머리말

고등학교 수학의 내신이나 수능 기출 문제는 무척 많지만 모두 교과 과정의 개념에서 파생된 문제입니다. 문제를 척 보면 아하! 이것은 무엇을 묻는 문제이구나! 하고 간파할 수 있을까요?

그럴 수 있어야 합니다.

고등학교 수학 문제는 수없이 많지만 그 기저에는 뼈대가 되는 기본 문제 유형이 있습니다. 이 기본 문제 유형을 정복하는 것이 수학 문제 정복의 열쇠입니다.

– 어려운 문제처럼 보이지만 한 단계만 해결하면 쉬운 문제로 변신하는 문제가 있습니다.

– 낯선 문제처럼 보이지만 한 꺼풀만 벗기면 익숙한 문제로 바뀌는 문제가 있습니다.

– 겉모양은 전혀 다른데 본질을 파악하면 사실상 동일한 문제가 있습니다.

가면을 쓰고 다른 문제인 척 가장할 때 속아 넘어 가지 않으려면 어떻게 해야 할까요?

풍산자 필수유형은 어려운 문제를 쉬운 문제로, 낯선 문제를 익숙한 문제로 바꾸는 능력을 기를 수 있도록 구성된 문제기본서입니다. 세상의 모든 수학 문제를 유형별로 정리하고 분석하여 그 뼈대가 되는 문제들로 구성하였습니다.

몇 천 문항씩 되는 많은 문제를 두서없이 풀기보다는 뼈대 문제를 완벽히 이해한다면 어떠한 수학 문제를 만나도 당당하게 맞서는 수학의 고수로 다시 태어날 것입니다.

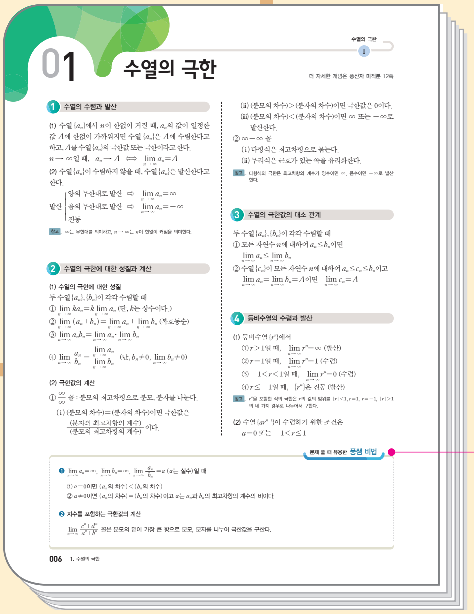
구성 과 특징

꼭 필요한 유형으로만 꽉 채운

풍산자 필수유형!

핵심 내용 요약 정리

중단원별로 꼭 알아야 하는 개념을 간단하고 명쾌하게 요약하였으며, 예, 참고, 주의 등으로 개념을 쉽게 이해할 수 있도록 하였습니다.

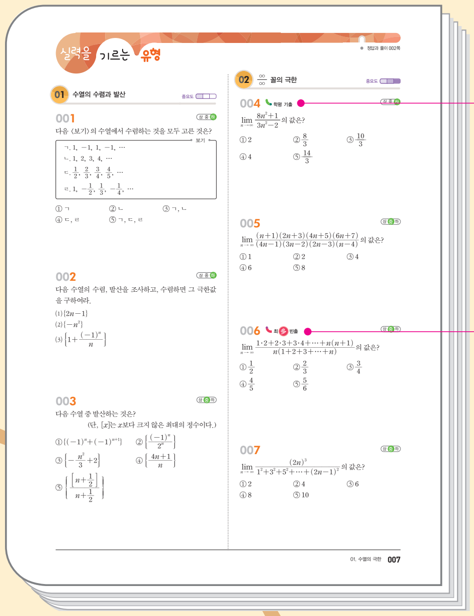


문제 풀 때 유용한 풍쌤 비법

핵심 내용과 연계되어 문제 풀이에 자주 이용되는 개념, 개념을 문제에 적용하는 방법 등을 소개하고 이를 활용할 수 있도록 하였습니다.

실력을 기르는 유형

학습에 필요한 문제들을 유형별로 나누고 유형별 중요도와 문항별 난이도를 제시하여 학습 수준에 맞추어 충분한 연습이 될 수 있도록 구성하였습니다.

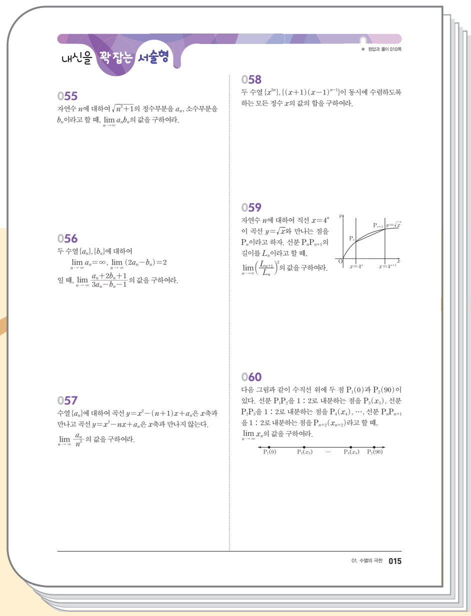


학평 기출

평가원, 교육청의 학력평가 기출 문제 중 자주 출제되는 유형의 문제입니다.

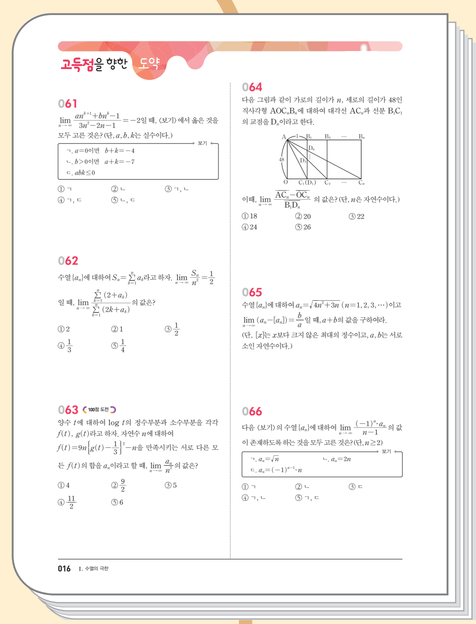
최多빈출

자주 출제되는 유형 중 가장 출제 비중이 높은 문제입니다.



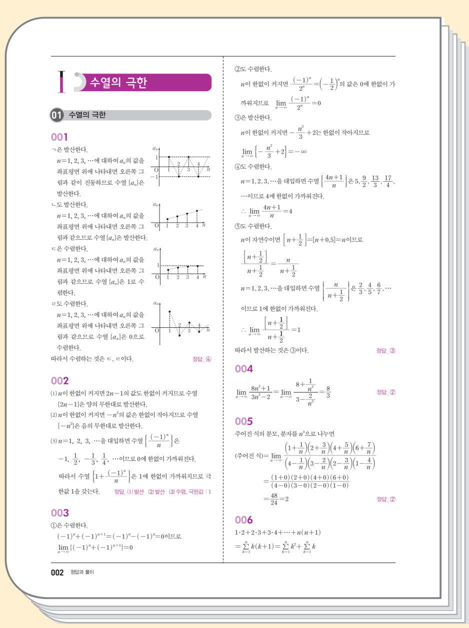
내신을 꽉 잡는 서술형

핵심적이고 출제 빈도가 높은 서술형 기출 문제로 구성하여 강화된 서술형 평가에 대비할 수 있도록 하였습니다.



고득점을 향한 도약

난이도가 높고, 출제 비중이 높은 문제로 구성하여 수학적 사고력과 응용력을 기를 수 있도록 하였습니다.



풀이

자세하고 친절한 풀이와 다른 풀이로 문제의 출제 의도와 다양한 해결 방향을 이해할 수 있도록 하였습니다.

차례

I

수열의 극한

01 수열의 극한

더 자세한 개념은 풍산자 미적분 12쪽

1 수열의 수렴과 발산

(1) 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, a_n의 값이 일정한 값 A에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 A에 수렴한다고 하고, A를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라고 한다.

$n \to \infty$일 때, $a_n \to A \iff \lim_{n\to\infty} a_n = A$

(2) 수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않을 때, 수열 $\{a_n\}$은 발산한다고 한다.

발산 $\begin{cases} \text{양의 무한대로 발산} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \\ \text{음의 무한대로 발산} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \\ \text{진동} \end{cases}$

참고 ∞는 무한대를 의미하고, $n \to \infty$는 n이 한없이 커짐을 의미한다.

2 수열의 극한에 대한 성질과 계산

(1) 수열의 극한에 대한 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴할 때

① $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n$ (단, k는 상수이다.)

② $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$ (복호동순)

③ $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

④ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ (단, $b_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$)

(2) 극한값의 계산

① $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴 : 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.

(i) (분모의 차수)=(분자의 차수)이면 극한값은 $\frac{(\text{분자의 최고차항의 계수})}{(\text{분모의 최고차항의 계수})}$이다.

(ii) (분모의 차수)>(분자의 차수)이면 극한값은 0이다.

(iii) (분모의 차수)<(분자의 차수)이면 ∞ 또는 $-\infty$로 발산한다.

② $\infty - \infty$ 꼴

(i) 다항식은 최고차항으로 묶는다.

(ii) 무리식은 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

참고 다항식의 극한은 최고차항의 계수가 양수이면 ∞, 음수이면 $-\infty$로 발산한다.

3 수열의 극한값의 대소 관계

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴할 때

① 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면

$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$

② 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = A$

4 등비수열의 수렴과 발산

(1) 등비수열 $\{r^n\}$에서

① $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ (발산)

② $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$ (수렴)

③ $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ (수렴)

④ $r \le -1$일 때, $\{r^n\}$은 진동 (발산)

참고 r^n을 포함한 식의 극한은 r의 값의 범위를 $|r|<1$, $r=1$, $r=-1$, $|r|>1$의 네 가지 경우로 나누어서 구한다.

(2) 수열 $\{ar^{n-1}\}$이 수렴하기 위한 조건은

$a=0$ 또는 $-1<r\le 1$

문제 풀 때 유용한 풍쌤 비법

❶ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha$ (α는 실수)일 때

① $\alpha=0$이면 (a_n의 차수)<(b_n의 차수)

② $\alpha \neq 0$이면 (a_n의 차수)=(b_n의 차수)이고 α는 a_n과 b_n의 최고차항의 계수의 비이다.

❷ **지수를 포함하는 극한값의 계산**

$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n+d^n}{a^n+b^n}$ 꼴은 분모의 밑이 가장 큰 항으로 분모, 분자를 나누어 극한값을 구한다.

01 수열의 수렴과 발산

중요도

001

상 중 하

다음 〈보기〉의 수열에서 수렴하는 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots$

ㄴ. $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$

ㄷ. $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$

ㄹ. $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

002

상 중 하

다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\{2n-1\}$

(2) $\{-n^2\}$

(3) $\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$

003

상 중 하

다음 수열 중 발산하는 것은?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $\{(-1)^n+(-1)^{n+1}\}$ ② $\left\{\frac{(-1)^n}{2^n}\right\}$

③ $\left\{-\frac{n^2}{3}+2\right\}$ ④ $\left\{\frac{4n+1}{n}\right\}$

⑤ $\left\{\frac{\left[n+\frac{1}{2}\right]}{n+\frac{1}{2}}\right\}$

02 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

중요도

004 학평 기출

상 중 하

$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+1}{3n^2-2}$의 값은?

① 2 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$

④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

005

상 중 하

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+3)(4n+5)(6n+7)}{(4n-1)(3n-2)(2n-3)(n-4)}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4

④ 6 ⑤ 8

006 최多빈출

상 중 하

$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)}{n(1+2+3+\cdots+n)}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

007

상 중 하

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^3}{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

008 상중하

수열 $\frac{1}{1^2}, \frac{1+2}{2^2}, \frac{1+2+3}{3^2}, \frac{1+2+3+4}{4^2}, \cdots$의 극한값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

009 상중하

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{\left\{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}^2}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

010 학평 기출 상중하

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\frac{1+a_n}{a_n}=n^2+2$가 성립할 때, $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

011 상중하

수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=1-\frac{1}{n^2}$일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_2a_3a_4\cdots a_n)$의 값은?

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 2

012 상중하

수열 $\log_2 2-\log_2 3, \log_2 3-\log_2 5, \log_2 4-\log_2 7, \log_2 5-\log_2 9, \cdots$의 극한값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

013 상중하

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{9n^2+3}+\sqrt{n^2-7}}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

014 최多빈출 상중하

$\lim_{n\to\infty}\{\log_2(\sqrt{4n-1}+\sqrt{4n+1})-\log_2\sqrt{n}\}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

015 학평 기출 상중하

이차함수 $f(x)=3x^2$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(n,\ f(n))$과 $\mathrm{Q}(n+1,\ f(n+1))$ 사이의 거리를 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? (단, n은 자연수이다.)

① 9 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 5

016 상중하

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n\cdot 3^n$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

017 상중하

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=3n^2-4n$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{(5n+2)a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

018 최多빈출 풍쌤 비법 1 상중하

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+5}{\sqrt{4n^2-1}}=7$일 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

019 상중하

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-6n+6}{bn^2+3n-3}=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{bn-a}{an+b}$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

03 $\infty-\infty$ 꼴의 극한

중요도

020 상중하

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-8n}-2n)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3})$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}}$

021 상중하

첫째항이 6, 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

022 상중하

서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 $\alpha+\beta=1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\alpha^2}-\sqrt{n+\beta^2}}{\sqrt{4n+\alpha}-\sqrt{4n+\beta}}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

023 최多빈출 상중하

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{kn+1}}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}=5$일 때, 상수 k의 값은?

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

024 상중하

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}\left\{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{20}-\frac{1}{n^{20}}\right\}$이 수렴하도록 하는 자연수 a의 최솟값은?

① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

025 상중하

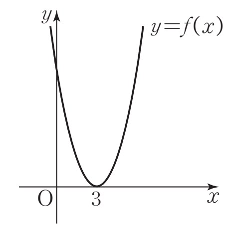
수렴하는 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$a_n=\sqrt{(n+3)(4n-1)}-kn$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라. (단, k는 상수이다.)

026 학평 기출 상중하

함수 $f(x)$는 $f(x)=(x-3)^2$이고 함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 자연수 n에 대하여 방정식 $f(x)=n$의 두 근이 α, β일 때, $h(n)=|\alpha-\beta|$라고 하자.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\{h(n+1)-h(n)\}$의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

027 상중하

이차방정식 $x^2-2nx+n=0$ (n은 자연수)의 두 근 중에서 작지 않은 근을 a_n이라 하고, a_n의 정수 부분을 $f(n)$이라고 하자. 이때, $\lim_{n\to\infty}\{a_n-f(n)\}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

04 수열의 극한에 대한 성질

중요도

028 상중하

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=5, \lim_{n\to\infty}a_nb_n=3$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)$의 값은?

① 19 ② 23 ③ 27
④ 31 ⑤ 35

029 상중하

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=3$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$이고 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_nb_n-2}{a_n+3b_n}=2$가 성립할 때, 상수 α의 값은?

① -3 ② $-\frac{8}{3}$ ③ $-\frac{7}{3}$
④ -2 ⑤ $-\frac{5}{3}$

030 학평 기출 상중하

수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)a_n=2,\ \lim_{n\to\infty} (n^2+1)b_n=7$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{(10n+1)b_n}{a_n}$의 값을 구하여라. (단, $a_n\neq0$)

031 상중하

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{2n^2+1}=3$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{n(a_n+a_{n+1})}{n^2+1}$의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

032 최多빈출 상중하

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. $a_n<b_n$이고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$
ㄴ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴할 때, $a_n<b_n$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n<\lim_{n\to\infty} b_n$
ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ 또는 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

05 수열의 극한값의 대소 관계

중요도

033 상중하

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$4n^2-3n-2<a_n<4n^2+n+2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2n^2+3n+4}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

034 상중하

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$(n-3)(4n^2+1)<2n^2a_n<2n^2(2n+3)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

035
상중하

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{-n}{2n-1}<a_n<\frac{n}{2n+1}$을 만족시킬 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n=0$　　ㄴ. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}=0$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{n^2+1}=0$

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

06 등비수열의 수렴과 발산
중요도

036
상중하

다음 등비수열 중 수렴하는 것은?

① $\left\{\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right\}$　② $\left\{\left(\log\frac{1}{10}\right)^n\right\}$
③ $\{1.01^n\}$　④ $\left\{\frac{-5^n}{9\cdot4^n}\right\}$
⑤ $\{(\sqrt{2}-1)^n\}$

037 최多빈출
상중하

수열 $\left\{\left(\frac{3x-5}{6}\right)^n\right\}$이 수렴하기 위한 정수 x의 개수는?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

038
상중하

수열 $\{(x^2-5x+7)^n\}$이 0이 아닌 값에 수렴하도록 하는 모든 실수 x의 값의 곱은?

① 4　② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

039 학평 기출
상중하

등비수열 $\{r^n\}$이 수렴할 때, 다음 〈보기〉의 수열에서 수렴하는 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. $\{r^{2n}\}$　　ㄴ. $\{(-r)^n\}$

ㄷ. $\left\{\left(\frac{1-r}{2}\right)^n\right\}$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

07 등비수열의 극한
중요도

040 풍쌤 비법 ❷
상중하

$\lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n+2^n}$의 값은?

① 11　② 12　③ 13
④ 14　⑤ 15

041
상중하

첫째항이 5이고 공비가 5인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}-7}{a_n}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

042

상 중 하

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 5, 공비가 6인 등비수열일 때, $\lim_{n\to\infty} \log_{a_n} b_n$의 값은?

① $\log_2 3$ ② $2\log_3 2$ ③ 2
④ $1+\log_3 2$ ⑤ $1+\log_2 3$

043

상 중 하

$\lim_{n\to\infty}\left(9+\frac{1}{3^n}\right)\left(a+\frac{1}{2^n}\right)=45$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

044 최多빈출

상 중 하

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{a\cdot 3^n-3^{n-1}}=6$을 만족시키는 상수 a에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{5a^n+4}{2a^n+7}$의 값은?

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{5}{7}$
④ $\frac{6}{7}$ ⑤ 1

045

상 중 하

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{3}{4}$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n-1}+8-3a_n}{6a_n-4^n+2}$의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

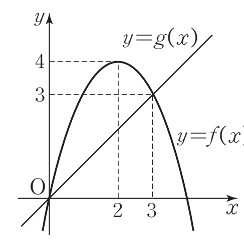
046 학평 기출

상 중 하

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 원점과 점 $(3, 3)$에서 만난다.

$h(x)$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(x)\}^{n+1}+5\{g(x)\}^n}{\{f(x)\}^n+\{g(x)\}^n}$

일 때, $h(2)+h(3)$의 값은?



① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

08 r^n을 포함한 수열의 극한

중요도

047

상 중 하

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}-r+2}{r^n+1}$ $(r\ne-1)$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. $|r|>1$일 때, 극한값은 존재하지 않는다.
ㄴ. $r=1$일 때, 극한값은 1이다.
ㄷ. $|r|<1$일 때, 극한값은 $2-r$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

048

상 중 하

수열 $\left\{\frac{r^{2n-1}+2}{r^{2n}+1}\right\}$이 수렴할 때, 다음 중 그 극한값이 될 수 없는 것은?

① $-\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ 3

정답과 풀이 009쪽

049

상 중 하

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{r^n-2010}=\alpha$일 때, 다음 중 상수 α의 값이 될 수 없는 것은?

① -2010 ② $-\frac{1}{2009}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2009}$ ⑤ 2010

09 x^n을 포함한 함수

중요도

050

상 중 하

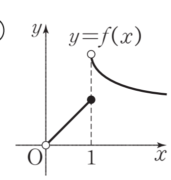
함수 $f(x)$를 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+5}{x^n+2}$로 정의할 때, $f(-2)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)$의 값은?

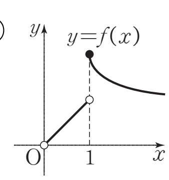
① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

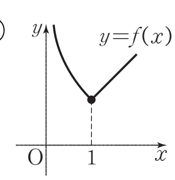
051

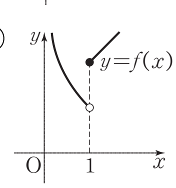
상 중 하

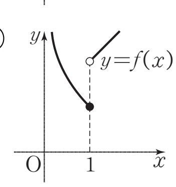
$x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+1}{x^n+x}$에 대하여 다음 중 함수 $f(x)$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은?

①


②


③


④


⑤


10 귀납적으로 정의된 수열의 극한

중요도

052 최多빈출

상 중 하

수렴하는 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\sqrt{2a_n+3}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

053

상 중 하

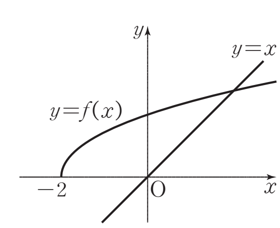
어느 달팽이는 낮에 2 m씩 벽을 타고 올라갔다가 밤에는 그날 낮에 도달한 최고 높이의 $\frac{1}{4}$만큼을 미끄러져 내려온다고 한다. 이와 같은 과정을 한없이 반복하며 벽을 오를 때, 이 달팽이가 도달할 수 있는 최고 높이는 몇 m에 한없이 가까워지는가?

① 4 m ② 8 m ③ 12 m
④ 16 m ⑤ 20 m

054 학평 기출

상 중 하

오른쪽 그림은 함수 $f(x)=\sqrt{x+2}$의 그래프와 직선 $y=x$를 나타낸 것이다.
수열 $\{a_n\}$을 $a_1=f(0)$, $a_2=f(a_1)$, $\cdots$, $a_{n+1}=f(a_n)$으로 정의할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?



① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

● 정답과 풀이 010쪽

055

자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+1}$의 정수부분을 a_n, 소수부분을 b_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_nb_n$의 값을 구하여라.

056

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty,\ \lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=2$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2b_n+1}{3a_n-b_n-1}$의 값을 구하여라.

057

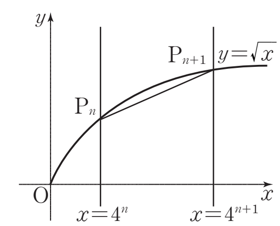
수열 $\{a_n\}$에 대하여 곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$은 x축과 만나고 곡선 $y=x^2-nx+a_n$은 x축과 만나지 않는다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값을 구하여라.

058

두 수열 $\{x^{2n}\}$, $\{(x+1)(x-1)^{n-1}\}$이 동시에 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 값의 합을 구하여라.

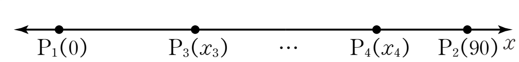
059

자연수 n에 대하여 직선 $x=4^n$이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 P_n이라고 하자. 선분 P_nP_{n+1}의 길이를 L_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2$의 값을 구하여라.



060

다음 그림과 같이 수직선 위에 두 점 $P_1(0)$과 $P_2(90)$이 있다. 선분 P_1P_2을 $1:2$로 내분하는 점을 $P_3(x_3)$, 선분 P_2P_3을 $1:2$로 내분하는 점을 $P_4(x_4)$, $\cdots$, 선분 P_nP_{n+1}을 $1:2$로 내분하는 점을 $P_{n+2}(x_{n+2})$라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} x_n$의 값을 구하여라.



061

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^{k+1}+bn^{k}-1}{3n^2-2n-1}=-2$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, a, b, k는 실수이다.)

보기

ㄱ. $a=0$이면 $b+k=-4$

ㄴ. $b>0$이면 $a+k=-7$

ㄷ. $abk\le 0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

062

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라고 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{1}{2}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(2+a_k)}{\sum_{k=1}^{n}(2k+a_k)}$의 값은?

① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

063 100점 도전

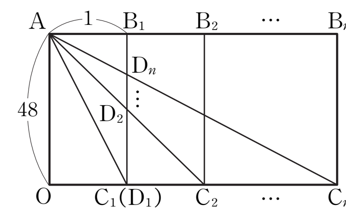
양수 t에 대하여 $\log t$의 정수부분과 소수부분을 각각 $f(t)$, $g(t)$라고 하자. 자연수 n에 대하여

$f(t)=9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-n$을 만족시키는 서로 다른 모든 $f(t)$의 합을 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은?

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5
④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

064

다음 그림과 같이 가로의 길이가 n, 세로의 길이가 48인 직사각형 AOC_nB_n에 대하여 대각선 AC_n과 선분 B_1C_1의 교점을 D_n이라고 한다.



이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{AC_n}-\overline{OC_n}}{\overline{B_1D_n}}$의 값은? (단, n은 자연수이다.)

① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

065

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n=\sqrt{4n^2+3n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이고 $\lim_{n\to\infty}(a_n-[a_n])=\frac{b}{a}$일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이고, a, b는 서로소인 자연수이다.)

066

다음 〈보기〉의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\cdot a_n}{n-1}$의 값이 존재하도록 하는 것을 모두 고른 것은? (단, $n\ge 2$)

보기

ㄱ. $a_n=\sqrt{n}$ ㄴ. $a_n=2n$

ㄷ. $a_n=(-1)^{n-1}\cdot n$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

067

다음 〈보기〉에서 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$인 상수 α의 값이 항상 존재하도록 하는 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. $3^n a_n < 2^n$　　ㄴ. $\dfrac{|a_n|}{100} < \left(\dfrac{9}{10}\right)^n$

ㄷ. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}+\dfrac{n}{n+1} < a_n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\dfrac{n+1}{n}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

068

양의 정수 n에 대하여 6^n의 양의 약수의 총합을 $T(n)$이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{6^n}{T(n)}$의 값은?

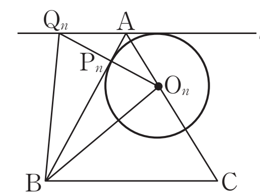
① $\dfrac{1}{2}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{6}$
④ $\dfrac{1}{12}$　⑤ $\dfrac{1}{18}$

069

$n\ge 2$인 자연수 n에 대하여 x^n을 x^2-3x+2로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{R(-1)}{R(0)}$의 값을 구하여라.

070 100점 도전

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC와 점 A를 지나고 직선 BC와 평행한 직선 l이 있다. 자연수 n에 대하여 중심 O_n이 변 AC 위에 있고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$인 원이 직선 AB와 직선 l에 모두 접한다. 이 원과 직선 AB가 접하는 점을 P_n, 직선 O_nP_n과 직선 l이 만나는 점을 Q_n이라고 하자. 삼각형 BO_nQ_n의 넓이를 S_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}2^nS_n=k$이다. k^2의 값을 구하여라.



071

자동차보험을 취급하는 두 회사 A, B가 있다. 해마다 자동차보험을 계약할 때, A사 고객의 6 %는 B사로, B사 고객의 2 %는 A사로 옮겨간다. 해마다 같은 비율로 이동하여 오랜 세월이 흐른 후 각 회사의 고객 수가 일정해진다고 할 때, A사와 B사의 고객 수의 비를 가장 간단한 자연수의 비로 나타내어라.

(단, 전체 고객 수는 변함이 없다.)