

머리말

고등학교 수학의 내신이나 수능 기출 문제는 무척 많지만 모두 교과 과정의 개념에서 파생된 문제입니다. 문제를 척 보면 아해! 이것은 무엇을 묻는 문제이구내! 하고 간파할 수 있을까요?

그럴 수 있어야 합니다.

고등학교 수학 문제는 수없이 많지만 그 기저에는 뼈대가 되는 기본 문제 유형이 있습니다. 이 기본 문제 유형을 정복하는 것이 수학 문제 정복의 열쇠입니다.

- 어려운 문제처럼 보이지만 한 단계만 해결하면 쉬운 문제로 변신하는 문제가 있습니다.
- 낯선 문제처럼 보이지만 한 꺼풀만 벗기면 익숙한 문제로 바뀌는 문제가 있습니다.
- 겉모양은 전혀 다른데 본질을 파악하면 사실상 동일한 문제가 있습니다.

가면을 쓰고 다른 문제인 척 가장할 때 속아 넘어 가지 않으려면 어떻게 해야 할까요?

풍산자 필수유형은 어려운 문제를 쉬운 문제로, 낯선 문제를 익숙한 문제로 바꾸는 능력을 기를 수 있도록 구성된 문제기본서입니다. 세상의 모든 수학 문제를 유형별로 정리하고 분석하여 그 뼈대가 되는 문제들로 구성하였습니다.

몇 천 문항씩 되는 많은 문제를 두서없이 풀기보다는 뼈대 문제를 완벽히 이해한다면 어떠한 수학 문제를 만나도 당당하게 맞서는 수학의 고수로 다시 태어날 것입니다.

구성 과 특징

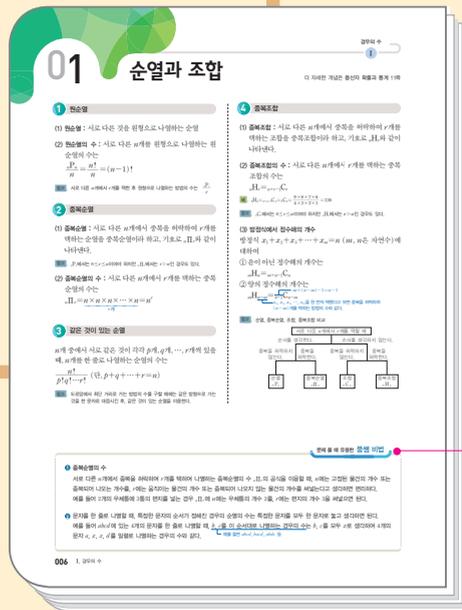
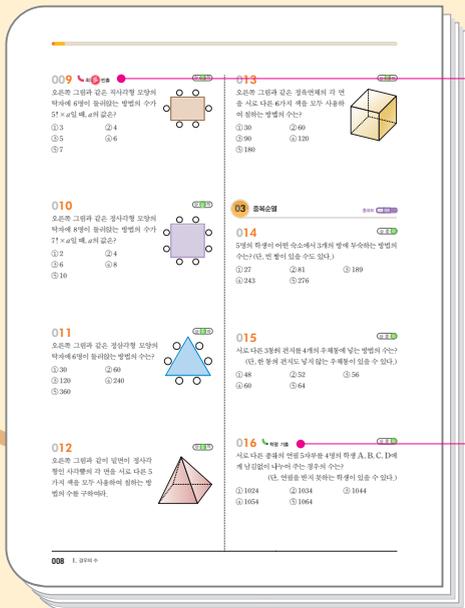
꼭 필요한 유형으로만 꼭 채운 풍산자 필수유형!

핵심 내용 요약 정리

중단원별로 꼭 알아야 하는 개념을 간단하고 명쾌하게 요약하였으며, 예, 참고, 주의 등으로 개념을 쉽게 이해할 수 있도록 하였습니다.

실력을 기르는 유형

학습에 필요한 문제들을 유형별로 나누고 유형별 중요도와 문항별 난이도를 제시하여 학습 수준에 맞추어 충분한 연습이 될 수 있도록 구성하였습니다.

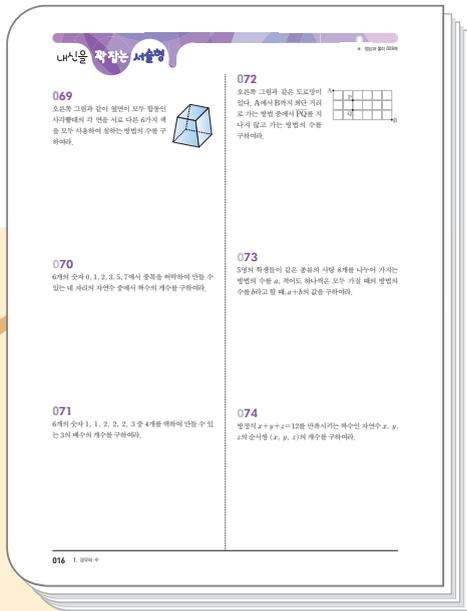


문제 풀 때 유용한 풍샘 비법

핵심 내용과 연계되어 문제 풀이에 자주 이용되는 개념, 개념을 문제에 적용하는 방법 등을 소개하고 이를 활용할 수 있도록 하였습니다.

최 다 빈출
자주 출제되는 유형 중 가장 출제 비중이 높은 문제입니다.

학평 기출
평가원, 교육청의 학력평가 기출 문제 중 자주 출제되는 유형의 문제입니다.



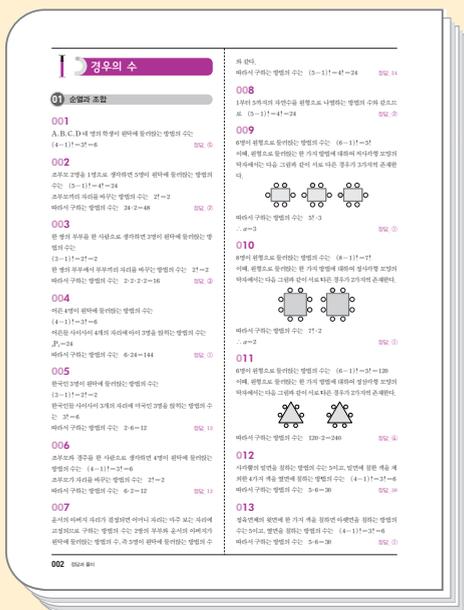
내신을 꼭 잡는 서술형

핵심적이고 출제 빈도가 높은 서술형 기출 문제로 구성되어 강화된 서술형 평가에 대비할 수 있도록 하였습니다.



고득점을 향한 도약

난이도가 높고, 출제 비중이 높은 문제로 구성되어 수학적 사고력과 응용력을 기를 수 있도록 하였습니다.



풀이

자세하고 친절한 풀이와 다른 풀이로 문제의 출제 의도와 다양한 해결 방향을 이해할 수 있도록 하였습니다.

차례

I

경우의 수

- 01 • 순열과 조합 006
- 02 • 이항정리 019

II

확률

- 03 • 확률의 뜻과 덧셈정리 030
- 04 • 조건부확률 043

III

통계

- 05 • 확률분포 058
- 06 • 정규분포 071
- 07 • 통계적 추정 085



I

경우의 수

01 순열과 조합 006

02 이항정리 019

01

순열과 조합

더 자세한 개념은 풍산자 확률과 통계 11쪽

1 원순열

- (1) 원순열 : 서로 다른 것을 원형으로 나열하는 순열
- (2) 원순열의 수 : 서로 다른 n 개를 원형으로 나열하는 원순열의 수는

$$\frac{{}_n P_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

참고 서로 다른 n 개에서 r 개를 택한 후 원형으로 나열하는 방법의 수는 $\frac{{}_n P_r}{r}$

2 중복순열

- (1) 중복순열 : 서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하는 순열을 중복순열이라 하고, 기호로 ${}_n \Pi_r$ 와 같이 나타낸다.

참고 ${}_n P_r$ 에서는 $0 \leq r \leq n$ 이어야 하지만 ${}_n \Pi_r$ 에서는 $r > n$ 인 경우도 있다.

- (2) 중복순열의 수 : 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_n \Pi_r = \underbrace{n \times n \times n \times \dots \times n}_{r \text{ 개}} = n^r$$

3 같은 것이 있는 순열

n 개 중에서 서로 같은 것이 각각 p 개, q 개, \dots , r 개씩 있을 때, n 개를 한 줄로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!q!\dots r!} \quad (\text{단, } p+q+\dots+r=n)$$

참고 도로망에서 최단 거리로 가는 방법의 수를 구할 때에는 같은 방향으로 가는 것을 한 문자로 대응시킨 후, 같은 것이 있는 순열을 이용한다.

4 중복조합

- (1) 중복조합 : 서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하는 조합을 중복조합이라 하고, 기호로 ${}_n H_r$ 와 같이 나타낸다.

- (2) 중복조합의 수 : 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_n H_r = {}_{n+r-1} C_r$$

예 ${}_6 H_4 = {}_{6+4-1} C_4 = {}_9 C_4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$

참고 ${}_n C_r$ 에서는 $0 \leq r \leq n$ 이어야 하지만 ${}_n H_r$ 에서는 $r > n$ 인 경우도 있다.

- (3) 방정식에서 정수해의 개수

방정식 $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m = n$ (m, n 은 자연수)에 대하여

- ① 음이 아닌 정수해의 개수는

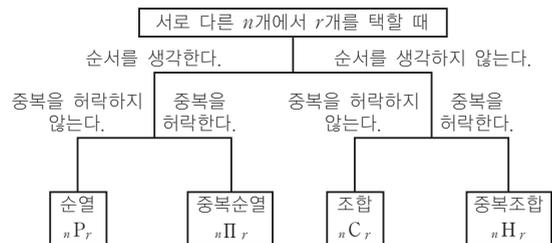
$${}_m H_n = {}_{m+n-1} C_n$$

- ② 양의 정수해의 개수는

$${}_m H_{n-m} = {}_{n-1} C_{n-m}$$

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ 을 한 번씩 택했다고 보면 중복을 허락하여 $(n-m)$ 개를 택하는 방법의 수와 같다.

참고 순열, 중복순열, 조합, 중복조합 비교



문제 풀 때 유용한 풍샘 비법

1 중복순열의 수

서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하여 나열하는 중복순열의 수 ${}_n \Pi_r$ 의 공식을 이용할 때, n 에는 고정된 물건의 개수 또는 중복되어 나오는 개수를, r 에는 움직이는 물건의 개수 또는 중복되어 나오지 않는 물건의 개수를 써넣는다고 생각하면 편리하다. 예를 들어 2개의 우체통에 3통의 편지를 넣는 경우 ${}_2 \Pi_3$ 에 n 에는 우체통의 개수 2를, r 에는 편지의 개수 3을 써넣으면 된다.

2 문자를 한 줄로 나열할 때, 특정한 문자의 순서가 정해진 경우의 순열의 수는 특정한 문자를 모두 한 문자로 놓고 생각하면 된다.

예를 들어 $abcd$ 에 있는 4개의 문자를 한 줄로 나열할 때, b, c 를 이 순서대로 나열하는 경우의 수는 b, c 를 모두 x 로 생각하여 4개의 문자 a, x, x, d 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다. 예를 들면 $abcd, bacd, abcd$ 등

01 원순열

중요도

001

상 중 하

A, B, C, D 네 명의 학생이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는?

- ① 30 ② 24 ③ 18
④ 12 ⑤ 6

002

상 중 하

조부모를 포함한 6명의 가족이 원탁에 둘러앉을 때, 조부모가 이웃하게 앉는 방법의 수는?

- ① 24 ② 48 ③ 120
④ 240 ⑤ 720

003

상 중 하

3쌍의 부부가 원탁에 둘러앉을 때, 부부끼리 이웃하게 앉는 방법의 수는?

- ① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

004  최 多 빈출

상 중 하

어른 4명과 아이 3명이 원탁에 둘러앉을 때, 아이들끼리 서로 이웃하지 않게 앉는 방법의 수는?

- ① 144 ② 156 ③ 168
④ 180 ⑤ 192

005

상 중 하

한국인 3명과 미국인 3명이 원탁에 둘러앉을 때, 한국인과 미국인이 교대로 앉는 방법의 수를 구하여라.

006

상 중 하

경주네 가족은 조부모를 포함하여 6명이다. 6명이 모두 원탁에 둘러앉을 때, 경주의 양 옆에 조부모가 앉는 방법의 수를 구하여라.

007

상 중 하

운서네 부모님이 이웃에 사는 2쌍의 부부를 초대하였다. 3쌍의 부부가 원탁에 둘러앉아 식사를 할 때, 운서네 부모님이 마주 보도록 앉는 방법의 수를 구하여라.

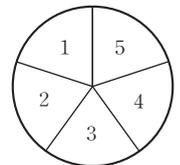
02 원순열의 활용

중요도

008

상 중 하

오른쪽 그림과 같이 5등분된 원판에 1부터 5까지의 자연수를 써넣는 방법의 수는?

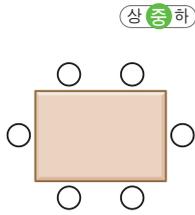


- ① 20 ② 24
③ 28 ④ 32
⑤ 36

009 **최 다** 빈출

오른쪽 그림과 같은 직사각형 모양의 탁자에 6명이 둘러앉는 방법의 수가 $5! \times a$ 일 때, a 의 값은?

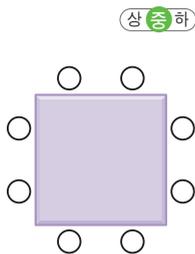
- ① 3 ② 4
- ③ 5 ④ 6
- ⑤ 7



010

오른쪽 그림과 같은 정사각형 모양의 탁자에 8명이 둘러앉는 방법의 수가 $7! \times a$ 일 때, a 의 값은?

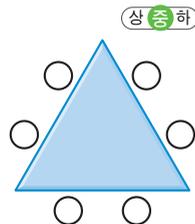
- ① 2 ② 4
- ③ 6 ④ 8
- ⑤ 10



011

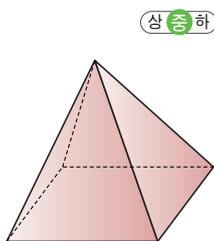
오른쪽 그림과 같은 정삼각형 모양의 탁자에 6명이 둘러앉는 방법의 수는?

- ① 30 ② 60
- ③ 120 ④ 240
- ⑤ 360



012

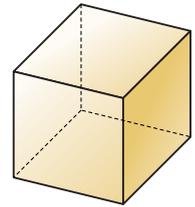
오른쪽 그림과 같이 밑면이 정사각형인 사각뿔의 각 면을 서로 다른 5가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수를 구하여라.



013

오른쪽 그림과 같은 정육면체의 각 면을 서로 다른 6가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수는?

- ① 30 ② 60
- ③ 90 ④ 120
- ⑤ 180



03 중복순열

중요도

014

5명의 학생이 어떤 숙소에서 3개의 방에 투숙하는 방법의 수는? (단, 빈 방이 있을 수도 있다.)

- ① 27 ② 81 ③ 189
- ④ 243 ⑤ 276

015

서로 다른 3통의 편지를 4개의 우체통에 넣는 방법의 수는? (단, 한 통의 편지도 넣지 않는 우체통이 있을 수 있다.)

- ① 48 ② 52 ③ 56
- ④ 60 ⑤ 64

016 **학명** 기출

서로 다른 종류의 연필 5자루를 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?

(단, 연필을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

- ① 1024 ② 1034 ③ 1044
- ④ 1054 ⑤ 1064

017

상 중 하

○, ×로 답하는 총 4개의 문제에서 나올 수 있는 가능한 답안의 개수는? (단, 비어 있는 답안은 없다.)

- ① 4 ② 10 ③ 12
④ 16 ⑤ 22

018

최 다 빈출

상 중 하

6명의 유권자가 각각 3명의 후보 중에서 기명 투표로 한 명의 후보에게 투표하는 방법의 수를 구하여라.

(단, 기권이나 무효는 없다.)

019

상 중 하

3명의 학생이 각각 회전목마, 바이킹, 청룡열차, 다람쥐 통의 4개의 놀이기구 중에서 어느 한 개를 이용하는 방법의 수는?

- ① 27 ② 48 ③ 64
④ 72 ⑤ 81

020

학평 기출

상 중 하

문자 a, b, c 에서 중복을 허락하여 세 개를 택하여 만든 단어를 전송하려고 한다. 단, 전송되는 단어에 a 가 연속되면 수신이 불가능하다고 하자. 예를 들면 aab, aaa 등은 수신이 불가능하고 bba, aba 등은 수신이 가능하다. 수신 가능한 단어의 개수를 구하여라.

021

공생 비법 1

상 중 하

A 지역의 중학교에 다니는 학생은 그 지역에 있는 남자 고등학교 2개, 여자 고등학교 1개, 남녀공학 2개 중에서 한 학교에 배정된다고 한다. A 지역의 중학교에 다니는 남학생 2명과 여학생 3명이 고등학교를 배정받을 수 있는 모든 경우의 수를 구하여라.

022

상 중 하

모스 부호 $\bullet, -$ 를 6개까지 사용하여 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수를 구하여라.

023

상 중 하

어느 야구팀의 포수가 오른손의 엄지, 검지, 중지 세 손가락을 펼치거나 구부려 접는 방법으로 투수에게 보내는 신호를 만들려고 한다. 이 손가락을 다섯 번 이하로 펼쳐서 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는? (단, 손가락은 한번 이상 펼쳐야 하고, 두 개 이상의 손가락을 동시에 펼치지 않는다.)

- ① 351 ② 354 ③ 357
④ 360 ⑤ 363

024

상 중 하

네 개의 숫자 0, 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는?

- ① 184 ② 188 ③ 190
④ 192 ⑤ 194

025 최^多빈출

상중하

다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허락하여 네 자리의 비밀번호를 만들 때, 홀수인 비밀번호의 개수를 구하여라.

026

상중하

2000 이상의 네 자리의 자연수 중에서 5의 배수의 개수를 구하여라.

027

상중하

네 개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 중복을 허락하여 만들 수 있는 세 자리의 정수 중 반드시 3이 포함되는 것의 개수를 구하여라.

028 학평 기출

상중하

세 개의 숫자 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 1과 2가 모두 포함되어 있는 자연수의 개수는?

- ① 58 ② 56 ③ 54
- ④ 52 ⑤ 50

029

상중하

여섯 개의 숫자 0, 1, 3, 5, 7, 9에서 중복을 허락하여 만든 자연수를 크기가 작은 것부터 순서대로 나열할 때, 3000은 몇 번째 수인가?

- ① 148번째 ② 181번째 ③ 217번째
- ④ 368번째 ⑤ 432번째

04 중복순열을 이용한 함수의 개수

중요도

030

상중하

두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{2, 4, 6\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수는?

- ① $3!$ ② $5!$ ③ 3^5
- ④ 5^3 ⑤ ${}_5P_3$

031

상중하

두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중에서 $f(1)=1$ 인 함수의 개수는?

- ① 4 ② 8 ③ 12
- ④ 16 ⑤ 27

032

상중하

두 집합 $X=\{x, y, z\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 함수 $f: X \rightarrow Y$ 중에서 $f(y) \neq 1$ 인 함수의 개수는?

- ① 64 ② 96 ③ 100
- ④ 124 ⑤ 125

05 같은 것이 있는 순열

중요도

033

상중하

coffee에 있는 6개의 문자를 한 줄로 나열하는 방법의 수는?

- ① 60 ② 120 ③ 180
- ④ 240 ⑤ 480

034 학평 기출

상중하

흰색 깃발 5개, 파란색 깃발 5개를 일렬로 모두 나열할 때, 양 끝에 흰색 깃발이 놓이는 경우의 수는?

- ① 56 ② 63 ③ 70
- ④ 77 ⑤ 84

035

상중하

start에 있는 5개의 문자를 한 줄로 나열할 때, 양 끝에 s와 r가 오도록 나열하는 방법의 수를 구하여라.

036

상중하

football에 있는 8개의 문자를 한 줄로 나열할 때, 자음끼리 이웃하도록 나열하는 방법의 수는?

- ① 360 ② 450 ③ 540
- ④ 630 ⑤ 720

037

상중하

success에 있는 7개의 문자를 한 줄로 나열할 때, u와 e가 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수는?

- ① 60 ② 80 ③ 120
- ④ 200 ⑤ 300

038 최다 빈출

상중하

6개의 숫자 0, 1, 1, 2, 2, 3을 모두 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리의 정수의 개수를 구하여라.

039

상중하

7개의 숫자 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6을 한 줄로 나열할 때, 홀수 번째 자리에는 홀수를 나열하는 방법의 수를 구하여라.

040

상중하

0, 1, 1, 3, 3, 3의 숫자가 각각 하나씩 적혀 있는 6장의 카드를 모두 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리의 정수 중에서 홀수의 개수는?

- ① 10 ② 20 ③ 30
- ④ 40 ⑤ 50

041 **풍샘 비법 2**

상 중 하

teacher에 있는 7개의 문자를 한 줄로 나열할 때, t, c, h, r를 이 순서대로 나열하는 방법의 수는?

- ① 100 ② 105 ③ 110
- ④ 115 ⑤ 120

042

상 중 하

ensemble에 있는 8개의 문자를 한 줄로 나열할 때, n이 m보다 앞에 오고, s가 l보다 앞에 오도록 나열하는 방법의 수는?

- ① 1250 ② 1680 ③ 2010
- ④ 2440 ⑤ 2870

043

상 중 하

7개의 숫자 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5를 한 줄로 나열할 때, 1, 2, 3은 크기가 작은 것부터 순서대로 나열하는 방법의 수는?

- ① 90 ② 105 ③ 210
- ④ 420 ⑤ 1260

044 **학평 기출**

상 중 하

1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 2가 적혀 있는 카드가 4가 적혀 있는 카드보다 왼쪽에 나열하고 홀수가 적혀 있는 카드는 작은 수부터 크기 순서대로 왼쪽부터 나열하는 경우의 수는?

- ① 56 ② 60 ③ 64
- ④ 68 ⑤ 72

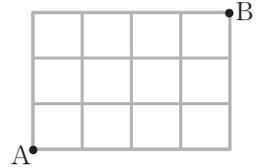
06 같은 것이 있는 순열의 활용

중요도

045

상 중 하

오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A에서 출발하여 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는?

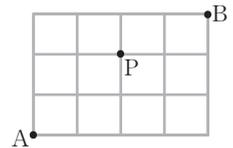


- ① 30 ② 35
- ③ 40 ④ 45
- ⑤ 50

046 **최 다 빈출**

상 중 하

오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A에서 출발하여 P를 지나 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는?

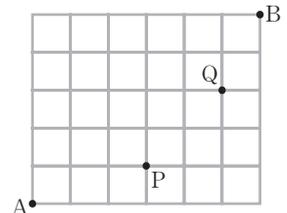


- ① 18 ② 24 ③ 30
- ④ 36 ⑤ 42

047 **학평 기출**

상 중 하

오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법 중에서 P는 지나고, Q는 지나지 않고 가는 방법의 수는?



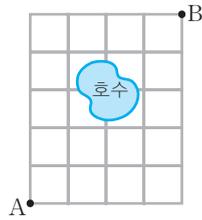
- ① 68 ② 84
- ③ 102 ④ 124
- ⑤ 140

048

상 중 하

오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는?

- ① 61 ② 65
- ③ 66 ④ 68
- ⑤ 72

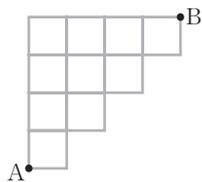


049

상 중 하

오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는?

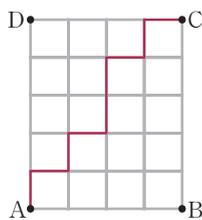
- ① 24 ② 42
- ③ 82 ④ 102
- ⑤ 134



050 학평 기출

상 중 하

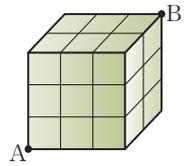
오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. 갑은 A에서 C까지 붉은 선을 따라 걷고, 을은 C에서 A까지 붉은 선을 따라 걸으며, 병은 B에서 D까지 도로를 따라 최단 거리로 걷는다. 갑, 을, 병 세 사람이 모두 만나도록 병이 B에서 D까지 가는 방법의 수를 구하여라. (단, 갑, 을, 병은 동시에 출발하고 같은 속력으로 걷는다.)



051

상 중 하

오른쪽 그림과 같이 크기가 같은 정육면체 18개를 쌓아 직육면체를 만들었을 때, 정육면체의 모서리를 따라 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는?



- ① 260 ② 320 ③ 400
- ④ 480 ⑤ 560

07 중복조합

중요도

052

상 중 하

다음 값을 구하여라.

- (1) ${}_3H_0$ (2) ${}_4H_3$
- (3) ${}_2H_3$ (4) ${}_2H_2$

053

상 중 하

다음을 만족시키는 n 또는 r 의 값을 구하여라.

- (1) ${}_nH_4 = 15$ (2) ${}_5H_r = 15$

054

상 중 하

1, 2, 3에서 중복을 허락하여 2개의 수를 선택하는 중복조합의 수를 구하여라.

055

상 중 하

2, 4, 6에서 중복을 허락하여 4개의 수를 선택할 때, 숫자 6이 1개 이하가 되는 경우의 수는?

- ① 3 ② 5 ③ 7
- ④ 9 ⑤ 11

056

확평 기출

상 중 하

$3 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 10$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는?

- ① 240 ② 270 ③ 300
- ④ 330 ⑤ 360

057

상 중 하

다음 식의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구하여라.

- (1) $(a+b)^5$ (2) $(a+b+c)^6$

058

상 중 하

$(x+y)^3(a+b+c)^5$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는?

- ① 68 ② 72 ③ 76
- ④ 80 ⑤ 84

059

최 다 빈출

상 중 하

2명의 후보가 출마한 선거에서 10명의 유권자가 각각 한 명의 후보에게 무기명으로 투표하는 방법의 수는?

(단, 기권이나 무효는 없다.)

- ① 10 ② 11 ③ 12
- ④ 55 ⑤ 56

060

상 중 하

감, 귤, 배, 사과 4종류의 과일만을 파는 가게에서 8개의 과일을 사는 방법의 수는?

(단, 감, 귤, 배, 사과는 각각 8개 이상씩 있다.)

- ① 45 ② 70 ③ 165
- ④ 225 ⑤ 495

061

상 중 하

색연필, 볼펜, 형광펜 중에서 7개를 선택하려고 한다. 색연필, 볼펜, 형광펜을 각각 적어도 1개 이상씩 선택하는 방법의 수는?

(단, 색연필, 볼펜, 형광펜은 각각 7개 이상씩 있다.)

- ① 15 ② 17 ③ 19
- ④ 21 ⑤ 23

08 방정식에서 정수해의 개수

중요도

062

상중하

방정식 $x+y+z=10$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 에 대하여 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 구하여라.

063

상중하

방정식 $a+b+c+d=9$ 를 만족시키는 양의 정수해의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는?

- ① 50 ② 52 ③ 54
④ 56 ⑤ 58

064 최다빈출

상중하

방정식 $x+y+z=8$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 m , 양의 정수해의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 n 이라고 할 때, $m-n$ 의 값은?

- ① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

065 학평 기출

상중하

다음 두 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는?

(가) $a+b+c+3d=10$
(나) $a+b+c \leq 5$

- ① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

09 중복조합을 이용한 함수의 개수

중요도

066

학평 기출

상중하

$\{1, 2, 3, 4\}$ 에서 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 로의 함수 중에서 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) \geq f(x_2)$ 를 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하여라.

067

상중하

두 집합 $X=\{1, 2, 3\}, Y=\{4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중에서 다음 세 조건 (가), (나), (다)를 만족시키는 함수의 개수를 각각 a, b, c 라고 할 때, $a+b+c$ 의 값은?

(가) $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$
(나) $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$
(다) $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$

- ① 40 ② 42 ③ 44
④ 46 ⑤ 48

068

상중하

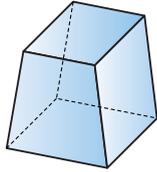
집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$ 에서 집합 $Y=\{5, 6, 7, 8, 9\}$ 로의 함수 f 중에서 다음 두 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는?

(가) $f(3)=7$
(나) $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$

- ① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

069

오른쪽 그림과 같이 옆면이 모두 합동인 사각뿔대의 각 면을 서로 다른 6가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수를 구하여라.



070

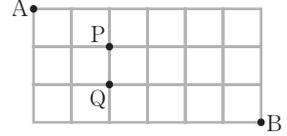
6개의 숫자 0, 1, 2, 3, 5, 7에서 중복을 허락하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중에서 짝수의 개수를 구하여라.

071

6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3 중 4개를 택하여 만들 수 있는 3의 배수의 개수를 구하여라.

072

오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법 중에서 \overline{PQ} 를 지나지 않고 가는 방법의 수를 구하여라.



073

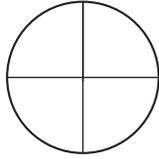
5명의 학생들이 같은 종류의 사탕 8개를 나누어 가지는 방법의 수를 a , 적어도 하나씩은 모두 가질 때의 방법의 수를 b 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

074

방정식 $x+y+z=12$ 를 만족시키는 짝수인 자연수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 구하여라.

075

서로 다른 다섯 가지 색을 사용하여 오른쪽 그림과 같이 4등분된 원판에 색을 칠하려고 한다. 이웃한 부분에는 서로 다른 색을 칠하는 그 방법의 수를 구하여라.



(단, 색은 중복하여 사용할 수 있다.)

076

참가자들이 1부터 999까지의 자연수를 차례대로 말하다가 3, 16, 903과 같이 숫자 3 또는 6 또는 9가 포함된 수는 말할 대신 박수를 한 번 치는 게임이 있다. 이 게임에서 박수를 모두 몇 번 치는지 구하여라.

(단, 3 또는 6 또는 9가 2개 이상 들어 있는 숫자는 박수를 한 번만 친다.)

077

두 집합 $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 치역과 공역이 같은 것의 개수를 구하여라.

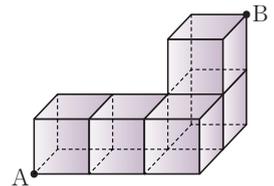
078

중복을 허락하여 기호 ●, ▲를 나열하여 부호를 만들 때, 100개의 부호를 만들려면 기호를 최소한 몇 개까지 사용해야 하는가?

- ① 4 ② 6 ③ 8
- ④ 10 ⑤ 12

079 100점 도전

오른쪽 그림과 같이 크기가 같은 정육면체 5개를 붙였을 때, 정육면체의 모서리를 따라 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수를 구하여라.



080

9개의 계단을 1계단 또는 2계단씩 오를 때, 올라가는 방법의 수는?

- ① 11 ② 22 ③ 33
- ④ 44 ⑤ 55

081

주사위를 5회 던져서 n 번째 나오는 눈의 수를 a_n ($n=1, 2, 3, 4, 5$)이라고 하자. $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ 인 경우의 수를 m , $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$ 인 경우의 수를 n 이라고 할 때, $m+n$ 의 값은?

- ① 218 ② 228 ③ 238
 ④ 248 ⑤ 258

082

수학 시험에 5지선다형의 객관식 문제가 20문항 출제되었고, 문제 당 배점은 5점씩 100점 만점이다. 학생 A는 모든 문제를 ①번에 답했고, 같은 방법으로 B는 ②번, C는 ③번, D는 ④번, E는 ⑤번에 답했다. 이때, 5명의 학생이 맞은 점수의 모든 경우의 수는?

- ① ${}_{24}C$ ② ${}_{24}C_4$ ③ ${}_2 C$
 ④ ${}_2 C_4$ ⑤ ${}_{26}C_6$

083

$(a+b-c)^5 - (b-c+d)^5$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구하여라.

084 C 100점 도전

자연수 n 에 대하여 $abc=3^n$ 을 만족시키는 1보다 큰 자연수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수가 15일 때, n 의 값은?

- ① 3 ② 5 ③ 7
 ④ 9 ⑤ 11

085

다음 두 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w 의 모든 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는?

- (가) $x+y+z+w=8$
 (나) $x \neq y$

- ① 136 ② 138 ③ 140
 ④ 142 ⑤ 144

086

두 집합

$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 $a \in A, b \in B$ 이고 $a < b$ 이면 $f(a) \leq f(b)$ 를 만족시키는 함수 $f: A \rightarrow B$ 중에서 $f(1)f(4)=12$ 를 만족시키는 함수의 개수를 구하여라.

02

이항정리

더 자세한 개념은 풍산자 확률과 통계 41쪽

1 이항정리

$$(1) \text{ 자연수 } n \text{에 대하여 } (a+b)^n \text{을 전개하면}$$

$$(a+b)^n = {}_n C_0 a^n + {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \cdots$$

$$+ {}_n C_r a^{n-r} b^r + \cdots + {}_n C_n b^n$$

이고, 이것을 이항정리라고 한다.

이때, 각 항의 계수 ${}_n C_0, {}_n C_1, \dots, {}_n C_r, \dots, {}_n C_n$ 을 이항 계수라고 한다.

$$(2) (a+b)^n \text{의 전개식에서 } a^{n-r} b^r \text{의 계수는 } {}_n C_r \text{와 같다.}$$

(단, $0 < r < n$)

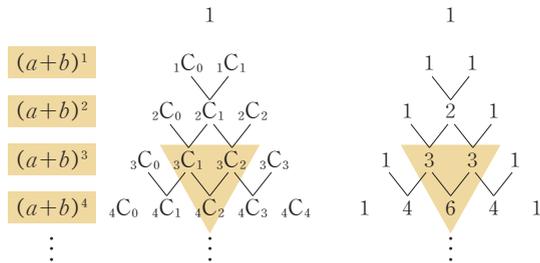
참고 ① $(a+b)^n$ 의 전개식에서 ${}_n C_r = {}_n C_{n-r}$ 이므로 $a^{n-r} b^r$ 의 계수와 $a^r b^{n-r}$ 의 계수는 서로 같다.

② n 이 자연수일 때, $(a+b+c)^n$ 의 전개식에서 $a^p b^q c^r$ 의 계수는 $\{(a+b)+c\}^n$ 에서 먼저 c^r 의 계수를 구한 후, $(a+b)^{n-r}$ 에서 $a^p b^q$ 의 계수를 구한다.
(단, $p+q+r=n, p>0, q>0, r>0$)

주의 $(a+b)^n$ 의 전개식에서 ${}_n C_r a^{n-r} b^r$ 은 r 번째 항이 아니라 $(r+1)$ 번째 항이다.

2 이항계수의 성질

(1) 파스칼의 삼각형 : $n=1, 2, 3, \dots$ 일 때, $(a+b)^n$ 의 전개식의 이항계수를 차례대로 다음과 같이 배열한 것을 파스칼의 삼각형이라고 한다.



(2) 이항계수의 성질

n 이 자연수일 때

$$\textcircled{1} {}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_n = 2^n$$

$$\textcircled{2} {}_n C_0 - {}_n C_1 + {}_n C_2 - {}_n C_3 + \cdots + (-1)^n {}_n C_n = 0$$

$$\textcircled{3} {}_n C_0 + {}_n C_2 + {}_n C_4 + {}_n C_6 + \cdots = 2^{n-1}$$

$${}_n C_1 + {}_n C_3 + {}_n C_5 + {}_n C_7 + \cdots = 2^{n-1} \text{ (단, } n \geq 2)$$

참고 $(1+x)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 x + {}_n C_2 x^2 + \cdots + {}_n C_n x^n$ 의 양변에
(i) $x=1$ 을 대입하면 ①이 성립한다.
(ii) $x=-1$ 을 대입하면 ②가 성립한다.
또, ①+②, ①-②을 하여 정리하면 ③이 성립한다.

문제 풀 때 유용한 풍샘 비법

1 이항정리를 이용한 전개식에서 계수 구하기

(1) $(a+bx)^n$ 꼴 $\Rightarrow x^r$ 항은 bx 를 r 번 곱할 때 나타나므로 a 는 $n-r$ 번 곱하면 된다. 즉, x^r 항은

$${}_n C_r a^{n-r} (bx)^r = {}_n C_r a^{n-r} b^r x^r \text{이므로 } x^r \text{의 계수는 } {}_n C_r a^{n-r} b^r$$

$$\text{예를 들어 } (a+bx)^n \text{의 전개식에서 } x^2 \text{항은 } a \text{를 } n-2 \text{번, } bx \text{를 } 2 \text{번 곱한 경우이므로 } {}_n C_2 a^{n-2} (bx)^2 = {}_n C_2 a^{n-2} b^2 x^2$$

따라서 x^2 의 계수는 ${}_n C_2 a^{n-2} b^2$ 이다.

(2) $(a+bx)^m (c+dx)^n$ 꼴 $\Rightarrow x^{r+s}$ 항은 $(a+bx)^m$ 의 전개식에서 x^r 항과 $(c+dx)^n$ 의 전개식에서 x^s 항을 구하여 이들의 곱을 이용한다.

즉, $(a+bx)^m$ 의 전개식에서 x^r 항은 ${}_m C_r a^{m-r} (bx)^r = {}_m C_r a^{m-r} b^r x^r$, $(c+dx)^n$ 의 전개식에서 x^s 항은 ${}_n C_s c^{n-s} (dx)^s = {}_n C_s c^{n-s} d^s x^s$ 이므로 이들의 곱은

$${}_m C_r a^{m-r} b^r x^r \cdot {}_n C_s c^{n-s} d^s x^s = {}_m C_r \cdot {}_n C_s \cdot (a^{m-r} b^r) (c^{n-s} d^s) x^{r+s} \text{ (단, } 0 < r < m, 0 < s < n) \quad \cdots \textcircled{1}$$

여기서 x^4 항은 $r+s=4$ 를 만족시키는 r, s 의 값을 구하여 ①에 대입하면 된다.

2 파스칼의 삼각형을 이용한 식의 값 구하기

파스칼의 삼각형에서 각 단계의 이항계수의 이웃하는 두 수를 더하면 그 다음 단계의 중앙에 있는 이항계수가 됨을 이용한다.

$$\Leftrightarrow {}_n C_r = {}_{n-1} C_{r-1} + {}_{n-1} C_r \text{ (단, } r=1, 2, 3, \dots, n-1)$$

