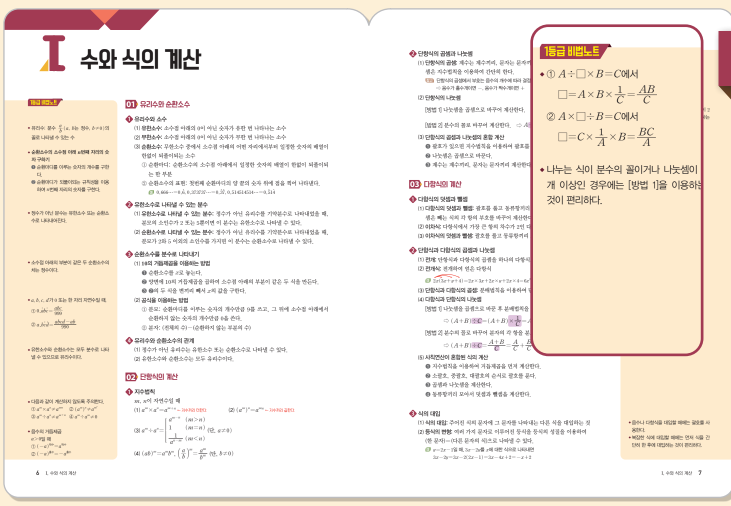
최고난도

중학수학 2-1

이 책의
구성과 특징



대단원 개념 정리

단원 핵심 내용 정리와 1등급 비법노트

대단원별 알아야 할 핵심 개념을 담았습니다. 또, 개념을 더 쉽게 이해할 수 있도록 예, 참고 등을 수록하여 정리하였습니다.

1등급 비법노트

새로 학습하는 개념과 연결되는 반드시 기억해야 할 내용과 문제를 풀 때 도움이 되는 실전 tip을 구조화하여 제공하였습니다.

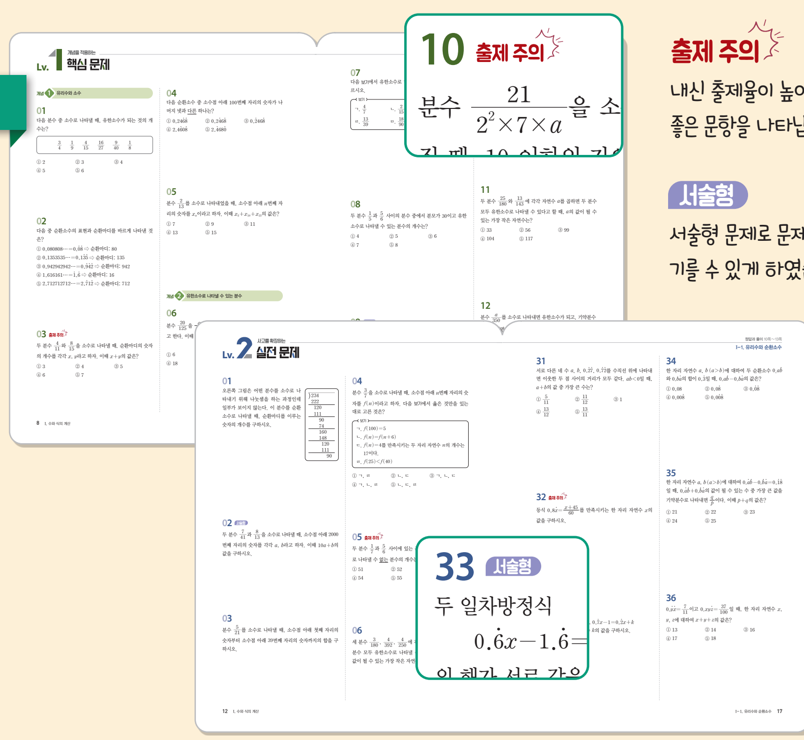
핵심 문제와 실전 문제

Lv. 1

중단원별 개념을 적용하여 내신 유형 학습에 적합한 핵심 문제를 담았습니다.

Lv. 2

중단원별 변별력과 사고력을 길러 주는 엄선된 문제를 담았습니다.



출제 주의

내신 출제율이 높아 한 번 더 풀어보면 좋은 문항을 나타냅니다.

서술형

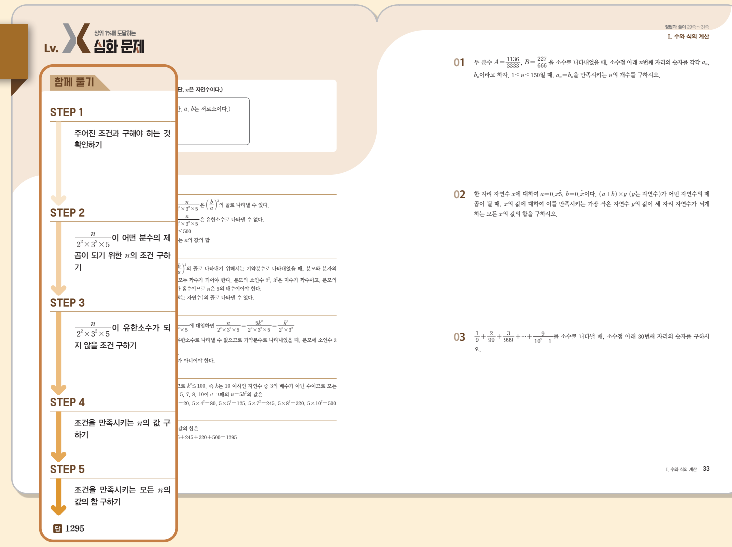
서술형 문제로 문제해결력을 기를 수 있게 하였습니다.

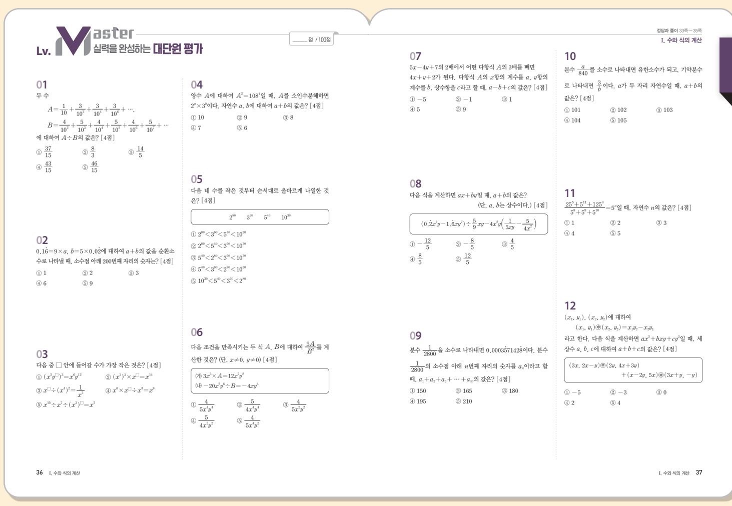
최상위권을 위한 심화 문제

대단원별 문제해결력과 응용력을 기를 수 있는 고난도 문제를 담았습니다.
또, 이전에 배운 개념과 여러 가지 수학적 개념이 포함된 복합 유형 문제로 구성하여 종합적 사고력을 기를 수 있습니다.

함께 풀기

이 단원의 대표적인 고난도 문제를 함께 차근차근 풀어보며 문제 해결을 위한 접근 방법을 익힐 수 있습니다.



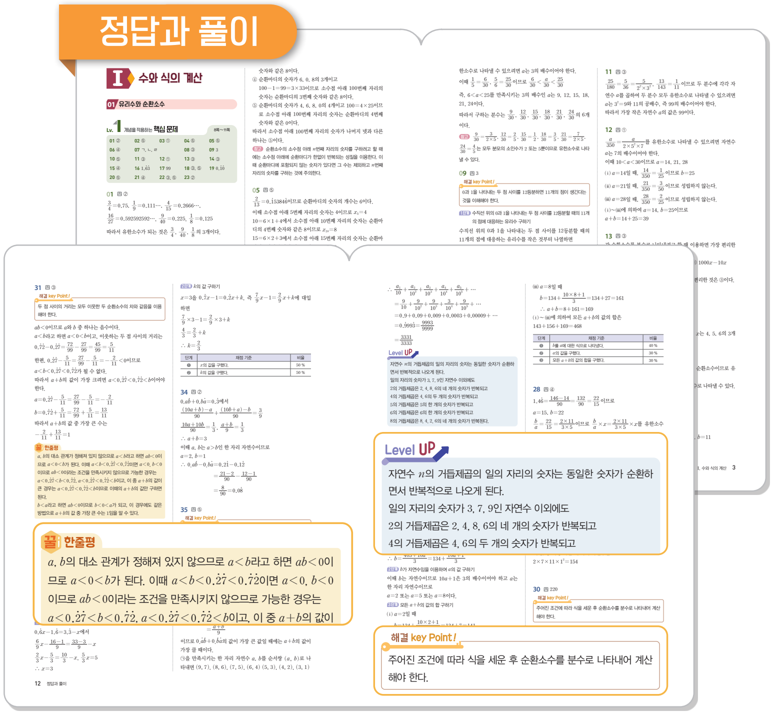


시험 대비 평가 문제

최종 점검을 위한 마무리 평가 문제

실력을 확인하고 완성할 수 있도록 수준 높은 문제로 대단원별 마무리 평가 문제를 담았습니다. 학교 시험과 유사하게 객관식, 주관식, 서술형 문제와 더불어 배점이 높은 변별력 있는 문제까지 담았습니다.

정답과 풀이



읽기만 해도 이해할 수 있는 쉽고 자세한 풀이를 제시하였습니다. 또, 참고와 다른 풀이를 담아 풀이 방법을 점검하고 사고력을 기를 수 있도록 하였으며, 서술형 문제에 대한 단계별 풀이와 채점표를 담았습니다.

해결 key Point!

문제 풀이의 접근법을 제시하여 스스로 해결할 수 있도록 실마리를 제공하였습니다.

Level UP

풀이 과정 중 필요한 첨삭이나 사고력 향상에 도움이 되는 개념을 담았습니다.

꿀 한줄평

문제를 풀 때 유의해야 할 핵심 내용을 수록하여 문제의 중요한 부분을 짚어주었습니다.

이 책의

차례

I

수와 식의 계산

I 수와 식의 계산

01 유리수와 순환소수

1 유리수와 소수

(1) **유한소수:** 소수점 아래의 0이 아닌 숫자가 유한 번 나타나는 소수

(2) **무한소수:** 소수점 아래의 0이 아닌 숫자가 무한 번 나타나는 소수

(3) **순환소수:** 무한소수 중에서 소수점 아래의 어떤 자리에서부터 일정한 숫자의 배열이 한없이 되풀이되는 소수

① 순환마디: 순환소수의 소수점 아래에서 일정한 숫자의 배열이 한없이 되풀이되는 한 부분

② 순환소수의 표현: 첫번째 순환마디의 양 끝의 숫자 위에 점을 찍어 나타낸다.

예 $0.666\cdots=0.\dot{6}$, $0.373737\cdots=0.\dot{3}\dot{7}$, $0.514514514\cdots=0.\dot{5}1\dot{4}$

2 유한소수로 나타낼 수 있는 분수

(1) **유한소수로 나타낼 수 있는 분수:** 정수가 아닌 유리수를 기약분수로 나타내었을 때, 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이면 이 분수는 유한소수로 나타낼 수 있다.

(2) **순환소수로 나타낼 수 있는 분수:** 정수가 아닌 유리수를 기약분수로 나타내었을 때, 분모가 2와 5 이외의 소인수를 가지면 이 분수는 순환소수로 나타낼 수 있다.

3 순환소수를 분수로 나타내기

(1) **10의 거듭제곱을 이용하는 방법**

❶ 순환소수를 x로 놓는다.

❷ 양변에 10의 거듭제곱을 곱하여 소수점 아래의 부분이 같은 두 식을 만든다.

❸ ❷의 두 식을 변끼리 빼서 x의 값을 구한다.

(2) **공식을 이용하는 방법**

① 분모: 순환마디를 이루는 숫자의 개수만큼 9를 쓰고, 그 뒤에 소수점 아래에서 순환하지 않는 숫자의 개수만큼 0을 쓴다.

② 분자: (전체의 수)$-$(순환하지 않는 부분의 수)

4 유리수와 순환소수의 관계

(1) 정수가 아닌 유리수는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다.

(2) 유한소수와 순환소수는 모두 유리수이다.

02 단항식의 계산

1 지수법칙

m, n이 자연수일 때

(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$ ← 지수끼리 더한다.

(2) $(a^m)^n=a^{mn}$ ← 지수끼리 곱한다.

(3) $a^m\div a^n=\begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$ (단, $a\neq0$)

(4) $(ab)^m=a^mb^m$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}$ (단, $b\neq0$)

1등급 비법노트

◆ 유리수: 분수 $\frac{a}{b}$(a, b는 정수, $b\neq0$)의 꼴로 나타낼 수 있는 수

◆ **순환소수의 소수점 아래 n번째 자리의 숫자 구하기**

❶ 순환마디를 이루는 숫자의 개수를 구한다.

❷ 순환마디가 되풀이되는 규칙성을 이용하여 n번째 자리의 숫자를 구한다.

◆ 정수가 아닌 분수는 유한소수 또는 순환소수로 나타내어진다.

◆ 소수점 아래의 부분이 같은 두 순환소수의 차는 정수이다.

◆ a, b, c, d가 0 또는 한 자리 자연수일 때,

① $0.\dot{a}b\dot{c}=\dfrac{abc}{999}$

② $a.\dot{b}c\dot{d}=\dfrac{abcd-ab}{990}$

◆ 유한소수와 순환소수는 모두 분수로 나타낼 수 있으므로 유리수이다.

◆ 다음과 같이 계산하지 않도록 주의한다.

① $a^m\times a^n\neq a^{mn}$ ② $(a^m)^n\neq a^{m^n}$

③ $a^m\div a^n\neq a^{m\div n}$ ④ $a^m\div a^m\neq0$

◆ 음수의 거듭제곱

$a>0$일 때

① $(-a)^{\text{짝수}}=a^{\text{짝수}}$

② $(-a)^{\text{홀수}}=-a^{\text{홀수}}$

2 단항식의 곱셈과 나눗셈

(1) **단항식의 곱셈:** 계수는 계수끼리, 문자는 문자끼리 곱한다. 이때 같은 문자끼리의 곱셈은 지수법칙을 이용하여 간단히 한다.

참고 단항식의 곱셈에서 부호는 음수의 개수에 따라 결정된다.
⇨ 음수가 홀수개이면 $-$, 음수가 짝수개이면 $+$

(2) **단항식의 나눗셈**

[방법 1] 나눗셈을 곱셈으로 바꾸어 계산한다. ⇨ $A\div B=A\times\frac{1}{B}=\frac{A}{B}$

[방법 2] 분수의 꼴로 바꾸어 계산한다. ⇨ $A\div B=\frac{A}{B}$

(3) **단항식의 곱셈과 나눗셈의 혼합 계산**

❶ 괄호가 있으면 지수법칙을 이용하여 괄호를 푼다.
❷ 나눗셈은 곱셈으로 바꾼다.
❸ 계수는 계수끼리, 문자는 문자끼리 계산한다.

03 다항식의 계산

1 다항식의 덧셈과 뺄셈

(1) **다항식의 덧셈과 뺄셈:** 괄호를 풀고 동류항끼리 모아서 계산한다. 이때 다항식의 뺄셈은 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어 계산한다.

(2) **이차식:** 다항식에서 가장 큰 항의 차수가 2인 다항식

(3) **이차식의 덧셈과 뺄셈:** 괄호를 풀고 동류항끼리 모아서 계산한다.

2 단항식과 다항식의 곱셈과 나눗셈

(1) **전개:** 단항식과 다항식의 곱셈을 하나의 다항식으로 나타내는 것

(2) **전개식:** 전개하여 얻은 다항식

예 $2x(3x+y+4)=2x\times3x+2x\times y+2x\times4=6x^2+2xy+8x$

(3) **단항식과 다항식의 곱셈:** 분배법칙을 이용하여 단항식을 다항식의 각 항에 곱한다.

(4) **다항식과 단항식의 나눗셈**

[방법 1] 나눗셈을 곱셈으로 바꾼 후 분배법칙을 이용하여 계산한다.

$$⇨ (A+B)\div C=(A+B)\times\frac{1}{C}=A\times\frac{1}{C}+B\times\frac{1}{C}$$

[방법 2] 분수의 꼴로 바꾸어 분자의 각 항을 분모로 나누어 계산한다.

$$⇨ (A+B)\div C=\frac{A+B}{C}=\frac{A}{C}+\frac{B}{C}$$

(5) **사칙연산이 혼합된 식의 계산**

❶ 지수법칙을 이용하여 거듭제곱을 먼저 계산한다.
❷ 소괄호, 중괄호, 대괄호의 순서로 괄호를 푼다.
❸ 곱셈과 나눗셈을 계산한다.
❹ 동류항끼리 모아서 덧셈과 뺄셈을 계산한다.

3 식의 대입

(1) **식의 대입:** 주어진 식의 문자에 그 문자를 나타내는 다른 식을 대입하는 것

(2) **등식의 변형:** 여러 가지 문자로 이루어진 등식을 등식의 성질을 이용하여 (한 문자)=(다른 문자의 식)으로 나타낼 수 있다.

예 $y=2x-1$일 때, $3x-2y$를 x에 대한 식으로 나타내면
$3x-2y=3x-2(2x-1)=3x-4x+2=-x+2$

1등급 비법노트

- ① $A\div\square\times B=C$에서
  $\square=A\times B\times\frac{1}{C}=\frac{AB}{C}$
  ② $A\times\square\div B=C$에서
  $\square=C\times\frac{1}{A}\times B=\frac{BC}{A}$
- 나누는 식이 분수의 꼴이거나 나눗셈이 2개 이상인 경우에는 [방법 1]을 이용하는 것이 편리하다.
- $A-(B+C)=A-B-C$
- a, b, c는 상수이고 $a\neq0$일 때
  ① $ax+b$ ⇨ 일차식
  ② ax^2+bx+c ⇨ 이차식
- 분배법칙
  ① $A(B+C)=AB+AC$
  ② $(A+B)C=AC+BC$
- 음수나 다항식을 대입할 때에는 괄호를 사용한다.
- 복잡한 식에 대입할 때에는 먼저 식을 간단히 한 후에 대입하는 것이 편리하다.

개념을 적용하는

Lv. 1 핵심 문제

개념 1 유리수와 소수

01

다음 분수 중 소수로 나타낼 때, 유한소수가 되는 것의 개수는?

$$\frac{3}{4} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{4}{15} \quad \frac{16}{27} \quad \frac{9}{40} \quad \frac{1}{8}$$

① 2 ✓② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

$\frac{3}{4}=0.75$

$\frac{1}{9}=0.111\cdots$

$15=0.2666\cdots$

$\frac{16}{27}=0.592592592\cdots$

$40=0.225$

$\frac{1}{8}=0.125$

02

다음 중 순환소수의 표현과 순환마디를 바르게 나타낸 것은?

① $0.080808\cdots=0.\dot{0}\dot{8}$ ⇨ 순환마디: 80

② $0.1353535\cdots=0.1\dot{3}\dot{5}$ ⇨ 순환마디: 135

③ $0.942942942\cdots=0.\dot{9}\dot{4}\dot{2}$ ⇨ 순환마디: 942

④ $1.616161\cdots=\dot{1}.\dot{6}$ ⇨ 순환마디: 16

✓⑤ $2.712712712\cdots=2.\dot{7}1\dot{2}$ ⇨ 순환마디: 712

① $0.080808\cdots=0.\dot{0}\dot{8}$ ⇨ 순환마디: 08
② $0.1353535\cdots=0.1\dot{3}\dot{5}$ ⇨ 순환마디: 35
③ $0.942942942\cdots=0.\dot{9}4\dot{2}$ ⇨ 순환마디: 942
④ $1.616161\cdots=1.\dot{6}\dot{1}$ ⇨ 순환마디: 61
⑤ $2.712712712\cdots=2.\dot{7}1\dot{2}$ ⇨ 순환마디: 712

03 출제 주의

두 분수 $\frac{4}{11}$와 $\frac{8}{15}$을 소수로 나타낼 때, 순환마디의 숫자의 개수를 각각 x, y라고 하자. 이때 $x+y$의 값은?

✓① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

$\frac{4}{11}=0.363636\cdots$에서 순환마디는 36이므로 $x=2$

$\frac{8}{15}=0.5333\cdots$에서 순환마디는 3이므로 $y=1$

$\therefore x+y=2+1=3$

04

다음 순환소수 중 소수점 아래 100번째 자리의 숫자가 나머지 넷과 다른 하나는?

① $0.24\dot{6}\dot{8}$ ② $0.2\dot{4}6\dot{8}$ ③ $0.\dot{2}46\dot{8}$
④ $2.\dot{4}60\dot{8}$ ✓⑤ $2.\dot{4}68\dot{0}$

① 순환마디의 숫자가 6, 8의 2개이고 $100-2=98=2\times49$이므로 소수점 아래 100번째 자리의 숫자는 8이다.
② 순환마디의 숫자가 4, 6, 8의 3개이고 $100-1=99=3\times33$이므로 소수점 아래 100번째 자리의 숫자는 8이다.
③ 순환마디의 숫자가 2, 4, 6, 8의 4개이고 $100=4\times25$이므로 소수점 아래 100번째 자리의 숫자는 8이다.
④ 순환마디의 숫자가 6, 0, 8의 3개이고 $100-1=99=3\times33$이므로 소수점 아래 100번째 자리의 숫자는 8이다.
⑤ 순환마디의 숫자가 4, 6, 8, 0의 4개이고 $100=4\times25$이므로 소수점 아래 100번째 자리의 숫자는 0이다.

05

분수 $\frac{2}{13}$를 소수로 나타내었을 때, 소수점 아래 n번째 자리의 숫자를 x_n이라고 하자. 이때 $x_5+x_{10}+x_{15}$의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ✓⑤ 15

$\frac{2}{13}=0.\dot{1}53846\dot{0}$이므로 순환마디의 숫자의 개수는 6이다.
$\therefore x_5=4$
$10=6\times1+4$이므로 $x_{10}=8$
$15=6\times2+3$이므로 $x_{15}=3$
$\therefore x_5+x_{10}+x_{15}=4+8+3=15$

개념 2 유한소수로 나타낼 수 있는 분수

06

분수 $\frac{20}{125}$을 $\frac{a}{10^n}$의 꼴로 바꾸어서 유한소수로 나타내려고 한다. 이때 $a+n$의 값 중 가장 작은 값은?

(단, a, n은 자연수이다.)

① 6 ② 10 ③ 14
✓④ 18 ⑤ 22

$\frac{20}{125}=\frac{4}{25}=\frac{4\times2^2}{5^2\times2^2}=\frac{16}{10^2}=\frac{160}{10^3}=\frac{1600}{10^4}=\cdots$
따라서 $a+n$의 값 중 가장 작은 값은 $a=16$, $n=2$일 때이므로 구하는 값은
$16+2=18$

07

다음 보기에서 유한소수로 나타낼 수 없는 분수를 모두 고르시오. ㄱ, ㄴ, ㄹ

〈 보기 〉

ㄱ. $\frac{4}{7}$　ㄴ. $\frac{2}{15}$　ㄷ. $\frac{14}{56}$

ㄹ. $\frac{13}{39}$　ㅁ. $\frac{18}{90}$　ㅂ. $\frac{3}{125}$

ㄱ. $\frac{4}{7}$　ㄴ. $\frac{2}{15}=\frac{2}{3\times5}$　ㄷ. $\frac{14}{56}=\frac{1}{2^2}$

ㄹ. $\frac{13}{39}=\frac{1}{3}$　ㅁ. $\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$　ㅂ. $\frac{3}{125}=\frac{3}{5^3}$

08

두 분수 $\frac{1}{5}$과 $\frac{5}{6}$ 사이의 분수 중에서 분모가 30이고 유한소수로 나타낼 수 있는 분수의 개수는?

① 4　② 5　✓③ 6

④ 7　⑤ 8

$30=2\times3\times5$이므로 구하는 분수를 $\frac{a}{30}$라고 할 때, $\frac{a}{30}$를 유한소수로 나타낼 수 있으려면 a는 3의 배수이어야 한다.

이때 $\frac{1}{5}=\frac{6}{30}$, $\frac{5}{6}=\frac{25}{30}$이므로 $\frac{6}{30}<\frac{a}{30}<\frac{25}{30}$

즉, $6<a<25$를 만족시키는 3의 배수인 a는 9, 12, 15, 18, 21, 24이다.

따라서 구하는 분수는 $\frac{9}{30}$, $\frac{12}{30}$, $\frac{15}{30}$, $\frac{18}{30}$, $\frac{21}{30}$, $\frac{24}{30}$의 6개이다.

09 서술형

수직선 위의 0과 1을 나타내는 두 점 사이를 12등분할 때의 11개의 점 중에서 유한소수로 나타낼 수 있는 것의 개수를 구하시오. 3

수직선 위의 0과 1을 나타내는 두 점 사이를 12등분할 때의 11개의 점에 대응하는 유리수를 작은 것부터 나열하면

$\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$, …, $\frac{11}{12}$ …… ㉠ ······ 40 %

이때 $12=2^2\times3$이므로 ㉠에서 유한소수로 나타낼 수 있으려면 분자가 3의 배수이어야 한다. ······ 40 %

따라서 유한소수로 나타낼 수 있는 것은 $\frac{3}{12}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{9}{12}$의 3개이다. ······ 20 %

10 출제 주의

분수 $\frac{21}{2^2\times7\times a}$을 소수로 나타내면 유한소수로 나타내어질 때, 10 이하의 자연수 중 a의 값이 될 수 있는 모든 수의 합은?

① 17　② 29　③ 32

④ 38　✓⑤ 39

$\frac{21}{2^2\times7\times a}=\frac{3}{2^2\times a}$을 유한소수로 나타낼 수 있으려면 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 한다.

따라서 10 이하의 자연수 중 a의 값이 될 수 있는 것은 2의 배수 또는 5의 배수 또는 1 또는 3이므로 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10

따라서 모든 수의 합은 $1+2+3+4+5+6+8+10=39$

11

두 분수 $\frac{25}{180}$와 $\frac{13}{143}$에 각각 자연수 a를 곱하면 두 분수 모두 유한소수로 나타낼 수 있다고 할 때, a의 값이 될 수 있는 가장 작은 자연수는?

① 33　② 56　✓③ 99

④ 104　⑤ 117

$\frac{25}{180}=\frac{5}{2^2\times3^2}$, $\frac{13}{143}=\frac{1}{11}$이므로 두 분수에 각각 자연수 a를 곱하여 두 분수 모두 유한소수로 나타낼 수 있으려면 a는 $3^2=9$와 11의 공배수, 즉 99의 배수이어야 한다.

따라서 가장 작은 자연수 a의 값은 99이다.

12

분수 $\frac{a}{350}$를 소수로 나타내면 유한소수가 되고, 기약분수로 나타내면 $\frac{1}{b}$이 된다. 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $10<a<30$)

✓① 39　② 40　③ 41

④ 42　⑤ 43

$\frac{a}{350}=\frac{a}{2\times5^2\times7}$를 유한소수로 나타낼 수 있으려면 자연수 a는 7의 배수이어야 한다.

이때 $10<a<30$이므로 $a=14$, 21, 28

(ⅰ) $a=14$일 때, $\frac{14}{350}=\frac{1}{25}$이므로 $b=25$

(ⅱ) $a=21$일 때, $\frac{21}{350}=\frac{3}{50}$이므로 성립하지 않는다.

(ⅲ) $a=28$일 때, $\frac{28}{350}=\frac{2}{25}$이므로 성립하지 않는다.

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 $a=14$, $b=25$이므로

$a+b=14+25=39$

개념 3 순환소수를 분수로 나타내기

13

다음 순환소수를 x로 놓고 분수로 나타내려고 할 때, $1000x-10x$를 이용하는 것이 가장 편리한 것은?

① $0.7\dot{1}$　② $3.\dot{4}\dot{9}$　✓③ $0.2\dot{5}\dot{6}$
④ $1.\dot{0}3\dot{8}$　⑤ $0.7\dot{6}2\dot{1}$

① $100x-10x$　② $100x-x$　③ $1000x-10x$
④ $1000x-x$　⑤ $10000x-10x$

14 출제 주의

$\frac{2}{5}<0.\dot{x}<\frac{11}{15}$을 만족시키는 한 자리의 자연수 x의 개수는?

① 1　② 2　✓③ 3
④ 4　⑤ 5

$0.\dot{x}=\frac{x}{9}$이므로 $\frac{2}{5}<\frac{x}{9}<\frac{11}{15}$　$\therefore 18<5x<33$
따라서 이를 만족시키는 한 자리의 자연수 x는 4, 5, 6의 3개이다.

15

다음 중 순환소수 $x=1.713713713\cdots$에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① x는 유리수이다.
② $1000x-x$를 이용하여 분수로 나타낼 수 있다.
③ $1.\dot{7}1\dot{3}$으로 나타낼 수 있다.
✓④ $x=\frac{1711}{999}$이다.
⑤ 순환마디는 713이다.

①, ③, ⑤ $x=1.713713713\cdots=1.\dot{7}1\dot{3}$은 순환소수이므로 유리수이고 순환마디는 713이다.
② $x=1.\dot{7}1\dot{3}$은 $1000x-x$를 이용하여 분수로 나타낼 수 있다.
④ $x=1.\dot{7}1\dot{3}=\frac{1713-1}{999}=\frac{1712}{999}$

16

서로소인 두 자연수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}$를 소수로 나타내면 $0.6\dot{1}$이다. 이때 $\frac{a}{b}$를 순환소수로 나타내시오. $1.\dot{6}\dot{3}$

$0.6\dot{1}=\frac{61-6}{90}=\frac{55}{90}=\frac{11}{18}$이므로 $a=18$, $b=11$
$\therefore \frac{a}{b}=\frac{18}{11}=1.636363\cdots=1.\dot{6}\dot{3}$

17 서술형

순환소수 $3.1\dot{7}$에 어떤 자연수를 곱하여 유한소수로 나타낼 수 있도록 할 때, 100 이하의 자연수 중 곱할 수 있는 가장 큰 수를 구하시오. 99

$3.1\dot{7}=\frac{317-31}{90}=\frac{143}{45}=\frac{143}{3^2\times5}$ ······ 40 %
이 수에 어떤 자연수를 곱하여 유한소수로 나타낼 수 있으려면 곱하는 자연수는 $3^2=9$의 배수이어야 한다. ······ 40 %
따라서 100 이하의 자연수 중 곱할 수 있는 가장 큰 수는 99이다. ······ 20 %

18

다음 중 두 수의 대소 관계가 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $0.\dot{8}<\frac{7}{8}$　② $2.\dot{3}>\frac{10}{3}$
✓③ $0.\dot{5}\dot{1}>\frac{13}{33}$　④ $0.3\dot{9}>\frac{4}{5}$
✓⑤ $0.\dot{2}3\dot{1}<\frac{87}{333}$

① $0.\dot{8}=\frac{8}{9}=\frac{64}{72}$, $\frac{7}{8}=\frac{63}{72}$이므로 $0.\dot{8}>\frac{7}{8}$
② $2.\dot{3}=\frac{23-2}{9}=\frac{21}{9}=\frac{7}{3}$이므로 $2.\dot{3}<\frac{10}{3}$
③ $0.\dot{5}\dot{1}=\frac{51}{99}=\frac{17}{33}$이므로 $0.\dot{5}\dot{1}>\frac{13}{33}$
④ $0.3\dot{9}=\frac{39-3}{90}=\frac{36}{90}=\frac{2}{5}$이므로 $0.3\dot{9}<\frac{4}{5}$
⑤ $0.\dot{2}3\dot{1}=\frac{231}{999}=\frac{77}{333}$이므로 $0.\dot{2}3\dot{1}<\frac{87}{333}$

19

$0.4\dot{6}=4.2\times a$, $0.\dot{9}\dot{3}=93\times b$일 때, $a-b$의 값을 순환소수로 나타내시오. $0.\dot{1}\dot{0}$

$0.4\dot{6}=4.2\times a$에서

$\frac{46-4}{90}=\frac{42}{10}\times a$ $\quad\therefore a=\frac{42}{90}\times\frac{10}{42}=\frac{1}{9}$

$0.\dot{9}\dot{3}=93\times b$에서

$\frac{93}{99}=93\times b$ $\quad\therefore b=\frac{93}{99}\times\frac{1}{93}=\frac{1}{99}$

$\therefore a-b=\frac{1}{9}-\frac{1}{99}=\frac{11}{99}-\frac{1}{99}=\frac{10}{99}=0.\dot{1}\dot{0}$

20

$\frac{11}{45}=x+0.0\dot{9}$일 때, x를 순환소수로 나타내면?

① $0.1\dot{1}$ ② $0.1\dot{2}$ ③ $0.1\dot{3}$
④ $0.\dot{1}\dot{3}$ ✓⑤ $0.1\dot{4}$

$\frac{11}{45}=x+0.0\dot{9}$에서

$x=\frac{11}{45}-0.0\dot{9}=\frac{22}{90}-\frac{9}{90}=\frac{13}{90}=\frac{14-1}{90}$

이므로 x를 순환소수로 나타내면

$x=0.1444\cdots=0.1\dot{4}$

21 출제 주의

어떤 기약분수를 순환소수로 나타내는데 시원이는 분모를 잘못 보아 $0.4\dot{2}$로 나타내었고, 연우는 분자를 잘못 보아 $0.\dot{6}\dot{7}$로 나타내었다. 이때 처음 기약분수를 순환소수로 바르게 나타내면?

① $0.1\dot{9}$ ② $0.01\dot{9}$ ③ $0.\dot{1}9\dot{0}$
✓④ $0.\dot{1}\dot{9}$ ⑤ $0.1\dot{9}\dot{1}$

$0.4\dot{2}=\frac{42-4}{90}=\frac{19}{45}$에서 시원이는 분자를 제대로 보았으므로 처음 기약분수의 분자는 19이다.

$0.\dot{6}\dot{7}=\frac{67}{99}$에서 연우는 분모를 제대로 보았으므로 처음 기약분수의 분모는 99이다.

따라서 처음 기약분수는 $\frac{19}{99}$이므로

$\frac{19}{99}=0.191919\cdots=0.\dot{1}\dot{9}$

개념 4 유리수와 순환소수의 관계

22 출제 주의

다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① 유한소수와 무한소수는 유리수이다.
② 순환소수 중에는 유리수가 아닌 것도 있다.
✓③ 순환소수가 아닌 무한소수는 유리수가 아니다.
④ 유한소수 중 분모와 분자가 0이 아닌 정수인 분수로 나타낼 수 없는 것도 있다.
✓⑤ 분모를 10의 거듭제곱으로 나타낼 수 있는 분수는 유한소수로 나타낼 수 있다.

① 유한소수는 유리수이지만, 무한소수 중 순환소수가 아닌 무한소수는 유리수가 아니다.
② 순환소수는 모두 유리수이다.
④ 유한소수는 모두 분모와 분자가 0이 아닌 정수인 분수로 나타낼 수 있다.

23

다음 보기에서 옳지 않은 것을 모두 고른 것은?

〈 보기 〉
ㄱ. 무한소수는 분모와 분자가 0이 아닌 정수인 분수로 나타낼 수 있다.
ㄴ. 정수가 아닌 유리수는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다.
ㄷ. 분모의 소인수에 3이 있는 분수는 유한소수로 나타낼 수 없다.
ㄹ. 순환소수가 아닌 무한소수는 분모와 분자가 0이 아닌 정수인 분수로 나타낼 수 없다.

① ㄱ, ㄴ ✓② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

ㄱ. 순환하지 않은 무한소수는 분모와 분자가 정수인 분수로 나타낼 수 없다.
ㄷ. 분모에 3이 있는 분수를 기약분수로 나타내었을 때 분모에 3이 없으면 유한소수로 나타낼 수 있다.

01

오른쪽 그림은 어떤 분수를 소수로 나타내기 위해 나눗셈을 하는 과정인데 일부가 보이지 않는다. 이 분수를 순환소수로 나타낼 때, 순환마디를 이루는 숫자의 개수를 구하시오. **3**

```
 )234
  222
  ---
   120
   111
   ---
     90
     74
    ---
    160
    148
    ---
     120
     111
     ---
      90
```

소수점 아래 각 자리에서의 나머지가 12, 9, 16, 12, 9, … 의 순서로 나타난다. 이때 12가 다시 나타날 때부터 몫의 소수점 아래 숫자가 반복되므로 순환마디가 생긴다. 따라서 순환마디를 이루는 숫자의 개수는 3이다.

02 서술형

두 분수 $\frac{7}{41}$과 $\frac{8}{13}$을 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 2000번째 자리의 숫자를 각각 a, b라고 하자. 이때 $10a+b$의 값을 구하시오. **31**

$\frac{7}{41}=0.\dot{1}707\dot{3}$이므로 순환마디를 이루는 숫자는 5개이다.
$2000=5\times400$이므로 소수점 아래 2000번째 자리의 숫자는 순환마디의 5번째 숫자와 같은 3이다. $\therefore a=3$ ······ 40 %
$\frac{8}{13}=0.\dot{6}1538\dot{4}$이므로 순환마디를 이루는 숫자는 6개이다.
$2000=6\times333+2$이므로 소수점 아래 2000번째 자리의 숫자는 순환마디의 2번째 숫자와 같은 1이다. $\therefore b=1$ ······ 40 %
$\therefore 10a+b=10\times3+1=31$ ······ 20 %

03

분수 $\frac{5}{21}$를 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 첫째 자리의 숫자부터 소수점 아래 39번째 자리의 숫자까지의 합을 구하시오. **175**

$\frac{5}{21}=0.\dot{2}3809\dot{5}$이므로 순환마디를 이루는 숫자는 6개이다.
$39=6\times6+3$이므로 순환마디가 6번 반복되고, 소수점 아래 37번째, 38번째, 39번째 자리의 숫자는 각각 순환마디의 1번째, 2번째, 3번째 자리의 숫자와 같으므로 2, 3, 8이다.
따라서 구하는 합은
$(2+3+8+0+9+5)\times6+2+3+8=175$

04

분수 $\frac{3}{7}$을 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 n번째 자리의 숫자를 $f(n)$이라고 하자. 다음 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보기 〉
ㄱ. $f(100)=5$
ㄴ. $f(n)=f(n+6)$
ㄷ. $f(n)=4$를 만족시키는 두 자리 자연수 n의 개수는 17이다.
ㄹ. $f(25)<f(40)$

① ㄱ, ㄹ　② ㄴ, ㄷ　③ ㄱ, ㄴ, ㄷ
✓④ ㄱ, ㄴ, ㄹ　⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

$\frac{3}{7}=0.\dot{4}2857\dot{1}$이므로 순환마디를 이루는 숫자는 6개이고
$f(1)=4$, $f(2)=2$, $f(3)=8$, $f(4)=5$, $f(5)=7$, $f(6)=1$
ㄱ. $100=6\times16+4$이므로 $f(100)=f(4)=5$
ㄴ. 순환마디를 이루는 숫자가 6개이므로 $f(n)=f(n+6)$
ㄷ. $f(n)=4$를 만족시키는 두 자리 자연수 n은 13, 19, …, 97의 15개이다.
ㄹ. $25=6\times4+1$이므로 $f(25)=f(1)=4$, $40=6\times6+4$이므로 $f(40)=f(4)=5$
$\therefore f(25)<f(40)$

05 출제 주의

두 분수 $\frac{1}{7}$과 $\frac{5}{6}$ 사이에 있는 분모가 84이면서 유한소수로 나타낼 수 없는 분수의 개수는?

① 51　② 52　③ 53
✓④ 54　⑤ 55

$84=2^2\times3\times7$이므로 구하는 분수를 $\frac{n}{84}$(n은 자연수)이라고 할 때, $\frac{n}{84}=\frac{7}{2^2\times3\times7}$을 유한소수로 나타낼 수 있으려면 n은 $3\times7=21$의 배수가 되어야 한다.
이때 $\frac{1}{7}=\frac{12}{84}$, $\frac{5}{6}=\frac{70}{84}$이므로 $\frac{12}{84}<\frac{n}{84}<\frac{70}{84}$
즉, $12<n<70$을 만족시키는 21의 배수는 21, 42, 63의 3개이다.
따라서 분모가 84이면서 유한소수로 나타낼 수 없는 분수의 개수는 $12<n<70$을 만족시키는 n의 개수에서 21의 배수의 개수를 빼면 되므로 $57-3=54$

06

세 분수 $\frac{3}{180}$, $\frac{4}{392}$, $\frac{4}{250}$에 각각 자연수 a를 곱하면 세 분수 모두 유한소수로 나타낼 수 있다고 한다. 이때 a의 값이 될 수 있는 가장 작은 자연수를 구하시오. **147**

$\frac{3}{180}=\frac{1}{2^2\times3\times5}$, $\frac{4}{392}=\frac{1}{2\times7^2}$, $\frac{4}{250}=\frac{2}{5^3}$이므로 세 분수에 각각 자연수 a를 곱하여 세 분수 모두 유한소수로 나타낼 수 있으려면 a는 3과 $7^2=49$의 공배수, 즉 147의 배수이어야 한다.
따라서 가장 작은 a의 값은 147이다.

07

x에 대한 일차방정식 $420x-a=8$의 해가 유한소수로 나타날 때, a의 값이 될 수 있는 가장 큰 두 자리 자연수를 구하시오. 97

$420x-a=8$에서 $420x=a+8$ $\quad\therefore x=\dfrac{a+8}{420}=\dfrac{a+8}{2^2\times3\times5\times7}$

이때 $\dfrac{a+8}{420}$이 유한소수로 나타내어지려면 $a+8$이 3과 7의 공배수인 21의 배수이어야 한다.

즉, $a+8$의 값이 될 수 있는 수는 21, 42, 63, 84, 105, …

이므로 a가 될 수 있는 수는 13, 34, 55, 76, 97, …

따라서 a의 값이 될 수 있는 가장 큰 두 자리 자연수는 97이다.

08

다음 조건을 만족시키는 분수 $\dfrac{n}{175}$의 값의 합을 구하시오. (단, n은 자연수이다.) 7

(가) $2<\dfrac{n}{175}<6$

(나) $\dfrac{n}{175}$은 유한소수로 나타낼 수 있다.

(다) 분자 n은 어떤 자연수의 제곱이다.

$\dfrac{n}{175}=\dfrac{n}{5^2\times7}$을 유한소수로 나타낼 수 있으려면 n은 7의 배수이어야 한다.

분자 n은 어떤 자연수의 제곱이므로 $n=7^2\times m^2$ (m은 자연수)의 꼴이어야 한다.

$2<\dfrac{n}{175}<6$, 즉 $\dfrac{350}{175}<\dfrac{n}{175}<\dfrac{1050}{175}$이므로 $350<n<1050$

즉, $350<7^2\times m^2<1050$이므로 $\dfrac{350}{49}<m^2<\dfrac{1050}{49}$ …… ㉠

㉠을 만족시키는 자연수 m의 값은 3, 4이다.

$m=3$일 때, $n=7^2\times3^2=441$, $m=4$일 때, $n=7^2\times4^2=784$

따라서 조건을 만족시키는 분수 $\dfrac{n}{175}$의 값의 합은 $\dfrac{441}{175}+\dfrac{784}{175}=\dfrac{1225}{175}=7$

09

분수 $\dfrac{a}{140}$를 소수로 나타내면 유한소수이고, 기약분수로 나타내면 $\dfrac{c}{b}$이다. 자연수 a, b, c에 대하여 $30<a<60$일 때, $a+b+c$의 값이 될 수 없는 것은?

① 40 ② 55 ③ 63

④ 76 ✓⑤ 87

$\dfrac{a}{140}=\dfrac{a}{2^2\times5\times7}$를 유한소수로 나타낼 수 있으려면 a는 7의 배수이어야 한다.

이때 $30<a<60$이므로 a의 값은 35, 42, 49, 56이다.

(i) $a=35$일 때, $\dfrac{a}{140}=\dfrac{1}{4}$이므로 $b=4$, $c=1$ $\quad\therefore a+b+c=35+4+1=40$

(ii) $a=42$일 때, $\dfrac{a}{140}=\dfrac{3}{10}$이므로 $b=10$, $c=3$ $\quad\therefore a+b+c=42+10+3=55$

(iii) $a=49$일 때, $\dfrac{a}{140}=\dfrac{7}{20}$이므로 $b=20$, $c=7$ $\quad\therefore a+b+c=49+20+7=76$

(iv) $a=56$일 때, $\dfrac{a}{140}=\dfrac{2}{5}$이므로 $b=5$, $c=2$ $\quad\therefore a+b+c=56+5+2=63$

10 출제 주의

$\dfrac{189}{2\times5^3\times x}=\dfrac{3^3\times7}{2\times5^3\times x}$

분수 $A=\dfrac{189}{2\times5^3\times x}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 두 자리 자연수 x의 값의 합을 구하시오. 123

(가) 분수 A를 소수로 나타내면 유한소수가 된다.

(나) 분수 A를 $\dfrac{a}{10^n}$ (a, n은 자연수)의 꼴로 나타냈을 때, n은 5보다 크거나 같다.

(다) 조건 (나)에서 구해진 자연수 A는 9의 배수이지만 27의 배수는 아니다.

분수 A의 분모 $2\times5^3\times x$를 $2^{p+1}\times5^{q+3}\times k$ (k는 $3^3\times7$의 약수)라고 할 때

$p+1=5$, $q+3\le5$ 또는 $p+1\le5$, $q+3=5$이어야 하므로 $p=4$, $q\le2$ 또는 $p\le4$, $q=2$

조건 (다)에 의하여 x는 3을 소인수로 갖고, 3의 지수는 1이다. $\quad\therefore k=3$ 또는 $k=3\times7$

(i) $k=3$, $p=4$, $q\le2$일 때, $q=0$이면 $x=2^4\times3=48$, $q=1$이면 $x=2^4\times5\times3=240$
이때 x는 두 자리 자연수이므로 x의 값은 48이다.

(ii) $k=3$, $p\le4$, $q=2$일 때, $p=0$이면 $x=5^2\times3=75$, $p=1$이면 $x=2\times5^2\times3=150$
이때 x는 두 자리 자연수이므로 x의 값은 75이다.

(iii) $k=3\times7$, $p=4$, $q\le2$일 때, $q=0$이면 $x=2^4\times3\times7=336$

(iv) $k=3\times7$, $p\le4$, $q=2$일 때, $p=0$이면 $x=5^2\times3\times7=525$

(i)~(iv)에 의하여 구하는 두 자리 자연수 x의 값은 48, 75이므로 그 합은 $48+75=123$

11

$\dfrac{A}{2^2\times3^3\times5\times n}$

자연수 A와 n에 대하여 분수 $\dfrac{A}{540\times n}$를 소수로 나타내면 유한소수가 되고, 기약분수로 나타내면 $\dfrac{1}{B}$이 된다. A가 두 자리 자연수일 때, 가능한 한 자리 자연수 n의 개수는?

① 5 ② 6 ✓③ 7

④ 8 ⑤ 9

A는 분모 $540\times n=2^2\times3^3\times5\times n$의 약수이어야 하고 3^3과 n에 포함된 2, 5 이외의 소인수와 모두 약분되어야 한다.

따라서 $A=3^3\times k$ (k는 자연수)의 꼴이므로 두 자리 자연수 A는 27, 54, 81이다.

(i) $A=27=3^3$일 때, $\dfrac{A}{540\times n}=\dfrac{1}{2^2\times5\times n}$을 유한소수로 나타낼 수 있어야 하므로 가능한 한 자리 자연수 n의 값은 1, 2, 4, 5, 8이다.

(ii) $A=54=2\times3^3$일 때, $\dfrac{A}{540\times n}=\dfrac{1}{2\times5\times n}$을 유한소수로 나타낼 수 있어야 하므로 가능한 한 자리 자연수 n의 값은 1, 2, 4, 5, 8이다.

(iii) $A=81=3^4$일 때, $\dfrac{A}{540\times n}=\dfrac{3}{2^2\times5\times n}$을 기약분수로 나타내었을 때 분자가 1이어야 하고 유한소수로 나타낼 수 있어야 하므로 가능한 한 자리 자연수 n의 값은 3, 6이다.

(i)~(iii)에 의하여 한 자리 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8의 7개이다.

12

다음 조건을 만족시키는 x의 개수는?

(가) x는 30 이하의 자연수이다.

(나) $N=\dfrac{9}{2^2\times5\times x}$는 유한소수로 나타낼 수 있다.

① 8 ② 11 ③ 14

✓④ 17 ⑤ 20

N을 유한소수로 나타낼 수 있으려면 소인수가 2 또는 5인 수를 A라고 할 때 x는 1 또는 A 또는 $3\times A$ 또는 $3^2\times A$의 꼴이다.

(i) $x=A$의 꼴일 때, x의 값은 2, 2^2, 2^3, 2^4, 5, 5^2, 2×5, $2^2\times5$의 8개이다.

(ii) $x=3\times A$의 꼴일 때, x의 값은 3, 2×3, $2^2\times3$, $2^3\times3$, 3×5, $2\times3\times5$의 6개이다.

(iii) $x=3^2\times A$의 꼴일 때, x의 값은 3^2, 2×3^2의 2개이다.

(i)~(iii)에 의하여 x의 개수는 $1+8+6+2=17$이다.

13 서술형

서로 다른 한 자리 자연수 a, b에 대하여 분수 $A=\dfrac{b}{2^2\times3\times5^2\times a}$를 유한소수로 나타낼 수 없을 때 가장 큰 A의 값을 M, 가장 작은 A의 값을 m이라고 하자. 이때 $M-m$의 값을 구하시오. $\dfrac{71}{2700}$

$A=\dfrac{b}{2^2\times3\times5^2\times a}$를 유한소수로 나타낼 수 없는 수는 기약분수로 나타내었을 때 분모에 2 또는 5 이외의 소인수가 있어야 한다. ········ 30 %

(ⅰ) $\dfrac{b}{2^2\times3\times5^2\times a}$가 가장 큰 수가 될 때

$a=1$, $b=8$일 때 가장 크다. $\therefore M=\dfrac{8}{2^2\times3\times5^2\times1}=\dfrac{2}{75}$ ········ 30 %

(ⅱ) $\dfrac{b}{2^2\times3\times5^2\times a}$가 가장 작은 수가 될 때

$a=9$, $b=1$일 때 가장 작다. $\therefore m=\dfrac{1}{2^2\times3\times5^2\times9}=\dfrac{1}{2700}$ ········ 30 %

$\therefore M-m=\dfrac{2}{75}-\dfrac{1}{2700}=\dfrac{71}{2700}$ ········ 10 %

14 출제 주의

다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b를 순서쌍 (a, b)로 나타낼 때, (a, b)의 개수는?

(가) $a+b=100$
(나) $\dfrac{11}{45}\times\dfrac{b}{a}$는 유한소수로 나타내어진다.

✓① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

조건 (나)에서 $\dfrac{11}{45}\times\dfrac{b}{a}=\dfrac{11\times b}{3^2\times5\times a}$이므로 b는 $3^2=9$의 배수이어야 한다.
조건 (가)에서 $a+b=100$이므로 $b<100$ $\therefore b=9, 18, 27, \dots, 99$
또, a의 값은 1 또는 소인수가 2 또는 5뿐인 수이거나 그 수에 11을 곱한 수이다.
조건 (가)에서 $a+b=100$, 즉 $a=100-b$이므로

$b=9$일 때, $a=91=7\times13$	$b=63$일 때, $a=37$
$b=18$일 때, $a=82=2\times41$	$b=72$일 때, $a=28=2^2\times7$
$b=27$일 때, $a=73$	$b=81$일 때, $a=19$
$b=36$일 때, $a=64=2^6$	$b=90$일 때, $a=10=2\times5$
$b=45$일 때, $a=55=5\times11$	$b=99$일 때, $a=1$
$b=54$일 때, $a=46=2\times23$	

따라서 주어진 조건을 만족시키는 a, b에 대하여 순서쌍 (a, b)는 $(1, 99)$, $(10, 90)$, $(55, 45)$, $(64, 36)$의 4개이다.

15

분수 $\dfrac{18}{k}$을 소수로 나타내면 유한소수이고, k는 $18<k\le100$인 자연수이다. 이때 k의 개수를 구하시오. 18

$\dfrac{18}{k}=\dfrac{2\times3^2}{k}$을 유한소수로 나타낼 수 있으려면 k는 소인수가 2 또는 5인 수이거나 그 수에 3을 곱하거나 9를 곱한 수이어야 한다.
이때 $18<k\le100$이므로
(ⅰ) k의 소인수가 2 또는 5일 때
k의 값은 2^5, 2^6, 5^2, 2×5^2, $2^2\times5$, $2^2\times5^2$, $2^3\times5$, $2^4\times5$의 8개이다.
(ⅱ) k가 소인수가 2 또는 5인 수에 3을 곱한 수일 때
k의 값은 $2^3\times3$, $2^4\times3$, $2^5\times3$, 3×5^2, $2\times3\times5$, $2^2\times3\times5$의 6개이다.
(ⅲ) k가 소인수가 2 또는 5인 수에 9를 곱한 수일 때
k의 값은 $2^2\times3^2$, $2^3\times3^2$, $3^2\times5$, $2\times3^2\times5$의 4개이다.
(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 k의 개수는 $8+6+4=18$이다.

16

분수 $\dfrac{42}{k}$를 소수로 나타내면 유한소수일 때, $\dfrac{1}{5}<\dfrac{42}{k}<\dfrac{1}{2}$을 만족시키는 자연수 k의 개수는?

① 12 ✓② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$\dfrac{42}{k}=\dfrac{2\times3\times7}{k}$을 유한소수로 나타낼 수 있으려면 k는 소인수가 2 또는 5인 수이거나 그 수에 3 또는 7을 곱한 수이어야 한다.
이때 $\dfrac{1}{5}<\dfrac{42}{k}<\dfrac{1}{2}$에서 $\dfrac{42}{210}<\dfrac{42}{k}<\dfrac{42}{84}$
즉, $84<k<210$이므로
(ⅰ) k의 소인수가 2 또는 5일 때, k의 값은 2^7, 5^3, $2^2\times5^2$, $2^3\times5^2$, $2^5\times5$의 5개이다.
(ⅱ) k가 소인수가 2 또는 5인 수에 3을 곱한 수일 때, k의 값은 $2^5\times3$, $2^6\times3$, $2\times3\times5^2$, $2^3\times3\times5$의 4개이다.
(ⅲ) k가 소인수가 2 또는 5인 수에 7을 곱한 수일 때, k의 값은 $2^4\times7$, $5^2\times7$, $2^2\times5\times7$의 3개이다.
(ⅳ) k가 소인수가 2 또는 5인 수에 3과 7을 곱한 수일 때, k의 값은 $2^3\times3\times7$, $5\times3\times7$의 2개이다.
(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 k의 개수는 $5+4+3+2=14$이다.

17

순환소수 a는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 순환마디는 소수점 아래 첫째 자리부터 시작한다.
(나) 순환마디를 이루는 숫자의 개수는 3이다.

a를 기약분수로 나타낼 때, 기약분수의 분모가 될 수 있는 수의 개수를 구하시오. (단, $0<a<1$) 5

순환마디는 소수점 아래 첫째 자리부터 시작하고, 순환마디를 이루는 숫자의 개수가 3이므로 $a=0.\dot{b}c\dot{d}$ (b, c, d는 한 자리의 음이 아닌 정수)의 꼴이다.
따라서 $a=\dfrac{bcd}{999}$이고 a를 기약분수로 나타낼 때 분모가 될 수 있는 수는 999의 약수이다.
즉, 조건을 만족시키는 a의 값은 999의 약수 1, 3, 9, 27, 37, 111, 333, 999 중 1과 9 또는 99의 약수인 1, 3, 9를 제외한 수이므로 구하는 수는
27, 37, 111, 333, 999의 5개이다.

18

분수 $\dfrac{a}{396}$를 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 첫째 자리부터 순환마디를 이루는 숫자의 개수는 2이다. 이를 만족시키는 두 자리 자연수 a의 개수는?

① 19 ✓② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

소수점 아래 첫째 자리부터 순환마디를 이루는 숫자의 개수가 2인 순환소수를 분수로 나타내면 분모는 99이다. 즉,
$\dfrac{a}{396}=\dfrac{a}{2^2\times3^2\times11}=\dfrac{a}{99\times4}$
에서 분모의 4가 약분되어야 하므로 a는 4의 배수이어야 하고, 순환마디를 이루는 숫자의 개수가 2이므로 11의 배수가 아니어야 한다.
따라서 두 자리 자연수 a는 12, 16, 20, …, 96의 22개에서 44, 88의 2개를 뺀 20개이다.

19

양수 a에서 정수로 나타나는 부분을 뺀 값을 $\langle a\rangle$로 나타낼 때, $\langle a\rangle=\langle 1000a\rangle$를 만족시키는 a의 값이 될 수 있는 것은?

① $3.1\dot{4}\dot{5}$ ✓② $7.\dot{0}4\dot{5}$ ③ $9.0\dot{1}2\dot{3}$
④ $12.\dot{3}\dot{5}$ ⑤ $15.3\dot{8}$

① $3.1\dot{4}\dot{5}=3.1454545\cdots$이므로 $\langle 3.1\dot{4}\dot{5}\rangle=0.1\dot{4}\dot{5}$
$1000\times3.1\dot{4}\dot{5}=3145.454545\cdots$이므로 $\langle 1000\times3.1\dot{4}\dot{5}\rangle=0.\dot{4}\dot{5}$
② $7.\dot{0}4\dot{5}=7.045045\cdots$이므로 $\langle 7.\dot{0}4\dot{5}\rangle=0.\dot{0}4\dot{5}$
$1000\times7.\dot{0}4\dot{5}=7045.045045\cdots$이므로 $\langle 1000\times7.\dot{0}4\dot{5}\rangle=0.\dot{0}4\dot{5}$
③ $9.0\dot{1}2\dot{3}=9.012312\cdots$이므로 $\langle 9.0\dot{1}2\dot{3}\rangle=0.0\dot{1}2\dot{3}$
$1000\times9.0\dot{1}2\dot{3}=9012.312312\cdots$이므로 $\langle 1000\times9.0\dot{1}2\dot{3}\rangle=0.\dot{3}1\dot{2}$
④ $12.\dot{3}\dot{5}=12.353535\cdots$이므로 $\langle 12.\dot{3}\dot{5}\rangle=0.\dot{3}\dot{5}$
$1000\times12.\dot{3}\dot{5}=12353.535353\cdots$이므로 $\langle 1000\times12.\dot{3}\dot{5}\rangle=0.\dot{5}\dot{3}$
⑤ $15.3\dot{8}=15.3888\cdots$이므로 $\langle 15.3\dot{8}\rangle=0.3\dot{8}$
$1000\times15.3\dot{8}=15388.888\cdots$이므로 $\langle 1000\times15.3\dot{8}\rangle=0.\dot{8}$

20

$\frac{1}{20}<0.\dot{0}\dot{x}<\frac{1}{6}$을 만족시키는 한 자리 자연수 x의 개수는?

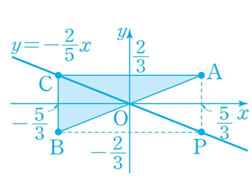
① 4 ✓② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

$0.\dot{0}\dot{x}=\frac{x}{99}$이므로 $\frac{1}{20}<0.\dot{0}\dot{x}<\frac{1}{6}$에서
$\frac{1}{20}<\frac{x}{99}<\frac{1}{6}$, $\frac{99}{20}<x<\frac{33}{2}$
$\therefore\ 4.95<x<16.5$
따라서 주어진 조건을 만족시키는 한 자리 자연수 x는 5, 6, 7, 8, 9의 5개이다.

21

정비례 관계인 $y=-\frac{2}{5}x$의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{P}(1.\dot{6},\ a)$와 x축에 대하여 대칭인 점을 A, y축에 대하여 대칭인 점을 B, 원점에 대하여 대칭인 점을 C라고 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 순환소수로 나타내면 $b.\dot{c}$이다. 이때 $b+c$의 값을 구하시오. (단, b, c는 한 자리 자연수이다.) 4

$1.\dot{6}=\frac{5}{3}$이고 점 $\mathrm{P}(1.\dot{6},\ a)$, 즉 $\mathrm{P}\left(\frac{5}{3},\ a\right)$는 $y=-\frac{2}{5}x$의 그래프 위의 점이므로
$a=-\frac{2}{5}\times\frac{5}{3}=-\frac{2}{3}$ $\therefore\ \mathrm{P}\left(\frac{5}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$
$\therefore\ \mathrm{A}\left(\frac{5}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, $\mathrm{B}\left(-\frac{5}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$, $\mathrm{C}\left(-\frac{5}{3},\ \frac{2}{3}\right)$
따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{20}{9}=2.\dot{2}$
즉, $b=2$, $c=2$이므로 $b+c=2+2=4$



22 출제 주의

$\frac{9}{56}=\frac{x_1}{10}+\frac{x_2}{10^2}+\frac{x_3}{10^3}+\cdots$을 만족시키는 음이 아닌 한 자리 정수 x_1, x_2, x_3, …에 대하여 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{50}$의 값은?

① 212 ② 214 ③ 216
✓④ 218 ⑤ 220

$\frac{9}{56}=0.160714285714285\cdots=0.160\dot{7}1428\dot{5}$
$x_1=1$, $x_2=6$, $x_3=0$, $x_4=7$, $x_5=1$, $x_6=4$, $x_7=2$, $x_8=8$, $x_9=5$, $x_{10}=7$, $x_{11}=1$, …
즉, $\frac{9}{56}$는 소수점 아래 네 번째 자리부터 순환마디를 이루며, 순환마디를 이루는 숫자는 7, 1, 4, 2, 8, 5의 6개이다.
$50=3+6\times7+5$이므로 순환마디가 7번 반복되고
$x_{46}=x_4=7$, $x_{47}=x_5=1$, $x_{48}=x_6=4$, $x_{49}=x_7=2$, $x_{50}=x_8=8$
$\therefore\ x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{50}$
$=(1+6+0)+(7+1+4+2+8+5)\times7+(7+1+4+2+8)$
$=218$

23

$1+\frac{2}{10}+\frac{5}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\cdots=\frac{a}{b}$일 때, 서로소인 두 자연수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

✓① 25 ② 26 ③ 27
④ 35 ⑤ 36

$1+\frac{2}{10}+\frac{5}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\cdots$
$=1+0.2+0.05+0.002+0.0005+\cdots$
$=1.252525\cdots=1.\dot{2}\dot{5}$
$=\frac{125-1}{99}=\frac{124}{99}$
따라서 $a=124$, $b=99$이므로
$a-b=124-99=25$

24

$5-\frac{6}{10^2}-\frac{6}{10^4}-\frac{6}{10^6}-\cdots$을 계산하여 기약분수로 나타낸 것은?

① $\frac{160}{33}$ ✓② $\frac{163}{33}$ ③ $\frac{166}{33}$
④ $\frac{169}{33}$ ⑤ $\frac{172}{33}$

$5-\frac{6}{10^2}-\frac{6}{10^4}-\frac{6}{10^6}-\cdots$
$=5-\frac{6}{100}-\frac{6}{10000}-\frac{6}{1000000}-\cdots$
$=5-(0.06+0.0006+0.000006+\cdots)$
$=5-0.060606\cdots=5-0.\dot{0}\dot{6}$
$=5-\frac{6}{99}=\frac{163}{33}$

25 출제 주의

$A=\frac{2}{5}+\frac{1}{50}+\frac{2}{500}+\frac{1}{5000}+\cdots$일 때, $\frac{11}{7}A$의 값을 기약분수로 나타내면 $\frac{y}{x}$가 된다. 이때 $x+y$의 값을 구하시오. 5

$A=\frac{2}{5}+\frac{1}{50}+\frac{2}{500}+\frac{1}{5000}+\cdots$

$=\frac{4}{10}+\frac{2}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{2}{10000}+\cdots$

$=0.4+0.02+0.004+0.0002+\cdots$

$=0.\dot{4}\dot{2}=\frac{42}{99}=\frac{14}{33}$

이므로 $\frac{11}{7}A=\frac{11}{7}\times\frac{14}{33}=\frac{2}{3}$

따라서 $x=3$, $y=2$이므로

$x+y=3+2=5$

26

자연수 n에 대하여 $13^n+17^n+19^n$의 일의 자리의 숫자를 a_n이라고 할 때, $\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\frac{a_4}{10^4}+\cdots$의 값을 기약분수로 나타내시오. $\frac{3331}{3333}$

13^n의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 반복하여 나타나고, 17^n의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1이 반복하여 나타나고, 19^n의 일의 자리의 숫자는 9, 1이 반복하여 나타난다.

따라서 $13^n+17^n+19^n$의 일의 자리의 숫자 a_n은

$n=1$일 때, $3+7+9=19$ $\quad\therefore a_1=9$

$n=2$일 때, $9+9+1=19$ $\quad\therefore a_2=9$

$n=3$일 때, $7+3+9=19$ $\quad\therefore a_3=9$

$n=4$일 때, $1+1+1=3$ $\quad\therefore a_4=3$

$n=5$일 때, $3+7+9=19$ $\quad\therefore a_5=9$

⋮

$\therefore \frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\frac{a_4}{10^4}+\frac{a_5}{10^5}+\cdots$

$=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\frac{9}{10^5}+\cdots$

$=0.9+0.09+0.009+0.0003+0.00009+\cdots$

$=0.\dot{9}99\dot{3}=\frac{9993}{9999}=\frac{3331}{3333}$

27 서술형

두 자연수 a, b에 대하여 순환소수 $0.4\dot{a}\dot{7}$을 분수로 나타내면 $\frac{b}{330}$가 된다고 할 때, 모든 $a+b$의 값의 합을 구하시오. (단, a는 한 자리 자연수이다.) 468

$0.4\dot{a}\dot{7}=\frac{(400+10a+7)-4}{990}=\frac{403+10a}{990}$이므로

$\frac{403+10a}{990}=\frac{b}{330}$ $\quad\therefore b=\frac{403+10a}{3}=134+\frac{10a+1}{3}$ ··· 40 %

이때 b는 자연수이므로 $10a+1$은 3의 배수이어야 하고 a는 한 자리 자연수이므로

$a=2$ 또는 $a=5$ 또는 $a=8$이다. ··· 30 %

(i) $a=2$일 때, $b=134+\frac{10\times2+1}{3}=134+7=141$ $\quad\therefore a+b=2+141=143$

(ii) $a=5$일 때, $b=134+\frac{10\times5+1}{3}=134+17=151$ $\quad\therefore a+b=5+151=156$

(iii) $a=8$일 때, $b=134+\frac{10\times8+1}{3}=134+27=161$ $\quad\therefore a+b=8+161=169$

(i)~(iii)에 의하여 모든 $a+b$의 값의 합은 $143+156+169=468$ ··· 30 %

28 출제 주의

순환소수 $1.4\dot{6}$을 기약분수로 나타내면 $\frac{b}{a}$가 된다. 두 분수 $\frac{b}{a}\times x$와 $\frac{a}{b}\times x$를 모두 유한소수로 나타낼 수 있도록 하는 자연수 x의 값 중 가장 작은 수는?

(단, a, b는 자연수이다.)

① 15 ② 21 ③ 27
✓④ 33 ⑤ 39

$1.4\dot{6}=\frac{146-14}{90}=\frac{22}{15}$이므로 $a=15$, $b=22$

$\frac{b}{a}\times x=\frac{2\times11}{3\times5}\times x$를 유한소수로 나타낼 수 있으려면 x는 3의 배수이어야 한다.

또, $\frac{a}{b}\times x=\frac{3\times5}{2\times11}\times x$를 유한소수로 나타낼 수 있으려면 x는 11의 배수이어야 한다.

따라서 x의 값은 3과 11의 공배수, 즉 33의 배수이므로 가장 작은 x의 값은 33이다.

29

순환소수 $1.\dot{2}\dot{7}$에 자연수 A를 곱하면 어떤 자연수의 제곱이 된다고 한다. 이때 A의 값 중 가장 작은 세 자리 자연수를 구하시오. 154

$1.\dot{2}\dot{7}=\frac{127-1}{99}=\frac{14}{11}=\frac{2\times7}{11}$이므로 $\frac{2\times7}{11}\times A$가 어떤 자연수의 제곱이 되려면

A는 11의 배수이면서 소인수분해 했을 때 지수가 모두 짝수이어야 한다.

$A=2\times7\times11\times k^2$ (k는 자연수)의 꼴이어야 하므로 A의 값 중 가장 작은 세 자리 자연수는 $2\times7\times11\times1^2=154$이다.

30

어떤 수 x에 $0.\dot{2}\dot{5}$를 곱해야 할 것을 잘못하여 0.25를 곱했더니, 바르게 계산한 결과보다 $0.\dot{5}$만큼 작게 나왔다. 이때 x의 값을 구하시오. 220

$0.\dot{2}\dot{5}x-0.25x=0.\dot{5}$이므로

$\frac{25}{99}x-\frac{25}{100}x=\frac{5}{9}$

$2500x-2475x=5500$

$25x=5500$ $\quad\therefore x=220$

31

서로 다른 네 수 a, b, $0.\dot{2}\dot{7}$, $0.\dot{7}\dot{2}$를 수직선 위에 나타내면 이웃한 두 점 사이의 거리가 모두 같다. $ab<0$일 때, $a+b$의 값 중 가장 큰 수는?

① $\frac{5}{11}$ ② $\frac{11}{12}$ ✓③ 1
④ $\frac{13}{12}$ ⑤ $\frac{13}{11}$

$ab<0$이므로 a와 b 중 하나는 음수이다.
$a<b$라고 하면 $a<0<b$이고, 이때 이웃하는 두 점 사이의 거리는
$0.\dot{7}\dot{2}-0.\dot{2}\dot{7}=\frac{72}{99}-\frac{27}{99}=\frac{5}{11}$
따라서 $a+b$의 값이 가장 크려면 $a<0.\dot{2}\dot{7}<0.\dot{7}\dot{2}<b$이어야 한다.
$a=0.\dot{2}\dot{7}-\frac{5}{11}=\frac{27}{99}-\frac{5}{11}=-\frac{2}{11}$
$b=0.\dot{7}\dot{2}+\frac{5}{11}=\frac{72}{99}+\frac{5}{11}=\frac{13}{11}$
따라서 $a+b$의 값 중 가장 큰 수는 $-\frac{2}{11}+\frac{13}{11}=1$

32 출제 주의

등식 $0.8\dot{x}=\frac{x+45}{60}$를 만족시키는 한 자리 자연수 x의 값을 구하시오. 9

$0.8\dot{x}=\frac{(80+x)-8}{90}=\frac{72+x}{90}$이므로
$\frac{72+x}{90}=\frac{x+45}{60}$
$2(72+x)=3(x+45)$
$144+2x=3x+135$
$\therefore x=9$

33 서술형

두 일차방정식

$$0.\dot{6}x-1.\dot{6}=3.\dot{3}-x,\ 0.\dot{7}x-1=0.\dot{2}x+k$$

의 해가 서로 같을 때, 상수 k의 값을 구하시오. $\frac{2}{3}$

$0.\dot{6}x-1.\dot{6}=3.\dot{3}-x$에서
$\frac{6}{9}x-\frac{16-1}{9}=\frac{33-3}{9}-x$
$\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}=\frac{10}{3}-x$, $\frac{5}{3}x=5$
$\therefore x=3$ ········· 50 %
$x=3$을 $0.\dot{7}x-1=0.\dot{2}x+k$, 즉 $\frac{7}{9}x-1=\frac{2}{9}x+k$에 대입하면
$\frac{7}{9}\times3-1=\frac{2}{9}\times3+k$
$\frac{4}{3}=\frac{2}{3}+k$ $\therefore k=\frac{2}{3}$ ········· 50 %

34

한 자리 자연수 a, $b\,(a>b)$에 대하여 두 순환소수 $0.a\dot{b}$와 $0.b\dot{a}$의 합이 $0.\dot{3}$일 때, $0.a\dot{b}-0.b\dot{a}$의 값은?

① 0.08 ✓② $0.0\dot{8}$ ③ $0.\dot{0}\dot{8}$
④ $0.00\dot{8}$ ⑤ $0.0\dot{0}\dot{8}$

$0.a\dot{b}+0.b\dot{a}=0.\dot{3}$에서
$\frac{(10a+b)-a}{90}+\frac{(10b+a)-b}{90}=\frac{3}{9}$
$\frac{10a+10b}{90}=\frac{1}{3}$ $\therefore a+b=3$
이때 a, b는 $a>b$인 한 자리 자연수이므로 $a=2$, $b=1$
$\therefore 0.a\dot{b}-0.b\dot{a}=0.2\dot{1}-0.1\dot{2}=\frac{21-2}{90}-\frac{12-1}{90}=\frac{8}{90}=0.0\dot{8}$

35

한 자리 자연수 a, $b\,(a>b)$에 대하여 $0.\dot{a}\dot{b}-0.\dot{b}\dot{a}=0.\dot{1}\dot{8}$일 때, $0.\dot{a}\dot{b}+0.\dot{b}\dot{a}$의 값이 될 수 있는 수 중 가장 큰 값을 기약분수로 나타내면 $\frac{q}{p}$이다. 이때 $p+q$의 값은?

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ✓⑤ 25

$0.\dot{a}\dot{b}-0.\dot{b}\dot{a}=0.\dot{1}\dot{8}$에서 $\frac{10a+b}{99}-\frac{10b+a}{99}=\frac{18}{99}$
$(10a+b)-(10b+a)=18$, $9a-9b=18$ $\therefore a-b=2$ ······ ㉠
한편,
$0.\dot{a}\dot{b}+0.\dot{b}\dot{a}=\frac{10a+b}{99}+\frac{10b+a}{99}=\frac{a+b}{9}$이므로 $0.\dot{a}\dot{b}+0.\dot{b}\dot{a}$의 값이 가장 큰 값일 때에는 $a+b$의 값이 가장 클 때이다.
㉠을 만족시키는 한 자리 자연수 a, b를 순서쌍 (a, b)로 나타내면
$(9, 7)$, $(8, 6)$, $(7, 5)$, $(6, 4)$ $(5, 3)$, $(4, 2)$, $(3, 1)$
이고 $a+b$의 값이 가장 크려면 $a=9$, $b=7$일 때이다.
따라서 가장 큰 $0.\dot{a}\dot{b}+0.\dot{b}\dot{a}$의 값은 $\frac{a+b}{9}=\frac{9+7}{9}=\frac{16}{9}$
이므로 $p=9$, $q=16$ $\therefore p+q=9+16=25$

36

$0.\dot{y}\dot{x}=\frac{7}{11}$이고 $0.xy\dot{z}=\frac{37}{100}$일 때, 한 자리 자연수 x, y, z에 대하여 $x+y+z$의 값은?

① 13 ② 14 ③ 16
④ 17 ✓⑤ 18

$\frac{7}{11}=0.636363\cdots=0.\dot{6}\dot{3}$이므로 $y=6$, $x=3$
즉, $0.xy\dot{z}=\frac{11}{30}$에서 $0.36\dot{z}=\frac{37}{100}$이므로
$\frac{(360+z)-36}{900}=\frac{37}{100}$, $\frac{324+z}{900}=\frac{37}{100}$
$324+z=333$ $\therefore z=9$
$\therefore x+y+z=3+6+9=18$

37 서술형

$3\le a\le 7$, $5\le c\le 9$, $a<b<c$인 세 자연수 a, b, c에 대하여 세 순환소수 $0.\dot{a}$, $0.0\dot{b}$, $0.00\dot{c}$가 $\dfrac{0.\dot{a}}{0.0\dot{b}}=\dfrac{0.0\dot{b}}{0.00\dot{c}}$를 만족시킬 때, 세 수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값을 구하시오. **19**

$\dfrac{0.\dot{a}}{0.0\dot{b}}=\dfrac{0.0\dot{b}}{0.00\dot{c}}$에서 $(0.0\dot{b})^2=0.\dot{a}\times 0.00\dot{c}$, $\left(\dfrac{b}{90}\right)^2=\dfrac{a}{9}\times\dfrac{c}{900}$ $\quad\therefore b^2=ac$ ····40 %

$3\le a\le 7$, $5\le c\le 9$에서 $15\le ac\le 63$이므로 $15\le b^2\le 63$, 즉 자연수 b의 값은 4, 5, 6, 7

(i) $b=4$일 때, $ac=16$이므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수 a, c의 값은 없다.

(ii) $b=5$일 때, $ac=25$이므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수 a, c의 값은 $a=5$, $c=5$

(iii) $b=6$일 때, $ac=36$이므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수 a, c의 값은 $a=4$, $c=9$ 또는 $a=6$, $c=6$

(iv) $b=7$일 때, $ac=49$이므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수 a, c의 값은 $a=7$, $c=7$

(i)~(iv)에 의하여 $b^2=ac$를 만족시키는 세 자연수 a, b, c를 순서쌍 (a, b, c)로 나타내면

$(4, 6, 9)$, $(5, 5, 5)$, $(6, 6, 6)$, $(7, 7, 7)$ ······························30 %

이때 $a<b<c$이므로 $a=4$, $b=6$, $c=9$

$\therefore a+b+c=4+6+9=19$ ······························30 %

38 출제 주의

반지름의 길이가 6인 원이 있다. 이 원에서 반지름의 길이를 $\dfrac{1}{10}$로 줄이는 과정을 반복할 때, 처음 원의 넓이와 반지름의 길이를 줄이는 과정을 하여 생긴 모든 원의 넓이의 합은 $\dfrac{b}{a}\pi$이다. 이때 $a+b$의 값을 구하시오. **411**

(단, a와 b는 서로소인 자연수이다.)

첫 번째 원의 반지름의 길이가 6이므로 원의 넓이는 $\pi\times 6^2=36\pi$

두 번째 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{6}{10}$이므로 원의 넓이는 $\pi\times\left(\dfrac{6}{10}\right)^2=0.36\pi$

세 번째 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{6}{100}$이므로 원의 넓이는 $\pi\times\left(\dfrac{6}{100}\right)^2=0.0036\pi$

⋮

따라서 모든 원의 넓이의 합은

$36\pi+0.36\pi+0.0036\pi+\cdots$

$=\pi\times 36.\dot{3}\dot{6}=\pi\times\dfrac{3636-36}{99}=\dfrac{400}{11}\pi$

이므로 $a=11$, $b=400$

$\therefore a+b=11+400=411$

39

어떤 공을 바닥에 떨어뜨리면 떨어진 높이의 $\dfrac{1}{10}$만큼 다시 튀어 오른다. 이 공을 80 cm의 높이에서 떨어뜨렸을 때, 공이 완전히 멈출 때까지 움직인 거리의 합을 순환소수로 나타내시오. **$97.\dot{7}$**

공을 80 cm의 높이에서 떨어뜨리면 공은 $80\times\dfrac{1}{10}=8$ (cm)만큼 튀어 오르고,

다시 바닥에 떨어뜨리면 공은 $8\times\dfrac{1}{10}=0.8$ (cm)만큼 튀어 오른다.

공이 완전히 멈출 때까지 움직인 거리의 합은

$80+2\times 80\times\dfrac{1}{10}+2\times 80\times\dfrac{1}{10^2}+2\times 80\times\dfrac{1}{10^3}+\cdots$

$=80+2\times(8+0.8+0.08+0.008+\cdots)$

$=80+2\times 8.\dot{8}=80+\dfrac{160}{9}$

$=80+17.\dot{7}=97.\dot{7}$

40

주어진 악보대로 연주되는 소리는 '레파도'의 음이 반복되므로 입력한 분수를 순환소수로 나타내었을 때의 순환마디는 837이다.

따라서 입력해야 하는 값은 $0.\dot{8}3\dot{7}$이므로 이를 기약분수로 나타내면

$0.\dot{8}3\dot{7}=\dfrac{837}{999}=\dfrac{31}{37}$

반복되는 기계음을 수로 나타내기 위해 다음과 같이 각 음계에 수를 대응시키는 사운드 모듈 기기를 개발하였다.

도	레	미	파	솔	라	시	도	레	미
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

이 기기에 분수를 입력하면 그 분수를 소수로 나타내었을 때, 소숫점 아래의 숫자에 해당하는 음을 차례대로 출력해 준다. 예를 들어 이 기기에 분수 $\dfrac{3}{11}$을 입력하면 $\dfrac{3}{11}=0.272727\cdots$이므로 오른쪽 그림과 같은 '미도'의 음이 반복된다.

이 기기에 오른쪽 악보의 음이 반복적으로 연주되도록 입력해야 할 분수를 구하시오. (단, 입력하는 분수는 0보다 크고 1보다 작은 기약분수이다.) **$\dfrac{31}{37}$**

(i) 일요일에서 나타낼 수 있는 분수는 $\dfrac{3}{10}=\dfrac{3}{2\times 5}$, $\dfrac{10}{17}=\dfrac{2\times 5}{17}$, $\dfrac{17}{24}=\dfrac{17}{2^3\times 3}$

(ii) 월요일에서 나타낼 수 있는 분수는 $\dfrac{4}{11}=\dfrac{2^2}{11}$, $\dfrac{11}{18}=\dfrac{11}{2\times 3^2}$, $\dfrac{18}{25}=\dfrac{2\times 3^2}{5^2}$

(iii) 화요일에서 나타낼 수 있는 분수는 $\dfrac{5}{12}=\dfrac{5}{2^2\times 3}$, $\dfrac{12}{19}=\dfrac{2^2\times 3}{19}$, $\dfrac{19}{26}=\dfrac{19}{2\times 13}$

41 출제 주의

오른쪽 그림은 준희가 졸업하는 해의 1월 달력이다. 준희의 졸업식은 2월이고 다음 조건을 만족한다고 할 때, 준희의 졸업식의 날짜는? (단, 2월은 28일까지 있다.)

01 January

일	월	화	수	목	금	토
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

(가) 연속된 세로 두 칸을 하나의 분수로 본다.

예를 들어 달력에서 $\begin{array}{|c|}\hline 15\\\hline 22\\\hline\end{array}$는 분수 $\dfrac{15}{22}$로 나타낸다.

(나) 졸업식이 있는 요일에서 나타낼 수 있는 분수 중 유한소수는 2개이다.

(다) 졸업식이 2월 x일이면 $x-1$은 소수이다.

① 2월 6일 ② 2월 8일 ③ 2월 12일

✓④ 2월 14일 ⑤ 2월 20일

02 February

일	월	화	수	목	금	토
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28		

(iv) 수요일에서 나타낼 수 있는 분수는 $\dfrac{6}{13}=\dfrac{2\times 3}{13}$, $\dfrac{13}{20}=\dfrac{13}{2^2\times 5}$, $\dfrac{20}{27}=\dfrac{2^2\times 5}{3^3}$

(v) 목요일에서 나타낼 수 있는 분수는 $\dfrac{7}{14}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{14}{21}=\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{21}{28}=\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2^2}$

(vi) 금요일에서 나타낼 수 있는 분수는 $\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2^3}$, $\dfrac{8}{15}=\dfrac{2^3}{3\times 5}$, $\dfrac{15}{22}=\dfrac{3\times 5}{2\times 11}$

(vii) 토요일에서 나타낼 수 있는 분수는 $\dfrac{2}{9}=\dfrac{2}{3^2}$, $\dfrac{9}{16}=\dfrac{3^2}{2^4}$, $\dfrac{16}{23}$

이때 목요일에 있는 수 7, 14, 21, 28에 대하여 조건 (다)를 만족시키는 날은 14일이다.

개념 1 지수법칙

01
다음을 만족시키는 자연수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?

$$4^3+4^3+4^3+4^3=4^x \qquad 7^3\times7^3\times7^3\times7^3=7^y$$

① 9　② 10　③ 15
✓④ 16　⑤ 20

$4^3+4^3+4^3+4^3=4^3\times4=4^4=4^x$이므로
$x=4$
$7^3\times7^3\times7^3\times7^3=7^{3+3+3+3}=7^{12}=7^y$이므로
$y=12$
$\therefore x+y=4+12=16$

02 출제 주의
$64^{3x-2}=4^{4x+4}$일 때, 자연수 x의 값을 구하시오. 2

$64^{3x-2}=2^{6(3x-2)}=2^{18x-12}$
$4^{4x+4}=2^{2(4x+4)}=2^{8x+8}$
즉, $2^{18x-12}=2^{8x+8}$이므로
$18x-12=8x+8$, $10x=20$
$\therefore x=2$

03 서술형
$\left(-\dfrac{2x^ay^3}{z^2}\right)^b=\dfrac{cx^{20}y^{12}}{z^d}$일 때, 자연수 a, b, c, d에 대하여 $a-b+c-d$의 값을 구하시오. 9

$\left(-\dfrac{2x^ay^3}{z^2}\right)^b=(-1)^b\times\dfrac{2^bx^{ab}y^{3b}}{z^{2b}}$ ······ 40 %
즉, $(-1)^b\times\dfrac{2^bx^{ab}y^{3b}}{z^{2b}}=\dfrac{cx^{20}y^{12}}{z^d}$이므로
$(-1)^b\times2^b=c$, $ab=20$, $3b=12$, $2b=d$
$\therefore b=4$, $a=5$, $d=8$, $c=16$ ······ 40 %
$\therefore a-b+c-d=5-4+16-8=9$ ······ 20 %

04
$2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=224$일 때, 자연수 x의 값은?

① 4　✓② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

$2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=2^x+2^x\times2+2^x\times2^2$
$=2^x\times(1+2+2^2)$
$=2^x\times7$
즉, $2^x\times7=224$이므로
$2^x=32=2^5$　$\therefore x=5$

05
$3^{x+2}=A$일 때, 27^x을 A를 사용하여 나타내면? (단, x는 자연수이다.)

① $\dfrac{A^2}{81}$　② $\dfrac{A^3}{81}$　✓③ $\dfrac{A^3}{729}$
④ $81A^2$　⑤ $729A^3$

$A=3^{x+2}=3^x\times3^2=3^x\times9$이므로 $3^x=\dfrac{A}{9}$
$\therefore 27^x=(3^3)^x=3^{3x}=(3^x)^3=\left(\dfrac{A}{9}\right)^3=\dfrac{A^3}{9^3}=\dfrac{A^3}{729}$

06
$2^{14}\times3^2\times5^{13}$은 n자리의 자연수이고, 각 자리의 숫자의 합이 k일 때, $n+k$의 값을 구하시오. 24

$2^{14}\times3^2\times5^{13}=2\times3^2\times(2\times5)^{13}=18\times10^{13}$
따라서 $2^{14}\times3^2\times5^{13}$은 15자리의 자연수이므로 $n=15$
각 자리의 숫자의 합은 $1+8=9$이므로 $k=9$
$\therefore n+k=15+9=24$

개념 2 단항식의 곱셈과 나눗셈

07

$(-Ax^2y)^2\times 2x^4y^B=32x^Cy^4$일 때, 자연수 A, B, C에 대하여 $A+B-C$의 값을 구하시오. -2

$(-Ax^2y)^2\times 2x^4y^B=A^2x^4y^2\times 2x^4y^B=2A^2x^8y^{2+B}$
즉, $2A^2x^8y^{2+B}=32x^Cy^4$이므로
$2A^2=32$, $8=C$, $2+B=4$ $\quad\therefore B=2$
이때 A는 자연수이므로 $A^2=16$에서 $A=4$
$\therefore A+B-C=4+2-8=-2$

08 출제 주의

$(2a^2b)^{\boxed{ㄱ}}\div(2a^3b^{\boxed{ㄴ}})^2=\dfrac{16a^6}{b^2}$일 때, 두 자연수 ㄱ, ㄴ의 차를 구하시오. 2

$(2a^2b)^{ㄱ}\div(2a^3b^{ㄴ})^2=\dfrac{2^{ㄱ}a^{2\times ㄱ}b^{ㄱ}}{4a^6b^{2\times ㄴ}}$
즉, $\dfrac{2^{ㄱ}a^{2\times ㄱ}b^{ㄱ}}{4a^6b^{2\times ㄴ}}=\dfrac{16a^6}{b^2}$이므로
$\dfrac{2^{ㄱ}}{4}=16$, $2\times ㄱ-6=6$, $2\times ㄴ-ㄱ=2$
$2^{ㄱ}=64=2^6$에서 $ㄱ=6$
$2\times ㄴ-6=2$에서 $2\times ㄴ=8$ $\quad\therefore ㄴ=4$
따라서 두 자연수 ㄱ, ㄴ의 차는
$6-4=2$

09 출제 주의

다음 중 옳지 않은 것은?

① $(-2x^2y)^3\div 2xy^3=-4x^5$
② $5x^2y\times 2xy\div\left(-\dfrac{5}{2}x^2y\right)=-4xy$
③ $(-x^3y^2)^2\times(-xy^2)=-x^7y^6$
✓④ $3x^3y\times\left(-\dfrac{1}{2}x^2y^2\right)\div\dfrac{1}{3}y=-\dfrac{9}{2}x^5y^3$
⑤ $\left(-\dfrac{1}{4}x^3\right)\div 2x^2y\div\left(-\dfrac{3}{4}x^2y^3\right)=\dfrac{1}{6xy^4}$

① $(-2x^2y)^3\div 2xy^3=-8x^6y^3\times\dfrac{1}{2xy^3}=-4x^5$
② $5x^2y\times 2xy\div\left(-\dfrac{5}{2}x^2y\right)=5x^2y\times 2xy\times\left(-\dfrac{2}{5x^2y}\right)=-4xy$
③ $(-x^3y^2)^2\times(-xy^2)=x^6y^4\times(-xy^2)=-x^7y^6$
④ $3x^3y\times\left(-\dfrac{1}{2}x^2y^2\right)\div\dfrac{1}{3}y=3x^3y\times\left(-\dfrac{1}{2}x^2y^2\right)\times\dfrac{3}{y}=-\dfrac{9}{2}x^5y^2$
⑤ $\left(-\dfrac{1}{4}x^3\right)\div 2x^2y\div\left(-\dfrac{3}{4}x^2y^3\right)=\left(-\dfrac{1}{4}x^3\right)\times\dfrac{1}{2x^2y}\times\left(-\dfrac{4}{3x^2y^3}\right)=\dfrac{1}{6xy^4}$

10

다음 식을 만족시키는 A, B에 대하여 $B\div A$를 계산하면?

$$(-x^3y^2)^3\div(-xy^2)^2\times A=9x^7y^3$$
$$(-3x^2y^3)^2\times B\div(3xy^2)^4=-3x^5y^2$$

① $\dfrac{1}{3x^5y^5}$ ② $\dfrac{1}{-3x^5y^3}$ ③ $-3x^5y^3$
✓④ $3x^5y^3$ ⑤ $3x^5y^5$

$(-x^3y^2)^3\div(-xy^2)^2\times A=9x^7y^3$에서 $-x^9y^6\div x^2y^4\times A=9x^7y^3$
$\therefore A=9x^7y^3\div(-x^9y^6)\times x^2y^4=9x^7y^3\times\left(-\dfrac{1}{x^9y^6}\right)\times x^2y^4=-9y$
$(-3x^2y^3)^2\times B\div(3xy^2)^4=-3x^5y^2$에서
$9x^4y^6\times B\div 81x^4y^8=-3x^5y^2$
$\therefore B=-3x^5y^2\div 9x^4y^6\times 81x^4y^8=-3x^5y^2\times\dfrac{1}{9x^4y^6}\times 81x^4y^8=-27x^5y^4$
$\therefore B\div A=-27x^5y^4\div(-9y)=-27x^5y^4\times\left(-\dfrac{1}{9y}\right)=3x^5y^3$

11

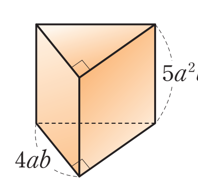
어떤 식에 $-\dfrac{4x^2}{y^3}$을 곱해야 하는데 잘못하여 $-\dfrac{4x^2}{y^3}$으로 나누었더니 $\dfrac{1}{2}xy^6$이 되었다. 이때 바르게 계산한 결과는?

① $-8x^5$ ② $-4x^3y^5$ ③ $-2x^3y^3$
④ $2x^3y^3$ ✓⑤ $8x^5$

어떤 식을 A라고 하면 $A\div\left(-\dfrac{4x^2}{y^3}\right)=\dfrac{1}{2}xy^6$
$\therefore A=\dfrac{1}{2}xy^6\times\left(-\dfrac{4x^2}{y^3}\right)=-2x^3y^3$
따라서 바르게 계산하면 $-2x^3y^3\times\left(-\dfrac{4x^2}{y^3}\right)=8x^5$

12 서술형

오른쪽 그림과 같이 밑면이 직각삼각형인 삼각기둥이 있다. 이 삼각기둥의 부피가 $40a^5b^4$, 높이가 $5a^2b$이고, 밑면인 직각삼각형의 밑변의 길이가 $4ab$일 때, 밑면인 직각삼각형의 높이를 구하시오. $4a^2b^2$



밑면인 직각삼각형의 높이를 x라고 하면
밑면의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 4ab\times x=2ab\times x$ ······ 20 %
삼각기둥의 부피가 $40a^5b^4$이므로 $2ab\times x\times 5a^2b=40a^5b^4$ ······ 40 %
$10a^3b^2\times x=40a^5b^4$
$\therefore x=40a^5b^4\div 10a^3b^2=40a^5b^4\times\dfrac{1}{10a^3b^2}=4a^2b^2$
따라서 밑면인 직각삼각형의 높이는 $4a^2b^2$이다. ······ 40 %

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

01

다음을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e에 대하여 $a+b+c+d+e$의 값은?

$$\frac{9\times10\times11\times12\times13\times14\times15\times16}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8}=2^a\times3^b\times5^c\times11^d\times13^e$$

① 3 ② 4 ③ 5
✓④ 6 ⑤ 7

$1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8=2^7\times3^2\times5\times7$
$9\times10\times11\times12\times13\times14\times15\times16=2^8\times3^4\times5^2\times7\times11\times13$
$\therefore \frac{9\times10\times11\times12\times13\times14\times15\times16}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8}=\frac{2^8\times3^4\times5^2\times7\times11\times13}{2^7\times3^2\times5\times7}$
$=2\times3^2\times5\times11\times13$
따라서 $2\times3^2\times5\times11\times13=2^a\times3^b\times5^c\times11^d\times13^e$이므로
$a=1$, $b=2$, $c=1$, $d=1$, $e=1$
$\therefore a+b+c+d+e=1+2+1+1+1=6$

02

자연수 a, b, c, d에 대하여 $(x^ay^bz^c)^d=x^{90}y^{27}z^{36}$이 성립할 때, 가장 작은 $a+b+c$의 값을 구하시오. 17

$(x^ay^bz^c)^d=x^{ad}y^{bd}z^{cd}=x^{90}y^{27}z^{36}$에서 d의 값이 가장 클 때
$a+b+c$는 가장 작은 값이 된다.
자연수 d는 90, 27, 36의 최대공약수일 때 그 값이 가장 크다.
$90=2\times3^2\times5$, $27=3^3$, $36=2^2\times3^2$이므로 최대공약수는
$3^2=9$ $\therefore d=9$
$9a=90$에서 $a=10$, $9b=27$에서 $b=3$
$9c=36$에서 $c=4$
따라서 가장 작은 $a+b+c$의 값은 $10+3+4=17$

03 출제 주의

$\left(\frac{16^5-64^4}{64^2-16^2}\right)^2=2^k$일 때, 자연수 k의 값은?

① 23 ✓② 24 ③ 25
④ 26 ⑤ 27

$\left(\frac{16^5-64^4}{64^2-16^2}\right)^2=\left(-\frac{64^4-16^5}{64^2-16^2}\right)^2=\left\{-\frac{(2^6)^4-(2^4)^5}{(2^6)^2-(2^4)^2}\right\}^2$
$=\left(-\frac{2^{24}-2^{20}}{2^{12}-2^8}\right)^2=\left\{-\frac{2^{20}(2^4-1)}{2^8(2^4-1)}\right\}^2$
$=(-2^{12})^2=2^{24}$
즉, $2^{24}=2^k$이므로 $k=24$

04

다음 두 식을 만족시키는 상수 a, b에 대하여 $\frac{3a^2}{2b}$의 값을 구하시오. $\frac{6}{5}$

$$\frac{27^4+9^5}{3^{10}+81^2}=3^a,\ (-2x^3)^b=-32x^{15}$$

$\frac{27^4+9^5}{3^{10}+81^2}=\frac{(3^3)^4+(3^2)^5}{3^{10}+(3^4)^2}=\frac{3^{12}+3^{10}}{3^{10}+3^8}=\frac{3^{10}(3^2+1)}{3^8(3^2+1)}=3^2$
즉, $3^2=3^a$이므로 $a=2$
$(-2x^3)^b=(-2)^bx^{3b}=-32x^{15}$이므로
$3b=15$ $\therefore b=5$
$\therefore \frac{3a^2}{2b}=\frac{3\times2^2}{2\times5}=\frac{6}{5}$

05

다음 등식을 만족시키는 상수 k의 값을 구하시오. 25
(단, n은 자연수이다.)

$$\left(\frac{27^{n+1}+3^{3n+1}}{9^{n+1}-3\times9^n}\right)^2=k\times9^n$$

$27^{n+1}+3^{3n+1}=(3^3)^{n+1}+3^{3n+1}=3^{3n+3}+3^{3n+1}=3^{3n+1}\times(3^2+1)=10\times3^{3n+1}$
$9^{n+1}-3\times9^n=9\times9^n-3\times9^n=9^n\times(9-3)=6\times3^{2n}$
$\therefore \left(\frac{27^{n+1}+3^{3n+1}}{9^{n+1}-3\times9^n}\right)^2=\left(\frac{10\times3^{3n+1}}{6\times3^{2n}}\right)^2=\left\{\frac{5}{3}\times3^{(3n+1)-2n}\right\}^2$
$=\left(\frac{5}{3}\times3^{n+1}\right)^2=(5\times3^n)^2=25\times9^n$
즉, $25\times9^n=k\times9^n$이므로 $k=25$이다.

06

$7^{100}<x^{150}<5^{200}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은?

① 26 ② 28 ✓③ 30
④ 32 ⑤ 34

$7^{100}<x^{150}<5^{200}$에서 $49^{50}<(x^3)^{50}<625^{50}$
$\therefore 49<x^3<625$ …… ㉠
부등식 ㉠을 만족시키는 자연수 x의 값은 4, 5, 6, 7, 8이다.
따라서 모든 자연수 x의 값의 합은 $4+5+6+7+8=30$

07

n이 자연수일 때, 다음 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보기 〉
ㄱ. $(-1)^n\times(-1)^{n+1}=-1$
ㄴ. $(-1)^{3-2n}+(-1)^{2n}=2$
ㄷ. $(-1)^{2n-1}-(-1)^{3n}\times(-1)^{5n}=-2$
ㄹ. $(-1)^{4n}\times(-1)^{2-3n}\div(-1)^{-n}=-1$

① ㄱ, ㄴ　② ㄴ, ㄷ　✓③ ㄱ, ㄷ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. $(-1)^n\times(-1)^{n+1}=(-1)^{2n+1}=-1$
ㄴ. $(-1)^{3-2n}+(-1)^{2n}=-1+1=0$
ㄷ. $(-1)^{2n-1}-(-1)^{3n}\times(-1)^{5n}=(-1)^{2n-1}-(-1)^{8n}=-1-1=-2$
ㄹ. $(-1)^{4n}\times(-1)^{2-3n}\div(-1)^{-n}=(-1)^{4n+2-3n-(-n)}=(-1)^{2+2n}=1$

08 서술형

자연수 n에 대하여 $\dfrac{10^{998}}{10^{30}+10^{20}}=a\times10^n$일 때, n의 값을 구하시오. (단, $1<a<10$) 967

$\dfrac{10^{998}}{10^{30}+10^{20}}=\dfrac{10^{998}}{10^{20}(10^{10}+1)}=\dfrac{10^{978}}{10^{10}+1}=a\times10^n$ ························ 30 %
$10^{10}<10^{10}+1<10^{11}$에서
$\dfrac{10^{978}}{10^{11}}<\dfrac{10^{978}}{10^{10}+1}<\dfrac{10^{978}}{10^{10}}$이므로
$\dfrac{10^{978}}{10^{11}}<a\times10^n<\dfrac{10^{978}}{10^{10}}$
$10^{967}<a\times10^n<10^{968}$ ························ 40 %
이때 $1<a<10$이므로 $n=967$이다. ························ 30 %

09

두 자연수 x, y가 등식 $3(x+1)-2(y+2)=5$를 만족시킨다. 이때 두 식 A, B에 대하여 $\dfrac{A}{B}$의 값을 구하시오. 64

$$A=4^{2x+y}\times2^{x-3y},\ B=\frac{8^x\times16^y}{2^{x+3y}}$$

$3(x+1)-2(y+2)=5$에서 $3x+3-2y-4=5$　$\therefore 3x-2y=6$
$A=4^{2x+y}\times2^{x-3y}=2^{4x+2y}\times2^{x-3y}=2^{5x-y}$
$B=\dfrac{8^x\times16^y}{2^{x+3y}}=\dfrac{2^{3x}\times2^{4y}}{2^{x+3y}}=2^{(3x+4y)-(x+3y)}=2^{2x+y}$
$\therefore \dfrac{A}{B}=\dfrac{2^{5x-y}}{2^{2x+y}}=2^{(5x-y)-(2x+y)}=2^6=64$

10

$6^{x+1}(2^{x+3}+2^{x+4})=a^{x+b}$일 때, 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 12　✓② 14　③ 16
④ 18　⑤ 20

$6^{x+1}(2^{x+3}+2^{x+4})=(2\times3)^{x+1}(2^{x+3}+2\times2^{x+3})$
$=2^{x+1}\times3^{x+1}\times2^{x+3}\times(1+2)$
$=2^{2x+4}\times3^{x+2}$
$=4^{x+2}\times3^{x+2}$
$=12^{x+2}$
즉, $12^{x+2}=a^{x+b}$이므로 $a=12$, $b=2$
$\therefore a+b=12+2=14$

11

$3^{x+4}+3^{x+3}+3^{x+2}+3^{x+1}+3^x=9801$을 만족시키는 자연수 x의 값을 구하시오. 4

$3^{x+4}+3^{x+3}+3^{x+2}+3^{x+1}+3^x=9801$에서
$3^4\times3^x+3^3\times3^x+3^2\times3^x+3\times3^x+3^x=9801$
$(3^4+3^3+3^2+3+1)\times3^x=9801$
$121\times3^x=9801$
$3^x=81=3^4$　$\therefore x=4$

12 출제 주의

다음을 계산하시오. $\dfrac{32}{27}$

$$\frac{8^4+8^4}{3^2+3^2+3^2}\div\frac{4^5+4^5+4^5+4^5}{9^4+9^4+9^4}\times\frac{2^4+2^4+2^4}{27^3+27^3+27^3}$$

$\dfrac{8^4+8^4}{3^2+3^2+3^2}\div\dfrac{4^5+4^5+4^5+4^5}{9^4+9^4+9^4}\times\dfrac{2^4+2^4+2^4}{27^3+27^3+27^3}$
$=\dfrac{2\times8^4}{3\times3^2}\div\dfrac{4\times4^5}{3\times9^4}\times\dfrac{3\times2^4}{3\times27^3}$
$=\dfrac{2\times(2^3)^4}{3\times3^2}\times\dfrac{3\times(3^2)^4}{2^2\times(2^2)^5}\times\dfrac{3\times2^4}{3\times(3^3)^3}$
$=\dfrac{2^{13}}{3^3}\times\dfrac{3^9}{2^{12}}\times\dfrac{2^4}{3^9}$
$=\dfrac{2^5}{3^3}=\dfrac{32}{27}$

13

$a=2^{x+1}$일 때, $\dfrac{4^{x+1}-2^{2x}}{8^x+2^x}$을 a를 이용하여 나타내시오. $\dfrac{6a}{a^2+4}$

$a=2^{x+1}=2\times2^x$에서 $2^x=\dfrac{a}{2}$

$$\therefore \frac{4^{x+1}-2^{2x}}{8^x+2^x}=\frac{4\times(2^x)^2-(2^x)^2}{(2^x)^3+2^x}=\frac{3\times(2^x)^2}{(2^x)^3+2^x}$$
$$=\frac{3\times\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^3+\frac{a}{2}}=\frac{\frac{3a^2}{4}}{\frac{a^3}{8}+\frac{a}{2}}$$
$$=\frac{6a^2}{a^3+4a}=\frac{6a}{a^2+4}$$

14

$a=2^{x+1}$, $b=10^x$일 때, $\dfrac{15^x+60^x+75^x}{12^x+30^x}$을 a, b를 이용하여 나타내시오. (단, x는 2 이상의 자연수이다.)

$\dfrac{8ab+2a^3b+16b^2}{a^4+4a^2b}$

$a=2^{x+1}=2^x\times2$에서 $2^x=\dfrac{a}{2}$ …… ㉠

$b=10^x=(2\times5)^x=2^x\times5^x$에서 $b=\dfrac{a}{2}\times5^x$ $\quad\therefore 5^x=\dfrac{2b}{a}$ …… ㉡

$$\frac{15^x+60^x+75^x}{12^x+30^x}=\frac{(3\times5)^x+(2^2\times3\times5)^x+(3\times5^2)^x}{(2^2\times3)^x+(2\times3\times5)^x}$$
$$=\frac{3^x\times5^x+(2^x)^2\times3^x\times5^x+3^x\times(5^x)^2}{(2^x)^2\times3^x+2^x\times3^x\times5^x}$$
$$=\frac{5^x+(2^x)^2\times5^x+(5^x)^2}{(2^x)^2+2^x\times5^x}$$

위의 식에 ㉠, ㉡을 대입하면

$$\frac{5^x+(2^x)^2\times5^x+(5^x)^2}{(2^x)^2+2^x\times5^x}=\frac{\frac{2b}{a}+\left(\frac{a}{2}\right)^2\times\frac{2b}{a}+\left(\frac{2b}{a}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a}{2}\times\frac{2b}{a}}=\frac{\frac{2b}{a}+\frac{ab}{2}+\frac{4b^2}{a^2}}{\frac{a^2}{4}+b}$$
$$=\frac{8ab+2a^3b+16b^2}{a^4+4a^2b}$$

15

$4^{a+b}=p$, $9^{a+b}=q$일 때, $\left(\dfrac{81}{4}\right)^{a+3b}\times\left(\dfrac{4}{81}\right)^{-a+b}$을 p, q를 이용하여 나타낸 것은? (단, a, b는 자연수이고, $a<b$이다.)

① $\dfrac{q}{p}$ ② $\dfrac{q^2}{p}$ ③ $\dfrac{q^3}{p^2}$

✓④ $\dfrac{q^4}{p^2}$ ⑤ $\dfrac{q^4}{p^3}$

$$\left(\frac{81}{4}\right)^{a+3b}\times\left(\frac{4}{81}\right)^{-a+b}=\left(\frac{9^2}{4}\right)^{a+3b}\times\left(\frac{4}{9^2}\right)^{-a+b}=\frac{9^{2a+6b}}{4^{a+3b}}\times\frac{4^{-a+b}}{9^{-2a+2b}}$$

이때 a, b는 자연수이고 $a<b$이므로 $2a+6b>-2a+2b$, $-a+b<a+3b$

$$\therefore\left(\frac{81}{4}\right)^{a+3b}\times\left(\frac{4}{81}\right)^{-a+b}=\frac{9^{2a+6b}}{4^{a+3b}}\times\frac{4^{-a+b}}{9^{-2a+2b}}=\frac{9^{(2a+6b)-(-2a+2b)}}{4^{(a+3b)-(-a+b)}}$$
$$=\frac{(9^{a+b})^4}{(4^{a+b})^2}=\frac{q^4}{p^2}$$

16 출제 주의

$x=y-3$을 만족시키는 두 자연수 x, y에 대하여 $a=7^{3x}$, $b=343^y$일 때, $\dfrac{a}{b}$의 값은?

✓① $\dfrac{1}{7^9}$ ② $\dfrac{1}{7^3}$ ③ 1

④ 7^3 ⑤ 7^9

$x=y-3$이므로 $y>x$이고 $y-x=3$

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{7^{3x}}{343^y}=\frac{7^{3x}}{7^{3y}}=\frac{1}{7^{3y-3x}}=\frac{1}{7^{3(y-x)}}=\frac{1}{7^9}$$

17 서술형

$16^{x+1}\times5^3\div8^{x-1}$이 여섯 자리 자연수가 되게 하는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. 12

$16^{x+1}\times5^3\div8^{x-1}=2^{4x+4}\times5^3\div2^{3x-3}=2^{x+7}\times5^3=2^{x+4}\times10^3$ ··· 40 %

이때 $2^{x+4}\times10^3=2^{x+4}\times1000$이 여섯 자리 자연수이므로

2^{x+4}은 세 자리 자연수이어야 한다.

2의 거듭제곱 중 세 자리 자연수는 $2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$ ··· 40 %

즉, $x+4=7$ 또는 $x+4=8$ 또는 $x+4=9$이므로

$x=3$ 또는 $x=4$ 또는 $x=5$

따라서 모든 자연수 x의 값의 합은 $3+4+5=12$이다. ··· 20 %

18

다음 조건을 만족시키는 두 자연수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하시오. 16

> (가) $\dfrac{27^{x+1}\times3^{2x}}{9^{x-2}}=81^{7-x}$
>
> (나) $2^{4x+1}\times3^{x-1}\times5^{4x-1}$은 y자리의 자연수이다.

조건 (가)에서 $\dfrac{27^{x+1}\times3^{2x}}{9^{x-2}}=\dfrac{3^{3x+3}\times3^{2x}}{3^{2x-4}}=3^{3x+7}$

$81^{7-x}=3^{28-4x}$

즉, $3^{3x+7}=3^{28-4x}$이므로

$3x+7=28-4x$, $7x=21$ $\quad\therefore x=3$

조건 (나)에서 $2^{4x+1}\times3^{x-1}\times5^{4x-1}=2^{13}\times3^2\times5^{11}=2^2\times3^2\times10^{11}=36\times10^{11}$

즉, 36×10^{11}은 13자리의 자연수이므로 $y=13$이다.

$\therefore x+y=3+13=16$

19

$N=(25^4+25^4)^3\times(8^5+8^5+8^5+8^5)^2\div(10^7+10^7)$에 대하여 N은 a자리의 자연수이고, N의 최고 자리의 숫자가 b일 때, $10a+b$의 값을 구하시오. 214

$N=(25^4+25^4)^3\times(8^5+8^5+8^5+8^5)^2\div(10^7+10^7)$

$=\dfrac{(2\times25^4)^3\times(4\times8^5)^2}{2\times10^7}=\dfrac{(2\times5^8)^3\times(2^2\times2^{15})^2}{2\times2^7\times5^7}=\dfrac{2^3\times5^{24}\times2^{34}}{2^8\times5^7}$

$=2^{29}\times5^{17}=2^{12}\times10^{17}=4096\times10^{17}$

따라서 N은 21자리의 수이고, 최고 자리의 숫자는 4이므로

$a=21$, $b=4$

$\therefore\ 10a+b=10\times21+4=214$

20

$\left(\dfrac{5}{3}\right)^{198}\times(1.5)^{201}\times(0.4)^{205}\times\dfrac{1}{36}$을 계산하였을 때, 소수점 아래 n번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수 m이 나오고, 소수점 아래 0을 제외한 모든 숫자의 곱은 a이다. 이때 $a+n-m$의 값을 구하시오. 93

$\left(\dfrac{5}{3}\right)^{198}\times(1.5)^{201}\times(0.4)^{205}\times\dfrac{1}{36}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^{198}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^{201}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^{205}\times\dfrac{1}{2^2\times3^2}$

$=\dfrac{2^2\times3}{5^7}=2^9\times3\times\dfrac{1}{2^7}\times\dfrac{1}{5^7}$

$=1536\times\left(\dfrac{1}{10}\right)^7$

즉, 소수점 아래 4번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수 1이 나오고, 소수점 아래 0을 제외한 모든 숫자는 1, 5, 3, 6이다.

따라서 $n=4$, $m=1$, $a=1\times5\times3\times6=90$이므로 $a+n-m=90+4-1=93$

21 출제 주의

빛의 속도는 초속 3.0×10^5 km이다. 태양에서 화성까지의 거리가 2.34×10^{11} m일 때, 태양의 빛이 화성에 도달하는 데 몇 분 걸리는지 구하시오. 13분

2.34×10^{11} (m)$=2.34\times10^8$ (km)이므로 태양의 빛이 화성에 도달하는 데 걸리는 시간은

$\dfrac{2.34\times10^8}{3.0\times10^5}=0.78\times10^3=780$(초)

따라서 태양의 빛이 화성에 도달하는 데 $\dfrac{780}{60}=13$(분) 걸린다.

22

$x:y:z=1:3:2$일 때, $\left(\dfrac{1}{2}xyz^3\right)^2\div\dfrac{x^2}{8}\div(2x)^2yz^5$의 값은?

① 1　② 2　✓③ 3　④ 4　⑤ 5

$\left(\dfrac{1}{2}xyz^3\right)^2\div\dfrac{x^2}{8}\div(2x)^2yz^5=\dfrac{1}{4}x^2y^2z^6\times\dfrac{8}{x^2}\times\dfrac{1}{4x^2yz^5}=\dfrac{yz}{2x^2}$ …… ㉠

이때 $x:y:z=1:3:2$이므로 $x=k$, $y=3k$, $z=2k$ (k는 자연수)라 하고 ㉠에 대입하면

$\dfrac{yz}{2x^2}=\dfrac{3k\times2k}{2k^2}=3$

23 서술형

자연수 a, b에 대하여 $x=a^b$일 때 $\langle a, x\rangle=b$와 같이 나타내자. 자연수 n에 대하여 $\langle 4n, x\rangle=3$, $\langle 8n^2, 2y\rangle=2$, $\left\langle n, \dfrac{z}{2}\right\rangle=2$일 때, $\dfrac{xy}{z}=pn^q$이 되게 하는 두 자연수 p, q의 합을 구하시오. 1029

$\langle 4n, x\rangle=3$에서 $x=(4n)^3=64n^3$ …… ㉠

$\langle 8n^2, 2y\rangle=2$에서 $2y=(8n^2)^2=64n^4$　$\therefore\ y=32n^4$ …… ㉡

$\left\langle n, \dfrac{z}{2}\right\rangle=2$에서 $\dfrac{z}{2}=n^2$　$\therefore\ z=2n^2$ …… ㉢ …… 40 %

$\dfrac{xy}{z}$에 ㉠, ㉡, ㉢을 대입하면

$\dfrac{xy}{z}=\dfrac{64n^3\times32n^4}{2n^2}=1024n^5$ …… 40 %

따라서 $p=1024$, $q=5$이므로

$p+q=1024+5=1029$ …… 20 %

24

$x^3=4$, $y^2=\dfrac{1}{8}$, $z^4=18$일 때, 다음 식의 값은? (단, $y>0$, $z>0$)

$$\left(\dfrac{2x^2}{y^3}\right)^3\div(-3x^3z)^2\times\dfrac{y^7z^6}{4x^3}$$

① 2　② 4　③ 6　✓④ 8　⑤ 10

$\left(\dfrac{2x^2}{y^3}\right)^3\div(-3x^3z)^2\times\dfrac{y^7z^6}{4x^3}=\dfrac{8x^6}{y^9}\div9x^6z^2\times\dfrac{y^7z^6}{4x^3}$

$=\dfrac{8x^6}{y^9}\times\dfrac{1}{9x^6z^2}\times\dfrac{y^7z^6}{4x^3}$

$=\dfrac{2z^4}{9x^3y^2}$

$=\dfrac{2\times18}{9\times4\times\dfrac{1}{8}}=8$

25

두 식 A, B가

$$(-3ab^2)^2 \div A \times (5a^2b)^3 = 45a^6b^5,$$

$$\frac{25a^6}{b^3} \times B \div \left(-\frac{5a^2}{b}\right)^3 = ab^4$$

을 만족시키고 $ab^2=-1$일 때, AB의 값을 구하시오. **125**

$(-3ab^2)^2 \div A \times (5a^2b)^3 = 45a^6b^5$에서

$A=(-3ab^2)^2 \times (5a^2b)^3 \div 45a^6b^5 = 9a^2b^4 \times 125a^6b^3 \times \frac{1}{45a^6b^5} = 25a^2b^2$

$\frac{25a^6}{b^3} \times B \div \left(-\frac{5a^2}{b}\right)^3 = ab^4$에서

$B = ab^4 \times \left(-\frac{5a^2}{b}\right)^3 \div \frac{25a^6}{b^3} = ab^4 \times \left(-\frac{125a^6}{b^3}\right) \times \frac{b^3}{25a^6} = -5ab^4$

$\therefore\ AB = 25a^2b^2 \times (-5ab^4) = -125a^3b^6 = -125(ab^2)^3$

$= -125 \times (-1)^3 = 125$

26

$N=5^n$일 때, $L(N)=n$이라고 하자. m, n이 자연수일 때, 다음 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보기 〉

ㄱ. $L(5^m \times 5^n) = L(5^m) + L(5^n)$

ㄴ. $L(5^m \div 5^n) = L(5^m) + L(5^n)$ (단, $m>n$)

ㄷ. $L(5^{mn}) = L(5^m) \times n$

ㄹ. $L(K)=4$이면 $K=625$

① ㄱ, ㄴ, ㄷ　　② ㄱ, ㄴ, ㄹ　　③ ㄴ, ㄷ, ㄹ

✓④ ㄱ, ㄷ, ㄹ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. $L(5^m \times 5^n) = L(5^{m+n}) = m+n$, $L(5^m)+L(5^n) = m+n$이므로
$L(5^m \times 5^n) = L(5^m) + L(5^n)$

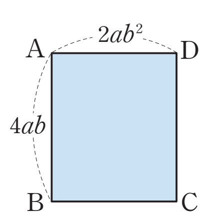
ㄴ. $L(5^m \div 5^n) = L(5^{m-n}) = m-n$, $L(5^m)+L(5^n) = m+n$이므로
$L(5^m \div 5^n) \neq L(5^m) + L(5^n)$

ㄷ. $L(5^{mn}) = mn$, $L(5^m) \times n = mn$이므로 $L(5^{mn}) = L(5^m) \times n$

ㄹ. $L(K)=4$이면 $K=5^4=625$

27 서술형

오른쪽 그림과 같은 직사각형 ABCD를 $\overline{\mathrm{AB}}$를 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 회전체의 부피를 P, $\overline{\mathrm{AD}}$를 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 회전체의 부피를 Q라고 할 때, P는 Q의 몇 배인지 구하시오. $\boldsymbol{\frac{b}{2}}$**배**



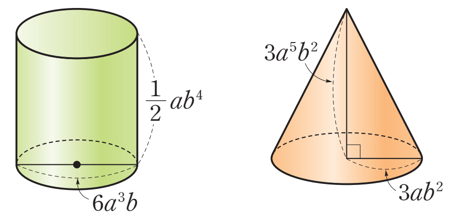
$P = \pi \times (2ab^2)^2 \times 4ab = \pi \times 4a^2b^4 \times 4ab = 16\pi a^3b^5$ ······························ 40 %

$Q = \pi \times (4ab)^2 \times 2ab^2 = \pi \times 16a^2b^2 \times 2ab^2 = 32\pi a^3b^4$ ······························ 40 %

따라서 $\frac{P}{Q} = \frac{16\pi a^3b^5}{32\pi a^3b^4} = \frac{b}{2}$이므로 P는 Q의 $\frac{b}{2}$배이다. ······························ 20 %

28 출제 주의

다음 그림과 같이 밑면의 지름의 길이가 $6a^3b$이고 높이가 $\frac{1}{2}ab^4$인 원기둥과 반지름의 길이가 $3ab^2$이고 높이가 $3a^5b^2$인 원뿔이 있다. 이때 원기둥의 부피는 원뿔의 부피의 몇 배인지 구하시오. $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$**배**



(원기둥의 부피) $= \pi \times \left(\frac{1}{2} \times 6a^3b\right)^2 \times \frac{1}{2}ab^4 = \pi \times 9a^6b^2 \times \frac{1}{2}ab^4 = \frac{9}{2}\pi a^7b^6$

(원뿔의 부피) $= \frac{1}{3} \times \pi \times (3ab^2)^2 \times 3a^5b^2 = \frac{1}{3} \times \pi \times 9a^2b^4 \times 3a^5b^2 = 9\pi a^7b^6$

따라서 $\frac{\frac{9}{2}\pi a^7b^6}{9\pi a^7b^6} = \frac{1}{2}$이므로 원기둥의 부피는 원뿔의 부피의 $\frac{1}{2}$배이다.

29

직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각 $4a^2b^2$, $5ab^2$이고, 삼각형의 밑변의 길이는 $8a^3b$, 높이는 h이다. 직사각형과 삼각형의 넓이의 비가 $5:4$일 때, h의 값을 구하시오. $\boldsymbol{4b^3}$

(직사각형의 넓이) $= 4a^2b^2 \times 5ab^2 = 20a^3b^4$

(삼각형의 넓이) $= \frac{1}{2} \times 8a^3b \times h = 4a^3bh$

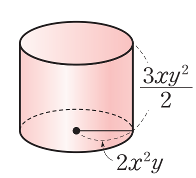
이때 직사각형과 삼각형의 넓이의 비가 $5:4$이므로

$20a^3b^4 : 4a^3bh = 5:4$, $80a^3b^4 = 20a^3bh$

$\therefore\ h = \frac{80a^3b^4}{20a^3b} = 4b^3$

30

오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 $2x^2y$이고 높이가 $\frac{3xy^2}{2}$인 원기둥 모양의 찰흙이 있다. 이 찰흙으로 반지름의 길이가 $\frac{xy}{2}$인 구를 몇 개 만들 수 있는지 구하시오.



$\boldsymbol{36x^2y}$**개**

(원기둥의 부피) $= \pi \times (2x^2y)^2 \times \frac{3xy^2}{2} = \pi \times 4x^4y^2 \times \frac{3xy^2}{2} = 6\pi x^5y^4$

(구의 부피) $= \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{xy}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times \frac{x^3y^3}{8} = \frac{\pi x^3y^3}{6}$

따라서 $\frac{6\pi x^5y^4}{\frac{\pi x^3y^3}{6}} = 36x^2y$이므로 만들 수 있는 구의 개수는 $36x^2y$이다.

Lv. 1 개념을 적용하는

핵심 문제

개념 1 다항식과 덧셈과 뺄셈

01

$(8x-4y+6)-a(-2x+y+5)$를 계산하였을 때, x의 계수와 y의 계수가 서로 같다. 이때 상수 a의 값은?

✓① -4　② -3　③ -1

④ 3　⑤ 4

$(8x-4y+6)-a(-2x+y+5)=8x-4y+6+2ax-ay-5a$

$=(8+2a)x+(-4-a)y+6-5a$

이때 x의 계수와 y의 계수가 서로 같으므로

$8+2a=-4-a$, $3a=-12$

$\therefore a=-4$

02 출제 주의

$5x+9y-\{2x-3(2x-3y)-8y\}=ax+by$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -3　② -1　③ 11

✓④ 17　⑤ 19

$5x+9y-\{2x-3(2x-3y)-8y\}=5x+9y-(2x-6x+9y-8y)$

$=5x+9y-(-4x+y)$

$=5x+9y+4x-y$

$=9x+8y$

즉, $9x+8y=ax+by$이므로 $a=9$, $b=8$

$\therefore a+b=9+8=17$

03 서술형

다음 조건을 만족시키는 다항식 A, B에 대하여 $A+B$를 구하시오. $-3x^2+6x-13$

(가) 다항식 A에 $4x^2+3x-1$을 더했더니 $2x^2+5x-4$가 되었다.

(나) 다항식 A에서 $-x^2-2x+7$을 빼었더니 다항식 B가 되었다.

조건 (가)에서 $A+(4x^2+3x-1)=2x^2+5x-4$이므로

$A=2x^2+5x-4-(4x^2+3x-1)=-2x^2+2x-3$ ······ 40 %

조건 (나)에서 $A-(-x^2-2x+7)=B$이므로

$B=-2x^2+2x-3-(-x^2-2x+7)=-x^2+4x-10$ ······ 40 %

$\therefore A+B=-2x^2+2x-3+(-x^2+4x-10)=-3x^2+6x-13$ ······ 20 %

04

$2x^2-5x+3$에 어떤 식을 더해야 할 것을 잘못하여 뺐더니 $-x^2+7x-4$가 되었다. 어떤 식이 ax^2+bx+c이고, 바르게 계산한 결과의 다항식이 dx^2+ex+f일 때, $a-b+c-d+e-f$의 값은?

(단, a, b, c, d, e, f는 상수이다.)

✓① -10　② -8　③ -6

④ -4　⑤ -2

$(2x^2-5x+3)-(ax^2+bx+c)=-x^2+7x-4$이므로

$ax^2+bx+c=2x^2-5x+3-(-x^2+7x-4)=3x^2-12x+7$

$\therefore a=3$, $b=-12$, $c=7$

바르게 계산한 결과의 식은 $(2x^2-5x+3)+(3x^2-12x+7)=5x^2-17x+10$

$\therefore d=5$, $e=-17$, $f=10$

$\therefore a-b+c-d+e-f=3-(-12)+7-5+(-17)-10=-10$

05

다음 표에서 가로, 세로, 대각선에 있는 세 다항식의 합이 모두 $18x^2+21xy-12y^2$이다. $2A-3B$를 간단히 하면 $ax^2+bxy+cy^2$이라고 할 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오. 27

A	B	$7x^2+9xy-5y^2$
	$6x^2+7xy-4y^2$	
	$10x^2+15xy-8y^2$	

$B+(6x^2+7xy-4y^2)+(10x^2+15xy-8y^2)=18x^2+21xy-12y^2$이므로

$B+(16x^2+22xy-12y^2)=18x^2+21xy-12y^2$

$\therefore B=18x^2+21xy-12y^2-(16x^2+22xy-12y^2)=2x^2-xy$

$A+B+(7x^2+9xy-5y^2)=18x^2+21xy-12y^2$이므로

$A+(2x^2-xy)+(7x^2+9xy-5y^2)=18x^2+21xy-12y^2$

$A+(9x^2+8xy-5y^2)=18x^2+21xy-12y^2$

$\therefore A=18x^2+21xy-12y^2-(9x^2+8xy-5y^2)=9x^2+13xy-7y^2$

따라서

$2A-3B=2(9x^2+13xy-7y^2)-3(2x^2-xy)=18x^2+26xy-14y^2-6x^2+3xy$

$=12x^2+29xy-14y^2$

이므로 $a=12$, $b=29$, $c=-14$

$\therefore a+b+c=12+29+(-14)=27$

개념 2 단항식과 다항식의 곱셈과 나눗셈

06

$\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}y-\frac{9}{8}xy\right)\times 8xy$의 전개식에서 xy^2의 계수를 a, $\left(\frac{5}{6}x^4y^2-\frac{4}{3}x^3y-\frac{2}{3}x^3y^3\right)\div\left(-\frac{4}{9}x^2y\right)$를 계산한 식에서 x^2y의 계수를 b라고 하자. 이때 ab의 값은?

① -25　✓② $-\frac{45}{2}$　③ -20

④ $\frac{45}{2}$　⑤ 25

$\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}y-\frac{9}{8}xy\right)\times 8xy=2x^2y+12xy^2-9x^2y^2$

에서 xy^2의 계수는 12이므로 $a=12$

$\left(\frac{5}{6}x^4y^2-\frac{4}{3}x^3y-\frac{2}{3}x^3y^3\right)\div\left(-\frac{4}{9}x^2y\right)=\left(\frac{5}{6}x^4y^2-\frac{4}{3}x^3y-\frac{2}{3}x^3y^3\right)\times\left(-\frac{9}{4x^2y}\right)$

$=-\frac{15}{8}x^2y+3x+\frac{3}{2}xy^2$

에서 x^2y의 계수는 $-\frac{15}{8}$이므로 $b=-\frac{15}{8}$　$\therefore ab=12\times\left(-\frac{15}{8}\right)=-\frac{45}{2}$

07

$x=2$, $y=-\frac{1}{2}$일 때, 다음 식의 값은?

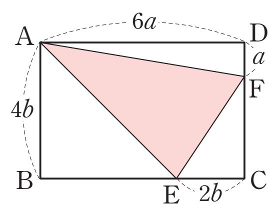
$$\frac{3x^2y^3-x^3y}{xy}+(2xy-3y)\times(-3xy)$$

① -8　② -7　✓③ -4
④ 4　⑤ 7

$\frac{3x^2y^3-x^3y}{xy}+(2xy-3y)\times(-3xy)=3xy^2-x^2-6x^2y^2+9xy^2$
$=12xy^2-x^2-6x^2y^2$
$=12\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2^2-6\times2^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2$
$=6-4-6=-4$

08 출제 주의

오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 $6a$, 세로의 길이가 $4b$인 직사각형 ABCD에서 색칠한 부분의 넓이는?



① $11ab-3a^2$
② $13ab-6a^2$
✓③ $13ab-3a^2$
④ $11ab-6a^2-4b^2$
⑤ $13ab-3a^2-4b^2$

직사각형 ABCD의 넓이는 $6a\times4b=24ab$
$\overline{BE}=6a-2b$, $\overline{CF}=4b-a$이므로
$\triangle ABE=\frac{1}{2}\times\overline{BE}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times(6a-2b)\times4b$
$=12ab-4b^2$
$\triangle ECF=\frac{1}{2}\times\overline{EC}\times\overline{CF}=\frac{1}{2}\times2b\times(4b-a)=4b^2-ab$
$\triangle AFD=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{DF}=\frac{1}{2}\times6a\times a=3a^2$
따라서 색칠한 부분의 넓이는
(직사각형 ABCD의 넓이)$-(\triangle ABE+\triangle ECF+\triangle AFD)$
$=24ab-\{(12ab-4b^2)+(4b^2-ab)+3a^2\}$
$=24ab-(11ab+3a^2)=13ab-3a^2$

개념 3 식의 대입

09

다항식 A를 $-4xy^3$으로 나눈 몫은 $7x^2y-3xy$이고 나머지는 $2x^3y$이다. 이때 $\frac{A}{2x^2y}$를 계산하면?

① $-14xy^3-6y^3+x$　✓② $-14xy^3+6y^3+x$
③ $-14xy^2+6y^2+x$　④ $14xy^2-6y^2+x$
⑤ $14xy^3-6y^3-x$

다항식 A를 $-4xy^3$으로 나눈 몫은 $7x^2y-3xy$이고 나머지는 $2x^3y$이므로
$A=-4xy^3\times(7x^2y-3xy)+2x^3y=-28x^3y^4+12x^2y^4+2x^3y$
$\therefore \frac{A}{2x^2y}=\frac{-28x^3y^4+12x^2y^4+2x^3y}{2x^2y}=-14xy^3+6y^3+x$

10 출제 주의

$A=-5x-4y+1$, $B=3x+5y-2$일 때, $(3A-2B)-2(A-2B)$를 x, y에 대한 식으로 나타내면?

① $x+6y-5$　✓② $x+6y-3$
③ $11x+6y-5$　④ $11x+14y-5$
⑤ $11x+14y-3$

$(3A-2B)-2(A-2B)=3A-2B-2A+4B$
$=A+2B$
$=(-5x-4y+1)+2(3x+5y-2)$
$=-5x-4y+1+6x+10y-4$
$=x+6y-3$

11

$\frac{x+y}{x-y}=\frac{1}{2}$일 때, $\frac{3x+7y}{x-5y}$의 값은?

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{4}$　✓③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$　⑤ 4

$\frac{x+y}{x-y}=\frac{1}{2}$에서
$2(x+y)=x-y$　$\therefore x=-3y$
$\therefore \frac{3x+7y}{x-5y}=\frac{-9y+7y}{-3y-5y}=\frac{-2y}{-8y}=\frac{1}{4}$

12

$(3x+2y):(7x+3y)=3:5$일 때, 다음 식을 x에 대한 식으로 나타내면?

$$8x-\{6x-11-2(x+2y)\}$$

① $-14x-11$　② $-14x+11$　③ $14x+11$
✓④ $28x+11$　⑤ $28x-11$

$(3x+2y):(7x+3y)=3:5$에서
$5(3x+2y)=3(7x+3y)$, $15x+10y=21x+9y$　$\therefore y=6x$
$\therefore 8x-\{6x-11-2(x+2y)\}=8x-(6x-11-2x-4y)$
$=8x-(4x-11-4y)$
$=4x+11+24x$
$=28x+11$

01 서술형

세 다항식 $A=3x^2+2x-1$, $B=-x^2+5x$, $C=x^2-3x+4$가 다음 등식을 만족시킬 때, 세 정수 a, b, c에 대하여 $\frac{a+c}{b}$의 값을 구하시오. $-\frac{11}{19}$

$$2A-\{B-(3A-2C)+4C\}+3B=ax^2+bx+c$$

$2A-\{B-(3A-2C)+4C\}+3B=2A-(-3A+B+6C)+3B$
$=5A+2B-6C$ …… ㉠ ·············· 30 %
㉠의 A, B, C에 각각의 다항식을 대입하면
$5A+2B-6C=5(3x^2+2x-1)+2(-x^2+5x)-6(x^2-3x+4)$
$=15x^2+10x-5-2x^2+10x-6x^2+18x-24$
$=7x^2+38x-29$ ·············· 40 %
즉, $7x^2+38x-29=ax^2+bx+c$이므로 $a=7$, $b=38$, $c=-29$
$\therefore \frac{a+c}{b}=\frac{7+(-29)}{38}=-\frac{11}{19}$ ·············· 30 %

02

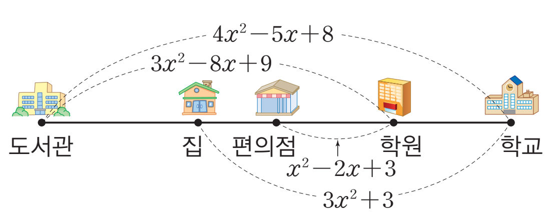
다음 표의 가로 방향의 규칙은 왼쪽의 두 칸의 식을 뺀 결과를 제일 오른쪽 칸에 적는 것이고, 세로 방향의 규칙은 위쪽 두 칸을 더한 결과를 제일 아래쪽 칸에 적는 것이다. ㉢+㉤을 계산하시오. $5x^2+2x+4$

㉠	㉡	$2x^2-3x+5$
$3x^2+5x-1$	㉢	㉣
$-x^2+2x-4$	$-2x^2-7x+3$	㉤

첫 번째 세로줄에서 ㉠$+(3x^2+5x-1)=-x^2+2x-4$이므로
㉠$=-x^2+2x-4-(3x^2+5x-1)=-4x^2-3x-3$
첫 번째 가로줄에서 ㉠$-$㉡$=2x^2-3x+5$이므로
㉡$=-4x^2-3x-3-(2x^2-3x+5)=-6x^2-8$
두 번째 세로줄에서 ㉡$+$㉢$=-2x^2-7x+3$이므로
㉢$=-2x^2-7x+3-(-6x^2-8)=4x^2-7x+11$
세 번째 가로줄에서 ㉤$=-x^2+2x-4+2x^2+7x-3=x^2+9x-7$
$\therefore$ ㉢$+$㉤$=(4x^2-7x+11)+(x^2+9x-7)=5x^2+2x+4$

03

다음 그림과 같이 도서관, 집, 편의점, 학원, 학교 다섯 지점이 한 직선 위에 있다.

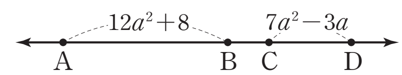


도서관에서 학교까지의 거리는 $4x^2-5x+8$, 도서관에서 학원까지의 거리는 $3x^2-8x+9$, 집에서 학교까지의 거리는 $3x^2+3$, 편의점에서 학원까지의 거리는 x^2-2x+3일 때, 집에서 편의점까지의 거리를 구하시오. x^2-x+1

(도서관에서 집까지의 거리)=(도서관에서 학교까지의 거리)−(집에서 학교까지의 거리)
$=(4x^2-5x+8)-(3x^2+3)=x^2-5x+5$
(집에서 학원까지의 거리)=(도서관에서 학원까지의 거리)−(도서관에서 집까지의 거리)
$=(3x^2-8x+9)-(x^2-5x+5)=2x^2-3x+4$
∴ (집에서 편의점까지의 거리)=(집에서 학원까지의 거리)−(편의점에서 학원까지의 거리)
$=(2x^2-3x+4)-(x^2-2x+3)=x^2-x+1$

04

다음 그림과 같이 수직선 위에 네 점 A, B, C, D가 있다. $\overline{AB}=12a^2+8$, $\overline{CD}=7a^2-3a$이고, $\overline{AB}$의 길이는 $\overline{BC}$의 길이의 4배일 때, $\overline{AD}$의 길이를 구하시오. $22a^2-3a+10$



$\overline{AB}=4\overline{BC}$에서 $\overline{BC}=\frac{1}{4}\overline{AB}=\frac{1}{4}(12a^2+8)=3a^2+2$
$\therefore \overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$
$=(12a^2+8)+(3a^2+2)+(7a^2-3a)$
$=22a^2-3a+10$

05

$6x-[4y-x-\{-3x-(\boxed{}+y)\}]=5x-7y$일 때, $\boxed{}$ 안에 들어갈 알맞은 식은?

① $-2x$　② $-2x+y$　③ $2x+y$
✓④ $-x+2y$　⑤ $x+2y$

$6x-[4y-x-\{-3x-(\boxed{}+y)\}]$
$=6x-(4y-x+3x+\boxed{}+y)$
$=6x-(2x+5y+\boxed{})$
$=4x-5y-\boxed{}$
이므로 $4x-5y-\boxed{}=5x-7y$
$\therefore \boxed{}=(4x-5y)-(5x-7y)=-x+2y$

06

어떤 식에서 $4x-3y+2z-5$를 빼야 할 것을 잘못하여 $3x+2y-z$에서 어떤 식을 뺐더니 $-5x+5y+3z+9$가 되었다. 이때 바르게 구한 식이 $ax+by+cz+d$일 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하시오. -6

어떤 식을 A라고 하면 $3x+2y-z-A=-5x+5y+3z+9$
$\therefore A=(3x+2y-z)-(-5x+5y+3z+9)=8x-3y-4z-9$
따라서 바르게 계산한 식은
$(8x-3y-4z-9)-(4x-3y+2z-5)=4x-6z-4$
즉, $a=4$, $b=0$, $c=-6$, $d=-4$이므로
$a+b+c+d=4+0+(-6)+(-4)=-6$

07 출제 주의

x, y, z, w에 대하여

$$(x,\ y)\otimes(z,\ w)=xz+yw$$

라고 할 때, 다음을 계산하면?

$$(3x+2,\ 4y)\otimes(2y,\ x-5)+(8xy,\ x+1)\otimes(-2,\ 3y)$$

① $-2xy-5y$ ✓② $-3xy-13y$ ③ $-5xy+8y$
④ $3xy-13y$ ⑤ $5xy+8y$

$(3x+2,\ 4y)\otimes(2y,\ x-5)=(3x+2)\times 2y+4y\times(x-5)$
$=6xy+4y+4xy-20y$
$=10xy-16y$
$(8xy,\ x+1)\otimes(-2,\ 3y)=8xy\times(-2)+(x+1)\times 3y$
$=-16xy+3xy+3y$
$=-13xy+3y$
$\therefore$ $(3x+2,\ 4y)\otimes(2y,\ x-5)+(8xy,\ x+1)\otimes(-2,\ 3y)$
$=(10xy-16y)+(-13xy+3y)$
$=-3xy-13y$

08

다음 식을 계산하면 ax^2+bxy일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 5

$$4x\left(3x-\frac{5}{2}y\right)-\left\{(6x^3y^2-3x^2y^3)\div\frac{3}{2}xy-5x^2y\right\}\div y$$

$4x\left(3x-\frac{5}{2}y\right)-\left\{(6x^3y^2-3x^2y^3)\div\frac{3}{2}xy-5x^2y\right\}\div y$
$=4x\left(3x-\frac{5}{2}y\right)-\left\{(6x^3y^2-3x^2y^3)\times\frac{2}{3xy}-5x^2y\right\}\times\frac{1}{y}$
$=12x^2-10xy-\{(4x^2y-2xy^2)-5x^2y\}\times\frac{1}{y}$
$=12x^2-10xy-(-x^2y-2xy^2)\times\frac{1}{y}$
$=12x^2-10xy+x^2+2xy$
$=13x^2-8xy$
따라서 $a=13$, $b=-8$이므로 $a+b=13+(-8)=5$

09

두 식 A, B가

$$A=12x^2y^3(x-2y)\div(2xy)^2,$$
$$B=3y(2x^2-3y+xy)$$

일 때, $A-(B-C)=3x^2y+xy^2$을 만족시키는 다항식 C는?

✓① $9x^2y+4xy^2-3xy-3y^2$
② $9x^2y-2xy^2-3xy-3y^2$
③ $9x^2y+4xy^2+3xy-15y^2$
④ $-3x^2y-2xy^2-3xy+15y^2$
⑤ $9x^2y+4xy^2-3y^2$

$A=12x^2y^3(x-2y)\div(2xy)^2=12x^2y^3(x-2y)\div 4x^2y^2$
$=12x^2y^3(x-2y)\times\frac{1}{4x^2y^2}=3y(x-2y)=3xy-6y^2$
$B=3y(2x^2-3y+xy)=6x^2y-9y^2+3xy^2$
$A-(B-C)=3x^2y+xy^2$에서 $A-B+C=3x^2y+xy^2$
$\therefore C=(3x^2y+xy^2)-A+B$
$=(3x^2y+xy^2)-(3xy-6y^2)+(6x^2y-9y^2+3xy^2)$
$=9x^2y+4xy^2-3xy-3y^2$

10 출제 주의

n이 자연수일 때, 다음을 계산하면?

$$(-1)^{2n+3}(-2x+5y)-(-1)^{2n}(7x-y)+(-1)^{2n-1}(-3x-6y)$$

① $2x-2y$ ② $-6x+12y$ ③ $12x$
④ $-8x-10y$ ✓⑤ $-2x+2y$

$(-1)^{2n+3}=-1$, $(-1)^{2n}=1$, $(-1)^{2n-1}=-1$이므로
$(-1)^{2n+3}(-2x+5y)-(-1)^{2n}(7x-y)+(-1)^{2n-1}(-3x-6y)$
$=-(-2x+5y)-(7x-y)-(-3x-6y)$
$=2x-5y-7x+y+3x+6y$
$=-2x+2y$

11

$(0.\dot{6}x^2y-0.1\dot{3}xy^2)\div 0.\dot{3}xy-\boxed{}=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y$일 때, $\boxed{}$ 안에 알맞은 식을 구하시오. $\frac{3}{2}x-\frac{19}{10}y$

$0.\dot{6}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$, $0.1\dot{3}=\frac{13-1}{90}=\frac{2}{15}$, $0.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$이므로
$(0.\dot{6}x^2y-0.1\dot{3}xy^2)\div 0.\dot{3}xy-\boxed{}=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y$에서
$\left(\frac{2}{3}x^2y-\frac{2}{15}xy^2\right)\div\frac{1}{3}xy-\boxed{}=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y$
$\left(\frac{2}{3}x^2y-\frac{2}{15}xy^2\right)\times\frac{3}{xy}-\boxed{}=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y$
$2x-\frac{2}{5}y-\boxed{}=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y$
$\therefore$ $\boxed{}=\left(2x-\frac{2}{5}y\right)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y\right)=\frac{3}{2}x-\frac{19}{10}y$

12

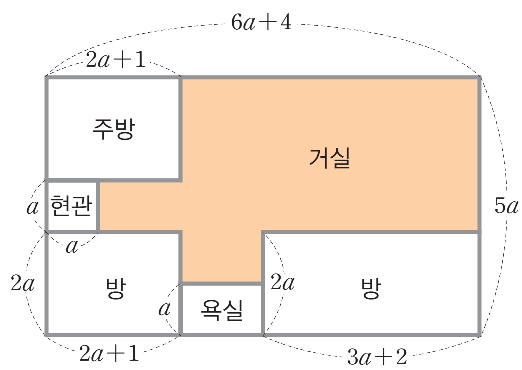
윗변과 아랫변의 길이, 높이가 각각 $2x^2y$, $6xy^2$, $3x^2y^2$인 사다리꼴과 두 대각선의 길이가 각각 $3xy$, $2x^2y^2$인 마름모가 있다. 사다리꼴의 넓이는 마름모의 넓이의 몇 배인가?

① $(x+y)$배 ② $(x+2y)$배 ✓③ $(x+3y)$배
④ $(2x+y)$배 ⑤ $(2x+3y)$배

(사다리꼴의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(2x^2y+6xy^2)\times 3x^2y^2=3x^4y^3+9x^3y^4$
(마름모의 넓이)$=\frac{1}{2}\times 3xy\times 2x^2y^2=3x^3y^3$
$\therefore$ (사다리꼴의 넓이)$\div$(마름모의 넓이)$=(3x^4y^3+9x^3y^4)\div 3x^3y^3$
$=(3x^4y^3+9x^3y^4)\times\frac{1}{3x^3y^3}$
$=x+3y$
따라서 사다리꼴의 넓이는 마름모의 넓이의 $(x+3y)$배이다.

13 서술형

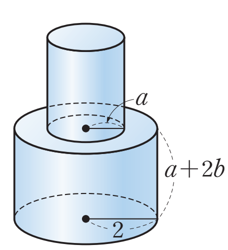
다음 그림은 지훈이네 집의 구조를 나타낸 것이다. 집은 직사각형 전체 공간 안에 현관, 주방, 방 2개, 욕실, 거실로 나누어져 있으며, 집 전체의 가로의 길이는 $6a+4$, 세로의 길이는 $5a$이다. 거실의 넓이가 pa^2+qa+r일 때, 세 상수 p, q, r에 대하여 $p+q+r$의 값을 구하시오. 25
(단, 모든 구역은 직사각형 모양이고, 벽의 두께는 무시한다.)



집 전체의 넓이는 $(6a+4)\times 5a=30a^2+20a$ ··· 20 %
주방의 세로의 길이는 $5a-(2a+a)=2a$
욕실의 가로의 길이는
$6a+4-\{(2a+1)+(3a+2)\}=6a+4-(5a+3)=a+1$ ··· 20 %
가로의 길이가 $2a+1$인 방의 넓이는 $(2a+1)\times 2a=4a^2+2a$
가로의 길이가 $3a+2$인 방의 넓이는 $(3a+2)\times 2a=6a^2+4a$
욕실의 넓이는 $(a+1)\times a=a^2+a$
현관의 넓이는 $a\times a=a^2$
주방의 넓이는 $(2a+1)\times 2a=4a^2+2a$
따라서 방 2개, 욕실, 현관, 주방의 넓이의 합은
$(4a^2+2a)+(6a^2+4a)+(a^2+a)+a^2+(4a^2+2a)=16a^2+9a$ ··· 30 %
거실의 넓이는 집 전체의 넓이에서 방 2개, 욕실, 현관, 주방의 넓이의 합을 빼면 되므로
$(30a^2+20a)-(16a^2+9a)=30a^2+20a-16a^2-9a=14a^2+11a$
따라서 $p=14$, $q=11$, $r=0$이므로
$p+q+r=14+11+0=25$ ··· 30 %

14

오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 2, 높이가 $a+2b$인 큰 원기둥과 밑면의 반지름의 길이가 a인 작은 원기둥이 있다. 두 원기둥의 부피의 합이 $(3a^2+2a+8b)\pi$일 때, 작은 원기둥의 높이를 구하시오. $3-\frac{2}{a}$



큰 원기둥의 부피는 $2^2\times\pi\times(a+2b)=(4a+8b)\pi$
작은 원기둥의 높이를 h라고 하면 작은 원기둥의 부피는 $a^2\times\pi\times h=a^2h\pi$
두 원기둥의 부피의 합이 $(3a^2+2a+8b)\pi$이므로
$(4a+8b)\pi+a^2h\pi=(3a^2+2a+8b)\pi$
$4a+8b+a^2h=3a^2+2a+8b$
$a^2h=3a^2+2a+8b-(4a+8b)=3a^2-2a$
$\therefore h=\frac{3a^2-2a}{a^2}=3-\frac{2}{a}$

15

$x=2$, $z=3$일 때, $\frac{6x^2y^2+9xy^2}{3xy}-2x(y-4z)=75$를 만족시킨다. 이때 y의 값을 구하시오. 9

$\frac{6x^2y^2+9xy^2}{3xy}-2x(y-4z)=2xy+3y-2xy+8xz=3y+8xz$
즉, $3y+8xz=75$이므로 이 식에 $x=2$, $z=3$을 대입하면
$3y+8\times 2\times 3=75$, $3y+48=75$
$3y=27$ $\therefore y=9$

16 출제 주의

$\frac{25^x\times 5^{3y}}{5^{x+y}}=625$일 때, $4(y-x)+3(2x+y)$를 x에 대한 식으로 나타내면 $ax+b$이다. 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. -21

$\frac{25^x\times 5^{3y}}{5^{x+y}}=625$에서 $\frac{5^{2x+3y}}{5^{x+y}}=5^4$, $5^{x+2y}=5^4$
$x+2y=4$ $\therefore y=\frac{4-x}{2}$
$\therefore 4(y-x)+3(2x+y)=4y-4x+6x+3y=2x+7y=2x+7\times\frac{4-x}{2}$
$=2x+14-\frac{7}{2}x=-\frac{3}{2}x+14$
따라서 $a=-\frac{3}{2}$, $b=14$이므로 $ab=-\frac{3}{2}\times 14=-21$

17

$4^x\times 8\times 8^y=2$를 만족시키는 두 자연수 x, y에 대하여 $A=2x+y-1$, $B=x-\frac{3}{2}y-3$일 때, $3A-2B$의 값은?

① -3 ✓② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

$4^x\times 8\times 8^y=2$에서 $2^{2x+3y+3}=2^1$
$2x+3y+3=1$ $\therefore 2x+3y=-2$
$\therefore 3A-2B=3(2x+y-1)-2\left(x-\frac{3}{2}y-3\right)$
$=6x+3y-3-2x+3y+6$
$=4x+6y+3$
$=2(2x+3y)+3$
$=2\times(-2)+3=-1$

18

$\frac{8x+ay}{8x-ay}=-\frac{1}{3}$을 만족시키는 x, y에 대하여 $9x-\{x-(4x-12y)-4y\}$의 값이 $28x$와 같다고 할 때, 상수 a의 값을 구하시오. 8

$9x-\{x-(4x-12y)-4y\}=9x-(x-4x+12y-4y)$
$=9x+3x-8y=12x-8y$
즉, $12x-8y=28x$이므로 $-8y=16x$ $\therefore y=-2x$
$y=-2x$를 $\frac{8x+ay}{8x-ay}=-\frac{1}{3}$에 대입하면 $\frac{8-2a}{8+2a}=-\frac{1}{3}$
$3(8-2a)=-(8+2a)$, $24-6a=-8-2a$
$4a=32$ $\therefore a=8$

19

$\dfrac{a+kab-b}{a+2ab-b}=3$이고 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=6$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. (단, $ab\neq0$) -6

$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=6$에서

$\dfrac{b-a}{ab}=6 \qquad \therefore a-b=-6ab$

$a-b=-6ab$를 $\dfrac{a+kab-b}{a+2ab-b}=\dfrac{a-b+kab}{a-b+2ab}=3$에 대입하면

$\dfrac{-6ab+kab}{-6ab+2ab}=3,\ \dfrac{-6+k}{-4}=3$

$-6+k=-12 \qquad \therefore k=-6$

20

$\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{3}{2}$일 때, $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2+xy}$의 값을 구하시오. $\dfrac{8}{15}$

(단, $xy\neq0$)

$\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{3}{2}$에서 $2(x+y)=3(x-y)$

$2x+2y=3x-3y \qquad \therefore x=5y$

$x=5y$를 $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2+xy}$에 대입하면

$\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2+xy}=\dfrac{25y^2-10y^2+y^2}{25y^2+5y^2}=\dfrac{16y^2}{30y^2}=\dfrac{8}{15}$

21 서술형

$x:y=3:1$, $y:z=2:5$일 때, 다음 식의 값을 구하시오. $\dfrac{72}{5}$

$$\left(\frac{3}{4}xy^2z^2-\frac{2}{3}x^2y^2z+\frac{5}{12}x^2yz^2\right)\div\frac{1}{12}xy^2z^2$$

$x:y=3:1$이므로 $x=3y$

$y:z=2:5$이므로 $5y=2z \qquad \therefore z=\dfrac{5}{2}y$ ······························ 30 %

$\left(\dfrac{3}{4}xy^2z^2-\dfrac{2}{3}x^2y^2z+\dfrac{5}{12}x^2yz^2\right)\div\dfrac{1}{12}xy^2z^2$

$=\left(\dfrac{3}{4}xy^2z^2-\dfrac{2}{3}x^2y^2z+\dfrac{5}{12}x^2yz^2\right)\times\dfrac{12}{xy^2z^2}$

$=9-\dfrac{8x}{z}+\dfrac{5x}{y}$ ······ ㉠ ······························ 30 %

따라서 $x=3y$, $z=\dfrac{5}{2}y$를 ㉠에 대입하면

$9-\dfrac{8x}{z}+\dfrac{5x}{y}=9-\dfrac{8\times3y}{\frac{5}{2}y}+\dfrac{5\times3y}{y}=9-\dfrac{48}{5}+15=\dfrac{72}{5}$ ················ 40 %

22

$\dfrac{a+b}{a-b}=5$, $\dfrac{b+c}{b-c}=7$을 만족시키는 a, b, c에 대하여 $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{ab^2+bc^2+ca^2}$의 값을 나타내면 $\dfrac{q}{p}$이다. 이때 $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 547

$\dfrac{a+b}{a-b}=5$에서 $a+b=5(a-b)$, $6b=4a \qquad \therefore a=\dfrac{3}{2}b$ ······ ㉠

$\dfrac{b+c}{b-c}=7$에서 $b+c=7(b-c)$, $8c=6b \qquad \therefore c=\dfrac{3}{4}b$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{ab^2+bc^2+ca^2}$에 대입하면

$\dfrac{a^3+b^3+c^3}{ab^2+bc^2+ca^2}=\dfrac{\left(\frac{3}{2}b\right)^3+b^3+\left(\frac{3}{4}b\right)^3}{\frac{3}{2}b\times b^2+b\times\left(\frac{3}{4}b\right)^2+\frac{3}{4}b\times\left(\frac{3}{2}b\right)^2}=\dfrac{\frac{27}{8}b^3+b^3+\frac{27}{64}b^3}{\frac{3}{2}b^3+\frac{9}{16}b^3+\frac{27}{16}b^3}$

$=\dfrac{\frac{307}{64}b^3}{\frac{60}{16}b^3}=\dfrac{307}{240}$

따라서 $p=240$, $q=307$이므로 $p+q=240+307=547$

23 출제 주의

두 수 x, y에 대하여 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3$일 때, $\dfrac{y(5x-2y)-y(x-2y)}{x+y}$의 값을 구하시오. (단, $xy\neq0$) $\dfrac{4}{3}$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3$에서 $\dfrac{x+y}{xy}=3 \qquad \therefore x+y=3xy$

$\therefore \dfrac{y(5x-2y)-y(x-2y)}{x+y}=\dfrac{5xy-2y^2-xy+2y^2}{x+y}=\dfrac{4xy}{x+y}=\dfrac{4xy}{3xy}=\dfrac{4}{3}$

24

$a+b+c=0$이고 $abc\neq0$일 때,

$a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{c}\right)+b\left(\dfrac{2}{c}+\dfrac{3}{a}\right)+c\left(\dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$의 값은?

✓① -6 ② -3 ③ -1

④ 1 ⑤ 3

$a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{c}\right)+b\left(\dfrac{2}{c}+\dfrac{3}{a}\right)+c\left(\dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{2a}{c}\right)+\left(\dfrac{2b}{c}+\dfrac{3b}{a}\right)+\left(\dfrac{3c}{a}+\dfrac{c}{b}\right)$

$=\dfrac{3b}{a}+\dfrac{3c}{a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{2a}{c}+\dfrac{2b}{c}$

$=\dfrac{3(b+c)}{a}+\dfrac{a+c}{b}+\dfrac{2(a+b)}{c}$ ······ ㉠

$a+b+c=0$에서

$b+c=-a$ ······ ㉡ $\quad a+c=-b$ ······ ㉢ $\quad a+b=-c$ ······ ㉣

㉡, ㉢, ㉣을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{3(b+c)}{a}+\dfrac{a+c}{b}+\dfrac{2(a+b)}{c}=\dfrac{3\times(-a)}{a}+\dfrac{-b}{b}+\dfrac{2\times(-c)}{c}$

$=-3+(-1)+(-2)=-6$

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

대표 문제

다음 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합을 구하시오. (단, n은 자연수이다.)

(가) $\dfrac{n}{2^2\times3^2\times5}$은 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2$의 꼴로 나타낼 수 있다. (단, a, b는 서로소이다.)
(나) $\dfrac{n}{2^2\times3^2\times5}$은 유한소수로 나타낼 수 없다.
(다) $n\le500$

함께 풀기

STEP 1

주어진 조건과 구해야 하는 것 확인하기

주어진 조건: ① $\dfrac{n}{2^2\times3^2\times5}$은 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2$의 꼴로 나타낼 수 있다.
② $\dfrac{n}{2^2\times3^2\times5}$은 유한소수로 나타낼 수 없다.
③ $n\le500$
구해야 하는 것: 모든 n의 값의 합

STEP 2

$\dfrac{n}{2^2\times3^2\times5}$이 어떤 분수의 제곱이 되기 위한 n의 조건 구하기

$\dfrac{n}{2^2\times3^2\times5}$이 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2$의 꼴로 나타내기 위해서는 기약분수로 나타내었을 때, 분모와 분자의 소인수의 지수가 모두 짝수가 되어야 한다. 분모의 소인수 2^2, 3^2은 지수가 짝수이고, 분모의 소인수 5는 지수가 홀수이므로 n은 5의 배수이어야 한다.
따라서 $n=5k^2$ (k는 자연수)의 꼴로 나타낼 수 있다.

STEP 3

$\dfrac{n}{2^2\times3^2\times5}$이 유한소수가 되지 않을 조건 구하기

$n=5k^2$을 $\dfrac{n}{2^2\times3^2\times5}$에 대입하면 $\dfrac{n}{2^2\times3^2\times5}=\dfrac{5k^2}{2^2\times3^2\times5}=\dfrac{k^2}{2^2\times3^2}$
이때 $\dfrac{k^2}{2^2\times3^2}$은 유한소수로 나타낼 수 없으므로 기약분수로 나타내었을 때, 분모에 소인수 3이 존재해야 한다.
즉, k는 3의 배수가 아니어야 한다.

STEP 4

조건을 만족시키는 n의 값 구하기

$n=5k^2\le500$이므로 $k^2\le100$, 즉 k는 10 이하인 자연수 중 3의 배수가 아닌 수이므로 모든 k의 값은 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10이고 그때의 $n=5k^2$의 값은
$5\times1^2=5$, $5\times2^2=20$, $5\times4^2=80$, $5\times5^2=125$, $5\times7^2=245$, $5\times8^2=320$, $5\times10^2=500$

STEP 5

조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합 구하기

따라서 모든 n의 값의 합은
$5+20+80+125+245+320+500=1295$

답 **1295**

01 두 분수 $A=\frac{1136}{3333}$, $B=\frac{227}{666}$을 소수로 나타내었을 때, 소수점 아래 n번째 자리의 숫자를 각각 a_n, b_n이라고 하자. $1 \leq n \leq 150$일 때, $a_n=b_n$을 만족시키는 n의 개수를 구하시오. **40**

$A=\frac{1136}{3333}=\frac{3408}{9999}=0.\dot{3}40\dot{8}$

$B=\frac{227}{666}=\frac{3405}{9990}=0.3\dot{4}0\dot{8}$

두 순환소수 $0.\dot{3}40\dot{8}$, $0.3\dot{4}0\dot{8}$에서

$0.\dot{3}40\dot{8}=0.340834083408 3408\cdots$

$0.3\dot{4}0\dot{8}=0.3408408408408408\cdots$

두 순환소수의 순환마디를 이루는 숫자의 개수는 각각 4, 3이고, 이 두 수의 최소공배수가 12이므로 두 순환소수는 처음 순환마디 이후 12번째마다 4, 0, 8의 같은 숫자가 나온다.

(i) $n=1$일 때, $a_1=b_1=3$

(ii) $n=2$일 때, $a_2=b_2=4$

$a_{14}=b_{14}=4$, $a_{26}=b_{26}=4$, …

따라서 $n=12k+2$ (k는 음수가 아닌 정수)일 때, $a_n=b_n=4$

$12k+2 \leq 150$에서 $k \leq 12.33\cdots$이므로 k는 0, 1, 2, …, 12의 13개이다.

(iii) $n=3$일 때, $a_3=b_3=0$

$a_{15}=b_{15}=0$, $a_{27}=b_{27}=0$, …

따라서 $n=12k+3$일 때, $a_n=b_n=0$

$12k+3 \leq 150$에서 $k \leq 12.25$이므로 k는 0, 1, 2, …, 12의 13개이다.

(iv) $n=4$일 때, $a_4=b_4=8$

$a_{16}=b_{16}=8$, $a_{28}=b_{28}=0$, …

따라서 $n=12k+4$일 때, $a_n=b_n=8$

$12k+4 \leq 150$에서 $k \leq 12.16\cdots$이므로 k는 0, 1, 2, …, 12의 13개이다.

(i)~(iv)에 의하여 $a_n=b_n$을 만족시키는 n의 개수는

$1+13+13+13=40$

02 한 자리 자연수 x에 대하여 $a=0.x\dot{5}$, $b=0.\dot{x}$이다. $(a+b)\times y$ (y는 자연수)가 어떤 자연수의 제곱이 될 때, x의 값에 대하여 이를 만족시키는 가장 작은 자연수 y의 값이 세 자리 자연수가 되게 하는 모든 x의 값의 합을 구하시오. **16**

$a=0.x\dot{5}=\frac{(10x+5)-x}{90}=\frac{9x+5}{90}$, $b=0.\dot{x}=\frac{x}{9}$이므로

$a+b=\frac{9x+5}{90}+\frac{x}{9}=\frac{19x+5}{90}$

이때 x는 한 자리 자연수이므로

(i) $x=1$일 때, $\frac{19x+5}{90}=\frac{4}{15}=\frac{2^2}{3\times5}$, $\frac{2^2}{3\times5}\times y=(\text{자연수})^2$이어야 하므로 가장 작은 자연수 y의 값은 $y=3\times5=15$

(ii) $x=2$일 때, $\frac{19x+5}{90}=\frac{43}{90}$, $\frac{43}{90}\times y=(\text{자연수})^2$이어야 하므로 가장 작은 자연수 y의 값은 $y=90\times43=3870$

(iii) $x=3$일 때, $\frac{19x+5}{90}=\frac{31}{45}$, $\frac{31}{45}\times y=(\text{자연수})^2$이어야 하므로 가장 작은 자연수 y의 값은 $y=45\times31=1395$

(iv) $x=4$일 때, $\frac{19x+5}{90}=\frac{9}{10}=\frac{3^2}{2\times5}$, $\frac{3^2}{2\times5}\times y=(\text{자연수})^2$이어야 하므로 가장 작은 자연수 y의 값은 $y=2\times5=10$

(v) $x=5$일 때, $\frac{19x+5}{90}=\frac{10}{9}=\frac{2\times5}{3^2}$, $\frac{2\times5}{3^2}\times y=(\text{자연수})^2$이어야 하므로 가장 작은 자연수 y의 값은 $y=2\times3^2\times5=90$

(vi) $x=6$일 때, $\frac{19x+5}{90}=\frac{119}{90}$, $\frac{119}{90}\times y=(\text{자연수})^2$이어야 하므로 가장 작은 자연수 y의 값은 $y=90\times119=10710$

(vii) $x=7$일 때, $\frac{19x+5}{90}=\frac{23}{15}$, $\frac{23}{15}\times y=(\text{자연수})^2$이어야 하므로 가장 작은 자연수 y의 값은 $y=15\times23=345$

(viii) $x=8$일 때, $\frac{19x+5}{90}=\frac{157}{90}$, $\frac{157}{90}\times y=(\text{자연수})^2$이어야 하므로 가장 작은 자연수 y의 값은 $y=90\times157=14130$

(ix) $x=9$일 때, $\frac{19x+5}{90}=\frac{88}{45}=\frac{2^3\times11}{3^2\times5}$, $\frac{2^3\times11}{3^2\times5}\times y=(\text{자연수})^2$이어야 하므로 가장 작은 자연수 y의 값은 $y=2\times3^2\times5\times11=990$

(i)~(ix)에서 자연수 x의 값에 대하여 가장 작은 자연수 y의 값이 세 자리 자연수가 되게 하는 x의 값은 7, 9이므로 그 합은

$7+9=16$

03 $\frac{1}{9}+\frac{2}{99}+\frac{3}{999}+\cdots+\frac{9}{10^9-1}$를 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 30번째 자리의 숫자를 구하시오. **7**

$\frac{n}{999\cdots9}$에서 분모가 n자리 수이고 그 수가 모두 9이면 순환마디가 $\underbrace{00\cdots0}_{0\text{이 }(n-1)\text{개}}n$인 순환소수이고 n이 30의 약수가 될 때, 소수점 아래 30번째 자리의 숫자는 n이다.

또, n이 30의 약수가 아닐 때, 소수점 아래 30번째 자리의 숫자는 0이다.

9 이하의 30의 약수는 1, 2, 3, 5, 6이므로

$n=1, 2, 3, 5, 6$일 때 $\frac{n}{\underbrace{999\cdots9}_{n\text{개}}}$의 소수점 아래 30번째 자리의 숫자는 n이고 $n=1, 2, 3, 5, 6$이 아닐 때 소수점 아래 30번째 자리의 숫자는 0이다.

따라서 $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{99}$, $\frac{3}{999}$, …, $\frac{9}{10^9-1}$의 소수점 아래 30번째 자리의 숫자의 합은

$1+2+3+0+5+6+0+0+0=17$

한편, 31은 소수이므로 9 이하의 31의 약수는 1뿐이므로 소수점 아래 31번째 숫자의 합은

$1+0+0+0+0+0+0+0+0=1$

즉, 주어진 소수점 아래 31번째 자리에서 받아올림 되는 숫자는 없으므로 $\frac{1}{9}+\frac{2}{99}+\frac{3}{999}+\cdots+\frac{9}{10^9-1}$를 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 30번째 자리의 숫자는 7이다.

04 $x=5.\dot{a}$일 때, $1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x+1}}=0.1\dot{3}\dot{6}$이다. 이때 한 자리 수 a의 값은?

① 1 ② 2 ✓③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x+1}}=1-\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}}=1-\dfrac{1}{\dfrac{x+2}{x+1}}$

$=1-\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{x+2}{x+2}-\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{1}{x+2}$

이때 $0.1\dot{3}\dot{6}=\dfrac{136-1}{990}=\dfrac{3}{22}$이므로

$\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{3}{22}$, $3x+6=22$

$3x=16$ $\quad\therefore x=\dfrac{16}{3}$

한편, $x=5.\dot{a}=5+0.\dot{a}=5+\dfrac{a}{9}$이므로

$5+\dfrac{a}{9}=\dfrac{16}{3}$, $\dfrac{a}{9}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore a=3$

05 등식 $(-2)^y\times(-9)^x\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^z=\dfrac{2\times6^5}{(-4)^3}$을 만족시키는 세 자연수 x, y, z에 대하여 $x^2+y^2+z^2$의 값을 구하시오. **6**

$(-2)^y\times(-9)^x\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^z=(-1)^y\times2^y\times(-1)^x\times3^{2x}\times3^z\times\dfrac{1}{2^z}$

$=(-1)^{x+y}\times\dfrac{2^y}{2^z}\times3^{2x+z}$

$\dfrac{2\times6^5}{(-4)^3}=\dfrac{2\times(2\times3)^5}{(-2^2)^3}=\dfrac{2\times2^5\times3^5}{-2^6}=-3^5$

즉, 주어진 등식은 $(-1)^{x+y}\times\dfrac{2^y}{2^z}\times3^{2x+z}=-3^5$

이때 우변이 음수이므로 $(-1)^{x+y}$의 지수 $x+y$는 홀수이어야 하고, 우변에 밑이 2인 수가 없으므로 $2^y=2^z$, 즉 $y=z$이어야 한다.

또, $3^{2x+z}=3^5$이므로 $2x+z=5$

이때 $2x$는 짝수이므로 z는 홀수이어야 하고, $y=z$이므로 y도 홀수이다.

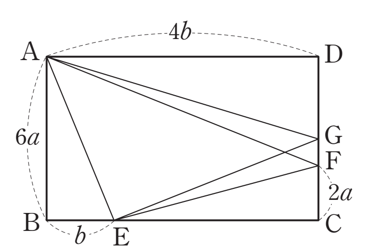
$x+y$가 홀수이므로 y가 홀수이면 x는 짝수이어야 한다.

즉, x는 짝수, y는 홀수, z는 홀수이고, $2x+z=5$를 만족시키는 짝수 x와 홀수 z의 값은 $x=2$, $z=1$

이때 $y=z$이므로 $y=1$

$\therefore x^2+y^2+z^2=2^2+1^2+1^2=6$

06 오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD에서 변 BC 위의 점 E, 변 CD 위의 점 F, 변 CD의 중점 G에 대하여 삼각형 AEF의 넓이를 S_1, 삼각형 AEG의 넓이를 S_2라고 할 때, S_2-S_1을 a, b에 대한 식으로 나타내시오. $\boldsymbol{\frac{1}{2}ab}$



$\triangle$AEF$=$(직사각형 ABCD의 넓이)$-\triangle$ABE$-\triangle$ECF$-\triangle$AFD,

$\triangle$AEG$=$(직사각형 ABCD의 넓이)$-\triangle$ABE$-\triangle$ECG$-\triangle$AGD

이므로

S_2-S_1

$=\triangle$AEG$-\triangle$AEF

$=\{$(직사각형 ABCD의 넓이)$-\triangle$ABE$-\triangle$ECG$-\triangle$AGD$\}$

$\quad-\{$(직사각형 ABCD의 넓이)$-\triangle$ABE$-\triangle$ECF$-\triangle$AFD$\}$

$=\triangle$ECF$+\triangle$AFD$-\triangle$ECG$-\triangle$AGD

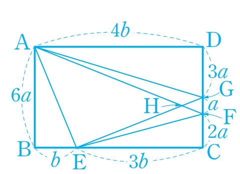
이때

$\overline{DG}=\overline{GC}=\dfrac{1}{2}\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\times6a=3a$,

$\overline{GF}=\overline{GC}-\overline{CF}=3a-2a=a$,

$\overline{EC}=\overline{BC}-\overline{BE}=4b-b=3b$

이므로



$\triangle$ECF$=\dfrac{1}{2}\times\overline{EC}\times\overline{CF}$

$=\dfrac{1}{2}\times3b\times2a=3ab$

$\triangle$AFD$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{DF}=\dfrac{1}{2}\times4b\times4a=8ab$

$\triangle$ECG$=\dfrac{1}{2}\times\overline{EC}\times\overline{CG}=\dfrac{1}{2}\times3b\times3a=\dfrac{9}{2}ab$

$\triangle$AGD$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{DG}=\dfrac{1}{2}\times4b\times3a=6ab$

$\therefore S_2-S_1=\triangle$ECF$+\triangle$AFD$-\triangle$ECG$-\triangle$AGD

$=3ab+8ab-\dfrac{9}{2}ab-6ab=\dfrac{1}{2}ab$

07 $abc=8$일 때, 다음 식의 값을 구하시오. $\frac{1}{2}$

$$\frac{a}{ab+2a+4}+\frac{b}{bc+2b+4}+\frac{c}{ca+2c+4}$$

$abc=8$에서 $\frac{abc}{2}=4$이므로

$\frac{a}{ab+2a+4}=\frac{a}{ab+2a+\frac{abc}{2}}=\frac{2a}{2ab+4a+abc}$

$=\frac{2}{2b+4+bc}=\frac{2}{bc+2b+4}=\frac{4}{2(bc+2b+4)}$

$\frac{b}{bc+2b+4}=\frac{2b}{2(bc+2b+4)}$

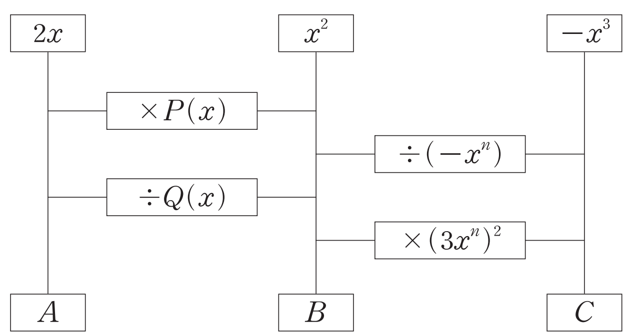
$\frac{c}{ca+2c+4}=\frac{bc}{abc+2bc+4b}=\frac{bc}{8+2bc+4b}=\frac{bc}{2(bc+2b+4)}$

$\therefore \frac{a}{ab+2a+4}+\frac{b}{bc+2b+4}+\frac{c}{ca+2c+4}$

$=\frac{4}{2(bc+2b+4)}+\frac{2b}{2(bc+2b+4)}+\frac{bc}{2(bc+2b+4)}$

$=\frac{4+2b+bc}{2(bc+2b+4)}=\frac{1}{2}$

08 다음과 같은 사다리타기 놀이판이 있다. 맨 위의 칸에서 출발하여 선을 따라 내려가면서 순서대로 계산하였더니 $A=\frac{1}{x^7}$, $B=-54x^{12}$, C는 19차 단항식이었다. $P(x)$, $Q(x)$는 계수가 정수인 단항식이고 n은 한 자리 자연수일 때, $\frac{C}{P(x)Q(x)}$를 구하시오. $9x^{14}$



$A=-x^3\div(-x^n)\div Q(x)=\frac{x^3}{x^nQ(x)}=\frac{1}{x^7}$

$\therefore Q(x)=\frac{x^3}{x^n}\times x^7=\frac{x^{10}}{x^n}$ ...... ㉠

$B=2x\times P(x)\div(-x^n)\times(3x^n)^2=2x\times P(x)\times\left(-\frac{1}{x^n}\right)\times 9x^{2n}$

$=P(x)\times(-18x^{n+1})$

즉, $P(x)\times(-18x^{n+1})=-54x^{12}$이므로

$P(x)=\frac{-54x^{12}}{-18x^{n+1}}=\frac{3x^{11}}{x^n}$ ...... ㉡

$C=x^2\times P(x)\div Q(x)\times(3x^n)^2=x^2\times\frac{3x^{11}}{x^n}\div\frac{x^{10}}{x^n}\times 9x^{2n}$

$=x^2\times\frac{3x^{11}}{x^n}\times\frac{x^n}{x^{10}}\times 9x^{2n}=27x^{3+2n}$

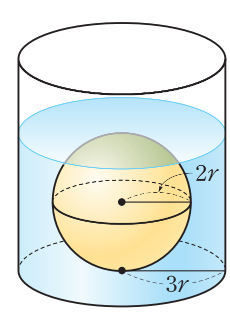
이때 C가 19차 단항식이므로 $3+2n=19$, $2n=16$ $\therefore n=8$

따라서 $C=27x^{19}$이고 $n=8$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$Q(x)=\frac{x^{10}}{x^8}=x^2$, $P(x)=\frac{3x^{11}}{x^8}=3x^3$

$\therefore \frac{C}{P(x)Q(x)}=\frac{27x^{19}}{3x^3\times x^2}=9x^{14}$

09 밑면인 원의 반지름의 길이가 $3r$인 원기둥 모양의 그릇에 물이 담겨 있다. 이 그릇에 반지름의 길이가 $2r$인 구 모양의 쇠공을 넣었더니 물의 높이가 높아져서 정확히 쇠공의 지름과 같아졌다. 쇠공을 넣기 전 처음 물의 높이 H가 $\frac{b}{a}r$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.) 103



쇠공을 넣기 전 물의 부피는 밑면인 원의 반지름의 길이가 $3r$, 높이가 H인 원기둥이므로 처음 물의 부피를 V_1이라고 하면

$V_1=\pi\times(3r)^2\times H=9\pi r^2H$

쇠공의 반지름의 길이가 $2r$이므로 쇠공의 부피를 V_2라고 하면

$V_2=\frac{4}{3}\pi\times(2r)^3=\frac{32}{3}\pi r^3$

그릇에 쇠공을 넣은 후 물과 쇠공의 부피의 합은 밑면인 원의 반지름의 길이가 $3r$, 물의 높이가 $4r$인 원기둥이므로 쇠공과 물의 부피의 합을 V_3이라고 하면

$V_3=\pi\times(3r)^2\times 4r=36\pi r^3$

즉, $V_1+V_2=V_3$이므로

$9\pi r^2H+\frac{32}{3}\pi r^3=36\pi r^3$, $9\pi r^2H=\frac{76}{3}\pi r^3$ $\therefore H=\frac{76}{27}r$

따라서 $a=27$, $b=76$이므로

$a+b=27+76=103$

_____점 / 100점

01

두 수

$$A=\frac{1}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^4}+\frac{3}{10^6}+\cdots,$$
$$B=\frac{4}{10^2}+\frac{5}{10^3}+\frac{4}{10^4}+\frac{5}{10^5}+\frac{4}{10^6}+\frac{5}{10^7}+\cdots$$

에 대하여 $A\div B$의 값은? [4점]

① $\frac{37}{15}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{14}{5}$
✓④ $\frac{43}{15}$ ⑤ $\frac{46}{15}$

$A=\frac{1}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^4}+\frac{3}{10^6}+\cdots=0.1303030\cdots=0.1\dot{3}\dot{0}=\frac{130-1}{990}=\frac{43}{330}$
$B=\frac{4}{10^2}+\frac{5}{10^3}+\frac{4}{10^4}+\frac{5}{10^5}+\frac{4}{10^6}+\frac{5}{10^7}+\cdots$
$=0.0454545\cdots=0.0\dot{4}\dot{5}=\frac{45}{990}=\frac{1}{22}$
$\therefore A\div B=\frac{43}{330}\div\frac{1}{22}=\frac{43}{330}\times 22=\frac{43}{15}$

02

$0.1\dot{6}=9\times a$, $b=5\times 0.0\dot{2}$에 대하여 $a+b$의 값을 순환소수로 나타낼 때, 소수점 아래 200번째 자리의 숫자는? [4점]

① 1 ✓② 2 ③ 3
④ 6 ⑤ 9

$0.1\dot{6}=9\times a$에서 $\frac{16-1}{90}=9\times a$ $\therefore a=\frac{15}{90}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{54}$
$b=5\times 0.0\dot{2}=5\times\frac{2}{90}=\frac{1}{9}$
$\therefore a+b=\frac{1}{54}+\frac{1}{9}=\frac{7}{54}=0.1\dot{2}9\dot{6}$
$a+b=0.1\dot{2}9\dot{6}$이므로 소수점 아래 둘째 자리부터 순환마디가 시작되고, 순환마디를 이루는 숫자의 개수는 3이다.
이때 $200=1+3\times 66+1$이므로 소수점 아래 200번째 자리의 숫자는 순환마디의 첫 번째 숫자인 2이다.

03

다음 중 □ 안에 들어갈 수가 가장 작은 것은? [4점]

① $(x^2y^{\square})^3=x^6y^{12}$ ② $(x^3)^3\times x^{\square}=x^{14}$
③ $x^{\square}\div(x^4)^2=\frac{1}{x^2}$ ④ $x^6\times x^{\square}\div x^3=x^8$
✓⑤ $x^{15}\div x^7\div(x^3)^{\square}=x^2$

① $(x^2y^{\square})^3=x^6y^{\square\times 3}=x^6y^{12}$에서 $\square\times 3=12$ $\therefore \square=4$
② $(x^3)^3\times x^{\square}=x^{9+\square}=x^{14}$에서 $9+\square=14$ $\therefore \square=5$
③ $x^{\square}\div(x^4)^2=x^{\square}\div x^8=\frac{x^{\square}}{x^8}=\frac{1}{x^2}$에서 $x^{\square}=\frac{1}{x^2}\times x^8=x^6$ $\therefore \square=6$
④ $x^6\times x^{\square}\div x^3=x^{3+\square}=x^8$에서 $3+\square=8$ $\therefore \square=5$
⑤ $x^{15}\div x^7\div(x^3)^{\square}=x^{8-3\times\square}=x^2$에서 $8-3\times\square=2$, $3\times\square=6$ $\therefore \square=2$

04

양수 A에 대하여 $A^2=108^4$일 때, A를 소인수분해하면 $2^a\times 3^b$이다. 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [4점]

✓① 10 ② 9 ③ 8
④ 7 ⑤ 6

$108=2^2\times 3^3$이므로 $108^4=(2^2\times 3^3)^4=2^8\times 3^{12}$
즉, $A^2=2^8\times 3^{12}=(2^4\times 3^6)^2$이므로 $A=2^4\times 3^6$
따라서 $a=4$, $b=6$이므로 $a+b=4+6=10$

05

다음 네 수를 작은 것부터 순서대로 올바르게 나열한 것은? [4점]

2^{80} 3^{60} 5^{40} 10^{30}

① $2^{80}<3^{60}<5^{40}<10^{30}$
✓② $2^{80}<5^{40}<3^{60}<10^{30}$
③ $5^{40}<2^{80}<3^{60}<10^{30}$
④ $5^{40}<3^{60}<2^{80}<10^{30}$
⑤ $10^{30}<5^{40}<3^{60}<2^{80}$

$2^{80}=(2^4)^{20}=16^{20}$, $3^{60}=(3^3)^{20}=27^{20}$, $5^{40}=(5^2)^{20}=25^{20}$이므로
$2^{80}<5^{40}<3^{60}$
또, $3^{60}=(3^2)^{30}=9^{30}<10^{30}$
따라서 네 수의 대소 관계를 비교하면
$2^{80}<5^{40}<3^{60}<10^{30}$

06

다음 조건을 만족시키는 두 식 A, B에 대하여 $\frac{5A}{B^2}$를 계산한 것은? (단, $x\neq 0$, $y\neq 0$) [4점]

(가) $3x^3\times A=12x^7y^2$
(나) $-20x^5y^6\div B=-4xy^3$

✓① $\frac{4}{5x^4y^4}$ ② $\frac{5}{4x^4y^4}$ ③ $\frac{4}{5x^2y^2}$
④ $\frac{5}{4x^2y^2}$ ⑤ $\frac{4}{5x^4y^2}$

$3x^3\times A=12x^7y^2$에서 $A=\frac{12x^7y^2}{3x^3}=4x^4y^2$
$-20x^5y^6\div B=-4xy^3$에서 $B=\frac{-20x^5y^6}{-4xy^3}=5x^4y^3$
$\therefore \frac{5A}{B^2}=\frac{5\times 4x^4y^2}{(5x^4y^3)^2}=\frac{20x^4y^2}{25x^8y^6}=\frac{4}{5x^4y^4}$

07

$5x-4y+7$의 2배에서 어떤 다항식 A의 3배를 빼면 $4x+y+2$가 된다. 다항식 A의 x항의 계수를 a, y항의 계수를 b, 상수항을 c라고 할 때, $a-b+c$의 값은? [4점]

① -5　② -1　③ 1
④ 5　✓⑤ 9

$2(5x-4y+7)-3A=4x+y+2$이므로
$10x-8y+14-3A=4x+y+2$
$3A=10x-8y+14-(4x+y+2)=6x-9y+12$
$\therefore A=2x-3y+4$
따라서 $a=2$, $b=-3$, $c=4$이므로
$a-b+c=2-(-3)+4=9$

08

다음 식을 계산하면 $ax+by$일 때, $a+b$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.) [4점]

$$(0.\dot{2}x^2y-1.\dot{6}xy^2)\div\frac{5}{9}xy-4x^2y\left(\frac{1}{5xy}-\frac{5}{4x^2}\right)$$

① $-\frac{12}{5}$　② $-\frac{8}{5}$　③ $\frac{4}{5}$
✓④ $\frac{8}{5}$　⑤ $\frac{12}{5}$

$(0.\dot{2}x^2y-1.\dot{6}xy^2)\div\frac{5}{9}xy-4x^2y\left(\frac{1}{5xy}-\frac{5}{4x^2}\right)$
$=\left(\frac{2}{9}x^2y-\frac{5}{3}xy^2\right)\times\frac{9}{5xy}-4x^2y\left(\frac{1}{5xy}-\frac{5}{4x^2}\right)$
$=\frac{2}{5}x-3y-\frac{4}{5}x+5y$
$=-\frac{2}{5}x+2y$
따라서 $a=-\frac{2}{5}$, $b=2$이므로
$a+b=-\frac{2}{5}+2=\frac{8}{5}$

09

분수 $\frac{1}{2800}$을 소수로 나타내면 $0.0003\dot{5}7142\dot{8}$이다. 분수 $\frac{1}{2800}$의 소수점 아래 n번째 자리의 숫자를 a_n이라고 할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{40}$의 값은? [4점]

① 150　✓② 165　③ 180
④ 195　⑤ 210

$\frac{1}{2800}=0.0003\dot{5}7142\dot{8}$에서 순환마디를 이루는 숫자의 개수는 6이고, 소수점 아래 4번째 자리까지의 숫자는 순환하지 않는다.
이때 $40=4+6\times6$이므로
$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{40}=(0+0+0+3)+(5+7+1+4+2+8)\times6$
$=3+27\times6=165$

10

분수 $\frac{a}{840}$를 소수로 나타내면 유한소수가 되고, 기약분수로 나타내면 $\frac{3}{b}$이다. a가 두 자리 자연수일 때, $a+b$의 값은? [4점]

① 101　② 102　✓③ 103
④ 104　⑤ 105

$\frac{a}{840}=\frac{a}{2^3\times3\times5\times7}$를 유한소수로 나타낼 수 있으려면 a는 3×7, 즉 21의 배수이어야 한다. 이때 a는 두자리 자연수이므로 $a=21$, 42, 63, 84
(i) $a=21$일 때, $\frac{21}{840}=\frac{1}{40}$이므로 성립하지 않는다.
(ii) $a=42$일 때, $\frac{42}{840}=\frac{1}{20}$이므로 성립하지 않는다.
(iii) $a=63$일 때, $\frac{63}{840}=\frac{3}{40}$이므로 $b=40$
(iv) $a=84$일 때, $\frac{84}{840}=\frac{1}{10}$이므로 성립하지 않는다.
(i)~(iv)에 의하여 $a=63$, $b=40$이므로 $a+b=63+40=103$

11

$\frac{25^5+5^{11}+125^4}{5^8+5^9+5^{10}}=5^n$일 때, 자연수 n의 값은? [4점]

① 1　✓② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

$\frac{25^5+5^{11}+125^4}{5^8+5^9+5^{10}}=\frac{5^{10}+5^{11}+5^{12}}{5^8+5^9+5^{10}}=\frac{5^{10}(1+5^1+5^2)}{5^8(1+5^1+5^2)}=5^2$
즉, $5^2=5^n$이므로 $n=2$

12

$(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$에 대하여
$(x_1,\ y_1)⊛(x_2,\ y_2)=x_1y_2-x_2y_1$
라고 한다. 다음 식을 계산하면 $ax^2+bxy+cy^2$일 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은? [4점]

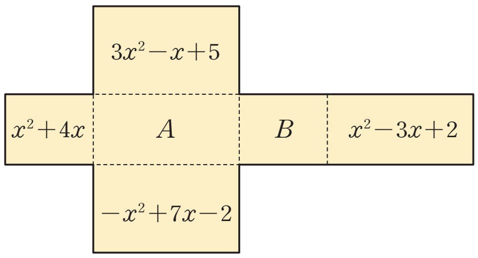
$(3x,\ 2x-y)⊛(2y,\ 4x+3y)$
$+(x-2y,\ 5x)⊛(3x+y,\ -y)$

① -5　② -3　✓③ 0
④ 2　⑤ 4

$(3x,\ 2x-y)⊛(2y,\ 4x+3y)=3x\times(4x+3y)-2y\times(2x-y)$
$=12x^2+9xy-4xy+2y^2$
$=12x^2+5xy+2y^2$
$(x-2y,\ 5x)⊛(3x+y,\ -y)=(x-2y)\times(-y)-(3x+y)\times5x$
$=-xy+2y^2-15x^2-5xy$
$=-15x^2-6xy+2y^2$
$\therefore (3x,\ 2x-y)⊛(2y,\ 4x+3y)+(x-2y,\ 5x)⊛(3x+y,\ -y)$
$=(12x^2+5xy+2y^2)+(-15x^2-6xy+2y^2)=-3x^2-xy+4y^2$
따라서 $a=-3$, $b=-1$, $c=4$이므로 $a+b+c=-3+(-1)+4=0$

13

다음 그림과 같은 전개도로 직육면체를 만들었을 때, 마주 보는 두 면에 적힌 두 다항식의 합은 모두 같다고 한다. 이때, 다항식 A, B에 대하여 $A-2B$의 값은? [4점]

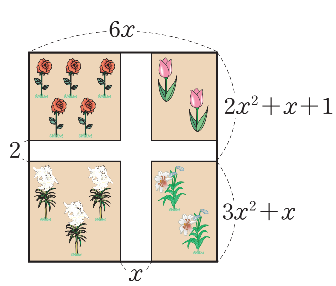


① $-x^2-5x-5$ ✓② $-x^2+5x-5$ ③ x^2+5x-5 ④ x^2-5x-5 ⑤ x^2+5x+5

$3x^2-x+5+(-x^2+7x-2)=2x^2+6x+3$
마주 보는 두 면에 적힌 두 다항식의 합은 모두 같으므로
$A+(x^2-3x+2)=2x^2+6x+3$에서
$A=2x^2+6x+3-(x^2-3x+2)=x^2+9x+1$
$(x^2+4x)+B=2x^2+6x+3$에서
$B=2x^2+6x+3-(x^2+4x)=x^2+2x+3$
$\therefore A-2B=x^2+9x+1-2(x^2+2x+3)$
$=x^2+9x+1-2x^2-4x-6$
$=-x^2+5x-5$

14

오른쪽 그림과 같이 직사각형 모양의 화단 사이에 폭이 일정한 십자형 모양의 길이 있다. 길을 제외한 화단의 총 넓이가 ax^3+bx^2+cx+d일 때, 네 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값은? [4점]



① 15 ② 20 ③ 25 ✓④ 30 ⑤ 35

길의 폭을 제외한 화단의 가로의 길이는
$6x-x=5x$
길의 폭을 제외한 화단의 세로의 길이는
$(2x^2+x+1)-2+(3x^2+x)=5x^2+2x-1$
따라서 길을 제외한 화단의 총 넓이는
$5x(5x^2+2x-1)=25x^3+10x^2-5x$
따라서 $a=25$, $b=10$, $c=-5$, $d=0$이므로
$a+b+c+d=25+10+(-5)+0=30$

15

1보다 작은 분수 $\dfrac{17}{n}$을 소수로 나타내면 소수점 아래 첫째 자리의 숫자가 6인 유한소수가 될 때, 자연수 n의 값은? [6점]

① 20 ✓② 25 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

$\dfrac{17}{n}$을 소수로 나타내면 소수점 아래 첫째 자리의 수가 6이므로
$0.6\le\dfrac{17}{n}<0.7$, $\dfrac{3}{5}\le\dfrac{17}{n}<\dfrac{7}{10}$
$\dfrac{10}{7}<\dfrac{n}{17}\le\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{170}{7}<n\le\dfrac{85}{3}$
$\therefore 24.286\cdots<n\le28.333\cdots$
즉, n의 값이 될 수 있는 수는 25, 26, 27, 28이다.
이때 $\dfrac{17}{n}$이 유한소수이어야 하므로 n은 소인수가 2 또는 5 뿐이거나 그 수에 17을 곱한 수이다.
따라서 조건을 만족시키는 n의 값은 25이다.

16

어떤 자연수 a에 $0.\dot{0}\dot{7}$을 곱해야 하는데 잘못하여 $0.0\dot{7}$을 곱하였더니 그 계산 결과가 정답보다 $0.\dot{2}\dot{8}$만큼 커졌다. 이때 자연수 a의 값을 구하시오. [4점] **40**

$a\times0.0\dot{7}-a\times0.\dot{0}\dot{7}=0.\dot{2}\dot{8}$이므로

$a\times\frac{7}{90}-a\times\frac{7}{99}=\frac{28}{99}$

$\left(\frac{77}{990}-\frac{70}{990}\right)a=\frac{28}{99}$

$\frac{7}{990}a=\frac{28}{99}$

$\therefore a=40$

19

자연수 x, y에 대하여 $\frac{75}{x}$를 소수로 나타내면 1보다 큰 유한소수가 되고, $\frac{y}{90}$를 소수로 나타내면 1보다 작은 유한소수가 된다. 이때 $x-y$의 값 중 가장 큰 수를 구하시오. [4점] **55**

$\frac{75}{x}=\frac{3\times5^2}{x}$이 1보다 큰 유한소수이므로 $x<75$이고 $\frac{75}{x}$를 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 가장 큰 x의 값은 64이다. $\therefore x=64$

$\frac{y}{90}=\frac{y}{2\times3^2\times5}$가 1보다 작은 유한소수이므로 $y<90$이고 y는 $3^2=9$의 배수이어야 한다.

따라서 이를 만족시키는 가장 작은 y의 값은 9이다. $\therefore y=9$

$\therefore x-y=64-9=55$

17

다음 $\boxed{}$ 안에 알맞은 식을 구하시오. [4점] $\boldsymbol{-3x^7y^7}$

$$(3x^3y^4)^2\div\boxed{}\times(-2x^2y)^4=-48x^7y^5$$

$(3x^3y^4)^2\div\boxed{}\times(-2x^2y)^4=-48x^7y^5$에서

$9x^6y^8\div\boxed{}\times16x^8y^4=-48x^7y^5$

$\therefore \boxed{}=9x^6y^8\times16x^8y^4\div(-48x^7y^5)$

$=9x^6y^8\times16x^8y^4\times\left(-\frac{1}{48x^7y^5}\right)$

$=-3x^7y^7$

20

자연수 x, y에 대하여 $x-y=2$를 만족시키고 $A=2^{9x+5y}$, $B=5^{6x+8y}$, $C=2^{5x+9y}$, $D=5^{2x+12y}$일 때, $\frac{AB}{CD}$의 값을 구하시오. [4점] $\boldsymbol{10^8}$

$\frac{AB}{CD}=\frac{2^{9x+5y}\times5^{6x+8y}}{2^{5x+9y}\times5^{2x+12y}}$

$=2^{4x-4y}\times5^{4x-4y}$

$=(2\times5)^{4\times2}$ ($\because x-y=2$)

$=10^8$

18

$2^{20}=A$일 때, $5\times2^{42}+24\times2^{38}$을 A를 사용하여 나타내시오. [4점] $\boldsymbol{26A^2}$

$5\times2^{42}+24\times2^{38}=5\times2^2\times2^{40}+2^3\times3\times2^{38}$

$=5\times2^2\times2^{40}+2\times3\times2^{40}$

$=20\times(2^{20})^2+6\times(2^{20})^2$

$=20\times A^2+6\times A^2$

$=(20+6)\times A^2$

$=26A^2$

21

$A=2x^2+5xy-3y^2$, $B=4x^2-xy+y^2$, $C=-x^2+4y^2$일 때, $2A-\{B-(2C-3A)\}$를 간단히 하면 $ax^2+bxy+cy^2$이다. 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오. [4점] **−2**

$2A-\{B-(2C-3A)\}=2A-(B-2C+3A)=-A-B+2C$

이 식에 $A=2x^2+5xy-3y^2$, $B=4x^2-xy+y^2$, $C=-x^2+4y^2$을 대입하면

$-A-B+2C=-(2x^2+5xy-3y^2)-(4x^2-xy+y^2)+2(-x^2+4y^2)$

$=-2x^2-5xy+3y^2-4x^2+xy-y^2-2x^2+8y^2$

$=-8x^2-4xy+10y^2$

따라서 $a=-8$, $b=-4$, $c=10$이므로

$a+b+c=-8+(-4)+10=-2$

22, 23번은 서술형입니다. 풀이 과정을 자세히 서술하시오.

22

어떤 다항식에서 $-x^2-6x+5$를 빼야 하는데 잘못하여 더했더니 $2x^2-x+3$이 되었다. 이때 바르게 계산한 결과를 ax^2+bx+c라고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. 8

(단, a, b, c는 상수이다.) [7점]

어떤 다항식을 A라고 하면

$A+(-x^2-6x+5)=2x^2-x+3$

$\therefore A=2x^2-x+3-(-x^2-6x+5)$

$=2x^2-x+3+x^2+6x-5$

$=3x^2+5x-2$ ······ 3점

바르게 계산하면

$3x^2+5x-2-(-x^2-6x+5)$

$=3x^2+5x-2+x^2+6x-5$

$=4x^2+11x-7$ ······ 2점

따라서 $a=4$, $b=11$, $c=-7$이므로

$a+b+c=4+11+(-7)=8$ ······ 2점

23

다음 조건을 만족시키는 A의 값을 구하시오. [7점] 216

(가) A는 세 자리 자연수이다.

(나) $\dfrac{A}{240}$는 유한소수로 나타내어진다.

(다) $\dfrac{A}{240}\times 30$은 어떤 자연수의 세제곱이다.

조건 (나)에서 $\dfrac{A}{240}=\dfrac{A}{2^4\times3\times5}$가 유한소수로 나타낼 수 있으려면 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 하므로 A는 3의 배수가 되어야 한다. ······ 2점

조건 (다)에서 $\dfrac{A}{240}\times30$이 어떤 자연수의 세제곱이므로

$\dfrac{A}{240}\times30=\dfrac{A}{8}=n^3$ (n은 자연수)의 꼴이어야 한다.

즉, $A=8n^3$의 꼴이어야 한다. ······ 2점

이때 A는 3의 배수이므로

$A=8\times3^3\times k^3=216k^3$ (k는 자연수)

의 꼴이고, $216\times2^3=1728>1000$이므로 $k=1$

따라서 세 자리 자연수 A의 값은 216이다. ······ 3점

Ⅱ 부등식

Ⅱ 부등식

01 일차부등식

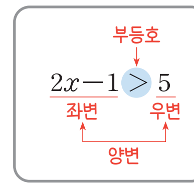
❶ 부등식의 뜻과 성질

(1) **부등식:** 부등호 $>$, $<$, $\geq$, $\leq$를 사용하여 수 또는 식의 대소 관계를 나타낸 식

① 좌변: 부등호의 왼쪽 부분

② 우변: 부등호의 오른쪽 부분

③ 양변: 부등식의 좌변과 우변



(2) **부등식의 표현**

$a>b$	$a<b$	$a\geq b$	$a\leq b$
a는 b보다 크다. a는 b 초과이다.	a는 b보다 작다. a는 b 미만이다.	a는 b보다 크거나 같다. a는 b보다 작지 않다. a는 b 이상이다.	a는 b보다 작거나 같다. a는 b보다 크지 않다. a는 b 이하이다.

(3) **부등식의 해:** 부등식을 참이 되게 하는 미지수의 값

(4) **부등식을 푼다:** 부등식의 해를 모두 구하는 것

(5) **부등식의 성질**

① 부등식의 양변에 같은 수를 더하거나 양변에 같은 수를 빼어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

⇨ $a<b$일 때, $a+c<b+c$, $a-c<b-c$

② 부등식의 양변에 같은 양수를 곱하거나 양변을 같은 양수로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

⇨ $a<b$이고 $c>0$일 때, $ac<bc$, $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$

③ 부등식의 양변에 같은 음수를 곱하거나 양변을 같은 음수로 나누면 부등호의 방향은 바뀐다.

⇨ $a<b$이고 $c<0$일 때, $ac>bc$, $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$

❷ 일차부등식의 뜻과 풀이

(1) **일차부등식:** 부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하였을 때

(일차식)>0, (일차식)<0, (일차식)≥ 0, (일차식)≤ 0

중 하나의 꼴로 나타나는 부등식

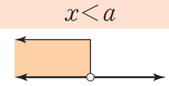
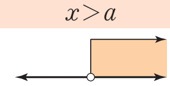
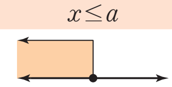
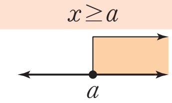
(2) **일차부등식의 풀이 순서**

❶ 미지수 x를 포함하는 항은 좌변으로, 상수항은 우변으로 이항한다.

❷ ❶의 식을 정리하여 $ax>b$, $ax<b$, $ax\geq b$, $ax\leq b$ $(a\neq 0)$ 중 하나의 꼴로 나타낸다.

❸ 부등식의 양변을 x의 계수 a로 나누어 $x>$(수), $x<$(수), $x\geq$(수), $x\leq$(수)의 꼴로 나타낸다. 이때 $a<0$이면 부등호의 방향은 바뀐다.

(3) **부등식의 해를 수직선 위에 나타내기**

$x<a$	$x>a$	$x\leq a$	$x\geq a$
			

1등급 비법노트

◆ **부등식의 참, 거짓**
부등식에서 좌변과 우변의 값의 대소 관계가
① 주어진 부등호의 방향과 같을 때 ⇨ 참
② 주어진 부등호의 방향과 다를 때 ⇨ 거짓

◆ 부등호 $<$, $>$를 $\leq$, $\geq$로 바꾸어도 부등식의 성질은 성립한다.

◆ 부등식의 양변을 0으로 나누는 경우는 생각하지 않는다.

◆ **$ax+b$ $(a\neq 0)$의 값의 범위를 알 때, x의 값의 범위 구하기**
$ax+b$의 값의 범위의 양변에 b를 뺀 후 양변을 a로 나누어 부등식의 한 변에 x만 남도록 만든다.
예) $-1\leq 2x+1\leq 3$의 양변에 -1을 빼면 $-2\leq 2x\leq 2$이고 양변을 2로 나누면 $-1\leq x\leq 1$

◆ x에 대한 부등식 $ax>b$에서
① $a>0$일 때, $x>\dfrac{b}{a}$
② $a<0$일 때, $x<\dfrac{b}{a}$
③ $a=0$일 때
$\begin{cases} b\geq 0\text{이면 해가 없다.} \\ b<0\text{이면 해가 무수히 많다.} \end{cases}$

◆ 수직선에서 ○에 대응하는 수는 부등식의 해에 포함되지 않고, ●에 대응하는 수는 부등식의 해에 포함된다.

3 복잡한 일차부등식의 풀이

(1) **괄호가 있는 경우:** 분배법칙을 이용하여 괄호를 풀고, 동류항끼리 정리하여 푼다.

(2) **계수가 소수인 경우:** 양변에 10, 100, 1000, …과 같은 적당한 10의 거듭제곱 수를 곱하여 계수를 모두 정수로 바꾸어 푼다.

(3) **계수가 분수인 경우:** 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 계수를 모두 정수로 바꾸어 푼다.

02 일차부등식의 활용

1 일차부등식의 활용 (1)

(1) **일차부등식의 활용 문제 풀이 순서**

❶ 미지수 정하기: 문제의 뜻을 이해하고 구하려고 하는 것을 미지수 x로 놓는다.

❷ 부등식 세우기: 문제의 뜻에 맞게 x에 대한 일차부등식을 세운다.

❸ 부등식 풀기: 일차부등식을 푼다.

❹ 확인하기: 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

(2) **수에 대한 문제**

① 어떤 수에 대한 문제: 어떤 수를 x로 놓고 x에 대한 부등식을 세운다.

② 연속하는 세 정수: $x-1$, x, $x+1$ 또는 x, $x+1$, $x+2$로 놓는다.

③ 연속하는 세 홀수(짝수): $x-2$, x, $x+2$ 또는 x, $x+2$, $x+4$로 놓는다.

(3) **원가, 정가에 대한 문제**

① 원가가 x원인 물건에 a %의 이익을 붙인 정가

⇨ (정가)=(원가)+(이익)$=\left(1+\dfrac{a}{100}\right)x$(원)

② 원가가 y원인 물건을 b % 할인한 판매 가격

⇨ (판매 가격)=(정가)−(할인 금액)$=\left(1-\dfrac{b}{100}\right)y$(원)

(4) **유리한 방법을 선택하는 문제**

① 교통비를 들여 도매점을 이용하는 것이 교통비 없이 동네 상점을 이용하는 것보다 유리하다.

⇨ (동네 상점 이용 금액)>(도매점 이용 금액)+(교통비)

② x명이 입장할 때, a명의 단체 입장료를 지불하는 것이 유리하다. (단, $x<a$)

⇨ (x명의 입장료)>(a명의 단체 입장료)

(5) **도형에 대한 문제**

① (삼각형의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times$(밑변의 길이)×(높이)

② (직사각형의 넓이)=(가로의 길이)×(세로의 길이)

③ (사다리꼴의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times${(윗변의 길이)+(아랫변의 길이)}×(높이)

2 일차부등식의 활용 (2)

(1) **거리, 속력, 시간에 대한 문제**

(거리)=(속력)×(시간), (속력)$=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{시간})}$, (시간)$=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$

(2) **농도에 대한 문제**

① (소금물의 농도)$=\dfrac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})}\times 100(\%)$

② (소금의 양)$=\dfrac{(\text{소금물의 농도})}{100}\times$(소금물의 양)

1등급 비법노트

- 계수에 소수와 분수가 섞여 있을 때에는 소수를 분수로 바꾼 후 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 푼다.
- 물건의 개수, 사람 수, 나이 등은 자연수임에 주의한다.
- ① (물건 전체의 가격)
  =(한 개의 가격)×(물건의 개수)
  ② (거스름돈)
  =(지불한 금액)−(물건 전체의 가격)
- (이익)=(판매 가격)−(원가)
- 도형에서 길이, 넓이, 부피는 항상 양수임에 주의한다.
- 거리, 속력, 시간에 대한 문제를 풀 때에는 단위를 통일시킨 후 부등식을 세운다.
  ① 1 km=1000 m
  ② 1시간=60분, 1분$=\dfrac{1}{60}$시간
- 소금물에 물을 더 넣거나 소금물을 증발시켜도 소금의 양은 변하지 않음을 이용하여 부등식을 세운다.

개념을 적용하는

Lv. 1 핵심 문제

개념 1 부등식의 뜻과 성질

01

다음 중 문장을 부등식으로 나타낸 것으로 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① x의 2배에서 1을 뺀 값은 9보다 크거나 같다.
⇨ $2x-1>9$

② 전체 학생 23명 중 남학생이 x명일 때, 여학생은 10명보다 많다. ⇨ $23-x<10$

✓③ 800원짜리 사과 x개와 500원짜리 귤 5개의 값은 10000원을 초과하지 않는다.
⇨ $800x+500\times5\leq10000$

④ 길이가 x m인 철사를 끝에서 2 m씩 3번 잘라 내고 남은 길이는 9 m보다 길지 않다. ⇨ $x-2+3\leq9$

✓⑤ 버스가 x km의 거리를 시속 100 km로 달리면 1시간 반 이상 걸린다. ⇨ $\dfrac{x}{100}\geq\dfrac{3}{2}$

① $2x-1\geq9$
② $23-x>10$
④ $x-2\times3\leq9$

02 출제 주의

다음 중 옳은 것은?

① $a<b$이면 $a^2<b^2$이다.

② $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$이면 $-a<-b$이다.

③ $-\dfrac{1}{5}a-4<-\dfrac{1}{5}b-4$이면 $a<b$이다.

④ $2a<b$이면 $a-1<\dfrac{b}{2}-\dfrac{1}{2}$이다.

✓⑤ $2-\dfrac{a}{3}<\dfrac{b}{3}+2$이면 $\dfrac{a+1}{7}>\dfrac{1-b}{7}$이다.

① $a<0$, $b>0$이고 $|a|=|b|$이면 $a<b$이지만 $a^2=b^2$
② $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$이면 $a<b$ $\quad\therefore -a>-b$
③ $-\frac{1}{5}a-4<-\frac{1}{5}b-4$에서 $-\frac{1}{5}a<-\frac{1}{5}b$ $\quad\therefore a>b$
④ $2a<b$에서 $a<\frac{b}{2}$ $\quad\therefore a-1<\frac{b}{2}-1$
⑤ $2-\frac{a}{3}<\frac{b}{3}+2$에서 $-\frac{a}{3}<\frac{b}{3}$, $a>-b$, $a+1>1-b$ $\quad\therefore \frac{a+1}{7}>\frac{1-b}{7}$

03

$-3\leq1-2a<11$일 때, $\dfrac{1}{3}x=-(a+4)$를 만족시키는 x의 값의 범위를 구하시오. $-18\leq x<3$

$-3\leq1-2a<11$에서 $-4\leq-2a<10$ $\quad\therefore -5<a\leq2$
$\frac{1}{3}x=-(a+4)$에서 $\frac{1}{3}x=-a-4$ $\quad\therefore x=-3a-12$
$-5<a\leq2$에서 $-6\leq-3a<15$
$-18\leq-3a-12<3$ $\quad\therefore -18\leq x<3$

개념 2 일차부등식의 뜻과 풀이

04

$5x^2+2ax\leq(b+1)x^2-6x+1$이 x에 대한 일차부등식이 되도록 하는 두 상수 a, b의 조건은?

✓① $a\neq-3$, $b=4$ ② $a\neq-3$, $b=6$
③ $a\neq3$, $b=2$ ④ $a\neq3$, $b=4$
⑤ $a\neq3$, $b=6$

$5x^2+2ax\leq(b+1)x^2-6x+1$에서
$(4-b)x^2+(2a+6)x-1\leq0$
일차부등식이 되려면 $4-b=0$, $2a+6\neq0$이어야 하므로
$a\neq-3$, $b=4$

05

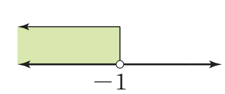
다음 일차부등식 중 해가 나머지 넷과 다른 하나는?

① $3x+2>14$ ② $x+3<3x-5$
③ $3x+1<4x-3$ ✓④ $x+5>3x-3$
⑤ $9-x<2x-3$

①, ②, ③, ⑤ $x>4$
④ $x<4$

06

일차부등식 $3x-7>4x+a$의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a의 값은?



✓① -6 ② -4 ③ -2
④ 0 ⑤ 2

$3x-7>4x+a$에서 $x<-7-a$
수직선 위에 나타낸 해는 $x<-1$이므로
$-7-a=-1$ $\quad\therefore a=-6$

07

$a<0$일 때, x에 대한 일차부등식 $2(ax+3)>4a+6$을 풀면?

① $x>-2$ ② $x>2$ ✓③ $x<2$
④ $x>3$ ⑤ $x<3$

$2(ax+3)>4a+6$에서
$2ax+6>4a+6$, $2ax>4a$
이때 $a<0$이므로 $x<2$

08

일차부등식 $\frac{3}{2}x+a\le 3-x$의 해 중에서 가장 큰 수가 2일 때, 상수 a의 값을 구하시오. -2

$\frac{3}{2}x+a\le 3-x$에서 $\frac{5}{2}x\le 3-a$
$\therefore x\le \frac{2}{5}(3-a)$
이때 해 중에서 가장 큰 수가 2이므로
$\frac{2}{5}(3-a)=2$, $3-a=5$
$\therefore a=-2$

개념 3 복잡한 일차부등식의 풀이

09 서술형

일차부등식 $0.03x-0.1\le 0.26$을 참이 되게 하는 x의 값 중 가장 큰 수를 a, 일차부등식 $\frac{5}{6}-\frac{x-1}{3}\le\frac{x}{2}$를 참이 되게 하는 x의 값 중 가장 작은 수를 b라고 할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a-5b$의 값을 구하시오. 5

$0.03x-0.1\le 0.26$에서 $3x-10\le 26$, $3x\le 36$ $\therefore x\le 12$
이때 부등식을 참이 되게 하는 x의 값 중 가장 큰 수는 12이므로
$a=12$ ······ 40 %
$\frac{5}{6}-\frac{x-1}{3}\le\frac{x}{2}$에서 $5-2(x-1)\le 3x$, $5-2x+2\le 3x$
$5x\ge 7$ $\therefore x\ge\frac{7}{5}$
이때 부등식을 참이 되게 하는 x의 값 중 가장 작은 수는 $\frac{7}{5}$이므로
$b=\frac{7}{5}$ ······ 40 %
$\therefore a-5b=12-5\times\frac{7}{5}=5$ ······ 20 %

10 출제 주의

일차부등식 $0.\dot{5}x+1.\dot{2}>\frac{x-1}{6}-\frac{7}{18}$을 만족시키는 음의 정수 x의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
✓④ 4 ⑤ 5

$0.\dot{5}x+1.\dot{2}>\frac{x-1}{6}-\frac{7}{18}$에서 $\frac{5}{9}x+\frac{11}{9}>\frac{x-1}{6}-\frac{7}{18}$이므로
$10x+22>3(x-1)-7$, $10x+22>3x-3-7$
$7x>-32$ $\therefore x>-\frac{32}{7}$
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 음의 정수 x는 -4, -3, -2, -1의 4개이다.

11

다음 두 일차부등식의 해가 서로 같을 때, 양수 a의 값은?

$$10\ge a(2x-3),$$
$$0.2\{x-(3x-1)\}\le -0.3(2x-5)-0.8$$

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ✓⑤ 5

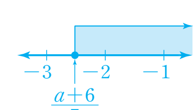
$0.2\{x-(3x-1)\}\le -0.3(2x-5)-0.8$에서
$2\{x-(3x-1)\}\le -3(2x-5)-8$
$2(-2x+1)\le -6x+7$, $-4x+2\le -6x+7$
$2x\le 5$ $\therefore x\le\frac{5}{2}$
$10\ge a(2x-3)$에서 $10\ge 2ax-3a$, $2ax\le 3a+10$
이때 $a>0$이므로 $x\le\frac{3a+10}{2a}$
두 일차부등식의 해가 서로 같으므로
$\frac{5}{2}=\frac{3a+10}{2a}$, $10a=6a+20$
$4a=20$ $\therefore a=5$

12 출제 주의

일차부등식 $\frac{x+a}{2}\le 4x-3$을 만족시키는 음의 정수 x가 2개일 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $-27\le a\le -20$ ② $-27\le a<-20$
✓③ $-27<a\le -20$ ④ $-15\le a<-8$
⑤ $-15<a\le -8$

$\frac{x+a}{2}\le 4x-3$에서 $7x\ge 6+a$
$\therefore x\ge\frac{a+6}{7}$ ······ ㉠



㉠을 만족시키는 음의 정수 x가 2개이므로
$-3<\frac{a+6}{7}\le -2$이어야 한다.
$-3<\frac{a+6}{7}\le -2$에서
$-21<a+6\le -14$ $\therefore -27<a\le -20$

사고를 확장하는
Lv. 2 실전 문제

ㄱ. $a<b$이고 $c<0$이므로 $ac>bc$이고 $d<0$이므로 $\frac{ac}{d}<\frac{bc}{d}$

ㄴ. $a<b$이므로 $a-2d<b-2d$이고 $c<0$이므로 $\frac{a-2d}{c}>\frac{b-2d}{c}$

01

네 수 a, b, c, d에 대하여 $a<b$, $c<0$, $d<0$이다. 다음 보기의 부등식 중 항상 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. ㄱ, ㄹ

〈 보기 〉

ㄱ. $\frac{ac}{d}<\frac{bc}{d}$ ㄴ. $\frac{a-2d}{c}<\frac{b-2d}{c}$

ㄷ. $a^2d-2bc<b^2d-2bc$ ㄹ. $\frac{a+c}{-2cd}>\frac{b+c}{-2cd}$

ㅁ. $-2ad+3c>-2bd+3c$

ㄷ. (i) $|a|\le|b|$일 때, $a^2\le b^2$이고 $d<0$이므로 $a^2d\ge b^2d$ $\therefore a^2d-2bc\ge b^2d-2bc$

(ii) $|a|>|b|$일 때, $a^2>b^2$이고 $d<0$이므로 $a^2d<b^2d$ $\therefore a^2d-2bc<b^2d-2bc$

(i), (ii)에 의하여 $a^2d-2bc<b^2d-2bc$가 항상 옳다고 할 수 없다.

ㄹ. $a<b$이므로 $a+c<b+c$이고 $-2cd<0$이므로 $\frac{a+c}{-2cd}>\frac{b+c}{-2cd}$

ㅁ. $a<b$이고 $-2d>0$이므로 $-2ad<-2bd$ $\therefore -2ad+3c<-2bd+3c$

02

$0<a<-b$를 만족시키는 두 실수 a, b에 대하여 다음 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보기 〉

ㄱ. $a|b|<b|a|$ ㄴ. $-1<\frac{a+b}{a-b}<0$

ㄷ. $|a+b|<|a|+|b|$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

✓④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. (좌변)$=a|b|=-ab>0$, (우변)$=b|a|=ba<0$ $\therefore a|b|>b|a|$

ㄴ. $a+b<0$이고 $a-b>0$이므로 $\frac{a+b}{a-b}<0$, $-a+b<a+b$, $\frac{-a+b}{a-b}<\frac{a+b}{a-b}$

$\therefore -1<\frac{a+b}{a-b}<0$

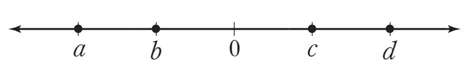
ㄷ. (좌변)$=|a+b|=-a-b$, (우변)$=|a|+|b|=a-b$

$-a-b<a-b$이므로 $|a+b|<|a|+|b|$

03 출제 주의

아래 그림은 네 수 a, b, c, d를 수직선 위에 나타낸 것이다. 다음 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $|a|=|d|=2|b|=2|c|$)



$a<b<0<c<d$이고 $|a|=|d|=2|b|=2|c|$

〈 보기 〉

ㄱ. $\frac{b-d}{c}>\frac{a-c}{d}$ ㄴ. $\frac{1-a}{b-a}>\frac{1-b}{d-c}$

ㄷ. $\frac{1}{a}-\frac{1}{d}>\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

✓④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $b-d=a-c<0$ $\therefore \frac{b-d}{c}>\frac{a-c}{d}$ $(\because 0<c<d)$

ㄴ. $a<b<0$이므로 $-a>-b>0$ $\therefore 1-a>1-b$

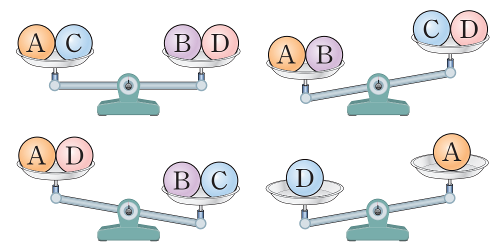
또, $b-a=d-c>0$이므로 $\frac{1-a}{b-a}>\frac{1-b}{d-c}$

ㄷ. $\frac{1}{a}=-\frac{1}{d}$, $\frac{1}{b}=-\frac{1}{c}$이므로 $\frac{1}{a}-\frac{1}{d}=\frac{2}{a}$, $\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$

또, $a<b<0$이므로 $\frac{2}{a}>\frac{2}{b}$ $\therefore \frac{1}{a}-\frac{1}{d}>\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$

04

다음은 무게가 서로 다른 네 개의 추 A, B, C, D를 양팔 저울에 올려 무게를 비교한 결과이다. 추의 무게가 무거운 것부터 순서대로 나열한 것은?



① B, C, A, D ✓② B, C, D, A

③ C, A, B, D ④ C, B, A, D

⑤ D, B, C, A

A+C=B+D …… ㉠ A+B>C+D …… ㉡

A+D<B+C …… ㉢ D>A

㉡의 양변에 C를 더하면 A+B+C>2C+D

이때 ㉠에 의하여 2B+D>2C+D, 2B>2C ∴ B>C

㉢의 양변에 C를 더하면 A+C+D<B+2C

이때 ㉠에 의하여 B+2D<B+2C, 2D<2C ∴ C>D

따라서 A<D<C<B이므로 무거운 순서대로 나열하면 B, C, D, A이다.

05 서술형

$-8\le 3x+4\le 1$일 때, $\frac{6-4x}{5}$의 값 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합을 구하시오. $\frac{32}{5}$

$-8\le 3x+4\le 1$에서 $-12\le 3x\le -3$ $\therefore -4\le x\le -1$ ··················· 30 %

$-4\le x\le -1$에서 $4\le -4x\le 16$

$10\le 6-4x\le 22$ $\therefore 2\le\frac{6-4x}{5}\le\frac{22}{5}$ ··················· 40 %

따라서 $\frac{6-4x}{5}$의 값 중 가장 큰 수는 $\frac{22}{5}$, 가장 작은 수는 2이므로 그 합은

$5+2=\frac{32}{5}$ ··················· 30 %

06

$2x+3y=6$일 때, $-3\le 2x+3\le 15$를 만족시키는 정수 y의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5

④ 6 ✓⑤ 7

$2x+3y=6$에서 $3y=6-2x$ $\therefore y=2-\frac{2}{3}x$

$-3\le 2x+3\le 15$에서 $-6\le 2x\le 12$

$-4\le -\frac{2}{3}x\le 2$, $-2\le 2-\frac{2}{3}x\le 4$ $\therefore -2\le y\le 4$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 y는 -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4의 7개이다.

07 출제 주의

다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은?

> (가) x를 -3으로 나눈 값에 4를 더한 값은 음수이다.
> (나) x에서 5를 뺀 다음 $\frac{3}{4}$배를 하면 3보다 크고 9보다 크지 않다.

① 65　② 70　✓③ 75
④ 80　⑤ 85

조건 (가)에서 $\frac{x}{-3}+4<0$이므로

$-\frac{x}{3}<-4$　$\therefore x>12$　…… ㉠

조건 (나)에서 $3<\frac{3}{4}(x-5)\le 9$이므로

$4<x-5\le 12$　$\therefore 9<x\le 17$　…… ㉡

㉠, ㉡에서 $12<x\le 17$이므로 조건을 만족시키는 자연수 x의 값은 13, 14, 15, 16, 17이고 그 합은

$13+14+15+16+17=75$

08

두 상수 a, b에 대하여

$$a\triangledown b=3a-4b$$

라고 할 때, 부등식 $(x+1)\triangledown(2x+m)\ge 2$를 만족시키는 x의 값 중 가장 큰 값이 1이다. 이때 상수 m의 값을 구하시오. -1

$(x+1)\triangledown(2x+m)\ge 2$에서

$3(x+1)-4(2x+m)\ge 2$

$3x+3-8x-4m\ge 2$, $-5x\ge 4m-1$

$\therefore x\le\frac{-4m+1}{5}$

이 부등식을 만족시키는 x의 값 중 가장 큰 값이 1이므로

$\frac{-4m+1}{5}=1$, $-4m+1=5$

$-4m=4$　$\therefore m=-1$

09

$x=10$이 x에 대한 일차부등식

$$0.3(x-a)-\frac{x}{5}\ge 0.1a-\frac{1}{2}$$

을 만족시키지 않는다고 할 때, 가장 작은 자연수 a의 값은?

① 2　② 3　✓③ 4
④ 5　⑤ 6

$x=10$이 주어진 부등식을 만족시키지 않으려면 $x=10$은

$0.3(x-a)-\frac{x}{5}<0.1a-\frac{1}{2}$을 만족시켜야 하므로

$0.3(10-a)-2<0.1a-\frac{1}{2}$이어야 한다.

$3(10-a)-20<a-5$, $30-3a-20<a-5$

$4a>15$　$\therefore a>\frac{15}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 a의 값은 4이다.

10

부등식 $|x-1|\le 5$의 해가 $x<a+3$을 만족시킬 때, 가장 작은 정수 a의 값은?

① 2　② 3　✓③ 4
④ 5　⑤ 6

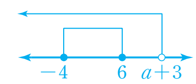
(i) $x\ge 1$일 때, $x-1\le 5$에서 $x\le 6$　$\therefore 1\le x\le 6$　…… ㉠

(ii) $x<1$일 때, $-(x-1)\le 5$에서

$-x+1\le 5$, $x\ge -4$　$\therefore -4\le x<1$　…… ㉡

㉠, ㉡에서 $-4\le x\le 6$

이때 $|x-1|\le 5$의 해가 $x<a+3$을 만족시키려면 오른쪽 그림과 같이 $a+3>6$이어야 한다.



$a+3>6$에서 $a>3$이므로 조건을 만족시키는 가장 작은 정수 a의 값은 4이다.

11 서술형

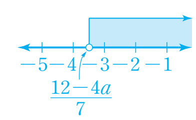
부등식 $\frac{3(x-2)}{2}+a>-\frac{x}{4}$를 만족시키는 음의 정수 x가 3개일 때, 상수 a의 값의 범위를 구하시오. $\frac{33}{4}<a\le 10$

$\frac{3(x-2)}{2}+a>-\frac{x}{4}$에서 $6(x-2)+4a>-x$

$6x-12+4a>-x$, $7x>12-4a$　$\therefore x>\frac{12-4a}{7}$ ……………… 30 %

이 부등식을 만족시키는 음의 정수 x가 3개이므로

$-4\le\frac{12-4a}{7}<-3$이어야 한다. ……………… 40 %



$-28\le 12-4a<-21$, $-40\le -4a<-33$

$\therefore \frac{33}{4}<a\le 10$ ……………… 30 %

12

x에 대한 일차부등식 $2(a-x)\le\frac{7-11x}{3}$를 만족시키는 x의 값 중 18과 서로소인 자연수가 5개가 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오. 3

$2(a-x)\le\frac{7-11x}{3}$에서 $6(a-x)\le 7-11x$, $6a-6x\le 7-11x$

$5x\le 7-6a$　$\therefore x\le\frac{7-6a}{5}$

이때 18과 서로소인 자연수는 1, 5, 7, 11, 13, 17, …

따라서 주어진 일차부등식을 만족시키는 x의 값 중 18과 서로소인 자연수 5개는 1, 5, 7, 11, 13이어야 하므로 $13\le\frac{7-6a}{5}<17$이어야 한다.

$65\le 7-6a<85$, $58\le -6a<78$　$\therefore -13<a\le -\frac{29}{3}$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 -12, -11, -10의 3개이다.

13 출제 주의

부등식 $0.3(x+a)\le 0.1x-0.9$를 만족시키는 양수 x가 존재하지 않도록 하는 모든 음의 정수 a의 값의 곱은?

① -120　✓② -6　③ -1
④ 2　⑤ 24

$0.3(x+a)\le 0.1x-0.9$에서 $3(x+a)\le x-9$, $3x+3a\le x-9$

$2x\le -9-3a$　$\therefore x\le \frac{-9-3a}{2}$

이 부등식을 만족시키는 양수 x가 존재하지 않으려면 $\frac{-9-3a}{2}\le 0$이어야 한다.

$-9-3a\le 0$, $3a\ge -9$　$\therefore a\ge -3$

따라서 음의 정수 a의 값은 -3, -2, -1이므로 그 곱은

$-3\times(-2)\times(-1)=-6$

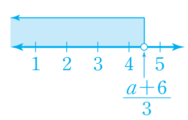
14

부등식 $3x-a<6$을 만족시키는 자연수 x가 4개일 때, 방정식 $ay+12=0$을 만족시키는 y의 값의 범위는 $m<y\le n$이다. 이때 $n-m$의 값을 구하시오. $\frac{2}{3}$

(단, a는 상수이다.)

$3x-a<6$에서 $3x<a+6$　$\therefore x<\frac{a+6}{3}$

이 부등식을 만족시키는 자연수 x가 4개이므로



$4<\frac{a+6}{3}\le 5$이어야 한다.

$12<a+6\le 15$　$\therefore 6<a\le 9$

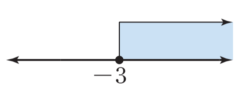
한편, $ay+12=0$에서 $ay=-12$　$\therefore y=-\frac{12}{a}$

이때 $6<a\le 9$에서 $\frac{1}{9}\le\frac{1}{a}<\frac{1}{6}$, $-2<-\frac{12}{a}\le -\frac{4}{3}$　$\therefore -2<y\le -\frac{4}{3}$

따라서 $m=-2$, $n=-\frac{4}{3}$이므로 $n-m=-\frac{4}{3}-(-2)=\frac{2}{3}$

15 출제 주의

x에 대한 일차부등식 $k(x-2)\le 5x+1$의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 k의 값을 구하시오. $\frac{14}{5}$



$k(x-2)\le 5x+1$에서 $kx-2k\le 5x+1$, $(k-5)x\le 2k+1$

이때 부등식의 해가 $x\ge -3$이므로 $k-5<0$이어야 한다.

$\therefore x\ge\frac{2k+1}{k-5}$

즉, $\frac{2k+1}{k-5}=-3$이므로

$2k+1=-3k+15$, $5k=14$　$\therefore k=\frac{14}{5}$

16

다음 보기에서 부등식 $ax+3<bx+5$에 대한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수이다.)

〈 보기 〉
ㄱ. $a>b$일 때, $x<\frac{2}{a-b}$
ㄴ. $a<b$일 때, $x<\frac{2}{a-b}$
ㄷ. $a>0$, $b=-a$일 때, $x<\frac{1}{a}$
ㄹ. $a<0$, $b=-a$일 때, $x>-\frac{1}{a}$

✓① ㄱ, ㄷ　② ㄱ, ㄹ　③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ　⑤ ㄷ, ㄹ

$ax+3<bx+5$에서 $(a-b)x<2$

ㄱ. $a>b$에서 $a-b>0$이므로 $x<\frac{2}{a-b}$

ㄴ. $a<b$에서 $a-b<0$이므로 $x>\frac{2}{a-b}$

ㄷ. $b=-a$이므로 $2ax<2$, 이때 $a>0$이므로 $x<\frac{1}{a}$

ㄹ. $b=-a$이므로 $2ax<2$, 이때 $a<0$이므로 $x>\frac{1}{a}$

17 서술형

x에 대한 일차부등식 $ax+2b<2b(x-3)+4a$의 해를 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) $a>2b$일 때 $x<4$, $a=2b$일 때 해가 없다., $a<2b$일 때 $x>4$

$ax+2b<2b(x-3)+4a$에서

$ax+2b<2bx-6b+4a$

$\therefore (a-2b)x<4(a-2b)$ ························ 10 %

(i) $a-2b>0$, 즉 $a>2b$일 때 $a-2b>0$이므로 $x<4$ ························ 30 %

(ii) $a-2b=0$, 즉 $a=2b$일 때 $a-2b=0$이므로 $0\times x<0$

따라서 해가 없다. ························ 30 %

(iii) $a-2b<0$, 즉 $a<2b$일 때 $a-2b<0$이므로 $x>4$

(i)~(iii)에 의하여 $a>2b$일 때 $x<4$, $a=2b$일 때 해가 없다., $a<2b$일 때 $x>4$이다.
························ 30 %

18

상수 a에 대하여 $a<-3$일 때, x에 대한 일차부등식

$$3(2ax-3)<-2\left(9x-\frac{3}{2}a\right)$$

를 만족시키는 x의 값 중 가장 작은 정수는?

① -2　② -1　③ 0
✓④ 1　⑤ 2

$3(2ax-3)<-2\left(9x-\frac{3}{2}a\right)$에서

$6ax-9<-18x+3a$, $6(a+3)x<3(a+3)$　$\therefore (a+3)x<\frac{a+3}{2}$

이때 $a<-3$에서 $a+3<0$이므로 $x>\frac{1}{2}$

따라서 부등식을 만족시키는 x의 값 중 가장 작은 정수는 1이다.

19

일차부등식 $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{4}(a-8)$을 만족시키는 상수 a의 값에 대하여 x에 대한 일차부등식 $ax-4a<20-5x$의 해는?

① $x<-5$　② $x>-5$　③ $x>-4$
④ $x<4$　✓⑤ $x>4$

$\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{4}(a-8)$에서
$\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}<\frac{1}{4}a-2$, $2a-3<a-8$　$\therefore a<-5$
$ax-4a<20-5x$에서 $(a+5)x<4(a+5)$
이때 $a<-5$에서 $a+5<0$이므로 $x>4$

20

$a-2b=0$인 두 상수 a, b에 대하여 x에 대한 일차부등식

$(a-b)x>2a+b-8$

의 해가 $x>3$일 때, ab의 값은?

① 12　② 18　③ 24
④ 28　✓⑤ 32

$a-2b=0$에서 $a=2b$　…… ㉠
㉠을 $(a-b)x>2a+b-8$에 대입하면 $bx>5b-8$
이때 부등식의 해가 $x>3$이므로 $b>0$이어야 한다.　$\therefore x>\frac{5b-8}{b}$
즉, $\frac{5b-8}{b}=3$이므로 $5b-8=3b$, $2b=8$　$\therefore b=4$
$b=4$를 ㉠에 대입하면 $a=2\times4=8$
$\therefore ab=8\times4=32$

21 출제 주의

두 상수 a, b에 대하여 x에 대한 일차부등식 $(a+b)x+(a-b)<0$의 해가 $x<-\frac{1}{5}$일 때, $(2a-b)x-(6a+9b)<0$의 해를 구하시오. $x<9$

$(a+b)x+(a-b)<0$에서 $(a+b)x<b-a$
이때 $(a+b)x<b-a$의 해가 $x<-\frac{1}{5}$이므로
$a+b>0$　…… ㉠
이어야 한다.　$\therefore x<\frac{b-a}{a+b}$
즉, $\frac{b-a}{a+b}=-\frac{1}{5}$이므로 $5b-5a=-a-b$, $-4a=-6b$　$\therefore a=\frac{3}{2}b$
$a=\frac{3}{2}b$를 ㉠에 대입하면 $\frac{5}{2}b>0$　$\therefore b>0$, $a>0$
$a=\frac{3}{2}b$를 $(2a-b)x-(6a+9b)<0$에 대입하면
$2bx-18b<0$, $2bx<18b$
이때 $b>0$이므로 $x<9$

22

x에 대한 일차부등식 $a(2x-1)<bx$의 해가 $x>1$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은? (단, a, b는 상수이다.)

① $2a<b$
② $ab>0$
③ $a<0$
✓④ $ax\le b$의 해는 $x\le1$
⑤ $x=1$은 $ax\le b$의 해이다.

$a(2x-1)<bx$에서 $2ax-a<bx$, $(2a-b)x<a$
이때 부등식의 해가 $x>1$이므로
$2a-b<0$　…… ㉠
이어야 한다.　$\therefore x>\frac{a}{2a-b}$
즉, $\frac{a}{2a-b}=1$이므로 $a=2a-b$　$\therefore a=b$
$a=b$를 ㉠에 대입하면 $a<0$
한편, $a=b$를 $ax\le b$에 대입하면 $ax\le a$
이때 $a<0$이므로 $x\ge1$
또, $x=1$을 $ax\le b$에 대입하면 $a\le b$
이때 $a=b$이므로 $a\le b$는 성립한다.

23

x에 대한 일차부등식 $a(x-5)\ge6x-3b$의 해가 무수히 많을 때, 가장 작은 b의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 3　② 5　③ 7
④ 8　✓⑤ 10

$a(x-5)\ge6x-3b$에서 $ax-5a\ge6x-3b$
$(a-6)x\ge5a-3b$
이때 부등식의 해가 무수히 많으므로
$a-6=0$, $5a-3b\le0$
즉, $a=6$이고 $5a-3b=30-3b\le0$이므로
$3b\ge30$　$\therefore b\ge10$
따라서 가장 작은 b의 값은 10이다.

24 출제 주의

x에 대한 일차부등식 $a(3x-1)\le b(x+1)$의 해가 없을 때, 부등식 $ax+5b<3a-bx$의 해는?

(단, a, b는 상수이다.)

① $x<-3$　✓② $x>-3$　③ $x<-2$
④ $x>-2$　⑤ $x<-1$

$a(3x-1)\le b(x+1)$에서 $3ax-a\le bx+b$
$(3a-b)x\le a+b$
이때 $(3a-b)x\le a+b$의 해가 없으므로
$3a-b=0$, $a+b<0$
즉, $b=3a$이고 $a+b=4a<0$이므로 $a<0$
따라서 부등식 $ax+5b<3a-bx$에 $b=3a$를 대입하면
$ax+15a<3a-3ax$, $4ax<-12a$
이때 $a<0$이므로 $x>-3$

개념을 적용하는

Lv. 1 핵심 문제

개념 1 일차부등식의 활용 (1)

01

어떤 수의 8배에 5를 더한 수는 어떤 수에 3을 더한 후 6배 한 수보다 작지 않다. 다음 중 이를 만족시키는 수가 아닌 것은?

✓① 6　② $\frac{13}{2}$　③ 7　④ $\frac{15}{2}$　⑤ 8

어떤 수를 x라고 하면
$8x+5\geq 6(x+3)$
$8x+5\geq 6x+18$, $2x\geq 13$　$\therefore x\geq \frac{13}{2}$

02 서술형

연속하는 세 짝수가 있다. 이 세 짝수 중 가장 작은 수의 3배에서 4를 뺀 수는 다른 두 수의 합에 7을 더한 것보다 크지 않다고 한다. 이를 만족시키는 세 짝수 중 가장 큰 세 수의 합을 구하시오. 54

연속하는 세 짝수를 $x-2$, x, $x+2$라고 하면
$3(x-2)-4\leq x+(x+2)+7$ ······ 40 %
$3x-6-4\leq 2x+9$　$\therefore x\leq 19$ ······ 30 %
이때 x는 짝수이므로 가장 큰 x의 값은 18이고, 세 짝수는 16, 18, 20이다.
따라서 세 수의 합은 $16+18+20=54$ ······ 30 %

03 출제 주의

도윤이는 한 개에 8000원인 햄버거와 한 개에 3000원인 핫도그를 합하여 모두 15개를 구입하려고 한다. 전체 금액이 100000원 이하가 되려면 햄버거는 최대 몇 개 구입할 수 있는가?

① 8개　② 9개　③ 10개　✓④ 11개　⑤ 12개

도윤이가 햄버거를 x개 구입한다고 하면 핫도그는 $(15-x)$개 구입할 수 있으므로
$8000x+3000(15-x)\leq 100000$
$8000x+45000-3000x\leq 100000$
$5000x\leq 55000$　$\therefore x\leq 11$

04

한 번에 540 kg까지 운반할 수 있는 엘리베이터에 몸무게가 80 kg인 사람이 1개에 25 kg인 상자를 여러 개 실어 운반하려고 한다. 한 번에 상자를 최대 몇 개 운반할 수 있는가? (단, 다른 사람은 타지 않는다.)

① 16개　② 17개　✓③ 18개　④ 19개　⑤ 20개

상자의 개수를 x라고 하면 $80+25x\leq 540$
$25x\leq 460$　$\therefore x\leq 18.4$
따라서 한 번에 상자를 최대 18개 운반할 수 있다.

05

어느 체조 선수가 예선에서 5명의 심판에게 받은 점수의 평균은 8점이었다. 결선은 10명의 심판이 심사를 할 때, 이 선수가 예선과 결선의 두 경기에서 받은 점수의 전체 평균이 8.5점 이상이 되려면 결선에서 받은 점수의 평균은 몇 점 이상이어야 하는지 구하시오. 8.75점

예선에서 5명의 심판에게 받은 점수의 평균은 8점이므로 예선에서 받은 총점은 $5\times 8=40$(점)이다.
결선에서 10명의 심판에게 받은 점수의 평균을 x점이라고 하면 결선에서 받은 총점은 $10x$점이다.
예선과 결선의 두 경기에서 받은 점수의 전체 평균이 8.5점 이상이 되어야 하므로
$\frac{40+10x}{15}\geq 8.5$
$40+10x\geq 127.5$, $10x\geq 87.5$　$\therefore x\geq 8.75$

06

원가가 12500원인 물건의 정가에서 25 %를 할인 판매하여 원가의 20 % 이상의 이익을 얻으려고 한다. 이때 정가는 얼마 이상으로 하면 되는가?

① 15000원　② 17500원　③ 18000원　④ 18500원　✓⑤ 20000원

정가를 x원이라고 하면 정가에서 25 %를 할인한 가격은 $\left(1-\frac{25}{100}\right)x=\frac{3}{4}x$(원)
할인 판매 했을 때 원가의 20 % 이상의 이익을 얻어야 하므로
$\frac{3}{4}x-12500\geq 12500\times\frac{20}{100}$
$\frac{3}{4}x-12500\geq 2500$
$\frac{3}{4}x\geq 15000$　$\therefore x\geq 20000$

07

현재 준서와 연아의 통장 잔고는 각각 40000원, 45000원이다. 다음 주부터 준서는 매주 6000원씩 저축하고, 연아는 첫 주에는 60000원을 저축한 후 그 다음 주부터 매주 4000원씩 출금하려고 한다. 준서의 저축액이 연아의 저축액보다 많아지는 것은 몇 주 후부터인가?

① 6주 후 ✓② 7주 후 ③ 8주 후
④ 9주 후 ⑤ 10주 후

x주 후부터 준서의 저축액이 연아의 저축액보다 많아진다고 하면
$40000+6000x>45000+60000-4000(x-1)$
$40000+6000x>105000-4000x+4000$
$10000x>69000 \quad \therefore x>6.9$
따라서 준서의 저축액이 연아의 저축액보다 많아지는 것은 7주 후부터이다.

08

어느 주차장의 주차 요금은 처음 30분까지는 3000원이고, 30분이 지나면 1분당 50원의 요금이 추가된다고 한다. 주차 요금이 8000원 이하가 되게 하려면 최대 몇 시간 몇 분 주차할 수 있는가?

✓① 2시간 10분 ② 2시간 20분 ③ 2시간 30분
④ 2시간 40분 ⑤ 2시간 50분

주차 시간을 x분이라고 하면
$3000+50(x-30)\le 8000$
$3000+50x-1500\le 8000$
$50x\le 6500 \quad \therefore x\le 130$
따라서 최대 130분, 즉 2시간 10분 주차할 수 있다.

09 출제 주의

어느 전시회의 성인 입장료는 5000원이고 청소년 입장료는 3000원이다. 25명 이상의 단체에 대해서는 입장료의 20 %를 할인해 준다고 한다. 두 명의 선생님이 23명 미만의 학생들과 함께 입장할 때, 학생들이 몇 명 이상일 때 25명의 단체 입장료를 내는 것이 유리한가?

① 16명 ② 17명 ✓③ 18명
④ 19명 ⑤ 20명

학생 수를 x라고 하면
$5000\times 2+3000x>(5000\times 2+3000\times 23)\times\left(1-\frac{20}{100}\right)$
$10000+3000x>63200,\ 3000x>53200 \quad \therefore x>17.733\cdots$
따라서 학생이 18명 이상일 때 25명의 단체 입장료를 내는 것이 유리하다.

10 서술형

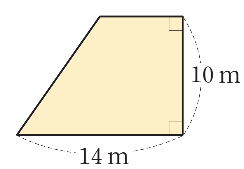
다음은 어느 통신사의 A, B 두 휴대폰 요금제를 나타낸 표이다. 세림이는 지금까지 A 요금제를 사용하다가 기본료가 더 저렴한 B 요금제로 바꾸려고 하였는데, A 요금제를 계속 이용하면 다음 달부터 장기 이용 고객이 되어 기본료의 10 %를 할인받을 수 있다고 한다. 세림이의 한 달 통화 시간이 몇 분 미만일 때, B 요금제로 바꾸는 것이 유리한 지 구하시오. 50분

	A 요금제(원)	B 요금제(원)
기본료	20000	15000
통화료(1분당)	120	180

세림이의 한 달 통화 시간을 x분이라고 하면
$(\text{A 요금제})=20000\times\left(1-\frac{10}{100}\right)+120x=18000+120x$(원)
$(\text{B 요금제})=15000+180x$(원) ······ 40 %
B 요금제로 바꾸는 것이 유리해야 하므로
$18000+120x>15000+180x$ ······ 30 %
$60x<3000 \quad \therefore x<50$
따라서 통화 시간이 50분 미만일 때, B 요금제로 바꾸는 것이 유리하다. ······ 30 %

11

오른쪽 그림과 같이 아랫변의 길이가 14 m, 높이가 10 m인 사다리꼴의 넓이가 115 m^2 이상이 되도록 할 때, 이 사다리꼴의 윗변의 길이는 몇 m 이상이어야 하는가?



① 6 m ✓② 9 m ③ 10 m
④ 18 m ⑤ 20 m

사다리꼴의 윗변의 길이를 x m라고 하면
$\frac{1}{2}\times(x+14)\times 10\ge 115$
$5x+70\ge 115,\ 5x\ge 45$
$\therefore x\ge 9$

12

다음 중 내각의 크기의 합이 1230°보다 작은 다각형이 아닌 것은?

① 오각형 ② 육각형 ③ 칠각형
④ 팔각형 ✓⑤ 구각형

n각형의 내각의 크기의 합은 $180^\circ\times(n-2)$이므로
$180^\circ\times(n-2)<1230^\circ$
$180^\circ\times n-360^\circ<1230^\circ,\ 180^\circ\times n<1590^\circ$
$\therefore n<8.833\cdots$
따라서 내각의 크기의 합이 1230°보다 작은 다각형이 아닌 것은 ⑤이다.

개념 2 일차부등식의 활용 (2)

13

시속 3 km의 일정한 속력으로 흐르는 강이 있다. 이 강의 상류와 하류에 있는 두 지점 사이의 거리는 120 km이다. 강을 따라 내려올 때에는 시속 37 km의 속력으로 움직이는 배를 타고 내려왔다가, 다시 거슬러 올라가려고 한다. 총 6시간 이내에 왕복을 마치려면, 거슬러 올라갈 때 배의 속력은 시속 몇 km 이상이어야 하는지 구하시오. 시속 43 km

강을 거슬러 올라갈 때의 배의 속력을 시속 x km라고 하면 강을 따라 내려갈 때의 배의 실제 속력은 시속 $37+3=40$ (km)
강을 거슬러 올라갈 때의 배의 실제 속력은 시속 $(x-3)$ km
총 6시간 이내에 왕복을 마쳐야 하므로
$\frac{120}{40}+\frac{120}{x-3}\le 6$, $\frac{120}{x-3}\le 3$, $120\le 3x-9$
$3x\ge 129$ $\therefore x\ge 43$

14

시은이는 영화관 앞에서 친구들과 만나기로 하였는데 약속 시간보다 50분 일찍 도착하여 영화관 근처에 있는 편의점에 가서 음료수를 사오려고 한다. 편의점에 갈 때는 분속 80 m로, 영화관으로 올 때는 분속 100 m로 걷고 음료수를 사는 데 5분이 걸린다고 할 때, 영화관에서 최대 몇 m 이내에 있는 편의점에 다녀올 수 있는가?

① 1820 m ② 1860 m ③ 1920 m
④ 1960 m ✓⑤ 2000 m

영화관에서 편의점까지의 거리를 x m라고 하면
$\frac{x}{80}+5+\frac{x}{100}\le 50$
$5x+2000+4x\le 20000$
$9x\le 18000$ $\therefore x\le 2000$

15 출제 주의

현진이와 은하가 같은 지점에서 동시에 출발하여 서로 반대 방향으로 직선 도로를 따라 걷고 있다. 현진이는 분속 70 m, 은하는 분속 40 m로 걷는다고 할 때, 현진이와 은하가 1650 m 이상 떨어지려면 최소 몇 분 걸어야 하는가?

① 12분 ② 13분 ③ 14분
✓④ 15분 ⑤ 16분

두 사람이 x분 동안 걷는다고 하면 현진이가 x분 동안 걸은 거리는 $70x$ m이고, 은하가 x분 동안 걸은 거리는 $40x$ m이므로
$70x+40x\ge 1650$
$110x\ge 1650$ $\therefore x\ge 15$

16

1200 L의 물이 들어 있는 물탱크에 펌프를 설치해두었다. 물탱크에는 매분 20 L의 물이 계속 흘러들어 오고, 펌프 1대당 매분 60 L의 물을 퍼낼 수 있다고 한다. 펌프 2대를 동시에 가동했을 때, 물탱크의 물이 완전히 바닥날 때까지 최소 몇 분이 걸리는가?

① 11분 ✓② 12분 ③ 13분
④ 14분 ⑤ 15분

물탱크의 물이 완전히 바닥날 때까지 걸리는 시간을 t분이라고 하자.
총 퍼내야 할 물의 양은 $(1200+20t)$ L
t분 동안 펌프 2대가 퍼내는 물의 양은 $2\times 60\times t=120t$ (L)
t분 안에 물이 완전히 바닥나려면
$120t\ge 1200+20t$, $100t\ge 1200$ $\therefore t\ge 12$

17

5 %의 소금물과 10 %의 소금물 300 g을 섞어서 8 % 이상의 소금물을 만들려고 한다. 5 %의 소금물을 최대 몇 g 섞을 수 있는가?

① 150 g ② 180 g ✓③ 200 g
④ 230 g ⑤ 250 g

5 %의 소금물을 x g 섞는다고 하면
$\frac{5}{100}\times x+\frac{10}{100}\times 300\ge\frac{8}{100}\times(x+300)$
$5x+3000\ge 8x+2400$
$3x\le 600$ $\therefore x\le 200$

18

20 %의 소금물 300 g이 있다. 이 소금물에 물을 더 넣어서 농도가 12 % 이하가 되도록 하려고 한다. 최소 몇 g의 물을 넣어야 하는가?

① 100 g ② 120 g ③150 g
✓④ 200 g ⑤ 240 g

20 %의 소금물 300 g에 들어있는 소금의 양은
$\frac{20}{100}\times 300=60$ (g)
더 넣는 물의 양을 x g이라고 하면
$\frac{60}{300+x}\times 100\le 12$
$6000\le 3600+12x$, $12x\ge 2400$ $\therefore x\ge 200$

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

01

다음 두 조건을 만족시키는 모든 두 자리 자연수의 합을 구하시오. 96

> (가) 십의 자리의 숫자는 일의 자리의 숫자의 2배보다 1만큼 작다.
> (나) 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수는 처음 수에서 27을 뺀 수보다 크다.

일의 자리의 숫자를 x라고 하면 조건 (가)에 의하여 십의 자리의 숫자는 $2x-1$이다.
조건 (나)에 의하여 $10x+(2x-1)>10(2x-1)+x-27$
$12x-1>21x-37$, $9x<36$ $\quad\therefore x<4$
즉 x의 값은 1, 2, 3이다.
(ⅰ) $x=1$일 때, 처음 수는 11이다.
(ⅱ) $x=2$일 때, 처음 수는 32이다.
(ⅲ) $x=3$일 때, 처음 수는 53이다.
(ⅰ)～(ⅲ)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 두 자리 자연수는 11, 32, 53이므로 그 합은
$11+32+53=96$

02

선호와 동주가 각각 젤리를 54개, 31개 갖고 있다고 한다. 매일 선호와 동주는 젤리를 2개씩 먹고, 선호는 가지고 있는 젤리 1개를 동주에게 준다고 한다. 10일 후 선호가 젤리 30개를 추가로 구매했다고 할 때, 동주가 선호보다 젤리를 더 많이 갖고 있게 되는 날은 며칠 후인지 구하시오. 27일 후

선호는 젤리가 매일 3개씩 줄어든다.
동주는 젤리가 매일 1개씩 줄어든다.
10일 후 선호가 가진 젤리는 54개이고, 동주가 가진 젤리는 21개이다.
10일 후를 기준으로 x일이 지났을 때, 두 사람이 가진 젤리의 개수는 선호가 $54-3x$, 동주가 $21-x$이다.
x일 후 동주가 가진 젤리의 개수가 선호가 가진 젤리의 개수보다 많아진다고 하면
$54-3x<21-x$, $2x>33$ $\quad\therefore x>16.5$
따라서 구하는 날은 $10+17=27$(일) 후이다.

03 출제 주의

어느 중학교의 1학년, 2학년, 3학년 학생은 각각 120명, 130명, 150명이다. 1학년, 2학년의 국어 성적의 평균은 각각 68점, 75점이고 중학교 전체의 국어 성적의 평균은 72점 이상이다. 이때 3학년의 국어 성적의 평균은 몇 점 이상이어야 하는가?

① 72점 ② 72.2점 ③ 72.4점
✓④ 72.6점 ⑤ 72.8점

3학년의 국어 성적의 평균을 x점이라고 하면
$\dfrac{120\times68+130\times75+150x}{120+130+150}\geq72$
$\dfrac{17910+150x}{400}\geq72$, $17910+150x\geq28800$
$150x\geq10890$ $\quad\therefore x\geq72.6$

04

40명의 학생을 대상으로 두 번에 걸쳐 시험을 시행하였다. 그 결과 첫 번째 시험보다 두 번째 시험에서 10명의 학생의 점수는 평균 8점이 올랐고, 5명의 학생의 점수는 평균 4점이 떨어졌고, 나머지 학생들의 점수에는 변화가 없었다. 전체 학생의 두 번째 시험 점수의 평균이 80점 이상이려면 첫 번째 시험 점수의 평균은 최소 몇 점이어야 하는지 구하시오. (단, 학생 수는 변하지 않았다.) 78.5점

첫 번째 시험 점수의 평균을 x점이라고 하면 두 번째 시험 점수의 총점은
$10(x+8)+5(x-4)+25x=10x+80+5x-20+25x=40x+60$(점)
두 번째 시험 점수의 평균이 80점 이상이려면
$\dfrac{40x+60}{40}\geq80$, $40x+60\geq3200$
$40x\geq3140$ $\quad\therefore x\geq78.5$

05 서술형

어느 중학교 A반과 B반이 볼링 게임을 하는데 A반 학생 10명의 볼링 점수의 평균은 90점이고, B반 학생들의 볼링 점수의 평균은 95점이다. A반과 B반 전체 학생들의 볼링 점수의 평균이 92점 이상이려면 B반 학생은 최소 몇 명이어야 하는지 구하시오. 7명

A반 학생들의 볼링 점수의 총합은 $10\times90=900$(점)
B반 학생을 x명이라고 하면 B반 학생들의 볼링 점수의 총합은 $95x$점 ··· 20 %
A반과 B반 전체 학생들의 볼링 점수의 평균이 92점 이상이려면
$\dfrac{900+95x}{10+x}\geq92$ ··· 40 %
$900+95x\geq920+92x$, $3x\geq20$ $\quad\therefore x\geq6.666\cdots$
따라서 B반 학생은 최소 7명이어야 한다. ··· 40 %

06

어느 제과점에서 A, B 두 종류의 초콜릿을 만드는데 필요한 코코아 가루의 양이 각각 80 g, 20 g이고, A, B 두 종류의 초콜릿을 합하여 35개를 만들려고 한다. 제과점에서 사용한 코코아 가루의 양이 1.55 kg 이하가 되도록 할 때, 초콜릿 A는 최대 몇 개 만들 수 있는가?

① 12개 ✓② 14개 ③ 16개
④ 18개 ⑤ 20개

초콜릿 A를 x개 만든다고 하면 초콜릿 B는 $(35-x)$개 만들 수 있으므로
$80x+20(35-x)\leq1550$
$60x+700\leq1550$
$60x\leq850$ $\quad\therefore x\leq14.16\cdots$
따라서 초콜릿 A는 최대 14개 만들 수 있다.

07 출제 주의

어느 농장에서 수확한 귤을 상자에 나누어 담으려고 하는데 한 상자에 50개씩 담으면 준비한 상자 중 마지막 상자에는 5자리가 남는다. 선별 과정에서 썩은 귤 40개를 골라내어 버리고, 남은 귤을 한 상자에 40개씩 담으려 했더니 준비한 상자가 부족했다. 이때 준비한 상자는 몇 개 이상인가?

① 4개 ✓② 5개 ③ 6개
④ 7개 ⑤ 8개

준비한 상자의 개수를 x라고 하면 한 상자에 귤을 50개씩 담으면 준비한 상자를 전부 가득 채우고 마지막 상자만 5자리가 남으므로 처음 귤의 개수는 $50x-50$이다.
선별 과정에서 썩은 귤 40개를 골라낸 후의 귤의 개수는 $50x-45$
선별 과정 후 귤을 준비한 상자에 40개씩 담으려 했더니 상자가 부족했으므로
$50x-45>40x$, $10x>45$ $\therefore x>4.5$
따라서 준비한 상자는 5개 이상이다.

08

어느 꽃집에서 한 송이에 1200원인 튤립을 4송이씩 묶어 한 묶음에 4000원으로 할인하여 판매하고 있다. 묶음으로 판매하는 튤립은 최대 5묶음까지이다. 꽃을 몇 송이를 사더라도 전체 꽃을 포장하는 데 포장비 2500원을 별도로 지불해야 한다. 포장비를 포함한 튤립 한 송이당 평균 가격이 1150원 이하가 되려면 튤립을 최대 몇 송이 살 수 있는지 구하시오. **30송이**

$\frac{4000\times5+2500}{20}=1125$(원)이므로 튤립을 20송이 이상 살 수 있다.
튤립을 x송이($x>20$) 산다고 하면 튤립 한 송이당 평균 가격이 1150원 이하가 되어야 하므로
$\frac{5\times4000+1200(x-20)+2500}{x}\le1150$
$\frac{1200x-1500}{x}\le1150$, $1200x-1500\le1150x$, $50x\le1500$
$\therefore x\le30$

09

어느 디저트 가게에서는 A, B 두 가지 종류의 마카롱 세트를 준비하려고 한다. A 세트에는 초콜릿 맛 4개, 딸기 맛 2개가 들어가고, B 세트에는 초콜릿 맛 2개, 딸기 맛 3개가 들어간다. 마카롱 세트를 만들기 위해서 초콜릿 맛은 200개를 사용하고, 딸기 맛은 최대 170개까지 사용할 수 있다고 할 때, 만들 수 있는 A 세트의 최소 개수와 최대 개수를 구하시오. **최소 개수: 33, 최대 개수: 50**

A 세트의 개수를 x, B 세트의 개수를 y (x, y는 0 이상의 정수)라고 하면
초콜릿 맛은 200개를 사용했으므로 $4x+2y=200$ $\therefore y=100-2x$ ······ ㉠
즉, B 세트의 개수는 $100-2x$이고, $y\ge0$이므로 $100-2x\ge0$ $\therefore x\le50$
한편, 딸기 맛은 최대 170개까지 사용할 수 있으므로 $2x+3y\le170$
이 부등식에 ㉠을 대입하면 $2x+3(100-2x)\le170$
$-4x+300\le170$, $4x\ge130$ $\therefore x\ge32.5$
따라서 $32.5\le x\le50$이므로 만들 수 있는 A 세트의 최소 개수는 33이고 최대 개수는 50이다.

10

어느 전자 제품 매장에서 태블릿의 원가에 40 %의 이익을 붙여 정가를 정했다. 재고 정리를 위해 할인 판매를 할 때, 원가의 5 % 이상의 이익은 남기려고 한다. 이때 정가를 최대 몇 % 할인할 수 있는가?

① 20 % ✓② 25 % ③ 30 %
④ 35 % ⑤ 40 %

태블릿의 원가를 A원이라고 하면 정가는 $A\left(1+\frac{40}{100}\right)=\frac{7}{5}A$(원)
정가에서 x % 할인한 가격은 $\frac{7}{5}A\left(1-\frac{x}{100}\right)$원
할인 판매했을 때 원가의 5 % 이상의 이익은 남겨야 하므로
$\frac{7}{5}A\left(1-\frac{x}{100}\right)\ge A\left(1+\frac{5}{100}\right)$
$700\left(1-\frac{x}{100}\right)\ge525$, $700-7x\ge525$, $7x\le175$
$\therefore x\le25$

11 서술형

어느 물건을 원가에 50 %의 이익을 붙여 정가를 정했는데 판매가 부진하여 정가에서 a % 이상 b % 이하로 할인하여 판매하기로 했다. 이때 손해를 보지 않기 위해서는 이익이 원가의 14 % 이상 20 % 이하가 되도록 해야 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. **44**

물건의 원가를 k원이라고 하면 정가는 $k\left(1+\frac{50}{100}\right)=\frac{3}{2}k$(원)
정가에서 x % 할인한 가격은 $\frac{3}{2}k\left(1-\frac{x}{100}\right)$원 ······ 20 %
할인 판매했을 때의 이익이 원가의 14 % 이상 20 % 이하가 되도록 하려면
$k\left(1+\frac{14}{100}\right)\le\frac{3}{2}k\left(1-\frac{x}{100}\right)\le k\left(1+\frac{20}{100}\right)$ ······ 30 %
$\frac{57}{50}\le\frac{3}{2}\left(1-\frac{x}{100}\right)\le\frac{6}{5}$, $\frac{19}{25}\le1-\frac{x}{100}\le\frac{4}{5}$
$-\frac{6}{25}\le-\frac{x}{100}\le-\frac{1}{5}$ $\therefore 20\le x\le24$ ······ 30 %
따라서 $a=20$, $b=24$이므로 $a+b=20+24=44$ ······ 20 %

12

제과점에서 쿠키 500개를 구웠는데, 그중 50개가 부서져서 판매할 수 없게 되었다. 부서지지 않은 쿠키만 판매해서 전체 재료비의 8 % 이상의 이익을 남기려고 할 때, 쿠키 한 개의 원가에 최소 몇 %의 이익을 붙여서 판매 가격을 정해야 하는가?

✓① 20 % ② 25 % ③ 30 %
④ 35 % ⑤ 40 %

쿠키 한 개를 만드는 데 들어가는 전체 재료비를 a원이라고 할 때 x %의 이익을 붙여서 판매 가격을 정하면 총 판매 가격은 $450a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원
부서지지 않은 쿠키만 판매해서 전체 재료비의 8 % 이상의 이익을 남기려고 하므로
$450a\left(1+\frac{x}{100}\right)\ge500a\times\left(1+\frac{8}{100}\right)$
$450\left(1+\frac{x}{100}\right)\ge540$, $1+\frac{x}{100}\ge\frac{6}{5}$, $\frac{x}{100}\ge\frac{1}{5}$
$\therefore x\ge20$

13

어느 동물원의 어른과 어린이의 입장료는 오른쪽 표와 같고, 동물 먹이 1봉지의 가격은 1000원이다. 전체 입장객 500명 중 어린이 수는 어른 수보다 많았고, 입장료와 동물 먹이 판매액의 총합이 290000원이었다. 먹이가 가장 적게 팔렸을 때, 입장한 어른 수와 어린이 수, 판매한 동물 먹이 봉지 수를 구하시오. **어른 수: 245, 어린이 수: 255, 동물 먹이 봉지 수: 91**

	동물원 입장료
어른	500원
어린이	300원

동물원에 입장한 어른 수를 x라고 하면 어린이 수는 $500-x$
어린이 수는 어른 수보다 많으므로 $500-x>x$, $2x<500$ $\quad\therefore x<250$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
판매한 동물 먹이 봉지 수를 y라고 하면 $500x+300(500-x)+1000y=290000$
$200x+1000y=140000$, $1000y=140000-200x$ $\quad\therefore y=\frac{700-x}{5}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
먹이가 가장 적게 팔린 경우는 x의 값이 가장 클 때이고 y는 정수이므로 x는 5의 배수이어야 한다. 즉, ㉠에 의하여 가장 큰 x의 값은 245, ㉡에서 $y=91$
따라서 입장한 어른 수는 245, 어린이 수는 255, 판매한 동물 먹이 봉지 수는 91이다.

14 서술형

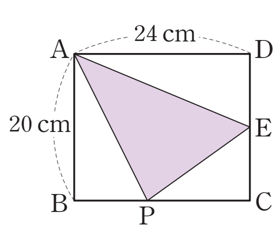
오른쪽 표는 어른과 청소년의 자유이용권 가격을 나타낸 것이다. 어른이 20명 이상이면 어른 요금의 15 %를 할인해 준다고 한다. 어른이 20명 미만이면서 어른과 청소년을 합하여 총 25명이 입장하려고 할 때, 어른이 몇 명 이상이면 어른 20명의 단체 요금을 내고 입장하는 것이 유리한지 구하시오. (단, 남은 5명은 청소년 요금을 내며, 청소년도 어른 요금으로 입장할 수 있다.) **12명**

	자유이용권 가격
어른	30000원
청소년	20000원

입장하려는 실제 어른 수를 x라고 하면 청소년 수는 $25-x$이다.
일반 요금으로 입장하는 경우 내야 할 금액은 $10000x+500000$ (원)
어른을 20명으로 생각하여 할인받는 경우 내야 할 금액은
$30000\times\left(1-\frac{15}{100}\right)\times20+20000\times5=610000$ (원) $\cdots\cdots$ 40 %
단체 요금을 내고 입장하는 것이 더 저렴해야 하므로
$10000x+500000>610000$ $\cdots\cdots$ 40 %
$10000x>110000$ $\quad\therefore x>11$
따라서 어른이 12명 이상이면 어른 20명의 단체 요금을 내고 입장하는 것이 유리하다. $\cdots\cdots$ 20 %

15 출제 주의

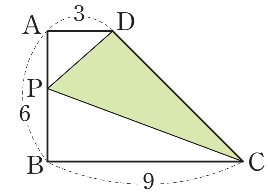
오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=20$ cm, $\overline{AD}=24$ cm인 직사각형 ABCD에서 점 E는 $\overline{CD}$의 중점이고, 점 P는 점 B를 출발하여 점 C까지 초속 2 cm로 $\overline{BC}$ 위를 움직인다. △APE의 넓이가 190 cm² 미만일 때, 점 P가 움직인 시간을 구하시오. **5초 초과 12초 이하**



점 P가 점 B를 출발하여 x초 동안 움직였을 때 $\overline{BP}=2x$ cm, $\overline{PC}=(24-2x)$ cm
이때 $0\le2x\le24$이므로 $0\le x\le12$
$\overline{CE}=\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AB}=10$ cm
(사각형 ABCD의 넓이)$=480$ cm²
$\triangle ABP=20x$ cm², $\triangle PCE=(120-10x)$ cm², $\triangle AED=120$ cm²
$\therefore$ △APE=(사각형 ABCD의 넓이)$-\triangle ABP-\triangle PCE-\triangle AED=(240-10x)$ cm²
이때 △APE의 넓이가 190 cm² 미만이어야 하므로 $240-10x<190$ $\quad\therefore x>5$
따라서 $5<x\le12$이므로 점 P가 움직인 시간은 5초 초과 12초 이하이다.

16

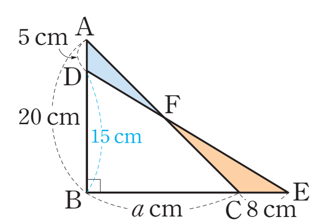
오른쪽 그림과 같은 사다리꼴 ABCD에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=3$, $\overline{BC}=9$이고 점 P가 변 AB 위를 움직인다고 한다. 삼각형 DPC의 넓이가 사다리꼴 ABCD의 넓이의 $\frac{7}{12}$ 이하가 되도록 할 때, $\overline{AP}$의 범위는 $0\le\overline{AP}\le a$이다. 이때 a의 값을 구하시오. **4**



(사다리꼴 ABCD의 넓이)$=36$이고 $\overline{AP}=x$라고 하면 $\overline{BP}=6-x$이므로
$\triangle ADP=\frac{3}{2}x$, $\triangle PBC=27-\frac{9}{2}x$
$\therefore$ △DPC=(사다리꼴 ABCD의 넓이)$-\triangle ADP-\triangle PBC=9+3x$
이때 △DPC의 넓이가 사다리꼴 ABCD의 넓이의 $\frac{7}{12}$ 이하가 되어야 하므로
$9+3x\le36\times\frac{7}{12}$, $3x\le12$ $\quad\therefore x\le4$
따라서 $0\le\overline{AP}\le4$이므로 $a=4$이다.

17

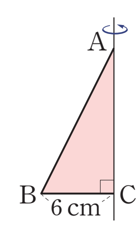
오른쪽 그림과 같이 $\angle B=90°$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=20$ cm, $\overline{BC}=a$ cm이다. 또, $\overline{AD}=5$ cm, $\overline{CE}=8$ cm가 되도록 변 AB 위에 점 D, 변 BC의 연장선 위에 점 E를 잡고, 선분 DE와 선분 AC의 교점을 F라고 하자. 삼각형 ADF의 넓이가 삼각형 FCE의 넓이보다 클 때, 가장 작은 자연수 a의 값을 구하시오. **25**



$\triangle ADF+\triangle DCF=\triangle ADC$, $\triangle FCE+\triangle DCF=\triangle DCE$이므로 삼각형 ADC의 넓이가 삼각형 DCE의 넓이보다 크면 된다.
$\triangle ADC=\frac{1}{2}\times5\times a=\frac{5}{2}a$ (cm²), $\triangle DCE=\frac{1}{2}\times8\times15=60$ (cm²)이므로
$\frac{5}{2}a>60$ $\quad\therefore a>24$
따라서 삼각형 ADF의 넓이가 삼각형 FCE의 넓이보다 클 때, 가장 작은 자연수 a의 값은 25이다.

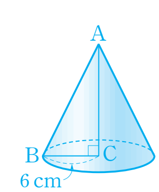
18

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}=6$ cm인 직각삼각형 ABC를 $\overline{AC}$를 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 회전체의 부피가 108π cm³ 이하일 때, $\overline{AC}$의 길이는 몇 cm 이하인가?

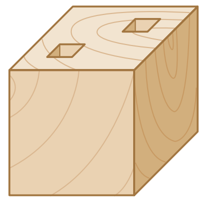


✓① 9 cm ② 12 cm
③ 15 cm ④ 18 cm
⑤ 21 cm

직각삼각형 ABC를 $\overline{AC}$를 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 회전체는 오른쪽 그림과 같은 원뿔이다.
$\overline{AC}=x$ cm라고 하면 회전체의 부피가 108π cm³ 이하이므로
$\frac{1}{3}\times\pi\times6^2\times x\le108\pi$, $12\pi x\le108\pi$ $\quad\therefore x\le9$



19



한 모서리의 길이가 10 cm인 정육면체 모양의 나무토막이 있다. 이 나무토막의 윗면에서 아랫면까지 관통하도록 가로와 세로의 길이가 각각 2 cm인 정사각기둥 모양의 구멍을 x개 뚫으려고 한다. 다음 조건을 만족시키는 구멍의 개수를 모두 구하시오. (단, 구멍끼리는 서로 겹치지 않는다.) 5, 6, 7

> (가) 구멍을 뚫은 후 입체도형의 겉넓이는 처음 정육면체의 겉넓이보다 60 % 이상 증가해야 한다.
> (나) 구멍을 뚫어서 사라진 나무토막의 부피는 처음 부피의 30 % 이하이어야 한다.

정육면체 모양의 나무토막의 처음 겉넓이는 600 cm^2, 처음 부피는 1000 cm^3이고 구멍 1개를 뚫을 때마다 72 cm^2의 겉넓이가 증가하게 되고, 40 cm^3의 부피가 감소하게 된다.
구멍 x개를 뚫은 후 입체도형의 겉넓이는 처음 정육면체의 겉넓이보다 60 % 이상 증가해야 하므로 $72x \ge 600 \times \frac{60}{100}$, $72x \ge 360$ $\therefore x \ge 5$ …… ㉠
구멍 x개를 뚫어서 사라진 나무토막의 부피는 처음 부피의 30 % 이하이어야 하므로
$40x \le 1000 \times \frac{30}{100}$, $40x \le 300$ $\therefore x \le 7.5$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $5 \le x \le 7.5$이므로 조건을 만족시키는 구멍의 개수는 5, 6, 7이다.

20

둘레의 길이가 60 m인 원 모양의 호수의 둘레길에 일정한 간격으로 벤치를 설치하려고 한다. 벤치 하나의 가로의 길이가 1.2 m이고, 벤치와 벤치 사이의 간격은 5 m를 넘지 않도록 설치하려고 한다. 벤치의 개수를 최소로 설치하려고 할 때, 필요한 벤치의 개수를 구하시오. 10

필요한 벤치의 개수를 x라고 하면 벤치와 벤치 사이의 간격의 개수도 x이다.
호수의 둘레의 길이가 60 m, 벤치 하나의 가로의 길이가 1.2 m이므로 벤치와 벤치 사이의 간격은 $\frac{60-1.2x}{x}$ m
벤치와 벤치 사이의 간격이 5 m를 넘지 않아야 하므로
$\frac{60-1.2x}{x} \le 5$, $60-1.2x \le 5x$, $6.2x \ge 60$ $\therefore x \ge 9.677\cdots$
따라서 필요한 벤치의 최소 개수는 10이다.

21 출제 주의

가로의 길이가 36 m, 세로의 길이가 24 m인 직사각형 모양의 방을 전시실로 만들려고 한다. 이 전시실의 벽을 따라 한 모서리의 길이가 1 m인 정육면체 모양의 조형물을 설치하려고 한다. 전시실의 네 귀퉁이에는 조형물을 반드시 설치하고, 조형물 사이의 간격은 3 m를 넘지 않도록 설치하려고 한다. 조형물을 최소로 설치하려고 할 때, 필요한 조형물의 개수를 구하시오. 30

가로의 길이가 36 m인 벽에 설치할 수 있는 조형물의 개수를 n이라고 하면 양쪽 끝(귀퉁이)에 조형물을 반드시 설치해야 하므로 간격의 개수는 조형물보다 1개 적은 $n-1$이다.
또, 전시실의 네 귀퉁이에는 조형물을 반드시 설치하고 조형물 사이의 간격이 3 m를 넘지 않아야 하므로 $\frac{36-1\times n}{n-1} \le 3$, $36-n \le 3(n-1)$, $4n \ge 39$ $\therefore n \ge 9.75$
즉, 길이가 36 m인 벽에는 최소 10개의 조형물을 설치할 수 있다.
마찬가지로 길이가 24 m인 벽에는 최소 7개의 조형물을 설치할 수 있다.
따라서 조형물을 최소로 설치하려고 할 때, 필요한 조형물의 개수는
$(10\times2)+(7\times2)-4=30$

22

1분에 4 L씩 물이 나오는 호스 A와 1분에 9 L씩 물이 나오는 호스 B가 있다. 용량이 180 L인 빈 물통에 호스 A로 물을 채우다가 호스 B로 바꾸어 물을 채워 30분 이내에 물통을 가득 채우려고 한다. 이때 호스 B는 최소 몇 분 사용해야 하는가?

① 11분　✓② 12분　③ 13분
④ 14분　⑤ 15분

호스 B를 사용한 시간을 x분이라고 하면 호스 A를 사용할 수 있는 시간은 $(30-x)$분이므로 $4(30-x)+9x \ge 180$, $120+5x \ge 180$, $5x \ge 60$ $\therefore x \ge 12$

철수의 배터리 잔량은 1분에 $\frac{30}{3000} \times 100 = 1(\%)$씩 증가한다.
영희의 배터리 잔량은 1분에 $\frac{80}{4000} \times 100 = 2(\%)$씩 감소한다. ………………… 40 %

23 서술형

철수의 스마트폰 배터리 용량은 3000 mAh이고 현재 12 %가 남았다. 영희의 스마트폰 배터리 용량은 4000 mAh이고 현재 90 %가 남았다. 철수는 고화질 영상을 보고 있어서 1분에 30 mAh를 소모하고, 영희는 화면 밝기를 낮추고 음악만 듣고 있어서 1분에 20 mAh를 소모한다. 영희가 배터리 공유 기능을 작동시켜 철수에게 1분에 60 mAh의 속도로 배터리 전력을 보내준다면, 영희의 배터리 잔량(%)이 철수의 배터리 잔량(%)과 같거나 낮아지는 것은 배터리 공유를 시작한지 몇 분이 지났을 때인지 구하시오. 26분

(단, 배터리 공유 시 전력 손실은 없다고 가정한다.)

배터리 공유를 시작한 지 x분 후 철수와 영희의 배터리 잔량(%)은 각각 $12+x$, $90-2x$이므로 영희의 배터리 잔량(%)이 철수의 배터리 잔량(%)과 같거나 낮아지려면
$90-2x \le 12+x$ ……………………………………………… 30 %
$3x \ge 78$ $\therefore x \ge 26$
따라서 영희의 배터리 잔량(%)이 철수의 배터리 잔량(%)과 같거나 낮아지는 것은 공유를 시작한 지 26분이 지났을 때이다. ……………………………… 30 %

24

어느 복잡한 암호를 해독하는 데 A 컴퓨터는 한 대당 10분이 걸리고, B 컴퓨터는 한 대당 25분이 걸린다. 컴퓨터 여러 대를 동시에 작동시켜 암호를 각각 나누어 해독한다고 할 때, A, B 두 종류의 컴퓨터를 합쳐 총 10대를 작동시켜 2분 이내에 이 암호 해독을 완료하려고 한다. 이때 B 컴퓨터는 최대 몇 대 작동시킬 수 있는가?

① 6대　② 7대　✓③ 8대
④ 9대　⑤ 10대

전체 해독할 암호의 양을 1이라고 하면 A 컴퓨터 1대의 1분 해독량은 $\frac{1}{10}$이고, B 컴퓨터 1대의 1분 해독량은 $\frac{1}{25}$이다. B 컴퓨터의 개수를 x라고 하면 A 컴퓨터의 개수는 $10-x$이므로 $2\left\{\frac{1}{10}(10-x)+\frac{x}{25}\right\} \ge 1$
$5(10-x)+2x \ge 25$, $-3x+50 \ge 25$ $\therefore x \le 8.333\cdots$
따라서 2분 이내에 이 암호 해독을 완료하기 위해서 B 컴퓨터는 최대 8대 작동시킬 수 있다.

25 서술형

어느 공장에서 정해진 작업량을 처리하는데 기계 A는 한 대당 4시간, 기계 B는 네 대당 5시간이 걸린다고 한다. A, B 두 종류의 기계를 합쳐 총 10대를 동시에 사용하여 1시간 이내에 작업을 모두 마치려면 기계 A는 최소 몇 대 사용해야 하는지 구하시오. 3대

처리해야 할 작업량을 1이라고 하면 기계 A 한 대로 1시간 동안 처리하는 작업량은 $\frac{1}{4}$이고 기계 B 한 대로 1시간 동안 처리하는 작업량은 $\frac{1}{20}$이다. ⋯⋯ 40 %

기계 A의 개수를 x라고 하면 기계 B의 개수는 $10-x$이고, 1시간 이내에 작업을 모두 마쳐야 하므로 $\frac{1}{4}x+\frac{1}{20}(10-x)\geq1$ ⋯⋯ 30 %

$5x+(10-x)\geq20$, $4x\geq10$ $\therefore x\geq2.5$

따라서 기계 A는 최소 3대 사용해야 한다. ⋯⋯ 30 %

26 출제 주의

어느 놀이공원에서 입장권을 팔았다. 매표 창구가 열리기 전에 300명이 줄을 서 있었고, 1분마다 5명의 새로운 사람들이 줄을 선다고 한다. 매표 창구 3개를 열면 줄을 서 있는 사람들이 모두 표를 구매하는 데 20분이 걸린다고 한다. 현재 매표 창구가 3개 열려 있을 때, 10분 이내에 줄을 서 있는 모든 사람들이 표를 구매하기 위해서는 적어도 몇 개의 매표 창구를 추가로 열어야 하는가? (단, 한 사람당 표 구매 시간과 각 창구의 처리 속도는 동일하고, 추가로 열 수 있는 매표 창구의 개수의 제한은 없다.)

① 1개 ② 2개 ✓③ 3개
④ 4개 ⑤ 5개

1개의 매표소에서 1분 동안 판매하는 표를 x장이라고 하면

$3\times20x=300+5\times20$, $60x=400$ $\therefore x=\frac{20}{3}$

a개의 매표 창구에서 10분 이내에 줄을 서 있는 모든 사람들이 표를 구매하려면

$a\times10\times\frac{20}{3}\geq300+5\times10$, $\frac{200}{3}a\geq350$ $\therefore a\geq5.25$

따라서 매표 창구가 6개 이상 열려 있어야 하므로 적어도 3개의 매표 창구를 추가로 열어야 한다.

27

200 m 간격으로 이정표가 세워져 있는 직선으로 된 산책로를 따라 수민이와 준호가 이동하고 있다. 수민이가 첫 번째 이정표에서 분속 60 m로 출발한 지 15분 후에 준호가 분속 100 m로 첫 번째 이정표에서 출발하였다. 두 이정표 사이를 구간이라 하고, n번째 구간은 n번째 이정표는 포함하고 $(n+1)$번째 이정표는 포함하지 않는다고 할 때, 처음으로 두 사람이 같은 구간에 있게 되는 것은 준호가 출발한 지 몇 분 후인지 구하시오. 18분

준호가 출발한 지 t분 후 수민이와 준호가 처음으로 같은 구간에 있으려면 두 사람 사이의 거리가 구간의 길이인 200 m 미만이어야 하므로

$60(t+15)-100t<200$, $-40t+900<200$ $\therefore t>\frac{35}{2}$

$t=\frac{35}{2}$일 때, 수민이의 이동거리는 $60\left(\frac{35}{2}+15\right)=1950$ (m), 준호의 이동거리는 $100\times\frac{35}{2}=1750$ (m)이고 준호가 10번째 구간에 진입하는 시간은

$100t=1800$에서 $t=18$

이때 수민이의 이동 거리는 $60(18+15)=1980$ (m)이므로 10번째 구간에 있다.
따라서 준호가 출발한 지 18분 후에 처음으로 두 사람이 같은 구간에 있게 된다.

28

지각을 하지 않기 위해 집에서 학교까지 20분 안에 도착해야 한다. 집에서 학교까지의 전체 거리는 2 km이고, 집에서 500 m까지는 시속 4 km로 걷다가, 남은 거리는 늦을 것 같아 뛰어가려고 한다. 집에서 학교까지 20분 안에 도착하려면 남은 거리는 시속 몇 km 이상으로 뛰어야 하는가?

① 6.9 km ✓② 7.2 km ③ 7.5 km
④ 7.8 km ⑤ 8.1 km

걸어간 거리가 500 m, 즉 0.5 km이므로 뛰어간 거리는 1.5 km이다.

뛰어갈 때의 속력을 시속 x km라고 하면 걸어간 시간은 $\frac{0.5}{4}=\frac{1}{8}$(시간), 뛰어간 시간은 $\frac{1.5}{x}=\frac{3}{2x}$(시간)이고 집에서 학교까지 20분, 즉 $\frac{1}{3}$시간 안에 도착해야 하므로

$\frac{1}{8}+\frac{3}{2x}\leq\frac{1}{3}$, $3x+36\leq8x$, $5x\geq36$ $\therefore x\geq7.2$

29

어느 시에서 잔잔한 물에서의 속력이 시속 24 km인 유람선이 속력이 시속 4 km인 강물 위를 운행하는 관광 코스를 개발하려고 한다. 유람선을 타고 출발지인 A 지점에서 강을 따라 강의 하류의 한 지점까지 내려가고, 그 지점에서 경치를 감상하기 위해 20분 동안 정박한 후, A 지점으로 다시 강을 따라 거슬러 올라가는 관광 코스이다. 이 코스 전체 소요 시간을 3시간 20분 이내로 할 때, 출발지인 A 지점에서 가장 멀리 다녀올 수 있는 강의 하류의 한 지점까지의 거리는 몇 km인지 구하시오. 35 km

강을 따라 내려갈 때의 유람선의 속력은 시속 $24+4=28$ (km)
강을 거슬러 올라갈 때의 유람선의 속력은 시속 $24-4=20$ (km)
출발지인 A 지점에서 x km 떨어진 강의 하류의 한 지점에서 20분 정박하고 다시 A 지점까지 돌아오는 데 3시간 20분, 즉 $\frac{10}{3}$시간 이하로 걸려야 하므로

$\frac{x}{28}+\frac{1}{3}+\frac{x}{20}\leq\frac{10}{3}$, $\frac{x}{28}+\frac{x}{20}\leq3$

$5x+7x\leq420$, $12x\leq420$ $\therefore x\leq35$

30

학교 도서관에서 기숙사까지의 거리가 800 m인 직선도로가 있다. 도서관 와이파이는 도서관으로부터 350 m 지점까지 연결되고, 기숙사 와이파이는 기숙사로부터 250 m 지점까지 연결된다고 한다. 철수가 오후 2시 15분에 도서관을 출발하여 분속 50 m의 속도로 걸어 기숙사를 갈 때, 도서관과 기숙사 와이파이가 모두 연결되지 않는 시간을 구하시오. (단, 와이파이는 연결 범위의 경계선부터 연결되지 않는다.) 오후 2시 22분부터 오후 2시 26분까지

철수가 도서관을 출발한 지 x분 후에 와이파이가 모두 연결되지 않기 시작한다고 하면 철수의 속력이 분속 50 m이므로 x분 동안 이동한 거리는 $50x$ m이다.
와이파이가 모두 연결되지 않는 구간은 도서관을 기준으로 350 m 지점부터 $800-250=550$ (m) 지점 사이이므로
$350\leq50x\leq550$ $\therefore 7\leq x\leq11$
따라서 와이파이가 연결되지 않는 시간은 출발한 지 7분 후부터 11분 후까지이고 출발 시각이 오후 2시 15분이므로 와이파이가 모두 연결되지 않는 시간은 오후 2시 22분부터 오후 2시 26분까지이다.

31 출제 주의

둘레의 길이가 3 km인 원 모양의 산책로가 있다. 민수는 분속 50 m의 일정한 속력으로, 영희는 분속 x m의 일정한 속력으로 산책로를 돌고 있다. 두 사람이 A 지점에서 동시에 출발하여 서로 반대 방향으로 돌 때 민수가 다시 A 지점으로 처음 돌아올 때까지 영희와 민수는 3번 만났다고 한다. 영희의 속력의 범위가 $a<x\le b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, 두 사람이 A 지점에서 만나는 경우는 만나는 횟수에 포함되지 않는다.) 250

민수가 분속 50 m로 둘레의 길이가 3 km, 즉 3000 m인 원 모양의 산책로를 한 바퀴 도는 데 걸리는 시간은

$\frac{3000}{50}=60$(분)

민수가 산책로를 한 바퀴 도는 60분 동안 두 사람의 이동 거리의 합은 $60(50+x)$ m이고 이때 두 사람이 3번 만나려면 $3\times3000<60(50+x)\le4\times3000$

$150<50+x\le200$ $\therefore 100<x\le150$

따라서 $a=100$, $b=150$이므로 $a+b=100+150=250$

32 서술형

우성이가 집에서 학교까지 시속 24 km로 자전거를 타고 가면 시속 6 km로 뛰어가는 것보다 15분 이상 빨리 도착한다. 우성이가 시속 40 km로 달리는 자동차를 타고 가면 최소 몇 분 걸리는지 구하시오. 3분

집에서 학교까지의 거리를 x km라고 하면 자전거가 뛰어가는 것보다 15분, 즉 $\frac{1}{4}$시간 이상 빨리 도착하므로

$\frac{x}{6}-\frac{x}{24}\ge\frac{1}{4}$ ······ 40 %

$4x-x\ge6$, $3x\ge6$ $\therefore x\ge2$ ······ 30 %

따라서 집에서 학교까지의 거리는 2 km 이상이므로 시속 40 km로 달리는 자동차를 타고 가면 최소 $\frac{2}{40}=\frac{1}{20}$(시간), 즉 3분 걸린다. ······ 30 %

33

제조 비용과 제조된 합금의 1 g당 강도는 오른쪽 표와 같다. 두 금속 A와 B를 합하여 500 g을 녹여 합금을 만들려고 할 때, 총 제조 비용은 13000원 이하, 제조된 합금의 평균 강도는 0.64 N 이상이 되도록 하려고 한다. 이때 사용해야 하는 금속 A의 양의 범위를 구하시오. (단, 합금 과정에서 무게 손실은 없다고 가정한다.)

금속	비용(원)	강도(N)
A	30	0.8
B	10	0.4

300 g 이상 400 g 이하

제조하는 금속 A의 양을 x g이라고 하면

금속 B의 양은 $(500-x)$g

총 제조 비용이 13000원 이하이어야 하므로 $30x+10(500-x)\le13000$

$20x+5000\le13000$, $20x\le8000$ $\therefore x\le400$ ······ ㉠

제조된 합금의 1 g당 평균 강도가 0.64 N 이상이어야 하므로

$\frac{0.8x+0.4(500-x)}{500}\ge0.64$

$0.8x+0.4(500-x)\ge320$, $0.4x+200\ge320$ $\therefore x\ge300$ ······ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $300\le x\le400$이므로 금속 A의 양의 범위는 300 g 이상 400 g 이하이다.

34

설탕물 450 g에서 물 150 g을 증발시킨 후 설탕 50 g을 넣었더니 농도가 처음 농도의 2배 이상이 되었다. 처음 설탕물의 농도는 몇 % 이하이었는가?

① 12 % ② 14 % ③ 16 %
④ 18 % ✓⑤ 20 %

처음 설탕물의 농도를 x %라고 하면 이 설탕물에 들어 있는 설탕의 양은

$\frac{x}{100}\times450=4.5x$ (g)

물 150 g을 증발시키고 설탕 50 g을 넣은 후의 설탕물의 양은

$450-150+50=350$ (g)

이때 농도가 처음 농도의 2배 이상이 되어야 하므로

$\frac{4.5x+50}{350}\times100\ge2x$

$4.5x+50\ge7x$, $2.5x\le50$ $\therefore x\le20$

35 출제 주의

당도 10 %인 오렌지 주스와 당도 20 %인 오렌지 주스를 섞어 혼합 주스 400 g을 만들었다. 여기에 당도 15 %인 오렌지 주스를 섞어서 당도가 16 % 이상인 혼합 주스 800 g을 만들려고 한다. 이때 당도 10 %인 오렌지 주스는 최대 몇 g 섞을 수 있는가?

① 80 g ② 100 g ✓③ 120 g
④ 140 g ⑤ 160 g

당도 10 %인 오렌지 주스의 양을 x g 섞는다고 하면 당도 20 %인 오렌지 주스는 $(400-x)$ g 섞어야 한다.

여기에 당도 15 %인 오렌지 주스를 400 g 섞어서 당도가 16 % 이상인 혼합 주스 800 g을 만들어야 하므로

$\frac{10}{100}\times x+\frac{20}{100}\times(400-x)+\frac{15}{100}\times400\ge\frac{16}{100}\times800$

$10x+20(400-x)+6000\ge12800$

$-10x+14000\ge12800$, $10x\le1200$

$\therefore x\le120$

따라서 당도 10 %인 오렌지 주스는 최대 120 g 섞을 수 있다.

36 서술형

당도가 15 %인 사과 주스 A와 당도가 10 %인 사과 주스 B가 있다. 사과 주스 A를 2컵, 사과 주스 B를 3컵 덜어내어 물 150 g이 들어 있는 컵에 넣고 섞었다. 섞은 전체 사과 주스의 당도가 8 % 이상이 되게 하려면 한 컵의 용량은 최소 몇 g이어야 하는지 구하시오. 60 g

한 컵의 용량을 x g이라고 하면 사과 주스 A에서 덜어낸 양은 $2x$ g, 사과 주스 B에서 덜어낸 양은 $3x$ g이고 컵에 들어 있는 물의 양은 150 g이므로 섞은 전체 사과 주스의 양은 $2x+3x+150=5x+150$ (g)

물이 들어 있는 컵에 넣은 사과 주스 A의 당분은 $\frac{15}{100}\times2x=0.3x$이고 사과 주스 B의 당분은 $\frac{10}{100}\times3x=0.3x$이므로 전체 당분의 양은 $0.3x+0.3x=0.6x$ ······ 40 %

섞은 전체 사과 주스의 당도가 8 % 이상이 되어야 하므로

$\frac{0.6x}{5x+150}\times100\ge8$ ······ 20 %

$0.6x\times100\ge8(x+150)$, $60x\ge40x+1200$ $\therefore x\ge60$

따라서 한 컵의 용량은 최소 60 g이어야 한다. ······ 40 %

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

대표 문제

선호는 450원 하는 우유와 720원 하는 빵을 합하여 40개를 구입하는데 25000원을 냈더니 거스름돈을 받았다. 다음 물음에 답하시오. (단, 우유와 빵은 각각 1개 이상 구입한다.)

(1) 빵은 최대 몇 개 구입할 수 있는지 구하시오.

(2) 빵과 우유를 사고 받은 거스름돈이 1000원 이상 2000원 미만이었으며 10원과 50원짜리 동전은 없었다고 할 때 우유와 빵은 몇 개씩 구입하였는지 구하시오.

함께 풀기

STEP 1

주어진 조건과 구해야 하는 것 확인하기

주어진 조건: ① 우유의 가격은 450원, 빵의 가격은 720원
② 우유와 빵을 합하여 40개를 구입하고, 25000원을 내고 거스름돈을 받았다.
③ 우유와 빵을 각각 1개 이상 구입한다.

구해야 하는 것: ① 구입할 수 있는 빵의 최대 개수
② 거스름돈이 1000원 이상 2000원 미만이고 10원과 50원짜리가 없을 때, 구입한 우유와 빵의 개수

STEP 2

빵과 우유의 개수를 x에 대한 식으로 나타내기

빵의 개수를 x, 우유의 개수를 $40-x$라고 하면 빵과 우유를 산 총 금액은
$450(40-x)+720x=1800+270x$(원)

STEP 3

(1) 조건에 맞게 부등식 세워 빵의 최대 구입 개수 구하기

빵과 우유를 사는데 25000원을 내고 거스름돈을 받았으므로
$1800+270x<25000$, $270x<7000$ $\therefore x<25.925\cdots$
따라서 빵은 최대 25개 구입할 수 있다.

STEP 4

(2) 거스름돈 조건을 이용하여 부등식 세우기

빵과 우유를 구입한 후 받은 거스름돈은 $25000-(1800+270x)=7000-270x$(원)
이고 거스름돈은 1000원 이상 2000원 미만이었으므로
$1000\le 7000-270x<2000$, $-6000\le -270x<-5000$ $\therefore 18.51\cdots<x\le 22.22\cdots$

STEP 5

거스름돈에 10원과 50원짜리 동전이 포함되지 않을 때의 빵과 우유의 구입 개수 구하기

(i) $x=19$일 때, 거스름돈은 $7000-270\times 19=1870$(원)
이때 거스름돈에 10원과 50원짜리가 포함되므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x=20$일 때, 거스름돈은 $7000-270\times 20=1600$(원)

(iii) $x=21$일 때, 거스름돈은 $7000-270\times 21=1330$(원)
이때 거스름돈에 10원과 50원짜리가 포함되므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $x=22$일 때, 거스름돈은 $7000-270\times 22=1060$(원)
이때 거스름돈에 10원과 50원짜리가 포함되므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에 의하여 구입한 빵의 개수는 20이고, 우유의 개수는 $40-20=20$이다.

답 (1) 25개 (2) 빵: 20개, 우유: 20개

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

01 x에 대한 일차부등식 $3x-k \le x+2$가 $x=-1$일 때 성립하고 모든 자연수 x에 대하여 성립하지 않는다고 할 때, 상수 k의 값의 범위는 $A \le k < B$이다. 이때 $A+B$의 값을 구하시오. -4

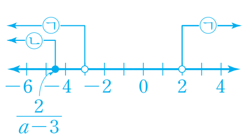
$x=-1$일 때 $3x-k \le x+2$가 성립하므로
$-3-k \le 1$ $\quad\therefore k \ge -4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$3x-k \le x+2$에서
$2x \le k+2$ $\quad\therefore x \le \dfrac{k+2}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
이때 모든 자연수 x에 대하여 ㉡이 성립하지 않으므로 $\dfrac{k+2}{2}<1$이어야 한다.
$k+2<2$ $\quad\therefore k<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉢에서 $-4 \le k < 0$
따라서 $A=-4$, $B=0$이므로
$A+B=-4+0=-4$

02 다음 두 부등식에 대하여 ㉠의 해가 ㉡의 해에 포함될 때, 상수 a의 값의 범위를 구하시오. (단, $a \ne 3$)

$$\begin{cases} ax-3 \ge 3x-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ |2x+1|>5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

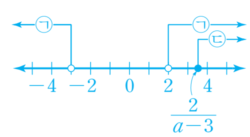
$\dfrac{7}{3}<a<3$ 또는 $3<a<4$

$|2x+1|>5$에서 $2x+1<-5$ 또는 $2x+1>5$
$2x<-6$ 또는 $2x>4$ $\quad\therefore x<-3$ 또는 $x>2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$ax-3 \ge 3x-1$에서 $(a-3)x \ge 2$
(i) $a-3<0$일 때, $x \le \dfrac{2}{a-3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉡의 해가 ㉠의 해에 포함되려면
$\dfrac{2}{a-3}<-3$이어야 한다.



$\dfrac{2}{a-3}<-3$에서
$2>-3(a-3)$, $2>-3a+9$
$3a>7$ $\quad\therefore a>\dfrac{7}{3}$
이때 $a-3<0$이므로 $a<3$ $\quad\therefore \dfrac{7}{3}<a<3$

(ii) $a-3>0$일 때, $x \ge \dfrac{2}{a-3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢
㉢의 해가 ㉠의 해에 포함되려면
$\dfrac{2}{a-3}>2$이어야 한다.



$\dfrac{2}{a-3}>2$에서
$2>2(a-3)$, $2>2a-6$
$2a<8$ $\quad\therefore a<4$
이때 $a-3>0$이므로 $a>3$ $\quad\therefore 3<a<4$
(i), (ii)에 의하여 상수 a의 값의 범위는
$\dfrac{7}{3}<a<3$ 또는 $3<a<4$

03 70보다 작은 자연수 n에 대하여 $\dfrac{n}{70}$을 소수로 나타내면 소수점 아래 첫째 자리의 숫자는 2이고, 소수점 아래 셋째 자리의 숫자는 4이다. 또, $\dfrac{n+1}{70}$을 소수로 나타내면 소수점 아래 둘째 자리의 숫자는 2이다. 이때 자연수 n의 값을 구하시오. 15

$n<70$이므로 $\dfrac{n}{70}<1$
$\dfrac{n}{70}$을 소수로 나타내면 소수점 아래 첫째 자리의 숫자는 2이고, 소수점 아래 셋째 자리의 숫자는 4이므로
$0.204 \le \dfrac{n}{70} \le 0.294$ $\quad\therefore 14.28 \le n \le 20.58$
즉, 자연수 n의 값은 15, 16, 17, 18, 19, 20이다.
각 n의 값에 대한 $\dfrac{n+1}{70}$의 값은
$n=15$일 때, $\dfrac{16}{70}=0.2285\cdots$
$n=16$일 때, $\dfrac{17}{70}=0.2428\cdots$
$n=17$일 때, $\dfrac{18}{70}=0.2571\cdots$
$n=18$일 때, $\dfrac{19}{70}=0.2714\cdots$
$n=19$일 때, $\dfrac{20}{70}=0.2857\cdots$
$n=20$일 때, $\dfrac{21}{70}=0.3$
따라서 $\dfrac{n+1}{70}$을 소수로 나타냈을 때, 소수점 아래 둘째 자리의 숫자가 2인 자연수 n의 값은 15이다.

04 문구점 주인이 공책 140권을 구입하였다. 검수 결과 20권은 표지에 흠집이 있어 원가 그대로 팔기로 하였고, 나머지 공책은 깨끗하여 원가에 일정한 이익을 붙여서 팔기로 하였다. 공책을 모두 팔아서 총 원가의 12 % 이상의 이익을 남기려면 흠집이 없는 깨끗한 공책에는 몇 % 이상의 이익을 붙여서 팔아야 하는지 구하시오. **14 %**

공책 한 권의 원가를 a원이라 하고 공책 한 권당 x %의 이익을 붙인다고 하면
공책 140권의 원가는 $140a$원
원가에 판매하는 공책 20권의 판매 금액은 $20a$원
이익을 붙여서 판매하는 공책 120권의 판매 금액은 $120a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원
이때 공책을 모두 팔아서 총 원가의 12 % 이상의 이익을 남기려면
$20a+120a\left(1+\frac{x}{100}\right)\geq 140a\left(1+\frac{12}{100}\right)$
$1+6\left(1+\frac{x}{100}\right)\geq 7\times\frac{112}{100}$, $6\left(1+\frac{x}{100}\right)\geq\frac{171}{25}$
$1+\frac{x}{100}\geq\frac{57}{50}$, $\frac{x}{100}\geq\frac{7}{50}$ $\therefore x\geq 14$

05 한 개에 2000원인 쿠키 여러 개를 한 세트로 팔고 있는 동네 제과점에서 오른쪽 그림과 같이 두 가지 판매 행사를 진행 중이다. 두 행사 중 [보너스 행사]를 선택하는 것이 쿠키 1개당 가격이 더 저렴할 때, 쿠키 한 세트에 쿠키가 최대 몇 개 들어 있어야 하는지 구하시오. (단, 판매 행사의 쿠키 한 세트에 들어 있는 쿠키의 개수는 서로 같고, 판매 행사는 하나만 선택할 수 있다.) **26개**

한 세트에 들어 있는 쿠키의 개수를 x라고 하면 [보너스 행사]에서 한 세트에 지불되는 금액은 $2000x$원이고 받는 쿠키의 개수는 $x+3$이므로 쿠키 1개당 가격은
$\frac{2000x}{x+3}$원
[할인 행사]에서 한 세트에 지불되는 금액은
$2000x\times\left(1-\frac{10}{100}\right)=1800x$(원)
이고 받는 쿠키의 개수는 x이므로 쿠키 1개당 가격은
$\frac{1800x}{x}=1800$(원)
두 행사 중 [보너스 행사]를 선택하는 것이 쿠키 1개당 가격이 더 저렴해야 하므로
$\frac{2000x}{x+3}<1800$
$2000x<1800(x+3)$, $2000x<1800x+5400$
$200x<5400$ $\therefore x<27$
따라서 [보너스 행사]를 선택하는 것이 쿠키 1개당 가격이 더 저렴하려면 쿠키 한 세트에 쿠키가 최대 26개 들어 있어야 한다.

06 양수 a를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 수를 $\{a\}$라고 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. **139**

(가) $10<\left\{\frac{2x+5}{5}\right\}\leq 14$	(나) $\left\{\frac{x}{3}\right\}$의 값은 짝수이다.

$\left\{\frac{2x+5}{5}\right\}$는 자연수이므로 $10<\left\{\frac{2x+5}{5}\right\}\leq 14$에서
$\left\{\frac{2x+5}{5}\right\}=11, 12, 13, 14$
즉, $10.5\leq\frac{2x+5}{5}<14.5$이어야 하므로
$52.5\leq 2x+5<72.5$, $47.5\leq 2x<67.5$
$\therefore 23.75\leq x<33.75$
이때 x는 자연수이므로 $x=24, 25, 26, 27, \dots, 33$
따라서 $\frac{x}{3}=8, \frac{25}{3}, \frac{26}{3}, 9, \dots, 11$이므로 $\left\{\frac{x}{3}\right\}$의 값 중 짝수인 수는 8, 10이다.
(ⅰ) $\left\{\frac{x}{3}\right\}=8$일 때, $7.5\leq\frac{x}{3}<8.5$
$22.5\leq x<25.5$ $\therefore x=24, 25$
(ⅱ) $\left\{\frac{x}{3}\right\}=10$일 때, $9.5\leq\frac{x}{3}<10.5$
$28.5\leq x<31.5$ $\therefore x=29, 30, 31$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 x의 값은 24, 25, 29, 30, 31이므로 그 합은
$24+25+29+30+31=139$

01

다음 중 □ 안에 들어갈 부등호의 방향이 나머지 넷과 <u>다른</u> 하나는? [4점]

① $a<b$이면 $1-a\square 1-b$이다.

② $2a>b$이면 $a+5\square\frac{1}{2}b+5$이다.

③ $a-(-3)>b-(-3)$이면 $a\square b$이다.

✓④ $a\times\left(-\frac{1}{4}\right)>b\times\left(-\frac{1}{4}\right)$이면 $a-2\square b-2$이다.

⑤ $-a\div(-6)>-\frac{1}{3}b\div(-6)$이면 $3a\square b$이다.

① $a<b$이면 $-a>-b$이므로 $1-a>1-b$
② $2a>b$이면 $a>\frac{1}{2}b$이므로 $a+5>\frac{1}{2}b+5$
③ $a-(-3)>b-(-3)$이면 $a+3>b+3$이므로 $a>b$
④ $a\times\left(-\frac{1}{4}\right)>b\times\left(-\frac{1}{4}\right)$이면 $a<b$이므로 $a-2<b-2$
⑤ $-a\div(-6)>-\frac{1}{3}b\div(-6)$이면 $\frac{a}{6}>\frac{b}{18}$이므로 $3a>b$

02

$-4\le 3(x-1)+5\le 11$을 만족시키는 x에 대하여 $m\le -4x+5\le M$일 때, $M+m$의 값은? [4점]

① -20 ② -6 ③ -2
✓④ 6 ⑤ 20

$-4\le 3(x-1)+5\le 11$에서
$-9\le 3(x-1)\le 6$, $-3\le x-1\le 2$
$\therefore -2\le x\le 3$
이때 $-12\le -4x\le 8$이므로 $-7\le -4x+5\le 13$
따라서 $m=-7$, $M=13$이므로 $M+m=13+(-7)=6$

03

다음 보기에서 일차방정식 $\frac{2x-3}{4}-\frac{x+5}{6}=\frac{1}{3}$을 만족시키는 x의 값을 해로 갖는 부등식만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보기 〉
ㄱ. $3x-10>x+2$
ㄴ. $5-2x\le x-16$
ㄷ. $\frac{3}{2}x-\frac{7}{4}>2x-\frac{11}{2}$
ㄹ. $\frac{2x-1}{5}+\frac{x+4}{10}\ge\frac{19}{5}$
ㅁ. $\frac{1}{2}x+4\le\frac{1}{3}x+5$

① ㄱ, ㄷ ② ㄴ, ㅁ ✓③ ㄷ, ㅁ
④ ㄱ, ㄴ, ㅁ ⑤ ㄷ, ㄹ, ㅁ

$\frac{2x-3}{4}-\frac{x+5}{6}=\frac{1}{3}$에서 $3(2x-3)-2(x+5)=4$, $4x-19=4$ $\therefore x=\frac{23}{4}$
ㄱ. $3x-10>x+2$에서 $2x>12$ $\therefore x>6$
ㄴ. $5-2x\le x-16$에서 $3x\ge 21$ $\therefore x\ge 7$
ㄷ. $\frac{3}{2}x-\frac{7}{4}>2x-\frac{11}{2}$에서 $6x-7>8x-22$, $2x<15$ $\therefore x<\frac{15}{2}$
ㄹ. $\frac{2x-1}{5}+\frac{x+4}{10}\ge\frac{19}{5}$에서 $2(2x-1)+x+4\ge 38$, $5x+2\ge 38$ $\therefore x\ge\frac{36}{5}$
ㅁ. $\frac{1}{2}x+4\le\frac{1}{3}x+5$에서 $3x+24\le 2x+30$ $\therefore x\le 6$

04

일차방정식 $-2(x+4)+7=5$의 해를 $x=a$라고 할 때, x에 대한 일차부등식 $x+2a>3x+8$의 해는? [4점]

✓① $x<-7$ ② $x>-7$ ③ $x<-4$
④ $x>-4$ ⑤ $x<-1$

$-2(x+4)+7=5$에서
$-2x-1=5$, $-2x=6$ $\therefore x=-3$
따라서 $a=-3$이므로 $x+2a>3x+8$에 $a=-3$을 대입하면
$x-6>3x+8$, $2x<-14$ $\therefore x<-7$

05

일차부등식 $0.8x-\frac{1}{4}(2x-3)\ge 1.5$를 만족시키는 가장 작은 자연수 x의 값은? [4점]

① -3 ② -2 ③ -1
④ 2 ✓⑤ 3

$0.8x-\frac{1}{4}(2x-3)\ge 1.5$에서
$16x-5(2x-3)\ge 30$
$6x+15\ge 30$, $6x\ge 15$ $\therefore x\ge\frac{5}{2}$
따라서 부등식을 만족시키는 가장 작은 자연수 x의 값은 3이다.

06

십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의 합이 8인 두 자리 자연수가 있다. 이 자연수의 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수는 처음 수의 4배보다 크다고 할 때, 처음 수는? [4점]

✓① 17 ② 26 ③ 35
④ 53 ⑤ 62

처음 두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 x라고 하면 일의 자리의 숫자는 $8-x$이므로
$10\times(8-x)+x>4\{10x+(8-x)\}$
$80-9x>36x+32$, $45x<48$ $\therefore x<\frac{16}{15}$
이때 x는 자연수이므로 $x=1$이고 처음 수는 $10\times1+(8-1)=17$이다.

07

$-2<x\le k$이고 $A=6-4x$일 때, A의 값의 범위에 포함되는 정수의 개수가 15가 되도록 하는 상수 k의 값의 범위는? [4점]

① $1\le k<1.25$ ② $1.25<k\le 1.5$
③ $1.5\le k<1.75$ ✓④ $1.75\le k<2$
⑤ $2\le k<2.25$

$-2<x\le k$에서
$-4k\le -4x<8$, $6-4k\le 6-4x<14$
즉, $6-4k\le A<14$이므로 A의 값의 범위에 포함되는 정수의 개수가 15이려면
$-2<6-4k\le -1$이어야 한다.
$-8<-4k\le -7$ $\therefore 1.75\le k<2$

08

부등식 $\dfrac{ax-3}{2}-\dfrac{x+a}{3}<1$의 해가 $x<3$일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 2 ✓② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

$\dfrac{ax-3}{2}-\dfrac{x+a}{3}<1$에서 $3(ax-3)-2(x+a)<6$, $3ax-9-2x-2a<6$
$\therefore (3a-2)x<15+2a$
이때 부등식의 해가 $x<3$이므로 $3a-2>0$이어야 한다.
$\therefore x<\dfrac{15+2a}{3a-2}$
즉, $\dfrac{15+2a}{3a-2}=3$이므로 $15+2a=3(3a-2)$, $15+2a=9a-6$
$7a=21$ $\therefore a=3$

09

x에 대한 일차부등식 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x+a}{3}\ge 2a$에 대하여 $x=12$가 이 부등식의 해가 되지 않도록 하는 가장 작은 정수 a의 값은? [4점]

① 6 ✓② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

$x=12$가 주어진 부등식의 해가 되지 않으려면 $x=12$는
$\dfrac{x}{2}+\dfrac{x+a}{3}<2a$의 해가 되어야 한다.
즉, $6+\dfrac{12+a}{3}<2a$이어야 하므로
$18+12+a<6a$, $5a>30$ $\therefore a>6$
따라서 조건을 만족시키는 가장 작은 정수 a의 값은 7이다.

10

일차부등식 $a(x-1)-b(x-2)>0$의 해가 존재하지 않을 때, 부등식 $(a-1)x+b<1$의 해는?
(단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $x<-1$ ✓② $x>-1$ ③ $x<2$
④ $x>2$ ⑤ $x>3$

$a(x-1)-b(x-2)>0$에서
$ax-a-bx+2b>0$, $(a-b)x>a-2b$
이때 $(a-b)x>a-2b$의 해가 존재하지 않으므로
$a-b=0$, $a-2b\ge 0$
즉, $a=b$이고, $a-2b=a-2a\ge 0$이므로 $a\le 0$
따라서 $(a-1)x+b<1$에서
$(a-1)x+a<1$, $(a-1)x<-a+1$
이때 $a-1\le -1$이므로 $x>-1$

11

어느 회사에서 생산한 제품 2000개에 대하여 생산 원가의 40 %의 이익을 붙여서 정가를 정하고, 불량품을 제외한 나머지 제품을 모두 팔았다. 이때 전체 생산 원가의 26 % 이상의 이익이 남게 하려면 불량품은 최대 몇 개까지 허용되는가? [4점]

✓① 200개 ② 210개 ③ 220개
④ 230개 ⑤ 240개

생산 원가를 a원이라 하고, 불량품 개수를 x라고 하면 정가는 $a\left(1+\dfrac{40}{100}\right)=1.4a$ (원)
판매 개수는 $2000-x$이고 전체 생산 원가의 26 % 이상의 이익이 남게 하려면
$(2000-x)\times 1.4a\ge 2000\times a\times\left(1+\dfrac{26}{100}\right)$
$(2000-x)\times 1.4\ge 2000\times 1.26$
$2800-1.4x\ge 2520$, $1.4x\le 280$
$\therefore x\le 200$

12

한결이가 집에서 3 km 떨어진 학교까지 가는데, 처음에는 분속 60 m로 걷다가 도중에 분속 150 m로 뛰어서 학교에 가려고 한다. 오전 8시에 집에서 출발하여 학교에 오전 8시 30분에서 8시 40분 사이에 도착하려면 분속 60 m로 걸은 거리는 a m 이상 b m 이하이다. 이때 $a+b$의 값은?
(단, 도착 시간은 경계 시간을 포함한다.) [4점]

① 1500 ② 2000 ③ 2500
✓④ 3000 ⑤ 3500

한결이가 분속 60 m로 걸은 거리를 x m라고 하면 분속 150 m로 뛰는 거리는 $(3000-x)$ m이다.
한결이가 집에서 학교까지 가는데 걸린 시간은 $\left(\dfrac{x}{60}+\dfrac{3000-x}{150}\right)$분이므로
$30\le\dfrac{x}{60}+\dfrac{3000-x}{150}\le 40$
$9000\le 5x+2(3000-x)\le 12000$
$9000\le 3x+6000\le 12000$ $\therefore 1000\le x\le 2000$
즉, 분속 60 m로 걸은 거리는 1000 m 이상 2000 m 이하이므로 $a=1000$, $b=2000$
$\therefore a+b=1000+2000=3000$

13

어느 콘서트장의 티켓 한 장의 가격과 응원봉 한 개의 가격은 오른쪽 표와 같다. 오늘 관객은 총 200명이었고, VIP석 관객 수는 일반석 관객 수의 2배 미만이었다. 티켓과 응원봉 판매 수익의 합계가 12400000원일 때, 응원봉이 가장 많이 팔린 경우 판매된 응원봉은 몇 개인가? [4점]

	가격
일반석 티켓	50000원
VIP석 티켓	100000원
응원봉	20000원

① 111개　② 112개　③ 113개

④ 114개　✓⑤ 115개

일반석 관객 수를 x라고 하면 VIP석 관객 수는 $200-x$이다.
이때 VIP석 관객 수는 일반석 관객 수의 2배 미만이므로
$200-x<2x$, $3x>200$　$\therefore x>66.666\cdots$
이때 판매된 응원봉의 개수를 y라고 하면 티켓과 응원봉 판매 수익의 합계가 12400000원이므로
$50000x+100000(200-x)+20000y=12400000$
$5x+10(200-x)+2y=1240$
$2000-5x+2y=1240$, $2y=5x-760$　$\therefore y=\frac{5x-760}{2}$　…… ㉠
응원봉이 가장 많이 팔린 경우, 즉 y의 값이 가장 클 때는 x의 값이 가장 클 때이다.
이때 y는 자연수이므로 x는 짝수이어야 하고, $67\le x<200$에서 가장 큰 x의 값은 198이다.
$x=198$을 ㉠에 대입하면
$y=\frac{5\times198-760}{2}=115$

14

어느 박물관에서 30명 이상의 단체인 경우에는 입장료의 20 %를 할인해 주고, 50명 이상의 단체인 경우에는 30 %를 할인해 주고 있다. 30명 이상 50명 미만인 단체에서는 몇 명 이상일 때, 50명의 단체 입장권을 사는 것이 더 유리한가? [4점]

① 42명　② 43명　✓③ 44명

④ 45명　⑤ 46명

단체 관람객 수를 x라 하고 1인당 입장료를 a원이라고 하면
30명 이상의 단체 할인이 반영된 입장권 가격은
$a\times\left(1-\frac{20}{100}\right)\times x=\frac{4}{5}ax$(원)
50명의 단체 할인이 반영된 입장권 가격은
$a\times\left(1-\frac{30}{100}\right)\times50=35a$(원)
30명 이상 50명 미만인 단체가 50명의 단체 입장권을 사는 것이 유리하려면
$\frac{4}{5}ax>35a$, $\frac{4}{5}x>35$　$\therefore x>43.75$
따라서 30명 이상 50명 미만인 단체에서는 44명 이상일 때 50명의 단체 입장권을 사는 것이 더 유리하다.

15

분모, 분자가 양의 정수인 기약분수가 있다. 이 기약분수의 분모에 2를 더한 것은 $\frac{3}{10}$과 같고, 분자에 1을 더한 것은 $\frac{1}{3}$보다 크다. 분모와 분자의 합이 20보다 클 때, 이 기약분수는? [6점]

① $\frac{3}{14}$　✓② $\frac{9}{28}$　③ $\frac{3}{7}$

④ $\frac{15}{28}$　⑤ $\frac{9}{14}$

기약분수를 $\frac{b}{a}$ ($a>0$, $b>0$, a, b는 서로소)라고 하면
$\frac{b}{a+2}=\frac{3}{10}$에서 $10b=3a+6$
$\therefore b=\frac{3a+6}{10}$　…… ㉠
$\frac{b+1}{a}>\frac{1}{3}$에서 $a<3b+3$　…… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$a<\frac{3(3a+6)}{10}+3$, $10a<9a+18+30$
$\therefore a<48$　…… ㉢
$10b=3a+6$에서 $10b=3(a+2)$이므로 $a+2$는 10의 배수이고,
㉢에서 $a+2<50$이므로
$a+2=10, 20, 30, 40$　$\therefore a=8, 18, 28, 38$
따라서 ㉠을 만족시키는 a, b를 순서쌍 (a, b)로 나타내면
$(8, 3)$, $(18, 6)$, $(28, 9)$, $(38, 12)$
이때 a, b는 서로소이고 $a+b>20$이므로 $a=28$, $b=9$이다.
$\therefore \frac{b}{a}=\frac{9}{28}$

16

일차부등식 $\frac{x-2}{3}-0.3x<-\frac{1}{2}$을 만족시키는 자연수 x의 개수를 구하시오. [4점] 4

$\frac{x-2}{3}-0.3x\leq-\frac{1}{2}$의 양변에 30을 곱하면
$10(x-2)-9x<-15$
$x-20<-15$ $\therefore x<5$
따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

17

일차부등식 $ax+b>0$의 해가 $x<-\frac{2}{3}$일 때, 일차부등식 $(4a-3b)x-a+6b\geq0$의 해를 구하시오. $x\leq-\frac{3}{2}$
(단, a, b는 상수이다.) [4점]

$ax+b>0$에서 $ax>-b$
이 부등식의 해가 $x<-\frac{2}{3}$이므로 $a<0$이어야 한다. $\therefore x<-\frac{b}{a}$
즉, $-\frac{b}{a}=-\frac{2}{3}$이므로 $b=\frac{2}{3}a$
$b=\frac{2}{3}a$를 $(4a-3b)x-a+6b\geq0$에 대입하면
$(4a-2a)x-a+4a\geq0$, $2ax\geq-3a$
$\therefore x\leq-\frac{3}{2}$

18

동네 문구점에서 한 자루에 1000원인 볼펜이 대형 할인점에 가면 한 자루에 750원이라고 한다. 대형 할인점에 다녀오는 왕복 교통비가 2000원일 때, 볼펜을 몇 자루 이상 사면 대형 할인점에 가는 것이 유리한지 구하시오. [4점] 9자루

볼펜을 x자루 산다고 하면
$1000x>750x+2000$
$250x>2000$ $\therefore x>8$
따라서 볼펜을 9자루 이상 사면 대형 할인점에 가는 것이 유리하다.

19

일차부등식 $0.3(x+2)\geq-1.5$를 만족시키는 x에 대하여 $\frac{5-2x}{5}$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. [4점] -5

$0.3(x+2)\geq-1.5$에서
$3(x+2)\geq-15$, $3x+6\geq-15$, $3x\geq-21$ $\therefore x\geq-7$
$x\geq-7$에서 $-2x\leq14$, $5-2x\leq19$ $\therefore \frac{5-2x}{5}\leq\frac{19}{5}$
따라서 $\frac{5-2x}{5}$의 값이 자연수이려면
$\frac{5-2x}{5}=1$ 또는 $\frac{5-2x}{5}=2$ 또는 $\frac{5-2x}{5}=3$이어야 하므로
$5-2x=5$ 또는 $5-2x=10$ 또는 $5-2x=15$
$\therefore x=0$ 또는 $x=-\frac{5}{2}$ 또는 $x=-5$
따라서 모든 정수 x의 값은 -5, 0이고 그 합은 $-5+0=-5$

20

채원이네 가족은 등산로의 길이가 4.2 km인 산을 등산하는데 올라갈 때는 시속 3 km로 걷고, 정상에 도착해서 경치를 구경하다가 내려올 때는 같은 길을 시속 4 km로 걸어서 총 3시간 10분 이내에 등산을 마치려고 한다. 채원이네 가족이 정상에서 경치를 구경할 수 있는 시간은 최대 몇 분인지 구하시오. [4점] 43분

채원이네 가족이 정상에서 경치를 구경하는 시간을 x분이라고 하면 3시간 10분은 $\frac{19}{6}$시간이므로
$\frac{4.2}{3}+\frac{x}{60}+\frac{4.2}{4}\leq\frac{19}{6}$
$84+x+63\leq190$ $\therefore x\leq43$
따라서 채원이네 가족이 정상에서 경치를 구경할 수 있는 시간은 최대 43분이다.

21

어느 유람선이 시속 2 km로 흐르는 강에서 상류의 한 지점 A와 하류의 한 지점 B 사이를 왕복하려고 한다. 두 지점 A, B 사이의 거리는 80 km이고, 정지한 물에서의 유람선의 속력은 시속 28 km이다. 지점 A에서 지점 B까지 이 속력으로 강을 따라 내려갔다가 다시 강을 거슬러 올라갈 때는 속력을 더 높여 5시간 20분 이내에 왕복하려고 한다. 강을 거슬러 올라갈 때의 유람선의 속력은 시속 몇 km 이상이어야 하는지 구하시오. [4점] 시속 32 km

강을 거슬러 올라갈 때의 유람선의 속력을 시속 x km라고 하면 강을 따라 내려갈 때의 유람선의 실제 속력은 시속 $28+2=30$ (km)이고, 강을 거슬러 올라갈 때의 유람선의 실제 속력은 시속 $(x-2)$ km이다.
총 5시간 20분, 즉 $\frac{16}{3}$시간 이내에 왕복을 마쳐야 하므로
$\frac{80}{30}+\frac{80}{x-2}\leq\frac{16}{3}$
$\frac{80}{x-2}\leq\frac{8}{3}$, $240\leq8(x-2)$, $240x\leq8x-16$
$8x\geq256$ $\therefore x\geq32$

22, 23번은 서술형입니다. 풀이 과정을 자세히 서술하시오.

22

일차부등식 $-\frac{x+2a}{6}-1\le 0.\dot{3}x-\frac{1}{2}a$를 만족시키는 x의 값 중 가장 작은 자연수가 4가 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오. [7점] **51**

$-\frac{x+2a}{6}-1\le 0.\dot{3}x-\frac{1}{2}a$에서

$-\frac{x+2a}{6}-1\le \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}a$이므로 양변에 6을 곱하면

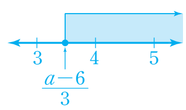
$-(x+2a)-6\le 2x-3a$

$-x-2a-6\le 2x-3a,\ 3x\ge a-6$

$\therefore\ x\ge \frac{a-6}{3}$ ······ 3점

이 부등식을 만족시키는 x의 값 중 가장 작은 자연수가 4이려면

$3<\frac{a-6}{3}\le 4$이어야 한다. ······ 2점



$3<\frac{a-6}{3}\le 4$에서

$9<a-6\le 12\qquad \therefore\ 15<a\le 18$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 16, 17, 18이고 그 합은

$16+17+18=51$ ······ 2점

23

둘레의 길이가 1200 m인 원 모양의 운동장 트랙을 따라 형은 분속 x m의 일정한 속력으로 자전거를 타고 있고, 동생은 분속 60 m로 걷고 있다. 두 사람이 A 지점에서 동시에 출발하여 같은 방향으로 돌 때, 동생이 다시 A 지점으로 처음 돌아올 때까지 형과 5번 만났다고 한다. 이때 형의 속력의 범위를 구하시오. (단, 두 사람이 A 지점에서 만나는 경우는 만나는 횟수에 포함하지 않는다.) [7점]

$360<x\le 420$

동생이 분속 60 m로 둘레의 길이가 1200 m인 원 모양의 운동장 트랙 한 바퀴 도는데 걸리는 시간은

$\frac{1200}{60}=20$(분) ······ 2점

동생이 트랙을 한 바퀴 도는 20분 동안 두 사람의 이동 거리의 차는 $20(x-60)$ m이고 이때 두 사람이 5번 만나려면

$5\times 1200<20(x-60)\le 6\times 1200$ ······ 3점

$6000<20x-1200\le 7200$

$7200<20x\le 8400$

$\therefore\ 360<x\le 420$

따라서 형의 속력 x의 범위는 $360<x\le 420$이다. ······ 2점

Ⅲ 연립방정식

1. 연립방정식의 풀이
2. 연립방정식의 활용

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

Lv. M 실력을 완성하는 대단원 평가

Ⅲ 연립방정식

1등급 비법노트

- 순서쌍 (m, n)이 일차방정식 $ax+by+c=0$의 해이다.
  ⇨ $x=m$, $y=n$을 $ax+by+c=0$에 대입하면 등식이 성립한다.
  ⇨ $am+bn+c=0$

- 순서쌍 (m, n)이 연립방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ a'x+b'y+c'=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해이다.
  ⇨ $x=m$, $y=n$을 두 일차방정식 ㉠, ㉡에 각각 대입하면 모두 등식이 성립한다.
  ⇨ $am+bn+c=0$, $a'm+b'n+c'=0$

- 두 일차방정식 중 어느 하나가 $x=(y$에 대한 식) 또는 $y=(x$에 대한 식)의 꼴일 때에는 대입법을 이용하는 것이 편리하다.

- 가감법을 이용하여 연립방정식을 풀 때, 없애려는 미지수의 계수의 절댓값을 같게 한 후
  ① 부호가 같으면
  ⇨ 방정식을 변끼리 뺀다.
  ② 부호가 다르면
  ⇨ 방정식을 변끼리 더한다.

01 연립방정식의 풀이

1 미지수가 2개인 일차방정식

(1) **미지수가 2개인 일차방정식:** 미지수가 2개이고 그 차수가 모두 1인 방정식
⇨ $ax+by+c=0$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$, $b\neq0$)

(2) **미지수가 2개인 일차방정식의 해:** 미지수가 2개인 일차방정식을 만족시키는 x, y의 값 또는 그 순서쌍 (x, y)

(3) **일차방정식을 푼다:** 일차방정식의 해를 모두 구하는 것

참고 미지수가 1개인 일차방정식의 해는 한 개이지만, 미지수가 2개인 일차방정식의 해는 여러 개일 수 있다.

2 미지수가 2개인 연립일차방정식

(1) **연립방정식:** 두 개 이상의 방정식을 한 쌍으로 묶어서 나타낸 것

(2) **미지수가 2개인 연립일차방정식:** 미지수가 2개인 두 일차방정식을 한 쌍으로 묶어 놓은 것

참고 연립일차방정식을 간단히 연립방정식이라고 한다.

(3) **연립방정식의 해:** 연립방정식에서 두 방정식을 동시에 참이 되게 하는 x, y의 값 또는 그 순서쌍 (x, y)

(4) **연립방정식을 푼다:** 연립방정식의 해를 모두 구하는 것

3 연립방정식의 풀이 – 대입법

(1) **대입법:** 연립방정식의 두 일차방정식 중 한 방정식을 다른 방정식에 대입하여 한 미지수를 없앤 후 연립방정식의 해를 구하는 방법

(2) **대입법을 이용한 연립방정식의 풀이**

❶ 한 방정식에서 한 미지수를 다른 미지수에 대한 식으로 나타낸다.
❷ ❶의 식을 다른 방정식에 대입하여 한 미지수를 없앤 후 일차방정식을 푼다.
❸ ❷에서 구한 해를 ❶의 식에 대입하여 다른 미지수의 값을 구한다.

4 연립방정식의 풀이 – 가감법

(1) **가감법:** 연립방정식의 두 일차방정식을 변끼리 더하거나 빼서 한 미지수를 없앤 후 연립방정식의 해를 구하는 방법

(2) **가감법을 이용한 연립방정식의 풀이**

❶ 각 방정식의 양변에 적당한 수를 곱하여 없애려는 미지수의 계수의 절댓값이 같아지도록 한다.
❷ ❶의 두 식을 변끼리 더하거나 빼서 한 미지수를 없앤 후 일차방정식을 푼다.
❸ ❷에서 구한 해를 두 일차방정식 중 간단한 일차방정식에 대입하여 다른 미지수의 값을 구한다.

5 여러 가지 연립방정식의 풀이

(1) **괄호가 있는 연립방정식:** 분배법칙을 이용하여 괄호를 풀고 동류항끼리 정리한 후 연립방정식을 푼다.

(2) **계수가 소수인 연립방정식:** 양변에 10, 100, 1000, …과 같은 적당한 10의 거듭제곱 수를 곱하여 계수를 모두 정수로 바꾼 후 연립방정식을 푼다.

(3) **계수가 분수인 연립방정식:** 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 계수를 모두 정수로 바꾼 후 연립방정식을 푼다.

(4) **$A=B=C$의 꼴의 방정식:** 세 연립방정식 $\begin{cases}A=B\\A=C\end{cases}$, $\begin{cases}A=B\\B=C\end{cases}$, $\begin{cases}A=C\\B=C\end{cases}$ 중 하나의 꼴로 바꾸어 푼다. 이때 세 연립방정식의 해가 모두 같으므로 이 중 가장 간단한 것을 선택하여 푼다.

6 해가 특수한 연립방정식

(1) **해가 무수히 많은 연립방정식:** 두 일차방정식을 변형하였을 때, 두 일차방정식이 일치하면 연립방정식의 해는 무수히 많다.

(2) **해가 없는 연립방정식:** 두 일차방정식을 변형하였을 때, x, y의 계수는 각각 같으나 상수항이 다르면 연립방정식의 해는 없다.

02 연립방정식의 활용

1 연립방정식의 활용 (1)

(1) **연립방정식의 활용 문제 풀이 순서**

❶ 미지수 정하기: 문제의 뜻을 이해하고 구하려고 하는 것을 미지수 x, y로 놓는다.

❷ 연립방정식 세우기: 주어진 조건을 이용하여 수량 사이의 관계를 찾아 x, y에 대한 연립방정식을 세운다.

❸ 연립방정식 풀기: 연립방정식을 푼다.

❹ 확인하기: 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

(2) **자릿수에 대한 문제:** 십의 자리의 숫자가 x, 일의 자리의 숫자가 y인 자연수는 $10x+y$이다.

(3) **나이에 대한 문제:** 현재 x살인 사람의 $\begin{cases}a\text{년 전의 나이} \Rightarrow (x-a)\text{살}\\b\text{년 후의 나이} \Rightarrow (x+b)\text{살}\end{cases}$

(4) **가격에 대한 문제**

• x원에 a %의 이익을 붙인 정가 ⇨ (정가)=(원가)+(이익)$=\left(1+\dfrac{a}{100}\right)x$(원)

• x원인 물건을 b % 할인한 판매 가격

⇨ (판매 가격)=(정가)−(할인 금액)$=\left(1-\dfrac{b}{100}\right)x$(원)

(5) **증가, 감소에 대한 문제**

• x가 a % 증가하였을 때 ⇨ 증가량은 $\dfrac{a}{100}x$, 증가한 후 전체의 양은 $\left(1+\dfrac{a}{100}\right)x$

• x가 b % 감소하였을 때 ⇨ 감소량은 $\dfrac{b}{100}x$, 감소한 후 전체의 양은 $\left(1-\dfrac{b}{100}\right)x$

(6) **일에 대한 문제:** 전체 일의 양을 1로 놓고 단위 시간 동안 할 수 있는 일의 양을 구한다.

2 연립방정식의 활용 (2)

(1) **거리, 속력, 시간에 대한 문제**

(거리)=(속력)×(시간), (속력)$=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{시간})}$, (시간)$=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$

(2) **농도에 대한 문제:** (소금물의 농도)$=\dfrac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})}\times 100(\%)$,

(소금의 양)$=\dfrac{(\text{소금물의 농도})}{100}\times$(소금물의 양)

1등급 비법노트

◆ $A=B=C$에서 C가 상수이면 $\begin{cases}A=C\\B=C\end{cases}$로 푸는 것이 가장 간단하다.

◆ 연립방정식 $\begin{cases}ax+by+c=0\\a'x+b'y+c'=0\end{cases}$에서

① $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$

⇨ 해가 무수히 많다.

② $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$

⇨ 해가 없다.

③ $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}$

⇨ 해가 한 쌍이다.

◆ 물건의 개수, 사람 수, 나이 등은 자연수임에 주의한다.

◆ 십의 자리의 숫자가 x, 일의 자리의 숫자가 y인 자연수의 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수는 $10y+x$이다.

◆ ① x의 $\dfrac{n}{m}$ ⇨ $\dfrac{n}{m}x$

② x의 a % ⇨ $\dfrac{a}{100}x$

③ $a:b=m:n$, $a+b=k$이면

$a=\dfrac{m}{m+n}\times k$, $b=\dfrac{n}{m+n}\times k$

◆ 거리, 속력, 시간에 대한 문제에서 단위가 다른 경우에는 먼저 단위를 통일시킨 후 방정식을 세운다.

◆ 두 사람이 원 모양의 트랙을 도는 경우

(1) 반대 방향으로 돌다 만날 때

⇨ (처음 만날 때까지의 이동 거리의 합) =(트랙의 길이)

(2) 같은 방향으로 돌다 만날 때

⇨ (처음 만날 때까지의 이동 거리의 차) =(트랙의 길이)

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

개념 1 미지수가 2개인 일차방정식

01
다음 중 미지수가 2개인 일차방정식인 것은?

① $7x-4y+2$
② $\frac{3}{x}+\frac{6}{y}-\frac{5}{9}=0$
③ $2x+5y=2(x+5)$
✓④ $4x(x-1)=4x^2-y$
⑤ $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=0.5x-0.2y+1$

① 등식이 아니므로 미지수가 2개인 일차방정식이 아니다.
② 미지수가 분모에 있으므로 미지수가 2개인 일차방정식이 아니다.
③ $2x+5y=2(x+5)$에서 $2x+5y=2x+10$ $\quad\therefore 5y-10=0$
즉, 미지수가 1개인 일차방정식이다.
④ $4x(x-1)=4x^2-y$에서 $4x^2-4x=4x^2-y$ $\quad\therefore -4x+y=0$
즉, 미지수가 2개인 일차방정식이다.
⑤ $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=0.5x-0.2y+1$에서 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}y+1$ $\quad\therefore \frac{8}{15}y-1=0$
즉, 미지수가 1개인 일차방정식이다.

02
순서쌍 $(4, -3)$이 x, y에 대한 일차방정식 $-ax+by=-72$의 해일 때, 음이 아닌 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ✓⑤ 7

$x=4$, $y=-3$을 $-ax+by=-72$에 대입하면
$-4a-3b=-72$ $\quad\therefore 4a+3b=72$
a, b가 음이 아닌 정수일 때, 일차방정식 $4a+3b=72$를 만족시키는 a, b의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

a	18	15	12	9	6	3	0
b	0	4	8	12	16	20	24

따라서 음이 아닌 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(18, 0)$, $(15, 4)$, $(12, 8)$, $(9, 12)$, $(6, 16)$, $(3, 20)$, $(0, 24)$의 7개이다.

03 출제 주의
두 순서쌍 $(a+1, a-1)$, $(2b, 3)$이 모두 일차방정식 $2x-5y=15-7a$의 해일 때, $a+b$의 값을 구하시오. 6
(단, a, b는 상수이다.)

$x=a+1$, $y=a-1$을 $2x-5y=15-7a$에 대입하면
$2(a+1)-5(a-1)=15-7a$, $-3a+7=15-7a$
$4a=8$ $\quad\therefore a=2$
$a=2$를 $2x-5y=15-7a$에 대입하면
$2x-5y=15-14$, $2x-5y=1$
$x=2b$, $y=3$을 $2x-5y=1$에 대입하면
$4b-15=1$, $4b=16$ $\quad\therefore b=4$
$\therefore a+b=2+4=6$

개념 2 미지수가 2개인 연립일차방정식

04
오른쪽 표는 달걀과 닭가슴살의 100 g당 열량과 단백질의 양을 나타낸 것이다. 달걀과 닭가슴살을 섭취하여 열량 470 kcal와 단백질 81 g을 얻으려고 할 때, 섭취해야 하는 달걀의 양을 x g, 닭가슴살의 양을 y g이라고 하자. x, y에 대한 연립방정식을 세우면?

	열량 (kcal)	단백질 (g)
달걀	140	12
닭가슴살	110	23

① $\begin{cases}14x+11y=470\\12x+23y=81\end{cases}$
② $\begin{cases}14x+12y=470\\11x+23y=81\end{cases}$
③ $\begin{cases}1.4x+1.1y=47\\0.12x+0.23y=8.1\end{cases}$
✓④ $\begin{cases}1.4x+1.1y=470\\0.12x+0.23y=81\end{cases}$
⑤ $\begin{cases}1.4x+0.12y=470\\1.1x+0.23y=81\end{cases}$

달걀과 닭가슴살의 1 g당 열량과 단백질의 양은 오른쪽 표와 같다.

	열량 (kcal)	단백질 (g)
달걀	1.4	0.12
닭가슴살	1.1	0.23

이때 달걀을 x g, 닭가슴살을 y g 섭취하여 열량 470 kcal와 단백질 81 g을 얻어야 하므로 구하는 연립방정식은 $\begin{cases}1.4x+1.1y=470\\0.12x+0.23y=81\end{cases}$

05
연립방정식 $\begin{cases}3x-2y=a\\5x-by=-5\end{cases}$를 만족시키는 x의 값은 18과 28의 최대공약수이고 y의 값은 40과 75의 최대공약수일 때, ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) -12

$18=2\times3^2$과 $28=2^2\times7$의 최대공약수는 2이므로 $x=2$
$40=2^3\times5$와 $75=3\times5^2$의 최대공약수는 5이므로 $y=5$
$x=2$, $y=5$를 $3x-2y=a$에 대입하면 $6-10=a$ $\quad\therefore a=-4$
$x=2$, $y=5$를 $5x-by=-5$에 대입하면
$10-5b=-5$, $-5b=-15$ $\quad\therefore b=3$
$\therefore ab=-4\times3=-12$

06
연립방정식 $\begin{cases}5x+2y=-1\\6x-4y=-3a\end{cases}$에서 x와 y를 서로 바꾸어 풀었더니 해가 $x=-3$, $y=-b$이었다. 이때 $b-a$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) 5

연립방정식 $\begin{cases}2x+5y=-1\\-4x+6y=-3a\end{cases}$의 해가 $x=-3$, $y=-b$이다.
$x=-3$, $y=-b$를 $2x+5y=-1$에 대입하면
$-6-5b=-1$, $-5b=5$ $\quad\therefore b=-1$
$x=-3$, $y=1$을 $-4x+6y=-3a$에 대입하면
$12+6=-3a$, $3a=-18$ $\quad\therefore a=-6$
$\therefore b-a=-1-(-6)=5$

개념 3 연립방정식의 풀이 - 대입법

07

연립방정식 $\begin{cases} 5x-y=7 \\ y-8=2x \end{cases}$의 해가 일차방정식 $4ax-y-2=0$을 만족시킬 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
✓④ 1 ⑤ 2

$\begin{cases} 5x-y=7 & \cdots\cdots ㉠ \\ y=2x+8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉡을 ㉠에 대입하면
$5x-(2x+8)=7$, $5x-2x-8=7$
$3x=15$ $\quad\therefore x=5$
$x=5$를 ㉡에 대입하면 $y=10+8=18$
$x=5$, $y=18$을 $4ax-y-2=0$에 대입하면
$20a-18-2=0$, $20a=20$ $\quad\therefore a=1$

08 출제 주의

연립방정식 $\begin{cases} ax+4y=12 \\ y=3x-5 \end{cases}$의 해가 일차방정식 $4x-y=9$를 만족시킬 때, 상수 a의 값은?

① -8 ✓② -4 ③ -2
④ 6 ⑤ 10

주어진 연립방정식의 해는 연립방정식
$\begin{cases} y=3x-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x-y=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.
㉠을 ㉡에 대입하면
$4x-(3x-5)=9$, $4x-3x+5=9$ $\quad\therefore x=4$
$x=4$를 ㉠에 대입하면 $y=12-5=7$
$x=4$, $y=7$을 $ax+4y=12$에 대입하면
$4a+28=12$, $4a=-16$ $\quad\therefore a=-4$

09 서술형

연립방정식 $\begin{cases} 5x-4y=8 \\ ax-\frac{2}{3}by=-4 \end{cases}$를 만족시키는 x, y의 값의 비가 2 : 3일 때, $a-b$의 값을 구하시오. $\frac{1}{2}$
(단, a, b는 상수이다.)

x, y의 값의 비가 2 : 3이므로
$x:y=2:3$, $2y=3x$ $\quad\therefore y=\frac{3}{2}x$ ······ 20 %
$y=\frac{3}{2}x$를 $5x-4y=8$에 대입하면
$5x-4\times\frac{3}{2}x=8$, $5x-6x=8$ $\quad\therefore x=-8$
$x=-8$을 $y=\frac{3}{2}x$에 대입하면 $y=\frac{3}{2}\times(-8)=-12$ ······ 50 %
$x=-8$, $y=-12$를 $ax-\frac{2}{3}by=-4$에 대입하면
$-8a+8b=-4$ $\quad\therefore a-b=\frac{1}{2}$ ······ 30 %

개념 4 연립방정식의 풀이 - 가감법

10

세 일차방정식 $ax-6y=3$, $2x+9y=8$, $6x-3y=14$의 해가 서로 같을 때, 상수 a의 값을 구하시오. 2

세 일차방정식의 공통인 해는 연립방정식
$\begin{cases} 2x+9y=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 6x-3y=14 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.
㉠$\times3-$㉡을 하면 $30y=10$ $\quad\therefore y=\frac{1}{3}$
$y=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면
$2x+3=8$, $2x=5$ $\quad\therefore x=\frac{5}{2}$
$x=\frac{5}{2}$, $y=\frac{1}{3}$을 $ax-6y=3$에 대입하면
$\frac{5}{2}a-2=3$, $\frac{5}{2}a=5$ $\quad\therefore a=2$

11

연립방정식 $\begin{cases} ax+by=1 \\ bx-ay=13 \end{cases}$의 해가 $x=1$, $y=-3$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -5 ② -3 ✓③ 5
④ 7 ⑤ 9

$x=1$, $y=-3$을 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=1 \\ bx-ay=13 \end{cases}$에 대입하면
$\begin{cases} a-3b=1 \\ b+3a=13 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} a-3b=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3a+b=13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠$\times3-$㉡을 하면 $-10b=-10$ $\quad\therefore b=1$
$b=1$을 ㉠에 대입하면 $a-3=1$ $\quad\therefore a=4$
$\therefore a+b=4+1=5$

12

연립방정식 $\begin{cases} 2x-y=a \\ 4x-3y=6 \end{cases}$에서 x, y의 값의 합이 5일 때, 상수 a의 값을 구하시오. 4

x, y의 값의 합이 5이므로 $x+y=5$
따라서 주어진 연립방정식의 해는 연립방정식
$\begin{cases} 4x-3y=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.
㉠$+$㉡$\times3$을 하면 $7x=21$ $\quad\therefore x=3$
$x=3$을 ㉡에 대입하면 $3+y=5$ $\quad\therefore y=2$
$x=3$, $y=2$를 $2x-y=a$에 대입하면 $6-2=a$ $\quad\therefore a=4$

13

두 연립방정식 $\begin{cases}3x-4y=10\\ax+by=5\end{cases}$, $\begin{cases}ax-2by=-4\\2x+5y=-1\end{cases}$의 해가 서로 같을 때, $a-2b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -7　② -5　③ -3
④ 5　✓⑤ 7

두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식
$\begin{cases}3x-4y=10 & \cdots\cdots ㉠\\2x+5y=-1 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$의 해와 같다.
㉠$\times 2-$㉡$\times 3$을 하면 $-23y=23$　$\therefore y=-1$
$y=-1$을 ㉠에 대입하면
$3x+4=10$, $3x=6$　$\therefore x=2$
$x=2$, $y=-1$을 $ax+by=5$에 대입하면
$2a-b=5$ ⋯⋯ ㉢
$x=2$, $y=-1$을 $ax-2by=-4$에 대입하면
$2a+2b=-4$　$\therefore a+b=-2$ ⋯⋯ ㉣
㉢+㉣을 하면 $3a=3$　$\therefore a=1$
$a=1$을 ㉢에 대입하면 $2-b=5$　$\therefore b=-3$
$\therefore a-2b=1-2\times(-3)=7$

14

연립방정식 $\begin{cases}3x+y=-3\\ax-y=5\end{cases}$의 해는 $x=p$, $y=q$이고 연립방정식 $\begin{cases}x+by=-9\\2x-5y=16\end{cases}$의 해는 $x=q$, $y=p$일 때, $a+b+p+q$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) 3

$x=p$, $y=q$는 일차방정식 $3x+y=-3$의 해이고 $x=q$, $y=p$는 일차방정식 $2x-5y=16$의 해이므로
$\begin{cases}3p+q=-3\\2q-5p=16\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}3p+q=-3 & \cdots\cdots ㉠\\5p-2q=-16 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$
㉠$\times 2+$㉡을 하면 $11p=-22$　$\therefore p=-2$
$p=-2$를 ㉠에 대입하면 $-6+q=-3$　$\therefore q=3$
$x=-2$, $y=3$을 $ax-y=5$에 대입하면
$-2a-3=5$, $-2a=8$　$\therefore a=-4$
$x=3$, $y=-2$를 $x+by=-9$에 대입하면
$3-2b=-9$, $-2b=-12$　$\therefore b=6$
$\therefore a+b+p+q=-4+6+(-2)+3=3$

15

연립방정식 $\begin{cases}ax+2y+1=3x-5\\6x-by+11=7-2x\end{cases}$를 푸는데 준혁이는 a를 잘못 보고 풀어서 $x=-2$, $y=3$을 얻었고, 윤서는 b를 잘못 보고 풀어서 $x=4$, $y=-1$을 얻었다. 이때 처음 연립방정식의 해를 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

$x=\frac{4}{5}$, $y=-\frac{13}{5}$

준혁이는 a를 잘못 보고 풀었으므로 $x=-2$, $y=3$은 일차방정식 $6x-by+11=7-2x$의 해이다.
즉, $-12-3b+11=7+4$에서 $-3b=12$　$\therefore b=-4$
윤서는 b를 잘못 보고 풀었으므로 $x=4$, $y=-1$은 일차방정식 $ax+2y+1=3x-5$의 해이다.
즉, $4a-2+1=12-5$에서 $4a=8$　$\therefore a=2$
따라서 처음 연립방정식은 $\begin{cases}2x+2y+1=3x-5\\6x+4y+11=7-2x\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}x-2y=6 & \cdots\cdots ㉠\\2x+y=-1 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$
㉠$\times 2-$㉡을 하면 $-5y=13$　$\therefore y=-\frac{13}{5}$
$y=-\frac{13}{5}$을 ㉠에 대입하면 $x+\frac{26}{5}=6$　$\therefore x=\frac{4}{5}$

개념 5 여러 가지 연립방정식의 풀이

16

연립방정식 $\begin{cases}2x-y=4(x-y+1) & \cdots\cdots ㉠\\3(x-2y)=y-5 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$의 해가 $x=a$, $y=b$일 때, $a+b$의 값은?

✓① -3　② -1　③ 1
④ 3　⑤ 5

㉠$\times 3-$㉡$\times 2$를 하면 $5y=-2$　$\therefore y=-\frac{2}{5}$
$y=-\frac{2}{5}$를 ㉠에 대입하면
$2x+\frac{6}{5}=-4$, $2x=-\frac{26}{5}$　$\therefore x=-\frac{13}{5}$
따라서 $a=-\frac{13}{5}$, $b=-\frac{2}{5}$이므로
$a+b=-\frac{13}{5}+\left(-\frac{2}{5}\right)=-3$

17 서술형

연립방정식 $\begin{cases}\frac{x}{5}-\frac{y}{2}=\frac{1}{10} & \cdots\cdots ㉠\\0.5x+0.8y=-1.8 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$의 해가 일차방정식 $\frac{x}{4}+\frac{y}{a}=1$을 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하시오. $-\frac{2}{3}$

㉠$\times 10$을 하면 $2x-5y=1$ ⋯⋯ ㉢
㉡$\times 10$을 하면 $5x+8y=-18$ ⋯⋯ ㉣
㉢$\times 5-$㉣$\times 2$를 하면 $-41y=41$　$\therefore y=-1$
$y=-1$을 ㉢에 대입하면 $2x+5=1$, $2x=-4$　$\therefore x=-2$ ⋯⋯ 70 %
$x=-2$, $y=-1$을 $\frac{x}{4}+\frac{y}{a}=1$에 대입하면
$-\frac{1}{2}-\frac{1}{a}=1$, $-\frac{1}{a}=\frac{3}{2}$
$\therefore a=-\frac{2}{3}$ ⋯⋯ 30 %

18 출제 주의

방정식 $-1.1x+0.4y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}y=0.5$를 풀면?

① $x=-18$, $y=-26$　② $x=-9$, $y=16$
③ $x=9$, $y=16$　✓④ $x=9$, $y=26$
⑤ $x=18$, $y=36$

주어진 방정식의 해는 연립방정식
$\begin{cases}-1.1x+0.4y=0.5 & \cdots\cdots ㉠\\-\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}y=0.5 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$의 해와 같다.
㉠$\times 10$을 하면
$-11x+4y=5$ ⋯⋯ ㉢
㉡$\times 12$를 하면
$-8x+3y=6$ ⋯⋯ ㉣
㉢$\times 3-$㉣$\times 4$를 하면 $-x=-9$　$\therefore x=9$
$x=9$를 ㉢에 대입하면 $-99+4y=5$, $4y=104$
$\therefore y=26$

19

연립방정식 $\begin{cases} 0.5x+0.1y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+6):(y-2)=3:1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해가 $x=a$, $y=b$일 때, $a-b$의 값은?

① -8　✓② -2　③ 2
④ 8　⑤ 12

㉠×10을 하면 $5x+y=20$ ⋯⋯ ㉢
㉡에서 $x+6=3(y-2)$
∴ $x-3y=-12$ ⋯⋯ ㉣
㉢×3+㉣을 하면 $16x=48$　∴ $x=3$
$x=3$을 ㉢에 대입하면 $15+y=20$　∴ $y=5$
따라서 $a=3$, $b=5$이므로
$a-b=3-5=-2$

20

방정식 $\frac{2x-y}{3}=\frac{x+3y+1}{4}=2y-x+2$를 만족시키는 순서쌍을 (a, b)라고 할 때, $a-b$의 값을 구하시오. $\frac{7}{5}$
(단, a, b는 상수이다.)

주어진 방정식의 해는 연립방정식
$\begin{cases} \frac{2x-y}{3}=2y-x+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{x+3y+1}{4}=2y-x+2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
의 해와 같다.
㉠×3을 하면
$2x-y=6y-3x+6$　∴ $5x-7y=6$ ⋯⋯ ㉢
㉡×4를 하면
$x+3y+1=8y-4x+8$　∴ $5x-5y=7$ ⋯⋯ ㉣
㉢-㉣을 하면 $-2y=-1$　∴ $y=\frac{1}{2}$
$y=\frac{1}{2}$을 ㉣에 대입하면 $5x-\frac{5}{2}=7$, $5x=\frac{19}{2}$　∴ $x=\frac{19}{10}$
따라서 $a=\frac{19}{10}$, $b=\frac{1}{2}$이므로 $a-b=\frac{19}{10}-\frac{1}{2}=\frac{7}{5}$

개념 6 해가 특수한 연립방정식

21

연립방정식 $\begin{cases} x-ay=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x-12y=-3b-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해가 없을 때, 상수 a, b의 조건은?

① $a=-3$, $b=-7$　② $a=-3$, $b\neq-7$
③ $a=-3$, $b\neq7$　④ $a=3$, $b=-7$
✓⑤ $a=3$, $b\neq-7$

㉠×4를 하면 $4x-4ay=20$ ⋯⋯ ㉢
따라서 주어진 연립방정식의 해가 없으려면 ㉡과 ㉢은 x의 계수는 같고 상수항은 달라야 한다.
따라서 $-4a=-12$, $20\neq-3b-1$이므로
$a=3$, $b\neq-7$

22 출제 주의

다음 연립방정식 중 해가 무수히 많은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\begin{cases} 6x-8y=1 \\ 3x-4y=-1 \end{cases}$　② $\begin{cases} 4x-2y=-6 \\ -6x-3y=9 \end{cases}$
✓③ $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=-\frac{1}{6} \\ -6x+4y=2 \end{cases}$　④ $\begin{cases} -0.5x+0.2y=0.3 \\ \frac{1}{6}x-\frac{1}{15}y=\frac{1}{10} \end{cases}$
✓⑤ $\begin{cases} 3(x-2y)=2(x-y)-5 \\ 5x-4(1-3y)=8x+11 \end{cases}$

① $\begin{cases} 6x-8y=1 \\ 6x-8y=-2 \end{cases}$이므로 해가 없다.
② $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ 2x+y=-3 \end{cases}$이므로 해가 1개이다.
③ $\begin{cases} 3x-2y=-1 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$이므로 해가 무수히 많다.
④ $\begin{cases} 5x-2y=-3 \\ 5x-2y=3 \end{cases}$이므로 해가 없다.
⑤ $\begin{cases} x-4y=-5 \\ 3x-12y=-15 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x-4y=-5 \\ x-4y=-5 \end{cases}$이므로 해가 무수히 많다.

23

연립방정식 $\begin{cases} 5x-2y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ -7x+4y=ax & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가질 때, 상수 a의 값은?

① -7　② -2　✓③ 3
④ 8　⑤ 13

㉠×(-2)를 하면 $-10x+4y=0$ ⋯⋯ ㉢
㉡에서 $(-7-a)x+4y=0$ ⋯⋯ ㉣
이때 주어진 연립방정식이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖는다는 의미는 해가 무수히 많다는 의미이므로 ㉢과 ㉣이 서로 일치해야 한다.
따라서 $-7-a=-10$이어야 하므로 $a=3$

24

연립방정식 $\begin{cases} 4x+6y=5 \\ (a+1)x-9y=5 \end{cases}$는 해가 없고, 연립방정식 $\begin{cases} 12x-by=18 \\ 4cx+3y=-6 \end{cases}$은 해가 무수히 많을 때, $a-bc$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) 2

연립방정식 $\begin{cases} 4x+6y=5 \\ (a+1)x-9y=5 \end{cases}$에서 $\begin{cases} -6x-9y=-\frac{15}{2} \\ (a+1)x-9y=5 \end{cases}$
이 연립방정식의 해가 없으므로
$-6=a+1$　∴ $a=-7$
연립방정식 $\begin{cases} 12x-by=18 \\ 4cx+3y=-6 \end{cases}$에서 $\begin{cases} 12x-by=18 \\ -12cx-9y=18 \end{cases}$
이 연립방정식의 해가 무수히 많으므로
$12=-12c$, $-b=-9$　∴ $b=9$, $c=-1$
∴ $a-bc=-7-9\times(-1)=2$

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

01

일차방정식 $3x-2y=75$를 만족시키는 두 자연수 x, y에 대하여 $\frac{x}{y}$가 기약분수일 때, $x+y$의 값 중 가장 작은 값을 구하시오. 35

일차방정식 $3x-2y=75$를 만족시키는 두 자연수 x, y의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	27	29	31	33	35	37	39	41	43	$\cdots$
y	3	6	9	12	15	18	21	24	27	$\cdots$

이때 $\frac{x}{y}$가 기약분수이므로 x, y는 서로소이다.
따라서 x, y가 서로소인 순서쌍 (x, y)는
$(29, 6)$, $(31, 9)$, $(37, 18)$, $(41, 24)$, $(43, 27)$, …
이므로 $x+y$의 값 중 가장 작은 값은
$29+6=35$

02

각 면에 1에서 6까지의 수가 각각 적힌 정육면체 모양의 주사위를 던져서 나온 눈의 수를 x, 각 면에 1에서 12까지의 수가 각각 적힌 정십이면체 모양의 주사위를 던져서 나온 눈의 수를 y라고 하자. 두 주사위를 동시에 던질 때, 다음 중 x, y에 대한 일차방정식의 해의 개수가 나머지 넷과 다른 하나는?

① $x+y=3$　　② $x+2y=5$　　③ $x-y=4$
④ $2x-y=9$　　✓⑤ $3x-4y=5$

두 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수의 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1)$, $(1, 2)$, …, $(6, 11)$, $(6, 12)$이다.
이 중 각 방정식을 만족시키는 순서쌍 (x, y)를 구하면
① 방정식 $x+y=3$의 해는 $(1, 2)$, $(2, 1)$의 2개이다.
② 방정식 $x+2y=5$의 해는 $(1, 2)$, $(3, 1)$의 2개이다.
③ 방정식 $x-y=4$의 해는 $(5, 1)$, $(6, 2)$의 2개이다.
④ 방정식 $2x-y=9$의 해는 $(5, 1)$, $(6, 3)$의 2개이다.
⑤ 방정식 $3x-4y=5$의 해는 $(3, 1)$의 1개이다.

03

x, y에 대한 일차방정식 $(2a+b)x+(3a-4b)y=0$의 해가 $x=2$, $y=-1$일 때, $3by+5a=3b-ax$를 만족시키는 x, y에 대하여 $2x-y$의 값은? (단, $ab\neq0$)

✓① -11　　② -7　　③ -3
④ 1　　⑤ 5

$x=2$, $y=-1$을 $(2a+b)x+(3a-4b)y=0$에 대입하면
$2(2a+b)-(3a-4b)=0$, $4a+2b-3a+4b=0$
$\therefore a=-6b$
$a=-6b$를 $3by+5a=3b-ax$에 대입하면
$3by-30b=3b+6bx$
$6bx-3by=-33b$
이때 $ab\neq0$, 즉 $a\neq0$, $b\neq0$이므로 양변을 $3b$로 나누면
$2x-y=-11$

04 출제 주의

x, y의 순서쌍 (a, b)가 일차방정식 $3x+4y=15$의 해일 때, $(a+5, b-2)$는 일차방정식 $3x+4y=k$의 해이다. 이때 상수 k의 값을 구하시오. 22

$x=a$, $y=b$를 $3x+4y=15$에 대입하면
$3a+4b=15$　…… ㉠
$x=a+5$, $y=b-2$를 $3x+4y=k$에 대입하면
$3(a+5)+4(b-2)=k$, $3a+4b+7=k$
㉠에서 $k=15+7=22$

05 서술형

x, y의 순서쌍 $(3, -1)$이 한 해인 일차방정식 $ax-3y-18=0$이 있다. 이 일차방정식의 해 중 x, y의 값의 비가 $3:4$인 해를 $x=b$, $y=c$라고 할 때, $a-b+c$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) 11

$x=3$, $y=-1$을 $ax-3y-18=0$에 대입하면
$3a+3-18=0$, $3a=15$　$\therefore a=5$ ······ 40 %
$a=5$를 $ax-3y-18=0$에 대입하면
$5x-3y-18=0$　…… ㉠
이때 x, y의 값의 비가 $3:4$인 해를 $x=3t$, $y=4t$ ($t\neq0$인 상수)라 하고 이를 ㉠에 대입하면
$15t-12t-18=0$, $3t=18$　$\therefore t=6$
따라서 $x=18$, $y=24$이므로 $b=18$, $c=24$ ······ 40 %
$\therefore a-b+c=5-18+24=11$ ······ 20 %

06 출제 주의

다음은 선미가 문구점에서 물건을 사고 받은 영수증인데 일부 글자가 찢어져 보이지 않게 되었다. 선미가 산 볼펜의 개수를 구하시오. 3

영 수 증
주문번호:02-202603　　2026.○○.○○ 18:30

상품	단가(원)	수량(개)	가격(원)
노트	1200	6	7200
샤프	3500		
볼펜	1300		
합계		12	21

선미가 산 샤프의 개수를 x, 볼펜의 개수를 y라고 하면
$6+x+y=12$　$\therefore x+y=6$　…… ㉠
이를 만족시키는 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는
$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$이다.
한편, 구매한 물건의 총 가격은 21000원 이상 22000원 미만이므로
$21000\leq1200\times6+3500x+1300y<22000$
$21000\leq7200+3500x+1300y<22000$
$13800\leq3500x+1300y<14800$
$\therefore 138\leq35x+13y<148$　…… ㉡
㉠을 만족시키는 자연수 x, y중에서 ㉡을 만족시키는 것을 구하면 $x=3$, $y=3$이다.
따라서 선미가 산 볼펜의 개수는 3이다.

07

일차방정식 $x+2y=13$을 만족시키는 자연수 x, y에 대하여 xy의 값이 가장 클 때의 해를 $x=p$, $y=q$라고 하자. $x=p$, $y=q$가 일차방정식 $3x+4y=k$를 만족시킨다고 할 때, $p+q+k$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① 41　　② 42　　✓③ 43
④ 44　　⑤ 45

일차방정식 $x+2y=13$을 만족시키는 두 자연수 x, y의 값과 그때의 xy의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	3	5	7	9	11
y	6	5	4	3	2	1
xy	6	15	20	21	18	11

따라서 $x=7$, $y=3$일 때 xy의 값은 21로 가장 크므로
$p=7$, $q=3$
$x=7$, $y=3$을 $3x+4y=k$에 대입하면
$21+12=k$　　$\therefore k=33$
$\therefore p+q+k=7+3+33=43$

08 서술형

x, y에 대한 일차방정식 $ax+by=12$의 해가 $x=1$, $y=3$일 때, 일차방정식 $2bx-ay=12(2b-y)$를 만족시키는 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하시오. 3
(단, a, b는 상수이다.)

$x=1$, $y=3$을 $ax+by=12$에 대입하면
$a+3b=12$　　$\therefore a=12-3b$　　⋯⋯ ㉠ ⋯⋯⋯⋯ 30 %
㉠을 $2bx-ay=12(2b-y)$에 대입하면
$2bx-(12-3b)y=12(2b-y)$, $2bx-12y+3by=24b-12y$
$2bx+3by=24b$
이때 $b\neq0$이므로 양변을 b로 나누면
$2x+3y=24$　　⋯⋯ ㉡ ⋯⋯⋯⋯ 40 %
㉡을 만족시키는 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는
$(3, 6)$, $(6, 4)$, $(9, 2)$의 3개이다. ⋯⋯⋯⋯ 30 %

09

두 수 a, b에 대하여 $a◎b=2a-3b+1$이라고 하자. $(2x-3)◎(y-4)=3$을 만족시키는 두 자연수 x, y가 서로소일 때, 가장 작은 $x+y$의 값을 구하시오. 13

$(2x-3)◎(y-4)=3$에서
$2(2x-3)-3(y-4)+1=3$, $4x-3y+7=3$
$\therefore 4x-3y=-4$
$4x-3y=-4$를 만족시키는 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는
$(2, 4)$, $(5, 8)$, $(8, 12)$, $(11, 16)$, $(14, 20)$, $(17, 24)$, …
이때 두 자연수 x, y가 서로소가 되면서 $x+y$의 값이 가장 작은 경우는 $x=5$, $y=8$일 때 $x+y=5+8=13$이다.

10

오른쪽은 세로셈을 이용하여 세 자리 자연수와 두 자리 자연수의 뺄셈을 한 것이다. 한 자리 자연수 x, y에 대하여 xy의 값을 구하시오. 32

$$\begin{array}{rccc} & x & y & x \\ -) & & x & y \\ \hline & 7 & 6 & y \end{array}$$

(ⅰ) $x\geq y$일 때
일의 자리의 계산에서 받아내림 없이 계산하면 $x-y=y$　　$\therefore x=2y$　　⋯⋯ ㉠
십의 자리의 계산에서 $x=y$이면 $y-x=0$이므로 $y-x=6$이 성립하지 않는다.
$\therefore x>y$
따라서 십의 자리의 계산은 백의 자리에서 10을 받아내림해야 하므로
$10+y-x=6$　　$\therefore x-y=4$　　⋯⋯ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $2y-y=4$　　$\therefore x=8$, $y=4$
(ⅱ) $x<y$일 때
일의 자리의 계산은 십의 자리에서 10을 받아내림해야 하므로
$10+x-y=y$　　$\therefore 2y-x=10$　　⋯⋯ ㉢
십의 자리의 계산에서 $y-1\geq x$이므로 받아내림 없이 계산하면
$y-1-x=6$　　$\therefore y-x=7$　　⋯⋯ ㉣
㉢, ㉣을 연립하면 $x=-4$, $y=3$
이때 x, y가 한 자리 자연수이어야 하므로 조건에 맞지 않는다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $x=8$, $y=4$　　$\therefore xy=8\times4=32$

11

연립방정식 $\begin{cases} 0.\dot{3}x+0.\dot{2}y=0.\dot{6} \\ 0.0\dot{4}x-0.0\dot{3}y=0.2\dot{7} \end{cases}$의 해가 $x=a$, $y=b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. 1

$\begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{2}{9}y=\frac{2}{3} & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{2}{45}x-\frac{1}{30}y=\frac{5}{18} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠×9를 하면 $3x+2y=6$　　⋯⋯ ㉢
㉡×90을 하면 $4x-3y=25$　　⋯⋯ ㉣
㉢×3+㉣×2를 하면 $17x=68$　　$\therefore x=4$
$x=4$를 ㉢에 대입하면 $12+2y=6$, $2y=-6$　　$\therefore y=-3$
따라서 $a=4$, $b=-3$이므로 $a+b=4+(-3)=1$

12 출제 주의

연립방정식

$$\begin{cases} \dfrac{(3^x)^3\times3^y}{3^{3y}}=729 \\ \dfrac{(2^x\times2^y)^2}{8^y}=128 \end{cases}$$

을 만족시키는 두 자연수 x, y에 대하여 xy의 값은?

① 30　　② 48　　③ 56
④ 64　　✓⑤ 72

$\frac{(3^x)^3\times3^y}{3^{3y}}=729$에서 $\frac{3^{3x+y}}{3^{3y}}=3^6$
$3x+y-3y=6$, 즉 $3x-2y=6$　　⋯⋯ ㉠
$\frac{(2^x\times2^y)^2}{8^y}=128$에서 $\frac{2^{2(x+y)}}{2^{3y}}=2^7$
$2(x+y)-3y=7$, 즉 $2x-y=7$　　⋯⋯ ㉡
㉠−㉡×2를 하면 $-x=-8$　　$\therefore x=8$
$x=8$을 ㉡에 대입하면 $16-y=7$　　$\therefore y=9$
$\therefore xy=8\times9=72$

13

두 수 a, b에 대하여

$$a◎b=\begin{cases} a-2b\ (a>b) \\ 2a-b\ (a\le b) \end{cases},\ a\diamond b=a+b+|a-b|$$

라고 할 때, 두 수 x, y에 대하여 연립방정식

$\begin{cases} x◎y=-x+y+5 \\ x\diamond y=x-y+10 \end{cases}$의 해를 구하시오. $x=5$, $y=5$ 또는 $x=7$, $y=3$

(i) $x>y$일 때

$x◎y=x-2y$, $x\diamond y=x+y+x-y=2x$이므로 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} x-2y=-x+y+5 \\ 2x=x-y+10 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} 2x-3y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡$\times2$를 하면 $-5y=-15$ $\therefore y=3$

$y=3$을 ㉡에 대입하면 $x+3=10$ $\therefore x=7$

(ii) $x\le y$일 때

$x◎y=2x-y$, $x\diamond y=x+y-(x-y)=2y$이므로 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} 2x-y=-x+y+5 \\ 2y=x-y+10 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} 3x-2y=5 & \cdots\cdots ㉢ \\ x-3y=-10 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢$-$㉣$\times3$을 하면 $7y=35$ $\therefore y=5$

$y=5$를 ㉣에 대입하면 $x-15=-10$ $\therefore x=5$

(i), (ii)에 의하여 구하는 연립방정식의 해는 $x=5$, $y=5$ 또는 $x=7$, $y=3$이다.

14 서술형

x, y의 순서쌍 $(3,\ 2)$는 일차방정식 $ax+by=k$의 해이고, x, y의 순서쌍 $(-2,\ 4)$는 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=k \\ 3ax+2by=28 \end{cases}$의 해일 때, $a+b+k$의 값을 구하시오. 23

(단, a, b, k는 상수이다.)

x, y의 순서쌍 $(3,\ 2)$, $(-2,\ 4)$가 모두 일차방정식 $ax+by=k$의 해이므로

$\begin{cases} 3a+2b=k & \cdots\cdots ㉠ \\ -2a+4b=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ ························· 30 %

㉠$\times2-$㉡을 하면 $8a=k$ $\therefore a=\frac{k}{8}$

$a=\frac{k}{8}$를 ㉠에 대입하면 $\frac{3}{8}k+2b=k$, $2b=\frac{5}{8}k$ $\therefore b=\frac{5}{16}k$ ·············· 30 %

x, y의 순서쌍 $(-2,\ 4)$가 일차방정식 $3ax+2by=28$의 해이므로

$-6a+8b=28$ $\therefore 3a-4b=-14$ $\cdots\cdots ㉢$

$a=\frac{k}{8}$, $b=\frac{5}{16}k$를 ㉢에 대입하면

$\frac{3}{8}k-\frac{5}{4}k=-14$, $-\frac{7}{8}k=-14$ $\therefore k=16$

따라서 $a=2$, $b=5$이므로 $a+b+k=2+5+16=23$ ························ 40 %

15 서술형

연립방정식 $\begin{cases} ax+by=-5 \\ x-3y=-3 \end{cases}$을 만족시키는 x, y의 값을 각각 2배하면 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=-40 \\ -x+by=26 \end{cases}$의 해가 된다고 할 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. -2

$\begin{cases} ax+by=-5 \\ x-3y=-3 \end{cases}$의 해를 $x=p$, $y=q$라고 하면

$\begin{cases} ap+bq=-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ p-3q=-3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

또, 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=-40 \\ -x+by=26 \end{cases}$의 해는 $x=2p$, $y=2q$이므로 $\begin{cases} 4p+2q=-40 \\ -2p+2bq=26 \end{cases}$에서

$\begin{cases} 2p+q=-20 & \cdots\cdots ㉢ \\ -p+bq=13 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$ ························ 30 %

㉡$+$㉢$\times3$을 하면 $7p=-63$ $\therefore p=-9$

$p=-9$를 ㉢에 대입하면 $-18+q=-20$ $\therefore q=-2$ ·················· 40 %

$p=-9$, $q=-2$를 ㉣에 대입하면 $9-2b=13$, $2b=-4$ $\therefore b=-2$

$p=-9$, $q=-2$, $b=-2$를 ㉠에 대입하면 $-9a+4=-5$, $-9a=-9$ $\therefore a=1$

$\therefore ab=1\times(-2)=-2$ ························ 30 %

16 출제 주의

다음을 만족시키는 x, y에 대하여 $\frac{2x+2y}{3y-5x}$의 값을 구하시오. (단, k는 0이 아닌 상수이다.) 6

$$y=3x-2k,\ x+2y=10k$$

$\begin{cases} y=3x-2k & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2y=10k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x+2(3x-2k)=10k$, $7x-4k=10k$

$7x=14k$ $\therefore x=2k$

$x=2k$를 ㉠에 대입하면 $y=6k-2k=4k$

$\therefore \frac{2x+2y}{3y-5x}=\frac{4k+8k}{12k-10k}=\frac{12k}{2k}=6$

17

다음 두 연립방정식

$$\begin{cases} \frac{4}{x-1}+\frac{12}{y+1}=10 \\ ax-2y=8 \end{cases},\ \begin{cases} bx+ay=17 \\ \frac{2}{x-1}-\frac{6}{y+1}=-1 \end{cases}$$

의 해가 같을 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 11

주어진 두 연립방정식의 해는 연립방정식 $\begin{cases} \frac{4}{x-1}+\frac{12}{y+1}=10 \\ \frac{2}{x-1}-\frac{6}{y+1}=-1 \end{cases}$의 해와 같다.

이때 $\frac{1}{x-1}=A$, $\frac{1}{y+1}=B$라고 하면 $\begin{cases} 4A+12B=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2A-6B=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$+$㉡$\times2$를 하면 $8A=8$ $\therefore A=1$

$A=1$을 ㉠에 대입하면 $4+12B=10$, $12B=6$ $\therefore B=\frac{1}{2}$

$A=\frac{1}{x-1}=1$에서 $x-1=1$이므로 $x=2$, $B=\frac{1}{y+1}=\frac{1}{2}$에서 $y+1=2$이므로 $y=1$

$x=2$, $y=1$을 $ax-2y=8$에 대입하면 $2a-2=8$ $\therefore a=5$

$x=2$, $y=1$, $a=5$를 $bx+ay=17$에 대입하면 $2b+5=17$ $\therefore b=6$

$\therefore a+b=5+6=11$

18

연립방정식 $\begin{cases} x+y+xy=6 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2 \end{cases}$를 만족시키는 x, y에 대하여 $x\left(y-\frac{y}{x}\right)+y\left(x-\frac{x}{y}\right)$의 값은?

① -4 ② -2 ✓③ 0
④ 2 ⑤ 4

$x+y=A$, $xy=B$라고 하면 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{A}{B}$이므로 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} A+B=6 \\ \frac{A}{B}=2 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} A+B=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ A=2B & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면

$2B+B=6$, $3B=6$ $\therefore B=2$

$B=2$를 ㉡에 대입하면 $A=4$

따라서 $x+y=4$, $xy=2$이므로

$x\left(y-\frac{y}{x}\right)+y\left(x-\frac{x}{y}\right)=xy-y+xy-x=2xy-(x+y)=2\times2-4=0$

19

두 수 x, y에 대하여 $\{x,\ y\}$는 x, y 중 작지 않은 수를 나타내고, $[x,\ y]$는 x, y 중 크지 않은 수를 나타낸다고 하자. 연립방정식 $\begin{cases} 2x-y-5=\{x,\ y\} \\ 3x-y-12=[x,\ y] \end{cases}$의 해를 $x=a$, $y=b$라고 할 때, $\{a,\ b\}-[a,\ b]$의 값은?

① -1　② 1　③ 3
✓④ 5　⑤ 7

(ⅰ) $x \ge y$일 때, $\{x,\ y\}=x$, $[x,\ y]=y$이므로
$\begin{cases} 2x-y-5=x \\ 3x-y-12=y \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x-y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-2y=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠, ㉡을 연립하면 $x=2$, $y=-3$
(ⅱ) $x<y$일 때, $\{x,\ y\}=y$, $[x,\ y]=x$이므로
$\begin{cases} 2x-y-5=y \\ 3x-y-12=x \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} 2x-2y=5 & \cdots\cdots ㉢ \\ 2x-y=12 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$
㉢, ㉣을 연립하면 $x=\frac{19}{2}$, $y=7$
이때 $\frac{19}{2}>7$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $x=2$, $y=-3$이므로 $a=2$, $b=-3$
$\therefore \{a,\ b\}-[a,\ b]=\{2,\ -3\}-[2,\ -3]=2-(-3)=5$

20

x, y의 순서쌍 $(4a+3b-18,\ 3a-2b-5)$가 연립방정식 $\begin{cases} \frac{3}{5}x+\frac{1}{5}y=\frac{22}{5} \\ \frac{1}{6}x+\frac{1}{4}y=\frac{17}{12} \end{cases}$의 해일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. 25

$\begin{cases} \frac{3}{5}x+\frac{1}{5}y=\frac{22}{5} & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{1}{6}x+\frac{1}{4}y=\frac{17}{12} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠$\times 5$를 하면 $3x+y=22$　$\cdots\cdots$ ㉢
㉡$\times 12$를 하면 $2x+3y=17$　$\cdots\cdots$ ㉣
㉢$\times 3-$㉣을 하면 $7x=49$　$\therefore x=7$
$x=7$을 ㉢에 대입하면 $21+y=22$　$\therefore y=1$
주어진 연립방정식의 해를 x, y의 순서쌍으로 나타내면 $(7,\ 1)$이므로
$\begin{cases} 4a+3b-18=7 \\ 3a-2b-5=1 \end{cases}$　$\therefore \begin{cases} 4a+3b=25 & \cdots\cdots ㉤ \\ 3a-2b=6 & \cdots\cdots ㉥ \end{cases}$
㉤$\times 2+$㉥$\times 3$을 하면 $17a=68$　$\therefore a=4$
$a=4$를 ㉤에 대입하면 $16+3b=25$, $3b=9$　$\therefore b=3$
$\therefore a^2+b^2=4^2+3^2=25$

21

방정식

$$\frac{4ax+y-2}{3}=\frac{3ax+y-3}{2}=1.5x+0.5y-1.5$$

의 해가 $x=1$, $y=b$일 때, ab의 값은?
(단, a는 상수이다.)

① 1　② 2　③ 3
✓④ 4　⑤ 5

주어진 방정식의 해는 연립방정식 $\begin{cases} \frac{4ax+y-2}{3}=\frac{3ax+y-3}{2} & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{4ax+y-2}{3}=1.5x+0.5y-1.5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
의 해와 같다.
㉠$\times 6$을 하면 $8ax+2y-4=9ax+3y-9$　$\therefore ax+y=5$
㉡$\times 6$을 하면 $8ax+2y-4=9x+3y-9$　$\therefore (8a-9)x-y=-5$
즉, 연립방정식 $\begin{cases} ax+y=5 \\ (8a-9)x-y=-5 \end{cases}$의 해가 $x=1$, $y=b$이므로
$\begin{cases} a+b=5 \\ 8a-9-b=-5 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} a+b=5 & \cdots\cdots ㉢ \\ 8a-b=4 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$
㉢$+$㉣을 하면 $9a=9$　$\therefore a=1$
$a=1$을 ㉢에 대입하면 $1+b=5$　$\therefore b=4$　$\therefore ab=1\times 4=4$

22

연립방정식 $\begin{cases} 3x : (x-y+3)=3 : 4 \\ 4x-17=3y \end{cases}$의 해와 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=7 \\ bx-ay=4 \end{cases}$의 해가 같을 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① 1　② 2　✓③ 3
④ 4　⑤ 5

$3x : (x-y+3)=3 : 4$에서 $12x=3(x-y+3)$, $12x=3x-3y+9$　$\therefore 9x+3y=9$
$\therefore \begin{cases} 9x+3y=9 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x-3y=17 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠$+$㉡을 하면 $13x=26$　$\therefore x=2$
$x=2$를 ㉡에 대입하면 $8-3y=17$, $-3y=9$　$\therefore y=-3$
따라서 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=7 \\ bx-ay=4 \end{cases}$의 해도 $x=2$, $y=-3$이므로
$\begin{cases} 2a-3b=7 \\ 2b+3a=4 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} 2a-3b=7 & \cdots\cdots ㉢ \\ 3a+2b=4 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$
㉢$\times 2+$㉣$\times 3$을 하면 $13a=26$　$\therefore a=2$
$a=2$를 ㉢에 대입하면 $4-3b=7$, $-3b=3$　$\therefore b=-1$
$\therefore a-b=2-(-1)=3$

23

연립방정식 $\begin{cases} 3x-y=7 \\ 2x+ay=6 \end{cases}$의 해가 $x=p$, $y=q$일 때, 연립방정식 $\begin{cases} 5x-6y=-17 \\ 10x+by=-8 \end{cases}$의 해는 $x=q$, $y=p$이다. 이때 두 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은?

① 2　✓② 5　③ 8
④ 13　⑤ 18

$x=p$, $y=q$는 $3x-y=7$의 해이고 $x=q$, $y=p$는 $5x-6y=-17$의 해이므로
$\begin{cases} 3p-q=7 \\ 5q-6p=-17 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} 3p-q=7 & \cdots\cdots ㉠ \\ 6p-5q=17 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠$\times 2-$㉡을 하면 $3q=-3$　$\therefore q=-1$
$q=-1$을 ㉠에 대입하면 $3p+1=7$, $3p=6$　$\therefore p=2$
$x=2$, $y=-1$을 $2x+ay=6$에 대입하면 $4-a=6$　$\therefore a=-2$
$x=-1$, $y=2$를 $10x+by=-8$에 대입하면 $-10+2b=-8$, $2b=2$　$\therefore b=1$
$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+1^2=5$

24 출제 주의

연립방정식 $\begin{cases} (2k-2)x-(k-3)y=6 \\ (k+5)x+(3k+5)y=6 \end{cases}$을 만족시키는 해 중 x, y의 값의 비가 $2 : 3$인 해를 $x=a$, $y=b$라고 할 때, $a+b-k$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) 12

x, y의 값의 비가 $2 : 3$인 해를 $x=2t$, $y=3t$ ($t\neq 0$인 상수)라 하고 주어진 연립방정식에 대입하면
$\begin{cases} (2k-2)2t-(k-3)3t=6 \\ (k+5)2t+(3k+5)3t=6 \end{cases}$　$\therefore \begin{cases} kt+5t=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ 11kt+25t=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠$\times 11-$㉡을 하면 $30t=60$　$\therefore t=2$
$t=2$를 ㉠에 대입하면 $2k+10=6$, $2k=-4$　$\therefore k=-2$
이때 $x=4$, $y=6$이므로 $a=4$, $b=6$
$\therefore a+b-k=4+6-(-2)=12$

25

연립방정식 $\begin{cases} 5x-y-k+2=0 \\ 2x+3y=16 \end{cases}$을 만족시키는 y의 값이 x의 절댓값의 2배일 때, 모든 상수 k의 값의 합을 구하시오.

-18

$\begin{cases} 5x-y-k+2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+3y=16 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$을 만족시키는 y의 값이 x의 절댓값의 2배이므로
$y=2|x|$이다.
즉, $y=2x$ 또는 $y=-2x$이다.
(ⅰ) $y=2x$일 때
$y=2x$를 ㉡에 대입하면 $2x+6x=16$, $8x=16$ $\therefore x=2, y=4$
$x=2$, $y=4$를 ㉠에 대입하면 $10-4-k+2=0$ $\therefore k=8$
(ⅱ) $y=-2x$일 때
$y=-2x$를 ㉡에 대입하면 $2x-6x=16$, $-4x=16$ $\therefore x=-4, y=8$
$x=-4$, $y=8$을 ㉠에 대입하면 $-20-8-k+2=0$ $\therefore k=-26$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 k의 값은 8, -26이므로 k의 값의 합은
$8+(-26)=-18$

26 출제 주의

연립방정식 $\begin{cases} 3x-2y=a+5 \\ 4x-3y=b-4 \end{cases}$의 해가 일차방정식 $4x-5y=b-8$을 만족시킬 때, $4a-3b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

✓① -30 ② -24 ③ -18
④ -12 ⑤ -6

주어진 연립방정식의 해는 연립방정식 $\begin{cases} 4x-3y=b-4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x-5y=b-8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.
㉠$-$㉡을 하면 $2y=4$ $\therefore y=2$
$y=2$를 ㉠에 대입하면
$4x-6=b-4$ $\therefore 4x=b+2$ $\cdots\cdots ㉢$
$y=2$를 $3x-2y=a+5$에 대입하면
$3x-4=a+5$ $\therefore 3x=a+9$ $\cdots\cdots ㉣$
㉢$\times 3-$㉣$\times 4$를 하면 $0=3b-4a-30$ $\therefore 4a-3b=-30$

27 서술형

연립방정식 $\begin{cases} 5x-y+a=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+3y=40 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$을 만족시키는 $x=p$, $y=q$가 모두 자연수일 때, $a+p+q$의 값을 구하시오. 16

(단, a는 자연수이다.)

㉠$\times 3+$㉡을 하면 $17x+3a=40$, $17x=40-3a$
$\therefore x=\dfrac{-3a+40}{17}$ $\cdots\cdots ㉢$ ··· 30 %
이때 $\dfrac{-3a+40}{17}$이 자연수가 되기 위해서는 $-3a+40$이 17의 배수이어야 한다.
$-3a+40=17$, $-3a+40=34$, $-3a+40=51$, ...에서
$a=\dfrac{23}{3}$, $a=2$, $a=-\dfrac{11}{3}$, ...이므로 조건을 만족시키는 자연수 a의 값은 $a=2$뿐이다.
$a=2$를 ㉢에 대입하면 $x=2$
$x=2$를 ㉡에 대입하면 $4+3y=40$, $3y=36$ $\therefore y=12$ ··· 50 %
따라서 $p=2$, $q=12$이므로
$a+p+q=2+2+12=16$ ··· 20 %

28

연립방정식 $\begin{cases} x+2|y|=3 \\ |x|+y=6 \end{cases}$을 만족시키는 해가 $x=p$, $y=q$일 때, 가장 큰 pq의 값은?

① 125 ✓② 135 ③ 145
④ 155 ⑤ 165

(ⅰ) $x\geq 0$, $y\geq 0$일 때 $\begin{cases} x+2y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠$-$㉡을 하면 $y=-3$이고 $y\geq 0$이어야 하므로 해가 없다.
(ⅱ) $x\geq 0$, $y<0$일 때 $\begin{cases} x-2y=3 & \cdots\cdots ㉢ \\ x+y=6 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$
㉢$-$㉣을 하면 $-3y=-3$에서 $y=1$이고 $y<0$이어야 하므로 해가 없다.
(ⅲ) $x<0$, $y\geq 0$일 때 $\begin{cases} x+2y=3 & \cdots\cdots ㉤ \\ -x+y=6 & \cdots\cdots ㉥ \end{cases}$
㉤, ㉥을 연립하면 $x=-3$, $y=3$
(ⅳ) $x<0$, $y<0$일 때 $\begin{cases} x-2y=3 & \cdots\cdots ㉦ \\ -x+y=6 & \cdots\cdots ㉧ \end{cases}$
㉦, ㉧을 연립하면 $x=-15$, $y=-9$
(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 연립방정식의 해는 $x=-3$, $y=3$ 또는 $x=-15$, $y=-9$이고 그때의 pq의 값은 $pq=-9$ 또는 $pq=135$이므로 pq의 값 중 가장 큰 값은 135이다.

29

연립방정식 $\begin{cases} y=|x+1|+|x-3| \\ x+y=7 \end{cases}$의 해를 순서쌍으로 나타낼 때, $(x, y)=(a, b)$라고 하자. 두 상수 a, b에 대하여 가장 큰 ab의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ✓⑤ 12

(ⅰ) $x<-1$일 때, $\begin{cases} y=-(x+1)-(x-3) \\ x+y=7 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} y=-2x+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠, ㉡을 연립하면 $x=-5$, $y=12$
(ⅱ) $-1\leq x<3$일 때, $\begin{cases} y=(x+1)-(x-3) \\ x+y=7 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} y=4 & \cdots\cdots ㉢ \\ x+y=7 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$
㉢을 ㉣에 대입하면 $x+4=7$에서 $x=3$이고 $-1\leq x<3$이어야 하므로 해가 없다.
(ⅲ) $x\geq 3$일 때, $\begin{cases} y=(x+1)+(x-3) \\ x+y=7 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} y=2x-2 & \cdots\cdots ㉤ \\ x+y=7 & \cdots\cdots ㉥ \end{cases}$
㉤, ㉥을 연립하면 $x=3$, $y=4$
(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 연립방정식의 해를 순서쌍 (x, y)로 나타내면 $(-5, 12)$ 또는 $(3, 4)$이고 그때의 ab의 값은 $ab=-60$ 또는 $ab=12$이므로 ab의 값 중 가장 큰 값은 12이다.

30

민수가 연립방정식 $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ x+3y=12 \end{cases}$을 푸는데 상수항을 모두 잘못 보고 풀어서 $x=4$를 얻었다. 민수가 잘못 본 상수항의 합이 18일 때, 잘못 보고 푼 두 방정식의 상수항의 곱을 구하시오. 80

민수가 상수항을 잘못 보고 푼 두 방정식에서 상수항의 합이 18이므로 상수항을 각각 a(a는 상수), $18-a$라고 하면 $\begin{cases} 3x-2y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ x+3y=18-a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠$\times 3+$㉡$\times 2$를 하면 $11x=36+a$ $\therefore x=\dfrac{36+a}{11}$
이때 $x=4$이므로 $4=\dfrac{36+a}{11}$
$44=36+a$ $\therefore a=8$
따라서 민수가 상수항을 잘못 보고 푼 연립방정식은 $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ x+3y=10 \end{cases}$이므로
잘못 보고 푼 두 방정식의 상수항의 곱은 $8\times 10=80$

31

연립방정식 $\begin{cases} ax+by=-4 \\ cx+2y=7 \end{cases}$을 푸는데 철호는 7을 d로 잘못 보고 풀어서 $x=-4$, $y=8$을 얻었고 지윤이는 제대로 보고 풀어서 $x=-3$, $y=5$를 얻었다. 네 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하시오. 17

$x=-4$, $y=8$과 $x=-3$, $y=5$는 모두 $ax+by=-4$의 해이므로

$\begin{cases} -4a+8b=-4 & \cdots\cdots ㉠ \\ -3a+5b=-4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×3－㉡×4를 하면

$4b=4 \quad \therefore b=1$

$b=1$을 ㉡에 대입하면

$-3a+5=-4$, $-3a=-9 \quad \therefore a=3$

또, $x=-3$, $y=5$는 $cx+2y=7$의 해이므로

$-3c+10=7$, $-3c=-3 \quad \therefore c=1$

따라서 $x=-4$, $y=8$이 $x+2y=d$의 해이므로

$-4+16=d \quad \therefore d=12$

$\therefore a+b+c+d=3+1+1+12=17$

32

일차방정식 $(a-2)x-3y=1$을 만족시키는 모든 해가 $ax+6y=b$를 만족시킬 때, 두 상수 a, b에 대하여 $3ab$의 값은?

√① -8 ② -6 ③ 3
④ 6 ⑤ 8

연립방정식 $\begin{cases} (a-2)x-3y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ ax+6y=b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해는 무수히 많다.

㉠×(－2)를 하면 $-2(a-2)x+6y=-2 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉡과 ㉢이 서로 일치해야 하므로

$-2(a-2)=a$, $-2=b$

$-2a+4=a$, $-3a=-4 \quad \therefore a=\frac{4}{3}$

$\therefore 3ab=3\times\frac{4}{3}\times(-2)=-8$

33 서술형

연립방정식 $\begin{cases} 5(2a+b-1)x+2(b-a)y=8 \\ (6a+3)x+\left(a+\frac{b}{3}-2\right)y=4 \end{cases}$의 해가 무수히 많을 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. 6

$\begin{cases} 5(2a+b-1)x+2(b-a)y=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ (6a+3)x+\left(a+\frac{b}{3}-2\right)y=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡×2를 하면 $2(6a+3)x+2\left(a+\frac{b}{3}-2\right)y=8 \quad \cdots\cdots ㉢$ ··················· 20 %

이때 주어진 연립방정식의 해가 무수히 많으므로 ㉠과 ㉢이 서로 일치해야 한다.

따라서 $5(2a+b-1)=2(6a+3)$에서

$10a+5b-5=12a+6 \quad \therefore 2a-5b=-11 \quad \cdots\cdots ㉣$

또, $2(b-a)=2\left(a+\frac{b}{3}-2\right)$에서 $2b-2a=2a+\frac{2}{3}b-4$, $3b-3a=3a+b-6$

$6a-2b=6 \quad \therefore 3a-b=3 \quad \cdots\cdots ㉤$ ··················· 40 %

㉣－㉤×5를 하면 $-13a=-26 \quad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉤에 대입하면 $6-b=3 \quad \therefore b=3$

$\therefore ab=2\times3=6$ ··················· 40 %

34

다음 보기에서 방정식 $3x+2y=x+3y+5=4x-y+7$의 해에 대한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보기 〉
ㄱ. $\frac{x}{y}$는 유한소수로 나타낼 수 없다.
ㄴ. $5x+10y$는 6의 배수이다.
ㄷ. $19x-22y=0$의 해가 된다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ √⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

주어진 방정식의 해는 $\begin{cases} 2x-y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-3y=-7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{22}{5}$, $y=\frac{19}{5}$

ㄱ. $\frac{x}{y}=\frac{22}{5}\div\frac{19}{5}=\frac{22}{19}$이고 분모에 2와 5 이외의 소인수가 있으므로 $\frac{x}{y}$는 유한소수로 나타낼 수 없다.

ㄴ. $5x+10y=5\times\frac{22}{5}+10\times\frac{19}{5}=60$이므로 $5x+10y$는 6의 배수이다.

ㄷ. $x=\frac{22}{5}$, $y=\frac{19}{5}$를 $19x-22y=0$에 대입하면 $19\times\frac{22}{5}-22\times\frac{19}{5}=0$이므로 해가 된다.

35 출제 주의

연립방정식 $\begin{cases} (a-2)x-y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ (2a-1)x-3y=2b-9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해가 무수히 많을 때, 일차방정식 $ax+by=100$의 자연수인 해가 $x=p$, $y=q$이다. 이때 가장 큰 pq의 값을 구하시오. 55

(단, a, b는 상수이다.)

㉠×3을 하면 $3(a-2)x-3y=9 \quad \cdots\cdots ㉢$

이때 주어진 연립방정식의 해가 무수히 많으므로 ㉡과 ㉢이 서로 일치해야 한다.

따라서 $3(a-2)=2a-1$, $9=2b-9$이므로

$3a-6=2a-1$, $2b=18 \quad \therefore a=5, b=9$

따라서 일차방정식 $5x+9y=100$을 만족시키는 자연수인 해 $x=p$, $y=q$는 $x=2$, $y=10$ 또는 $x=11$, $y=5$이고 그때의 pq의 값은 $pq=2\times10=20$, $pq=11\times5=55$이다.

따라서 pq의 값 중 가장 큰 값은 55이다.

36

두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값이 한 자리 수일 때, 연립방정식 $\begin{cases} (a-1)x+y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+2y=a+b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해가 존재하지 않기 위한 순서쌍 (a, b)의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 √⑤ 5

㉠×2를 하면 $2(a-1)x+2y=8 \quad \cdots\cdots ㉢$

이때 주어진 연립방정식의 해가 존재하지 않아야 하므로 ㉡과 ㉢은 x의 계수는 같고 상수항은 달라야 한다.

따라서 $2(a-1)=4$, $8\neq a+b$이므로

$2a-2=4$, $2a=6 \quad \therefore a=3$

$a=3$을 $a+b\neq8$에 대입하면 $3+b\neq8 \quad \therefore b\neq5$

이때 $a+b$의 값이 한 자리 자연수이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 6)$의 5개이다.

개념 1 연립방정식의 활용 (1)

01

서로 다른 두 자연수가 있다. 두 수의 합은 38이고 두 수의 차의 5배는 큰 수의 2배보다 10만큼 크다. 이때 두 자연수 중 큰 수를 구하시오. 25

두 자연수 중 큰 수를 x, 작은 수를 y라고 하면

$\begin{cases} x+y=38 \\ 5(x-y)=2x+10 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+y=38 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-5y=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 3-$㉡을 하면 $8y=104$ $\quad\therefore y=13$

$y=13$을 ㉠에 대입하면 $x+13=38$ $\quad\therefore x=25$

따라서 큰 수는 25이다.

02 출제 주의

두 자리 자연수가 있다. 이 수의 십의 자리의 숫자는 일의 자리의 숫자의 3배보다 1만큼 크고, 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수는 처음 수보다 45만큼 작다고 한다. 이때 처음 수를 구하시오. 72

처음 수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라고 하면

$\begin{cases} x=3y+1 \\ 10y+x=(10x+y)-45 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x=3y+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-y=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$3y+1-y=5$, $2y=4$ $\quad\therefore y=2$

$y=2$를 ㉠에 대입하면 $x=6+1=7$

따라서 처음 수는 72이다.

03

승윤이는 배점이 3점, 4점, 5점으로 구성된 과학 시험에서 20문제를 맞혀 78점을 받았다. 승윤이가 3점짜리 문제를 6문제 맞혔을 때, 4점짜리 문제는 몇 문제 맞혔는가?

① 6문제 ② 7문제 ③ 8문제
④ 9문제 ✓⑤ 10문제

승윤이가 4점짜리를 x문제, 5점짜리를 y문제 맞혔다고 하면

$\begin{cases} 6+x+y=20 \\ 3\times 6+4x+5y=78 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+y=14 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+5y=60 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

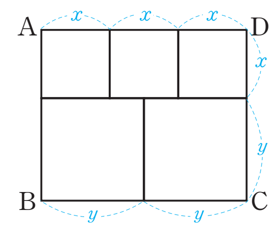
㉠$\times 4-$㉡을 하면 $-y=-4$ $\quad\therefore y=4$

$y=4$를 ㉠에 대입하면 $x+4=14$ $\quad\therefore x=10$

따라서 승윤이는 4점짜리를 10문제 맞혔다.

04

크고 작은 두 종류의 정사각형이 있다. 오른쪽 그림과 같이 작은 정사각형 3개와 큰 정사각형 2개를 사용하여 직사각형 ABCD를 만들었다. 직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 132일 때, 두 종류의 정사각형의 한 변의 길이의 차는?



① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ✓⑤ 6

$\overline{AD}=\overline{BC}$이므로 $3x=2y$ $\quad\therefore 3x-2y=0$ $\cdots\cdots ㉠$

직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 132이므로 $5x+4y=132$ $\cdots\cdots ㉡$

㉠$\times 2+$㉡을 하면 $11x=132$ $\quad\therefore x=12$

$x=12$를 ㉠에 대입하면 $36-2y=0$, $2y=36$ $\quad\therefore y=18$

따라서 작은 정사각형의 한 변의 길이는 12, 큰 정사각형의 한 변의 길이는 18이므로 두 종류의 정사각형의 한 변의 길이의 차는

$18-12=6$

05

어느 상점에서 두 제품 A, B를 합하여 26000원에 사서 A 제품에는 원가의 15 %, B 제품에는 원가의 25 %의 이익을 붙여서 팔았더니 5300원의 이익을 얻었다. 이때 A 제품의 원가는?

✓① 12000원 ② 12500원 ③ 13000원
④ 13500원 ⑤ 14000원

두 제품 A, B의 원가를 각각 x원, y원이라고 하면

$\begin{cases} x+y=26000 \\ \frac{15}{100}x+\frac{25}{100}y=5300 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+y=26000 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+5y=106000 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 3-$㉡을 하면 $-2y=-28000$ $\quad\therefore y=14000$

$y=14000$을 ㉠에 대입하면 $x+14000=26000$ $\quad\therefore x=12000$

따라서 A 제품의 원가는 12000원이다.

06 서술형

어느 과수원에서 작년에는 사과와 배를 합하여 1450개를 수확하였다. 올해의 수확량은 작년에 비하여 사과는 20 % 증가하고 배는 12 % 감소하여 전체적으로 98개 증가하였다고 할 때, 올해 수확한 사과의 개수를 구하시오. 1020

작년에 수확한 사과의 개수를 x, 배의 개수를 y라고 하면

$\begin{cases} x+y=1450 \\ \frac{20}{100}x-\frac{12}{100}y=98 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+y=1450 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x-3y=2450 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ ······ 20 %

㉠$\times 3+$㉡을 하면 $8x=6800$ $\quad\therefore x=850$

$x=850$을 ㉠에 대입하면 $850+y=1450$ $\quad\therefore y=600$ ······ 50 %

따라서 올해 수확한 사과의 개수는

$850+850\times\frac{20}{100}=850+170=1020$ ······ 30 %

07

어느 물통에 물을 가득 채우려고 한다. A, B 두 수도꼭지를 모두 열어 8분 동안 물을 넣었더니 물통이 가득 찼다. 또, 이 물통에 A 수도꼭지를 열어 9분 동안 물을 넣은 후 B 수도꼭지를 열어 6분 동안 물을 넣었더니 물통이 가득 찼다. 이 물통에 B 수도꼭지만 열어 물을 넣을 때, 물통을 가득 채우는 데 걸리는 시간은 몇 분인지 구하시오. (단, A, B 두 수도꼭지에서 나오는 물의 양은 각각 일정하다.) 24분

물통에 물을 가득 채웠을 때의 물의 양을 1이라 하고 A, B 두 수도꼭지로 1분 동안 채울 수 있는 물의 양을 각각 x, y라고 하면

$\begin{cases} 8x+8y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 9x+6y=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×3−㉡×4를 하면 $-12x=-1$ $\quad\therefore x=\frac{1}{12}$

$x=\frac{1}{12}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{2}{3}+8y=1$, $8y=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore y=\frac{1}{24}$

따라서 B 수도꼭지만 열어 물을 넣을 때, 물통을 가득 채우는 데 걸리는 시간은 24분이다.

개념 2 연립방정식의 활용 (2)

08 출제 주의

희상이는 집에서 18 km 떨어진 과학관에 가는데 처음에는 버스를 타고 시속 60 km로 가다가 중간에 내려서 시속 4 km로 걸어 갔더니 46분이 걸렸다. 이때 희상이가 버스를 타고 간 거리는?

① 12 km ② 13 km ③ 14 km
④ 15 km ✓⑤ 16 km

희상이가 버스를 타고 간 거리를 x km, 걸어간 거리를 y km라고 하면

$\begin{cases} x+y=18 \\ \frac{x}{60}+\frac{y}{4}=\frac{46}{60} \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+y=18 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+15y=46 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $-14y=-28$ $\quad\therefore y=2$

$y=2$를 ㉠에 대입하면 $x+2=18$ $\quad\therefore x=16$

따라서 희상이가 버스를 타고 간 거리는 16 km이다.

09

건우네 집과 나은이네 집 사이의 거리는 1.2 km이다. 건우와 나은이가 서로의 집을 향하여 동시에 출발하여 도중에 만났다. 건우의 속력은 분속 60 m, 나은이의 속력은 분속 40 m일 때, 건우와 나은이는 출발한 지 몇 분 후에 만났는지 구하시오. 12분

건우가 걸은 거리를 x m, 나은이가 걸은 거리를 y m라고 하면

$\begin{cases} x+y=1200 \\ \frac{x}{60}=\frac{y}{40} \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+y=1200 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-3y=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×2−㉡을 하면 $5y=2400$ $\quad\therefore y=480$

$y=480$을 ㉠에 대입하면 $x+480=1200$ $\quad\therefore x=720$

따라서 건우와 나은이는 출발한 지 $\frac{720}{60}=12$(분) 후에 만났다.

10

일정한 속력으로 달리는 기차가 길이가 510 m인 터널을 완전히 통과하는 데 14초가 걸리고, 길이가 1335 m인 다리를 완전히 통과하는 데 25초가 걸린다고 한다. 이 기차의 길이를 구하시오. 540 m

기차의 길이를 x m, 기차의 속력을 초속 y m라고 하면

$\begin{cases} x+510=14y \\ x+1335=25y \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x-14y=-510 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-25y=-1335 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $11y=825$ $\quad\therefore y=75$

$y=75$를 ㉠에 대입하면 $x-1050=-510$ $\quad\therefore x=540$

따라서 기차의 길이는 540 m이다.

11

농도가 다른 두 소금물 A, B가 있다. 소금물 A를 200 g, 소금물 B를 300 g 섞으면 6 %의 소금물이 되고, 소금물 A를 300 g, 소금물 B를 200 g 섞으면 8 %의 소금물이 된다. 이때 소금물 A의 농도를 구하시오. 12 %

소금물 A의 농도를 x %, 소금물 B의 농도를 y %라고 하면

$\begin{cases} \frac{x}{100}\times200+\frac{y}{100}\times300=\frac{6}{100}\times500 \\ \frac{x}{100}\times300+\frac{y}{100}\times200=\frac{8}{100}\times500 \end{cases}$

즉, $\begin{cases} 2x+3y=30 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+2y=40 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×3−㉡×2를 하면 $5y=10$ $\quad\therefore y=2$

$y=2$를 ㉠에 대입하면 $2x+6=30$, $2x=24$ $\quad\therefore x=12$

따라서 소금물 A의 농도는 12 %이다.

12 출제 주의

구리가 32 %, 아연이 4 % 들어 있는 합금 A와 구리가 8 %, 아연이 6 % 들어 있는 합금 B가 있다. 두 합금 A, B를 녹여서 구리가 80 g, 아연이 30 g이 들어 있는 합금을 만들려고 할 때, 필요한 두 합금 A, B의 양의 합을 구하시오. 550 g

합금 A가 x g, 합금 B가 y g 필요하다고 하면

$\begin{cases} \frac{32}{100}x+\frac{8}{100}y=80 \\ \frac{4}{100}x+\frac{6}{100}y=30 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} 4x+y=1000 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+3y=1500 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡×2를 하면 $-5y=-2000$ $\quad\therefore y=400$

$y=400$을 ㉠에 대입하면

$4x+400=1000$, $4x=600$ $\quad\therefore x=150$

따라서 필요한 합금 A의 양은 150 g, 합금 B의 양은 400 g이므로 두 합금 A, B의 양의 합은

$150+400=550$(g)

01

현재 첫째의 나이는 21살이고, 둘째의 나이의 2배와 셋째의 나이의 5배를 더하면 111살이다. 이때 둘째와 셋째의 나이의 합은? (단, 세 사람의 나이는 모두 다르다.)

① 31살　② 32살　✓③ 33살　④ 34살　⑤ 35살

둘째의 나이의 2배와 셋째의 나이의 5배를 더하면 111살이므로

$2x+5y=111$　$\therefore x=\frac{111-5y}{2}$　…… ㉠

첫째의 나이가 21살이므로 $x=\frac{111-5y}{2}<21$, $5y>69$　$\therefore y>13.8$

이때 ㉠에서 x는 자연수이므로 y는 홀수이어야 한다. 따라서 $y=15, 17, 19, \dots$

$y=15$일 때, $x=\frac{111-75}{2}=18$　$y=17$일 때, $x=\frac{111-85}{2}=13$

이때 $x>y$이어야 하므로 $x=18$, $y=15$

따라서 둘째와 셋째의 나이의 합은 $x+y=18+15=33$(살)

02

한결이는 네 자리 자연수로 되어 있는 사물함 비밀번호를 정하고 다음과 같이 힌트를 적어 두었다.

- 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자는 각각 2, 5이다.
- 각 자리의 숫자의 합은 19이다.
- 천의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자의 합에서 백의 자리와 일의 자리의 숫자의 합을 빼면 3이다.

한결이의 사물함 비밀번호의 각 자리의 숫자의 곱은?

① 210　② 240　✓③ 270　④ 300　⑤ 330

비밀번호의 각 자리의 숫자를 천의 자리부터 차례대로 x, y, 2, 5라고 하면

$x+y+2+5=19$에서 $x+y=12$　…… ㉠

$(x+2)-(y+5)=3$에서 $x-y=6$　…… ㉡

㉠+㉡을 하면 $2x=18$　$\therefore x=9$

$x=9$를 ㉠에 대입하면 $9+y=12$　$\therefore y=3$

따라서 비밀번호의 각 자리의 숫자는 9, 3, 2, 5이므로 그 곱은 $9\times3\times2\times5=270$

03 서술형

6명의 학생이 탁구 리그전을 하였다. 이기는 학생은 2점, 비기는 학생은 1점, 지는 학생은 0점을 받기로 하였고, 모든 학생이 서로 한 번씩 경기를 하여 총 15경기가 진행되었다. 오른쪽 표는 경기가 끝난 후 학생들이 받은 점수를 조사하여 나타낸 것이다. $a+2b+3c$의 값을 구하시오. 9

받은 점수	학생 수
2	a
4	1
5	b
6	c
7	1
합계	6

$a+b+c=4$　…… ㉠ ························ 25 %

매 경기마다 두 학생이 받는 점수의 총합은 2점이고 15경기가 모두 끝난 후 6명의 학생이 받는 점수의 총합은 30점이므로 $2a+4+5b+6c+7=30$

$\therefore 2a+5b+6c=19$　…… ㉡ ························ 25 %

㉡−㉠×2를 하면 $3b+4c=11$　…… ㉢

이때 a, b, c는 0 이상의 정수이므로 ㉢을 만족시키는 정수 해는 $b=1$, $c=2$이다.

$b=1$, $c=2$를 ㉠에 대입하면 $a+1+2=4$　$\therefore a=1$

$\therefore a+2b+3c=1+2\times1+3\times2=9$ ························ 50 %

04 출제 주의

A, B 두 사람이 주사위를 던져서 높은 수가 나오면 이기는 게임을 진행하였다. 이긴 사람은 4점, 진 사람은 1점을 얻고 비기면 두 사람 모두 2점씩 얻는다. 주사위를 10번 던지고 난 결과, A는 25점을 얻었고 B는 22점을 얻었다. 이때 A가 이긴 횟수를 구하시오. 4

A가 이긴 횟수를 x, 비긴 횟수를 y라고 하면 A가 진 횟수는 $10-x-y$이다.

A가 얻은 점수는 $4x+2y+(10-x-y)=25$　$\therefore 3x+y=15$　…… ㉠

B가 이긴 횟수는 A가 진 횟수와 같으므로 B가 얻은 점수는

$4(10-x-y)+2y+x=22$　$\therefore 3x+2y=18$　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $x=4$, $y=3$이므로 A가 이긴 횟수는 4이다.

05

어느 학교는 학생들의 다양한 활동을 장려하기 위해 마일리지 제도를 운영하고 있다. 봉사 활동을 하면 2점을 얻고, 지각을 하면 3점이 감점되며, 상장을 받으면 5점을 얻는다. 한 학생이 한학기 동안 마일리지 관련 행동을 20번 한 결과, 최종 마일리지가 14점이 되었다. 이때 이 학생이 봉사 활동을 한 횟수가 될 수 있는 값 중 가장 큰 값은?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　✓⑤ 10

봉사 활동을 한 횟수를 x, 지각을 한 횟수를 y, 상장을 받은 횟수를 z라고 하면 x, y, z는

0 이상의 정수이고 $\begin{cases} x+y+z=20 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-3y+5z=14 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=20-x-z$이고 이 식을 ㉡에 대입하면

$2x-3(20-x-z)+5z=14$, $5x+8z=74$　$\therefore x=\frac{74-8z}{5}$

$x=\frac{74-8z}{5}\geq0$에서 $74-8z\geq0$, $8z\leq74$　$\therefore z\leq9.25$

이때 x가 0 이상의 정수가 되려면 $74-8z$는 5의 배수가 되어야 한다. 즉, $z=3$ 또는 $z=8$

$z=3$일 때, $x=10$, $y=7$　$z=8$일 때, $x=2$, $y=10$

따라서 봉사 활동을 한 횟수가 될 수 있는 값 중 가장 큰 값은 10이다.

06

어느 학교 축제 공연마당에서는 노래, 댄스, 밴드 분야에 여러 팀들이 참여하였다. 노래 공연은 4분씩, 댄스 공연은 7분씩, 밴드 공연은 9분씩 진행되었고, 밴드 공연에 참여한 팀은 댄스 공연에 참여한 팀보다 1팀 더 많다. 노래 공연에 소요된 전체 시간이 댄스 공연에 소요된 전체 시간보다 7분 더 길고, 공연 사이마다 쉬는 시간이 2분씩 주어질 때, 전체 공연 시간이 1시간 51분이었다. 이때 노래 공연에 참여한 팀의 수를 구하시오. 7

(단, 모든 팀은 한 번씩만 공연하였다.)

노래 공연에 참여한 팀의 수를 x, 댄스 공연에 참여한 팀의 수를 y라고 하면 밴드 공연에 참여한 팀의 수는 $y+1$이므로 총 공연의 수는 $x+y+(y+1)=x+2y+1$

공연 사이의 쉬는 시간의 합은 $2(x+2y+1-1)=2x+4y$(분)

노래 공연에 소요된 전체 시간은 댄스 공연에 소요된 전체 시간보다 7분 더 기므로

$4x=7y+7$　$\therefore 4x-7y=7$　…… ㉠

전체 공연 시간이 1시간 51분, 즉 111분이므로 $4x+7y+9(y+1)+(2x+4y)=111$

$6x+20y=102$　$\therefore 3x+10y=51$　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $x=7$, $y=3$

따라서 노래 공연에 참여한 팀의 수는 7이다.

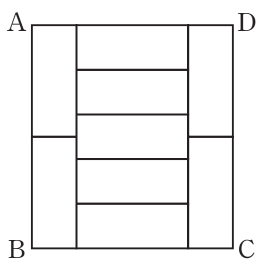
07

어느 목수는 책상 한 개를 만드는 데 6일, 의자 한 개를 만드는 데 2일이 걸린다. 가구 한 개 제작이 완료되면 하루 휴식일을 갖고, 일요일은 무조건 휴식하고 휴식일이 일요일과 겹치면 다음날인 월요일에도 휴식일을 갖는다. 책상과 의자를 합쳐 13개의 주문을 받아 수요일부터 제작하여 63일 뒤에 전부 완성하였을 때, 책상은 몇 개 제작하였는지 구하시오. **4개**

제작한 책상의 개수를 x, 의자의 개수를 y라고 하면 $x+y=13$ …… ㉠
전체 작업 기간 안에 일요일이 9번 들어 있고, 가구 한 개의 제작이 완료될 때마다 하루 휴식일이 있으나 마지막 제작이 완료된 뒤의 휴식일은 생각하지 않으므로 휴식일은 총 12일이다. 작업하지 않는 날의 수는 일요일 9일과 휴식일 12일을 합쳐 21일이므로 작업일 수는 $63-21=42$이다. 따라서 $6x+2y=42$, 즉 $3x+y=21$ …… ㉡
㉡－㉠을 하면 $2x=8$ $\quad\therefore x=4$
$x=4$를 ㉠에 대입하면 $4+y=13$ $\quad\therefore y=9$
따라서 책상은 4개 제작하였다.

08

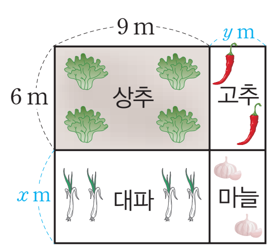
오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD를 합동인 직사각형 9개로 나누었다. 직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 76 cm일 때, 작은 직사각형 하나의 넓이를 구하시오. **40 cm²**



작은 직사각형의 긴 변의 길이를 x cm, 짧은 변의 길이를 y cm라고 하면 직사각형 ABCD의 가로의 길이는 $(x+2y)$ cm이고 세로의 길이는 $2x$ cm이다.
이때 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는 $2\{(x+2y)+2x\}=76$ (cm)
$3x+2y=38$ …… ㉠
작은 직사각형의 긴 변의 길이의 2배와 짧은 변의 길이의 5배가 같으므로
$2x=5y$, 즉 $2x-5y=0$ …… ㉡
㉠×2－㉡×3을 하면 $19y=76$ $\quad\therefore y=4$
$y=4$를 ㉡에 대입하면 $2x-20=0$, $2x=20$ $\quad\therefore x=10$
따라서 작은 직사각형 하나의 넓이는 $xy=10\times4=40\,(\text{cm}^2)$

09 출제 주의

오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 9 m이고 세로의 길이가 6 m인 직사각형 모양의 상추를 재배하는 텃밭이 있다. 텃밭의 가로의 길이와 세로의 길이를 늘여서 새로운 텃밭을 만들고 그곳에 고추, 대파, 마늘을 재배하려고 한다. 가로로 늘인 길이는 세로로 늘인 길이보다 2 m 짧고, 텃밭에 새롭게 추가된 영역의 넓이는 처음 텃밭의 넓이의 $\frac{4}{3}$와 같다. 또, 마늘을 재배하는 영역의 넓이는 처음 텃밭의 넓이의 $\frac{1}{6}$과 같다고 할 때, 새로운 텃밭 전체의 둘레의 길이를 구하시오. **46 m**



처음 텃밭의 넓이는 $9\times6=54\,(\text{m}^2)$
가로로 늘인 길이는 세로로 늘인 길이보다 2 m 짧으므로 $y=x-2$ …… ㉠
텃밭에 새롭게 추가된 영역의 넓이는 처음 텃밭의 넓이의 $\frac{4}{3}$와 같고,
마늘을 재배하는 영역의 넓이는 처음 텃밭의 넓이의 $\frac{1}{6}$과 같으므로
$9x+6y+\left(54\times\frac{1}{6}\right)=54\times\frac{4}{3}$, $9x+6y=63$ $\quad\therefore 3x+2y=21$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하면 $x=5$, $y=3$이므로 새로운 텃밭의 가로의 길이는 $9+3=12$ (m), 세로의 길이는 $6+5=11$ (m)이므로 전체의 둘레의 길이는 $2\times(12+11)=46$ (m)

10

어느 학교에서 독서 캠프에 참여한 학생은 남학생과 여학생을 합쳐 40명이다. 남학생들의 하루 평균 독서 시간은 1.5시간이고 여학생들의 하루 평균 독서 시간은 2.4시간이다. 이 중 하루에 0.6시간만 책을 읽는 여학생 4명을 제외한 나머지 학생의 하루 평균 독서 시간은 2시간이었다. 이때 독서 캠프에 참가한 남학생 수는?

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ✓⑤ 24

독서 캠프에 참여한 남학생 수를 x, 여학생 수를 y라고 하면 전체 학생 수가 40명이므로
$x+y=40$ …… ㉠
남학생들의 하루 평균 독서 시간이 1.5시간이고 여학생들의 하루 평균 독서 시간이 2.4시간이므로 전체 독서 시간의 합은 $(1.5x+2.4y)$시간이다.
하루에 0.6시간만 책을 읽는 여학생 4명을 제외한 나머지 학생의 하루 평균 독서 시간이 2시간이므로
$\frac{1.5x+2.4y-0.6\times4}{36}=2$, $1.5x+2.4y=74.4$
$\therefore 5x+8y=248$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하면 $x=24$, $y=16$

11

90명이 시험을 보았는데 그 중 36명이 불합격하였다. 최저 합격 점수는 90명의 평균보다 4점이 낮고, $\underbrace{\text{합격자의 평균}}_{x}$보다는 18점이 낮으며 $\underbrace{\text{불합격자의 평균}}_{y}$의 2배보다 8점이 낮았다. 이때 최저 합격 점수는?

① 41점 ✓② 42점 ③ 43점
④ 44점 ⑤ 45점

합격자의 수는 $90-36=54$이고, 전체 평균은 $\frac{54x+36y}{90}=\frac{3x+2y}{5}$(점)이다.
최저 합격 점수는 90명의 평균보다 4점이 낮고, 합격자의 평균보다는 18점이 낮으며 불합격자의 평균의 2배보다 8점이 낮으므로
(최저 합격 점수)$=\frac{3x+2y}{5}-4=x-18=2y-8$
이 방정식의 해는 연립방정식 $\begin{cases}\frac{3x+2y}{5}-4=x-18\\ x-18=2y-8\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}x-y=35 & \cdots\cdots ㉠\\ x-2y=10 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$
의 해와 같다. ㉠, ㉡을 연립하면 $x=60$, $y=25$
따라서 최저 합격 점수는 $60-18=42$(점)

12

어느 학교에서는 이수해야 할 봉사 시간의 기준이 40시간이다. 전체 학생 45명 중 이 기준을 충족한 학생은 15명이고, 이 학생들의 평균 봉사 시간은 기준을 충족하지 못한 학생들의 평균 봉사 시간의 1.5배보다 6시간이 많고, 기준을 충족하지 못한 학생들의 평균 봉사 시간은 전체 학생들의 평균 봉사 시간보다 8시간이 적었다고 할 때, 전체 학생들의 평균 봉사 시간을 구하시오. **44시간**

봉사 시간의 기준을 충족한 학생들의 평균 봉사 시간을 x시간, 충족하지 못한 학생들의 평균 봉사 시간을 y시간이라고 하면 $x=1.5y+6$, 즉 $2x-3y=12$ …… ㉠
전체 학생들의 평균 봉사 시간은 $\frac{15x+30y}{45}=\frac{x+2y}{3}$(시간)이므로
$y=\frac{x+2y}{3}-8$, $3y=x+2y-24$ $\quad\therefore x-y=24$ …… ㉡
㉠－㉡×2를 하면 $-y=-36$ $\quad\therefore y=36$
$y=36$을 ㉡에 대입하면 $x-36=24$ $\quad\therefore x=60$
따라서 전체 학생들의 평균 봉사 시간은
$\frac{x+2y}{3}=\frac{60+2\times36}{3}=44$(시간)

13

A 지점에서 B 지점을 거쳐 C 지점으로 가는 버스의 구간 요금은 A 지점에서 B 지점까지는 1600원, A 지점에서 C 지점까지는 3000원, B 지점에서 C 지점까지는 1800원이라고 한다. 이 버스가 A 지점에서 승객 30명을 태우고 출발하여 B 지점을 거쳐 C 지점에 도착하였을 때, C 지점에서 내린 승객은 26명이었다. 승차권 판매요금이 총 85200원일 때, B 지점에서 내린 승객 수와 새로 탄 승객 수의 합은?

① 6 ② 7 ✓③ 8
④ 9 ⑤ 10

B 지점에서 내린 승객 수를 x, B 지점에서 새로 탄 승객 수를 y라고 하면 C 지점에서 내린 승객 수가 26이므로 $30-x+y=26$ $\therefore x-y=4$ …… ㉠
승차권 판매요금이 총 85200원이므로 $1600x+3000(30-x)+1800y=85200$
$-1400x+1800y+90000=85200$
$-1400x+1800y=-4800$ $\therefore 7x-9y=24$ …… ㉡
㉠×7−㉡을 하면 $2y=4$ $\therefore y=2$
$y=2$를 ㉠에 대입하면 $x-2=4$ $\therefore x=6$
따라서 B 지점에서 내린 승객 수는 6, B 지점에서 새로 탄 승객 수는 2이므로 구하는 합은 $6+2=8$이다.

14 출제 주의

어느 수학 캠프의 참여자를 선발하는 과정에서 1차 전형에 합격한 남학생과 여학생의 수의 비는 5 : 3이다. 이 중에서 2차 전형에 합격한 남학생과 여학생의 수의 비는 3 : 2이고, 불합격한 남학생과 여학생의 수의 비는 7 : 4이다. 2차 전형에 합격한 학생이 60명일 때, 1차 전형에 합격한 학생 수를 구하시오. 192

1차 전형에 합격한 남학생 수를 x, 여학생 수를 y라고 하자. 이때 2차 전형에 합격한 남학생과 여학생 수는 각각 $60\times\frac{3}{5}=36$, $60\times\frac{2}{5}=24$이므로
$\begin{cases} x:y=5:3 \\ (x-36):(y-24)=7:4 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} 3x-5y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x-7y=-24 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠×4−㉡×3을 하면 $y=72$
$y=72$를 ㉠에 대입하면 $3x-360=0$, $3x=360$ $\therefore x=120$
따라서 1차 전형에 합격한 학생 수는 $120+72=192$

15

두 도시 A, B 사이를 운항하는 어느 비행기의 수하물 운송 요금은 탑승객 1인당 일정한 무게 a kg까지는 무료이고, a kg을 초과하면 초과한 무게에 비례하여 부과된다고 한다. 이 비행기에 탑승하는 정호와 재원이가 부치는 수하물의 무게의 총합은 75 kg이다. 정호와 재원이가 각자의 수하물을 부칠 때 지불할 요금은 각각 4만원, 3만원이고 이 수하물을 합쳐서 한 사람이 부치게 되면 지불할 요금은 11만원이 된다. 이때 a의 값을 구하시오. 20

(단, 정호와 재원이의 수하물은 모두 a kg 초과이다.)

정호가 부치려는 수하물의 무게를 x kg이라고 하면 재원이가 부치려는 수하물의 무게는 $(75-x)$ kg이다. 초과한 수하물의 무게에 대하여 부과되는 1 kg당 요금은 일정하므로
$\frac{x-a}{4}=\frac{(75-x)-a}{3}=\frac{75-a}{11}$
$\frac{x-a}{4}=\frac{(75-x)-a}{3}$에서 $a=300-7x$ …… ㉠
$\frac{x-a}{4}=\frac{75-a}{11}$에서 $11x-7a=300$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하면 $x=40$, $a=20$

16

민승이와 희은이가 300개의 종이학을 함께 접으면 6시간이 걸린다. 민승이가 혼자 9시간 동안 종이학을 접은 후 희은이가 혼자 4시간 동안 종이학을 접어도 300개의 종이학을 접는다고 할 때, 300개의 종이학을 희은이가 혼자 접으면 몇 시간이 걸리는지 구하시오. 10시간

민승이와 희은이가 1시간에 접을 수 있는 종이학의 개수를 각각 x, y라고 하면
$\begin{cases} 6x+6y=300 \\ 9x+4y=300 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+y=50 & \cdots\cdots ㉠ \\ 9x+4y=300 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠×4−㉡을 하면 $-5x=-100$ $\therefore x=20$
$x=20$을 ㉠에 대입하면 $20+y=50$ $\therefore y=30$
따라서 희은이는 1시간에 30개의 종이학을 접으므로 300개의 종이학을 희은이가 혼자 접으면 $\frac{300}{30}=10$(시간)이 걸린다.

17

어느 상품을 만드는 기계 A, B, C가 상품을 360개 만드는 데 세 기계를 모두 작동시키면 6시간이 걸리고, 기계 A와 C만 작동시키면 9시간, 기계 B와 C만 작동시키면 12시간이 걸린다. 기계 A와 B만 작동시키면 이 상품을 360개 만드는 데 몇 시간이 걸리는지 구하시오. 7.2시간

세 기계 A, B, C를 작동시켰을 때 한 시간 동안 만들어 내는 상품의 개수를 각각 x, y, z라고 하면 $6x+6y+6z=360$, $9x+9z=360$, $12y+12z=360$
$\therefore \begin{cases} x+y+z=60 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+z=40 & \cdots\cdots ㉡ \\ y+z=30 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$
㉠−㉡을 하면 $y=20$
$y=20$을 ㉢에 대입하면 $20+z=30$ $\therefore z=10$
$z=10$을 ㉡에 대입하면 $x+10=40$ $\therefore x=30$
따라서 두 기계 A와 B만 작동시키면 한 시간당 $x+y=30+20=50$(개)의 상품을 만들 수 있으므로 이 상품 360개를 만드는데 $\frac{360}{50}=7.2$(시간)이 걸린다.

18

지훈이는 매주 운동으로 자전거 타기, 달리기, 수영을 하고 운동 시간을 기록한다. 이번 주 운동 기록을 보니 지난 주에 비해 자전거 타기, 달리기, 수영을 한 시간이 각각 12 %, 28 %, 20 % 증가하였고, 전체 운동 시간은 22 % 증가하였다. 지난 주에 달리기를 한 시간은 자전거를 탄 시간의 2배이고, 이번 주의 전체 운동 시간이 24시간 24분일 때, 이번 주에 수영을 한 시간은?

① 3시간 ② 4시간 ③ 5시간
✓④ 6시간 ⑤ 7시간

지난 주에 자전거를 탄 시간을 x시간, 수영을 한 시간을 y시간이라고 하면 달리기를 한 시간은 자전거를 탄 시간의 2배이므로 $2x$시간이다. 지난 주에 비해 이번 주에 자전거 타기, 달리기, 수영을 한 시간이 각각 12 %, 28 %, 20 % 증가하였고 전체 운동 시간은 22 % 증가하였으므로 $1.12x+1.28\times2x+1.2y=1.22(x+2x+y)$
$112x+256x+120y=366x+122y$, $2x=2y$ $\therefore x=y$ …… ㉠
이번 주의 전체 운동 시간이 24시간 24분이므로 $1.12x+1.28\times2x+1.2y=24.4$
$112x+256x+120y=2440$, $368x+120y=2440$ $\therefore 46x+15y=305$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $46x+15x=305$, $61x=305$ $\therefore x=5$, $y=5$
따라서 이번 주에 수영을 한 시간은 $1.2y=1.2\times5=6$(시간)

19

A 도시의 저수지에 1800톤의 물이 있다. 이 저수지에 물이 계획대로 매일 채워지면 30일 정도 A 도시에 물을 공급할 수 있다. 그런데 가뭄이 심해져서 A 도시의 저수지에 채워지는 물의 양이 $\frac{1}{3}$로 줄었고, 계획대로 A 도시에 물을 공급하면 15일 밖에 공급하지 못한다고 한다. 가뭄 전에 이 저수지에 하루 동안 채워지는 물의 양을 구하시오. **90톤**

가뭄 전에 저수지에 하루 동안 채워지는 물의 양을 x톤, 가뭄 전에 저수지에서 A 도시에 하루 동안 공급하는 물의 양을 y톤이라고 하면 가뭄 전 상태로는 30일 공급이 가능하므로
$30(x-y)+1800=0 \quad \therefore x-y=-60$ …… ㉠
가뭄으로 A 도시에 공급하는 물의 양이 $\frac{1}{3}$로 줄었고, 현재 공급량이 그대로 유지되면 15일 공급이 가능하므로
$15\left(\frac{1}{3}x-y\right)+1800=0 \quad \therefore x-3y=-360$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하면 $x=90$, $y=150$

20 출제 주의

용량이 2800 L인 물통에 수도관 A와 B를 통해 물을 채운다. 수도관 A와 B를 처음 50분 동안 모두 작동시키다가 수도관 A의 작동을 멈추고 수도관 B만 10분 더 작동시켰더니 물통이 가득 채워졌다. 또, 수도관 A와 B를 처음 40분 동안 모두 작동시켰다가 수도관 B의 작동을 멈추고 수도관 A만 30분 더 작동시켰더니 이 물통에 200 L만큼 부족하게 채워졌다. 수도관 A와 B를 모두 작동시킨다면 몇 분 만에 물통을 다 채울 수 있는지 구하시오. **56분**

수도관 A, B에서 1분 동안 나오는 물의 양을 각각 x L, y L라고 하면 수도관 A를 50분, 수도관 B를 60분 작동시키면 용량이 2800 L인 물통을 가득 채우므로
$50x+60y=2800$, 즉 $5x+6y=280$ …… ㉠
수도관 A를 70분, 수도관 B를 40분 작동시키면 용량이 2800 L 물통을 200 L만큼 부족하게 채우므로
$70x+40y=2600$, 즉 $7x+4y=260$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하면 $x=20$, $y=30$
따라서 수도관 A와 B를 모두 작동시키면 1분에 $20+30=50$(L)의 물이 나오므로 용량이 2800 L인 물통을 다 채우는 데 $\frac{2800}{50}=56$(분)이 걸린다.

21

어느 콘서트 티켓을 판매하는 창구에서 판매 전부터 티켓 구매 대기줄이 있었고 판매가 시작되면 일정한 비율로 대기줄을 서는 사람의 수가 늘어난다. 판매 창구가 하나만 열리면 40분 만에 대기줄이 없어지고 두 개가 열리면 16분 만에 대기줄이 없어진다고 할 때, 판매 창구가 세 개가 열리면 몇 분만에 대기줄이 없어지는지 구하시오. (단, 모든 판매 창구에서는 사람의 수와 한 사람이 티켓을 구매하는 데 걸리는 시간은 각각 일정하다.) **10분**

1분 동안 티켓을 x명에게 판매하고 y명이 구매 대기줄에 선다고 하자. 판매 전에 이미 티켓 구매 대기줄에 있던 사람 수를 a라고 하면 판매 창구가 하나만 열리면 40분 만에 대기줄이 없어지므로 $a+40y=40x$ …… ㉠
판매 창구가 두 개가 열리면 16분 만에 대기줄이 없어지므로 $a+16y=32x$ …… ㉡
㉠−㉡을 하면 $24y=8x$에서 $y=\frac{1}{3}x$이고, 이를 ㉠에 대입하면
$a+\frac{40}{3}x=40x \quad \therefore a=\frac{80}{3}x$ …… ㉢
판매 창구가 세 개가 열릴 때, t분 만에 대기줄이 없어진다면 $a+ty=3\times tx$ …… ㉣
㉣에서 $\frac{80}{3}x+\frac{1}{3}tx=3tx$, $80+t=9t$, $8t=80 \quad \therefore t=10$

22 서술형

체험학습을 온 학생들이 숙소에서 18 km 떨어진 체험 활동지까지 버스 한 대로 이동 하기로 하였는데 버스 좌석이 부족해서 1조는 시속 4 km의 도보로 이동하고, 2조는 시속 60 km의 버스를 타고 가다가 A 지점에서 내려 걸어갔다. 이때 버스는 되돌아가서 도보로 이동하던 1조를 태우고 체험 활동지로 이동하였고 두 조는 동시에 도착하였을 때, 두 조의 학생들이 도보로 이동한 거리를 구하시오. (단, 두 조가 도보와 버스로 이동한 거리와 이동할 때의 속력은 같고, 버스의 승·하차 시간은 무시한다.) **2 km**

학생들이 도보로 이동한 거리를 x km, 버스를 타고 이동한 거리를 y km라고 하면 버스가 되돌아간 거리는 $(y-x)$ km이다. $\therefore x+y=18$ …… ㉠ …… 40 %
$\frac{x}{4}=\frac{y-x}{60}+\frac{y}{60}$에서 $y=8x$ …… ㉡ …… 30 %
㉡을 ㉠에 대입하면 $9x=18 \quad \therefore x=2$
따라서 두 조의 학생들이 도보로 이동한 거리는 2 km이다. …… 30 %

23

어느 등산 코스에 있는 산장에서 산 정상까지 이어진 트레킹 코스는 7.2 km이다. A팀과 B팀이 산장에서 산 정상까지 이동하는 데 A팀이 B팀보다 18분 먼저 출발하였고 B팀이 출발한 지 36분 후 두 팀이 만났다. 이후 A팀은 중간에 12분 휴식하였고 B팀은 쉬지 않고 이동하여 A팀보다 30분 먼저 산 정상에 도착하였다. A팀이 산 정상에 도착할 때까지 걸린 시간을 구하시오. (단, 두 팀의 이동 속력은 각각 일정하고, 두 팀 모두 산 정상에 도착할 때까지 추가로 휴식한 시간은 없다.) **2시간**

A팀과 B팀의 이동 속력을 각각 시속 x km, 시속 y km라고 하면
$\frac{54}{60}x=\frac{36}{60}y \quad \therefore \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=0$ …… ㉠
$\frac{7.2}{x}-\frac{7.2}{y}=\frac{3}{5}$에서 $\frac{12}{x}-\frac{12}{y}=1$ …… ㉡
이때 $\frac{1}{x}=X$, $\frac{1}{y}=Y$로 놓으면 ㉠, ㉡에서 $\begin{cases} 2X-3Y=0 & \cdots\cdots ㉢ \\ 12X-12Y=1 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$
㉢, ㉣을 연립하면 $X=\frac{1}{4}$, $Y=\frac{1}{6}$이므로 $x=4$, $y=6$
따라서 A팀이 산 정상에 도착할 때까지 걸린 시간은 $\frac{7.2}{4}+\frac{12}{60}=2$(시간)

24 출제 주의

준기와 윤서가 둘레의 길이가 1600 m이고 출발점과 도착점이 같은 둘레길 코스를 따라 걸을 때, 출발점에서 동시에 출발하여 같은 방향으로 걸으면 40분 후에 처음으로 다시 만나고, 반대 방향으로 걸으면 3번째로 다시 만나기까지 24분이 걸린다고 한다. 두 사람이 출발점에서 동시에 출발하여 반대 방향으로 둘레길 코스를 따라 걷다가 처음으로 만난 후 윤서가 걷던 방향으로 윤서의 속력에 맞춰 같이 걷는다면 처음 만난 지점에서 출발점으로 다시 돌아오는 데 걸리는 시간은? (단, 준기와 윤서의 속력은 각각 일정하고 준기가 윤서보다 빠르게 걷는다.)

① 11분 ✓② 12분 ③ 13분
④ 14분 ⑤ 15분

준기의 속력을 분속 x m, 윤서의 속력을 분속 y m라고 하면
$40x-40y=1600$, 즉 $x-y=40$ …… ㉠ $24x+24y=4800$, 즉 $x+y=200$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하면 $x=120$, $y=80$
윤서의 속력이 분속 80 m이므로 둘레길을 한 바퀴 도는 데 걸리는 시간은 20분이고 두 사람이 반대 방향으로 걸으면 3번째로 다시 만나기까지 24분이 걸리므로 처음으로 다시 만나기까지 걸리는 시간은 8분이다.
따라서 구하는 시간은 $20-8=12$(분)

25

두 지점 사이가 18 km인 강에서 배가 왕복하는데 상류로 올라가다가 엔진이 고장나 30분 동안 하류로 떠내려갔다가 다시 상류로 올라가 왕복하는데 총 3시간 30분이 걸렸다. 떠내려간 30분을 제외하면 상류로 올라가는 데 걸린 시간은 하류로 내려가는 데 걸린 시간의 2배였다고 할 때, 정지한 물 위에서의 배의 속력을 구하시오. **시속 14 km**

(단, 배와 강물의 속력은 일정하다.)

정지한 물 위에서의 배의 속력을 시속 x km, 강물의 속력을 시속 y km라고 하면

$\left(18+\frac{y}{2}\right)\times\frac{1}{x-y}+\frac{18}{x+y}=3$ …… ㉠ $\left(18+\frac{y}{2}\right)\times\frac{1}{x-y}=2\times\frac{18}{x+y}$ …… ㉡

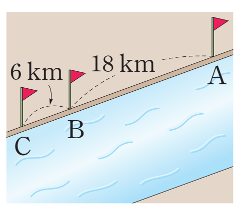
㉡을 ㉠에 대입하면 $2\times\frac{18}{x+y}+\frac{18}{x+y}=3$, $\frac{54}{x+y}=3$ $\therefore y=18-x$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $\left(18+\frac{18-x}{2}\right)\times\frac{1}{x-(18-x)}+\frac{18}{x+(18-x)}=3$

$\frac{54-x}{2}\times\frac{1}{2x-18}+1=3$, $54-x=8x-72$, $9x=126$ $\therefore x=14$

26

강 위에 있는 세 지점 A, B, C를 왕복하는 배가 있다. B는 A보다 18 km 떨어진 하류 지점에 있고 C는 B보다 6 km 떨어진 하류 지점에 있다. B에서 강을 거슬러 올라가 A까지 이동하는 시간이 A에서 B까지 강을 따라 내려가는 시간보다 48분이 더 걸렸다. 또, B에서 A를 거쳐 다시 B를 지나 C까지 강을 따라 이동하는 데 3시간 36분이 걸렸을 때 정지한 물 위에서의 배의 속력을 구하시오. **시속 12 km**



(단, 배와 강물의 속력은 일정하다.)

정지한 물 위에서의 배의 속력을 시속 x km, 강물의 속력을 시속 y km라고 하면

$\frac{18}{x-y}-\frac{18}{x+y}=\frac{4}{5}$ …… ㉠

$\frac{18}{x-y}+\frac{18}{x+y}+\frac{6}{x+y}=\frac{18}{5}$ $\therefore \frac{18}{x-y}+\frac{24}{x+y}=\frac{18}{5}$ …… ㉡

이때 $\frac{1}{x-y}=A$, $\frac{1}{x+y}=B$로 놓으면 ㉠, ㉡에서 $\begin{cases}18A-18B=\frac{4}{5} & \cdots\cdots ㉢\\ 18A+24B=\frac{18}{5} & \cdots\cdots ㉣\end{cases}$

㉢, ㉣을 연립하면 $A=\frac{1}{9}$, $B=\frac{1}{15}$이므로 $\frac{1}{x-y}=\frac{1}{9}$, $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{15}$

$\begin{cases}x-y=9\\ x+y=15\end{cases}$에서 $2x=24$ $\therefore x=12$

27 서술형

6 %의 소금물과 2 %의 소금물을 섞었더니 a %의 소금물 b g이 되었다. 여기에 6 %의 소금물의 양의 $\frac{1}{3}$만큼의 물을 더 부었더니 4 %의 소금물 600 g이 되었다고 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. **485**

6 %의 소금물의 양을 x g이라 하고 2 %의 소금물의 양을 y g이라고 하면 더 부은 물의 양은 $\frac{1}{3}x$ g이므로 $\begin{cases}x+y+\frac{1}{3}x=600\\ \frac{6}{100}x+\frac{2}{100}y=\frac{4}{100}\times600\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}4x+3y=1800 & \cdots\cdots ㉠\\ 3x+y=1200 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$ ····40 %

㉠, ㉡을 연립하면 $x=360$, $y=120$ ······························ 30 %

따라서 6 %의 소금물과 2 %의 소금물을 섞었을 때의 소금물의 양은 $b=360+120=480$ (g)이고 두 소금물을 섞었을 때의 소금의 양은 $\frac{4}{100}\times600=24$ (g)이므로 소금물의 농도는 $a=\frac{24}{480}\times100=5$ (%)이다.

$\therefore a+b=5+480=485$ ······························ 30 %

A, B 두 그릇에 담긴 소금물의 농도를 각각 a %, b %라고 하면 A 그릇의 소금물의 반을 B 그릇의 소금물에 섞었을 때 A 그릇의 소금물 300 g에 들어 있는 소금의 양은 $3a$ g

B 그릇의 소금물 900 g에 들어 있는 소금의 양은 $(3a+6b)$ g

28

A, B 두 그릇에 소금물이 각각 600 g씩 들어 있다. 먼저 A 그릇의 소금물의 반을 B 그릇에 붓고 잘 섞은 뒤, 다시 B 그릇의 소금물의 반을 A 그릇에 붓고 잘 섞었더니 최종적으로 A 그릇의 소금물의 농도는 16 %, B 그릇의 소금물의 농도는 12 %가 되었다. 처음 A 그릇에 들어 있던 소금물의 농도는?

① 21 % ✓② 22 % ③ 23 %
④ 24 % ⑤ 25 %

B 그릇의 소금물의 반을 다시 A 그릇의 소금물에 섞었을 때 A 그릇의 소금물 750 g에 들어 있는 소금의 양은 $(4.5a+3b)$ g

A 그릇의 소금물 750 g의 농도는 16 %이므로

$\frac{4.5a+3b}{750}=\frac{16}{100}$ $\therefore 3a+2b=80$ …… ㉠

B 그릇의 소금물 450 g에 들어 있는 소금의 양은 $(1.5a+3b)$ g

B 그릇의 소금물 450 g의 농도는 12 %이므로

$\frac{1.5a+3b}{450}=\frac{12}{100}$ $\therefore a+2b=36$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=22$, $b=7$

29

사과즙과 오렌지즙을 섞어 주스를 만들었다. 병 A에는 사과즙과 오렌지즙이 1 : 2의 비율로 섞인 주스가 담겨 있고, 병 B에는 사과즙과 오렌지즙이 3 : 2의 비율로 섞인 주스가 담겨 있다. 두 병의 주스를 섞어 사과즙과 오렌지즙이 7 : 6의 비율로 섞인 주스 260 mL를 만들었을 때, 병 B에 들어 있던 주스의 양은?

① 160 mL ② 180 mL ✓③ 200 mL
④ 220 mL ⑤ 240 mL

병 A에 들어 있던 주스의 양을 x mL, 병 B에 들어 있던 주스의 양을 y mL라고 하면

$x+y=260$ …… ㉠

새로 만들어진 주스에 들어 있는 사과즙의 양은 $\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{5}y\right)$ mL이고 오렌지즙의 양은 $\left(\frac{2}{3}x+\frac{2}{5}y\right)$ mL이므로 $\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{5}y\right):\left(\frac{2}{3}x+\frac{2}{5}y\right)=7:6$

$6\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{5}y\right)=7\left(\frac{2}{3}x+\frac{2}{5}y\right)$ $\therefore 10x-3y=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $x=60$, $y=200$

30

금속 A는 철 50 %, 니켈 20 %를 포함한 합금이고 금속 B는 철 30 %, 니켈 40 %를 포함한 합금이다. 이 두 종류의 합금 A, B를 혼합하여 철 13 kg, 니켈 8 kg 포함하는 합금을 만들려고 한다. 섞은 두 금속 A, B의 무게를 각각 a kg, b kg이라고 할 때, $a+b$의 값은?

① 26 ② 27 ③ 28
④ 29 ✓⑤ 30

만들려는 합금에 들어간 금속 A의 무게를 x kg, 금속 B의 무게를 y kg이라고 하면

$\begin{cases}0.5x+0.3y=13\\ 0.2x+0.4y=8\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}5x+3y=130 & \cdots\cdots ㉠\\ x+2y=40 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠$\times2-$㉡$\times3$을 하면 $7x=140$ $\therefore x=20$

$x=20$을 ㉠에 대입하면 $100+3y=130$, $3y=30$ $\therefore y=10$

따라서 만들려는 합금에 들어간 금속 A의 무게는 20 kg, 금속 B의 무게는 10 kg이므로

$a=20$, $b=10$ $\therefore a+b=20+10=30$

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

대표 문제

어느 공장에서 같은 상품을 만드는 A, B 두 기계를 설치하였다. 두 기계는 각각 일정한 속도로 상품을 만들고, 작동을 시작할 때 불량품 30개를 만든 후 정상품을 생산하며 작동을 시작할 때 나오는 불량품들은 폐기한다. 첫째 날은 A 기계와 B 기계를 동시에 30분 동안 작동시킨 후 B 기계는 멈추고 A 기계만 20분 동안 추가로 계속 작동시켰더니 1420개의 정상품을 만들었고, 둘째 날에는 A 기계만 40분간 작동시켰다가 멈춘 후 다시 A 기계와 B 기계를 동시에 20분간 작동시켜 1430개의 정상품을 만들었다. 이때 A 기계만을 도중에 멈추지 않고 작동시켜 830개의 정상품을 만드는 데 걸리는 시간은 몇 분인지 구하시오.

함께 풀기

STEP 1

주어진 조건과 구해야 하는 것 확인하기

주어진 조건: ① 각각 일정한 속도로 상품을 만드는 두 기계
② 두 기계 작동시 처음 불량품 30개 생산
③ A, B 두 기계 30분 작동 후, B 기계만 멈추고 A 기계 20분 작동시 정상품 1420개 생산
④ A 기계 40분 작동 후 멈춘 뒤 다시 A, B 두 기계 20분 작동시 정상품 1430개 생산

구해야 하는 것: A 기계만 멈추지 않고 작동시켰을 때, 830개의 정상품을 만드는 데 걸리는 시간

STEP 2

미지수 x, y를 정하고, 주어진 조건에서 x, y에 대한 일차방정식을 세운다.

A, B 두 기계로 1분 동안 만들 수 있는 상품의 개수를 각각 x, y라고 하면 첫째 날 A는 50분 작동시키고 B는 30분 작동시켜 1420개의 정상품을 만들었을 때, 불량품은 (2×30)개 만들었으므로

$50x+30y-2\times30=1420$, $50x+30y=1480$

$\therefore\ 5x+3y=148$ $\cdots\cdots$ ㉠

둘째 날 A는 40분 작동시켰다가 멈춘 후 다시 20분 작동시키고 B는 20분 작동시켜 1430개의 정상품을 만들었고 불량품은 (3×30)개 만들었으므로

$60x+20y-3\times30=1430$, $60x+20y=1520$

$\therefore\ 3x+y=76$ $\cdots\cdots$ ㉡

STEP 3

연립일차방정식을 풀어 x, y의 값을 구한다.

㉠$-$㉡$\times3$을 하면 $-4x=-80$ $\therefore\ x=20$

$x=20$을 ㉡에 대입하면 $60+y=76$ $\therefore\ y=16$

STEP 4

A 기계만 작동시켜 상품을 생산하는 데 걸리는 시간을 구한다.

A 기계를 t분 작동시켜 830개의 정상품을 만들면 30개의 불량품이 나오므로

$20t-30=830$, $20t=860$ $\therefore\ t=43$

따라서 A 기계만 멈추지 않고 작동시켜 830개의 정상품을 만드는 데 걸리는 시간은 43분이다.

답 43분

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

01 연립방정식 $\begin{cases} 5|x|-2|y|=k+4 \\ 4|x|+3|y|=40 \end{cases}$을 만족시키는 x, y가 모두 정수일 때, 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. **69**

$|x|=a$, $|y|=b$라고 하면

$\begin{cases} 5a-2b=k+4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4a+3b=40 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×3+㉡×2를 하면 $23a=3k+92$ $\quad \therefore a=\frac{3k+92}{23}$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠×4−㉡×5를 하면 $-23b=4k-184$ $\quad \therefore b=\frac{184-4k}{23}$

이때 주어진 연립방정식의 우변이 모두 자연수이므로 a, b는 음이 아닌 정수이다.

따라서 $3k+92$와 $184-4k$가 0 또는 23의 배수이어야 하므로

$184-4k$가 될 수 있는 값은

0, 23, 46, 69, 92, 115, 138, 161, 184이다.

$184-4k=0$일 때, $4k=184$ $\quad \therefore k=46$

$184-4k=23$일 때, $4k=161$ $\quad \therefore k=\frac{161}{4}$

$184-4k=46$일 때, $4k=138$ $\quad \therefore k=\frac{69}{2}$

$184-4k=69$일 때, $4k=115$ $\quad \therefore k=\frac{115}{4}$

$184-4k=92$일 때, $4k=92$ $\quad \therefore k=23$

$184-4k=115$일 때, $4k=69$ $\quad \therefore k=\frac{69}{4}$

$184-4k=138$일 때, $4k=46$ $\quad \therefore k=\frac{23}{2}$

$184-4k=161$일 때, $4k=23$ $\quad \therefore k=\frac{23}{4}$

$184-4k=184$일 때, $4k=0$ $\quad \therefore k=0$

이때 k는 자연수이므로 k의 값은 23, 46이다.

$k=23$, $k=46$을 ㉢에 각각 대입하면

$a=\frac{69+92}{23}=7$, $a=\frac{138+92}{23}=10$으로 모두 조건을 만족시킨다.

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은

$23+46=69$

02 연립방정식 $\begin{cases} 10x-15y=2k & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+12y=5k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해가 $x=p$, $y=q$이다. 세 자연수 p, q, k의 최소공배수가 540일 때, p, q, k의 값의 합을 구하시오. **84**

㉠×4+㉡×5를 하면 $55x=33k$ $\quad \therefore x=\frac{3}{5}k$

이를 ㉡에 대입하면 $\frac{9}{5}k+12y=5k$, $12y=\frac{16}{5}k$ $\quad \therefore y=\frac{4}{15}k$

$\therefore p=\frac{3}{5}k$, $q=\frac{4}{15}k$

이때 p, q는 자연수이므로 k는 15의 배수이어야 한다.

$k=15l$ (l은 자연수)이라고 하면 $p=9l$, $q=4l$

세 자연수 $9l=3^2\times l$, $4l=2^2\times l$, $15l=3\times5\times l$의 최소공배수는

$2^2\times3^2\times5\times l$이고 이 값이 $540=2^2\times3^3\times5$이므로

$2^2\times3^2\times5\times l=2^2\times3^3\times5$ $\quad \therefore l=3$

따라서 $p=9\times3=27$, $q=4\times3=12$, $k=15\times3=45$이므로

$p+q+k=27+12+45=84$

03 연립방정식 $\begin{cases} \frac{5xy}{x+y}+\frac{10xy}{x-y}=-42 \\ \frac{15xy}{x+y}+\frac{5xy}{x-y}=-96 \end{cases}$의 해를 구하시오. **$x=3$, $y=-2$**

$\frac{xy}{x+y}=A$, $\frac{xy}{x-y}=B$라고 하면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} 5A+10B=-42 & \cdots\cdots ㉠ \\ 15A+5B=-96 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡×2를 하면 $-25A=150$ $\quad \therefore A=-6$

$A=-6$을 ㉠에 대입하면 $-30+10B=-42$ $\quad \therefore B=-\frac{6}{5}$

따라서 $\begin{cases} \frac{xy}{x+y}=-6 \\ \frac{xy}{x-y}=-\frac{6}{5} \end{cases}$이므로 $\begin{cases} \frac{x+y}{xy}=-\frac{1}{6} \\ \frac{x-y}{xy}=-\frac{5}{6} \end{cases}$에서

$\begin{cases} \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=-\frac{1}{6} & \cdots\cdots ㉢ \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=-\frac{5}{6} & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢+㉣을 하면 $\frac{2}{y}=-1$ $\quad \therefore y=-2$

㉢−㉣을 하면 $\frac{2}{x}=\frac{2}{3}$ $\quad \therefore x=3$

04 한 자리 자연수 a, b $(a>b)$에 대하여 두 순환소수 x, y를 $x=0.\dot{a}\dot{b}$, $y=0.a\dot{b}$, $c=a-b$라고 할 때, 연립방정식 $\begin{cases} 11x-2y=7+\dfrac{c}{9} \\ 99x-90y=13-c \end{cases}$ 를 만족시키는 x, y에 대하여 $99x+6y$의 값을 구하시오. 88

$x=0.\dot{a}\dot{b}=\dfrac{10a+b}{99}$, $y=0.a\dot{b}=\dfrac{9a+b}{90}$이고 $c=a-b$이므로

$11x-2y=7+\dfrac{c}{9}$에서 $11\times\dfrac{10a+b}{99}-2\times\dfrac{9a+b}{90}=7+\dfrac{a-b}{9}$

$5(10a+b)-(9a+b)=315+5(a-b)$

$50a+5b-9a-b=315+5a-5b$ $\quad\therefore 4a+b=35$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, $99x-90y=13-c$에서 $99\times\dfrac{10a+b}{99}-90\times\dfrac{9a+b}{90}=13-(a-b)$

$10a+b-9a-b=13-a+b$ $\quad\therefore 2a-b=13$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면 $6a=48$ $\quad\therefore a=8$

$a=8$을 ㉠에 대입하면 $32+b=35$ $\quad\therefore b=3$

따라서 $x=\dfrac{10\times8+3}{99}=\dfrac{83}{99}$, $y=\dfrac{9\times8+3}{90}=\dfrac{5}{6}$이므로

$99x+6y=99\times\dfrac{83}{99}+6\times\dfrac{5}{6}=83+5=88$

05 기현이와 지선이는 가위바위보를 하여 계단 오르기 게임을 하였다. 이긴 사람은 3계단을 올라가고 진 사람은 2계단을 내려가고 비기는 경우에는 1계단을 올라가기로 하였다. 가위바위보를 15번 한 결과 기현이가 처음 위치에서 올라간 계단 수가 지선이가 처음 위치에서 올라간 계단 수의 3배가 되었을 때, 기현이가 이긴 횟수를 구하시오. 6

기현이가 이긴 횟수를 x, 진 횟수를 y라고 하면 두 사람이 비긴 횟수는 $15-x-y$이고 지선이가 이긴 횟수는 y, 진 횟수는 x이다. 또, 지선이가 처음 위치에서 올라간 계단 수를 m (m은 자연수)이라고 하면 기현이가 처음 위치에서 올라간 계단 수는 $3m$이다.

따라서 $\begin{cases} 3x-2y+(15-x-y)=3m \\ 3y-2x+(15-x-y)=m \end{cases}$이므로

$\begin{cases} 2x-3y=3m-15 & \cdots\cdots ㉠ \\ -3x+2y=m-15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×2+㉡×3을 하면 $-5x=9m-75$ $\quad\therefore x=\dfrac{75-9m}{5}$

이때 x는 자연수이므로 $75-9m$이 5의 배수이어야 한다.

$75-9m$이 될 수 있는 값은 5, 10, 15, …, 65

이 중 $75-9m$이 5의 배수가 되는 자연수 m의 값은 $m=5$뿐이므로

$x=\dfrac{75-9\times5}{5}=6$

따라서 기현이가 이긴 횟수는 6이다.

06 어느 문구점에서 볼펜 300자루와 노트 450권을 들여와 볼펜은 원가의 40 %, 노트는 원가의 20 %의 이익을 붙여 정가를 정하였다. 볼펜 전체 수량의 $\dfrac{1}{2}$과 노트 전체 수량의 $\dfrac{2}{3}$를 정가로 팔고, 문구가 잘 팔리지 않아 볼펜과 노트의 남은 수량은 각각 정가의 20 %, 정가의 10 %를 할인하여 팔았다. 볼펜과 노트의 구입 원가 총액은 1170000원이고 전량을 판매하여 223200원의 이익을 얻었다고 할 때, 볼펜 1자루와 노트 1권의 처음 정가의 합을 구하시오. 3840원

볼펜 1자루와 노트 1권의 원가를 각각 x원, y원이라고 하면

$300x+450y=1170000$ $\quad\therefore 2x+3y=7800$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

볼펜 1자루의 정가는 $\left(1+\dfrac{40}{100}\right)x=\dfrac{140}{100}x$(원)

노트 1권의 정가는 $\left(1+\dfrac{20}{100}\right)y=\dfrac{120}{100}y$(원)

볼펜 1자루를 정가에서 20 % 할인한 판매 가격은

$\dfrac{140}{100}x\left(1-\dfrac{20}{100}\right)=\dfrac{112}{100}x$(원)

노트 1권을 정가에서 10 % 할인한 판매 가격은

$\dfrac{120}{100}y\left(1-\dfrac{10}{100}\right)=\dfrac{108}{100}y$(원)

볼펜 전체 수량의 $\dfrac{1}{2}$인 $300\times\dfrac{1}{2}=150$(자루)와 노트 전체 수량의 $\dfrac{2}{3}$인 $450\times\dfrac{2}{3}=300$(권)을 정가에 팔아 얻는 이익은

$150\times\dfrac{40}{100}x+300\times\dfrac{20}{100}y=60x+60y$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

볼펜 전체 수량의 $\dfrac{1}{2}$인 150자루와 노트 전체 수량의 $\dfrac{1}{3}$인 150권을 할인된 가격에 팔아 얻는 이익은

$150\times\dfrac{12}{100}x+150\times\dfrac{8}{100}y=18x+12y$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

전량을 판매했을 때 얻는 이익은 ㉡+㉢이므로

$(60x+60y)+(18x+12y)=223200$, $78x+72y=223200$

$\therefore 13x+12y=37200$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉣−㉠×4를 하면 $5x=6000$ $\quad\therefore x=1200$

$x=1200$을 ㉠에 대입하면 $2400+3y=7800$ $\quad\therefore y=1800$

따라서 볼펜 1자루의 원가는 1200원이므로 처음 정가는

$1200\times\dfrac{140}{100}=1680$(원), 노트 1권의 원가는 1800원이므로

처음 정가는 $1800\times\dfrac{120}{100}=2160$(원)이므로 처음 정가의 합은

$1680+2160=3840$(원)이다.

_____ 점 / 100점

01

등식 $(a+2b)x^2+ax-5y=(b+6)x^2+3x-by$가 미지수가 2개인 일차방정식이 되기 위한 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는? [4점]

① 1　　② 2　　✓③ 3　　④ 4　　⑤ 5

$(a+b-6)x^2+(a-3)x+(-5+b)y=0$
위의 식이 미지수가 2개인 일차방정식이 되려면
$a+b-6=0$, $a-3\neq 0$, $-5+b\neq 0$이어야 하므로
$a+b=6$, $a\neq 3$, $b\neq 5$
이때 a, b가 자연수이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는
$(2, 4)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$의 3개이다.

02

일차방정식 $0.\dot{4}x+0.0\dot{8}y=1.\dot{3}$의 한 해가 $x=2$, $y=k$일 때, k의 값은? [4점]

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　✓⑤ 5

$\frac{4}{9}x+\frac{4}{45}y=\frac{4}{3}$　　$\therefore 5x+y=15$
$x=2$, $y=k$를 $5x+y=15$에 대입하면
$10+k=15$　　$\therefore k=5$

03

연립방정식 $\begin{cases} y=3x-1 \\ ax+y=-16 \end{cases}$의 해 $x=m$, $y=n$이 일차방정식 $7x-3y=9$를 만족시킬 때, $a+m+n$의 값은?
(단, a는 상수이다.) [4점]

① -15　　✓② -11　　③ -9　　④ 5　　⑤ 13

주어진 연립방정식의 해는 연립방정식 $\begin{cases} y=3x-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 7x-3y=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.
㉠을 ㉡에 대입하면 $7x-3(3x-1)=9$, $7x-9x+3=9$
$-2x=6$　　$\therefore x=-3$
$x=-3$을 ㉠에 대입하면 $y=-9-1=-10$
$x=-3$, $y=-10$을 $ax+y=-16$에 대입하면
$-3a-10=-16$, $-3a=-6$　　$\therefore a=2$
따라서 $a=2$, $m=-3$, $n=-10$이므로
$a+m+n=2+(-3)+(-10)=-11$

04

연립방정식 $\begin{cases} ax-by=-5 \\ bx-ay=1 \end{cases}$에서 잘못하여 a와 b를 서로 바꾸어 놓고 풀었더니 해가 $x=3$, $y=-1$이 되었다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① -3　　② -2　　✓③ -1　　④ 2　　⑤ 3

$\begin{cases} a+3b=-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3a+b=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠$\times 3-$㉡을 하면 $8b=-16$　　$\therefore b=-2$
$b=-2$를 ㉠에 대입하면 $a-6=-5$　　$\therefore a=1$
$\therefore a+b=1+(-2)=-1$

05

세 일차방정식 $ax-6y=1$, $0.2x+0.3y=-0.1$, $(x+2):(y+1)=3:4$의 해가 서로 같을 때, 상수 a의 값은? [4점]

✓① -3　　② -1　　③ $-\frac{1}{3}$　　④ $\frac{1}{3}$　　⑤ 3

세 일차방정식의 공통인 해는 연립방정식 $\begin{cases} 0.2x+0.3y=-0.1 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+2):(y+1)=3:4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.
㉠$\times 10$을 하면 $2x+3y=-1$　　$\cdots\cdots$ ㉢
㉡에서 $4(x+2)=3(y+1)$, $4x+8=3y+3$　　$\therefore 4x-3y=-5$　　$\cdots\cdots$ ㉣
㉢$+$㉣을 하면 $6x=-6$　　$\therefore x=-1$
$x=-1$을 ㉢에 대입하면 $-2+3y=-1$, $3y=1$　　$\therefore y=\frac{1}{3}$
$x=-1$, $y=\frac{1}{3}$을 $ax-6y=1$에 대입하면 $-a-2=1$　　$\therefore a=-3$

06

영민이와 수연이가 연립방정식 $\begin{cases} ax+4y=5 \\ 5x-by=17 \end{cases}$을 푸는데 영민이는 $ax+4y=5$의 x의 계수를 잘못 보고 풀었고, 수연이는 $5x-by=17$의 y의 계수를 잘못 보고 풀었다. 그 결과 영민이는 $x=\frac{21}{5}$, $y=2$를 해로 구했고 수연이는 $x=1$, $y=\frac{1}{2}$을 해로 구했다. 이때 처음 연립방정식의 해는?
(단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $x=-1$, $y=-1$　　② $x=-1$, $y=1$　　③ $x=1$, $y=-1$　　✓④ $x=3$, $y=-1$　　⑤ $x=3$, $y=1$

$x=\frac{21}{5}$, $y=2$를 $5x-by=17$에 대입하면 $21-2b=17$, $-2b=-4$　　$\therefore b=2$
$x=1$, $y=\frac{1}{2}$을 $ax+4y=5$에 대입하면 $a+2=5$　　$\therefore a=3$
따라서 처음 연립방정식은 $\begin{cases} 3x+4y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x-2y=17 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠$+$㉡$\times 2$를 하면 $13x=39$　　$\therefore x=3$
$x=3$을 ㉠에 대입하면 $9+4y=5$, $4y=-4$　　$\therefore y=-1$

07

다음 보기에서 연립방정식 $\begin{cases} ax-3(y+1)=4x \\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{4}y=1-\frac{b}{12} \end{cases}$ 에 대한 설명으로 옳은 것만을 모두 고른 것은?

(단, a, b는 상수이다.) [4점]

〈 보기 〉
ㄱ. $a=9$, $b=12$이면 해가 없다.
ㄴ. $a=12$, $b=-9$이면 해가 없다.
ㄷ. $a=12$, $b=9$이면 해가 무수히 많다.
ㄹ. $a=9$이면 해가 한 쌍이다.

① ㄱ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄷ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

$\begin{cases} (a-4)x-3y=3 \\ 8x-3y=12-b \end{cases}$

ㄱ. $a=9$, $b=12$이면 $\begin{cases} 5x-3y=3 \\ 8x-3y=0 \end{cases}$이므로 해가 1개이다.

ㄴ. $a=12$, $b=-9$이면 $\begin{cases} 8x-3y=3 \\ 8x-3y=21 \end{cases}$이므로 해가 없다.

ㄷ. $a=12$, $b=9$이면 $\begin{cases} 8x-3y=3 \\ 8x-3y=3 \end{cases}$이므로 해가 무수히 많다.

ㄹ. $a=9$이면 $\begin{cases} 5x-3y=3 \\ 8x-3y=12-b \end{cases}$이므로 해가 한 쌍이다.

08

현재 지원이와 삼촌의 나이의 합은 57살이고, 8년 후에는 삼촌의 나이가 지원이의 나이의 2배보다 4살이 많아진다고 한다. 현재 지원이와 삼촌의 나이의 차는? [4점]

① 25살 ② 26살 ✓③ 27살
④ 28살 ⑤ 29살

현재 지원이의 나이를 x살, 삼촌의 나이를 y살이라고 하면

$\begin{cases} x+y=57 \\ y+8=2(x+8)+4 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+y=57 & \cdots\cdots ㉠ \\ y=2x+12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면 $x+(2x+12)=57$, $3x=45$ $\therefore x=15$
$x=15$를 ㉡에 대입하면 $y=30+12=42$
따라서 현재 지원이는 15살, 삼촌은 42살이므로 나이의 차는
$42-15=27$(살)이다.

09

정현이와 소현이가 둘레의 길이가 2.8 km인 호수의 둘레를 따라 걷는데 정현이가 400 m를 걷는 동안 소현이는 300 m를 걷는다고 한다. 정현이와 소현이가 같은 지점에서 동시에 출발하여 서로 반대 방향으로 걸으면 10분 후에 처음으로 다시 만날 때, 정현이와 소현이의 속력의 차는?

(단, 정현이와 소현이의 속력은 각각 일정하다.) [4점]

① 분속 30 m ② 분속 35 m ✓③ 분속 40 m
④ 분속 45 m ⑤ 분속 50 m

정현이의 속력을 분속 a m, 소현이의 속력을 분속 b m라고 하면

$a:b=400:300$, $400b=300a$ $\therefore b=\frac{3}{4}a$ $\cdots\cdots ㉠$

$10a+10b=2800$ $\therefore a+b=280$ $\cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면 $a+\frac{3}{4}a=280$, $\frac{7}{4}a=280$ $\therefore a=160$

$a=160$을 ㉠에 대입하면 $b=120$
따라서 정현이의 속력은 분속 160 m, 소현이의 속력은 분속 120 m이므로 정현이와 소현이의 속력의 차는 분속 $160-120=40$(m)이다.

10

다음 조건을 만족시키는 두 수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는? [4점]

- $2x-3y+28=0$
- x, y는 정수이다.
- $xy<0$

① 1 ② 2 ③ 3
✓④ 4 ⑤ 5

(i) $x>0$, $y<0$일 때
$-3y>0$이므로 $2x-3y+28>0$
즉, $2x-3y+28=0$을 만족시키는 x, y의 값이 존재하지 않는다.
(ii) $x<0$, $y>0$일 때
$2x-3y+28=0$, 즉 $2x-3y=-28$을 만족시키는 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)은
$(-2, 8)$, $(-5, 6)$, $(-8, 4)$, $(-11, 2)$
(i), (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수는 4이다.

11

오른쪽 표의 가로, 세로, 대각선에 놓인 수의 합이 모두 18로 같을 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값은? [4점]

$x-y+1$		b
10	a	
x	$-3y+5$	7

① 27 ② 36 ③ 45
✓④ 54 ⑤ 63

첫 번째 세로 열의 세 수의 합 $(x-y+1)+10+x=18$에서 $2x-y=7$ $\cdots\cdots ㉠$

세 번째 가로 행의 세 수의 합 $x+(-3y+5)+7=18$에서 $x-3y=6$ $\cdots\cdots ㉡$

㉠$-$㉡$\times 2$를 하면 $5y=-5$ $\therefore y=-1$
$y=-1$을 ㉡에 대입하면 $x+3=6$ $\therefore x=3$
왼쪽 위에서 오른쪽 아래로의 대각선의 세 수의 합이 $(x-y+1)+a+7=18$
즉, $\{3-(-1)+1\}+a+7=18$이므로 $a=6$
또, 왼쪽 아래에서 오른쪽 위로의 대각선의 세 수의 합이
$x+a+b=18$, 즉 $3+6+b=18$이므로 $b=9$ $\therefore ab=6\times 9=54$

12

x, y에 대한 방정식 $(a-4b)x+(2a+b)y=0$의 해를 만족시키는 순서쌍 (x, y)가 $(1, 2)$일 때, $4ax-5by=3(a-b)$를 만족시키는 한 자리 자연수 x, y의 순서쌍은 (m, n)이다. 이때 $m+n$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.) [4점]

✓① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

$x=1$, $y=2$를 $(a-4b)x+(2a+b)y=0$에 대입하면 $(a-4b)+2(2a+b)=0$

$5a-2b=0$ $\therefore a=\frac{2}{5}b$

$a=\frac{2}{5}b$를 $4ax-5by=3(a-b)$에 대입하면 $\frac{8}{5}bx-5by=3\left(\frac{2}{5}b-b\right)$

$\frac{8}{5}bx-5by=-\frac{9}{5}b$, $8x-25y=-9$ $\therefore x=\frac{25y-9}{8}$

이때 x, y는 한 자리 자연수이므로 $25y-9$가 8의 배수이어야 한다.
따라서 $y=1$, $y=9$이고, 그때의 x의 값은 $x=2$, $x=27$이다.
이때 x는 한 자리 자연수이므로 $x=2$
즉, $m=2$, $n=1$이므로 $m+n=2+1=3$

13

두 수 x, y에 대하여 $x \triangledown y$는 x, y 중 작지 않은 수를 나타내고 $x \triangle y$는 x, y 중 크지 않은 수를 나타낸다고 하자. 연립방정식 $\begin{cases} x \triangledown y = 2x+1 \\ x \triangle y = x+y-5 \end{cases}$의 해를 $x=a$, $y=b$라고 할 때, $a+b$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ✓⑤ 7

(i) $x \geq y$일 때
$\begin{cases} x=2x+1 \\ y=x+y-5 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
이므로 ㉠, ㉡을 만족시키는 해는 없다.
(ii) $x < y$일 때
$\begin{cases} y=2x+1 \\ x=x+y-5 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} y=2x+1 & \cdots\cdots ㉢ \\ y=5 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$
㉣을 ㉢에 대입하면 $5=2x+1$, $2x=4$ $\quad \therefore x=2$
(i), (ii)에 의하여 $a=2$, $b=5$
$\therefore a+b=2+5=7$

14

연립방정식 $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ 3x-2y=9-a \end{cases}$를 만족시키는 x와 y의 값의 차가 4일 때, 가능한 모든 상수 a의 값의 합은? [4점]

① 21 ② 22 ③ 23
✓④ 24 ⑤ 25

x와 y의 값의 차가 4이므로 $|x-y|=4$
즉, $x-y=4$ 또는 $x-y=-4$
(i) $x-y=4$일 때
$\begin{cases} 2x-y=-3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-y=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠−㉡을 하면 $x=-7$
$x=-7$을 ㉡에 대입하면
$-7-y=4$ $\quad \therefore y=-11$
$x=-7$, $y=-11$을 $3x-2y=9-a$에 대입하면
$-21+22=9-a$ $\quad \therefore a=8$
(ii) $x-y=-4$일 때
$\begin{cases} 2x-y=-3 & \cdots\cdots ㉢ \\ x-y=-4 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$
㉢−㉣을 하면 $x=1$
$x=1$을 ㉣에 대입하면 $1-y=-4$ $\quad \therefore y=5$
$x=1$, $y=5$를 $3x-2y=9-a$에 대입하면
$3-10=9-a$ $\quad \therefore a=16$
(i), (ii)에 의하여 a의 값은 8, 16이므로 a의 합은 $8+16=24$

15

백색 페인트와 흑색 페인트가 섞여 있는 혼합물 A와 혼합물 B가 있다. 900 g의 혼합물 A에는 백색과 흑색의 비율이 4 : 1로 섞여 있고, 1000 g의 혼합물 B에는 백색과 흑색의 비율이 2 : 3으로 섞여 있다. 이 두 종류의 혼합물만 사용하여 백색과 흑색의 비율이 4 : 3인 혼합물을 만들려고 할 때, 만들 수 있는 혼합물의 양은 최대 몇 g인가? [6점]

① 1600 g ② 1650 g ③ 1700 g
✓④ 1750 g ⑤ 1800 g

혼합물 A에서 사용하는 페인트의 양을 x g, 혼합물 B에서 사용하는 페인트의 양을 y g이라고 하면 새로운 혼합물의 백색 페인트의 양은 $\left(\frac{4}{5}x+\frac{2}{5}y\right)$ g이고 흑색 페인트의 양은 $\left(\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}y\right)$ g이므로 $\left(\frac{4}{5}x+\frac{2}{5}y\right) : \left(\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}y\right)=4:3$
$3(4x+2y)=4(x+3y)$, $12x+6y=4x+12y$ $\quad \therefore 4x=3y$
따라서 두 혼합물 A와 B를 3 : 4의 비율로 섞어야 하므로
$x=3k$, $y=4k$ $(k \neq 0)$라고 하면
$3k \leq 900$, $4k \leq 1000$ $\quad \therefore k \leq 250$
즉, $k=250$일 때까지 혼합물을 사용할 수 있으므로 혼합물 A의 최대 사용량은
$3k=3 \times 250=750$(g)
혼합물 B의 최대 사용량은 $4k=4 \times 250=1000$(g)
따라서 만들 수 있는 혼합물의 양은 최대
$750+1000=1750$(g)이다.

16

다음 네 일차방정식이 한 쌍의 공통인 해를 가질 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점] 2

$$4x-3y=10,\ bx+(1-a)y=3,$$
$$(a-1)x-y=2(a-1),\ 5x-2y=9$$

주어진 네 일차방정식의 공통인 해는 연립방정식 $\begin{cases} 4x-3y=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x-2y=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.
㉠×2−㉡×3을 하면 $-7x=-7$ $\quad\therefore x=1$
$x=1$을 ㉠에 대입하면 $4-3y=10$, $-3y=6$ $\quad\therefore y=-2$
$x=1$, $y=-2$를 $(a-1)x-y=2(a-1)$에 대입하면
$a-1+2=2a-2$ $\quad\therefore a=3$
$a=3$, $x=1$, $y=-2$를 $bx+(1-a)y=3$에 대입하면
$b+(-2)\times(-2)=3$, $b+4=3$ $\quad\therefore b=-1$
$\therefore a+b=3+(-1)=2$

17

연립방정식 $\begin{cases} ax-y=4 \\ 2x-3y=16 \end{cases}$에서 y의 절댓값이 x의 절댓값의 2배일 때, 모든 상수 a의 값의 합을 구하시오. [4점] 1

y의 절댓값이 x의 절댓값의 2배이므로 $|y|=2|x|$ $\quad\therefore y=2x$ 또는 $y=-2x$
(i) $y=2x$일 때
$y=2x$를 $2x-3y=16$에 대입하면
$2x-6x=16$, $-4x=16$ $\quad\therefore x=-4$
$x=-4$를 $y=2x$에 대입하면 $y=-8$
$x=-4$, $y=-8$을 $ax-y=4$에 대입하면
$-4a+8=4$, $-4a=-4$ $\quad\therefore a=1$
(ii) $y=-2x$일 때
$y=-2x$를 $2x-3y=16$에 대입하면
$2x+6x=16$, $8x=16$ $\quad\therefore x=2$
$x=2$를 $y=-2x$에 대입하면 $y=-4$
$x=2$, $y=-4$를 $ax-y=4$에 대입하면
$2a+4=4$, $2a=0$ $\quad\therefore a=0$
(i), (ii)에 의하여 a의 값은 0 또는 1이므로 a의 값의 합은 $0+1=1$

18

은우의 중간고사 수학 성적과 영어 성적의 합은 156점이었다. 기말고사에서는 수학 성적은 8 % 떨어지고 영어 성적은 15 % 올라서 합이 161점이 되었다. 은우의 기말고사 영어 성적을 구하시오. [4점] 87.4점

은우의 중간고사 수학 성적을 x점, 영어 성적을 y점이라고 하면
$\begin{cases} x+y=156 \\ x\left(1-\frac{8}{100}\right)+y\left(1+\frac{15}{100}\right)=161 \end{cases}$
즉, $\begin{cases} x+y=156 & \cdots\cdots ㉠ \\ 92x+115y=16100 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠×92−㉡을 하면 $-23y=-1748$ $\quad\therefore y=76$
$y=76$을 ㉠에 대입하면 $x+76=156$ $\quad\therefore x=80$
따라서 은우의 기말고사 영어 성적은 $76\times\left(1+\frac{15}{100}\right)=87.4$(점)

19

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} 2(x-3y)-5=x+by \\ ax+2y=x+4y+10 \end{cases}$의 해가 무수히 많을 때, x에 대한 일차방정식 $(2a+b+2k)x+2b+3k+1=0$의 해는 없다. 이때 상수 k의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점] $-\frac{1}{2}$

연립방정식 $\begin{cases} 2(x-3y)-5=x+by \\ ax+2y=x+4y+10 \end{cases}$에서 $\begin{cases} x-(6+b)y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ (a-1)x-2y=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠×2를 하면 $2x-(12+2b)y=10$ $\quad\cdots\cdots ㉢$
이때 주어진 연립방정식의 해가 무수히 많으므로 ㉡과 ㉢이 일치해야 한다.
따라서 $a-1=2$이므로 $a=3$
또, $-(12+2b)=-2$이므로 $2b=-10$ $\quad\therefore b=-5$
$a=3$, $b=-5$를 $(2a+b+2k)x+2b+3k+1=0$에 대입하면
$(1+2k)x+3k-9=0$
이 일차방정식의 해가 없으므로 $1+2k=0$, $3k-9\neq0$ $\quad\therefore k=-\frac{1}{2}$

20

다음을 만족시키는 세 자리 자연수를 구하시오. [4점] 524

백의 자리의 숫자가 x, 십의 자리의 숫자가 y, 일의 자리의 숫자가 십의 자리의 숫자의 2배인 세 자리 자연수가 있다. 각 자리의 숫자의 합은 11이고 백의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾸면 처음 수보다 99만큼 작다.

일의 자리의 숫자가 십의 자리의 숫자의 2배이므로 일의 자리의 숫자는 $2y$
각 자리의 숫자의 합은 11이므로 $x+y+2y=11$ $\quad\therefore x+3y=11$ $\quad\cdots\cdots ㉠$
백의 자리와 일의 자리의 숫자를 바꾸면 처음 수보다 99만큼 작으므로
$200y+10y+x=100x+10y+2y-99$ $\quad\therefore x-2y=1$ $\quad\cdots\cdots ㉡$
㉠−㉡을 하면 $5y=10$ $\quad\therefore y=2$
$y=2$를 ㉠에 대입하면 $x+6=11$ $\quad\therefore x=5$
따라서 구하는 세 자리 자연수는 524이다.

21

어느 스포츠 종목에서는 참가 팀들이 승패에 따라 점수를 획득하여 합산 점수가 높은 순으로 순위를 결정한다고 한다. 올해는 승패에 따른 점수 부여 방식을 다음 표와 같이 작년과 다르게 하기로 하였다.

	승	무	패
작년	+3점	0점	−2점
올해	+3점	+1점	0점

A팀은 올해 32게임을 하였고 55점을 획득하였다. 작년의 점수 부여 방식으로 계산한 점수는 31점이라고 할 때, A팀이 비긴 게임의 수를 구하시오. [4점] 10

A팀이 이긴 게임의 수를 x, 비긴 게임의 수를 y라고 하면 진 게임의 수는 $32-x-y$이다. 올해의 방식으로 계산한 점수가 55점이므로
$3x+y=55$ $\quad\cdots\cdots ㉠$
작년의 방식으로 계산한 점수가 31점이므로
$3x-2(32-x-y)=31$ $\quad\therefore 5x+2y=95$ $\quad\cdots\cdots ㉡$
㉠×2−㉡을 하면 $x=15$
$x=15$를 ㉠에 대입하면 $45+y=55$ $\quad\therefore y=10$
따라서 비긴 게임의 수는 10이다.

22, 23번은 서술형입니다. 풀이 과정을 자세히 서술하시오.

22

연립방정식 $\begin{cases} 6x+3y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 10x+6y=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해가 $x=a$, $y=b$이고, 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=-4 \\ bx-ay=-\frac{5}{3} \end{cases}$의 해가 $x=c$, $y=d$일 때, $5ac-7bd$의 값을 구하시오. [7점] 4

㉠×2−㉡을 하면 $2x=1$ $\therefore x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $3+3y=2$, $3y=-1$ $\therefore y=-\frac{1}{3}$

$\therefore a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{3}$ ······ 3점

$a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{3}$을 $\begin{cases} ax+by=-4 \\ bx-ay=-\frac{5}{3} \end{cases}$에 대입하면

$\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=-4 & \cdots\cdots ㉢ \\ -\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y=-\frac{5}{3} & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢×6을 하면 $3x-2y=-24$ ······ ㉤

㉣×6을 하면 $-2x-3y=-10$ ······ ㉥

㉤×2+㉥×3을 하면 $-13y=-78$ $\therefore y=6$ ······ 3점

$y=6$을 ㉤에 대입하면 $3x-12=-24$, $3x=-12$ $\therefore x=-4$

$\therefore c=-4$, $d=6$

$\therefore 5ac-7bd=5\times\frac{1}{2}\times(-4)-7\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times6=-10+14=4$ ······ 1점

23

민수가 집에서 40 km 떨어진 삼촌 댁에 버스와 자전거, 도보를 이용하여 다녀왔다. 삼촌 댁에 갈 때 버스를 탄 거리만큼 돌아올 때 자전거를 타고 이동하였고, 삼촌 댁에 갈 때 자전거를 탄 거리만큼 돌아올 때 버스를 타고 이동하였으며 나머지 거리는 갈 때와 돌아올 때 모두 도보로 이동하였다. 민수가 삼촌 댁에 갈 때는 1시간 50분, 돌아올 때는 2시간 10분이 걸렸고 버스와 자전거 그리고 도보로 이동할 때 속력은 각각 시속 54 km, 시속 27 km, 시속 4 km로 일정했다고 할 때, 삼촌 댁에 갈 때 버스를 타고 간 거리를 구하시오. [7점] **27 km**

삼촌 댁에 갈 때 버스를 탄 거리를 x km, 자전거로 간 거리를 y km라고 하면 삼촌 댁에 갈 때 총 이동거리는 40 km이므로 도보로 이동한 거리는 $(40-x-y)$ km이고

삼촌 댁에 갈 때 걸린 시간은 1시간 50분, 즉 $\frac{11}{6}$시간이므로

$\frac{x}{54}+\frac{y}{27}+\frac{40-x-y}{4}=\frac{11}{6}$, $2x+4y+27(40-x-y)=198$

$\therefore 25x+23y=882$ ······ ㉠

돌아올 때 걸린 시간은 2시간 10분, 즉 $\frac{13}{6}$시간이므로

$\frac{y}{54}+\frac{x}{27}+\frac{40-x-y}{4}=\frac{13}{6}$, $2y+4x+27(40-x-y)=234$

$\therefore 23x+25y=846$ ······ ㉡ ······ 3점

㉠×23−㉡×25를 하면 $-96y=-864$ $\therefore y=9$

$y=9$를 ㉠에 대입하면 $25x+207=882$, $25x=675$ $\therefore x=27$ ······ 3점

따라서 삼촌 댁에 갈 때 버스를 타고 간 거리는 27 km이다. ······ 1점

IV

일차함수

Ⅳ 일차함수

1등급 비법노트

- 함수 $y=f(x)$에서 f는 함수를 뜻하는 function의 첫 글자이다.
- **함수 $y=f(x)$에서 $f(a)$**
  ⇨ $x=a$일 때의 함숫값
  ⇨ $x=a$일 때, y의 값
  ⇨ $f(x)$에서 x 대신 a를 대입하여 얻은 값
- 일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서
  ① x절편: $-\frac{b}{a}$ ($y=0$일 때, x의 값)
  ② y절편: b ($x=0$일 때, y의 값)
- 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기
  ⇨ $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(\text{또는 } \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)$
- 일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서 b의 값이 일정할 때, $|a|$가 클수록 그래프는 y축에 가까워진다.
- $b=0$이면 원점을 지난다.

01 일차함수의 그래프

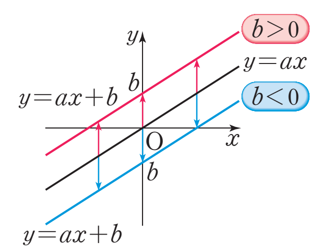
❶ 함수와 일차함수

(1) **함수:** 두 변수 x, y에 대하여 x의 값이 변함에 따라 y의 값이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계가 있을 때, y를 x에 대한 함수라고 한다.
또, y가 x에 대한 함수일 때, 기호로 $y=f(x)$와 같이 나타낸다.

(2) **함숫값:** 함수 $y=f(x)$에서 x의 값에 따라 하나씩 정해지는 y의 값 $f(x)$를 x에 대한 함숫값이라고 한다.

(3) **함수의 그래프:** 함수 $y=f(x)$에서 x의 값과 그 값에 따라 정해지는 y의 값의 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표로 하는 점 전체를 좌표평면 위에 나타낸 것

(4) **일차함수:** 함수 $y=f(x)$에서 $y=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)와 같이 y가 x의 일차식으로 나타날 때, 이 함수를 x에 대한 일차함수라고 한다.

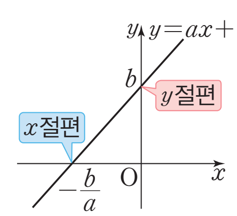


(5) **평행이동:** 한 도형을 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 이동시키는 것

(6) **일차함수 $y=ax+b$의 그래프:** 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 일차함수 $y=ax$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선

❷ 일차함수의 그래프의 절편과 기울기

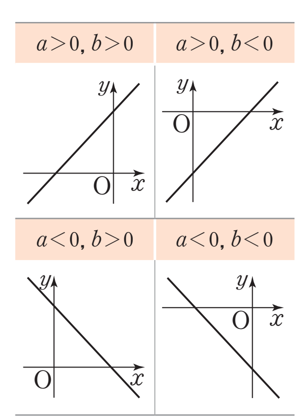
(1) **일차함수의 그래프의 x절편, y절편**
① x절편: 일차함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표
② y절편: 일차함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표



(2) **일차함수의 그래프의 기울기:** 일차함수 $y=ax+b$에서 x의 값의 증가량에 대한 y의 값의 증가량의 비율은 항상 일정하다. 이 증가량의 비율 a를 일차함수 $y=ax+b$의 그래프의 기울기라고 한다.
⇨ $(\text{기울기})=\frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}=a$

❸ 일차함수 $y=ax+b$의 그래프의 성질

(1) **a의 부호:** 그래프의 모양을 결정한다.
① $a>0$이면 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가한다.
⇨ 오른쪽 위로 향하는 직선
② $a<0$이면 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다.
⇨ 오른쪽 아래로 향하는 직선



(2) **b의 부호:** 그래프가 y축과 만나는 부분을 결정한다.
① $b>0$이면 y축과 양의 부분에서 만난다.
⇨ $(y\text{절편})>0$
② $b<0$이면 y축과 음의 부분에서 만난다.
⇨ $(y\text{절편})<0$

4 일차함수의 그래프의 평행과 일치

(1) 기울기가 같은 두 일차함수의 그래프는 서로 평행하거나 일치한다.

두 일차함수 $y=ax+b$, $y=cx+d$에서 두 그래프가

① 서로 평행하면 $a=c$, $b\neq d$　　　② 서로 일치하면 $a=c$, $b=d$

(2) 서로 평행한 두 일차함수의 그래프의 기울기는 같다.

5 일차함수의 식 구하기

(1) **기울기와 y절편을 알 때:** 기울기가 a, y절편이 b인 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식은 $y=ax+b$이다.

(2) **기울기와 한 점을 알 때:** 기울기가 a이고 점 (x_1, y_1)을 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 $y=ax+b$라 하고 $x=x_1$, $y=y_1$을 대입하여 b의 값을 구한다.

(3) **서로 다른 두 점을 알 때:** 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) (단, $x_1\neq x_2$)를 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식은 (기울기)$=a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$를 구한 후, 일차함수의 식을 $y=ax+b$라 하고 한 점의 좌표를 대입하여 b의 값을 구한다.

6 일차함수의 활용

일차함수의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 푼다.

❶ 변수 정하기: 문제의 뜻을 파악하고 변수 x, y를 정한다.

❷ 함수 구하기: x와 y 사이의 관계를 일차함수 $y=ax+b$로 나타낸다.

❸ 답 구하기: 함숫값이나 그래프를 이용하여 구하는 값을 찾는다.

❹ 확인하기: 구한 답이 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

02 일차함수와 일차방정식의 관계

1 일차함수와 일차방정식의 관계

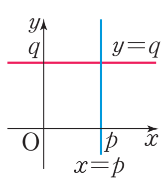
(1) **일차함수와 일차방정식:** 미지수가 2개인 일차방정식 $ax+by+c=0$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$, $b\neq0$)의 그래프는 일차함수 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$의 그래프와 같다.

(2) **직선의 방정식:** x, y의 값의 범위가 모든 수일 때, 일차방정식 $ax+by+c=0$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$, $b\neq0$)의 그래프는 직선이다. 이때 $ax+by+c=0$을 직선의 방정식이라고 한다.

2 일차방정식 $x=p$, $y=q$의 그래프

(1) **일차방정식 $x=p$ ($p\neq0$)의 그래프:** 점 $(p, 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선

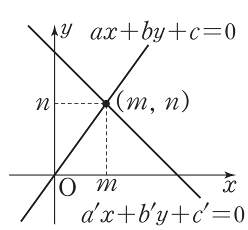
(2) **일차방정식 $y=q$ ($q\neq0$)의 그래프:** 점 $(0, q)$를 지나고 x축에 평행한 직선



3 일차함수의 그래프와 연립일차방정식의 해

(1) 연립일차방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$의 해는 두 일차방정식 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 그래프, 즉 두 일차함수의 그래프의 교점의 좌표와 같다.

(2) 연립일차방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$의 해의 개수는 두 일차방정식 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 그래프의 교점의 개수와 같다.



1등급 비법노트

- 두 일차함수의 그래프에서
  ① 기울기가 같고 y절편이 다르면 ⇨ 평행
  ② 기울기가 같고 y절편도 같으면 ⇨ 일치
- 기울기가 다른 두 일차함수의 그래프는 한 점에서 만난다.
- 기울기가 a이고 점 (x_1, y_1)을 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식
  ⇨ $y-y_1=a(x-x_1)$
- 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식
  ⇨ $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ (단, $x_1\neq x_2$)
- x절편이 m, y절편이 n인 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식
  ⇨ $y=-\dfrac{n}{m}x+n$ (단, $m\neq0$)
- 두 변수에 대한 일차함수의 식을 세울 때에는 단위에 주의한다.
- $ax+by+c=0$에서
  $by=-ax-c$
  $\therefore y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$
- ① 일차방정식 $x=0$의 그래프
  ⇨ y축
  ② 일차방정식 $y=0$의 그래프
  ⇨ x축
- 연립일차방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$에서
  ① 해가 무수히 많다. (일치)
  ⇨ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$
  ② 해가 없다. (평행)
  ⇨ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$
  ③ 한 쌍의 해를 갖는다.
  ⇨ $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}$

개념을 적용하는

Lv. 1 핵심 문제

개념 1 함수와 일차함수

01 출제 주의

다음 중 y가 x의 일차함수인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① 자연수 x의 약수의 개수 y

② 시속 x km로 80 km를 이동할 때 걸린 시간 y시간

✓③ 우유 500 mL가 들어 있는 병에서 x mL를 마셨을 때, 남은 우유의 양 y mL

④ 한 변의 길이가 x cm인 정사각형의 넓이 $y\,\text{cm}^2$

✓⑤ 윗변의 길이가 x cm, 아랫변의 길이가 $2x$ cm이고, 높이가 4 cm인 사다리꼴의 넓이 $y\,\text{cm}^2$

① y가 x의 함수이지만, y가 x의 일차식으로 나타내어지지 않으므로 일차함수가 아니다.
② (시간)$=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$이므로 $y=\dfrac{80}{x}$, 즉 일차함수가 아니다.
③ (남은 우유의 양)$=500-$(마신 우유의 양)이므로 $y=500-x$
④ (정사각형의 넓이)$=$(한 변의 길이)^{2}이므로 $y=x^2$, 즉 일차함수가 아니다.
⑤ (사다리꼴의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\{$(윗변의 길이)$+$(아랫변의 길이)$\}\times$(높이)이므로
$y=\dfrac{1}{2}(x+2x)\times 4$ $\quad\therefore y=6x$

02

두 일차함수 $f(x)=ax-5-(3a-x)$, $g(x)=\dfrac{1}{a}x+4$에 대하여 $f(-3)=4$일 때, $g(6)$의 값은?

(단, a는 상수이다.)

① -7　② -5　✓③ 1　④ 5　⑤ 7

$f(x)=ax-5-(3a-x)$에서 $f(-3)=4$이므로
$-3a-5-(3a+3)=4$, $-6a-8=4$
$-6a=12$ $\quad\therefore a=-2$
따라서 $g(x)=-\dfrac{1}{2}x+4$이므로
$g(6)=-\dfrac{1}{2}\times 6+4=1$

03 서술형

일차함수 $y=ax-\dfrac{1}{3}$의 그래프는 점 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right)$를 지나고, 이 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 점 $\left(k, -\dfrac{5}{3}\right)$를 지날 때, $12ak$의 값을 구하시오. -4

(단, a는 상수이다.)

$y=ax-\dfrac{1}{3}$의 그래프는 점 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right)$를 지나므로
$\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{2}a=1$ $\quad\therefore a=2$ ······ 40 %
따라서 $y=2x-\dfrac{1}{3}$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=2x-\dfrac{1}{3}-1$ $\quad\therefore y=2x-\dfrac{4}{3}$
이때 이 그래프가 점 $\left(k, -\dfrac{5}{3}\right)$를 지나므로
$-\dfrac{5}{3}=2k-\dfrac{4}{3}$, $2k=-\dfrac{1}{3}$ $\quad\therefore k=-\dfrac{1}{6}$ ······ 50 %
$\therefore 12ak=12\times 2\times\left(-\dfrac{1}{6}\right)=-4$ ······ 10 %

개념 2 일차함수의 그래프의 절편과 기울기

04

일차함수 $y=ax+4$의 그래프의 x절편과 y절편이 절댓값은 같지만 부호는 서로 다르다고 한다. 이 그래프가 점 $(-2, k)$를 지날 때, k의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -4　② -2　③ 1　✓④ 2　⑤ 4

$y=ax+4$에 $y=0$을 대입하면 $0=ax+4$, $ax=-4$ $\quad\therefore x=-\dfrac{4}{a}$
또, $y=ax+4$에 $x=0$을 대입하면 $y=4$
즉, $-\dfrac{4}{a}=-4$이므로 $a=1$
따라서 $y=x+4$의 그래프가 점 $(-2, k)$를 지나므로 $k=-2+4=2$

05

$\dfrac{2k-4}{-1-(-3)}=k-2$ ······ ㉠

세 점 $(-3, 4)$, $(-1, 2k)$, $(2, 3k-5)$를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는?

$\dfrac{3k-5-4}{2-(-3)}=\dfrac{3k-9}{5}$ ······ ㉡

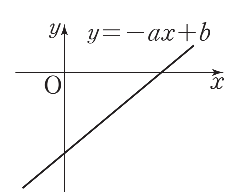
✓① $-\dfrac{3}{2}$　② $-\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{3}{2}$　⑤ $\dfrac{5}{2}$

㉠, ㉡이 같으므로 $k-2=\dfrac{3k-9}{5}$, $5k-10=3k-9$ $\quad\therefore k=\dfrac{1}{2}$
따라서 세 점을 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는 $k-2=\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{3}{2}$

06

일차함수 $y=-ax+b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때 다음 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

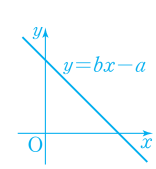
(단, a, b는 상수이다.)



〈 보기 〉
ㄱ. 일차함수 $y=bx-a$의 그래프의 y절편은 일차함수 $y=-ax+b$의 y절편보다 크다.
ㄴ. 일차함수 $y=bx-a$의 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다.
ㄷ. 두 일차함수 $y=-ax+b$, $y=bx-a$의 그래프의 x절편이 같다.

① ㄱ　✓② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$a<0$, $b<0$이므로 $y=bx-a$의 그래프의 기울기는 음수이고 y절편은 양수이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $y=-ax+b$의 그래프의 y절편은 음수이므로 $y=bx-a$의 그래프의 y절편은 $y=-ax+b$의 그래프의 y절편보다 크다.
ㄴ. $y=bx-a$의 그래프는 제1, 2, 4사분면을 지나고 제3사분면을 지나지 않는다.
ㄷ. $y=-ax+b$, $y=bx-a$의 그래프의 x절편은 각각 $\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{a}{b}$이므로 같지 않다.

07

두 일차함수 $y=\frac{3}{2}x-6$, $y=\frac{1}{a}x-2$의 그래프가 x축과 만나는 점을 각각 P, Q라고 하자. $\overline{PQ}=2$일 때, 상수 a의 값은? (단, $a>2$)

✓① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

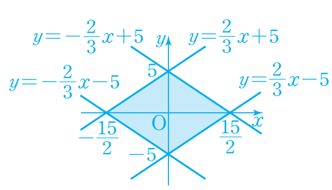
$y=\frac{3}{2}x-6$에 $y=0$을 대입하면 $0=\frac{3}{2}x-6$, $\frac{3}{2}x=6$　$\therefore x=4$
$\therefore$ P$(4, 0)$
$y=\frac{1}{a}x-2$에 $y=0$을 대입하면 $0=\frac{1}{a}x-2$, $\frac{1}{a}x=2$　$\therefore x=2a$
$\therefore$ Q$(2a, 0)$
이때 $a>2$이므로 $2a>4$
따라서 $\overline{PQ}=2a-4=2$이므로 $2a=6$　$\therefore a=3$

08 출제 주의

네 일차함수 $y=\frac{2}{3}x+5$, $y=\frac{2}{3}x-5$, $y=-\frac{2}{3}x+5$, $y=-\frac{2}{3}x-5$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는?

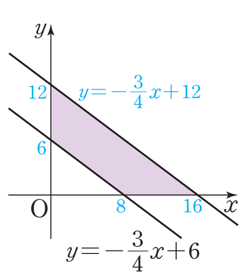
① 25　② $\frac{75}{2}$　③ 50
④ $\frac{125}{2}$　✓⑤ 75

구하는 넓이는 삼각형 두 개의 넓이의 합과 같으므로
$2\times\left(\frac{1}{2}\times15\times5\right)=75$



09 출제 주의

오른쪽 그림은 일차함수 $y=-\frac{3}{4}x+6$의 그래프와 이 그래프를 y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다. 이때 두 일차함수의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. 72



$y=-\frac{3}{4}x+6$의 그래프의 x절편은 8, y절편은 6이다.
$y=-\frac{3}{4}x+6$의 그래프를 y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-\frac{3}{4}x+12$
$y=-\frac{3}{4}x+12$의 그래프의 x절편은 16, y절편은 12이다.
따라서 $y=-\frac{3}{4}x+6$, $y=-\frac{3}{4}x+12$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\left(\frac{1}{2}\times16\times12\right)-\left(\frac{1}{2}\times8\times6\right)=96-24=72$

개념 3 일차함수 $y=ax+b$의 그래프의 성질

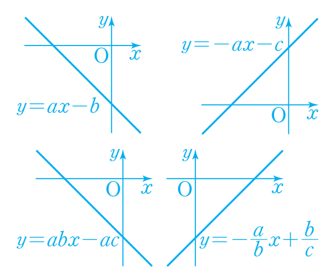
10

$a<0$, $b>0$, $c<0$일 때, 다음 보기의 일차함수 중 그래프가 제1사분면을 지나지 않는 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보기 〉
ㄱ. $y=ax-b$　ㄴ. $y=-ax-c$
ㄷ. $y=abx-ac$　ㄹ. $y=-\frac{a}{b}x+\frac{b}{c}$

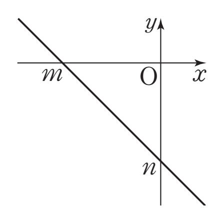
① ㄱ, ㄴ　✓② ㄱ, ㄷ　③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ　⑤ ㄷ, ㄹ

ㄱ. $a<0$, $-b<0$이므로 $y=ax-b$의 그래프는 제2, 3, 4사분면을 지난다.
ㄴ. $-a>0$, $-c>0$이므로 $y=-ax-c$의 그래프는 제1, 2, 3사분면을 지난다.
ㄷ. $ab<0$, $-ac<0$이므로 $y=abx-ac$의 그래프는 제2, 3, 4사분면을 지난다.
ㄹ. $-\frac{a}{b}>0$, $\frac{b}{c}<0$이므로 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{b}{c}$의 그래프는 제1, 3, 4사분면을 지난다.



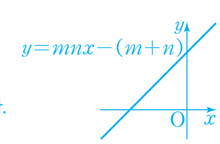
11

오른쪽 그림과 같은 일차함수의 그래프의 x절편을 m, y절편을 n이라고 할 때, 일차함수 $y=mnx-(m+n)$의 그래프가 지나는 사분면은? (단, m, n은 상수이다.)



① 제1, 3사분면　② 제2, 4사분면
✓③ 제1, 2, 3사분면　④ 제1, 2, 4사분면
⑤ 제2, 3, 4사분면

주어진 그래프에서 x절편과 y절편이 모두 음수이므로
$m<0$, $n<0$
따라서 $mn>0$, $-(m+n)>0$이므로
$y=mnx-(m+n)$의 그래프는 제1, 2, 3사분면을 지난다.



12

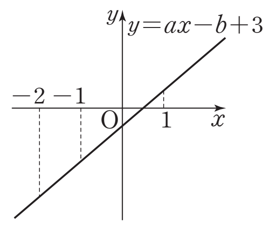
일차함수 $y=-(3a+1)x+(5-2a)$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않도록 하는 정수 a의 개수는?

① 2　✓② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

$y=-(3a+1)x+(5-2a)$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 기울기는 음수이어야 하고, y절편은 0보다 크거나 같아야 한다.
즉, $-(3a+1)<0$에서 $3a+1>0$, $3a>-1$　$\therefore a>-\frac{1}{3}$
또, $5-2a\geq0$에서 $2a\leq5$　$\therefore a\leq\frac{5}{2}$
따라서 $-\frac{1}{3}<a\leq\frac{5}{2}$이므로 이를 만족시키는 정수 a는 0, 1, 2의 3개이다.

13

두 상수 a, b에 대하여 일차함수 $y=ax-b+3$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)



① $a<0$ ✓② $b>3$
③ $a+b<3$ ④ $a-b+2>0$
✓⑤ $2a+b>3$

① 그래프가 오른쪽 위로 향하므로 $a>0$
② y절편이 음수이므로 $-b+3<0$ ∴ $b>3$
③ $x=-1$일 때, y의 값이 음수이므로 $-a-b+3<0$ ∴ $a+b>3$
④ $x=1$일 때, y의 값이 양수이므로 $a-b+3>0$ ∴ $a-b+2>-1$
이때 $a-b+2>0$이 성립하는지는 알 수 없다.
⑤ $x=-2$일 때, y의 값이 음수이므로 $-2a-b+3<0$ ∴ $2a+b>3$

개념 4 일차함수의 그래프의 평행과 일치

14

일차함수 $y=2ax-1$의 그래프는 일차함수 $y=3\left(\frac{1}{4}-x\right)$의 그래프와 서로 평행하고 점 $(-1,\ b+1)$을 지날 때, $a+b$의 값은?

(단, a는 상수이다.)

① $-\frac{3}{2}$ ✓② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$y=3\left(\frac{1}{4}-x\right)$에서 $y=-3x+\frac{3}{4}$
즉, $y=2ax-1$의 그래프가 $y=-3x+\frac{3}{4}$의 그래프와 평행하므로
$2a=-3$ ∴ $a=-\frac{3}{2}$
$y=-3x-1$의 그래프가 점 $(-1,\ b+1)$을 지나므로 $b+1=3-1$ ∴ $b=1$
∴ $a+b=-\frac{3}{2}+1=-\frac{1}{2}$

15 출제 주의

점 $(2,\ -7)$을 지나는 일차함수 $y=-5x+k$의 그래프를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면 일차함수 $y=ax+\frac{b}{2}$의 그래프와 서로 일치한다. 이때 $a+b+k$의 값은? (단, a, b, k는 상수이다.)

① -10 ② -7 ✓③ -4
④ -1 ⑤ 2

$y=-5x+k$의 그래프가 점 $(2,\ -7)$을 지나므로 $-7=-10+k$ ∴ $k=3$
$y=-5x+3$의 그래프를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-5x+3-4$ ∴ $y=-5x-1$
이 일차함수의 그래프가 $y=ax+\frac{b}{2}$의 그래프와 일치하므로
$a=-5$, $\frac{b}{2}=-1$ ∴ $b=-2$
∴ $a+b+k=-5+(-2)+3=-4$

16 서술형

두 일차함수

$y=(4a+b-1)x+(2a-b)$,
$y=(a+2b+3)x-(4a+3b)$

의 그래프가 서로 일치할 때, 일차함수 $y=3ax-b$의 그래프의 x절편과 y절편의 합을 구하시오. 1

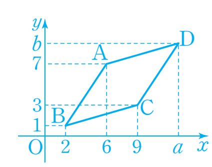
(단, a, b는 상수이다.)

$4a+b-1=a+2b+3$에서 $3a-b=4$ …… ㉠
$2a-b=-(4a+3b)$에서 $2a-b=-4a-3b$
$2b=-6a$ ∴ $b=-3a$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $3a-(-3a)=4$, $6a=4$ ∴ $a=\frac{2}{3}$
$a=\frac{2}{3}$를 ㉡에 대입하면 $b=-2$ ··· 50 %
$y=3ax-b$, 즉 $y=2x+2$에 $y=0$을 대입하면 $0=2x+2$ ∴ $x=-1$
$y=2x+2$에 $x=0$을 대입하면 $y=2$
즉, $y=2x+2$의 그래프의 x절편은 -1, y절편은 2이다. ··· 40 %
따라서 $y=2x+2$의 그래프의 x절편과 y절편의 합은 $-1+2=1$ ··· 10 %

17

세 점 $\mathrm{A}(6,\ 7)$, $\mathrm{B}(2,\ 1)$, $\mathrm{C}(9,\ 3)$과 제1사분면 위의 점 D로 이루어진 사각형이 평행사변형이 되도록 하는 점 D의 좌표는?

① $(5,\ 4)$ ② $(5,\ 9)$ ③ $(13,\ 4)$
✓④ $(13,\ 9)$ ⑤ $(14,\ 10)$



점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 $\overline{\mathrm{AB}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{DC}}$이므로
$\frac{7-1}{6-2}=\frac{b-3}{a-9}$에서 $6(a-9)=4(b-3)$
$6a-54=4b-12$ ∴ $3a-2b=21$ …… ㉠
또, $\overline{\mathrm{AD}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $\frac{b-7}{a-6}=\frac{3-1}{9-2}$에서
$7(b-7)=2(a-6)$, $7b-49=2a-12$
∴ $2a-7b=-37$ …… ㉡
㉠×2−㉡×3을 하면 $17b=153$ ∴ $b=9$
$b=9$를 ㉠에 대입하면 $3a-18=21$, $3a=39$ ∴ $a=13$
따라서 점 D의 좌표는 $(13,\ 9)$이다.

개념 5 일차함수의 식 구하기

18

일차함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 6만큼 증가할 때, y의 값은 3만큼 감소하고 $f(0)=-8$이다. $f(k+1)=k-1$을 만족시키는 상수 k의 값은?

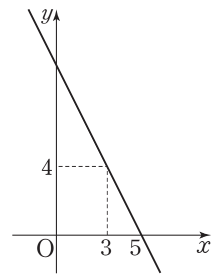
① -7 ✓② -5 ③ -3
④ -1 ⑤ 1

$f(x)=ax+b$라고 하면 $y=f(x)$는 x의 값이 6만큼 증가할 때, y의 값은 3만큼 감소하므로 기울기는
$a=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$
$f(0)=-8$이므로 $-8=b$ ∴ $f(x)=-\frac{1}{2}x-8$
$f(x)=-\frac{1}{2}x-8$에서 $f(k+1)=k-1$이므로
$k-1=-\frac{1}{2}(k+1)-8$
$2k-2=-k-1-16$, $3k=-15$ ∴ $k=-5$

19 출제 주의

일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 오른쪽 그림의 직선과 평행하고, 일차함수 $y=6x+6$의 그래프와 x축 위에서 만난다. 이때 $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)



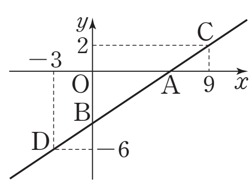
✓① -4 ② -2
③ 2 ④ 4
⑤ 6

$y=ax+b$의 그래프는 두 점 $(3, 4)$, $(5, 0)$을 지나는 직선과 평행하므로 기울기는
$a=\frac{0-4}{5-3}=-2$
이때 $y=-2x+b$의 그래프는 $y=6x+6$의 그래프와 x축 위에서 만나므로 x절편이 서로 같다.
$y=6x+6$에 $y=0$을 대입하면 $0=6x+6$
$6x=-6$ $\therefore x=-1$
즉, 일차함수 $y=-2x+b$의 그래프의 x절편이 -1이므로
$y=-2x+b$에 $x=-1$, $y=0$을 대입하면 $0=2+b$ $\therefore b=-2$
$\therefore a+b=-2+(-2)=-4$

20

오른쪽 그림과 같이 두 점 C, D를 지나는 일차함수의 그래프의 x절편, y절편을 각각 A, B라고 한다. 이때 △OBA의 넓이를 구하시오.

(단, 점 O는 원점이다.) 12



두 점 $C(9, 2)$, $D(-3, -6)$을 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는
$\frac{-6-2}{-3-9}=\frac{2}{3}$이므로 일차함수의 식을 $y=\frac{2}{3}x+b$ (단, b는 상수)라고 하면 이 그래프가 점 $C(9, 2)$를 지나므로
$2=6+b$ $\therefore b=-4$
$y=\frac{2}{3}x-4$에 $y=0$을 대입하면 $0=\frac{2}{3}x-4$, $\frac{2}{3}x=4$ $\therefore x=6$
$y=\frac{2}{3}x-4$에 $x=0$을 대입하면 $y=-4$
따라서 $y=\frac{2}{3}x-4$의 그래프의 x절편은 6, y절편은 -4이므로 △OBA의 넓이는
$\frac{1}{2}\times6\times4=12$

21

두 상수 a, b에 대하여 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 일차함수 $y=-2x+10$의 그래프와 x축에서 만나고, 일차함수 $y=5x-1$의 그래프와 y축에서 만난다. 이때 a의 값을 구하시오. $\frac{1}{5}$

$y=-2x+10$에 $y=0$을 대입하면 $0=-2x+10$, $2x=10$ $\therefore x=5$
$y=5x-1$에 $x=0$을 대입하면 $y=-1$
따라서 $y=ax+b$의 x절편은 5, y절편은 -1이다.
즉, 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 두 점 $(5, 0)$, $(0, -1)$을 지나므로
$a=(\text{기울기})=\frac{-1-0}{0-5}=\frac{1}{5}$

개념 6 일차함수의 활용

22

길이가 24 cm인 용수철 저울에 추를 매달면 추의 무게가 4 g 늘어날 때마다 용수철의 길이는 1 cm씩 늘어난다. 이 저울에 무게가 20 g인 추를 매달았을 때의 용수철의 길이는?

① 28 cm ✓② 29 cm ③ 30 cm
④ 31 cm ⑤ 32 cm

추의 무게가 4 g 늘어날 때마다 용수철의 길이는 1 cm씩 늘어나므로 추의 무게가 1 g 늘어날 때마다 용수철의 길이는 $\frac{1}{4}$ cm씩 늘어난다.
무게가 x g짜리인 추를 매달았을 때의 용수철의 길이를 y cm라고 하면 $y=24+\frac{1}{4}x$
$y=24+\frac{1}{4}x$에 $x=20$을 대입하면 $y=24+5=29$

23

비커에 담긴 물을 가열하면서 1분마다 물의 온도를 재었더니 온도가 일정하게 올라갔다. 다음 표는 비커에 담긴 물을 가열한 지 x분 후의 물의 온도 y ℃를 나타낸 것이다.

x(분)	0	1	2	3	4	5	6
y (℃)	16	22	28	34	40	46	52

가열한 지 15분 후의 물의 온도를 a ℃, 물이 처음으로 끓기까지 걸린 시간을 b분이라고 할 때, $a+b$의 값은?

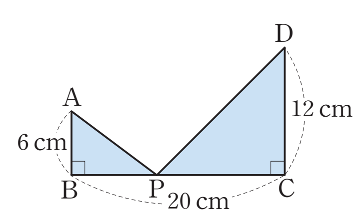
(단, 물은 100 ℃에서 끓는다.)

① 90 ② 100 ③ 110
✓④ 120 ⑤ 130

가열한 지 0분 후의 물의 온도는 16 ℃이고 1분마다 물의 온도가 6 ℃씩 올라가므로
$y=6x+16$
$y=6x+16$에 $x=15$를 대입하면 $y=90+16=106$ $\therefore a=106$
$y=6x+16$에 $y=100$을 대입하면 $100=6x+16$, $6x=84$ $\therefore x=14$ $\therefore b=14$
$\therefore a+b=106+14=120$

24

오른쪽 그림에서 점 P는 점 B에서 출발하여 점 C까지 $\overline{BC}$ 위를 매초 2 cm의 속력으로 움직인다. △ABP와 △DCP의 넓이의 합이 96 cm²가 되는 것은 점 P가 점 B에서 출발한 지 몇 초 후인가?



✓① 4초 후 ② 5초 후 ③ 6초 후
④ 7초 후 ⑤ 8초 후

점 P가 점 B에서 출발한 지 x초 후의 △ABP와 △DCP의 넓이의 합을 y cm²라고 하면 $\overline{BP}=2x$ cm, $\overline{PC}=(20-2x)$ cm이므로
$y=\left(\frac{1}{2}\times2x\times6\right)+\left\{\frac{1}{2}\times(20-2x)\times12\right\}=6x+120-12x=-6x+120$
$y=-6x+120$에 $y=96$을 대입하면 $96=-6x+120$
$6x=24$ $\therefore x=4$

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

01 출제 주의

다음 보기에서 y가 x에 대한 함수인 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, x는 자연수이다.)

〈 보기 〉

ㄱ. y는 x를 4배한 후 3을 뺀 수이다.
ㄴ. y는 x와 36의 최대공약수이다.
ㄷ. y는 x에 가장 가까운 홀수이다.
ㄹ. y는 x를 4로 나눈 몫이다.
ㅁ. y는 절댓값이 x가 되는 수이다.

① ㄱ, ㄴ, ㄷ ✓② ㄱ, ㄴ, ㄹ ③ ㄴ, ㄷ, ㄹ
④ ㄴ, ㄷ, ㅁ ⑤ ㄷ, ㄹ, ㅁ

ㄱ. $y=4x-3$이므로 x가 하나로 정해지면 y도 하나로 정해지므로 함수이다.
ㄴ. x가 정해지면 x와 36의 최대공약수는 하나로 결정되므로 함수이다.
ㄷ. $x=4$일 때, 4에 가장 가까운 홀수는 3과 5이다. 즉, y가 하나로 정해지지 않으므로 함수가 아니다.
ㄹ. 나눗셈에서의 몫은 하나로 결정되므로 함수이다.
ㅁ. $x=|y|$이므로 $x=1$일 때, $y=\pm1$이다. 즉, y가 하나로 정해지지 않으므로 함수가 아니다.

02

다음 보기에서 y가 x에 대한 일차함수인 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보기 〉

ㄱ. 어느 도시 지하철의 기본 요금은 1550원이고 이동 거리가 10 km를 초과하면 5 km마다 100원의 요금이 추가될 때, 지하철 요금 y원과 이동 거리 x km
ㄴ. 1 L의 연료로 15 km를 달릴 수 있는 자동차가 65 L의 연료를 넣고 x km를 달렸을 때, 남은 연료의 양 y L
ㄷ. 고속 충전기의 배터리 충전량이 50 % 미만일 때에는 1분에 5 %, 50 % 이상일 때에는 2.5 %씩 충전될 때, 고속 충전기로 충전중인 0 %의 배터리의 충전량 y %와 시간 x분

① ㄱ ✓② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 이동 거리가 10 km를 초과하면 5 km마다 100원의 요금이 추가되므로 $x=10$, 10.1, 10.2, ...일 때 요금이 전혀 변하지 않다가 $x=15$가 될 때 100원이 증가하므로 y가 x에 대한 일차식으로 나타내어지지 않으므로 y가 x에 대한 일차함수가 아니다.
ㄴ. 1 L의 연료로 15 km를 달릴 수 있는 자동차가 x km를 달리는 데 사용되는 연료의 양은 $\frac{x}{15}$ L이므로 $y=65-\frac{1}{15}x$
ㄷ. 배터리 충전량이 50 % 미만일 때에는 1분에 5 %씩 충전되므로 $y=5x\ (x<10)$
$x>10$일 때, 즉 배터리 충전량이 50 % 이상일 때에는 1분에 2.5 %씩 충전되므로
$y=50+2.5(x-10)$ $\therefore y=2.5x+25\ (x\geq10)$
따라서 하나의 일차식으로 나타내어지지 않으므로 y가 x에 대한 일차함수가 아니다.

03

다음 보기에서 함수 $f(x)=$(자연수 x의 모든 약수의 합)에 대하여 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, p는 소수이다.)

〈 보기 〉

ㄱ. $f(10)=f(15)$
ㄴ. $f(p)=1+p$
ㄷ. $f(p^2)$은 항상 홀수이다.
ㄹ. $f(x)=8$을 만족시키는 자연수 x는 두 개 이상 존재한다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄹ ✓③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. $f(10)=1+2+5+10=18$, $f(15)=1+3+5+15=24$ $\therefore f(10)\neq f(15)$
ㄴ. p의 약수는 1, p이므로 $f(p)=1+p$
ㄷ. p^2의 약수는 1, p, p^2이다.
$p=2$일 때, $f(2^2)=1+2+4=7$이므로 홀수이다.
$p\neq2$일 때, p는 홀수이므로 $f(p^2)=1+p+p^2$ 은 홀수이다.
따라서 $f(p^2)$은 항상 홀수이다.
ㄹ. $x\geq8$이면 $f(x)>8$이므로 $f(x)=8$인 x는 $x<8$이다.
$f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=4$, $f(4)=7$, $f(5)=6$, $f(6)=12$, $f(7)=8$
이므로 $f(x)=8$을 만족시키는 자연수 x는 7의 1개이다.

04 출제 주의

자연수 n에 대하여 함수

$$f(n)=(7^n\text{을 10으로 나눈 나머지})$$

라고 하자. 예를 들어 $f(1)=7$, $f(2)=9$일 때, $f(n)-n>0$을 만족시키는 모든 n의 값의 합을 구하시오. 14

$f(n)$의 값은 7, 9, 3, 1이 반복된다.
이때 $f(n)$의 최댓값이 9이므로 $f(n)-n>0$이려면 $n\leq9$이어야 한다.
$f(1)-1=6>0$, $f(2)-2=7>0$, $f(3)-3=0$, $f(4)-4=-3<0$, $f(5)-5=2>0$,
$f(6)-6=3>0$, $f(7)-7=-4<0$, $f(8)-8=-7<0$, $f(9)-9=-2<0$
이므로 $f(n)-n>0$을 만족시키는 n의 값은 1, 2, 5, 6이다.
따라서 n의 값의 합은 $1+2+5+6=14$

05

자연수 n에 대하여 2^n의 일의 자리의 숫자를 $f(n)$, 3^n의 일의 자리의 숫자를 $g(n)$이라고 할 때,

$$\{f(1)-g(1)\}+\{f(2)-g(2)\}+\{f(3)-g(3)\}+\cdots+\{f(50)-g(50)\}$$

의 값을 구하시오. -6

$f(n)$의 값은 2, 4, 8, 6이 반복되고 $g(n)$의 값은 3, 9, 7, 1이 반복된다.
$f(1)-g(1)=-1$, $f(2)-g(2)=-5$, $f(3)-g(3)=1$, $f(4)-g(4)=5$이므로
$\{f(1)-g(1)\}+\{f(2)-g(2)\}+\{f(3)-g(3)\}+\{f(4)-g(4)\}$
$=-1+(-5)+1+5=0$
$\therefore \{f(1)-g(1)\}+\{f(2)-g(2)\}+\{f(3)-g(3)\}+\cdots+\{f(50)-g(50)\}$
$=\{f(49)-g(49)\}+\{f(50)-g(50)\}$
$=\{f(1)-g(1)\}+\{f(2)-g(2)\}$
$=-1-5=-6$

06

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(2x-1)=5x+3$$

을 만족시킬 때, $f(4a-3)=28$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오. 3

$2x-1=t$라고 하면 $2x=t+1$ $\therefore x=\frac{t+1}{2}$

$\therefore f(t)=5\times\frac{t+1}{2}+3=\frac{5}{2}t+\frac{11}{2}$

즉, $f(x)=\frac{5}{2}x+\frac{11}{2}$이므로

$f(4a-3)=\frac{5}{2}(4a-3)+\frac{11}{2}=10a-2$

$f(4a-3)=28$에서

$10a-2=28$, $10a=30$ $\therefore a=3$

07 서술형

함수 $y=f(x)$에 대하여

$$f(3)=-5,\ f(-1)=7,\ f\left(\frac{4x-2}{3}\right)=ax+b$$

가 성립한다. $f(6)=m$이라고 할 때, $a+b-m$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) 16

$\frac{4x-2}{3}=3$일 때, $4x-2=9$, $4x=11$ $\therefore x=\frac{11}{4}$

따라서 $f(3)=\frac{11}{4}a+b=-5$ …… ㉠ ······ 20 %

$\frac{4x-2}{3}=-1$일 때, $4x-2=-3$, $4x=-1$ $\therefore x=-\frac{1}{4}$

따라서 $f(-1)=-\frac{1}{4}a+b=7$ …… ㉡ ······ 30 %

㉠-㉡을 하면 $3a=-12$ $\therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $-11+b=-5$ $\therefore b=6$ ······ 20 %

$\frac{4x-2}{3}=6$일 때, $4x-2=18$, $4x=20$ $\therefore x=5$

$f\left(\frac{4x-2}{3}\right)=-4x+6$이므로 $f(6)=-20+6=-14$ $\therefore m=-14$

$\therefore a+b-m=-4+6-(-14)=16$ ······ 20 %

08 출제 주의

$y=(2a+2)x-a(3x-4)+2x(a+1)$이 x에 대한 일차함수가 되도록 하는 상수 a의 값으로 옳지 않은 것은?

✓① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

$y=(2a+2)x-a(3x-4)+2x(a+1)$
$=2ax+2x-3ax+4a+2ax+2x$
$=(a+4)x+4a$

가 x에 대한 일차함수가 되려면 $a+4\neq0$이어야 하므로 $a\neq-4$

09

$y=(3a+5b-23)x^2+(4a-b)x+b$가 x에 대한 일차함수가 되기 위한 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 6 ✓② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

$y=(3a+5b-23)x^2+(4a-b)x+b$가 x에 대한 일차함수가 되려면
$y=(x$에 대한 일차식)의 꼴이어야 하므로
$3a+5b-23=0$, $4a-b\neq0$ $\therefore 3a+5b=23$, $b\neq4a$
$3a+5b=23$을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 4)$, $(6, 1)$이다.
이때 $a=1$, $b=4$이면 $b=4a$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 $a=6$, $b=1$이므로 $a+b=6+1=7$

10 서술형

x에 대한 일차함수 $f(x)=ax+b$의 두 상수 a, b에 대하여

$$f(-2)+qf(1)+pf(2)=0$$

이 항상 성립할 때, pq의 값을 구하시오. -12

(단, p, q는 상수이다.)

$f(-2)+qf(1)+pf(2)=0$에서
$(-2a+b)+q(a+b)+p(2a+b)=0$
$-2a+b+aq+bq+2ap+bp=0$
$\therefore a(2p+q-2)+b(p+q+1)=0$ …… ㉠ ······ 40 %
㉠이 모든 a, b에 대하여 항상 성립하려면 a, b의 계수가 모두 0이어야 하므로
$\begin{cases}2p+q-2=0 & \cdots\cdots ㉡\\ p+q+1=0 & \cdots\cdots ㉢\end{cases}$ ······ 20 %
㉡-㉢을 하면 $p-3=0$ $\therefore p=3$
$p=3$을 ㉢에 대입하면 $6+q-2=0$ $\therefore q=-4$
$\therefore pq=3\times(-4)=-12$ ······ 40 %

11

일차함수 $f(x)=ax+b$에 대하여
$f(k+2)-f(k)=-4$이고 $f(0)=-7$이다. 이때 $a-b$의 값은? (단, a, b, k는 상수이다.)

① -10 ② -5 ③ 0
✓④ 5 ⑤ 10

$f(k+2)-f(k)=a(k+2)+b-(ak+b)=2a$
즉, $2a=-4$이므로 $a=-2$
또, $f(0)=-7$이므로 $-7=b$
$\therefore a-b=-2-(-7)=5$

12

일차방정식 $4(x-2)=2x-4$의 해를 $x=a$, 일차방정식 $\frac{x-4}{2}=2$의 해를 $x=b$라고 하자. 일차함수 $f(x)=kx-4$에 대하여 $f(a)=b-2$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. 5

$4(x-2)=2x-4$에서 $4x-8=2x-4$
$2x=4$, $x=2$ $\therefore a=2$
$\frac{x-4}{2}=2$에서 $x-4=4$, $x=8$ $\therefore b=8$
따라서 $f(2)=8-2=6$이므로 $f(x)=kx-4$에서
$6=2k-4$, $2k=10$ $\therefore k=5$

13 서술형

두 일차함수 $f(x)=ax+3$, $g(x)=-\frac{2}{5}x+b$에 대하여 $f(-2)=-2b+7$, $g(5)=2a+4$가 성립한다. $f(k)=g(k)$를 만족시키는 k의 값이 $k=\frac{n}{m}$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. 43

(단, a, b, k는 상수이고, m, n은 서로소인 정수이다.)

$f(x)=ax+3$에서 $f(-2)=-2b+7$이므로
$-2b+7=-2a+3$ $\therefore a-b=-2$ …… ㉠ ………… 20 %
$g(x)=-\frac{2}{5}x+b$에서 $g(5)=2a+4$이므로
$2a+4=-2+b$ $\therefore 2a-b=-6$ …… ㉡ ………… 20 %
㉡−㉠을 하면 $a=-4$
$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $-4-b=-2$ $\therefore b=-2$
$\therefore f(x)=-4x+3$, $g(x)=-\frac{2}{5}x-2$ ………… 30 %
$f(k)=g(k)$에서 $-4k+3=-\frac{2}{5}k-2$, $\frac{18}{5}k=5$ $\therefore k=\frac{25}{18}$
따라서 $m=18$, $n=25$이므로 $m+n=18+25=43$ ………… 30 %

14

점 $(-k,\ 2k+2)$를 지나는 일차함수 $y=2x-6$의 그래프를 y축의 방향으로 k^4-8만큼 평행이동하였다. 평행이동한 그래프 위의 점 중 x좌표와 y좌표의 합이 8인 점의 좌표를 구하시오. (2, 6)

$y=2x-6$의 그래프가 점 $(-k,\ 2k+2)$를 지나므로
$2k+2=-2k-6$, $4k=-8$ $\therefore k=-2$
즉, $k^4-8=(-2)^4-8=8$이므로 $y=2x-6$의 그래프를 y축의 방향으로 8만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=2x-6+8$ $\therefore y=2x+2$
이 그래프 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표의 합이 8인 점의 좌표를 $(a,\ 8-a)$라고 하면
$8-a=2a+2$, $3a=6$ $\therefore a=2$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(2,\ 6)$이다.

15

점 $(4,\ -1)$을 지나는 일차함수 $y=ax+b$의 그래프를 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동하면 점 $(2,\ 2)$를 지난다. 일차함수 $y=ax+2b$의 그래프 위의 점 중에서 x좌표가 y좌표의 2배가 되는 점의 x좌표와 y좌표의 합은?

(단, a, b는 상수이다.)

① 8 ② 9 ✓③ 10
④ 11 ⑤ 12

$y=ax+b$의 그래프가 점 $(4,\ -1)$을 지나므로 $4a+b=-1$ …… ㉠
일차함수 $y=ax+b$의 그래프를 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=ax+b-5$
이 함수의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지나므로 $2=2a+b-5$ $\therefore 2a+b=7$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하면 $a=-4$, $b=15$
$y=ax+2b$, 즉 $y=-4x+30$의 그래프 위의 점 중에서 x좌표가 y좌표의 2배가 되는 점의 좌표를 $(2k,\ k)$라고 하면 $k=-8k+30$, $9k=30$ $\therefore k=\frac{10}{3}$
따라서 구하는 좌표는 $\left(\frac{20}{3},\ \frac{10}{3}\right)$이므로 이 점의 x좌표와 y좌표의 합은 $\frac{20}{3}+\frac{10}{3}=10$

16

일차함수 $f(x)=ax+b$에 대하여

$$\frac{f(5q)-f(2p)}{2p-5q}=-3$$

이고 $f(-1)=4$일 때, $f(5)$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① 18 ✓② 22 ③ 26
④ 30 ⑤ 34

$\frac{f(5q)-f(2p)}{2p-5q}=-3$에서 $\frac{f(5q)-f(2p)}{5q-2p}=3$이므로 그래프의 기울기는 3이다.
$\therefore a=3$
$f(x)=3x+b$에서 $f(-1)=4$이므로 $4=-3+b$ $\therefore b=7$
따라서 $f(x)=3x+7$이므로 $f(5)=3\times5+7=22$

17

일차함수 $f(x)$가 다음을 만족시킬 때, $f(100)-f(1)$의 값은? $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라고 하자.

$$\frac{f(4)-f(2)}{2}+\frac{f(9)-f(3)}{3}+\frac{f(16)-f(4)}{4}+\cdots+\frac{f(100)-f(10)}{10}=210$$

① 448 ② 455 ✓③ 462
④ 476 ⑤ 490

$\frac{f(k^2)-f(k)}{k}=\frac{(ak^2+b)-(ak+b)}{k}=\frac{ak^2-ak}{k}=a(k-1)$이므로
$\frac{f(4)-f(2)}{2}+\frac{f(9)-f(3)}{3}+\frac{f(16)-f(4)}{4}+\cdots+\frac{f(100)-f(10)}{10}$
$=a+2a+3a+\cdots+9a=(1+2+3+\cdots+9)a=45a$
즉, $45a=210$이므로 $a=\frac{14}{3}$
$\therefore f(100)-f(1)=100a+b-(a+b)=99a=99\times\frac{14}{3}=462$

18

y는 x에 대한 일차함수, x는 t에 대한 일차함수이고 그 관계식이 각각 $y=mx-3$, $x=nt+1$이다. t의 값이 2부터 6까지 변할 때, y의 값의 증가량은 24이고 $t=-1$일 때, $y=-6$이다. 두 상수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
✓④ 5 ⑤ 6

$\begin{cases} y=mx-3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x=nt+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면 $y=m(nt+1)-3=mnt+m-3$
$f(t)=mnt+m-3$이라고 하면 $f(6)-f(2)=24$이므로
$(6mn+m-3)-(2mn+m-3)=24$
$4mn=24$ $\therefore mn=6$ ...... ㉢
또, $f(-1)=-6$이므로
$-6=-mn+m-3$ ...... ㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $-6=-6+m-3$ $\therefore m=3$
$m=3$을 ㉢에 대입하면 $3n=6$ $\therefore n=2$
$\therefore m+n=3+2=5$

19

세 점 A$(1,\ -1)$, B$(-1,\ a)$, C$(2,\ -a+1)$이 모두 한 직선 위에 있을 때, 이 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식은 $y=mx+n$이다. 이때 $a+m+n$의 값은?

(단, m, n은 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
✓④ 4 ⑤ 5

$m=\dfrac{a-(-1)}{-1-1}=\dfrac{(-a+1)-(-1)}{2-1}$ ...... ㉠

$-\dfrac{a+1}{2}=-a+2$, $-a-1=-2a+4$ $\therefore a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면 $m=-3$
$y=mx+n$, 즉 $y=-3x+n$의 그래프는 점 A$(1,\ -1)$을 지나므로
$-1=-3+n$ $\therefore n=2$
$\therefore a+m+n=5+(-3)+2=4$

20 출제 주의

네 점 A$(1,\ b-2a)$, B$(3,\ 5)$, C$(b-1,\ 3a+4)$, D$(5,\ 2a+b)$ 중 어느 세 점을 꼭짓점으로 잡아도 삼각형이 만들어지지 않도록 하는 a, b에 대하여 $2a+b$의 값을 구하시오. 6

네 점 A, B, C, D가 모두 한 직선 위에 있어야 한다.
세 점 A, B, D에서 $\dfrac{5-(b-2a)}{3-1}=\dfrac{(2a+b)-(b-2a)}{5-1}$이므로

$\dfrac{2a-b+5}{2}=a$, $2a-b+5=2a$ $\therefore b=5$

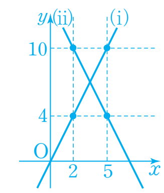
또, 세 점 A, B, C에서 $\dfrac{5-(5-2a)}{3-1}=\dfrac{(3a+4)-(5-2a)}{4-1}$이므로

$a=\dfrac{5a-1}{3}$, $3a=5a-1$, $-2a=-1$ $\therefore a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore 2a+b=2\times\dfrac{1}{2}+5=6$

21

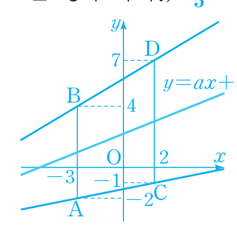
일차함수 $y=ax+b$의 x의 값의 범위가 $2\le x\le 5$이고, y의 값의 범위가 $4\le y\le 10$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 가장 큰 $b-a$의 값을 구하시오. 16



(i) $a>0$일 때
그래프가 두 점 $(2,\ 4)$, $(5,\ 10)$을 지나야 하므로
$\begin{cases} 2a+b=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5a+b=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠, ㉡을 연립하면 $a=2$, $b=0$
$\therefore b-a=0-2=-2$
(ii) $a<0$일 때
그래프가 두 점 $(2,\ 10)$, $(5,\ 4)$를 지나야 하므로
$\begin{cases} 2a+b=10 & \cdots\cdots ㉢ \\ 5a+b=4 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$
㉢, ㉣을 연립하면 $a=-2$, $b=14$
$\therefore b-a=14-(-2)=16$
(i), (ii)에 의하여 가장 큰 $b-a$의 값은 16이다.

22 서술형

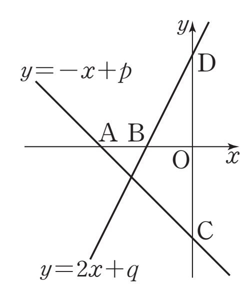
네 점 A$(-3,\ -2)$, B$(-3,\ 4)$, C$(2,\ -1)$, D$(2,\ 7)$에 대하여 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 두 선분 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$와 모두 만나도록 하는 b의 값의 범위가 $m\le b\le n$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) $\dfrac{22}{5}$



$y=ax+b$의 그래프가 두 점 B, D를 지날 때 b의 값이 가장 크고, 두 점 A, C를 지날 때 b의 값이 가장 작다. ······ 20 %
$y=ax+b$의 그래프가 두 점 B, D를 지날 때
$a=\dfrac{3}{5}$이므로 $y=\dfrac{3}{5}x+b$이고 이 그래프가 점 B를 지나므로
$4=-\dfrac{9}{5}+b$ $\therefore b=\dfrac{29}{5}$ ······ 30 %
$y=ax+b$의 그래프가 두 점 A, C를 지날 때
$a=\dfrac{1}{5}$이므로 $y=\dfrac{1}{5}x+b$이고 이 그래프가 점 A를 지나므로
$-2=-\dfrac{3}{5}+b$ $\therefore b=-\dfrac{7}{5}$ ······ 30 %
따라서 $-\dfrac{7}{5}\le b\le\dfrac{29}{5}$이므로 $m=-\dfrac{7}{5}$, $n=\dfrac{29}{5}$
$\therefore m+n=\dfrac{22}{5}$ ······ 20 %

23

오른쪽 그림과 같이 두 일차함수 $y=-x+p$, $y=2x+q$의 그래프와 x축과의 교점을 각각 A, B라 하고, y축과의 교점을 각각 C, D라고 하자. $\overline{AO}=2\overline{BO}$, $\overline{CD}=6$일 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, 점 O는 원점이고, $p<0$, $q>0$이다.) 18



$y=-x+p$의 그래프의 x절편은 p, y절편도 p이므로 A$(p,\ 0)$, C$(0,\ p)$
$y=2x+q$의 그래프의 x절편은 $-\dfrac{q}{2}$, y절편은 q이므로 B$\left(-\dfrac{q}{2},\ 0\right)$, D$(0,\ q)$
이때 $\overline{AO}=2\overline{BO}$이므로 $-p=2\times\dfrac{q}{2}$
$\therefore p+q=0$ ...... ㉠
$\overline{CD}=6$이므로 $q-p=6$ ...... ㉡
㉠+㉡을 하면 $2q=6$ $\therefore q=3$
$q=3$을 ㉠에 대입하면 $p+3=0$ $\therefore p=-3$
$\therefore p^2+q^2=(-3)^2+3^2=18$

24

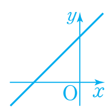
$\frac{c}{b}<0 \Rightarrow b$와 c의 부호가 다르다.

$\frac{a^2c}{b}<0$일 때, 일차함수 $y=\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$의 그래프가 반드시 지나는 사분면은?

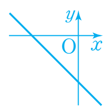
① 제1, 2사분면 ② 제1, 3사분면
③ 제1, 4사분면 ✓④ 제2, 3사분면
⑤ 제3, 4사분면

a의 부호에 관계없이 $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$의 부호는 $\frac{b}{a}>0$, $\frac{c}{a}<0$ 또는 $\frac{b}{a}<0$, $\frac{c}{a}>0$

(ⅰ) $\frac{b}{a}>0$, $\frac{c}{a}<0$일 때, $\frac{b}{a}>0$, $-\frac{c}{a}>0$이므로 $y=\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$의 그래프는 제1, 2, 3사분면을 지난다.



(ⅱ) $\frac{b}{a}<0$, $\frac{c}{a}>0$일 때, $\frac{b}{a}<0$, $-\frac{c}{a}<0$이므로 $y=\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$의 그래프는 제2, 3, 4사분면을 지난다.



(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 일차함수 $y=\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$의 그래프가 반드시 지나는 사분면은 제2, 3사분면이다.

25

일차함수 $y=\frac{1}{2}ax+2$의 그래프는 일차함수 $y=-4x+6$의 그래프와 만나지 않고, 일차함수 $y=-2bx+c-3$의 그래프와 x축과 y축 위에서 모두 만난다고 할 때, $a+bc$의 값을 구하시오. 2

(단, a, b, c는 상수이다.)

$y=\frac{1}{2}ax+2$의 그래프는 $y=-4x+6$의 그래프와 만나지 않으므로 두 함수의 기울기가 같다.

즉, $\frac{1}{2}a=-4$에서 $a=-8$

두 일차함수의 그래프가 2개 이상의 점에서 만나면 두 그래프는 일치하므로

$y=\frac{1}{2}ax+2=-4x+2$의 식과 $y=-2bx+c-3$의 식이 같아야 한다.

즉, $-4=-2b$에서 $b=2$, $2=c-3$에서 $c=5$

$\therefore a+bc=-8+2\times5=2$

26

기울기가 같은 두 일차함수 $y=ax+6$, $y=\frac{3}{2}x+b$의 그래프가 x축과 만나는 점을 각각 P, Q라고 하자. $\overline{PQ}=8$이고 선분 PQ의 중점 M을 지나고, 두 일차함수 $y=ax+6$, $y=\frac{3}{2}x+b$의 그래프와 평행한 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 $y=f(x)$라고 하자. $y=f(x)$의 그래프의 y절편의 절댓값이 12일 때, $2a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

✓① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

$y=ax+6$, $y=\frac{3}{2}x+b$의 그래프의 기울기가 같으므로 $a=\frac{3}{2}$

$\therefore$ P$(-4, 0)$, Q$\left(-\frac{2b}{3}, 0\right)$

$\overline{PQ}=\left|-4-\left(-\frac{2b}{3}\right)\right|=8$에서 $\left|\frac{2b}{3}-4\right|=8$ $\therefore b=-6$ 또는 $b=18$

$f(x)=\frac{3}{2}x+c$ (c는 상수)라고 하자.

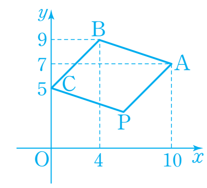
(ⅰ) $b=-6$일 때, 점 Q의 좌표는 $(4, 0)$이므로 M$(0, 0)$ $\therefore c=0$

(ⅱ) $b=18$일 때, 점 Q의 좌표는 $(-12, 0)$이므로 M$(-8, 0)$ $\therefore c=12$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $b=18$이므로 $2a+b=2\times\frac{3}{2}+18=21$

27 서술형

세 점 A$(10, 7)$, B$(4, 9)$, C$(0, 5)$와 점 P가 평행사변형 BCPA의 네 꼭짓점일 때, 두 점 P, B를 지나는 직선의 방정식을 구하시오. $y=-3x+21$



P(a, b)라고 하면

(직선 BC의 기울기)=(직선 AP의 기울기)에서

$\frac{5-9}{0-4}=\frac{b-7}{a-10}$, $a-10=b-7$

$\therefore a-b=3$ ...... ㉠

(직선 BA의 기울기)=(직선 CP의 기울기)에서

$\frac{9-7}{4-10}=\frac{b-5}{a-0}$, $a=-3b+15$

$\therefore a+3b=15$ ...... ㉡ ············ 40 %

㉡$-$㉠을 하면 $4b=12$ $\therefore b=3$

$b=3$을 ㉠에 대입하면 $a-3=3$ $\therefore a=6$ $\therefore$ P$(6, 3)$ ············ 20 %

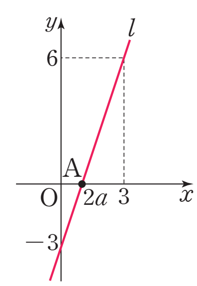
두 점 B$(4, 9)$, P$(6, 3)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{3-9}{6-4}=-3$이므로 일차함수의 그래프의 식을 $y=-3x+n$ (n은 상수)이라고 하면 이 일차함수의 그래프는 점 B$(4, 9)$를 지나므로

$9=-12+n$ $\therefore n=21$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-3x+21$ ············ 40 %

28

오른쪽 그림과 같이 직선 l이 점 A$(2a, 0)$을 지난다. 점 A와 점 B$(5a, -3a)$를 지나는 일차함수의 그래프의 식을 $y=mx+n$라고 할 때, 상수 m, n에 대하여 m^2+n^2의 값은?



① 1 ✓② 2 ③ 4
④ 5 ⑤ 9

직선 l을 그래프로 하는 일차함수의 식을 $y=kx-3$ (k는 상수)이라고 하면 이 직선이 점 $(3, 6)$을 지나므로

$6=3k-3$, $3k=9$ $\therefore k=3$

직선 $y=3x-3$이 점 A$(2a, 0)$을 지나므로 $0=6a-3$, $6a=3$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore$ A$(1, 0)$, B$\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$y=mx+n$의 그래프가 두 점 A$(1, 0)$, B$\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$을 지나므로

$m=\dfrac{-\frac{3}{2}-0}{\frac{5}{2}-1}=-1$

즉, $y=-x+n$의 그래프가 점 A$(1, 0)$을 지나므로

$0=-1+n$ $\therefore n=1$

$\therefore m^2+n^2=(-1)^2+1^2=2$

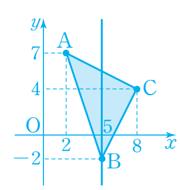
29 출제 주의

일차함수 $y=ax+(2-3a)$의 그래프가 a의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 A, 일차함수 $y=-\frac{4}{3}x+1$의 그래프와 평행한 일차함수 $y=bx+3$의 그래프가 x축과 만나는 점을 B라고 하자. 두 점 A, B를 지나는 직선의 y절편을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) -6

$x=3$일 때 $y=ax+(2-3a)$는 상수 a의 값에 관계없이 항상 $y=2$이다.
따라서 $y=ax+(2-3a)$의 그래프는 항상 점 A$(3, 2)$를 지난다.
$y=bx+3$의 그래프는 $y=-\frac{4}{3}x+1$의 그래프와 평행하므로
$\therefore b=-\frac{4}{3}$ $\quad\therefore$ B$\left(\frac{9}{4}, 0\right)$
두 점 A$(3, 2)$, B$\left(\frac{9}{4}, 0\right)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{0-2}{\frac{9}{4}-3}=\frac{8}{3}$이므로 일차함수의 그래프의 식을 $y=\frac{8}{3}x+n$ (n은 상수)이라고 하면 이 그래프가 점 A$(3, 2)$를 지나므로
$2=8+n$ $\quad\therefore n=-6$
따라서 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{8}{3}x-6$이므로 y절편은 -6이다.

30

세 점 A$(2, 7)$, B$(5, -2)$, C$(8, 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. x축에 수직인 직선 $x=k$를 그릴 때, 이 직선이 삼각형 ABC와 만나는 부분의 길이가 가장 길 때의 길이를 l이라고 하자. 상수 k에 대하여 $k+l$의 값을 구하시오. $\frac{25}{2}$



직선 $x=k$가 삼각형 ABC와 만나는 부분의 길이는 $k<5$에서 k가 커질수록 커지고, $k>5$에서 k가 커질수록 작아지므로 $k=5$일 때 가장 길다.
두 점 A, C를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{4-7}{8-2}=-\frac{1}{2}$이므로
이 직선의 방정식을 $y=-\frac{1}{2}x+n$ (n은 상수)이라고 하면
이 직선이 점 A$(2, 7)$을 지나므로 $7=-1+n$ $\quad\therefore n=8$
따라서 두 점 A, C를 지나는 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x+8$이다.
$y=-\frac{1}{2}x+8$에 $x=5$를 대입하면 $y=-\frac{5}{2}+8=\frac{11}{2}$
$l=\frac{11}{2}-(-2)=\frac{15}{2}$ $\quad\therefore k+l=5+\frac{15}{2}=\frac{25}{2}$

31

어느 실험에서 어떤 용액을 가열한 후 냉각시키면서 온도를 3분마다 측정하였더니 가열할 때는 12 ℃씩 올라가고 냉각시킬 때는 9 ℃씩 내려갔다. 처음 온도가 20 ℃인 이 용액을 80 ℃까지 가열한 뒤 50 ℃까지 냉각시키는 데 걸리는 시간은 몇 분인지 구하시오. 25분

처음 온도가 20 ℃인 이 용액을 x_1분 동안 가열했을 때의 온도를 y_1 ℃라고 하면
$y_1=20+4x_1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$y_1=80$을 ㉠에 대입하면 $80=20+4x_1$, $4x_1=60$ $\quad\therefore x_1=15$
80 ℃인 이 용액을 x_2분 동안 냉각시켰을 때의 온도를 y_2 ℃라고 하면
$y_2=80-3x_2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
$y_2=50$을 ㉡에 대입하면 $50=80-3x_2$, $3x_2=30$ $\quad\therefore x_2=10$
따라서 구하는 시간은 $15+10=25$(분)

32

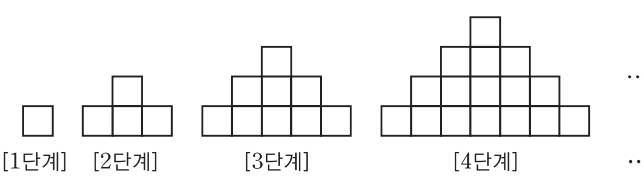
어느 물탱크에 들어있는 물의 양은 시간에 따라 일정한 속도로 줄어든다고 한다. 오전 10시 정각에 500 L, 오전 10시 20분에 470 L였을 때, 물탱크에 남아있는 물의 양이 125 L가 되는 시각은?

① 오후 2시 ✓② 오후 2시 10분
③ 오후 2시 20분 ④ 오후 2시 30분
⑤ 오후 2시 40분

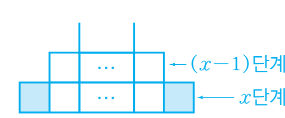
오전 10시 정각 이후 시간 t분이 지났을 때의 물의 양을 $V(t)$라고 하자.
함수 $V(t)$의 그래프는 두 점 $(0, 500)$, $(20, 470)$을 지나므로 함수의 그래프의 기울기는 $\frac{470-500}{20-0}=-\frac{3}{2}$
이고 $V(t)=-\frac{3}{2}t+b$ (b는 상수)라고 하면 이 그래프가 점 $(0, 500)$을 지나므로
$b=500$
따라서 $V(t)=-\frac{3}{2}t+500$에 $V(t)=125$를 대입하면
$125=-\frac{3}{2}t+500$, $\frac{3}{2}t=375$ $\quad\therefore t=250$
즉, 탱크의 물의 양이 125 L가 되는 시각은 오전 10시 정각으로부터 250분, 즉 4시간 10분 후인 오후 2시 10분이다.

33

다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1 cm인 정사각형을 덧붙여 만든 도형이 있다. 제일 아랫줄에 있는 정사각형이 1단계에서는 1개, 2단계에서는 3개, 3단계에서는 5개, $\cdots$ 등으로 전 단계보다 2개씩 덧붙인다.



위와 같은 과정을 x단계까지 반복하여 생기는 도형의 바깥 둘레의 길이를 $f(x)$ cm라고 할 때,
$\frac{f(1)-f(2)+f(3)-f(4)+\cdots+f(99)-f(100)}{f(17)}$의 값을 구하시오. -3

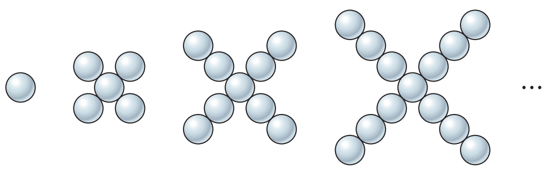


x단계의 둘레는 $(x-1)$단계보다 6 cm 더 길다.
따라서 $f(x)-f(x-1)=6$ (단, x는 $x\geq 2$인 자연수)이므로
$f(x-1)-f(x)=-6$

$$\therefore \frac{f(1)-f(2)+f(3)-f(4)+\cdots+f(99)-f(100)}{f(17)}$$
$$=\frac{\{f(1)-f(2)\}+\{f(3)-f(4)\}+\cdots+\{f(99)-f(100)\}}{f(17)}$$
$$=\frac{(-6)\times 50}{6\times 17-2}=\frac{-300}{100}=-3$$

34

아래 그림과 같은 규칙으로 구슬을 배열해 나갈 때, n번째에 놓인 구슬의 개수를 $f(n)$이라고 하자.



$f(1)$ $f(2)$ $f(3)$ $f(4)$ ⋯

이때 다음 보기에서 $f(n)$에 대한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

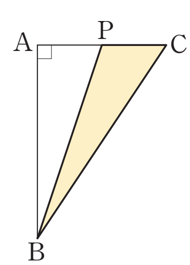
〈 보기 〉
ㄱ. $f(n+1)-f(n)=4$ (단, n은 자연수)
ㄴ. $f(100)=401$
ㄷ. $f(n)<100$을 만족시키는 n의 개수는 25이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
✓④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

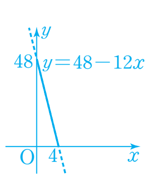
ㄱ. n번째에 놓인 구슬의 개수는 $n-1$번째보다 4개 더 많다.
$\therefore f(n)-f(n-1)=4$ (단, n은 $n\geq2$인 자연수) ⋯⋯ ㉠
ㄴ. ㉠에서 $f(n)=f(n-1)+4$이고 $f(1)=1$이므로
$f(2)=f(1)+4=1+4$,
$f(3)=f(2)+4=1+4\times2$,
$f(4)=f(3)+4=1+4\times3$
⋮
$f(n)=f(n-1)+4=4n-3$
$\therefore f(100)=4\times100-3=397$
ㄷ. $f(n)<100$에서 $4n-3<100$, $4n<103$ $\therefore n<\frac{103}{4}=25.75$
이때 n은 자연수이므로 조건을 만족시키는 n의 값은 1, 2, 3, ..., 25의 25개이다.

35

$\angle A=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=12\,\text{cm}$, $\overline{AC}=8\,\text{cm}$이다. 점 P는 점 A에서 출발하여 선분 AC를 따라 초속 $2\,\text{cm}$로 움직인다. x초 후의 삼각형 PBC의 넓이를 $y\,\text{cm}^2$라고 할 때, y를 x에 대한 함수로 나타내자. 이 함수의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. 96
(단, $0\leq x\leq4$)



삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times12\times8=48\,(\text{cm}^2)$
$\overline{AP}=2x\,\text{cm}$이므로 삼각형 ABP의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2x\times12=12x\,(\text{cm}^2)$
$\therefore y=48-12x$
따라서 $y=48-12x$의 그래프의 x절편은 4, y절편은 48이므로 이 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\frac{1}{2}\times4\times48=96$



36

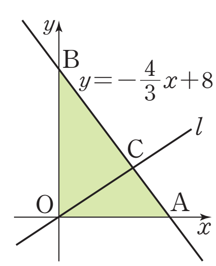
두 일차함수 $y=\frac{3}{2}x+9$, $y=ax+b$의 그래프가 x축 위의 한 점에서 만나고, 두 그래프와 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 36이다. 두 일차함수의 그래프의 y절편의 합은 10보다 작다고 할 때, $4ab$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -9 ② -6 ③ 0
✓④ 6 ⑤ 9

두 일차함수의 그래프가 x축 위의 한 점에서 만나므로 두 일차함수의 그래프의 x절편은 같다. 즉, $-6=-\frac{b}{a}$이므로 $b=6a$
두 일차함수의 그래프와 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 36이므로
$\frac{1}{2}\times|9-b|\times6=36$, $|9-b|=12$
$9-b=-12$ 또는 $9-b=12$
$\therefore b=21$ 또는 $b=-3$ ⋯⋯ ㉠
이때 두 일차함수의 그래프의 y절편의 합은 10보다 작으므로
$9+b<10$ $\therefore b<1$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $b=-3$
$b=-3$을 $b=6a$에 대입하면
$-3=6a$ $\therefore a=-\frac{1}{2}$
$\therefore 4ab=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-3)=6$

37 서술형

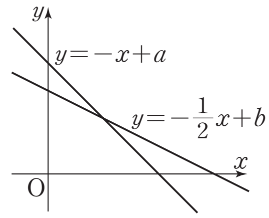
오른쪽 그림과 같이 일차함수 $y=-\frac{4}{3}x+8$의 그래프와 x축, y축, 직선 l과의 교점을 각각 A, B, C라고 하자. △OAB와 △OAC의 넓이의 비가 3 : 1일 때, 점 C의 x좌표를 구하시오. (단, 점 O는 원점이다.) 4



A(6, 0), B(0, 8)
$\therefore$ △OAB$=\frac{1}{2}\times6\times8=24$ ⋯⋯ 40 %
△OAB와 △OAC의 넓이의 비가 3 : 1이므로
24 : △OAC$=3:1$, 3△OAC$=24$ $\therefore$ △OAC$=8$ ⋯⋯ 20 %
이때 점 C의 y좌표를 k라고 하면 △OAC의 넓이가 8이므로
$\frac{1}{2}\times6\times k=8$, $3k=8$ $\therefore k=\frac{8}{3}$
$y=\frac{8}{3}$을 $y=-\frac{4}{3}x+8$에 대입하면
$\frac{8}{3}=-\frac{4}{3}x+8$, $\frac{4}{3}x=\frac{16}{3}$ $\therefore x=4$
따라서 점 C의 x좌표는 4이다. ⋯⋯ 40 %

38 서술형

일차함수 $y=-x+a$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 A, 일차함수 $y=-\frac{1}{2}x+b$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 B라고 하자. $A:B=8:9$이고 두 삼각형의 넓이의 차가 4일 때, 두 양수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. **14**



$y=-x+a$의 그래프의 x절편은 a, y절편도 a이므로 $A=\frac{1}{2}\times a\times a=\frac{a^2}{2}$ ······· 20 %

$y=-\frac{1}{2}x+b$의 그래프의 x절편은 $2b$, y절편은 b이므로 $B=\frac{1}{2}\times 2b\times b=b^2$ ···· 20 %

$A:B=8:9$이므로 $\frac{a^2}{2}:b^2=8:9$, $8b^2=\frac{9}{2}a^2$ $\therefore b^2=\frac{9}{16}a^2$ ······ ㉠

또, 두 삼각형의 넓이의 차가 4이므로 $b^2-\frac{a^2}{2}=4$ ······ ㉡ ····· 30 %

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{9}{16}a^2-\frac{a^2}{2}=4$, $\frac{a^2}{16}=4$, $a^2=64$ $\therefore a=8$ ($\because a>0$)

$a=8$을 ㉠에 대입하면 $b^2=36$ $\therefore b=6$ ($\because b>0$)

$\therefore a+b=8+6=14$ ································ 30 %

39 출제 주의

세 일차함수 $f(x)=-\frac{1}{2}x+6$, $g(x)=ax+6$, $h(x)=bx+6$에 대하여 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 $y=h(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 삼등분할 때, $\frac{a}{b}$의 값은?

(단, a, b는 상수이고, $a<-\frac{1}{2}<b<0$이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
✓④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

$f(x)=-\frac{1}{2}x+6$의 그래프의 x절편은 12, y절편은 6이다.

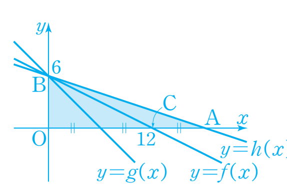
$g(x)=ax+6$, $h(x)=bx+6$의 그래프의 y절편은 모두 6이다.

이때 $a<-\frac{1}{2}<b<0$이므로 ($g(x)$의 기울기)<($f(x)$의 기울기)<($h(x)$의 기울기)<0

따라서 $y=g(x)$의 그래프는 점 (6, 0)을 지나고 $y=h(x)$의 그래프는 (18, 0)을 지나므로 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프의 기울기는 각각

$a=\frac{0-6}{6-0}=-1$, $b=\frac{0-6}{18-0}=-\frac{1}{3}$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{-1}{-\frac{1}{3}}=3$



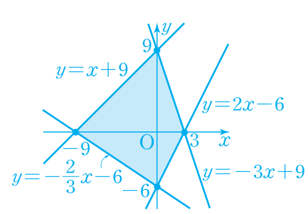
40

네 일차함수 $y=x+9$, $y=-3x+9$, $y=2x-6$, $y=-\frac{2}{3}x-6$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. **90**

네 일차함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 두 x절편을 이은 선분을 밑변으로 하는 삼각형 두 개의 합이므로

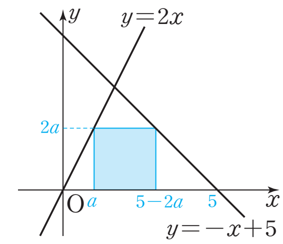
$\left[\frac{1}{2}\times\{3-(-9)\}\times 9\right]+\left[\frac{1}{2}\times\{3-(-9)\}\times 6\right]$

$=54+36=90$



41

오른쪽 그림과 같이 두 일차함수 $y=2x$, $y=-x+5$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 삼각형 안에 내접하는 정사각형의 넓이는?



① 1 ② 2
③ 3 ✓④ 4
⑤ 5

$y=2x$, $y=-x+5$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 삼각형 ABC에 내접하는 정사각형의 한 꼭짓점인 일차함수 $y=2x$의 그래프 위의 점을 $(a, 2a)$라고 하면 정사각형의 한 변의 길이는 $2a$이다. 이때 정사각형의 나머지 세 꼭짓점의 좌표는 각각

$(a, 0)$, $(5-2a, 0)$, $(5-2a, 2a)$

정사각형의 가로, 세로의 길이가 같아야 하므로 $2a=(5-2a)-a$

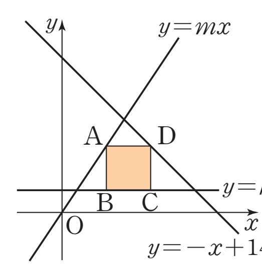
$5a=5$ $\therefore a=1$

따라서 정사각형의 한 변의 길이가 2이므로 넓이는 $2\times 2=4$

42 서술형

오른쪽 그림과 같이 세 직선 $y=mx$, $y=-x+14$, $y=k$로 둘러싸인 삼각형에 정사각형 ABCD가 내접하고 있다. 정사각형 ABCD의 넓이가 16이고 삼각형 OAD의 넓이가 12일 때, mk의 값을 구하시오. **3**

(단, 점 O는 원점이고, k, m은 상수이다.)



정사각형 ABCD의 넓이가 16이므로 한 변의 길이는 4이다.

$B(a, k)$라고 하면 $A(a, k+4)$, $C(a+4, k)$, $D(a+4, k+4)$ ··············· 40 %

이때 삼각형 OAD의 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}\times 4\times(k+4)=12$, $2(k+4)=12$

$k+4=6$ $\therefore k=2$

직선 $y=-x+14$가 점 $D(a+4, 6)$을 지나므로

$6=-(a+4)+14$, $a+4=8$ $\therefore a=4$ ································ 20 %

따라서 직선 $y=mx$는 점 $A(4, 6)$을 지나므로

$6=4m$ $\therefore m=\frac{3}{2}$

$\therefore mk=\frac{3}{2}\times 2=3$ ·· 40 %

핵심 문제

개념 1 일차함수와 일차방정식의 관계

01 출제 주의

일차방정식 $ax-y+b=0$의 그래프는 일차방정식 $4x+2y-1=0$의 그래프와는 평행하고, 일차방정식 $5x+y-2=0$의 그래프와는 y축 위에서 만난다. 이때 $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

✓① -4　② -2　③ 0
④ 2　⑤ 4

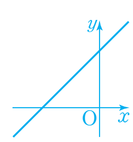
$ax-y+b=0$에서 $y=ax+b$ …… ㉠
$4x+2y-1=0$에서 $y=-2x+\frac{1}{2}$ …… ㉡
두 그래프 ㉠, ㉡이 서로 평행하므로 $a=-2$
$5x+y-2=0$에서 $y=-5x+2$ …… ㉢
두 그래프 ㉠, ㉢이 y축 위에서 만나므로 $b=2$
$\therefore a-b=-2-2=-4$

02

$y=(2a+7)x-a+6$
일차방정식 $(2a+7)x-y-a+6=0$의 그래프가 제1, 2, 3사분면을 지날 때, 다음 중 상수 a의 값이 될 수 없는 것은?

✓① -4　② $-\frac{5}{2}$　③ 0
④ $\frac{7}{2}$　⑤ 5

그래프가 제1, 2, 3사분면을 지나려면 (기울기)>0, (y절편)>0이어야 한다.
$2a+7>0$에서 $2a>-7$　$\therefore a>-\frac{7}{2}$
$-a+6>0$에서 $-a>-6$　$\therefore a<6$
$\therefore -\frac{7}{2}<a<6$



03

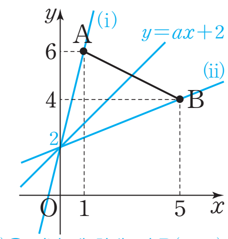
$y=-\frac{a}{b}x+\frac{4}{b}$
일차방정식 $ax+by-4=0$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하였더니 두 점 $(-2,\ 7)$, $(3,\ -3)$을 지나는 직선과 일치하였다. 이때 $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $-\frac{4}{3}$　② $-\frac{2}{3}$　③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{4}{3}$　✓⑤ 2

$y=-\frac{a}{b}x+\frac{4}{b}$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-\frac{a}{b}x+\frac{4}{b}-3$ …… ㉠
두 점 $(-2,\ 7)$, $(3,\ -3)$을 지나는 직선의 기울기는 -2이므로 이 직선의 방정식을 $y=-2x+k$ (k는 상수)라고 하면 이 직선이 점 $(-2,\ 7)$을 지나므로
$7=4+k$　$\therefore k=3$　$\therefore y=-2x+3$ …… ㉡
두 직선 ㉠, ㉡이 일치하므로 $-\frac{a}{b}=-2$, $\frac{4}{b}-3=3$
$\therefore a=\frac{4}{3}$, $b=\frac{2}{3}$　$\therefore a+b=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$

04 서술형

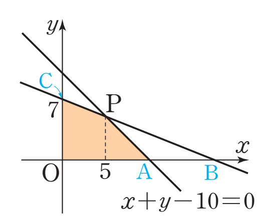
오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 $A(1,\ 6)$, $B(5,\ 4)$에 대하여 $\overline{AB}$와 일차방정식 $ax-y+2=0$의 그래프가 만나도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하시오. $\frac{2}{5}\le a\le 4$
$y=ax+2$



$\overline{AB}$와 직선 $y=ax+2$가 만나려면 a의 값은 점 $A(1,\ 6)$을 지날 때 최대, 점 $B(5,\ 4)$를 지날 때 최소가 된다. ……… 40 %
(i) 직선 $y=ax+2$가 점 $A(1,\ 6)$을 지날 때
$6=a+2$　$\therefore a=4$
(ii) 직선 $y=ax+2$가 점 $B(5,\ 4)$를 지날 때
$4=5a+2$, $5a=2$　$\therefore a=\frac{2}{5}$ ……… 40 %
(i), (ii)에 의하여 $\frac{2}{5}\le a\le 4$ ……… 20 %

05

오른쪽 그림과 같이 직선 $x+y-10=0$과 y절편이 7인 직선의 교점을 P라고 할 때, 점 P의 x좌표가 5이다. 이때 색칠한 부분의 넓이는? (단, 점 O는 원점이다.)

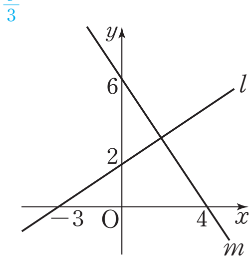


① $\frac{55}{2}$　② $\frac{65}{2}$　③ $\frac{75}{2}$
✓④ $\frac{85}{2}$　⑤ $\frac{95}{2}$

$P(5,\ 5)$, $A(10,\ 0)$
두 점 $(5,\ 5)$, $(0,\ 7)$을 지나는 직선의 기울기는 $-\frac{2}{5}$이므로 이 직선의 방정식은
$y=-\frac{2}{5}x+7$　$\therefore B\left(\frac{35}{2},\ 0\right)$
따라서 색칠한 부분의 넓이는
$\triangle COB-\triangle PAB=\left(\frac{1}{2}\times\frac{35}{2}\times7\right)-\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{35}{2}-10\right)\times5\right\}$
$=\frac{245}{4}-\frac{75}{4}=\frac{85}{2}$

06 출제 주의

$y=-\frac{a}{3}x-\frac{b}{3}$
두 직선 l, m이 오른쪽 그림과 같을 때, 일차방정식 $ax+3y+b=0$의 그래프가 직선 l과는 서로 평행하고 직선 m과는 x축에서 만난다. 이때 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 6

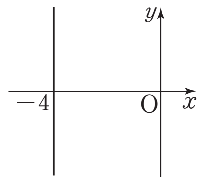


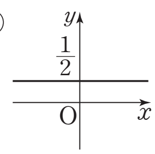
직선 l은 두 점 $(-3,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지나므로 기울기는 $\frac{2}{3}$
이때 $y=-\frac{a}{3}-\frac{b}{3}$와 직선 l이 서로 평행하므로 $-\frac{a}{3}=\frac{2}{3}$　$\therefore a=-2$
직선 m의 x절편은 4이므로 $y=\frac{2}{3}x-\frac{b}{3}$에 $x=4$, $y=0$을 대입하면
$0=\frac{8}{3}-\frac{b}{3}$, $\frac{b}{3}=\frac{8}{3}$　$\therefore b=8$
따라서 $y=\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}$에서 $-2x+3y+8=0$　$\therefore a=-2$, $b=8$
$\therefore a+b=-2+8=6$

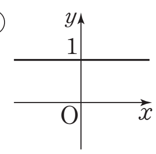
개념 2 일차방정식 $x=p$, $y=q$의 그래프

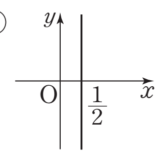
07

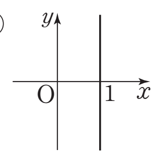
일차방정식 $ax+by-8=0$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 일차방정식 $5abx-(a+3b)y-2=0$의 그래프는? (단, a, b는 상수이다.)

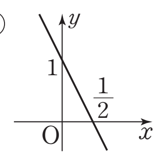


①


✓②


③


④


⑤


주어진 그래프의 식은 $x=-4$, $x+4=0$ $\quad\therefore -2x-8=0$
이 식이 $ax+by-8=0$과 같으므로 $a=-2$, $b=0$
$5abx-(a+3b)y-2=0$에 $a=-2$, $b=0$을 대입하면
$2y-2=0$, $2y=2$ $\quad\therefore y=1$

08 출제 주의

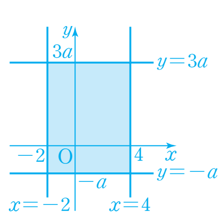
두 점 $(2a-1,\ 3)$, $(b+6,\ a+4)$를 지나는 직선은 x축에 수직이고, 두 점 $(-9a,\ 5-2a)$, $(3,\ 2b+7)$을 지나는 직선은 y축에 수직일 때, ab의 값을 구하시오. -6

두 점 $(2a-1,\ 3)$, $(b+6,\ a+4)$를 지나는 직선은 x축에 수직이므로 두 점의 x좌표가 같아야 한다.
즉, $2a-1=b+6$이므로 $2a-b=7$ ······ ㉠
두 점 $(-9a,\ 5-2a)$, $(3,\ 2b+7)$을 지나는 직선은 y축에 수직이므로 두 점의 y좌표가 같아야 한다.
즉, $5-2a=2b+7$이므로 $2a+2b=-2$ $\quad\therefore a+b=-1$ ······ ㉡
㉠+㉡을 하면 $3a=6$ $\quad\therefore a=2$
$a=2$를 ㉡에 대입하면 $2+b=-1$ $\quad\therefore b=-3$
$\therefore ab=2\times(-3)=-6$

09 서술형

네 직선 $\overset{x=-2}{\underline{x+2=0}}$, $\overset{x=4}{\underline{x-4=0}}$, $\overset{y=-a}{\underline{y+a=0}}$, $\overset{y=3a}{\underline{y-3a=0}}$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 48일 때, 상수 a의 값을 구하시오. (단, $a>0$) 2

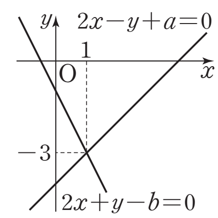
이때 $a>0$이므로 주어진 네 직선을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같이 직사각형이다. ··········· 40 %
네 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이가 48이므로
$\{4-(-2)\}\times\{3a-(-a)\}=48$
$24a=48$ $\quad\therefore a=2$ ························· 60 %



개념 3 일차함수의 그래프와 연립일차방정식의 해

10

두 일차방정식 $2x-y+a=0$, $2x+y-b=0$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 두 그래프가 y축과 만나는 두 점 사이의 거리는?
(단, a, b는 상수이다.)



① 3 ✓② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

두 일차방정식 $2x-y+a=0$, $2x+y-b=0$의 그래프의 교점의 좌표가 $(1,\ -3)$이므로
$2+3+a=0$ $\quad\therefore a=-5$
$2-3-b=0$ $\quad\therefore b=-1$
$2x-y-5=0$에 $x=0$을 대입하면 $y=-5$
$2x+y+1=0$에 $x=0$을 대입하면 $y=-1$
따라서 두 일차방정식 $2x-y-5=0$, $2x+y+1=0$의 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(0,\ -5)$, $(0,\ -1)$이므로 두 점 사이의 거리는
$-1-(-5)=4$

11

직선 $x-2y-1=0$이 두 직선 $\underset{㉠}{\underline{2x-3y-4=0}}$, $\underset{㉡}{\underline{3x-4y+a=0}}$의 교점을 지날 때, 상수 a의 값은?

✓① -7 ② -6 ③ -5
④ 6 ⑤ 7

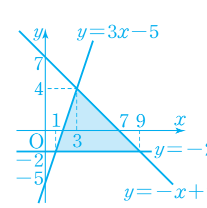
두 직선의 교점을 한 직선이 지나므로 세 직선은 한 점에서 만난다.
㉠×2−㉡을 하면 $-y+2=0$ $\quad\therefore y=2$
$y=2$를 ㉠에 대입하면 $x-4-1=0$ $\quad\therefore x=5$
따라서 직선 $3x-4y+a=0$이 점 $(5,\ 2)$를 지나므로
$15-8+a=0$ $\quad\therefore a=-7$

12

세 직선 $\underset{㉠}{\underline{y=-x+7}}$, $\underset{㉡}{\underline{y=3x-5}}$, $y=-2$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 12 ② 18 ✓③ 24
④ 30 ⑤ 36

㉠을 ㉡에 대입하면 $-x+7=3x-5$, $4x=12$
$\therefore x=3$
$x=3$을 ㉠에 대입하면 $y=-3+7=4$
$y=-x+7$에 $y=-2$를 대입하면
$-2=-x+7$ $\quad\therefore x=9$
$y=3x-5$에 $y=-2$를 대입하면
$-2=3x-5$, $-3x=-3$ $\quad\therefore x=1$
따라서 구하는 넓이는 $\frac{1}{2}\times(9-1)\times\{4-(-2)\}=24$



13

두 일차방정식 $\underset{㉠}{x-3y+2=0}$, $\underset{㉡}{4x-y-a=0}$의 그래프의 교점이 제2사분면 위에 있을 때, 상수 a의 값의 범위는?

✓① $-8<a<-\frac{2}{3}$　② $-8\le a\le -\frac{2}{3}$

③ $-\frac{2}{3}<a<8$　④ $-\frac{2}{3}\le a\le 8$

⑤ $\frac{2}{3}<a<8$

㉠×4−㉡을 하면 $-11y+8+a=0$, $11y=8+a$　$\therefore y=\frac{a+8}{11}$

$y=\frac{a+8}{11}$을 ㉠에 대입하면 $x-\frac{3a+24}{11}+2=0$　$\therefore x=\frac{3a+2}{11}$

점 $\left(\frac{3a+2}{11}, \frac{a+8}{11}\right)$이 제2사분면 위에 있으므로 $\frac{3a+2}{11}<0$, $\frac{a+8}{11}>0$

$\frac{3a+2}{11}<0$에서 $3a+2<0$, $3a<-2$　$\therefore a<-\frac{2}{3}$

$\frac{a+8}{11}>0$에서 $a+8>0$　$\therefore a>-8$　$\therefore -8<a<-\frac{2}{3}$

14

두 점 $(-3, -5)$, $(1, 7)$을 지나는 직선이 두 일차방정식 $y-2x-1=0$, $2y-kx-5=0$의 그래프의 교점을 지날 때, 상수 k의 값은?

① 1　② 3　✓③ 5

④ 7　⑤ 9

두 점 $(-3, -5)$, $(1, 7)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{7-(-5)}{1-(-3)}=\frac{12}{4}=3$이므로 이 직선의 방정식을 $y=3x+b$ (b는 상수)라고 하면 이 직선이 점 $(1, 7)$을 지나므로

$7=3+b$　$\therefore b=4$　$\therefore y=3x+4$

$y-2x-1=0$에 $y=3x+4$를 대입하면

$3x+4-2x-1=0$, $x+3=0$　$\therefore x=-3$　$\therefore y=-9+4=-5$

따라서 직선 $y=3x+4$와 일차방정식 $y-2x-1=0$의 그래프의 교점의 좌표가 $(-3, -5)$이므로 $2y-kx-5=0$에 $x=-3$, $y=-5$를 대입하면

$-10+3k-5=0$, $3k=15$　$\therefore k=5$

15

x축 위에서 만나는 두 직선 $y=-\frac{1}{4}x+1$, $y=ax+b$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 10일 때, ab의 값은?

(단, a, b는 상수이고, $b>0$이다.)

① −18　✓② −9　③ −6

④ 12　⑤ 24

직선 $y=-\frac{1}{4}x+1$의 x절편은 4이므로 직선 $y=ax+b$의 x절편도 4이다.

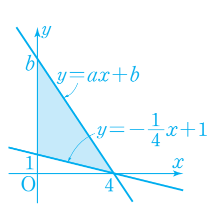
두 직선 $y=-\frac{1}{4}x+1$, $y=ax+b$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 10이므로 $\frac{1}{2}\times(b-1)\times 4=10$

$b-1=5$　$\therefore b=6$

즉, 직선 $y=ax+6$이 점 $(4, 0)$을 지나므로

$0=4a+6$, $4a=-6$　$\therefore a=-\frac{3}{2}$

$\therefore ab=-\frac{3}{2}\times 6=-9$



16

두 직선 $\underset{㉠}{y=-x+5}$, $\underset{㉡}{y=x+1}$의 교점을 A, 이 두 직선과 x축과의 교점을 각각 B, C라고 하자. 점 A를 지나고 △ABC의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

① $y=-3x+9$　② $y=-3x+6$

✓③ $x=2$　④ $y=3x-6$

⑤ $y=3x-3$

㉠을 ㉡에 대입하면 $-x+5=x+1$, $-2x=-4$　$\therefore x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $y=-2+5=3$　$\therefore$ A$(2, 3)$

$\therefore$ B$(5, 0)$, C$(-1, 0)$

점 A$(2, 3)$을 지나는 직선이 △ABC의 넓이를 이등분하려면 $\overline{BC}$의 중점 $(2, 0)$을 지나야 한다.

두 점 $(2, 3)$, $(2, 0)$의 x좌표가 같으므로 구하는 직선의 방정식은 $x=2$이다.

17 출제 주의

두 직선 $(a+3)x-ay=6$, $-2x+5y=b$의 교점이 존재하지 않도록 하는 상수 a, b의 조건은?

① $a=-5$, $b=-6$　② $a=-5$, $b\ne -6$

✓③ $a=-5$, $b\ne 6$　④ $a=5$, $b=6$

⑤ $a=5$, $b\ne 6$

$(a+3)x-ay=6$에서 $y=\frac{a+3}{a}x-\frac{6}{a}$　…… ㉠

$-2x+5y=b$에서 $y=\frac{2}{5}x+\frac{b}{5}$　…… ㉡

두 직선 ㉠, ㉡의 교점이 존재하지 않으려면 두 직선은 서로 평행해야 하므로

$\frac{a+3}{a}=\frac{2}{5}$, $-\frac{6}{a}\ne\frac{b}{5}$이어야 한다.

$\frac{a+3}{a}=\frac{2}{5}$에서 $5a+15=2a$, $3a=-15$　$\therefore a=-5$

$-\frac{6}{a}\ne\frac{b}{5}$에서 $-\frac{6}{-5}\ne\frac{b}{5}$　$\therefore b\ne 6$

18

두 일차방정식 $x+2y-6=0$, $ax-6y-b=0$의 그래프의 교점이 무수히 많을 때, 다음 보기에서 일차함수 $y=ax+b$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수이다.)

$y=-\frac{1}{2}x+3$ …… ㉠

$y=\frac{a}{6}x-\frac{b}{6}$ …… ㉡

〈 보기 〉

ㄱ. 원점을 지나는 직선이다.

ㄴ. x절편은 6이다.

ㄷ. 기울기가 y절편보다 크다.

ㄹ. 제2, 3, 4사분면을 지난다.

① ㄱ, ㄴ　② ㄱ, ㄹ　③ ㄴ, ㄷ

④ ㄴ, ㄹ　✓⑤ ㄷ, ㄹ

두 직선 ㉠, ㉡의 교점이 무수히 많으려면 두 직선은 일치해야 하므로

$-\frac{1}{2}=\frac{a}{6}$, $3=-\frac{b}{6}$이어야 한다.

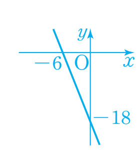
$\therefore a=-3$, $b=-18$　$\therefore y=-3x-18$

ㄱ. $y=-3x-18$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면 $0\ne -18$

ㄴ. $y=-3x-18$에 $y=0$을 대입하면 $x=-6$, 즉 x절편은 -6이다.

ㄷ. 기울기는 -3이고 y절편은 -18이므로 기울기가 y절편보다 크다.

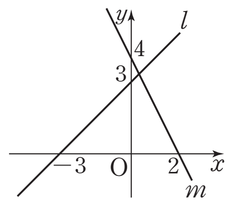
ㄹ. 일차함수 $y=-3x-18$의 그래프는 제2, 3, 4사분면을 지난다.



Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

01

상현이는 일차방정식 $ax+by+12=0$의 그래프를 처음에는 기울기를 잘못 보고 y절편을 제대로 보아 직선 l을 그렸고, 두 번째에는 y절편을 잘못 보고 기울기를 제대로 보아 직선 m을 그렸다. 두 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값은?



① -8　② -4　✓③ 4　④ 8　⑤ 12

$ax+by+12=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{12}{b}$

상현이가 처음에는 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{12}{b}$의 그래프에서 y절편은 제대로 보고 직선 l을 그렸으므로 $-\frac{12}{b}=3$　$\therefore b=-4$

상현이가 두 번째에는 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{12}{b}$의 그래프에서 기울기는 제대로 보고 직선 m을 그렸으므로 $-\frac{a}{b}=\frac{0-4}{2-0}$, $-\frac{a}{-4}=-2$　$\therefore a=-8$

$\therefore b-a=-4-(-8)=4$

02 서술형

두 일차방정식 $\underset{y=\frac{5}{3}x-7}{5x-3y-21=0}$, $\underset{y=ax+b}{ax-y+b=0}$의 그래프가 서로 평행하다. 두 그래프가 x축과 만나는 점을 각각 P, Q라고 할 때, 선분 PQ의 길이가 9가 되도록 하는 모든 상수 b의 값의 합을 구하시오. (단, a는 상수이다.) -14

$5x-3y-21=0$에 $y=0$을 대입하면 $5x-21=0$, $x=\frac{21}{5}$　$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{21}{5}, 0\right)$ ······ 30 %

$\overline{\mathrm{PQ}}=9$이므로 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{21}{5}+9, 0\right)$ 또는 $\left(\frac{21}{5}-9, 0\right)$

즉, $\left(\frac{66}{5}, 0\right)$ 또는 $\left(-\frac{24}{5}, 0\right)$ ······ 30 %

$y=\frac{5}{3}x-7$의 그래프와 $y=ax+b$의 그래프가 서로 평행하므로 $a=\frac{5}{3}$

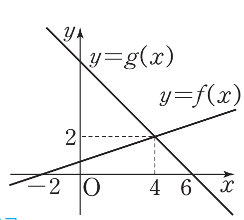
(ⅰ) $y=\frac{5}{3}x+b$의 그래프가 점 $\left(\frac{66}{5}, 0\right)$을 지날 때, $0=22+b$　$\therefore b=-22$

(ⅱ) $y=\frac{5}{3}x+b$의 그래프가 점 $\left(-\frac{24}{5}, 0\right)$을 지날 때, $0=-8+b$　$\therefore b=8$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 b의 값의 합은 $-22+8=-14$ ······ 40 %

03 서술형

오른쪽 그림과 같은 두 일차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프에 대하여 부등식 $3f(x)-g(x)>4$의 해를 구하시오. $x>4$



$y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(-2, 0)$, $(4, 2)$를 지나므로

$f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ ······ 40 %

$y=g(x)$의 그래프는 두 점 $(6, 0)$, $(4, 2)$를 지나므로

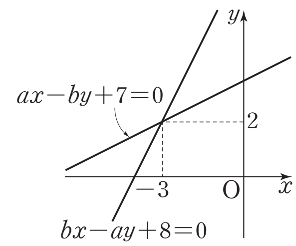
$g(x)=-x+6$ ······ 40 %

$3f(x)-g(x)>4$에서 $3\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)-(-x+6)>4$

$2x-4>4$, $2x>8$　$\therefore x>4$ ······ 20 %

04 출제 주의

두 일차방정식 $ax-by+7=0$, $bx-ay+8=0$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 일차방정식 $ax+by=9$를 만족시키는 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는? (단, a, b는 상수이다.)



① 1　② 2　③ 3　✓④ 4　⑤ 5

연립방정식 $\begin{cases} ax-by+7=0 \\ bx-ay+8=0 \end{cases}$의 해가 $x=-3$, $y=2$이므로

$\begin{cases} -3a-2b+7=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ -2a-3b+8=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

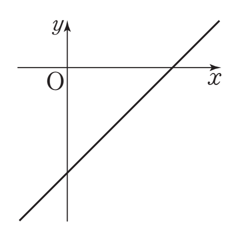
㉠$\times 2-$㉡$\times 3$을 하면 $5b-10=0$, $5b=10$　$\therefore b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면 $-3a-4+7=0$, $-3a=-3$　$\therefore a=1$

따라서 일차방정식 $ax+by=9$, 즉 $x+2y=9$를 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(1, 4)$, $(3, 3)$, $(5, 2)$, $(7, 1)$의 4개이다.

05

일차방정식 $ax+by+c=0$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 일차방정식 $bx+ay+c=0$의 그래프가 지나지 않는 사분면은? (단, a, b, c는 상수이다.)



① 제1사분면　② 제2사분면　③ 제3사분면　✓④ 제4사분면　⑤ 제1, 3사분면

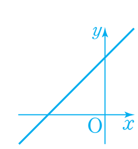
$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

주어진 그래프의 기울기는 양수, y절편은 음수이므로

$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$　$\therefore \frac{a}{b}<0$, $\frac{c}{b}>0$　$\therefore ac<0$

$bx+ay+c=0$에서 $y=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$

따라서 $-\frac{b}{a}>0$, $-\frac{c}{a}>0$이므로 일차방정식 $bx+ay+c=0$의 그래프는 제1, 2, 3사분면을 지난다.



06

다음 보기에서 일차방정식 $ax+by+c=0$ ($y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$)의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, a, b, c는 상수이다.)

〈 보기 〉

ㄱ. $ab<0$, $bc=0$이면 제1, 3사분면을 지난다.

ㄴ. $ab<0$, $bc>0$이면 제1, 3, 4사분면을 지난다.

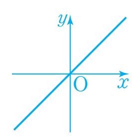
ㄷ. $ac>0$, $bc>0$이면 제1, 2, 3사분면을 지난다.

① ㄱ　　✓② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

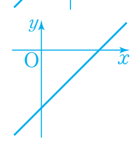
ㄱ. $ab<0$, $bc=0$이므로 $-\frac{a}{b}>0$, $c=0$

즉, $y=-\frac{a}{b}x$이고 이 그래프는 원점을 지나면서 기울기가 양수인 직선이므로 제1, 3사분면을 지난다.



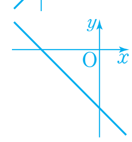
ㄴ. $ab<0$, $bc>0$이므로 $-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$

따라서 그래프는 기울기가 양수이고 y절편이 음수인 직선이므로 제1, 3, 4사분면을 지난다.



ㄷ. a와 b의 부호가 같으므로 $-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}<0$

따라서 그래프는 기울기가 음수이고 y절편이 음수인 직선이므로 제2, 3, 4사분면을 지난다.



07 출제 주의

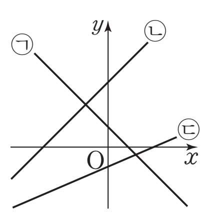
세 직선

l: $ax+by+1=0$, → $y=-\frac{a}{b}x-\frac{1}{b}$

m: $ax-y+b=0$, → $y=ax+b$

n: $-bx+y-a=0$ → $y=bx+a$

이 오른쪽 그림과 같을 때, 세 직선 l, m, n을 ㉠, ㉡, ㉢과 바르게 짝 지은 것은?



(단, a, b는 상수이다.)

① l－㉠, m－㉡, n－㉢

② l－㉡, m－㉠, n－㉢

✓③ l－㉡, m－㉢, n－㉠

④ l－㉢, m－㉠, n－㉡

⑤ l－㉢, m－㉡, n－㉠

(i) $a>0$, $b>0$일 때, $-\frac{a}{b}<0$이고 $-\frac{1}{b}<0$

세 직선 ㉠, ㉡, ㉢ 중 직선 l이 될 수 있는 직선이 없다.

(ii) $a>0$, $b<0$일 때, $-\frac{a}{b}>0$이고 $-\frac{1}{b}>0$

직선 l의 기울기는 양수, y절편도 양수이므로 직선 l은 ㉡이다.

직선 m의 기울기는 양수, y절편은 음수이므로 직선 m은 ㉢이다.

직선 n의 기울기는 음수, y절편은 양수이므로 직선 n은 ㉠이다.

(iii) $a<0$, $b>0$일 때, $-\frac{a}{b}>0$이고 $-\frac{1}{b}<0$

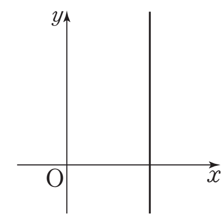
세 직선 l, m, n 중 직선 ㉡이 될 수 있는 직선이 없다.

(iv) $a<0$, $b<0$일 때, 세 직선 ㉠, ㉡, ㉢ 중 두 직선 m, n이 될 수 있는 직선이 없다.

(i)~(iv)에 의하여 l－㉡, m－㉢, n－㉠이다.

08

일차방정식 $bx-ay-c=0$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 일차방정식 $ax+by+c=0$의 그래프가 지나는 사분면은? (단, a, b, c는 상수이다.)



① 제1, 2사분면　　② 제1, 3사분면

③ 제1, 4사분면　　④ 제2, 3사분면

✓⑤ 제3, 4사분면

주어진 그래프는 x축에 수직이고, y축의 우측에 있으므로 $x=k$ $(k>0)$의 꼴이어야 한다.

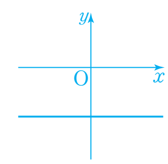
$bx-ay-c=0$에서 $x=\frac{a}{b}y+\frac{c}{b}$

$\frac{a}{b}=0$, $\frac{c}{b}>0$이므로 $a=0$

$ax+by+c=0$에 $a=0$을 대입하면

$by=-c$　　$\therefore y=-\frac{c}{b}<0$

따라서 $y=-\frac{c}{b}$의 그래프는 제3, 4사분면을 지난다.



09

직선 $(4a-1)x+(2a+1)y-12a=0$은 x축에 평행하고, 직선 $(5b+5)x-(7+4b)y+9b=0$은 y축에 수직일 때, 이 두 직선 사이의 거리를 구하시오. 5

(단, a, b는 상수이다.)

직선 $(4a-1)x+(2a+1)y-12a=0$은 x축에 평행하므로

$4a-1=0$　　$\therefore a=\frac{1}{4}$

즉, 이 직선의 방정식은 $\frac{3}{2}y-3=0$　　$\therefore y=2$

직선 $(5b+5)x-(7+4b)y+9b=0$은 y축에 수직이므로

$5b+5=0$　　$\therefore b=-1$

즉, 이 직선의 방정식은 $-3y-9=0$　　$\therefore y=-3$

따라서 두 직선 $y=2$, $y=-3$ 사이의 거리는 $2-(-3)=5$

10

네 방정식 $y=b$, $y=-2$, $x-3a=0$ ($x=3a$), $x+a=0$ ($x=-a$)의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이가 112이고 둘레의 길이가 44일 때, 두 양의 정수 a, b의 값의 합은?

① 11　　② 12　　③ 13

✓④ 14　　⑤ 15

직사각형의 넓이가 112이므로

$\{3a-(-a)\}\times\{b-(-2)\}=112$

$4a(b+2)=112$　　$\therefore a(b+2)=28$　　…… ㉠

㉠을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(1, 26)$, $(2, 12)$, $(4, 5)$, $(7, 2)$이다.

또, 직사각형의 둘레의 길이가 44이므로

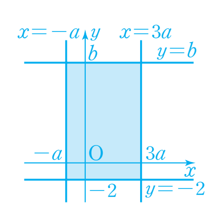
$2\times[\{3a-(-a)\}+\{b-(-2)\}]=44$

$4a+b+2=22$　　$\therefore 4a+b=20$　　…… ㉡

㉡을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(1, 16)$, $(2, 12)$, $(3, 8)$, $(4, 4)$이다.

따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(2, 12)$이므로

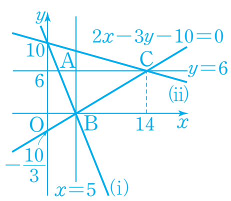
$a=2$, $b=12$　　$\therefore a+b=2+12=14$



11

세 직선 $\overset{x=5}{5x-25=0}$, $\overset{y=6}{12-2y=0}$, $2x-3y-10=0$으로 둘러싸인 도형과 일차함수 $y=ax+10$의 그래프가 만나도록 하는 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오. -3

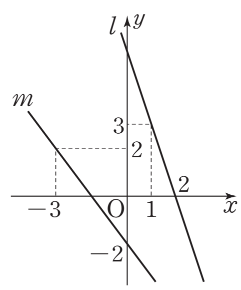
$2x-3y-10=0$에 $x=5$를 대입하면 $10-3y-10=0$　$\therefore y=0$
$2x-3y-10=0$에 $y=6$을 대입하면 $2x-18-10$　$\therefore x=14$
일차함수 $y=ax+10$의 그래프의 y절편은 10이므로 그래프는 항상 $(0, 10)$을 지난다.
이때 △ABC와 일차함수 $y=ax+10$의 그래프가 만나려면 $a<0$이어야 하고 a의 값은 점 B$(5, 0)$을 지날 때 최소, 점 C$(14, 6)$을 지날 때 최대가 된다.



(i) 직선 $y=ax+10$이 점 B$(5, 0)$을 지날 때
$0=5a+10$　$\therefore a=-2$
(ii) 직선 $y=ax+10$이 점 C$(14, 6)$을 지날 때
$6=14a+10$　$\therefore a=-\frac{2}{7}$
(i), (ii)에 의하여 $-2\le a\le -\frac{2}{7}$이므로 이를 만족시키는 정수 a의 값은 -2, -1이고 그 합은 $-2+(-1)=-3$

12

오른쪽 그림과 같은 두 직선 l, m에 대하여 두 직선 l, m의 교점의 좌표를 구하시오. $\left(\frac{24}{5}, -\frac{42}{5}\right)$



직선 l의 방정식은 $y=-3x+6$
직선 m의 방정식은 $y=-\frac{4}{3}x-2$
이때 두 직선 l, m의 교점의 좌표는 연립방정식
$\begin{cases} y=-3x+6 & \cdots\cdots ㉠ \\ y=-\frac{4}{3}x-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.
㉠을 ㉡에 대입하면
$-3x+6=-\frac{4}{3}x-2$, $-\frac{5}{3}x=-8$　$\therefore x=\frac{24}{5}$
$x=\frac{24}{5}$를 ㉠에 대입하면 $y=-3\times\frac{24}{5}+6=-\frac{42}{5}$
따라서 두 직선 l, m의 교점의 좌표는 $\left(\frac{24}{5}, -\frac{42}{5}\right)$이다.

13 출제 주의

세 직선 $x+3y+a=0$, $4x+y-18=0$, $bx+cy+9=0$으로 둘러싸인 삼각형의 두 꼭짓점의 좌표가 $(1, 5)$, $(3, 6)$일 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

✓① -17　② -16　③ -15
④ -14　⑤ -13

점 $(1, 5)$는 직선 $x+3y+a=0$과 직선 $bx+cy+9=0$의 교점이다.
점 $(1, 5)$를 $x+3y+a=0$에 대입하면 $1+15+a=0$　$\therefore a=-16$
점 $(1, 5)$를 직선 $bx+cy+9=0$에 대입하면 $b+5c+9=0$　$\cdots\cdots$ ㉠
점 $(3, 6)$은 직선 $4x+y-18=0$과 직선 $bx+cy+9=0$의 교점이다.
점 $(3, 6)$을 직선 $bx+cy+9=0$에 대입하면 $3b+6c+9=0$
$\therefore b+2c+3=0$　$\cdots\cdots$ ㉡
㉠$-$㉡을 하면 $3c+6=0$, $3c=-6$　$\therefore c=-2$
$c=-2$를 ㉠에 대입하면 $b-10+9=0$　$\therefore b=1$
$\therefore a+b+c=-16+1+(-2)=-17$

14

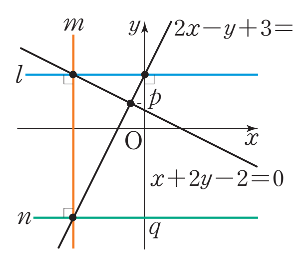
다음 네 직선이 한 점에서 만날 때, 두 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하시오. 4

$$5x-ay+b-4=0,\ \underset{㉠}{3x+2y-7=0},$$
$$ax-4y+b-6=0,\ \underset{㉡}{x-5y+9=0}$$

㉠$-$㉡$\times 3$을 하면 $17y-34=0$, $17y=34$　$\therefore y=2$
$y=2$를 ㉠에 대입하면 $3x+4-7=0$, $3x=3$　$\therefore x=1$
즉, 네 직선의 교점의 좌표는 $(1, 2)$이다.
따라서 점 $(1, 2)$는 두 일차방정식 $5x-ay+b-4=0$, $ax-4y+b-6=0$의 그래프 위의 점이므로 각각 대입하면
$5-2a+b-4=0$, $a-8+b-6=0$
$\therefore \begin{cases} 2a-b=1 & \cdots\cdots ㉢ \\ a+b=14 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$
㉢$+$㉣을 하면 $3a=15$　$\therefore a=5$
$a=5$를 ㉣에 대입하면 $5+b=14$　$\therefore b=9$
$\therefore b-a=9-5=4$

15

두 일차방정식 $\underset{㉠}{2x-y+3=0}$, $\underset{㉡}{x+2y-2=0}$의 그래프와 좌표축에 평행한 세 직선 l, m, n이 오른쪽 그림과 같다. 두 일차방정식 $2x-y+3=0$, $x+2y-2=0$의 그래프의 교점의 y좌표를 p, 직선 n이 y축과 만나는 점의 y좌표를 q라고 할 때, pq의 값은?



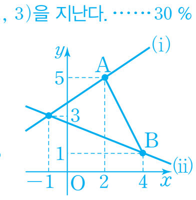
✓① -7　② -5　③ -3
④ 3　⑤ 5

㉡$\times 2-$㉠을 하면 $5y-7=0$　$\therefore y=\frac{7}{5}$　$\therefore p=\frac{7}{5}$
$2x-y+3=0$에 $x=0$을 대입하면 $-y+3=0$　$\therefore y=3$
즉, 직선 l의 방정식은 $y=3$이다.
$x+2y-2=0$에 $y=3$을 대입하면 $x+6-2=0$　$\therefore x=-4$
따라서 직선 m의 방정식은 $x=-4$이다.
$2x-y+3=0$에 $x=-4$를 대입하면 $-8-y+3=0$　$\therefore y=-5$
따라서 직선 n의 방정식은 $y=-5$이다.　$\therefore q=-5$
$\therefore pq=\frac{7}{5}\times(-5)=-7$

16 서술형

두 점 A$(2, 5)$, B$(4, 1)$을 이은 선분 AB와 직선 $y=mx+m+3$이 만나도록 하는 상수 m의 값의 범위를 구하시오. $-\frac{2}{5}\le m\le\frac{2}{3}$

$y=mx+m+3$을 m에 대하여 정리하면 $(x+1)m+(3-y)=0$
즉, 직선 $y=mx+m+3$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 3)$을 지난다. ⋯⋯30 %
(i) 직선 $y=mx+m+3$이 점 A$(2, 5)$를 지날 때
$m=\frac{5-3}{2-(-1)}=\frac{2}{3}$
(ii) 직선 $y=mx+m+3$이 점 B$(4, 1)$을 지날 때
$m=\frac{1-3}{4-(-1)}=-\frac{2}{5}$ ⋯⋯50 %



(i), (ii)에 의하여 직선 $y=mx+m+3$이 선분 AB와 만나도록 하는 m의 값의 범위는 $-\frac{2}{5}\le m\le\frac{2}{3}$ ⋯⋯20 %

17

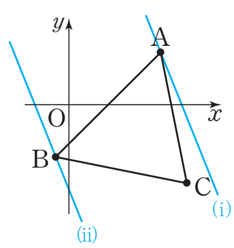
두 일차함수 $f(x)=-2x+m$, $g(x)=-mx+n$의 그래프의 교점의 x좌표가 1이고 $f(-2)=g(3)$일 때, 일차함수 $y=g(x)$의 그래프의 x절편을 구하시오. $\frac{8}{3}$

(단, m, n은 상수이다.)

$f(1)=g(1)$에서 $-2+m=-m+n$ $\quad\therefore n=2m-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$f(-2)=g(3)$에서 $4+m=-3m+n$ $\quad\therefore n=4m+4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $2m-2=4m+4$, $-2m=6$ $\quad\therefore m=-3$
$m=-3$을 ㉡에 대입하면 $n=-12+4=-8$
즉, $g(x)=3x-8$이므로 이 식에 $y=0$을 대입하면
$0=3x-8$, $3x=8$ $\quad\therefore x=\frac{8}{3}$
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 x절편은 $\frac{8}{3}$이다.

18

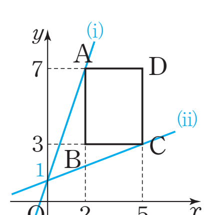
오른쪽 그림과 같이 세 점 A$(7,\ 3)$, B$(-1,\ -4)$, C$(9,\ -6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 일차방정식 $5x+2y-n=0$의 그래프가 삼각형 ABC와 만날 때, 정수 n의 개수를 구하시오. 55



$5x+2y-n=0$에서 $y=-\frac{5}{2}x+\frac{n}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
(i) ㉠의 그래프가 점 A$(7,\ 3)$을 지날 때, $3=-\frac{35}{2}+\frac{n}{2}$ $\quad\therefore n=41$
(ii) ㉠의 그래프가 점 B$(-1,\ -4)$를 지날 때, $-4=\frac{5}{2}+\frac{n}{2}$ $\quad\therefore n=-13$
(i), (ii)에 의하여 $-13\le n\le 41$이므로 정수 n은 -13, -12, -11, …, 41의 55개이다.

19

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 네 점 A$(2,\ 7)$, B$(2,\ 3)$, C$(5,\ 3)$, D$(5,\ 7)$을 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 있다. 일차방정식 $-ax+y+1=0$의 그래프가 이 사각형과 두 점에서 만나도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하시오. $\frac{4}{5}<a<4$



$-ax+y+1=0$에서 $y=ax-1$
(i) 직선 $y=ax-1$이 점 A$(2,\ 7)$을 지날 때
$7=2a-1$, $2a=8$ $\quad\therefore a=4$
(ii) 직선 $y=ax-1$이 점 C$(5,\ 3)$을 지날 때
$3=5a-1$, $5a=4$ $\quad\therefore a=\frac{4}{5}$
(i), (ii)에 의하여 상수 a의 값의 범위는 $\frac{4}{5}<a<4$

20 출제 주의

두 직선 $12x+ay-12=0$, $3x+2y+b=0$이 서로 일치할 때, 연립방정식 $\begin{cases} ax-y+2=0 \\ kx-2y-6b=0 \end{cases}$의 해가 존재하지 않는다. 이때 상수 k의 값을 구하시오. 16

(단, a, b는 상수이다.)

$12x+ay-12=0$에서 $y=-\frac{12}{a}x+\frac{12}{a}$, $3x+2y+b=0$에서 $y=-\frac{3}{2}x-\frac{b}{2}$
이때 두 직선이 서로 일치하므로 $-\frac{12}{a}=-\frac{3}{2}$, $\frac{12}{a}=-\frac{b}{2}$이어야 한다.
$\therefore a=8$, $b=3$
따라서 연립방정식 $\begin{cases} 8x-y+2=0 \\ kx-2y+18=0 \end{cases}$의 해가 존재하지 않으므로 두 직선이 서로 평행해야 한다.
$8x-y+2=0$에서 $y=8x+2$, $kx-2y+18=0$에서 $y=\frac{k}{2}x+9$이므로
$8=\frac{k}{2}$ $\quad\therefore k=16$

21 서술형

서로 다른 세 직선 $\underline{2x+3y-6=0}$, $\underline{ax+y-1=0}$, $\underline{x+ay-3=0}$에 의하여 삼각형이 만들어지지 않도록 하는 모든 상수 a의 값의 합을 구하시오. (단, $a>0$) 2

$y=-\frac{2}{3}x+2$ $\cdots\cdots$ ㉠ $\quad y=-ax+1$ $\cdots\cdots$ ㉡ $\quad y=-\frac{1}{a}x+\frac{3}{a}$ $\cdots\cdots$ ㉢

(i) 두 직선이 서로 평행할 때
두 직선 ㉠, ㉡이 서로 평행하면 $-\frac{2}{3}=-a$이므로 $a=\frac{2}{3}$
두 직선 ㉠, ㉢이 서로 평행하면 $-\frac{2}{3}=-\frac{1}{a}$이므로 $a=\frac{3}{2}$
그런데 $a=\frac{3}{2}$이면 직선 ㉢은 $y=-\frac{2}{3}x+2$가 되므로 직선 ㉠과 일치한다.
두 직선 ㉡, ㉢이 서로 평행하면 $-a=-\frac{1}{a}$ $\quad\therefore a=1$ ($\because a>0$) $\cdots\cdots\cdots$ 40 %
(ii) 세 직선이 평행할 때, 두 직선 ㉠, ㉢의 기울기가 같으면 두 직선이 서로 일치하게 되므로 세 직선이 모두 평행할 수는 없다. $\cdots\cdots$ 20 %
(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때
㉠을 ㉢에 대입하면 $-\frac{2}{3}x+2=-\frac{1}{a}x+\frac{3}{a}$, $(3-2a)x=3(3-2a)$
이때 $a=\frac{3}{2}$이면 두 직선 ㉠, ㉢이 서로 일치하게 되므로 $a\ne\frac{3}{2}$이어야 한다.
즉, $x=3$이고, 이를 ㉠에 대입하면 $y=-2+2=0$ $\quad\therefore (3,\ 0)$
$(3,\ 0)$을 ㉡에 대입하면 $0=-3a+1$, $3a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$
따라서 세 직선이 한 점에서 만날 때의 상수 a의 값은 $a=\frac{1}{3}$ $\cdots\cdots$ 30 %
(i)~(iii)에 의하여 모든 상수 a의 값의 합은 $\frac{2}{3}+1+\frac{1}{3}=2$ $\cdots\cdots\cdots$ 10 %

22 출제 주의

세 직선 $\underset{y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}}{\underline{x+2y=5}}$, $\underset{y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}}{\underline{2x-3y=4}}$, $\underset{y=-ax}{\underline{ax+y=0}}$이 좌표평면을 6개의 부분으로 나누도록 하는 모든 상수 a의 값의 곱이 $\frac{p}{q}$일 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소이다.)

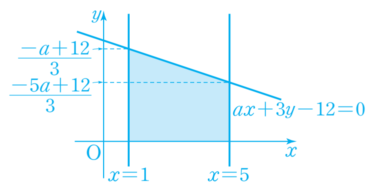
① 17 ② 21 ✓③ 25 ④ 29 ⑤ 33

(i) 두 직선 $x+2y=5$, $ax+y=0$이 서로 평행할 때, $-\frac{1}{2}=-a$이므로 $a=\frac{1}{2}$
(ii) 두 직선 $2x-3y=4$, $ax+y=0$이 서로 평행할 때, $\frac{2}{3}=-a$이므로 $a=-\frac{2}{3}$
(iii) 직선 $ax+y=0$이 두 직선 $x+2y=5$, $2x-3y=4$의 교점을 지날 때
$\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$를 연립하면 $x=\frac{23}{7}$, $y=\frac{6}{7}$ $\quad\therefore \left(\frac{23}{7},\ \frac{6}{7}\right)$
$\left(\frac{23}{7},\ \frac{6}{7}\right)$을 $ax+y=0$에 대입하면 $\frac{23}{7}a+\frac{6}{7}=0$ $\quad\therefore a=-\frac{6}{23}$
(i)~(iii)에 의하여 모든 상수 a의 값의 곱은 $\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{6}{23}\right)=\frac{2}{23}$
따라서 $p=2$, $q=23$이므로 $p+q=2+23=25$

23

세 직선 $ax+3y-12=0$, $x=1$, $x=5$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 12일 때, 상수 a의 값을 구하시오. 1

(단, $a<2$)



두 직선 $ax+3y-12=0$, $x=1$의 교점의 좌표는 $\left(1,\ \frac{-a+12}{3}\right)$

두 직선 $ax+3y-12=0$, $x=5$의 교점의 좌표는 $\left(5,\ \frac{-5a+12}{3}\right)$

세 직선 $ax+3y-12=0$, $x=1$, $x=5$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 12이므로

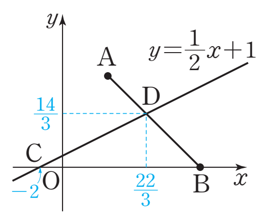
$\frac{1}{2}\times\left(\frac{-a+12}{3}+\frac{-5a+12}{3}\right)\times(5-1)=12$

$-4a+16=12$, $a+4=3$ $\therefore a=1$

24

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 두 점 A(4, 8), B(12, 0)이 있다. 일차함수 $y=\frac{1}{2}x+1$의 그래프가 x축과 만나는 점을 C, 선분 AB와 만나는 점을 D라고 할 때, 삼각형 CBD의 넓이는 $\frac{n}{m}$이다. 이때 $m+n$의 값은?

(단, m, n은 서로소이다.)



✓① 101 ② 102 ③ 103
④ 104 ⑤ 105

$y=\frac{1}{2}x+1$에 $y=0$을 대입하면 $0=\frac{1}{2}x+1$ $\therefore x=-2$ $\therefore$ C $(-2,\ 0)$

두 점 A, B를 지나는 일차함수의 그래프의 식은 $y=-x+12$

$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ y=-x+12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{1}{2}x+1=-x+12$ $\therefore x=\frac{22}{3}$

$x=\frac{22}{3}$를 ㉠에 대입하면 $y=\frac{11}{3}+1=\frac{14}{3}$ $\therefore$ D $\left(\frac{22}{3},\ \frac{14}{3}\right)$

따라서 삼각형 CBD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\{12-(-2)\}\times\frac{14}{3}=\frac{98}{3}$이므로

$m=3$, $n=98$ $\therefore m+n=3+98=101$

25

세 직선 $3x-4y+4=0$, $x+3y-3=0$, $4x-y-12=0$으로 둘러싸인 부분인 삼각형의 넓이는?

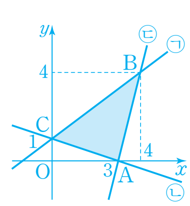
① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$
④ 6 ✓⑤ $\frac{13}{2}$

두 직선 $3x-4y+4=0$, $x+3y-3=0$의 교점의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

두 직선 $3x-4y+4=0$, $4x-y-12=0$의 교점의 좌표는 $(4,\ 4)$이다.

두 직선 $x+3y-3=0$, $4x-y-12=0$의 교점의 좌표는 $(3,\ 0)$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 한 변의 길이가 4인 정사각형에서 나머지 3개의 삼각형의 넓이를 뺀 것과 같으므로

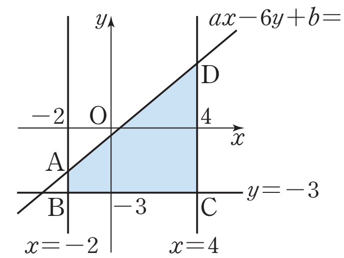


$(4\times4)-\left\{\frac{1}{2}\times4\times(4-1)\right\}-\left(\frac{1}{2}\times3\times1\right)-\left\{\frac{1}{2}\times(4-3)\times4\right\}$

$=16-6-\frac{3}{2}-2=\frac{13}{2}$

26

오른쪽 그림과 같이 네 직선 $ax-6y+b=0$, $x=-2$, $x=4$, $y=-3$으로 둘러싸인 사다리꼴 ABCD의 넓이는 21이고 $\overline{AB}=1$이다. 이때 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $a>0$) 3



사다리꼴 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(1+\overline{CD})\times\{4-(-2)\}=21$에서 $3(1+\overline{CD})=21$ $\therefore \overline{CD}=6$

$\therefore$ A$(-2,\ -2)$, D$(4,\ 3)$

두 점 A, D가 직선 $ax-6y+b=0$ 위의 점이므로

$\begin{cases} -2a+12+b=0 \\ 4a-18+b=0 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} 2a-b=12 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4a+b=18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

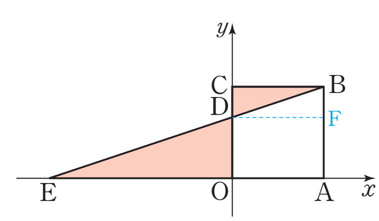
㉠+㉡을 하면 $6a=30$ $\therefore a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면 $10-b=12$ $\therefore b=-2$

$\therefore a+b=5+(-2)=3$

27

다음 그림과 같이 x축 위의 선분 OA를 한 변으로 하는 정사각형 OABC가 있다. 변 OC 위의 한 점 D에 대하여 직선 BD가 x축과 만나는 점을 E라고 하자. 색칠한 두 삼각형 BCD, EOD의 넓이의 합이 사다리꼴 OABD의 넓이와 같을 때, 직선 BD의 기울기는 $\frac{n}{m}$이다. 이때 $m+n$의 값은? (단, 점 O는 원점이고, m, n은 서로소인 자연수이다.)



① 3 ✓② 4 ③ 5
④ 7 ⑤ 8

△BCD+△EOD=(사다리꼴 OABD의 넓이)에서

△BCD=△BDF이므로 △EOD=(직사각형 OAFD의 넓이)이다.

정사각형 OABC의 한 변의 길이를 a라고 하면 B$(a,\ a)$

$\frac{1}{2}\times\overline{EO}\times\overline{OD}=\overline{OA}\times\overline{OD}$에서

$\overline{EO}=2\overline{OA}=2a$ $\therefore$ E$(-2a,\ 0)$

따라서 두 점 B$(a,\ a)$, E$(-2a,\ 0)$을 지나는 직선의 기울기는

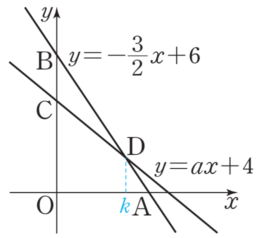
$\frac{0-a}{-2a-a}=\frac{1}{3}$이므로 $m=3$, $n=1$

$\therefore m+n=3+1=4$

28 서술형

오른쪽 그림과 같이 일차함수 $y=-\frac{3}{2}x+6$의 그래프가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B, 일차함수 $y=ax+4$의 그래프가 y축과 만나는 점을 C, 일차함수 $y=-\frac{3}{2}x+6$의 그래프와 만나는 점을 D라고 하자. 점 D는 제1사분면 위에 있고, 삼각형 BCD와 사각형 COAD의 넓이의 비가 1 : 3일 때, 상수 a의 값을 구하시오. $-\frac{5}{6}$

(단, 점 O는 원점이다.)



$A(4,\ 0)$, $B(0,\ 6)$이므로 $\triangle OAB=\frac{1}{2}\times4\times6=12$ ⋯⋯ 30 %

삼각형 BCD의 넓이를 S_1, 사각형 COAD의 넓이를 S_2라고 하면

$S_1 : S_2=1 : 3$이므로 $S_2=3S_1$

$S_1+S_2=4S_1=12$이므로 $S_1=3$

점 D의 x좌표를 k라고 하면 $S_1=\frac{1}{2}\times(6-4)\times k=3$ $\quad\therefore k=3$ ⋯⋯ 40 %

점 D는 직선 $y=-\frac{3}{2}x+6$ 위의 점이므로 $x=3$을 대입하면

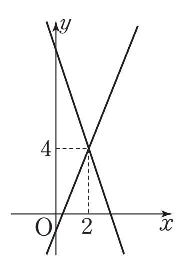
$y=-\frac{3}{2}\times3+6=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore D\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$

점 $D\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$은 직선 $y=ax+4$ 위의 점이므로

$\frac{3}{2}=3a+4$, $3a=-\frac{5}{2}$ $\quad\therefore a=-\frac{5}{6}$ ⋯⋯ 30 %

29 서술형

두 일차방정식 $5x+ay=2$, $3x-by=10$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 점 $(2,\ 4)$에서 만난다. 두 일차방정식의 그래프와 y축으로 둘러싸인 도형에 대하여 y축을 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 입체도형의 부피를 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) $\frac{44}{3}\pi$



$5x+ay=2$에 $x=2$, $y=4$를 대입하면 $10+4a=2$, $4a=-8$ $\quad\therefore a=-2$

$3x-by=10$에 $x=2$, $y=4$를 대입하면 $6-4b=10$, $4b=-4$ $\quad\therefore b=-1$ ⋯ 30 %

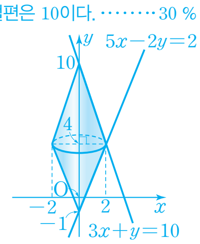
직선 $5x-2y=2$의 y절편은 -1이고 직선 $3x+y=10$의 y절편은 10이다. ⋯⋯ 30 %

따라서 두 일차방정식의 그래프와 y축으로 둘러싸인 도형은 삼각형이고, 이를 y축을 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 입체도형은 두 개의 원뿔을 붙여 놓은 도형이 된다.

따라서 구하는 부피는

$\left\{\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times(10-4)\right\}+\left[\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times\{4-(-1)\}\right]$

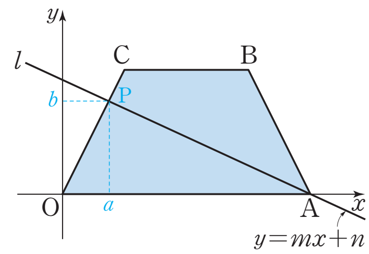
$=8\pi+\frac{20}{3}\pi=\frac{44}{3}\pi$ ⋯⋯ 40 %



30

다음 그림과 같이 $O(0,\ 0)$, $A(12,\ 0)$, $B(9,\ 6)$, $C(3,\ 6)$을 꼭짓점으로 하는 사다리꼴 OABC의 넓이를 점 A를 지나는 일차함수 $y=mx+n$의 그래프가 이등분한다고 할 때, $\frac{n}{m}$의 값을 구하시오. (단, m, n은 상수이다.)

-12



사다리꼴 OABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\{(12-0)+(9-3)\}\times6=54$

$\triangle ABC$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(9-3)\times6=18$

$\triangle OAP$의 넓이는 사다리꼴 OABC의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times12\times b=\frac{1}{2}\times54$, $6b=27$ $\quad\therefore b=\frac{9}{2}$

또, 직선 OC의 방정식은 $y=2x$이고 점 $P(a,\ b)$가 이 직선 위의 점이므로

$b=2a$에서 $\frac{9}{2}=2a$ $\quad\therefore a=\frac{9}{4}$ $\quad\therefore P\left(\frac{9}{4},\ \frac{9}{2}\right)$

두 점 $P\left(\frac{9}{4},\ \frac{9}{2}\right)$, $A(12,\ 0)$을 지나는 직선의 기울기는

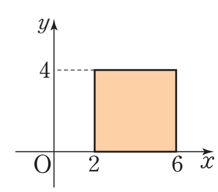
$\dfrac{0-\frac{9}{2}}{12-\frac{9}{4}}=\dfrac{-\frac{9}{2}}{\frac{39}{4}}=-\frac{6}{13}$ $\quad\therefore m=-\frac{6}{13}$

일차함수 $y=-\frac{6}{13}x+n$의 그래프가 점 $A(12,\ 0)$을 지나므로

$0=-\frac{72}{13}+n$ $\quad\therefore n=\frac{72}{13}$ $\quad\therefore \frac{n}{m}=\dfrac{\frac{72}{13}}{-\frac{6}{13}}=-12$

31 출제 주의

직선 $mx+y-ma+b=0$이 상수 m의 값에 관계없이 오른쪽 그림의 정사각형의 넓이를 이등분할 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)



✓① -8 ② -7 ③ -6
④ -4 ⑤ -3

정사각형의 넓이를 이등분하려면 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

정사각형의 두 대각선의 교점은 대각선의 중점이므로 교점의 좌표는

$\left(\frac{2+6}{2},\ \frac{0+4}{2}\right)$, 즉 $(4,\ 2)$

$mx+y-ma+b=0$을 m에 대하여 정리하면 $(x-a)m+(y+b)=0$ ⋯⋯ ㉠

즉, ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(a,\ -b)$를 지난다.

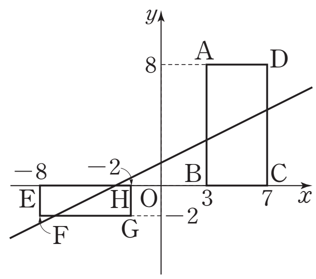
따라서 ㉠이 정사각형의 넓이를 이등분하려면 m의 값에 관계없이 정사각형의 중심을 지나야 하므로 $a=4$, $b=-2$

$\therefore ab=4\times(-2)=-8$

32

다음 그림과 같이 좌표평면 위에 놓인 두 직사각형 ABCD, EFGH의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 방정식이 $ax+by+3=0$일 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

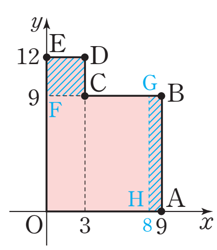


① -2　　✓② -1　　③ 0
④ 1　　⑤ 2

직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(5,\ 4)$
직사각형 EFGH의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(-5,\ -1)$
두 점 $(5,\ 4)$, $(-5,\ -1)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 이 직선의 방정식을
$y=\frac{1}{2}x+c$ (c는 상수)라고 하면 이 직선이 점 $(5,\ 4)$를 지나므로
$4=\frac{5}{2}+c$　　$\therefore c=\frac{3}{2}$
따라서 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$
즉, $x-2y+3=0$이므로 $a=1$, $b=-2$　　$\therefore a+b=1+(-2)=-1$

33

오른쪽 그림과 같은 도형 OABCDE의 넓이를 이등분하고 원점을 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{q}{p}x$이다. 이때 $p+q$의 값을 구하시오. (단, 도형의 각 변은 x축 또는 y축과 평행하고, p, q는 서로소이다.) **17**



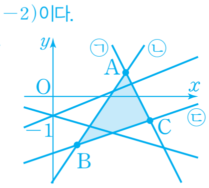
사각형 CDEF는 한 변의 길이가 3인 정사각형이므로 넓이는 $3^2=9$이다.
이때 $\overline{BA}=9$이므로 사각형 ABGH의 넓이가 9가 되도록 점 G와 점 G에서 x축에 내린 수선의 발 H를 잡으면 $\overline{GB}=1$이어야 한다.　　$\therefore G(8,\ 9)$
따라서 사각형 CDEF와 사각형 ABGH의 넓이가 같으므로 도형 OABCDE의 넓이를 이등분하는 직선 $y=\frac{q}{p}x$는 사각형 OHGF의 넓이를 이등분하면 된다.
이때 직사각형 OHGF의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은 원점과 점 $G(8,\ 9)$를 지나므로 $y=\frac{9}{8}x$이다. 따라서 $p=8$, $q=9$이므로 $p+q=8+9=17$

34

세 직선 $\underset{㉠}{\underline{2x+y-7=0}}$, $\underset{㉡}{\underline{3x-y-8=0}}$, $\underset{㉢}{\underline{x-2y-6=0}}$으로 둘러싸인 삼각형 ABC가 있다. 일차함수 $y=ax-1$의 그래프가 삼각형 ABC를 삼각형과 사각형으로 나눈다고 할 때, 상수 a의 값의 범위를 구하시오.

$-\frac{1}{2}<a<0$ 또는 $0<a<\frac{2}{3}$

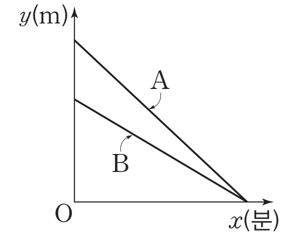
두 직선 $2x+y-7=0$, $3x-y-8=0$의 교점의 좌표는 $(3,\ 1)$이다.
두 직선 $2x+y-7=0$, $x-2y-6=0$의 교점의 좌표는 $(4,\ -1)$이다.
두 직선 $3x-y-8=0$, $x-2y-6=0$의 교점의 좌표는 $(2,\ -2)$이다.
$y=ax-1$의 그래프가 삼각형 ABC를 삼각형과 사각형으로 나누는 경우는 삼각형의 세 점을 지나지 않는 경우이다.



(ⅰ) $y=ax-1$의 그래프가 점 $A(3,\ 1)$을 지날 때
$1=3a-1$, $3a=2$　　$\therefore a=\frac{2}{3}$
(ⅱ) $y=ax-1$의 그래프가 점 $B(2,\ -2)$를 지날 때
$-2=2a-1$, $2a=-1$　　$\therefore a=-\frac{1}{2}$
(ⅲ) $y=ax-1$의 그래프가 점 $C(4,\ -1)$을 지날 때
$-1=4a-1$, $4a=0$　　$\therefore a=0$
(ⅰ)～(ⅲ)에 의하여 구하는 상수 a의 값의 범위는
$-\frac{1}{2}<a<0$ 또는 $0<a<\frac{2}{3}$

35

오른쪽 그림은 A와 B가 직선 모양의 경로를 따라 일정한 속력으로 목적지까지 이동할 때, 같은 시각에 출발하여 이동하는 데 걸린 시간 x분과 남아 있는 거리 y m 사이의 관계를 나타낸 그래프이다. 다음 보기에서 그래프에 대한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



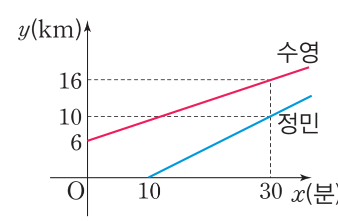
〈 보기 〉
ㄱ. A와 B가 이동한 거리는 같다.
ㄴ. B가 A보다 목적지에 늦게 도착한다.
ㄷ. A가 B보다 더 빠른 속력으로 이동했다.

① ㄱ　　✓② ㄷ　　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 두 그래프의 y절편은 시간이 0분일 때의 남아 있는 거리이므로 목적지까지의 거리를 의미한다. A의 그래프의 y절편이 B의 그래프의 y절편보다 크고, 이는 출발 지점에서 목적지까지의 거리가 B보다 A가 더 멀다는 것을 의미한다.
ㄴ. 두 그래프의 x절편은 목적지에 도착한 시간을 의미한다. 즉, A와 B 모두 동일한 시간에 목적지에 도착했음을 알 수 있다.
ㄷ. 속력은 주어진 그래프의 기울기와 같다. 이때 A의 그래프의 기울기의 절댓값이 더 크므로 A가 B보다 더 빠른 속력으로 이동했다.

36 출제 주의

수영이와 정민이는 주말에 같은 코스를 따라 자전거를 타기로 했는데 정민이에게 일이 생겨 수영이가 먼저 출발하였다. 오른쪽 그림은 수영이가 오전 10시에 출발한 지 x분 후에 이동한 거리를 y km라고 할 때, x와 y의 관계를 그래프로 나타낸 것이다. 수영이와 정민이가 만나는 시각을 구하시오.



오전 11시 6분

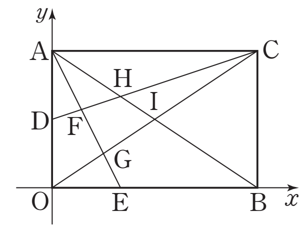
수영이가 이동한 거리를 나타내는 그래프의 방정식은
$y=\frac{1}{3}x+6$　　…… ㉠
정민이가 이동한 거리를 나타내는 그래프의 방정식은
$y=\frac{1}{2}x-5$　　…… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{1}{3}x+6=\frac{1}{2}x-5$, $\frac{1}{6}x=11$　　$\therefore x=66$
따라서 수영이와 정민이가 만나는 시각은 오전 10시에서 66분이 지난 후이므로 오전 11시 6분이다.

Lv. X 상위 1%에 도달하는

심화 문제

대표 문제

오른쪽 그림과 같이 네 점 A$(0,\ 8)$, O$(0,\ 0)$, B$(12,\ 0)$, C$(12,\ 8)$을 꼭짓점으로 하는 직사각형 AOBC에서 $\overline{\mathrm{AO}}$의 중점을 D, $\overline{\mathrm{OB}}$ 위에 $\overline{\mathrm{OE}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{OB}}$를 만족시키는 점 E를 잡는다. $\overline{\mathrm{AE}}$와 $\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{CO}}$의 교점을 각각 F, G, $\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{CO}}$의 교점을 각각 H, I라고 할 때, 사각형 FGIH의 넓이를 구하시오.



함께 풀기

STEP 1

주어진 조건과 구해야 하는 것 확인하기

주어진 조건: ① 네 점 A$(0,\ 8)$, O$(0,\ 0)$, B$(12,\ 0)$, C$(12,\ 8)$

② $\overline{\mathrm{AO}}$의 중점 D, $\overline{\mathrm{OB}}$ 위에 $\overline{\mathrm{OE}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{OB}}$를 만족시키는 점 E

③ $\overline{\mathrm{AE}}$와 $\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{CO}}$의 교점을 각각 F, G, $\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{CO}}$의 교점을 각각 H, I

구해야 하는 것: 사각형 FGIH의 넓이

STEP 2

두 점 D, E의 좌표 구하기

$\overline{\mathrm{AO}}$의 중점 D의 좌표는 $(0,\ 4)$이고

$\overline{\mathrm{OE}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{3}\times 12=4$이므로 점 E의 좌표는 $(4,\ 0)$이다.

STEP 3

네 직선 OB, DC, AE, AB의 방정식 구하기

직선 $\overline{\mathrm{OC}}$의 방정식은 $y=\frac{8}{12}x$, 즉 $y=\frac{2}{3}x$ …… ㉠

직선 $\overline{\mathrm{DC}}$의 방정식은 $y=\frac{8-4}{12-0}x+4$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+4$ …… ㉡

직선 $\overline{\mathrm{AE}}$의 방정식은 $y=\frac{0-8}{4-0}x+8$, 즉 $y=-2x+8$ …… ㉢

직선 $\overline{\mathrm{AB}}$의 방정식은 $y=\frac{0-8}{12-0}x+8$, 즉 $y=-\frac{2}{3}x+8$ …… ㉣

STEP 4

네 직선의 교점의 좌표 모두 구하기

점 G는 두 직선 $\overline{\mathrm{OC}}$, $\overline{\mathrm{AE}}$의 교점이므로 ㉠, ㉢을 연립하여 풀면 G$(3,\ 2)$

점 F는 두 직선 $\overline{\mathrm{DC}}$, $\overline{\mathrm{AE}}$의 교점이므로 ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 F$\left(\frac{12}{7},\ \frac{32}{7}\right)$

점 H는 두 직선 $\overline{\mathrm{DC}}$, $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점이므로 ㉡, ㉣을 연립하여 풀면 H$\left(4,\ \frac{16}{3}\right)$

점 I는 두 직선 $\overline{\mathrm{OC}}$, $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점이므로 ㉠, ㉣을 연립하여 풀면 I$(6,\ 4)$

STEP 5

사각형 FGIH의 넓이 구하기

∴ (사각형 FGIH의 넓이)

$=\triangle\mathrm{AOI}-\triangle\mathrm{AOG}-\triangle\mathrm{AFH}$

$=\triangle\mathrm{AOI}-\triangle\mathrm{AOG}-(\triangle\mathrm{ADH}-\triangle\mathrm{ADF})$

$=\left(\frac{1}{2}\times 8\times \underbrace{6}_{\text{점 I의 }x\text{좌표}}\right)-\left(\frac{1}{2}\times 8\times \underbrace{3}_{\text{점 G의 }x\text{좌표}}\right)-\left\{\left(\frac{1}{2}\times 4\times \underbrace{4}_{\text{점 H의 }x\text{좌표}}\right)-\left(\frac{1}{2}\times 4\times \underbrace{\frac{12}{7}}_{\text{점 F의 }x\text{좌표}}\right)\right\}$

$=24-12-\left(8-\frac{24}{7}\right)=\frac{52}{7}$

답 $\frac{52}{7}$

01 점 $(4,\ 7)$을 지나는 직선 중 x절편이 소수이고 y절편이 양의 정수인 직선의 개수를 구하시오. 2

점 $(4,\ 7)$을 지나는 직선의 x절편을 a, y절편을 b (a, b는 자연수)라고 하면 직선은 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$를 지나므로 기울기는 $-\frac{b}{a}$

따라서 직선의 방정식은 $y=-\frac{b}{a}x+b$이고 이 직선이 점 $(4,\ 7)$을 지나므로 $7=-\frac{4b}{a}+b$에서 $7a=(a-4)b$ …… ㉠

$\therefore b=\frac{7a}{a-4}=7+\frac{28}{a-4}$

이때 b는 자연수이므로

$a-4=-28,\ -14,\ -7,\ 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 14,\ 28$

$\therefore a=-24,\ -10,\ -3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 11,\ 18,\ 32$

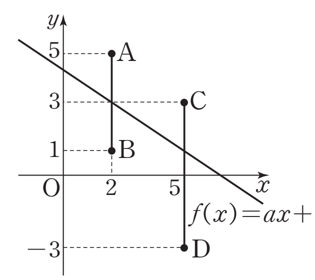
따라서 ㉠을 만족시키는 a, b의 값을 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면

$(-24,\ 6),\ (-10,\ 5),\ (-3,\ 3),\ (5,\ 35),\ (6,\ 21),\ (8,\ 14),\ (11,\ 11),\ (18,\ 9),\ (32,\ 8)$

이때 a는 소수이므로 조건을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(5,\ 35)$, $(11,\ 11)$의 2개이다.

따라서 조건을 만족시키는 직선의 개수는 2이다.

02 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 두 선분 AB, CD를 각각 지난다. 이때 $f(4)$의 값 중 가장 작은 값과 $f(6)$의 값 중 가장 큰 값의 합을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) 2



$f(4)$의 값은 직선 $f(x)=ax+b$가 두 점 $\mathrm{B}(2,\ 1)$, $\mathrm{D}(5,\ -3)$을 지날 때 가장 작으므로 그때의 직선의 기울기는 $a=\frac{-3-1}{5-2}=-\frac{4}{3}$

$f(x)=-\frac{4}{3}x+b$의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지나므로 $1=-\frac{8}{3}+b$ $\quad\therefore b=\frac{11}{3}$

$\therefore f(x)=-\frac{4}{3}x+\frac{11}{3}$

따라서 가장 작은 $f(4)$의 값은 $f(4)=-\frac{16}{3}+\frac{11}{3}=-\frac{5}{3}$

또, $f(6)$의 값은 직선 $f(x)=ax+b$가 두 점 $\mathrm{B}(2,\ 1)$, $\mathrm{C}(5,\ 3)$을 지날 때 가장 크므로 그때의 직선의 기울기는 $a=\frac{3-1}{5-2}=\frac{2}{3}$

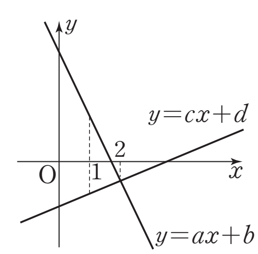
$f(x)=\frac{2}{3}x+b$의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지나므로 $1=\frac{4}{3}+b$ $\quad\therefore b=-\frac{1}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$

따라서 가장 큰 $f(6)$의 값은 $f(6)=4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$이므로 구하는 값은 $-\frac{5}{3}+\frac{11}{3}=2$

03 오른쪽 그림의 두 일차함수 $y=ax+b$, $y=cx+d$의 그래프에 대한 설명으로 다음 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, a, b, c, d는 상수이다.)



〈 보기 〉

ㄱ. $|a|>|c|$　　ㄴ. $a-c<d-b$

ㄷ. $\frac{b}{a}>\frac{d}{c}$　　ㄹ. $\frac{b-d}{a-c}=2$

① ㄱ, ㄴ　✓② ㄱ, ㄷ　③ ㄴ, ㄷ　④ ㄴ, ㄹ　⑤ ㄷ, ㄹ

ㄱ. $y=ax+b$의 그래프가 $y=cx+d$의 그래프보다 더 가파르다.

$\therefore |a|>|c|$

ㄴ. $y=ax+b$에서 $x=1$일 때, $a+b>0$

$y=cx+d$에서 $x=1$일 때, $c+d<0$

즉, $a+b>c+d$이므로 $a-c>d-b$

ㄷ. $y=ax+b$에 $y=0$을 대입하면 $0=ax+b$ $\quad\therefore x=-\frac{b}{a}$

$y=cx+d$에 $y=0$을 대입하면 $0=cx+d$ $\quad\therefore x=-\frac{d}{c}$

$y=ax+b$의 그래프의 x절편이 $y=cx+d$의 그래프의 x절편보다 더 작으므로

$-\frac{b}{a}<-\frac{d}{c}$ $\quad\therefore \frac{b}{a}>\frac{d}{c}$

ㄹ. $y=ax+b$, $y=cx+d$는 $x=2$일 때의 함숫값이 같으므로 $2a+b=2c+d$

$b-d=-2(a-c)$ $\quad\therefore \frac{b-d}{a-c}=-2$

Lv. X 상위 1%에 도달하는 **심화 문제**

04 두 양수 x, y에 대하여 함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(\frac{125}{81}\right)$의 값을 구하시오. 3

(가) $f(xy)=f(x)+f(y)$

(나) $f(25)=10$, $f\left(\frac{1}{3}\right)=-3$

조건 (가)에 $x=1$, $y=1$을 대입하면
$f(1)=f(1\times1)=f(1)+f(1)$ $\quad\therefore f(1)=0$
또, $f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=f\left(\frac{1}{x}\times x\right)=f(1)=0$이므로
$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
조건 (가)에 $x=5$, $y=5$를 대입하면
$f(25)=f(5\times5)=f(5)+f(5)=2f(5)$
조건 (나)에 의하여 $f(25)=10$이므로
$2f(5)=10$ $\quad\therefore f(5)=5$
㉠에 의하여 $f(3)=-f\left(\frac{1}{3}\right)=-(-3)=3$

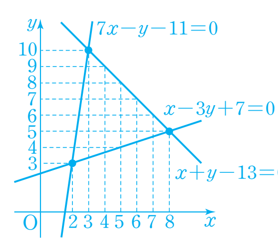
$\therefore f\left(\frac{125}{81}\right)=f\left(125\times\frac{1}{81}\right)=f(125)+f\left(\frac{1}{81}\right)$
$=f(125)-f(81)$
$=f(25\times5)-f(9\times9)$
$=\{f(25)+f(5)\}-\{f(9)+f(9)\}$
$=\{f(5)+f(5)+f(5)\}-\{f(3)+f(3)+f(3)+f(3)\}$
$=3f(5)-4f(3)$
$=3\times5-4\times3=3$

05 다음 세 직선으로 둘러싸인 삼각형의 내부에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인점의 개수를 구하시오. (단, 경계선은 제외한다.) 17

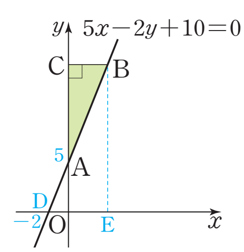
$\underset{㉠}{\underline{x-3y+7=0}}$, $\underset{㉡}{\underline{7x-y-11=0}}$, $\underset{㉢}{\underline{x+y-13=0}}$

㉠$-$㉡$\times3$을 하면 $-20x+40=0$, $20x=40$ $\quad\therefore x=2$
$x=2$를 ㉡에 대입하면 $14-y-11=0$ $\quad\therefore y=3$
따라서 두 직선 $x-3y+7=0$, $7x-y-11=0$의 교점의 좌표는 $(2, 3)$이다.
㉠$-$㉢을 하면 $-4y+20=0$, $4y=20$ $\quad\therefore y=5$
$y=5$를 ㉢에 대입하면 $x+5-13=0$ $\quad\therefore x=8$
따라서 두 직선 $x-3y+7=0$, $x+y-13=0$의 교점의 좌표는 $(8, 5)$이다.
㉡$+$㉢을 하면 $8x-24=0$, $8x=24$ $\quad\therefore x=3$
$x=3$을 ㉢에 대입하면 $3+y-13=0$ $\quad\therefore y=10$
따라서 두 직선 $7x-y-11=0$, $x+y-13=0$의 교점의 좌표는 $(3, 10)$이다.

이때 삼각형의 내부에 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는
$x=3$일 때, $y=4, 5, 6, 7, 8, 9$의 6개
$x=4$일 때, $y=4, 5, 6, 7, 8$의 5개
$x=5$일 때, $y=5, 6, 7$의 3개
$x=6$일 때, $y=5, 6$의 2개
$x=7$일 때, $y=5$의 1개
따라서 정수인 점의 개수는
$6+5+3+2+1=17$



06 오른쪽 그림과 같이 일차방정식 $5x-2y+10=0$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A, 그래프 위의 한 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 C라고 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는 20이다. 이때 삼각형 ABC를 x축을 회전축으로 하여 1회전시킨 회전체의 부피는? (단, 점 B는 제1사분면 위에 있다.)



① $\frac{200}{3}\pi$ ② $\frac{500}{3}\pi$ ③ $\frac{800}{3}\pi$

④ $\frac{1100}{3}\pi$ ✓⑤ $\frac{1400}{3}\pi$

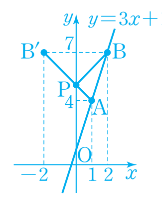
$5x-2y+10=0$에서 $y=\frac{5}{2}x+5$ $\quad\therefore A(0, 5)$
$y=\frac{5}{2}x+5$에 $y=0$을 대입하면 $0=\frac{5}{2}x+5$ $\quad\therefore x=-2$
$\therefore D(-2, 0)$
또, 직선 $y=\frac{5}{2}x+5$ 위의 점 B의 좌표를 $\left(a, \frac{5}{2}a+5\right)$ $(a>0)$라고 하면 $\triangle ABC$의 넓이가 20이므로
$\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{5}{2}a+5-5\right)=20$, $\frac{5}{4}a^2=20$, $a^2=16$
이때 $a>0$이므로 $a=4$ $\quad\therefore B(4, 15)$
따라서 $\triangle ABC$를 x축을 회전축으로 하여 1회전시킨 회전체의 부피는 사각형 OEBC를 x축을 회전축으로 하여 1회전시킨 원기둥의 부피에서 사각형 OEBA를 x축을 회전축으로 하여 1회전시킨 원뿔대의 부피를 빼면 된다.

또, 이 원뿔대의 부피는 $\triangle BDE$를 x축을 회전축으로 하여 1회전시킨 원뿔의 부피에서 $\triangle ADO$를 x축을 회전축으로 하여 1회전시킨 원뿔의 부피를 빼면 되므로
$\left(\frac{1}{3}\times\pi\times15^2\times6\right)-\left(\frac{1}{3}\times\pi\times5^2\times2\right)=450\pi-\frac{50}{3}\pi=\frac{1300}{3}\pi$
따라서 구하는 부피는
$(\pi\times15^2\times4)-\frac{1300}{3}\pi=900\pi-\frac{1300}{3}\pi=\frac{1400}{3}\pi$

07 일차함수 $y=ax+1$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$, $\mathrm{B}(k,\ 7)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$가 최소가 되도록 하는 y축 위의 점 P와 점 $(a,\ k-a)$를 지나는 직선의 방정식을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

$y=-2x+5$

점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$가 일차함수 $y=ax+1$의 그래프 위에 있으므로
$4=a+1$　　$\therefore a=3$
점 $\mathrm{B}(k,\ 7)$이 일차함수 $y=3x+1$의 그래프 위에 있으므로
$7=3k+1$, $3k=6$　　$\therefore k=2$
즉, 점 $(a,\ k-a)$는 $(3,\ -1)$이다.
점 $\mathrm{B}(2,\ 7)$과 y축에 대하여 대칭인 점을 점 B'이라고 하면 $\mathrm{B}'(-2,\ 7)$
이때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$이므로 세 점 A, P, B′이 일직선 위에 있을 때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값이 최소가 된다.



두 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$, $\mathrm{B}'(-2,\ 7)$을 지나는 직선의 기울기는 -1이므로 일차함수의 식을 $y=-x+b$ (b는 상수)라고 하면 이 일차함수의 그래프가 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$를 지나므로
$4=-1+b$　　$\therefore b=5$
즉, 일차함수의 식이 $y=-x+5$이므로 그래프의 y절편은 5이다.
$\therefore \mathrm{P}(0,\ 5)$
따라서 점 $\mathrm{P}(0,\ 5)$와 점 $(3,\ -1)$을 지나는 직선의 기울기는 -2이므로 직선의 방정식은 $y=-2x+5$이다.

08 연료 1 L로 15 km를 달릴 수 있는 자동차가 있다. 첫 번째 주유소에 도착했을 때 자동차의 연료계의 눈금은 $\frac{1}{6}C$ L를 가리키고 있었고 첫 번째 주유소에서 연료 30 L를 넣었더니 연료계의 눈금이 $\frac{2}{3}C$ L를 가리키고 있었다. 이 자동차가 첫 번째 주유소를 출발하여 150 km를 주행한 후 두 번째 주유소에 들렀다. 두 번째 주유소에서 연료를 더 넣었더니 연료계의 눈금이 $\frac{3}{4}C$ L를 가리키고 있었다고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 두 번째 주유소에서 넣은 연료량은 몇 L인지 구하시오. **15 L**

(2) 두 번째 주유소를 출발한 후, 주행 중 남아 있는 연료량을 y L, 주행 거리를 x km라고 할 때, y를 x에 대한 식으로 나타내시오. $y=45-\frac{1}{15}x\ (0\le x\le 675)$

(3) 두 번째 주유소에서 연료를 더 넣고 210 km를 주행한 후 남아 있는 연료량을 구하시오. **31 L**

(1) 연료량이 $\frac{1}{6}C$ L일 때, 연료 30 L를 넣었더니 연료량이 $\frac{2}{3}C$ L가 되었으므로
$\frac{1}{6}C+30=\frac{2}{3}C$, $\frac{1}{2}C=30$　　$\therefore C=60\ (\mathrm{L})$
첫 번째 주유소에서 연료를 넣기 전의 자동차 연료량은 $\frac{1}{6}C=10\ (\mathrm{L})$
첫 번째 주유소에서 연료를 넣은 직후의 자동차 연료량은
$10+30=40\ (\mathrm{L})$
150 km를 주행할 때 소모되는 연료량은 $\frac{150}{15}=10\ (\mathrm{L})$
150 km를 주행한 후 두 번째 주유소에서 연료를 더 넣은 직후의 자동차의 연료량은 $\frac{3}{4}C=45\ (\mathrm{L})$
따라서 두 번째 주유소에서 넣은 연료량은
$45-(40-10)=15\ (\mathrm{L})$
(2) x km를 주행할 때 소모되는 자동차의 연료량은 $\frac{1}{15}x$ L이다.
두 번째 주유소에서 연료를 넣은 직후의 자동차의 연료량이 45 L이므로
$y=45-\frac{1}{15}x\ (0\le x\le 675)$
(3) 두 번째 주유소에서 210 km를 주행한 후 남아 있는 연료량은 $x=210$일 때의 y의 값이므로
$y=45-\frac{1}{15}\times 210=45-14=31\ (\mathrm{L})$

09 9시 x분에 시침과 분침이 이루는 각 중에서 작은 각의 크기를 $y°$라고 할 때, x와 y 사이의 관계식은

$$y=\begin{cases}5.5x+p & (0\le x\le a)\\ q-5.5x & (a<x\le b)\\ 5.5x-270 & (b<x\le 60)\end{cases}$$

9시 k분에 시침이 12시 방향과 이루는 작은 각의 크기는 $(90-0.5k)°$이므로 시침에서 분침까지 시계방향으로 이루는 각의 크기는 $(90-0.5k)+6k=90+5.5k(°)$이다.

이다. 이때 $\frac{b}{a}+p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 상수이다.) **363**

(ⅰ) 시침과 분침이 일직선이 될 때까지 시침과 분침이 이루는 작은 각의 크기
시침과 분침이 일직선이 되는 경우인 9시 a분에 시침에서 분침까지 시계 방향으로 이루는 각의 크기는 $90+5.5a(°)$이므로
$90+5.5a=180$에서 $5.5a=90$　　$\therefore a=\frac{180}{11}$
따라서 $y=90+5.5x\ \left(0\le x\le \frac{180}{11}\right)$이므로 $p=90$
(ⅱ) 시침과 분침이 일직선이 될 때부터 일치할 때까지 시침과 분침이 이루는 작은 각의 크기
$x>\frac{180}{11}$에서 시침과 분침이 일치하는 시각 9시 b분에 시침에서 분침까지 시계 방향으로 이루는 각의 크기는 $90+5.5b(°)$이므로
$90+5.5b=360$에서 $5.5b=270$　　$\therefore b=\frac{540}{11}$
이때 시침과 분침이 이루는 작은 각의 크기는
$360-(90+5.5x)=270-5.5x(°)$
따라서 $y=270-5.5x\left(\frac{180}{11}\le x\le \frac{540}{11}\right)$이므로 $q=270$
(ⅲ) 시침과 분침이 일치할 때부터 10시가 되기 전까지 시침과 분침이 이루는 작은 각의 크기
$x>\frac{540}{11}$에서 10시가 되기 전까지의 시각 9시 x분에서의 시침에서 분침까지 시계 방향으로 이루는 각의 크기는
$(90-0.5x)-(360-6x)=5.5x-270(°)$
$\therefore y=5.5x-270\left(\frac{540}{11}<x\le 60\right)$
(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 $\frac{b}{a}+p+q$의 값은 363이다.

Lv. Master 실력을 완성하는 대단원 평가

_____ 점 / 100점

01

등식 $3x(1-2ax)-b(4x+1)-cy=0$에서 y가 x에 대한 일차함수가 되도록 하는 세 상수 a, b, c의 조건은? [4점]

① $a=0$, $b=\frac{3}{4}$, $c=0$ ② $a=0$, $b\neq\frac{3}{4}$, $c\neq0$
③ $a=0$, $b=\frac{4}{3}$, $c=0$ ④ $a=0$, $b\neq\frac{4}{3}$, $c=0$
⑤ $a=0$, $b\neq\frac{4}{3}$, $c\neq0$

$3x(1-2ax)-b(4x+1)-cy=0$에서
$3x-6ax^2-4bx-b-cy=0$
$cy=-6ax^2+(3-4b)x-b$
이 등식이 일차함수가 되려면 $-6a=0$, $3-4b\neq0$, $c\neq0$이어야 하므로
$a=0$, $b\neq\frac{3}{4}$, $c\neq0$

02

자연수 x보다 작은 소수의 개수를 y라고 할 때, $y=f(x)$이다. $f(4)+f(8)+f(12)$의 값은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

4보다 작은 소수는 2, 3의 2개이므로 $f(4)=2$
8보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이므로 $f(8)=4$
12보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7, 11의 5개이므로 $f(12)=5$
$\therefore f(4)+f(8)+f(12)=2+4+5=11$

03

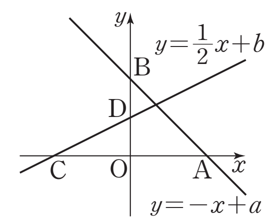
일차함수 $y=5x+b$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프가 두 점 $(a,\ a+8)$, $(-3,\ 13)$을 지날 때, $a+b$의 값은? (단, b는 상수이다.) [4점]

① -9 ② -6 ③ 6
④ 9 ⑤ 12

$y=5x+b$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=5x+2b$
이 그래프가 점 $(-3,\ 13)$을 지나므로 $13=-15+2b$, $2b=28$ $\therefore b=14$
따라서 일차함수 $y=5x+28$의 그래프가 점 $(a,\ a+8)$을 지나므로
$a+8=5a+28$ $\therefore a=-5$
$\therefore a+b=-5+14=9$

04

오른쪽 그림과 같이 일차함수 $y=-x+a$의 그래프가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B, 일차함수 $y=\frac{1}{2}x+b$의 그래프가 x축, y축과 만나는 점을 각각 C, D라 고 하자. $\overline{BD}=\overline{DO}$이고 $\overline{AC}=8$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]



① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

$A(a,\ 0)$, $B(0,\ a)$, $C(-2b,\ 0)$, $D(0,\ b)$
$\overline{BD}=\overline{DO}$에서 $a-b=b$ $\therefore a=2b$ …… ㉠
$\overline{AC}=8$에서 $a-(-2b)=8$ $\therefore a+2b=8$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $2b+2b=8$, $4b=8$ $\therefore b=2$
$b=2$를 ㉠에 대입하면 $a=2\times2=4$ $\therefore a+b=4+2=6$

05

두 상수 a, b에 대하여 다음 중 일차함수 $y=abx+a-b$의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개) [4점]

① $a=b$이면 원점을 지난다.
② $a<0$, $b>0$이면 y절편이 음수이다.
③ a, b의 부호가 같으면 오른쪽 위로 향하는 직선이다.
④ a, b의 부호가 다르면 제3사분면을 지나지 않는다.
⑤ 일차함수 $y=abx+\frac{b}{a}$의 그래프와 한 점에서 만난다.

① $a=b$이면 $y=a^2x$이므로 원점을 지난다. ② $a<0$, $b>0$이면 y절편은 $a-b<0$
③ a, b의 부호가 같으면 기울기는 $ab>0$이므로 오른쪽 위로 향하는 직선이다.
④ a, b의 부호가 다르면 기울기는 $ab<0$
이때 $a>0$, $b<0$이면 y절편이 $a-b>0$이므로 그래프가 제1, 2, 4사분면을 지나고,
$a<0$, $b>0$이면 y절편이 $a-b<0$이므로 그래프가 제2, 3, 4사분면을 지난다.
⑤ $y=abx+\frac{b}{a}$의 그래프와 기울기가 ab로 같으므로 서로 평행하거나 일치, 즉 만나지 않거나 일치한다.

06

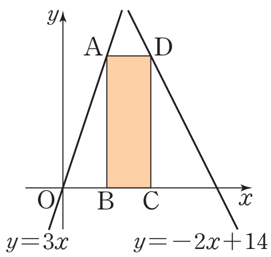
지면으로부터 10 km까지는 높이가 100 m 높아질 때마다 기온이 0.5 ℃씩 내려간다고 한다. 지면의 기온이 영상 16 ℃일 때, 기온이 영하 3 ℃인 곳의 지면으로부터의 높이는 몇 m인가? [4점]

① 2600 m ② 2800 m ③ 3400 m
④ 3600 m ⑤ 3800 m

지면으로부터의 높이가 1 m 높아질 때마다 기온은 0.005 ℃씩 내려간다. 지면의 기온이 영상 16 ℃일 때, 지면으로부터의 높이가 x m인 곳의 기온을 y ℃라고 하면
$y=16-0.005x$
$y=16-0.005x$에 $y=-3$을 대입하면
$-3=16-0.005x$ $\therefore x=3800$

07

오른쪽 그림에서 두 점 A, D는 각각 일차함수 $y=3x$, $y=-2x+14$의 그래프 위에 있고, 두 점 B, C는 각각 두 점 A, D에서 x축에 내린 수선의 발이다. $\overline{AB}=3\overline{BC}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는?



(단, 선분 AD는 x축과 평행하다.) [4점]

① 11　✓② 12　③ 13
④ 14　⑤ 15

A$(a,\ 3a)$, D$(b,\ -2b+14)$라고 하면 B$(a,\ 0)$, C$(b,\ 0)$
$\overline{AB}=3\overline{BC}$이므로 $3a=3(b-a)$　$\therefore b=2a$　…… ㉠
$\overline{AB}=\overline{DC}$이므로 $3a=-2b+14$　$\therefore 3a+2b=14$　…… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $3a+4a=14$　$\therefore a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=4$
$\therefore$ A$(2,\ 6)$, B$(2,\ 0)$, C$(4,\ 0)$, D$(4,\ 6)$
따라서 사각형 ABCD의 넓이는 $(4-2)\times(6-0)=12$

08

$y=2x+9$ …… ㉠

연립방정식 $\begin{cases} 2x+y-9=0 \\ (1-a)x-3(y+2)=0 \end{cases}$의 해가 존재하지 않을 때, 두 일차방정식 $(3-a)x-y-6=0$, $bx+2y-4c=0$의 공통인 해는 무수히 많다. 이때 $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

$y=\frac{1-a}{3}x-2$ …… ㉡

① -24　② -12　③ -4
④ 4　✓⑤ 12

㉠, ㉡의 해가 존재하지 않으려면 ㉠, ㉡의 그래프가 서로 평행해야 하므로
$-2=\frac{1-a}{3}$에서 $1-a=-6$　$\therefore a=7$
$(3-a)x-y-6=0$, 즉 $-4x-y-6=0$에서 $y=-4x-6$　…… ㉢
$bx+2y-4c=0$에서 $2y=-bx+4c$　$\therefore y=-\frac{b}{2}x+2c$　…… ㉣
㉢, ㉣의 공통인 해가 무수히 많으려면 ㉢, ㉣의 그래프가 서로 일치해야 하므로
$-4=-\frac{b}{2}$, $-6=2c$　$\therefore b=8,\ c=-3$
$\therefore a+b+c=7+8+(-3)=12$

09

x의 값이 5만큼 증가할 때 y의 값이 2만큼 감소하는 일차함수 $y=f(x)$와 y절편이 1인 일차함수 $y=g(x)$가 있다. $f(5)=6$, $g(4)=5$일 때, $f(x)>g(x)$인 x의 값의 범위는 $x<m$이다. m의 값은? [4점]

① 2　② 3　③ 4
✓④ 5　⑤ 6

(기울기)$=-\frac{2}{5}$이므로 $f(x)=-\frac{2}{5}x+a$ (a는 상수)라고 하면
$f(5)=-2+a=6$에서 $a=8$　$\therefore f(x)=-\frac{2}{5}x+8$
$y=g(x)$의 y절편이 1이므로 $g(x)=bx+1$ (b는 상수)이라고 하면
$g(4)=4b+1=5$에서 $4b=4$　$\therefore b=1$　$\therefore g(x)=x+1$
따라서 $f(x)>g(x)$에서 $-\frac{2}{5}x+8>x+1$, $\frac{7}{5}x<7$　$\therefore x<5$　$\therefore m=5$

10

y를 x에 대한 식 $y=f(x)$로 나타낼 때, y가 x의 일차함수이면서 함숫값도 옳은 것은? [4점]

① 반지름의 길이가 x cm인 원형 모양인 동전의 둘레의 길이를 반지름의 길이로 나눈 값 y, $f(1)=2\pi$
② 속력이 시속 x km인 자전거가 30 km를 가는 데 걸리는 시간 y시간, $f(20)=1.5$
③ 한 상자에 x개 이하로 귤을 담을 때, 100개의 귤을 담기 위해 필요한 상자의 최소 개수 y, $f(12)=8$
✓④ 어느 학급의 학생 수가 30이고 남학생 수는 x일 때 여학생 수 y, $f(15)=15$
⑤ 밑변의 길이가 x cm이고 높이가 10 cm인 삼각형의 넓이 y cm^2, $f(5)=50$

① $y=\frac{2\pi x}{x}=2\pi$　$\therefore f(1)=2\pi$　② $y=\frac{30}{x}$　$\therefore f(20)=1.5$
③ $f(x)$가 x에 대한 일차식으로 표현되지 않으므로 일차함수가 아니다.
④ $y=30-x$　$\therefore f(15)=15$
⑤ $y=\frac{1}{2}\times x\times 10=5x$　$\therefore f(5)=25$

11

다음은 물속에서의 음파 속력과 물체가 받는 압력에 대한 설명이다.

> (가) 수압은 수심이 10 m 깊어질 때마다 1기압씩 증가한다.
> (나) 물속에서의 음파 속력은 초속 1.5 km이다.
> (다) 물체가 받는 압력은 그 지점의 수압에 1기압을 더한 값이다.

해수면에서 수직으로 음파를 발사했더니 4초 후 물속의 물체에 반사되어 되돌아왔다. 이 물체가 물속에서 받는 압력은? (단, 해수면에서의 수압은 0이라고 한다.)[4점]

① 281기압　② 296기압　✓③ 301기압
④ 316기압　⑤ 330기압

해수면으로부터 x m 깊이에 있는 물체가 받는 압력을 y기압이라고 하면
$y=\frac{1}{10}x+1$　…… ㉠
해수면에서 음파가 물속의 물체까지 도달하는데 걸리는 시간은 2초이므로 수면에서 물체까지의 수직 거리는 3 km
즉, $x=3000$을 ㉠에 대입하면 $y=\frac{1}{10}\times 3000+1=301$

12

자연수 x를 6으로 나눈 나머지를 $f(x)$라 하고

$$g(x)=f(3x+2)$$

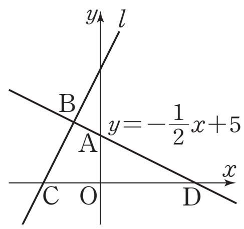
라고 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은? [4점]

① $f(x+6)=f(x)$　② $g(x+2)=f(3x+8)$
③ $g(x+6)=g(x)$　✓④ $g(2x)=2f(x)$
⑤ $g(6x+4)=g(4)$

① $f(x)$는 자연수 x를 6으로 나눈 나머지이므로 $f(x+6)=f(x)$
② $g(x+2)=f(3(x+2)+2)=f(3x+8)$
③ $g(x+6)=f(3(x+6)+2)=f(3x+20)=f(3x+2)=g(x)$
④ $f(6x+k)=f(k)$(k는 상수)이므로 $g(2x)=f(6x+2)=f(2)=2$,
$x=2$일 때 $2f(x)=2f(2)=4$　$\therefore g(2x)\neq 2f(x)$
⑤ $g(6x+4)=f(18x+14)=f(14)=f(2)$
$g(4)=f(14)=f(2)$　$\therefore g(6x+4)=g(4)$

13

오른쪽 그림과 같이 일차함수 $y=-\frac{1}{2}x+5$의 그래프와 직선 l이 점 $\mathrm{B}(-2,\ 6)$에서 만난다. 사각형 OABC의 넓이가 23일 때, 직선 l의 y절편은?



(단, 점 O는 원점이다.) [4점]

✓① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

$y=-\frac{1}{2}x+5$의 그래프의 x절편은 10, y절편은 5이므로

$\mathrm{D}(10,\ 0)$, $\mathrm{A}(0,\ 5)$ $\quad\therefore \triangle\mathrm{OAD}=\frac{1}{2}\times10\times5=25$

$\triangle\mathrm{BCD}=\triangle\mathrm{OAD}+$(사각형 OABC의 넓이)$=25+23=48$이고

점 $\mathrm{C}(-a,\ 0)$ $(a>0)$이라고 하면 $\overline{\mathrm{CD}}=10+a$이므로

$\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\times(10+a)\times6=48$, $10+a=16$ $\quad\therefore a=6$

따라서 두 점 $\mathrm{B}(-2,\ 6)$, $\mathrm{C}(-6,\ 0)$을 지나는 직선 l의 기울기는 $\frac{3}{2}$이므로 직선 l의 방정식을 $y=\frac{3}{2}x+b$ (b는 상수)라고 하면 이 직선이 점 $\mathrm{C}(-6,\ 0)$을 지나므로

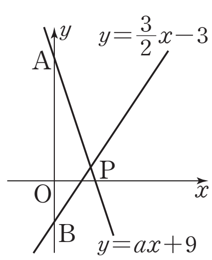
$0=-9+b$ $\quad\therefore b=9$

따라서 직선 l의 방정식은 $y=\frac{3}{2}x+9$이므로 y절편은 9이다.

14

오른쪽 그림과 같이 두 일차함수 $y=\frac{3}{2}x-3$, $y=ax+9$의 그래프와 y축으로 둘러싸인 삼각형 ABP의 넓이가 16일 때, 상수 a의 값은?

(단, $a<0$) [4점]



① $-\frac{10}{3}$ ✓② -3
③ $-\frac{8}{3}$ ④ $-\frac{7}{3}$
⑤ -2

두 직선의 교점 P의 x좌표를 k라고 하면 삼각형 ABP의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\times\{9-(-3)\}\times k=16$, $6k=16$ $\quad\therefore k=\frac{8}{3}$

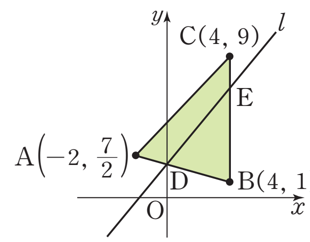
$y=\frac{3}{2}x-3$에 $x=\frac{8}{3}$을 대입하면 $y=4-3=1$

따라서 $y=ax+9$의 그래프가 점 $\mathrm{P}\left(\frac{8}{3},\ 1\right)$을 지나므로

$1=\frac{8}{3}a+9$, $\frac{8}{3}a=-8$ $\quad\therefore a=-3$

15

다음 그림과 같이 △ABC의 한 변 AB가 y축과 만나는 교점을 D라고 하자. 점 D와 선분 BC 위의 한 점 E를 지나는 직선 l이 △ABC의 넓이를 이등분한다고 할 때, 직선 l의 기울기는? [6점]



① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{5}{6}$ ✓③ $\frac{13}{12}$
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{19}{12}$

두 점 $\mathrm{A}\left(-2,\ \frac{7}{2}\right)$, $\mathrm{B}(4,\ 1)$을 지나는 직선의 기울기는 $-\frac{5}{12}$

이므로 $y=-\frac{5}{12}x+k$ (k는 상수)라고 하면 이 직선이 점 $\mathrm{A}(4,\ 1)$을 지나므로

$1=-\frac{5}{3}+k$ $\quad\therefore k=\frac{8}{3}$

따라서 직선의 방정식은 $y=-\frac{5}{12}x+\frac{8}{3}$이므로 점 D의 좌표는 $\left(0,\ \frac{8}{3}\right)$이다.

$\overline{\mathrm{BC}}=9-1=8$이고, 점 A에서 선분 BC까지의 거리는 $4-(-2)=6$이므로

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times8\times6=24$

이때 직선 l이 △ABC의 넓이를 이등분하므로 △DEB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times24=12$이다.

점 E의 좌표를 $(4,\ a)$라고 하면 $\overline{\mathrm{BE}}=a-1$이고, 점 D에서 선분 BE까지의 거리는 4이므로 $\triangle\mathrm{DEB}=\frac{1}{2}\times(a-1)\times4=12$, $a-1=6$ $\quad\therefore a=7$

따라서 두 점 $\mathrm{D}\left(0,\ \frac{8}{3}\right)$, $\mathrm{E}(4,\ 7)$을 지나는 직선 l의 기울기는

$\dfrac{7-\frac{8}{3}}{4-0}=\frac{13}{12}$

16

일차함수 $y=-ax+2$의 그래프를 y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 그래프의 x절편이 -1일 때, 일차함수 $y=bx-2$의 그래프를 y축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 그래프의 x절편을 구하시오. [4점] 1

$y=-ax+2$의 그래프를 y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-ax+2-b$
이때 평행이동한 그래프의 x절편이 -1이므로
$0=a+2-b \quad \therefore b=a+2 \quad \cdots\cdots ㉠$
$y=bx-2$의 그래프를 y축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=bx-2-a$
$y=bx-2-a$에 $y=0$을 대입하면 $0=bx-2-a \quad \therefore bx=2+a$
㉠을 이 식에 대입하면 $(a+2)x=2+a$
$b=a+2\neq0$이므로 $x=1$
따라서 구하는 x절편은 1이다.

17

일차함수 $f(x)=ax+b$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점] 8

> (가) $f(1)-f(0)+\dfrac{f(4)-f(2)}{2}+\dfrac{f(6)-f(3)}{3}=9$
>
> (나) $\dfrac{f(4)+f(0)}{2}=5$

$\dfrac{f(1)+f(0)}{1-0}=a$, $\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}=a$, $\dfrac{f(6)-f(3)}{6-3}=a$이므로 조건 (가)에서
$f(1)-f(0)+\dfrac{f(4)-f(2)}{2}+\dfrac{f(6)-f(3)}{3}=3a=9 \quad \therefore a=3 \quad \cdots\cdots ㉠$
조건 (나)에서 $\dfrac{f(4)+f(0)}{2}=\dfrac{(4a+b)+b}{2}=2a+b=5 \quad \cdots\cdots ㉡$
㉠을 ㉡에 대입하면 $6+b=5 \quad \therefore b=-1$
즉, $f(x)=3x-1$이므로 $f(3)=9-1=8$

18

기울기와 y절편이 주어진 직선을 그리는 데 단비는 기울기를 잘못 보고 그려서 직선 $y=6x-1$이 되었고, 가람이는 y절편을 잘못 보고 그려서 두 점 $(-4,\ -7)$, $(2,\ 5)$를 지나는 직선이 되었다. 처음 직선의 방정식을 $y=ax+b$라고 할 때, $a-b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) 3 [4점]

단비는 y절편을 제대로 보았으므로 처음 직선의 y절편은 -1이다.
가람이는 기울기를 제대로 보았으므로 처음 직선의 기울기는 $\dfrac{5-(-7)}{2-(-4)}=2$이다.
따라서 처음 직선의 방정식은 $y=2x-1$이므로
$a=2,\ b=-1 \quad \therefore a-b=2-(-1)=3$

19

세 점 $A(2,\ 1)$, $B(1,\ 5)$ $C(a,\ -a+6)$을 다음 규칙에 따라 이동시킬 때, 이동시킨 세 점이 한 직선 위에 있도록 하는 자연수 a의 값의 합을 구하시오. [4점] 3

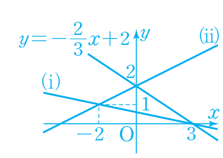
> (가) $x\geq y$이면 점$(x,\ y)$를 점 $(x-y,\ x+2y)$로 이동시킨다.
>
> (나) $x<y$이면 점$(x,\ y)$를 점 $(-x,\ 3x+y)$로 이동시킨다.

점 A를 규칙 (가)에 따라 이동시킨 점을 A′이라고 하면 $A'(1,\ 4)$
점 B를 규칙 (나)에 따라 이동시킨 점을 B′이라고 하면 $B'(-1,\ 8)$
따라서 두 점 A′, B′을 지나는 직선의 방정식은 $y=-2x+6$이다.
(ⅰ) $a\geq-a+6$일 때, $2a\geq6$에서 $a\geq3$
점 C를 규칙 (가)에 따라 이동시킨 점을 C′이라고 하면 $C'(2a-6,\ -a+12)$
이때 점 C′이 직선 $y=-2x+6$ 위에 있어야 하므로
$-a+12=-2(2a-6)+6,\ 3a=6 \quad \therefore a=2$
(ⅱ) $a<-a+6$일 때, $2a<6$에서 $a<3$
점 C를 규칙 (나)에 따라 이동시킨 점을 C″이라고 하면 $C''(-a,\ 2a+6)$
이때 점 C″이 직선 $y=-2x+6$ 위에 있어야 하므로
$2a+6=2a+6,\ 0\times a=0$
이 등식은 $a<3$일 때 항상 성립하므로 자연수 a의 값은 1, 2이다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 자연수 a의 값의 합은 $1+2=3$

20

두 직선 $y=-\dfrac{2}{3}x+2$, $y-kx-1=2k$가 제1사분면 위에서 만나도록 하는 상수 k의 값의 범위를 구하시오. [4점] $-\dfrac{1}{5}<k<\dfrac{1}{2}$

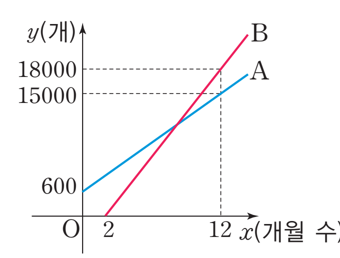
$y=-\dfrac{2}{3}x+2$에 $y=0$을 대입하면 $0=-\dfrac{2}{3}x+2 \quad \therefore x=3$
$y-kx-1=2k$를 k에 대하여 정리하면 $k(x+2)-(y-1)=0 \quad \cdots\cdots ㉠$
따라서 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 1)$을 지난다.
(ⅰ) 직선 ㉠이 점 $(3,\ 0)$을 지날 때
$5k+1=0,\ 5k=-1 \quad \therefore k=-\dfrac{1}{5}$
(ⅱ) 직선 ㉠이 점 $(0,\ 2)$를 지날 때
$2k-1=0,\ 2k=1 \quad \therefore k=\dfrac{1}{2}$



(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 두 직선이 제1사분면 위에서 만나려면 상수 k의 값의 범위는 $-\dfrac{1}{5}<k<\dfrac{1}{2}$

21

두 회사 A, B에서 같은 종류의 제품을 각각 생산하여 판매하는데 A 회사는 1월부터 제품을 생산하여 판매하였고, B 회사에서는 3월부터 해당 제품을 생산하여 판매를 시작했다. 위의 그림은 3월을 기준으로 x개월 후의 누적 판매량을 y개라고 할 때, x와 y사이의 관계를 그래프로 나타낸 것이다. 두 회사 A, B에서 생산하는 제품의 판매량이 같아지는 것은 몇 월인지 구하시오. 10월 (단, $x=0$은 3월을 의미한다.) [4점]



A 회사의 제품의 판매량을 나타내는 직선의 방정식은 $y=1200x+600 \quad \cdots\cdots ㉠$
B 회사의 제품의 판매량을 나타내는 직선의 방정식은 $y=1800x-3600 \quad \cdots\cdots ㉡$
㉡을 ㉠에 대입하면 $1800x-3600=1200x+600,\ 600x=4200 \quad \therefore x=7$
따라서 두 회사 A, B에서 생산하는 제품의 판매량이 같아지는 것은 3월부터 7개월 후인 10월이다.

22, 23번은 서술형입니다. 풀이 과정을 자세히 서술하시오.

22

세 점 $(-6,\ -2)$, $(3k,\ 4)$, $(2k+3,\ 12)$를 지나는 직선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. 25

[7점]

두 점 $(-6,\ -2)$, $(3k,\ 4)$를 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{4-(-2)}{3k-(-6)}=\dfrac{2}{k+2}$ …… ㉠

두 점 $(-6,\ -2)$, $(2k+3,\ 12)$를 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{12-(-2)}{(2k+3)-(-6)}=\dfrac{14}{2k+9}$ …… ㉡

㉠, ㉡이 같으므로 $\dfrac{2}{k+2}=\dfrac{14}{2k+9}$, $4k+18=14k+28$ $\quad \therefore k=-1$ ··········3점

세 점을 지나는 직선의 기울기는 2이므로 직선의 방정식을 $y=2x+b$ (b는 상수)라고 하면 이 직선이 점 $(-6,\ -2)$를 지나므로

$-2=-12+b$ $\quad \therefore b=10$

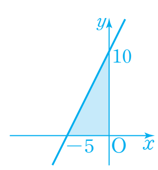
즉, 세 점을 지나는 직선의 방정식은 $y=2x+10$ ································2점

$y=2x+10$에 $y=0$을 대입하면 $0=2x+10$

$2x=-10$ $\quad \therefore x=-5$

따라서 직선 $y=2x+10$의 그래프의 x절편은 -5이므로 구하는 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 5\times 10=25$ ·······································2점



23

세 직선 $4x-3y+2=0$, $3x-y=0$, $y=ax-5$로 삼각형을 만들 수 없도록 하는 모든 상수 a의 값의 곱을 구하시오. [7점] 62

주어진 세 직선 중 두 직선 $4x-3y+2=0$, $5x-y=0$은 서로 평행하지 않으므로 세 직선으로 삼각형을 만들 수 없는 경우는 세 직선 중 평행한 두 직선이 있는 경우이거나 세 직선이 한 점에서 만나 세 개의 교점을 만들 수 없는 경우이다. ·····················1점

(ⅰ) 두 직선 $4x-3y+2=0$, $y=ax-5$가 서로 평행할 때

직선 $4x-3y+2=0$에서 $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}$

즉, 두 직선 $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}$, $y=ax-5$가 서로 평행하면 $a=\dfrac{4}{3}$

(ⅱ) 두 직선 $3x-y=0$, $y=ax-5$가 서로 평행할 때

직선 $3x-y=0$, 즉 $y=3x$와 직선 $y=ax-5$가 서로 평행하면 $a=3$ ···········2점

(ⅲ) 세 직선이 한 점에서 만날 때

연립방정식 $\begin{cases} 4x-3y+2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-y=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$에서

㉡$\times 3-$㉠을 하면 $5x-2=0$ $\quad \therefore x=\dfrac{2}{5}$

$x=\dfrac{2}{5}$를 ㉡에 대입하면 $\dfrac{6}{5}-y=0$ $\quad \therefore y=\dfrac{6}{5}$

점 $\left(\dfrac{2}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)$이 직선 $y=ax-5$를 지나야 하므로

$\dfrac{6}{5}=\dfrac{2}{5}a-5$ $\quad \therefore a=\dfrac{31}{2}$ ···3점

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 삼각형을 만들 수 없도록 하는 상수 a의 값은 $\dfrac{4}{3}$, 3, $\dfrac{31}{2}$이므로 모든 a의 값의 곱은

$\dfrac{4}{3}\times 3\times \dfrac{31}{2}=62$ ···1점