



풍산자

수학 I

· 풍산자수학연구소 ·

머리말

수학 공부는 어떻게 해야 할까요?

먼저 개념을 익혀야 합니다.

개념 학습은 문제와 융합된 형태로 이루어져야 합니다.

풍산자는 개념과 문제를 유기적으로 결합하여

개념 공부가 문제 공부이고 문제 공부가 개념 공부인

시스템을 지향하며 만들었습니다.

개념과 문제를 하나의 흐름으로 공부하되

직관적인 그림과 비유를 통한 구어체 설명으로

개념은 좀 더 쉽고 빠르게 익히고,

문제 풀이는 단계별로 짧게 구성하여

어려운 문제도 명쾌하게 이해할 수 있도록 하였습니다.

골치 아픈 수학이지만 풍산자로 공부하면서

때로는 소설책을 읽는 듯한 재미와 통쾌함도 느끼고

고향 같은 푸근함도 느끼면서 수학의 기초를 든든하게

닦을 수 있기를 바랍니다.

풍산자수학연구소



풍산자만의 매력

1

학습자의 눈높이에 맞는 개념서

개념 설명이 아무리 자세하더라도 여러분의 눈높이에 맞지 않다면 아무 소용이 없습니다. 풍산자는 궁금해 하는 부분만을 바로 옆에서 콕콕 짚어 설명해 주는 과외 선생님같은 개념서입니다.

2

지루하지 않고 재미있는 개념서

딱딱하고 어려운 용어 때문에 수학이 지루하고 재미없게 느껴졌나요? 풍산자 특유의 유쾌하고 명쾌한 설명으로 지루할 틈 없이 수학을 쉽고 재미있게 공부할 수 있습니다.

3

짧은 호흡으로 간결하게 읽는 개념서

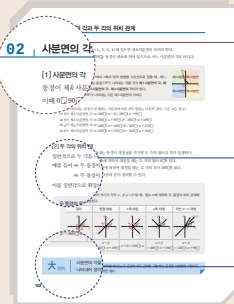
많은 양의 개념을 한 번에 읽고 문제를 풀려면 그 개념을 문제에 어떻게 적용해야 할지 몰라 어렵게 느껴집니다. 풍산자는 개념 설명을 읽고 그 개념을 바로 문제에 적용하도록 구성하여 짧은 호흡으로 공부할 수 있습니다.





미니 단원

개념을 주제별로 나누어 짧은 호흡으로 익힐 수 있도록 구성하였습니다.



● 개념 설명

군살을 쏘 빼 명료하고 간결하게 설명하였습니다.

● 설명, 증명, 참고, 개념확인
개념의 원리를 쉽게 이해할 수 있도록 도와 줍니다.

● **대원칙** 개념의 핵심이 되는 한마디를 꼭 짚어 줍니다.



● 예제와 유제

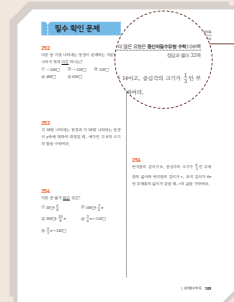
개념 이해에 꼭 필요한 문제들만 엄선하였습니다.

● **풍산자비** 문제를 풀기 위해 알아야 할 핵심 개념을 알려 줍니다.

● **풍산자 비법** 학습의 흐름에 따라 내용을 정리합니다.

필수 확인 문제

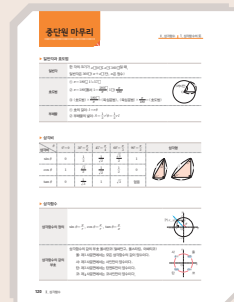
개념의 확인과 응용을 위해 스스로 풀어 볼 문제를 수록하였습니다.



● 더 많은 유형의 문제를 풀어 볼 수 있도록 풍산자필수유형의 관련 쪽수를 안내하였습니다.

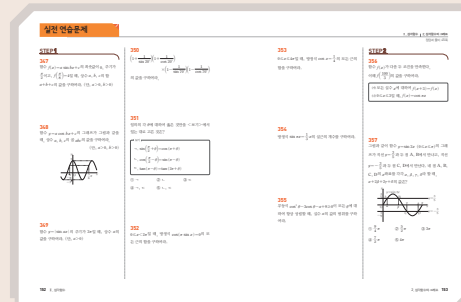
중단원 마무리

단원별 핵심 내용을 한눈에 살펴볼 수 있도록 표로 정리하였습니다.



실전 연습문제

실전에 꼭 필요한 문제들을 2단계로 나누어 수록하였습니다.





I 지수 함수와 로그함수

1 지수와 로그

1 지수	12
2 로그	25
3 상용로그	37

2 지수함수와 로그함수

1 지수함수	51
2 지수방정식과 지수부등식	61
3 로그함수	69
4 로그방정식과 로그부등식	82





II 삼각함수

1 삼각함수의 뜻

1 삼각함수의 정의	100
2 삼각함수의 공식	110

2 삼각함수의 그래프

1 삼각함수의 그래프	124
2 삼각함수의 그래프의 활용	141

3 삼각형에 응용

1 사인법칙과 코사인법칙	156
2 도형의 넓이	167



III 수열

1 등차수열과 등비수열

1 등차수열	180
2 등비수열	195

2 수열의 합

1 시그마 Σ	216
2 여러 가지 수열의 합	226

3 수학적 귀납법

1 수열의 귀납적 정의	238
2 수학적 귀납법	247

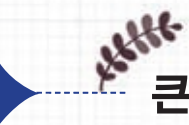
I

← 지수함수와 로그함수 →

1 지수와 로그

2 지수함수와 로그함수





큰 수를 간단하게 표현할 수 있을까?

지구와 태양의 거리는 약 149600000 km

10의 거듭제곱으로 표시하면 1.496×10^8 km

길고 긴 이 숫자는 앞으로 배울 로그를 취하면

놀랍게도 $8 \times \times$ 정도의 간단한 수가 된다.

또 우주 공간의 먼지입자의 크기는 대략 0.000000000001

10의 거듭제곱으로 표시하면 1×10^{-12}

로그를 취하면 간단하게 -12

그래서 매우 큰 수 또는 매우 작은 수를 계산하고

표현할 때 지수와 로그가 정말 유용하다.

로그는 주판, 아라비아 숫자, 소수점, 컴퓨터와 더불어

계산의 5대 발명 중의 하나로 꼽힌다.

지수와 로그는 결국 계산하는 방법이니

익숙해질 때까지 반복하여 연습해야 한다.



1

지수와 로그

수학사는 어느 정도 일반화의 역사.
기존의 지수법칙을 유지하면서 지수의 범위를 확장한다.
그리고 지수와 떼려야 뗄 수 없는 로그를 정의한다.

1 지수

$$a^x = b$$

2 로그

$$x = \log_a b$$

3 상용로그

$$\log N$$

1 지수

01 거듭제곱근

거듭제곱이란 거듭해서 곱한 것, 즉, $x, x^2, x^3, \dots, x^n$ 을 의미한다.

거듭제곱근이란 방정식 $x^n=a$ 의 근을 의미한다.

거듭제곱근

a 가 실수, n 이 2 이상의 자연수일 때,

n 제곱하여 a 가 되는 수, 즉 $x^n=a$ 를 만족시키는 x 를 a 의 n 제곱근이라 한다.

이때 a 의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, ...을 통틀어 a 의 거듭제곱근이라 한다.

a 는 x 의 n 제곱

$$x^n=a$$

x 는 a 의 n 제곱근

a 의 n 제곱근 $\Rightarrow$ n 제곱하여 a 가 되는 수 $\Rightarrow$ 방정식 $x^n=a$ 의 n 개의 근

실수 a 의 n 제곱근, 즉 방정식 $x^n=a$ 의 근은 실근과 허근을 통틀어 n 개가 있다. 이 중 **실근 하나를 $\sqrt[n]{a}$ 로 나타내고 n 제곱근 a 로 읽는다.** 이때 n 이 짝수이면 a 의 값의 범위에 따라 실근

의 개수가 달라지고, n 이 홀수이면 a 의 값과 관계없이 실근은 1개 존재한다. 예를 들어,

8의 세제곱근 $\Rightarrow x^3=8$ 에서 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$ 이 중 실수는 $2 \Rightarrow \sqrt[3]{8}=2$

16의 네제곱근 $\Rightarrow x^4=16$ 에서 $x=\pm 2$ 또는 $x=\pm 2i$ 이 중 실수는 ± 2

$$\Rightarrow \sqrt[4]{16}=2, -\sqrt[4]{16}=-2$$

-16의 네제곱근 $\Rightarrow$ 네제곱해서 -16이 되는 실수는 없다.

$$\Rightarrow \sqrt[4]{-16} \text{ 은 실수에서 정의되지 않는다.}$$

실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것, 즉 $x^n=a$ 의 실근

$n \backslash a$	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 짝수일 때	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n 이 홀수일 때	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

설명 a 의 n 제곱근과 n 제곱근 a 는 엄연히 다르다.

a 의 n 제곱근은 방정식 $x^n=a$ 의 근으로 복소수 범위에서 n 개가 존재한다.

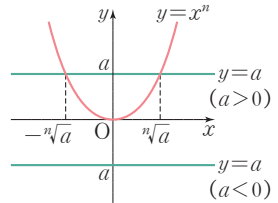
n 제곱근 a 는 a 의 n 제곱근 중 a 와 부호가 같은 실수로 많아야 1개이다.

함수 $y=x^n$ 의 그래프와 거듭제곱근

실수 a 의 n 제곱근, 즉 방정식 $x^n=a$ 의 근은 실근과 허근을 통틀어 n 개가 있다. 이 중에서 실근은 몇 개일까? 놀랍게도 n 개 중에서 실근은 많아야 2개뿐이다. 방정식 $x^n=a$ 의 실근은 함수 $y=x^n$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

(1) n 이 짝수일 때,

함수 $y=x^n$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭인 U자형의 그래프이다. 이 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 개수는 a 의 부호에 따라 달라진다.



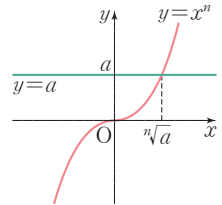
① $a>0$ 이면 함수 $y=x^n$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 개수는 2개이므로 방정식 $x^n=a$ 의 실근은 2개이다. 이 중 양수를 $\sqrt[n]{a}$, 음수를 $-\sqrt[n]{a}$ 로 나타낸다.

② $a=0$ 이면 방정식 $x^n=0$ 의 근은 0 하나뿐이다.

③ $a<0$ 이면 함수 $y=x^n$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 는 만나지 않으므로 방정식 $x^n=a$ 의 실근은 없다.

(2) n 이 홀수일 때,

함수 $y=x^n$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 원점에 대하여 대칭이고 계속 증가하는 모양이다. 이 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 개수는 항상 하나뿐이므로 $x^n=a$ 의 실근은 항상 하나뿐이다. 이것을 $\sqrt[n]{a}$ 로 나타낸다.



| 거듭제곱근의 정의 |

001

다음 거듭제곱근을 구하고, 그 중에서 실수인 것을 말하여라.

(1) -8 의 세제곱근

(2) 81 의 네제곱근

풍산자타 a 의 n 제곱근이란 무엇인가? → 방정식 $x^n=a$ 의 근!

- ▶ 풀이 (1) -8 의 세제곱근은 방정식 $x^3=-8$ 의 근이므로 $x^3+8=0$, $(x+2)(x^2-2x+4)=0$
 $\therefore x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$ ← -8 의 세제곱근
 이 중에서 실수인 것은 -2 이다.
- (2) 81 의 네제곱근은 방정식 $x^4=81$ 의 근이므로 $x^4-81=0$, $(x^2-9)(x^2+9)=0$
 $\therefore x=\pm 3$ 또는 $x=\pm 3i$ ← 81 의 네제곱근
 이 중에서 실수인 것은 ± 3 이다.

정답과 풀이 2쪽

유제 002

다음 거듭제곱근을 구하고, 그 중에서 실수인 것을 말하여라.

(1) -1 의 세제곱근

(2) 16 의 네제곱근

02 거듭제곱근의 성질

$\sqrt[n]{a}$ 의 계산은 중학교 때 배웠다. $\sqrt[n]{a}$ 에서도 유사한 공식이 성립한다.

거듭제곱근의 성질

$a > 0, b > 0$ 이고 m, n 이 2 이상의 자연수일 때

$$(1) \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$(2) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(3) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(4) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

$$(5) \sqrt[n]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ (단, } p \text{는 자연수)}$$

- | 설명 |** 거듭제곱근의 모든 계산을 처리해 주는 공식들. 꼭 감상해 보니, (1), (2), (3)은 익숙한 생김새. 근호 앞에 수가 있다는 걸 빼면 중학교 때 배운 제곱근 공식과 거의 같은 형태이다. (4), (5)가 낯설다. 다음과 같이 암기하면 된다.
- (4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \Rightarrow$ 근호 앞 수끼리는 곱할 수 있고 바꿀 수 있다. (단, $\sqrt{a} = {}^2\sqrt{a}$)
- (5) $\sqrt[n]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} \Rightarrow$ 근호 앞 수와 지수는 약분할 수 있다.

| 거듭제곱근의 계산 (1) |

003 다음 값을 구하여라.

$$(1) \sqrt[6]{64}$$

$$(2) \sqrt[5]{-32}$$

$$(3) -\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$$

$$(4) \sqrt[3]{-0.008}$$

풍산자 $\sqrt[n]{a}$ 의 값을 구하려면 n 제곱하여 a 가 되는 수를 구한다.

- ▶ 풀이
- $$(1) \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$
- $$(2) \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$$
- $$(3) -\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = -\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = -\frac{1}{2}$$
- $$(4) \sqrt[3]{-0.008} = \sqrt[3]{(-0.2)^3} = -0.2$$

정답과 풀이 2쪽

유제 004 다음 값을 구하여라.

$$(1) \sqrt[4]{81}$$

$$(2) \sqrt[3]{-27}$$

$$(3) -\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$$

$$(4) \sqrt[3]{-0.001}$$

005 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{8}$

(2) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{54}}$

(3) $(\sqrt[6]{8})^2$

풍산자디 거듭제곱근의 성질을 이용하여 근호를 합친 후 $\sqrt[n]{a^n}$ 꼴로 고치면 된다.

▶ 풀이

(1) $\sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2 \times 8} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

(2) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{54}} = \sqrt[3]{\frac{2}{54}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{1}{3}$

(3) $(\sqrt[6]{8})^2 = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{(2^3)^2} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

정답과 풀이 2쪽

유제 **006** 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{3}$

(2) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$

(3) $(\sqrt[4]{4})^2$

007 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[4]{3\sqrt{16}} \times \sqrt[3]{\sqrt{16}}$

(2) $\sqrt[12]{5^4} \times \sqrt[9]{5^6}$

풍산자디

근호 앞 수가 다르다. 일단 다음 성질을 이용하여 근호 앞 수를 같게 하고 본다.

(1) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \Rightarrow$ 근호 앞 수끼리는 곱할 수 있고 바꿀 수 있다.

(2) $\sqrt[n^p]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} \Rightarrow$ 근호 앞 수와 지수는 약분할 수 있다.

▶ 풀이

(1) $\sqrt[4]{3\sqrt{16}} \times \sqrt[3]{\sqrt{16}} = \sqrt[3]{4\sqrt{16}} \times \sqrt[3]{\sqrt{16}}$
 $= \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

(2) $\sqrt[12]{5^4} \times \sqrt[9]{5^6} = \sqrt[3 \times 4]{5^{1 \times 4}} \times \sqrt[3 \times 3]{5^{2 \times 3}}$
 $= \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

9와 6을 약분할 수 있다.

$$\sqrt[9]{5^6} = \sqrt[3]{5^2}$$

정답과 풀이 2쪽

유제 **008** 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[3]{\sqrt{81}} \times \sqrt[4]{\sqrt{81}}$

(2) $\sqrt[8]{7^6} \times \sqrt[12]{7^3}$

009 다음 식을 간단히 하여라.

$$(1) \sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}}} \quad (\text{단, } a > 0)$$

$$(2) \sqrt[4]{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}}$$

풍산자답 (1) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ 를 쓴 후 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ 를 이용하면 쿨하게 풀린다.

(2) 각 항의 밑을 2로 통일한 후 지수가 작은 항으로 묶어내면 된다.

▶ 풀이 (1) (주어진 식) $= \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}} \times \frac{\sqrt{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt{\sqrt[6]{a}}} = \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[6]{a}} \times \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[12]{a}} = 1$

(2) (주어진 식) $= \sqrt[4]{\frac{(2^3)^{10} + (2^2)^{10}}{(2^3)^4 + (2^2)^{11}}} = \sqrt[4]{\frac{2^{30} + 2^{20}}{2^{12} + 2^{22}}} = \sqrt[4]{\frac{2^{20}(2^{10} + 1)}{2^{12}(1 + 2^{10})}} = \sqrt[4]{2^8} = \sqrt[4]{4^4} = 4$

정답과 풀이 2쪽

유제 **010** 다음 식을 간단히 하여라.

$$(1) \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}} \quad (\text{단, } a > 0)$$

$$(2) \sqrt[4]{\frac{2^9 + 4^7}{2^5 + 4^5}}$$

| 거듭제곱근의 크기 비교 |

011 세 수 $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{10}$ 의 크기를 비교하여라.

풍산자답 근호 앞 수가 2, 3, 4로 다르다. 일단 $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$ 을 이용하여 2, 3, 4의 최소공배수인 12로 근호 앞 수를 통일하고 본다.

▶ 풀이 2, 3, 4의 최소공배수인 12로 근호 앞 수를 통일하면

$$\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$$

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$$

$$\sqrt[4]{10} = \sqrt[12]{10^3} = \sqrt[12]{1000}$$

이때 $\sqrt[12]{256} < \sqrt[12]{729} < \sqrt[12]{1000}$ 이므로

$$\sqrt[3]{4} < \sqrt{3} < \sqrt[4]{10}$$

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$
근호 앞 수와 지수에
같은 수를 곱할 수 있다.

정답과 풀이 2쪽

유제 **012** 세 수 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$ 의 크기를 비교하여라.



풍산자 비법

- ‘ a 의 n 제곱근’과 ‘ n 제곱근 a ($=\sqrt[n]{a}$)’의 관계는 ‘ a 의 제곱근’과 ‘제곱근 a ($\sqrt{a}$)’의 관계.
- 계산할 때는 $\sqrt{=} \sqrt[2]{=} \neq \sqrt[1]{=}$ 임에 주의한다.

03 | 지수의 확장

지수란 무엇인가? 지수란 몇 번 곱하는지 지시하는 수.

$a \times a \times a = a^3$ 에서 a 를 밑, 3을 지수라 한다.

지수란 거듭제곱에서 곱해진 문자의 개수. 개수이므로 당연히 지수는 자연수이어야 한다.

하지만 우리는 곧 지수를 아주 자연스럽게 정수, 유리수, 실수로 확장할 것이다.

중학교 때 배운 지수법칙을 복습하고 시작한다.

지수법칙

a, b 가 실수, m, n 이 자연수일 때, 다음 법칙이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 (1) a^m a^n &= a^{m+n} & (2) (a^m)^n &= a^{mn} & (3) (ab)^n &= a^n b^n \\
 (4) \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \quad (\text{단, } b \neq 0) & (5) a^m \div a^n &= \begin{cases} a^{m-n} & (m > n \text{ 일 때}) \\ 1 & (m = n \text{ 일 때}) \\ \frac{1}{a^{n-m}} & (m < n \text{ 일 때}) \end{cases} \quad (\text{단, } a \neq 0)
 \end{aligned}$$

[1] 정수 지수로의 확장

지수법칙에 의하면 $a^2 \div a^2 = a^0 = ?$ 한편, $a^2 \div a^2 = \frac{a^2}{a^2} = 1$

지수법칙에 의하면 $a^2 \div a^5 = a^{-3} = ?$ 한편, $a^2 \div a^5 = \frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3}$

자연스럽게 다음과 같이 지수를 확장한다. 물론, 지수법칙을 유지하며!

0 또는 음의 정수인 지수의 정의

$a \neq 0$ 이고 n 이 양의 정수일 때,

- (1) $a^0 = 1$ $\Rightarrow$ 어떤 수를 0제곱하면 무조건 1이 된다.
 (2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\Rightarrow$ 지수의 마이너스는 역수의 효과를 준다.

개념확인

1 다음 식을 간단히 하여라.

$$(1) 2^0 \quad (2) (-3)^0 \quad (3) 2^{-1} \quad (4) 3^{-2}$$

2 다음 <보기>중 그 값이 0 또는 1이 아닌 것을 모두 골라라.

$$\begin{array}{ccccc}
 \hookrightarrow \text{보기} & & & & \\
 \neg. 0^0 & \neg. 0^3 & \neg. 0^{-3} & \neg. (-3)^0 & \neg. -3^0
 \end{array}$$

- ▶ 풀이 1 (1) $2^0 = 1$ (2) $(-3)^0 = 1$ (3) $2^{-1} = \frac{1}{2}$ (4) $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$
 2 $\neg. 0^0$ 은 정의되지 않는다. $\neg. 0^3 = 0 \times 0 \times 0 = 0$ $\neg. 0^{-3}$ 은 정의되지 않는다.
 $\neg. (-3)^0 = 1$ $\neg. -3^0 = -(3^0) = -1$
 따라서 정답은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

[2] 유리수 지수로의 확장

이번엔 정수에서 유리수로 지수를 확장할 것이다.

$(a^m)^3 = a$ 에서 지수법칙 $(a^m)^n = a^{mn}$ 을 떠올려 보면, $m = \frac{1}{3}$, 즉 $(a^{\frac{1}{3}})^3 = a$ 가 된다.

여기에서 다음과 같은 정의를 얻는다. 마찬가지로 지수법칙이 유지된다.

유리수인 지수의 정의

$a > 0$ 이고 m, n 이 정수이며 $n \geq 2$ 일 때,

(1) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

(2) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \rightarrow$ 분수 지수는 거듭제곱근이 된다.

[3] 실수 지수로의 확장

실수 지수의 정교한 분석은 대학 과정에서 한다.

고등학교에서는 근삿값을 구하는 방법만 이해하고 지수법칙을 적용하면 된다.

지수법칙

$a > 0, b > 0$ 이고 m, n 이 실수일 때,

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^n = a^n b^n$

(4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

(5) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

설명 실수 지수의 근삿값을 구하는 방법은?

지수가 무리수인 $2^{\sqrt{2}}$ 의 경우를 생각해 보자. 무리수 $\sqrt{2} = 1.414213\cdots$ 이므로 $\sqrt{2}$ 에 가까워지는 유리수 1, 1.4, 1.41, 1.414, $\cdots$ 를 지수로 갖는 수 $2^1, 2^{1.4}, 2^{1.41}, 2^{1.414}, \cdots$ 는 일정한 수에 한없이 가까워진다는 사실이 알려져 있다. 이 일정한 수를 $2^{\sqrt{2}}$ 으로 정의한다.

x	2^x
1	2
1.4	2.639015...
1.41	2.657371...
1.414	2.664749...
$\vdots$	$\vdots$

지수를 유리수로, 실수로 확장해도 모든 지수법칙은 성립한다. 하지만 지수가 확장됨에 따라 **밀은 점점 제한**된다.

a^n 에서 n 의 값의 범위에 따라 지수법칙이 성립하는 a 의 값의 범위를 정리하면 다음과 같다.

확장				
n 의 값의 범위	자연수	정수	유리수	실수
a 의 값의 범위	실수	0이 아닌 실수	양수	양수
제한				

밀이 양수이기만 하면 지수에 상관없이 마음 놓고 지수법칙을 쓸 수 있다.

밀이 음수라면? 유감스럽게도 밀이 음수이고 지수가 분수일 때는 지수법칙을 쓸 수 없다.

틀린 계산 $\Rightarrow \{(-3)^2\}^{\frac{1}{2}} = (-3)^{2 \times \frac{1}{2}} = (-3)^1 = -3$

바른 계산 $\Rightarrow \{(-3)^2\}^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3^{2 \times \frac{1}{2}} = 3$

013 다음 식을 간단히 하여라.

$$(1) \left\{ \left(\frac{64}{9} \right)^{-\frac{5}{4}} \right\}^{\frac{2}{5}}$$

$$(2) 18^{\frac{2}{3}} \div 24^{\frac{1}{3}} \times 16^{\frac{1}{3}}$$

풍산자타 지수법칙을 이용하는 문제. 밑이 양수이기만 하면 지수에 상관없이 마음 놓고 지수법칙을 쓸 수 있다.

▶ 풀이 (1) (주어진 식) $= \left(\frac{64}{9} \right)^{-\frac{5}{4} \times \frac{2}{5}} = \left(\frac{64}{9} \right)^{-\frac{1}{2}}$

$$= \left\{ \left(\frac{8}{3} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{8}{3} \right)^{2 \times (-\frac{1}{2})}$$

$$= \left(\frac{8}{3} \right)^{-1} = \frac{3}{8}$$

(2) (주어진 식) $= (2 \times 3^2)^{\frac{2}{3}} \div (2^3 \times 3)^{\frac{1}{3}} \times (2^4)^{\frac{1}{3}}$

$$= (2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}}) \div (2^1 \times 3^{\frac{1}{3}}) \times 2^{\frac{4}{3}}$$

$$= 2^{\frac{2}{3}-1+\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2 \times 3 = 6$$

정답과 풀이 2쪽

유제 014 다음 식을 간단히 하여라.

$$(1) \left\{ \left(\frac{9}{16} \right)^{-\frac{4}{3}} \right\}^{\frac{3}{8}}$$

$$(2) 2^{\frac{3}{4}} \div 32^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{4}}$$

| 거듭제곱근을 지수로 나타내기 |

015 다음 식을 a^n 꼴로 나타내어라. (단, $a > 0$)

$$(1) \sqrt[3]{\sqrt{a}} \times \sqrt[4]{\frac{a^2}{a}}$$

$$(2) \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a}$$

풍산자타 근호 안에 근호가 있는 문제. 먼저 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ 를 이용하여 근호를 합친 후 근호를 분수 지수로 고치면 된다.

▶ 풀이 (1) (주어진 식) $= \sqrt[6]{a} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a}} = a^{\frac{1}{6}} \times a^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{1}{12}}$

$$= a^{\frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{12}} = a^{\frac{3}{4}}$$

(2) (주어진 식) $= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[9]{a} \times \sqrt[27]{a} = a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{9}} \times a^{\frac{1}{27}}$

$$= a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}} = a^{\frac{13}{27}}$$

정답과 풀이 2쪽

유제 016 다음 식을 a^n 꼴로 나타내어라. (단, $a > 0$)

$$(1) \sqrt{\frac{a}{\sqrt{a}}} \times \sqrt[3]{a}$$

$$(2) \sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a}$$

017 다음 식을 간단히 하여라. (단, $a > 0$, $b > 0$)

(1) $(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$ (2) $(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$

풍산자타 곱셈 공식과 분수 지수가 융합된 문제. 분수 지수가 끼어들어 어려운 척 하지만 다음 곱셈 공식 한 방이면 쿨하게 풀린다.

(1) $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

(2) $(A-B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$

▶ 풀이 (1) (주어진 식) $= \{(a^{\frac{1}{4}})^2 - (b^{\frac{1}{4}})^2\}(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$
 $= (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$
 $= (a^{\frac{1}{2}})^2 - (b^{\frac{1}{2}})^2 = a - b$
 (2) (주어진 식) $= (a^{\frac{1}{3}})^3 - (b^{\frac{1}{3}})^3 = a - b$

정답과 풀이 2쪽

유제 **018** 다음 식을 간단히 하여라. (단, $a > 0$, $b > 0$)

(1) $(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})(a + a^{-1})$ (2) $(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$

019 $(3^{\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}})^3 + (3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}})^3$ 을 간단히 하여라.

풍산자타 곱셈 공식 $(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$ (복부호 동순)을 이용하여 전개하는 문제. 이때 공통부분을 한 문자로 치환하여 생각하면 몸과 마음이 한결 편하다.

▶ 풀이 $3^{\frac{1}{3}} = A$, $3^{-\frac{2}{3}} = B$ 로 놓으면
 (주어진 식) $= (A+B)^3 + (A-B)^3$
 $= (A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3) + (A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3)$
 $= 2A^3 + 6AB^2$
 $= 2(3^{\frac{1}{3}})^3 + 6 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{4}{3}}$
 $= 2 \cdot 3 + 6 \cdot 3^{-1} = 8$

정답과 풀이 3쪽

유제 **020** $(2^{\frac{3}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}})^2 + (2^{\frac{3}{2}} - 2^{-\frac{1}{2}})^2$ 을 간단히 하여라.

021 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

(1) $a + a^{-1}$

(2) $a^2 + a^{-2}$

(3) $a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}$

풍산자타 (1), (2) 주어진 식의 양변을 제곱하면 (1)이 구해지고, (1)을 제곱하면 (2)가 구해진다.

(3) 주어진 식의 양변을 세제곱하면 된다. 이때 다음 공식을 이용하자.

$$(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$$

▶ 풀이 (1) $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$ 의 양변을 제곱하면 $a + 2 + a^{-1} = 9$

$$\therefore a + a^{-1} = 7$$

(2) $a + a^{-1} = 7$ 의 양변을 제곱하면 $a^2 + 2 + a^{-2} = 49$

$$\therefore a^2 + a^{-2} = 47$$

(3) $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$ 의 양변을 세제곱하면 $(a^{\frac{1}{2}})^3 + (a^{-\frac{1}{2}})^3 + 3 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}) = 27$

$$a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 3 \cdot 1 \cdot 3 = 27$$

$$\therefore a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} = 18$$

정답과 풀이 3쪽

유제 **022** $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 3$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

(1) $a + a^{-1}$

(2) $a^2 + a^{-2}$

(3) $a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}}$

023 $x = 3^{\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{1}{3}}$ 일 때, $3x^3 - 9x$ 의 값을 구하여라.

풍산자타 $(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$ 를 이용하여 x^3 을 계산하면 된다.

▶ 풀이 $x^3 = (3^{\frac{1}{3}})^3 + (3^{-\frac{1}{3}})^3 + 3 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} (3^{\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{1}{3}})$

$$= 3 + 3^{-1} + 3 \cdot 1 \cdot x$$

$$= 3x + \frac{10}{3}$$

$$\text{따라서 } x^3 - 3x = \frac{10}{3} \text{ 이므로 } 3x^3 - 9x = 10$$

정답과 풀이 3쪽

유제 **024** $x = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}$ 일 때, $2x^3 - 6x$ 의 값을 구하여라.

025 $2^x=81$ 일 때, $\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^{-\frac{x}{2}}$ 의 값을 구하여라.

풍산자단 구해야 하는 식이 주어진 식을 포함하도록 변형한다. 즉, 2^x 을 포함한 식으로 변형한다.

→ 헷갈리는 마이너스 지수부터 처리하고 본다.

$$\begin{aligned} \text{▶ 풀이} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^{-\frac{x}{2}} &= (\sqrt{8})^{\frac{x}{2}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{x}{2}} = (2^x)^{\frac{3}{4}} \quad \leftarrow 2^x=81 \text{을 대입} \\ &= 81^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^3 = 27 \end{aligned}$$

정답과 풀이 3쪽

유제 **026** $3^x=4$ 일 때, $1\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{x}{2}}$ 의 값을 구하여라.

027 $a^{2x}=3$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

$$(1) \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} \qquad (2) \frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x - a^{-x}}$$

풍산자단 a^{2x} 을 포함한 식으로 변형한다. 즉, 분모, 분자에 각각 a^x 을 곱한다.

▶ 풀이 (1) 분모, 분자에 각각 a^x 을 곱하면

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= \frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1} \quad \leftarrow a^{2x}=3 \text{을 대입} \\ &= \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2) 분모, 분자에 각각 a^x 을 곱하면

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= \frac{a^{4x}-a^{-2x}}{a^{2x}-1} = \frac{(a^{2x})^2 - \frac{1}{a^{2x}}}{a^{2x}-1} \quad \leftarrow a^{2x}=3 \text{을 대입} \\ &= \frac{3^2 - \frac{1}{3}}{3-1} = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

정답과 풀이 3쪽

유제 **028** $a^{-2}=3$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

$$(1) \frac{a-a^{-1}}{a+a^{-1}} \qquad (2) \frac{a^3-a^{-3}}{a^3+a^{-3}}$$

029

다음 물음에 답하여라.

- (1) $5^x=81$, $45^y=243$ 일 때, $\frac{4}{x}-\frac{5}{y}$ 의 값을 구하여라.
- (2) $2^x=3^y=6^z$ 일 때, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$ 의 값을 구하여라. (단, $xyz \neq 0$)

풍산자디

주어진 조건식의 밑이 다르면 조건식을 변형하여 밑을 통일한다.

- (1) 조건식의 우변이 3의 거듭제곱꼴이므로 밑을 3인 식으로 변형한다.
- (2) 주어진 조건식을 k 로 놓고 밑이 k 인 식으로 변형한다.

▶ 풀이 (1) $5^x=81$ 에서 $5=81^{\frac{1}{x}}=(3^4)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{4}{x}}$ ㉠

$45^y=243$ 에서 $45=243^{\frac{1}{y}}=(3^5)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{5}{y}}$ ㉡

㉠ $\div$ ㉡을 하면 $\frac{5}{45}=3^{\frac{4}{x}}\div 3^{\frac{5}{y}}$

$\frac{1}{9}=3^{\frac{4}{x}-\frac{5}{y}}$, $3^{-2}=3^{\frac{4}{x}-\frac{5}{y}}$

$\therefore \frac{4}{x}-\frac{5}{y}=-2$

(2) $2^x=3^y=6^z=k$ 로 놓으면 $k>0$ 이고, $xyz \neq 0$ 에서 $k \neq 1$ 이다.

$2^x=k$ 에서 $2=k^{\frac{1}{x}}$ ㉢

$3^y=k$ 에서 $3=k^{\frac{1}{y}}$ ㉣

$6^z=k$ 에서 $6=k^{\frac{1}{z}}$ ㉤

㉢ $\times$ ㉣ $\div$ ㉤을 하면 $\frac{2\cdot 3}{6}=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\div k^{\frac{1}{z}}$

$1=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}$ 에서 $k>0$ 이고, $k \neq 1$ 이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$

정답과 풀이 3쪽

유제 **030** 다음 물음에 답하여라.

- (1) $40^x=32$, $10^y=8$ 일 때, $\frac{5}{x}-\frac{3}{y}$ 의 값을 구하여라.
- (2) $3^x=4^y=12^z$ 일 때, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$ 의 값을 구하여라. (단, $xyz \neq 0$)

**풍산자 비법**

밑이 양수일 땐 지수법칙을 마음껏 써도 좋다. 틀리는 것을 두려워 말고 많이 계산해 보고, 많이 변형해 보자. 연습이 중요하다.