



풍산자

수학 II

· 풍산자수학연구소 ·

머리말

수학 공부는 어떻게 해야 할까요?

먼저 개념을 익혀야 합니다.

개념 학습은 문제와 융합된 형태로 이루어져야 합니다.

풍산자는 개념과 문제를 유기적으로 결합하여

개념 공부가 문제 공부이고 문제 공부가 개념 공부인

시스템을 지향하며 만들었습니다.

개념과 문제를 하나의 흐름으로 공부하되

직관적인 그림과 비유를 통한 구어체 설명으로

개념은 좀 더 쉽고 빠르게 익히고,

문제 풀이는 단계별로 짧게 구성하여

어려운 문제도 명쾌하게 이해할 수 있도록 하였습니다.

골치 아픈 수학이지만 풍산자로 공부하면서

때로는 소설책을 읽는 듯한 재미와 통쾌함도 느끼고

고향 같은 푸근함도 느끼면서 수학의 기초를 든든하게

닦을 수 있기를 바랍니다.

풍산자수학연구소



풍산자만의 매력

1

학습자의 눈높이에 맞는 개념서

개념 설명이 아무리 자세하더라도 여러분의 눈높이에 맞지 않다면 아무 소용이 없습니다. 풍산자는 궁금해 하는 부분만을 바로 옆에서 콕콕 짚어 설명해 주는 과외 선생님같은 개념서입니다.

2

지루하지 않고 재미있는 개념서

딱딱하고 어려운 용어 때문에 수학이 지루하고 재미없게 느껴졌나요? 풍산자 특유의 유쾌하고 명쾌한 설명으로 지루할 틈 없이 수학을 쉽고 재미있게 공부할 수 있습니다.

3

짧은 호흡으로 간결하게 읽는 개념서

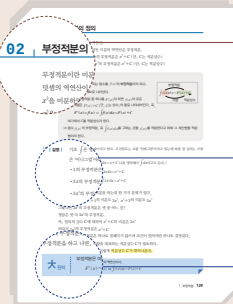
많은 양의 개념을 한 번에 읽고 문제를 풀려면 그 개념을 문제에 어떻게 적용해야 할지 몰라 어렵게 느껴집니다. 풍산자는 개념 설명을 읽고 그 개념을 바로 문제에 적용하도록 구성하여 짧은 호흡으로 공부할 수 있습니다.



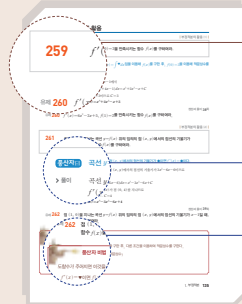


미니 단원

개념을 주제별로 나누어 짧은 호흡으로 익힐 수 있도록 구성하였습니다.



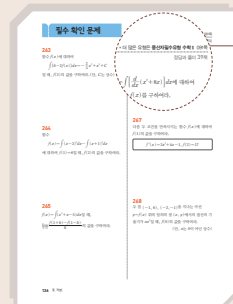
- **개념 설명**
군살을 쏙 빼 명료하고 간결하게 설명하였습니다.
- **설명, 증명, 참고, 개념확인**
개념의 원리를 쉽게 이해할 수 있도록 도와 줍니다.
- **대원칙** 개념의 핵심이 되는 한마디를 꼭 짚어 줍니다.



- **예제와 유제**
개념 이해에 꼭 필요한 문제들만 엄선하였습니다.
- **풍산자비** 문제를 풀기 위해 알아야 할 핵심 개념을 알려 줍니다.
- **풍산자 비법** 학습의 흐름에 따라 내용을 정리합니다.

필수 확인 문제

개념의 확인과 응용을 위해 스스로 풀어 볼 문제를 수록하였습니다.



- 더 많은 유형의 문제를 풀어 볼 수 있도록 풍산자필수유형의 관련 쪽수를 안내하였습니다.

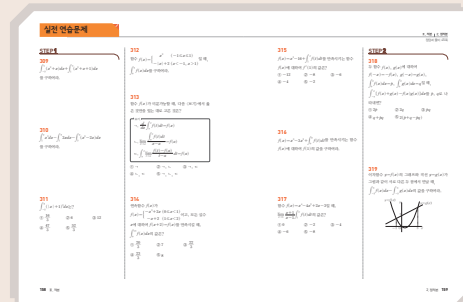
중단원 마무리

단원별 핵심 내용을 한눈에 살펴볼 수 있도록 표로 정리하였습니다.



실전 연습문제

실전에 꼭 필요한 문제들을 2단계로 나누어 수록하였습니다.





I 함수의 극한과 연속

1 함수의 극한

1 함수의 극한	12
2 극한값의 계산	23
3 함수의 극한의 활용	29

2 함수의 연속

1 함수의 연속	37
----------------	----





II 미분

1 미분계수와 도함수

1 미분계수	52
2 도함수	63

2 도함수의 활용

1 접선의 방정식	77
2 평균값 정리	83
3 함수의 극대와 극소	89
4 함수의 최대와 최소	105
5 방정식과 부등식의 활용	109
6 속도와 가속도	116



III 적분

1 부정적분

1 부정적분	128
--------------	-----

2 정적분

1 정적분	140
2 여러 가지 정적분	147

3 정적분의 활용

1 넓이의 계산	162
2 넓이의 활용	172
3 속도와 거리	176

I

← 함수의 극한과 연속 →

1 함수의 극한

2 함수의 연속





미분과 적분을 배우려면, 먼저 **극한**부터

극한을 알아야 미분을 하고,
미분을 알아야 적분을 한다.
극한과 미분과 적분은 서로 의지하는
한 지붕 세 가족.

미분이란 시간에 따른 어떤 양의 ‘변화율’
자연계의 여러 현상들은 미분에 의해 묘사된다.
공기와 같은 유체의 운동을 기술할 때,
컴퓨터 소프트웨어를 개발할 때,
경제에서 벌어지는 현상들을 해석할 때 등
모두 미적분이 사용된다.
적분은 미분의 역연산.
그리고 미적분의 기초가 되는 것이
바로 극한이다.

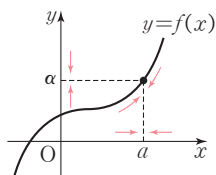


1

함수의 극한

x 가 어떤 값에 한없이 가까워지거나
 한없이 커질 때 또는 한없이 작아질 때
 $f(x)$ 의 값이 어떻게 변화하는지 살펴보는 것이 바로 함수의 극한.

1 함수의 극한



2 극한값의 계산

$$\frac{0}{0} \text{ 꼴}$$

수분해
분

3 함수의 극한의 활용

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+ax+b} = 1$$

1

함수의 극한

01 | 함수의 수렴

함수 식 $y=f(x)$ 와 x 의 값이 a 로 주어지면 함수값 $f(a)$ 를 쉽게 구할 수 있다.

즉, $y=f(x)$, $x=a \Rightarrow f(a)$

그런데 이때 x 의 값이 하나의 수로 딱 주어진 것이 아니라 단지 어떤 수에 한없이 가까워지고 있다면? 이에 따라 $f(x)$ 가 어떤 수에 가까워지고 있다면?

$y=f(x)$, $x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \rightarrow \square$

이것이 바로 극한.

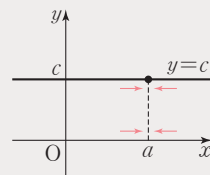
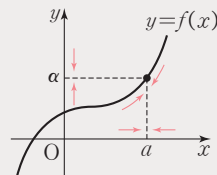
함수의 수렴과 극한

- (1) 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 와 다른 값을 가지면서 a 에 한없이 가까워질 때 $f(x)$ 가 a 에 한없이 가까워지면, $f(x)$ 는 a 에 수렴한다고 하고, a 를 $x \rightarrow a$ 일 때의 $f(x)$ 의 극한값 또는 극한이라 하며, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a \text{ 또는 } x \rightarrow a \text{일 때 } f(x) \rightarrow a$$

- (2) 상수함수 $f(x)=c$ (c 는 상수)는 모든 x 의 값에 대하여 함수값이 항상 c 이므로 a 의 값에 관계없이 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c$$



| 참고 | 기호 $\lim$ 는 극한을 뜻하는 영어 limit의 약자이며, ‘리미트’라 읽는다.

| 설명 | 다음 표현은 모두 같은 표현이다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$$

$\Leftrightarrow x$ 가 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 는 a 에 한없이 가까워진다.

$\Leftrightarrow x$ 가 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 는 a 에 수렴한다.

$\Leftrightarrow x \rightarrow a$ 일 때 $f(x)$ 의 극한값은 a 이다.

$\Leftrightarrow x \rightarrow a$ 일 때 $f(x) \rightarrow a$

함숫값과 극한값은 다르다. 그러나 다항함수처럼 우리에게 친근한 함수들은 대부분 $f(x)$ 에 $x=a$ 를 대입한 값, 즉 $f(a)$ 가 극한값이 된다.

001

그래프를 이용하여 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

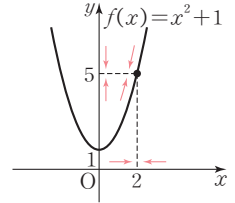
(3) $\lim_{x \rightarrow 2} 3$

풍산자타 $\lim_{x \rightarrow 2}$ ●의 값을 구하려면 $x \rightarrow 2$ 일 때 ●가 어떤 수에 가까워지는지를 관찰하면 된다.

▶ 풀이

- (1) $f(x) = x^2 + 1$ 로 놓으면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.
 x 의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 5에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5$$



- (2) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ 로 놓으면

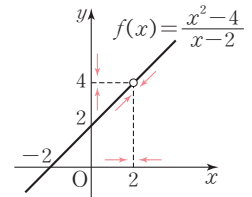
$x \neq 2$ 일 때

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

x 의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 4에 한없이 가까워지므로

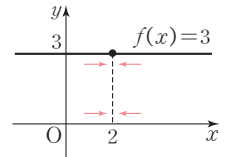
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$



- (3) $f(x) = 3$ 으로 놓으면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

모든 x 의 값에 대하여 함수값 $f(x)$ 가 항상 3이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3 = 3$$



정답과 풀이 2쪽

유제 002 그래프를 이용하여 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x)$

(2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} 7$

02 | 함수의 발산

x 의 값은 어떤 수에 한없이 가까워지고 있는데 $f(x)$ 는 특정한 값에 가까워지지 않는다면?

이게 바로 발산! 수렴하지 않는 경우는 전부 다 발산이다.

그 중에서도 특별한 경우는 두 가지. 그 값이 아주 커지거나, 아주 작아지거나.

함수의 발산

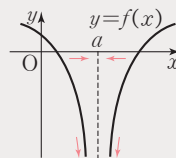
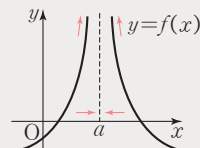
함수 $f(x)$ 가 수렴하지 않으면 발산이라 한다.

- (1) 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 한없이 커지면 $f(x)$ 는 양의 무한대로 발산한다고 하며, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ 또는 } x \rightarrow a \text{ 일 때, } f(x) \rightarrow \infty$$

- (2) 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 $f(x)$ 는 음의 무한대로 발산한다고 하며, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ 또는 } x \rightarrow a \text{ 일 때, } f(x) \rightarrow -\infty$$



| 설명 | 기호 ∞ 는 '무한대'라 읽고, $x \rightarrow \infty$ 는 x 가 한없이 커지는 상태를 의미한다.

| 함수의 발산 |

003 다음 극한을 조사하여라.

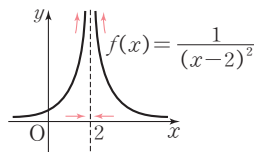
(1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{|x-1|}$

풍산자타 양의 무한대로 발산할 때는 그래프가 하늘 높이 솟구칠 때이고,
음의 무한대로 발산할 때는 그래프가 땅속으로 내려갈 때이다.

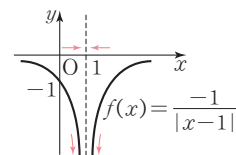
- ▶ 풀이 (1) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ 로 놓으면 x 의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 양수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$$



- (2) $f(x) = \frac{-1}{|x-1|}$ 로 놓으면 x 의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{|x-1|} = -\infty$$



정답과 풀이 2쪽

유제 004 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{3}{x^2} \right)$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{|x|}$

03 | $x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$ 일 때의 극한

$x \rightarrow \infty$ 는 x 가 한없이 커진다는 것이고, $x \rightarrow -\infty$ 는 x 가 한없이 작아진다는 것.
이 경우에도 극한을 구하는 방법은 똑같다. 극한값이 어디로 가는지 관찰하면 된다.

$x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$ 일 때의 극한

- (1) x 의 값이 양수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, 즉 $x \rightarrow \infty$ 일 때 함수 $f(x)$ 의 극한을 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 로 나타낸다.
(2) x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, 즉 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 함수 $f(x)$ 의 극한을 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 로 나타낸다.

| 설명 | 함수의 극한 $x \rightarrow a$ 와 $x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$ 일 때 3가지를 비교해 보자.

- ① $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a \Rightarrow x$ 가 a 의 좌우에서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 가 a 에 한없이 가까워진다.
② $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \beta \Rightarrow x$ 가 양수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 가 β 에 한없이 가까워진다.
③ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \gamma \Rightarrow x$ 가 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 가 γ 에 한없이 가까워진다.

| $x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$ 일 때의 함수의 극한 |

005 다음 극한을 조사하여라.

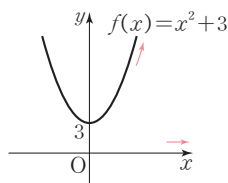
(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 3)$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2}{x}\right)$

풍산자녀 값이 어떻게 될지 생각만으로도 풀 수 있다. 그래프를 그려 보면 더욱 명확하다.

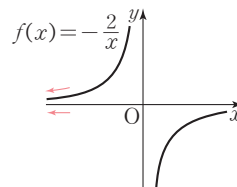
- ▶ 풀이 (1) $f(x) = x^2 + 3$ 으로 놓으면 그래프에서 x 의 값이 양수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 3) = \infty$$



- (2) $f(x) = -\frac{2}{x}$ 로 놓으면 그래프에서 x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2}{x}\right) = 0$$



정답과 풀이 2쪽

유제 **006** 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 5)$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1}$

04 좌극한과 우극한

x 가 어떤 수에 한없이 가까워지는 상황을 둘로 나누어 볼 수 있다.

왼쪽에서 가까워지느냐 오른쪽에서 가까워지느냐.

왼쪽에서 접근하면 좌극한, 오른쪽에서 접근하면 우극한.

좌극한과 우극한

- (1) x 가 a 보다 작은 값을 가지면서 a 에 한없이 가까워지는 것을 $x \rightarrow a-$ 로 나타낸다. 이때 $f(x)$ 가 일정한 값 a 에 한없이 가까워지면 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = a$ 로 나타내고, a 를 $x=a$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 좌극한이라 한다.
- (2) x 가 a 보다 큰 값을 가지면서 a 에 한없이 가까워지는 것을 $x \rightarrow a+$ 로 나타낸다. 이때 $f(x)$ 가 일정한 값 a 에 한없이 가까워지면 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = a$ 로 나타내고, a 를 $x=a$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 우극한이라 한다.

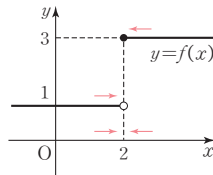
좌극한과 우극한이 같지 않은 경우가 있다.

예를 들어 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같이 계단 모양일 때,

$x=2$ 에서의 $f(x)$ 의 좌극한은 1이므로 $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 1$

$x=2$ 에서의 $f(x)$ 의 우극한은 3이므로 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 3$

이와 같이 그래프가 계단 모양일 때는 계단이 꺾이는 지점에서 항상 좌극한과 우극한이 다르다.



함수의 극한값이 존재할 조건 중요!

$x=a$ 에서 함수 $f(x)$ 의 극한값이 존재하려면 $x=a$ 에서 함수 $f(x)$ 의 좌극한과 우극한이 모두 존재하고, 그 값이 서로 같아야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a \iff \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = a$$

설명 | 우극한과 좌극한이 같을 때만 극한이 존재한다. 우극한과 좌극한이 다르면 극한값이 존재하지 않는다.

그래프를 고속도로라고 생각하자.

우극한은 오른쪽에서 돌진할 때의 목표 지점.

좌극한은 왼쪽에서 돌진할 때의 목표 지점.

목표 지점이 다르면? 극한은 없다.

또, 극한값과 함수값은 다를 수 있다.

그림의 $x=2$ 근처를 본다.

약간 왼쪽의 $f(x)$ 의 값은 1 $\Rightarrow$ (좌극한) $= \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 1$

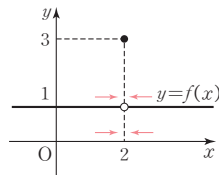
약간 오른쪽의 $f(x)$ 의 값은 1 $\Rightarrow$ (우극한) $= \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 1$

좌극한과 우극한이 1로 같다. 따라서 극한값은 1 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$

하지만 $x=2$ 일 때 함수값은 3 $\Rightarrow f(2) = 3$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 는 $f(2)$ 와는 상관이 없다.

$x \rightarrow 2$ 란 $x \neq 2$ 이면서 x 가 2에 가까이 가는 것.



007

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$

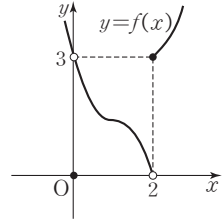
(2) $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(4) $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$

(5) $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$

(6) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$



풍산자

주어진 그래프는 $x=0$ 과 $x=2$ 에서 모두 끊어져 있지만 상황이 조금 다르다.

$x=0$ 에서는 좌극한과 우극한이 같다. 극한이 존재한다.

그러나 $x=2$ 에서는 좌극한과 우극한이 다르다. 극한이 존재하지 않는다.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 3$

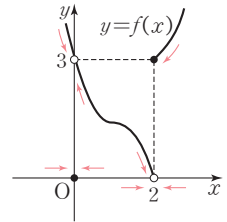
(2) $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 3$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$

(4) $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 0$

(5) $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 3$

(6) $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.



정답과 풀이 2쪽

유제 008 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$

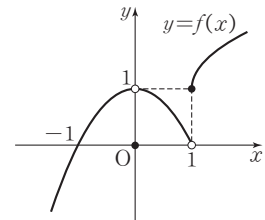
(2) $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$

(5) $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$

(6) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$



009

다음 극한을 조사하여라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{|x-2|}$

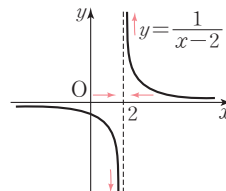
(3) $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$

풍산자 주어진 함수의 그래프를 그려 좌극한과 우극한이 같은지 조사한다.

▶ 풀이 (1) 함수 $y = \frac{1}{x-2}$ 의 그래프는 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{1}{x-2} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

따라서 좌극한과 우극한이 다르므로 주어진 극한은 존재하지 않는다.



(2) 함수 $y = \frac{x-2}{|x-2|}$ 의 그래프는 그림과 같고,

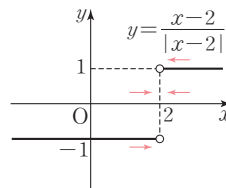
$$x \rightarrow 2- \text{ 일 때, } |x-2| = -(x-2)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x-2}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x-2}{-(x-2)} = -1$$

$$x \rightarrow 2+ \text{ 일 때, } |x-2| = x-2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x-2}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

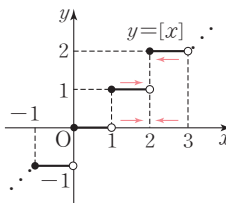
따라서 좌극한과 우극한이 다르므로 주어진 극한은 존재하지 않는다.



(3) 함수 $y = [x]$ 의 그래프는 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} [x] = 1, \lim_{x \rightarrow 2+} [x] = 2$$

따라서 좌극한과 우극한이 다르므로 주어진 극한은 존재하지 않는다.



정답과 풀이 2쪽

유제 010 다음 극한을 조사하여라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} [x]$



풍산자 비법

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a \iff x$ 가 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 는 a 에 한없이 가까워진다.
- 함수의 수렴과 발산은 그래프를 떠올리면 명쾌하게 이해할 수 있다.
- $x=a$ 에서 함수 $f(x)$ 의 극한이 존재하려면 좌극한과 우극한이 모두 존재하고, 그 값이 서로 같아야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a \iff \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = a$$