필수 개념 연계 문항들로 빠르게 끝내는 **단기 완성서**

풍산자 라이트

미적분

구성과 특징

쉽고 가벼운

단기 개념 완성서

필수 개념 연계 문제와

기출 문제를 한번에 잡는

개념 완성 비법서

기본 개념의

문제 적용력 **up!!**

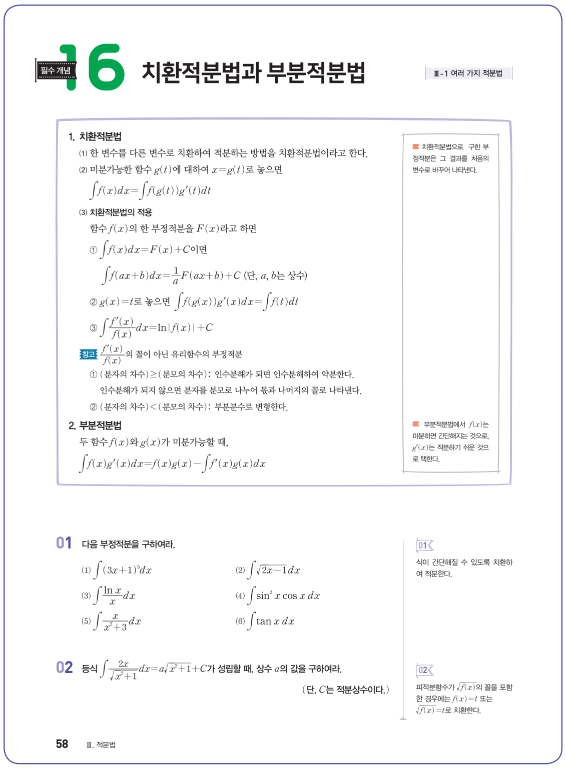
실전 문제 해결력 **up!!**

1

필수 개념과 연계 문제 학습

• 미적분을 학습하는 데 꼭 필요한 개념을 선별하고 문제 풀이에 도움이 되는 내용을 참고로 제시

• 필수 개념과 연계한 문제를 소개하고, 문제 풀이에 좀 더 쉽게 다가가기 위한 TIP 제공



필수 개념 **16** 치환적분법과 부분적분법 Ⅲ-1 여러 가지 적분법

1. 치환적분법

(1) 한 변수를 다른 변수로 치환하여 적분하는 방법을 치환적분법이라고 한다.

(2) 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면

$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$

(3) 치환적분법의 적용

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

① $\int f(x)dx=F(x)+C$이면

$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$ (단, a, b는 상수)

② $g(x)=t$로 놓으면 $\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(t)dt$

③ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$

참고 $\frac{f'(x)}{f(x)}$의 꼴이 아닌 유리함수의 부정적분

① (분자의 차수)$\geq$(분모의 차수): 인수분해가 되면 인수분해하여 약분한다. 인수분해가 되지 않으면 분자를 분모로 나누어 몫과 나머지의 꼴로 나타낸다.

② (분자의 차수)$<$(분모의 차수): 부분분수로 변형한다.

2. 부분적분법

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 미분가능할 때,

$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

치환적분법으로 구한 부정적분은 그 결과를 처음의 변수로 바꾸어 나타낸다.

부분적분법에서 $f(x)$는 미분하면 간단해지는 것으로, $g'(x)$는 적분하기 쉬운 것으로 택한다.

01 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (3x+1)^5dx$ (2) $\int \sqrt{2x-1}\,dx$

(3) $\int \frac{\ln x}{x}dx$ (4) $\int \sin^2 x\cos x\,dx$

(5) $\int \frac{x}{x^2+3}dx$ (6) $\int \tan x\,dx$

02 등식 $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx=a\sqrt{x^2+1}+C$가 성립할 때, 상수 a의 값을 구하여라. (단, C는 적분상수이다.)

01 식이 간단해질 수 있도록 치환하여 적분한다.

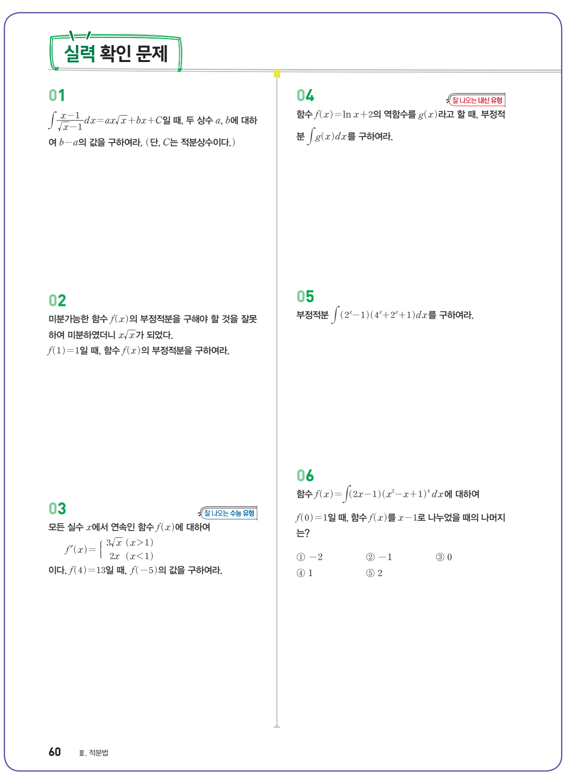
02 피적분함수가 $\sqrt{f(x)}$의 꼴을 포함한 경우에는 $f(x)=t$ 또는 $\sqrt{f(x)}=t$로 치환한다.

58 Ⅲ. 적분법

2

실력 확인 문제

- 잘 나오는 내신 유형, 잘 틀리는 내신 유형을 표시하여 내신을 대비할 수 있는 문제를 수록
- 잘 나오는 수능 유형, 잘 틀리는 수능 유형을 표시하여 학력평가, 평가원, 수능 기출 문제를 연습



실력 확인 문제

01
$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}dx = ax\sqrt{x}+bx+C$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하여라. (단, C는 적분상수이다.)

02
미분가능한 함수 $f(x)$의 부정적분을 구해야 할 것을 잘못하여 미분하였더니 $x\sqrt{x}$가 되었다.
$f(1)=1$일 때, 함수 $f(x)$의 부정적분을 구하여라.

03 잘 나오는 수능 유형
모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=\begin{cases} 3\sqrt{x} & (x>1) \\ 2x & (x<1) \end{cases}$$

이다. $f(4)=13$일 때, $f(-5)$의 값을 구하여라.

04 잘 나오는 내신 유형
함수 $f(x)=\ln x+2$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 부정적분 $\int g(x)dx$를 구하여라.

05
부정적분 $\int (2^x-1)(4^x+2^x+1)dx$를 구하여라.

06
함수 $f(x)=\int (2x-1)(x^2-x+1)^4dx$에 대하여
$f(0)=1$일 때, 함수 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는?

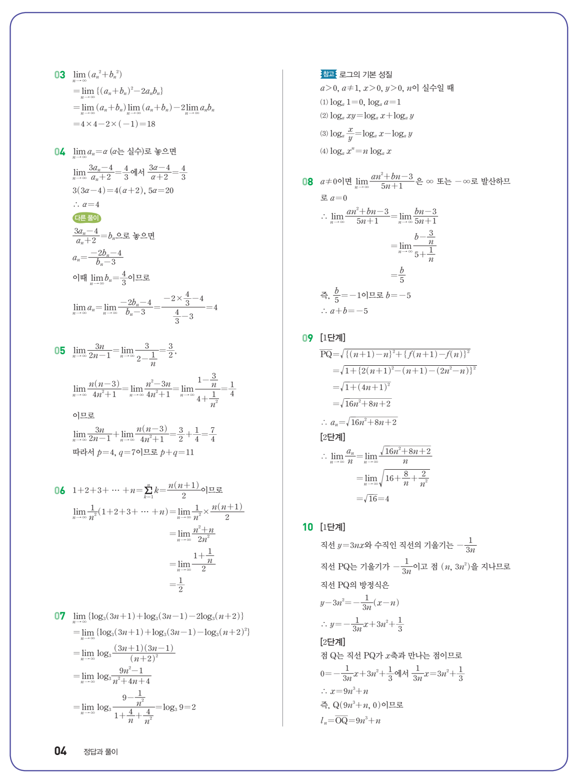
① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

60 Ⅲ. 적분법

3

정답과 풀이

- 다른 풀이, 참고를 제시하여 다양한 방법으로 문제 풀이에 접근
- 풀이를 단계별로 나누어 체계적으로 과정을 사고



03 $\lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)$
$=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\}$
$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-2\lim_{n\to\infty}a_nb_n$
$=4\times4-2\times(-1)=18$

04 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)로 놓으면
$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-4}{a_n+2}=\frac{4}{3}$에서 $\frac{3\alpha-4}{\alpha+2}=\frac{4}{3}$
$3(3\alpha-4)=4(\alpha+2)$, $5\alpha=20$
$\therefore \alpha=4$
다른 풀이
$\frac{3a_n-4}{a_n+2}=b_n$으로 놓으면
$a_n=\frac{-2b_n-4}{b_n-3}$
이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{4}{3}$이므로
$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-2b_n-4}{b_n-3}=\frac{-2\times\frac{4}{3}-4}{\frac{4}{3}-3}=4$

05 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2-\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}$,
$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-3)}{4n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n}{4n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n}}{4+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{4}$
이므로
$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n-1}+\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-3)}{4n^2+1}=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$
따라서 $p=4$, $q=7$이므로 $p+q=11$

06 $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$이므로
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}$
$=\frac{1}{2}$

07 $\lim_{n\to\infty}\{\log_3(3n+1)+\log_3(3n-1)-2\log_3(n+2)\}$
$=\lim_{n\to\infty}\{\log_3(3n+1)+\log_3(3n-1)-\log_3(n+2)^2\}$
$=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{(3n+1)(3n-1)}{(n+2)^2}$
$=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{9n^2-1}{n^2+4n+4}$
$=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{9-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}=\log_3 9=2$

참고 로그의 기본 성질
$a>0$, $a\neq1$, $x>0$, $y>0$, n이 실수일 때
(1) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$
(2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$
(3) $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$
(4) $\log_a x^n=n\log_a x$

08 $a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn-3}{5n+1}$은 ∞ 또는 $-\infty$로 발산하므로 $a=0$
$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn-3}{5n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn-3}{5n+1}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{b-\frac{3}{n}}{5+\frac{1}{n}}$
$=\frac{b}{5}$
즉, $\frac{b}{5}=-1$이므로 $b=-5$
$\therefore a+b=-5$

09 [1단계]
$\overline{PQ}=\sqrt{\{(n+1)-n\}^2+\{f(n+1)-f(n)\}^2}$
$=\sqrt{1+\{2(n+1)^2-(n+1)-(2n^2-n)\}^2}$
$=\sqrt{1+(4n+1)^2}$
$=\sqrt{16n^2+8n+2}$
$\therefore a_n=\sqrt{16n^2+8n+2}$
[2단계]
$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2+8n+2}}{n}$
$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{16+\frac{8}{n}+\frac{2}{n^2}}$
$=\sqrt{16}=4$

10 [1단계]
직선 $y=3nx$와 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3n}$
직선 PQ는 기울기가 $-\frac{1}{3n}$이고 점 $(n, 3n^2)$을 지나므로
직선 PQ의 방정식은
$y-3n^2=-\frac{1}{3n}(x-n)$
$\therefore y=-\frac{1}{3n}x+3n^2+\frac{1}{3}$
[2단계]
점 Q는 직선 PQ가 x축과 만나는 점이므로
$0=-\frac{1}{3n}x+3n^2+\frac{1}{3}$에서 $\frac{1}{3n}x=3n^2+\frac{1}{3}$
$\therefore x=9n^3+n$
즉, $Q(9n^3+n, 0)$이므로
$l_n=\overline{OQ}=9n^3+n$

04 정답과 풀이

차례

Ⅰ 수열의 극한

Ⅱ 미분법

Ⅲ 적분법

필수 개념 01

수열의 극한

1. 수열의 수렴과 발산

수열 $\{a_n\}$이

(1) **수렴**: $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (α는 일정한 값)

(2) **발산**: $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n=\infty & \text{(양의 무한대로 발산)} \\ \lim_{n\to\infty} a_n=-\infty & \text{(음의 무한대로 발산)} \\ \text{진동하면서 발산} \end{cases}$

2. 수열의 극한값의 계산

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고, $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)일 때

(1) **수열의 극한에 대한 기본 성질**

① $\lim_{n\to\infty} ka_n=k\lim_{n\to\infty} a_n=k\alpha$ (단, k는 상수이다.)

② $\lim_{n\to\infty} (a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n\pm\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\pm\beta$ (복호동순)

③ $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$

④ $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq 0$, $\beta\neq 0$)

(2) **수열의 극한의 대소 관계**

① 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le b_n$이면 $\alpha\le\beta$

② 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$

수열의 극한값 구하기

(1) $\dfrac{\infty}{\infty}$의 꼴

분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

① (분모의 차수) $=$ (분자의 차수)
⇨ 극한값은 최고차항의 계수의 비

② (분모의 차수) $>$ (분자의 차수)
⇨ 극한값은 0

③ (분모의 차수) $<$ (분자의 차수)
⇨ ∞ 또는 $-\infty$로 발산

(2) $\infty-\infty$의 꼴

무리식은 유리화하고, 다항식은 최고차항으로 묶는다.

01 수렴하는 수열인 것만을 |보기|에서 있는 대로 고른 것은?

|보기|

ㄱ. $\left\{3+\dfrac{1}{n}\right\}$ ㄴ. $\{2n-1\}$

ㄷ. $\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ ㄹ. $\{(-1)^n\}$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

01 n이 한없이 커질 때, 일정한 값이 가까워지는 수열을 찾는다.

02 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=2$, $\lim_{n\to\infty} b_n=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty} (2a_n+b_n)$의 값을 구하여라.

02 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하는 경우에만 수열의 극한에 대한 성질이 성립한다.

03 수렴하는 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n-1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

과 같이 정의될 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

03 수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (α는 실수)이면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$이다.

04 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{n}+3\right)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

04 $\frac{\infty}{\infty}$의 꼴은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈 다음, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$임을 이용한다.

05 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{n-1}=2$가 성립하도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

05 $\frac{\infty}{\infty}$의 꼴의 극한이 0이 아닌 값으로 수렴하면 분모와 분자의 차수가 같아야 하고, 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.

06 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$의 값을 구하여라.

06 분자에만 근호가 있는 무리식은 분모를 1로 생각하고 분자를 유리화한다.

07 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\frac{3n-1}{n+1}<a_n<\frac{3n+4}{n+1}$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① -3 ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ 2 ⑤ 3

07 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$이다.

필수 개념 **02**

등비수열의 극한

1. 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산

(1) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)

(2) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)

(3) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)

(4) $r\le -1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다. (발산)

2. 등비수열의 수렴 조건

(1) 수열 $\{r^n\}$이 수렴하기 위한 조건 ⇨ $-1<r\le 1$

(2) 수열 $\{ar^{n-1}\}$이 수렴하기 위한 조건 ⇨ $a=0$ 또는 $-1<r\le 1$

등비수열

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은

$a_n=ar^{n-1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

01 다음 등비수열의 수렴과 발산을 조사하여라.

(1) $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$

(2) $-3,\ 1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{27},\ \cdots$

01 등비수열의 공비의 범위를 조사한다.

02 수렴하는 수열인 것만을 |보기|에서 있는 대로 골라라.

|보기|

ㄱ. $\{4\times(-1)^n\}$　　ㄴ. $\{(1+0.2)^n\}$

ㄷ. $\left\{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right\}$　　ㄹ. $\left\{\frac{3^n}{2^{2n}}\right\}$

02 $-1<(\text{공비})\le 1$인 것을 찾는다.

03 첫째항이 5, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 일반항을 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① 0　　② $\frac{1}{2}$　　③ 1

④ $\frac{5}{2}$　　⑤ 5

03 $-1<\frac{1}{2}<1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

04 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-5^n}{2^n+5^n}$ (2) $\lim_{n\to\infty}(5^n-2^n)$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{(2^n+1)(3^n+1)}$ (4) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^n}{2^n+3^{n+1}}$

04
(2) 밑의 절댓값이 가장 큰 항으로 묶는다.

05 등비수열 $\left\{\left(\frac{x+1}{2}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구하여라.

05
수열 $\{r^n\}$이 수렴하기 위한 조건은
$-1<r\le1$

06 수열 $x,\ x(x-1),\ x(x-1)^2,\ \cdots$이 수렴하도록 하는 정수 x의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

06
수열 $\{ar^{n-1}\}$이 수렴하기 위한 조건은
$a=0$ 또는 $-1<r\le1$

07 두 등비수열 $\{(x-2)^n\}$, $\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^n\right\}$이 동시에 수렴하기 위한 x의 값의 범위가 $\alpha<x\le\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

07
두 등비수열에서 각각 x의 값의 범위를 구하여 공통 범위를 찾는다.

08 $\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{r^n+1}$의 값은 $|r|<1$이면 a이고, $|r|>1$이면 b이다. 이때 두 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하여라.

08
$r>1$이면 $\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$
$-1<r<1$이면 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$
$r<-1$이면 $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$

실력 확인 문제

01

다음 수열 중에서 수렴하는 것은?

① $\{\sqrt{n}\}$ ② $\{1-3n\}$ ③ $\{\sin 2n\pi\}$
④ $\{2n^2-5\}$ ⑤ $\{1+(-1)^n\}$

02

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=4$, $\lim_{n\to\infty} b_n=-3$ 일 때, 다음 중 극한값이 옳지 않은 것은?

① $\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=-2$ ② $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=-12$
③ $\lim_{n\to\infty}(3b_n-a_n)=-13$ ④ $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n}{b_n}=4$
⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{a_n}=\frac{1}{4}$

03

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=4,\ \lim_{n\to\infty} a_nb_n=-1$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+b_n{}^2)$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

04

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-4}{a_n+2}=\frac{4}{3}$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

05

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n-1}+\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-3)}{4n^2+1}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

06

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 2

정답과 풀이 p.03

07

다음 극한값은?

$$\lim_{n\to\infty}\{\log_3(3n+1)+\log_3(3n-1)-2\log_3(n+2)\}$$

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

08

등식 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn-3}{5n+1}=-1$이 성립하도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

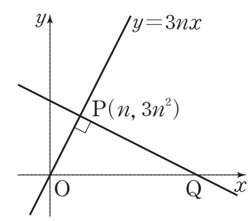
① -10 ② -5 ③ 0
④ 5 ⑤ 10

09

자연수 n에 대하여 곡선 $f(x)=2x^2-x$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(n, f(n))$, $\mathrm{Q}(n+1, f(n+1))$ 사이의 거리를 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하여라.

10

자연수 n에 대하여 직선 $y=3nx$ 위의 점 $\mathrm{P}(n, 3n^2)$을 지나고 이 직선과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라고 할 때, 선분 OQ의 길이를 l_n이라고 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n^3}$의 값을 구하여라. (단, O는 원점이다.)



11

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}(4n-1)a_n$의 값은?

① 6 ② 9 ③ 12
④ 15 ⑤ 18

12

잘 나오는 내신 유형

자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식 $x^2+2nx-3n=0$의 양의 실근을 a_n이라고 하자. 이때 $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

13

잘 틀리는 수능 유형

$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$의 값을 구하여라.

14

$\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n^2+an}-n)=2$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

15

자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+2n}$의 소수 부분을 a_n이라고 할 때, $\lim_{n \to \infty} a_n$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

16

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$4n-1<(n+2)a_n<4n+3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \to \infty} a_n$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

17

잘 나오는 수능 유형

수열 $\{a_n\}$에 대하여 곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$은 x축과 만나고, 곡선 $y=x^2-nx+a_n$은 x축과 만나지 않는다. $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n^2}$의 값은?

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

18

잘 나오는 내신 유형

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 |보기|에서 있는 대로 고른 것은?

|보기|

ㄱ. $\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n}=1$이면 $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}=1$이다.

ㄴ. $\lim_{n \to \infty} a_nb_n=0$이면 $\lim_{n \to \infty} a_n=0$ 또는 $\lim_{n \to \infty} b_n=0$이다.

ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이면 $\lim_{n \to \infty} a_n<\lim_{n \to \infty} b_n$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답과 풀이 p.04

19

$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{2^n}\right)\left(a+\frac{1}{3^n}\right)=-6$일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

20

첫째항이 2, 공비가 5인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-3}{a_n}$의 값을 구하여라.

21

공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{2^n}=-3$이다. 이때 수열 $\{a_n\}$의 첫째항은?

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

22

등비수열 $\left\{\left(\frac{2^x-5}{3}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위가 $\alpha<x\le\beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

23

잘 틀리는 내신 유형

등비수열 $\{(\log x-1)^n\}$이 수렴하도록 하는 정수 x의 개수를 구하여라.

24

$a>2$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2a^{n+1}-3\times2^n}{a^n-2^{n-1}}=10$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하여라.

03 급수의 수렴과 발산

1. 급수와 부분합

(1) **급수**: 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$로 연결한 식

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

(2) **부분합**: 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

2. 급수의 수렴과 발산

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$에 대하여

(1) 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 S에 수렴한다.

이때 S를 급수의 합이라고 한다.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S \iff \sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$$

(2) 수열 $\{S_n\}$이 발산할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다고 한다.

3. 수열의 극한과 급수 사이의 관계

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다. (역은 성립하지 않는다.)

(2) $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다. ⇦ (1)의 대우

4. 급수의 성질

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 각각 수렴하면

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}ka_n=k\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (단, k는 상수이다.)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ (복호동순)

수열 $\{a_n\}$의 수렴, 발산은 $\lim_{n\to\infty}a_n$으로 판별하고, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 수렴, 발산은 $\lim_{n\to\infty}S_n$으로 판별한다.

급수가 발산하면 급수의 합은 생각하지 않는다.

급수의 성질은 수렴하는 급수에 대해서만 성립한다.

01 다음 급수의 수렴과 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

(1) $1+3+5+\cdots+(2n-1)+\cdots$

(2) $\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\cdots$

01

급수의 합은 다음의 순서로 구한다.

① 제n항까지의 부분합 S_n을 구한다.

② $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값을 구한다.

02 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n=\frac{12n}{3n+1}$일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 합을 구하여라.

02

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n$

03 급수 $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 이 급수의 제n항을 a_n이라고 할 때, a_n을 구하여라.

(2) 첫째항부터 제n항까지의 부분합 S_n을 구하여라.

(3) $\lim_{n\to\infty} S_n$을 구하여라.

04 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-1)=3$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{2}$

④ 1 ⑤ 2

05 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$의 수렴과 발산을 조사하여라.

06 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+4b_n)$의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

07 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=7,\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=1$$

일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 합과 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 합을 각각 구하여라.

03

부분분수의 변형

두 수 A, B에 대하여

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$

(단, $A\neq B$)

04

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

05

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$이지만, 그 역은 성립하지 않는다.

06

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$($\alpha$, β는 실수)

이면 실수 p, q에 대하여

$\sum_{n=1}^{\infty}(pa_n+qb_n)=p\alpha+q\beta$

07

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로 급수의 성질을 이용할 수 있다.

04 등비급수

1. 등비급수

첫째항이 $a(a\neq0)$, 공비가 r인 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$의 각 항의 합으로 이루어진 급수, 즉

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$

2. 등비급수의 수렴과 발산

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}(a\neq0)$은

(1) $|r|<1$일 때 수렴하고, 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

(2) $|r|\geq1$일 때 발산한다.

3. 등비급수의 수렴 조건

(1) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하기 위한 조건 ⇨ $-1<r<1$

(2) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$이 수렴하기 위한 조건 ⇨ $a=0$ 또는 $-1<r<1$

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$에서 $a=0$이면 부분합 $S_n=0$이므로 r의 값에 관계없이 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=0$

01 다음 등비급수의 수렴과 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

(1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$

(2) $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{125}+\cdots$

(3) $1+\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+\cdots$

01
등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은
$|r|<1$이면 수렴,
$|r|\geq1$이면 발산

02 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$의 합을 구하여라.

02
두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$이 각각 수렴하므로 급수의 성질을 이용할 수 있다.

03 급수 $1+2x+4x^2+8x^3+\cdots$이 수렴하도록 하는 정수 x의 개수는?

① 0　② 1　③ 2
④ 3　⑤ 4

03
주어진 급수의 공비가
$-1<(\text{공비})<1$
을 만족시켜야 한다.

04 첫째항이 3인 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 합이 2일 때, 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 구하여라.

04
공비를 r라 하고 등비급수의 합의 공식을 이용한다.

05 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)(x-3)^n$이 동시에 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위는?

① $2\le x<3$　② $2<x\le 3$　③ $2\le x\le 3$
④ $2<x<4$　⑤ $2<x\le 4$

05
두 등비급수에서 각각 수렴하는 x의 값의 범위를 구하여 공통 범위를 찾는다.

06 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴할 때, 항상 수렴하는 급수인 것만을 |보기|에서 있는 대로 골라라.

|보기|

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$　ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$　ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r+1}{2}\right)^n$

06
$-1<r<1$이므로 각 경우에서 $-1<(공비)<1$인지 확인한다.

07 다음은 등비급수를 이용하여 순환소수 $0.\dot{3}\dot{4}$를 분수로 나타내는 과정이다.
(가), (나), (다)에 알맞은 것을 써넣어라.

$0.\dot{3}\dot{4}=0.34+0.0034+0.000034+\cdots$

$=\frac{34}{100}+\frac{34}{100^2}+\frac{34}{100^3}+\cdots$

따라서 $0.\dot{3}\dot{4}$는 첫째항이 $\boxed{(가)}$이고 공비가 $\boxed{(나)}$인 등비급수의 합이므로

$0.\dot{3}\dot{4}=\frac{\boxed{(가)}}{1-\boxed{(나)}}=\boxed{(다)}$

07
순환소수를 등비급수의 합으로 나타내면 첫째항과 공비를 찾을 수 있다.

실력 확인 문제

01

다음 급수 중 수렴하는 것은?

① $1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}+\cdots$

② $2+4+6+8+\cdots+2n+\cdots$

③ $-1+1-1+1-1+\cdots+(-1)^n+\cdots$

④ $1+\left(\frac{1}{2}\right)+0+\left(-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{-n+3}{2}\right)+\cdots$

⑤ $\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\frac{2}{4\times5}+\cdots+\frac{2}{(n+1)(n+2)}+\cdots$

02

|보기|의 급수 중 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은?

|보기|

ㄱ. $1-2+3-4+5-6+\cdots$

ㄴ. $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$

ㄷ. $(1-2)+(2-1)+(1-2)+(2-1)$
$+(1-2)+\cdots$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

03

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=6,\ \sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n)=10$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 합은?

① -4 ② -2 ③ 0

④ 2 ⑤ 4

04

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3b_n)=10,\ \sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-2b_n)=9$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

05

잘 나오는 내신 유형

$\frac{2}{3^2-1}+\frac{2}{5^2-1}+\frac{2}{7^2-1}+\frac{2}{9^2-1}+\cdots$ 의 합은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ 1 ⑤ 2

06

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+n$일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}$의 합은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

정답과 풀이 p.08

07

잘 나오는 내신 유형

급수 $\sum_{n=2}^{\infty} \log_2 \frac{n^2}{(n-1)(n+1)}$의 합은?

① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{2}$

④ 1 ⑤ 2

08

수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$(a_1-7)+(a_2-7)+(a_3-7)+\cdots$$

이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

09

자연수 n에 대하여 직선 $(2n+1)x+(2n-1)y=1$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 a_n이라고 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 합은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

10

급수

$$x+\frac{x(x-1)}{2}+\frac{x(x-1)^2}{2^2}+\frac{x(x-1)^3}{2^3}+\cdots$$

이 수렴하도록 하는 정수 x의 개수를 구하여라.

11

잘 나오는 수능 유형

수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+9n}{n}$의 값을 구하여라.

12

수열 $\{(x-1)(3x-1)^n\}$과 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (x^2-x+1)^n$이 모두 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위를 구하여라.

13

공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=16$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항은?

① 1 ② 3 ③ 6
④ 9 ⑤ 12

14

잘 틀리는 내신 유형

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=-6$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\ 2}=72$일 때, a_4의 값을 구하여라.

15

수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=3,\ 2a_{n+1}=a_n+4\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

로 정의될 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(4-a_n)$의 합을 구하여라.

16

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $\log_3(S_n+1)=n$을 만족시킬 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 합은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

17

급수

$$\log_3\sqrt{9}+\log_3\sqrt{\sqrt{9}}+\log_3\sqrt{\sqrt{\sqrt{9}}}+\cdots$$

의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 9 ⑤ 18

18

두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$에 대한 설명으로 옳은 것만을 |보기|에서 있는 대로 고른 것은?

|보기|

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이면 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 발산하면 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\neq 0$이다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$도 수렴한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답과 풀이 p.10

19

잘 틀리는 내신 유형

자연수 n에 대하여 $2^n\times 3^{n+1}$의 모든 양의 약수의 개수를 a_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 합을 구하여라.

20

자연수 n에 대하여 x^n을 $4x+3$으로 나누었을 때의 나머지를 a_n이라고 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 합은?

① $-\frac{4}{7}$ ② $-\frac{3}{7}$ ③ $-\frac{3}{4}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{7}{3}$

21

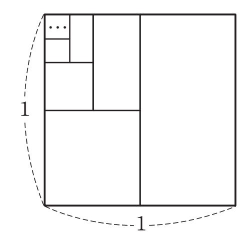
모든 항이 양수이고 첫째항이 $0.\dot{3}$, 제3항이 $0.01\dot{3}$인 등비급수의 합은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{7}{12}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

22

분수 $\frac{5}{11}$를 소수로 나타낼 때 소수점 아래 제 n번째 자리의 수를 a_n이라고 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

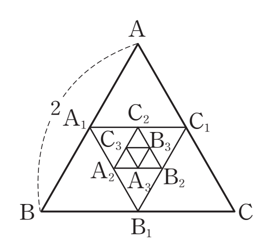
23



오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형이 있다. 이 정사각형을 합동인 두 직사각형으로 나누는 선분을 그리고, 한 직사각형을 다시 합동인 두 정사각형으로 나누는 선분을 그린다. 이와 같은 과정을 한없이 반복할 때, 그려진 선분의 길이의 합은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

24



오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 각 변의 중점을 연결하여 만든 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 넓이를 S_1, 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 각 변의 중점을 연결하여 만든 정삼각형 $A_2B_2C_2$의 넓이를 S_2라고 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정삼각형 $A_nB_nC_n$의 넓이를 S_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값을 구하여라.

필수 개념 05

지수함수와 로그함수의 미분

1. 지수함수와 로그함수의 극한

(1) 지수함수의 극한

① $a>1$일 때, $\lim_{x\to\infty} a^x=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x=0$

② $0<a<1$일 때, $\lim_{x\to\infty} a^x=0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x=\infty$

(2) 로그함수의 극한

① $a>1$일 때, $\lim_{x\to0+} \log_a x=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}\log_a x=\infty$

② $0<a<1$일 때, $\lim_{x\to0+} \log_a x=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\log_a x=-\infty$

2. 무리수 e와 자연로그

(1) 무리수 e: x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$의 값은 일정한 값에 수렴하며 그 값을 e라고 한다.

① $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$　　② $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

(2) 자연로그: 무리수 e를 밑으로 하는 로그 $\log_e x$를 자연로그라고 하며, 기호 $\ln x$로 나타낸다. 즉, $\log_e x=\ln x$

3. 지수함수와 로그함수의 극한

$a>0$, $a\neq1$일 때, 다음이 성립한다.

① $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$　　② $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

③ $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$　　④ $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$

4. 지수함수와 로그함수의 도함수

(1) 지수함수의 도함수

① $y=e^x \Rightarrow y'=e^x$　　② $y=a^x \Rightarrow y'=a^x\ln a$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

(2) 로그함수의 도함수

① $y=\ln x \Rightarrow y'=\frac{1}{x}$　　② $y=\log_a x \Rightarrow y'=\frac{1}{x\ln a}$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

e는 무리수이며 그 값은 2.7182818⋯임이 알려져 있다.

자연로그는 로그의 특수한 경우이므로 로그의 성질이 그대로 성립한다.
즉, $x>0$, $y>0$일 때
① $\ln 1=0$, $\ln e=1$
② $\ln xy=\ln x+\ln y$
③ $\ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y$
④ $\ln x^n=n\ln x$
(단, n은 실수이다.)

지수함수와 로그함수의 극한에 의하여
① $\lim_{x\to0}\frac{e^{bx}-1}{ax}=\frac{b}{a}$
② $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+bx)}{ax}=\frac{b}{a}$

01 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-1}{3^x}$　　(2) $\lim_{x\to\infty}(7^x-5^x)$

(3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$　　(4) $\lim_{x\to0+}\log x$

(5) $\lim_{x\to\infty}\{\log_3 9x-\log_3(x+3)\}$　　(6) $\lim_{x\to4+}\{\log(x^2-16)-\log(x-4)\}$

01
$\frac{\infty}{\infty}$의 꼴: 분모에서 밑이 가장 큰 항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.
$\infty-\infty$의 꼴: 밑이 가장 큰 항으로 묶는다.

정답과 풀이 p.13

02 $\lim_{x \to 0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}=e^a$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

03 $\lim_{x \to 0}\frac{e^x+b}{\ln(1+ax)}=1$을 만족시키는 두 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

04 $\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+6x)}{x}=a$, $\lim_{x \to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}=b$일 때, ab의 값을 구하여라.

05 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=x^2e^x$ (2) $y=2^{x+1}$ (3) $y=3^{2x-1}$

(4) $y=\ln x^4$ (5) $y=\log_2 5x$ (6) $y=x\ln 7x$

06 함수 $f(x)=(x^2+2)e^{x-1}$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하여라.

07 함수 $f(x)=\ln x^2+3x$에 대하여 $\lim_{h \to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값을 구하여라.

02

$\lim_{■ \to 0}(1+■)^{\frac{1}{■}}=e$,

$\lim_{● \to \infty}\left(1+\frac{1}{●}\right)^{●}=e$

03

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)

일 때, $\lim_{x \to a}g(x)=0$이면

$\lim_{x \to a}f(x)=0$이다.

04

지수함수와 로그함수의 극한에 의하여

① $\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+bx)}{ax}=\frac{b}{a}$

② $\lim_{x \to 0}\frac{e^{bx}-1}{ax}=\frac{b}{a}$

05

미분법의 기본 공식에 의하여

① $y=cf(x)$ (c는 상수)일 때, $y'=cf'(x)$

② $y=f(x)g(x)$일 때, $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

07

$f'(a)=\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$