풍산자

일등급 유형

미적분

구성과 특징

1 일등급 실력 완성을 위한 집중 학습

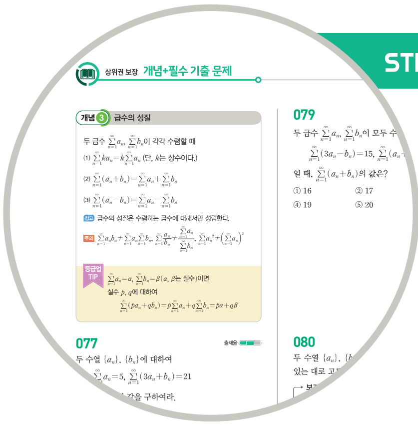
학교 시험과 수능에서 일등급 실력을 완성하기 위한 문항 대비 집중서로 중상위 수준의 다양한 문제 풀이를 통해 중위권 학생들은 상위권 실력으로 향상될 수 있고, 상위권 학생들은 상위권 실력을 유지할 수 있도록 구성하였습니다.

2 다양한 유형의 문항으로 학교시험 & 학력평가 대비

학교 시험과 수능/모의고사/학력평가를 분석하여 출제 빈도가 높고 반드시 알아야 할 유형, 다양한 문제 해결력이 필요한 유형을 체계적으로 수록하여 학교 시험과 수능을 동시에 대비할 수 있습니다. 또한 최신 기출 문제를 연습하고 실전에 대비할 수 있도록 신경향 문제를 수록하였습니다.

3 점진적 학습이 가능한 단계별 문제 구성

실전 개념이 문제에 어떻게 활용되는지를 정리하였고, 중 수준, 상 수준, 최상위 수준의 문제를 단계별로 수록하여 문제를 풀면서 일등급 실력에 도달할 수 있도록 구성하였습니다.

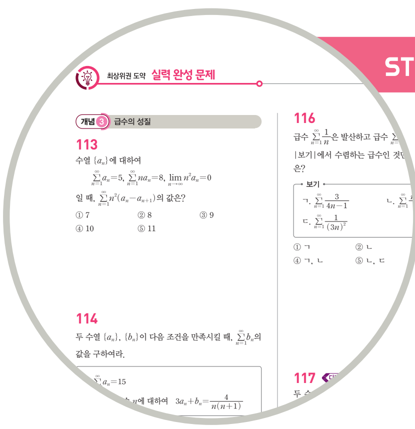


STEP A | 상위권 보장 개념+필수 기출 문제

- 학교 시험/평가원/교육청 기출 문제를 체계적으로 분석하여 실전 개념을 정리하였고, 출제 가능성이 높은 유형으로 구성하였습니다.
- 등급업 TIP 실전에 자주 이용되는 개념, 공식, 비법 등을 제시하였습니다.
- STEP A, STEP B에서는 실제 시험에 출제되는 문제를 수록하여 실전 감각을 기를 수 있습니다.

  평가원 기출 교육청 기출 평가원/ 교육청 기출 문제 중에서 중요한 유형의 문제입니다.

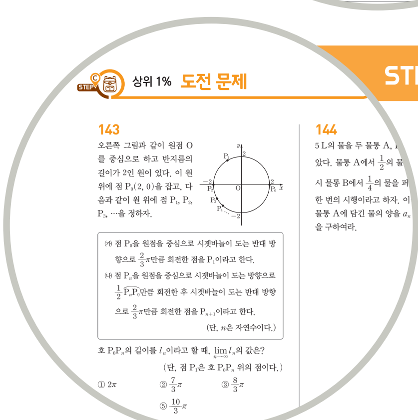
  학교 기출 신 유형 최신 학교 시험 기출 문제 중에서 새로운 유형의 문제로 정답과 풀이에서 접근 방법을 확인할 수 있습니다.



STEP B | 최상위권 도약 실력 완성 문제

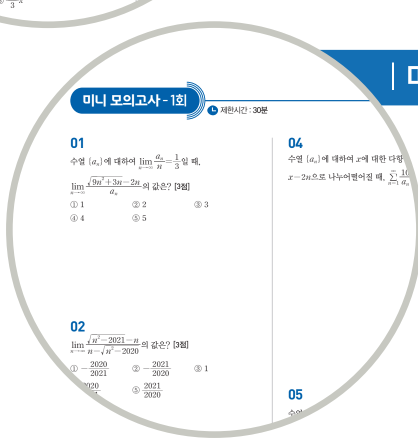
- 개념별로 상 수준의 문제를 구성하여 탄탄한 상위권 실력을 완성할 수 있도록 하였습니다.

  다빈출 출제 비중이 높은 유형의 문제입니다.



STEP C | 상위 1% 도전 문제

- 대단원별 최고난도 문항으로 일등급 대비와 최상위 실력을 기를 수 있도록 하였습니다.



| 미니 모의고사

- 대단원별로 실력을 점검할 수 있는 문항을 엄선하여 구성하였습니다.

차례

III | 적분법

풍산자가 제안하는 상위권으로의 지름길

일등급유형 ▶▶

어제는 역사이고

내일은 미래이며,

그리고 오늘은 선물입니다.

그렇기에 우리는

현재(present)를 선물(present)이라고 말합니다.

명석한 두뇌도 뛰어난 체력도 타고난 재능도 끝없는 노력을 이길 순 없다.
아무것도 변하지 않을지라도 내가 변하면 모든 것이 변한다.

풍산자 일등급유형과 함께 까다로운 문제를 정복해 볼까요?

_계산 실수와 개념의 잘못된 적용을 유도하는 문제

_개념은 단순한데 사고의 전환이 필요한 신경향 문제

_익숙한 문제인데 풀이 방법은 다른 접근이 필요한 문제

_여러 가지 개념의 응용을 해야 하는데 적용에 실패하는 문제

_문제 해결을 위한 조건과 추론 과정에서 변형과 해석을 요구하는 문제

I

수열의 극한

STEP A 상위권 보장 **개념+필수 기출 문제**

개념 1 수열의 수렴과 발산

(1) **수열의 수렴:** 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 한다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \quad \text{또는} \quad n\to\infty\text{일 때 } a_n\to\alpha$$

참고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (α는 상수)이면

$$\lim_{n\to\infty} a_{n-1}=\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} a_{2n}=\alpha$$

(2) **수열의 발산:** 수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않을 때, 수열 $\{a_n\}$은 발산한다고 한다.

① 양의 무한대로 발산: $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$

② 음의 무한대로 발산: $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$

③ 진동

참고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$는 수열 $\{a_n\}$의 극한값이 ∞라는 것이 아니라, a_n의 값이 한없이 커지는 상태라는 것을 의미한다.

(3) **수열의 극한에 대한 기본 성질**

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴할 때

① $\lim_{n\to\infty} ka_n=k\lim_{n\to\infty} a_n$ (단, k는 상수이다.)

② $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n$

③ $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n$

④ $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\times\lim_{n\to\infty} b_n$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ (단, $b_n\neq0$, $\lim_{n\to\infty} b_n\neq0$)

참고 수열의 극한에 대한 기본 성질은 각각의 수열이 수렴할 때만 성립한다.

등급업 TIP

상수 k에 대하여

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ 또는 $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$ ➡ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{k}{a_n}=0$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ➡ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{k}{a_n}=\pm\infty$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n=k$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$일 때

$k>0$ ➡ $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\infty$

$k<0$ ➡ $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=-\infty$

001 출제율

다음 |보기|의 수열에서 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\left\{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$ ㄴ. $\{3+\sin n\pi\}$

ㄷ. $\{(-1)^{n+1}+(-1)^n\}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

002 교육청 기출 출제율

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n=2,\ \lim_{n\to\infty} b_n=1$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)$의 값을 구하여라.

003 출제율

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3a_n-5}{a_n+3}=\dfrac{2}{3}$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

004

출제율

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{a_n}=0$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{-3a_n+4}{a_n+2}$의 값은?

① -3　② -2　③ -1

④ 0　⑤ 1

005

출제율

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-3)=1,\ \lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=5$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n(2+b_n)$의 값을 구하여라.

006

출제율

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 |보기|에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, α는 상수이다.)

보기

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$이다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이면 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$이다.

ㄹ. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$이다.

① ㄱ　② ㄹ　③ ㄴ, ㄷ

④ ㄴ, ㄹ　⑤ ㄷ, ㄹ

개념 2 수열의 극한값의 계산

(1) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴: 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

① (분모의 차수)=(분자의 차수)
➡ 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.

② (분모의 차수)>(분자의 차수)
➡ 극한값은 0이다.

③ (분모의 차수)<(분자의 차수)
➡ ∞ 또는 $-\infty$로 발산한다. 즉, 극한값은 없다.

(2) $\infty-\infty$ 꼴

① 다항식은 최고차항으로 묶는다.

② 무리식은 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

참고 다항식의 극한은 최고차항의 계수가 양수이면 ∞로, 음수이면 $-\infty$로 발산한다.

주의 ∞는 수가 아니라 한없이 커지는 상태를 나타내므로 $\frac{\infty}{\infty}\neq1$, $\infty\times\infty\neq\infty^2$, $\infty-\infty\neq0$이다.

등급업 TIP

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\alpha$ (α는 실수)일 때

(1) $\alpha=0$ ➡ (a_n의 차수)<(b_n의 차수)

(2) $\alpha\neq0$ ➡ (a_n의 차수)=(b_n의 차수)이고

$\alpha=\frac{(a_n\text{의 최고차항의 계수})}{(b_n\text{의 최고차항의 계수})}$이다.

007

출제율

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}{\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n-1}}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{2}{3}$

④ 1　⑤ $\frac{4}{3}$

008

출제율

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3-n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

009

출제율

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3-(n-2)^3}{3n^2-1}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

010

출제율

$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3}{3^2+6^2+9^2+\cdots+9n^2}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

011

출제율

$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{1+2+3+\cdots+n}-\sqrt{1+2+3+\cdots+(n-1)}\}$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1

④ $\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

012

출제율

이차방정식 $x^2+4nx-3n=0$의 양의 실근을 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은? (단, n은 자연수이다.)

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ 2

④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

013

출제율

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{1+a_n}{a_n}=2n^3+3$$

이 성립할 때, $\lim_{n\to\infty}(4n^3+3n)a_n$의 값을 구하여라.

정답과 풀이 003쪽

014

출제율

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(n^3+3n+1)a_n=5$일 때, $\lim_{n\to\infty}(2n^3-3n+4)a_n$의 값은?

① 1 ② 5 ③ 10
④ 15 ⑤ 20

015 학교 기출 신유형

출제율

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn+1}{2n-3}=2$를 만족시키는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

016

출제율

$\lim_{n\to\infty}\frac{15}{\sqrt{n^2+kn}-\sqrt{n^2+1}}=3$이 되도록 하는 상수 k의 값은?

① 3 ② 5 ③ 6
④ 9 ⑤ 10

개념 3 수열의 극한값의 대소 관계

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴할 때

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le b_n$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}b_n$이다.

(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$이다.

참고 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이라고 해서 반드시 $\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}b_n$이 성립하는 것은 아니다. 예를 들어 $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$이다.

등급업 TIP

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le b_n$일 때

(1) $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이다.

(2) $\lim_{n\to\infty}b_n=-\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$이다.

017

출제율

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$3n^2<(n^2+3)a_n<3n^2+2n+1$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ 3
④ $\frac{10}{3}$ ⑤ 4

018 평가원 기출

출제율

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sqrt{9n^2+4}<\sqrt{na_n}<3n+2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

019

출제율

$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3n^2+\sin\frac{n}{2}\pi\right)}{n^3+2}$의 값을 구하여라.

020 학교 기출 신유형

출제율

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n-2n^2|\le 1$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{2n^2+4}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

개념 4 등비수열의 수렴과 발산

(1) 등비수열 $\{r^n\}$에서

① $r>1$일 때　$\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$ (발산)

② $r=1$일 때　$\lim_{n\to\infty}r^n=1$ (수렴)

③ $-1<r<1$일 때　$\lim_{n\to\infty}r^n=0$ (수렴)

④ $r\le -1$일 때　$\{r^n\}$은 진동 (발산)

참고 r^n을 포함한 식의 극한은 r의 값의 범위를 $|r|<1$, $r=1$, $r=-1$, $|r|>1$의 네 가지 경우로 나누어서 구한다.

(2) 수열 $\{ar^{n-1}\}$이 수렴하기 위한 조건은

$a=0$ 또는 $-1<r\le 1$

등급업 TIP

$\lim_{n\to\infty}\frac{c^n+d^n}{a^n+b^n}$ 꼴은 분모의 밑이 가장 큰 항으로 분모, 분자를 나누어 극한값을 구한다. 즉, $|a|>|b|$이면 a^n으로, $|a|<|b|$이면 b^n으로 분모, 분자를 나누어 극한값을 구한다.

021

출제율

수열 $\left\{\frac{2^n+4^{n+1}}{3^{n-1}-4^n}\right\}$의 극한값을 구하여라.

022

출제율

수열 $\left\{x^n\left(\frac{x-1}{6}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 값의 합은?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

정답과 풀이 005쪽

023

출제율

등비수열 $\{(\log_2 4k-3)^n\}$이 수렴하도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $0<k\leq 3$ ② $1\leq k\leq 4$
③ $0\leq k<3$ ④ $1<k\leq 4$
⑤ $0\leq k\leq 3$

024

출제율

$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{2^n}\right)\left(a+\frac{1}{3^n}\right)=15$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 5 ③ 9
④ 13 ⑤ 17

025

출제율

수열 $\{r^n\}$이 수렴할 때, |보기|의 수열에서 항상 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은? $\left(\text{단, } \lim_{n\to\infty} r^n\neq -1\right)$

보기

ㄱ. $\left\{\left(\frac{1-r}{3}\right)^n\right\}$ ㄴ. $\left\{\left(2+\frac{r}{3}\right)^n\right\}$
ㄷ. $\left\{\left(1-\frac{r^n}{3}\right)\right\}$ ㄹ. $\left\{\frac{1}{1+r^n}\right\}$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄷ, ㄹ
④ ㄱ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

026

출제율

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$5^{n+1}-4^n<(3^{n+1}+5^{n-1})a_n<3^n+5^{n+1}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① 5 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

027

출제율

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n-1}+3^{2n-1}}{4^{n-1}+a\times 9^{n+1}}=\frac{1}{81}$을 만족시키는 실수 a에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{3-a^{n-1}}$의 값은?

① -3 ② -6 ③ -9
④ -12 ⑤ -15

STEP B 최상위권 도약 **실력 완성 문제**

개념 1 수열의 수렴과 발산

028

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=5$일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_{n+5}-a_n)$의 값을 구하여라.

029

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=24,\ a_{n+1}-a_n=\frac{4}{n(n+1)}$$

일 때, a_1의 값은?

① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

030 다빈출

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty,\ \lim_{n\to\infty}(4a_n-3b_n)=12$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+2b_n}{a_n-b_n}$의 값은? (단, $a_n-b_n\neq0$)

① -20 ② -19 ③ -18
④ -17 ⑤ -16

031

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2b_n-a_nb_n-a_n+1)$의 값은?

(가) $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$	(나) $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=6$

① -10 ② -5 ③ 0
④ 5 ⑤ 10

032

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 이차방정식

$$x^2-2a_nx+3a_{n+2}+4=0$$

이 중근을 갖는다. 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라.

033

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{(a_n-b_n)(a_n+b_n)}$의 값은?

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>b_n>0$
(나) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=3$
(다) $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+b_n{}^2)=29$

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{8}{21}$ ③ $\frac{3}{7}$
④ $\frac{10}{21}$ ⑤ $\frac{11}{21}$

034 교육청 기출

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이

$$a_n=\frac{(-1)^n+3}{2},\ b_n=p\times(-1)^{n+1}+q$$

일 때, |보기|에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, p, q는 실수이다.)

보기

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$은 발산한다.
ㄴ. 수열 $\{b_n\}$이 수렴하도록 하는 실수 p가 존재한다.
ㄷ. 두 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_nb_n\}$이 모두 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+b_n{}^2)=6$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

035 학교 기출 신유형

수렴하는 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, 수열 $\{a_n+S_n\}$은 첫째항이 6, 공차가 4인 등차수열을 이룬다. $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라.

개념 2 수열의 극한값의 계산

036

등차수열 $\{a_n\}$에서

$$a_1=3,\ a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=13$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하여라.

037

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+4n$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\times a_{n-1}}{S_n}$의 값을 구하여라.

038

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} na_n$의 값은? (단, $a_n<b_n$)

(가) $a_n+b_n=2n$	(나) $a_n\times b_n=-2$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

039

함수 $f(x)$가 $f(x)=(x-5)^2$이고 자연수 n에 대하여 방정식 $f(x)=n$의 두 근이 α, β일 때,

$$g(n)=|\alpha-\beta|$$

라고 하자. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n}\{g(2n+1)-g(2n-1)\}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

040

자연수 n에 대하여 다항식 $2(x+2)^{2n}+(2x+7)^n$을 $x-1$, $x+2$로 나눈 나머지를 각각 a_n, b_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\log_3 a_n+\log_3 b_n}{n}$의 값을 구하여라.

041 다빈출

자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+6n+4}$의 소수 부분을 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

042

일반항이 $a_n=2n^2-2n+1$인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-2}{S_n}$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

정답과 풀이 009쪽

043 학교 기출 신유형

자연수 $1, 2, 3, \cdots, n$에 대하여 서로 다른 두 수의 곱의 총합을 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{200a_n}{n^4}$의 값은?

① 20 ② 25 ③ 30
④ 35 ⑤ 40

044

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이

$$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2},\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}=\frac{1}{18}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

045 교육청 기출

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\frac{1}{n+1}\ (n\ge1)$
(나) $\lim_{n\to\infty}n^2b_n=2$

$\lim_{n\to\infty}n^2a_n$의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

046

수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=\log_2\frac{n+2}{n+1}$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}}{n}$의 값을 구하여라.

047 다빈출

자연수 n에 대하여

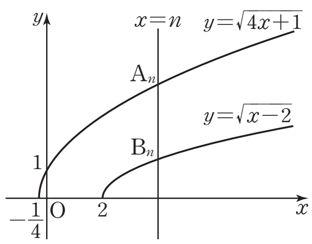
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^x}\left\{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{25}-\frac{1}{n^{25}}\right\}$$

의 값이 존재하기 위한 실수 x의 최솟값은?

① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

048

다음 그림과 같이 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 두 곡선 $y=\sqrt{4x+1}$, $y=\sqrt{x-2}$와 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라고 하자. $a_n=\overline{\mathrm{OA}_n}$, $b_n=\overline{\mathrm{OB}_n}$이라고 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{18}{a_n-b_n}$의 값은? (단, $n\ge2$이고 O는 원점이다.)



① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

049

좌표평면 위의 두 원

$$x^2+(y-2)^2=4,\ (x-n)^2+y^2=n^2$$

이 원점과 점 A_n에서 만난다. 원 $(x-n)^2+y^2=n^2$의 중심을 점 B_n이라 하고 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$을 $2:3$으로 내분하는 점을 (x_n, y_n)이라고 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{x_n}+5y_n\right)$의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

050 학교 기출 신유형

자연수 n에 대하여 직선 $y=\dfrac{x}{n}$와 원 $x^2+(y-2)^2=12$가 만나는 두 점 사이의 거리를 a_n이라고 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^2$의 값을 구하여라.

051

자연수 n에 대하여 원 $(x-2n)^2+(y-n)^2=n^2$ 위의 점 P_n과 직선 $x+y+n=0$ 사이의 거리의 최댓값을 M_n, 최솟값을 m_n이라고 하자. $a_n=M_nm_n$이라고 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

개념 3 수열의 극한값의 대소 관계

052

자연수 n에 대하여 $X=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{n}{20}\right]$일 때, $80X$의 값은?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

정답과 풀이 011쪽

053

모든 항이 양수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값은?

(가) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{2}$
(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{4n^3-n^2}{3n+2}<a_n+b_n<\frac{4n^3+n^2}{3n-2}$$

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

054 학교 기출 신 유형

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$3n^4-6n^3+3n^2<a_n<3n^4+6n^3+3n^2$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}}{2n^3}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

055

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} na_n$의 값을 구하여라.

(가) 이차방정식 $nx^2-(3n+1)x+n^2a_n=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(나) 이차방정식 $x^2-(3n-1)x+(n^3+1)a_n=0$이 서로 다른 두 허근을 갖는다.

개념 4 등비수열의 수렴과 발산

056 다빈출

자연수 n에 대하여 다항식 $P(x)=3x^n+5x+1$을 $x-3$, $x-5$로 나누었을 때의 나머지를 각각 a_n, b_n이라 고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{5^n-1}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

057

수열 $\sqrt{2}$, $\sqrt{2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, …의 극한값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

058

첫째항이 9이고 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$\log a_{n+1}=1+\log a_n$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_2}{9}\right)^n}{a_n+S_n}$의 값은?

① $\frac{10}{19}$ ② 1 ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{26}{9}$ ⑤ 3

059

첫째항이 3이고 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$과 모든 자연수 n에 대하여 이차방정식 $x^2-6a_nx+{a_{n+1}}^2=0$이 항상 중근을 갖는다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

060 교육청 기출

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $4^n<a_n<4^n+1$
(나) $2+2^2+2^3+\cdots+2^n<b_n<2^{n+1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+b_n}{2a_n+2^nb_n}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

061

수열 $\left\{\frac{r^n}{3+r^n}\right\}$의 극한값의 집합을 X라고 하자. 집합 X의 원소의 개수를 a, 집합 X의 모든 원소의 합을 b라고 할 때, $a+4b$의 값을 구하여라.

062

두 자연수 a, b에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+2b^{n+1}}{2a^n+b^n}=6$을 만족시키고 수열 $\left\{\left(\frac{a-1}{b^2}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하여라.

정답과 풀이 014쪽

063

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-3^n}{x^n+3^n}$ (n은 자연수)에 대하여

$$\lim_{x\to a-}f(x)<\lim_{x\to a+}f(x)$$

를 만족시키는 실수 a의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 3

064 교육청 기출

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(8)$의 값을 구하여라.

065

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{3}{5}$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{-6n^2+n+5a_n}{3n^2-2n-a_n}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

066

일반항이 $a_n=\lim_{k\to\infty}\frac{20^{k+1}+(5n)^k}{20^k+n^{2k}}$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 부등식

$$\sum_{i=1}^{m}(a_i+2i)\geq 400$$

을 만족시키는 자연수 m의 최솟값은?

① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

067 학교 기출 신유형

수열

2.24, 22.2244, 222.222444, $\cdots$

의 제n항을 a_n이라고 하자. a_n의 정수 부분을 b_n, 소수 부분을 c_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}+c_n\right)$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{11}{45}$
④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{13}{45}$

STEP A 상위권 보장 개념+필수 기출 문제

개념 1 급수의 수렴과 발산

(1) **급수**

① 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 덧셈 기호 $+$로 연결한 식

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

을 급수라고 한다.

② 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 합

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

를 이 급수의 제n항까지의 부분합이라고 한다.

(2) **급수의 수렴과 발산**

① 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 부분합 $\sum_{k=1}^{n}a_k$를 S_n이라고 할 때, 이 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 S에 수렴한다고 하고 S를 급수의 합이라고 한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

└ 급수의 합은 먼저 부분합을 구한 후 그것의 극한값을 구한다.

② 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 발산하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다고 한다.

└ 급수가 발산하면 급수의 합은 생각하지 않는다.

참고 수열의 수렴, 발산 ➡ $\lim_{n\to\infty}a_n$을 조사

급수의 수렴, 발산 ➡ $\lim_{n\to\infty}S_n$을 조사

068 평가원 기출

출제율

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$의 값은?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2

④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

069 학교 기출 신유형

출제율

자연수 n에 대하여 $2^{n+2}\times3^n$의 모든 양의 약수의 개수를 a_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값을 구하여라.

070

출제율

급수 $\frac{3}{1^2}+\frac{5}{1^2+2^2}+\frac{7}{1^2+2^2+3^2}+\cdots$의 값을 구하여라.

071

출제율

$\sum_{n=3}^{\infty}\log\left(1-\frac{4}{n^2}\right)$의 값은?

① $-\log 6$　② $-\log 4$　③ $-\log 2$

④ $\log 2$　⑤ $\log 4$

072

출제율

자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$(n^2+3n+2)x^2-(2n+3)x+1=0$$

의 두 근이 α_n, $\beta_n(\alpha_n>\beta_n)$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n-\beta_n)$의 값을 구하여라.

개념 2 급수와 수열의 극한 사이의 관계

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

대우

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

주의 (1)의 역은 성립하지 않는다. 즉, $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이라고 해서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 반드시 수렴하는 것은 아니다. 예를 들어 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이지만 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$은 양의 무한대로 발산한다.

등급업 TIP

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 S에 수렴할 때, 첫째항부터 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면 $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S$이고 $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$
$$=S-S=0$$

(2) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴, 발산을 조사할 때는 먼저 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구해 본다. 이때 그 값이 0이 아니면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 항상 발산하고, 0이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하는지 따져 본다.

073

출제율

다음 |보기|에서 수렴하는 급수인 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n})$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+n}{3-4n}$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

074

출제율

수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$(a_1-3)+\left(\frac{a_2}{2^2}-3\right)+\left(\frac{a_3}{3^2}-3\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{n^2}-3\right)+\cdots$$

이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3a_n}{2n-a_n}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

075

출제율

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3n^2+2}{4n-1}\right)=5$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{8a_n}{n+4}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

076

출제율

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-6)=10$일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_{2n}+3a_{n+1})$의 값을 구하여라.

개념 3 급수의 성질

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴할 때

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (단, k는 상수이다.)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

참고 급수의 성질은 수렴하는 급수에 대해서만 성립한다.

주의 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2 \neq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^2$

등급업 TIP

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ (α, β는 실수)이면

실수 p, q에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} (pa_n+qb_n) = p\sum_{n=1}^{\infty} a_n + q\sum_{n=1}^{\infty} b_n = p\alpha + q\beta$$

077

출제율

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5,\ \sum_{n=1}^{\infty} (3a_n+b_n) = 21$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값을 구하여라.

078

출제율

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{a_n - \frac{5}{n(n+1)}\right\} = 8$일 때,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구하여라.

079

출제율

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n-b_n) = 15,\ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n+2b_n) = 26$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$의 값은?

① 16 ② 17 ③ 18

④ 19 ⑤ 20

080

출제율

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 |보기|에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+1)$과 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n-1)$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$도 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답과 풀이 020쪽

개념 4 등비급수의 수렴과 발산

(1) **등비급수**

첫째항이 $a\,(a\neq0)$, 공비가 r인 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$의 각 항을 덧셈 기호 $+$로 연결한 급수

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$$

을 첫째항이 a, 공비가 r인 등비급수라고 한다.

(2) **등비급수의 수렴과 발산**

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}\,(a\neq0)$에 대하여 다음이 성립한다.

① $|r|<1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

② $|r|\geq1$일 때, 발산한다.

등급업 TIP

등비수열과 등비급수의 수렴 조건 비교

(1) 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$의 수렴 조건

➡ $a=0$ 또는 $-1<r\leq1$

(2) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$의 수렴 조건

➡ $a=0$ 또는 $-1<r<1$

081

출제율

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{5^n}$의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

082 학교 기출 신유형

출제율

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_1=b_1=2$이고, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=6$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$의 값을 구하여라.

083 교육청 기출

출제율

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x-3}{7}\right)^n$이 수렴하도록 하는 정수 x의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

084

출제율

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{5}$인 등비수열이다. 다음 중 수렴하지 않는 급수는?

① $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ ② $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ ③ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$

④ $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ ⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$

085

출제율

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cos\frac{n}{4}\pi=a\sqrt{2}+b$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $\frac{2a}{b}$의 값을 구하여라.

086

출제율

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3=4,\ a_6=-2$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{a_n}$의 값은?

① $-\frac{2^{10}}{3}$　② -2^9　③ 1　④ 2^9　⑤ $\frac{2^{10}}{3}$

087

출제율

$|x|<\frac{1}{3}$일 때, 급수

$$2+8x+26x^2+\cdots+(3^n-1)x^{n-1}+\cdots$$

의 합이 $\frac{24}{5}$이다. 실수 x의 값을 구하여라.

088

출제율

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=15,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}=9$$

일 때, a_2의 값은?

① $\frac{2}{3}$　② $\frac{5}{3}$　③ $\frac{7}{3}$　④ $\frac{10}{3}$　⑤ $\frac{13}{3}$

개념 5 등비급수의 활용

(1) 순환소수에서의 활용

순환소수는 등비급수를 이용하여 다음과 같은 순서에 따라 분수로 나타낼 수 있다. 무한소수 중 소수점 아래의 어떤 자리부터 일정한 숫자의 배열이 끝없이 되풀이되는 소수

(i) 순환소수를 등비급수로 나타낸다.

(ii) 첫째항 a와 공비 r를 구한다.

(iii) 등비급수의 합 $\frac{a}{1-r}$를 구한다.

예 $0.\dot{5}=\underbrace{0.5+0.05+0.005+\cdots}_{\text{첫째항이 } 0.5,\text{ 공비가 } 0.1\text{인 등비급수의 합}}=\frac{0.5}{1-0.1}=\frac{5}{9}$

(2) 도형에서의 활용

닮은꼴이 한없이 반복되는 도형에서 길이, 넓이 등의 합은 다음과 같은 순서에 따라 등비급수를 이용하여 구한다.

(i) 첫 번째 도형에서 a_1을 구한다.

(ii) 두 번째 도형에서 a_2를 구하거나 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 찾아 공비 r를 구한다.

등급업 TIP

닮은꼴에서 길이의 닮음비가 $m:n$이면

(1) 넓이의 비는 $m^2:n^2$

(2) 부피의 비는 $m^3:n^3$

089

출제율

순환소수 $0.\dot{4}\dot{5}$의 소수점 아래 n번째 자리의 숫자를 a_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$의 값은?

① $\frac{15}{8}$　② 2　③ $\frac{17}{8}$　④ $\frac{9}{4}$　⑤ $\frac{19}{8}$

정답과 풀이 021쪽

090

출제율

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3=0.\dot{3},\ a_5=0.08\dot{3}$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값은?

① $\frac{4}{3}$　② $\frac{5}{3}$　③ 2

④ $\frac{7}{3}$　⑤ $\frac{8}{3}$

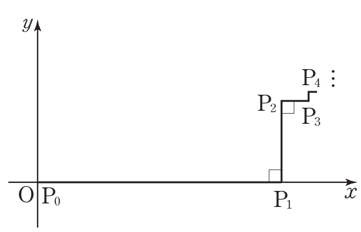
091

출제율

다음 그림과 같이 좌표평면 위에서 원점 O를 출발한 점 P가 P_1, P_2, P_3, $\cdots$으로 움직인다.

$$\overline{OP_1}=6,\ \overline{P_nP_{n+1}}=\frac{1}{3}\overline{P_{n-1}P_n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

일 때, n이 한없이 커지면 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표가 $(p,\ q)$이다. $p+q$의 값은? (단, $P_0(0,\ 0)$)



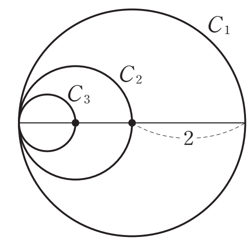
① 8　② $\frac{33}{4}$　③ $\frac{17}{2}$

④ $\frac{35}{4}$　⑤ 9

092 학교 기출 신유형

출제율

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원 C_1의 중심을 지나고 원 C_1에 내접하는 원을 C_2, 원 C_2의 중심을 지나고 원 C_2에 내접하는 원을 C_3이라고 하자. 이와 같은 과정을 한없이 반복하여 원 C_4, C_5, C_6, $\cdots$을 정할 때, 모든 원의 둘레의 길이의 합은?



① 4π　② $\frac{16}{3}\pi$　③ 6π

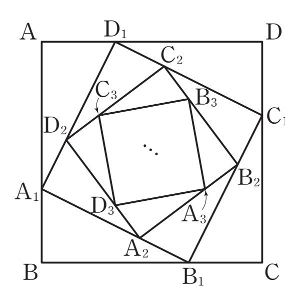
④ $\frac{20}{3}\pi$　⑤ 8π

093

출제율

다음 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 있다. 변 AB, BC, CD, DA를 3 : 1로 내분한 점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1이라 하고, 이 네 점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_1이라고 하자.

이와 같이 계속하여 변 A_nB_n, B_nC_n, C_nD_n, D_nA_n을 3 : 1로 내분한 점을 각각 A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}이라 하고, 이 네 점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_{n+1}이라고 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하여라.



STEP B 최상위권 도약 실력 완성 문제

개념 1 급수의 수렴과 발산

094

자연수 n에 대하여 두 수 -1과 7 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 수열

$-1, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, 7$

이 등차수열을 이룬다. 이 수열의 공차를 d_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1}d_{n+1}$의 값은?

① 40 ② 44 ③ 48 ④ 52 ⑤ 56

095

다음 |보기|의 급수 중에서 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$

ㄴ. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\cdots$

ㄷ. $2-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\cdots$

ㄹ. $-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\cdots$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄴ, ㄷ ④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

096

자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)=x^2-(n+1)x+n^2$, $g(x)=(n+1)x-2n$의 그래프의 두 교점의 x좌표를 a_n, b_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{20}{a_nb_n}$의 값은?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

097

$a_1=2$, $a_2=5$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{5}$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{a_na_{n+2}}$의 값은? (단, $a_n\neq0$)

① -1 ② $-\frac{7}{5}$ ③ $-\frac{9}{5}$ ④ $-\frac{11}{5}$ ⑤ $-\frac{13}{5}$

098 다빈출

수열 $\{a_n\}$이 자연수 n에 대하여

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+1}=a_{n+2}-a_n$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}$의 값을 구하여라.

099

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $S_n=\frac{4n}{n+2}$이다. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$의 값을 구하여라.

100

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이 각각 $a_n=\frac{1}{n+2}$, $b_n=\frac{1+(-1)^n}{n+4}$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$의 값을 구하여라.

101 교육청 기출

첫째항이 양수이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$과 모든 항이 양수인 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_1의 값은?

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$\log a_n+\log a_{n+1}+\log b_n=0$$

(나) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{12}$

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

102

좌표평면 위의 원점 O와 두 점 $A_n\left(\frac{10}{n+2}, 0\right)$, $B_n\left(\frac{5}{n+1}, \frac{20}{n+3}\right)$에 대하여 삼각형 OA_nB_n의 넓이를 S_n이라고 하자. $S_n<1$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 m이라고 할 때, $\sum_{n=m}^{\infty}S_n$의 값은?

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

103 학교 기출 신유형

1과 2 사이의 유리수 중에서 3을 분모로 하는 기약분수는 $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$이다. 이와 같이 자연수 n과 $n+1$ 사이의 유리수 중에서 3을 분모로 하는 모든 기약분수의 합을 a_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 1

104

좌표평면에서 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 것을 모두 나열하여 P_1, P_2, P_3, …이라고 하자. 점 P_n의 x좌표와 y좌표를 각각 a_n, b_n이라고 하면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$일 때, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_n-b_n}$의 값을 구하여라.

105

모든 항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2-1}=1,\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_n}-n)=\frac{3}{2}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{a_nS_n}$의 값은?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

개념 2 급수와 수열의 극한 사이의 관계

106 다빈출

수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}+\frac{3^{n-1}-5^n}{5^{n+1}+2}\right)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+a_n}{5n^2+3n}$의 값을 구하여라.

107

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{2n+1}+2S_n=a_n+\frac{n^2+2n}{2n^2+1},\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=k$$

가 성립한다. $150k$의 값을 구하여라. (단, k는 상수이다.)

108

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n^{\,2}+b_n^{\,2})$의 값은?

(가) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=5$
(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{2+2n^2}{3n^2+3}<b_n<\frac{3+2n^2}{3n^2+3}$$

① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{7}{9}$
④ $\frac{8}{9}$ ⑤ 1

109

모든 자연수 n에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

(가) $2n^2+3<(1+2+3+\cdots+n)a_n$
(나) $b_n<10-2a_n$
(다) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-2)$가 수렴한다.

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

110 학교 기출 신 유형

수열 $\{a_n\}$에 대하여 두 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n-\frac{4n^2+1}{n+1}\right),\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}a_n-\frac{an^2+bn}{n+5}\right)$$

이 모두 수렴할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

111

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)=5$$

가 성립한다. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라고 할 때, |보기|에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n>\lim_{n\to\infty} b_n$
ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)$은 수렴한다.
ㄷ. $\lim_{n\to\infty}(S_n-a_n-3n)=\lim_{n\to\infty}(T_n+3b_n+n)$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

112

수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\left(1-\frac{a_1}{3}\right)+\left\{\frac{2(1^2+2^2)}{1^3+2^3}-\frac{a_2}{12}\right\}+\left\{\frac{3(1^2+2^2+3^2)}{1^3+2^3+3^3}-\frac{a_3}{27}\right\}+\cdots+\left\{\frac{n(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)}{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}-\frac{a_n}{3n^2}\right\}$$

이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+a_n}{5n^2+3n}$의 값을 구하여라.

개념 3 급수의 성질

113

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=5,\ \sum_{n=1}^{\infty} na_n=8,\ \lim_{n\to\infty} n^2a_n=0$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n-a_{n+1})$의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

114

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값을 구하여라.

(가) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=15$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $3a_n+b_n=\dfrac{4}{n(n+1)}$

115

모든 항이 양수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \log b_n$이 모두 수렴하고,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log a_nb_n=9,\ \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{a_n^{\ 3}}{b_n}=3$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n^{\ 2}b_n$의 값을 구하여라.

116

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$은 발산하고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$은 수렴할 때, |보기|에서 수렴하는 급수인 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{4n-1}$ ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+3}{n^2}$
ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n)^2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

117 다빈출

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 |보기|에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+2b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n-b_n)$이 수렴하면 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 모두 수렴한다.
ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_na_{n+1}$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴한다.
ㄷ. $a_n<b_n$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\beta$이면 $\alpha<\beta$이다.
(단, α, β는 상수이다.)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답과 풀이 029쪽

개념 4 등비급수의 수렴과 발산

118

$\sum_{n=3}^{15} \frac{k}{n(n-1)}$의 값이 정수가 되도록 하는 자연수 k의 최솟값을 a라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{a}\right)^n$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

119 다빈출

수열 $\{a_n\}$이

$$9a_1+9^2a_2+9^3a_3+\cdots+9^na_n=5^n-1$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{5^n}$의 값은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$
④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

120

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=2,\ \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \times (-2)^n\}=-2$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$의 값을 구하여라.

121

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{5n^2-1}{n^2+n+2}<\sum_{k=1}^{n} a_k<\frac{5n^2-1}{n^2+n}$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=p$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n}$의 값은?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

122

$1<k<5$인 상수 k에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k+k^2+k^3+\cdots+k^n}{5^n}=1$$

일 때, $9k$의 값을 구하여라.

123 교육청 기출

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=\frac{1}{8}$이고,

$$a_n a_{n+1}=2^n \ (n\ge1)$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n-1}}$의 값을 구하여라.

124 다빈출

방정식 $x^n=(-5)^n$의 실근의 개수를 a_n이라고 할 때, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}$의 값은? (단, n은 1보다 큰 자연수이다.)

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

125

자연수 n에 대하여 두 함수 $f(n)$, $g(n)$이

$$f(n)=\sin\frac{2n-1}{4}\pi,\ g(n)=\cos\frac{2n-1}{4}\pi$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{f(n)+g(n)}{2}\right\}^n$의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
④ $\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

126

등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_5의 값을 구하여라. (단, $a_n\neq0$)

(가) $2a_4=a_2+a_3$	(나) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=12$

127

급수

$$\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5^2}+\frac{4}{5^3}\right)+\left(\frac{4}{5^3}+\frac{4}{5^4}+\frac{4}{5^5}\right)+\left(\frac{4}{5^4}+\frac{4}{5^5}+\frac{4}{5^6}+\frac{4}{5^7}\right)+\cdots$$

의 합은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{25}{24}$
④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

128

$\log_3 x=[\log_3 x]$를 만족시키는 $0<x<1$인 모든 x의 값들의 합은?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

129

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(3^{2x-3}-2\times3^{x-2})^n$이 수렴하도록 하는 정수 x의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

130

실수 t에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(2r)^{n-1}=t$일 때, 다음 중 t의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

131

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}x(2x+1)^n$이 수렴할 때, 그 합을 $f(x)$라고 하자. 이때 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P의 자취의 길이를 구하여라. (단, $x(2x+1)\neq0$)

132

모든 항이 1이 아닌 양수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값은?

> (가) $a_1=\frac{1}{100}$
> (나) $\log a_n+\log a_{n+1}=\log a_n \log a_{n+1}$
> (다) $\log b_n=\sum_{k=1}^{6n}\log a_k$

① $\frac{1}{99999}$ ② $\frac{1}{9999}$ ③ $\frac{1}{999}$
④ $\frac{1}{99}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

133

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 |보기|에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$도 수렴한다.

ㄴ. 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}{b_n}^2$이 모두 수렴하면 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$도 수렴한다.

ㄷ. 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^3$, $\sum_{n=1}^{\infty}{b_n}^3$이 모두 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$도 모두 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

134

21×7^n의 모든 양의 약수 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{2n+4}에 대하여

$$T_n=\sum_{k=1}^{2n+4}\frac{1}{a_k},\ \lim_{n\to\infty}T_n=t$$

라고 할 때, $9t$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

135

집합 $\left\{\frac{2}{k}\middle|k\text{는 자연수}\right\}$의 원소 중에서 정수이거나 유한소수로 나타낼 수 있는 수를 큰 수부터 차례대로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$이라고 하자. 이때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값을 구하여라.

136

다음 조건을 모두 만족시키는 정수 x의 값의 합은?

(가) 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-3}{8}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log_3\frac{x}{9}\right)^n$이 모두 수렴한다.
(나) 자연수 n에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}-3^{2n}-5^{n+1}}{x^n+3^{2n+1}+5^n}=-\frac{1}{3}$$

① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

개념 5 등비급수의 활용

137

순환소수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$의 각 항이

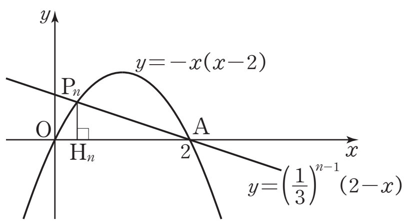
$$a_1=0.\dot{2},\ a_2=0.\dot{2}\dot{0},\ a_3=0.\dot{2}0\dot{0},$$
$$a_4=0.\dot{2}00\dot{0},\ a_5=0.\dot{2}000\dot{0},\ \cdots$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 1

138

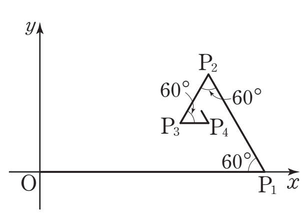
다음 그림과 같이 자연수 n에 대하여 직선 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2-x)$와 이차함수 $y=-x(x-2)$의 그래프가 만나는 두 점을 $\mathrm{A}(2,\ 0)$과 P_n이라고 하자. 점 P_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}$의 값을 구하여라.



139

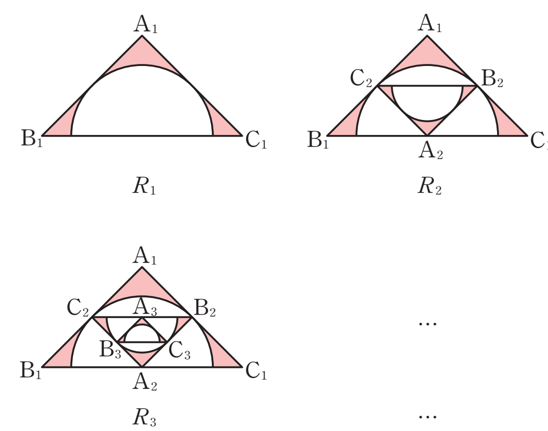
다음 그림과 같이 x축 위의 점 P_1에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}_1}=4$이다. $\angle \mathrm{OP}_1\mathrm{P}_2=60^{\circ}$, $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OP}_1}$이 되도록 점 P_2를 정하고, $\angle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3=60^{\circ}$, $\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}$가 되도록 점 P_3을 정한다. 이와 같은 방법으로 계속하여 점 P_n을 정할 때, 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 x좌표를 구하여라.

(단, O는 원점이다.)



140

다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}=\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1}=\sqrt{2}$, $\angle \mathrm{A}_1=90^{\circ}$인 직각삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$의 내부와 이 직각삼각형의 두 변과 접하고 중심이 선분 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$ 위에 있는 반원의 외부에 공통으로 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라고 하자. 그림 R_1에서 그린 반원의 중심을 A_2, 반원과 직각삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$의 두 변이 접하는 접점을 각각 B_2, C_2라고 할 때, 직각삼각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$의 내부와 이 직각삼각형의 두 변과 접하고 중심이 선분 $\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$ 위에 있는 반원의 외부에 공통으로 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라고 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

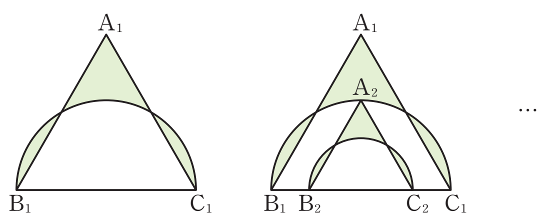


① $\frac{\pi-3}{6}$　② $\frac{4-\pi}{6}$　③ $\frac{\pi-3}{3}$　④ $\frac{4-\pi}{3}$　⑤ $\frac{\pi-3}{2}$

141

다음 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 선분 B_1C_1을 지름으로 하는 반원을 그려 삼각형 $A_1B_1C_1$의 내부와 반원에서 공통된 부분을 제외한 ⋀ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라고 하자. 그림 R_1에서 반원 위의 점 A_2와 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하는 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그린다. 선분 B_2C_2를 지름으로 하는 반원을 그려 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 삼각형 $A_2B_2C_2$의 내부와 반원에서 공통된 부분을 제외한 ⋀ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라고 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

(단, 모든 반원의 중심은 일치한다.)

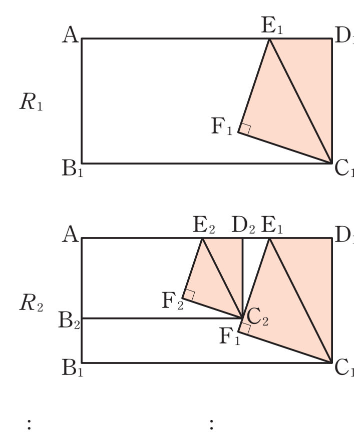


R_1　　　R_2　　　⋯

① 2π　② $\frac{9}{4}\pi$　③ $\frac{5}{2}\pi$
④ $\frac{11}{4}\pi$　⑤ 3π

142 평가원 기출

다음 그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AD_1}=4$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. 선분 AD_1을 $3:1$로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 직사각형 $AB_1C_1D_1$의 내부에 점 F_1을 $\overline{F_1E_1}=\overline{F_1C_1}$, $\angle E_1F_1C_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고 삼각형 $E_1F_1C_1$을 그린다. 사각형 $E_1F_1C_1D_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라고 하자. 그림 R_1에서 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1F_1 위의 점 C_2, 선분 AE_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{AD_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 삼각형 $E_2F_2C_2$를 그리고 사각형 $E_2F_2C_2D_2$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라고 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{441}{103}$　② $\frac{441}{109}$　③ $\frac{441}{115}$
④ $\frac{441}{121}$　⑤ $\frac{441}{127}$