풍산자
반복수학

공통수학 2

| 정답과 풀이 |

I 도형의 방정식

I-1 | 평면좌표 008-015쪽

01 답 (1) 4 (2) 3 (3) 7 (4) 10

풀이 (1) $\overline{AB}=|5-1|=4$

(2) $\overline{AB}=|2-(-1)|=3$

(3) $\overline{AB}=|-4-3|=7$

(4) $\overline{AB}=|-10-0|=10$

02 답 (1) -7, 3 (2) 4, 8 (3) -6, 0 (4) -3, 19

풀이 (1) $\overline{AB}=|-2-a|=5$에서

$-2-a=5$ 또는 $-2-a=-5$이므로

$a=-7$ 또는 $a=3$

(2) $\overline{AB}=|6-a|=2$에서

$6-a=2$ 또는 $6-a=-2$이므로

$a=4$ 또는 $a=8$

(3) $\overline{AB}=|a-(-3)|=3$에서

$a+3=3$ 또는 $a+3=-3$이므로

$a=0$ 또는 $a=-6$

(4) $\overline{AB}=|a-8|=11$에서

$a-8=11$ 또는 $a-8=-11$이므로

$a=19$ 또는 $a=-3$

03 답 (1) $\sqrt{10}$ (2) $5\sqrt{2}$ (3) 5 (4) $\sqrt{34}$ (5) $\sqrt{13}$ (6) $2\sqrt{5}$

풀이 (1) $\overline{AB}=\sqrt{(3-2)^2+\{1-(-2)\}^2}$

$=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

(2) $\overline{AB}=\sqrt{(-2-5)^2+(3-4)^2}$

$=\sqrt{49+1}=5\sqrt{2}$

(3) $\overline{AB}=\sqrt{(3-3)^2+(-4-1)^2}$

$=\sqrt{0+25}=5$

(4) $\overline{AB}=\sqrt{\{-4-(-1)\}^2+\{-9-(-4)\}^2}$

$=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

(5) $\overline{AB}=\sqrt{(2-0)^2+(8-5)^2}$

$=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

(6) $\overline{AB}=\sqrt{(-2)^2+4^2}$

$=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$

04 답 (1) 1, 7 (2) -1, 11 (3) -6, 2 (4) -4, 4 (5) -4, -2

풀이 (1) $\overline{AB}=\sqrt{(4-a)^2+(-1-2)^2}=3\sqrt{2}$에서

$(4-a)^2+9=18$

$a^2-8a+7=0$

$(a-1)(a-7)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=7$

(2) $\overline{AB}=\sqrt{(0-3)^2+(5-a)^2}=3\sqrt{5}$에서

$9+(5-a)^2=45$

$a^2-10a-11=0$

$(a+1)(a-11)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=11$

(3) $\overline{AB}=\sqrt{\{a-(-2)\}^2+\{-8-(-2)\}^2}=2\sqrt{13}$에서

$(a+2)^2+36=52$

$a^2+4a-12=0$

$(a+6)(a-2)=0$

$\therefore a=-6$ 또는 $a=2$

(4) $\overline{AB}=\sqrt{a^2+3^2}=5$에서

$a^2+9=25$

$a^2=16$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=4$

(5) $\overline{AB}=\sqrt{(-1-4)^2+\{a-(-3)\}^2}=\sqrt{26}$에서

$25+(a+3)^2=26$

$a^2+6a+8=0$

$(a+4)(a+2)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=-2$

05 답 (1) $\left(\frac{29}{8}, 0\right)$ (2) $(-1, 0)$ (3) $(2, 0)$ (4) $\left(-\frac{19}{2}, 0\right)$

풀이 (1) 점 P는 x축 위의 점이므로 좌표를 $(a, 0)$이라고 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서

$\sqrt{(a-5)^2+(0-3)^2}=\sqrt{(a-1)^2+(0-2)^2}$

$(a-5)^2+9=(a-1)^2+4$

$a^2-10a+34=a^2-2a+5$

$-8a=-29$

$\therefore a=\frac{29}{8}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{29}{8}, 0\right)$이다.

(2) 점 P는 x축 위의 점이므로 좌표를 $(a, 0)$이라고 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서

$\sqrt{\{a-(-3)\}^2+\{0-(-1)\}^2}=\sqrt{(a-1)^2+(0-1)^2}$

$(a+3)^2+1=(a-1)^2+1$

$a^2+6a+10=a^2-2a+2$

$8a=-8$

$\therefore a=-1$

따라서 점 P의 좌표는 $(-1, 0)$이다.

(3) 점 P는 x축 위의 점이므로 좌표를 $(a, 0)$이라고 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서

$\sqrt{(a-0)^2+\{0-(-2)\}^2}=\sqrt{(a-4)^2+(0-2)^2}$

$a^2+4=(a-4)^2+4$

$a^2+4=a^2-8a+20$

$8a=16$

$\therefore a=2$

따라서 점 P의 좌표는 $(2, 0)$이다.

(4) 점 P는 x축 위의 점이므로 좌표를 $(a, 0)$이라고 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서

$\sqrt{(a-1)^2+(0-4)^2}=\sqrt{(a-0)^2+(0-6)^2}$

$(a-1)^2+16=a^2+36$

$a^2-2a+17=a^2+36$

$-2a=19$

$\therefore a=-\dfrac{19}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(-\dfrac{19}{2}, 0\right)$이다.

06 답 (1) $(0, 8)$ (2) $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$ (3) $(0, -14)$ (4) $\left(0, -\dfrac{17}{5}\right)$

풀이 (1) 점 Q는 y축 위의 점이므로 좌표를 $(0, a)$라고 하면

$\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서

$\sqrt{\{0-(-1)\}^2+(a-6)^2}=\sqrt{(0-2)^2+(a-7)^2}$

$1+(a-6)^2=4+(a-7)^2$

$a^2-12a+37=a^2-14a+53$

$2a=16$

$\therefore a=8$

따라서 점 Q의 좌표는 $(0, 8)$이다.

(2) 점 Q는 y축 위의 점이므로 좌표를 $(0, a)$라고 하면

$\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서

$\sqrt{\{0-(-2)\}^2+(a-0)^2}=\sqrt{(0-2)^2+(a-3)^2}$

$4+a^2=4+(a-3)^2$

$a^2+4=a^2-6a+13$

$6a=9$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}$

따라서 점 Q의 좌표는 $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$이다.

(3) 점 Q는 y축 위의 점이므로 좌표를 $(0, a)$라고 하면

$\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서

$\sqrt{(0-3)^2+\{a-(-3)\}^2}$

$=\sqrt{\{0-(-7)\}^2+\{a-(-5)\}^2}$

$9+(a+3)^2=49+(a+5)^2$

$a^2+6a+18=a^2+10a+74$

$-4a=56$

$\therefore a=-14$

따라서 점 Q의 좌표는 $(0, -14)$이다.

(4) 점 Q는 y축 위의 점이므로 좌표를 $(0, a)$라고 하면

$\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서

$\sqrt{\{0-(-3)\}^2+\{a-(-5)\}^2}=\sqrt{0+a^2}$

$9+(a+5)^2=a^2$

$a^2+10a+34=a^2$

$10a=-34$

$\therefore a=-\dfrac{17}{5}$

따라서 점 Q의 좌표는 $\left(0, -\dfrac{17}{5}\right)$이다.

07 답 (1) 28 (2) 13

풀이 (1) 점 P는 x축 위의 점이므로 좌표를 $(a, 0)$이라고 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=[\{a-(-4)\}^2+(0-3)^2]+\{(a-2)^2+(0-1)^2\}$

$=(a^2+8a+25)+(a^2-4a+5)$

$=2a^2+4a+30$

$=2(a+1)^2+28$

따라서 최솟값은 28이다.

(2) 점 P는 x축 위의 점이므로 좌표를 $(a, 0)$이라고 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=[(a-0)^2+\{0-(-1)\}^2]$

$+[(a-4)^2+\{0-(-2)\}^2]$

$=(a^2+1)+(a^2-8a+20)$

$=2a^2-8a+21$

$=2(a-2)^2+13$

따라서 최솟값은 13이다.

08 답 (1) $\dfrac{35}{2}$ (2) 45

풀이 (1) 점 Q는 y축 위의 점이므로 좌표를 $(0, a)$라고 하면

$\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2$

$=\{(0-2)^2+(a-0)^2\}$

$+[\{0-(-1)\}^2+\{a-(-5)\}^2]$

$=(a^2+4)+(a^2+10a+26)$

$=2a^2+10a+30$

$=2\left(a+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{35}{2}$

따라서 최솟값은 $\dfrac{35}{2}$이다.

(2) 점 Q는 y축 위의 점이므로 좌표를 $(0, a)$라고 하면

$\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2$

$=[\{0-(-2)\}^2+\{a-(-2)\}^2]$

$+\{(0-3)^2+(a-6)^2\}$

$=(a^2+4a+8)+(a^2-12a+45)$

$=2a^2-8a+53$

$=2(a-2)^2+45$

따라서 최솟값은 45이다.

09 답 (1) $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형

(2) $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형

(3) 정삼각형

(4) $\angle B=90^\circ$인 직각이등변삼각형

풀이 (1) $\overline{AB}=\sqrt{(4-1)^2+(3-4)^2}=\sqrt{10}$

$\overline{BC}=\sqrt{(5-4)^2+(0-3)^2}=\sqrt{10}$

$\overline{CA}=\sqrt{(1-5)^2+(4-0)^2}=4\sqrt{2}$

따라서 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

(2) $\overline{AB}=\sqrt{(-2-0)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{BC}=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+(1-4)^2}=5$

$\overline{CA}=\sqrt{(0-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$이므로 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이다.

(3) $\overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(\sqrt{3}-0)^2}=2$

$\overline{BC}=\sqrt{(3-2)^2+(0-\sqrt{3})^2}=2$

$\overline{CA}=\sqrt{(1-3)^2+(0-0)^2}=2$

따라서 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$이므로 정삼각형이다.

(4) $\overline{AB}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+\{1-(-3)\}^2}=5$

$\overline{BC}=\sqrt{(6-2)^2+(-2-1)^2}=5$

$\overline{CA}=\sqrt{(-1-6)^2+\{-3-(-2)\}^2}=5\sqrt{2}$

따라서 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이고 $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로 $\angle B=90^\circ$인 직각이등변삼각형이다.

10 답 (1) 2 (2) 2

풀이 (1) $\overline{AB}:\overline{BC}=2:1$이므로 점 B는 선분 AC를 $2:1$로 내분한다.

(2) $\overline{BC}:\overline{CD}=1:2$이므로 점 C는 선분 BD를 $1:2$로 내분한다.

11 답 (1) 3, 2 (2) 1

풀이 (1) $\overline{AC}:\overline{CD}=3:2$이므로 점 C는 선분 AD를 $3:2$로 내분한다.

(2) $\overline{BD}:\overline{DE}=4:2=2:1$이므로 점 D는 선분 BE를 $2:1$로 내분한다.

12 답 (1) $P(-3)$ (2) $M\left(-\frac{1}{2}\right)$

풀이 (1) 점 P의 좌표를 x라고 하면

$x=\frac{1\times7+2\times(-8)}{1+2}=-3$

$\therefore P(\underline{-3})$

(2) 점 M의 좌표를 x라고 하면

$x=\frac{-8+7}{2}=-\frac{1}{2}$

$\therefore M\left(-\frac{1}{2}\right)$

13 답 (1) $P\left(\frac{2}{5}\right)$ (2) $M(1)$

풀이 (1) 점 P의 좌표를 x라고 하면

$x=\frac{3\times(-2)+2\times4}{3+2}=\frac{2}{5}$

$\therefore P\left(\frac{2}{5}\right)$

(2) 점 M의 좌표를 x라고 하면

$x=\frac{4+(-2)}{2}=1$

$\therefore M(1)$

14 답 (1) $\left(\frac{5}{3}, 3\right)$ (2) $\left(\frac{7}{3}, 4\right)$ (3) $\left(2, \frac{7}{2}\right)$

풀이 (1) 구하는 점의 좌표를 (x, y)라고 하면

$x=\frac{1\times3+2\times1}{1+2}=\frac{5}{3}$

$y=\frac{1\times5+2\times2}{1+2}=3$

따라서 $\left(\underline{\frac{5}{3}}, \underline{3}\right)$이다.

(2) 구하는 점의 좌표를 (x, y)라고 하면

$x=\frac{2\times3+1\times1}{2+1}=\frac{7}{3}$

$y=\frac{2\times5+1\times2}{2+1}=4$

따라서 $\left(\frac{7}{3}, 4\right)$이다.

(3) 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+5}{2}\right)$에서 $\left(\underline{2}, \underline{\frac{7}{2}}\right)$이다.

15 답 (1) $\left(-1, \frac{13}{5}\right)$ (2) $\left(\frac{4}{7}, -\frac{6}{7}\right)$ (3) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

풀이 (1) 구하는 점의 좌표를 (x, y)라고 하면

$x=\frac{2\times2+3\times(-3)}{2+3}=-1$

$y=\frac{2\times(-4)+3\times7}{2+3}=\frac{13}{5}$

따라서 $\left(-1, \frac{13}{5}\right)$이다.

(2) 구하는 점의 좌표를 (x, y)라고 하면

$x=\frac{5\times2+2\times(-3)}{5+2}=\frac{4}{7}$

$y=\frac{5\times(-4)+2\times7}{5+2}=-\frac{6}{7}$

따라서 $\left(\frac{4}{7}, -\frac{6}{7}\right)$이다.

(3) 중점의 좌표는 $\left(\frac{-3+2}{2}, \frac{7+(-4)}{2}\right)$에서

$\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$이다.

16 답 (1) $a=5$, $b=3$ (2) $a=-5$, $b=1$ (3) $a=8$, $b=2$

풀이 (1) $\frac{2\times2+1\times a}{2+1}=3$에서 $4+a=9$이므로 $a=\underline{5}$

$\frac{2\times4+1\times1}{2+1}=b$에서 $b=\underline{3}$

(2) $\frac{3\times3+2\times(-2)}{3+2}=b$에서 $b=1$

$\frac{3\times(-5)+2\times a}{3+2}=-5$에서 $-15+2a=-25$이므로 $a=-5$

(3) $\frac{a+(-2)}{2}=3$에서 $a-2=6$이므로 $a=8$

$\frac{b+6}{2}=4$에서 $b+6=8$이므로 $b=2$

17 답 (1) $(2, 0)$ (2) $\left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ (3) $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

풀이 (1) 점 P의 좌표는

$\left(\frac{1\times5+2\times(-1)}{1+2}, \frac{1\times(-2)+2\times2}{1+2}\right)$

이므로 $P\left(1, \frac{2}{3}\right)$이다.

점 Q의 좌표는

$\left(\frac{2\times5+1\times(-1)}{2+1}, \frac{2\times(-2)+1\times2}{2+1}\right)$

이므로 $Q\left(3, -\frac{2}{3}\right)$이다.

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}\right)$에서 $(\underline{2}, \underline{0})$이다.

(2) 점 P의 좌표는

$\left(\frac{1\times3+2\times6}{1+2}, \frac{1\times(-3)+2\times0}{1+2}\right)$

이므로 $P(5, -1)$이다.

점 Q의 좌표는

$\left(\frac{2\times3+1\times6}{2+1}, \frac{2\times(-3)+1\times0}{2+1}\right)$

이므로 $Q(4, -2)$이다.

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$\left(\frac{5+4}{2}, \frac{-1+(-2)}{2}\right)$

에서 $\left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right)$이다.

(3) 점 P의 좌표는

$\left(\frac{1\times5+2\times(-2)}{1+2}, \frac{1\times3+2\times(-1)}{1+2}\right)$

이므로 $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$이다.

점 Q의 좌표는

$\left(\frac{2\times5+1\times(-2)}{2+1}, \frac{2\times3+1\times(-1)}{2+1}\right)$

이므로 $Q\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$이다.

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{8}{3}}{2}, \frac{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}}{2}\right)$

에서 $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$이다.

18 답 (1) $(-2, 1)$ (2) $(-4, -2)$

(3) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (4) $\left(-\frac{5}{3}, 6\right)$

풀이 (1) 무게중심의 좌표를 (x, y)라고 하면

$x=\frac{2+(-4)+(-4)}{3}=-2$

$y=\frac{3+6+(-6)}{3}=1$

따라서 무게중심의 좌표는 $(\underline{-2}, \underline{1})$이다.

(2) 무게중심의 좌표를 (x, y)라고 하면

$x=\frac{-3+(-2)+(-7)}{3}=-4$

$y=\frac{-9+2+1}{3}=-2$

따라서 무게중심의 좌표는 $(-4, -2)$이다.

(3) 무게중심의 좌표를 (x, y)라고 하면

$x=\frac{0+3+(-2)}{3}=\frac{1}{3}$

$y=\frac{0+(-2)+4}{3}=-\frac{2}{3}$

따라서 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$이다.

(4) 무게중심의 좌표를 (x, y)라고 하면

$x=\frac{-2+1+(-4)}{3}=-\frac{5}{3}$

$y=\frac{10+5+3}{3}=6$

따라서 무게중심의 좌표는 $\left(-\frac{5}{3}, 6\right)$이다.

19 답 (1) $a=-2$, $b=2$ (2) $a=4$, $b=-4$

(3) $a=13$, $b=1$ (4) $a=-12$, $b=8$

풀이 (1) $\frac{a+5+3}{3}=2$에서 $a+8=6$이므로 $a=\underline{-2}$

$\frac{6+b+7}{3}=5$에서 $b+13=15$이므로 $b=\underline{2}$

(2) $\frac{-3+a+2}{3}=1$에서 $a-1=3$이므로 $a=4$

$\frac{-1+b+(-4)}{3}=-3$에서 $b-5=-9$이므로 $b=-4$

(3) $\frac{2+(-4)+5}{3}=b$에서 $3=3b$이므로 $b=1$

$\frac{-4+(-6)+a}{3}=1$에서 $a-10=3$이므로 $a=13$

(4) $\frac{-5+9+b}{3}=4$에서 $b+4=12$이므로 $b=8$

$\frac{a+3+6}{3}=-1$에서 $a+9=-3$이므로 $a=-12$

20 답 (1) $a=12$, $b=3$ (2) $a=10$, $b=-1$

(3) $a=5$, $b=-1$

풀이 (1) 평행사변형의 성질에 의하여 대각선 AC의 중점의 좌표 $\left(\frac{2+7}{2}, \frac{5+2}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$과 대각선 BD의 중점의 좌표 $\left(\frac{-3+a}{2}, \frac{4+b}{2}\right)$가 같으므로

$-3+a=9$, $4+b=7$

$\therefore a=\underline{12}$, $b=\underline{3}$

(2) 평행사변형의 성질에 의하여 대각선 AC의 중점의 좌표 $\left(\frac{a+(-3)}{2}, \frac{b+(-1)}{2}\right)$과 대각선 BD의 중점의 좌표 $\left(\frac{2+5}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{7}{2}, -1\right)$이 같으므로

$a-3=7$, $b-1=-2$

$\therefore a=10$, $b=-1$

(3) 평행사변형의 성질에 의하여 대각선 AC의 중점의 좌표 $\left(\frac{6+1}{2}, \frac{-2+5}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$과 대각선 BD의 중점의 좌표 $\left(\frac{a+2}{2}, \frac{b+4}{2}\right)$가 같으므로

$a+2=7$, $b+4=3$

$\therefore a=5$, $b=-1$

21 답 $a=-2$, $b=2$

풀이 마름모의 성질에 의하여 대각선 AC의 중점의 좌표

$\left(\frac{a+7}{2}, \frac{3+4}{2}\right)$와 대각선 BD의 중점의 좌표

$\left(\frac{3+b}{2}, \frac{-1+8}{2}\right)$이 같으므로

$a+7=3+b$에서

$b=a+4$ …… ㉠

마름모의 성질에 의하여 $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(3-a)^2+(-1-3)^2=(7-3)^2+\{4-(-1)\}^2$

$a^2-6a+25=41$

$a^2-6a-16=0$

$(a+2)(a-8)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=8$

이때 $a<0$이므로 $a=-2$이고 ㉠에서 $b=2$이다.

22 답 $a=2$, $b=4$

풀이 마름모의 성질에 의하여 대각선 AC의 중점의 좌표

$\left(\frac{1+4}{2}, \frac{1+b}{2}\right)$와 대각선 BD의 중점의 좌표

$\left(\frac{3+2}{2}, \frac{a+3}{2}\right)$이 같으므로

$1+b=a+3$에서

$b=a+2$ …… ㉠

마름모의 성질에 의하여 $\overline{AB}=\overline{AD}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{AD}^2$이므로

$(3-1)^2+(a-1)^2=(2-1)^2+(3-1)^2$

$a^2-2a+5=5$

$a^2-2a=0$

$a(a-2)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=2$

이때 $a>0$이므로 $a=2$이고 ㉠에서 $b=4$이다.

중단원 점검문제 | I-1 평면좌표 016-017쪽

01 답 7

풀이 $\overline{AB}=|6-(-1)|=7$

02 답 -13, -1

풀이 $\overline{AB}=|-7-a|=6$에서

$-7-a=6$ 또는 $-7-a=-6$이므로

$a=-13$ 또는 $a=-1$

03 답 $4\sqrt{5}$

풀이 $\overline{AB}=\sqrt{\{6-(-2)\}^2+\{1-(-3)\}^2}$

$=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5}$

04 답 $\sqrt{5}$

풀이 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서

$\sqrt{(0-4)^2+(7-2)^2}=\sqrt{(0-a)^2+(7-1)^2}$

$41=a^2+36$, $a^2=5$

$\therefore a=\sqrt{5}$ 또는 $a=-\sqrt{5}$

이때 a는 양수이므로 $a=\sqrt{5}$이다.

05 답 $\left(\frac{7}{4}, \frac{7}{8}\right)$

풀이 점 P는 x축 위의 점이므로 좌표를 $(a, 0)$이라고 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서

$\sqrt{(a-3)^2+(0-4)^2}=\sqrt{(a-0)^2+\{0-(-2)\}^2}$

$(a-3)^2+16=a^2+4$, $a^2-6a+25=a^2+4$

$-6a=-21$

$\therefore a=\frac{7}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$이다.

점 Q는 y축 위의 점이므로 좌표를 $(0, b)$라고 하면

$\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서

$\sqrt{(0-3)^2+(b-4)^2}=\sqrt{(0-0)^2+\{b-(-2)\}^2}$

$9+(b-4)^2=(b+2)^2$, $b^2-8b+25=b^2+4b+4$

$-12b=-21$

$\therefore b=\frac{7}{4}$

따라서 점 Q의 좌표는 $\left(0, \frac{7}{4}\right)$이다.

즉, 선분 PQ의 중점의 좌표는

$\left(\frac{\frac{7}{2}+0}{2}, \frac{0+\frac{7}{4}}{2}\right)$에서 $\left(\frac{7}{4}, \frac{7}{8}\right)$이다.

06 답 $2\sqrt{2}$

풀이 $\overline{AB}=\sqrt{\{-4-(-k-1)\}^2+(k+2-1)^2}$

$=\sqrt{(k-3)^2+(k+1)^2}$

$=\sqrt{(k^2-6k+9)+(k^2+2k+1)}$

$=\sqrt{2k^2-4k+10}$

$=\sqrt{2(k-1)^2+8}$

따라서 $\overline{AB}\geq\sqrt{8}=2\sqrt{2}$이므로 선분 AB의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다.

07 답 0

풀이 $\overline{AB}=\sqrt{(a-1)^2+(a-1)^2}$

$=\sqrt{2(a-1)^2}$

$\overline{BC}=\sqrt{(a+1-a)^2+(-1-a)^2}$

$=\sqrt{(a+1)^2+1}$

$\overline{CA}=\sqrt{\{1-(a+1)\}^2+\{1-(-1)\}^2}$

$=\sqrt{a^2+4}$

삼각형 ABC는 ∠B가 직각인 직각삼각형이므로

$\overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$에서

$a^2+4=2(a-1)^2+(a+1)^2+1$

$a^2+4=(2a^2-4a+2)+(a^2+2a+1)+1$

$2a^2-2a=0$

$a(a-1)=0$

따라서 $a=0$ 또는 $a=1$이고, $a=1$이면 점 A와 점 B의 좌표가 같으므로 $a=0$이다.

08 답 (가) 점 D, (나) 점 E

09 답 11

풀이 $\dfrac{2\times a+3\times 1}{2+3}=5$이므로

$2a+3=25$

$2a=22$

$\therefore\ a=11$

10 답 $5\sqrt{2}$

풀이 점 B의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면

$\dfrac{3\times a+2\times 1}{3+2}=4$에서 $3a+2=20$이므로

$a=6$

$\dfrac{3\times b+2\times(-2)}{3+2}=-5$에서 $3b-4=-25$이므로

$b=-7$

따라서 점 B의 좌표는 $(6,\ -7)$이므로 두 점 $A(1,\ -2)$, $B(6,\ -7)$을 이은 선분 AB의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(6-1)^2+\{-7-(-2)\}^2}$

$=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

11 답 6

풀이 선분 AB를 $1:k$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times(-2)+k\times 4}{1+k},\ \dfrac{1\times 7+k\times 5}{1+k}\right)$이므로

$\left(\dfrac{4k-2}{1+k},\ \dfrac{5k+7}{1+k}\right)$이다.

점 $\left(\dfrac{4k-2}{1+k},\ \dfrac{5k+7}{1+k}\right)$이 직선 $y=2x-1$ 위에 있으므로

$\dfrac{5k+7}{1+k}=2\times\dfrac{4k-2}{1+k}-1$

$5k+7=2(4k-2)-(1+k)$

$2k=12\qquad\therefore\ k=6$

12 답 3

풀이 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{m\times 3+n\times(-1)}{m+n},\ \dfrac{m\times(-5)+n\times 3}{m+n}\right)$

즉, $\left(\dfrac{3m-n}{m+n},\ \dfrac{-5m+3n}{m+n}\right)$

이때 점 P는 y축 위에 있으므로

$\dfrac{3m-n}{m+n}=0$

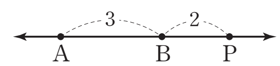
$3m-n=0$

$\therefore\ n=3m$

$\therefore\ \dfrac{n}{m}=\dfrac{3m}{m}=3$

13 답 $\left(-\dfrac{20}{3},\ -4\right)$

풀이 $2\overline{AB}=3\overline{BP}$에서 $\overline{AB}:\overline{BP}=3:2$이므로 이를 그림으로 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, 점 B는 선분 AP를 $3:2$로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$\dfrac{3\times x+2\times 5}{3+2}=-2$에서 $3x+10=-10$이므로

$x=-\dfrac{20}{3}$

$\dfrac{3\times y+2\times 1}{3+2}=-2$에서 $3y+2=-10$이므로

$y=-4$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(-\dfrac{20}{3},\ -4\right)$이다.

14 답 $\left(\dfrac{8}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

풀이 점 B의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$, 점 C의 좌표를 $(x_2,\ y_2)$라고 하면

$\dfrac{x_1+x_2}{2}=2,\ \dfrac{y_1+y_2}{2}=1$

이므로 $x_1+x_2=4,\ y_1+y_2=2$이다.

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{4+x_1+x_2}{3},\ \dfrac{-3+y_1+y_2}{3}\right)$에서 $\left(\dfrac{8}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$이다.

다른 풀이 삼각형 ABC의 무게중심은 점 A와 변 BC의 중점을 $2:1$로 내분하는 점이다.

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times 2+1\times 4}{2+1},\ \dfrac{2\times 1+1\times(-3)}{2+1}\right)$에서 $\left(\dfrac{8}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$이다.

15 답 $6\sqrt{2}$

풀이 점 B의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$, 점 D의 좌표를 $(x_2,\ y_2)$라고 하면 평행사변형의 성질에 의하여 대각선 AC의 중점의 좌표 $\left(\dfrac{-1+3}{2},\ \dfrac{3+(-1)}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 1)$과 대각선 BD의 중점의 좌표 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$가 같으므로

$x_1+x_2=2$ …… ㉠

$y_1+y_2=2$ …… ㉡

또, 대각선 BD를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2x_2+x_1}{2+1}, \frac{2y_2+y_1}{2+1}\right)$에서 $\left(\frac{x_1+2x_2}{3}, \frac{y_1+2y_2}{3}\right)$이고

이 점의 좌표가 $(0, 0)$이므로

$\frac{x_1+2x_2}{3}=0$, $\frac{y_1+2y_2}{3}=0$에서

$x_1+2x_2=0$ …… ㉢

$y_1+2y_2=0$ …… ㉣

㉠과 ㉢을 연립하여 풀면

$x_1=4$, $x_2=-2$

㉡과 ㉣을 연립하여 풀면

$y_1=4$, $y_2=-2$

따라서 점 B의 좌표는 $(4, 4)$, 점 D의 좌표는 $(-2, -2)$이므로

$\overline{BD}=\sqrt{(-2-4)^2+(-2-4)^2}=6\sqrt{2}$

16 답 $a=-2$, $b=2$

풀이 마름모의 성질에 의하여 대각선 AC의 중점의 좌표 $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$과 대각선 BD의 중점의 좌표 $\left(\frac{-4+b}{2}, \frac{-1+5}{2}\right)$가 같으므로

$a=-4+b$에서

$b=a+4$ …… ㉠

마름모의 성질에 의하여 $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(-4-a)^2+(-1-3)^2=\{0-(-4)\}^2+\{1-(-1)\}^2$

$a^2+8a+32=20$

$a^2+8a+12=0$

$(a+6)(a+2)=0$

$\therefore a=-6$ 또는 $a=-2$

이때 $a>-6$이므로 $a=-2$이고 ㉠에서 $b=2$이다.

Ⅰ-2 | 직선의 방정식 018-035쪽

01 답 (1) $y=x+3$ (2) $y=-4x+1$
(3) $y=2x-6$ (4) $y=-3x+2$
(5) $y=-2x-4$

풀이 (4) 직선 $y=-3x+5$와 기울기가 같으므로 기울기가 -3이고 y절편이 2인 직선의 방정식은

$y=-3x+2$

(5) y축과 만나는 점이 $(0, -4)$이므로 y절편이 -4이다.
따라서 기울기가 -2이고 y절편이 -4인 직선의 방정식은

$y=-2x-4$

02 답 (1) $y=2x$ (2) $y=-x-15$
(3) $y=5x+16$ (4) $y=4x-20$
(5) $y=-\frac{1}{2}x+5$

풀이 (1) $y-2=2(x-1)$이므로

$y=2x-2+2$

$\therefore y=2x$

(2) $y-(-10)=-\{x-(-5)\}$이므로

$y=-x-5-10$

$\therefore y=-x-15$

(3) $y-1=5\{x-(-3)\}$이므로

$y=5x+15+1$

$\therefore y=5x+16$

(4) 직선 $y=4x-1$과 기울기가 같으므로 기울기는 4이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-0=4(x-5)$

$\therefore y=4x-20$

(5) $y=-\frac{1}{2}x+6$과 기울기가 같으므로 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-3=-\frac{1}{2}(x-4)$

$y=-\frac{1}{2}x+2+3$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+5$

03 답 (1) $y=\sqrt{3}x+6$ (2) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$
(3) $y=x-5$ (4) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{4\sqrt{3}}{3}$
(5) $y=x+1$ (6) $y=\sqrt{3}x+2$

풀이 (1) x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60°이므로 기울기는 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x+6$

(2) x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 30°이므로 기울기는 $\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$

(3) x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45°이므로 기울기는 $\tan 45^\circ=1$이고, y축과 만나는 점이 $(0, -5)$이므로 y절편은 -5이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y=x-5$

(4) x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 30°이므로 기울기는 $\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y-(-\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$
$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}$
$\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

(5) x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45°이므로 기울기는 $\tan 45^\circ=1$이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y-(-2)=x-(-3)$
$y=x+3-2$
$\therefore y=x+1$

(6) x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60°이므로 기울기는 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y-5=\sqrt{3}(x-\sqrt{3})$
$y=\sqrt{3}x-3+5$
$\therefore y=\sqrt{3}x+2$

04 답 (1) $(0, 0)$ (2) $(0, -2)$ (3) $(-1, 4)$ (4) $(2, -5)$ (5) $(-3, -3)$

풀이 (1) $y=mx$는 $y-0=m(x-0)$과 같이 나타낼 수 있으므로 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 0)$을 지난다.
(2) $y=mx-2$는 $y+2=m(x-0)$과 같이 나타낼 수 있으므로 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0, -2)$를 지난다.
(3) $y=mx+m+4$는 $y-4=m(x+1)$과 같이 나타낼 수 있으므로 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 4)$를 지난다.
(4) $y=-mx+2m-5$는 $y+5=-m(x-2)$와 같이 나타낼 수 있으므로 m의 값에 관계없이 항상 점 $(2, -5)$를 지난다.
(5) $y=3mx-3+9m$은 $y+3=3m(x+3)$과 같이 나타낼 수 있으므로 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-3, -3)$을 지난다.

05 답 (1) $x=2$ (2) $y=-3$ (3) $x=-1$ (4) $y=6$ (5) $x=-5$ (6) $y=-4$ (7) $x=7$ (8) $y=-8$

풀이 (7) x축에 수직이면 y축에 평행하므로 점 $(7, 5)$를 지나고 y축에 평행한 직선의 방정식은
$x=7$
(8) y축에 수직이면 x축에 평행하므로 점 $(-7, -8)$을 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은
$y=-8$

06 답 (1) $y=x+1$ (2) $y=2x$ (3) $y=4x+5$ (4) $y=-3x+13$ (5) $y=4x-3$ (6) $x=7$ (7) $y=-x-8$ (8) $y=-\frac{1}{2}x-5$ (9) $y=-3$ (10) $y=-5x+10$ (11) $x=2$ (12) $y=x+11$

풀이 (1) $y-2=\frac{5-2}{4-1}(x-1)$이므로
$y=(x-1)+2$
$\therefore y=x+1$
(2) $y-6=\frac{20-6}{10-3}(x-3)$이므로
$y=2(x-3)+6$
$\therefore y=2x$
(3) $y-1=\frac{13-1}{2-(-1)}\{x-(-1)\}$이므로
$y=4(x+1)+1$
$\therefore y=4x+5$
(4) $y-1=\frac{4-1}{3-4}(x-4)$이므로
$y=-3(x-4)+1$
$\therefore y=-3x+13$
(5) $y-5=\frac{-11-5}{-2-2}(x-2)$이므로
$y=4(x-2)+5$
$\therefore y=4x-3$
(6) 두 점의 x좌표가 같으므로
$x=7$
(7) $y-(-2)=\frac{-7-(-2)}{-1-(-6)}\{x-(-6)\}$
$y=-(x+6)-2$
$\therefore y=-x-8$
(8) $y-(-4)=\frac{-1-(-4)}{-8-(-2)}\{x-(-2)\}$이므로
$y=-\frac{1}{2}(x+2)-4$
$\therefore y=-\frac{1}{2}x-5$
(9) 두 점의 y좌표가 같으므로
$y=-3$
(10) $y-5=\frac{-5-5}{3-1}(x-1)$이므로
$y=-5(x-1)+5$
$\therefore y=-5x+10$
(11) 두 점의 x좌표가 같으므로
$x=2$

(12) $y-3=\dfrac{6-3}{-5-(-8)}\{x-(-8)\}$이므로

$y=(x+8)+3$

$\therefore y=x+11$

07 답 (1) $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{5}=1$ (2) $-\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$

(3) $-\dfrac{x}{6}-y=1$ (4) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{9}=1$

(5) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}=1$

풀이 (4) 두 점 $(0, 9)$, $(3, 0)$을 지나므로 x절편이 3, y절편이 9이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{9}=1$

다른 풀이 $y-9=\dfrac{0-9}{3-0}(x-0)$이므로

$y=-3x+9$

(5) 두 점 $(0, -4)$, $(2, 0)$을 지나므로 x절편이 2, y절편이 -4이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}=1$

08 답 (1) 3 (2) -6 (3) $\dfrac{3}{2}$ (4) $\dfrac{13}{3}$

풀이 (1) (직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)이어야 하므로

$\dfrac{5-3}{2-1}=\dfrac{7-5}{a-2}$

$2(a-2)=2$, $a-2=1$

$\therefore a=3$

(2) (직선 AB의 기울기)=(직선 AC의 기울기)이어야 하므로

$\dfrac{a-3}{1-(-2)}=\dfrac{6-3}{-3-(-2)}$

$a-3=-9 \quad \therefore a=-6$

(3) (직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)이어야 하므로

$\dfrac{1-(-2)}{4-a}=\dfrac{-5-1}{-1-4}$

$6(4-a)=15$, $4-a=\dfrac{5}{2}$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}$

(4) (직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)이어야 하므로

$\dfrac{3-4}{-1-2}=\dfrac{a-3}{3-(-1)}$

$3(a-3)=4$, $a-3=\dfrac{4}{3}$

$\therefore a=\dfrac{13}{3}$

09 답 (1) -5 (2) $\dfrac{19}{3}$ (3) 0

풀이 두 점 A, B를 지나는 직선이 점 C를 지나면 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

(1) (직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)이어야 하므로

$\dfrac{2-(-2)}{-3-1}=\dfrac{4-2}{a-(-3)}$

$-(a+3)=2$

$\therefore a=-5$

(2) (직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)이어야 하므로

$\dfrac{8-a}{2-3}=\dfrac{3-8}{5-2}$

$3(8-a)=5$, $8-a=\dfrac{5}{3}$

$\therefore a=\dfrac{19}{3}$

(3) (직선 AB의 기울기)=(직선 AC의 기울기)이어야 하므로

$\dfrac{2-(-3)}{a-3-(-8)}=\dfrac{6-(-3)}{1-(-8)}$

$a+5=5$

$\therefore a=0$

10 답 (1) $y=-\dfrac{3}{2}x+7$ (2) $x=1$

(3) $y=2x+5$ (4) $y=\dfrac{5}{2}x+10$

풀이 점 A를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선은 변 BC의 중점을 지난다.

(1) 선분 BC의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{5+3}{2}, \dfrac{-1+3}{2}\right)$에서

$(4, 1)$

즉, 두 점 $(2, 4)$, $(4, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\dfrac{1-4}{4-2}(x-2)$

$y=-\dfrac{3}{2}(x-2)+4$

$\therefore y=-\dfrac{3}{2}x+7$

(2) 선분 BC의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{2+0}{2}, \dfrac{-6+4}{2}\right)$에서

$(1, -1)$

즉, 두 점 $(1, 1)$, $(1, -1)$을 지나는 직선의 방정식은 두 점의 x좌표가 같으므로

$x=1$

(3) 선분 BC의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{1+(-3)}{2}, \dfrac{7+(-1)}{2}\right)$에서

$(-1, 3)$

즉, 두 점 $(-4, -3)$, $(-1, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-(-3)=\dfrac{3-(-3)}{-1-(-4)}\{x-(-4)\}$

$y=2(x+4)-3$

$\therefore y=2x+5$

(4) 선분 BC의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{-2+(-2)}{2}, \dfrac{8+2}{2}\right)$에서

$(-2, 5)$

즉, 두 점 $(-6,\ -5)$, $(-2,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-(-5)=\frac{5-(-5)}{-2-(-6)}\{x-(-6)\}$

$y=\frac{5}{2}(x+6)-5$

$\therefore\ y=\frac{5}{2}x+10$

11 답 (1) 1 (2) 5 (3) $-\frac{5}{3}$

풀이 점 A를 지나는 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하므로 이 직선은 변 BC의 중점을 지난다.

(1) 선분 BC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{3+2}{2},\ \frac{a+7}{2}\right)$에서

$\left(\frac{5}{2},\ \frac{a+7}{2}\right)$이다.

직선 $y=2x-1$이 이 점을 지나므로 $x=\frac{5}{2}$, $y=\frac{a+7}{2}$을 $y=2x-1$에 대입하면

$\frac{a+7}{2}=2\times\frac{5}{2}-1$

$a+7=8 \qquad \therefore\ a=1$

(2) 선분 BC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+1}{2},\ \frac{-2+a}{2}\right)$에서

$\left(\frac{3}{2},\ \frac{-2+a}{2}\right)$이다.

직선 $y=-x+3$이 이 점을 지나므로 $x=\frac{3}{2}$,

$y=\frac{-2+a}{2}$를 $y=-x+3$에 대입하면

$\frac{-2+a}{2}=-\frac{3}{2}+3$

$-2+a=3 \qquad \therefore\ a=5$

(3) 선분 BC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-3+a}{2},\ \frac{-5+9}{2}\right)$에서

$\left(\frac{-3+a}{2},\ 2\right)$이다.

직선 $y=-3x-5$가 이 점을 지나므로 $x=\frac{-3+a}{2}$,

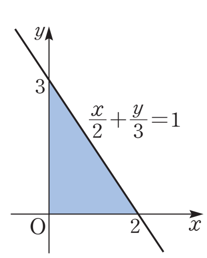
$y=2$를 $y=-3x-5$에 대입하면

$2=-3\times\frac{-3+a}{2}-5$

$4=9-3a-10 \qquad \therefore\ a=-\frac{5}{3}$

12 답 (1) 3 (2) 6 (3) $\frac{5}{2}$ (4) 27

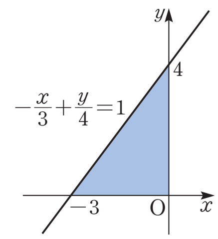
풀이 (1) 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$의 x절편은 2, y절편은 3이므로 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times3=3$

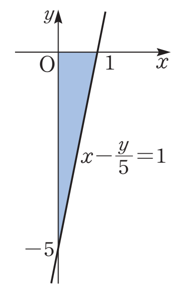
(2) 직선 $-\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$의 x절편은 -3, y절편은 4이므로 직선 $-\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times|-3|\times4=6$

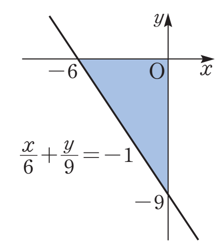
(3) 직선 $x-\frac{y}{5}=1$의 x절편은 1, y절편은 -5이므로 직선 $x-\frac{y}{5}=1$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times|-5|=\frac{5}{2}$

(4) 직선 $\frac{x}{6}+\frac{y}{9}=-1$, 즉 $-\frac{x}{6}-\frac{y}{9}=1$의 x절편은 -6, y절편은 -9이므로 직선 $\frac{x}{6}+\frac{y}{9}=-1$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times|-6|\times|-9|=27$

13 답 (1) 12 (2) 2 (3) 10

풀이 (1) 직선 $x+\frac{y}{a}=1$의 x절편은 1, y절편은 a이므로 직선 $x+\frac{y}{a}=1$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times|a|=6$

$\frac{|a|}{2}=6,\ |a|=12$

$\therefore\ a=-12$ 또는 $a=12$

이때 $a>0$이므로 $a=12$이다.

(2) 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a^3}=1$의 x절편은 a, y절편은 a^3이므로 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a^3}=1$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times|a|\times|a^3|=8$

$\frac{a^4}{2}=8,\ a^4=16,\ a^2=4$

$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=2$

이때 $a>0$이므로 $a=2$이다.

(3) 직선 $-\frac{x}{4a}-\frac{y}{3}=1$의 x절편은 $-4a$, y절편은 -3이므로 직선 $-\frac{x}{4a}-\frac{y}{3}=1$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times|-4a|\times|-3|=60$

$6|a|=60$, $|a|=10$

$\therefore\ a=-10$ 또는 $a=10$

이때 $a>0$이므로 $a=10$

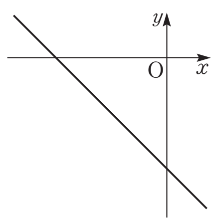
14 답 풀이 참조

풀이 (1) $ax+by+c=0$에서 $b\neq 0$이므로 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 기울기는 $-\frac{a}{b}$이므로 $a>0$, $b>0$에서 $-\frac{a}{b}\,\underline{<}\,0$

y절편은 $-\frac{c}{b}$이므로 $b>0$, $c>0$에서 $-\frac{c}{b}\,\underline{<}\,0$

따라서 직선의 개형은 다음 그림과 같다.

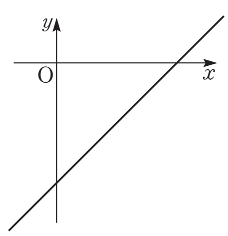


(2) $ax+by+c=0$에서 $b\neq 0$이므로 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 기울기는 $-\frac{a}{b}$이므로 $a<0$, $b>0$에서 $-\frac{a}{b}>0$

y절편은 $-\frac{c}{b}$이므로 $b>0$, $c>0$에서 $-\frac{c}{b}<0$

따라서 직선의 개형은 다음 그림과 같다.

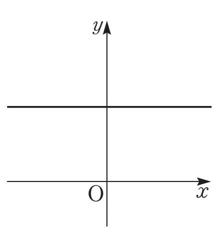


(3) $ax+by+c=0$에서 $b\neq 0$이므로 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 기울기는 $-\frac{a}{b}$이므로 $a=0$, $b<0$에서 $-\frac{a}{b}=0$

y절편은 $-\frac{c}{b}$이므로 $b<0$, $c>0$에서 $-\frac{c}{b}>0$

따라서 직선의 개형은 다음 그림과 같다.



15 답 (1) 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면
(2) 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면
(3) 제2사분면, 제4사분면

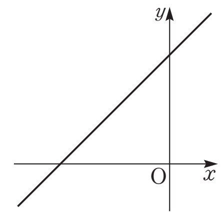
풀이 (1) $ax+by+c=0$에서 $b\neq 0$이므로 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 x절편은 $-\frac{c}{a}$, y절편은 $-\frac{c}{b}$이고

$ac>0$, $bc<0$이므로

$-\frac{c}{a}\,\underline{<}\,0$, $-\frac{c}{b}\,\underline{>}\,0$

따라서 x절편이 음수, y절편이 양수인 직선이므로 그래프는 다음 그림과 같고 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면을 지난다.



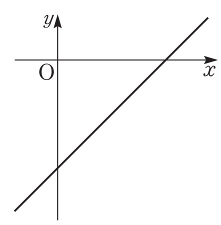
(2) $ax+by+c=0$에서 $b\neq 0$이므로 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 기울기는 $-\frac{a}{b}$, x절편은 $-\frac{c}{a}$이고

$ab<0$, $ac<0$이므로

$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{a}>0$

따라서 기울기가 양수, x절편이 양수인 직선이므로 그래프는 다음 그림과 같고 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지난다.



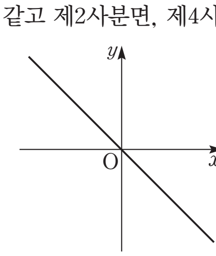
(3) $ax+by+c=0$에서 $b\neq 0$이므로 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 기울기는 $-\frac{a}{b}$, y절편은 $-\frac{c}{b}$이고

$ab>0$, $c=0$이므로

$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}=0$

따라서 기울기가 음수, y절편이 0인 직선이므로 그래프는 다음 그림과 같고 제2사분면, 제4사분면을 지난다.



16 답 (1) 평행하다. (2) 수직이다.
(3) 한 점에서 만난다. (4) 평행하다.
(5) 수직이다. (6) 평행하다.
(7) 일치한다. (8) 한 점에서 만난다.

풀이 (1) 두 직선의 기울기가 같으므로 평행하다.

(2) 두 직선의 기울기의 곱이 $-2\times\frac{1}{2}=-1$이므로 수직이다.

(3) 두 직선의 기울기가 같지 않고, 기울기의 곱이

$\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)\neq -1$이므로 한 점에서 만난다.

(4) 두 직선의 기울기가 같으므로 평행하다.

(5) $2\times 2+4\times(-1)=0$이므로 수직이다.

(6) $\frac{3}{6}=\frac{-5}{-10}\neq\frac{-2}{3}$이므로 평행하다.

(7) $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}$이므로 일치한다.

(8) $\frac{-1}{2}\neq\frac{5}{-5}$이고 $(-1)\times2+5\times(-5)\neq0$이므로 한 점에서 만난다.

17 답 (1) 1 (2) -3 (3) 5 (4) $\frac{1}{2}$ (5) 2 (6) $\frac{2}{3}$

풀이 (2) $y=2ax+4x+5=2(a+2)x+5$

즉, $-2=2(a+2)$에서 $a=\underline{-3}$

(3) $2a=a+5$에서 $a=5$

(4) $\frac{a}{1}=\frac{2}{4}\neq\frac{-3}{6}$에서 $a=\underline{\frac{1}{2}}$

(5) $\frac{1}{3}=\frac{1}{5a-7}\neq\frac{-5}{6}$에서 $5a-7=3$이므로 $a=2$

(6) $\frac{a-1}{2a}=\frac{-1}{4}\neq\frac{-4}{1}$에서 $4(a-1)=-2a$이므로

$a=\frac{2}{3}$

18 답 (1) $y=2x-3$ (2) $y=-x-3$ (3) $y=\frac{2}{3}x+6$ (4) $y=-3x+1$

풀이 (1) 직선 $y=2x-1$에 평행하므로 기울기가 2이고 점 $(1, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-(-1)=2(x-1)$

$\therefore y=\underline{2x-3}$

(2) 직선 $y=-x+5$에 평행하므로 기울기가 -1이고 점 $(0, -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-(-3)=-(x-0)$

$\therefore y=-x-3$

(3) 직선 $2x-3y-1=0$, 즉 $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$에 평행하므로 기울기가 $\frac{2}{3}$이고 점 $(-6, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{2}{3}\{x-(-6)\}$

$\therefore y=\frac{2}{3}x+6$

(4) 직선 $-6x-2y+5=0$, 즉 $y=-3x+\frac{5}{2}$에 평행하므로 기울기가 -3이고 점 $(-1, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=-3\{x-(-1)\}$

$\therefore y=-3x+1$

19 답 (1) 1 (2) $-\frac{7}{6}$ (3) $\frac{1}{2}$ 또는 1 (4) 4 (5) 0 (6) -2 또는 2

풀이 (1) $-1\times a=-1$에서 $a=\underline{1}$

(2) $2\times3(a+1)=-1$에서 $6a+6=-1$이므로

$a=-\frac{7}{6}$

(3) $2a\times\left(a-\frac{3}{2}\right)=-1$에서

$2a^2-3a+1=0$

$(2a-1)(a-1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$

(4) $2\times4+(-a)\times2=0$에서 $a=\underline{4}$

(5) $3a\times2+2\times(-a)=0$에서 $4a=0$이므로

$a=0$

(6) $a\times2a+(-4)\times2=0$에서 $2a^2-8=0$이므로

$a=-2$ 또는 $a=2$

20 답 (1) $y=-2x+7$ (2) $y=-x+4$ (3) $y=4x+20$ (4) $y=\frac{1}{3}x-2$

풀이 (1) 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$에 수직이므로 기울기가 -2이고 점 $(2, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=-2(x-2)$

$\therefore y=\underline{-2x+7}$

(2) 직선 $y=x+3$에 수직이므로 기울기가 -1이고 점 $(5, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-(-1)=-(x-5)$

$\therefore y=-x+4$

(3) 직선 $x+4y+1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$에 수직이므로 기울기가 4이고 점 $(-4, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=4\{x-(-4)\}$

$\therefore y=4x+20$

(4) 직선 $3x+y-8=0$, 즉 $y=-3x+8$에 수직이므로 기울기가 $\frac{1}{3}$이고 점 $(6, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{3}(x-6)$

$\therefore y=\frac{1}{3}x-2$

21 답 (1) -3, $-\frac{1}{2}$, 2 (2) -4, $-\frac{9}{4}$, $-\frac{1}{2}$ (3) -8, 2, 12

풀이 세 직선이 삼각형을 이루지 않으려면 적어도 두 직선이 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

(1) (ⅰ) 두 직선 $y=-2x-4$, $y=-ax+1$이 평행할 때

두 직선의 기울기가 서로 같아야 하므로

$a=\underline{2}$

(ⅱ) 두 직선 $y=3x+6$, $y=-ax+1$이 평행할 때

두 직선의 기울기가 서로 같아야 하므로

$a=\underline{-3}$

(ⅲ) 세 직선이 한 점에서 만날 때

두 직선 $y=-2x-4$, $y=3x+6$의 교점을 직선 $y=-ax+1$이 지나야 한다.

$-2x-4=3x+6$에서 $x=-2$이고 $y=0$

즉, 교점은 $(-2, 0)$이고 직선 $y=-ax+1$이 이 점을 지나므로

$0=2a+1$에서 $a=\underline{-\frac{1}{2}}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 a의 값은 $\underline{-3}$, $\underline{-\frac{1}{2}}$, $\underline{2}$이다.

(2) (ⅰ) 두 직선 $y=\frac{3}{2}x-9$, $y=(a+2)x-2$가 평행할 때

두 직선의 기울기가 서로 같아야 하므로

$\frac{3}{2}=a+2$에서 $a=-\frac{1}{2}$

(ⅱ) 두 직선 $y=-2x+5$, $y=(a+2)x-2$가 평행할 때

두 직선의 기울기가 서로 같아야 하므로

$-2=a+2$에서 $a=-4$

(ⅲ) 세 직선이 한 점에서 만날 때

두 직선 $y=\frac{3}{2}x-9$, $y=-2x+5$의 교점을

직선 $y=(a+2)x-2$가 지나야 한다.

$\frac{3}{2}x-9=-2x+5$에서 $x=4$이고 $y=-3$

즉, 교점은 $(4,\ -3)$이고 직선 $y=(a+2)x-2$가 이 점을 지나므로 $-3=4(a+2)-2$에서

$a=-\frac{9}{4}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 a의 값은 -4, $-\frac{9}{4}$, $-\frac{1}{2}$이다.

(3) (ⅰ) 두 직선 $2x-y-3=0$, $ax+4y+8=0$이 평행할 때

$\frac{2}{a}=\frac{-1}{4}\neq\frac{-3}{8}$에서 $a=-8$

(ⅱ) 두 직선 $x+2y+5=0$, $ax+4y+8=0$이 평행할 때

$\frac{1}{a}=\frac{2}{4}\neq\frac{5}{8}$에서 $a=2$

(ⅲ) 세 직선이 한 점에서 만날 때

두 직선 $2x-y-3=0$, $x+2y+5=0$의 교점을 직선 $ax+4y+8=0$이 지나야 한다.

$2x-y-3=0$은 $y=2x-3$,

$x+2y+5=0$은 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$이므로

$2x-3=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$에서 $x=\frac{1}{5}$이고 $y=-\frac{13}{5}$

즉, 교점은 $\left(\frac{1}{5},\ -\frac{13}{5}\right)$이고 직선 $ax+4y+8=0$이

이 점을 지나므로 $a\times\frac{1}{5}+4\times\left(-\frac{13}{5}\right)+8=0$에서

$a=12$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 a의 값은 -8, 2, 12이다.

22 답 **(1)** $2x-9y+25=0$ **(2)** $3x+y+2=0$
(3) $5x-y+11=0$ **(4)** $11x-4y+1=0$

풀이 **(1)** 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(4x+6y-7)+k(2x-y+6)=0$ (단, k는 실수)

이 직선이 점 $\mathrm{P}(1,\ 3)$을 지나므로 $x=1$, $y=3$을 대입하면

$(4+18-7)+k(2-3+6)=0$

$5k+15=0$ $\quad\therefore k=-3$

따라서 $(4x+6y-7)-3(2x-y+6)=0$이므로 구하는 직선의 방정식은

$\underline{2x-9y+25=0}$

(2) 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(2x+3y-1)+k(x-2y+3)=0$ (단, k는 실수)

이 직선이 점 $\mathrm{P}(0,\ -2)$를 지나므로 $x=0$, $y=-2$를 대입하면

$(-6-1)+k(4+3)=0$

$7k-7=0$ $\quad\therefore k=1$

따라서 $(2x+3y-1)+(x-2y+3)=0$이므로 구하는 직선의 방정식은

$3x+y+2=0$

(3) 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(-3x+5y-3)+k(x+2y+4)=0$ (단, k는 실수)

이 직선이 점 $\mathrm{P}(-2,\ 1)$을 지나므로 $x=-2$, $y=1$을 대입하면

$(6+5-3)+k(-2+2+4)=0$

$4k+8=0$ $\quad\therefore k=-2$

따라서 $(-3x+5y-3)-2(x+2y+4)=0$이므로 구하는 직선의 방정식은

$5x-y+11=0$

(4) 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(2x-y+10)+k(3x-y-3)=0$ (단, k는 실수)

이 직선이 점 $\mathrm{P}(-3,\ -8)$을 지나므로 $x=-3$, $y=-8$을 대입하면

$(-6+8+10)+k(-9+8-3)=0$

$-4k+12=0$ $\quad\therefore k=3$

따라서 $(2x-y+10)+3(3x-y-3)=0$이므로 구하는 직선의 방정식은

$11x-4y+1=0$

23 답 **(1)** $(1,\ -1)$ **(2)** $\left(-\frac{1}{2},\ -1\right)$
(3) $(3,\ 8)$ **(4)** $\left(\frac{7}{10},\ \frac{9}{5}\right)$

풀이 **(1)** 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(-2x+y+3)+k(x+2y+1)=0$

이 직선이 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점 P는 두 직선 $-2x+y+3=0$, $x+2y+1=0$의 교점이다.

즉, 두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-1$이므로 점 P의 좌표는 $(\underline{1},\ \underline{-1})$이다.

(2) 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(4x-3y-1)+k(2x+y+2)=0$

이 직선이 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점 P는 두 직선 $4x-3y-1=0$, $2x+y+2=0$의 교점이다.

즉, 두 식을 연립하여 풀면 $x=-\frac{1}{2}$, $y=-1$이므로

점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ -1\right)$이다.

(3) 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(3x-y-1)+k(x-y+5)=0$

이 직선이 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점 P는 두 직선 $3x-y-1=0$, $x-y+5=0$의 교점이다.

즉, 두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=8$이므로 점 P의 좌표는 $(3, 8)$이다.

(4) 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+2y-5)+k(4x-y-1)=0$

이 직선이 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점 P는 두 직선 $2x+2y-5=0$, $4x-y-1=0$의 교점이다.

즉, 두 식을 연립하여 풀면 $x=\frac{7}{10}$, $y=\frac{9}{5}$이므로 점 P의 좌표는 $\left(\frac{7}{10}, \frac{9}{5}\right)$이다.

24 답 (1) 2 (2) $\sqrt{5}$ (3) 4 (4) $9\sqrt{2}$ (5) $\frac{5\sqrt{29}}{29}$ (6) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ (7) 1 (8) $\frac{9}{5}$

풀이 (1) $\frac{|3\times1-4\times2-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-10|}{5}=\frac{10}{5}=2$

(2) $\frac{|2\times0+0-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

(3) $5x-12y=6$은 $5x-12y-6=0$으로 나타낼 수 있으므로

$\frac{|5\times(-2)-12\times3-6|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{|-52|}{13}=\frac{52}{13}=4$

(4) $\frac{|6-(-4)+8|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|18|}{\sqrt{2}}=\frac{18}{\sqrt{2}}=9\sqrt{2}$

(5) $y=-\frac{2}{5}x-1$은 $2x+5y+5=0$으로 나타낼 수 있으므로

$\frac{|2\times0+5\times0+5|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\frac{|5|}{\sqrt{29}}=\frac{5}{\sqrt{29}}=\frac{5\sqrt{29}}{29}$

(6) $y=-3x+2$는 $3x+y-2=0$으로 나타낼 수 있으므로

$\frac{|3\times3-5-2|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|2|}{\sqrt{10}}=\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

(7) $y=2$는 $y-2=0$으로 나타낼 수 있으므로

$\frac{|0\times3+3-2|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{|1|}{1}=1$

다른 풀이 $y=2$는 x축에 평행한 직선이므로 이 직선과 점 $(3, 3)$ 사이의 거리는 $|3-2|=1$이다.

(8) $y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$은 $3x+4y-2=0$으로 나타낼 수 있으므로

$\frac{|3\times(-1)+4\times(-1)-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-9|}{5}=\frac{9}{5}$

25 답 (1) -1, 11 (2) -3, 10 (3) -15, 5 (4) -9, 21

풀이 (1) $\frac{|2-a+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|-a+5|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$이므로

$|-a+5|=6$

$-a+5=6$ 또는 $-a+5=-6$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=11$

(2) $\frac{|2\times a+3\times(-4)+5|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|2a-7|}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$이므로

$|2a-7|=13$

$2a-7=13$ 또는 $2a-7=-13$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=10$

(3) $\frac{|2\times1+3+a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|a+5|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$이므로

$|a+5|=10$

$a+5=10$ 또는 $a+5=-10$

$\therefore a=-15$ 또는 $a=5$

(4) $\frac{|4\times(-5)-3\times(-2)+(a+8)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|a-6|}{5}=3$

이므로 $|a-6|=15$

$a-6=15$ 또는 $a-6=-15$

$\therefore a=-9$ 또는 $a=21$

26 답 (1) $y=x+4$, $y=x-4$

(2) $y=-\frac{3}{4}x+5$, $y=-\frac{3}{4}x-5$

(3) $y=-3x+5\sqrt{2}$, $y=-3x-5\sqrt{2}$

풀이 (1) 직선 $x+y-4=0$, 즉 $y=-x+4$에 수직이므로 기울기는 1이다.

따라서 구하는 직선의 방정식을 $y=x+k$ (k는 상수)로 놓으면 $x-y+k=0$과 같이 나타낼 수 있으므로

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

$|k|=4$

$\therefore k=4$ 또는 $k=-4$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=x+4$ 또는 $y=x-4$이다.

(2) 직선 $4x-3y-6=0$, 즉 $y=\frac{4}{3}x-2$에 수직이므로 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식을 $y=-\frac{3}{4}x+k$ (k는 상수)로 놓으면 $3x+4y-4k=0$과 같이 나타낼 수 있으므로

$\frac{|-4k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-4k|}{5}=4$

$|-4k|=20$

$|k|=5$

$\therefore k=5$ 또는 $k=-5$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-\frac{3}{4}x+5$ 또는 $y=-\frac{3}{4}x-5$이다.

(3) 직선 $x-3y-1=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$에 수직이므로 기울기는 -3이다.

따라서 구하는 직선의 방정식을 $y=-3x+k$ (k는 상수)로 놓으면 $3x+y-k=0$과 같이 나타낼 수 있으므로

$\frac{|-k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|-k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{5}$

$|k|=5\sqrt{2}$

$\therefore k=5\sqrt{2}$ 또는 $k=-5\sqrt{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-3x+5\sqrt{2}$ 또는 $y=-3x-5\sqrt{2}$이다.

27 답 (1) $\sqrt{5}$ (2) $\frac{\sqrt{13}}{13}$ (3) 1 (4) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (5) $3\sqrt{10}$ (6) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

풀이 (1) 직선 $x-2y+3=0$ 위의 점 $(-3, 0)$과 직선 $x-2y-2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-3-2\times0-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

따라서 두 직선 사이의 거리는 $\sqrt{5}$이다.

(2) 직선 $2x+3y+2=0$ 위의 점 $(-1, 0)$과 직선 $2x+3y+3=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\times(-1)+3\times0+3|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|1|}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$

따라서 두 직선 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{13}}{13}$이다.

(3) 직선 $3x-4y+4=0$ 위의 점 $(0, 1)$과 직선 $3x-4y+9=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\times0-4\times1+9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|5|}{5}=1$

따라서 두 직선 사이의 거리는 1이다.

(4) 직선 $y=2x+3$ 위의 점 $(0, 3)$과 직선 $y=2x+5$, 즉 $2x-y+5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\times0-3+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2|}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 두 직선 사이의 거리는 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$이다.

(5) 직선 $y=\frac{1}{3}x-8$ 위의 점 $(0, -8)$과 직선 $y=\frac{1}{3}x+2$, 즉 $x-3y+6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|0-3\times(-8)+6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|30|}{\sqrt{10}}=3\sqrt{10}$

따라서 두 직선 사이의 거리는 $3\sqrt{10}$이다.

(6) 직선 $y=-7x$ 위의 점 $(0, 0)$과 직선 $y=-7x+5$, 즉 $7x+y-5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-5|}{\sqrt{7^2+1^2}}=\frac{|-5|}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 두 직선 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

28 답 (1) 7 (2) 13 (3) 3 (4) 4 (5) 9

풀이 (1) 밑변을 변 AB라고 하면

$\overline{AB}=\sqrt{(4-2)^2+\{5-(-1)\}^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

이때 삼각형의 높이는 점 C와 선분 AB 사이의 거리이다.

직선 AB는 두 점 A, B를 지나는 직선이므로 그 방정식은

$y-(-1)=\frac{5-(-1)}{4-2}(x-2)$

$y=3(x-2)-1$

$\therefore y=3x-7$

점 $C(-1, -3)$과 직선 $y=3x-7$, 즉 $3x-y-7=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\times(-1)-(-3)-7|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|-7|}{\sqrt{10}}=\frac{7}{\sqrt{10}}$

따라서 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{10}\times\frac{7}{\sqrt{10}}=7$

(2) 밑변을 변 AB라고 하면

$\overline{AB}=\sqrt{\{-2-(-3)\}^2+\{-6-(-1)\}^2}=\sqrt{26}$

이때 삼각형의 높이는 점 C와 선분 AB 사이의 거리이다.

직선 AB는 두 점 A, B를 지나는 직선이므로 그 방정식은

$y-(-1)=\frac{-6-(-1)}{-2-(-3)}\{x-(-3)\}$

$y=-5(x+3)-1$

$\therefore y=-5x-16$

점 $C(4, -10)$과 직선 $y=-5x-16$, 즉 $5x+y+16=0$ 사이의 거리는

$\frac{|5\times4-10+16|}{\sqrt{5^2+1^2}}=\frac{26}{\sqrt{26}}$

따라서 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{26}\times\frac{26}{\sqrt{26}}=13$

(3) 밑변을 선분 AB라고 하면

$\overline{AB}=\sqrt{(4-8)^2+\{0-(-3)\}^2}=5$

이때 삼각형의 높이는 점 C와 선분 AB 사이의 거리이다.

직선 AB는 두 점 A, B를 지나는 직선이므로 그 방정식은

$y-(-3)=\frac{0-(-3)}{4-8}(x-8)$

$y=-\frac{3}{4}(x-8)-3$

$\therefore y=-\frac{3}{4}x+3$

점 $C(-2, 6)$과 직선 $y=-\frac{3}{4}x+3$, 즉 $3x+4y-12=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\times(-2)+4\times6-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{6}{5}$

따라서 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times\frac{6}{5}=3$

(4) 밑변을 선분 BC라고 하면

$\overline{BC}=\sqrt{(-2-2)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

이때 삼각형의 높이는 점 A와 선분 BC 사이의 거리이다.

직선 BC는 두 점 B, C를 지나는 직선이므로 그 방정식은

$y-4=\frac{-2-4}{-2-2}(x-2)$

$y=\frac{3}{2}(x-2)+4$

$\therefore y=\frac{3}{2}x+1$

점 A(0, -1)과 직선 $y=\frac{3}{2}x+1$, 즉 $3x-2y+2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\times0-2\times(-1)+2|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{13}}$

따라서 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{13}\times\frac{4}{\sqrt{13}}=4$

(5) 밑변을 선분 BC라고 하면

$\overline{BC}=\sqrt{(3-1)^2+(7-3)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

이때 삼각형의 높이는 점 A와 선분 BC 사이의 거리이다.

직선 BC는 두 점 B, C를 지나는 직선이므로 그 방정식은

$y-3=\frac{7-3}{3-1}(x-1)$

$y=2(x-1)+3$

$\therefore y=2x+1$

점 A(5, 2)와 직선 $y=2x+1$, 즉 $2x-y+1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\times5-2+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{9}{\sqrt{5}}$

따라서 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{9}{\sqrt{5}}=9$

중단원 점검문제 | I-2 직선의 방정식 036-037쪽

01 답 $y=-3x-2$

풀이 직선 $y=-3x+5$와 기울기가 같으므로 기울기는 -3이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-4=-3\{x-(-2)\}$

$\therefore y=-3x-2$

02 답 $y=x-4$

풀이 $y=2mx-2-4m$은 $y+2=2m(x-2)$와 같이 나타낼 수 있으므로 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점은 $(2, -2)$이다.

따라서 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$이므로 기울기가 $\tan 45°=1$이고 점 $(2, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-(-2)=x-2$

$\therefore y=x-4$

03 답 -5

풀이 x축에 수직이면 y축에 평행하므로 점 $(5, -3)$을 지나고 y축에 평행한 직선의 방정식은

$x=5$

따라서 $x-5=0$에서 $a=0$, $b=-5$이므로

$a+b=-5$

04 답 $y=-\frac{1}{2}x+5$

풀이 $y=x+2$, $y=3x-2$를 연립하여 풀면

$x=2$, $y=4$

즉, 교점의 좌표가 $(2, 4)$이므로 두 점 $(2, 4)$, $(6, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{2-4}{6-2}(x-2)$

$y=-\frac{1}{2}(x-2)+4$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+5$

05 답 6

풀이 x절편을 a, y절편을 $-a$라고 하면 직선의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$

이 직선이 점 $(3, -3)$을 지나므로 $x=3$, $y=-3$을 대입하면

$\frac{3}{a}+\frac{-3}{-a}=1$

$\frac{6}{a}=1$

$\therefore a=6$

이때 구하는 직선의 방정식은 $\frac{x}{6}-\frac{y}{6}=1$, 즉 $x-y-6=0$이다.

따라서 $a=-1$, $b=-6$이므로

$ab=-1\times(-6)=6$

06 답 -11

풀이 (직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)이어야 하므로

$\frac{3-2}{1-(-1)}=\frac{-3-3}{a-1}$

$a-1=-12$

$\therefore a=-11$

07 답 $-\frac{1}{3}$

풀이 직선 $y=m(x+4)+2$는 $y-2=m(x+4)$이므로 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-4, 2)$를 지난다.

즉, 직선 $y=m(x+4)+2$는 점 $\mathrm{A}(-4, 2)$를 지나므로 변 BC의 중점을 지나면 삼각형 ABC의 넓이를 이등분한다.

선분 BC의 중점은 $\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-3+3}{2}\right)$에서 $(2, 0)$

$x=2$, $y=0$을 $y=m(x+4)+2$에 대입하면

$0=m(2+4)+2$

$\therefore m=-\frac{1}{3}$

08 답 $\frac{4}{3}$

풀이 직선이 정사각형의 두 대각선의 교점을 지날 때 정사각형의 넓이를 이등분한다.

구하는 직선은 원점을 지나므로 직선의 방정식을 $y=ax$ (a는 상수)로 놓으면 정사각형의 두 대각선의 교점은 $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$에서 $(3, 4)$

$x=3$, $y=4$를 $y=ax$에 대입하면

$4=3a \qquad \therefore a=\frac{4}{3}$

09 답 6

풀이 직선 $ax+4y=4a$에서

$\frac{x}{4}+\frac{y}{a}=1$

즉, x절편은 4, y절편은 a이므로 직선 $ax+4y=4a$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times|a|=12$, $|a|=6$

$\therefore a=-6$ 또는 $a=6$

이때 $a>0$이므로 $a=6$이다.

10 답 제1사분면

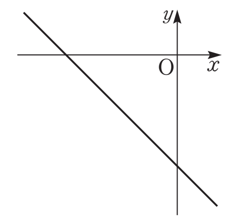
풀이 $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 기울기는 $-\frac{a}{b}$, y절편은 $-\frac{c}{b}$이고 $ab>0$, $bc>0$이므로

$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}<0$

따라서 기울기가 음수, y절편이 음수인 직선이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같고 제1사분면을 지나지 않는다.



11 답 $y=-2x+\frac{11}{2}$

직선 AB의 기울기는

$\frac{2-(-3)}{8-(-2)}=\frac{1}{2}$

이고, 구하는 직선은 직선 AB에 수직이므로 기울기는 -2이다.

이때 구하는 직선은 선분 AB를 수직이등분하므로 선분 AB의 중점을 지난다.

선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-2+8}{2}, \frac{-3+2}{2}\right)$에서 $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$이다.

따라서 기울기가 -2이고 점 $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-\left(-\frac{1}{2}\right)=-2(x-3)$

$\therefore y=-2x+\frac{11}{2}$

12 답 1

풀이 직선 $x+ay+1=0$이 직선 $2x-y+1=0$에 수직이므로 $1\times2+a\times(-1)=0$에서

$a=2$

직선 $x+ay+1=0$이 직선 $x+(3-b)y-1=0$에 평행하므로

$\frac{1}{1}=\frac{a}{3-b}\neq\frac{1}{-1}$

$3-b=a$에서 $3-b=2$이므로

$b=1$

$\therefore a-b=2-1=1$

13 답 -2, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{9}{7}$

풀이 세 직선이 삼각형을 이루지 않으려면 적어도 두 직선이 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

(i) 두 직선 $-3x+4y+5=0$, $ax+2y+1=0$이 평행할 때

$\frac{-3}{a}=\frac{4}{2}\neq\frac{5}{1}$에서 $a=-\frac{3}{2}$

(ii) 두 직선 $x-y-3=0$, $ax+2y+1=0$이 평행할 때

$\frac{1}{a}=\frac{-1}{2}\neq\frac{-3}{1}$에서 $a=-2$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때
두 직선 $-3x+4y+5=0$, $x-y-3=0$의 교점을 직선 $ax+2y+1=0$이 지나야 한다.
$-3x+4y+5=0$은 $y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$,
$x-y-3=0$은 $y=x-3$이므로
$\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}=x-3$에서 $x=7$이고 $y=4$
즉, 교점은 $(7,\ 4)$이고 직선 $ax+2y+1=0$이 이 점을 지나므로
$a\times7+2\times4+1=0$에서 $a=-\frac{9}{7}$

(i), (ii), (iii)에서 a의 값은 -2, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{9}{7}$이다.

14 답 $(-1,\ 1)$

풀이 주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$(x-2y+3)+k(3x+3y)=0$
이 직선이 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점은 두 직선 $x-2y+3=0$, $3x+3y=0$의 교점이다.
즉, 두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=1$이므로 구하는 점의 좌표는 $(-1,\ 1)$이다.

15 답 $y=-2x-6$, $y=-2x+14$

풀이 직선 $x-2y+6=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+3$에 수직이므로 기울기는 -2이다.
따라서 구하는 직선의 방정식을 $y=-2x+k$ (k는 상수)로 놓으면 $2x+y-k=0$과 같이 나타낼 수 있으므로
점 $(1,\ 2)$와 직선 $2x+y-k=0$ 사이의 거리는
$\frac{|2\times1+2-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|4-k|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$
$|4-k|=10$
$4-k=-10$ 또는 $4-k=10$
$\therefore k=-6$ 또는 $k=14$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y=-2x-6$ 또는 $y=-2x+14$

16 답 $\sqrt{10}$

풀이 두 직선 $3x+y-8=0$, $mx+(m-4)y+4=0$이 평행하므로
$\frac{3}{m}=\frac{1}{m-4}\neq\frac{-8}{4}$
$3(m-4)=m$
따라서 $m=6$이므로 두 직선의 방정식은 $3x+y-8=0$, $3x+y+2=0$이다.
직선 $3x+y+2=0$ 위의 한 점 $(0,\ -2)$와 직선 $3x+y-8=0$ 사이의 거리는
$\frac{|3\times0-2-8|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$
따라서 두 직선 사이의 거리는 $\sqrt{10}$이다.

Ⅰ-3 | 원의 방정식 038-053쪽

01 답 (1) $x^2+y^2=1$
(2) $(x-2)^2+(y-3)^2=9$
(3) $(x+3)^2+(y-5)^2=4$
(4) $(x+6)^2+(y+2)^2=25$

02 답 (1) 중심의 좌표: $(0,\ 1)$, 반지름의 길이: 2
(2) 중심의 좌표: $(-2,\ 3)$, 반지름의 길이: 4
(3) 중심의 좌표: $(4,\ 5)$, 반지름의 길이: 7
(4) 중심의 좌표: $(-1,\ -6)$, 반지름의 길이: $4\sqrt{2}$

03 답 (1) $x^2+y^2=25$
(2) $(x+2)^2+(y-2)^2=13$
(3) $(x-1)^2+(y-9)^2=32$
(4) $(x+4)^2+(y+8)^2=40$
(5) $(x-5)^2+y^2=5$

풀이 (1) 구하는 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 중심이 원점이므로
$x^2+y^2=r^2$
이 원이 점 $(4,\ 3)$을 지나므로
$4^2+3^2=r^2$
$r^2=25$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2=25$

(2) 구하는 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 중심이 점 $(-2,\ 2)$이므로
$(x+2)^2+(y-2)^2=r^2$
이 원이 점 $(1,\ 4)$를 지나므로
$(1+2)^2+(4-2)^2=r^2$
$r^2=13$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+2)^2+(y-2)^2=13$

(3) 구하는 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 중심이 점 $(1,\ 9)$이므로
$(x-1)^2+(y-9)^2=r^2$
이 원이 점 $(-3,\ 5)$를 지나므로
$(-3-1)^2+(5-9)^2=r^2$
$r^2=32$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y-9)^2=32$

(4) 구하는 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 중심이 점 $(-4,\ -8)$이므로
$(x+4)^2+(y+8)^2=r^2$
이 원이 점 $(2,\ -6)$을 지나므로
$(2+4)^2+(-6+8)^2=r^2$
$r^2=40$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+4)^2+(y+8)^2=40$

(5) 구하는 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 중심이 점 $(5, 0)$이므로
$(x-5)^2+y^2=r^2$
이 원이 점 $(3, -1)$을 지나므로
$(3-5)^2+(-1)^2=r^2$
$r^2=5$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-5)^2+y^2=5$

04 답 (1) $(x-4)^2+(y+2)^2=17$
(2) $(x+3)^2+(y-1)^2=2$
(3) $x^2+y^2=29$
(4) $(x-4)^2+(y+1)^2=25$

풀이 (1) 원의 중심의 좌표는 선분 AB의 중점이므로
$\left(\frac{3+5}{2}, \frac{2-6}{2}\right)$에서
$(4, -2)$
두 점 A, B는 원의 지름의 양 끝 점이므로 구하는 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}$이다. 즉,
$\frac{1}{2}\sqrt{(5-3)^2+(-6-2)^2}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{17}=\sqrt{17}$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-4)^2+(y+2)^2=\underline{17}$

다른 풀이 원의 중심의 좌표는 선분 AB의 중점이므로
$\left(\frac{3+5}{2}, \frac{2-6}{2}\right)$에서
$(4, -2)$
원의 반지름의 길이는 원의 중심과 점 A 사이의 거리와 같으므로
$\sqrt{(3-4)^2+\{2-(-2)\}^2}=\sqrt{17}$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-4)^2+(y+2)^2=17$

(2) 원의 중심의 좌표는 선분 AB의 중점이므로
$\left(\frac{-4-2}{2}, \frac{2+0}{2}\right)$에서
$(-3, 1)$
두 점 A, B는 원의 지름의 양 끝 점이므로 구하는 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}$이다. 즉,
$\frac{1}{2}\sqrt{\{-2-(-4)\}^2+(0-2)^2}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y-1)^2=2$

(3) 원의 중심의 좌표는 선분 AB의 중점이므로
$\left(\frac{-5+5}{2}, \frac{-2+2}{2}\right)$에서
$(0, 0)$
두 점 A, B는 원의 지름의 양 끝 점이므로 구하는 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}$이다. 즉,
$\frac{1}{2}\sqrt{\{5-(-5)\}^2+\{2-(-2)\}^2}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{29}=\sqrt{29}$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2=29$

(4) 원의 중심의 좌표는 선분 AB의 중점이므로
$\left(\frac{7+1}{2}, \frac{3-5}{2}\right)$에서
$(4, -1)$
두 점 A, B는 원의 지름의 양 끝 점이므로 구하는 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}$이다. 즉,
$\frac{1}{2}\sqrt{(1-7)^2+(-5-3)^2}=\frac{1}{2}\times 10=5$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-4)^2+(y+1)^2=25$

05 답 (1) $(x+1)^2+(y-3)^2=9$
(2) $x^2+(y+2)^2=4$
(3) $(x-2)^2+y^2=20$
(4) $(x+3)^2+(y-5)^2=5$

풀이 (1) $x^2+y^2+2x-6y+1=0$에서
$(x^2+2x+1)+(y^2-6y+9)-9=0$
$\therefore (x+1)^2+(y-3)^2=\underline{9}$

(2) $x^2+y^2+4y=0$에서
$x^2+(y^2+4y+4)-4=0$
$\therefore x^2+(y+2)^2=4$

(3) $x^2+y^2-4x-16=0$에서
$(x^2-4x+4)+y^2-20=0$
$\therefore (x-2)^2+y^2=20$

(4) $x^2+y^2+6x-10y+29=0$에서
$(x^2+6x+9)+(y^2-10y+25)-5=0$
$\therefore (x+3)^2+(y-5)^2=5$

06 답 (1) 중심의 좌표: $(6, -1)$, 반지름의 길이: 2
(2) 중심의 좌표: $(-2, 4)$, 반지름의 길이: $2\sqrt{6}$
(3) 중심의 좌표: $(5, 1)$, 반지름의 길이: 3
(4) 중심의 좌표: $(-1, -4)$, 반지름의 길이: $\sqrt{2}$

풀이 (1) $x^2+y^2-12x+2y+33=0$에서
$(x^2-12x+36)+(y^2+2y+1)-4=0$
$\therefore (x-6)^2+(y+1)^2=4$
따라서 원의 중심의 좌표는 $(6, -1)$, 반지름의 길이는 $\underline{2}$이다.

(2) $x^2+y^2+4x-8y-4=0$에서
$(x^2+4x+4)+(y^2-8y+16)-24=0$
$\therefore (x+2)^2+(y-4)^2=24$
따라서 원의 중심의 좌표는 $(-2, 4)$, 반지름의 길이는 $2\sqrt{6}$이다.

(3) $x^2+y^2-10x-2y+17=0$에서
$(x^2-10x+25)+(y^2-2y+1)-9=0$
$\therefore (x-5)^2+(y-1)^2=9$
따라서 원의 중심의 좌표는 $(5, 1)$, 반지름의 길이는 3이다.

(4) $x^2+y^2+2x+8y+15=0$에서
$(x^2+2x+1)+(y^2+8y+16)-2=0$
$\therefore (x+1)^2+(y+4)^2=2$
따라서 원의 중심의 좌표는 $(-1, -4)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

07 답 (1) $k<16$ (2) $k<8$
(3) $-3\sqrt{5}<k<3\sqrt{5}$ (4) $k<-1$ 또는 $k>2$

풀이 (1) $x^2+y^2+8y+k=0$에서
$x^2+(y^2+8y+16)=-k+16$
$\therefore x^2+(y+4)^2=-k+16$
이 방정식이 원을 나타내기 위해서는 $-k+16>0$이어야 하므로 $k<16$이다.
(2) $x^2+y^2-6x+4y+k+5=0$에서
$(x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)=-k+8$
$\therefore (x-3)^2+(y+2)^2=-k+8$
이 방정식이 원을 나타내기 위해서는 $-k+8>0$이어야 하므로 $k<8$이다.
(3) $x^2+y^2-12x+6y+k^2=0$에서
$(x^2-12x+36)+(y^2+6y+9)=-k^2+45$
$\therefore (x-6)^2+(y+3)^2=-k^2+45$
이 방정식이 원을 나타내기 위해서는 $-k^2+45>0$이어야 하므로
$k^2-45<0$
$(k+3\sqrt{5})(k-3\sqrt{5})<0$
$\therefore -3\sqrt{5}<k<3\sqrt{5}$
(4) $x^2+y^2-2x-2y-k^2+k+4=0$에서
$(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)=k^2-k-2$
$\therefore (x-1)^2+(y-1)^2=k^2-k-2$
이 방정식이 원을 나타내기 위해서는 $k^2-k-2>0$이어야 하므로
$(k+1)(k-2)>0$
$\therefore k<-1$ 또는 $k>2$

08 답 (1) $x^2+y^2+6x+4y=0$
(2) $x^2+y^2-8x+2y=0$
(3) $x^2+y^2-10x=0$

풀이 (1) 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓으면 이 원이 점 $(0, 0)$을 지나므로 $x=0$, $y=0$을 대입하면
$C=0$
$x^2+y^2+Ax+By=0$이 두 점 $(-1, 1)$, $(-5, -5)$를 지나므로 이를 각각 대입하면
$-A+B=-2$ …… ㉠
$-5A-5B=-50$ $\quad\therefore A+B=10$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $A=6$, $B=4$이므로 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2+6x+4y=0$

다른 풀이 주어진 세 점을 $O(0, 0)$, $A(-1, 1)$, $B(-5, -5)$라 하고 세 점 O, A, B를 지나는 원의 중심을 $P(a, b)$라고 하면 $\overline{OP}=\overline{AP}=\overline{BP}$
$\overline{OP}=\overline{AP}$에서 $\overline{OP}^2=\overline{AP}^2$이므로
$a^2+b^2=(a+1)^2+(b-1)^2$
$\therefore a-b=-1$ …… ㉠
$\overline{OP}=\overline{BP}$에서 $\overline{OP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$a^2+b^2=(a+5)^2+(b+5)^2$
$\therefore a+b=-5$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-2$
즉, 원의 중심은 $P(-3, -2)$이므로 원의 반지름의 길이는 $\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y+2)^2=13$
(2) 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓으면 이 원이 점 $(0, 0)$을 지나므로 $C=0$
$x^2+y^2+Ax+By=0$이 두 점 $(3, -5)$, $(5, 3)$을 지나므로 이를 각각 대입하면
$3A-5B=-34$ …… ㉠
$5A+3B=-34$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $A=-8$, $B=2$이므로 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-8x+2y=0$
(3) 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓으면 이 원이 점 $(0, 0)$을 지나므로 $C=0$
$x^2+y^2+Ax+By=0$이 두 점 $(1, 3)$, $(2, 4)$를 지나므로 이를 각각 대입하면
$A+3B=-10$ …… ㉠
$2A+4B=-20$ $\quad\therefore A+2B=-10$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $A=-10$, $B=0$이므로 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-10x=0$

09 답 (1) $(x-2)^2+(y-1)^2=1$
(2) $(x+3)^2+(y-8)^2=64$
(3) $(x+6)^2+(y+4)^2=16$
(4) $(x-2)^2+(y+5)^2=25$
(5) $x^2+(y-3)^2=9$

풀이 (1) 반지름의 길이는 $|(\text{중심의 } y\text{좌표})|=1$이므로
$(x-2)^2+(y-1)^2=1$
(2) 반지름의 길이는 $|(\text{중심의 } y\text{좌표})|=8$이므로
$(x+3)^2+(y-8)^2=64$
(3) 반지름의 길이는 $|(\text{중심의 } y\text{좌표})|=|-4|=4$이므로
$(x+6)^2+(y+4)^2=16$
(4) 반지름의 길이는 $|(\text{중심의 } y\text{좌표})|=|-5|=5$이므로
$(x-2)^2+(y+5)^2=25$
(5) 반지름의 길이는 $|(\text{중심의 } y\text{좌표})|=3$이므로
$x^2+(y-3)^2=9$

10 답 (1) 2 (2) 3 (3) -5

풀이 (1) 중심이 점 $(1,\ a)$이고 x축에 접하는 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y-a)^2=a^2$

이 원이 점 $(3,\ 2)$를 지나므로

$(3-1)^2+(2-a)^2=a^2$

$a^2-4a+8=a^2$, $-4a+8=0$

$\therefore\ a=\underline{2}$

(2) 중심이 점 $(-a,\ 3)$이고 x축에 접하는 원의 방정식은

$(x+a)^2+(y-3)^2=9$

이 원이 점 $(-3,\ 6)$을 지나므로

$(-3+a)^2+(6-3)^2=9$

$(a-3)^2=0$ $\quad\therefore\ a=3$

(3) 중심이 점 $(-4,\ a)$이고 x축에 접하는 원의 방정식은

$(x+4)^2+(y-a)^2=a^2$

이 원이 점 $(-7,\ -9)$를 지나므로

$(-7+4)^2+(-9-a)^2=a^2$

$a^2+18a+90=a^2$

$18a+90=0$

$\therefore\ a=-5$

11 답 (1) $(x-1)^2+(y-7)^2=1$

(2) $(x-5)^2+(y+3)^2=25$

(3) $(x+2)^2+(y+2)^2=4$

(4) $(x-6)^2+y^2=36$

(5) $(x+8)^2+(y-7)^2=64$

풀이 (1) 반지름의 길이는 $|(\text{중심의 } x\text{좌표})|=1$이므로

$(x-1)^2+(y-7)^2=\underline{1}$

(2) 반지름의 길이는 $|(\text{중심의 } x\text{좌표})|=5$이므로

$(x-5)^2+(y+3)^2=25$

(3) 반지름의 길이는 $|(\text{중심의 } x\text{좌표})|=|-2|=2$이므로

$(x+2)^2+(y+2)^2=4$

(4) 반지름의 길이는 $|(\text{중심의 } x\text{좌표})|=6$이므로

$(x-6)^2+y^2=36$

(5) 반지름의 길이는 $|(\text{중심의 } x\text{좌표})|=|-8|=8$이므로

$(x+8)^2+(y-7)^2=64$

12 답 (1) 4 (2) 19 (3) $-2,\ 8$

(4) $-4,\ 4$ (5) $-1,\ 1$

풀이 (1) $(x-2)^2+(y+4)^2=k$가 y축에 접하면 반지름의 길이는 $|(\text{중심의 } x\text{좌표})|$이므로

$k=2^2=\underline{4}$

(2) $(x-6)^2+y^2=2(k-1)$이 y축에 접하면 반지름의 길이는 $|(\text{중심의 } x\text{좌표})|$이므로 $2(k-1)=6^2$에서

$k-1=18$ $\quad\therefore\ k=19$

(3) $(x+4)^2+(y-5)^2=k^2-6k$가 y축에 접하면 반지름의 길이는 $|(\text{중심의 } x\text{좌표})|$이므로

$k^2-6k=4^2$

$k^2-6k-16=0$, $(k+2)(k-8)=0$

$\therefore\ k=-2$ 또는 $k=8$

(4) $(x+k)^2+(y-3)^2=16$이 y축에 접하면 반지름의 길이는 $|(\text{중심의 } x\text{좌표})|$이므로

$|-k|=4$ $\quad\therefore\ k=-4$ 또는 $k=4$

(5) $(x-k)^2+(y+2)^2=1$이 y축에 접하면 반지름의 길이는 $|(\text{중심의 } x\text{좌표})|$이므로

$|k|=1$ $\quad\therefore\ k=-1$ 또는 $k=1$

13 답 (1) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

(2) $(x-9)^2+(y+9)^2=81$

(3) $(x-6)^2+(y+6)^2=36$

(4) $(x+3)^2+(y-3)^2=9$

(5) $(x+7)^2+(y+7)^2=49$

14 답 (1) $(x+5)^2+(y-5)^2=25$

(2) $(x+3)^2+(y+3)^2=9$

(3) $(x-4)^2+(y-4)^2=16$

(4) $(x-10)^2+(y+10)^2=100$

15 답 $(x+2)^2+y^2=16$

풀이 주어진 조건을 만족시키는 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$로 놓으면

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:2$이므로 $2\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$이다.

$2\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-6)^2+y^2}$에서

$4(x^2+y^2)=(x-6)^2+y^2$

$3x^2+3y^2+12x-36=0$

$x^2+y^2+4x-12=0$

$(x^2+4x+4)+y^2=16$

$\therefore\ (x+\underline{2})^2+y^2=\underline{16}$

16 답 $(x-6)^2+y^2=4$

풀이 주어진 조건을 만족시키는 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$로 놓으면

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=2:1$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{BP}}$이다.

$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-5)^2+y^2}$에서

$(x-2)^2+y^2=4(x-5)^2+4y^2$

$3x^2+3y^2-36x+96=0$

$x^2+y^2-12x+32=0$

$(x^2-12x+36)+y^2=4$

$\therefore\ (x-6)^2+y^2=4$

17 답 $(x-3)^2+(y+2)^2=1$

풀이 점 $\mathrm{Q}(x,\ y)$로 놓으면 $x=a+3$, $y=b-2$이므로

$a=x-3$, $b=y+2$

이때 점 P는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=1$

위의 식에 $a=x-3$, $b=y+2$를 대입하면 점 Q가 나타내는 도형의 방정식은

$(x-\underline{3})^2+(y+\underline{2})^2=1$

18 답 $x^2+(y+4)^2=4$

풀이 점 Q(x, y)로 놓으면 $x=a-1$, $y=b-1$이므로

$a=x+1$, $b=y+1$

이때 점 P는 원 $(x-1)^2+(y+3)^2=4$ 위의 점이므로

$(a-1)^2+(b+3)^2=4$

위의 식에 $a=x+1$, $b=y+1$을 대입하면 점 Q가 나타내는 도형의 방정식은

$\{(x+1)-1\}^2+\{(y+1)+3\}^2=4$

$\therefore x^2+(y+4)^2=4$

19 답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 만나지 않는다.

(3) 한 점에서 만난다. (접한다.)

(4) 만나지 않는다.

(5) 한 점에서 만난다. (접한다.)

(6) 서로 다른 두 점에서 만난다.

풀이 (1) $x^2+y^2=1$에 $y=x+1$을 대입하면

$x^2+(x+1)^2=1$

$2x^2+2x=0$

$\therefore x^2+x=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=1^2-4\times1\times0=1>0$

이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $x^2+y^2=4$에 $y=x-3$을 대입하면

$x^2+(x-3)^2=4$

$\therefore 2x^2-6x+5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-2\times5=-1<0$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

(3) $x^2+(y-1)^2=5$에 $y=-2x+6$을 대입하면

$x^2+(-2x+5)^2=5$

$5x^2-20x+20=0$

$\therefore x^2-4x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times4=0$이므로 원과 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.)

(4) $(x+1)^2+(y+1)^2=10$에 $y=x+8$을 대입하면

$(x+1)^2+(x+9)^2=10$

$2x^2+20x+72=0$

$\therefore x^2+10x+36=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=5^2-1\times36=-11<0$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

(5) $x^2+y^2-4x+6y+11=0$에 $x+y-1=0$, 즉 $y=-x+1$을 대입하면

$x^2+(-x+1)^2-4x+6(-x+1)+11=0$

$2x^2-12x+18=0$

$\therefore x^2-6x+9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times9=0$이므로 원과 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.)

(6) $x^2+y^2-8y+15=0$에 $3x-y+4=0$, 즉 $y=3x+4$를 대입하면

$x^2+(3x+4)^2-8(3x+4)+15=0$

$\therefore 10x^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=0-4\times10\times(-1)=40>0$

이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

20 답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(3) 만나지 않는다.

(4) 한 점에서 만난다. (접한다.)

(5) 한 점에서 만난다. (접한다.)

(6) 만나지 않는다.

풀이 (1) 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|0-0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 원의 반지름의 길이는 1이므로

$\frac{\sqrt{2}}{2}<1$

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=-2x$, 즉 $2x+y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\times0-0|}{\sqrt{2^2+1^2}}=0$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 $0<\sqrt{5}$

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

다른 풀이 직선 $y=-2x$는 원의 중심 $(0, 0)$을 지나므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(3) 원의 중심 $(-2, 0)$과 직선 $y=3x+1$, 즉 $3x-y+1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\times(-2)-0+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

이때 원의 반지름의 길이는 1이므로 $\frac{\sqrt{10}}{2}>1$

따라서 원과 직선은 만나지 않는다.

(4) 원의 중심 $(1, -3)$과 직선 $3x-4y+5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\times1-4\times(-3)+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{20}{5}=4$

이때 원의 반지름의 길이는 4이므로 원과 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.)

(5) $x^2+y^2-4x+8y-12=0$에서

$(x-2)^2+(y+4)^2=32$

원의 중심 $(2, -4)$와 직선 $x-y+2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2-(-4)+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

이때 원의 반지름의 길이는 $4\sqrt{2}$이므로 원과 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.)

(6) $x^2+y^2+2x-10y+24=0$에서

$(x+1)^2+(y-5)^2=2$

원의 중심 $(-1, 5)$와 직선 $-2x+y-2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-2\times(-1)+5-2|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이므로 $\sqrt{5}>\sqrt{2}$

따라서 원과 직선은 만나지 않는다.

참고 원과 직선의 위치 관계를 파악하는 방법은 다음의 두 가지가 있다.

[방법 1] 판별식 이용

[방법 2] 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용

원의 중심이 원점이 아닌 경우 판별식을 이용하면 식이 복잡해지므로 원의 중심과 직선 사이의 거리를 주로 이용한다.

21 답 (1) $-2\sqrt{3}<k<2\sqrt{3}$

(2) $k=2\sqrt{3}$ 또는 $k=-2\sqrt{3}$

(3) $k<-2\sqrt{3}$ 또는 $k>2\sqrt{3}$

풀이 $x^2+y^2=6$에 $y=x+k$를 대입하면

$x^2+(x+k)^2=6$

$\therefore 2x^2+2kx+k^2-6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=k^2-2\times(k^2-6)=-k^2+12$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로

$-k^2+12>0$

$k^2-12<0$

$(k+2\sqrt{3})(k-2\sqrt{3})<0$

$\therefore \underline{-2\sqrt{3}}<k<\underline{2\sqrt{3}}$

(2) 한 점에서 만나려면 $D=0$, 즉 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$-k^2+12=0$

$k^2=12$

$\therefore k=2\sqrt{3}$ 또는 $k=-2\sqrt{3}$

(3) 만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로

$-k^2+12<0$

$k^2-12>0$

$(k+2\sqrt{3})(k-2\sqrt{3})>0$

$\therefore k<-2\sqrt{3}$ 또는 $k>2\sqrt{3}$

22 답 (1) $-13<k<-3$

(2) $k=-13$ 또는 $k=-3$

(3) $k<-13$ 또는 $k>-3$

풀이 원 $(x-4)^2+y^2=5$의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이고, 원의 중심 $(4, 0)$과 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\times4-0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k+8|}{\sqrt{5}}$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{|k+8|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$이어야 하므로

$|k+8|<5$

$-5<k+8<5$

$\therefore \underline{-13}<k<\underline{-3}$

(2) 한 점에서 만나려면 $\frac{|k+8|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$이어야 하므로

$|k+8|=5$

$k+8=5$ 또는 $k+8=-5$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=-13$

(3) 만나지 않으려면 $\frac{|k+8|}{\sqrt{5}}>\sqrt{5}$이어야 하므로

$|k+8|>5$

$k+8<-5$ 또는 $k+8>5$

$\therefore k<-13$ 또는 $k>-3$

23 답 (1) $-4<k<0$

(2) $k=-4$ 또는 $k=0$

(3) $k<-4$ 또는 $k>0$

풀이 $x^2+y^2+4x+8y+16=0$에서

$(x+2)^2+(y+4)^2=4$

원의 반지름의 길이는 2이고, 원의 중심 $(-2, -4)$와 직선 $-3x+4y-5k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-3\times(-2)+4\times(-4)-5k|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\frac{|-5k-10|}{5}$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{|-5k-10|}{5}<2$이어야 하므로

$|-5k-10|<10$

$-10<-5k-10<10$

$\therefore -4<k<0$

(2) 한 점에서 만나려면 $\frac{|-5k-10|}{5}=2$이어야 하므로

$|-5k-10|=10$

$-5k-10=10$ 또는 $-5k-10=-10$

$\therefore k=-4$ 또는 $k=0$

(3) 만나지 않으려면 $\frac{|-5k-10|}{5}>2$이어야 하므로

$|-5k-10|>10$

$-5k-10<-10$ 또는 $-5k-10>10$

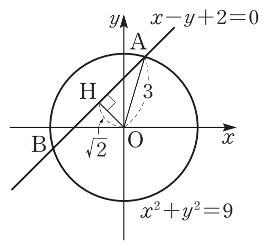
$\therefore k>0$ 또는 $k<-4$

24 답 (1) $2\sqrt{7}$ (2) 2 (3) $2\sqrt{51}$

풀이 (1) 원 $x^2+y^2=9$의 중심 $O(0, 0)$에서 직선 $x-y+2=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 선분 OH의 길이는 원의 중심 $O(0, 0)$과 직선 $x-y+2=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{OH}=\frac{|0-0+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로 다음 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 각각 A, B라고 하면 $\overline{OA}=3$



삼각형 OHA에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AH}=\sqrt{3^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{7}$

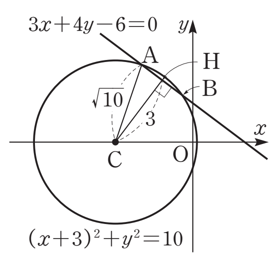
따라서 현의 길이는 $\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{7}$이다.

(2) 원 $(x+3)^2+y^2=10$의 중심 C에서 직선 $3x+4y-6=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 선분 CH의 길이는 원의 중심 C$(-3, 0)$과 직선 $3x+4y-6=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{CH}=\dfrac{|3\times(-3)+4\times0-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{15}{5}=3$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 다음 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 각각 A, B라고 하면

$\overline{CA}=\sqrt{10}$



삼각형 CHA에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AH}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-3^2}=1$

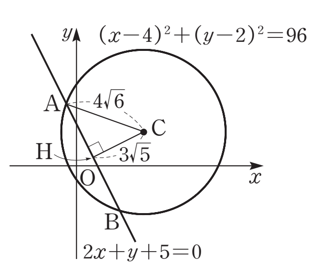
따라서 현의 길이는 $\overline{AB}=2\overline{AH}=2$이다.

(3) 원 $(x-4)^2+(y-2)^2=96$의 중심 C에서 직선 $2x+y+5=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 선분 CH의 길이는 원의 중심 C$(4, 2)$와 직선 $2x+y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{CH}=\dfrac{|2\times4+2+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 $4\sqrt{6}$이므로 다음 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 각각 A, B라고 하면

$\overline{CA}=4\sqrt{6}$



삼각형 AHC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AH}=\sqrt{(4\sqrt{6})^2-(3\sqrt{5})^2}=\sqrt{51}$

따라서 현의 길이는 $\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{51}$이다.

25 답 **(1)** 최댓값: $3\sqrt{2}$, 최솟값: $\sqrt{2}$

(2) 최댓값: 5, 최솟값: 1

(3) 최댓값: $\dfrac{39\sqrt{17}}{17}$, 최솟값: $\dfrac{5\sqrt{17}}{17}$

(4) 최댓값: $\dfrac{9\sqrt{10}}{2}$, 최솟값: $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

풀이 **(1)** 원 $x^2+y^2=2$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $x+y+4=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|0+0+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

이고 원 $x^2+y^2=2$의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의

최댓값은 $2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$, 최솟값은 $2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$이다.

(2) 원 $x^2+y^2=4$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $5x+12y-39=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|5\times0+12\times0-39|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\dfrac{39}{13}=3$

이고 원 $x^2+y^2=4$의 반지름의 길이는 2이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의

최댓값은 $3+2=5$, 최솟값은 $3-2=1$이다.

(3) 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=17$의 중심 $(2, 2)$와 직선 $-x+4y+16=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-2+4\times2+16|}{\sqrt{(-1)^2+4^2}}=\dfrac{22}{\sqrt{17}}=\dfrac{22\sqrt{17}}{17}$

이고 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=17$의 반지름의 길이는 $\sqrt{17}$이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의

최댓값은 $\dfrac{22\sqrt{17}}{17}+\sqrt{17}=\dfrac{39\sqrt{17}}{17}$,

최솟값은 $\dfrac{22\sqrt{17}}{17}-\sqrt{17}=\dfrac{5\sqrt{17}}{17}$이다.

(4) 원 $(x+5)^2+(y-3)^2=40$의 중심 $(-5, 3)$과 직선 $3x-y-7=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3\times(-5)-3-7|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{25}{\sqrt{10}}=\dfrac{5\sqrt{10}}{2}$

이고 원 $(x+5)^2+(y-3)^2=40$의 반지름의 길이는 $2\sqrt{10}$이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의

최댓값은 $\dfrac{5\sqrt{10}}{2}+2\sqrt{10}=\dfrac{9\sqrt{10}}{2}$,

최솟값은 $\dfrac{5\sqrt{10}}{2}-2\sqrt{10}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$이다.

26 답 **(1)** 최댓값: $\sqrt{26}+2$, 최솟값: $\sqrt{26}-2$

(2) 최댓값: $8\sqrt{2}$, 최솟값: $2\sqrt{2}$

(3) 최댓값: 9, 최솟값: 1

(4) 최댓값: $2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$, 최솟값: $2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$

풀이 **(1)** 원 $x^2+y^2=4$의 중심 $(0, 0)$과 점 P$(1, 5)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(1-0)^2+(5-0)^2}=\sqrt{26}$

이고 원 $x^2+y^2=4$의 반지름의 길이는 2이므로 원 밖의 점 P에서 원에 이르는 거리의

최댓값은 $\sqrt{26}+2$, 최솟값은 $\sqrt{26}-2$이다.

(2) 원 $(x+3)^2+y^2=18$의 중심 $(-3, 0)$과 점 $\mathrm{P}(4, 1)$ 사이의 거리는

$\sqrt{\{4-(-3)\}^2+(1-0)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

이고 원 $(x+3)^2+y^2=18$의 반지름의 길이는 $3\sqrt{2}$이므로 원 밖의 점 P에서 원에 이르는 거리의 최댓값은 $5\sqrt{2}+3\sqrt{2}=8\sqrt{2}$, 최솟값은 $5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$이다.

(3) 원 $(x-1)^2+(y+5)^2=16$의 중심 $(1, -5)$와 점 $\mathrm{P}(-2, -9)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-2-1)^2+\{-9-(-5)\}^2}=5$

이고 원 $(x-1)^2+(y+5)^2=16$의 반지름의 길이는 4이므로 원 밖의 점 P에서 원에 이르는 거리의 최댓값은 $5+4=9$, 최솟값은 $5-4=1$이다.

(4) 원 $(x-2)^2+(y+6)^2=8$의 중심 $(2, -6)$과 점 $\mathrm{P}(4, -10)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(4-2)^2+\{-10-(-6)\}^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

이고 원 $(x-2)^2+(y+6)^2=8$의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 원 밖의 점 P에서 원에 이르는 거리의 최댓값은 $2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$, 최솟값은 $2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$이다.

27 답 (1) $y=x\pm2\sqrt{2}$ (2) $y=-x\pm2$ (3) $y=2x\pm3\sqrt{5}$ (4) $y=-3x\pm10\sqrt{3}$ (5) $y=-x\pm6\sqrt{2}$ (6) $y=-2x\pm10$

풀이 (1) $y=x\pm2\sqrt{1^2+1}$이므로 $y=x\pm2\sqrt{2}$

다른 풀이 기울기가 1이므로 구하는 접선의 방정식을 $y=x+k$ (k는 상수)로 놓고 원의 방정식 $x^2+y^2=4$에 대입하면

$x^2+(x+k)^2=4$

$2x^2+2kx+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 원과 직선이 접해야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-4)=0$

$-k^2+8=0$ $\therefore k=\pm2\sqrt{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=x\pm2\sqrt{2}$

(2) $y=-x\pm\sqrt{2}\sqrt{(-1)^2+1}$이므로

$y=-x\pm2$

다른 풀이 기울기가 -1이므로 구하는 접선의 방정식을 $y=-x+k$ (k는 상수)로 놓으면 $x+y-k=0$과 같이 나타낼 수 있으므로 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 사이의 거리는

$\frac{|0+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-k|}{\sqrt{2}}$

이때 원과 직선이 접하므로 원의 중심과 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{2}$와 같다.

$\frac{|-k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$|-k|=2$ $\therefore k=\pm2$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=-x\pm2$

(3) $y=2x\pm3\sqrt{2^2+1}$이므로

$y=2x\pm3\sqrt{5}$

(4) $y=-3x\pm\sqrt{30}\sqrt{(-3)^2+1}$이므로

$y=-3x\pm10\sqrt{3}$

(5) $y=-x+6$에 평행하므로 기울기는 -1이다.

$y=-x\pm6\sqrt{(-1)^2+1}$이므로

$y=-x\pm6\sqrt{2}$

(6) $y=\frac{1}{2}x+2$에 수직이므로 기울기는 -2이다.

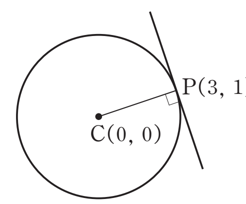
$y=-2x\pm2\sqrt{5}\sqrt{(-2)^2+1}$이므로

$y=-2x\pm10$

28 답 (1) $3x+y=10$ (2) $-x+2y=5\sqrt{2}$

풀이 (1) $3\times x+1\times y=10$이므로 $3x+y=10$

다른 풀이 다음 그림과 같이 원의 중심을 $\mathrm{C}(0, 0)$, 원 위의 점을 $\mathrm{P}(3, 1)$이라고 하자.



선분 CP의 기울기는

$\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{3}$

이고, 구하는 접선의 기울기는 선분 CP와 수직이므로 -3이다.

따라서 기울기가 -3이고 점 $(3, 1)$을 지나는 직선이므로

$y-1=-3(x-3)$

$\therefore y=-3x+10$

(2) $-\sqrt{2}\times x+2\sqrt{2}\times y=10$이므로

$-\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y=10$

$\therefore -x+2y=5\sqrt{2}$

29 답 (1) $-2x+3y=13$ (2) $x-2\sqrt{3}y=13$

풀이 (1) $-2\times x+3\times y=13$이므로

$-2x+3y=13$

(2) $1\times x+(-2\sqrt{3})\times y=13$이므로

$x-2\sqrt{3}y=13$

30 답 (1) $-4x-3y=25$ (2) $y=2$ (3) $5x-y=26$ (4) $-2x+y=15$

풀이 (1) $-4\times x+(-3)\times y=25$이므로

$-4x-3y=25$

(2) $0\times x+2\times y=4$이므로 $y=2$

(3) $5\times x+(-1)\times y=26$이므로

$5x-y=26$

(4) $-6\times x+3\times y=45$이므로

$-6x+3y=45$

$\therefore -2x+y=15$

31 답 (1) $2x+y=5$, $-2x+y=5$
(2) $-2x+\sqrt{2}y=6$, $-2x-\sqrt{2}y=6$
(3) $3x-y=10$, $-x-3y=10$
(4) $y=-1$, $3x+4y=5$

풀이 (1) 접점을 (x_1, y_1)로 놓으면 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=5$
이 접선이 점 $P(0, 5)$를 지나므로 $5y_1=5$에서
$y_1=1$
또, 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로
${x_1}^2+{y_1}^2=5$
$y_1=1$을 위의 식에 대입하면 $x_1^2+1=5$이므로
${x_1}^2=4$
$\therefore$ $x_1=2$ 또는 $x_1=-2$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$2x+y=5$ 또는 $\underline{-2x+y=5}$

다른 풀이 1 접선의 기울기를 m으로 놓으면 접선은 점 $P(0, 5)$를 지나므로 접선의 방정식은
$y-5=mx$
$mx-y+5=0$
이때 원 $x^2+y^2=5$와 직선 $mx-y+5=0$이 접하므로 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{5}$와 같아야 한다.
$\dfrac{|m\times0-0+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$
$5=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$
$25=5m^2+5$
$m^2=4$
$\therefore$ $m=2$ 또는 $m=-2$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$2x-y+5=0$ 또는 $2x+y-5=0$

다른 풀이 2 점 $P(0, 5)$를 지나는 접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은
$y-5=mx$
$y=mx+5$
이것을 $x^2+y^2=5$에 대입하여 정리하면
$(m^2+1)x^2+10mx+20=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$\dfrac{D}{4}=(5m)^2-20(m^2+1)=0$
$5m^2-20=0$
$m^2=4$
$\therefore$ $m=2$ 또는 $m=-2$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$2x-y+5=0$ 또는 $2x+y-5=0$

(2) 접점을 (x_1, y_1)로 놓으면 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=6$
이 접선이 점 $P(-3, 0)$을 지나므로
$-3x_1=6$에서 $x_1=-2$
또, 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=6$ 위의 점이므로
${x_1}^2+{y_1}^2=6$
$x_1=-2$를 위의 식에 대입하면 $4+{y_1}^2=6$이므로
${y_1}^2=2$
$\therefore$ $y_1=\sqrt{2}$ 또는 $y_1=-\sqrt{2}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$-2x+\sqrt{2}y=6$ 또는 $-2x-\sqrt{2}y=6$

(3) 접점을 (x_1, y_1)로 놓으면 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=10$
이 접선이 점 $P(2, -4)$를 지나므로
$2x_1-4y_1=10$에서
$x_1-2y_1=5$ …… ㉠
또, 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점이므로
${x_1}^2+{y_1}^2=10$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$x_1=3$, $y_1=-1$ 또는 $x_1=-1$, $y_1=-3$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$3x-y=10$ 또는 $-x-3y=10$

(4) 접점을 (x_1, y_1)로 놓으면 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=1$
이 접선이 점 $P(3, -1)$을 지나므로
$3x_1-y_1=1$ …… ㉠
또, 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로
${x_1}^2+{y_1}^2=1$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$x_1=0$, $y_1=-1$ 또는 $x_1=\dfrac{3}{5}$, $y_1=\dfrac{4}{5}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$-y=1$ 또는 $\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y=1$
$\therefore$ $y=-1$ 또는 $3x+4y=5$

01 답 중심의 좌표: $(5,\ 7)$, 반지름의 길이: $\sqrt{10}$

02 답 $(x-2)^2+(y-5)^2=5$

풀이 원의 중심의 좌표는 선분 AB의 중점이므로

$\left(\frac{1+3}{2},\ \frac{7+3}{2}\right)$에서 $(2,\ 5)$이다.

두 점 A, B는 원의 지름의 양 끝 점이므로 구하는 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}$이다.

$\frac{1}{2}\sqrt{(3-1)^2+(3-7)^2}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}=\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-5)^2=5$

03 답 $4\sqrt{5}$

풀이 $x^2+y^2-6x+12y=0$에서

$(x^2-6x+9)+(y^2+12y+36)-45=0$

$(x-3)^2+(y+6)^2=45$

이므로 원 $x^2+y^2-6x+12y=0$의 반지름의 길이는 $3\sqrt{5}$이다.

$x^2+y^2-2y-4=0$에서

$x^2+(y^2-2y+1)-5=0$

$x^2+(y-1)^2=5$

이므로 원 $x^2+y^2-2y-4=0$의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은

$3\sqrt{5}+\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

04 답 7

풀이 $x^2+y^2+8x-2y+k^2-4k+5=0$에서

$(x^2+8x+16)+(y^2-2y+1)=-k^2+4k+12$

$\therefore (x+4)^2+(y-1)^2=-k^2+4k+12$

이 방정식이 원을 나타내기 위해서는

$-k^2+4k+12>0$이어야 하므로

$k^2-4k-12<0$

$(k+2)(k-6)<0$

따라서 $-2<k<6$이므로 정수 k는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$의 7개이다.

05 답 2

풀이 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$은 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$c=0$

$x^2+y^2+ax+by=0$이 두 점 $(7,\ -1)$, $(6,\ -8)$을 지나므로

$7a-b=-50$ …… ㉠

$6a-8b=-100 \quad \therefore 3a-4b=-50$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-6,\ b=8$

$\therefore a+b+c=-6+8+0=2$

06 답 $-2,\ 3$

풀이 반지름의 길이는 $|(\text{중심의 } y\text{좌표})|$이므로

$|k|=\sqrt{2k^2-k-6}$

$k^2=2k^2-k-6$

$k^2-k-6=0$

$(k+2)(k-3)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=3$

07 답 $4\sqrt{2}$

풀이 점 $(-1,\ 2)$를 지나고 x축, y축에 동시에 접하므로 중심이 제2사분면에 있다.

원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은

$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

이 원이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$

$(r^2-2r+1)+(r^2-4r+4)=r^2$

$r^2-6r+5=0$

$(r-1)(r-5)=0$

따라서 $r=1$ 또는 $r=5$이므로 두 원의 중심은 각각 $(-1,\ 1)$, $(-5,\ 5)$이고 두 원의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{\{-5-(-1)\}^2+(5-1)^2}=4\sqrt{2}$

08 답 $(x+7)^2+(y+2)^2=25$

풀이 점 $Q(x,\ y)$로 놓으면 $x=a-5,\ y=b-6$이므로

$a=x+5,\ b=y+6$

이때 점 P는 원 $(x+2)^2+(y-4)^2=25$ 위의 점이므로

$(a+2)^2+(b-4)^2=25$

위의 식에 $a=x+5,\ b=y+6$을 대입하면 점 Q가 나타내는 도형의 방정식은

$\{(x+5)+2\}^2+\{(y+6)-4\}^2=25$

$\therefore (x+7)^2+(y+2)^2=25$

09 답 $-7<k<-2$ 또는 $2<k<3$

풀이 $x^2+y^2-6x-2ky+13=0$에서

$(x-3)^2+(y-k)^2=k^2-4$

원 $(x-3)^2+(y-k)^2=k^2-4$의 반지름의 길이는 $\sqrt{k^2-4}$이고 원의 중심 $(3,\ k)$와 직선 $x+2y-4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3+2\times k-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2k-1|}{\sqrt{5}}$

원과 직선이 만나지 않으려면 $\frac{|2k-1|}{\sqrt{5}}>\sqrt{k^2-4}$이어야 하므로

$|2k-1|>\sqrt{5}\sqrt{k^2-4}$

$4k^2-4k+1>5k^2-20,\ k^2+4k-21<0$

$(k+7)(k-3)<0$

$\therefore -7<k<3$ …… ㉠

이때 $\sqrt{k^2-4}>0$이어야 하므로

$k^2-4>0$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-7<k<-2$ 또는 $2<k<3$

10 답 -4

풀이 원 $(x+2)^2+(y-6)^2=9$의 넓이를 이등분하는 직선은 원의 중심 $(-2,\ 6)$을 지나므로 직선 $3x+ay+b=0$은 두 점 $(-2,\ 6)$, $(-4,\ 9)$를 지난다.

$-6+6a+b=0$ ⋯⋯ ㉠

$-12+9a+b=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-6$

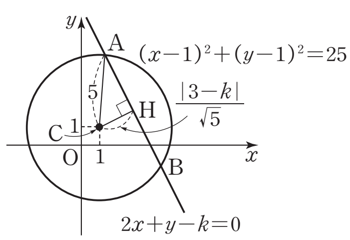
$\therefore a+b=2+(-6)=-4$

11 답 $-2,\ 8$

풀이 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=25$의 중심 C에서 직선 $2x+y-k=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 선분 CH의 길이는 원의 중심 $C(1,\ 1)$과 직선 $2x+y-k=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{CH}=\dfrac{|2\times1+1-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|3-k|}{\sqrt{5}}$

이때 원의 반지름의 길이가 5이므로 다음 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 각각 A, B라고 하면 $\overline{CA}=5$



삼각형 CHA에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AH}=\sqrt{5^2-\left(\dfrac{|3-k|}{\sqrt{5}}\right)^2}$

이고 현의 길이가 $4\sqrt{5}$이므로 $\overline{AB}=2\overline{AH}=4\sqrt{5}$, 즉

$2\sqrt{5^2-\left(\dfrac{|3-k|}{\sqrt{5}}\right)^2}=4\sqrt{5}$

$\sqrt{5^2-\left(\dfrac{|3-k|}{\sqrt{5}}\right)^2}=2\sqrt{5}$

$25-\dfrac{(k-3)^2}{5}=20$

$(k-3)^2=25$

$k-3=-5$ 또는 $k-3=5$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=8$

12 답 최댓값: 10, 최솟값: 0

풀이 원 $(x+6)^2+(y-2)^2=25$의 중심 $(-6,\ 2)$와 직선 $3x+4y-15=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3\times(-6)+4\times2-15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|-25|}{5}=5$

이고 원 $(x+6)^2+(y-2)^2=25$의 반지름의 길이는 5이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의

최댓값은 $5+5=10$, 최솟값은 $5-5=0$이다.

다른 풀이 원 $(x+6)^2+(y-2)^2=25$의 중심 $(-6,\ 2)$와 직선 $3x+4y-15=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3\times(-6)+4\times2-15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|-25|}{5}=5$

이때 원 $(x+6)^2+(y-2)^2=25$의 반지름의 길이는 5이므로 직선 $3x+4y-15=0$은 원 $(x+6)^2+(y-2)^2=25$에 접한다.

따라서 원 위의 점과 직선 사이의 거리의

최댓값은 $2\times5=10$이고 최솟값은 원 위의 점과 접점이 일치하는 경우이므로 0이다.

13 답 최댓값: $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$, 최솟값: $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

풀이 원 $x^2+(y-4)^2=12$의 중심 $(0,\ 4)$와 점 $(-3,\ 1)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-3-0)^2+(1-4)^2}=3\sqrt{2}$

이고 원 $x^2+(y-4)^2=12$의 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$이므로 원 밖의 점 $(-3,\ 1)$에서 원에 이르는 거리의

최댓값은 $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$, 최솟값은 $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$이다.

14 답 $y=2x\pm5$

풀이 직선 $x+2y+3=0$, 즉 $y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$에 수직이므로

기울기는 2이다.

따라서 $y=2x\pm\sqrt{5}\sqrt{2^2+1}$이므로

$y=2x\pm5$

15 답 $y=-\dfrac{2}{3}x+\sqrt{13}$

풀이 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(-3,\ 2)$에서 접선의 방정식은

$-3x+2y=13$, 즉 $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{13}{2}$

기울기가 $-\dfrac{2}{3}$이고 원 $x^2+y^2=9$에 접하는 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{2}{3}x\pm3\sqrt{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+1}$이므로

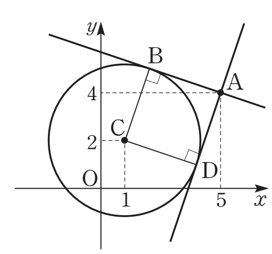
$y=-\dfrac{2}{3}x\pm\sqrt{13}$

따라서 y절편이 양수인 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{2}{3}x+\sqrt{13}$

16 답 $\sqrt{10}$

풀이 다음 그림과 같이 원의 중심을 $C(1,\ 2)$, 두 접점을 B, D라고 하자.



원의 성질에 의하여 $\overline{CB}=\overline{CD}=r$이고

$\angle CBA=\angle CDA=90^\circ$이므로 사각형 ABCD는 정사각형이다.

이때 선분 CA의 길이는 한 변의 길이가 r인 정사각형 ABCD의 대각선의 길이인 $\sqrt{2}r$와 같다.

$\overline{CA}=\sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

이므로

$\sqrt{2}r=2\sqrt{5}$ $\quad\therefore r=\sqrt{10}$

Ⅰ-4 | 도형의 이동 056-065쪽

01 답 (1) $(3,\ 4)$ (2) $(-2,\ 9)$ (3) $(1,\ 1)$
(4) $(0,\ -7)$ (5) $(5,\ 0)$

풀이 (1) $(2+1,\ 1+3)$이므로 $(3,\ 4)$
(2) $(-3+1,\ 6+3)$이므로 $(-2,\ 9)$
(3) $(0+1,\ -2+3)$이므로 $(1,\ 1)$
(4) $(-1+1,\ -10+3)$이므로 $(0,\ -7)$
(5) $(4+1,\ -3+3)$이므로 $(5,\ 0)$

02 답 (1) $(3,\ 10)$ (2) $(-5,\ 8)$ (3) $(-4,\ -3)$
(4) $(5,\ 4)$ (5) $(-2,\ 2)$

풀이 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x-3,\ y+4)$는 점 $(x,\ y)$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
(1) $(6-3,\ 6+4)$이므로 $(3,\ 10)$
(2) $(-2-3,\ 4+4)$이므로 $(-5,\ 8)$
(3) $(-1-3,\ -7+4)$이므로 $(-4,\ -3)$
(4) $(8-3,\ 0+4)$이므로 $(5,\ 4)$
(5) $(1-3,\ -2+4)$이므로 $(-2,\ 2)$

03 답 (1) $a=4,\ b=-1$ (2) $a=-4,\ b=5$
(3) $a=7,\ b=3$ (4) $a=-1,\ b=2$
(5) $a=-5,\ b=-8$

풀이 (1) $(1,\ -2) \longrightarrow (1+a,\ -2+b)$이므로
$1+a=5,\ -2+b=-3$에서
$a=4,\ b=-1$
(2) $(-3,\ 5) \longrightarrow (-3+a,\ 5+b)$이므로
$-3+a=-7,\ 5+b=10$에서
$a=-4,\ b=5$
(3) $(-4,\ 1) \longrightarrow (-4+a,\ 1+b)$이므로
$-4+a=3,\ 1+b=4$에서
$a=7,\ b=3$
(4) $(3,\ 3) \longrightarrow (3+a,\ 3+b)$이므로
$3+a=2,\ 3+b=5$에서
$a=-1,\ b=2$
(5) $(2,\ 0) \longrightarrow (2+a,\ 0+b)$이므로
$2+a=-3,\ 0+b=-8$에서
$a=-5,\ b=-8$

04 답 (1) $(-9,\ 9)$ (2) $(5,\ 3)$ (3) $(-1,\ 13)$
(4) $(0,\ -2)$ (5) $(3,\ -8)$

풀이 점 $(-1,\ 4)$를 점 $(3,\ -3)$으로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 $3-(-1)=4$만큼, y축의 방향으로 $-3-4=-7$만큼 평행이동한 것이므로 $(x,\ y) \longrightarrow (x+4,\ y-7)$이다.
(1) 구하는 점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면
점 $(a,\ b)$가 점 $(-5,\ 2)$로 옮겨진다.
즉, $(a,\ b) \longrightarrow (a+4,\ b-7)$에서
$a+4=-5,\ b-7=2$이므로 $a=-9,\ b=9$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(-9,\ 9)$이다.
(2) 구하는 점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면
점 $(a,\ b)$가 점 $(9,\ -4)$로 옮겨진다.
즉, $(a,\ b) \longrightarrow (a+4,\ b-7)$에서
$a+4=9,\ b-7=-4$이므로
$a=5,\ b=3$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(5,\ 3)$이다.
(3) 구하는 점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면
점 $(a,\ b)$가 점 $(3,\ 6)$으로 옮겨진다.
즉, $(a,\ b) \longrightarrow (a+4,\ b-7)$에서
$a+4=3,\ b-7=6$이므로
$a=-1,\ b=13$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(-1,\ 13)$이다.
(4) 구하는 점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면
점 $(a,\ b)$가 점 $(4,\ -9)$로 옮겨진다.
즉, $(a,\ b) \longrightarrow (a+4,\ b-7)$에서
$a+4=4,\ b-7=-9$이므로
$a=0,\ b=-2$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(0,\ -2)$이다.
(5) 구하는 점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면
점 $(a,\ b)$가 점 $(7,\ -15)$로 옮겨진다.
즉, $(a,\ b) \longrightarrow (a+4,\ b-7)$에서
$a+4=7,\ b-7=-15$이므로
$a=3,\ b=-8$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(3,\ -8)$이다.

05 답 (1) $x-y+6=0$ (2) $2x+4y-21=0$
(3) $-3x+5y-6=0$ (4) $y=x^2+2x+3$
(5) $y=2x^2+4x+1$ (6) $y=-x^2-3$
(7) $(x-1)^2+(y-2)^2=16$ (8) $(x+4)^2+y^2=4$

풀이 (1) $x-y+3=0$에 x 대신 $x+1$, y 대신 $y-2$를 대입하면
$(x+1)-(y-2)+3=0$
$\therefore\ x-y+6=0$
(2) $2x+4y-15=0$에 x 대신 $x+1$, y 대신 $y-2$를 대입하면
$2(x+1)+4(y-2)-15=0$
$\therefore\ 2x+4y-21=0$
(3) $-3x+5y+7=0$에 x 대신 $x+1$, y 대신 $y-2$를 대입하면
$-3(x+1)+5(y-2)+7=0$
$\therefore\ -3x+5y-6=0$
(4) $y=x^2$에 x 대신 $x+1$, y 대신 $y-2$를 대입하면
$y-2=(x+1)^2$
$\therefore\ y=x^2+2x+3$
(5) $y=2x^2-3$에 x 대신 $x+1$, y 대신 $y-2$를 대입하면
$y-2=2(x+1)^2-3$
$\therefore\ y=2x^2+4x+1$
(6) $y=-x^2+2x-6$에 x 대신 $x+1$, y 대신 $y-2$를 대입하면
$y-2=-(x+1)^2+2(x+1)-6$
$\therefore\ y=-x^2-3$

(7) $(x-2)^2+y^2=16$에 x 대신 $x+1$, y 대신 $y-2$를 대입하면
$\{(x+1)-2\}^2+(y-2)^2=16$
$\therefore (x-1)^2+(y-2)^2=16$

(8) $(x+3)^2+(y+2)^2=4$에 x 대신 $x+1$, y 대신 $y-2$를 대입하면
$\{(x+1)+3\}^2+\{(y-2)+2\}^2=4$
$\therefore (x+4)^2+y^2=4$

06 답 (1) $x+2y+12=0$
(2) $2x-6y-23=0$
(3) $y=-x^2+4x-4$
(4) $y=3x^2-17x+24$
(5) $(x-2)^2+(y+6)^2=5$
(6) $(x-5)^2+(y+8)^2=10$

풀이 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+2, y-2)$는 점 (x, y)를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다. 따라서 도형을 평행이동할 때는 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+2$를 대입해야 한다.

(1) $x+2y+10=0$에 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+2$를 대입하면
$(x-2)+2(y+2)+10=0$
$\therefore \underline{x+2y+12=0}$

(2) $2x-6y-7=0$에 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+2$를 대입하면
$2(x-2)-6(y+2)-7=0$
$\therefore 2x-6y-23=0$

(3) $y=-x^2+2$에 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+2$를 대입하면
$y+2=-(x-2)^2+2$
$\therefore y=-x^2+4x-4$

(4) $y=3x^2-5x+4$에 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+2$를 대입하면
$y+2=3(x-2)^2-5(x-2)+4$
$\therefore y=3x^2-17x+24$

(5) $x^2+(y+4)^2=5$에 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+2$를 대입하면
$(x-2)^2+\{(y+2)+4\}^2=5$
$\therefore (x-2)^2+(y+6)^2=5$

(6) $(x-3)^2+(y+6)^2=10$에 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+2$를 대입하면
$\{(x-2)-3\}^2+\{(y+2)+6\}^2=10$
$\therefore (x-5)^2+(y+8)^2=10$

07 답 (1) $-3x+y+20=0$
(2) $4x-5y-24=0$
(3) $y=5x^2-51x+130$
(4) $y=-2x^2+23x-67$
(5) $x^2+(y+6)^2=25$
(6) $(x-15)^2+(y+7)^2=12$

풀이 도형 $f(x, y)=0$을 도형 $f(x-5, y+1)=0$으로 옮기는 평행이동은 도형을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -1만큼 옮긴 것이다.

(1) $-3x+y+4=0$에 x 대신 $x-5$, y 대신 $y+1$을 대입하면
$-3(x-5)+(y+1)+4=0$
$\therefore \underline{-3x+y+20=0}$

(2) $4x-5y+1=0$에 x 대신 $x-5$, y 대신 $y+1$을 대입하면
$4(x-5)-5(y+1)+1=0$
$\therefore 4x-5y-24=0$

(3) $y=5x^2-x+1$에 x 대신 $x-5$, y 대신 $y+1$을 대입하면
$y+1=5(x-5)^2-(x-5)+1$
$\therefore y=5x^2-51x+130$

(4) $y=-2x^2+3x-1$에 x 대신 $x-5$, y 대신 $y+1$을 대입하면
$y+1=-2(x-5)^2+3(x-5)-1$
$\therefore y=-2x^2+23x-67$

(5) $(x+5)^2+(y+5)^2=25$에 x 대신 $x-5$, y 대신 $y+1$을 대입하면
$\{(x-5)+5\}^2+\{(y+1)+5\}^2=25$
$\therefore x^2+(y+6)^2=25$

(6) $(x-10)^2+(y+6)^2=12$에 x 대신 $x-5$, y 대신 $y+1$을 대입하면
$\{(x-5)-10\}^2+\{(y+1)+6\}^2=12$
$\therefore (x-15)^2+(y+7)^2=12$

08 답 (1) -8 (2) 9

풀이 (1) $x+2y-1=0$에 x 대신 $x+3$, y 대신 $y-2$를 대입하면
$(x+3)+2(y-2)-1=0$
$\therefore x+2y-2=0$
이 직선이 점 $(k, 5)$를 지나므로
$k+10-2=0$
$\therefore k=\underline{-8}$

(2) $-2x+5y+k=0$에 x 대신 $x+3$, y 대신 $y-2$를 대입하면
$-2(x+3)+5(y-2)+k=0$
$\therefore -2x+5y+k-16=0$
이 직선이 점 $(-6, -1)$을 지나므로
$12-5+k-16=0$
$\therefore k=9$

09 답 (1) -11 (2) 2

풀이 (1) $y=x^2+4x-3$에 x 대신 $x+1$, y 대신 $y+4$를 대입하면
$y+4=(x+1)^2+4(x+1)-3$
$\therefore y=x^2+6x-2$
이 그래프가 점 $(-3, k)$를 지나므로
$k=9-18-2=-11$

(2) $y=-3x^2+kx-2$에 x 대신 $x+1$, y 대신 $y+4$를 대입하면
$y+4=-3(x+1)^2+k(x+1)-2$
$\therefore y=-3x^2+(k-6)x+k-9$
이 그래프가 점 $(0, -7)$을 지나므로
$-7=k-9$
$\therefore k=2$

10 답 (1) $a=1$, $b=-2$ (2) $a=-5$, $b=9$
(3) $a=5$, $b=-4$ (4) $a=-2$, $b=-2$

풀이 평행이동 $f(x, y)=0 \longrightarrow f(x-a, y-b)=0$은 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.
따라서 점의 평행이동으로 나타내면
$(x, y) \longrightarrow (x+a, y+b)$와 같다.

(1) 두 원의 반지름의 길이가 같고 원 C의 중심 $(0, 0)$이 원 C'의 중심 $(1, -2)$로 옮겨진다.
따라서 $(0, 0) \longrightarrow (0+a, 0+b)$이므로
$a=\underline{1}$, $b=\underline{-2}$

(2) 두 원의 반지름의 길이가 같고 원 C의 중심 $(3, -5)$가 원 C'의 중심 $(-2, 4)$로 옮겨진다.
따라서 $(3, -5) \longrightarrow (3+a, -5+b)$이므로
$3+a=-2$, $-5+b=4$에서
$a=-5$, $b=9$

(3) $x^2+y^2-2x+6y-15=0$에서
$(x-1)^2+(y+3)^2=25$
두 원의 반지름의 길이가 같고 원 C의 중심 $(-4, 1)$이 원 C'의 중심 $(1, -3)$으로 옮겨진다.
따라서 $(-4, 1) \longrightarrow (-4+a, 1+b)$이므로
$-4+a=1$, $1+b=-3$에서
$a=5$, $b=-4$

(4) $x^2+y^2-4x-10y+28=0$에서
$(x-2)^2+(y-5)^2=1$
$x^2+y^2-6y+8=0$에서
$x^2+(y-3)^2=1$
두 원의 반지름의 길이가 같고 원 C의 중심 $(2, 5)$가 원 C'의 중심 $(0, 3)$으로 옮겨진다.
따라서 $(2, 5) \longrightarrow (2+a, 5+b)$이므로
$2+a=0$, $5+b=3$에서
$a=-2$, $b=-2$

11 답 (1) $(4, -2)$ (2) $(-4, 2)$
(3) $(-4, -2)$ (4) $(2, 4)$

12 답 (1) $(-1, -5)$ (2) $(1, 5)$
(3) $(1, -5)$ (4) $(5, -1)$

13 답 (1) $(6, 7)$ (2) $(-6, -7)$
(3) $(-6, 7)$ (4) $(-7, 6)$

14 답 (1) $(-8, 3)$ (2) $(8, -3)$
(3) $(8, 3)$ (4) $(-3, -8)$

15 답 (1) $(-4, 3)$ (2) $(8, 0)$ (3) $(1, -2)$

풀이 (1) 점 $(3, 4)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(3, -4)$이고, 이를 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(\underline{-4}, \underline{3})$이다.

(2) 점 $(0, -8)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(0, 8)$이고, 이를 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(8, 0)$이다.

(3) 점 $(-2, -1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-2, 1)$이고, 이를 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(1, -2)$이다.

16 답 (1) $(5, -6)$ (2) $(2, 10)$ (3) $(-3, -7)$

풀이 (1) 점 $(5, 6)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-5, 6)$이고, 이를 다시 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(5, -6)$이다.

(2) 점 $(2, -10)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-2, -10)$이고, 이를 다시 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(2, 10)$이다.

(3) 점 $(-3, 7)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(3, 7)$이고, 이를 다시 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-3, -7)$이다.

참고 점 (x, y)를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-x, y)$이고, 이를 다시 원점에 대하여 대칭이동한 좌표는 $(x, -y)$이다.
따라서 구하는 점은 점 (x, y)를 x축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

17 답 (1) $(-12, -4)$ (2) $(-6, 1)$ (3) $(-1, -7)$

풀이 (1) 점 $(7, -2)$를 평행이동한 점의 좌표는 $(7+5, -2-2)$이므로 $(12, -4)$이고, 이를 다시 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(\underline{-12}, \underline{-4})$이다.

(2) 점 $(1, 3)$을 평행이동한 점의 좌표는 $(1+5, 3-2)$이므로 $(6, 1)$이고, 이를 다시 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-6, 1)$이다.

(3) 점 $(-4, -5)$를 평행이동한 점의 좌표는 $(-4+5, -5-2)$이므로 $(1, -7)$이고, 이를 다시 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-1, -7)$이다.

18 답 (1) $(-7, -3)$ (2) $(-5, -14)$ (3) $(4, -6)$

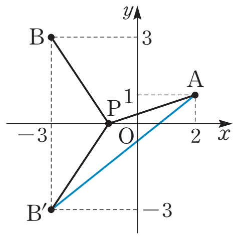
풀이 (1) 점 $(3, -6)$을 평행이동한 점의 좌표는 $(3-6, -6-1)$이므로 $(-3, -7)$이고, 이를 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-7, -3)$이다.

(2) 점 $(-8, -4)$를 평행이동한 점의 좌표는 $(-8-6, -4-1)$이므로 $(-14, -5)$이고, 이를 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-5, -14)$이다.

(3) 점 $(0, 5)$를 평행이동한 점의 좌표는 $(0-6, 5-1)$이므로 $(-6, 4)$이고, 이를 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(4, -6)$이다.

19 답 (1) $\sqrt{41}$ (2) 10 (3) $5\sqrt{5}$ (4) $2\sqrt{13}$

풀이 (1) 점 $\mathrm{B}(-3, 3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{B'}$이라고 하면 점 $\mathrm{B'}$의 좌표는 $(-3, -3)$이다.



이때 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$

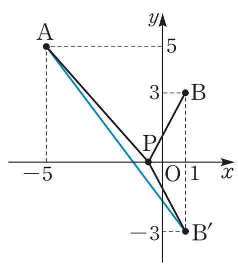
$\geq\overline{\mathrm{AB'}}$

에서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AB'}}$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{(-3-2)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{41}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\sqrt{41}$이다.

(2) 점 $\mathrm{B}(1,\ 3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{B'}$이라고 하면 점 $\mathrm{B'}$의 좌표는 $(1,\ -3)$이다.



이때 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$

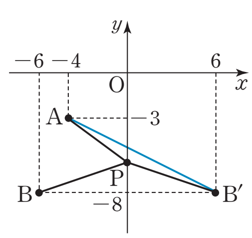
$\geq\overline{\mathrm{AB'}}$

에서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AB'}}$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{\{1-(-5)\}^2+(-3-5)^2}=10$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 10이다.

(3) 점 $\mathrm{B}(-6,\ -8)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{B'}$이라고 하면 점 $\mathrm{B'}$의 좌표는 $(6,\ -8)$이다.



이때 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$

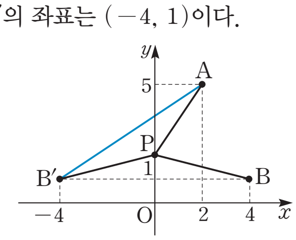
$\geq\overline{\mathrm{AB'}}$

에서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AB'}}$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{\{6-(-4)\}^2+\{-8-(-3)\}^2}=5\sqrt{5}$

이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $5\sqrt{5}$이다.

(4) 점 $\mathrm{B}(4,\ 1)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{B'}$이라고 하면 점 $\mathrm{B'}$의 좌표는 $(-4,\ 1)$이다.



이때 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$

$\geq\overline{\mathrm{AB'}}$

에서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AB'}}$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{(-4-2)^2+(1-5)^2}=2\sqrt{13}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $2\sqrt{13}$이다.

20 답 (1) $2x+3y+2=0$

(2) $-2x-3y+2=0$

(3) $-2x+3y+2=0$

(4) $-3x+2y+2=0$

풀이 (1) $2x-3y+2=0$에 y 대신 $-y$를 대입하면

$2x-3\times(-y)+2=0$

$\therefore\ 2x+3y+2=0$

(2) $2x-3y+2=0$에 x 대신 $-x$를 대입하면

$2\times(-x)-3y+2=0$

$\therefore\ -2x-3y+2=0$

(3) $2x-3y+2=0$에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$2\times(-x)-3\times(-y)+2=0$

$\therefore\ -2x+3y+2=0$

(4) $2x-3y+2=0$에 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$2y-3x+2=0$

$\therefore\ -3x+2y+2=0$

21 답 (1) $(x-2)^2+(y-5)^2=17$

(2) $(x+2)^2+(y+5)^2=17$

(3) $(x+2)^2+(y-5)^2=17$

(4) $(x+5)^2+(y-2)^2=17$

풀이 (1) $(x-2)^2+(y+5)^2=17$에 y 대신 $-y$를 대입하면

$(x-2)^2+(-y+5)^2=17$

$\therefore\ (x-2)^2+(y-5)^2=17$

(2) $(x-2)^2+(y+5)^2=17$에 x 대신 $-x$를 대입하면

$(-x-2)^2+(y+5)^2=17$

$\therefore\ (x+2)^2+(y+5)^2=17$

(3) $(x-2)^2+(y+5)^2=17$에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$(-x-2)^2+(-y+5)^2=17$

$\therefore\ (x+2)^2+(y-5)^2=17$

(4) $(x-2)^2+(y+5)^2=17$에 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$(y-2)^2+(x+5)^2=17$

$\therefore\ (x+5)^2+(y-2)^2=17$

22 답 (1) $x-2y+6=0$

(2) $y=x^2-6x-2$

(3) $(x-6)^2+(y-3)^2=16$

풀이 (1) $-x-2y+6=0$에 y 대신 $-y$를 대입하면

$-x-2\times(-y)+6=0$

$\therefore -x+2y+6=0$

위의 식에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$-(-x)+2\times(-y)+6=0$

$\therefore \underline{x-2y+6=0}$

(2) $y=x^2+6x-2$에 y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=x^2+6x-2$

$\therefore y=-x^2-6x+2$

위의 식에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=-(-x)^2-6\times(-x)+2$

$\therefore y=x^2-6x-2$

(3) $(x+6)^2+(y-3)^2=16$에 y 대신 $-y$를 대입하면

$(x+6)^2+(-y-3)^2=16$

$\therefore (x+6)^2+(y+3)^2=16$

위의 식에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$(-x+6)^2+(-y+3)^2=16$

$\therefore (x-6)^2+(y-3)^2=16$

참고 도형 $f(x, y)=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x, -y)=0$이고, 이를 다시 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x, y)=0$이다.
따라서 구하는 도형은 도형 $f(x, y)=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

23 답 (1) $-6x-3y-7=0$
(2) $-x-2y+3=0$
(3) $(x+3)^2+(y-6)^2=1$

풀이 (1) $3x+6y-7=0$에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$3\times(-x)+6\times(-y)-7=0$

$\therefore -3x-6y-7=0$

위의 식에 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$-3y-6x-7=0$

$\therefore -6x-3y-7=0$

(2) $2x+y+3=0$에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$2\times(-x)-y+3=0$

$\therefore -2x-y+3=0$

위의 식에 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$-2y-x+3=0$

$\therefore -x-2y+3=0$

(3) $(x+6)^2+(y-3)^2=1$에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$(-x+6)^2+(-y-3)^2=1$

$\therefore (x-6)^2+(y+3)^2=1$

위의 식에 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$(y-6)^2+(x+3)^2=1$

$\therefore (x+3)^2+(y-6)^2=1$

24 답 (1) $x+4y+16=0$
(2) $y=-x^2-6x-15$
(3) $(x+9)^2+(y+16)^2=50$

풀이 (1) $-x+4y-10=0$에 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+6$을 대입하면

$-(x-2)+4(y+6)-10=0$

$\therefore -x+4y+16=0$

위의 식에 x 대신 $-x$를 대입하면

$-(-x)+4y+16=0$

$\therefore \underline{x+4y+16}=0$

(2) $y=-x^2+2x-1$에 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+6$을 대입하면

$y+6=-(x-2)^2+2(x-2)-1$

$\therefore y=-x^2+6x-15$

위의 식에 x 대신 $-x$를 대입하면

$y=-(-x)^2+6\times(-x)-15$

$\therefore y=-x^2-6x-15$

(3) $(x-7)^2+(y+10)^2=50$에 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+6$을 대입하면

$\{(x-2)-7\}^2+\{(y+6)+10\}^2=50$

$\therefore (x-9)^2+(y+16)^2=50$

위의 식에 x 대신 $-x$를 대입하면

$(-x-9)^2+(y+16)^2=50$

$\therefore (x+9)^2+(y+16)^2=50$

25 답 (1) $5x-2y-22=0$
(2) $(x-1)^2+(y+1)^2=15$
(3) $(x-5)^2+(y-1)^2=4$

풀이 (1) $-2x+5y=0$에 x 대신 $x+1$, y 대신 $y-4$를 대입하면

$-2(x+1)+5(y-4)=0$

$\therefore -2x+5y-22=0$

위의 식에 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$-2y+5x-22=0$

$\therefore 5x-2y-22=0$

(2) $x^2+(y+3)^2=15$에 x 대신 $x+1$, y 대신 $y-4$를 대입하면

$(x+1)^2+\{(y-4)+3\}^2=15$

$\therefore (x+1)^2+(y-1)^2=15$

위의 식에 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$(y+1)^2+(x-1)^2=15$

$\therefore (x-1)^2+(y+1)^2=15$

(3) $(x-2)^2+(y-1)^2=4$에 x 대신 $x+1$, y 대신 $y-4$를 대입하면

$\{(x+1)-2\}^2+\{(y-4)-1\}^2=4$

$\therefore (x-1)^2+(y-5)^2=4$

위의 식에 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$(y-1)^2+(x-5)^2=4$

$\therefore (x-5)^2+(y-1)^2=4$

01 답 $(5,\ -3)$

풀이 $(-2+7,\ 6-9)$이므로 $(5,\ -3)$이다.

02 답 $y=5x+21$

풀이 점 $(0,\ -3)$을 점 $(1,\ 2)$로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 $1-0=1$만큼, y축의 방향으로 $2-(-3)=5$만큼 평행이동한 것이다.
점 $A(-4,\ 1)$을 평행이동하면 $(-4+1,\ 1+5)$이므로 평행이동한 점 B의 좌표는 $(-3,\ 6)$이다.
따라서 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{6-1}{-3-(-4)}\{x-(-4)\}$$

$y=5(x+4)+1$

$\therefore\ y=5x+21$

03 답 -2

풀이 $y=3x-5$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $-2a$만큼 평행이동한 것이므로 $y=3x-5$에 x 대신 $x-a$, y 대신 $y+2a$를 대입하면

$y+2a=3(x-a)-5$

$\therefore\ y=3x-5a-5$

이 직선의 방정식이 $y=3x+5$와 같으므로 $-5a-5=5$에서

$a=-2$

04 답 $(x+1)^2+(y+1)^2=13$

풀이 $(x-1)^2+(y+6)^2=13$에 x 대신 $x+2$, y 대신 $y-5$를 대입하면

$\{(x+2)-1\}^2+\{(y-5)+6\}^2=13$

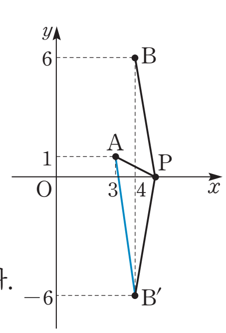
$\therefore\ (x+1)^2+(y+1)^2=13$

05 답 1

풀이 점 $(a,\ b)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a,\ b)$이고, 이를 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(b,\ -a)$이다.
따라서 $b=-3$, $-a=-4$에서 $a=4$, $b=-3$이므로

$a+b=4+(-3)=1$

06 답 $5\sqrt{2}$



풀이 점 $B(4,\ 6)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라고 하면 점 B′의 좌표는 $(4,\ -6)$이다.
이때 $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$

$\geq\overline{AB'}$

에서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\overline{AB'}$이다.
따라서

$\overline{AB'}=\sqrt{(4-3)^2+(-6-1)^2}=5\sqrt{2}$

이므로 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $5\sqrt{2}$이다.

07 답 0

풀이 $ax+(b+3)y=1$에 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$ay+(b+3)x=1$

$\therefore\ (b+3)x+ay=1$

위의 식이 $(a-2)x-(b+5)y=1$과 같으므로

$b+3=a-2$, $a=-(b+5)$

두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-5$이므로

$ab=0$

08 답 2

풀이 $2x-3y+7=0$에 x 대신 $-x$를 대입하면

$2\times(-x)-3y+7=0$

$\therefore\ -2x-3y+7=0$

위의 식에 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$-2y-3x+7=0$

$\therefore\ -3x-2y+7=0$

이때 직선 $-3x-2y+7=0$이 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=1$의 넓이를 이등분하므로 직선 $-3x-2y+7=0$은 원의 중심 $(1,\ a)$를 지난다.
따라서 $-3-2a+7=0$에서

$a=2$

Ⅱ
집합과 명제

Ⅱ-1 | 집합 070-091쪽

01 답 (1) ◯ (2) × (3) ◯ (4) × (5) × (6) ◯ (7) × (8) ◯ (9) ◯ (10) ◯

풀이 (1) '10보다 작은 짝수의 모임'은 그 대상을 분명히 정할 수 있으므로 집합이다. 이 집합의 원소는 2, 4, 6, 8이다.

(2) '밝은 색의 모임'은 '밝다'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

(3) '우리나라 광역시의 모임'은 그 대상을 분명히 정할 수 있으므로 집합이다. 이 집합의 원소는 부산, 대구, 인천, 광주, 대전, 울산이다.

(4) '축구를 잘하는 학생의 모임'은 '잘하다'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

(5) '작은 소수의 모임'은 '작다'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

(6) '$x^2=1$을 만족시키는 실수의 모임'은 그 대상을 분명히 정할 수 있으므로 집합이다. 이 집합의 원소는 -1, 1이다.

(7) '5에 가까운 자연수의 모임'은 '가깝다'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

(8) '$0<x<1$을 만족시키는 자연수의 모임'은 그 대상을 분명히 정할 수 있으므로 집합이다. 이 집합의 원소는 없다.

(9) '3의 배수의 모임'은 그 대상을 분명히 정할 수 있으므로 집합이다. 이 집합의 원소는 3, 6, 9, 12, 15, ⋯이다.

(10) '$x^2-3=0$을 만족시키는 유리수의 모임'은 그 대상을 분명히 정할 수 있으므로 집합이다. 이 집합의 원소는 없다.

02 답 (1) $\in$ (2) $\notin$ (3) $\in$ (4) $\notin$

풀이 집합 A의 원소는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24이다.

(1) 2는 A에 속하므로 $2\in A$

(2) 7은 A에 속하지 않으므로 $7\notin A$

(3) 24는 A에 속하므로 $24\in A$

(4) 48은 A에 속하지 않으므로 $48\notin A$

03 답 (1) $\notin$ (2) $\in$ (3) $\in$ (4) $\notin$

풀이 집합 B의 원소는 1, 2, 3, 4이다.

(1) 0은 B에 속하지 않으므로 $0\notin B$

(2) 2는 B에 속하므로 $2\in B$

(3) 3은 B에 속하므로 $3\in B$

(4) 5는 B에 속하지 않으므로 $5\notin B$

04 답 (1) $\notin$ (2) $\in$ (3) $\in$ (4) $\notin$ (5) $\in$ (6) $\in$

풀이 (1) -3은 자연수가 아니므로 -3은 N에 속하지 않는다.

$\therefore -3\notin N$

(2) 0.5는 유리수이므로 0.5는 Q에 속한다.

$\therefore 0.5\in Q$

(3) $-\frac{3}{2}$은 유리수이므로 $-\frac{3}{2}$은 Q에 속한다.

$\therefore -\frac{3}{2}\in Q$

(4) $\sqrt{4}=2$는 무리수가 아니므로 $\sqrt{4}$는 P에 속하지 않는다.

$\therefore \sqrt{4}\notin P$

(5) $-\sqrt{6}$은 무리수이므로 $-\sqrt{6}$은 P에 속한다.

$\therefore -\sqrt{6}\in P$

(6) π는 실수이므로 π는 R에 속한다.

$\therefore \pi\in R$

05 답 (1) $A=\{2, 4, 6, 8\}$
(2) $B=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
(3) $C=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
(4) $D=\{-4, 5\}$
(5) $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

풀이 (1) 8 이하의 짝수는 2, 4, 6, 8이므로

$A=\{2, 4, 6, 8\}$

(4) $x^2-x-20=0$에서 $(x+4)(x-5)=0$이므로

$x=-4$ 또는 $x=5$

$\therefore D=\{-4, 5\}$

(5) $|x-3|<4$에서 $-4<x-3<4$, $-1<x<7$

이때 x는 자연수이므로 1, 2, 3, 4, 5, 6이다.

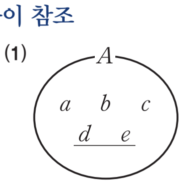
$\therefore E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

06 답 (1) (예) $A=\{x|x$는 20 이하의 홀수$\}$
(2) (예) $B=\{x|x$는 한 자리의 자연수$\}$
(3) (예) $C=\{x|x$는 12의 약수$\}$
(4) (예) $D=\{x|-5\le x\le -1$, x는 정수$\}$
(5) (예) $E=\{x|x$는 100보다 작은 4의 배수$\}$

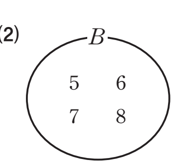
풀이 (1) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19는 20 이하의 홀수이므로 $A=\{x|x$는 20 이하의 홀수$\}$

07 답 풀이 참조

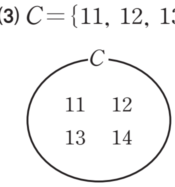
풀이 (1)



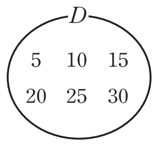
(2)



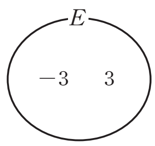
(3) $C=\{11, 12, 13, 14\}$



(4) $D=\{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30\}$



(5) $E=\{-3,\ 3\}$



08 답 (1) 유　(2) 무　(3) 무　(4) 무　(5) 유

풀이 (3) $C=\{7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35,\ \cdots\}$이므로 무한집합이다.

(4) $D=\{24,\ 48,\ 72,\ 96,\ 120,\ \cdots\}$이므로 무한집합이다.

(5) $E=\varnothing$이므로 유한집합이다.

09 답 (1) $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,\ 2\}$

(2) $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,\ b\}$, $\{a,\ c\}$, $\{b,\ c\}$, $\{a,\ b,\ c\}$

(3) $\varnothing$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{8\}$, $\{2,\ 4\}$, $\{2,\ 8\}$, $\{4,\ 8\}$, $\{2,\ 4,\ 8\}$

(4) $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{0\}$, $\{\varnothing,\ 0\}$

(5) $\varnothing$, $\{\{0\}\}$, $\{\{1\}\}$, $\{\{0\},\ \{1\}\}$

(6) $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{a\}$, $\{\{a\}\}$, $\{\varnothing,\ a\}$, $\{\varnothing,\ \{a\}\}$, $\{a,\ \{a\}\}$, $\{\varnothing,\ a,\ \{a\}\}$

풀이 (1) 집합 A의 부분집합은 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,\ 2\}$이다.

(3) $C=\{x\,|\,x$는 1보다 큰 8의 약수$\}=\{2,\ 4,\ 8\}$이므로 부분집합은 $\varnothing$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{8\}$, $\{2,\ 4\}$, $\{2,\ 8\}$, $\{4,\ 8\}$, $\{2,\ 4,\ 8\}$이다.

10 답 (1) $\subset$　(2) $\subset$　(3) $\not\subset$　(4) $\subset$　(5) $\not\subset$　(6) $\subset$

풀이 (1) $\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$

(2) $\{36\}$은 A의 부분집합이므로 $\{36\}\subset A$

(3) $\{12,\ 16\}$은 A의 부분집합이 아니므로 $\{12,\ 16\}\not\subset A$

(4) $\{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$는 A의 부분집합이므로 $\{3,\ 6,\ 9,\ 12\}\subset A$

(5) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$는 A의 부분집합이 아니므로 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}\not\subset A$

(6) 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이므로 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36\}\subset A$

11 답 (1) $X\subset Y$　(2) $X\subset Y$　(3) $Y\subset X$　(4) $X\subset Y$　(5) $Y\subset X$　(6) $Y\subset X$

풀이 (1) $X=\{-2\}$, $Y=\{-2,\ 2\}$이므로 $X\subset Y$

(2) $|x|<2$에서 $-2<x<2$이고 x는 자연수이므로 1이다.
$|y-1|<2$에서 $-2<y-1<2$, $-1<y<3$이고 y는 자연수이므로 1, 2이다.
$X=\{1\}$, $Y=\{1,\ 2\}$이므로 $X\subset Y$

(3) 정사각형은 직사각형이므로 $Y\subset X$

(4) $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$,
$Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$이므로 $X\subset Y$

(5) $X=\{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ \cdots\}$,
$Y=\{15,\ 30,\ 45,\ 60,\ 75,\ \cdots\}$이므로 $Y\subset X$

(6) $X=\{\cdots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$,
$Y=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$이므로 $Y\subset X$

12 답 (1) ○　(2) ×　(3) ×　(4) ○　(5) ○　(6) ○　(7) ×

풀이 집합 A의 원소는 $\varnothing$, 1, 2, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,\ 2\}$이다.

(1) $\varnothing$은 A의 원소이므로 $\varnothing\in A$

(2) 0은 A의 원소가 아니므로 $0\notin A$

(3) $\{1,\ \{1\}\}$은 A의 부분집합이므로
$\{1,\ \{1\}\}\notin A$, $\{1,\ \{1\}\}\subset A$

(4) $\{1,\ 2\}$는 A의 부분집합이므로 $\{1,\ 2\}\subset A$

(5) $\{\{1\},\ \{2\}\}$는 A의 부분집합이므로 $\{\{1\},\ \{2\}\}\subset A$

(6) $\{2\}$는 A의 원소이므로 $\{2\}\in A$

(7) $\{\varnothing,\ 2,\ \{2\}\}$는 A의 부분집합이므로
$\{\varnothing,\ 2,\ \{2\}\}\subset A$

13 답 (1) $A=B$　(2) $A\neq B$　(3) $A=B$

풀이 (1) $A=\{2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 3\}$이므로 $A=B$

(2) $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B=\{2,\ 3,\ 6\}$이므로 $A\neq B$

(3) $A=\{6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\ \cdots\}$,
$B=\{6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\ \cdots\}$이므로 $A=B$

14 답 (1) $a=3$, $b=5$　(2) $a=7$, $b=4$　(3) $a=5$, $b=3$

풀이 (1) $X=Y$이므로 $a\neq b$
$a\in Y$, $b\in X$이므로 $a=3$, $b=5$

(2) $X=Y$이므로 $a+2\neq b-1$
$a+2\in Y$이므로 $a+2=9$　$\therefore a=7$
$b-1\in X$이므로 $b-1=3$　$\therefore b=4$

(3) $X=Y$이므로 $3a+1\neq 5b-3$
$3a+1\in Y$이므로 $3a+1=16$　$\therefore a=5$
$5b-3\in X$이므로 $5b-3=12$　$\therefore b=3$

15 답 (1) $\varnothing$, $\{x\}$, $\{y\}$　(2) $\varnothing$

(3) $\varnothing$, $\{s\}$, $\{t\}$, $\{u\}$, $\{s,\ t\}$, $\{s,\ u\}$, $\{t,\ u\}$

(4) $\varnothing$, $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{-1,\ 0\}$, $\{-1,\ 1\}$, $\{0,\ 1\}$

(5) $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$

(6) $\varnothing$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 5\}$, $\{2,\ 7\}$, $\{3,\ 5\}$, $\{3,\ 7\}$, $\{5,\ 7\}$, $\{2,\ 3,\ 5\}$, $\{2,\ 3,\ 7\}$, $\{2,\ 5,\ 7\}$, $\{3,\ 5,\ 7\}$

풀이 (1) A의 진부분집합은 부분집합 중 자기 자신 $\{x,\ y\}$를 제외한 것이므로 $\varnothing$, $\{x\}$, $\{y\}$이다.

(5) $E=\{1,\ 3\}$이므로 E의 진부분집합은 부분집합 중 자기 자신 $\{1,\ 3\}$을 제외한 것이다. 즉, $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$이다.

(6) $F=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$이므로 F의 진부분집합은 부분집합 중 자기 자신 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$을 제외한 것이다. 즉,
$\varnothing$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 5\}$, $\{2,\ 7\}$, $\{3,\ 5\}$, $\{3,\ 7\}$, $\{5,\ 7\}$, $\{2,\ 3,\ 5\}$, $\{2,\ 3,\ 7\}$, $\{2,\ 5,\ 7\}$, $\{3,\ 5,\ 7\}$이다.

16 답 (1) 16 (2) 64 (3) 32 (4) 16 (5) 256

풀이 (1) 집합 A의 원소의 개수가 4이므로 부분집합의 개수는 $2^4=16$

(2) 집합 B의 원소의 개수가 6이므로 부분집합의 개수는 $2^6=64$

(3) 집합 C의 원소의 개수가 5이므로 부분집합의 개수는 $2^5=32$

(4) 집합 $D=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$의 원소의 개수가 4이므로 부분집합의 개수는 $2^4=16$

(5) 집합 $E=\{6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\ 36,\ 42,\ 48\}$의 원소의 개수가 8이므로 부분집합의 개수는 $2^8=256$

17 답 (1) 63 (2) 15 (3) 1023 (4) 31 (5) 511

풀이 (1) 집합 A의 원소의 개수가 6이므로 진부분집합의 개수는 $2^6-1=64-1=63$

(2) 집합 B의 원소의 개수가 4이므로 진부분집합의 개수는 $2^4-1=16-1=15$

(3) 집합 C의 원소의 개수가 10이므로 진부분집합의 개수는 $2^{10}-1=1024-1=1023$

(4) 집합 $D=\{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$의 원소의 개수가 5이므로 진부분집합의 개수는 $2^5-1=32-1=31$

(5) 집합 $E=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18\}$의 원소의 개수가 9이므로 진부분집합의 개수는
$2^9-1=512-1=511$

18 답 (1) 32 (2) 16 (3) 8 (4) 16 (5) 4

풀이 (1) 구하는 부분집합의 개수는 A에서 a를 제외한
$\{b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$의 부분집합의 개수와 같으므로
$2^{6-1}=2^5=32$

(2) 구하는 부분집합의 개수는 A에서 $b,\ c$를 제외한
$\{a,\ d,\ e,\ f\}$의 부분집합의 개수와 같으므로
$2^{6-2}=2^4=16$

(3) 구하는 부분집합의 개수는 A에서 $d,\ e,\ f$를 제외한
$\{a,\ b,\ c\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^{6-3}=2^3=8$

(4) 구하는 부분집합의 개수는 A에서 $a,\ e$를 제외한
$\{b,\ c,\ d,\ f\}$의 부분집합의 개수와 같으므로
$2^{6-2}=2^4=16$

(5) 구하는 부분집합의 개수는 A에서 $b,\ c,\ d,\ f$를 제외한
$\{a,\ e\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^{6-4}=2^2=4$

19 답 (1) 256 (2) 128 (3) 32 (4) 64 (5) 128

풀이 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

(1) 구하는 부분집합의 개수는 B에서 1, 2를 제외한
$\{3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 10\}$의 부분집합의 개수와 같으므로
$2^{10-2}=2^8=256$

(2) 구하는 부분집합의 개수는 B에서 7, 8, 9를 제외한
$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10\}$의 부분집합의 개수와 같으므로
$2^{10-3}=2^7=128$

(3) 구하는 부분집합의 개수는 B에서 1, 3, 5, 7, 9를 제외한 $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$의 부분집합의 개수와 같으므로
$2^{10-5}=2^5=32$

(4) 구하는 부분집합의 개수는 B에서 1, 2, 4, 8을 제외한
$\{3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10\}$의 부분집합의 개수와 같으므로
$2^{10-4}=2^6=64$

(5) 구하는 부분집합의 개수는 B에서 3, 6, 9를 제외한
$\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10\}$의 부분집합의 개수와 같으므로
$2^{10-3}=2^7=128$

20 답 (1) 4 (2) 4 (3) 16 (4) 64 (5) 8

풀이 (1) 집합 X는 $\{a,\ b,\ c,\ d\}$의 부분집합 중
$a,\ b$를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 구하는 집합 X의 개수는
$2^{4-2}=2^2=4$

(2) 집합 X는 $\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$의 부분집합 중 1, 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 구하는 집합 X의 개수는
$2^{5-3}=2^2=4$

(3) 집합 X는 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\}$의 부분집합 중 1, 3, 5, 7을 반드시 원소로 갖는 집합이므로 구하는 집합 X의 개수는 $2^{8-4}=2^4=16$

(4) 집합 X는 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9\}$의 부분집합 중 7, 8, 9를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 구하는 집합 X의 개수는
$2^{9-3}=2^6=64$

(5) 집합 X는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36\}$의 부분집합 중 1, 2, 3, 4, 6, 12를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 구하는 집합 X의 개수는 $2^{9-6}=2^3=8$

21 답 (1) 28 (2) 24 (3) 28 (4) 24

풀이 (1) 구하는 부분집합의 개수는
(전체 부분집합의 개수)
−(홀수 1, 3, 5를 포함하지 않는 부분집합의 개수)
와 같다.

(i) 전체 부분집합의 개수는 $2^5=32$

(ii) 홀수 1, 3, 5를 포함하지 않는 부분집합의 개수는
$2^{5-3}=2^2=4$

(i), (ii)에서 구하는 부분집합의 개수는 $32-4=28$

(2) 구하는 부분집합의 개수는
(전체 부분집합의 개수)
−(짝수 2, 4를 포함하지 않는 부분집합의 개수)
와 같다.

(i) 전체 부분집합의 개수는 $2^5=32$

(ii) 짝수 2, 4를 포함하지 않는 부분집합의 개수는
$2^{5-2}=2^3=8$

(i), (ii)에서 구하는 부분집합의 개수는 $32-8=24$

(3) 구하는 부분집합의 개수는
(전체 부분집합의 개수)
−(소수 2, 3, 5를 포함하지 않는 부분집합의 개수)
와 같다.

(i) 전체 부분집합의 개수는 $2^5=32$

(ii) 소수 2, 3, 5를 포함하지 않는 부분집합의 개수는
$2^{5-3}=2^2=4$

(i), (ii)에서 구하는 부분집합의 개수는 $32-4=28$

(4) 구하는 부분집합의 개수는

(전체 부분집합의 개수)

$-$(3의 약수 1, 3을 포함하지 않는 부분집합의 개수)

와 같다.

(i) 전체 부분집합의 개수는 $2^5=32$

(ii) 3의 약수 1, 3을 포함하지 않는 부분집합의 개수는 $2^{5-2}=2^3=8$

(i), (ii)에서 구하는 부분집합의 개수는 $32-8=24$

22 답 (1) $\{a, b, c, d, e\}$ (2) $\{s, t, u\}$

(3) $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$

(또는 $\{x \mid x$는 30 이하의 3의 배수$\}$)

(4) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

(또는 $\{x \mid x$는 $-2 \le x < 4$인 정수$\}$)

(5) $\{x \mid x$는 자연수$\}$

풀이 (3) $A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$,

$B=\{6, 12, 18, 24, 30\}$이므로

$A \cup B=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$

다른 풀이 6의 배수는 3의 배수이므로

$A \cup B=\{x \mid x$는 30 이하의 3의 배수$\}$

(4) $A=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3\}$이므로

$A \cup B=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

다른 풀이 $A=\{x \mid x$는 $-2 \le x \le 2$인 정수$\}$,

$B=\{x \mid x$는 $0 < x < 4$인 정수$\}$이므로

$A \cup B=\{x \mid x$는 $-2 \le x < 4$인 정수$\}$

(5) $A=\{1, 2, 3, \cdots, 99\}$,

$B=\{100, 101, 102, \cdots\}$이므로

$A \cup B=\{x \mid x$는 자연수$\}$

23 답 (1) $\{2, 4\}$ (2) $\varnothing$

(3) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ (또는 $\{x \mid x$는 12의 약수$\}$)

(4) $\{5, 6, 7, 8\}$ (또는 $\{x \mid x$는 $5 \le x < 9$인 자연수$\}$)

풀이 (3) $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,

$B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$이므로

$A \cap B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

다른 풀이 12의 약수는 24의 약수이므로

$A \cap B=\{x \mid x$는 12의 약수$\}$

(4) $A=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

$B=\{5, 6, 7, \cdots, 15\}$이므로

$A \cap B=\{5, 6, 7, 8\}$

24 답 (1) ○ (2) × (3) ○ (4) ○

(5) ○ (6) ○ (7) ○ (8) ×

풀이 (1) $A \cap B=\varnothing$이므로 A와 B는 서로소이다.

(2) $A \cap B=\{2\}$이므로 A와 B는 서로소가 아니다.

(4) $A=\{x \mid -1 < x < 1\}$, $B=\{-1, 1\}$에서

$A \cap B=\varnothing$이므로 A와 B는 서로소이다.

(5) $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$에서

$A \cap B=\varnothing$이므로 A와 B는 서로소이다.

(8) $A=\{x \mid x$는 3의 배수$\}$, $B=\{x \mid x$는 7의 배수$\}$에서

$A \cap B=\{x \mid x$는 21의 배수$\}$이므로 A와 B는 서로소가 아니다.

25 답 (1) $\{3, 5, 6, 7, 9\}$ (2) $\varnothing$

(3) $\{6, 7, 8, 9\}$ (4) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

풀이 (2) $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}=U$이므로

$B^C=\varnothing$

(3) $C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로 $C^C=\{6, 7, 8, 9\}$

(4) $D=\{2, 4, 6, 8\}$이므로 $D^C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

26 답 (1) $\{a, b\}$ (2) $\{3, 6, 9, 12\}$

(3) $\{2\}$ (4) $\varnothing$

풀이 (3) $A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$이므로

$A-B=\{2\}$

(4) $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로

$A-B=\varnothing$

27 답 (1) $\{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$ (2) $\{6\}$

(3) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (4) $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

(5) $\{2, 4, 8\}$ (6) $\{3, 9\}$

(7) $\{1, 5, 7\}$ (8) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

(9) $\{2, 4, 8\}$ (10) $\{1, 5, 7\}$

풀이 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

$A=\{2, 4, 6, 8\}$, $B=\{3, 6, 9\}$에 대하여

(7) $A \cup B=\{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$이므로

$(A \cup B)^C=\{1, 5, 7\}$

(8) $A \cap B=\{6\}$이므로

$(A \cap B)^C=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

(9) $A=\{2, 4, 6, 8\}$, $B^C=\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$이므로

$A \cap B^C=\{2, 4, 8\}$

(10) $B^C=\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, $A=\{2, 4, 6, 8\}$이므로

$B^C-A=\{1, 5, 7\}$

28 답 (1) $\{1, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$ (2) $\{1, 7\}$

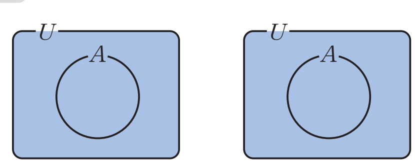
(3) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ (4) $\{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$

(5) $\{3, 5, 9\}$ (6) $\{4, 10\}$

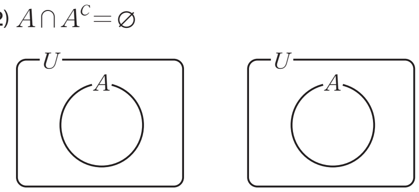
(7) $\{2, 6, 8\}$ (8) $\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$

29 답 풀이 참조

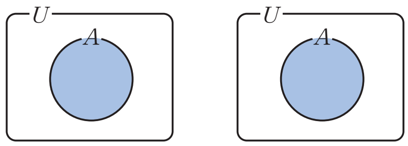
풀이 (1) $A \cup A^C=U$



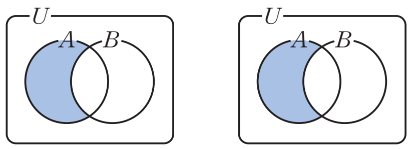
(2) $A \cap A^C=\varnothing$



(3) $(A^C)^C=A$



(4) $A-B=A\cap B^C$



30 답 (1) $\{8,\ 16\}$ (2) $\{8,\ 16\}$
(3) $\{8,\ 16\}$ (4) $\{8,\ 16\}$

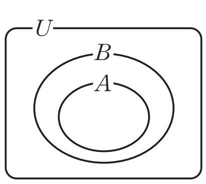
풀이 (2) $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$, $B^C=\{8,\ 16,\ 32\}$이므로
$A\cap B^C=\{8,\ 16\}$
(3) $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$, $A\cap B=\{1,\ 2,\ 4\}$이므로
$A-(A\cap B)=\{8,\ 16\}$
(4) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4\}$이므로
$(A\cup B)-B=\{8,\ 16\}$

31 답 (1) ○ (2) ○ (3) ○
(4) × (5) × (6) ○

풀이 (1) $A\cup\varnothing^C=A\cup U=\underline{U}$ (○)
(2) $A\cap\varnothing^C=A\cap U=A$ (○)
(3) $(\varnothing^C)^C=\varnothing$ (○)
(4) $B-A=B\cap A^C$ (×)
(5) $U-(A^C)^C=U-A=A^C$ (×)
(6) $(A^C)^C\cap B^C=A\cap B^C=A-B$ (○)

32 답 (1) A (2) B (3) $\varnothing$ (4) A (5) $\varnothing$

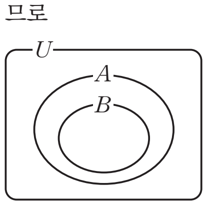
풀이 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A\subset B$이므로



(1) $A\subset B$이므로 $A\cap B=\underline{A}$
(2) $A\subset B$이므로 $A\cup B=B$
(3) $A\subset B$이므로 $(A^C)^C\cap B^C=A\cap B^C=A-B=\varnothing$
(4) $A\subset B$이므로 $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B=A$
(5) $A\subset B$이므로 $B^C\subset A^C$ $\quad\therefore B^C-A^C=\varnothing$

33 답 (1) ○ (2) ○ (3) × (4) ○ (5) ×

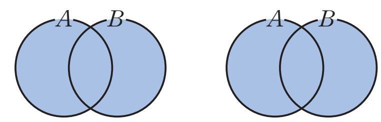
풀이 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $B\subset A$이므로



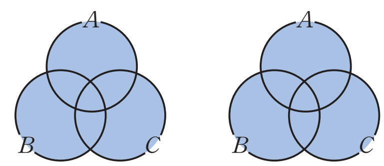
(1) $B\subset A$이므로 $A\cap B=\underline{B}$ (○)
(2) $B\subset A$이므로 $A\cup B^C=U$ (○)
(3) $B\subset A$이므로 $A-B\neq\varnothing$ (×)
(4) $B\subset A$이므로 $B\cap A^C=B-A=\varnothing$ (○)
(5) $B\subset A$이므로 $A^C\subset B^C$ (×)

34 답 풀이 참조

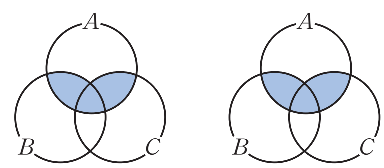
풀이 (1) $A\cup B=B\cup A$



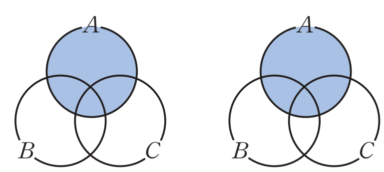
(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$



(3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$



(4) $(A\cap B)\cup A=A$

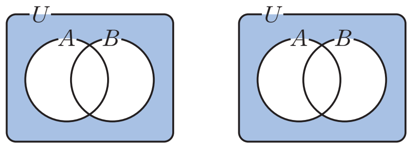


35 답 (1) ① $\{2,\ 4,\ 8\}$ ② $\{2,\ 4,\ 8\}$ ③ $=$
(2) ① $\{4,\ 8\}$ ② $\{4,\ 8\}$ ③ $=$
(3) ① $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 16\}$
② $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 16\}$ ③ $=$
(4) ① $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ ② $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ ③ $=$

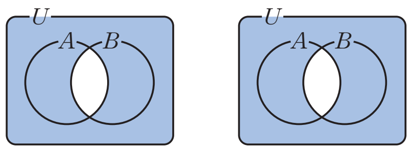
풀이 (2) ① $A\cap B=\{2,\ 4,\ 8\}$, $C=\{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20\}$
이므로 $(A\cap B)\cap C=\{4,\ 8\}$
② $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $B\cap C=\{4,\ 8,\ 16\}$이므로
$A\cap(B\cap C)=\{4,\ 8\}$
③ $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
(3) ① $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $B\cap C=\{4,\ 8,\ 16\}$이므로
$A\cup(B\cap C)=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 16\}$
② $A\cup B=\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 16\}$,
$A\cup C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 16,\ 20\}$이므로
$(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 16\}$
③ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
(4) ① $A\cup B=\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 16\}$,
$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$이므로
$(A\cup B)\cap A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$
② $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$
③ $(A\cup B)\cap A=A$

36 답 풀이 참조

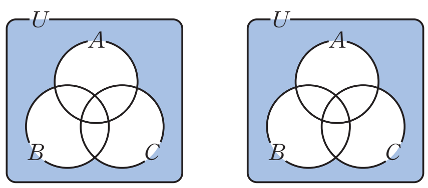
풀이 (1) $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$



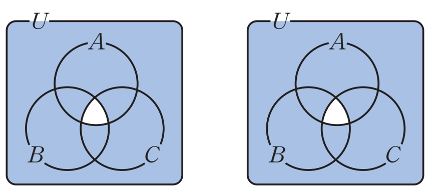
(2) $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$



(3) $(A\cup B\cup C)^C=A^C\cap B^C\cap C^C$



(4) $(A\cap B\cap C)^C=A^C\cup B^C\cup C^C$



37 답 (1) ① $\{3, 5, 6, 7\}$ ② $\{3, 5, 6, 7\}$ ③ $=$

(2) ① $\{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$ ② $\{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$ ③ $=$

풀이 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$에 대하여

(1) ① $A\cup B=\{1, 2, 4, 8\}$이므로

$(A\cup B)^C=\underline{\{3, 5, 6, 7\}}$

② $A^C=\{3, 5, 6, 7, 8\}$, $B^C=\{1, 3, 5, 6, 7\}$이므로

$A^C\cap B^C=\underline{\{3, 5, 6, 7\}}$

③ $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$

(2) ① $A\cap B=\{2, 4\}$이므로

$(A\cap B)^C=\{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$

② $A^C=\{3, 5, 6, 7, 8\}$, $B^C=\{1, 3, 5, 6, 7\}$이므로

$A^C\cup B^C=\{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$

③ $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

38 답 (1) ㄷ (2) ㄹ, ㄴ

(3) ㄹ, ㄷ (4) ㄹ, ㄱ, ㄴ

39 답 풀이 참조

풀이 (1) $A\cap(A^C\cup B)=\underline{(A\cap A^C)}\cup(A\cap B)$

$=\underline{\varnothing}\cup(A\cap B)$

$=\underline{A\cap B}$

(2) $(A\cup B)\cap(A\cup B^C)=A\cup(B\cap B^C)$

$=A\cup\varnothing$

$=A$

(3) $(A^C-B)^C=(A^C\cap B^C)^C$

$=(A^C)^C\cup(B^C)^C$

$=A\cup B$

(4) $A\cup(A-B^C)=A\cup\{A\cap(B^C)^C\}$

$=A\cup(A\cap B)$

$=A$

40 답 (1) ① 50 ② 36 ③ 18 ④ 10

⑤ 44 ⑥ 26 ⑦ 8

(2) ① 46 ② 22 ③ 28 ④ 7

⑤ 43 ⑥ 15 ⑦ 21

풀이 (1) ① $n(U)=26+10+8+\underline{6}=\underline{50}$

② $n(A)=26+10=36$

③ $n(B)=8+10=18$

⑤ $n(A\cup B)=26+10+8=44$

(2) ① $n(U)=15+7+21+3=46$

② $n(A)=15+7=22$

③ $n(B)=21+7=28$

⑤ $n(A\cup B)=15+7+21=43$

41 답 (1) 30 (2) 17 (3) 42 (4) 42

풀이 (1) $n(A^C)=n(U)-n(A)=50-\underline{20}=\underline{30}$

(2) $n(B^C)=n(U)-n(B)=50-33=17$

(3) $n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)=50-8=42$

(4) $n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)=42$

42 답 (1) 26 (2) 33 (3) 10 (4) 10

풀이 (1) $n(A^C)=n(U)-n(A)=60-34=26$

(2) $n(B^C)=n(U)-n(B)=60-27=33$

(3) $n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)=60-50=10$

(4) $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=10$

43 답 (1) 12 (2) 15 (3) 12 (4) 15

풀이 (1) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=21-\underline{9}=\underline{12}$

(2) $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=24-9=15$

(3) $n(A\cap B^C)=n(A-B)=12$

(4) $n(B\cap A^C)=n(B-A)=15$

44 답 (1) 23 (2) 19 (3) 23 (4) 19

풀이 (1) $n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)=54-\underline{31}=\underline{23}$

(2) $n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)=54-35=19$

(3) $n(A\cap B^C)=n(A-B)=23$

(4) $n(B\cap A^C)=n(B-A)=19$

45 답 (1) 66 (2) 38 (3) 39

(4) 23 (5) 30 (6) 48

풀이 (1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=38+35-\underline{7}=\underline{66}$

(2) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=30+24-16=38$

(3) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=27+22-10=39$

(4) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=16+10-3=23$

(5) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=10+20-0=30$

(6) $n(A\cap B)=0$이므로
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$
$=23+25=48$

46 답 (1) 13 (2) 8 (3) 11 (4) 17 (5) 0 (6) 0

풀이 (1) $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=17+34-\underline{38}=\underline{13}$

(2) $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=33+41-66=8$

(3) $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=20+27-36=11$

(4) $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=22+26-31=17$

(5) $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=14+16-30=0$

(6) $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=21+27-48=0$

47 답 (1) 67 (2) 33 (3) 32 (4) 16

풀이 (1) 1부터 100까지의 자연수의 집합을 U, 2의 배수의 집합을 A, 3의 배수의 집합을 B라고 하면
$n(A)=50$, $n(B)=33$
$A\cap B$는 6의 배수의 집합이므로 $n(A\cap B)=16$
따라서 2의 배수 또는 3의 배수의 개수는
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=50+\underline{33}-\underline{16}=\underline{67}$

(2) 1부터 100까지의 자연수의 집합을 U, 4의 배수의 집합을 A, 6의 배수의 집합을 B라고 하면
$n(A)=25$, $n(B)=16$
$A\cap B$는 12의 배수의 집합이므로 $n(A\cap B)=8$
따라서 4의 배수 또는 6의 배수의 개수는
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=25+16-8=33$

(3) 1부터 100까지의 자연수의 집합을 U, 5의 배수의 집합을 A, 7의 배수의 집합을 B라고 하면
$n(A)=20$, $n(B)=14$
$A\cap B$는 35의 배수의 집합이므로 $n(A\cap B)=2$
따라서 5의 배수 또는 7의 배수의 개수는
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=20+14-2=32$

(4) 1부터 100까지의 자연수의 집합을 U, 8의 배수의 집합을 A, 12의 배수의 집합을 B라고 하면
$n(A)=12$, $n(B)=8$
$A\cap B$는 24의 배수의 집합이므로 $n(A\cap B)=4$
따라서 8의 배수 또는 12의 배수의 개수는
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=12+8-4=16$

48 답 (1) 38 (2) 36 (3) 38 (4) 37 (5) 46

풀이 (1) $n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=16+18+20-5-7-6+\underline{2}=\underline{38}$

(2) $n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=25+18+19-13-6-11+4=36$

(3) $n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=11+21+23-5-10-3+1=38$

(4) $n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=15+17+17-4-5-6+3=37$

(5) $n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=18+21+18-5-4-4+2=46$

49 답 (1) 3 (2) 1 (3) 2 (4) 5 (5) 7

풀이 (1) $n(A\cap B\cap C)$
$=n(A\cup B\cup C)-n(A)-n(B)-n(C)$
$+n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$
$=\underline{31}-13-14-15+5+4+5=\underline{3}$

(2) $n(A\cap B\cap C)$
$=n(A\cup B\cup C)-n(A)-n(B)-n(C)$
$+n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$
$=36-18-16-13+5+3+4=1$

(3) $n(A\cap B\cap C)$
$=n(A\cup B\cup C)-n(A)-n(B)-n(C)$
$+n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$
$=39-15-15-17+3+3+4=2$

(4) $n(A\cap B\cap C)$
$=n(A\cup B\cup C)-n(A)-n(B)-n(C)$
$+n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$
$=46-19-20-22+6+7+7=5$

(5) $n(A\cap B\cap C)$
$=n(A\cup B\cup C)-n(A)-n(B)-n(C)$
$+n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$
$=44-20-20-24+8+9+10=7$

01 답 ④

풀이 집합 A의 원소는 0, 1, $\{1\}$이므로

$0\in A$, $1\in A$, $\{1\}\in A$

또, 집합 A의 부분집합을 구하면

$\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{\{1\}\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, \{1\}\}$, $\{1, \{1\}\}$, $\{0, 1, \{1\}\}$

따라서 옳지 않은 것은 ④ $\{0, 1\}\in A$이다.

02 답 3

풀이 $A=B$이므로 $x^2+1\neq x-1$이고 $x^2+1=10$, $x-1=2$

$\therefore x=3$

03 답 6

풀이 $n=6$일 때, $B=\{1, 2, 3, 6\}$

04 답 ②

풀이 $B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $C=\{0, 1, 2, 4\}$이므로

$A\subset C\subset B$

05 답 8

풀이 $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이고, $A\subset X\subset B$이므로 집합 X는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$의 부분집합 중 원소 1, 2, 4를 반드시 포함하는 것이므로 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는 $2^{6-3}=2^3=8$

06 답 8

풀이 집합 S의 부분집합 중 $\{1, 2\}$와 서로소인 집합은 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 원소 1, 2를 제외한 집합의 부분집합이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 집합의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

07 답 15

풀이 $A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$이므로

$A\cap B^C=\{3, 5, 7\}$

따라서 $A\cap B^C$의 모든 원소의 합은 $3+5+7=15$

08 답 ③

풀이 ③ $A\subset B$일 때, $A\cap B=A$이므로 $(A\cap B)^C=A^C$

09 답 ⑤

풀이 $A-(A\cap B)=A$이므로 $A\cap B=\varnothing$

10 답 2

풀이 $A\cap B=A$에서 $A\subset B$이므로

$a^2-2=2$, $a^2=4$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

(i) $a=-2$일 때

$A=\{-1, 2\}$, $B=\{2, 5, 7\}$이므로 $A\cap B\neq A$

(ii) $a=2$일 때

$A=\{2, 7\}$, $B=\{2, 5, 7\}$이므로 $A\cap B=A$

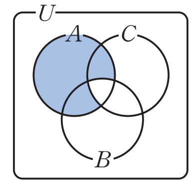
(i), (ii)에 의하여 $a=2$

11 답 ②

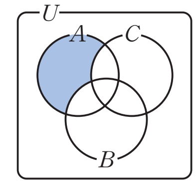
풀이 $A-(B\cup C)=A\cap(B\cup C)^C=A\cap(B^C\cap C^C)$

각 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

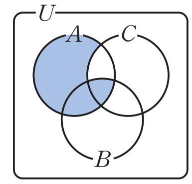
① $A\cap(B\cap C)^C$



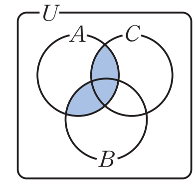
② $A\cap(B\cup C)^C$



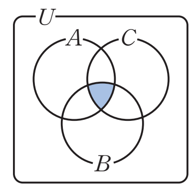
③ $A\cap(B^C\cap C)^C$
$=A\cap(B\cup C^C)$



④ $A\cap(B^C\cap C^C)^C$
$=A\cap(B\cup C)$

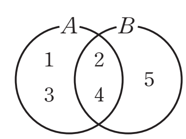


⑤ $A\cap(B^C\cup C^C)^C=A\cap(B\cap C)$



12 답 $\{2, 4, 5\}$

풀이 주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore B=\{2, 4, 5\}$

13 답 ①

풀이 $(A\cup B)\cap(A^C\cap B)^C=(A\cup B)\cap(A\cup B^C)$
$=A\cup(B\cap B^C)$
$=A\cup\varnothing=A$

14 답 34

풀이 $n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$
$=40-6=34$

15 답 9

풀이 $A\cap B=\varnothing$이므로

$n(A\cap B)=0$, $n(A\cap B\cap C)=0$

$n(A\cup C)=n(A)+n(C)-n(A\cap C)$에서

$7=5+3-n(A\cap C)$ $\quad\therefore n(A\cap C)=1$

$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$에서

$5=4+3-n(B\cap C)$ $\quad\therefore n(B\cap C)=2$

$\therefore n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=5+4+3-0-2-1+0=9$

01 답 (1) × (2) × (3) ○ (4) × (5) ○ (6) ○

풀이 (1), (2), (4) 참, 거짓을 명확하게 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
(3), (6) 거짓인 명제이다.
(5) 참인 명제이다.

02 답 (1) 조 (2) 명 (3) 조 (4) 명 (5) 조 (6) 명

풀이 (1), (3), (5) x의 값에 따라 참, 거짓이 결정되므로 조건이다.
(2) 참인 명제이다.
(4), (6) 거짓인 명제이다.

03 답 (1) $\{1, 3, 5, 7\}$ (2) $\{1, 2, 4, 8\}$
(3) $\{5, 7, 8\}$ (4) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
(5) $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ (6) $\varnothing$
(7) $\{3, 4, 5\}$ (8) $\{2\}$

풀이 (3) 12의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12이므로 진리집합은 $\{5, 7, 8\}$이다.
(5) $3x+1>10$에서 $3x>9$, $x>3$이므로 진리집합은 $\{4, 5, 6, 7, 8\}$이다.
(7) $|x-4|<2$에서 $-2<x-4<2$, $2<x<6$이므로 진리집합은 $\{3, 4, 5\}$이다.
(8) $x^2=4$에서 $x=2$이므로 진리집합은 $\{2\}$이다.

04 답 (1) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (2) $\{2, 3, 5\}$
(3) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

풀이 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.
(1) $P=\{2, 3, 4, 5\}$, $Q=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
따라서 조건 'p 또는 q'의 진리집합은
$P\cup Q=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
(2) $x^2-7x+10=0$에서 $(x-2)(x-5)=0$
$x=2$ 또는 $x=5$ $\therefore P=\{2, 5\}$
$|x-4|=1$에서 $x-4=-1$ 또는 $x-4=1$
$x=3$ 또는 $x=5$ $\therefore Q=\{3, 5\}$
따라서 조건 'p 또는 q'의 진리집합은
$P\cup Q=\{2, 3, 5\}$
(3) $P=\{1, 2, 3, 6\}$
$3x+2\le 17$에서 $3x\le 15$, $x\le 5$
$\therefore Q=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
따라서 조건 'p 또는 q'의 진리집합은
$P\cup Q=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

05 답 (1) $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ (2) $\{7, 8, 9, 10\}$
(3) $\{5, 10\}$

풀이 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.
(1) $P=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Q=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
따라서 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은
$P\cap Q=\{2, 3, 4, 5, 6\}$
(2) $2x+3>15$에서 $2x>12$, $x>6$
$P=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $Q=\{7, 8, 9, 10\}$
따라서 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은
$P\cap Q=\{7, 8, 9, 10\}$
(3) $P=\{1, 2, 5, 10\}$, $Q=\{5, 10\}$
따라서 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은
$P\cap Q=\{5, 10\}$

06 답 (1) $0\notin Q$ (2) $(-1)+1\neq 0$
(3) $\sqrt{2}$는 무리수이다. (4) 5는 8의 약수이다.

풀이 (3) '$\sqrt{2}$는 유리수이다.'의 부정은 '$\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.' 즉, '$\sqrt{2}$는 무리수이다.'이다.

07 답 (1) $x=2$ (2) $x\ge 5$
(3) $x<3$ (4) x는 정수가 아니다.

08 답 (1) $1\le x<4$ (2) $x\neq 7$ 그리고 $x\neq 8$
(3) $2<x\le 5$ (4) $x\neq 0$ 또는 $y\neq 1$
(5) $x\le 10$ 또는 $x\ge 20$ (6) $x<6$ 또는 $x\ge 12$

풀이 (1) '$x\ge 4$ 또는 $x<1$'의 부정은
'$x<4$ 그리고 $x\ge 1$'에서 '$1\le x<4$'이다.
(3) '$x-5>0$ 또는 $x-2\le 0$'의 부정은
'$x-5\le 0$ 그리고 $x-2>0$', '$x\le 5$ 그리고 $x>2$'
$\therefore$ '$2<x\le 5$'
(5) '$10<x<20$', 즉 '$x>10$ 그리고 $x<20$'의 부정은
'$x\le 10$ 또는 $x\ge 20$'이다.
(6) '$6\le x<12$', 즉 '$x\ge 6$ 그리고 $x<12$'의 부정은 '$x<6$ 또는 $x\ge 12$'이다.

09 답 (1) ① 참 ② 2와 3은 서로소가 아니다. ③ 거짓
(2) ① 거짓 ② 5는 2의 배수가 아니다. ③ 참
(3) ① 거짓 ② $\sqrt{4}$는 유리수이다. ③ 참
(4) ① 참 ② π는 유리수이다. ③ 거짓

10 답 (1) $\{1, 2, 3, 4\}$
(2) $\{6, 7, 8, 9, 10\}$
(3) $\{1, 2, 6, 7, 8, 9, 10\}$
(4) $\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
(5) $\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$
(6) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$
(7) $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$
(8) $\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

풀이 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$에 대하여 주어진 조건의 진리집합을 P라고 하자.
(1) $P=\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
따라서 조건의 부정의 진리집합은
$P^C=\{1, 2, 3, 4\}$

11 답 (1) 가정: 어떤 수는 6이다.
결론: 어떤 수는 12의 약수이다.
(2) 가정: $x=2$이다.
결론: $x^2=4$이다.
(3) 가정: $2<x<3$이다.
결론: $2\le x\le 3$이다.
(4) 가정: a, b가 모두 홀수이다.
결론: ab는 홀수이다.
(5) 가정: a, b가 모두 자연수이다.
결론: $a+b$는 자연수이다.

12 답 (1) 참 (2) 거짓 (3) 참

풀이 (1) $P=\{1, 2, 4\}$, $Q=\{1, 2, 4, 8\}$에서 $P\subset Q$이므로 $p \longrightarrow q$는 참이다.
(2) $P=\{-1, 1\}$, $Q=\{1\}$에서 $P\not\subset Q$이므로 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.
(3) $Q=\{x|-2<x<2\}$에서 $P\subset Q$이므로 $p \longrightarrow q$는 참이다.

13 답 (1) 거짓 (2) 거짓 (3) 참

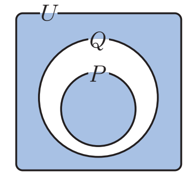
풀이 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.
(1) $P=\{4, 8, 12, 16, 20, \cdots\}$,
$Q=\{12, 24, 36, 48, 60, \cdots\}$에서 $P\not\subset Q$이므로
$p \longrightarrow q$는 거짓이다.
(2) $P=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$,
$Q=\{1, 3, 5, 15\}$에서 $P\not\subset Q$이므로 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.
(3) $x^2-15x+54=0$에서
$(x-6)(x-9)=0$이므로 $x=6$ 또는 $x=9$
즉, $Q=\{6, 9\}$
이때 $P=\{6\}$에서 $P\subset Q$이므로 $p \longrightarrow q$는 참이다.

14 답 (1) 거짓 (2) 참 (3) 참 (4) 거짓
(5) 거짓 (6) 참 (7) 거짓 (8) 거짓

풀이 (1) 'p: x가 소수이다.', 'q: x는 홀수이다.'라 하고,
조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면
$P=\{2, 3, 5, 7, 11, \cdots\}$, $Q=\{1, 3, 5, 7, 9, \cdots\}$
따라서 $P\not\subset Q$이므로 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.
(2) 'p: $x=3$', 'q: $7x-11=10$'이라고 하면
q: $x=3$
조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면
$P=\{3\}$, $Q=\{3\}$
따라서 $P\subset Q$이므로 $p \longrightarrow q$는 참이다.
(3) 'p: $x>3$', 'q: $2x-1>3$'이라고 하면
q: $x>2$
조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면
$P=\{x|x>3\}$, $Q=\{x|x>2\}$
따라서 $P\subset Q$이므로 $p \longrightarrow q$는 참이다.
(4) 'p: $x<5$', 'q: $x^2<25$'라 하고,
조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면
$P=\{x|x<5\}$, $Q=\{x|-5<x<5\}$
따라서 $P\not\subset Q$이므로 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.
(5) [반례] $x=0$이면 x는 실수이지만 $x^2=0$이다.
(6) 사각형 ABCD가 정사각형이면 네 변의 길이가 모두 같으므로 사각형 ABCD는 마름모이다.
(7) [반례] $x=3$, $y=-2$이면 $x>y$이지만 $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$이다.
(8) [반례] $x=1$, $y=2$, $z=0$이면 $xz=yz$이지만 $x\ne y$이다.

15 답 (1) ○ (2) ○ (3) × (4) ○

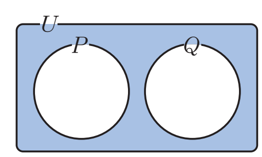
풀이 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 $P\subset Q$
(1) $P\cap Q=P$
(2) $P\subset Q$이므로 $P\cap Q^C=P-Q=\varnothing$
(3) $P\cup Q^C$을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽과 같으므로
$P\cup Q^C\ne U$



(4) $P\subset Q$이므로 $Q^C\subset P^C$
$\therefore P^C\cap Q^C=Q^C$

16 답 (1) × (2) ○ (3) × (4) ○

풀이 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 $P\subset Q^C$
(1) $P\cap Q=\varnothing$
(2) $P\cap Q=\varnothing$이므로 $P\cap Q^C=P-Q=P$
(3) $P^C\cap Q^C$을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽과 같으므로
$P^C\cap Q^C\ne\varnothing$



(4) $P^C\cup Q^C=(P\cap Q)^C$
$=\varnothing^C=U$

17 답 (1) 참 (2) 거짓 (3) 참 (4) 참 (5) 거짓

풀이 (1) '$x<5$이다.'의 진리집합을 P라고 하면
$P=U=\{1, 2, 3, 4\}$이므로 참이다.
(2) '$x^2<10$이다.'의 진리집합을 P라고 하면
$P=\{1, 2, 3\}$이고 $P\ne U$이므로 거짓이다.
(3) 'x는 4의 약수이다.'의 진리집합을 P라고 하면
$P=\{1, 2, 4\}$이고 $P\ne\varnothing$이므로 참이다.
(4) '$x^2=x$이다.'의 진리집합을 P라고 하면
$P=\{1\}$이고 $P\ne\varnothing$이므로 참이다.
(5) '$x-1\ge 4$이다.'의 진리집합을 P라고 하면
$P=\varnothing$이므로 거짓이다.

18 답 (1) 어떤 자연수 x에 대하여 $x\le 0$이다. (거짓)
(2) 어떤 실수 x에 대하여 $x-1=0$이다. (참)
(3) 어떤 소수는 짝수이다. (참)
(4) 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1\ne 0$이다. (참)
(5) 모든 4의 약수는 8의 약수이다. (참)

19 답 (1) 역: $p \longrightarrow q$, 대우: $\sim p \longrightarrow \sim q$
(2) 역: $\sim q \longrightarrow p$, 대우: $q \longrightarrow \sim p$
(3) 역: $q \longrightarrow \sim p$, 대우: $\sim q \longrightarrow p$
(4) 역: $\sim q \longrightarrow \sim p$, 대우: $q \longrightarrow p$
(5) 역: $\sim p \longrightarrow \sim q$, 대우: $p \longrightarrow q$

20 답 (1) 역: $x=1$이면 $x^2=1$이다.
대우: $x\neq1$이면 $x^2\neq1$이다.
(2) 역: $x>0$이면 $x>2$이다.
대우: $x\leq0$이면 $x\leq2$이다.
(3) 역: $x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다.
대우: $x\neq0$이고 $y\neq0$이면 $xy\neq0$이다.
(4) 역: $x=1$이고 $y=1$이면 $x+y=2$이다.
대우: $x\neq1$ 또는 $y\neq1$이면 $x+y\neq2$이다.
(5) 역: $a+b<0$이면 $a<0$ 또는 $b<0$이다.
대우: $a+b\geq0$이면 $a\geq0$이고 $b\geq0$이다.

21 답 (1) 역: x가 2의 배수이면 x는 4의 배수이다. (거짓)
대우: x가 2의 배수가 아니면 x는 4의 배수가 아니다. (참)
(2) 역: x가 12의 약수이면 x는 6의 약수이다. (거짓)
대우: x가 12의 약수가 아니면 x는 6의 약수가 아니다. (참)
(3) 역: 이등변삼각형이면 정삼각형이다. (거짓)
대우: 이등변삼각형이 아니면 정삼각형이 아니다. (참)
(4) 역: $x\geq1$이고 $y\geq2$이면 $x+y\geq3$이다. (참)
대우: $x<1$ 또는 $y<2$이면 $x+y<3$이다. (거짓)
(5) 역: x 또는 y가 짝수이면 xy가 짝수이다. (참)
대우: x, y가 모두 홀수이면 xy는 홀수이다. (참)
(6) 역: xy가 무리수이면 x, y는 모두 무리수이다. (거짓)
대우: xy가 유리수이면 x 또는 y는 유리수이다. (거짓)

풀이 (6) 역: xy가 무리수이면 x, y는 모두 무리수이다.
[반례] $x=1$, $y=\sqrt{2}$이면 $xy=\sqrt{2}$는 무리수이지만
$x=1$은 유리수, $y=\sqrt{2}$는 무리수이다. $\therefore$ 거짓
대우: xy가 유리수이면 x 또는 y는 유리수이다.
[반례] $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$이면 $xy=2$는 유리수이지만
$x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$는 모두 무리수이다. $\therefore$ 거짓

22 답 (1) ㅁ (2) ㄷ (3) ㄹ (4) ㄴ (5) ㄱ
풀이 (1) 명제 $q \longrightarrow p$가 참이므로 그 대우
ㅁ. $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이다.
(2) 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 ㄷ. $q \longrightarrow \sim p$가 참이다.
(3) 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 ㄹ. $\sim q \longrightarrow p$가 참이다.
(4) 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 ㄴ. $q \longrightarrow p$가 참이다.
(5) 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 그 대우 ㄱ. $p \longrightarrow q$가 참이다.

23 답 (1) $\sim r$ (2) q (3) r (4) r (5) p
풀이 (1) 명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim r$도 참이다.
따라서 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 $p \longrightarrow \sim r$가 참이다.
(2) 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow q$도 참이다.
따라서 명제 $p \longrightarrow r$, $r \longrightarrow q$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 $p \longrightarrow q$가 참이다.
(3) 명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 그 대우 $p \longrightarrow \sim q$도 참이다.
따라서 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow r$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 $p \longrightarrow r$가 참이다.
(4) 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim p$도 참이다.
따라서 명제 $q \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow r$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 $q \longrightarrow r$가 참이다.
(5) 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow q$도 참이다.
따라서 명제 $r \longrightarrow q$, $q \longrightarrow p$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 $r \longrightarrow p$가 참이다.

24 답 (1) ○ (2) ○ (3) ○
(4) ○ (5) × (6) ×
풀이 (1) 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim p$도 참이다.
(2) 명제 $r \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.
(3) 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow \sim r$가 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $p \longrightarrow \sim r$도 참이다.
(4) 명제 $r \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.
다른 풀이 (3)에서 명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.
(5) 명제 $\sim q \longrightarrow p$는 $p \longrightarrow \sim q$의 역이므로 $\sim q \longrightarrow p$가 반드시 참이라고 할 수 없다.
(6) 명제 $q \longrightarrow r$는 $r \longrightarrow q$의 역이므로 $q \longrightarrow r$가 반드시 참이라고 할 수 없다.

25 답 (1) (가) 홀수 (나) $2k^2-2k+1$
(2) (가) 홀수 (나) $2kl-k-l$

26 답 (1) (가) $2m^2$ (나) 2
(2) (가) 유리수 (나) 3
(3) (가) 3 (나) 9
(4) (가) 2 (나) k^2+k

27 답 (1) ① 거짓 ② 참 ③ 필요조건
(2) ① 참 ② 거짓 ③ 충분조건
(3) ① 참 ② 참 ③ 필요충분조건
풀이 (1) ① □ABCD가 평행사변형이면 □ABCD는 마름모이다. (거짓)
② □ABCD가 마름모이면 □ABCD는 평행사변형이다. (참)

③ 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이고 명제 $q \longrightarrow p$가 참이므로
p는 q이기 위한 필요조건이다.

(2) ① x가 자연수이면 x는 정수이다. (참)
② x가 정수이면 x는 자연수이다. (거짓)
③ 명제 $p \longrightarrow q$가 참이고 명제 $q \longrightarrow p$가 거짓이므로
p는 q이기 위한 충분조건이다.

(3) ① $\triangle$ABC가 두 내각의 크기가 같은 삼각형이면
$\triangle$ABC는 이등변삼각형이다. (참)
② $\triangle$ABC가 이등변삼각형이면 $\triangle$ABC는 두 내각의 크기가 같은 삼각형이다. (참)
③ 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow p$가 모두 참이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

28 답 (1) ① $\{x \mid -1<x<0\}$ ② $\{x \mid x<3\}$ ③ 충분조건
(2) ① $\{-3, 2\}$ ② $\{2\}$ ③ 필요조건
(3) ① $\{-4, 4\}$ ② $\{-4, 4\}$ ③ 필요충분조건

풀이 (1) ① $x^2+x<0$에서 $x(x+1)<0$, $-1<x<0$이므로
$P=\{x \mid -1<x<0\}$
② $x-3<0$에서 $x<3$이므로
$Q=\{x \mid x<3\}$
③ $P \subset Q$이고 $Q \not\subset P$이므로
p는 q이기 위한 충분조건이다.

(2) ① $x^2+x-6=0$에서 $(x+3)(x-2)=0$
$x=-3$ 또는 $x=2$이므로
$P=\{-3, 2\}$
② $3x-1=5$에서 $x=2$이므로
$Q=\{2\}$
③ $P \not\subset Q$이고 $Q \subset P$이므로
p는 q이기 위한 필요조건이다.

(3) ① $|x|=4$에서 $x=-4$ 또는 $x=4$이므로
$P=\{-4, 4\}$
② $x^2=16$에서 $x=-4$ 또는 $x=4$이므로
$Q=\{-4, 4\}$
③ $P=Q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

29 답 (1) 필요조건 (2) 필요조건
(3) 필요충분조건 (4) 필요충분조건
(5) 충분조건 (6) 필요조건
(7) 충분조건 (8) 충분조건
(9) 필요충분조건 (10) 필요조건
(11) 필요조건 (12) 필요충분조건

풀이 (1) $p \longrightarrow q$는 거짓이고, $q \longrightarrow p$는 참이다.
[$p \longrightarrow q$의 반례] $x=2$, $y=1$이면 $x+y=3$이지만
$x \neq 1$, $y \neq 2$이다.
따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

(2) $p \longrightarrow q$는 거짓이고, $q \longrightarrow p$는 참이다.
[$p \longrightarrow q$의 반례] $x=-5$이면 $x^2=25$이지만 $x \neq 5$이다.
따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

(5) $p \longrightarrow q$는 참이고, $q \longrightarrow p$는 거짓이다.
[$q \longrightarrow p$의 반례] $x=10$이면 $x \leq 10$이지만 $0<x<9$는 아니다.
따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

(6) $x^2-5x+6<0$에서 $(x-2)(x-3)<0$, $2<x<3$이므로
q: $2<x<3$
$p \longrightarrow q$는 거짓이고, $q \longrightarrow p$는 참이다.
[$p \longrightarrow q$의 반례] $x=2$이면 $x \geq 2$이지만 $2<x<3$은 아니다.
따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

(7) $x^2<1$에서 $x^2-1<0$, $(x+1)(x-1)<0$,
$-1<x<1$이므로 p: $-1<x<1$
$p \longrightarrow q$는 참이고, $q \longrightarrow p$는 거짓이다.
[$q \longrightarrow p$의 반례] $x=-1$이면 $x \geq -1$이지만 $x^2<1$은 아니다.
따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

(8) $p \longrightarrow q$는 참이고, $q \longrightarrow p$는 거짓이다.
[$q \longrightarrow p$의 반례] $x=-4$이면 $x<3$이지만 $|x|<3$은 아니다.
따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

(10) $p \longrightarrow q$는 거짓이고, $q \longrightarrow p$는 참이다.
[$p \longrightarrow q$의 반례] $x=-2$, $y=-3$이면 $|xy|=xy$이지만 $x<0$, $y<0$이다.
따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

(11) $p \longrightarrow q$는 거짓이고, $q \longrightarrow p$는 참이다.
[$p \longrightarrow q$의 반례] $x=1$, $y=3$이면 $x+y$는 짝수이지만
x, y는 모두 홀수이다.
따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

다른 풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.
(2) $P=\{-5, 5\}$, $Q=\{5\}$에서 $P \not\subset Q$이고 $Q \subset P$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
(5) $P=\{x \mid 0<x<9\}$, $Q=\{x \mid x \leq 10\}$에서 $P \subset Q$이고 $Q \not\subset P$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
(6) $P=\{x \mid x \geq 2\}$, $Q=\{x \mid 2<x<3\}$에서 $P \not\subset Q$이고 $Q \subset P$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
(7) $P=\{x \mid -1<x<1\}$, $Q=\{x \mid x \geq -1\}$에서 $P \subset Q$이고 $Q \not\subset P$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
(8) $P=\{x \mid -3<x<3\}$, $Q=\{x \mid x<3\}$에서 $P \subset Q$이고 $Q \not\subset P$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

30 답 (1) 5 (2) 6 (3) 7 (4) 3

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.
(1) p가 q이기 위한 충분조건, 즉 $p \longrightarrow q$가 참이므로
$P \subset Q$이어야 한다.
따라서 $x=1$이 $x^2-ax+4=0$을 만족시키므로
$1-a+4=0$
$\therefore a=5$

(2) q가 p이기 위한 필요조건, 즉 $p \longrightarrow q$가 참이므로

$P \subset Q$이어야 한다.

따라서 $x=2$가 $x^2-5x+a=0$을 만족시키므로

$4-10+a=0 \qquad \therefore a=6$

(3) q가 p이기 위한 충분조건, 즉 $q \longrightarrow p$가 참이므로

$Q \subset P$이어야 한다.

따라서 $x=3$이 $x^2-ax+12=0$을 만족시키므로

$9-3a+12=0 \qquad \therefore a=7$

(4) p가 q이기 위한 필요조건, 즉 $q \longrightarrow p$가 참이므로

$Q \subset P$이어야 한다.

따라서 $x=-1$이 $3x^2-a=0$을 만족시키므로

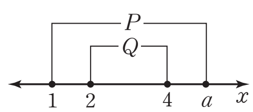
$3-a=0 \qquad \therefore a=3$

31 답 (1) 4　　(2) 2　　(3) 3　　(4) -5

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.

(1) p가 q이기 위한 필요조건, 즉 $q \longrightarrow p$가 참이므로

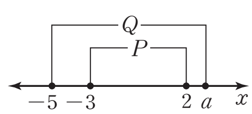
$Q \subset P$이어야 한다.



따라서 $a \geq 4$이므로 a의 최솟값은 4이다.

(2) p가 q이기 위한 충분조건, 즉 $p \longrightarrow q$가 참이므로

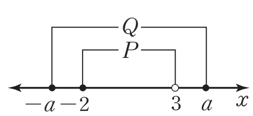
$P \subset Q$이어야 한다.



따라서 $a \geq 2$이므로 a의 최솟값은 2이다.

(3) q가 p이기 위한 필요조건, 즉 $p \longrightarrow q$가 참이므로

$P \subset Q$이어야 한다.

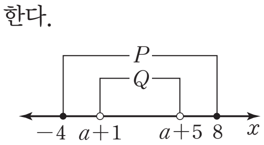


$-a \leq -2$, $3 \leq a$이므로 $a \geq 2$, $a \geq 3 \qquad \therefore a \geq 3$

따라서 a의 최솟값은 3이다.

(4) q가 p이기 위한 충분조건, 즉 $q \longrightarrow p$가 참이므로

$Q \subset P$이어야 한다.



$-4 \leq a+1$, $a+5 \leq 8$이므로

$a \geq -5$, $a \leq 3 \qquad \therefore -5 \leq a \leq 3$

따라서 a의 최솟값은 -5이다.

32 답 (1) × 　(2) × 　(3) ○　(4) × 　(5) ○

풀이 (1) $x+2>0$에서 $x>-2$이므로 $x \leq -2$인 경우에는

부등식이 성립하지 않는다.

따라서 절대부등식이 아니다.

(2) $x=0$인 경우에는 부등식이 성립하지 않는다.

따라서 절대부등식이 아니다.

(3) $|x| \geq 0$이므로 $|x|+1>0$

따라서 절대부등식이다.

(4) $x=-1$인 경우에는 부등식이 성립하지 않는다.

따라서 절대부등식이 아니다.

(5) $x^2+1 \geq 2x$에서 $x^2-2x+1 \geq 0$, $(x-1)^2 \geq 0$

따라서 절대부등식이다.

33 답 (1) $A \geq B$　　(2) $A>B$　　(3) $A<B$

풀이 (1) $A-B=\dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{a^2+2ab+b^2}{4}$

$=\dfrac{a^2-2ab+b^2}{4}$

$=\dfrac{(a-b)^2}{4} \geq 0$

$\therefore A \geq B$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

(2) $A-B=\dfrac{a}{1+a}-\dfrac{b}{1+b}$

$=\dfrac{a(1+b)-b(1+a)}{(1+a)(1+b)}$

$=\dfrac{a-b}{(1+a)(1+b)}$

$a>b>0$에서 $a-b>0$, $1+a>0$, $1+b>0$이므로

$\dfrac{a-b}{(1+a)(1+b)}>0$

$\therefore A>B$

(3) $A^2-B^2=(\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$=(a+b)-(a+b+2\sqrt{ab})$

$=-2\sqrt{a}\sqrt{b}<0$

$\therefore A^2<B^2$

이때 $A>0$, $B>0$이므로

$A<B$

34 답 (1) (가) $\dfrac{1}{4}b^2$　　(나) $\dfrac{1}{2}b$

(2) (가) $\dfrac{3}{4}b^2$　　(나) $\geq$

(3) (가) $|ab|-ab$　　(나) ab

(4) (가) $|a|-|b|$　　(나) $|b|$

35 답 (1) 2　　(2) 12　　(3) 4　　(4) 2　　(5) 8

풀이 (1) $a>0$, $\dfrac{1}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에

의하여

$a+\dfrac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \times \dfrac{1}{a}}=2$

(단, 등호는 $a=1$일 때 성립한다.)

따라서 $a+\dfrac{1}{a}$의 최솟값은 2이다.

(2) $4a>0$, $\frac{9}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4a+\frac{9}{a}\ge 2\sqrt{4a\times\frac{9}{a}}=2\sqrt{36}=12$

$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{3}{2}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $4a+\frac{9}{a}$의 최솟값은 12이다.

(3) $a-1>0$, $\frac{4}{a-1}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a-1+\frac{4}{a-1}\ge 2\sqrt{(a-1)\times\frac{4}{a-1}}=2\sqrt{4}=4$

(단, 등호는 $a=3$일 때 성립한다.)

따라서 $a-1+\frac{4}{a-1}$의 최솟값은 4이다.

(4) $\frac{b}{a}>0$, $\frac{a}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\ge 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}=2$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

따라서 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$의 최솟값은 2이다.

(5) $\frac{8b}{a}>0$, $\frac{2a}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{8b}{a}+\frac{2a}{b}\ge 2\sqrt{\frac{8b}{a}\times\frac{2a}{b}}=2\sqrt{16}=8$

(단, 등호는 $a=2b$일 때 성립한다.)

따라서 $\frac{8b}{a}+\frac{2a}{b}$의 최솟값은 8이다.

36 답 (1) 4 (2) 12

풀이 (1) $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\ge 2\sqrt{ab}=2\sqrt{4}=4$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

따라서 $a+b$의 최솟값은 4이다.

(2) $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a+3b\ge 2\sqrt{2a\times 3b}=2\sqrt{36}=12$

$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{3}{2}b\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $2a+3b$의 최솟값은 12이다.

37 답 (1) 1 (2) 6

풀이 (1) $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}=\frac{2}{2}=1$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

따라서 ab의 최댓값은 1이다.

(2) $3a>0$, $2b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\sqrt{3a\times 2b}\le\frac{3a+2b}{2}=\frac{12}{2}=6$

$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{2}{3}b\text{일 때 성립한다.}\right)$

$\sqrt{6ab}\le 6$, $6ab\le 36$ $\quad\therefore ab\le 6$

따라서 ab의 최댓값은 6이다.

38 답 (1) 최댓값: $\sqrt{10}$, 최솟값: $-\sqrt{10}$
(2) 최댓값: 5, 최솟값: -5
(3) 최댓값: $5\sqrt{2}$, 최솟값: $-5\sqrt{2}$
(4) 최댓값: $5\sqrt{5}$, 최솟값: $-5\sqrt{5}$

풀이 (1) $a=1$, $b=1$로 놓고 코시-슈바르츠의 부등식을 적용하면

$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\ge(x+y)^2$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립한다.)

이때 $x^2+y^2=5$이므로

$(x+y)^2\le 10$

$\therefore -\sqrt{10}\le x+y\le\sqrt{10}$

따라서 $x+y$의 최댓값은 $\sqrt{10}$, 최솟값은 $-\sqrt{10}$이다.

(2) $a=2$, $b=1$로 놓고 코시-슈바르츠의 부등식을 적용하면

$(2^2+1^2)(x^2+y^2)\ge(2x+y)^2$

(단, 등호는 $x=2y$일 때 성립한다.)

이때 $x^2+y^2=5$이므로

$(2x+y)^2\le 25$

$\therefore -5\le 2x+y\le 5$

따라서 $2x+y$의 최댓값은 5, 최솟값은 -5이다.

(3) $a=1$, $b=3$으로 놓고 코시-슈바르츠의 부등식을 적용하면

$(1^2+3^2)(x^2+y^2)\ge(x+3y)^2$

(단, 등호는 $3x=y$일 때 성립한다.)

이때 $x^2+y^2=5$이므로

$(x+3y)^2\le 50$

$\therefore -5\sqrt{2}\le x+3y\le 5\sqrt{2}$

따라서 $x+3y$의 최댓값은 $5\sqrt{2}$, 최솟값은 $-5\sqrt{2}$이다.

(4) $a=3$, $b=4$로 놓고 코시-슈바르츠의 부등식을 적용하면

$(3^2+4^2)(x^2+y^2)\ge(3x+4y)^2$

(단, 등호는 $4x=3y$일 때 성립한다.)

이때 $x^2+y^2=5$이므로

$(3x+4y)^2\le 125$

$\therefore -5\sqrt{5}\le 3x+4y\le 5\sqrt{5}$

따라서 $3x+4y$의 최댓값은 $5\sqrt{5}$, 최솟값은 $-5\sqrt{5}$이다.

39 답 (1) 8 (2) 5 (3) 13 (4) 4

풀이 (1) $a=1$, $b=1$로 놓고 코시-슈바르츠의 부등식을 적용하면

$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\ge(x+y)^2$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립한다.)

이때 $x+y=4$이므로

$2(x^2+y^2)\ge 16$

$\therefore x^2+y^2 \ge 8$
따라서 x^2+y^2의 최솟값은 8이다.

(2) $a=1$, $b=2$로 놓고 코시-슈바르츠의 부등식을 적용하면
$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \ge (x+2y)^2$
(단, 등호는 $2x=y$일 때 성립한다.)
이때 $x+2y=5$이므로
$5(x^2+y^2) \ge 25$
$\therefore x^2+y^2 \ge 5$
따라서 x^2+y^2의 최솟값은 5이다.

(3) $a=2$, $b=3$으로 놓고 코시-슈바르츠의 부등식을 적용하면
$(2^2+3^2)(x^2+y^2) \ge (2x+3y)^2$
(단, 등호는 $3x=2y$일 때 성립한다.)
이때 $2x+3y=13$이므로
$13(x^2+y^2) \ge 169$
$\therefore x^2+y^2 \ge 13$
따라서 x^2+y^2의 최솟값은 13이다.

(4) $a=4$, $b=3$으로 놓고 코시-슈바르츠의 부등식을 적용하면
$(4^2+3^2)(x^2+y^2) \ge (4x+3y)^2$
(단, 등호는 $3x=4y$일 때 성립한다.)
이때 $4x+3y=10$이므로
$25(x^2+y^2) \ge 100$
$\therefore x^2+y^2 \ge 4$
따라서 x^2+y^2의 최솟값은 4이다.

중단원 점검문제 | Ⅱ-2 명제 113-114쪽

01 답 ②
풀이 ② x의 값에 따라 참, 거짓이 결정되므로 조건이다.

02 답 ①
풀이 ① [반례] $x=-2$이면 $x<1$이지만 $x^2>1$이다.

03 답 ④
풀이 $a^2+b^2=0 \Longleftrightarrow a=0$이고 $b=0$
따라서 부정은 '$a \ne 0$ 또는 $b \ne 0$'이다.

04 답 12
풀이 조건 p의 진리집합을 P라고 하면
$P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8\}$
이때 조건 $\sim p$의 진리집합은 $P^C=\{5,\ 7\}$
따라서 구하는 모든 원소의 합은
$5+7=12$

05 답 ①
풀이 ② $P \subset R^C$이므로 $p \longrightarrow \sim r$는 참이다.
③ $P \subset Q$에서 $Q^C \subset P^C$이므로 $\sim q \longrightarrow \sim p$는 참이다.
④ $R \subset P^C$이므로 $r \longrightarrow \sim p$는 참이다.
⑤ $R \subset Q^C$이므로 $r \longrightarrow \sim q$는 참이다.

06 답 ②
풀이 '$a \ge \sqrt{3}$이면 $a^2 \ge 3$이다.'의 대우는 '$a^2<3$이면 $a<\sqrt{3}$이다.'이다.

07 답 ④
풀이 ① 역: $x^2>y^2$이면 $x>y$이다. (거짓)
[반례] $x=-3$, $y=2$이면 $x^2>y^2$이지만 $x<y$이다.
② 역: $2x^2-18=0$이면 $x=-3$이다. (거짓)
[반례] $x=3$이면 $2x^2-18=0$이지만 $x \ne -3$이다.
③ 역: $ab=0$이면 $a=0$이고 $b=0$이다. (거짓)
[반례] $a=0$, $b=1$이면 $ab=0$이지만 $a=0$이고 $b \ne 0$이다.
④ 역: $a+b>0$이고 $ab>0$이면 $a>0$이고 $b>0$이다. (참)
⑤ 역: 세 집합 A, B, C에 대하여
$(A \cap C) \subset (B \cap C)$이면 $A \subset B$이다. (거짓)
[반례] $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{1\}$, $C=\varnothing$이면
$(A \cap C) \subset (B \cap C)$이지만 $A \supset B$이다.

08 답 81
풀이 주어진 명제의 부정은
'모든 실수 x에 대하여 $x^2-18x+k \ge 0$이다.'이다.
모든 실수 x에 대하여 이차부등식
$x^2-18x+k \ge 0$이 성립해야 하므로 이차방정식
$x^2-18x+k=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=81-k \le 0 \quad \therefore k \ge 81$
따라서 k의 최솟값은 81이다.

09 답 ⑤

풀이 $p^2(n^2-1)=q^2$에서 p는 q^2의 약수이므로 $\frac{q^2}{p}$은 자연수이다.

그런데 p, q는 서로소이므로 p가 1이 아닌 자연수이면

$\frac{q^2}{p}$은 자연수가 아니다. $\therefore p=1$

따라서 $p^2(n^2-1)=q^2$에 $p=1$을 대입하면

$n^2-1=q^2$ $\therefore n^2=\boxed{q^2+1}$

자연수 k에 대하여

(i) $q=2k$일 때

$n^2=(2k)^2+1$이므로 $(2k)^2<n^2<\boxed{(2k+1)^2}$

그런데 $2k<n<2k+1$을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $q=2k+1$일 때

$n^2=(2k+1)^2+1$이므로 $\boxed{(2k+1)^2}<n^2<(2k+2)^2$

그런데 $2k+1<n<2k+2$를 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $\sqrt{n^2-1}=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)를 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않으므로 $\sqrt{n^2-1}$은 무리수이다.

10 답 2

풀이 p는 q이기 위한 충분조건이므로

$p \Longrightarrow q$ (ㄱ)

p는 $\sim r$이기 위한 필요조건이므로

$\sim r \Longrightarrow p$

$\sim r \Longrightarrow p$, $p \Longrightarrow q$이므로 삼단논법에 의하여

$\sim r \Longrightarrow q$

이것의 대우는

$\sim q \Longrightarrow r$ (ㄹ)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ의 2개이다.

11 답 2

풀이 $x^2-2ax+3\neq0 \longrightarrow x-3\neq0$이 참이므로 그 대우인 $x-3=0 \longrightarrow x^2-2ax+3=0$도 참이다.

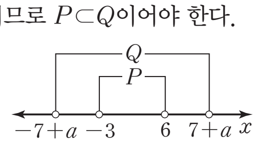
따라서 $x=3$이 $x^2-2ax+3=0$을 만족시키므로

$9-6a+3=0$ $\therefore a=2$

12 답 3

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$p \longrightarrow q$가 참이므로 $P\subset Q$이어야 한다.



$-7+a\leq-3$, $7+a\geq6$이므로

$a\leq4$, $a\geq-1$ $\therefore -1\leq a\leq4$

따라서 $m=-1$, $M=4$이므로

$m+M=3$

13 답 18

풀이 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(a+\frac{8}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right)=ab+2+8+\frac{16}{ab}=10+ab+\frac{16}{ab}$$

$$\geq10+2\sqrt{ab\times\frac{16}{ab}}=18$$

(단, 등호는 $ab=4$일 때 성립한다.)

따라서 $\left(a+\frac{8}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right)$의 최솟값은 18이다.

14 답 -13

풀이 $a=2$, $b=3$으로 놓고 코시−슈바르츠의 부등식을 적용하면

$(2^2+3^2)(x^2+y^2)\geq(2x+3y)^2$

(단, 등호는 $3x=2y$일 때 성립한다.)

이때 $x^2+y^2=1$이므로

$(2x+3y)^2\leq13$

$\therefore -\sqrt{13}\leq2x+3y\leq\sqrt{13}$

따라서 $2x+3y$의 최댓값은 $\sqrt{13}$, 최솟값은 $-\sqrt{13}$이므로

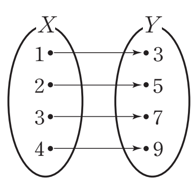
그 곱은 $\sqrt{13}\times(-\sqrt{13})=-13$

Ⅲ 함수와 그래프

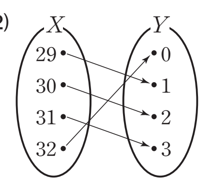
Ⅲ-1 | 함수 118-139쪽

01 답 풀이 참조

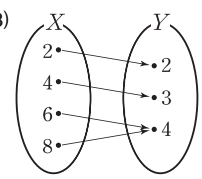
풀이 (1)



(2)



(3)



02 답 (1) × (2) ○ (3) ×

풀이 (1) X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 두 개이므로 함수가 아니다.

(2) X의 각 원소에 대하여 $1 \longrightarrow a$, $2 \longrightarrow c$, $3 \longrightarrow b$와 같이 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

(3) X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

03 답 (1) ○ (2) × (3) ○ (4) ○ (5) × (6) ×

풀이 (1) X의 각 원소에 대하여 $-1 \longrightarrow 1$, $0 \longrightarrow 0$, $1 \longrightarrow 1$과 같이 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

(2) X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

(3) X의 각 원소에 대하여 $-1 \longrightarrow 1$, $0 \longrightarrow 0$, $1 \longrightarrow 1$과 같이 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

(4) X의 각 원소에 대하여 $-1 \longrightarrow -1$, $0 \longrightarrow 0$, $1 \longrightarrow 1$과 같이 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

(5) X의 원소 -1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

(6) X의 원소 -1, 1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

04 답 (1) 정의역: $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역: $\{a, b, c, d\}$, 치역: $\{a, b, c\}$

(2) 정의역: $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역: $\{1, 3, 5, 7\}$, 치역: $\{1, 3, 5, 7\}$

(3) 정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{5, 6, 7, 8\}$, 치역: $\{5, 6, 7\}$

(4) 정의역: $\{a, b, c, d\}$, 공역: $\{1, 2, 3, 4\}$, 치역: $\{1, 3\}$

(5) 정의역: $\{2, 4, 8\}$, 공역: $\{a, b, c\}$, 치역: $\{a\}$

05 답 (1) $\{-2, 0, 2\}$ (2) $\{-1, 0, 1\}$ (3) $\{-1, 0\}$ (4) $\{1, 2\}$ (5) $\{1, 2, 3\}$

풀이 (1) X의 각 원소에 대하여 $-1 \longrightarrow -2$, $0 \longrightarrow 0$, $1 \longrightarrow 2$와 같이 대응하므로 치역은 $\{-2, 0, 2\}$이다.

(2) X의 각 원소에 대하여 $-1 \longrightarrow -1$, $0 \longrightarrow 0$, $1 \longrightarrow 1$과 같이 대응하므로 치역은 $\{-1, 0, 1\}$이다.

(3) X의 각 원소에 대하여 $-1 \longrightarrow 0$, $0 \longrightarrow -1$, $1 \longrightarrow 0$과 같이 대응하므로 치역은 $\{-1, 0\}$이다.

(4) X의 각 원소에 대하여 $-1 \longrightarrow 2$, $0 \longrightarrow 1$, $1 \longrightarrow 2$와 같이 대응하므로 치역은 $\{1, 2\}$이다.

(5) X의 각 원소에 대하여 $-1 \longrightarrow 3$, $0 \longrightarrow 2$, $1 \longrightarrow 1$과 같이 대응하므로 치역은 $\{1, 2, 3\}$이다.

06 답 (1) $\{1, 3, 5, 6, 7\}$ (2) $\{1, 2, 6, 13, 22\}$ (3) $\{-3, -1, 1, 3\}$

풀이 (1) (i) $x<3$, 즉 $x=1, 2$일 때, $f(x)=2x-1$이므로

$f(1)=2-1=1$, $f(2)=4-1=3$

(ii) $x\ge 3$, 즉 $x=3, 4, 5$일 때, $f(x)=x+2$이므로

$f(3)=3+2=5$, $f(4)=4+2=6$, $f(5)=5+2=7$

따라서 f의 치역은 $\{1, 3, 5, 6, 7\}$이다.

(2) (i) $x<2$, 즉 $x=1$일 때, $f(x)=-x+3$이므로

$f(1)=-1+3=2$

(ii) $x\ge 2$, 즉 $x=2, 3, 4, 5$일 때, $f(x)=x^2-3$이므로

$f(2)=4-3=1$, $f(3)=9-3=6$,

$f(4)=16-3=13$, $f(5)=25-3=22$

따라서 f의 치역은 $\{1, 2, 6, 13, 22\}$이다.

(3) (i) x는 홀수, 즉 $x=1, 3, 5$일 때,

$f(x)=-x+2$이므로

$f(1)=-1+2=1$, $f(3)=-3+2=-1$,

$f(5)=-5+2=-3$

(ii) x는 짝수, 즉 $x=2, 4$일 때, $f(x)=x-1$이므로

$f(2)=2-1=1$, $f(4)=4-1=3$

따라서 f의 치역은 $\{-3, -1, 1, 3\}$이다.

07 답 (1) $f=g$ (2) $f\ne g$ (3) $f=g$

풀이 (1) $f(-1)=g(-1)=-1$, $f(0)=g(0)=0$,

$f(1)=g(1)=1$ $\quad\therefore f=g$

(2) $f(-1)=1$, $f(0)=2$, $f(1)=3$,

$g(-1)=-3$, $g(0)=-1$, $g(1)=1$

$\therefore f\ne g$

(3) $f(-1)=g(-1)=2$, $f(0)=g(0)=1$,

$f(1)=g(1)=2$ $\quad\therefore f=g$

08 답 (1) $f=g$ (2) $f\neq g$ (3) $f\neq g$

풀이 (1) $f(x)=|x|$, $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$

$\therefore$ $f=g$

(2) 함수 f의 정의역은 모든 실수이고, 함수 g의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq-1$인 모든 실수$\}$이다.

즉, 두 함수의 정의역이 다르므로 $f\neq g$

(3) 함수 f의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq2$인 모든 실수$\}$이고, 함수 g의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq-2,\ x\neq2$인 모든 실수$\}$이다.

즉, 두 함수의 정의역이 다르므로 $f\neq g$

09 답 (1) $a=3$, $b=-1$ (2) $a=1$, $b=1$
(3) $a=1$, $b=-1$ (4) $a=-1$, $b=6$

풀이 (1) $f(1)=g(1)$에서 $a+b=2$

$f(2)=g(2)$에서 $2a+b=5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

(2) $f(-1)=g(-1)$에서 $a-b=0$

$f(1)=g(1)$에서 $a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

(3) $f(0)=g(0)$에서 $b=-1$

$f(1)=g(1)$에서 $a=2+b$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-1$

(4) $f(1)=g(1)$에서 $a+b=5$

$f(3)=g(3)$에서 $3a+b=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=6$

10 답 (1) ◯ (2) × (3) ◯ (4) ◯ (5) × (6) ×

풀이 (1), (3), (4) 정의역의 각 원소에 공역의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수의 그래프이다.

(2) $x>-1$일 때, x에 대응하는 y가 두 개씩 있으므로 함수의 그래프가 아니다.

(5) $x=1$일 때, x에 대응하는 y가 무수히 많으므로 함수의 그래프가 아니다.

(6) $-1<x<1$일 때, x에 대응하는 y가 두 개씩 있으므로 함수의 그래프가 아니다.

다른 풀이 (1), (3), (4) y축에 평행한 직선을 그었을 때, 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.

(2), (5), (6) y축에 평행한 직선을 그었을 때, 두 점 이상에서 만나는 직선이 있으므로 함수의 그래프가 아니다.

11 답 (1) ㄴ, ㄷ (2) ㄴ, ㄷ (3) ㄷ (4) ㄱ

풀이 (1) 직선 $y=k$ (k는 상수)와 함수의 그래프의 교점이 항상 1개인 것을 찾으면 ㄴ, ㄷ이다.

(2) 일대일함수 중에서 치역과 공역이 같은 함수, 즉 치역이 실수 전체의 집합인 함수의 그래프를 찾으면 ㄴ, ㄷ이다.

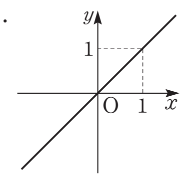
(3) 정의역과 공역이 같고 정의역의 각 원소에 그 자신이 대응하는 함수, 즉 그래프가 직선 $y=x$인 함수를 찾으면 ㄷ이다.

(4) 치역의 원소가 1개, 즉 그래프가 x축에 평행한 직선을 찾으면 ㄱ이다.

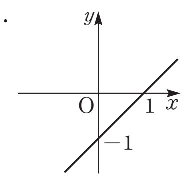
12 답 (1) ㄱ, ㄴ (2) ㄱ, ㄴ (3) ㄱ (4) ㄹ

풀이 주어진 함수의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.

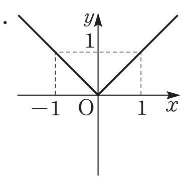
ㄱ.



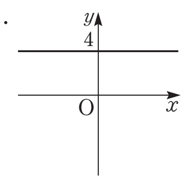
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



13 답 (1) $a=1$, $b=3$ (2) $a=2$, $b=1$
(3) $a=3$, $b=-2$

풀이 (1) $a>0$에서 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프는 증가하는 모양이므로 f는 일대일함수이다. f가 일대일대응이려면 치역과 공역이 일치해야 하므로 함수 $f(x)$의 그래프가 두 점 $(-1,\ 2)$, $(3,\ 6)$을 지나야 한다.

즉, $f(-1)=2$, $f(3)=6$이므로

$-a+b=2$, $3a+b=6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$

(2) $a>0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프가 두 점 $(-2,\ -3)$, $(2,\ 5)$를 지나야 한다.

즉, $f(-2)=-3$, $f(2)=5$이므로

$-2a+b=-3$, $2a+b=5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

(3) $a>0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프가 두 점 $(1,\ 1)$, $(6,\ 16)$을 지나야 한다.

즉, $f(1)=1$, $f(6)=16$이므로

$a+b=1$, $6a+b=16$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$

14 답 (1) $a=-2$, $b=5$ (2) $a=-1$, $b=-2$
(3) $a=-3$, $b=4$

풀이 (1) $a<0$에서 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프는 감소하는 모양이므로 f는 일대일함수이다. f가 일대일대응이려면 치역과 공역이 일치해야 하므로 함수 $f(x)$의 그래프가 두 점 $(1,\ 3)$, $(6,\ -7)$을 지나야 한다.

즉, $f(1)=3$, $f(6)=-7$이므로

$a+b=3$, $6a+b=-7$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=5$

(2) $a<0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프가 두 점 $(-6,\ 4)$, $(-1,\ -1)$을 지나야 한다.

즉, $f(-6)=4$, $f(-1)=-1$이므로

$-6a+b=4$, $-a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$

(3) $a<0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프가 두 점 $(-3,\ 13)$, $(5,\ -11)$을 지나야 한다.
즉, $f(-3)=13$, $f(5)=-11$이므로
$-3a+b=13$, $5a+b=-11$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=4$

15 답 (1) 9 (2) 16 (3) 27

풀이 (1) a의 함숫값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3개
b의 함숫값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3개
따라서 함수의 개수는 $3\times3=3^2=\underline{9}$
(2) a의 함숫값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개
b의 함숫값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개
따라서 함수의 개수는 $4\times4=4^2=16$
(3) 1의 함숫값이 될 수 있는 것은 a, b, c의 3개
2의 함숫값이 될 수 있는 것은 a, b, c의 3개
3의 함숫값이 될 수 있는 것은 a, b, c의 3개
따라서 함수의 개수는 $3\times3\times3=3^3=27$

16 답 (1) 24 (2) 20 (3) 24

풀이 (1) a의 함숫값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개
b의 함숫값이 될 수 있는 것은 a의 함숫값을 제외한 3개
c의 함숫값이 될 수 있는 것은 a, b의 함숫값을 제외한 2개
따라서 일대일함수의 개수는 $4\times3\times2=\underline{24}$
(2) 1의 함숫값이 될 수 있는 것은 s, t, u, v, w의 5개
2의 함숫값이 될 수 있는 것은 1의 함숫값을 제외한 4개
따라서 일대일함수의 개수는 $5\times4=20$
(3) a의 함숫값이 될 수 있는 것은 e, f, g, h의 4개
b의 함숫값이 될 수 있는 것은 a의 함숫값을 제외한 3개
c의 함숫값이 될 수 있는 것은 a, b의 함숫값을 제외한 2개
d의 함숫값이 될 수 있는 것은 a, b, c의 함숫값을 제외한 1개
따라서 일대일함수의 개수는 $4\times3\times2\times1=24$

17 답 (1) 6 (2) 24 (3) 120

풀이 (1) a의 함숫값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3개
b의 함숫값이 될 수 있는 것은 a의 함숫값을 제외한 2개
c의 함숫값이 될 수 있는 것은 a, b의 함숫값을 제외한 1개
따라서 일대일대응의 개수는 $3\times2\times1=\underline{6}$
(2) a의 함숫값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개
b의 함숫값이 될 수 있는 것은 a의 함숫값을 제외한 3개
c의 함숫값이 될 수 있는 것은 a, b의 함숫값을 제외한 2개
d의 함숫값이 될 수 있는 것은 a, b, c의 함숫값을 제외한 1개
따라서 일대일대응의 개수는 $4\times3\times2\times1=24$
(3) 1의 함숫값이 될 수 있는 것은 6, 7, 8, 9, 10의 5개
2의 함숫값이 될 수 있는 것은 1의 함숫값을 제외한 4개
3의 함숫값이 될 수 있는 것은 1, 2의 함숫값을 제외한 3개
4의 함숫값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 함숫값을 제외한 2개
5의 함숫값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 함숫값을 제외한 1개
따라서 일대일대응의 개수는 $5\times4\times3\times2\times1=120$

18 답 (1) 3 (2) 3 (3) 4

풀이 (1) 집합 Y의 원소의 개수가 3이므로 상수함수의 개수는 $\underline{3}$이다.
(2) 집합 Y의 원소의 개수가 3이므로 상수함수의 개수는 3이다.
(3) 집합 Y의 원소의 개수가 4이므로 상수함수의 개수는 4이다.

19 답 (1) 1 (2) 3 (3) 2 (4) 4 (5) 8 (6) 6 (7) 7 (8) 5

풀이 (1) $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(\underline{6})=\underline{1}$
(2) $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(8)=3$
(3) $(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(5)=2$
(4) $(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(7)=4$
(5) $(f\circ g)(5)=f(g(5))=f(2)=8$
(6) $(f\circ g)(6)=f(g(6))=f(1)=6$
(7) $(f\circ g)(7)=f(g(7))=f(4)=7$
(8) $(f\circ g)(8)=f(g(8))=f(3)=5$

20 답 (1) 5 (2) 3 (3) 1 (4) 6 (5) 2 (6) 0

풀이 (1) $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(\underline{2})=\underline{5}$
(2) $(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(3)=3$
(3) $(g\circ f)(5)=g(f(5))=g(4)=1$
(4) $(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(6)=6$
(5) $(f\circ g)(4)=f(g(4))=f(1)=2$
(6) $(f\circ g)(6)=f(g(6))=f(0)=0$

21 답 (1) 2 (2) 11 (3) -1 (4) 63 (5) 8 (6) 0 (7) 63 (8) 17

풀이 (1) $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(\underline{0})=\underline{2}$
(2) $(g\circ f)(-2)=g(f(-2))=g(3)=11$
(3) $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(-1)=-1$
(4) $(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(8)=63$
(5) $(f\circ g)\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(g\left(\frac{1}{3}\right)\right)=f(3)=8$
(6) $(f\circ g)(-1)=f(g(-1))=f(-1)=0$
(7) $(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(8)=63$
(8) $(g\circ g)(1)=g(g(1))=g(5)=17$

22 답 (1) 6 (2) 3 (3) 2

풀이 (1) $f(0)=0+2=2$이므로
$(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(2)$
$=2^2+2=\underline{6}$
(2) $f(-1)=-1+2=1$이므로
$(f\circ f)(-1)=f(f(-1))=f(1)$
$=1^2+2=3$
(3) $f(-2)=-2+2=0$이므로
$(f\circ f)(-2)=f(f(-2))=f(0)$
$=0+2=2$

23 답 (1) 3 (2) -3 (3) 5

풀이 (1) $f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2=2$이므로

$(f\circ f)(\sqrt{2})=f(f(\sqrt{2}))=f(2)=2\times2-1=\underline{3}$

(2) $f(0)=2\times0-1=-1$이므로

$(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(-1)=2\times(-1)-1=-3$

(3) $f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2=3$이므로

$(f\circ f)(\sqrt{3})=f(f(\sqrt{3}))=f(3)=2\times3-1=5$

24 답 (1) $-12x-7$ (2) $-12x+23$ (3) $36x+35$

풀이 (1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(6x+5)$

$=-2(6x+5)+3$

$=\underline{-12x-7}$

(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-2x+3)$

$=6(-2x+3)+5$

$=-12x+23$

(3) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(6x+5)$

$=6(6x+5)+5$

$=36x+35$

25 답 (1) $9x^2-9x+2$ (2) $3x^2-3x-1$ (3) x^4-2x^3+x

풀이 (1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x-1)$

$=(3x-1)^2-(3x-1)$

$=(9x^2-6x+1)-(3x-1)$

$=\underline{9x^2-9x+2}$

(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-x)$

$=3(x^2-x)-1$

$=3x^2-3x-1$

(3) $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(x^2-x)$

$=(x^2-x)^2-(x^2-x)$

$=(x^4-2x^3+x^2)-(x^2-x)$

$=x^4-2x^3+x$

26 답 (1) $h(x)=3x-3$ (2) $h(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ (3) $h(x)=-\frac{1}{2}x+6$ (4) $h(x)=x^2-6$

풀이 (1) $(g\circ h)(x)=g(h(x))=h(x)+4$이므로

$h(x)+4=3x+1$

$\therefore h(x)=\underline{3x-3}$

(2) $(g\circ h)(x)=g(h(x))=2h(x)+1$이므로

$2h(x)+1=x-2$

$\therefore h(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

(3) $(g\circ h)(x)=g(h(x))=-2h(x)+7$이므로

$-2h(x)+7=x-5$

$\therefore h(x)=-\frac{1}{2}x+6$

(4) $(g\circ h)(x)=g(h(x))=h(x)+2$이므로

$h(x)+2=x^2-4$

$\therefore h(x)=x^2-6$

27 답 (1) $h(x)=3x-11$ (2) $h(x)=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ (3) $h(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ (4) $h(x)=x^2-4x$

풀이 (1) $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(x+4)$이므로

$h(x+4)=3x+1$

$x+4=t$로 놓으면 $x=t-4$이므로

$h(t)=3(t-4)+1=3t-11$

$\therefore h(x)=\underline{3x-11}$

(2) $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(2x+1)$이므로

$h(2x+1)=x-2$

$2x+1=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$이므로

$h(t)=\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\right)-2=\frac{1}{2}t-\frac{5}{2}$

$\therefore h(x)=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

(3) $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(-2x+7)$이므로

$h(-2x+7)=x-5$

$-2x+7=t$로 놓으면 $x=-\frac{1}{2}t+\frac{7}{2}$이므로

$h(t)=\left(-\frac{1}{2}t+\frac{7}{2}\right)-5=-\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}$

$\therefore h(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

(4) $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(x+2)$이므로

$h(x+2)=x^2-4$

$x+2=t$로 놓으면 $x=t-2$이므로

$h(t)=(t-2)^2-4=t^2-4t$

$\therefore h(x)=x^2-4x$

28 답 (1) 16 (2) 17 (3) 9 (4) 5 (5) 5 (6) 1

풀이 (1) $x-4=2$에서 $x=6$

$f(x-4)=2x+4$에 $x=6$을 대입하면

$f(2)=2\times6+4=\underline{16}$

(2) $2x-6=2$에서 $x=4$

$f(2x-6)=3x+5$에 $x=4$를 대입하면

$f(2)=3\times4+5=17$

(3) $3x-1=2$에서 $x=1$

$f(3x-1)=-x+10$에 $x=1$을 대입하면

$f(2)=-1+10=9$

(4) $\frac{4x+2}{9}=2$에서 $4x+2=18$, $4x=16$ $\therefore x=4$

$f\left(\frac{4x+2}{9}\right)=x+1$에 $x=4$를 대입하면

$f(2)=4+1=5$

(5) $\frac{2x+6}{5}=2$에서 $2x+6=10$, $2x=4$ $\therefore x=2$

$f\left(\frac{2x+6}{5}\right)=3x^2-7$에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=3\times2^2-7=5$

(6) $\dfrac{8-2x}{5}=2$에서 $8-2x=10$, $2x=-2$ $\quad\therefore x=-1$

$f\left(\dfrac{8-2x}{5}\right)=x^2+x+1$에 $x=-1$을 대입하면

$f(2)=(-1)^2+(-1)+1=1$

29 답 (1) 2 (2) 1 (3) 4 (4) 1 (5) 2 (6) 5

풀이 (1) $(f\circ g\circ f)(1)=f(g(f(1)))=f(g(2))=f(1)=\underline{2}$

(2) $(g\circ f\circ g)(2)=g(f(g(2)))=g(f(1))=g(2)=1$

(3) $(f\circ g\circ g)(3)=f(g(g(3)))=f(g(3))=f(3)=4$

(4) $(g\circ f\circ f)(4)=g(f(f(4)))=g(f(1))=g(2)=1$

(5) $(f\circ f\circ g)(5)=f(f(g(5)))=f(f(4))=f(1)=2$

(6) $(g\circ g\circ f)(5)=g(g(f(5)))=g(g(5))=g(4)=5$

30 답 (1) 7 (2) 52 (3) 13 (4) -3 (5) 242 (6) 98 (7) $\dfrac{5}{2}$ (8) -7

풀이 (1) $(h\circ g\circ f)(1)=h(g(f(1)))=h(g(2))$

$=h(5)=\underline{7}$

(2) $(h\circ f\circ g)(2)=h(f(g(2)))=h(f(5))$

$=h(50)=52$

(3) $(g\circ h\circ f)(-1)=g(h(f(-1)))=g(h(2))$

$=g(4)=13$

(4) $(g\circ f\circ h)(-2)=g(f(h(-2)))=g(f(0))$

$=g(0)=-3$

(5) $(f\circ h\circ g)(3)=f(h(g(3)))=f(h(9))$

$=f(11)=242$

(6) $(f\circ g\circ h)(-3)=f(g(h(-3)))$

$=f(g(-1))=f(-7)=98$

(7) $(h\circ f\circ f)\left(\dfrac{1}{2}\right)=h\left(f\left(f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)\right)=h\left(f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$

$=h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{2}$

(8) $(g\circ g\circ h)\left(-\dfrac{3}{2}\right)=g\left(g\left(h\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right)\right)=g\left(g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$

$=g(-1)=-7$

31 답 (1) c (2) d (3) e (4) d (5) e (6) e

풀이 그림에서 $f(a)=b$, $f(b)=c$, $f(c)=d$, $f(d)=e$

(1) $(f\circ f)(a)=f(f(a))=f(b)=\underline{c}$

(2) $(f\circ f)(b)=f(f(b))=f(c)=d$

(3) $(f\circ f)(c)=f(f(c))=f(d)=e$

(4) $(f\circ f\circ f)(a)=f(f(f(a)))=f(f(b))$

$=f(c)=d$

(5) $(f\circ f\circ f)(b)=f(f(f(b)))=f(f(c))$

$=f(d)=e$

(6) $(f\circ f\circ f\circ f)(a)=f(f(f(f(a))))=f(f(f(b)))$

$=f(f(c))=f(d)=e$

32 답 (1) -1 (2) 2 (3) 3 (4) $\dfrac{3}{2}$

풀이 (1) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x-2)$

$=a(3x-2)+2=3ax-2a+2$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+2)$

$=3(ax+2)-2=3ax+4$

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이므로

$3ax-2a+2=3ax+4 \quad\therefore a=\underline{-1}$

(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x+a)$

$=2(3x+a)+1=6x+2a+1$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)$

$=3(2x+1)+a=6x+3+a$

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이므로

$6x+2a+1=6x+3+a \quad\therefore a=2$

(3) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x+4)$

$=-\dfrac{1}{2}(-x+4)+a$

$=\dfrac{1}{2}x-2+a$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(-\dfrac{1}{2}x+a\right)$

$=-\left(-\dfrac{1}{2}x+a\right)+4$

$=\dfrac{1}{2}x-a+4$

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이므로

$\dfrac{1}{2}x-2+a=\dfrac{1}{2}x-a+4 \quad\therefore a=3$

(4) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2ax-1)$

$=-2(2ax-1)+a=-4ax+2+a$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-2x+a)$

$=2a(-2x+a)-1=-4ax+2a^2-1$

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이므로

$-4ax+2+a=-4ax+2a^2-1$

$2+a=2a^2-1$, $2a^2-a-3=0$

$(2a-3)(a+1)=0 \quad\therefore a=\dfrac{3}{2}$ 또는 $a=-1$

그런데 $a=-1$이면 $f=g$이므로

$a=\dfrac{3}{2}$

33 답 (1) $4x^2-4x+1$ (2) $4x^2-4x+1$ (3) $2x^2-2$ (4) $4x^2-1$ (5) $4x^2-8x+4$ (6) $4x-1$

풀이 (1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x)=2x-1$이므로

$(h\circ(g\circ f))(x)=h((g\circ f)(x))=h(2x-1)$

$=(2x-1)^2=\underline{4x^2-4x+1}$

(2) $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(x-1)=(x-1)^2$이므로

$((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))=(h\circ g)(2x)$

$=(2x-1)^2=4x^2-4x+1$

(3) $(f\circ g\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))=(f\circ g)(x^2)$

$=f(g(x^2))=f(x^2-1)$

$=2(x^2-1)=2x^2-2$

(4) $(g\circ h\circ f)(x)=(g\circ h)(f(x))=(g\circ h)(2x)$
$=g(h(2x))=g(4x^2)$
$=4x^2-1$

(5) $(h\circ f\circ g)(x)=(h\circ f)(g(x))=(h\circ f)(x-1)$
$=h(f(x-1))=h(2x-2)$
$=(2x-2)^2=4x^2-8x+4$

(6) $(g\circ f\circ f)(x)=(g\circ f)(f(x))=(g\circ f)(2x)$
$=g(f(2x))=g(4x)=4x-1$

34 답 (1) 11 (2) -9 (3) 1024 (4) $\frac{1}{1024}$

풀이 (1) $f^1(x)=x+1$
$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$
$=f(x+1)=(x+1)+1=x+2$
$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$
$=f(x+2)=(x+2)+1=x+3$
$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))$
$=f(x+3)=(x+3)+1=x+4$
$\vdots$
따라서 $f^n(x)=x+n$이므로 $f^{10}(1)=1+10=\underline{11}$

(2) $f^1(x)=x-1$
$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$
$=f(x-1)=(x-1)-1=x-2$
$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$
$=f(x-2)=(x-2)-1=x-3$
$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))$
$=f(x-3)=(x-3)-1=x-4$
$\vdots$
따라서 $f^n(x)=x-n$이므로 $f^{10}(1)=1-10=-9$

(3) $f^1(x)=2x$
$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$
$=f(2x)=2\times 2x=2^2x$
$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$
$=f(2^2x)=2\times 2^2x=2^3x$
$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))$
$=f(2^3x)=2\times 2^3x=2^4x$
$\vdots$
따라서 $f^n(x)=2^nx$이므로 $f^{10}(1)=2^{10}=1024$

(4) $f^1(x)=\frac{x}{2}$
$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$
$=f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{x}{2}=\frac{x}{2^2}$
$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$
$=f\left(\frac{x}{2^2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{x}{2^2}=\frac{x}{2^3}$
$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))$
$=f\left(\frac{x}{2^3}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{x}{2^3}=\frac{x}{2^4}$
$\vdots$
따라서 $f^n(x)=\frac{x}{2^n}$이므로 $f^{10}(1)=\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}$

35 답 (1) × (2) × (3) ○

풀이 (1) Y의 원소 d에 대응하는 X의 원소가 없으므로 함수 f는 일대일대응이 아니다.
따라서 역함수가 존재하지 않는다.
(2) 함수 f가 일대일대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다.
(3) 함수 f가 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

36 답 (1) ○ (2) × (3) × (4) ×

풀이 (1) 주어진 함수가 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
(2), (3), (4) 주어진 함수가 일대일대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다.

37 답 (1) 4 (2) 5 (3) 1 (4) 2 (5) 3

풀이 (1) 그림에서 $f(4)=2$이므로 $f^{-1}(2)=\underline{4}$
(2) 그림에서 $f(5)=4$이므로 $f^{-1}(4)=5$
(3) 그림에서 $f(1)=6$이므로 $f^{-1}(6)=1$
(4) 그림에서 $f(2)=8$이므로 $f^{-1}(8)=2$
(5) 그림에서 $f(3)=10$이므로 $f^{-1}(10)=3$

38 답 (1) 2 (2) 1 (3) 2

풀이 (1) $f^{-1}(3)=a$라고 하면 $f(a)=3$이므로
$4a-5=3,\ a=2$ $\quad\therefore f^{-1}(3)=\underline{2}$
(2) $f^{-1}(3)=a$라고 하면 $f(a)=3$이므로
$6a-3=3,\ a=1$ $\quad\therefore f^{-1}(3)=1$
(3) $f^{-1}(3)=a$라고 하면 $f(a)=3$이므로
$-2a+7=3,\ a=2$ $\quad\therefore f^{-1}(3)=2$

39 답 (1) 3 (2) -17 (3) -2 (4) 8

풀이 (1) $f^{-1}(a)=1$에서 $f(1)=a$이므로 $a=\underline{3}$
(2) $f^{-1}(a)=-3$에서 $f(-3)=a$이므로 $a=-17$
(3) $f^{-1}(a)=0$에서 $f(0)=a$이므로 $a=-2$
(4) $f^{-1}(a)=2$에서 $f(2)=a$이므로 $a=8$

40 답 (1) 3 (2) -1 (3) 0 (4) -5

풀이 (1) $f^{-1}(-1)=2$에서 $f(2)=-1$이므로
$-4+a=-1$ $\quad\therefore a=\underline{3}$
(2) $f^{-1}(1)=-1$에서 $f(-1)=1$이므로
$2+a=1$ $\quad\therefore a=-1$
(3) $f^{-1}(-2)=1$에서 $f(1)=-2$이므로
$-2+a=-2$ $\quad\therefore a=0$
(4) $f^{-1}(-1)=-2$에서 $f(-2)=-1$이므로
$4+a=-1$ $\quad\therefore a=-5$

41 답 (1) $a=4,\ b=-2$ (2) $a=-2,\ b=5$
(3) $a=2,\ b=7$ (4) $a=1,\ b=3$
(5) $a=3,\ b=3$

풀이 (1) $f^{-1}(2)=1$에서 $f(1)=2$이므로
$a+b=2$ …… ㉠
$f^{-1}(6)=2$에서 $f(2)=6$이므로
$2a+b=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\underline{4}$, $b=\underline{-2}$

(2) $f(2)=1$이므로

$2a+b=1$ …… ㉠

$f^{-1}(-1)=3$에서 $f(3)=-1$이므로

$3a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=5$

(3) $f(-3)=1$이므로

$-3a+b=1$ …… ㉠

$f^{-1}(3)=-2$에서 $f(-2)=3$이므로

$-2a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=7$

(4) $f^{-1}(1)=-2$에서 $f(-2)=1$이므로

$-2a+b=1$ …… ㉠

$f^{-1}(5)=2$에서 $f(2)=5$이므로

$2a+b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$

(5) $f^{-1}(2)=-\frac{1}{3}$에서 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=2$이므로

$-\frac{1}{3}a+b=2$ …… ㉠

$f^{-1}(4)=\frac{1}{3}$에서 $f\left(\frac{1}{3}\right)=4$이므로

$\frac{1}{3}a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=3$

42 답 (1) $y=2x+6$ (2) $y=\frac{1}{2}x+2$ (3) $y=-3x+6$ (4) $y=\sqrt{x}\ (x\geq 0)$ (5) $y=\sqrt{\frac{x-1}{2}}\ (x\geq 1)$

풀이 (1) $y=\frac{1}{2}x-3$의 x와 y를 바꾸면

$x=\frac{1}{2}y-3$

y를 x에 대한 식으로 나타내면

$\frac{1}{2}y=x+3$ $\quad\therefore y=\underline{2x+6}$

(2) $y=2x-4$의 x와 y를 바꾸면

$x=2y-4$

y를 x에 대한 식으로 나타내면

$2y=x+4$ $\quad\therefore y=\frac{1}{2}x+2$

(3) $y=-\frac{1}{3}x+2$의 x와 y를 바꾸면

$x=-\frac{1}{3}y+2$

y를 x에 대한 식으로 나타내면

$\frac{1}{3}y=-x+2$ $\quad\therefore y=-3x+6$

(4) $y=x^2$의 x와 y를 바꾸면

$x=y^2$

$y\geq 0$이므로 y를 x에 대한 식으로 나타내면

$y=\sqrt{x}$

이때 $y=x^2$의 치역이 역함수의 정의역이므로 구하는 역함수는 $y=\sqrt{x}\ (x\geq 0)$

(5) $y=2x^2+1$의 x와 y를 바꾸면

$x=2y^2+1$

$y\geq 0$이므로 y를 x에 대한 식으로 나타내면

$2y^2=x-1$, $y^2=\frac{x-1}{2}$

$\therefore y=\sqrt{\frac{x-1}{2}}$

이때 $y=2x^2+1$의 치역이 역함수의 정의역이므로 구하는 함수의 역함수는 $y=\sqrt{\frac{x-1}{2}}\ (x\geq 1)$

43 답 (1) 1 (2) 3 (3) 2 (4) 4

풀이 (1) $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$이므로

$(g\circ f)^{-1}(1)=(f^{-1}\circ g^{-1})(1)=f^{-1}(g^{-1}(1))$
$=f^{-1}(2)=\underline{1}$

(2) $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$이므로

$(g\circ f)^{-1}(3)=(f^{-1}\circ g^{-1})(3)=f^{-1}(g^{-1}(3))$
$=f^{-1}(4)=3$

(3) $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$이므로

$(f\circ g)^{-1}(2)=(g^{-1}\circ f^{-1})(2)=g^{-1}(f^{-1}(2))$
$=g^{-1}(1)=2$

(4) $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$이므로

$(f\circ g)^{-1}(4)=(g^{-1}\circ f^{-1})(4)=g^{-1}(f^{-1}(4))$
$=g^{-1}(3)=4$

44 답 (1) 8 (2) 11 (3) 2 (4) 1 (5) 5 (6) -1

풀이 (1) $f^{-1}\circ f=I$이므로

$(f^{-1}\circ f\circ g)(1)=(I\circ g)(1)=g(1)=\underline{8}$

(2) $f\circ f^{-1}=I$이므로

$(g\circ f\circ f^{-1})(2)=(g\circ I)(2)=g(2)=11$

(3) $g^{-1}\circ g=I$이므로

$(f\circ g^{-1}\circ g)(5)=(f\circ I)(5)=f(5)=2$

(4) $g\circ g^{-1}=I$이므로

$(g\circ g^{-1}\circ f)(4)=(I\circ f)(4)=f(4)=1$

(5) $f^{-1}\circ f=I$이므로

$(f^{-1}\circ f\circ g\circ f)(3)=(I\circ g\circ f)(3)$
$=(g\circ f)(3)=g(f(3))$
$=g(0)=5$

(6) $g\circ g^{-1}=I$이므로

$(f\circ g\circ g^{-1}\circ g)(-1)=(f\circ I\circ g)(-1)$
$=(f\circ g)(-1)=f(g(-1))$
$=f(2)=-1$

45 답 (1) 2 (2) 0 (3) 13 (4) $\frac{1}{2}$ (5) 5

풀이 (1) $(f^{-1}\circ g)^{-1}(1)=(g^{-1}\circ f)(1)=g^{-1}(f(1))$
$=g^{-1}(1)$

$g^{-1}(1)=k$로 놓으면 $g(k)=1$이므로

$k-1=1$ $\quad\therefore k=\underline{2}$

$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(1)=g^{-1}(1)=\underline{2}$

(2) $(f\circ g^{-1})^{-1}(1)=(g\circ f^{-1})(1)=g(f^{-1}(1))$

$f^{-1}(1)=k$로 놓으면 $f(k)=1$이므로

$6k-5=1,\ 6k=6 \qquad \therefore k=1$

$\therefore (f\circ g^{-1})^{-1}(1)=g(1)=0$

(3) $(g\circ f^{-1})^{-1}(2)=(f\circ g^{-1})(2)=f(g^{-1}(2))$

$g^{-1}(2)=k$로 놓으면 $g(k)=2$이므로

$k-1=2 \qquad \therefore k=3$

$\therefore (g\circ f^{-1})^{-1}(2)=f(3)=13$

(4) $(g^{-1}\circ f)^{-1}(-1)=(f^{-1}\circ g)(-1)=f^{-1}(g(-1))$

$=f^{-1}(-2)$

$f^{-1}(-2)=k$로 놓으면 $f(k)=-2$

$6k-5=-2,\ 6k=3 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

$\therefore (g^{-1}\circ f)^{-1}(-1)=f^{-1}(-2)=\frac{1}{2}$

(5) $(g\circ g)^{-1}(3)=(g^{-1}\circ g^{-1})(3)=g^{-1}(g^{-1}(3))$

$g^{-1}(3)=k$로 놓으면 $g(k)=3$

$k-1=3 \qquad \therefore k=4$

$g^{-1}(4)=l$로 놓으면 $g(l)=4$

$l-1=4 \qquad \therefore l=5$

$\therefore (g\circ g)^{-1}(3)=g^{-1}(4)=5$

46 답 (1) -3 (2) 1 (3) 11 (4) 15 (5) 0

풀이 (1) $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$이므로

$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(1)$

$=(I\circ g^{-1}\circ f)(1)$

$=(g^{-1}\circ f)(1)$

$=g^{-1}(f(1))$

$=g^{-1}(5)$

$g^{-1}(5)=k$로 놓으면 $g(k)=5$이므로

$-k+2=5 \qquad \therefore k=\underline{-3}$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1)=g^{-1}(5)=\underline{-3}$

(2) $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$이므로

$(f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f)(3)=(f\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(3)$

$=(f\circ g^{-1}\circ I)(3)$

$=(f\circ g^{-1})(3)$

$=f(g^{-1}(3))$

$g^{-1}(3)=k$로 놓으면 $g(k)=3$이므로

$-k+2=3 \qquad \therefore k=-1$

$\therefore (f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f)(3)=f(g^{-1}(3))$

$=f(-1)=1$

(3) $(f^{-1}\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f$이므로

$(f\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(-2)$

$=(f\circ g^{-1}\circ f\circ f^{-1})(-2)$

$=(f\circ g^{-1}\circ I)(-2)$

$=(f\circ g^{-1})(-2)=f(g^{-1}(-2))$

$g^{-1}(-2)=k$로 놓으면 $g(k)=-2$이므로

$-k+2=-2 \qquad \therefore k=4$

$\therefore (f\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(-2)=f(g^{-1}(-2))$

$=f(4)=11$

(4) $(f^{-1}\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f$이므로

$(g\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ g^{-1})(-4)$

$=(g\circ g^{-1}\circ f\circ g^{-1})(-4)$

$=(I\circ f\circ g^{-1})(-4)$

$=(f\circ g^{-1})(-4)$

$=f(g^{-1}(-4))$

$g^{-1}(-4)=k$로 놓으면 $g(k)=-4$이므로

$-k+2=-4 \qquad \therefore k=6$

$\therefore (g\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ g^{-1})(-4)=f(g^{-1}(-4))$

$=f(6)=15$

(5) $(f\circ g^{-1})^{-1}=g\circ f^{-1}$이므로

$(g^{-1}\circ(f\circ g^{-1})^{-1}\circ g)(-1)$

$=(g^{-1}\circ g\circ f^{-1}\circ g)(-1)$

$=(I\circ f^{-1}\circ g)(-1)$

$=(f^{-1}\circ g)(-1)$

$=f^{-1}(g(-1))$

$=f^{-1}(3)$

$f^{-1}(3)=k$로 놓으면 $f(k)=3$

$2k+3=3 \qquad \therefore k=0$

$\therefore (g^{-1}\circ(f\circ g^{-1})^{-1}\circ g)(-1)=f^{-1}(3)=0$

47 답 (1) -3 (2) 1 (3) 1 (4) 3

풀이 (1) $(g\circ f)(x)=x$에서 $f^{-1}=g$이므로

$(f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(1)=(g\circ g^{-1}\circ f)(1)$

$=(I\circ f)(1)$

$=f(1)=\underline{-3}$

(2) $(g\circ f)(x)=x$에서 $f^{-1}=g$이므로

$(f\circ g^{-1}\circ f^{-1})(2)=(f\circ g^{-1}\circ g)(2)$

$=(f\circ I)(2)$

$=f(2)=1$

(3) $(g\circ f)(x)=x$에서 $g^{-1}=f$이므로

$(g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(-3)=(f\circ f^{-1}\circ g)(-3)$

$=(I\circ g)(-3)$

$=g(-3)$

$g(-3)=k$로 놓으면 $f(k)=-3$이므로

$4k-7=-3,\ 4k=4$

$\therefore k=\underline{1}$

$\therefore (g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(-3)=g(-3)=\underline{1}$

(4) $(g\circ f)(x)=x$에서 $g^{-1}=f$이므로

$(g\circ f^{-1}\circ g^{-1})(5)=(g\circ f^{-1}\circ f)(5)$

$=(g\circ I)(5)$

$=g(5)$

$g(5)=k$로 놓으면 $f(k)=5$이므로

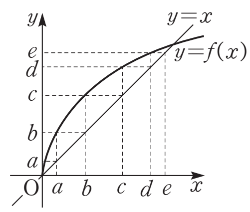
$4k-7=5,\ 4k=12$

$\therefore k=3$

$\therefore (g\circ f^{-1}\circ g^{-1})(5)=g(5)=3$

48 답 (1) a (2) b (3) c (4) a (5) b

풀이



그림에서 $f^{-1}(b)=a$, $f^{-1}(c)=b$, $f^{-1}(d)=c$, $f^{-1}(e)=d$

(1) $(f\circ f)^{-1}(c)=(f^{-1}\circ f^{-1})(c)$
$=f^{-1}(f^{-1}(c))$
$=f^{-1}(b)=a$

(2) $(f\circ f)^{-1}(d)=(f^{-1}\circ f^{-1})(d)$
$=f^{-1}(f^{-1}(d))$
$=f^{-1}(c)=b$

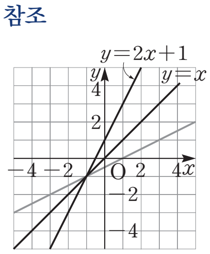
(3) $(f\circ f)^{-1}(e)=(f^{-1}\circ f^{-1})(e)$
$=f^{-1}(f^{-1}(e))$
$=f^{-1}(d)=c$

(4) $(f\circ f\circ f)^{-1}(d)=(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(d)$
$=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(d)))$
$=f^{-1}(f^{-1}(c))$
$=f^{-1}(b)=a$

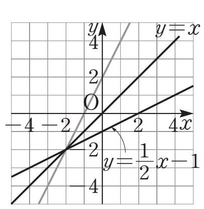
(5) $(f\circ f\circ f)^{-1}(e)=(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(e)$
$=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(e)))$
$=f^{-1}(f^{-1}(d))$
$=f^{-1}(c)=b$

49 답 풀이 참조

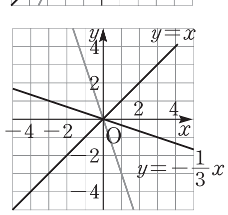
풀이 (1)



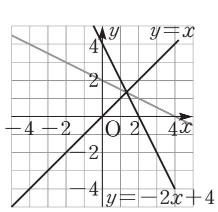
(2)



(3)



(4)



50 답 (1) $(4,\ 4)$ (2) $(-3,\ -3)$ (3) $(1,\ 1)$ (4) $(1,\ 1)$ (5) $(3,\ 3)$

풀이 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로 $f(x)=x$에서

(1) $2x-4=x$ $\quad\therefore x=4$
따라서 구하는 교점의 좌표는 $(4,\ 4)$이다.

(2) $\frac{2}{3}x-1=x$, $\frac{1}{3}x=-1$ $\quad\therefore x=-3$
따라서 구하는 교점의 좌표는 $(-3,\ -3)$이다.

(3) $-4x+5=x$, $5x=5$ $\quad\therefore x=1$
따라서 구하는 교점의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.

(4) $x^2=x$, $x(x-1)=0$
$x>0$이므로 $x=1$
따라서 구하는 교점의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.

(5) $x^2-6=x$, $x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$
$x\geq 0$이므로 $x=3$
따라서 구하는 교점의 좌표는 $(3,\ 3)$이다.

01 답 ⑤

풀이 ⑤ X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

02 답 1

풀이 $f(-2)=-(-2)^2+1=-3$, $f(2)=2+2=4$이므로
$f(-2)+f(2)=1$

03 답 20

풀이 $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, $\cdots$
이므로 3^n의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 반복된다.
따라서 함수 f의 치역은 $\{1, 3, 7, 9\}$이므로 모든 원소의 합은
$1+3+7+9=20$

04 답 $\{-1\}$, $\{2\}$, $\{-1, 2\}$

풀이 $f=g$이면 $2x^2-1=2x+3$이므로
$2x^2-2x-4=0$, $(x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
따라서 구하는 집합 X는 공집합이 아닌 $\{-1, 2\}$의 부분집합이므로 $\{-1\}$, $\{2\}$, $\{-1, 2\}$

05 답 ②

풀이 ①, ③, ④, ⑤ x에 대응하는 y가 2개 이상인 것이 있으므로 함수의 그래프가 아니다.

06 답 28

풀이 $a=4\times3\times2\times1=24$, $b=4$이므로
$a+b=28$

07 답 1

풀이 $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(2)=2-a$
즉, $2-a=a$이므로 $a=1$

08 답 3

풀이 $\dfrac{3x+1}{2}=5$에서 $3x+1=10$, $3x=9$ $\quad\therefore x=3$
$f\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)=x^2-6$에 $x=3$을 대입하면
$f(5)=3^2-6=3$

09 답 2

풀이 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=a(-x+4)+3$
$\qquad\qquad=-ax+4a+3$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=-(ax+3)+4$
$\qquad\qquad=-ax+1$
$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이므로
$-ax+4a+3=-ax+1$ $\quad\therefore a=-\dfrac{1}{2}$
따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+3$이므로
$f(2)=-1+3=2$

10 답 2

풀이 $f^2(x)=f(f(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x}$
$f^3(x)=f(f^2(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=x$
$f^4(x)=f(f^3(x))=f(x)$
$\vdots$
$\therefore f^{200}(-1)=f^{3\times66+2}(-1)=f^2(-1)$
$\qquad=\dfrac{-1-1}{-1}=2$

11 답 2

풀이 함수 $f(x)=-2x+1$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 공역과 치역이 같아야 한다.
이때 함수 $f(x)$의 그래프의 기울기는 -2로 감소하는 함수이므로
$f(-1)=b$에서 $-2\times(-1)+1=b$ $\quad\therefore b=3$
$f(1)=a$에서 $-2\times1+1=a$ $\quad\therefore a=-1$
$\therefore a+b=-1+3=2$

12 답 5

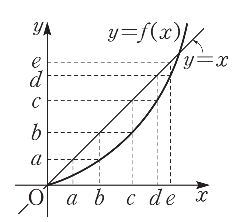
풀이 $(f\circ g^{-1})(1)=f(g^{-1}(1))=f(2)=3$
$(g\circ f)^{-1}(4)=(f^{-1}\circ g^{-1})(4)=f^{-1}(g^{-1}(4))$
$\qquad=f^{-1}(3)=2$
$\therefore (f\circ g^{-1})(1)+(g\circ f)^{-1}(4)=3+2=5$

13 답 -2

풀이 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(1)$
$\qquad=(I\circ g^{-1}\circ f)(1)$
$\qquad=(g^{-1}\circ f)(1)$
$\qquad=g^{-1}(f(1))=g^{-1}(2)$
$g^{-1}(2)=k$로 놓으면 $g(k)=2$이므로
$2k+6=2$, $2k=-4$ $\quad\therefore k=-2$
$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1)=g^{-1}(2)=-2$

14 답 ⑤

풀이



그림에서 $f^{-1}(b)=c$, $f^{-1}(c)=d$, $f^{-1}(d)=e$
$\therefore (f\circ f\circ f)^{-1}(b)=(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(b)$
$\qquad=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(b)))=f^{-1}(f^{-1}(c))$
$\qquad=f^{-1}(d)=e$

다른 풀이 $(f\circ f\circ f)^{-1}(b)=k$라고 하면
$(f\circ f\circ f)(k)=b$
그림에서 $f(e)=d$, $f(d)=c$, $f(c)=b$이므로
$(f\circ f\circ f)(e)=f(f(f(e)))=f(f(d))$
$\qquad=f(c)=b$
$\therefore (f\circ f\circ f)^{-1}(b)=e$

Ⅲ-2 | 유리함수 142-157쪽

01 답 (1) 분 (2) 다 (3) 다 (4) 분 (5) 분

풀이 (1), (4), (5) 분모에 x가 있으므로 분수식이다.

02 답 (1) $\frac{3x+5}{(x+1)(x+2)}$ (2) $\frac{4x-3}{x(x-3)}$ (3) $\frac{x+5}{(x-1)(x+1)}$ (4) $\frac{2x}{(x+2)(x-2)}$ (5) $\frac{10}{x(x-5)(x+5)}$

풀이 (1) $\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{2(x+2)+(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{3x+5}{(x+1)(x+2)}$

(2) $\frac{1}{x}+\frac{3}{x-3}=\frac{(x-3)+3x}{x(x-3)}=\frac{4x-3}{x(x-3)}$

(3) $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{3(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+5}{(x-1)(x+1)}$

(4) $\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2-x}=\frac{(2-x)-(2+x)}{(2+x)(2-x)}=\frac{2x}{(x+2)(x-2)}$

(5) $\frac{1}{x(x-5)}-\frac{1}{x(x+5)}=\frac{(x+5)-(x-5)}{x(x-5)(x+5)}=\frac{10}{x(x-5)(x+5)}$

03 답 (1) $\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}$ (2) x (3) $\frac{x-1}{(x+1)(x+3)}$

풀이 (1) $\frac{x-2}{x^2-x}\times\frac{x^2+x}{x^2-4}=\frac{x-2}{x(x-1)}\times\frac{x(x+1)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}$

(2) $\frac{x^2-25}{x^2+5x}\times\frac{x^2}{x-5}=\frac{(x+5)(x-5)}{x(x+5)}\times\frac{x^2}{x-5}=x$

(3) $\frac{x-3}{x^2-x-2}\times\frac{x^2-3x+2}{x^2-9}$

$=\frac{x-3}{(x+1)(x-2)}\times\frac{(x-1)(x-2)}{(x+3)(x-3)}$

$=\frac{x-1}{(x+1)(x+3)}$

04 답 (1) $\frac{x-4}{x+2}$ (2) $\frac{x+5}{x-5}$ (3) $\frac{x+1}{x-2}$

풀이 (1) $\frac{x-1}{x+4}\div\frac{x^2+x-2}{x^2-16}=\frac{x-1}{x+4}\times\frac{(x+4)(x-4)}{(x+2)(x-1)}=\frac{x-4}{x+2}$

(2) $\frac{x^2+x-20}{x^2-x-20}\div\frac{x-4}{x+4}=\frac{(x+5)(x-4)}{(x+4)(x-5)}\times\frac{x+4}{x-4}=\frac{x+5}{x-5}$

(3) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x+6}\div\frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3}$

$=\frac{(x+1)(x+4)}{(x-2)(x-3)}\times\frac{(x-1)(x-3)}{(x+4)(x-1)}=\frac{x+1}{x-2}$

05 답 (1) $\frac{2x-1}{(x+4)(x+1)(x-1)}$ (2) $\frac{10x+9}{(2x+1)(x+2)(x-3)}$ (3) $\frac{1}{2x+1}$ (4) 1 (5) $\frac{5x-1}{5x+3}$

풀이 (1) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}-\frac{x+1}{x^2+3x-4}$

$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)(x-1)}-\frac{x+1}{(x+4)(x-1)}$

$=\frac{(x+4)(x-1)+(x+4)-(x+1)^2}{(x+4)(x+1)(x-1)}$

$=\frac{(x^2+3x-4)+(x+4)-(x^2+2x+1)}{(x+4)(x+1)(x-1)}$

$=\frac{2x-1}{(x+4)(x+1)(x-1)}$

(2) $\frac{x-1}{x^2-x-6}-\frac{2x}{2x^2+5x+2}+\frac{5}{2x^2-5x-3}$

$=\frac{x-1}{(x+2)(x-3)}-\frac{2x}{(2x+1)(x+2)}+\frac{5}{(2x+1)(x-3)}$

$=\frac{(x-1)(2x+1)-2x(x-3)+5(x+2)}{(2x+1)(x+2)(x-3)}$

$=\frac{(2x^2-x-1)-(2x^2-6x)+(5x+10)}{(2x+1)(x+2)(x-3)}$

$=\frac{10x+9}{(2x+1)(x+2)(x-3)}$

(3) $\frac{x-3}{x^2-2x-8}\div\frac{2x+1}{x^2-3x-4}\times\frac{x+2}{x^2-2x-3}$

$=\frac{x-3}{(x+2)(x-4)}\times\frac{(x+1)(x-4)}{2x+1}\times\frac{x+2}{(x+1)(x-3)}$

$=\frac{1}{2x+1}$

(4) $\frac{x^2+x}{x^2-x}\times\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x+2}\div\frac{x-3}{x+2}$

$=\frac{x(x+1)}{x(x-1)}\times\frac{(x-1)(x-3)}{(x+1)(x+2)}\times\frac{x+2}{x-3}=1$

(5) $\frac{3}{2x+1}\times\frac{4x^2-1}{5x+3}-\frac{x^2-2x}{x^2+2x}\div\frac{5x+3}{x+2}$

$=\frac{3}{2x+1}\times\frac{(2x+1)(2x-1)}{5x+3}-\frac{x(x-2)}{x(x+2)}\times\frac{x+2}{5x+3}$

$=\frac{3(2x-1)}{5x+3}-\frac{x-2}{5x+3}=\frac{5x-1}{5x+3}$

06 답 (1) $-\frac{2}{(x-5)(x-7)}$ (2) $\frac{x-8}{(x-2)(x-4)}$ (3) $\frac{-4x+2}{(x+1)(x-1)}$ (4) $\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)}$

풀이 (1) $\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-6}{x-7}=\frac{(x-5)+1}{x-5}-\frac{(x-7)+1}{x-7}$

$=\left(1+\frac{1}{x-5}\right)-\left(1+\frac{1}{x-7}\right)$

$=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-7}$

$=\frac{(x-7)-(x-5)}{(x-5)(x-7)}$

$=-\frac{2}{(x-5)(x-7)}$

(2) $\frac{x-6}{x-4}-\frac{x-5}{x-2}=\frac{(x-4)-2}{x-4}-\frac{(x-2)-3}{x-2}$

$=\left(1-\frac{2}{x-4}\right)-\left(1-\frac{3}{x-2}\right)$

$=\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-4}$

$=\frac{3(x-4)-2(x-2)}{(x-2)(x-4)}$

$=\frac{x-8}{(x-2)(x-4)}$

(3) $\frac{2x-3}{x-1}-\frac{2x+5}{x+1}=\frac{2(x-1)-1}{x-1}-\frac{2(x+1)+3}{x+1}$

$=\left(2-\frac{1}{x-1}\right)-\left(2+\frac{3}{x+1}\right)$

$=-\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x+1}$

$=\frac{-(x+1)-3(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\frac{-4x+2}{(x+1)(x-1)}$

(4) $\frac{x^2+x+2}{x+1}-\frac{x^2-x-1}{x-1}$

$=\frac{x(x+1)+2}{x+1}-\frac{x(x-1)-1}{x-1}$

$=\left(x+\frac{2}{x+1}\right)-\left(x-\frac{1}{x-1}\right)$

$=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-1}$

$=\frac{2(x-1)+(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)}$

07 답 (1) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$

(2) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$

(3) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}$

(4) $2\left(\frac{1}{2x+3}-\frac{1}{2x+5}\right)$

풀이 (1) $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$

$=\frac{1}{(x+2)-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)$

$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$

(2) $\frac{1}{(x+2)(x+4)}$

$=\frac{1}{(x+4)-(x+2)}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$

(3) $\frac{2}{(x+1)(x+3)}$

$=\frac{2}{(x+3)-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$

$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}$

(4) $\frac{4}{(2x+3)(2x+5)}$

$=\frac{4}{(2x+5)-(2x+3)}\left(\frac{1}{2x+3}-\frac{1}{2x+5}\right)$

$=2\left(\frac{1}{2x+3}-\frac{1}{2x+5}\right)$

08 답 (1) 분　(2) 다　(3) 분　(4) 분　(5) 다

풀이 (1), (3), (4) $y=$(분수식)이므로 분수함수이다.

(2), (5) $y=$(다항식)이므로 다항함수이다.

09 답 (1) $\{x\,|\,x\neq0$인 실수$\}$

(2) $\{x\,|\,x\neq4$인 실수$\}$

(3) $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{1}{2}\text{인 실수}\right\}$

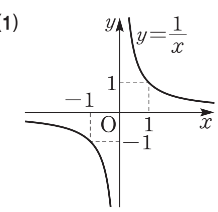
(4) $\{x\,|\,x\neq-1,\ x\neq1$인 실수$\}$

(5) 실수 전체의 집합

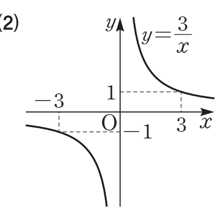
풀이 (5) $x^2+3>0$이므로 정의역은 실수 전체의 집합이다.

10 답 풀이 참조

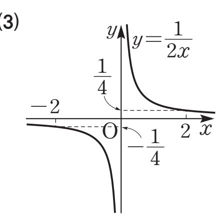
풀이 (1)



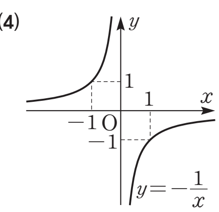
(2)



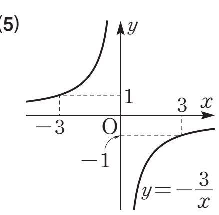
(3)



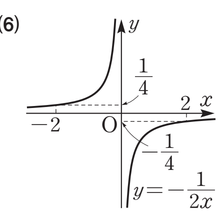
(4)



(5)



(6)



11 답 (1) $y=\frac{1}{x-2}+3$　(2) $y=\frac{2}{x+5}+6$

(3) $y=-\frac{1}{x-3}-2$　(4) $y=-\frac{3}{x+4}-1$

(5) $y=\frac{1}{3(x-4)}-4$　(6) $y=\frac{2}{5(x+1)}-2$

(7) $y=-\frac{1}{2(x-1)}+2$　(8) $y=-\frac{1}{4(x+3)}-5$

풀이 (1) 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$y-3=\frac{1}{x-2}$　$\therefore\ y=\frac{1}{x-2}+3$

(2) 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동하면

$y-6=\frac{2}{x+5}$ $\quad\therefore y=\frac{2}{x+5}+6$

(3) 함수 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$y+2=-\frac{1}{x-3}$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{x-3}-2$

(4) 함수 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$y+1=-\frac{3}{x+4}$ $\quad\therefore y=-\frac{3}{x+4}-1$

(5) 함수 $y=\frac{1}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면

$y+4=\frac{1}{3(x-4)}$ $\quad\therefore y=\frac{1}{3(x-4)}-4$

(6) 함수 $y=\frac{2}{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$y+2=\frac{2}{5(x+1)}$ $\quad\therefore y=\frac{2}{5(x+1)}-2$

(7) 함수 $y=-\frac{1}{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$y-2=-\frac{1}{2(x-1)}$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{2(x-1)}+2$

(8) 함수 $y=-\frac{1}{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동하면

$y+5=-\frac{1}{4(x+3)}$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{4(x+3)}-5$

12 답 (1) $p=4,\ q=5$
(2) $p=-2,\ q=-3$
(3) $p=-5,\ q=0$

풀이 (1) 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하면 $y=\frac{1}{x-4}+5$이다.
$\therefore p=4,\ q=5$

(2) 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면 $y=\frac{1}{x+2}-3$이다.
$\therefore p=-2,\ q=-3$

(3) 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼 평행이동하면 $y=\frac{1}{x+5}$이다.
$\therefore p=-5,\ q=0$

13 답 (1) $p=3,\ q=-5$
(2) $p=-7,\ q=9$
(3) $p=0,\ q=-4$

풀이 (1) 함수 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동하면 $y=-\frac{1}{x-3}-5$이다. $\quad\therefore p=3,\ q=-5$

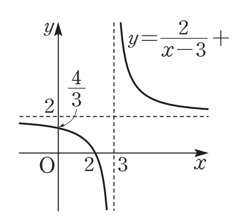
(2) 함수 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -7만큼, y축의 방향으로 9만큼 평행이동하면 $y=-\frac{1}{x+7}+9$이다. $\quad\therefore p=-7,\ q=9$

(3) 함수 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면 $y=-\frac{1}{x}-4$이다. $\quad\therefore p=0,\ q=-4$

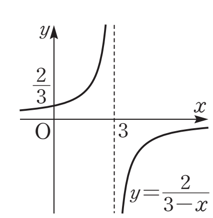
14 답 (1) 점근선의 방정식: $x=0,\ y=1$
정의역: $\{x\,|\,x\neq0$인 실수$\}$
치역: $\{y\,|\,y\neq1$인 실수$\}$
(2) 점근선의 방정식: $x=7,\ y=0$
정의역: $\{x\,|\,x\neq7$인 실수$\}$
치역: $\{y\,|\,y\neq0$인 실수$\}$
(3) 점근선의 방정식: $x=-4,\ y=9$
정의역: $\{x\,|\,x\neq-4$인 실수$\}$
치역: $\{y\,|\,y\neq9$인 실수$\}$
(4) 점근선의 방정식: $x=-8,\ y=-2$
정의역: $\{x\,|\,x\neq-8$인 실수$\}$
치역: $\{y\,|\,y\neq-2$인 실수$\}$
(5) 점근선의 방정식: $x=2,\ y=-3$
정의역: $\{x\,|\,x\neq2$인 실수$\}$
치역: $\{y\,|\,y\neq-3$인 실수$\}$
(6) 점근선의 방정식: $x=-\frac{5}{3},\ y=1$
정의역: $\left\{x\,\middle|\,x\neq-\frac{5}{3}\text{인 실수}\right\}$
치역: $\{y\,|\,y\neq1$인 실수$\}$

15 답 풀이 참조

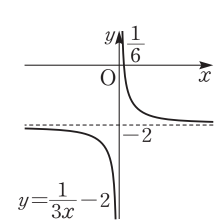
풀이 (1) 함수 $y=\frac{2}{x-3}+2$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



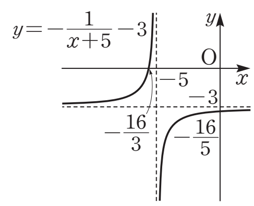
(2) 함수 $y=\frac{2}{3-x}=-\frac{2}{x-3}$의 그래프는 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



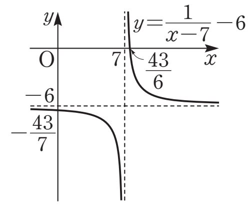
(3) 함수 $y=\frac{1}{3x}-2$의 그래프는 $y=\frac{1}{3x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



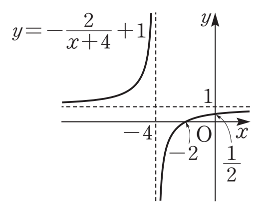
(4) 함수 $y=-\frac{1}{x+5}-3$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



(5) 함수 $y=\frac{1}{x-7}-6$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 7만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



(6) 함수 $y=-\frac{2}{x+4}+1$의 그래프는 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



16 답 (1) $k=1$, $p=1$, $q=2$
(2) $k=-1$, $p=2$, $q=-1$
(3) $k=1$, $p=1$, $q=-2$
(4) $k=-3$, $p=-3$, $q=-4$

풀이 (1) 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=2$이므로 함수의 식은

$y=\frac{k}{x-1}+2$ …… ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=\frac{k}{0-1}+2$ $\quad\therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면 $y=\frac{1}{x-1}+2$

$\therefore k=1$, $p=\underline{1}$, $q=\underline{2}$

(2) 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=-1$이므로 함수의 식은

$y=\frac{k}{x-2}-1$ …… ㉠

㉠의 그래프가 점 $(1, 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{1-2}-1$ $\quad\therefore k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하면 $y=\frac{-1}{x-2}-1$

$\therefore k=-1$, $p=2$, $q=-1$

(3) 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=-2$이므로 함수의 식은

$y=\frac{k}{x-1}-2$ …… ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0, -3)$을 지나므로

$-3=\frac{k}{0-1}-2$ $\quad\therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면 $y=\frac{1}{x-1}-2$

$\therefore k=1$, $p=1$, $q=-2$

(4) 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-3$, $y=-4$이므로 함수의 식은

$y=\frac{k}{x+3}-4$ …… ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0, -5)$를 지나므로

$-5=\frac{k}{0+3}-4$ $\quad\therefore k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하면 $y=\frac{-3}{x+3}-4$

$\therefore k=-3$, $p=-3$, $q=-4$

17 답 (1) 점근선의 방정식: $x=1$, $y=2$
정의역: $\{x\,|\,x\neq 1$인 실수$\}$
치역: $\{y\,|\,y\neq 2$인 실수$\}$
(2) 점근선의 방정식: $x=-1$, $y=3$
정의역: $\{x\,|\,x\neq -1$인 실수$\}$
치역: $\{y\,|\,y\neq 3$인 실수$\}$
(3) 점근선의 방정식: $x=3$, $y=-1$
정의역: $\{x\,|\,x\neq 3$인 실수$\}$
치역: $\{y\,|\,y\neq -1$인 실수$\}$
(4) 점근선의 방정식: $x=2$, $y=2$
정의역: $\{x\,|\,x\neq 2$인 실수$\}$
치역: $\{y\,|\,y\neq 2$인 실수$\}$
(5) 점근선의 방정식: $x=3$, $y=4$
정의역: $\{x\,|\,x\neq 3$인 실수$\}$
치역: $\{y\,|\,y\neq 4$인 실수$\}$
(6) 점근선의 방정식: $x=-6$, $y=-1$
정의역: $\{x\,|\,x\neq -6$인 실수$\}$
치역: $\{y\,|\,y\neq -1$인 실수$\}$

풀이 (1) $y=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+2$이므로

점근선의 방정식: $x=\underline{1}$, $y=\underline{2}$

정의역: $\{x\,|\,\underline{x\neq 1}$인 실수$\}$, 치역: $\{y\,|\,\underline{y\neq 2}$인 실수$\}$

(2) $y=\frac{3x-2}{x+1}=\frac{3(x+1)-5}{x+1}=-\frac{5}{x+1}+3$이므로

점근선의 방정식: $x=-1$, $y=3$

정의역: $\{x\,|\,x\neq -1$인 실수$\}$, 치역: $\{y\,|\,y\neq 3$인 실수$\}$

(3) $y=\frac{4-x}{x-3}=\frac{-(x-3)+1}{x-3}=\frac{1}{x-3}-1$이므로

점근선의 방정식: $x=3$, $y=-1$

정의역: $\{x\,|\,x\neq 3$인 실수$\}$, 치역: $\{y\,|\,y\neq -1$인 실수$\}$

(4) $y=\frac{2x-5}{x-2}=\frac{2(x-2)-1}{x-2}=-\frac{1}{x-2}+2$이므로

점근선의 방정식: $x=2$, $y=2$

정의역: $\{x\,|\,x\neq 2$인 실수$\}$, 치역: $\{y\,|\,y\neq 2$인 실수$\}$

(5) $y=\dfrac{4x-7}{x-3}=\dfrac{4(x-3)+5}{x-3}=\dfrac{5}{x-3}+4$이므로

점근선의 방정식: $x=3$, $y=4$

정의역: $\{x|x\neq3$인 실수$\}$, 치역: $\{y|y\neq4$인 실수$\}$

(6) $y=-\dfrac{x-1}{x+6}=\dfrac{-x+1}{x+6}=\dfrac{-(x+6)+7}{x+6}=\dfrac{7}{x+6}-1$

이므로

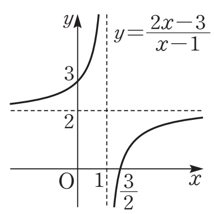
점근선의 방정식: $x=-6$, $y=-1$

정의역: $\{x|x\neq-6$인 실수$\}$, 치역: $\{y|y\neq-1$인 실수$\}$

18 답 풀이 참조

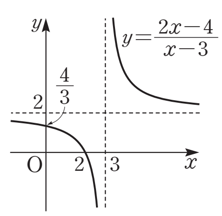
풀이 (1) $y=\dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{2(x-1)-1}{x-1}=-\dfrac{1}{x-1}+2$

즉, 함수 $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



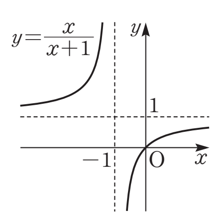
(2) $y=\dfrac{2x-4}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+2}{x-3}=\dfrac{2}{x-3}+2$

즉, 함수 $y=\dfrac{2x-4}{x-3}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



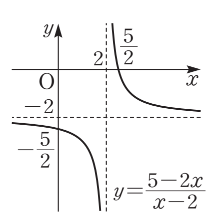
(3) $y=\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{(x+1)-1}{x+1}=-\dfrac{1}{x+1}+1$

즉, 함수 $y=\dfrac{x}{x+1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



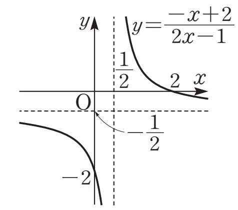
(4) $y=\dfrac{5-2x}{x-2}=\dfrac{-2(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}-2$

즉, 함수 $y=\dfrac{5-2x}{x-2}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



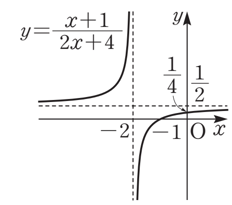
(5) $y=\dfrac{-x+2}{2x-1}=\dfrac{-\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}}{2x-1}=\dfrac{3}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)}-\dfrac{1}{2}$

즉, 함수 $y=\dfrac{-x+2}{2x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 $-\dfrac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



(6) $y=\dfrac{x+1}{2x+4}=\dfrac{\frac{1}{2}(2x+4)-1}{2x+4}=-\dfrac{1}{2(x+2)}+\dfrac{1}{2}$

즉, 함수 $y=\dfrac{x+1}{2x+4}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



19 답 (1) $a=-1$, $b=0$, $c=-1$

(2) $a=1$, $b=1$, $c=-2$

(3) $a=2$, $b=-2$, $c=1$

(4) $a=-3$, $b=-4$, $c=1$

풀이 (1) 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=-1$이므로 함수의 식은

$y=\dfrac{k}{x-1}-1$ …… ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{0-1}-1$ $\quad\therefore k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{-1}{x-1}-1=\dfrac{-1-(x-1)}{x-1}=\dfrac{-x}{x-1}$

$\therefore a=-1$, $b=0$, $c=-1$

(2) 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=1$이므로 함수의 식은

$y=\dfrac{k}{x-2}+1$ …… ㉠

㉠의 그래프가 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{-1-2}+1$ $\quad\therefore k=3$

$k=3$을 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{3}{x-2}+1=\dfrac{3+(x-2)}{x-2}=\dfrac{x+1}{x-2}$

$\therefore a=1$, $b=1$, $c=-2$

(3) 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=2$이므로 함수의 식은

$y=\dfrac{k}{x+1}+2$ …… ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0, -2)$를 지나므로

$-2=\dfrac{k}{0+1}+2$ $\quad\therefore k=-4$

$k=-4$를 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{-4}{x+1}+2=\dfrac{-4+2(x+1)}{x+1}=\dfrac{2x-2}{x+1}$

$\therefore a=2$, $b=-2$, $c=1$

(4) 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=-3$이므로 함수의 식은

$y=\frac{k}{x+1}-3$ ...... ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0, -4)$를 지나므로

$-4=\frac{k}{0+1}-3$ $\quad\therefore k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하면

$y=\frac{-1}{x+1}-3=\frac{-1-3(x+1)}{x+1}=\frac{-3x-4}{x+1}$

$\therefore a=-3,\ b=-4,\ c=1$

20 답 (1) ○ (2) × (3) ○

풀이 (1) $y=\frac{x-4}{x-5}=\frac{(x-5)+1}{x-5}=\frac{1}{x-5}+1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

(2) $y=\frac{-x}{x-1}=\frac{-(x-1)-1}{x-1}=-\frac{1}{x-1}-1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

(3) $y=\frac{-3x+7}{x-2}=\frac{-3(x-2)+1}{x-2}=\frac{1}{x-2}-3$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

21 답 (1) × (2) ○ (3) ×

풀이 (1) $y=-\frac{x+2}{x+3}=\frac{-x-2}{x+3}=\frac{-(x+3)+1}{x+3}$

$=\frac{1}{x+3}-1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

(2) $y=\frac{x-1}{x}=-\frac{1}{x}+1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

(3) $y=\frac{x-3}{x-1}=\frac{(x-1)-2}{x-1}=-\frac{2}{x-1}+1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

22 답 (1) $a=1,\ b=2$ (2) $a=2,\ b=-1$
(3) $a=\frac{1}{2},\ b=1$ (4) $a=-\frac{1}{2},\ b=-1$
(5) $a=-\frac{1}{3},\ b=1$ (6) $a=0,\ b=2$

풀이 (1) $y=\frac{2x}{x-1}=\frac{2(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 두 점근선 $x=1$, $y=2$의 교점 $(1, 2)$에 대하여 대칭이다.

$\therefore a=1,\ b=2$

(2) $y=\frac{1-x}{x-2}=\frac{-(x-2)-1}{x-2}=-\frac{1}{x-2}-1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 두 점근선 $x=2$, $y=-1$의 교점 $(2, -1)$에 대하여 대칭이다.

$\therefore a=2,\ b=-1$

(3) $y=\frac{2x+3}{2x-1}=\frac{(2x-1)+4}{2x-1}$

$=\frac{4}{2x-1}+1=\frac{2}{x-\frac{1}{2}}+1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 두 점근선 $x=\frac{1}{2}$, $y=1$의 교점 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$에 대하여 대칭이다. $\quad\therefore a=\frac{1}{2},\ b=1$

(4) $y=\frac{-2x+3}{2x+1}=\frac{-(2x+1)+4}{2x+1}$

$=\frac{4}{2x+1}-1=\frac{2}{x+\frac{1}{2}}-1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 두 점근선 $x=-\frac{1}{2}$, $y=-1$의 교점 $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$에 대하여 대칭이다.

$\therefore a=-\frac{1}{2},\ b=-1$

(5) $y=\frac{3x+2}{3x+1}=\frac{(3x+1)+1}{3x+1}$

$=\frac{1}{3x+1}+1=\frac{1}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}+1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 두 점근선 $x=-\frac{1}{3}$, $y=1$의 교점 $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$에 대하여 대칭이다.

$\therefore a=-\frac{1}{3},\ b=1$

(6) $y=\frac{8x-1}{4x}=-\frac{1}{4x}+2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 두 점근선 $x=0$, $y=2$의 교점 $(0, 2)$에 대하여 대칭이다. $\quad\therefore a=0,\ b=2$

23 답 (1) $a=4,\ b=2$ (2) $a=2,\ b=2$
(3) $a=-1,\ b=5$ (4) $a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{5}{2}$

풀이 (1) $y=\frac{3x}{x+1}=\frac{3(x+1)-3}{x+1}=-\frac{3}{x+1}+3$

이므로 주어진 함수의 그래프는 점 $(-1, 3)$을 지나고 기울기가 ±1인 두 직선에 대하여 대칭이다.

$x=-1$, $y=3$을 주어진 두 직선의 방정식에 대입하면

$3=-1+a,\ 3=1+b$ $\quad\therefore a=4,\ b=2$

(2) $y=\dfrac{2x-1}{x}=-\dfrac{1}{x}+2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 점 $(0,\ 2)$를 지나고 기울기가 ±1인 두 직선에 대하여 대칭이다.

$x=0$, $y=2$를 주어진 두 직선의 방정식에 대입하면

$a=2$, $b=2$

(3) $y=\dfrac{2x-8}{x-3}=\dfrac{2(x-3)-2}{x-3}=-\dfrac{2}{x-3}+2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 점 $(3,\ 2)$를 지나고 기울기가 ±1인 두 직선에 대하여 대칭이다.

$x=3$, $y=2$를 주어진 두 직선의 방정식에 대입하면

$2=3+a$, $2=-3+b$ $\quad\therefore a=-1$, $b=5$

(4) $y=\dfrac{x+2}{2x-4}=\dfrac{(x-2)+4}{2(x-2)}=\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{1}{2}$

이므로 주어진 함수의 그래프는 점 $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 지나고 기울기가 ±1인 두 직선에 대하여 대칭이다.

$x=2$, $y=\dfrac{1}{2}$을 주어진 두 직선의 방정식에 대입하면

$\dfrac{1}{2}=2+a$, $\dfrac{1}{2}=-2+b$ $\quad\therefore a=-\dfrac{3}{2}$, $b=\dfrac{5}{2}$

24 답 (1) $\{y\,|\,y\le0$ 또는 $y\ge2\}$

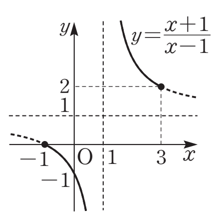
(2) $\left\{y\,\middle|\,y\le\dfrac{3}{4}\text{ 또는 }y\ge\dfrac{13}{4}\right\}$

(3) $\{y\,|\,y\le2$ 또는 $y\ge4\}$

(4) $\left\{y\,\middle|\,y\le-\dfrac{7}{3}\text{ 또는 }y\ge-\dfrac{5}{3}\right\}$

풀이 (1) $y=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1$

이므로 함수 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

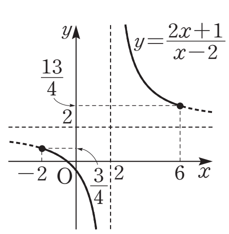


$x=-1$일 때 $y=0$, $x=3$일 때 $y=2$이므로 치역은

$\{y\,|\,y\le0$ 또는 $y\ge2\}$

(2) $y=\dfrac{2x+1}{x-2}=\dfrac{2(x-2)+5}{x-2}=\dfrac{5}{x-2}+2$

이므로 함수 $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

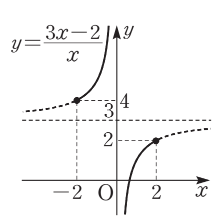


$x=-2$일 때 $y=\dfrac{3}{4}$, $x=6$일 때 $y=\dfrac{13}{4}$이므로 치역은

$\left\{y\,\middle|\,y\le\dfrac{3}{4}\text{ 또는 }y\ge\dfrac{13}{4}\right\}$

(3) $y=\dfrac{3x-2}{x}=-\dfrac{2}{x}+3$

이므로 함수 $y=\dfrac{3x-2}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



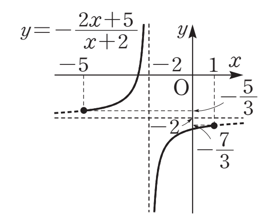
$x=-2$일 때 $y=4$, $x=2$일 때 $y=2$이므로 치역은

$\{y\,|\,y\le2$ 또는 $y\ge4\}$

(4) $y=-\dfrac{2x+5}{x+2}=\dfrac{-2x-5}{x+2}=\dfrac{-2(x+2)-1}{x+2}$

$=-\dfrac{1}{x+2}-2$

이므로 함수 $y=-\dfrac{2x+5}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=-5$일 때 $y=-\dfrac{5}{3}$, $x=1$일 때 $y=-\dfrac{7}{3}$이므로 치역은

$\left\{y\,\middle|\,y\le-\dfrac{7}{3}\text{ 또는 }y\ge-\dfrac{5}{3}\right\}$

25 답 (1) 최댓값: $\dfrac{4}{5}$, 최솟값: 0

(2) 최댓값: 5, 최솟값: $\dfrac{7}{3}$

(3) 최댓값: $-\dfrac{11}{5}$, 최솟값: -3

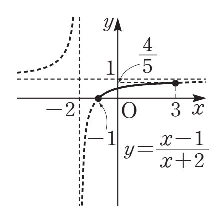
(4) 최댓값: $\dfrac{15}{4}$, 최솟값: 3

(5) 최댓값: 2, 최솟값: 0

(6) 최댓값: $-\dfrac{7}{2}$, 최솟값: -5

풀이 (1) $y=\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{(x+2)-1}{x+2}=-\dfrac{1}{x+2}+1$

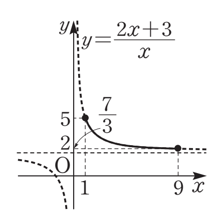
이므로 함수 $y=\dfrac{x+1}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=-1$일 때 $y=0$, $x=3$일 때 $y=\dfrac{4}{5}$이므로

최댓값은 $\dfrac{4}{5}$, 최솟값은 0이다.

(2) $y=\dfrac{2x+3}{x}=\dfrac{3}{x}+2$이므로 함수 $y=\dfrac{2x+3}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

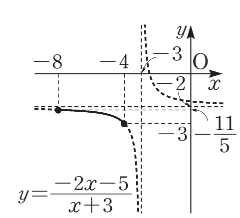


$x=1$일 때 $y=5$, $x=9$일 때 $y=\dfrac{7}{3}$이므로

최댓값은 5, 최솟값은 $\dfrac{7}{3}$이다.

(3) $y=\dfrac{-2x-5}{x+3}=\dfrac{-2(x+3)+1}{x+3}=\dfrac{1}{x+3}-2$

이므로 함수 $y=\dfrac{-2x-5}{x+3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



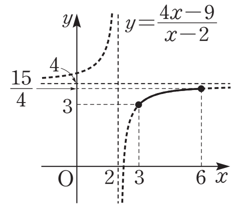
$x=-8$일 때 $y=-\dfrac{11}{5}$,

$x=-4$일 때 $y=-3$이므로

최댓값은 $-\dfrac{11}{5}$, 최솟값은 -3이다.

(4) $y=\frac{4x-9}{x-2}=\frac{4(x-2)-1}{x-2}=-\frac{1}{x-2}+4$

이므로 함수 $y=\frac{4x-9}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

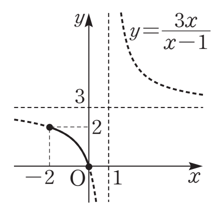


$x=3$일 때 $y=3$, $x=6$일 때 $y=\frac{15}{4}$이므로

최댓값은 $\frac{15}{4}$, 최솟값은 3이다.

(5) $y=\frac{3x}{x-1}=\frac{3(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+3$

이므로 함수 $y=\frac{3x}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

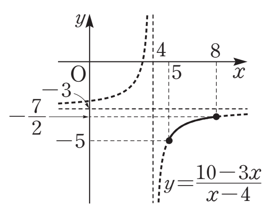


$x=-2$일 때 $y=2$, $x=0$일 때 $y=0$이므로

최댓값은 2, 최솟값은 0이다.

(6) $y=\frac{10-3x}{x-4}=\frac{-3(x-4)-2}{x-4}=-\frac{2}{x-4}-3$

이므로 함수 $y=\frac{10-3x}{x-4}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=5$일 때 $y=-5$, $x=8$일 때 $y=-\frac{7}{2}$이므로

최댓값은 $-\frac{7}{2}$, 최솟값은 -5이다.

26 답 (1) $y=\frac{-2x+3}{x+1}$　(2) $y=\frac{-x+4}{x-5}$

(3) $y=\frac{3x+1}{x-4}$　(4) $y=\frac{5x-6}{2x-1}$

풀이 (1) x와 y를 서로 바꾸면

$x=\frac{-y+3}{y+2}$

y를 x에 대한 식으로 나타내면

$x(y+2)=-y+3$

$xy+2x=-y+3$

$y(x+1)=-2x+3$

$\therefore y=\frac{-2x+3}{x+1}$

(2) x와 y를 서로 바꾸면

$x=\frac{5y+4}{y+1}$

y를 x에 대한 식으로 나타내면

$x(y+1)=5y+4$

$xy+x=5y+4$

$y(x-5)=-x+4$

$\therefore y=\frac{-x+4}{x-5}$

(3) x와 y를 서로 바꾸면

$x=\frac{4y+1}{y-3}$

y를 x에 대한 식으로 나타내면

$x(y-3)=4y+1$

$xy-3x=4y+1$

$y(x-4)=3x+1$

$\therefore y=\frac{3x+1}{x-4}$

(4) x와 y를 서로 바꾸면

$x=\frac{y-6}{2y-5}$

y를 x에 대한 식으로 나타내면

$x(2y-5)=y-6$

$2xy-5x=y-6$

$y(2x-1)=5x-6$

$\therefore y=\frac{5x-6}{2x-1}$

27 답 (1) -2　(2) 5　(3) -4　(4) -1

풀이 (1) $y=\frac{3}{x+a}+2$로 놓고, x와 y를 서로 바꾸면

$x=\frac{3}{y+a}+2$

y를 x에 대한 식으로 나타내면

$x-2=\frac{3}{y+a}$

$y+a=\frac{3}{x-2}$

$y=\frac{3}{x-2}-a$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{3}{x-2}-a$

$f(x)=f^{-1}(x)$이므로

$\frac{3}{x+a}+2=\frac{3}{x-2}-a$

$\therefore a=-2$

(2) $y=\frac{2}{x-5}+a$로 놓고, x와 y를 서로 바꾸면

$x=\frac{2}{y-5}+a$

y를 x에 대한 식으로 나타내면

$x-a=\frac{2}{y-5}$

$y-5=\frac{2}{x-a}$

$y=\frac{2}{x-a}+5$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{2}{x-a}+5$

$f(x)=f^{-1}(x)$이므로

$\frac{2}{x-5}+a=\frac{2}{x-a}+5$

$\therefore a=5$

(3) $y=\dfrac{4x-3}{x+a}$로 놓고, x와 y를 서로 바꾸면

$x=\dfrac{4y-3}{y+a}$

y를 x에 대한 식으로 나타내면

$x(y+a)=4y-3$

$xy+ax=4y-3$

$y(x-4)=-ax-3$

$y=\dfrac{-ax-3}{x-4}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-ax-3}{x-4}$

$f(x)=f^{-1}(x)$이므로

$\dfrac{4x-3}{x+a}=\dfrac{-ax-3}{x-4}$

$\therefore a=-4$

(4) $y=\dfrac{x+a-1}{x+a}$로 놓고, x와 y를 서로 바꾸면

$x=\dfrac{y+a-1}{y+a}$

y를 x에 대한 식으로 나타내면

$x(y+a)=y+a-1$

$xy+ax=y+a-1$에서

$y(x-1)=-ax+a-1$

$y=\dfrac{-ax+a-1}{x-1}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-ax+a-1}{x-1}$

$f(x)=f^{-1}(x)$이므로

$\dfrac{x+a-1}{x+a}=\dfrac{-ax+a-1}{x-1}$

$\therefore a=-1$

참고 $y=\dfrac{x+a-1}{x+a}=1-\dfrac{1}{x+a}$로 놓고, x와 y를 서로 바꾸면

$x=1-\dfrac{1}{y+a}$

y를 x에 대한 식으로 나타내면

$x-1=-\dfrac{1}{y+a}$

$y+a=-\dfrac{1}{x-1}$

$y=-a-\dfrac{1}{x-1}$

$\therefore f^{-1}(x)=-a-\dfrac{1}{x-1}$

$f(x)=f^{-1}(x)$이므로

$1-\dfrac{1}{x+a}=-a-\dfrac{1}{x-1}$

$\therefore a=-1$

01 답 4

풀이 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{3}{x+1}$

$=\dfrac{(x-1)(x+1)+2x(x+1)-3x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{x^2-1+2x^2+2x-3x^2+3x}{x(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{5x-1}{x(x-1)(x+1)}$

따라서 $a=0$, $b=5$, $c=-1$이므로

$a+b+c=4$

02 답 1

풀이 $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}\times\dfrac{x^2+xy-2y^2}{x^2+xy}\div\dfrac{x^2-4y^2}{x^2-2xy}$

$=\dfrac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2}\times\dfrac{(x+2y)(x-y)}{x(x+y)}\times\dfrac{x(x-2y)}{(x+2y)(x-2y)}$

$=1$

03 답 $\dfrac{3}{x(x+3)}$

풀이 $\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}$

$=\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{3}{x(x+3)}$

04 답 ㄴ, ㄹ

풀이 ㄱ, ㄷ. 다항함수

ㄴ, ㄹ. 다항함수가 아닌 유리함수, 즉 분수함수

05 답 7

풀이 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=3$이므로 함수의 식은

$y=\dfrac{b}{x-2}+3$ …… ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{b}{0-2}+3$ $\quad\therefore b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{2}{x-2}+3$

따라서 $a=2$, $b=2$, $c=3$이므로

$a+b+c=7$

06 답 2

풀이 함수 $y=\dfrac{1}{x+1}-3$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면

$y=\dfrac{1}{x+1}-3+a$

이 그래프가 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0=\frac{1}{0+1}-3+a$

$\therefore a=2$

07 답 -3

풀이 $y=\frac{ax-2}{x+b}=\frac{a(x+b)-ab-2}{x+b}$

$=\frac{-ab-2}{x+b}+a$

이므로 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-b$, $y=a$이다.

$-b=1$, $a=-2$이므로 $a=-2$, $b=-1$

$\therefore a+b=-3$

다른 풀이 함수 $y=\frac{ax-2}{x+b}$의 그래프의 점근선의 방정식이

$x=1$, $y=-2$이므로

$x=-b=1$, $y=\frac{a}{1}=-2$

따라서 $a=-2$, $b=-1$이므로

$a+b=-3$

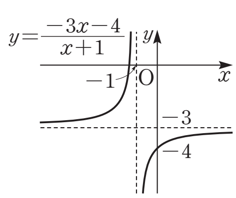
08 답 제1사분면

풀이 $y=\frac{-3x-4}{x+1}=\frac{-3(x+1)-1}{x+1}$

$=-\frac{1}{x+1}-3$

이므로 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 함수 $y=\frac{-3x-4}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않는다.



09 답 4

풀이 $y=\frac{-x+5}{x-2}=\frac{-(x-2)+3}{x-2}$

$=\frac{3}{x-2}-1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=3$, $b=2$, $c=-1$이므로

$a+b+c=4$

10 답 4

풀이 $y=\frac{x+k}{x+1}=\frac{(x+1)+k-1}{x+1}$

$=\frac{k-1}{x+1}+1$

따라서 함수 $y=\frac{x+k}{x+1}$의 그래프를 평행이동시켜 $y=\frac{3}{x}$의 그래프와 겹쳐지도록 하려면

$k-1=3$ $\quad\therefore k=4$

11 답 5

풀이 $y=\frac{4x-5}{x-1}=\frac{4(x-1)-1}{x-1}$

$=-\frac{1}{x-1}+4$

이므로 주어진 함수의 그래프는 두 점근선 $x=1$, $y=4$의 교점 $(1, 4)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $p=1$, $q=4$이므로

$p+q=5$

12 답 $\{y|y\le-3$ 또는 $y\ge0\}$

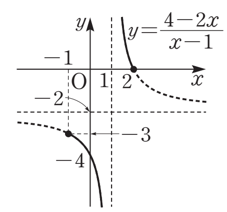
풀이 $y=\frac{4-2x}{x-1}=\frac{-2(x-1)+2}{x-1}$

$=\frac{2}{x-1}-2$

이므로 함수 $y=\frac{4-2x}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$x=-1$일 때 $y=-3$, $x=2$일 때 $y=0$이므로 치역은

$\{y|y\le-3$ 또는 $y\ge0\}$



13 답 1

풀이 $x=a\ (a<0)$일 때 최솟값 -8, $x=-2$일 때 최댓값 b를 가지므로 함수 $y=\frac{4}{x}$에 대입하면

$-8=\frac{4}{a}$, $b=\frac{4}{-2}$

이므로 $a=-\frac{1}{2}$, $b=-2$

$\therefore ab=1$

14 답 5

풀이 $y=\frac{2x+a}{x+2}$로 놓고, x와 y를 서로 바꾸면

$x=\frac{2y+a}{y+2}$

y를 x에 대한 식으로 나타내면

$x(y+2)=2y+a$

$xy+2x=2y+a$

$y(x-2)=-2x+a$

$\therefore y=\frac{-2x+a}{x-2}$

$\frac{3-2x}{x-b}=\frac{-2x+a}{x-2}$이므로

$a=3$, $b=2$

$\therefore a+b=5$

01 답 (1) 무 (2) 유 (3) 유 (4) 유 (5) 무 (6) 무

풀이 (1), (5), (6) 근호 안에 문자가 있고, 유리식으로 나타낼 수 없으므로 무리식이다.

02 답 (1) $x\geq 2$ (2) $-1\leq x\leq 3$ (3) $4\leq x\leq 5$ (4) $x>-\frac{1}{4}$ (5) $5<x\leq 7$ (6) $3<x\leq 6$

풀이 (1) $\sqrt{2x-4}$에서 $2x-4\geq 0$이어야 하므로 $x\geq 2$

(2) $\sqrt{3-x}$에서 $3-x\geq 0$이어야 하므로 $x\leq 3$

$\sqrt{x+1}$에서 $x+1\geq 0$이어야 하므로 $x\geq -1$

$\therefore -1\leq x\leq 3$

(3) $\sqrt{3x-12}$에서 $3x-12\geq 0$이어야 하므로 $x\geq 4$

$\sqrt{10-2x}$에서 $10-2x\geq 0$이어야 하므로 $x\leq 5$

$\therefore 4\leq x\leq 5$

(4) $\frac{1}{\sqrt{4x+1}}$에서 $4x+1>0$이어야 하므로 $x>-\frac{1}{4}$

(5) $\sqrt{7-x}$에서 $7-x\geq 0$이어야 하므로 $x\leq 7$

$\frac{1}{\sqrt{x-5}}$에서 $x-5>0$이어야 하므로 $x>5$

$\therefore 5<x\leq 7$

(6) $\sqrt{6-x}$에서 $6-x\geq 0$이어야 하므로 $x\leq 6$

$\frac{1}{\sqrt{x-3}}$에서 $x-3>0$이어야 하므로 $x>3$

$\therefore 3<x\leq 6$

03 답 (1) 양 (2) 음 (3) 양 (4) 음 (5) 양

풀이 (1) $a<0$일 때, $-a>0$

$\sqrt{a^2}=|a|=-a$이므로 양수이다.

(2) $-\sqrt{a^2}=-|a|=-(-a)=a$이므로 음수이다.

(3) $\sqrt{(-a)^2}=|-a|=-a$이므로 양수이다.

(4) $-\sqrt{(-a)^2}=-|-a|=-(-a)=a$이므로 음수이다.

(5) $(-\sqrt{-a})^2=(\sqrt{-a})^2=-a$이므로 양수이다.

04 답 (1) 1 (2) 4 (3) 1

풀이 (1) $1<a<2$일 때

$\sqrt{a^2-2a+1}+\sqrt{a^2-4a+4}$

$=\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a-2)^2}=|a-1|+|a-2|$

$=(a-1)-(a-2)=1$

(2) $-1<a<3$일 때

$\sqrt{9-6a+a^2}+\sqrt{a^2+2a+1}$

$=\sqrt{(a-3)^2}+\sqrt{(a+1)^2}=|a-3|+|a+1|$

$=-(a-3)+(a+1)=4$

(3) $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$일 때

$\sqrt{a^2+a+\frac{1}{4}}+\sqrt{a^2-a+\frac{1}{4}}$

$=\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}=\left|a+\frac{1}{2}\right|+\left|a-\frac{1}{2}\right|$

$=\left(a+\frac{1}{2}\right)-\left(a-\frac{1}{2}\right)=1$

05 답 (1) $\sqrt{x+1}-1$ (2) $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$ (3) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}$ (4) $\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$ (5) $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}$ (6) $-2x+1-2\sqrt{x(x-1)}$

풀이 (1) $\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{x(\sqrt{x+1}-1)}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)}$

$=\frac{x(\sqrt{x+1}-1)}{x+1-1}=\sqrt{x+1}-1$

(2) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}$

$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x-(x-1)}=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$

(3) $\frac{4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$

$=\frac{4(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}$

$=\frac{4(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}{x+2-(x-2)}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}$

(4) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$

(5) $\frac{x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$=\frac{x(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}$

$=\frac{x(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{1+x-(1-x)}$

$=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}$

(6) $\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}$

$=\frac{x-1+x+2\sqrt{x(x-1)}}{x-1-x}$

$=-2x+1-2\sqrt{x(x-1)}$

06 답 (1) $\frac{2\sqrt{x}}{x-y}$ (2) $\frac{2\sqrt{x}}{x-1}$ (3) 0 (4) $-\frac{2}{x}$ (5) $2x$ (6) $\frac{2x}{y}$

풀이 (1) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=\frac{2\sqrt{x}}{x-y}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$

$=\frac{2\sqrt{x}}{x-1}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}-\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

$=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}-\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

$=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x}-\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=0$

(4) $\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{1+x}}$

$=\dfrac{(1-\sqrt{1+x})+(1+\sqrt{1+x})}{(1+\sqrt{1+x})(1-\sqrt{1+x})}$

$=\dfrac{2}{1-(1+x)}=-\dfrac{2}{x}$

(5) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})-\sqrt{x}(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})}$

$=\dfrac{-2x}{x-1-x}=2x$

(6) $\dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}+\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$

$=\dfrac{(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})^2+(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})^2}{(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})}$

$=\dfrac{2\{(x+y)+(x-y)\}}{x+y-(x-y)}=\dfrac{4x}{2y}=\dfrac{2x}{y}$

07 답 (1) ○ (2) × (3) ○ (4) × (5) ○ (6) ○

풀이 (1) $\sqrt{2x}$가 무리식이므로 $y=\sqrt{2x}$는 무리함수이다.

(2) $-\sqrt{2}x$가 다항식이므로 $y=-\sqrt{2}x$는 다항함수이다.

(4) $\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$이 다항식이므로 $y=\sqrt{(x-1)^2}$은 다항함수이다.

08 답 (1) $\{x|x\geq 2\}$ (2) $\{x|x\leq 3\}$ (3) $\left\{x\middle|x\geq\dfrac{5}{2}\right\}$

(4) $\{x|x\leq 0\}$ (5) $\{x|x\leq 5\}$ (6) $\{x|-2\leq x\leq 2\}$

풀이 (1) $x-2\geq 0$에서 $x\geq 2$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\geq 2\}$이다.

(2) $3-x\geq 0$에서 $x\leq 3$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\leq 3\}$이다.

(3) $2x-5\geq 0$에서 $x\geq\dfrac{5}{2}$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\left\{x\middle|x\geq\dfrac{5}{2}\right\}$이다.

(4) $-x\geq 0$에서 $x\leq 0$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\leq 0\}$이다.

(5) $15-3x\geq 0$에서 $x\leq 5$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\leq 5\}$이다.

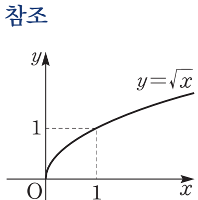
(6) $4-x^2\geq 0$에서 $(x+2)(x-2)\leq 0$

$\therefore -2\leq x\leq 2$

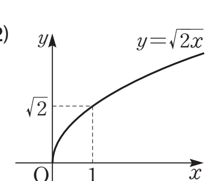
따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|-2\leq x\leq 2\}$이다.

09 답 풀이 참조

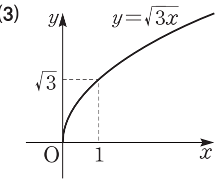
풀이 (1)



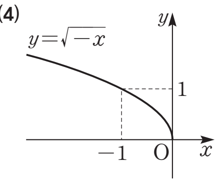
(2)



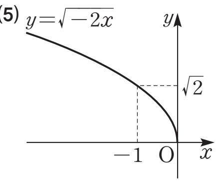
(3)



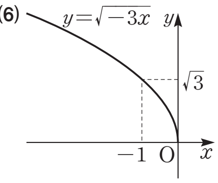
(4)



(5)

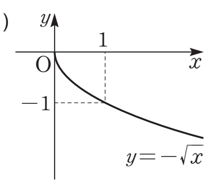


(6)

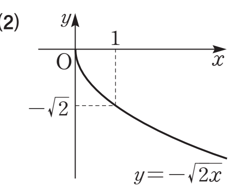


10 답 풀이 참조

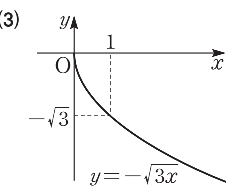
풀이 (1)



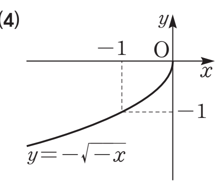
(2)



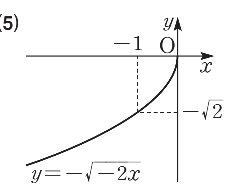
(3)



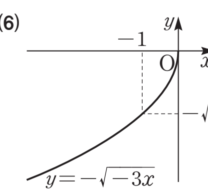
(4)



(5)

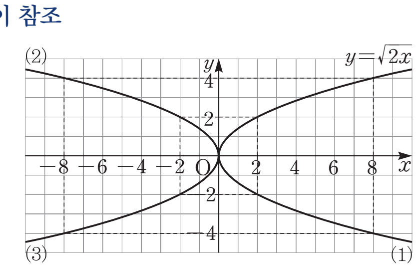


(6)



11 답 풀이 참조

풀이



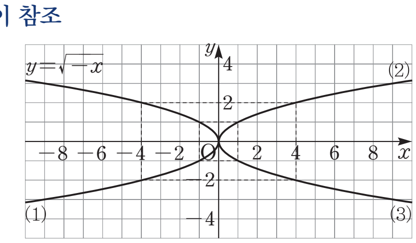
(1) $y=-\sqrt{2x}$

(2) $y=\sqrt{-2x}$

(3) $y=-\sqrt{-2x}$

12 답 풀이 참조

풀이



(1) $y=-\sqrt{-x}$

(2) $y=\sqrt{x}$

(3) $y=-\sqrt{x}$

13 답 (1) $y=\sqrt{x-2}+3$　　(2) $y=-\sqrt{2(x+5)}+4$

(3) $y=\sqrt{-(x-3)}-2$　　(4) $y=-\sqrt{-3(x+4)}-4$

(5) $y=\sqrt{x+2}-2$　　(6) $y=-\sqrt{2(x-3)}+2$

풀이 (1) 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$y-3=\sqrt{x-2}$　　$\therefore y=\sqrt{x-2}+3$

(2) 함수 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면

$y-4=-\sqrt{2(x+5)}$　　$\therefore y=-\sqrt{2(x+5)}+4$

(3) 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$y+2=\sqrt{-(x-3)}$　　$\therefore y=\sqrt{-(x-3)}-2$

(4) 함수 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면

$y+4=-\sqrt{-3(x+4)}$　　$\therefore y=-\sqrt{-3(x+4)}-4$

(5) 함수 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$y+2=\sqrt{(x+1)+1}$　　$\therefore y=\sqrt{x+2}-2$

(6) 함수 $y=-\sqrt{2x-4}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$y-2=-\sqrt{2(x-1)-4}$　　$\therefore y=-\sqrt{2(x-3)}+2$

14 답 (1) 정의역: $\{x|x\geq -2\}$, 치역: $\{y|y\geq 4\}$

(2) 정의역: $\{x|x\geq -1\}$, 치역: $\{y|y\geq 2\}$

(3) 정의역: $\{x|x\geq 3\}$, 치역: $\{y|y\leq -4\}$

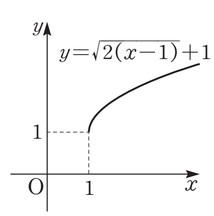
(4) 정의역: $\{x|x\leq 5\}$, 치역: $\{y|y\geq 5\}$

(5) 정의역: $\{x|x\leq -2\}$, 치역: $\{y|y\geq 3\}$

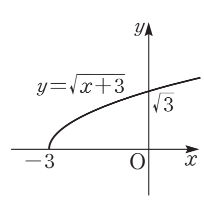
(6) 정의역: $\{x|x\leq 1\}$, 치역: $\left\{y\middle|y\leq \frac{1}{2}\right\}$

15 답 풀이 참조

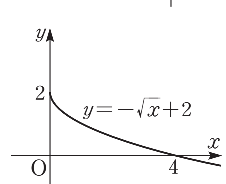
풀이 (1) $y=\sqrt{2(x-1)}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



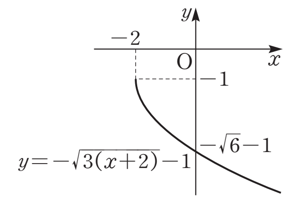
(2) $y=\sqrt{x+3}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



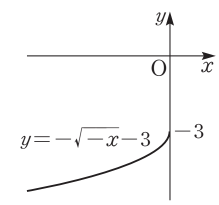
(3) $y=-\sqrt{x}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



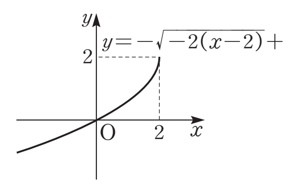
(4) $y=-\sqrt{3(x+2)}-1$의 그래프는 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



(5) $y=-\sqrt{-x}-3$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



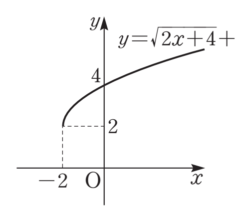
(6) $y=-\sqrt{-2(x-2)}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



16 답 풀이 참조

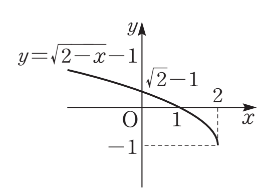
풀이 (1) $y=\sqrt{2x+4}+2=\sqrt{2(x+2)}+2$

즉, $y=\sqrt{2x+4}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



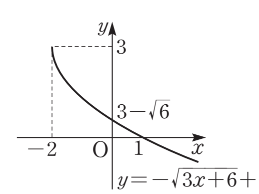
(2) $y=\sqrt{2-x}-1=\sqrt{-(x-2)}-1$

즉, $y=\sqrt{2-x}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



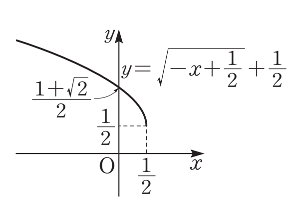
(3) $y=-\sqrt{3x+6}+3=-\sqrt{3(x+2)}+3$

즉, $y=-\sqrt{3x+6}+3$의 그래프는 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



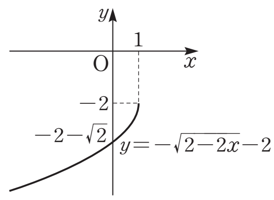
(4) $y=\sqrt{-x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}=\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{2}$

즉, $y=\sqrt{-x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 위의 그림과 같다.



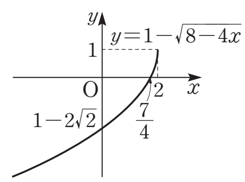
(5) $y=-\sqrt{2-2x}-2=-\sqrt{-2(x-1)}-2$

즉, $y=-\sqrt{2-2x}-2$의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



(6) $y=1-\sqrt{8-4x}=-\sqrt{-4(x-2)}+1$

즉, $y=1-\sqrt{8-4x}$의 그래프는 $y=-\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



17 답 (1) $a=4$, $b=4$, $c=-2$
(2) $a=-2$, $b=4$, $c=-1$
(3) $a=2$, $b=4$, $c=1$
(4) $a=-1$, $b=1$, $c=1$

풀이 (1) 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{a(x+1)}-2$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0=\sqrt{a}-2$, $\sqrt{a}=2$ $\quad\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{4(x+1)}-2$ $\quad\therefore y=\sqrt{4x+4}-2$

$\therefore a=\underline{4}$, $b=\underline{4}$, $c=\underline{-2}$

(2) 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{a(x-2)}-1$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{-2a}-1$, $\sqrt{-2a}=2$ $\quad\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{-2(x-2)}-1$ $\quad\therefore y=\sqrt{-2x+4}-1$

$\therefore a=-2$, $b=4$, $c=-1$

(3) 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=-\sqrt{a(x+2)}+1$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1=-\sqrt{2a}+1$, $\sqrt{2a}=2$ $\quad\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{2(x+2)}+1$ $\quad\therefore y=-\sqrt{2x+4}+1$

$\therefore a=2$, $b=4$, $c=1$

(4) 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=-\sqrt{a(x-1)}+1$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{-a}+1$, $\sqrt{-a}=1$ $\quad\therefore a=-1$

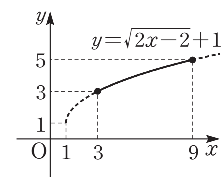
$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{-(x-1)}+1$ $\quad\therefore y=-\sqrt{-x+1}+1$

$\therefore a=-1$, $b=1$, $c=1$

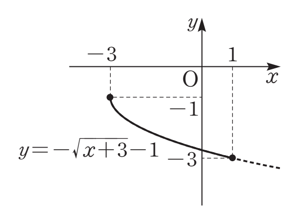
18 답 (1) $\{y\,|\,3\le y\le 5\}$ (2) $\{y\,|\,-3\le y\le -1\}$
(3) $\{y\,|\,4\le y\le 6\}$ (4) $\{y\,|\,-3\le y\le -2\}$

풀이 (1) $y=\sqrt{2x-2}+1=\sqrt{2(x-1)}+1$이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



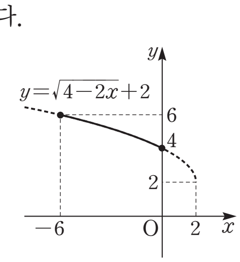
$x=3$일 때 $y=3$, $x=9$일 때 $y=5$이므로 치역은 $\underline{\{y\,|\,3\le y\le 5\}}$

(2) $y=-\sqrt{x+3}-1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



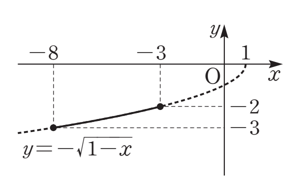
$x=-3$일 때 $y=-1$, $x=1$일 때 $y=-3$이므로 치역은 $\{y\,|\,-3\le y\le -1\}$

(3) $y=\sqrt{4-2x}+2=\sqrt{-2(x-2)}+2$이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



$x=-6$일 때 $y=6$, $x=0$일 때 $y=4$이므로 치역은 $\{y\,|\,4\le y\le 6\}$

(4) $y=-\sqrt{1-x}=-\sqrt{-(x-1)}$이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



$x=-8$일 때 $y=-3$, $x=-3$일 때 $y=-2$이므로 치역은 $\{y\,|\,-3\le y\le -2\}$

19 답 (1) $a=2$, $b=1$　　(2) $a=-3$, $b=-3$

(3) $a=4$, $b=4$

풀이 (1) $y=\sqrt{-2x+a}+b$에서 $y-b=\sqrt{-2x+a}$이므로

$-2x+a\geq 0$, $y-b\geq 0$　　$\therefore x\leq \frac{a}{2}$, $y\geq b$

따라서 정의역은 $\left\{x \middle| x\leq \frac{a}{2}\right\}$이고, 치역은 $\{y|y\geq b\}$이므로 $\frac{a}{2}=1$, $b=1$　　$\therefore a=\underline{2}$, $b=\underline{1}$

(2) $y=\sqrt{-x+a}+b$에서 $y-b=\sqrt{-x+a}$이므로

$-x+a\geq 0$, $y-b\geq 0$　　$\therefore x\leq a$, $y\geq b$

따라서 정의역은 $\{x|x\leq a\}$이고, 치역은 $\{y|y\geq b\}$이므로 $a=-3$, $b=-3$

(3) $y=-\sqrt{-4x+a}+b$에서 $y-b=-\sqrt{-4x+a}$이므로

$-4x+a\geq 0$, $y-b\leq 0$　　$\therefore x\leq \frac{a}{4}$, $y\leq b$

따라서 정의역은 $\left\{x \middle| x\leq \frac{a}{4}\right\}$이고, 치역은 $\{y|y\leq b\}$이므로 $\frac{a}{4}=1$, $b=4$　　$\therefore a=4$, $b=4$

20 답 (1) 최댓값: 1, 최솟값: 0

(2) 최댓값: 4, 최솟값: 0

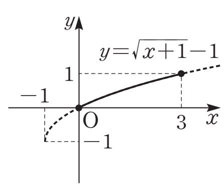
(3) 최댓값: 2, 최솟값: -1

(4) 최댓값: -1, 최솟값: -3

(5) 최댓값: 8, 최솟값: 6

(6) 최댓값: 4, 최솟값: 2

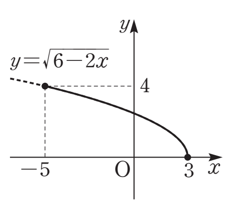
풀이 (1) 함수 $y=\sqrt{x+1}-1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$x=0$일 때 $y=0$, $x=3$일 때 $y=1$이므로

최댓값은 $\underline{1}$, 최솟값은 $\underline{0}$이다.

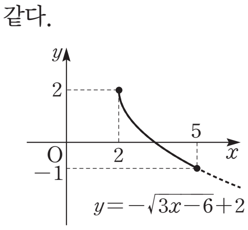
(2) $y=\sqrt{6-2x}=\sqrt{-2(x-3)}$이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



$x=-5$일 때 $y=4$, $x=3$일 때 $y=0$이므로

최댓값은 4, 최솟값은 0이다.

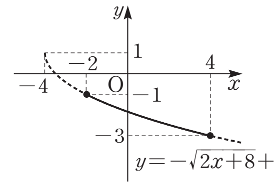
(3) $y=-\sqrt{3x-6}+2=-\sqrt{3(x-2)}+2$이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



$x=2$일 때 $y=2$, $x=5$일 때 $y=-1$이므로

최댓값은 2, 최솟값은 -1이다.

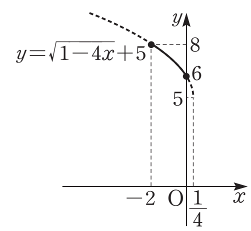
(4) $y=-\sqrt{2x+8}+1=-\sqrt{2(x+4)}+1$이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



$x=-2$일 때 $y=-1$, $x=4$일 때 $y=-3$이므로

최댓값은 -1, 최솟값은 -3이다.

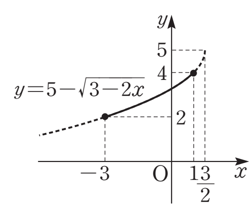
(5) $y=\sqrt{1-4x}+5=\sqrt{-4\left(x-\frac{1}{4}\right)}+5$이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



$x=-2$일 때 $y=8$, $x=0$일 때 $y=6$이므로

최댓값은 8, 최솟값은 6이다.

(6) $y=5-\sqrt{3-2x}=-\sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}+5$이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



$x=-3$일 때 $y=2$, $x=1$일 때 $y=4$이므로

최댓값은 4, 최솟값은 2이다.

21 답 (1) $y=x^2-4x+5$ $(x\geq 2)$

(2) $y=1-x^2$ $(x\geq 0)$

(3) $y=x^2-8x+19$ $(x\leq 4)$

(4) $y=\frac{1}{2}x^2-3x+5$ $(x\geq 3)$

(5) $y=x^2-2x+5$ $(x\leq 1)$

(6) $y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{9}{2}$ $(x\leq -1)$

풀이 (1) $y=\sqrt{x-1}+2$에서 $y-2=\sqrt{x-1}$이므로

$x-1\geq 0$, $y-2\geq 0$　　$\therefore x\geq 1$, $y\geq 2$

$\therefore y-2=\sqrt{x-1}$ $(x\geq 1,\ y\geq 2)$　　…… ㉠

㉠에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x-2=\sqrt{y-1}$ $(y\geq 1,\ x\geq 2)$

양변을 제곱하면 $x^2-4x+4=y-1$

$y=\underline{x^2-4x+5}$ $(x\geq \underline{2})$

(2) $y=\sqrt{1-x}$이므로

$1-x\geq 0$, $y\geq 0$　　$\therefore x\leq 1$, $y\geq 0$

$\therefore y=\sqrt{1-x}$ $(x\leq 1,\ y\geq 0)$　　…… ㉠

㉠에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x=\sqrt{1-y}$ $(y\le 1,\ x\ge 0)$

양변을 제곱하면 $x^2=1-y$

$\therefore\ y=1-x^2$ $(x\ge 0)$

(3) $y=-\sqrt{x-3}+4$에서

$y-4=-\sqrt{x-3}$이므로

$x-3\ge 0,\ y-4\le 0$ $\quad\therefore\ x\ge 3,\ y\le 4$

$\therefore\ y-4=-\sqrt{x-3}$ $(x\ge 3,\ y\le 4)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x-4=-\sqrt{y-3}$ $(y\ge 3,\ x\le 4)$

양변을 제곱하면 $x^2-8x+16=y-3$

$\therefore\ y=x^2-8x+19$ $(x\le 4)$

(4) $y=\sqrt{2x-1}+3$에서

$y-3=\sqrt{2x-1}$이므로

$2x-1\ge 0,\ y-3\ge 0$ $\quad\therefore\ x\ge\frac{1}{2},\ y\ge 3$

$\therefore\ y-3=\sqrt{2x-1}$ $\left(x\ge\frac{1}{2},\ y\ge 3\right)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x-3=\sqrt{2y-1}$ $\left(y\ge\frac{1}{2},\ x\ge 3\right)$

양변을 제곱하면 $x^2-6x+9=2y-1$

$\therefore\ y=\frac{1}{2}x^2-3x+5$ $(x\ge 3)$

(5) $y=-\sqrt{x-4}+1$에서

$y-1=-\sqrt{x-4}$이므로

$x-4\ge 0,\ y-1\le 0$ $\quad\therefore\ x\ge 4,\ y\le 1$

$\therefore\ y-1=-\sqrt{x-4}$ $(x\ge 4,\ y\le 1)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x-1=-\sqrt{y-4}$ $(y\ge 4,\ x\le 1)$

양변을 제곱하면 $x^2-2x+1=y-4$

$\therefore\ y=x^2-2x+5$ $(x\le 1)$

(6) $y=-\sqrt{10-2x}-1$에서

$y+1=-\sqrt{10-2x}$이므로

$10-2x\ge 0,\ y+1\le 0$ $\quad\therefore\ x\le 5,\ y\le -1$

$\therefore\ y+1=-\sqrt{10-2x}$ $(x\le 5,\ y\le -1)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x+1=-\sqrt{10-2y}$ $(y\le 5,\ x\le -1)$

양변을 제곱하면 $x^2+2x+1=10-2y$

$\therefore\ y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{9}{2}$ $(x\le -1)$

22 답 (1) $(2,\ 2)$ (2) $(5,\ 5)$

풀이 (1) 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{x+2}=x$의 양변을 제곱하면

$x+2=x^2,\ x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

주어진 함수 $y=\sqrt{x+2}$에서 $y\ge 0$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge 0\}$이다. $\quad\therefore\ x=2$

따라서 교점의 좌표는 $(2,\ 2)$이다.

(2) 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{x+4}+2$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{x+4}+2=x$에서 $\sqrt{x+4}=x-2$

양변을 제곱하면

$x+4=x^2-4x+4,\ x^2-5x=0$

$x(x-5)=0$

주어진 함수 $y=\sqrt{x+4}+2$에서 $y\ge 2$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge 2\}$이다. $\quad\therefore\ x=5$

따라서 교점의 좌표는 $(5,\ 5)$이다.

23 답 (1) $(3,\ 3)$ (2) $(3,\ 3)$

풀이 (1) 함수 $y=\sqrt{2x+3}$에서 x와 y를 서로 바꾸면 $x=\sqrt{2y+3}$이므로 주어진 두 함수는 역함수 관계이다.

두 함수의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{2x+3}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{2x+3}=x$의 양변을 제곱하면

$2x+3=x^2,\ x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

주어진 함수 $y=\sqrt{2x+3}$에서 $y\ge 0$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge 0\}$이다. $\quad\therefore\ x=3$

따라서 교점의 좌표는 $(3,\ 3)$이다.

(2) 함수 $y=\sqrt{x+6}$에서 x와 y를 서로 바꾸면 $x=\sqrt{y+6}$이므로 주어진 두 함수는 역함수 관계이다.

두 함수의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{x+6}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{x+6}=x$의 양변을 제곱하면

$x+6=x^2,\ x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$

주어진 함수 $y=\sqrt{x+6}$에서 $y\ge 0$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge 0\}$이다. $\quad\therefore\ x=3$

따라서 교점의 좌표는 $(3,\ 3)$이다.

24 답 (1) $\frac{5}{2}$ (2) $\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{11}$ (4) 8

풀이 (1) $(f^{-1}\circ g)^{-1}(0)=(g^{-1}\circ f)(0)=g^{-1}(f(0))$

$=g^{-1}(1)$

$g^{-1}(1)=k$로 놓으면 $g(k)=1$이므로

$\sqrt{2k-4}=1,\ 2k-4=1$ $\quad\therefore\ k=\frac{5}{2}$

$\therefore\ (f^{-1}\circ g)^{-1}(0)=g^{-1}(1)=\frac{5}{2}$

(2) $(f\circ g^{-1})^{-1}(2)=(g\circ f^{-1})(2)=g(f^{-1}(2))$

$f^{-1}(2)=k$로 놓으면 $f(k)=2$이므로

$\sqrt{k+1}=2,\ k+1=4$ $\quad\therefore\ k=3$

$\therefore\ (f\circ g^{-1})^{-1}(2)=g(3)=\sqrt{2}$

(3) $(g\circ f^{-1})^{-1}(4)=(f\circ g^{-1})(4)=f(g^{-1}(4))$

$g^{-1}(4)=k$로 놓으면 $g(k)=4$이므로

$\sqrt{2k-4}=4,\ 2k-4=16$

$2k=20$ $\quad\therefore\ k=10$

$\therefore\ (g\circ f^{-1})^{-1}(4)=f(10)=\sqrt{11}$

(4) $(g^{-1}\circ f)^{-1}\left(\frac{13}{2}\right)=(f^{-1}\circ g)\left(\frac{13}{2}\right)$

$=f^{-1}\left(g\left(\frac{13}{2}\right)\right)$

$=f^{-1}(3)$

$f^{-1}(3)=k$로 놓으면 $f(k)=3$이므로

$\sqrt{k+1}=3,\ k+1=9 \qquad \therefore\ k=8$

$\therefore\ (g^{-1}\circ f)^{-1}\left(\frac{13}{2}\right)=f^{-1}(3)=8$

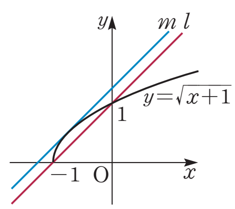
25 답 (1) ① $1\le k<\frac{5}{4}$ ② $k<1$ 또는 $k=\frac{5}{4}$ ③ $k>\frac{5}{4}$

(2) ① $-\frac{3}{2}\le k<\frac{1}{2}$ ② $k<-\frac{3}{2}$ 또는 $k=\frac{1}{2}$

③ $k>\frac{1}{2}$

(3) ① $2\le k<\frac{9}{4}$ ② $k<2$ 또는 $k=\frac{9}{4}$ ③ $k>\frac{9}{4}$

풀이 (1) $y=\sqrt{x+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 교점의 개수가 바뀌는 경우는 오른쪽 그림에서 직선 $y=x+k$가 l 또는 m일 때이다.



(i) l은 직선 $y=x+k$가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때이므로 $0=-1+k \qquad \therefore\ k=1$

(ii) m은 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때이므로 $\sqrt{x+1}=x+k$의 양변을 제곱하면

$x+1=x^2+2kx+k^2$

$x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2-1)=0$

$-4k+5=0 \qquad \therefore\ k=\frac{5}{4}$

① 서로 다른 두 점에서 만날 때는 직선 $y=x+k$가 l일 때부터 m의 아래쪽에 있을 때까지이므로

$1\le k<\frac{5}{4}$

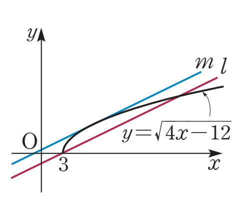
② 한 점에서 만날 때는 직선 $y=x+k$가 l의 아래쪽에 있거나 m일 때이므로

$k<1$ 또는 $k=\frac{5}{4}$

③ 만나지 않을 때는 직선 $y=x+k$가 m의 위쪽에 있을 때이므로

$k>\frac{5}{4}$

(2) $y=\sqrt{4x-12}=\sqrt{4(x-3)}$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$의 교점의 개수가 바뀌는 경우는 오른쪽 그림에서 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 l 또는 m일 때이다.



(i) l은 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 점 $(3,\ 0)$을 지날 때이므로

$0=\frac{3}{2}+k \qquad \therefore\ k=-\frac{3}{2}$

(ii) m은 $y=\sqrt{4x-12}$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 접할 때이므로 $\sqrt{4x-12}=\frac{1}{2}x+k$의 양변을 제곱하면

$4x-12=\frac{1}{4}x^2+kx+k^2$

$\frac{1}{4}x^2+(k-4)x+k^2+12=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(k-4)^2-(k^2+12)=0$

$-8k+4=0 \qquad \therefore\ k=\frac{1}{2}$

① 서로 다른 두 점에서 만날 때는 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 l일 때부터 m의 아래쪽에 있을 때까지이므로

$-\frac{3}{2}\le k<\frac{1}{2}$

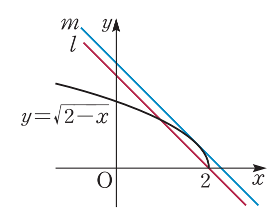
② 한 점에서 만날 때는 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 l의 아래쪽에 있거나 m일 때이므로

$k<-\frac{3}{2}$ 또는 $k=\frac{1}{2}$

③ 만나지 않을 때는 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 m의 위쪽에 있을 때이므로

$k>\frac{1}{2}$

(3) $y=\sqrt{2-x}=\sqrt{-(x-2)}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$의 교점의 개수가 바뀌는 경우는 오른쪽 그림에서 직선 $y=-x+k$가 l 또는 m일 때이다.



(i) l은 직선 $y=-x+k$가 점 $(2,\ 0)$을 지날 때이므로

$0=-2+k \qquad \therefore\ k=2$

(ii) m은 $y=\sqrt{2-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때이므로 $\sqrt{2-x}=-x+k$의 양변을 제곱하면

$2-x=x^2-2kx+k^2$

$x^2-(2k-1)x+k^2-2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2-2)=0$

$-4k+9=0 \qquad \therefore\ k=\frac{9}{4}$

① 서로 다른 두 점에서 만날 때는 직선 $y=-x+k$가 l일 때부터 m의 아래쪽에 있을 때까지이므로

$2\le k<\frac{9}{4}$

② 한 점에서 만날 때는 직선 $y=-x+k$가 l의 아래쪽에 있거나 m일 때이므로

$k<2$ 또는 $k=\frac{9}{4}$

③ 만나지 않을 때는 직선 $y=-x+k$가 m의 위쪽에 있을 때이므로

$k>\frac{9}{4}$

01 답 5

풀이 $\sqrt{6-2x}$에서 $6-2x\ge0$이어야 하므로 $x\le3$

$\dfrac{1}{\sqrt{3x-4}}$에서 $3x-4>0$이어야 하므로 $x>\dfrac{4}{3}$

$\therefore \dfrac{4}{3}<x\le3$

따라서 정수 x는 2, 3이므로 구하는 값은 $2+3=5$

02 답 2

풀이 $0<x\le1$이므로

$$\sqrt{1+\frac{2x+1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{2x-1}{x^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{x^2+2x+1}{x^2}}-\sqrt{\frac{x^2-2x+1}{x^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2}}-\sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2}}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}$$
$$=\frac{x+1}{x}-\left(-\frac{x-1}{x}\right)=\frac{x+1}{x}+\frac{x-1}{x}$$
$$=\frac{2x}{x}=2$$

03 답 1

풀이 $\dfrac{x}{\sqrt{2x+1}-1}-\dfrac{x}{\sqrt{2x+1}+1}$

$$=\frac{x(\sqrt{2x+1}+1)-x(\sqrt{2x+1}-1)}{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)}$$
$$=\frac{2x}{(2x+1)-1}=\frac{2x}{2x}=1$$

04 답 ㄴ, ㄹ

풀이 ㄱ, ㄷ. 다항함수

ㄴ, ㄹ. 무리함수

05 답 ㄹ

풀이 ㄱ. $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄴ. $y=-\sqrt{3x}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\sqrt{3x+1}-1=\sqrt{3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)}-1$이므로 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $-\dfrac{1}{3}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\sqrt{-3x-1}+1=\sqrt{-3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)}+1$이므로 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{1}{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동하여 함수 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄹ이다.

다른 풀이 함수 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-3(x-p)}+q=\sqrt{-3x+3p}+q$이다.

따라서 이 식과 같은 꼴을 찾으면 ㄹ이다.

06 답 3

풀이 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은

$y=\sqrt{a(x-1)}+2$

이 그래프가 점 $(4,\ 5)$를 지나므로

$5=\sqrt{3a}+2$, $\sqrt{3a}=3$

$3a=9$

$\therefore a=3$

07 답 -3

풀이 $y=\sqrt{-2x+4}-3=\sqrt{-2(x-2)}-3$

이므로 $y=\sqrt{-2x+4}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

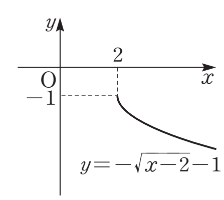
따라서 $a=-2$, $b=2$, $c=-3$이므로

$a+b+c=-3$

08 답 제4사분면

풀이 함수 $y=-\sqrt{x-2}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 제4사분면만을 지난다.



09 답 -4

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=-\sqrt{a(x-4)}+2$

이 그래프가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$-2=-\sqrt{-4a}+2$

$\sqrt{-4a}=4$, $-4a=16$

$\therefore a=-4$

따라서 $f(x)=-\sqrt{-4(x-4)}+2$이므로

$f(-5)=-\sqrt{-4\times(-5-4)}+2=-4$

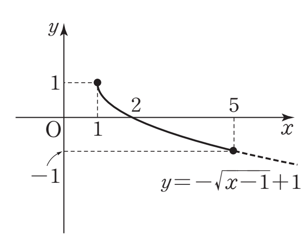
10 답 2

풀이 함수 $y=-\sqrt{x-1}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$x=1$일 때 $y=1$, $x=5$일 때 $y=-1$이므로 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le1\}$이다.

따라서 $a=-1$, $b=1$이므로

$b-a=2$



11 답 5

풀이 함수 $y=\sqrt{4x+a}+1$의 정의역은 $\{x|0\le x\le 2\}$, 치역은 $\{y|2\le y\le b\}$이다.

$x=0$일 때 $y=2$이므로

$2=\sqrt{a}+1 \qquad \therefore a=1$

$x=2$일 때 $y=b$이므로

$b=\sqrt{8+a}+1=\sqrt{8+1}+1=4$

$\therefore a+b=1+4=5$

12 답 6

풀이 $y=x^2-4x+1\ (x\ge 2)$의 x와 y를 서로 바꾸면

$x=y^2-4y+1\ (y\ge 2)$

y를 x에 대한 식으로 나타내면

$y^2-4y+4=x+3$

$(y-2)^2=x+3$

이때 $y\ge 2$이므로

$y=\sqrt{x+3}+2$

따라서 $a=3$, $b=2$이므로

$ab=6$

13 답 8

풀이 함수 $y=\sqrt{x}+2$에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x=\sqrt{y}+2$

이므로 주어진 두 함수는 역함수 관계이다.

두 함수의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{x}+2$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{x}+2=x$에서 $\sqrt{x}=x-2$의 양변을 제곱하면

$x=x^2-4x+4$

$x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$

주어진 함수 $y=\sqrt{x}+2$에서 $y\ge 2$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\ge 2\}$이다.

$\therefore x=4$

따라서 교점의 좌표는 $(4, 4)$이고 $a=4$, $b=4$이므로

$a+b=8$

14 답 5

풀이 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(4)=(g^{-1}\circ f)(4)$

$=g^{-1}(f(4))$

$=g^{-1}(3)$

$g^{-1}(3)=k$로 놓으면 $g(k)=3$이므로

$\sqrt{2k-1}=3$

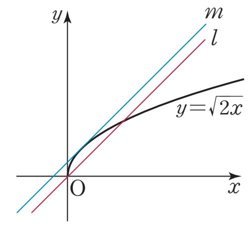
$2k-1=9$

$\therefore k=5$

$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(4)=g^{-1}(3)=5$

15 답 $0\le k<\frac{1}{2}$

풀이 무리함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) l은 직선 $y=x+k$가 원점을 지날 때이므로

$0=0+k \qquad \therefore k=0$

(ii) m은 $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때이므로

$\sqrt{2x}=x+k$의 양변을 제곱하면

$2x=x^2+2kx+k^2$

$x^2+2(k-1)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-k^2=0$

$-2k+1=0$

$\therefore k=\frac{1}{2}$

무리함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때는 직선 $y=x+k$가 l일 때부터 m의 아래쪽에 있을 때까지이므로

$0\le k<\frac{1}{2}$