풍산자

일등급 유형

정답과 풀이

미적분

Ⅰ. 수열의 극한

01 수열의 극한

001

ㄱ. $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$에 n 대신 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \cdots$

이므로 수열 $\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$은 0에 수렴한다.

ㄴ. 자연수 n에 대하여 $\sin n\pi=0$이므로

$3+\sin n\pi=3+0=3$

즉, 수열 $\{3+\sin n\pi\}$는 3에 수렴한다.

ㄷ. $(-1)^{n+1}+(-1)^n$에 n 대신 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$1-1=0,\ -1+1=0,\ 1-1=0,\ \cdots$

이므로 수열 $\{(-1)^{n+1}+(-1)^n\}$은 0에 수렴한다.

따라서 수렴하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

002

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}2b_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}a_n+2\lim_{n\to\infty}b_n$$

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용한다.

$$=2+2\times1=4$$

답 4

풍쌤 비법

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)이면 실수 k, l, m에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ka_n+lb_n}{ma_nb_n}=\frac{k\lim_{n\to\infty}a_n+l\lim_{n\to\infty}b_n}{m\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{k\alpha+l\beta}{m\alpha\beta}$$

(단, $m\neq0$, $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$)

003

$\frac{3a_n-5}{a_n+3}=b_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{2}{3}$

이때 $a_n=\frac{-3b_n-5}{b_n-3}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-3b_n-5}{b_n-3}=\frac{-3\lim_{n\to\infty}b_n-5}{\lim_{n\to\infty}b_n-3}$$

$$=\frac{-3\times\frac{2}{3}-5}{\frac{2}{3}-3}=3$$

답 ③

간단 풀이

$\lim_{n\to\infty}a_n$이 수렴한다는 조건이 있으므로 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 풀 수도 있다.

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)라고 하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-5}{a_n+3}=\frac{2}{3}$에서

$\frac{3\alpha-5}{\alpha+3}=\frac{2}{3}$, $9\alpha-15=2\alpha+6$

$7\alpha=21$ $\quad\therefore\ \alpha=3$

즉, $\lim_{n\to\infty}a_n=3$이다.

004

$a_n>0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{-3a_n+4}{a_n+2}$의 분모, 분자를 a_n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-3a_n+4}{a_n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3+\frac{4}{a_n}}{1+\frac{2}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3+2\times\frac{2}{a_n}}{1+\frac{2}{a_n}}$$

$$=\frac{-3+2\times0}{1+0}=-3$$

답 ①

005

$a_n-3=c_n$, $a_n+2b_n=d_n$으로 놓으면

$a_n=c_n+3$, $b_n=\frac{1}{2}(d_n-a_n)$

$\lim_{n\to\infty}c_n=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(c_n+3)=\lim_{n\to\infty}c_n+3=1+3=4$

$\lim_{n\to\infty}d_n=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(d_n-a_n)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}d_n-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}a_n$$

$$=\frac{1}{2}\times5-\frac{1}{2}\times4=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n(2+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\times\left(2+\lim_{n\to\infty}b_n\right)=4\left(2+\frac{1}{2}\right)=10$$

답 10

다른 풀이

$a_n=c_n+3$, $b_n=\frac{1}{2}(d_n-a_n)=\frac{1}{2}(d_n-c_n-3)$이고

$\lim_{n\to\infty}c_n=1$, $\lim_{n\to\infty}d_n=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n(2+b_n)=\lim_{n\to\infty}(c_n+3)\left\{2+\frac{1}{2}(d_n-c_n-3)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(c_n+3)\left(\frac{1}{2}d_n-\frac{1}{2}c_n+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}c_n+3\right)\left(\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}d_n-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}c_n+\frac{1}{2}\right)$$

$$=(1+3)\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=10$$

풍쌤 비법

네 실수 p, q, r, s ($p\neq0$, $r\neq0$)에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{ra_n+s}{pa_n+q}=\alpha$ (α는 실수)이면 $\frac{ra_n+s}{pa_n+q}=b_n$으로 놓고 a_n을 b_n에 대한 식으로 나타낸 후 $\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$임을 이용한다.

006

ㄱ은 옳지 않다.

(반례) $a_n=n+3$, $b_n=n$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$이지만

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}3=3\neq 0$이다.

ㄴ도 옳지 않다.

(반례) $a_n=n$, $b_n=n^2$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$이지만

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\neq 1$이다.

ㄷ도 옳지 않다.

(반례) $a_n=n$, $b_n=\frac{1}{n}$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이지만

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}1=1\neq 0$이다.

ㄹ은 옳다.

$a_n-b_n=c_n$이라고 하면 $b_n=a_n-c_n$

이때 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-c_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}c_n$

$=\alpha-0=\alpha$

두 수열 $\{a_n\}$, $\{c_n\}$이 수렴하므로 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용한다.

따라서 옳은 것은 ㄹ이다.

답 ②

007

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}{\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+\sqrt{4-\frac{1}{n}}}$$

분모, 분자를 $\sqrt{n}$으로 나눈다.

$$=\frac{1+1}{2+2}=\frac{1}{2}$$

답 ②

간단 풀이

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴에서 극한값을 구할 때에는 최고차항의 계수만 관찰하면 된다.

특히 (분모의 차수)=(분자의 차수)이면 극한값은

$\frac{(\text{분자의 최고차항의 계수})}{(\text{분모의 최고차항의 계수})}$이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}{\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n-1}}=\frac{1+1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$$

008

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3-n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}$$

분모, 분자를 각각 유리화한다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3-n})(\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3-n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})(\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3-n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{(n^3+n)-(n^3-n)\}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}{\{(n+2)-(n-2)\}(\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3-n})}$$

분모, 분자를 $\sqrt{n^3}$, 즉 $n\sqrt{n}$으로 나눈다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)}{4\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}$$

$$=\frac{2(1+1)}{4(1+1)}=\frac{1}{2}$$

답 ②

009

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3-(n-2)^3}{3n^2-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3+6n^2+12n+8)-(n^3-6n^2+12n-8)}{3n^2-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2+16}{3n^2-1}$$

분모, 분자를 n^2으로 나눈다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12+\frac{16}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{12+0}{3-0}=4$$

답 ②

다른 풀이

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3-(n-2)^3}{3n^2-1}$에서 $(n+2)^3-(n-2)^3$은 다음과 같이 간단히 할 수도 있다.

$(n+2)^3-(n-2)^3$

$=\{(n+2)-(n-2)\}\{(n+2)^2+(n+2)(n-2)+(n-2)^2\}$

$=4(n^2+4n+4+n^2-4+n^2-4n+4)$

$=4(3n^2+4)=12n^2+16$

참고

(1) 곱셈 공식

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(2) 인수분해 공식

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

010

$$3^2+6^2+9^2+\cdots+9n^2=\sum_{k=1}^{n}(3k)^2=9\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=9\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{3n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{5n^3}{3^2+6^2+9^2+\cdots+9n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3}{3n(n+1)(2n+1)}$$

분모, 분자를 n^3으로 나눈다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}$$

$$=\frac{10}{3(1+0)(2+0)}=\frac{5}{3}$$

답 ⑤

참고

자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

011

$\sqrt{1+2+3+\cdots+n}-\sqrt{1+2+3+\cdots+(n-1)}$

$=\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$

$=\sqrt{\frac{n}{2}}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$ ← 분모를 1로 놓고 분자를 유리화한다.

$=\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}$

$=\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}$

$=\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\{\sqrt{1+2+3+\cdots+n}-\sqrt{1+2+3+\cdots+(n-1)}\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$ ← 분모, 분자를 $\sqrt{n}$으로 나눈다.

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ②

012

$x^2+4nx-3n=0$에서 $x=-2n\pm\sqrt{4n^2+3n}$

이때 $a_n>0$이므로 $a_n=-2n+\sqrt{4n^2+3n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-2n+\sqrt{4n^2+3n})$ ← 분모를 1로 놓고 분자를 유리화한다.

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(-2n+\sqrt{4n^2+3n})(-2n-\sqrt{4n^2+3n})}{-2n-\sqrt{4n^2+3n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+\sqrt{4n^2+3n}}$ ← 분모, 분자를 n, 즉 $\sqrt{n^2}$으로 나눈다.

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2+\sqrt{4+\frac{3}{n}}}$

$=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}$

답 ①

013

$\frac{1+a_n}{a_n}=2n^3+3$에서

$\frac{1}{a_n}+1=2n^3+3$, $\frac{1}{a_n}=2n^3+2$

$\therefore a_n=\frac{1}{2n^3+2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(4n^3+3n)a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+3n}{2n^3+2}$ ← 분모, 분자를 n^3으로 나눈다.

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n^2}}{2+\frac{2}{n^3}}$

$=\frac{4+0}{2+0}=2$

답 2

014

$\lim_{n\to\infty}(2n^3-3n+4)a_n$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{(n^3+3n+1)a_n\times\frac{2n^3-3n+4}{n^3+3n+1}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}(n^3+3n+1)a_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n+4}{n^3+3n+1}$ ← 분모, 분자를 n^3으로 나눈다.

$=5\times\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{1+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}$

$=5\times2=10$

답 ③

015

접근

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 분모와 분자의 차수가 같아야 함을 이용한다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn+1}{2n-3}=2$에서 $a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn+1}{2n-3}$은 발산하므로 $a=0$이어야 한다.

이때

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn+1}{2n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{2n-3}$ ← 분모, 분자를 n으로 나눈다.

$=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{1}{n}}{2-\frac{3}{n}}=\frac{b}{2}$

이므로

$\frac{b}{2}=2$ $\quad\therefore b=4$

$\therefore a+b=4$

답 ④

풍쌤 비법

미정계수가 포함되어 있는 수열의 극한이 수렴할 때, $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나누고, $\infty-\infty$ 꼴의 극한은 근호가 있는 쪽을 유리화하여 극한값을 미정계수를 사용하여 나타낸 후 이를 주어진 극한값과 비교한다.

016

$\lim_{n\to\infty}\frac{15}{\sqrt{n^2+kn}-\sqrt{n^2+1}}=3$에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{15}{\sqrt{n^2+kn}-\sqrt{n^2+1}}$ ← 분모를 유리화한다.

$=\lim_{n\to\infty}\frac{15(\sqrt{n^2+kn}+\sqrt{n^2+1})}{(\sqrt{n^2+kn}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+kn}+\sqrt{n^2+1})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{15(\sqrt{n^2+kn}+\sqrt{n^2+1})}{(n^2+kn)-(n^2+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{15(\sqrt{n^2+kn}+\sqrt{n^2+1})}{kn-1}$ ← 분모, 분자를 n, 즉 $\sqrt{n^2}$으로 나눈다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{15\left(\sqrt{1+\frac{k}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}{k-\frac{1}{n}}=\frac{30}{k}$$

이므로

$\frac{30}{k}=3$ $\quad\therefore k=10$

답 ⑤

017

$3n^2<(n^2+3)a_n<3n^2+2n+1$에서 각 변을 n^2+3으로 나누면

$$\frac{3n^2}{n^2+3}<a_n<\frac{3n^2+2n+1}{n^2+3}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2+3}=3,\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+1}{n^2+3}=3$$

최고차항의 계수의 비로 극한값을 구한다.

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=3$$

답 ③

풍쌤 비법

수열의 일반항 a_n을 포함한 $A<B<C$ 꼴의 부등식이 주어졌을 때, $\lim_{n\to\infty}$(a_n을 포함한 식)의 값을 구하려면 주어진 부등식을 $D<$(a_n을 포함한 식)$<E$ 꼴로 변형한 후 수열의 극한의 대소 관계를 이용한다.

018

$\sqrt{9n^2+4}<\sqrt{na_n}<3n+2$에서 각 변을 제곱하면

$9n^2+4<na_n<(3n+2)^2$

각 변을 n^2으로 나눈다.

$$\frac{9n^2+4}{n^2}<\frac{a_n}{n}<\frac{(3n+2)^2}{n^2}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+4}{n^2}=9,\ \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+12n+4}{n^2}=9$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=9$$

답 ④

참고

$a>0,\ b>0$일 때

$a>b \Longleftrightarrow a^2>b^2 \Longleftrightarrow \sqrt{a}>\sqrt{b}$

019

모든 자연수 n에 대하여

$$-1\le\sin\frac{n}{2}\pi\le1$$

이므로 각 변에 $3n^2$을 더하면

$$3n^2-1\le3n^2+\sin\frac{n}{2}\pi\le3n^2+1$$

다시 각 변에 $\frac{n}{n^3+2}$을 곱하면

$$\frac{3n^3-n}{n^3+2}\le\frac{n\left(3n^2+\sin\frac{n}{2}\pi\right)}{n^3+2}\le\frac{3n^3+n}{n^3+2}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-n}{n^3+2}=3,\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n}{n^3+2}=3$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3n^2+\sin\frac{n}{2}\pi\right)}{n^3+2}=3$$

답 3

020

접근

주어진 부등식을 a_{2n}을 포함한 식으로 변형하여 $\frac{a_{2n}}{2n^2+4}$의 값의 범위를 구한 후 수열의 극한의 대소 관계를 이용한다.

부등식 $|a_n-2n^2|\le1$이 모든 자연수 n에 대하여 성립하므로 n 대신 $2n$을 대입하여도 부등식은 성립한다.

즉, $|a_{2n}-2(2n)^2|\le1$이므로

$|a_{2n}-8n^2|\le1$

$\therefore\ -1\le a_{2n}-8n^2\le1$

각 변에 $8n^2$을 더하면

$8n^2-1\le a_{2n}\le8n^2+1$

각 변을 $2n^2+4$로 나누면

$$\frac{8n^2-1}{2n^2+4}\le\frac{a_{2n}}{2n^2+4}\le\frac{8n^2+1}{2n^2+4}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2-1}{2n^2+4}=4,\ \lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+1}{2n^2+4}=4$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{2n^2+4}=4$$

답 ④

021

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+4^{n+1}}{3^{n-1}-4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+4\times4^n}{\frac{1}{3}\times3^n-4^n}$$

분모, 분자를 4^n으로 나눈다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+4}{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}$$

$$=\frac{0+4}{0-1}=-4$$

답 -4

풍쌤 비법

r^n 꼴이 포함된 식의 극한은 r의 값의 범위를 확인하여 극한값을 구한다. 이때 $|r|<1$이면 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$임을 이용한다.

022

$x^n\left(\frac{x-1}{6}\right)^n=\left(\frac{x^2-x}{6}\right)^n$이므로 주어진 수열이 수렴하려면

$-1<\frac{x^2-x}{6}\le 1$

이어야 한다.

(i) $-1<\frac{x^2-x}{6}$에서

이차방정식 $x^2-x+6=0$의 판별식을 D라고 하면 $D=(-1)^2-4\times1\times6=-23<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2-x+6>0$이 성립한다.

$x^2-x>-6$, $x^2-x+6>0$

이때 $x^2-x+6>0$은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 이 부등식의 해는 모든 실수이다.

(ii) $\frac{x^2-x}{6}\le 1$에서

$x^2-x\le 6$, $x^2-x-6\le 0$

$(x+2)(x-3)\le 0 \qquad \therefore -2\le x\le 3$

(i), (ii)에서 $\quad -2\le x\le 3$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$-2+(-1)+0+1+2+3=3$

답 ⑤

023

주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\log_2 4k-3\le 1$

이어야 하므로

$2<\log_2 4k\le 4$, $\log_2 2^2<\log_2 4k\le \log_2 2^4$

$2^2<4k\le 2^4$, $4<4k\le 16$

$\therefore 1<k\le 4$

답 ④

024

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{2^n}\right)\left(a+\frac{1}{3^n}\right)=3a$

따라서 $3a=15$이므로 $\quad a=5$

답 ②

025

수열 $\{r^n\}$이 수렴하므로 $\quad -1<r\le 1$

ㄱ. $-1<r\le 1$에서

$-1\le -r<1$, $0\le 1-r<2$

즉, $0\le\frac{1-r}{3}<\frac{2}{3}$이므로 수열 $\left\{\left(\frac{1-r}{3}\right)^n\right\}$은 항상 수렴한다.

ㄴ. $-1<r\le 1$에서 $\quad -\frac{1}{3}<\frac{r}{3}\le\frac{1}{3}$

$2-\frac{1}{3}<2+\frac{r}{3}\le 2+\frac{1}{3}$

즉, $\frac{5}{3}<2+\frac{r}{3}\le\frac{7}{3}$이므로 수열 $\left\{\left(2+\frac{r}{3}\right)^n\right\}$은 수렴하지 않는다.

ㄷ. 수열 $\{r^n\}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{r^n}{3}\right)=1-\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}r^n$

즉, 수열 $\left\{1-\frac{r^n}{3}\right\}$은 항상 수렴한다.

ㄹ. 수열 $\{r^n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}r^n\ne -1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+r^n}=\frac{1}{1+\lim_{n\to\infty}r^n}$

즉, 수열 $\left\{\frac{1}{1+r^n}\right\}$은 항상 수렴한다.

따라서 항상 수렴하는 수열인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

026

$5^{n+1}-4^n<(3^{n+1}+5^{n-1})a_n<3^n+5^{n+1}$의 각 변을 $3^{n+1}+5^{n-1}$으로 나누면

$\frac{5^{n+1}-4^n}{3^{n+1}+5^{n-1}}<a_n<\frac{3^n+5^{n+1}}{3^{n+1}+5^{n-1}}$

이때

$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-4^n}{3^{n+1}+5^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\times5^n-4^n}{3\times3^n+\frac{1}{5}\times5^n}$

└ 분모, 분자를 5^n으로 나눈다.

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{3\times\left(\frac{3}{5}\right)^n+\frac{1}{5}}=25$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+5^{n+1}}{3^{n+1}+5^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+5\times5^n}{3\times3^n+\frac{1}{5}\times5^n}$

└ 분모, 분자를 5^n으로 나눈다.

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n+5}{3\times\left(\frac{3}{5}\right)^n+\frac{1}{5}}=25$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=25$

답 ④

027

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n-1}+3^{2n-1}}{4^{n-1}+a\times9^{n+1}}=\frac{1}{81}$에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n-1}+3^{2n-1}}{4^{n-1}+a\times9^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\times4^n+\frac{1}{3}\times9^n}{\frac{1}{4}\times4^n+9a\times9^n}$

└ 분모, 분자를 9^n으로 나눈다.

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{9}\right)^n+\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}\times\left(\frac{4}{9}\right)^n+9a}=\frac{1}{27a}$

이므로

$\frac{1}{27a}=\frac{1}{81} \qquad \therefore a=3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{3-a^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{3-3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times3^n}{3-\frac{1}{3}\times3^n}$

└ 분모, 분자를 3^n으로 나눈다.

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\frac{3}{3^n}-\frac{1}{3}}=-9$

답 ③

028

$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=5$이므로

$\lim_{n\to\infty}(a_{n+2}-a_{n+1})=5$, $\lim_{n\to\infty}(a_{n+3}-a_{n+2})=5$,

$\lim_{n\to\infty}(a_{n+4}-a_{n+3})=5$, $\lim_{n\to\infty}(a_{n+5}-a_{n+4})=5$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}(a_{n+5}-a_n)&=\lim_{n\to\infty}\{(a_{n+5}-a_{n+4})+(a_{n+4}-a_{n+3})+(a_{n+3}-a_{n+2})\\&\qquad+(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)\}\\&=\lim_{n\to\infty}(a_{n+5}-a_{n+4})+\lim_{n\to\infty}(a_{n+4}-a_{n+3})+\lim_{n\to\infty}(a_{n+3}-a_{n+2})\\&\qquad+\lim_{n\to\infty}(a_{n+2}-a_{n+1})+\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)\\&=5+5+5+5+5=25\end{aligned}$$

답 25

029

$a_{n+1}-a_n=\dfrac{4}{n(n+1)}=4\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입하면

$a_2-a_1=4\left(1-\dfrac{1}{2}\right)$

$a_3-a_2=4\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)$

$a_4-a_3=4\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)$

$\vdots$

$a_n-a_{n-1}=4\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$

위의 식들을 변끼리 더하여 정리하면

$a_n-a_1=4\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

$\therefore a_n=a_1+4\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=24$이고

$\lim_{n\to\infty}\left\{a_1+4\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right\}=a_1+4\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=a_1+4$

이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{a_1+4\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right\}$에서

$24=a_1+4\qquad\therefore a_1=20$

답 ③

참고

분수 꼴로 주어진 수열의 합은 부분분수로 변형하여 구한다.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+a)(k+b)}=\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k+b}\right)$ (단, $a\neq b$)

030

$4a_n-3b_n=c_n$이라고 하면

$b_n=\dfrac{4}{3}a_n-\dfrac{1}{3}c_n$

또, $\lim_{n\to\infty}c_n=12$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{c_n}{a_n}=0$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+2b_n}{a_n-b_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+2\left(\frac{4}{3}a_n-\frac{1}{3}c_n\right)}{a_n-\left(\frac{4}{3}a_n-\frac{1}{3}c_n\right)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{17}{3}a_n-\frac{2}{3}c_n}{-\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{3}c_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{17}{3}-\frac{2}{3}\times\frac{c_n}{a_n}}{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{c_n}{a_n}}\\&=-17\end{aligned}$$

분모, 분자를 a_n으로 나눈다.

답 ④

031

$a_nb_n=c_n$이라고 하면 $a_n=\dfrac{c_n}{b_n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}c_n=6$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{c_n}{b_n}=0$

한편

$$\begin{aligned}a_n{}^2b_n-a_nb_n-a_n+1&=a_n{}^2b_n-a_n-a_nb_n+1\\&=a_n(a_nb_n-1)-(a_nb_n-1)\\&=(a_n-1)(a_nb_n-1)\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2b_n-a_nb_n-a_n+1)&=\lim_{n\to\infty}(a_n-1)(a_nb_n-1)\\&=\left(\lim_{n\to\infty}a_n-1\right)\left(\lim_{n\to\infty}a_nb_n-1\right)\\&=(0-1)\times(6-1)=-5\end{aligned}$$

답 ②

032

이차방정식 $x^2-2a_nx+3a_{n+2}+4=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=a_n{}^2-3a_{n+2}-4=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2-3a_{n+2}-4)=0$이고 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+2}=\alpha$ $(\alpha\geq 0)$라고 하면

$\alpha^2-3\alpha-4=0$, $(\alpha+1)(\alpha-4)=0$

$\therefore \alpha=4$ $(\because \alpha>0)$

즉, $\lim_{n\to\infty}a_n=4$이다.

답 4

참고

이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라고 할 때

(1) $D>0$ ➡ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $D=0$ ➡ 중근 (서로 같은 두 실근)을 갖는다.

(3) $D<0$ ➡ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

033

$a_nb_n=\dfrac{(a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2})-(a_n-b_n)^2}{2}$이므로 조건 (나), (다)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2})-(a_n-b_n)^2}{2}$$
$$=\frac{\lim_{n\to\infty}(a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2})-\left\{\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\right\}^2}{2}$$
$$=\frac{29-3^2}{2}=10$$

한편 $(a_n+b_n)^2=(a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2})+2a_nb_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)^2=\lim_{n\to\infty}\{(a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2})+2a_nb_n\}$$
$$\therefore \left\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\right\}^2=\lim_{n\to\infty}(a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2})+2\lim_{n\to\infty}a_nb_n$$
$$=29+2\times10=49$$

이때 조건 (가)에 의하여 $a_n+b_n>0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=7$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{(a_n-b_n)(a_n+b_n)}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_nb_n}{\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\times\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)}$$
$$=\frac{10}{3\times7}=\frac{10}{21}$$

답 ④

다른 풀이

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$라고 하면

조건 (가)에 의하여

$\alpha\geq\beta\geq0$

또, 조건 (나)에 의하여

$\alpha-\beta=3$, $\alpha^2+\beta^2=29$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$\alpha=5$, $\beta=2$ ($\because$ $\alpha\geq0$, $\beta\geq0$)

즉, $\lim_{n\to\infty}a_n=5$, $\lim_{n\to\infty}b_n=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{(a_n-b_n)(a_n+b_n)}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n}{\left(\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n\right)}$$
$$=\frac{5\times2}{(5-2)(5+2)}=\frac{10}{21}$$

034

ㄱ은 옳다.

$a_n=\dfrac{(-1)^n+3}{2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은

$1, 2, 1, 2, \cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 발산한다.

ㄴ도 옳다. 수열 $\{a_n\}$은 $1, 2, 1, 2, \cdots$로 진동하므로 발산한다.

$b_n=p\times(-1)^{n+1}+q$이므로 수열 $\{b_n\}$은

$p+q, -p+q, p+q, -p+q, \cdots$

이때 $p=-p$, 즉 $p=0$이면 수열 $\{b_n\}$은 q에 수렴한다.

따라서 수열 $\{b_n\}$이 수렴하도록 하는 실수 p가 존재한다.

ㄷ은 옳지 않다.

수열 $\{a_n+b_n\}$은

$1+p+q, 2-p+q, 1+p+q, 2-p+q, \cdots$

이므로 $1+p=2-p$, 즉 $p=\dfrac{1}{2}$이면 수열 $\{a_n+b_n\}$은

$\dfrac{3}{2}+q$에 수렴한다.

또, 수열 $\{a_nb_n\}$은

$p+q, -2p+2q, p+q, -2p+2q, \cdots$

이므로 $p+q=-2p+2q$, 즉 $3p=q$이면 수열 $\{a_nb_n\}$은 $4p$에 수렴한다.

$p=\dfrac{1}{2}$, $3p=q$에서 $q=\dfrac{3}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\frac{3}{2}+q=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3,$$
$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=4p=4\times\frac{1}{2}=2$$

$a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}=(a_n+b_n)^2-2a_nb_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2})=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\}$$
$$=\left\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\right\}^2-2\lim_{n\to\infty}a_nb_n$$
$$=3^2-2\times2=5\neq6$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

다른 풀이

ㄷ은 옳지 않다.

$a_n=\dfrac{(-1)^n+3}{2}$, $b_n=p\times(-1)^{n+1}+q$이므로

$$a_n+b_n=\frac{(-1)^n+3}{2}+p\times(-1)^{n+1}+q$$
$$=\frac{1}{2}\times(-1)^n+\frac{3}{2}+(-p)\times(-1)^n+q$$
$$=\left(\frac{1}{2}-p\right)\times(-1)^n+\frac{3}{2}+q$$

수열 $\{a_n+b_n\}$이 수렴하려면 $\dfrac{1}{2}-p=0$이어야 하므로

$p=\dfrac{1}{2}$

따라서 $b_n=\dfrac{1}{2}\times(-1)^{n+1}+q$이므로

$$a_nb_n=\frac{(-1)^n+3}{2}\times\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^{n+1}+q\right\}$$
$$=\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^n+\frac{3}{2}\right\}\times\left\{-\frac{1}{2}\times(-1)^n+q\right\}$$
$$=-\frac{1}{4}\times(-1)^{2n}+\left(\frac{q}{2}-\frac{3}{4}\right)\times(-1)^n+\frac{3}{2}q$$
$$=\left(\frac{q}{2}-\frac{3}{4}\right)\times(-1)^n+\frac{3}{2}q-\frac{1}{4}$$

수열 $\{a_nb_n\}$이 수렴하려면 $\dfrac{q}{2}-\dfrac{3}{4}=0$이어야 하므로

$q=\dfrac{3}{2}$

035

접근

$a_n+S_n=b_n$으로 놓고 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용한다.

$a_n+S_n=b_n$ …… ㉠

이라고 하면

$a_{n-1}+S_{n-1}=b_{n-1}$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$(a_n-a_{n-1})+(S_n-S_{n-1})=b_n-b_{n-1}$

$a_n-a_{n-1}+a_n=4$

수열 $\{b_n\}$은 공차가 4인 등차수열이므로 $b_n-b_{n-1}=4$

$\therefore 2a_n - a_{n-1} = 4$

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = \alpha$라고 하면

$\lim_{n\to\infty}(2a_n - a_{n-1}) = 4$에서

$2\alpha - \alpha = 4 \qquad \therefore \alpha = 4$

즉, $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$이다.

답 4

참고

수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$a_1 = S_1,\ a_n = S_n - S_{n-1}\ (n \ge 2)$

036

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면 $a_1 = 3$이므로

$a_n = a_1 + d(n-1) = 3 + d(n-1)$

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = 13$에서

$3 - (3+d) + (3+2d) - (3+3d) + (3+4d) = 13$

$2d = 10 \qquad \therefore d = 5$

따라서 $a_n = 3 + 5(n-1) = 5n - 2$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n-2}{n} = \frac{5}{1} = 5$$

답 5

037

$S_n = n^2 + 4n$ …… ㉠

이므로

$S_{n-1} = (n-1)^2 + 4(n-1)\ (n \ge 2)$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$a_n = 2n + 3\ (n \ge 2)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n \times a_{n-1}}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)\times\{2(n-1)+3\}}{n^2+4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+8n+3}{n^2+4n} = 4$$

답 4

038

a_n, b_n을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 x에 대한 이차방정식은

$x^2 - (a_n + b_n)x + a_n b_n = 0$

이므로 조건 (가), (나)에 의하여

$x^2 - 2nx - 2 = 0 \qquad \therefore x = n \pm \sqrt{n^2+2}$

$a_n < b_n$이므로 $\quad a_n = n - \sqrt{n^2+2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} n(n - \sqrt{n^2+2})$ 분모를 1로 놓고 분자를 유리화한다.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-\sqrt{n^2+2})(n+\sqrt{n^2+2})}{n+\sqrt{n^2+2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2n}{n+\sqrt{n^2+2}}$$

분모, 분자를 n, 즉 $\sqrt{n^2}$으로 나눈다.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{1+1} = -1$$

답 ②

039

$f(x) = n$, 즉 $(x-5)^2 = n$에서

$x - 5 = \pm\sqrt{n} \qquad \therefore x = 5 \pm \sqrt{n}$

따라서 $\alpha = 5 - \sqrt{n},\ \beta = 5 + \sqrt{n}$ 또는 $\alpha = 5 + \sqrt{n},\ \beta = 5 - \sqrt{n}$이므로

$g(n) = |\alpha - \beta| = 2\sqrt{n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt{2n}\{g(2n+1) - g(2n-1)\}$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{2n}(2\sqrt{2n+1} - 2\sqrt{2n-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\sqrt{2n}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})$$

분모를 1로 놓고 분자를 유리화한다.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{2n}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

분모, 분자를 $\sqrt{n}$으로 나눈다.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = 2$$

답 ②

040

$P(x) = 2(x+2)^{2n} + (2x+7)^n$이라고 하면 나머지정리에 의하여

$a_n = P(1) = 2\times 3^{2n} + 9^n = 2\times 3^{2n} + 3^{2n} = 3^{2n+1}$

$b_n = P(-2) = 3^n$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_3 a_n + \log_3 b_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_3 3^{2n+1} + \log_3 3^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)+n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n} = 3$$

답 3

참고

(1) 나머지정리

다항식 $P(x)$를 일차식 $x - \alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라고 하면 ➡ $R = P(\alpha)$

(2) 로그의 성질

$a > 0,\ a \ne 1,\ M > 0,\ N > 0$일 때

① $\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1$

② $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

③ $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

④ $\log_a M^k = k\log_a M$ (단, k는 실수이다.)

041

$\sqrt{n^2+4n+4} < \sqrt{n^2+6n+4} < \sqrt{n^2+6n+9}$이므로

$\sqrt{(n+2)^2} < \sqrt{n^2+6n+4} < \sqrt{(n+3)^2}$

$\therefore n+2 < \sqrt{n^2+6n+4} < n+3$

즉, $\sqrt{n^2+6n+4}$의 정수 부분이 $n+2$이므로

$a_n = \sqrt{n^2+6n+4} - (n+2)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+6n+4}-(n+2)\}$$ 분모를 1로 놓고 분자를 유리화한다.
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{n^2+6n+4}-(n+2)\}\{\sqrt{n^2+6n+4}+(n+2)\}}{\sqrt{n^2+6n+4}+(n+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+6n+4}+(n+2)}$$ 분모, 분자를 n, 즉 $\sqrt{n^2}$으로 나눈다.
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{6}{n}+\frac{4}{n^2}}+\left(1+\frac{2}{n}\right)}$$
$$=\frac{2}{1+1}=1$$

답 ⑤

042

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-2k+1)$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}-n^2=\frac{2n^3+n}{3}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-2}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-2}{\frac{2n^3+n}{3}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^3-6}{2n^3+n}$$ 분모, 분자를 n^3으로 나눈다.
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9-\frac{6}{n^3}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{9}{2}$$

답 ⑤

043

▸ 접근

곱셈 공식과 자연수의 거듭제곱의 합의 공식을 이용하여 a_n을 구한다.

$(1+2+3+\cdots+n)^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+2a_n$이므로
$$a_n=\frac{1}{2}\{(1+2+3+\cdots+n)^2-(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2-\sum_{k=1}^{n}k^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$
$$=\frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{24}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{200a_n}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{25(n+1)(3n^2-n-2)}{3n^3}$$ 분모, 분자를 n^3으로 나눈다.
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{25\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{3}$$
$$=\frac{25\times1\times3}{3}=25$$

답 ②

044

수열 $\{a_n\}$이 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면
$$a_n=a+(n-1)d$$
$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}=\frac{1}{18}$에서
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a+(n-1)d}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{a-d}{n}+d}=\frac{1}{d}$$ 분모, 분자를 n으로 나눈다.
이므로
$$\frac{1}{d}=\frac{1}{18}\qquad \therefore d=18$$
$S_n=\frac{n\{2a+18(n-1)\}}{2}=n(a+9n-9)$이므로
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n+1)(9n+a)}-\sqrt{n(9n+a-9)}\}$$ 분모를 1로 놓고 분자를 유리화한다.
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{(n+1)(9n+a)}\}^2-\{\sqrt{n(9n+a-9)}\}^2}{\sqrt{(n+1)(9n+a)}+\sqrt{n(9n+a-9)}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{18n+a}{\sqrt{(n+1)(9n+a)}+\sqrt{n(9n+a-9)}}$$ 분모, 분자를 n, 즉 $\sqrt{n^2}$으로 나눈다.
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{18+\frac{a}{n}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(9+\frac{a}{n}\right)}+\sqrt{9+\frac{a-9}{n}}}$$
$$=\frac{18}{3+3}=3$$

답 ③

참고

(1) 등차수열의 합

등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

① 첫째항이 a, 제n항이 l일 때 ➡ $S_n=\frac{n(a+l)}{2}$

② 첫째항이 a, 공차가 d일 때 ➡ $S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

(2) 등차수열의 귀납적 정의

① $a_{n+1}-a_n=d$ (일정) $\Longleftrightarrow a_{n+1}=a_n+d$
수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열이다.

② $a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1} \Longleftrightarrow 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$
a_{n+1}은 a_n과 a_{n+2}의 등차중항이다.
$$\Longleftrightarrow a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$$

045

$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=S_n$이라고 하면 조건 (가)에 의하여
$$S_n=\frac{1}{n+1}\ (n\geq1)$$
이때
$$a_n+b_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$
$$=-\frac{1}{n(n+1)}=-\frac{1}{n^2+n}\ (n\geq2)$$
이므로
$$a_n=-\frac{1}{n^2+n}-b_n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n^2a_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n^2}{n^2+n}-n^2b_n\right)$$
$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}-\lim_{n\to\infty}n^2b_n$$
└ 분모, 분자를 n^2으로 나눈다.
$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}-2\ (\because \text{조건 (나)})$$
$$=-1-2=-3$$

답 ①

046

$a_n=\log_2\frac{n+2}{n+1}$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$=\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}+\log_2\frac{5}{4}+\cdots+\log_2\frac{n+2}{n+1}$

$=\log_2\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{n+2}{n+1}\right)$

$=\log_2\frac{n+2}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2^{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\log_2\frac{n+2}{2}}}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{2}}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n}$$
└ 분모, 분자를 n으로 나눈다.
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{2}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

047

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^x}\left\{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{25}-\frac{1}{n^{25}}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^x}\left\{\left(\frac{n^2+1}{n}\right)^{25}-\frac{1}{n^{25}}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^x}\left\{\frac{(n^2+1)^{25}-1}{n^{25}}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)^{25}-1}{n^{x+25}}$$

이 극한값이 존재하려면 분모의 차수가 분자의 차수보다 크거나 같아야 하므로

$x+25\geq 2\times 25$ $\quad\therefore x\geq 25$

따라서 실수 x의 최솟값은 25이다.

답 ③

048

$A_n(n, \sqrt{4n+1})$, $B_n(n, \sqrt{n-2})$이므로

$a_n=\overline{OA_n}=\sqrt{n^2+4n+1}$, $b_n=\overline{OB_n}=\sqrt{n^2+n-2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{18}{a_n-b_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{18}{\sqrt{n^2+4n+1}-\sqrt{n^2+n-2}}$$
┌ 분모를 유리화한다.
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{18(\sqrt{n^2+4n+1}+\sqrt{n^2+n-2})}{(\sqrt{n^2+4n+1}-\sqrt{n^2+n-2})(\sqrt{n^2+4n+1}+\sqrt{n^2+n-2})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6(\sqrt{n^2+4n+1}+\sqrt{n^2+n-2})}{n+1}$$
└ 분모, 분자를 n, 즉 $\sqrt{n^2}$으로 나눈다.
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}\right)}{1+\frac{1}{n}}$$
$$=\frac{6(1+1)}{1}=12$$

답 ③

참고

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

(1) 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

(2) 원점 O와 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는

$\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

049

$x^2+(y-2)^2=4$에서

$x^2+y^2-4y=0$

$(x-n)^2+y^2=n^2$에서

$x^2+y^2-2nx=0$

두 원 $x^2+y^2-4y=0$, $x^2+y^2-2nx=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4y-(x^2+y^2-2nx)=0$

$\therefore y=\frac{1}{2}nx$

직선 $y=\frac{1}{2}nx$와 원 $x^2+y^2-4y=0$의 교점의 x좌표는

$x^2+\left(\frac{1}{2}nx\right)^2-4\times\frac{1}{2}nx=0$에서

$\frac{n^2+4}{4}x^2-2nx=0$, $x\left(\frac{n^2+4}{4}x-2n\right)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{8n}{n^2+4}$

$\therefore A_n\left(\frac{8n}{n^2+4}, \frac{4n^2}{n^2+4}\right)$

$B_n(n, 0)$이므로

$$x_n=\frac{2\times n+3\times\frac{8n}{n^2+4}}{2+3}=\frac{2n^3+32n}{5n^2+20}$$

$$y_n=\frac{2\times 0+3\times\frac{4n^2}{n^2+4}}{2+3}=\frac{12n^2}{5n^2+20}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{x_n}+5y_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+20}{n^2+16}+\frac{12n^2}{n^2+4}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+20}{n^2+16}+\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2}{n^2+4}$$
└ 분모, 분자를 n^2으로 나눈다.
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{20}{n^2}}{1+\frac{16}{n^2}}+\lim_{n\to\infty}\frac{12}{1+\frac{4}{n^2}}$$
$$=5+12=17$$

답 ④

참고

(1) 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식 (공통인 현의 방정식)

두 점에서 만나는 두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$,

$x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+ax+by+c-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$

즉, $(a-a')x+(b-b')y+c-c'=0$

(2) 좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점

두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$를 잇는 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 하고 선분 AB의 중점을 M이라고 하면

$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

$\mathrm{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$ (단, $m\neq n$)

$\mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

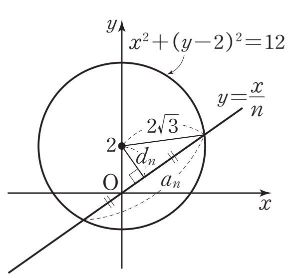
050

접근

원의 중심과 직선 $y=\frac{x}{n}$ 사이의 거리와 원의 반지름의 길이를 이용하여 a_n을 구한다.

원 $x^2+(y-2)^2=12$의 중심 $(0, 2)$와 직선 $y=\frac{x}{n}$, 즉 $x-ny=0$ 사이의 거리를 d_n이라고 하면

$$d_n=\frac{|0-2n|}{\sqrt{1^2+(-n)^2}}=\frac{2n}{\sqrt{1+n^2}}$$



원 $x^2+(y-2)^2=12$의 반지름의 길이가 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$이므로

$$a_n=2\sqrt{(2\sqrt{3})^2-d_n^{\,2}}$$
$$=2\sqrt{12-\frac{4n^2}{1+n^2}}$$
$$=2\sqrt{\frac{8n^2+12}{1+n^2}}$$
$$=4\sqrt{\frac{2n^2+3}{1+n^2}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n^{\,2}=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{32n^2+48}{1+n^2}}_{\text{분모, 분자를 } n^2\text{으로 나눈다.}}=\lim_{n\to\infty}\frac{32+\frac{48}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+1}=32$$

답 32

다른 풀이

$y=\frac{x}{n}$와 $x^2+(y-2)^2=12$를 연립하여 풀면

$x=\frac{2n\pm2n\sqrt{2n^2+3}}{n^2+1}$, $y=\frac{2\pm2\sqrt{2n^2+3}}{n^2+1}$ (복부호동순)

따라서 직선 $y=\frac{x}{n}$와 원 $x^2+(y-2)^2=12$의 교점의 좌표는

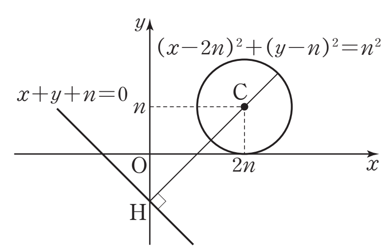
$\left(\frac{2n+2n\sqrt{2n^2+3}}{n^2+1}, \frac{2+2\sqrt{2n^2+3}}{n^2+1}\right)$,

$\left(\frac{2n-2n\sqrt{2n^2+3}}{n^2+1}, \frac{2-2\sqrt{2n^2+3}}{n^2+1}\right)$이므로

$$a_n=\sqrt{\left(\frac{4n\sqrt{2n^2+3}}{n^2+1}\right)^2+\left(\frac{4\sqrt{2n^2+3}}{n^2+1}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{16n^2(2n^2+3)+16(2n^2+3)}{(n^2+1)^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{16(2n^2+3)(n^2+1)}{(n^2+1)^2}}=4\sqrt{\frac{2n^2+3}{n^2+1}}$$

051

원 $(x-2n)^2+(y-n)^2=n^2$의 중심을 C라고 하면 $\mathrm{C}(2n, n)$



위의 그림과 같이 원 $(x-2n)^2+(y-n)^2=n^2$의 중심 C에서 직선 $x+y+n=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{|2n+n+n|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4n}{\sqrt{2}}=2n\sqrt{2}$$

이때 원 $(x-2n)^2+(y-n)^2=n^2$의 반지름의 길이가 n이므로

$M_n=\overline{\mathrm{CH}}+n=(2\sqrt{2}+1)n$, $m_n=\overline{\mathrm{CH}}-n=(2\sqrt{2}-1)n$

$\therefore a_n=M_nm_n=(2\sqrt{2}+1)n\times(2\sqrt{2}-1)n=7n^2$

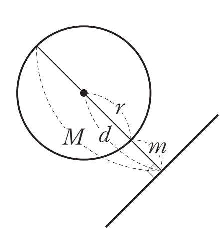
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}7k^2=\lim_{n\to\infty}\frac{21}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left\{\frac{21}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}}_{\text{분모, 분자를 } n^3\text{으로 나눈다.}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{21}{1}\times\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}\right\}$$
$$=\frac{21\times2}{6}=7$$

답 ②

참고

원 위의 점과 직선 사이의 거리

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라고 할 때, 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 하면



$M=d+r$, $m=d-r$

052

$\frac{n}{20}-1<\left[\frac{n}{20}\right]\leq\frac{n}{20}$이고 n이 자연수이므로

$\frac{1}{n}\left(\frac{n}{20}-1\right)<\frac{1}{n}\left[\frac{n}{20}\right]\leq\frac{1}{n}\times\frac{n}{20}$

$\frac{1}{20}-\frac{1}{n}<\frac{1}{n}\left[\frac{n}{20}\right]\leq\frac{1}{20}$

이때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{20}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{20}=\frac{1}{20}$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{n}{20}\right]=\frac{1}{20}$

따라서 $X=\frac{1}{20}$이므로

$80X=80\times\frac{1}{20}=4$

답 ②

053

조건 (나)에서 $\frac{4n^3-n^2}{3n+2}<a_n+b_n<\frac{4n^3+n^2}{3n-2}$이므로 각 변을 n^2으로 나누면

$\frac{4n-1}{3n+2}<\frac{a_n}{n^2}+\frac{b_n}{n^2}<\frac{4n+1}{3n-2}$

이때

$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{4}{3}$

분모, 분자를 n으로 나눈다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{4}{3}$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}+\frac{b_n}{n^2}\right)=\frac{4}{3}$

조건 (가)에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{2}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}=\frac{4}{3}-\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_n}{n^2}}{\frac{a_n}{n^2}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{5}{3}$

답 ⑤

054

접근

주어진 부등식과 자연수의 거듭제곱의 합 공식을 이용하여 $a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}$을 포함한 부등식을 유도한 후 수열의 극한의 대소 관계를 이용한다.

$3n^4-6n^3+3n^2<a_n<3n^4+6n^3+3n^2$의 각 변을 n^2으로 나누면

$3n^2-6n+3<\frac{a_n}{n^2}<3n^2+6n+3$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}(3k^2-6k+3)<\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}<\sum_{k=1}^{n}(3k^2+6k+3)$

이때

$\sum_{k=1}^{n}(3k^2-6k+3)$

$=3\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k+3n$

$=3\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-6\times\frac{n(n+1)}{2}+3n$

$=\frac{2n^3-3n^2+n}{2}$

$\sum_{k=1}^{n}(3k^2+6k+3)$

$=3\sum_{k=1}^{n}k^2+6\sum_{k=1}^{n}k+3n$

$=3\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+6\times\frac{n(n+1)}{2}+3n$

$=\frac{2n^3+9n^2+13n}{2}$

이므로

$\frac{2n^3-3n^2+n}{2}<\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}<\frac{2n^3+9n^2+13n}{2}$

각 변을 $2n^3$으로 나누면

$\frac{1}{2}-\frac{3}{4n}+\frac{1}{4n^2}<\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}}{2n^3}<\frac{1}{2}+\frac{9}{4n}+\frac{13}{4n^2}$

이때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4n}+\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{1}{2}$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{9}{4n}+\frac{13}{4n^2}\right)=\frac{1}{2}$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}}{2n^3}=\frac{1}{2}$

즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}}{2n^3}=\frac{1}{2}$

답 ②

055

조건 (가)에서 이차방정식 $nx^2-(3n+1)x+n^2a_n=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라고 하면

$D_1=(3n+1)^2-4n^3a_n>0$

$\therefore a_n<\frac{(3n+1)^2}{4n^3}$ …… ㉠

조건 (나)에서 이차방정식 $x^2-(3n-1)x+(n^3+1)a_n=0$이 서로 다른 두 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라고 하면

$D_2=(3n-1)^2-4(n^3+1)a_n<0$

$\therefore a_n>\frac{(3n-1)^2}{4(n^3+1)}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{(3n-1)^2}{4(n^3+1)}<a_n<\frac{(3n+1)^2}{4n^3}$

각 변에 n을 곱하여 정리하면

$\frac{9n^3-6n^2+n}{4n^3+4}<na_n<\frac{9n^2+6n+1}{4n^2}$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9n^3-6n^2+n}{4n^3+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{9-\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{4}{n^3}}=\frac{9}{4}$$

└ 분모, 분자를 n^3으로 나눈다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+6n+1}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{9+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}{4}=\frac{9}{4}$$

└ 분모, 분자를 n^2으로 나눈다.

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\frac{9}{4}$$

답 $\frac{9}{4}$

056

$a_n=P(3)=3\times3^n+5\times3+1=3^{n+1}+16$,

$b_n=P(5)=3\times5^n+5\times5+1=3\times5^n+26$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{5^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+3\times5^n+42}{5^n-1}$$

└ 분모, 분자를 5^n으로 나눈다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{3}{5}\right)^n+3+\frac{42}{5^n}}{1-\frac{1}{5^n}}=3$$

답 ③

057

주어진 수열은

$2^{\frac{1}{2}},\ 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}},\ 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}},\ \cdots$

이므로 제n항을 a_n이라고 하면

$$a_n=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=2^{\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}}=2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

└ 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합

따라서 구하는 극한값은

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=2$$

답 ③

참고

등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

(1) $r\neq1$일 때 ➡ $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2) $r=1$일 때 ➡ $S_n=na$

058

$\log a_{n+1}=1+\log a_n$에서

$\log a_{n+1}=\log 10a_n \qquad \therefore a_{n+1}=10a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 9, 공비가 10인 등비수열이므로

$a_n=9\times10^{n-1}$, $S_n=\frac{9(10^n-1)}{10-1}=10^n-1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_2}{9}\right)^n}{a_n+S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10^n}{9\times10^{n-1}+(10^n-1)}$$

└ 분모, 분자를 10^n으로 나눈다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{9}{10}+1-\frac{1}{10^n}}=\frac{10}{19}$$

답 ①

참고

등비수열의 귀납적 정의

(1) $a_{n+1}\div a_n=r$ (일정) $\Longleftrightarrow a_{n+1}=ra_n$

└ 수열 $\{a_n\}$은 공비가 r인 등비수열이다.

(2) $a_{n+1}\div a_n=a_{n+2}\div a_{n+1} \Longleftrightarrow a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$

└ a_{n+1}은 a_n과 a_{n+2}의 등비중항이다. $\Longleftrightarrow a_{n+1}=\pm\sqrt{a_na_{n+2}}$

059

이차방정식 $x^2-6a_nx+a_{n+1}{}^2=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(3a_n)^2-a_{n+1}{}^2=0$

$(3a_n+a_{n+1})(3a_n-a_{n+1})=0$

모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이므로

$3a_n-a_{n+1}=0 \qquad \therefore a_{n+1}=3a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열이므로

$a_n=3\times3^{n-1}=3^n$, $S_n=\frac{3(3^n-1)}{3-1}=\frac{3}{2}(3^n-1)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}(3^n-1)}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{3}{2}$$

답 ③

060

조건 (가)에서 $4^n<a_n<4^n+1$이므로 각 변을 4^n으로 나누면

$1<\frac{a_n}{4^n}<1+\frac{1}{4^n}$

이때

$\lim_{n\to\infty}1=1$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4^n}\right)=1$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=1$$

조건 (나)에서 $2+2^2+2^3+\cdots+2^n<b_n<2^{n+1}$이고

$2+2^2+2^3+\cdots+2^n=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$이므로

$2^{n+1}-2<b_n<2^{n+1}$

각 변을 2^n으로 나누면

$2-\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{b_n}{2^n}<2$

이때

$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2$, $\lim_{n\to\infty}2=2$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{2^n}=2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+b_n}{2a_n+2^n b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4a_n}{4^n}+\frac{b_n}{4^n}}{\frac{2a_n}{4^n}+\frac{2^n b_n}{4^n}}$$

분모, 분자를 4^n으로 나눈다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times\frac{a_n}{4^n}+\frac{1}{2^n}\times\frac{b_n}{2^n}}{2\times\frac{a_n}{4^n}+\frac{b_n}{2^n}}$$

$$=\frac{4\times1+0\times2}{2\times1+2}=1$$

답 ③

061

(i) $|r|>1$일 때

$\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{3+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{3}{r^n}+1}=1$$

분모, 분자를 r^n으로 나눈다.

(ii) $|r|<1$일 때

$\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{3+r^n}=0$

(iii) $r=1$일 때

$\lim_{n\to\infty}r^n=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{3+r^n}=\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}$

(iv) $r=-1$일 때

수열 $\{r^n\}$은 $-1, 1, -1, 1, \cdots$이므로 수열 $\left\{\frac{r^n}{3+r^n}\right\}$은 $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\cdots$이다. 즉, 수열 $\left\{\frac{r^n}{3+r^n}\right\}$은 진동(발산)한다.

(i)~(iv)에 의하여 $X=\left\{0, \frac{1}{4}, 1\right\}$

따라서 $a=3$, $b=0+\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$이므로

$a+4b=3+4\times\frac{5}{4}=8$

답 8

062

(i) $a>b$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+2b^{n+1}}{2a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+2b\left(\frac{b}{a}\right)^n}{2+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=\frac{a}{2}$$

분모, 분자를 a^n으로 나눈다.

즉, $\frac{a}{2}=6$이므로 $a=12$

따라서 순서쌍 (a, b)는

$(12, 11)$, $(12, 10)$, $(12, 9)$, $(12, 8)$, $(12, 7)$, $(12, 6)$, $(12, 5)$, $(12, 4)$, $(12, 3)$, $(12, 2)$, $(12, 1)$

(ii) $a=b$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+2b^{n+1}}{2a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+2a^{n+1}}{2a^n+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{a^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}a=a$$

이므로 $a=6$

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(6, 6)$

(iii) $a<b$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+2b^{n+1}}{2a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left(\frac{a}{b}\right)^n+2b}{2\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}=2b$$

분모, 분자를 b^n으로 나눈다.

즉, $2b=6$이므로 $b=3$

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(1, 3)$, $(2, 3)$

수열 $\left\{\left(\frac{a-1}{b^2}\right)^n\right\}$은 첫째항과 공비가 모두 $\frac{a-1}{b^2}$이므로 수렴하려면

$-1<\frac{a-1}{b^2}\le1$이어야 한다.

즉, $-b^2+1<a\le b^2+1$이므로 (i), (ii), (iii)에서 이를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(1, 3)$, $(2, 3)$, $(6, 6)$, $(12, 4)$, $(12, 5)$, $(12, 6)$, $(12, 7)$, $(12, 8)$, $(12, 9)$, $(12, 10)$, $(12, 11)$

의 11개이다.

답 11

참고

첫째항 $\frac{a-1}{b^2}$이 0인 수열은 모든 항이 0이므로 수열은 0으로 수렴한다. $\frac{a-1}{b^2}=0$일 때 $a=1$이므로 (iii)에서 $b=3$이다.

063

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-3^n}{x^n+3^n}$에서

(i) $|x|>3$, 즉 $x<-3$ 또는 $x>3$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{3}{x}\right)^n\right|=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-3^n}{x^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{3}{x}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{x}\right)^n}=1$$

분모, 분자를 x^n으로 나눈다.

(ii) $|x|<3$, 즉 $-3<x<3$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-3^n}{x^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^n-1}{\left(\frac{x}{3}\right)^n+1}=-1$$

분모, 분자를 3^n으로 나눈다.

(iii) $x=3$일 때

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-3^n}{x^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-3^n}{3^n+3^n}=0$$

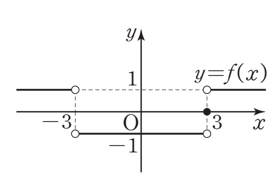
(iv) $x=-3$일 때

$f(x)$는 정의되지 않는다.

(i)~(iv)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x<-3 \text{ 또는 } x>3)\\ -1 & (-3<x<3)\\ 0 & (x=3)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x\to a-}f(x)<\lim_{x\to a+}f(x)$를 만족시키는

우극한값이 좌극한값보다 큰 x의 값을 구한다.

실수 a의 값은 3이다.

답 ⑤

참고

함수 $f(x)$가 x^n이 포함된 극한으로 정의된 경우에는 x의 값의 범위를 $|x|>1$, $|x|<1$, $x=1$, $x=-1$로 나누어서 $f(x)$를 구한다. 이 문제에서는 함수 $f(x)$에 x^n과 3^n이 함께 포함되어 있으므로 x의 값의 범위를 $|x|>3$, $|x|<3$, $x=3$, $x=-3$으로 나누어서 $f(x)$를 구한다.

064

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$에서

(i) $|x|>1$, 즉 $x<-1$ 또는 $x>1$일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}}_{\text{분모, 분자를 } x^{2n}\text{으로 나눈다.}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=1$$

(ii) $|x|<1$, 즉 $-1<x<1$일 때

$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}=0$$

(iii) $x=\pm1$일 때

$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\\ 0 & (-1<x<1)\\ \frac{1}{2} & (x=\pm1)\end{cases}$$

함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$g(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라고 하자.

함수 $f(x)$가 $x=-1$과 $x=1$에서 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=-1$과 $x=1$에서 연속이어야 한다.

(iv) $x=-1$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$$

즉, $1-a+b=0=\frac{1}{2}(1-a+b)$이어야 하므로

$a-b=1$ …… ㉠

(v) $x=1$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=f(1)g(1)$$

즉, $0=1+a+b=\frac{1}{2}(1+a+b)$이어야 하므로

$a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-1$

따라서 $g(x)=x^2-1$이므로

$g(8)=8^2-1=63$

답 63

참고

함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

065

$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{3}{5}$의 n에 차례대로 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 대입하면

$\frac{a_2}{a_1}<\frac{3}{5}$, $\frac{a_3}{a_2}<\frac{3}{5}$, $\frac{a_4}{a_3}<\frac{3}{5}$, $\cdots$, $\frac{a_n}{a_{n-1}}<\frac{3}{5}$

위의 부등식들을 변끼리 곱하여 정리하면

$\frac{a_n}{a_1}<\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로

$0<a_n<a_1\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

이때

$\lim_{n\to\infty}0=0$, $\lim_{n\to\infty}\left\{a_1\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}=0$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{-6n^2+n+5a_n}{3n^2-2n-a_n}}_{\text{분모, 분자를 } n^2\text{으로 나눈다.}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-6+\frac{1}{n}+\frac{5a_n}{n^2}}{3-\frac{2}{n}-\frac{a_n}{n^2}}$$

$$=\frac{-6}{3}=-2$$

답 ①

다른 풀이

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이고

$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{3}{5}$이므로 $0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$a_1>a_2>a_3>\cdots>a_n>a_{n+1}>\cdots>0$

$\therefore$ $0<a_n<a_1$

각 변을 n^2으로 나누면

$0<\frac{a_n}{n^2}<\frac{a_1}{n^2}$

이때

$\lim_{n\to\infty}0=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{n^2}=0$ ($\because$ a_1은 상수)

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=0$

066

$a_n=\lim_{k\to\infty}\frac{20^{k+1}+(5n)^k}{20^k+n^{2k}}$에서

(i) $1\le n\le3$일 때, $n^2<5n<20$이므로

$0<\frac{n^2}{20}<1$, $0<\frac{5n}{20}<1$

$\therefore$ $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{n^2}{20}\right)^k=0$, $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{5n}{20}\right)^k=0$

$$\therefore\ a_n=\lim_{k\to\infty}\underbrace{\frac{20^{k+1}+(5n)^k}{20^k+n^{2k}}}_{\text{분모, 분자를 }20^k\text{으로 나눈다.}}=\lim_{k\to\infty}\frac{20+\left(\frac{5n}{20}\right)^k}{1+\left(\frac{n^2}{20}\right)^k}=20$$

(ii) $n=4$일 때, $n^2<5n=20$이므로

$$0<\frac{n^2}{5n}<1,\ \frac{20}{5n}=1$$

$$\therefore\ \lim_{k\to\infty}\left(\frac{n^2}{5n}\right)^k=0,\ \lim_{k\to\infty}\left(\frac{20}{5n}\right)^k=1$$

$$\therefore\ a_n=\lim_{k\to\infty}\underbrace{\frac{20^{k+1}+(5n)^k}{20^k+n^{2k}}}_{\text{분모, 분자를 }(5n)^k\text{으로 나눈다.}}=\lim_{k\to\infty}\frac{20\left(\frac{20}{5n}\right)^k+1}{\left(\frac{20}{5n}\right)^k+\left(\frac{n^2}{5n}\right)^k}=21$$

(iii) $n=5$일 때, $20<5n=n^2$이므로

$$\frac{n^2}{5n}=1,\ 0<\frac{20}{5n}<1$$

$$\therefore\ \lim_{k\to\infty}\left(\frac{n^2}{5n}\right)^k=1,\ \lim_{k\to\infty}\left(\frac{20}{5n}\right)^k=0$$

$$\therefore\ a_n=\lim_{k\to\infty}\underbrace{\frac{20^{k+1}+(5n)^k}{20^k+n^{2k}}}_{\text{분모, 분자를 }(5n)^k\text{으로 나눈다.}}=\lim_{k\to\infty}\frac{20\left(\frac{20}{5n}\right)^k+1}{\left(\frac{20}{5n}\right)^k+\left(\frac{n^2}{5n}\right)^k}=1$$

(iv) $n\ge6$일 때, $20<5n<n^2$이므로

$$0<\frac{20}{n^2}<1,\ 0<\frac{5n}{n^2}<1$$

$$\therefore\ \lim_{k\to\infty}\left(\frac{20}{n^2}\right)^k=0,\ \lim_{k\to\infty}\left(\frac{5n}{n^2}\right)^k=0$$

$$\therefore\ a_n=\lim_{k\to\infty}\underbrace{\frac{20^{k+1}+(5n)^k}{20^k+n^{2k}}}_{\text{분모, 분자를 }(n^2)^k\text{으로 나눈다.}}=\lim_{k\to\infty}\frac{20\left(\frac{20}{n^2}\right)^k+\left(\frac{5n}{n^2}\right)^k}{\left(\frac{20}{n^2}\right)^k+1}=0$$

(i)~(iv)에 의하여

$\sum_{i=1}^{5}a_i=20\times3+21+1=82$

이고 $m\ge6$일 때 $\sum_{i=1}^{m}a_i=82$이다.

따라서 $\sum_{i=1}^{m}(a_i+2i)\ge400$을 만족시키는 자연수 m은 $m\ge6$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}(a_i+2i)&=\sum_{i=1}^{m}a_i+2\sum_{i=1}^{m}i\\&=82+2\times\frac{m(m+1)}{2}\\&=m(m+1)+82\end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^{m}(a_i+2i)\ge400$에서

$m(m+1)+82\ge400\qquad\therefore\ m(m+1)\ge318$

이때 $17\times18=306$, $18\times19=342$이므로 자연수 m의 최솟값은 18이다.

답 ②

참고

$m=5$일 때

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}(a_i+2i)&=\sum_{i=1}^{5}(a_i+2i)=\sum_{i=1}^{5}a_i+2\sum_{i=1}^{5}i\\&=82+2\times\frac{5\times6}{2}=112\end{aligned}$$

이므로 $m\le5$이면 $\sum_{i=1}^{m}(a_i+2i)\le112$이다.

따라서 $\sum_{i=1}^{m}(a_i+2i)\ge400$을 만족시키는 자연수 m은 $m\ge6$이다.

067

접근

a_n의 정수 부분과 소수 부분을 각각 각 자릿수의 합으로 나타낸 후 등비수열의 합의 공식을 이용하여 b_n과 c_n을 구한다.

$a_n=\underbrace{22\cdots2}_{n\text{개}}.\underbrace{22\cdots2}_{n\text{개}}\underbrace{44\cdots4}_{n\text{개}}$ 이므로

$$\begin{aligned}b_n&=2\underbrace{(10^{n-1}+10^{n-2}+10^{n-3}+\cdots+1)}_{\text{첫째항이 1, 공비가 10인 등비수열의 첫째항부터 제}n\text{항까지의 합}}\\&=2\times\frac{10^n-1}{10-1}=\frac{2}{9}(10^n-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_n&=2\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^n}\right)\\&\qquad+4\left(\frac{1}{10^{n+1}}+\frac{1}{10^{n+2}}+\frac{1}{10^{n+3}}+\cdots+\frac{1}{10^{2n}}\right)\\&=2\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^n}\right)\\&\qquad+\frac{4}{10^n}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^n}\right)\\&=\left(2+\frac{4}{10^n}\right)\underbrace{\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^n}\right)}_{\text{첫째항이 }\frac{1}{10}\text{, 공비가 }\frac{1}{10}\text{인 등비수열의 첫째항부터 제}n\text{항까지의 합}}\\&=\left(2+\frac{4}{10^n}\right)\times\frac{\frac{1}{10}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{10}}\\&=\frac{1}{9}\left(2+\frac{4}{10^n}\right)\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}+c_n\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{2(10^n-1)}+\frac{1}{9}\left(2+\frac{4}{10^n}\right)\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}\right]\\&=0+\frac{1}{9}(2+0)(1-0)=\frac{2}{9}\end{aligned}$$

답 ②

02 급수

068

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\underbrace{-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}}_{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

답 ②

풍쌤 비법

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$에서 a_n이 $\frac{1}{AB}$ 꼴로 주어진 경우의 급수의 합은 다음과 같은 순서에 따라 구한다.

(i) 주어진 조건을 이용하여 급수의 제n항을 구한다.

(ii) 부분분수를 이용하여 부분합 S_n을 구한다.

➡ $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$

(iii) $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값을 구한다.

참고

분수 꼴로 주어진 수열의 합에서 항이 연쇄적으로 소거되는 경우, 소거되지 않고 남는 항은 앞에서 첫 번째가 남으면 뒤에서도 첫 번째가 남는다. ➡ **070**번 참조

또, **068**번과 같이 건너뛰며 소거되는 경우는 앞에서 첫 번째, 세 번째가 남으면 뒤에서도 첫 번째, 세 번째가 남는다.

즉, 항이 연쇄적으로 소거될 때 앞에서 남는 항과 뒤에서 남는 항은 서로 대칭이 되는 위치에 있다.

069

접근

두 수 2, 3은 서로소이므로 $2^{n+2}\times3^n$의 양의 약수는 (2^{n+2}의 약수)$\times$(3^n의 약수) 꼴임을 이용하여 a_n을 구하고, 부분분수를 이용하여 제n항까지의 합을 구한다.

$a_n=\{(n+2)+1\}(n+1)=(n+1)(n+3)$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{12}$$

답 $\frac{5}{12}$

참고

자연수의 양의 약수의 개수

자연수 N이 $N=a^m\times b^n$ (a, b는 서로 다른 소수, m, n은 자연수)으로 소인수분해될 때, N의 양의 약수의 개수는

$(m+1)(n+1)$

070

주어진 급수의 제n항을 a_n이라고 하면

$$a_n=\frac{2n+1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}=\frac{2n+1}{\sum_{k=1}^{n}k^2}$$

$$=\frac{2n+1}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=\frac{6}{n(n+1)}$$

$$=6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

이므로 주어진 급수의 합은

$$\frac{3}{1^2}+\frac{5}{1^2+2^2}+\frac{7}{1^2+2^2+3^2}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$=6\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=6\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=6\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=6$$

답 6

071

주어진 급수의 제3항에서 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=3}^{n}\log\left(1-\frac{4}{k^2}\right)$$

$$=\sum_{k=3}^{n}\log\frac{k^2-4}{k^2}$$

$$=\sum_{k=3}^{n}\log\left(\frac{k-2}{k}\times\frac{k+2}{k}\right)$$

$$=\log\left(\frac{1}{3}\times\frac{5}{3}\right)+\log\left(\frac{2}{4}\times\frac{6}{4}\right)+\log\left(\frac{3}{5}\times\frac{7}{5}\right)+\log\left(\frac{4}{6}\times\frac{8}{6}\right)+\cdots+\log\left(\frac{n-4}{n-2}\times\frac{n}{n-2}\right)+\log\left(\frac{n-3}{n-1}\times\frac{n+1}{n-1}\right)+\log\left(\frac{n-2}{n}\times\frac{n+2}{n}\right)$$

$$=\log\left\{\left(\frac{1}{3}\times\frac{5}{3}\right)\times\left(\frac{2}{4}\times\frac{6}{4}\right)\times\left(\frac{3}{5}\times\frac{7}{5}\right)\times\left(\frac{4}{6}\times\frac{8}{6}\right)\times\cdots\times\left(\frac{n-4}{n-2}\times\frac{n}{n-2}\right)\times\left(\frac{n-3}{n-1}\times\frac{n+1}{n-1}\right)\times\left(\frac{n-2}{n}\times\frac{n+2}{n}\right)\right\}$$

$$=\log\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{n+1}{n-1}\times\frac{n+2}{n}\right)$$

$$=\log\frac{n^2+3n+2}{6n^2-6n}$$

$$\therefore \sum_{k=3}^{n}\log\left(1-\frac{4}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log\underbrace{\frac{n^2+3n+2}{6n^2-6n}}_{\text{분모, 분자를 } n^2\text{으로 나눈다.}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{6-\frac{6}{n}}=\log\frac{1}{6}$$

$$=-\log 6$$

답 ①

072

$(n^2+3n+2)x^2-(2n+3)x+1=0$에서

$\{(n+1)x-1\}\{(n+2)x-1\}=0$

$\therefore x=\dfrac{1}{n+1}$ 또는 $x=\dfrac{1}{n+2}$

따라서 $\alpha_n=\dfrac{1}{n+1}$, $\beta_n=\dfrac{1}{n+2}$ ($\because \alpha_n>\beta_n$)이므로

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n-\beta_n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{1}{2}$

073

ㄱ은 발산한다.

주어진 급수의 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})\\&=(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})+(\sqrt{8}-\sqrt{6})\\&\quad+\cdots+\{\sqrt{2n}-\sqrt{2(n-1)}\}+(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n})\\&=\sqrt{2n+2}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n})&=\lim_{n\to\infty}S_n\\&=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2})\\&=\infty\end{aligned}$$

ㄴ은 발산한다.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2+n}{3-4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+1}{\frac{3}{n}-4}=-\frac{1}{4}\neq0$이므로 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+n}{3-4n}$은

발산한다. 분모, 분자를 n으로 나눈다.

ㄷ은 수렴한다.

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1\end{aligned}$$

따라서 수렴하는 급수는 ㄷ이다.

답 ③

074

주어진 급수

$$(a_1-3)+\left(\frac{a_2}{2^2}-3\right)+\left(\frac{a_3}{3^2}-3\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{n^2}-3\right)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}-3\right)$$

이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}-3\right)=0$$

$\dfrac{a_n}{n^2}-3=b_n$이라고 하면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$이고 $a_n=n^2(b_n+3)$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3a_n}{2n-a_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3n^2(b_n+3)}{2n-n^2(b_n+3)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}-3(b_n+3)}{\frac{2}{n}-(b_n+3)}\\&=\frac{0-3(0+3)}{0-(0+3)}=3\end{aligned}$$

분모, 분자를 n^2으로 나눈다.

답 ③

풍쌤 비법

수열 $\{a_n\}$을 포함한 급수가 수렴하면 이 급수의 일반항을 b_n으로 놓고 a_n을 b_n으로 나타낸 후 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$임과 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용한다.

075

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3n^2+2}{4n-1}\right)=5$, 즉 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3n^2+2}{4n-1}\right)$가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{3n^2+2}{4n-1}\right)=0$$

$a_n-\dfrac{3n^2+2}{4n-1}=b_n$이라고 하면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$이고

$a_n=b_n+\dfrac{3n^2+2}{4n-1}$이다.

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{8a_n}{n+4}&=\lim_{n\to\infty}\frac{8b_n+8\times\frac{3n^2+2}{4n-1}}{n+4}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{8(4n-1)b_n+8(3n^2+2)}{(n+4)(4n-1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{8\left(\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}\right)b_n+8\left(3+\frac{2}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{4}{n}\right)\left(4-\frac{1}{n}\right)}\\&=\frac{0+8(3+0)}{(1+0)(4-0)}=6\end{aligned}$$

분모, 분자를 n^2으로 나눈다.

답 ③

076

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-6)=10$, 즉 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-6)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}(2a_n-6)=0$$

$2a_n-6=b_n$이라고 하면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$이고 $a_n=\dfrac{b_n}{2}+3$이다.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$에서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_{2n}=\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_{2n}+3a_{n+1})&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{b_{2n}}{2}+3\right)+3\left(\frac{b_{n+1}}{2}+3\right)\right\}\\&=0+3+3(0+3)=12\end{aligned}$$

답 12

077

$3a_n+b_n=c_n$이라고 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=21$, $b_n=c_n-3a_n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-3a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n-3\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$
$$=21-3\times5=6$$

답 6

간단 풀이

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴한다는 조건이 없으므로 위와 같이 풀어야 하지만 정답만 얻고자 한다면 다음과 같이 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴한다는 가정 하에 급수의 성질을 이용하여 풀 수도 있다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+b_n)=21$에서 $3\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=21$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}b_n=21-3\sum_{n=1}^{\infty}a_n=21-3\times5=6$$

078

$a_n-\frac{5}{n(n+1)}=b_n$이라고 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=8$, $a_n=b_n+\frac{5}{n(n+1)}$

이때

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n(n+1)}=5\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=5\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=5\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=5\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=5$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{b_n+\frac{5}{n(n+1)}\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}b_n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n(n+1)}$$
$$=8+5=13$$

답 13

079

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ (α, β는 상수)

라고 하면 $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-b_n)=15$에서

$3\alpha-\beta=15$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)=26$에서

$\alpha+2\beta=26$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=8$, $\beta=9$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=8$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=9$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=8+9=17$$

답 ②

다른 풀이

$p(3a_n-b_n)+q(a_n+2b_n)=a_n+b_n$ (p, q는 상수)이라고 하면

$(3p+q)a_n+(-p+2q)b_n=a_n+b_n$

$\therefore 3p+q=1,\ -p+2q=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$p=\frac{1}{7}$, $q=\frac{4}{7}$

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)$이 모두 수렴하므로 급수의 성질에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\frac{1}{7}\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-b_n)+\frac{4}{7}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)$$
$$=\frac{1}{7}\times15+\frac{4}{7}\times26=\frac{119}{7}=17$$

080

ㄱ은 옳다.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\beta$ (α, β는 상수)라 하고, $a_n+b_n=c_n$이라고 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\beta$, $b_n=c_n-a_n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n-\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\beta-\alpha$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 수렴한다.

ㄴ도 옳다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-1)=\beta$ (α, β는 상수)라고 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n+1)+(b_n-1)\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-1)$$
$$=\alpha+\beta$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$은 수렴한다.

ㄷ은 옳지 않다.

(반례) 수열 $\{a_n\}$을 0, 1, 0, 1, …이라 하고, 수열 $\{b_n\}$을 1, 0, 1, 0, …이라고 하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=0$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이지만 $\lim_{n\to\infty}b_n\neq0$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

081

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}+\frac{-\frac{1}{5}}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)}$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

답 ④

082

접근

등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r_1, r_2로 놓고 주어진 조건을 이용하여 r_1, r_2를 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r_1, r_2라고 하면

$a_1=b_1=2$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=5$에서 $\quad \dfrac{2}{1-r_1}=5 \qquad \therefore r_1=\dfrac{3}{5}$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=6$에서 $\quad \dfrac{2}{1-r_2}=6 \qquad \therefore r_2=\dfrac{2}{3}$

따라서 $a_n=2\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$, $b_n=2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$이므로

$$a_nb_n=\left\{2\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}\times\left\{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$
$$=4\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

즉, 수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 $\dfrac{2}{5}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n=\frac{4}{1-\frac{2}{5}}=\frac{20}{3}$$

답 $\dfrac{20}{3}$

083

주어진 급수는 첫째항과 공비가 모두 $\dfrac{2x-3}{7}$이므로 주어진 급수가 수렴하려면

$-1<\dfrac{2x-3}{7}<1$, $-7<2x-3<7$

$-4<2x<10 \qquad \therefore -2<x<5$

따라서 정수 x는

$-1, 0, 1, 2, 3, 4$

의 6개이다.

답 ③

084

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\dfrac{2}{3}$인 등비수열이므로

$$a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\dfrac{1}{5}$인 등비수열이므로

$$b_n=\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$-1<\dfrac{2}{3}<1$, $-1<\dfrac{1}{5}<1$이므로 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 수렴한다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\dfrac{1}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{4}$

①, ② 급수의 성질에 의하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$은 수렴한다.

③ $(-1)^na_n=(-1)^n\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$=(-1)\times(-1)^{n-1}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$
$$=-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$은 첫째항이 -1, 공비가 $-\dfrac{2}{3}$인 등비급수이고 $-1<-\dfrac{2}{3}<1$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$은 수렴한다.

④ $a_nb_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{2}{15}\right)^{n-1}$

즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$은 첫째항이 1, 공비가 $\dfrac{2}{15}$인 등비급수이고 $-1<\dfrac{2}{15}<1$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$은 수렴한다.

⑤ $\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}=\left(\dfrac{10}{3}\right)^{n-1}$

즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$은 첫째항이 1, 공비가 $\dfrac{10}{3}$인 등비급수이고 $\dfrac{10}{3}>1$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$은 발산한다.

답 ⑤

085

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cos\frac{n}{4}\pi$$
$$=\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3^3}\cos\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{3^4}\cos\pi+\frac{1}{3^5}\cos\frac{5}{4}\pi$$
$$+\frac{1}{3^6}\cos\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{3^7}\cos\frac{7}{4}\pi+\frac{1}{3^8}\cos2\pi+\frac{1}{3^9}\cos\frac{9}{4}\pi$$
$$+\frac{1}{3^{10}}\cos\frac{5}{2}\pi+\frac{1}{3^{11}}\cos\frac{11}{4}\pi+\frac{1}{3^{12}}\cos3\pi+\frac{1}{3^{13}}\cos\frac{13}{4}\pi$$
$$+\frac{1}{3^{14}}\cos\frac{7}{2}\pi+\frac{1}{3^{15}}\cos\frac{15}{4}\pi+\frac{1}{3^{16}}\cos4\pi+\cdots$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3^3}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{3^4}\times(-1)+\frac{1}{3^5}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$+\frac{1}{3^7}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3^8}\times1+\frac{1}{3^9}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3^{11}}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$+\frac{1}{3^{12}}\times(-1)+\frac{1}{3^{13}}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{3^{15}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3^{16}}\times1+\cdots$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^9}-\frac{1}{3^{13}}+\cdots\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^7}+\frac{1}{3^{11}}-\frac{1}{3^{15}}+\cdots\right)$$
$$-\left(\frac{1}{3^4}-\frac{1}{3^8}+\frac{1}{3^{12}}-\frac{1}{3^{16}}+\cdots\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3^4}\right)}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\frac{1}{3^3}}{1-\left(-\frac{1}{3^4}\right)}-\frac{\frac{1}{3^4}}{1-\left(-\frac{1}{3^4}\right)}$$
$$=\frac{27}{164}\sqrt{2}-\frac{3}{164}\sqrt{2}-\frac{1}{82}=\frac{6}{41}\sqrt{2}-\frac{1}{82}$$

따라서 $a=\dfrac{6}{41}$, $b=-\dfrac{1}{82}$이므로

$$\frac{2a}{b}=\frac{2\times\frac{6}{41}}{-\frac{1}{82}}=-24$$

답 -24

086

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=4$에서 $\quad a+2d=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$a_6=-2$에서 $\quad a+5d=-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=8$, $d=-2$

$\therefore a_n=8+(n-1)\times(-2)=-2(n-1)+8$

따라서

$2^{a_n}=2^{-2(n-1)+8}=2^8\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}2^{a_n}=\frac{2^8}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2^{10}}{3}$

답 ⑤

087

$|x|<\frac{1}{3}$에서 $|3x|<1$이므로

$2+8x+26x^2+\cdots+(3^n-1)x^{n-1}+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(3^n-1)x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}3(3x)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$

$=\frac{3}{1-3x}-\frac{1}{1-x}=\frac{2}{(1-3x)(1-x)}$

따라서 $\frac{2}{(1-3x)(1-x)}=\frac{24}{5}$이므로

$\frac{1}{(1-3x)(1-x)}=\frac{12}{5}$, $5=12(1-3x)(1-x)$

$36x^2-48x+7=0$, $(6x-1)(6x-7)=0$

$\therefore x=\frac{1}{6}\left(\because |x|<\frac{1}{3}\right)$

답 $\frac{1}{6}$

088

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_n=a\times r^{n-1}$이므로

$a_{2n-1}=a\times r^{2n-2}=a\times r^{2(n-1)}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=15$에서

$\frac{a}{1-r}=15$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=9$에서

$\frac{a}{1-r^2}=9$

$\frac{a}{(1-r)(1+r)}=9$, $\frac{15}{1+r}=9$ ($\because$ ㉠)

$1+r=\frac{5}{3}$ $\quad\therefore r=\frac{2}{3}$

$r=\frac{2}{3}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{a}{1-\frac{2}{3}}=15$ $\quad\therefore a=5$

따라서 $a_n=5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$이므로

$a_2=5\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$

답 ④

089

$0.\dot{4}\dot{5}=0.454545\cdots$이므로

$a_n=\begin{cases}4 & (n\text{이 홀수})\\ 5 & (n\text{이 짝수})\end{cases}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=\frac{4}{3}+\frac{5}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\frac{5}{3^4}+\frac{4}{3^5}+\frac{5}{3^6}+\cdots$

$=4\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^5}+\cdots\right)}_{\text{첫째항이 }\frac{1}{3}\text{, 공비가 }\frac{1}{9}\text{인 등비급수}}+5\underbrace{\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\cdots\right)}_{\text{첫째항이 }\frac{1}{9}\text{, 공비가 }\frac{1}{9}\text{인 등비급수}}$

$=4\times\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}+5\times\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{2}+\frac{5}{8}=\frac{17}{8}$

답 ③

090

$a_3=0.\dot{3}=\underbrace{0.3+0.03+0.003+\cdots}_{\text{첫째항이 0.3, 공비가 0.1인 등비급수}}$

$=\frac{0.3}{1-0.1}=\frac{1}{3}$

$a_5=0.08\dot{3}=0.08+\underbrace{0.003+0.0003+0.00003+\cdots}_{\text{첫째항이 0.003, 공비가 0.1인 등비급수}}$

$=0.08+\frac{0.003}{1-0.1}=\frac{2}{25}+\frac{1}{300}=\frac{1}{12}$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(a>0, r>0)$라고 하면

모든 항이 양수이므로 $a>0$, $r>0$

$a_3=\frac{1}{3}$에서 $ar^2=\frac{1}{3}$ …… ㉠

$a_5=\frac{1}{12}$에서 $ar^4=\frac{1}{12}$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^2=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore r=\frac{1}{2}$ ($\because r>0$)

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{4}{3}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{8}{3}$

답 ⑤

091

$\overline{P_0P_1}=6$, $\overline{P_nP_{n+1}}=\frac{1}{3}\overline{P_{n-1}P_n}$이므로

$\overline{P_{n-1}P_n}=6\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

이때

$p=\overline{P_0P_1}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}+\cdots$

$=\underbrace{6+6\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+6\times\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots}_{\text{첫째항이 6, 공비가 }\frac{1}{9}\text{인 등비급수}}$

$=\frac{6}{1-\frac{1}{9}}=\frac{27}{4}$

$q=\overline{P_1P_2}+\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}+\cdots$

$=\underbrace{6\times\frac{1}{3}+6\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+6\times\left(\frac{1}{3}\right)^5+\cdots}_{\text{첫째항이 }6\times\frac{1}{3}\text{, 공비가 }\frac{1}{9}\text{인 등비급수}}$

$=\frac{6\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{4}$

이므로

$p+q=\frac{27}{4}+\frac{9}{4}=9$

답 ⑤

풍쌤 비법

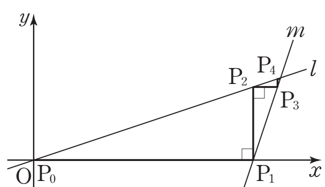
한없이 움직이는 점이 가까워지는 점의 좌표를 구할 때

➡ x좌표와 y좌표가 변하는 규칙을 찾아 그것을 각각 등비급수로 나타낸다.

이 문제에서 x좌표는 x축에 평행한 선분들의 길이의 합이고, y좌표는 y축에 평행한 선분들의 길이의 합이므로 각각을 급수로 나타낸 후 첫째항과 공비를 구하여 그 합을 구한다.

참고

다음 그림과 같이 n이 짝수일 때 점 P_n을 이은 직선 l과 n이 홀수일 때 점 P_n을 이은 직선 m을 생각해 보자.



n이 한없이 커질 때 점 P_n은 두 직선 l, m 위를 번갈아 가며 위치하므로 점 P_n이 가까워지는 점의 좌표는 두 직선 l, m의 교점이 된다.

직선 l은 두 점 $\mathrm{P}_0(0, 0)$, $\mathrm{P}_2(6, 2)$를 지나므로 직선 l의 방정식은

$y=\frac{1}{3}x$ …… ㉠

직선 m은 두 점 $\mathrm{P}_1(6, 0)$, $\mathrm{P}_3\left(\frac{20}{3}, 2\right)$를 지나므로 직선 m의 방정식은

$y=3x-18$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=\frac{27}{4}$, $y=\frac{9}{4}$

즉, 두 직선 l, m의 교점은 $\left(\frac{27}{4}, \frac{9}{4}\right)$이므로 점 P_n이 한없이 가까워지는 점과 일치한다.

092

접근

두 원 C_n, C_{n+1}의 닮음비를 구하여 모든 원의 둘레의 길이의 합을 등비급수로 나타낸다.

원 C_{n+1}은 원 C_n의 중심을 지나고 원 C_n에 내접하므로 원 C_{n+1}의 반지름의 길이는 원 C_n의 반지름의 길이의 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 두 원 C_n, C_{n+1}의 닮음비는 $1 : \frac{1}{2}$이므로 그 둘레의 길이의 비도 $1 : \frac{1}{2}$이다.

원 C_1의 반지름의 길이는 2이므로 원 C_1의 둘레의 길이는

$2\pi\times2=4\pi$

따라서 모든 원의 둘레의 길이의 합은

$$4\pi+4\pi\times\frac{1}{2}+4\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots=\frac{4\pi}{1-\frac{1}{2}}=8\pi$$

답 ⑤

풍쌤 비법

길이의 합, 넓이의 합을 구할 때

➡ 길이 또는 넓이가 줄어들거나 늘어나는 규칙을 찾아 그 합을 등비급수로 나타낸다.

닮은 도형이 한없이 반복될 때, 첫째항은 주어진 조건을 이용하여 구하고 공비는 둘째항을 구하지 않고 닮음비를 이용하여 구할 수도 있다.

093

직각삼각형 $\mathrm{A_1BB_1}$에서 $\overline{\mathrm{A_1B}}=1$, $\overline{\mathrm{BB_1}}=3$이므로

$\overline{\mathrm{A_1B_1}}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\therefore S_1=(\sqrt{10})^2=10$

또, 직각삼각형 $\mathrm{A_2B_1B_2}$에서

$\overline{\mathrm{A_2B_1}}=\frac{1}{4}\times\sqrt{10}$, $\overline{\mathrm{B_1B_2}}=\frac{3}{4}\times\sqrt{10}$

이므로

$$\overline{\mathrm{A_2B_2}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{10}}{4}\right)^2}=\frac{5}{2}$$

두 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$, $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 닮음비가 $\sqrt{10} : \frac{5}{2}$이므로 넓이의 비는

$$(\sqrt{10})^2 : \left(\frac{5}{2}\right)^2=10 : \frac{25}{4}=8 : 5$$

$\therefore S_2=\frac{5}{8}S_1$

마찬가지 방법으로

$S_3=\left(\frac{5}{8}\right)^2S_2$, $S_4=\left(\frac{5}{8}\right)^3S_3$, $\cdots$

이므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 10, 공비가 $\frac{5}{8}$인 등비수열이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{10}{1-\frac{5}{8}}=\frac{80}{3}$$

답 $\frac{80}{3}$

094

수열 $-1, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, 7$은 첫째항이 -1, 제$(n+2)$항이 7인 등차수열이므로

$-1+\{(n+2)-1\}d_n=7$

$(n+1)d_n=8 \qquad \therefore d_n=\frac{8}{n+1}$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}d_{n-1}d_{n+1}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{64}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{64}{k(k+2)}\\&=\lim_{n\to\infty}32\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}32\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}32\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=32\left(1+\frac{1}{2}\right)=48\end{aligned}$$

답 ③

095

각 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하자.

ㄱ은 수렴한다.

$S_{2n-1}=1$, $S_{2n}=1-\frac{1}{n+1}$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1$

$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-0=1$

즉, $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=1$이므로 주어진 급수는 1에 수렴한다.

ㄴ은 발산한다.

$S_{2n-1}=1$, $S_{2n}=1-\frac{n}{n+1}$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1$

$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=1-1=0$

즉, $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄷ도 발산한다.

$S_{2n-1}=2$, $S_{2n}=2-\frac{n+2}{n+1}$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=2$

$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n+2}{n+1}\right)=2-1=1$

즉, $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄹ은 수렴한다.

$S_{2n-1}=-1$, $S_{2n}=-1+\frac{1}{2n+1}$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=-1$

$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(-1+\frac{1}{2n+1}\right)=-1+0=-1$

즉, $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=-1$이므로 주어진 급수는 -1에 수렴한다.

따라서 수렴하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

풍쌤 비법

항의 부호가 교대로 변하는 급수는 홀수 번째 항까지의 부분합 S_{2n-1}과 짝수 번째 항까지의 부분합 S_{2n}의 극한값을 구하여 다음과 같이 수렴, 발산을 조사한다.

(1) $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\alpha$ (α는 실수)이면 급수는 α에 수렴한다.
즉, 급수의 합은 α이다.

(2) $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이면 급수는 발산한다.

참고

항의 부호가 교대로 변하는 급수에서 괄호가 있는 경우와 없는 경우는 그 결과가 다르므로 잘 확인해야 한다.

예를 들어, ㄷ의 급수가

$\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right)+\cdots$

와 같이 주어진 경우는 급수의 제n항까지의 부분합 S_n이

$$S_n=\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=2-\frac{n+2}{n+1}$$

이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n+2}{n+1}\right)=2-1=1$

즉, 주어진 급수는 1에 수렴한다.

096

두 함수 $f(x)=x^2-(n+1)x+n^2$, $g(x)=(n+1)x-2n$의 그래프의 두 교점의 x좌표는 이차방정식

$x^2-(n+1)x+n^2=(n+1)x-2n$

의 두 근이다. 즉, a_n, b_n은 이차방정식

$x^2-2(n+1)x+n^2+2n=0$

의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_nb_n=n^2+2n=n(n+2)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{20}{a_nb_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{20}{n(n+2)}$$
$$=10\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=10\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=10\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=10\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=10\left(1+\frac{1}{2}\right)=15$$

답 ④

참고

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

097

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{a_na_{n+2}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_{n+2}=\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{5}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+2}}=\frac{5}{4}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{a_na_{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{5}{4}-\frac{5}{4}=-\frac{9}{5}$$

답 ③

098

$a_{n+1}=a_{n+2}-a_n$에서

$a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$

이때 $a_1=1$, $a_2=2$이고 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$이므로

$a_3=1+2=3$, $a_4=2+3=5$, $a_5=3+5=8$, $\cdots$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)=\frac{1}{a_2}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

099

$S_n=\frac{4n}{n+2}$이므로

(i) $n\geq 2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{4n}{n+2}-\frac{4n-4}{n+1}$$

$$=\frac{8}{(n+1)(n+2)} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

(ii) $n=1$일 때

$$a_1=S_1=\frac{4}{3}$$

이것은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같다.

(i), (ii)에서

$$a_n=\frac{8}{(n+1)(n+2)}\ (n\geq 1)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{8}{(n+1)(n+2)}+\frac{8}{(n+2)(n+3)}\right\}$$

$$=8\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$=8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=8\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=8\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$=8\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{20}{3}$$

답 $\frac{20}{3}$

다른 풀이

a_n+a_{n+1}을 다음과 같이 구할 수도 있다.

$n\geq 2$일 때

$$a_n+a_{n+1}=(S_n-S_{n-1})+(S_{n+1}-S_n)$$

$$=S_{n+1}-S_{n-1}$$

$$=\frac{4n+4}{n+3}-\frac{4n-4}{n+1}$$

$$=\left(4-\frac{8}{n+3}\right)-\left(4-\frac{8}{n+1}\right)$$

$$=8\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 $a_1+a_2=S_2=2$이고 이것은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 $a_n+a_{n+1}=8\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$

간단 풀이

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+2}=4$이므로 $\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=\lim_{n\to\infty}S_n=4$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k+a_{k+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(S_n+S_{n+1}-a_1)$$

$$=4+4-\frac{4}{3}=\frac{20}{3}\ \left(\because a_1=S_1=\frac{4}{3}\right)$$

100

$a_n=\frac{1}{n+2}$, $b_n=\frac{1+(-1)^n}{n+4}$이므로 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 각 항을 나열하면

$\{a_n\}$: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\cdots$

$\{b_n\}$: 0, $\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{5}$, $\cdots$

따라서 수열 $\{a_nb_n\}$의 각 항은

0, $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{8}\times\frac{1}{5}$, $\cdots$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=0+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+0+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+0+\frac{1}{8}\times\frac{1}{5}+\cdots$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{5}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+2}\times\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

101

조건 ㈎에서 $\log a_n+\log a_{n+1}+\log b_n=0$이므로

$\log a_na_{n+1}b_n=0 \qquad \therefore a_na_{n+1}b_n=1$

$\therefore b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\ (\because a_na_{n+1}\neq 0)$

$=\dfrac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 3이므로 $a_{n+1}-a_n=3$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

수열 $\{a_n\}$의 공차가 3이므로 $a_{n+1}=a_1+\{(n+1)-1\}\times 3$ $=3n+a_1$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{3n+a_1}\right)$$

$$=\frac{1}{3a_1}$$

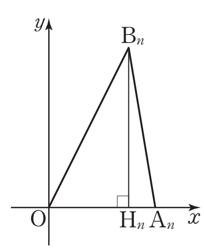
이때 조건 ㈏에서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{12}$이므로

$\dfrac{1}{3a_1}=\dfrac{1}{12} \qquad \therefore a_1=4$

답 ⑤

102

오른쪽 그림과 같이 점 B_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라고 하면



$$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}_n}\times\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{10}{n+2}\times\frac{20}{n+3}$$

$$=\frac{100}{(n+2)(n+3)}$$

$S_n<1$에서

$\dfrac{100}{(n+2)(n+3)}<1 \qquad \therefore (n+2)(n+3)>100$

이때

$n=7$이면 $(7+2)(7+3)=90<100$

$n=8$이면 $(8+2)(8+3)=110>100$

이므로 $S_n<1$을 만족시키는 n의 최솟값은 8이다.

즉, $m=8$이므로

$$\sum_{n=m}^{\infty}S_n=\sum_{n=8}^{\infty}\frac{100}{(n+2)(n+3)}$$

$$=100\sum_{n=8}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=100\lim_{n\to\infty}\sum_{k=8}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=100\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{13}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$=100\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{n+3}\right)=100\times\frac{1}{10}=10$$

답 ②

103

접근

$n=\dfrac{3n}{3},\ n+1=\dfrac{3n+3}{3}$임을 이용하여 자연수 n과 $n+1$ 사이의 유리수 중 3을 분모로 하는 기약분수를 구한다.

$n=\dfrac{3n}{3},\ n+1=\dfrac{3n+3}{3}$이므로 자연수 n과 $n+1$ 사이의 유리수 중 3을 분모로 하는 기약분수는 $\dfrac{3n+1}{3},\ \dfrac{3n+2}{3}$이다.

$$\therefore a_n=\frac{3n+1}{3}+\frac{3n+2}{3}$$

$$=\frac{6n+3}{3}=2n+1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

답 ①

104

곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수이려면 자연수 n에 대하여 $x=3n^2$이어야 한다.

$\therefore a_n=3n^2,\ b_n=3n$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_n-b_n}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3n^2-3n}=\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

답 $\dfrac{1}{3}$

105

$S_n=An^2+Bn$ (A, B는 상수, $A\neq 0$)이라고 하면

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2-1}=1$에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{An^2+Bn}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{A+\frac{B}{n}}{1-\frac{1}{n^2}}=A$$

분모, 분자를 n^2으로 나눈다.

이므로 $A=1$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_n}-n)=\frac{3}{2}$에서

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+Bn}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+Bn}-n)(\sqrt{n^2+Bn}+n)}{\sqrt{n^2+Bn}+n}$$

분모를 1로 놓고 분자를 유리화한다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{Bn}{\sqrt{n^2+Bn}+n}$$

분모, 분자를 n, 즉 $\sqrt{n^2}$으로 나눈다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{B}{\sqrt{1+\frac{B}{n}}+1}=\frac{B}{2}$$

이므로

$\frac{B}{2}=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore B=3$

$\therefore S_n=n^2+3n$

(i) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+3n-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$

$=2n+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=4$

이것은 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 것과 같다.

(i), (ii)에서 $\quad a_n=2n+2$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{a_nS_n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(2n+2)(n^2+3n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{12}$$

답 ⑤

참고

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n^2+\frac{2a-d}{2}n$$

이므로 S_n은 An^2+Bn (A, B는 상수) 꼴이다.

한편, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=An^2+Bn+C$ (A, B, C는 상수)일 때,

$C=0$이면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등차수열을 이루고

$C\neq 0$이면 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등차수열을 이룬다.

106

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}+\frac{3^{n-1}-5^n}{5^{n+1}+2}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}+\frac{3^{n-1}-5^n}{5^{n+1}+2}\right)=0$$

$\frac{a_n}{n^2}+\frac{3^{n-1}-5^n}{5^{n+1}+2}=b_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이고

$\frac{a_n}{n^2}=b_n-\frac{3^{n-1}-5^n}{5^{n+1}+2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(b_n-\frac{3^{n-1}-5^n}{5^{n+1}+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}b_n-\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}-5^n}{5^{n+1}+2}$$

분모, 분자를 5^n으로 나눈다.

$$=\lim_{n\to\infty}b_n-\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{5}\right)^n-1}{5+\frac{2}{5^n}}$$

$$=0+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+a_n}{5n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{a_n}{n^2}}{5+\frac{3}{n}}=\frac{4+\frac{1}{5}}{5}=\frac{21}{25}$$

분모, 분자를 n^2으로 나눈다.

답 $\frac{21}{25}$

107

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=k$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}S_n=k$

$S_{2n+1}+2S_n=a_n+\frac{n^2+2n}{2n^2+1}$에서

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n+1}+2S_n)=\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{n^2+2n}{2n^2+1}\right)$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n+1}+2S_n)=\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}+2\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=k+2k=3k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{n^2+2n}{2n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{2n^2+1}$$

분모, 분자를 n^2으로 나눈다.

$$=0+\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

이므로 $\quad 3k=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore k=\frac{1}{6}$

$\therefore 150k=150\times\frac{1}{6}=25$

답 25

108

조건 (가)에 의하여 $\quad\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 $\frac{2+2n^2}{3n^2+3}<b_n<\frac{3+2n^2}{3n^2+3}$이므로

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+2n^2}{3n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2}+2}{3+\frac{3}{n^2}}=\frac{2}{3},$$

분모, 분자를 n^2으로 나눈다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+2n^2}{3n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n^2}+2}{3+\frac{3}{n^2}}=\frac{2}{3}$$

이므로 수열의 극한값의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{2}{3}$

㉠에서 $a_n+b_n=c_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$이고

$a_n=c_n-b_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(c_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}c_n-\lim_{n\to\infty}b_n=-\frac{2}{3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)^2+\left(\lim_{n\to\infty}b_n\right)^2$$
$$=\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

답 ④

109

조건 ㈎에서 $2n^2+3<(1+2+3+\cdots+n)a_n$이므로

$$2n^2+3<\frac{n(n+1)}{2}a_n$$

$$\therefore a_n>\frac{4n^2+6}{n^2+n}\ \left(\because \frac{n(n+1)}{2}>0\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 ㈏에서 $b_n<10-2a_n$이므로

$$2a_n<10-b_n \qquad \therefore a_n<5-\frac{b_n}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\dfrac{4n^2+6}{n^2+n}<a_n<5-\dfrac{b_n}{2}$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{4n^2+6}{n^2+n}}_{\text{분모, 분자를 } n^2\text{으로 나눈다.}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{6}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=4,$$

조건 (다)에 의하여 $\lim_{n\to\infty}(b_n-2)=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=2$

$$\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{b_n}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}5-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}b_n=5-\frac{1}{2}\times2=4$$

이므로 수열의 극한값의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=4$$

답 ③

110

접근

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}A_n=0$임을 이용하여 식을 세워 두 식에서 나오는 $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값이 서로 같음을 이용한다.

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n-\dfrac{4n^2+1}{n+1}\right)$과 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}a_n-\dfrac{an^2+bn}{n+5}\right)$이 모두 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(na_n-\frac{4n^2+1}{n+1}\right)=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}a_n-\frac{an^2+bn}{n+5}\right)=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $na_n-\dfrac{4n^2+1}{n+1}=c_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$이고

$a_n=\dfrac{c_n}{n}+\dfrac{4n^2+1}{n^2+n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c_n}{n}+\frac{4n^2+1}{n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{4n^2+1}{n^2+n}}_{\text{분모, 분자를 } n^2\text{으로 나눈다.}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=4$$

㉡에서 $\dfrac{1}{2}a_n-\dfrac{an^2+bn}{n+5}=d_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}d_n=0$이고

$a_n=2d_n+\dfrac{2an^2+2bn}{n+5}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(2d_n+\frac{2an^2+2bn}{n+5}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2an^2+2bn}{n+5}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=4$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2an^2+2bn}{n+5}=4 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉢에서 극한값이 존재하므로 $a=0$

즉, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2an^2+2bn}{n+5}=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\dfrac{2bn}{n+5}}_{\text{분모, 분자를 } n\text{으로 나눈다.}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2b}{1+\frac{5}{n}}=2b$이므로

$2b=4 \qquad \therefore b=2$

$\therefore a-b=0-2=-2$

답 ①

111

ㄱ은 옳다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)=5$이므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n-3)=0$, $\lim_{n\to\infty}(b_n+1)=0$

$\lim_{n\to\infty}a_n=3$, $\lim_{n\to\infty}b_n=-1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n>\lim_{n\to\infty}b_n$

ㄴ은 옳지 않다.

ㄱ에서 $\lim_{n\to\infty}a_n=3$, $\lim_{n\to\infty}b_n=-1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-2\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=3-2\times(-1)=5\neq0$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)$은 발산한다.

ㄷ은 옳다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)=5$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-3)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}3\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(S_n-3n)$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}(S_n-3n)=5$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(S_n-a_n-3n)=\lim_{n\to\infty}(S_n-3n)-\lim_{n\to\infty}a_n$$
$$=5-3=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)=5$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(b_k+1)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k+\sum_{k=1}^{n}1\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(T_n+n)$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}(T_n+n)=5$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(T_n+3b_n+n)=\lim_{n\to\infty}(T_n+n)+3\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=5-3=2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\lim_{n\to\infty}(S_n-a_n-3n)=\lim_{n\to\infty}(T_n+3b_n+n)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

112

주어진 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)}{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}-\frac{a_n}{3n^2}\right\}=0$$

$\dfrac{n(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)}{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}-\dfrac{a_n}{3n^2}=b_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이고

$$\frac{a_n}{3n^2}=\frac{n(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)}{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}-b_n$$

$$=\frac{n\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}-b_n$$

$$=\frac{4n+2}{3n+3}-b_n$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+2}{3n+3}-b_n\right)=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{4n+2}{3n+3}}_{\text{분모, 분자를 }n\text{으로 나눈다.}}-\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{2}{n}}{3+\frac{3}{n}}-\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{4}{3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{3n^2}\times3\right)=\frac{4}{3}\times3=4$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{4n^2+a_n}{5n^2+3n}}_{\text{분모, 분자를 }n^2\text{으로 나눈다.}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{a_n}{n^2}}{5+\frac{3}{n}}=\frac{4+4}{5}=\frac{8}{5}$$

답 $\frac{8}{5}$

113

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n-a_{n+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k^2(a_k-a_{k+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{1^2(a_1-a_2)+2^2(a_2-a_3)+3^2(a_3-a_4)+\cdots+n^2(a_n-a_{n+1})\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}[(1^2-0^2)a_1+(2^2-1^2)a_2+(3^2-2^2)a_3+\cdots+\{n^2-(n-1)^2\}a_n-n^2a_{n+1}]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\{n^2-(n-1)^2\}a_n-\lim_{n\to\infty}n^2a_{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)a_n-\lim_{n\to\infty}n^2a_{n+1}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}na_n-\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}n^2a_{n+1}$$

$$=2\times8-5-0=11$$

답 ⑤

114

조건 (나)에서 $3a_n+b_n=\frac{4}{n(n+1)}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+b_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n(n+1)}=4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=4$$

$3a_n+b_n=c_n$이라고 하면 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=4$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-3a_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}c_n-3\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

$$=4-3\times15=-41\ (\because \text{ 조건 (가)})$$

답 -41

115

$\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=\beta$ (α, β는 상수)라고 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}\log a_nb_n=9$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}(\log a_n+\log b_n)=9$, $\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n+\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=9$

$\therefore \alpha+\beta=9$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{a_n^3}{b_n}=3$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}(3\log a_n-\log b_n)=3$, $3\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n-\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=3$

$\therefore 3\alpha-\beta=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=3$, $\beta=6$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n=3$, $\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=6$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n^2b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2\log a_n+\log b_n)$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n+\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n$$

$$=2\times3+6=12$$

답 12

116

ㄱ은 발산한다.

$\frac{3}{4n-1}>\frac{3}{4n}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{n}$이고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$이 발산하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4n-1}$도 발산한다.

ㄴ도 발산한다.

$\frac{n+3}{n^2}=\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}>\frac{1}{n}$이고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$이 발산하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^2}$도 발산한다.

ㄷ은 수렴한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=A$ (A는 상수)라고 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2}=\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{9}A$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n)^2}$은 수렴한다.

따라서 수렴하는 것은 ㄷ이다.

답 ③

풍쌤 비법

모든 자연수 n에 대하여 $0<a_n\le b_n$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$도 발산한다.

참고

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이지만

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$은 발산한다.

또, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$
$$<1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$
$$=2$$

이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$은 2보다 작은 어떤 A로 수렴한다.

117

ㄱ은 옳다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)=p$, $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)=q$ (p, q는 상수)라 하고

$a_n+2b_n=c_n$, $2a_n-b_n=d_n$이라고 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=p$, $\sum_{n=1}^{\infty}d_n=q$이고

$a_n=\frac{1}{5}c_n+\frac{2}{5}d_n$, $b_n=\frac{2}{5}c_n-\frac{1}{5}d_n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}c_n+\frac{2}{5}d_n\right)$$
$$=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}c_n+\frac{2}{5}\sum_{n=1}^{\infty}d_n=\frac{1}{5}p+\frac{2}{5}q$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}c_n-\frac{1}{5}d_n\right)$$
$$=\frac{2}{5}\sum_{n=1}^{\infty}c_n-\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}d_n=\frac{2}{5}p-\frac{1}{5}q$$

따라서 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 모두 수렴한다.

ㄴ은 옳지 않다.

(반례) $\{a_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, 1, $\cdots$이면

$\{a_{n+1}\}$: 1, 0, 1, 0, 1, 0, $\cdots$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}=0+0+0+0+0+0+0+\cdots=0$$

그런데 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

ㄷ은 옳다.

$$\alpha-\beta=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)<0\ (\because a_n<b_n)$$

$\therefore \alpha<\beta$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

118

$$\sum_{n=3}^{15}\frac{k}{n(n-1)}$$
$$=k\sum_{n=3}^{15}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$
$$=k\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{15}\right)\right\}$$
$$=k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{15}\right)=\frac{13}{30}k$$

이므로 $\sum_{n=3}^{15}\frac{k}{n(n-1)}$의 값이 정수가 되도록 하는 자연수 k의 최솟값은 30이다.

즉, $a=30$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{a}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{30}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{5}$$

답 ④

119

$b_n=9^na_n$으로 놓고 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면 $S_n=5^n-1$

(i) $n\geq2$일 때

$$b_n=S_n-S_{n-1}=5^n-1-(5^{n-1}-1)$$
$$=5^n-5^{n-1}=4\times5^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $n=1$일 때

$b_1=S_1=4$

이것은 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 것과 같다.

(i), (ii)에서 $b_n=4\times5^{n-1}$

따라서 $9^na_n=4\times5^{n-1}$이므로

$$a_n=\frac{4}{9}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} \qquad \therefore \frac{a_n}{5^n}=\frac{4}{45}\times\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{45}\times\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{\frac{4}{45}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{10}$$

답 ①

120

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(-1<r<1)$라고 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $-1<r<1$

$a_n=a\times r^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$에서

$$\frac{a}{1-r}=2$$
$$\therefore a=2-2r \quad \cdots\cdots ㉠$$

$a_n\times(-2)^n=a\times r^{n-1}\times(-2)^n=-2a\times(-2r)^{n-1}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\times(-2)^n\}=-2$에서

$$\frac{-2a}{1-(-2r)}=-2$$
$$\therefore a=1+2r \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{3}{2},\ r=\frac{1}{4}$$

따라서 $a_n=\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$이므로

$$a_{2n-1}=\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}=\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{8}{5}$$

답 $\frac{8}{5}$

121

$\frac{5n^2-1}{n^2+n+2}<\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{5n^2-1}{n^2+n}$에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-1}{n^2+n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=5$$

분모, 분자를 n^2으로 나눈다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-1}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=5$$

이므로 수열의 극한값의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=5$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5$이므로 $p=5$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$$

답 ③

122

$$\frac{k+k^2+k^3+\cdots+k^n}{5^n}=\frac{\frac{k(k^n-1)}{k-1}}{5^n}=\frac{k}{k-1}\left\{\left(\frac{k}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}$$

이고, $1<k<5$에서 $\frac{1}{5}<\frac{k}{5}<1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+k^2+k^3+\cdots+k^n}{5^n}=\frac{k}{k-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{k}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{k}{k-1}\left(\frac{\frac{k}{5}}{1-\frac{k}{5}}-\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}\right)$$

$$=\frac{k}{k-1}\left(\frac{k}{5-k}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{k}{k-1}\times\frac{5(k-1)}{4(5-k)}$$

$$=\frac{5k}{4(5-k)}$$

즉, $\frac{5k}{4(5-k)}=1$이므로

$5k=20-4k$ $\quad\therefore 9k=20$

답 20

123

$a_na_{n+1}=2^n$에서

$n=1$일 때 $a_1a_2=2$ $\quad\therefore a_2=2^4\ \left(\because a_1=\frac{1}{8}\right)$

$n=2$일 때 $a_2a_3=2^2$ $\quad\therefore a_3=\frac{1}{2^2}$

$n=3$일 때 $a_3a_4=2^3$ $\quad\therefore a_4=2^5$

$n=4$일 때 $a_4a_5=2^4$ $\quad\therefore a_5=\frac{1}{2}$

$n=5$일 때 $a_5a_6=2^5$ $\quad\therefore a_6=2^6$

⋮

따라서 자연수 n에 대하여

$\{a_{2n-1}\}: \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}, \cdots$

첫째항이 $\frac{1}{8}$, 공비가 2인 등비수열

$\{a_{2n}\}: 2^4, 2^5, 2^6, \cdots$

첫째항이 16, 공비가 2인 등비수열

이므로

$a_{2n-1}=\frac{1}{2^3}\times2^{n-1}$, $a_{2n}=2^4\times2^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^3}{2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{8}{1-\frac{1}{2}}=16$$

답 16

다른 풀이

$a_na_{n+1}=2^n$ ······ ㉠

㉠에서 n 대신 $n+1$을 대입하면

$a_{n+1}a_{n+2}=2^{n+1}$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$\frac{a_{n+2}}{a_n}=2$

$\therefore a_{n+2}=2a_n$

$\{a_{2n-1}\}: a_3=2a_1,\ a_5=2a_3,\ a_7=2a_5, \cdots$

$\{a_{2n}\}: a_4=2a_2,\ a_6=2a_4,\ a_8=2a_6, \cdots$

즉, 두 수열 $\{a_{2n-1}\}$, $\{a_{2n}\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

이때 $a_1=\frac{1}{8}$이므로 수열 $\left\{\frac{1}{a_{2n-1}}\right\}$은 첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$a_{2n-1}=\frac{1}{8}\times2^{n-1}$이므로

$\frac{1}{a_{2n-1}}=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n-1}}=\frac{8}{1-\frac{1}{2}}=16$$

124

$x^n=(-5)^n$에서

(i) $n=2k$ (k는 자연수)일 때

$x^n=(-5)^n=(-5)^{2k}=5^{2k}>0$

이때 n은 짝수이므로 실근의 개수는 2이다.

$\therefore a_{2k}=2$

(ii) $n=2k+1$ (k는 자연수)일 때

$x^n=(-5)^n=(-5)^{2k+1}=-5^{2k+1}<0$

이때 n은 홀수이므로 실근의 개수는 1이다.

$\therefore a_{2k+1}=1$

(i), (ii)에서 $a_n=\begin{cases}2\ (n=2, 4, 6, \cdots)\\ 1\ (n=3, 5, 7, \cdots)\end{cases}$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}=\frac{a_2}{4^2}+\frac{a_3}{4^3}+\frac{a_4}{4^4}+\frac{a_5}{4^5}+\frac{a_6}{4^6}+\frac{a_7}{4^7}+\cdots$$

$$=\frac{2}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{2}{4^4}+\frac{1}{4^5}+\frac{2}{4^6}+\frac{1}{4^7}+\cdots$$

$$=2\underbrace{\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^6}+\cdots\right)}_{\text{첫째항이 }\frac{1}{4^2}\text{, 공비가 }\frac{1}{4^2}\text{인 등비급수}}+\underbrace{\left(\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{4^7}+\cdots\right)}_{\text{첫째항이 }\frac{1}{4^3}\text{, 공비가 }\frac{1}{4^2}\text{인 등비급수}}$$

$$=2\times\frac{\frac{1}{4^2}}{1-\frac{1}{4^2}}+\frac{\frac{1}{4^3}}{1-\frac{1}{4^2}}$$

$$=\frac{2}{15}+\frac{1}{60}=\frac{3}{20}$$

답 ③

참고

a의 n제곱근 중에서 실수는 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$ (2개)	0 (1개)	없다. (0개)
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$ (1개)	0 (1개)	$\sqrt[n]{a}$ (1개)

125

$f(n)+g(n)=\sin\frac{2n-1}{4}\pi+\cos\frac{2n-1}{4}\pi$에 $n=1, 2, 3, 4$를 차례대로 대입하면

$f(1)+g(1)=\sin\frac{1}{4}\pi+\cos\frac{1}{4}\pi=\sqrt{2}$

$f(2)+g(2)=\sin\frac{3}{4}\pi+\cos\frac{3}{4}\pi=0$

$f(3)+g(3)=\sin\frac{5}{4}\pi+\cos\frac{5}{4}\pi=-\sqrt{2}$

$f(4)+g(4)=\sin\frac{7}{4}\pi+\cos\frac{7}{4}\pi=0$

또,

$$f(n+4)+g(n+4)=\sin\frac{2n+7}{4}\pi+\cos\frac{2n+7}{4}\pi$$

$\sin\frac{2n+7}{4}\pi=\sin\left(2\pi+\frac{2n-1}{4}\pi\right)$
$=\sin\frac{2n-1}{4}\pi$
$\cos\frac{2n+7}{4}\pi=\cos\left(2\pi+\frac{2n-1}{4}\pi\right)$
$=\cos\frac{2n-1}{4}\pi$

$$=\sin\frac{2n-1}{4}\pi+\cos\frac{2n-1}{4}\pi$$

$$=f(n)+g(n)$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{f(n)+g(n)}{2}\right\}^n=\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^7+\cdots$$

첫째항이 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 공비가 $-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$ 인 등비급수

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

답 ①

126

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(-1<r<1)$라고 하면

조건 (나)에 의하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $-1<r<1$

$a_n=a\times r^{n-1}$

조건 (가)에서 $2a_4=a_2+a_3$이므로

a_4는 a_2, a_3의 등차중항이다. 즉, a_2, a_4, a_3 또는 a_3, a_4, a_2는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$2ar^3=ar+ar^2$

이 식의 양변을 ar로 나누면

$a_n\neq0$이므로 $ar\neq0$

$2r^2=1+r$, $2r^2-r-1=0$

$(2r+1)(r-1)=0$ $\therefore r=-\frac{1}{2}$ ($\because -1<r<1$)

조건 (나)에서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=12$이므로

$\frac{a}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=12$ $\therefore a=18$

따라서 $a_n=18\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$a_5=18\times\left(-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{9}{8}$

답 $\frac{9}{8}$

127

주어진 급수의 제n항을 a_n이라고 하면 a_n은 첫째항이 $\frac{4}{5^n}$이고 공비가 $\frac{1}{5}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$a_n=\frac{\frac{4}{5^n}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{5^n}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}=\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}-5\left(\frac{1}{25}\right)^n$$

따라서 주어진 급수의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}-5\left(\frac{1}{25}\right)^n\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}-5\times\frac{\frac{1}{25}}{1-\frac{1}{25}}$$

$$=\frac{5}{4}-\frac{5}{24}=\frac{25}{24}$$

답 ③

128

$\log_3 x=[\log_3 x]$이려면 $\log_3 x$는 정수이어야 한다.

이때 $0<x<1$이므로 $\log_3 x<0$

즉, $\log_3 x$가 -1, -2, -3, -4, $\cdots$이어야 하므로

x는 $\frac{1}{3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $\left(\frac{1}{3}\right)^3$, $\left(\frac{1}{3}\right)^4$, $\cdots$

따라서 구하는 x의 값들의 합은

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

답 ③

129

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(3^{2x-3}-2\times3^{x-2})^n$이 수렴하려면

$-1<3^{2x-3}-2\times3^{x-2}<1$ $\cdots\cdots$ ㉠

이어야 한다.

㉠의 각 변에 3^3, 즉 27을 곱하면

$-27<3^{2x}-6\times3^x<27$

(i) $-27<3^{2x}-6\times3^x$에서

$3^{2x}-6\times3^x+27>0$

$3^x=t$ $(t>0)$라고 하면

$t^2-6t+27=(t-3)^2+18>0$

즉, 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $3^{2x}-6\times3^{x}<27$에서

$3^{2x}-6\times3^{x}-27<0$

$3^{x}=t\ (t>0)$라고 하면

$t^2-6t-27<0,\ (t+3)(t-9)<0$

$\therefore t<9\ (\because t+3>0)$

즉, $3^{x}<9$이므로 $3^{x}<3^{2}$

$\therefore x<2$

(i), (ii)에서 $x<2$이므로 구하는 정수 x의 최댓값은 1이다.

답 ①

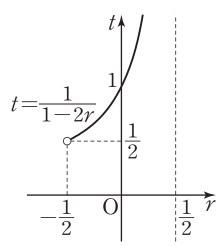
130

$\sum_{n=1}^{\infty}(2r)^{n-1}=t$이므로

$-1<2r<1 \qquad \therefore -\frac{1}{2}<r<\frac{1}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(2r)^{n-1}=t$에서 $\quad t=\frac{1}{1-2r}$

따라서 r와 t 사이의 관계를 그래프로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$t>\frac{1}{2}$

즉, t의 값이 될 수 없는 것은 ① $\frac{1}{2}$이다.

답 ①

131

$\sum_{n=1}^{\infty}x(2x+1)^{n}$이 수렴하므로

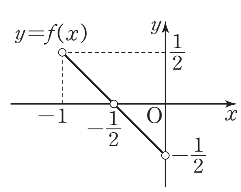
$-1<2x+1<0$ 또는 $0<2x+1<1\ (\because x(2x+1)\neq0)$

$\therefore -1<x<-\frac{1}{2}$ 또는 $-\frac{1}{2}<x<0$

한편

$f(x)=\frac{x(2x+1)}{1-(2x+1)}=-x-\frac{1}{2}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 점 P의 자취의 길이는 두 점 $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$ 사이의 거리와 같으므로

$\sqrt{(0+1)^2+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$

답 $\sqrt{2}$

참고

두 점 사이의 거리

(1) 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는

➡ $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

(2) 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리는

➡ $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}$

132

조건 (나)에서 $\log a_n+\log a_{n+1}=\log a_n \log a_{n+1}$이므로

$(\log a_n-1)\log a_{n+1}=\log a_n$

$\therefore \log a_{n+1}=\frac{\log a_n}{\log a_n-1}$ …… ㉠

조건 (가)에서 $a_1=\frac{1}{100}$이므로

$\log a_1=\log\frac{1}{100}=\log 10^{-2}=-2$

㉠의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$\log a_2=\frac{\log a_1}{\log a_1-1}=\frac{-2}{-2-1}=\frac{2}{3} \qquad \therefore a_2=10^{\frac{2}{3}}$

$\log a_3=\frac{\log a_2}{\log a_2-1}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-1}=-2 \qquad \therefore a_3=10^{-2}=\frac{1}{100}$

$\log a_4=\frac{\log a_3}{\log a_3-1}=\frac{-2}{-2-1}=\frac{2}{3} \qquad \therefore a_4=10^{\frac{2}{3}}$

⋮

$\therefore a_n=\begin{cases}\frac{1}{100} & (n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots)\\ 10^{\frac{2}{3}} & (n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots)\end{cases}$

조건 (다)에서 $\log b_n=\sum_{k=1}^{6n}\log a_k$이므로

$\log b_n=\sum_{k=1}^{6n}\log a_k$

$=\log a_1+\log a_2+\log a_3+\cdots+\log a_{6n}$

$=\log a_1a_2a_3\cdots a_{6n}$

$\therefore b_n=a_1a_2a_3\cdots a_{6n}=\left(\frac{1}{100}\times10^{\frac{2}{3}}\right)^{3n}$

$=10^{-4n}$

$=\left(\frac{1}{10000}\right)^{n}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10000}\right)^{n}=\frac{\frac{1}{10000}}{1-\frac{1}{10000}}=\frac{1}{9999}$

답 ②

133

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항을 각각 a, b라 하고, 공비를 각각 r, s라고 하면

$a_n=a\times r^{n-1}$, $b_n=b\times s^{n-1}$

ㄱ은 옳다.

두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로

$-1<r<1,\ -1<s<1$

이때 $a_nb_n=ab\times(rs)^{n-1}$이고 $-1<rs<1$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 수렴한다.

ㄴ도 옳다.

${a_n}^2=a^2\times(r^2)^{n-1}$, ${b_n}^2=b^2\times(s^2)^{n-1}$이고 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}{b_n}^2$이 모두 수렴하므로

$0\le r^2<1,\ 0\le s^2<1$

따라서 $-1<r<1,\ -1<s<1$이므로 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴한다.

ㄷ도 옳다.

$a_n{}^3=a^3\times(r^3)^{n-1}$, $b_n{}^3=b^3\times(s^3)^{n-1}$이고 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^3$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n{}^3$이 모두 수렴하므로

$-1<r^3<1$, $-1<s^3<1$

따라서 $-1<r<1$, $-1<s<1$이므로 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$도 모두 수렴한다.

급수의 성질에 의하여

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$은 수렴한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

참고

첫째항이 0인 등비급수는 0으로 수렴한다.
따라서 $a=b=0$인 경우 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

134

$21\times7^n=3\times7^{n+1}$의 양의 약수는

$1, 7, 7^2, 7^3, \cdots, 7^{n+1}$,

$3, 3\times7, 3\times7^2, 3\times7^3, \cdots, 3\times7^{n+1}$

이므로

$$\begin{aligned}T_n&=\sum_{k=1}^{2n+4}\frac{1}{a_k}\\&=\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\cdots+\frac{1}{7^{n+1}}\right)\\&\quad+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times7}+\frac{1}{3\times7^2}+\frac{1}{3\times7^3}+\cdots+\frac{1}{3\times7^{n+1}}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\cdots+\frac{1}{7^{n+1}}\right)\\&\quad+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\cdots+\frac{1}{7^{n+1}}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\cdots+\frac{1}{7^{n+1}}\right)\\&=\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\cdots+\frac{1}{7^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore t&=\lim_{n\to\infty}T_n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\cdots+\frac{1}{7^{n+1}}\right)\\&=\frac{4}{3}\times\frac{1}{1-\frac{1}{7}}=\frac{14}{9}\end{aligned}$$

$\therefore 9t=14$

답 ⑤

135

자연수 k에 대하여 $\frac{2}{k}$가 정수 또는 유한소수가 되려면 $k=1$이거나 k를 소인수분해하였을 때 2 또는 5만을 인수로 가져야 한다.

따라서

$a_1=\frac{2}{1}=2$, $a_2=\frac{2}{2}=1$, $a_3=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$, $a_4=\frac{2}{5}$,

$a_5=\frac{2}{2^3}=\frac{1}{2^2}$, $a_6=\frac{2}{2\times5}=\frac{1}{5}$, $a_7=\frac{2}{2^4}=\frac{1}{2^3}$,

$a_8=\frac{2}{2^2\times5}=\frac{1}{2\times5}$, $a_9=\frac{2}{5^2}$, $\cdots$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_n&=2+1+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2\times5}+\frac{2}{5^2}+\cdots\\&=2\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right)+\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right)\\&\quad+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right)\\&\quad+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right)+\cdots\\&=\left(2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right)\\&=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=4\times\frac{5}{4}=5\end{aligned}$$

답 5

참고

유한소수로 나타낼 수 있는 유리수

➡ 정수가 아닌 유리수를 기약분수로 나타내었을 때, 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이면 그 분수는 유한소수로 나타낼 수 있다.

136

조건 (가)에서 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-3}{8}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log_3\frac{x}{9}\right)^n$이 모두 수렴하므로

$-1<\frac{x-3}{8}<1$, $-1<\log_3\frac{x}{9}<1$

$-1<\frac{x-3}{8}<1$에서

$-8<x-3<8$

$\therefore -5<x<11$ ······ ㉠

$-1<\log_3\frac{x}{9}<1$에서

$\frac{1}{3}<\frac{x}{9}<3$

$\therefore 3<x<27$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $3<x<11$

조건 (나)에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}-3^{2n}-5^{n+1}}{x^n+3^{2n+1}+5^n}=-\frac{1}{3}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{x^2\times x^n-9^n-5\times5^n}{x^n+3\times9^n+5^n}=-\frac{1}{3}$

(i) $3<x<9$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^2\times x^n-9^n-5\times5^n}{x^n+3\times9^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2\times\left(\frac{x}{9}\right)^n-1-5\times\left(\frac{5}{9}\right)^n}{\left(\frac{x}{9}\right)^n+3+\left(\frac{5}{9}\right)^n}=-\frac{1}{3}$$

분모, 분자를 9^n으로 나눈다.

(ii) $x=9$일 때

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x^2\times x^n-9^n-5\times5^n}{x^n+3\times9^n+5^n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{9^2\times9^n-9^n-5\times5^n}{9^n+3\times9^n+5^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{80\times9^n-5\times5^n}{4\times9^n+5^n}}_{\text{분모, 분자를 }9^n\text{으로 나눈다.}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{80-5\times\left(\frac{5}{9}\right)^n}{4+\left(\frac{5}{9}\right)^n}\\&=20\end{aligned}$$

(iii) $9<x<11$일 때

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{x^2\times x^n-9^n-5\times5^n}{x^n+3\times9^n+5^n}}_{\text{분모, 분자를 }x^n\text{으로 나눈다.}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2-\left(\frac{9}{x}\right)^n-5\times\left(\frac{5}{x}\right)^n}{1+3\times\left(\frac{9}{x}\right)^n+\left(\frac{5}{x}\right)^n}\\&=x^2\end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 조건 (나)를 만족시키는 x의 값의 범위는

$3<x<9$

$x^2=-\frac{1}{3}$인 실수 x는 존재하지 않는다.

따라서 구하는 정수 x의 값의 합은

$4+5+6+7+8=30$

답 ⑤

137

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 나열하면

$a_1=0.\dot{2}=\frac{2}{9}$, $a_2=0.\dot{2}\dot{0}=\frac{20}{99}$, $a_3=0.\dot{2}0\dot{0}=\frac{200}{999}$,

$a_4=0.\dot{2}00\dot{0}=\frac{2000}{9999}$, $a_5=0.\dot{2}000\dot{0}=\frac{20000}{99999}$, $\cdots$

이므로

$$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=\frac{99}{20}-\frac{9}{2}=\frac{9}{20}$$

$$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}=\frac{999}{200}-\frac{99}{20}=\frac{9}{200}=\frac{9}{20}\times\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_3}=\frac{9999}{2000}-\frac{999}{200}=\frac{9}{2000}=\frac{9}{20}\times\left(\frac{1}{10}\right)^2$$

$$\frac{1}{a_5}-\frac{1}{a_4}=\frac{99999}{20000}-\frac{9999}{2000}=\frac{9}{20000}=\frac{9}{20}\times\left(\frac{1}{10}\right)^3$$

$\vdots$

즉, 수열 $\left\{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{9}{20}$, 공비가 $\frac{1}{10}$인 등비수열이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{\frac{9}{20}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{2}$$

답 ②

참고

순환소수를 분수로 나타내기

순환소수는 다음과 같은 방법으로 분수로 나타낼 수 있다.

(i) 분모는 순환마디를 이루는 숫자의 개수만큼 9를 쓰고, 그 뒤에 소수점 아래 순환마디에 포함되지 않는 숫자의 개수만큼 0을 쓴다.

(ii) 분자는 (순환마디를 포함하는 전체의 수) $-$ (순환하지 않는 부분의 수)를 쓴다.

$$0.\dot{a}b\dot{c}=\frac{\overset{\text{전체의 수}}{abc}}{\underset{\text{순환마디 숫자 3개}}{999}}\qquad a.b\dot{c}\dot{d}=\frac{\overset{\text{전체의 수}}{abcd}-\overset{\text{순환하지 않는 부분의 수}}{ab}}{\underset{\text{순환마디 숫자 2개, 소수점 아래 순환하지 않는 숫자 1개}}{990}}$$

138

점 P_n은 직선 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2-x)$와 곡선 $y=-x(x-2)$의 교점이므로 점 P_n의 x좌표는

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2-x)=-x(x-2)$$

$$x(x-2)-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(x-2)=0,\ (x-2)\left\{x-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=0$$

$$\therefore x=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\ (\because x\neq2)$$

점 P_n의 y좌표는

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left\{2-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}&=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2}\\&=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

즉, $P_n\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1},\ 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right)$이므로

$$\overline{P_nH_n}=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\overline{P_nH_n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\\&=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}-\frac{1}{1-\frac{1}{9}}\\&=3-\frac{9}{8}=\frac{15}{8}\end{aligned}$$

답 $\frac{15}{8}$

139

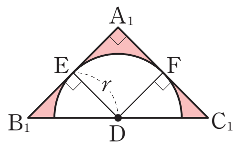
$\overline{P_1P_2}=\frac{1}{2}\overline{OP_1}$, $\overline{P_{n+1}P_{n+2}}=\frac{1}{2}\overline{P_nP_{n+1}}$이고 $\angle OP_1P_2=60°$, $\angle P_nP_{n+1}P_{n+2}=60°$이므로 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 x좌표는

$$\begin{aligned}&\overline{OP_1}-\overline{P_1P_2}\cos60°-\overline{P_2P_3}\cos60°+\overline{P_3P_4}\\&\quad-\overline{P_4P_5}\cos60°-\overline{P_5P_6}\cos60°+\overline{P_6P_7}\\&\quad-\overline{P_7P_8}\cos60°-\overline{P_8P_9}\cos60°+\overline{P_9P_{10}}-\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=4-\left(4\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}-\left\{4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\frac{1}{2}+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\\&\quad-\left\{4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}\times\frac{1}{2}-\left\{4\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}\times\frac{1}{2}+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^6\\&\quad-\left\{4\times\left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}\times\frac{1}{2}-\left\{4\times\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}\times\frac{1}{2}+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^9-\cdots\\&=4-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^5-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^6\\&\quad+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^6-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^8-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^9+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^9-\cdots\\&=\left\{4+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots\right\}\\&\quad-\left\{4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^5+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^8+\cdots\right\}\\&\quad-\left\{4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^6+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^9+\cdots\right\}\\&=\frac{4}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}-\frac{4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}-\frac{4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}\\&=\frac{32}{7}-\frac{8}{7}-\frac{4}{7}=\frac{20}{7}\end{aligned}$$

답 $\frac{20}{7}$

140



오른쪽 그림과 같이 그림 R_1에서 반원의 중심을 D라 하고, 점 D에서 변 A_1B_1, A_1C_1에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 고 하자.

직각삼각형 $A_1B_1C_1$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{B_1C_1}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$

$\triangle EB_1D \equiv \triangle FC_1D$ (SAS 합동)이므로

$\overline{B_1D}=\overline{DC_1}=\frac{1}{2}\overline{B_1C_1}=1$

따라서 반원의 반지름의 길이를 r라고 하면 직각삼각형 EB_1D에서 $\overline{EB_1}=\overline{ED}=r$, $\overline{B_1D}=1$이므로 피타고라스 정리에 의하여

$r^2+r^2=1$, $r^2=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore r=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\because r>0)$

$\therefore S_1=\triangle A_1B_1C_1-$(반원의 넓이)

$\quad=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\pi$

$\quad=1-\frac{\pi}{4}$

그림 R_2에서 $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$ (AA 닮음)이고

$\overline{A_2B_2}=\overline{A_2C_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 삼각형 $A_1B_1C_1$과 $A_2B_2C_2$의 닮음비는

$\sqrt{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}=1:\frac{1}{2}$

그림 R_n에서 새로 색칠한 부분과 그림 R_{n+1}에서 새로 색칠한 부분도 닮음이고 닮음비가 $1:\frac{1}{2}$이므로 그 넓이의 비는

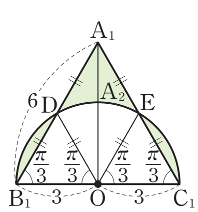
$1:\left(\frac{1}{2}\right)^2=1:\frac{1}{4}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n$은 첫째항이 $1-\frac{\pi}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1-\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4-\pi}{3}$$

답 ④

141



오른쪽 그림과 같이 그림 R_1에서 반원의 중심을 O라 하고 선분 OA_1을 그으면 선분 OA_1과 반원의 교점은 A_2이다. 반원과 선분 A_1B_1, A_1C_1의 교점을 각각 D, E라 하고 $\overline{OD}$, $\overline{OE}$를 그으면 그림 R_1의 도형은 선분 OA_1에 대하여 대칭이므로

$S_1=2[\{\triangle ODA_1-$(부채꼴 ODA_2의 넓이)$\}$

$\qquad+\{$(부채꼴 OB_1D의 넓이)$-\triangle OB_1D\}]$

삼각형 OB_1D는 한 변의 길이가 3인 정삼각형이므로

$\angle B_1OD=\frac{\pi}{3}$

$\overline{OA_1}\perp\overline{B_1C_1}$이므로

$\angle A_1OB_1=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \angle A_1OD=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

정삼각형 $A_1B_1C_1$의 한 변의 길이가 6이므로

$\overline{OA_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}$

$$\therefore S_1=2\left\{\left(\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times3\times\sin\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{\pi}{6}\right)+\left(\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times3^2\right)\right\}$$

$$=2\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}\pi+\frac{3}{2}\pi-\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{3}{2}\pi$$

그림 R_2에서 정삼각형 $A_2B_2C_2$의 높이가 3이므로

$\overline{A_1B_1}:\overline{A_1O}=\overline{A_2B_2}:3$에서 $\quad 2:\sqrt{3}=\overline{A_2B_2}:3$

그림 R_1의 반원의 반지름의 길이와 같다.

$\overline{A_1B_1}:\overline{A_1O}=6:3\sqrt{3}=2:\sqrt{3}$

$\therefore \overline{A_2B_2}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

모든 정삼각형은 서로 닮음이므로 삼각형 $A_1B_1C_1$과 $A_2B_2C_2$는 닮음이고 닮음비는

$6:2\sqrt{3}=1:\frac{\sqrt{3}}{3}$

그림 R_n에서 새로 색칠한 도형과 그림 R_{n+1}에서 새로 색칠한 도형도 닮음이고 닮음비가 $1:\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 그 넓이의 비는

$1^2:\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=1:\frac{1}{3}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n$은 첫째항이 $\frac{3}{2}\pi$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{3}{2}\pi}{1-\frac{1}{3}}=\frac{9}{4}\pi$$

답 ②

참고

(1) 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이를 h, 넓이를 S라고 하면

➡ $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

(2) 두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이를 S라고 하면

➡ $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

(3) 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴에서 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

➡ $l=r\theta$, $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$

142

그림 R_1에서 $\overline{AE_1}:\overline{E_1D_1}=3:1$이므로

$\overline{AE_1}=\frac{3}{4}\overline{AD_1}=3$, $\overline{E_1D_1}=\frac{1}{4}\overline{AD_1}=1$

직각삼각형 $E_1C_1D_1$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{E_1C_1}=\sqrt{\overline{E_1D_1}^2+\overline{D_1C_1}^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

삼각형 $E_1F_1C_1$은 직각이등변삼각형이므로

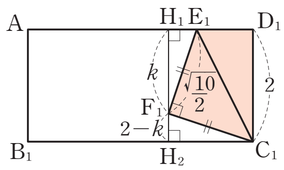
$\overline{E_1F_1}:\overline{E_1C_1}=1:\sqrt{2}$에서 $\quad \overline{E_1F_1}:\sqrt{5}=1:\sqrt{2}$

$\therefore \overline{C_1F_1}=\overline{E_1F_1}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\therefore S_1=\triangle E_1C_1D_1+\triangle E_1F_1C_1$

$\quad=\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{9}{4}$

그림 R_1에서 다음과 같이 점 F_1을 지나고 변 D_1C_1에 평행한 선분을 그어 변 AD_1, B_1C_1과의 교점을 각각 H_1, H_2라고 하자.



$\overline{F_1H_1}=k$라고 하면 $\overline{H_1H_2}=\overline{D_1C_1}=2$이므로 $\overline{F_1H_2}=2-k$
또, $\triangle F_1E_1H_1 \equiv \triangle C_1F_1H_2$ (RHA 합동)이므로
$\overline{H_1E_1}=\overline{H_2F_1}=2-k$, $\overline{C_1H_2}=\overline{F_1H_1}=k$
직각삼각형 $C_1F_1H_2$에서 피타고라스 정리에 의하여

$(2-k)^2+k^2=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$, $2k^2-4k+4=\frac{5}{2}$

$4k^2-8k+8=5$, $4k^2-8k+3=0$

$(2k-3)(2k-1)=0$

$\therefore k=\frac{3}{2}$ ($\because \overline{F_1H_1}>\overline{F_1H_2}$)

따라서 $\overline{F_1H_1}=\frac{3}{2}$, $\overline{H_1E_1}=\frac{1}{2}$이므로 직각삼각형 $F_1E_1H_1$에서

$\tan(\angle H_1E_1F_1)=\frac{\overline{F_1H_1}}{\overline{H_1E_1}}=3$

그림 R_2에서 $\overline{AB_2}=\overline{D_2C_2}=a$라고 하면
$\overline{AD_2}=2a$, $\overline{D_2E_1}=3-2a$

$\therefore \tan(\angle D_2E_1C_2)=\frac{\overline{D_2C_2}}{\overline{D_2E_1}}=\frac{a}{3-2a}$

이때 $\tan(\angle D_2E_1C_2)=\tan(\angle H_1E_1F_1)=3$이므로

$\frac{a}{3-2a}=3$, $a=3(3-2a)$

$\therefore a=\frac{9}{7}$

따라서 직사각형 $AB_1C_1D_1$과 $AB_2C_2D_2$의 닮음비는

$2:\frac{9}{7}=1:\frac{9}{14}$

두 사각형 $E_1F_1C_1D_1$과 $E_2F_2C_2D_2$도 닮음이고 그 닮음비도

$1:\frac{9}{14}$이다.

그림 R_n에서 새로 색칠한 사각형과 그림 R_{n+1}에서 새로 색칠한 사각형도 닮음이고 닮음비가 $1:\frac{9}{14}$이므로 그 넓이의 비는

$1^2:\left(\frac{9}{14}\right)^2=1:\frac{81}{196}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n$은 첫째항이 $\frac{9}{4}$, 공비가 $\frac{81}{196}$인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{81}{196}}=\frac{441}{115}$$

답 ③

다른 풀이

$\tan(\angle D_2E_1C_2)$의 값은 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 구할 수도 있다.

직각삼각형 $E_1C_1D_1$에서 $\tan(\angle D_1E_1C_1)=\frac{\overline{D_1C_1}}{\overline{E_1D_1}}=2$

직각삼각형 $E_1F_1C_1$에서 $\tan(\angle C_1E_1F_1)=\frac{\overline{F_1C_1}}{\overline{E_1F_1}}=1$

$$\therefore \tan(\angle D_1E_1F_1)=\frac{\tan(\angle D_1E_1C_1)+\tan(\angle C_1E_1F_1)}{1-\tan(\angle D_1E_1C_1)\tan(\angle C_1E_1F_1)}=\frac{2+1}{1-2\times 1}=-3$$

$$\therefore \tan(\angle D_2E_1C_2)=\tan(\pi-\angle D_1E_1F_1)=-\tan(\angle D_1E_1F_1)=3$$

참고

(1) 삼각함수의 덧셈정리
① $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
② $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
③ $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

(2) 여러 가지 각에 대한 삼각함수의 성질
① $2n\pi+\theta$의 삼각함수 (단, n은 정수)
$\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta$, $\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta$,
$\tan(2n\pi+\theta)=\tan\theta$
② $-\theta$의 삼각함수
$\sin(-\theta)=-\sin\theta$, $\cos(-\theta)=\cos\theta$,
$\tan(-\theta)=-\tan\theta$
③ $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수
$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\cos\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\sin\theta$,
$\tan\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\frac{1}{\tan\theta}$ (복부호동순)
④ $\pi\pm\theta$의 삼각함수
$\sin(\pi\pm\theta)=\mp\sin\theta$, $\cos(\pi\pm\theta)=-\cos\theta$,
$\tan(\pi\pm\theta)=\pm\tan\theta$ (복부호동순)

상위 1% 도전 문제

143

$\angle P_0OP_n=\theta_n$이라고 하면

$\theta_1=\frac{2}{3}\pi$

$\theta_2=\theta_1-\frac{1}{2}\theta_1+\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}\theta_1+\frac{2}{3}\pi$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\pi+\frac{2}{3}\pi$

$=\frac{2}{3}\pi\left(1+\frac{1}{2}\right)$

$\theta_3=\theta_2-\frac{1}{2}\theta_2+\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}\theta_2+\frac{2}{3}\pi$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\pi\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}\pi$

$=\frac{2}{3}\pi\left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$

$\theta_4=\theta_3-\frac{1}{2}\theta_3+\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}\theta_3+\frac{2}{3}\pi$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\pi\left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}+\frac{2}{3}\pi$

$=\frac{2}{3}\pi\left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}$

$\vdots$

이므로

$\theta_n=\frac{2}{3}\pi\left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$=\frac{2}{3}\pi\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

$=\frac{4}{3}\pi\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$l_n=2\times\theta_n=2\times\frac{4}{3}\pi\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\frac{8}{3}\pi\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$이므로

$\lim_{n\to\infty}l_n=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{3}\pi\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\frac{8}{3}\pi$

답 ③

144

처음 5 L의 물을 두 물통 A, B에 각각 4 L, 1 L로 나누어 담았을 때의 두 물통 A, B에 담긴 물의 양을 각각 a_0 L, b_0 L라 하고 주어진 시행을 n번 반복한 후에 물통 B에 담긴 물의 양을 b_n L라고 하자.

$a_0=4$, $b_0=1$이므로

$a_1=\frac{4}{2}+\frac{1}{4}\left(1+\frac{4}{2}\right)=\frac{11}{4}$

또,

$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{4}\left(b_n+\frac{a_n}{2}\right)=\frac{5}{8}a_n+\frac{1}{4}b_n$ …… ㉠

이고 두 물통 A, B에 담긴 물의 양은 5 L로 일정하므로

$a_n+b_n=5$

$\therefore b_n=5-a_n$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a_{n+1}=\frac{5}{8}a_n+\frac{1}{4}(5-a_n)=\frac{3}{8}a_n+\frac{5}{4}$

상수 k에 대하여

$a_{n+1}-k=\frac{3}{8}(a_n-k)$라고 하면

$a_{n+1}=\frac{3}{8}a_n+\frac{5}{8}k$이므로

$\frac{5}{8}k=\frac{5}{4}$ $\therefore k=2$

즉, $a_{n+1}-2=\frac{3}{8}(a_n-2)$이므로 수열 $\{a_n-2\}$는 첫째항이 $a_1-2=\frac{11}{4}-2=\frac{3}{4}$이고 공비가 $\frac{3}{8}$인 등비수열이다.

따라서 $a_n-2=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}$이므로

$a_n=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}+2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}+2\right\}=\frac{3}{4}\times0+2=2$

답 2

간단 풀이

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$라고 하면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이므로

$a_{n+1}=\frac{3}{8}a_n+\frac{5}{4}$에서

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{8}a_n+\frac{5}{4}\right)$, $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\frac{3}{8}\lim_{n\to\infty}a_n+\frac{5}{4}$

$\alpha=\frac{3}{8}\alpha+\frac{5}{4}$, $\frac{5}{8}\alpha=\frac{5}{4}$ $\therefore \alpha=2$

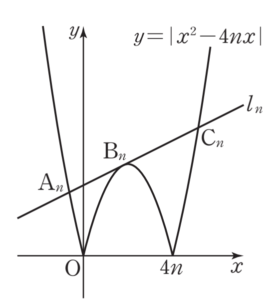
$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=2$

참고

㉡에서 $b_n=5-a_n$이므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(5-a_n)=5-\lim_{n\to\infty}a_n=5-2=3$

145



직선 l_n과 곡선 $y=|x^2-4nx|$가 서로 다른 세 점에서 만나고 $a_n\neq0$이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 l_n과 곡선 $y=-x^2+4nx$는 접해야 한다.

$a_n<b_n<c_n$이므로 접점은 B_n이다.

$y=-x^2+4nx$에서

$y'=-2x+4n$

접점 $B_n(b_n, -b_n^2+4nb_n)$에서의 접선의 기울기가 $\frac{n}{2}$이므로

$\frac{n}{2}=-2b_n+4n$ $\therefore b_n=\frac{7}{4}n$

즉, $B_n\left(\frac{7}{4}n, \frac{63}{16}n^2\right)$이므로 직선 l_n의 방정식은

$y-\frac{63}{16}n^2=\frac{n}{2}\left(x-\frac{7}{4}n\right)$

$\therefore y=\frac{n}{2}x+\frac{49}{16}n^2$

직선 l_n과 곡선 $y=x^2-4nx$의 두 교점이 A_n, C_n이므로 x에 대한 이차방정식 $\frac{n}{2}x+\frac{49}{16}n^2=x^2-4nx$, 즉 $x^2-\frac{9}{2}nx-\frac{49}{16}n^2=0$의 두 근은 a_n, c_n이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_n+c_n=\frac{9}{2}n,\ a_nc_n=-\frac{49}{16}n^2$$

$\mathrm{A}_n(a_n, a_n^2-4na_n)$, $\mathrm{C}_n(c_n, c_n^2-4nc_n)$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}&=\sqrt{(c_n-a_n)^2+\{c_n^2-4nc_n-(a_n^2-4na_n)\}^2}\\&=\sqrt{(c_n-a_n)^2+(c_n-a_n)^2(c_n+a_n-4n)^2}\\&=\sqrt{(c_n-a_n)^2\{1+(c_n+a_n-4n)^2\}}\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}(c_n-a_n)^2&=(c_n+a_n)^2-4a_nc_n\\&=\left(\frac{9}{2}n\right)^2-4\times\left(-\frac{49}{16}n^2\right)\\&=\frac{65}{2}n^2\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}&=\sqrt{(c_n-a_n)^2\{1+(c_n+a_n-4n)^2\}}\\&=\sqrt{\frac{65}{2}n^2\left\{1+\left(\frac{9}{2}n-4n\right)^2\right\}}\\&=\sqrt{\frac{65}{2}n^2\left(1+\frac{1}{4}n^2\right)}\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{\sqrt{\frac{65}{2}n^2\left(1+\frac{1}{4}n^2\right)}}{n^2}}_{\text{분모, 분자를 } n^2\text{, 즉 } \sqrt{n^4}\text{으로 나눈다.}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{65}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4}\right)}}{1}$$

$$=\sqrt{\frac{65}{2}\left(0+\frac{1}{4}\right)}=\frac{\sqrt{130}}{4}$$

답 $\frac{\sqrt{130}}{4}$

146

명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

$\sim q$: $x^2+x-2\geq 0$에서

$(x+2)(x-1)\geq 0$ $\quad\therefore x\leq -2$ 또는 $x\geq 1$

$\sim p$: $(x^2-2ax+a)(x^2+x-2)\geq 0$

명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이 되려면 $x\leq -2$ 또는 $x\geq 1$에서 $(x^2-2ax+a)(x^2+x-2)\geq 0$이어야 한다.

이때 $x^2+x-2\geq 0$이므로 $f(x)=x^2-2ax+a$라고 하면 $x\leq -2$ 또는 $x\geq 1$에서 $f(x)\geq 0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2-2ax+a=0$의 판별식을 D라고 하면

(i) $D\leq 0$일 때

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이므로

$\frac{D}{4}=a^2-a\leq 0$에서

$a(a-1)\leq 0$

$\therefore 0\leq a\leq 1$

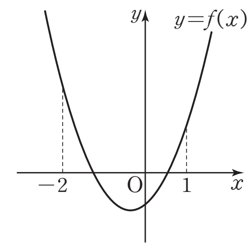
(ii) $D>0$일 때

$\frac{D}{4}=a^2-a>0$에서

$a(a-1)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>1$ …… ㉠

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 $x\leq -2$ 또는 $x\geq 1$에서 $f(x)\geq 0$이려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(-2)\geq 0$에서

$4+4a+a\geq 0$, $5a\geq -4$

$\therefore a\geq -\frac{4}{5}$ …… ㉡

$f(1)\geq 0$에서

$1-2a+a\geq 0$ $\quad\therefore a\leq 1$ …… ㉢

$f(x)=x^2-2ax+a=(x-a)^2-a^2+a$에서 $y=f(x)$의 그래프에서 축의 방정식은 $x=a$이므로

$-2<a<1$ …… ㉣

㉠~㉣에서 $-\frac{4}{5}\leq a<0$

(i), (ii)에서 $-\frac{4}{5}\leq a\leq 1$

따라서 $M=1$, $m=-\frac{4}{5}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Mm)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n=\frac{-\frac{4}{5}}{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}=-\frac{4}{9}$$

답 ②

참고

(1) 명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때

① $P\subset Q$이면 $p \longrightarrow q$는 참이다.

② $P\not\subset Q$이면 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

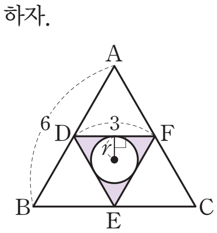
(2) 명제와 그 대우의 참, 거짓

① 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

② 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 거짓이다.

147

그림 R_1에서 정삼각형 DEF는 한 변의 길이가 3이므로 내접원의 반지름의 길이를 r라고 하자.



정삼각형 DEF의 넓이에서

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 3^2=\frac{1}{2}\times r\times(3+3+3)$

$\therefore r=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 3^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\pi=\frac{3}{4}(3\sqrt{3}-\pi)$

그림 R_2에서 두 정삼각형 DEF와 GHI는 닮음이고 닮음비가 $2:1$, 즉 $1:\frac{1}{2}$이다.

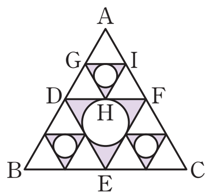


그림 R_1에서 색칠된 부분과 그림 R_2에서 새로 색칠된 한 부분도 닮음이고 그 닮음비가 $1:\frac{1}{2}$이다.

그림 R_n에서 새로 색칠한 한 부분과 그림 R_{n+1}에서 새로 색칠된 한 부분도 닮음이고 그 닮음비가 $1:\frac{1}{2}$이므로 그 넓이의 비는

$1^2:\left(\frac{1}{2}\right)^2=1:\frac{1}{4}$

이때 새로 색칠된 부분의 수가 3배씩 늘어나므로 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$은 첫째항이 $\frac{3}{4}(3\sqrt{3}-\pi)$, 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비급수의 합이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{3}{4}(3\sqrt{3}-\pi)}{1-\frac{3}{4}}=9\sqrt{3}-3\pi$$

답 $9\sqrt{3}-3\pi$

미니 모의고사 - 1회

01

$\frac{a_n}{n}=b_n$이라고 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{3}$, $a_n=nb_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+3n}-2n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+3n}-2n}{nb_n}$$

분모, 분자를 n, 즉 $\sqrt{n^2}$으로 나눈다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{3}{n}}-2}{b_n}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9+\frac{3}{n}}-2\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$$

$$=\frac{3-2}{\frac{1}{3}}=3$$

답 ③

02

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-2021}-n}{n-\sqrt{n^2-2020}}$$

분모, 분자를 유리화한다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-2021}-n)(\sqrt{n^2-2021}+n)(n+\sqrt{n^2-2020})}{(n-\sqrt{n^2-2020})(n+\sqrt{n^2-2020})(\sqrt{n^2-2021}+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2021(n+\sqrt{n^2-2020})}{2020(\sqrt{n^2-2021}+n)}$$

분모, 분자를 n, 즉 $\sqrt{n^2}$으로 나눈다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2021\left(1+\sqrt{1-\frac{2020}{n^2}}\right)}{2020\left(\sqrt{1-\frac{2021}{n^2}}+1\right)}$$

$$=\frac{-2021(1+1)}{2020(1+1)}=-\frac{2021}{2020}$$

답 ②

03

$a_n=\frac{n}{(n+1)!}$이라 하고 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\cdots+\left\{\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right\}$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$\therefore \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$=\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{1-\frac{1}{(n+1)!}\right\}$$

$$=1$$

답 1

04

$f(x)=x^3-2a_nx+8n^2$이라고 하면 $f(x)$가 $x-2n$으로 나누어떨어지므로 $f(2n)=0$에서

$8n^3-4na_n+8n^2=0$, $4na_n=8n^3+8n^2$

$\therefore a_n=2n(n+1)$

$$\begin{aligned}\therefore &\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{a_n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n(n+1)}\\&=5\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=5\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=5\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=5\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=5\end{aligned}$$

답 5

05

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)=0$

$\frac{a_n}{n}-3=b_n$이라고 하면

$\lim_{n\to\infty}b_n=0$, $a_n=n(b_n+3)$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n+3a_n}{n-a_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3n(b_n+3)}{n-n(b_n+3)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3(b_n+3)}{1-(b_n+3)}\\&=\frac{1+3(0+3)}{1-(0+3)}=-5\end{aligned}$$

분모, 분자를 n으로 나눈다.

답 ④

06

$\frac{5^n}{(4-2\sin\theta)^{n+1}}=\frac{5}{(4-2\sin\theta)^2}\times\left(\frac{5}{4-2\sin\theta}\right)^{n-1}$이므로

수열 $\left\{\frac{5^n}{(4-2\sin\theta)^{n+1}}\right\}$은 첫째항이 $\frac{5}{(4-2\sin\theta)^2}$이고, 공비가 $\frac{5}{4-2\sin\theta}$인 등비수열이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{(4-2\sin\theta)^{n+1}}$이 0이 아닌 극한값을 가지려면

$\frac{5}{4-2\sin\theta}\neq0$, $-1<\frac{5}{4-2\sin\theta}\leq1$ …… ㉠

한편 $-1\leq\sin\theta\leq1$이므로

$4-2\sin\theta>0$

따라서 ㉠에서 $0<\frac{5}{4-2\sin\theta}\leq1$

(i) $\frac{5}{4-2\sin\theta}>0$일 때

$4-2\sin\theta>0$이므로 $\frac{5}{4-2\sin\theta}>0$은 모든 실수 θ에 대하여 항상 성립한다.

(ii) $\frac{5}{4-2\sin\theta}\leq1$일 때

$4-2\sin\theta>0$이므로 양변에 $4-2\sin\theta$를 곱하여도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

즉, $5\leq4-2\sin\theta$이므로

$2\sin\theta\leq-1$ $\quad\therefore \sin\theta\leq-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $\sin\theta\leq-\frac{1}{2}$이므로 실수 θ의 값으로 적당한 것은 ⑤ $\frac{7}{6}\pi$이다.

답 ⑤

07

(i) $n\geq2$일 때

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(n+2)\times5^n-(n+1)\times5^{n-1}\\&=(4n+9)\times5^{n-1}\end{aligned}$$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=3\times5=15$

이것은 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같지 않다.

(i), (ii)에서

$a_1=15$, $a_n=(4n+9)\times5^{n-1}$ $(n\geq2)$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\times5^n}{(4n+9)\times5^{n-1}}\\&=5\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{4n+9}=5\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{4+\frac{9}{n}}=\frac{5}{4}\end{aligned}$$

분모, 분자를 n으로 나눈다.

답 $\frac{5}{4}$

08

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n=2n+1$ …… ㉠

㉠에 n 대신 $n-1$을 대입하면

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=2n-1$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$na_n=2$ $\quad\therefore a_n=\frac{2}{n}$ (단, $n\geq2$)

$a_1=3$, $a_n=\frac{2}{n}$ $(n\geq2)$이므로

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}\\&=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_5+\cdots\\&=3\times\frac{2}{2}+\frac{2}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}+\cdots\\&=3+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=3+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=3+4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=3+4\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\&=3+4\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=3+4\times\frac{1}{2}=5\end{aligned}$$

답 ⑤

참고

$n\ge 2$일 때 $a_n=\frac{2}{n}$이고, $n=1$일 때는 $a_n=\frac{2}{n}$가 성립하지 않으므로 다음과 같이 계산하지 않도록 주의한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n(n+1)}=4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=4\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=4\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=4$$

09

$f(1)=1$
$f(2)=1+3$
$f(3)=1+3+5+7$
$f(4)=1+3+5+7+9+11+13+15$
⋮

따라서 $f(n)$은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제2^{n-1}항까지의 합이므로

$$f(n)=\frac{2^{n-1}(1+2^n-1)}{2}=2^{2n-2}=4^{n-1}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

답 ④

10

기금을 조성한 후 n번째 해에 지급하는 장학금을 a_n억 원이라고 하면 해마다 지급하는 장학금의 총액은 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$억 원이다.

$a_1=20\times1.1\times0.2=20\times\frac{11}{10}\times\frac{2}{10}=\frac{22}{5}$

$a_2=(20\times1.1\times0.8)\times1.1\times0.2$
$\quad=(20\times1.1\times0.2)\times1.1\times0.8$
$\quad=a_1\times\frac{11}{10}\times\frac{8}{10}=a_1\times\frac{22}{25}$

$a_3=\{(20\times1.1\times0.8)\times1.1\times0.8\}\times1.1\times0.2$
$\quad=(20\times1.1\times0.2)\times1.1\times0.8\times1.1\times0.8$
$\quad=a_1\times\frac{11}{10}\times\frac{8}{10}\times\frac{11}{10}\times\frac{8}{10}=a_1\times\left(\frac{22}{25}\right)^2$
⋮

이므로

$a_n=a_1\times\left(\frac{22}{25}\right)^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{22}{5}$, 공비가 $\frac{22}{25}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{22}{5}}{1-\frac{22}{25}}=\frac{110}{3}$$

즉, 해마다 지급할 장학금의 총액은 $\frac{110}{3}$억 원이다.

답 ③

미니 모의고사 - 2회

01

$\frac{3a_n+1}{a_n+3}=b_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=1$

이때 $a_n=\frac{1-3b_n}{b_n-3}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-3b_n}{b_n-3}=\frac{1-3\lim_{n\to\infty}b_n}{\lim_{n\to\infty}b_n-3}$$
$$=\frac{1-3\times1}{1-3}=1$$

답 ④

간단 풀이

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$라고 하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+1}{a_n+3}=1$에서 $\frac{3\alpha+1}{\alpha+3}=1$

$3\alpha+1=\alpha+3,\ 2\alpha=2 \qquad \therefore \alpha=1$

즉, $\lim_{n\to\infty}a_n=1$이다.

02

$\frac{1}{2n^2+3}<a_n<\frac{1}{2n^2+1}$의 각 변에 n^2을 곱하면

$\frac{n^2}{2n^2+3}<n^2a_n<\frac{n^2}{2n^2+1}$

이때

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{3}{n^2}}=\frac{1}{2}$,

분모, 분자를 n^2으로 나눈다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$

이므로 수열의 극한값의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}n^2a_n=\frac{1}{2}$

답 ②

03

등비수열 $\left\{(x-5)\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}\right\}$이 수렴하려면

$x-5=0$ 또는 $-1<\frac{x}{2}\le1$

이어야 하므로

$x=5$ 또는 $-2<x\le2$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 5의 5개이다.

답 ⑤

04

$\mathrm{P}_n(n, 5^n)$, $\mathrm{Q}_n(n, 3^n)$이므로

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=5^n-3^n$

$\mathrm{P}_{n+1}(n+1, 5^{n+1})$, $\mathrm{Q}_{n+1}(n+1, 3^{n+1})$이므로

$\overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}}=5^{n+1}-3^{n+1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}}}{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}}=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{5^{n+1}-3^{n+1}}{5^n-3^n}}_{\text{분모, 분자를 }5^n\text{으로 나눈다.}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5-3\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}=5$$

답 ④

05

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x-1}{5}\right)^n$이 수렴하려면

$-1<\frac{2x-1}{5}<1$

이어야 하므로

$-5<2x-1<5$, $-4<2x<6$

$\therefore -2<x<3$ …… ㉠

수열 $\left\{\left(\log_2\frac{x}{3}\right)^n\right\}$이 수렴하려면

$-1<\log_2\frac{x}{3}\le 1$

이어야 하므로 $\frac{1}{2}<\frac{x}{3}\le 2$

$\therefore \frac{3}{2}<x\le 6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{3}{2}<x<3$

답 $\frac{3}{2}<x<3$

06

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라고 하면 공차가 3이므로

$a_n=a+3(n-1)=3n+a-3$

$a_{n+1}=3n+a$이므로

$a_{n+1}-a_n=3$

$a_{n+1}+a_n=6n+2a-3$

$a_{n+1}{}^2+a_n{}^2=(3n+a)^2+(3n+a-3)^2$

$=9n^2+6an+a^2+9n^2+a^2+9+6an-6a-18n$

$=18n^2+(12a-18)n+2a^2-6a+9$

$\therefore b_n=a_{n+1}{}^4-a_n{}^4$

$=(a_{n+1}{}^2+a_n{}^2)(a_{n+1}{}^2-a_n{}^2)$

$=(a_{n+1}{}^2+a_n{}^2)(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)$

$=\{18n^2+(12a-18)n+2a^2-6a+9\}\times(6n+2a-3)\times 3$

$=3\{18n^2+(12a-18)n+2a^2-6a+9\}(6n+2a-3)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n{}^3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{3\{18n^2+(12a-18)n+2a^2-6a+9\}(6n+2a-3)}{(3n+a-3)^3}}_{\text{분모, 분자를 }n^3\text{으로 나눈다.}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left\{18+\frac{12a-18}{n}+\frac{2a^2-6a+9}{n^2}\right\}\left(6+\frac{2a-3}{n}\right)}{\left(3+\frac{a-3}{n}\right)^3}$$

$=\frac{3\times18\times6}{3^3}=12$

답 ④

07

원 C_n은 중심이 점 $\mathrm{P}_n\left(n, \sqrt{\frac{n}{4}}\right)$이고 y축에 접하므로 그 방정식은

$(x-n)^2+\left(y-\sqrt{\frac{n}{4}}\right)^2=n^2$

원 C_n이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$(x-n)^2+\frac{n}{4}=n^2$, $x^2-2nx+\frac{n}{4}=0$

$\therefore x=n\pm\sqrt{n^2-\frac{n}{4}}$

원 C_n이 x축과 만나는 점 중 원점과 가까운 점이 Q_n이므로

$\mathrm{Q}_n\left(n-\sqrt{n^2-\frac{n}{4}},\ 0\right)$

$\overline{\mathrm{OQ}_n}=n-\sqrt{n^2-\frac{n}{4}}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\overline{\mathrm{OQ}_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{n-\sqrt{n^2-\frac{n}{4}}}_{\text{분모를 유리화한다.}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2-\frac{n}{4}}}{\left(n-\sqrt{n^2-\frac{n}{4}}\right)\left(n+\sqrt{n^2-\frac{n}{4}}\right)}$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{n+\sqrt{n^2-\frac{n}{4}}}{n}}_{\text{분모, 분자를 }n\text{, 즉 }\sqrt{n^2}\text{으로 나눈다.}}$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{4n}}}{1}$$

$=4\times2=8$

답 8

08

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r라고 하면

$a_n=ar^{n-1}$ $\quad\therefore \frac{1}{a_n}=\frac{1}{a}\times\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$

조건 (가)에서 $\sum_{k=1}^{9}a_k=\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{a_k}$이므로

$\frac{a(1-r^9)}{1-r}=\frac{\frac{1}{a}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^9\right\}}{1-\frac{1}{r}}$ $(\because r\ne1)$

$\frac{a(1-r^9)}{1-r}=\frac{r}{a(r-1)}\times\frac{r^9-1}{r^9}$

$\frac{a(r^9-1)}{r-1}=\frac{1}{ar^8}\times\frac{r^9-1}{r-1}$

$\therefore a^2r^8=1$ …… ㉠

조건 (나)에서 $a_5+a_6=-1$이므로

$ar^4+ar^5=-1$, $ar^4(1+r)=-1$

$\therefore ar^4=-\frac{1}{1+r}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\left(-\frac{1}{1+r}\right)^2=1$, $\frac{1}{1+2r+r^2}=1$

$1+2r+r^2=1$, $r^2+2r=0$

$r(r+2)=0$ $\quad\therefore r=-2$ $(\because r\ne0)$

$r=-2$를 ㉠에 대입하면

$a^2\times(-2)^8=1,\ a^2=\dfrac{1}{256}$

$\therefore a=\dfrac{1}{16}\ (\because a>0)$

따라서 $\dfrac{1}{a_n}=16\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{16}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{32}{3}$

즉, $p=3,\ q=32$이므로

$p+q=35$

답 35

참고

$r=1$이면 조건 ㈏에 의하여 $a+a=-1$, 즉 $a=-\dfrac{1}{2}$이 되어 첫째항이 양수라는 조건에 맞지 않는다.

$\therefore r\neq1$

또, $r=0$이면 조건 ㈏를 만족시키지 않으므로

$r\neq0$

09

333^n을 4로 나눈 나머지는 333^n의 일의 자리의 수를 4로 나눈 나머지와 같다.

$n=1, 2, 3, \cdots$일 때 333^n의 일의 자리의 수를 차례대로 나열하면

3, 9, 7, 1, 3, $\cdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$을 차례대로 나열하면

$a_1=3,\ a_2=1,\ a_3=3,\ a_4=1,\ a_5=3,\ \cdots$

$$\begin{aligned}\therefore 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\{6+(-1)^n\}^n}&=48\left(\frac{a_1}{5}+\frac{a_2}{7^2}+\frac{a_3}{5^3}+\frac{a_4}{7^4}+\frac{a_5}{5^5}+\frac{a_6}{7^6}+\cdots\right)\\&=48\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{7^2}+\frac{3}{5^3}+\frac{1}{7^4}+\frac{3}{5^5}+\frac{1}{7^6}+\cdots\right)\\&=48\Bigg\{3\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^5}+\cdots\right)}_{\text{첫째항이 }\frac{1}{5},\text{ 공비가 }\frac{1}{25}\text{인 등비급수}}+\underbrace{\left(\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{7^6}+\cdots\right)}_{\text{첫째항이 }\frac{1}{49},\text{ 공비가 }\frac{1}{49}\text{인 등비급수}}\Bigg\}\\&=48\left(3\times\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}+\frac{\frac{1}{49}}{1-\frac{1}{49}}\right)\\&=48\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{48}\right)=31\end{aligned}$$

답 ⑤

10

선분 A_nA_{n+1}을 지름으로 하는 반원의 호의 길이를 l_n이라고 하면 구하는 모든 반원의 호의 길이의 합은 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}l_n$이다.

$\overline{A_1A_2}=3$이므로 $l_1=\dfrac{3}{2}\pi$

$\overline{A_2A_3}=3\times\dfrac{2}{3}=2$이므로 $l_2=\pi$

$\overline{A_3A_4}=2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$이므로 $l_3=\dfrac{2}{3}\pi$

$\overline{A_4A_5}=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{9}$이므로 $l_4=\dfrac{4}{9}\pi$

$\overline{A_5A_6}=\dfrac{8}{9}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{16}{27}$이므로 $l_5=\dfrac{8}{27}\pi$

$\overline{A_6A_7}=\dfrac{16}{27}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{32}{81}$이므로 $l_6=\dfrac{16}{81}\pi$

$\vdots$

$$\begin{aligned}\therefore\sum_{n=1}^{\infty}l_n&=\frac{3}{2}\pi+\pi+\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{9}\pi+\frac{8}{27}\pi+\frac{16}{81}\pi+\cdots\\&=\pi\Bigg\{\underbrace{\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+\frac{8}{27}+\cdots\right)}_{\text{첫째항이 }\frac{3}{2},\text{ 공비가 }\frac{4}{9}\text{인 등비급수}}+\underbrace{\left(1+\frac{4}{9}+\frac{16}{81}+\cdots\right)}_{\text{첫째항이 }1,\text{ 공비가 }\frac{4}{9}\text{인 등비급수}}\Bigg\}\\&=\pi\left(\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{4}{9}}+\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\right)\\&=\pi\left(\frac{27}{10}+\frac{9}{5}\right)=\frac{9}{2}\pi\end{aligned}$$

답 $\dfrac{9}{2}\pi$

Ⅱ. 미분법

03 여러 가지 함수의 미분

001

ㄱ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-3^{x+1}}{4^x}=\dfrac{2^0-3^1}{4^0}=\dfrac{1-3}{1}=-2$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5^{x+2}}{3^x-5^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5^2}{\left(\dfrac{3}{5}\right)^x-1}=\dfrac{25}{0-1}=-25$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to3}\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)=\log_{\frac{1}{2}}(9-1)=\log_{2^{-1}}2^3=-3$

ㄹ. $\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\dfrac{4x+1}{x+6}=\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\dfrac{4+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{6}{x}}=\log_2\dfrac{4+0}{1+0}$

$=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

따라서 극한값이 큰 것부터 순서대로 나열하면

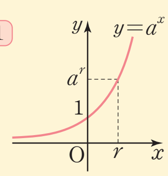
ㄹ－ㄱ－ㄷ－ㄴ이다.

답 ④

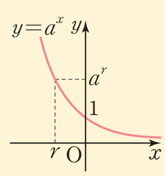
풍쌤 비법

(1) 지수함수 $y=a^x\,(a>0,\ a\neq1)$에서

$a>1$



$0<a<1$

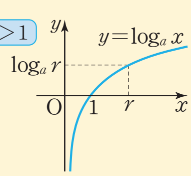


① $a>1$일 때, $\lim\limits_{x\to r}a^x=a^r$, $\lim\limits_{x\to\infty}a^x=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$

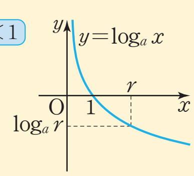
② $0<a<1$일 때, $\lim\limits_{x\to r}a^x=a^r$, $\lim\limits_{x\to\infty}a^x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=\infty$

(2) 로그함수 $y=\log_a x\,(a>0,\ a\neq1)$에서

$a>1$



$0<a<1$



① $a>1$일 때, $\lim\limits_{x\to r}\log_a x=\log_a r$ (r는 양수),

$\lim\limits_{x\to0+}\log_a x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=\infty$

② $0<a<1$일 때, $\lim\limits_{x\to r}\log_a x=\log_a r$ (r는 양수),

$\lim\limits_{x\to0+}\log_a x=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=-\infty$

002

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a\times3^{x+2}+2^x}{3^x-2^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a\times9+\left(\dfrac{2}{3}\right)^x}{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^x}=9a=54$

$\therefore\ a=6$

답 ①

003

$$\lim_{x\to\infty}\{\log_6(ax-2)-\log_6(x+1)\}=\lim_{x\to\infty}\log_6\frac{ax-2}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_6\frac{a-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$$

$$=\log_6 a=2$$

$\therefore\ a=6^2=36$

답 ④

참고

로그의 성질

$a>0,\ a\neq1,\ M>0,\ N>0$일 때

(1) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

(2) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(3) $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(4) $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수이다.)

004

$\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0+}\frac{\log_5\dfrac{5}{x}}{\log_5\left(\dfrac{10}{x}+1\right)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\log_5 5t}{\log_5(10t+1)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\log_5 t}{\log_5 t+\log_5\left(10+\dfrac{1}{t}\right)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\log_5 t}+1}{1+\dfrac{\log_5\left(10+\dfrac{1}{t}\right)}{\log_5 t}}$$

$$=\frac{1}{1}=1$$

$\log_5 5t=\log_5 5+\log_5 t$,

$\log_5(10t+1)$

$=\log_5 t\left(10+\dfrac{1}{t}\right)$

$=\log_5 t+\log_5\left(10+\dfrac{1}{t}\right)$

답 ①

005

$$\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{x}{a}\right)(1+ax)\right\}^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}}\right\}^{\frac{1}{a}}\{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\}^a$$

$$=e^{\frac{1}{a}}\times e^a$$

$$=e^{a+\frac{1}{a}}=e^{\frac{10}{3}}$$

$a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{10}{3}$에서 $3a^2-10a+3=0$

$(3a-1)(a-3)=0$ $\therefore\ a=3$ ($\because$ a는 자연수)

답 3

006

$x-1=t$로 놓으면 $x \to 1$일 때 $t \to 0$이므로

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1}{\log_9 x}-\frac{x-1}{\log_3 x}\right)=\lim_{t\to0}\left\{\frac{t}{\log_9(t+1)}-\frac{t}{\log_3(t+1)}\right\}$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{1}{\frac{\log_9(t+1)}{t}}-\frac{1}{\frac{\log_3(t+1)}{t}}\right\}$$
$$=\ln 9-\ln 3$$
$$=2\ln 3-\ln 3$$
$$=\ln 3$$

답 $\ln 3$

007

접근

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{bx}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{ax}\right\}^{\frac{b}{a}}$ 꼴이 되도록 식을 변형한다.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^x$$

$\frac{x+a}{x-a}=\frac{x-a+2a}{x-a}=\frac{x-a}{x-a}+\frac{2a}{x-a}$
$=1+\frac{2a}{x-a}$

$x-a=t$로 놓으면 $x \to \infty$일 때 $t \to \infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{2a}{t}\right)^{t+a}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2a}{t}\right)^{\frac{t}{2a}}\right\}^{\frac{2a(t+a)}{t}}$$
$$=e^{2a}=e^{100}$$

$\lim_{t\to\infty}\frac{2a(t+a)}{t}$
$=\lim_{t\to\infty}2a\left(1+\frac{a}{t}\right)$
$=2a$

$2a=100$ $\quad\therefore a=50$

답 50

008

$\lim_{x\to0}\frac{(x+2)^2-a}{e^{bx}-e^{ax}}=\frac{1}{2}$에서 $x \to 0$일 때 극한값이 존재하고

(분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}\{(x+2)^2-a\}=0$이므로

$2^2-a=0$ $\quad\therefore a=4$

$$\lim_{x\to0}\frac{(x+2)^2-a}{e^{bx}-e^{ax}}=\lim_{x\to0}\frac{(x+2)^2-4}{e^{bx}-e^{4x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x(x+4)}{e^{bx}-e^{4x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{x}{e^{bx}-e^{4x}}\times(x+4)\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{\frac{e^{bx}-e^{4x}}{x}}\times(x+4)\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{\frac{e^{bx}-1}{x}-\frac{e^{4x}-1}{x}}\times(x+4)\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{\frac{e^{bx}-1}{bx}\times b-\frac{e^{4x}-1}{4x}\times4}\times(x+4)\right\}$$
$$=\frac{1}{b-4}\times4$$
$$=\frac{4}{b-4}=\frac{1}{2}$$

$b-4=8$ $\quad\therefore b=12$

$\therefore a+b=4+12=16$

답 ⑤

간단 풀이

$$\lim_{x\to0}\frac{(x+2)^2-a}{e^{bx}-e^{ax}}=\lim_{x\to0}\frac{(x+2)^2-4}{e^{bx}-e^{4x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x(x+4)}{e^{bx}-e^{4x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{bx-4x}{e^{bx}-e^{4x}}\times\frac{x(x+4)}{x(b-4)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{bx-4x}{e^{bx}-e^{4x}}\times\frac{x+4}{b-4}\right)$$
$$=1\times\frac{4}{b-4}$$
$$=\frac{4}{b-4}=\frac{1}{2}$$

참고

미정계수의 결정

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 상수)일 때

(1) $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

(2) $\lim_{x\to a}f(x)=0$이고 $\alpha\neq0$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이다.

009

두 점 A, B의 좌표를 각각 구하면

A$(t, \ln t)$, B$(t, -\ln t)$

$\therefore \overline{AB}=\ln t-(-\ln t)=2\ln t$

삼각형 AQB의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times2\ln t\times\overline{PQ}=1$ $\quad\therefore \overline{PQ}=\frac{1}{\ln t}$

$\therefore f(t)=\frac{1}{\ln t}$

$t-1=s$로 놓으면 $t \to 1+$일 때 $s \to 0+$이므로

$$\lim_{t\to1+}(t-1)f(t)=\lim_{t\to1+}\frac{t-1}{\ln t}=\lim_{s\to0+}\frac{s}{\ln(s+1)}=1$$

답 ②

010

$f(x)=x^3\ln x^4=4x^3\ln x$에서

$f'(x)=12x^2\ln x+4x^3\times\frac{1}{x}=12x^2\ln x+4x^2$이므로

$f'(e^x)=12\times(e^x)^2\times\ln e^x+4\times(e^x)^2$
$=12xe^{2x}+4e^{2x}$

$$\therefore \lim_{x\to0}\left\{\frac{f'(e^x)}{4e^{2x}}\right\}^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{12xe^{2x}+4e^{2x}}{4e^{2x}}\right)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}(3x+1)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\{(3x+1)^{\frac{1}{3x}}\}^3=e^3$$

답 ③

참고

곱의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

011

$f(x)=(2^x+8)\log_2 x$에서 $f(1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{f'(1)}{2}$$

$f'(x)=2^x\ln 2\times\log_2 x+(2^x+8)\times\dfrac{1}{x\ln 2}$이므로

$f'(1)=\dfrac{10}{\ln 2}$

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\frac{f'(1)}{2}=\frac{5}{\ln 2}$

답 ②

참고

미분계수

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

012

$g(x)=f(x)e^{x-1}-2x$로 놓으면

$g'(x)=f'(x)e^{x-1}+f(x)e^{x-1}-2$ $\quad(e^{x-1})'=\left(\dfrac{e^x}{e}\right)'=\dfrac{e^x}{e}=e^{x-1}$

$g(1)=f(1)-2=2-2=0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)e^{x-1}-2x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$=g'(1)$$
$$=f'(1)+f(1)-2$$
$$=5+2-2=5$$

답 5

013

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2}{n+1}(\sqrt[n]{x}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2}{n+1}(x^{\frac{1}{n}}-1)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{1+\frac{1}{n}}\times\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)$$

$\dfrac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $h\to0+$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{1+\frac{1}{n}}\times\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{h\to0+}\left(\frac{9}{1+h}\times\frac{x^h-1}{h}\right)=9\ln x$$

즉, $f(x)=9\ln x$이므로 $f'(x)=\dfrac{9}{x}$

$\therefore f'(3)=\dfrac{9}{3}=3$

답 ②

014

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\displaystyle\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$\displaystyle\lim_{x\to1+}3^x=\lim_{x\to1-}(ax+b)=f(1)$

$\therefore a+b=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, $f'(1)$이 존재해야 하므로

$$f'(x)=\begin{cases}3^x\ln3 & (x>1)\\ a & (x<1)\end{cases}$$

에서 $\displaystyle\lim_{x\to1+}3^x\ln3=\lim_{x\to1-}a$

$\displaystyle\lim_{x\to1+}f'(x)=\lim_{x\to1-}f'(x)$

$\therefore a=3\ln3$

$a=3\ln3$을 ㉠에 대입하면

$3\ln3+b=3 \quad \therefore b=3-3\ln3$

$\therefore a-b=3\ln3-(3-3\ln3)=6\ln3-3$

답 ①

참고

미분가능성과 연속성

두 함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 함수

$f(x)=\begin{cases}g(x) & (x\ge a)\\ h(x) & (x<a)\end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하면

(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다.

➡ $\displaystyle\lim_{x\to a+}g(x)=\lim_{x\to a-}h(x)=g(a)$

(2) 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수가 존재한다.

➡ $\displaystyle\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}$

015

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$에서

$\cos\alpha>0$, $\sin\beta<0$

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{7}{25}$$

답 $-\dfrac{7}{25}$

참고

삼각함수 사이의 관계

(1) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\qquad$ (2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

016

$\sin\alpha+\cos\beta=\dfrac{2}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\dfrac{4}{9}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\cos\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt3}$의 양변을 제곱하면

$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\dfrac{1}{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)+\cos^2\beta+\sin^2\beta=\dfrac{7}{9}$

$2+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=\dfrac{7}{9}$

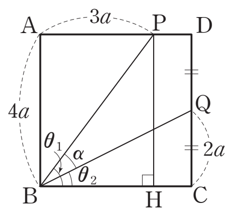
$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=-\dfrac{11}{18}$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{11}{18}$

답 ①

017

정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 $4a$라고 하면



$\overline{AP}=3a$, $\overline{CQ}=2a$

$\angle PBC=\theta_1$, $\angle QBC=\theta_2$라 하고 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{BH}=\overline{AP}=3a$

$\triangle PBH$에서 $\tan\theta_1=\dfrac{4a}{3a}=\dfrac{4}{3}$

$\triangle QBC$에서 $\tan\theta_2=\dfrac{2a}{4a}=\dfrac{1}{2}$

이때 $\alpha=\theta_1-\theta_2$이므로

$$\tan\alpha=\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

$$=\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}{1+\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

답 ②

018

접근

직선 $y=ax+b$와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 α라고 할 때, $\tan\alpha=a$임을 이용한다.

두 직선 $y=4x$, $y=mx$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 2θ, $\theta\left(0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라고 하면

$\tan 2\theta=4$, $\tan\theta=m$

$\tan 2\theta=\tan(\theta+\theta)=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$이므로

$4=\dfrac{2m}{1-m^2}$, $4m^2+2m-4=0$

$2m^2+m-2=0$ $\quad\therefore m=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

이때 $0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\underbrace{0<\theta<\dfrac{\pi}{4}}_{0<\tan\theta<1}$이므로 $m>0$

$\therefore m=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$

따라서 $a=-1$, $b=17$이므로

$a+b=-1+17=16$

답 ①

019

$x-\dfrac{1}{2}=t$로 놓으면 $x\to\dfrac{1}{2}$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\sin(\cos\pi x)}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left\{\cos\pi\left(t+\frac{1}{2}\right)\right\}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left\{\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\right\}}{t}$$

$\cos\left(\pi t+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\pi t$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(-\sin\pi t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\sin(-\sin\pi t)}{-\sin\pi t}\times\frac{\sin\pi t}{\pi t}\times(-\pi)\right\}$$

$$=1\times1\times(-\pi)=-\pi$$

답 ②

풍쌤 비법

치환을 이용한 삼각함수의 극한

$x-a=t$로 놓으면 $x\to a$일 때 $t\to 0$이므로

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\tan(x-a)}{x-a}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}=1$

참고

$\dfrac{n\pi}{2}\pm\theta$ (n은 정수) 꼴의 삼각함수의 변환

(i) n이 홀수이면 sin ➡ cos, cos ➡ sin
n이 짝수이면 sin ➡ sin, cos ➡ cos
으로 변형한다.

(ii) θ는 항상 예각으로 생각하고 $\dfrac{n\pi}{2}\pm\theta$가 나타내는 동경이 속하는 사분면에서 원래 주어진 삼각함수의 부호를 따른다.

020

접근

함수 $f(x)$를 이용하여 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(\sin x)}$를 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}$ 꼴이 되도록 식을 변형한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2-2x)}{\sin^2x-2\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin(x^2-2x)}{x^2-2x}\times\frac{x^2-2x}{\sin x(\sin x-2)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin(x^2-2x)}{x^2-2x}\times\frac{x(x-2)}{\sin x(\sin x-2)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin(x^2-2x)}{x^2-2x}\times\frac{x}{\sin x}\times\frac{x-2}{\sin x-2}\right\}$$

$$=1\times1\times\frac{-2}{-2}=1$$

답 1

021

$\dfrac{2}{x-3}=t$로 놓으면 $x=3+\dfrac{2}{t}$이고 $x\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{5}\tan\frac{2}{x-3}=\lim_{t\to 0}\frac{10t+6}{5t}\tan t$$

$x=3+\dfrac{2}{t}$이므로

$\dfrac{3x+1}{5}=\dfrac{3\left(3+\frac{2}{t}\right)+1}{5}$

$=\dfrac{10+\frac{6}{t}}{5}=\dfrac{10t+6}{5t}$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{10t+6}{5}\times\frac{\tan t}{t}\right)$$

$$=\frac{6}{5}\times1=\frac{6}{5}$$

답 ④

022

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{ax\tan x+b}{1-\cos x}=8$에서 $x\to 0$일 때 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to 0}(ax\tan x+b)=0$이므로 $b=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax\tan x+b}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax\tan x}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax\tan x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax\tan x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax\tan x(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{ax\tan x(1+\cos x)}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a\times\frac{\tan x}{x}\times(1+\cos x)}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}$$

$$=\frac{a\times 1\times(1+1)}{1^2}$$

$=2a=8$

$\therefore a=4$

$\therefore a+b=4+0=4$

답 ④

풍쌤 비법

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\cos x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ 꼴의 극한은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 분모, 분자에 $1+\cos x$를 각각 곱한다.

(ii) $1-\cos^2 x=\sin^2 x$임을 이용한다.

(iii) 삼각함수의 극한을 이용한다.

023

$\overline{OP}=\sqrt{t^2+\sin^2 t}$이고 원 C의 반지름의 길이는 $\sin t$이므로

$\overline{OR}=\overline{OP}-\overline{RP}=\sqrt{t^2+\sin^2 t}-\sin t$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{OQ}}{\overline{OR}}=\lim_{t\to 0+}\frac{t}{\sqrt{t^2+\sin^2 t}-\sin t}$$

$\frac{0}{0}$ 꼴이므로 분모, 분자 중 무리식이 있으면 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{t(\sqrt{t^2+\sin^2 t}+\sin t)}{(\sqrt{t^2+\sin^2 t}-\sin t)(\sqrt{t^2+\sin^2 t}+\sin t)}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{t(\sqrt{t^2+\sin^2 t}+\sin t)}{t^2+\sin^2 t-\sin^2 t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{t^2+\sin^2 t}+\sin t}{t}$$

분모, 분자를 t로 나눈다.

$$=\lim_{t\to 0+}\left(\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{t^2}}+\frac{\sin t}{t}\right)$$

$=\sqrt{1+1}+1$

$=1+\sqrt{2}$

따라서 $a=1$, $b=1$이므로

$a+b=1+1=2$

답 2

024

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)+f(\pi)-f(\pi-h)}{h}$$

$$=2\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}$$

$=2f'(\pi)+f'(\pi)$

$=3f'(\pi)$

$f(x)=e^x\cos x$에서

$f'(x)=e^x\cos x+e^x\times(-\sin x)$

$\quad=e^x(\cos x-\sin x)$

이므로

$3f'(\pi)=3e^\pi(\cos\pi-\sin\pi)=-3e^\pi$

답 ①

025

$f(x)=\sin^2 x=\sin x\sin x$에서

$f'(x)=\cos x\sin x+\sin x\cos x$

$\quad=2\sin x\cos x$

$$\therefore \lim_{x\to\pi}\frac{5f'(x)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{10\sin x\cos x}{x-\pi}$$

$x-\pi=t$로 놓으면 $x\to\pi$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{10\sin x\cos x}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{10\sin(t+\pi)\cos(t+\pi)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{10\times(-\sin t)\times(-\cos t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(10\times\frac{\sin t}{t}\times\cos t\right)$$

$=10\times 1\times 1=10$

답 ⑤

026

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3\tan h-7h^2\sin\frac{1}{h}}{h}$$

$$=3\lim_{h\to 0}\frac{\tan h}{h}-7\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}$$

이때 $-|h|\le h\sin\frac{1}{h}\le|h|$이고 $\lim_{h\to 0}(-|h|)=\lim_{h\to 0}|h|=0$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0$

$\therefore f'(0)=3\times 1-7\times 0=3$

답 ③

참고

함수의 극한의 대소 관계

세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때, a에 가까운 모든 x에 대하여

(1) $f(x)\le g(x)$이면 $\alpha\le\beta$이다.

(2) $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$이다.

027

$$f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x\sin(x+h)-x\sin x}{h}$$

$$=x\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$=x(\sin x)'$

$=x\cos x$

이므로

$$f'(x)=1\times\cos x+x\times(-\sin x)$$
$$=\cos x-x\sin x$$
$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$$

답 ③

028

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to0+}(3a\cos x+2b\sin x)=\lim_{x\to0-}e^x=f(0)$$

$3a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$

또, $f'(0)$이 존재해야 하므로

$$f'(x)=\begin{cases}-3a\sin x+2b\cos x & (x>0)\\ e^x & (x<0)\end{cases}$$에서

$$\lim_{x\to0+}(-3a\sin x+2b\cos x)=\lim_{x\to0-}e^x$$

$2b=1 \qquad \therefore b=\frac{1}{2}$

$$\therefore ab=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

답 ①

029

접근

$x\to0+$, $x\to0-$로 나누어 극한값을 구하고 이때의 극한값이 서로 같아야 함을 이용한다.

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to\infty$이고 $x\to0-$일 때 $t\to-\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{3^{\frac{1}{x}}+3^b}{3^{\frac{1}{x}}+3^a}=\lim_{t\to\infty}\frac{3^t+3^b}{3^t+3^a}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+3^b\times\left(\frac{1}{3}\right)^t}{1+3^a\times\left(\frac{1}{3}\right)^t}=1$$

$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^t=0$

$$\lim_{x\to0-}\frac{3^{\frac{1}{x}}+3^b}{3^{\frac{1}{x}}+3^a}=\lim_{t\to-\infty}\frac{3^t+3^b}{3^t+3^a}=\frac{3^b}{3^a}=3^{b-a}$$

$\lim_{t\to-\infty}3^t=0$

이때 $\lim_{x\to0}\frac{3^{\frac{1}{x}}+3^b}{3^{\frac{1}{x}}+3^a}$의 값이 c로 존재하려면

$c=1=3^{b-a} \qquad \therefore b-a=0,\ c=1$

$\therefore a-b+c=-(b-a)+c=1$

답 ④

030

ㄱ. $-x=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x}{5^x-5^{-x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{5^{-t}}{5^{-t}-5^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{25}\right)^t}{\left(\frac{1}{25}\right)^t-1}=0$$

ㄴ. $\lim_{x\to0+}\frac{1}{x}=\infty$, $\lim_{x\to0-}\frac{1}{x}=-\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}2^{\frac{1}{x}}=\infty,\ \lim_{x\to0+}2^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=0$$
$$\lim_{x\to0-}2^{\frac{1}{x}}=0,\ \lim_{x\to0-}2^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0-}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\infty$$

이때 $\lim_{x\to0+}\frac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}-2^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0+}\frac{1}{1-2^{-\frac{2}{x}}}=1$, $\lim_{x\to0-}\frac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}-2^{-\frac{1}{x}}}=0$

이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}-2^{-\frac{1}{x}}}\neq\lim_{x\to0-}\frac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}-2^{-\frac{1}{x}}}$$

따라서 극한값이 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}(-\log_2 x)=-\infty$

ㄹ. $$\lim_{x\to\infty}(\log_3\sqrt{3x^2+7}-\log_3 x)=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{\sqrt{3x^2+7}}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log_3\sqrt{3+\frac{7}{x^2}}$$
$$=\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

031

$$\lim_{x\to0+}\frac{a^x+\log_b x}{b^x+\log_a x}=\lim_{x\to0+}\frac{a^x+\frac{\log x}{\log b}}{b^x+\frac{\log x}{\log a}}$$

이때 $\lim_{x\to0+}a^x=1$, $\lim_{x\to0+}b^x=1$이고 $\lim_{x\to0+}\log x=-\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{a^x+\frac{\log x}{\log b}}{b^x+\frac{\log x}{\log a}}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{a^x}{\log x}+\frac{1}{\log b}}{\frac{b^x}{\log x}+\frac{1}{\log a}}=\frac{\frac{1}{\log b}}{\frac{1}{\log a}}$$
$$=\frac{\log a}{\log b}=\log_b a=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \log_a b=\frac{1}{\log_b a}=\frac{3}{2}$$

답 ④

참고

로그의 밑의 변환

$a\neq1$, $a>0$, $b>0$일 때

(1) $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ (단, $c>0$, $c\neq1$)

(2) $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

032

$$f(6)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(6^n+6^{3n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log6^{3n}(6^{-2n}+1)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{\log6^{3n}+\log(6^{-2n}+1)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{3\log6+\frac{1}{n}\log(6^{-2n}+1)\right\}$$
$$=3\log6$$

$$f\left(\frac{1}{6}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(6^{-n}+6^{-3n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log6^{-n}(1+6^{-2n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{\log 6^{-n}+\log(1+6^{-2n})\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\log 6+\frac{1}{n}\log(1+6^{-2n})\right\}$$
$$=-\log 6$$
$\therefore f(6)-f\left(\frac{1}{6}\right)=3\log 6-(-\log 6)=4\log 6$

답 ⑤

033

$f(3)=22$이므로

$a^3+b=22$ ...... ㉠

$\lim_{x\to-\infty}\{f(x)+5\}=\lim_{x\to-\infty}(a^x+b+5)=0$ ...... ㉡

(i) $0<a<1$일 때

$\lim_{x\to-\infty}a^x=\infty$이므로 ㉡은 성립하지 않는다.

(ii) $a=1$일 때

㉡에서 $\lim_{x\to-\infty}(a^x+b+5)=1+b+5=0$

$\therefore b=-6$

그런데 $a=1$, $b=-6$은 ㉠을 만족시키지 않는다.

(iii) $a>1$일 때

$\lim_{x\to-\infty}a^x=0$이므로 ㉡에서

$\lim_{x\to-\infty}(a^x+b+5)=0+b+5=0$

$\therefore b=-5$

$b=-5$를 ㉠에 대입하면

$a^3-5=22$, $a^3=27$　　$\therefore a=3\ (\because a>1)$

(i), (ii), (iii)에서 $a=3$, $b=-5$

따라서 $f(x)=3^x-5$이므로

$f(4)=3^4-5=76$

답 ②

034

함수 $f(x)$는 $x\neq1$인 모든 실수에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1+}g(f(x))=\lim_{x\to1-}g(f(x))=g(f(1))$이어야 한다.

$$\lim_{x\to1+}(5^{-2x+3}+5^{2x-3})=\lim_{x\to1-}(5^{ax}+5^{-ax})$$
$$=5+5^{-1}=\frac{26}{5}$$

$5^a+5^{-a}=\frac{26}{5}$에서 $5^a=t$로 놓으면

$t+\frac{1}{t}=\frac{26}{5}$, $5t^2-26t+5=0$

$(5t-1)(t-5)=0$　　$\therefore t=\frac{1}{5}$ 또는 $t=5$

$5^a=\frac{1}{5}=5^{-1}$ 또는 $5^a=5$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 구하는 a의 값의 곱은

$(-1)\times1=-1$

답 -1

035

$$g(n)=\lim_{x\to0}f(x)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}-n}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\dfrac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}-n}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\dfrac{e^x-1}{x}+\dfrac{e^{2x}-1}{x}+\dfrac{e^{3x}-1}{x}+\cdots+\dfrac{e^{nx}-1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\dfrac{e^x-1}{x}+\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\times2+\dfrac{e^{3x}-1}{3x}\times3+\cdots+\dfrac{e^{nx}-1}{nx}\times n}$$
$$=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$$
$$=\frac{1}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}g(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=2\times1=2$$

답 ②

참고

부분분수

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

036

$f(x)\ln(ax+1)+1=3^x$에서

$x\neq0$일 때　$f(x)=\frac{3^x-1}{\ln(ax+1)}$

함수 $f(x)$가 $x>-1$에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=\ln3$이어야 한다.

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{\ln(ax+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{3^x-1}{x}\times\frac{ax}{\ln(ax+1)}\times\frac{1}{a}\right\}$$
$$=\ln3\times1\times\frac{1}{a}$$
$$=\frac{\ln3}{a}=\ln3$$

$\therefore a=1$

따라서 $f(x)=\frac{3^x-1}{\ln(x+1)}$이므로

$f(a)=f(1)=\frac{3-1}{\ln2}=\frac{2}{\ln2}$

답 ②

037

ㄱ은 옳다.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^3}-1}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{x^3}-1}{x^3}\times x^2\right)=1\times0=0$$

ㄴ은 옳지 않다.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{f(x)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^x-1}{x}\times\frac{x}{f(x)}\right\}=\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)}=2$$ 이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\{f(x)\}^2}=\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)(e^x+1)}{\{f(x)\}^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^x-1}{f(x)}\times\frac{x}{f(x)}\times\frac{e^x+1}{x}\right\}$$

$$=2\times2\times\lim_{x\to0}\frac{e^x+1}{x}$$

이때 $\lim_{x\to0+}\frac{e^x+1}{x}=\infty$, $\lim_{x\to0-}\frac{e^x+1}{x}=-\infty$이므로 극한값이 존재하지 않는다.

ㄷ도 옳지 않다.

(반례) $f(x)=|x|$라고 하면

$$\lim_{x\to0+}\frac{e^{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0+}\left(\frac{e^{|x|}-1}{|x|}\times\frac{|x|}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0+}\left(\frac{e^x-1}{x}\times1\right)$$

$$=1$$

$\lim_{x\to0+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0+}1=1$

$$\lim_{x\to0-}\frac{e^{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0-}\left(\frac{e^{|x|}-1}{|x|}\times\frac{|x|}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0-}\left\{\frac{e^{-x}-1}{-x}\times(-1)\right\}$$

$$=-1$$

$\lim_{x\to0-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to0-}(-1)=-1$

즉, $\lim_{x\to0+}\frac{e^{|x|}-1}{x}\neq\lim_{x\to0-}\frac{e^{|x|}-1}{x}$이므로 $\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

038

접근

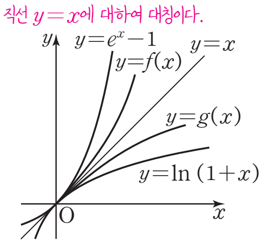
두 함수 $y=\ln(1+x)$, $y=e^x-1$과 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수 관계임을 이용하여 역함수에 대한 부등식을 파악한다.

두 함수 $y=\ln(1+x)$, $y=e^x-1$과 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수 관계이다.

$y=\ln(1+x)$와 $y=e^x-1$, $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 각각 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

또, $\ln(1+x)\le f(x)\le e^x-1$이므로

네 함수 $y=\ln(1+x)$, $y=e^x-1$, $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다.



따라서 $\ln(1+x)\le g(x)\le e^x-1$이고

$x\ge0$에서

$$\frac{\ln(1+x)}{x}\le\frac{g(x)}{x}\le\frac{e^x-1}{x}$$

이때 $\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to0+}\frac{e^x-1}{x}=1$이므로 $\lim_{x\to0+}\frac{g(x)}{x}=1$

$4x=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(4x)}{x}=\lim_{t\to0+}\frac{g(t)}{\frac{t}{4}}=4\lim_{t\to0+}\frac{g(t)}{t}=4\times1=4$$

답 ③

039

$A(t,\ 2^t)$, $B\left(t,\ \left(\frac{1}{2}\right)^t\right)$, $H(0,\ 2^t)$이므로

$\overline{AB}=2^t-\left(\frac{1}{2}\right)^t$, $\overline{AH}=t$

$$\therefore\ \lim_{t\to0+}\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}}=\lim_{t\to0+}\frac{2^t-\left(\frac{1}{2}\right)^t}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{2^t-1}{t}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^t-1}{t}\right\}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{2^t-1}{t}-\lim_{t\to0+}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^t-1}{t}$$

$$=\ln2-\ln\frac{1}{2}$$

$$=\ln2-(-\ln2)=2\ln2$$

답 ①

040

접근

곡선 $y=e^{2(x-e)}-1$은 곡선 $y=e^{2x}$을 평행이동한 곡선임을 이용하여 사각형 ABQP가 어떤 사각형인지 파악한다.

곡선 $y=e^{2(x-e)}-1$은 곡선 $y=e^{2x}$을 x축의 방향으로 e만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

점 A를 x축의 방향으로 e만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점이 B이므로 직선 l_1과 평행한 직선 l_2 위의 두 점 P, Q에 대하여 점 Q는 점 P를 x축의 방향으로 e만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 사각형 ABQP는 평행사변형이다.

$\overline{AB}/\!/\overline{PQ}$, $\overline{AP}=\overline{BQ}$이므로 사각형 ABQP는 평행사변형이다.

직선 l_1의 방정식은 $y=-\frac{1}{e}x+1$, 즉 $x+ey-e=0$이므로

$P(t,\ e^{2t})$이라고 하면 점 P와 직선 $x+ey-e=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|t+e^{2t+1}-e|}{\sqrt{1+e^2}}=\frac{t+e(e^{2t}-1)}{\sqrt{1+e^2}}$$

$\overline{AB}=\sqrt{e^2+1}$이므로

$$S_1(t)=\frac{t+e(e^{2t}-1)}{\sqrt{1+e^2}}\times\sqrt{e^2+1}=t+e(e^{2t}-1)$$

$H(0,\ e^{2t})$이고 $\overline{AH}=e^{2t}-1$, $\overline{PH}=t$이므로

$$S_2(t)=\frac{t(e^{2t}-1)}{2}$$

$$\therefore\ \lim_{t\to0+}\frac{tS_1(t)}{S_2(t)}=\lim_{t\to0+}\frac{t\{t+e(e^{2t}-1)\}}{\frac{t(e^{2t}-1)}{2}}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{2\{t+e(e^{2t}-1)\}}{e^{2t}-1}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{2+2e\times\frac{e^{2t}-1}{t}}{\frac{e^{2t}-1}{t}}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{1+2e\times\frac{e^{2t}-1}{2t}}{\frac{e^{2t}-1}{2t}}$$

$$=1+2e$$

답 $1+2e$

참고

점과 직선 사이의 거리

점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

041

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)라고 하면

$f(1)=3$이므로 $a+b+c=3$ …… ㉠

$f'(1)=\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln f(x)}{x}+2$에서 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln f(x)}{x}$의 값이 존재하고

이차함수 $f(x)$는 모든 실수에서 미분가능하므로 $f'(1)$의 값이 존재한다.

$x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\{\ln f(x)\}=0$이므로

$\lim_{x\to 0}\ln(ax^2+bx+c)=0$, $\ln c=0$ $\therefore c=1$

$f(x)=ax^2+bx+1$에서 $f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(1)=2a+b$ …… ㉡

$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln f(x)}{x}+2\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(ax^2+bx+1)}{x}+2\\&=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+ax^2+bx)}{ax^2+bx}\times(ax+b)\right\}+2\\&=1\times b+2=b+2\end{aligned}$$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$2a+b=b+2$, $2a=2$ $\therefore a=1$

$a=1$, $c=1$을 ㉠에 대입하면

$1+b+1=3$ $\therefore b=1$

따라서 $f(x)=x^2+x+1$이므로

$f(-1)=1-1+1=1$

답 ④

042

$f(x)=(x^2-ax+3)e^x$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=(2x-a)e^x+(x^2-ax+3)e^x\\&=\{x^2+(2-a)x+3-a\}e^x\end{aligned}$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\{t^2+(2-a)t+3-a\}e^t$

이때 $e^t>0$이므로 기울기가 항상 양수이려면

$t^2+(2-a)t+3-a>0$이어야 한다.

t에 대한 이차방정식 $t^2+(2-a)t+3-a=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(2-a)^2-4(3-a)<0$

이어야 한다.

$a^2-8<0$, $(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})<0$

$\therefore -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

답 ⑤

참고

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 이차방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수와 같다.

즉, 이차함수 $f(x)$에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이면 이차방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재하지 않으므로 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라고 할 때, $D<0$이어야 한다.

043

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}=3$에서 $h\to 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to 0}f(h)=0$이므로

$\lim_{h\to 0}(ae^h+b)=0$ $\therefore a+b=0$ …… ㉠

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$이므로

$f'(0)=3$

$f'(x)=ae^x$이므로

$f'(0)=a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$3+b=0$ $\therefore b=-3$

$\therefore ab=3\times(-3)=-9$

답 ①

044

$\dfrac{g'(x)}{f'(x)}+\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=2$의 양변에 $f'(x)g'(x)$를 곱하여 정리하면

$\{f'(x)\}^2-2f'(x)g'(x)+\{g'(x)\}^2=0$

$\{f'(x)-g'(x)\}^2=0$

$\therefore f'(x)-g'(x)=0$ …… ㉠

$f(x)-g(x)=e^{2x}-6e^x-8x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-g'(x)=2e^{2x}-6e^x-8$ …… ㉡

$(e^{2x})'=(e^x\times e^x)'$
$=e^xe^x+e^xe^x$
$=2e^{2x}$

㉠, ㉡에 의하여 $2e^{2x}-6e^x-8=0$

$e^{2x}-3e^x-4=0$, $(e^x-4)(e^x+1)=0$

이때 $e^x>0$이므로 $e^x=4$

$\therefore x=\ln 4=2\ln 2$

답 ③

045

$k(x)=f(x)g(x)$로 놓으면

$\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\{f(1+h)g(1+h)-f(1)g(1)\}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{k(1+h)-k(1)}{h}$

$=k'(1)$

$k(x)=f(x)g(x)=(5-\ln x)e^{x-5}=\dfrac{(5-\ln x)e^x}{e^5}$이므로

$k'(x)=-\dfrac{1}{x}\times\dfrac{e^x}{e^5}+\dfrac{(5-\ln x)e^x}{e^5}$

$\therefore k'(1)=-1\times\dfrac{e}{e^5}+\dfrac{5e}{e^5}=\dfrac{4}{e^4}$

답 ④

046

접근

평균값 정리를 이용하여 $\frac{f_n(2x)-f_n(x)}{2x-x}=f_n'(c)$인 상수 c가 x와 $2x$ 사이에 적어도 하나 존재함을 안다.

함수 $f_n(x)$는 모든 실수에서 연속이고 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f_n(2x)-f_n(x)}{2x-x}=f_n'(c) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

인 상수 c가 x와 $2x$ 사이에 적어도 하나 존재한다.

$x \to 0$이면 $c \to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_n(2x)-f_n(x)}{x}=f_n'(0) \ (\because \text{㉠})$$

한편 $f_n(x)=e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}$에서

$f_n'(x)=e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}$이므로

$$f_n'(0)=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=36$$

$(e^{nx})'=(\overbrace{e^xe^x\cdots e^x}^{n\text{개}})'=e^xe^x\cdots e^x+\cdots+e^xe^x\cdots e^x=ne^{nx}$

$n^2+n-72=0,\ (n+9)(n-8)=0$

$\therefore n=8 \ (\because n>0)$

답 8

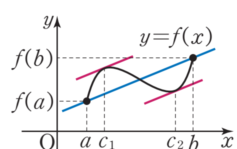
참고

평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



047

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

조건 (가)에서

$$f(0)=\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(axe^{2x}+bx^2)=0$$

조건 (나)에서 임의의 실수 $x_1\,(x_1<0)$에 대하여

$$f'(x_1)=\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\lim_{x\to x_1}\frac{3x-3x_1}{x-x_1}$$

$$=\lim_{x\to x_1}3=3$$

함수 $f(x)$는 모든 실수에 대하여 미분가능하므로 $x=x_1$에서도 미분가능하다.

이므로 $x<0$일 때 $f'(x)=3$

$\therefore f(x)=\int 3dx=3x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=0$이고 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0-}(3x+C)=0$$

$\therefore C=0$

따라서 $x<0$일 때 $f(x)=3x$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{axe^{2x}+bx^2}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{3x}{x}$$

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이므로 $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$\lim_{x\to 0+}(ae^{2x}+bx)=3 \qquad \therefore a=3$$

즉, $x>0$일 때, $f(x)=3xe^{2x}+bx^2$

이때 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2e$이므로

$$\frac{3e}{2}+\frac{b}{4}=2e \qquad \therefore b=2e$$

따라서 $x>0$일 때 $f(x)=3xe^{2x}+2ex^2$

$$f'(x)=\begin{cases} 3 & (x<0) \\ 3e^{2x}+6xe^{2x}+4ex & (x>0) \end{cases}$$

$(3xe^{2x})'=(3xe^xe^x)'=3e^xe^x+3xe^xe^x+3xe^xe^x=3e^{2x}+6xe^{2x}$

$$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right)=3e+3e+2e=8e$$

답 ④

048

함수 $f_n(x)g(x)$가 구간 $(-1, \infty)$에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0}f_n(x)g(x)=f_n(0)g(0)$$

이때 $f_n(0)g(0)=0\times 6=0$이고

$$\lim_{x\to 0}f_n(x)g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^n+kx^2}{(e^x-1)\ln(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{(x^{n-2}+k)\times\frac{x}{e^x-1}\times\frac{x}{\ln(x+1)}\right\}$$

$$=k\times 1\times 1=k$$

이므로 $k=0$

$\therefore f_n(x)=x^n$

$h_n(x)=f_n(x)\ln x=x^n\ln x$이므로

$$h_n'(x)=nx^{n-1}\ln x+x^n\times\frac{1}{x}=x^{n-1}(n\ln x+1)$$

$x>0$이므로 $h_n'(x)=0$에서 $n\ln x+1=0$

$$\ln x=-\frac{1}{n} \qquad \therefore x=e^{-\frac{1}{n}}$$

즉, $a_n=e^{-\frac{1}{n}}$이므로

$$h_n(a_n)=h_n(e^{-\frac{1}{n}})=(e^{-\frac{1}{n}})^n\ln e^{-\frac{1}{n}}$$

$$=e^{-1}\times\left(-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{en}$$

같은 방법으로 하면

$h_{n+1}(x)=x^{n+1}\ln x,\ a_{n+1}=e^{-\frac{1}{n+1}}$이므로

$$h_{n+1}(a_{n+1})=h_{n+1}(e^{-\frac{1}{n+1}})=(e^{-\frac{1}{n+1}})^{n+1}\ln e^{-\frac{1}{n+1}}$$

$$=e^{-1}\times\left(-\frac{1}{n+1}\right)=-\frac{1}{e(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{n=3}^{\infty}h_n(a_n)h_{n+1}(a_{n+1})$$

$$=\sum_{n=3}^{\infty}\left[\left(-\frac{1}{en}\right)\times\left\{-\frac{1}{e(n+1)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{e^2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{e^2}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{e^2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{e^2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{e^2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$=\frac{1}{e^2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3e^2}$

답 $\frac{1}{3e^2}$

참고

$x\neq a$인 모든 실수에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여 함수

$f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\neq a) \\ b & (x=a) \end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속이면

$\lim_{x\to a}g(x)=b$

049

$g\left(\frac{2}{3}\right)=\alpha$, $g\left(\frac{1}{5}\right)=\beta$라고 하면

$f(\alpha)=\frac{2}{3}$, $f(\beta)=\frac{1}{5}$이므로

$\tan\alpha=\frac{2}{3}$, $\tan\beta=\frac{1}{5}$

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}}=1$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\alpha+\beta<\pi$이고

$\tan(\alpha+\beta)=1$이므로

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

$\therefore g\left(\frac{2}{3}\right)+g\left(\frac{1}{5}\right)=\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

답 ②

050

$\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}$

$=\left(\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}\right)+\left(\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}\right)$

$=\frac{2}{1-\sin^2\theta}+\frac{2}{1-\cos^2\theta}$

$=\frac{2}{\cos^2\theta}+\frac{2}{\sin^2\theta}$

$=2\sec^2\theta+2\csc^2\theta$

$=2(\tan^2\theta+1)+2(\cot^2\theta+1)$

$\tan^2\theta+1=(\sqrt{3}-1)^2+1$

$=4-2\sqrt{3}+1$

$=5-2\sqrt{3}$

$\cot\theta=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$이므로

$\cot^2\theta+1=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2+1$

$=\frac{4+2\sqrt{3}}{4}+1$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+2$

$\therefore 2(\tan^2\theta+1)+2(\cot^2\theta+1)$

$=2(5-2\sqrt{3})+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+2\right)$

$=10-4\sqrt{3}+\sqrt{3}+4=14-3\sqrt{3}$

답 $14-3\sqrt{3}$

051

$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\sin(\pi+x)$

$=\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x-\cos\frac{\pi}{6}\sin x\right)$

$\times\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\sin x\right)-\sin x$

$=\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)-\sin x$

$=\frac{1}{4}\cos^2 x-\frac{3}{4}\sin^2 x-\sin x$

$=\frac{1}{4}(1-\sin^2 x)-\frac{3}{4}\sin^2 x-\sin x$

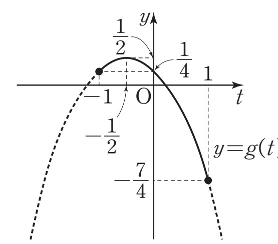
$=-\sin^2 x-\sin x+\frac{1}{4}$

이때 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\leq t\leq 1$

주어진 함수 $f(x)$를 $g(t)$라고 하면

$g(t)=-t^2-t+\frac{1}{4}=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

$-1\leq t\leq 1$에서 함수 $y=g(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



$t=-\frac{1}{2}$일 때 최댓값은 $M=\frac{1}{2}$,

$t=1$일 때 최솟값은 $m=-\frac{7}{4}$

$\therefore M+m=\frac{1}{2}+\left(-\frac{7}{4}\right)=-\frac{5}{4}$

답 ②

052

x에 대한 이차방정식 $x^2+x\sin\theta+\cos\theta=0$의 판별식을 D라고 하면 이 방정식이 두 실근을 가지므로

$D=\sin^2\theta-4\cos\theta\geq 0$, $(1-\cos^2\theta)-4\cos\theta\geq 0$

$\therefore \cos^2\theta+4\cos\theta-1\leq 0$ ······ ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=-\sin\theta$, $\tan\alpha\tan\beta=\cos\theta$

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{2}{3}$

$2-2\cos\theta=-3\sin\theta$

위의 식의 양변을 제곱하면

$(2-2\cos\theta)^2=(-3\sin\theta)^2$

$4\cos^2\theta-8\cos\theta+4=9\sin^2\theta$

$4\cos^2\theta-8\cos\theta+4=9(1-\cos^2\theta)$

$13\cos^2\theta-8\cos\theta-5=0$

$(13\cos\theta+5)(\cos\theta-1)=0$

$\therefore \cos\theta=-\frac{5}{13}$ 또는 $\cos\theta=1$

이때 $\cos\theta=1$이면 ㉠을 만족시키지 않으므로

$\cos\theta=-\frac{5}{13}$

답 ①

참고

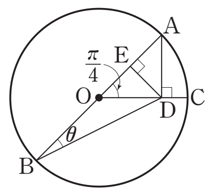
이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 할 때

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

053

점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E라 하고 $\overline{OA}=2a$라고 하면 $\triangle AED$와 $\triangle DEO$는 직각이등변삼각형이므로



$\overline{AE}=\overline{OE}=\overline{DE}=a$

직각삼각형 BDE에서 $\overline{BE}=3a$이므로

$\overline{BD}=\sqrt{(3a)^2+a^2}=\sqrt{10}a$ ($\because a>0$)

$\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{10}a}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

$\cos\theta=\frac{3a}{\sqrt{10}a}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\therefore \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{3}{5}$

답 $\frac{3}{5}$

참고

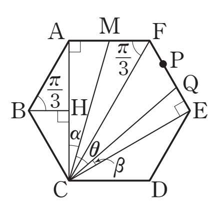
$\sin2\theta=\sin(\theta+\theta)$

$=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta$

$=2\sin\theta\cos\theta$

054

정육각형의 한 변의 길이를 $6a$라 하고 꼭짓점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{AH}=\overline{AB}\sin\frac{\pi}{3}=6a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}a$

$\therefore \overline{AC}=2\overline{AH}=2\times3\sqrt{3}a=6\sqrt{3}a$

정육각형의 한 내각의 크기는 120°이므로 $\angle ABH=\frac{\pi}{3}$

$\angle ACF=\angle FCE=\frac{\pi}{6}$이므로

$\angle ACE=\frac{\pi}{3}$

한편 $\angle ACM=\alpha$, $\angle QCE=\beta$라고 하면 $\theta=\frac{\pi}{3}-(\alpha+\beta)$

$\triangle ACM$에서 $\tan\alpha=\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}}=\frac{3a}{6\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

$\triangle CEQ$에서 $\tan\beta=\frac{\overline{EQ}}{\overline{CE}}=\frac{2a}{6\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{9}}{1-\frac{\sqrt{3}}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{9}}=\frac{5\sqrt{3}}{17}$$

$$\therefore \tan\theta=\tan\left\{\frac{\pi}{3}-(\alpha+\beta)\right\}=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan(\alpha+\beta)}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\frac{5\sqrt{3}}{17}}{1+\sqrt{3}\times\frac{5\sqrt{3}}{17}}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

답 ③

055

두 직선 AB, AC가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 하면

$\tan\alpha=\frac{x_2{}^2-x_1{}^2}{x_2-x_1}=\frac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=x_2+x_1$

$=x_2+\left(x_2-\frac{3}{2}\right)=2x_2-\frac{3}{2}$ 　 $x_2-x_1=\frac{3}{2}$에서 $x_1=x_2-\frac{3}{2}$

$\tan\beta=\frac{x_3{}^2-x_1{}^2}{x_3-x_1}=\frac{(x_3+x_1)(x_3-x_1)}{x_3-x_1}=x_3+x_1$

$=\left(x_2+\frac{3}{2}\right)+\left(x_2-\frac{3}{2}\right)=2x_2$ 　 $x_3-x_2=\frac{3}{2}$에서 $x_3=x_2+\frac{3}{2}$

$x_2-x_1=\frac{3}{2}$에서 $x_1=x_2-\frac{3}{2}$

한편 $\angle BAC=\theta$에서 $\theta=\beta-\alpha$이므로

$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)$

$$=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{2x_2-\left(2x_2-\frac{3}{2}\right)}{1+\left(2x_2-\frac{3}{2}\right)\times2x_2}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}}{4x_2{}^2-3x_2+1}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}}{4\left(x_2-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{7}{16}}$$

이때 $\tan\theta>0$, 즉 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\tan\theta$의 값이 최대일 때 θ의 값도 최대이다.

$x_2=\frac{3}{8}$일 때 분모가 최소이므로 $\tan\theta$의 값은 최대이다.

따라서 $x_2=\frac{3}{8}$일 때 $\tan\theta$의 값이 최대이므로 θ의 값도 최대이다.

$\therefore x_1+x_2+x_3=\left(x_2-\frac{3}{2}\right)+x_2+\left(x_2+\frac{3}{2}\right)=3x_2=3\times\frac{3}{8}=\frac{9}{8}$

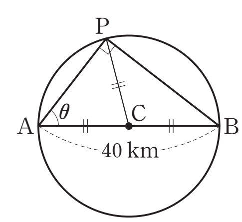
답 ④

056

접근

$\overline{AP}$, $\overline{BP}$의 길이를 삼각함수로 나타낸 후 삼각함수의 합성을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원을 그리면 $\overline{CA}=\overline{CP}=\overline{CB}$이므로 $\triangle PAB$가 이 원에 내접한다.



$\therefore \angle APB=\frac{\pi}{2}$

$\angle PAB=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면

$\overline{AP}=\overline{AB}\cos\theta=40\cos\theta$ (km)

$\overline{BP}=\overline{AB}\sin\theta=40\sin\theta$ (km)

총공사 비용을 $f(\theta)$(억 원)이라고 하면

$f(\theta)=3\times40\cos\theta+4\times40\sin\theta$

$=160\sin\theta+120\cos\theta$

$=40(4\sin\theta+3\cos\theta)$

$=40\times5\left(\frac{4}{5}\sin\theta+\frac{3}{5}\cos\theta\right)$

$=200\sin(\theta+\alpha)$ $\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\frac{4}{5}\right)$

따라서 $f(\theta)$는 $\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$일 때 최대이므로 구하는 값은

$\tan(\angle PAB)=\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$$=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

참고

삼각함수의 합성

$y=a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

➡ y의 최댓값은 $\sqrt{a^2+b^2}$, 최솟값은 $-\sqrt{a^2+b^2}$이다.

057

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan2x+\tan4x+\cdots+\tan20x}{\sin x+\sin2x+\cdots+\sin10x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\tan2x}{x}+\dfrac{\tan4x}{x}+\cdots+\dfrac{\tan20x}{x}}{\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{\sin2x}{x}+\cdots+\dfrac{\sin10x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\tan2x}{2x}\times2+\dfrac{\tan4x}{4x}\times4+\cdots+\dfrac{\tan20x}{20x}\times20}{\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{\sin2x}{2x}\times2+\cdots+\dfrac{\sin10x}{10x}\times10}$$

$$=\frac{2+4+\cdots+20}{1+2+\cdots+10}$$

$$=\frac{2(1+2+\cdots+10)}{1+2+\cdots+10}=2$$

답 ②

058

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x\right)$$

$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$x+\dfrac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $x\to-\dfrac{\pi}{6}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x+\cos x}{x+\dfrac{\pi}{6}}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}{x+\dfrac{\pi}{6}}$$

$$=2\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=2\times1=2$$

답 ⑤

059

$f(x)=ax+b\,(a\neq0)$로 놓으면 $f'(x)=a$이므로 직선 $y=f(x)$의 기울기는 a이다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}\right)=a$$

이므로

$$\lim_{x\to\infty}f(x)\ln\left(1+\tan\frac{3}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)}{x}\times x\ln\left(1+\tan\frac{3}{x}\right)\right\}$$

$$=a\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\tan\dfrac{3}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$$

$$=a\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\ln\left(1+\tan\dfrac{3}{x}\right)}{\tan\dfrac{3}{x}}\times\frac{\tan\dfrac{3}{x}}{\dfrac{3}{x}}\times3\right\}$$

$$=a\times1\times1\times3$$

$$=3a=12$$

$\therefore a=4$

따라서 직선 $y=f(x)$의 기울기는 4이다.

답 4

060

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^n}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^n}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^n\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^n\cos x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos^2x)}{x^n\cos x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^3x}{x^n\cos x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\times\frac{1}{x^{n-3}}\times\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}\right\}\quad\cdots\cdots ㉠$$

이때 $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3=1$, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$이고 ㉠이 0이 아닌 값 α에 수렴하므로

$n-3=0\qquad\therefore n=3$

$$\therefore \alpha=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\times\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}\right\}$$

$$=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha+n=\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}$$

답 ⑤

061

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$$\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{\sin^2 3x}=b\quad\cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to0}(a-\cos x)=0$이므로

$a-1=0\qquad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 3x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin^2 3x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{\sin^2 3x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{\sin^2 3x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}{\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)^2\times9\times(1+\cos x)}$$

$$=\frac{1^2}{1^2\times9\times2}=\frac{1}{18}$$

$\therefore\ a+18b=1+18\times\dfrac{1}{18}=2$

답 2

062

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(2x-\pi)}{f(x)}=4$에서 $x\to\dfrac{\pi}{2}$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자)$\to$0이므로 (분모)$\to$0이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=0$이므로 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

따라서 $f(x)=\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)(x-k)$ (k는 상수)로 놓을 수 있다.

$x-\dfrac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(2x-\pi)}{f(x)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2 2t}{f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{\left(\frac{\sin 2t}{2t}\right)^2\times\frac{4t^2}{f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}\right\}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{4t^2}{f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{4t^2}{t\left(t+\frac{\pi}{2}-k\right)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{4t}{t+\frac{\pi}{2}-k}=4$$

$t\to0$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자)$\to$0이므로 (분모)$\to$0이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{t\to0}\left(t+\frac{\pi}{2}-k\right)=0$이므로

$\dfrac{\pi}{2}-k=0\qquad\therefore\ k=\dfrac{\pi}{2}$

따라서 $f(x)=\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2$이므로

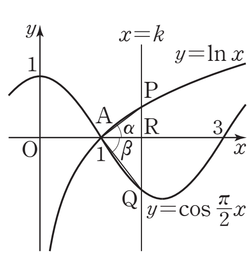
$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{2}\right)^2=\dfrac{\pi^2}{16}$

답 ④

063

$\mathrm{P}(k,\ \ln k)$, $\mathrm{Q}\left(k,\ \cos\dfrac{\pi}{2}k\right)$,

$\mathrm{R}(k,\ 0)$, $\angle\mathrm{PAR}=\alpha$, $\angle\mathrm{QAR}=\beta$라고 하면



$\triangle$PAR에서

$\tan\alpha=\dfrac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{AR}}}=\dfrac{\ln k}{k-1}$

$\triangle$RAQ에서

$\tan\beta=\dfrac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{AR}}}=\dfrac{-\cos\frac{\pi}{2}k}{k-1}$

$k-1=t$로 놓으면 $k\to1+$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{k\to1+}\tan\alpha=\lim_{k\to1+}\frac{\ln k}{k-1}=\lim_{t\to0+}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

$$\lim_{k\to1+}\tan\beta=\lim_{k\to1+}\frac{-\cos\frac{\pi}{2}k}{k-1}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{-\cos\left\{\frac{\pi}{2}(1+t)\right\}}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}\times\frac{\pi}{2}$$
$$=1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

이때 $\theta=\alpha+\beta$이므로

$$\lim_{k\to1+}\tan\theta=\lim_{k\to1+}\tan(\alpha+\beta)$$
$$=\lim_{k\to1+}\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{1+\frac{\pi}{2}}{1-1\times\frac{\pi}{2}}=\frac{2+\pi}{2-\pi}$$

답 ⑤

064

$\triangle$POH에서 $\overline{\mathrm{OP}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OP}}\cos\theta=\cos\theta$, $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{OP}}\sin\theta=\sin\theta$

$\therefore\ f(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$

원의 접선 PQ와 반지름 OP가 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{2}$이다.

$\angle\mathrm{OPQ}=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\overline{\mathrm{OP}}}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{OA}}=\sec\theta-1$

이때 $\angle\mathrm{AQR}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로

$g(\theta)=\dfrac{1}{2}(\sec\theta-1)^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(\sec\theta-1)^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}{\theta\times\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로
$0<\cos\theta<1$
$\sec\theta>1$
$\therefore\ \sec\theta-1>0$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(\sec\theta-1)\sqrt{\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}}}{\frac{1}{2}\theta\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)\sqrt{\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}}}{\frac{1}{2}\theta\sin\theta\cos^2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\times\frac{\theta}{\sin\theta}\times\frac{\sqrt{\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}}}{\frac{1}{2}\cos^2\theta}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

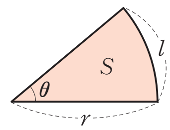
$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$
$\displaystyle=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$
$\displaystyle=\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos\theta}\right\}=\frac{1}{2}$

답 ④

참고

부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면



(1) $l=r\theta$

(2) $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$

(3) (부채꼴의 둘레의 길이) $=2r+r\theta$

065

$$f(x)=\lim_{t\to x}\frac{t\sin x-x\sin t}{t-x}$$
$$=\lim_{t\to x}\frac{t\sin x-x\sin x+x\sin x-x\sin t}{t-x}$$
$$=\lim_{t\to x}\frac{(t-x)\sin x-x(\sin t-\sin x)}{t-x}$$
$$=\lim_{t\to x}\left(\sin x-x\times\frac{\sin t-\sin x}{t-x}\right)$$
$$=\sin x-x\times(\sin x)'$$
$$=\sin x-x\cos x$$

이므로

$$f'(x)=\cos x-\{\cos x+x\times(-\sin x)\}$$
$$=x\sin x$$
$$\therefore\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

066

$f(x)=\sin x(1+\cos x)$에서

$$f'(x)=\cos x(1+\cos x)+\sin x\times(-\sin x)$$
$$=\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x$$
$$=\cos x+\cos^2 x-(1-\cos^2 x)$$
$$=2\cos^2 x+\cos x-1$$
$$=(2\cos x-1)(\cos x+1)$$

$f'(x)=0$에서

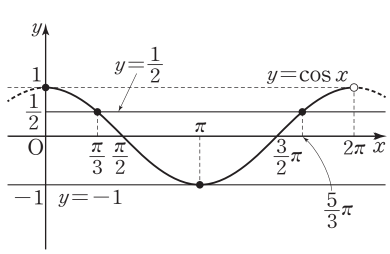
$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$

$\therefore\ \cos x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

$0\le x<2\pi$이므로

$\cos x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

$\cos x=-1$에서 $x=\pi$



따라서 $f'(x)=0$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합은

$\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi+\pi=3\pi$

답 ③

참고

(1) $\cos x=a$의 해: 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표를 구한다.

(2) $a\cos^2 x+b\cos x+c=0$의 해: $\cos x=t$로 치환한 후 $at^2+bt+c=0$의 해를 구한다. (단, $-1\le t\le 1$)

067

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)-\frac{\pi}{2}}\times\frac{-\sin x}{x}\right\}$$
$$=-\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)-\frac{\pi}{2}}$$

$\frac{\pi}{2}-\sin x=t$로 놓으면 $x\to 0$일 때 $t\to\frac{\pi}{2}$이므로

$$-\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)-\frac{\pi}{2}}=-\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(t)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{t-\frac{\pi}{2}}$$
$$=-f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$f(x)=\sin x\cos x$에서

$$f'(x)=\cos x\cos x+\sin x\times(-\sin x)$$
$$=\cos^2 x-\sin^2 x$$
$$\therefore\ -f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\left(\cos^2\frac{\pi}{2}-\sin^2\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-(0-1)=1$$

답 ④

068

$$g(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}\times 3$$
$$=3f'(x)$$

한편 $f(x)=\sin x\cos x-\sin x$에서

$$f'(x)=\cos x\cos x+\sin x\times(-\sin x)-\cos x$$
$$=\cos^2 x-\sin^2 x-\cos x$$
$$=\cos^2 x-(1-\cos^2 x)-\cos x$$
$$=2\cos^2 x-\cos x-1$$

이므로

$g(x)=3f'(x)=6\cos^2 x-3\cos x-3$

이때 $\cos x=t$로 놓으면

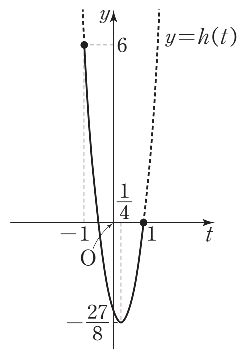
$-1\le t\le 1$

주어진 함수 $g(x)$를 $h(t)$라고 하면

$$h(t)=6t^2-3t-3=6\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{27}{8}$$

$-1\le t\le 1$에서 함수 $y=h(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로
$t=-1$일 때 최댓값은 $M=6$,
$t=\frac{1}{4}$일 때 최솟값은 $m=-\frac{27}{8}$
$\therefore M+m=6+\left(-\frac{27}{8}\right)=\frac{21}{8}$

답 ③



069

접근
x의 값의 범위를 $0\le x\le \pi$, $-\pi\le x\le 0$으로 나누어 함수 $f(x)$의 식을 정리한다.

$f(x)=a|x|+|2\sin x|$에서

$f(x)=\begin{cases} ax+2\sin x & (0\le x\le \pi) \\ -ax-2\sin x & (-\pi\le x\le 0)\end{cases}$이므로

$f'(x)=\begin{cases} a+2\cos x & (0< x< \pi) \\ -a-2\cos x & (-\pi< x< 0)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 0+}(a+2\cos x)=\lim_{x\to 0-}(-a-2\cos x)$

$a+2=-a-2 \qquad \therefore a=-2$

답 ①

04 여러 가지 미분법

070

$f(x)=\csc x\cot x$에서

$f'(x)=-\csc x\cot x\times\cot x+\csc x\times(-\csc^2 x)$

$\quad=-\csc x(\cot^2 x+\csc^2 x)$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}(1+2)=-3\sqrt{2}$

답 $-3\sqrt{2}$

071

$f(x)=\frac{x^2}{x+3}$에서

$f'(x)=\frac{2x(x+3)-x^2\times 1}{(x+3)^2}=\frac{2x^2+6x-x^2}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=\frac{1+6}{4^2}=\frac{7}{16}$

답 $\frac{7}{16}$

072

$f(x)=\frac{e^{x+2}-1}{x}$에서 $f(-2)=0$이므로

$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=f'(-2)$

$f(x)=\frac{e^{x+2}-1}{x}=\frac{e^2\times e^x-1}{x}$에서

$f'(x)=\frac{e^2\times e^x\times x-(e^2\times e^x-1)\times 1}{x^2}$

$\quad=\frac{e^{x+2}(x-1)+1}{x^2}$

$\therefore f'(-2)=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

답 ②

다른 풀이

$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{e^{x+2}-1}{x(x+2)}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{e^t-1}{t}\times\frac{1}{t-2}\right)=-\frac{1}{2}$

073

$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\cdots+\frac{10}{x^{10}}$

$\quad=x^{-1}+2x^{-2}+3x^{-3}+\cdots+10x^{-10}$

이므로

$f'(x)=-x^{-2}-2^2x^{-3}-3^2x^{-4}-\cdots-10^2x^{-11}$

$\therefore f'(1)=-1^2-2^2-3^2-\cdots-10^2$

$\quad=-(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$

$\quad=-\sum_{k=1}^{10}k^2$

$\quad=-\frac{10\times 11\times 21}{6}$

$\quad=-385$

답 -385

다른 풀이

$f(x)=\sum_{n=1}^{10}\frac{n}{x^n}=\sum_{n=1}^{10}nx^{-n}$

$f'(x)=\sum_{n=1}^{10}\{n\times(-n)\times x^{-n-1}\}$

$\quad=-\sum_{n=1}^{10}n^2x^{-n-1}$

$\therefore f'(1)=-\sum_{n=1}^{10}n^2=-\frac{10\times11\times21}{6}=-385$

참고

자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

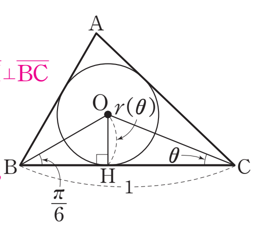
(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

074

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심을 O라 하고, 이 원과 변 BC의 접점을 H라고 하자. ($\overline{OH}\perp\overline{BC}$)

점 O는 삼각형 ABC의 내심이므로 (점 O는 ∠ABC, ∠ACB의 내각의 이등분선의 교점이다.)

$\angle OBH=\frac{\pi}{6}$, $\angle OCH=\theta$



$\triangle$OBH에서

$\frac{\overline{OH}}{\overline{BH}}=\tan\frac{\pi}{6}$이므로 $\frac{r(\theta)}{\overline{BH}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \overline{BH}=\sqrt{3}r(\theta)$

$\triangle$OCH에서

$\frac{\overline{OH}}{\overline{CH}}=\tan\theta$이므로 $\frac{r(\theta)}{\overline{CH}}=\tan\theta$

$\therefore \overline{CH}=\frac{r(\theta)}{\tan\theta}$

$\overline{BH}+\overline{CH}=\overline{BC}=1$이므로

$\sqrt{3}r(\theta)+\frac{r(\theta)}{\tan\theta}=1$

$r(\theta)\left(\frac{1+\sqrt{3}\tan\theta}{\tan\theta}\right)=1$

$\therefore r(\theta)=\frac{\tan\theta}{1+\sqrt{3}\tan\theta}$

$h(\theta)=\frac{r(\theta)}{\tan\theta}=\frac{\frac{\tan\theta}{1+\sqrt{3}\tan\theta}}{\tan\theta}=\frac{1}{1+\sqrt{3}\tan\theta}$이므로

$h'(\theta)=-\frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{(1+\sqrt{3}\tan\theta)^2}$

$\therefore h'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(1+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 ②

075

$f(2x-3)=x^2-4x+11$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f'(2x-3)=2x-4$

$\therefore f'(2x-3)=x-2$ …… ㉠

$2x-3=6$에서 $x=\frac{9}{2}$

$x=\frac{9}{2}$를 ㉠에 대입하면

$f'(6)=\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

풍쌤 비법

미분가능한 함수 $y=f(x)$에 대하여

$y=f(ax+b)$ (a, b는 상수)이면

$y'=af'(ax+b)$

076

$f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

$\quad=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$

$\quad=\frac{1}{2}\{\ln(1+\sin x)-\ln(1-\sin x)\}$

에서

$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}-\frac{-\cos x}{1-\sin x}\right)$

$\quad=\frac{\cos x(1-\sin x)+\cos x(1+\sin x)}{2(1+\sin x)(1-\sin x)}$

$\quad=\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$

$\quad=\frac{\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}=2$

답 2

077

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+2}{x-2}=7$에서 $x\to2$일 때 극한값이 존재하고

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)+2\}=0$이므로

$f(2)=-2$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=7$

$\lim_{x\to-2}\frac{g(x)+2}{x+2}=9$에서 $x\to-2$일 때 극한값이 존재하고

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-2}\{g(x)+2\}=0$이므로

$g(-2)=-2$

$\lim_{x\to-2}\frac{g(x)+2}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}=g'(-2)=9$

$y=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서 $y'=g'(f(x))f'(x)$이므로 $x=2$일 때의 미분계수는

$g'(f(2))f'(2)=g'(-2)f'(2)=9\times7=63$

답 63

078

$h(x)=g(f(x))$로 놓으면

$h(x)=e^{\sin\frac{x}{3}}$

$\therefore h\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\sin\frac{\pi}{6}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{g(f(x))-\sqrt{e}}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$h'(x)=e^{\sin\frac{x}{3}}\times\cos\frac{x}{3}\times\frac{1}{3}$이므로

$$h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\sin\frac{\pi}{6}}\times\cos\frac{\pi}{6}\times\frac{1}{3}$$
$$=\sqrt{e}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3e}}{6}$$

답 ③

풍쌤 비법

(1) $y=e^{f(x)}$이면 $y'=e^{f(x)}f'(x)$

(2) $y=\sin f(x)$이면 $y'=\cos f(x)\times f'(x)$

$y=\cos f(x)$이면 $y'=-\sin f(x)\times f'(x)$

(3) $y=\sin^n f(x)$이면

$y'=n\sin^{n-1}f(x)\times\cos f(x)\times f'(x)$

$y=\cos^n f(x)$이면

$y'=n\cos^{n-1}f(x)\times\{-\sin f(x)\}\times f'(x)$

079

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\tan x+2}}=(\tan x+2)^{-\frac{1}{2}}$에서

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(\tan x+2)^{-\frac{3}{2}}\times\sec^2 x$$
$$=-\frac{\sec^2 x}{2(\tan x+2)\sqrt{\tan x+2}}$$
$$=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\tan x+2}}}_{f(x)}\times\underbrace{\left\{-\frac{\sec^2 x}{2(\tan x+2)}\right\}}_{g(x)}$$

이때 $f'(x)=f(x)g(x)$이므로

$$g(x)=-\frac{\sec^2 x}{2(\tan x+2)}$$

$$\therefore g\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sec^2\frac{\pi}{4}}{2\left(\tan\frac{\pi}{4}+2\right)}=-\frac{2}{2(1+2)}=-\frac{1}{3}$$

답 $-\frac{1}{3}$

다른 풀이

$f'(x)=f(x)g(x)$에서 $f(x)\neq0$이면

$g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\tan x+2}}=(\tan x+2)^{-\frac{1}{2}}$에서 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|f(x)|=-\frac{1}{2}\ln|\tan x+2|$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{\sec^2 x}{2(\tan x+2)}$$

따라서 $g(x)=-\frac{\sec^2 x}{2(\tan x+2)}$이므로

$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{3}$

080

$x=t^3-\frac{1}{6}t^2+4$에서 $\frac{dx}{dt}=3t^2-\frac{1}{3}t$

$y=t^3+3t^2$에서 $\frac{dy}{dt}=3t^2+6t$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+6t}{3t^2-\frac{1}{3}t}\left(\text{단, } 3t^2-\frac{1}{3}t\neq0\right)$$

따라서 $t=1$일 때

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3\times1^2+6\times1}{3\times1^2-\frac{1}{3}\times1}=\frac{9}{\frac{8}{3}}=\frac{27}{8}$$

답 $\frac{27}{8}$

081

$x=a\cos^4\theta$에서

$\frac{dx}{d\theta}=4a\cos^3\theta\times(-\sin\theta)=-4a\cos^3\theta\sin\theta$

$y=a\sin^4\theta$에서 $\frac{dy}{d\theta}=4a\sin^3\theta\cos\theta$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{4a\sin^3\theta\cos\theta}{-4a\cos^3\theta\sin\theta}$$
$$=-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=-\tan^2\theta\ (\text{단, } \sin\theta\cos\theta\neq0)$$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때

$$\frac{dy}{dx}=-\tan^2\frac{\pi}{3}=-(\sqrt{3})^2=-3$$

답 -3

082

$x=\ln t$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$

$y=\ln(t^2+1)$에서 $\frac{dy}{dt}=\frac{2t}{t^2+1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2t}{t^2+1}}{\frac{1}{t}}=\frac{2t^2}{t^2+1}$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^2}{t^2+1}$$

분모, 분자를 분모의 최고차항인 t^2으로 각각 나눈다.

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{t^2}}$$
$$=\frac{2}{1+0}=2$$

답 2

083

$x=4\tan\theta$에서 $\dfrac{dx}{d\theta}=4\sec^2\theta$

$y=12\sec\theta$에서 $\dfrac{dy}{d\theta}=12\sec\theta\tan\theta$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{12\sec\theta\tan\theta}{4\sec^2\theta}=\dfrac{3\tan\theta}{\sec\theta}=3\sin\theta$

$3\sin\theta=\dfrac{3}{2}$에서 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\le\theta<2\pi$이므로 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\dfrac{5}{6}\pi$

$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$일 때 $x<0$이므로 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

$a=4\tan\dfrac{\pi}{6}=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

$b=12\sec\dfrac{\pi}{6}=12\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=8\sqrt{3}$

$\therefore ab=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\times 8\sqrt{3}=32$

답 ③

084

$x=t^2+\dfrac{a}{t^2}$에서 $\dfrac{dx}{dt}=2t-\dfrac{2a}{t^3}$

$y=t^2-\dfrac{a}{t^2}$에서 $\dfrac{dy}{dt}=2t+\dfrac{2a}{t^3}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2t+\frac{2a}{t^3}}{2t-\frac{2a}{t^3}}=\dfrac{t^4+a}{t^4-a}$ (단, $t^4-a\ne 0$)

$t=3$일 때의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값이 2이므로

$\dfrac{3^4+a}{3^4-a}=2$, $81+a=162-2a$

$3a=81$ $\therefore a=27$

답 ③

085

$y^3=\ln|2-x^2|+4xy-3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3y^2\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x}{2-x^2}+4y+4x\dfrac{dy}{dx}$

$(3y^2-4x)\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x}{2-x^2}+4y$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{3y^2-4x}\left(\dfrac{-2x}{2-x^2}+4y\right)$ (단, $3y^2-4x\ne 0$, $2-x^2\ne 0$)

따라서 곡선 위의 점 $(1, 1)$에서의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$\dfrac{1}{3-4}\left(\dfrac{-2}{2-1}+4\right)=-2$

답 ①

086

점 (a, b)가 곡선 $2\sqrt{x}+\sqrt{y}=6$ 위의 점이므로

$2\sqrt{a}+\sqrt{b}=6$ …… ㉠

$2\sqrt{x}+\sqrt{y}=6$에서 $2x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=6$

양변을 x에 대하여 미분하면

$x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\dfrac{dy}{dx}=0$

$\dfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\dfrac{dy}{dx}=-x^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x^{-\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}}=-\dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ (단, $x\ne 0$)

곡선 $2\sqrt{x}+\sqrt{y}=6$ 위의 점 (a, b)에서의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은 -2이므로

$-\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-2$, $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ $\therefore a=b$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2\sqrt{a}+\sqrt{a}=6$, $3\sqrt{a}=6$, $\sqrt{a}=2$ $\therefore a=4$

$a=4$를 ㉡에 대입하면 $b=4$

$\therefore a+b=4+4=8$

답 8

087

점 $(1, 0)$이 곡선 $2x^3-2y^3+axy+b=0$ 위의 점이므로

$2+b=0$ $\therefore b=-2$

$2x^3-2y^3+axy+b=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x^2-6y^2\dfrac{dy}{dx}+ay+ax\dfrac{dy}{dx}=0$

$(6y^2-ax)\dfrac{dy}{dx}=6x^2+ay$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6x^2+ay}{6y^2-ax}$ (단, $6y^2-ax\ne 0$)

곡선 $2x^3-2y^3+axy+b=0$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$\dfrac{6}{-a}=3$ $\therefore a=-2$ $\dfrac{dy}{dx}$에 $x=1$, $y=0$을 대입한다.

$\therefore ab=-2\times(-2)=4$

답 ④

088

점 (a, b)가 곡선 $e^x-e^y=2y$ 위의 점이므로

$e^a-e^b=2b$ …… ㉠

$e^x-e^y=2y$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^x-e^y\dfrac{dy}{dx}=2\dfrac{dy}{dx}$

$(e^y+2)\dfrac{dy}{dx}=e^x$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^x}{e^y+2}$

곡선 $e^x-e^y=2y$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 1이므로

$\dfrac{e^a}{e^b+2}=1$ $\therefore e^a=e^b+2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$e^b+2-e^b=2b$ $\therefore b=1$

$b=1$을 ㉡에 대입하면

$e^a=e+2$ $\therefore a=\ln(e+2)$

$\therefore a+b=\ln(e+2)+1$

답 ①

089

접근

먼저 점 P의 좌표를 구하고 $\dfrac{dy}{dx}$의 식에 점 P의 x좌표와 y좌표를 대입한다.

곡선 $x^2+3xy+y^2=20$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x^2+3x^2+x^2=20$, $5x^2=20$, $x^2=4$

$y=x$를 $x^2+3xy+y^2=20$에 대입한다.

$x>0$이므로 $\quad x=2$

점 P가 제1사분면의 점이므로 $x>0$이다.

$\therefore$ P$(2,\ 2)$

$x^2+3xy+y^2=20$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x+3y+3x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(3x+2y)\frac{dy}{dx}=-2x-3y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-2x-3y}{3x+2y}\ (\text{단, } 3x+2y\neq0)$$

따라서 곡선 $x^2+3xy+y^2=20$ 위의 점 P$(2,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{-2\times2-3\times2}{3\times2+2\times2}=-1$$

답 -1

090

$x=\sin y$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\cos y \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}$$

$x=\sin y$에서 $x=\dfrac{1}{2}$일 때

$$\frac{1}{2}=\sin y \qquad \therefore y=\frac{\pi}{6}\ \left(\because 0<y<\frac{\pi}{2}\right)$$

따라서 $x=\dfrac{1}{2}$, 즉 $y=\dfrac{\pi}{6}$일 때의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 ⑤

풍쌤 비법

y를 x에 대하여 직접 미분하기 어려운 경우에는 x를 y에 대하여 미분한 후 역함수의 미분법을 이용한다. 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 역함수가 존재할 때

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\ \left(\text{단, } \frac{dx}{dy}\neq0\right)$$

091

$g(3)=a$라고 하면 $f(a)=3$이므로

$a^2+3a+5=3$, $a^2+3a+2=0$

$(a+1)(a+2)=0 \qquad \therefore a=-1\ (\because x>-2)$

따라서 $g(3)=-1$이고 $f'(x)=2x+3$이므로

$$g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{2\times(-1)+3}=1$$

답 1

092

$g(a)=b$라고 하면 $f(b)=a$이므로

$\ln(e^b+2)=a \qquad \therefore e^b+2=e^a \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=\ln(e^x+2)$에서

$$f'(x)=\frac{e^x}{e^x+2} \qquad \therefore \frac{1}{f'(x)}=\frac{e^x+2}{e^x}$$

$$g'(a)=\frac{1}{f'(g(a))}=\frac{1}{f'(b)}=\frac{e^b+2}{e^b}=\frac{e^a}{e^a-2}\ (\because ㉠)$$

$$\therefore \frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{g'(a)}=\frac{e^a+2}{e^a}+\frac{e^a-2}{e^a}=2$$

답 2

093

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{g(x)-3}{x-1}=4$에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to1}\{g(x)-3\}=0$이므로

$g(1)=3 \qquad \therefore f(3)=1$

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=4$$

$$\therefore f'(3)=\frac{1}{g'(f(3))}=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{4}$$

답 ①

094

$$\lim_{x\to2}\frac{\{g(x)\}^2-\{g(2)\}^2}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\{g(x)-g(2)\}\{g(x)+g(2)\}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}\times\lim_{x\to2}\{g(x)+g(2)\}$$

$$=2g(2)g'(2)$$

이때 $f(1)=2$에서 $g(2)=1$이므로

$$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{\{g(x)\}^2-\{g(2)\}^2}{x-2}=2g(2)g'(2)=2\times1\times3=6$$

답 6

095

$f(x)=(x+a)e^{bx}$에서

$f'(x)=1\times e^{bx}+(x+a)be^{bx}=(bx+ab+1)e^{bx}$

$f''(x)=b\times e^{bx}+(bx+ab+1)\times be^{bx}$

$\qquad\quad =(bx+ab+2)be^{bx}$

$f'(0)=4$에서 $\quad ab+1=4 \qquad \therefore ab=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f''(0)=10$에서 $\quad (ab+2)b=10 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{3}{2},\ b=2$$

$$\therefore 2a+b=2\times\frac{3}{2}+2=5$$

답 ⑤

096

$f(x)=\sqrt{x^2+7}=(x^2+7)^{\frac{1}{2}}$에서

$f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+7}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}}$

$f'(0)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=f''(0)$

이때

$$f''(x)=\frac{1\times\sqrt{x^2+7}-x\times\dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}}}{(\sqrt{x^2+7})^2}$$

$$=\frac{(x^2+7)-x^2}{(x^2+7)\sqrt{x^2+7}}$$

$$=\frac{7}{(x^2+7)\sqrt{x^2+7}}$$

이므로 $f''(0)=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

답 ③

097

$f(x)=e^{3x}\cos x$에서

$f'(x)=3e^{3x}\cos x-e^{3x}\sin x=e^{3x}(3\cos x-\sin x)$

$f''(x)=3e^{3x}(3\cos x-\sin x)+e^{3x}(-3\sin x-\cos x)$

$\quad=e^{3x}(-6\sin x+8\cos x)$

이때 $x=\alpha$가 방정식 $f''(x)=0$의 해이므로

$e^{3\alpha}(-6\sin\alpha+8\cos\alpha)=0$

$e^{3\alpha}>0$이므로 $\quad -6\sin\alpha+8\cos\alpha=0$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\quad \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{4}{3}$

$\therefore \tan\alpha=\dfrac{4}{3}$

답 $\dfrac{4}{3}$

098

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f'(a+h)-f'(a)}{h}=f''(a)=2$

$f(x)=\dfrac{1}{x+3}$에서

$f'(x)=-\dfrac{1}{(x+3)^2}$

$f''(x)=\dfrac{2(x+3)}{(x+3)^4}=\dfrac{2}{(x+3)^3}$

$f''(a)=\dfrac{2}{(a+3)^3}=2$이므로

$(a+3)^3=1,\ a+3=1 \qquad \therefore a=-2$

답 ①

099

접근

$f'(x), f''(x)$를 각각 구하여 주어진 식에 대입하여 x의 값을 구한다. 이때 로그의 진수 조건에 주의한다.

$f(x)=x^2\ln x$에서

$f'(x)=2x\ln x+x^2\times\dfrac{1}{x}=2x\ln x+x$

$f''(x)=2\ln x+2x\times\dfrac{1}{x}+1=2\ln x+3$

$f(x)-f'(x)-f''(x)=\ln x-x-3$에서

$x^2\ln x-(2x\ln x+x)-(2\ln x+3)=\ln x-x-3$

$(x^2-2x-3)\ln x=0$

$(x+1)(x-3)\ln x=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $\underbrace{x=1}_{\ln x=0\text{에서 } x=1}$

$f(x)=x^2\ln x$에서 진수 조건에 의하여 $x>0$이므로

$x=1$ 또는 $x=3$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 x의 값의 합은

$1+3=4$

답 ①

참고

$\log_a N$이 정의되려면 $a>0,\ a\neq1,\ N>0$이어야 한다.

100

$f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+7}$에서

$$f'(x)=\frac{1\times(x^2+7)-(x+3)\times2x}{(x^2+7)^2}$$

$$=\frac{-x^2-6x+7}{(x^2+7)^2}$$

$f'(x)\geq0$이고 $(x^2+7)^2>0$이므로

$-x^2-6x+7\geq0,\ x^2+6x-7\leq0$

$(x+7)(x-1)\leq0 \qquad \therefore -7\leq x\leq1$

따라서 $f'(x)\geq0$을 만족시키는 정수 x의 개수는 $-7, -6, -5, \cdots,$ 1의 9이다.

답 ③

101

접근

$\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)$가 등비수열의 합임을 파악하고 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)$의 값을 구할 때 등비급수의 합 공식을 이용한다.

$\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^n$

이때 $0<x<1$이므로

$g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)=x+x^2+x^3+\cdots=\dfrac{x}{1-x}$

$g'(x)=\dfrac{1\times(1-x)-x\times(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

이므로

$g'\left(\dfrac{5}{6}\right)=\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{5}{6}\right)^2}=36$

답 36

참고

등비급수의 합

$-1<r<1$일 때, 등비급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$의 합은 $\dfrac{a}{1-r}$이다.

102

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+2}$에서

$f'(x)=\dfrac{a(x^2+2)-(ax+b)\times 2x}{(x^2+2)^2}$

$=\dfrac{-ax^2-2bx+2a}{(x^2+2)^2}$

$\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=-3$에서 $\quad f'(2)=-3$

즉, $f'(2)=\dfrac{-2a-4b}{(4+2)^2}=-3$이므로

$a+2b=54$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=0$에서

$\lim_{x\to 1}\left\{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\dfrac{1}{x+1}\right\}=0$

$\dfrac{1}{2}f'(1)=0 \qquad \therefore f'(1)=0$

즉, $f'(1)=\dfrac{a-2b}{(1+2)^2}=0$이므로

$a-2b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=27,\ b=\dfrac{27}{2}$

$\therefore a-4b=27-4\times\dfrac{27}{2}=-27$

답 ②

103

$f(x)=\dfrac{2\sin x}{\sin x+\cos x}$에서

$f'(x)=\dfrac{2\cos x(\sin x+\cos x)-2\sin x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$

$=\dfrac{2\cos^2 x+2\sin^2 x}{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x}$ $\quad \sin^2 x+\cos^2 x=1$

$=\dfrac{2}{1+2\sin x\cos x}$

$=\dfrac{2}{1+\sin 2x}$

$f'(\alpha)=\dfrac{4}{3}$에서 $\quad \dfrac{2}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{4}{3}$

$1+\sin 2\alpha=\dfrac{3}{2} \qquad \therefore \sin 2\alpha=\dfrac{1}{2}$

이때 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$에서 $0\le 2\alpha\le\pi$이므로

$2\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $2\alpha=\dfrac{5}{6}\pi \qquad \therefore \alpha=\dfrac{\pi}{12}$ 또는 $\alpha=\dfrac{5}{12}\pi$

따라서 모든 α의 값의 합은

$\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{\pi}{2}$

답 ④

104

$g(x)=6e^{-\ln(x^2+3)}=6e^{\ln(x^2+3)^{-1}}$

$=6(x^2+3)^{-1}=\dfrac{6}{x^2+3}$

$(x-2)f(x)=g(x)-g(2)$에서

$x\neq 2$일 때, $f(x)=\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$

이때 $g'(x)=-\dfrac{6\times 2x}{(x^2+3)^2}=-\dfrac{12x}{(x^2+3)^2}$이므로

$f(2)=g'(2)=-\dfrac{12\times 2}{(4+3)^2}=-\dfrac{24}{49}$

답 ③

105

$f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx})$으로 놓으면

$f(0)=\ln n$이므로

$\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}}{n}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

$=f'(0)=15$

이때 $f'(x)=\dfrac{e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}}$이므로

$f'(0)=\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n}=\dfrac{1}{n}\times\dfrac{n(n+1)}{2}$

$=\dfrac{n+1}{2}=15$

$n+1=30 \qquad \therefore n=29$

답 29

106

$f(\sqrt{3x})=3x^2-12x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(\sqrt{3x})\times\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}=6x-12$

$\therefore f'(\sqrt{3x})=\sqrt{3x}(4x-8)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\left\{\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\dfrac{1}{x+2}\right\}=\dfrac{1}{4}f'(2)$

$\sqrt{3x}=2$에서 $x=\dfrac{4}{3}$이므로 $x=\dfrac{4}{3}$를 ㉠의 양변에 대입하면

$f'(2)=2\left(\dfrac{16}{3}-8\right)=-\dfrac{16}{3}$

$\therefore \lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\dfrac{1}{4}f'(2)=\dfrac{1}{4}\times\left(-\dfrac{16}{3}\right)=-\dfrac{4}{3}$

답 ③

다른 풀이

$\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\dfrac{1}{4}f'(2)$이고

$f(\sqrt{3x})=3x^2-12x$에서 $\sqrt{3x}=t\,(t\ge 0)$로 놓으면

$f(t)=\dfrac{1}{3}t^4-4t^2$

$f'(t)=\dfrac{4}{3}t^3-8t$이므로 $\quad f'(2)=-\dfrac{16}{3}$

$\therefore \lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\dfrac{1}{4}f'(2)=-\dfrac{4}{3}$

107

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$이어야 한다.

$\lim_{x\to 1+}(\ln x+3)=\lim_{x\to 1-}(a\tan \pi x+b)=3$

$a\tan\pi+b=3$에서 $\quad b=3$

또, $f'(1)$이 존재해야 하므로

$f(x)=\begin{cases} \ln x+3 & (x\ge 1) \\ a\tan\pi x+3 & (x<1)\end{cases}$에서

$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x>1) \\ a\pi\sec^2\pi x & (x<1)\end{cases}$

$\lim_{x\to 1+} f'(x)=\lim_{x\to 1-} f'(x)$에서

$\lim_{x\to 1+}\dfrac{1}{x}=\lim_{x\to 1-} a\pi\sec^2\pi x$

$1=a\pi\sec^2\pi=a\pi \qquad \therefore a=\dfrac{1}{\pi}$

$\therefore a\pi+b=\dfrac{1}{\pi}\times\pi+3=4$

답 4

108

$\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}=2$에서 $x\to 1$일 때 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{f(x)+1\}=0$이므로

$f(1)=-1$

$\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$

$g(x)=\dfrac{5\sec\pi x}{f(x)}$에서

$g(1)=\dfrac{5\sec\pi}{f(1)}=\dfrac{-5}{-1}=5$이므로

$\lim_{x\to 1}\dfrac{g(x)-5}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$

이때

$g'(x)=\dfrac{5\pi\sec\pi x\tan\pi x\times f(x)-5\sec\pi x f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

이므로

$g'(1)=\dfrac{5\pi\sec\pi\tan\pi\times f(1)-5\sec\pi f'(1)}{\{f(1)\}^2}$

$\quad=\dfrac{0-5\times(-1)\times 2}{(-1)^2}=10$

답 ③

109

$g\left(\dfrac{x+8}{10}\right)=f^{-1}(x)$에서

$f\left(g\left(\dfrac{x+8}{10}\right)\right)=x$ ← 역함수의 정의를 이용하여 간단히 나타낸다.

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'\left(g\left(\dfrac{x+8}{10}\right)\right)g'\left(\dfrac{x+8}{10}\right)\times\dfrac{1}{10}=1$

$\therefore f'\left(g\left(\dfrac{x+8}{10}\right)\right)g'\left(\dfrac{x+8}{10}\right)=10$ …… ㉠

$\dfrac{x+8}{10}=1$에서 $x=2$이고

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$f'(g(1))g'(1)=10$

$\therefore f'(0)g'(1)=10$ …… ㉡

이때 $f(x)=(x^2+2)e^{-x}$에서

$f'(x)=2xe^{-x}+(x^2+2)e^{-x}\times(-1)$

$\quad=(2x-x^2-2)e^{-x}$

$\therefore f'(0)=-2$

$f'(0)=-2$를 ㉡에 대입하면

$(-2)\times g'(1)=10 \qquad \therefore g'(1)=-5$

$\therefore |g'(1)|=5$

답 5

110

다항식 $f(x)=x^{12}+ax^2+bx$를 $(x^3-1)^4$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^{12}+ax^2+bx=(x^3-1)^4Q(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b=0 \qquad \therefore a+b=-1$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$12x^{11}+2ax+b=4(x^3-1)^3\times 3x^2Q(x)+(x^3-1)^4Q'(x)$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$12+2a+b=0 \qquad \therefore 2a+b=-12$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-11$, $b=10$

$\therefore a^2+b^2=(-11)^2+10^2=221$

답 ⑤

111

$\log\{1+f(x)\}+xf(x)=\log 3$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\log\{1+f(0)\}=\log 3$

$1+f(0)=3 \qquad \therefore f(0)=2$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{\{1+f(x)\}\ln 10}+f(x)+xf'(x)=0$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\dfrac{f'(0)}{\{1+f(0)\}\ln 10}+f(0)=0$

$\dfrac{f'(0)}{(1+2)\ln 10}+2=0 \qquad \therefore f'(0)=-6\ln 10$

답 ①

112

접근

주어진 조건을 이용하여 $g'(x)$, 즉 $f_{20}'(x)$를 구한 후 $x=1$을 대입한다.

$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$에서

$f_{n+1}'(x)=f'(f_n(x))f_n'(x)$

$g(x)=f_{20}(x)$에서

$$\begin{aligned} g'(x)&=f_{20}'(x)\\ &=f'(f_{19}(x))f_{19}'(x)\\ &=f'(f_{19}(x))f'(f_{18}(x))f_{18}'(x)\\ &\ \ \vdots\\ &=f'(f_{19}(x))f'(f_{18}(x))\cdots f'(f_2(x))f'(f_1(x))f_1'(x)\end{aligned}$$

$f(1)=1$이므로

$f_1(1)=f(1)=1$

$f_2(1)=f(f_1(1))=f(1)=1$

$f_3(1)=f(f_2(1))=f(1)=1$

$\vdots$

$f_{19}(1)=f(f_{18}(1))=f(1)=1$

$$\begin{aligned}\therefore g'(1)&=f'(f_{19}(1))f'(f_{18}(1))\cdots f'(f_2(1))f'(f_1(1))f_1'(1)\\ &=\underbrace{f'(1)f'(1)\cdots f'(1)f'(1)f'(1)}_{20\text{개}}\\ &=3^{20}\end{aligned}$$

답 ④

113

$f(x)=x^{\sin x}$에서 $f(\pi)=\pi^{\sin\pi}=1$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-1}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)$$

$f(x)=x^{\sin x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln x^{\sin x}=\sin x\ln x$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\cos x\ln x+\sin x\times\frac{1}{x}$$

$$\therefore f'(x)=f(x)\left(\cos x\ln x+\sin x\times\frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(\pi)&=f(\pi)\left(\cos\pi\ln\pi+\sin\pi\times\frac{1}{\pi}\right)\\ &=1\times(-\ln\pi+0)\\ &=-\ln\pi=\ln\frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

답 ①

풍쌤 비법

$y=\{f(x)\}^{g(x)}$ $(f(x)>0)$ 꼴의 함수의 도함수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $y=\{f(x)\}^{g(x)}$의 양변에 자연로그를 취한다.

➡ $\ln y=g(x)\ln f(x)$

(ii) (i)의 양변을 x에 대하여 미분한다.

➡ $\dfrac{y'}{y}=g'(x)\ln f(x)+g(x)\times\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

(iii) (ii)를 y'에 대하여 정리한다.

114

$g(x)=\dfrac{f(x)\cos x}{e^x}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\begin{aligned}\ln|g(x)|&=\ln\left|\frac{f(x)\cos x}{e^x}\right|\\ &=\ln|f(x)|+\ln|\cos x|-\ln e^x\\ &=\ln|f(x)|+\ln|\cos x|-x\end{aligned}$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}+\underline{\frac{-\sin x}{\cos x}}-1 \quad\cdots\cdots ㉠$$

$(\ln|\cos x|)'=\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}=\dfrac{-\sin x}{\cos x}$

㉠에 $x=\pi$를 대입하면

$$\frac{g'(\pi)}{g(\pi)}=\frac{f'(\pi)}{f(\pi)}+\underline{\frac{-\sin\pi}{\cos\pi}}-1$$

$\sin\pi=0$, $\cos\pi=-1$이므로 $\dfrac{-\sin\pi}{\cos\pi}=0$

이고, $g'(\pi)=e^\pi g(\pi)$에서 $\dfrac{g'(\pi)}{g(\pi)}=e^\pi$이므로

$$e^\pi=\frac{f'(\pi)}{f(\pi)}+0-1$$

$$\therefore \frac{f'(\pi)}{f(\pi)}=e^\pi+1$$

답 ④

다른 풀이

$g(x)=\dfrac{f(x)\cos x}{e^x}$의 양변에 e^x을 곱하면

$e^xg(x)=f(x)\cos x$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=\pi$를 대입하면

$e^\pi g(\pi)=f(\pi)\cos\pi=-f(\pi)$

즉, $f(\pi)=-e^\pi g(\pi)=-g'(\pi)$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^xg(x)+e^xg'(x)=f'(x)\cos x-f(x)\sin x$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $x=\pi$를 대입하면

$e^\pi g(\pi)+e^\pi g'(\pi)=f'(\pi)\cos\pi-f(\pi)\sin\pi$

$g'(\pi)+e^\pi g'(\pi)=-f'(\pi)$

$(e^\pi+1)g'(\pi)=-f'(\pi)$

$\therefore f'(\pi)=-(e^\pi+1)g'(\pi)$

$$\therefore \frac{f'(\pi)}{f(\pi)}=\frac{-(e^\pi+1)g'(\pi)}{-g'(\pi)}=e^\pi+1$$

풍쌤 비법

$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 꼴의 도함수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취한다.

➡ $\ln|y|=\ln\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|=\ln|f(x)|-\ln|g(x)|$

(ii) (i)의 양변을 x에 대하여 미분한다.

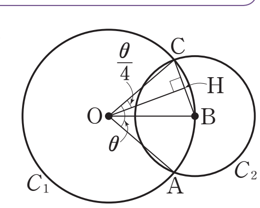
➡ $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}-\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

(iii) (ii)를 y'에 대하여 정리한다.

115

접근

△OBC에서 이등변삼각형의 성질과 삼각비를 이용하여 선분의 길이를 구한다.



점 O에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 △OHC에서

$\angle COH=\dfrac{\theta}{4}$, $\overline{OC}=2$이므로

$\overline{CH}=2\sin\dfrac{\theta}{4}$, $\overline{OH}=2\cos\dfrac{\theta}{4}$

원 C_2의 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{BC}}=2\overline{\mathrm{CH}}=2\times2\sin\frac{\theta}{4}=4\sin\frac{\theta}{4}$이므로

$\triangle$OBC가 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{OH}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$일 때 $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{CH}}$

원 C_2의 넓이는

$S(\theta)=\pi\times\left(4\sin\frac{\theta}{4}\right)^2=16\pi\sin^2\frac{\theta}{4}$ …… ㉠

또, $\triangle$OBC의 넓이는

$T(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{OH}}$

$=\frac{1}{2}\times4\sin\frac{\theta}{4}\times2\cos\frac{\theta}{4}$

$=4\sin\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{4}$

$=2\sin\frac{\theta}{2}$

이때 $T(a)=\frac{2}{3}$이므로

$2\sin\frac{a}{2}=\frac{2}{3}$ $\qquad\therefore \sin\frac{a}{2}=\frac{1}{3}$ …… ㉡

㉠의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$S'(\theta)=16\pi\times2\sin\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{4}\times\frac{1}{4}$

$=8\pi\sin\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{4}=4\pi\sin\frac{\theta}{2}$

$\therefore 6S'(a)=6\times4\pi\sin\frac{a}{2}=6\times4\pi\times\frac{1}{3}=8\pi$ ($\because$ ㉡)

답 8π

다른 풀이

원 C_2의 반지름의 길이를 r라고 하면 $\triangle$OBC에서 코사인법칙에 의하여

$r^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos\frac{\theta}{2}=8-8\cos\frac{\theta}{2}$

원 C_2의 넓이는

$S(\theta)=\pi\left(8-8\cos\frac{\theta}{2}\right)$ …… ㉠

또, $\triangle$OBC의 넓이는

$T(\theta)=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{\theta}{2}$

이때 $T(a)=\frac{2}{3}$이므로

$2\sin\frac{a}{2}=\frac{2}{3}$ $\qquad\therefore \sin\frac{a}{2}=\frac{1}{3}$ …… ㉡

㉠의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$S'(\theta)=8\pi\sin\frac{\theta}{2}\times\frac{1}{2}=4\pi\sin\frac{\theta}{2}$

$\therefore 6S'(a)=6\times4\pi\sin\frac{a}{2}=6\times4\pi\times\frac{1}{3}=8\pi$ ($\because$ ㉡)

116

$\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+4h)-f(\pi)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+4h)-f(\pi)}{4h}\times4$

$=4f'(\pi)$

$x=t-\sin t$에서 $\frac{dx}{dt}=1-\cos t$

$y=t+\cos t$에서 $\frac{dy}{dt}=1-\sin t$

$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\sin t}{1-\cos t}$ (단, $\cos t\neq1$)

$t-\sin t=\pi$에서 $t=\pi$

$\therefore 4f'(\pi)=4\times\frac{1-\sin\pi}{1-\cos\pi}=4\times\frac{1}{1-(-1)}=2$

답 ②

117

$x=\frac{2-t}{2+t}$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{-1\times(2+t)-(2-t)\times1}{(2+t)^2}=\frac{-4}{(2+t)^2}$

$y=\frac{3t}{2+t}$에서

$\frac{dy}{dt}=\frac{3\times(2+t)-3t\times1}{(2+t)^2}=\frac{6}{(2+t)^2}$

$\therefore f(t)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{6}{(2+t)^2}}{\frac{-4}{(2+t)^2}}=-\frac{3}{2}$

$\therefore \sum_{t=1}^{100}|f(t)|=\sum_{t=1}^{100}\left|-\frac{3}{2}\right|=100\times\frac{3}{2}=150$

답 ③

118

$\lim_{t\to1}\frac{f(t)+2}{t-1}=\frac{2}{3}$에서 $t\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{t\to1}\{f(t)+2\}=0$이므로

$f(1)=-2$

$\lim_{t\to1}\frac{f(t)+2}{t-1}=\lim_{t\to1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=f'(1)=\frac{2}{3}$

$\lim_{h\to0}\frac{g(1+3h)}{h}=15$에서 $h\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to0}g(1+3h)=0$이므로 $\quad g(1)=0$

$\lim_{h\to0}\frac{g(1+3h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{g(1+3h)-g(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{g(1+3h)-g(1)}{3h}\times3$

$=3g'(1)=15$

$\therefore g'(1)=5$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$\frac{g'(1)}{f'(1)}=\frac{5}{\frac{2}{3}}=\frac{15}{2}$

답 $\frac{15}{2}$

119

$x=e^t+e^{2t}+e^{3t}+\cdots+e^{nt}$에서

$\frac{dx}{dt}=e^t+2e^{2t}+3e^{3t}+\cdots+ne^{nt}$

$y=e^t+e^{3t}+e^{5t}+\cdots+e^{(2n-1)t}$에서

$\frac{dy}{dt}=e^t+3e^{3t}+5e^{5t}+\cdots+(2n-1)e^{(2n-1)t}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t+3e^{3t}+5e^{5t}+\cdots+(2n-1)e^{(2n-1)t}}{e^t+2e^{2t}+3e^{3t}+\cdots+ne^{nt}}$

$t=0$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$$g(n)=\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+3+\cdots+n}$$

$$=\frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$

$$=\frac{2n}{n+1}$$

$g(n)=\frac{7}{4}$에서 $\frac{2n}{n+1}=\frac{7}{4}$

$8n=7(n+1)$, $8n=7n+7$ $\quad\therefore n=7$

답 7

120

$x=5\cos^3\theta$에서

$$\frac{dx}{d\theta}=15\cos^2\theta\times(-\sin\theta)=-15\cos^2\theta\sin\theta$$

$y=5\sin^3\theta$에서

$$\frac{dy}{d\theta}=15\sin^2\theta\cos\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{15\sin^2\theta\cos\theta}{-15\cos^2\theta\sin\theta}$$

$$=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta \text{ (단, } \sin\theta\cos\theta\neq0)$$

따라서 주어진 그래프 중 함수 $f(\theta)=-\tan\theta$의 그래프의 개형을 나타내는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

121

$x=\frac{4-t}{1+t}$에서

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-1\times(1+t)-(4-t)\times1}{(1+t)^2}=\frac{-5}{(1+t)^2}$$

$y=\frac{2t^2}{1+t}$에서

$$\frac{dy}{dt}=\frac{4t(1+t)-2t^2\times1}{(1+t)^2}=\frac{2t^2+4t}{(1+t)^2}$$

$$f(t)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2t^2+4t}{(1+t)^2}}{\frac{-5}{(1+t)^2}}=-\frac{2}{5}t(t+2)\ (t\neq-1)$$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$$

$$=-\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$$

$$=-\frac{5}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$

$$=-\frac{5}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=-\frac{5}{4}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=-\frac{5}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=-\frac{5}{4}\times\frac{3}{2}=-\frac{15}{8}$$

답 ②

122

접근

$x+y$, xy를 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

$x=2^{at}+2^{3at}$에서

$$\frac{dx}{dt}=2^{at}\times a\ln2+2^{3at}\times3a\ln2=a\ln2(2^{at}+3\times2^{3at})$$

$y=2^{at}-2^{3at}$에서

$$\frac{dy}{dt}=2^{at}\times a\ln2-2^{3at}\times3a\ln2=a\ln2(2^{at}-3\times2^{3at})$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\ln2(2^{at}-3\times2^{3at})}{a\ln2(2^{at}+3\times2^{3at})}=\frac{2^{at}-3\times2^{3at}}{2^{at}+3\times2^{3at}}$$

이때

$x+y=(2^{at}+2^{3at})+(2^{at}-2^{3at})=2\times2^{at}$,

$x-y=(2^{at}+2^{3at})-(2^{at}-2^{3at})=2\times2^{3at}$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{2}(x+y)-\frac{3}{2}(x-y)}{\frac{1}{2}(x+y)+\frac{3}{2}(x-y)}$$

$$=\frac{(x+y)-3(x-y)}{(x+y)+3(x-y)}$$

$$=\frac{-2x+4y}{4x-2y}$$

$$=\frac{-x+2y}{2x-y}$$

따라서 $b=2$, $c=2$이므로

$b-2c=2-2\times2=-2$

답 ②

123

$x^2+3xy-y^2=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x+3y+3x\frac{dy}{dx}-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(2y-3x)\frac{dy}{dx}=2x+3y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x+3y}{2y-3x}\ (\text{단, } 2y-3x\neq0)$$

곡선 $x^2+3xy-y^2=3$ 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선의 기울기가 모두 -5이므로

$\frac{2x+3y}{2y-3x}=-5$, $2x+3y=-10y+15x$

$-13x=-13y$ $\quad\therefore x=y$

$x=y$를 ㉠에 대입하면

$x^2+3x^2-x^2=3$, $x^2=1$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-1$

즉, $x=1$일 때 $y=1$, $x=-1$일 때 $y=-1$이므로

A$(1, 1)$, B$(-1, -1)$ 또는 A$(-1, -1)$, B$(1, 1)$

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(-1-1)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

124

점 $(27, b)$가 곡선 $\sqrt[3]{x}+a\sqrt[3]{y}=15$ 위의 점이므로

$3+a\sqrt[3]{b}=15 \qquad \therefore a\sqrt[3]{b}=12$ …… ㉠

$\sqrt[3]{x}+a\sqrt[3]{y}=15$에서 $x^{\frac{1}{3}}+ay^{\frac{1}{3}}=15$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{a}{3\sqrt[3]{y^2}}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\times\frac{3\sqrt[3]{y^2}}{a}=-\frac{\sqrt[3]{y^2}}{a\sqrt[3]{x^2}}\ (\text{단, } x\neq 0)$$

곡선 $\sqrt[3]{x}+a\sqrt[3]{y}=15$ 위의 점 $(27, b)$에서의 접선의 기울기가 $\frac{2}{27}$이므로

$-\frac{\sqrt[3]{b^2}}{9a}=\frac{2}{27} \qquad \therefore \sqrt[3]{b^2}=-\frac{2}{3}a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-6,\ b=-8$

$\therefore a+b=-6+(-8)=-14$

답 ②

125

접근

사인함수의 덧셈정리를 이용하여 식을 간단히 한 후 x에 대하여 미분한다.

$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2$에서

$(\sin x\cos y+\cos x\sin y)+(\sin x\cos y-\cos x\sin y)=2$

$\therefore \sin x\cos y=1$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\cos x\cos y+\sin x\times(-\sin y)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x\cos y}{\sin x\sin y}=\cot x\cot y\ (\text{단, } \sin x\sin y\neq 0)$$

$\frac{dy}{dx}=f(y)\cot x$에서 $\cot x\cot y=f(y)\cot x$

$\therefore f(y)=\cot y$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

답 $\sqrt{3}$

126

점 $(2, -1)$이 곡선 $y^3+2yf(x)+f(5x-8)=4$ 위의 점이므로

$-1-2f(2)+f(2)=4 \qquad \therefore f(2)=-5$

$y^3+2yf(x)+f(5x-8)=4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3y^2\frac{dy}{dx}+2yf'(x)+2f(x)\frac{dy}{dx}+f'(5x-8)\times 5=0$ …… ㉠

곡선 $y^3+2yf(x)+f(5x-8)=4$ 위의 점 $(2, -1)$에서의 접선의 기울기는 -2이므로

㉠에 $x=2,\ y=-1,\ \frac{dy}{dx}=-2$를 대입하면

$$3\times(-1)^2\times(-2)+2\times(-1)\times f'(2)+2\times(-5)\times(-2)+f'(2)\times 5=0$$

$3f'(2)=-14 \qquad \therefore f'(2)=-\frac{14}{3}$

답 ①

127

$g(2)=a$라고 하면 $\quad f(a)=2$

즉, $\sqrt[3]{a^3+6a+8}=2$의 양변을 세제곱하면

$a^3+6a+8=8,\ a(a^2+6)=0$

$\therefore a=0\ (\because a^2+6>0)$

$\therefore g(2)=0$

$f(x)=\sqrt[3]{x^3+6x+8}=(x^3+6x+8)^{\frac{1}{3}}$에서

$$f'(x)=\frac{3x^2+6}{3(\sqrt[3]{x^3+6x+8})^2}$$

$$\therefore f'(0)=\frac{6}{3\times 2^2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

답 ⑤

다른 풀이

$f(0)=\sqrt[3]{8}=2$이므로 $\quad g(2)=0$

한편 $f(x)=\sqrt[3]{x^3+6x+8}$에서 양변을 세제곱하면

$\{f(x)\}^3=x^3+6x+8$

양변을 x에 대하여 미분하면

$3\{f(x)\}^2f'(x)=3x^2+6$

$\{f(x)\}^2f'(x)=x^2+2$

$x=0$을 대입하면

$\{f(0)\}^2f'(0)=2 \qquad \therefore f'(0)=\frac{1}{2}$

$$\therefore g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

128

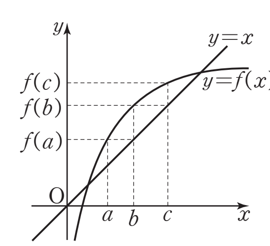
$x^2-9x+4=0$의 두 근이 $g'(b),\ g'(c)$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$g'(b)+g'(c)=9,\ g'(b)g'(c)=4$

오른쪽 그림에서

$f(a)=b,\ f(b)=c$

이므로



$$f'(a)=\frac{1}{g'(f(a))}=\frac{1}{g'(b)}$$

$$f'(b)=\frac{1}{g'(f(b))}=\frac{1}{g'(c)}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(a)g'(c)+f'(b)g'(b)&=\frac{g'(c)}{g'(b)}+\frac{g'(b)}{g'(c)}\\&=\frac{\{g'(b)\}^2+\{g'(c)\}^2}{g'(b)g'(c)}\\&=\frac{\{g'(b)+g'(c)\}^2-2g'(b)g'(c)}{g'(b)g'(c)}\\&=\frac{9^2-2\times 4}{4}=\frac{73}{4}\end{aligned}$$

답 ②

129

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(3, 5)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f(3)=5,\ f'(3)=1$

함수 $y=f(3x)$의 역함수가 $g(x)$이므로
$g(f(3x))=x$
위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$g'(f(3x))f'(3x)\times3=1$ …… ㉠
$f(3x)=5$를 만족시키는 x의 값을 구하면 $f(3)=5$이므로
$x=1$
$x=1$을 ㉠에 대입하면
$g'(f(3))f'(3)\times3=1$
$g'(5)\times1\times3=1$
$\therefore g'(5)=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

풍쌤 비법
합성함수를 이용한 역함수의 미분법
미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라고 하면
$f(g(x))=x$
이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(g(x))g'(x)=1$이므로
$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$ (단, $f'(g(x))\neq0$)

참고
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 $f'(x)>0$
즉, $f(x)$는 일대일대응이므로 $f(3x)=5$를 만족시키는 x의 값은 오직 하나만 존재한다.

130

조건 ㈎의 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x-1}=e$에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고
(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)+1\}=0$이므로 $f(1)=-1$ …… ㉠
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=e$
조건 ㈏에서 $g'(1)=e^2$
$f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))$에서
$f'(x)=g'(h(x))h'(x)$
$\therefore f'(-1)=g'(h(-1))h'(-1)$
$h(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로 ㉠에서 $h(-1)=1$
$g'(h(-1))=g'(1)=e^2$
$h'(-1)=\frac{1}{f'(h(-1))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{e}$
$\therefore f'(-1)=g'(h(-1))h'(-1)$
$=e^2\times\frac{1}{e}=e$

답 e

다른 풀이
조건 ㈏에서 $g'(1)=e^2$
함수 $f(x)$의 역함수가 $h(x)$이므로
$h(x)=f^{-1}(x)$
$f(x)=(g\circ h)(x)$에서 $f(x)=(g\circ f^{-1})(x)$
$\therefore g(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$
위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$
위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$g'(1)=f'(f(1))f'(1)$
$e^2=f'(-1)\times e$ $\quad\therefore f'(-1)=e$

131

$h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$에서
$h'(x)=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$
$\therefore h'(1)=\frac{g'(1)f(1)-g(1)f'(1)}{\{f(1)\}^2}$ …… ㉠
$f(x)=x^3+4x+1$에서 $f'(x)=3x^2+4$이므로
$f(1)=6$, $f'(1)=7$
$g(1)=a$라고 하면 $f(a)=1$이므로
$a^3+4a+1=1$, $a^3+4a=0$
$a(a^2+4)=0$ $\quad\therefore a=0$ ($\because a^2+4>0$)
$\therefore g(1)=0$
$g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{4}$
이때 ㉠에서
$h'(1)=\frac{\frac{1}{4}\times6-0\times7}{6^2}=\frac{1}{24}$
따라서 $p=1$, $q=24$이므로
$p+q=1+24=25$

답 ⑤

132

$f(3g(x)+x^3-2x)=x$에서
$g(x)=3g(x)+x^3-2x$
$\therefore g(x)=-\frac{1}{2}x^3+x$
$f(2)=a$라고 하면 $g(a)=2$이므로
$-\frac{1}{2}a^3+a=2$, $a^3-2a+4=0$
$(a+2)(a^2-2a+2)=0$
$\therefore a=-2$ ($\because a^2-2a+2=(a-1)^2+1>0$)
$\therefore f(2)=-2$
$g'(x)=-\frac{3}{2}x^2+1$이므로
$f'(2)=\frac{1}{g'(f(2))}=\frac{1}{g'(-2)}$
$=\frac{1}{-\frac{3}{2}\times(-2)^2+1}=-\frac{1}{5}$

답 $-\frac{1}{5}$

133

접근
점 A에서의 접선과 원의 중심과 점 A를 지나는 직선은 수직임을 이용한다.

$h(x)=g(x^2-x-1)$이라고 하면
$h'(x)=g'(x^2-x-1)(2x-1)$

$\therefore h'(3)=5g'(5)$ ── 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $A(3, 5)$를 지난다.

이때 $f(3)=5$에서 $g(5)=3$이므로

$$g'(5)=\frac{1}{f'(g(5))}=\frac{1}{f'(3)}$$

원 $(x-6)^2+(y-4)^2=10$의 중심을 $C(6, 4)$라고 하면 직선 AC의 기울기는

$$\frac{4-5}{6-3}=-\frac{1}{3}$$

── 직선 AC와 수직이다.

원 $(x-6)^2+(y-4)^2=10$ 위의 점 $A(3, 5)$에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=3$

따라서 함수 $y=g(x^2-x-1)$의 $x=3$에서의 미분계수는

$$h'(3)=5g'(5)=\frac{5}{f'(3)}=\frac{5}{3}$$

답 ⑤

참고

접선과 수직인 직선

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$를 지나는 접선의 기울기는 $f'(a)$이고 이 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{f'(a)}$이다.

134

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다. 즉,

$f'(x)=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$
$$=\frac{1}{3\{g(x)\}^2+ag(x)+b}$$
$$=\frac{1}{3\left\{g(x)+\frac{a}{6}\right\}^2-\frac{a^2}{12}+b}$$

에서 $g'(x)$는 $g(x)=-\frac{a}{6}$를 만족시키는 x에서 최댓값 $\frac{1}{-\frac{a^2}{12}+b}$을 갖는다.

조건 ㈏에서 $g'(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $\frac{1}{6}$을 가지므로

$g(3)=-\frac{a}{6}=1$ ($\because$ ㈎) $\qquad \therefore a=-6$

$$\frac{1}{-\frac{a^2}{12}+b}=\frac{1}{6},\ \frac{1}{-\frac{36}{12}+b}=\frac{1}{6}$$

$\frac{1}{-3+b}=\frac{1}{6} \qquad \therefore b=9$

따라서 $f'(x)=3x^2-6x+9$이므로

$f'(1)=3-6+9=6$

답 ⑤

135

$f(x)=(2x^2-2x+a)e^x$에서

$f'(x)=(4x-2)e^x+(2x^2-2x+a)e^x$
$\quad=(2x^2+2x-2+a)e^x$

$f''(x)=(4x+2)e^x+(2x^2+2x-2+a)e^x$
$\quad=(2x^2+6x+a)e^x$

이때 $e^x>0$이므로 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)\geq 0$이려면 $2x^2+6x+a\geq 0$이어야 한다.

이차방정식 $2x^2+6x+a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=3^2-2a\leq 0$, $9-2a\leq 0$

$\therefore a\geq\frac{9}{2}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\frac{9}{2}$이다.

답 $\frac{9}{2}$

136

$\lim_{x\to 2}\frac{f'(f(x))-4}{x-2}=16$에서 $x\to 2$일 때 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f'(f(x))-4\}=0$이므로

$f'(f(2))=4$

$\therefore f'(2)=4$ ($\because f(2)=2$)

$$\lim_{x\to 2}\frac{f'(f(x))-4}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{f'(f(x))-f'(f(2))}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{f'(f(x))-f'(f(2))}{f(x)-f(2)}\times\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=f''(2)\times f'(2)$$
$$=4f''(2)=16$$

$\therefore f''(2)=4$

답 ④

참고

$\lim_{x\to 2}\frac{f'(f(x))-f'(f(2))}{f(x)-f(2)}=\lim_{x\to 2}\frac{f'(f(x))-f'(2)}{f(x)-2}$이고

$f(2)=2$이므로 $x\to 2$일 때 $f(x)\to 2$이다.

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f'(f(x))-f'(f(2))}{f(x)-f(2)}=f''(2)$$

137

접근

$f^{\langle n+1\rangle}(x)=\frac{d}{dx}f^{\langle n\rangle}(x)$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 규칙성을 찾는다.

$f(x)=15\sqrt[5]{e^{2x}}=15e^{\frac{2}{5}x}$에서

$$f^{\langle 1\rangle}(x)=f'(x)=15\times\frac{2}{5}e^{\frac{2}{5}x}$$
$$f^{\langle 2\rangle}(x)=\frac{d}{dx}f^{\langle 1\rangle}(x)=15\times\left(\frac{2}{5}\right)^2e^{\frac{2}{5}x}$$
$$f^{\langle 3\rangle}(x)=\frac{d}{dx}f^{\langle 2\rangle}(x)=15\times\left(\frac{2}{5}\right)^3e^{\frac{2}{5}x}$$
$$\vdots$$
$$f^{\langle n\rangle}(x)=\frac{d}{dx}f^{\langle n-1\rangle}(x)=15\times\left(\frac{2}{5}\right)^n e^{\frac{2}{5}x}$$

이때 $f^{<n>}(5)=15\times\left(\frac{2}{5}\right)^n e^2$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} f^{<n>}(5)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{15\times\left(\frac{2}{5}\right)^n e^2\right\}$$
$$=15e^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$
$$=15e^2\times\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}$$
$$=15e^2\times\frac{2}{3}=10e^2$$

답 ③

138

조건 ㈎에서 $f(1)=e$이므로

$f(1)=(1+a+b)e=e$

$1+a+b=1$ $\quad\therefore a+b=0$ ...... ㉠

$f(x)=(x^2+ax+b)e^x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+b)e^x$

$\quad=\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$

조건 ㈎에서 $f'(1)=e$이므로

$f'(1)=\{1+(a+2)+a+b\}e=e$

$2a+b+3=1$

$\therefore 2a+b=-2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=2$

$f(x)=(x^2-2x+2)e^x$

$f'(x)=x^2e^x$ $f'(x)=\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$에 $a=-2$, $b=2$를 대입한다.

$f''(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x$

$f(1)=e$에서 $f^{-1}(e)=1$이므로

$(f^{-1})'(e)=\frac{1}{f'(f^{-1}(e))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{e}$

한편 조건 ㈏에서 $g(f(1))=f'(1)$이므로

$g(e)=e$

$g(f(x))=f'(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=f''(x)$ ...... ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g'(f(1))f'(1)=f''(1)$

$g'(e)\times e=3e$ $\quad\therefore g'(e)=3$

$h(x)=f^{-1}(x)g(x)$에서

$h'(x)=(f^{-1})'(x)g(x)+f^{-1}(x)g'(x)$

$\therefore h'(e)=(f^{-1})'(e)g(e)+f^{-1}(e)g'(e)$

$\quad=\frac{1}{e}\times e+1\times3=4$

답 ④

139

$f(x)=xe^{\frac{x}{3}}$에서

$f'(x)=e^{\frac{x}{3}}+\frac{1}{3}xe^{\frac{x}{3}}=\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}(x+3)$

$f''(x)=\frac{1}{9}e^{\frac{x}{3}}(x+3)+\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}=\frac{1}{9}e^{\frac{x}{3}}(x+6)$

$\therefore f'(3)=2e$, $f''(3)=e$

$g(f(x))=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=1$

즉, $g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$의 양변을 x에 대하여 다시 미분하면

$g''(f(x))f'(x)=-\frac{f''(x)}{\{f'(x)\}^2}$

$x=3$을 대입하면

$g''(f(3))f'(3)=-\frac{f''(3)}{\{f'(3)\}^2}$

$g''(3e)\times2e=-\frac{e}{(2e)^2}$

$\therefore g''(3e)=-\frac{1}{8e^2}$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{g'(3e+h)-g'(3e)}{h}=g''(3e)=-\frac{1}{8e^2}$

답 ②

05 도함수의 활용

140

$f(x)=\sqrt{3x^2-2}$라고 하면

$$f'(x)=\frac{6x}{2\sqrt{3x^2-2}}=\frac{3x}{\sqrt{3x^2-2}}$$

곡선 위의 점 $(-1, 1)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(-1)=\frac{-3}{\sqrt{3-2}}=-3$$

이므로 접선의 방정식은

$y-1=-3(x+1)\qquad \therefore y=-3x-2$

따라서 $a=-3$, $b=-2$이므로

$2a+b=2\times(-3)+(-2)=-8$

답 -8

참고

곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 접선의 기울기 $f'(a)$를 구한다.

(ii) $y-f(a)=f'(a)(x-a)$를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

141

$f(x)=4x+\sin x$라고 하면

$f'(x)=4+\cos x$

곡선 위의 점 $(2\pi, 8\pi)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2\pi)=4+\cos 2\pi=5$

이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{5}$이므로 수직인 직선의 방정식은

$$y-8\pi=-\frac{1}{5}(x-2\pi)\qquad \therefore y=-\frac{1}{5}x+\frac{42}{5}\pi$$

따라서 구하는 y절편은 $\frac{42}{5}\pi$이다.

답 $\frac{42}{5}\pi$

참고

접선에 수직인 직선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)\ (\text{단, } f'(a)\neq 0)$$

142

접근

직선을 평행이동하여도 기울기는 변하지 않음을 이용한다.

$f(x)=\ln\left(x+\frac{2}{e}\right)$라고 하면

$$f'(x)=\frac{1}{x+\frac{2}{e}}=\frac{e}{ex+2}$$

직선 $y=\frac{e}{2}x$를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=\frac{e}{2}x+k$이므로 접선의 기울기는 $\frac{e}{2}$이다.

접점의 좌표를 $\left(t, \ln\left(t+\frac{2}{e}\right)\right)$라고 하면

$$f'(t)=\frac{e}{et+2}=\frac{e}{2}$$

$et+2=2\qquad \therefore t=0$

즉, 접점의 좌표는 $(0, \ln 2-1)$이므로 접선의 방정식은

$y=\frac{e}{2}x+\ln 2-1$

$\therefore k=\ln 2-1$

답 ②

참고

기울기가 주어진 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 접점의 좌표를 $(t, f(t))$로 놓는다.

(ii) t에 대한 방정식 $f'(t)=m$을 만족시키는 실수 t의 값을 구한다.

(iii) (ii)에서 구한 t의 값을 이용하여 접선의 방정식
$y-f(t)=m(x-t)$를 구한다.

143

$f(x)=\frac{x}{x-1}$라고 하면

$$f'(x)=\frac{1\times(x-1)-x\times 1}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}$$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{t}{t-1}\right)$라고 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=-\frac{1}{(t-1)^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{t}{t-1}=-\frac{1}{(t-1)^2}(x-t)\qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 직선이 점 $(3, -3)$을 지나므로

$$-3-\frac{t}{t-1}=-\frac{1}{(t-1)^2}(3-t)$$

$3(t-1)^2+t(t-1)=3-t$

$4t^2-6t=0$, $2t(2t-3)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=\frac{3}{2}$

$t=0$을 ㉠에 대입하면

$y=-x\qquad \cdots\cdots ㉡$

$t=\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면

$$y-3=-4\left(x-\frac{3}{2}\right)\qquad \therefore y=-4x+9\qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡의 x절편은 0, ㉢의 x절편은 $\frac{9}{4}$이고 두 직선 ㉡, ㉢의 교점의 좌표가 $(3, -3)$이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}\times 3=\frac{27}{8}$$

답 $\frac{27}{8}$

다른 풀이

접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$y-(-3)=m(x-3)\qquad \therefore y=mx-3m-3\qquad \cdots\cdots ㉠$

$mx-3m-3=\frac{x}{x-1}$에서

$mx(x-1)-3m(x-1)-3(x-1)=x$

$mx^2-4(m+1)x+3m+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=\{-2(m+1)\}^2-m(3m+3)=0$

$m^2+5m+4=0$, $(m+1)(m+4)=0$

$\therefore m=-1$ 또는 $m=-4$

$m=-1$을 ㉠에 대입하면

$y=-x$ …… ㉡

$m=-4$를 ㉠에 대입하면

$y=-4x+9$ …… ㉢

㉡의 x절편은 0, ㉢의 x절편은 $\frac{9}{4}$이고 두 직선 ㉡, ㉢의 교점의 좌표가 $(3, -3)$이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}\times3=\frac{27}{8}$

참고

곡선 위에 있지 않은 한 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 위에 있지 않은 한 점 (x_1, y_1)에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 접점의 좌표를 $(t, f(t))$로 놓는다.

(ii) 곡선 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$를 구한다.

(iii) 점 (x_1, y_1)은 접선 위의 점이므로 (ii)에서 구한 접선의 방정식에 $x=x_1$, $y=y_1$을 대입하여 실수 t의 값을 구한다.

(iv) (iii)에서 구한 t의 값을 이용하여 접선의 방정식 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$를 구한다.

144

$f(x)=\sin^2 x$, $g(x)=a-2\cos x$라고 하면

$f'(x)=2\sin x\cos x$, $g'(x)=2\sin x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(t)=g(t)$에서 $\sin^2 t=a-2\cos t$

$\therefore a=\sin^2 t+2\cos t$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $2\sin t\cos t=2\sin t$

$2\sin t(1-\cos t)=0$ $\quad\therefore \sin t=0$ 또는 $\cos t=1$

$\therefore t=0\left(\because -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$

$t=0$을 ㉠에 대입하면

$a=0+2\times1=2$

답 ②

참고

두 곡선의 공통인 접선

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=a$인 점에서 공통인 접선을 가지면

(1) $x=a$인 점에서 두 곡선이 만난다.

➡ $f(a)=g(a)$

(2) $x=a$인 점에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같다.

➡ $f'(a)=g'(a)$

145

$g(1)=k$라고 하면 $f(k)=1$이므로

$e^{3k+1}=1$, $3k+1=0$ $\quad\therefore k=-\frac{1}{3}$

$g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'\left(-\frac{1}{3}\right)}$ …… ㉠

이때 $f'(x)=3e^{3x+1}$이므로

$f'\left(-\frac{1}{3}\right)=3$ $\quad\therefore g'(1)=\frac{1}{3}$ ($\because$ ㉠)

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(1, -\frac{1}{3}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}(x-1)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$

답 ③

다른 풀이

$y=e^{3x+1}$의 양변에 자연로그를 취하면 $\ln y=3x+1$

$\therefore x=\frac{1}{3}(\ln y-1)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{3}(\ln x-1)$

즉, $g(x)=\frac{1}{3}(\ln x-1)$이므로

$g'(x)=\frac{1}{3x}$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(1, -\frac{1}{3}\right)$에서의 접선의 기울기가 $g'(1)=\frac{1}{3}$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}(x-1)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$

풍쌤 비법

역함수의 그래프의 접선의 방정식

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=a$인 점에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $g(a)=b$라고 하면 $f(b)=a$임을 이용하여 b의 값을 구한다.

(ii) $g'(a)=\frac{1}{f'(g(a))}=\frac{1}{f'(b)}$임을 이용하여 접선의 기울기를 구한다.

(iii) (ii)에서 구한 $g'(a)$의 값을 이용하여 접선의 방정식 $y-b=g'(a)(x-a)$를 구한다.

146

$x=e^t+e^{-t}$에서 $\frac{dx}{dt}=e^t-e^{-t}$

$y=e^t-e^{-t}$에서 $\frac{dy}{dt}=e^t+e^{-t}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}$ (단, $t\neq0$)

$t=\ln3$일 때

$x=e^{\ln3}+e^{-\ln3}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

$y=e^{\ln3}-e^{-\ln3}=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\ln 3}+e^{-\ln 3}}{e^{\ln 3}-e^{-\ln 3}}=\frac{\frac{10}{3}}{\frac{8}{3}}=\frac{5}{4}$$

이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{8}{3}=\frac{5}{4}\left(x-\frac{10}{3}\right)$ $\quad\therefore y=\frac{5}{4}x-\frac{3}{2}$

이 직선이 점 $\left(a, \frac{9}{4}\right)$를 지나므로

$\frac{9}{4}=\frac{5}{4}a-\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}a=\frac{15}{4}$ $\quad\therefore a=3$

답 3

풍쌤 비법

매개변수로 나타낸 곡선의 접선의 방정식

매개변수 t로 나타낸 두 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$에서 $t=a$인 점에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $\frac{g'(t)}{f'(t)}$를 구한다.

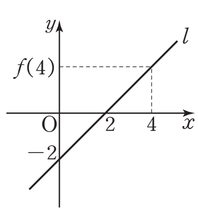
(ii) $f(a)$, $g(a)$, $\frac{g'(a)}{f'(a)}$의 값을 구한다.

(iii) (ii)에서 구한 값을 이용하여 접선의 방정식

$y-g(a)=\frac{g'(a)}{f'(a)}\{x-f(a)\}$를 구한다.

147

조건 (가)에서 직선 l이 제2사분면을 지나지 않고, 조건 (나)에서 직선 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형인 직각이등변삼각형의 넓이가 2이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 l의 x절편과 y절편은 각각 2, -2이다.



따라서 직선 l의 방정식은

$y=x-2$ 기울기는 1이고 y절편은 -2이다.

이때 점 $(4, f(4))$는 직선 $y=x-2$ 위의 점이므로 $\quad f(4)=2$

또한, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(4, f(4))$에서의 접선 l의 기울기가 1이므로 $\quad f'(4)=1$

$g(x)=xf(2x)$에서

$g'(x)=f(2x)+2xf'(2x)$

$g'(x)=(x)'f(2x)+x\{f'(2x)\times(2x)'\}$
$=f(2x)+x\{f'(2x)\times 2\}$
$=f(2x)+2xf'(2x)$

$\therefore g'(2)=f(4)+4f'(4)$
$=2+4\times 1=6$

답 ④

148

$f(x)=\frac{x-3}{x^2+7}$에서

$$f'(x)=\frac{1\times(x^2+7)-(x-3)\times 2x}{(x^2+7)^2}$$
$$=\frac{-x^2+6x+7}{(x^2+7)^2}$$
$$=\frac{-(x-7)(x+1)}{(x^2+7)^2}$$

$f'(x)>0$에서

$-(x-7)(x+1)>0$ ($\because x^2+7>0$)

$(x+1)(x-7)<0$

$\therefore -1<x<7$

따라서 구하는 모든 정수 x는 0, 1, 2, $\cdots$, 6의 7개이다.

답 ④

149

$f(x)=(1+\sin x)\cos x$에서

$f'(x)=\cos x\times\cos x+(1+\sin x)\times(-\sin x)$
$=\cos^2 x-\sin^2 x-\sin x$
$=(1-\sin^2 x)-\sin^2 x-\sin x$
$=-2\sin^2 x-\sin x+1$
$=-(\sin x+1)(2\sin x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=-1$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$0<x<\pi$에서 $\sin x=-1$을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않는다.

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ($\because 0<x<\pi$)

$0<x<\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

즉, 함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위는 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$이므로

$a=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{5}{6}\pi$

$\therefore a+2b=\frac{\pi}{6}+2\times\frac{5}{6}\pi=\frac{11}{6}\pi$

답 $\frac{11}{6}\pi$

150

$f(x)=e^{-x}(x^2+ax+3)$에서

$f'(x)=-e^{-x}(x^2+ax+3)+e^{-x}(2x+a)$
$=e^{-x}\{-x^2+(2-a)x+a-3\}$

$e^{-x}>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이 성립하려면

$-x^2+(2-a)x+a-3\le 0$이어야 한다.

이차방정식 $-x^2+(2-a)x+a-3=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(2-a)^2-4\times(-1)\times(a-3)\le 0$

$a^2-8\le 0$, $(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})\le 0$

$\therefore -2\sqrt{2}\le a\le 2\sqrt{2}$

따라서 구하는 a의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.

답 $2\sqrt{2}$

참고

이차부등식이 항상 성립할 조건

모든 실수 x에 대하여 이차부등식이 항상 성립할 조건은 다음과 같다. (단, $D=b^2-4ac$)

(1) $ax^2+bx+c>0$ ➡ $a>0$, $D<0$

(2) $ax^2+bx+c\ge 0$ ➡ $a>0$, $D\le 0$

(3) $ax^2+bx+c<0$ ➡ $a<0$, $D<0$

(4) $ax^2+bx+c\le 0$ ➡ $a<0$, $D\le 0$

151

$f(x)=x+\sqrt{12-x^2}$에서 $0<x\le 2\sqrt{3}$이고

$12-x^2\ge 0$에서
$x^2-12\le 0$
$(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})\le 0$
$-2\sqrt{3}\le x\le 2\sqrt{3}$
이때 $x>0$이므로
$0<x\le 2\sqrt{3}$

$$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{12-x^2}}=\frac{\sqrt{12-x^2}-x}{\sqrt{12-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서

$\sqrt{12-x^2}-x=0$, $\sqrt{12-x^2}=x$

양변을 제곱하면

$12-x^2=x^2$, $x^2=6$

$\therefore\ x=\sqrt{6}$ ($\because\ 0<x\le 2\sqrt{3}$)

$0<x\le 2\sqrt{3}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{6}$	$\cdots$	$2\sqrt{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	0	↘	

따라서 함수 $f(x)$가 증가하는 구간은 $(0, \sqrt{6})$이므로 이 구간에 속하는 정수 x는 1, 2이고 그 합은

$1+2=3$

답 ①

참고

함수의 정의역

(1) 유리함수: (분모)$\ne 0$

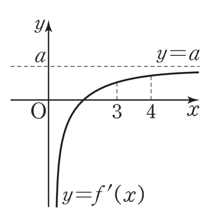
(2) 무리함수: (근호 안의 수)≥ 0

(3) 로그함수: (밑)>0, (밑)$\ne 1$, (진수)>0

152

$f(x)=ax-\ln x$에서 $\quad f'(x)=a-\dfrac{1}{x}$

함수 $f(x)$가 구간 $(3, 4)$에서 증가하려면 $3<x<4$일 때 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(3)=a-\dfrac{1}{3}\ge 0 \qquad \therefore\ a\ge \dfrac{1}{3}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\dfrac{1}{3}$이다.

답 ②

153

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{16-x}$에서 $0\le x\le 16$이고

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{16-x}}=\frac{\sqrt{16-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{16-x}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sqrt{16-x}-\sqrt{x}=0$

$\sqrt{16-x}=\sqrt{x}$

양변을 제곱하면

$16-x=x$, $2x=16 \qquad \therefore\ x=8$

$0\le x\le 16$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	8	$\cdots$	16
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	4	↗	$4\sqrt{2}$	↘	4

즉, 함수 $f(x)$는 $x=8$에서 극댓값 $4\sqrt{2}$를 가지므로

$a=8$, $b=4\sqrt{2}$

$\therefore\ ab=8\times 4\sqrt{2}=32\sqrt{2}$

답 $32\sqrt{2}$

154

$f(x)=3x(\ln x)^2$에서 $x>0$이고

로그의 진수 조건

$$f'(x)=3(\ln x)^2+3x\times 2\ln x\times\frac{1}{x}$$
$$=3\ln x(\ln x+2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=-2$ 또는 $\ln x=0$

$\therefore\ x=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$ 또는 $x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$\frac{12}{e^2}$	↘	0	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\dfrac{12}{e^2}$, 극솟값은 $f(1)=0$이므로 극댓값과 극솟값의 합은 $\dfrac{12}{e^2}$이다.

답 ⑤

155

함수 $f(x)$가 $x=-4$에서 극댓값 $\dfrac{8}{e^5}$을 가지므로

$f(-4)=\dfrac{8}{e^5}$

$(16+k)e^{-5}=\dfrac{16+k}{e^5}=\dfrac{8}{e^5}$에서

$16+k=8 \qquad \therefore\ k=-8$

$f(x)=(x^2-8)e^{x-1}$에서

$f'(x)=2xe^{x-1}+(x^2-8)e^{x-1}=(x^2+2x-8)e^{x-1}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x^2+2x-8=0$ ($\because\ e^{x-1}>0$)

$(x+4)(x-2)=0 \qquad \therefore\ x=-4$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{8}{e^5}$	↘	$-4e$	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(2)=-4e$이다.

답 ②

156

$x=2\theta-\sin\theta$에서 $\quad \dfrac{dx}{d\theta}=2-\cos\theta$

$y=6-\cos\theta$에서 $\quad \dfrac{dy}{d\theta}=\sin\theta$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\sin\theta}{2-\cos\theta}$$

$\frac{dy}{dx}=0$에서 $\sin\theta=0$ $\quad\therefore \theta=\pi$ $(\because 0<\theta<2\pi)$

$0<\theta<\pi$일 때 $\frac{dy}{dx}>0$, $\pi<\theta<2\pi$일 때 $\frac{dy}{dx}<0$이므로 주어진 함수는 $\theta=\pi$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 구하는 극댓값은

$y=6-\cos\pi=6-(-1)=7$

답 ⑤

참고

$-1\le\cos\theta\le1$이므로 $2-\cos\theta>0$

따라서 $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta}{2-\cos\theta}$의 부호는 $\sin\theta$의 부호와 같다.

157

$f(x)=e^x+ae^{-x}+b$에서

$f'(x)=e^x-ae^{-x}$

함수 $f(x)$가 $x=\ln2$에서 극솟값 5를 가지므로

$f'(\ln2)=0$에서 $2-\frac{a}{2}=0$ $\quad\therefore a=4$

$f(x)=e^x+4e^{-x}+b$이므로

$f(\ln2)=5$에서 $2+2+b=5$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore a-b=4-1=3$

답 ③

참고

미분가능한 함수 $f(x)$가

(1) $x=a$에서 극값을 가지면

$f'(a)=0$

(2) $x=a$에서 극값 b를 가지면

$f(a)=b, f'(a)=0$

158

$f(x)=\cos^3 2x$에서

$f'(x)=3\cos^2 2x\times(-\sin2x)\times2=-6\sin2x\cos^2 2x$

$f'(x)=0$에서 $\sin2x=0$ 또는 $\cos2x=0$

$-\frac{\pi}{8}<x<\frac{5}{8}\pi$에서 $-\frac{\pi}{4}<2x<\frac{5}{4}\pi$이므로

$\sin2x=0$일 때, $2x=0$ 또는 $2x=\pi$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

$\cos2x=0$일 때, $2x=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{\pi}{4}$

$-\frac{\pi}{8}<x<\frac{5}{8}\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\left(-\frac{\pi}{8}\right)$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\left(\frac{5}{8}\pi\right)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	1	↘		↘	-1	↗	

따라서 $-\frac{\pi}{8}<x<\frac{5}{8}\pi$에서 함수 $f(x)$는 극댓값 $f(0)=1$, 극솟값 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$을 가지므로 2개의 극값을 갖는다.

답 ②

159

접근

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가짐을 이용한다.

$f(x)=\frac{5x+k}{x^2-1}$에서

$f'(x)=\frac{5(x^2-1)-(5x+k)\times2x}{(x^2-1)^2}$

$=\frac{-5x^2-2kx-5}{(x^2-1)^2}$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $-5x^2-2kx-5=0$이 $x\neq\pm1$인 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $k\neq\pm5$

$f'(x)$에서 $x^2-1\neq0$ $\quad\therefore x\neq\pm1$

이차방정식 $-5x^2-2kx-5=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(-5)\times(-5)>0$

$k^2-25>0$, $(k+5)(k-5)>0$

$\therefore k<-5$ 또는 $k>5$

답 ⑤

풍쌤 비법

극값을 가질 조건－판별식 이용

$f'(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$에서 $h(x)$가 이차식이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x)>0$일 때

(1) $f(x)$가 극값을 갖는다.

➡ $h(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $f(x)$가 극값을 갖지 않는다.

➡ $h(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다.

160

$f(x)=x^2+4\sin x$라고 하면

$f'(x)=2x+4\cos x$, $f''(x)=2-4\sin x$

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로

$2-4\sin x<0$ $\quad\therefore \sin x>\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$ $(\because 0<x<2\pi)$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$

답 $\frac{2}{3}\pi$

161

$f(x)=(2+ax^2)e^{-x}$이라고 하면

$f'(x)=2axe^{-x}-(2+ax^2)e^{-x}$

$=(-ax^2+2ax-2)e^{-x}$

$f''(x)=(-2ax+2a)e^{-x}-(-ax^2+2ax-2)e^{-x}$

$=(ax^2-4ax+2a+2)e^{-x}$

곡선 $y=f(x)$가 실수 전체의 구간에서 아래로 볼록하려면 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)\ge0$이어야 하므로

$ax^2-4ax+2a+2\geq 0$ ($\because$ $e^{-x}>0$) …… ㉠

이 항상 성립해야 한다.

(i) $a=0$일 때, $2>0$이므로 부등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $a\neq 0$일 때, 부등식 ㉠이 성립해야 하므로 $a>0$

이차방정식 $ax^2-4ax+2a+2=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-a(2a+2)\leq 0$

$2a^2-2a\leq 0$, $2a(a-1)\leq 0$

$\therefore$ $0\leq a\leq 1$

그런데 $a>0$이므로 $0<a\leq 1$

(i), (ii)에서 $0\leq a\leq 1$이므로 a의 최댓값은 1이다.

답 1

162

$f(x)=\ln(x^2+k)$라고 하면

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+k}$

$f''(x)=\frac{2(x^2+k)-2x\times 2x}{(x^2+k)^2}$

$=\frac{-2(x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})}{(x^2+k)^2}$

$f''(x)=0$에서 $-2(x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})=0$ ($\because$ $(x^2+k)^2>0$)

$\therefore$ $x=-\sqrt{k}$ 또는 $x=\sqrt{k}$

이때 $x=-\sqrt{k}$ 또는 $x=\sqrt{k}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로

변곡점은 $(-\sqrt{k}, \ln 2k)$, $(\sqrt{k}, \ln 2k)$이다.

선분 PQ의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{k}-(-\sqrt{k})=2\sqrt{2}$, $2\sqrt{k}=2\sqrt{2}$

$\therefore$ $k=2$

답 ②

풍쌤 비법

변곡점의 판정

함수 $f(x)$에서

(i) $f''(a)=0$

(ii) $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀐다.

➡ 점 $(a, f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

163

$f(x)=-2x^2+ax+b\ln x$에서 $x>0$이고

로그의 진수 조건

$f'(x)=-4x+a+\frac{b}{x}$, $f''(x)=-4-\frac{b}{x^2}$

$x=1$에서 극댓값을 가지므로

$f'(1)=0$에서 $-4+a+b=0$ …… ㉠

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이므로

$f''\left(\frac{1}{2}\right)=0$에서 $-4-4b=0$ $\therefore$ $b=-1$

$b=-1$을 ㉠에 대입하면 $a=5$

$\therefore$ $f(x)=-2x^2+5x-\ln x$

$f'(x)=-4x+5-\frac{1}{x}$

$=\frac{-4x^2+5x-1}{x}$

$=\frac{-(4x-1)(x-1)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	$\frac{9}{8}+2\ln 2$	↗	3	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{4}$일 때 극솟값

$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{8}+2\ln 2$를 갖는다.

답 $\frac{9}{8}+2\ln 2$

풍쌤 비법

변곡점을 이용한 미정계수 구하기

함수 $f(x)$에 대하여

(1) $x=a$에서 극값 b를 갖는다.

➡ $f(a)=b$, $f'(a)=0$

(2) 점 (a, b)는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

➡ $f(a)=b$, $f''(a)=0$

164

$f(x)=3\sin kx+4x^3$에서

$f'(x)=3k\cos kx+12x^2$

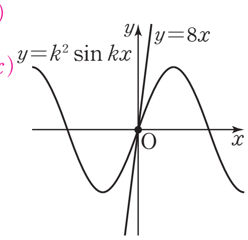
$f''(x)=-3k^2\sin kx+24x$

함수 $f(x)=3\sin kx+4x^3$의 그래프가 오직 하나의 변곡점을 가지려면 $f''(x)=0$의 근이 오직 하나이어야 한다.

$-3k^2\sin kx+24x=0$에서 $k^2\sin kx=8x$

두 함수 $y=k^2\sin kx$, $y=8x$의 그래프는 다음 그림과 같다.

방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표이므로 주어진 방정식 $k^2\sin kx=8x$의 해를 구하기 위해 오른쪽과 같이 두 곡선을 그려 본다.



두 함수의 그래프의 교점의 x좌표가 1개이려면 곡선 $y=k^2\sin kx$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기가 8보다 작거나 같으면 된다.

$h(x)=k^2\sin kx$라고 하면 $h'(x)=k^3\cos kx$이므로 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기는 $h'(0)=k^3$이다.

즉, $k^3\leq 8$에서 $k^3-8\leq 0$

$(k-2)(k^2+2k+4)\leq 0$

$\therefore$ $k\leq 2$ ($\because$ $k^2+2k+4>0$)

따라서 k의 최댓값은 2이다.

답 2

165

$f(x)=x\sqrt{1-x^2}$에서 $-1\le x\le 1$이고

$1-x^2\ge 0$에서 $(x+1)(x-1)\le 0$ $\therefore -1\le x\le 1$

$f'(x)=\sqrt{1-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $1-2x^2=0$, $(1+\sqrt{2}x)(1-\sqrt{2}x)=0$

$\therefore x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

즉, 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$, 최솟값은

$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$이므로

$M=\dfrac{1}{2}$, $m=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore Mm=\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$

답 $-\dfrac{1}{4}$

166

$f(x)=x\ln x-10x+e^a$에서 $x>0$이고

로그의 진수 조건

$f'(x)=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}-10=\ln x-9$

$f'(x)=0$에서 $\ln x-9=0$ $\therefore x=e^9$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e^9	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-e^9+e^a$	↗

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(e^9)=-e^9+e^a$이므로

$-e^9+e^a=0$ $\therefore a=9$

$f(x)=x\ln x-10x+e^9$이므로

$f(1)=-10+e^9$

답 $-10+e^9$

167

$f(x)=\sin^3 x-2\cos^2 x+6$

$=\sin^3 x-2(1-\sin^2 x)+6$

$=\sin^3 x+2\sin^2 x+4$

이때 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$

주어진 함수 $f(x)$를 $g(t)$라고 하면

$g(t)=t^3+2t^2+4$

$g'(t)=3t^2+4t=t(3t+4)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ ($\because -1\le t\le 1$)

$-1\le t\le 1$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	5	↘	4	↗	7

따라서 함수 $g(t)$의 최댓값은 $g(1)=7$, 최솟값은 $g(0)=4$이므로 구하는 합은

$7+4=11$

답 11

풍쌤 비법

치환을 이용한 함수의 최대, 최소

함수 $f(x)$에 공통부분이 있을 때에는 다음과 같은 순서로 최대, 최소를 구한다.

(i) 공통부분을 t로 치환하여 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타낸다.

(ii) t의 값의 범위를 구한다.

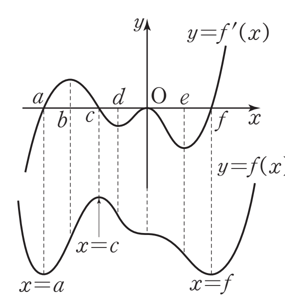
(iii) 함수 $g(t)$의 최댓값, 최솟값을 구한다.

168

접근

함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 파악한다.

주어진 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 변화에 따른 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



ㄱ은 옳다.

함수 $f(x)$가 극값을 갖는 점은 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f(x)$의 부호가 바뀌는 점이다.

따라서 함수 $f'(x)$는 $x=c$에서 극대, $x=a$, $x=f$에서 극소이므로 극값을 갖는 점은 3개이다.

ㄴ도 옳다.

곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 $y=f'(x)$의 그래프에서 증가와 감소가 바뀌는 점이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 $x=b, d, 0, e$일 때의 4개이다.

ㄷ도 옳다.

구간 $[a, f]$에서 함수 $y=f(x)$는 $x=c$에서 유일한 극대이므로 최대가 됨을 알 수 있다. 따라서 구간 $[a, f]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(c)$이다.

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

풍쌤 비법

도함수를 이용한 그래프의 해석

(1) 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 부호

➡ 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기의 부호와 같다.

(2) 함수 $f'(x)$의 도함수 $f''(x)$의 부호

➡ 함수 $y=f'(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기의 부호와 같다.

169

$f(x)=2e^{-x}$이라고 하면

$f'(x)=-2e^{-x}$

곡선 $y=2e^{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2e^{-t})$에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-2e^{-t}$이므로 접선의 방정식은

$y-2e^{-t}=-2e^{-t}(x-t)$

$\therefore\ y=-2e^{-t}x+2te^{-t}+2e^{-t}$

$\mathrm{A}(0,\ 2e^{-t})$, $\mathrm{B}(0,\ 2te^{-t}+2e^{-t})$이므로 삼각형 APB의 넓이를

점 P의 y좌표 접선의 y절편

$S(t)$라고 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{AB}}$

$=\frac{1}{2}\times t\times(2te^{-t}+2e^{-t}-2e^{-t})$

$=t^2e^{-t}$

$S'(t)=2te^{-t}-t^2e^{-t}=te^{-t}(2-t)$

$S'(t)=0$에서 $t=2$ ($\because\ t>0$)

$t>0$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $S(t)$는 $t=2$일 때 극대이면서 최대이다.

답 ④

풍쌤 비법

함수의 최대, 최소의 활용

길이, 넓이, 부피 등의 최댓값 또는 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 적당한 변수를 미지수 x로 놓고 식을 세운다. 이때 변수의 제한 조건이 있으면 변수의 범위를 구한다.

(ii) 구한 식의 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

170

$\ln x-x+9-a=0$에서

$\ln x-x+9=a$

주어진 방정식의 해가 존재하려면 곡선 $y=\ln x-x+9$와 직선 $y=a$가 서로 만나야 한다.

$f(x)=\ln x-x+9$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because\ x>0$) 로그의 진수 조건

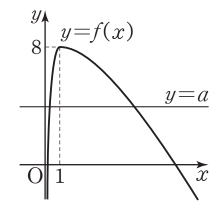
$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	8	↘

이때

$\lim_{x\to 0+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$가 만나기 위한 a의 값의 범위는 $a\le 8$이므로 자연수 a는 $1,\ 2,\ \cdots,\ 8$의 8개이다.

답 ④

171

방정식 $e^x+e^{-x}=k$가 오직 한 개의 실근을 가지려면 곡선 $y=e^x+e^{-x}$과 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 한다.

$f(x)=e^x+e^{-x}$이라고 하면

$f'(x)=e^x-e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $e^x-e^{-x}=0$

$\therefore\ x=0$

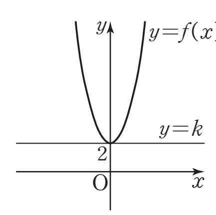
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗

이때

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나기 위한 k의 값은 2이다.

답 ④

172

$k(x^3+1)=x$에서 $x\ne-1$이므로

$x=-1$이면 (좌변)$=0$, (우변)$=-1$ 이므로 (좌변)$\ne$(우변)

$\frac{x}{x^3+1}=k$ …… ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=\frac{x}{x^3+1}$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=\frac{x}{x^3+1}$라고 하면

$f'(x)=\frac{1\times(x^3+1)-x\times 3x^2}{(x^3+1)^2}=\frac{-2x^3+1}{(x^3+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $-2x^3+1=0$ ($\because\ x\ne-1$)

$x^3=\frac{1}{2}$ $\therefore\ x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

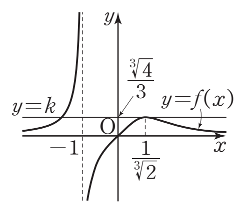
x	$\cdots$	(-1)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	$\searrow$

이때

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$,

$\lim_{x\to-1-} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-1+} f(x)=-\infty$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k의 값은 $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$이다.

답 ①

173

$f(x)=3x-e^x$이라고 하면

$f'(x)=3-e^x$

$f'(x)=0$에서 $e^x=3$ $\therefore x=\ln 3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	$\cdots$	$\ln 3$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$3\ln 3-3$	$\searrow$

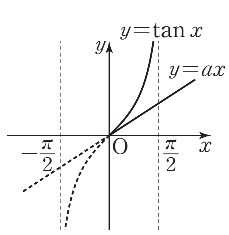
즉, 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(\ln 3)=3\ln 3-3$이므로 부등식 $f(x)\le k$가 성립하려면 $k\ge 3\ln 3-3$이어야 한다.

따라서 실수 k의 최솟값은 $3\ln 3-3$이다.

답 ⑤

174

$0<x<\frac{\pi}{2}$일 때, 부등식 $\tan x>ax$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\tan x$가 직선 $y=ax$보다 위쪽에 있어야 한다.



$f(x)=\tan x$라고 하면

$f'(x)=\sec^2 x$

$y=\tan x$의 그래프 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=1$이므로 접선의 방정식은

$y=x$

따라서 $0<x<\frac{\pi}{2}$일 때, 주어진 부등식이 성립하려면 $a\le 1$이다.

답 $a\le 1$

참고

구간 (a, b)에서 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립하려면 구간 (a, b)에서 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있어야 한다.

175

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라고 하면

$v(t)=x'(t)=\pi+2\pi\sin\pi t$

$a(t)=v'(t)=2\pi^2\cos\pi t$

$v(1)=\pi+2\pi\sin\pi=\pi$,

$a(1)=2\pi^2\cos\pi=-2\pi^2$

이므로 $t=1$에서의 속도와 가속도의 곱은

$\pi\times(-2\pi^2)=-2\pi^3$

따라서 $p=-2$, $q=3$이므로

$p^2q=(-2)^2\times 3=12$

답 12

176

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라고 하면

$v(t)=x'(t)=at+\frac{b}{t}$

$a(t)=v'(t)=a-\frac{b}{t^2}$

$t=2$에서의 속도가 $\frac{7}{2}$이므로

$v(2)=2a+\frac{b}{2}=\frac{7}{2}$ $\therefore 4a+b=7$ ⋯⋯ ㉠

$t=2$에서의 가속도가 $\frac{9}{4}$이므로

$a(2)=a-\frac{b}{4}=\frac{9}{4}$ $\therefore 4a-b=9$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-1$

$\therefore a+b=2+(-1)=1$

답 1

177

$x=\frac{1}{4}e^{2(t-3)}-at$, $y=be^{t-3}$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}e^{2(t-3)}-a$, $\frac{dy}{dt}=be^{t-3}$

이므로 점 P의 속도는 $\left(\frac{1}{2}e^{2(t-3)}-a,\ be^{t-3}\right)$

시각 $t=3$에서의 점 P의 속도는 $\left(\frac{1}{2}-a,\ b\right)$이므로

$\frac{1}{2}-a=\frac{3}{2}$, $b=2$ $\therefore a=-1$, $b=2$

$\therefore a+b=-1+2=1$

답 1

178

$x=t^2-4t+3$, $y=-t^2+5t+1$에서

$\frac{dx}{dt}=2t-4$, $\frac{dy}{dt}=-2t+5$

이므로 점 P의 속도는 $(2t-4,\ -2t+5)$

점 P의 속력은

$\sqrt{(2t-4)^2+(-2t+5)^2}=\sqrt{8t^2-36t+41}=\sqrt{8\left(t-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{1}{2}}$

따라서 점 P의 속력은 $t=\frac{9}{4}$일 때 최소이고 최솟값은 $\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

답 ③

179

$x=at^2-a\sin t$, $y=t-a\cos t$에서

$\frac{dx}{dt}=2at-a\cos t$, $\frac{dy}{dt}=1+a\sin t$

$\frac{d^2x}{dt^2}=2a+a\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=a\cos t$

이므로 점 P의 가속도는 $(2a+a\sin t,\ a\cos t)$

$t=\pi$에서의 점 P의 가속도는 $(2a,\ -a)$이고 가속도의 크기는 $\sqrt{10}$ 이므로

$\sqrt{(2a)^2+(-a)^2}=\sqrt{5}a=\sqrt{10}$ ($\because$ $a>0$)

$\therefore$ $a=\sqrt{2}$

답 $\sqrt{2}$

180

$f(x)=5xe^x$이라고 하면

$f'(x)=5e^x+5xe^x=5e^x(1+x)$

접점의 좌표를 $(t,\ 5te^t)$이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=5e^t(1+t)$이므로 접선의 방정식은

$y-5te^t=5e^t(1+t)(x-t)$

이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$-5te^t=5e^t(1+t)(1-t)$, $5e^t(t^2-t-1)=0$

$\therefore$ $t^2-t-1=0$ ($\because$ $e^t>0$)

이 이차방정식의 두 근을 α, β라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$

두 접선의 기울기는 각각 $5e^\alpha(1+\alpha)$, $5e^\beta(1+\beta)$이므로 두 접선의 기울기의 곱은

$$\begin{aligned}5e^\alpha(1+\alpha)\times5e^\beta(1+\beta)&=25e^{\alpha+\beta}(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)\\&=25e^1(-1+1+1)=25e\end{aligned}$$

답 ③

181

$f(x)=(2x+k)e^{-x}$이라고 하면

$f'(x)=2e^{-x}+(2x+k)\times(-e^{-x})=-e^{-x}(2x+k-2)$

접점의 좌표를 $(t,\ (2t+k)e^{-t})$이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-e^{-t}(2t+k-2)$이므로 접선의 방정식은

$y-(2t+k)e^{-t}=-e^{-t}(2t+k-2)(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-(2t+k)e^{-t}=-e^{-t}(2t+k-2)\times(-t)$

$e^{-t}(2t^2+kt+k)=0$

$\therefore$ $2t^2+kt+k=0$ ($\because$ $e^{-t}>0$) …… ㉠

원점에서 곡선 $y=(2x+k)e^{-x}$에 적어도 한 개의 접선을 그으려면 방정식 ㉠이 실근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$D=k^2-4\times2\times k\geq0$

$k^2-8k\geq0$, $k(k-8)\geq0$

$\therefore$ $k\leq0$ 또는 $k\geq8$

따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 8이다.

답 ③

182

$f(x)=\sin x+\cos x$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=\cos x-\sin x\\&=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)\\&=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi\sin x+\sin\frac{3}{4}\pi\cos x\right)\\&=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)\end{aligned}$$

접점의 좌표를 $(t,\ \sin t+\cos t)$라고 하면 접선의 기울기가 $\tan\frac{\pi}{4}=1$이므로

$f'(t)=\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{3}{4}\pi\right)=1$

$\sin\left(t+\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0<t<2\pi$에서 $\frac{3}{4}\pi<t+\frac{3}{4}\pi<\frac{11}{4}\pi$이므로

$t+\frac{3}{4}\pi=\frac{9}{4}\pi$ $\quad\therefore$ $t=\frac{3}{2}\pi$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\frac{3}{2}\pi,\ \sin\frac{3}{2}\pi+\cos\frac{3}{2}\pi\right)$, 즉 $\left(\frac{3}{2}\pi,\ -1\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-1)=x-\frac{3}{2}\pi$ $\quad\therefore$ $y=x-\frac{3}{2}\pi-1$

즉, x절편은 $\frac{3}{2}\pi+1$이다.

답 ④

183

점 $A_n(x_n,\ y_n)$이 곡선 $xy=7$ 위의 점이므로

$x_ny_n=7$ $\quad\therefore$ $y_n=\frac{7}{x_n}$

$xy=7$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$y+x\frac{dy}{dx}=0$ $\quad\therefore$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$ (단, $x\neq0$)

점 $A_n\left(x_n,\ \frac{7}{x_n}\right)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{7}{x_n}}{x_n}=-\frac{7}{{x_n}^2}$

이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{7}{x_n}=-\frac{7}{{x_n}^2}(x-x_n)$ $\quad\therefore$ $y=-\frac{7}{{x_n}^2}x+\frac{14}{x_n}$

이 직선의 x절편은 $2x_n$이므로 $\quad B_{n+1}(2x_n,\ 0)$

즉, $x_{n+1}=2x_n$이므로 $\quad y_{n+1}=\frac{7}{x_{n+1}}=\frac{7}{2x_n}=\frac{1}{2}y_n$

따라서 수열 $\{y_n\}$은 첫째항이 7이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}y_n=\frac{7}{1-\frac{1}{2}}=14$

답 ④

풍쌤 비법

음함수로 나타낸 곡선의 접선의 방정식

곡선 $f(x, y)=0$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(ⅰ) 음함수의 미분법을 이용하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

(ⅱ) $\dfrac{dy}{dx}$에 $x=a$, $y=b$를 대입하여 접선의 기울기 m을 구한다.

(ⅲ) (ⅱ)에서 구한 m의 값을 이용하여 접선의 방정식 $y-b=m(x-a)$를 구한다.

184

$g(x)=f(x^2-3x)$에 $x=4$를 대입하면

$g(4)=f(4)=4$

$g(x)=f(x^2-3x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f'(x^2-3x)\times(2x-3)$

위의 식에 $x=4$를 대입하면

$g'(4)=5f'(4)=5\times4=20$

곡선 $y=g(x)$가 직선 $y=h(x)$와 점 $(4, g(4))$에서 접하므로 직선 $y=h(x)$는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(4, g(4))$에서의 접선이다.

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(4, g(4))$에서의 접선의 방정식은

$y-g(4)=g'(4)(x-4)$

$y-4=20(x-4)$

$\therefore y=20x-76$

따라서 $h(x)=20x-76$이므로

$h(5)=20\times5-76=24$

답 ②

185

$x=t+2$에서 $\dfrac{dx}{dt}=1$

$y=-t^{-2}+\dfrac{5}{4}$에서 $\dfrac{dy}{dt}=2t^{-3}=\dfrac{2}{t^3}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2}{t^3}$ (단, $t\neq0$)

$g(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$에서

$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$

함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 $x=0$인 점에서의 접선의 기울기는 $g'(0)=f'(f(0))f'(0)$이므로 접선의 방정식은

$y=g'(0)x+g(0)=f'(f(0))f'(0)x+f(f(0))$ ⋯⋯ ㉠

$x=0$일 때 $t=-2$이므로

$f(0)=[y]_{t=-2}=-(-2)^{-2}+\dfrac{5}{4}=1$

$f'(0)=\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{t=-2}=\dfrac{2}{(-2)^3}=-\dfrac{1}{4}$

$x=1$일 때, $t=-1$이므로

$f(1)=[y]_{t=-1}=-(-1)^{-2}+\dfrac{5}{4}=\dfrac{1}{4}$

$f'(1)=\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{t=-1}=\dfrac{2}{(-1)^3}=-2$

㉠에서

$y=f'(f(0))f'(0)x+f(f(0))$

$=f'(1)\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)\times x+f(1)$

$=-2\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)\times x+\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{4}$이므로

$2a+4b=2\times\dfrac{1}{2}+4\times\dfrac{1}{4}=2$

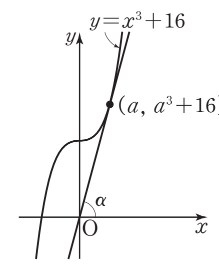
답 2

186

$f(x)=x^3+16$이라고 하면

$f'(x)=3x^2$

원점에서 곡선 $y=x^3+16$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (a, a^3+16)이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2$이므로 접선의 방정식은



$y-(a^3+16)=3a^2(x-a)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-(a^3+16)=3a^2\times(-a)$, $a^3=8$

$\therefore a=2$

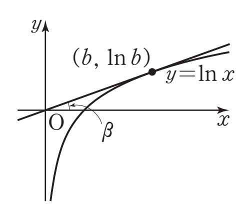
접점의 좌표는 $(2, 24)$이므로 접선과 x축의 양의 방향이 이루는 예각의 크기를 α라고 하면

$\tan\alpha=12$

한편 $g(x)=\ln x$라고 하면

$g'(x)=\dfrac{1}{x}$

원점에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선의 접점을 $(b, \ln b)$라고 하면 접선의 기울기는 $g'(b)=\dfrac{1}{b}$이므로 접선의 방정식은



$y-\ln b=\dfrac{1}{b}(x-b)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-\ln b=\dfrac{1}{b}\times(-b)$, $\ln b=1$

$\therefore b=e$

접점의 좌표는 $(e, 1)$이므로 접선과 x축의 양의 방향이 이루는 예각의 크기를 β라고 하면

$\tan\beta=\dfrac{1}{e}$

$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

$=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{12-\frac{1}{e}}{1+12\times\frac{1}{e}}=\dfrac{12e-1}{e+12}$

답 ④

187

$x=-2\sin\theta$에서 $\dfrac{dx}{d\theta}=-2\cos\theta$

$y=4\cos\theta$에서 $\dfrac{dy}{d\theta}=-4\sin\theta$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{-4\sin\theta}{-2\cos\theta}=2\tan\theta$ (단, $\cos\theta\neq0$)

점 $\mathrm{P}(-2\sin\theta, 4\cos\theta)$에서의 접선의 방정식은

$y-4\cos\theta=2\tan\theta\{x-(-2\sin\theta)\}$

$\therefore y=2\tan\theta x+4\tan\theta\sin\theta+4\cos\theta$

$=2\tan\theta x+4\times\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta}$

$=2\tan\theta x+\dfrac{4}{\cos\theta}$

$=2\tan\theta x+4\sec\theta$

$\mathrm{A}(-2\csc\theta, 0)$, $\mathrm{B}(0, 4\sec\theta)$$(\sin\theta\neq0)$이므로

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\times|2\csc\theta|\times|4\sec\theta|$

$=\dfrac{4}{|\sin\theta\cos\theta|}$

$=\dfrac{8}{|\sin2\theta|}\geq8$

$0<|\sin2\theta|\leq1$이므로 $\dfrac{1}{|\sin2\theta|}\geq1$ $\therefore \dfrac{8}{|\sin2\theta|}\geq8$

따라서 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은 8이다.

답 ②

188

접근

점 $\mathrm{P}(a, b)$에서의 접선과 직선 AP가 수직임을 이용하여 직선 AP의 방정식을 구하고 직선 AP의 y절편을 구한다.

곡선 $y=\cos6x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$에서의 접선과 직선 AP는 서로 수직이다.

$f(x)=\cos6x$라고 하면

$f'(x)=-6\sin6x$

곡선 $y=\cos6x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, \cos6a)$에서의 접선의 기울기가 $-6\sin6a$이므로 직선 AP의 기울기는 $\dfrac{1}{6\sin6a}$이다.

직선 AP의 방정식은

$y-\cos6a=\dfrac{1}{6\sin6a}(x-a)$

$\therefore y=\dfrac{1}{6\sin6a}x-\dfrac{a}{6\sin6a}+\cos6a$

따라서 $f(a)=-\dfrac{a}{6\sin6a}+\cos6a$이므로

$\lim\limits_{a\to0+}f(a)=\lim\limits_{a\to0+}\left(-\dfrac{a}{6\sin6a}+\cos6a\right)$

$=\lim\limits_{a\to0+}\left(-\dfrac{1}{36}\times\dfrac{6a}{\sin6a}+\cos6a\right)$

$=-\dfrac{1}{36}\times1+1=\dfrac{35}{36}$

답 ⑤

189

$f(x)=a\ln x+x^2-8x$에서

$f'(x)=\dfrac{a}{x}+2x-8=\dfrac{2x^2-8x+a}{x}$

구간 $(0, \infty)$에서 증가하려면 $f'(x)\geq0$이어야 하므로

$x>0$에서 $2x^2-8x+a\geq0$이어야 한다.

$g(x)=2x^2-8x+a$로 놓으면

$g(x)=2(x-2)^2-8+a$

함수 $g(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 $-8+a$를 갖는다.

$x>0$에서 $g(x)\geq0$이 성립하려면

$g(2)=-8+a\geq0$ $\quad\therefore a\geq8$

따라서 실수 a의 최솟값은 8이다.

답 ④

190

$f(x)=e^{-x}(a+\cos x)$에서

$f'(x)=-e^{-x}(a+\cos x)+e^{-x}\times(-\sin x)$

$=-e^{-x}(a+\cos x+\sin x)$

$e^{-x}>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq0$이 성립하려면

$a+\cos x+\sin x\geq0$이어야 한다.

즉, $-\sin x-\cos x\leq a$

$-\sin x-\cos x=-(\sin x+\cos x)=-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

이고 $-1\leq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leq1$이므로

$-\sqrt{2}\leq-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leq\sqrt{2}$

$\therefore -\sqrt{2}\leq-\sin x-\cos x\leq\sqrt{2}$

$\therefore a\geq\sqrt{2}$

답 ④

191

$f(x)=ax-9+\ln(x^2+4)$에서

$f'(x)=a+\dfrac{2x}{x^2+4}=a+\dfrac{2}{x+\frac{4}{x}}$

이때 $x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\dfrac{4}{x}\geq2\sqrt{x\times\dfrac{4}{x}}=4$

$\left(\text{단, 등호는 } x=\dfrac{4}{x}\text{, 즉 } x=2\text{일 때 성립한다.}\right)$

즉, $f'(x)=a+\dfrac{2}{x+\frac{4}{x}}\leq a+\dfrac{2}{4}=a+\dfrac{1}{2}$

함수 $f(x)$가 양의 실수 전체에서 감소하기 위해서는 $f'(x)\leq0$이어야 하므로

$(f'(x)\text{의 최댓값})\leq0$

$a+\dfrac{1}{2}\leq0$ $\quad\therefore a\leq-\dfrac{1}{2}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $-\dfrac{1}{2}$이다.

답 ②

192

$f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$에서

$f'(x)=\dfrac{1\times(x^2+3)-(x+1)\times 2x}{(x^2+3)^2}$

$=\dfrac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}$

$=\dfrac{-(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$ ($\because x^2+3>0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{6}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

즉, $-3<x<1$일 때 $f'(x)>0$이고 $-\dfrac{1}{6}<f(x)<\dfrac{1}{2}$이므로

$f'(f(x))>0$이다.

$g(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$에서

$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$

이때 $f'(x)$와 $g'(x)$의 부호는 동일하므로 함수 $g(x)$가 증가하는 구간은 $-3<x<1$이다.

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=1$이므로

$\alpha\beta=-3\times 1=-3$

답 -3

193

$f(x)=\dfrac{e^{ax}}{x+2}$에서

$f'(x)=\dfrac{ae^{ax}(x+2)-e^{ax}\times 1}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{e^{ax}(ax+2a-1)}{(x+2)^2}$

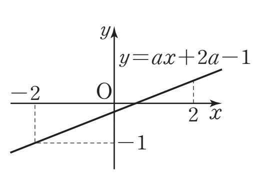
구간 $(2, \infty)$에 증가하려면 $f'(x)\ge 0$이어야 하고 $e^{ax}>0$이므로 $ax+2a-1\ge 0$이어야 한다.

$g(x)=ax+2a-1$로 놓으면

$y=ax+2a-1$에서 $a(x+2)-(y+1)=0$

$\therefore x=-2,\ y=-1$

직선 $y=g(x)$는 a의 값에 관계없이 점 $(-2, -1)$을 지나므로 $x>2$일 때 $g(x)\ge 0$이려면 $a>0$, $g(2)\ge 0$이어야 한다.



$g(2)\ge 0$에서 $4a-1\ge 0$ $\quad\therefore a\ge\dfrac{1}{4}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\dfrac{1}{4}$이다.

답 ②

참고

정점을 지나는 직선의 방정식

직선 $m(x-a)+(y-b)=0$은 m의 값에 관계없이 항상 점 (a, b)를 지난다.

194

ㄱ, ㄴ, ㄷ의 함수는 모두 닫힌구간 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 연속이고 열린구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_1)$인 x_1이 구간 (a, b)에 존재하고,

$\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(x_2)$인 x_2가 구간 (b, c)에 존재한다.

따라서 주어진 조건으로부터 $0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$인 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1)<f'(x_2)$가 성립하므로 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $f'(x)$는 증가하는 함수이어야 한다.

ㄱ은 옳다.

$f(x)=e^x-2x$에서

$f'(x)=e^x-2$, $f''(x)=e^x$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$는 증가하는 함수이다.

ㄴ도 옳다.

$f(x)=\ln\dfrac{1}{x+1}$에서

$f'(x)=-\dfrac{1}{x+1}$, $f''(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$는 증가하는 함수이다.

ㄷ은 옳지 않다.

$f(x)=x+\cos x$에서

$f'(x)=1-\sin x$, $f''(x)=-\cos x$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $f''(x)<0$이므로 $f'(x)$는 감소하는 함수이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

195

접근

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가함을 이용한다.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$f(x)=(x^2+ax+b)e^x$에서

$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+b)e^x$

$=\{x^2+(2+a)x+a+b\}e^x$

$f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$x^2+(2+a)x+a+b\ge 0$ ($\because e^x>0$)

이차방정식 $x^2+(2+a)x+a+b=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(2+a)^2-4(a+b)=a^2-4b+4\le 0$

$\therefore b\ge\dfrac{1}{4}a^2+1$

$a=1$일 때 $b\ge\dfrac{5}{4}$이므로 $b=2, 3, 4, 5$

$a=2$일 때 $b\ge 2$이므로 $b=2, 3, 4, 5$

$a=3$일 때 $b\ge\dfrac{13}{4}$이므로 $b=4, 5$

$a=4$일 때 $b\geq 5$이므로 $b=5$

$a=5$일 때 $b\geq \frac{29}{4}$이므로 조건을 만족시키는 b는 없다.

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$4+4+2+1=11$

답 ④

참고

역함수가 존재할 조건

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이므로 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

196

$f(x)=4e^{x}+ae^{-x}$에서

$f'(x)=4e^{x}-ae^{-x}=(4e^{2x}-a)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $4e^{2x}-a=0$ ($\because e^{-x}>0$)

$e^{2x}=\frac{a}{4}$, $e^{x}=\frac{\sqrt{a}}{2}$ $\quad\therefore x=\ln\frac{\sqrt{a}}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	$\cdots$	$\ln\frac{\sqrt{a}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$4\sqrt{a}$	$\nearrow$

ㄱ은 옳지 않다.

함수 $f(x)$는 극솟값만 갖는다.

ㄴ은 옳다.

함수 $f(x)$의 극솟값은 $f\left(\ln\frac{\sqrt{a}}{2}\right)=4\sqrt{a}$이다.

ㄷ도 옳다.

$\ln\frac{\sqrt{a}}{2}=1$에서

$\frac{\sqrt{a}}{2}=e$, $\sqrt{a}=2e$ $\quad\therefore a=4e^{2}$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

197

$y=x^{x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln y=x\ln x$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{y'}{y}=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

$y'=y(\ln x+1)=x^{x}(\ln x+1)$

$y'=0$에서 $\ln x+1=0$ ($\because x>0$)

$\ln x=-1$ $\quad\therefore x=\frac{1}{e}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$	$\nearrow$

즉, 함수 $y=x^{x}$은 $x=\frac{1}{e}$에서 극솟값 $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$을 가지므로

$a=\frac{1}{e}$, $b=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$

$\therefore ab=\frac{1}{e}\times\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}+1}=e^{-\frac{1}{e}-1}$

답 ①

198

$f(x)=\frac{a}{x}-\ln x^{3}+x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=-\frac{a}{x^{2}}-\frac{3}{x}+1=\frac{x^{2}-3x-a}{x^{2}}$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $x^{2}-3x-a=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^{2}-3x-a=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-3)^{2}-4\times(-a)=9+4a>0$

$\therefore a>-\frac{9}{4}$

(ii) (두 근의 합)$=3>0$

(iii) (두 근의 곱)$=\underline{-a>0}$ $\quad\therefore a<0$

$x>0$이므로 두 근의 곱은 양수이다.

(i), (ii), (iii)에서 $-\frac{9}{4}<a<0$

따라서 정수 a는 -2, -1이므로 구하는 합은

$-2+(-1)=-3$

답 -3

199

$f(x)=ax+4\sin x$에서

$f'(x)=a+4\cos x$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$ 또는 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

이때 $-1\leq\cos x\leq 1$이므로 $-4\leq 4\cos x\leq 4$

$a-4\leq a+4\cos x\leq a+4$ $\quad\therefore a-4\leq f'(x)\leq a+4$

이때 $a+4\leq 0$ 또는 $a-4\geq 0$이어야 하므로

$a\leq -4$ 또는 $a\geq 4$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

답 ④

200

$f(x)=2\sin(\pi\sin x)$에서

$f'(x)=2\cos(\pi\sin x)\times\pi\cos x$

$f'(x)=0$에서

$\cos(\pi\sin x)=0$ 또는 $\cos x=0$

(i) $\cos(\pi\sin x)=0$일 때

$\pi\sin x=-\frac{\pi}{2}$ 또는 $\pi\sin x=\frac{\pi}{2}$ ($\because \underline{-\pi\leq\pi\sin x\leq\pi}$)

$0<x<2\pi$이므로

$-1\leq\sin x\leq 1$

$\therefore -\pi\leq\pi\sin x\leq\pi$

$\sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi$

(ii) $\cos x=0$일 때, $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

(i), (ii)에서 극값을 갖는 점의 좌표는

$\left(\frac{\pi}{6},\ 2\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$, $\left(\frac{5}{6}\pi,\ 2\right)$, $\left(\frac{7}{6}\pi,\ -2\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi,\ 0\right)$, $\left(\frac{11}{6}\pi,\ -2\right)$

이때 직선이 두 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$, $\left(\frac{5}{6}\pi,\ 2\right)$ 또는 두 점 $\left(\frac{7}{6}\pi,\ -2\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi,\ 0\right)$을 지날 때 기울기가 최대이므로

$M=\dfrac{2}{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{6}{\pi}$

직선이 두 점 $\left(\frac{5}{6}\pi,\ 2\right)$, $\left(\frac{7}{6}\pi,\ -2\right)$를 지날 때 기울기가 최소이므로

$m=\dfrac{-4}{\frac{\pi}{3}}=-\dfrac{12}{\pi}$

$\therefore\ M+m=\dfrac{6}{\pi}+\left(-\dfrac{12}{\pi}\right)=-\dfrac{6}{\pi}$

답 $-\dfrac{6}{\pi}$

201

접근

함수 $f(x)$가 극솟값을 가질 때의 x의 값의 규칙을 찾는다.

$f(x)=e^{-x}(\sin x+\cos x)$에서

$f'(x)=-e^{-x}(\sin x+\cos x)+e^{-x}(\cos x-\sin x)$

$\quad\quad =-2e^{-x}\sin x$

$f''(x)=2e^{-x}\sin x-2e^{-x}\cos x$

$\quad\quad =2e^{-x}(\sin x-\cos x)$

$f'(x)=0$에서

$\sin x=0$ ($\because\ e^{-x}>0$)

$\therefore\ x=n\pi$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	π	$\cdots$	2π	$\cdots$	3π	$\cdots$	4π	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	$-e^{-\pi}$	↗	$e^{-2\pi}$	↘	$-e^{-3\pi}$	↗	$e^{-4\pi}$	↘

(i) $x=(2m-1)\pi$(m은 자연수)일 때

$\sin(2m-1)\pi=0$, $\cos(2m-1)\pi=-1$이므로

$f''(x)>0$

따라서 함수 $f(x)$는 극솟값을 갖는다.

(ii) $x=2m\pi$(m은 자연수)일 때

$\sin 2m\pi=0$, $\cos 2m\pi=1$이므로

$f''(x)<0$

따라서 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$가 극소일 때의 x의 값은

$\pi,\ 3\pi,\ 5\pi,\ \cdots$, 즉 $x_1=\pi$, $x_2=3\pi$, $\cdots$이므로

$x_{10}=19\pi$, $x_{20}=39\pi$

따라서 $x_{20}-x_{10}=39\pi-19\pi=20\pi$이므로

$a=20$

답 ④

202

$f'(x)=-\frac{4}{3}e^{2x}\sin 2x+2f(x)$에서

$f''(x)=-\frac{8}{3}e^{2x}\sin 2x-\frac{8}{3}e^{2x}\cos 2x+2f'(x)$

$\quad =-\frac{8}{3}e^{2x}\sin 2x-\frac{8}{3}e^{2x}\cos 2x+2\left\{-\frac{4}{3}e^{2x}\sin 2x+2f(x)\right\}$

$\quad =-\frac{16}{3}e^{2x}\sin 2x-\frac{8}{3}e^{2x}\cos 2x+4f(x)$

이고 $f''(x)=-\frac{16}{3}e^{2x}\sin 2x+\frac{8}{3}e^{2x}$이므로

$-\frac{8}{3}e^{2x}\cos 2x+4f(x)=\frac{8}{3}e^{2x}$

$\therefore\ f(x)=\frac{2}{3}e^{2x}\cos 2x+\frac{2}{3}e^{2x}$

$f'(x)=\frac{4}{3}e^{2x}\cos 2x-\frac{4}{3}e^{2x}\sin 2x+\frac{4}{3}e^{2x}$

$\quad =\frac{4}{3}e^{2x}(\cos 2x-\sin 2x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\cos 2x-\sin 2x+1=0$ ($\because\ e^{2x}>0$)

$\sin 2x-\cos 2x=1$, $\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\therefore\ \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0<x<\pi$에서 $-\frac{\pi}{4}<2x-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{4}\pi$이므로

$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ 또는 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$

$\therefore\ x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{8}{3}e^{\frac{\pi}{2}}<0$, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{8}{3}e^{\pi}>0$이므로 구하는 극댓값은

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{3}e^{\frac{\pi}{2}}$

답 ④

203

진수 조건에서 $x+1>0$ $\quad\therefore\ x>-1$

$f(x)=2x^2+a\ln(x+1)$에서

$f'(x)=4x+\dfrac{a}{x+1}=\dfrac{4x^2+4x+a}{x+1}$

ㄱ은 옳지 않다.

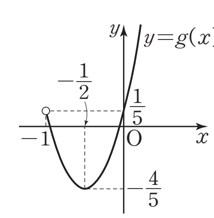
$g(x)=4x^2+4x+a$라고 하면

$g(x)=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1+a$

$a=\frac{1}{5}$일 때 $x>-1$에서 함수

$g(x)=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{4}{5}$의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.



이때

$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{5}<x<-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{5}$에서

$g(x)<0$이므로

$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x+1}<0$ ($\because\ x>-1$)

ㄴ은 옳다.

ㄱ에서 $g(x)=4x^2+4x+a$이므로

$g(-1)=g(0)=a<0$

$g(x)=0$에서

$4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{4}{5}=0$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{5}$

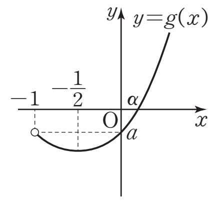
$x+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore\ x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

$x>-1$에서 함수

$g(x)=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1+a$의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 교점의 x좌표를 α라고 하면 $x=\alpha$의 좌우에서 $g(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀐다.

$f'(x)=\frac{g(x)}{x+1}$이므로 $f'(\alpha)=\frac{g(\alpha)}{\alpha+1}=0$이고 $x=\alpha$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 오직 하나의 극솟값을 갖는다.

ㄷ도 옳다.

함수 $f(x)$의 극값의 개수가 2이려면 방정식 $f'(x)=0$, 즉 $g(x)=0$이 $x>-1$에서 서로 다른 두 실근을 갖고 이 값의 좌우에서 $f'(x)$, 즉 $g(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$g\left(-\frac{1}{2}\right)<0$, $g(-1)>0$이어야 하므로

$g\left(-\frac{1}{2}\right)<0$에서 $\quad -1+a<0 \qquad \therefore a<1$

$g(-1)>0$에서 $\quad a>0$

$\therefore 0<a<1$

따라서 함수 $f(x)$의 극값의 개수가 2가 되도록 하는 a의 값의 범위는 $0<a<1$이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

204

$a=-1$이면 $\quad f(x)=\frac{(x+1)^2}{x+1}=x+1$

구간 $[0, 2)$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 $x=0$에서 극댓값을 갖지 않는다. 즉, 주어진 조건을 만족시키지 않으므로 $\quad a\neq-1$

$f(x)=\frac{(x-a)^2}{x+1}$에서

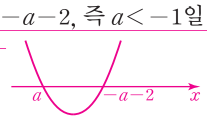
$$f'(x)=\frac{2(x-a)(x+1)-(x-a)^2\times1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x-a)(x+2+a)}{(x+1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=a$ 또는 $x=-a-2$

$a\neq-1$이므로 $\quad a\neq-a-2$

(i) $a<-a-2$, 즉 $a<-1$일 때



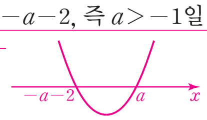
$x=-a-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=-a-2$에서 $f(x)$는 극솟값을 갖는다.

구간 $[0, 2)$에서 함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 구간 $(0, 2)$에서 극솟값을 가져야 한다.

즉, $0<-a-2<2$이어야 하므로 $\quad -4<a<-2$

a는 정수이므로 $\quad a=-3$

(ii) $a>-a-2$, 즉 $a>-1$일 때



$x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=a$에서 $f(x)$는 극솟값을 갖는다.

구간 $[0, 2)$에서 함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 구간 $(0, 2)$에서 극솟값을 가져야 한다.

즉, $0<a<2$이어야 하고 a는 정수이므로 $\quad a=1$

(i), (ii)에서 $\quad a=-3$ 또는 $a=1$

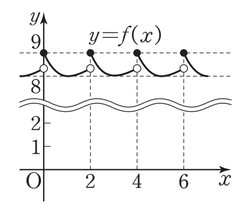
따라서 구하는 정수 a의 값의 곱은

$-3\times1=-3$

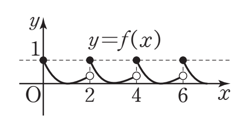
답 ①

참고

$a=-3$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.



$a=1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.



205

점 $(t, 4t^3)$과 직선 $y=x+3$, 즉 $x-y+3=0$ 사이의 거리 $g(t)$는

$$g(t)=\frac{|t-4t^3+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|4t^3-t-3|}{\sqrt{2}}$$

이때 $4t^3-t-3=(t-1)(4t^2+4t+3)$이고 $4t^2+4t+3>0$이므로

$$g(t)=\begin{cases}\frac{4t^3-t-3}{\sqrt{2}} & (t\geq1)\\ \frac{-4t^3+t+3}{\sqrt{2}} & (t<1)\end{cases}$$ 에서

$$g'(t)=\begin{cases}\frac{12t^2-1}{\sqrt{2}} & (t>1)\\ \frac{-12t^2+1}{\sqrt{2}} & (t<1)\end{cases}$$

(i) $t>1$일 때 $\quad \frac{12t^2-1}{\sqrt{2}}>0$

(ii) $t<1$일 때 $\quad \frac{-12t^2+1}{\sqrt{2}}=0$에서

$-12t^2+1=0$, $t^2=\frac{1}{12}$

$\therefore t=-\frac{\sqrt{3}}{6}$ 또는 $t=\frac{\sqrt{3}}{6}$

또, $\lim_{t\to1-}g(t)=\lim_{t\to1+}g(t)=g(1)$이므로 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$g(t)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $g(t)$는 $t=-\frac{\sqrt{3}}{6}$, $t=1$에서 극솟값, $t=\frac{\sqrt{3}}{6}$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 함수 $g(t)$가 극값을 갖게 되는 모든 t의 값의 합은

$$-\frac{\sqrt{3}}{6}+1+\frac{\sqrt{3}}{6}=1$$

답 1

206

$f(x)=\left(\ln\frac{k}{x}\right)^2$이라고 하면

$f(x)=\left(\ln\frac{k}{x}\right)^2=(\ln k-\ln x)^2$

$f'(x)=2(\ln k-\ln x)\times\left(-\frac{1}{x}\right)$

$\quad=\frac{2(\ln x-\ln k)}{x}$

$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-2(\ln x-\ln k)\times 1}{x^2}$

$\quad=\frac{-2(\ln x-\ln k-1)}{x^2}$

$f''(x)=0$에서 $\ln x-\ln k-1=0$ ($\because x^2>0$)

$\ln x=\ln k+1=\ln ke \qquad \therefore x=ke$

즉, 변곡점의 좌표는 $(ke, 1)$이므로 변곡점에서의 접선의 기울기는

$f'(ke)=\frac{2}{ke}$이고 접선의 방정식은

$y-1=\frac{2}{ke}(x-ke) \qquad \therefore y=\frac{2}{ke}x-1$

이 접선이 점 $(4, 3)$을 지나므로

$3=\frac{8}{ke}-1 \qquad \therefore k=\frac{2}{e}$

답 ③

207

$f(x)=\frac{2}{x^2+1}$에서

$f'(x)=-\frac{4x}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=-\frac{4(x^2+1)^2-4x\times 2(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4}$

$\quad=\frac{4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$이고, $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

이때 $f(0)=2$이므로 $\mathrm{A}(0, 2)$

$f''(x)=0$에서 $3x^2-1=0$, $x^2=\frac{1}{3}$

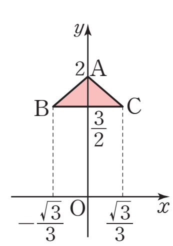
$\therefore x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점

B, C의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{2}\right)$

따라서 오른쪽 그림에서

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

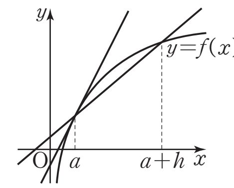


답 $\frac{\sqrt{3}}{6}$

208

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}<f'(a)$에서 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$의 값은 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+h$까지 변할 때의 평균변화율이고, $f'(a)$의 값은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기이다.

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x>0$에서 위로 볼록해야 한다.



① $f(x)=\frac{4}{x}$에서

$f'(x)=-\frac{4}{x^2}$, $f''(x)=\frac{8}{x^3}$

$x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 $x>0$에서 아래로 볼록하다.

② $f(x)=2x^2$에서 $f'(x)=4x$, $f''(x)=4$

$x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 $x>0$에서 아래로 볼록하다.

③ $f(x)=3x^3$에서 $f'(x)=9x^2$, $f''(x)=18x$

$x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 $x>0$에서 아래로 볼록하다.

④ $f(x)=2^x$에서 $f'(x)=2^x\ln x$, $f''(x)=2^x(\ln x)^2+\frac{2^x}{x}$

$x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 $x>0$에서 아래로 볼록하다.

⑤ $f(x)=\ln x$에서 $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$

$x>0$에서 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 $x>0$에서 위로 볼록하다.

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 함수는 ⑤이다.

답 ⑤

209

$f(x)=ax^2+5\sin x+x$에서

$f'(x)=2ax+5\cos x+1$

$f''(x)=2a-5\sin x$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고 그 근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서 $2a-5\sin x=0$

$\therefore 5\sin x=2a$

이때 $-1\le\sin x\le 1$이므로

$-5\le 5\sin x\le 5$

$-5\le 2a\le 5 \qquad \therefore -\frac{5}{2}\le a\le\frac{5}{2}$

(i) $a=-\frac{5}{2}$이면 $f''(x)=2a-5\sin x\le 0$

(ii) $a=\frac{5}{2}$이면 $f''(x)=2a-5\sin x\ge 0$

즉, $a=-\frac{5}{2}$, $a=\frac{5}{2}$이면 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점이 될 수 없다.

$\therefore -\frac{5}{2}<a<\frac{5}{2}$

답 ④

210

$f(x)=3x^n\left(\ln x-\frac{1}{n}\right)$이라고 하면

$f'(x)=3nx^{n-1}\left(\ln x-\frac{1}{n}\right)+3x^n\times\frac{1}{x}$

$\quad=3nx^{n-1}\ln x$

$f''(x)=3n(n-1)x^{n-2}\ln x+3nx^{n-1}\times\frac{1}{x}$

$\quad=3nx^{n-2}\{(n-1)\ln x+1\}$

$f''(x)=0$에서 $(n-1)\ln x+1=0$ ($\because$ $x>0$)

로그의 진수 조건

$\ln x=\frac{1}{1-n}$ $\quad\therefore x=e^{\frac{1}{1-n}}$

$x>e^{\frac{1}{1-n}}$일 때, $\quad f''(x)>0$

$x<e^{\frac{1}{1-n}}$일 때, $\quad f''(x)<0$

즉, $x=e^{\frac{1}{1-n}}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로

$a_n=e^{\frac{1}{1-n}}$, $b_n=3e^{\frac{n}{1-n}}\left(\frac{1}{1-n}-\frac{1}{n}\right)$

$f(e^{\frac{1}{1-n}})$
$=3(e^{\frac{1}{1-n}})^n\left(\ln e^{\frac{1}{1-n}}-\frac{1}{n}\right)$
$=3e^{\frac{n}{1-n}}\left(\frac{1}{1-n}-\frac{1}{n}\right)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$

$\quad=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$

$\quad=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{1-n}}+3\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n}{1-n}}\left(\frac{1}{1-n}-\frac{1}{n}\right)$

$\quad=1+0=1$

답 1

211

$g(x)=\sin(x^2+ax+b)$이므로

$g'(x)=(2x+a)\cos(x^2+ax+b)$

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $g'(-x)=-g'(x)$이므로

$x=0$을 대입하면 $g'(0)=-g'(0)$ $\quad\therefore g'(0)=0$

$\therefore a\cos b=0$

$0<b<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos b\neq0$이므로 $\quad a=0$

즉, $g(x)=\sin(x^2+b)$이고

$g'(x)=2x\cos(x^2+b)$이므로

$g''(x)=2\cos(x^2+b)-4x^2\sin(x^2+b)$

조건 (나)에서 점 $(k, g(k))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이므로

$g''(k)=0$

$2\cos(k^2+b)-4k^2\sin(k^2+b)=0$ …… ㉠

$k=0$이면 $0<b<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos b\neq0$이므로 ㉠이 성립하지 않고,

$\cos(k^2+b)=0$이면 ㉠에서 $\sin(k^2+b)=0$이므로

$\sin^2(k^2+b)+\cos^2(k^2+b)=1$이 성립하지 않는다.

$\therefore k\neq0$, $\cos(k^2+b)\neq0$

㉠에서 $\quad\tan(k^2+b)=\frac{1}{2k^2}$ …… ㉡

조건 (나)에서 $2kg(k)=\sqrt{3}g'(k)$이므로

$2k\sin(k^2+b)=2\sqrt{3}k\cos(k^2+b)$

$\therefore \tan(k^2+b)=\sqrt{3}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $\quad\frac{1}{2k^2}=\sqrt{3}$

$\therefore k^2=\frac{\sqrt{3}}{6}$

$k^2=\frac{\sqrt{3}}{6}$을 ㉢에 대입하면 $\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{6}+b\right)=\sqrt{3}$이고 $0<b<\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{6}<\frac{\sqrt{3}}{6}+b<\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\pi}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{6}+b=\frac{\pi}{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{6}<\frac{\pi}{3}<\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\pi}{2}$

$\therefore b=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}$

$\therefore a+b=0+\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}$

답 ③

212

$x<y$인 임의의 두 실수 x, y에 대하여

$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right)$를 만족시키려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록해야 하므로 $f''(x)\geq0$이어야 한다.

$f(x)=e^{\frac{1}{x-4}}$에서

$f'(x)=-\frac{1}{(x-4)^2}e^{\frac{1}{x-4}}$

$f''(x)=\frac{2}{(x-4)^3}e^{\frac{1}{x-4}}+\frac{1}{(x-4)^4}e^{\frac{1}{x-4}}$

$\quad=\frac{2x-7}{(x-4)^4}e^{\frac{1}{x-4}}$

$\frac{2x-7}{(x-4)^4}e^{\frac{1}{x-4}}\geq0$이어야 하므로

$2x-7\geq0$ $\left(\because (x-4)^4>0, e^{\frac{1}{x-4}}>0\right)$

$\therefore x\geq\frac{7}{2}$

이때 $x<4$이므로 $\quad\frac{7}{2}\leq x<4$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $\frac{7}{2}\leq x<4$에서 아래로 볼록하므로

$\alpha=\frac{7}{2}$, $\beta=4$일 때 $\beta-\alpha$는 최댓값을 갖는다.

따라서 $\beta-\alpha$의 최댓값은

$4-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

213

$g(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$\quad=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)$

$\quad=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$g(x)=t$로 놓으면 $-2\leq t\leq2$이고

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^3-6t^2+7$

$f'(t)=3t^2-12t=3t(t-4)$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=4$

$-2\leq t\leq2$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	-25	$\nearrow$	7	$\searrow$	-9

따라서 함수 $f(t)$의 최댓값은 $f(0)=7$, 최솟값은 $f(-2)=-25$ 이므로 구하는 합은

$7+(-25)=-18$

답 -18

214

$f(1)=e>0$이므로 최솟값은 양수이다.

즉, $h(x)=|f(x)-g(x)|\neq 0$이어야 하므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 만나지 않는다.

이때 $f(x)>0$이고 $g(x)$는 최고차항이 -2인 이차함수이므로

$h(x)=|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$

이고 $x=1$에서 최솟값 $f(1)$을 가지므로

$h(1)=f(1)-g(1)=f(1)$

$\therefore g(1)=0$

함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 -2인 이차함수이므로

$g(x)=-2(x-1)(x-a)$ (a는 상수)라고 하면

$h(x)=e^x+2(x-1)(x-a)$

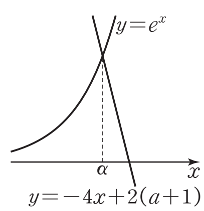
$\quad =e^x+2x^2-2(a+1)x+2a$

$h'(x)=e^x+4x-2(a+1)$

$h'(x)=0$에서

$e^x+4x-2(a+1)=0$

$\therefore e^x=-4x+2(a+1)$ ...... ㉠



방정식 ㉠의 근을 $x=\alpha$라 하고 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	극소	↗

함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이면서 최소이므로 $\alpha=1$

즉, 방정식 ㉠의 근이 $x=1$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$e=-4+2(a+1)$ $\quad\therefore a=\frac{e}{2}+1$

따라서 $g(x)=-2(x-1)\left(x-\frac{e}{2}-1\right)$이므로

$g\left(\frac{e}{2}\right)=-2\left(\frac{e}{2}-1\right)\left(\frac{e}{2}-\frac{e}{2}-1\right)=e-2$

답 ①

215

$f(x)=k(x^2+x)e^{-x}$에서

$f'(x)=k(2x+1)e^{-x}-k(x^2+x)e^{-x}$

$\quad =k(-x^2+x+1)e^{-x}$

접점의 좌표를 $(t, k(t^2+t)e^{-t})$이라고 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=k(-t^2+t+1)e^{-t}$이므로 접선의 방정식은

$y-k(t^2+t)e^{-t}=k(-t^2+t+1)e^{-t}(x-t)$

$\therefore y=k(-t^2+t+1)e^{-t}x+kt^3e^{-t}$

이 직선의 y절편을 $g(t)$라고 하면

$g(t)=kt^3e^{-t}$

$g'(t)=k\times 3t^2e^{-t}-kt^3e^{-t}=ke^{-t}t^2(3-t)$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=3$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↗		↗	극대	↘

함수 $g(t)$는 $t=3$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$g(3)=\frac{27k}{e^3}$

이때 함수 $g(t)$의 최댓값이 81이므로

$\frac{27k}{e^3}=81$ $\quad\therefore k=3e^3$

따라서 $f(x)=3(x^2+x)e^{3-x}$이므로

$f(1)f(5)=6e^2\times 90e^{-2}=540$

답 ③

216

$f(x)=\frac{3x}{x^2+2}$에서

$f'(x)=\frac{3\times(x^2+2)-3x\times 2x}{(x^2+2)^2}$

$\quad =\frac{3(2-x^2)}{(x^2+2)^2}$

$f''(x)=\frac{-6x(x^2+2)^2-3(2-x^2)\times 2(x^2+2)\times 2x}{(x^2+2)^4}$

$\quad =\frac{6x^3-36x}{(x^2+2)^3}=\frac{6x(x^2-6)}{(x^2+2)^3}$

$f'(x)=0$에서 $\quad 2-x^2=0$ ($\because x^2+2>0$)

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

$f''(x)=0$에서 $\quad 6x(x^2-6)=0$

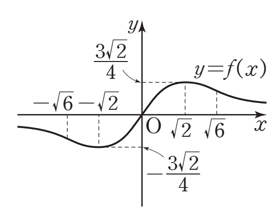
$\therefore x=-\sqrt{6}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{6}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{6}$	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{6}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{3\sqrt{6}}{8}$	↘	$-\frac{3\sqrt{2}}{4}$	↗	0	↗	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	↘	$\frac{3\sqrt{6}}{8}$	↘

이때 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ은 옳다.

모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=\frac{-3x}{(-x)^2+2}=\frac{-3x}{x^2+2}=-f(x)$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

ㄴ도 옳다.

함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(\sqrt{2})=\frac{3\sqrt{2}}{4}$, 최솟값은

$f(-\sqrt{2})=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$이다.

ㄷ도 옳다.

구간 $(\sqrt{6}, \infty)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하므로 구간 (e, e^2)에서도 아래로 볼록하다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

217

접근
합성함수의 미분법과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 특징을 이용한다.

ㄱ은 옳지 않다.

$(f\circ f)(5)=f(f(5))=f(3)=5$

ㄴ은 옳다.

$(f\circ f)'(x)=f'(f(x))f'(x)$이므로

$(f\circ f)'(4)=f'(f(4))f'(4)$

이때 $f'(4)<0$이고 열린구간 $(3, 5)$에서 $f'(x)\le 0$,

$3<f(4)<5$이므로 $f'(f(4))\le 0$

$\therefore (f\circ f)'(4)\ge 0$

ㄷ은 옳지 않다.

$5<x<6$에서 $3<f(x)<6$

이때 $5<x<6$에서 $f(x)=5$인 x의 값을 t라고 하면

$5<x<t$에서 $3<f(x)<5$이므로

$(f\circ f)'(x)=f'(f(x))f'(x)<0$

$t<x<6$에서 $5<f(x)<6$이므로

$(f\circ f)'(x)=f'(f(x))f'(x)>0$

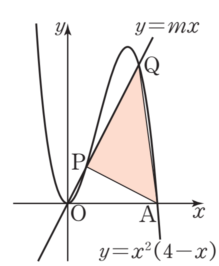
즉, 함수 $(f\circ f)(x)$는 열린구간 $(5, 6)$에서 감소하다가 증가한다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

218

삼차함수 $y=x^2(4-x)$의 그래프와 직선 $y=mx$의 교점 P, Q의 x좌표는 방정식



$x^2(4-x)=mx$에서

$x(x^2-4x+m)=0$

$x\ne 0$이므로

$x^2-4x+m=0$ …… ㉠

의 두 실근이다.

이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라고 하면

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=m$

$\therefore \beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{16-4m}=2\sqrt{4-m}$

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-m>0 \qquad \therefore m<4$

이때 m은 양수이므로 $0<m<4$

$\triangle APQ=\triangle OAQ-\triangle OAP$

$=\dfrac{1}{2}\times 4\times m\beta-\dfrac{1}{2}\times 4\times m\alpha$ P$(\alpha, m\alpha)$, Q$(\beta, m\beta)$

$=2m(\beta-\alpha)$

$=2m\times 2\sqrt{4-m}$

$=4\sqrt{-m^3+4m^2}$

$f(m)=-m^3+4m^2$ $(0<m<4)$으로 놓으면

$f'(m)=-3m^2+8m=-m(3m-8)$

$f'(m)=0$에서 $m=\dfrac{8}{3}$ $(\because 0<m<4)$

$0<m<4$에서 함수 $f(m)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

m	(0)	$\cdots$	$\frac{8}{3}$	$\cdots$	(4)
$f'(m)$		$+$	0	$-$	
$f(m)$		↗	극대	↘	

즉, $m=\dfrac{8}{3}$일 때 함수 $f(m)$은 극대이면서 최대이므로

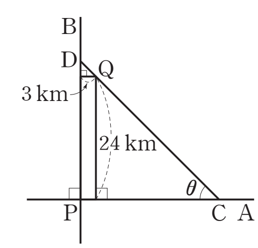
$m=\dfrac{8}{3}$일 때 $\triangle$APQ의 넓이는 최대가 된다.

$\therefore 15m=15\times\dfrac{8}{3}=40$

답 40

219

오른쪽 그림과 같이 새 직선 도로와 기존 직선 도로 PA, PB가 만나는 점을 각각 C, D라고 하면



$\overline{CD}=\overline{QC}+\overline{QD}=\dfrac{24}{\sin\theta}+\dfrac{3}{\cos\theta}$

$\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$f(\theta)=\dfrac{24}{\sin\theta}+\dfrac{3}{\cos\theta}$으로 놓으면

$f'(\theta)=-\dfrac{24\cos\theta}{\sin^2\theta}+\dfrac{3\sin\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{-24\cos^3\theta+3\sin^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$f'(\theta)=0$에서 $-24\cos^3\theta+3\sin^3\theta=0$

$\tan^3\theta=8 \qquad \therefore \tan\theta=2$

이때 $\tan\theta<2$, 즉 $\sin\theta<2\cos\theta$이면

$-24\cos^3\theta+3\sin^3\theta<-24\cos^3\theta+3\times(2\cos\theta)^3=0$이므로

$f'(\theta)<0$

$\tan\theta>2$, 즉 $\sin\theta>2\cos\theta$이면

$-24\cos^3\theta+3\sin^3\theta>-24\cos^3\theta+3\times(2\cos\theta)^3=0$이므로

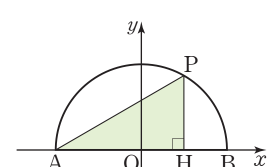
$f'(\theta)>0$

따라서 함수 $f(\theta)$는 $\tan\theta=2$일 때 극소이면서 최소이므로 새 직선 도로의 길이가 최소가 되기 위한 $\tan\theta$의 값은 2이다.

답 ②

220

선분 AB의 중점을 원점 O, 직선 AB를 x축, 직선 AB에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면에 놓으면 오른쪽 그림과 같다.



선분 AB를 지름으로 하는 반원은 원 $x^2+y^2=1$의 일부이므로

점 P의 좌표를 $(x, \sqrt{1-x^2})$ $(-1<x<1)$이라고 하면

$\overline{AH}=1+x$, $\overline{PH}=\sqrt{1-x^2}$

삼각형 AHP의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$S(x)=\dfrac{1}{2}\times(1+x)\times\sqrt{1-x^2}$

$S'(x)=\dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{2}\times(1+x)\times\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$

$=\dfrac{1-x^2-x(1+x)}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-2x^2-x+1}{2\sqrt{1-x^2}}$

$=\dfrac{-(2x-1)(x+1)}{2\sqrt{1-x^2}}$

$S'(x)=0$에서 $\quad x=\frac{1}{2}$

$-1<x<1$에서 함수 $S(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(-1)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	↘	

따라서 함수 $S(x)$는 $x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$을 가지므로 삼각형 AHP의 넓이의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$이다.

답 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

다른 풀이

$\angle\mathrm{POH}=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면

$\overline{\mathrm{PH}}=\sin\theta$, $\overline{\mathrm{OH}}=\cos\theta$, $\overline{\mathrm{AH}}=1+\cos\theta$

삼각형 AHP의 넓이를 $S(\theta)$라고 하면

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times(1+\cos\theta)\times\sin\theta$$

$$\begin{aligned}S'(\theta)&=\frac{1}{2}\times(-\sin\theta)\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times(1+\cos\theta)\times\cos\theta\\&=\frac{1}{2}\times(-\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos\theta)\\&=\frac{1}{2}\times\{-(1-\cos^2\theta)+\cos^2\theta+\cos\theta\}\\&=\frac{1}{2}(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)\\&=\frac{1}{2}(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)\end{aligned}$$

$S'(\theta)=0$에서 $\quad \cos\theta=\frac{1}{2}\ \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\cos\theta+1\neq 0$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $S(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	↘	

따라서 함수 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$을 가지므로 삼각형 AHP의 넓이의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$이다.

221

방정식 $\ln 2x=ax^2$의 실근의 개수는 두 곡선 $y=\ln 2x$, $y=ax^2$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=\ln 2x$, $g(x)=ax^2$이라고 하면

$f'(x)=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$, $g'(x)=2ax$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 x좌표를 t라고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad \ln 2t=at^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad \frac{1}{t}=2at \qquad \therefore\ a=\frac{1}{2t^2}$

$a=\frac{1}{2t^2}$을 ㉠에 대입하면

$\ln 2t=\frac{1}{2}$, $2t=\sqrt{e} \qquad \therefore\ t=\frac{\sqrt{e}}{2}$

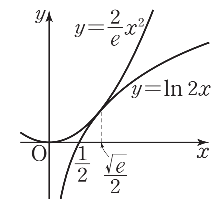
$\therefore\ a=\frac{2}{e}$

방정식 $\ln 2x=ax^2$의 실근은

$0<a<\frac{2}{e}$일 때 2개,

$a=\frac{2}{e}$일 때 1개,

$a>\frac{2}{e}$일 때 0개이다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

222

$4x=\tan x+k$에서 $\quad 4x-\tan x=k$

방정식 $4x-\tan x=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=4x-\tan x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x)=4x-\tan x$라고 하면

$f'(x)=4-\sec^2 x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sec^2 x=4$, $\cos^2 x=\frac{1}{4}$

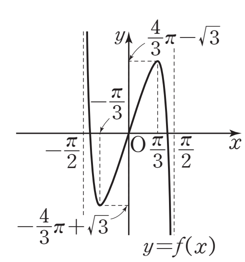
$\cos x=\pm\frac{1}{2} \qquad \therefore\ x=-\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	$-\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}$	↗	$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$	↘	

이때 $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면

$-\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}<k<\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

따라서 $\alpha=-\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}$, $\beta=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$이므로

$\beta-\alpha=\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)-\left(-\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}\right)=\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}$

답 ②

223

접근

곡선 $y=x^2e^{-x^2}$과 두 직선 $y=k+\frac{1}{6}$, $y=k-\frac{1}{6}$의 교점의 개수가 6인 경우를 생각한다.

$|x^2e^{-x^2}-k|=\frac{1}{6}$에서 $\quad x^2e^{-x^2}-k=\pm\frac{1}{6}$

$\therefore x^2e^{-x^2}=k+\frac{1}{6}$ 또는 $x^2e^{-x^2}=k-\frac{1}{6}$ ...... ㉠

즉, ㉠의 서로 다른 실근이 6개이어야 한다.

$f(x)=x^2e^{-x^2}$이라고 하면

$f'(x)=2xe^{-x^2}+x^2\times(-2x)\times e^{-x^2}$

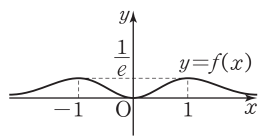
$\quad\;=2e^{-x^2}x(1-x)(1+x)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



㉠의 실근이 6개가 되기 위해서는

$k-\frac{1}{6}<k+\frac{1}{6}$

이므로 $k+\frac{1}{6}$의 값이 극댓값과 같아야 한다.

$k+\frac{1}{6}=\frac{1}{e}\qquad\therefore k=\frac{1}{e}-\frac{1}{6}$

답 ③

참고

$k-\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{6}=\frac{1}{e}-\frac{1}{3}>0$

이므로 방정식 $x^2e^{-x^2}=k-\frac{1}{6}$은 서로 다른 4개의 실근, 방정식

$x^2e^{-x^2}=k+\frac{1}{6}$은 서로 다른 2개의 실근을 갖는다.

224

$1\le x\le 4$이므로 $ax\le e^x\le bx$에서

$a\le\frac{e^x}{x}\le b$

$f(x)=\frac{e^x}{x}$이라고 하면

$f'(x)=\frac{e^x\times x-e^x\times 1}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because e^x>0$)

$1\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	1	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	e	↗	$\frac{e^4}{4}$

함수 $f(x)$는 $1\le x\le 4$에서 증가하므로

$e\le\frac{e^x}{x}\le\frac{e^4}{4}$

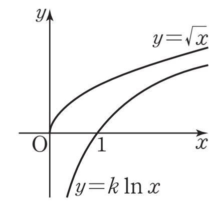
$\therefore a\le e,\ b\ge\frac{e^4}{4}$

따라서 $b-a$의 최솟값은 $\frac{e^4}{4}-e$이다.

답 $\frac{e^4}{4}-e$

225

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\sqrt{x}\ge k\ln x$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}$가 곡선 $y=k\ln x$보다 위쪽에 있거나 두 곡선이 접해야 한다.



$f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=k\ln x$라고 하면

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $g'(x)=\frac{k}{x}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 x좌표를 t $(t>0)$라고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\sqrt{t}=k\ln t$ ...... ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{k}{t}\qquad\therefore k=\frac{\sqrt{t}}{2}$

$k=\frac{\sqrt{t}}{2}$를 ㉠에 대입하면

$\sqrt{t}=\frac{\sqrt{t}}{2}\ln t$, $\ln t=2\qquad\therefore t=e^2$

$\therefore k=\frac{e}{2}$

따라서 $0<k\le\frac{e}{2}$이므로 k의 최댓값은 $\frac{e}{2}$이다.

답 ②

226

접근

함수 $f(x)$의 최솟값과 함수 $g(x)$의 최댓값의 대소를 비교한다.

임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식 $f(x_1)\ge g(x_2)$가 성립하려면

$(f(x)$의 최솟값$)\ge(g(x)$의 최댓값$)$

이어야 한다.

$f(x)=5xe^x$에서

$f'(x)=5e^x+5xe^x=5(1+x)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{5}{e}$	↗

함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(-1)=-\frac{5}{e}$이고 $g(x)=-3x^2+k$의 최댓값은 $g(0)=k$이므로

$k\le-\frac{5}{e}$

따라서 실수 k의 최댓값은 $-\frac{5}{e}$이다.

답 $-\frac{5}{e}$

227

$\ln(\sin x+4)=a$에서 $g(x)=\ln(\sin x+4)$라고 하면

$g'(x)=\frac{\cos x}{\sin x+4}$

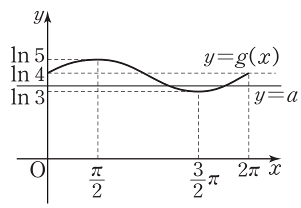
$g'(x)=0$에서 $\cos x=0$ ($\because \sin x+4>0$)

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

$0 \le x \le 2\pi$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\ln 4$	↗	$\ln 5$	↘	$\ln 3$	↗	$\ln 4$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $\ln(\sin x+4)=a$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같으므로

$a<\ln 3$일 때 $f(a)=0$

$a=\ln 3$일 때 $f(a)=1$

$\ln 3<a<\ln 4$일 때 $f(a)=2$

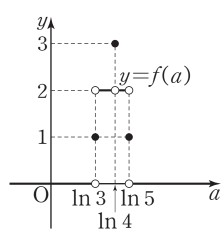
$a=\ln 4$일 때 $f(a)=3$

$\ln 4<a<\ln 5$일 때 $f(a)=2$

$a=\ln 5$일 때 $f(a)=1$

$a>\ln 5$일 때 $f(a)=0$

따라서 함수 $y=f(a)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(a)$가 불연속이 되는 a의 값은 $\ln 3$, $\ln 4$, $\ln 5$의 3개이다.



답 3

228

ㄱ은 옳다.

$f(x)=e^{-x}+x^2+1$에서

$f'(x)=-e^{-x}+2x$

이때 $f'(0)=-1<0$, $f'(1)=-\frac{1}{e}+2>0$이므로 $f'(t)=0$을 만족시키는 t의 값의 범위는 $0<t<1$이다.

ㄴ은 옳지 않다.

$f''(x)=e^{-x}+2$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하다.

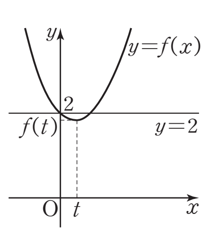
따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 존재하지 않는다.

ㄷ도 옳다.

ㄱ, ㄴ에 의하여 곡선 $y=f(x)$는 $x=t$ $(0<t<1)$에서 극소이자 최소이고 아래로 볼록한 곡선이다.

이때 $f(0)=2$이므로 $f(t)<2$

즉, 방정식 $f(x)=2$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

229

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라고 하면

$$v(t)=x'(t)=-\frac{8t}{(t^2+m)^2}$$

$$a(t)=v'(t)=-\frac{8(t^2+m)^2-8t\times 2(t^2+m)\times 2t}{(t^2+m)^4}$$

$$=\frac{8(3t^2-m)}{(t^2+m)^3}$$

$t=1$에서의 점 P의 가속도는 0이므로

$$a(1)=\frac{8(3-m)}{(1+m)^3}=0 \qquad \therefore m=3$$

$x(t)=\frac{4}{t^2+3}$이므로 $t=1$에서의 점 P의 위치는

$$x(1)=\frac{4}{1+3}=1 \qquad \therefore n=1$$

$$\therefore \frac{m}{n}=\frac{3}{1}=3$$

답 ④

230

$f(t)=e^t-t$에서 $f'(t)=e^t-1$

$g(t)=(t-3)^2e^t$에서

$g'(t)=2(t-3)e^t+(t-3)^2e^t=(t-1)(t-3)e^t$

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도는 각각 $f'(t)$, $g'(t)$이고 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이려면 $f'(t)g'(t)<0$이어야 한다.

그런데 $t>0$에서 $f'(t)>0$이므로 $g'(t)<0$

$(t-1)(t-3)e^t<0$

$\therefore 1<t<3$ $(\because e^t>0)$

한편 $1<t<3$에서 점 Q는 방향을 바꾸지 않으므로 점 Q가 움직인 거리는

$|g(3)-g(1)|=4e$

답 ④

231

점 P는 점 A에서 출발하여 호 AB를 따라 점 B를 향하여 매초 1의 일정한 속력으로 움직이므로 t초 후의 호 AP의 길이가 t이고, 선분 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기도 t이다.

사분원의 반지름의 길이가 1이므로 선분 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $\widehat{AP}=1\times\theta=t$에서 $\theta=t$

직선 OP의 방정식이 $y=(\tan t)x$, 직선 AB의 방정식이 $y=-x+1$이므로 두 직선이 만나는 점의 x좌표는

$(\tan t)x=-x+1$에서

$$(1+\tan t)x=1 \qquad \therefore x=\frac{1}{1+\tan t}$$

즉, 시각 t에서의 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{1}{1+\tan t}, \frac{\tan t}{1+\tan t}\right)$이므로 시각 t에서의 점 Q의 속도는

점 Q의 좌표를 $(f(t), g(t))$라고 하면 점 Q의 속도는 $(f'(t), g'(t))$이다.

$$\left(-\frac{\sec^2 t}{(1+\tan t)^2}, \frac{\sec^2 t}{(1+\tan t)^2}\right)$$

$$g'(t)=\frac{\sec^2 t\times(1+\tan t)-\tan t\times\sec^2 t}{(1+\tan t)^2}$$

$$=\frac{\sec^2 t}{(1+\tan t)^2}$$

점 P는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 점 P의 x좌표가 $\frac{4}{5}$일 때의 y좌표는 $\left(\frac{4}{5}\right)^2+y^2=1$에서

$y^2=\frac{9}{25}$ $\quad\therefore y=\frac{3}{5}$ ($\because y>0$)

점 P의 x좌표가 $\frac{4}{5}$일 때의 시각을 t_1이라고 하면

$$\tan t_1=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$$

$\therefore \sec^2 t_1=1+\tan^2 t_1=1+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$

즉, 시각 $t=t_1$에서의 점 Q의 속도는

$$\left(-\frac{\frac{25}{16}}{\left(1+\frac{3}{4}\right)^2}, \frac{\frac{25}{16}}{\left(1+\frac{3}{4}\right)^2}\right)=\left(-\frac{25}{49}, \frac{25}{49}\right)$$

따라서 $a=-\frac{25}{49}$, $b=\frac{25}{49}$이므로

$b-a=\frac{25}{49}-\left(-\frac{25}{49}\right)=\frac{50}{49}$

답 ⑤

232

접근

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도는 $f'(t)$, $g'(t)$이므로 $y=f'(t)$, $y=g'(t)$의 그래프가 한 점에서 만나는 경우를 생각한다.

$f(t)=e^{2t}+1$에서 $\quad f'(t)=2e^{2t}$

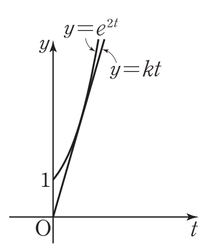
$g(t)=kt^2+2$에서 $\quad g'(t)=2kt$

두 점 P, Q의 속도가 같으려면 $f'(t)=g'(t)$이므로

$2e^{2t}=2kt$

$\therefore e^{2t}=kt$ $\quad$ …… ㉠

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각이 한 번뿐이려면 $t>0$에서 방정식 ㉠이 오직 하나의 실근을 가져야 하므로 두 함수 $y=e^{2t}$, $y=kt$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 접해야 한다.



$p(t)=e^{2t}$, $q(t)=kt$라고 하면

$p'(t)=2e^{2t}$, $q'(t)=k$

접점의 t좌표를 a라고 하면

$p(a)=q(a)$에서 $\quad e^{2a}=ka$ $\quad$ …… ㉡

$p'(a)=q'(a)$에서 $\quad 2e^{2a}=k$ $\quad$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$2ka=k$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because k\neq 0$)

$a=\frac{1}{2}$을 ㉢에 대입하면

$k=2e$

답 ②

233

시각 t에서의 점 P의 위치를 (x, y)라고 하면

$y=4xe^{x-2}$에서

$\frac{dy}{dt}=(4e^{x-2}+4xe^{x-2})\frac{dx}{dt}=4e^{x-2}(1+x)\frac{dx}{dt}$

이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$\left(\frac{dx}{dt}, 4e^{x-2}(1+x)\frac{dx}{dt}\right)$

점 P의 속력이 3이므로

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left\{4e^{x-2}(1+x)\frac{dx}{dt}\right\}^2}=3$

$\frac{dx}{dt}\sqrt{1+16e^{2x-4}(1+x)^2}=3$

$\therefore \frac{dx}{dt}=\frac{3}{\sqrt{1+16e^{2x-4}(1+x)^2}}$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발이 점 Q이므로 점 Q의 위치는 $(x, 0)$이고 속도는 $\left(\frac{dx}{dt}, 0\right)$이다.

점 Q의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+0}$$
$$=\frac{dx}{dt}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{1+16e^{2x-4}(1+x)^2}}$$

따라서 $x=2$일 때, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발 Q의 속력은

$\frac{3}{\sqrt{1+144}}=\frac{3}{\sqrt{145}}=\frac{3\sqrt{145}}{145}$

답 $\frac{3\sqrt{145}}{145}$

234

시각 t에서의 점 P의 위치를 (x, y)라고 하면 속도는 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$이고 속력은

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\frac{dx}{dt}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

이때 기울기가 2이고 원점을 지나는 직선 $y=2x$와 곡선 $y=\sqrt{2x}$의 원점이 아닌 교점의 x좌표는

$2x=\sqrt{2x}$, $4x^2=2x$, $2x(2x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ ($\because x\neq 0$)

즉, 교점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$이다.

$y=\sqrt{2x}$에서 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2x}}$이므로

$x=\frac{1}{2}$일 때 $\quad\frac{dy}{dx}=1$

점 P의 x좌표가 매초 $\sqrt{6}$의 속력으로 일정하게 변하므로

$\frac{dx}{dt}=\sqrt{6}$

따라서 직선 OP의 기울기가 2가 되는 순간 점 P의 속력은

$\frac{dx}{dt}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{6}\times\sqrt{1+1^2}=2\sqrt{3}$

답 $2\sqrt{3}$

상위 1% 도전 문제

235

$e^{x+h}f(x+h)-e^{x}f(x)\le h^2$에서

$g(x)=e^{x}f(x)$라고 하면

$g(x+h)-g(x)\le h^2$ …… ㉠

(i) $h<0$일 때

부등식 ㉠의 양변을 h로 나누면

$\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\ge h$

$\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\ge \lim\limits_{h\to 0-}h$

$\therefore \lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\ge 0$

(ii) $h>0$일 때

부등식 ㉠의 양변을 h로 나누면

$\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\le h$

$\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\le \lim\limits_{h\to 0+}h$

$\therefore \lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\le 0$

(i), (ii)에 의하여

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=0$

즉, $g'(x)=0$이므로 $g(x)=k$ (단, k는 상수)

$g(0)=f(0)=4$이므로 $k=4$

$\therefore g(x)=4$

$4=e^{x}f(x)$이므로 $f(x)=4e^{-x}$

따라서 $f'(x)=-4e^{-x}$이므로

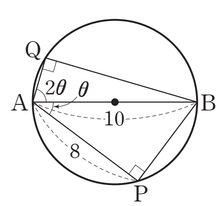
$f'(-3)=-4e^{3}$

답 $-4e^3$

236

$\angle PAB=\theta$로 놓으면

$\angle QAB=2\theta$



$\triangle ABP$에서 $\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$이고

$\overline{BP}=\sqrt{10^2-8^2}=6$이므로

$\sin\theta=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$, $\cos\theta=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{24}{25}$

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^2-1=\dfrac{7}{25}$

$\triangle ABQ$에서 $\angle AQB=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\overline{AQ}=\overline{AB}\cos 2\theta=10\times\dfrac{7}{25}=\dfrac{14}{5}$

$\overline{BQ}=\overline{AB}\sin 2\theta=10\times\dfrac{24}{25}=\dfrac{48}{5}$

$\therefore \overline{AQ}+\overline{BQ}=\dfrac{14}{5}+\dfrac{48}{5}=\dfrac{62}{5}$

따라서 $p=5$, $q=62$이므로

$p+q=5+62=67$

답 67

237

직선 OP의 기울기는 $\dfrac{a^t-1}{t}$이므로 점 $P(t, a^t-1)$을 지나고 직선 OP에 수직인 직선의 방정식은

$y-(a^t-1)=-\dfrac{t}{a^t-1}(x-t)$

$x=0$일 때 $y=a^t-1+\dfrac{t^2}{a^t-1}$

$\therefore f(t)=a^t-1+\dfrac{t^2}{a^t-1}$

$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{f(t)}{t}=\lim\limits_{t\to 0+}\left(\dfrac{a^t-1}{t}+\dfrac{t}{a^t-1}\right)=\ln a+\dfrac{1}{\ln a}$

$a>1$에서 $\ln a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\ln a+\dfrac{1}{\ln a}\ge 2\sqrt{\ln a\times\dfrac{1}{\ln a}}=2$

이때 등호는 $\ln a=\dfrac{1}{\ln a}$, $\ln a=1$일 때 성립하므로

$a=e$ $\therefore a=e$

두 곡선 $y=\alpha^x-1$과 $y=\beta^{x-2}-1$의 교점의 x좌표가 k이므로

$\alpha^k-1=\beta^{k-2}-1$, $e^k-1=\beta^{k-2}-1$

$e^k=\beta^{k-2}$

$\therefore \left(\dfrac{\beta}{e}\right)^k=\beta^2$ …… ㉠

(i) $1<\beta<e$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\beta}{e}\right)^n=0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\beta^{k+n}}{\alpha^k(\alpha^n+\beta^n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\beta^{k+n}}{e^k(e^n+\beta^n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\beta^k\left(\dfrac{\beta}{e}\right)^n}{e^k\left\{1+\left(\dfrac{\beta}{e}\right)^n\right\}}=0$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\beta=e$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\beta^{k+n}}{\alpha^k(\alpha^n+\beta^n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{k+n}}{e^k(e^n+e^n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{k+n}}{2e^{k+n}}=\dfrac{1}{2}$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $\beta>e$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{e}{\beta}\right)^n=0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\beta^{k+n}}{\alpha^k(\alpha^n+\beta^n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\beta^{k+n}}{e^k(e^n+\beta^n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\beta^k}{e^k\left\{\left(\dfrac{e}{\beta}\right)^n+1\right\}}$

$=\left(\dfrac{\beta}{e}\right)^k=\beta^2$ ($\because$ ㉠)

즉, $\beta^2=9e^2$이므로 $\beta=3e$ ($\because \beta>e$)

(i), (ii), (iii)에서 $\beta=3e$

$\therefore \dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{3e}{e}=3$

답 3

238

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$라고 하자.

ㄱ은 옳다.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 $x\ne 0$에서 $f(x)>0$이므로 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

즉, $f'(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기는 0이다.

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이므로

$h'(0)=g'(f(0))f'(0)=g'(0)\times 0=0$

즉, 함수 $y=h(x)$의 그래프 위의 점 $(0,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 0이다.

따라서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=h(x)$, 즉 $y=f(x)$와 $y=(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서의 접선의 기울기가 같다.

ㄴ도 옳다.

$g(x)=(x^2+2x+3)e^{-x}$에서

$g'(x)=(2x+2)e^{-x}-(x^2+2x+3)e^{-x}=-(x^2+1)e^{-x}$

이므로

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)=-[\{f(x)\}^2+1]e^{-f(x)}f'(x)$

이때 $\{f(x)\}^2+1>0$, $e^{-f(x)}>0$이고, 함수 $f(x)$가 감소하는 구간에서 $f'(x)<0$이므로 같은 구간에서 $h'(x)>0$이다.

따라서 함수 $f(x)$가 감소하는 구간에서 함수 $h(x)$, 즉 $(g\circ f)(x)$는 증가한다.

ㄷ도 옳다.

$p(x)=(g\circ f)(x)-f(x)=h(x)-f(x)$라고 하면

$$p'(x)=h'(x)-f'(x)$$
$$=-[\{f(x)\}^2+1]e^{-f(x)}f'(x)-f'(x) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 ㄱ에서 $f'(0)=h'(0)=0$이므로

$p'(0)=0$

또, ㄱ에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극솟값을 가지므로 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌고, ㉠에서 $[\{f(x)\}^2+1]e^{-f(x)}>0$이므로 $x=0$의 좌우에서 $p'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀐다.

즉, 함수 $p(x)$, 즉 $(g\circ f)(x)-f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

239

$\overline{PQ}=\sin\theta$, $\overline{OQ}=\cos\theta$이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta-\frac{1}{2}\theta$$

$$\begin{aligned}S'(\theta)&=\frac{1}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}(\cos^2\theta-1)-\frac{1}{2}\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta\\&=-\frac{1}{2}\sin^2\theta-\frac{1}{2}\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta\\&=\sin\theta(2\cos\theta-\sin\theta)\ \left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$S'(\theta)=0$에서 $\sin\theta\neq0$이므로 $2\cos\theta-\sin\theta=0$

$\therefore 2\cos\theta=\sin\theta$

$2\cos\theta=\sin\theta$를 만족시키는 θ의 값을 α라고 하면

$\tan\alpha=2\ \left(단,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

이때 $\tan\theta<2$이면 $S'(\theta)>0$이고, $\tan\theta>2$이면 $S'(\theta)<0$이므로 $S(\theta)$는 $\theta=\alpha$에서 극대이면서 최대이다.

$\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha=1+2^2=5$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan\alpha=2$에서 $\sin\alpha=2\cos\alpha$이므로 $S(\theta)$가 최대가 되는 선분 PQ의 길이는

$\overline{PQ}=\sin\alpha=2\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

답 ⑤

240

$f(x)=x^3\left(\frac{1}{3}-\ln x\right)$에서 $x>0$이고

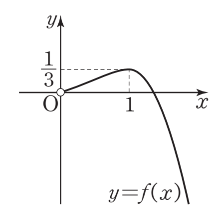
$f'(x)=3x^2\left(\frac{1}{3}-\ln x\right)+x^3\times\left(-\frac{1}{x}\right)=-3x^2\ln x$

$f'(x)=0$에서 $x=1\ (\because x>0)$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$

이때 $\lim_{x\to0+}f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) n이 홀수일 때

$(-1)^n=-1$이므로 방정식 $f(x)=-\frac{n}{15}$의 실근의 개수는

$a_n=1$

(ii) n이 짝수일 때

$(-1)^n=1$이므로 방정식 $f(x)=\frac{n}{15}$의 실근의 개수는

$a_n=\begin{cases}0 & (n=6,\ 8,\ \cdots)\\2 & (n=2,\ 4)\end{cases}$

(i), (ii)에서

$\sum_{n=1}^{20}a_n=\sum_{n=1}^{10}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{10}a_{2n}=10\times1+2\times2+8\times0=14$

답 14

미니 모의고사 - 1회

01

$\lim_{x\to0}(1+5x)^{\frac{2}{x}}+\lim_{x\to0}(1-2x)^{\frac{5}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\{(1+5x)^{\frac{1}{5x}}\}^{10}+\lim_{x\to0}\{(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\}^{-10}$

$=e^{10}+e^{-10}=e^{10}+\frac{1}{e^{10}}$

$\therefore k=10$

답 10

02

$\frac{2}{1+\sin\theta}+\frac{2}{1-\sin\theta}=\frac{4}{1-\sin^2\theta}=\frac{4}{\cos^2\theta}$

$=4\sec^2\theta=5$

$\therefore \sec^2\theta=\frac{5}{4}$

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로

$1+\tan^2\theta=\frac{5}{4}$ $\quad\therefore \tan^2\theta=\frac{1}{4}$

이때 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\tan\theta>0$이므로 $\tan\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \tan\theta+\cot\theta=\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

답 ⑤

03

$f(x)=\frac{x^6(x-1)^5(x-2)^2}{(x-3)^3(x-4)}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|f(x)|=6\ln|x|+5\ln|x-1|+2\ln|x-2|$
$-3\ln|x-3|-\ln|x-4|$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{6}{x}+\frac{5}{x-1}+\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x-3}-\frac{1}{x-4}$

$\therefore \frac{f'(6)}{f(6)}=1+1+\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}=1$

답 ①

04

ㄱ은 옳다.

$x=-3$, $x=-1$, $x=1$에서 $f'(x)=0$이고 x의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 열린구간 $(-4, 2)$에서 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 점은 3개이다.

ㄴ은 옳지 않다.

$f'(-2)$의 값이 존재하므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 미분가능하다.

ㄷ은 옳다.

$f''(0)=0$이고, $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 점 $(0, f(0))$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

05

$x=t^2+kt+1$, $y=kt^2-6t$에서

$\frac{dx}{dt}=2t+k$, $\frac{dy}{dt}=2kt-6$

$t=1$에서의 점 P의 속력이 $\sqrt{65}$이므로

$\sqrt{(2+k)^2+(2k-6)^2}=\sqrt{65}$

$(2+k)^2+(2k-6)^2=65$

$4+4k+k^2+4k^2-24k+36=65$

$5k^2-20k-25=0$, $k^2-4k-5=0$

$(k+1)(k-5)=0$ $\quad\therefore k=5$ $(\because k>0)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=2$, $\frac{d^2y}{dt^2}=2k=10$

따라서 $t=1$에서 점 P의 가속도는 $(2, 10)$이므로 가속도의 크기는 $\sqrt{2^2+10^2}=2\sqrt{26}$

답 $2\sqrt{26}$

06

$\overline{PA}=\overline{PQ}=6$, $\overline{PB}=\overline{PR}=2$이므로

$A(6\cos\theta, 2+6\sin\theta)$, $B(-2\cos\theta, 2-2\sin\theta)$

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\{(2+6\sin\theta)+(2-2\sin\theta)\}\times8\cos\theta$

$=16\cos\theta(1+\sin\theta)$

$\therefore \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{S(\theta)}{\sqrt{1-\sin\theta}}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{16\cos\theta(1+\sin\theta)}{\sqrt{1-\sin\theta}}$

$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{16\cos\theta(1+\sin\theta)\sqrt{1+\sin\theta}}{\sqrt{1-\sin\theta}\sqrt{1+\sin\theta}}$

$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{16\cos\theta(1+\sin\theta)\sqrt{1+\sin\theta}}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$

$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{16\cos\theta(1+\sin\theta)\sqrt{1+\sin\theta}}{\sqrt{\cos^2\theta}}$

$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\{16(1+\sin\theta)\sqrt{1+\sin\theta}\}$

$=16\times2\times\sqrt{2}=32\sqrt{2}$

답 $32\sqrt{2}$

07

$x=t+t^2+t^3+\cdots+t^n$에서

$\frac{dx}{dt}=1+2t+3t^2+\cdots+nt^{n-1}$

$y=t+\frac{3}{2}t^2+\frac{5}{3}t^3+\cdots+\frac{2n-1}{n}t^n$에서

$\frac{dy}{dt}=1+3t+5t^2+\cdots+(2n-1)t^{n-1}$

$\therefore \frac{dx}{dy}=\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}=\frac{1+2t+3t^2+\cdots+nt^{n-1}}{1+3t+5t^2+\cdots+(2n-1)t^{n-1}}$

$g(n)=\lim_{t\to1}\frac{dx}{dy}$

$=\lim_{t\to1}\frac{1+2t+3t^2+\cdots+nt^{n-1}}{1+3t+5t^2+\cdots+(2n-1)t^{n-1}}$

$=\frac{1+2+3+\cdots+n}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}=\frac{\sum_{k=1}^{n}k}{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}$

$$=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{2\times\frac{n(n+1)}{2}-n}=\frac{n+1}{2n}$$

$\therefore g(2)=\frac{3}{4}$

답 $\frac{3}{4}$

08

$f(x)=e^x+\sin x$라고 하면

$f'(x)=e^x+\cos x$

곡선 위의 점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=1+1=2$

이므로 접선의 방정식은

$y=2x+1$

직선 $y=2x+1$, 즉 $2x-y+1=0$이 원 $(x-2)^2+y^2=r^2$과 접하므로 직선 $2x-y+1=0$과 원의 중심 $(2, 0)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $|r|$와 같다.

$|r|=\frac{|2\times2-0+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}\qquad\therefore r^2=(\sqrt{5})^2=5$

답 ①

09

ㄱ은 옳다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}g(x)&=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{\sin x}\\&=\lim_{x\to0+}\left\{\frac{x}{\sin x}\times\frac{f(x)}{x}\right\}\\&=\lim_{x\to0+}\left\{\frac{x}{\sin x}\times\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right\}\\&=1\times f'(0)\\&=f'(0)=0\ (\because \text{조건 (나)})\end{aligned}$$

ㄴ도 옳다.

$h(x)=f'(x)\sin x-f(x)\cos x$로 놓으면

$$\begin{aligned}h'(x)&=f''(x)\sin x+f'(x)\cos x-f'(x)\cos x+f(x)\sin x\\&=\{f''(x)+f(x)\}\sin x\end{aligned}$$

조건 (다)에서 $0<x<\pi$일 때 $f''(x)+f(x)>0$이고 $\sin x>0$이므로 $h'(x)>0$

즉, $h(x)$는 $0<x<\pi$에서 증가하고 $h(0)=0$이므로 $0<x<\pi$에서 $h(x)>0$이다.

따라서 $0<x<\pi$에서 $f'(x)\sin x>f(x)\cos x$이다.

ㄷ도 옳다.

$g'(x)=\frac{f'(x)\sin x-f(x)\cos x}{\sin^2 x}$

$0<x<\pi$에서 $\sin^2 x>0$이고, ㄴ에서

$h(x)=f'(x)\sin x-f(x)\cos x>0$이므로

$g'(x)=\frac{h(x)}{\sin^2 x}>0$

즉, $g(x)$는 $0<x<\pi$에서 증가하므로 $0<x_1<x_2<\pi$인 임의의 x_1, x_2에 대하여 $g(x_1)<g(x_2)$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

10

$\frac{g(x)}{f(x)}+\frac{4f(x)}{g(x)}=4$에서

$\{g(x)\}^2+4\{f(x)\}^2=4f(x)g(x)$

$4\{f(x)\}^2-4f(x)g(x)+\{g(x)\}^2=0$

$\{2f(x)-g(x)\}^2=0$

$\therefore 2f(x)=g(x)$ …… ㉠

방정식 ㉠의 실근이 존재하기 위해서는 두 함수 $2f(x)=4kx$, $g(x)=\ln x$의 그래프가 만나야 하고 이때 실수 k가 최대가 되기 위해서는 두 함수의 그래프가 접해야 한다.

접점의 좌표를 $(t, \ln t)$라고 하면 $g'(x)=\frac{1}{x}$이므로 접선의 기울기는 $g'(t)=\frac{1}{t}$이고 접선의 방정식은

$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$

이 직선이 원점을 지나야 하므로

$-\ln t=-1$, $\ln t=1\qquad\therefore t=e$

접점의 좌표는 $(e, 1)$이므로 $2f(x)=4kx$에서

$4ke=1\qquad\therefore k=\frac{1}{4e}$

따라서 실수 k의 최댓값은 $\frac{1}{4e}$이다.

답 $\frac{1}{4e}$

미니 모의고사 - 2회

01

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)$

$$\lim_{x\to0-}\frac{7x^2+3}{x-3}=\lim_{x\to0+}\frac{e^{2x}-1}{ax}=-1$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{e^{2x}-1}{ax}=\lim_{x\to0+}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{2}{a}\right)=\frac{2}{a}$$

따라서 $\frac{2}{a}=-1$이므로 $a=-2$

답 ②

02

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=6$에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)=ax^2\ln x+bx$에서 $f(1)=b=0$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=6$$

$f(x)=ax^2\ln x$에서

$$f'(x)=2ax\ln x+ax^2\times\frac{1}{x}=2ax\ln x+ax$$

이므로 $f'(1)=a=6$

$f'(x)=12x\ln x+6x$이므로

$f'(3)=36\ln3+18$

$\therefore f'(3)-3a=(36\ln3+18)-3\times6=36\ln3$

답 $36\ln3$

03

$ax-y+2=0$, $x-4y+3=0$에서

$y=ax+2$, $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$

두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 하면

$\tan\alpha=a$, $\tan\beta=\frac{1}{4}$

두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan\frac{\pi}{4}$에서

$$\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=1$$

$$\frac{a-\frac{1}{4}}{1+a\times\frac{1}{4}}=\pm1$$

$a-\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4}a$ 또는 $a-\frac{1}{4}=-1-\frac{1}{4}a$

$\frac{3}{4}a=\frac{5}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}a=-\frac{3}{4}$

$\therefore a=\frac{5}{3}$ 또는 $a=-\frac{3}{5}$

따라서 모든 상수 a의 값의 곱은

$\frac{5}{3}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-1$

답 -1

04

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=x^2+15x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=2x+15$

이때 $g'(x)=\frac{3(x^2+2)-3x\times2x}{(x^2+2)^2}=\frac{-3x^2+6}{(x^2+2)^2}$이므로

$$f'\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)\times\frac{-3x^2+6}{(x^2+2)^2}=2x+15$$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)\times\frac{3}{2}=15$ $\therefore f'(0)=10$

답 ②

05

$\sin xy=\sqrt{2}x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$y\cos xy+x\cos xy\frac{dy}{dx}=\sqrt{2}$$

$$\cos xy\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=\sqrt{2}$$

$$y+x\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{2}}{\cos xy},\ x\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{2}}{\cos xy}-y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{2}}{x\cos xy}-\frac{y}{x}$$

따라서 곡선 위의 점 $\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}\right)$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}}-\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}}=4-\pi$$

답 ④

06

$g(t)=\frac{1}{2}t^2$이고 $f(t)+g(t)\le\frac{1}{2}|t(e^t-1)|$이므로

$f(t)\le\frac{1}{2}|t(e^t-1)|-g(t)$

$$0\le\frac{f(t)}{g(t)}\le\frac{\frac{1}{2}|t(e^t-1)|}{g(t)}-1$$

$$\therefore \lim_{t\to0+}0\le\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{g(t)}\le\lim_{t\to0+}\left\{\frac{\frac{1}{2}|t(e^t-1)|}{g(t)}-1\right\}$$

$\lim_{t\to0+}0=0$이고,

$$\lim_{t\to0+}\left\{\frac{\frac{1}{2}|t(e^t-1)|}{g(t)}-1\right\}=\lim_{t\to0+}\left\{\left|\frac{t(e^t-1)}{t^2}\right|-1\right\}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left\{\left|\frac{e^t-1}{t}\right|-1\right\}$$
$$=1-1=0$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{g(t)}=0$$

답 ①

07

$(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(1)=5$

$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$이고

$g'(x)=e^{\sin x}\cos x$이므로

$(f\circ g)'(0)=f'(g(0))g'(0)=f'(1)\times 1=f'(1)=2$

다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

$R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=a+b=5$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면

$2+b=5 \qquad \therefore b=3$

따라서 $R(x)=2x+3$이므로

$R(4)=11$

답 11

08

$f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{3+x}{3-x}}=\dfrac{1}{2}\{\ln(3+x)-\ln(3-x)\}$이므로

$f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3+x}+\dfrac{1}{3-x}\right)=\dfrac{3}{9-x^2}$

$g(0)=a$라고 하면 $f(a)=0$이므로 $\ln\sqrt{\dfrac{3+a}{3-a}}=0$

$\sqrt{\dfrac{3+a}{3-a}}=1$, $\dfrac{3+a}{3-a}=1$

$3+a=3-a \qquad \therefore a=0$

즉, $g(0)=0$이므로

$g'(0)=\dfrac{1}{f'(g(0))}=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{\frac{3}{9}}=3$

답 ⑤

09

$f(x)=\cos(\ln x)$에서

$f'(x)=-\sin(\ln x)\times\dfrac{1}{x}$

ㄱ은 옳다.

$1<x<e^{\frac{\pi}{2}}$에서 $0<\ln x<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $-1<-\sin(\ln x)<0$

즉, $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(1, e^{\frac{\pi}{2}})$에서 감소한다.

ㄴ도 옳다.

$f''(x)=-\cos(\ln x)\times\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{x}-\sin(\ln x)\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=-\dfrac{1}{x^2}\{\cos(\ln x)-\sin(\ln x)\}$

$\therefore f''(e^{\pi})=-\dfrac{1}{e^{2\pi}}(\cos\pi-\sin\pi)=\dfrac{1}{e^{2\pi}}>0$

ㄷ도 옳다.

$f'(1)=-\sin 0\times 1=0$,

$f''(1)=-(\cos 0-\sin 0)=-1<0$

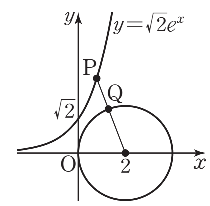
이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

10

곡선 $y=\sqrt{2}e^x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, \sqrt{2}e^t)$과 점 Q 사이의 거리의 최솟값은 점 P에서 원의 중심 $(2, 0)$까지의 거리에서 반지름의 길이 2를 뺀 것과 같다.



$f(t)=\sqrt{(t-2)^2+2e^{2t}}-2$라고 하면

$\sqrt{(t-2)^2+(\sqrt{2}e^t-0)^2}$
$=\sqrt{(t-2)^2+2e^{2t}}$

$f(t)$의 최솟값이 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값이다.

$g(t)=(t-2)^2+2e^{2t}$이라고 하면

$g'(t)=2(t-2)+4e^{2t}$

$g'(t)=0$에서 $t=0$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$
$g(t)$	↘	6	↗

따라서 $g(t)$의 최솟값은 $g(0)=6$이므로 $f(t)$의 최솟값은 $\sqrt{6}-2$이다.

답 ③

Ⅲ. 적분법

06 여러 가지 적분법

001

$f(x)=\int \frac{1+x^2}{x}dx=\int\left(\frac{1}{x}+x\right)dx$

$=\ln|x|+\frac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수이다.)

$f(e)=\frac{1}{2}e^2$이므로 $1+\frac{1}{2}e^2+C=\frac{1}{2}e^2$

$\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=\ln|x|+\frac{1}{2}x^2-1$이므로

$f(1)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

답 ③

풍쌤 비법

유리함수의 적분

(1) (분자의 차수)≥(분모의 차수)인 경우

➡ 분자를 분모로 나누어 몫과 나머지 꼴로 나타내어 적분한다.

(2) (분자의 차수)<(분모의 차수)인 경우

➡ 분모가 인수분해되면 부분분수로 변형하여 적분한다.

002

$\int_1^4 f(x)dx=\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx=\int_1^4 x^{-\frac{3}{2}}dx$

$=\left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^4=\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^4$

$=-1-(-2)=1$

답 1

참고

지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

(1) $a^xa^y=a^{x+y}$ (2) $a^x\div a^y=a^{x-y}$

(3) $(a^x)^y=a^{xy}$ (4) $(ab)^x=a^xb^x$

003

$\int_0^1 \frac{1}{x^2+5x+6}dx=\int_0^1 \frac{1}{(x+2)(x+3)}dx$

$=\int_0^1\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx$

$=\Big[\ln|x+2|-\ln|x+3|\Big]_0^1$

$=(\ln 3-\ln 4)-(\ln 2-\ln 3)$

$=\ln 3-2\ln 2-\ln 2+\ln 3$

$=2\ln 3-3\ln 2$

$=\ln 3^2-\ln 2^3$

$=\ln\frac{3^2}{2^3}=\ln\frac{9}{8}$

따라서 $p=8$, $q=9$이므로

$p+q=8+9=17$

답 ④

004

$f'(x)=\begin{cases}2x-1 & (x<1)\\ 6\sqrt{x} & (x>1)\end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases}x^2-x+C_1 & (x<1)\\ 4x^{\frac{3}{2}}+C_2 & (x>1)\end{cases}$ (단, C_1, C_2는 적분상수이다.)

이때 $f(4)=30$이므로

$4\times 4^{\frac{3}{2}}+C_2=30$, $32+C_2=30$

$\therefore C_2=-2$

그런데 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이어야 한다.

즉, $\underbrace{\lim_{x\to 1-}(x^2-x+C_1)=\lim_{x\to 1+}(4x^{\frac{3}{2}}-2)=f(1)}_{\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)}$에서

$C_1=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+2 & (x<1)\\ 4x^{\frac{3}{2}}-2 & (x\ge 1)\end{cases}$이므로

$f(-1)=1-(-1)+2=4$

답 ③

참고

함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

005

$\left|\frac{4}{x}-2\right|=\begin{cases}\frac{4}{x}-2 & (1\le x\le 2)\\ -\frac{4}{x}+2 & (2<x\le 4)\end{cases}$이므로

$\int_1^4\left|\frac{4}{x}-2\right|dx$

$=\int_1^2\left(\frac{4}{x}-2\right)dx+\int_2^4\left(-\frac{4}{x}+2\right)dx$

$=\Big[4\ln x-2x\Big]_1^2+\Big[-4\ln x+2x\Big]_2^4$

$=4\ln 2-4-(-2)+\{-4\ln 4+8-(-4\ln 2+4)\}$

$=4\ln 2-2+(-4\ln 4+4\ln 2+4)$

$=-4\ln 4+8\ln 2+2$

$=-8\ln 2+8\ln 2+2=2$

답 ⑤

006

$$\int(2^x-1)(4^x+2^x+1)dx$$
$$=\int(2^x-1)(2^{2x}+2^x+1)dx$$
$$=\int(2^{3x}-1)dx=\int(8^x-1)dx$$
$$=\frac{8^x}{\ln 8}-x+C$$
$$=\frac{1}{3\ln 2}\times 2^{3x}-x+C$$ (단, C는 적분상수이다.)

따라서 $a=\frac{1}{3\ln 2}$, $b=3$, $c=-1$이므로

$$a+b+c=\frac{1}{3\ln 2}+3+(-1)$$
$$=\frac{1}{3\ln 2}+2$$

답 ⑤

007

$a>1$이므로

$$\int_1^a\left(2^x-\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}-\ln x\right]_1^a$$
$$=\frac{2^a}{\ln 2}-\ln a-\frac{2}{\ln 2}$$
$$=\frac{2^a-2}{\ln 2}-\ln a$$

즉, $\frac{2^a-2}{\ln 2}-\ln a=\frac{2}{\ln 2}-\ln 2$이므로 $a=2$

답 2

008

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$$f'(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}$$
$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}dx$$
$$=\int\frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x-1}dx$$
$$=\int(e^x+1)dx=e^x+x+C$$ (단, C는 적분상수이다.)

$f(0)=0$이므로

$1+C=0$ $\quad\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=e^x+x-1$이므로

$f(1)=e+1-1=e$

답 e

009

$$\int_{\ln 2}^{\ln 4}f(x)dx+\int_{\ln 4}^{\ln 6}f(x)dx-\int_{\ln 5}^{\ln 6}f(x)dx$$
$$=\int_{\ln 2}^{\ln 4}e^{2x}dx+\int_{\ln 4}^{\ln 6}e^{2x}dx-\int_{\ln 5}^{\ln 6}e^{2x}dx$$
$$=\int_{\ln 2}^{\ln 6}e^{2x}dx-\int_{\ln 5}^{\ln 6}e^{2x}dx$$
$$=\int_{\ln 2}^{\ln 6}e^{2x}dx+\int_{\ln 6}^{\ln 5}e^{2x}dx$$
$$=\int_{\ln 2}^{\ln 5}e^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{\ln 2}^{\ln 5}$$
$$=\frac{1}{2}e^{2\ln 5}-\frac{1}{2}e^{2\ln 2}=\frac{25}{2}-2=\frac{21}{2}$$

$\frac{1}{2}e^{2\ln 5}=\frac{1}{2}e^{\ln 5^2}=\frac{1}{2}\times 25^{\ln e}=\frac{25}{2}$

$\frac{1}{2}e^{2\ln 2}=\frac{1}{2}e^{\ln 2^2}=\frac{1}{2}\times 4^{\ln e}=2$

답 $\frac{21}{2}$

풍쌤 비법

지수함수의 적분 (단, C는 적분상수)

(1) $\int e^{px}dx=\frac{1}{p}e^{px}+C$ (단, $p\neq 0$)

(2) $\int a^{px}dx=\int(a^p)^x dx=\frac{a^{px}}{\ln a^p}+C=\frac{a^{px}}{p\ln a}+C$

(단, $a>0$, $a\neq 1$, $p\neq 0$)

010

접근

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능함을 이용하여 $x\geq 1$에서의 $f(x)$의 식을 구한다.

$$f'(x)=\begin{cases}e^{x-1} & (x<1)\\ \frac{1}{x} & (x>1)\end{cases}$$ 에서

$$f(x)=\begin{cases}e^{x-1}+C_1 & (x<1)\\ \ln x+C_2 & (x>1)\end{cases}$$ (단, C_1, C_2는 적분상수이다.)

이때 $f(0)=\frac{1}{e}-e^2$이므로

$\frac{1}{e}+C_1=\frac{1}{e}-e^2$ $\quad\therefore C_1=-e^2$

그런데 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이어야 한다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 1-}(e^{x-1}-e^2)=\lim\limits_{x\to 1+}(\ln x+C_2)=f(1)$에서

$1-e^2=C_2$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}e^{x-1}-e^2 & (x<1)\\ \ln x+1-e^2 & (x\geq 1)\end{cases}$$

$f(a)=3-e^2$에서 $a\geq 1$이므로

$\ln a+1-e^2=3-e^2$, $\ln a=2$

$\therefore a=e^2$

답 ④

참고

$a<1$이면 $f(a)=3-e^2$에서

$e^{a-1}-e^2=3-e^2$, $e^{a-1}=3$

$a-1=\ln 3$ $\quad\therefore a=1+\ln 3$

$1+\ln 3>1$이므로 $a<1$이라는 조건에 모순이다.

따라서 $a\geq 1$이다.

011

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2-\sin x)dx$$
$$=2x+\cos x+C$$ (단, C는 적분상수이다.)

$f(0)=-1$이므로 $1+C=-1$ $\quad\therefore C=-2$

따라서 $f(x)=2x+\cos x-2$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}-2=\frac{2}{3}\pi-\frac{3}{2}$$

즉, $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{3}{2}$이므로

$$ab=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-1$$

답 ②

012

두 함수 $y=\cos x$, $y=k$의 그래프는 y축에 대칭이고, 두 함수 $y=x^3$, $y=\sin x$의 그래프는 원점에 대칭이다.
따라서 두 함수 $y=x^3\cos x$, $y=\sin x\cos x$의 그래프는 원점에 대칭이다. 즉,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^3\cos x\,dx=0,\ \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cos x\,dx=0$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(x^3+\sin x+k)\cos x\,dx &=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(x^3\cos x+\sin x\cos x+k\cos x)dx\\ &=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}k\cos x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}k\cos x\,dx\\ &=2\Big[k\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=2k\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &=k\sqrt{2}=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

$\therefore k=2$

답 ④

풍쌤 비법

우함수, 기함수의 정적분

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-a, a]$에서 연속일 때

(1) $f(x)$가 우함수, 즉 $f(-x)=f(x)$이면
└ 함수의 그래프가 y축에 대하여 대칭

➡ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

(2) $f(x)$가 기함수, 즉 $f(-x)=-f(x)$이면
└ 함수의 그래프가 원점에 대하여 대칭

➡ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

013

$$|\cos x|=\begin{cases}\cos x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\\ -\cos x & \left(\frac{\pi}{2}<x\le\pi\right)\end{cases}$$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}|\cos x|dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx\\ &=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\ &=1-(-1)=2\end{aligned}$$

답 ④

다른 풀이

닫힌구간 $[0, \pi]$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$에 대하여 대칭이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x|dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\cos x|dx$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^{\pi}|\cos x|dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x|dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\cos x|dx\\ &=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\\ &=2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &=2\times1=2\end{aligned}$$

014

$2x+3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$이므로

$$\begin{aligned}\int(2x+3)^5dx=\int t^5\times\frac{1}{2}dt&=\int\frac{1}{2}t^5dt\\ &=\frac{1}{12}t^6+C\\ &=\frac{1}{12}(2x+3)^6+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수이다.})\end{aligned}$$

따라서 $a=12$, $b=6$이므로

$a-b=12-6=6$

답 ②

015

$(x^2+x+3)'=2x+1$이므로

$$\begin{aligned}f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{2x+1}{x^2+x+3}dx&=\int\frac{(x^2+x+3)'}{x^2+x+3}dx\\ &=\ln(x^2+x+3)+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수이다.})\end{aligned}$$

$x^2+x+3>0$

$f(0)=1+\ln3$이므로 $\ln3+C=1+\ln3$

$\therefore C=1$

따라서 $f(x)=\ln(x^2+x+3)+1$이므로

$f(1)=\ln5+1$

답 ④

016

$$\begin{aligned}f(x)=\int\cos^3x\,dx&=\int\cos^2x\times\cos x\,dx\\ &=\int(1-\sin^2x)\cos x\,dx\end{aligned}$$

└ $\sin^2x+\cos^2x=1$

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$\begin{aligned}f(x)=\int(1-\sin^2x)\cos x\,dx&=\int(1-t^2)dt\\ &=t-\frac{1}{3}t^3+C\\ &=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수이다.})\end{aligned}$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로 $1-\frac{1}{3}+C=0$ $\quad\therefore C=-\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x-\frac{2}{3}$이므로

$f(\pi)=-\frac{2}{3}$

답 $-\frac{2}{3}$

017

$1+x^2=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$이므로

$$f(x)=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\times 2xdx$$
$$=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=t^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=\sqrt{t}+C$$
$$=\sqrt{1+x^2}+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수이다.})$$

$f(0)=1$이므로

$1+C=1 \qquad \therefore C=0$

$\therefore f(x)=\sqrt{1+x^2}$

$f(x)-1=0$에서

$\sqrt{1+x^2}-1=0,\ \sqrt{1+x^2}=1$

$1+x^2=1,\ x^2=0 \qquad \therefore x=0$

따라서 방정식 $f(x)-1=0$의 실근의 개수는 1이다.

답 ②

018

$2+\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2+\sin x)'}{2+\sin x}dx$$
$$=\Big[\ln(2+\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}$

답 ③

019

$3x-2=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=3$이고

$x=1$일 때 $t=1$, $x=5$일 때 $t=13$이므로

$$\int_1^5 f(3x-2)dx=\int_1^{13}\frac{f(t)}{3}dt=\frac{1}{3}\int_1^{13}f(t)dt$$
$$=\frac{1}{3}\times 9=3$$

답 ③

020

$x^2=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=3$일 때 $t=9$이므로

$$\int_0^3 2xf(x^2)dx=\int_0^9 f(t)dt=\int_0^9 f(x)dx$$
$$=\int_0^5 f(x)dx+\int_5^9 f(x)dx$$
$$=24-8=16$$

답 16

021

$u(x)=x,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=e^x$

$$\therefore \int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx$$
$$=xe^x-e^x+C$$
$$=(x-1)e^x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수이다.})$$

따라서 $a=1,\ b=-1$이므로

$ab=1\times(-1)=-1$

답 ②

022

$u(x)=x,\ v'(x)=\cos 2x$로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x$

$$\therefore f(x)=\int x\cos 2x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x\sin 2x-\int\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$$
$$=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수이다.})$$

$f(\pi)=\dfrac{5}{4}$이므로

$\dfrac{1}{4}+C=\dfrac{5}{4} \qquad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}x\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x+1$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{3}{4}$

답 $\dfrac{3}{4}$

023

$\sin(\pi+x)=-\sin x$이므로

$$\int_0^{\pi}x\sin(\pi+x)dx=\int_0^{\pi}(-x\sin x)dx$$

$u(x)=-x,\ v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=-1,\ v(x)=-\cos x$

$$\therefore \int_0^{\pi}x\sin(\pi+x)dx=\int_0^{\pi}(-x\sin x)dx$$
$$=\Big[x\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos x\,dx$$
$$=\pi\cos\pi-\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}$$
$$=-\pi$$

답 ①

참고

$\pi\pm\theta$의 삼각함수

(1) $\sin(\pi\pm\theta)=\mp\sin\theta$ (복부호동순)

(2) $\cos(\pi\pm\theta)=-\cos\theta$

(3) $\tan(\pi\pm\theta)=\pm\tan\theta$ (복부호동순)

024

$f(x)=(\ln x)^2$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=2\ln x\times\frac{1}{x}=\frac{2}{x}\ln x$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$

$$\therefore \int x(\ln x)^2dx=\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\int\frac{2}{x}\ln x\times\frac{1}{2}x^2dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\int x\ln x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int x\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=x$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=\frac{1}{2}x^2$

$$\therefore \int x\ln x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{x}\times\frac{1}{2}x^2dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C_1 \text{ (단, } C_1\text{은 적분상수이다.)} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int x(\ln x)^2dx=\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C_1\right)$$
$$=\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+C$$

(단, C는 적분상수이다.)

답 $\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+C$ (단, C는 적분상수이다.)

025

이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1, -1)$이므로

$g(x)=a(x-1)^2-1\,(a>0)$로 놓을 수 있다.

함수 $y=g(x)$의 그래프가 원점을 지나므로 $g(0)=0$에서

$a-1=0 \qquad \therefore a=1$

$\therefore g(x)=(x-1)^2-1$

$$\therefore \int_1^e\sqrt{g(\ln x)+1}\,dx=\int_1^e\sqrt{(\ln x-1)^2-1+1}\,dx$$
$$=\int_1^e\sqrt{(\ln x-1)^2}\,dx$$
$$=\int_1^e|\ln x-1|\,dx$$

└ $1\le x\le e$에서 $\ln x-1\le 0$

$$=\int_1^e(1-\ln x)dx$$
$$=\Big[x\Big]_1^e-\int_1^e\ln x\,dx$$

└ $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓고 부분적분법을 이용한다.

$$=e-1-\left\{\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e 1dx\right\}$$
$$=e-1-\left\{e-\Big[x\Big]_1^e\right\}=e-1-\{e-(e-1)\}$$
$$=e-2$$

답 ①

026

$f(x)=e^{x^2}+\int_0^1 tf(t)dt$에서 $\int_0^1 tf(t)dt=k$ (k는 상수)라고 하면

$f(x)=e^{x^2}+k$

$$\therefore \int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1 t(e^{t^2}+k)dt=\int_0^1 te^{t^2}dt+\int_0^1 kt\,dt$$

$\int_0^1 te^{t^2}dt$에서 $t^2=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=2t$이고

$t=0$일 때 $s=0$, $t=1$일 때 $s=1$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{2}e^s ds=\left[\frac{1}{2}e^s\right]_0^1=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 kt\,dt=\left[\frac{1}{2}kt^2\right]_0^1=\frac{1}{2}k$$

$$\therefore \int_0^1 tf(t)dt=\left(\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}k=k$$

$\frac{1}{2}k=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2} \qquad \therefore k=e-1$

따라서 $f(x)=e^{x^2}+e-1$이므로 $f(1)=e+e-1=2e-1$

답 ④

풍쌤 비법

정적분을 포함한 등식

(1) 적분 구간이 상수로 주어진 경우: $A=B+\int_a^b f(t)dt$

➡ 정적분은 상수이므로 $\int_a^b f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓는다.

(2) 적분 구간이 변수로 주어진 경우: $A=B+\int_a^x f(t)dt$

➡ (i) 양변을 x에 대하여 미분한다.

(ii) 양변에 $x=a$를 대입한다.

027

$\int_0^x f(t)dt=\sin 2x+ax^2+a$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$a=0$

$\int_0^x f(t)dt=\sin 2x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2\cos 2x$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\pi=-2$

답 -2

028

$\int_a^x f(t)dt=(x+a-4)e^x$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=(2a-4)e^a \qquad \therefore a=2\ (\because e^a>0)$

즉, $\int_2^x f(t)dt=(x-2)e^x$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=e^x+(x-2)e^x=(x-1)e^x$

$\therefore f(a)=f(2)=e^2$

답 ②

029

$F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^3-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x^3-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\times\frac{1}{x^2+x+1}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}F'(1)=\frac{1}{3}f(1)=\frac{e}{3}$$

답 ①

030

접근

주어진 등식의 양변을 미분하여 $f'(x)$를 구한 후 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 조사한다.

$f(x)=\int_0^x \frac{2t+1}{t^2+t+1}dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

$f'(x)=0$에서 $2x+1=0$ $\quad \therefore x=-\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\int_0^{-\frac{1}{2}} \frac{2t+1}{t^2+t+1}dt=-\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{(t^2+t+1)'}{t^2+t+1}dt$$
$$=-\Big[\ln(t^2+t+1)\Big]_{-\frac{1}{2}}^0=\ln\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\right)$$
$$=\ln\frac{3}{4}$$

답 ③

031

$$f'(x)=\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1}$$
$$=x-\sqrt{x}$$

이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (x-\sqrt{x})dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C_1 \text{ (단, } C_1\text{은 적분상수이다.)}$$

$$g'(x)=\frac{1-x}{\sqrt{x}+1}=\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}+1}=1-\sqrt{x}$$

이므로

$$g(x)=\int g'(x)dx=\int (1-\sqrt{x})dx$$
$$=x-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C_2 \text{ (단, } C_2\text{는 적분상수이다.)}$$

$f(1)=g(1)$이므로 $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+C_1=1-\frac{2}{3}+C_2$

$\therefore C_1=C_2+\frac{1}{2}$

$$\therefore f(2)-g(2)=\left(2-\frac{4\sqrt{2}}{3}+C_1\right)-\left(2-\frac{4\sqrt{2}}{3}+C_2\right)$$
$$=C_1-C_2=\frac{1}{2}$$

답 ②

다른 풀이

$h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)=\frac{(x\sqrt{x}-\sqrt{x})-(1-x)}{\sqrt{x}+1}$$
$$=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}=x-1$$

이므로

$$h(x)=\int h'(x)dx=\int (x-1)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2-x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수이다.)}$$

$h(1)=f(1)-g(1)=0$이므로

$\frac{1}{2}-1+C=0$ $\quad \therefore C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$이므로

$f(2)-g(2)=2-2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

032

$F(x)=xf(x)+\ln x+\frac{3}{x}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}$

$xf'(x)=-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}$ $\quad \therefore f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}$

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)dx$$
$$=\int(-x^{-2}+3x^{-3})dx=x^{-1}-\frac{3}{2}x^{-2}+C$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{3}{2x^2}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수이다.)}$$

$f(1)=0$이므로 $1-\frac{3}{2}+C=0$ $\quad \therefore C=\frac{1}{2}$

즉, $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{3}{2x^2}+\frac{1}{2}$이므로 방정식 $f(x)=0$에서

$\frac{1}{x}-\frac{3}{2x^2}+\frac{1}{2}=0$, $\frac{2x-3+x^2}{2x^2}=0$

$\therefore x^2+2x-3=0$ $(\because x^2>0)$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실근의 합은 -2이다.

답 -2

033

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(\frac{1}{x}+2x\right)dx$$
$$=\ln x+x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수이다.)}$$

또, $\lim_{x\to e}\frac{f(x)}{x-e}=1$에서 $x\to e$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to e}f(x)=0$이므로 $f(e)=0$

$1+e^2+C=0$ $\quad \therefore C=-1-e^2$

따라서 $f(x)=\ln x+x^2-1-e^2$이므로

$f(1)=1-1-e^2=-e^2$

답 ①

참고

미정계수의 결정

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 상수)일 때

(1) $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$

(2) $\lim_{x\to a}f(x)=0$이고 $\alpha\neq 0$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$

034

$2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ ······ ㉠

㉠에 x 대신 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$2f\left(\frac{1}{x}\right)+x^2f(x)=x+x^2$

위의 식의 양변을 $2x^2$으로 나누면 — $2x^2\neq0$이므로 양변을 $2x^2$으로 나눌 수 있다.

$\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}$ ······ ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$\frac{3}{2}f(x)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3x}+\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)dx&=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{3x}+\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3}\right)dx\\&=\left[\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{2}{3x}-\frac{1}{3}x\right]_{\frac{1}{2}}^{2}\\&=\left(\frac{1}{3}\ln2-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}-\frac{4}{3}-\frac{1}{6}\right)\\&=\frac{2\ln2}{3}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ②

035

$f'(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{x^2}$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int f'(x)dx=\int\frac{\sqrt{x}+1}{x^2}dx\\&=\int(x^{-\frac{3}{2}}+x^{-2})dx\\&=\int x^{-\frac{3}{2}}dx+\int x^{-2}dx\\&=-2x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1}+C\\&=-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+C\end{aligned}$$ (단, C는 적분상수이다.)

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, -3)$을 지나므로 $f(1)=-3$에서

$-2-1+C=-3$ $\quad\therefore C=0$

$\therefore f(x)=-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$

ㄱ은 옳다.

$f(4)=-\frac{2}{\sqrt{4}}-\frac{1}{4}=-1-\frac{1}{4}=-\frac{5}{4}$

ㄴ도 옳다.

임의의 양수 x에 대하여 $-\frac{2}{\sqrt{x}}<0$, $-\frac{1}{x}<0$이므로

$f(x)=-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}<0$

ㄷ은 옳지 않다.

ㄴ에 의하여 임의의 양수 x에 대하여 $f(x)<0$이므로 방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 양수 x는 존재하지 않는다.

즉, 방정식 $f(x)=0$의 실근은 존재하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

036

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 e^x에 정비례하므로 $f'(x)=ke^x\,(k\neq0)$으로 놓으면

$f(x)=\int f'(x)dx=\int ke^xdx=ke^x+C$ (단, C는 적분상수이다.)

곡선 $y=f(x)$는 두 점 $(0, 2)$, $(1, 4e-2)$를 지나므로

$f(0)=k+C=2$ ······ ㉠

$f(1)=ke+C=4e-2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$k=4$, $C=-2$

따라서 $f(x)=4e^x-2$이므로 방정식 $f(x)=0$에서

$4e^x-2=0$, $e^x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\ln\frac{1}{2}=-\ln2$

답 ②

037

$|e^x-e^a|=\begin{cases}-e^x+e^a & (x<a)\\ e^x-e^a & (x\geq a)\end{cases}$이므로

$$\begin{aligned}f(a)&=\int_0^1|e^x-e^a|dx\\&=\int_0^a(-e^x+e^a)dx+\int_a^1(e^x-e^a)dx\\&=\left[-e^x+e^ax\right]_0^a+\left[e^x-e^ax\right]_a^1\\&=(2a-3)e^a+e+1\end{aligned}$$

이 식의 양변을 a에 대하여 미분하면

$f'(a)=2e^a+(2a-3)e^a=(2a-1)e^a$

$f'(a)=0$에서 $2a-1=0$ ($\because e^a>0$) $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

a	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$
$f(a)$	↘	극소	↗

따라서 $f(a)$는 $a=\frac{1}{2}$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 a의 값은 $\frac{1}{2}$이다.

답 ④

038

$f''(x)=\lim_{h\to0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=-\sin x$이므로

$f'(x)=\int(-\sin x)dx=\cos x+C_1$ (단, C_1은 적분상수이다.)

$f'(0)=2$이므로

$1+C_1=2$ $\quad\therefore C_1=1$

따라서 $f'(x)=\cos x+1$이므로

$f(x)=\int(\cos x+1)dx$

$=\sin x+x+C_2$ (단, C_2는 적분상수이다.)

$f(0)=1$이므로

$C_2=1$

따라서 $f(x)=\sin x+x+1$이므로

$f(\pi)=\pi+1$

답 ④

039

$f(x)=xf'(x)+(\sin x-x\cos x)$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=f'(x)+xf''(x)+(\cos x-\cos x+x\sin x)$

$xf''(x)=-x\sin x \qquad \therefore f''(x)=-\sin x\ (\because x>0)$

$\therefore f'(x)=\int f''(x)dx=\int(-\sin x)dx$

$=\cos x+C_1$(단, C_1은 적분상수이다.) …… ㉡

$f(\pi)=0$이므로 ㉠의 양변에 $x=\pi$를 대입하면

$f(\pi)=\pi f'(\pi)+(\sin\pi-\pi\cos\pi)$

$0=\pi f'(\pi)+\pi \qquad \therefore f'(\pi)=-1$

㉡의 양변에 $x=\pi$를 대입하면

$f'(\pi)=\cos\pi+C_1$

$-1=-1+C_1 \qquad \therefore C_1=0$

즉, $f'(x)=\cos x$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int\cos x\,dx$

$=\sin x+C_2$(단, C_2는 적분상수이다.)

$f(\pi)=0$이므로

$\sin\pi+C_2=0 \qquad \therefore C_2=0$

따라서 $f(x)=\sin x$이므로

$f(2\pi)=\sin 2\pi=0$

답 0

040

접근

함수 $g(x)$의 식을 구한 후 $n=1, 2, 3, \cdots, 10$을 대입한다.

$g(x)=e^xf(x)$에서 $g'(x)=e^xf(x)+e^xf'(x)$ …… ㉠

$f(x)=-f'(x)+e^{-x}\cos x$에서

$f'(x)=-f(x)+e^{-x}\cos x$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$g'(x)=e^xf(x)+e^x\{-f(x)+e^{-x}\cos x\}=\cos x$

$\therefore g(x)=\int g'(x)dx=\int\cos x\,dx$

$=\sin x+C$ (단, C는 적분상수이다.) …… ㉢

한편 $f(0)=1$이므로 $g(x)=e^xf(x)$에 $x=0$을 대입하면

$g(0)=e^0\times f(0)=1$

㉢에서 $g(0)=0+C=1 \qquad \therefore C=1$

$\therefore g(x)=\sin x+1$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}g(n\pi)=g(\pi)+g(2\pi)+g(3\pi)+\cdots+g(10\pi)$

$=1+1+1+\cdots+1=10$

답 10

041

$\frac{f(x)}{x}+f'(x)=\frac{\sin^2x}{x(1-\cos x)}$의 양변에 x를 곱하면

$f(x)+xf'(x)=\frac{\sin^2x}{1-\cos x}$

이때 $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$이고,

$\frac{\sin^2x}{1-\cos x}=\frac{1-\cos^2x}{1-\cos x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}$

$=1+\cos x$

이므로 $\{xf(x)\}'=1+\cos x$

$\therefore xf(x)=\int(1+\cos x)dx=x+\sin x+C$

(단, C는 적분상수이다.)

$f(\pi)=0$이므로

$\pi+C=0 \qquad \therefore C=-\pi$

따라서 $xf(x)=x+\sin x-\pi$이므로 양변에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}-\pi=1-\frac{\pi}{2}$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}-1$

답 ③

042

$f'(x)=e^{-2x+1}-\frac{1}{2e^x}=e^{-2x+1}-\frac{1}{2}e^{-x}$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int\left(e^{-2x+1}-\frac{1}{2}e^{-x}\right)dx$

$=-\frac{1}{2}e^{-2x+1}+\frac{1}{2}e^{-x}+C$ (단, C는 적분상수이다.)

$f(1)=0$이므로

$-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}e^{-1}+C=0 \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x+1}+\frac{1}{2}e^{-x}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2n+1}+\frac{1}{2}e^{-n}\right)$

$=-\frac{1}{2}\times\frac{e^{-1}}{1-e^{-2}}+\frac{1}{2}\times\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}$

분모, 분자에 각각 e^2를 곱한다. 분모, 분자에 각각 e를 곱한다.

$=\frac{-e}{2(e^2-1)}+\frac{1}{2(e-1)}$

$=\frac{-e+(e+1)}{2(e^2-1)}$

$=\frac{1}{2(e^2-1)}$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

답 ②

참고

등비급수의 수렴과 발산

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}(a\neq0)$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $|r|<1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

(2) $|r|\geq1$일 때, 발산한다.

043

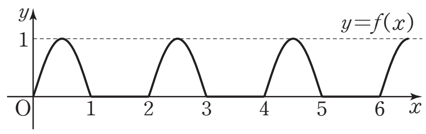
접근

함수 $f(x)$의 주기를 구하고 이를 이용하여 주어진 정적분을 정적분의 합으로 나타낸다.

$f(x+2)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이다.

$0\le x\le 1$일 때 $f(x)=\sin\pi x$이고, $1<x<2$일 때 $f'(x)\ge 0$이므로 $f(x)=0$이다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

$f(1)=f(2)=0$이므로 함수 $f(x)$가 $1<x<2$에서 증가하게 되면 이 구간에서 감소하는 구간이 있어야 한다. 따라서 이 구간에서 $f(x)=0$일 수 밖에 없다.



$$\therefore \int_0^8 f(x)dx$$
$$=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\int_4^6 f(x)dx+\int_6^8 f(x)dx$$
$$=4\int_0^2 f(x)dx$$
$$=4\int_0^1 \sin\pi x\,dx$$
$$=4\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1$$
$$=4\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\right)$$
$$=\frac{8}{\pi}$$

답 $\frac{8}{\pi}$

풍쌤 비법

$a\ne 0$이고 C는 적분상수일 때

(1) $\int \sin ax\,dx=-\frac{1}{a}\cos ax+C$

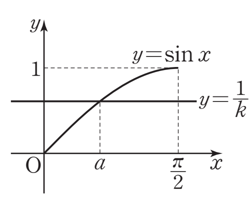
(2) $\int \cos ax\,dx=\frac{1}{a}\sin ax+C$

044

$k\sin x-1=0$에서 $\sin x=\frac{1}{k}$

따라서 방정식 $k\sin x-1=0$의 근은 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{k}$의 교점의 x좌표이다.

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{k}$이 오른쪽 그림과 같이 한 점에서 만나므로 이 교점의 x좌표를 a라고 하면 방정식 $k\sin x-1=0$의 근도 a이다.



즉, $k\sin a-1=0$이므로 $\sin a=\frac{1}{k}$ …… ㉠

$$\therefore f(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|k\sin x-1|dx$$
$$=\int_0^a(1-k\sin x)dx+\int_a^{\frac{\pi}{2}}(k\sin x-1)dx$$
$$=\Big[x+k\cos x\Big]_0^a+\Big[-k\cos x-x\Big]_a^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=(a+k\cos a-k)+\left(-\frac{\pi}{2}+k\cos a+a\right)$$
$$=2a+2k\cos a-k-\frac{\pi}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

이때 $k>1$이면 $0<\frac{1}{k}<1$이므로 $0<\sin a<1$ ($\because$ ㉠)

즉, $0<a<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos a>0$

$$\therefore \cos a=\sqrt{1-\sin^2 a}=\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}=\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}$$

㉠의 양변을 k에 대하여 미분하면

$$\cos a\times\frac{da}{dk}=-\frac{1}{k^2}$$
$$\therefore \frac{da}{dk}=-\frac{1}{k^2\cos a}=-\frac{1}{k\sqrt{k^2-1}}$$

㉡의 양변을 k에 대하여 미분하면

$$f'(k)=2\frac{da}{dk}+2\cos a+2k\times(-\sin a)\frac{da}{dk}-1$$
$$=-\frac{2}{k\sqrt{k^2-1}}+\frac{2\sqrt{k^2-1}}{k}+\frac{2}{k\sqrt{k^2-1}}-1$$
$$=\frac{2\sqrt{k^2-1}}{k}-1$$

$f'(k)=0$에서 $\frac{2\sqrt{k^2-1}}{k}-1=0$, $2\sqrt{k^2-1}=k$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4(k^2-1)=k^2$, $3k^2=4$

$k^2=\frac{4}{3}$ $\quad\therefore k=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ($\because k>1$)

$k>1$에서 함수 $f(k)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

k	(1)	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$f'(k)$		$-$	0	$+$
$f(k)$		↘	극소	↗

함수 $f(k)$는 $k=\frac{2\sqrt{3}}{3}$에서 극소이면서 최소이다.

$k=\frac{2\sqrt{3}}{3}$이면 $\sin a=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore a=\frac{\pi}{3}$ $\left(\because 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 함수 $f(k)$의 최솟값은

$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=2\times\frac{\pi}{3}+2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\cos\frac{\pi}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$$

답 ②

045

ㄱ은 정적분의 값이 항상 0이다.

$f(x)=x\cos x$에서

$f(-x)=(-x)\cos(-x)=-x\cos x=-f(x)$

이므로 함수 $f(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx=0$$

ㄴ은 정적분의 값이 항상 0인 것은 아니다.

$g(x)=xf(x)=x^2\cos x$로 놓으면

$g(-x)=(-x)^2\cos(-x)=x^2\cos x=g(x)$

이므로 함수 $xf(x)$는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-a}^{a} xf(x)dx=2\int_0^a xf(x)dx$$

이때 정적분 $\int_0^a xf(x)dx$의 값이 0이 아니면 $\int_{-a}^a xf(x)dx$의 값도 0이 아니다.

ㄷ은 정적분의 값이 항상 0이다.

$f(x)=x\cos x$에서 $f'(x)=\cos x-x\sin x$

$\therefore xf'(x)=x\cos x-x^2\sin x$

ㄱ에서 $y=x\cos x$는 기함수이고, $h(x)=x^2\sin x$로 놓으면

$h(-x)=(-x)^2\sin(-x)=-x^2\sin x=-h(x)$

이므로 함수 $h(x)$도 기함수이다.

$\therefore \int_{-a}^{a} xf'(x)dx=\int_{-a}^{a}(x\cos x-x^2\sin x)dx=0$

따라서 정적분의 값이 항상 0인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ⑤

046

$$f(x)=\begin{cases} l\sin x+C_1 & \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right) \\ m\sin x+C_2 & \left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right) \\ n\sin x+C_3 & \left(\pi<x<\frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

(단, C_1, C_2, C_3은 적분상수이다.)

$0\le x\le\frac{3}{2}\pi$에서 연속이므로 $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$, $x=\frac{3}{2}\pi$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)$이므로

$\lim_{x\to0+}(l\sin x+C_1)=0 \qquad \therefore C_1=0$

$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi-}f(x)=f\left(\frac{3}{2}\pi\right)$이므로

$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi-}(n\sin x+C_3)=1$

$-n+C_3=1 \qquad \therefore C_3=n+1$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}l\sin x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}(m\sin x+C_2)$

$l=m+C_2 \qquad \therefore C_2=l-m$

$\lim_{x\to\pi-}f(x)=\lim_{x\to\pi+}f(x)=f(\pi)$이므로

$\lim_{x\to\pi-}(m\sin x+l-m)=\lim_{x\to\pi+}(n\sin x+n+1)$

$l-m=n+1 \qquad \therefore l=m+n+1$ …… ㉠

따라서

$$f(x)=\begin{cases} l\sin x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right) \\ m\sin x+n+1 & \left(\frac{\pi}{2}<x\le\pi\right) \\ n\sin x+n+1 & \left(\pi<x\le\frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

이므로

$\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)dx+\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}l\sin x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(m\sin x+n+1)dx$

$\qquad+\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}(n\sin x+n+1)dx$

$=\Big[-l\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-m\cos x+(n+1)x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$\qquad+\Big[-n\cos x+(n+1)x\Big]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$

$=l+m+(\pi-1)n+\pi$

$=(m+n+1)+m+(\pi-1)n+\pi$ ($\because$ ㉠)

$=2m+n\pi+\pi+1$

이 값이 최대이어야 하므로 $m>0$, $n>0$이어야 한다.

$|l|+|m|+|n|\le10$에 ㉠을 대입하면

$|m+n+1|+|m|+|n|\le10$

$(m+n+1)+m+n\le10$

$2m+2n+1\le10 \qquad \therefore m+n\le\frac{9}{2}$

(i) $m=1$, $n=3$일 때, $\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx=4\pi+3$

(ii) $m=2$, $n=2$일 때, $\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx=3\pi+5$

(iii) $m=3$, $n=1$일 때, $\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx=2\pi+7$

(i), (ii), (iii)에서 $\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx$의 값이 최대인 경우는 $m=1$, $n=3$일 때이므로

$l=1+3+1=5$ ($\because$ ㉠)

$\therefore l+2m+3n=5+2\times1+3\times3=16$

답 ⑤

047

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\sin x\,dx$에서

$1-\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sin x$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\sin x\,dx=\int_0^1 t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$

한편 $\int_e^{e^2}\frac{a+\ln x}{x}dx$에서

$a+\ln x=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dx}=\frac{1}{x}$이고

$x=e$일 때 $s=a+1$, $x=e^2$일 때 $x=a+2$이므로

$B=\int_e^{e^2}\frac{a+\ln x}{x}dx=\int_{a+1}^{a+2}s\,ds=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_{a+1}^{a+2}$

$=\frac{1}{2}\{(a+2)^2-(a+1)^2\}=\frac{2a+3}{2}$

$A=B$이므로 $\frac{2a+3}{2}=\frac{1}{2}$, $2a=-2$

$\therefore a=-1$

답 ②

048

$x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=2$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이다.

이때 $\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2\theta}=2\sqrt{1-\sin^2\theta}=2\cos\theta$이므로

$\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos\theta\times2\cos\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2\theta\,d\theta$ — $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$에서

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$ — $\cos^2\theta=\frac{1+\cos2\theta}{2}$

$$=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$$

답 ③

049

$x=\sqrt{3}\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\sqrt{3}\sec^2\theta$이고

$x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$, $x=\sqrt{3}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{a}{x^2+3}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{a}{3\tan^2\theta+3}\times\sqrt{3}\sec^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{a}{3\sec^2\theta}\times\sqrt{3}\sec^2\theta\right)d\theta$$

$3\tan^2\theta+3=3(\tan^2\theta+1)=3\sec^2\theta$

$$=\frac{a}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}1\,d\theta=\frac{a}{\sqrt{3}}\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{a}{12\sqrt{3}}\pi$$

즉, $\frac{a}{12\sqrt{3}}=\frac{1}{4}$이므로 $\quad a=\frac{1}{4}\times12\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

답 ③

050

$$\int_0^{\ln 3}\frac{9\sqrt{3}}{e^x+3e^{-x}}dx=\int_0^{\ln 3}\frac{9\sqrt{3}e^x}{e^{2x}+3}dx=9\sqrt{3}\int_0^{\ln 3}\frac{e^x}{e^{2x}+3}dx$$

$e^x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\ln 3$일 때 $t=3$이므로

$$9\sqrt{3}\int_0^{\ln 3}\frac{e^x}{e^{2x}+3}dx=9\sqrt{3}\int_1^3\frac{1}{t^2+3}dt$$

이때 $t=\sqrt{3}\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dt}{d\theta}=\sqrt{3}\sec^2\theta$이고

$t=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$, $t=3$일 때 $\frac{\pi}{3}$이므로

$$\int_1^3\frac{1}{t^2+3}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{3\tan^2\theta+3}d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{3(\tan^2\theta+1)}d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{3\sec^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{3}d\theta$$

$$=\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$$

$$\therefore\ \int_0^{\ln 3}\frac{9\sqrt{3}}{e^x+3e^{-x}}dx=9\sqrt{3}\int_1^3\frac{1}{t^2+3}dt$$

$$=9\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{18}\pi=\frac{3}{2}\pi$$

답 $\frac{3}{2}\pi$

051

$$f(x)=\int\cos 4x\cos 2x\,dx$$

$$=\int(1-2\sin^2 2x)\cos 2x\,dx$$

$\sin 2x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2\cos 2x$이므로

$$f(x)=\int(1-2t^2)\times\frac{1}{2}dt$$

$$=\int\left(\frac{1}{2}-t^2\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}t-\frac{1}{3}t^3+C$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{3}\sin^3 2x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수이다.)}$$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{6}$이므로

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+C=\frac{1}{6}\qquad\therefore\ C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{3}\sin^3 2x$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{3}\sin^3 2x}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sin 2x}{x}-\frac{1}{3}\times\frac{\sin 2x}{x}\times\sin^2 2x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times2-0=1$$

답 1

052

$f(x)=\int f'(x)dx=\int xe^{x^2}dx$에서

$x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$f(x)=\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수이다.)}$$

$f(1)=\frac{e}{2}$이므로 $\quad\frac{e}{2}+C=\frac{e}{2}\qquad\therefore\ C=0$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}$

$f'(x)=xe^{x^2}=0$에서 $\quad x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\frac{1}{2}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

답 ②

053

$x^2-4x+3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-4=2(x-2)$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x-2)(x^2-4x+3)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\int t^2dt=\frac{1}{6}t^3+C$$

$$=\frac{1}{6}(x^2-4x+3)^3+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수이다.)}$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,5)$를 지나므로 $f(0)=5$에서

$\frac{1}{6}\times3^3+C=5\qquad\therefore\ C=\frac{1}{2}$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{6}(x^2-4x+3)^3+\frac{1}{2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad(x-2)(x^2-4x+3)^2=0$

$(x-2)\{(x-1)(x-3)\}^2=0$

$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗		↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극솟값

$f(2)=\frac{1}{6}(2^2-4\times2+3)^3+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$을 갖는다.

답 ④

054

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$g(f(x))=x$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=1$

$\therefore g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$

$f(x)g'(f(x))=\frac{1}{x^2+x+1}$이므로

$\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{1}{x^2+x+1}$

$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)}=x^2+x+1$ ...... ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 부정적분하면

$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int(x^2+x+1)dx$

$\ln|f(x)|=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$ (단, C는 적분상수이다.) ...... ㉡

$f(0)=e$이므로 ㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\ln e=C=1$

따라서 $\ln|f(x)|=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1$이므로

$|f(x)|=e^{\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1}$

그런데 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고

$\underbrace{f(0)=e}_{f(x)>0}$이므로

$f(x)=e^{\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1}$

$\therefore f(6)=e^{\frac{1}{3}\times6^3+\frac{1}{2}\times6^2+6+1}=e^{97}$

$\therefore a=97$

답 ④

055

접근

주어진 정적분을 삼각함수의 정적분으로 나타내고 치환적분법을 이용한다.

$m(\theta)=\tan\theta$이므로

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{m(\theta)}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta$

$\sin\theta=t$로 놓으면 $\frac{dt}{d\theta}=\cos\theta$이고

$\theta=\frac{\pi}{6}$일 때 $t=\frac{1}{2}$, $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{m(\theta)}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{t}dt$$

$$=\Big[\ln t\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\frac{1}{2}$$

$$=\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln3$$

답 ①

다른 풀이

$\overline{OP}=r$라고 하면 $\overline{OH}=r\cos\theta$, $\overline{PH}=r\sin\theta$이므로

$m(\theta)=\frac{\overline{PH}}{\overline{OH}}=\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\therefore \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{m(\theta)}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta=\Big[\ln|\sin\theta|\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\ln\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)-\ln\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\frac{1}{2}$$

$$=\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln3$$

056

ㄱ은 옳다.

$$a_1+a_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x(1+\tan^2x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\sec^2x\,dx$$

$\tan x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sec^2x$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\sec^2x\,dx=\int_0^1t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

ㄴ은 옳다.

ㄱ과 같은 방법으로

$$a_2+a_4=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2x\underbrace{(1+\tan^2x)}_{=\sec^2x}dx=\int_0^1t^2dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

ㄷ은 옳지 않다.

ㄱ, ㄴ과 같은 방법으로 $k=0, 1, 2, 3, \cdots$일 때

$$a_{4k+1}+a_{4k+2}+a_{4k+3}+a_{4k+4}=(a_{4k+1}+a_{4k+3})+(a_{4k+2}+a_{4k+4})$$

$$=\int_0^1t^{4k+1}dt+\int_0^1t^{4k+2}dt$$

$$=\left[\frac{1}{4k+2}t^{4k+2}\right]_0^1+\left[\frac{1}{4k+3}t^{4k+3}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{100}a_k=\sum_{k=0}^{24}(a_{4k+1}+a_{4k+2}+a_{4k+3}+a_{4k+4})$$

$$=\sum_{k=0}^{24}\left(\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{98}+\frac{1}{99}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

057

조건 ㈎에서

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)-\{f(x-h)-f(x)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$
$$=f'(x)+f'(x)$$
$$=2f'(x)$$

즉, $2f'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$이므로 $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$x^2+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$
$$=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\times\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{1}{2}\times2t^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{t}+C$$
$$=\sqrt{x^2+1}+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수이다.})$$

조건 ㈏에서 $f(0)=-1$이므로

$1+C=-1$　　$\therefore C=-2$

$\therefore f(x)=\sqrt{x^2+1}-2$

곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$\sqrt{x^2+1}-2=0$에서 $\sqrt{x^2+1}=2$

양변을 제곱하면

$x^2+1=4,\ x^2=3$　　$\therefore x=\pm\sqrt{3}$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 x축과 두 점 $(-\sqrt{3},\ 0)$, $(\sqrt{3},\ 0)$에서 만나므로

$\overline{\text{AB}}=\sqrt{3}-(-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$

답 $2\sqrt{3}$

058

$f(x)+f(4-x)=\sqrt{2x+1}$에서

$\int_0^4\{f(x)+f(4-x)\}dx=\int_0^4\sqrt{2x+1}dx$이므로

$$\int_0^4 f(x)dx+\int_0^4 f(4-x)dx=\int_0^4\sqrt{2x+1}dx \quad\cdots\cdots\ ㉠$$

$\int_0^4 f(4-x)dx$에서 $4-x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-1$이고

$x=0$일 때 $t=4$, $x=4$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^4 f(4-x)dx=-\int_4^0 f(t)dt=\int_0^4 f(t)dt=\int_0^4 f(x)dx$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^4 f(x)dx+\int_0^4 f(x)dx=\int_0^4\sqrt{2x+1}dx$$
$$2\int_0^4 f(x)dx=\int_0^4\sqrt{2x+1}dx$$
$$\therefore \int_0^4 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{2x+1}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^4(2x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$
$$=\frac{1}{6}\Big[(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^4$$
$$=\frac{1}{6}(27-1)=\frac{13}{3}$$

따라서 $p=3,\ q=13$이므로

$p+q=3+13=16$

답 ④

059

접근

$h(x)=f(x)+g(x)$로 놓고 부정적분을 이용하여 $h(x)$의 식을 구한다.

$f(x)$, $g(x)$의 한 부정적분이 각각 $F(x)$, $G(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$

$F(x)+G(x)=f(x)+g(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+g(x)=\{f(x)+g(x)\}'$

이때 $f(x)+g(x)=h(x)$라고 하면

$h(x)=h'(x)$에서 $\dfrac{h'(x)}{h(x)}=1$

$$\int\frac{h'(x)}{h(x)}dx=\int1dx$$

$\ln|h(x)|=x+C$ (단, C는 적분상수이다.)

$\therefore h(x)=e^{x+C}$

즉, $f(x)+g(x)=e^{x+C}$이므로 $f(4)+g(4)=2e^4$에서

$e^{4+C}=2e^4,\ e^C=2$　　$\therefore C=\ln2$

따라서 $f(x)+g(x)=e^{x+\ln2}$이므로

$\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to0}e^{x+\ln2}=e^{\ln2}=2$

답 ⑤

060

조건 ㈎에서 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 따라서 함수 $y=xf(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$-xf(-x)=-x\times\{-f(x)\}$
$=xf(x)$

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx=2\int_0^1 xf(x)dx=6$$
$$\therefore \int_0^1 xf(x)dx=3$$

또, 함수 $y=(e^{x^2}+x^2)f\left(\dfrac{x}{2}\right)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

(우함수)×(기함수)=(기함수)

$$\int_{-2}^2(e^{x^2}+x^2)f\left(\frac{x}{2}\right)dx=0$$
$$\therefore \int_{-2}^2 g(x)dx=\int_{-2}^2(e^{x^2}+x^2+x)f\left(\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=\int_{-2}^2(e^{x^2}+x^2)f\left(\frac{x}{2}\right)dx+\int_{-2}^2 xf\left(\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=2\int_0^2 xf\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$\dfrac{x}{2}=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{2}$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^2 xf\left(\frac{x}{2}\right)dx=\int_0^1 4tf(t)dt=4\int_0^1 tf(t)dt$$
$$=4\times3=12$$
$$\therefore \int_{-2}^2(e^{x^2}+x^2+x)f\left(\frac{x}{2}\right)dx=2\int_0^2 xf\left(\frac{x}{2}\right)dx=2\times12=24$$

답 ③

061

함수 $y=\ln x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은

$f(x)=\ln(x+2)$

$$\therefore \int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 \ln(x+2)dx$$

$$=\int_3^4 \ln x dx$$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면
$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$

$$=\Big[x\ln x-x\Big]_3^4$$

$$=(4\ln 4-4)-(3\ln 3-3)$$

$$=4\ln 4-3\ln 3-1$$

답 $4\ln 4-3\ln 3-1$

참고

도형의 평행이동

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(x-a, y-b)=0$

062

$$f(t)=\int_1^e t\ln x dx=t\int_1^e \ln x dx$$

$$=t\Big[x\ln x-x\Big]_1^e=t$$

$g(t)=\int_1^e x\ln x dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=x$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=\frac{1}{2}x^2$이므로

$$g(t)=\int_1^e x\ln x dx=\Big[\frac{1}{2}x^2\ln x\Big]_1^e-\int_1^e \frac{1}{2}x dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\Big[\frac{1}{4}x^2\Big]_1^e=\frac{e^2}{2}-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{e^2+1}{4}$$

$$\therefore f(t)+g(t)=t+\frac{e^2+1}{4}$$

따라서 방정식 $f(t)+g(t)=0$에서

$t+\frac{e^2+1}{4}=0$ $\qquad \therefore t=-\frac{e^2+1}{4}$

답 ②

063

$\int_0^1 (x-1)f'(x+1)dx=-7$에서 $x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^1 (x-1)f'(x+1)dx=\int_1^2 (t-2)f'(t)dt \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$u(t)=t-2$, $v'(t)=f'(t)$로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=f(t)$이므로

$$\int_1^2 (t-2)f'(t)dt=\Big[(t-2)f(t)\Big]_1^2-\int_1^2 f(t)dt$$

$$=f(1)-\int_1^2 f(t)dt$$

$$=5-\int_1^2 f(t)dt=-7$$

$$\therefore \int_1^2 f(t)dt=5-(-7)=12$$

$$\therefore \int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 f(t)dt=12$$

답 12

064

$f'(x)=0$에서 $\frac{\ln x}{x^2}=0$, $\ln x=0$ $\qquad \therefore x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

$f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{\ln x}{x^2}dx$에서

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=\frac{1}{x^2}$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=-\frac{1}{x}$이므로

$$f(x)=-\frac{\ln x}{x}-\int\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx$$

$$=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수이다.)}$$

함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(1)=1$이므로

$-1+C=1$ $\qquad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+2$이므로

$$f(e)=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+2=-\frac{2}{e}+2$$

따라서 $a=-2$, $b=2$이므로

$a+b=-2+2=0$

답 ③

065

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 8)$을 지나므로

$f(1)=8$

$\int_0^1 xf'(x)f(x)dx$에서

$u(x)=x$, $v'(x)=f(x)f'(x)$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\frac{1}{2}\{f(x)\}^2$

$\left[\frac{1}{2}\{f(x)\}^2\right]'=\frac{1}{2}\times 2f(x)f'(x)$
$=f'(x)f(x)$

$$\therefore \int_0^1 xf'(x)f(x)dx$$

$$=\Big[\frac{1}{2}x\{f(x)\}^2\Big]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}\{f(x)\}^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\{f(1)\}^2-\frac{1}{2}\int_0^1\{f(x)\}^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\times 8^2-\frac{1}{2}\times 12=26$$

답 ②

066

접근

n이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어 $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} x\cos x dx$의 값을 구한다.

$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} x\cos x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$이므로

$$\begin{aligned}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} x\cos x\,dx&=\Big[x\sin x\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}-\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\sin x\,dx\\&=\Big[\cos x\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}\\&=\cos n\pi-\cos(n-1)\pi\\&=\begin{cases}-2 & (n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots)\\ 2 & (n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots)\end{cases}\end{aligned}$$

따라서 $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} x\cos x\,dx=-2$를 만족시키는 100 이하의 자연수 n은 1, 3, 5, $\cdots$, 99의 50개이다.

답 ⑤

참고

n이 홀수일 때, $\cos n\pi=-1$, $\cos(n-1)\pi=1$이므로

$\cos n\pi-\cos(n-1)\pi=-1-1=-2$

n이 짝수일 때, $\cos n\pi=1$, $\cos(n-1)\pi=-1$이므로

$\cos n\pi-\cos(n-1)\pi=1-(-1)=2$

067

$\{x^2f(x)\}'=2xf(x)+x^2f'(x)$이므로 조건 ㈎에 의하여

$x^2f(x)=\int\{x^2f(x)\}'dx=\int(2x+4)\ln x\,dx$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=2x+4$로 놓으면 $u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x^2+4x$ 이므로

$$\begin{aligned}x^2f(x)&=(x^2+4x)\ln x-\int(x+4)dx\\&=(x^2+4x)\ln x-\frac{1}{2}x^2-4x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수이다.)}\end{aligned}$$ …… ㉠

조건 ㈏에서 $f(1)=-\frac{9}{2}$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=-\frac{1}{2}-4+C=-\frac{9}{2}$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $x^2f(x)=(x^2+4x)\ln x-\frac{1}{2}x^2-4x$이므로

$f(x)=\left(1+\frac{4}{x}\right)\ln x-\frac{1}{2}-\frac{4}{x}$ $(\because x>0)$

$\therefore 4f(e)=4\left\{\left(1+\frac{4}{e}\right)\ln e-\frac{1}{2}-\frac{4}{e}\right\}=2$

답 ⑤

068

주어진 그래프에서 $f(x)=\begin{cases}x+1 & (x<0)\\ -x+1 & (x\ge 0)\end{cases}$이므로

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{2}e^{f(x)}f(x)dx\\&=\int_{-1}^{0}e^{f(x)}f(x)dx+\int_{0}^{2}e^{f(x)}f(x)dx\\&=\int_{-1}^{0}e^{x+1}(x+1)dx+\int_{0}^{2}e^{-x+1}(-x+1)dx\end{aligned}$$

$\int_{-1}^{0}e^{x+1}(x+1)dx$에서 $u(x)=x+1$, $v'(x)=e^{x+1}$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^{x+1}$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}e^{x+1}(x+1)dx&=\Big[(x+1)e^{x+1}\Big]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}e^{x+1}dx\\&=e-\Big[e^{x+1}\Big]_{-1}^{0}\\&=e-(e-1)=1\end{aligned}$$ …… ㉠

$\int_{0}^{2}e^{-x+1}(-x+1)dx$에서 $g(x)=-x+1$, $h'(x)=e^{-x+1}$으로 놓으면 $g'(x)=-1$, $h(x)=-e^{-x+1}$이므로

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2}e^{-x+1}(-x+1)dx&=\Big[-(-x+1)e^{-x+1}\Big]_{0}^{2}-\int_{0}^{2}e^{-x+1}dx\\&=e^{-1}+e-\Big[-e^{-x+1}\Big]_{0}^{2}\\&=e^{-1}+e-(-e^{-1}+e)\\&=2e^{-1}=\frac{2}{e}\end{aligned}$$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}e^{f(x)}f(x)dx&=\int_{-1}^{0}e^{x+1}(x+1)dx+\int_{0}^{2}e^{-x+1}(-x+1)dx\\&=1+2e^{-1}=1+\frac{2}{e}\end{aligned}$$

답 ④

069

$\int_{0}^{1}f'(\sqrt{x})dx$에서 $\sqrt{x}=t$로 놓으면 $x=t^2$에서 $\frac{dx}{dt}=2t$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$\int_{0}^{1}f'(\sqrt{x})dx=\int_{0}^{1}f'(t)\times 2t\,dt=2\int_{0}^{1}tf'(t)dt$

$u(t)=t$, $v'(t)=f'(t)$로 놓으면 $u'(t)=1$, $v(t)=f(t)$이므로

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1}tf'(t)dt&=\Big[tf(t)\Big]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}f(t)dt\\&=f(1)-\int_{0}^{1}f(t)dt=1-\int_{0}^{1}f(t)dt\end{aligned}$$

그래프에서 $f(1)=1$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{0}^{1}f'(\sqrt{x})dx&=2\int_{0}^{1}tf'(t)dt\\&=2-2\int_{0}^{1}f(t)dt\end{aligned}$$

이때 주어진 그림에서 $\int_{0}^{1}f(x)dx=-2+6=4$이므로

$\int_{0}^{1}f'(\sqrt{x})dx=2-2\times 4=-6$

답 ①

070

$f(x)=\int e^x\cos x\,dx$에서 $u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-\sin x$, $v(x)=e^x$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int e^x\cos x\,dx\\&=e^x\cos x-\int(-e^x\sin x)dx\\&=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx\end{aligned}$$ …… ㉠

$\int e^x\sin x\,dx$에서 $s(x)=\sin x$, $t'(x)=e^x$으로 놓으면

$s'(x)=\cos x$, $t(x)=e^x$이므로

$\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x dx$

$\quad =e^x\cos x+e^x\sin x-f(x)$

$2f(x)=e^x\cos x+e^x\sin x$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$ (단, C는 적분상수이다.)

$f(0)=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2}$ $\quad \therefore C=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)$

방정식 $f(x)=\frac{1}{2}e^x$에서

$\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)=\frac{1}{2}e^x$, $\cos x+\sin x=1$ ($\because e^x>0$)

$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ $\quad \therefore \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $(0\le x\le 2\pi)$

이때 $\frac{\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{4}\le\frac{9}{4}\pi$에서

$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{9}{4}\pi$이므로

$x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=2\pi$

따라서 모든 실근의 합은

$0+\frac{\pi}{2}+2\pi=\frac{5}{2}\pi$

답 ④

참고

삼각함수의 합성

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

$\left(\text{단, } \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

071

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하자.

$\frac{1}{n}=t$로 놓으면 $n=\frac{1}{t}$이고 $n\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx=\lim_{n\to\infty} n\left\{F\left(\frac{1}{n}\right)-F(0)\right\}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{F(t)-F(0)}{t}=F'(0)=f(0)$$
$$=2+1=3$$

답 ①

072

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{1-x}^{1+2x} f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_{1-x}^{1+2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(1+2x)-F(1-x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\{F(1+2x)-F(1)\}-\{F(1-x)-F(1)\}}{x}$$
$$=2\lim_{x\to 0}\frac{F(1+2x)-F(1)}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{F(1-x)-F(1)}{-x}$$
$$=2F'(1)+F'(1)$$
$$=3F'(1)=3f(1)$$
$$=3(e+1)=3e+3$$

답 ③

073

$\int_0^2 tf(t)dt=k$(k는 상수)라고 하면 $f(x)=e^{x^2}+k$이므로

$k=\int_0^2 t(e^{t^2}+k)dt=\int_0^2 (te^{t^2}+kt)dt$

$\quad =\int_0^2 te^{t^2}dt+\int_0^2 ktdt$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\int_0^2 te^{t^2}dt$에서 $t^2=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=2t$이고

$t=0$일 때 $s=0$, $t=2$일 때 $s=4$이므로

$\int_0^2 te^{t^2}dt=\int_0^4 \frac{1}{2}e^s ds=\left[\frac{1}{2}e^s\right]_0^4=\frac{e^4-1}{2}$

또, $\int_0^2 ktdt=\left[\frac{k}{2}t^2\right]_0^2=2k$이므로 ㉠에 의하여

$k=\frac{e^4-1}{2}+2k$ $\quad \therefore k=\frac{1-e^4}{2}$

즉, $\int_0^2 tf(t)dt=\frac{1-e^4}{2}$이므로

$\int_0^2 \{2xf(x)+1\}dx=2\int_0^2 xf(x)dx+\underbrace{\int_0^2 1dx}_{\left[x\right]_0^2=2}$

$\quad =2\times\frac{1-e^4}{2}+2=3-e^4$

따라서 $a=3$, $b=4$이므로

$a+b=3+4=7$

답 ③

074

$\int_0^1 sf(ts)ds$에서 $ts=k$라고 하면 $\frac{dk}{ds}=t$이고

$s=0$일 때 $k=0$, $s=1$일 때 $k=t$이므로

$\int_0^1 sf(ts)ds=\int_0^t \frac{k}{t^2}f(k)dk=\frac{1}{t^2}\int_0^t kf(k)dk=\cos t$

즉, $\int_0^t xf(x)dx=t^2\cos t$이므로 양변을 t에 대하여 미분하면

$tf(t)=2t\cos t-t^2\sin t$ ($\because t>0$)

$\therefore f(t)=2\cos t-t\sin t$

$\therefore f(-\pi)=2\cos(-\pi)-(-\pi)\sin(-\pi)=-2$

답 ②

075

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$\int_1^{x^2} f(t)dt=\Big[F(t)\Big]_1^{x^2}=F(x^2)-F(1)=x^2+2\ln x-3$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x^2)\times 2x=2x+\frac{2}{x}$

$\therefore f(x^2)=1+\frac{1}{x^2}$

따라서 $x^2=s$로 놓으면 $f(s)=1+\frac{1}{s}$이므로

$$\int_1^2 \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_1^2 \frac{1}{x}(1+x)dx$$
$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x}+1\right)dx$$
$$= \Big[\ln x + x\Big]_1^2$$
$$= (\ln 2 + 2) - 1$$
$$= \ln 2 + 1$$

답 $\ln 2+1$

076

$f(x)=\int_0^x (a-\cos nt)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=a-\cos nx$

이때 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면

$f'(x)=a-\cos nx \geq 0$

$-1 \leq \cos nx \leq 1$이고 $a>0$이므로

$a-1 \geq 0 \qquad \therefore a \geq 1$

따라서 양수 a의 최솟값은 1이다.

답 ①

077

주어진 그래프에서 $f(x)=ax(x-2)(a>0)$로 놓으면

$g(x)=\int_x^{x+1} e^{at(t-2)}dt$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=e^{a(x+1)(x-1)}-e^{ax(x-2)}$

$\quad = e^{ax^2-a}-e^{ax^2-2ax}$

$\quad = e^{ax^2-a}(1-e^{a-2ax})$

$g'(x)=0$에서 $\quad 1-e^{a-2ax}=0 \ (\because e^{ax^2-a}>0)$

$e^{a-2ax}=1,\ a-2ax=0 \qquad \therefore x=\frac{1}{2} \ (\because a>0)$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

따라서 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극소이면서 최소이므로 $g(x)$의 최솟값은 $g\left(\frac{1}{2}\right)$이다.

답 ②

078

$f(x)=\int_0^x (t-x)g(t)dt=\int_0^x tg(t)dt-x\int_0^x g(t)dt$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=xg(x)-\int_0^x g(t)dt-xg(x)=-\int_0^x g(t)dt$

$f(x)=\sin x+kx$에서 $f'(x)=\cos x+k$이므로

$\cos x+k=-\int_0^x g(t)dt$

$\therefore \int_0^x g(t)dt=-\cos x-k \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(x)=\sin x$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=-1-k \qquad \therefore k=-1$

따라서 $f(x)=\sin x-x,\ g(x)=\sin x$이므로

$$\int_0^{\pi}\{f(x)+g(x)\}dx=\int_0^{\pi}(2\sin x-x)dx$$
$$=\left[-2\cos x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi}$$
$$=4-\frac{\pi^2}{2}$$

답 ⑤

079

접근

조건 (가)에서 $f(0)=0$이고 조건 (나)에서

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$임을 이용한다.

조건 (나)에서

$\int_{x-h}^{x+h} f'(t)=\Big[f(t)\Big]_{x-h}^{x+h}=f(x+h)-f(x-h)$

이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h} f'(t)dt$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$

$=f'(x)+f'(x)$

$=2f'(x)=2(x+e^x)e^x$

$\therefore f'(x)=(x+e^x)e^x=xe^x+e^{2x}$

$f(x)=\int f'(x)dx$

$\quad =\int (xe^x+e^{2x})dx$

$\quad =\int xe^x dx+\int e^{2x}dx$ $\quad u(x)=x,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면 $u'(x)=1,\ v(x)=e^x$

$\quad =\left(xe^x-\int e^x dx\right)+\frac{1}{2}e^{2x}+C_1$ (단, C_1은 적분상수이다.)

$\quad =(xe^x-e^x+C_2)+\frac{1}{2}e^{2x}+C_1$ (단, C_2는 적분상수이다.)

$\quad =\frac{1}{2}e^{2x}+(x-1)e^x+C$ (단, $C=C_1+C_2$)

이때 곡선 $y=f(x)$가 원점 $(0,\ 0)$을 지나므로 $f(0)=0$에서

$f(0)=\frac{1}{2}-1+C=0 \qquad \therefore C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+(x-1)e^x+\frac{1}{2}$이므로

$f(1)=\frac{1}{2}(e^2+1)$

답 ①

080

조건 (가)에 의하여 $\quad f(0)=1$

조건 (나)에서

$2xf(x)=xe^x+x+\int_0^x (x+t)f'(t)dt$

$\quad =xe^x+x+x\int_0^x f'(t)dt+\int_0^x tf'(t)dt$

$\quad =xe^x+x+x\{f(x)-f(0)\}+\int_0^x tf'(t)dt$

$$=xe^x+x+x\{f(x)-1\}+\int_0^x tf'(t)dt \ (\because f(0)=1)$$
$$=xe^x+xf(x)+\int_0^x tf'(t)dt$$
$\therefore xf(x)=xe^x+\int_0^x tf'(t)dt$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=e^x+xe^x+xf'(x)$

$\therefore f(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

방정식 $f(x)=0$에서 $(x+1)e^x=0$

$x+1=0$ ($\because e^x>0$) $\therefore x=-1$

답 $x=-1$

081

ㄱ은 옳다.

조건 (나)에서

$\ln f(x)+2x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt=0$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}+2\int_0^x f(t)dt+2xf(x)-2xf(x)=0$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}+2\int_0^x f(t)dt=0$, $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-2\int_0^x f(t)dt$

$\therefore f'(x)=-2f(x)\int_0^x f(t)dt$ …… ㉠

이때 조건 (가)에서 $f(x)>0$이므로 $x>0$이면

$\int_0^x f(t)dt>0$

따라서 $x>0$일 때 $f'(x)<0$이므로 $x>0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

ㄴ도 옳다.

㉠에서 $f'(x)=-2f(x)\int_0^x f(t)dt$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이면서 최대이다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

조건 (나)의 $\ln f(x)+2\int_0^x (x-t)f(t)dt=0$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\ln f(0)=0$ $\therefore f(0)=1$

즉, 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다.

ㄷ도 옳다.

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변에 $x=0$을 대입하면 $F(0)=0$

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

또, ㉠에서 $f'(x)=-2f(x)F(x)$이므로

$f'(x)=-2F'(x)F(x)$

$\therefore f'(x)+2F'(x)F(x)=0$

위의 식의 양변을 부정적분하면

$f(x)+\{F(x)\}^2=C$ (단, C는 적분상수이다.)

$[f(x)+\{F(x)\}^2]'=f'(x)+2F'(x)F(x)$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+\{F(0)\}^2=1=C$

즉, $f(x)+\{F(x)\}^2=1$이므로

$f(1)+\{F(1)\}^2=1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

참고

실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$인 함수 $f(x)$와 $a>0$에 대하여 $\int_0^a f(x)dx$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이이므로 $\int_0^a f(x)dx>0$이다.

한편 $b<0$에 대하여 $\int_0^b f(x)dx=-\int_b^0 f(x)dx$이고 이 값은 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=b$, $x=0$으로 둘러싸인 부분의 넓이에 -1을 곱한 값이므로 $\int_0^b f(x)dx<0$이다.

07 정적분의 활용

082

접근

x로 놓는 값을 다르게 하여 주어진 극한을 정적분으로 나타내어 본다.

(i) $\frac{k}{n}=x$라고 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)=3\int_0^1 f(1+2x)dx$$

(ii) $\frac{2k}{n}=x$라고 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\int_0^2 f(1+x)dx$$

(iii) $1+\frac{2k}{n}=x$라고 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\int_1^3 f(x)dx$$

따라서 정적분으로 바르게 나타낸 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ의 3개이다.

답 ④

083

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1 xf(x)dx$$
$$=\int_0^1 x(4x^2+3x+6)dx$$
$$=\int_0^1 (4x^3+3x^2+6x)dx$$
$$=\Big[x^4+x^3+3x^2\Big]_0^1$$
$$=5$$

답 ⑤

084

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}+\frac{4}{n}+\frac{6}{n}+\cdots+\frac{2n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n}$$
$$=\int_0^1 2xdx$$
$$=\Big[x^2\Big]_0^1$$
$$=1$$

답 1

085

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)=\int_1^3 f(x)dx$$
$$=\int_1^3\frac{1}{x^2+x}dx$$
$$=\int_1^3\frac{1}{x(x+1)}dx$$

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$

$$=\int_1^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\Big[\ln x-\ln(x+1)\Big]_1^3$$
$$=(\ln 3-\ln 4)-(\ln 1-\ln 2)$$
$$=\ln 3-\ln 4+\ln 2=\ln\frac{3\times 2}{4}=\ln\frac{3}{2}$$

답 ④

다른 풀이 ❶

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)=2\int_0^1 f(1+2x)dx$$
$$=2\int_0^1\frac{1}{(1+2x)(2+2x)}dx$$
$$=2\int_0^1\left(\frac{1}{1+2x}-\frac{1}{2+2x}\right)dx$$
$$=2\Big[\frac{1}{2}\ln(1+2x)-\frac{1}{2}\ln(2+2x)\Big]_0^1$$
$$=2\left\{\left(\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln 4\right)-\left(\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{2}\ln 2\right)\right\}$$
$$=\ln\frac{3}{4}+\ln 2=\ln\frac{3}{2}$$

다른 풀이 ❷

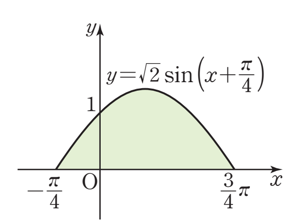
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)=\int_0^2 f(1+x)dx$$
$$=\int_0^2\frac{1}{(1+x)(2+x)}dx$$
$$=\int_0^2\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2+x}\right)dx$$
$$=\Big[\ln(1+x)-\ln(2+x)\Big]_0^2$$
$$=\ln 3-\ln 4+\ln 2=\ln\frac{3}{2}$$

086

$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$$
$$=\Big[-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$$
$$=2\sqrt{2}$$



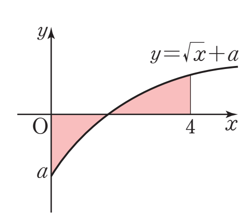
답 ④

087

$a<0$이므로 곡선 $y=\sqrt{x}+a$는 오른쪽 그림과 같다.

이때 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_0^4(\sqrt{x}+a)dx=0$$
$$\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+ax\Big]_0^4=0$$
$$\frac{2}{3}\times 8+4a=0 \qquad \therefore a=-\frac{4}{3}$$



답 $-\frac{4}{3}$

088

$\int_{-4}^{x} f(t)dt=\frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x+4}=\frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}}$

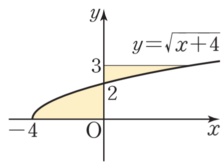
위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=(x+4)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x+4}$

$y=\sqrt{x+4}$의 양변을 제곱하면

$y^2=x+4 \qquad \therefore x=y^2-4$

따라서 구하는 넓이는



$\int_{0}^{2}(4-y^2)dy+\int_{2}^{3}(y^2-4)dy$

$=\left[4y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}y^3-4y\right]_2^3$

$=\frac{16}{3}+\frac{7}{3}$

$=\frac{23}{3}$

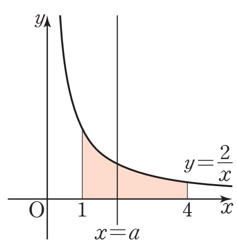
즉, $p=3$, $q=23$이므로

$p+q=3+23=26$

답 26

089

함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $x=a$에 의하여 이등분되므로



$\int_{1}^{4}\frac{2}{x}dx=2\int_{1}^{a}\frac{2}{x}dx$

$2\left[\ln x\right]_1^4=4\left[\ln x\right]_1^a$

$2\ln 4=4\ln a$

$4\ln 2=4\ln a$

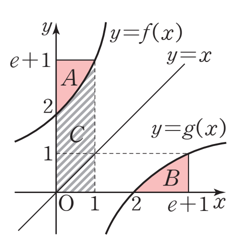
$\therefore a=2$

답 ②

090

함수 $f(x)=e^x+1$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

오른쪽 그림에서 $A=B$이므로



$\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{2}^{e+1}g(x)dx$

$=C+B=C+A$

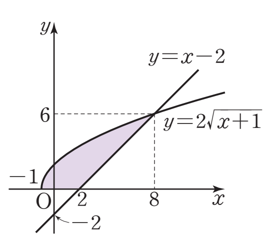
$=1\times(e+1)=e+1$

답 ④

091

곡선 $y=2\sqrt{x+1}$과 직선 $y=x-2$의 교점의 x좌표는 $2\sqrt{x+1}=x-2$에서

양변을 제곱하면



$4x+4=x^2-4x+4$

$x^2-8x=0$, $x(x-8)=0$

$\therefore x=8$ ($\because x\ge2$)

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{8}2\sqrt{x+1}dx-\frac{1}{2}\times6\times6$

$=\left[\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{8}-18$

$=36-18=18$

답 18

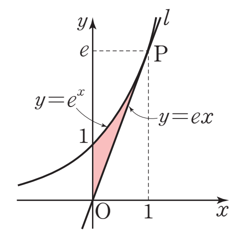
092

$f(x)=e^x$이라고 하면 $\quad f'(x)=e^x$

곡선 $y=e^x$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ e)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=e$이므로 접선의 방정식은

$y-e=e(x-1) \qquad \therefore y=ex$

따라서 구하는 넓이는



$\int_{0}^{1}(e^x-ex)dx=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1$

$=\left(e-\frac{e}{2}\right)-1=\frac{e}{2}-1$

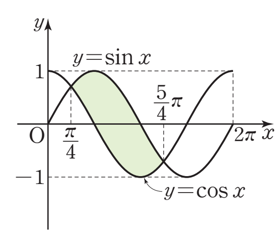
답 ①

093

두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 교점의 x좌표는 $\sin x=\cos x$에서

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

($\because 0\le x\le 2\pi$)



따라서 구하는 넓이는

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin x-\cos x)dx$

$=\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}$

$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

094

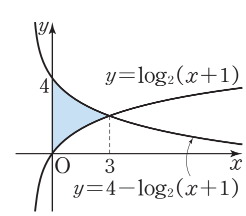
두 곡선 $y=\log_2(x+1)$, $y=4-\log_2(x+1)$의 교점의 x좌표는

$\log_2(x+1)=4-\log_2(x+1)$에서

$2\log_2(x+1)=4$, $\log_2(x+1)=2$

$x+1=4 \qquad \therefore x=3$

따라서 구하는 넓이는



$\int_{0}^{3}\{4-\log_2(x+1)-\log_2(x+1)\}dx$

$=\int_{0}^{3}\{4-2\log_2(x+1)\}dx$

$=\int_{0}^{3}4dx-2\int_{0}^{3}\log_2(x+1)dx$

$=\left[4x\right]_0^3-2\int_{0}^{3}\log_2(x+1)dx$

$=12-2\int_{0}^{3}\log_2(x+1)dx \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때 $x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=3$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^3 \log_2(x+1)dx=\int_1^4 \log_2 t\,dt=\int_1^4 \frac{\ln t}{\ln 2}dt$$
$$=\frac{1}{\ln 2}\int_1^4 \ln t\,dt$$
$$=\frac{1}{\ln 2}\Big[t\ln t-t\Big]_1^4$$

$\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C$ (단, C는 적분상수이다.)

$$=\frac{1}{\ln 2}\{(4\ln 4-4)-(-1)\}$$
$$=\frac{1}{\ln 2}(8\ln 2-3)=8-\frac{3}{\ln 2} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 넓이는

$$12-2\left(8-\frac{3}{\ln 2}\right)=12-16+\frac{6}{\ln 2}=\frac{6}{\ln 2}-4$$

답 ③

095

곡선 $y=e^{2x}$과 직선 $y=-2x+a$의 교점의 x좌표를 k $(0<k<1)$라고 하면

$$(A\text{의 넓이})=\int_0^k \{(-2x+a)-e^{2x}\}dx$$

$0\le x\le k$일 때, $-2x+a\ge e^{2x}$

$$(B\text{의 넓이})=\int_k^1 \{e^{2x}-(-2x+a)\}dx$$

$k\le x\le 1$일 때, $e^{2x}\ge -2x+a$

(A의 넓이)=(B의 넓이)이므로

$$\int_0^k \{(-2x+a)-e^{2x}\}dx=\int_k^1 \{e^{2x}-(-2x+a)\}dx$$
$$\int_0^k \{(-2x+a)-e^{2x}\}dx-\int_k^1 \{e^{2x}-(-2x+a)\}dx=0$$
$$\int_0^k \{(-2x+a)-e^{2x}\}dx+\int_k^1 \{(-2x+a)-e^{2x}\}dx=0$$
$$\int_0^1 (-2x+a-e^{2x})dx=0$$
$$\left[-x^2+ax-\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1=0$$
$$\left(-1+a-\frac{e^2}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$
$$\therefore a=\frac{e^2+1}{2}$$

답 ①

096

입체도형의 부피는

$$\int_0^4 (e^{2x}+x+2)dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^4$$
$$=\left(\frac{1}{2}e^8+16\right)-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{e^8+31}{2}$$

따라서 $a=8$, $b=31$이므로

$a+b=8+31=39$

답 ②

097

물의 깊이가 5일 때 그릇에 담긴 물의 부피를 V라고 하면

$$V=\int_0^5 \ln(x+1)dx$$

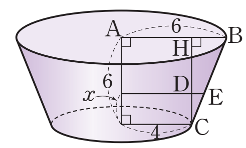
$x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=5$일 때 $t=6$이므로

$$V=\int_1^6 \ln t\,dt=\Big[t\ln t-t\Big]_1^6$$
$$=(6\ln 6-6)-(-1)$$
$$=6\ln 6-5$$

답 $6\ln 6-5$

098



오른쪽 그림과 같이 밑면으로부터의 높이를 x라 하고 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{CD}:\overline{CH}=\overline{DE}:\overline{HB}$이므로

$x:6=\overline{DE}:2$

$6\overline{DE}=2x \qquad \therefore \overline{DE}=\frac{x}{3}$

밑면으로부터의 높이가 x이고 밑면에 평행한 원의 반지름의 길이는

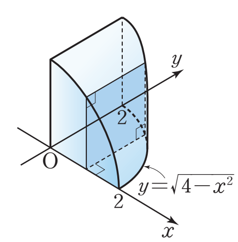
$4+\frac{x}{3}$이므로 이 원의 넓이는 $\pi\left(4+\frac{x}{3}\right)^2$이다.

따라서 그릇의 부피는

$$\int_0^6 \pi\left(4+\frac{x}{3}\right)^2 dx=\pi\int_0^6 \left(4+\frac{x}{3}\right)^2 dx$$

답 ③

099



한 변의 길이가 $\sqrt{4-x^2}$인 정사각형의 넓이는 $(4-x^2)$이다.

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^2 (4-x^2)dx=\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

답 ②

100

한 변의 길이가 $\sqrt{\sin x}$인 정삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{\sin x})^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^\pi \frac{\sqrt{3}}{4}\sin x\,dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^\pi \sin x\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\Big[-\cos x\Big]_0^\pi$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\{-(-1)-(-1)\}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

101

점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |2\sin\pi t|dt=2\int_0^2 |\sin\pi t|dt$$
$$=2\int_0^1 2\sin\pi t\,dt$$
$$=4\int_0^1 \sin\pi t\,dt$$

$$=4\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^1$$
$$=4\left\{\frac{1}{\pi}-\left(-\frac{1}{\pi}\right)\right\}$$
$$=\frac{8}{\pi}$$
$\therefore k=8$

답 8

102

$x=3t^2$, $y=1-t^2$에서 $\frac{dx}{dt}=6t$, $\frac{dy}{dt}=-2t$

따라서 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2\sqrt{(6t)^2+(-2t)^2}dt=\int_0^2\sqrt{40t^2}dt=2\sqrt{10}\int_0^2 t\,dt$$
$$=2\sqrt{10}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^2=2\sqrt{10}\times2=4\sqrt{10}$$

답 $4\sqrt{10}$

103

$$x(t)=\int_0^t v(t)dt$$
$$=\int_0^8(t-3)dt+\int_8^t 5e^{8-t}dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2-3t\right]_0^8+\left[-5e^{8-t}\right]_8^t$$
$$=8+(-5e^{8-t}+5)$$
$$=13-5e^{8-t}$$
$$\therefore \lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{t\to\infty}(13-5e^{8-t})=13$$

답 ③

104

ㄱ은 옳다.

시각 t에서의 점 P의 속도는

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)=(1-2\sin t, \sqrt{3}\cos t)$$

이므로 $t=\frac{\pi}{2}$일 때 점 P의 속도는 $\left(1-2\sin\frac{\pi}{2}, \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2}\right)$,

즉 $(-1, 0)$이다.

ㄴ도 옳다.

시각 t에서의 점 P의 속도의 크기는

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(1-2\sin t)^2+(\sqrt{3}\cos t)^2}$$
$$=\sqrt{1-4\sin t+4\sin^2 t+3\cos^2 t}$$
$$=\sqrt{3(\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{\sin^2 t+\cos^2 t=1})+\sin^2 t-4\sin t+1}$$
$$=\sqrt{\sin^2 t-4\sin t+4}$$
$$=\sqrt{(\sin t-2)^2}$$
$$=|\sin t-2|$$

$0\le t\le 2\pi$에서 $-1\le\sin t\le1$이므로 $-3\le\sin t-2\le-1$

$\therefore 1\le|\sin t-2|\le3$

따라서 점 P의 속도의 크기의 최솟값은 1이다.

ㄷ도 옳다.

점 P가 $t=\pi$에서 $t=2\pi$까지 움직인 거리는

$$\int_\pi^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_\pi^{2\pi}(\underbrace{2-\sin t}_{\sin t-2<0\text{이므로 }|\sin t-2|=2-\sin t})dt$$
$$=\left[2t+\cos t\right]_\pi^{2\pi}$$
$$=(4\pi+1)-(2\pi-1)$$
$$=2\pi+2$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

105

$x=\theta-\sin\theta$, $y=1-\cos\theta$에서

$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos\theta+\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}}\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{\theta}{2}d\theta=\left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}$$
$$=4-(-4)=8$$

답 ④

106

$x=3t^2$, $y=2t^3$에서 $\frac{dx}{dt}=6t$, $\frac{dy}{dt}=6t^2$이므로 곡선의 길이는

$$\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{(6t)^2+(6t^2)^2}dt$$
$$=\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{36t^2(t^2+1)}dt$$
$$=\int_0^{2\sqrt{2}}6t\sqrt{t^2+1}dt$$

$t^2+1=u$로 놓으면 $\frac{du}{dt}=2t$이고

$t=0$일 때 $u=1$, $t=2\sqrt{2}$일 때 $u=9$이므로

$$\int_0^{2\sqrt{2}}6t\sqrt{t^2+1}dt=\int_1^9 3\sqrt{u}du=\left[2u^{\frac{3}{2}}\right]_1^9=54-2=52$$

따라서 구하는 곡선의 길이는 52이다.

답 ④

107

$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$에서 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$이므로

$0\le\theta\le a$에서 곡선 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$의 길이는

$$\int_0^a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_0^a\sqrt{1+\left\{\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right\}^2}dx$$
$$=\int_0^a\sqrt{\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})}dx$$
$$=\int_0^a\sqrt{\left\{\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right\}^2}dx$$

$$=\int_0^a \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^a$$
$$=\frac{1}{2}(e^a-e^{-a})=\frac{3}{4}$$

즉, $e^a-e^{-a}=\frac{3}{2}$이므로 양변에 $2e^a$을 곱한다.

$2e^{2a}-3e^a-2=0$, $(2e^a+1)(e^a-2)=0$

$e^a=2$ ($\because e^a>0$) $\quad \therefore a=\ln 2$

답 ①

108

$y=\ln(x^2-1)$에서 $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^2-1}$이므로

구하는 곡선의 길이는

$$\int_2^5 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_2^5 \sqrt{1+\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2}dx$$

$$1+\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2=\frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{(x^2+1)^2}{(x^2-1)^2}=\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2$$

$$=\int_2^5 \sqrt{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2}dx$$
$$=\int_2^5 \frac{x^2+1}{x^2-1}dx$$
$$=\int_2^5 \left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)dx$$
$$=\int_2^5 \left\{1+\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right\}dx$$
$$=\int_2^5 \left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\Big[x+\ln(x-1)-\ln(x+1)\Big]_2^5$$
$$=(5+\ln 4-\ln 6)-(2+\ln 1-\ln 3)$$
$$=3+\ln\frac{4\times 3}{6}$$
$$=3+\ln 2$$

답 ⑤

109

$f'(x)=(x\sqrt{x})'=(x^{\frac{3}{2}})'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$이므로

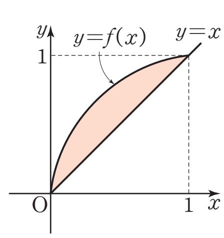
$$l=\int_0^2 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx=\int_0^2 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx$$
$$=\int_0^2 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx=\left[\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$
$$=\frac{8}{27}\left(\frac{11}{2}\sqrt{\frac{11}{2}}-1\right)$$
$$=\frac{2}{27}(11\sqrt{22}-4)$$

$\therefore 27l=27\times\frac{2}{27}(11\sqrt{22}-4)=2(11\sqrt{22}-4)$

답 $2(11\sqrt{22}-4)$

110

$f'(x)>0$, $f''(x)<0$이고 $f(0)=0$, $f(1)=1$이므로 연속함수 $y=f(x)$의 그래프는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 위로 볼록하면서 증가한다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$$\therefore \int_0^1 \{f(x)-x\}dx$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{k}{n}\right\}\frac{1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{k}{n}\right\}$$

답 ②

111

분자와 분모를 각각 n^5으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)(1+2+3+\cdots+n)}{1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)}{n^3}\times\frac{(1+2+3+\cdots+n)}{n^2}}{\frac{1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4}{n^5}}$$
$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}\right\}\times\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\times\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^4\times\frac{1}{n}\right\}}$$
$$=\frac{\int_0^1 x^2dx\times\int_0^1 xdx}{\int_0^1 x^4dx}=\frac{\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1\times\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1}{\Big[\frac{1}{5}x^5\Big]_0^1}$$
$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}}=\frac{5}{6}$$

답 ②

112

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\{\sqrt{n^2-1^2}+2\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+(n-1)\sqrt{n^2-(n-1)^2}\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k\sqrt{n^2-k^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{k}{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\times\frac{1}{n}\right\}$$
$$=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$$

$1-x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-2x$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx=\int_1^0\left(-\frac{1}{2}\sqrt{t}\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{t}dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

따라서 주어진 극한값은 $\frac{1}{3}$이다.

답 $\frac{1}{3}$

113

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x\sqrt{4n^2-4nkx+k^2x^2}}{n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4n^2-4nkx+k^2x^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4-4\times\frac{kx}{n}+\left(\frac{kx}{n}\right)^2}$$
$$=\int_0^x\sqrt{4-4t+t^2}dt=\int_0^x|2-t|dt$$

$$\therefore f(4)=\int_0^4 |2-t|\,dt$$
$$=\int_0^2 (2-t)dt+\int_2^4 (-2+t)dt$$
$$=\left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^2+\left[-2t+\frac{1}{2}t^2\right]_2^4$$
$$=2+2=4$$

답 ④

114

접근

등차수열 $\{a_k\}$의 공차를 구하여 $a_{k+1}-a_k$를 n에 대한 식으로 나타낸다.

$a_k=-1-\frac{3}{n}+\frac{3k}{n}=-1+(k-1)\times\frac{3}{n}$이므로 등차수열 $\{a_k\}$의 공차는 $\frac{3}{n}$이다. 즉, $a_{k+1}-a_k=\frac{3}{n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(a_k)(a_{k+1}-a_k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(-1+\frac{3}{n}(k-1)\right)\times\frac{3}{n}$$
$$=\int_{-1}^{2} f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(3x^2-x+1)dx$$
$$=\left[x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{2}$$
$$=8-\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{21}{2}$$

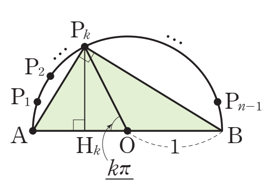
답 ②

115

반원에 대한 중심각의 크기는 π이므로

$\angle \mathrm{AOP}_k=\frac{k\pi}{n}$

오른쪽 그림과 같이 점 P_k에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H_k라고 하면 $\triangle \mathrm{P}_k\mathrm{H}_k\mathrm{O}$에서



$\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{H}_k}=\overline{\mathrm{OP}_k}\sin\frac{k\pi}{n}=\sin\frac{k\pi}{n}$

$\overline{\mathrm{OP}_k}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=1$

$S_k=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{H}_k}=\frac{1}{2}\times 2\times\sin\frac{k\pi}{n}=\sin\frac{k\pi}{n}$

이므로

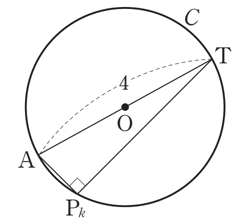
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\times\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1 \sin\pi x\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{\pi}-\left(-\frac{1}{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}$$

답 $\frac{2}{\pi}$

116

$\angle \mathrm{AOP}_k=\frac{2}{3}\pi\times\frac{k}{n}=\frac{2k\pi}{3n}$

오른쪽 그림에서



$\angle \mathrm{ATP}_k=\frac{1}{2}\angle \mathrm{AOP}_k=\frac{1}{2}\times\frac{2k\pi}{3n}=\frac{k\pi}{3n}$

이므로 직각삼각형 ATP_k에서

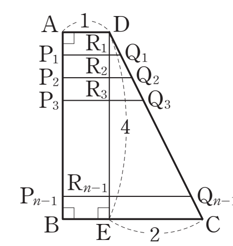
$\overline{\mathrm{AP}_k}=\overline{\mathrm{AT}}\sin(\angle \mathrm{ATP}_k)=4\sin\frac{k\pi}{3n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{\mathrm{AP}_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}4\sin\frac{k\pi}{3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{3n}$$
$$=\frac{12}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{3n}k\right)\times\frac{\pi}{3n}$$
$$=\frac{12}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx$$
$$=\frac{12}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{12}{\pi}\left\{-\frac{1}{2}-(-1)\right\}=\frac{6}{\pi}$$

답 ③

117

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 E라고 하면



$\overline{\mathrm{DE}}=4$, $\overline{\mathrm{CE}}=2$

$\overline{\mathrm{DE}}$와 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}$, $\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}$, $\cdots$, $\overline{\mathrm{R}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}}$이 만나는 점을 차례대로 R_1, R_2, $\cdots$, R_{n-1}이라고 하면

$\overline{\mathrm{DR}_1}=\frac{4}{n}$, $\overline{\mathrm{DR}_2}=\frac{8}{n}$, $\cdots$,

$\overline{\mathrm{DR}_{n-1}}=\frac{4(n-1)}{n}$, $\overline{\mathrm{DE}}=\frac{4n}{n}$이므로

$\overline{\mathrm{R}_1\mathrm{Q}_1}=\frac{2}{n}$, $\overline{\mathrm{R}_2\mathrm{Q}_2}=\frac{4}{n}$, $\cdots$, $\overline{\mathrm{R}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}}=\frac{2(n-1)}{n}$, $\overline{\mathrm{EC}}=\frac{2n}{n}$

$\therefore \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}=1+\frac{2}{n}$, $\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}=1+\frac{4}{n}$, $\cdots$, $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=1+\frac{2n}{n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}^2+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}^2+\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3}^2+\cdots+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}^2\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\left(1+\frac{4}{n}\right)^2+\left(1+\frac{6}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{2n}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\times\frac{2}{n}$$
$$=\frac{3}{2}\int_1^3 x^2\,dx=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3$$
$$=\frac{3}{2}\times\frac{26}{3}=13$$

답 ⑤

118

곡선 $y=\sin x$ $(0\le x\le\pi)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=a\cos x\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라고 하면

$$S_1=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=1+1=2$$

$$S_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos x\,dx=\left[a\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=a$$

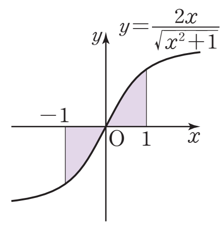
이때 색칠한 두 부분의 넓이가 같으려면 $S_1=S_2$이어야 하므로

$a=2$

답 2

119

$f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$라고 하면



$f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right|dx=2\int_{0}^{1}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$x^2+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$2\int_{0}^{1}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx=2\int_{1}^{2}\frac{1}{\sqrt{t}}dt=2\int_{1}^{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=2\left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_{1}^{2}=2(2\sqrt{2}-2)=4(\sqrt{2}-1)$$

답 ④

120

함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$S_1+S_2=\int_{0}^{2}\sqrt{3x}\,dx=\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{2}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$S_2=\int_{0}^{2}\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$\therefore S_1=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}-S_2=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}=\dfrac{4\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{3}=(\sqrt{3}-1)S_2$

$\therefore k=\sqrt{3}-1$

답 ①

121

색칠한 부분의 넓이는

$$\int_{0}^{2\pi}|x\sin x|dx=\int_{0}^{\pi}x\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi}x\sin x\,dx$$

$\int x\sin x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$이므로

$$\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx$$
$$=-x\cos x+\sin x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수이다.)}$$

$$\therefore \int_{0}^{2\pi}|x\sin x|dx=\int_{0}^{\pi}x\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi}x\sin x\,dx$$
$$=\Big[-x\cos x+\sin x\Big]_{0}^{\pi}-\Big[-x\cos x+\sin x\Big]_{\pi}^{2\pi}$$
$$=\pi-(-3\pi)=4\pi$$

답 ④

122

접근

$y=|\sin x|$가 주기함수임을 이용하여 S_n을 n에 대한 식으로 나타낸다.

$$S_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\left|\left(\frac{1}{3}\right)^n\sin x\right|dx$$
$$=\left(\frac{1}{3}\right)^n\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|dx$$

이때 $y=|\sin x|$는 주기가 π인 주기함수이므로 임의의 자연수 n에 대하여

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|dx=\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_{0}^{\pi}$$
$$=1-(-1)=2$$

$$\therefore S_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|dx=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1$$

답 ④

123

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=e^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이라고 하면

$f(x)=e^{x-m}+n$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(0, -2)$, $(\ln 3, 0)$을 지나므로

$f(0)=-2$에서

$e^{-m}+n=-2\qquad \therefore n=-2-e^{-m}\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$f(\ln 3)=0$에서

$e^{\ln 3-m}+n=0$, $3e^{-m}+n=0$

$\therefore n=-3e^{-m}\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-2-e^{-m}=-3e^{-m}$

$2e^{-m}=2$, $e^{-m}=1\qquad \therefore m=0$

$m=0$을 ㉠에 대입하면 $n=-3$

따라서 $f(x)=e^x-3$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{1}(-e^x+3)dx=\Big[-e^x+3x\Big]_{0}^{1}$$
$$=(-e+3)-(-1)$$
$$=4-e$$

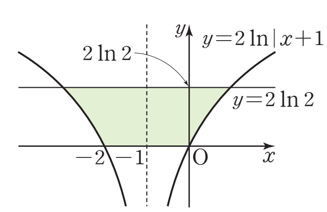
답 $4-e$

124

$x>-1$일 때, $y=2\ln|x+1|=2\ln(x+1)$에서

$\ln(x+1)=\dfrac{y}{2}\qquad \therefore x=e^{\frac{y}{2}}-1\qquad\cdots\cdots$ ㉠

함수 $y=2\ln|x+1|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이므로 ㉠의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면



$x-1=e^{\frac{y}{2}}-1\qquad \therefore x=e^{\frac{y}{2}}$

따라서 구하는 넓이는

$$2\int_{0}^{2\ln 2}e^{\frac{y}{2}}dy=2\left[2e^{\frac{y}{2}}\right]_{0}^{2\ln 2}=2(4-2)=4$$

답 ③

다른 풀이

곡선 $y=2\ln|x+1|$과 직선 $y=2\ln 2$의 교점의 x좌표는

$x>-1$일 때 $2\ln(x+1)=2\ln 2$, $x+1=2\qquad \therefore x=1$

$x<-1$일 때 $2\ln(-x-1)=2\ln 2$, $-x-1=2\qquad \therefore x=-3$

즉, 곡선 $y=2\ln|x+1|$과 직선 $y=2\ln 2$의 교점은 $(-3, 2\ln 2)$, $(1, 2\ln 2)$이다.

따라서 구하는 넓이는

$$4\times2\ln2-2\int_0^1 2\ln(x+1)dx=8\ln2-4\int_1^2 \ln t\,dt$$
$$=8\ln2-4\Big[t\ln t-t\Big]_1^2$$
$$=8\ln2-8\ln2+4=4$$

125

$f(x)=4^x-4^{-x}+n$이라고 하면

$f'(x)=4^x\ln4+4^{-x}\ln4=(4^x+4^{-x})\ln4>0$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

또, $n\geq5$일 때 $f(-1)=\frac{1}{4}-4+n=n-\frac{15}{4}>0$이므로

$$S_n=\int_{-1}^1(4^x-4^{-x}+n)dx=\left[\frac{4^x+4^{-x}}{\ln4}+nx\right]_{-1}^1$$
$$=\left(\frac{4+4^{-1}}{\ln4}+n\right)-\left(\frac{4^{-1}+4}{\ln4}-n\right)=2n$$

$$\therefore \sum_{n=5}^{20}S_n=\sum_{n=5}^{20}2n=\sum_{n=1}^{20}2n-\sum_{n=1}^{4}2n$$
$$=2\times\frac{20\times21}{2}-2\times\frac{4\times5}{2}$$
$$=420-20=400$$

답 400

참고

자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

126

함수 $y=f(x)$의 역함수가 존재하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$ 또는 $f'(x)\leq0$이어야 한다.

$f(x)=(2x^2+a)e^x$에서

$f'(x)=4xe^x+(2x^2+a)e^x$
$\quad=(2x^2+4x+a)e^x$

$e^x>0$이므로 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $2x^2+4x+a\geq0$이어야 한다.

이차방정식 $2x^2+4x+a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=4-2a\leq0$

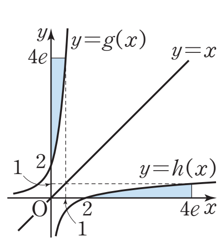
$\therefore a\geq2$

따라서 실수 a의 최솟값은 2이므로

$m=2$

$\therefore g(x)=(2x^2+2)e^x$

$g(0)=2$, $g(1)=4e$이고 함수 $y=g(x)$와 그 역함수 $y=h(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\int_2^{4e}h(x)dx$의 값은 함수 $y=g(x)$의 그래프와 y축 및 직선 $y=4e$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

$$\therefore \int_2^{4e}h(x)dx$$
$$=1\times4e-\int_0^1 g(x)dx$$
$$=4e-\int_0^1(2x^2+2)e^x dx$$

$u(x)=2x^2+2$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면 $u'(x)=4x$, $v(x)=e^x$

$$=4e-\Big[(2x^2+2)e^x\Big]_0^1+\int_0^1 4xe^x dx$$

$s(x)=4x$, $t'(x)=e^x$으로 놓으면 $s'(x)=4$, $t(x)=e^x$

$$=4e-(4e-2)+\Big[4xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 4e^x dx$$
$$=2+4e-\Big[4e^x\Big]_0^1$$
$$=2+4e-(4e-4)=6$$

답 6

127

$f(x)=\int_a^{x+1}|\ln t|dt-\int_a^x|\ln t|dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=|\ln(x+1)|-|\ln x|$

$0<x<1$에서 $\ln(x+1)>0$, $\ln x<0$이므로

$f'(x)=\ln(x+1)+\ln x=\ln x(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\ln x(x+1)=0$

$x(x+1)=1$, $x^2+x-1=0$

$\therefore x=\frac{-1+\sqrt5}{2}$ ($\because 0<x<1$)

이때 $f''(x)=\frac{2x+1}{x(x+1)}$에서 $f''\left(\frac{-1+\sqrt5}{2}\right)=\sqrt5>0$이므로

함수 $f(x)$는 $x=\frac{-1+\sqrt5}{2}$에서 극소이면서 최소이다.

$\therefore \alpha=\frac{-1+\sqrt5}{2}$

곡선 $y=\frac{8}{x^3}$과 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\alpha+1$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_\alpha^{\alpha+1}\frac{8}{x^3}dx=\left[-\frac{4}{x^2}\right]_\alpha^{\alpha+1}$$
$$=-\frac{4}{(\alpha+1)^2}+\frac{4}{\alpha^2}=\frac{8\alpha+4}{\{\alpha(\alpha+1)\}^2}$$
$$=\frac{-4+4\sqrt5+4}{1^2}=4\sqrt5$$

$\therefore S^2=(4\sqrt5)^2=80$

답 ⑤

128

$f(x)=\ln x$라고 하면 $f'(x)=\frac{1}{x}$

원점에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t, \ln t)$라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{t}$이므로 접선의 방정식은

$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{t}x-1+\ln t$

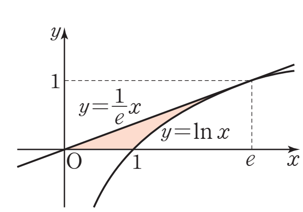
이 직선이 원점을 지나므로

$0=-1+\ln t$

$\ln t=1$ $\quad\therefore t=e$

따라서 접점의 좌표는 $(e, 1)$이고

접선의 방정식은 $y=\frac{1}{e}x$이므로



구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\times e\times 1-\int_1^e \ln x\,dx=\frac{1}{2}e-\Big[x\ln x-x\Big]_1^e$$

$$=\frac{1}{2}e-1=\frac{e-2}{2}$$

$\int \ln x\,dx$
$=x\ln x-x+C$
(단, C는 적분상수이다.)

답 ①

129

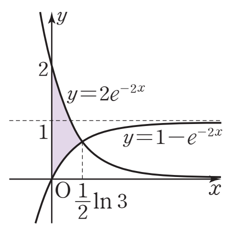
$f(x)=1-e^{-2x}$에서

$f'(x)=2e^{-2x}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f'(x)$의 교점의 x좌표는 $1-e^{-2x}=2e^{-2x}$에서

$3e^{-2x}=1$, $e^{-2x}=\frac{1}{3}$

$-2x=-\ln 3 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}\ln 3$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{1}{2}\ln 3}\{2e^{-2x}-(1-e^{-2x})\}dx=\int_0^{\frac{1}{2}\ln 3}(3e^{-2x}-1)dx$$

$$=\Big[-\frac{3}{2}e^{-2x}-x\Big]_0^{\frac{1}{2}\ln 3}$$

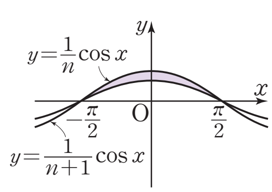
$$=-\frac{3}{2}e^{-\ln 3}-\frac{1}{2}\ln 3-\Big(-\frac{3}{2}\Big)$$

$$=1-\frac{1}{2}\ln 3$$

답 ①

130

두 곡선 $y=\frac{1}{n}\cos x$, $y=\frac{1}{n+1}\cos x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$S_n=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{1}{n}\cos x-\frac{1}{n+1}\cos x\Big)dx$$

$$=\Big[\frac{1}{n}\sin x-\frac{1}{n+1}\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)-\Big(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\Big)$$

$$=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}2\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Big)$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\Big\{\Big(1-\frac{1}{2}\Big)+\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Big)+\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\Big)+\cdots+\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)\Big\}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)$$

$$=2\times 1=2$$

답 ④

131

두 곡선 $x=(1+e)e^y$, $x=e^{2y}+e$의 교점의 y좌표는

$(1+e)e^y=e^{2y}+e$에서

$e^{2y}-(1+e)e^y+e=0$, $(e^y-1)(e^y-e)=0$

$e^y=1$ 또는 $e^y=e$

$\therefore y=0$ 또는 $y=1$

한편 $0\le y\le 1$에서 $1\le e^y\le e$이므로

$e^{2y}+e-(1+e)e^y=(e^y-1)(e^y-e)\le 0$

즉, $0\le y\le 1$에서 $e^{2y}+e\le(1+e)e^y$이므로 두 곡선 $x=(1+e)e^y$, $x=e^{2y}+e$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^1\{(1+e)e^y-(e^{2y}+e)\}dy=\int_0^1(e^y+e^{y+1}-e^{2y}-e)dy$$

$$=\Big[e^y+e^{y+1}-\frac{1}{2}e^{2y}-ey\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\Big(e+\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{2}e^2-e-\frac{1}{2}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$, $c=-\frac{1}{2}$이므로

$$a-b+c=\frac{1}{2}-(-1)+\Big(-\frac{1}{2}\Big)=1$$

답 ④

132

$\frac{2}{1+x^2}=\frac{2}{1+(-x)^2}$에서 곡선 $y=\frac{2}{1+x^2}$는 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}\Big(2-\frac{2}{1+x^2}\Big)dx=2\int_0^1\Big(2-\frac{2}{1+x^2}\Big)dx$$

$$=4\int_0^1\Big(1-\frac{1}{1+x^2}\Big)dx$$

$$=4\Big[x\Big]_0^1-4\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=4-4\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$에서 $x=\tan\theta\Big(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\Big)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$이고 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

따라서 구하는 넓이는 ㉠에서

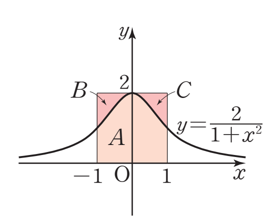
$$4-4\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=4-4\times\frac{\pi}{4}$$

$$=4-\pi$$

답 $4-\pi$

다른 풀이

구하는 넓이는 오른쪽 그림에서 $(A+B+C)-A$와 같으므로



$$2\times 2-\int_{-1}^{1}\frac{2}{1+x^2}dx$$

$$=4-4\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

133

$y=e^{ax}$에서 $ax=\ln y$ $\quad \therefore x=\dfrac{1}{a}\ln y$ ($\because a\neq 0$)

x, y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{1}{a}\ln x \ (x>0)$

$\therefore g(x)=\dfrac{1}{a}\ln x$

$f(x)=e^{ax}$, $g(x)=\dfrac{1}{a}\ln x$에서 $f'(x)=ae^{ax}$, $g'(x)=\dfrac{1}{ax}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=e$에서 서로 접하므로

$f(e)=g(e)$에서 $\quad e^{ae}=\dfrac{1}{a}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

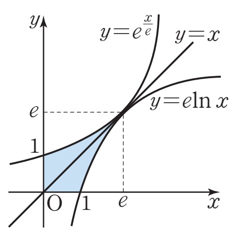
$f'(e)=g'(e)$에서 $\quad ae^{ae}=\dfrac{1}{ae}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a\times\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{ae}$ $\quad \therefore a=\dfrac{1}{e}$

$\therefore f(x)=e^{\frac{x}{e}}$, $g(x)=e\ln x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는



$2\displaystyle\int_0^e \{f(x)-x\}dx$

$=2\displaystyle\int_0^e (e^{\frac{x}{e}}-x)dx$

$=2\Big[e\times e^{\frac{x}{e}}-\dfrac{1}{2}x^2\Big]_0^e$

$=e^2-2e$

답 ①

다른 풀이

구하는 넓이는

$\displaystyle\int_0^e f(x)dx-\int_1^e g(x)dx$

$=\displaystyle\int_0^e e^{\frac{x}{e}}dx-\int_1^e e\ln x\,dx$

$=\Big[e\times e^{\frac{x}{e}}\Big]_0^e-e\Big[x\ln x-x\Big]_1^e$

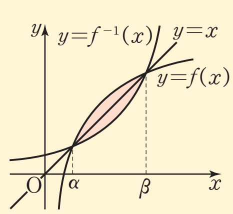
$=(e^2-e)-e$

$=e^2-2e$

풍쌤 비법

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=2\int_\alpha^\beta |f(x)-x|dx$$



134

$f(x)=xe^{x-n}$에서 $f'(x)=e^{x-n}+xe^{x-n}=(x+1)e^{x-n}$

$x\geq 0$에서 $f'(x)>0$이므로 $x\geq 0$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

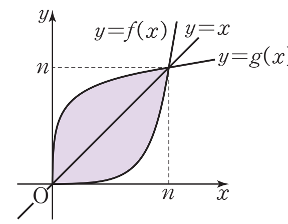
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같으므로 $xe^{x-n}=x$에서

$x(e^{x-n}-1)=0$

$x=0$ 또는 $e^{x-n}=1$

$\therefore x=0$ 또는 $x=n$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로



$S_n=2\displaystyle\int_0^n \{x-f(x)\}dx$

$=2\displaystyle\int_0^n (x-xe^{x-n})dx$

$=\displaystyle\int_0^n 2x\,dx-\int_0^n 2xe^{x-n}dx$ $\quad$ $u(x)=2x$, $v'(x)=e^{x-n}$으로 놓으면 $u'(x)=2$, $v(x)=e^{x-n}$

$=\Big[x^2\Big]_0^n-\Big[2xe^{x-n}\Big]_0^n+\displaystyle\int_0^n 2e^{x-n}dx$

$=n^2-2n+\Big[2e^{x-n}\Big]_0^n$

$=n^2-2n+2-2e^{-n}$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+2-2e^{-n}}{n^2}$

$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{2}{e^n n^2}\Big)=1$

답 1

135

ㄱ은 옳다.

$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(e^x-1)dx=\Big[e^x-x\Big]_0^1$

$=e-1-1=e-2$

ㄴ도 옳다.

$g(x)=f(x)-x=e^x-1-x$로 놓으면

$g'(x)=e^x-1$

$x>0$에서 $g'(x)>0$이므로 함수 $g(x)$는 $x>0$에서 증가하고, $g(0)=0$이므로 $x>0$에서 $g(x)>0$이다.

즉, $x>0$에서 $f(x)-x>0$이므로

$f(x)>x$

ㄷ도 옳다.

$y=e^x-1$에서

$e^x=y+1$

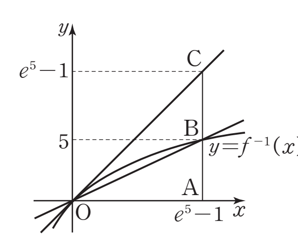
$\therefore x=\ln(y+1)$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\ln(x+1)$

$\therefore f^{-1}(x)=\ln(x+1)$

오른쪽 그림에서



$\triangle OAB=\dfrac{5(e^5-1)}{2}<\displaystyle\int_0^{e^5-1}f^{-1}(x)dx$

$\displaystyle\int_0^{e^5-1}f^{-1}(x)dx<\frac{(e^5-1)^2}{2}=\triangle OAC$

$\therefore \dfrac{5(e^5-1)}{2}<\displaystyle\int_0^{e^5-1}f^{-1}(x)dx<\frac{(e^5-1)^2}{2}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

136

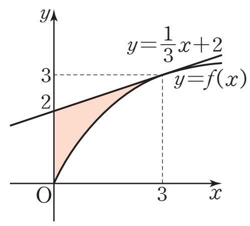
함수 $f(x)$가 일대일대응이므로 역함수가 존재하고, 곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(0,\ 0)$, $(3,\ 3)$을 지나므로 증가함수이다.

따라서 $f'(x)\geq 0$이고, $0\leq x\leq 3$에서 $f'(x)f''(x)<0$이므로

$f'(x)>0$, $f''(x)<0$

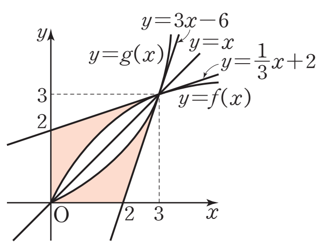
한편 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(3)(x-3)+3=\frac{1}{3}x+2$



접선과 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.

이때 곡선 $y=f(x)$와 접선 $y=\frac{1}{3}x+2$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 각각 역함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=3x-6$이 되므로 다음 그림의 색칠한 두 부분의 넓이는 $\frac{3}{2}$으로 서로 같다.



$\therefore \int_0^3 g(x)dx=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times 1\times 3=3$

답 3

137

구하는 입체도형의 부피를 V라고 하면

$V=\int_0^3 S(x)dx=\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}dx$

$\sqrt{9-x^2}=t$로 놓으면 $9-x^2=t^2$에서 $2t\frac{dt}{dx}=-2x$, $t\frac{dt}{dx}=-x$이고 $x=0$일 때 $t=3$, $x=3$일 때 $t=0$이므로

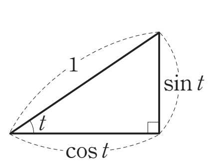
$V=\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}dx=\int_3^0(-t^2)dt=\int_0^3 t^2dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^3=9$

답 ⑤

138

x축 위의 $x=t\left(\frac{\pi}{6}\leq t\leq\frac{\pi}{4}\right)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 빗변의 길이가 1이고 한 내각의 크기가 t인 직각삼각형이므로 단면의 넓이를 $S(t)$라고 하면



$S(t)=\frac{1}{2}\times\cos t\times\sin t=\frac{1}{2}\sin t\cos t$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라고 하면

$V=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} S(x)dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cos x dx$

$\sin x=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dx}=\cos x$이고

$x=\frac{\pi}{6}$일 때 $s=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $s=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$V=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} s\,ds=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}s^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{16}$

답 ①

139

$1\leq y\leq e$에서 y축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(y)$라고 하면 $S(y)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

$y=e^x$에서 $x=\ln y$이므로 $S(y)=\frac{\sqrt{3}}{4}(\ln y)^2$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라고 하면

$V=\int_1^e S(y)dy=\int_1^e\frac{\sqrt{3}}{4}(\ln y)^2dy=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^e(\ln y)^2dy$

$\ln y=x$에서 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}=\frac{1}{e^x}$이고

$y=1$일 때 $x=0$, $y=e$일 때 $x=1$이므로

$V=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^e(\ln y)^2dy=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1 x^2e^xdx$

$u(x)=x^2$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면 $u'(x)=2x$, $v(x)=e^x$

$\int_0^1 x^2e^xdx=\left[x^2e^x\right]_0^1-2\int_0^1 xe^xdx$ 　 $s(x)=x$, $t'(x)=e^x$로 놓으면 $s'(x)=1$, $t(x)=e^x$

$=e-2\left(\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^xdx\right)$

$=e-2\left(e-\left[e^x\right]_0^1\right)$

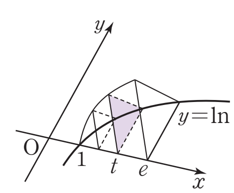
$=e-2\{e-(e-1)\}=e-2$

$\therefore V=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1 x^2e^xdx=\frac{\sqrt{3}(e-2)}{4}$

답 ⑤

다른 풀이

$y=e^x$의 역함수는 $y=\ln x$



$x=t\ (1\leq t\leq e)$일 때 정삼각형의 한 변의 길이는 $\ln t$이므로 정삼각형의 넓이를 $S(t)$라고 하면 $S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}(\ln t)^2$

따라서 입체도형의 부피 V는

$V=\int_1^e S(t)dt=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^e(\ln t)^2dt$

$\int_1^e(\ln t)^2dt$에서 $u(t)=(\ln t)^2$, $v'(t)=1$로 놓으면

$u'(t)=2\ln t\times\frac{1}{t}=\frac{2\ln t}{t}$, $v(t)=t$이므로

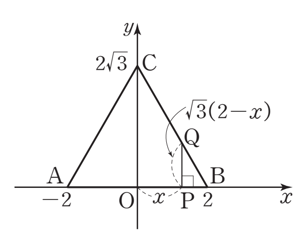
$\int_1^e(\ln t)^2dt=\left[t(\ln t)^2\right]_1^e-\int_1^e 2\ln t dt$

$=e-2\left[t\ln t-t\right]_1^e=e-2$

$\therefore V=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^e(\ln t)^2dt=\frac{\sqrt{3}(e-2)}{4}$

140

오른쪽 그림과 같이 변 AB의 중점을 원점 O로 하고 직선 AB를 x축, 직선 OC를 y축으로 놓으면



$\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 2\sqrt{3})$

변 AB 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)$

$(0\leq x\leq 2)$를 지나고 변 AB에 수

직인 직선이 변 BC와 만나는 점을 Q라고 하면

$\overline{PQ}=\overline{PB}\tan 60^\circ=\sqrt{3}(2-x)$

점 P를 지나고 변 AB에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면 $S(x)$는 지름의 길이가 $\sqrt{3}(2-x)$인 반원의 넓이이므로

$$S(x)=\frac{1}{2}\times\pi\left\{\frac{1}{2}\times\sqrt{3}(2-x)\right\}^2=\frac{3}{8}\pi(x-2)^2$$

이때 점 P의 x좌표가 $x=-2$에서 $x=0$까지의 부피와 $x=0$에서 $x=2$까지의 부피가 같다.

따라서 구하는 입체도형의 부피는

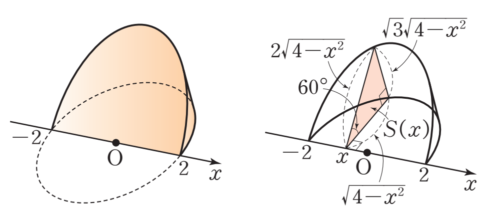
$$\begin{aligned}2\int_0^2 S(x)dx&=2\int_0^2\frac{3}{8}\pi(x-2)^2dx\\&=\frac{3}{4}\pi\int_0^2(x-2)^2dx\\&=\frac{3}{4}\pi\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_0^2\\&=\frac{3}{4}\pi\times\frac{8}{3}=2\pi\end{aligned}$$

답 2π

141

다음 그림과 같이 원기둥의 밑면의 중심을 원점으로 하고, 지름을 x축으로 정하면 작은 입체도형의 밑면은 반지름의 길이가 2인 반원이다.

$x^2+y^2=2^2$에서 $y=\sqrt{4-x^2}\ (y\geq0)$



이때 x좌표가 x인 점을 지나고 밑면에 수직인 평면으로 이 입체도형을 자를 때 생기는 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\times\sqrt{4-x^2}\times\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(4-x^2)$$

$\sqrt{4-x^2}\tan 60^\circ=\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}$

이므로 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 S(x)dx&=2\int_0^2 S(x)dx\\&=2\int_0^2\frac{\sqrt{3}}{2}(4-x^2)dx=\sqrt{3}\int_0^2(4-x^2)dx\\&=\sqrt{3}\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{16\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

따라서 $p=3$, $q=16$이므로

$p+q=3+16=19$

답 19

142

접근

구의 단면이 원임을 이용하여 작은 입체도형의 부피를 구하고 구의 부피를 이용하여 작은 부분의 부피와 큰 입체도형의 부피를 구한다.

구의 중심으로부터의 거리가 x인 평면으로 구를 자를 때의 구의 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면 단면인 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{4^2-x^2}=\sqrt{16-x^2}$이므로

$S(x)=\pi(\sqrt{16-x^2})^2=\pi(16-x^2)$

$$\begin{aligned}V_1&=\int_2^4 S(x)dx=\int_2^4\pi(16-x^2)dx\\&=\pi\left[16x-\frac{1}{3}x^3\right]_2^4=\frac{40}{3}\pi\end{aligned}$$

구의 반지름의 길이가 4이므로 구의 부피는

$\frac{4}{3}\pi\times4^3=\frac{256}{3}\pi$

$V_2=\frac{256}{3}\pi-\frac{40}{3}\pi=72\pi$

$$\therefore \frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{40}{3}\pi}{72\pi}=\frac{5}{27}$$

답 ③

참고

구의 겉넓이와 부피

구의 반지름의 길이가 r일 때

(1) 겉넓이: $4\pi r^2$

(2) 부피: $\frac{4}{3}\pi r^3$

143

$v(t)=0$일 때 점 P가 진행 방향을 바꾸므로 진행 방향을 바꾸는 시각은 $\frac{1}{2}\sin\pi t=0$에서 $t=1, 2, 3, \cdots$

따라서 출발 후 처음으로 진행 방향을 바꾸는 시각은 $t=1$이므로 구하는 점 P의 좌표는

$$\begin{aligned}0+\int_0^1\frac{1}{2}\sin\pi t\,dt&=\frac{1}{2}\int_0^1\sin\pi t\,dt=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^1\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

답 ④

144

$f(x)=2x^3-9x^2+12x$에서 $f'(x)=6x^2-18x+12$

$\frac{dx}{dt}=-f'(t)\sin f(t)$, $\frac{dy}{dt}=f'(t)\cos f(t)$이므로 닫힌구간 $[0, 2]$에서 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}&\int_0^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt\\&=\int_0^2\sqrt{\{-f'(t)\sin f(t)\}^2+\{f'(t)\cos f(t)\}^2}dt\\&=\int_0^2\sqrt{\{f'(t)\}^2}dt=\int_0^2|f'(t)|dt\\&=\int_0^2|6t^2-18t+12|dt \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $6t^2-18t+12=6(t-1)(t-2)$이므로

$0\leq t\leq1$일 때, $|6t^2-18t+12|=6t^2-18t+12$

$1\leq t\leq2$일 때, $|6t^2-18t+12|=-(6t^2-18t+12)$

따라서 ㉠에서 구하는 거리는

$$\begin{aligned}&\int_0^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt\\&=\int_0^1(6t^2-18t+12)dt-\int_1^2(6t^2-18t+12)dt\\&=\left[2t^3-9t^2+12t\right]_0^1-\left[2t^3-9t^2+12t\right]_1^2\\&=5-(-1)\\&=6\end{aligned}$$

답 ③

145

단면이 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 움직인 거리를 h cm라고 하면

$h=\int_0^5 t(8-t)dt=\int_0^5 (8t-t^2)dt$

$=\left[4t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^5=100-\frac{125}{3}=\frac{175}{3}$

단면의 넓이와 단면이 움직인 거리의 곱이 흘러나온 물의 양이 되므로 구하는 물의 양은

$6\times\frac{175}{3}=350(\text{cm}^3)$

답 ⑤

146

$x=e^{-t}\sin t,\ y=e^{-t}\cos t$에서

$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=e^{-t}(\cos t-\sin t)$

$\frac{dy}{dt}=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t=-e^{-t}(\cos t+\sin t)$

이므로

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=e^{-2t}(1-2\sin t\cos t)$

$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=e^{-2t}(1+2\sin t\cos t)$

$\therefore \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=2e^{-2t}$

따라서 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^a\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^a\sqrt{2e^{-2t}}dt$

$=\sqrt{2}\int_0^a e^{-t}dt$

$=\sqrt{2}\left[-e^{-t}\right]_0^a$

$=\sqrt{2}(-e^{-a}+1)$

즉, $\sqrt{2}(1-e^{-a})=\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)=\sqrt{2}(1-e^{-2})$이므로

$-a=-2 \qquad \therefore a=2$

답 ②

147

$x=3\sin t-\sin 3t,\ y=3\cos t-\cos 3t$에서

$\frac{dx}{dt}=3\cos t-3\cos 3t,\ \frac{dy}{dt}=-3\sin t+3\sin 3t$이므로

$t=0$에서 $t=\frac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(3\cos t-3\cos 3t)^2+(-3\sin t+3\sin 3t)^2}dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sqrt{2\underline{-2\cos t\cos 3t-2\sin t\sin 3t}}\,dt$

$-2\cos t\cos 3t-2\sin t\sin 3t$
$=-2(\cos t\cos 3t+\sin t\sin 3t)$
$=-2\cos(t-3t)$
$=-2\cos(-2t)=-2\cos 2t$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sqrt{2(1-\cos 2t)}\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}6\sqrt{\frac{1-\cos 2t}{2}}dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}6\sqrt{\sin^2 t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}6\sin t\,dt$

$=\left[-6\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=6$

답 ③

148

접근

$\mathrm{P}(x, y)$로 놓고, $\frac{dS}{dt}=4$임을 이용하여 점 P의 속력을 x에 대한 식으로 나타낸다.

점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면

$S=\int_0^x 2\sqrt{x}\,dx$

위의 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\frac{dS}{dt}=2\sqrt{x}\times\frac{dx}{dt}$

이때 $\frac{dS}{dt}=4$이므로 $2\sqrt{x}\times\frac{dx}{dt}=4 \qquad \therefore \frac{dx}{dt}=\frac{2}{\sqrt{x}}$

한편 $y=2\sqrt{x}$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\sqrt{x}}\times\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{x}}\times\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2}{x}$

따라서 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 속력은

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{2}{x}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}$

이므로 점 P가 점 $(4, 4)$를 지날 때의 속력은

$\sqrt{\frac{4}{4}+\frac{4}{4^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\sqrt{\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}$에 $x=4$를 대입한다.

답 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

149

$y=\ln(\cos x)$에서 $\quad y'=\frac{-\sin x}{\cos x}$

$x=0$에서 $x=\frac{\pi}{6}$까지 곡선 $y=\ln(\cos x)$의 길이를 l이라고 하면

$l=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)^2}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{6}$일 때 $t=\frac{1}{2}$이므로

$l=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-t^2}dt$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(1-t)(1+t)}dt$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$

$=\frac{1}{2}\left[-\ln(1-t)+\ln(1+t)\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}\left(-\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\ln 3$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

답 ①

150

$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$에서 $f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

따라서 $x=-2$에서 $x=2$까지 곡선 $y=f(x)$의 길이는

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx&=\int_{-2}^{2}\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}dx\\&=\int_{-2}^{2}\sqrt{1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}dx\\&=\int_{-2}^{2}\sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}dx\\&=\int_{-2}^{2}\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}dx\\&=\int_{-2}^{2}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx\\&=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_{-2}^{2}\\&=\frac{1}{2}(2e^2-2e^{-2})\\&=e^2-e^{-2}=2\times\frac{e^2-e^{-2}}{2}\\&=2f'(2)\end{aligned}$$

답 ④

151

$\int_{1}^{5}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$는 곡선 $y=f(x)$에 대하여 $x=1$에서 $x=5$까지의 길이이므로 최소인 경우는 두 점 $(1, 1)$, $(5, 4)$를 직선으로 연결할 때이다. 따라서 구하는 최솟값은

$\sqrt{(5-1)^2+(4-1)^2}=5$

답 5

참고

두 점 사이의 거리

두 점 $\mathrm{A}(x, y)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

152

$x=\dfrac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}$, $y=\dfrac{1}{2}t^2-t$에서

$\dfrac{dx}{dt}=2t^{\frac{1}{2}}$, $\dfrac{dy}{dt}=t-1$이므로

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2&=(2t^{\frac{1}{2}})^2+(t-1)^2=4t+t^2-2t+1\\&=t^2+2t+1=(t+1)^2\end{aligned}$$

따라서 점 P가 $t=1$에서 $t=a$까지 그리는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}\int_{1}^{a}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt&=\int_{1}^{a}\sqrt{(t+1)^2}dt\\&=\int_{1}^{a}(t+1)dt\\&=\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_{1}^{a}\\&=\frac{1}{2}a^2+a-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

즉, $\dfrac{1}{2}a^2+a-\dfrac{3}{2}=6$이므로

$a^2+2a-15=0$, $(a+5)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

답 ③

153

조건 (다)에 의하여

$\int_{0}^{t}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx=\dfrac{1}{2}(e^t-e^{-t})$

위의 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}=\dfrac{1}{2}(e^t+e^{-t})$

위의 식의 양변을 제곱하면

$1+\{f'(t)\}^2=\dfrac{1}{4}(e^{2t}+e^{-2t}+2)$

$\therefore \{f'(t)\}^2=\dfrac{1}{4}(e^{2t}+e^{-2t}-2)=\left\{\dfrac{1}{2}(e^t-e^{-t})\right\}^2$

이때 조건 (나)에 의하여 $x\geq0$에서 $f'(x)\geq0$이므로

$f'(t)=\dfrac{1}{2}(e^t-e^{-t})$

$\therefore f(t)=\int f'(t)dt=\int\dfrac{1}{2}(e^t-e^{-t})dt=\dfrac{1}{2}(e^t+e^{-t})+C$

(단, C는 적분상수이다.)

조건 (가)에서 $f(0)=1$이므로

$1+C=1$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(t)=\dfrac{1}{2}(e^t+e^{-t})$이므로

$f(\ln 2)=\dfrac{1}{2}(e^{\ln 2}+e^{-\ln 2})=\dfrac{1}{2}\left(2+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{4}$

답 ③

154

$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=1$, 즉 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\times\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\begin{aligned}1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2&=1+\left\{-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^2=1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\\&=\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=x^{-\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

곡선 $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=1$은 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이므로 이 곡선의 전체 길이는

$$\begin{aligned}4\int_{0}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx&=4\int_{0}^{1}\sqrt{x^{-\frac{2}{3}}}dx\\&=4\int_{0}^{1}x^{-\frac{1}{3}}dx\\&=4\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_{0}^{1}\\&=4\times\frac{3}{2}=6\end{aligned}$$

답 ③

상위 1% 도전 문제

155

$f(xy)=yf(x)+xf(y)$의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1)=f(1)+f(1)\qquad \therefore f(1)=0$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)f(x)+xf\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{x}f(x)+xf\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$=\frac{f(x)}{x}+\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}$$

$$=\frac{f(x)}{x}+\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(1)}{\frac{h}{x}}$$

$$=\frac{f(x)}{x}+f'(1) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

곡선 $y=f'(x)$가 점 $(1, 1)$을 지나므로 $f'(1)=1$을 ㉠에 대입하면

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x}+1$$

$\therefore f(x)=xf'(x)-x \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=f'(x)+xf''(x)-1 \qquad \therefore f''(x)=\frac{1}{x}$

$f'(x)=\int f''(x)dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C$ (단, C는 적분상수이다.)

$f'(1)=1$이므로 $\quad C=1$

$\therefore f'(x)=\ln x+1$

$f'(x)=\ln x+1$을 ㉡에 대입하면

$f(x)=x(\ln x+1)-x=x\ln x$

$\therefore f(e)=e\ln e=e$

답 ③

156

$$f(x)=\int_0^1\frac{f(t)+e^x}{e^t+1}dt=e^x\int_0^1\frac{1}{e^t+1}dt+\int_0^1\frac{f(t)}{e^t+1}dt$$

$\int_0^1\frac{1}{e^t+1}dt=A$, $\int_0^1\frac{f(t)}{e^t+1}dt=B$ (A, B는 상수)로 놓으면

$f(x)=Ae^x+B$

$$\int_0^1\frac{f(t)}{e^t+1}dt=\int_0^1\frac{Ae^t+B}{e^t+1}dt$$

$$=\int_0^1\frac{A(e^t+1)-A+B}{e^t+1}dt$$

$$=\int_0^1\left(A+\frac{B-A}{e^t+1}\right)dt$$

$$=\Big[At\Big]_0^1+(B-A)\int_0^1\frac{1}{e^t+1}dt$$

$$=A+(B-A)\times A$$

즉, $B=A+A(B-A)$이므로

$B=A+AB-A^2$, $AB-B-A^2+A=0$

$B(A-1)-A(A-1)=0$, $(B-A)(A-1)=0$

$\therefore A=B$ 또는 $A=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

한편 $\int_0^1\frac{1}{e^t+1}dt$에서 $e^t+1=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=e^t$이고

$t=0$일 때 $s=2$, $t=1$일 때 $s=e+1$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{e^t+1}dt=\int_2^{e+1}\frac{1}{s}\times\frac{1}{s-1}ds$$

$e^t+1=s$이므로
$e^t=s-1$

$$=\int_2^{e+1}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right)ds$$

$$=\Big[\ln(s-1)-\ln s\Big]_2^{e+1}$$

$$=\ln e-\ln(e+1)-(-\ln 2)$$

$$=\ln\frac{2e}{e+1}$$

즉, $A=\ln\frac{2e}{e+1}\neq 1$이므로 ㉠에서 $B=A=\ln\frac{2e}{e+1}$

$\therefore f(x)=Ae^x+B=e^x\ln\frac{2e}{e+1}+\ln\frac{2e}{e+1}$

$$=(e^x+1)\ln\frac{2e}{e+1}$$

$$\therefore \frac{f(\ln 7)}{f(\ln 3)}=\frac{e^{\ln 7}+1}{e^{\ln 3}+1}=\frac{8}{4}=2$$

답 ②

157

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(t)=f'(t)(x-t) \qquad \cdots\cdots ㉠$

직선 ㉠이 y축과 만나는 점 B의 y좌표는

$y-f(t)=f'(t)(0-t)$에서 $y=f(t)-tf'(t)$

$\therefore \mathrm{B}(0, f(t)-tf'(t))$

점 A $(t, f(t))$에서 x축에 내린 수선의 발 C의 좌표는 $\mathrm{C}(t, 0)$

사각형 ABOC는 사다리꼴이므로

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\{f(t)-tf'(t)+f(t)\}\times t$$

$$=tf(t)-\frac{1}{2}t^2f'(t)$$

조건 (나)에 의하여

$tf(t)-\frac{1}{2}t^2f'(t)=\left(\frac{3}{2}t^2+t\right)f(t)$이므로

$tf(t)-\frac{1}{2}t^2f'(t)=\frac{3}{2}t^2f(t)+tf(t)$

$\therefore \frac{f'(t)}{f(t)}=-3$ ($\because t\neq 0$)

$\int\frac{f'(t)}{f(t)}dt=\int(-3)dt$이므로

$\ln f(t)=-3t+C$ (단, C는 적분상수이다.)

$\therefore f(t)=e^{-3t+C}$

조건 (다)에서

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 e^{-3x+C}dx=1-\frac{1}{e^3}$$

$$\left[-\frac{1}{3}e^{-3x+C}\right]_0^1=1-\frac{1}{e^3}$$

$$-\frac{1}{3}e^{-3+C}-\left(-\frac{1}{3}e^C\right)=1-\frac{1}{e^3}$$

$\frac{1}{3}e^{C}\left(1-\frac{1}{e^{3}}\right)=1-\frac{1}{e^{3}}$

$\therefore e^{C}=3$

따라서 $f(x)=e^{-3x+C}=e^{C}\times e^{-3x}=3e^{-3x}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} f(x)dx&=\int_0^{\ln 2} 3e^{-3x}dx\\&=\Big[-e^{-3x}\Big]_0^{\ln 2}\\&=-e^{-3\ln 2}-(-1)\\&=-e^{\ln\frac{1}{8}}+1\\&=-\frac{1}{8}+1=\frac{7}{8}\end{aligned}$$

답 ①

158

$f(x)=(a+x)-\int_0^x t\sin(x-t)\,dt$에서

$x-t=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=-1$이고

$t=0$일 때 $s=x$, $t=x$일 때 $s=0$이므로

$$\begin{aligned}&\int_0^x t\sin(x-t)\,dt\\&=-\int_x^0 (x-s)\sin s\,ds\\&=\int_0^x (x-s)\sin s\,ds\end{aligned}$$

$u(s)=x-s$, $v'(s)=\sin s$로 놓으면
$u'(s)=-1$, $v(s)=-\cos s$

$$\begin{aligned}&=\Big[(x-s)\times(-\cos s)\Big]_0^x-\int_0^x \cos s\,ds\\&=x-\int_0^x \cos s\,ds\\&=x-\Big[\sin s\Big]_0^x\\&=x-\sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=(a+x)-\int_0^x t\sin(x-t)\,dt\\&=a+x-(x-\sin x)\\&=a+\sin x\qquad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

ㄱ은 옳다.

$$\begin{aligned}f(x)+f(-x)&=(a+\sin x)+\{a+\sin(-x)\}\\&=(a+\sin x)+(a-\sin x)\\&=2a\end{aligned}$$

ㄴ도 옳다.

$$\begin{aligned}&f\left(\frac{m+n}{2}\right)-\frac{f(m)+f(n)}{2}\\&=\left\{a+\sin\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{2}\right)\right\}-\frac{1}{2}(2a+\sin m+\sin n)\\&=\sin\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{2}\right)-\frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{m}{2}+\frac{m}{2}\right)+\sin\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}\right)\right\}\\&=\left(\sin\frac{m}{2}\cos\frac{n}{2}+\cos\frac{m}{2}\sin\frac{n}{2}\right)\\&\qquad-\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{m}{2}\cos\frac{m}{2}+2\sin\frac{n}{2}\cos\frac{n}{2}\right)\\&=\sin\frac{m}{2}\left(\cos\frac{n}{2}-\cos\frac{m}{2}\right)-\sin\frac{n}{2}\left(\cos\frac{n}{2}-\cos\frac{m}{2}\right)\\&=\left(\sin\frac{m}{2}-\sin\frac{n}{2}\right)\left(\cos\frac{n}{2}-\cos\frac{m}{2}\right)\end{aligned}$$

이때 $0<m<n<\pi$, 즉 $0<\frac{m}{2}<\frac{n}{2}<\frac{\pi}{2}$에서

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin x$는 증가하고 $\cos x$는 감소한다.

$\sin\frac{m}{2}<\sin\frac{n}{2}$, $\cos\frac{m}{2}>\cos\frac{n}{2}$이므로

$\left(\sin\frac{m}{2}-\sin\frac{n}{2}\right)\left(\cos\frac{n}{2}-\cos\frac{m}{2}\right)>0$

$\therefore f\left(\frac{m+n}{2}\right)>\frac{f(m)+f(n)}{2}$

ㄷ도 옳다.

㉠에서 $a=0$일 때, $f(x)=\sin x$이므로

$f'(x)=\cos x$

$$\begin{aligned}f(2x)&=\sin 2x=\sin(x+x)\\&=\sin x\cos x+\cos x\sin x\\&=2\sin x\cos x\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}g(\theta)&=\int_0^{\theta}\frac{2f'(x)}{f(2x)}dx+\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{f'(x)}dx\\&=\int_0^{\theta}\frac{2\cos x}{2\sin x\cos x}dx+\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}dx\\&=\int_0^{\theta}\frac{1}{\sin x}dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{1}{\cos x}dx\end{aligned}$$

이므로

$g'(\theta)=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$g'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=\sin\theta$이므로 $\theta=\frac{\pi}{4}$

즉, $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$이고 $\theta=\frac{\pi}{4}$의 좌우에서 $g'(\theta)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $g(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{4}$에서 극대이다.

따라서 열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 함수 $g(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{4}$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값을 갖는다.

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

참고

어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 a, b에 대하여

(1) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2}$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그 구간에서 아래로 볼록하다.

(2) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2}$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그 구간에서 위로 볼록하다.

159

$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로 $x<0$ 또는 $x>1$에서

$0<\frac{1}{x^2-x+1}<1$

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x^2-x+1}\right)^n=\frac{\frac{1}{x^2-x+1}}{1-\frac{1}{x^2-x+1}}\\&=\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x(x-1)}\end{aligned}$$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=4$, $x=n$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_n은

$$S_n=\int_4^n \frac{1}{x(x-1)}dx$$
$$=\int_4^n\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\Big[\ln(x-1)-\ln x\Big]_4^n$$
$$=\ln\frac{n-1}{n}-\ln\frac{3}{4}$$
$$=\ln\frac{n-1}{n}+\ln\frac{4}{3}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{n-1}{n}+\ln\frac{4}{3}\right)=\ln\frac{4}{3}$$

답 ③

160

$x=\ln 3$일 때 $y=\dfrac{e^{\ln 3}+e^{-\ln 3}}{2}=\dfrac{3+\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{5}{3}$이므로 점 P의 좌표는

$\left(\ln 3, \dfrac{5}{3}\right)$

$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$에서 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$이므로 구슬이 트랙을 따라 점 P에서 점 $(0, 1)$까지 처음 굴러온 거리를 l_1이라고 하면

$$l_1=\int_0^{\ln 3}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_0^{\ln 3}\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}dx$$
$$=\int_0^{\ln 3}\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}dx=\int_0^{\ln 3}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^{\ln 3}=\frac{1}{2}(e^{\ln 3}-e^{-\ln 3})$$
$$=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

이때 구슬이 굴러 내려온 거리의 $\dfrac{3}{4}$만큼 맞은편으로 굴러 올라가므로 공이 움직인 총거리를 l이라고 하면

$$l=l_1+\frac{3}{4}l_1+\frac{3}{4}l_1+\left(\frac{3}{4}\right)^2 l_1+\left(\frac{3}{4}\right)^2 l_1+\cdots$$
$$=l_1+2\left\{\frac{3}{4}l_1+\left(\frac{3}{4}\right)^2 l_1+\left(\frac{3}{4}\right)^3 l_1+\cdots\right\}$$
$$=l_1+2\times\frac{\frac{3}{4}l_1}{1-\frac{3}{4}}$$
$$=7l_1$$
$$=7\times\frac{4}{3}=\frac{28}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=28$이므로

$pq=3\times 28=84$

답 84

미니 모의고사 - 1회

01

$\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}dx$에서 $x^2+a=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$이고

$x=-1$일 때 $t=a+1$, $x=0$일 때 $t=a$이므로

$$\int_{-1}^{0}\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}dx=\int_{a+1}^{a}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_{a+1}^{a}t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\Big[2t^{\frac{1}{2}}\Big]_{a+1}^{a}$$
$$=\sqrt{a}-\sqrt{a+1}$$

즉, $\sqrt{a}-\sqrt{a+1}=2\sqrt{2}-3=\sqrt{8}-\sqrt{9}$이므로

$a=8$

답 8

02

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^2dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x)dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin 2x)dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx$$

이때 $y=\sin 2x$는 기함수이므로

$y=\sin 2x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx=0$$
$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^2dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx$$
$$=2\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$$

답 ④

03

$y=e^x$에서 $y'=e^x$이므로 $f(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^1 x^2f(x)dx=\int_0^1 x^2e^x dx$$

$u(x)=x^2$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면 $u'(x)=2x$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int_0^1 x^2e^xdx=\Big[x^2e^x\Big]_0^1-\int_0^1 2xe^xdx$$
$$=e-2\int_0^1 xe^xdx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$s(x)=x$, $t'(x)=e^x$으로 놓으면 $s'(x)=1$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int_0^1 xe^xdx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^xdx$$
$$=e-\Big[e^x\Big]_0^1$$
$$=e-(e-1)=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^1 x^2e^xdx=e-2\times 1=e-2$$

답 ②

04

① $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\int_0^1 x^2dx$

② $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx$

③ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=2\int_0^1 x^2dx$

④ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2=2\int_0^1(1+2x)^2dx=\int_0^2(1+x)^2dx$

$=\int_1^3 x^2dx$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2=\int_0^1(1+x)^2dx=\int_1^2 x^2dx$

따라서 정적분 $\int_1^2 x^2dx$의 값과 같은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

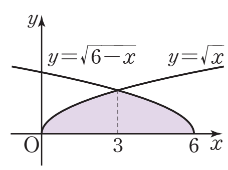
05

두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{6-x}$의 교점의 x좌표는

$\sqrt{x}=\sqrt{6-x}$에서 $x=6-x$

$2x=6$ $\therefore x=3$

두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{6-x}$는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$\int_0^3\sqrt{x}dx+\int_3^6\sqrt{6-x}dx$

이때 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{6-x}$는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$\int_0^3\sqrt{x}dx=\int_3^6\sqrt{6-x}dx$

$\therefore \int_0^3\sqrt{x}dx+\int_3^6\sqrt{6-x}dx=\int_0^3\sqrt{x}dx+\int_0^3\sqrt{x}dx$

$=2\int_0^3\sqrt{x}dx=2\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^3$

$=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

답 ⑤

참고

(1) 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a\neq0)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

(2) 무리함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동하면 각각 $y=-\sqrt{ax}$, $y=\sqrt{-ax}$, $y=-\sqrt{-ax}$의 그래프가 된다.

06

$f(-x)=\sin(\sin(-x))=\sin(-\sin x)=-\sin(\sin x)=-f(x)$

따라서 함수 $y=f(x)$는 기함수이므로 실수 a에 대하여

$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

$\therefore \int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{-2}^{2}f(x)dx=0+0=0$

답 0

참고

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 우함수 또는 기함수일 때, 다음이 성립한다.

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)g(x)$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$(f\circ g)(x)$
우함수	우함수	우함수	우함수	우함수
우함수	기함수	기함수	기함수	우함수
기함수	우함수	기함수	기함수	우함수
기함수	기함수	우함수	우함수	기함수

따라서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 우함수 또는 기함수로 주어지고, $\int$ 안의 식이 위의 표에 나와 있는 식으로 주어질 때, 우함수 또는 기함수인지를 판단한 다음 우함수 또는 기함수의 정적분을 구하는 공식을 이용하여 푼다.

07

$\int f(x)dx=xf(x)-x\ln x+k$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-\ln x-1$, $xf'(x)=\ln x+1$

$\therefore f'(x)=\frac{\ln x+1}{x}$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{\ln x+1}{x}dx$에서 $\ln x+1=t$로 놓으면

$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$f(x)=\int\frac{\ln x+1}{x}dx=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C$

$=\frac{1}{2}(\ln x+1)^2+C$ (단, C는 적분상수이다.)

$f(e)=2$이므로

$\frac{1}{2}(\ln e+1)^2+C=2$

$2+C=2$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x+1)^2$이므로

$f(e^{-2})=\frac{1}{2}(\ln e^{-2}+1)^2=\frac{1}{2}\times(-1)^2=\frac{1}{2}$

답 ②

08

$f(x)=\int_0^x(tx^2-2x)e^{tx}dt=\int_0^x x(tx-2)e^{tx}dt$

$u(t)=tx-2$, $v'(t)=xe^{tx}$으로 놓으면 $u'(t)=x$, $v(t)=e^{tx}$이므로

$f(x)=\int_0^x x(tx-2)e^{tx}dt$

$=\left[(tx-2)e^{tx}\right]_0^x-\int_0^x xe^{tx}dt$

$=(x^2-2)e^{x^2}+2-\left[e^{tx}\right]_0^x$

$=(x^2-2)e^{x^2}+2-(e^{x^2}-1)$

$=(x^2-3)e^{x^2}+3$

$f'(x)=2xe^{x^2}+(x^2-3)e^{x^2}\times2x$

$=(2x^3-4x)e^{x^2}$

$=2x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})e^{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=\sqrt{2}$ $(\because x>0)$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{2}$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

$f(\sqrt{2})=(2-3)e^2+3=3-e^2$

답 ①

09

$f(x)=xe^{-x}$에서

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

$f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$

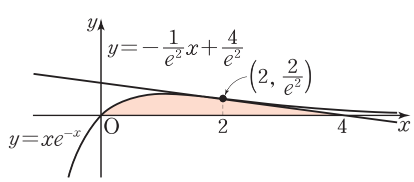
$f''(x)=0$에서 $x=2$ ($\because e^{-x}>0$)

$x=2$를 기준으로 $f''(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$이다.

따라서 변곡점에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{2}{e^2}=f'(2)(x-2)$ $\quad f'(2)=-\frac{1}{e^2}$

$\therefore y=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$



곡선 $y=f(x)$와 접선 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^2 xe^{-x}dx+\frac{1}{2}\times(4-2)\times\frac{2}{e^2}=\int_0^2 xe^{-x}dx+\frac{2}{e^2}$

$\int_0^2 xe^{-x}dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=-e^{-x}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 xe^{-x}dx&=\Big[-xe^{-x}\Big]_0^2-\int_0^2(-e^{-x})dx\\&=-2e^{-2}+\int_0^2 e^{-x}dx\\&=-2e^{-2}+\Big[-e^{-x}\Big]_0^2\\&=-2e^{-2}-e^{-2}+1\\&=-3e^{-2}+1\\&=-\frac{3}{e^2}+1\end{aligned}$$

$\therefore \int_0^2 xe^{-x}dx+\frac{2}{e^2}=-\frac{3}{e^2}+1+\frac{2}{e^2}=1-\frac{1}{e^2}$

따라서 $a=2$, $b=1$이므로

$a+b=2+1=3$

답 ②

10

t초 후 두 점 P, Q의 위치를 각각 x_1, x_2라고 하면

$x_1=\int_0^t \sin^2 t\,dt=\int_0^t \frac{1-\cos 2t}{2}dt$

$\quad=\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right]_0^t=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t$

$x_2=\int_0^t \frac{1}{2}\sin t\,dt=\left[-\frac{1}{2}\cos t\right]_0^t=\frac{1}{2}(1-\cos t)$

두 점이 만나는 횟수는 방정식 $\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t=\frac{1}{2}(1-\cos t)$, 즉

$t-\frac{1}{2}\sin 2t+\cos t-1=0$의 근의 개수와 같으므로

$f(t)=t-\frac{1}{2}\sin 2t+\cos t-1$로 놓으면

$$\begin{aligned}f'(t)&=1-\cos 2t-\sin t\\&=1-(1-2\sin^2 t)-\sin t\\&=2\sin^2 t-\sin t\\&=\sin t(2\sin t-1)\end{aligned}$$

$f'(t)=0$에서 $\sin t=0$ 또는 $\sin t=\frac{1}{2}$

$\therefore t=\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi$ ($\because 0<t\le\pi$)

$f(0)=0, f\left(\frac{\pi}{6}\right)<0, f\left(\frac{5}{6}\pi\right)>0, f(\pi)>0$

따라서 $0<t<\pi$에서 방정식 $f(t)=0$은 하나의 실근을 가지므로 두 점 P, Q는 한 번 만난다.

답 ②

01

$\int \frac{1}{1-e^x}dx$에서 $1-e^x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-e^x$이므로

$$f(x)=\int \frac{1}{1-e^x}dx$$
$$=\int \frac{1}{t}\times\frac{1}{t-1}dt$$
$$=\int \frac{1}{(t-1)t}dt$$
$$=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=\ln|t-1|-\ln|t|+C$$
$$=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|+C$$
$$=\ln\left|\frac{-e^x}{1-e^x}\right|+C$$
$$=\ln\left|\frac{e^x}{e^x-1}\right|+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수이다.)}$$

$$\therefore f(1)-f(2)=\ln\frac{e}{e-1}-\ln\frac{e^2}{e^2-1}$$
$$=\ln\left(\frac{e}{e-1}\times\frac{e^2-1}{e^2}\right)=\ln\frac{e+1}{e}$$

답 ⑤

02

$\int_0^{\pi} f(x)\sin 2x\,dx$에서 $u(x)=f(x)$, $v'(x)=\sin 2x$로 놓으면

$u'(x)=f'(x)$, $v(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$이므로

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin 2x\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}f(x)\cos 2x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left\{-\frac{1}{2}f'(x)\cos 2x\right\}dx$$
$$=-\frac{1}{2}f(\pi)-\left\{-\frac{1}{2}f(0)\right\}+\int_0^{\pi}\frac{1}{2}f'(x)\cos 2x\,dx$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}f'(x)\cos 2x\,dx \ (\because f(\pi)=f(0))$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}f'(x)\cos 2x\,dx$$

$\therefore k=\frac{1}{2}$

답 ③

03

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{kx}{n}\right)^2+\frac{kx}{n}\right\}\frac{x}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{x}{n}k\right)^2+\frac{x}{n}k\right\}\frac{x}{n}$$
$$=\int_0^{x}(t^2+t)dt$$

양변을 x에 대하여 미분하면

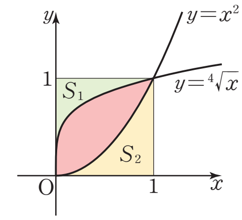
$f'(x)=x^2+x$

$\therefore f'(5)=25+5=30$

답 30

04

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt[4]{x}$와 y축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라고 하면



$$S_1=\int_0^1 x\,dy=\int_0^1 y^4\,dy=\left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^1=\frac{1}{5}$$

$y=\sqrt[4]{x}$에서 $x=y^4$

$$S_2=\int_0^1 y\,dx=\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

$$\therefore S_1+S_2=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{8}{15}$$

S_1+S_2와 색칠한 부분의 넓이의 합은 한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이와 같으므로 구하는 넓이는

$$1-(S_1+S_2)=1-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}$$

답 $\frac{7}{15}$

05

$y=\frac{1}{3}\sqrt{x}(x-3)=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$에서 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})$

$$\therefore 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left\{\frac{1}{2}(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})\right\}^2$$
$$=1+\frac{1}{4}(x-2+x^{-1})$$
$$=\frac{1}{4}(x+2+x^{-1})$$
$$=\frac{1}{4}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2$$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_1^9\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_1^9\sqrt{\frac{1}{4}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^9(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^9$$
$$=\frac{1}{2}\left(24-\frac{8}{3}\right)=\frac{32}{3}$$

답 ④

06

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$a_n=\int_1^e\frac{(\ln x)^n}{x}dx=\int_0^1 t^n\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{18}a_na_{n+1}=\sum_{n=1}^{18}\left(\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{18}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{20}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{20}=\frac{9}{20}$$

답 ⑤

07

$g(x)=e^x$에서 $g'(x)=e^x$이므로

$g(2)=e^2$, $g'(2)=e^2$

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_{g(2)}^{g(2+h)} f(x)dx}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(g(2+h))-F(g(2))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{F(g(2+h))-F(g(2))}{g(2+h)-g(2)}\times\frac{g(2+h)-g(2)}{h}\right\}$$

$$=f(g(2))\times g'(2)$$

$$=\sqrt{e^2}\ln e^2\times e^2$$

$$=2e\times e^2=2e^3$$

답 ⑤

08

$f(x)=e^x$이라고 하면

$f'(x)=e^x$

점 $\left(\frac{k}{n}, e^{\frac{k}{n}}\right)$에서의 접선의 기울기는 $f'\left(\frac{k}{n}\right)=e^{\frac{k}{n}}$이므로 접선의 방정식은

$$y-e^{\frac{k}{n}}=e^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)$$

이때 y절편은 $y-e^{\frac{k}{n}}=e^{\frac{k}{n}}\left(0-\frac{k}{n}\right)$에서 $y=\left(1-\frac{k}{n}\right)e^{\frac{k}{n}}$이므로

$$S_{\frac{k}{n}}=\left(1-\frac{k}{n}\right)e^{\frac{k}{n}}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}S_{\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)e^{\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}=\int_0^1(1-x)e^x dx$$

$u(x)=1-x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-1$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int_0^1(1-x)e^x dx=\Big[(1-x)e^x\Big]_0^1-\int_0^1(-e^x)dx$$

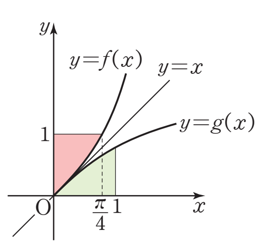
$$=-1+\int_0^1 e^x dx=-1+\Big[e^x\Big]_0^1$$

$$=-1+(e-1)=e-2$$

답 ①

09

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 오른쪽 그림과 같다.



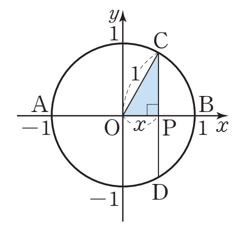
$\int_0^1 g(x)dx$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

$$\therefore \int_0^1 g(x)dx=\frac{\pi}{4}\times 1-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\frac{\pi}{4}-A$$

답 ①

10

오른쪽 그림과 같이 지름 AB의 중점을 원점, 직선 AB를 x축으로 잡고, 점 P의 좌표를 $(x, 0)$이라고 하면 임의의 점 $(x, 0)$을 지나고 직선 AB에 수직인 현 CD의 길이는



$\overline{CD}=2\sqrt{1-x^2}$

이때 현 CD를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{1-x^2})^2=\sqrt{3}(1-x^2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_{-1}^{1}S(x)dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{3}(1-x^2)dx$$

$$=2\sqrt{3}\int_0^1(1-x^2)dx$$

$$=2\sqrt{3}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=2\sqrt{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

답 ④

성공하기 위해

지녀야 할 자질이 있는데

이는 명확한 목표,

목표에 대한 지식,

성취하고자 하는 불타는 열망이다.

– 나폴레온 힐(Napoleon Hill)