

풍산자
반복
수학
미적분





풍산자 반복수학 이렇게 특별합니다.

1

한 권으로 기본 개념과 연산 실력 완성!

- 개념과 연산을 동시에 학습할 수 있도록 구성하여 기본 실력 완성
- 개념과 연산 유형의 집중학습으로 수학 실력을 쌓고 자신감을 기르며 실전에서는 킬러 문제에 시간을 할애

2

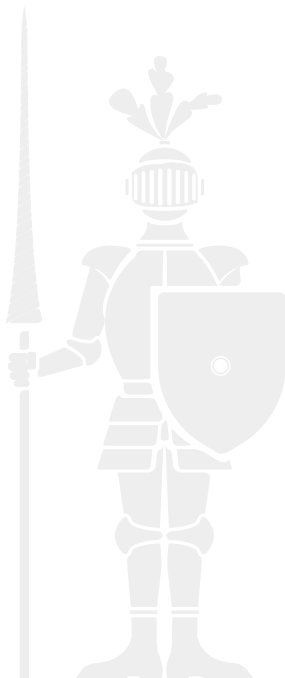
소단원별로 분석하여 체계적이고 최적인 주제별 구성!

- 소단원별로 학습 이해의 흐름에 맞춰 주제별 개념과 연산 유형을 체계적으로 학습
- 주제별 개념과 연산 학습으로 빈틈없는 기본 실력 향상

3

스스로 쉽게 학습할 수 있는 문제 연결 학습법!

- 개념과 공식 등을 이용하여 바로바로 적용하여 풀 수 있도록 구성하여 수학의 기본 개념과 연산을 스스로 완성
- 개념 정리부터 연산 유형까지 풀면서 저절로 원리를 터득



정확하고 빠른 풀이를 위한 반복 훈련서

풍산자 반복수학 이렇게 구성하였습니다.

1 주제별 개념 정리와 연산 유형

- 주제별로 중요한 개념 정리와 문제 풀이에 도움이 되는 참고, 보기, 보충 설명 제시
- 빈틈없는 개념과 연산학습이 이루어지도록 체계적으로 연산 유형 분류
- **포인트** 에서 연산 학습의 비법, 공식 등을 다시 한번 체크

1 수열의 수렴과 발산

01 수열의 수렴
수열 $\{a_n\}$ 이 a 에 한없이 가까워지면 a 를 a_n 의 극한이라고 하며, 이 때 a 를 수열 $\{a_n\}$ 의 극한값 또는 극한이라고 하며, 기호로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 또는 $a_n \rightarrow a$ 로 쓴다.

02 수열의 발산
수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하지 않을 때, 수열 $\{a_n\}$ 은 발산한다고 한다.
① 양의 무한대로 발산: a_n 이 한없이 커질 때 발산할 수의 값이 한없이 커진다.
② 음의 무한대로 발산: a_n 이 한없이 작아질 때 발산할 수의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다.
③ 발산: 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다.

03 수열의 수렴과 발산

03 다음 수열의 수렴·발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.
(1) $1, 2, 3, \dots, n^2, \dots$
▶ 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = n^2$ 이면 $a_n \rightarrow \infty$ 이므로 발산한다.
(2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$
▶ 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = \frac{1}{2^n}$ 이면 $a_n \rightarrow 0$ 이므로 수렴한다. 극한값은 0이다.
(3) $0, 2, 0, 2, \dots, 1 + (-1)^n, \dots$
▶ 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = 1 + (-1)^n$ 이면 a_n 은 0과 2를 번갈아가며 움직이므로 발산한다.
(4) $-1, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}, \dots, -(\frac{2}{3})^n, \dots$
▶ 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = -(\frac{2}{3})^n$ 이면 $a_n \rightarrow 0$ 이므로 수렴한다. 극한값은 0이다.
(5) $0, 2, -2, \dots, 10 - 4n, \dots$
▶ 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = 10 - 4n$ 이면 $a_n \rightarrow -\infty$ 이므로 발산한다.
(6) $1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, \dots, n(n+1), \dots$
▶ 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = n(n+1)$ 이면 $a_n \rightarrow \infty$ 이므로 발산한다.

2 수열의 수렴

01 다음 수열의 극한값을 구하여라.
(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$
▶ 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = \frac{1}{n}$ 이면 $a_n \rightarrow 0$ 이므로 수렴한다. 극한값은 0이다.
(2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$
▶ 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = \frac{1}{n}$ 이면 $a_n \rightarrow 0$ 이므로 수렴한다. 극한값은 0이다.
(3) $1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \dots, 1 - \frac{1}{n}, \dots$
▶ 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ 이면 $a_n \rightarrow 1$ 이므로 수렴한다. 극한값은 1이다.
(4) $2, 3, 4, \dots, n, \dots$
▶ 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = n$ 이면 $a_n \rightarrow \infty$ 이므로 발산한다.

02 수열의 발산

02 다음 수열이 발산함을 그래프를 이용하여 확인하여라.
(1) $1, 2, 3, \dots, n, \dots$
▶ 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = n$ 이면 $a_n \rightarrow \infty$ 이므로 발산한다.
(2) $10, 5, 0, \dots, 5 - 5n, \dots$
▶ 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = 5 - 5n$ 이면 $a_n \rightarrow -\infty$ 이므로 발산한다.
(3) $2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$
▶ 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = 2^n$ 이면 $a_n \rightarrow \infty$ 이므로 발산한다.
(4) $-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$
▶ 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = (-1)^n$ 이면 a_n 은 1과 -1을 번갈아가며 움직이므로 발산한다.

2 중단원 점검문제

- 실력을 점검하여 취약한 개념, 연산을 스스로 체크하고 보충 학습이 가능하도록 구성

3 정답과 풀이

- 문제 해결 과정이 보이는 자세하고 쉬운 풀이 제공

2 중단원 점검문제

01 다음 중 발산하는 수열은 무엇에 표시해라.
(1) $1, 2, 3, \dots, n, \dots$
(2) $10, 5, 0, \dots, 5 - 5n, \dots$
(3) $2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$
(4) $-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$

02 다음 수열 $\{a_n\}$ 의 극한값을 구하여라.
(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$
(2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$
(3) $1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \dots, 1 - \frac{1}{n}, \dots$
(4) $2, 3, 4, \dots, n, \dots$

03 수열 $\{a_n\}$ 의 수렴·발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.
(1) $1, 2, 3, \dots, n^2, \dots$
(2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$
(3) $0, 2, 0, 2, \dots, 1 + (-1)^n, \dots$
(4) $-1, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}, \dots, -(\frac{2}{3})^n, \dots$
(5) $0, 2, -2, \dots, 10 - 4n, \dots$
(6) $1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, \dots, n(n+1), \dots$

04 다음 수열의 수렴·발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.
(1) $1, 2, 3, \dots, n^2, \dots$
(2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$
(3) $0, 2, 0, 2, \dots, 1 + (-1)^n, \dots$
(4) $-1, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}, \dots, -(\frac{2}{3})^n, \dots$
(5) $0, 2, -2, \dots, 10 - 4n, \dots$
(6) $1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, \dots, n(n+1), \dots$

3 수열의 극한

01 다음 수열의 수렴·발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.
(1) $1, 2, 3, \dots, n^2, \dots$
(2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$
(3) $0, 2, 0, 2, \dots, 1 + (-1)^n, \dots$
(4) $-1, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}, \dots, -(\frac{2}{3})^n, \dots$
(5) $0, 2, -2, \dots, 10 - 4n, \dots$
(6) $1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, \dots, n(n+1), \dots$

02 다음 수열의 수렴·발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.
(1) $1, 2, 3, \dots, n^2, \dots$
(2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$
(3) $0, 2, 0, 2, \dots, 1 + (-1)^n, \dots$
(4) $-1, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}, \dots, -(\frac{2}{3})^n, \dots$
(5) $0, 2, -2, \dots, 10 - 4n, \dots$
(6) $1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, \dots, n(n+1), \dots$



I

수열의 극한

- 1. 수열의 극한 006
- 2. 급수 020

II

미분법

- 1. 여러 가지 함수의 미분 036
- 2. 여러 가지 미분법 076
- 3. 도함수의 활용 098

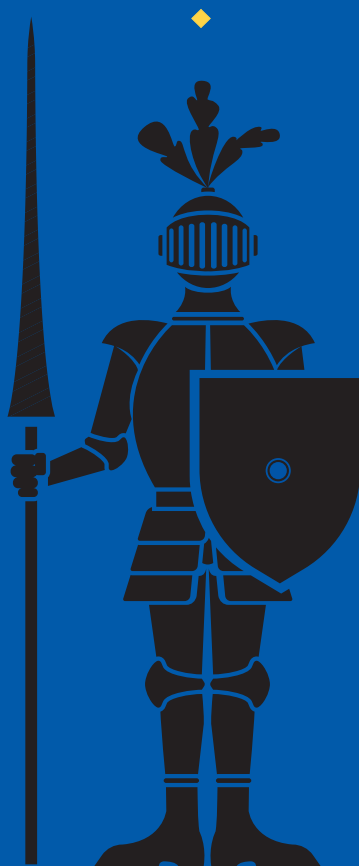
III

적분법

- 1. 여러 가지 적분법 126
- 2. 정적분 144
- 3. 정적분의 활용 166

I

수열의 극한



1. 수열의 극한

2. 급수

수열의 수렴과 발산

1 수열의 수렴

수열 $\{a_n\}$ 에서 n 이 한없이 커질 때 일반항 a_n 의 값이 일정한 수 a 에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$ 은 a 에 수렴한다고 한다. 이때 a 를 수열 $\{a_n\}$ 의 극한값 또는 극한이라고 하며, 기호로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ 또는 } n \rightarrow \infty \text{ 일 때 } a_n \rightarrow a$$

와 같이 나타낸다.

2 수열의 발산

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하지 않을 때, 수열 $\{a_n\}$ 은 발산한다고 한다.

① 양의 무한대로 발산: n 이 한없이 커질 때 일반항 a_n 의 값이 한없이 커진다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ 또는 } n \rightarrow \infty \text{ 일 때 } a_n \rightarrow \infty$$

② 음의 무한대로 발산: n 이 한없이 커질 때 일반항 a_n 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \text{ 또는 } n \rightarrow \infty \text{ 일 때 } a_n \rightarrow -\infty$$

③ 진동: 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다.

▶ 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = c$ (c 는 상수)일 때,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c = c$

▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$
 는 극한값이 ∞ , $-\infty$ 라는 뜻이 아니다. 이때는 극한값이 없다고 한다.

유형 01 수열의 수렴

01 다음 수열의 극한값을 그래프를 이용하여 구하여라.

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \square, \frac{1}{n}, c$

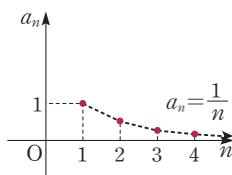
▶ 풀이 주어진 수열의 일반항을 a_n

이라 하면 $a_n =$

오른쪽 그래프에서 n 이 한없이 커질 때 a_n 의 값은

에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$$



(2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \square, \frac{n}{n+1}, c$

(3) $1-1, 1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{3}, \square, 1-\frac{1}{n}, c$

(4) $5, 5, 5, \square, 5, c$

유형 02 수열의 발산

02 다음 수열이 발산함을 그래프를 이용하여 확인하여라.

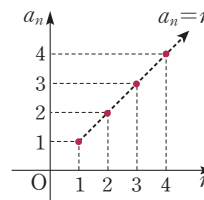
(1) $1, 2, 3, \square, n, c$

▶ 풀이 주어진 수열의 일반항을 a_n 이

라 하면 $a_n = n$

오른쪽 그래프에서 n 이 한없이 커질 때 a_n 의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$$



(2) $10, 5, 0, \square, 15-5n, c$

(3) $2, 4, 8, \square, 2^n, c$

(4) $-1, 1, -1, \square, (-1)^n, c$

03 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, c$

▶ 풀이 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면 $a_n = n^2$
 n 이 한없이 커질 때 a_n 의 값은 한없이 커지므로 이 수열은 양의 무한대로 ∞ 한다.

(2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2n}, c$

(3) $0, 2, 0, 2, \dots, 1 + (-1)^n, c$

(4) $-1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \dots, -\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, c$

(5) $6, 2, -2, \dots, 10 - 4n, c$

(6) $1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, \dots, n(n+1), c$

04 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\left\{ \frac{1}{2n+1} \right\}$

▶ 풀이 n 이 한없이 커질 때 $\frac{1}{2n+1}$ 의 값은 0에 한없이 가까

워지므로 수열 $\left\{ \frac{1}{2n+1} \right\}$ 은 수렴하고, 그 극한값은 0

이다.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

(2) $\{n^2 + 4n\}$

(3) $\left\{ 2 - \left(\frac{1}{5} \right)^n \right\}$

(4) $\left\{ \frac{-n^2 + 1}{3n} \right\}$

(5) $\{n \times (-1)^n\}$

▶ **공생 POINT**

- ① 수열 $\{a_n\}$ 이 a 에 수렴 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
- ② 수열 $\{a_n\}$ 이 양의 무한대로 발산 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
- ③ 수열 $\{a_n\}$ 이 음의 무한대로 발산 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

수열의 극한에 대한 성질

1 수열의 극한에 대한 성질

두 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 이 수렴하고 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)일 때

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha + \beta$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha - \beta$$

$$\textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c\alpha \quad (\text{단, } c \text{는 상수})$$

$$\textcircled{4} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha\beta$$

$$\textcircled{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\text{단, } b_n \neq 0, \beta \neq 0)$$

▶ 수열의 극한에 대한 성질은 두 수열이 모두 수렴하는 경우에만 성립한다.

$$\begin{aligned} \text{보기} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n} + 1 \right) \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \\ &= 3 \times 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

유형 04 수열의 극한에 대한 성질

정답과 풀이 003쪽

05 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$ 일 때, 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$

$$\begin{aligned} \text{▶ 풀이} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= 1 + (-2) \\ &= \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$

06 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 임을 이용하여 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4}{n} \right)$

$$\begin{aligned} \text{▶ 풀이} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 + 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ &= 3 + 4 \times 0 \\ &= \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{1}{n} \right)$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right) \left(1 - \frac{3}{n} \right)$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{5}{2} - \frac{1}{n}}$

▶ 풀이 POINT

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)이면 실수 p, q 에 대하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (pa_n + qb_n) = p\alpha + q\beta$$

수열의 극한값

1 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

- ① (분모의 차수) = (분자의 차수): 극한값은 $\frac{(\text{분자의 최고차항의 계수})}{(\text{분모의 최고차항의 계수})}$
- ② (분모의 차수) > (분자의 차수): 극한값은 0
- ③ (분모의 차수) < (분자의 차수): ∞ 또는 $-\infty$ 로 발산

▶ $\frac{\infty}{\infty} \neq 1$, $\infty - \infty \neq 0$ 임에 주의한다.

2 $\infty - \infty$ 꼴의 극한

- ① 다항식의 극한: 최고차항으로 묶어서 $\infty \times$ (상수) 꼴로 나타낸다.
- ② 무리식의 극한: 근호($\sqrt{\quad}$)가 있는 쪽을 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 나타낸다.

유형 05 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

정답과 풀이 003쪽

07 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n+1}$

▶ 풀이 n 으로 분모, 분자를 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+3}{3n^2+n}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n+2}{(n+1)(n+3)}$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$

08 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\square \square \square}{n^2}$

▶ 풀이 $\square \square \square c + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\square \square \square c}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{O}{\square \square \square} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}$

▶ 풍습 POINT

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

➡ 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

유형 06 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 미정계수의 결정

09 다음 등식이 성립하도록 하는 상수 a 의 값을 구하여라.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an-1}{4n+2} = 3$

▶ 풀이 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an-1}{4n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - \frac{1}{n}}{4 + \frac{2}{n}} = \frac{a}{4}$

즉, $\frac{a}{4} = 3$ 이므로 $a = 12$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2n+3)(n-2)}{an^2+1} = 1$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2-2n+3}{(n+4)^2} = -2$

10 다음 등식이 성립하도록 하는 상수 a, b 의 값을 구하여라.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+bn+1}{2n-3} = 2$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn^2-4n+3}{an^3+n^2-1} = -3$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+b)n^2+bn-1}{\sqrt{9n^2+4n+1}} = \frac{1}{6}$

▶ **포인트**

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값이 0이 아닌 값으로 수렴

→ 분모와 분자의 차수가 같아야 하고, 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.

유형 07 $\infty - \infty$ 꼴의 극한

11 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 2n)$

▶ 풀이 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 2n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right)$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right) = 1$ 이므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 2n) = \infty$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(n - \frac{1}{5}n^2\right)$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 1})$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+4)} - n}$

유형 08
 $\infty - \infty$ 꼴의 미정계수의 결정

12 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$

▶ 풀이 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

$$= \underline{\hspace{1cm}}$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n})$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n)$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4n} - n}$

▶ 풀이 POINT

$\infty - \infty$ 꼴의 극한

➡ 다항식은 최고차항으로 묶어 $\infty \times (\text{상수})$ 꼴로 변형하고,
 무리식은 근호가 있는 쪽을 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.

13 다음 등식이 성립하도록 하는 상수 a 의 값을 구하여라.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - n) = 1$

▶ 풀이 (좌변) $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + an} - n)(\sqrt{n^2 + an} + n)}{\sqrt{n^2 + an} + n}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an}{\sqrt{n^2 + an} + n} = \frac{a}{2}$$
 즉, $\frac{a}{2} = \underline{\hspace{1cm}}$ 이므로 $a = \underline{\hspace{1cm}}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{4n^2 - n} - 2n} = -3$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + 3}) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a\sqrt{n}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) = 2$

▶ 풀이 POINT

실수 a 에 대하여

① $a + \infty = \infty$, $a - \infty = -\infty$

② $a > 0$ 이면 $a \times \infty = \infty$, $a \times (-\infty) = -\infty$

③ $a < 0$ 이면 $a \times \infty = -\infty$, $a \times (-\infty) = \infty$

④ $a = 0$ 이면 $a \times \infty = 0$, $a \times (-\infty) = 0$

⑤ $\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$

유형 09 수열의 극한의 변형

14 수렴하는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5a_n - 3}{3a_n + 2} = 2$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

▶ 풀이 $\frac{5a_n - 3}{3a_n + 2} = b_n$ 으로 놓으면 $a_n = \frac{3 + 2b_n}{5 - 3b_n}$
 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ 이므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 2b_n}{5 - 3b_n} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n - 2}{a_n + 1} = -1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 5$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (4n - 3)a_n$ 의 값

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3n + 5} = -4$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4a_n}{16n + 3}$ 의 값

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 + 3)a_n = -1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n$ 의 값

▶ 풀이 포인트

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ra_n + s}{pa_n + q} = \alpha$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

→ $\frac{ra_n + s}{pa_n + q} = b_n$ 으로 놓고 a_n 을 b_n 에 대한 식으로 나타낸 다음,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ 임을 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구한다.

유형 10 수열의 극한의 참, 거짓

15 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것에는 ○표, 옳지 않은 것에는 ×표를 하여라.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ 이다. ()

▶ 풀이 [반례] $a_n = n$, $b_n = \frac{1}{n}$ 이면
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{2cm}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이지만
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \underline{\hspace{2cm}} 0$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$ 이다. ()

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 또는 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이다. ()

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 3$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 이다. ()

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ 이다. ()

▶ 풀이 포인트

수열의 극한에 대한 합답형 문제

→ 극한값을 구하려는 수열은 수렴하는 수열에 대한 식으로 나타내고, 거짓인 명제는 반례를 찾는다.

수열의 극한의 대소 관계

1 수열의 극한의 대소 관계

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 수렴하고 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)일 때,

① 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq b_n$ 이면 $\alpha \leq \beta$

② 수열 $\{c_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq c_n \leq b_n$ 이고 $\alpha = \beta$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$$

참고 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 $a_n < b_n$ 이라고 해서 반드시 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 인 것은 아니다.

즉, $a_n < b_n$ 이지만 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 인 경우가 있다.

보기 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{2}{n}$ 이면 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < b_n$ 이지만 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이다.

유형 11 수열의 극한의 대소 관계

정답과 풀이 005쪽

16 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 다음 극한값을 구하여라.

(1) $1 + \frac{1}{n} \leq a_n \leq 1 + \frac{2}{n}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

▶ 풀이 $1 + \frac{1}{n} \leq a_n \leq 1 + \frac{2}{n}$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{1cm}}$$

(2) $\frac{4n-1}{n+2} \leq a_n \leq \frac{4n+3}{n+2}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

(3) $3 + \frac{2}{n^2} \leq a_n \leq 3 + \frac{4}{n^2}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

(4) $2 + \frac{n}{n+3} \leq a_n \leq 2 + \frac{n+2}{n+3}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2a_n$ 의 값

17 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 다음 극한값을 구하여라.

(1) $n < (n+1)a_n < n+2$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

▶ 풀이 부등식의 각 변을 $n+1$ 로 나누면

$$\frac{n}{n+1} < a_n < \frac{n+2}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{1cm}}$$

(2) $2n^2 + 1 < n^2 a_n < 2n^2 + 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값

(3) $5n^2 - 1 < (2n+1)a_n < 5n^2 + 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 의 값

▶ 풀이 POINT

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ (α 는 실수)일 때

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq c_n \leq b_n$ 이면

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$$

등비수열의 수렴과 발산

1 등비수열 $\{r^n\}$ 의 수렴과 발산

등비수열 $\{r^n\}$ 은

- ① $r > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$ (발산)
- ② $r = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ (수렴)
- ③ $|r| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ (수렴)
- ④ $r \leq -1$ 일 때, 진동한다. (발산)

보기 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

유형 12 등비수열의 수렴과 발산

18 다음 등비수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $\{0.5^n\}$

▶ 풀이 주어진 등비수열의 공비는 ____ 이고,
 $-1 < ___ < 1$ 이므로 주어진 수열은 ____에 수렴한다.

(2) $\{(-1.1)^n\}$

(3) $\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^n\right\}$

(4) $\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}$

(5) $\{(\sqrt{3})^n\}$

19 다음 등비수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $1, -2, 4, -8, c$

▶ 풀이 주어진 등비수열의 공비는 ____ 이고, ____ < -1 이므로 주어진 수열은 ____한다.

(2) $\frac{2}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^3, \left(\frac{2}{3}\right)^4, c$

(3) $-0.1, -(0.1)^2, -(0.1)^3, -(0.1)^4, c$

(4) $4, 4, 4, 4, c$

(5) $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, c$

풍샘 POINT

등비수열 $\{r^n\}$ 에서

- ① $-1 < r \leq 1$ 이면 수렴
- ② $r \leq -1$ 또는 $r > 1$ 이면 발산

20 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\left\{ \frac{2^n + 1}{3^n + 1} \right\}$

▶ 풀이 3^n 으로 분모, 분자를 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{3^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{2 + 1}{1 + 0} = \frac{3}{1} = 3$$

따라서 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 3이다.

(2) $\left\{ \frac{5^n - 1}{4^n} \right\}$

(3) $\left\{ \frac{4^n + 3}{2^{2n} - 2} \right\}$

(4) $\left\{ \frac{2^n - 5^n}{2^n + 5^n} \right\}$

(5) $\left\{ \frac{3^{n+1} + (-2)^n}{3^{n+1} - (-2)^n} \right\}$

21 다음 수열의 극한값을 구하여라.

(1) $\left\{ \frac{2^{n+1}}{2^n + 1} \right\}$

▶ 풀이 2^n 으로 분모, 분자를 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 2^n}{2^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{2}{1 + 0} = 2$$

(2) $\left\{ \frac{9^n - 3^n}{9^n + 3^n} \right\}$

(3) $\left\{ \frac{2^n - 4 \times 3^n}{2^n + 3^n} \right\}$

(4) $\left\{ \frac{3^{n+1} - 2^{2n}}{4^n + 3^n} \right\}$

■ **풍습 POINT**

r^n 을 포함한 수열의 극한

➡ 분모에서 밑의 절댓값이 가장 큰 항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

유형 14 등비수열의 극한

22 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 4^n + 2}{4^n}$

▶ 풀이 4^n 으로 분모, 분자를 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 4^n + 2}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1} = \underline{\hspace{1cm}}$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2}}{3^n + 2^n}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \times 5^n - 3^n}{5^n + 3^n + 1}$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 2^n + 1}{(2^n + 1)^2}$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n + 3^n}{(3^n + 1)(2^n + 1)}$

▶ 풀이 POINT

수열 $\left\{ \frac{c^n + d^n}{a^n + b^n} \right\}$ (a, b, c, d 는 실수) 꼴의 극한값

⇒ $|a| > |b|$ 이면 a^n 으로, $|a| < |b|$ 이면 b^n 으로 분모, 분자를 각각 나눈 다음, $|r| < 1$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 임을 이용한다.

유형 15 공비가 문자로 주어진 등비수열의 극한

23 $r > 0$ 일 때, 수열 $\left\{ \frac{r^n}{1+r^n} \right\}$ 의 수렴, 발산을 r 의 값의 범위에 따라 조사하여라.

(1) $0 < r < 1$ 일 때

▶ 풀이 $0 < r < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \underline{\hspace{1cm}}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1+r^n} = \underline{\hspace{1cm}}$$

(2) $r = 1$ 일 때

(3) $r > 1$ 일 때

24 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $\left\{ \frac{1-r^n}{1+r^n} \right\}$ (단, $r > 0$)

▶ 풀이 (i) $0 < r < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1+r^n} = \underline{\hspace{1cm}}$$

(ii) $r = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1+r^n} = \underline{\hspace{1cm}}$$

(iii) $r > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1+r^n} = \underline{\hspace{1cm}}$$

(2) $\left\{ \frac{r^{2n} - r^n}{r^{2n} + 1} \right\}$ (단, $r > 0$)

▶ 풀이 POINT

r^n 을 포함한 식의 극한

⇒ r 의 값의 범위를 $|r| < 1$, $r = 1$, $|r| > 1$, $r = -1$ 인 경우로 나누어 조사한다.

등비수열의 수렴 조건

1 등비수열의 수렴 조건

① 등비수열 $\{r^n\}$ 이 수렴하기 위한 조건은

$$-1 < r \leq 1$$

② 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$ 이 수렴하기 위한 조건은

$$a=0 \text{ 또는 } -1 < r \leq 1$$

보기 등비수열 $\{(x-1)^n\}$ 이 수렴하려면

$$-1 < x-1 \leq 1$$

$$\therefore 0 < x \leq 2$$

유형 16 등비수열의 수렴 조건

정답과 풀이 007쪽

25 다음 등비수열이 수렴하기 위한 x 의 값의 범위를 구하여라.

(1) $\{(2x)^n\}$

▶ 풀이 공비가 $2x$ 이므로 수렴하려면

$$-1 < 2x \leq 1$$

$$\therefore \underline{\hspace{1cm}} < x \leq \underline{\hspace{1cm}}$$

(2) $\left\{\left(-\frac{x}{3}\right)^n\right\}$

(3) $\{(x+3)^n\}$

(4) $\left\{\left(\frac{x-2}{4}\right)^n\right\}$

(5) $\left\{-2\left(x+\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}$

(6) $\{x(x-1)^{n-1}\}$

(7) $\{(x+1)(x+2)^{n-1}\}$

(8) $\{(x-4)(2-x)^{n-1}\}$

(9) $\left\{(3-x)\left(\frac{1+2x}{2}\right)^{n-1}\right\}$

▶ 풀이 POINT

① 등비수열 $\{r^n\}$ 이 수렴하기 위한 조건

$$\Rightarrow -1 < r \leq 1$$

② 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$ 이 수렴하기 위한 조건

$$\Rightarrow a=0 \text{ 또는 } -1 < r \leq 1$$

· 중단원 점검문제 ·

01

다음 중 발산하는 수열인 것만을 보기에서 있는 대로 골라라.

보기

$$\text{㉠. } \{3-4n\}$$

$$\text{㉡. } \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$$

$$\text{㉢. } \left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$$

$$\text{㉣. } \{(-2)^n\}$$

02

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -3$ 일

때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n + 3}{2a_n + b_n}$ 의 값을 구하여라.

03

수렴하는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n - 1}{a_n + 2} = -4$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하여라.

04

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\log_2(n+1) - \log_2(4n+1)\}$ 의 값을 구하여라.

05

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)}{n(n+1)(n-1)}$ 의 값을 구하여라.

06

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn - 1}{2n + 5} = 3$ 일 때, 상수 a , b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하여라.

07

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n-1} - \sqrt{n})$ 의 값을 구하여라.

08

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n^2 + 4n + 3} - (an + b)\} = 4$ 일 때, 상수 a , b 에 대하여 ab 의 값을 구하여라.



09

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n+2)a_n = -1$ 일 때,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+3)a_n$ 의 값을 구하여라.

10

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 골라라.

보기

- ㄱ. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 모두 발산하면 수열 $\{a_nb_n\}$ 도 발산한다.
 ㄴ. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 모두 수렴하고 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 이다.
 ㄷ. $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 도 수렴한다.
 ㄹ. 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < b_n$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 이다.

11

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$9n^2 < (3n+1)a_n < 9n^2 + 3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3n-1}$ 의 값을 구하여라.

12

다음 수열이 수렴하기 위한 실수 x 의 최솟값을 구하여라.

$$1, -\frac{x}{2}, \frac{x^2}{4}, -\frac{x^3}{8}, c$$

13

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-7^{n+1}}{7^n+3^n}$ 의 값을 구하여라.

14

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n-3^n}{r^n+3^n} = -1$ 을 만족시키는 정수 r 의 개수를 구하여라.
 (단, $|r| \neq 3$)

15

등비수열 $\{r^n\}$ 이 수렴할 때, 항상 수렴하는 수열인 것만을 보기에서 있는 대로 골라라.

보기

$$\text{ㄱ. } \left\{ \left(\frac{r}{2} \right)^n \right\} \quad \text{ㄴ. } \{(-r)^n\} \quad \text{ㄷ. } \{r^{2n}\}$$

16

두 등비수열 $\left\{ \left(\frac{1-x}{3} \right)^n \right\}$, $\{(x+2)(2x+1)^{n-1}\}$ 이 모두 수렴하기 위한 x 의 값의 범위를 구하여라.



급수의 수렴과 발산

1 급수

수열 $\{a_n\}$ 의 각 항을 덧셈 기호 $+$ 를 사용하여 연결한 식을 급수라고 하며, 기호로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 같이 나타낸다. 즉,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

2 부분합

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 을 이 급수의 제 n 항까지의 부분합이라고 한다. 즉,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

3 급수의 합

① 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$ 이 일정한 값 S 에 수렴할 때, 즉 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ 일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 S 에 수렴한다고 하며, S 를 이 급수의 합이라 하고 다음과 같이 나타낸다.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S \text{ 또는 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

② 부분합의 수열 $\{S_n\}$ 이 발산하면 급수는 발산한다고 한다. 급수가 발산하면 급수의 합은 생각하지 않는다.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \end{aligned}$$

▶ 수열의 수렴, 발산은 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 을 조사하고, 급수의 수렴, 발산은 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 을 조사한다.

유형 01 부분합이 주어진 급수의 합 구하기

01 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 다음과 같을 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 값을 구하여라.

(1) $S_n = \frac{2n}{n+1}$

▶ 풀이 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $S_n = \frac{n^2 + n + 1}{4n^2}$

(3) $S_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

(4) $S_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

풍샘 POINT

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

유형 02 급수의 부분합 구하기

02 다음 급수의 첫째항부터 제 n 항까지의 부분합을 구하여라.

(1) $\square$

▶ 풀이 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면 $a_n = \square$
 따라서 첫째항부터 제 n 항까지의 부분합 S_n 은
 $S_n = 1 + 2 + 3 + c + \square$
 $= \sum_{k=1}^n k = \square$

(2) $\square + (2n-1) + c$

(3) $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \square \quad \frac{1}{n(n+1)} + c$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

▶ 풀이 POINT

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + c + a_n + c$ 의 부분합

⇒ $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + c + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$

유형 03 급수의 수렴과 발산

03 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

(1) $\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + c + \left(\frac{2}{3}\right)^n + c$

▶ 풀이 주어진 급수는 첫째항이 $\frac{2}{3}$, 공비가 $\frac{2}{3}$ 인 등비수열의 합이므로 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{\frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}}{1 - \frac{2}{3}} = 2 \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$$

따라서 주어진 급수는 $\square$ 하고, 그 합은 $\square$ 이다.

(2) $1 + 2^2 + 3^2 + c + n^2 + c$

(3) $\square$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)$

▶ 풀이 POINT

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 수렴과 발산

⇒ 제 n 항까지의 부분합 S_n 을 구한 후 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 을 조사한다.

04 다음 급수의 합을 구하여라.

(1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + c + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + c$

▶ 풀이 주어진 급수는 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열의 합
이므로 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \underline{\hspace{2cm}}$$

(2) $1 + \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + c + \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + c$

(3) $6 + 2 + \frac{2}{3} + c + 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + c$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

▶ 풀이 POINT

- ① 수열의 수렴, 발산 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 을 조사
- ② 급수의 수렴, 발산 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 을 조사

05 다음 급수의 합을 구하여라.

(1) $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + c + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + c$

▶ 풀이 주어진 급수의 제 n 항을 a_n , 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

이므로

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + c + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \underline{\hspace{2cm}}$$

(2) $\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + c + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + c$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\boxed{\hspace{1cm}}}$

유형 05 항의 부호가 교대로 바뀌는 급수

06 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

$$(1) (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (2-\sqrt{3}) + c \\ + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) + c$$

▶ 풀이 주어진 급수의 제 n 항을 a_n , 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면 $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ 이므로

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (2-\sqrt{3}) + c \\ + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$= \text{---} - \text{---}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \text{---}$$

따라서 주어진 급수는 ---한다.

$$(2) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + c \\ + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) + c$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right)$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

▶ 풀이 POINT

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 에서

① a_n 이 $\frac{1}{AB}$ ($A \neq B$) 꼴로 주어진 경우

→ $a_n = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$ 꼴로 변형한다.

② a_n 이 무리식을 포함한 경우

→ 항끼리 소거되지 않으면 $a_n = \frac{1}{\sqrt{A}} - \frac{1}{\sqrt{B}}$ 꼴로 변형한다.

07 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

(1) $\square$

▶ 풀이 주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_1=1, S_2=0, S_3=1, S_4=0, S_5=1, S_6=0, c$$

이므로

$$S_{2n-1} = \text{---}, S_{2n} = \text{---}$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \text{---}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \text{---}$ 이므로 주어진 급수는 ---한다.

$$(2) (1-1) + (1-1) + (1-1) + c$$

(3) $\square$

$$(4) (1-2) + (3-4) + (5-6) + c$$

▶ 풀이 POINT

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 에 대하여 홀수 번째 항까지의 부분합을 S_{2n-1} , 짝수 번째 항까지의 부분합을 S_{2n} 이라 하면

$$① \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \alpha \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$$

$$② \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{은 발산}$$