최고난도

중학수학 2-1

정답과 풀이

I 수와 식의 계산

01 유리수와 순환소수

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제 8쪽~11쪽

01 ②	02 ⑤	03 ①	04 ⑤	05 ⑤
06 ④	07 ㄱ, ㄴ, ㄹ		08 ③	09 3
10 ⑤	11 ③	12 ①	13 ③	14 ③
15 ④	16 $1.\dot{6}\dot{3}$	17 99	18 ③, ⑤	19 $0.1\dot{0}$
20 ⑤	21 ④	22 ③, ⑤	23 ②	

01 답 ②

$\frac{3}{4}=0.75$, $\frac{1}{9}=0.111\cdots$, $\frac{4}{15}=0.2666\cdots$,
$\frac{16}{27}=0.592592592\cdots$, $\frac{9}{40}=0.225$, $\frac{1}{8}=0.125$

따라서 유한소수가 되는 것은 $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{40}$, $\frac{1}{8}$의 3개이다.

02 답 ⑤

① $0.080808\cdots=0.\dot{0}\dot{8}$ ⇨ 순환마디: 08
② $0.1353535\cdots=0.1\dot{3}\dot{5}$ ⇨ 순환마디: 35
③ $0.942942942\cdots=0.\dot{9}4\dot{2}$ ⇨ 순환마디: 942
④ $1.616161\cdots=1.\dot{6}\dot{1}$ ⇨ 순환마디: 61
⑤ $2.712712712\cdots=2.\dot{7}1\dot{2}$ ⇨ 순환마디: 712

따라서 순환소수의 표현과 순환마디를 바르게 나타낸 것은 ⑤이다.

03 답 ①

$\frac{4}{11}=0.363636\cdots$에서 순환마디는 36이므로 $x=2$
$\frac{8}{15}=0.5333\cdots$에서 순환마디는 3이므로 $y=1$
$\therefore x+y=2+1=3$

04 답 ⑤

① 순환마디의 숫자가 6, 8의 2개이고 $100-2=98=2\times49$이므로 소수점 아래 100번째 자리의 숫자는 순환마디의 2번째 숫자와 같은 8이다.
② 순환마디의 숫자가 4, 6, 8의 3개이고 $100-1=99=3\times33$이므로 소수점 아래 100번째 자리의 숫자는 순환마디의 3번째 숫자와 같은 8이다.
③ 순환마디의 숫자가 2, 4, 6, 8의 4개이고 $100=4\times25$이므로 소수점 아래 100번째 자리의 숫자는 순환마디의 4번째 숫자와 같은 8이다.
④ 순환마디의 숫자가 6, 0, 8의 3개이고 $100-1=99=3\times33$이므로 소수점 아래 100번째 자리의 숫자는 순환마디의 3번째 숫자와 같은 8이다.
⑤ 순환마디의 숫자가 4, 6, 8, 0의 4개이고 $100=4\times25$이므로 소수점 아래 100번째 자리의 숫자는 순환마디의 4번째 숫자와 같은 0이다.

따라서 소수점 아래 100번째 자리의 숫자가 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

참고 순환소수의 소수점 아래 n번째 자리의 숫자를 구하려고 할 때에는 소수점 아래에 순환마디가 한없이 반복되는 성질을 이용한다. 이때 순환마디에 포함되지 않는 숫자가 있다면 그 수는 제외하고 n번째 자리의 숫자를 구하는 것에 주의한다.

05 답 ⑤

$\frac{2}{13}=0.\dot{1}5384\dot{6}$이므로 순환마디의 숫자의 개수는 6이다.
이때 소수점 아래 5번째 자리의 숫자는 4이므로 $x_5=4$
$10=6\times1+4$에서 소수점 아래 10번째 자리의 숫자는 순환마디의 4번째 숫자와 같은 8이므로 $x_{10}=8$
$15=6\times2+3$에서 소수점 아래 15번째 자리의 숫자는 순환마디의 3번째 숫자와 같은 3이므로 $x_{15}=3$
$\therefore x_5+x_{10}+x_{15}=4+8+3=15$

06 답 ④

$$\frac{20}{125}=\frac{4}{25}=\frac{4}{5^2}=\frac{4\times2^2}{5^2\times2^2}=\frac{16}{10^2}=\frac{160}{10^3}=\frac{1600}{10^4}=\cdots$$

따라서 $a+n$의 값 중 가장 작은 값은 $a=16$, $n=2$일 때이므로 구하는 값은
$16+2=18$

참고 유한소수로 나타낼 수 있는 분수의 분모는 10의 거듭제곱의 꼴로 바꿀 수 있음을 이용한다.

07 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

보기의 분수를 기약분수로 나타낸 후 분모를 소인수분해하면 다음과 같다.

ㄱ. $\frac{4}{7}$ ㄴ. $\frac{2}{15}=\frac{2}{3\times5}$ ㄷ. $\frac{14}{56}=\frac{1}{2^2}$
ㄹ. $\frac{13}{39}=\frac{1}{3}$ ㅁ. $\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$ ㅂ. $\frac{3}{125}=\frac{3}{5^3}$

따라서 유한소수로 나타낼 수 없는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

참고 유한소수로 나타내려면 기약분수로 나타내었을 때 소인수가 2 또는 5뿐이어야 한다.

08 답 ③

$30=2\times3\times5$이므로 구하는 분수를 $\frac{a}{30}$라고 할 때, $\frac{a}{30}$를 유

한소수로 나타낼 수 있으려면 a는 3의 배수이어야 한다.

이때 $\frac{1}{5}=\frac{6}{30}$, $\frac{5}{6}=\frac{25}{30}$이므로 $\frac{6}{30}<\frac{a}{30}<\frac{25}{30}$

즉, $6<a<25$를 만족시키는 3의 배수인 a는 9, 12, 15, 18, 21, 24이다.

따라서 구하는 분수는 $\frac{9}{30}$, $\frac{12}{30}$, $\frac{15}{30}$, $\frac{18}{30}$, $\frac{21}{30}$, $\frac{24}{30}$의 6개이다.

참고 $\frac{9}{30}=\frac{3}{2\times5}$, $\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$, $\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$, $\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$, $\frac{21}{30}=\frac{7}{2\times5}$, $\frac{24}{30}=\frac{4}{5}$는 모두 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이므로 유한소수로 나타낼 수 있다.

09 답 3

해결 key Point!

0과 1을 나타내는 두 점 사이를 12등분하면 11개의 점이 생긴다는 것을 이해해야 한다.

1단계 수직선 위의 0과 1을 나타내는 두 점 사이를 12등분할 때의 11개의 점에 대응하는 유리수 구하기

수직선 위의 0과 1을 나타내는 두 점 사이를 12등분할 때의 11개의 점에 대응하는 유리수를 작은 것부터 나열하면

$\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$, …, $\frac{11}{12}$ …… ㉠

2단계 분자의 조건 구하기

이때 $12=2^2\times3$이므로 ㉠에서 유한소수로 나타낼 수 있으려면 분자가 3의 배수이어야 한다.

3단계 유한소수로 나타낼 수 있는 것의 개수 구하기

따라서 유한소수로 나타낼 수 있는 것은 $\frac{3}{12}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{9}{12}$의 3개이다.

단계	채점 기준	비율
❶	수직선 위의 0과 1을 나타내는 두 점 사이를 12등분할 때의 11개의 점에 대응하는 유리수를 구했다.	40 %
❷	분자의 조건을 구했다.	40 %
❸	유한소수로 나타낼 수 있는 것의 개수를 구했다.	20 %

참고 $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$, $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$과 같이 기약분수로 나타내면 분모의 소인수가 2뿐이므로 유한소수로 나타낼 수 있다.

10 답 ⑤

$\frac{21}{2^2\times7\times a}=\frac{3}{2^2\times a}$을 유한소수로 나타낼 수 있으려면 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 한다.

따라서 10 이하의 자연수 중 a의 값이 될 수 있는 것은 2의 배수 또는 5의 배수 또는 1 또는 3이므로

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10

따라서 모든 수의 합은

$1+2+3+4+5+6+8+10=39$

11 답 ③

$\frac{25}{180}=\frac{5}{36}=\frac{5}{2^2\times3^2}$, $\frac{13}{143}=\frac{1}{11}$이므로 두 분수에 각각 자연수 a를 곱하여 두 분수 모두 유한소수로 나타낼 수 있으려면 a는 $3^2=9$와 11의 공배수, 즉 99의 배수이어야 한다.

따라서 가장 작은 자연수 a의 값은 99이다.

12 답 ①

$\frac{a}{350}=\frac{a}{2\times5^2\times7}$를 유한소수로 나타낼 수 있으려면 자연수 a는 7의 배수이어야 한다.

이때 $10<a<30$이므로 $a=14, 21, 28$

(i) $a=14$일 때, $\frac{14}{350}=\frac{1}{25}$이므로 $b=25$

(ii) $a=21$일 때, $\frac{21}{350}=\frac{3}{50}$이므로 성립하지 않는다.

(iii) $a=28$일 때, $\frac{28}{350}=\frac{2}{25}$이므로 성립하지 않는다.

(i)~(iii)에 의하여 $a=14$, $b=25$이므로

$a+b=14+25=39$

13 답 ③

각 순환소수를 분수로 나타내려고 할 때 이용하면 가장 편리한 식은 다음과 같다.

① $100x-10x$ ② $100x-x$ ③ $1000x-10x$
④ $1000x-x$ ⑤ $10000x-10x$

따라서 $1000x-10x$를 이용하는 것이 가장 편리한 것은 ③이다.

14 답 ③

$0.\dot{x}=\frac{x}{9}$이므로 $\frac{2}{5}<\frac{x}{9}<\frac{11}{15}$

$\frac{18}{45}<\frac{5x}{45}<\frac{33}{45}$ $\therefore 18<5x<33$

따라서 이를 만족시키는 한 자리의 자연수 x는 4, 5, 6의 3개이다.

15 답 ④

①, ③, ⑤ $x=1.713713713\cdots=1.\dot{7}1\dot{3}$은 순환소수이므로 유리수이고 순환마디는 713이다.

② $x=1.\dot{7}1\dot{3}$은 $1000x-x$를 이용하여 분수로 나타낼 수 있다.

④ $x=1.\dot{7}1\dot{3}=\frac{1713-1}{999}=\frac{1712}{999}$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

16 답 $1.\dot{6}\dot{3}$

$0.6\dot{1}=\frac{61-6}{90}=\frac{55}{90}=\frac{11}{18}$이므로 $a=18$, $b=11$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{18}{11}=1.636363\cdots=1.\dot{6}\dot{3}$

17 답 99

1단계 순환소수를 분수로 나타내기

$3.1\dot{7}=\frac{317-31}{90}=\frac{286}{90}=\frac{143}{45}=\frac{143}{3^2\times5}$

2단계 곱하는 자연수의 조건 구하기

이 수에 어떤 자연수를 곱하여 유한소수로 나타낼 수 있으려면 곱하는 자연수는 $3^2=9$의 배수이어야 한다.

3단계 100 이하의 자연수 중 곱할 수 있는 가장 큰 수 구하기

따라서 100 이하의 자연수 중 곱할 수 있는 가장 큰 수는 99이다.

단계	채점 기준	비율
❶	순환소수를 분수로 나타냈다.	40 %
❷	곱하는 자연수의 조건을 구했다.	40 %
❸	100 이하의 자연수 중 곱할 수 있는 가장 큰 수를 구했다.	20 %

18 답 ③, ⑤

① $0.\dot{8}=\frac{8}{9}=\frac{64}{72}$, $\frac{7}{8}=\frac{63}{72}$이므로 $0.\dot{8}>\frac{7}{8}$

② $2.\dot{3}=\frac{23-2}{9}=\frac{21}{9}=\frac{7}{3}$이므로 $2.\dot{3}<\frac{10}{3}$

③ $0.\dot{5}\dot{1}=\frac{51}{99}=\frac{17}{33}$이므로 $0.\dot{5}\dot{1}>\frac{13}{33}$

④ $0.3\dot{9}=\frac{39-3}{90}=\frac{36}{90}=\frac{2}{5}$이므로 $0.3\dot{9}<\frac{4}{5}$

⑤ $0.\dot{2}3\dot{1}=\frac{231}{999}=\frac{77}{333}$이므로 $0.\dot{2}3\dot{1}<\frac{87}{333}$

따라서 옳은 것은 ③, ⑤이다.

19 답 $0.\dot{1}\dot{0}$

$0.4\dot{6}=4.2\times a$에서

$\frac{46-4}{90}=\frac{42}{10}\times a$

$\therefore\ a=\frac{42}{90}\times\frac{10}{42}=\frac{1}{9}$

$0.\dot{9}\dot{3}=93\times b$에서

$\frac{93}{99}=93\times b$

$\therefore\ b=\frac{93}{99}\times\frac{1}{93}=\frac{1}{99}$

$\therefore\ a-b=\frac{1}{9}-\frac{1}{99}=\frac{11}{99}-\frac{1}{99}=\frac{10}{99}=0.\dot{1}\dot{0}$

20 답 ⑤

$\frac{11}{45}=x+0.0\dot{9}$에서

$x=\frac{11}{45}-0.0\dot{9}=\frac{22}{90}-\frac{9}{90}$

$=\frac{13}{90}=\frac{14-1}{90}$

이므로 x를 순환소수로 나타내면

$x=0.1444\cdots=0.1\dot{4}$

21 답 ④

$0.4\dot{2}=\frac{42-4}{90}=\frac{38}{90}=\frac{19}{45}$

에서 시원이는 분자를 제대로 보았으므로 처음 기약분수의 분자는 19이다.

$0.\dot{6}\dot{7}=\frac{67}{99}$

에서 연우는 분모를 제대로 보았으므로 처음 기약분수의 분모는 99이다.

따라서 처음 기약분수는 $\frac{19}{99}$이므로 순환소수로 나타내면

$\frac{19}{99}=0.191919\cdots=0.\dot{1}\dot{9}$

22 답 ③, ⑤

① 유한소수는 유리수이지만, 무한소수 중 순환소수가 아닌 무한소수는 유리수가 아니다.

② 순환소수는 모두 유리수이다.

④ 유한소수는 모두 분모와 분자가 0이 아닌 정수인 분수로 나타낼 수 있다.

23 답 ②

ㄱ. 순환하지 않은 무한소수는 분모와 분자가 정수인 분수로 나타낼 수 없다.

ㄷ. 분모에 3이 있는 분수를 기약분수로 나타내었을 때 분모에 3이 없으면 유한소수로 나타낼 수 있다.

따라서 옳지 않은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

12쪽~18쪽

01 3	**02** 31	**03** 175	**04** ④	**05** ④
06 147	**07** 97	**08** 7	**09** ⑤	**10** 123
11 ③	**12** ④	**13** $\frac{71}{2700}$	**14** ①	**15** 18
16 ②	**17** 5	**18** ②	**19** ②	**20** ②
21 4	**22** ④	**23** ①	**24** ②	**25** 5
26 $\frac{3331}{3333}$	**27** 468	**28** ④	**29** 154	**30** 220
31 ③	**32** 9	**33** $\frac{2}{3}$	**34** ②	**35** ⑤
36 ⑤	**37** 19	**38** 411	**39** $97.\dot{7}$	**40** $\frac{31}{37}$
41 ④				

01 답 3

해결 key Point!

나눗셈의 세로셈에서 나머지에 같은 숫자가 반복하여 나오는 간격이 순환마디이다.

소수점 아래 각 자리에서의 나머지가 12, 9, 16, 12, 9, …의 순서로 나타난다. 이때 12가 다시 나타날 때부터 몫의 소수점 아래 숫자가 반복되므로 순환마디가 생긴다. 따라서 순환마디를 이루는 숫자의 개수는 3이다.

02 답 31

해결 key Point!

두 분수를 소수로 나타낼 때 순환마디를 이루는 숫자의 개수로 2000을 나누었을 때의 나머지를 이용하여 a, b의 값을 구한다.

1단계 $\frac{7}{41}$의 순환마디를 이용하여 a의 값 구하기

$\frac{7}{41}=0.\dot{1}707\dot{3}$이므로 순환마디를 이루는 숫자는 5개이다.

$2000=5\times400$이므로 소수점 아래 2000번째 자리의 숫자는 순환마디의 5번째 숫자와 같은 3이다.

$\therefore\ a=3$

2단계 $\frac{8}{13}$의 순환마디를 이용하여 b의 값 구하기

$\frac{8}{13}=0.\dot{6}1538\dot{4}$이므로 순환마디를 이루는 숫자는 6개이다.

$2000=6\times333+2$이므로 소수점 아래 2000번째 자리의 숫자는 순환마디의 2번째 숫자와 같은 1이다.

$\therefore\ b=1$

3단계 $10a+b$의 값 구하기

$\therefore\ 10a+b=10\times3+1=31$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구했다.	40 %
❷	b의 값을 구했다.	40 %
❸	$10a+b$의 값을 구했다.	20 %

03 답 175

$\frac{5}{21}=0.\dot{2}3809\dot{5}$이므로 순환마디를 이루는 숫자는 6개이다.

$39=6\times6+3$이므로 순환마디가 6번 반복되고, 소수점 아래 37번째, 38번째, 39번째 자리의 숫자는 각각 순환마디의 1번째, 2번째, 3번째 자리의 숫자와 같으므로 2, 3, 8이다.

따라서 구하는 합은

$(2+3+8+0+9+5)\times6+2+3+8=175$

04 답 ④

해결 key Point!

주어진 분수를 소수로 나타낸 후 $f(n)$의 값을 구하면서 규칙성을 확인해야 한다.

$\frac{3}{7}=0.\dot{4}2857\dot{1}$이므로 순환마디를 이루는 숫자는 6개이고

$f(1)=4$, $f(2)=2$, $f(3)=8$, $f(4)=5$, $f(5)=7$, $f(6)=1$

ㄱ. $100=6\times16+4$이므로 소수점 아래 100번째 자리의 숫자는 소수점 아래 4번째 자리의 숫자와 같다.
$\therefore\ f(100)=f(4)=5$

ㄴ. 순환마디를 이루는 숫자가 6개이므로
$f(n)=f(n+6)$

ㄷ. $f(1)=f(7)=f(13)=\cdots=f(97)=4$이므로
$f(n)=4$를 만족시키는 두 자리 자연수 n은
13, 19, …, 97의 15개이다.

ㄹ. $25=6\times4+1$이므로 $f(25)=f(1)=4$
$40=6\times6+4$이므로 $f(40)=f(4)=5$
$\therefore\ f(25)<f(40)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

05 답 ④

해결 key Point!

두 분수 $\frac{1}{7}$과 $\frac{5}{6}$의 분모를 84로 통분하여 두 수 사이에 있는 분모가 84인 분수를 구해야 한다.

$84=2^2\times3\times7$이므로 구하는 분수를 $\frac{n}{84}$(n은 자연수)이라고 할 때, $\frac{n}{84}=\frac{7}{2^2\times3\times7}$을 유한소수로 나타낼 수 있으려면 n은 $3\times7=21$의 배수가 되어야 한다.

이때 $\frac{1}{7}=\frac{12}{84}$, $\frac{5}{6}=\frac{70}{84}$이므로

$\frac{12}{84}<\frac{n}{84}<\frac{70}{84}$

즉, $12<n<70$을 만족시키는 21의 배수는 21, 42, 63의 3개이다.

따라서 분모가 84이면서 유한소수로 나타낼 수 없는 분수의 개수는 $12<n<70$을 만족시키는 n의 개수에서 21의 배수의 개수를 빼면 되므로

$57-3=54$

06 답 147

$\frac{3}{180}=\frac{1}{2^2\times3\times5}$, $\frac{4}{392}=\frac{1}{2\times7^2}$, $\frac{4}{250}=\frac{2}{5^3}$이므로 세 분수에 각각 자연수 a를 곱하여 세 분수 모두 유한소수로 나타낼 수 있으려면 a는 3과 $7^2=49$의 공배수, 즉 147의 배수이어야 한다.

따라서 가장 작은 a의 값은 147이다.

07 답 97

$420x-a=8$에서 $420x=a+8$

$\therefore\ x=\frac{a+8}{420}=\frac{a+8}{2^2\times3\times5\times7}$

이때 $\frac{a+8}{420}$이 유한소수로 나타내어지려면 $a+8$이 3과 7의 공배수인 21의 배수이어야 한다.
즉, $a+8$의 값이 될 수 있는 수는
21, 42, 63, 84, 105, $\cdots$
이므로 a가 될 수 있는 수는
13, 34, 55, 76, 97, $\cdots$
따라서 a의 값이 될 수 있는 가장 큰 두 자리 자연수는 97이다.

08 답 7

해결 key Point!

분모 175를 소인수분해한 후 $\frac{n}{175}$을 유한소수로 나타낼 수 있는 조건을 생각해야 한다.

조건 (나)에서 $\frac{n}{175}=\frac{n}{5^2\times7}$을 유한소수로 나타낼 수 있으려면 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 하므로 n은 7의 배수이어야 한다.
조건 (다)에서 분자 n은 어떤 자연수의 제곱이므로
$n=7^2\times m^2$ (m은 자연수)의 꼴이어야 한다.
조건 (가)에서 $2<\frac{n}{175}<6$
즉, $\frac{350}{175}<\frac{n}{175}<\frac{1050}{175}$이므로
$350<n<1050$
즉, $350<7^2\times m^2<1050$이므로
$\frac{350}{49}<m^2<\frac{1050}{49}$ $\cdots\cdots$ ㉠
이때 $\frac{350}{49}=7.142\cdots$, $\frac{1050}{49}=21.428\cdots$이므로 ㉠을 만족시키는 자연수 m의 값은 3, 4이다.
$m=3$일 때, $n=7^2\times3^2=441$
$m=4$일 때, $n=7^2\times4^2=784$
따라서 조건을 만족시키는 분수 $\frac{n}{175}$의 값의 합은
$\frac{441}{175}+\frac{784}{175}=\frac{1225}{175}=7$

09 답 ⑤

$\frac{a}{140}=\frac{a}{2^2\times5\times7}$를 유한소수로 나타낼 수 있으려면 a는 7의 배수이어야 한다.
이때 $30<a<60$이므로 a의 값은 35, 42, 49, 56이다.

(i) $a=35$일 때
$\frac{a}{140}=\frac{35}{2^2\times5\times7}=\frac{1}{4}$이므로
$b=4$, $c=1$
$\therefore a+b+c=35+4+1=40$

(ii) $a=42$일 때
$\frac{a}{140}=\frac{42}{2^2\times5\times7}=\frac{3}{10}$이므로
$b=10$, $c=3$
$\therefore a+b+c=42+10+3=55$

(iii) $a=49$일 때
$\frac{a}{140}=\frac{49}{2^2\times5\times7}=\frac{7}{20}$이므로
$b=20$, $c=7$
$\therefore a+b+c=49+20+7=76$

(iv) $a=56$일 때
$\frac{a}{140}=\frac{56}{2^2\times5\times7}=\frac{2}{5}$이므로
$b=5$, $c=2$
$\therefore a+b+c=56+5+2=63$

(i)~(iv)에 의하여 $a+b+c$의 값은 40, 55, 63, 76이므로 그 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

10 답 123

해결 key Point!

A가 유한소수가 되기 위해서는 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 한다.

$189=3^3\times7$이므로
$A=\frac{189}{2\times5^3\times x}=\frac{3^3\times7}{2\times5^3\times x}$
조건 (가)에 의하여 A를 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 한다.
또, 조건 (나)에 의하여 A를 기약분수로 나타내었을 때, 분모의 소인수 2와 5의 지수가 하나는 5이고 하나는 5보다 작거나 같아야 한다.
따라서 분수 A의 분모 $2\times5^3\times x$를
$2^{p+1}\times5^{q+3}\times k$ (k는 $3^3\times7$의 약수)라고 할 때
$p+1=5$, $q+3\le5$ 또는 $p+1\le5$, $q+3=5$이어야 하므로
$p=4$, $q\le2$ 또는 $p\le4$, $q=2$ $\cdots\cdots$ ㉠
조건 (다)에 의하여 x는 3을 소인수로 갖고, 3의 지수는 1이다.
$\therefore k=3$ 또는 $k=3\times7$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서

(i) $k=3$, $p=4$, $q\le2$일 때
$q=0$이면 $x=2^4\times3=48$
$q=1$이면 $x=2^4\times5\times3=240$
이때 x는 두 자리 자연수이므로 조건을 만족시키는 x의 값은 48이다.

(ii) $k=3$, $p\le4$, $q=2$일 때
$p=0$이면 $x=5^2\times3=75$

$p=1$이면 $x=2\times5^2\times3=150$

이때 x는 두 자리 자연수이므로 조건을 만족시키는 x의 값은 75이다.

(iii) $k=3\times7$, $p=4$, $q\le2$일 때

$q=0$이면 $x=2^4\times3\times7=336$

이때 x는 두 자리 자연수이므로 조건을 만족시키는 x의 값은 없다.

(iv) $k=3\times7$, $p\le4$, $q=2$일 때

$p=0$이면 $x=5^2\times3\times7=525$

이때 x는 두 자리 자연수이므로 조건을 만족시키는 x의 값은 없다.

(i)~(iv)에 의하여 구하는 두 자리 자연수 x의 값은 48, 75이므로 그 합은 $48+75=123$

11 답 ③

해결 key Point!

분모 540을 소인수분해한 후 $\frac{A}{540\times n}$가 유한소수가 될 수 있는 조건을 생각해야 한다.

$\frac{A}{540\times n}=\frac{A}{2^2\times3^3\times5\times n}=\frac{1}{B}$

에서 A는 분모 $540\times n=2^2\times3^3\times5\times n$의 약수이어야 한다.

이때 $\frac{A}{540\times n}$가 유한소수로 나타낼 수 있어야 하므로 A는 분모의 3^3과 n에 포함된 2, 5 이외의 소인수와 모두 약분되어야 한다.

따라서 $A=3^3\times k$ (k는 자연수)의 꼴이므로 두 자리 자연수 A는 27, 54, 81이다.

(i) $A=27=3^3$일 때

$\frac{A}{540\times n}=\frac{3^3}{2^2\times3^3\times5\times n}=\frac{1}{2^2\times5\times n}$

을 유한소수로 나타낼 수 있어야 하므로 가능한 한 자리 자연수 n의 값은 1, 2, 4, 5, 8이다.

(ii) $A=54=2\times3^3$일 때

$\frac{A}{540\times n}=\frac{2\times3^3}{2^2\times3^3\times5\times n}=\frac{1}{2\times5\times n}$

을 유한소수로 나타낼 수 있어야 하므로 가능한 한 자리 자연수 n의 값은 1, 2, 4, 5, 8이다.

(iii) $A=81=3^4$일 때

$\frac{A}{540\times n}=\frac{3^4}{2^2\times3^3\times5\times n}=\frac{3}{2^2\times5\times n}$

을 기약분수로 나타내었을 때 분자가 1이어야 하고 유한소수로 나타낼 수 있어야 하므로 가능한 한 자리 자연수 n의 값은 3, 6이다.

(i)~(iii)에 의하여 한 자리 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8의 7개이다.

12 답 ④

N을 유한소수로 나타낼 수 있으려면 기약분수로 나타내었을 때, 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 한다. 이때 분자에 9가 있으므로 소인수가 2 또는 5인 수를 A라고 할 때 x는 1 또는 A 또는 $3\times A$ 또는 $3^2\times A$의 꼴이다.

(i) $x=A$의 꼴일 때

x는 30 이하의 자연수이므로 x의 값은 2, 2^2, 2^3, 2^4, 5, 5^2, 2×5, $2^2\times5$의 8개이다.

(ii) $x=3\times A$의 꼴일 때

x는 30 이하의 자연수이므로 x의 값은 3, 2×3, $2^2\times3$, $2^3\times3$, 3×5, $2\times3\times5$의 6개이다.

(iii) $x=3^2\times A$의 꼴일 때

x는 30 이하의 자연수이므로 x의 값은 3^2, 2×3^2의 2개이다.

(i)~(iii)에 의하여 x의 개수는 $1+8+6+2=17$이다.

참고 $x=1$인 경우도 생각해야 한다.

13 답 $\frac{71}{2700}$

해결 key Point!

한 자리 자연수 a, b에 대하여 $A=\frac{b}{2^2\times3\times5^2\times a}$를 유한소수로 나타낼 수 없도록 하는 a, b의 조건을 생각해야 한다.

1단계 주어진 분수를 유한소수로 나타낼 수 없도록 하는 a, b의 조건 구하기

$A=\frac{b}{2^2\times3\times5^2\times a}$를 유한소수로 나타내려면 이 분수를 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 하고, b는 3의 배수이어야 한다.

따라서 유한소수로 나타낼 수 없으려면 기약분수로 나타내었을 때 분모에 2 또는 5 이외의 소인수가 있어야 한다.

2단계 M의 값 구하기

(i) $\frac{b}{2^2\times3\times5^2\times a}$가 가장 큰 수가 될 때

a는 작을수록 b는 클 수록 $\frac{b}{2^2\times3\times5^2\times a}$의 값이 크므로 $a=1$, $b=8$일 때 가장 크다.

$\therefore M=\frac{8}{2^2\times3\times5^2\times1}=\frac{2}{75}$

3단계 m의 값 구하기

(ii) $\frac{b}{2^2\times3\times5^2\times a}$가 가장 작은 수가 될 때

a는 클수록 b는 작을수록 $\frac{b}{2^2\times3\times5^2\times a}$의 값이 작으므로 $a=9$, $b=1$일 때 가장 작다.

$\therefore m=\frac{1}{2^2\times3\times5^2\times9}=\frac{1}{2700}$

4단계 $M-m$의 값 구하기

$\therefore M-m=\frac{2}{75}-\frac{1}{2700}=\frac{71}{2700}$

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 분수를 유한소수로 나타낼 수 없도록 하는 a, b의 조건을 구했다.	30 %
❷	M의 값을 구했다.	30 %
❸	m의 값을 구했다.	30 %
❹	$M-m$의 값을 구했다.	10 %

참고 (ⅰ)에서 $a=1$, $b=9$일 때,

$\frac{b}{2^2\times3\times5^2\times a}=\frac{9}{2^2\times3\times5^2\times1}=\frac{3}{100}$이므로 가장 큰 값이지만 유한소수이다.

14 답 ①

조건 (나)에서 $\frac{11}{45}\times\frac{b}{a}=\frac{11\times b}{3^2\times5\times a}$가 유한소수로 나타내어지려면 b는 $3^2=9$의 배수이어야 한다.

조건 (가)에서 $a+b=100$이므로 $b<100$

$\therefore b=9, 18, 27, \cdots, 99$

또, a의 값이 될 수 있는 것은 $\frac{11}{45}\times\frac{b}{a}$를 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2 또는 5가 되는 값이므로 a의 값은 1 또는 소인수가 2 또는 5뿐인 수이거나 그 수에 11을 곱한 수이다.

조건 (가)에서 $a+b=100$, 즉 $a=100-b$이므로

$b=9$일 때, $a=100-9=91=7\times13$

$b=18$일 때, $a=100-18=82=2\times41$

$b=27$일 때, $a=100-27=73$

$b=36$일 때, $a=100-36=64=2^6$

$b=45$일 때, $a=100-45=55=5\times11$

$b=54$일 때, $a=100-54=46=2\times23$

$b=63$일 때, $a=100-63=37$

$b=72$일 때, $a=100-72=28=2^2\times7$

$b=81$일 때, $a=100-81=19$

$b=90$일 때, $a=100-90=10=2\times5$

$b=99$일 때, $a=100-99=1$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 a, b에 대하여 순서쌍 (a, b)는 $(1, 99)$, $(10, 90)$, $(55, 45)$, $(64, 36)$의 4개이다.

참고 주어진 조건을 만족시키는 자연수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}$의 값은 다음과 같다.

$a=64$, $b=36$일 때, $\frac{11}{45}\times\frac{b}{a}=\frac{11\times36}{3^2\times5\times64}=\frac{11}{2^4\times5}$

$a=55$, $b=45$일 때, $\frac{11}{45}\times\frac{b}{a}=\frac{11\times45}{3^2\times5\times55}=\frac{1}{5}$

$a=10$, $b=90$일 때, $\frac{11}{45}\times\frac{b}{a}=\frac{11\times90}{3^2\times5\times10}=\frac{11}{5}$

$a=1$, $b=99$일 때, $\frac{11}{45}\times\frac{b}{a}=\frac{11\times99}{3^2\times5\times1}=\frac{121}{5}$

15 답 18

$\frac{18}{k}=\frac{2\times3^2}{k}$을 유한소수로 나타낼 수 있으려면 이 분수를 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 한다. 이때 분자에 3^2이 있으므로 k는 소인수가 2 또는 5인 수이거나 그 수에 3을 곱하거나 9를 곱한 수이어야 한다.

이때 $18<k\le100$이므로

(ⅰ) k의 소인수가 2 또는 5일 때

k의 값은 2^5, 2^6, 5^2, 2×5^2, $2^2\times5$, $2^2\times5^2$, $2^3\times5$, $2^4\times5$의 8개이다.

(ⅱ) k가 소인수가 2 또는 5인 수에 3을 곱한 수일 때

k의 값은 $2^3\times3$, $2^4\times3$, $2^5\times3$, 3×5^2, $2\times3\times5$, $2^2\times3\times5$의 6개이다.

(ⅲ) k가 소인수가 2 또는 5인 수에 9를 곱한 수일 때

k의 값은 $2^2\times3^2$, $2^3\times3^2$, $3^2\times5$, $2\times3^2\times5$의 4개이다.

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 k의 개수는 $8+6+4=18$이다.

16 답 ②

해결 key Point!

$42=2\times3\times7$임을 이용하여 $\frac{42}{k}$가 유한소수가 되도록 하는 분모의 소인수를 생각해야 한다.

$\frac{42}{k}=\frac{2\times3\times7}{k}$을 유한소수로 나타낼 수 있으려면 이 분수를 기약분수로 나타냈을 때 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 하므로 k는 소인수가 2 또는 5인 수이거나 그 수에 3 또는 7을 곱한 수이어야 한다.

이때 $\frac{1}{5}<\frac{42}{k}<\frac{1}{2}$에서 $\frac{42}{210}<\frac{42}{k}<\frac{42}{84}$

즉, $84<k<210$이므로

(ⅰ) k의 소인수가 2 또는 5일 때

k의 값은 2^7, 5^3, $2^2\times5^2$, $2^3\times5^2$, $2^5\times5$의 5개이다.

(ⅱ) k가 소인수가 2 또는 5인 수에 3을 곱한 수일 때

k의 값은 $2^5\times3$, $2^6\times3$, $2\times3\times5^2$, $2^3\times3\times5$의 4개이다.

(ⅲ) k가 소인수가 2 또는 5인 수에 7을 곱한 수일 때

k의 값은 $2^4\times7$, $5^2\times7$, $2^2\times5\times7$의 3개이다.

(ⅳ) k가 소인수가 2 또는 5인 수에 3과 7을 곱한 수일 때

k의 값은 $2^3\times3\times7$, $5\times3\times7$의 2개이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 k의 개수는 $5+4+3+2=14$이다.

17 답 5

해결 key Point!

조건에 따라 a는 $0.\dot{b}c\dot{d}$의 꼴이고 분모는 999의 약수가 되어야 한다.

순환마디는 소수점 아래 첫째 자리부터 시작하고, 순환마디를 이루는 숫자의 개수가 3이므로

$a=0.\dot{b}c\dot{d}$ (b, c, d는 한 자리의 음이 아닌 정수)의 꼴이다.
따라서 $a=\dfrac{bcd}{999}$이고 a를 기약분수로 나타낼 때 분모가 될 수 있는 수는 999의 약수이다.
이때 분모가 1이면 $a>1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
또, 분모가 9 또는 99의 약수이면 기약분수는 순환마디를 이루는 숫자의 개수가 1 또는 2가 되므로 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 조건을 만족시키는 a의 값은 999의 약수 1, 3, 9, 27, 37, 111, 333, 999 중 1과 9 또는 99의 약수인 1, 3, 9를 제외한 수이므로 구하는 수는 27, 37, 111, 333, 999의 5개이다.

꿀 한줄평

순환소수를 분수로 나타낼 때, 순환마디의 개수에 따라 분모의 0 또는 9의 숫자의 개수가 정해진다. 이 분수를 기약분수로 나타내면 0 또는 9가 아닌 수로 이루어진 분모가 나타날 수 있는데 기약분수로 나타내어진 분모가 주어진 순환마디의 성질을 만족시키는지 확인해야 한다.

18 답 ②

소수점 아래 첫째 자리부터 순환마디를 이루는 숫자의 개수가 2인 순환소수를 분수로 나타내면 분모는 99이다. 즉,

$$\frac{a}{396}=\frac{a}{2^2\times3^2\times11}=\frac{a}{99\times4}$$

에서 분모의 4가 약분되어야 하므로 a는 4의 배수이어야 한다.
이때 a가 11의 배수이면 분모에 9만 남아 순환마디를 이루는 숫자의 개수가 1이다.
따라서 두 자리 자연수 a는 4의 배수 12, 16, 20, …, 96의 22개에서 4의 배수이면서 11의 배수인 44, 88의 2개를 뺀 20개이다.

19 답 ②

① $3.1\dot{4}\dot{5}=3.1454545\cdots$이므로 $\langle 3.1\dot{4}\dot{5}\rangle=0.1\dot{4}\dot{5}$
$1000\times3.1\dot{4}\dot{5}=3145.454545\cdots$이므로
$\langle 1000\times3.1\dot{4}\dot{5}\rangle=0.\dot{4}\dot{5}$
$\therefore \langle 3.1\dot{4}\dot{5}\rangle\neq\langle 1000\times3.1\dot{4}\dot{5}\rangle$

② $7.\dot{0}4\dot{5}=7.045045\cdots$이므로 $\langle 7.\dot{0}4\dot{5}\rangle=0.\dot{0}4\dot{5}$
$1000\times7.\dot{0}4\dot{5}=7045.045045\cdots$이므로
$\langle 1000\times7.\dot{0}4\dot{5}\rangle=0.\dot{0}4\dot{5}$
$\therefore \langle 7.\dot{0}4\dot{5}\rangle=\langle 1000\times7.\dot{0}4\dot{5}\rangle$

③ $9.0\dot{1}2\dot{3}=9.0123123\cdots$이므로 $\langle 9.0\dot{1}2\dot{3}\rangle=0.0\dot{1}2\dot{3}$
$1000\times9.0\dot{1}2\dot{3}=9012.312312\cdots$이므로
$\langle 1000\times9.0\dot{1}2\dot{3}\rangle=0.\dot{3}1\dot{2}$
$\therefore \langle 9.0\dot{1}2\dot{3}\rangle\neq\langle 1000\times9.0\dot{1}2\dot{3}\rangle$

④ $12.\dot{3}\dot{5}=12.353535\cdots$이므로 $\langle 12.\dot{3}\dot{5}\rangle=0.\dot{3}\dot{5}$
$1000\times12.\dot{3}\dot{5}=12353.535353\cdots$이므로
$\langle 1000\times12.\dot{3}\dot{5}\rangle=0.\dot{5}\dot{3}$
$\therefore \langle 12.\dot{3}\dot{5}\rangle\neq\langle 1000\times12.\dot{3}\dot{5}\rangle$

⑤ $15.3\dot{8}=15.3888\cdots$이므로 $\langle 15.3\dot{8}\rangle=0.3\dot{8}$
$1000\times15.3\dot{8}=15388.888\cdots$이므로
$\langle 1000\times15.3\dot{8}\rangle=0.\dot{8}$
$\therefore \langle 15.3\dot{8}\rangle\neq\langle 1000\times15.3\dot{8}\rangle$

따라서 $\langle a\rangle=\langle 1000a\rangle$를 만족시키는 a의 값이 될 수 있는 것은 ②이다.

꿀 한줄평

a에 1000을 곱하면 소수점의 위치가 기존 위치에서 세 칸 뒤로 이동하므로 a와 $1000a$의 소수 부분이 같으려면 a는 소수점 아래 첫째 자리부터 순환마디가 시작되어야 하고, 순환마디를 이루는 숫자의 개수는 3의 약수인 1 또는 3이어야 한다.

20 답 ②

$0.\dot{0}\dot{x}=\dfrac{x}{99}$이므로 $\dfrac{1}{20}<0.\dot{0}\dot{x}<\dfrac{1}{6}$에서

$\dfrac{1}{20}<\dfrac{x}{99}<\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{99}{20}<x<\dfrac{33}{2}$

$\therefore 4.95<x<16.5$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 한 자리 자연수 x는 5, 6, 7, 8, 9의 5개이다.

21 답 4

해결 key Point!

세 점 A, B, C를 좌표평면 위에 나타낸 후, 선분으로 연결하여 만들어지는 직각삼각형의 넓이를 구해야 한다.

$1.\dot{6}=\dfrac{16-1}{9}=\dfrac{5}{3}$이고 점 P$(1.\dot{6},\ a)$, 즉 P$\left(\dfrac{5}{3},\ a\right)$는

$y=-\dfrac{2}{5}x$의 그래프 위의 점이므로

$a=-\dfrac{2}{5}\times\dfrac{5}{3}=-\dfrac{2}{3}\qquad\therefore$ P$\left(\dfrac{5}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$

점 P$\left(\dfrac{5}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$와 x축에 대하여 대칭인 점 A의 좌표는

$\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$

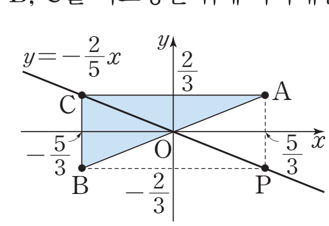
점 P$\left(\dfrac{5}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$와 y축에 대하여 대칭인 점 B의 좌표는

$\left(-\dfrac{5}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$

점 P$\left(\dfrac{5}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$와 원점에 대하여 대칭인 점 C의 좌표는

$\left(-\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$

이때 세 점 A, B, C를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\left\{\frac{5}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)\right\}\times\left\{\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}\times\frac{4}{3}$$
$$=\frac{20}{9}=\frac{22-2}{9}$$
$$=2.\dot{2}$$

즉, $b=2$, $c=2$이므로

$b+c=2+2=4$

Level UP

점 P(x, y)와 x축에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(x, -y)$

y축에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(-x, y)$

원점에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(-x, -y)$이다.

22 답 ④

해결 key Point!

x_n은 $\frac{9}{56}$를 소수로 나타내었을 때 소수점 아래 n번째 자리의 숫자임을 알아야 한다.

$\frac{9}{56}=0.160714285714285\cdots=0.160\dot{7}1428\dot{5}$

에서 x_n은 $\frac{9}{56}$를 소수로 나타내었을 때 소수점 아래 n번째 자리의 숫자이므로

$x_1=1$, $x_2=6$, $x_3=0$, $x_4=7$, $x_5=1$, $x_6=4$, $x_7=2$, $x_8=8$, $x_9=5$, $x_{10}=7$, $x_{11}=1$, …

즉, $\frac{9}{56}$는 소수점 아래 네 번째 자리부터 순환마디를 이루며, 순환마디를 이루는 숫자는 7, 1, 4, 2, 8, 5의 6개이다.

$50=3+6\times7+5$이므로 순환마디가 7번 반복되고

$x_{46}=x_4=7$, $x_{47}=x_5=1$, $x_{48}=x_6=4$, $x_{49}=x_7=2$, $x_{50}=x_8=8$

$$\therefore x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{50}$$
$$=(1+6+0)+(7+1+4+2+8+5)\times7+(7+1+4+2+8)$$
$$=218$$

23 답 ①

$$1+\frac{2}{10}+\frac{5}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\cdots$$
$$=1+0.2+0.05+0.002+0.0005+\cdots=1.252525\cdots$$
$$=1.\dot{2}\dot{5}=\frac{125-1}{99}=\frac{124}{99}$$

따라서 $a=124$, $b=99$이므로

$a-b=124-99=25$

24 답 ②

$$5-\frac{6}{10^2}-\frac{6}{10^4}-\frac{6}{10^6}-\cdots$$
$$=5-\frac{6}{100}-\frac{6}{10000}-\frac{6}{1000000}-\cdots$$
$$=5-(0.06+0.0006+0.000006+\cdots)$$
$$=5-0.060606\cdots=5-0.\dot{0}\dot{6}$$
$$=5-\frac{6}{99}=\frac{163}{33}$$

25 답 5

$$A=\frac{2}{5}+\frac{1}{50}+\frac{2}{500}+\frac{1}{5000}+\cdots$$
$$=\frac{4}{10}+\frac{2}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{2}{10000}+\cdots$$
$$=0.4+0.02+0.004+0.0002+\cdots$$
$$=0.\dot{4}\dot{2}$$
$$=\frac{42}{99}=\frac{14}{33}$$

이므로

$\frac{11}{7}A=\frac{11}{7}\times\frac{14}{33}=\frac{2}{3}$

따라서 $x=3$, $y=2$이므로

$x+y=3+2=5$

26 답 $\frac{3331}{3333}$

해결 key Point!

자연수 n에 대하여 13^n, 17^n, 19^n의 일의 자리의 숫자의 규칙성을 확인해야 한다.

13의 일의 자리의 숫자는 3, 13^2의 일의 자리의 숫자는 9, 13^3의 일의 자리의 숫자는 7, 13^4의 일의 자리의 숫자는 1, 13^5의 일의 자리의 숫자는 3, …이므로 13^n의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 반복하여 나타난다.

17의 일의 자리의 숫자는 7, 17^2의 일의 자리의 숫자는 9, 17^3의 일의 자리의 숫자는 3, 17^4의 일의 자리의 숫자는 1, 17^5의 일의 자리의 숫자는 7, …이므로 17^n의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1이 반복하여 나타난다.

19의 일의 자리의 숫자는 9, 19^2의 일의 자리의 숫자는 1, 19^3의 일의 자리의 숫자는 9, …이므로 19^n의 일의 자리의 숫자는 9, 1이 반복하여 나타난다.

따라서 $13^n+17^n+19^n$의 일의 자리의 숫자 a_n은

$n=1$일 때, $3+7+9=19$　$\therefore a_1=9$

$n=2$일 때, $9+9+1=19$　$\therefore a_2=9$

$n=3$일 때, $7+3+9=19$　$\therefore a_3=9$

$n=4$일 때, $1+1+1=3$　$\therefore a_4=3$

$n=5$일 때, $3+7+9=19$　$\therefore a_5=9$

⋮

$\therefore \frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\frac{a_4}{10^4}+\frac{a_5}{10^5}+\cdots$

$=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\frac{9}{10^5}+\cdots$

$=0.9+0.09+0.009+0.0003+0.00009+\cdots$

$=0.\dot{9}99\dot{3}=\frac{9993}{9999}$

$=\frac{3331}{3333}$

Level UP

자연수 n의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 동일한 숫자가 순환하면서 반복적으로 나오게 된다.
일의 자리의 숫자가 3, 7, 9인 자연수 이외에도
2의 거듭제곱은 2, 4, 8, 6의 네 개의 숫자가 반복되고
4의 거듭제곱은 4, 6의 두 개의 숫자가 반복되고
5의 거듭제곱은 5의 한 개의 숫자가 반복되고
6의 거듭제곱은 6의 한 개의 숫자가 반복되고
8의 거듭제곱은 8, 4, 2, 6의 네 개의 숫자가 반복된다.

27 답 468

해결 key Point!

$0.4\dot{a}\dot{7}$을 분수로 나타내고, $\frac{b}{330}$와 통분하여 두 분수의 분자를 비교해야 한다.

1단계 $0.4\dot{a}\dot{7}$을 분수로 표현하고 이 수가 $\frac{b}{330}$와 같음을 이용하여 b를 a에 대한 식으로 나타내기

$0.4\dot{a}\dot{7}=\frac{(400+10a+7)-4}{990}=\frac{403+10a}{990}$이므로

$\frac{403+10a}{990}=\frac{b}{330}$

$403+10a=3b$

$\therefore b=\frac{403+10a}{3}=134+\frac{10a+1}{3}$

2단계 b가 자연수임을 이용하여 a의 값 구하기

이때 b는 자연수이므로 $10a+1$은 3의 배수이어야 하고 a는 한 자리 자연수이므로

$a=2$ 또는 $a=5$ 또는 $a=8$이다.

3단계 모든 $a+b$의 값의 합 구하기

(i) $a=2$일 때

$b=134+\frac{10\times2+1}{3}=134+7=141$

$\therefore a+b=2+141=143$

(ii) $a=5$일 때

$b=134+\frac{10\times5+1}{3}=134+17=151$

$\therefore a+b=5+151=156$

(iii) $a=8$일 때

$b=134+\frac{10\times8+1}{3}=134+27=161$

$\therefore a+b=8+161=169$

(i)~(iii)에 의하여 모든 $a+b$의 값의 합은

$143+156+169=468$

단계	채점 기준	비율
❶	b를 a에 대한 식으로 나타냈다.	40 %
❷	a의 값을 구했다.	30 %
❸	모든 $a+b$의 값의 합을 구했다.	30 %

28 답 ④

$1.4\dot{6}=\frac{146-14}{90}=\frac{132}{90}=\frac{22}{15}$이므로

$a=15$, $b=22$

$\frac{b}{a}=\frac{22}{15}=\frac{2\times11}{3\times5}$이므로 $\frac{b}{a}\times x=\frac{2\times11}{3\times5}\times x$를 유한소수로 나타낼 수 있으려면 x는 3의 배수이어야 한다.

또, $\frac{a}{b}=\frac{15}{22}=\frac{3\times5}{2\times11}$이므로 $\frac{a}{b}\times x=\frac{3\times5}{2\times11}\times x$를 유한소수로 나타낼 수 있으려면 x는 11의 배수이어야 한다.

따라서 x의 값은 3과 11의 공배수, 즉 33의 배수이므로 가장 작은 x의 값은 33이다.

29 답 154

$1.\dot{2}\dot{7}=\frac{127-1}{99}=\frac{126}{99}=\frac{14}{11}=\frac{2\times7}{11}$이므로 $\frac{2\times7}{11}\times A$가 어떤 자연수의 제곱이 되려면 A는 11의 배수이면서 소인수분해 했을 때 지수가 모두 짝수이어야 한다.

즉, $A=2\times7\times11\times k^2$ (k는 자연수)의 꼴이어야 하므로 A의 값 중 가장 작은 세 자리 자연수는

$2\times7\times11\times1^2=154$

30 답 220

해결 key Point!

주어진 조건에 따라 식을 세운 후 순환소수를 분수로 나타내어 계산해야 한다.

$0.\dot{2}\dot{5}x-0.25x=0.\dot{5}$이므로

$\frac{25}{99}x-\frac{25}{100}x=\frac{5}{9}$

$2500x-2475x=5500$

$25x=5500$

$\therefore x=220$

31 답 ③

해결 key Point!

두 점 사이의 거리는 모두 이웃한 두 순환소수의 차와 같음을 이용해야 한다.

$ab<0$이므로 a와 b 중 하나는 음수이다.

$a<b$라고 하면 $a<0<b$이고, 이웃하는 두 점 사이의 거리는

$0.\dot{7}\dot{2}-0.\dot{2}\dot{7}=\frac{72}{99}-\frac{27}{99}=\frac{45}{99}=\frac{5}{11}$

한편, $0.\dot{2}\dot{7}-\frac{5}{11}=\frac{27}{99}-\frac{5}{11}=-\frac{2}{11}<0$이므로

$a<b<0.\dot{2}\dot{7}<0.\dot{7}\dot{2}$가 될 수 없다.

따라서 $a+b$의 값이 가장 크려면 $a<0.\dot{2}\dot{7}<0.\dot{7}\dot{2}<b$이어야 한다.

$a=0.\dot{2}\dot{7}-\frac{5}{11}=\frac{27}{99}-\frac{5}{11}=-\frac{2}{11}$

$b=0.\dot{7}\dot{2}+\frac{5}{11}=\frac{72}{99}+\frac{5}{11}=\frac{13}{11}$

따라서 $a+b$의 값 중 가장 큰 수는

$-\frac{2}{11}+\frac{13}{11}=1$

꿀 한줄평

a, b의 대소 관계가 정해져 있지 않으므로 $a<b$라고 하면 $ab<0$이므로 $a<0<b$가 된다. 이때 $a<b<0.\dot{2}\dot{7}<0.\dot{7}\dot{2}$이면 $a<0$, $b<0$이므로 $ab<0$이라는 조건을 만족시키지 않으므로 가능한 경우는 $a<0.\dot{2}\dot{7}<b<0.\dot{7}\dot{2}$, $a<0.\dot{2}\dot{7}<0.\dot{7}\dot{2}<b$이고, 이 중 $a+b$의 값이 큰 경우는 $a<0.\dot{2}\dot{7}<0.\dot{7}\dot{2}<b$이므로 이때의 $a+b$의 값만 구하면 된다.

$b<a$라고 하면 $ab<0$이므로 $b<0<a$가 되고, 이 경우에도 같은 방법으로 $a+b$의 값 중 가장 큰 수는 1임을 알 수 있다.

32 답 9

$0.8\dot{x}=\frac{(80+x)-8}{90}=\frac{72+x}{90}$이므로

$\frac{72+x}{90}=\frac{x+45}{60}$

$2(72+x)=3(x+45)$

$144+2x=3x+135$

$\therefore\ x=9$

33 답 $\frac{2}{3}$

1단계 x의 값 구하기

$0.\dot{6}x-1.\dot{6}=3.\dot{3}-x$에서

$\frac{6}{9}x-\frac{16-1}{9}=\frac{33-3}{9}-x$

$\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}=\frac{10}{3}-x$, $\frac{5}{3}x=5$

$\therefore\ x=3$

2단계 k의 값 구하기

$x=3$을 $0.\dot{7}x-1=0.\dot{2}x+k$, 즉 $\frac{7}{9}x-1=\frac{2}{9}x+k$에 대입하면

$\frac{7}{9}\times3-1=\frac{2}{9}\times3+k$

$\frac{4}{3}=\frac{2}{3}+k$

$\therefore\ k=\frac{2}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	x의 값을 구했다.	50 %
❷	k의 값을 구했다.	50 %

34 답 ②

$0.a\dot{b}+0.b\dot{a}=0.\dot{3}$에서

$\frac{(10a+b)-a}{90}+\frac{(10b+a)-b}{90}=\frac{3}{9}$

$\frac{10a+10b}{90}=\frac{1}{3}$, $\frac{a+b}{9}=\frac{1}{3}$

$\therefore\ a+b=3$

이때 a, b는 $a>b$인 한 자리 자연수이므로

$a=2$, $b=1$

$\therefore\ 0.a\dot{b}-0.b\dot{a}=0.2\dot{1}-0.1\dot{2}$

$=\frac{21-2}{90}-\frac{12-1}{90}$

$=\frac{8}{90}=0.0\dot{8}$

35 답 ⑤

해결 key Point!

순환소수를 분수로 나타내어 정리해 만든 a와 b 사이의 관계식을 이용해야 한다.

$0.\dot{a}\dot{b}-0.\dot{b}\dot{a}=0.\dot{1}\dot{8}$에서

$\frac{10a+b}{99}-\frac{10b+a}{99}=\frac{18}{99}$

$(10a+b)-(10b+a)=18$, $9a-9b=18$

$\therefore\ a-b=2$ …… ㉠

한편,

$0.\dot{a}\dot{b}+0.\dot{b}\dot{a}=\frac{10a+b}{99}+\frac{10b+a}{99}$

$=\frac{11a+11b}{99}$

$=\frac{a+b}{9}$

이므로 $0.\dot{a}\dot{b}+0.\dot{b}\dot{a}$의 값이 가장 큰 값일 때에는 $a+b$의 값이 가장 클 때이다.

㉠을 만족시키는 한 자리 자연수 a, b를 순서쌍 (a, b)로 나타내면 $(9, 7)$, $(8, 6)$, $(7, 5)$, $(6, 4)$ $(5, 3)$, $(4, 2)$, $(3, 1)$

이고 $a+b$의 값이 가장 크려면 $a=9$, $b=7$일 때이다.

따라서 가장 큰 $0.\dot{a}\dot{b}+0.\dot{b}\dot{a}$의 값은

$\frac{a+b}{9}=\frac{9+7}{9}=\frac{16}{9}$

이므로 $p=9$, $q=16$

$\therefore p+q=9+16=25$

36 답 ⑤

$\frac{7}{11}=0.636363\cdots=0.\dot{6}\dot{3}$이므로 $y=6$, $x=3$

즉, $0.xy\dot{z}=\frac{37}{100}$에서 $0.36\dot{z}=\frac{37}{100}$이므로

$\frac{(360+z)-36}{900}=\frac{37}{100}$

$\frac{324+z}{900}=\frac{37}{100}$

$324+z=333$

$\therefore z=9$

$\therefore x+y+z=3+6+9=18$

37 답 19

1단계 a, b, c 사이의 관계식 구하기

$\frac{0.\dot{a}}{0.0\dot{b}}=\frac{0.0\dot{b}}{0.00\dot{c}}$에서 $(0.0\dot{b})^2=0.\dot{a}\times0.00\dot{c}$

이때 $0.\dot{a}=\frac{a}{9}$, $0.0\dot{b}=\frac{b}{90}$, $0.00\dot{c}=\frac{c}{900}$이므로

$\left(\frac{b}{90}\right)^2=\frac{a}{9}\times\frac{c}{900}$, $\frac{b^2}{8100}=\frac{ac}{8100}$

$\therefore b^2=ac$

2단계 $b^2=ac$를 만족시키는 모든 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c) 구하기

$3\le a\le7$, $5\le c\le9$에서 $15\le ac\le63$이므로

$15\le b^2\le63$

따라서 자연수 b의 값은 4, 5, 6, 7이다.

(i) $b=4$일 때

$ac=16$이므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수 a, c의 값은 없다.

(ii) $b=5$일 때

$ac=25$이므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수 a, c의 값은 $a=5$, $c=5$

(iii) $b=6$일 때

$ac=36$이므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수 a, c의 값은 $a=4$, $c=9$ 또는 $a=6$, $c=6$

(iv) $b=7$일 때

$ac=49$이므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수 a, c의 값은 $a=7$, $c=7$

(i)~(iv)에 의하여 $b^2=ac$를 만족시키는 세 자연수 a, b, c를 순서쌍 (a, b, c)로 나타내면

$(4, 6, 9)$, $(5, 5, 5)$, $(6, 6, 6)$, $(7, 7, 7)$

3단계 $a+b+c$의 값 구하기

이때 $a<b<c$이므로

$a=4$, $b=6$, $c=9$

$\therefore a+b+c=4+6+9=19$

단계	채점 기준	비율
❶	a, b, c 사이의 관계식을 구했다.	40 %
❷	$b^2=ac$를 만족시키는 모든 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)를 구했다.	30 %
❸	$a+b+c$의 값을 구했다.	30 %

38 답 411

해결 key Point!

반복하여 생긴 각 원의 넓이를 소수로 나타내고, 그 합을 순환소수로 나타낸다.

첫 번째 원의 반지름의 길이가 6이므로

원의 넓이는 $\pi\times6^2=36\pi$

두 번째 원의 반지름의 길이는 $6\times\frac{1}{10}=\frac{6}{10}$이므로

원의 넓이는 $\pi\times\left(\frac{6}{10}\right)^2=\frac{36}{100}\pi=0.36\pi$

세 번째 원의 반지름의 길이는 $\frac{6}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{6}{100}$이므로

원의 넓이는 $\pi\times\left(\frac{6}{100}\right)^2=\frac{36}{10000}\pi=0.0036\pi$

⋮

따라서 모든 원의 넓이의 합은

$36\pi+0.36\pi+0.0036\pi+\cdots$

$=\pi\times(36+0.36+0.0036+\cdots)$

$=\pi\times36.\dot{3}\dot{6}$

$=\pi\times\frac{3636-36}{99}$

$=\frac{400}{11}\pi$

이므로 $a=11$, $b=400$

$\therefore a+b=11+400=411$

39 답 $97.\dot{7}$

해결 key Point!

공은 튀어오른 거리만큼 떨어진다.

공을 80 cm의 높이에서 떨어뜨리면

공은 $80\times\frac{1}{10}=8$ (cm)만큼 튀어 오르고,

다시 바닥에 떨어뜨리면

공은 $8\times\frac{1}{10}=0.8$ (cm)만큼 튀어 오른다.

공은 이런 과정을 반복하므로 공이 완전히 멈출 때까지 움직인 거리의 합은

$80+2\times80\times\frac{1}{10}+2\times80\times\frac{1}{10^2}+2\times80\times\frac{1}{10^3}+\cdots$

$=80+2\times(8+0.8+0.08+0.008+\cdots)$

$=80+2\times8.\dot{8}=80+2\times\frac{88-8}{9}$

$=80+\frac{160}{9}$

$=80+\frac{177-17}{9}$

$=80+17.\dot{7}$

$=97.\dot{7}$

참고 공을 바닥에 떨어뜨릴 때, 튀어오른 만큼 다시 바닥에 떨어지므로 공이 움직인 거리는 (튀어오른 높이)$\times$2로 구해야 한다.

40 답 $\frac{31}{37}$

해결 key Point!

주어진 음계를 숫자로 나타내고, 그 숫자를 순환마디로 갖는 분수를 구해야 한다.

주어진 악보대로 연주되는 소리는 '레파도'의 음이 반복되므로 입력한 분수를 순환소수로 나타내었을 때의 순환마디는 837이다.

따라서 입력해야 하는 값은 $0.\dot{8}3\dot{7}$이므로 이를 기약분수로 나타내면

$0.\dot{8}3\dot{7}=\frac{837}{999}=\frac{31}{37}$

41 답 ④

해결 key Point!

2월 달력을 그린 후 각 요일에서 나타낼 수 있는 분수 중 유한소수가 되는 분수를 찾아야 한다.

주어진 1월 달력을 이용하여 2월 달력을 만들면 다음과 같다.

02 February

일	월	화	수	목	금	토
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28		

달력에 있는 모든 수로 분수를 만들고, 유한소수의 개수를 구하면

(i) 일요일에서 나타낼 수 있는 분수는

$\frac{3}{10}=\frac{3}{2\times5}$, $\frac{10}{17}=\frac{2\times5}{17}$, $\frac{17}{24}=\frac{17}{2^3\times3}$

이고, 이를 소수로 나타냈을 때 유한소수가 되는 분수는

$\frac{3}{10}$의 1개이다.

(ii) 월요일에서 나타낼 수 있는 분수는

$\frac{4}{11}=\frac{2^2}{11}$, $\frac{11}{18}=\frac{11}{2\times3^2}$, $\frac{18}{25}=\frac{2\times3^2}{5^2}$

이고, 이를 소수로 나타냈을 때 유한소수가 되는 분수는

$\frac{18}{25}$의 1개이다.

(iii) 화요일에서 나타낼 수 있는 분수는

$\frac{5}{12}=\frac{5}{2^2\times3}$, $\frac{12}{19}=\frac{2^2\times3}{19}$, $\frac{19}{26}=\frac{19}{2\times13}$

이고, 이를 소수로 나타냈을 때 유한소수가 되는 분수는 없다.

(iv) 수요일에서 나타낼 수 있는 분수는

$\frac{6}{13}=\frac{2\times3}{13}$, $\frac{13}{20}=\frac{13}{2^2\times5}$, $\frac{20}{27}=\frac{2^2\times5}{3^3}$

이고, 이를 소수로 나타냈을 때 유한소수가 되는 분수는

$\frac{13}{20}$의 1개이다.

(v) 목요일에서 나타낼 수 있는 분수는

$\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$, $\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$, $\frac{21}{28}=\frac{3}{4}=\frac{3}{2^2}$

이고, 이를 소수로 나타냈을 때 유한소수가 되는 분수는

$\frac{7}{14}$, $\frac{21}{28}$의 2개이다.

(vi) 금요일에서 나타낼 수 있는 분수는

$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$, $\frac{8}{15}=\frac{2^3}{3\times5}$, $\frac{15}{22}=\frac{3\times5}{2\times11}$

이고, 이를 소수로 나타냈을 때 유한소수가 되는 분수는

$\frac{1}{8}$의 1개이다.

(vii) 토요일에서 나타낼 수 있는 분수는

$\frac{2}{9}=\frac{2}{3^2}$, $\frac{9}{16}=\frac{3^2}{2^4}$, $\frac{16}{23}$

이고, 이를 소수로 나타냈을 때 유한소수가 되는 분수는

$\frac{9}{16}$의 1개이다.

(i)~(vii)에 의하여 조건 (나)를 만족시키는 요일은 목요일이다.

이때 목요일에 있는 수 7, 14, 21, 28에 대하여

$7-1=6$, $14-1=13$, $21-1=20$, $28-1=27$

이고 소수는 13뿐이므로 조건 (다)를 만족시키는 날은 14일이다.

따라서 준희의 졸업식 날짜는 2월 14일이다.

02 단항식의 계산

Lv. 1 개념을 적용하는 **핵심 문제**

19쪽~20쪽

01 ④	**02** 2	**03** 9	**04** ②	**05** ③
06 24	**07** -2	**08** 2	**09** ④	**10** ④
11 ⑤	**12** $4a^2b^2$			

01 답 ④

$4^3+4^3+4^3+4^3=4^3\times4=4^4=4^x$이므로

$x=4$

$7^3\times7^3\times7^3\times7^3=7^{3+3+3+3}=7^{12}=7^y$이므로

$y=12$

$\therefore x+y=4+12=16$

Level UP

① 곱셈: 같은 수나 문자를 n번 더한 것을 간단히 나타낸 것

⇨ $\underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{n\text{번}}=a\times n$

② 거듭제곱: 같은 수나 문자를 n번 곱한 것을 간단히 나타낸 것

⇨ $\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{번}}=a^n$

02 답 2

$64^{3x-2}=2^{6(3x-2)}=2^{18x-12}$

$4^{4x+4}=2^{2(4x+4)}=2^{8x+8}$

즉, $2^{18x-12}=2^{8x+8}$이므로

$18x-12=8x+8$, $10x=20$

$\therefore x=2$

03 답 9

1단계 주어진 식의 좌변을 간단히 하기

$\left(-\dfrac{2x^ay^3}{z^2}\right)^b=(-1)^b\times\dfrac{2^bx^{ab}y^{3b}}{z^{2b}}$

2단계 a, b, c, d의 값 구하기

즉, $(-1)^b\times\dfrac{2^bx^{ab}y^{3b}}{z^{2b}}=\dfrac{cx^{20}y^{12}}{z^d}$이므로

$(-1)^b\times2^b=c$, $ab=20$, $3b=12$, $2b=d$

$\therefore b=4$, $a=5$, $d=8$, $c=16$

3단계 $a-b+c-d$의 값 구하기

$\therefore a-b+c-d=5-4+16-8=9$

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 식의 좌변을 간단히 했다.	40 %
❷	a, b, c, d의 값을 구했다.	40 %
❸	$a-b+c-d$의 값을 구했다.	20 %

04 답 ②

$2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=2^x+2^x\times2+2^x\times2^2$

$=2^x\times(1+2+2^2)$

$=2^x\times7$

즉, $2^x\times7=224$이므로

$2^x=32=2^5$ $\quad\therefore x=5$

참고 분배법칙 $ab+ac+ad=a(b+c+d)$임을 이용한다.

05 답 ③

$A=3^{x+2}=3^x\times3^2=3^x\times9$이므로 $3^x=\dfrac{A}{9}$

$\therefore 27^x=(3^3)^x=3^{3x}=(3^x)^3$

$=\left(\dfrac{A}{9}\right)^3=\dfrac{A^3}{9^3}=\dfrac{A^3}{729}$

06 답 24

$2^{14}\times3^2\times5^{13}=2\times3^2\times(2\times5)^{13}=18\times10^{13}$

따라서 $2^{14}\times3^2\times5^{13}$은 15자리의 자연수이므로 $n=15$

각 자리의 숫자의 합은 $1+8=9$이므로 $k=9$

$\therefore n+k=15+9=24$

07 답 -2

$(-Ax^2y)^2\times2x^4y^B=A^2x^4y^2\times2x^4y^B=2A^2x^8y^{2+B}$

즉, $2A^2x^8y^{2+B}=32x^Cy^4$이므로

$2A^2=32$, $8=C$, $2+B=4$ $\quad\therefore B=2$

이때 A는 자연수이므로 $A^2=16$에서 $A=4$

$\therefore A+B-C=4+2-8=-2$

08 답 2

$(2a^2b)^{\boxed{\text{ㄱ}}}\div(2a^3b^{\boxed{\text{ㄴ}}})^2=\dfrac{2^{\boxed{\text{ㄱ}}}a^{2\times\boxed{\text{ㄱ}}}b^{\boxed{\text{ㄱ}}}}{4a^6b^{2\times\boxed{\text{ㄴ}}}}$

즉, $\dfrac{2^{\boxed{\text{ㄱ}}}a^{2\times\boxed{\text{ㄱ}}}b^{\boxed{\text{ㄱ}}}}{4a^6b^{2\times\boxed{\text{ㄴ}}}}=\dfrac{16a^6}{b^2}$이므로

$\dfrac{2^{\boxed{\text{ㄱ}}}}{4}=16$, $2\times\boxed{\text{ㄱ}}-6=6$, $2\times\boxed{\text{ㄴ}}-\boxed{\text{ㄱ}}=2$

$2^{\boxed{\text{ㄱ}}}=64=2^6$에서 $\boxed{\text{ㄱ}}=6$

$2\times\boxed{\text{ㄴ}}-6=2$에서 $2\times\boxed{\text{ㄴ}}=8$ $\quad\therefore \boxed{\text{ㄴ}}=4$

따라서 두 자연수 ㄱ, ㄴ의 차는

$6-4=2$

09 답 ④

① $(-2x^2y)^3\div2xy^3=-8x^6y^3\times\dfrac{1}{2xy^3}=-4x^5$

② $5x^2y\times2xy\div\left(-\dfrac{5}{2}x^2y\right)=5x^2y\times2xy\times\left(-\dfrac{2}{5x^2y}\right)$

$=-4xy$

③ $(-x^3y^2)^2\times(-xy^2)=x^6y^4\times(-xy^2)=-x^7y^6$

④ $3x^3y\times\left(-\frac{1}{2}x^2y^2\right)\div\frac{1}{3}y=3x^3y\times\left(-\frac{1}{2}x^2y^2\right)\times\frac{3}{y}$

$=-\frac{9}{2}x^5y^2$

⑤ $\left(-\frac{1}{4}x^3\right)\div2x^2y\div\left(-\frac{3}{4}x^2y^3\right)$

$=\left(-\frac{1}{4}x^3\right)\times\frac{1}{2x^2y}\times\left(-\frac{4}{3x^2y^3}\right)=\frac{1}{6xy^4}$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

10 답 ④

$(-x^3y^2)^3\div(-xy^2)^2\times A=9x^7y^3$에서

$-x^9y^6\div x^2y^4\times A=9x^7y^3$

$\therefore A=9x^7y^3\div(-x^9y^6)\times x^2y^4$

$=9x^7y^3\times\left(-\frac{1}{x^9y^6}\right)\times x^2y^4$

$=-9y$

$(-3x^2y^3)^2\times B\div(3xy^2)^4=-3x^5y^2$에서

$9x^4y^6\times B\div81x^4y^8=-3x^5y^2$

$\therefore B=-3x^5y^2\div9x^4y^6\times81x^4y^8$

$=-3x^5y^2\times\frac{1}{9x^4y^6}\times81x^4y^8$

$=-27x^5y^4$

$\therefore B\div A=-27x^5y^4\div(-9y)$

$=-27x^5y^4\times\left(-\frac{1}{9y}\right)$

$=3x^5y^3$

11 답 ⑤

어떤 식을 A라고 하면

$A\div\left(-\frac{4x^2}{y^3}\right)=\frac{1}{2}xy^6$

$\therefore A=\frac{1}{2}xy^6\times\left(-\frac{4x^2}{y^3}\right)=-2x^3y^3$

따라서 바르게 계산하면

$-2x^3y^3\times\left(-\frac{4x^2}{y^3}\right)=8x^5$

12 답 $4a^2b^2$

해결 key Point!

(삼각기둥의 부피)=(밑면인 삼각형의 넓이)×(기둥의 높이)임을 이용해야 한다.

1단계 밑면인 직각삼각형의 높이를 x라 하고 밑면의 넓이를 x로 나타내기

밑면인 직각삼각형의 높이를 x라고 하면 밑면의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4ab\times x=2ab\times x$

2단계 삼각기둥의 부피를 이용하여 x에 대한 식 세우기

삼각기둥의 부피가 $40a^5b^4$이므로

$2ab\times x\times5a^2b=40a^5b^4$

3단계 밑면인 직각삼각형의 높이 구하기

$10a^3b^2\times x=40a^5b^4$

$\therefore x=40a^5b^4\div10a^3b^2=40a^5b^4\times\frac{1}{10a^3b^2}=4a^2b^2$

따라서 밑면인 직각삼각형의 높이는 $4a^2b^2$이다.

단계	채점 기준	비율
❶	밑면인 직각삼각형의 높이를 x라 하고 밑면의 넓이를 x로 나타냈다.	20 %
❷	삼각기둥의 부피를 이용하여 x에 대한 식을 세웠다.	40 %
❸	밑면인 직각삼각형의 높이를 구했다.	40 %

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

21쪽～25쪽

01 ④	**02** 17	**03** ②	**04** $\frac{6}{5}$	**05** 25
06 ③	**07** ③	**08** 967	**09** 64	**10** ②
11 4	**12** $\frac{32}{27}$	**13** $\frac{6a}{a^2+4}$	**14** $\frac{8ab+2a^3b+16b^2}{a^4+4a^2b}$	
15 ④	**16** ①	**17** 12	**18** 16	**19** 214
20 93	**21** 13분	**22** ③	**23** 1029	**24** ④
25 125	**26** ④	**27** $\frac{b}{2}$배	**28** $\frac{1}{2}$배	**29** $4b^3$
30 $36x^2y$개				

01 답 ④

해결 key Point!

좌변의 분모, 분자를 소인수분해하여 계산한 후 우변과 비교해야 한다.

$1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8$

$=1\times2\times3\times2^2\times5\times(2\times3)\times7\times2^3$

$=2^7\times3^2\times5\times7$

$9\times10\times11\times12\times13\times14\times15\times16$

$=3^2\times(2\times5)\times11\times(2^2\times3)\times13\times(2\times7)\times(3\times5)\times2^4$

$=2^8\times3^4\times5^2\times7\times11\times13$

$\therefore \frac{9\times10\times11\times12\times13\times14\times15\times16}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8}$

$=\frac{2^8\times3^4\times5^2\times7\times11\times13}{2^7\times3^2\times5\times7}$

$=2\times3^2\times5\times11\times13$

따라서 $2\times3^2\times5\times11\times13=2^a\times3^b\times5^c\times11^d\times13^e$이므로

$a=1,\ b=2,\ c=1,\ d=1,\ e=1$

$\therefore a+b+c+d+e=1+2+1+1+1=6$

02 답 17

해결 key Point!

d의 값이 가장 클 때 $a+b+c$는 가장 작은 값이 되는 것을 이용해야 한다.

$(x^a y^b z^c)^d = x^{ad} y^{bd} z^{cd} = x^{90} y^{27} z^{36}$에서 d의 값이 가장 클 때 $a+b+c$는 가장 작은 값이 된다.

또, $ad=90$, $bd=27$, $cd=36$이므로 자연수 d는 90, 27, 36의 최대공약수일 때 그 값이 가장 크다.

$90=2\times3^2\times5$, $27=3^3$, $36=2^2\times3^2$이므로 최대공약수는

$3^2=9 \qquad \therefore d=9$

$9a=90$에서 $a=10$

$9b=27$에서 $b=3$

$9c=36$에서 $c=4$

따라서 가장 작은 $a+b+c$의 값은

$10+3+4=17$

03 답 ②

해결 key Point!

분자, 분모의 각 항을 모두 2의 거듭제곱의 꼴로 나타낸다.

$$\begin{aligned}\left(\frac{16^5-64^4}{64^2-16^2}\right)^2 &= \left(-\frac{64^4-16^5}{64^2-16^2}\right)^2\\ &= \left\{-\frac{(2^6)^4-(2^4)^5}{(2^6)^2-(2^4)^2}\right\}^2\\ &= \left(-\frac{2^{24}-2^{20}}{2^{12}-2^8}\right)^2\\ &= \left\{-\frac{2^{20}(2^4-1)}{2^8(2^4-1)}\right\}^2\\ &= (-2^{12})^2=2^{24}\end{aligned}$$

즉, $2^{24}=2^k$이므로 $k=24$

04 답 $\frac{6}{5}$

해결 key Point!

$\frac{27^4+9^5}{3^{10}+81^2}$의 분모, 분자의 각 항을 모두 3의 거듭제곱의 꼴로 나타낸 후 식을 간단히 정리해야 한다.

$$\begin{aligned}\frac{27^4+9^5}{3^{10}+81^2} &= \frac{(3^3)^4+(3^2)^5}{3^{10}+(3^4)^2} = \frac{3^{12}+3^{10}}{3^{10}+3^8}\\ &= \frac{3^{10}(3^2+1)}{3^8(3^2+1)} = 3^2\end{aligned}$$

즉, $3^2=3^a$이므로 $a=2$

$(-2x^3)^b=(-2)^b x^{3b}=-32x^{15}$이므로

$3b=15 \qquad \therefore b=5$

$\therefore \frac{3a^2}{2b}=\frac{3\times2^2}{2\times5}=\frac{6}{5}$

05 답 25

해결 key Point!

주어진 식의 분모와 분자를 지수법칙을 이용하여 3의 거듭제곱의 꼴로 나타내어 정리해야 한다.

$$\begin{aligned}27^{n+1}+3^{3n+1} &= (3^3)^{n+1}+3^{3n+1}\\ &= 3^{3n+3}+3^{3n+1}\\ &= 3^2\times3^{3n+1}+3^{3n+1}\\ &= 3^{3n+1}\times(3^2+1)\\ &= 10\times3^{3n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}9^{n+1}-3\times9^n &= 9\times9^n-3\times9^n\\ &= 9^n\times(9-3)\\ &= 6\times3^{2n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \left(\frac{27^{n+1}+3^{3n+1}}{9^{n+1}-3\times9^n}\right)^2 &= \left(\frac{10\times3^{3n+1}}{6\times3^{2n}}\right)^2\\ &= \left\{\frac{5}{3}\times3^{(3n+1)-2n}\right\}^2\\ &= \left(\frac{5}{3}\times3^{n+1}\right)^2\\ &= (5\times3^n)^2\\ &= 25\times9^n\end{aligned}$$

즉, $25\times9^n=k\times9^n$이므로 $k=25$이다.

06 답 ③

해결 key Point!

세 지수의 최대공약수로 지수를 같게 한 후, 밑의 대소를 비교해야 한다.

$7^{100}<x^{150}<5^{200}$에서

$(7^2)^{50}<(x^3)^{50}<(5^4)^{50}$, $49^{50}<(x^3)^{50}<625^{50}$

$\therefore 49<x^3<625 \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때 $3^3=27$, $4^3=64$, $5^3=125$, $6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=512$, $9^3=729$, …이므로 부등식 ㉠을 만족시키는 자연수 x의 값은 4, 5, 6, 7, 8이다.

따라서 모든 자연수 x의 값의 합은

$4+5+6+7+8=30$

Level UP

자연수 a, b, m, n에 대하여

① 지수가 같을 때, 밑이 클수록 큰 수이다.

$a<b$이면 $a^m<b^m$

② 밑이 같을 때, 지수가 클수록 큰 수이다.

$m<n$이면 $a^m<a^n$ (단, $a\neq1$)

07 답 ③

해결 key Point!

지수가 홀수인지 짝수인지 판별한다.

ㄱ. $(-1)^{n}\times(-1)^{n+1}=(-1)^{2n+1}=-1$

ㄴ. $(-1)^{3-2n}+(-1)^{2n}=-1+1=0$

ㄷ. $(-1)^{2n-1}-(-1)^{3n}\times(-1)^{5n}=(-1)^{2n-1}-(-1)^{8n}$

$=-1-1=-2$

ㄹ. $(-1)^{4n}\times(-1)^{2-3n}\div(-1)^{-n}=(-1)^{4n+2-3n-(-n)}$

$=(-1)^{2+2n}=1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

08 답 967

해결 key Point!

양수인 분수의 대소 관계를 비교할 때, 분자의 값이 같으면 분모의 크기가 클수록 작아진다는 사실을 이용해야 한다.

1단계 좌변의 분모, 분자를 약분하여 간단히 하기

$$\frac{10^{998}}{10^{30}+10^{20}}=\frac{10^{998}}{10^{20}(10^{10}+1)}=\frac{10^{978}}{10^{10}+1}=a\times10^{n}$$

2단계 $\frac{10^{978}}{10^{11}}, \frac{10^{978}}{10^{10}+1}, \frac{10^{978}}{10^{10}}$의 대소 관계 비교하기

$10^{10}<10^{10}+1<10^{11}$에서

$\frac{10^{978}}{10^{11}}<\frac{10^{978}}{10^{10}+1}<\frac{10^{978}}{10^{10}}$이므로

$\frac{10^{978}}{10^{11}}<a\times10^{n}<\frac{10^{978}}{10^{10}}$

$10^{967}<a\times10^{n}<10^{968}$

3단계 n의 값 구하기

이때 $1<a<10$이므로 $n=967$이다.

단계	채점 기준	비율
❶	좌변의 분모, 분자를 약분하여 간단히 했다.	30 %
❷	$\frac{10^{978}}{10^{11}}, \frac{10^{978}}{10^{10}+1}, \frac{10^{978}}{10^{10}}$의 대소 관계를 비교했다.	40 %
❸	n의 값을 구했다.	30 %

09 답 64

$3(x+1)-2(y+2)=5$에서

$3x+3-2y-4=5$ $\quad\therefore 3x-2y=6$

$A=4^{2x+y}\times2^{x-3y}$

$=2^{2(2x+y)}\times2^{x-3y}$

$=2^{4x+2y}\times2^{x-3y}$

$=2^{(4x+2y)+(x-3y)}$

$=2^{5x-y}$

$B=\frac{8^{x}\times16^{y}}{2^{x+3y}}=\frac{2^{3x}\times2^{4y}}{2^{x+3y}}=2^{(3x+4y)-(x+3y)}=2^{2x+y}$

$\therefore \frac{A}{B}=\frac{2^{5x-y}}{2^{2x+y}}$

$=2^{(5x-y)-(2x+y)}$

$=2^{3x-2y}$

$=2^{6}=64$

10 답 ②

해결 key Point!

좌변의 식을 정리하여 어떤 자연수의 거듭제곱의 꼴로 만들어야 한다.

$6^{x+1}(2^{x+3}+2^{x+4})=(2\times3)^{x+1}(2^{x+3}+2\times2^{x+3})$

$=2^{x+1}\times3^{x+1}\times2^{x+3}\times(1+2)$

$=2^{2x+4}\times3^{x+2}$

$=2^{2(x+2)}\times3^{x+2}$

$=4^{x+2}\times3^{x+2}$

$=(4\times3)^{x+2}$

$=12^{x+2}$

즉, $12^{x+2}=a^{x+b}$이므로 $a=12$, $b=2$

$\therefore a+b=12+2=14$

11 답 4

$3^{x+4}+3^{x+3}+3^{x+2}+3^{x+1}+3^{x}=9801$에서

$3^{4}\times3^{x}+3^{3}\times3^{x}+3^{2}\times3^{x}+3\times3^{x}+3^{x}=9801$

$(3^{4}+3^{3}+3^{2}+3+1)\times3^{x}=9801$

$121\times3^{x}=9801$

$3^{x}=81=3^{4}$

$\therefore x=4$

12 답 $\frac{32}{27}$

$\frac{8^{4}+8^{4}}{3^{2}+3^{2}+3^{2}}\div\frac{4^{5}+4^{5}+4^{5}+4^{5}}{9^{4}+9^{4}+9^{4}}\times\frac{2^{4}+2^{4}+2^{4}}{27^{3}+27^{3}+27^{3}}$

$=\frac{2\times8^{4}}{3\times3^{2}}\div\frac{4\times4^{5}}{3\times9^{4}}\times\frac{3\times2^{4}}{3\times27^{3}}$

$=\frac{2\times(2^{3})^{4}}{3\times3^{2}}\times\frac{3\times(3^{2})^{4}}{2^{2}\times(2^{2})^{5}}\times\frac{3\times2^{4}}{3\times(3^{3})^{3}}$

$=\frac{2^{13}}{3^{3}}\times\frac{3^{9}}{2^{12}}\times\frac{2^{4}}{3^{9}}$

$=\frac{2^{5}}{3^{3}}=\frac{32}{27}$

13 답 $\frac{6a}{a^{2}+4}$

$a=2^{x+1}=2\times2^{x}$에서 $2^{x}=\frac{a}{2}$

$\therefore \frac{4^{x+1}-2^{2x}}{8^{x}+2^{x}}=\frac{4\times(2^{2})^{x}-2^{2x}}{2^{3x}+2^{x}}$

$=\frac{4\times(2^{x})^{2}-(2^{x})^{2}}{(2^{x})^{3}+2^{x}}=\frac{3\times(2^{x})^{2}}{(2^{x})^{3}+2^{x}}$

$=\frac{3\times\left(\frac{a}{2}\right)^{2}}{\left(\frac{a}{2}\right)^{3}+\frac{a}{2}}=\frac{\frac{3a^{2}}{4}}{\frac{a^{3}}{8}+\frac{a}{2}}$ ……(＊)

$=\frac{6a^{2}}{a^{3}+4a}=\frac{6a}{a^{2}+4}$

Level UP

$A=\frac{x}{z}+\frac{y}{z}$, $B=\frac{p}{r}+\frac{q}{r}$ (p, q, r, x, y, z는 0이 아닌 정수)일 때

$\frac{A}{B}=\dfrac{\frac{p}{r}+\frac{q}{r}}{\frac{x}{z}+\frac{y}{z}}$의 분모 분자에 각각 rz를 곱하면

$\dfrac{\left(\frac{p}{r}+\frac{q}{r}\right)\times rz}{\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)\times rz}=\dfrac{pz+qz}{rx+ry}$이므로 (*)에서

$\dfrac{\frac{3a^2}{4}\times 8}{\left(\frac{a^3}{8}+\frac{a}{2}\right)\times 8}=\dfrac{6a^2}{a^3+4a}$

14 답 $\dfrac{8ab+2a^3b+16b^2}{a^4+4a^2b}$

해결 key Point!

2^x, 5^x을 각각 a, b를 이용하여 나타낸 후 $\dfrac{15^x+60^x+75^x}{12^x+30^x}$에 대입해야 한다.

$a=2^{x+1}=2^x\times 2$에서

$2^x=\dfrac{a}{2}$ ······ ㉠

$b=10^x=(2\times 5)^x=2^x\times 5^x$에서 $b=\dfrac{a}{2}\times 5^x$

$\therefore\ 5^x=\dfrac{2b}{a}$ ······ ㉡

$$\frac{15^x+60^x+75^x}{12^x+30^x}=\frac{(3\times5)^x+(2^2\times3\times5)^x+(3\times5^2)^x}{(2^2\times3)^x+(2\times3\times5)^x}$$
$$=\frac{3^x\times5^x+(2^x)^2\times3^x\times5^x+3^x\times(5^x)^2}{(2^x)^2\times3^x+2^x\times3^x\times5^x}$$
$$=\frac{5^x+(2^x)^2\times5^x+(5^x)^2}{(2^x)^2+2^x\times5^x}$$

분자, 분모를 각각 3^x으로 나눈다.

위의 식에 ㉠, ㉡을 대입하면

$$\frac{5^x+(2^x)^2\times5^x+(5^x)^2}{(2^x)^2+2^x\times5^x}=\frac{\frac{2b}{a}+\left(\frac{a}{2}\right)^2\times\frac{2b}{a}+\left(\frac{2b}{a}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a}{2}\times\frac{2b}{a}}$$
$$=\frac{\frac{2b}{a}+\frac{ab}{2}+\frac{4b^2}{a^2}}{\frac{a^2}{4}+b}$$
$$=\frac{8ab+2a^3b+16b^2}{a^4+4a^2b}$$

분자, 분모에 각각 $4a^2$을 곱한다.

15 답 ④

해결 key Point!

$\left(\frac{81}{4}\right)^{a+3b}\times\left(\frac{4}{81}\right)^{-a+b}$을 변형하여 4^{a+b}, 9^{a+b}의 꼴을 만든다.

$$\left(\frac{81}{4}\right)^{a+3b}\times\left(\frac{4}{81}\right)^{-a+b}=\left(\frac{9^2}{4}\right)^{a+3b}\times\left(\frac{4}{9^2}\right)^{-a+b}$$
$$=\frac{9^{2(a+3b)}}{4^{a+3b}}\times\frac{4^{-a+b}}{9^{2(-a+b)}}$$
$$=\frac{9^{2a+6b}}{4^{a+3b}}\times\frac{4^{-a+b}}{9^{-2a+2b}}$$

이때 a, b는 자연수이고 $a<b$이므로

$2a+6b>-2a+2b$, $-a+b<a+3b$

$$\therefore\ \left(\frac{81}{4}\right)^{a+3b}\times\left(\frac{4}{81}\right)^{-a+b}=\frac{9^{2a+6b}}{4^{a+3b}}\times\frac{4^{-a+b}}{9^{-2a+2b}}$$
$$=\frac{9^{(2a+6b)-(-2a+2b)}}{4^{(a+3b)-(-a+b)}}$$
$$=\frac{9^{4a+4b}}{4^{2a+2b}}$$
$$=\frac{(9^{a+b})^4}{(4^{a+b})^2}$$
$$=\frac{q^4}{p^2}$$

16 답 ①

$x=y-3$이므로 $y>x$이고 $y-x=3$

$$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{7^{3x}}{343^y}=\frac{7^{3x}}{7^{3y}}$$
$$=\frac{1}{7^{3y-3x}}=\frac{1}{7^{3(y-x)}}$$
$$=\frac{1}{7^{3\times3}}=\frac{1}{7^9}$$

17 답 12

해결 key Point!

주어진 수를 $A\times10^n$ (A는 정수, n은 자연수)의 꼴로 변형한다.

1단계 주어진 수를 $2^a\times10^b$의 꼴로 변형하기

$$16^{x+1}\times5^3\div8^{x-1}=(2^4)^{x+1}\times5^3\div(2^3)^{x-1}$$
$$=2^{4x+4}\times5^3\div2^{3x-3}$$
$$=2^{(4x+4)-(3x-3)}\times5^3$$
$$=2^{x+7}\times5^3$$
$$=2^{x+4}\times(2\times5)^3$$
$$=2^{x+4}\times10^3$$

2단계 조건을 만족시키는 2의 거듭제곱 구하기

이때 $2^{x+4}\times10^3=2^{x+4}\times1000$이 여섯 자리 자연수이므로

2^{x+4}은 세 자리 자연수이어야 한다.

2의 거듭제곱 중 세 자리 자연수는

$2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$

3단계 조건을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합 구하기

즉, $x+4=7$ 또는 $x+4=8$ 또는 $x+4=9$이므로

$x=3$ 또는 $x=4$ 또는 $x=5$

따라서 모든 자연수 x의 값의 합은 $3+4+5=12$이다.

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 수를 $2^a \times 10^b$의 꼴로 변형했다.	40 %
❷	조건을 만족시키는 2의 거듭제곱을 구했다.	40 %
❸	모든 자연수 x의 값의 합을 구했다.	20 %

참고 $x=3$일 때, $2^{x+4}\times10^3=2^7\times10^3=128\times1000=128000$
$x=4$일 때, $2^{x+4}\times10^3=2^8\times10^3=256\times1000=256000$
$x=5$일 때, $2^{x+4}\times10^3=2^9\times10^3=512\times1000=512000$

18 답 16

해결 key Point!

조건 (가)에서 양변을 3의 거듭제곱의 꼴로 나타내어 지수를 비교해야 한다.

조건 (가)에서

$$\frac{27^{x+1}\times3^{2x}}{9^{x-2}}=\frac{(3^3)^{x+1}\times3^{2x}}{(3^2)^{x-2}}=\frac{3^{3x+3}\times3^{2x}}{3^{2x-4}}=\frac{3^{5x+3}}{3^{2x-4}}=3^{(5x+3)-(2x-4)}=3^{3x+7}$$

$81^{7-x}=(3^4)^{7-x}=3^{28-4x}$

즉, $3^{3x+7}=3^{28-4x}$이므로

$3x+7=28-4x$, $7x=21$ $\therefore x=3$

조건 (나)에서

$$2^{4x+1}\times3^{x-1}\times5^{4x-1}=2^{13}\times3^2\times5^{11}=2^2\times3^2\times(2\times5)^{11}=2^2\times3^2\times10^{11}=36\times10^{11}$$

즉, 36×10^{11}은 13자리의 자연수이므로 $y=13$이다.

$\therefore x+y=3+13=16$

19 답 214

해결 key Point!

주어진 식을 정리하여 $N=$(m자리의 수)$\times10^n$의 꼴로 표현하여 자리의 수와 최고 자리의 숫자를 구해야 한다.

$$N=(25^4+25^4)^3\times(8^5+8^5+8^5+8^5)^2\div(10^7+10^7)$$
$$=\frac{(25^4+25^4)^3\times(8^5+8^5+8^5+8^5)^2}{10^7+10^7}$$
$$=\frac{(2\times25^4)^3\times(4\times8^5)^2}{2\times10^7}$$
$$=\frac{\{2\times(5^2)^4\}^3\times\{2^2\times(2^3)^5\}^2}{2\times(2\times5)^7}$$
$$=\frac{(2\times5^8)^3\times(2^2\times2^{15})^2}{2\times2^7\times5^7}$$
$$=\frac{(2^3\times5^{24})\times(2^{17})^2}{2^8\times5^7}$$
$$=\frac{2^3\times5^{24}\times2^{34}}{2^8\times5^7}=\frac{2^{37}\times5^{24}}{2^8\times5^7}$$
$$=2^{29}\times5^{17}=2^{12}\times(2\times5)^{17}$$
$$=2^{12}\times10^{17}=4096\times10^{17}$$

따라서 N은 21자리의 수이고, 최고 자리의 숫자는 4이므로

$a=21$, $b=4$

$\therefore 10a+b=10\times21+4=214$

20 답 93

해결 key Point!

주어진 수를 $k\times\left(\frac{1}{10}\right)^n$ (k는 정수, n은 자연수)의 꼴로 바꿔야 한다.

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{198}\times(1.5)^{201}\times(0.4)^{205}\times\frac{1}{36}$$
$$=\left(\frac{5}{3}\right)^{198}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{201}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{205}\times\frac{1}{2^2\times3^2}$$
$$=\frac{5^{198}}{3^{198}}\times\frac{3^{201}}{2^{201}}\times\frac{2^{205}}{5^{205}}\times\frac{1}{2^2\times3^2}$$
$$=\frac{2^2\times3}{5^7}$$
$$=2^9\times3\times\frac{1}{2^7}\times\frac{1}{5^7}$$
$$=1536\times\left(\frac{1}{10}\right)^7$$

즉, 소수점 아래 4번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수 1이 나오고, 소수점 아래 0을 제외한 모든 숫자는 1, 5, 3, 6이다.

따라서 $n=4$, $m=1$, $a=1\times5\times3\times6=90$이므로

$a+n-m=90+4-1=93$

Level UP

m자리의 수 A에 대하여 $A\times\left(\frac{1}{10}\right)^n$은 소수점 아래 $(n-m+1)$번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나온다. 즉,

$$1536\times\left(\frac{1}{10}\right)^7=1536\times0.0000001=0.0001536$$

는 소수점 아래 4번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나온다.

21 답 13분

해결 key Point!

주어진 값의 단위를 맞춘 후 계산해야 한다.

2.34×10^{11} (m)$=2.34\times10^8$ (km)이므로 태양의 빛이 화성에 도달하는 데 걸리는 시간은

$$\frac{2.34\times10^8}{3.0\times10^5}=0.78\times10^3=780(\text{초})$$

따라서 태양의 빛이 화성에 도달하는 데 $\frac{780}{60}=13$(분) 걸린다.

22 답 ③

해결 key Point!

$x:y:z=1:3:2$이므로 $x=k$, $y=3k$, $z=2k$ (k는 자연수)라 하고 이를 주어진 식에 대입한다.

$$\left(\frac{1}{2}xyz^3\right)^2 \div \frac{x^2}{8} \div (2x)^2yz^5 = \frac{1}{4}x^2y^2z^6 \times \frac{8}{x^2} \times \frac{1}{4x^2yz^5}$$
$$= \frac{yz}{2x^2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $x:y:z=1:3:2$이므로

$x=k$, $y=3k$, $z=2k$ (k는 자연수)라 하고 ㉠에 대입하면

$$\frac{yz}{2x^2} = \frac{3k \times 2k}{2k^2} = 3$$

23 답 1029

1단계 x, y, z를 n에 대한 식으로 나타내기

$\langle 4n, x\rangle = 3$에서 $x=(4n)^3=64n^3$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\langle 8n^2, 2y\rangle = 2$에서 $2y=(8n^2)^2=64n^4$

$\therefore y=32n^4$ $\cdots\cdots$ ㉡

$\left\langle n, \frac{z}{2}\right\rangle = 2$에서 $\frac{z}{2}=n^2$

$\therefore z=2n^2$ $\cdots\cdots$ ㉢

2단계 $\frac{xy}{z}$에 **1단계**에서 구한 식 대입하여 n에 대한 식으로 나타내기

$\frac{xy}{z}$에 ㉠, ㉡, ㉢을 대입하면

$$\frac{xy}{z} = \frac{64n^3 \times 32n^4}{2n^2} = 1024n^5$$

3단계 $p+q$의 값 구하기

따라서 $p=1024$, $q=5$이므로

$p+q=1024+5=1029$

단계	채점 기준	비율
❶	x, y, z를 n에 대한 식으로 나타냈다.	40 %
❷	$\frac{xy}{z}$를 n에 대한 식으로 나타냈다.	40 %
❸	$p+q$의 값을 구했다.	20 %

24 답 ④

해결 key Point!

주어진 식을 정리한 후에 수를 대입해야 편리하다.

$$\left(\frac{2x^2}{y^3}\right)^3 \div (-3x^3z)^2 \times \frac{y^7z^6}{4x^3} = \frac{8x^6}{y^9} \div 9x^6z^2 \times \frac{y^7z^6}{4x^3}$$
$$= \frac{8x^6}{y^9} \times \frac{1}{9x^6z^2} \times \frac{y^7z^6}{4x^3}$$
$$= \frac{2z^4}{9x^3y^2}$$
$$= \frac{2 \times 18}{9 \times 4 \times \frac{1}{8}}$$
$$=8$$

25 답 125

해결 key Point!

① $A \div \square \times B = C \Rightarrow A \times \frac{1}{\square} \times B = C \Rightarrow \square = A \times B \times \frac{1}{C}$

② $A \times \square \div B = C \Rightarrow A \times \square \times \frac{1}{B} = C \Rightarrow \square = \frac{1}{A} \times B \times C$

$(-3ab^2)^2 \div A \times (5a^2b)^3 = 45a^6b^5$에서

$A=(-3ab^2)^2 \times (5a^2b)^3 \div 45a^6b^5$

$\quad = 9a^2b^4 \times 125a^6b^3 \times \frac{1}{45a^6b^5}$

$\quad = 25a^2b^2$

$\frac{25a^6}{b^3} \times B \div \left(-\frac{5a^2}{b}\right)^3 = ab^4$에서

$B = ab^4 \times \left(-\frac{5a^2}{b}\right)^3 \div \frac{25a^6}{b^3}$

$\quad = ab^4 \times \left(-\frac{125a^6}{b^3}\right) \times \frac{b^3}{25a^6}$

$\quad = -5ab^4$

$\therefore AB = 25a^2b^2 \times (-5ab^4)$

$\quad = -125a^3b^6 = -125(ab^2)^3$

$\quad = -125 \times (-1)^3$

$\quad = 125$

26 답 ④

ㄱ. $L(5^m \times 5^n) = L(5^{m+n}) = m+n$,

$L(5^m)+L(5^n)=m+n$이므로

$L(5^m \times 5^n) = L(5^m)+L(5^n)$

ㄴ. $L(5^m \div 5^n) = L(5^{m-n}) = m-n$,

$L(5^m)+L(5^n)=m+n$이므로

$L(5^m \div 5^n) \neq L(5^m)+L(5^n)$

ㄷ. $L(5^{mn})=mn$, $L(5^m) \times n = mn$이므로

$L(5^{mn}) = L(5^m) \times n$

ㄹ. $L(K)=4$이면 $K=5^4=625$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

27 답 $\frac{b}{2}$배

1단계 P를 a, b를 사용한 식으로 나타내기

$P = \pi \times (2ab^2)^2 \times 4ab$

$\quad = \pi \times 4a^2b^4 \times 4ab$

$\quad = 16\pi a^3b^5$

2단계 Q를 a, b를 사용한 식으로 나타내기

$Q = \pi \times (4ab)^2 \times 2ab^2$

$\quad = \pi \times 16a^2b^2 \times 2ab^2$

$\quad = 32\pi a^3b^4$

3단계 P는 Q의 몇 배인지 구하기

따라서 $\frac{P}{Q} = \frac{16\pi a^3b^5}{32\pi a^3b^4} = \frac{b}{2}$이므로 P는 Q의 $\frac{b}{2}$배이다.

단계	채점 기준	비율
❶	P를 a, b를 사용한 식으로 나타냈다.	40 %
❷	Q를 a, b를 사용한 식으로 나타냈다.	40 %
❸	P는 Q의 몇 배인지 구했다.	20 %

참고 어떤 직선을 회전축으로 하여 1회전시킬 때 생기는 회전체의 높이는 회전축 위에 있는 선분의 길이이다.

① $\overline{AB}$를 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 회전체

⇨ 반지름의 길이가 $2ab^2$, 높이가 $4ab$인 원기둥

② $\overline{AD}$를 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 회전체

⇨ 반지름의 길이가 $4ab$, 높이가 $2ab^2$인 원기둥

28 답 $\frac{1}{2}$배

원기둥의 부피를 V_1이라고 하면

$$V_1=\pi\times\left(\frac{1}{2}\times6a^3b\right)^2\times\frac{1}{2}ab^4$$
$$=\pi\times9a^6b^2\times\frac{1}{2}ab^4$$
$$=\frac{9}{2}\pi a^7b^6$$

원뿔의 부피를 V_2라고 하면

$$V_2=\frac{1}{3}\times\pi\times(3ab^2)^2\times3a^5b^2$$
$$=\frac{1}{3}\times\pi\times9a^2b^4\times3a^5b^2$$
$$=9\pi a^7b^6$$

따라서 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{9}{2}\pi a^7b^6}{9\pi a^7b^6}=\frac{1}{2}$이므로 원기둥의 부피는 원뿔의 부피의 $\frac{1}{2}$배이다.

29 답 $4b^3$

(직사각형의 넓이)$=4a^2b^2\times5ab^2=20a^3b^4$

(삼각형의 넓이)$=\frac{1}{2}\times8a^3b\times h=4a^3bh$

이때 직사각형과 삼각형의 넓이의 비가 $5:4$이므로

$20a^3b^4:4a^3bh=5:4$, $80a^3b^4=20a^3bh$

$\therefore\ h=\frac{80a^3b^4}{20a^3b}=4b^3$

30 답 $36x^2y$개

원기둥의 부피를 V_1이라고 하면

$$V_1=\pi\times(2x^2y)^2\times\frac{3xy^2}{2}$$
$$=\pi\times4x^4y^2\times\frac{3xy^2}{2}$$
$$=6\pi x^5y^4$$

구의 부피를 V_2라고 하면

$$V_2=\frac{4}{3}\times\pi\times\left(\frac{xy}{2}\right)^3$$
$$=\frac{4}{3}\times\pi\times\frac{x^3y^3}{8}$$
$$=\frac{\pi x^3y^3}{6}$$

따라서 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{6\pi x^5y^4}{\frac{\pi x^3y^3}{6}}=36x^2y$이므로 만들 수 있는 구의 개수는 $36x^2y$이다.

03 다항식의 계산

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

26쪽～27쪽

01 ①	02 ④	03 $-3x^2+6x-13$		04 ①
05 27	06 ②	07 ③	08 ③	09 ②
10 ②	11 ③	12 ④		

01 답 ①

$(8x-4y+6)-a(-2x+y+5)$

$=8x-4y+6+2ax-ay-5a$

$=(8+2a)x+(-4-a)y+6-5a$

이때 x의 계수와 y의 계수가 서로 같으므로

$8+2a=-4-a$, $3a=-12$

$\therefore\ a=-4$

02 답 ④

$5x+9y-\{2x-3(2x-3y)-8y\}$

$=5x+9y-(2x-6x+9y-8y)$

$=5x+9y-(-4x+y)$

$=5x+9y+4x-y$

$=9x+8y$

즉, $9x+8y=ax+by$이므로

$a=9$, $b=8$

$\therefore\ a+b=9+8=17$

03 답 $-3x^2+6x-13$

1단계 A 구하기

조건 (가)에서 $A+(4x^2+3x-1)=2x^2+5x-4$이므로

$A=2x^2+5x-4-(4x^2+3x-1)$

$=2x^2+5x-4-4x^2-3x+1$

$=-2x^2+2x-3$

2단계 B 구하기

조건 (나)에서 $A-(-x^2-2x+7)=B$이므로

$B=-2x^2+2x-3-(-x^2-2x+7)$

$=-2x^2+2x-3+x^2+2x-7$

$=-x^2+4x-10$

3단계 $A+B$ 구하기

$\therefore A+B=-2x^2+2x-3+(-x^2+4x-10)$

$=-3x^2+6x-13$

단계	채점 기준	비율
❶	A를 구했다.	40 %
❷	B를 구했다.	40 %
❸	$A+B$를 구했다.	20 %

04 답 ①

$(2x^2-5x+3)-(ax^2+bx+c)=-x^2+7x-4$이므로

$ax^2+bx+c=2x^2-5x+3-(-x^2+7x-4)$

$=2x^2-5x+3+x^2-7x+4$

$=3x^2-12x+7$

$\therefore a=3,\ b=-12,\ c=7$

바르게 계산한 결과의 식은

$(2x^2-5x+3)+(3x^2-12x+7)=5x^2-17x+10$

$\therefore d=5,\ e=-17,\ f=10$

$\therefore a-b+c-d+e-f$

$=3-(-12)+7-5+(-17)-10$

$=3+12+7-5-17-10$

$=-10$

05 답 27

$B+(6x^2+7xy-4y^2)+(10x^2+15xy-8y^2)$

$=18x^2+21xy-12y^2$

이므로

$B+(16x^2+22xy-12y^2)=18x^2+21xy-12y^2$

$\therefore B=18x^2+21xy-12y^2-(16x^2+22xy-12y^2)$

$=18x^2+21xy-12y^2-16x^2-22xy+12y^2$

$=2x^2-xy$

$A+B+(7x^2+9xy-5y^2)=18x^2+21xy-12y^2$이므로

$A+(2x^2-xy)+(7x^2+9xy-5y^2)=18x^2+21xy-12y^2$

$A+(9x^2+8xy-5y^2)=18x^2+21xy-12y^2$

$\therefore A=18x^2+21xy-12y^2-(9x^2+8xy-5y^2)$

$=18x^2+21xy-12y^2-9x^2-8xy+5y^2$

$=9x^2+13xy-7y^2$

따라서

$2A-3B=2(9x^2+13xy-7y^2)-3(2x^2-xy)$

$=18x^2+26xy-14y^2-6x^2+3xy$

$=12x^2+29xy-14y^2$

이므로 $a=12,\ b=29,\ c=-14$

$\therefore a+b+c=12+29+(-14)=27$

06 답 ②

$\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}y-\frac{9}{8}xy\right)\times 8xy=2x^2y+12xy^2-9x^2y^2$

에서 xy^2의 계수는 12이므로 $a=12$

$\left(\frac{5}{6}x^4y^2-\frac{4}{3}x^3y-\frac{2}{3}x^3y^3\right)\div\left(-\frac{4}{9}x^2y\right)$

$=\left(\frac{5}{6}x^4y^2-\frac{4}{3}x^3y-\frac{2}{3}x^3y^3\right)\times\left(-\frac{9}{4x^2y}\right)$

$=-\frac{15}{8}x^2y+3x+\frac{3}{2}xy^2$

에서 x^2y의 계수는 $-\frac{15}{8}$이므로 $b=-\frac{15}{8}$

$\therefore ab=12\times\left(-\frac{15}{8}\right)=-\frac{45}{2}$

07 답 ③

해결 key Point!

주어진 식을 먼저 간단히 한다.

$\frac{3x^2y^3-x^3y}{xy}+(2xy-3y)\times(-3xy)$

$=3xy^2-x^2-6x^2y^2+9xy^2$

$=12xy^2-x^2-6x^2y^2$

$=12\times 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2^2-6\times 2^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

$=6-4-6$

$=-4$

08 답 ③

직사각형 ABCD의 넓이는

$6a\times 4b=24ab$

$\overline{BE}=6a-2b,\ \overline{CF}=4b-a$이므로

$\triangle ABE=\frac{1}{2}\times\overline{BE}\times\overline{AB}$

$=\frac{1}{2}\times(6a-2b)\times 4b$

$=12ab-4b^2$

$\triangle ECF=\frac{1}{2}\times\overline{EC}\times\overline{CF}$

$=\frac{1}{2}\times 2b\times(4b-a)$

$=4b^2-ab$

$\triangle AFD=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{DF}$

$=\frac{1}{2}\times 6a\times a$

$=3a^2$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

(직사각형 ABCD의 넓이)$-$($\triangle$ABE$+\triangle$ECF$+\triangle$AFD)

$=24ab-\{(12ab-4b^2)+(4b^2-ab)+3a^2\}$

$=24ab-(11ab+3a^2)$

$=24ab-11ab-3a^2$

$=13ab-3a^2$

09 답 ②

다항식 A를 $-4xy^3$으로 나눈 몫은 $7x^2y-3xy$이고 나머지는 $2x^3y$이므로

$A=-4xy^3\times(7x^2y-3xy)+2x^3y$

$\quad=-28x^3y^4+12x^2y^4+2x^3y$

$\therefore \dfrac{A}{2x^2y}=\dfrac{-28x^3y^4+12x^2y^4+2x^3y}{2x^2y}$

$\quad=-14xy^3+6y^3+x$

참고 어떤 수 a를 b로 나눈 몫이 q이고 나머지가 r이면 $a=b\times q+r$이다.

10 답 ②

$(3A-2B)-2(A-2B)$

$=3A-2B-2A+4B$

$=A+2B$

$=(-5x-4y+1)+2(3x+5y-2)$

$=-5x-4y+1+6x+10y-4$

$=x+6y-3$

11 답 ③

$\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{1}{2}$에서

$2(x+y)=x-y,\ 2x+2y=x-y$

$\therefore x=-3y$

$\therefore \dfrac{3x+7y}{x-5y}=\dfrac{-9y+7y}{-3y-5y}=\dfrac{-2y}{-8y}=\dfrac{1}{4}$

12 답 ④

$(3x+2y):(7x+3y)=3:5$에서

$5(3x+2y)=3(7x+3y)$

$15x+10y=21x+9y$

$\therefore y=6x$

$\therefore 8x-\{6x-11-2(x+2y)\}$

$\quad=8x-(6x-11-2x-4y)$

$\quad=8x-(4x-11-4y)$

$\quad=8x-4x+11+4y$

$\quad=4x+11+24x$

$\quad=28x+11$

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

28쪽~31쪽

01 $-\frac{11}{19}$	**02** $5x^2+2x+4$		**03** x^2-x+1	
04 $22a^2-3a+10$		**05** ④	**06** -6	**07** ②
08 5	**09** ①	**10** ⑤	**11** $\frac{3}{2}x-\frac{19}{10}y$	
12 ③	**13** 25	**14** $3-\frac{2}{a}$	**15** 9	**16** -21
17 ②	**18** 8	**19** -6	**20** $\frac{8}{15}$	**21** $\frac{72}{5}$
22 547	**23** $\frac{4}{3}$	**24** ①		

01 답 $-\dfrac{11}{19}$

해결 key Point!

등식의 좌변의 식을 A, B, C에 대하여 정리한 후 A, B, C에 각각의 다항식을 대입해야 한다.

1단계 좌변의 식 정리하기

$2A-\{B-(3A-2C)+4C\}+3B$

$=2A-(B-3A+2C+4C)+3B$

$=2A-(-3A+B+6C)+3B$

$=2A+3A-B-6C+3B$

$=5A+2B-6C \quad \cdots\cdots$ ㉠

2단계 A, B, C에 x에 대한 식을 대입하여 정리하기

㉠의 A, B, C에 각각의 다항식을 대입하면

$5A+2B-6C$

$=5(3x^2+2x-1)+2(-x^2+5x)-6(x^2-3x+4)$

$=15x^2+10x-5-2x^2+10x-6x^2+18x-24$

$=7x^2+38x-29$

3단계 $a+b+c$의 값 구하기

즉, $7x^2+38x-29=ax^2+bx+c$이므로

$a=7,\ b=38,\ c=-29$

$\therefore \dfrac{a+c}{b}=\dfrac{7+(-29)}{38}=\dfrac{-22}{38}=-\dfrac{11}{19}$

단계	채점 기준	비율
❶	좌변의 식을 정리했다.	30 %
❷	A, B, C에 x에 대한 식을 대입하여 정리했다.	40 %
❸	$a+b+c$의 값을 구했다.	30 %

02 답 $5x^2+2x+4$

첫 번째 세로줄에서

㉠$+(3x^2+5x-1)=-x^2+2x-4$이므로

㉠$=-x^2+2x-4-(3x^2+5x-1)$

$\quad=-x^2+2x-4-3x^2-5x+1$

$\quad=-4x^2-3x-3$

첫 번째 가로줄에서

㉠$-$㉡$=2x^2-3x+5$이므로

$(-4x^2-3x-3)-$㉡$=2x^2-3x+5$

$\therefore$ ㉡$=-4x^2-3x-3-(2x^2-3x+5)$

$=-4x^2-3x-3-2x^2+3x-5$

$=-6x^2-8$

두 번째 세로줄에서

㉡$+$㉢$=-2x^2-7x+3$이므로

$(-6x^2-8)+$㉢$=-2x^2-7x+3$

$\therefore$ ㉢$=-2x^2-7x+3-(-6x^2-8)$

$=-2x^2-7x+3+6x^2+8$

$=4x^2-7x+11$

세 번째 가로줄에서

$(-x^2+2x-4)-(-2x^2-7x+3)=$㉤이므로

㉤$=-x^2+2x-4+2x^2+7x-3$

$=x^2+9x-7$

$\therefore$ ㉢$+$㉤$=(4x^2-7x+11)+(x^2+9x-7)$

$=5x^2+2x+4$

03 답 x^2-x+1

도서관에서 집까지의 거리는

(도서관에서 학교까지의 거리)$-$(집에서 학교까지의 거리)

$=(4x^2-5x+8)-(3x^2+3)$

$=4x^2-5x+8-3x^2-3$

$=x^2-5x+5$

집에서 학원까지의 거리는

(도서관에서 학원까지의 거리)$-$(도서관에서 집까지의 거리)

$=(3x^2-8x+9)-(x^2-5x+5)$

$=3x^2-8x+9-x^2+5x-5$

$=2x^2-3x+4$

따라서 집에서 편의점까지의 거리는

(집에서 학원까지의 거리)$-$(편의점에서 학원까지의 거리)

$=(2x^2-3x+4)-(x^2-2x+3)$

$=2x^2-3x+4-x^2+2x-3$

$=x^2-x+1$

참고 집에서 편의점까지의 거리를 구할 수 있는 방법은 다양하므로 적절히 선택하여 계산하면 된다.

04 답 $22a^2-3a+10$

해결 key Point!

$\overline{AB}=4\overline{BC}$임을 이용하여 $\overline{BC}$의 길이를 구한다.

$\overline{AB}=4\overline{BC}$에서 $\overline{BC}=\frac{1}{4}\overline{AB}=\frac{1}{4}(12a^2+8)=3a^2+2$

$\therefore \overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$

$=(12a^2+8)+(3a^2+2)+(7a^2-3a)$

$=22a^2-3a+10$

다른 풀이

$\overline{BC}=\frac{1}{4}\overline{AB}$이므로

$\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$

$=\overline{AB}+\frac{1}{4}\overline{AB}+\overline{CD}$

$=\frac{5}{4}\overline{AB}+\overline{CD}$

$=\frac{5}{4}(12a^2+8)+(7a^2-3a)$

$=15a^2+10+7a^2-3a$

$=22a^2-3a+10$

05 답 ④

해결 key Point!

주어진 식의 좌변을 간단히 한 후, $\boxed{}$를 구한다.

$6x-[4y-x-\{-3x-(\boxed{}+y)\}]$

$=6x-\{4y-x-(-3x-\boxed{}-y)\}$

$=6x-(4y-x+3x+\boxed{}+y)$

$=6x-(2x+5y+\boxed{})$

$=6x-2x-5y-\boxed{}$

$=4x-5y-\boxed{}$

이므로

$4x-5y-\boxed{}=5x-7y$

$\therefore \boxed{}=(4x-5y)-(5x-7y)$

$=4x-5y-5x+7y$

$=-x+2y$

06 답 -6

어떤 식을 A라고 하면

$3x+2y-z-A=-5x+5y+3z+9$

$\therefore A=(3x+2y-z)-(-5x+5y+3z+9)$

$=3x+2y-z+5x-5y-3z-9$

$=8x-3y-4z-9$

따라서 바르게 계산한 식은

$(8x-3y-4z-9)-(4x-3y+2z-5)$

$=8x-3y-4z-9-4x+3y-2z+5$

$=4x-6z-4$

즉, $a=4$, $b=0$, $c=-6$, $d=-4$이므로

$a+b+c+d=4+0+(-6)+(-4)=-6$

07 답 ②

$(3x+2,\ 4y)\otimes(2y,\ x-5)=(3x+2)\times 2y+4y\times(x-5)$

$=6xy+4y+4xy-20y$

$=10xy-16y$

$(8xy,\ x+1)\otimes(-2,\ 3y)=8xy\times(-2)+(x+1)\times 3y$
$=-16xy+3xy+3y$
$=-13xy+3y$
$\therefore\ (3x+2,\ 4y)\otimes(2y,\ x-5)+(8xy,\ x+1)\otimes(-2,\ 3y)$
$=(10xy-16y)+(-13xy+3y)$
$=-3xy-13y$

08 답 5

$4x\left(3x-\frac{5}{2}y\right)-\left\{(6x^3y^2-3x^2y^3)\div\frac{3}{2}xy-5x^2y\right\}\div y$
$=4x\left(3x-\frac{5}{2}y\right)-\left\{(6x^3y^2-3x^2y^3)\times\frac{2}{3xy}-5x^2y\right\}\times\frac{1}{y}$
$=12x^2-10xy-\{(4x^2y-2xy^2)-5x^2y\}\times\frac{1}{y}$
$=12x^2-10xy-(-x^2y-2xy^2)\times\frac{1}{y}$
$=12x^2-10xy+x^2+2xy$
$=13x^2-8xy$
따라서 $a=13,\ b=-8$이므로
$a+b=13+(-8)=5$

09 답 ①

해결 key Point!
A, B를 간단히 한 후, C가 있는 식에 A, B를 대입해야 한다.

$A=12x^2y^3(x-2y)\div(2xy)^2$
$=12x^2y^3(x-2y)\div 4x^2y^2$
$=12x^2y^3(x-2y)\times\frac{1}{4x^2y^2}$
$=3y(x-2y)$
$=3xy-6y^2$
$B=3y(2x^2-3y+xy)$
$=6x^2y-9y^2+3xy^2$
$A-(B-C)=3x^2y+xy^2$에서
$A-B+C=3x^2y+xy^2$
$\therefore\ C=(3x^2y+xy^2)-A+B$
$=(3x^2y+xy^2)-(3xy-6y^2)+(6x^2y-9y^2+3xy^2)$
$=3x^2y+xy^2-3xy+6y^2+6x^2y-9y^2+3xy^2$
$=9x^2y+4xy^2-3xy-3y^2$

10 답 ⑤

$(-1)^{2n+3}=-1,\ (-1)^{2n}=1,\ (-1)^{2n-1}=-1$이므로
$(-1)^{2n+3}(-2x+5y)-(-1)^{2n}(7x-y)$
$+(-1)^{2n-1}(-3x-6y)$
$=-(-2x+5y)-(7x-y)-(-3x-6y)$
$=2x-5y-7x+y+3x+6y$
$=-2x+2y$

11 답 $\frac{3}{2}x-\frac{19}{10}y$

해결 key Point!
$A-\square=B$의 꼴은 $\square=A-B$로 계산해야 한다.

$0.\dot{6}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3},\ 0.1\dot{3}=\frac{13-1}{90}=\frac{2}{15},\ 0.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$이므로
$(0.\dot{6}x^2y-0.1\dot{3}xy^2)\div 0.\dot{3}xy-\square=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y$에서
$\left(\frac{2}{3}x^2y-\frac{2}{15}xy^2\right)\div\frac{1}{3}xy-\square=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y$
$\left(\frac{2}{3}x^2y-\frac{2}{15}xy^2\right)\times\frac{3}{xy}-\square=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y$
$2x-\frac{2}{5}y-\square=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y$
$\therefore\ \square=\left(2x-\frac{2}{5}y\right)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y\right)$
$=2x-\frac{2}{5}y-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y$
$=\frac{3}{2}x-\frac{19}{10}y$

12 답 ③

(사다리꼴의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(2x^2y+6xy^2)\times 3x^2y^2$
$=3x^4y^3+9x^3y^4$
(마름모의 넓이)$=\frac{1}{2}\times 3xy\times 2x^2y^2=3x^3y^3$
$\therefore$ (사다리꼴의 넓이)$\div$(마름모의 넓이)
$=(3x^4y^3+9x^3y^4)\div 3x^3y^3$
$=(3x^4y^3+9x^3y^4)\times\frac{1}{3x^3y^3}$
$=x+3y$
따라서 사다리꼴의 넓이는 마름모의 넓이의 $(x+3y)$배이다.

13 답 25

해결 key Point!
거실의 넓이는 집 전체의 넓이에서 방 2개, 욕실, 현관, 주방의 넓이를 빼면 된다.

1단계 집 전체의 넓이 구하기
집 전체의 넓이는
$(6a+4)\times 5a=30a^2+20a$
2단계 주방의 세로의 길이와 욕실의 가로의 길이 구하기
주방의 세로의 길이는
$5a-(2a+a)=5a-3a=2a$
욕실의 가로의 길이는

$6a+4-\{(2a+1)+(3a+2)\}=6a+4-(5a+3)$
$=6a+4-5a-3$
$=a+1$

3단계 방 2개, 욕실, 현관, 주방의 넓이의 합 구하기

가로의 길이가 $2a+1$인 방의 넓이는
$(2a+1)\times 2a=4a^2+2a$
가로의 길이가 $3a+2$인 방의 넓이는
$(3a+2)\times 2a=6a^2+4a$
욕실의 넓이는 $(a+1)\times a=a^2+a$
현관의 넓이는 $a\times a=a^2$
주방의 넓이는 $(2a+1)\times 2a=4a^2+2a$
따라서 방 2개, 욕실, 현관, 주방의 넓이의 합은
$(4a^2+2a)+(6a^2+4a)+(a^2+a)+a^2+(4a^2+2a)$
$=16a^2+9a$

4단계 거실의 넓이를 구하여 $p+q+r$의 값 구하기

거실의 넓이는 집 전체의 넓이에서 방 2개, 욕실, 현관, 주방의 넓이의 합을 빼면 되므로
$(30a^2+20a)-(16a^2+9a)=30a^2+20a-16a^2-9a$
$=14a^2+11a$
따라서 $p=14$, $q=11$, $r=0$이므로
$p+q+r=14+11+0=25$

단계	채점 기준	비율
❶	집 전체의 넓이를 구했다.	20 %
❷	주방의 세로의 길이와 욕실의 가로의 길이를 구했다.	20 %
❸	방 2개, 욕실, 현관, 주방의 넓이의 합을 구했다.	30 %
❹	거실의 넓이를 구하여 $p+q+r$의 값을 구했다.	30 %

14 답 $3-\frac{2}{a}$

큰 원기둥의 부피는
$2^2\times\pi\times(a+2b)=(4a+8b)\pi$
작은 원기둥의 높이를 h라고 하면 작은 원기둥의 부피는
$a^2\times\pi\times h=a^2h\pi$
두 원기둥의 부피의 합이 $(3a^2+2a+8b)\pi$이므로
$(4a+8b)\pi+a^2h\pi=(3a^2+2a+8b)\pi$
$4a+8b+a^2h=3a^2+2a+8b$
$a^2h=3a^2+2a+8b-(4a+8b)$
$=3a^2+2a+8b-4a-8b$
$=3a^2-2a$
$\therefore h=\frac{3a^2-2a}{a^2}=3-\frac{2}{a}$

15 답 9

해결 key Point!
주어진 등식의 좌변을 간단히 한 후, x, z의 값을 대입해야 한다.

$\frac{6x^2y^2+9xy^2}{3xy}-2x(y-4z)=2xy+3y-2xy+8xz$
$=3y+8xz$
즉, $3y+8xz=75$이므로 이 식에 $x=2$, $z=3$을 대입하면
$3y+8\times 2\times 3=75$, $3y+48=75$
$3y=27$ $\quad\therefore y=9$

16 답 -21

해결 key Point!
$\frac{25^x\times 5^{3y}}{5^{x+y}}=625$에서 y를 x에 대한 식으로 나타낸 후, $4(y-x)+3(2x+y)$에 대입해야 한다.

$\frac{25^x\times 5^{3y}}{5^{x+y}}=625$에서
$\frac{(5^2)^x\times 5^{3y}}{5^{x+y}}=5^4$, $\frac{5^{2x+3y}}{5^{x+y}}=5^4$
$5^{(2x+3y)-(x+y)}=5^4$, $5^{x+2y}=5^4$
$x+2y=4$, $2y=4-x$
$\therefore y=\frac{4-x}{2}$
$\therefore 4(y-x)+3(2x+y)=4y-4x+6x+3y$
$=2x+7y$
$=2x+7\times\frac{4-x}{2}$
$=2x+14-\frac{7}{2}x$
$=-\frac{3}{2}x+14$
따라서 $a=-\frac{3}{2}$, $b=14$이므로
$ab=-\frac{3}{2}\times 14=-21$

17 답 ②

해결 key Point!
$4^x\times 8\times 8^y=2$의 지수를 정리하여 x, y 사이의 관계식을 찾아야 한다.

$4^x\times 8\times 8^y=2$에서
$2^{2x}\times 2^3\times 2^{3y}=2$, $2^{2x+3y+3}=2^1$
$2x+3y+3=1$ $\quad\therefore 2x+3y=-2$
$\therefore 3A-2B=3(2x+y-1)-2\left(x-\frac{3}{2}y-3\right)$
$=6x+3y-3-2x+3y+6$
$=4x+6y+3$
$=2(2x+3y)+3$
$=2\times(-2)+3$
$=-1$

18 답 8

해결 key Point!

$9x-\{x-(4x-12y)-4y\}=28x$이고, 이 식에서 y를 x에 대한 식으로 나타낸 후, $\frac{8x+ay}{8x-ay}=-\frac{1}{3}$에 대입해야 한다.

$$9x-\{x-(4x-12y)-4y\}=9x-(x-4x+12y-4y)$$
$$=9x-(-3x+8y)$$
$$=9x+3x-8y$$
$$=12x-8y$$

즉, $12x-8y=28x$이므로

$-8y=16x \qquad \therefore y=-2x$

$y=-2x$를 $\frac{8x+ay}{8x-ay}=-\frac{1}{3}$에 대입하면

$\frac{8x+a\times(-2x)}{8x-a\times(-2x)}=-\frac{1}{3}$, $\frac{8-2a}{8+2a}=-\frac{1}{3}$

$3(8-2a)=-(8+2a)$, $24-6a=-8-2a$

$4a=32 \qquad \therefore a=8$

꿀 한줄평

구하는 값은 a이므로 a가 없는 식에서 한 문자에 대하여 정리하여 만든 관계식을 a가 포함된 식에 대입해서 a의 값을 구해야 한다. 이때 대입한 식의 분자, 분모에 같은 문자가 있어 문자가 전부 약분됨을 확인한다.

19 답 -6

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=6$에서

$\frac{b-a}{ab}=6$, $b-a=6ab$

$\therefore a-b=-6ab$

$a-b=-6ab$를 $\frac{a+kab-b}{a+2ab-b}=\frac{a-b+kab}{a-b+2ab}=3$에 대입하면

$\frac{-6ab+kab}{-6ab+2ab}=3$, $\frac{ab(-6+k)}{-4ab}=3$

$\frac{-6+k}{-4}=3$, $-6+k=-12$

$\therefore k=-6$

20 답 $\frac{8}{15}$

해결 key Point!

$\frac{x+y}{x-y}=\frac{3}{2}$을 한 문자에 대하여 정리한 식을 $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+xy}$에 대입해야 한다.

$\frac{x+y}{x-y}=\frac{3}{2}$에서 $2(x+y)=3(x-y)$

$2x+2y=3x-3y \qquad \therefore x=5y$

$x=5y$를 $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+xy}$에 대입하면

$$\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+xy}=\frac{(5y)^2-2\times5y\times y+y^2}{(5y)^2+5y\times y}$$
$$=\frac{25y^2-10y^2+y^2}{25y^2+5y^2}$$
$$=\frac{16y^2}{30y^2}=\frac{8}{15}$$

21 답 $\frac{72}{5}$

해결 key Point!

주어진 조건을 모두 한 문자에 대하여 정리해야 한다.

1단계 주어진 두 비례식을 각각 y에 대하여 나타내기

$x:y=3:1$이므로

$x=3y$

$y:z=2:5$이므로

$5y=2z \qquad \therefore z=\frac{5}{2}y$

2단계 주어진 식 간단히 하기

$\left(\frac{3}{4}xy^2z^2-\frac{2}{3}x^2y^2z+\frac{5}{12}x^2yz^2\right)\div\frac{1}{12}xy^2z^2$

$=\left(\frac{3}{4}xy^2z^2-\frac{2}{3}x^2y^2z+\frac{5}{12}x^2yz^2\right)\times\frac{12}{xy^2z^2}$

$=9-\frac{8x}{z}+\frac{5x}{y} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

3단계 **1단계**에서 구한 식을 **2단계**에서 간단히 한 식에 대입하여 식의 값 구하기

따라서 $x=3y$, $z=\frac{5}{2}y$를 ㉠에 대입하면

$$9-\frac{8x}{z}+\frac{5x}{y}=9-\frac{8\times3y}{\frac{5}{2}y}+\frac{5\times3y}{y}$$
$$=9-\frac{48}{5}+15=\frac{72}{5}$$

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 두 비례식을 각각 y에 대하여 나타냈다.	30 %
❷	주어진 식을 간단히 했다.	30 %
❸	식의 값을 구했다.	40 %

22 답 547

$\frac{a+b}{a-b}=5$에서

$a+b=5(a-b)$, $a+b=5a-5b$

$6b=4a \qquad \therefore a=\frac{3}{2}b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{b+c}{b-c}=7$에서

$b+c=7(b-c)$, $b+c=7b-7c$

$8c=6b \qquad \therefore c=\frac{3}{4}b \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 $\frac{a^3+b^3+c^3}{ab^2+bc^2+ca^2}$에 대입하면

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{ab^2+bc^2+ca^2}=\frac{\left(\frac{3}{2}b\right)^3+b^3+\left(\frac{3}{4}b\right)^3}{\frac{3}{2}b\times b^2+b\times\left(\frac{3}{4}b\right)^2+\frac{3}{4}b\times\left(\frac{3}{2}b\right)^2}$$
$$=\frac{\frac{27}{8}b^3+b^3+\frac{27}{64}b^3}{\frac{3}{2}b^3+\frac{9}{16}b^3+\frac{27}{16}b^3}$$
$$=\frac{\frac{307}{64}b^3}{\frac{60}{16}b^3}=\frac{307}{240}$$

따라서 $p=240$, $q=307$이므로

$p+q=240+307=547$

다른 풀이

$\frac{a+b}{a-b}=5$에서

$a+b=5(a-b)$, $a+b=5a-5b$

$6b=4a \qquad \therefore a:b=6:4=3:2$

$\frac{b+c}{b-c}=7$에서

$b+c=7(b-c)$, $b+c=7b-7c$

$8c=6b \qquad \therefore b:c=8:6=4:3$

따라서 $a:b:c=6:4:3$이다.

$a=6k$, $b=4k$, $c=3k$ $(k\neq0)$라고 하면

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{ab^2+bc^2+ca^2}=\frac{(6k)^3+(4k)^3+(3k)^3}{6k\times(4k)^2+4k\times(3k)^2+3k\times(6k)^2}$$
$$=\frac{216k^3+64k^3+27k^3}{96k^3+36k^3+108k^3}$$
$$=\frac{307k^3}{240k^3}=\frac{307}{240}$$

따라서 $p=240$, $q=307$이므로

$p+q=240+307=547$

23 답 $\frac{4}{3}$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$에서 $\frac{x+y}{xy}=3$

$\therefore x+y=3xy$

$$\therefore \frac{y(5x-2y)-y(x-2y)}{x+y}=\frac{5xy-2y^2-xy+2y^2}{x+y}$$
$$=\frac{4xy}{x+y}=\frac{4xy}{3xy}=\frac{4}{3}$$

꿀 한줄평

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$에서 한 문자에 대하여 정리한 후 그 식을 $\frac{y(5x-2y)-y(x-2y)}{x+y}$에 대입하여 값을 구할 수도 있지만, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$을 한 문자에 대하여 정리한 식이 복잡하므로 계산이 어렵다.

$\frac{y(5x-2y)-y(x-2y)}{x+y}$를 정리하면 $x+y$와 xy로 이루어진 식이 되므로 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$에서 $x+y$와 xy에 대한 식으로 정리한 후 그 식을 대입하는 것이 더 편리하다.

24 답 ①

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{c}\right)+b\left(\frac{2}{c}+\frac{3}{a}\right)+c\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)$$
$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{2a}{c}\right)+\left(\frac{2b}{c}+\frac{3b}{a}\right)+\left(\frac{3c}{a}+\frac{c}{b}\right)$$
$$=\frac{3b}{a}+\frac{3c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{2a}{c}+\frac{2b}{c}$$
$$=\frac{3(b+c)}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{2(a+b)}{c} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$a+b+c=0$에서

$b+c=-a \qquad \cdots\cdots ㉡$

$a+c=-b \qquad \cdots\cdots ㉢$

$a+b=-c \qquad \cdots\cdots ㉣$

㉡, ㉢, ㉣을 ㉠에 대입하면

$$\frac{3(b+c)}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{2(a+b)}{c}$$
$$=\frac{3\times(-a)}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{2\times(-c)}{c}$$
$$=-3+(-1)+(-2)=-6$$

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

33쪽~35쪽

01 40	02 16	03 7	04 ③	05 6
06 $\frac{1}{2}ab$	07 $\frac{1}{2}$	08 $9x^{14}$	09 103	

01 답 40

해결 key Point!

두 분수의 분모를 9와 0으로만 이루어지게 분자, 분모에 적절한 수를 곱하여 두 분수를 순환소수로 나타낸다.

분수 A의 분자, 분모에 각각 3을 곱하면

$A=\frac{1136}{3333}=\frac{3408}{9999}=0.\dot{3}40\dot{8}$

분수 B의 분자, 분모에 각각 15를 곱하면

$B=\frac{227}{666}=\frac{3405}{9990}=0.3\dot{4}0\dot{8}$

두 순환소수 $0.\dot{3}40\dot{8}$, $0.3\dot{4}0\dot{8}$에서

$0.\dot{3}40\dot{8}=0.3408340834083408\cdots$

$0.3\dot{4}0\dot{8}=0.3408408408408408\cdots$

두 순환소수의 순환마디를 이루는 숫자의 개수는 각각 4, 3이고, 이 두 수의 최소공배수가 12이므로 두 순환소수는 처음 공통인 소수점 자리의 숫자가 나온 이후 12번째마다 4, 0, 8의 같은 숫자가 나온다.

(i) $n=1$일 때, $a_1=b_1=3$

(ii) $n=2$일 때, $a_2=b_2=4$

$n=2$ 이후 12번째 마다 두 소수의 소수점 자리의 숫자가 모두 4가 나오므로

$a_{14}=b_{14}=4$, $a_{26}=b_{26}=4$, …

따라서 $n=12k+2$ (k는 음수가 아닌 정수)일 때,

$a_n=b_n=4$

$12k+2\le150$에서 $k\le12.33\cdots$이므로 k는 0, 1, 2, …, 12의 13개이다.

(iii) $n=3$일 때, $a_3=b_3=0$

$n=3$ 이후 12번째 마다 두 소수의 소수점 자리의 숫자가 모두 0이 나오므로

$a_{15}=b_{15}=0$, $a_{27}=b_{27}=0$, …

따라서 $n=12k+3$일 때, $a_n=b_n=0$

$12k+3\le150$에서 $k\le12.25$이므로 k는 0, 1, 2, …, 12의 13개이다.

(iv) $n=4$일 때, $a_4=b_4=8$

$n=4$ 이후 12번째 마다 두 소수의 소수점 자리의 숫자가 모두 8이 나오므로

$a_{16}=b_{16}=8$, $a_{28}=b_{28}=0$, …

따라서 $n=12k+4$일 때, $a_n=b_n=8$

$12k+4\le150$에서 $k\le12.16\cdots$이므로 k는 0, 1, 2, …, 12의 13개이다.

(i)~(iv)에 의하여 $a_n=b_n$을 만족시키는 n의 개수는

$1+13+13+13=40$

꿀 한줄평

순환마디를 이루는 숫자의 개수가 각각 m, n인 순환소수에서 숫자 m과 n의 최소공배수의 값에서 순환마디가 다시 반복된다. 이때, 이 문제는 $0.3\dot{4}0\dot{8}$에서 순환마디 앞에 3이 있으므로 순환마디가 처음 나오는 소수점 자리가 다르다.
따라서 두 소수의 순환마디 4, 3의 최소공배수인 12의 값의 주기로 순환마디가 반복되는 것을 이용하여 처음 같아지는 소수점 자리를 구한 후 12번째 마다 같은 수가 나온다는 규칙으로 답을 찾아야 한다.

02 답 16

해결 key Point!

$a+b$의 값을 분수로 나타내고, 한 자리 자연수 x에 대하여 조건을 만족시키는 모든 y의 값 중 세 자리 자연수를 구해야 한다.

$a=0.x\dot{5}=\dfrac{(10x+5)-x}{90}=\dfrac{9x+5}{90}$, $b=0.\dot{x}=\dfrac{x}{9}$이므로

$a+b=\dfrac{9x+5}{90}+\dfrac{x}{9}=\dfrac{19x+5}{90}$

이때 x는 한 자리 자연수이므로

(i) $x=1$일 때, $\dfrac{19x+5}{90}=\dfrac{24}{90}=\dfrac{4}{15}=\dfrac{2^2}{3\times5}$

$\dfrac{2^2}{3\times5}\times y=(\text{자연수})^2$이어야 하므로 가장 작은 자연수 y의 값은 $y=3\times5=15$

(ii) $x=2$일 때, $\dfrac{19x+5}{90}=\dfrac{43}{90}$

$\dfrac{43}{90}\times y=(\text{자연수})^2$이어야 하므로 가장 작은 자연수 y의 값은 $y=90\times43=3870$

(iii) $x=3$일 때, $\dfrac{19x+5}{90}=\dfrac{62}{90}=\dfrac{31}{45}$

$\dfrac{31}{45}\times y=(\text{자연수})^2$이어야 하므로 가장 작은 자연수 y의 값은 $y=45\times31=1395$

(iv) $x=4$일 때, $\dfrac{19x+5}{90}=\dfrac{81}{90}=\dfrac{9}{10}=\dfrac{3^2}{2\times5}$

$\dfrac{3^2}{2\times5}\times y=(\text{자연수})^2$이어야 하므로 가장 작은 자연수 y의 값은 $y=2\times5=10$

(v) $x=5$일 때, $\dfrac{19x+5}{90}=\dfrac{100}{90}=\dfrac{10}{9}=\dfrac{2\times5}{3^2}$

$\dfrac{2\times5}{3^2}\times y=(\text{자연수})^2$이어야 하므로 가장 작은 자연수 y의 값은 $y=2\times3^2\times5=90$

(vi) $x=6$일 때, $\dfrac{19x+5}{90}=\dfrac{119}{90}$

$\dfrac{119}{90}\times y=(\text{자연수})^2$이어야 하므로 가장 작은 자연수 y의 값은 $y=90\times119=10710$

(vii) $x=7$일 때, $\dfrac{19x+5}{90}=\dfrac{138}{90}=\dfrac{23}{15}$

$\dfrac{23}{15}\times y=(\text{자연수})^2$이어야 하므로 가장 작은 자연수 y의 값은 $y=15\times23=345$

(viii) $x=8$일 때, $\dfrac{19x+5}{90}=\dfrac{157}{90}$

$\dfrac{157}{90}\times y=(\text{자연수})^2$이어야 하므로 가장 작은 자연수 y의 값은 $y=90\times157=14130$

(ix) $x=9$일 때, $\dfrac{19x+5}{90}=\dfrac{176}{90}=\dfrac{88}{45}=\dfrac{2^3\times11}{3^2\times5}$

$\dfrac{2^3\times11}{3^2\times5}\times y=(\text{자연수})^2$이어야 하므로 가장 작은 자연수 y의 값은 $y=2\times3^2\times5\times11=990$

(i)~(ix)에서 자연수 x의 값에 대하여 가장 작은 자연수 y의 값이 세 자리 자연수가 되게 하는 x의 값은 7, 9이므로 그 합은 $7+9=16$

꿀 한줄평

주어진 $a+b=\frac{19x+5}{90}$가 기약분수인지 아닌지 알 수 없으므로 $y=90k$ (k는 자연수)의 꼴로 놓고 문제를 해결하면 안된다. 이때 x가 한자리 자연수이므로 x에 값을 차례대로 대입하여 주어진 조건을 만족시키는 y의 값을 찾는다.

03 답 7

해결 key Point!

$\frac{1}{9}+\frac{2}{99}+\frac{3}{999}+\cdots$ 에서 소수점 아래 30번째 자리의 숫자를 구하기 위해 각 분수를 순환소수로 나타낸 후 순환마디를 이루는 숫자의 개수를 구하고 그 규칙을 파악한다.

$\frac{1}{9}=0.\dot{1}$의 순환마디를 이루는 숫자의 개수가 1이므로 소수점 아래 30번째 자리의 숫자는 1이다.

$\frac{2}{99}=0.\dot{0}\dot{2}$의 순환마디를 이루는 숫자의 개수가 2이고 $30=2\times15$이므로 소수점 아래 30번째 자리의 숫자는 순환마디의 두 번째 숫자인 2이다.

$\frac{3}{999}=0.\dot{0}0\dot{3}$의 순환마디를 이루는 숫자의 개수가 3이고 $30=3\times10$이므로 소수점 아래 30번째 자리의 숫자는 순환마디의 세 번째 숫자인 3이다.

$\frac{4}{9999}=0.\dot{0}00\dot{4}$의 순환마디를 이루는 숫자의 개수가 4이고 $30=4\times7+2$이므로 소수점 아래 30번째 자리의 숫자는 순환마디의 두 번째 숫자인 0이다.

즉, $\frac{n}{999\cdots9}$에서 분모가 n자리 수이고 그 수가 모두 9이면 순환마디가 $\underbrace{00\cdots0}_{0이\ (n-1)개}n$인 순환소수이고 n이 30의 약수가 될 때, 소수점 아래 30번째 자리의 숫자는 n이다.

또, n이 30의 약수가 아닐 때, 소수점 아래 30번째 자리의 숫자는 0이다.

9 이하의 30의 약수는 1, 2, 3, 5, 6이므로

$n=1$, 2, 3, 5, 6일 때 $\frac{n}{\underbrace{999\cdots9}_{n개}}$의 소수점 아래 30번째 자리의 숫자는 n이고 $n=1$, 2, 3, 5, 6이 아닐 때 소수점 아래 30번째 자리의 숫자는 0이다.

따라서 $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{99}$, $\frac{3}{999}$, $\cdots$, $\frac{9}{10^9-1}$의 소수점 아래 30번째 자리의 숫자의 합은

$1+2+3+0+5+6+0+0+0=17$

한편, 31은 소수이므로 9 이하의 31의 약수는 1뿐이므로 소수점 아래 31번째 숫자의 합은

$1+0+0+0+0+0+0+0+0=1$

즉, 주어진 소수점 아래 31번째 자리에서 받아올림 되는 숫자는 없으므로 $\frac{1}{9}+\frac{2}{99}+\frac{3}{999}+\cdots+\frac{9}{10^9-1}$를 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 30번째 자리의 숫자는 7이다.

꿀 한줄평

소수점 아래 수들의 합을 구할 때 받아올림 되는 수가 없는지 주의해서 살펴봐야 한다. 즉, 30번째 자리의 숫자를 구하는 것이므로 31번째 자리의 숫자의 합이 10이 넘는지 확인해야 한다.

04 답 ③

해결 key Point!

가장 간단한 분수의 꼴부터 차례대로 계산한다.

$$1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x+1}}=1-\cfrac{1}{\cfrac{x+1}{x+1}+\cfrac{1}{x+1}}$$
$$=1-\cfrac{1}{\cfrac{x+2}{x+1}}$$
$$=1-\frac{x+1}{x+2}$$
$$=\frac{x+2}{x+2}-\frac{x+1}{x+2}$$
$$=\frac{1}{x+2}$$

이때 $0.1\dot{3}\dot{6}=\frac{136-1}{990}=\frac{3}{22}$이므로

$\frac{1}{x+2}=\frac{3}{22}$, $3x+6=22$

$3x=16 \quad \therefore x=\frac{16}{3}$

한편, $x=5.\dot{a}=5+0.\dot{a}=5+\frac{a}{9}$이므로

$5+\frac{a}{9}=\frac{16}{3}$, $\frac{a}{9}=\frac{1}{3}$

$\therefore a=3$

Level UP

$\cfrac{\cfrac{d}{c}}{\cfrac{b}{a}}$는 다음과 같이 계산한다.

$\cfrac{\cfrac{d}{c}}{\cfrac{b}{a}}=\frac{d}{c}\div\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\times\frac{a}{b}=\frac{ad}{bc}$ (단, $abc\neq0$)

특히, $\cfrac{1}{\cfrac{b}{a}}=1\div\frac{b}{a}=1\times\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$ (단, $ab\neq0$)

05 답 6

해결 key Point!

부호를 결정하는 -1과 소수로 나누어 분자, 분모를 각각 전개하여 정리한 후 좌변과 우변을 비교한다.

$(-2)^y\times(-9)^x\times\left(\frac{3}{2}\right)^z$

$=(-1)^y\times 2^y\times(-1)^x\times 9^x\times\frac{3^z}{2^z}$

$=(-1)^y\times 2^y\times(-1)^x\times 3^{2x}\times 3^z\times\frac{1}{2^z}$

$=(-1)^{x+y}\times\frac{2^y}{2^z}\times 3^{2x+z}$

$\frac{2\times 6^5}{(-4)^3}=\frac{2\times(2\times 3)^5}{(-2^2)^3}=\frac{2\times 2^5\times 3^5}{-2^6}=-3^5$

즉, 주어진 등식은

$(-1)^{x+y}\times\frac{2^y}{2^z}\times 3^{2x+z}=-3^5$

이때 우변이 음수이므로 $(-1)^{x+y}$의 지수 $x+y$는 홀수이어야 하고, 우변에 밑이 2인 수가 없으므로 $2^y=2^z$, 즉 $y=z$이어야 한다.

또, $3^{2x+z}=3^5$이므로 $2x+z=5$

이때 $2x$는 짝수이므로 z는 홀수이어야 하고, $y=z$이므로 y도 홀수이다.

$x+y$가 홀수이므로 y가 홀수이면 x는 짝수이어야 한다.

즉, x는 짝수, y는 홀수, z는 홀수이고, $2x+z=5$를 만족시키는 짝수 x와 홀수 z의 값은 $x=2$, $z=1$

이때 $y=z$이므로 $y=1$

$\therefore\ x^2+y^2+z^2=2^2+1^2+1^2=6$

꿀 한줄평

주어진 식의 좌변은 -1과 소수의 거듭제곱으로 이루어진 수로, 우변은 계산하여 부호와 각 소수에 대한 지수를 비교하면 된다. 이때 세 수 x, y, z가 모두 자연수이므로 구한 관계식이 성립하는 자연수의 조합을 찾으면 된다.

06 답 $\frac{1}{2}ab$

해결 key Point!

$\triangle$AEF와 $\triangle$AEG의 넓이는 직사각형의 넓이에서 각각 $\triangle$AEF와 $\triangle$AEG가 아닌 다른 부분의 넓이를 빼서 구해야 한다.

$\triangle$AEF$=$(직사각형 ABCD의 넓이)
$-\triangle$ABE$-\triangle$ECF$-\triangle$AFD

$\triangle$AEG$=$(직사각형 ABCD의 넓이)
$-\triangle$ABE$-\triangle$ECG$-\triangle$AGD

이므로

S_2-S_1

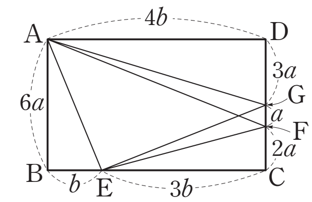
$=\triangle$AEG$-\triangle$AEF

$=\{$(직사각형ABCD의 넓이)
$-\triangle$ABE$-\triangle$ECG$-\triangle$AGD$\}$

$-\{$(직사각형ABCD의 넓이)
$-\triangle$ABE$-\triangle$ECF$-\triangle$AFD$\}$

$=\triangle$ECF$+\triangle$AFD$-\triangle$ECG$-\triangle$AGD

이때



$\overline{DG}=\overline{GC}=\frac{1}{2}\overline{CD}$

$=\frac{1}{2}\times 6a=3a$,

$\overline{GF}=\overline{GC}-\overline{CF}$

$=3a-2a=a$,

$\overline{EC}=\overline{BC}-\overline{BE}$

$=4b-b=3b$

이므로

$\triangle ECF=\frac{1}{2}\times\overline{EC}\times\overline{CF}=\frac{1}{2}\times 3b\times 2a=3ab$

$\triangle AFD=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{DF}=\frac{1}{2}\times 4b\times 4a=8ab$

$\triangle ECG=\frac{1}{2}\times\overline{EC}\times\overline{CG}=\frac{1}{2}\times 3b\times 3a=\frac{9}{2}ab$

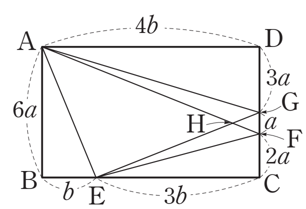
$\triangle AGD=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{DG}=\frac{1}{2}\times 4b\times 3a=6ab$

$\therefore\ S_2-S_1=\triangle ECF+\triangle AFD-\triangle ECG-\triangle AGD$

$=3ab+8ab-\frac{9}{2}ab-6ab$

$=\frac{1}{2}ab$

다른 풀이



선분 EG와 선분 AF의 교점을 H라고 하면

$S_2-S_1=\triangle AEG-\triangle AEF$

$=(\triangle AEH+\triangle AHG)-(\triangle AEH+\triangle EFH)$

$=\triangle AHG-\triangle EFH$

$=\triangle AHG+\triangle HFG-(\triangle EFH+\triangle HFG)$

$=\triangle AFG-\triangle EFG$

이때

$\triangle AFG=\frac{1}{2}\times\overline{FG}\times\overline{AD}=\frac{1}{2}\times a\times 4b=2ab$

$\triangle EFG=\frac{1}{2}\times\overline{FG}\times\overline{EC}=\frac{1}{2}\times a\times 3b=\frac{3}{2}ab$

$\therefore\ S_2-S_1=\triangle AFG-\triangle EFG=2ab-\frac{3}{2}ab=\frac{1}{2}ab$

07 답 $\frac{1}{2}$

해결 key Point!

조건 $abc=8$을 이용하여 각 항의 분모를 $bc+2b+4$로 통일하여 식을 간단히 정리해야 한다.

$abc=8$에서 $\frac{abc}{2}=4$이므로

$$\frac{a}{ab+2a+4}=\frac{a}{ab+2a+\frac{abc}{2}}$$
$$=\frac{2a}{2ab+4a+abc}$$
$$=\frac{2}{2b+4+bc}$$
$$=\frac{2}{bc+2b+4}$$
$$=\frac{4}{2(bc+2b+4)}$$
$$\frac{b}{bc+2b+4}=\frac{2b}{2(bc+2b+4)}$$
$$\frac{c}{ca+2c+4}=\frac{bc}{abc+2bc+4b}$$
$$=\frac{bc}{8+2bc+4b}$$
$$=\frac{bc}{2(bc+2b+4)}$$
$$\therefore \frac{a}{ab+2a+4}+\frac{b}{bc+2b+4}+\frac{c}{ca+2c+4}$$
$$=\frac{4}{2(bc+2b+4)}+\frac{2b}{2(bc+2b+4)}+\frac{bc}{2(bc+2b+4)}$$
$$=\frac{4+2b+bc}{2(bc+2b+4)}=\frac{1}{2}$$

08 답 $9x^{14}$

해결 key Point!

사다리타기 규칙을 이용하여 A, B, C에 도달하기 위해서는 어느 식에서 시작하는지를 확인하고 등식을 세워야 한다.

$-x^3$에서 출발하면 계산 결과가 A이므로

$$A=-x^3\div(-x^n)\div Q(x)=\frac{x^3}{x^nQ(x)}=\frac{1}{x^7}$$
$$\therefore Q(x)=\frac{x^3}{x^n}\times x^7=\frac{x^{10}}{x^n} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$2x$에서 출발하면 계산 결과가 B이므로

$$B=2x\times P(x)\div(-x^n)\times(3x^n)^2$$
$$=2x\times P(x)\times\left(-\frac{1}{x^n}\right)\times 9x^{2n}$$
$$=P(x)\times(-18x^{n+1})$$

즉, $P(x)\times(-18x^{n+1})=-54x^{12}$이므로

$$P(x)=\frac{-54x^{12}}{-18x^{n+1}}=\frac{3x^{11}}{x^n} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

x^2에서 출발하면 계산 결과가 C이고 이 식에 ㉠, ㉡을 대입하면

$$C=x^2\times P(x)\div Q(x)\times(3x^n)^2$$
$$=x^2\times\frac{3x^{11}}{x^n}\div\frac{x^{10}}{x^n}\times 9x^{2n}$$
$$=x^2\times\frac{3x^{11}}{x^n}\times\frac{x^n}{x^{10}}\times 9x^{2n}$$
$$=27x^{3+2n}$$

이때 C가 19차 단항식이므로

$3+2n=19$, $2n=16$ $\quad\therefore n=8$

따라서 $C=27x^{19}$이고 $n=8$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$$Q(x)=\frac{x^{10}}{x^8}=x^2,\ P(x)=\frac{3x^{11}}{x^8}=3x^3$$
$$\therefore \frac{C}{P(x)Q(x)}=\frac{27x^{19}}{3x^3\times x^2}=9x^{14}$$

09 답 103

해결 key Point!

(처음 물의 부피)+(쇠공의 부피)=(쇠공이 들어 있는 물의 부피)임을 이용해야 한다.

쇠공을 넣기 전 물의 부피는 밑면인 원의 반지름의 길이가 $3r$, 높이가 H인 원기둥이므로 처음 물의 부피를 V_1이라고 하면

$V_1=\pi\times(3r)^2\times H=9\pi r^2H$

쇠공의 반지름의 길이가 $2r$이므로 쇠공의 부피를 V_2라고 하면

$$V_2=\frac{4}{3}\pi\times(2r)^3=\frac{32}{3}\pi r^3$$

그릇에 쇠공을 넣은 후 물과 쇠공의 부피의 합은 밑면인 원의 반지름의 길이가 $3r$, 물의 높이가 $4r$인 원기둥이므로 쇠공과 물의 부피의 합을 V_3이라고 하면

$V_3=\pi\times(3r)^2\times 4r=36\pi r^3$

즉, $V_1+V_2=V_3$이므로

$$9\pi r^2H+\frac{32}{3}\pi r^3=36\pi r^3,\ 9\pi r^2H=\frac{76}{3}\pi r^3$$
$$\therefore H=\frac{76}{27}r$$

따라서 $a=27$, $b=76$이므로

$a+b=27+76=103$

Lv. Master 실력을 완성하는 대단원 평가

36쪽~40쪽

01 ④	**02** ②	**03** ⑤	**04** ①	**05** ②
06 ①	**07** ⑤	**08** ④	**09** ②	**10** ③
11 ②	**12** ③	**13** ②	**14** ④	**15** ②
16 40	**17** $-3x^7y^7$	**18** $26A^2$	**19** 55	**20** 10^8
21 -2	**22** 8	**23** 216		

01 답 ④

$$A=\frac{1}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^4}+\frac{3}{10^6}+\cdots$$
$$=0.1303030\cdots=0.1\dot{3}\dot{0}$$
$$=\frac{130-1}{990}=\frac{43}{330}$$

$B=\frac{4}{10^2}+\frac{5}{10^3}+\frac{4}{10^4}+\frac{5}{10^5}+\frac{4}{10^6}+\frac{5}{10^7}+\cdots$

$=0.0454545\cdots=0.0\dot{4}\dot{5}$

$=\frac{45}{990}=\frac{1}{22}$

$\therefore\ A\div B=\frac{43}{330}\div\frac{1}{22}=\frac{43}{330}\times 22=\frac{43}{15}$

02 답 ②

해결 key Point!

$a+b$의 순환마디의 개수를 세서 반복되어 나타나는 숫자들의 규칙을 파악해야 한다.

$0.1\dot{6}=9\times a$에서 $\frac{16-1}{90}=9\times a$

$\therefore\ a=\frac{15}{90}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{54}$

$b=5\times 0.0\dot{2}=5\times\frac{2}{90}=\frac{1}{9}$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{54}+\frac{1}{9}=\frac{7}{54}=0.1\dot{2}9\dot{6}$

$a+b=0.1\dot{2}9\dot{6}$이므로 소수점 아래 둘째 자리부터 순환마디가 시작되고, 순환마디를 이루는 숫자의 개수는 3이다.

이때 $200=1+3\times 66+1$이므로 소수점 아래 200번째 자리의 숫자는 순환마디의 첫 번째 숫자인 2이다.

03 답 ⑤

① $(x^2y^{\square})^3=x^6y^{\square\times 3}=x^6y^{12}$에서

$\square\times 3=12\qquad\therefore\ \square=4$

② $(x^3)^3\times x^{\square}=x^{9+\square}=x^{14}$에서

$9+\square=14\qquad\therefore\ \square=5$

③ $x^{\square}\div(x^4)^2=x^{\square}\div x^8=\frac{x^{\square}}{x^8}=\frac{1}{x^2}$에서

$x^{\square}=\frac{1}{x^2}\times x^8=x^6\qquad\therefore\ \square=6$

④ $x^6\times x^{\square}\div x^3=x^{3+\square}=x^8$에서

$3+\square=8\qquad\therefore\ \square=5$

⑤ $x^{15}\div x^7\div(x^3)^{\square}=x^{8-3\times\square}=x^2$에서

$8-3\times\square=2,\ 3\times\square=6\qquad\therefore\ \square=2$

따라서 □ 안에 들어갈 수가 가장 작은 것은 ⑤이다.

04 답 ①

$108=2^2\times 3^3$이므로

$108^4=(2^2\times 3^3)^4=2^8\times 3^{12}$

즉, $A^2=2^8\times 3^{12}=(2^4\times 3^6)^2$이므로

$A=2^4\times 3^6$

따라서 $a=4,\ b=6$이므로

$a+b=4+6=10$

05 답 ②

해결 key Point!

주어진 수의 지수를 같게 하여 밑의 대소 관계를 확인한다.

$2^{80}=(2^4)^{20}=16^{20}$,

$3^{60}=(3^3)^{20}=27^{20}$,

$5^{40}=(5^2)^{20}=25^{20}$

이므로 $2^{80}<5^{40}<3^{60}$

또, $3^{60}=(3^2)^{30}=9^{30}<10^{30}$

따라서 네 수의 대소 관계를 비교하면

$2^{80}<5^{40}<3^{60}<10^{30}$

참고 주어진 수를 모두 같은 지수로 바꾸어 한번에 비교하지 않고 각각을 따로 대소 비교를 하여 대소 관계를 구해도 된다.

06 답 ①

$3x^3\times A=12x^7y^2$에서

$A=\frac{12x^7y^2}{3x^3}=4x^4y^2$

$-20x^5y^6\div B=-4xy^3$에서

$B=\frac{-20x^5y^6}{-4xy^3}=5x^4y^3$

$\therefore\ \frac{5A}{B^2}=\frac{5\times 4x^4y^2}{(5x^4y^3)^2}=\frac{20x^4y^2}{25x^8y^6}=\frac{4}{5x^4y^4}$

07 답 ⑤

$2(5x-4y+7)-3A=4x+y+2$이므로

$10x-8y+14-3A=4x+y+2$

$3A=10x-8y+14-(4x+y+2)$

$=10x-8y+14-4x-y-2$

$=6x-9y+12$

$\therefore\ A=2x-3y+4$

따라서 $a=2,\ b=-3,\ c=4$이므로

$a-b+c=2-(-3)+4=9$

08 답 ④

$(0.\dot{2}x^2y-1.\dot{6}xy^2)\div\frac{5}{9}xy-4x^2y\left(\frac{1}{5xy}-\frac{5}{4x^2}\right)$

$=\left(\frac{2}{9}x^2y-\frac{5}{3}xy^2\right)\times\frac{9}{5xy}-4x^2y\left(\frac{1}{5xy}-\frac{5}{4x^2}\right)$

$=\frac{2}{5}x-3y-\frac{4}{5}x+5y$

$=-\frac{2}{5}x+2y$

따라서 $a=-\frac{2}{5},\ b=2$이므로

$a+b=-\frac{2}{5}+2=\frac{8}{5}$

09 답 ②

해결 key Point!

분수 $\frac{1}{2800}$을 소수로 나타내어 순환마디에 나열되는 숫자들의 규칙을 파악해야 한다.

$\frac{1}{2800}=0.0003\dot{5}71428\dot{}$에서 순환마디를 이루는 숫자의 개수는 6이고, 소수점 아래 4번째 자리까지의 숫자는 순환하지 않는다. 이때 $40=4+6\times6$이므로 소수점 아래 40번째 자리의 숫자까지 순환마디가 소수점 아래 5번째 자리부터 6번 반복된다.

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{40}$

$=(0+0+0+3)+(5+7+1+4+2+8)\times6$

$=3+27\times6=165$

10 답 ③

해결 key Point!

$\frac{a}{840}$가 유한소수가 되기 위해 분모의 소인수 중 2, 5를 제외한 소수가 약분되도록 a의 값을 정해야 한다.

$\frac{a}{840}=\frac{a}{2^3\times3\times5\times7}$를 유한소수로 나타낼 수 있으려면 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 하므로 a는 3×7, 즉 21의 배수이어야 한다.

이때 a는 두자리 자연수이므로

$a=21, 42, 63, 84$

(i) $a=21$일 때

$\frac{21}{840}=\frac{1}{40}$이므로 성립하지 않는다.

(ii) $a=42$일 때

$\frac{42}{840}=\frac{1}{20}$이므로 성립하지 않는다.

(iii) $a=63$일 때

$\frac{63}{840}=\frac{3}{40}$이므로 $b=40$

(iv) $a=84$일 때

$\frac{84}{840}=\frac{1}{10}$이므로 성립하지 않는다.

(i)~(iv)에 의하여 $a=63$, $b=40$이므로

$a+b=63+40=103$

11 답 ②

$$\frac{25^5+5^{11}+125^4}{5^8+5^9+5^{10}}=\frac{(5^2)^5+5^{11}+(5^3)^4}{5^8+5^9+5^{10}}$$
$$=\frac{5^{10}+5^{11}+5^{12}}{5^8+5^9+5^{10}}$$
$$=\frac{5^{10}(1+5^1+5^2)}{5^8(1+5^1+5^2)}$$
$$=5^2$$

즉, $5^2=5^n$이므로 $n=2$

12 답 ③

$(3x,\ 2x-y)⊛(2y,\ 4x+3y)$

$=3x\times(4x+3y)-2y\times(2x-y)$

$=12x^2+9xy-4xy+2y^2$

$=12x^2+5xy+2y^2$

$(x-2y,\ 5x)⊛(3x+y,\ -y)$

$=(x-2y)\times(-y)-(3x+y)\times5x$

$=-xy+2y^2-15x^2-5xy$

$=-15x^2-6xy+2y^2$

$\therefore (3x,\ 2x-y)⊛(2y,\ 4x+3y)+(x-2y,\ 5x)⊛(3x+y,\ -y)$

$=(12x^2+5xy+2y^2)+(-15x^2-6xy+2y^2)$

$=-3x^2-xy+4y^2$

따라서 $a=-3$, $b=-1$, $c=4$이므로

$a+b+c=-3+(-1)+4=0$

13 답 ②

해결 key Point!

전개도로 만들어지는 직육면체의 마주 보는 두 면에 적힌 두 다항식을 확인해야 한다.

$3x^2-x+5+(-x^2+7x-2)=2x^2+6x+3$

마주 보는 두 면에 적힌 두 다항식의 합은 모두 같으므로

$A+(x^2-3x+2)=2x^2+6x+3$에서

$A=2x^2+6x+3-(x^2-3x+2)$

$=2x^2+6x+3-x^2+3x-2$

$=x^2+9x+1$

$(x^2+4x)+B=2x^2+6x+3$에서

$B=2x^2+6x+3-(x^2+4x)$

$=2x^2+6x+3-x^2-4x$

$=x^2+2x+3$

$\therefore A-2B=x^2+9x+1-2(x^2+2x+3)$

$=x^2+9x+1-2x^2-4x-6$

$=-x^2+5x-5$

14 답 ④

길의 폭을 제외한 화단의 가로의 길이는

$6x-x=5x$

길의 폭을 제외한 화단의 세로의 길이는

$(2x^2+x+1)-2+(3x^2+x)=5x^2+2x-1$

따라서 길을 제외한 화단의 총 넓이는

$5x(5x^2+2x-1)=25x^3+10x^2-5x$

따라서 $a=25$, $b=10$, $c=-5$, $d=0$이므로

$a+b+c+d=25+10+(-5)+0=30$

15 답 ②

해결 key Point!

$\frac{17}{n}$이 유한소수가 되는 경우, 즉 n의 소인수가 2 또는 5뿐일 때와 n의 소인수에 17이 포함될 때로 나누어 생각해 보아야 한다.

$\frac{17}{n}$을 소수로 나타내면 소수점 아래 첫째 자리의 수가 6이므로

$0.6 \le \frac{17}{n} < 0.7$, $\frac{3}{5} \le \frac{17}{n} < \frac{7}{10}$

$\frac{10}{7} < \frac{n}{17} \le \frac{5}{3}$, $\frac{170}{7} < n \le \frac{85}{3}$

$\therefore 24.286\cdots < n \le 28.333\cdots$

즉, n의 값이 될 수 있는 수는 25, 26, 27, 28이다.

이때 $\frac{17}{n}$이 유한소수이어야 하므로 n은 소인수가 2 또는 5뿐이거나 그 수에 17을 곱한 수이다.

따라서 조건을 만족시키는 n의 값은 25이다.

다른 풀이

$\frac{17}{n}$이 1보다 작으므로 $n>17$이고 $\frac{17}{n}$이 유한소수가 되려면 n은 소인수가 2 또는 5뿐이거나 그 수에 17을 곱한 수이어야 한다.

(ⅰ) n의 소인수가 2 또는 5뿐일 때

17보다 큰 자연수 n의 값은 20, 25, 32, 40, …이다.

이때 $\frac{17}{20}=0.85$, $\frac{17}{25}=0.68$, $\frac{17}{32}=0.53125$, …이고, n의 값이 커질수록 $\frac{17}{n}$의 값은 작아지므로 가능한 n의 값은 25이다.

(ⅱ) n의 소인수가 2 또는 5인 수에 17을 곱한 수일 때

17보다 큰 자연수 n의 값은 34, 68, 85, …이다.

이때 $\frac{17}{34}=0.5$, $\frac{17}{68}=0.25$, …이므로 가능한 n의 값은 없다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\frac{17}{n}$이 소수점 아래 첫째 자리의 숫자가 6인 유한소수가 되는 n의 값은 25이다.

16 답 40

자연수 a에 $0.0\dot{7}$을 곱해야 하는데 잘못하여 $0.\dot{0}\dot{7}$을 곱하였더니 그 계산 결과가 정답보다 $0.\dot{2}\dot{8}$만큼 커졌으므로

$a \times 0.0\dot{7} - a \times 0.\dot{0}\dot{7} = 0.\dot{2}\dot{8}$

$a \times \frac{7}{90} - a \times \frac{7}{99} = \frac{28}{99}$

$\left(\frac{77}{990} - \frac{70}{990}\right)a = \frac{28}{99}$

$\frac{7}{990}a = \frac{28}{99}$

$\therefore a=40$

17 답 $-3x^7y^7$

해결 key Point!

$A \div \square \times B = C$에서 $\square = A \times B \div C$임을 이용해야 한다.

$(3x^3y^4)^2 \div \square \times (-2x^2y)^4 = -48x^7y^5$에서

$9x^6y^8 \div \square \times 16x^8y^4 = -48x^7y^5$

$\therefore \square = 9x^6y^8 \times 16x^8y^4 \div (-48x^7y^5)$

$= 9x^6y^8 \times 16x^8y^4 \times \left(-\frac{1}{48x^7y^5}\right)$

$= -3x^7y^7$

18 답 $26A^2$

해결 key Point!

주어진 식의 밑 2의 지수를 20의 배수가 되도록 변형한다.

$5 \times 2^{42} + 24 \times 2^{38} = 5 \times 2^2 \times 2^{40} + 2^3 \times 3 \times 2^{38}$

$= 5 \times 2^2 \times 2^{40} + 2 \times 3 \times 2^{40}$

$= 20 \times (2^{20})^2 + 6 \times (2^{20})^2$

$= 20 \times A^2 + 6 \times A^2$

$= (20+6) \times A^2$

$= 26A^2$

19 답 55

해결 key Point!

가장 큰 $x-y$의 값을 구하기 위해서는 조건을 만족시키는 가장 큰 x의 값과 가장 작은 y의 값을 구한 다음 그 차를 구해야 한다.

$\frac{75}{x} = \frac{3 \times 5^2}{x}$이 1보다 큰 유한소수이므로 $x<75$이고 $\frac{75}{x}$를 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 한다. 이때

$74=2\times37$, 73, $72=2^3\times3^2$, 71, $70=2\times5\times7$,

$69=3\times23$, $68=2^2\times17$, 67, $66=2\times3\times11$,

$65=5\times13$, $64=2^6$, …

이므로 조건을 만족시키는 가장 큰 x의 값은 64이다.

$\therefore x=64$

$\frac{y}{90} = \frac{y}{2\times3^2\times5}$가 1보다 작은 유한소수이므로 $y<90$이고 $\frac{y}{90}$를 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 한다.

즉, y는 $3^2=9$의 배수이어야 한다.

따라서 이를 만족시키는 가장 작은 y의 값은 9이다.

$\therefore y=9$

$\therefore x-y=64-9=55$

20 답 10^8

A, C의 지수와 B, D의 지수의 대소 관계를 각각 구하면

$9x+5y-(5x+9y)=4x-4y$,

$6x+8y-(2x+12y)=4x-4y$

에서 $4(x-y)>0$이므로

$9x+5y>5x+9y$, $6x+8y>2x+12y$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{AB}{CD}&=\frac{2^{9x+5y}\times 5^{6x+8y}}{2^{5x+9y}\times 5^{2x+12y}}\\&=2^{(9x+5y)-(5x+9y)}\times 5^{(6x+8y)-(2x+12y)}\\&=2^{4x-4y}\times 5^{4x-4y}\\&=2^{4(x-y)}\times 5^{4(x-y)}\\&=(2\times 5)^{4\times 2}\ (\because x-y=2)\\&=10^8\end{aligned}$$

21 답 -2

해결 key Point!

$2A-\{B-(2C-3A)\}$를 간단히 한 후, A, B, C를 대입한다.

$$\begin{aligned}2A-\{B-(2C-3A)\}&=2A-(B-2C+3A)\\&=2A-B+2C-3A\\&=-A-B+2C\end{aligned}$$

이 식에 $A=2x^2+5xy-3y^2$, $B=4x^2-xy+y^2$,

$C=-x^2+4y^2$을 대입하면

$-A-B+2C$

$=-(2x^2+5xy-3y^2)-(4x^2-xy+y^2)+2(-x^2+4y^2)$

$=-2x^2-5xy+3y^2-4x^2+xy-y^2-2x^2+8y^2$

$=-8x^2-4xy+10y^2$

따라서 $a=-8$, $b=-4$, $c=10$이므로

$a+b+c=-8+(-4)+10=-2$

22 답 8

1단계 어떤 다항식 구하기

어떤 다항식을 A라고 하면

$A+(-x^2-6x+5)=2x^2-x+3$

$$\begin{aligned}\therefore A&=2x^2-x+3-(-x^2-6x+5)\\&=2x^2-x+3+x^2+6x-5\\&=3x^2+5x-2\end{aligned}$$

2단계 바르게 계산한 결과 구하기

바르게 계산하면

$3x^2+5x-2-(-x^2-6x+5)$

$=3x^2+5x-2+x^2+6x-5$

$=4x^2+11x-7$

3단계 $a+b+c$의 값 구하기

따라서 $a=4$, $b=11$, $c=-7$이므로

$a+b+c=4+11+(-7)=8$

단계	채점 기준	배점
❶	어떤 다항식을 구했다.	3점
❷	바르게 계산한 결과를 구했다.	2점
❸	$a+b+c$의 값을 구했다.	2점

23 답 216

해결 key Point!

$\frac{A}{240}$를 유한소수로 나타낼 수 있으려면 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 한다.

1단계 조건 (나)에서 $\frac{A}{240}$가 유한소수가 될 조건 구하기

조건 (나)에서 $\frac{A}{240}=\frac{A}{2^4\times 3\times 5}$가 유한소수로 나타낼 수 있으려면 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 하므로 A는 3의 배수가 되어야 한다.

2단계 조건 (다)에서 $\frac{A}{240}\times 30$이 어떤 자연수의 세제곱이 될 조건 구하기

조건 (다)에서 $\frac{A}{240}\times 30$이 어떤 자연수의 세제곱이므로

$\frac{A}{240}\times 30=\frac{A}{8}=n^3$ (n은 자연수)의 꼴이어야 한다.

즉, $A=8n^3$의 꼴이어야 한다.

3단계 조건을 만족시키는 A의 값 구하기

이때 A는 3의 배수이므로

$A=8\times 3^3\times k^3=216k^3$ (k는 자연수)

의 꼴이고, $216\times 2^3=1728>1000$이므로 $k=1$

따라서 세 자리 자연수 A의 값은 216이다.

단계	채점 기준	배점
❶	조건 (나)에서 $\frac{A}{240}$가 유한소수가 될 조건을 구했다.	2점
❷	조건 (다)에서 $\frac{A}{240}\times 30$이 어떤 자연수의 세제곱이 될 조건을 구했다.	2점
❸	조건을 만족시키는 A의 값을 구했다.	3점

Ⅱ 부등식

01 일차부등식

Lv. 1 개념을 적용하는 **핵심 문제** 44쪽~45쪽

01 ③, ⑤	02 ⑤	03 $-18\le x<3$		04 ①
05 ④	06 ①	07 ③	08 -2	09 5
10 ④	11 ⑤	12 ③		

01 답 ③, ⑤

① $2x-1\ge 9$

② $23-x>10$

④ $x-2\times 3\le 9$

02 답 ⑤

① $a<0$, $b>0$이고 $|a|=|b|$이면 $a<b$이지만 $a^2=b^2$

② $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$이면 $a<b$ $\quad\therefore -a>-b$

③ $-\frac{1}{5}a-4<-\frac{1}{5}b-4$에서 $-\frac{1}{5}a<-\frac{1}{5}b$ $\quad\therefore a>b$

④ $2a<b$에서 $a<\frac{b}{2}$ $\quad\therefore a-1<\frac{b}{2}-1$

⑤ $2-\frac{a}{3}<\frac{b}{3}+2$에서 $-\frac{a}{3}<\frac{b}{3}$

$a>-b$, $a+1>1-b$

$\therefore \frac{a+1}{7}>\frac{1-b}{7}$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

03 답 $-18\le x<3$

$-3\le 1-2a<11$에서 $-4\le -2a<10$

$\therefore -5<a\le 2$

$\frac{1}{3}x=-(a+4)$에서 $\frac{1}{3}x=-a-4$

$\therefore x=-3a-12$

$-5<a\le 2$에서 $-6\le -3a<15$

$-18\le -3a-12<3$

$\therefore -18\le x<3$

04 답 ①

$5x^2+2ax\le(b+1)x^2-6x+1$에서

$(4-b)x^2+(2a+6)x-1\le 0$

일차부등식이 되려면 $4-b=0$, $2a+6\ne 0$이어야 하므로

$a\ne -3$, $b=4$

05 답 ④

① $3x+2>14$에서 $3x>12$ $\quad\therefore x>4$

② $x+3<3x-5$에서 $2x>8$ $\quad\therefore x>4$

③ $3x+1<4x-3$에서 $x>4$

④ $x+5>3x-3$에서 $2x<8$ $\quad\therefore x<4$

⑤ $9-x<2x-3$에서 $3x>12$ $\quad\therefore x>4$

따라서 해가 다른 것은 ④이다.

06 답 ①

$3x-7>4x+a$에서 $x<-7-a$

수직선 위에 나타낸 해는 $x<-1$이므로

$-7-a=-1$ $\quad\therefore a=-6$

07 답 ③

$2(ax+3)>4a+6$에서

$2ax+6>4a+6$, $2ax>4a$

이때 $a<0$이므로 $x<2$

08 답 -2

$\frac{3}{2}x+a\le 3-x$에서 $\frac{5}{2}x\le 3-a$

$\therefore x\le\frac{2}{5}(3-a)$

이때 해 중에서 가장 큰 수가 2이므로

$\frac{2}{5}(3-a)=2$, $3-a=5$

$\therefore a=-2$

09 답 5

1단계 a의 값 구하기

$0.03x-0.1\le 0.26$의 양변에 100을 곱하면

$3x-10\le 26$, $3x\le 36$

$\therefore x\le 12$

이때 부등식을 참이 되게 하는 x의 값 중 가장 큰 수는 12이므로

$a=12$

2단계 b의 값 구하기

$\frac{5}{6}-\frac{x-1}{3}\le\frac{x}{2}$의 양변에 6을 곱하면

$5-2(x-1)\le 3x$, $5-2x+2\le 3x$

$5x\ge 7$ $\quad\therefore x\ge\frac{7}{5}$

이때 부등식을 참이 되게 하는 x의 값 중 가장 작은 수는 $\frac{7}{5}$이므로

$b=\frac{7}{5}$

3단계 $a-5b$의 값 구하기

$\therefore a-5b=12-5\times\frac{7}{5}=5$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구했다.	40 %
❷	b의 값을 구했다.	40 %
❸	$a-5b$의 값을 구했다.	20 %

10 답 ④

$0.\dot{5}x+1.\dot{2}>\frac{x-1}{6}-\frac{7}{18}$에서

$\frac{5}{9}x+\frac{11}{9}>\frac{x-1}{6}-\frac{7}{18}$이므로 양변에 18을 곱하면

$10x+22>3(x-1)-7$, $10x+22>3x-3-7$

$7x>-32$ $\quad\therefore x>-\frac{32}{7}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 음의 정수 x는 -4, -3, -2, -1의 4개이다.

참고 한 자리 자연수 a, b에 대하여 $0.\dot{a}=\frac{a}{9}$, $a.\dot{b}=\frac{ab-a}{9}$

11 답 ⑤

$0.2\{x-(3x-1)\}\leq-0.3(2x-5)-0.8$의 양변에 10을 곱하면

$2\{x-(3x-1)\}\leq-3(2x-5)-8$

$2(x-3x+1)\leq-6x+15-8$

$2(-2x+1)\leq-6x+7$, $-4x+2\leq-6x+7$

$2x\leq5$ $\quad\therefore x\leq\frac{5}{2}$

$10\geq a(2x-3)$에서 $10\geq2ax-3a$

$2ax\leq3a+10$

이때 $a>0$이므로

$x\leq\frac{3a+10}{2a}$

두 일차부등식의 해가 서로 같으므로

$\frac{5}{2}=\frac{3a+10}{2a}$, $10a=6a+20$

$4a=20$ $\quad\therefore a=5$

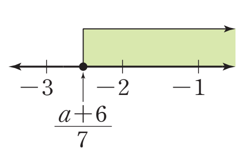
12 답 ③

$\frac{x+a}{2}\leq4x-3$의 양변에 2를 곱하면

$x+a\leq8x-6$, $7x\geq6+a$

$\therefore x\geq\frac{a+6}{7}$

이 부등식을 만족시키는 음의 정수 x가 2개이므로 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같이



$-3<\frac{a+6}{7}\leq-2$이어야 한다.

$-3<\frac{a+6}{7}\leq-2$에서

$-21<a+6\leq-14$ $\quad\therefore -27<a\leq-20$

참고 (i) $\frac{a+6}{7}=-3$이면 주어진 일차부등식의 해 $x\geq-3$을 만족시키는 음의 정수 x는 -3, -2, -1의 3개이다.

(ii) $\frac{a+6}{7}=-2$이면 주어진 일차부등식의 해 $x\geq-2$를 만족시키는 음의 정수 x는 -2, -1의 2개이다.

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

46쪽~49쪽

01 ㄱ, ㄹ	02 ④	03 ④	04 ②	05 $\frac{32}{5}$
06 ⑤	07 ③	08 -1	09 ③	10 ③
11 $\frac{33}{4}<a\leq10$		12 3	13 ②	14 $\frac{2}{3}$
15 $\frac{14}{5}$	16 ①	17 풀이 참조	18 ④	19 ⑤
20 ⑤	21 $x<9$	22 ④	23 ⑤	24 ②

01 답 ㄱ, ㄹ

해결 key Point!

부등식의 양변에 음수를 곱하거나 나누면 부등호의 방향이 바뀐다는 성질을 적용하면서 부등호의 방향을 따져야 한다.

ㄱ. $a<b$이고 $c<0$이므로 $ac>bc$

또, $d<0$이므로 $\frac{ac}{d}<\frac{bc}{d}$

ㄴ. $a<b$이므로 $a-2d<b-2d$

또, $c<0$이므로 $\frac{a-2d}{c}>\frac{b-2d}{c}$

ㄷ. (i) $|a|\leq|b|$일 때

$a^2\leq b^2$이고 $d<0$이므로 $a^2d\geq b^2d$

따라서 $a^2d-2bc\geq b^2d-2bc$

(ii) $|a|>|b|$일 때

$a^2>b^2$이고 $d<0$이므로 $a^2d<b^2d$

따라서 $a^2d-2bc<b^2d-2bc$

(i), (ii)에 의하여 $a^2d-2bc<b^2d-2bc$가 항상 옳다고 할 수 없다.

ㄹ. $a<b$이므로 $a+c<b+c$

또, $-2cd<0$이므로 $\frac{a+c}{-2cd}>\frac{b+c}{-2cd}$

ㅁ. $a<b$이고 $-2d>0$이므로 $-2ad<-2bd$

따라서 $-2ad+3c<-2bd+3c$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

다른 풀이

다음과 같이 적당한 수를 대입하여 부등식이 성립하지 않는 경우를 찾을 수 있다.

$a=1$, $b=2$, $c=-1$, $d=-2$일 때

ㄴ. (좌변)$=\frac{a-2d}{c}=\frac{1-2\times(-2)}{-1}=-5$

(우변)$=\frac{b-2d}{c}=\frac{2-2\times(-2)}{-1}=-6$

$-5>-6$이므로 $\frac{a-2d}{c}>\frac{b-2d}{c}$

ㄷ. (좌변)$=a^2d-2bc=1^2\times(-2)-2\times2\times(-1)=2$

(우변)$=b^2d-2bc=2^2\times(-2)-2\times2\times(-1)=-4$

$2>-4$이므로 $a^2d-2bc>b^2d-2bc$

ㅁ. (좌변)$=-2ad+3c=-2\times1\times(-2)+3\times(-1)=1$

(우변)$=-2bd+3c=-2\times2\times(-2)+3\times(-1)=5$

$1<5$이므로 $-2ad+3c<-2bd+3c$

02 답 ④

해결 key Point!

$0<a<-b$에서 $a>0$, $b<0$이므로 $a+b<0$, $a-b>0$임을 이용해야 한다.

$0<a<-b$에서 $a>0$, $b<0$이므로 $a+b<0$, $a-b>0$

ㄱ. (좌변)$=a|b|=a\times(-b)=-ab>0$

(우변)$=b|a|=ba<0$

$\therefore\ a|b|>b|a|$

ㄴ. $a+b<0$, $a-b>0$에서 $\frac{a+b}{a-b}<0$

또, $a>0$에서 $-a<a$이므로 $-a+b<a+b$

$\frac{-a+b}{a-b}<\frac{a+b}{a-b}$, $\frac{-(a-b)}{a-b}<\frac{a+b}{a-b}$

$-1<\frac{a+b}{a-b}$ $\quad\therefore\ -1<\frac{a+b}{a-b}<0$

ㄷ. (좌변)$=|a+b|=-(a+b)=-a-b$

(우변)$=|a|+|b|=a-b$

$-a-b<a-b$이므로 $|a+b|<|a|+|b|$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

03 답 ④

해결 key Point!

수직선을 이용하여 네 수 a, b, c, d의 대소 관계를 확인해야 한다.

ㄱ. $a<b<0<c<d$이고 $|a|=|d|=2|b|=2|c|$이므로

$b-d=a-c<0$

또, $0<c<d$이므로 $\frac{b-d}{c}<\frac{a-c}{d}$

ㄴ. $a<b<0$이므로 $-a>-b>0$

$\therefore\ 1-a>1-b$

또, $b-a=d-c>0$이므로 $\frac{1-a}{b-a}>\frac{1-b}{d-c}$

ㄷ. $a<b<0<c<d$이고 $|a|=|d|=2|b|=2|c|$이므로

$a=-d$, $b=-c$

즉, $\frac{1}{a}=-\frac{1}{d}$, $\frac{1}{b}=-\frac{1}{c}$이므로

$\frac{1}{a}-\frac{1}{d}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{2}{a}$, $\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{b}=\frac{2}{b}$

또, $a<b<0$이므로 $\frac{2}{a}>\frac{2}{b}$

$\therefore\ \frac{1}{a}-\frac{1}{d}>\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

Level UP

적당한 수를 대입하여 부등식이 성립하지 않음을 보일 수 있다.

ㄱ에서 $a=-2$, $b=-1$, $c=1$, $d=2$일 때

(좌변)$=\frac{b-d}{c}=\frac{(-1)-2}{1}=-3$

(우변)$=\frac{a-c}{d}=\frac{(-2)-1}{2}=-\frac{3}{2}$

$-3>-\frac{3}{2}$이므로 $\frac{b-d}{c}<\frac{a-c}{d}$

04 답 ②

해결 key Point!

양팔저울에 올려진 추들의 무게의 대소 관계를 식으로 나타낸 후 부등식의 성질을 이용해야 한다.

주어진 그림을 식으로 나타내면

A+C=B+D $\quad$ …… ㉠

A+B>C+D $\quad$ …… ㉡

A+D<B+C $\quad$ …… ㉢

D>A

㉡의 양변에 C를 더하면

A+B+C>2C+D

이때 ㉠에 의하여

2B+D>2C+D, 2B>2C $\quad$ ∴B>C

㉢의 양변에 C를 더하면

A+C+D<B+2C

이때 ㉠에 의하여

B+2D<B+2C, 2D<2C $\quad$ ∴ C>D

따라서 A<D<C<B이므로 무거운 순서대로 나열하면

B, C, D, A이다.

05 답 $\frac{32}{5}$

해결 key Point!

주어진 부등식을 풀어 x의 값의 범위를 구한 후, 부등식의 성질을 이용하여 구하고자 하는 식의 범위를 차례대로 구해야 한다.

1단계 x의 값의 범위 구하기

$-8\leq3x+4\leq1$에서 $-12\leq3x\leq-3$

$\therefore -4 \le x \le -1$

2단계 $\dfrac{6-4x}{5}$의 범위 구하기

$-4 \le x \le -1$에서 $4 \le -4x \le 16$

$10 \le 6-4x \le 22 \qquad \therefore 2 \le \dfrac{6-4x}{5} \le \dfrac{22}{5}$

3단계 $\dfrac{6-4x}{5}$의 값 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합 구하기

따라서 $\dfrac{6-4x}{5}$의 값 중 가장 큰 수는 $\dfrac{22}{5}$, 가장 작은 수는 2이므로 그 합은

$\dfrac{22}{5}+2=\dfrac{32}{5}$

단계	채점 기준	비율
❶	x의 값의 범위를 구했다.	30 %
❷	$\dfrac{6-4x}{5}$의 범위를 구했다.	40 %
❸	$\dfrac{6-4x}{5}$의 값 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합을 구했다.	30 %

06 답 ⑤

해결 key Point!

y를 x에 대한 식으로 나타낸 후, 부등식의 성질을 이용하여 y의 값의 범위를 구해야 한다.

$2x+3y=6$에서 $3y=6-2x$

$\therefore y=2-\dfrac{2}{3}x$

한편, $-3 \le 2x+3 \le 15$에서

$-6 \le 2x \le 12$, $-4 \le -\dfrac{2}{3}x \le 2$

$-2 \le 2-\dfrac{2}{3}x \le 4 \qquad \therefore -2 \le y \le 4$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 y는 -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4의 7개이다.

07 답 ③

조건 (가)에서 $\dfrac{x}{-3}+4<0$이므로

$-\dfrac{x}{3}<-4 \qquad \therefore x>12 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 $3<\dfrac{3}{4}(x-5) \le 9$이므로

$4<x-5 \le 12 \qquad \therefore 9<x \le 17 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $12<x \le 17$이므로 조건을 만족시키는 자연수 x의 값은 13, 14, 15, 16, 17이고 그 합은

$13+14+15+16+17=75$

08 답 -1

$(x+1) \bigtriangledown (2x+m) \ge 2$에서

$3(x+1)-4(2x+m) \ge 2$

$3x+3-8x-4m \ge 2$

$-5x \ge 4m-1 \qquad \therefore x \le \dfrac{-4m+1}{5}$

이 부등식을 만족시키는 x의 값 중 가장 큰 값이 1이므로

$\dfrac{-4m+1}{5}=1$, $-4m+1=5$, $-4m=4$

$\therefore m=-1$

09 답 ③

해결 key Point!

$x=a$가 $x \ge b$를 만족시키지 않으면 $x=a$는 $x<b$를 만족시켜야 한다.

$x=10$이 주어진 부등식을 만족시키지 않으려면 $x=10$은

$0.3(x-a)-\dfrac{x}{5}<0.1a-\dfrac{1}{2}$을 만족시켜야 하므로

$0.3(10-a)-2<0.1a-\dfrac{1}{2}$이어야 한다.

이 식의 양변에 10을 곱하면

$3(10-a)-20<a-5$, $30-3a-20<a-5$

$4a>15 \qquad \therefore a>\dfrac{15}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 a의 값은 4이다.

10 답 ③

$|x-1| \le 5$에서

(i) $x \ge 1$일 때

$x-1 \le 5$에서 $x \le 6$

$\therefore 1 \le x \le 6 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $x<1$일 때

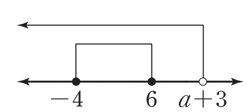
$-(x-1) \le 5$에서

$-x+1 \le 5$, $x \ge -4$

$\therefore 4 \le x < 1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-4 \le x \le 6$

이때 $|x-1| \le 5$의 해가 $x<a+3$을 만족시키려면 오른쪽 그림과 같이 $a+3>6$이어야 한다.



$a+3>6$에서 $a>3$

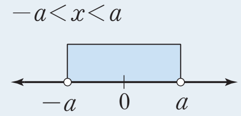
따라서 조건을 만족시키는 가장 작은 정수 a의 값은 4이다.

Level UP

절댓값은 원점으로부터의 거리를 나타내므로 양수 a에 대하여 다음과 같다.

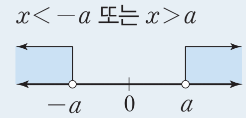
① $|x|<a$이면

$-a<x<a$



② $|x|>a$이면

$x<-a$ 또는 $x>a$



11 답 $\frac{33}{4}<a\leq10$

해결 key Point!

부등식을 푼 후, 수직선을 이용하여 조건을 만족시키는 a의 값의 범위를 찾아야 한다.

1단계 주어진 부등식을 정리하여 x의 값의 범위 구하기

$\frac{3(x-2)}{2}+a>-\frac{x}{4}$의 양변에 4를 곱하면

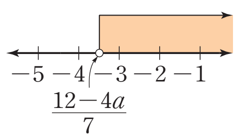
$6(x-2)+4a>-x$, $6x-12+4a>-x$

$7x>12-4a$

$\therefore\ x>\frac{12-4a}{7}$

2단계 부등식을 만족시키는 음의 정수가 3개일 조건 구하기

이 부등식을 만족시키는 음의 정수 x가 3개이므로 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같이



$-4\leq\frac{12-4a}{7}<-3$이어야 한다.

3단계 a의 값의 범위 구하기

$-28\leq12-4a<-21$, $-40\leq-4a<-33$

$\therefore\ \frac{33}{4}<a\leq10$

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 부등식을 정리하여 x의 값의 범위를 구했다.	30 %
❷	부등식을 만족시키는 음의 정수가 3개일 조건을 구했다.	40 %
❸	a의 값의 범위를 구했다.	30 %

12 답 3

해결 key Point!

주어진 부등식의 해를 구한 후, 18과 서로소인 자연수가 5개가 될 조건을 생각해야 한다.

$2(a-x)\leq\frac{7-11x}{3}$의 양변에 3을 곱하면

$6(a-x)\leq7-11x$, $6a-6x\leq7-11x$

$5x\leq7-6a$ $\quad\therefore\ x\leq\frac{7-6a}{5}$

이때 18과 서로소인 자연수는 2의 배수도 3의 배수도 아닌 수이므로

1, 5, 7, 11, 13, 17, …

따라서 주어진 일차부등식을 만족시키는 x의 값 중 18과 서로소인 자연수 5개는 1, 5, 7, 11, 13이어야 하므로

$13\leq\frac{7-6a}{5}<17$이어야 한다.

$65\leq7-6a<85$, $58\leq-6a<78$

$\therefore\ -13<a\leq-\frac{29}{3}$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 -12, -11, -10의 3개이다.

13 답 ②

$0.3(x+a)\leq0.1x-0.9$의 양변에 10을 곱하면

$3(x+a)\leq x-9$, $3x+3a\leq x-9$

$2x\leq-9-3a$ $\quad\therefore\ x\leq\frac{-9-3a}{2}$

이 부등식을 만족시키는 양수 x가 존재하지 않으려면

$\frac{-9-3a}{2}\leq0$이어야 한다.

$-9-3a\leq0$, $3a\geq-9$

$\therefore\ a\geq-3$

따라서 음의 정수 a의 값은 -3, -2, -1이므로 그 곱은

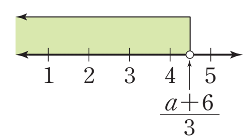
$-3\times(-2)\times(-1)=-6$

14 답 $\frac{2}{3}$

$3x-a<6$에서 $3x<a+6$

$\therefore\ x<\frac{a+6}{3}$

이 부등식을 만족시키는 자연수 x가 4개이므로 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같이 $4<\frac{a+6}{3}\leq5$이어야 한다.



$4<\frac{a+6}{3}\leq5$에서

$12<a+6\leq15$ $\quad\therefore\ 6<a\leq9$

한편, $ay+12=0$에서 $ay=-12$

$\therefore\ y=-\frac{12}{a}$

이때 $6<a\leq9$에서 $\frac{1}{9}\leq\frac{1}{a}<\frac{1}{6}$

$-2<-\frac{12}{a}\leq-\frac{4}{3}$ $\quad\therefore\ -2<y\leq-\frac{4}{3}$

따라서 $m=-2$, $n=-\frac{4}{3}$이므로

$n-m=-\frac{4}{3}-(-2)=\frac{2}{3}$

꿀 한줄평

부등식의 해가 $x<k$일 때, 부등식을 만족시키는 자연수 x가 4개이려면 $4<k\leq5$임에 유의한다.

$k=4$이면 $x<4$이므로 부등식을 만족시키는 자연수 x가 1, 2, 3의 3개이다.

$k=5$이면 $x<5$이므로 부등식을 만족시키는 자연수 x가 1, 2, 3, 4의 4개가 된다.

15 답 $\frac{14}{5}$

해결 key Point!

주어진 부등식을 풀어 주어진 해와 비교해야 한다.

$k(x-2) \le 5x+1$에서

$kx-2k \le 5x+1$, $(k-5)x \le 2k+1$

이때 부등식의 해가 $x \ge -3$이므로 $k-5<0$이어야 한다.

$\therefore x \ge \dfrac{2k+1}{k-5}$

즉, $\dfrac{2k+1}{k-5}=-3$이므로

$2k+1=-3k+15$, $5k=14$ $\quad \therefore k=\dfrac{14}{5}$

꿀 한줄평

주어진 부등식의 부등호의 방향과 해로 주어진 부등식의 부등호의 방향을 비교하여 일차항의 계수의 부호를 판단한다. 즉, 부등호의 방향이 바뀌었으므로 x의 계수 $k-5$가 음수임을 알 수 있다.

16 답 ①

해결 key Point!

주어진 부등식은 a, b의 대소 관계에 따라 해가 달라짐에 주의하여 보기의 부등식의 해를 구해야 한다.

$ax+3<bx+5$에서 $(a-b)x<2$

ㄱ. $a>b$에서 $a-b>0$이므로 $x<\dfrac{2}{a-b}$

ㄴ. $a<b$에서 $a-b<0$이므로 $x>\dfrac{2}{a-b}$

ㄷ. $b=-a$이므로 $2ax<2$

이때 $a>0$이므로 $x<\dfrac{1}{a}$

ㄹ. $b=-a$이므로 $2ax<2$

이때 $a<0$이므로 $x>\dfrac{1}{a}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17 답 풀이 참조

해결 key Point!

식을 정리한 후, x의 계수의 부호가 양수, 0, 음수인 경우로 나누어서 부등식의 해를 구해야 한다.

1단계 주어진 부등식 정리하기

$ax+2b<2b(x-3)+4a$에서

$ax+2b<2bx-6b+4a$, $ax-2bx<4a-8b$

$\therefore (a-2b)x<4(a-2b)$

2단계 x의 계수가 양수일 때, x의 값의 범위 구하기

(i) $a-2b>0$, 즉 $a>2b$일 때

$a-2b>0$이므로 $x<4$

3단계 x의 계수가 0일 때, 해 구하기

(ii) $a-2b=0$, 즉 $a=2b$일 때

$a-2b=0$이므로 $0 \times x<0$

따라서 해가 없다.

4단계 x의 계수가 음수일 때, x의 값의 범위 구하기

(iii) $a-2b<0$, 즉 $a<2b$일 때

$a-2b<0$이므로 $x>4$

(i)～(iii)에 의하여 $a>2b$일 때 $x<4$, $a=2b$일 때 해가 없다., $a<2b$일 때 $x>4$이다.

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 부등식을 정리했다.	10 %
❷	x의 계수가 양수일 때, x의 값의 범위를 구했다.	30 %
❸	x의 계수가 0일 때, 해를 구했다.	30 %
❹	x의 계수가 음수일 때, x의 값의 범위를 구했다.	30 %

Level UP

x에 대한 일차부등식 $ax>b$에서 a에 대한 조건이 없다면 a의 부호에 따라 x의 값의 범위를 구해야 한다.

18 답 ④

$3(2ax-3)<-2\left(9x-\dfrac{3}{2}a\right)$에서

$6ax-9<-18x+3a$, $6(a+3)x<3(a+3)$

$\therefore (a+3)x<\dfrac{a+3}{2}$

이때 $a<-3$에서 $a+3<0$이므로

$x>\dfrac{1}{2}$

따라서 부등식을 만족시키는 x의 값 중 가장 작은 정수는 1이다.

19 답 ⑤

$\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{3}a-\dfrac{1}{2}\right)<\dfrac{1}{4}(a-8)$에서

$\dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{4}<\dfrac{1}{4}a-2$

양변에 4를 곱하면

$2a-3<a-8$ $\quad \therefore a<-5$

$ax-4a<20-5x$에서 $(a+5)x<4(a+5)$

이때 $a<-5$에서 $a+5<0$이므로

$x>4$

20 답 ⑤

$a-2b=0$에서 $a=2b$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $(a-b)x>2a+b-8$에 대입하면

$bx>5b-8$

이때 부등식의 해가 $x>3$이므로 $b>0$이어야 한다.

$\therefore x>\dfrac{5b-8}{b}$

즉, $\dfrac{5b-8}{b}=3$이므로

$5b-8=3b$, $2b=8$ $\quad \therefore b=4$

$b=4$를 ㉠에 대입하면

$a=2\times4=8$

$\therefore ab=8\times4=32$

21 답 $x<9$

$(a+b)x+(a-b)<0$에서 $(a+b)x<b-a$

이때 $(a+b)x<b-a$의 해가 $x<-\frac{1}{5}$이므로

$a+b>0$ $\cdots\cdots$ ㉠

이어야 한다.

$\therefore x<\frac{b-a}{a+b}$

즉, $\frac{b-a}{a+b}=-\frac{1}{5}$이므로

$5b-5a=-a-b$, $-4a=-6b$

$\therefore a=\frac{3}{2}b$

$a=\frac{3}{2}b$를 ㉠에 대입하면

$\frac{5}{2}b>0$

$\therefore b>0$, $a>0$

$a=\frac{3}{2}b$를 $(2a-b)x-(6a+9b)<0$에 대입하면

$2bx-18b<0$, $2bx<18b$

이때 $b>0$이므로 $x<9$

22 답 ④

$a(2x-1)<bx$에서 $2ax-a<bx$

$(2a-b)x<a$

이때 부등식의 해가 $x>1$이므로

$2a-b<0$ $\cdots\cdots$ ㉠

이어야 한다.

$\therefore x>\frac{a}{2a-b}$

즉, $\frac{a}{2a-b}=1$이므로

$a=2a-b$ $\quad\therefore a=b$

$a=b$를 ㉠에 대입하면 $a<0$

한편, $a=b$를 $ax\le b$에 대입하면 $ax\le a$

이때 $a<0$이므로 $x\ge1$

또, $x=1$을 $ax\le b$에 대입하면 $a\le b$

이때 $a=b$이므로 $a\le b$는 성립한다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

23 답 ⑤

해결 key Point!

주어진 부등식의 해가 무수히 많은 경우 주어진 부등식을 $px\ge q$의 꼴로 변형한 후, $p=0$, $q\le0$이어야 함을 이용해야 한다.

$a(x-5)\ge6x-3b$에서 $ax-5a\ge6x-3b$

$(a-6)x\ge5a-3b$

이때 부등식의 해가 무수히 많으므로

$a-6=0$, $5a-3b\le0$

즉, $a=6$이고 $5a-3b=30-3b\le0$이므로

$3b\ge30$ $\quad\therefore b\ge10$

따라서 가장 작은 b의 값은 10이다.

Level UP

x에 대한 일차부등식 $ax\ge b$에서

① 해가 없으면 $a=0$, $b>0$

② 해가 무수히 많으면 $a=0$, $b\le0$

24 답 ②

해결 key Point!

주어진 부등식의 해가 없는 경우 주어진 부등식을 $px\le q$의 꼴로 변형한 후, $p=0$, $q<0$이어야 함을 이용해야 한다.

$a(3x-1)\le b(x+1)$에서 $3ax-a\le bx+b$

$(3a-b)x\le a+b$

이때 $(3a-b)x\le a+b$의 해가 없으므로

$3a-b=0$, $a+b<0$

즉, $b=3a$이고 $a+b=4a<0$이므로

$a<0$

따라서 부등식 $ax+5b<3a-bx$에 $b=3a$를 대입하면

$ax+15a<3a-3ax$, $4ax<-12a$

이때 $a<0$이므로 $x>-3$

Level UP

x에 대한 일차부등식 $ax\le b$에서

① 해가 없으면 $a=0$, $b<0$

② 해가 무수히 많으면 $a=0$, $b\ge0$

02 일차부등식의 활용

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

50쪽~52쪽

01 ①	02 54	03 ④	04 ③	05 8.75점
06 ⑤	07 ②	08 ①	09 ③	10 50분
11 ②	12 ⑤	13 시속 43 km		14 ⑤
15 ④	16 ②	17 ③	18 ④	

01 답 ①

어떤 수를 x라고 하면

$8x+5\geq 6(x+3)$

$8x+5\geq 6x+18$, $2x\geq 13$

$\therefore x\geq \frac{13}{2}$

따라서 이를 만족시키는 수가 아닌 것은 ①이다.

02 답 54

1단계 일차부등식 세우기

연속하는 세 짝수를 $x-2$, x, $x+2$라고 하면

$3(x-2)-4\leq x+(x+2)+7$

2단계 일차부등식 풀기

$3x-6-4\leq 2x+9$

$\therefore x\leq 19$

3단계 세 짝수 중 가장 큰 세 수의 합 구하기

이때 x는 짝수이므로 가장 큰 x의 값은 18이고, 세 짝수는 16, 18, 20이다.

따라서 세 수의 합은

$16+18+20=54$

단계	채점 기준	비율
❶	일차부등식을 세웠다.	40 %
❷	일차부등식을 풀었다.	30 %
❸	세 짝수 중 가장 큰 세 수의 합을 구했다.	30 %

03 답 ④

도윤이가 햄버거를 x개 구입한다고 하면 핫도그는 $(15-x)$개 구입할 수 있으므로

$8000x+3000(15-x)\leq 100000$

$8000x+45000-3000x\leq 100000$

$5000x\leq 55000$ $\quad\therefore x\leq 11$

따라서 햄버거는 최대 11개 구입할 수 있다.

04 답 ③

상자의 개수를 x라고 하면

$80+25x\leq 540$

$25x\leq 460$ $\quad\therefore x\leq 18.4$

따라서 한 번에 상자를 최대 18개 운반할 수 있다.

05 답 8.75점

해결 key Point!

(총점)=(평균)×(심판 수)임을 이용해야 한다.

예선에서 5명의 심판에게 받은 점수의 평균은 8점이므로 예선에서 받은 총점은 $5\times 8=40$(점)이다.

결선에서 10명의 심판에게 받은 점수의 평균을 x점이라고 하면 결선에서 받은 총점은 $10x$점이다.

예선과 결선의 두 경기에서 받은 점수의 전체 평균이 8.5점 이상이 되어야 하므로

$\frac{40+10x}{15}\geq 8.5$

$40+10x\geq 127.5$, $10x\geq 87.5$

$\therefore x\geq 8.75$

따라서 결선에서 받은 점수의 평균은 8.75점 이상이어야 한다.

06 답 ⑤

정가를 x원이라고 하면 정가에서 25 %를 할인한 가격은

$\left(1-\frac{25}{100}\right)x=\frac{3}{4}x$(원)

할인 판매 했을 때 원가의 20 % 이상의 이익을 얻어야 하므로

$\frac{3}{4}x-12500\geq 12500\times\frac{20}{100}$

$\frac{3}{4}x-12500\geq 2500$

$\frac{3}{4}x\geq 15000$ $\quad\therefore x\geq 20000$

따라서 정가는 최소 20000원 이상이어야 한다.

참고 (정가)=(원가)+(이익)이므로 (이익)=(정가)−(원가)이다.

07 답 ②

x주 후부터 준서의 저축액이 연아의 저축액보다 많아진다고 하면

$40000+6000x>45000+60000-4000(x-1)$

$40000+6000x>105000-4000x+4000$

$10000x>69000$ $\quad\therefore x>6.9$

따라서 준서의 저축액이 연아의 저축액보다 많아지는 것은 7주 후부터이다.

08 답 ①

주차 시간을 x분이라고 하면

$3000+50(x-30)\leq 8000$

$3000+50x-1500\leq 8000$

$50x\leq 6500$ $\quad\therefore x\leq 130$

따라서 최대 130분, 즉 2시간 10분 주차할 수 있다.

09 답 ③

학생 수를 x라고 하면

$5000\times 2+3000x>(5000\times 2+3000\times 23)\times\left(1-\frac{20}{100}\right)$

$10000+3000x>79000\times\frac{4}{5}$

$10000+3000x>63200$, $3000x>53200$

$\therefore x>17.733\cdots$

따라서 학생이 18명 이상일 때 25명의 단체 입장료를 내는 것이 유리하다.

10 답 50분

1단계 한 달 통화 시간을 x분이라고 할 때, A, B 두 휴대폰 요금제의 이용 요금을 각각 x에 대한 식으로 나타내기

세림이의 한 달 통화 시간을 x분이라고 하면

$$(\text{A 요금제})=20000\times\left(1-\frac{10}{100}\right)+120x$$
$$=18000+120x\ (\text{원})$$

$(\text{B 요금제})=15000+180x$ (원)

2단계 일차부등식 세우기

B 요금제로 바꾸는 것이 유리해야 하므로

$18000+120x>15000+180x$

3단계 일차부등식을 풀고 B 요금제로 바꾸는 것이 유리한 통화 시간 구하기

$60x<3000$ $\therefore x<50$

따라서 통화 시간이 50분 미만일 때, B 요금제로 바꾸는 것이 유리하다.

단계	채점 기준	비율
❶	한 달 통화 시간을 x분이라고 할 때, A, B 두 휴대폰 요금제의 이용 요금을 각각 x에 대한 식으로 나타냈다.	40 %
❷	일차부등식을 세웠다.	30 %
❸	B 요금제로 바꾸는 것이 유리한 통화 시간을 구했다.	30 %

11 답 ②

사다리꼴의 윗변의 길이를 x m라고 하면

$\frac{1}{2}\times(x+14)\times10\geq115$

$5x+70\geq115$, $5x\geq45$

$\therefore x\geq9$

따라서 사다리꼴의 윗변의 길이는 9 m 이상이어야 한다.

참고 (사다리꼴의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\{$(윗변의 길이)+(아랫변의 길이)$\}\times$(높이)

12 답 ⑤

n각형의 내각의 크기의 합은 $180°\times(n-2)$이므로

$180°\times(n-2)<1230°$

$180°\times n-360°<1230°$, $180°\times n<1590°$

$\therefore n<8.833\cdots$

따라서 내각의 크기의 합이 1230°보다 작은 다각형이 아닌 것은 ⑤이다.

13 답 시속 43 km

해결 key Point!

배가 강을 거슬러 올라갈 때 배의 실제 속력은 배의 속력에서 강의 속력을 뺀 값임을 알아야 한다.

강을 거슬러 올라갈 때의 배의 속력을 시속 x km라고 하면 강의 속력이 시속 3 km이므로 강을 따라 내려갈 때의 배의 실제 속력은 시속 $37+3=40$ (km),

강을 거슬러 올라갈 때의 배의 실제 속력은 시속 $(x-3)$ km

총 6시간 이내에 왕복을 마쳐야 하므로

$\frac{120}{40}+\frac{120}{x-3}\leq6$

$\frac{120}{x-3}\leq3$

$120\leq3(x-3)$ ← $x-3>0$이므로 양변에 $x-3$을 곱한다.

$120\leq3x-9$, $3x\geq129$

$\therefore x\geq43$

따라서 강을 거슬러 올라갈 때의 배의 속력은 시속 43 km 이상이어야 한다.

Level UP

흐르는 강물에서

① (강을 거슬러 올라갈 때의 배의 속력)

=(정지한 물에서의 배의 속력)−(강물의 속력)

② (강을 따라 내려갈 때의 배의 속력)

=(정지한 물에서의 배의 속력)+(강물의 속력)

임을 이용한다.

14 답 ⑤

영화관에서 편의점까지의 거리를 x m라고 하면

$\frac{x}{80}+5+\frac{x}{100}\leq50$

$5x+2000+4x\leq20000$

$9x\leq18000$

$\therefore x\leq2000$

따라서 영화관에서 2000 m 이내에 있는 편의점에 다녀올 수 있다.

15 답 ④

두 사람이 x분 동안 걷는다고 하면

현진이가 x분 동안 걸은 거리는 $70x$ m이고, 은하가 x분 동안 걸은 거리는 $40x$ m이므로

$70x+40x\geq1650$, $110x\geq1650$

$\therefore x\geq15$

따라서 현진이와 은하는 최소 15분 걸어야 한다.

16 답 ②

해결 key Point!

물탱크의 물이 완전히 바닥날 때까지 걸리는 시간을 t분이라 하고 조건에 맞게 부등식을 세워야 한다.

물탱크의 물은 완전히 바닥날 때까지 걸리는 시간을 t분이라고 하자. 물탱크에 처음 들어 있던 물의 양이 $1200\ \mathrm{L}$이고 t분 동안 들어 온 물의 양은 $20t\ \mathrm{L}$이므로 총 퍼내야 할 물의 양은
$(1200+20t)\ \mathrm{L}$
t분 동안 펌프 2대가 퍼내는 물의 양은
$2\times60\times t=120t\ (\mathrm{L})$
즉, t분 안에 물이 완전히 바닥나려면
$120t\ge1200+20t$
$100t\ge1200 \qquad \therefore\ t\ge12$
따라서 물탱크의 물이 완전히 바닥날 때까지 최소 12분이 걸린다.

17 답 ③

5 %의 소금물을 x g 섞는다고 하면
$\frac{5}{100}\times x+\frac{10}{100}\times300\ge\frac{8}{100}\times(x+300)$
$5x+3000\ge8x+2400$
$3x\le600 \qquad \therefore\ x\le200$
따라서 5 %의 소금물을 최대 200 g 섞을 수 있다.

18 답 ④

해결 key Point!

더 넣는 물의 양을 x g이라고 하고 농도를 이용하여 부등식을 세워야 한다.

20 %의 소금물 300 g에 들어있는 소금의 양은
$\frac{20}{100}\times300=60\ (\mathrm{g})$
더 넣는 물의 양을 x g이라고 하면
$\frac{60}{300+x}\times100\le12$
$6000\le12(300+x)$ ← $x>0$이므로 양변에 $300+x$를 곱한다.
$6000\le3600+12x,\ 12x\ge2400$
$\therefore\ x\ge200$
따라서 최소 200 g의 물을 넣어야 한다.

꿀 한줄평

소금물의 농도를 다루는 문제에서 물이 증발되거나 물을 더 넣었을 때, 소금의 양은 변하지 않는다는 사실을 이용한다.

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

53쪽～58쪽

01 96	02 27일 후	03 ④	04 78.5점	05 7명
06 ②	07 ②	08 30송이		
09 최소 개수: 33, 최대 개수: 50			10 ②	11 44
12 ①	13 어른 수: 245, 어린이 수: 255, 동물 먹이 봉지 수: 91			
14 12명	15 5초 초과 12초 이하		16 4	17 25
18 ①	19 5, 6, 7	20 10	21 30	22 ②
23 26분	24 ③	25 3대	26 ③	27 18분
28 ②	29 35 km	30 오후 2시 22분부터 오후 2시 26분까지		
31 250	32 3분	33 300 g 이상 400 g 이하		
34 ⑤	35 ③	36 60 g		

01 답 96

해결 key Point!

십의 자리의 숫자가 m, 일의 자리의 숫자가 n인 두 자리 자연수는 $10m+n$이다.

일의 자리의 숫자를 x라고 하면 조건 ㈎에 의하여 십의 자리의 숫자는 $2x-1$이다.
처음 수는 $10(2x-1)+x$이고,
처음 수에서 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수는 $10x+(2x-1)$이므로 조건 ㈏에 의하여
$10x+(2x-1)>10(2x-1)+x-27$
$12x-1>21x-37,\ 9x<36$
$\therefore\ x<4$
즉, x의 값은 1, 2, 3이다.
(i) $x=1$일 때
십의 자리의 숫자는 $2x-1=2\times1-1=1$이므로 처음 수는 11이다.
(ii) $x=2$일 때
십의 자리의 숫자는 $2x-1=2\times2-1=3$이므로 처음 수는 32이다.
(iii) $x=3$일 때
십의 자리의 숫자는 $2x-1=2\times3-1=5$이므로 처음 수는 53이다.
(i)～(iii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 두 자리 자연수는 11, 32, 53이므로 그 합은
$11+32+53=96$

02 답 27일 후

해결 key Point!

먼저 두 사람의 10일 후 가진 젤리의 개수를 구해야 한다.

선호는 매일 젤리 2개를 먹고, 젤리 1개를 동주에게 주므로 젤

리가 매일 3개씩 줄어든다.
동주는 매일 젤리 2개를 먹고, 젤리 1개를 선호에게 받으므로 젤리가 매일 1개씩 줄어든다.
10일 후 선호는 젤리를 30개 구매했으므로 선호가 가진 젤리는 $54-3\times10+30=54$(개)이고, 동주가 가진 젤리는 $31-1\times10=21$(개)이다.
10일 후를 기준으로 x일이 지났을 때, 두 사람이 가진 젤리의 개수는 선호가 $54-3x$, 동주가 $21-x$이다.
x일 후 동주가 가진 젤리의 개수가 선호가 가진 젤리의 개수보다 많아진다고 하면
$54-3x<21-x$
$2x>33 \quad \therefore x>16.5$
따라서 동주가 젤리를 추가로 30개 구매한 10일 후를 기준으로 17일 후에 동주의 젤리의 개수가 선호의 젤리의 개수보다 더 많아지므로 구하는 날은 $10+17=27$(일) 후이다.

꿀 한줄평
젤리의 개수를 첫날을 기준으로 세도 되지만, 10일 후에 젤리를 추가 구매하므로 10일 후의 젤리의 개수를 기준으로 문제를 푸는 것이 더 편리하다.
10일 후의 두 사람이 가진 젤리의 개수를 구한 다음, 10일 후를 기준으로 x일 후 젤리의 개수에 대한 부등식을 세운 후, 그 부등식을 푼다. 이때 답은 부등식의 후에 10일을 더한 값이 되어야 한다는 것에 유의한다.

03 답 ④
3학년의 국어 성적의 평균을 x점이라고 하면
$\frac{120\times68+130\times75+150x}{120+130+150}\geq72$
$\frac{17910+150x}{400}\geq72$
$17910+150x\geq28800,\ 150x\geq10890$
$\therefore x\geq72.6$
따라서 3학년의 국어 성적의 평균은 72.6점 이상이어야 한다.

04 답 78.5점
첫 번째 시험 점수의 평균을 x점이라고 하면 두 번째 시험 점수의 총점은
$10(x+8)+5(x-4)+25x=10x+80+5x-20+25x$
$=40x+60$(점)
두 번째 시험 점수의 평균이 80점 이상이려면
$\frac{40x+60}{40}\geq80$
$40x+60\geq3200,\ 40x\geq3140$
$\therefore x\geq78.5$
따라서 첫 번째 시험 점수의 평균은 최소 78.5점이어야 한다.

05 답 7명
1단계 두 반의 볼링 점수의 총합 구하기
A반 학생들의 볼링 점수의 총합은
$10\times90=900$(점)
B반 학생을 x명이라고 하면 B반 학생들의 볼링 점수의 총합은 $95x$점
2단계 부등식 세우기
A반과 B반 전체 학생들의 볼링 점수의 평균이 92점 이상이려면
$\frac{900+95x}{10+x}\geq92$
3단계 부등식을 풀고, B반의 최소 학생 수 구하기
$900+95x\geq920+92x$
$3x\geq20 \quad \therefore x\geq6.666\cdots$
따라서 B반 학생은 최소 7명이어야 한다.

단계	채점 기준	비율
❶	두 반의 볼링 점수의 총합을 구했다.	20 %
❷	부등식을 세웠다.	40 %
❸	B반의 최소 학생 수를 구했다.	40 %

06 답 ②
해결 key Point!
단위를 통일하여 식을 세워야 한다.

초콜릿 A를 x개 만든다고 하면 초콜릿 B는 $(35-x)$개 만들 수 있으므로
$80x+20(35-x)\leq1550$
$60x+700\leq1550$
$60x\leq850 \quad \therefore x\leq14.16\cdots$
따라서 초콜릿 A는 최대 14개 만들 수 있다.

07 답 ②
해결 key Point!
준비한 상자의 개수를 x라 하고 부등식을 세워야 한다.

준비한 상자의 개수를 x라고 하면 한 상자에 귤을 50개씩 담으면 준비한 상자를 전부 가득 채우고 마지막 상자만 5자리가 남으므로 처음 귤의 개수는 $50x-5$이다.
선별 과정에서 썩은 귤 40개를 골라낸 후의 귤의 개수는
$(50x-5)-40=50x-45$
선별 과정 후 귤을 준비한 상자에 40개씩 담으려 했더니 상자가 부족했으므로
$50x-45>40x$
$10x>45 \quad \therefore x>4.5$
따라서 준비한 상자는 5개 이상이다.

08 답 30송이

해결 key Point!

튤립을 최대로 구매하기 위해서는 튤립을 4송이씩 묶어서 팔 때 더 저렴하므로 5묶음을 다 사고 추가로 튤립을 구입할 때의 식을 세워야 한다.

튤립을 20송이 산다고 하면 한 송이당 평균 가격은

$\frac{4000\times5+2500}{20}=1125$(원)

따라서 튤립을 20송이 이상 살 수 있으므로 튤립을 x송이 $(x>20)$ 산다고 하면 묶음으로 산 튤립의 개수는 $5\times4=20$, 추가로 구입한 튤립의 개수는 $x-20$이다.

이때 튤립 한 송이당 평균 가격이 1150원 이하가 되어야 하므로

$\frac{5\times4000+1200(x-20)+2500}{x}\le1150$

$\frac{20000+1200x-24000+2500}{x}\le1150$

$\frac{1200x-1500}{x}\le1150$

$1200x-1500\le1150x$, $50x\le1500$

$\therefore\ x\le30$

따라서 튤립은 최대 30송이 살 수 있다.

09 답 최소 개수: 33, 최대 개수: 50

해결 key Point!

A 세트의 개수를 x로 놓고 조건을 이용하여 B 세트의 개수를 x에 대한 식으로 나타내야 한다.

A 세트의 개수를 x, B 세트의 개수를 y (x, y는 0 이상의 정수)라고 하면 A, B 두 가지 종류의 마카롱 세트를 만들기 위해서 초콜릿 맛은 200개를 사용했으므로

$4x+2y=200$, $2y=200-4x$

$\therefore\ y=100-2x$ …… ㉠

즉, A 세트의 개수는 x, B 세트의 개수는 $100-2x$이고, $y\ge0$이므로

$100-2x\ge0$, $2x\le100$

$\therefore\ x\le50$

한편, 딸기 맛은 최대 170개까지 사용할 수 있으므로

$2x+3y\le170$

이 부등식에 ㉠을 대입하면

$2x+3(100-2x)\le170$

$-4x+300\le170$, $4x\ge130$

$\therefore\ x\ge32.5$

따라서 $32.5\le x\le50$이므로 만들 수 있는 A 세트의 최소 개수는 33이고 최대 개수는 50이다.

10 답 ②

태블릿의 원가를 A원이라고 하면 정가는

$A\left(1+\frac{40}{100}\right)=\frac{7}{5}A$ (원)

정가에서 x % 할인한 가격은

$\frac{7}{5}A\left(1-\frac{x}{100}\right)$원

할인 판매 했을 때 원가의 5 % 이상의 이익은 남겨야 하므로

$\frac{7}{5}A\left(1-\frac{x}{100}\right)\ge A\left(1+\frac{5}{100}\right)$

$\frac{7}{5}\left(1-\frac{x}{100}\right)\ge\frac{105}{100}$, $700\left(1-\frac{x}{100}\right)\ge525$

$700-7x\ge525$, $7x\le175$

$\therefore\ x\le25$

따라서 정가를 최대 25 % 할인할 수 있다.

Level UP

원가가 a원인 제품에서

① b %의 이익을 붙인 가격은 $a\left(1+\frac{b}{100}\right)$원

② b % 할인한 가격은 $a\left(1-\frac{b}{100}\right)$원

11 답 44

1단계 물건의 정가와 할인한 가격을 식으로 나타내기

물건의 원가를 k원이라고 하면 정가는

$k\left(1+\frac{50}{100}\right)=\frac{3}{2}k$(원)

정가에서 x % 할인한 가격은

$\frac{3}{2}k\left(1-\frac{x}{100}\right)$원

2단계 부등식 세우기

할인 판매했을 때의 이익이 원가의 14 % 이상 20 % 이하가 되도록 하려면

$k\left(1+\frac{14}{100}\right)\le\frac{3}{2}k\left(1-\frac{x}{100}\right)\le k\left(1+\frac{20}{100}\right)$

3단계 부등식 풀기

$\frac{57}{50}\le\frac{3}{2}\left(1-\frac{x}{100}\right)\le\frac{6}{5}$

$\frac{19}{25}\le1-\frac{x}{100}\le\frac{4}{5}$, $-\frac{6}{25}\le-\frac{x}{100}\le-\frac{1}{5}$

$\therefore\ 20\le x\le24$

4단계 $a+b$의 값 구하기

따라서 $a=20$, $b=24$이므로

$a+b=20+24=44$

단계	채점 기준	비율
❶	물건의 정가와 할인한 가격을 식으로 나타냈다.	20 %
❷	부등식을 세웠다.	30 %
❸	부등식을 풀었다.	30 %
❹	$a+b$의 값을 구했다.	20 %

12 답 ①

쿠키 한 개를 만드는 데 들어가는 전체 재료비를 a원이라고 하면 쿠키 500개를 만드는 데 들어가는 총 재료비는 $500a$원이고, 부서진 쿠키가 50개이므로 판매 가능한 쿠키는 450개이다.
이때 쿠키 한 개의 원가에 x %의 이익을 붙여서 판매 가격을 정하면 총 판매 가격은

$450a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원

부서지지 않은 쿠키만 판매해서 전체 재료비의 8 % 이상의 이익을 남기려고 하므로

$450a\left(1+\frac{x}{100}\right)\ge 500a\times\left(1+\frac{8}{100}\right)$

$450a\left(1+\frac{x}{100}\right)\ge 500a\times\frac{27}{25}$, $450\left(1+\frac{x}{100}\right)\ge 540$

$1+\frac{x}{100}\ge\frac{6}{5}$, $\frac{x}{100}\ge\frac{1}{5}$

$\therefore\ x\ge 20$

따라서 쿠키 한 개의 원가에 최소 20 %의 이익을 붙여서 판매 가격을 정해야 한다.

13 답 어른 수: 245, 어린이 수: 255, 동물 먹이 봉지 수: 91

해결 key Point!

동물원에 입장한 어른 수를 x라고 하면 어린이 수는 $500-x$이다.

동물원에 입장한 어른 수를 x라고 하면 어린이 수는
$500-x$이고, 어린이 수는 어른 수보다 많으므로

$500-x>x$, $2x<500$

$\therefore\ x<250$ ······ ㉠

또, 판매한 동물 먹이 봉지 수를 y라고 하면 입장료와 동물 먹이 판매액의 총합이 290000원이므로

$500x+300(500-x)+1000y=290000$

$200x+150000+1000y=290000$

$200x+1000y=140000$, $1000y=140000-200x$

$\therefore\ y=\frac{700-x}{5}$ ······ ㉡

먹이가 가장 적게 팔린 경우, 즉 y의 값이 가장 작을 때는 x의 값이 가장 클 때이다.
이때 y는 정수이므로 x는 5의 배수이어야 하고, ㉠에 의하여 가장 큰 x의 값은 245이다. $x=245$를 ㉡에 대입하면

$y=\frac{700-245}{5}=91$

따라서 입장한 어른 수는 245, 어린이 수는
$500-245=255$이고 판매한 동물 먹이 봉지 수는 91이다.

꿀 한줄평

정수 또는 5의 배수 조건에 유의해서 문제에 접근해야 한다.
즉, $y=\frac{700-x}{5}$에서 y가 정수이려면 분자가 5의 배수이어야 하고, 700은 5의 배수이므로 x도 5의 배수이어야 한다.

14 답 12명

1단계 일반 요금을 낼 때와 단체 요금을 낼 때의 금액을 식으로 나타내기

입장하려는 실제 어른 수를 x라고 하면 청소년 수는
$25-x$이다.
일반 요금으로 입장하는 경우 내야 할 금액은

$30000x+20000(25-x)=10000x+500000$(원)

어른을 20명으로 생각하여 할인받는 경우 내야 할 금액은

$30000\times\left(1-\frac{15}{100}\right)\times 20+20000\times 5=610000$(원)

2단계 일차부등식 세우기

단체 요금을 내고 입장하는 것이 더 저렴해야 하므로

$10000x+500000>610000$

3단계 일차부등식을 풀고 지불하는 금액이 더 유리한 어른 수 구하기

$10000x>110000$ $\quad\therefore\ x>11$

따라서 어른이 12명 이상이면 어른 20명의 단체 요금을 내고 입장하는 것이 유리하다.

단계	채점 기준	비율
❶	일반 요금을 낼 때와 단체 요금을 낼때의 금액을 식으로 나타냈다.	40 %
❷	일차부등식을 세웠다.	40 %
❸	지불하는 금액이 더 유리한 어른 수를 구했다.	20 %

15 답 5초 초과 12초 이하

해결 key Point!

△APE=(사각형 ABCD의 넓이)−△ABP−△PCE−△AED

점 P가 점 B를 출발하여 x초 동안 움직였을 때

$\overline{BP}=2x$ cm, $\overline{PC}=(24-2x)$ cm

이때 $0\le 2x\le 24$이므로 $0\le x\le 12$

점 E는 $\overline{CD}$의 중점이므로

$\overline{CE}=\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 20=10$ (cm)

(사각형 ABCD의 넓이)$=24\times 20=480$ (cm²)

$\triangle ABP=\frac{1}{2}\times 2x\times 20=20x$ (cm²)

$\triangle PCE=\frac{1}{2}\times(24-2x)\times 10=120-10x$ (cm²)

$\triangle AED=\frac{1}{2}\times 24\times 10=120$ (cm²)

$\therefore$ △APE

=(사각형 ABCD의 넓이)−△ABP−△PCE−△AED

$=480-20x-(120-10x)-120$

$=240-10x$ (cm²)

이때 △APE의 넓이가 190 cm² 미만이어야 하므로

$240-10x<190$

$10x>50$ $\quad\therefore\ x>5$

따라서 $5<x\le 12$이므로 점 P가 움직인 시간은 5초 초과 12초 이하이다.

16 답 4

$\overline{AP}=x$라고 하면 $\overline{BP}=6-x$

(사다리꼴 ABCD의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(3+9)\times6=36$

$\triangle ADP=\frac{1}{2}\times3\times x=\frac{3}{2}x$

$\triangle PBC=\frac{1}{2}\times9\times(6-x)=27-\frac{9}{2}x$

$\therefore$ $\triangle DPC=$(사다리꼴 ABCD의 넓이)$-\triangle ADP-\triangle PBC$

$=36-\frac{3}{2}x-\left(27-\frac{9}{2}x\right)=9+3x$

이때 $\triangle DPC$의 넓이가 사다리꼴 ABCD의 넓이의 $\frac{7}{12}$ 이하가 되어야 하므로

$9+3x\le36\times\frac{7}{12}$

$9+3x\le21$, $3x\le12$ $\quad\therefore x\le4$

따라서 $0\le\overline{AP}\le4$이므로 $a=4$이다.

17 답 25

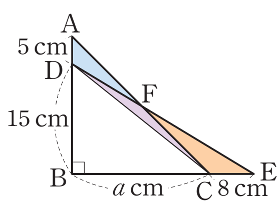
해결 key Point!

$\triangle ADF$, $\triangle FCE$의 넓이를 구하는 것은 어려우므로 $\triangle ADC$, $\triangle DCE$의 넓이를 이용해야 한다.

$\triangle ADF+\triangle DCF=\triangle ADC$,

$\triangle FCE+\triangle DCF=\triangle DCE$

이므로 삼각형 ADF의 넓이가 삼각형 FCE의 넓이보다 크려면 삼각형 ADC의 넓이가 삼각형 DCE의 넓이보다 크면 된다.



$\triangle ADC=\frac{1}{2}\times5\times a=\frac{5}{2}a\ (\text{cm}^2)$,

$\triangle DCE=\frac{1}{2}\times8\times15=60\ (\text{cm}^2)$

이므로 $\frac{5}{2}a>60$ $\quad\therefore a>24$

따라서 삼각형 ADF의 넓이가 삼각형 FCE의 넓이보다 클 때, 가장 작은 자연수 a의 값은 25이다.

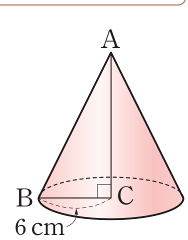
18 답 ①

해결 key Point!

직각삼각형의 한 변을 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 입체도형은 원뿔이므로 다음의 원뿔의 부피 공식을 이용해야 한다.

⇨ (원뿔의 부피)$=\frac{1}{3}\times\pi\times$(밑면의 반지름의 길이)$^2\times$(높이)

직각삼각형 ABC를 $\overline{AC}$를 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 회전체는 오른쪽 그림과 같은 원뿔이다.



$\overline{AC}=x$ cm라고 하면 회전체의 부피가 $108\pi\ \text{cm}^3$ 이하이므로

$\frac{1}{3}\times\pi\times6^2\times x\le108\pi$

$12\pi x\le108\pi$ $\quad\therefore x\le9$

따라서 $\overline{AC}$의 길이는 9 cm 이하이다.

19 답 5, 6, 7

해결 key Point!

구멍을 x개 뚫은 후 입체도형의 겉넓이와 부피의 변화와 조건을 이용하여 부등식으로 나타내야 한다.

한 모서리의 길이가 10 cm인 정육면체 모양의 나무토막의 처음 겉넓이는 $(10\times10)\times6=600\ (\text{cm}^2)$,

처음 부피는 $10\times10\times10=1000\ (\text{cm}^3)$

구멍 1개의 크기는 가로와 세로의 길이가 모두 2 cm이고 높이는 10 cm이므로 구멍 1개를 뚫게 되면

나무토막의 윗면과 아랫면에서 사라지는 넓이의 합은

$(2\times2)\times2=8\ (\text{cm}^2)$

구멍의 옆면에 생기는 넓이는

$(2\times10)\times4=80\ (\text{cm}^2)$

즉, 구멍 1개를 뚫을 때마다 $80-8=72\ (\text{cm}^2)$의 겉넓이가 증가하게 된다.

또, 구멍 1개의 부피는 $2\times2\times10=40\ (\text{cm}^3)$

즉, 구멍 1개를 뚫을 때마다 $40\ \text{cm}^3$의 부피가 감소하게 된다.

구멍 x개를 뚫은 후 입체도형의 겉넓이는 처음 정육면체의 겉넓이보다 60 % 이상 증가해야 하므로

$72x\ge600\times\frac{60}{100}$

$72x\ge360$ $\quad\therefore x\ge5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

구멍 x개를 뚫어서 사라진 나무토막의 부피는 처음 부피의 30 % 이하이어야 하므로

$40x\le1000\times\frac{30}{100}$

$40x\le300$ $\quad\therefore x\le7.5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $5\le x\le7.5$이므로 조건을 만족시키는 구멍의 개수는 5, 6, 7이다.

꿀 한줄평

겉넓이의 변화를 구할 때 '사라지는 넓이'와 '생기는 넓이'를 동시에 고려해야 하므로 단순히 구멍의 옆면 넓이만 더하는 것이 아니라 줄어드는 윗면과 아랫면의 넓이를 빼야하는 것을 주의해야 한다.

20 답 10

해결 key Point!

필요한 벤치의 개수를 x라고 하면 벤치와 벤치 사이의 간격의 개수도 x임을 이용해야 한다.

필요한 벤치의 개수를 x라고 하면 벤치와 벤치 사이의 간격의 개수도 x이다.

호수의 둘레의 길이가 60 m, 벤치 하나의 가로의 길이가 1.2 m이므로 벤치와 벤치 사이의 간격은

$\frac{60-1.2x}{x}$ m

벤치와 벤치 사이의 간격이 5 m를 넘지 않아야 하므로

$\frac{60-1.2x}{x} \le 5$

$x>0$이므로 양변에 x를 곱한다.

$60-1.2x \le 5x$

$6.2x \ge 60 \qquad \therefore x \ge 9.677\cdots$

따라서 필요한 벤치의 최소 개수는 10이다.

21 답 30

해결 key Point!

한 쪽 벽면에 조형물을 n개 설치하면 그 사이 간격은 $(n-1)$개 임을 이용해야 한다.

가로의 길이가 36 m인 벽에 설치할 수 있는 조형물의 개수를 n이라고 하면 양쪽 끝(귀퉁이)에 조형물을 반드시 설치해야 하므로 간격의 개수는 조형물보다 1개 적은 $n-1$이다.

또, 전시실의 네 귀퉁이에는 조형물을 반드시 설치하고 조형물 사이의 간격이 3 m를 넘지 않아야 하므로

$\frac{36-1\times n}{n-1} \le 3$

$n-1>0$이므로 양변에 $n-1$을 곱한다.

$36-n \le 3(n-1)$

$36-n \le 3n-3,\ 4n \ge 39$

$\therefore n \ge 9.75$

즉, 길이가 36 m인 벽에는 최소 10개의 조형물을 설치할 수 있다.

마찬가지로 길이가 24 m인 벽에 설치할 수 있는 조형물의 개수를 m이라고 하면 간격의 개수는 $m-1$이다.

또, 전시실의 네 귀퉁이에는 조형물을 반드시 설치하고 조형물 사이의 거리는 3 m를 넘지 않아야 하므로

$\frac{24-1\times m}{m-1} \le 3$

$m-1>0$이므로 양변에 $m-1$을 곱한다.

$24-m \le 3(m-1)$

$24-m \le 3m-3,\ 4m \ge 27$

$\therefore m \ge 6.75$

즉, 길이가 24 m인 벽에는 최소 7개의 조형물을 설치할 수 있다.

따라서 조형물을 최소로 설치하려고 할 때, 필요한 조형물의 개수는 $(10\times 2)+(7\times 2)-4=30$

Level UP

조형물을 네 귀퉁이에는 반드시 설치해야 하므로 개수를 셀 때 가로, 세로에 설치된 조형물의 개수에서 겹치는 것을 빼야함에 유의한다.

22 답 ②

호스 B를 사용한 시간을 x분이라고 하면 호스 A를 사용할 수 있는 시간은 $(30-x)$분이므로

$4(30-x)+9x \ge 180$

$120+5x \ge 180,\ 5x \ge 60 \qquad \therefore x \ge 12$

따라서 물통을 가득 채우려면 호스 B는 최소 12분 사용해야 한다.

23 답 26분

해결 key Point!

배터리 공유를 시작한 지 x분이 지났을 때 두 사람의 배터리 잔량을 식으로 나타내야 한다.

1단계 철수와 영희의 배터리 잔량의 1분당 변화율 구하기

철수의 배터리는 1분에 30 mAh를 소모하고 60 mAh가 충전되므로 배터리 잔량은 $-30+60=30$ (mAh), 즉 30 mAh씩 증가한다. 이때 철수의 배터리 전체 용량이 3000 mAh이므로 철수의 배터리 잔량은 1분에

$\frac{30}{3000}\times 100=1(\%)$씩 증가한다.

영희의 배터리는 1분에 20 mAh를 소모하고 60 mAh를 철수에게 보내주므로 배터리 잔량은 $-20-60=-80$ (mAh), 즉 80 mAh씩 감소한다. 이때 영희의 배터리 전체 용량이 4000 mAh이므로 영희의 배터리 잔량은 1분에

$\frac{80}{4000}\times 100=2(\%)$씩 감소한다.

2단계 일차부등식 세우기

배터리 공유를 시작한 지 x분 후 철수와 영희의 배터리 잔량(%)은 각각 $12+x$, $90-2x$이므로 영희의 배터리 잔량(%)이 철수의 배터리 잔량(%)과 같거나 낮아지려면

$90-2x \le 12+x$

3단계 일차부등식을 풀고 영희의 배터리 잔량이 철수의 배터리 잔량과 같거나 낮아지는 시간 구하기

$3x \ge 78 \qquad \therefore x \ge 26$

따라서 영희의 배터리 잔량(%)이 철수의 배터리 잔량(%)과 같거나 낮아지는 것은 공유를 시작한 지 26분이 지났을 때이다.

단계	채점 기준	비율
❶	철수와 영희의 배터리 잔량의 1분당 변화율을 구했다.	40 %
❷	일차부등식을 세웠다.	30 %
❸	영희의 배터리 잔량이 철수의 배터리 잔량과 같거나 낮아지는 시간을 구했다.	30 %

24 답 ③

해결 key Point!

전체 해독할 암호의 양을 1로 놓고 각 컴퓨터의 1분당 해독량을 먼저 구해야 한다.

전체 해독할 암호의 양을 1이라고 하면 A 컴퓨터 1대의 1분 해독량은 $\frac{1}{10}$이고, B 컴퓨터 1대의 1분 해독량은 $\frac{1}{25}$이다.
B 컴퓨터의 개수를 x라고 하면 A 컴퓨터의 개수는 $10-x$이고, 2분 이내에 암호 해독을 완료한다는 것은 10대의 컴퓨터가 2분 동안 한 일의 양이 전체 일의 양보다 크거나 같아야 하므로

$2\left\{\frac{1}{10}(10-x)+\frac{x}{25}\right\}\ge 1$

$\frac{1}{5}(10-x)+\frac{2x}{25}\ge 1$, $5(10-x)+2x\ge 25$

$-3x+50\ge 25$, $-3x\ge -25$

$\therefore x\le 8.333\cdots$

따라서 2분 이내에 이 암호 해독을 완료하기 위해서 B 컴퓨터는 최대 8대 작동시킬 수 있다.

25 답 3대

해결 key Point!

처리할 전체 작업량을 1이라고 했을 때 각 기계가 한 시간 동안 처리할 수 있는 작업량을 먼저 구해야 한다.

1단계 전체 작업량을 1로 놓고 두 기계 A, B의 한 대당 1시간 동안 처리하는 작업량 구하기

처리해야 할 작업량을 1이라고 하면 기계 A 한 대로 처리하는 데 4시간이 걸리므로 기계 A 한 대로 1시간 동안 처리하는 작업량은 $\frac{1}{4}$이다.

또, 기계 B 네 대로 처리하는 데 5시간이 걸리므로 한 대로는 20시간이 걸린다. 즉, 기계 B 한 대로 1시간 동안 처리하는 작업량은 $\frac{1}{20}$이다.

2단계 일차부등식 세우기

기계 A의 개수를 x라고 하면 기계 B의 개수는 $10-x$이고, 1시간 이내에 작업을 모두 마쳐야 하므로

$\frac{1}{4}x+\frac{1}{20}(10-x)\ge 1$

3단계 일차부등식을 풀고 기계 A를 최소 몇 대 사용해야 하는지 구하기

$5x+(10-x)\ge 20$

$4x\ge 10$

$\therefore x\ge 2.5$

따라서 기계 A는 최소 3대 사용해야 한다.

단계	채점 기준	비율
❶	전체 작업량을 1로 놓고 두 기계 A, B의 한 대당 1시간 동안 처리하는 작업량 구하기	40 %
❷	일차부등식을 세웠다.	30 %
❸	기계 A를 최소 몇 대 사용해야 하는지 구했다.	30 %

26 답 ③

해결 key Point!

1개의 매표소에서 1분 동안 판매하는 표의 개수를 먼저 구해야 한다.

1개의 매표소에서 1분 동안 판매하는 표를 x장이라고 하면 3개의 매표 창구에서 줄을 서고 있는 사람 모두 표를 구매하는 데 20분이 걸리므로

$3\times 20x=300+5\times 20$

$60x=400$ $\quad\therefore x=\frac{20}{3}$

a개의 매표 창구에서 10분 이내에 줄을 서 있는 모든 사람들이 표를 구매하려면

$a\times 10\times \frac{20}{3}\ge 300+5\times 10$

$\frac{200}{3}a\ge 350$ $\quad\therefore a\ge 5.25$

따라서 매표 창구가 6개 이상 열려 있어야 하므로 적어도 3개의 매표 창구를 추가로 열어야 한다.

27 답 18분

해결 key Point!

두 사람이 같은 구간 안에 있으려면 두 사람 사이의 거리가 구간의 길이인 200 m 보다 짧아야 함을 이용해야 한다.

준호가 출발한 지 t분 후 수민이의 이동 거리는 $60(t+15)$ m, 준호의 이동 거리는 $100t$ m이다.
수민이와 준호가 처음으로 같은 구간에 있을 때에는
(수민이의 이동 거리)>(준호의 이동 거리)
이므로 이때 두 사람 사이의 거리가 구간의 길이인 200 m 미만이어야 한다.
즉, $60(t+15)-100t<200$이므로

$-40t+900<200$, $-40t<-700$

$\therefore t>\frac{35}{2}$

$t=\frac{35}{2}$일 때, 수민이의 이동거리는

$60\left(\frac{35}{2}+15\right)=1950\ (\mathrm{m})$

준호의 이동거리는

$100\times\frac{35}{2}=1750\ (\mathrm{m})$

이므로 거리의 차는 200 m가 되는 순간이지만 수민이는 10번째 구간에 있고 준호는 9번째 구간에 있다.
준호가 10번째 구간에 진입하는 시간은
$100t=1800$에서 $t=18$
이때 수민이의 이동 거리는 $60(18+15)=1980\ (\mathrm{m})$이므로 10번째 구간에 있다.
따라서 준호가 출발한 지 18분 후에 처음으로 두 사람이 같은 구간에 있게 된다.

참고 준호가 k번째 이정표에 도착했을 때의 거리는 구간을 $(k-1)$번 지난 거리이므로
$100t=200(k-1)$
$\therefore t=2(k-1)$
준호가 k번째 구간에 진입하는 시각이 $t=2(k-1)$분이므로 그 순간의 수민이의 위치는
$60\{2(k-1)+15\}=120k+780\ (\mathrm{m})$
즉, 수민이도 k번째 구간에 있으려면
$200(k-1)\le 120k+780<200k$
$\therefore 9.75<k\le 12.25$
따라서 가능한 k의 값은 10, 11, 12이고 가장 작은 값은 10이다.

꿀 한줄평

구하는 것은 시간이지만 몇 번째 구간에서 수민이와 준호가 만나는지 먼저 구해야 한다. 두 사람 사이의 거리가 한 구간의 길이보다 작아지는 때를 구하면 되지만 그때 같은 구간에 있는지 확인해야 한다. 한 구간의 길이보다 작아진 시각에 같은 구간에 있지 않으면 그때 두 사람이 위치한 구간을 구한 후, 같은 구간에 있게 되는 시간을 구해야 한다.

28 답 ②

해결 key Point!

문제에 나온 단위들이 서로 다르므로 먼저 제시된 속력을 모두 시속 기준으로 바꿔야 한다.

걸어간 거리가 500 m, 즉 0.5 km이므로 뛰어간 거리는 1.5 km이다.
뛰어 갈 때의 속력을 시속 x km라고 하면 걸어간 시간은 $\frac{0.5}{4}=\frac{1}{8}$(시간), 뛰어간 시간은 $\frac{1.5}{x}=\frac{3}{2x}$(시간)이고 집에서 학교까지 20분, 즉 $\frac{1}{3}$시간 안에 도착해야 하므로
$\frac{1}{8}+\frac{3}{2x}\le\frac{1}{3}$
$x>0$이므로 양변에 $24x$를 곱한다.
$3x+36\le 8x$
$5x\ge 36\qquad \therefore x\ge 7.2$
따라서 남은 거리는 시속 7.2 km 이상으로 뛰어야 한다.

29 답 35 km

해결 key Point!

강을 따라 내려갈 때의 유람선의 속력과 강을 거슬러 올라갈 때의 유람선의 속력을 각각 구해야 한다.

잔잔한 물에서의 유람선의 속력이 시속 24 km이고 강물의 속력이 시속 4 km이므로
강을 따라 내려갈 때의 유람선의 속력은 시속
$24+4=28\ (\mathrm{km})$
강을 거슬러 올라갈 때의 유람선의 속력은 시속
$24-4=20\ (\mathrm{km})$
출발지인 A 지점에서 x km 떨어진 강의 하류의 한 지점에서 20분 정박하고 다시 A 지점까지 돌아오는 데 3시간 20분, 즉 $\frac{10}{3}$시간 이하로 걸려야 하므로
$\frac{x}{28}+\frac{1}{3}+\frac{x}{20}\le\frac{10}{3}$
$\frac{x}{28}+\frac{x}{20}\le 3,\ 5x+7x\le 420$
$12x\le 420\qquad \therefore x\le 35$
따라서 출발지인 A 지점에서 가장 멀리 다녀올 수 있는 강의 하류의 한 지점까지의 거리는 35 km이다.

30 답 오후 2시 22분부터 오후 2시 26분까지

철수가 도서관을 출발한 지 x분 후에 와이파이가 모두 연결되지 않기 시작한다고 하면 철수의 속력이 분속 50 m이므로 x분 동안 이동한 거리는 $50x$ m이다.
와이파이가 모두 연결되지 않는 구간은 도서관을 기준으로 350 m 지점부터 $800-250=550\ (\mathrm{m})$ 지점 사이이므로
$350\le 50x\le 550\qquad \therefore 7\le x\le 11$
따라서 와이파이가 연결되지 않는 시간은 출발한 지 7분 후부터 11분 후까지이고 출발 시각이 오후 2시 15분이므로 와이파이가 모두 연결되지 않는 시간은 오후 2시 22분부터 오후 2시 26분까지이다.

31 답 250

해결 key Point!

민수와 영희가 이동한 시간이 같음을 이용하여 부등식을 세워야 한다.

민수가 분속 50 m로 둘레의 길이가 3 km, 즉 3000 m인 원 모양의 산책로를 한 바퀴 도는 데 걸리는 시간은
$\frac{3000}{50}=60$(분)
민수가 산책로를 한 바퀴 도는 60분 동안 두 사람의 이동 거리의 합은 $60(50+x)$ m이고 이때 두 사람이 3번 만나려면
$3\times 3000<60(50+x)\le 4\times 3000$
$150<50+x\le 200\qquad \therefore 100<x\le 150$
따라서 $a=100$, $b=150$이므로
$a+b=100+150=250$

Level UP

두 사람 A, B가 같은 지점에서 동시에 출발하여 산책로의 둘레를 따라 돌고 A가 B보다 빠르다고 하면
① 서로 반대 방향으로 돌아 처음으로 만날 때
(A의 이동 거리)+(B의 이동 거리)=(산책로의 둘레의 길이)
② 서로 같은 방향으로 돌아 처음으로 만날 때
(A의 이동 거리)−(B의 이동 거리)=(산책로의 둘레의 길이)

32 답 3분

1단계 일차부등식 세우기

집에서 학교까지의 거리를 x km라고 하면 자전거가 뛰어가는 것보다 15분, 즉 $\frac{1}{4}$시간 이상 빨리 도착하므로

$\frac{x}{6}-\frac{x}{24}\geq\frac{1}{4}$

2단계 일차부등식 풀기

$4x-x\geq 6$, $3x\geq 6$

$\therefore x\geq 2$

3단계 시속 40 km로 달리는 자동차를 타고 가면 최소 몇 분 걸리는지 구하기

따라서 집에서 학교까지의 거리는 2 km 이상이므로 시속 40 km로 달리는 자동차를 타고 가면 최소 $\frac{2}{40}=\frac{1}{20}$(시간), 즉 3분 걸린다.

단계	채점 기준	비율
❶	일차부등식을 세웠다.	40 %
❷	일차부등식을 풀었다.	30 %
❸	시속 40 km로 달리는 자동차를 타고 가면 최소 몇 분 걸리는지를 구했다.	30 %

33 답 300 g 이상 400 g 이하

해결 key Point!

제조하는 금속 A의 양을 x g, 금속 B의 양을 $(500-x)$ g이라 하고 조건에 맞는 부등식을 세워야 한다.

제조하는 금속 A의 양을 x g이라고 하면 금속 B의 양은 $(500-x)$g이다.

총 제조 비용이 13000원 이하이어야 하므로

$30x+10(500-x)\leq 13000$

$20x+5000\leq 13000$, $20x\leq 8000$

$\therefore x\leq 400$ ······ ㉠

제조된 합금의 1 g당 평균 강도가 0.64 N 이상이어야 하므로

$\frac{0.8x+0.4(500-x)}{500}\geq 0.64$

$0.8x+0.4(500-x)\geq 320$

$0.4x+200\geq 320$, $0.4x\geq 120$

$\therefore x\geq 300$ ······ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $300\leq x\leq 400$이므로 금속 A의 양의 범위는 300 g 이상 400 g 이하이다.

34 답 ⑤

처음 설탕물의 농도를 x %라고 하면 이 설탕물에 들어 있는 설탕의 양은

$\frac{x}{100}\times 450=4.5x$ (g)

물 150 g을 증발시키고 설탕 50 g을 넣은 후의 설탕물의 양은

$450-150+50=350$ (g)

이때 농도가 처음 농도의 2배 이상이 되어야 하므로

$\frac{4.5x+50}{350}\times 100\geq 2x$

$4.5x+50\geq 7x$, $2.5x\leq 50$

$\therefore x\leq 20$

따라서 처음 설탕물의 농도는 20 % 이하이었다.

다른 풀이

처음 설탕물의 농도를 x %라고 하면 물 150 g을 증발시키고 설탕 50 g을 넣은 후의 설탕물의 양은

$450-150+50=350$ (g)

이때 농도가 처음 농도의 2배 이상이 되어야 하므로

$\frac{x}{100}\times 450+50\geq\frac{2x}{100}\times 350$

$45x+500\geq 70x$, $25x\leq 500$

$\therefore x\leq 20$

따라서 처음 설탕물의 농도는 20 % 이하이었다.

35 답 ③

해결 key Point!

당도 10 %인 오렌지 주스의 섞는 양을 x g이라 하고 부등식을 세워야 한다.

당도 10 %인 오렌지 주스의 양을 x g 섞는다고 하면 당도 20 %인 오렌지 주스는 $(400-x)$ g 섞어야 한다.

여기에 당도 15 %인 오렌지 주스를 400 g 섞어서 당도가 16 % 이상인 혼합 주스 800 g을 만들어야 하므로

$\frac{10}{100}\times x+\frac{20}{100}\times(400-x)+\frac{15}{100}\times 400\geq\frac{16}{100}\times 800$

$10x+20(400-x)+6000\geq 12800$

$-10x+14000\geq 12800$, $10x\leq 1200$

$\therefore x\leq 120$

따라서 당도 10 %인 오렌지 주스는 최대 120 g 섞을 수 있다.

36 답 60 g

해결 key Point!

한 컵의 용량을 x g이라 하고 식을 세워야 한다.

1단계 전체 사과 주스의 양과 당분의 양을 x에 대한 식으로 나타내기

한 컵의 용량을 x g이라고 하면 사과 주스 A에서 덜어낸 양은 $2x$ g, 사과 주스 B에서 덜어낸 양은 $3x$ g이고 컵에 들어 있는 물의 양은 150 g이므로 섞은 전체 사과 주스의 양은

$2x+3x+150=5x+150$ (g)

물이 들어 있는 컵에 넣은 사과 주스 A의 당분은

$\frac{15}{100}\times 2x=0.3x$

사과 주스 B의 당분은

$\dfrac{10}{100}\times 3x=0.3x$

따라서 전체 당분의 양은

$0.3x+0.3x=0.6x$

2단계 부등식 세우기

섞은 전체 사과 주스의 당도가 8 % 이상이 되어야 하므로

$\dfrac{0.6x}{5x+150}\times 100\geq 8$

3단계 부등식을 풀고 한 컵의 최소 용량 구하기

이때 $x>0$이므로 양변에 $5x+150$을 곱하면

$0.6x\times 100\geq 8(x+150)$

$60x\geq 40x+1200,\ 20x\geq 1200$

$\therefore\ x\geq 60$

따라서 한 컵의 용량은 최소 60 g이어야 한다.

단계	채점 기준	비율
❶	전체 사과 주스의 양과 당분의 양을 x에 대한 식으로 나타냈다.	40 %
❷	부등식을 세웠다.	20 %
❸	한 컵의 최소 용량을 구했다.	40 %

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

60쪽~61쪽

01 -4 **02** $\frac{7}{3}<a<3$ 또는 $3<a<4$ **03** 15

04 14 % **05** 26개 **06** 139

01 답 -4

해결 key Point!

먼저 x에 대한 일차부등식을 풀고 해의 범위에 -1이 포함될 조건과 모든 자연수가 포함되지 않을 조건을 따져봐야 한다.

$x=-1$일 때 $3x-k\leq x+2$가 성립하므로

$-3-k\leq 1\qquad \therefore\ k\geq -4\qquad \cdots\cdots$ ㉠

$3x-k\leq x+2$에서

$2x\leq k+2\qquad \therefore\ x\leq \dfrac{k+2}{2}\qquad \cdots\cdots$ ㉡

이때 모든 자연수 x에 대하여 ㉡이 성립하지 않으므로

$\dfrac{k+2}{2}<1$이어야 한다.

$k+2<2\qquad \therefore\ k<0\qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢에서 $-4\leq k<0$

따라서 $A=-4,\ B=0$이므로

$A+B=-4+0=-4$

꿀 한줄평

$x\leq a$에서 $a=1$이면 $x\leq 1$이 되므로 부등식의 해에 자연수 1이 포함된다.

따라서 $x\leq a$의 해가 자연수를 포함하지 않을 조건은 $a<1$이다.

02 답 $\frac{7}{3}<a<3$ 또는 $3<a<4$

해결 key Point!

부등식 $|x|>a\ (a>0)$를 만족시키는 x의 범위는

$x<-a$ 또는 $x>a$임을 이용해야 한다.

$|2x+1|>5$에서

$2x+1<-5$ 또는 $2x+1>5$

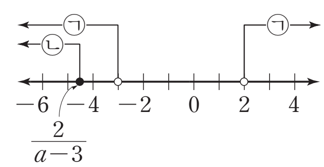
$2x<-6$ 또는 $2x>4$

$\therefore\ x<-3$ 또는 $x>2\qquad \cdots\cdots$ ㉠

$ax-3\geq 3x-1$에서 $(a-3)x\geq 2$

(i) $a-3<0$일 때, $x\leq \dfrac{2}{a-3}\qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 해가 ㉠의 해에 포함되려면 오른쪽 그림과 같이



$\dfrac{2}{a-3}<-3$이어야 한다.

$\dfrac{2}{a-3}<-3$에서

$2>-3(a-3),\ 2>-3a+9$

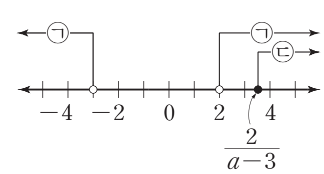
$3a>7\qquad \therefore\ a>\dfrac{7}{3}$

이때 $a-3<0$이므로 $a<3$

$\therefore\ \dfrac{7}{3}<a<3$

(ii) $a-3>0$일 때, $x\geq \dfrac{2}{a-3}\qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉢의 해가 ㉠의 해에 포함되려면 오른쪽 그림과 같이



$\dfrac{2}{a-3}>2$이어야 한다.

$\dfrac{2}{a-3}>2$에서

$2>2(a-3),\ 2>2a-6$

$2a<8\qquad \therefore\ a<4$

이때 $a-3>0$이므로 $a>3$

$\therefore\ 3<a<4$

(i), (ii)에 의하여 상수 a의 값의 범위는

$\dfrac{7}{3}<a<3$ 또는 $3<a<4$

꿀 한줄평

x의 계수에 미지수가 있을 때에는 반드시 x의 계수의 부호를 나누어서 생각하고, 복잡한 포함 관계는 수직선을 그려서 그 관계를 확인해보는 것이 좋다.

03 답 15

해결 key Point!

먼저 주어진 조건에 의하여 $\frac{n}{70}$이 포함되는 범위를 구해봐야 한다.

$n<70$이므로 $\frac{n}{70}<1$

$\frac{n}{70}$을 소수로 나타내면 소수점 아래 첫째 자리의 숫자는 2이고, 소수점 아래 셋째 자리의 숫자는 4이므로

$0.204\le\frac{n}{70}\le0.294$ $\qquad\therefore 14.28\le n\le20.58$

즉, 자연수 n의 값은 15, 16, 17, 18, 19, 20이다.

각 n의 값에 대한 $\frac{n+1}{70}$의 값은

$n=15$일 때, $\frac{16}{70}=0.2285\cdots$

$n=16$일 때, $\frac{17}{70}=0.2428\cdots$

$n=17$일 때, $\frac{18}{70}=0.2571\cdots$

$n=18$일 때, $\frac{19}{70}=0.2714\cdots$

$n=19$일 때, $\frac{20}{70}=0.2857\cdots$

$n=20$일 때, $\frac{21}{70}=0.3$

따라서 $\frac{n+1}{70}$을 소수로 나타냈을 때, 소수점 아래 둘째 자리의 숫자가 2인 자연수 n의 값은 15이다.

다른 풀이

$n<70$이므로 $\frac{n}{70}<1$

$\frac{n}{70}$을 소수로 나타내면 소수점 아래 첫째 자리의 숫자는 2이고, 소수점 아래 셋째 자리의 숫자는 4이므로

$0.204\le\frac{n}{70}\le0.294$

또, $\frac{n+1}{70}=\frac{n}{70}+\frac{1}{70}$이고 $\frac{1}{70}=0.0142\cdots$이므로

$0.2182\cdots\le\frac{n+1}{70}<0.3082\cdots$

이때 $\frac{n+1}{70}$을 소수로 나타내면 소수점 아래 둘째 자리의 숫자가 2이므로

$0.22\le\frac{n+1}{70}<0.23$

$15.4\le n+1<16.1$ $\qquad\therefore 14.4\le n<15.1$

따라서 자연수 n의 값은 15이다.

꿀 한줄평

1보다 작은 소수 x의 소수점 아래 각 자리의 숫자가 주어지면 x에 대한 범위를 구할 수 있다. 예를 들어 x의 소수점 아래 첫째 자리의 숫자가 2이면 $0.2\le x<0.3$이다.

04 답 14 %

해결 key Point!

원가를 a원이라 하고 원가로 판매하는 공책의 판매 금액과 이익을 붙여서 판매하는 공책의 판매 금액을 식으로 나타내야 한다.

공책 한 권의 원가를 a원이라 하고 공책 한 권당 x %의 이익을 붙인다고 하면

공책 140권의 원가는 $140a$원

원가에 판매하는 공책 20권의 판매 금액은 $20a$원

이익을 붙여서 판매하는 공책 120권의 판매 금액은

$120a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원

이때 공책을 모두 팔아서 총 원가의 12 % 이상의 이익을 남기려면

$20a+120a\left(1+\frac{x}{100}\right)\ge140a\left(1+\frac{12}{100}\right)$

$1+6\left(1+\frac{x}{100}\right)\ge7\times\frac{112}{100}$

$6\left(1+\frac{x}{100}\right)\ge\frac{171}{25}$

$1+\frac{x}{100}\ge\frac{57}{50}$, $\frac{x}{100}\ge\frac{7}{50}$

$\therefore x\ge14$

따라서 흠집이 없는 깨끗한 공책에는 14 % 이상의 이익을 붙여서 팔아야 한다.

05 답 26개

해결 key Point!

한 세트에 들어 있는 쿠키의 개수를 x라 하고 두 행사에서의 한 세트 가격을 식으로 나타내야 한다.

한 세트에 들어 있는 쿠키의 개수를 x라고 하면

[보너스 행사]에서 한 세트에 지불되는 금액은 $2000x$원이고 받는 쿠키의 개수는 $x+3$이므로 쿠키 1개당 가격은

$\frac{2000x}{x+3}$원

[할인 행사]에서 한 세트에 지불되는 금액은

$2000x\times\left(1-\frac{10}{100}\right)=1800x$ (원)

이고 받는 쿠키의 개수는 x이므로 쿠키 1개당 가격은

$\frac{1800x}{x}=1800$ (원)

두 행사 중 [보너스 행사]를 선택하는 것이 쿠키 1개당 가격이 더 저렴해야 하므로

$\frac{2000x}{x+3}<1800$

$2000x<1800(x+3)$, $2000x<1800x+5400$

$2000x<5400$ $\qquad\therefore x<27$

따라서 [보너스 행사]를 선택하는 것이 쿠키 1개당 가격이 더 저렴하려면 쿠키 한 세트에 쿠키가 최대 26개 들어 있어야 한다.

꿀 한줄평

쿠키 1개당 가격을 비교하므로 두 상품의 쿠키 1개당 가격을 구해 비교해야 한다.

이때 1개당 가격은 $\frac{(\text{상품 가격})}{(\text{쿠키의 개수})}$이므로 쿠키의 개수가 다른 두 상품에서 각 상품에 들어 있는 쿠키의 개수를 잘 구분해야 한다.

06 답 139

해결 key Point!

주어진 기호의 조건을 이용하여 $\left\{\frac{2x+5}{5}\right\}$의 값이 될 수 있는 수를 구해야 한다.

$\left\{\frac{2x+5}{5}\right\}$는 자연수이므로 $10<\left\{\frac{2x+5}{5}\right\}\le 14$에서

$\left\{\frac{2x+5}{5}\right\}=11,\ 12,\ 13,\ 14$

즉, $10.5\le\frac{2x+5}{5}<14.5$이어야 하므로

$52.5\le 2x+5<72.5,\ 47.5\le 2x<67.5$

$\therefore\ 23.75\le x<33.75$

이때 x는 자연수이므로

$x=24,\ 25,\ 26,\ 27,\ \cdots,\ 33$

따라서 $\frac{x}{3}=8,\ \frac{25}{3},\ \frac{26}{3},\ 9,\ \cdots,\ 11$이므로 $\left\{\frac{x}{3}\right\}$의 값 중 짝수인 수는 8, 10이다.

(i) $\left\{\frac{x}{3}\right\}=8$일 때

$7.5\le\frac{x}{3}<8.5,\ 22.5\le x<25.5$

$\therefore\ x=24,\ 25$

(ii) $\left\{\frac{x}{3}\right\}=10$일 때

$9.5\le\frac{x}{3}<10.5,\ 28.5\le x<31.5$

$\therefore\ x=29,\ 30,\ 31$

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 x의 값은 24, 25, 29, 30, 31이므로 그 합은

$24+25+29+30+31=139$

Lv. Master 실력을 완성하는 대단원 평가

62쪽~66쪽

01 ④	02 ④	03 ③	04 ①	05 ⑤
06 ①	07 ④	08 ②	09 ②	10 ②
11 ①	12 ④	13 ⑤	14 ③	15 ②
16 4	17 $x\le-\frac{3}{2}$	18 9자루	19 -5	20 43분
21 시속 32 km		22 51	23 $360<x\le 420$	

01 답 ④

① $a<b$이면 $-a>-b$이므로 $1-a\boxed{>}1-b$

② $2a>b$이면 $a>\frac{1}{2}b$이므로 $a+5\boxed{>}\frac{1}{2}b+5$

③ $a-(-3)>b-(-3)$이면 $a+3>b+3$이므로

$a\boxed{>}b$

④ $a\times\left(-\frac{1}{4}\right)>b\times\left(-\frac{1}{4}\right)$이면 $a<b$이므로

$a-2\boxed{<}b-2$

⑤ $-a\div(-6)>-\frac{1}{3}b\div(-6)$이면 $\frac{a}{6}>\frac{b}{18}$이므로

$3a\boxed{>}b$

따라서 □ 안에 들어갈 부등호의 방향이 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

02 답 ④

$-4\le 3(x-1)+5\le 11$에서

$-9\le 3(x-1)\le 6,\ -3\le x-1\le 2$

$\therefore\ -2\le x\le 3$

이때 $-12\le -4x\le 8$이므로

$-7\le -4x+5\le 13$

따라서 $m=-7,\ M=13$이므로

$M+m=13+(-7)=6$

03 답 ③

해결 key Point!

일차방정식의 해를 구한 후, 일차방정식의 해가 각 부등식의 해의 범위를 만족하는지 확인해야 한다.

$\frac{2x-3}{4}-\frac{x+5}{6}=\frac{1}{3}$의 양변에 12를 곱하면

$3(2x-3)-2(x+5)=4$

$4x-19=4,\ 4x=23$

$\therefore\ x=\frac{23}{4}$

ㄱ. $3x-10>x+2$에서

$2x>12\qquad\therefore\ x>6$

ㄴ. $5-2x\le x-16$에서

$3x\ge 21\qquad\therefore\ x\ge 7$

ㄷ. $\frac{3}{2}x-\frac{7}{4}>2x-\frac{11}{2}$의 양변에 4를 곱하면

$6x-7>8x-22,\ 2x<15$

$\therefore\ x<\frac{15}{2}$

ㄹ. $\frac{2x-1}{5}+\frac{x+4}{10}\ge\frac{19}{5}$의 양변에 10을 곱하면

$2(2x-1)+x+4\ge 38,\ 5x+2\ge 38$

$5x\ge 36\qquad\therefore\ x\ge\frac{36}{5}$

ㅁ. $\frac{1}{2}x+4 \le \frac{1}{3}x+5$의 양변에 6을 곱하면

$3x+24 \le 2x+30 \qquad \therefore x \le 6$

따라서 $x=\frac{23}{4}$을 해로 갖는 부등식은 ㄷ, ㅁ이다.

04 답 ①

$-2(x+4)+7=5$에서

$-2x-1=5, -2x=6$

$\therefore x=-3$

따라서 $a=-3$이므로 $x+2a>3x+8$에 $a=-3$을 대입하면

$x-6>3x+8, 2x<-14$

$\therefore x<-7$

05 답 ⑤

$0.8x-\frac{1}{4}(2x-3) \ge 1.5$의 양변에 20을 곱하면

$16x-5(2x-3) \ge 30$

$6x+15 \ge 30, 6x \ge 15$

$\therefore x \ge \frac{5}{2}$

따라서 부등식을 만족시키는 가장 작은 자연수 x의 값은 3이다.

06 답 ①

해결 key Point!

(십의 자리의 숫자)+(일의 자리의 숫자)=8이므로
(일의 자리의 숫자)=8−(십의 자리의 숫자)임을 이용해야 한다.

처음 두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 x라고 하면 일의 자리의 숫자는 $8-x$이므로

$10 \times (8-x)+x>4\{10x+(8-x)\}$

$80-9x>36x+32, 45x<48$

$\therefore x<\frac{16}{15}$

이때 x는 자연수이므로 $x=1$

따라서 처음 수는 $10 \times 1+(8-1)=17$이다.

07 답 ④

해결 key Point!

주어진 x의 값의 범위로부터 부등식의 성질을 이용하여 A의 값의 범위를 구해야 한다.

$-2<x \le k$에서

$-4k \le -4x<8, 6-4k \le 6-4x<14$

즉, $6-4k \le A<14$이므로 A의 값의 범위에 포함되는 정수의 개수가 15이려면

$-2<6-4k \le -1$이어야 한다.

$-8<-4k \le -7 \qquad \therefore 1.75 \le k<2$

08 답 ②

해결 key Point!

먼저 부등식의 해를 구한 후, 주어진 해와 비교해야 한다.

$\frac{ax-3}{2}-\frac{x+a}{3}<1$의 양변에 6을 곱하면

$3(ax-3)-2(x+a)<6, 3ax-9-2x-2a<6$

$\therefore (3a-2)x<15+2a$

이때 부등식의 해가 $x<3$이므로 $3a-2>0$이어야 한다.

$\therefore x<\frac{15+2a}{3a-2}$

즉, $\frac{15+2a}{3a-2}=3$이므로

$15+2a=3(3a-2), 15+2a=9a-6$

$7a=21 \qquad \therefore a=3$

다른 풀이

부등식 $\frac{ax-3}{2}-\frac{x+a}{3}<1$의 해가 $x<3$이면

$x=3$은 방정식 $\frac{ax-3}{2}-\frac{x+a}{3}=1$의 해이므로

$\frac{3a-3}{2}-\frac{3+a}{3}=1$

양변에 6을 곱하면

$3(3a-3)-2(3+a)=6, 7a-15=6$

$7a=21 \qquad \therefore a=3$

09 답 ②

해결 key Point!

$x=k$가 $x \ge a$의 해가 아니면 $x=k$는 $x<a$의 해임을 이용해야 한다.

$x=12$가 주어진 부등식의 해가 되지 않으려면 $x=12$는

$\frac{x}{2}+\frac{x+a}{3}<2a$의 해가 되어야 한다.

즉, $6+\frac{12+a}{3}<2a$이어야 하므로

$18+12+a<6a, 5a>30$

$\therefore a>6$

따라서 조건을 만족시키는 가장 작은 정수 a의 값은 7이다.

10 답 ②

$a(x-1)-b(x-2)>0$에서

$ax-a-bx+2b>0$

$(a-b)x>a-2b$

이때 $(a-b)x>a-2b$의 해가 존재하지 않으므로

$a-b=0, a-2b \ge 0$

즉, $a=b$이고, $a-2b=a-2a \ge 0$이므로

$a \le 0$

따라서 $(a-1)x+b<1$에서

$(a-1)x+a<1$, $(a-1)x<-a+1$
이때 $a-1\le-1$이므로
$x>-1$

Level UP

x에 대한 일차부등식 $ax>b$에서
① 해가 없으면 $a=0$, $b\ge0$
② 해가 무수히 많으면 $a=0$, $b<0$

11 답 ①

해결 key Point!

생산 원가를 a원이라 하고 불량품의 개수를 x라고 할 때, 정가와 판매 개수를 a, x에 대한 식으로 나타내야 한다.

생산 원가를 a원이라 하고, 불량품 개수를 x라고 하면 정가는
$a\left(1+\frac{40}{100}\right)=1.4a$(원)
판매 개수는 $2000-x$이고 전체 생산 원가의 26 % 이상의 이익이 남게 하려면
$(2000-x)\times1.4a\ge2000\times a\times\left(1+\frac{26}{100}\right)$
$(2000-x)\times1.4\ge2000\times1.26$
$2800-1.4x\ge2520$, $1.4x\le280$
$\therefore\ x\le200$
따라서 불량품은 최대 200개까지 허용된다.

12 답 ④

해결 key Point!

한결이가 분속 60 m로 걸은 거리를 x m라 하고 거리의 단위를 m로 통일하여 부등식을 세워야 한다.

한결이가 분속 60 m로 걸은 거리를 x m라고 하면 분속 150 m로 뛰는 거리는 $(3000-x)$ m이다.
한결이가 집에서 학교까지 가는데 걸린 시간은
$\left(\frac{x}{60}+\frac{3000-x}{150}\right)$분
이므로
$30\le\frac{x}{60}+\frac{3000-x}{150}\le40$
$9000\le5x+2(3000-x)\le12000$
$9000\le3x+6000\le12000$
$3000\le3x\le6000$
$\therefore\ 1000\le x\le2000$
즉, 분속 60 m로 걸은 거리는 1000 m 이상 2000 m 이하이므로
$a=1000$, $b=2000$
$\therefore\ a+b=1000+2000=3000$

13 답 ⑤

해결 key Point!

일반석 관객 수를 x, VIP석 관객 수는 $200-x$라 하고 식을 세워야 한다.

일반석 관객 수를 x라고 하면 VIP석 관객 수는 $200-x$이다.
이때 VIP석 관객 수는 일반석 관객 수의 2배 미만이므로
$200-x<2x$, $3x>200$
$\therefore\ x>66.666\cdots$
이때 판매된 응원봉의 개수를 y라고 하면 티켓과 응원봉 판매 수익의 합계가 12400000원이므로
$50000x+100000(200-x)+20000y=12400000$
$5x+10(200-x)+2y=1240$
$2000-5x+2y=1240$
$2y=5x-760$
$\therefore\ y=\frac{5x-760}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠
응원봉이 가장 많이 팔린 경우, 즉 y의 값이 가장 클 때는 x의 값이 가장 클 때이다.
이때 y는 자연수이므로 x는 짝수이어야 하고, $67\le x<200$에서 가장 큰 x의 값은 198이다.
$x=198$을 ㉠에 대입하면
$y=\frac{5\times198-760}{2}=115$
즉, 응원봉이 가장 많이 팔린 경우 판매된 응원봉은 115개이다.

14 답 ③

해결 key Point!

실제 인원 수대로 표를 사는 것과 인원이 모자라더라도 더 좋은 할인 혜택을 받기 위해 어떤 단체 입장권을 사는 것이 더 저렴한지 식을 세워 비교해야 한다.

단체 관람객 수를 x라 하고 1인당 입장료를 a원이라고 하면 30명 이상의 단체 할인이 반영된 입장권 가격은
$a\times\left(1-\frac{20}{100}\right)\times x=\frac{4}{5}ax$(원)
50명의 단체 할인이 반영된 입장권 가격은
$a\times\left(1-\frac{30}{100}\right)\times50=35a$(원)
30명 이상 50명 미만인 단체가 50명의 단체 입장권을 사는 것이 유리하려면
$\frac{4}{5}ax>35a$
$\frac{4}{5}x>35$ $\quad\therefore\ x>43.75$
따라서 30명 이상 50명 미만인 단체에서는 44명 이상일 때 50명의 단체 입장권을 사는 것이 더 유리하다.

15 답 ②

해결 key Point!

기약분수를 $\frac{b}{a}$ $(a>0,\ b>0,\ a,\ b$는 서로소$)$라 하고 조건에 맞는 식을 세워야 한다.

기약분수를 $\frac{b}{a}$ $(a>0,\ b>0,\ a,\ b$는 서로소$)$라고 하면

$\frac{b}{a+2}=\frac{3}{10}$에서 $10b=3a+6$

$\therefore\ b=\frac{3a+6}{10}$ …… ㉠

$\frac{b+1}{a}>\frac{1}{3}$에서 $a<3b+3$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a<\frac{3(3a+6)}{10}+3,\ 10a<9a+18+30$

$\therefore\ a<48$ …… ㉢

$10b=3a+6$에서 $10b=3(a+2)$이므로 $a+2$는 10의 배수이고, ㉢에서 $a+2<50$이므로

$a+2=10,\ 20,\ 30,\ 40 \qquad \therefore\ a=8,\ 18,\ 28,\ 38$

따라서 ㉠을 만족시키는 $a,\ b$를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면

$(8,\ 3),\ (18,\ 6),\ (28,\ 9),\ (38,\ 12)$

이때 $a,\ b$는 서로소이고 $a+b>20$이므로 $a=28,\ b=9$이다.

$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{9}{28}$

다른 풀이

기약분수의 분모에 2를 더한 것은 $\frac{3}{10}$이므로 이 기약분수를

$\frac{3k}{10k-2}$ $(k$는 자연수$)$로 놓을 수 있다.

이때 기약분수의 분자에 1을 더한 것은 $\frac{1}{3}$보다 크므로

$\frac{3k+1}{10k-2}>\frac{1}{3}$

$9k+3>10k-2 \qquad \therefore\ k<5$

$k<5$를 만족시키는 자연수 k의 값을 $\frac{3k}{10k-2}$에 대입하면

$k=1$일 때, $\frac{3\times1}{10\times1-2}=\frac{3}{8}$

$k=2$일 때, $\frac{3\times2}{10\times2-2}=\frac{6}{18}$

$k=3$일 때, $\frac{3\times3}{10\times3-2}=\frac{9}{28}$

$k=4$일 때, $\frac{3\times4}{10\times4-2}=\frac{12}{38}$

이때 분모와 분자의 합이 20보다 큰 기약분수인 것은 $\frac{9}{28}$이다.

16 답 4

$\frac{x-2}{3}-0.3x\le-\frac{1}{2}$의 양변에 30을 곱하면

$10(x-2)-9x<-15$

$x-20<-15 \qquad \therefore\ x<5$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

17 답 $x\le-\frac{3}{2}$

$ax+b>0$에서 $ax>-b$

이 부등식의 해가 $x<-\frac{2}{3}$이므로 $a<0$이어야 한다.

$\therefore\ x<-\frac{b}{a}$

즉, $-\frac{b}{a}=-\frac{2}{3}$이므로

$b=\frac{2}{3}a$

$b=\frac{2}{3}a$를 $(4a-3b)x-a+6b\ge0$에 대입하면

$(4a-2a)x-a+4a\ge0$

$2ax\ge-3a \qquad \therefore\ x\le-\frac{3}{2}$

18 답 9자루

볼펜을 x자루 산다고 하면

$1000x>750x+2000$

$250x>2000 \qquad \therefore\ x>8$

따라서 볼펜을 9자루 이상 사면 대형 할인점에 가는 것이 유리하다.

19 답 -5

해결 key Point!

먼저 일차부등식의 해를 구한 후, x를 부등식의 성질을 이용하여 $\frac{5-2x}{5}$의 꼴로 변형해야 한다.

$0.3(x+2)\ge-1.5$의 양변에 10을 곱하면

$3(x+2)\ge-15,\ 3x+6\ge-15$

$3x\ge-21 \qquad \therefore\ x\ge-7$

$x\ge-7$에서 $-2x\le14,\ 5-2x\le19$

$\therefore\ \frac{5-2x}{5}\le\frac{19}{5}$

따라서 $\frac{5-2x}{5}$의 값이 자연수이려면

$\frac{5-2x}{5}=1$ 또는 $\frac{5-2x}{5}=2$ 또는 $\frac{5-2x}{5}=3$이어야 하므로 $5-2x=5$ 또는 $5-2x=10$ 또는 $5-2x=15$

$2x=0$ 또는 $2x=-5$ 또는 $2x=-10$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=-\frac{5}{2}$ 또는 $x=-5$

따라서 모든 정수 x의 값은 $-5,\ 0$이고 그 합은

$-5+0=-5$

20 답 43분

채원이네 가족이 정상에서 경치를 구경하는 시간을 x분이라고 하면 3시간 10분은 $\frac{19}{6}$시간이므로

$\frac{4.2}{3}+\frac{x}{60}+\frac{4.2}{4}\le\frac{19}{6}$

$84+x+63\le190$ $\quad\therefore x\le43$

따라서 채원이네 가족이 정상에서 경치를 구경할 수 있는 시간은 최대 43분이다.

21 답 시속 32 km

강을 거슬러 올라갈 때의 유람선의 속력을 시속 x km라고 하면 강의 속력이 시속 2 km이므로

강을 따라 내려갈 때의 유람선의 실제 속력은 시속 $28+2=30$ (km)이고

강을 거슬러 올라갈 때의 유람선의 실제 속력은 시속 $(x-2)$ km이다.

총 5시간 20분, 즉 $\frac{16}{3}$시간 이내에 왕복을 마쳐야 하므로

$\frac{80}{30}+\frac{80}{x-2}\le\frac{16}{3}$

$\frac{80}{x-2}\le\frac{8}{3}$에서 $x-2>0$이므로 양변에 $3(x-2)$를 곱하면

$240\le8(x-2)$, $240\le8x-16$

$8x\ge256$ $\quad\therefore x\ge32$

따라서 강을 거슬러 올라갈 때의 유람선의 속력은 시속 32 km 이상이어야 한다.

22 답 51

1단계 주어진 부등식의 해를 a를 사용한 식으로 나타내기

$-\frac{x+2a}{6}-1\le0.\dot{3}x-\frac{1}{2}a$에서

$-\frac{x+2a}{6}-1\le\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}a$이므로 양변에 6을 곱하면

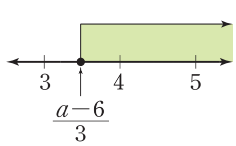
$-(x+2a)-6\le2x-3a$

$-x-2a-6\le2x-3a$, $3x\ge a-6$

$\therefore x\ge\frac{a-6}{3}$

2단계 $\frac{a-6}{3}$의 범위 구하기

이 부등식을 만족시키는 x의 값 중 가장 작은 자연수가 4이려면 오른쪽 그림과 같이 $3<\frac{a-6}{3}\le4$이어야 한다.



3단계 모든 정수 a의 값의 합 구하기

$3<\frac{a-6}{3}\le4$에서

$9<a-6\le12$ $\quad\therefore 15<a\le18$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 16, 17, 18이고 그 합은

$16+17+18=51$

단계	채점 기준	배점
❶	주어진 부등식의 해를 a를 사용한 식으로 나타냈다.	3점
❷	$\frac{a-6}{3}$의 범위를 구했다.	2점
❸	모든 정수 a의 값의 합을 구했다.	2점

23 답 $360<x\le420$

해결 key Point!

원 모양의 운동장 트랙에서 두 사람이 동시에 출발하여 같은 방향으로 돌 때, 한 번 만날 때마다 두 사람의 이동 거리 차는 트랙 한 바퀴인 1200 m만큼 벌어진다는 것을 이용해야 한다.

1단계 동생이 원 모양의 운동장 트랙을 한 바퀴 도는 데 걸리는 시간 구하기

동생이 분속 60 m로 둘레의 길이가 1200 m인 원 모양의 운동장 트랙 한 바퀴 도는데 걸리는 시간은

$\frac{1200}{60}=20$(분)

2단계 동생이 다시 A 지점으로 돌아왔을 때, 형과의 이동 거리의 차 구하기

동생이 트랙을 한 바퀴 도는 20분 동안 두 사람의 이동 거리의 차는 $20(x-60)$ m

이고 이때 두 사람이 5번 만나려면

$5\times1200<20(x-60)\le6\times1200$

3단계 형의 속력의 범위 구하기

$6000<20x-1200\le7200$

$7200<20x\le8400$ $\quad\therefore 360<x\le420$

따라서 형의 속력 x의 범위는 $360<x\le420$이다.

단계	채점 기준	배점
❶	동생이 운동장 트랙을 한 바퀴 도는데 걸리는 시간을 구했다.	2점
❷	동생이 다시 A 지점으로 돌아왔을 때, 형과의 이동 거리의 차를 구했다.	3점
❸	형의 속력의 범위를 구했다.	2점

Ⅲ 연립방정식

01 연립방정식의 풀이

Lv. 1 개념을 적용하는 **핵심 문제** 70쪽~73쪽

01 ④	02 ⑤	03 6	04 ④	05 -12
06 5	07 ④	08 ②	09 $\frac{1}{2}$	10 2
11 ③	12 4	13 ⑤	14 3	
15 $x=\frac{4}{5}$, $y=-\frac{13}{5}$		16 ①	17 $-\frac{2}{3}$	18 ④
19 ②	20 $\frac{7}{5}$	21 ⑤	22 ③, ⑤	23 ③
24 2				

01 답 ④

① 등식이 아니므로 미지수가 2개인 일차방정식이 아니다.
② 미지수가 분모에 있으므로 미지수가 2개인 일차방정식이 아니다.
③ $2x+5y=2(x+5)$에서 $2x+5y=2x+10$
$\therefore 5y-10=0$
즉, 미지수가 1개인 일차방정식이다.
④ $4x(x-1)=4x^2-y$에서 $4x^2-4x=4x^2-y$
$\therefore -4x+y=0$
즉, 미지수가 2개인 일차방정식이다.
⑤ $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=0.5x-0.2y+1$에서
$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}y+1 \qquad \therefore \frac{8}{15}y-1=0$
즉, 미지수가 1개인 일차방정식이다.
따라서 미지수가 2개인 일차방정식인 것은 ④이다.

02 답 ⑤

$x=4$, $y=-3$을 $-ax+by=-72$에 대입하면
$-4a-3b=-72 \qquad \therefore 4a+3b=72$
a, b가 음이 아닌 정수일 때, 일차방정식 $4a+3b=72$를 만족시키는 a, b의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

a	18	15	12	9	6	3	0
b	0	4	8	12	16	20	24

따라서 음이 아닌 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(18, 0)$, $(15, 4)$, $(12, 8)$, $(9, 12)$, $(6, 16)$, $(3, 20)$, $(0, 24)$의 7개이다.

03 답 6

$x=a+1$, $y=a-1$을 $2x-5y=15-7a$에 대입하면
$2(a+1)-5(a-1)=15-7a$, $-3a+7=15-7a$
$4a=8 \qquad \therefore a=2$
$a=2$를 $2x-5y=15-7a$에 대입하면
$2x-5y=15-14$, $2x-5y=1$
$x=2b$, $y=3$을 $2x-5y=1$에 대입하면
$4b-15=1$, $4b=16 \qquad \therefore b=4$
$\therefore a+b=2+4=6$

04 답 ④

달걀과 닭가슴살의 1 g당 열량과 단백질의 양은 오른쪽 표와 같다.

	열량 (kcal)	단백질 (g)
달걀	1.4	0.12
닭가슴살	1.1	0.23

이때 달걀을 x g, 닭가슴살을 y g 섭취하여 열량 470 kcal와 단백질 81 g을 얻어야 하므로 구하는 연립방정식은
$$\begin{cases} 1.4x+1.1y=470 \\ 0.12x+0.23y=81 \end{cases}$$

05 답 -12

$18=2\times3^2$과 $28=2^2\times7$의 최대공약수는 2이므로 $x=2$
$40=2^3\times5$와 $75=3\times5^2$의 최대공약수는 5이므로 $y=5$
$x=2$, $y=5$를 $3x-2y=a$에 대입하면
$6-10=a \qquad \therefore a=-4$
$x=2$, $y=5$를 $5x-by=-5$에 대입하면
$10-5b=-5$, $-5b=-15 \qquad \therefore b=3$
$\therefore ab=-4\times3=-12$

06 답 5

연립방정식 $\begin{cases} 5x+2y=-1 \\ 6x-4y=-3a \end{cases}$에서 x와 y를 서로 바꾸어 풀었을 때의 해가 $x=-3$, $y=-b$이므로 연립방정식
$\begin{cases} 2x+5y=-1 \\ -4x+6y=-3a \end{cases}$의 해가 $x=-3$, $y=-b$이다.
$x=-3$, $y=-b$를 $2x+5y=-1$에 대입하면
$-6-5b=-1$, $-5b=5 \qquad \therefore b=-1$
$x=-3$, $y=1$을 $-4x+6y=-3a$에 대입하면
$12+6=-3a$, $3a=-18 \qquad \therefore a=-6$
$\therefore b-a=-1-(-6)=5$

07 답 ④

연립방정식 $\begin{cases} 5x-y=7 \\ y-8=2x \end{cases}$에서 $\begin{cases} 5x-y=7 & \cdots\cdots ㉠ \\ y=2x+8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉡을 ㉠에 대입하면
$5x-(2x+8)=7$, $5x-2x-8=7$

$3x=15 \quad \therefore x=5$

$x=5$를 ㉡에 대입하면

$y=10+8=18$

$x=5$, $y=18$을 $4ax-y-2=0$에 대입하면

$20a-18-2=0$, $20a=20$

$\therefore a=1$

08 답 ②

주어진 연립방정식의 해는 연립방정식

$\begin{cases} y=3x-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x-y=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠을 ㉡에 대입하면

$4x-(3x-5)=9$, $4x-3x+5=9 \quad \therefore x=4$

$x=4$를 ㉠에 대입하면

$y=12-5=7$

$x=4$, $y=7$을 $ax+4y=12$에 대입하면

$4a+28=12$, $4a=-16$

$\therefore a=-4$

09 답 $\frac{1}{2}$

1단계 x, y의 값의 비를 이용하여 x, y 사이의 관계식 구하기

x, y의 값의 비가 2 : 3이므로

$x : y=2 : 3$, $2y=3x \quad \therefore y=\frac{3}{2}x$

2단계 연립방정식 풀기

$y=\frac{3}{2}x$를 $5x-4y=8$에 대입하면

$5x-4\times\frac{3}{2}x=8$, $5x-6x=8 \quad \therefore x=-8$

$x=-8$을 $y=\frac{3}{2}x$에 대입하면

$y=\frac{3}{2}\times(-8)=-12$

3단계 $a-b$의 값 구하기

$x=-8$, $y=-12$를 $ax-\frac{2}{3}by=-4$에 대입하면

$-8a+8b=-4 \quad \therefore a-b=\frac{1}{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	x, y의 값의 비를 이용하여 x, y 사이의 관계식을 구했다.	20 %
❷	연립방정식을 풀었다.	50 %
❸	$a-b$의 값을 구했다.	30 %

참고 a, b의 값을 구할 수는 없지만 $a-b$의 값은 구할 수 있음에 주의한다.

10 답 2

세 일차방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} 2x+9y=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 6x-3y=14 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠×3−㉡을 하면

$30y=10 \quad \therefore y=\frac{1}{3}$

$y=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$2x+3=8$, $2x=5 \quad \therefore x=\frac{5}{2}$

$x=\frac{5}{2}$, $y=\frac{1}{3}$을 $ax-6y=3$에 대입하면

$\frac{5}{2}a-2=3$, $\frac{5}{2}a=5$

$\therefore a=2$

11 답 ③

$x=1$, $y=-3$을 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=1 \\ bx-ay=13 \end{cases}$에 대입하면

$\begin{cases} a-3b=1 \\ b+3a=13 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} a-3b=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3a+b=13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×3−㉡을 하면

$-10b=-10 \quad \therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면

$a-3=1 \quad \therefore a=4$

$\therefore a+b=4+1=5$

참고 주어진 연립방정식에 $x=1$, $y=-3$을 각각 대입하여 a, b에 대한 연립방정식을 세운다.

12 답 4

x, y의 값의 합이 5이므로 $x+y=5$

따라서 주어진 연립방정식의 해는 연립방정식

$\begin{cases} 4x-3y=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠+㉡×3을 하면

$7x=21 \quad \therefore x=3$

$x=3$을 ㉡에 대입하면

$3+y=5 \quad \therefore y=2$

$x=3$, $y=2$를 $2x-y=a$에 대입하면

$6-2=a \quad \therefore a=4$

13 답 ⑤

두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} 3x-4y=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+5y=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠×2−㉡×3을 하면

$-23y=23 \quad \therefore y=-1$

$y=-1$을 ㉠에 대입하면

$3x+4=10$, $3x=6$ $\quad\therefore x=2$

$x=2$, $y=-1$을 $ax+by=5$에 대입하면

$2a-b=5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

$x=2$, $y=-1$을 $ax-2by=-4$에 대입하면

$2a+2b=-4$

$\therefore a+b=-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉢+㉣을 하면

$3a=3$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉢에 대입하면

$2-b=5$ $\quad\therefore b=-3$

$\therefore a-2b=1-2\times(-3)=7$

14 답 3

$x=p$, $y=q$는 일차방정식 $3x+y=-3$의 해이고 $x=q$, $y=p$는 일차방정식 $2x-5y=16$의 해이므로

$\begin{cases} 3p+q=-3 \\ 2q-5p=16 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} 3p+q=-3 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 5p-2q=-16 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉠×2+㉡을 하면

$11p=-22$ $\quad\therefore p=-2$

$p=-2$를 ㉠에 대입하면

$-6+q=-3$ $\quad\therefore q=3$

$x=-2$, $y=3$을 $ax-y=5$에 대입하면

$-2a-3=5$, $-2a=8$ $\quad\therefore a=-4$

$x=3$, $y=-2$를 $x+by=-9$에 대입하면

$3-2b=-9$, $-2b=-12$ $\quad\therefore b=6$

$\therefore a+b+p+q=-4+6+(-2)+3=3$

15 답 $x=\frac{4}{5}$, $y=-\frac{13}{5}$

준혁이는 a를 잘못 보고 풀었으므로 $x=-2$, $y=3$은 일차방정식 $6x-by+11=7-2x$의 해이다.

즉, $-12-3b+11=7+4$에서

$-3b=12$ $\quad\therefore b=-4$

윤서는 b를 잘못 보고 풀었으므로 $x=4$, $y=-1$은 일차방정식 $ax+2y+1=3x-5$의 해이다.

즉, $4a-2+1=12-5$에서

$4a=8$ $\quad\therefore a=2$

따라서 처음 연립방정식은 $\begin{cases} 2x+2y+1=3x-5 \\ 6x+4y+11=7-2x \end{cases}$, 즉

$\begin{cases} x-2y=6 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 2x+y=-1 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$ 이므로

㉠×2−㉡을 하면

$-5y=13$ $\quad\therefore y=-\frac{13}{5}$

$y=-\frac{13}{5}$을 ㉠에 대입하면

$x+\frac{26}{5}=6$ $\quad\therefore x=\frac{4}{5}$

16 답 ①

연립방정식 $\begin{cases} 2x-y=4(x-y+1) \\ 3(x-2y)=y-5 \end{cases}$ 에서

$\begin{cases} 2x-3y=-4 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 3x-7y=-5 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉠×3−㉡×2를 하면

$5y=-2$ $\quad\therefore y=-\frac{2}{5}$

$y=-\frac{2}{5}$를 ㉠에 대입하면

$2x+\frac{6}{5}=-4$, $2x=-\frac{26}{5}$ $\quad\therefore x=-\frac{13}{5}$

따라서 $a=-\frac{13}{5}$, $b=-\frac{2}{5}$이므로

$a+b=-\frac{13}{5}+\left(-\frac{2}{5}\right)=-3$

17 답 $-\frac{2}{3}$

1단계 연립방정식 풀기

$\begin{cases} \frac{x}{5}-\frac{y}{2}=\frac{1}{10} & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 0.5x+0.8y=-1.8 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉠×10을 하면

$2x-5y=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉡×10을 하면

$5x+8y=-18$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉢×5−㉣×2를 하면

$-41y=41$ $\quad\therefore y=-1$

$y=-1$을 ㉢에 대입하면

$2x+5=1$, $2x=-4$ $\quad\therefore x=-2$

2단계 a의 값 구하기

$x=-2$, $y=-1$을 $\frac{x}{4}+\frac{y}{a}=1$에 대입하면

$-\frac{1}{2}-\frac{1}{a}=1$, $-\frac{1}{a}=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore a=-\frac{2}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	연립방정식을 풀었다.	70 %
❷	a의 값을 구했다.	30 %

18 답 ④

주어진 방정식의 해는 연립방정식

$\begin{cases} -1.1x+0.4y=0.5 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ -\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}y=0.5 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$ 의 해와 같다.

㉠×10을 하면

$-11x+4y=5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉡×12를 하면

$-8x+3y=6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉢×3−㉣×4를 하면

$-x=-9 \qquad \therefore x=9$

$x=9$를 ㉢에 대입하면

$-99+4y=5,\ 4y=104$

$\therefore y=26$

19 답 ②

$\begin{cases} 0.5x+0.1y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+6):(y-2)=3:1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 10$을 하면

$5x+y=20 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $x+6=3(y-2)$

$\therefore x-3y=-12 \qquad \cdots\cdots$ ㉣

㉢$\times 3+$㉣을 하면

$16x=48 \qquad \therefore x=3$

$x=3$을 ㉢에 대입하면

$15+y=20 \qquad \therefore y=5$

따라서 $a=3,\ b=5$이므로

$a-b=3-5=-2$

20 답 $\frac{7}{5}$

주어진 방정식의 해는 연립방정식

$\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3}=2y-x+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{x+3y+1}{4}=2y-x+2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해와 같다.

㉠$\times 3$을 하면

$2x-y=6y-3x+6$

$\therefore 5x-7y=6 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡$\times 4$를 하면

$x+3y+1=8y-4x+8$

$\therefore 5x-5y=7 \qquad \cdots\cdots$ ㉣

㉢$-$㉣을 하면

$-2y=-1 \qquad \therefore y=\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}$을 ㉣에 대입하면

$5x-\frac{5}{2}=7,\ 5x=\frac{19}{2} \qquad \therefore x=\frac{19}{10}$

따라서 $a=\frac{19}{10},\ b=\frac{1}{2}$이므로

$a-b=\frac{19}{10}-\frac{1}{2}=\frac{7}{5}$

21 답 ⑤

$\begin{cases} x-ay=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x-12y=-3b-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 4$를 하면 $4x-4ay=20 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

따라서 주어진 연립방정식의 해가 없으려면 ㉡과 ㉢은 x의 계수는 같고 상수항은 달라야 한다.

따라서 $-4a=-12,\ 20\neq-3b-1$이므로

$a=3,\ b\neq-7$

다른 풀이

연립방정식 $\begin{cases} x-ay=5 \\ 4x-12y=-3b-1 \end{cases}$의 해가 없으므로

$\frac{1}{4}=\frac{-a}{-12}\neq\frac{5}{-3b-1}$

$\frac{1}{4}=\frac{-a}{-12}$에서 $-4a=-12 \qquad \therefore a=3$

$\frac{1}{4}\neq\frac{5}{-3b-1}$에서 $20\neq-3b-1 \qquad \therefore b\neq-7$

참고 연립방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$에서

① $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$이면 해가 무수히 많다.

② $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$이면 해가 없다.

③ $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$이면 해가 한 쌍이다.

22 답 ③, ⑤

① $\begin{cases} 6x-8y=1 \\ 3x-4y=-1 \end{cases}$에서 $\begin{cases} 6x-8y=1 \\ 6x-8y=-2 \end{cases}$이므로 해가 없다.

② $\begin{cases} 4x-2y=-6 \\ -6x-3y=9 \end{cases}$에서 $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ 2x+y=-3 \end{cases}$이므로 해가 1개이다.

③ $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=-\frac{1}{6} \\ -6x+4y=2 \end{cases}$에서 $\begin{cases} 3x-2y=-1 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$이므로 해가 무수히 많다.

④ $\begin{cases} -0.5x+0.2y=0.3 \\ \frac{1}{6}x-\frac{1}{15}y=\frac{1}{10} \end{cases}$에서 $\begin{cases} 5x-2y=-3 \\ 5x-2y=3 \end{cases}$이므로 해가 없다.

⑤ $\begin{cases} 3(x-2y)=2(x-y)-5 \\ 5x-4(1-3y)=8x+11 \end{cases}$에서 $\begin{cases} x-4y=-5 \\ 3x-12y=-15 \end{cases}$

즉, $\begin{cases} x-4y=-5 \\ x-4y=-5 \end{cases}$이므로 해가 무수히 많다.

따라서 해가 무수히 많은 것은 ③, ⑤이다.

23 답 ③

$\begin{cases} 5x-2y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ -7x+4y=ax & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times(-2)$를 하면 $-10x+4y=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $(-7-a)x+4y=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉣

이때 주어진 연립방정식이 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 갖는다는 의미는 해가 무수히 많다는 의미이므로 ㉢과 ㉣이 서로 일치해야 한다.

따라서 $-7-a=-10$이어야 하므로 $a=3$

참고 연립방정식의 해가 한 쌍 보다 많다는 것은 해가 무수히 많다는 의미이다.

24 답 2

연립방정식 $\begin{cases} 4x+6y=5 \\ (a+1)x-9y=5 \end{cases}$에서 $\begin{cases} -6x-9y=-\frac{15}{2} \\ (a+1)x-9y=5 \end{cases}$

이 연립방정식의 해가 없으므로

$-6=a+1 \quad \therefore a=-7$

연립방정식 $\begin{cases} 12x-by=18 \\ 4cx+3y=-6 \end{cases}$에서 $\begin{cases} 12x-by=18 \\ -12cx-9y=18 \end{cases}$

이 연립방정식의 해가 무수히 많으므로

$12=-12c,\ -b=-9 \quad \therefore b=9,\ c=-1$

$\therefore a-bc=-7-9\times(-1)=2$

다른 풀이

연립방정식 $\begin{cases} 4x+6y=5 \\ (a+1)x-9y=5 \end{cases}$의 해가 없으므로

$\frac{4}{a+1}=\frac{6}{-9}\neq\frac{5}{5}$

$\frac{4}{a+1}=\frac{6}{-9}$에서 $6a+6=-36$

$6a=-42 \quad \therefore a=-7$

연립방정식 $\begin{cases} 12x-by=18 \\ 4cx+3y=-6 \end{cases}$의 해가 무수히 많으므로

$\frac{12}{4c}=\frac{-b}{3}=\frac{18}{-6}$

$\frac{12}{4c}=-3$에서 $-12c=12 \quad \therefore c=-1$

$\frac{-b}{3}=-3$에서 $b=9$

$\therefore a-bc=-7-9\times(-1)=2$

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

74쪽~79쪽

01 35	02 ⑤	03 ①	04 22	05 11
06 3	07 ③	08 3	09 13	10 32
11 1	12 ⑤	13 $x=5,\ y=5$ 또는 $x=7,\ y=3$		
14 23	15 -2	16 6	17 11	18 ③
19 ④	20 25	21 ④	22 ③	23 ②
24 12	25 -18	26 ①	27 16	28 ②
29 ⑤	30 80	31 17	32 ①	33 6
34 ⑤	35 55	36 ⑤		

01 답 35

해결 key Point!

$\frac{x}{y}$가 기약분수가 되려면 x, y는 서로소이어야 한다.

일차방정식 $3x-2y=75$를 만족시키는 두 자연수 x, y의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	27	29	31	33	35	37	39	41	43	…
y	3	6	9	12	15	18	21	24	27	…

이때 $\frac{x}{y}$가 기약분수이므로 x, y는 서로소이다.

따라서 x, y가 서로소인 순서쌍 (x, y)는

$(29, 6), (31, 9), (37, 18), (41, 24), (43, 27), \dots$

이므로 $x+y$의 값 중 가장 작은 값은 $x=29$, $y=6$일 때이므로 그 값은 $x+y=29+6=35$

02 답 ⑤

해결 key Point!

두 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수를 각 방정식의 x, y에 대입하여 식이 성립하는 것을 해로 구해야 한다.

두 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수의 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 11), (6, 12)$이다.

이 중 각 방정식을 만족시키는 순서쌍 (x, y)를 구하면

① 방정식 $x+y=3$의 해는 $(1, 2), (2, 1)$의 2개이다.

② 방정식 $x+2y=5$의 해는 $(1, 2), (3, 1)$의 2개이다.

③ 방정식 $x-y=4$의 해는 $(5, 1), (6, 2)$의 2개이다.

④ 방정식 $2x-y=9$의 해는 $(5, 1), (6, 3)$의 2개이다.

⑤ 방정식 $3x-4y=5$의 해는 $(3, 1)$의 1개이다.

따라서 해의 개수가 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

03 답 ①

$x=2$, $y=-1$을 $(2a+b)x+(3a-4b)y=0$에 대입하면

$2(2a+b)-(3a-4b)=0,\ 4a+2b-3a+4b=0$

$\therefore a=-6b$

$a=-6b$를 $3by+5a=3b-ax$에 대입하면

$3by-30b=3b+6bx \quad \therefore 6bx-3by=-33b$

이때 $ab\neq0$, 즉 $a\neq0$, $b\neq0$이므로 양변을 $3b$로 나누면

$2x-y=-11$

04 답 22

$x=a$, $y=b$를 $3x+4y=15$에 대입하면

$3a+4b=15 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$x=a+5$, $y=b-2$를 $3x+4y=k$에 대입하면

$3(a+5)+4(b-2)=k,\ 3a+4b+7=k$

㉠에서 $k=15+7=22$

05 답 11

해결 key Point!

미지수가 2개인 일차방정식의 해 x, y의 값의 비가 $a : b$로 주어지면 $x=at$, $y=bt$ ($t\neq0$인 상수)라고 할 수 있어야 한다.

1단계 a의 값 구하기

$x=3$, $y=-1$을 $ax-3y-18=0$에 대입하면

$3a+3-18=0$, $3a=15$

$\therefore\ a=5$

2단계 b, c의 값 구하기

$a=5$를 $ax-3y-18=0$에 대입하면

$5x-3y-18=0$ ······ ㉠

이때 x, y의 값의 비가 $3:4$인 해를 $x=3t$, $y=4t$ ($t\neq0$인 상수)라 하고 이를 ㉠에 대입하면

$15t-12t-18=0$, $3t=18$

$\therefore\ t=6$

따라서 $x=18$, $y=24$이므로

$b=18$, $c=24$

3단계 $a-b+c$의 값 구하기

$\therefore\ a-b+c=5-18+24=11$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구했다.	40 %
❷	b, c의 값을 구했다.	40 %
❸	$a-b+c$의 값을 구했다.	20 %

06 답 3

해결 key Point!

샤프와 볼펜의 개수는 자연수이므로 조건을 만족시키는 방정식의 자연수인 해를 구해야 한다.

선미가 산 샤프의 개수를 x, 볼펜의 개수를 y라고 하면

$6+x+y=12$

$\therefore\ x+y=6$ ······ ㉠

이를 만족시키는 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$

한편, 구매한 물건의 총 가격은 21000원 이상 22000원 미만이므로

$21000\leq1200\times6+3500x+1300y<22000$

$21000\leq7200+3500x+1300y<22000$

$13800\leq3500x+1300y<14800$

$\therefore\ 138\leq35x+13y<148$ ······ ㉡

㉠을 만족시키는 두 자연수 x, y중에서 ㉡을 만족시키는 것을 구하면 $x=3$, $y=3$이다.

따라서 선미가 산 볼펜의 개수는 3이다.

07 답 ③

일차방정식 $x+2y=13$을 만족시키는 두 자연수 x, y의 값과 그때의 xy의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	3	5	7	9	11
y	6	5	4	3	2	1
xy	6	15	20	21	18	11

따라서 $x=7$, $y=3$일 때 xy의 값은 21로 가장 크므로

$p=7$, $q=3$

$x=7$, $y=3$을 $3x+4y=k$에 대입하면

$21+12=k$

$\therefore\ k=33$

$\therefore\ p+q+k=7+3+33=43$

08 답 3

1단계 $x=1$, $y=3$을 일차방정식 $ax+by=12$에 대입하여 a, b 사이의 관계식 구하기

$x=1$, $y=3$을 $ax+by=12$에 대입하면

$a+3b=12$

$\therefore\ a=12-3b$ ······ ㉠

2단계 일차방정식 $2bx-ay=12(2b-y)$를 간단히 하기

㉠을 $2bx-ay=12(2b-y)$에 대입하면

$2bx-(12-3b)y=12(2b-y)$

$2bx-12y+3by=24b-12y$

$2bx+3by=24b$

이때 $b\neq0$이므로 양변을 b로 나누면

$2x+3y=24$ ······ ㉡

3단계 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수 구하기

㉡을 만족시키는 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(3, 6)$, $(6, 4)$, $(9, 2)$의 3개이다.

단계	채점 기준	비율
❶	$x=1$, $y=3$을 일차방정식 $ax+by=12$에 대입하여 a, b 사이의 관계식을 구했다.	30 %
❷	일차방정식 $2bx-ay=12(2b-y)$를 간단히 했다.	40 %
❸	두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구했다.	30 %

09 답 13

$(2x-3)◎(y-4)=3$에서

$2(2x-3)-3(y-4)+1=3$, $4x-3y+7=3$

$\therefore\ 4x-3y=-4$

$4x-3y=-4$를 만족시키는 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(2, 4)$, $(5, 8)$, $(8, 12)$, $(11, 16)$, $(14, 20)$, $(17, 24)$, …

이때 두 자연수 x, y가 서로소가 되면서 $x+y$의 값이 가장 작은 경우는 $x=5$, $y=8$일 때 $x+y=5+8=13$이다.

10 답 32

해결 key Point!

받아내림이 있는 경우와 받아내림이 없는 경우로 나누어 생각해 본다. 즉, $x \geq y$이면 일의 자리의 계산에서 받아내림이 없고 $x<y$이면 일의 자리의 계산에서 받아내림이 있다는 것을 이용한다.

(i) $x \geq y$일 때

일의 자리의 계산에서 받아내림 없이 계산하면

$x-y=y \quad \therefore x=2y \quad \cdots\cdots ㉠$

십의 자리의 계산에서 $x=y$이면 $y-x=0$이므로 $y-x=6$이 성립하지 않는다.

$\therefore x>y$

따라서 십의 자리의 계산은 백의 자리에서 10을 받아내림해야 하므로

$10+y-x=6 \quad \therefore x-y=4 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면

$2y-y=4 \quad \therefore y=4$

$y=4$를 ㉠에 대입하면 $x=8$

(ii) $x<y$일 때

일의 자리의 계산은 십의 자리에서 10을 받아내림해야 하므로

$10+x-y=y \quad \therefore 2y-x=10 \quad \cdots\cdots ㉢$

십의 자리의 계산에서 $x>y-1$이면 조건에서 $y-1<x<y$이므로 조건을 만족시키는 자연수 x, y가 존재하지 않는다.

따라서 십의 자리의 계산은 받아내림 없이 계산해야 하므로

$y-1-x=6 \quad \therefore y-x=7 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉢$-$㉣을 하면 $y=3$

$y=3$을 ㉣에 대입하면

$3-x=7 \quad \therefore x=-4$

이때 x, y가 한 자리 자연수이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $x=8$, $y=4$

$\therefore xy=8\times4=32$

11 답 1

해결 key Point!

순환소수를 분수로 만든 뒤 분모의 최소공배수를 곱해서 계수가 정수인 연립방정식을 세워야 한다.

$\begin{cases} 0.\dot{3}x+0.\dot{2}y=0.\dot{6} \\ 0.0\dot{4}x-0.0\dot{3}y=0.2\dot{7} \end{cases}$에서

$\begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{2}{9}y=\frac{2}{3} & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{2}{45}x-\frac{1}{30}y=\frac{5}{18} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 9$를 하면 $3x+2y=6 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉡$\times 90$을 하면 $4x-3y=25 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉢$\times 3+$㉣$\times 2$를 하면

$17x=68 \quad \therefore x=4$

$x=4$를 ㉢에 대입하면

$12+2y=6,\ 2y=-6 \quad \therefore y=-3$

따라서 $a=4$, $b=-3$이므로

$a+b=4+(-3)=1$

Level UP

순환소수를 분수로 나타내기

a, b, c가 0 또는 한 자리 자연수일 때

$0.\dot{a}=\frac{a}{9}$, $0.\dot{a}\dot{b}=\frac{ab}{99}$,

$0.a\dot{b}=\frac{ab-a}{90}$, $0.a\dot{b}\dot{c}=\frac{abc-a}{990}$, $0.ab\dot{c}=\frac{abc-ab}{900}$

12 답 ⑤

해결 key Point!

지수법칙을 이용하여 식을 정리하면 연립방정식을 얻을 수 있다.

$\frac{(3^x)^3\times3^y}{3^{3y}}=729$에서 $\frac{3^{3x+y}}{3^{3y}}=3^6$

$3x+y-3y=6$

$\therefore 3x-2y=6 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\frac{(2^x\times2^y)^2}{8^y}=128$에서 $\frac{2^{2(x+y)}}{2^{3y}}=2^7$

$2(x+y)-3y=7$

$\therefore 2x-y=7 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠$-$㉡$\times 2$를 하면

$-x=-8 \quad \therefore x=8$

$x=8$을 ㉡에 대입하면

$16-y=7 \quad \therefore y=9$

$\therefore xy=8\times9=72$

Level UP

지수법칙

m, n이 자연수일 때

(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n=a^{mn}$

(3) $a\neq0$일 때

① $m>n$이면 $a^m\div a^n=a^{m-n}$

② $m=n$이면 $a^m\div a^n=1$

③ $m<n$이면 $a^m\div a^n=\frac{1}{a^{n-m}}$

(4) $(ab)^m=a^mb^m$, $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$ (단, $b\neq0$)

13 답 $x=5, y=5$ 또는 $x=7, y=3$

해결 key Point!

$x>y$일 때와 $x\le y$일 때로 나누어서 연립방정식을 풀어야 한다.

(i) $x>y$일 때

$x◎y=x-2y$, $x◇y=x+y+x-y=2x$이므로 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} x-2y=-x+y+5 \\ 2x=x-y+10 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} 2x-3y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡×2를 하면

$-5y=-15 \qquad \therefore y=3$

$y=3$을 ㉡에 대입하면

$x+3=10 \qquad \therefore x=7$

(ii) $x\le y$일 때

$x◎y=2x-y$, $x◇y=x+y-(x-y)=2y$이므로 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} 2x-y=-x+y+5 \\ 2y=x-y+10 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} 3x-2y=5 & \cdots\cdots ㉢ \\ x-3y=-10 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢−㉣×3을 하면

$7y=35 \qquad \therefore y=5$

$y=5$를 ㉣에 대입하면

$x-15=-10 \qquad \therefore x=5$

(i), (ii)에 의하여 구하는 연립방정식의 해는 $x=5, y=5$ 또는 $x=7, y=3$이다.

14 답 23

해결 key Point!

일차방정식 $ax+by=k$가 x, y의 순서쌍 $(3, 2)$, $(-2, 4)$를 모두 해로 가짐을 이용한다.

1단계 주어진 조건으로 a, b, k에 대한 연립방정식 세우기

x, y의 순서쌍 $(3, 2)$, $(-2, 4)$가 모두 일차방정식 $ax+by=k$의 해이므로

$\begin{cases} 3a+2b=k & \cdots\cdots ㉠ \\ -2a+4b=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

2단계 **1단계**에서 세운 연립방정식을 풀어 a, b를 k에 대한 식으로 나타내기

㉠×2−㉡을 하면

$8a=k \qquad \therefore a=\frac{k}{8}$

$a=\frac{k}{8}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{8}k+2b=k$, $2b=\frac{5}{8}k \qquad \therefore b=\frac{5}{16}k$

3단계 $3ax+2by=28$에 연립방정식의 해와 a, b를 대입하여 $a+b+k$의 값 구하기

x, y의 순서쌍 $(-2, 4)$가 일차방정식 $3ax+2by=28$의 해이므로

$-6a+8b=28 \qquad \therefore 3a-4b=-14 \qquad \cdots\cdots ㉢$

$a=\frac{k}{8}$, $b=\frac{5}{16}k$를 ㉢에 대입하면

$\frac{3}{8}k-\frac{5}{4}k=-14$, $-\frac{7}{8}k=-14 \qquad \therefore k=16$

따라서 $a=2$, $b=5$이므로

$a+b+k=2+5+16=23$

단계	채점 기준	비율
❶	a, b, k에 대한 연립방정식을 세웠다.	30 %
❷	a, b를 k에 대한 식으로 나타냈다.	30 %
❸	$a+b+k$의 값을 구했다.	40 %

꿀 한줄평

해를 주어진 일차방정식에 대입하여 등식이 성립함을 이용하면 a, b, k에 대한 세 개의 일차방정식을 얻을 수 있으므로 이를 연립하여 풀면 된다.

15 답 -2

1단계 첫 번째 연립방정식의 해를 $x=p$, $y=q$라 하고 주어진 해의 조건을 이용하여 p, q에 대한 연립방정식을 세우기

$\begin{cases} ax+by=-5 \\ x-3y=-3 \end{cases}$의 해를 $x=p$, $y=q$라고 하면

$\begin{cases} ap+bq=-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ p-3q=-3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

또, 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=-40 \\ -x+by=26 \end{cases}$의 해는 $x=2p$, $y=2q$이므로

$\begin{cases} 4p+2q=-40 \\ -2p+2bq=26 \end{cases}$에서 $\begin{cases} 2p+q=-20 & \cdots\cdots ㉢ \\ -p+bq=13 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

2단계 p, q의 값 구하기

㉡+㉢×3을 하면

$7p=-63 \qquad \therefore p=-9$

$p=-9$를 ㉢에 대입하면

$-18+q=-20 \qquad \therefore q=-2$

3단계 ab의 값 구하기

$p=-9$, $q=-2$를 ㉣에 대입하면

$9-2b=13$, $2b=-4 \qquad \therefore b=-2$

$p=-9$, $q=-2$, $b=-2$를 ㉠에 대입하면

$-9a+4=-5$, $-9a=-9 \qquad \therefore a=1$

$\therefore ab=1\times(-2)=-2$

단계	채점 기준	비율
❶	p, q에 대한 연립방정식을 세웠다.	30 %
❷	p, q의 값을 구했다.	40 %
❸	ab의 값을 구했다.	30 %

16 답 6

해결 key Point!

x, y를 k에 대한 식으로 나타내야 한다.

$$\begin{cases} y=3x-2k & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2y=10k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x+2(3x-2k)=10k$, $7x-4k=10k$

$7x=14k \qquad \therefore x=2k$

$x=2k$를 ㉠에 대입하면

$y=6k-2k=4k$

$\therefore \dfrac{2x+2y}{3y-5x}=\dfrac{4k+8k}{12k-10k}=\dfrac{12k}{2k}=6$

꿀 한줄평

미지수가 3개일 때, 서로 다른 2개의 식이 주어져 있으면 두 미지수를 다른 한 미지수에 대하여 나타낼 수 있다. 즉, 위의 문제에서 x, y를 모두 k에 대한 식으로 나타낸 후 구하는 식에 대입하면 값을 구할 수 있다.

17 답 11

주어진 두 연립방정식의 해는 연립방정식

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x-1}+\dfrac{12}{y+1}=10 \\ \dfrac{2}{x-1}-\dfrac{6}{y+1}=-1 \end{cases}$$

의 해와 같다.

이때 $\dfrac{1}{x-1}=A$, $\dfrac{1}{y+1}=B$라고 하면

$$\begin{cases} 4A+12B=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2A-6B=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠+㉡×2를 하면

$8A=8 \qquad \therefore A=1$

$A=1$을 ㉠에 대입하면

$4+12B=10$, $12B=6$

$\therefore B=\dfrac{1}{2}$

$A=\dfrac{1}{x-1}=1$에서 $x-1=1$

$\therefore x=2$

$B=\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{2}$에서 $y+1=2$

$\therefore y=1$

$x=2$, $y=1$을 $ax-2y=8$에 대입하면

$2a-2=8 \qquad \therefore a=5$

$x=2$, $y=1$, $a=5$를 $bx+ay=17$에 대입하면

$2b+5=17 \qquad \therefore b=6$

$\therefore a+b=5+6=11$

꿀 한줄평

두 연립방정식의 해가 같을 때에는 네 개의 일차방정식의 해가 모두 같은 것이므로 적절한 두 일차방정식을 묶어서 해를 구한다. 또, 미지수가 분모에 있어 계산하기 어려우므로 공통부분을 한 문자로 놓고 연립방정식을 풀기 쉬운 꼴로 바꾸어 해를 구해야 한다.

18 답 ③

해결 key Point!

$x+y=A$, $xy=B$라 하고 주어진 연립방정식을 A, B에 대한 연립방정식으로 만든다.

$x+y=A$, $xy=B$라고 하면 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{A}{B}$이므로

주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} A+B=6 \\ \dfrac{A}{B}=2 \end{cases}, \text{ 즉 } \begin{cases} A+B=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ A=2B & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$2B+B=6$, $3B=6 \qquad \therefore B=2$

$B=2$를 ㉡에 대입하면

$A=4$

따라서 $x+y=4$, $xy=2$이므로

$$x\left(y-\frac{y}{x}\right)+y\left(x-\frac{x}{y}\right)=xy-y+xy-x=2xy-(x+y)$$
$$=2\times2-4=0$$

19 답 ④

해결 key Point!

$\{x, y\}$는 x, y 중 작지 않은 수를 나타내고, $[x, y]$는 x, y 중 크지 않은 수를 나타내므로

$x\geq y$이면 $\{x, y\}=x$, $[x, y]=y$

$x<y$이면 $\{x, y\}=y$, $[x, y]=x$

(i) $x\geq y$일 때

$\{x, y\}=x$, $[x, y]=y$이므로

$$\begin{cases} 2x-y-5=x \\ 3x-y-12=y \end{cases}, \text{ 즉 } \begin{cases} x-y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-2y=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠×2−㉡을 하면

$-x=-2 \qquad \therefore x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$2-y=5 \qquad \therefore y=-3$

(ii) $x<y$일 때

$\{x, y\}=y$, $[x, y]=x$이므로

$$\begin{cases} 2x-y-5=y \\ 3x-y-12=x \end{cases}, \text{ 즉 } \begin{cases} 2x-2y=5 & \cdots\cdots ㉢ \\ 2x-y=12 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

㉢−㉣을 하면

$-y=-7 \qquad \therefore y=7$

$y=7$을 ㉣에 대입하면

$2x-7=12$, $2x=19$ $\therefore x=\frac{19}{2}$

이때 $\frac{19}{2}>7$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $x=2$, $y=-3$이므로 $a=2$, $b=-3$

$\therefore \{a, b\}-[a, b]=\{2, -3\}-[2, -3]$

$=2-(-3)=5$

20 답 25

해결 key Point!

일차방정식의 양변에 분모의 최소공배수를 곱해서 계수가 정수인 일차방정식으로 변형한 뒤 연립방정식을 풀어야 한다.

$\begin{cases} \frac{3}{5}x+\frac{1}{5}y=\frac{22}{5} & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{1}{6}x+\frac{1}{4}y=\frac{17}{12} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×5를 하면 $3x+y=22$ ······ ㉢

㉡×12를 하면 $2x+3y=17$ ······ ㉣

㉢×3−㉣을 하면

$7x=49$ $\therefore x=7$

$x=7$을 ㉢에 대입하면

$21+y=22$ $\therefore y=1$

주어진 연립방정식의 해를 x, y의 순서쌍으로 나타내면

$(7, 1)$이므로

$\begin{cases} 4a+3b-18=7 \\ 3a-2b-5=1 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} 4a+3b=25 & \cdots\cdots ㉤ \\ 3a-2b=6 & \cdots\cdots ㉥ \end{cases}$

㉤×2+㉥×3을 하면

$17a=68$ $\therefore a=4$

$a=4$를 ㉤에 대입하면

$16+3b=25$, $3b=9$ $\therefore b=3$

$\therefore a^2+b^2=4^2+3^2=25$

21 답 ④

해결 key Point!

$A=B=C$의 꼴의 방정식이므로

$\begin{cases} A=B \\ A=C \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} A=B \\ B=C \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} A=C \\ B=C \end{cases}$

중 하나의 꼴로 바꾸어 푼다.

주어진 방정식의 해는 연립방정식

$\begin{cases} \frac{4ax+y-2}{3}=\frac{3ax+y-3}{2} & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{4ax+y-2}{3}=1.5x+0.5y-1.5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 해와 같다.

㉠×6을 하면 $8ax+2y-4=9ax+3y-9$

$\therefore ax+y=5$

㉡×6을 하면 $8ax+2y-4=9x+3y-9$

$\therefore (8a-9)x-y=-5$

즉, 연립방정식 $\begin{cases} ax+y=5 \\ (8a-9)x-y=-5 \end{cases}$의 해가 $x=1$, $y=b$이므로

$\begin{cases} a+b=5 \\ 8a-9-b=-5 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} a+b=5 & \cdots\cdots ㉢ \\ 8a-b=4 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢+㉣을 하면

$9a=9$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉢에 대입하면

$1+b=5$ $\therefore b=4$

$\therefore ab=1\times4=4$

22 답 ③

$3x:(x-y+3)=3:4$에서 $12x=3(x-y+3)$

$12x=3x-3y+9$ $\therefore 9x+3y=9$

$\therefore \begin{cases} 9x+3y=9 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x-3y=17 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$13x=26$ $\therefore x=2$

$x=2$를 ㉡에 대입하면

$8-3y=17$, $-3y=9$ $\therefore y=-3$

따라서 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=7 \\ bx-ay=4 \end{cases}$의 해도 $x=2$, $y=-3$이므로

$\begin{cases} 2a-3b=7 \\ 2b+3a=4 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} 2a-3b=7 & \cdots\cdots ㉢ \\ 3a+2b=4 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢×2+㉣×3을 하면

$13a=26$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉢에 대입하면

$4-3b=7$, $-3b=3$ $\therefore b=-1$

$\therefore a-b=2-(-1)=3$

23 답 ②

$x=p$, $y=q$는 $3x-y=7$의 해이고 $x=q$, $y=p$는 $5x-6y=-17$의 해이므로

$\begin{cases} 3p-q=7 \\ 5q-6p=-17 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} 3p-q=7 & \cdots\cdots ㉠ \\ 6p-5q=17 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×2−㉡을 하면

$3q=-3$ $\therefore q=-1$

$q=-1$을 ㉠에 대입하면

$3p+1=7$, $3p=6$ $\therefore p=2$

$x=2$, $y=-1$을 $2x+ay=6$에 대입하면

$4-a=6$ $\therefore a=-2$

$x=-1$, $y=2$를 $10x+by=-8$에 대입하면

$-10+2b=-8$, $2b=2$ $\therefore b=1$

$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+1^2=5$

24 답 12

x, y의 값의 비가 $2:3$인 해를 $x=2t$, $y=3t$ ($t\neq0$인 상수)라 하고 주어진 연립방정식에 대입하면

$$\begin{cases}(2k-2)2t-(k-3)3t=6\\(k+5)2t+(3k+5)3t=6\end{cases}$$

$$\begin{cases}4kt-4t-3kt+9t=6\\2kt+10t+9kt+15t=6\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases}kt+5t=6 & \cdots\cdots ㉠\\11kt+25t=6 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠$\times11-$㉡을 하면

$30t=60$ $\quad\therefore t=2$

$t=2$를 ㉠에 대입하면

$2k+10=6$, $2k=-4$ $\quad\therefore k=-2$

이때 $x=4$, $y=6$이므로 $a=4$, $b=6$

$\therefore a+b-k=4+6-(-2)=12$

25 답 -18

해결 key Point!

y의 값이 x의 절댓값의 2배이므로 $y=2|x|$

즉, $y=2x$ 또는 $y=-2x$로 경우를 나누어 연립방정식을 풀어야 한다.

$\begin{cases}5x-y-k+2=0 & \cdots\cdots ㉠\\2x+3y=16 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$을 만족시키는 y의 값이 x의 절댓값의 2배이므로 $y=2|x|$이다.

즉, $y=2x$ 또는 $y=-2x$이다.

(i) $y=2x$일 때

$y=2x$를 ㉡에 대입하면

$2x+6x=16$, $8x=16$ $\quad\therefore x=2$, $y=4$

$x=2$, $y=4$를 ㉠에 대입하면

$10-4-k+2=0$ $\quad\therefore k=8$

(ii) $y=-2x$일 때

$y=-2x$를 ㉡에 대입하면

$2x-6x=16$, $-4x=16$ $\quad\therefore x=-4$, $y=8$

$x=-4$, $y=8$을 ㉠에 대입하면

$-20-8-k+2=0$ $\quad\therefore k=-26$

(i), (ii)에 의하여 k의 값은 8, -26이므로

$8+(-26)=-18$

다른 풀이

$\begin{cases}5x-y-k+2=0 & \cdots\cdots ㉠\\2x+3y=16 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$에서 ㉠$\times3+$㉡을 하면

$17x-3k+6=16$, $17x=3k+10$

$\therefore x=\dfrac{3k+10}{17}$

$x=\dfrac{3k+10}{17}$을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{6k+20}{17}+3y=16$, $3y=\dfrac{-6k+252}{17}$

$\therefore y=\dfrac{-2k+84}{17}$

이때 y의 값이 x의 절댓값의 2배이므로

$\dfrac{-2k+84}{17}=2\left|\dfrac{3k+10}{17}\right|$, $2k-84=2|3k+10|$

즉, $2k-84=2(3k+10)$ 또는 $2k-84=-2(3k+10)$이므로

$2k-84=6k+20$ 또는 $2k-84=-6k-20$

$4k=-104$ 또는 $8k=64$

$\therefore k=-26$ 또는 $k=8$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 $-26+8=-18$

Level UP

방정식의 해 사이의 관계가 주어질 때

(1) y의 값이 x의 값의 a배이다. ⇨ $y=ax$

(2) y의 값이 x의 값보다 b만큼 크다. ⇨ $y=x+b$

(3) x의 값과 y의 값의 차가 c이다. ⇨ $x-y=c$ 또는 $y-x=c$

(4) x의 값과 y의 값의 비가 $a:b$이다.

⇨ $x=at$, $y=bt$ ($t\neq0$인 상수) 또는 $ay=bx$

26 답 ①

주어진 연립방정식의 해는 연립방정식

$\begin{cases}4x-3y=b-4 & \cdots\cdots ㉠\\4x-5y=b-8 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$의 해와 같다.

㉠$-$㉡을 하면

$2y=4$ $\quad\therefore y=2$

$y=2$를 ㉠에 대입하면

$4x-6=b-4$ $\quad\therefore 4x=b+2$ $\quad\cdots\cdots ㉢$

$y=2$를 $3x-2y=a+5$에 대입하면

$3x-4=a+5$ $\quad\therefore 3x=a+9$ $\quad\cdots\cdots ㉣$

㉢$\times3-$㉣$\times4$를 하면

$0=3b-4a-30$ $\quad\therefore 4a-3b=-30$

꿀 한줄평

미지수가 4개로 이루어진 방정식이 3개가 주어졌을 때, 미지수의 값을 전부 구할 수는 없다. 그런데 여기서는 두 식을 적절히 계산하면 y의 값을 구할 수 있으므로 y의 값을 구하고 이를 이용하여 $4a-3b$의 값을 구하는 방법을 찾아야 한다.

27 답 16

1단계 두 식을 연립하여 x를 a에 대한 식으로 나타내기

$$\begin{cases}5x-y+a=0 & \cdots\cdots ㉠\\2x+3y=40 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠$\times3+$㉡을 하면

$17x+3a=40$, $17x=40-3a$

$\therefore\ x=\dfrac{-3a+40}{17}$ …… ㉢

2단계 a, p, q의 값 구하기

이때 $\dfrac{-3a+40}{17}$이 자연수가 되기 위해서는 $-3a+40$이 17의 배수이어야 한다.

$-3a+40=17$, $-3a+40=34$, $-3a+40=51$, …에서

$a=\dfrac{23}{3}$, $a=2$, $a=-\dfrac{11}{3}$, …이므로 조건을 만족시키는 자연수 a의 값은 $a=2$뿐이다.

$a=2$를 ㉢에 대입하면 $x=2$

$x=2$를 ㉡에 대입하면

$4+3y=40$, $3y=36$ $\therefore\ y=12$

3단계 $a+p+q$의 값 구하기

따라서 $p=2$, $q=12$이므로

$a+p+q=2+2+12=16$

단계	채점 기준	비율
❶	x를 a에 대한 식으로 나타냈다.	30 %
❷	a, p, q의 값을 구했다.	50 %
❸	$a+p+q$의 값을 구했다.	20 %

꿀 한줄평

연립방정식의 해와 a가 자연수라는 조건이 있으므로

$$x=\frac{-3a+40}{17}$$

에서 $-3a+40$이 17의 배수가 되는 자연수 a의 값을 찾으면 된다.

28 답 ②

해결 key Point!

주어진 연립방정식에 $|x|$, $|y|$가 존재하므로 x와 y의 부호에 따라 연립방정식을 풀어야 한다.

(i) $x\ge0$, $y\ge0$일 때

$\begin{cases} x+2y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면 $y=-3$

이때 $y\ge0$이어야 하므로 해가 없다.

(ii) $x\ge0$, $y<0$일 때

$\begin{cases} x-2y=3 & \cdots\cdots ㉢ \\ x+y=6 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢$-$㉣을 하면

$-3y=-3$ $\therefore\ y=1$

이때 $y<0$이어야 하므로 해가 없다.

(iii) $x<0$, $y\ge0$일 때

$\begin{cases} x+2y=3 & \cdots\cdots ㉤ \\ -x+y=6 & \cdots\cdots ㉥ \end{cases}$

㉤$+$㉥을 하면

$3y=9$ $\therefore\ y=3$

$y=3$을 ㉤에 대입하면

$x+6=3$ $\therefore\ x=-3$

(iv) $x<0$, $y<0$일 때

$\begin{cases} x-2y=3 & \cdots\cdots ㉦ \\ -x+y=6 & \cdots\cdots ㉧ \end{cases}$

㉦$+$㉧을 하면

$-y=9$ $\therefore\ y=-9$

$y=-9$를 ㉧에 대입하면

$-x-9=6$ $\therefore\ x=-15$

(i)~(iv)에 의하여 연립방정식의 해는 $x=-3$, $y=3$ 또는 $x=-15$, $y=-9$이고 그때의 pq의 값은 $pq=-3\times3=-9$ 또는 $pq=-15\times(-9)=135$이다.

따라서 pq의 값 중 가장 큰 값은 135이다.

꿀 한줄평

절댓값이 있는 경우, 절댓값 안의 식의 값이 0이 되는 값을 기준으로 범위를 나눈다. 여기서는 $|x|$, $|y|$가 존재하므로 $x\ge0$, $x<0$과 $y\ge0$, $y<0$으로 범위를 나누어

(i) $x\ge0$, $y\ge0$, (ii) $x\ge0$, $y<0$, (iii) $x<0$, $y\ge0$, (iv) $x<0$, $y<0$

의 4가지 경우의 값을 모두 구해야 한다. 이때 4가지 경우의 연립방정식을 풀어서 얻은 해가 각 경우의 x, y의 부호와 일치하는지 꼭 확인해봐야 한다.

29 답 ⑤

해결 key Point!

$|x+1|$, $|x-3|$의 값이 각각 0이 되는 값을 기준으로 $x<-1$, $-1\le x<3$, $x\ge3$일 때로 경우를 나누어서 식을 간단히 정리한다.

(i) $x<-1$일 때

$\begin{cases} y=-(x+1)-(x-3) \\ x+y=7 \end{cases}$에서

$\begin{cases} y=-2x+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x-2x+2=7$ $\therefore\ x=-5$

$x=-5$를 ㉠에 대입하면

$y=10+2=12$

(ii) $-1\le x<3$일 때

$\begin{cases} y=(x+1)-(x-3) \\ x+y=7 \end{cases}$에서

$\begin{cases} y=4 & \cdots\cdots ㉢ \\ x+y=7 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢을 ㉣에 대입하면

$x+4=7$ $\therefore\ x=3$

이때 $-1\le x<3$이어야 하므로 해가 없다.

(iii) $x \geq 3$일 때

$\begin{cases} y=(x+1)+(x-3) \\ x+y=7 \end{cases}$에서

$\begin{cases} y=2x-2 & \cdots\cdots ㉤ \\ x+y=7 & \cdots\cdots ㉥ \end{cases}$

㉤을 ㉥에 대입하면

$x+2x-2=7$, $3x=9$ $\quad \therefore x=3$

$x=3$을 ㉤에 대입하면

$y=6-2=4$

(i)~(iii)에 의하여 연립방정식의 해를 순서쌍 (x, y)로 나타내면 $(-5, 12)$ 또는 $(3, 4)$이고 그때의 ab의 값은 $ab=-5\times12=-60$ 또는 $ab=3\times4=12$ 이므로 ab의 값 중 가장 큰 값은 12이다.

30 답 80

해결 key Point!

두 상수항의 합이 18이므로 한 상수항을 a(a는 상수)라 하고 다른 한 상수항을 $18-a$라고 한다.

민수가 상수항을 잘못 보고 푼 두 방정식에서 상수항의 합이 18이므로 상수항을 각각 a(a는 상수), $18-a$라고 하면

$\begin{cases} 3x-2y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ x+3y=18-a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times3+$㉡$\times2$를 하면

$11x=36+a \quad \therefore x=\dfrac{36+a}{11}$

이때 $x=4$이므로 $4=\dfrac{36+a}{11}$

$44=36+a \quad \therefore a=8$

따라서 민수가 상수항을 잘못 보고 푼 연립방정식은

$\begin{cases} 3x-2y=8 \\ x+3y=10 \end{cases}$이므로 잘못 보고 푼 두 방정식의 상수항의 곱은

$8\times10=80$

다른 풀이

민수가 상수항을 잘못 보고 푼 두 방정식에서 상수항의 합이 18이므로 상수항을 각각 a(a는 상수), $18-a$라고 하면

$\begin{cases} 3x-2y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ x+3y=18-a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

이 연립방정식의 해가 $x=4$이므로

$\begin{cases} 12-2y=a \\ 4+3y=18-a \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a=12-2y \\ a=14-3y \end{cases}$

즉, $12-2y=14-3y$이므로 $y=2$

$\therefore a=8$

따라서 민수가 상수항을 잘못 보고 푼 연립방정식은

$\begin{cases} 3x-2y=8 \\ x+3y=10 \end{cases}$이므로 잘못 보고 푼 두 방정식의 상수항의 곱은

$8\times10=80$

31 답 17

$x=-4$, $y=8$과 $x=-3$, $y=5$는 모두 $ax+by=-4$의 해이므로

$\begin{cases} -4a+8b=-4 & \cdots\cdots ㉠ \\ -3a+5b=-4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times3-$㉡$\times4$를 하면

$4b=4 \quad \therefore b=1$

$b=1$을 ㉡에 대입하면

$-3a+5=-4$, $-3a=-9 \quad \therefore a=3$

또, $x=-3$, $y=5$는 $cx+2y=7$의 해이므로

$-3c+10=7$, $-3c=-3 \quad \therefore c=1$

따라서 $x=-4$, $y=8$이 $x+2y=d$의 해이므로

$-4+16=d \quad \therefore d=12$

$\therefore a+b+c+d=3+1+1+12=17$

32 답 ①

주어진 조건에서 연립방정식

$\begin{cases} (a-2)x-3y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ ax+6y=b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해는 무수히 많다.

㉠$\times(-2)$를 하면 $-2(a-2)x+6y=-2 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉡과 ㉢이 서로 일치해야 하므로

$-2(a-2)=a$, $-2=b$

$-2a+4=a$, $-3a=-4 \quad \therefore a=\dfrac{4}{3}$

$\therefore 3ab=3\times\dfrac{4}{3}\times(-2)=-8$

33 답 6

1단계 연립방정식의 상수항을 같게 만들기

$\begin{cases} 5(2a+b-1)x+2(b-a)y=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ (6a+3)x+\left(a+\dfrac{b}{3}-2\right)y=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡$\times2$를 하면

$2(6a+3)x+2\left(a+\dfrac{b}{3}-2\right)y=8 \quad \cdots\cdots ㉢$

2단계 해가 무수히 많을 조건을 이용하여 a, b에 대한 연립방정식 세우기

이때 주어진 연립방정식의 해가 무수히 많으므로 ㉠과 ㉢이 서로 일치해야 한다.

따라서 $5(2a+b-1)=2(6a+3)$에서

$10a+5b-5=12a+6 \quad \therefore 2a-5b=-11 \quad \cdots\cdots ㉣$

또, $2(b-a)=2\left(a+\dfrac{b}{3}-2\right)$에서

$2b-2a=2a+\dfrac{2}{3}b-4$, $3b-3a=3a+b-6$

$6a-2b=6 \quad \therefore 3a-b=3 \quad \cdots\cdots ㉤$

3단계 ab의 값 구하기

㉣$-$㉤$\times 5$를 하면

$-13a=-26 \qquad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉤에 대입하면

$6-b=3 \qquad \therefore b=3$

$\therefore ab=2\times 3=6$

단계	채점 기준	비율
❶	연립방정식의 상수항을 같게 만들었다.	20 %
❷	a, b에 대한 연립방정식을 세웠다.	40 %
❸	ab의 값을 구했다.	40 %

34 답 ⑤

주어진 방정식의 해는 연립방정식 $\begin{cases} 3x+2y=x+3y+5 \\ 3x+2y=4x-y+7 \end{cases}$, 즉

$\begin{cases} 2x-y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-3y=-7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠$-$㉡$\times 2$를 하면

$5y=19 \qquad \therefore y=\dfrac{19}{5}$

$y=\dfrac{19}{5}$를 ㉡에 대입하면

$x-\dfrac{57}{5}=-7 \qquad \therefore x=\dfrac{22}{5}$

ㄱ. $\dfrac{x}{y}=x\div y=\dfrac{22}{5}\div\dfrac{19}{5}=\dfrac{22}{5}\times\dfrac{5}{19}=\dfrac{22}{19}$이고 분모에 2와 5 이외의 소인수가 있으므로 $\dfrac{x}{y}$는 유한소수로 나타낼 수 없다.

ㄴ. $5x+10y=5\times\dfrac{22}{5}+10\times\dfrac{19}{5}=60$이므로 $5x+10y$는 6의 배수이다.

ㄷ. $x=\dfrac{22}{5}$, $y=\dfrac{19}{5}$를 $19x-22y=0$에 대입하면

$19\times\dfrac{22}{5}-22\times\dfrac{19}{5}=0$이므로 해가 된다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

35 답 55

$\begin{cases} (a-2)x-y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ (2a-1)x-3y=2b-9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 3$을 하면

$3(a-2)x-3y=9 \qquad \cdots\cdots ㉢$

이때 주어진 연립방정식의 해가 무수히 많으므로 ㉡과 ㉢이 서로 일치해야 한다.

따라서 $3(a-2)=2a-1$, $9=2b-9$이므로

$3a-6=2a-1$, $2b=18$

$\therefore a=5$, $b=9$

따라서 일차방정식 $5x+9y=100$을 만족시키는 자연수인 해 $x=p$, $y=q$는 $x=2$, $y=10$ 또는 $x=11$, $y=5$이고 그때의 pq의 값은 $pq=2\times 10=20$, $pq=11\times 5=55$이다.

따라서 pq의 값 중 가장 큰 값은 55이다.

36 답 ⑤

$\begin{cases} (a-1)x+y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+2y=a+b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 2$를 하면

$2(a-1)x+2y=8 \qquad \cdots\cdots ㉢$

이때 주어진 연립방정식의 해가 존재하지 않아야 하므로 ㉡과 ㉢은 x의 계수는 같고 상수항은 달라야 한다.

따라서 $2(a-1)=4$, $8\neq a+b$이므로

$2a-2=4$, $2a=6 \qquad \therefore a=3$

$a=3$을 $a+b\neq 8$에 대입하면

$3+b\neq 8 \qquad \therefore b\neq 5$

이때 $a+b$의 값이 한 자리 자연수이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 6)$의 5개이다.

02 연립방정식의 활용

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제 (80쪽~81쪽)

01 25	02 72	03 ⑤	04 ⑤	05 ①
06 1020	07 24분	08 ⑤	09 12분	10 540 m
11 12 %	12 550 g			

01 답 25

두 자연수 중 큰 수를 x, 작은 수를 y라고 하면

$\begin{cases} x+y=38 \\ 5(x-y)=2x+10 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+y=38 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-5y=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 3-$㉡을 하면

$8y=104 \qquad \therefore y=13$

$y=13$을 ㉠에 대입하면

$x+13=38 \qquad \therefore x=25$

따라서 큰 수는 25이다.

02 답 72

처음 수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라고 하면 $\begin{cases} x=3y+1 \\ 10y+x=(10x+y)-45 \end{cases}$

$\begin{cases} x=3y+1 \\ -9x+9y=-45 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x=3y+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-y=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$3y+1-y=5$, $2y=4 \qquad \therefore y=2$

$y=2$를 ㉠에 대입하면 $x=6+1=7$

따라서 처음 수는 72이다.

03 답 ⑤

승윤이가 4점짜리를 x문제, 5점짜리를 y문제 맞혔다고 하면

$\begin{cases} 6+x+y=20 \\ 3\times6+4x+5y=78 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+y=14 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+5y=60 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times4-$㉡을 하면

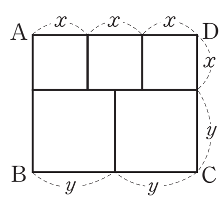
$-y=-4 \qquad \therefore y=4$

$y=4$를 ㉠에 대입하면

$x+4=14 \qquad \therefore x=10$

따라서 승윤이는 4점짜리를 10문제 맞혔다.

04 답 ⑤



오른쪽 그림과 같이 작은 정사각형의 한 변의 길이를 x, 큰 정사각형의 한 변의 길이를 y라고 하면

$\overline{AD}=\overline{BC}$이므로

$3x=2y \qquad \therefore 3x-2y=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 132이므로

$5x+4y=132 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠$\times2+$㉡을 하면

$11x=132 \qquad \therefore x=12$

$x=12$를 ㉠에 대입하면

$36-2y=0,\ 2y=36 \qquad \therefore y=18$

따라서 작은 정사각형의 한 변의 길이는 12, 큰 정사각형의 한 변의 길이는 18이므로 두 종류의 정사각형의 한 변의 길이의 차는

$18-12=6$

참고 직사각형의 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다.

05 답 ①

두 제품 A, B의 원가를 각각 x원, y원이라고 하면

$\begin{cases} x+y=26000 \\ \frac{15}{100}x+\frac{25}{100}y=5300 \end{cases}$

즉, $\begin{cases} x+y=26000 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+5y=106000 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times3-$㉡을 하면

$-2y=-28000 \qquad \therefore y=14000$

$y=14000$을 ㉠에 대입하면

$x+14000=26000 \qquad \therefore x=12000$

따라서 A 제품의 원가는 12000원이다.

06 답 1020

1단계 연립방정식 세우기

작년에 수확한 사과의 개수를 x, 배의 개수를 y라고 하면

$\begin{cases} x+y=1450 \\ \frac{20}{100}x-\frac{12}{100}y=98 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+y=1450 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x-3y=2450 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

2단계 연립방정식 풀기

㉠$\times3+$㉡을 하면

$8x=6800 \qquad \therefore x=850$

$x=850$을 ㉠에 대입하면

$850+y=1450 \qquad \therefore y=600$

3단계 올해 수확한 사과의 개수 구하기

따라서 올해 수확한 사과의 개수는

$850+850\times\frac{20}{100}=850+170=1020$

단계	채점 기준	비율
❶	연립방정식을 세웠다.	20 %
❷	연립방정식을 풀었다.	50 %
❸	올해 수확한 사과의 개수를 구했다.	30 %

07 답 24분

물통에 물을 가득 채웠을 때의 물의 양을 1이라 하고 A, B 두 수도꼭지로 1분 동안 채울 수 있는 물의 양을 각각 x, y라고 하면

$\begin{cases} 8x+8y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 9x+6y=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times3-$㉡$\times4$를 하면

$-12x=-1 \qquad \therefore x=\frac{1}{12}$

$x=\frac{1}{12}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{2}{3}+8y=1,\ 8y=\frac{1}{3} \qquad \therefore y=\frac{1}{24}$

따라서 B 수도꼭지만 열어 물을 넣을 때, 물통을 가득 채우는 데 걸리는 시간은 24분이다.

08 답 ⑤

희상이가 버스를 타고 간 거리를 x km, 걸어간 거리를 y km라고 하면

$\begin{cases} x+y=18 \\ \frac{x}{60}+\frac{y}{4}=\frac{46}{60} \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+y=18 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+15y=46 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면

$-14y=-28 \qquad \therefore y=2$

$y=2$를 ㉠에 대입하면

$x+2=18 \qquad \therefore x=16$

따라서 희상이가 버스를 타고 간 거리는 16 km이다.

09 답 12분

건우가 걸은 거리를 x m, 나은이가 걸은 거리를 y m라고 하면

$\begin{cases} x+y=1200 \\ \frac{x}{60}=\frac{y}{40} \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+y=1200 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-3y=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×2−㉡을 하면

$5y=2400 \qquad \therefore y=480$

$y=480$을 ㉠에 대입하면

$x+480=1200 \qquad \therefore x=720$

따라서 건우와 나은이는 출발한 지 $\frac{720}{60}=12$(분) 후에 만났다.

10 답 540 m

기차의 길이를 x m, 기차의 속력을 초속 y m라고 하면

$\begin{cases} x+510=14y \\ x+1335=25y \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x-14y=-510 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-25y=-1335 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면

$11y=825 \qquad \therefore y=75$

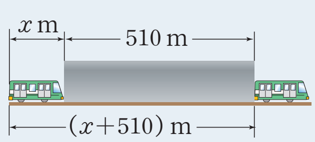
$y=75$를 ㉠에 대입하면

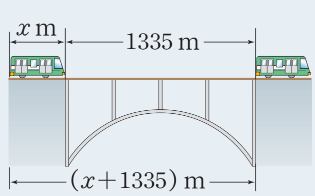
$x-1050=-510 \qquad \therefore x=540$

따라서 기차의 길이는 540 m이다.

Level UP

길이가 x m인 기차가 길이가 510 m인 터널을 완전히 통과하기 위해 달려야 하는 거리는 $(x+510)$ m이고, 길이가 1335 m인 다리를 완전히 통과하기 위해 달려야 하는 거리는 $(x+1335)$ m이다.





11 답 12 %

소금물 A의 농도를 x %, 소금물 B의 농도를 y %라고 하면

$\begin{cases} \frac{x}{100}\times 200+\frac{y}{100}\times 300=\frac{6}{100}\times 500 \\ \frac{x}{100}\times 300+\frac{y}{100}\times 200=\frac{8}{100}\times 500 \end{cases}$

즉, $\begin{cases} 2x+3y=30 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+2y=40 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×3−㉡×2를 하면

$5y=10 \qquad \therefore y=2$

$y=2$를 ㉠에 대입하면

$2x+6=30,\ 2x=24 \qquad \therefore x=12$

따라서 소금물 A의 농도는 12 %이다.

12 답 550 g

합금 A가 x g, 합금 B가 y g 필요하다고 하면

$\begin{cases} \frac{32}{100}x+\frac{8}{100}y=80 \\ \frac{4}{100}x+\frac{6}{100}y=30 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} 4x+y=1000 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+3y=1500 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡×2를 하면

$-5y=-2000 \qquad \therefore y=400$

$y=400$을 ㉠에 대입하면

$4x+400=1000,\ 4x=600 \qquad \therefore x=150$

따라서 필요한 합금 A의 양은 150 g, 합금 B의 양은 400 g이므로 두 합금 A, B의 양의 합은

$150+400=550$(g)

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

82쪽~86쪽

01 ③	02 ③	03 9	04 4	05 ⑤
06 7	07 4개	08 40 cm^2	09 46 m	10 ⑤
11 ②	12 44시간	13 ③	14 192	15 20
16 10시간	17 7.2시간	18 ④	19 90톤	20 56분
21 10분	22 2 km	23 2시간	24 ②	
25 시속 14 km		26 시속 12 km		27 485
28 ②	29 ③	30 ⑤		

01 답 ③

해결 key Point!

둘째의 나이와 셋째의 나이를 각각 x살, y살이라 하고 조건에 맞게 방정식을 세운 뒤 나이가 자연수임을 이용하여 $y<x<21$을 만족시키는 자연수 해를 구해야 한다.

둘째의 나이를 x살, 셋째의 나이를 y살이라고 하면 둘째의 나이의 2배와 셋째의 나이의 5배를 더하면 111살이므로

$2x+5y=111$

$2x=111-5y \qquad \therefore x=\frac{111-5y}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$

첫째의 나이가 21살이므로 $x=\frac{111-5y}{2}<21$

$111-5y<42,\ 5y>69 \qquad \therefore y>13.8$

이때 ㉠에서 x는 자연수이므로 y는 홀수이어야 한다.

따라서 $y=15,\ 17,\ 19,\ \cdots$

이를 ㉠에 각각 대입하면

$y=15$일 때, $x=\frac{111-75}{2}=18$

$y=17$일 때, $x=\frac{111-85}{2}=13$

이때 $x>y$이어야 하므로 $x=18,\ y=15$

따라서 둘째와 셋째의 나이의 합은

$x+y=18+15=33$(살)

꿀 한줄평

나이, 개수, 횟수, 인원 수 등을 구하는 방정식의 활용 문제에서는 해가 자연수임에 주의한다.

02 답 ③

비밀번호의 각 자리의 숫자를 천의 자리부터 차례대로 x, y, 2, 5라고 하면

$x+y+2+5=19$에서 $x+y=12$ ······ ㉠

$(x+2)-(y+5)=3$에서 $x-y=6$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2x=18$ $\quad\therefore x=9$

$x=9$를 ㉠에 대입하면

$9+y=12$ $\quad\therefore y=3$

따라서 비밀번호의 각 자리의 숫자는 9, 3, 2, 5이므로 그 곱은

$9\times3\times2\times5=270$

03 답 9

1단계 학생 수의 합 조건을 이용하여 일차방정식 세우기

학생 수는 모두 6명이므로

$a+1+b+c+1=6$

$\therefore a+b+c=4$ ······ ㉠

2단계 점수의 합 조건을 이용하여 일차방정식을 세우기

이때 이기는 학생은 2점, 비기는 학생은 1점, 지는 학생은 0점을 받기로 하였으므로 매 경기마다 두 학생이 받는 점수의 총합은 2점이다.

따라서 15경기가 모두 끝난 후 6명의 학생이 받는 점수의 총합은 $2\times15=30$(점)이므로

$2a+4+5b+6c+7=30$

$\therefore 2a+5b+6c=19$ ······ ㉡

3단계 두 미지수 사이의 관계식을 구하고 정수 조건을 이용하여 $a+2b+3c$의 값 구하기

㉡−㉠×2를 하면

$3b+4c=11$ ······ ㉢

이때 a, b, c는 0 이상의 정수이므로 ㉢을 만족시키는 정수 해는 $b=1$, $c=2$이다.

$b=1$, $c=2$를 ㉠에 대입하면

$a+1+2=4$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore a+2b+3c=1+2\times1+3\times2=9$

단계	채점 기준	비율
❶	학생 수의 합 조건을 이용하여 일차방정식을 세웠다.	25 %
❷	점수의 합 조건을 이용하여 일차방정식을 세웠다.	25 %
❸	$a+2b+3c$의 값을 구했다.	50 %

04 답 4

해결 key Point!

A, B 두 사람이 게임을 할 때, A가 이긴 횟수를 a, 진 횟수를 b라고 하면 B가 이긴 횟수는 b, 진 횟수는 a임을 이용한다.

A가 이긴 횟수를 x, 비긴 횟수를 y라고 하면 A가 진 횟수는 $10-x-y$이다.

A가 얻은 점수는

$4x+2y+(10-x-y)=25$

$\therefore 3x+y=15$ ······ ㉠

B가 이긴 횟수는 y, B가 진 횟수는 x이므로

B가 얻은 점수는

$4(10-x-y)+2y+x=22$

$\therefore 3x+2y=18$ ······ ㉡

㉡−㉠을 하면 $y=3$

$y=3$을 ㉠에 대입하면

$3x+3=15$, $3x=12$ $\quad\therefore x=4$

따라서 A가 이긴 횟수는 4이다.

다른 풀이

주사위를 10번 던지고 난 결과, A의 점수가 B의 점수보다 3점이 더 높다.

주사위를 한 번 던지고 난 후 이긴 사람과 진 사람의 점수 차이는 3점이므로 주사위 게임에서 A가 이긴 횟수는 B가 이긴 횟수보다 1회만큼 많다.

A가 이긴 횟수를 x라고 하면 B가 이긴 횟수는 $x-1$이고 비긴 횟수는 $10-(x+x-1)=11-2x$이다.

따라서 주사위를 10번 던지고 난 결과, A는 25점을 얻었으므로

$4x+2(11-2x)+(x-1)=25$

$x+21=25$ $\quad\therefore x=4$

따라서 A가 이긴 횟수는 4이다.

05 답 ⑤

봉사 활동을 한 횟수를 x, 지각을 한 횟수를 y, 상장을 받은 횟수를 z라고 하면 x, y, z는 0 이상의 정수이다.

$$\begin{cases} x+y+z=20 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-3y+5z=14 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=20-x-z$

이 식을 ㉡에 대입하면

$2x-3(20-x-z)+5z=14$, $5x+8z=74$

$5x=74-8z$ $\quad\therefore x=\dfrac{74-8z}{5}$

$x=\dfrac{74-8z}{5}\geq0$에서

$74-8z\geq0$, $8z\leq74$ $\quad\therefore z\leq9.25$

이때 x가 0 이상의 정수가 되려면 $74-8z$는 5의 배수가 되어야 한다.
즉, $74-8z=50$ 또는 $74-8z=10$이므로
$z=3$ 또는 $z=8$
이를 ㉠에 각각 차례대로 대입하면
$z=3$일 때, $x=\dfrac{50}{5}=10$, $10+y+3=20$ $\quad\therefore y=7$
$z=8$일 때, $x=\dfrac{10}{5}=2$, $2+y+8=20$ $\quad\therefore y=10$
따라서 봉사 활동을 한 횟수가 될 수 있는 값 중 가장 큰 값은 10이다.

참고 x, y, z가 모두 0이 아닌 정수이므로 소거하는 미지수와 한 문자로 나타낸 미지수가 다른 문자여도 답은 같다.

06 답 7

노래 공연에 참여한 팀의 수를 x, 댄스 공연에 참여한 팀의 수를 y라고 하면 밴드 공연에 참여한 팀의 수는 $y+1$이므로 총 공연의 수는
$x+y+(y+1)=x+2y+1$
공연 사이의 쉬는 시간의 합은
$2(x+2y+1-1)=2x+4y$(분)
노래 공연에 소요된 전체 시간은 댄스 공연에 소요된 전체 시간보다 7분 더 기므로
$4x=7y+7$ $\quad\therefore 4x-7y=7$ $\quad$ …… ㉠
전체 공연 시간이 1시간 51분, 즉 111분이므로
$4x+7y+9(y+1)+(2x+4y)=111$
$6x+20y=102$ $\quad\therefore 3x+10y=51$ $\quad$ …… ㉡
㉠$\times 3-$㉡$\times 4$를 하면
$-61y=-183$ $\quad\therefore y=3$
$y=3$을 ㉠에 대입하면
$4x-21=7$, $4x=28$ $\quad\therefore x=7$
따라서 노래 공연에 참여한 팀의 수는 7이다.

꿀 한줄평
전체 공연 시간은 노래, 밴드, 댄스 공연 시간과 각 공연 사이의 쉬는 시간의 합이다. 이때 공연 사이의 쉬는 시간의 횟수는 {(공연 팀의 수)-1}임에 주의해야 한다.

07 답 4개

해결 key Point!
63일 중 일요일은 9일이고, 작업 시 일요일은 항상 쉬고, 가구를 1개씩 만들 때마다 하루의 휴일을 보내기 때문에 목수가 63일 중 실제로 작업한 날의 수를 구해야 한다.

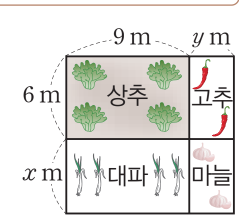
제작한 책상의 개수를 x, 의자의 개수를 y라고 하면 총 제작한 가구의 개수는 13이므로
$x+y=13$ $\quad$ …… ㉠
$63=7\times 9$이므로 전체 작업 기간 안에 일요일이 9번 들어 있다.
또, 가구 한 개의 제작이 완료될 때마다 하루 휴식일이 있으나 마지막 제작이 완료된 뒤의 휴식일은 생각하지 않으므로 휴식일은 총 12일이다.
한편, 휴식이 일요일과 겹치면 다음날인 월요일도 쉬므로 작업하지 않는 날의 수는 일요일 9일과 휴식일 12일을 합쳐 21일이다.
따라서 작업일 수는 $63-21=42$이므로
$6x+2y=42$, 즉 $3x+y=21$ $\quad$ …… ㉡
㉡$-$㉠을 하면
$2x=8$ $\quad\therefore x=4$
$x=4$를 ㉠에 대입하면
$4+y=13$ $\quad\therefore y=9$
따라서 책상은 4개 제작하였다.

08 답 40 cm^2

작은 직사각형의 긴 변의 길이를 x cm, 짧은 변의 길이를 y cm라고 하면 직사각형 ABCD의 가로의 길이는 $(x+2y)$ cm이고 세로의 길이는 $2x$ cm이다.
이때 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는
$2\{(x+2y)+2x\}=76$ (cm)
$3x+2y=38$ $\quad$ …… ㉠
작은 직사각형의 긴 변의 길이의 2배와 짧은 변의 길이의 5배가 같으므로
$2x=5y$, 즉 $2x-5y=0$ $\quad$ …… ㉡
㉠$\times 2-$㉡$\times 3$을 하면
$19y=76$ $\quad\therefore y=4$
$y=4$를 ㉡에 대입하면
$2x-20=0$, $2x=20$ $\quad\therefore x=10$
따라서 작은 직사각형 하나의 넓이는
$xy=10\times 4=40$ (cm^2)

09 답 46 m

해결 key Point!
가로로 늘인 길이를 y m, 세로로 늘인 길이를 x m라 하고 조건에 맞게 연립방정식을 세워야 한다.



처음 텃밭의 넓이는
$9\times 6=54$(m^2)
가로로 늘인 길이를 y m, 세로로 늘인 길이를 x m라고 하면 가로로 늘인 길이는 세로로 늘인 길이보다 2 m 짧으므로
$y=x-2$ $\quad$ …… ㉠

텃밭에 새롭게 추가된 영역의 넓이는 처음 텃밭의 넓이의 $\frac{4}{3}$와 같고, 마늘을 재배하는 영역의 넓이는 처음 텃밭의 넓이의 $\frac{1}{6}$과 같으므로

$9x+6y+54\times\frac{1}{6}=54\times\frac{4}{3}$

$9x+6y=63$, 즉 $3x+2y=21$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$3x+2(x-2)=21$, $5x=25$ $\therefore x=5$

$x=5$를 ㉠에 대입하면

$y=5-2=3$

따라서 새로운 텃밭의 가로의 길이는 $9+3=12$ (m), 세로의 길이는 $6+5=11$ (m)이므로 전체의 둘레의 길이는

$2\times(12+11)=46$ (m)

10 답 ⑤

독서 캠프에 참여한 남학생 수를 x, 여학생 수를 y라고 하면 전체 학생 수가 40이므로

$x+y=40$ ...... ㉠

남학생들의 하루 평균 독서 시간이 1.5시간이고 여학생들의 하루 평균 독서 시간이 2.4시간이므로 전체 독서 시간의 합은 $(1.5x+2.4y)$시간이다.

하루에 0.6시간만 책을 읽는 여학생 4명을 제외한 나머지 학생의 하루 평균 독서 시간이 2시간이므로

$\frac{1.5x+2.4y-0.6\times4}{36}=2$

$1.5x+2.4y-2.4=72$, $1.5x+2.4y=74.4$

$15x+24y=744$ $\therefore 5x+8y=248$ ...... ㉡

㉠$\times5-$㉡을 하면

$-3y=-48$ $\therefore y=16$

$y=16$을 ㉠에 대입하면

$x+16=40$ $\therefore x=24$

따라서 독서 캠프에 참가한 남학생 수는 24이다.

11 답 ②

불합격자가 36명이므로 합격자의 수는 $90-36=54$

합격자의 평균을 x점, 불합격자의 평균을 y점이라고 하면

전체 평균은 $\frac{54x+36y}{90}=\frac{3x+2y}{5}$(점)

최저 합격 점수는 90명의 평균보다 4점이 낮고, 합격자의 평균보다는 18점이 낮으며 불합격자의 평균의 2배보다 8점이 낮으므로

(최저 합격 점수)$=\frac{3x+2y}{5}-4=x-18=2y-8$

이 방정식의 해는 연립방정식 $\begin{cases}\frac{3x+2y}{5}-4=x-18\\ x-18=2y-8\end{cases}$, 즉

$\begin{cases}x-y=35 & \cdots\cdots ㉠\\ x-2y=10 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$의 해와 같다.

㉠$-$㉡을 하면 $y=25$

$y=25$를 ㉠에 대입하면

$x-25=35$ $\therefore x=60$

따라서 최저 합격 점수는

$60-18=42$(점)

Level UP

A 집단 학생 a명과 B 집단 학생 b명의 점수의 평균을 각각 x점, y점이라고 하면 A 집단과 B 집단의 점수의 총합은 각각 ax점, by점이므로 두 집단 전체의 평균은 $\frac{ax+by}{a+b}$점이다.

12 답 44시간

봉사 시간의 기준을 충족한 학생이 15명이므로 충족하지 못한 학생의 수는 $45-15=30$

봉사 시간의 기준을 충족한 학생들의 평균 봉사 시간을 x시간, 충족하지 못한 학생들의 평균 봉사 시간을 y시간이라고 하면

$x=1.5y+6$, 즉 $2x-3y=12$ ...... ㉠

전체 학생들의 평균 봉사 시간은 $\frac{15x+30y}{45}=\frac{x+2y}{3}$(시간)

이므로

$y=\frac{x+2y}{3}-8$, $3y=x+2y-24$

$\therefore x-y=24$ ...... ㉡

㉠$-$㉡$\times2$를 하면

$-y=-36$ $\therefore y=36$

$y=36$을 ㉡에 대입하면

$x-36=24$ $\therefore x=60$

따라서 전체 학생들의 평균 봉사 시간은

$\frac{x+2y}{3}=\frac{60+2\times36}{3}=44$(시간)

13 답 ③

B 지점에서 내린 승객 수를 x, B 지점에서 새로 탄 승객 수를 y라고 하면

C 지점에서 내린 승객 수가 26이므로

$30-x+y=26$

$\therefore x-y=4$ ...... ㉠

승차권 판매요금이 총 85200원이므로

$1600x+3000(30-x)+1800y=85200$

$-1400x+1800y+90000=85200$

$-1400x+1800y=-4800$

$\therefore 7x-9y=24$ ...... ㉡

㉠$\times7-$㉡을 하면

$2y=4 \qquad \therefore y=2$

$y=2$를 ㉠에 대입하면

$x-2=4 \qquad \therefore x=6$

따라서 B 지점에서 내린 승객 수는 6, B 지점에서 새로 탄 승객 수는 2이므로 구하는 합은

$6+2=8$이다.

14 답 192

1차 전형에 합격한 남학생 수를 x, 여학생 수를 y라고 하자.

이때 2차 전형에 합격한 남학생과 여학생 수는 각각

$60\times\frac{3}{5}=36$, $60\times\frac{2}{5}=24$

이므로

$\begin{cases} x:y=5:3 \\ (x-36):(y-24)=7:4 \end{cases}$, $\begin{cases} 3x=5y \\ 7(y-24)=4(x-36) \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} 3x-5y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x-7y=-24 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times4-$㉡$\times3$을 하면 $y=72$

$y=72$를 ㉠에 대입하면

$3x-360=0$, $3x=360 \qquad \therefore x=120$

따라서 1차 전형에 합격한 학생 수는

$120+72=192$

15 답 20

해결 key Point!

정호가 부치려는 수하물의 무게를 x kg이라고 하면 재원이가 부치려는 수하물의 무게는 $(75-x)$ kg이고 초과한 무게에 대하여 부과되는 1 kg 당 요금은 일정하므로 이를 이용하여 식을 세운다.

정호가 부치려는 수하물의 무게를 x kg이라고 하면 재원이가 부치려는 수하물의 무게는 $(75-x)$ kg이다.

무료로 부칠 수 있는 수화물의 무게인 a kg을 초과한 경우 초과한 수하물의 무게에 대하여 부과되는 1 kg당 요금은 일정하므로

$\frac{x-a}{4}=\frac{(75-x)-a}{3}=\frac{75-a}{11}$

이 방정식의 해는 연립방정식 $\begin{cases} \frac{x-a}{4}=\frac{(75-x)-a}{3} \\ \frac{x-a}{4}=\frac{75-a}{11} \end{cases}$ 의 해와 같다.

$\frac{x-a}{4}=\frac{(75-x)-a}{3}$에서 $3x-3a=300-4x-4a$

$\therefore a=300-7x \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\frac{x-a}{4}=\frac{75-a}{11}$에서 $11x-11a=300-4a$

$\therefore 11x-7a=300 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면

$11x-7(300-7x)=300$, $11x-2100+49x=300$

$60x=2400 \qquad \therefore x=40$

$x=40$을 ㉠에 대입하면

$a=300-280=20$

16 답 10시간

민승이와 희은이가 1시간에 접을 수 있는 종이학의 개수를 각각 x, y라고 하면

$\begin{cases} 6x+6y=300 \\ 9x+4y=300 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+y=50 & \cdots\cdots ㉠ \\ 9x+4y=300 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times4-$㉡을 하면

$-5x=-100 \qquad \therefore x=20$

$x=20$을 ㉠에 대입하면

$20+y=50 \qquad \therefore y=30$

따라서 희은이는 1시간에 30개의 종이학을 접으므로 300개의 종이학을 희은이가 혼자 접으면 $\frac{300}{30}=10$(시간)이 걸린다.

17 답 7.2시간

세 기계 A, B, C를 작동시켰을 때 한 시간 동안 만들어 내는 상품의 개수를 각각 x, y, z라고 하면

$6x+6y+6z=360$, $9x+9z=360$, $12y+12z=360$

$\therefore \begin{cases} x+y+z=60 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+z=40 & \cdots\cdots ㉡ \\ y+z=30 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면 $y=20$

$y=20$을 ㉢에 대입하면

$20+z=30 \qquad \therefore z=10$

$z=10$을 ㉡에 대입하면

$x+10=40 \qquad \therefore x=30$

따라서 두 기계 A와 B만 작동시키면 한 시간당

$x+y=30+20=50$(개)의 상품을 만들 수 있으므로 이 상품 360개를 만드는데 $\frac{360}{50}=7.2$(시간)이 걸린다.

꿀 한줄평

연립방정식의 미지수가 3개이지만 가감법을 이용해 미지수 2개를 한 번에 없앨 수 있으므로 연립방정식의 해를 한 번에 구할 수 있다.

18 답 ④

지난 주에 자전거를 탄 시간을 x시간, 수영을 한 시간을 y시간이라고 하면 달리기를 한 시간은 자전거를 탄 시간의 2배이므로 $2x$시간이다.

지난 주에 비해 이번 주에 자전거 타기, 달리기, 수영을 한 시간이 각각 12 %, 28 %, 20 % 증가하였고 전체 운동 시간은 22 % 증가하였으므로

$1.12x+1.28\times 2x+1.2y=1.22(x+2x+y)$
$112x+256x+120y=366x+122y$
$2x=2y$ $\quad\therefore x=y$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
이번 주의 전체 운동 시간이 24시간 24분이므로
$1.12x+1.28\times 2x+1.2y=24.4$
$112x+256x+120y=2440$, $368x+120y=2440$
$\therefore 46x+15y=305$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$46x+15x=305$, $61x=305$
$\therefore x=5$, $y=5$
따라서 이번 주에 수영을 한 시간은
$1.2y=1.2\times 5=6$(시간)

Level UP

증가량과 감소량
(1) x가 a % 증가하였을 때
증가량은 $\frac{a}{100}x$이고 증가한 후 전체의 양은 $\left(1+\frac{a}{100}\right)x$
(2) x가 b % 감소하였을 때
감소량은 $\frac{b}{100}x$이고 감소한 후 전체의 양은 $\left(1-\frac{b}{100}\right)x$

19 답 90톤

가뭄 전에 저수지에 하루 동안 채워지는 물의 양을 x톤, 가뭄 전에 저수지에서 A 도시에 하루 동안 공급하는 물의 양을 y톤이라고 하면 가뭄 전 상태로는 30일 공급이 가능하므로
$30(x-y)+1800=0$, $x-y+60=0$
$\therefore x-y=-60$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
가뭄으로 A 도시에 공급하는 물의 양이 $\frac{1}{3}$로 줄었고, 현재 공급량이 그대로 유지되면 15일 공급이 가능하므로
$15\left(\frac{1}{3}x-y\right)+1800=0$, $5x-15y=-1800$
$\therefore x-3y=-360$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠$-$㉡을 하면
$2y=300$, $y=150$
$y=150$을 ㉠에 대입하면
$x-150=-60$ $\quad\therefore x=90$
따라서 가뭄 전에 저수지에 하루 동안 채워지는 물의 양은 90톤이다.

20 답 56분

수도관 A, B에서 1분 동안 나오는 물의 양을 각각 x L, y L라고 하면 수도관 A를 50분, 수도관 B를 60분 작동시키면 용량이 2800 L인 물통을 가득 채우므로
$50x+60y=2800$, 즉 $5x+6y=280$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
또, 수도관 A를 70분, 수도관 B를 40분 작동시키면 용량이 2800 L 물통을 200 L만큼 부족하게 채우므로
$70x+40y=2600$, 즉 $7x+4y=260$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠$\times 4-$㉡$\times 6$을 하면
$-22x=-440$ $\quad\therefore x=20$
$x=20$을 ㉠에 대입하면
$100+6y=280$, $6y=180$ $\quad\therefore y=30$
따라서 수도관 A와 B를 모두 작동시키면 1분에 $20+30=50$(L)의 물이 나오므로 용량이 2800 L인 물통을 다 채우는 데 $\frac{2800}{50}=56$(분)이 걸린다.

21 답 10분

1분 동안 티켓을 x명에게 판매하고 y명이 구매 대기줄에 선다고 하자.
판매 전에 이미 티켓 구매 대기줄에 있던 사람 수를 a라고 하면 판매 창구가 하나만 열리면 40분 만에 대기줄이 없어지므로
$a+40y=40x$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
판매 창구가 두 개가 열리면 16분 만에 대기줄이 없어지므로
$a+16y=2\times 16x$, $a+16y=32x$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠$-$㉡을 하면
$24y=8x$ $\quad\therefore y=\frac{1}{3}x$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$a+\frac{40}{3}x=40x$ $\quad\therefore a=\frac{80}{3}x$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣
판매 창구가 세 개가 열릴 때, t분 만에 대기줄이 없어진다면
$a+ty=3\times tx$ $\quad\cdots\cdots$ ㉤
㉢, ㉣을 ㉤에 대입하면
$\frac{80}{3}x+\frac{1}{3}tx=3tx$
이때 $x\neq 0$이므로 양변을 x로 나누면
$\frac{80}{3}+\frac{1}{3}t=3t$, $80+t=9t$
$8t=80$ $\quad\therefore t=10$
따라서 판매 창구가 세 개가 열릴 때, 대기줄은 10분 만에 없어진다.

22 답 2 km

해결 key Point!
두 조의 학생이 걸은 거리와 걸어서 이동한 속력은 같으므로 걸어서 이동한 시간도 동일함을 이용한다.

1단계 숙소에서 체험 활동지까지의 거리를 이용하여 일차방정식 세우기
학생들이 도보로 이동한 거리를 x km, 버스를 타고 이동한 거리를 y km라고 하면 버스가 되돌아간 거리는 $(y-x)$ km이다.
숙소에서 체험 활동지까지의 거리가 18 km이므로
$x+y=18$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
2단계 체험 활동지까지의 이동 시간을 이용하여 일차방정식 세우기

2조가 버스에서 내린 A 지점에서 체험 활동지까지 걸어간 시간은 버스가 되돌아갔다가 1조를 태우고 다시 체험 활동지까지 가는 시간과 같으므로

$\frac{x}{4}=\frac{y-x}{60}+\frac{y}{60}$, $15x=(y-x)+y$

$16x=2y \qquad \therefore y=8x \qquad \cdots\cdots$ ㉡

3단계 두 조의 학생이 도보로 이동한 거리 구하기

㉡을 ㉠에 대입하면

$9x=18 \qquad \therefore x=2$

따라서 두 조의 학생이 도보로 이동한 거리는 2 km이다.

단계	채점 기준	비율
❶	숙소에서 체험 활동지까지의 거리를 이용하여 일차방정식을 세웠다.	40 %
❷	체험 활동지까지의 이동 시간을 이용하여 일차방정식을 세웠다.	30 %
❸	두 조의 학생이 도보로 이동한 거리를 구했다.	30 %

23 답 2시간

해결 key Point !

거리, 속력, 시간의 단위가 다를 때에는 방정식을 세우기 전에 단위를 통일해야 한다.

54분은 $\frac{54}{60}=\frac{9}{10}$(시간), 36분은 $\frac{36}{60}=\frac{3}{5}$(시간)으로 나타낸다.

A팀과 B팀의 이동 속력을 각각 시속 x km, 시속 y km라고 하면 산장에서 출발한 뒤 두 팀이 만날 때까지 A팀이 54분 동안 이동한 거리와 B팀이 36분 동안 이동한 거리는 같으므로

$\frac{54}{60}x=\frac{36}{60}y$, $\frac{9}{10}x=\frac{3}{5}y$

$\frac{2}{x}=\frac{3}{y} \qquad \therefore \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또, B팀이 A팀보다 18분 늦게 출발하였으나 산 정상에는 30분 먼저 도착했고 A팀은 12분 휴식하였으므로 산장에서 출발하여 산 정상에 도착할 때까지 실제 이동한 시간의 차이는 36분이다.

즉, $\frac{7.2}{x}-\frac{7.2}{y}=\frac{3}{5}$에서 $\frac{12}{x}-\frac{12}{y}=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

이때 $\frac{1}{x}=X$, $\frac{1}{y}=Y$로 놓고 ㉠, ㉡으로 연립방정식을 세우면

$\begin{cases} 2X-3Y=0 & \cdots\cdots ㉢ \\ 12X-12Y=1 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

$6\times$㉢$-$㉣을 하면 $-6Y=-1 \qquad \therefore Y=\frac{1}{6}$

$Y=\frac{1}{6}$을 ㉢에 대입하면

$2X-\frac{1}{2}=0 \qquad \therefore X=\frac{1}{4}$

따라서 $x=4$, $y=6$이므로 A팀이 산 정상에 도착할 때까지 걸린 시간은 $\frac{7.2}{4}+\frac{12}{60}=1.8+0.2=2$(시간)이다.

24 답 ②

준기의 속력을 분속 x m, 윤서의 속력을 분속 y m라고 하면 출발점에서 동시에 출발하여 같은 방향으로 걸으면 40분 후에 처음으로 다시 만나고, $x>y$이므로

$40x-40y=1600$, 즉 $x-y=40 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

반대 방향으로 걸으면 3번째로 다시 만나기까지 24분이 걸리므로

$24x+24y=4800$, 즉 $x+y=200 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2x=240 \qquad \therefore x=120$

$x=120$을 ㉡에 대입하면

$120+y=200 \qquad \therefore y=80$

윤서의 속력이 분속 80 m이므로 둘레길을 한 바퀴 도는 데 걸리는 시간은 $\frac{1600}{80}=20$(분)이다.

한편, 두 사람이 반대 방향으로 걸으면 3번째로 다시 만나기까지 24분이 걸리므로 처음으로 다시 만나기까지 걸리는 시간은 8분이다. 따라서 처음으로 만난 후 윤서가 걷던 방향으로 윤서의 속력에 맞춰 같이 걷는다면 처음 만난 지점에서 출발점으로 다시 돌아오는 데 걸리는 시간은 $20-8=12$(분)이다.

Level UP

A, B 두 사람이 같은 지점에서 동시에 출발하여 원형의 둘레길을 돌다 만날 때

(1) 같은 방향으로 돌다 처음으로 만나는 경우

⇨ (A, B 두 사람이 이동한 거리의 차)=(둘레길의 길이)

(2) 서로 반대 방향으로 돌다 처음으로 만나는 경우

⇨ (A, B 두 사람이 이동한 거리의 합)=(둘레길의 길이)

임을 이용한다.

25 답 시속 14 km

정지한 물 위에서의 배의 속력을 시속 x km, 강물의 속력을 시속 y km라고 하면 강을 거슬러 올라갈 때의 배의 속력은 시속 $(x-y)$ km, 강을 따라 내려올 때의 배의 속력은 시속 $(x+y)$ km이다.

30분 동안 떠내려간 거리는 $\frac{y}{2}$ km이고 떠내려간 30분을 제외하면 왕복하는 데 총 3시간이 걸렸으므로

$\left(18+\frac{y}{2}\right)\times\frac{1}{x-y}+\frac{18}{x+y}=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

떠내려간 30분을 제외하면 상류로 올라가는 데 걸린 시간은 하류로 내려가는 데 걸린 시간의 2배이므로

$\left(18+\frac{y}{2}\right)\times\frac{1}{x-y}=2\times\frac{18}{x+y} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2\times\frac{18}{x+y}+\frac{18}{x+y}=3,\ \frac{54}{x+y}=3$

$x+y=18\qquad\therefore\ y=18-x\qquad\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$\left(18+\frac{18-x}{2}\right)\times\frac{1}{x-(18-x)}+\frac{18}{x+(18-x)}=3$

$\frac{54-x}{2}\times\frac{1}{2x-18}+1=3,\ 54-x=8x-72$

$9x=126\qquad\therefore\ x=14$

따라서 정지한 물 위에서의 배의 속력은 시속 14 km이다.

꿀 한줄평

흐르는 강을 움직이는 배의 속력을 구할 때는 흐르는 강의 속력도 고려해서 식을 세워야 한다. 실제 배가 움직이는 속력은 상류로 갈때는 강물의 속력을 빼고, 하류로 갈 때는 강물의 속력을 더해야 한다. 이때 두 문자를 정리해서 연립방정식을 풀기 어려운 경우 두 식에서 적절한 식을 대입하여 한 문자를 소거할 수 있다면 대입하여 문제를 더 쉽게 해결할 수 있다.

26 답 시속 12 km

정지한 물 위에서의 배의 속력을 시속 x km, 강물의 속력을 시속 y km라고 하면 강을 거슬러 올라갈 때 배의 속력은 시속 $(x-y)$ km, 강을 따라 내려올 때 배의 속력은 시속 $(x+y)$ km이다.

B에서 A까지 이동하는 시간이 A에서 B까지 이동하는 시간보다 48분, 즉 $\frac{48}{60}=\frac{4}{5}$(시간) 더 걸렸으므로

$\frac{18}{x-y}-\frac{18}{x+y}=\frac{4}{5}\qquad\cdots\cdots$ ㉠

B에서 A를 거쳐 다시 B를 지나 C까지 강을 따라 이동하는 데 3시간 36분, 즉 $3\frac{36}{60}=\frac{18}{5}$(시간)이 걸렸으므로

$\frac{18}{x-y}+\frac{18}{x+y}+\frac{6}{x+y}=\frac{18}{5}$

$\frac{18}{x-y}+\frac{24}{x+y}=\frac{18}{5}\qquad\cdots\cdots$ ㉡

이때 $\frac{1}{x-y}=A,\ \frac{1}{x+y}=B$로 놓고 ㉠, ㉡으로 연립방정식을 세우면

$\begin{cases}18A-18B=\frac{4}{5} & \cdots\cdots ㉢\\ 18A+24B=\frac{18}{5} & \cdots\cdots ㉣\end{cases}$

㉣−㉢을 하면

$42B=\frac{14}{5}\qquad\therefore\ B=\frac{1}{15}$

$B=\frac{1}{15}$을 ㉢에 대입하면

$18A-\frac{6}{5}=\frac{4}{5},\ 18A=2\qquad\therefore\ A=\frac{1}{9}$

즉, $\frac{1}{x-y}=\frac{1}{9},\ \frac{1}{x+y}=\frac{1}{15}$이므로

$\begin{cases}x-y=9 & \cdots\cdots ㉤\\ x+y=15 & \cdots\cdots ㉥\end{cases}$

㉤+㉥을 하면

$2x=24\qquad\therefore\ x=12$

따라서 정지한 물에서 배의 속력은 시속 12 km이다.

27 답 485

해결 key Point!

농도가 다른 두 소금물 A, B를 섞은 후 물을 더 넣을 때
(A 소금물의 양)+(B 소금물의 양)+(추가된 물의 양)
=(전체 소금물의 양)
(A 소금의 양)+(B 소금의 양)=(전체 소금의 양)
임을 이용한다. 즉, 소금물을 섞을 때 소금의 양은 변하지 않음에 주의해야 한다.

1단계 섞인 소금물의 양과 농도 조건을 이용하여 연립방정식 세우기

6 %의 소금물의 양을 x g이라 하고 2 %의 소금물의 양을 y g이라고 하면 더 부은 물의 양은 $\frac{1}{3}x$ g이므로

$\begin{cases}x+y+\frac{1}{3}x=600\\ \frac{6}{100}x+\frac{2}{100}y=\frac{4}{100}\times600\end{cases}$

즉, $\begin{cases}4x+3y=1800 & \cdots\cdots ㉠\\ 3x+y=1200 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

2단계 6 %의 소금물의 양과 4 %의 소금물의 양 구하기

㉠−㉡×3을 하면

$-5x=-1800\qquad\therefore\ x=360$

$x=360$을 ㉡에 대입하면

$1080+y=1200\qquad\therefore\ y=120$

3단계 $a+b$의 값 구하기

따라서 6 %의 소금물과 2 %의 소금물을 섞었을 때의 소금물의 양은 $b=360+120=480$ (g)이고 두 소금물을 섞었을 때의 소금의 양은 $\frac{4}{100}\times600=24$ (g)이므로 소금물의 농도는

$a=\frac{24}{480}\times100=5$ (%)이다.

$\therefore\ a+b=5+480=485$

단계	채점 기준	비율
❶	조건을 이용하여 연립방정식을 세웠다.	40 %
❷	두 소금물의 양을 구했다.	30 %
❸	$a+b$의 값을 구했다.	30 %

28 답 ②

A, B 두 그릇에 담긴 소금물의 농도를 각각 a %, b %라고 하면 A 그릇의 소금물의 반을 B 그릇의 소금물에 섞었을 때 A 그릇의 소금물 300 g에 들어 있는 소금의 양은

$300\times\frac{a}{100}=3a$ (g)

B 그릇의 소금물 900 g에 들어 있는 소금의 양은

$300\times\frac{a}{100}+600\times\frac{b}{100}=3a+6b\ (\text{g})$

B 그릇의 소금물의 반을 다시 A 그릇의 소금물에 섞었을 때 A 그릇의 소금물 750 g에 들어 있는 소금의 양은

$3a+\frac{3a+6b}{2}=4.5a+3b\ (\text{g})$

A 그릇의 소금물 750 g의 농도는 16 %이므로

$\frac{4.5a+3b}{750}=\frac{16}{100}$, $45a+30b=1200$

$\therefore\ 3a+2b=80$ ······ ㉠

B 그릇의 소금물 450 g에 들어 있는 소금의 양은

$\frac{3a+6b}{2}=1.5a+3b\ (\text{g})$

B 그릇의 소금물 450 g의 농도는 12 %이므로

$\frac{1.5a+3b}{450}=\frac{12}{100}$, $15a+30b=540$

$\therefore\ a+2b=36$ ······ ㉡

㉠－㉡을 하면

$2a=44$ $\quad\therefore\ a=22$

$a=22$를 ㉡에 대입하면

$22+2b=36$, $2b=14$ $\quad\therefore\ b=7$

따라서 처음 A 그릇에 들어 있던 소금물의 농도는 22 %이다.

29 답 ③

병 A에 들어 있던 주스의 양을 x mL, 병 B에 들어 있던 주스의 양을 y mL라고 하면

$x+y=260$ ······ ㉠

새로 만들어진 주스에 들어 있는 사과즙의 양은 $\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{5}y\right)$ mL이고 오렌지즙의 양은 $\left(\frac{2}{3}x+\frac{2}{5}y\right)$ mL이므로

$\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{5}y\right):\left(\frac{2}{3}x+\frac{2}{5}y\right)=7:6$

$6\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{5}y\right)=7\left(\frac{2}{3}x+\frac{2}{5}y\right)$, $30x+54y=70x+42y$

$40x-12y=0$ $\quad\therefore\ 10x-3y=0$ ······ ㉡

㉠×3＋㉡을 하면

$13x=780$ $\quad\therefore\ x=60$

$x=60$을 ㉠에 대입하면

$60+y=260$ $\quad\therefore\ y=200$

따라서 병 B에 들어 있던 주스의 양은 200 ml이다.

다른 풀이

병 A에 들어 있던 주스의 양을 x mL, 병 B에 들어 있던 주스의 양을 y mL라고 하면

$x+y=260$ ······ ㉠

이때 새로 만들어진 주스에 들어 있는 사과즙의 양은

$\frac{1}{3}x+\frac{3}{5}y=260\times\frac{7}{13}$, 즉 $5x+9y=2100$ ······ ㉡

㉠×5－㉡를 하면

$-4y=-800$ $\quad\therefore\ y=200$

$y=200$을 ㉠에 대입하면

$x+200=260$ $\quad\therefore\ x=60$

따라서 병 B에 들어 있는 주스의 양은 200 mL이다.

30 답 ⑤

만들려는 합금에 들어간 금속 A의 무게를 x kg, 금속 B의 무게를 y kg이라고 하자.

두 종류의 합금을 혼합해서 만들려는 합금의 철 성분은 $(0.5x+0.3y)$ kg, 니켈 성분은$(0.2x+0.4y)$ kg이므로

$\begin{cases}0.5x+0.3y=13\\0.2x+0.4y=8\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}5x+3y=130 & \cdots\cdots ㉠\\x+2y=40 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠×2－㉡×3을 하면

$7x=140$ $\quad\therefore\ x=20$

$x=20$을 ㉠에 대입하면

$100+3y=130$, $3y=30$ $\quad\therefore\ y=10$

따라서 만들려는 합금에 들어간 금속 A의 무게는 20 kg, 금속 B의 무게는 10 kg이므로

$a=20$, $b=10$

$\therefore\ a+b=20+10=30$

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

88쪽～89쪽

01 69	**02** 84	**03** $x=3$, $y=-2$	**04** 88
05 6	**06** 3840원		

01 답 69

해결 key Point!

x, y가 모두 정수이므로 $|x|=a$, $|y|=b$라고 하면 주어진 연립방정식의 우변이 모두 자연수이므로 a, b는 음이 아닌 정수임을 이용해야 한다.

$|x|=a$, $|y|=b$라고 하면

$\begin{cases}5a-2b=k+4 & \cdots\cdots ㉠\\4a+3b=40 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠×3＋㉡×2를 하면

$23a=3k+92$ $\quad\therefore\ a=\frac{3k+92}{23}$ ······ ㉢

㉠×4－㉡×5를 하면

$-23b=4k-184$ $\quad\therefore\ b=\frac{184-4k}{23}$

이때 주어진 연립방정식의 우변이 모두 자연수이므로 a, b는 음이 아닌 정수이다.

따라서 $3k+92$와 $184-4k$가 0 또는 23의 배수이어야 하므로

$184-4k$가 될 수 있는 값은
0, 23, 46, 69, 92, 115, 138, 161, 184이다.
$184-4k=0$일 때, $4k=184$ $\quad\therefore k=46$
$184-4k=23$일 때, $4k=161$ $\quad\therefore k=\frac{161}{4}$
$184-4k=46$일 때, $4k=138$ $\quad\therefore k=\frac{69}{2}$
$184-4k=69$일 때, $4k=115$ $\quad\therefore k=\frac{115}{4}$
$184-4k=92$일 때, $4k=92$ $\quad\therefore k=23$
$184-4k=115$일 때, $4k=69$ $\quad\therefore k=\frac{69}{4}$
$184-4k=138$일 때, $4k=46$ $\quad\therefore k=\frac{23}{2}$
$184-4k=161$일 때, $4k=23$ $\quad\therefore k=\frac{23}{4}$
$184-4k=184$일 때, $4k=0$ $\quad\therefore k=0$
이때 k는 자연수이므로 k의 값은 23, 46이다.
$k=23$, $k=46$을 ⓒ에 각각 대입하면
$a=\frac{69+92}{23}=7$, $a=\frac{138+92}{23}=10$으로 모두 조건을 만족시킨다.
따라서 모든 자연수 k의 값의 합은
$23+46=69$

다른 풀이

$|x|=a$, $|y|=b$라고 하면 주어진 연립방정식의 우변이 모두 자연수이므로 a, b는 음이 아닌 정수이고

$$\begin{cases} 5a-2b=k+4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4a+3b=40 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $3b=40-4a$ $\quad\therefore b=\frac{40-4a}{3}$
b가 음이 아닌 정수이려면 $40-4a$는 3의 배수가 되어야 하고 $b\geq0$이므로 $40-4a\geq0$에서
$-4a\geq-40$ $\quad\therefore a\leq10$
따라서 가능한 a의 값은 1, 4, 7, 10
각각에 대하여 b와 k를 ㉠에 대입하면

(i) $a=1$일 때
$b=\frac{40-4}{3}=12$이므로 $5-24=k+4$
$\therefore k=-23$
이때 k는 자연수이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=4$일 때
$b=\frac{40-4\times4}{3}=8$이므로 $20-16=k+4$
$\therefore k=0$
이때 k는 자연수이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a=7$일 때
$b=\frac{40-4\times7}{3}=4$이므로 $35-8=k+4$
$\therefore k=23$

(iv) $a=10$일 때
$b=\frac{40-4\times10}{3}=0$이므로 $50=k+4$
$\therefore k=46$

(i)~(iv)에 의하여 자연수 k의 값은 23, 46이므로 모든 자연수 k의 값의 합은
$23+46=69$

꿀 한줄평
절댓값이 존재해도 이 문제에서는 절댓값을 풀지 않아도 된다. 절댓값은 음이 아닌 수가 된다는 점을 이용하여 문제를 해결할 수 있다. 특히 x, y가 정수이므로 문제 조건에서 $|x|$, $|y|$는 음이 아닌 정수임을 이용하여 구한 분수가 정수가 되기 위한 자연수 k의 값만 찾으면 된다.

02 답 84

해결 key Point!
연립방정식의 해 x, y를 k에 대하여 나타내고, 그 값이 정수가 되기 위한 k의 값을 찾는다.

연립방정식 $\begin{cases} 10x-15y=2k & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+12y=5k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$에서
㉠$\times4+$㉡$\times5$를 하면
$55x=33k$ $\quad\therefore x=\frac{3}{5}k$
이를 ㉡에 대입하면
$\frac{9}{5}k+12y=5k$, $12y=\frac{16}{5}k$ $\quad\therefore y=\frac{4}{15}k$
$\therefore p=\frac{3}{5}k$, $q=\frac{4}{15}k$
이때 p, q는 자연수이므로 k는 15의 배수이어야 한다.
$k=15l$ (l은 자연수)이라고 하면
$p=9l$, $q=4l$
세 자연수 $9l=3^2\times l$, $4l=2^2\times l$, $15l=3\times5\times l$의 최소공배수는
$2^2\times3^2\times5\times l$
이고 이 값이 $540=2^2\times3^3\times5$이므로
$2^2\times3^2\times5\times l=2^2\times3^3\times5$ $\quad\therefore l=3$
따라서 $p=9\times3=27$, $q=4\times3=12$, $k=15\times3=45$이므로
$p+q+k=27+12+45=84$

03 답 $x=3$, $y=-2$

해결 key Point!
$\frac{xy}{x+y}=A$, $\frac{xy}{x-y}=B$라 하고 연립방정식을 풀어야 한다.

$\frac{xy}{x+y}=A$, $\frac{xy}{x-y}=B$라고 하면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} 5A+10B=-42 & \cdots\cdots ㉠ \\ 15A+5B=-96 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠$-$㉡$\times 2$를 하면

$-25A=150 \quad \therefore A=-6$

$A=-6$을 ㉠에 대입하면

$-30+10B=-42,\ 10B=-12 \quad \therefore B=-\frac{6}{5}$

따라서 $\begin{cases} \frac{xy}{x+y}=-6 \\ \frac{xy}{x-y}=-\frac{6}{5} \end{cases}$ 이므로 $\begin{cases} \frac{x+y}{xy}=-\frac{1}{6} \\ \frac{x-y}{xy}=-\frac{5}{6} \end{cases}$ 에서

$\begin{cases} \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=-\frac{1}{6} & \cdots\cdots ㉢ \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=-\frac{5}{6} & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢+㉣을 하면 $\frac{2}{y}=-1 \quad \therefore y=-2$

㉢$-$㉣을 하면 $\frac{2}{x}=\frac{2}{3} \quad \therefore x=3$

꿀 한줄평

주어진 연립방정식에서 분수를 없애기 위해 양변에 $(x+y)(x-y)$를 곱하면 식이 복잡해지고 이차식이 된다. 연립방정식에 공통부분이 있으므로 공통부분을 한 문자로 두고 해를 구하는 것이 좋다.

이때 $\frac{xy}{x+y}$의 역수는 $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}$, $\frac{xy}{x-y}$의 역수는 $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$임을 알고 이를 이용하여 복잡한 연립방정식을 가감법하기 쉬운 연립방정식으로 변형하는 과정이 필요하다.

04 답 88

해결 key Point!

a, b가 한 자리 자연수이므로

$0.\dot{a}\dot{b}=\frac{10a+b}{99}$, $0.a\dot{b}=\frac{(10a+b)-a}{90}$

임을 이용하여 주어진 식을 나타낸다.

$x=0.\dot{a}\dot{b}=\frac{10a+b}{99}$, $y=0.a\dot{b}=\frac{(10a+b)-a}{90}=\frac{9a+b}{90}$

이고 $c=a-b$이므로

$11x-2y=7+\frac{c}{9}$에서

$11\times\frac{10a+b}{99}-2\times\frac{9a+b}{90}=7+\frac{a-b}{9}$

$\frac{10a+b}{9}-\frac{9a+b}{45}=7+\frac{a-b}{9}$

$5(10a+b)-(9a+b)=315+5(a-b)$

$50a+5b-9a-b=315+5a-5b$

$\therefore 4a+b=35 \quad \cdots\cdots ㉠$

또, $99x-90y=13-c$에서

$99\times\frac{10a+b}{99}-90\times\frac{9a+b}{90}=13-(a-b)$

$10a+b-9a-b=13-a+b$

$\therefore 2a-b=13 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠+㉡을 하면

$6a=48 \quad \therefore a=8$

$a=8$을 ㉠에 대입하면

$32+b=35 \quad \therefore b=3$

따라서 $x=\frac{10\times8+3}{99}=\frac{83}{99}$, $y=\frac{9\times8+3}{90}=\frac{5}{6}$이므로

$99x+6y=99\times\frac{83}{99}+6\times\frac{5}{6}=83+5=88$

05 답 6

해결 key Point!

A, B 두 사람이 가위바위보를 할 때, A가 이긴 횟수를 x, 진 횟수를 y라고 하면 B가 이긴 횟수는 y, 진 횟수는 x임을 이용해야 한다.

기현이가 이긴 횟수를 x, 진 횟수를 y라고 하면 두 사람이 비긴 횟수는 $15-x-y$이고 지선이가 이긴 횟수는 y, 진 횟수는 x이다. 또, 지선이가 처음 위치에서 올라간 계단 수를 m (m은 자연수)이라고 하면 기현이가 처음 위치에서 올라간 계단 수는 $3m$이다.

따라서 $\begin{cases} 3x-2y+(15-x-y)=3m \\ 3y-2x+(15-x-y)=m \end{cases}$ 이므로

$\begin{cases} 2x-3y=3m-15 & \cdots\cdots ㉠ \\ -3x+2y=m-15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 2+$㉡$\times 3$을 하면

$-5x=9m-75 \quad \therefore x=\frac{75-9m}{5}$

이때 x는 자연수이므로 $75-9m$이 5의 배수이어야 하므로 $75-9m$이 될 수 있는 값은 5, 10, 15, …, 65이다. $75-9m$이 5의 배수가 되는 자연수 m의 값은 5 뿐이므로

$x=\frac{75-9\times5}{5}=6$

따라서 기현이가 이긴 횟수는 6이다.

06 답 3840원

해결 key Point!

볼펜 1자루와 노트 1권의 원가를 각각 x원, y원이라 하고 볼펜은 원가의 40 %, 노트는 원가의 20 %의 이익을 붙인 정가와 정가에서 20 %, 10 %를 할인한 가격을 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

볼펜 1자루와 노트 1권의 원가를 각각 x원, y원이라고 하면

$300x+450y=1170000$

$\therefore 2x+3y=7800 \quad \cdots\cdots ㉠$

볼펜 1자루의 정가는 $\left(1+\frac{40}{100}\right)x=\frac{140}{100}x$(원)

노트 1권의 정가는 $\left(1+\frac{20}{100}\right)y=\frac{120}{100}y$(원)

볼펜 1자루를 정가에서 20 % 할인한 판매 가격은

$\frac{140}{100}x\left(1-\frac{20}{100}\right)=\frac{112}{100}x$(원)

노트 1권을 정가에서 10 % 할인한 판매 가격은

$\frac{120}{100}y\left(1-\frac{10}{100}\right)=\frac{108}{100}y$(원)

볼펜 전체 수량의 $\frac{1}{2}$인 $300\times\frac{1}{2}=150$(자루)와 노트 전체 수량의 $\frac{2}{3}$인 $450\times\frac{2}{3}=300$(권)을 정가에 팔아 얻는 이익은

$150\times\frac{40}{100}x+300\times\frac{20}{100}y=60x+60y$ …… ㉡

볼펜 전체 수량의 $\frac{1}{2}$인 150자루와 노트 전체 수량의 $\frac{1}{3}$인 150권을 할인된 가격에 팔아 얻는 이익은

$150\times\frac{12}{100}x+150\times\frac{8}{100}y=18x+12y$ …… ㉢

전량을 판매했을 때 얻는 이익은 ㉡+㉢이므로

$(60x+60y)+(18x+12y)=223200$, $78x+72y=223200$

$\therefore\ 13x+12y=37200$ …… ㉣

㉣$-$㉠$\times4$를 하면

$5x=6000$ $\therefore\ x=1200$

$x=1200$을 ㉠에 대입하면

$2400+3y=7800$, $3y=5400$ $\therefore\ y=1800$

따라서 볼펜 1자루의 원가는 1200원이므로 처음 정가는

$1200\times\frac{140}{100}=1680$(원)

노트 1권의 원가는 1800원이므로 처음 정가는

$1800\times\frac{120}{100}=2160$(원)

따라서 처음 정가의 합은

$1680+2160=3840$(원)이다.

Lv. Master 실력을 완성하는 대단원 평가

90쪽～94쪽

01 ③	**02** ⑤	**03** ②	**04** ③	**05** ①
06 ④	**07** ⑤	**08** ③	**09** ③	**10** ④
11 ④	**12** ①	**13** ⑤	**14** ④	**15** ④
16 2	**17** 1	**18** 87.4점	**19** $-\frac{1}{2}$	**20** 524
21 10	**22** 4	**23** 27 km		

01 답 ③

해결 key Point!

미지수가 2개인 일차방정식은

$ax+by+c=0$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$, $b\neq0$)

의 꼴이어야 한다.

$(a+2b)x^2+ax-5y=(b+6)x^2+3x-by$에서

$(a+b-6)x^2+(a-3)x+(-5+b)y=0$

위의 식이 미지수가 2개인 일차방정식이 되려면 $a+b-6=0$, $a-3\neq0$, $-5+b\neq0$이어야 하므로

$a+b=6$, $a\neq3$, $b\neq5$

이때 a, b가 자연수이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$의 3개이다.

02 답 ⑤

$0.\dot{4}x+0.0\dot{8}y=1.\dot{3}$에서 $\frac{4}{9}x+\frac{4}{45}y=\frac{4}{3}$

$\therefore\ 5x+y=15$

$x=2$, $y=k$를 $5x+y=15$에 대입하면

$10+k=15$ $\therefore\ k=5$

03 답 ②

주어진 연립방정식의 해는 연립방정식

$\begin{cases} y=3x-1 & \cdots\cdots\ ㉠ \\ 7x-3y=9 & \cdots\cdots\ ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠을 ㉡에 대입하면

$7x-3(3x-1)=9$, $7x-9x+3=9$

$-2x=6$ $\therefore\ x=-3$

$x=-3$을 ㉠에 대입하면

$y=-9-1=-10$

$x=-3$, $y=-10$을 $ax+y=-16$에 대입하면

$-3a-10=-16$, $-3a=-6$ $\therefore\ a=2$

따라서 $a=2$, $m=-3$, $n=-10$이므로

$a+m+n=2+(-3)+(-10)=-11$

04 답 ③

a와 b를 서로 바꾼 연립방정식

$\begin{cases} bx-ay=-5 \\ ax-by=1 \end{cases}$의 해가 $x=3$, $y=-1$이므로

$\begin{cases} a+3b=-5 & \cdots\cdots\ ㉠ \\ 3a+b=1 & \cdots\cdots\ ㉡ \end{cases}$

㉠$\times3-$㉡을 하면

$8b=-16$ $\therefore\ b=-2$

$b=-2$를 ㉠에 대입하면

$a-6=-5$ $\therefore\ a=1$

$\therefore\ a+b=1+(-2)=-1$

05 답 ①

세 일차방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} 0.2x+0.3y=-0.1 & \cdots\cdots\ ㉠ \\ (x+2):(y+1)=3:4 & \cdots\cdots\ ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠$\times10$을 하면

$2x+3y=-1$ …… ㉢

㉡에서 $4(x+2)=3(y+1)$

$4x+8=3y+3$

$\therefore\ 4x-3y=-5$ …… ㉣

㉢+㉣을 하면

$6x=-6$ $\therefore x=-1$

$x=-1$을 ㉢에 대입하면

$-2+3y=-1$, $3y=1$ $\therefore y=\frac{1}{3}$

$x=-1$, $y=\frac{1}{3}$을 $ax-6y=1$에 대입하면

$-a-2=1$ $\therefore a=-3$

06 답 ④

영민이는 $5x-by=17$을 제대로 보고 풀었으므로

$x=\frac{21}{5}$, $y=2$를 $5x-by=17$에 대입하면

$21-2b=17$, $-2b=-4$ $\therefore b=2$

수연이는 $ax+4y=5$를 제대로 보고 풀었으므로

$x=1$, $y=\frac{1}{2}$을 $ax+4y=5$에 대입하면

$a+2=5$ $\therefore a=3$

따라서 처음 연립방정식은

$\begin{cases} 3x+4y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x-2y=17 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡×2를 하면

$13x=39$ $\therefore x=3$

$x=3$을 ㉠에 대입하면

$9+4y=5$, $4y=-4$ $\therefore y=-1$

따라서 처음 연립방정식의 해는 $x=3$, $y=-1$이다.

07 답 ⑤

$\begin{cases} ax-3(y+1)=4x \\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{4}y=1-\frac{b}{12} \end{cases}$에서

$\begin{cases} (a-4)x-3y=3 \\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{4}y=1-\frac{b}{12} & \cdots\cdots ㉠ \end{cases}$

㉠×12를 하면 $8x-3y=12-b$

ㄱ. $a=9$, $b=12$이면

$\begin{cases} 5x-3y=3 \\ 8x-3y=0 \end{cases}$이므로 해가 한 쌍이다.

ㄴ. $a=12$, $b=-9$이면

$\begin{cases} 8x-3y=3 \\ 8x-3y=21 \end{cases}$이므로 해가 없다.

ㄷ. $a=12$, $b=9$이면

$\begin{cases} 8x-3y=3 \\ 8x-3y=3 \end{cases}$이므로 해가 무수히 많다.

ㄹ. $a=9$이면

$\begin{cases} 5x-3y=3 \\ 8x-3y=12-b \end{cases}$이므로 해가 한 쌍이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

08 답 ③

현재 지원이의 나이를 x살, 삼촌의 나이를 y살이라고 하면

$\begin{cases} x+y=57 \\ y+8=2(x+8)+4 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+y=57 & \cdots\cdots ㉠ \\ y=2x+12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면

$x+(2x+12)=57$, $3x=45$ $\therefore x=15$

$x=15$를 ㉡에 대입하면

$y=30+12=42$

따라서 현재 지원이는 15살, 삼촌은 42살이므로 나이의 차는

$42-15=27$(살)이다.

09 답 ③

해결 key Point!

두 사람 A, B가 같은 지점에서 동시에 출발하여 호수의 둘레를 따라 서로 반대 방향으로 걸어서 만나려면
(A가 걸은 거리)+(B가 걸은 거리)=(호수의 둘레)임을 이용한다.

정현이의 속력을 분속 a m, 소현이의 속력을 분속 b m라고 하면 정현이가 400 m를 걷는 동안 소현이는 300 m를 걸으므로

$a:b=400:300$, $400b=300a$ $\therefore b=\frac{3}{4}a$ $\cdots\cdots$ ㉠

정현이와 소현이가 동시에 출발하여 서로 반대 방향으로 걸으면 10분 후에 처음으로 다시 만나므로

$10a+10b=2800$ $\therefore a+b=280$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a+\frac{3}{4}a=280$, $\frac{7}{4}a=280$ $\therefore a=160$

$a=160$을 ㉠에 대입하면 $b=120$

따라서 정현이의 속력은 분속 160 m, 소현이의 속력은 분속 120 m이므로 정현이와 소현이의 속력의 차는 분속

$160-120=40$(m)이다.

10 답 ④

해결 key Point!

$xy<0$을 만족시키는 경우는 $x>0$, $y<0$과 $x<0$, $y>0$의 두 가지이므로 두 가지 경우로 나누어 확인한다.

(i) $x>0$, $y<0$일 때

$-3y>0$이므로 $2x-3y+28>0$

즉, $2x-3y+28=0$을 만족시키는 x, y의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $x<0$, $y>0$일 때

$2x-3y+28=0$, 즉 $2x-3y=-28$을 만족시키는 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)은

$(-2, 8)$, $(-5, 6)$, $(-8, 4)$, $(-11, 2)$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수는 4이다.

11 답 ④

첫 번째 세로 열의 세 수의 합 $(x-y+1)+10+x=18$에서

$2x-y=7$ $\cdots\cdots$ ㉠

세 번째 가로 행의 세 수의 합 $x+(-3y+5)+7=18$에서

$x-3y=6$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡$\times 2$를 하면

$5y=-5$ $\quad\therefore y=-1$

$y=-1$을 ㉡에 대입하면

$x+3=6$ $\quad\therefore x=3$

왼쪽 위에서 오른쪽 아래로의 대각선의 세 수의 합이

$(x-y+1)+a+7=18$

즉, $\{3-(-1)+1\}+a+7=18$이므로

$a=6$

또, 왼쪽 아래에서 오른쪽 위로의 대각선의 세 수의 합이

$x+a+b=18$, 즉 $3+6+b=18$이므로

$b=9$

$\therefore ab=6\times 9=54$

12 답 ①

$x=1$, $y=2$를 $(a-4b)x+(2a+b)y=0$에 대입하면

$(a-4b)+2(2a+b)=0$, $a-4b+4a+2b=0$

$5a-2b=0$ $\quad\therefore a=\frac{2}{5}b$

$a=\frac{2}{5}b$를 $4ax-5by=3(a-b)$에 대입하면

$\frac{8}{5}bx-5by=3\left(\frac{2}{5}b-b\right)$, $\frac{8}{5}bx-5by=-\frac{9}{5}b$

이때 $ab\neq 0$, 즉 $b\neq 0$이므로 양변에 $\frac{5}{b}$를 곱하면

$8x-25y=-9$ $\quad\therefore x=\frac{25y-9}{8}$

이때 x, y는 한 자리 자연수이므로 $25y-9$가 8의 배수이어야 한다.

$y<10$인 자연수 중 $25y-9$가 8의 배수가 되는 y의 값은

$y=1$, $y=9$이고, 그때의 x의 값은 $x=2$, $x=27$이다.

이때 x는 한 자리 자연수이므로 $x=2$

따라서 $m=2$, $n=1$이므로

$m+n=2+1=3$

13 답 ⑤

해결 key Point!

x와 y의 크기에 따라 결괏값이 다름을 이용한다. 즉

$x\geq y$일 때 $x\triangledown y=x$, $x\triangle y=y$이고,

$x<y$일 때 $x\triangledown y=y$, $x\triangle y=x$임을 이용해야 한다.

(ⅰ) $x\geq y$일 때

$\begin{cases} x=2x+1 \\ y=x+y-5 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

이므로 ㉠, ㉡을 만족시키는 해는 없다.

(ⅱ) $x<y$일 때

$\begin{cases} y=2x+1 \\ x=x+y-5 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} y=2x+1 & \cdots\cdots ㉢ \\ y=5 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉣을 ㉢에 대입하면

$5=2x+1$, $2x=4$ $\quad\therefore x=2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=2$, $b=5$

$\therefore a+b=2+5=7$

14 답 ④

해결 key Point!

x와 y의 값의 차가 4이므로 $|x-y|=4$이다.

즉, $x-y=4$ 또는 $x-y=-4$로 경우를 나누어서 연립방정식을 풀어야 한다.

x와 y의 값의 차가 4이므로 $|x-y|=4$

즉, $x-y=4$ 또는 $x-y=-4$

(ⅰ) $x-y=4$일 때

$\begin{cases} 2x-y=-3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-y=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면 $x=-7$

$x=-7$을 ㉡에 대입하면

$-7-y=4$ $\quad\therefore y=-11$

$x=-7$, $y=-11$을 $3x-2y=9-a$에 대입하면

$-21+22=9-a$ $\quad\therefore a=8$

(ⅱ) $x-y=-4$일 때

$\begin{cases} 2x-y=-3 & \cdots\cdots ㉢ \\ x-y=-4 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢$-$㉣을 하면 $x=1$

$x=1$을 ㉣에 대입하면

$1-y=-4$ $\quad\therefore y=5$

$x=1$, $y=5$를 $3x-2y=9-a$에 대입하면

$3-10=9-a$ $\quad\therefore a=16$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 a의 값은 8, 16이므로 a의 값의 합은

$8+16=24$

15 답 ④

혼합물 A에서 사용하는 페인트의 양을 x g, 혼합물 B에서 사용하는 페인트의 양을 y g이라고 하면 새로운 혼합물의 백색 페인트의 양은 $\left(\frac{4}{5}x+\frac{2}{5}y\right)$ g이고 흑색 페인트의 양은

$\left(\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}y\right)$ g이므로

$\left(\frac{4}{5}x+\frac{2}{5}y\right):\left(\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}y\right)=4:3$

$3(4x+2y)=4(x+3y)$, $12x+6y=4x+12y$

$\therefore$ $4x=3y$

따라서 두 혼합물 A와 B를 3 : 4의 비율로 섞어야 하므로

$x=3k$, $y=4k$ $(k\neq0)$라고 하면

$3k\leq900$, $4k\leq1000$에서 $k\leq300$, $k\leq250$

$\therefore$ $k\leq250$

즉, $k=250$일 때까지 혼합물을 사용할 수 있으므로 혼합물 A의 최대 사용량은 $3k=3\times250=750$(g)

혼합물 B의 최대 사용량은 $4k=4\times250=1000$(g)

따라서 만들 수 있는 혼합물의 양은 최대

$750+1000=1750$(g)이다.

꿀 한줄평

두 혼합물을 섞었을 때, 만들어진 혼합물의 백색과 흑색의 비율에 맞게 넣을 수 있는 두 혼합물의 투입 비율을 다시 구하고, 그 비율과 주어진 혼합물의 양을 이용하여 최대로 사용할 수 있는 양을 구한다.
즉, A와 B를 3 : 4로 섞을 때 두 혼합물 A, B의 양을 각각 $3k$, $4k$ $(k\neq0)$라 하고 A는 최대 900 g, B는 최대 1000 g, 사용할 수 있는 조건을 이용하여 부등식을 세우면 혼합물의 양이 최대 몇 g인지 구할 수 있다.

16 답 2

주어진 네 일차방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} 4x-3y=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x-2y=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠$\times2-$㉡$\times3$을 하면

$-7x=-7$ $\quad\therefore$ $x=1$

$x=1$을 ㉠에 대입하면

$4-3y=10$, $-3y=6$ $\quad\therefore$ $y=-2$

$x=1$, $y=-2$를 $(a-1)x-y=2(a-1)$에 대입하면

$a-1+2=2a-2$ $\quad\therefore$ $a=3$

$a=3$, $x=1$, $y=-2$를 $bx+(1-a)y=3$에 대입하면

$b+(-2)\times(-2)=3$, $b+4=3$ $\quad\therefore$ $b=-1$

$\therefore$ $a+b=3+(-1)=2$

17 답 1

해결 key Point!

절댓값이 k $(k>0)$인 수는 k, $-k$임을 이용한다.

y의 절댓값이 x의 절댓값의 2배이므로 $|y|=2|x|$

$\therefore$ $y=2x$ 또는 $y=-2x$

(ⅰ) $y=2x$일 때

$y=2x$를 $2x-3y=16$에 대입하면

$2x-6x=16$, $-4x=16$ $\quad\therefore$ $x=-4$

$x=-4$를 $y=2x$에 대입하면 $y=-8$

$x=-4$, $y=-8$을 $ax-y=4$에 대입하면

$-4a+8=4$, $-4a=-4$ $\quad\therefore$ $a=1$

(ⅱ) $y=-2x$일 때

$y=-2x$를 $2x-3y=16$에 대입하면

$2x+6x=16$, $8x=16$ $\quad\therefore$ $x=2$

$x=2$를 $y=-2x$에 대입하면 $y=-4$

$x=2$, $y=-4$를 $ax-y=4$에 대입하면

$2a+4=4$, $2a=0$ $\quad\therefore$ $a=0$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 a의 값은 0, 1이므로 a의 값의 합은

$0+1=1$

18 답 87.4점

은우의 중간고사 수학 성적을 x점, 영어 성적을 y점이라고 하면

$\begin{cases} x+y=156 \\ x\left(1-\frac{8}{100}\right)+y\left(1+\frac{15}{100}\right)=161 \end{cases}$

즉, $\begin{cases} x+y=156 & \cdots\cdots ㉠ \\ 92x+115y=16100 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times92-$㉡을 하면

$-23y=-1748$ $\quad\therefore$ $y=76$

$y=76$을 ㉠에 대입하면

$x+76=156$ $\quad\therefore$ $x=80$

따라서 은우의 기말고사 영어 성적은

$76\times\left(1+\frac{15}{100}\right)=87.4$(점)

19 답 $-\frac{1}{2}$

연립방정식 $\begin{cases} 2(x-3y)-5=x+by \\ ax+2y=x+4y+10 \end{cases}$에서

$\begin{cases} 2x-6y-5=x+by \\ (a-1)x-2y=10 \end{cases}$

즉, $\begin{cases} x-(6+b)y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ (a-1)x-2y=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times2$를 하면

$2x-(12+2b)y=10$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

이때 주어진 연립방정식의 해가 무수히 많으므로 ㉡과 ㉢이 일치해야 한다.

따라서 $a-1=2$이므로 $a=3$

또, $-(12+2b)=-2$이므로

$2b=-10$ $\quad\therefore$ $b=-5$

$a=3$, $b=-5$를 $(2a+b+2k)x+2b+3k+1=0$에 대입하면

$(1+2k)x+3k-9=0$

이 일차방정식의 해가 없으므로

$1+2k=0$, $3k-9\neq0$

$\therefore$ $k=-\frac{1}{2}$

20 답 524

일의 자리의 숫자가 십의 자리의 숫자의 2배이므로 일의 자리의 숫자는 $2y$

각 자리의 숫자의 합은 11이므로

$x+y+2y=11 \quad \therefore x+3y=11 \quad \cdots\cdots$ ㉠

백의 자리와 일의 자리의 숫자를 바꾸면 처음 수보다 99만큼 작으므로

$200y+10y+x=100x+10y+2y-99$

$-99x+198y=-99 \quad \therefore x-2y=1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠−㉡을 하면

$5y=10 \quad \therefore y=2$

$y=2$를 ㉠에 대입하면

$x+6=11 \quad \therefore x=5$

따라서 구하는 세 자리 자연수는 524이다.

꿀 한줄평

x, y는 각 자리의 숫자이므로 한 자리 수이고 백의 자리의 숫자가 x, 십의 자리 숫자가 y, 일의 자리의 숫자가 z인 세 자리 수는 $100x+10y+z$와 같이 표현한다.

21 답 10

해결 key Point!

전체 게임의 수가 A이고 이긴 횟수가 x, 비긴 횟수가 y이면 진 횟수는 $A-x-y$임을 이용한다.

A팀이 이긴 게임의 수를 x, 비긴 게임의 수를 y라고 하면 진 게임의 수는 $32-x-y$이다.

올해의 방식으로 계산한 점수가 55점이므로

$3x+y=55 \quad \cdots\cdots$ ㉠

작년의 방식으로 계산한 점수가 31점이므로

$3x-2(32-x-y)=31$

$\therefore 5x+2y=95 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠×2−㉡을 하면 $x=15$

$x=15$를 ㉠에 대입하면

$45+y=55 \quad \therefore y=10$

따라서 비긴 게임의 수는 10이다.

22 답 4

1단계 a, b의 값 구하기

$$\begin{cases} 6x+3y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 10x+6y=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠×2−㉡을 하면 $2x=1 \quad \therefore x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$3+3y=2,\ 3y=-1 \quad \therefore y=-\frac{1}{3}$

$\therefore a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{3}$

2단계 c, d의 값 구하기

$a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{3}$을 $\begin{cases} ax+by=-4 \\ bx-ay=-\frac{5}{3} \end{cases}$에 대입하면

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=-4 & \cdots\cdots ㉢ \\ -\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y=-\frac{5}{3} & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

㉢×6을 하면 $3x-2y=-24 \quad \cdots\cdots$ ㉤

㉣×6을 하면 $-2x-3y=-10 \quad \cdots\cdots$ ㉥

㉤×2+㉥×3을 하면

$-13y=-78 \quad \therefore y=6$

$y=6$을 ㉤에 대입하면

$3x-12=-24,\ 3x=-12 \quad \therefore x=-4$

$\therefore c=-4,\ d=6$

3단계 $5ac-7bd$의 값 구하기

$\therefore 5ac-7bd=5\times\frac{1}{2}\times(-4)-7\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times6$

$=-10+14=4$

단계	채점 기준	배점
❶	a, b의 값을 구했다.	3점
❷	c, d의 값을 구했다.	3점
❸	$5ac-7bd$의 값을 구했다.	1점

23 답 27 km

해결 key Point!

삼촌 댁에 갈 때 걸린 시간 1시간 50분은 $1\frac{50}{60}=\frac{11}{6}$(시간), 돌아올 때 걸린 시간 2시간 10분은 $2\frac{10}{60}=\frac{13}{6}$(시간)임을 이용하여 방정식을 세워야 한다.

1단계 이동 거리와 이동 시간을 이용하여 일차방정식 세우기

삼촌 댁에 갈 때 버스를 탄 거리를 x km, 자전거로 간 거리를 y km라고 하면 삼촌 댁에 갈 때 총 이동거리는 40 km이므로 도보로 이동한 거리는 $(40-x-y)$ km이고 삼촌 댁에 갈 때 걸린 시간은 1시간 50분, 즉 $\frac{11}{6}$시간이므로

$\frac{x}{54}+\frac{y}{27}+\frac{40-x-y}{4}=\frac{11}{6}$

$2x+4y+27(40-x-y)=198$

$\therefore 25x+23y=882 \quad \cdots\cdots$ ㉠

돌아올 때 걸린 시간은 2시간 10분, 즉 $\frac{13}{6}$시간이므로

$\frac{y}{54}+\frac{x}{27}+\frac{40-x-y}{4}=\frac{13}{6}$

$2y+4x+27(40-x-y)=234$

$\therefore 23x+25y=846 \quad \cdots\cdots$ ㉡

2단계 x, y의 값 구하기

㉠$\times 23-$㉡$\times 25$를 하면

$-96y=-864 \qquad \therefore y=9$

$y=9$를 ㉠에 대입하면

$25x+207=882$, $25x=675 \qquad \therefore x=27$

3단계 삼촌 댁에 갈 때 버스를 타고 간 거리 구하기

따라서 삼촌 댁에 갈 때 버스를 타고 간 거리는 27 km이다.

단계	채점 기준	배점
❶	이동 거리와 이동 시간을 이용하여 일차방정식을 세웠다.	3점
❷	x, y의 값을 구했다.	3점
❸	삼촌 댁에 갈 때 버스를 타고 간 거리를 구했다.	1점

Ⅳ 일차함수

01 일차함수의 그래프

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

98쪽~101쪽

01 ③, ⑤	02 ③	03 -4	04 ④	05 ①
06 ②	07 ①	08 ⑤	09 72	10 ②
11 ③	12 ②	13 ②, ⑤	14 ②	15 ③
16 1	17 ④	18 ②	19 ①	20 12
21 $\frac{1}{5}$	22 ②	23 ④	24 ①	

01 답 ③, ⑤

① y가 x의 함수이지만, y가 x의 일차식으로 나타내어지지 않으므로 일차함수가 아니다.

② (시간)$=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$이므로 $y=\dfrac{80}{x}$

즉, 일차함수가 아니다.

③ (남은 우유의 양)$=500-$(마신 우유의 양)이므로

$y=500-x$

④ (정사각형의 넓이)$=$(한 변의 길이)^{2}이므로

$y=x^2$

즉, 일차함수가 아니다.

⑤ (사다리꼴의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times\{(\text{윗변의 길이})+(\text{아랫변의 길이})\}\times(\text{높이})$

이므로 $y=\dfrac{1}{2}(x+2x)\times 4 \qquad \therefore y=6x$

따라서 y가 x의 일차함수인 것은 ③, ⑤이다.

02 답 ③

$f(x)=ax-5-(3a-x)$에서 $f(-3)=4$이므로

$-3a-5-(3a+3)=4$, $-6a-8=4$

$-6a=12 \qquad \therefore a=-2$

따라서 $g(x)=-\dfrac{1}{2}x+4$이므로

$g(6)=-\dfrac{1}{2}\times 6+4=1$

03 답 -4

1단계 a의 값 구하기

$y=ax-\dfrac{1}{3}$의 그래프는 점 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right)$를 지나므로

$\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{2}a=1 \qquad \therefore a=2$

2단계 k의 값 구하기

따라서 $y=2x-\frac{1}{3}$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행 이동한 그래프의 식은

$y=2x-\frac{1}{3}-1 \qquad \therefore y=2x-\frac{4}{3}$

이때 이 그래프가 점 $\left(k, -\frac{5}{3}\right)$를 지나므로

$-\frac{5}{3}=2k-\frac{4}{3}$, $2k=-\frac{1}{3} \qquad \therefore k=-\frac{1}{6}$

3단계 $12ak$의 값 구하기

$\therefore 12ak=12\times2\times\left(-\frac{1}{6}\right)=-4$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구했다.	40 %
❷	k의 값을 구했다.	50 %
❸	$12ak$의 값을 구했다.	10 %

04 답 ④

$y=ax+4$에 $y=0$을 대입하면 $0=ax+4$

$ax=-4 \qquad \therefore x=-\frac{4}{a}$

또, $y=ax+4$에 $x=0$을 대입하면 $y=4$

즉, $y=ax+4$의 그래프의 x절편은 $-\frac{4}{a}$, y절편은 4이므로

$-\frac{4}{a}=-4 \qquad \therefore a=1$

따라서 $y=x+4$의 그래프가 점 $(-2, k)$를 지나므로

$k=-2+4 \qquad \therefore k=2$

05 답 ①

세 점이 모두 한 직선 위에 있으므로

두 점 $(-3, 4)$, $(-1, 2k)$를 지나는 직선의 기울기가

두 점 $(-3, 4)$, $(2, 3k-5)$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

두 점 $(-3, 4)$, $(-1, 2k)$를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는

$\frac{2k-4}{-1-(-3)}=\frac{2k-4}{2}=k-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또, 두 점 $(-3, 4)$, $(2, 3k-5)$를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는

$\frac{3k-5-4}{2-(-3)}=\frac{3k-9}{5} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

이때 ㉠, ㉡이 같으므로

$k-2=\frac{3k-9}{5}$, $5k-10=3k-9$

$2k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

따라서 세 점을 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는

$k-2=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$

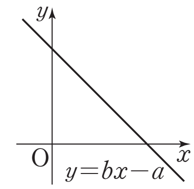
06 답 ②

$y=-ax+b$의 그래프의 기울기는 양수이므로

$-a>0$에서 $a<0$

또, y절편은 음수이므로 $b<0$이다.

즉, $b<0$, $-a>0$이므로 $y=bx-a$의 그래프의 기울기는 음수이고 y절편은 양수이므로 $y=bx-a$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $y=-ax+b$의 그래프의 y절편은 음수이고, $y=bx-a$의 그래프의 y절편은 양수이므로 $y=bx-a$의 그래프의 y절편은 $y=-ax+b$의 그래프의 y절편보다 크다.

ㄴ. $y=bx-a$의 그래프는 제1, 2, 4사분면을 지나고 제3사분면을 지나지 않는다.

ㄷ. $y=-ax+b$에 $y=0$을 대입하면 $0=-ax+b$

$ax=b \qquad \therefore x=\frac{b}{a}$

$y=bx-a$에 $y=0$을 대입하면 $0=bx-a$

$bx=a \qquad \therefore x=\frac{a}{b}$

즉, $y=-ax+b$, $y=bx-a$의 그래프의 x절편은 각각 $\frac{b}{a}$, $\frac{a}{b}$이므로 같지 않다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

07 답 ①

$y=\frac{3}{2}x-6$에 $y=0$을 대입하면 $0=\frac{3}{2}x-6$

$\frac{3}{2}x=6 \qquad \therefore x=4$

$\therefore \mathrm{P}(4, 0)$

$y=\frac{1}{a}x-2$에 $y=0$을 대입하면 $0=\frac{1}{a}x-2$

$\frac{1}{a}x=2 \qquad \therefore x=2a$

$\therefore \mathrm{Q}(2a, 0)$

이때 $a>2$이므로 $2a>4$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=2a-4=2$이므로

$2a=6 \qquad \therefore a=3$

08 답 ⑤

$y=\frac{2}{3}x+5$에 $y=0$을 대입하면 $0=\frac{2}{3}x+5$

$\frac{2}{3}x=-5 \qquad \therefore x=-\frac{15}{2}$

또, $y=\frac{2}{3}x+5$에 $x=0$을 대입하면 $y=5$

즉, $y=\frac{2}{3}x+5$의 그래프의 x절편은 $-\frac{15}{2}$, y절편은 5이다.

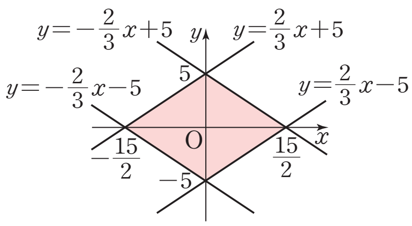
같은 방법으로

$y=\frac{2}{3}x-5$의 그래프의 x절편은 $\frac{15}{2}$, y절편은 -5,

$y=-\frac{2}{3}x+5$의 그래프의 x절편은 $\frac{15}{2}$, y절편은 5,

$y=-\frac{2}{3}x-5$의 그래프의 x절편은 $-\frac{15}{2}$, y절편은 -5

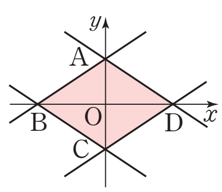
이므로 좌표평면 위에 네 일차함수의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는 삼각형 두 개의 넓이의 합과 같으므로

$2\times\left(\frac{1}{2}\times15\times5\right)=75$

참고 마름모 ABCD의 넓이는 대각선의 길이를 이용하여 구할 수도 있다.
즉, $\overline{AC}=10$, $\overline{BD}=15$이므로
마름모 ABCD의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times10\times15=75$



09 답 72

$y=-\frac{3}{4}x+6$에 $y=0$을 대입하면 $0=-\frac{3}{4}x+6$

$\frac{3}{4}x=6$ $\quad\therefore x=8$

또, $y=-\frac{3}{4}x+6$에 $x=0$을 대입하면 $y=6$

즉, $y=-\frac{3}{4}x+6$의 그래프의 x절편은 8, y절편은 6이다.

$y=-\frac{3}{4}x+6$의 그래프를 y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{3}{4}x+6+6$ $\quad\therefore y=-\frac{3}{4}x+12$

$y=-\frac{3}{4}x+12$에 $y=0$을 대입하면 $0=-\frac{3}{4}x+12$

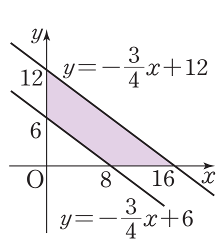
$\frac{3}{4}x=12$ $\quad\therefore x=16$

또, $y=-\frac{3}{4}x+12$에 $x=0$을 대입하면 $y=12$

즉, $y=-\frac{3}{4}x+12$의 그래프의 x절편은 16, y절편은 12이다.

따라서 $y=-\frac{3}{4}x+6$, $y=-\frac{3}{4}x+12$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

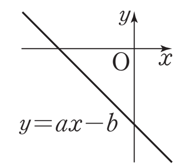
$\left(\frac{1}{2}\times16\times12\right)-\left(\frac{1}{2}\times8\times6\right)$
$=96-24=72$



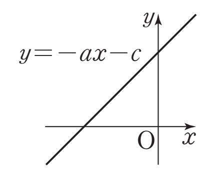
10 답 ②

$a<0$, $b>0$, $c<0$에서

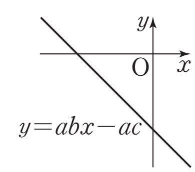
ㄱ. $a<0$, $-b<0$이므로 $y=ax-b$의 그래프의 기울기는 음수이고, y절편도 음수이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제2, 3, 4사분면을 지난다.



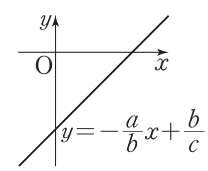
ㄴ. $-a>0$, $-c>0$이므로 $y=-ax-c$의 그래프의 기울기는 양수이고, y절편도 양수이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1, 2, 3사분면을 지난다.



ㄷ. $ab<0$, $-ac<0$이므로 $y=abx-ac$의 그래프의 기울기는 음수이고, y절편도 음수이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제2, 3, 4사분면을 지난다.



ㄹ. $-\frac{a}{b}>0$, $\frac{b}{c}<0$이므로
$y=-\frac{a}{b}x+\frac{b}{c}$의 그래프의 기울기는 양수이고, y절편은 음수이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1, 3, 4사분면을 지난다.



따라서 그래프가 제1사분면을 지나지 않는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

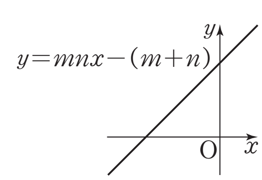
참고 두 수 a, b에 대하여
① a, b의 부호가 같다. ⇨ $ab>0$ $\left(\text{또는 } \frac{a}{b}>0\right)$
② a, b의 부호가 다르다. ⇨ $ab<0$ $\left(\text{또는 } \frac{a}{b}<0\right)$

11 답 ③

주어진 그래프에서 x절편과 y절편이 모두 음수이므로

$m<0$, $n<0$

따라서 $mn>0$, $-(m+n)>0$이므로 $y=mnx-(m+n)$의 그래프의 기울기는 양수이고, y절편도 양수이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1, 2, 3사분면을 지난다.



12 답 ②

$y=-(3a+1)x+(5-2a)$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 기울기는 음수이어야 하고, y절편은 0보다 크거나 같아야 한다.

즉, $-(3a+1)<0$에서 $3a+1>0$

$3a>-1$ $\quad\therefore a>-\frac{1}{3}$

또, $5-2a\geq0$에서 $2a\leq5$ $\quad\therefore a\leq\frac{5}{2}$

따라서 $-\frac{1}{3}<a\le\frac{5}{2}$이므로 이를 만족시키는 정수 a는 0, 1, 2의 3개이다.

13 답 ②, ⑤

① 그래프가 오른쪽 위로 향하므로 $a>0$

② y절편이 음수이므로 $-b+3<0$ $\quad\therefore b>3$

③ $x=-1$일 때, y의 값이 음수이므로

$-a-b+3<0$ $\quad\therefore a+b>3$

④ $x=1$일 때, y의 값이 양수이므로

$a-b+3>0$ $\quad\therefore a-b>-3$

$\therefore a-b+2>-1$

이때 $a-b+2>0$이 성립하는지는 알 수 없다.

⑤ $x=-2$일 때, y의 값이 음수이므로

$-2a-b+3<0$ $\quad\therefore 2a+b>3$

따라서 옳은 것은 ②, ⑤이다.

14 답 ②

$y=3\left(\frac{1}{4}-x\right)$에서 $y=-3x+\frac{3}{4}$

즉, $y=2ax-1$의 그래프가 $y=-3x+\frac{3}{4}$의 그래프와 평행하므로

$2a=-3$ $\quad\therefore a=-\frac{3}{2}$

$y=-3x-1$의 그래프가 점 $(-1, b+1)$을 지나므로

$b+1=3-1$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore a+b=-\frac{3}{2}+1=-\frac{1}{2}$

15 답 ③

$y=-5x+k$의 그래프가 점 $(2, -7)$을 지나므로

$-7=-10+k$ $\quad\therefore k=3$

$y=-5x+3$의 그래프를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-5x+3-4$ $\quad\therefore y=-5x-1$

이 일차함수의 그래프가 $y=ax+\frac{b}{2}$의 그래프와 일치하므로

$a=-5$, $\frac{b}{2}=-1$ $\quad\therefore b=-2$

$\therefore a+b+k=-5+(-2)+3=-4$

16 답 1

1단계 a, b의 값 구하기

$y=(4a+b-1)x+(2a-b)$,

$y=(a+2b+3)x-(4a+3b)$의 그래프가 일치하므로

$4a+b-1=a+2b+3$에서 $3a-b=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$2a-b=-(4a+3b)$에서 $2a-b=-4a-3b$

$2b=-6a$ $\quad\therefore b=-3a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $3a-(-3a)=4$

$6a=4$ $\quad\therefore a=\frac{2}{3}$

$a=\frac{2}{3}$를 ㉡에 대입하면 $b=-2$

2단계 $y=3ax-b$의 그래프의 x절편, y절편 구하기

$y=3ax-b$, 즉 $y=2x+2$에 $y=0$을 대입하면 $0=2x+2$

$2x=-2$ $\quad\therefore x=-1$

$y=2x+2$에 $x=0$을 대입하면 $y=2$

즉, $y=2x+2$의 그래프의 x절편은 -1, y절편은 2이다.

3단계 $y=3ax-b$의 그래프의 x절편과 y절편의 합 구하기

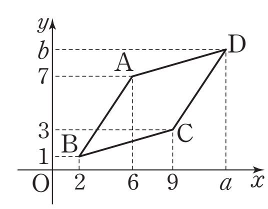
따라서 $y=2x+2$의 그래프의 x절편과 y절편의 합은

$-1+2=1$

단계	채점 기준	비율
❶	a, b의 값을 구했다.	50 %
❷	$y=3ax-b$의 그래프의 x절편, y절편을 구했다.	40 %
❸	$y=3ax-b$의 그래프의 x절편과 y절편의 합을 구했다.	10 %

17 답 ④

세 점 A(6, 7), B(2, 1), C(9, 3)과 제1사분면 위의 점 D로 이루어진 사각형이 평행사변형이 되도록 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 점 D의 좌표를 (a, b)라고 하면 $\overline{AB}/\!/\overline{DC}$이므로

$\frac{7-1}{6-2}=\frac{b-3}{a-9}$에서 $6(a-9)=4(b-3)$

$6a-54=4b-12$, $6a-4b=42$

$\therefore 3a-2b=21$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로

$\frac{b-7}{a-6}=\frac{3-1}{9-2}$에서 $7(b-7)=2(a-6)$

$7b-49=2a-12$ $\quad\therefore 2a-7b=-37$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠$\times 2-$㉡$\times 3$을 하면

$17b=153$ $\quad\therefore b=9$

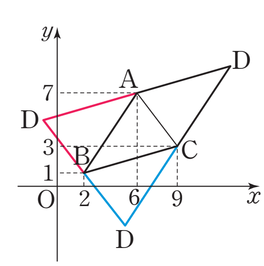
$b=9$를 ㉠에 대입하면

$3a-18=21$, $3a=39$

$\therefore a=13$

따라서 점 D의 좌표는 $(13, 9)$이다.

참고 네 점 A, B, C, D로 이루어진 사각형이 평행사변형이 되도록 하는 점 D의 위치는 오른쪽 그림과 같이 세 곳이지만 제1사분면 위의 점 D는 하나뿐이다.



18 답 ②

$f(x)=ax+b$라고 하면 $y=f(x)$는 x의 값이 6만큼 증가할 때, y의 값은 3만큼 감소하므로 기울기는

$a=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$

$f(0)=-8$이므로 $-8=b$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x-8$

$f(x)=-\frac{1}{2}x-8$에서 $f(k+1)=k-1$이므로

$k-1=-\frac{1}{2}(k+1)-8$

$2k-2=-k-1-16$

$3k=-15 \qquad \therefore k=-5$

19 답 ①

$y=ax+b$의 그래프는 두 점 $(3,\ 4)$, $(5,\ 0)$을 지나는 직선과 평행하므로 기울기는

$a=\frac{0-4}{5-3}=-2$

이때 $y=-2x+b$의 그래프는 $y=6x+6$의 그래프와 x축 위에서 만나므로 x절편이 서로 같다.

$y=6x+6$에 $y=0$을 대입하면 $0=6x+6$

$6x=-6 \qquad \therefore x=-1$

즉, 일차함수 $y=-2x+b$의 그래프의 x절편이 -1이므로

$y=-2x+b$에 $x=-1$, $y=0$을 대입하면

$0=2+b \qquad \therefore b=-2$

$\therefore a+b=-2+(-2)=-4$

20 답 12

두 점 $\mathrm{C}(9,\ 2)$, $\mathrm{D}(-3,\ -6)$을 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는

$\frac{-6-2}{-3-9}=\frac{-8}{-12}=\frac{2}{3}$

두 점 C, D를 지나는 일차함수의 식을 $y=\frac{2}{3}x+b$ (단, b는 상수)라고 하면 이 그래프가 점 $\mathrm{C}(9,\ 2)$를 지나므로

$2=6+b \qquad \therefore b=-4$

$y=\frac{2}{3}x-4$에 $y=0$을 대입하면 $0=\frac{2}{3}x-4$

$\frac{2}{3}x=4 \qquad \therefore x=6$

$y=\frac{2}{3}x-4$에 $x=0$을 대입하면 $y=-4$

따라서 $y=\frac{2}{3}x-4$의 그래프의 x절편은 6, y절편은 -4이므로 $\triangle$OBA의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6\times4=12$

21 답 $\frac{1}{5}$

$y=-2x+10$에 $y=0$을 대입하면 $0=-2x+10$

$2x=10 \qquad \therefore x=5$

따라서 $y=-2x+10$의 그래프의 x절편은 5이다.

$y=5x-1$에 $x=0$을 대입하면 $y=-1$

따라서 $y=5x-1$의 그래프의 y절편은 -1이므로 $y=ax+b$의 x절편은 5, y절편은 -1이다.

즉, 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 두 점 $(5,\ 0)$, $(0,\ -1)$을 지나므로

$a=(\text{기울기})=\frac{-1-0}{0-5}=\frac{1}{5}$

22 답 ②

추의 무게가 4 g 늘어날 때마다 용수철의 길이는 1 cm씩 늘어나므로 추의 무게가 1 g 늘어날 때마다 용수철의 길이는 $\frac{1}{4}$ cm씩 늘어난다.

무게가 x g짜리인 추를 매달았을 때의 용수철의 길이를 y cm라고 하면 $y=24+\frac{1}{4}x$

$y=24+\frac{1}{4}x$에 $x=20$을 대입하면 $y=24+5=29$

따라서 이 저울에 무게가 20 g인 추를 매달았을 때의 용수철의 길이는 29 cm이다.

23 답 ④

가열한 지 0분 후의 물의 온도는 16 ℃이고 1분마다 물의 온도가 6 ℃씩 올라가므로

$y=6x+16$

$y=6x+16$에 $x=15$를 대입하면 $y=90+16=106$

$\therefore a=106$

$y=6x+16$에 $y=100$을 대입하면 $100=6x+16$

$6x=84 \qquad \therefore x=14$

$\therefore b=14$

$\therefore a+b=106+14=120$

24 답 ①

점 P가 점 B에서 출발한 지 x초 후의 $\triangle$ABP와 $\triangle$DCP의 넓이의 합을 $y\ \mathrm{cm}^2$라고 하면 $\overline{\mathrm{BP}}=2x$ cm, $\overline{\mathrm{PC}}=(20-2x)$ cm이므로

$y=\left(\frac{1}{2}\times2x\times6\right)+\left\{\frac{1}{2}\times(20-2x)\times12\right\}$

$\quad=6x+120-12x$

$\quad=-6x+120$

$y=-6x+120$에 $y=96$을 대입하면 $96=-6x+120$

$6x=24 \qquad \therefore x=4$

따라서 $\triangle$ABP와 $\triangle$DCP의 넓이의 합이 96 cm^2가 되는 것

은 점 P가 점 B에서 출발한 지 4초 후이다.

참고 (거리)=(속력)×(시간)이므로

$\overline{BP}=2\times x=2x\,(\mathrm{cm})$

$\therefore \overline{PC}=\overline{BC}-\overline{BP}=20-2x\,(\mathrm{cm})$

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

102쪽~109쪽

01 ②	**02** ②	**03** ③	**04** 14	**05** -6
06 3	**07** 16	**08** ①	**09** ②	**10** -12
11 ④	**12** 5	**13** 43	**14** $(2,\ 6)$	**15** ③
16 ②	**17** ③	**18** ④	**19** ④	**20** 6
21 16	**22** $\frac{22}{5}$	**23** 18	**24** ④	**25** 2
26 ①	**27** $y=-3x+21$	**28** ②	**29** -6	
30 $\frac{25}{2}$	**31** 25분	**32** ②	**33** -3	**34** ④
35 96	**36** ④	**37** 4	**38** 14	**39** ④
40 90	**41** ④	**42** 3		

01 답 ②

ㄱ. $y=4x-3$이므로 x가 하나로 정해지면 y도 하나로 정해지므로 함수이다.

ㄴ. x가 정해지면 x와 36의 최대공약수는 하나로 결정되므로 함수이다.

ㄷ. $x=4$일 때, 4에 가장 가까운 홀수는 3과 5이다. 즉, y가 하나로 정해지지 않으므로 함수가 아니다.

ㄹ. 나눗셈에서의 몫은 하나로 결정되므로 함수이다.

ㅁ. $x=|y|$이므로 $x=1$일 때, $y=\pm1$이다. 즉, y가 하나로 정해지지 않으므로 함수가 아니다.

따라서 y가 x에 대한 함수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

02 답 ②

해결 key Point!

주어진 조건에 맞게 y를 x에 대한 식으로 표현한다.

ㄱ. 이동 거리가 10 km를 초과하면 5 km마다 100원의 요금이 추가되므로 $x=10,\ 10.1,\ 10.2,\ \dots$일 때 요금이 전혀 변하지 않다가 $x=15$가 될 때 100원이 증가하므로 y가 x에 대한 일차식으로 나타내어지지 않으므로 y가 x에 대한 일차함수가 아니다.

ㄴ. 1 L의 연료로 15 km를 달릴 수 있는 자동차가 x km를 달리는 데 사용되는 연료의 양은 $\frac{x}{15}$ L이므로

$y=65-\frac{1}{15}x$

ㄷ. 배터리 충전량이 50 % 미만일 때에는 1분에 5 %씩 충전되므로 $y=5x\ (x<10)$

이때 $x=10$이면 $y=50$이므로 충전을 시작한 지 10분 후 배터리 충전량이 50 %가 된다.

$x\geq10$일 때, 즉 배터리 충전량이 50 % 이상일 때에는 1분에 2.5 %씩 충전되므로

$y=50+2.5(x-10)\qquad \therefore y=2.5x+25\ (x\geq10)$

따라서 하나의 일차식으로 나타내어지지 않으므로 y가 x에 대한 일차함수가 아니다.

따라서 y가 x에 대한 일차함수인 것은 ㄴ뿐이다.

03 답 ③

ㄱ. 10의 약수는 1, 2, 5, 10이므로

$f(10)=1+2+5+10=18$

15의 약수는 1, 3, 5, 15이므로

$f(15)=1+3+5+15=24$

$\therefore f(10)\neq f(15)$

ㄴ. p의 약수는 1, p이므로

$f(p)=1+p$

ㄷ. p^2의 약수는 1, p, p^2이다.

$p=2$일 때, $f(2^2)=1+2+4=7$이므로 홀수이다.

$p\neq2$일 때, p는 홀수이고 p^2도 홀수이므로

$f(p^2)=1+p+p^2$은 홀수이다.

따라서 $f(p^2)$은 항상 홀수이다.

ㄹ. $x\geq8$이면 $f(x)>8$이므로 $f(x)=8$인 x는 $x<8$이다.

즉, $x<8$일 때

$f(1)=1,\ f(2)=1+2=3,\ f(3)=1+3=4,$

$f(4)=1+2+4=7,\ f(5)=1+5=6,$

$f(6)=1+2+3+6=12,\ f(7)=1+7=8$

이므로 $f(x)=8$을 만족시키는 자연수 x는 7의 1개이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

Level UP

자연수의 약수의 개수와 합

(1) 자연수 N이 $N=a^m b^n$ (a, b는 서로 다른 소수, m, n은 자연수)으로 소인수분해될 때, N의 약수의 개수는

$(m+1)(n+1)$

N의 약수의 합은

$(1+a+a^2+\cdots+a^m)(1+b+b^2+\cdots+b^n)$

(2) 소수 p의 약수는 항상 2개이고 약수의 합은 $1+p$이다.

(3) 소수 p의 제곱수 p^2의 약수는 항상 3개이고 약수의 합은 $1+p+p^2$이다.

04 답 14

해결 key Point!

7^n을 10으로 나눈 나머지는 7^n의 일의 자리의 숫자이므로 $7,\ 7^2,\ 7^3,\ 7^4,\ \dots$의 일의 자리의 숫자를 구하고, 그 규칙을 확인해야 한다.

$f(n)=(7^n$을 10으로 나눈 나머지$)$에서 $n=1, 2, 3, \cdots$일 때
$f(1)=7,\ f(2)=9,\ f(3)=3,\ f(4)=1,\ f(5)=7, \cdots$
즉, $f(n)$의 값은 7, 9, 3, 1이 반복된다.
이때 $f(n)$의 최댓값이 9이므로 $n\ge10$이면 $f(n)-n<0$이다.
즉, $f(n)-n>0$이려면 $n\le9$이어야 한다.
이때
$f(1)-1=7-1=6>0,\ f(2)-2=9-2=7>0,$
$f(3)-3=3-3=0,\ f(4)-4=1-4=-3<0,$
$f(5)-5=7-5=2>0,\ f(6)-6=9-6=3>0,$
$f(7)-7=3-7=-4<0,\ f(8)-8=1-8=-7<0,$
$f(9)-9=7-9=-2<0$
이므로 $f(n)-n>0$을 만족시키는 n의 값은 1, 2, 5, 6이다.
따라서 n의 값의 합은
$1+2+5+6=14$

05 답 -6

해결 key Point!
자연수 n에 대하여 2^n, 3^n의 일의 자리의 숫자들을 구한 후 반복되는 규칙을 각각 확인해야 한다.

$f(n)$은 2^n의 일의 자리의 숫자이므로
$f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=8,\ f(4)=6,\ f(5)=2, \cdots$
즉, $f(n)$의 값은 2, 4, 8, 6이 반복된다.
또, $g(n)$은 3^n의 일의 자리의 숫자이므로
$g(1)=3,\ g(2)=9,\ g(3)=7,\ g(4)=1,\ g(5)=3, \cdots$
즉, $g(n)$의 값은 3, 9, 7, 1이 반복된다.
이때
$f(1)-g(1)=2-3=-1,\ f(2)-g(2)=4-9=-5,$
$f(3)-g(3)=8-7=1,\ f(4)-g(4)=6-1=5$
이므로
$\{f(1)-g(1)\}+\{f(2)-g(2)\}$
$\qquad+\{f(3)-g(3)\}+\{f(4)-g(4)\}$
$=-1+(-5)+1+5=0$
$\therefore \{f(1)-g(1)\}+\{f(2)-g(2)\}+\{f(3)-g(3)\}$
$\qquad+\cdots+\{f(50)-g(50)\}$
$=\{f(49)-g(49)\}+\{f(50)-g(50)\}$
$=\{f(1)-g(1)\}+\{f(2)-g(2)\}$
$=-1-5=-6$

Level UP
$f(x)$와 $g(x)$는 x의 값이 4씩 증가할 때마다 함숫값이 같아지므로 자연수 n에 대하여
$f(a)=f(a+4)=f(a+8)=\cdots=f(a+4n)$
$g(a)=g(a+4)=g(a+8)=\cdots=g(a+4n)$
이 성립한다.

06 답 3

해결 key Point!
$2x-1=t$라 하고 $f(t)$를 t에 대한 식으로 나타낸다.

$2x-1=t$라고 하면 $2x=t+1 \qquad \therefore x=\dfrac{t+1}{2}$
$\therefore f(t)=5\times\dfrac{t+1}{2}+3=\dfrac{5}{2}t+\dfrac{11}{2}$
즉, $f(x)=\dfrac{5}{2}x+\dfrac{11}{2}$이므로
$f(4a-3)=\dfrac{5}{2}(4a-3)+\dfrac{11}{2}=10a-2$
$f(4a-3)=28$에서
$10a-2=28,\ 10a=30 \qquad \therefore a=3$

07 답 16

1단계 $f(3)=-5$를 만족시키는 a, b 사이의 관계식 구하기
$\dfrac{4x-2}{3}=3$일 때
$4x-2=9,\ 4x=11 \qquad \therefore x=\dfrac{11}{4}$
따라서 $f(3)=\dfrac{11}{4}a+b=-5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
2단계 $f(-1)=7$을 만족시키는 a, b 사이의 관계식 구하기
$\dfrac{4x-2}{3}=-1$일 때
$4x-2=-3,\ 4x=-1 \qquad \therefore x=-\dfrac{1}{4}$
따라서 $f(-1)=-\dfrac{1}{4}a+b=7 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
3단계 ㉠, ㉡을 연립하여 a, b의 값 구하기
㉠$-$㉡을 하면
$3a=-12 \qquad \therefore a=-4$
$a=-4$를 ㉠에 대입하면
$-11+b=-5 \qquad \therefore b=6$
4단계 $a+b-m$의 값 구하기
$\dfrac{4x-2}{3}=6$일 때
$4x-2=18,\ 4x=20 \qquad \therefore x=5$
$f\left(\dfrac{4x-2}{3}\right)=-4x+6$이므로
$f(6)=-20+6=-14 \qquad \therefore m=-14$
$\therefore a+b-m=-4+6-(-14)=16$

단계	채점 기준	비율
❶	$f(3)=-5$를 만족시키는 a, b 사이의 관계식을 구했다.	30 %
❷	$f(-1)=7$을 만족시키는 a, b 사이의 관계식을 구했다.	30 %
❸	❶, ❷에서 구한 두 식을 연립하여 a, b의 값을 구했다.	20 %
❹	$a+b-m$의 값을 구했다.	20 %

08 답 ①

$y=(2a+2)x-a(3x-4)+2x(a+1)$
$\quad=2ax+2x-3ax+4a+2ax+2x$
$\quad=(a+4)x+4a$

가 x에 대한 일차함수가 되려면 $a+4\neq0$이어야 하므로
$a\neq-4$
따라서 y가 x에 대한 일차함수가 되도록 하는 상수 a의 값으로 옳지 않은 것은 ①이다.

09 답 ②

해결 key Point!
주어진 식이 x에 대한 일차함수가 되려면 우변의 x^2의 계수는 0이고, x의 계수는 0이 아니어야 한다.

$y=(3a+5b-23)x^2+(4a-b)x+b$가 x에 대한 일차함수가 되려면 $y=(x$에 대한 일차식$)$의 꼴이어야 하므로
$3a+5b-23=0$, $4a-b\neq0$
$\therefore 3a+5b=23$, $b\neq4a$
$3a+5b=23$을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 4)$, $(6, 1)$이다.
이때 $a=1$, $b=4$이면 $b=4a$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 $a=6$, $b=1$이므로
$a+b=6+1=7$

10 답 -12

해결 key Point!
두 상수 a, b에 대하여 항상 성립하는 식은 a, b에 대한 항등식임을 이용하여 푼다.

1단계 $f(-2)+qf(1)+pf(2)=0$을 a, b에 대한 식으로 나타내기
$f(-2)+qf(1)+pf(2)=0$에서
$(-2a+b)+q(a+b)+p(2a+b)=0$
$-2a+b+aq+bq+2ap+bp=0$
$\therefore a(2p+q-2)+b(p+q+1)=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

2단계 주어진 식이 모든 a, b에 대하여 항상 성립할 조건 구하기
㉠이 모든 a, b에 대하여 항상 성립하려면 a, b의 계수가 모두 0이어야 하므로
$$\begin{cases}2p+q-2=0 & \cdots\cdots ㉡\\ p+q+1=0 & \cdots\cdots ㉢\end{cases}$$

3단계 p, q의 값을 구하고 pq의 값 구하기
㉡$-$㉢을 하면
$p-3=0 \quad \therefore p=3$
$p=3$을 ㉡에 대입하면
$6+q-2=0 \quad \therefore q=-4$
$\therefore pq=3\times(-4)=-12$

단계	채점 기준	비율
❶	$f(-2)+qf(1)+pf(2)=0$을 a, b에 대한 식으로 나타냈다.	40 %
❷	주어진 식이 모든 a, b에 대하여 항상 성립할 조건을 구했다.	20 %
❸	p, q의 값을 구하고 pq의 값을 구했다.	40 %

Level UP
두 상수 a, b에 대하여 등식 $ax+b=0$이 모든 x에 대하여 항상 성립하려면 $a=0$, $b=0$이어야 한다.

11 답 ④

$f(k+2)-f(k)=a(k+2)+b-(ak+b)=2a$
즉, $2a=-4$이므로 $a=-2$
또, $f(0)=-7$이므로 $-7=b$
$\therefore a-b=-2-(-7)=5$

12 답 5

$4(x-2)=2x-4$에서 $4x-8=2x-4$
$2x=4$, $x=2 \quad \therefore a=2$
$\dfrac{x-4}{2}=2$에서 $x-4=4$
$x=8 \quad \therefore b=8$
따라서 $f(2)=8-2=6$이므로 $f(x)=kx-4$에서
$6=2k-4$, $2k=10 \quad \therefore k=5$

13 답 43

1단계 $f(-2)=-2b+7$을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기
$f(x)=ax+3$에서 $f(-2)=-2b+7$이므로
$-2b+7=-2a+3$, $2a-2b=-4$
$\therefore a-b=-2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

2단계 $g(5)=2a+4$를 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기
$g(x)=-\dfrac{2}{5}x+b$에서 $g(5)=2a+4$이므로
$2a+4=-2+b$
$\therefore 2a-b=-6 \quad \cdots\cdots$ ㉡

3단계 a, b의 값과 $f(x)$, $g(x)$ 구하기
㉡$-$㉠을 하면 $a=-4$
$a=-4$를 ㉠에 대입하면
$-4-b=-2 \quad \therefore b=-2$
$\therefore f(x)=-4x+3$, $g(x)=-\dfrac{2}{5}x-2$

4단계 $f(k)=g(k)$를 만족시키는 k의 값을 구하고 $m+n$의 값 구하기
$f(k)=g(k)$에서 $-4k+3=-\dfrac{2}{5}k-2$
$\dfrac{18}{5}k=5 \quad \therefore k=\dfrac{25}{18}$

따라서 $m=18$, $n=25$이므로

$m+n=18+25=43$

단계	채점 기준	비율
❶	$f(-2)=-2b+7$을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구했다.	20 %
❷	$g(5)=2a+4$를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구했다.	20 %
❸	a, b의 값과 $f(x)$, $g(x)$를 구했다.	30 %
❹	k의 값을 구하고 $m+n$의 값을 구했다.	30 %

14 답 $(2, 6)$

$y=2x-6$의 그래프가 점 $(-k, 2k+2)$를 지나므로

$2k+2=-2k-6$

$4k=-8$ $\therefore k=-2$

즉, $k^4-8=(-2)^4-8=8$이므로 $y=2x-6$의 그래프를 y축의 방향으로 8만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2x-6+8$ $\therefore y=2x+2$

이 그래프 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표의 합이 8인 점의 좌표를 $(a, 8-a)$라고 하면

$8-a=2a+2$

$3a=6$ $\therefore a=2$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(2, 6)$이다.

15 답 ③

$y=ax+b$의 그래프가 점 $(4, -1)$을 지나므로

$4a+b=-1$ …… ㉠

일차함수 $y=ax+b$의 그래프를 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=ax+b-5$

이 함수의 그래프가 점 $(2, 2)$를 지나므로

$2=2a+b-5$ $\therefore 2a+b=7$ …… ㉡

㉠－㉡을 하면

$2a=-8$ $\therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉡에 대입하면

$-8+b=7$ $\therefore b=15$

$y=ax+2b$, 즉 $y=-4x+30$의 그래프 위의 점 중에서 x좌표가 y좌표의 2배가 되는 점의 좌표를 $(2k, k)$라고 하면

$k=-8k+30$, $9k=30$ $\therefore k=\dfrac{10}{3}$

따라서 구하는 좌표는 $\left(\dfrac{20}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$이므로 이 점의 x좌표와 y좌표의 합은 $\dfrac{20}{3}+\dfrac{10}{3}=10$

16 답 ②

일차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $(2p, f(2p))$, $(5q, f(5q))$에 대하여

$\dfrac{f(5q)-f(2p)}{2p-5q}=-3$에서 $\dfrac{f(5q)-f(2p)}{5q-2p}=3$이므로 그래프의 기울기는 3이다.

$\therefore a=3$

$f(x)=3x+b$에서 $f(-1)=4$이므로

$4=-3+b$ $\therefore b=7$

따라서 $f(x)=3x+7$이므로

$f(5)=3\times5+7=22$

Level UP

일차함수 $f(x)=ax+b$의 그래프 위의 두 점 $(p, f(p))$, $(q, f(q))$에 대하여

$\dfrac{f(q)-f(p)}{q-p}$는 일차함수 $y=f(x)$의 그래프의 기울기 a를 나타낸다.

17 답 ③

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$$\frac{f(k^2)-f(k)}{k}=\frac{(ak^2+b)-(ak+b)}{k}=\frac{ak^2-ak}{k}=\frac{ak(k-1)}{k}=a(k-1)$$

이므로

$$\frac{f(4)-f(2)}{2}+\frac{f(9)-f(3)}{3}+\frac{f(16)-f(4)}{4}+\cdots+\frac{f(100)-f(10)}{10}$$
$$=a(2-1)+a(3-1)+a(4-1)+\cdots+a(10-1)$$
$$=a+2a+3a+\cdots+9a$$
$$=(1+2+3+\cdots+9)a$$
$$=45a$$

즉, $45a=210$이므로 $a=\dfrac{14}{3}$

$\therefore f(100)-f(1)=100a+b-(a+b)=99a$

$=99\times\dfrac{14}{3}=462$

Level UP

자연수 n에 대하여 1부터 n까지의 합을 쉽게 구하는 방법

$S=1+2+3+\cdots+n$이라고 하면

$2S=(1+2+3+\cdots+n)+(n+n-1+n-2+\cdots+1)$

$=(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)=n(n+1)$

이므로 $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\begin{array}{r} 1+2+3+\cdots+n \\ +\,)\ n+n-1+n-2+\cdots+1 \\ \hline \underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n\text{개}} \end{array}$$

18 답 ④

해결 key Point!

$y=mx-3$에 $x=nt+1$을 대입하여 y를 t에 대한 함수로 나타낸다.

$\begin{cases} y=mx-3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x=nt+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면

$y=m(nt+1)-3=mnt+m-3$

$f(t)=mnt+m-3$이라고 하면

$f(6)-f(2)=24$이므로

$(6mn+m-3)-(2mn+m-3)=24$

$4mn=24 \quad \therefore mn=6 \quad \cdots\cdots ㉢$

또, $f(-1)=-6$이므로

$-6=-mn+m-3 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉢을 ㉣에 대입하면

$-6=-6+m-3 \quad \therefore m=3$

$m=3$을 ㉢에 대입하면

$3n=6 \quad \therefore n=2$

$\therefore m+n=3+2=5$

19 답 ④

세 점 A, B, C가 모두 한 직선 위에 있으므로 두 점 $A(1,\ -1)$, $B(-1,\ a)$를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기와 두 점 $A(1,\ -1)$, $C(2,\ -a+1)$을 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는 같다.

즉, $m=\dfrac{a-(-1)}{-1-1}=\dfrac{(-a+1)-(-1)}{2-1} \quad \cdots\cdots ㉠$

$-\dfrac{a+1}{2}=-a+2,\ -a-1=-2a+4 \quad \therefore a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면 $m=-3$

$y=mx+n$, 즉 $y=-3x+n$의 그래프는 점 $A(1,\ -1)$을 지나므로

$-1=-3+n \quad \therefore n=2$

$\therefore a+m+n=5+(-3)+2=4$

Level UP

세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$이 일직선 위에 있는 경우

① (직선 AB의 기울기)=(직선 AC의 기울기)

즉, $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$

② 두 점을 지나는 직선 위에 다른 한 점이 있다.

20 답 6

해결 key Point!

세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 만들어지지 않도록 하려면 세 점이 모두 한 직선 위에 있어야 한다.

네 점 A, B, C, D 중 어느 세 점을 꼭짓점으로 잡아도 삼각형이 만들어지지 않으려면 네 점이 모두 한 직선 위에 있어야 한다.

세 점 A, B, D가 한 직선 위에 있으므로 두 점 $A(1,\ b-2a)$, $B(3,\ 5)$를 지나는 직선의 기울기와 두 점 $A(1,\ b-2a)$, $D(5,\ 2a+b)$를 지나는 직선의 기울기가 같아야 하므로

$\dfrac{5-(b-2a)}{3-1}=\dfrac{(2a+b)-(b-2a)}{5-1}$

$\dfrac{2a-b+5}{2}=a,\ 2a-b+5=2a$

$-b+5=0 \quad \therefore b=5$

또, 세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로 두 점 $A(1,\ 5-2a)$, $B(3,\ 5)$를 지나는 직선의 기울기와 두 점 $A(1,\ 5-2a)$, $C(4,\ 3a+4)$를 지나는 직선의 기울기가 같아야 하므로

$\dfrac{5-(5-2a)}{3-1}=\dfrac{(3a+4)-(5-2a)}{4-1}$

$a=\dfrac{5a-1}{3},\ 3a=5a-1$

$-2a=-1 \quad \therefore a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore 2a+b=2\times\dfrac{1}{2}+5=6$

21 답 16

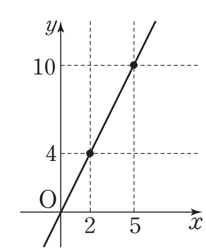
해결 key Point!

일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 $a>0$이면 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가하고, $a<0$이면 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다.

x의 값의 범위가 $2\le x\le 5$, y의 값의 범위가 $4\le y\le 10$이면 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는

(i) $a>0$일 때

오른쪽 그림과 같이 그래프가 두 점 $(2,\ 4)$, $(5,\ 10)$을 지나야 하므로



$\begin{cases} 2a+b=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5a+b=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡−㉠을 하면

$3a=6 \quad \therefore a=2$

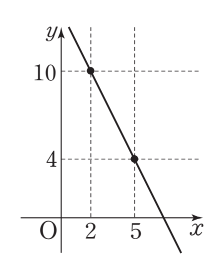
$a=2$를 ㉠에 대입하면

$4+b=4 \quad \therefore b=0$

$\therefore b-a=0-2=-2$

(ii) $a<0$일 때

오른쪽 그림과 같이 그래프가 두 점 $(2,\ 10)$, $(5,\ 4)$를 지나야 하므로



$\begin{cases} 2a+b=10 & \cdots\cdots ㉢ \\ 5a+b=4 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉣−㉢을 하면

$3a=-6 \quad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉢에 대입하면

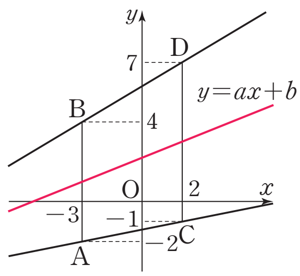
$-4+b=10 \quad \therefore b=14$

$\therefore b-a=14-(-2)==16$

(i), (ii)에 의하여 가장 큰 $b-a$의 값은 16이다.

22 답 $\frac{22}{5}$

1단계 $y=ax+b$의 그래프가 선분 AB와 선분 CD를 지날 때, b의 값의 조건 확인하기



네 점 A$(-3,\ -2)$, B$(-3,\ 4)$, C$(2,\ -1)$, D$(2,\ 7)$과 두 선분 AB, CD는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=ax+b$의 그래프가 두 점 B, D를 지날 때 b의 값이 가장 크고, 두 점 A, C를 지날 때 b의 값이 가장 작다.

2단계 두 점 B, D를 지날 때, b의 값 구하기

$y=ax+b$의 그래프가 두 점 B$(-3,\ 4)$, D$(2,\ 7)$을 지날 때

$a=(\text{기울기})=\frac{7-4}{2-(-3)}=\frac{3}{5}$

일차함수 $y=\frac{3}{5}x+b$의 그래프가 점 B$(-3,\ 4)$를 지나므로

$4=-\frac{9}{5}+b \qquad \therefore b=\frac{29}{5}$

3단계 두 점 A, C를 지날 때, b의 값 구하기

$y=ax+b$의 그래프가 두 점 A$(-3,\ -2)$, C$(2,\ -1)$를 지날 때

$a=(\text{기울기})=\frac{(-1)-(-2)}{2-(-3)}=\frac{1}{5}$

일차함수 $y=\frac{1}{5}x+b$의 그래프가 점 A$(-3,\ -2)$를 지나므로

$-2=-\frac{3}{5}+b \qquad \therefore b=-\frac{7}{5}$

4단계 $m+n$의 값 구하기

따라서 $-\frac{7}{5}\le b\le\frac{29}{5}$이므로 $m=-\frac{7}{5}$, $n=\frac{29}{5}$

$\therefore m+n=-\frac{7}{5}+\frac{29}{5}=\frac{22}{5}$

단계	채점 기준	비율
❶	$y=ax+b$의 그래프가 선분 AB와 선분 CD를 지날 때, b의 값의 조건을 확인했다.	20 %
❷	두 점 B, D를 지날 때, b의 값을 구했다.	30 %
❸	두 점 A, C를 지날 때, b의 값을 구했다.	30 %
❹	$m+n$의 값을 구했다.	20 %

23 답 18

$y=-x+p$에 $y=0$을 대입하면 $0=-x+p$

$\therefore x=p$

$y=-x+p$에 $x=0$을 대입하면 $y=p$

따라서 $y=-x+p$의 그래프의 x절편은 p, y절편도 p이므로 A$(p,\ 0)$, C$(0,\ p)$

$y=2x+q$에 $y=0$을 대입하면 $0=2x+q$

$2x=-q \qquad \therefore x=-\frac{q}{2}$

$y=2x+q$에 $x=0$을 대입하면 $y=q$

따라서 $y=2x+q$의 그래프의 x절편은 $-\frac{q}{2}$, y절편은 q이므로 B$\left(-\frac{q}{2},\ 0\right)$, D$(0,\ q)$

이때 $\overline{AO}=2\overline{BO}$이므로 $-p=2\times\frac{q}{2}$

$\therefore p+q=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\overline{CD}=6$이므로

$q-p=6 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2q=6 \qquad \therefore q=3$

$q=3$을 ㉠에 대입하면

$p+3=0 \qquad \therefore p=-3$

$\therefore p^2+q^2=(-3)^2+3^2=18$

24 답 ④

해결 key Point!

$a^2>0$이므로 $\frac{a^2c}{b}$에서 $\frac{c}{b}$의 부호만 생각하면 된다.

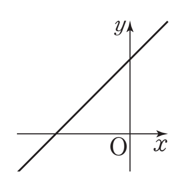
$\frac{a^2c}{b}<0$에서 $a^2>0$이므로 b와 c의 부호가 다르다.

따라서 a의 부호에 관계없이 $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$의 부호는

$\frac{b}{a}>0$, $\frac{c}{a}<0$ 또는 $\frac{b}{a}<0$, $\frac{c}{a}>0$

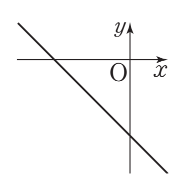
(i) $\frac{b}{a}>0$, $\frac{c}{a}<0$일 때

$\frac{b}{a}>0$, $-\frac{c}{a}>0$이므로 일차함수 $y=\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$의 그래프의 기울기는 양수이고 y절편도 양수이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1, 2, 3사분면을 지난다.



(ii) $\frac{b}{a}<0$, $\frac{c}{a}>0$일 때

$\frac{b}{a}<0$, $-\frac{c}{a}<0$이므로 일차함수 $y=\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$의 그래프의 기울기는 음수이고 y절편도 음수이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제2, 3, 4사분면을 지난다.



(i), (ii)에 의하여 일차함수 $y=\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$의 그래프가 반드시 지나는 사분면은 제2, 3사분면이다.

꿀 한줄평

일차함수의 그래프가 지나는 사분면을 구할 때, 기울기와 y절편의 부호만 파악하면 된다. 이때 꼭 모든 상수의 부호를 알아야 하는 것은 아니므로 각 상수의 부호에 따른 기울기와 y절편의 부호를 확인한다.

이 문제에서 b와 c의 부호는 다르고 a의 부호는 정해져 있지 않으므로

$a>0,\ b>0,\ c<0$이면 $\frac{b}{a}>0,\ \frac{c}{a}<0$

$a>0,\ b<0,\ c>0$이면 $\frac{b}{a}<0,\ \frac{c}{a}>0$

$a<0,\ b>0,\ c<0$이면 $\frac{b}{a}<0,\ \frac{c}{a}>0$

$a<0,\ b<0,\ c>0$이면 $\frac{b}{a}>0,\ \frac{c}{a}<0$

즉, 주어진 조건에 맞는 $a,\ b,\ c$의 부호는 4가지 경우가 있지만 각 경우의 $\frac{b}{a},\ \frac{c}{a}$의 부호를 확인하면 2가지의 경우밖에 존재하지 않는다.

따라서 2가지의 경우만 확인하면 된다.

25 답 2

해결 key Point!

두 일차함수의 그래프가 x축과 y축 위에서 모두 만나므로 두 일차함수의 그래프는 일치한다는 것을 알 수 있어야 한다.

$y=\frac{1}{2}ax+2$의 그래프는 $y=-4x+6$의 그래프와 만나지 않으므로 두 함수의 기울기가 같다.

즉, $\frac{1}{2}a=-4$에서 $a=-8$

두 일차함수의 그래프가 2개 이상의 점에서 만나면 두 그래프는 일치하므로 $y=\frac{1}{2}ax+2=-4x+2$의 식과

$y=-2bx+c-3$의 식이 같아야 한다.

즉, $-4=-2b$에서 $b=2$

$2=c-3$에서 $c=5$

$\therefore\ a+bc=-8+2\times5=2$

26 답 ①

$y=ax+6,\ y=\frac{3}{2}x+b$의 그래프의 기울기가 같으므로

$a=\frac{3}{2}$

$y=\frac{3}{2}x+6$에 $y=0$을 대입하면 $0=\frac{3}{2}x+6$

$\frac{3}{2}x=-6,\ x=-4\qquad\therefore\ \mathrm{P}(-4,\ 0)$

$y=\frac{3}{2}x+b$에 $y=0$을 대입하면 $0=\frac{3}{2}x+b$

$\frac{3}{2}x=-b,\ x=-\frac{2b}{3}\qquad\therefore\ \mathrm{Q}\left(-\frac{2b}{3},\ 0\right)$

이때 두 점 P, Q 사이의 거리가 8이므로

$\left|-4-\left(-\frac{2b}{3}\right)\right|=8$에서 $\left|\frac{2b}{3}-4\right|=8$

$\frac{2b}{3}-4=-8$ 또는 $\frac{2b}{3}-4=8$

$\frac{2b}{3}=-4$ 또는 $\frac{2b}{3}=12$

$\therefore\ b=-6$ 또는 $b=18$

$y=\frac{3}{2}x+6,\ y=\frac{3}{2}x+b$의 그래프와 평행한 직선을 그래프로 하는 일차함수의 그래프 l의 식을 $f(x)=\frac{3}{2}x+c$ (c는 상수)라고 하자.

(i) $b=-6$일 때

점 Q의 좌표는 $(4,\ 0)$이므로 점 M의 좌표는

$\left(\frac{-4+4}{2},\ 0\right)\qquad\therefore\ \mathrm{M}(0,\ 0)$

이때 $y=f(x)$의 그래프가 점 M을 지나므로

$c=0$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x$이고, 이 그래프의 y절편은 0이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $b=18$일 때

점 Q의 좌표는 $(-12,\ 0)$이므로 점 M의 좌표는

$\left(\frac{-4+(-12)}{2},\ 0\right)\qquad\therefore\ (-8,\ 0)$

이때 $y=f(x)$의 그래프가 점 M을 지나므로

$0=-12+c\qquad\therefore\ c=12$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x+12$이고, 그래프의 y절편은 12이다.

(i), (ii)에 의하여 $b=18$이므로

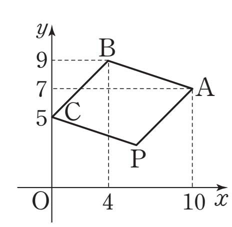
$2a+b=2\times\frac{3}{2}+18=21$

27 답 $y=-3x+21$

해결 key Point!

평행사변형은 마주 보는 두 쌍의 대변이 서로 평행하므로 평행사변형 BCPA에서 선분 BC와 선분 AP의 기울기가 서로 같아야 하고 선분 BA와 선분 CP의 기울기도 서로 같아야 한다.

1단계 평행사변형에서 마주보는 두 쌍의 대변이 서로 평행함을 이용하여 식 세우기



세 점 A(10, 7), B(4, 9), C(0, 5)와 점 P가 평행사변형 BCPA의 네 꼭짓점이 되려면 점 P는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

이때 $\mathrm{P}(a,\ b)$라고 하면 평행사변형의 마주 보는 두 변이 서로 평행하므로

(직선 BC의 기울기)=(직선 AP의 기울기)에서

$\frac{5-9}{0-4}=\frac{b-7}{a-10},\ 1=\frac{b-7}{a-10}$

$a-10=b-7\qquad\therefore\ a-b=3\qquad\cdots\cdots$ ㉠

(직선 BA의 기울기)=(직선 CP의 기울기)에서

$\frac{9-7}{4-10}=\frac{b-5}{a-0},\ -\frac{1}{3}=\frac{b-5}{a}$

$a=-3b+15\qquad\therefore\ a+3b=15\qquad\cdots\cdots$ ㉡

2단계 점 P의 좌표 구하기

㉡$-$㉠을 하면

$4b=12 \qquad \therefore b=3$

$b=3$을 ㉠에 대입하면

$a-3=3 \qquad \therefore a=6$

$\therefore \mathrm{P}(6,\ 3)$

3단계 두 점 B, P를 지나는 직선의 방정식 구하기

두 점 $\mathrm{B}(4,\ 9)$, $\mathrm{P}(6,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{3-9}{6-4}=-3$

이므로 일차함수의 그래프의 식을 $y=-3x+n$ (n은 상수)이라고 하면 이 일차함수의 그래프가 점 $\mathrm{B}(4,\ 9)$를 지나므로

$9=-12+n \qquad \therefore n=21$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-3x+21$

단계	채점 기준	비율
❶	평행사변형에서 마주 보는 두 쌍의 대변이 서로 평행함을 이용하여 식을 세웠다.	40 %
❷	점 P의 좌표를 구했다.	20 %
❸	두 점 B, P를 지나는 직선의 방정식을 구했다.	40 %

28 답 ②

직선 l의 y절편이 -3이므로 직선 l을 그래프로 하는 일차함수의 식을 $y=kx-3$ (k는 상수)이라고 하자. 이 직선이 점 $(3,\ 6)$을 지나므로

$6=3k-3,\ 3k=9 \qquad \therefore k=3$

직선 $y=3x-3$이 점 $\mathrm{A}(2a,\ 0)$을 지나므로

$0=6a-3,\ 6a=3 \qquad \therefore a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{A}(1,\ 0),\ \mathrm{B}\left(\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$

$y=mx+n$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$을 지나므로

$m=\dfrac{-\dfrac{3}{2}-0}{\dfrac{5}{2}-1}=-1$

즉, $y=-x+n$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$을 지나므로

$0=-1+n \qquad \therefore n=1$

$\therefore m^2+n^2=(-1)^2+1^2=2$

29 답 -6

해결 key Point!

a의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 찾으려면 a의 계수가 0이어야 한다.

$y=ax+(2-3a)=a(x-3)+2$이므로 $x=3$일 때 상수 a의 값에 관계없이 항상 $y=2$이다.

따라서 $y=ax+(2-3a)$의 그래프는 항상 점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$를 지난다.

$y=bx+3$의 그래프는 $y=-\dfrac{4}{3}x+1$의 그래프와 평행하므로 두 그래프의 기울기가 같다.

$\therefore b=-\dfrac{4}{3}$

$y=-\dfrac{4}{3}x+3$에 $y=0$을 대입하면 $0=-\dfrac{4}{3}x+3$

$\dfrac{4}{3}x=3,\ x=\dfrac{9}{4} \qquad \therefore \mathrm{B}\left(\dfrac{9}{4},\ 0\right)$

두 점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{9}{4},\ 0\right)$을 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{0-2}{\dfrac{9}{4}-3}=\dfrac{8}{3}$

이므로 일차함수의 그래프의 식을 $y=\dfrac{8}{3}x+n$ (n은 상수)이라고 하면 이 그래프가 점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$를 지나므로

$2=8+n \qquad \therefore n=-6$

따라서 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $y=\dfrac{8}{3}x-6$이므로 y절편은 -6이다.

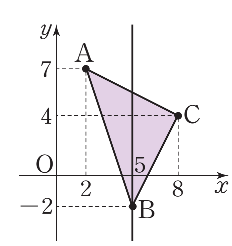
Level UP

일차함수 $y=m(x-a)+b$에 $x=a$, $y=b$를 대입하면 등식이 성립하므로 일차함수 $y=m(x-a)+b$의 그래프는 m의 값에 관계없이 항상 점 $(a,\ b)$를 지난다.

30 답 $\dfrac{25}{2}$

해결 key Point!

직선 $x=k$가 점 B를 지날 때 삼각형과 만나는 부분의 선분의 길이가 가장 길다는 것을 알아야 한다.



세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

이때 직선 $x=k$가 삼각형 ABC와 만나는 부분의 길이는 $k<5$에서 k가 커질수록 커지고, $k>5$에서 k가 커질수록 작아진다. 따라서 직선 $x=k$가 삼각형 ABC와 만나는 부분의 길이는 $k=5$일 때, 즉 이 직선이 $\mathrm{B}(5,\ -2)$를 지날 때 가장 길다.

두 점 $\mathrm{A}(2,\ 7)$, $\mathrm{C}(8,\ 4)$를 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{4-7}{8-2}=-\dfrac{1}{2}$

이므로 이 직선의 방정식을 $y=-\dfrac{1}{2}x+n$ (n은 상수)이라고 하면 이 직선이 점 $\mathrm{A}(2,\ 7)$을 지나므로

$7=-1+n \qquad \therefore n=8$

따라서 두 점 A, C를 지나는 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x+8$이다.

$y=-\frac{1}{2}x+8$에 $x=5$를 대입하면 $y=-\frac{5}{2}+8=\frac{11}{2}$

두 직선 $y=-\frac{1}{2}x+8$, $x=5$의 교점이 점 $\left(5,\ \frac{11}{2}\right)$이므로 직선 $x=k$가 삼각형 ABC와 만나는 부분의 길이가 가장 길 때의 길이 l은

$l=\frac{11}{2}-(-2)=\frac{15}{2}$

$\therefore k+l=5+\frac{15}{2}=\frac{25}{2}$

31 답 25분

해결 key Point!

용액을 가열할 때 1분당 올라가는 온도와 냉각시킬 때 1분당 내려가는 온도를 구해 온도와 시간에 대한 식을 세워야 한다.

어떤 용액을 가열할 때 3분마다 온도가 12 ℃씩 올라가므로 1분마다 4 ℃씩 올라간다. 처음 온도가 20 ℃인 이 용액을 x_1분 동안 가열했을 때의 온도를 y_1 ℃라고 하면

$y_1=20+4x_1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$y_1=80$을 ㉠에 대입하면 $80=20+4x_1$

$4x_1=60 \qquad \therefore x_1=15$

또, 이 용액을 냉각시킬 때 3분마다 온도가 9 ℃씩 내려가므로 1분마다 3 ℃씩 내려간다. 80 ℃인 이 용액을 x_2분 동안 냉각시켰을 때의 온도를 y_2 ℃라고 하면

$y_2=80-3x_2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

$y_2=50$을 ㉡에 대입하면 $50=80-3x_2$

$3x_2=30 \qquad \therefore x_2=10$

따라서 처음 온도가 20 ℃인 용액을 15분간 가열하여 80 ℃인 용액이 되었고, 이 용액을 10분간 냉각하여 50 ℃인 용액이 되었으므로 구하는 시간은

$15+10=25$(분)

32 답 ②

오전 10시 정각 이후 시간 t분이 지났을 때의 물의 양을 $V(t)$라고 하자. 물의 양이 오전 10시 정각에 500 L, 오전 10시 20분에 470 L이므로 함수 $V(t)$의 그래프는 두 점 $(0,\ 500)$, $(20,\ 470)$을 지난다.

즉, 함수의 그래프의 기울기는

$\frac{470-500}{20-0}=-\frac{3}{2}$

이므로 $V(t)=-\frac{3}{2}t+b$ (b는 상수)라고 하면 이 그래프가 점 $(0,\ 500)$을 지나므로

$b=500$

따라서 $V(t)=-\frac{3}{2}t+500$에 $V(t)=125$를 대입하면

$125=-\frac{3}{2}t+500,\ \frac{3}{2}t=375$

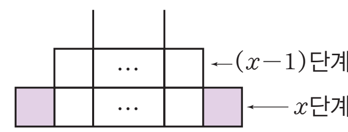
$\therefore t=250$

즉, 탱크의 물의 양이 125 L가 되는 시각은 오전 10시 정각으로부터 250분, 즉 4시간 10분 후인 오후 2시 10분이다.

33 답 -3

해결 key Point!

x단계의 둘레와 $(x-1)$단계의 둘레의 차이를 구해야 한다.



오른쪽 그림과 같이 x단계의 둘레는 $(x-1)$단계 보다 색칠된 부분의 바깥 둘레 만큼 더 길다.

즉, x단계의 둘레는 $(x-1)$단계보다 6 cm 더 길다.

따라서 $f(x)-f(x-1)=6$ (단, x는 $x\geq 2$인 자연수)이므로

$f(x-1)-f(x)=-6$

$$\therefore \frac{f(1)-f(2)+f(3)-f(4)+\cdots+f(99)-f(100)}{f(17)}$$
$$=\frac{\{f(1)-f(2)\}+\{f(3)-f(4)\}+\cdots+\{f(99)-f(100)\}}{f(17)}$$
$$=\frac{(-6)\times 50}{6\times 17-2}$$
$$=\frac{-300}{100}=-3$$

Level UP

$f(x)=f(x-1)+6$이고 $f(1)=4$이므로

$f(2)=f(1)+6=4+6$,

$f(3)=f(2)+6=4+6+6=4+6\times 2$,

$f(4)=f(3)+6=4+6\times 2+6=4+6\times 3$,

$\vdots$

$f(x)=f(x-1)+6=4+6(x-1)=6x-2$

따라서 $f(x)$는 일차함수이다.

34 답 ④

해결 key Point!

나열된 구슬의 개수 사이의 규칙성을 찾아야 한다.

ㄱ. n번째에 놓인 구슬의 개수는 $n-1$번째보다 4개 더 많다.

$\therefore f(n)-f(n-1)=4$ (단, n은 $n\geq 2$인 자연수) $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

ㄴ. ㉠에서 $f(n)=f(n-1)+4$이고 $f(1)=1$이므로

$f(2)=f(1)+4=1+4$,

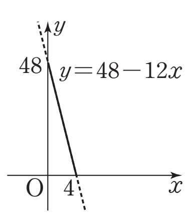
$f(3)=f(2)+4=1+4+4=1+4\times2$,
$f(4)=f(3)+4=1+4\times2+4=1+4\times3$
⋮
$f(n)=f(n-1)+4=1+4(n-1)=4n-3$
$\therefore f(100)=4\times100-3=397$

ㄷ. $f(n)<100$에서 $4n-3<100$
$4n<103 \qquad \therefore n<25.75$
이때 n은 자연수이므로 조건을 만족시키는 n의 값은 1, 2, 3, …, 25의 25개이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

35 답 96

삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times12\times8=48\ (\mathrm{cm}^2)$
$\overline{\mathrm{AP}}=2x$ cm이므로 삼각형 ABP의 넓이는
$\frac{1}{2}\times2x\times12=12x\ (\mathrm{cm}^2)$
이때
(삼각형 PBC의 넓이)
=(삼각형 ABC의 넓이)−(삼각형 ABP의 넓이)
이므로
$y=48-12x$
$y=48-12x$에 $y=0$을 대입하면 $0=48-12x$
$12x=48 \qquad \therefore x=4$
$y=48-12x$에 $x=0$을 대입하면 $y=48$
따라서 $y=48-12x$의 그래프의 x절편은 4, y절편은 48이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는



$\frac{1}{2}\times4\times48=96$

36 답 ④

해결 key Point!
두 일차함수의 그래프가 x축 위의 한 점에서 만나므로 두 일차함수의 그래프의 x절편이 같아야 한다.

두 일차함수의 그래프가 x축 위의 한 점에서 만나므로 두 일차함수의 그래프의 x절편은 같다.
$y=\frac{3}{2}x+9$에 $y=0$을 대입하면 $0=\frac{3}{2}x+9$
$\frac{3}{2}x=-9 \qquad \therefore x=-6$
$y=ax+b$에 $y=0$을 대입하면 $0=ax+b$
$ax=-b \qquad \therefore x=-\frac{b}{a}$
즉, $-6=-\frac{b}{a}$이므로 $b=6a$
두 일차함수의 그래프와 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 36이므로
$\frac{1}{2}\times|9-b|\times6=36$, $|9-b|=12$
$9-b=-12$ 또는 $9-b=12$
$\therefore b=21$ 또는 $b=-3 \qquad$ …… ㉠
이때 두 일차함수의 그래프의 y절편의 합은 10보다 작으므로
$9+b<10 \qquad \therefore b<1 \qquad$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $b=-3$
$b=-3$을 $b=6a$에 대입하면
$-3=6a \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$
$\therefore 4ab=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-3)=6$

37 답 4

1단계 △OAB의 넓이 구하기
$y=-\frac{4}{3}x+8$에 $y=0$을 대입하면 $0=-\frac{4}{3}x+8$
$\frac{4}{3}x=8$, $x=6 \qquad \therefore \mathrm{A}(6,\ 0)$
$y=-\frac{4}{3}x+8$에 $x=0$을 대입하면 $y=8 \qquad \therefore \mathrm{B}(0,\ 8)$
$\therefore \triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times6\times8=24$

2단계 △OAC의 넓이 구하기
△OAB와 △OAC의 넓이의 비가 3 : 1이므로
△OAB : △OAC=3 : 1, 24 : △OAC=3 : 1
$3\triangle\mathrm{OAC}=24 \qquad \therefore \triangle\mathrm{OAC}=8$

3단계 점 C의 x좌표 구하기
이때 점 C의 y좌표를 k라고 하면 △OAC의 넓이가 8이므로
$\frac{1}{2}\times6\times k=8$, $3k=8 \qquad \therefore k=\frac{8}{3}$
$y=\frac{8}{3}$을 $y=-\frac{4}{3}x+8$에 대입하면 $\frac{8}{3}=-\frac{4}{3}x+8$
$\frac{4}{3}x=\frac{16}{3} \qquad \therefore x=4$
따라서 점 C의 x좌표는 4이다.

단계	채점 기준	비율
❶	△OAB의 넓이를 구했다.	40 %
❷	△OAC의 넓이를 구했다.	20 %
❸	점 C의 x좌표를 구했다.	40 %

38 답 14

해결 key Point!
일차함수의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는
$\frac{1}{2}\times|(x\text{절편})|\times|(y\text{절편})|$임을 이용한다.

1단계 삼각형의 넓이 A 구하기

$y=-x+a$에 $y=0$을 대입하면 $0=-x+a$

$\therefore x=a$

$y=-x+a$에 $x=0$을 대입하면 $y=b$

따라서 $y=-x+a$의 그래프의 x절편은 a, y절편도 a이므로 $y=-x+a$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이 A는

$A=\frac{1}{2}\times a\times a=\frac{a^2}{2}$

2단계 삼각형의 넓이 B 구하기

$y=-\frac{1}{2}x+b$에 $y=0$을 대입하면 $0=-\frac{1}{2}x+b$

$\frac{1}{2}x=b \qquad \therefore x=2b$

$y=-\frac{1}{2}x+b$에 $x=0$을 대입하면 $y=b$

따라서 $y=-\frac{1}{2}x+b$의 그래프의 x절편은 $2b$, y절편은 b이므로 $y=-\frac{1}{2}x+b$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이 B는

$B=\frac{1}{2}\times 2b\times b=b^2$

3단계 삼각형의 넓이의 비와 차를 이용하여 식 세우기

$A:B=8:9$이므로 $\frac{a^2}{2}:b^2=8:9$

$8b^2=\frac{9}{2}a^2 \qquad \therefore b^2=\frac{9}{16}a^2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또, 두 삼각형의 넓이의 차가 4이므로

$b^2-\frac{a^2}{2}=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

4단계 $a+b$의 값 구하기

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{9}{16}a^2-\frac{a^2}{2}=4$

$\frac{a^2}{16}=4$, $a^2=64$

이때 a는 양수이므로 $a=8$

$a=8$을 ㉠에 대입하면

$b^2=36$

이때 b는 양수이므로 $b=6$

$\therefore a+b=8+6=14$

단계	채점 기준	비율
❶	삼각형의 넓이 A를 구했다.	20 %
❷	삼각형의 넓이 B를 구했다.	20 %
❸	두 삼각형의 넓이의 비와 차를 이용하여 식을 세웠다.	30 %
❹	$a+b$의 값을 구했다.	30 %

39 답 ④

$y=-\frac{1}{2}x+6$에 $y=0$을 대입하면 $0=-\frac{1}{2}x+6$

$\frac{1}{2}x=6 \qquad \therefore x=12$

$y=-\frac{1}{2}x+6$에 $x=0$을 대입하면 $y=6$

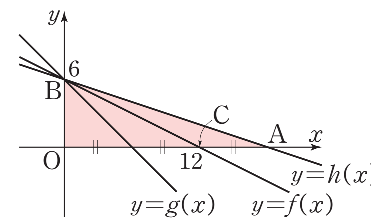
따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x+6$의 그래프의 x절편은 12, y절편은 6이다.

또, $g(0)=6$, $h(0)=6$이므로 $g(x)=ax+6$, $h(x)=bx+6$의 그래프의 y절편은 모두 6이다.

이때 $a<-\frac{1}{2}<b<0$이므로

($g(x)$의 기울기)$<$($f(x)$의 기울기)$<$($h(x)$의 기울기)<0

따라서 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$y=h(x)$의 그래프와 x축, y축이 만나는 점을 각각 A, B라고 하면 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 삼각형 OAB의 넓이를 삼등분한다.

따라서 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(6, 0)$을 지나고 $y=h(x)$의 그래프는 $(18, 0)$을 지나므로 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프의 기울기는 각각

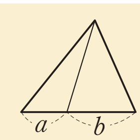
$a=\frac{0-6}{6-0}=-1$, $b=\frac{0-6}{18-0}=-\frac{1}{3}$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{-1}{-\frac{1}{3}}=3$

꿀 한줄평

두 삼각형의 높이가 같은 경우 밑변의 길이의 비와 넓이의 비는 같다. 즉, 높이가 h일 때 두 삼각형의 밑변의 길이가 $a:b$이면 넓이의 비도

$\frac{1}{2}\times a\times h:\frac{1}{2}\times b\times h=a:b$이므로 밑변의 길이의 비와 같다.



40 답 90

해결 key Point!

각 일차함수의 x절편과 y절편을 이용하여 그래프를 그려 네 일차함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 성질을 알아본다.

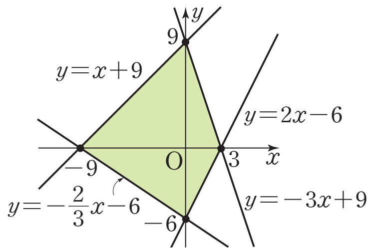
$y=x+9$의 그래프의 x절편은 -9, y절편은 9

$y=-3x+9$의 그래프의 x절편은 3, y절편은 9

$y=2x-6$의 그래프의 x절편은 3, y절편은 -6

$y=-\frac{2}{3}x-6$의 그래프의 x절편은 -9, y절편은 -6

따라서 $y=x+9$, $y=-3x+9$, $y=2x-6$, $y=-\frac{2}{3}x-6$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



네 일차함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 두 x절편을 이은 선분을 밑변으로 하는 삼각형 두 개의 합이므로

$\left[\frac{1}{2}\times\{3-(-9)\}\times9\right]+\left[\frac{1}{2}\times\{3-(-9)\}\times6\right]$

$=54+36=90$

41 답 ④

해결 key Point!

정사각형의 한 점의 좌표를 미지수로 놓고 나머지 점들을 모두 한 미지수로 표현하여 변의 길이를 나타내야 한다.

$y=2x$, $y=-x+5$의 그래프와 x축과의 교점을 각각 B, C라 하고 두 일차함수의 그래프의 교점을 A라고 하자.

$y=-x+5$에 $y=0$을 대입하면 $0=-x+5$

$\therefore x=5 \qquad \therefore$ C$(5, 0)$

$y=2x$, $y=-x+5$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 삼각형 ABC에 내접하는 정사각형의 한 꼭짓점인 일차함수 $y=2x$의 그래프 위의 점을 $(a, 2a)$라고 하면 정사각형의 한 변의 길이는 $2a$이다.

$y=-x+5$에 $y=2a$를 대입하면 $2a=-x+5$

$\therefore x=5-2a$

이때 정사각형의 나머지 세 꼭짓점의 좌표는 각각

$(a, 0)$, $(5-2a, 0)$, $(5-2a, 2a)$

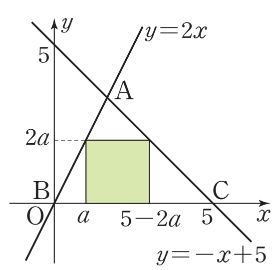
오른쪽 그림에서 정사각형의 가로, 세로의 길이가 같아야 하므로

$2a=(5-2a)-a$

$5a=5 \qquad \therefore a=1$

따라서 정사각형의 한 변의 길이가 2이므로 넓이는

$2\times2=4$



42 답 3

해결 key Point!

점 B의 좌표를 (a, k)라 하고 정사각형의 세 꼭짓점 A, C, D의 좌표를 a, k를 이용하여 나타낸 후, 정사각형 ABCD와 삼각형 OAD의 넓이를 a, k에 대한 식으로 나타낸다.

1단계 정사각형 ABCD의 넓이를 이용하여 네 꼭짓점 A, B, C, D의 좌표를 문자로 나타내기

정사각형 ABCD의 넓이가 16이므로 한 변의 길이는 4이다.

B(a, k)라고 하면

A$(a, k+4)$, C$(a+4, k)$, D$(a+4, k+4)$

2단계 삼각형 OAD의 넓이를 이용하여 k의 값 구하기

이때 삼각형 OAD의 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}\times4\times(k+4)=12$, $2(k+4)=12$

$k+4=6 \qquad \therefore k=2$

직선 $y=-x+14$가 점 D$(a+4, 6)$을 지나므로

$6=-(a+4)+14$, $a+4=8$

$\therefore a=4$

3단계 mk의 값 구하기

따라서 직선 $y=mx$는 점 A$(4, 6)$을 지나므로

$6=4m \qquad \therefore m=\frac{3}{2}$

$\therefore mk=\frac{3}{2}\times2=3$

단계	채점 기준	비율
❶	정사각형 ABCD의 넓이를 이용하여 네 꼭짓점 A, B, C, D의 좌표를 문자로 나타냈다.	40 %
❷	삼각형 OAD의 넓이를 이용하여 k의 값을 구했다.	20 %
❸	mk의 값을 구했다.	40 %

02 일차함수와 일차방정식의 관계

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

110쪽~112쪽

01 ①	**02** ①	**03** ⑤	**04** $\frac{2}{5}\le a\le4$	
05 ④	**06** 6	**07** ②	**08** -6	**09** 2
10 ②	**11** ①	**12** ③	**13** ①	**14** ③
15 ②	**16** ③	**17** ③	**18** ⑤	

01 답 ①

$ax-y+b=0$에서 $y=ax+b$ $\qquad$ …… ㉠

$4x+2y-1=0$에서 $2y=-4x+1$

$\therefore y=-2x+\frac{1}{2}$ $\qquad$ …… ㉡

두 그래프 ㉠, ㉡이 서로 평행하므로

$a=-2$

$5x+y-2=0$에서 $y=-5x+2$ $\qquad$ …… ㉢

두 그래프 ㉠, ㉢이 y축 위에서 만나므로

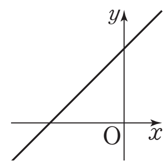
$b=2$

$\therefore a-b=-2-2=-4$

02 답 ①

$(2a+7)x-y-a+6=0$에서 $y=(2a+7)x-a+6$

이 그래프가 제1, 2, 3사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 (기울기)>0, (y절편)>0이어야 한다.



$2a+7>0$에서 $2a>-7$ $\quad\therefore a>-\frac{7}{2}$

$-a+6>0$에서 $-a>-6$ $\quad\therefore a<6$

따라서 $-\frac{7}{2}<a<6$이므로 상수 a의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

03 답 ⑤

$ax+by-4=0$에서 $by=-ax+4$

$\therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{4}{b}$

$y=-\frac{a}{b}x+\frac{4}{b}$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{a}{b}x+\frac{4}{b}-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

두 점 $(-2, 7)$, $(3, -3)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-3-7}{3-(-2)}=\frac{-10}{5}=-2$

이므로 이 직선의 방정식을 $y=-2x+k$ (k는 상수)라고 하면 이 직선이 점 $(-2, 7)$을 지나므로

$7=4+k$ $\quad\therefore k=3$

$\therefore y=-2x+3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

두 직선 ㉠, ㉡이 일치하므로

$-\frac{a}{b}=-2$, $\frac{4}{b}-3=3$

$a=2b$, $\frac{4}{b}=6$ $\quad\therefore a=\frac{4}{3}$, $b=\frac{2}{3}$

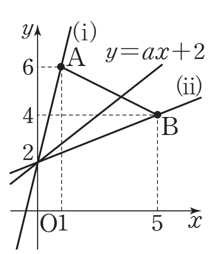
$\therefore a+b=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$

04 답 $\frac{2}{5}\le a\le 4$

1단계 일차방정식 $ax-y+2=0$의 그래프를 그려 a의 값의 범위 이해하기

$ax-y+2=0$에서 $y=ax+2$

$\overline{AB}$와 직선 $y=ax+2$가 만나려면 a의 값은 점 A$(1, 6)$을 지날 때 최대, 점 B$(5, 4)$를 지날 때 최소가 된다.



2단계 최대일 때와 최소일 때의 a의 값 각각 구하기

(i) 직선 $y=ax+2$가 점 A$(1, 6)$을 지날 때

$6=a+2$ $\quad\therefore a=4$

(ii) 직선 $y=ax+2$가 점 B$(5, 4)$를 지날 때

$4=5a+2$, $5a=2$ $\quad\therefore a=\frac{2}{5}$

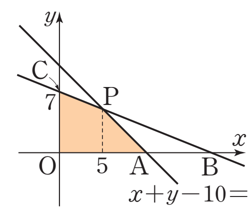
3단계 a의 값의 범위 구하기

(i), (ii)에 의하여 $\frac{2}{5}\le a\le 4$

단계	채점 기준	비율
❶	일차방정식 $ax-y+2=0$의 그래프를 그려 a의 값의 범위를 이해했다.	40 %
❷	최대일 때와 최소일 때의 a의 값을 각각 구했다.	40 %
❸	a의 값의 범위를 구했다.	20 %

05 답 ④

직선 $x+y-10=0$이 x축과 만나는 점을 A, y절편이 7인 직선이 x축과 만나는 점을 B, y축과 만나는 점을 C라고 하자.



$x+y-10=0$에 $x=5$를 대입하면

$5+y-10=0$ $\quad\therefore y=5$

$\therefore$ P$(5, 5)$

$x+y-10=0$에 $y=0$을 대입하면

$x-10=0$, $x=10$ $\quad\therefore$ A$(10, 0)$

두 점 $(5, 5)$, $(0, 7)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{7-5}{0-5}=-\frac{2}{5}$

이므로 이 직선의 방정식은 $y=-\frac{2}{5}x+7$

$y=-\frac{2}{5}x+7$에 $y=0$을 대입하면 $0=-\frac{2}{5}x+7$

$\frac{2}{5}x=7$, $x=\frac{35}{2}$ $\quad\therefore$ B$\left(\frac{35}{2}, 0\right)$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$\triangle$COB$-\triangle$PAB

$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{35}{2}\times 7\right)-\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{35}{2}-10\right)\times 5\right\}$

$=\frac{245}{4}-\frac{75}{4}=\frac{85}{2}$

06 답 6

$ax+3y+b=0$에서 $3y=-ax-b$

$\therefore y=-\frac{a}{3}x-\frac{b}{3}$

직선 l은 두 점 $(-3, 0)$, $(0, 2)$를 지나므로 기울기는

$\frac{2-0}{0-(-3)}=\frac{2}{3}$

이때 $y=-\frac{a}{3}-\frac{b}{3}$와 직선 l이 서로 평행하므로

$-\frac{a}{3}=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore a=-2$

직선 m의 x절편은 4이므로 $y=-\frac{a}{3}x-\frac{b}{3}$, 즉

$y=\frac{2}{3}x-\frac{b}{3}$에 $x=4$, $y=0$을 대입하면 $0=\frac{8}{3}-\frac{b}{3}$

$\frac{b}{3}=\frac{8}{3}$ $\therefore b=8$

따라서 $y=\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}$에서

$3y=2x-8$, $-2x+3y+8=0$

$\therefore a=-2$, $b=8$

$\therefore a+b=-2+8=6$

Level UP

일차함수 $y=ax+b$의 그래프의 기울기 a와 y절편 b는 다음과 같은 조건을 이용하여 구할 수 있다.

① 기울기

- 일차함수 $y=mx+n$의 그래프와 평행하다. ⇨ $a=m$
- 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선과 평행하다.

  ⇨ $a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

② y절편

- 점 $(0, n)$을 지난다. ⇨ $b=n$
- 일차함수 $y=mx+n$의 그래프와 y축에서 만난다. ⇨ $b=n$

07 답 ②

주어진 그래프는 점 $(-4, 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이므로 그래프의 식은

$x=-4$, $x+4=0$ $\therefore -2x-8=0$

이 식이 $ax+by-8=0$과 같으므로

$a=-2$, $b=0$

$5abx-(a+3b)y-2=0$에 $a=-2$, $b=0$을 대입하면

$2y-2=0$, $2y=2$ $\therefore y=1$

따라서 일차방정식 $5abx-(a+3b)y-2=0$, 즉 $y=1$의 그래프는 ②이다.

08 답 -6

두 점 $(2a-1, 3)$, $(b+6, a+4)$를 지나는 직선은 x축에 수직이므로 두 점의 x좌표가 같아야 한다.

즉, $2a-1=b+6$이므로

$2a-b=7$ …… ㉠

두 점 $(-9a, 5-2a)$, $(3, 2b+7)$을 지나는 직선은 y축에 수직이므로 두 점의 y좌표가 같아야 한다.

즉, $5-2a=2b+7$이므로

$2a+2b=-2$ $\therefore a+b=-1$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $3a=6$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면

$2+b=-1$ $\therefore b=-3$

$\therefore ab=2\times(-3)=-6$

참고 x축에 수직인 직선 위의 두 점은 x좌표가 서로 같고, y축에 수직인 직선 위의 두 점은 y좌표가 서로 같다.

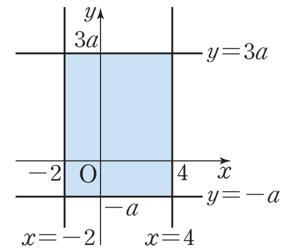
09 답 2

1단계 네 직선으로 둘러싸인 도형 이해하기

$x+2=0$에서 $x=-2$, $x-4=0$에서 $x=4$

$y+a=0$에서 $y=-a$, $y-3a=0$에서 $y=3a$

이때 $a>0$이므로 주어진 네 직선을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같이 직사각형이다.



2단계 넓이를 이용하여 a의 값 구하기

네 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이가 48이므로

$\{4-(-2)\}\times\{3a-(-a)\}=48$

$24a=48$ $\therefore a=2$

참고 a가 양수라는 조건이 주어지지 않으면 a의 값이 음수가 되는 경우도 생각해야 한다.

단계	채점 기준	비율
❶	네 직선으로 둘러싸인 도형을 이해했다.	40 %
❷	a의 값을 구했다.	60 %

10 답 ②

두 일차방정식 $2x-y+a=0$, $2x+y-b=0$의 그래프의 교점의 좌표가 $(1, -3)$이므로

$2x-y+a=0$에 $x=1$, $y=-3$을 대입하면

$2+3+a=0$ $\therefore a=-5$

$2x+y-b=0$에 $x=1$, $y=-3$을 대입하면

$2-3-b=0$ $\therefore b=-1$

따라서 두 일차방정식은 $2x-y-5=0$, $2x+y+1=0$이고

$2x-y-5=0$에 $x=0$을 대입하면

$-y-5=0$ $\therefore y=-5$

$2x+y+1=0$에 $x=0$을 대입하면

$y+1=0$ $\therefore y=-1$

따라서 두 일차방정식 $2x-y-5=0$, $2x+y+1=0$의 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(0, -5)$, $(0, -1)$이므로 두 점 사이의 거리는

$-1-(-5)=4$

11 답 ①

두 직선의 교점을 한 직선이 지나므로 세 직선은 한 점에서 만난다.

두 직선 $x-2y-1=0$, $2x-3y-4=0$의 교점의 좌표는

연립방정식 $\begin{cases} x-2y-1=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-3y-4=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠$\times 2-$㉡을 하면

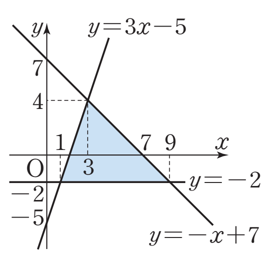
$-y+2=0$ $\therefore y=2$

$y=2$를 ㉠에 대입하면

$x-4-1=0 \qquad \therefore x=5$
따라서 직선 $3x-4y+a=0$이 점 $(5, 2)$를 지나므로
$15-8+a=0 \qquad \therefore a=-7$

12 답 ③

연립방정식 $\begin{cases} y=-x+7 & \cdots\cdots ㉠ \\ y=3x-5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$에서
㉠을 ㉡에 대입하면 $-x+7=3x-5$
$4x=12 \qquad \therefore x=3$
$x=3$을 ㉠에 대입하면
$y=-3+7=4$
따라서 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(3, 4)$이다.
$y=-x+7$에 $y=-2$를 대입하면
$-2=-x+7 \qquad \therefore x=9$
따라서 두 직선 $y=-x+7$, $y=-2$의 교점의 좌표는 $(9, -2)$이다.
$y=3x-5$에 $y=-2$를 대입하면
$-2=3x-5$, $-3x=-3 \qquad \therefore x=1$
따라서 두 직선 $y=3x-5$, $y=-2$의 교점의 좌표는 $(1, -2)$이다.
세 직선 $y=-x+7$, $y=3x-5$, $y=-2$를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
따라서 구하는 넓이는
$\frac{1}{2}\times(9-1)\times\{4-(-2)\}=24$



13 답 ①

두 일차방정식 $x-3y+2=0$, $4x-y-a=0$의 그래프의 교점은 연립방정식
$\begin{cases} x-3y+2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x-y-a=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.
㉠$\times4-$㉡을 하면
$-11y+8+a=0$, $11y=8+a \qquad \therefore y=\frac{a+8}{11}$
$y=\frac{a+8}{11}$을 ㉠에 대입하면
$x-\frac{3a+24}{11}+2=0 \qquad \therefore x=\frac{3a+2}{11}$
점 $\left(\frac{3a+2}{11}, \frac{a+8}{11}\right)$이 제2사분면 위에 있으므로
$\frac{3a+2}{11}<0$, $\frac{a+8}{11}>0$
$\frac{3a+2}{11}<0$에서 $3a+2<0$, $3a<-2$
$\therefore a<-\frac{2}{3}$
$\frac{a+8}{11}>0$에서 $a+8>0 \qquad \therefore a>-8$
$\therefore -8<a<-\frac{2}{3}$

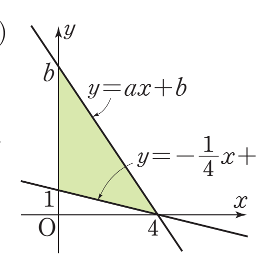
14 답 ③

해결 key Point!
두 점 $(-3, -5)$, $(1, 7)$을 지나는 직선이 다른 두 직선의 교점을 지나면 세 직선이 한 점에서 만난다는 사실을 이용하여 연립방정식을 세워야 한다.

두 점 $(-3, -5)$, $(1, 7)$을 지나는 직선의 기울기는
$\frac{7-(-5)}{1-(-3)}=\frac{12}{4}=3$
이므로 이 직선의 방정식을 $y=3x+b$ (b는 상수)라고 하면
이 직선이 점 $(1, 7)$을 지나므로
$7=3+b \qquad \therefore b=4$
$\therefore y=3x+4$
$y-2x-1=0$에 $y=3x+4$를 대입하면
$3x+4-2x-1=0$, $x+3=0 \qquad \therefore x=-3$
$y=3x+4$에 $x=-3$을 대입하면 $y=-9+4=-5$
따라서 직선 $y=3x+4$와 일차방정식 $y-2x-1=0$의 그래프의 교점의 좌표가 $(-3, -5)$이므로 $2y-kx-5=0$에 $x=-3$, $y=-5$를 대입하면
$-10+3k-5=0$, $3k=15 \qquad \therefore k=5$

15 답 ②

$y=-\frac{1}{4}x+1$에 $y=0$을 대입하면 $0=-\frac{1}{4}x+1$
$\frac{1}{4}x=1 \qquad \therefore x=4$
직선 $y=-\frac{1}{4}x+1$의 x절편은 4이므로 직선 $y=ax+b$의 x절편도 4이다.
직선 $y=ax+b$의 y절편은 b $(b>0)$이므로 두 직선 $y=-\frac{1}{4}x+1$, $y=ax+b$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같다.
이 넓이가 10이므로



$\frac{1}{2}\times(b-1)\times4=10$
$b-1=5 \qquad \therefore b=6$
즉, 직선 $y=ax+b=ax+6$이 점 $(4, 0)$을 지나므로
$0=4a+6$, $4a=-6 \qquad \therefore a=-\frac{3}{2}$
$\therefore ab=-\frac{3}{2}\times6=-9$

16 답 ③

두 직선 $y=-x+5$, $y=x+1$의 교점의 좌표는 연립방정식

$\begin{cases} y=-x+5 & \cdots\cdots ㉠ \\ y=x+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠을 ㉡에 대입하면

$-x+5=x+1$, $-2x=-4$　　$\therefore x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$y=-2+5=3$　　$\therefore$ A$(2, 3)$

$y=-x+5$에 $y=0$을 대입하면

$0=-x+5$, $x=5$　　$\therefore$ B$(5, 0)$

$y=x+1$에 $y=0$을 대입하면

$0=x+1$, $x=-1$　　$\therefore$ C$(-1, 0)$

점 A$(2, 3)$을 지나는 직선이 △ABC의 넓이를 이등분하려면 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점 $\left(\frac{5-1}{2}, 0\right)$, 즉 $(2, 0)$을 지나야 한다.

두 점 $(2, 3)$, $(2, 0)$의 x좌표가 같으므로 두 점을 지나는 직선은 y축과 평행하다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $x=2$이다.

17 답 ③

$(a+3)x-ay=6$에서 $ay=(a+3)x-6$

$\therefore y=\frac{a+3}{a}x-\frac{6}{a}$　　$\cdots\cdots$ ㉠

$-2x+5y=b$에서 $5y=2x+b$

$\therefore y=\frac{2}{5}x+\frac{b}{5}$　　$\cdots\cdots$ ㉡

두 직선 ㉠, ㉡의 교점이 존재하지 않으려면 두 직선은 서로 평행해야 하므로 $\frac{a+3}{a}=\frac{2}{5}$, $-\frac{6}{a}\neq\frac{b}{5}$이어야 한다.

$\frac{a+3}{a}=\frac{2}{5}$에서 $5a+15=2a$

$3a=-15$　　$\therefore a=-5$

$-\frac{6}{a}\neq\frac{b}{5}$에서 $-\frac{6}{-5}\neq\frac{b}{5}$

$\therefore b\neq6$

참고 $(a+3)x-ay=6$에서 $a=0$이면 $3x=6$, 즉 $x=2$이므로 직선 $-2x+5y=b$와의 교점이 존재하게 된다. 따라서 $a\neq0$이므로 $y=\frac{a+3}{a}x-\frac{6}{a}$과 같이 나타낼 수 있다.

18 답 ⑤

$x+2y-6=0$에서 $2y=-x+6$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+3$　　$\cdots\cdots$ ㉠

$ax-6y-b=0$에서 $6y=ax-b$

$\therefore y=\frac{a}{6}x-\frac{b}{6}$　　$\cdots\cdots$ ㉡

두 직선 ㉠, ㉡의 교점이 무수히 많으려면 두 직선은 일치해야 하므로 $-\frac{1}{2}=\frac{a}{6}$, $3=-\frac{b}{6}$이어야 한다.

$-\frac{1}{2}=\frac{a}{6}$에서 $a=-3$

$3=-\frac{b}{6}$에서 $b=-18$

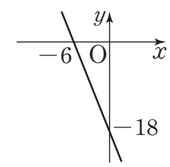
따라서 일차함수 $y=-3x-18$에 대하여

ㄱ. $y=-3x-18$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면 $0\neq-18$
　즉, 원점을 지나지 않는 직선이다.

ㄴ. $y=-3x-18$에 $y=0$을 대입하면 $0=-3x-18$
　$3x=-18$　　$\therefore x=-6$
　즉, x절편은 -6이다.

ㄷ. 기울기는 -3이고 y절편은 -18이므로 기울기가 y절편보다 크다.

ㄹ. 일차함수 $y=-3x-18$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2, 3, 4사분면을 지난다.



따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

113쪽~119쪽

01 ③	02 -14	03 $x>4$	04 ④	05 ④
06 ②	07 ③	08 ⑤	09 5	10 ④
11 -3	12 $\left(\frac{24}{5}, -\frac{42}{5}\right)$		13 ①	14 4
15 ①	16 $-\frac{2}{5}\le m\le\frac{2}{3}$		17 $\frac{8}{3}$	18 55
19 $\frac{4}{5}<a<4$		20 16	21 2	22 ③
23 1	24 ①	25 ⑤	26 3	27 ②
28 $-\frac{5}{6}$	29 $\frac{44}{3}\pi$	30 -12	31 ①	32 ②
33 17	34 $-\frac{1}{2}<a<0$ 또는 $0<a<\frac{2}{3}$			35 ②
36 오전 11시 6분				

01 답 ③

해결 key Point!

일차방정식 $ax+by+c=0$을 정리하여 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$로 변형한 후 그래프의 기울기와 y절편의 값을 비교해야 한다.

$ax+by+12=0$에서 $by=-ax-12$

$\therefore y=-\frac{a}{b}x-\frac{12}{b}$

상현이가 처음에는 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{12}{b}$의 그래프에서 y절편은

제대로 보고 직선 l을 그렸으므로

$-\frac{12}{b}=3 \qquad \therefore b=-4$

상현이가 두 번째에는 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{12}{b}$의 그래프에서 기울기는 제대로 보고 직선 m을 그렸으므로

$-\frac{a}{b}=\frac{0-4}{2-0},\ -\frac{a}{-4}=-2$

$\therefore a=-8$

$\therefore b-a=-4-(-8)=4$

02 답 -14

1단계 점 P의 좌표 구하기

$5x-3y-21=0$에 $y=0$을 대입하면 $5x-21=0$

$5x=21,\ x=\frac{21}{5} \qquad \therefore \mathrm{P}\left(\frac{21}{5},\ 0\right)$

2단계 점 Q의 좌표 구하기

$\overline{\mathrm{PQ}}=9$이므로 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{21}{5}+9,\ 0\right)$ 또는 $\left(\frac{21}{5}-9,\ 0\right)$

즉, $\left(\frac{66}{5},\ 0\right)$ 또는 $\left(-\frac{24}{5},\ 0\right)$

3단계 두 직선의 평행 조건을 이용하여 모든 b의 값의 합 구하기

$5x-3y-21=0$에서 $3y=5x-21$

$\therefore y=\frac{5}{3}x-7$

$y=\frac{5}{3}x-7$의 그래프와 $ax-y+b=0$, 즉 $y=ax+b$의 그래프가 서로 평행하므로

$a=\frac{5}{3}$

(i) $y=\frac{5}{3}x+b$의 그래프가 점 $\left(\frac{66}{5},\ 0\right)$을 지날 때

$0=22+b \qquad \therefore b=-22$

(ii) $y=\frac{5}{3}x+b$의 그래프가 점 $\left(-\frac{24}{5},\ 0\right)$을 지날 때

$0=-8+b \qquad \therefore b=8$

(i), (ii)에 의하여 b의 값의 합은

$-22+8=-14$

단계	채점 기준	비율
❶	점 P의 좌표를 구했다.	30 %
❷	점 Q의 좌표를 구했다.	30 %
❸	두 직선의 평행 조건을 이용하여 모든 b의 값의 합을 구했다.	40 %

03 답 $x>4$

해결 key Point!

두 일차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 식을 각각 구하여 $3f(x)-g(x)>4$에 대입해야 한다.

1단계 일차함수 $f(x)$의 식 구하기

$y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(-2,\ 0)$, $(4,\ 2)$를 지나므로 기울기는

$\frac{2-0}{4-(-2)}=\frac{1}{3}$

이고, 이 그래프의 식을 $y=\frac{1}{3}x+a$ (a는 상수)라고 하면 이 그래프가 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로

$0=-\frac{2}{3}+a \qquad \therefore a=\frac{2}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

2단계 일차함수 $g(x)$의 식 구하기

$y=g(x)$의 그래프는 두 점 $(6,\ 0)$, $(4,\ 2)$를 지나므로 기울기는

$\frac{2-0}{4-6}=-1$

이고, 이 그래프의 식을 $y=-x+b$ (b는 상수)라고 하면 이 그래프가 점 $(6,\ 0)$을 지나므로

$0=-6+b \qquad \therefore b=6$

$\therefore g(x)=-x+6$

3단계 $3f(x)-g(x)>4$의 해 구하기

$3f(x)-g(x)>4$에서

$3\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)-(-x+6)>4$

$2x-4>4,\ 2x>8$

$\therefore x>4$

단계	채점 기준	비율
❶	일차함수 $f(x)$의 식을 구했다.	40 %
❷	일차함수 $g(x)$의 식을 구했다.	40 %
❸	$3f(x)-g(x)>4$의 해를 구했다.	20 %

04 답 ④

두 일차방정식 $ax-by+7=0$, $bx-ay+8=0$의 그래프의 교점의 좌표가 $(-3,\ 2)$이므로 연립방정식

$\begin{cases} ax-by+7=0 \\ bx-ay+8=0 \end{cases}$의 해는 $x=-3$, $y=2$이다.

$\therefore \begin{cases} -3a-2b+7=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ -2a-3b+8=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 2-$㉡$\times 3$을 하면

$5b-10=0,\ 5b=10$

$\therefore b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$-3a-4+7=0,\ -3a=-3$

$\therefore a=1$

따라서 일차방정식 $ax+by=9$, 즉 $x+2y=9$를 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(1,\ 4)$, $(3,\ 3)$, $(5,\ 2)$, $(7,\ 1)$의 4개이다.

05 답 ④

$ax+by+c=0$에서 $by=-ax-c$

$\therefore\ y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

주어진 그래프의 기울기는 양수, y절편은 음수이므로

$-\dfrac{a}{b}>0,\ -\dfrac{c}{b}<0 \qquad \therefore\ \dfrac{a}{b}<0,\ \dfrac{c}{b}>0$

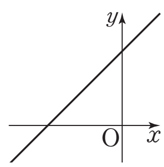
즉, a와 b의 부호는 다르고 b와 c의 부호는 같으므로 a와 c의 부호는 다르다.

$\therefore\ ac<0$

$bx+ay+c=0$에서 $ay=-bx-c$

$\therefore\ y=-\dfrac{b}{a}x-\dfrac{c}{a}$

따라서 $-\dfrac{b}{a}>0,\ -\dfrac{c}{a}>0$이므로 일차방정식 $bx+ay+c=0$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 제1, 2, 3사분면을 지난다.



06 답 ②

해결 key Point!

일차방정식 $ax+by+c=0$을 정리하여 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$로 변형한 후 그래프의 기울기와 y절편의 부호를 조사해야 한다.

$ax+by+c=0$에서 $by=-ax-c$

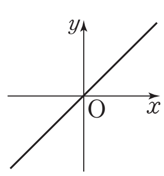
$\therefore\ y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 그래프의 기울기는 $-\dfrac{a}{b}$, y절편은 $-\dfrac{c}{b}$이다.

ㄱ. $ab<0$, $bc=0$이므로 $-\dfrac{a}{b}>0$, $c=0$

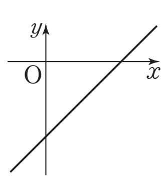
즉, ㉠에서 $y=-\dfrac{a}{b}x$

따라서 그래프는 원점을 지나면서 기울기가 양수인 직선이고 제1, 3사분면을 지난다.



ㄴ. $ab<0$, $bc>0$이므로 $-\dfrac{a}{b}>0$, $-\dfrac{c}{b}<0$

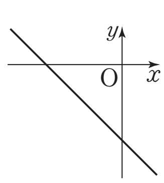
따라서 그래프는 기울기가 양수이고 y절편이 음수인 직선이므로 제1, 3, 4사분면을 지난다.



ㄷ. $ac>0$, $bc>0$이므로 a와 c의 부호가 같고 b와 c의 부호가 같다.

즉, a와 b의 부호가 같으므로 $ab>0$

따라서 $-\dfrac{a}{b}<0$, $-\dfrac{c}{b}<0$이므로 ㉠의 그래프는 기울기가 음수이고 y절편이 음수인 직선이므로 제2, 3, 4사분면을 지난다.



그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

07 답 ③

l: $ax+by+1=0$에서 $by=-ax-1 \qquad \therefore\ y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{1}{b}$

m: $ax-y+b=0$에서 $y=ax+b$

n: $-bx+y-a=0$에서 $y=bx+a$

(i) $a>0$, $b>0$일 때

$-\dfrac{a}{b}<0$이고 $-\dfrac{1}{b}<0$

직선 l의 기울기는 음수, y절편도 음수이므로 세 직선 ㉠, ㉡, ㉢ 중 직선 l이 될 수 있는 직선이 없다.

(ii) $a>0$, $b<0$일 때

$-\dfrac{a}{b}>0$이고 $-\dfrac{1}{b}>0$

직선 l의 기울기는 양수, y절편도 양수이므로 직선 l은 ㉡이다.

직선 m의 기울기는 양수, y절편은 음수이므로 직선 m은 ㉢이다.

직선 n의 기울기는 음수, y절편은 양수이므로 직선 n은 ㉠이다.

(iii) $a<0$, $b>0$일 때

$-\dfrac{a}{b}>0$이고 $-\dfrac{1}{b}<0$

직선 l의 기울기는 양수, y절편은 음수이므로 직선 l은 ㉢이다.

직선 m의 기울기는 음수, y절편은 양수이므로 직선 m은 ㉠이다.

직선 n의 기울기는 양수, y절편은 음수이므로 직선 n은 ㉢이다.

따라서 세 직선 l, m, n 중 직선 ㉡이 될 수 있는 직선이 없다.

(iv) $a<0$, $b<0$일 때

두 직선 m과 n의 기울기는 음수, y절편도 음수이므로 세 직선 ㉠, ㉡, ㉢ 중 두 직선 m, n이 될 수 있는 직선이 없다.

(i)~(iv)에 의하여 $l-$㉡, $m-$㉢, $n-$㉠이다.

08 답 ⑤

주어진 그래프는 x축에 수직이고, y축의 우측에 있으므로 $x=k\ (k>0)$의 꼴이어야 한다.

$bx-ay-c=0$에서 $bx=ay+c$

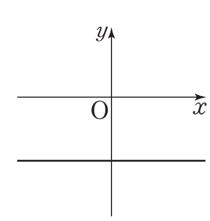
$\therefore\ x=\dfrac{a}{b}y+\dfrac{c}{b}$

$\dfrac{a}{b}=0,\ \dfrac{c}{b}>0$이므로 $a=0$

$ax+by+c=0$에 $a=0$을 대입하면

$by=-c \qquad \therefore\ y=-\dfrac{c}{b}<0$

따라서 $y=-\dfrac{c}{b}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 제3, 4사분면을 지난다.



꿀 한줄평

일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 $a>0$이면 오른쪽 위로, $a<0$이면 오른쪽 아래로 향하는 직선이 그려지게 된다.
그런데 축에 수직인 그래프는 식이 $x=k$ 또는 $y=k$ (k는 상수)의 꼴이므로 각각 y의 계수, x의 계수가 0이다.
주어진 그래프는 x축에 수직이므로 y의 계수가 0임을 이용하고, y축의 우측에 그래프가 있으므로 $x=k$의 꼴에서 k가 양수임을 이용한다.

09 답 5

해결 key Point!

x축에 평행한 (y축에 수직인) 직선의 방정식은 $y=k$ ($k\neq0$)의 꼴이어야 한다.

직선 $(4a-1)x+(2a+1)y-12a=0$은 x축에 평행하므로

$4a-1=0,\ 4a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

즉, 이 직선의 방정식은 $\frac{3}{2}y-3=0$

$\frac{3}{2}y=3 \qquad \therefore y=2$

또, 직선 $(5b+5)x-(7+4b)y+9b=0$은 y축에 수직이므로

$5b+5=0,\ 5b=-5 \qquad \therefore b=-1$

즉, 이 직선의 방정식은 $-3y-9=0$

$3y=-9 \qquad \therefore y=-3$

따라서 두 직선 $y=2$, $y=-3$ 사이의 거리는

$2-(-3)=5$

참고 (1) 직선 $x=p$ ($p\neq0$) ⇨ x축에 수직인 직선
⇨ y축에 평행한 직선
(2) 직선 $y=q$ ($q\neq0$) ⇨ x축에 평행한 직선
⇨ y축에 수직인 직선

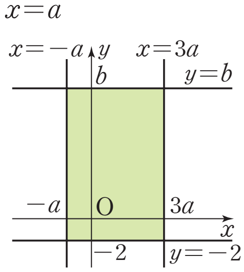
10 답 ④

해결 key Point!

a, b가 양의 정수이므로 구한 a, b의 관계식을 성립하게 하는 정수 (a, b)의 순서쌍을 나열해 본다.

$x-3a=0$에서 $x=3a$, $x+a=0$에서 $x=a$

$a>0$, $b>0$이므로 네 직선 $y=b$, $y=-2$, $x=3a$, $x=-a$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때 색칠한 부분의 넓이는 112이므로



$\{3a-(-a)\}\times\{b-(-2)\}=112$

$4a(b+2)=112$

$\therefore a(b+2)=28 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$28=1\times28=2\times14=4\times7$이고 a, b는 양의 정수이므로 ㉠을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(1, 26)$, $(2, 12)$, $(4, 5)$, $(7, 2)$이다.

또, 직사각형의 둘레의 길이가 44이므로

$2\times[\{3a-(-a)\}+\{b-(-2)\}]=44,\ 4a+b+2=22$

$\therefore 4a+b=20 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

마찬가지로 a, b는 양의 정수이므로 ㉡을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(1, 16)$, $(2, 12)$, $(3, 8)$, $(4, 4)$이다.

따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(2, 12)$이므로

$a=2,\ b=12$

$\therefore a+b=2+12=14$

11 답 -3

$5x-25=0$에서 $5x=25 \qquad \therefore x=5$

$12-2y=0$에서 $-2y=-12 \qquad \therefore y=6$

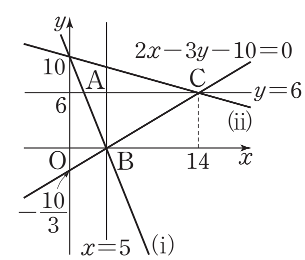
$2x-3y-10=0$에 $x=5$를 대입하면

$10-3y-10=0,\ -3y=0 \qquad \therefore y=0$

$2x-3y-10=0$에 $y=6$을 대입하면

$2x-18-10=0,\ 2x=28 \qquad \therefore x=14$

따라서 직선 $2x-3y-10=0$은 두 직선 $5x-25=0$, $12-2y=0$과 각각 점 $(5, 0)$, 점 $(14, 6)$에서 만나므로 주어진 세 직선으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림의 △ABC와 같다.



일차함수 $y=ax+10$의 그래프의 y절편은 10이므로 그래프는 항상 점 $(0, 10)$을 지난다.

이때 △ABC와 일차함수 $y=ax+10$의 그래프가 만나려면 $a<0$이어야 하고 a의 값은 점 $B(5, 0)$을 지날 때 최소, 점 $C(14, 6)$을 지날 때 최대가 된다.

(i) 직선 $y=ax+10$이 점 $B(5, 0)$을 지날 때

$0=5a+10,\ 5a=-10$

$\therefore a=-2$

(ii) 직선 $y=ax+10$이 점 $C(14, 6)$을 지날 때

$6=14a+10,\ 14a=-4$

$\therefore a=-\frac{2}{7}$

(i), (ii)에 의하여 $-2\leq a\leq-\frac{2}{7}$이므로 이를 만족시키는 정수 a의 값은 -2, -1이고 그 합은

$-2+(-1)=-3$

12 답 $\left(\frac{24}{5}, -\frac{42}{5}\right)$

해결 key Point!

두 직선 l, m이 지나는 두 점을 찾아 l, m의 방정식을 먼저 구해야 한다.

직선 l은 두 점 $(2, 0)$, $(1, 3)$을 지나므로 기울기는

$\frac{3-0}{1-2}=-3$

이고, 직선 l의 방정식을 $y=-3x+b$ (b는 상수)라고 하면 직선 l이 점 $(2, 0)$을 지나므로

$0=-6+b \qquad \therefore b=6$

따라서 직선 l의 방정식은 $y=-3x+6$이다.

직선 m의 y절편은 -2이므로 직선 m의 방정식을 $y=ax-2$ (a는 상수)라고 하면 직선 m이 점 $(-3, 2)$를 지나므로

$2=-3a-2,\ 3a=-4 \qquad \therefore a=-\frac{4}{3}$

따라서 직선 m의 방정식은 $y=-\frac{4}{3}x-2$이다.

이때 두 직선 l, m의 교점의 좌표는 연립방정식

$\begin{cases} y=-3x+6 & \cdots\cdots ㉠ \\ y=-\frac{4}{3}x-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠을 ㉡에 대입하면

$-3x+6=-\frac{4}{3}x-2$

$-\frac{5}{3}x=-8 \qquad \therefore x=\frac{24}{5}$

$x=\frac{24}{5}$를 ㉠에 대입하면

$y=-\frac{72}{5}+6=-\frac{42}{5}$

따라서 두 직선 l, m의 교점의 좌표는 $\left(\frac{24}{5}, -\frac{42}{5}\right)$이다.

13 답 ①

해결 key Point!

삼각형의 두 꼭짓점이 각각 두 직선의 교점이어야 한다. 따라서 주어진 두 점을 각 직선에 대입해 보면서 어떤 직선이 만나는지 확인한다.

점 $(1, 5)$를 $4x+y-18=0$에 대입하면 $4\times1+5-18\neq0$이므로 점 $(1, 5)$는 직선 $4x+y-18=0$ 위에 있지 않다.

즉, 점 $(1, 5)$는 직선 $x+3y+a=0$과 직선 $bx+cy+9=0$의 교점이다.

점 $(1, 5)$를 $x+3y+a=0$에 대입하면

$1+15+a=0 \qquad \therefore a=-16$

점 $(1, 5)$를 $bx+cy+9=0$에 대입하면

$b+5c+9=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

점 $(3, 6)$을 $4x+y-18=0$에 대입하면 $12+6-18=0$이므로 점 $(3, 6)$은 직선 $4x+y-18=0$ 위에 있다.

또, 점 $(3, 6)$을 $x+3y-16=0$에 대입하면 $3+18-16\neq0$이므로 점 $(3, 6)$은 직선 $x+3y-16=0$ 위에 있지 않다.

즉, 점 $(3, 6)$은 직선 $4x+y-18=0$과 직선 $bx+cy+9=0$의 교점이다.

점 $(3, 6)$을 직선 $bx+cy+9=0$에 대입하면

$3b+6c+9=0 \qquad \therefore b+2c+3=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠$-$㉡을 하면

$3c+6=0,\ 3c=-6 \qquad \therefore c=-2$

$c=-2$를 ㉠에 대입하면

$b-10+9=0 \qquad \therefore b=1$

$\therefore a+b+c=-16+1+(-2)=-17$

14 답 4

해결 key Point!

계수가 미지수가 아닌 두 일차방정식을 연립하여 교점의 좌표를 구한 뒤 나머지 연립방정식에 대입하여 a, b에 대한 새로운 연립방정식을 세워야 한다.

주어진 네 직선이 만나는 한 점의 좌표는 연립방정식

$\begin{cases} 3x+2y-7=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-5y+9=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠$-$㉡$\times3$을 하면

$17y-34=0,\ 17y=34 \qquad \therefore y=2$

$y=2$를 ㉠에 대입하면

$3x+4-7=0,\ 3x=3 \qquad \therefore x=1$

즉, 네 직선의 교점의 좌표는 $(1, 2)$이다.

따라서 점 $(1, 2)$는 두 일차방정식 $5x-ay+b-4=0$, $ax-4y+b-6=0$의 그래프 위의 점이므로 각각 대입하면

$5-2a+b-4=0,\ a-8+b-6=0$

$\therefore \begin{cases} 2a-b=1 & \cdots\cdots ㉢ \\ a+b=14 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢$+$㉣을 하면

$3a=15 \qquad \therefore a=5$

$a=5$를 ㉣에 대입하면

$5+b=14 \qquad \therefore b=9$

$\therefore b-a=9-5=4$

15 답 ①

두 일차방정식 $2x-y+3=0$, $x+2y-2=0$의 그래프의 교점의 좌표는 연립방정식

$\begin{cases} 2x-y+3=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2y-2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉡$\times2-$㉠을 하면

$5y-7=0,\ 5y=7 \qquad \therefore y=\frac{7}{5}$

$\therefore p=\frac{7}{5}$

$2x-y+3=0$에 $x=0$을 대입하면

$-y+3=0 \qquad \therefore y=3$

즉, 그래프의 y절편이 3이므로 직선 l의 방정식은 $y=3$이다.

$x+2y-2=0$에 $y=3$을 대입하면

$x+6-2=0 \qquad \therefore x=-4$

따라서 직선 l과 $x+2y-2=0$의 그래프의 교점의 좌표는 $(-4,\ 3)$이므로 직선 m의 방정식은 $x=-4$이다.

$2x-y+3=0$에 $x=-4$를 대입하면

$-8-y+3=0 \qquad \therefore y=-5$

따라서 직선 m과 $2x-y+3=0$의 그래프의 교점의 좌표는 $(-4,\ -5)$이므로 직선 n의 방정식은 $y=-5$이다.

$\therefore q=-5$

$\therefore pq=\frac{7}{5}\times(-5)=-7$

16 답 $-\frac{2}{5}\le m\le\frac{2}{3}$

1단계 직선 $y=mx+m+3$이 m의 값에 관계없이 지나는 점 구하기

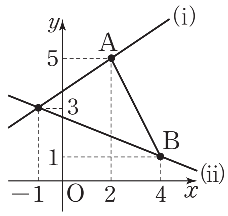
$y=mx+m+3$을 m에 대하여 정리하면

$mx+m+3-y=0$에서 $(x+1)m+(3-y)=0$

즉, 직선 $y=mx+m+3$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 3)$을 지난다.

2단계 가장 클 때와 가장 작을 때의 m의 값 각각 구하기

오른쪽 그림에서



(i) 직선 $y=mx+m+3$이 점 A$(2,\ 5)$를 지날 때

$m=\frac{5-3}{2-(-1)}=\frac{2}{3}$

(ii) 직선 $y=mx+m+3$이 점 B$(4,\ 1)$을 지날 때

$m=\frac{1-3}{4-(-1)}=-\frac{2}{5}$

3단계 m의 값의 범위 구하기

(i), (ii)에 의하여 직선 $y=mx+m+3$이 선분 AB와 만나도록 하는 m의 값의 범위는

$-\frac{2}{5}\le m\le\frac{2}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	직선 $y=mx+m+3$이 m의 값에 관계없이 지나는 점을 구했다.	30 %
❷	가장 클 때와 가장 작을 때의 m의 값을 각각 구했다.	50 %
❸	m의 값의 범위를 구했다.	20 %

17 답 $\frac{8}{3}$

$y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표가 1이므로

$f(1)=g(1)$에서

$-2+m=-m+n \qquad \therefore n=2m-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(-2)=g(3)$에서

$4+m=-3m+n \qquad \therefore n=4m+4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2m-2=4m+4,\ -2m=6 \qquad \therefore m=-3$

$m=-3$을 ㉡에 대입하면

$n=-12+4=-8$

즉, $g(x)=3x-8$이므로 이 식에 $y=0$을 대입하면

$0=3x-8,\ 3x=8 \qquad \therefore x=\frac{8}{3}$

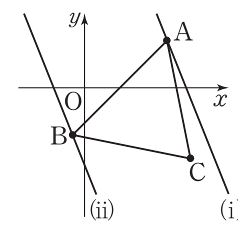
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 x절편은 $\frac{8}{3}$이다.

18 답 55

$5x+2y-n=0$에서 $2y=-5x+n$

$\therefore y=-\frac{5}{2}x+\frac{n}{2} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 ㉠의 그래프의 y절편이 $\frac{n}{2}$이므로 n은 ㉠의 그래프의 y절편이 가장 클 때 최대, 가장 작을 때 최소가 된다.



(i) ㉠의 그래프가 점 A$(7,\ 3)$을 지날 때

$3=-\frac{35}{2}+\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}=\frac{41}{2}$

$\therefore n=41$

(ii) ㉠의 그래프가 점 B$(-1,\ -4)$를 지날 때

$-4=\frac{5}{2}+\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}=-\frac{13}{2} \qquad \therefore n=-13$

(i), (ii)에 의하여 $-13\le n\le 41$이므로 정수 n은 -13, -12, -11, $\dots$, 41의 55개이다.

참고 두 점 A$(7,\ 3)$, C$(9,\ -6)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{-6-3}{9-7}=-\frac{9}{2}<-\frac{5}{2}$이므로 $y=-\frac{5}{2}x+\frac{n}{2}$의 그래프의 기울기보다 작다.

따라서 $y=-\frac{5}{2}x+\frac{n}{2}$의 그래프가 점 C를 지날 때보다 점 A를 지날 때의 n의 값이 더 크다.

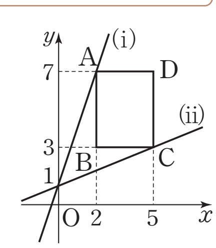
19 답 $\frac{4}{5}<a<4$

해결 key Point!

직선이 반드시 지나는 점을 찾아야 한다.

$-ax+y+1=0$에서 $y=ax-1$이고 직선 $y=ax-1$은 항상 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

이때 일차방정식 $-ax+y+1=0$의 그래프가 사각형 ABCD와 두 점에서 만나려면 직선 $y=ax-1$이 점 A를 지날 때보다 기울기가 작고, 점 C를 지날 때 보다 기울기가 커야 한다.



(i) 직선 $y=ax-1$이 점 A$(2,\ 7)$을 지날 때

$7=2a-1,\ 2a=8$

$\therefore a=4$

(ⅱ) 직선 $y=ax-1$이 점 C$(5, 3)$을 지날 때

$3=5a-1$, $5a=4$

$\therefore a=\frac{4}{5}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 상수 a의 값의 범위는

$\frac{4}{5}<a<4$

20 답 16

$12x+ay-12=0$에서 $ay=-12x+12$

$\therefore y=-\frac{12}{a}x+\frac{12}{a}$

$3x+2y+b=0$에서 $2y=-3x-b$

$\therefore y=-\frac{3}{2}x-\frac{b}{2}$

이때 두 직선이 서로 일치하므로 $-\frac{12}{a}=-\frac{3}{2}$, $\frac{12}{a}=-\frac{b}{2}$ 이어야 한다.

$-\frac{12}{a}=-\frac{3}{2}$에서 $a=8$

$\frac{12}{a}=-\frac{b}{2}$, 즉 $\frac{12}{8}=-\frac{b}{2}$에서 $b=-3$

따라서 연립방정식 $\begin{cases} 8x-y+2=0 \\ kx-2y+18=0 \end{cases}$의 해가 존재하지 않으므로 두 직선이 서로 평행해야 한다.

$8x-y+2=0$에서 $y=8x+2$

$kx-2y+18=0$에서 $2y=kx+18$

$\therefore y=\frac{k}{2}x+9$

즉, $8=\frac{k}{2}$이므로 $k=16$

21 답 2

해결 key Point!

서로 다른 세 직선이 삼각형을 만들지 않으려면 두 개 또는 세 개의 직선이 서로 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

1단계 두 직선이 서로 평행할 때, a의 값 구하기

(ⅰ) 두 직선이 서로 평행할 때

$2x+3y-6=0$에서 $3y=-2x+6$

$\therefore y=-\frac{2}{3}x+2$ …… ㉠

$ax+y-1=0$에서 $y=-ax+1$ …… ㉡

$x+ay-3=0$에서 $ay=-x+3$

$\therefore y=-\frac{1}{a}x+\frac{3}{a}$ …… ㉢

ⓐ 두 직선 ㉠, ㉡이 서로 평행할 때

$-\frac{2}{3}=-a$이므로 $a=\frac{2}{3}$

ⓑ 두 직선 ㉠, ㉢이 서로 평행할 때

$-\frac{2}{3}=-\frac{1}{a}$이므로 $a=\frac{3}{2}$

그런데 $a=\frac{3}{2}$이면 직선 ㉢은 $y=-\frac{2}{3}x+2$가 되므로 직선 ㉠과 일치한다. 즉, 조건을 만족시키지 않는다.

ⓒ 두 직선 ㉡, ㉢이 서로 평행할 때

$-a=-\frac{1}{a}$이므로 $a^2=1$

이때 $a>0$이므로 $a=1$

따라서 두 직선이 서로 평행할 때의 상수 a의 값은

$a=\frac{2}{3}$ 또는 $a=1$

2단계 세 직선이 모두 평행할 때 찾기

(ⅱ) 세 직선이 모두 평행할 때

두 직선 ㉠, ㉢의 기울기가 같으면 두 직선이 서로 일치하게 되므로 세 직선이 모두 평행할 수는 없다.

3단계 세 직선이 한 점에서 만날 때, a의 값 구하기

(ⅲ) 세 직선이 한 점에서 만날 때

세 직선의 교점은 직선의 방정식 중 두 개를 연립한 연립방정식의 해가 나머지 직선의 방정식의 해가 되면 된다.

㉠을 ㉢에 대입하면

$-\frac{2}{3}x+2=-\frac{1}{a}x+\frac{3}{a}$

이때 $a>0$이므로 양변에 $3a$를 곱하면

$-2ax+6a=-3x+9$, $(3-2a)x=3(3-2a)$

이때 $a=\frac{3}{2}$이면 두 직선 ㉠, ㉢이 서로 일치하게 되므로

$a\neq\frac{3}{2}$이어야 한다.

즉, $x=3$이고, 이를 ㉠에 대입하면 $y=-2+2=0$

따라서 두 직선 $2x+3y-6=0$, $x+ay-3=0$의 교점의 좌표는 $(3, 0)$이다.

$(3, 0)$을 ㉡에 대입하면

$0=-3a+1$, $3a=1$

$\therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 세 직선이 한 점에서 만날 때의 상수 a의 값은

$a=\frac{1}{3}$

4단계 모든 상수 a의 값의 합 구하기

(ⅰ)～(ⅲ)에 의하여 모든 상수 a의 값의 합은

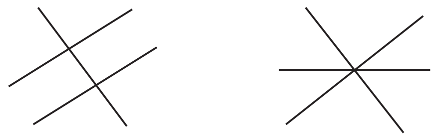
$\frac{2}{3}+1+\frac{1}{3}=2$

단계	채점 기준	비율
❶	두 직선이 서로 평행할 때의 a의 값을 구했다.	40 %
❷	세 직선이 모두 평행할 수 없음을 설명했다.	20 %
❸	세 직선이 한 점에서 만날 때의 a의 값을 구했다.	30 %
❹	모든 상수 a의 값의 합을 구했다.	10 %

22 답 ③

해결 key Point!

세 직선이 좌표평면을 6개의 부분으로 나누는 경우는 다음 그림과 같이 2가지 경우가 있다.



세 직선 $x+2y=5$, $2x-3y=4$, $ax+y=0$이 좌표평면을 6개의 부분으로 나누는 경우는 두 직선이 서로 평행할 때 또는 세 직선이 한 점에서 만날 때이다.

(i) 두 직선 $x+2y=5$, $ax+y=0$이 서로 평행할 때

$x+2y=5$에서 $2y=-x+5$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

$ax+y=0$에서 $y=-ax$

두 직선이 서로 평행하려면 $-\frac{1}{2}=-a$이므로

$a=\frac{1}{2}$

(ii) 두 직선 $2x-3y=4$, $ax+y=0$이 서로 평행할 때

$2x-3y=4$에서 $3y=2x-4$ $\quad\therefore y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$

두 직선이 서로 평행하려면 $\frac{2}{3}=-a$이므로

$a=-\frac{2}{3}$

(iii) 직선 $ax+y=0$이 두 직선 $x+2y=5$, $2x-3y=4$의 교점을 지날 때

$$\begin{cases} x+2y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-3y=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠×2−㉡을 하면

$7y=6 \quad\therefore y=\frac{6}{7}$

$y=\frac{6}{7}$을 ㉠에 대입하면

$x+\frac{12}{7}=5 \quad\therefore x=\frac{23}{7}$

따라서 두 직선 $x+2y=5$, $2x-3y=4$의 교점의 좌표는

$\left(\frac{23}{7}, \frac{6}{7}\right)$이다.

$\left(\frac{23}{7}, \frac{6}{7}\right)$을 $ax+y=0$에 대입하면

$\frac{23}{7}a+\frac{6}{7}=0$, $\frac{23}{7}a=-\frac{6}{7}$

$\therefore a=-\frac{6}{23}$

(i)~(iii)에 의하여 모든 상수 a의 값의 곱은

$\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{6}{23}\right)=\frac{2}{23}$

따라서 $p=2$, $q=23$이므로 $p+q=2+23=25$

23 답 1

해결 key Point!

세 직선과 x축으로 둘러싸인 도형은 사다리꼴이 되므로 사다리꼴의 넓이 공식을 이용하여 식을 세운다.

$ax+3y-12=0$에 $x=1$을 대입하면

$a+3y-12=0$, $3y=-a+12$

$\therefore y=\frac{-a+12}{3}$

따라서 두 직선 $ax+3y-12=0$, $x=1$의 교점의 좌표는

$\left(1, \frac{-a+12}{3}\right)$

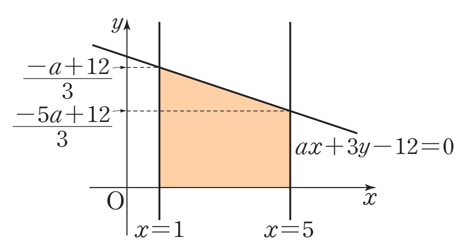
$ax+3y-12=0$에 $x=5$를 대입하면

$5a+3y-12=0$, $3y=-5a+12$

$\therefore y=\frac{-5a+12}{3}$

따라서 두 직선 $ax+3y-12=0$, $x=5$의 교점의 좌표는

$\left(5, \frac{-5a+12}{3}\right)$이므로 세 직선을 나타내면 다음과 같다.



이때 세 직선 $ax+3y-12=0$, $x=1$, $x=5$와 x축으로 둘러싸인 부분은 사다리꼴이고, 그 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{-a+12}{3}+\frac{-5a+12}{3}\right)\times(5-1)=12$

$2\times\frac{-6a+24}{3}=12$, $-4a+16=12$

$-a+4=3 \quad\therefore a=1$

참고 세 직선 $ax+3y-12=0$, $x=1$, $x=5$와 x축으로 이루어진 도형의 넓이가 16이고, 직선 $ax+3y-12=0$은 a의 값에 관계없이 점 $(0, 4)$를 지나므로 구하는 도형의 넓이가 10이 되려면 직선 $ax+3y-12=0$의 기울기가 음수이어야 한다.

24 답 ①

$y=\frac{1}{2}x+1$에 $y=0$을 대입하면 $0=\frac{1}{2}x+1$

$\frac{1}{2}x=-1$, $x=-2 \quad\therefore$ C $(-2, 0)$

두 점 A$(4, 8)$, B$(12, 0)$을 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는

$\frac{0-8}{12-4}=-1$

이므로 일차함수의 식을 $y=-x+b$ (b는 상수)라고 하면 이 직선이 점 A$(4, 8)$을 지나므로

$8=-4+b \qquad \therefore b=12$

따라서 두 점 A, B를 지나는 일차함수의 그래프의 식은

$y=-x+12$

$y=\frac{1}{2}x+1$의 그래프와 $y=-x+12$의 그래프의 교점은 연립방정식

$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ y=-x+12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{2}x+1=-x+12, \ \frac{3}{2}x=11$

$\therefore x=\frac{22}{3}$

$x=\frac{22}{3}$를 ㉠에 대입하면

$y=\frac{11}{3}+1=\frac{14}{3}$

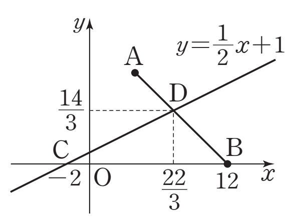
$\therefore \mathrm{D}\left(\frac{22}{3}, \frac{14}{3}\right)$

따라서 삼각형 CBD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{12-(-2)\}\times\frac{14}{3}=\frac{98}{3}$

이므로 $m=3, n=98$

$\therefore m+n=3+98=101$



25 답 ⑤

$3x-4y+4=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$x+3y-3=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$

$4x-y-12=0 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉠$-$㉡$\times3$을 하면

$-13y+13=0, \ 13y=13 \qquad \therefore y=1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면

$x+3-3=0 \qquad \therefore x=0$

따라서 두 직선 $3x-4y+4=0$, $x+3y-3=0$의 교점의 좌표는 $(0, 1)$이다.

㉠$-$㉢$\times4$를 하면

$-13x+52=0, \ 13x=52 \qquad \therefore x=4$

$x=4$를 ㉢에 대입하면

$16-y-12=0 \qquad \therefore y=4$

따라서 두 직선 $3x-4y+4=0$, $4x-y-12=0$의 교점의 좌표는 $(4, 4)$이다.

㉡$\times4-$㉢을 하면

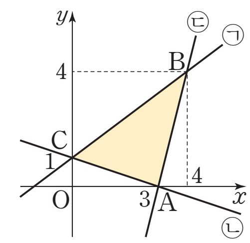
$13y=0 \qquad \therefore y=0$

$y=0$을 ㉢에 대입하면

$4x-12=0, \ 4x=12 \qquad \therefore x=3$

따라서 두 직선 $x+3y-3=0$, $4x-y-12=0$의 교점의 좌표는 $(3, 0)$이다.

세 점을 각각 A(3, 0), B(4, 4), C(0, 1)이라 하고 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



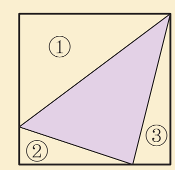
따라서 삼각형 ABC의 넓이는 한 변의 길이가 4인 정사각형에서 나머지 3개의 삼각형의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$(4\times4)-\left\{\frac{1}{2}\times4\times(4-1)\right\}-\left(\frac{1}{2}\times3\times1\right)$
$-\left\{\frac{1}{2}\times(4-3)\times4\right\}$

$=16-6-\frac{3}{2}-2=\frac{13}{2}$

꿀 한줄평

오른쪽 그림에서 색칠한 삼각형의 넓이는 삼각형에 외접하는 사각형의 면적에서 구하는 삼각형이 아닌 사각형의 내부에 있는 삼각형 ①, ②, ③의 넓이를 모두 빼면 된다.



26 답 3

해결 key Point!

사다리꼴의 넓이 공식을 이용하여 $\overline{\mathrm{CD}}$의 길이와 직선이 지나는 두 점 A, D의 좌표를 각각 구한다.

사다리꼴 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(1+\overline{\mathrm{CD}})\times\{4-(-2)\}=21$에서

$3(1+\overline{\mathrm{CD}})=21, \ 1+\overline{\mathrm{CD}}=7 \qquad \therefore \overline{\mathrm{CD}}=6$

점 B의 좌표가 $(-2, -3)$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=1$이므로 점 A의 좌표는 $(-2, -2)$

점 C의 좌표가 $(4, -3)$이고 $\overline{\mathrm{CD}}=6$이므로 점 D의 좌표는 $(4, 3)$

두 점 A, D가 직선 $ax-6y+b=0$ 위의 점이므로 두 점의 좌표를 $ax-6y+b=0$에 각각 대입하면

$\begin{cases} -2a+12+b=0 \\ 4a-18+b=0 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} 2a-b=12 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4a+b=18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$+$㉡을 하면

$6a=30 \qquad \therefore a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면

$10-b=12 \qquad \therefore b=-2$

$\therefore a+b=5+(-2)=3$

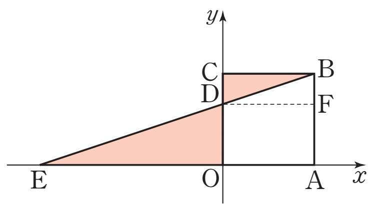
27 답 ②

해결 key Point!

점 D를 지나면서 x축에 평행한 직선을 긋고 $\overline{\mathrm{AB}}$와 만나는 점을 F라고 하면 $\triangle\mathrm{DBC}=\triangle\mathrm{BDF}$이므로

$\triangle\mathrm{DEO}=$(직사각형 OAFD의 넓이)임을 이용한다.

다음 그림과 같이 점 D를 지나면서 x축에 평행한 직선을 긋고, $\overline{AB}$와 만나는 점을 F라고 하자.



$\triangle BCD+\triangle EOD=$(사다리꼴 OABD의 넓이)에서

$\triangle BCD=\triangle BDF$이므로

$\triangle EOD=$(직사각형 OAFD의 넓이)이다.

정사각형 OABC의 한 변의 길이를 a라고 하면 $B(a,\ a)$

$\frac{1}{2}\times\overline{EO}\times\overline{OD}=\overline{OA}\times\overline{OD}$에서

$\overline{EO}=2\overline{OA}=2a \qquad \therefore E(-2a,\ 0)$

따라서 두 점 $B(a,\ a)$, $E(-2a,\ 0)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{0-a}{-2a-a}=\frac{1}{3}$

이므로 $m=3,\ n=1$

$\therefore m+n=3+1=4$

28 답 $-\frac{5}{6}$

1단계 삼각형 OAB의 넓이 구하기

$y=-\frac{3}{2}x+6$에 $y=0$을 대입하면 $0=-\frac{3}{2}x+6$

$\frac{3}{2}x=6,\ x=4 \qquad \therefore A(4,\ 0)$

$y=-\frac{3}{2}x+6$에 $x=0$을 대입하면 $y=6$

$\therefore B(0,\ 6)$

$\therefore \triangle OAB=\frac{1}{2}\times4\times6=12$

2단계 점 D의 x좌표 구하기

삼각형 BCD의 넓이를 S_1, 사각형 COAD의 넓이를 S_2라고 하면 $S_1 : S_2=1 : 3$이므로 $S_2=3S_1$

$S_1+S_2=4S_1=12$이므로 $S_1=3$

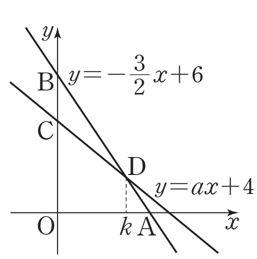
$y=ax+4$에 $x=0$을 대입하면 $y=4$

$\therefore C(0,\ 4)$

점 D의 x좌표를 k라고 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times(6-4)\times k=3$

$\therefore k=3$



3단계 a의 값 구하기

점 D는 직선 $y=-\frac{3}{2}x+6$ 위의 점이므로 $x=3$을 대입하면

$y=-\frac{3}{2}\times3+6=\frac{3}{2} \qquad \therefore D\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$

따라서 점 $D\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$은 직선 $y=ax+4$ 위의 점이므로

$\frac{3}{2}=3a+4,\ 3a=-\frac{5}{2} \qquad \therefore a=-\frac{5}{6}$

단계	채점 기준	비율
❶	삼각형 OAB의 넓이를 구했다.	30 %
❷	점 D의 x좌표를 구했다.	40 %
❸	a의 값을 구했다.	30 %

29 답 $\frac{44}{3}\pi$

해결 key Point!

두 일차방정식의 그래프와 y축으로 둘러싸인 도형인 삼각형을 y축을 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 입체도형은 원뿔 두 개를 붙여 놓은 도형이 되므로 다음의 원뿔의 부피 공식을 이용해야 한다.

⇨ (원뿔의 부피)$=\frac{1}{3}\times\pi\times$(밑면의 반지름의 길이)$^2\times$(높이)

1단계 두 그래프의 교점의 좌표를 이용하여 a, b의 값 구하기

$5x+ay=2$에 $x=2,\ y=4$를 대입하면

$10+4a=2,\ 4a=-8 \qquad \therefore a=-2$

$3x-by=10$에 $x=2,\ y=4$를 대입하면

$6-4b=10,\ 4b=-4 \qquad \therefore b=-1$

2단계 두 그래프의 y절편 구하기

직선 $5x+ay=2$, 즉 $5x-2y=2$에 $x=0$을 대입하면

$-2y=2 \qquad \therefore y=-1$

즉, 직선 $5x-2y=2$의 y절편은 -1이다.

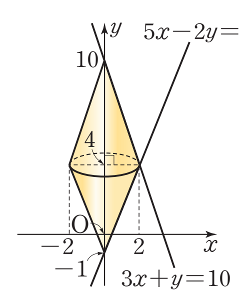
또, 직선 $3x-by=10$, 즉 $3x+y=10$에 $x=0$을 대입하면

$y=10$

즉, 직선 $3x+y=10$의 y절편은 10이다.

3단계 입체도형의 부피 구하기

따라서 두 일차방정식의 그래프와 y축으로 둘러싸인 도형은 삼각형이고, 이를 y축을 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 입체도형은 오른쪽 그림과 같이 두 개의 원뿔을 붙여 놓은 도형이 된다.



따라서 구하는 부피는

$\left\{\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times(10-4)\right\}+\left[\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times\{4-(-1)\}\right]$

$=8\pi+\frac{20}{3}\pi$

$=\frac{44}{3}\pi$

단계	채점 기준	비율
❶	교점의 좌표를 이용하여 a, b의 값을 구했다.	30 %
❷	두 그래프의 y절편을 구했다.	30 %
❸	입체도형의 부피를 구했다.	40 %

30 답 -12

해결 key Point!

등변사다리꼴 OABC의 넓이를 직선 $y=mx+n$이 이등분하려면 이 직선이 선분 OC와 만나야 한다는 사실을 이용해야 한다.

사다리꼴 OABC의 넓이는

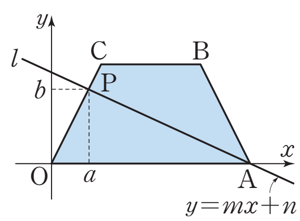
$\frac{1}{2}\times\{(12-0)+(9-3)\}\times6=54$

$\triangle$OAC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times12\times6=36$

이때 사다리꼴 OABC의 넓이가 54, $\triangle$OAC의 넓이가 36이므로 직선 $y=mx+n$은 선분 OC와 만나야 한다.

직선 $y=mx+n$이 선분 OC와 만나는 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라고 하면 $\triangle$OAP의 넓이는 사다리꼴 OABC의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로



$\frac{1}{2}\times12\times b=\frac{1}{2}\times54,\ 6b=27$

$\therefore\ b=\frac{9}{2}$

또, 직선 OC의 방정식은 $y=2x$이고 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 이 직선 위의 점이므로 $b=2a$에서

$\frac{9}{2}=2a \qquad \therefore\ a=\frac{9}{4}$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(\frac{9}{4},\ \frac{9}{2}\right)$

두 점 $\mathrm{P}\left(\frac{9}{4},\ \frac{9}{2}\right)$, $\mathrm{A}(12,\ 0)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{0-\frac{9}{2}}{12-\frac{9}{4}}=\frac{-\frac{9}{2}}{\frac{39}{4}}=-\frac{6}{13}$$

$\therefore\ m=-\frac{6}{13}$

따라서 일차함수 $y=-\frac{6}{13}x+n$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(12,\ 0)$을 지나므로

$0=-\frac{72}{13}+n \qquad \therefore\ n=\frac{72}{13}$

$$\therefore\ \frac{n}{m}=\frac{\frac{72}{13}}{-\frac{6}{13}}=-12$$

31 답 ①

정사각형의 넓이를 이등분하려면 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

정사각형의 두 대각선의 교점은 대각선의 중점이므로 교점의 좌표는

$\left(\frac{2+6}{2},\ \frac{0+4}{2}\right)$, 즉 $(4,\ 2)$

$mx+y-ma+b=0$을 m에 대하여 정리하면

$(x-a)m+(y+b)=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

즉, ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(a,\ -b)$를 지난다.

따라서 ㉠이 정사각형의 넓이를 이등분하려면 m의 값에 관계없이 정사각형의 중심을 지나야 하므로

$a=4,\ -b=2 \qquad \therefore\ b=-2$

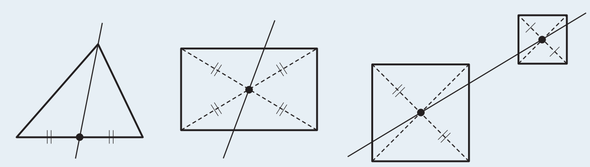
$\therefore\ ab=4\times(-2)=-8$

Level UP

(1) 삼각형에서 한 꼭짓점을 지나면서 그 넓이를 이등분하는 직선은 대변의 중점을 지난다.

(2) 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 두 대각선의 교점을 지난다.

(3) 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 각 직사각형의 두 대각선의 교점을 모두 지난다.



32 답 ②

해결 key Point!

직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 항상 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

직사각형의 두 대각선의 교점은 대각선의 중점이므로 교점의 좌표는

$\left(\frac{3+7}{2},\ \frac{0+8}{2}\right)$, 즉 $(5,\ 4)$

직사각형 EFGH 넓이를 이등분하려면 두 대각선의 교점을 지나야 한다. 이때 두 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{-8+(-2)}{2},\ \frac{-2+0}{2}\right)$, 즉 $(-5,\ -1)$

따라서 직사각형 ABCD와 직사각형 EFGH의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 점 $(5,\ 4)$와 점 $(-5,\ -1)$을 모두 지나야 한다.

두 점 $(5,\ 4)$, $(-5,\ -1)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-1-4}{-5-5}=\frac{1}{2}$

이므로 이 직선의 방정식을 $y=\frac{1}{2}x+c$ (c는 상수)라고 하면 이 직선이 점 $(5,\ 4)$를 지나므로

$4=\frac{5}{2}+c \qquad \therefore\ c=\frac{3}{2}$

따라서 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$, 즉 $x-2y+3=0$이므로

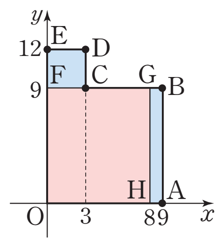
$a=1,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=1+(-2)=-1$

33 답 17

해결 key Point!

사각형 CDEF의 넓이와 같으면서 $\overline{AB}$를 한 변으로 하는 직사각형을 찾는다.



오른쪽 그림과 같이 직선 BC와 y축과의 교점을 F라고 하면 사각형 CDEF는 한 변의 길이가 3인 정사각형이므로 넓이는 $3^2=9$이다.

이때 $\overline{BA}=9$이므로 사각형 ABGH의 넓이가 9가 되도록 선분 BC 위의 점 G와 점 G에서 x축에 내린 수선의 발 H를 잡으면 $\overline{GB}=1$이어야 한다. 즉, 점 G의 좌표는 $(8,\ 9)$이다.

따라서 사각형 CDEF와 사각형 ABGH의 넓이가 같으므로 도형 OABCDE의 넓이를 이등분하는 직선 $y=\dfrac{q}{p}x$는 사각형 OHGF의 넓이를 이등분하면 된다.

이때 직사각형 OHGF의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은 원점과 점 G$(8,\ 9)$를 지나므로 $y=\dfrac{9}{8}x$이다.

따라서 $p=8,\ q=9$이므로

$p+q=8+9=17$

34 답 $-\dfrac{1}{2}<a<0$ 또는 $0<a<\dfrac{2}{3}$

해결 key Point!

삼각형을 지나는 직선을 그어 보며 그은 직선에 의하여 나누어진 2개의 도형의 모양을 조사한다.

$2x+y-7=0$ …… ㉠

$3x-y-8=0$ …… ㉡

$x-2y-6=0$ …… ㉢

㉠+㉡을 하면

$5x-15=0,\ 5x=15\qquad\therefore\ x=3$

$x=3$을 ㉠에 대입하면

$6+y-7=0\qquad\therefore\ y=1$

따라서 두 직선 $2x+y-7=0,\ 3x-y-8=0$의 교점의 좌표는 $(3,\ 1)$이다.

㉠×2+㉢을 하면

$5x-20=0,\ 5x=20\qquad\therefore\ x=4$

$x=4$를 ㉠에 대입하면

$8+y-7=0\qquad\therefore\ y=-1$

따라서 두 직선 $2x+y-7=0,\ x-2y-6=0$의 교점의 좌표는 $(4,\ -1)$이다.

㉡×2−㉢을 하면

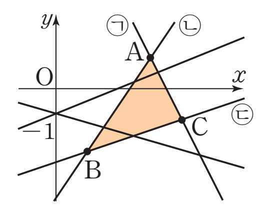
$5x-10=0,\ 5x=10\qquad\therefore\ x=2$

$x=2$를 ㉡에 대입하면

$6-y-8=0\qquad\therefore\ y=-2$

따라서 두 직선 $3x-y-8=0,\ x-2y-6=0$의 교점의 좌표는 $(2,\ -2)$이다.

한편, $y=ax-1$의 그래프는 기울기가 a이고 y절편이 -1이므로 점 $(0,\ -1)$을 지난다.



따라서 A$(3,\ 1)$, B$(2,\ -2)$, C$(4,\ -1)$이라고 할 때, $y=ax-1$의 그래프가 삼각형 ABC를 삼각형과 사각형으로 나누는 경우는 삼각형의 세 점을 지나지 않는 경우이다.

(ⅰ) $y=ax-1$의 그래프가 점 A$(3,\ 1)$을 지날 때

$1=3a-1,\ 3a=2\qquad\therefore\ a=\dfrac{2}{3}$

(ⅱ) $y=ax-1$의 그래프가 점 B$(2,\ -2)$를 지날 때

$-2=2a-1,\ 2a=-1\qquad\therefore\ a=-\dfrac{1}{2}$

(ⅲ) $y=ax-1$의 그래프가 점 C$(4,\ -1)$을 지날 때

$-1=4a-1,\ 4a=0\qquad\therefore\ a=0$

(ⅰ), (ⅲ)에 의하여 $y=ax-1$의 그래프가 두 점 A, C를 모두 지나지 않으면서 선분 AC와 만날 때의 a의 값의 범위는 $0<a<\dfrac{2}{3}$이다.

(ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $y=ax-1$의 그래프가 두 점 B, C를 모두 지나지 않으면서 선분 BC와 만날 때의 a의 값의 범위는 $-\dfrac{1}{2}<a<0$이다.

따라서 구하는 상수 a의 값의 범위는

$-\dfrac{1}{2}<a<0$ 또는 $0<a<\dfrac{2}{3}$

35 답 ②

ㄱ. 두 그래프의 y절편은 시간이 0분일 때의 남아 있는 거리이므로 목적지까지의 거리를 의미한다.
A의 그래프의 y절편이 B의 그래프의 y절편보다 크고, 이는 출발 지점에서 목적지까지의 거리가 B보다 A가 더 멀다는 것을 의미한다. 즉, A와 B가 이동한 거리는 같지 않다.

ㄴ. 두 그래프의 x절편은 목적지에 도착한 시간을 의미한다. 즉, A와 B 모두 동일한 시간에 목적지에 도착했음을 알 수 있다.

ㄷ. $(\text{속력})=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{시간})}$이므로 속력은 주어진 그래프의 기울기와 같다. 즉, 기울기의 절댓값이 클수록 속력이 빠르다.
이때 A의 그래프의 기울기의 절댓값이 더 크므로 A가 B보다 더 빠른 속력으로 이동했다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

36 답 오전 11시 6분

수영이가 이동한 거리를 나타내는 그래프는 기울기가

$\frac{16-6}{30-0}=\frac{1}{3}$

이고, y절편이 6이므로 그래프의 방정식은

$y=\frac{1}{3}x+6$ ⋯⋯ ㉠

정민이가 이동한 거리를 나타내는 그래프는 기울기가

$\frac{10-0}{30-10}=\frac{1}{2}$

이므로 $y=\frac{1}{2}x+a$ (a는 상수)라고 하면 x절편이 10이므로

$0=5+a$ $\therefore a=-5$

$\therefore y=\frac{1}{2}x-5$ ⋯⋯ ㉡

두 사람이 만나는 시각은 오전 10시에서 두 그래프의 교점의 x좌표만큼 지난 시각이므로 ㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{3}x+6=\frac{1}{2}x-5,\ \frac{1}{6}x=11$ $\therefore x=66$

따라서 수영이와 정민이가 만나는 시각은 오전 10시에서 66분이 지난 후이므로 오전 11시 6분이다.

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

121쪽~123쪽

01 2	**02** 2	**03** ②	**04** 3	**05** 17
06 ⑤	**07** $y=-2x+5$			

08 (1) 15 L (2) $y=45-\frac{1}{15}x$ $(0\le x\le 675)$ (3) 31 L

09 363

01 답 2

해결 key Point!

점 (4, 7)을 지나는 직선의 x절편과 y절편을 미지수로 나타낸 후 소수와 양의 정수인 조건을 만족시키는 값을 구해야 한다.

점 (4, 7)을 지나는 직선의 x절편을 a, y절편을 b (a, b는 자연수)라고 하면 이 직선은 두 점 $(a, 0)$, $(0, b)$를 지나므로

기울기는 $\frac{b-0}{0-a}=-\frac{b}{a}$

따라서 직선의 방정식은 $y=-\frac{b}{a}x+b$이고 이 직선이 점 (4, 7)을 지나므로

$7=-\frac{4b}{a}+b$에서 $7a=-4b+ab$

$7a=(a-4)b$ ⋯⋯ ㉠

$\therefore b=\frac{7a}{a-4}=7+\frac{28}{a-4}$ ← $\frac{7(a-4)+28}{a-4}=7+\frac{28}{a-4}$

이때 b는 자연수이므로

$a-4=-28,\ -14,\ -7,\ 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 14,\ 28$

$\therefore a=-24,\ -10,\ -3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 11,\ 18,\ 32$

따라서 ㉠을 만족시키는 a, b의 값을 순서쌍 (a, b)로 나타내면

$(-24, 6)$, $(-10, 5)$, $(-3, 3)$, $(5, 35)$, $(6, 21)$, $(8, 14)$, $(11, 11)$, $(18, 9)$, $(32, 8)$

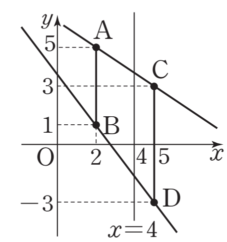
이때 a는 소수이므로 조건을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(5, 35)$, $(11, 11)$의 2개이다.

따라서 조건을 만족시키는 직선의 개수는 2이다.

02 답 2

해결 key Point!

두 선분 AB, CD를 지나는 직선 $f(x)$를 그려 보면서 $f(4)$의 값과 $f(6)$의 값을 이해한다.



$f(4)$의 값은 직선 $f(x)=ax+b$가 두 점 B(2, 1), D(5, −3)을 지날 때 가장 작으므로 그때의 직선의 기울기는

$a=\frac{-3-1}{5-2}=-\frac{4}{3}$

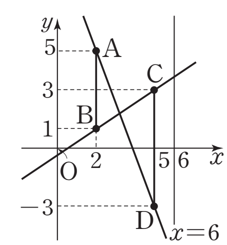
$f(x)=-\frac{4}{3}x+b$의 그래프가 점 (2, 1)을 지나므로

$1=-\frac{8}{3}+b$ $\therefore b=\frac{11}{3}$

$\therefore f(x)=-\frac{4}{3}x+\frac{11}{3}$

따라서 가장 작은 $f(4)$의 값은

$f(4)=-\frac{16}{3}+\frac{11}{3}=-\frac{5}{3}$



또, $f(6)$의 값은 직선 $f(x)=ax+b$가 두 점 B(2, 1), C(5, 3)을 지날 때 가장 크므로 그때의 직선의 기울기는

$a=\frac{3-1}{5-2}=\frac{2}{3}$

$f(x)=\frac{2}{3}x+b$의 그래프가 점 (2, 1)을 지나므로

$1=\frac{4}{3}+b$ $\therefore b=-\frac{1}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$

따라서 가장 큰 $f(6)$의 값은

$f(6)=4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$

이므로 구하는 값은 $-\frac{5}{3}+\frac{11}{3}=2$

03 답 ②

해결 key Point!

두 직선의 모양을 이용하여 기울기, x절편, $x=1$일 때의 함숫값, $x=2$일 때의 함숫값 등을 비교해야 한다.

ㄱ. $y=ax+b$의 그래프가 $y=cx+d$의 그래프보다 더 가파르다. $\therefore |a|>|c|$

ㄴ. $y=ax+b$는 $x=1$일 때, 양수인 함숫값을 가지므로

$a+b>0$

$y=cx+d$는 $x=1$일 때, 음수인 함숫값을 가지므로

$c+d<0$

즉, $a+b>c+d$이므로 $a-c>d-b$

ㄷ. $y=ax+b$에 $y=0$을 대입하면 $0=ax+b$

$ax=-b \qquad \therefore x=-\frac{b}{a}$

$y=cx+d$에 $y=0$을 대입하면 $0=cx+d$

$cx=-d \qquad \therefore x=-\frac{d}{c}$

$y=ax+b$의 그래프의 x절편이 $y=cx+d$의 그래프의 x절편보다 더 작으므로

$-\frac{b}{a}<-\frac{d}{c} \qquad \therefore \frac{b}{a}>\frac{d}{c}$

ㄹ. $y=ax+b$, $y=cx+d$는 $x=2$일 때의 함숫값이 같으므로

$2a+b=2c+d$, $b-d=-2(a-c)$

$\therefore \frac{b-d}{a-c}=-2$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

04 답 3

해결 key Point!

조건 (가)를 이용하여 $f(1)$의 값을 구하고, $f\left(\frac{125}{81}\right)$를 여러 함숫값의 합으로 나눌 수 있어야 한다.

조건 (가)에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1)=f(1\times1)=f(1)+f(1) \qquad \therefore f(1)=0$

또, $f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=f\left(\frac{1}{x}\times x\right)=f(1)=0$이므로

$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

조건 (가)에 $x=5$, $y=5$를 대입하면

$f(25)=f(5\times5)=f(5)+f(5)=2f(5)$

조건 (나)에 의하여 $f(25)=10$이므로

$2f(5)=10 \qquad \therefore f(5)=5$

㉠에 의하여 $f(3)=-f\left(\frac{1}{3}\right)=-(-3)=3$

$$\begin{aligned}\therefore f\left(\frac{125}{81}\right)&=f\left(125\times\frac{1}{81}\right)=f(125)+f\left(\frac{1}{81}\right)\\&=f(125)-f(81)\\&=f(25\times5)-f(9\times9)\\&=\{f(25)+f(5)\}-\{f(9)+f(9)\}\\&=\{f(5\times5)+f(5)\}-\{f(3\times3)+f(3\times3)\}\\&=\{f(5)+f(5)+f(5)\}\\&\qquad-\{f(3)+f(3)+f(3)+f(3)\}\\&=3f(5)-4f(3)\\&=3\times5-4\times3=3\end{aligned}$$

05 답 17

해결 key Point!

세 직선을 좌표평면 위에 나타내고, 각 x의 값에서의 y좌표가 정수인 점을 찾아본다.

$$\begin{cases}x-3y+7=0 & \cdots\cdots ㉠\\7x-y-11=0 & \cdots\cdots ㉡\\x+y-13=0 & \cdots\cdots ㉢\end{cases}$$

㉠$-$㉡$\times3$을 하면

$-20x+40=0$, $20x=40 \qquad \therefore x=2$

$x=2$를 ㉡에 대입하면

$14-y-11=0 \qquad \therefore y=3$

따라서 두 직선 $x-3y+7=0$, $7x-y-11=0$의 교점의 좌표는 $(2, 3)$이다.

㉠$-$㉢을 하면

$-4y+20=0$, $4y=20 \qquad \therefore y=5$

$y=5$를 ㉢에 대입하면

$x+5-13=0 \qquad \therefore x=8$

따라서 두 직선 $x-3y+7=0$, $x+y-13=0$의 교점의 좌표는 $(8, 5)$이다.

㉡$+$㉢을 하면

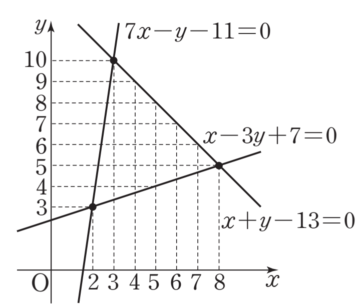
$8x-24=0$, $8x=24 \qquad \therefore x=3$

$x=3$을 ㉢에 대입하면

$3+y-13=0 \qquad \therefore y=10$

따라서 두 직선 $7x-y-11=0$, $x+y-13=0$의 교점의 좌표는 $(3, 10)$이다.

세 직선 $x-3y+7=0$, $7x-y-11=0$, $x+y-13=0$을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 삼각형의 내부의 점이 될 수 있는 x의 값의 범위는 $2<x<8$이고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는

$x=3$일 때, $y=4$, 5, 6, 7, 8, 9의 6개

$x=4$일 때, $y=4$, 5, 6, 7, 8의 5개

$x=5$일 때, $y=5$, 6, 7의 3개

$x=6$일 때, $y=5$, 6의 2개

$x=7$일 때, $y=5$의 1개

따라서 정수인 점의 개수는

$6+5+3+2+1=17$

06 답 ⑤

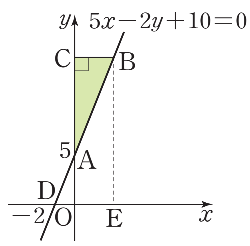
해결 key Point!

주어진 삼각형을 x축을 회전축으로 하여 1회전시키면 원기둥에서 원뿔대를 뺀 입체도형이 만들어진다.

$5x-2y+10=0$에서 $2y=5x+10$

$\therefore\ y=\frac{5}{2}x+5$

$y=\frac{5}{2}x+5$에 $y=0$을 대입하면



$0=\frac{5}{2}x+5,\ \frac{5}{2}x=-5$

$\therefore\ x=-2 \qquad \therefore\ \mathrm{D}(-2,\ 0)$

$y=\frac{5}{2}x+5$에 $x=0$을 대입하면

$y=5 \qquad \therefore\ \mathrm{A}(0,\ 5)$

또, 직선 $y=\frac{5}{2}x+5$ 위의 점 B의 좌표를

$\left(a,\ \frac{5}{2}a+5\right)$ $(a>0)$라고 하면 △ABC의 넓이가 20이므로

$\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{5}{2}a+5-5\right)=20$

$\frac{5}{4}a^2=20,\ a^2=16$

이때 $a>0$이므로 $a=4$

즉, 점 B의 좌표는 $(4,\ 15)$이다.

따라서 △ABC를 x축을 회전축으로 하여 1회전시킨 회전체의 부피는 사각형 OEBC를 x축을 회전축으로 하여 1회전시킨 원기둥의 부피에서 사각형 OEBA를 x축을 회전축으로 하여 1회전시킨 원뿔대의 부피를 빼면 된다.

또, 이 원뿔대의 부피는 △BDE를 x축을 회전축으로 하여 1회전시킨 원뿔의 부피에서 △ADO를 x축을 회전축으로 하여 1회전시킨 원뿔의 부피를 빼면 되므로

$$\left(\frac{1}{3}\times\pi\times15^2\times6\right)-\left(\frac{1}{3}\times\pi\times5^2\times2\right)=450\pi-\frac{50}{3}\pi$$
$$=\frac{1300}{3}\pi$$

따라서 구하는 부피는

$$(\pi\times15^2\times4)-\frac{1300}{3}\pi=900\pi-\frac{1300}{3}\pi$$
$$=\frac{1400}{3}\pi$$

07 답 $y=-2x+5$

해결 key Point!

점 B와 y축에 대하여 대칭인 점을 점 B′라고 하면 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$임을 이용하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$가 최소가 되는 상황을 알아본다.

점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$가 일차함수 $y=ax+1$의 그래프 위에 있으므로

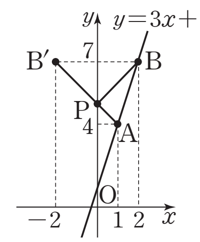
$4=a+1 \qquad \therefore\ a=3$

점 $\mathrm{B}(k,\ 7)$이 일차함수 $y=3x+1$의 그래프 위에 있으므로

$7=3k+1,\ 3k=6 \qquad \therefore\ k=2$

즉, 점 $(a,\ k-a)$는 $(3,\ -1)$이다.

점 $\mathrm{B}(2,\ 7)$과 y축에 대하여 대칭인 점을 점 B′이라고 하면 $\mathrm{B'}(-2,\ 7)$



이때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$이므로 세 점 A, P, B′이 일직선 위에 있을 때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값이 최소가 된다.

두 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$, $\mathrm{B'}(-2,\ 7)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{7-4}{-2-1}=-1$

이므로 일차함수의 식을 $y=-x+b$ (b는 상수)라고 하면 이 일차함수의 그래프가 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$를 지나므로

$4=-1+b \qquad \therefore\ b=5$

즉, 일차함수의 식이 $y=-x+5$이므로 그래프의 y절편은 5이다. $\quad\therefore\ \mathrm{P}(0,\ 5)$

따라서 점 $\mathrm{P}(0,\ 5)$와 점 $(3,\ -1)$을 지나는 직선의 기울기는

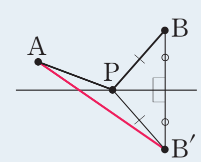
$\frac{-1-5}{3-0}=-2$

이므로 직선의 방정식은 $y=-2x+5$이다.

Level UP

직선 l에 대하여 같은 방향에 두 점 A, B가 있을 때, 점 A에서 직선 l 위의 한 점을 거쳐 점 B까지 가는 최단 거리는 한 점을 직선 l에 대하여 대칭이동한 점과 다른 한 점 사이의 거리와 같다.

즉, 오른쪽 그림과 같이 점 B를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 B′, 직선 l 위의 점을 P라고 하면



$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}\geq\overline{\mathrm{AB'}}$

이다. 따라서 점 A에서 직선 l 위의 한 점을 거쳐 점 B까지 가는 최단 거리는 선분 AB′의 길이와 같다.

08 답 (1) 15 L (2) $y=45-\frac{1}{15}x$ $(0\leq x\leq 675)$ (3) 31 L

해결 key Point!

연료 1 L로 15 km를 주행하므로 1 km 주행할 때마다 $\frac{1}{15}$ L의 연료가 소모된다. 따라서 주행 거리 x km에 대하여 남아 있는 연료량 y L는 일차함수 $y=-\frac{1}{15}x+a$ (a는 상수)의 꼴로 표현될 수 있음을 알아야 한다.

(1) 연료량이 $\frac{1}{6}C$ L일 때, 연료 30 L를 넣었더니 연료량이 $\frac{2}{3}C$ L가 되었으므로

$\frac{1}{6}C+30=\frac{2}{3}C,\ \frac{1}{2}C=30 \qquad \therefore\ C=60$ L

첫 번째 주유소에서 연료를 넣기 전의 자동차 연료량은

$\frac{1}{6}C=\frac{1}{6}\times60=10\,(\mathrm{L})$

첫 번째 주유소에서 연료를 넣은 직후의 자동차 연료량은

$10+30=40\,(\mathrm{L})$

150 km를 주행할 때 소모되는 연료량은

$\frac{150}{15}=10\,(\mathrm{L})$

150 km를 주행한 후 두 번째 주유소에서 연료를 더 넣은 직후의 자동차의 연료량은

$\frac{3}{4}C=\frac{3}{4}\times60=45\,(\mathrm{L})$

따라서 두 번째 주유소에서 넣은 연료량은

$45-(40-10)=15\,(\mathrm{L})$

(2) 연료 1 L로 15 km 달릴 수 있으므로 x km를 주행할 때 소모되는 자동차의 연료량은 $\frac{1}{15}x$ L이다.

두 번째 주유소에서 연료를 넣은 직후의 자동차의 연료량이 45 L이므로

$y=45-\frac{1}{15}x\ (0\le x\le675)$

(3) 두 번째 주유소에서 210 km를 주행한 후 남아 있는 연료량은 $x=210$일 때의 y의 값이므로

$y=45-\frac{1}{15}\times210=45-14=31\,(\mathrm{L})$

09 답 363

해결 key Point!

시침과 분침이 일직선이 되는 경우와 일치하는 경우를 기준으로 작은 각의 크기를 나타내는 식이 다름을 알고, 각 경우의 식을 표현한다.

시계에서 시침은 분당 $\frac{360}{12}\times\frac{1}{60}=0.5(^\circ)$씩 움직이고, 분침은 분당 $360\times\frac{1}{60}=6(^\circ)$씩 움직인다.

즉, 9시 k분 $(0\le k\le60)$에 시침이 12시 방향과 이루는 작은 각의 크기는 $(90-0.5k)^\circ$이므로 시침에서 분침까지 시계방향으로 이루는 각의 크기는 $(90-0.5k)+6k=90+5.5k(^\circ)$이다.

이때 x와 y 사이의 관계식이 달라지는 기준은 시침과 분침이 일직선이 되는 시각, 즉 180°가 되는 시각인 9시 a분과 시침과 분침이 일치하는 시각, 즉 0°가 되는 시각인 9시 b분이다.

(i) 시침과 분침이 일직선이 될 때까지 시침과 분침이 이루는 작은 각의 크기

시침과 분침이 일직선이 되는 경우인 9시 a분에 시침에서 분침까지 시계방향으로 이루는 각의 크기는 $90+5.5a(^\circ)$이므로 $90+5.5a=180$를 만족시키는 a의 값은

$5.5a=90\qquad\therefore\ a=\frac{180}{11}$

따라서 $y=90+5.5x\ \left(0\le x\le\frac{180}{11}\right)$이므로

$p=90$

(ii) 시침과 분침이 일직선이 될 때부터 일치할 때까지 시침과 분침이 이루는 작은 각의 크기

$x>\frac{180}{11}$에서 시침과 분침이 일치하는 시각 9시 b분에 시침에서 분침까지 시계방향으로 이루는 각의 크기는 $90+5.5b(^\circ)$이므로 $90+5.5b=360$를 만족시키는 b의 값은

$5.5b=270\qquad\therefore\ b=\frac{540}{11}$

이때 9시 x분에서의 시침과 분침이 이루는 작은 각의 크기는 시침에서 분침까지 시계 반대 방향으로 이루는 각의 크기이므로

$360-(90+5.5x)=270-5.5x(^\circ)$

따라서 $y=270-5.5x\ \left(\frac{180}{11}\le x\le\frac{540}{11}\right)$이므로

$q=270$

(iii) 시침과 분침이 일치할 때부터 10시가 되기 전까지 시침과 분침이 이루는 작은 각의 크기

$x>\frac{540}{11}$에서 10시가 되기 전까지의 시각 9시 x분에서의 분침이 12시 방향과 이루는 각은 $360-6x(^\circ)$이므로 시침에서 분침까지 시계방향으로 이루는 각의 크기는

$(90-0.5x)-(360-6x)=5.5x-270(^\circ)$

$\therefore\ y=5.5x-270\left(\frac{540}{11}<x\le60\right)$

(i)~(iii)에 의하여 $\frac{b}{a}+p+q$의 값은

$\frac{\frac{540}{11}}{\frac{180}{11}}+90+270=3+90+270=363$이다.

꿀 한줄평

시침과 분침이 움직이는 것을 파악하여 일치하거나 일직선이 되는 경우가 있는지를 먼저 알아야 한다. 또, 시침은 1시간에 30°, 즉 1분에 0.5°씩 움직이고, 분침은 1분에 6°씩 움직이므로 이것을 미지수를 이용하여 표현하고, 시침과 분침이 일치하거나 일직선이 되는 경우가 언제인지 시침과 분침이 이루는 각을 이용하여 구하면 된다.

Lv. Master 실력을 완성하는 대단원 평가

124쪽～128쪽

01 ②	02 ③	03 ④	04 ①	05 ④, ⑤
06 ⑤	07 ②	08 ⑤	09 ④	10 ④
11 ③	12 ④	13 ①	14 ②	15 ③
16 1	17 8	18 3	19 3	
20 $-\frac{1}{5}<k<\frac{1}{2}$		21 10월	22 25	23 62

01 답 ②

해결 key Point!

x, y에 대한 등식에서 y를 x에 대한 식으로 나타내었을 때, y가 x에 대한 일차함수가 되려면
$y=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)의 꼴로 나타내어져야 한다.

$3x(1-2ax)-b(4x+1)-cy=0$에서
$3x-6ax^2-4bx-b-cy=0$
$cy=-6ax^2+(3-4b)x-b$
이 등식이 일차함수가 되려면 $-6a=0$, $3-4b\neq0$, $c\neq0$이어야 하므로 $a=0$, $b\neq\frac{3}{4}$, $c\neq0$

02 답 ③

4보다 작은 소수는 2, 3의 2개이므로
$f(4)=2$
8보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이므로
$f(8)=4$
12보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7, 11의 5개이므로
$f(12)=5$
$\therefore f(4)+f(8)+f(12)=2+4+5=11$

03 답 ④

$y=5x+b$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=5x+b+b$ $\quad\therefore y=5x+2b$
이 그래프가 점 $(-3, 13)$을 지나므로
$13=-15+2b$, $2b=28$ $\quad\therefore b=14$
따라서 $y=5x+28$의 그래프가 점 $(a, a+8)$을 지나므로
$a+8=5a+28$, $4a=-20$ $\quad\therefore a=-5$
$\therefore a+b=-5+14=9$

04 답 ①

$y=-x+a$에 $y=0$을 대입하면 $0=-x+a$
$x=a$ $\quad\therefore \mathrm{A}(a, 0)$
$y=-x+a$에 $x=0$을 대입하면 $y=a$
$\therefore \mathrm{B}(0, a)$
$y=\frac{1}{2}x+b$에 $y=0$을 대입하면 $0=\frac{1}{2}x+b$
$\frac{1}{2}x=-b$, $x=-2b$ $\quad\therefore \mathrm{C}(-2b, 0)$
$y=\frac{1}{2}x+b$에 $x=0$을 대입하면 $y=b$
$\therefore \mathrm{D}(0, b)$
$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{DO}}$에서 $a-b=b$
$\therefore a=2b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$\overline{\mathrm{AC}}=8$에서 $a-(-2b)=8$
$\therefore a+2b=8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$2b+2b=8$, $4b=8$ $\quad\therefore b=2$
$b=2$를 ㉠에 대입하면 $a=4$
$\therefore a+b=4+2=6$

05 답 ④, ⑤

해결 key Point!

a, b의 부호가 같으면 $a>0$, $b>0$ 또는 $a<0$, $b<0$이고, a, b의 부호가 다르면 $a>0$, $b<0$ 또는 $a<0$, $b>0$이어야 한다.

① $a=b$이면 $y=a^2x$
즉, 원점을 지난다.
② $a<0$, $b>0$이면 y절편은 $a-b<0$
③ a, b의 부호가 같으면 기울기는 $ab>0$
즉, 오른쪽 위로 향하는 직선이다.
④ a, b의 부호가 다르면 기울기는 $ab<0$
이때 $a>0$, $b<0$이면 y절편이 $a-b>0$이므로 그래프가 제1, 2, 4사분면을 지나고, $a<0$, $b>0$이면 y절편이 $a-b<0$이므로 그래프가 제2, 3, 4사분면을 지난다.
⑤ $y=abx+\frac{b}{a}$의 그래프와 기울기가 ab로 같으므로 서로 평행하거나 일치, 즉 만나지 않거나 일치한다.
따라서 옳지 않은 것은 ④, ⑤이다.

06 답 ⑤

지면으로부터의 높이가 100 m 높아질 때마다 기온이 0.5 ℃씩 내려가므로 1 m 높아질 때마다 기온은 0.005 ℃씩 내려간다. 지면의 기온이 영상 16 ℃일 때, 지면으로부터의 높이가 x m인 곳의 기온을 y ℃라고 하면
$y=16-0.005x$
$y=16-0.005x$에 $y=-3$을 대입하면
$-3=16-0.005x$
$0.005x=19$ $\quad\therefore x=3800$
따라서 기온이 영하 3 ℃인 곳의 지면으로부터의 높이는 3800 m이다.

참고 실생활 문제에서 주어진 조건을 이용하여 식을 세울 때에는 단위에 주의한다.

07 답 ②

두 점 A, D는 각각 $y=3x$, $y=-2x+14$의 그래프 위에 있으므로 $A(a, 3a)$, $D(b, -2b+14)$라고 하면

$B(a, 0)$, $C(b, 0)$

$\overline{AB}=3\overline{BC}$이므로 $3a=3(b-a)$

$3a=3b-3a$, $3b=6a$

$\therefore b=2a$ …… ㉠

또, $\overline{AD}$가 x축에 평행하므로 $\overline{AB}=\overline{DC}$이다.

즉, $3a=-2b+14$이므로

$3a+2b=14$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$3a+4a=14$, $7a=14$ $\quad\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=4$

$\therefore A(2, 6)$, $B(2, 0)$, $C(4, 0)$, $D(4, 6)$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$(4-2)\times(6-0)=12$

08 답 ⑤

$2x+y-9=0$에서 $y=-2x+9$ …… ㉠

$(1-a)x-3(y+2)=0$에서 $(1-a)x-3y-6=0$

$3y=(1-a)x-6$ $\quad\therefore y=\frac{1-a}{3}x-2$ …… ㉡

이때 ㉠, ㉡의 해가 존재하지 않으려면 ㉠, ㉡의 그래프가 서로 평행해야 하므로

$-2=\frac{1-a}{3}$에서 $1-a=-6$ $\quad\therefore a=7$

$(3-a)x-y-6=0$, 즉 $-4x-y-6=0$에서

$y=-4x-6$ …… ㉢

$bx+2y-4c=0$에서 $2y=-bx+4c$

$\therefore y=-\frac{b}{2}x+2c$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통인 해가 무수히 많으려면 ㉢, ㉣의 그래프가 서로 일치해야 하므로

$-4=-\frac{b}{2}$, $-6=2c$ $\quad\therefore b=8$, $c=-3$

$\therefore a+b+c=7+8+(-3)=12$

09 답 ④

$y=f(x)$는 x의 값이 5만큼 증가할 때 y의 값이 2만큼 감소하므로

(기울기)$=-\frac{2}{5}$

따라서 $f(x)=-\frac{2}{5}x+a$ (a는 상수)라고 하면

$f(5)=-2+a=6$에서 $a=8$

$\therefore f(x)=-\frac{2}{5}x+8$

$y=g(x)$의 y절편이 1이므로 $g(x)=bx+1$ (b는 상수)이라고 하면

$g(4)=4b+1=5$에서 $4b=4$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore g(x)=x+1$

따라서 $f(x)>g(x)$에서 $-\frac{2}{5}x+8>x+1$

$\frac{7}{5}x<7$ $\quad\therefore x<5$

$\therefore m=5$

10 답 ④

① 반지름의 길이가 x cm인 원형 모양인 동전의 둘레의 길이는 $2\pi x$ cm이므로 이를 반지름의 길이로 나눈 값 y는

$y=\frac{2\pi x}{x}=2\pi$ $\quad\therefore f(x)=2\pi$

따라서 $f(1)=2\pi$로 함숫값은 옳지만 일차함수는 아니다.

② 속력이 시속 x km인 자전거가 30 km를 가는 데 걸리는 시간 y시간은

$y=\frac{30}{x}$ $\quad\therefore f(x)=\frac{30}{x}$

따라서 $f(20)=\frac{30}{20}=1.5$로 함숫값은 옳지만 일차함수는 아니다.

③ 한 상자에 x개 이하로 귤을 담을 때, 100개의 귤을 담기 위해 필요한 상자의 최소 개수 y는 x가 100의 약수이면 100을 x로 나누었을 때의 몫이고, x가 100의 약수가 아니면 100을 x로 나누었을 때의 몫에 1을 더한 값이다.

이때 12는 100의 약수가 아니므로 $f(12)=8+1=9$로 함숫값은 옳지 않고 $f(x)$가 x에 대한 일차식으로 표현되지 않으므로 일차함수도 아니다.

④ 어느 학급의 학생 수가 30이고 남학생 수는 x일 때 여학생 수 y는

$y=30-x$ $\quad\therefore f(x)=30-x$

따라서 $f(15)=15$로 함숫값도 옳고, 일차함수이다.

⑤ 밑변의 길이가 x cm이고 높이가 10 cm인 삼각형의 넓이 $y\ cm^2$는

$y=\frac{1}{2}\times x\times 10=5x$ $\quad\therefore f(x)=5x$

따라서 일차함수이지만 $f(5)=25$로 함숫값은 옳지 않다.

그러므로 일차함수이면서 함숫값도 옳은 것은 ④이다.

11 답 ③

해수면에서의 수압이 0이고, 수심이 10 m 깊어질 때마다 수압이 1기압씩 증가하므로 수심이 x m인 곳에서의 수압은 $\frac{1}{10}x$기압이다.

해수면으로부터 x m 깊이에 있는 물체가 받는 압력을 y기압이라고 하면

$y=\frac{1}{10}x+1$ ...... ㉠

해수면에서 수직으로 음파를 발사한 지 4초 후 물속의 물체에 반사되어 돌아왔으므로 음파가 물속의 물체까지 도달하는데 걸리는 시간은 $4\times\frac{1}{2}=2$(초)이고, 물속에서의 음파 속력은 초속 1.5 km이므로 수면에서 물체까지의 수직 거리는

$2\times1.5=3$(km)

즉, $x=3000$을 ㉠에 대입하면

$y=\frac{1}{10}\times3000+1=301$

따라서 이 물체가 물속에서 받는 압력은 301기압이다.

12 답 ④

해결 key Point!

$g(ax+b)$의 꼴이면 $ax+b$를 $f(x)$에 대입하여
$g(ax+b)=f(3(ax+b)+2)$로 나타낸다.

① $f(x)$는 자연수 x를 6으로 나눈 나머지이므로
$f(x+6)=f(x)$

② $g(x+2)=f(3(x+2)+2)=f(3x+8)$

③ $g(x+6)=f(3(x+6)+2)=f(3x+20)$
$=f(3x+2)=g(x)$

④ $f(6x+k)=f(k)$(k는 상수)이므로 좌변은
$g(2x)=f(3\times2x+2)=f(6x+2)=f(2)=2$
한편, 우변은 $x=2$일 때 $2f(x)=2f(2)=2\times2=4$이므로 등식이 성립하지 않는다.

⑤ $g(6x+4)=f(3(6x+4)+2)=f(18x+14)$
$=f(14)=f(2)$
$g(4)=f(3\times4+2)=f(14)=f(2)$
$\therefore g(6x+4)=g(4)$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

13 답 ①

$y=-\frac{1}{2}x+5$에 $y=0$을 대입하면 $0=-\frac{1}{2}x+5$

$\frac{1}{2}x=5$ $\therefore x=10$

따라서 $y=-\frac{1}{2}x+5$의 그래프의 x절편은 10, y절편은 5이므로

D(10, 0), A(0, 5)

$\therefore \triangle\text{OAD}=\frac{1}{2}\times10\times5=25$

$\triangle\text{BCD}=\triangle\text{OAD}+$(사각형 OABC의 넓이)$=25+23=48$

이고 점 C$(-a, 0)$ $(a>0)$이라고 하면

$\overline{\text{CD}}=10-(-a)=10+a$이므로

$\triangle\text{BCD}=\frac{1}{2}\times(10+a)\times6=48$

$3(10+a)=48$, $10+a=16$ $\therefore a=6$

따라서 두 점 B$(-2, 6)$, C$(-6, 0)$을 지나는 직선 l의 기울기는

$\frac{0-6}{-6-(-2)}=\frac{3}{2}$

이므로 직선 l의 방정식을 $y=\frac{3}{2}x+b$ (b는 상수)라고 하면 이 직선이 점 C$(-6, 0)$을 지나므로

$0=-9+b$ $\therefore b=9$

따라서 직선 l의 방정식은 $y=\frac{3}{2}x+9$이므로 y절편은 9이다.

14 답 ②

두 직선 $y=\frac{3}{2}x-3$, $y=ax+9$의 y절편은 각각 -3, 9이고, 두 직선의 교점 P의 x좌표를 k라고 하면 삼각형 ABP의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\times\{9-(-3)\}\times k=16$

$6k=16$ $\therefore k=\frac{8}{3}$

$y=\frac{3}{2}x-3$에 $x=\frac{8}{3}$을 대입하면

$y=4-3=1$

따라서 $y=ax+9$의 그래프가 점 $\text{P}\left(\frac{8}{3}, 1\right)$을 지나므로

$1=\frac{8}{3}a+9$, $\frac{8}{3}a=-8$ $\therefore a=-3$

15 답 ③

해결 key Point!

두 점 B, C는 직선 $x=4$ 위의 점이므로 선분 $\overline{\text{BC}}$ 위의 점 E의 좌표를 $(4, a)$ (a는 상수)라고 한다.

두 점 $\text{A}\left(-2, \frac{7}{2}\right)$, B(4, 1)을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1-\frac{7}{2}}{4-(-2)}=-\frac{5}{12}$

이므로 $y=-\frac{5}{12}x+k$ (k는 상수)라고 하면 이 직선이 점 B(4, 1)을 지나므로

$1=-\frac{5}{3}+k$ $\therefore k=\frac{8}{3}$

따라서 직선의 방정식은 $y=-\frac{5}{12}x+\frac{8}{3}$이므로 점 D의 좌표는 $\left(0, \frac{8}{3}\right)$이다.

$\overline{\text{BC}}=9-1=8$이고, 점 A에서 선분 BC까지의 거리는

$4-(-2)=6$이므로

$\triangle\text{ABC}=\frac{1}{2}\times8\times6=24$

이때 직선 l이 $\triangle ABC$의 넓이를 이등분하므로 $\triangle DEB$의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 24 = 12$이다.

점 E의 좌표를 $(4,\ a)$라고 하면 $\overline{BE} = a-1$이고, 점 D에서 선분 BE까지의 거리는 4이므로

$\triangle DEB = \frac{1}{2} \times (a-1) \times 4 = 12$

$2(a-1)=12,\ a-1=6 \qquad \therefore a=7$

따라서 두 점 $D\left(0,\ \frac{8}{3}\right)$, $E(4,\ 7)$을 지나는 직선 l의 기울기는

$\dfrac{7-\frac{8}{3}}{4-0} = \dfrac{13}{12}$

꿀 한줄평

점 D는 두 점 A, B를 지나는 직선의 y절편이고, 점 E는 선분 BC 위의 점이므로 점 D의 x좌표는 0이고, 점 E의 x좌표가 4임을 파악하고 문제를 접근해야 한다. 이때 직선 BC는 x축에 수직이므로 직선 BC 위에 있는 선분을 밑변으로 하는 삼각형의 높이는 나머지 한 점의 x좌표의 값을 이용해서 구할 수 있다.

16 답 1

$y=-ax+2$의 그래프를 y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-ax+2-b$

이때 평행이동한 그래프의 x절편이 -1이므로

$y=-ax+2-b$에 $x=-1,\ y=0$을 대입하면

$0=a+2-b \qquad \therefore b=a+2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또, $y=bx-2$의 그래프를 y축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=bx-2-a$

$y=bx-2-a$에 $y=0$을 대입하면 $0=bx-2-a$

$\therefore bx=2+a$

㉠을 이 식에 대입하면

$(a+2)x=2+a$

이때 $b=a+2 \neq 0$이므로 $x=1$

따라서 구하는 x절편은 1이다.

17 답 8

해결 key Point!

일차함수의 그래프의 기울기는 $\dfrac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}$임을 이용해야 한다.

$\dfrac{f(1)+f(0)}{1-0}=a,\ \dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}=a,\ \dfrac{f(6)-f(3)}{6-3}=a$이므로 조건 (가)에서

$f(1)-f(0)+\dfrac{f(4)-f(2)}{2}+\dfrac{f(6)-f(3)}{3}=3a=9$

$\therefore a=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서

$\dfrac{f(4)+f(0)}{2}=\dfrac{(4a+b)+b}{2}=2a+b=5 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$6+b=5 \qquad \therefore b=-1$

즉, $f(x)=3x-1$이므로 $f(3)=9-1=8$

18 답 3

단비는 y절편을 제대로 보았으므로 처음 직선의 y절편은 -1이다.

가람이는 기울기를 제대로 보았으므로 처음 직선의 기울기는 $\dfrac{5-(-7)}{2-(-4)}=2$이다.

따라서 처음 직선의 방정식은 $y=2x-1$이므로

$a=2,\ b=-1$

$\therefore a-b=2-(-1)=3$

19 답 3

해결 key Point!

두 점 A, B를 이동시킨 두 점을 지나는 직선을 먼저 구해야 한다.

점 $A(2,\ 1)$에서 $2>1$이므로 점 A를 규칙 (가)에 따라 이동시킨 점을 A'이라고 하면

$A'(2-1,\ 2+2\times1)$, 즉 $A'(1,\ 4)$

또, 점 $B(1,\ 5)$에서 $1<5$이므로 점 B를 규칙 (나)에 따라 이동시킨 점을 B'이라고 하면

$B'(-1,\ 3\times1+5)$, 즉 $B'(-1,\ 8)$

두 점 A', B'을 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{8-4}{-1-1}=-2$

이므로 이 직선의 식을 $y=-2x+n$ (n은 상수)이라고 하면 이 직선이 점 $A'(1,\ 4)$를 지나므로

$4=-2+n \qquad \therefore n=6$

따라서 직선의 방정식은 $y=-2x+6$이다.

점 $C(a,\ -a+6)$에 대하여

(i) $a \geq -a+6$일 때

$2a \geq 6$에서 $a \geq 3$

점 C를 규칙 (가)에 따라 이동시킨 점을 C'이라고 하면

$C'(a-(-a+6),\ a+2(-a+6))$

즉, $C'(2a-6,\ -a+12)$

이때 점 C'이 직선 $y=-2x+6$ 위에 있어야 하므로

$-a+12=-2(2a-6)+6$

$-a+12=-4a+18,\ 3a=6$

$\therefore a=2$

이때 $a \geq 3$을 만족시키지 못한다.

(ii) $a<-a+6$일 때

$2a<6$에서 $a<3$

점 C를 규칙 (나)에 따라 이동시킨 점을 C″이라고 하면

$C''(-a,\ 3a+(-a+6))$, 즉 $C''(-a,\ 2a+6)$

이때 점 C″이 직선 $y=-2x+6$ 위에 있어야 하므로

$2a+6=2a+6,\ 0\times a=0$

이 등식은 $a<3$일 때 항상 성립하므로 자연수 a의 값은 1, 2이다.

(i), (ii)에 의하여 자연수 a의 값의 합은

$1+2=3$

20 답 $-\frac{1}{5}<k<\frac{1}{2}$

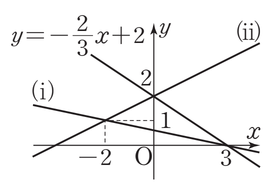
$y=-\frac{2}{3}x+2$에 $y=0$을 대입하면 $0=-\frac{2}{3}x+2$

$\frac{2}{3}x=2 \qquad \therefore x=3$

$y-kx-1=2k$를 k에 대하여 정리하면

$kx+2k-y+1=0 \qquad \therefore k(x+2)-(y-1)=0$ ······ ㉠

따라서 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 1)$을 지난다.



오른쪽 그림에서

(i) 직선 ㉠이 점 $(3,\ 0)$을 지날 때

$5k+1=0,\ 5k=-1$

$\therefore k=-\frac{1}{5}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0,\ 2)$를 지날 때

$2k-1=0,\ 2k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에 의하여 두 직선이 제1사분면 위에서 만나려면 상수 k의 값의 범위는

$-\frac{1}{5}<k<\frac{1}{2}$

꿀 한줄평

일차방정식을 k에 대하여 정리하면 $k(x+2)-(y-1)=0$

이 식은 $x=-2,\ y=1$을 대입하면 상수 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로 일차방정식 $k(x+2)-(y-1)=0$의 그래프는 항상 점 $(-2,\ 1)$을 지난다.

이를 이용하여 두 직선이 제1사분면 위에서 만나기 위한 범위를 찾고, 범위의 양 끝 값을 구하면 된다.

21 답 10월

A 회사의 제품의 판매량을 나타내는 그래프는 기울기가

$\frac{15000-600}{12-0}=1200$

이고, y절편은 600이므로 직선의 방정식은

$y=1200x+600$ ······ ㉠

B 회사의 제품의 판매량을 나타내는 그래프는 기울기가

$\frac{18000-0}{12-2}=1800$

이므로 직선의 방정식을 $y=1800x+n$ (n은 상수)이라고 하면 이 직선은 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$0=3600+n \qquad \therefore n=-3600$

$\therefore y=1800x-3600$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$1800x-3600=1200x+600$

$600x=4200 \qquad \therefore x=7$

따라서 두 회사 A, B에서 생산하는 제품의 판매량이 같아지는 것은 3월부터 7개월 후인 10월이다.

22 답 25

1단계 k의 값 구하기

한 직선 위에 있는 세 점 중 어느 두 점을 지나는 직선의 기울기는 모두 같다.

두 점 $(-6,\ -2)$, $(3k,\ 4)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{4-(-2)}{3k-(-6)}=\frac{6}{3k+6}=\frac{2}{k+2}$ ······ ㉠

두 점 $(-6,\ -2)$, $(2k+3,\ 12)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{12-(-2)}{(2k+3)-(-6)}=\frac{14}{2k+9}$ ······ ㉡

㉠, ㉡이 같으므로

$\frac{2}{k+2}=\frac{14}{2k+9}$, $4k+18=14k+28$

$10k=-10 \qquad \therefore k=-1$

2단계 세 점을 지나는 직선의 방정식 구하기

따라서 세 점을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{2}{-1+2}=2$

이므로 직선의 방정식을 $y=2x+b$ (b는 상수)라고 하면 이 직선이 점 $(-6,\ -2)$를 지나므로

$-2=-12+b \qquad \therefore b=10$

즉, 세 점을 지나는 직선의 방정식은

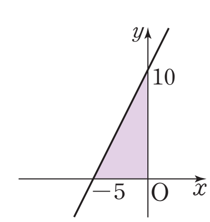
$y=2x+10$

3단계 도형의 넓이 구하기

$y=2x+10$에 $y=0$을 대입하면 $0=2x+10$

$2x=-10 \qquad \therefore x=-5$

따라서 직선 $y=2x+10$의 그래프의 x절편은 -5, y절편은 10으로 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 도형의 넓이는



$\frac{1}{2}\times 5\times 10=25$

단계	채점 기준	배점
❶	k의 값을 구했다.	3점
❷	세 점을 지나는 직선의 방정식을 구했다.	2점
❸	도형의 넓이를 구했다.	2점

23 답 62

해결 key Point!

세 직선이 삼각형을 만들 수 없는 경우는 세 직선 중 두 개 또는 세 개의 직선이 서로 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나는 경우이어야 한다.

1단계 세 직선으로 삼각형을 만들 수 없는 경우 파악하기

주어진 세 직선 중 두 직선 $4x-3y+2=0$, $5x-y=0$은 서로 평행하지 않으므로 세 직선으로 삼각형을 만들 수 없는 경우는 세 직선 중 평행한 두 직선이 있는 경우이거나 세 직선이 한 점에서 만나 세 개의 교점을 만들 수 없는 경우이다.

2단계 두 직선이 평행할 때의 a의 값 구하기

(i) 두 직선 $4x-3y+2=0$, $y=ax-5$가 서로 평행할 때

직선 $4x-3y+2=0$에서 $3y=4x+2$

$\therefore y=\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$

즉, 두 직선 $y=\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$, $y=ax-5$가 서로 평행하면

$a=\frac{4}{3}$

(ii) 두 직선 $3x-y=0$, $y=ax-5$가 서로 평행할 때

직선 $3x-y=0$, 즉 $y=3x$와 직선 $y=ax-5$가 서로 평행하면

$a=3$

3단계 세 직선이 한 점에서 만날 때의 a의 값 구하기

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때

연립방정식 $\begin{cases} 4x-3y+2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-y=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$에서

㉡$\times 3-$㉠을 하면

$5x-2=0 \qquad \therefore x=\frac{2}{5}$

$x=\frac{2}{5}$를 ㉡에 대입하면

$\frac{6}{5}-y=0 \qquad \therefore y=\frac{6}{5}$

점 $\left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$이 직선 $y=ax-5$를 지나야 하므로

$\frac{6}{5}=\frac{2}{5}a-5$, $\frac{2}{5}a=\frac{31}{5} \qquad \therefore a=\frac{31}{2}$

4단계 모든 상수 a의 값의 곱 구하기

(i)～(iii)에 의하여 삼각형을 만들 수 없도록 하는 상수 a의 값은 $\frac{4}{3}$, 3, $\frac{31}{2}$이므로 모든 a의 값의 곱은

$\frac{4}{3}\times 3\times \frac{31}{2}=62$

단계	채점 기준	배점
❶	세 직선으로 삼각형을 만들 수 없는 경우를 파악했다.	1점
❷	두 직선이 평행할 때의 a의 값을 구했다.	2점
❸	세 직선이 한 점에서 만날 때의 a의 값을 구했다.	3점
❹	모든 상수 a의 값의 곱을 구했다.	1점

MEMO