

풍안짜

미적분 I

정답과 풀이

함수의 극한과 연속

1 함수의 극한

1 함수의 극한

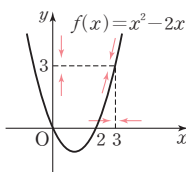
12~21쪽

002

- (1) $f(x) = x^2 - 2x$ 로 놓으면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

x 의 값이 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x) = 3$$



- (2) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}$ 로 놓으면

$x \neq -2$ 일 때,

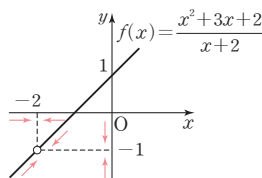
$$f(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{x+2} = x+1$$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

x 의 값이 -2 에 한없이 가까워질 때,

$f(x)$ 의 값은 -1 에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} = -1$$

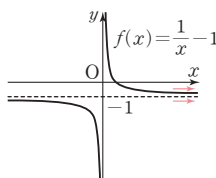


- (3) $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ 로 놓으면

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

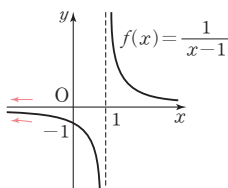
x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 -1 에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = -1$$



- (4) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ 로 놓으면

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

답 (1) 3 (2) -1 (3) -1 (4) 0

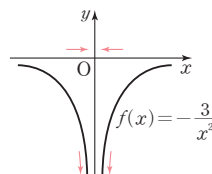
004

- (1) $f(x) = -\frac{3}{x^2}$ 으로 놓으면

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

x 의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{3}{x^2} \right) = -\infty$$

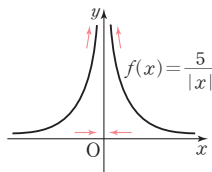


- (2) $f(x) = \frac{5}{|x|}$ 로 놓으면

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

x 의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{|x|} = \infty$$

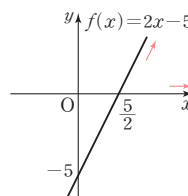


- (3) $f(x) = 2x - 5$ 로 놓으면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

x 의 값이 한없이 커질 때,

$f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 5) = \infty$$



답 (1) $-\infty$ (2) ∞ (3) ∞

006

- (1) x 의 값이 0보다 작으면서

0에 한없이 가까워질 때,

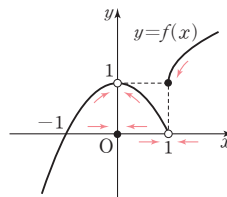
$f(x)$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

- (2) x 의 값이 0보다 크면서 0에 한없이 가까워질 때,

$f(x)$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$



(3) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

(4) x 의 값이 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때,
 $f(x)$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

(5) x 의 값이 1보다 크면서 1에 한없이 가까워질 때,
 $f(x)$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

(6) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

답 (1) 1 (2) 1 (3) 1 (4) 0

(5) 1 (6) 존재하지 않는다.

008

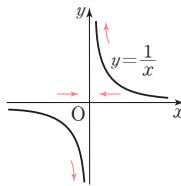
(1) 함수 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

따라서 좌극한과 우극한이 존재하지 않으므로 주어진 극한은 존재하지 않는다.



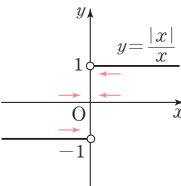
(2) 함수 $y = \frac{|x|}{x}$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

따라서 좌극한과 우극한이 다르므로 주어진 극한은 존재하지 않는다.



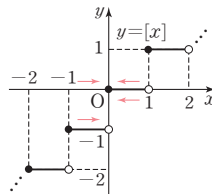
(3) 함수 $y = [x]$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0$$

따라서 좌극한과 우극한이 다르므로 주어진 극한은 존재하지 않는다.



답 (1) 존재하지 않는다.

(2) 존재하지 않는다.

(3) 존재하지 않는다.

+ 풍산자 비법

함숫값은 극한과는 상관이 없다.

극한을 조사할 때에는 함숫값이 아니라 가까워지는 값에 집중한다.

참고 가우스 기호를 포함한 함수의 극한

$[x]$ 가 x 보다 크지 않은 최대의 정수일 때, 정수 n 에 대하여

$$\textcircled{1} x \rightarrow n + \text{이면 } n \leq x < n+1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n$$

$$\textcircled{2} x \rightarrow n - \text{이면 } n-1 \leq x < n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n-1$$

010

$2f(x) + g(x) = h(x)$ 로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 10 \text{ 이고 } f(x) = \frac{h(x) - g(x)}{2} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{h(x) - g(x)}{2} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} h(x) - \lim_{x \rightarrow 3} g(x)}{2} \\ &= \frac{10 - 2}{2} = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4}{2} = 2$$

답 2

다른 풀이

함수 $f(x)$ 가 수렴한다는 조건은 없지만 $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$,

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$ 가 수렴하고 $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) \neq 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 도

수렴하므로 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 풀 수도 있다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \{2f(x) + g(x)\} &= 2 \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + 2 = 10 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4}{2} = 2$$

012

ㄱ은 옳지 않다.

$$(\text{반례}) f(x) = 0, g(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases} \text{이면}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

이지만 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ은 옳다.

(반례) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = p, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = q$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left(g(x) \times \frac{f(x)}{g(x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} g(x) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = pq\end{aligned}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재한다.

ㄷ은 옳지 않다.

(반례) $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 0 & (x \geq 0) \\ 1 & (x < 0) \end{cases}$ 일 때,

$f(x)g(x) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$ 이지만

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ㄴ

따라서 함수

$y = f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.

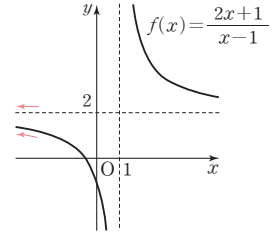
x 의 값이 음수이면서

그 절댓값이 한없이 커

질 때, $f(x)$ 의 값은 2

에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$$



(3) $f(x) = \frac{1}{|x-2|}$ 로 놓

으면 함수 $y = f(x)$ 의

그래프는 오른쪽 그림

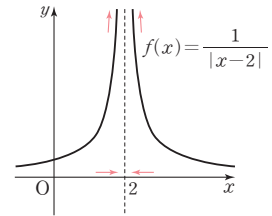
과 같다.

x 의 값이 2에 한없이

가까워질 때, $f(x)$ 의

값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{|x-2|} = \infty$$



(4) $f(x) = -\sqrt{x-1}$ 로 놓으

면 함수 $y = f(x)$ 의 그래

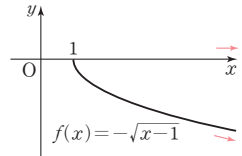
프는 오른쪽 그림과 같다.

x 의 값이 한없이 커질 때,

$f(x)$ 의 값은 음수이면서

그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-\sqrt{x-1}) = -\infty$$



답 (1) 3 (2) 2 (3) ∞ (4) $-\infty$

필수 확인 문제

22쪽

013

(1) $f(x) = x^2 + x + 1$ 로 놓으

면 함수 $y = f(x)$ 의 그래

프는 오른쪽 그림과 같다.

x 의 값이 1에 한없이 가까

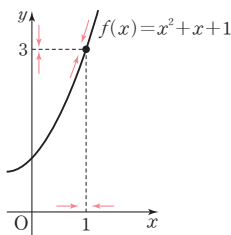
워질 때, $f(x)$ 의 값은 3에

한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

(2) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{2x+1}{x-1} \\ &= \frac{2(x-1)+3}{x-1} \\ &= \frac{3}{x-1} + 2\end{aligned}$$



014

① $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = b, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 는 존재하지 않는다.

② $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 는 존재하지 않는다.

③ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 는 존재하지 않는다.

④ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = a$

⑤ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 는 존재하지 않는다.

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 가 존재하는 것은 ④이다.

답 ④

015

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 - 4) = -3$$

$$f(1) = 10 \times 1 = 10$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + f(1) = 1 + (-3) + 10 = 8$$

답 8

016

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x)f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x(x+1)f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} xf(x) \times \lim_{x \rightarrow 2} (x+1)$$

$$= 1 \times 3 = 3$$

답 3

017

$$\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 10} g(x) = a \text{이고, } a \neq \frac{2}{3} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 10} f(x)g(x) - 2 \neq 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{f(x) + 3g(x)}{f(x)g(x) - 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 10} \{f(x) + 3g(x)\}}{\lim_{x \rightarrow 10} \{f(x)g(x) - 2\}}$$

$$= \frac{3 + 3a}{3a - 2} = \frac{1}{2}$$

$$6 + 6a = 3a - 2, 3a = -8$$

$$\therefore a = -\frac{8}{3}$$

답 $-\frac{8}{3}$

2 극한값의 계산

23~27쪽

019

$$(1) \text{ (주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$$

$$(2) \text{ (주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-2} = -2$$

$$(3) \text{ (주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}+2) = 4$$

$$(4) \text{ (주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+7}+3} = \frac{1}{6}$$

답 (1) 4 (2) -2 (3) 4 (4) $\frac{1}{6}$

021

(1) 분모, 분자를 x^3 으로 나누면

$$\text{(주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{2}{x^2}}{3 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} = 2$$

(2) 분모, 분자를 x^2 으로 나누면

$$\text{(주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}}{4 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0$$

(3) 분모, 분자를 x^2 으로 나누면

$$\text{(주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \infty$$

(4) 분모, 분자를 $\sqrt{x^2}$, 즉 x 로 나누면

$$\text{(주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x}}} = 1$$

답 (1) 2 (2) 0 (3) ∞ (4) 1

다른 풀이

(1) (분모의 차수) = (분자의 차수)이므로

$$\frac{(\text{분자의 최고차항의 계수})}{(\text{분모의 최고차항의 계수})} = \frac{6}{3} = 2$$

(2) (분모의 차수) > (분자의 차수)이므로 0

(3) (분모의 차수) < (분자의 차수)이고

$$\frac{(\text{분자의 최고차항의 계수})}{(\text{분모의 최고차항의 계수})} \text{가 양수이므로 } \infty$$

023

$$(1) \text{ (주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(1 - \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^4} \right)$$

$$= \infty$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ (주어진 식)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

답 (1) ∞ (2) $\frac{1}{2}$

참고

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$ 에서 분모를 1로 보고 분자를 유리화한다.

025

(1) (주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{2}\sqrt{x+2}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{x+2})(\sqrt{2}+\sqrt{x+2})}{\sqrt{2}x\sqrt{x+2}(\sqrt{2}+\sqrt{x+2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\sqrt{2}x\sqrt{x+2}(\sqrt{2}+\sqrt{x+2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{x+2}(\sqrt{2}+\sqrt{x+2})} \\
 &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{8}
 \end{aligned}$$

(2) (주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(6x \times \frac{\sqrt{9x+1}-3\sqrt{x}}{3\sqrt{9x+1}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 6x \times \frac{(\sqrt{9x+1}-3\sqrt{x})(\sqrt{9x+1}+3\sqrt{x})}{3\sqrt{9x+1}(\sqrt{9x+1}+3\sqrt{x})} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{9x+1+3\sqrt{9x^2+x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{9+\frac{1}{x}+3\sqrt{9+\frac{1}{x}}} = \frac{1}{9}
 \end{aligned}$$

답 (1) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$ (2) $\frac{1}{9}$

027

(1) $x=-t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \text{(주어진 식)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t}{\sqrt{t^2+1}+1} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}+\frac{1}{t}} = -1
 \end{aligned}$$

(2) $x=-t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \text{(주어진 식)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2+t}-t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2+t}-t)(\sqrt{t^2+t}+t)}{\sqrt{t^2+t}+t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\sqrt{t^2+t}+t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}+1} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

답 (1) -1 (2) $\frac{1}{2}$

필수 확인 문제

28쪽

028

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3x-18}{2(x+6)f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-3)(x+6)}{2(x+6)f(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{2f(x)} = \frac{-3}{2f(0)} \\
 &= -\frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

답 $-\frac{3}{4}$

029

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{9x^2-1}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2+3x+4}{2x^2+5} \\
 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{9-\frac{1}{x^2}}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{2+\frac{5}{x^2}} \\
 = \frac{8}{1+3} + \frac{-1}{2} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{2}$

030

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x} \\
 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{(x+1)^2-(x+1)\}-(x^2-x)}{x} \\
 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x} = 2
 \end{aligned}$$

답 2

031

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^6 + 3x^3 - 4) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^6 \left(2 + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^6} \right) = \infty$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{x} \times \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \\ &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 (1) ∞ (2) $\frac{1}{2}$

032

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{x+4} \left\{ \frac{1}{(x+3)^2} - 1 \right\} &= \lim_{x \rightarrow -4} \left\{ \frac{1}{x+4} \times \frac{1 - (x+3)^2}{(x+3)^2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow -4} \left\{ \frac{1}{x+4} \times \frac{-x^2 - 6x - 8}{(x+3)^2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow -4} \left\{ \frac{1}{x+4} \times \frac{-(x+2)(x+4)}{(x+3)^2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{-(x+2)}{(x+3)^2} \\ &= \frac{-(-4+2)}{(-4+3)^2} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\frac{x}{\sqrt{4x^2+2}} - \frac{1}{2} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \times \frac{2x - \sqrt{4x^2+2}}{2\sqrt{4x^2+2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x^2 \times \frac{(2x - \sqrt{4x^2+2})(2x + \sqrt{4x^2+2})}{2\sqrt{4x^2+2}(2x + \sqrt{4x^2+2})} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{2x\sqrt{4x^2+2} + 4x^2 + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{2\sqrt{4 + \frac{2}{x^2}} + 4 + \frac{2}{x^2}} \\ &= \frac{-1}{4+4} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

답 (1) 2 (2) $-\frac{1}{8}$

033

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로
(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 - kt} - \sqrt{t^2 + kt}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2 - kt} - \sqrt{t^2 + kt})(\sqrt{t^2 - kt} + \sqrt{t^2 + kt})}{\sqrt{t^2 - kt} + \sqrt{t^2 + kt}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2kt}{\sqrt{t^2 - kt} + \sqrt{t^2 + kt}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2k}{\sqrt{1 - \frac{k}{t}} + \sqrt{1 + \frac{k}{t}}} \\ &= \frac{-2k}{1+1} = -k \end{aligned}$$

따라서 $-k=5$ 이므로 $k=-5$

답 -5

3 함수의 극한의 활용

29~32쪽

035

$x \rightarrow 1$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로
(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0$ 이어야 하므로

$$1 + a + b = 0$$

$$\therefore b = -a - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - a - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1+a) \\ &= 2 + a = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 0, b = -1$$

답 $a=0, b=-1$

037

$x \rightarrow 1$ 일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\rightarrow 0$
이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{x} - b) = 0$ 이어야 하므로

$$a - b = 0 \quad \therefore b = a$$

$$\begin{aligned}
\therefore (\text{주어진 식}) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{a\sqrt{x}-a} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{a(x-1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}+1}{a} \\
&= \frac{2}{a} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\therefore a=4, b=4$$

$$\text{답 } a=4, b=4$$

039

[1단계] $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{3x^2-x+1} = 1$ 이라면 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 3인 이차함수이어야 한다.

[2단계] $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 3$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{이어야 하므로}$$

$$f(2) = 0$$

[3단계] $f(x) = 3(x-2)(x+a)$ (a 는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)(x+a)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} 3(x+a)$$

$$= 3(2+a) = 3$$

따라서 $a = -1$ 이므로

$$f(x) = 3(x-2)(x-1)$$

$$= 3x^2 - 9x + 6$$

$$\text{답 } f(x) = 3x^2 - 9x + 6$$

041

$$\frac{x-1}{2x^2+1} < f(x) < \frac{x+1}{2x^2+1} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x^2+1} = 0 \text{이므로}$$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\text{답 } 0$$

043

[1단계] 점 A는 곡선 $y = \frac{2}{x}$ 와 직선 $x=2$ 의 교점이므로

$$A(2, 1)$$

점 B는 곡선 $y = \frac{2}{x}$ 와 직선 $x=t$ 의 교점이므로

$$B\left(t, \frac{2}{t}\right)$$

점 C는 점 B에서 직선 $x=2$ 에 내린 수선의 발이므로

$$C\left(2, \frac{2}{t}\right)$$

$$\text{이때 } \overline{AC} = 1 - \frac{2}{t}, \overline{BC} = t - 2 \text{이므로}$$

삼각형 ABC의 넓이 $S(t)$ 는

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BC}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{2}{t}\right) \times (t-2)$$

$$= \frac{(t-2)^2}{2t}$$

$$[2단계] \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t-2)^2}{t \times 2t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 - 4t + 4}{2t^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{t} + \frac{4}{t^2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{답 } \frac{1}{2}$$

필수 확인 문제

33쪽

044

$x \rightarrow 2$ 일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - b) = 0 \text{이어야 하므로}$$

$$4 - b = 0$$

$$\therefore b = 4$$

..... ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - (a+2)x + 2a}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-a)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-a}{x+2} \\ &= \frac{2-a}{4} = 3\end{aligned}$$

$$2-a=12 \quad \therefore a=-10$$

$$\therefore a+b=-10+4=-6$$

답 -6

045

$x \rightarrow -1$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} (\sqrt{x+a}-b)=0 \text{이어야 하므로}$$

$$\sqrt{-1+a}-b=0 \quad \therefore b=\sqrt{a-1}$$

$\therefore$ (주어진 식)

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a-1}}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a-1})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-1})}{(x+1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a-1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a-1}} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \sqrt{a-1}=3 \text{에서 } a=10, b=3 \text{이므로}$$

$$a-b=10-3=7$$

답 7

046

주어진 극한은 $\frac{\infty}{\infty}$ 의 꼴이고, 0이 아닌 값에 수렴하므로 분자, 분모의 차수가 같아야 한다.

$$\therefore a=0$$

분자, 분모의 차수가 같으므로 극한값은

$$\frac{(\text{분자의 최고차항의 계수})}{(\text{분모의 최고차항의 계수})}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx^2+2x+3}{2x^2-3x+4} = 5 \text{에서 } \frac{b}{2} = 5$$

$$\therefore b=10$$

$$\therefore a+b=0+10=10$$

답 10

047

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2+2x+4} = 3$ 이라면 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 3인 이차함수이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)(x+2)} = -2 \text{에서}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)=0 \text{이어야 하므로 } f(1)=0$$

$$f(x)=3(x-1)(x+a) \quad (a \text{는 상수}) \text{로 놓으면}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2+x-2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x+a)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x+a)}{x+2} \\ &= 1+a = -2\end{aligned}$$

$$\therefore a = -3$$

$$\text{따라서 } f(x)=3(x-1)(x-3) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x-1)(x-3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} 3(x-1) = 6\end{aligned}$$

답 6

048

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+3)^3}{x^3+3} < \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+33)^3}{x^3+3} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+3)^3}{x^3+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+33)^3}{x^3+3} = \frac{3^3}{1} = 27$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 27$$

답 27

049

점 $P(t, t+2)$ 를 지나고 직선 $y=x+2$ 에 수직인 직선의 방정식은

$$y-(t+2) = -(x-t)$$

$$\therefore y = -x + 2t + 2$$

따라서 $Q(0, 2t+2)$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AQ}^2 &= \{0 - (-2)\}^2 + \{(2t+2) - 0\}^2 \\ &= 4t^2 + 8t + 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 &= \{t - (-2)\}^2 + \{(t+2) - 0\}^2 \\ &= 2(t+2)^2 \\ &= 2t^2 + 8t + 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t^2 + 8t + 8}{2t^2 + 8t + 8} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{8}{t} + \frac{8}{t^2}}{2 + \frac{8}{t} + \frac{8}{t^2}} = 2\end{aligned}$$

답 2

● 실전 연습문제

35~36쪽

050

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3 + 1 = 4$$

답 ④

051

$x+3=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -3$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x+3) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = -2$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-f(x)}{3f(x)} = \frac{2-(-2)}{3 \times (-2)} = -\frac{2}{3}$$

답 $-\frac{2}{3}$

052

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+\alpha^2} - \sqrt{x+\beta^2}}{\sqrt{4x+\alpha} - \sqrt{4x+\beta}}$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x+\alpha^2} - \sqrt{x+\beta^2}}{\sqrt{4x+\alpha} - \sqrt{4x+\beta}} \times \frac{\sqrt{x+\alpha^2} + \sqrt{x+\beta^2}}{\sqrt{4x+\alpha} + \sqrt{4x+\beta}} \right) \\ &\quad \times \frac{\sqrt{4x+\alpha} + \sqrt{4x+\beta}}{\sqrt{x+\alpha^2} + \sqrt{x+\beta^2}}\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a^2 - \beta^2)(\sqrt{4x+\alpha} + \sqrt{4x+\beta})}{(a - \beta)(\sqrt{x+\alpha^2} + \sqrt{x+\beta^2})}$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a + \beta) \left(\sqrt{4 + \frac{\alpha}{x}} + \sqrt{4 + \frac{\beta}{x}} \right)}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{x}}} \quad (\because a \neq \beta) \\ &= \frac{1 \times (2+2)}{1+1} = 2 \quad (\because a + \beta = 1)\end{aligned}$$

답 2

053

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{x^2+1}{x+1} + a \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2+1}{x+1} + a}{x} = b \text{에서}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2+1}{x+1} + a \right) = 0 \text{이어야 하므로}$$

$$\frac{1}{1} + a = 0 \quad \therefore a = -1$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)}{x(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x+1} = -1$$

따라서 $b = -1$ 이므로

$$a + b = -1 + (-1) = -2$$

답 -2

054

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax+b}{\sqrt{x^2+3x+1}} \text{에서 } x = -t \text{로 놓으면 } x \rightarrow -\infty \text{일}$$

때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax+b}{\sqrt{x^2+3x+1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-at+b}{\sqrt{t^2-3t+1}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-a + \frac{b}{t}}{\sqrt{1 - \frac{3}{t} + \frac{1}{t}}} = -a$$

즉, $-a = 1$ 이므로 $a = -1$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{ax^2+bx+c}{x^2-7x+6} = -\frac{9}{5} \text{에서}$$

$x \rightarrow 6$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 6} (ax^2+bx+c) = 0 \text{이어야 하므로}$$

$$-36 + 6b + c = 0 \quad \therefore c = 36 - 6b$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 6} \frac{ax^2+bx+c}{x^2-7x+6} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-x^2+bx+36-6b}{(x-1)(x-6)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-(x+6-b)(x-6)}{(x-1)(x-6)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-(x+6-b)}{x-1}$$

$$= \frac{-12+b}{5}$$

$$\text{즉, } \frac{-12+b}{5} = -\frac{9}{5} \text{ 이므로 } b=3$$

$$\therefore c=36-6 \times 3=18$$

$$\therefore a+b+c=-1+3+18=20$$

답 20

055

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-2x+1}{f(x)}=1 \text{ 이려면 } f(x) \text{ 는 이차항의 계수가 } 2$$

인 이차함수이어야 하므로

$$f(x)=2x^2+ax+b \text{ (} a, b \text{ 는 상수)로 놓을 수 있다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{3x+1}=1 \text{ 이려면 } g(x) \text{ 는 일차항의 계수가 } 3 \text{ 인 일}$$

차함수이어야 하므로

$$g(x)=3x+c \text{ (} c \text{ 는 상수)로 놓을 수 있다.}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{xg(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+ax+b}{3x^2+cx} = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

056

$$\sqrt{8x^2-1} < f(x) < \sqrt{8x^2+2} \text{ 에서}$$

$$8x^2-1 < \{f(x)\}^2 < 8x^2+2 \text{ 이므로}$$

$$\frac{8x^2-1}{2x^2} < \frac{\{f(x)\}^2}{2x^2} < \frac{8x^2+2}{2x^2}$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2-1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2+2}{2x^2} = 4 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{2x^2} = 4$$

답 4

057

(i) $x \rightarrow 1+$ 일 때

$$\sqrt{x}-1 > 0 \text{ 이므로 } |\sqrt{x}-1| = \sqrt{x}-1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\sqrt{x} + (\sqrt{x}-1) - 1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = 2$$

(ii) $x \rightarrow 1-$ 일 때

$$\sqrt{x}-1 < 0 \text{ 이므로 } |\sqrt{x}-1| = -(\sqrt{x}-1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\sqrt{x} - (\sqrt{x}-1) - 1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{0}{\sqrt{x}-1} = 0$$

(i), (ii)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2 + 0 = 2$$

답 ⑤

058

ㄱ. $x \rightarrow 0$ 일 때 $g(x) \rightarrow 3-$, 즉 3보다 작은 수에서 3

으로 접근하므로 $g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때

$t \rightarrow 3-$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 3-} f(t) = 3$$

ㄴ. $x \rightarrow 0-$ 일 때 $f(x)=0$

$x \rightarrow 0+$ 일 때 $f(x)=3$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) = g(0) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) = g(3) = 3$$

좌극한과 우극한이 다르므로 극한값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $x \rightarrow 3$ 일 때 $g(x) \rightarrow 0+$, 즉 0보다 큰 수에서 0으

로 접근하므로 $g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 3$ 일 때

$t \rightarrow 0+$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = 3$$

ㄹ. $x \rightarrow 3-$ 일 때 $f(x)=3$

$x \rightarrow 3+$ 일 때 $f(x)=5$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3-} g(f(x)) = g(3) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} g(f(x)) = g(5) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} g(f(x)) = 3$$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

+ 풍산자 비법

합성함수의 극한

두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a+} g(f(x))$ 의 값을

$f(x)=t$ 로 놓고 다음을 이용하여 구한다.

① $x \rightarrow a+$ 일 때 $t \rightarrow b+$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow a+} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow b+} g(t)$$

② $x \rightarrow a+$ 일 때 $t \rightarrow b-$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow a+} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow b-} g(t)$$

③ $x \rightarrow a+$ 일 때 $t=b$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a+} g(f(x)) = g(b)$

$\lim_{x \rightarrow a-} g(f(x))$ 의 값도 동일한 방법으로 구한다.

직선 l 의 기울기가 1이고 y 절편이 $g(t)$ 이므로 직선 l 의 방정식은

$$y = x + g(t)$$

두 점 A, B는 곡선 $y = x^2$ 과 직선 l 의 교점이므로 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, β 라고 하면 이차방정식 $x^2 = x + g(t)$, 즉 $x^2 - x - g(t) = 0$ 의 두 근이 α, β 이다.

즉, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -g(t)$$

한편, $A(\alpha, \alpha + g(t)), B(\beta, \beta + g(t))$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= (\beta - \alpha)^2 + (\beta - \alpha)^2 \\ &= 2(\beta - \alpha)^2 \end{aligned}$$

즉,

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= 1^2 - 4 \times \{-g(t)\} \\ &= 1 + 4g(t) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= 2(\beta - \alpha)^2 \\ &= 2 + 8g(t) \end{aligned}$$

이때 선분 AB의 길이가 $2t$ 이어야 하므로

$$(2t)^2 = 2 + 8g(t), 4t^2 = 2 + 8g(t)$$

$$\therefore g(t) = \frac{2t^2 - 1}{4}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t^2} = \frac{2t^2 - 1}{4t^2} = \frac{1}{2}$$

답 ④

2 함수의 연속

1 함수의 연속

38~48쪽

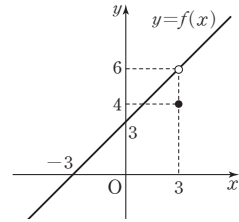
061

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) \\ &= 6 \end{aligned}$$

이고, $f(3) = 4$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 불연속이다.



$$(2) \lim_{x \rightarrow 3-} g(x)$$

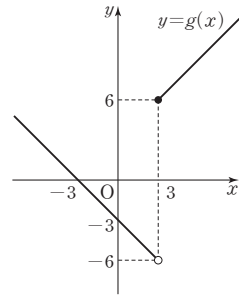
$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3-} \left\{ \frac{(x-3)(x+3)}{-(x-3)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3-} \{ -(x+3) \} \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} g(x)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3+} (x+3) \\ &= 6 \end{aligned}$$

좌극한과 우극한이 다르므로 $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ 의 값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 불연속이다.



답 (1) 불연속 (2) 불연속

063

[1단계] 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면

$x = -2$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x + a}{x + 2} = b \quad \dots\dots ㉠$$

[2단계] ㉠에서 $x \rightarrow -2$ 일 때 극한값이 존재하고

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x + a) = 0 \text{에서 } 4 + 2 + a = 0$$

$$\therefore a = -6 \quad \dots\dots ㉡$$

[3단계] ㉔을 ㉔에 대입하면

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-3)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (x-3) = -5 \\ \therefore a &= -6, b = -5 \end{aligned}$$

답 $a = -6, b = -5$

065

(i) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수

$f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수

$f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

(iii) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1, f(3) = 2$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 불연속이다.

(i)~(iii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1, x=2$ 에서 극한값이 존재하지 않고, $x=1, x=2, x=3$ 에서 불연속이므로

$$a=2, b=3 \quad \therefore a+b=2+3=5$$

답 5

067

[1단계] $x \neq 8$ 일 때, $f(x) = \frac{\sqrt{x+a}-2}{x-8}$

함수 $f(x)$ 가 $x \geq 4$ 인 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=8$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} f(x) &= f(8) \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+a}-2}{x-8} &= f(8) \end{aligned} \quad \dots\dots ㉔$$

[2단계] ㉔에서 $x \rightarrow 8$ 일 때 극한값이 존재하고

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt{x+a}-2) = 0 \text{이어야 하므로}$$

$$\sqrt{8+a}-2=0$$

$$\therefore a = -4$$

$\dots\dots ㉔$

[3단계] ㉔을 ㉔에 대입하면

$$\begin{aligned} f(8) &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x-4}-2}{x-8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt{x-4}-2)(\sqrt{x-4}+2)}{(x-8)(\sqrt{x-4}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{(x-8)(\sqrt{x-4}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{\sqrt{x-4}+2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore af(8) = -4 \times \frac{1}{4} = -1$$

답 -1

069

ㄱ. (반례) $f(x) = x+1, g(x) = \begin{cases} 0 & (x=a+1) \\ x & (x \neq a+1) \end{cases}$ 이면

$f(x), g(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이지만

$$g(f(a)) = g(a+1) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow a+1} g(t) = a+1 \text{이므로}$$

$a+1 \neq 0$ 일 때 $g(f(x))$ 는 $x=a$ 에서 불연속이다.

즉, ㄱ은 $x=a$ 에서 항상 연속이라 할 수 없다.

ㄴ, ㄷ. 연속함수의 합과 차, 곱 그리고 합성함수는 연속이다.

이때 $y = |x|, y = x^2$ 이 연속이므로 이들과 합성한

ㄴ, ㄷ은 연속이다.

ㄴ. 유리함수는 분모가 0일 때 함숫값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

즉, $g(a) = 0$ 이면 불연속이므로 ㄴ은 $x=a$ 에서 항상 연속이라 할 수 없다.

따라서 $x=a$ 에서 항상 연속인 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

+ 풍산자 비법

함수의 연속에 대한 명제의 참, 거짓은 반례가 존재하는지 생각해 보고 판별한다.

071

(1) 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로

함수 $f(x)g(x)$ 도 모든 실수, 즉

열린구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다.

$$(2) \frac{1}{f(x)-g(x)} = \frac{1}{x^2-6-(x^2+x-20)} \\ = \frac{1}{-x+14}$$

따라서 함수 $\frac{1}{f(x)-g(x)}$ 은 $-x+14 \neq 0$, 즉 $x \neq 14$ 인 모든 실수에서 연속이므로 열린구간 $(-\infty, 14)$, $(14, \infty)$ 에서 연속이다.

답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, 14)$, $(14, \infty)$

073

$\neg$ 은 옳다.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \\ = -1 \times 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \\ = 1 \times (-1) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = -1$$

$\neg$ 도 옳다.

$g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1-$ 일 때 $t=-1$ 이고

$x \rightarrow -1+$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(g(x)) = f(-1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow -1^+} f(t) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} f(g(x)) = 1$$

또, $f(g(-1)) = f(-1) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(g(x)) = f(g(-1))$$

따라서 $f(g(x))$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

$\sqsubset$ 은 옳지 않다.

$f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이고

$x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1^+} g(t) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} g(f(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 1} g(f(x))$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} g(f(x))$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $g(f(x))$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

그러므로 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

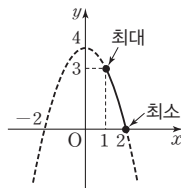
답 $\neg$, $\neg$

075

(1) $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고

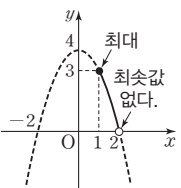
$$f(1)=3, f(2)=0$$

따라서 $x=1$ 일 때 최댓값 3, $x=2$ 일 때 최솟값 0을 갖는다.



(2) $f(x)$ 는 구간 $[1, 2)$ 에서 연속이고 $f(1)=3$ 이지만 $x=2$ 는 구간에 속하지 않으므로 최솟값은 존재하지 않는다.

따라서 $x=1$ 일 때 최댓값 3을 갖고, 최솟값은 없다.



답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: 0

(2) 최댓값: 3, 최솟값은 없다.

077

$f(x)=x^3+x-3$ 으로 놓으면 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 연속이므로 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이다.

또, $f(1)=-1 < 0$, $f(2)=7 > 0$ 이므로

$$f(1)f(2) < 0$$

따라서 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

079

$g(x)=f(x)-x$ 로 놓으면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간

$[1, 3]$ 에서 연속이므로 방정식 $g(x)=0$ 은

$g(1)g(3) < 0$ 일 때 1과 3 사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$$g(1)=f(1)-1$$

$$=(a^2+a+1)-1$$

$$=a^2+a$$

$$g(3)=f(3)-3$$

$$=a-3$$

이므로

$$(a^2+a)(a-3) < 0, a(a+1)(a-3) < 0$$

이때 양수 a 에 대하여 $a(a+1) > 0$ 이므로

$$a-3 < 0 \quad \therefore 0 < a < 3 (\because a > 0)$$

답 $0 < a < 3$

080

①, ②, ③ $f(1)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $x=1$ 에서 불연속이다.

④ $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $x=1$ 에서 불연속이다.

⑤ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2$ 이므로 $x=1$ 에서 연속이다.

따라서 $x=1$ 에서 연속인 함수는 ⑤이다.

답 ⑤

081

ㄱ은 옳지 않다.

$\lim_{x \rightarrow r} f(x) \neq f(r)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=r$ 에서 불연속이다.

ㄴ은 옳다.

$\lim_{x \rightarrow q+} f(x) = \lim_{x \rightarrow q-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow q} f(x)$ 의 값이 존재한다.

ㄷ은 옳지 않다.

$\lim_{x \rightarrow p+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow p-} f(x)$ 이고 $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ 의 값이 존재하지 않고, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) \neq f(p)$ 이다.

ㄹ은 옳지 않다.

함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 값은 p, q, r 의 3개이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ㄴ

082

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이라면

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = f(2)$$

이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x+b) = 2+b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^2+x+a) = 4+2+a = 6+a$$

$$f(2) = 4+2+a = 6+a$$

$$\text{즉, } 2+b = 6+a$$

$$\therefore a-b = -4$$

답 -4

083

$f(x) = x^3 + 3x - 5$ 로 놓으면 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 닫힌구간 $[-2, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ 에서 연속이다.

$$f(-2) = -8 - 6 - 5 = -19 < 0$$

$$f(-1) = -1 - 3 - 5 = -9 < 0$$

$$f(0) = 0 + 0 - 5 = -5 < 0$$

$$f(1) = 1 + 3 - 5 = -1 < 0$$

$$f(2) = 8 + 6 - 5 = 9 > 0$$

$$f(3) = 27 + 9 - 5 = 31 > 0$$

따라서 $f(1)f(2) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(1, 2)$ 이다.

답 ④

084

$\sqrt{f(x)}$ 가 모든 실수 x 에서 연속이려면 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = k^2 - 9 \leq 0$$

$$(k+3)(k-3) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq k \leq 3$$

..... ㉠

또, $\frac{1}{g(x)}$ 이 모든 실수 x 에서 연속이려면 모든 실수

x 에 대하여 $g(x) \neq 0$, 즉 $g(x) > 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $g(x) = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = 1^2 - (-k) < 0$$

$$\therefore k < -1$$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 $-3 \leq k < -1$

따라서 구하는 정수 k 의 값은 $-3, -2$ 이므로 그 합은 $-3 + (-2) = -5$

답 -5

실전 연습문제

51~52쪽

085

$$f(x) = \frac{1}{x - \frac{3}{x-2}} = \frac{1}{\frac{x^2 - 2x - 3}{x-2}} = \frac{x-2}{(x+1)(x-3)}$$

따라서 $x-2=0$, $(x+1)(x-3)=0$ 인 x 의 값에서 함수 $f(x)$ 가 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 개수는 $-1, 2, 3$ 의 3개이다.

답 ④

086

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} (-2x + a) = -a$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} (ax - 6) = a^2 - 6$$

$$f(a) = -a$$

$$\text{즉, } -a = a^2 - 6 \text{에서}$$

$$a^2 + a - 6 = 0, (a+3)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 2$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$-3 + 2 = -1$$

답 ①

087

$f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 연속이려면 $x = -1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + a} + b}{x + 1} = -1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

①에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} (\sqrt{x^2 + a} + b) = 0 \text{이어야 하므로}$$

$$\sqrt{1 + a} + b = 0$$

$$\therefore b = -\sqrt{1 + a} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

②을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + a} - \sqrt{1 + a}}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x^2 + a} - \sqrt{1 + a})(\sqrt{x^2 + a} + \sqrt{1 + a})}{(x + 1)(\sqrt{x^2 + a} + \sqrt{1 + a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(\sqrt{x^2 + a} + \sqrt{1 + a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + a} + \sqrt{1 + a}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 + a}} = -1 \end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{1 + a} = 1$ 이므로 $a = 0$

$a = 0$ 을 ②에 대입하면 $b = -1$

$$\therefore a^2 + b^2 = 0 + 1 = 1$$

답 1

088

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x = a$, $x = b$ 에서 연속이어야 한다.

(i) 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 연속

이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

$$3 = a^2 - 1 \quad \therefore a^2 = 4$$

(ii) 함수 $f(x)$ 가 $x = b$ 에서 연속이어야 하므로

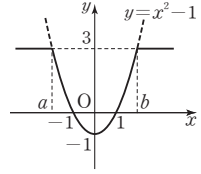
$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$$

$$b^2 - 1 = 3 \quad \therefore b^2 = 4$$

(i), (ii)에서 구하는 값은

$$a^2 + b^2 = 4 + 4 = 8$$

답 8



089

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.

①, ②, ⑤ 최대·최소 정리

에 의하여 함수 $f(x)$ 가

이 구간에서 연속이므로

$f(x)$ 는 최댓값과 최

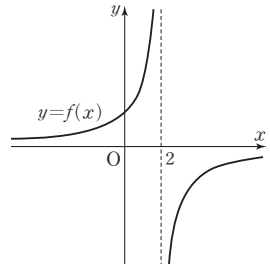
솟값을 갖는다.

③ 구간 $[1, 2)$ 에서 최댓값은 없고, 최솟값은 $f(1) = 4$

④ 구간 $(2, 4]$ 에서 최댓값은 $f(4) = -2$, 최솟값은 없다.

따라서 최댓값이 존재하지 않는 구간은 ③이다.

답 ③



090

$g(x) = f(x) - x$ 로 놓으면 함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에

서 연속이므로 닫힌구간 $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$,

$[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$, $[\frac{3}{4}, 1]$ 에서 연속이다.

$$g(0) = f(0) - 0 = -\frac{1}{2} < 0$$

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} > 0$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} < 0$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12} > 0$$

$$g\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}=\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{1}{20}>0$$

$$g(1)=f(1)-1=\frac{5}{6}-1=-\frac{1}{6}<0$$

따라서 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$ 은 열린구간

$$\left(0, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{3}{4}, 1\right)$$

에서 각각 적어도 한 개의 실근을 가지므로 방정식 $f(x)=x$ 는

$0<x<1$ 에서 적어도 4개의 실근을 갖는다.

답 4개

091

ㄱ은 옳다.

$h(x)=\frac{1}{f(x)}$ 로 놓으면 함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 연

속이므로 $h(0)=\frac{1}{f(0)}$ 의 값이 존재한다.

즉, $h(0)=\frac{1}{f(0)}\neq 0$ 이므로 함수 $f(x)=\frac{1}{h(x)}$ 은

$x=0$ 에서 연속이다.

ㄴ도 옳다.

$h(x)=f(x)+g(x)$ 로 놓으면 $g(x)=h(x)-f(x)$

이므로 두 함수 $f(x)$, $h(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이면

함수 $g(x)$ 도 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄷ은 옳지 않다.

(반례) $f(x)=\begin{cases} -1 & (x<0) \\ 1 & (x\geq 0) \end{cases}$ 이면 $\{f(x)\}^2=1$ 이므로

함수 $\{f(x)\}^2$ 은 $x=0$ 에서 연속이지만 함수 $f(x)$ 는

$x=0$ 에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

092

$g(x)=x^2-2x-1$ 이라 하면

$g(x)=(x-1)^2-2$ 이므로

열린구간 $(-1, 3)$ 에서 함수

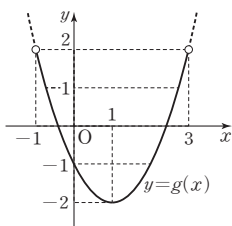
$y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같다.

이때 $f(x)=[g(x)]$ 이므로

$g(x)\neq -2$ 인 정수, 즉 $g(x)=-1, 0, 1$ 을 만족시키는

x 의 값에서 불연속이다.



$g(x)=-1, 0, 1$ 을 만족시키는 x 의 값은 2개씩 존재하
므로 열린구간 $(-1, 3)$ 에서 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 개
수는 6이다.

답 ③

참고

$g(1)=-2$ 이므로 $f(1)=[g(1)]=-2$ 이고,

$x \rightarrow 1$ 일 때 $g(x) \rightarrow -2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [g(x)] = -2$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는

$g(x)=-2$ 를 만족시키는 x 의 값인 $x=1$ 에서 연속이다.

093

$(x^2-1)f(x)=x^3+ax+b$ 에서

$(x+1)(x-1)f(x)=x^3+ax+b$ 이므로

$x \neq -1, x \neq 1$ 일 때

$$f(x) = \frac{x^3+ax+b}{(x+1)(x-1)}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+ax+b}{(x+1)(x-1)} = f(1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

또, 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=-1$ 에

서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+ax+b}{(x+1)(x-1)} = f(-1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

①에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이

므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3+ax+b) = 0$ 이어야 하므로

$$a+b=-1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

또, ②에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 극한값이 존재하고

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3+ax+b) = 0$ 이어야 하므로

$$-a+b=1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

③, ④를 연립하여 풀면

$$a=-1, b=0$$

$$\therefore f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2-1)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$$

답 1

094

합성함수 $(g \circ f)(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$ 에서 연속이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1^-} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(1)$$

이어야 한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} (g \circ f)(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} g(3x+a) \\ &= (3+a)^2 + a(3+a) + 3 \\ &= 2a^2 + 9a + 12 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} (g \circ f)(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x^2 - x + 2a) \\ &= (2a)^2 + a \times 2a + 3 \\ &= 6a^2 + 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(1) &= g(f(1)) \\ &= g(2a) \\ &= 6a^2 + 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉢} \end{aligned}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$, $\textcircled{㉢}$ 에서

$$2a^2 + 9a + 12 = 6a^2 + 3, \quad 4a^2 - 9a - 9 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 값의 합은

$$-\frac{-9}{4} = \frac{9}{4} \quad \text{답 } \frac{9}{4}$$

095

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건 $(가)$, $(나)$ 에 의하여

$$f(4) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 16a + 4b - 24, \quad f(0) = f(4)$$

$$\text{즉, } 16a + 4b - 24 = -24 \text{이므로}$$

$$16a + 4b = 0 \quad \therefore b = -4a \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

한편, $f(x) = ax^2 - 4ax - 24 = a(x-2)^2 - 4a - 24$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4)=f(x)$ 이다.

따라서 방정식 $f(x)=0$ 이 열린구간 $(1, 2)$ 에서 실근을 갖지 않으면 열린구간 $(2, 3)$, $(5, 6)$, $(6, 7)$, $(9, 10)$ 에서도 실근을 갖지 못하므로 $1 < x < 10$ 에서 방정식 $f(x)=0$ 의 실근의 개수는 4 이하이다.

방정식 $f(x)=0$ 이 열린구간 $(1, 2)$ 에서 실근을 1개 가지면 열린구간 $(2, 3)$, $(5, 6)$, $(6, 7)$, $(9, 10)$ 에서도 실근을 1개씩 가지므로 $1 < x < 10$ 에서 방정식

$f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 5이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고, 열린구간 $(1, 2)$ 에서 실근을 1개 가지므로 $f(1)f(2) < 0$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} f(1)f(2) &= (-3a-24)(-4a-24) \\ &= 12(a+8)(a+6) < 0 \end{aligned}$$

$$\therefore -8 < a < -6$$

이때 a 는 정수이므로 $a = -7$

$$a = -7 \text{을 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } b = 28$$

$$\therefore a+b = -7+28 = 21$$

답 ④

참고 주기함수

함수 $f(x)$ 의 정의역에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+p)=f(x)$ 를 만족시키는 0이 아닌 상수 p 가 존재할 때, 함수 $f(x)$ 를 주기함수라 한다.

이때 상수 p 중에서 가장 작은 양수를 함수 $f(x)$ 의 주기라 한다.



미분

1

미분계수와 도함수

1 미분계수

56~66쪽

002

$$(1) (\text{평균변화율}) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{-1 - 2}{4 - 1} = -1$$

$$(2) (\text{평균변화율}) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$

답 (1) -1 (2) 2

004

$$(1) f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x - 1) - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x - 1)}{x - 1} = 3$$

$$(2) f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x) - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3$$

답 (1) 3 (2) 3

다른 풀이

$$(1) f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3h + 2) - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3$$

$$(2) f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 + (1+h) - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 3h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 3)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (h + 3) = 3$$

006

함수 $f(x) = x^2 + 5x$ 의 그래프 위의 점 $(-1, -4)$ 에서의 접선의 기울기는 $f(x)$ 의 $x = -1$ 에서의 미분계수와 같으므로

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^2 + 5(-1+h) + 4}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 3h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (h + 3) = 3$$

답 3

008

함수 $f(x)$ 의 구간 $[0, a]$ 에서의 평균변화율은

$$\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{(a^2 - 2a) - 0}{a - 0}$$

$$= \frac{a(a - 2)}{a}$$

$$= a - 2$$

..... ㉠

함수 $f(x)$ 의 $x = 3$ 에서의 미분계수는

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 2(3+h) - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (h + 4) = 4$$

..... ㉡

㉠, ㉡이 같으므로

$$a - 2 = 4 \quad \therefore a = 6$$

답 6

010

오른쪽 그림에서 x 좌표

가 a, b, c 인 점에서의

접선의 기울기를 살펴보

면

$$0 < f'(c) < f'(a),$$

$$f'(b) < 0$$

ㄱ은 옳다.

$$f'(a) > 0, f'(b) < 0 \text{ 이므로 } f'(a) > f'(b)$$

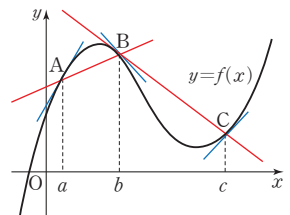
ㄴ은 옳지 않다.

두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기

는 $x = b$ 인 점에서의 접선의 기울기 $f'(b)$ 보다 크므

로

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > f'(b)$$



ㄷ은 옳다.

두 점 $(b, f(b)), (c, f(c))$ 를 지나는 직선의 기울기는 $x=c$ 인 점에서의 접선의 기울기 $f'(c)$ 보다 작으므로

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b} < f'(c)$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

012

$$(1) \text{ (주어진 식)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{2h} \times 2 \\ = f'(a) \times 2 = 5 \times 2 = 10$$

$$(2) \text{ (주어진 식)} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2} \times h \right\} \\ = f'(a) \times 0 = 5 \times 0 = 0$$

$$(3) \text{ (주어진 식)} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{f(a-h)-f(a)}{-h} \times (-1) \right\} \\ = f'(a) - f'(a) \times (-1) \\ = 2f'(a) = 2 \times 5 = 10$$

답 (1) 10 (2) 0 (3) 10

다른 풀이

$$(3) \text{ 공식} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{h} \right\} \\ = (m-n)f'(a)$$

를 이용하면

$$\text{(주어진 식)} = \{1 - (-1)\}f'(a) \\ = 2f'(a) \\ = 2 \times 5 = 10$$

014

$$(1) \text{ (주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \times \frac{1}{x+2} \right\} \\ = f'(2) \times \frac{1}{4} = 4 \times \frac{1}{4} = 1$$

$$(2) \text{ (주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{x-2}{f(x)-f(2)} \times (x^2+2x+4) \right\} \\ = \frac{1}{f'(2)} \times 12 = \frac{1}{4} \times 12 = 3$$

$$(3) \text{ (주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4} \times (x+2) \right\} \\ = f'(4) \times 4 = 4 \times 4 = 16$$

$$(4) \text{ (주어진 식)} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(2)-2f(2)+2f(2)-2f(x)}{x-2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{(x-2)f(2)}{x-2} - \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \times 2 \right\} \\ = f(2) - f'(2) \times 2 \\ = 3 - 4 \times 2 = -5$$

답 (1) 1 (2) 3 (3) 16 (4) -5

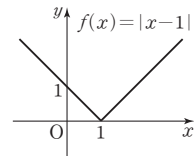
016

$$(1) \text{ (i)} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} |x-1| = 0,$$

$f(1)=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

따라서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.



$$(ii) f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|-|0|}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}$$

여기서

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1,$$

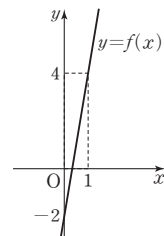
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

이므로 $f'(1)$ 이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

$$(2) \text{ (i)} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \\ = \lim_{x \rightarrow 1^-} (6x-2) = 4, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \\ = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+4x-1) = 4, \\ f(1) = 4 \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

따라서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.



$$(ii) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{6x-6}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{6(x-1)}{x-1} = 6$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2+4x-5}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x+5)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x+5) = 6\end{aligned}$$

따라서 $f'(1)=6$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이고 미분가능하다.

답 풀이 참조

018

(i) $x=-1$ 에서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=f(-1)$ 이므로 연속이지만 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 뾰족하므로 미분가능하지 않다.

(ii) $x=0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$ 이므로 불연속이고, 미분 가능하지 않다.

(iii) $x=1$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 불연속이고, 미분가능하지 않다.

(i)~(iii)에서 $a=2$, $b=3$ 이므로 $a+b=2+3=5$

답 5

● 필수 확인 문제

67쪽

019

x 의 값이 -1 에서 a 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(a)-f(-1)}{a-(-1)} &= \frac{(a^3-3a)-2}{a+1} \\ &= \frac{(a+1)(a^2-a-2)}{a+1} \\ &= a^2-a-2\end{aligned}$$

$a^2-a-2=4$ 에서 $a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0 \quad \therefore a=-2 \text{ 또는 } a=3$

이때 $a > -1$ 이므로 $a=3$

답 3

020

함수 $f(x)$ 의 구간 $[k, 3k]$ 에서의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(3k)-f(k)}{3k-k} &= \frac{(18k^2+3k)-(2k^2+k)}{2k} \\ &= \frac{16k^2+2k}{2k} = 8k+1\end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 의 $x=4$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{2(4+h)^2+(4+h)\}-36}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2+17h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2h+17) = 17\end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 이 같으므로

$$8k+1=17 \quad \therefore k=2$$

답 2

021

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x^2-9} &= \lim_{x \rightarrow -3} \left\{ \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} \times \frac{1}{x-3} \right\} \\ &= f'(-3) \times \left(-\frac{1}{6} \right) = 3 \\ \therefore f'(-3) &= -18\end{aligned}$$

답 -18

022

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(1+h)-f(1)}{h} - \frac{f(1-h)-f(1)}{-h} \times (-1) \right\} \\ &= f'(1) - f'(1) \times (-1) = 2f'(1) \\ \text{이므로} \\ 2f'(1) &= 6 \text{에서 } f'(1) = 3 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{f(x)-f(1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{x-1}{f(x)-f(1)} \times (x+1) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}} \times (x+1) \right\} \\ &= \frac{1}{f'(1)} \times 2 = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{2}{3}$

023

연속이면 이어져 있고, 미분가능하지 않은 점은 끊어져 있거나 뾰족점이다.

두 조건을 동시에 만족시키는 점의 x 좌표는 1이다.

답 1

024

주어진 식의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+0$$

$$\therefore f(0)=0$$

또,

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(1)+f(h)+2h(1+h)\}-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+2h(h+1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)}{h} + 2(h+1) \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} 2(h+1) \\ & \quad (\because f(0)=0) \\ &= f'(0) + 2 \end{aligned}$$

이므로 $f'(0)+2=-1$ 에서

$$f'(0)=-3$$

답 -3

2 도함수

68~75쪽

026

$$\begin{aligned} (1) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^2-(x+h)\}-(x^2-x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2+2xh-h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h+2x-1) = 2x-1 \end{aligned}$$

$$(2) f'(x) = 2x-1$$

답 (1) $2x-1$ (2) $2x-1$

028

$$(1) y' = 4 \times 3x^2 - 6 \times 2x + 3 - 0$$

$$= 12x^2 - 12x + 3$$

$$(2) y' = (2x-5)'(x^2-3x+1) + (2x-5)(x^2-3x+1)'$$

$$= 2(x^2-3x+1) + (2x-5)(2x-3)$$

$$= (2x^2-6x+2) + (4x^2-16x+15)$$

$$= 6x^2 - 22x + 17$$

$$(3) y' = (x+1)'(x+2)(x+3) + (x+1)(x+2)'(x+3)$$

$$+ (x+1)(x+2)(x+3)'$$

$$= 1 \times (x+2)(x+3) + (x+1) \times 1 \times (x+3)$$

$$+ (x+1)(x+2) \times 1$$

$$= (x^2+5x+6) + (x^2+4x+3) + (x^2+3x+2)$$

$$= 3x^2 + 12x + 11$$

$$(4) y' = 5(2x-3)^4 \times (2x-3)'$$

$$= 5(2x-3)^4 \times 2$$

$$= 10(2x-3)^4$$

$$\text{답 (1) } y' = 12x^2 - 12x + 3 \quad (2) y' = 6x^2 - 22x + 17$$

$$(3) y' = 3x^2 + 12x + 11 \quad (4) y' = 10(2x-3)^4$$

030

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h)-f(2+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h)-f(2)+f(2)-f(2+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(2+2h)-f(2)}{2h} \times 2 - \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \right\}$$

$$= f'(2) \times 2 - f'(2) = f'(2)$$

한편, $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$ 이므로 $f'(2) = 12$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = f'(2) = 12$$

답 12

032

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 \text{에서 } f'(1) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{f(x)-f(2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}} = \frac{1}{f'(2)} = 1$$

$$\text{에서 } f'(2) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

한편, $f(x) = ax^2 + bx$ 에서 $f'(x) = 2ax + b$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $f'(1) = 2a + b = 1, f'(2) = 4a + b = 1$ 이므로

두 식을 연립하여 풀면 $a=0, b=1$

답 $a=0, b=1$

034

$f(x) = x^{10} + 5x$ 로 놓으면 $f(1) = 6$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} + 5x - 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

한편, $f'(x) = 10x^9 + 5$ 이므로

(주어진 식) $= f'(1) = 10 + 5 = 15$

답 15

다른 풀이

주어진 식의 분자, 분모를 x 에 대하여 각각 미분하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} + 5x - 6}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{10} + 5x - 6)'}{(x - 1)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10x^9 + 5}{1} \\ &= \frac{10 + 5}{1} = 15 \end{aligned}$$

036

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ 에서

$$a = b - 2$$

..... ㉠

또, $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(bx - 2) - a}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(bx - 2) - (b - 2)}{x - 1} \quad (\because \text{㉠}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{bx - b}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{b(x - 1)}{x - 1} = b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax^3 - a}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} a(x^2 + x + 1) = 3a \end{aligned}$$

$$\therefore b = 3a$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 3$

답 $a = 1, b = 3$

다른 풀이

$g(x) = ax^3, h(x) = bx - 2$ 라 하면

$$g'(x) = 3ax^2, h'(x) = b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$g(1) = h(1) \quad \therefore a = b - 2$$

..... ㉠

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$g'(1) = h'(1) \quad \therefore 3a = b$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 3$

038

(1) x^{10} 을 $(x+1)^2$ 으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$x^{10} = (x+1)^2 Q(x) + ax + b \quad \dots\dots \text{㉠}$$

㉠의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $1 = -a + b$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$10x^9 = 2(x+1)Q(x) + (x+1)^2 Q'(x) + a$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $-10 = a$

$$\therefore a = -10, b = -9$$

따라서 구하는 나머지는 $-10x - 9$

(2) 다항식 $x^5 - ax + b$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^5 - ax + b = (x-1)^2 Q(x) \quad \dots\dots \text{㉠}$$

㉠의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면 $1 - a + b = 0$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$5x^4 - a = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x)$$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면 $5 - a = 0$

$$\therefore a = 5, b = 4$$

답 (1) $-10x - 9$ (2) $a = 5, b = 4$

필수 확인 문제

76쪽

039

$$f'(x) = 1 - x + x^2 - \dots + x^{20}$$

이므로

$$f'(1) = 1 - 1 + 1 - \dots + 1 = 1$$

답 1

040

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 로 놓으면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$f(1) = 2, \text{ 즉 } 1 + a + b = 2$$

$$\therefore a + b = 1$$

..... ㉠

또, 이 점에서의 접선의 기울기가 2이므로

$$f'(1) = 2, \text{ 즉 } 3 + 2a + b = 2$$

$$\therefore 2a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2, b=3$

$$\text{답 } a=-2, b=3$$

041

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(2) - 4f(x)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(2) - 4f(2) + 4f(2) - 4f(x)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{(x^2-4)f(2)}{x-2} - 4 \times \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ (x+2)f(2) - 4 \times \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \right\} \\ &= 4f(2) - 4f'(2) \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1)'(x^2+5) + (x+1)(x^2+5)' \\ &= x^2+5 + (x+1) \times 2x \\ &= x^2+5+2x^2+2x \\ &= 3x^2+2x+5 \end{aligned}$$

따라서 $f(2)=3 \times 9=27, f'(2)=21$ 이므로

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= 4f(2) - 4f'(2) \\ &= 4 \times 27 - 4 \times 21 = 24 \end{aligned}$$

답 24

042

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-2}{x-3} = 1 \text{에서 } x \rightarrow 3 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } f(3)-2=0 \text{에서 } f(3)=2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-2}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} \\ &= f'(3) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{B} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)-1}{x-3} = 2 \text{에서 } x \rightarrow 3 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } g(3)-1=0 \text{에서 } g(3)=1 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)-1}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)-g(3)}{x-3} \\ &= g'(3) = 2 \quad \dots\dots \textcircled{D} \end{aligned}$$

$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 이므로 $x=3$ 을 대입하면

㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 의하여

$$y'=f'(3)g(3)+f(3)g'(3)$$

$$=1 \times 1 + 2 \times 2 = 5$$

답 5

043

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로 $x=2$ 에서 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = f(2) \text{에서}$$

$$4a+b=4 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

또, $f'(2)$ 가 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{\{a(x-4)^2+b\} - (4a+b)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{a(x-4)^2-4a}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{a(x^2-8x+12)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{a(x-2)(x-6)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} a(x-6) = -4a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2-(4a+b)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2-4}{x-2} \quad (\because \textcircled{A}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} (x+2) = 4 \end{aligned}$$

에서

$$-4a=4 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-1, b=8$

$$\therefore ab = -1 \times 8 = -8$$

답 -8

다른 풀이

$$g(x)=x^2, h(x)=a(x-4)^2+b \text{라 하면}$$

$$g'(x)=2x, h'(x)=2a(x-4)$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$g(2)=h(2)$$

$$\therefore 4a+b=4 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로

$$g'(2)=h'(2)$$

$$\therefore a=-1$$

㉠에 $a=-1$ 을 대입하면 $b=8$

$$\therefore ab = -1 \times 8 = -8$$

044

다항식 $x^{15}+ax^7+b$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $x+6$ 이므로

$$x^{15}+ax^7+b=(x+1)^2Q(x)+x+6 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

㉗의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$-1 - a + b = 5$$

$$\therefore b = a + 6$$

..... ㉘

㉗의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$15x^{14} + 7ax^6 = 2(x+1)Q(x) + (x+1)^2Q'(x) + 1$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$15 + 7a = 1 \quad \therefore a = -2$$

㉘에 $a = -2$ 를 대입하면 $b = 4$

따라서 주어진 다항식은 $x^{15} - 2x^7 + 4$ 이므로 이 다항식을 $x - 1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$1 - 2 + 4 = 3$$

답 3

● 실전 연습문제

78~80쪽

045

함수 $f(x)$ 의 구간 $[1, 3]$ 에서의 평균변화율은

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-5 - (-3)}{2} = -1$$

구간 $[-2, k]$ 에서의 평균변화율은

$$\begin{aligned} \frac{f(k) - f(-2)}{k - (-2)} &= \frac{-k^2 + 3k - 5 - (-15)}{k + 2} \\ &= \frac{-(k+2)(k-5)}{k+2} \\ &= -k + 5 \end{aligned}$$

즉, $-k + 5 = -1$ 이므로 $k = 6$

답 ④

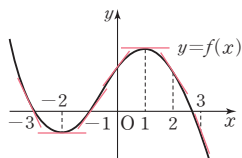
046

함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점

$(a, f(a))$ 에 대하여

$f'(a)$ 는 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기이다.

즉, 접선의 기울기가 가장 큰 것은 $f'(-1)$ 이다.



답 ②

047

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + ax + a^2) = 3a^2$$

따라서 모든 실수 a 에 대하여 $f(a) = 3a^2$ 이므로

$$f(x) = 3x^2$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(1+h) - f(1)}{h} - \frac{f(1-h) - f(1)}{h} \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(1+h) - f(1)}{h} - \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \times (-1) \right\}$$

$$= f'(1) - f'(1) \times (-1)$$

$$= 2f'(1)$$

$f(x) = 3x^2$ 에서 $f'(x) = 6x$ 이므로

$$f'(1) = 6$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = 2f'(1) = 2 \times 6 = 12$$

답 12

048

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2f(x)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4 + 2f(x) + 4}{x^2 - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4} + 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 2}{x^2 - 4}$$

$$= 1 + 2 \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times \frac{1}{x + 2} \right\}$$

$$= 1 + 2 \times f'(2) \times \frac{1}{4}$$

$$= 1 + 2 \times 6 \times \frac{1}{4} = 4$$

답 4

049

함수 $f(x)$ 가 $x = b$ 에서 미분가능하므로 $x = b$ 에서 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow b+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = f(b) \text{에서}$$

$$b^3 + a = -b^2 + b$$

$$\therefore a = -b^3 - b^2 + b$$

..... ㉗

또, $f'(b)$ 가 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow b+} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} &= \lim_{x \rightarrow b+} \frac{(x^3+a)-(b^3+a)}{x-b} \\ &= \lim_{x \rightarrow b+} \frac{x^3-b^3}{x-b} \\ &= \lim_{x \rightarrow b+} \frac{(x-b)(x^2+bx+b^2)}{x-b} \\ &= \lim_{x \rightarrow b+} (x^2+bx+b^2) \\ &= 3b^2 \\ \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} &= \lim_{x \rightarrow b-} \frac{(-x^2+x)-(-b^2+b)}{x-b} \\ &= \lim_{x \rightarrow b-} (-x-b+1) \\ &= -2b+1\end{aligned}$$

따라서 $3b^2 = -2b+1$ 이므로

$$3b^2+2b-1=0, (3b-1)(b+1)=0$$

$$\therefore b = -1 \quad (\because b < 0)$$

㉠에 $b = -1$ 을 대입하면 $a = -1$

$$\therefore a+b = -1+(-1) = -2$$

답 -2

다른 풀이

$$g(x) = x^3 + a, h(x) = -x^2 + x \text{라 하면}$$

$$g'(x) = 3x^2, h'(x) = -2x+1$$

함수 $f(x)$ 가 $x=b$ 에서 연속이므로

$$g(b) = h(b), b^3+a = -b^2+b$$

$$\therefore a = -b^3-b^2+b$$

..... ㉠

함수 $f(x)$ 가 $x=b$ 에서 미분가능하므로

$$g'(b) = h'(b), 3b^2 = -2b+1$$

$$3b^2+2b-1=0, (3b-1)(b+1)=0$$

$$\therefore b = -1 \quad (\because b < 0)$$

㉠에 $b = -1$ 을 대입하면 $a = -1$

$$\therefore a+b = -1+(-1) = -2$$

050

$y = x^3 - 5x + 4$ 에서 $y' = 3x^2 - 5$ 이고 접선의 기울기가 7이므로

$$3x^2 - 5 = 7, x^2 = 4$$

$$\therefore x = \pm 2$$

따라서 접선의 기울기가 7인 두 점의 좌표는 (2, 2),

(-2, 6)이므로 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(-2-2)^2 + (6-2)^2} = 4\sqrt{2}$$

답 $4\sqrt{2}$

051

$g(x) = x^2 f(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = (x^2)'f(x) + x^2\{f(x)\}'$$

$$= 2xf(x) + x^2 f'(x)$$

$$\therefore g'(2) = 4f(2) + 4f'(2)$$

$$= 4 \times 1 + 4 \times 3 = 16$$

답 ③

052

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + 3bx \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -1$$

즉, $f(1) = 2 + a + 3b = -1$ 이므로

$$a + 3b = -3$$

..... ㉠

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + 3b \text{이므로}$$

$$f'(1) = 6 + 2a + 3b = 3$$

$$\therefore 2a + 3b = -3$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 0, b = -1$

$$\therefore ab = 0 \times (-1) = 0$$

답 0

053

$$f'(-a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-a+h)-f(-a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(a-h)+f(a)}{h}$$

$$\leftarrow f(-x) = -f(x)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\{f(a-h)-f(a)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h} = f'(a)$$

$f'(-a) = f'(a)$ 이고 $f'(a) = 3$ 이므로

$$f'(a) + f'(-a) = 2f'(a) = 2 \times 3 = 6$$

답 6

054

함수 $g(x)$ 가 $f(x)$ 의 역함수이므로

$$f(a) = -1, f(b) = 2 \text{에서}$$

$$g(-1) = a, g(2) = b$$

또, 함수 $f(x)$ 의 구간 $[a, b]$ 에서의 평균변화율이 3이므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{2-(-1)}{b-a} = 3$$

$$\therefore b-a=1$$

따라서 함수 $g(x)$ 의 구간 $[-1, 2]$ 에서의 평균변화율은

$$\frac{g(2)-g(-1)}{2-(-1)}=\frac{b-a}{3}=\frac{1}{3} \quad \text{답 ③}$$

055

① $f(0)=0$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+0)-f(0)}{h} = f'(0)$$

그런데 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이 아니므로 $f'(0)$ 의 값은 존재하지 않는다.

② $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ 이다.

③ $x=2$ 에서 연속이 아니므로 미분가능하지 않다.

$$\text{④ } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3) > 0$$

⑤ $f'(1) \neq 0, f'(3) \neq 0$ 이므로 $f'(1)f'(3) \neq 0$

답 ④

056

$\frac{1}{x} = h$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0+$ 이므로

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ f\left(4 + \frac{2}{x}\right) - f\left(4 - \frac{4}{x}\right) \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(4+2h) - f(4-4h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\{f(4+2h) - f(4)\} - \{f(4-4h) - f(4)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(4+2h) - f(4)}{2h} \times 2 \\ &\quad - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(4-4h) - f(4)}{-4h} \times (-4) \\ &= 2f'(4) - \{-4f'(4)\} \\ &= 6f'(4) \\ &= 6 \times 2 = 12 \end{aligned} \quad \text{답 ①}$$

057

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & (x \leq 0) \\ f(x) & (0 < x < 2) \text{라 하면} \\ 2 & (x \geq 2) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 가 $x=0, x=2$ 에서 미분가능하므로 $x=0, x=2$ 에서 연속이다.

(i) 함수 $g(x)$ 가 $x=0, x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + bx + c) = 1$$

$$\therefore c=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = g(2) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + bx + c) = 2, 4a + 2b + c = 2$$

$$\therefore 4a + 2b = 1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

(ii) $g'(0)$ 이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+1) - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(ax^2 + bx + 1) - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^2 + bx}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b$$

$$\therefore b=1$$

㉠에 $b=1$ 을 대입하면 $a = -\frac{1}{4}$ 이므로

(i)~(iii)에서

$$8a - 4b + 2c = -2 - 4 + 2 = -4$$

답 -4

다른 풀이

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & (x \leq 0) \\ f(x) & (0 < x < 2) \text{에서} \\ 2 & (x \geq 2) \end{cases}$$

$h(x) = x+1, k(x) = 2$ 라 하면

함수 $g(x)$ 는 $x=0, x=2$ 에서 연속이므로

$h(0) = f(0)$ 에서 $c=1,$

$f(2) = k(2)$ 에서 $4a + 2b + c = 2$

$$\therefore 4a + 2b = 1 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$h'(0) = f'(0)$ 에서 $b=1$

㉡에 $b=1$ 을 대입하면 $a = -\frac{1}{4}$

$$\therefore 8a - 4b + 2c = -2 - 4 + 2 = -4$$

058

주어진 식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$-3f(0) = 0 \quad \therefore f(0) = 0$$

(i) 다항함수 $f(x)$ 가 일차함수이거나 상수함수이면 주어진 식의 좌변의 차수는 1 이하이고, 우변의 차수는 2이므로 성립하지 않는다.

(ii) 다항함수 $f(x)$ 가 이차함수이면 $f(x) = x^2 + ax$ (a 는 상수)로 놓을 수 있다.

주어진 식에 의하여

$$x(2x+a) - 3(x^2+ax) = 2x^2 - 8x$$

$$-x^2 - 2ax = 2x^2 - 8x$$

이때 양변의 이차항의 계수가 일치하지 않으므로 성립하지 않는다.

(iii) 다항함수 $f(x)$ 가 삼차함수이면

$y = x^3 + ax^2 + bx$ (a, b 는 상수)로 놓을 수 있다.

주어진 식에 의하여

$$x(3x^2 + 2ax + b) - 3(x^3 + ax^2 + bx) = 2x^2 - 8x$$

$$-ax^2 - 2bx = 2x^2 - 8x$$

$$\therefore a = -2, b = 4$$

(i)~(iii)에서 다항함수 $f(x)$ 는 삼차함수이므로

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x$$

$$\therefore f(1) = 1 - 2 + 4 = 3$$

답 ③

참고

다항함수 $f(x)$ 가 사차 이상의 함수이면 주어진 등식에서 좌변의 차수가 4차이므로 성립하지 않는다.

059

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^n - 5x - 6}{x(x-2)} = a \text{ 이고 } \lim_{x \rightarrow 2} x(x-2) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^n - 5x - 6) = 0 \text{ 이어야 한다.}$$

$$\text{즉, } 2^n - 10 - 6 = 0 \text{ 에서 } 2^n = 16$$

$$\therefore n = 4$$

이때 $f(x) = x^4 - 5x$ 로 놓으면 $f(2) = 6$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 5x - 6}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \frac{1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{2} f'(2) = a$$

$$f'(x) = 4x^3 - 5 \text{ 에서 } f'(2) = 27 \text{ 이므로}$$

$$a = \frac{1}{2} \times 27 = \frac{27}{2}$$

$$\therefore na = 4 \times \frac{27}{2} = 54$$

답 54

060

(i) 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나눌 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면

$$f(x) = (x-1)^2 Q_1(x) \quad \dots\dots ㉑$$

㉑의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f(1)=0$

㉑의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2(x-1)Q_1(x) + (x-1)^2 Q_1'(x)$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f'(1)=0$

(ii) 다항식 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 -1 이므로 $f(2) = -1$

(iii) 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^2(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면 나머지는 이차 이하의 다항식이므로

$g(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = (x-1)^2(x-2)Q_2(x) + ax^2 + bx + c \quad \dots\dots ㉒$$

㉒의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = a + b + c = 0 \quad \dots\dots ㉓$$

㉒의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(2) = 4a + 2b + c = -1 \quad \dots\dots ㉔$$

㉒의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2(x-1)(x-2)Q_2(x) + (x-1)^2 Q_2'(x) + (x-1)^2(x-2)Q_2'(x) + 2ax + b$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(1) = 2a + b = 0 \quad \dots\dots ㉕$$

㉓, ㉔, ㉕을 연립하여 풀면

$$a = -1, b = 2, c = -1$$

즉, $g(x) = -x^2 + 2x - 1$ 이므로

$$g'(x) = -2x + 2$$

$$\therefore g'(3) = -6 + 2 = -4 \quad \text{답 } -4$$

2 도함수의 활용

1 접선의 방정식

82~86쪽

062

$f(x) = x^2 - 5x + 7$ 로 놓으면 $f'(x) = 2x - 5$

이 곡선 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(2) = 2 \times 2 - 5 = -1$$

따라서 기울기가 -1 이고, 점 $(2, 1)$ 을 지나는 접선의 방정식은

$$y - 1 = -(x - 2) \quad \therefore y = -x + 3$$

따라서 점 $(2, k)$ 는 접선 $y = -x + 3$ 위의 점이므로

$$k = -2 + 3 = 1$$

답 1

064

$f(x) = x^3 - 9x + 2$ 로 놓으면 $f'(x) = 3x^2 - 9$

(1) 접선의 기울기가 -6 이므로

$$3x^2 - 9 = -6, x^2 = 1$$

$$\therefore x = \pm 1$$

$$x = 1 \text{ 일 때 } y = -6,$$

$$x = -1 \text{ 일 때 } y = 10$$

따라서 접점의 좌표는 $(1, -6), (-1, 10)$ 이므로

구하는 접선의 방정식은

$$y + 6 = -6(x - 1), y - 10 = -6(x + 1)$$

$$\therefore y = -6x, y = -6x + 4$$

(2) 직선 $y = 3x - 2$ 에 평행한 직선의 기울기는 3이므로

$$3x^2 - 9 = 3, x^2 = 4$$

$$\therefore x = \pm 2$$

$$x = 2 \text{ 일 때 } y = -8,$$

$$x = -2 \text{ 일 때 } y = 12$$

따라서 접점의 좌표는 $(2, -8), (-2, 12)$ 이므로

구하는 접선의 방정식은

$$y + 8 = 3(x - 2), y - 12 = 3(x + 2)$$

$$\therefore y = 3x - 14, y = 3x + 18$$

답 (1) $y = -6x, y = -6x + 4$

(2) $y = 3x - 14, y = 3x + 18$

066

$f(x) = x^2 + x - 2$ 로 놓으면 $f'(x) = 2x + 1$

접점의 좌표를 $(a, a^2 + a - 2)$ 라 하면

기울기는 $f'(a) = 2a + 1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (a^2 + a - 2) = (2a + 1)(x - a)$$

$$y = (2a + 1)x - a^2 - 2$$

..... ㉠

이 직선이 점 $(0, -6)$ 을 지나므로

$$-6 = -a^2 - 2, a^2 = 4$$

$$\therefore a = \pm 2$$

$a = 2, a = -2$ 를 ㉠에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y = 5x - 6, y = -3x - 6$$

답 $y = 5x - 6, y = -3x - 6$

068

$f(x) = x^3 - 2ax + b$ 로 놓으면 $f'(x) = 3x^2 - 2a$

(i) 점 $(1, 2)$ 가 곡선 위의 점이므로

$$f(1) = 1 - 2a + b = 2$$

$$\therefore 2a - b = -1$$

(ii) 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기가 -3 이므로

$$f'(1) = 3 - 2a = -3$$

$$\therefore a = 3$$

(i), (ii)에서 $a = 3, b = 7$

답 $a = 3, b = 7$

070

(1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1, g(x) = x^2 + 9x + 6$ 으로 놓으면

$$f'(x) = 3x^2 - 4x, g'(x) = 2x + 9$$

두 곡선의 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서}$$

$$t^3 - 2t^2 + 1 = t^2 + 9t + 6$$

$$t^3 - 3t^2 - 9t - 5 = 0, (t + 1)^2(t - 5) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 5$$

..... ㉠

$$f'(t) = g'(t) \text{에서}$$

$$3t^2 - 4t = 2t + 9$$

$$3t^2 - 6t - 9 = 0, 3(t + 1)(t - 3) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 3$$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 $t = -1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, -2)$ 이고 접선의 기울

기는 $f'(-1) = g'(-1) = 7$ 이므로

구하는 접선의 방정식은

$$y + 2 = 7(x + 1) \quad \therefore y = 7x + 5$$

(2) $f(x) = x^3 + ax - b, g(x) = bx^2 + c$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + a, g'(x) = 2bx$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 점 (1, 3)을 지나므로
 $f(1)=3$ 에서 $1+a-b=3$

$$\therefore a-b=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$g(1)=3 \text{에서 } b+c=3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

점 (1, 3)에서의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(1)=g'(1) \text{에서}$$

$$3+a=2b \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하면 풀면

$$a=7, b=5, c=-2$$

$$\text{답 (1) } y=7x+5 \quad (2) a=7, b=5, c=-2$$

+ 풍산자 방법

두 곡선이 공통인 접선을 가지면 두 곡선은 한 점에서 서로 접한다. 즉, 두 가지만 확인하자.

- ① 함숫값이 같다. ② 미분계수가 같다.

필수 확인 문제

87쪽

071

$$f(x)=x^3-2x^2+3x \text{로 놓으면}$$

$$f'(x)=3x^2-4x+3$$

이 곡선 위의 점 (1, 2)에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=3-4+3=2$$

따라서 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이므로
 그 방정식은

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-1) \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

그러므로 구하는 y 절편은 $\frac{5}{2}$ 이다.

$$\text{답 } \frac{5}{2}$$

072

$$f(x)=2x^3-3x+10 \text{으로 놓으면}$$

$$f'(x)=6x^2-3$$

이 곡선 위의 점 (1, 9)에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=6-3=3$$

따라서 기울기가 3이고, 점 (1, 9)를 지나는 접선의 방정식은

$$y-9=3(x-1) \quad \therefore y=3x+6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

직선 ㉠의 x 절편과 y 절편이 각각 -2, 6이므로 이 직선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6$$

$$\text{답 } 6$$

073

$$f(x)=x^3-2x^2+x+8 \text{로 놓으면}$$

$$f'(x)=3x^2-4x+1$$

점점의 좌표를 (a, a^3-2a^2+a+8) 이라 하면 기울기는 $f'(a)=3a^2-4a+1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(a^3-2a^2+a+8)=(3a^2-4a+1)(x-a)$$

이 직선이 점 (0, 0)을 지나므로

$$-(a^3-2a^2+a+8)=(3a^2-4a+1)(-a)$$

$$a^3-a^2-4=0, (a-2)(a^2+a+2)=0$$

$$\therefore a=2$$

따라서 점점의 좌표는 (2, 10)이다.

$$\text{답 } (2, 10)$$

074

$$f(x)=-2x^3+x^2+ax-1 \text{로 놓으면}$$

점 (-1, 1)이 곡선 위의 점이므로

$$f(-1)=2+1-a-1=1$$

$$\therefore a=1$$

$$f(x)=-2x^3+x^2+x-1 \text{에서}$$

$$f'(x)=-6x^2+2x+1 \text{이므로}$$

$$f'(-1)=-6-2+1=-7$$

즉, 점 (-1, 1)에서의 접선의 방정식은

$$y-1=-7(x+1) \quad \therefore y=-7x-6$$

따라서 $b=-7, c=-6$ 이므로

$$a+b+c=1+(-7)+(-6)=-12$$

$$\text{답 } -12$$

075

$$f(x)=x^3-9x, g(x)=-3x^2+k \text{로 놓으면}$$

$$f'(x)=3x^2-9, g'(x)=-6x$$

두 곡선의 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$f(t)=g(t) \text{에서}$$

$$t^3-9t=-3t^2+k \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$f'(t)=g'(t) \text{에서}$$

$$3t^2-9=-6t$$

$$t^2+2t-3=0, (t+3)(t-1)=0$$

$$\therefore t=-3 \text{ 또는 } t=1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑧을 ⑦에 대입하면

$$t=-3 \text{ 일 때, } 0=-27+k$$

$$\therefore k=27$$

$$t=1 \text{ 일 때, } -8=-3+k$$

$$\therefore k=-5$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은

$$27+(-5)=22$$

답 22

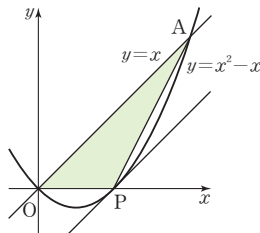
076

$f(x)=x^2-x$ 로 놓으면 $f'(x)=2x-1$

직선 OA의 방정식은

$$y-2=x-2 \quad \therefore y=x$$

다음 그림과 같이 삼각형 OAP의 넓이가 최대일 때는 직선 OA와 평행하고 곡선에 접하는 직선의 접점이 P인 경우이다.



주어진 곡선 위의 점에서의 접선 중 직선 $y=x$ 와 평행한 접선의 접점의 좌표를 (t, t^2-t) 라 하면

$$f'(t)=2t-1=1$$

$$\therefore t=1$$

따라서 접점의 좌표는 $(1, 0)$ 이므로 접점과 직선 $y=x$,

즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1-0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $\overline{OA}=2\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 OAP의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}=1$$

답 1

2 평균값 정리

88~92쪽

078

(1) 함수 $f(x)=x^2-6x+5$ 는 닫힌구간 $[0, 6]$ 에서 연속이고, 열린구간 $(0, 6)$ 에서 미분가능하다.

또, $f(0)=f(6)=5$ 이므로 롤의 정리에 의하여

$f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 6)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=2x-6 \text{ 이므로}$$

$$f'(c)=2c-6=0$$

$$\therefore c=3$$

(2) 함수 $f(x)=(x+1)(x-2)^2$ 은 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고, 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 미분가능하다.

또, $f(-1)=f(2)=0$ 이므로 롤의 정리에 의하여

$f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(-1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=(x-2)^2+2(x+1)(x-2)$$

$$=(x-2)(x-2+2x+2)$$

$$=3x(x-2)$$

이므로

$$f'(c)=3c(c-2)=0$$

$$\therefore c=0 \text{ 또는 } c=2$$

이때 $-1 < c < 2$ 이므로 $c=0$

답 (1) 3 (2) 0

참고

c 의 값을 구할 때 주어진 열린구간에 속하는지 반드시 확인한다.

080

(1) 함수 $f(x)=x^2-2x$ 는 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고, 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(-1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=2x-2 \text{ 이므로}$$

$$\frac{0-3}{3}=2c-2$$

$$-1=2c-2$$

$$\therefore c=\frac{1}{2}$$

(2) 함수 $f(x)=x^3-3x$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고, 열린구간 $(0, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=3x^2-3\text{이므로}$$

$$\frac{2-0}{2}=3c^2-3, 1=3c^2-3, c^2=\frac{4}{3}$$

$$\therefore c=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{이때 } 0 < c < 2 \text{이므로 } c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{답 (1) } \frac{1}{2} \text{ (2) } \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

필수 확인 문제

93쪽

081

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 연속이고, 열린구간 $(-3, 3)$ 에서 미분가능하다.

또, $f(-3)=f(3)=0$ 이므로 롤의 정리에 의하여

$f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(-3, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=3x^2-9\text{이므로}$$

$$f'(c)=3c^2-9=0$$

$$c^2-3=0 \quad \therefore c=\pm\sqrt{3}$$

따라서 구하는 실수 c 의 개수는 2이다.

답 ③

082

닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 롤의 정리가 성립하려면 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$ 에서 미분가능해야 하며, $f(0)=f(1)$ 이어야 한다.

ㄱ. $f(x)=x^3(1-x)$ 는 다항함수이므로 닫힌구간

$[0, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$ 에서 미분가능하며, $f(0)=f(1)=0$ 이다.

ㄴ. 함수 $g(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$ 의 그래

프는 오른쪽 그림과 같으므로

$f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$

에서 연속이고

$g(0)=g(1)=\frac{1}{2}$ 이지만, $x=\frac{1}{2}$ 에서 미분가능하지 않다.

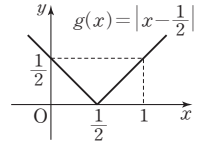
ㄷ. $0 \leq x \leq 1$ 에서 $x+3 > 0$ 이므로

$$h(x)=\frac{|x+3|}{x+3}=\frac{x+3}{x+3}=1$$

따라서 $h(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$ 에서 미분가능하며, $h(0)=h(1)=1$ 이다.

따라서 롤의 정리가 성립하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ



083

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, k]$ 에서 연속이고, 열린구간 $(1, k)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(k)-f(1)}{k-1}=f'\left(\frac{2k}{3}\right)$$

$$f'(x)=-2x+4\text{이므로}$$

$$\frac{-k^2+4k-3}{k-1}=-\frac{4k}{3}+4$$

$$\frac{-(k-1)(k-3)}{k-1}=-\frac{4k}{3}+4$$

$$-k+3=-\frac{4k}{3}+4, \frac{k}{3}=1$$

$$\therefore k=3$$

답 3

084

함수 $f(x)=x^3-4x$ 는 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 연속이고, 열린구간 $(0, 3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(0, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=3x^2-4\text{이므로}$$

$$\frac{15-0}{3-0}=3c^2-4, 5=3c^2-4, c^2=3$$

$$\text{이때 } 0 < c < 3 \text{이므로 } c=\sqrt{3}$$

답 $\sqrt{3}$

085

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[3, 5]$ 에서 연속이고, 열린구간 $(3, 5)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(5)-f(3)}{5-3}=f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(3, 5)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 조건 (가)에서 $f(3)=6$ 이고 조건 (나)에서 $f'(c) \leq 4$ 이므로

$$\frac{f(5)-6}{2} \leq 4 \quad \therefore f(5) \leq 14$$

따라서 $f(5)$ 의 최댓값은 14이다.

답 14

3 함수의 극대와 극소

94~109쪽

087

(1) $f(x) = x^3 - 3x$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$= 3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$ 에서 증가하고, 구간 $[-1, 1]$ 에서 감소한다.

(2) $f(x) = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + 1$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 - 3x + 6$$

$$= -3(x+2)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	-9	↗	$\frac{9}{2}$	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-2, 1]$ 에서 증가하고, 구간 $(-\infty, -2]$, $[1, \infty)$ 에서 감소한다.

답 (1) 구간 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$ 에서 증가,
구간 $[-1, 1]$ 에서 감소

(2) 구간 $[-2, 1]$ 에서 증가,
구간 $(-\infty, -2]$, $[1, \infty)$ 에서 감소

089

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) = -x^2 + 2ax - (3a-2) \leq 0$$

즉, $x^2 - 2ax + (3a-2) \geq 0$ 이 성립해야 하므로

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3a + 2 \leq 0, (a-1)(a-2) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq a \leq 2$$

답 $1 \leq a \leq 2$

참고 이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, 모든 실수 x 에 대하여

① 이차부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 이 성립하려면

$$\Rightarrow a > 0, D \leq 0$$

② 이차부등식 $ax^2 + bx + c \leq 0$ 이 성립하려면

$$\Rightarrow a < 0, D \leq 0$$

091

함수 $f(x)$ 가 구간 $[1, 4]$ 에서 증가하려면 $1 \leq x \leq 4$ 일 때

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - a \geq 0 \text{이 성립해야 한다.}$$

따라서 이차함수

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - a \text{의 그래프가}$$

오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$f'(1) = -3 + 12 - a \geq 0 \text{에서}$$

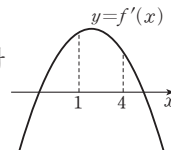
$$a \leq 9$$

$$f'(4) = -48 + 48 - a \geq 0 \text{에서}$$

$$a \leq 0$$

①, ②을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$a \leq 0$$

답 $a \leq 0$ 

..... ①

..... ②

093

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$= 3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 $x=0$ 일 때, 극댓값: $f(0)=3$

$x=2$ 일 때, 극솟값: $f(2)=-1$

답 극댓값: 3, 극솟값: -1

095

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{10}ax^2 + bx \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{5}ax + b$$

$x=-1$ 에서 극댓값을 갖고, $x=1$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(-1) = 3 - \frac{1}{5}a + b = 0$$

$$f'(1) = 3 + \frac{1}{5}a + b = 0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-3$

답 $a=0$, $b=-3$

097

$$f(x) = x^4 + ax^3 + 4x^2 + b \text{에서}$$

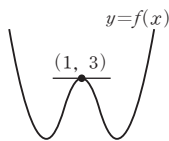
$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 8x$$

$x=1$ 에서 극댓값 3을 가지므로

$$f(1) = 1 + a + 4 + b = 3$$

$$f'(1) = 4 + 3a + 8 = 0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=2$



답 $a=-4$, $b=2$

099

구간 $[-2, 4]$ 에서 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 -1, 2, 3이다.

(i) $x=-1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극소이다.

(ii) $x=2$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대이다.

(iii) $x=3$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극값을 갖지 않는다.

(i)~(iii)에서 $m=1$, $n=1$ 이므로

$$m+n=1+1=2$$

답 2

참고

$f'(a)=0$ 일 때, $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 반드시 극값을 갖는 것은 아니다.

$x=a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌는지 확인해야 한다.

101

$$(1) f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$= 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

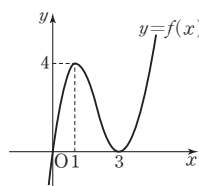
따라서 $x=1$ 일 때, 극댓값: $f(1)=4$

$x=3$ 일 때, 극솟값: $f(3)=0$

또, $f(0)=0$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같다.



$$(2) f(x) = -2x^3 + 6x - 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = -6x^2 + 6$$

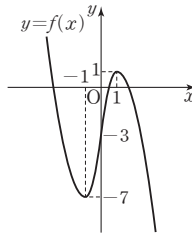
$$= -6(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	-7	↗	1	↘

따라서 $x=-1$ 일 때,
 극솟값: $f(-1)=-7$
 $x=1$ 일 때,
 극댓값: $f(1)=1$
 또, $f(0)=-3$ 이므로 함수
 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽
 그림과 같다.



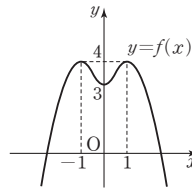
답 풀이 참조

103

- (1) $f(x)=-x^4+2x^2+3$ 에서
 $f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x+1)(x-1)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	4	↘	3	↗	4	↘

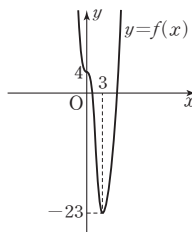
따라서 $x=-1$ 일 때,
 극댓값: $f(-1)=4$
 $x=0$ 일 때, 극솟값: $f(0)=3$
 $x=1$ 일 때, 극댓값: $f(1)=4$
 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래
 프는 오른쪽 그림과 같다.



- (2) $f(x)=x^4-4x^3+4$ 에서
 $f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=3$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	0	$\dots$	3	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	4	$\searrow$	-23	$\nearrow$

따라서 $x=3$ 일 때,
 극솟값: $f(3)=-23$
 극댓값은 없으므로
 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오
 른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

105

$y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 -1 ,
 1 이므로 이 값을 경계로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표
 로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	↗	극대	↘		↘

위의 증감표에 의하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 증가
 하다가 $x=-1$ 에서부터 감소하고, $x=1$ 에서 멈췄한
 후 다시 감소한다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것
 은 ④이다.

답 ④

107

- (1) 삼차함수 $f(x)=x^3-3ax^2+(9a-6)x-5$ 가 극댓
 값과 극솟값을 갖기 위해서는 방정식 $f'(x)=0$ 이
 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$$f'(x)=3x^2-6ax+(9a-6)=0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$\frac{D}{4}=9a^2-3(9a-6)>0, a^2-3a+2>0$$

$$(a-1)(a-2)>0 \quad \therefore a<1 \text{ 또는 } a>2$$

- (2) 삼차함수 $f(x)=ax^3+6x^2+(10-2a)x+3$ 이 극
 댓값과 극솟값을 갖지 않기 위해서는 방정식
 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로
 $f'(x)=3ax^2+12x+(10-2a)=0$ 의 판별식을 D
 라 하면

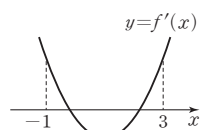
$$\frac{D}{4}=36-3a(10-2a)\leq 0, a^2-5a+6\leq 0$$

$$(a-2)(a-3)\leq 0 \quad \therefore 2\leq a\leq 3$$

답 (1) $a<1$ 또는 $a>2$ (2) $2\leq a\leq 3$

109

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-1, 3)$ 에
 서 극댓값과 극솟값을 가지려면
 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 구간
 $(-1, 3)$ 에서 서로 다른 두 실근
 을 가져야 한다.



$$f(x) = x^3 - 2ax^2 - 9 \text{에서 } f'(x) = 3x^2 - 4ax$$

(i) 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D > 0 \text{이어야 하므로 } \frac{D}{4} = 4a^2 > 0$$

$$\therefore a \neq 0 \text{인 모든 실수} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $f'(-1) > 0$ 이어야 하므로 $3 + 4a > 0$

$$\therefore a > -\frac{3}{4} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$f'(3) > 0 \text{이어야 하므로 } 27 - 12a > 0$$

$$\therefore a < \frac{9}{4} \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

(iii) 이차방정식 $y = f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이

$$x = \frac{2}{3}a \text{이므로 } -1 < \frac{2}{3}a < 3$$

$$\therefore -\frac{3}{2} < a < \frac{9}{2} \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$\textcircled{7} \sim \textcircled{10}$ 을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$-\frac{3}{4} < a < 0 \text{ 또는 } 0 < a < \frac{9}{4}$$

따라서 구하는 정수 a 의 값은 1, 2이므로 2개이다.

답 2

필수 확인 문제

110쪽

110

$$f'(x) = 3x^2 - 9x + 6$$

$$= 3(x-1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	4	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 1]$, $[2, \infty)$ 에서 증가하고, 구간 $[1, 2]$ 에서 감소한다.

즉, $a=1$, $b=2$ 이므로

$$b-a=2-1=1$$

답 1

다른 풀이

$$f'(x) = 3x^2 - 9x + 6 = 3(x-1)(x-2)$$

함수 $f(x)$ 가 감소하므로 $f'(x) \leq 0$ 에서

$$3(x-1)(x-2) \leq 0, (x-1)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq x \leq 2$$

따라서 $a=1$, $b=2$ 이므로

$$b-a=2-1=1$$

111

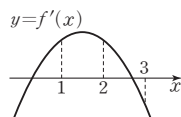
$$f(x) = -x^3 + ax^2 - 1 \text{에서 } f'(x) = -3x^2 + 2ax$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $[1, 2]$ 에서 증가하고, 구간 $[3, \infty)$ 에서 감소하려면

$$f'(1) \geq 0, f'(2) \geq 0, f'(3) \leq 0 \text{이}$$

어야 하므로 $y=f'(x)$ 의 그래프가

오른쪽 그림과 같아야 한다.



$$(i) f'(1) = -3 + 2a \geq 0 \text{에서}$$

$$a \geq \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$(ii) f'(2) = -12 + 4a \geq 0 \text{에서}$$

$$a \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$(iii) f'(3) = -27 + 6a \leq 0 \text{에서}$$

$$a \leq \frac{9}{2} \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$, $\textcircled{9}$ 을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$3 \leq a \leq \frac{9}{2}$$

따라서 구하는 정수 a 의 값은 3, 4이므로 그 합은

$$3+4=7$$

답 7

112

오른쪽 그림과 같이

$y=f'(x)$ 의 그래프

와 x 축의 교점의 x

좌표를 작은 것부터

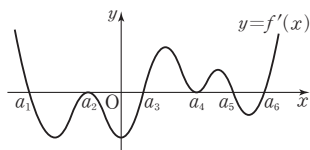
순서대로 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 이라 하자.

$$(i) x=a_1, x=a_5 \text{의 좌우에서 } f'(x) \text{의 부호가 양}(+) \text{에서 음}(-) \text{으로 바뀌므로 } x=a_1, x=a_5 \text{에서 극대}$$

이다.

$$(ii) x=a_3, x=a_6 \text{의 좌우에서 } f'(x) \text{의 부호가 음}(-) \text{에서 양}(+) \text{으로 바뀌므로 } x=a_3, x=a_6 \text{에서 극소}$$

이다.



(iii) $x=a_2, x=a_4$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=a_2, x=a_4$ 에서 극대도 극소도 아니다.
따라서 함수 $y=f(x)$ 가 극댓값 또는 극솟값을 갖는 x 의 값의 개수는 4이다. **답 4**

113

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+5$ 에서

$$f'(x)=6x^2+2ax+b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값 -2 를 가지므로

$$f(1)=2+a+b+5=-2$$

$$\therefore a+b=-9 \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$f'(1)=6+2a+b=0$$

$$\therefore 2a+b=-6 \quad \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면

$$a=3, b=-12$$

따라서 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+5$ 이므로

$$f'(x)=6x^2+6x-12$$

$$=6(x+2)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 일 때 극대이므로 구하는 극댓값은

$$f(-2)=-16+12+24+5=25$$

답 25

114

삼차함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 갖기 위해서는 방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=3x^2+2(k-1)x-2k+2=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2-3 \times (-2k+2)>0$$

$$k^2+4k-5>0, (k+5)(k-1)>0$$

$$\therefore k<-5 \text{ 또는 } k>1$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 2이다.

답 2

115

사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖지 않기 위해서는 방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖지 않아야 한다.

즉, $f'(x)=0$ 의 중근과 다른 한 실근을 갖거나, 삼중근을 갖거나, 하나의 실근과 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

$f'(x)=x(x^2+2ax+a)$ 이므로 이차방정식

$x^2+2ax+a=0$ 의 판별식을 D 라 하자.

(i) $f'(x)=0$ 이 중근과 다른 한 실근을 가질 때, 즉 방정식 $x^2+2ax+a=0$ 이 $x \neq 0$ 인 실수를 중근으로 가지므로

$$\frac{D}{4}=a^2-a=0, a(a-1)=0$$

$$\therefore a=1 (\because a=0 \text{이면 } x=0 \text{ 을 중근으로 갖는다.})$$

(ii) $f'(x)=0$ 이 삼중근을 가질 때, 즉 방정식

$$x^2+2ax+a=0 \text{ 이 } x=0 \text{ 을 중근으로 가지므로}$$

$$x^2+2ax+a=0 \text{ 에 } x=0 \text{ 을 대입하면 } a=0$$

(iii) $f'(x)=0$ 이 하나의 실근과 서로 다른 두 허근을 가질 때, 즉 방정식 $x^2+2ax+a=0$ 이 허근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=a^2-a<0, a(a-1)<0 \quad \therefore 0<a<1$$

(i)~(iii)에서 $0 \leq a \leq 1$

답 $0 \leq a \leq 1$

4 함수의 최대와 최소

111~113쪽

117

(1) $f(x)=2x^3-3x^2-12x$ 에서

$$f'(x)=6x^2-6x-12$$

$$=6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

구간 $[-2, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	$\nearrow$	7	$\searrow$	-20	$\nearrow$	-9

따라서 양 끝값과 극값을 비교하면

$$\text{최댓값: } f(-1)=7, \text{ 최솟값: } f(2)=-20$$

(2) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 1$ 에서

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

$$= 12x^2(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$

구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	-1	\	-2	/	15

따라서 양 끝값과 극값을 비교하면

최댓값: $f(2)=15$, 최솟값: $f(1)=-2$

답 (1) 최댓값: 7, 최솟값: -20

(2) 최댓값: 15, 최솟값: -2

참고

반드시 극댓값이 최댓값, 극솟값이 최솟값이 되는 것은 아니므로 주어진 범위의 양 끝값을 확인한다.

119

$f(x) = x^3 - 3x + a$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$= 3(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	a	\	$a-2$	/	$a+2$

따라서 최댓값: $f(2)=a+2$, 최솟값: $f(1)=a-2$

주어진 조건에서 최댓값이 10이므로

$$a+2=10 \quad \therefore a=8$$

답 8

121

$f(x) = ax^3 - 6ax^2 + b$ 에서

$$f'(x) = 3ax^2 - 12ax = 3ax(x-4)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=4$

$a > 0$ 일 때, 구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$b-7a$	/	b	\	$b-16a$

따라서 최댓값: $f(0)=b$, 최솟값: $f(2)=b-16a$

주어진 조건에서 최댓값이 10, 최솟값이 -22이므로

$$b=10, b-16a=-22$$

$$\therefore a=2, b=10$$

답 $a=2, b=10$

123

상자의 부피를 $f(x)$ 라 하면

$$f(x) = (6-2x)^2x$$

$$= 4x^3 - 24x^2 + 36x \quad (0 < x < 3)$$

$$f'(x) = 12x^2 - 48x + 36$$

$$= 12(x-1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=3$

구간 $(0, 3)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	1	...	(3)
$f'(x)$		+	0	-	(0)
$f(x)$	(0)	/	16	\	(0)

따라서 $x=1$ 일 때 부피가 최대이고, 이때의 부피는 16이다.

답 $x=1$, 부피: 16

필수 확인 문제

114쪽

124

$f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 10$ 에서

$$f'(x) = -6x^2 - 12x$$

$$= -6x(x+2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

구간 $[-3, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	...	-2	...	0	...	2
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	10	\	2	/	10	\	-30

양 끝값과 극값을 비교하면

최댓값: $f(-3)=f(0)=10$, 최솟값: $f(2)=-30$

따라서 $M=10$, $m=-30$ 이므로

$$M-m=10-(-30)=40$$

답 40

125

$$f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3-4x^2+\frac{2}{3} \text{에서}$$

$$f'(x)=4x^3-4x^2-8x \\ =4x(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	2
$f'(x)$	0	+	0	-	0
$f(x)$	-1	↗	$\frac{2}{3}$	↘	-10

따라서 $x=2$ 에서 최솟값 -10 을 가지므로

$$a=2, b=-10$$

$$\therefore a+b=2+(-10)=-8$$

답 -8

126

$$f(x)=2x^3-9x^2+12x+k \text{에서}$$

$$f'(x)=6x^2-18x+12 \\ =6(x-1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

구간 $[1, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	2	...	3
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	$k+5$	↘	$k+4$	↗	$k+9$

따라서 최댓값: $f(3)=k+9$, 최솟값: $f(2)=k+4$

주어진 조건에서 최댓값과 최솟값의 합이 7이므로

$$(k+9)+(k+4)=7, 2k=-6$$

$$\therefore k=-3$$

답 -3

127

$$f(x)=x^4-4x^3+4x^2+a \text{에서}$$

$$f'(x)=4x^3-12x^2+8x \\ =4x(x-1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	1
$f'(x)$		-	0	+	0
$f(x)$	$a+9$	↘	a	↗	$a+1$

따라서 최댓값: $f(-1)=a+9$, 최솟값: $f(0)=a$

주어진 조건에서 최댓값이 79이므로

$$a+9=79 \quad \therefore a=70$$

따라서 $f(x)$ 의 최솟값은 $a=70$

답 70

128

오른쪽 그림과 같이 정삼각형의

꼭짓점으로부터 거리가

x ($0 < x < 6$)인 부분까지 자른다

고 하자.

상자의 밑면은 한 변의 길이가

$12-2x$ 인 정삼각형이므로 그 넓

이를 S 라 하면

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(12-2x)^2$$

또, 상자의 높이를 h 라 하면

$$h=x \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

따라서 상자의 부피를 $f(x)$ 라 하면

$$f(x)=Sh=\frac{\sqrt{3}}{4}(12-2x)^2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

$$=x^3-12x^2+36x$$

$$f(x)=x^3-12x^2+36x \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2-24x+36$$

$$=3(x-2)(x-6)$$

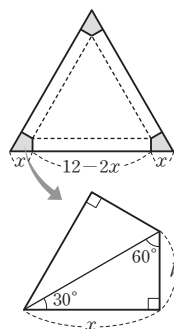
$$f'(x)=0 \text{에서 } x=2 \text{ 또는 } x=6$$

구간 $(0, 6)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	2	...	(6)
$f'(x)$		+	0	-	(0)
$f(x)$	(0)	↗	32	↘	(0)

따라서 상자의 부피는 $x=2$ 일 때 최대이고, 최댓값은 32이다.

답 ③



129

$-x^2 - 2x = t$ 로 놓으면

$$t = -(x+1)^2 + 1$$

구간 $[-3, 0]$ 에서 함수 $y = -(x+1)^2 + 1$ 의 최댓값은 1, 최솟값은 -3 이므로 $-3 \leq t \leq 1$

$$g(t) = t^3 - 3t^2 - 9t \text{라 하면}$$

$$g'(t) = 3t^2 - 6t - 9$$

$$= 3(t+1)(t-3)$$

$$g'(t) = 0 \text{에서 } t = -1 \text{ 또는 } t = 3$$

$-3 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-3	...	-1	...	1
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$	-27	↗	5	↘	-11

따라서 최댓값: $f(-1) = 5$, 최솟값: $f(-3) = -27$

답 최댓값: 5, 최솟값: -27

5 방정식과 부등식의 활용

115~120쪽

131

(1) $f(x) = x^3 - 3x - 2$ 로 놓으면

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

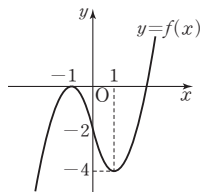
$$= 3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



(2) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$ 로 놓으면

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

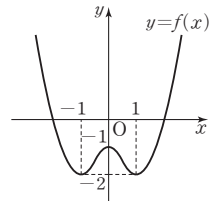
$$= 4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



(3) $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ 로 놓으면

$$f'(x) = 8x^3 - 8x$$

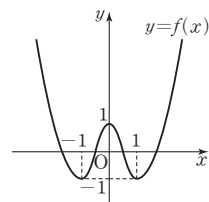
$$= 8x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 네 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.



답 (1) 2 (2) 2 (3) 4

다른 풀이

(1) (극댓값) $\times$ (극솟값) $= 0 \times (-4) = 0$ 이므로 중근과 다른 한 실근을 갖는다. 즉, 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

133

$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + a + 6$ 으로 놓으면

$$f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$a+6$	$\searrow$	$a-2$	$\nearrow$

(1) (극댓값) $\times$ (극솟값) < 0 이어야 하므로

$$(a+6)(a-2) < 0 \quad \therefore -6 < a < 2$$

(2) (극댓값) $\times$ (극솟값) $= 0$ 이어야 하므로

$$(a+6)(a-2) = 0 \quad \therefore a = -6 \text{ 또는 } a = 2$$

(3) (극댓값) $\times$ (극솟값) > 0 이어야 하므로

$$(a+6)(a-2) > 0 \quad \therefore a < -6 \text{ 또는 } a > 2$$

답 (1) $-6 < a < 2$

(2) $a = -6$ 또는 $a = 2$

(3) $a < -6$ 또는 $a > 2$

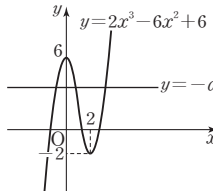
다른 풀이

$$2x^3 - 6x^2 + a + 6 = 0 \text{에서}$$

$$2x^3 - 6x^2 + 6 = -a \text{이므로}$$

$$y = 2x^3 - 6x^2 + 6, y = -a \text{로}$$

놓고, 두 그래프의 교점의 개수를 조사해도 된다.



$$(1) -2 < -a < 6 \quad \therefore -6 < a < 2$$

$$(2) -a = 6 \text{ 또는 } -a = -2 \quad \therefore a = -6 \text{ 또는 } a = 2$$

$$(3) -a < -2 \text{ 또는 } -a > 6 \quad \therefore a < -6 \text{ 또는 } a > 2$$

135

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + a \text{로 놓으면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$= 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$a+5$	$\searrow$	$a-27$	$\nearrow$

따라서 극댓값: $f(-1) = a+5$, 극솟값: $f(3) = a-27$

(1) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오

른쪽 그림과 같아야 하므로

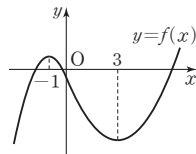
$$(\text{극댓값}) > 0, (\text{극솟값}) < 0,$$

$$(y\text{축과 만나는 점의 } y\text{좌표}) < 0$$

에서

$$a+5 > 0, a-27 < 0, a < 0$$

$$\therefore -5 < a < 0$$



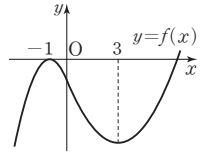
(2) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오

른쪽 그림과 같아야 하므로

$$(\text{극댓값}) = 0 \text{에서}$$

$$a+5=0$$

$$\therefore a = -5$$



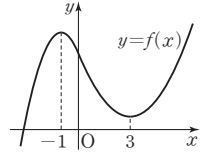
(3) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오

른쪽 그림과 같아야 하므로

$$(\text{극솟값}) > 0 \text{에서}$$

$$a-27 > 0$$

$$\therefore a > 27$$



답 (1) $-5 < a < 0$

(2) $a = -5$ (3) $a > 27$

137

(1) $x^4 - 4x + a > 28x$ 에서 $x^4 - 32x + a > 0$

$$f(x) = x^4 - 32x + a \text{로 놓으면}$$

x	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	최소	$\nearrow$

$$f'(x) = 4x^3 - 32$$

$$= 4(x-2)(x^2+2x+4)$$

그런데 $x^2+2x+4 = (x+1)^2+3 > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값을 갖는다.

따라서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이 성립하려면

$$f(2) = a - 48 > 0$$

$$\therefore a > 48$$

(2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ 로 놓으면

x	(2)	...
$f'(x)$	(0)	+
$f(x)$		$\nearrow$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$= 3x(x-2)$$

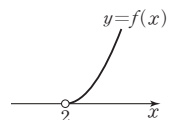
그런데 $x > 2$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로

$f(x)$ 는 증가하는 함수이고,

$x > 2$ 일 때 $f(x) > 0$ 이 성립하려면

$$f(2) = a - 4 \geq 0$$

$$\therefore a \geq 4$$



답 (1) $a > 48$ (2) $a \geq 4$

138

 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ 로 놓으면

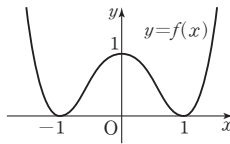
$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$= 4x(x+1)(x-1)$$

 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 1$ 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	0	↗	1	↘	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



답 2

139

 $f(x) = x^3 - 6x^2 - n$ 으로 놓으면

$$f'(x) = 3x^2 - 12x$$

$$= 3x(x-4)$$

 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 4$ 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$-n$	↘	$-n-32$	↗

삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) < 0$ 이어야 하므로

$$(-n)(-n-32) < 0, n(n+32) < 0$$

$$\therefore -32 < n < 0$$

따라서 정수 n 은 $-31, -30, -29, \dots, -2, -1$ 로 그 개수는 31이다.

답 31

참고

 $x^3 - 6x^2 - n = 0$ 에서 $x^3 - 6x^2 = n$ 이므로

$y = x^3 - 6x^2$, $y = n$ 으로 놓고 두 그래프의 교점의 개수를 조사하여 풀 수도 있다.

140

 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + p$ 로 놓으면

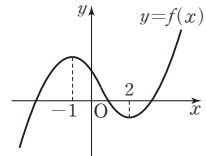
$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$= 6(x+1)(x-2)$$

 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 2$ 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$p+7$	↘	$p-20$	↗

삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 두 개의 양근과 한 개의 음근을 가지려면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$$(\text{극댓값}) > 0, (\text{극솟값}) < 0,$$

$$(y\text{축과 만나는 점의 } y\text{좌표}) > 0\text{에서}$$

$$p+7 > 0, p-20 < 0, p > 0$$

$$\therefore 0 < p < 20$$

답 $0 < p < 20$

141

방정식 $2x^3 - 2x^2 - 36x = x^2 + k$, 즉 $2x^3 - 3x^2 - 36x - k = 0$ 이 한 개의 실근을 가져야 한다. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - k$ 로 놓으면

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$$

$$= 6(x+2)(x-3)$$

 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 3$ 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$44-k$	↘	$-81-k$	↗

$$(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) > 0\text{이어야 하므로}$$

$$(44-k)(-81-k) > 0, (k+81)(k-44) > 0$$

$$\therefore k < -81 \text{ 또는 } k > 44$$

따라서 구하는 자연수 k 의 최솟값은 45이다.

답 45

142

 $x^3 - 8x + k > 4x$ 에서 $x^3 - 12x + k > 0$ $f(x) = x^3 - 12x + k$ 로 놓으면

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$= 3(x+2)(x-2)$$

이때 $x > 2$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x > 2$ 에서 증가하는 함수이다.

$x > 2$ 일 때 $f(x) > 0$ 이 성립하려면
 $f(2) = 8 - 24 + k \geq 0 \quad \therefore k \geq 16$
 따라서 상수 k 의 최솟값은 16이다.

답 16

143

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > g(x)$, 즉
 $f(x) - g(x) > 0$ 이 성립해야 한다.
 $h(x) = f(x) - g(x)$ 로 놓으면
 $h(x) = x^4 - 2k^2x^2 + k$
 $h'(x) = 4x^3 - 4k^2x$
 $= 4x(x+k)(x-k)$
 $h'(x) = 0$ 에서 $x = -k$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = k$
 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-k$	$\cdots$	0	$\cdots$	k	$\cdots$
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	$-k^4+k$	$\nearrow$	k	$\searrow$	$-k^4+k$	$\nearrow$

$-k^4 + k \leq k$ 이므로 $h(x)$ 는 $x = -k$ 또는 $x = k$ 에서 최
 소값을 갖는다.
 따라서 모든 실수 x 에 대하여 $h(x) > 0$ 이 성립하려면
 $-k^4 + k > 0, k(k-1)(k^2+k+1) < 0$
 그런데 $k^2+k+1 = \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ 이므로
 $k(k-1) < 0 \quad \therefore 0 < k < 1$
 즉, 조건을 만족시키는 k 의 값인 것은 ④ $\frac{1}{2}$ 이다.

답 ④

+ 풍산자 방법

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) > g(x)$ 가 성립할 때,
 $h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면 $h(x) > 0$, 즉
 $(h(x) \text{의 최솟값}) > 0$ 이어야 한다.

6 속도와 가속도

122~125쪽

145

- (1) (평균속도) $= \frac{(9-45)-0}{3-0} = -12$
 (2) 점 P의 시각 t 에서의 위치가 $x = \frac{1}{3}t^3 - 5t^2$ 이므로

속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = t^2 - 10t, \quad a = \frac{dv}{dt} = 2t - 10$$

따라서 $t = 3$ 일 때의 점 P의 속도와 가속도는

$$v = 9 - 30 = -21, \quad a = 6 - 10 = -4$$

- (3) 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$$v = t^2 - 10t = 0 \text{에서 } t(t-10) = 0$$

$$\therefore t = 10 (\because t > 0)$$

답 (1) -12 (2) 속도: -21, 가속도: -4 (3) 10

147

- (1) t 초 후의 돌의 높이가 $h = 45 + 40t - 5t^2$ 이므로

속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = 40 - 10t, \quad a = \frac{dv}{dt} = -10$$

따라서 $t = 2$ 일 때의 속도와 가속도는

$$v = 40 - 10 \times 2 = 20 \text{ (m/s)}$$

$$a = -10 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

- (2) 최고 높이에 도달할 때, $v = 0$ 이므로

$$40 - 10t = 0 \text{에서 } t = 4 \text{ (초)}$$

따라서 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은 4초
 이고, 그때의 높이는

$$h = 45 + 40 \times 4 - 5 \times 4^2 = 125 \text{ (m)}$$

- (3) 땅에 떨어질 때, $h = 0$ 이므로

$$45 + 40t - 5t^2 = 0 \text{에서}$$

$$t^2 - 8t - 9 = 0, \quad (t+1)(t-9) = 0$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $t = 9$

따라서 땅에 떨어지는 순간의 속도는

$$v = 40 - 10 \times 9 = -50 \text{ (m/s)}$$

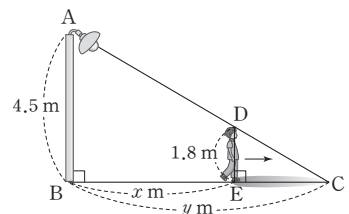
답 (1) 속도: 20 m/s, 가속도: -10 m/s²

(2) 걸린 시간: 4초, 높이: 125 m

(3) -50 m/s

149

오른쪽 그림과 같
 이 t 분 후에 가로
 등을 기준으로 학
 생이 움직인 거리
 를 x m, 학생의
 그림자의 끝이 움
 직인 거리를 y m라 하자.



$\triangle ABC \sim \triangle DEC$ 이므로

$$4.5 : y = 1.8 : (y - x)$$

$$1.8y = 4.5y - 4.5x, 2.7y = 4.5x$$

$$\therefore y = \frac{5}{3}x \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(1) 학생이 매분 72 m의 속도로 걸어가므로 t 분 후 학생이 움직인 거리는

$$x = 72t \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8}$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$y = 120t$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = 120 \text{ (m/min)}$$

(2) t 분 후의 학생의 그림자의 길이를 l 이라 하면

$$l = y - x = 120t - 72t = 48t$$

$$\therefore \frac{dl}{dt} = 48 \text{ (m/min)}$$

답 (1) 120 m/min (2) 48 m/min

필수 확인 문제

126쪽

150

점 P의 시각 t 에서의 위치가 $x = t^3 - 3t^2$ 이므로 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 6$$

속도가 45인 순간의 시각을 구하면

$$3t^2 - 6t = 45$$

$$t^2 - 2t - 15 = 0, (t+3)(t-5) = 0$$

$$\therefore t = 5 \quad (\because t > 0)$$

따라서 속도가 45일 때, 즉 $t = 5$ 일 때의 가속도는

$$6 \times 5 - 6 = 24 \quad \text{답 } 24$$

151

두 점 P, Q의 시각 t 에서의 위치가 각각 $x_P = t^3 + t$,

$$x_Q = t^2 + 2t$$
이므로

점 P의 시각 t 에서의 속도를 v_P , 점 Q의 시각 t 에서의

속도를 v_Q 라 하면

$$v_P = 3t^2 + 1, v_Q = 2t + 2$$

$$3t^2 + 1 = 2t + 2 \text{에서}$$

$$3t^2 - 2t - 1 = 0, (3t+1)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = 1 \quad (\because t > 0)$$

따라서 $t = 1$ 일 때의 점 P의 위치는

$$1 + 1 = 2$$

답 2

152

점 P의 시각 t 에서의 위치가 $x = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 10t$ 이므로

로 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = t^2 - 7t + 10$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 2t - 7$$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$$t^2 - 7t + 10 = 0, (t-2)(t-5) = 0$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 5$$

따라서 $t = 2$ 일 때 처음으로 운동 방향을 바꾸므로 구하는 가속도는

$$2 \times 2 - 7 = -3$$

답 -3

153

점 P의 시각 t 에서의 위치가 $x = t^3 - 4t + 1$ 이므로 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

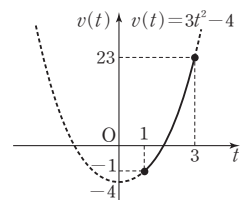
$1 \leq t \leq 3$ 에서 $\textcircled{7}$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$$-1 \leq v \leq 23$$

$$\therefore 0 \leq |v| \leq 23$$

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 23이다.



답 23

154

t 초 후의 물체의 높이가 $h = 20 + 30t - 5t^2$ 이므로 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = 30 - 10t$$

최고 높이에 도달할 때 $v=0$ 이므로
 $30-10t=0 \quad \therefore t=3$
 따라서 도달할 수 있는 최고 높이는
 $h=20+30 \times 3-5 \times 3^2=65$ (m)

답 ③

155

t 초 후의 점 P의 좌표는 $(t, 0)$, 점 Q의 좌표는 $(0, 3t)$
 이므로 삼각형 OPQ의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times t \times 3t = \frac{3}{2}t^2$$

따라서 $\frac{dS}{dt} = 3t$ 이므로 $t=4$ 일 때의 S 의 변화율은

$$3 \times 4 = 12$$

답 12

+ 풍산자 방법

시각에 대한 변화율

어떤 물체의 시각 t 에서의 길이 l , 넓이 S , 부피 V 에 대한
 시각 t 에서의 변화율은 다음과 같은 순서로 구한다.

- ① t 초 후의 길이, 넓이, 부피에 대한 관계식을 세운다.
- ② 관계식을 t 에 대하여 미분한다.

→ 길이의 변화율: $\frac{dl}{dt}$

→ 넓이의 변화율: $\frac{dS}{dt}$

→ 부피의 변화율: $\frac{dV}{dt}$

- ③ ②에서 구한 식에 주어진 조건을 만족시키는 t 의 값을 대입한다.

● 실전 연습문제

128~130쪽

156

$$f(x) = x^2 + 1 \text{로 놓으면 } f'(x) = 2x$$

접점의 좌표를 (t, t^2+1) 이라 하면 접선의 기울기는
 $\tan 135^\circ = -1$ 이므로

$$f'(t) = 2t = -1 \quad \therefore t = -\frac{1}{2}$$

즉, 접점의 좌표는 $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ 이므로 구하는 접선의 방
 정식은

$$y - \frac{5}{4} = -\left\{x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\} \quad \therefore y = -x + \frac{3}{4}$$

$$\text{답 } y = -x + \frac{3}{4}$$

참고

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ 인 직선의 기
 울기는 $\tan \theta$ 이다.

157

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 6 \text{으로 놓으면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

이 곡선 위의 점 $(2, 8)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(2) = 5$$

따라서 기울기가 5이고, 점 $(2, 8)$ 을 지나는 접선의 방
 정식은

$$y - 8 = 5(x - 2) \quad \therefore y = 5x - 2$$

이 직선이 주어진 곡선과 만나는 점의 x 좌표는

$$x^3 - 2x^2 + x + 6 = 5x - 2 \text{에서}$$

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0, (x-2)^2(x+2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 접선이 곡선과 다시 만나는 점의 x 좌표는 -2 이
 므로 구하는 좌표는 $(-2, -12)$ 이다.

$$\text{답 } (-2, -12)$$

158

함수 $f(x)$ 는 다항함수이므로 닫힌구간 $[-2, 3]$ 에서
 연속이고, 열린구간 $(-2, 3)$ 에서 미분가능하다.

롤의 정리를 만족시키려면 $f(-2) = f(3)$ 이어야 하므로
 $-2k - 4 = 3k + 36 \quad \therefore k = -8$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 + x^2 - 8x \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 8 \text{이므로 } f'(c) = 0 \text{에서}$$

$$3c^2 + 2c - 8 = 0, (3c-4)(c+2) = 0$$

$$\therefore c = \frac{4}{3} (\because -2 < c < 3)$$

$$\therefore k + c = -8 + \frac{4}{3} = -\frac{20}{3}$$

답 ②

159

함수 $f(x)$ 가 구간 $[1, \infty)$ 에서 증가하려면 $x \geq 1$ 일 때 $f'(x) = 3x^2 + 2kx \geq 0$ 이 성립해야 한다.

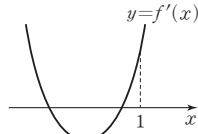
따라서 이차함수 $f'(x) = 3x^2 + 2kx$ 의 그래프가

오른쪽 그림과 같아야 하므로

$f'(1) = 3 + 2k \geq 0$ 에서

$$k \geq -\frac{3}{2}$$

즉, k 의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다.



답 ⑤

160

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - (a^2 - 8a) \geq 0$ 이 성립해야 하므로

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3(-a^2 + 8a) \leq 0, 4a^2 - 24a \leq 0$$

$$4a(a - 6) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 6$$

따라서 a 의 최댓값은 6이다.

답 6

161

$f(x) = -x^3 + ax + b$ 에서 $f'(x) = -3x^2 + a$

함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 극솟값 0을 가지므로

$$f(-1) = 1 - a + b = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f'(-1) = -3 + a = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 3, b = 2$

$$\therefore f(x) = -x^3 + 3x + 2$$

$$\therefore f'(x) = -3x^2 + 3$$

$$= -3(x-1)(x+1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극댓값을 가지므로 구하는 극댓값은

$$f(1) = -1 + 3 + 2 = 4$$

답 4

162

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x = 3$ 에서 극솟값 1을 가지므로

$$f(3) = 27 + 9a + 3b + 1 = 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f'(3) = 27 + 6a + b = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -6, b = 9$

$$\therefore f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$= 3(x-1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$ 또는 $x = 3$

구간 $[-1, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\dots$	1	$\dots$	3
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$	-15	$\nearrow$	5	$\searrow$	1

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 일 때 최댓값 5를 갖는다.

답 5

163

$f(x) = x^3 - 3x - k$ 로 놓으면

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$2-k$	$\searrow$	$-2-k$	$\nearrow$

삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 오직 한 개의 실근을 가지려면

(극댓값) $\times$ (극솟값) > 0 이어야 하므로

$$f(-1)f(1) > 0, (2-k)(-2-k) > 0$$

$$\therefore k < -2 \text{ 또는 } k > 2$$

답 ②

+ 풍산자 비법

삼차방정식이 실근을 가질 조건

① 서로 다른 세 실근

$$\Rightarrow (\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) < 0$$

② 서로 다른 두 실근

$$\Rightarrow (\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) = 0$$

③ 한 개의 실근

$$\Rightarrow (\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) > 0 \text{ 또는 극값이 존재하지 않는다.}$$

164

점 P의 시각 t 에서의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v=4t^2+2kt-2$$

$$a=8t+2k$$

$t=1$ 일 때의 점 P의 가속도가 2이므로

$$8+2k=2 \quad \therefore k=-3$$

따라서 $v=4t^2-6t-2$ 이므로 $t=2$ 일 때의 점 P의 속도는

$$16-12-2=2$$

답 2

165

$f(x)=-x^2+3x+1$ 로 놓으면 $f'(x)=-2x+3$

주어진 곡선 위의 점과 직선 $y=x+4$ 사이의 거리의 최솟값은 기울기가 1인 접선과 직선 $y=x+4$ 사이의 거리와 같다.

접점의 좌표를 $(t, -t^2+3t+1)$ 이라고 하면

$f'(t)=1$ 에서

$$-2t+3=1 \quad \therefore t=1$$

따라서 접점의 좌표는 $(1, 3)$ 이므로 이 점과 직선

$y=x+4$, 즉 $x-y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1-3+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

166

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $f(x)$ 가 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$ 는 증가하거나 감소해야 한다.

이때 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$ 는 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$f(x)=x^3+2x^2+kx+3 \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2+4x+k \geq 0$$

방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4-3k \leq 0 \quad \therefore k \geq \frac{4}{3}$$

답 $k \geq \frac{4}{3}$

167

$g(x)=(x^3+2)f(x)$ 에서

$$g'(x)=(x^3+2)'f(x)+(x^3+2)f'(x)$$

$$=3x^2f(x)+(x^3+2)f'(x)$$

$g(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값 24를 가지므로

$$g(1)=3f(1)=24$$

$$\therefore f(1)=8$$

$$g'(1)=3f(1)+3f'(1)=0$$

$$3 \times 8 + 3f'(1) = 0$$

$$\therefore f'(1) = -8$$

$$\therefore f(1) - f'(1) = 8 - (-8) = 16$$

답 16

168

$\neg$ 은 옳지 않다.

$f'(a) > 0, f(a) < 0$ 에서 $f'(a) + f(a)$ 의 부호는 알 수 없다.

$\cup$ 은 옳다.

$$f'(b) < 0, f(b) < 0 \text{이므로 } f'(b) + f(b) < 0$$

$\cap$ 도 옳다.

$$f'(c) > 0, f(c) > 0 \text{이므로 } f'(c)f(c) > 0$$

따라서 옳은 것은 $\cup, \cap$ 이다.

답 ⑤

169

$$f(x)=x^3-3ax^2+8a^2 \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2-6ax$$

$$=3x(x-2a)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2a$$

구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$2a$	...	4
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	$8a^2$	$\searrow$	$-4a^3+8a^2$	$\nearrow$	$8a^2-48a+64$

따라서 최솟값은 $f(2a)=-4a^3+8a^2$ 이므로

$$g(a)=-4a^3+8a^2$$

$$\therefore g'(a)=-12a^2+16a$$

$$=-12a\left(a-\frac{4}{3}\right)$$

$$g'(a)=0 \text{에서 } a=\frac{4}{3}$$

$0 < a < 2$ 에서 함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	...	$\frac{4}{3}$	...	(2)
$g'(a)$		+	0	-	
$g(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

따라서 최댓값은

$$g\left(\frac{4}{3}\right) = -4 \times \frac{64}{27} + 8 \times \frac{16}{9} = \frac{128}{27}$$

답 $\frac{128}{27}$

170

B(-3, 0), C(3, 0)이므로

점 D의 좌표를

$D(t, -t^2+9)$ ($0 < t < 3$),

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \times (2t+6) \times (-t^2+9) \\ &= -t^3 - 3t^2 + 9t + 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'(t) &= -3t^2 - 6t + 9 \\ &= -3(t+3)(t-1) \end{aligned}$$

$S'(t)=0$ 에서 $t=-3$ 또는 $t=1$

$0 < t < 3$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	...	1	...	(3)
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		$\nearrow$	32	$\searrow$	

따라서 $t=1$ 일 때 넓이가 최대이고, 이때의 넓이는 32이다.

답 32

171

ㄱ은 옳지 않다.

$t=2, t=4, t=7$ 일 때, $v(t)=0$ 이므로 점 P는 출발하고 나서 세 번 멈춘다.

ㄴ도 옳지 않다.

$t=2, t=4$ 일 때, $v(t)$ 의 부호가 바뀌므로 점 P는 출발하고 나서 운동 방향을 두 번 바꾼다.

ㄷ은 옳다.

$v(t)=1$ 또는 $v(t)=-1$ 인 경우는 6번 있다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ③

172

t 초 후의 높이가 $h=a+30t+bt^2$ 이므로 속도를 v 라 하면 $v=30+2bt$

3초 후에 최고 높이 70 m에 도달하므로

$$70=a+90+9b \quad \therefore a+9b=-20 \quad \dots\dots ①$$

최고 높이에 도달할 때 $v=0$ 이므로

$$v=30+6b=0 \quad \therefore b=-5$$

$b=-5$ 를 ①에 대입하면 $a=25$

$$\therefore h=25+30t-5t^2$$

물체의 높이가 50 m 이상이어야 하므로

$$25+30t-5t^2 \geq 50, \quad 5t^2-30t+25 \leq 0$$

$$t^2-6t+5 \leq 0, \quad (t-1)(t-5) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq t \leq 5$$

따라서 1초부터 5초까지이므로 4초 동안 물체의 높이가 50 m 이상이다. **답** 4초

적분

1 부정적분

1 부정적분

134~142쪽

002

(1) $(-x)' = -1$ 이므로

$$\int (-1)dx = -x + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수이다.)}$$

(2) $(x^5)' = 5x^4$ 이므로

$$\int 5x^4 dx = x^5 + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수이다.)}$$

(3) $(x^6)' = 6x^5$ 이므로

$$\int 6x^5 dx = x^6 + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수이다.)}$$

답 (1) $-x + C$ (2) $x^5 + C$ (3) $x^6 + C$

004

(1) $f(x) = (x^2 + 3x + C)'$

$$\therefore f(x) = 2x + 3$$

(2) $f(x) = (x^3 + 2x^2 - 4x + C)'$

$$\therefore f(x) = 3x^2 + 4x - 4$$

답 (1) $f(x) = 2x + 3$

(2) $f(x) = 3x^2 + 4x - 4$

006

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int (ax^2 + 2x + 3)dx \right\} = 4x^2 + bx + c \text{에서}$$

$$ax^2 + 2x + 3 = 4x^2 + bx + c$$

$$\therefore a = 4, b = 2, c = 3$$

답 $a = 4, b = 2, c = 3$

008

(1) (주어진 식) $= -2x + C$

(2) (주어진 식) $= \frac{1}{10+1} x^{10+1} + C$

$$= \frac{1}{11} x^{11} + C$$

(3) (주어진 식) $= 12 \int x^5 dx$

$$= 12 \times \frac{1}{6} x^6 + C = 2x^6 + C$$

답 (1) $-2x + C$ (2) $\frac{1}{11} x^{11} + C$ (3) $2x^6 + C$

010

(1) (주어진 식) $= \int 3x^2 dx - \int 2x dx + \int 1 dx$

$$= 3 \int x^2 dx - 2 \int x dx + \int 1 dx$$

$$= x^3 - x^2 + x + C$$

(2) (주어진 식) $= \int (6x^2 - 6x) dx$

$$= 6 \times \frac{1}{3} x^3 - 6 \times \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$= 2x^3 - 3x^2 + C$$

(3) (주어진 식)

$$= \int (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) dx$$

$$= \frac{1}{4} x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 8x + C$$

답 (1) $x^3 - x^2 + x + C$

(2) $2x^3 - 3x^2 + C$

(3) $\frac{1}{4} x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 8x + C$

다른 풀이

(3) (주어진 식) $= \frac{1}{3+1} (x+2)^{3+1} + C$

$$= \frac{1}{4} (x+2)^4 + C$$

$$= \frac{1}{4} x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 8x + C$$

012

(1) (주어진 식) $= \int (t^3 + 1) dt = \frac{1}{4} t^4 + t + C$

(2) (주어진 식) $= \int \frac{(y+2)(y-2)}{y-2} dy$

$$= \int (y+2) dy = \frac{1}{2} y^2 + 2y + C$$

(3) (주어진 식) $= \int \{(x+2)^2 - (x-2)^2\} dx$

$$= \int 8x dx = 4x^2 + C$$

답 (1) $\frac{1}{4} t^4 + t + C$ (2) $\frac{1}{2} y^2 + 2y + C$ (3) $4x^2 + C$

014

$$f'(x) = 6x^2 - 2x + 5 \text{에서}$$

$$f(x) = \int (6x^2 - 2x + 5) dx$$

$$= 2x^3 - x^2 + 5x + C$$

이때 $f(1) = 2$ 이므로

$$6 + C = 2 \quad \therefore C = -4$$

$$\therefore f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 4$$

$$\text{답 } f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 4$$

016

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (x, y) 에서의 접선의 기울기가 $x-1$ 이므로

$$f'(x) = x - 1$$

$$\therefore f(x) = \int (x-1) dx = \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

한편, 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$f(1) = -\frac{1}{2} + C = 0 \quad \therefore C = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$$

$$\text{답 } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$$

018

$xf(x) - F(x) = 2x^3 + x^2 - 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) - F'(x) = 6x^2 + 2x$$

이때 $F'(x) = f(x)$ 이므로

$$f(x) + xf'(x) - f(x) = 6x^2 + 2x$$

$$xf'(x) = 6x^2 + 2x = x(6x + 2)$$

$$\therefore f'(x) = 6x + 2$$

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (6x + 2) dx = 3x^2 + 2x + C$$

$$\text{이고 } f(-1) = 3 \text{이므로 } 3 - 2 + C = 3 \quad \therefore C = 2$$

$$\therefore f(x) = 3x^2 + 2x + 2$$

$$\text{답 } f(x) = 3x^2 + 2x + 2$$

020

$$f'(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -3 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-3	$\dots$	3	$\dots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극솟값을 가지므로 $f(3) = -7$ 이때

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (x^2 - 9) dx = \frac{1}{3}x^3 - 9x + C$$

이므로

$$f(3) = 9 - 27 + C = -7 \quad \therefore C = 11$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 11$ 이고, $f(x)$ 는 $x = -3$ 에

서 극대이므로 구하는 극댓값은

$$f(-3) = -9 + 27 + 11 = 29$$

답 29

필수 확인 문제

143쪽

021

함수 $f(x)$ 의 부정적분 중 하나가 $-x^2 + 3x$ 이므로

$$f(x) = (-x^2 + 3x)'$$

$$= -2x + 3$$

답 ①

022

$$f(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} (x^2 + 8x) \right\} dx$$

$$= x^2 + 8x + C$$

$$f(0) = 1 \text{이므로 } C = 1$$

$$\therefore f(x) = x^2 + 8x + 1$$

$$\text{답 } f(x) = x^2 + 8x + 1$$

023

$$(\text{주어진 식}) = \int \frac{x^3 - 8}{x - 2} dx$$

$$= \int \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x-2} dx$$

$$= \int (x^2 + 2x + 4) dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x + C$$

$$\text{답 } \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x + C$$

024

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1 \text{에서}$$

$$f(x) = \int (3x^2 + 4x - 1) dx$$

$$= x^3 + 2x^2 - x + C$$

이때 $f(2) = 17$ 이므로

$$8 + 8 - 2 + C = 17 \quad \therefore C = 3$$

따라서 $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$ 에서

$$f(1) = 1 + 2 - 1 + 3 = 5$$

답 5

025

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 (x, y) 에서의 접선의 기울기가 ax^2 이므로

$$f'(x) = ax^2$$

$$\therefore f(x) = \int ax^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} ax^3 + C$$

한편, 곡선 $y = f(x)$ 가 두 점 $(-1, 6)$, $(-2, -1)$ 을 지나므로

$$-\frac{1}{3}a + C = 6, \quad -\frac{8}{3}a + C = -1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 3$, $C = 7$

따라서 $f(x) = x^3 + 7$ 에서

$$f(0) = 7$$

답 7

026

$f(x) = \int (-3x^2 + kx + 6) dx$ 의 양변을 x 에 대하여

미분하면

$$f'(x) = -3x^2 + kx + 6$$

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극대이므로

$$f'(1) = -3 + k + 6 = 0 \quad \therefore k = -3$$

즉, $f'(x) = -3x^2 - 3x + 6 = -3(x+2)(x-1)$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극댓값을 가지므로

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

이때

$$f(x) = \int (-3x^2 - 3x + 6) dx$$

$$= -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + C$$

이므로

$$f(1) = -1 - \frac{3}{2} + 6 + C = \frac{1}{2} \quad \therefore C = -3$$

따라서 $f(x) = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x - 3$ 이고, $f(x)$ 는

$x = -2$ 에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$$f(-2) = 8 - 6 - 12 - 3 = -13$$

답 -13

실전 연습문제

145~146쪽

027

$x^4 - 2x^2 + 1$ 이 $f(x)$ 의 부정적분 중 하나이므로

$$f(x) = (x^4 - 2x^2 + 1)'$$

$$= 4x^3 - 4x$$

$f(x) = 4x^3 - 4x$ 가 $g(x)$ 의 부정적분 중 하나이므로

$$g(x) = (4x^3 - 4x)'$$

$$= 12x^2 - 4$$

$$\therefore g(1) = 12 - 4 = 8$$

답 8

028

$\int f(x) dx = F(x) + C$ (단, C 는 적분상수이다.)

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) \text{라 하면}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \quad \int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx = \int f'(x) dx$$

$$= f(x) + C$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{d}{dx} \left\{ \int f(x) dx \right\} = \frac{d}{dx} \{ F(x) + C \}$$

$$= f(x)$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{d}{dx} \left[\int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx \right] = \frac{d}{dx} \left[\int f'(x) dx \right]$$

$$= \frac{d}{dx} (f(x) + C)$$

$$= f'(x)$$

답 ③

029

$$f'(x) = 8x^3 - 4kx + 2 \text{에서}$$

$$f(x) = \int (8x^3 - 4kx + 2) dx$$

$$= 2x^4 - 2kx^2 + 2x + C$$

$$\text{이때 } f(0) = -1 \text{이므로 } C = -1$$

$$\text{또, } f(1) = 5 \text{이므로}$$

$$2 - 2k + 2 + C = 5 \quad \therefore C - 2k = 1$$

$$C = -1 \text{을 위의 식에 대입하면 } k = -1$$

$$\text{따라서 } f(x) = 2x^4 + 2x^2 + 2x - 1 \text{이므로}$$

$$f(-1) = 2 + 2 - 2 - 1 = 1$$

답 1

030

$$f(x) = \int (2ax + 1) dx \text{에서 } f'(x) = 2ax + 1$$

$$\text{곡선 } y = f(x) \text{ 위의 점 } (2, 3) \text{에서의 접선의 기울기가 } -3 \text{이므로 } f'(2) = -3$$

$$\text{즉, } 4a + 1 = -3 \text{에서 } a = -1$$

$$\therefore f(x) = \int (-2x + 1) dx$$

$$= -x^2 + x + C$$

$$\text{한편, 곡선 } y = f(x) \text{가 점 } (2, 3) \text{을 지나므로}$$

$$-4 + 2 + C = 3 \quad \therefore C = 5$$

$$\text{따라서 } f(x) = -x^2 + x + 5 \text{이므로}$$

$$f(1) = -1 + 1 + 5 = 5$$

답 ⑤

031

$$F(x) = (x+2)f(x) - x^3 + 12x$$

..... ㉠

$$\text{㉠의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$F'(x) = f(x) + (x+2)f'(x) - 3x^2 + 12$$

$$\text{이때 } F'(x) = f(x) \text{이므로}$$

$$f(x) = f(x) + (x+2)f'(x) - 3x^2 + 12$$

$$(x+2)f'(x) = 3x^2 - 12 = (x+2)(3x+6)$$

$$\therefore f'(x) = 3x - 6$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (3x - 6) dx = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉡의 양변에 } x=0 \text{을 대입하면}$$

$$F(0) = 2f(0) = 30 \text{에서 } f(0) = 15 \text{이므로 ㉡에서}$$

$$C = 15$$

$$\text{즉, } f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 15 \text{이므로}$$

$$f(2) = 6 - 12 + 15 = 9$$

답 9

032

$$h(x) = \{f(x)g(x)\}' \text{이므로}$$

$$h(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$= 2x \times (-x+3) + (x^2-1) \times (-1)$$

$$= -3x^2 + 6x + 1$$

$$h'(x) = -6x + 6$$

$$\therefore h(0) + h'(1) = 1 + 0 = 1$$

답 ②

033

$$F(x) = \int \left[\frac{d}{dx} \int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx \right] dx$$

$$= \int \left[\frac{d}{dx} \{f(x) + C_1\} \right] dx$$

$$= \int f'(x) dx$$

$$= f(x) + C_2$$

$$= 1 + x + 2x^2 + \cdots + 5x^5 + C_2$$

(단, C_1, C_2 는 적분상수이다.)

$$\text{이때 } F(0) = 3 \text{이므로}$$

$$1 + C_2 = 3 \quad \therefore C_2 = 2$$

$$\text{따라서 } F(x) = 3 + x + 2x^2 + \cdots + 5x^5 \text{이므로}$$

$$F(1) = 3 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 18$$

답 18

+ 풍산자 비법

$$\cdot \int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx = f(x) + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수이다.})$$

$$\cdot \frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = f(x)$$

034

$$f'(x) = x + |x-1| \text{이므로}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & (x>1) \\ 1 & (x<1) \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x^2 - x + C_1 & (x \geq 1) \\ x + C_2 & (x < 1) \end{cases}$$

(단, C_1, C_2 는 적분상수이다.)

$$\text{이때 } f(0) = 0 \text{이므로 } C_2 = 0$$

$$\text{또, 함수 } f(x) \text{가 모든 실수 } x \text{에서 연속이므로 } x=1 \text{에서도 연속이다.}$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \text{에서 } 1 = C_1$$

$$\text{따라서}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & (x \geq 1) \\ x & (x < 1) \end{cases}$$

이므로

$$f(-1)+f(2)=-1+3=2$$

답 ③

035

주어진 식의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+0-3$$

$$\therefore f(0)=3$$

또, 미분계수의 정의와 주어진 식에 의하여

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-3}{h} = -1 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+6h-3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)-3}{h} + 6 \right\} \\ &= -1+6=5 \end{aligned}$$

답 ④

036

$f'(x)=ax(x-1)(x+1)$ ($a>0$)로 놓으면

$$\begin{aligned} f(x) &= \int a(x^3-x)dx \\ &= \frac{a}{4}x^4 - \frac{a}{2}x^2 + C \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 가지므로

$$f(0)=C=3$$

$$\text{즉, } f(x)=\frac{a}{4}x^4-\frac{a}{2}x^2+3 \text{ 이므로}$$

$$f(1)=2 \text{ 에서 } \frac{a}{4}-\frac{a}{2}+3=2 \quad \therefore a=4$$

따라서 $f(x)=x^4-2x^2+3=(x^2-1)^2+2>0$ 이므로
방정식 $f(x)=0$ 의 실근은 없다.

답 ①

2 정적분

1 정적분

148~155쪽

038

(1) 오른쪽 그림에서 직선

$$y=-\frac{1}{2}x \text{ 와 } x \text{ 축 및 두 직선}$$

$x=2, x=4$ 로 둘러싸인 도형
의 넓이를 S 라 하면

$$S=\frac{1}{2} \times (1+2) \times 2=3 \text{ 이므로}$$

$$\int_2^4 -\frac{1}{2}x dx = -S = -3$$

(2) 위끝과 아래끝이 같으므로

$$\int_0^0 (x^3-5x)dx=0$$

$$(3) \int_1^{-1} (-x+1)dx = -\int_{-1}^1 (-x+1)dx$$

이고, $\int_{-1}^1 (-x+1)dx$ 의 값

은 오른쪽 그림에서 직선

$y=-x+1$ 과 두 직선

$x=-1, x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이이므로

$$\begin{aligned} \int_1^{-1} (-x+1)dx &= -\int_{-1}^1 (-x+1)dx \\ &= -\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = -2 \end{aligned}$$

(4) 오른쪽 그림에서 직선 $y=3x$ 와 x

축 및 두 직선 $x=-1, x=2$ 로 둘러싸인 도형에 대하여 $y \geq 0$ 인 부분의 넓이를 S_1 , $y \leq 0$ 인 부분의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_1=\frac{1}{2} \times 2 \times 6=6,$$

$$S_2=\frac{1}{2} \times 1 \times 3=\frac{3}{2} \text{ 이므로}$$

$$\int_{-1}^2 3x dx = S_1 - S_2 = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

답 (1) -3 (2) 0 (3) -2 (4) $\frac{9}{2}$

040

$\int_{-2}^x f(t)dt=4x^2-x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=8x-1$$

$$\text{답 } f(x)=8x-1$$

042

$$\begin{aligned}
 (1) \int_2^3 3x^2 dx &= \left[x^3 \right]_2^3 \\
 &= 3^3 - 2^3 \\
 &= 27 - 8 = 19 \\
 (2) \int_1^3 (4x+3) dx &= \left[2x^2 + 3x \right]_1^3 \\
 &= (2 \times 3^2 + 3 \times 3) - (2 \times 1^2 + 3 \times 1) \\
 &= 27 - 5 = 22 \\
 (3) \int_1^2 (3x^2 - 2x + 2) dx &= \left[x^3 - x^2 + 2x \right]_1^2 \\
 &= (2^3 - 2^2 + 2 \times 2) - (1^3 - 1^2 + 2 \times 1) \\
 &= 8 - 2 = 6 \\
 (4) \int_0^3 (x+1)(x-1) dx &= \int_0^3 (x^2 - 1) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_0^3 \\
 &= \frac{1}{3} \times 3^3 - 3 \\
 &= 9 - 3 = 6
 \end{aligned}$$

답 (1) 19 (2) 22 (3) 6 (4) 6

참고

$$\begin{aligned}
 (1) \int_2^3 3x^2 dx &= \left[x^3 + C \right]_2^3 \\
 &= (3^3 + C) - (2^3 + C) \\
 &= 27 - 8 = 19
 \end{aligned}$$

이므로 정적분에서는 적분상수 C 를 무시하고 계산한다.

044

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ (주어진 식)} &= \int_0^1 (x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4x - 4) dx \\
 &= \int_0^1 8x dx \\
 &= \left[4x^2 \right]_0^1 = 4 \\
 (2) \text{ (주어진 식)} &= \int_0^2 (x^2 - 1) dx + \int_2^3 (x^2 + 1) dx \\
 &= \int_0^2 2x^2 dx \\
 &= \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{16}{3}
 \end{aligned}$$

답 (1) 4 (2) $\frac{16}{3}$

046

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ (주어진 식)} &= \int_0^2 (x^2 - 2x) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_0^2 \\
 &= \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3} \\
 (2) \text{ (주어진 식)} &= \int_0^2 (3x^2 + 4x - 2) dx + \int_2^3 (3x^2 + 4x - 2) dx \\
 &= \int_0^3 (3x^2 + 4x - 2) dx \\
 &= \left[x^3 + 2x^2 - 2x \right]_0^3 \\
 &= 27 + 18 - 6 = 39
 \end{aligned}$$

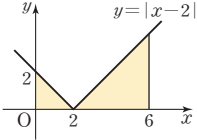
답 (1) $-\frac{4}{3}$ (2) 39

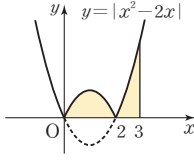
048

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 (6x - 3) dx \\
 &= \left[x^3 \right]_0^1 + \left[3x^2 - 3x \right]_1^2 \\
 &= 1 + 6 = 7
 \end{aligned}$$

답 7

050

$$\begin{aligned}
 (1) |x-2| &= \begin{cases} -x+2 & (x < 2) \\ x-2 & (x \geq 2) \end{cases} \\
 \text{이므로} & \int_0^6 |x-2| dx \\
 &= \int_0^2 (-x+2) dx + \int_2^6 (x-2) dx \\
 &= \left[-\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^6 \\
 &= 2 + 8 = 10
 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned}
 (2) |x^2 - 2x| &= \begin{cases} -x^2 + 2x & (0 < x < 2) \\ x^2 - 2x & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 2) \end{cases} \text{이므로} \\
 & \int_0^3 |x^2 - 2x| dx \\
 &= \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx \\
 & \quad + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3} x^3 + x^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_2^3 \\
 &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$


답 (1) 10 (2) $\frac{8}{3}$

051

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x^3 f(x) dx &= \int_0^1 x^3 (7x^3 - 5x + 4) dx \\
 &= \int_0^1 (7x^6 - 5x^4 + 4x^3) dx \\
 &= \left[x^7 - x^5 + x^4 \right]_0^1 = 1
 \end{aligned}$$

답 1

052

(주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \int_1^{-1} (6x^2 + 4x - 2) dx + 0 \\
 &\quad + \int_{-1}^2 \{ (2x+1)^2 + (2x^2-3) \} dx \\
 &= \int_1^{-1} (6x^2 + 4x - 2) dx + \int_{-1}^2 (6x^2 + 4x - 2) dx \\
 &= \int_1^2 (6x^2 + 4x - 2) dx \\
 &= \left[2x^3 + 2x^2 - 2x \right]_1^2 \\
 &= 20 - 2 = 18
 \end{aligned}$$

답 ④

053

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 f(x) dx \\
 &= \int_0^4 f(x) dx + \int_4^2 f(x) dx + \int_2^1 f(x) dx \\
 &= \int_0^4 f(x) dx - \int_2^4 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx \\
 &= 10 - 6 - 1 = 3
 \end{aligned}$$

답 3

054

$$\begin{aligned}
 (\text{주어진 식}) &= \int_0^a \{ (x+2)^2 - (x-2)^2 \} dx \\
 &= \int_0^a 8x dx \\
 &= \left[4x^2 \right]_0^a = 4a^2
 \end{aligned}$$

즉, $4a^2 = 16$ 이므로 $a^2 = 4$ $\therefore a = 2$ ($\because a > 0$)

답 2

055

$$x^3 + 2x + 1 + |x-1| = \begin{cases} x^3 + x + 2 & (x \leq 1) \\ x^3 + 3x & (x \geq 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{주어진 식}) &= \int_0^1 (x^3 + x + 2) dx + \int_1^2 (x^3 + 3x) dx \\
 &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \right]_1^2 \\
 &= \frac{11}{4} + \frac{33}{4} = 11
 \end{aligned}$$

답 11

056

$$\int_0^2 f'(x) dx = \int_0^3 f'(x) dx = 0 \text{에서}$$

$$\int_0^2 f'(x) dx = \left[f(x) \right]_0^2 = f(2) - f(0),$$

$$\int_0^3 f'(x) dx = \left[f(x) \right]_0^3 = f(3) - f(0) \text{이므로}$$

$$f(2) - f(0) = f(3) - f(0) = 0$$

$$\therefore f(0) = f(2) = f(3)$$

이때 $f(0) = f(2) = f(3) = k$ (k 는 상수)라 하면 $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 1이므로

$$f(x) = x(x-2)(x-3) + k \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (x-2)(x-3) + x(x-3) + x(x-2)$$

$$\therefore f'(2) = 2 \times (-1) = -2$$

답 -2

참고

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 a 일 때

$$f(a) = f(b) = f(c) = k \text{이면}$$

$$f(x) = a(x-a)(x-b)(x-c) + k$$

2 여러 가지 정적분

157~165쪽

058

(1) 피적분함수의 각 항의 차수가 모두 홀수이므로

$$10x^5 - 9x^3 + 4x \text{는 홀함수이다.}$$

$$\therefore \int_{-3}^3 (10x^5 - 9x^3 + 4x) dx = 0$$

(2) (주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-2}^2 (x^5 - 5x^3 - 3x) dx + \int_{-2}^2 (3x^2 + 2) dx \\
 &= 0 + 2 \int_0^2 (3x^2 + 2) dx \\
 &= 2 \left[x^3 + 2x \right]_0^2 \\
 &= 2 \times 12 = 24
 \end{aligned}$$

(3) (주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^0 (x^5 + 2x^3 - 6x^2 - x + 2) dx \\
 &\quad + \int_0^1 (x^5 + 2x^3 - 6x^2 - x + 2) dx \\
 &= \int_{-1}^1 (x^5 + 2x^3 - 6x^2 - x + 2) dx \\
 &= \int_{-1}^1 (x^5 + 2x^3 - x) dx + \int_{-1}^1 (-6x^2 + 2) dx \\
 &= 0 + 2 \int_0^1 (-6x^2 + 2) dx \\
 &= 2 \left[-2x^3 + 2x \right]_0^1 = 0
 \end{aligned}$$

답 (1) 0 (2) 24 (3) 0

060

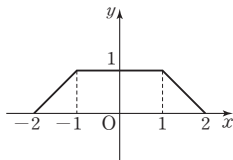
(나)에서 $f(x)$ 는 주기가 4인 주기함수이다.

$\int_{-14}^{10} f(x) dx$ 는 여섯 주기의 정적분.

따라서 한 주기의 정적분만 구해 6배 하면 된다.

주어진 그림은 구간 $[0, 2]$ 에서의 그래프이므로 한 주기의 그래프를 완성해야 한다.

(가)의 $f(-x) = f(x)$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 한 주기의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 한 주기의 정적분은

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \times (2+4) \times 1 = 3$$

이므로 여섯 주기의 정적분은

$$\begin{aligned}
 \int_{-14}^{10} f(x) dx &= 6 \int_{-2}^2 f(x) dx \\
 &= 6 \times 3 = 18
 \end{aligned}$$

답 18

062

(1) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 \int_0^1 f(t) dt$ 에서

$$\int_0^1 f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 놓으면

$$f(x) = 4x^3 - 3kx^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}
 k &= \int_0^1 f(t) dt \\
 &= \int_0^1 (4t^3 - 3kt^2) dt \\
 &= \left[t^4 - kt^3 \right]_0^1 = 1 - k
 \end{aligned}$$

$$k = 1 - k \text{에서 } k = \frac{1}{2}$$

이것을 ②에 대입하면

$$f(x) = 4x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

(2) $f(x) = 3x^2 - 2x + \int_0^1 tf'(t) dt$ 에서

$$\int_0^1 tf'(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 놓으면

$$f(x) = 3x^2 - 2x + k \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②에서 $f'(x) = 6x - 2$ 이므로 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}
 k &= \int_0^1 (6t^2 - 2t) dt \\
 &= \left[2t^3 - t^2 \right]_0^1 = 1
 \end{aligned}$$

이것을 ②에 대입하면

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$$\text{답 (1) } f(x) = 4x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

$$(2) f(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

064

$\int_3^x f(t) dt = x^3 - ax + 3$ 의 양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$0 = 27 - 3a + 3$$

$$\therefore a = 10$$

즉, $\int_3^x f(t) dt = x^3 - 10x + 3$ 이므로 양변을 x 에 대하여

미분하면

$$f(x) = 3x^2 - 10$$

$$\text{답 } f(x) = 3x^2 - 10$$

066

[1단계] $xf(x)=2x^3+x^2+14+\int_2^x f(t)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)=6x^2+2x+f(x)$$

$$\therefore xf'(x)=x(6x+2)$$

이 식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$f'(x)=6x+2$$

$$\therefore f(x)=\int(6x+2)dx$$

$$=3x^2+2x+C \text{ (단, } C \text{는 적분상수이다.)}$$

..... ㉠

[2단계] 주어진 식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$2f(2)=16+4+14+0$$

$$\therefore f(2)=17$$

$$\text{㉠에서 } f(2)=12+4+C=17$$

$$\therefore C=1$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=3x^2+2x+1$$

$$\text{답 } f(x)=3x^2+2x+1$$

068

 $f(x)=\int_{-1}^x t(t-1)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=x(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$f(0)=\int_{-1}^0 t(t-1)dt$$

$$=\int_{-1}^0 (t^2-t)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^0=\frac{5}{6}$$

 $x=1$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$f(1)=\int_{-1}^1 t(t-1)dt=\int_{-1}^1 (t^2-t)dt$$

$$=2\int_0^1 t^2dt \leftarrow \int_{-1}^1 (-t)dt=0$$

$$=2\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{극댓값: } \frac{5}{6}, \text{ 극솟값: } \frac{2}{3}$$

$$\text{답 } \text{극댓값: } \frac{5}{6}, \text{ 극솟값: } \frac{2}{3}$$

070

 $f(t)=t^2-t-1$ 로 놓고 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$(\text{주어진 식})=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t)dt$$

$$=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[F(t)]_1^x}{x-1}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'(1)$$

이때 $F'(t)=f(t)$ 이므로

$$F'(1)=f(1)=-1$$

답 -1

072

 $f(x)=x^2+3$ 으로 놓고 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$(\text{주어진 식})=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+3h} f(x)dx$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[F(x)]_1^{1+3h}}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+3h)-F(1)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+3h)-F(1)}{3h} \times 3$$

$$=3F'(1)$$

이때 $F'(x)=f(x)$ 이므로

$$F'(1)=f(1)=1+3=4$$

$$\therefore (\text{주어진 식})=3F'(1)=3 \times 4=12$$

답 12

074

 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2-4} \int_2^x f(t)dt=\lim_{x \rightarrow 2} \frac{[F(t)]_2^x}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{F(x)-F(2)}{x-2} \times \frac{1}{x+2} \right\}$$

$$=\frac{1}{4}F'(2)$$

이때 $F'(x)=f(x)$ 이므로

$$F'(2)=f(2)=8-2+6=12$$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4} \times 12=3$$

답 3

075

(주어진 식)

$$= \int_{-a}^a (6x^5 - 8x^3) dx + \int_{-a}^a (-3x^2 + 1) dx$$

$$= 0 + 2 \int_0^a (-3x^2 + 1) dx$$

$$= 2 \left[-x^3 + x \right]_0^a = -2a^3 + 2a$$

즉, $-2a^3 + 2a = -48$ 이므로

$$a^3 - a - 24 = 0, (a-3)(a^2 + 3a + 8) = 0$$

$$\therefore a = 3$$

답 3

076

 $f(x)$ 는 짝함수, $g(x)$ 는 홀함수이므로

$$\int_{-3}^3 \{f(x) + g(x)\} dx = \int_{-3}^3 f(x) dx + \int_{-3}^3 g(x) dx$$

$$= 2 \int_0^3 f(x) dx + 0$$

$$= 2 \times 4 = 8$$

답 8

077

(㉑)에서 $f(-x) = f(x)$ 이므로

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

(㉒)에서 $f(x) = f(x+4)$ 이므로

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_{-4}^{-2} f(x) dx \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

㉑, ㉒에서

$$\int_{-4}^{-2} f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx = 8$$

이므로

$$\int_{-4}^0 f(x) dx = \int_{-4}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^0 f(x) dx$$

$$= 2 \times 8 = 16$$

$$\therefore \int_{-4}^{12} f(x) dx$$

$$= \int_{-4}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx + \int_4^8 f(x) dx$$

$$+ \int_8^{12} f(x) dx$$

$$= 4 \int_{-4}^0 f(x) dx$$

$$= 4 \times 16 = 64$$

답 64

078

$$\int_0^1 f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

로 놓으면

$$f(x) = 3x^2 - 6x - k \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

㉒을 ㉑에 대입하면

$$k = \int_0^1 f(t) dt$$

$$= \int_0^1 (3t^2 - 6t - k) dt$$

$$= \left[t^3 - 3t^2 - kt \right]_0^1 = -k - 2$$

$$k = -k - 2 \text{에서 } 2k = -2$$

$$\therefore k = -1$$

이것을 ㉒에 대입하면

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

$$f(x) = 0 \text{에서 } 3x^2 - 6x + 1 = 0$$

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{1}{3}$ 이다.답 $\frac{1}{3}$

079

$$\int_1^x f(t) dt = x^3 - 2ax^2 + ax \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$0 = 1 - 2a + a \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore \int_1^x f(t) dt = x^3 - 2x^2 + x \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

㉑의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$\therefore f(3) = 27 - 12 + 1 = 16$$

답 16

080

주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x^2 - kx + 4k$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 삼차함수이다.삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖기 위해서는 방정식

$$f'(x) = 0 \text{이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로}$$

이차방정식 $x^2 - kx + 4k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = k^2 - 4 \times 4k > 0, k(k-16) > 0$$

$$\therefore k < 0 \text{ 또는 } k > 16$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 17이다.

답 17

+ 풍산자 비법

삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 이차방정식

$f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

① $f(x)$ 가 극값을 가지려면 $\Rightarrow D > 0$

② $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 $\Rightarrow D \leq 0$

● 실전 연습문제

168~170쪽

081

$$\begin{aligned}\int_0^a (3x^2 - 4)dx &= \left[x^3 - 4x \right]_0^a \\ &= a^3 - 4a\end{aligned}$$

즉, $a^3 - 4a = 0$ 이므로

$$a(a^2 - 4) = 0, \quad a(a+2)(a-2) = 0$$

$\therefore a = 0$ 또는 $a = -2$ 또는 $a = 2$

따라서 양수 a 의 값은 2이다.

답 ①

082

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= \int_1^2 (x^2 - 2x)dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)dx \\ &= \int_1^3 (x^2 - 2x)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_1^3 \\ &= 0 - \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{2}{3}$

083

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 (|x| + 1)^2 dx &= \int_{-2}^2 (x^2 + 2|x| + 1)dx \\ &= \int_{-2}^2 (x^2 + 1)dx + 2 \int_{-2}^2 |x|dx \\ &= 2 \int_0^2 (x^2 + 1)dx + 2 \int_{-2}^0 (-x)dx + 2 \int_0^2 xdx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^2 + 2 \left[-\frac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^0 + 2 \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{28}{3} + 4 + 4 = \frac{52}{3}\end{aligned}$$

답 ⑤

084

$f(x)$ 는 짝함수이므로 $xf(x)$ 는 홀함수이다.

$$\text{즉, } \int_{-1}^1 f(x)dx = 2 \int_0^1 f(x)dx = 2, \quad \int_{-1}^1 xf(x)dx = 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (3x+2)f(x)dx &= 3 \int_{-1}^1 xf(x)dx + 2 \int_{-1}^1 f(x)dx \\ &= 3 \times 0 + 2 \times 2 = 4\end{aligned}$$

답 4

+ 풍산자 비법

$g(x) = xf(x)$ 라 하면

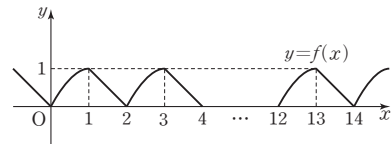
$$g(-x) = -xf(-x) = -xf(x) = -g(x)$$

이므로 $xf(x)$ 는 홀함수이다.

085

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & (0 \leq x \leq 1) \\ -x + 2 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \text{ 이고,}$$

$f(x+2) = f(x)$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 알 수 있듯이 $0 \leq x \leq 13$ 에서 $0 \leq x \leq 1$ 의 모양은 7번, $1 \leq x \leq 2$ 의 모양은 6번 나온다.

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^{13} f(x)dx &= 7 \int_0^1 (-x^2 + 2x)dx + 6 \int_1^2 (-x + 2)dx \\ &= 7 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1 + 6 \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_1^2 \\ &= 7 \times \frac{2}{3} + 6 \times \frac{1}{2} = \frac{23}{3}\end{aligned}$$

답 ④

086

$$f(x) = 10x - x \int_0^2 f(t)dt - \int_0^2 f(t)dt$$

$$\text{이때 } \int_0^2 f(t)dt = k \text{ (} k \text{는 상수) } \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

로 놓으면

$$f(x) = 10x - kx - k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉠을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^2 (10t - kt - k) dt = \left[5t^2 - \frac{1}{2}kt^2 - kt \right]_0^2$$

$$= 20 - 4k$$

$$k = 20 - 4k \text{에서 } k = 4$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$f(x) = 6x - 4$$

$$\therefore f(-1) = -6 - 4 = -10$$

답 -10

087

$$f(x) = x^3 - 16 + \int_1^x f(t) dt \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = -15$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 + f(x)$$

$$\therefore f'(1) = 3 + f(1) = 3 - 15 = -12$$

답 ①

088

주어진 등식에서

$$x \int_1^x f(t) dt - \int_1^x t f(t) dt = -x^4 + 4x^3 - 4x$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) = -4x^3 + 12x^2 - 4$$

$$\therefore \int_1^x f(t) dt = -4x^3 + 12x^2 - 4 \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = -12x^2 + 24x$$

$$= -12(x-1)^2 + 12$$

따라서 주어진 식의 최댓값은 $x=1$ 일 때 12이다.

답 12

089

$f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ 로 놓고, $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

(주어진 식)

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{2-h}^{2+h} f(x) dx$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{F(2+h) - F(2)\} + \{F(2) - F(2-h)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2) - F(2-h)}{-h}$$

$$= F'(2) + F'(2)$$

$$= 2F'(2)$$

$$= 2f(2)$$

$$= 2 \times 9 = 18$$

답 18

090

함수 $F(x)$, $G(x)$ 가 $f(x)$ 의 부정적분이므로

$$F(x) = G(x) + C \quad (C \text{는 상수}) \quad \dots\dots ㉠$$

와 같이 나타낼 수 있다.

이때 ㉠에서 $F(1) = G(1) - 4$ 이므로 ㉠의 양변에

$x=1$ 을 대입하면

$$F(1) = G(1) + C \quad \therefore C = -4$$

즉, $F(x) = G(x) - 4$ 이므로 양변에 $x=6$ 을 대입하면

$$F(6) = G(6) - 4 = 1 - 4 = -3$$

$$\therefore \int_2^6 f(x) dx = \left[F(x) \right]_2^6$$

$$= F(6) - F(2)$$

$$= -3 - 5 = -8$$

답 -8

다른 풀이

$F(x) = G(x) - 4$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$F(2) = G(2) - 4$$

$$5 = G(2) - 4 \quad \therefore G(2) = 9$$

$$\therefore \int_2^6 f(x) dx = \left[G(x) \right]_2^6$$

$$= G(6) - G(2)$$

$$= 1 - 9 = -8$$

091

$$\int_a^b f(x) dx = 1, \int_a^b x f(x) dx = 3 \text{이므로}$$

$$\int_a^b (x-k)^2 f(x) dx$$

$$= \int_a^b (x^2 - 2kx + k^2) f(x) dx$$

$$= \int_a^b x^2 f(x) dx - 2k \int_a^b x f(x) dx + k^2 \int_a^b f(x) dx$$

$$=k^2-6k+\int_a^b x^2 f(x) dx$$

$$=(k-3)^2-9+\int_a^b x^2 f(x) dx$$

따라서 주어진 값을 최소로 하는 k 의 값은 3이다.

답 ⑤

092

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(x)$ 의 두 교점의 x 좌표가 $-1, 3$ 이므로

$$f(x)-g(x)=k(x+1)(x-3) \quad (k \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

이때 $f(0)-g(0)=k \times (0+1) \times (0-3)=-3k$ 이고,

주어진 그래프에서 $f(0)=0, g(0)=2$ 이므로

$$-3k=-2 \quad \therefore k=\frac{2}{3}$$

$$\text{즉, } f(x)-g(x)=\frac{2}{3}(x^2-2x-3) \text{이므로}$$

$$\int_{-3}^3 f(x) dx - \int_{-3}^3 g(x) dx$$

$$= \int_{-3}^3 \{f(x)-g(x)\} dx$$

$$= \int_{-3}^3 \frac{2}{3}(x^2-2x-3) dx$$

$$= \frac{2}{3} \int_{-3}^3 (x^2-3) dx - \frac{4}{3} \int_{-3}^3 x dx$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^3 (x^2-3) dx - 0$$

$$= \frac{4}{3} \left[\frac{1}{3} x^3 - 3x \right]_0^3$$

$$= \frac{4}{3} \times 0 = 0$$

답 0

093

$f(x)$ 는 홀함수이므로 $f'(x)$ 는 짝함수, $x^5 f'(x)$, $x^3 f'(x)$ 는 홀함수이다.

$$\text{즉, } \int_{-3}^3 f'(x) dx = 2 \int_0^3 f'(x) dx,$$

$$\int_{-3}^3 x^5 f'(x) dx = \int_{-3}^3 x^3 f'(x) dx = 0 \text{이므로}$$

$$\int_{-3}^3 (3x^5 - x^3 + 1) f'(x) dx$$

$$= 3 \int_{-3}^3 x^5 f'(x) dx - \int_{-3}^3 x^3 f'(x) dx + \int_{-3}^3 f'(x) dx$$

$$= 3 \times 0 - 0 + 2 \int_0^3 f'(x) dx$$

$$= 2 \left[f(x) \right]_0^3 = 2 \{ f(3) - f(0) \}$$

이때 $f(-x) = -f(x)$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0) = 0 \text{이므로}$$

$$(주어진 식) = 2 \times (5-0) = 10$$

답 10

094

$$(\text{㉠}) \text{에서 } \int_0^3 f(x) dx = 6, \int_1^3 f(x) dx = 4 \text{이므로}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx$$

$$= 6 - 4 = 2$$

(㉡)에서 $f(x) = f(4-x)$ 이므로 $f(x+2) = f(2-x)$ 이다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이다.

$$\text{즉, } \int_3^4 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 2 \text{이므로}$$

$$\int_0^4 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx$$

$$= 6 + 2 = 8$$

$$\therefore \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

답 ⑤

095

$$\int_{-1}^1 g'(t) dt = \left[g(t) \right]_{-1}^1$$

$$= g(1) - g(-1)$$

$$= \int_0^1 f(t) dt - \left(- \int_0^1 f(t) dt \right)$$

$$= 2 \int_0^1 f(t) dt$$

$$\text{즉, } f(x) = 4x^3 - 2 \int_0^1 f(t) dt \text{이므로}$$

$$\int_0^1 f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수})$$

..... ㉠

로 놓으면

$$f(x) = 4x^3 - 2k$$

..... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$k = \int_0^1 (4t^3 - 2k) dt = \left[t^4 - 2kt \right]_0^1 = 1 - 2k$$

$$k = 1 - 2k \text{에서 } k = \frac{1}{3}$$

$$\text{이것을 ㉡에 대입하면 } f(x) = 4x^3 - \frac{2}{3}$$

$$\therefore f(1) = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

답 ③

096

$g(x) = \int_0^x f(t)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = f(x) = -(x+2)^2 + a + 4$$

함수 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 증가하려면 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $g'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이때 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 함수 $g'(x)$ 의 최솟값은

$x=1$ 일 때 $a-5$ 이므로

$$a-5 \geq 0 \quad \therefore a \geq 5$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 5이다.

답 5

097

주어진 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 1 - 1 - 3 + 5 + a \quad \therefore a = -2$$

$$\begin{aligned} \int_1^x (x-t)f'(t)dt &= x \int_1^x f'(t)dt - \int_1^x tf'(t)dt \\ &= x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x + a \end{aligned}$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f'(t)dt + xf'(x) - xf'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5$$

$$\therefore \int_1^x f'(t)dt = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑦의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 12x^2 - 6x - 6$$

$$\therefore f(x) = \int (12x^2 - 6x - 6)dx$$

$$= 4x^3 - 3x^2 - 6x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수이다.})$$

이때 $f'(x) = 12x^2 - 6x - 6 = 6(2x+1)(x-1)$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = 1$ 이므로

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{1}{2}$ 에서 극댓값, $x=1$ 에서 극솟값을 가지므로

$$M = f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + C$$

$$= \frac{7}{4} + C$$

$$m = f(1) = 4 - 3 - 6 + C = -5 + C$$

$$\therefore M - m = \frac{7}{4} + C - (-5 + C) = \frac{27}{4}$$

답 $\frac{27}{4}$

098

$f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \int_{-1}^{x^3} f(t)dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\left[F(t)\right]_{-1}^{x^3}}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \left\{ \frac{F(x^3) - F(-1)}{x^3 + 1} \times (x^2 - x + 1) \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \left\{ \frac{F(x^3) - F(-1)}{x^3 - (-1)} \times (x^2 - x + 1) \right\}$$

$$= 3F'(-1)$$

이때 $F'(x) = f(x)$ 이므로

$$F'(-1) = f(-1) = -2 - 3 + 4 + 5 = 4$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = 3 \times 4 = 12$$

답 12

3 정적분의 활용

1 넓이

172~178쪽

100

곡선 $y=x^2-2x-3$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는

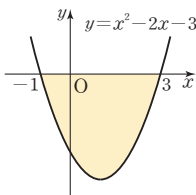
$x^2-2x-3=0$ 에서 $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

오른쪽 그림에서 $-1 \leq x \leq 3$ 일

때 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^3 |x^2-2x-3| dx \\ &= \int_{-1}^3 \{-(x^2-2x-3)\} dx \\ &= \int_{-1}^3 (-x^2+2x+3) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 \\ &= 9 - \left(-\frac{5}{3} \right) = \frac{32}{3} \end{aligned}$$



답 $\frac{32}{3}$

102

곡선 $y=x^3-4x^2+3x$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는

$x^3-4x^2+3x=0$ 에서 $x(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

오른쪽 그림에서 $0 \leq x \leq 1$ 일

때 $y \geq 0$ 인 도형의 넓이를

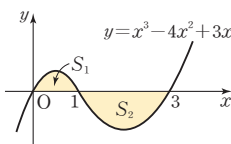
S_1 , $1 \leq x \leq 3$ 일 때 $y \leq 0$ 인

도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 (x^3-4x^2+3x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{5}{12} \\ S_2 &= - \int_1^3 (x^3-4x^2+3x) dx \\ &= - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_1^3 \\ &= - \left(-\frac{9}{4} - \frac{5}{12} \right) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$S_1 + S_2 = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}$$



답 $\frac{37}{12}$

104

곡선과 직선의 교점의 x 좌표

는

$x^3-x^2-x=x$ 에서

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$

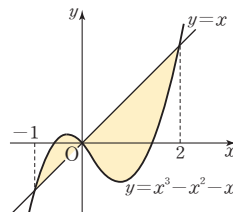
또는 $x=2$

이때 $-1 \leq x \leq 0$ 에서 $x^3-x^2-x \geq x$,

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $x^3-x^2-x \leq x$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 (x^3-x^2-x-x) dx + \int_0^2 \{x-(x^3-x^2-x)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x) dx + \int_0^2 (-x^3+x^2+2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

답 $\frac{37}{12}$



106

두 곡선의 교점의 x 좌표를 구하면

$x^2-x-1=-2x^2-x+2$ 에서

$3x^2-3=0$

$3(x+1)(x-1)=0$

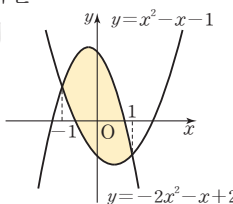
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

이때 $-1 \leq x \leq 1$ 에서

$x^2-x-1 \leq -2x^2-x+2$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \{-2x^2-x+2-(x^2-x-1)\} dx \\ &= \int_{-1}^1 (-2x^2-x+2-x^2+x+1) dx \\ &= \int_{-1}^1 (-3x^2+3) dx \\ &= 2 \int_0^1 (-3x^2+3) dx \\ &= 2 \left[-x^3+3x \right]_0^1 = 2 \times 2 = 4 \end{aligned}$$

답 4



참고

넓이는 항상 양수이므로 두 곡선 중 어떤 것이 위에 있는지 잘 살핀다.

108

(1) 포물선과 x 축의 교점의 x 좌표는

$-2x^2+2x+4=0$ 에서 $2(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{|a|}{6}(\beta - a)^3 = \frac{2}{6} \times \{2 - (-1)\}^3 = 9$$

(2) 포물선과 직선의 교점의 x좌표는

$$2x^2 - x + 1 = -3x + 13 \text{에서 } 2x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$2(x+3)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{|a|}{6}(\beta - a)^3 \\ &= \frac{2}{6} \times \{2 - (-3)\}^3 = \frac{125}{3} \end{aligned}$$

(3) 두 포물선의 교점의 x좌표는

$$x^2 - 3x - 1 = -x^2 + 5x - 1 \text{에서 } 2x^2 - 8x = 0$$

$$2x(x-4) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{|a-a'|}{6}(\beta - a)^3 \\ &= \frac{1 - (-1)}{6} \times (4 - 0)^3 = \frac{64}{3} \end{aligned}$$

답 (1) 9 (2) $\frac{125}{3}$ (3) $\frac{64}{3}$

필수 확인 문제

179쪽

109

곡선 $y = x^2 - 4x + 4$ 와 x축의 교점의 x좌표는

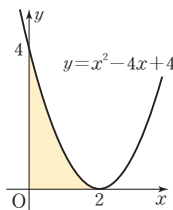
$$x^2 - 4x + 4 = 0 \text{에서}$$

$$(x-2)^2 = 0 \quad \therefore x = 2$$

오른쪽 그림에서 $0 \leq x \leq 2$ 일 때

$y \geq 0$ 이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$



답 $\frac{8}{3}$

110

곡선 $y = -3x^2 + ax$ 와 x축의 교점의 x좌표는

$$-3x^2 + ax = 0 \text{에서 } -x(3x - a) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{a}{3}$$

이때 $a > 6$ 에서 $\frac{a}{3} > 2$ 이므로

곡선 $y = -3x^2 + ax$ 와 x축 및

두 직선 $x = 1$, $x = 2$ 로 둘러싸인

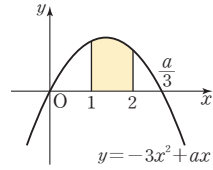
도형은 오른쪽 그림과 같다.

색칠한 부분의 넓이가 11이므로

$$\begin{aligned} \int_1^2 (-3x^2 + ax) dx &= \left[-x^3 + \frac{1}{2}ax^2 \right]_1^2 \\ &= -7 + \frac{3}{2}a = 11 \end{aligned}$$

$$\frac{3}{2}a = 18 \quad \therefore a = 12$$

답 12



111

곡선과 직선의 교점의 x좌표는

$$x^3 - 2x^2 + x = 2x - 2 \text{에서}$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

$$(x+1)(x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는}$$

$$x = 2$$

이때 $-1 \leq x \leq 1$ 에서

$$x^3 - 2x^2 + x \geq 2x - 2,$$

$1 \leq x \leq 2$ 에서 $x^3 - 2x^2 + x \leq 2x - 2$ 이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^1 \{(x^3 - 2x^2 + x) - (2x - 2)\} dx$$

$$+ \int_1^2 \{(2x - 2) - (x^3 - 2x^2 + x)\} dx$$

$$= \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx$$

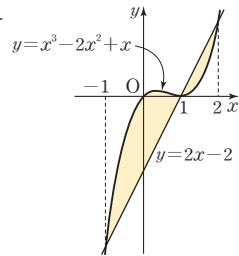
$$+ \int_1^2 (-x^3 + 2x^2 + x - 2) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^1$$

$$+ \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_1^2$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}$$

답 $\frac{37}{12}$



112

두 곡선 $y = x^2 - 4x + 5$, $y = -x^2 + 6x - 3$ 의 교점의

x좌표는

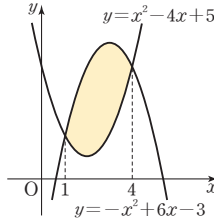
$$x^2 - 4x + 5 = -x^2 + 6x - 3 \text{에서}$$

$$2x^2 - 10x + 8 = 0, 2(x-1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

이때 $1 \leq x \leq 4$ 에서 $-x^2+6x-3 \geq x^2-4x+5$ 이므로
구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_1^4 \{(-x^2+6x-3) - (x^2-4x+5)\} dx \\ &= \int_1^4 (-2x^2+10x-8) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-8x \right]_1^4 \\ &= \frac{16}{3} + \frac{11}{3} = 9 \end{aligned}$$



답 9

다른 풀이

포물선의 넓이 공식에 의하여 구하는 넓이는

$$\frac{|a-a'|}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1-(-1)}{6} \times (4-1)^3 = 9$$

113

포물선 $y = x^2 - x + m$ 과 직선

$y = mx$ 의 교점의 x 좌표는

$x^2 - x + m = mx$ 에서

$x^2 - (m+1)x + m = 0$

$(x-m)(x-1) = 0$

$\therefore x = m$ 또는 $x = 1$

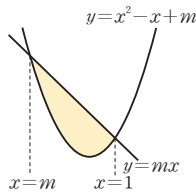
포물선과 직선 $y = mx$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{6}(1-m)^3$$

주어진 조건에서 도형의 넓이가 $\frac{32}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{6}(1-m)^3 = \frac{32}{3}$$

$$(1-m)^3 = 64, 1-m=4 \quad \therefore m=-3$$



답 -3

114

$$g(x) = \begin{cases} 2x+2 & (x \leq 0) \\ -2x+2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$x \leq 0$ 에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는 $x^2-3x-4=2x+2$ 에서

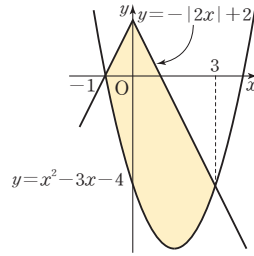
$$x^2-5x-6=0, (x-6)(x+1)=0$$

$\therefore x = -1$ ($\because x \leq 0$)

$x \geq 0$ 에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는 $x^2-3x-4=-2x+2$ 에서

$$x^2-x-6=0, (x-3)(x+2)=0$$

$$\therefore x=3 \quad (\because x \geq 0)$$



이때 $-1 \leq x \leq 0$ 에서 $x^2-3x-4 \leq 2x+2$,

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $x^2-3x-4 \leq -2x+2$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 \{(2x+2) - (x^2-3x-4)\} dx \\ & \quad + \int_0^3 \{(-2x+2) - (x^2-3x-4)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (-x^2+5x+6) dx + \int_0^3 (-x^2+x+6) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_0^3 \\ &= \frac{19}{6} + \frac{27}{2} = \frac{50}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{50}{3}$

2 넓이의 활용

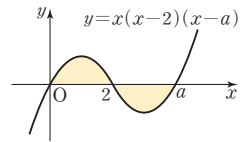
180~182쪽

116

주어진 곡선은 x 축과 $x=0$,

$x=2$, $x=a$ 에서 만나고,

$a > 2$ 이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



선택한 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\begin{aligned} & \int_0^a x(x-2)(x-a) dx \\ &= \int_0^a \{x^3 - (2+a)x^2 + 2ax\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2+a}{3}x^3 + ax^2 \right]_0^a = 0 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{3}a^3 = 0, a^3(a-4)=0$$

$$\therefore a=4 (\because a>2)$$

답 4

118

[1단계] $f(x)=x^3$ 으로 놓으면

$$f'(x)=3x^2 \quad \therefore f'(1)=3$$

따라서 점 (1, 1)에서의 접선의 방정식은

$$y-1=3(x-1) \quad \therefore y=3x-2$$

[2단계] 곡선과 접선의 교점의 x 좌표는

$$x^3=3x-2 \text{에서 } (x-1)^2(x+2)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=-2$$

이때 $-2 \leq x \leq 1$ 에서

$$x^3 \geq 3x-2 \text{이므로 구하}$$

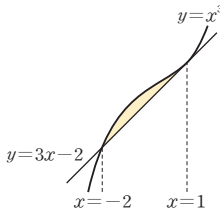
는 넓이는

$$\int_{-2}^1 \{x^3 - (3x-2)\} dx$$

$$= \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1$$

$$= \frac{3}{4} - (-6) = \frac{27}{4}$$



답 $\frac{27}{4}$

120

곡선 $y=x^3-x^2+x$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3-x^2+x=x \text{에서 } x^2(x-1)=0$$

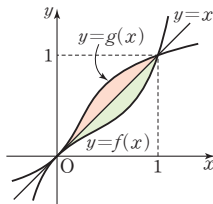
$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$2 \int_0^1 \{x - (x^3 - x^2 + x)\} dx$$

$$= 2 \int_0^1 (-x^3 + x^2) dx$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$



답 $\frac{1}{6}$

+ 풍산자 비법

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 두 그래프 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점은 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

필수 확인 문제

183쪽

121

주어진 그림에서 (A 의 넓이) = (B 의 넓이)이므로

$$\int_{-1}^k (3x^2-3) dx = 0$$

$$\int_{-1}^k (3x^2-3) dx = \left[x^3 - 3x \right]_{-1}^k = k^3 - 3k - 2$$

$$k^3 - 3k - 2 = 0 \text{에서}$$

$$(k+1)^2(k-2)=0$$

$$\therefore k=2 (\because k>1)$$

답 2

122

곡선과 직선의 교점의 x 좌표는

$$x^2-x=ax \text{에서}$$

$$x^2-(a+1)x=0, x\{x-(a+1)\}=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=a+1$$

x 축이 도형의 넓이를 이등분하므로

$$\int_0^{a+1} \{ax - (x^2-x)\} dx = 2 \int_0^1 |x^2-x| dx$$

$$\int_0^{a+1} \{-x^2 + (a+1)x\} dx = 2 \int_0^1 (-x^2+x) dx$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{(a+1)}{2}x^2 \right]_0^{a+1} = 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$\frac{(a+1)^3}{6} = 2 \times \frac{1}{6}$$

$$\therefore (a+1)^3 = 2$$

답 ③

123

$$y=x^3-3x^2+x+2 \text{에서}$$

$$y'=3x^2-6x+1$$

따라서 점 (0, 2)에서의 접선의 기울기는 1이므로 접선의 방정식은

$$y-2=1 \times (x-0)$$

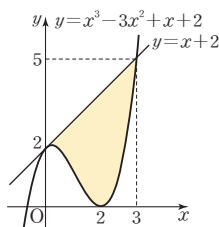
$$\therefore y=x+2$$

곡선과 접선의 교점의 x 좌표는

$$x^3-3x^2+x+2=x+2 \text{에서}$$

$$x^3-3x^2=0, x^2(x-3)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=3$$



위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^3 \{(x+2) - (x^3 - 3x^2 + x + 2)\} dx \\ &= \int_0^3 (-x^3 + 3x^2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 \right]_0^3 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{27}{4}$

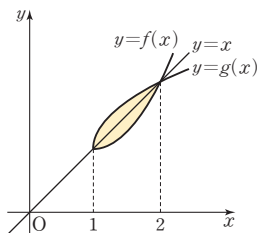
124

곡선 $y = x^2 - 2x + 2$ ($x \geq 1$)와 직선 $y = x$ 의 교점의 좌표는

$$x^2 - 2x + 2 = x \text{에서}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0, (x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$



위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & 2 \int_1^2 \{x - (x^2 - 2x + 2)\} dx \\ &= 2 \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x \right]_1^2 \\ &= 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{3}$

125

$$f(x) = -x^2 + 1 \text{이라 하면 } f'(x) = -2x$$

접점의 좌표를 $(a, -a^2 + 1)$ 이라 하면 접선의 기울기는

$$f'(a) = -2a \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - (-a^2 + 1) = -2a(x - a)$$

$$\therefore y = -2ax + a^2 + 1$$

..... ㉠

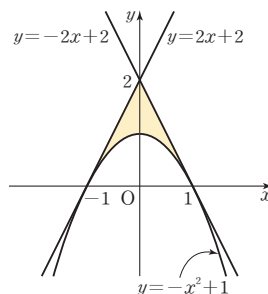
직선 ㉠이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2 = a^2 + 1, a^2 - 1 = 0$$

$$(a+1)(a-1) = 0 \quad \therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 1$$

$$a = -1 \text{일 때, ㉠에서 } y = 2x + 2$$

$$a = 1 \text{일 때, ㉠에서 } y = -2x + 2$$



위의 그림에서 곡선과 두 접선으로 둘러싸인 도형이

y 축에 대하여 대칭이고, $0 \leq x \leq 1$ 에서

$$-2x + 2 \geq -x^2 + 1 \text{이므로 구하는 넓이는}$$

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^1 \{(-2x + 2) - (-x^2 + 1)\} dx \\ &= 2 \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_0^1 \\ &= 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{2}{3}$

3 속도와 거리

184~187쪽

127

(1) $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^3 (t^2 - 2t) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_0^3 = 0$$

(2) $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가

움직인 거리는

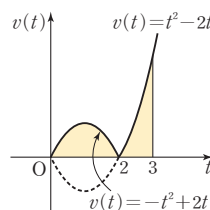
$$\int_0^3 |t^2 - 2t| dt$$

$$= \int_0^2 (-t^2 + 2t) dt$$

$$+ \int_2^3 (t^2 - 2t) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{3}t^3 + t^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_2^3$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$



- (3) $t=0$ 에서 점 P의 위치가 4이므로 $t=6$ 에서 점 P의 위치는

$$4 + \int_0^6 (t^2 - 2t) dt = 4 + \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_0^6$$

$$= 4 + 36 = 40$$

답 (1) 0 (2) $\frac{8}{3}$ (3) 40

참고

점 P가 항상 원점에서 출발하는 것은 아니다.
위치를 구할 때에는 점 P의 $t=0$ 에서의 위치를 잘 파악하는 것이 중요하다.

129

- (1) 물체의 처음 높이에 5초가 지난 후의 위치의 변화량을 더하면 되므로 구하는 높이는

$$50 + \int_0^5 (30 - 10t) dt = 50 + \left[30t - 5t^2 \right]_0^5$$

$$= 50 + 25 = 75 \text{ (m)}$$

- (2) 물체가 최고 지점에 도달했을 때

속도는 0이므로

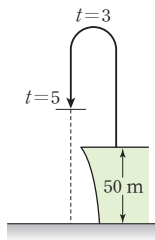
$$v(t) = 30 - 10t = 0 \text{에서 } t = 3$$

따라서 $t=3$ 일 때 최고 지점에 도달하므로 구하는 높이는

$$50 + \int_0^3 (30 - 10t) dt$$

$$= 50 + \left[30t - 5t^2 \right]_0^3$$

$$= 50 + 45 = 95 \text{ (m)}$$



- (3) 물체를 쏘아 올린 후 5초 동안 물체가 움직인 거리는

$$\int_0^5 |v(t)| dt = \int_0^5 |30 - 10t| dt$$

$$= \int_0^3 (30 - 10t) dt + \int_3^5 \{-(30 - 10t)\} dt$$

$$= \left[30t - 5t^2 \right]_0^3 + \left[-30t + 5t^2 \right]_3^5$$

$$= 45 + 20 = 65 \text{ (m)}$$

답 (1) 75 m (2) 95 m (3) 65 m

131

- (1) $t=3$ 에서 운동 방향을 바꾸므로 구하는 거리는

$$\int_0^3 v(t) dt = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$$

- (2) $t=0$ 에서 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는 속도의 그 래프와 t 축 사이의 넓이와 같으므로

$$\int_0^4 |v(t)| dt = \int_0^3 |v(t)| dt + \int_3^4 |v(t)| dt$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 4$$

- (3) 출발점의 위치가 0이므로 $t=4$ 에서 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^4 v(t) dt = \int_0^3 v(t) dt + \int_3^4 v(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 + \left(-\frac{1}{2} \times 1 \times 2 \right) = 2$$

답 (1) 3 (2) 4 (3) 2

필수 확인 문제

188쪽

132

$t=5$ 에서 점 P와 점 A 사이의 거리는 $t=0$ 에서 $t=5$ 까지 점 P의 위치의 변화량이므로

$$\int_0^5 v(t) dt = \int_0^5 (t^2 - 6t + 8) dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t \right]_0^5$$

$$= \frac{125}{3} - 75 + 40 = \frac{20}{3}$$

답 $\frac{20}{3}$

133

$t=0$ 에서 점 P의 위치가 2이므로 $t=4$ 에서 점 P의 위치는

$$2 + \int_0^4 v(t) dt$$

$$= 2 + \int_0^3 (-2t + 1) dt + \int_3^4 (3t^2 - 4t) dt$$

$$= 2 + \left[-t^2 + t \right]_0^3 + \left[t^3 - 2t^2 \right]_3^4$$

$$= 2 + (-6) + 23 = 19$$

답 19

134

최고 높이에 도달했을 때 속도는 0이므로

$$v(t) = -10t + 10k = 0 \text{에서 } t = k$$

따라서 $t=k$ 일 때의 높이가 45 m이므로

$$\int_0^k (-10t + 10k) dt = 45$$

$$\left[-5t^2 + 10kt \right]_0^k = 45, \quad 5k^2 = 45$$

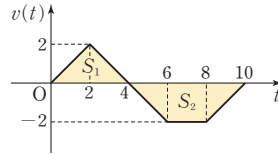
$$k^2 = 9 \quad \therefore k = 3 \quad (\because k \text{는 양수})$$

답 3

135

오른쪽 그림과 같이

$v(t)$ 의 그래프와 t 축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 S_1, S_2 라 하자.



(i) $t=0$ 에서 $t=10$ 까지 물체의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned} a &= \int_0^{10} v(t) dt \\ &= S_1 - S_2 \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 - \left\{ \frac{1}{2} \times (6+2) \times 2 \right\} = -4 \end{aligned}$$

(ii) $t=0$ 에서 $t=10$ 까지 물체가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} b &= \int_0^{10} |v(t)| dt \\ &= S_1 + S_2 \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 + \left\{ \frac{1}{2} \times (2+6) \times 2 \right\} = 12 \end{aligned}$$

$$\therefore a+b = -4+12=8$$

답 8

136

ㄱ은 옳지 않다.

속력은 $|v(t)|$ 이므로 $t=0, t=3$ 에서 점 P의 속력이 최소이다.

ㄴ도 옳지 않다.

점 P의 운동 방향이 바뀔 때 속도는 0이므로 점 P는 $t=3$ 에서 운동 방향을 바꾼다.

즉, 점 P는 원점을 출발한 후 운동 방향을 1번 바꾼다.

ㄷ은 옳다.

$$\int_0^3 |v(t)| dt = \int_3^4 |v(t)| dt \text{ 이면 } \int_0^4 v(t) dt = 0 \text{ 이므로 } t=4 \text{에서 점 P는 원점에 있다.}$$

ㄹ은 옳지 않다.

$$\begin{aligned} \int_0^2 |v(t)| dt &= \int_3^4 |v(t)| dt \text{ 이면} \\ \int_0^2 v(t) dt &= -\int_3^4 v(t) dt \text{ 이므로} \\ \int_0^4 v(t) dt &= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^3 v(t) dt + \int_3^4 v(t) dt \\ &= \int_2^3 v(t) dt \end{aligned}$$

이때 $\int_2^3 v(t) dt \neq 0$ 이므로 $t=4$ 에서 점 P는 원점에 있지 않다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ㄷ

실전 연습문제

190~192쪽

137

곡선 $y=3x^2-kx$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$3x^2-kx=0 \text{에서 } 3x\left(x-\frac{k}{3}\right)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{k}{3}$$

$0 \leq x \leq \frac{k}{3}$ 일 때, $y \leq 0$ 이므로 도형의 넓이는

$$\int_0^{\frac{k}{3}} (-3x^2+kx) dx = \left[-x^3 + \frac{k}{2}x^2 \right]_0^{\frac{k}{3}} = \frac{k^3}{54}$$

$$\text{즉, } \frac{k^3}{54} = 4 \text{이므로 } k^3 = 216$$

$$\therefore k=6$$

답 ④

다른 풀이

포물선의 넓이 공식에 의하여 도형의 넓이는

$$\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{3}{6}\left(\frac{k}{3}-0\right)^3 = \frac{k^3}{54}$$

$$\text{즉, } \frac{k^3}{54} = 4 \text{이므로 } k^3 = 216 \quad \therefore k=6$$

138

곡선 $y=x^2-2x$ 와 직선 $y=-x$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2-2x=-x \text{에서}$$

$$x^2-x=0, x(x-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

곡선 $y=x^2-2x$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2-2x=x \text{에서}$$

$$x^2-3x=0, x(x-3)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=3$$

오른쪽 그림에서

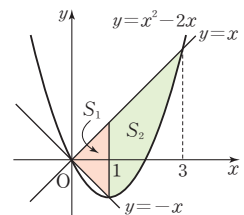
$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 \{x - (-x)\} dx \\ &= \int_0^1 2x dx \\ &= \left[x^2 \right]_0^1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^3 \{x - (x^2-2x)\} dx \\ &= \int_1^3 (-x^2+3x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_1^3 = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$S_1+S_2 = 1 + \frac{10}{3} = \frac{13}{3}$$

답 $\frac{13}{3}$



139

두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - x - 2 = -2x^2 + 5x + 7 \text{에서}$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0, 3(x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하

는 넓이는

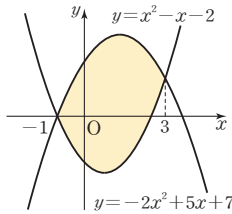
$$\int_{-1}^3 \{(-2x^2 + 5x + 7) - (x^2 - x - 2)\} dx$$

$$= \int_{-1}^3 (-3x^2 + 6x + 9) dx$$

$$= \left[-x^3 + 3x^2 + 9x \right]_{-1}^3$$

$$= 27 - (-5) = 32$$

답 ③



다른 풀이

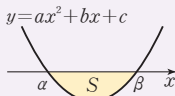
포물선의 넓이 공식에 의하여 구하는 넓이는

$$\frac{|a-a'|}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1-(-2)}{6}\{3-(-1)\}^3 = 32$$

+ 풍산자 비법

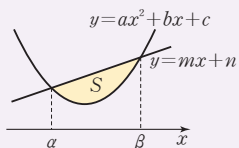
포물선의 넓이 공식

(1) 포물선과 x 축



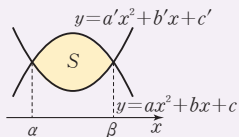
$$\Rightarrow S = \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2) 포물선과 직선



$$\Rightarrow S = \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(3) 포물선과 포물선



$$\Rightarrow S = \frac{|a-a'|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

140

곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이가 9이므로 곡선과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

곡선과 직선의 교점의 x 좌표는 이차방정식

$$2x^2 - 12x + 18 + k = 2x \text{에서}$$

$$2x^2 - 14x + 18 + k = 0$$

..... ㉠

의 두 근이므로 두 근을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

오른쪽 그림에서 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{|-2|}{6}(\beta-\alpha)^3 = 9$$

$$\text{즉, } (\beta-\alpha)^3 = 27 \text{이므로}$$

$$\beta-\alpha=3$$

..... ㉡

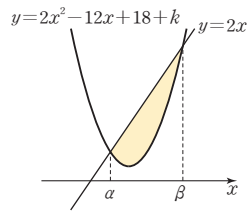
㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=7 \quad \text{..... ㉢, } \alpha\beta=\frac{18+k}{2} \quad \text{..... ㉣}$$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $\alpha=2, \beta=5$

$$\text{이를 ㉣에 대입하면 } 10 = \frac{18+k}{2} \quad \therefore k=2$$

답 2



141

$$f(x) = x^3 - 3x^2 \text{에서 } f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$\therefore \frac{2}{3}f'(x) = 2x^2 - 4x$$

두 곡선 $y=f(x), y=\frac{2}{3}f'(x)$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3 - 3x^2 = 2x^2 - 4x \text{에서}$$

$$x^3 - 5x^2 + 4x = 0$$

$$x(x-1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

$$\text{또는 } x=4$$

따라서 오른쪽 그림에서

구하는 넓이는

$$\int_0^1 \{(x^3 - 3x^2) - (2x^2 - 4x)\} dx$$

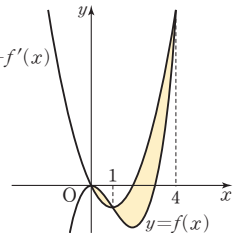
$$+ \int_1^4 \{(2x^2 - 4x) - (x^3 - 3x^2)\} dx$$

$$= \int_0^1 (x^3 - 5x^2 + 4x) dx + \int_1^4 (-x^3 + 5x^2 - 4x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 \right]_1^4$$

$$= \frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6}$$

답 ②



142

곡선 $y = |x^2 - 1|$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는

$$|x^2 - 1| = 0 \text{에서 } (x+1)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

곡선 $y = |x^2 - 1|$ 과 직선 $y=1$ 의 교점의 x 좌표는

(i) $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$ 일 때

$$x^2 - 1 = 1 \text{에서}$$

$$x^2 - 2 = 0, (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x = \sqrt{2}$$

(ii) $-1 \leq x \leq 1$ 일 때

$$-x^2 + 1 = 1 \text{에서 } x^2 = 0$$

$$\therefore x = 0$$

따라서 오른쪽 그림에서

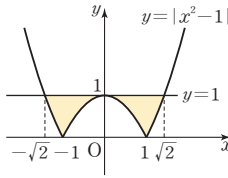
구하는 넓이는

$$2 \left\{ \sqrt{2} \times 1 - \int_0^1 (-x^2 + 1) dx - \int_1^{\sqrt{2}} (x^2 - 1) dx \right\}$$

$$= 2\sqrt{2} - 2 \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 - 2 \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$= 2\sqrt{2} - \frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}(\sqrt{2} - 1)$$

답 $\frac{8}{3}(\sqrt{2} - 1)$



143

$A : B = 1 : 2$ 에서 $A = \frac{B}{2}$ 이고, 곡선 $y = x^2 - 4x + k$ 는

직선 $x = 2$ 에 대하여 대칭이므로

$$\int_0^2 (x^2 - 4x + k) dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + kx \right]_0^2 = 0, -\frac{16}{3} + 2k = 0$$

$$\therefore k = \frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

144

구하는 넓이는

$$2 \int_2^5 \{f(x) - x\} dx = 2 \int_2^5 f(x) dx - 2 \int_2^5 x dx$$

$$= 2 \times 20 - 2 \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_2^5$$

$$= 40 - 21 = 19$$

답 19

145

ㄱ은 옳지 않다.

$$f(4) = \int_0^4 v(t) dt$$

$$= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^4 v(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 0$$

ㄴ은 옳다.

$$f(10) = \int_0^{10} v(t) dt$$

$$= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^{10} v(t) dt$$

$$= \int_0^2 v(t) dt + 0 = f(2)$$

ㄷ은 옳지 않다.

점 P가 원점을 지나는 것은

$$f(t) = \int_0^t v(t) dt = 0 \quad (t > 0) \text{일 때, 즉}$$

$t = 4$ 또는 $t = 8$ 일 때이므로 출발 후 2번이다.

ㄹ은 옳다.

점 P가 10초 동안 실제로 움직인 거리는 속도 $v(t)$ 와

t 축으로 둘러싸인 부분의 넓이이므로 5이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ③

146

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 \left\{ kx^2 - \left(-\frac{1}{k} \right) x^2 \right\} dx$$

$$= \left(k + \frac{1}{k} \right) \int_0^1 x^2 dx$$

$$= \left(k + \frac{1}{k} \right) \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} \left(k + \frac{1}{k} \right)$$

$k > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

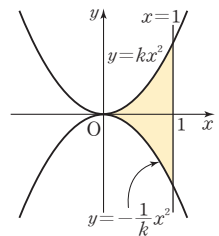
$$k + \frac{1}{k} \geq 2\sqrt{k \times \frac{1}{k}} = 2$$

(단, 등호는 $k = 1$ 일 때 성립한다.)

따라서 $\frac{1}{3} \left(k + \frac{1}{k} \right) \geq \frac{2}{3}$ 이므로 구하는 도형의 넓이의

최솟값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

답 $\frac{2}{3}$



참고 산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0, b > 0$ 일 때,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{일 때 성립한다.})$$

147

두 삼차함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 x

좌표가 $-2, 0, 1$ 이므로

$$f(x) - g(x) = ax(x+2)(x-1) \quad (a \text{는 } 0 \text{이 아닌 상수})$$

로 놓자.

구간 $[0, 1]$ 에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{5}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}dx &= \int_0^1 ax(x+2)(x-1)dx \\ &= \int_0^1 (ax^3+ax^2-2ax)dx \\ &= \left[\frac{a}{4}x^4 + \frac{a}{3}x^3 - ax^2 \right]_0^1 = -\frac{5}{12}a\end{aligned}$$

즉, $-\frac{5}{12}a = \frac{5}{4}$ 이므로 $a = -3$

따라서 $f(x)-g(x) = -3x(x+2)(x-1)$ 이므로
 $f(-1)-g(-1) = -3 \times (-1) \times 1 \times (-2) = -6$

답 -6

148

$$\begin{aligned}F(2)-F(-3) &= \int_0^2 f(t)dt - \int_0^{-3} f(t)dt \\ &= \int_0^2 f(t)dt + \int_{-3}^0 f(t)dt \\ &= \int_{-3}^2 f(t)dt \\ &= \int_{-3}^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt \\ &= (A \text{의 넓이}) - (B \text{의 넓이}) \\ &= 25 - 5 = 20\end{aligned}$$

답 20

149

점 $(1, 3)$ 을 지나는 직선의 기울기를 m 이라 하면 직선의 방정식은

$$y = m(x-1) + 3 \quad \therefore y = mx - m + 3$$

곡선 $y=x^2$ 과 직선 $y=mx-m+3$ 의 교점의 x 좌표를

α, β ($\alpha < \beta$)라 하면 $x^2 = mx - m + 3$ 에서

$$x^2 - mx + m - 3 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이차방정식 ⑦의 두 근이 α, β 이므로 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

이차방정식 ⑦에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = m, \quad \alpha\beta = m - 3 \text{에서}$$

$$\begin{aligned}\beta - \alpha &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{m^2 - 4(m-3)} \\ &= \sqrt{(m-2)^2 + 8}\end{aligned}$$

이므로

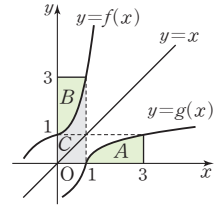
$$\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}(\sqrt{(m-2)^2 + 8})^3$$

따라서 구하는 도형의 넓이가 최소가 되도록 하는 직선의 기울기는 2이다. **답** ③

150

함수 $y=f(x)$ 와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로
 $(A \text{의 넓이}) = (B \text{의 넓이})$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 g(x)dx \\ &= (C \text{의 넓이}) + (A \text{의 넓이}) \\ &= (C \text{의 넓이}) + (B \text{의 넓이}) \\ &= 1 \times 3 = 3\end{aligned}$$



답 3

151

$t=0$ 일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하려면 $v(t)$ 가 중근을 가져야 한다.

(i) $v(t)$ 가 $t=0$ 인 삼중근을 가질 때, $a=0$ 인 경우

$t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned}\int_0^2 \{-t^3(t-1)\}dt &= \int_0^2 (-t^4+t^3)dt \\ &= \left[-\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{4}t^4 \right]_0^2 = -\frac{12}{5}\end{aligned}$$

(ii) $v(t)$ 가 $t=1$ 인 중근을 가질 때, 즉 $a=1$ 또는

$$a = \frac{1}{2} \text{인 경우}$$

$a=1$ 일 때, $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned}\int_0^2 \{-t(t-1)^2(t-2)\}dt \\ &= \int_0^2 (-t^4+4t^3-5t^2+2t)dt \\ &= \left[-\frac{1}{5}t^5+t^4-\frac{5}{3}t^3+t^2 \right]_0^2 = \frac{4}{15}\end{aligned}$$

$a = \frac{1}{2}$ 일 때, $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left\{ -t \left(t - \frac{1}{2} \right) (t-1)^2 \right\} dt \\ &= \int_0^2 \left(-t^4 + \frac{5}{2}t^3 - 2t^2 + \frac{1}{2}t \right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{5}t^5 + \frac{5}{8}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^2 \right]_0^2 = -\frac{11}{15}\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은 $\frac{4}{15}$ 이다.

답 ③