풍산자

미적분

· 풍산자수학연구소 ·

머리말

수학 공부는 어떻게 해야 할까요?

먼저 개념을 익혀야 합니다.

개념 학습은 문제와 융합된 형태로 이루어져야 합니다.

풍산자는 개념과 문제를 유기적으로 결합하여

개념 공부가 문제 공부이고 문제 공부가 개념 공부인

시스템을 지향하며 만들었습니다.

개념과 문제를 하나의 흐름으로 공부하되

직관적인 그림과 비유를 통한 구어체 설명으로

개념은 좀 더 쉽고 빠르게 익히고,

문제 풀이는 단계별로 짧게 구성하여

어려운 문제도 명쾌하게 이해할 수 있도록 하였습니다.

골치 아픈 수학이지만 풍산자로 공부하면서

때로는 소설책을 읽는 듯한 재미와 통쾌함도 느끼고

고향 같은 푸근함도 느끼면서 수학의 기초를 든든하게

닦을 수 있기를 바랍니다.

풍산자수학연구소

풍산자만의 매력

1 학습자의 눈높이에 맞는 개념서

개념 설명이 아무리 자세하더라도 여러분의 눈높이에 맞지 않다면 아무 소용이 없습니다. 풍산자는 궁금해 하는 부분만을 바로 옆에서 콕콕 짚어 설명해 주는 과외 선생님같은 개념서입니다.

2 지루하지 않고 재미있는 개념서

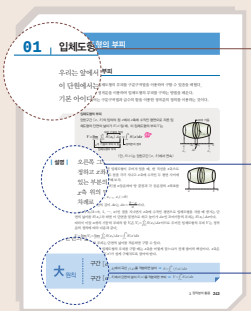
딱딱하고 어려운 용어 때문에 수학이 지루하고 재미없게 느껴졌나요? 풍산자 특유의 유쾌하고 명쾌한 설명으로 지루할 틈 없이 수학을 쉽고 재미있게 공부할 수 있습니다.

3 짧은 호흡으로 간결하게 읽는 개념서

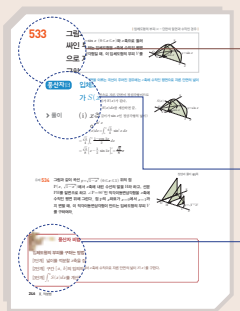
많은 양의 개념을 한 번에 읽고 문제를 풀려면 그 개념을 문제에 어떻게 적용해야 할지 몰라 어렵게 느껴집니다. 풍산자는 개념 설명을 읽고 그 개념을 바로 문제에 적용하도록 구성하여 짧은 호흡으로 공부할 수 있습니다.

미니 단원

개념을 주제별로 나누어 짧은 호흡으로 익힐 수 있도록 구성하였습니다.



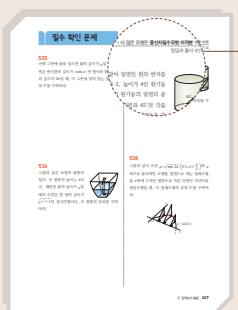
- **개념 설명** 군살을 쏙 빼 명료하고 간결하게 설명하였습니다.
- **설명, 증명, 참고, 개념확인** 개념의 원리를 쉽게 이해할 수 있도록 도와 줍니다.
- **大원칙** 개념의 핵심이 되는 한마디를 콕 짚어 줍니다.



- **예제와 유제** 개념 이해에 꼭 필요한 문제들만 엄선하였습니다.
- **풍산자白** 문제를 풀기 위해 알아야 할 핵심 개념을 알려 줍니다.
- **풍산자 비법** 학습의 흐름에 따라 내용을 정리합니다.

필수 확인 문제

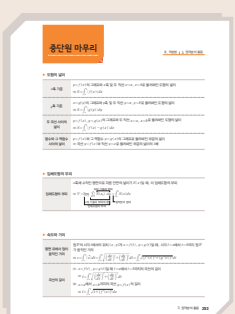
개념의 확인과 응용을 위해 스스로 풀어 볼 문제를 수록하였습니다.



- 더 많은 유형의 문제를 풀어 볼 수 있도록 풍산자필수유형의 관련 쪽수를 안내하였습니다.

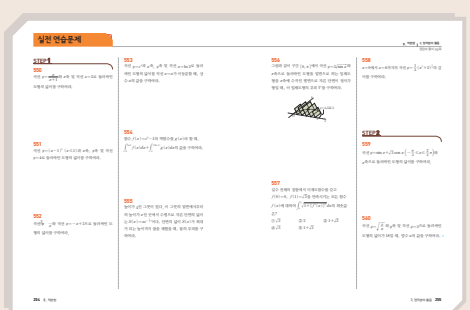
중단원 마무리

단원별 핵심 내용을 한눈에 살펴볼 수 있도록 표로 정리하였습니다.



실전 연습문제

실전에 꼭 필요한 문제들을 2단계로 나누어 수록하였습니다.



차례

Ⅰ 수열의 극한

1 수열의 극한

1 수열의 극한 12

2 등비수열의 극한 23

2 급수

1 급수의 수렴과 발산 31

2 등비급수 40

Ⅱ 미분법

1 여러 가지 함수의 미분

1 지수함수와 로그함수의 미분 54
2 삼각함수의 덧셈정리 68
3 삼각함수의 미분 84

2 여러 가지 미분법

1 함수의 몫의 미분 101
2 합성함수의 미분 106
3 매개변수로 나타낸 함수의 미분 115
4 음함수와 역함수의 미분 117
5 이계도함수 121

3 도함수의 활용

1 접선의 방정식 129
2 함수의 극대와 극소 134
3 함수의 그래프 141
4 방정식과 부등식에의 활용 155
5 속도와 가속도 162

CONTENTS

Ⅲ 적분법

1 여러 가지 적분법

1 여러 가지 함수의 부정적분 174

2 치환적분법과 부분적분법 180

2 정적분

1 여러 가지 함수의 정적분 198

2 정적분으로 정의된 함수 212

3 정적분과 급수 220

3 정적분의 활용

1 도형의 넓이 234

2 입체도형의 부피 243

3 속도와 거리 248

I

수열의 극한

1 수열의 극한

2 급수

극한 개념의 역사

유클리드는 입체 도형의 부피를 구하는 데
극한을 이용하였다.
또한 원의 넓이는
반지름의 길이의 제곱에 비례한다는 것을
극한을 이용하여 증명하였다.
이러한 방법은 아르키메데스가
도형의 넓이나 부피를 계산하기 위하여 사용하였는데,
여전히 극한의 개념은 초보적인 것이었다.

이론적인 극한의 개념은
미적분학의 창시자 뉴턴에 의하여 도입되었으며
오일러, 볼차노, 코시 등에 의하여
학문적 체계를 갖추게 되었다.
특히 코시는 극한의 개념을 명확히 하여
수열의 극한과 급수의 수렴에 대하여
엄밀한 정의를 함으로써
극한의 개념을 체계화하였다.

1 수열의 극한

자연수 n이 한없이 커질 때
a_n의 값이 어떻게 변화하는지 살펴보는 것이 바로 수열의 극한.

1 수열의 극한

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

2 등비수열의 극한

$$\lim_{n\to\infty} r^n$$

1 수열의 극한

01 수열의 수렴과 발산

[수학Ⅱ]에서는 함수의 극한을 배웠다. [미적분]에서는 수열의 극한을 배운다.

수열 $\{a_n\}$의 극한이란 a_n이 가까이 가는 수.

기호로는 $\lim_{n\to\infty} a_n=A$ ➡ n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 A에 한없이 가까워진다.

함수의 극한과 수열의 극한이 뭐가 다른가?

외관상의 차이점은 크게 다음 둘.

첫째, 즐겨쓰는 문자가 다르다.

함수의 극한은 x를 쓴다. ➡ $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$

수열의 극한은 n을 쓴다. ➡ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$

둘째, 함수의 극한은 $x\to a$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$가 있지만

수열의 극한은 $n\to\infty$만 있다.

함수의 극한 중 $x\to\infty$일 때는 수열의 극한과 별 차이가 없다. 단지, 함수의 극한에서 x는 실수로 증가하지만 수열의 극한에서 n은 자연수로 증가한다는 것 뿐.

수열의 수렴

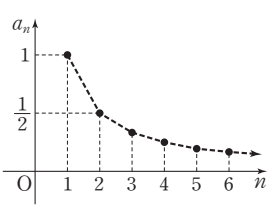
수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 **수렴**한다고 하고 α를 수열 $\{a_n\}$의 **극한값** 또는 **극한**이라 하며 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ 또는 **$n\to\infty$일 때 $a_n\to\alpha$**

특히, 수열 $\{a_n\}$에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=c$ (c는 상수)일 때, 수열 $\{a_n\}$은 c에 수렴한다고 하고 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} c=c$

| 설명 | 수열 $\{a_n\}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$은 점점 0에 가까워진다.



이때 0을 이 수열의 극한이라 한다.

이것을 조금 다듬어서 수학의 언어로 묘사하면 다음과 같다.

다섯 가지 모두 같은 소리다.

① $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ ② $n\to\infty$일 때 $\frac{1}{n}\to 0$

③ 수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$의 극한값은 0이다. ④ 수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$은 0에 수렴한다.

⑤ n의 값이 한없이 커질 때 $\frac{1}{n}$의 값은 0에 한없이 가까워진다.

수열의 발산

수열이 수렴하지 않을 때 발산한다고 한다. 수열이 발산할 때 극한값은 없다.

수열의 발산은 다음 세 가지 경우로 구분할 수 있다.

(1) **양의 무한대로 발산**: 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값도 한없이 커지는 경우

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty \text{ 또는 } n\to\infty \text{일 때 } a_n\to\infty$$

(2) **음의 무한대로 발산**: 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지는 경우

$$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty \text{ 또는 } n\to\infty \text{일 때 } a_n\to-\infty$$

(3) **진동**: 수열이 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는 경우

| 설명 | 다음의 간단한 세 수열을 이용하여 수열의 발산을 이해해 보자.

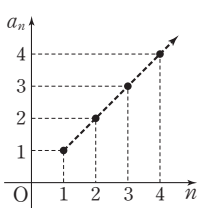
모두 발산하는 수열이다.

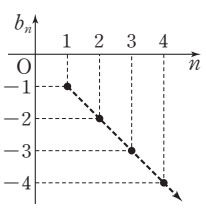
$\{a_n\}$: $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$

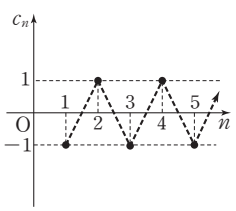
$\{b_n\}$: $-1, -2, -3, \cdots, -n, \cdots$

$\{c_n\}$: $-1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots$

이 수열을 좌표평면 위에 나타내면 각각 다음과 같다.







① 수열 $\{a_n\}$은 n의 값이 커지면 하늘 높이 치솟는다.
이런 경우를 양의 무한대로 발산한다고 하며, $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$로 나타낸다.

② 수열 $\{b_n\}$은 n의 값이 커지면 땅속으로 내려간다.
이런 경우를 음의 무한대로 발산한다고 하며, $\lim_{n\to\infty} b_n=-\infty$로 나타낸다.

③ 수열 $\{c_n\}$은 n의 값이 커지면 하늘 높이 치솟거나 땅속으로 내려가지도 않고, 수렴하지도 않는다.
이런 경우를 진동한다고 한다.

| 참고 | ∞와 $-\infty$는 발산의 특수한 경우로 수렴이 아님.

수렴이란 특정한 수에 가까이 가는 것.

∞는 수가 아닌 한없이 커지는 상태를 의미함.

大 원칙

수열의 극한
- 수렴: 극한값 α를 갖는다. ➡ $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$
- 발산
  - 양의 무한대로 발산 ➡ $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$
  - 음의 무한대로 발산 ➡ $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$
  - 진동

001 다음 수열의 수렴과 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ (2) $\{n+1\}$

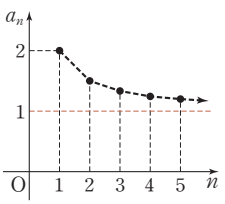
(3) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ (4) $\{(-2)^n\}$

풍산자팁 수열 $\{a_n\}$에서 n에 1, 2, 3, …, 10, …, 100, …, 1000, …을 차례로 대입해 보자. a_n의 값이 어떤 수에 가까워지는가?

› 풀이

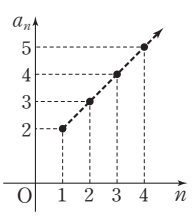
(1) n의 값이 한없이 커질 때, $1+\frac{1}{n}$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$은 **수렴**하고, 그 극한값은 1이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathbf{1}$

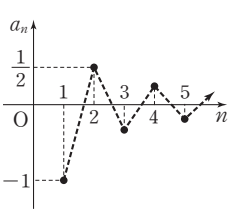


(2) n의 값이 한없이 커질 때, $n+1$의 값은 한없이 커지므로 수열 $\{n+1\}$은 양의 무한대로 **발산**한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$(극한값은 없다.)

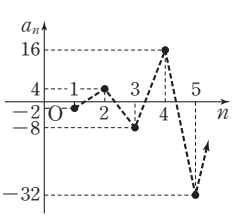


(3) n의 값이 한없이 커질 때, $\frac{(-1)^n}{n}$의 값은 -1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, …과 같이 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$은 수렴하고, 그 극한값은 0이다. $\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\mathbf{0}$



(4) n의 값이 한없이 커질 때, $(-2)^n$의 값은 -2, 4, -8, 16, …과 같이 일정한 수에 수렴하지도 않고, 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 진동한다.

따라서 이 수열은 **발산**하므로 극한값은 없다.



정답과 풀이 2쪽

유제 **002** 다음 수열의 수렴과 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ (2) $\{-2n+1\}$

(3) $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ (4) $\{2\times(-1)^n\}$

02 극한값의 계산

함수의 극한 중 $x \to \infty$일 때는 수열의 극한과 별 차이가 없다고 했다. 따라서

함수의 극한에 관한 성질 ➡ 수열의 극한에 관한 성질

함수의 극한값을 구하는 방법 ➡ 수열의 극한값을 구하는 방법

함수의 극한의 대소 관계 ➡ 수열의 극한의 대소 관계

와 같이 생각할 수 있다. (엄밀하게는 같지 않지만 같다고 생각해도 된다.)

수열의 극한에 관한 성질 중요!

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고, $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)일 때

(1) $\lim_{n\to\infty} ka_n=k\lim_{n\to\infty} a_n=k\alpha$ (단, k는 상수)

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n\pm\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\pm\beta$ (복부호 동순)

(3) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\times\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq 0$, $\beta\neq 0$)

| 설명 | 실제로 수렴하는 두 수열을 가지고 계산을 해 보면 사실 매우 당연한 얘기들이다.

예를 들어 $a_n=2+\frac{1}{n}$, $b_n=3+\frac{1}{n}$인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 위의 성질이 성립함을 쉽게 확인할 수 있다. 각자 해 보도록 하자.

이때 주의해야 할 점은 2가지다.

[주의 1] 수렴하는 수열에 대해서만 통한다.

예를 들어 $a_n=n+1$, $b_n=n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$

$\lim_{n\to\infty} (a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} (n+1-n)=\lim_{n\to\infty} 1=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty} (a_n-b_n)\neq\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n$

[주의 2] 분모가 0이 아닐 때만 통한다.

예를 들어 $a_n=\frac{2}{n}$, $b_n=\frac{1}{n}$이라 하면

$\lim_{n\to\infty} a_n=0$, $\lim_{n\to\infty} b_n=0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty} 2=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}\neq\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

| 참고 | $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\times\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}=0\times 0=0$

같은 방법으로 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}=0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}=0$, …, $\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n^p}=0$ (단, k는 상수, p는 양수)

수열의 극한값을 구하는 방법 중요!

(1) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한: 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

① (분모의 차수)=(분자의 차수) ➡ 극한값은 $\frac{\text{(분자의 최고차항의 계수)}}{\text{(분모의 최고차항의 계수)}}$

② (분모의 차수)>(분자의 차수) ➡ 극한값은 0

③ (분모의 차수)<(분자의 차수) ➡ ∞ 또는 $-\infty$로 발산

(2) $\infty-\infty$ 꼴의 극한

① 무리식의 극한: $\infty-\infty$의 꼴을 유리화한다.

② 다항식의 극한: 최고차항으로 묶어낸다.

| 참고 | $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴과 $\infty-\infty$ 꼴을 제외하고, 나머지 ∞를 포함한 극한은 다음과 같이 생각하면 된다.

$\infty\times\infty=\infty$, $\infty+\infty=\infty$, $\infty-2=\infty$, $2-\infty=-\infty$, $2\times\infty=\infty$, $(-2)\times\infty=-\infty$

수열의 극한의 대소 관계

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴할 때

(1) 극한과 부등식: 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le b_n$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

(2) 샌드위치 정리: 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\alpha$

| 설명 | (1)에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이지만 두 수열의 극한값이 같은 경우, 즉 $\alpha=\beta$인 경우도 있다.

예를 들어 $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$이면 $a_n<b_n$이지만 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$이다.

마찬가지로 (2)에서도 $a_n<c_n<b_n$이지만 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n$인 경우가 있다.

| 수열의 극한에 관한 성질 |

003 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+3}{a_nb_n+1}$의 값을 구하여라.

풍산자曰 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하면 수열의 극한에 관한 성질이 성립한다.

› 풀이 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+3}{a_nb_n+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n+3}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n\times\lim\limits_{n\to\infty}b_n+1}=\frac{2+3}{2\times(-1)+1}=\mathbf{-5}$

정답과 풀이 2쪽

유제 **004** 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(b_n)^2}{2a_n-1}$의 값을 구하여라.

005 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{2n^2+n+2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n^2-n+1}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{n+2}$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n+1}$

풍산자비 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 ➡ 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

› 풀이

(1) n^2으로 분모, 분자를 각각 나누면

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}$$

$$=\frac{3-0+0}{2+0+0}=\frac{3}{2}$$ ⬅ (분모의 차수)=(분자의 차수)

(2) n^2으로 분모, 분자를 각각 나누면

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{0+0}{2-0+0}=\mathbf{0}$$ ⬅ (분모의 차수)>(분자의 차수)

(3) n으로 분모, 분자를 각각 나누면

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$$

$$=\frac{\infty+1+0}{1+0}=\infty$$ ⬅ (분모의 차수)<(분자의 차수)

(4) n으로 분모, 분자를 각각 나누면

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{\sqrt{1+0}+1}{1+0}=2$$

정답과 풀이 2쪽

유제 **006** 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+4n-5}{-n^3+2n^2-4}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-6}{2n^3-n^2+1}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+n+1}{n+1}$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{\sqrt{n^2+3}+n}$

007 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left[\left\{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right\}^2\times(1+2+3+\cdots+n)\right]$

(3) $\lim_{n\to\infty}\{\log(10n^2-n)-\log(n^2+2)\}$

풍산자팁 자연수의 거듭제곱의 합 공식이나 로그의 성질을 이용하여 일단 식을 간단히 정리한 후 다시 보면 익숙한 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 문제가 된다.

› 풀이

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이므로

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

(2) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$이므로

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-1}{n}\right)^2\times\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2\times\frac{n^2+n}{2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(3) $$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\log\frac{10n^2-n}{n^2+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{10-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}$$

$$=\log 10=\mathbf{1}$$

정답과 풀이 **2**쪽

유제 **008** 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\right\}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\{\log(n+3)-\log(n+2)\}$

009 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}$

(4) $\lim_{n\to\infty}(3+2n^2-n^3)$

풍산자팁 (1), (2)와 같은 ∞−∞ 꼴의 무리식의 극한값을 구할 때에는 분모를 1로 생각하고, 분자를 유리화한다.
(3)은 분모를 유리화하고, (4)는 최고차항으로 묶어낸다.

› 풀이

(1) 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\mathbf{0}$$

(2) 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$ ← $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴: 분모, 분자를 n으로 각각 나눈다.
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(3) 분모가 ∞−∞ 꼴의 무리식이므로 분모를 유리화하면

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{4(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})=\infty$$

(4) 최고차항인 n^3으로 묶어내면

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{3}{n^3}+\frac{2}{n}-1\right)=\infty\times(-1)=-\infty$$

정답과 풀이 2쪽

유제 **010** 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n})$

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

(4) $\lim_{n\to\infty}(2n^3-3n+4)$

011 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{2n+3}=4$일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

풍산자팁 분수식의 극한에서 0이 아닌 값에 수렴하려면 일단 분모, 분자의 차수가 같아야 한다.

› 풀이 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{2n+3}$에서 $a\neq0$이면 발산하므로 $a=0$

$$(\text{좌변})=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}$$

$$=\frac{b}{2}=4$$

$\therefore b=8$

$\therefore a+b=8$

정답과 풀이 3쪽

유제 **012** $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn-3}{5n+2}=2$일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

013 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+2})=5$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

풍산자팁 좌변이 $\infty-\infty$ 꼴의 무리식이므로 분모를 1로 생각하고, 분자를 유리화한다.

› 풀이

$$(\text{좌변})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+2})(\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+2})}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an-2}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a-\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}$$

$$=\frac{a}{2}=5$$

$\therefore a=\mathbf{10}$

정답과 풀이 3쪽

유제 **014** $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-n)=8$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

015 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\frac{3n+1}{n+2}<a_n<\frac{3n+2}{n+1}$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

풍산자비 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$

› 풀이 $\frac{3n+1}{n+2}<a_n<\frac{3n+2}{n+1}$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+2}=3$, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n+1}=3$이므로
수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=3$

정답과 풀이 3쪽

유제 **016** 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\frac{2n+3}{n+5}<a_n<\frac{2n+4}{n+5}$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

017 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $3n^2-5n-1<a_n<3n^2+n+2$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+2n+2}$의 값을 구하여라.

풍산자비 구하는 식을 포함하도록 주어진 부등식의 각 변을 n^2+2n+2로 나누면 된다.

› 풀이 주어진 부등식의 각 변을 n^2+2n+2로 나누면
$\frac{3n^2-5n-1}{n^2+2n+2}<\frac{a_n}{n^2+2n+2}<\frac{3n^2+n+2}{n^2+2n+2}$
이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-5n-1}{n^2+2n+2}=3$, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+2}{n^2+2n+2}=3$이므로
수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+2n+2}=3$

정답과 풀이 3쪽

유제 **018** 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\frac{1}{n+3}<a_n<\frac{1}{n+1}$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} na_n$의 값을 구하여라.

풍산자 비법

- $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 ➜ 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.
- $\infty-\infty$ 꼴의 극한 ➜ 유리화 또는 최고차항으로 묶어내기.