



풍산자

확률과 통계

· 풍산자수학연구소 ·

머리말

수학 공부는 어떻게 해야 할까요?

먼저 개념을 익혀야 합니다.

개념 학습은 문제와 융합된 형태로 이루어져야 합니다.

풍산자는 개념과 문제를 유기적으로 결합하여

개념 공부가 문제 공부이고 문제 공부가 개념 공부인

시스템을 지향하며 만들었습니다.

개념과 문제를 하나의 흐름으로 공부하되

직관적인 그림과 비유를 통한 구어체 설명으로

개념은 좀 더 쉽고 빠르게 익히고,

문제 풀이는 단계별로 짧게 구성하여

어려운 문제도 명쾌하게 이해할 수 있도록 하였습니다.

골치 아픈 수학이지만 풍산자로 공부하면서

때로는 소설책을 읽는 듯한 재미와 통쾌함도 느끼고

고향 같은 푸근함도 느끼면서 수학의 기초를 든든하게

닦을 수 있기를 바랍니다.

풍산자수학연구소



풍산자만의 매력

1

학습자의 눈높이에 맞는 개념서

개념 설명이 아무리 자세하더라도 여러분의 눈높이에 맞지 않다면 아무 소용이 없습니다. 풍산자는 궁금해 하는 부분만을 바로 옆에서 콕콕 짚어 설명해 주는 과외 선생님같은 개념서입니다.

2

지루하지 않고 재미있는 개념서

딱딱하고 어려운 용어 때문에 수학이 지루하고 재미없게 느껴졌나요? 풍산자 특유의 유쾌하고 명쾌한 설명으로 지루할 틈 없이 수학을 쉽고 재미있게 공부할 수 있습니다.

3

짧은 호흡으로 간결하게 읽는 개념서

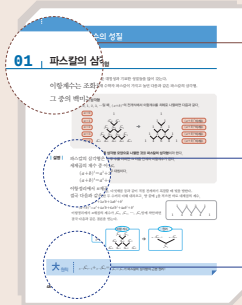
많은 양의 개념을 한 번에 읽고 문제를 풀려면 그 개념을 문제에 어떻게 적용해야 할지 몰라 어렵게 느껴집니다. 풍산자는 개념 설명을 읽고 그 개념을 바로 문제에 적용하도록 구성하여 짧은 호흡으로 공부할 수 있습니다.





미니 단원

개념을 주제별로 나누어 짧은 호흡으로 익힐 수 있도록 구성하였습니다.

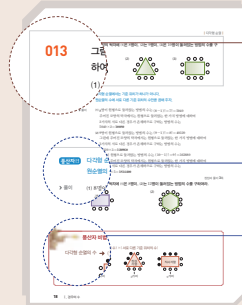


● 개념 설명

군살을 쏘 빼 명료하고 간결하게 설명하였습니다.

● 설명, 증명, 참고, 개념확인
개념의 원리를 쉽게 이해할 수 있도록 도와 줍니다.

● 다원칙 개념의 핵심이 되는 한마디를 꼭 짚어 줍니다.



● 예제와 유제

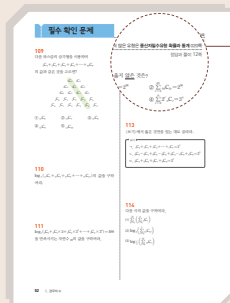
개념 이해에 꼭 필요한 문제들만 엄선하였습니다.

● 풍산자바 문제를 풀기 위해 알아야 할 핵심 개념을 알려 줍니다.

● 풍산자 비법 학습의 흐름에 따라 내용을 정리합니다.

필수 확인 문제

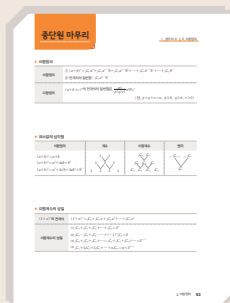
개념의 확인과 응용을 위해 스스로 풀어 볼 문제를 수록하였습니다.



● 더 많은 유형의 문제를 풀어 볼 수 있도록 풍산자필수유형의 관련 쪽수를 안내하였습니다.

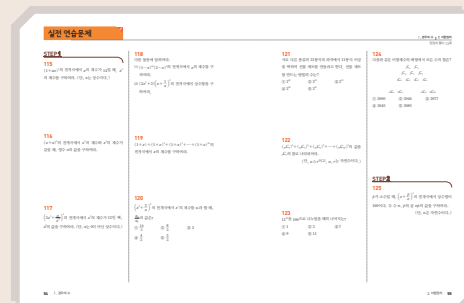
중단원 마무리

단원별 핵심 내용을 한눈에 살펴볼 수 있도록 표로 정리하였습니다.



실전 연습문제

실전에 꼭 필요한 문제들을 2단계로 나누어 수록하였습니다.





I 경우의 수

1 순열과 조합

1 순열	12
2 조합	30

2 이항정리

1 이항정리	42
2 이항계수의 성질	48





II 확률

1 확률의 뜻과 활용

1 확률의 뜻	60
2 확률의 활용	69

2 조건부확률

1 조건부확률	79
2 사건의 독립과 종속	86



III 통계

1 확률분포	
1 확률변수와 확률분포	106
2 이항분포	116
3 연속확률변수와 정규분포	123

2 통계적 추정	
1 모평균과 표본평균	142
2 모평균의 추정	150

I

← 경우의 수 →

1 순열과 조합

2 이항정리





DNA, 그 **순서**가 궁금하다.

DNA는 유전자의 기본 요소로 나선 구조로 이루어져 있다. 나선 구조를 구성하는 4개의 단백질의 순서와 배열에 따라 생물의 특징이 달라지기 때문에 이 순서와 배열을 연구하면 난치병 치료에 도움이 되기도 하고, 티라노사우르스나 매머드와 같은 멸종된 생물을 다시 복원하는 연구에도 중요한 도구로 쓰인다.

DNA를 분석하는 것은 유전적 요소를 연구하는 유전공학에서 매우 중요한 일이다. 염기의 배열을 분석하는 과정에서 순열과 조합이 중요한 도구로 쓰인다.



1

순열과 조합

순서가 중요하나 중요하지 않느냐
그것이 문제이다.

1 순열

$${}_nP_r$$

2 조합

$${}_nC_r$$

01 | 경우의 수와 순열

고등학교 [수학]에서 순열과 조합에 대해 이미 배웠다.

[확률과 통계]에서의 순열과 조합은 더 복잡한 경우를 배우게 된다.

본격적으로 학습하기 전에 이미 배운 내용을 간단히 복습하고 가자.

[1] 경우의 수

경우의 수 문제를 풀다 보면 두 경우의 수를 더해야 할지 곱해야 할지 헷갈릴 때가 무척 많다.

합의 법칙과 곱의 법칙은 언제 더하고 언제 곱하는지에 대하여 정리한 것이다.

합의 법칙과 곱의 법칙

- (1) **합의 법칙**: 두 사건 A, B 가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A, B 가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n 이면 사건 A 또는 사건 B 가 일어나는 경우의 수는 $m+n$ 이다.
- (2) **곱의 법칙**: 사건 A 가 일어나는 경우의 수가 m 이고, 그 각각에 대하여 사건 B 가 일어나는 경우의 수가 n 이면 두 사건 A, B 가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m \times n$ 이다.

[2] 순열

3개의 문자 a, b, c 에서 2개를 뽑는 방법과 뽑아서 나열하는 방법은 다음과 같다.

뽑는 방법 → 순서를 무시하는 것	뽑아서 나열하는 방법 → 순서를 고려하는 것
ab, ac, bc	ab, ac, ba, bc, ca, cb

뽑는 것을 조합이라 하고, 뽑아서 나열하는 것을 순열이라 한다.

한마디로 순열이란 순서가 있는 배열.

순열

서로 다른 n 개에서 중복됨이 없이 r 개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n 개에서 r 개를 택하는 순열이라 한다. 이 순열의 수를 ${}_nP_r$ 로 나타내고 다음과 같이 계산한다.

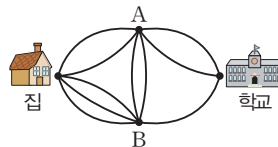
$${}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{개}} \quad (\text{단}, 0 < r \leq n)$$

| 참고 | ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (\text{단}, 0 \leq r \leq n), {}_nP_n = n!, 0! = 1, {}_nP_0 = 1$

001

집과 학교 사이에 그림과 같은 도로망이 있다. 집에서 학교로 가는 방법의 수를 구하여라.

(단, 같은 지점을 두 번 지나지 않는다.)



▶ 풀이

언제 더하고 언제 곱하는가?

경우를 분석하여 '또는'일 때는 더하고, '그리고'일 때는 곱한다.

곱의 법칙에 의하여 집에서 학교로 가는 방법은

(집 → A → 학교) ⇒ $2 \times 2 = 4$ (가지)

(집 → B → 학교) ⇒ $2 \times 2 = 4$ (가지)

(집 → A → B → 학교) ⇒ $2 \times 2 \times 1 = 4$ (가지)

(집 → B → A → 학교) ⇒ $2 \times 2 \times 1 = 4$ (가지)

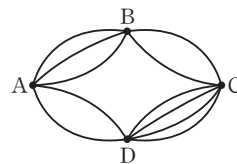
따라서 합의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는 $4 + 4 + 4 + 4 = 16$

정답과 풀이 2쪽

유제 002 네 개의 도시 A, B, C, D 사이에 그림과 같은 도로망이 있다.

A도시에서 C도시로 가는 방법의 수를 구하여라.

(단, 같은 지점을 두 번 지나지 않는다.)



| 순열의 수 |

003

다음 등식을 만족시키는 n 또는 r 의 값을 구하여라. (단, n, r 는 자연수이다.)

(1) ${}_7P_r = 210$

(2) ${}_nP_2 = 90$

(3) ${}_nP_4 = 20 \cdot {}_nP_2$

▶ 풀이

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

(1) ${}_7P_r$ 는 7부터 1씩 줄여가며 r 개를 곱한 것이다.

그런데 ${}_7P_r = 210 = 7 \times 6 \times 5$ 이므로 $r = 3$

(2) ${}_nP_2$ 는 n 부터 1씩 줄여가며 2개를 곱한 것이다.

그런데 ${}_nP_2 = 90 = 10 \times 9$ 이므로 $n = 10$

(3) 주어진 식의 양변을 풀이 쓰면 $n(n-1)(n-2)(n-3) = 20n(n-1)$ ㉠

그런데 ${}_nP_4$ 에서 $n \geq 4$ 이므로 $n(n-1) \neq 0$ 이다.

㉠의 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면 $(n-2)(n-3) = 20$

$$n^2 - 5n - 14 = 0, (n-7)(n+2) = 0$$

$$n \geq 4 \text{이므로 } n+2 \neq 0 \quad \therefore n = 7$$

정답과 풀이 2쪽

유제 004 다음 등식을 만족시키는 n 또는 r 의 값을 구하여라. (단, n, r 는 자연수이다.)

(1) ${}_5P_r = 60$

(2) ${}_nP_2 = 30$

(3) ${}_nP_5 = 30 \cdot {}_nP_3$

005 다음 물음에 답하여라.

- (1) 5명의 학생을 일렬로 세우는 방법의 수를 구하여라.
 (2) 5명의 학생 중 3명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수를 구하여라.
 (3) 서로 다른 9권의 책 중 r 권을 뽑아 책꽂이에 일렬로 꽂는 방법의 수가 72일 때, r 의 값을 구하여라.

풍산자답 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수: ${}_nP_r$

- ▶ 풀이 (1) 5명에서 5명을 택하는 순열의 수와 같으므로
 ${}_5P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
 (2) 5명에서 3명을 택하는 순열의 수와 같으므로
 ${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$
 (3) 서로 다른 9권에서 r 권을 택하는 순열의 수가 72이므로
 ${}_9P_r = 72 = 9 \times 8 \quad \therefore r = 2$

정답과 풀이 2쪽

유제 006 다음 물음에 답하여라.

- (1) 6명의 학생을 일렬로 앉히는 방법의 수를 구하여라.
 (2) 10명의 학생 중에서 대표, 부대표를 각각 1명씩 뽑는 경우의 수를 구하여라.
 (3) 서로 다른 n 권의 책 중 2권을 뽑아 책꽂이에 일렬로 꽂는 방법의 수가 56일 때, n 의 값을 구하여라.

| 순열 (2) |

007 남자 4명, 여자 3명을 일렬로 세울 때, 여자 3명이 이웃하여 서는 경우의 수를 구하여라.

풍산자답 '이웃한다'라 하면 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 세운 후, 묶음 안에서 일렬로 세우는 경우를 생각하면 된다.

- [1단계] 여자 3명을 한 묶음으로 보면 총 5묶음
 5묶음을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5! = 120$
 $\text{남1} \text{ 남2} \text{ 남3} \text{ 남4} \text{ 여1 여2 여3}$
 [2단계] 묶음 안의 여자 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3! = 6$
 [3단계] 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $120 \times 6 = 720$

정답과 풀이 2쪽

유제 008 서로 다른 국어책 2권, 영어책 3권, 수학책 2권을 책꽂이에 일렬로 꽂을 때, 국어책은 국어책끼리, 영어책은 영어책끼리 이웃하게 꽂는 경우의 수를 구하여라.

[1] 원순열

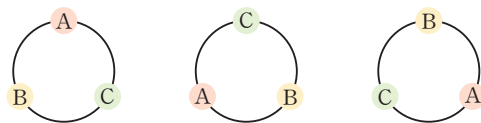
원순열이란 원형으로 나열하는 순열.

원형으로 나열할 때는 회전 방향이 같은

순서의 나열은 모두 같은 것으로 본다.

즉, 원순열에서 [그림 1]의 세 경우는

모두 같은 경우이다.



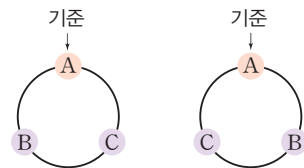
[그림 1]

왜냐? **돌리면 같아지니까.**

적당히 돌리면 A를 항상 꼭대기로 오게 할 수 있다.

이를 이용해 생각하면 A, B, C의 원순열은 [그림 2]의 2가지뿐.

이와 같이 원순열은 항상 1개를 기준으로 고정한 후 나머지만 나열하면 된다.



[그림 2]

따라서 서로 다른 n 개를 원형으로 나열한다면 1개를 기준으로 고정한 후 나머지 $(n-1)$ 개만 나열하면 되므로 그 경우의 수는 $(n-1)!$ 이 된다.

원순열 (중요)

(1) 서로 다른 n 개를 원형으로 나열하는 것을 원순열이라 한다.

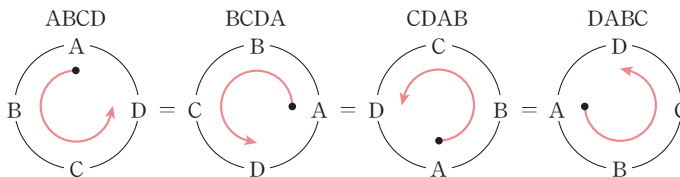
(2) 원순열의 수: 서로 다른 n 개를 원형으로 나열하는 경우의 수는 $(n-1)!$ 이다.

| 설명 |

4개의 문자 A, B, C, D를 원형으로 나열하는 방법을 생각해 보자.

4개의 문자 A, B, C, D를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$ 이다.

그런데 4개의 문자 A, B, C, D를 일렬로 나열할 때에는 ABCD, BCDA, CDAB, DABC가 서로 다른 나열이지만 원형으로 나열할 때에는 다음 그림과 같이 모두 같은 나열이 된다.



{모두 회전 방향이 같다} = {모두 위치 관계가 같다} = {모두 같은 원순열}

이와 같이 4개의 문자 A, B, C, D를 일렬로 나열하는 것을 원형으로 나열하면 회전에 의해 같은 나열이 되는 것이 4가지씩 있으므로 원순열의 수는 $\frac{4!}{4} = 3!$ 이 된다.

일반적으로 서로 다른 n 개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 $n!$ 이고, 이 각각을 원형으로 나열하면 그 전체에는 같은 것이 n 가지씩 있으므로 원순열의 수는 순열의 수의 $\frac{1}{n}$ 이 된다.

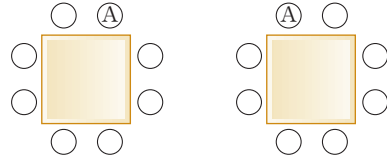
즉, 서로 다른 n 개를 원형으로 나열하는 원순열의 수는 $\frac{nP_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$ 이다.

[2] 다각형 순열

다각형 순열이란 다각형 위에 나열하는 순열.

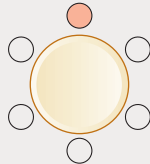
다각형 순열에서 오른쪽 그림의 둘은 서로 다른 경우.

왜냐? 돌려도 같아지지 않으니까.



다각형의 둘레에 나열하는 순열의 수

다각형의 둘레에 나열하는 순열의 수 $\rightarrow$ (원순열의 수) $\times$ (서로 다른 기준 위치의 수)



$(6-1)!$



$(6-1)! \times 2$

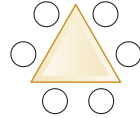


$(6-1)! \times 3$

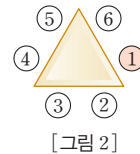
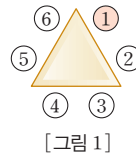
- 설명** 원순열에서는 적당히 돌리면 같아지므로 1개를 기준 위치에 고정한 후 나머지만 나열하면 된다.
 하지만 다각형의 둘레에 나열하는 경우 기준 위치가 하나가 아니다.
 왜냐? 돌려도 같아지지 않으니까.
 이런 경우 원순열의 수를 구한 후, 서로 다른 기준 위치의 수만큼 곱해야 한다.

개념확인

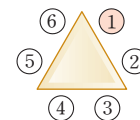
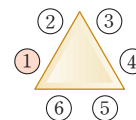
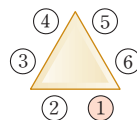
오른쪽 그림과 같은 정삼각형 모양의 탁자에 6명의 학생이 둘러앉는 방법의 수를 구하여라.



- ▶ 풀이 6명의 학생을 각각 ①~⑥이라 하자.
 [그림 1]과 같이 학생 ①이 자리에 앉는 방법의 수는 1, 이 경우에 대하여 나머지 5명의 학생이 앉는 방법의 수는 $5!$
 이때 학생 ①의 위치를 [그림 2]와 같이 옮기면 [그림 1]과 서로 다른 방법이 되므로 구하는 방법의 수는
 $5! \times 2 = 240$



- ▶ 다른 풀이 서로 다른 n 개를 원형으로 나열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ 이다.
 이때 $n!$ 을 n 으로 나누는 이유는 한 가지의 순열에 대하여 n 개씩 같은 것이 생기므로 같은 것의 개수만큼 나누어 주어야 하기 때문이다.
 즉, 정삼각형 모양의 책상에 6명의 학생이 둘러앉는 경우에는 한 가지의 순열에 대하여 오른쪽 그림과 같이 3가지씩 같은 것이 생기므로
 구하는 방법의 수는 $\frac{6!}{3} = 240$

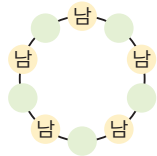


009 남학생 5명과 여학생 3명이 원탁에 둘러앉을 때, 다음을 구하여라.

- (1) 모든 방법의 수
- (2) 여학생끼리 이웃하여 앉는 방법의 수
- (3) 여학생끼리 이웃하지 않게 앉는 방법의 수

풍산자타 여학생들이 이웃하여 앉으면 여학생을 한 묶음으로 생각하고, 이웃하지 않는다고 하면 나머지를 먼저 나열한다.

- ▶ 풀이
- (1) 8명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수이므로 $(8-1)! = 7! = 5040$
 - (2) 여학생 3명을 1명으로 생각하면 6명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는 $(6-1)! = 5! = 120$
여학생끼리 자리를 바꿔 앉는 방법의 수는 $3! = 6$
따라서 구하는 방법의 수는 $120 \times 6 = 720$
 - (3) 이웃하지 않은 남학생을 먼저 나열하여 벽을 만든다.
남학생 5명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는 $(5-1)! = 4! = 24$
남학생과 남학생 사이의 5개의 장소 중 여학생이 끼어들 3개의 장소를 택하는 방법의 수는 ${}_5P_3 = 60$
따라서 구하는 방법의 수는 $24 \times 60 = 1440$



정답과 풀이 2쪽

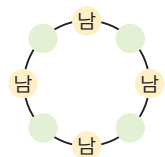
유제 **010** 부모와 4명의 자녀가 원탁에 둘러앉을 때, 다음을 구하여라.

- (1) 모든 방법의 수
- (2) 부모가 이웃하여 앉는 방법의 수
- (3) 부모가 마주 보도록 앉는 방법의 수

011 남학생 4명과 여학생 4명이 원탁에 둘러앉을 때, 남학생과 여학생이 교대로 앉는 방법의 수를 구하여라.

풍산자타 먼저 남자를 앉힌 후 그 사이사이에 여자를 끼워 앉힌다.

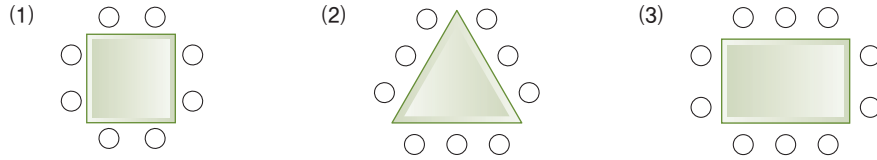
- ▶ 풀이
- 남학생 4명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는 $(4-1)! = 3! = 6$
남학생과 남학생 사이의 4개의 장소에 여학생을 앉히는 방법의 수는 ${}_4P_4 = 24$
따라서 구하는 방법의 수는 $6 \times 24 = 144$



정답과 풀이 2쪽

유제 **012** 네 쌍의 부부가 원탁에 둘러앉을 때, 부부끼리 이웃하여 앉는 방법의 수를 구하여라.

013 그림과 같은 모양의 탁자에 (1)은 8명이, (2)는 9명이, (3)은 10명이 둘러앉는 방법의 수를 구하여라.



풍산자비 다각형 순열에서는 기준 위치가 하나가 아니다.
원순열의 수에 서로 다른 기준 위치의 수만큼 곱해 주자.

- ▶ 풀이
- (1) 8명이 원형으로 둘러앉는 방법의 수는 $(8-1)! = 7! = 5040$
주어진 모양의 탁자에서는 원형으로 둘러앉는 한 가지 방법에 대하여
2가지의 서로 다른 경우가 존재하므로 구하는 방법의 수는
 $5040 \times 2 = \mathbf{10080}$
 - (2) 9명이 원형으로 둘러앉는 방법의 수는 $(9-1)! = 8! = 40320$
그런데 주어진 모양의 탁자에서는 원형으로 둘러앉는 한 가지 방법에 대하여
3가지의 서로 다른 경우가 존재하므로 구하는 방법의 수는
 $40320 \times 3 = \mathbf{120960}$
 - (3) 10명이 원형으로 둘러앉는 방법의 수는 $(10-1)! = 9! = 362880$
그런데 주어진 모양의 탁자에서는 원형으로 둘러앉는 한 가지 방법에 대하여
5가지의 서로 다른 경우가 존재하므로 구하는 방법의 수는
 $362880 \times 5 = \mathbf{1814400}$

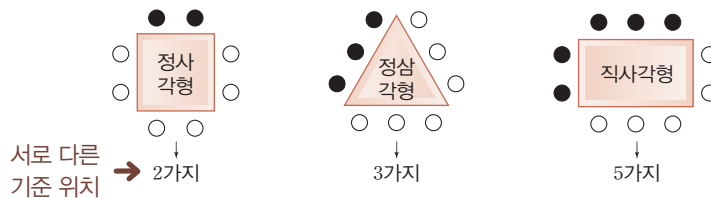
정답과 풀이 3쪽

유제 **014** 그림과 같은 모양의 탁자에 (1)은 8명이, (2)는 12명이 둘러앉는 방법의 수를 구하여라.



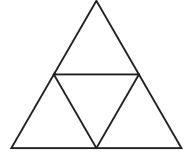
풍산자비법

다각형 순열의 수 $\rightarrow$ (원순열의 수) $\times$ (서로 다른 기준 위치의 수)



015

그림과 같이 크기가 같은 4개의 정삼각형으로 이루어진 영역을 빨강, 파랑, 노랑, 초록의 4가지 색을 모두 사용하여 색칠하는 방법의 수를 구하여라.

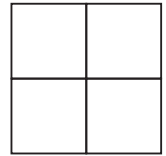


풍산자타 먼저 중앙의 삼각형을 칠한 후, 원순열을 이용하여 나머지 3개의 삼각형을 칠하면 된다.

- ▶ 풀이 중앙의 삼각형을 칠하는 방법은 4가지이고,
나머지 3개의 삼각형을 칠하는 방법의 수는 중앙에 칠한 색을 제외한 나머지 3가지 색을 원
형으로 나열하는 원순열의 수와 같으므로 $(3-1)! = 2! = 2$
따라서 구하는 방법의 수는 $4 \times 2 = 8$

정답과 풀이 3쪽

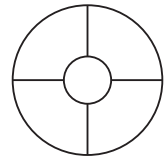
유제 016 그림과 같이 정사각형을 4등분한 영역을 서로 다른 4가지 색을 모두 사용하여 색칠하는 방법의 수를 구하여라.



017

그림과 같이 5개의 영역으로 나누어진 원을 서로 다른 5가지 색을 모두 사용하여 색칠하는 방법의 수를 구하여라.

(단, 가운데 원을 제외한 4개의 도형은 모두 합동이다.)



풍산자타 도형에 색칠하는 방법의 수

➡ 먼저 중앙이 되는 부분을 칠한 후, 원순열을 이용하여 나머지 부분을 칠하면 된다.

- ▶ 풀이 중앙의 원을 칠하는 방법은 5가지이고,
나머지 4개의 도형을 칠하는 방법의 수는 중앙에 칠한 색을 제외한 나머지 4가지 색을 원형
으로 나열하는 원순열의 수와 같으므로 $(4-1)! = 3! = 6$
따라서 구하는 방법의 수는 $5 \times 6 = 30$

정답과 풀이 3쪽

유제 018 그림과 같은 정사각뿔의 각 면을 서로 다른 5가지 색을 모두 사용하여 색칠하는 방법의 수를 구하여라.

