

풍 산 자 필 · 수 · 유 · 형

정답과 풀이

대수

I ❖ 지수함수와 로그함수

이 지수

001

- ① 네제곱근 16은 $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ 이다.
 ② 2의 세제곱근은 방정식 $x^3=2$ 의 근이므로 3개이다.
 ③ -16의 네제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^4=-16$ 의 실근이므로 존재하지 않는다.
 ④ 64의 세제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^3=64$ 의 실근이다.
 $x^3-64=0$ 에서 $(x-4)(x^2+4x+16)=0$
 $\therefore x=4$ 또는 $x=-2 \pm 2\sqrt{3}i$
 따라서 64의 세제곱근 중 실수인 것은 4이다.
 ⑤ $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ 이므로 $\sqrt{(-5)^2}$ 의 제곱근은 $\pm\sqrt{5}$ 이다.
 따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

정답_ ②

002

- 3의 세제곱근이 a 이므로
 $a^3=3$
 b 의 네제곱근이 $\sqrt{3}$ 이므로
 $b=(\sqrt{3})^4=9$
 $\therefore \left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{b^3}{a^3} = \frac{9^3}{3} = 243$

정답_ ⑤

003

- 8은 짝수이고 7은 양수이므로 7의 8제곱근 중 실수인 것은 2개이다.
 $\therefore f(7, 8)=2$
 7은 홀수이므로 8의 7제곱근 중 실수인 것은 1개이다.
 $\therefore f(8, 7)=1$
 8은 짝수이고 -7은 음수이므로 -7의 8제곱근 중 실수인 것은 없다.
 $\therefore f(-7, 8)=0$
 7은 홀수이므로 -8의 7제곱근 중 실수인 것은 1개이다.
 $\therefore f(-8, 7)=1$
 $\therefore f(7, 8) + f(8, 7) + f(-7, 8) + f(-8, 7) = 2 + 1 + 0 + 1 = 4$

정답_ ③

004

- (1) $\sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{49} = \sqrt[3]{7 \times 49} = \sqrt[3]{7^3} = 7$
 (2) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$
 (3) $\sqrt[8]{x^6} \times \sqrt[16]{x^4} = \sqrt[4]{x^3} \times \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x^3 \times x} = \sqrt[4]{x^4} = x$

$$\begin{aligned} (4) \sqrt[4]{\frac{3}{x}} \times \sqrt[4]{\frac{x}{3}} \div \sqrt[3]{\frac{x}{x}} &= \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{x}} \times \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{3}} \div \sqrt[3]{1} \\ &= \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{x}} \times \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{3}} \div 1 \\ &= \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{x}} \times \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{3}} \times \frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[12]{x}} = 1 \end{aligned}$$

정답_ (1) 7 (2) 3 (3) x (4) 1

005

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{243} \div \sqrt[4]{9} = \sqrt{243} \div \sqrt[4]{3^2} \\ &= \sqrt{243} \div \sqrt{3} = \sqrt{81} = 9 \\ b &= \sqrt[3]{-\sqrt{64}} = \sqrt[3]{-\sqrt{8^2}} \\ &= \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2 \\ \therefore a-b &= 9 - (-2) = 11 \end{aligned}$$

정답_ 11

006

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sqrt[6]{36} + \sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[6]{6^2} + \sqrt[3]{3^3 \times 3}}{\sqrt[6]{2^2} + \sqrt[3]{3^3}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{6} + 3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2} + 3} = \frac{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2} + 3)}{\sqrt[3]{2} + 3} \\ &= \sqrt[3]{3} \\ \therefore a^6 &= (\sqrt[3]{3})^6 = 3^2 = 9 \end{aligned}$$

정답_ ⑤

007

$$\begin{aligned} 2, 6, 3 \text{의 최소공배수가 } 6 \text{이므로} \\ \sqrt[6]{a^3b} \times \sqrt[6]{64a^3b} \div \sqrt[3]{8b^2} &= \sqrt[6]{(a^3b)^3} \times \sqrt[6]{64a^3b} \div \sqrt[6]{(8b^2)^2} \\ &= \frac{\sqrt[6]{a^9b^3} \times \sqrt[6]{64a^3b}}{\sqrt[6]{64b^4}} \\ &= \frac{\sqrt[6]{a^9b^3 \times 64a^3b}}{64b^4} \\ &= \sqrt[6]{a^{12}} = a^2 \end{aligned}$$

정답_ ③

008

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^3} \sqrt[4]{a^4} \sqrt[4]{a} \div \sqrt[3]{5} \sqrt[4]{a} \sqrt[4]{a} &= \frac{\sqrt[3]{a^3} \times \sqrt[4]{a^4} \times \sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{5} \times \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a^3} \times \sqrt[4]{a^5}}{\sqrt[3]{5} \times \sqrt[4]{a^2}} \\ &= \frac{\sqrt[30]{a^{15} \times a^5}}{\sqrt[30]{5^3 \times a^2}} = \sqrt[30]{\frac{a^{20}}{5^3}} \\ &= \sqrt[30]{a^{18}} = \sqrt[5]{a^3} \end{aligned}$$

따라서 $m=3, n=5$ 이므로
 $m+n=3+5=8$

정답_ 8

009

- (i) n 이 짝수일 때
 $(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$ 의 실근은
 $x = \pm\sqrt[n]{8}$ 또는 $x = \pm\sqrt[2n]{8}$
 모든 실근의 곱이 양수이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i) n 이 홀수일 때

$$(x^n - 8)(x^{2n} - 8) = 0 \text{의 실근은}$$

$$x = \sqrt[n]{8} \text{ 또는 } x = \pm \sqrt[2n]{8}$$

따라서 모든 실근의 곱은

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{8} \times \sqrt[2n]{8} \times (-\sqrt[2n]{8}) &= 2^{\frac{3}{n}} \times 2^{\frac{3}{2n}} \times (-2^{\frac{3}{2n}}) \\ &= -2^{\frac{3}{n} + \frac{3}{2n} + \frac{3}{2n}} \\ &= -2^{\frac{6}{n}} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -2^{\frac{6}{n}} = -4 \text{이므로}$$

$$2^{\frac{6}{n}} = 2^2, \frac{6}{n} = 2$$

$$\therefore n = 3$$

(i), (ii)에서 $n = 3$

정답_ ②

010

$$\begin{aligned} (1) (9^{-4} \div 3^{-2})^{-3} &= \{(3^2)^{-4} \div 3^{-2}\}^{-3} \\ &= (3^{-8} \div 3^{-2})^{-3} \\ &= (3^{-6})^{-3} = 3^{18} \end{aligned}$$

이므로

$$3^{-20} \times (9^{-4} \div 3^{-2})^{-3} = 3^{-20} \times 3^{18} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned} (2) (\sqrt{5})^0 + \left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} &= 1 + \frac{1}{\left(-\frac{1}{5}\right)^2} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{25}} \\ &= 1 + 25 = 26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \frac{2^{-10} + 2^{12}}{2^{10} + 2^{-12}} &= \frac{2^{10} + 2^{12}}{2^{10} + \frac{1}{2^{12}}} = \frac{2^{22} + 1}{\frac{2^{22} + 1}{2^{12}}} \\ &= 2^2 = 4 \end{aligned}$$

정답_ (1) $\frac{1}{9}$ (2) 26 (3) 4

011

$$\begin{aligned} \frac{x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9}{1 + x^{-2} + x^{-4} + x^{-6} + x^{-8}} &= \frac{x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^8}} \\ &= \frac{x(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8)}{\frac{x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^8}} \\ &= x^9 \end{aligned}$$

정답_ ④

다른 풀이

주어진 식의 분모, 분자에 각각 x^9 을 곱하면

$$\begin{aligned} \frac{x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9}{1 + x^{-2} + x^{-4} + x^{-6} + x^{-8}} &= \frac{x^9(x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9)}{x^9(1 + x^{-2} + x^{-4} + x^{-6} + x^{-8})} \\ &= \frac{x^9(x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9)}{x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x} \\ &= x^9 \end{aligned}$$

012

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\frac{8^{-10} + 4^{-10}}{8^{-4} + 4^{-11}}} &= \sqrt[4]{\frac{(2^3)^{-10} + (2^2)^{-10}}{(2^3)^{-4} + (2^2)^{-11}}} = \sqrt[4]{\frac{2^{-30} + 2^{-20}}{2^{-12} + 2^{-22}}} \\ &= \sqrt[4]{\frac{2^{-20}(2^{-10} + 1)}{2^{-12}(1 + 2^{-10})}} = \sqrt[4]{2^{-8}} \\ &= \sqrt[4]{\frac{1}{2^8}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

정답_ ②

013

자연수 n 에 대하여 $\frac{1}{2^{-n}+1} = \frac{2^n}{1+2^n}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{-n}+1} + \frac{1}{2^n+1} &= \frac{2^n}{1+2^n} + \frac{1}{1+2^n} = 1 \\ \therefore \frac{1}{2^{-5}+1} + \frac{1}{2^{-3}+1} + \frac{1}{2^{-1}+1} + \frac{1}{2^0+1} + \frac{1}{2^1+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^4+1} \\ &= \left(\frac{1}{2^{-5}+1} + \frac{1}{2^5+1}\right) + \left(\frac{1}{2^{-3}+1} + \frac{1}{2^3+1}\right) + \left(\frac{1}{2^{-1}+1} + \frac{1}{2^1+1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2^0+1} \\ &= 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

정답_ ②

014

$$\begin{aligned} \left\{\left(\frac{16}{25}\right)^{\frac{7}{4}}\right\}^{\frac{2}{7}} \times \left\{\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{2}{3}} &= \left(\frac{16}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} \\ &= \left\{\left(\frac{4}{5}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \times (3^{-2})^{-1} \\ &= \frac{4}{5} \times 3^2 = \frac{36}{5} \end{aligned}$$

정답_ $\frac{36}{5}$

015

$$\begin{aligned} (a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \times (a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{3}{2}})^{-\frac{1}{2}} &= a^{-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{4}} \times a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{4}} \\ &= a^{-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = a^{-\frac{1}{2}}b \\ &= \frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a} \end{aligned}$$

정답_ ②

016

$$\begin{aligned} (a^{\sqrt{2}})^{2\sqrt{6}} \div a^{\sqrt{5}(\sqrt{15}-2\sqrt{5})} \times (\sqrt[3]{a})^{3\sqrt{3}} &= a^{4\sqrt{3}} \div a^{5\sqrt{3}-10} \times (a^{\frac{1}{3}})^{3\sqrt{3}} \\ &= a^{4\sqrt{3}} \div a^{5\sqrt{3}-10} \times a^{\sqrt{3}} \\ &= a^{4\sqrt{3}-(5\sqrt{3}-10)+\sqrt{3}} \\ &= a^{10} \end{aligned}$$

$$\therefore k = 10$$

정답_ 10

017

$$2^{-a} + 2^{-b} = \frac{1}{2^a} + \frac{1}{2^b} = \frac{2^a + 2^b}{2^{a+b}}$$

$$\text{이때 } 2^a + 2^b = 2, 2^{-a} + 2^{-b} = \frac{9}{4} \text{이므로}$$

$$\frac{9}{4} = \frac{2}{2^{a+b}}$$

$$\therefore 2^{a+b} = 2 \times \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\text{따라서 } p=9, q=8 \text{이므로}$$

$$p+q=9+8=17$$

정답_ 17

018

$$\neg. \sqrt[3]{a^4} = a^{\frac{4}{3}} \text{ (거짓)}$$

$$\neg. \frac{1}{\sqrt[5]{a^6}} = \frac{1}{a^{\frac{6}{5}}} = a^{-\frac{6}{5}} \text{ (참)}$$

$$\neg. \sqrt[7]{\frac{1}{a}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{7}} = (a^{-1})^{\frac{1}{7}} = a^{-\frac{1}{7}} \text{ (거짓)}$$

$$\neg. \sqrt{a^3 \sqrt{a^5}} = \sqrt{a \times a^{\frac{5}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{5}{4}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{5}{4}} = a^{\frac{3}{4}} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 의 2개이다.

정답_ ③

다른 풀이

$$\neg. \sqrt{a^3 \sqrt{a^5}} = \sqrt{a \times a^{\frac{5}{2}}} = \sqrt{a^{1+\frac{5}{2}}} = \sqrt{a^{\frac{7}{2}}} = (a^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{4}} \text{ (참)}$$

019

$$\begin{aligned} (1) \sqrt{2^3 \sqrt{2^5 \sqrt{2}}} &= \sqrt{2 \times 2^6 \times 2^{30} \sqrt{2}} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{6}{2}} \times 2^{\frac{30}{2}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{6}{2} + \frac{30}{2}} \\ &= 2^{\frac{21}{2}} = 2^{\frac{7}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\sqrt[4]{8}} &= \sqrt[12]{2^3} = 2^{\frac{3}{12}} = 2^{\frac{1}{4}} \\ \therefore \sqrt{2^3 \sqrt{2^5 \sqrt{2}}} &\div \sqrt[3]{\sqrt[4]{8}} \times \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{7}{10}} \div 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} \\ &= 2^{\frac{7}{10} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 2^{\frac{7}{10}} \end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{7}{10}$$

$$\begin{aligned} (2) \sqrt[3]{a \sqrt{a} \times \frac{a}{\sqrt[k]{a}}} &= \left(a \sqrt{a} \times \frac{a}{\sqrt[k]{a}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^{1+\frac{1}{2}} \times a^{1-\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(a^{\frac{3}{2} + \frac{k-1}{k}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{k-1}{3k}} \end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^4}} = \sqrt[6]{a^4} = a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{즉, } a^{\frac{1}{2} + \frac{k-1}{3k}} = a^{\frac{2}{3}} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{k-1}{3k} = \frac{2}{3}, \frac{k-1}{3k} = \frac{1}{6}$$

$$6k-6=3k, 3k=6$$

$$\therefore k=2$$

정답_ (1) $\frac{7}{10}$ (2) 2

020

$$\sqrt{a}=3 \text{에서 } a^{\frac{1}{2}}=3 \quad \therefore a=3^2$$

$$\sqrt[5]{b}=4 \text{에서 } b^{\frac{1}{5}}=4 \quad \therefore b=4^5$$

$$\therefore \sqrt[10]{ab} = a^{\frac{1}{10}} \times b^{\frac{1}{10}} = (3^2)^{\frac{1}{10}} \times (4^5)^{\frac{1}{10}} = 3^{\frac{1}{5}} \times 4^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{따라서 } m=\frac{1}{5}, n=\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$mn = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

정답_ ⑤

021

$$\text{조건 (가)에 의하여 } b = (\sqrt[3]{a})^m = a^{\frac{m}{3}}$$

$$\text{조건 (나)에 의하여 } c = (\sqrt{b})^n = b^{\frac{n}{2}}$$

$$\text{조건 (다)에 의하여 } c^4 = a^{12}$$

$$\text{이때 } c^4 = (b^{\frac{n}{2}})^4 = b^{2n} = (a^{\frac{m}{3}})^{2n} = a^{\frac{2mn}{3}} \text{이므로}$$

$$a^{\frac{2mn}{3}} = a^{12}, \frac{2mn}{3} = 12$$

$$\therefore mn=18$$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n) 은

$$(2, 9), (3, 6), (6, 3), (9, 2)$$

이므로 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수는 4이다.

정답_ ①

022

$$a=8^3=(2^3)^3=2^9 \text{이므로 } 2=a^{\frac{1}{9}}$$

$$\therefore 32^6=(2^5)^6=2^{30}=(a^{\frac{1}{9}})^{30}=a^{\frac{10}{3}}$$

정답_ ④

023

$$5^4=a \text{에서 } 5=a^{\frac{1}{4}}$$

$$9^6=b \text{에서 } (3^2)^6=b, 3^{12}=b \quad \therefore 3=b^{\frac{1}{12}}$$

$$\therefore 45^{10}=(3^2 \times 5)^{10}=3^{20} \times 5^{10}=(b^{\frac{1}{12}})^{20} \times (a^{\frac{1}{4}})^{10}=a^{\frac{5}{2}} b^{\frac{5}{3}}$$

정답_ ④

024

$$a=\sqrt{3} \text{에서 } a^2=3$$

$$b=\sqrt[3]{2} \text{에서 } b^3=2$$

$$\therefore \sqrt[12]{6^5}=6^{\frac{5}{12}}=(2 \times 3)^{\frac{5}{12}}=(a^2 \times b^3)^{\frac{5}{12}}=a^{\frac{5}{6}} b^{\frac{5}{4}}$$

정답_ ③

025

$$\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{n}}=(3^{-4})^{\frac{1}{n}}=3^{-\frac{4}{n}} \text{에서 } 3^{-\frac{4}{n}} \text{이 자연수가 되려면 } -\frac{4}{n} \text{가 음이}$$

아닌 정수이어야 한다.

즉, n 이 4의 음의 약수이어야 하므로

$$n=-1, -2, -4$$

이때 $3^{-\frac{4}{n}}$ 의 값은 각각 81, 9, 3이므로 집합 A 의 원소 중에서 자연수인 것은 3, 9, 81의 3개이다.

정답_ ③

026

$$a^3=3 \text{에서 } a=3^{\frac{1}{3}}$$

$$b^6=5 \text{에서 } b=5^{\frac{1}{6}}$$

$$c^9=7 \text{에서 } c=7^{\frac{1}{9}}$$

이때 $(abc)^n = (3^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{6}} \times 7^{\frac{1}{9}})^n = 3^{\frac{n}{3}} \times 5^{\frac{n}{6}} \times 7^{\frac{n}{9}}$ 이 자연수가 되려면

$\frac{n}{3}, \frac{n}{6}, \frac{n}{9}$ 이 모두 음이 아닌 정수이어야 한다.

즉, n 이 3, 6, 9의 공배수이어야 하므로 자연수 n 의 최소값은 3, 6, 9의 최소공배수인 18이다.

정답_ ②

027

$$\sqrt[8]{3\sqrt{7}} = \sqrt[8]{3 \times 7^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{1}{8}} \times 7^{\frac{1}{16}}$$

즉, $3^{\frac{1}{8}} \times 7^{\frac{1}{16}}$ 이 자연수 N 의 n 제곱근이라고 하면

$$N = (3^{\frac{1}{8}} \times 7^{\frac{1}{16}})^n = 3^{\frac{n}{8}} \times 7^{\frac{n}{16}}$$

따라서 $3^{\frac{n}{8}} \times 7^{\frac{n}{16}}$ 이 자연수가 되려면 $\frac{n}{8}, \frac{n}{16}$ 이 모두 음이 아닌 정수이어야 한다. 즉, n 이 8, 16의 공배수이어야 하고 $2 \leq n \leq 200$ 이므로 자연수 n 은 16, 32, 48, ..., 192의 12개이다.

정답_ ③

028

두 자연수 m, n 에 대하여 $\sqrt[3]{2m} \times \sqrt{n^3}$ 의 값이 자연수이므로 $\sqrt[3]{2m}, \sqrt{n^3}$ 의 값이 각각 자연수이어야 한다.

$$\sqrt[3]{2m} = (2m)^{\frac{1}{3}} \text{이 자연수이므로}$$

$$m = 2^2 \times k^3 \text{ (} k \text{는 자연수)}$$

의 꼴이다.

즉, 135 이하의 자연수 중에서 m 이 될 수 있는 값은

$$2^2 \times 1^3 = 4, 2^2 \times 2^3 = 32, 2^2 \times 3^3 = 108$$

$$\text{또, } \sqrt{n^3} = n^{\frac{3}{2}} \text{이 자연수이므로}$$

$$n = l^2 \text{ (} l \text{은 자연수)}$$

의 꼴이다.

즉, 9 이하의 자연수 중에서 n 이 될 수 있는 값은

$$1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9$$

따라서 $m+n$ 의 최댓값은

$$108 + 9 = 117$$

정답_ ⑤

029

$$A = \sqrt[3]{4}, B = \sqrt{3}, C = \sqrt[6]{12} \text{에서 } 3, 2, 6 \text{의 최소공배수가 } 6 \text{이므로}$$

$$A = \sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{16}$$

$$B = \sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$$

$$C = \sqrt[6]{12}$$

$$\text{이때 } 12 < 16 < 27 \text{이므로 } \sqrt[6]{12} < \sqrt[6]{16} < \sqrt[6]{27}$$

$$\therefore C < A < B$$

정답_ ④

030

50, 40, 30의 최대공약수는 10이므로 주어진 세 수의 지수를 10으로 같게 하면

$$A = 2^{50} = (2^5)^{10} = 32^{10}$$

$$B = 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$$

$$C = 4^{30} = (4^3)^{10} = 64^{10}$$

$$\text{이때 } 32 < 64 < 81 \text{이므로 } 32^{10} < 64^{10} < 81^{10}$$

$$\therefore A < C < B$$

정답_ ②

031

$$\sqrt[3]{2\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2} \times \sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{12}} = \sqrt[6]{12}$$

$$\sqrt[3]{3\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^2} \times \sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{18}} = \sqrt[6]{18}$$

$$\sqrt[2]{2^3\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2^3 \times 3} = \sqrt[4]{24} = \sqrt[6]{24}$$

$$\text{이때 } 12 < 18 < 24 \text{이므로 } \sqrt[6]{12} < \sqrt[6]{18} < \sqrt[6]{24}$$

$$\text{따라서 } a = \sqrt[3]{2\sqrt{3}}, b = \sqrt[2]{2^3\sqrt{3}} \text{이므로}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt[2]{2^3\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt[6]{24}}{\sqrt[6]{12}} = \sqrt[6]{\frac{24}{12}} = \sqrt[6]{2}$$

정답_ ①

다른 풀이

$$\sqrt[3]{2\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2 \times 3^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{2}{6}} \times 3^{\frac{1}{6}} = (2^2 \times 3)^{\frac{1}{6}} = 12^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt[3]{3\sqrt{2}} = \sqrt[3]{3 \times 2^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{6}} \times 2^{\frac{1}{6}} = (3^2 \times 2)^{\frac{1}{6}} = 18^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt[2]{2^3\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2^3 \times 3} = 2^{\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{6}} \times 3^{\frac{1}{6}} = (2^3 \times 3)^{\frac{1}{6}} = 24^{\frac{1}{6}}$$

$$\text{이때 } 12 < 18 < 24 \text{이므로 } 12^{\frac{1}{6}} < 18^{\frac{1}{6}} < 24^{\frac{1}{6}}$$

$$\text{따라서 } a = 12^{\frac{1}{6}}, b = 24^{\frac{1}{6}} \text{이므로}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{24^{\frac{1}{6}}}{12^{\frac{1}{6}}} = \left(\frac{24}{12}\right)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$$

032

$$(i) A - B = (3\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}) - (\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3})$$

$$= 2(\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}) = 2(\sqrt[6]{8} - \sqrt[6]{9}) < 0$$

$$\therefore A < B$$

$$(ii) C - D = (2\sqrt[3]{3} - 3\sqrt{2}) - (2\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{3})$$

$$= 5(\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}) = 5(\sqrt[6]{9} - \sqrt[6]{8}) > 0$$

$$\therefore C > D$$

$$(iii) A - C = (3\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}) - (2\sqrt[3]{3} - 3\sqrt{2})$$

$$= 6\sqrt{2} - \sqrt[3]{3} = 4\sqrt{2} + (2\sqrt{2} - \sqrt[3]{3})$$

$$= 4\sqrt{2} + (\sqrt[6]{8} - \sqrt[3]{3})$$

$$= 4\sqrt{2} + (\sqrt[6]{512} - \sqrt[6]{9}) > 0$$

$$\therefore A > C$$

$$(i) \sim (iii) \text{에서 } D < C < A < B$$

따라서 가장 큰 수 B 와 가장 작은 수 D 의 합은

$$B + D = (\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3}) + (2\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{3})$$

$$= 3\sqrt{2}$$

정답_ $3\sqrt{2}$

참고 두 수 또는 두 식의 대소를 비교할 때에는 다음 중 하나를 이용한다.

- (1) 두 수의 차의 부호를 조사한다.
 $\Rightarrow A - B > 0 \iff A > B$
- (2) 두 수의 제곱의 차의 부호를 조사한다.
 $\Rightarrow A > 0, B > 0$ 일 때, $A^2 - B^2 > 0 \iff A^2 > B^2 \iff A > B$
- (3) 두 수의 비를 조사한다.
 $\Rightarrow A > 0, B > 0$ 일 때, $\frac{A}{B} > 1 \iff A > B$

033

- (1) $(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) + (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$
 $= \{(a^{\frac{1}{3}})^3 - (b^{\frac{1}{3}})^3\} + \{(a^{\frac{1}{2}})^2 - (b^{\frac{1}{2}})^2\}$
 $= (a - b) + (a - b)$
 $= 2a - 2b$
- (2) $(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} + 1)(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} - 1) = (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 - 1^2$
 $= a + 2 + a^{-1} - 1$
 $= a + \frac{1}{a} + 1$
- (3) $(\sqrt[3]{7} + 1)(\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{7} + 1) = (\sqrt[3]{7} + 1)\{(\sqrt[3]{7})^2 - \sqrt[3]{7} + 1\}$
 $= (\sqrt[3]{7})^3 + 1^3$
 $= 7 + 1$
 $= 8$
- 정답** (1) $2a - 2b$ (2) $a + \frac{1}{a} + 1$ (3) 8

참고 지수법칙과 곱셈 공식

$a > 0, b > 0$ 이고 x, y 가 실수일 때

- (1) $(a^x + b^y)(a^x - b^y) = a^{2x} - b^{2y}$
- (2) $(a^x + b^y)^2 = a^{2x} + 2a^x b^y + b^{2y}$
 $(a^x - b^y)^2 = a^{2x} - 2a^x b^y + b^{2y}$
- (3) $(a^x + b^y)(a^{2x} - a^x b^y + b^{2y}) = a^{3x} + b^{3y}$
 $(a^x - b^y)(a^{2x} + a^x b^y + b^{2y}) = a^{3x} - b^{3y}$
- (4) $(a^x + b^y)^3 = a^{3x} + 3a^{2x} b^y + 3a^x b^{2y} + b^{3y}$
 $(a^x - b^y)^3 = a^{3x} - 3a^{2x} b^y + 3a^x b^{2y} - b^{3y}$

034

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-3^{\frac{1}{8}}} + \frac{1}{1+3^{\frac{1}{8}}} + \frac{2}{1+3^{\frac{1}{4}}} + \frac{4}{1+3^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1+3^{\frac{1}{8}}+1-3^{\frac{1}{8}}}{(1-3^{\frac{1}{8}})(1+3^{\frac{1}{8}})} + \frac{2}{1+3^{\frac{1}{4}}} + \frac{4}{1+3^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{2}{1-3^{\frac{1}{4}}} + \frac{2}{1+3^{\frac{1}{4}}} + \frac{4}{1+3^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{2(1+3^{\frac{1}{4}})+2(1-3^{\frac{1}{4}})}{(1-3^{\frac{1}{4}})(1+3^{\frac{1}{4}})} + \frac{4}{1+3^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{4}{1-3^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{1+3^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{4(1+3^{\frac{1}{2}})+4(1-3^{\frac{1}{2}})}{(1-3^{\frac{1}{2}})(1+3^{\frac{1}{2}})} \\ &= \frac{8}{1-3} \\ &= -4 \end{aligned}$$

정답 ②

035

$$\begin{aligned} 2^{\frac{3}{2}} &= A, 2^{\frac{1}{2}} = B \text{로 놓으면} \\ (2^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{1}{2}})^2 + (2^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{1}{2}})^2 &= (A+B)^2 + (A-B)^2 \\ &= (A^2 + 2AB + B^2) + (A^2 - 2AB + B^2) \\ &= 2(A^2 + B^2) = 2\{(2^{\frac{3}{2}})^2 + (2^{\frac{1}{2}})^2\} \\ &= 2(2^3 + 2) = 2(8 + 2) \\ &= 20 \end{aligned}$$

정답 ⑤

036

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{3}} &= A, a^{-\frac{1}{3}} = B \text{로 놓으면 } a = A^3, a^{-1} = B^3 \text{이므로} \\ (a - a^{-1}) \div (a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}) &= \frac{A^3 - B^3}{A - B} \\ &= \frac{(A - B)(A^2 + AB + B^2)}{A - B} \\ &= A^2 + AB + B^2 \\ &= (a^{\frac{1}{3}})^2 + a^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{3}} + (a^{-\frac{1}{3}})^2 \\ &= a^{\frac{2}{3}} + 1 + a^{-\frac{2}{3}} \\ &= (2^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}} + 1 + (2^{\frac{2}{3}})^{-\frac{2}{3}} \\ &= 2 + 1 + 2^{-1} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

정답 ④

037

- (1) $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ 의 양변을 제곱하면
 $(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = 3^2$
 $x + 2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1} = 9$
 $x + 2 + x^{-1} = 9$
 $\therefore x + x^{-1} = 7$
- (2) $x + x^{-1} = 7$ 의 양변을 제곱하면
 $(x + x^{-1})^2 = 7^2$
 $x^2 + 2xx^{-1} + x^{-2} = 49$
 $x^2 + 2 + x^{-2} = 49$
 $\therefore x^2 + x^{-2} = 47$
- (3) $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ 의 양변을 세제곱하면
 $(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^3 = 3^3$
 $(x^{\frac{1}{2}})^3 + 3x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) + (x^{-\frac{1}{2}})^3 = 27$
 $x^{\frac{3}{2}} + 3 \times 1 \times 3 + x^{-\frac{3}{2}} = 27$
 $x^{\frac{3}{2}} + 9 + x^{-\frac{3}{2}} = 27$
 $\therefore x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = 18$

정답 (1) 7 (2) 47 (3) 18

038

$$\begin{aligned} (3^x + 3^{-x})^2 &= 9^x + 9^{-x} + 2 = 34 + 2 = 36 \\ 3^x + 3^{-x} &> 0 \text{이므로} \\ 3^x + 3^{-x} &= 6 \end{aligned}$$

..... ㉠

$$(3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}})^2 = 3^x + 3^{-x} + 2 = 6 + 2 = 8$$

$$3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}} > 0 \text{ 이므로}$$

$$3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}} = 2\sqrt{2}$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\frac{3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}}}{3^x + 3^{-x}} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

..... ㉠

정답_ ②

039

$$\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 4 + \sqrt{3} \text{의 양변을 세제곱하면}$$

$$x + \frac{1}{x} + 3\sqrt[3]{x} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) = 64 + 3\sqrt{3} + 12\sqrt{3}(4 + \sqrt{3})$$

$$x + \frac{1}{x} + 3\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = 100 + 51\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= 100 + 51\sqrt{3} - 3\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \\ &= 100 + 51\sqrt{3} - 3(4 + \sqrt{3}) \\ &= 88 + 48\sqrt{3} \end{aligned}$$

따라서 $a = 88$, $b = 48$ 이므로

$$a - b = 88 - 48 = 40$$

정답_ ⑤

040

$$\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = 3 \text{에서 } a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 3$$

$$a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 3 \text{의 양변을 세제곱하면}$$

$$(a^{\frac{1}{2}})^3 - (a^{-\frac{1}{2}})^3 - 3a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}) = 27$$

$$a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} - 3 \times 1 \times 3 = 27$$

$$\therefore a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} = 36$$

..... ㉠

$$a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 3 \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$(a^{\frac{1}{2}})^2 + (a^{-\frac{1}{2}})^2 - 2 = 9$$

$$a + a^{-1} - 2 = 9$$

$$\therefore a + a^{-1} = 11$$

..... ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$$\frac{a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}}}{a + a^{-1} + 1} = \frac{36}{11 + 1} = 3$$

정답_ ①

041

주어진 식의 분모, 분자에 각각 a^x 을 곱하면

$$\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{a^x(a^{3x} - a^{-3x})}{a^x(a^x - a^{-x})} = \frac{a^{4x} - a^{-2x}}{a^{2x} - 1}$$

$$= \frac{(a^{2x})^2 - \frac{1}{a^{2x}}}{a^{2x} - 1} = \frac{5^2 - \frac{1}{5}}{5 - 1}$$

$$= \frac{\frac{124}{5}}{4} = \frac{31}{5}$$

정답_ ④

042

$$3^{\frac{1}{x}} = 25 \text{에서 } 25^x = 3$$

$$\therefore 5^{2x} = 3$$

주어진 식의 분모, 분자에 각각 5^x 을 곱하면

$$\begin{aligned} \frac{5^{3x} - 5^{-3x}}{5^x + 5^{-x}} &= \frac{5^x(5^{3x} - 5^{-3x})}{5^x(5^x + 5^{-x})} = \frac{5^{4x} - 5^{-2x}}{5^{2x} + 1} \\ &= \frac{(5^{2x})^2 - (5^{2x})^{-1}}{5^{2x} + 1} = \frac{3^2 - \frac{1}{3}}{3 + 1} \\ &= \frac{\frac{26}{3}}{4} = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

정답_ $\frac{13}{6}$

043

$$\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2 \text{에서}$$

$$3^x + 3^{-x} = 2(3^x - 3^{-x})$$

$$3^x + 3^{-x} = 2 \times 3^x - 2 \times 3^{-x}$$

$$3^x = 3 \times 3^{-x}, (3^x)^2 = 3$$

$$\therefore 9^x = 3$$

$$\therefore 9^x + 9^{-x} = 9^x + \frac{1}{9^x} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

정답_ $\frac{10}{3}$

044

$$\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} \text{의 분모, 분자에 각각 } a^x \text{을 곱하면}$$

$$\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{a^x(a^x - a^{-x})}{a^x(a^x + a^{-x})} = \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1}$$

$$\therefore \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$2(a^{2x} - 1) = a^{2x} + 1, a^{2x} = 3$$

$$\therefore a^x = \sqrt{3} (\because a > 0)$$

$$\text{따라서 } \frac{a^{\frac{3}{2}x} - a^{-\frac{x}{2}}}{a^{\frac{x}{2}} + a^{-\frac{3}{2}x}} \text{의 분모, 분자에 각각 } a^{\frac{x}{2}} \text{을 곱하면}$$

$$\begin{aligned} \frac{a^{\frac{3}{2}x} - a^{-\frac{x}{2}}}{a^{\frac{x}{2}} + a^{-\frac{3}{2}x}} &= \frac{a^{\frac{x}{2}}(a^{\frac{3}{2}x} - a^{-\frac{x}{2}})}{a^{\frac{x}{2}}(a^{\frac{x}{2}} + a^{-\frac{3}{2}x})} = \frac{a^{2x} - 1}{a^x + a^{-x}} \\ &= \frac{(\sqrt{3})^2 - 1}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\frac{4}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

정답_ ③

045

$$2^x = 36 \text{에서 } 2 = 36^{\frac{1}{x}} = (6^2)^{\frac{1}{x}} = 6^{\frac{2}{x}}$$

..... ㉠

$$3^y = 36 \text{에서 } 3 = 36^{\frac{1}{y}} = (6^2)^{\frac{1}{y}} = 6^{\frac{2}{y}}$$

..... ㉡

㉠ $\times$ ㉡을 하면

$$6 = 6^{\frac{2}{x}} \times 6^{\frac{2}{y}}, 6^{2(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})} = 6$$

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \quad \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

정답_ ②

046

$$12^a=16 \text{에서 } 12^a=2^4 \quad \therefore 12=2^{\frac{4}{a}}$$

$$3^b=2 \text{에서 } 3=2^{\frac{1}{b}}$$

㉠÷㉡을 하면

$$4=2^{\frac{4}{a}} \div 2^{\frac{1}{b}}, 2^{\frac{4}{a}-\frac{1}{b}}=2^2$$

$$\therefore \frac{4}{a}-\frac{1}{b}=2$$

..... ㉠

..... ㉡

정답_ ②

047

$$15^x=8 \text{에서 } 15^x=2^3 \quad \therefore 15=2^{\frac{3}{x}}$$

$$a^y=2 \text{에서 } a=2^{\frac{1}{y}}$$

㉠×㉡을 하면

$$15a=2^{\frac{3}{x}} \times 2^{\frac{1}{y}}, 15a=2^{\frac{3}{x}+\frac{1}{y}}$$

$$\text{이때 } \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=2 \text{이므로}$$

$$15a=2^2=4$$

$$\therefore a=\frac{4}{15}$$

..... ㉠

..... ㉡

정답_ ④

048

$$3^x=7^y=21^z=k \ (k>0) \text{로 놓으면 } xyz \neq 0 \text{에서 } k \neq 1$$

$$3^x=k \text{에서 } 3=k^{\frac{1}{x}}$$

$$7^y=k \text{에서 } 7=k^{\frac{1}{y}}$$

$$21^z=k \text{에서 } 21=k^{\frac{1}{z}}$$

㉠×㉡÷㉢을 하면

$$3 \times 7 \div 21 = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \div k^{\frac{1}{z}}$$

$$\therefore k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}=1$$

$$\text{이때 } k \neq 1 \text{이므로 } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$$

..... ㉠

..... ㉡

..... ㉢

정답_ ③

049

$$a^x=b^y=5^z=k \ (k>0) \text{로 놓으면 } a \neq 1, b \neq 1, xyz \neq 0 \text{에서 } k \neq 1$$

$$a^x=k \text{에서 } a=k^{\frac{1}{x}}$$

$$b^y=k \text{에서 } b=k^{\frac{1}{y}}$$

$$5^z=k \text{에서 } 5=k^{\frac{1}{z}}$$

$$\text{이때 } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z} \text{이므로}$$

$$k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{2}{z}}, k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}}=(k^{\frac{1}{z}})^2$$

$$\therefore ab=5^2=25$$

정답_ 25

050

$xy \neq 0$ 이므로 $x+y+xy=0$ 의 양변을 xy 로 나누면

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}+1=0$$

$$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-1$$

..... ㉠

$$\left(\frac{1}{10}\right)^x=k \text{에서 } \frac{1}{10}=k^{\frac{1}{x}}$$

..... ㉡

$$20^y=k \text{에서 } 20=k^{\frac{1}{y}}$$

..... ㉢

$$\text{㉡} \times \text{㉢을 하면 } 2=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

$$\text{㉠에서 } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-1 \text{이므로}$$

$$k^{-1}=2 \quad \therefore k=\frac{1}{2}$$

정답_ $\frac{1}{2}$

051

박테리아가 1분마다 k 배로 증식한다고 하면 오후 12시 n 분의 박테리아의 수는

$$N \times k^n$$

같은 날 오후 12시 30분의 박테리아의 수가 10 N 이므로

$$N \times k^{30}=10N \quad \therefore k^{30}=10$$

따라서 같은 날 오후 12시 50분의 박테리아의 수는

$$N \times k^{50}=N \times (k^{30})^{\frac{5}{3}}=10^{\frac{5}{3}}N$$

정답_ ④

052

A 용액 속으로 빛을 비추면 2 m 진행할 때마다 빛의 밝기가 20 %씩 감소하므로

$$0.8l_0=l_0k^{\frac{2}{z}} \quad \therefore k=0.8$$

A 용액 속에서 빛이 20 m, 30 m 진행한 후의 밝기를 각각 l_{20} , l_{30} 이라고 하면

$$l_{20}=l_0k^{\frac{20}{z}}=l_0k^{10}=l_0 \times 0.8^{10}$$

$$l_{30}=l_0k^{\frac{30}{z}}=l_0k^{15}=l_0 \times 0.8^{15}$$

이때 $l_{20}=ml_{30}$ 이므로

$$m=\frac{l_{20}}{l_{30}}=\frac{l_0 \times 0.8^{10}}{l_0 \times 0.8^{15}}=\frac{1}{0.8^5}$$

$$\therefore k^3m=0.8^3 \times \frac{1}{0.8^5}=\frac{1}{0.8^2}=\frac{1}{0.64}=\frac{1}{\frac{64}{100}}=\frac{25}{16}$$

정답_ ③

053

두 물체 A, B의 질량을 각각 m_A , m_B 라 하고 단면적을 각각 S_A , S_B 라고 하자.

$$m_A : m_B = 1 : 2\sqrt{2}, S_A : S_B = 1 : 8 \text{이므로}$$

$$m_B=2\sqrt{2}m_A, S_B=8S_A$$

$$\text{즉, } \frac{v_A^2}{v_B^2}=\frac{\frac{2m_A g}{D\rho S_A}}{\frac{4\sqrt{2}m_A g}{D\rho(8S_A)}}=2\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2=2\sqrt{2}, \left[\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}=(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^3=2^{\frac{9}{4}}$$

정답_ ④

054

집합 X 의 원소 중에서 양수의 개수를 p , 음수의 개수를 q 라고 하자.

양수의 네제곱근 중 실수인 것은 2개, 0의 네제곱근 중 실수인 것은 1개, 음수의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.

이때 $n(A)=7$ 이므로 $0 \in X$

$n(A)=2p+1=7$ 에서

$p=3$ ①

실수의 세제곱근 중 실수인 것은 언제나 1개이므로

$n(B)=p+q+1=5$ 에서

$q=1$ ②

따라서 집합 X 의 원소는 양수가 3개, 0, 음수가 1개이어야 한다.

이때 집합 X 의 모든 원소의 합은

$X=\{-1, 0, 3, 4, 5\}$

일 때 최대이므로 구하는 최댓값은

$-1+0+3+4+5=11$ ③

정답_ 11

채점 기준	비율
① 집합 X 의 원소 중 양수의 개수 구하기	40 %
② 집합 X 의 원소 중 음수의 개수 구하기	40 %
③ 집합 X 의 모든 원소의 합의 최댓값 구하기	20 %

055

두 자연수 a, b 에 대하여

(i) $\sqrt[3]{\frac{2^a \times 5^b}{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^a} \times \sqrt[3]{5^b}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^{\frac{a}{3}} \times 5^{\frac{b}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{a-1}{3}} \times 5^{\frac{b}{3}}$ 이 자연수이므로

$a-1=3m, b=3n$ (m 은 음이 아닌 정수, n 은 자연수)

의 꼴이어야 한다.

$\therefore a=1, 4, 7, 10, \dots, b=3, 6, 9, 12, \dots$ ①

(ii) $\sqrt{\frac{3^a}{2^{b+1}}} = \frac{\sqrt{3^a}}{\sqrt{2^{b+1}}} = \frac{3^{\frac{a}{2}}}{2^{\frac{b+1}{2}}}$ 이 유리수이므로

$a=2p, b+1=2q$ (p, q 는 자연수)

의 꼴이어야 한다.

$\therefore a=2, 4, 6, 8, \dots, b=1, 3, 5, 7, \dots$ ②

(i), (ii)에서 $a=4, 10, 16, \dots, b=3, 9, 15, \dots$

따라서 $a+b$ 는 $a=4, b=3$ 일 때 최소이므로 $a+b$ 의 최솟값은

$4+3=7$ ③

정답_ 7

채점 기준	비율
① $\sqrt[3]{\frac{2^a \times 5^b}{2}}$ 이 자연수가 되도록 하는 a, b 의 값 구하기	40 %
② $\sqrt{\frac{3^a}{2^{b+1}}}$ 이 유리수가 되도록 하는 a, b 의 값 구하기	40 %
③ $a+b$ 의 최솟값 구하기	20 %

056

$A=2^{\sqrt{3}}$

$B=\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3^4}=3^{\frac{4}{3}}$

$C=\sqrt[4]{256}=\sqrt[4]{2^8}=2^2$

이때 $\sqrt{3}<2$ 이므로

$2^{\sqrt{3}}<2^2 \quad \therefore A<C$ ①

$B^3=81, C^3=64$ 이므로

$C<B$ ②

$\therefore A<C<B$ ③

정답_ $A<C<B$

채점 기준	비율
① $A<C$ 임을 알기	40 %
② $C<B$ 임을 알기	40 %
③ $A<C<B$ 임을 알기	20 %

057

$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=2$ 의 양변을 제곱하면

$a+a^{-1}-2=4 \quad \therefore a+a^{-1}=6$ ㉠

..... ①

$(a-a^{-1})^2=a^2+a^{-2}-2=(a+a^{-1})^2-4=6^2-4=32$

이때 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=2>0$ 에서 $a>1$ 이므로 $a-a^{-1}>0$

$\therefore a-a^{-1}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ ㉡

..... ②

㉠, ㉡에 의하여

$\frac{a-a^{-1}}{a+a^{-1}}=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ③

정답_ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

채점 기준	비율
① $a+a^{-1}$ 의 값 구하기	40 %
② $a-a^{-1}$ 의 값 구하기	40 %
③ $\frac{a-a^{-1}}{a+a^{-1}}$ 의 값 구하기	20 %

058

$10=\frac{50}{5}=\frac{50}{50^a}=50^{1-a}$ 이므로 ①

$10^{\frac{a+b+2}{3(1-a)}}=(50^{1-a})^{\frac{a+b+2}{3(1-a)}}=50^{\frac{a+b+2}{3}}$

$=\sqrt[3]{50^a \times 50^b \times 50^2}=\sqrt[3]{5 \times 10 \times 50^2}$

$=\sqrt[3]{50^3}=50$ ②

정답_ 50

채점 기준	비율
① $10=50^{1-a}$ 임을 알기	50 %
② 주어진 식의 값 구하기	50 %

059

$3^a=4^b$ 에서 $(3^a)^c=(4^b)^c$

$\therefore 3^{ac}=4^{bc}$ ①

$4^b=5^c$ 에서 $(4^b)^a=(5^c)^a$

$\therefore 4^{ab}=5^{ac}$ ②

이때 $ac=2$ 이므로

$4^{bc}=3^2=9, 4^{ab}=5^2=25$ ③

$$\therefore 4^{ab-bc} = 4^{ab} \div 4^{bc} = \frac{25}{9} \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

정답_ $\frac{25}{9}$

채점 기준	비율
① $3^{ac} = 4^{bc}$ 임을 알기	30%
② $4^{ab} = 5^{ac}$ 임을 알기	30%
③ 4^{ab} , 4^{bc} 의 값 구하기	20%
④ 4^{ab-bc} 의 값 구하기	20%

다른 풀이

$$4^{ab-bc} = (4^b)^a \div (4^b)^c = (5^c)^a \div (3^a)^c = \left(\frac{5}{3}\right)^{ac} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

060

모든 실수 x 에 대하여 $\sqrt[3]{-x^2+2nx-5n}$ 이 음수가 되려면 모든 실수 x 에 대하여

$$-x^2+2nx-5n < 0, \text{ 즉 } x^2-2nx+5n > 0$$

이어야 한다.

이차방정식 $x^2-2nx+5n=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = n^2 - 5n < 0$$

$$n(n-5) < 0 \quad \therefore 0 < n < 5$$

이때 n 은 자연수이므로 $n=1, 2, 3, 4$

따라서 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$1+2+3+4=10$$

정답_ ④

061

n 이 홀수일 때, $m-2n$ 의 값에 관계없이 $m-2n$ 의 n 제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 항상 1이므로

$$f(3)=1$$

이때 $f(2)+f(3)+f(4)=3$ 이므로

$$f(2)+f(4)=3-f(3)=3-1=2$$

$$\therefore f(2)=2, f(4)=0 \text{ 또는 } f(2)=1, f(4)=1$$

$$\text{또는 } f(2)=0, f(4)=2$$

(i) $f(2)=2, f(4)=0$ 일 때

$$m-4 > 0, m-8 < 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$m > 4, m < 8 \quad \therefore 4 < m < 8$$

이때 m 은 자연수이므로 $m=5, 6, 7$

(ii) $f(2)=1, f(4)=1$ 일 때

$$m-4=0, m-8=0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$m=4, m=8$$

m 의 값이 4이면서 동시에 8일 수는 없으므로 이를 만족시키는 자연수 m 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $f(2)=0, f(4)=2$ 일 때

$$m-4 < 0, m-8 > 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$m < 4, m > 8$$

이를 동시에 만족시키는 자연수 m 의 값은 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에서 $m=5, 6, 7$

따라서 모든 자연수 m 의 값의 합은

$$5+6+7=18$$

정답_ ①

062

x 에 대한 이차방정식 $x^2-\sqrt[3]{16}x+a=0$ 의 두 근이 $\sqrt[3]{2}$ 와 b 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sqrt[3]{2}+b=\sqrt[3]{16}, \sqrt[3]{2}b=a$$

따라서

$$b=\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2^4}-\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}$$

$$a=\sqrt[3]{2}b=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2^2}$$

이므로

$$ab=\sqrt[3]{2^2}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2^3}=2$$

정답_ ③

063

$$f(x)=\frac{7^x}{7^x+1} \text{ 이므로}$$

$$f(-x)=\frac{7^{-x}}{7^{-x}+1}=\frac{7^x \times 7^{-x}}{7^x(7^{-x}+1)}=\frac{1}{7^x+1}$$

$$\text{따라서 } f(x)+f(-x)=\frac{7^x}{7^x+1}+\frac{1}{7^x+1}=\frac{7^x+1}{7^x+1}=1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} a+b &= \{f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(100)\} \\ &\quad + \{f(-1)+f(-2)+f(-3)+\dots+f(-100)\} \\ &= \{f(1)+f(-1)\} + \{f(2)+f(-2)\} + \{f(3)+f(-3)\} \\ &\quad + \dots + \{f(100)+f(-100)\} \\ &= \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{100\text{개}} = 100 \end{aligned}$$

정답_ 100

064

$$f(n)=n+2\sqrt{n+1}\sqrt{11}=(n+2)(n+1)\sqrt{11}=11\frac{1}{(n+1)(n+2)} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} f(1)\times f(2)\times f(3)\times\dots\times f(m-1) &= 11^{\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\dots+\frac{1}{m(m+1)}} \\ &= 11^{\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\dots+\frac{1}{m(m+1)}} \\ &= 11^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\dots+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)} \\ &= 11^{\frac{1}{2}-\frac{1}{m+1}} \\ &= 11^{\frac{m-1}{2m+2}} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 11^{\frac{m-1}{2m+2}}=m+1\sqrt[100]{11}=11^{\frac{100}{m+1}} \text{ 이므로}$$

$$11^{\frac{m-1}{2m+2}}=11^{\frac{100}{m+1}}, \frac{m-1}{2m+2}=\frac{100}{m+1}$$

$$\text{이때 } \frac{100}{m+1}=\frac{200}{2m+2} \text{ 이므로}$$

$$m-1=200 \quad \therefore m=201$$

정답_ ④

065

$n=2^x \times 3^y \times 5^z$ (x, y, z 는 음이 아닌 정수)으로 놓으면

$$\sqrt{\frac{n}{2}}=\sqrt{\frac{2^x \times 3^y \times 5^z}{2}}=2^{\frac{x-1}{2}} \times 3^{\frac{y}{2}} \times 5^{\frac{z}{2}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{n}{3}}=\sqrt[3]{\frac{2^x \times 3^y \times 5^z}{3}}=2^{\frac{x}{3}} \times 3^{\frac{y-1}{3}} \times 5^{\frac{z}{3}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{n}{5}}=\sqrt[5]{\frac{2^x \times 3^y \times 5^z}{5}}=2^{\frac{x}{5}} \times 3^{\frac{y}{5}} \times 5^{\frac{z-1}{5}}$$

세 수 $\sqrt{\frac{n}{2}}, \sqrt[3]{\frac{n}{3}}, \sqrt[5]{\frac{n}{5}}$ 이 모두 자연수이어야 하므로

$x-1$ 은 2의 배수이고, x 는 3과 5의 공배수이어야 한다.

즉, x 의 최소값은 3과 5의 최소공배수인 15이다.

또, $y-1$ 은 3의 배수이고, y 는 2와 5의 공배수이어야 한다.

즉, y 의 최소값은 2와 5의 최소공배수인 10이다.

또, $z-1$ 은 5의 배수이고, z 는 2와 3의 공배수이어야 한다.

즉, z 의 최소값은 2와 3의 최소공배수인 6이다.

따라서 n 의 최소값은 $2^{15} \times 3^{10} \times 5^6$ 이므로

$p=15, q=10, r=6$

$\therefore p+q+r=15+10+6=31$

정답 ⑤

066

함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이고 조건 (나)에 의하여 최소값이 음의 정수이므로 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i) n 이 홀수일 때

방정식 $x^n-64=0$, 즉 $x^n=64$ 의 실근은

$x=\sqrt[n]{64}$

의 1개이다.

따라서 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$ 의 근이 모두 중근일 수 없으므로 조건 (가)를 만족시키는 이차함수 $f(x)$ 는 존재하지 않는다.

(ii) n 이 짝수일 때

방정식 $x^n-64=0$, 즉 $x^n=64$ 의 실근은

$x=-\sqrt[n]{64}$ 또는 $x=\sqrt[n]{64}$

$\therefore x=-2^{\frac{6}{n}}$ 또는 $x=2^{\frac{6}{n}}$

따라서 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$f(x)=(x+2^{\frac{6}{n}})(x-2^{\frac{6}{n}})=x^2-2^{\frac{12}{n}}$

이어야 한다.

이때 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최소값 $-2^{\frac{12}{n}}$ 을 갖고, 이 값이 조건 (나)에 의하여 음의 정수이어야 하므로 n 은 12의 양의 약수이어야 한다.

$\therefore n=2, 4, 6, 12$

(i), (ii)에서 $n=2, 4, 6, 12$

따라서 모든 자연수 n 의 값의 합은

$2+4+6+12=24$

정답 24

067

ㄱ. $f(n, a^3)=\sqrt[n]{a^3}=3\sqrt[n]{a^9}=f(3n, a^9)$ (참)

ㄴ. $f(n, a) \times f(n+1, a)=\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n+1]{a}$

$=\sqrt[n(n+1)]{a^{n+1}} \times \sqrt[n(n+1)]{a^n}$

$=\sqrt[n(n+1)]{a^{2n+1}}$ (거짓)

ㄷ. $m=3, n=2, a=\frac{1}{64}$ 이라고 하면

$f\left(3, \frac{1}{64}\right)=\sqrt[3]{\frac{1}{64}}=\frac{1}{4}, f\left(2, \frac{1}{64}\right)=\sqrt{\frac{1}{64}}=\frac{1}{8}$

즉, $m>n$ 이지만 $f(m, a)>f(n, a)$ 임을 알 수 있다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

정답 ①

068

$\sqrt[3]{4}=4^{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{8}=8^{\frac{1}{4}}, \sqrt[6]{10}=10^{\frac{1}{6}}$ 이고, 3, 4, 6의 최소공배수는 12이므로 이 세 수를 각각 12제곱하면

$(\sqrt[3]{4})^{12}=(4^{\frac{1}{3}})^{12}=4^4=256$

$(\sqrt[4]{8})^{12}=(8^{\frac{1}{4}})^{12}=8^3=512$

$(\sqrt[6]{10})^{12}=(10^{\frac{1}{6}})^{12}=10^2=100$

$1<100<256<512$ 이므로

$1<\sqrt[6]{10}<\sqrt[3]{4}<\sqrt[4]{8}$

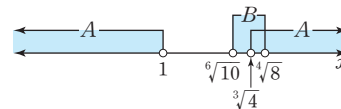
$(x-1)(x-\sqrt[3]{4})>0$ 에서 $x<1$ 또는 $x>\sqrt[3]{4}$

$\therefore A=\{x|x<1 \text{ 또는 } x>\sqrt[3]{4}\}$

$(x-\sqrt[4]{8})(x-\sqrt[6]{10})<0$ 에서 $\sqrt[6]{10}<x<\sqrt[4]{8}$

$\therefore B=\{x|\sqrt[6]{10}<x<\sqrt[4]{8}\}$

이때 각각의 집합을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore A \cup B = \{x|x<1 \text{ 또는 } x>\sqrt[6]{10}\}$

정답 $\{x|x<1 \text{ 또는 } x>\sqrt[6]{10}\}$

069

(i) $\frac{A}{B}=\frac{a^{\frac{n+1}{n}} \times b}{a \times b^{\frac{n}{n+1}}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} \times \frac{1}{b^{\frac{1}{n+1}}}$

$ab<1$ 에서 $a<b^{-1}$ ($\because b>0$)이므로

$\frac{A}{B}=a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n+1}}<(b^{-1})^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n+1}}=b^{-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}=b^{-\frac{1}{n(n+1)}}$

이때 $b>1$, $-\frac{1}{n(n+1)}<0$ 이므로 $b^{-\frac{1}{n(n+1)}}<1$

즉, $\frac{A}{B}<1$ 이므로 $A<B$

(ii) $\frac{C}{B}=\frac{a^{\frac{n}{n+1}} \times b^{\frac{n+1}{n}}}{a \times b^{\frac{n}{n+1}}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{n+1}}} \times \frac{1}{b^{\frac{2n+1}{n(n+1)}}}$

$0<a<1$, $-\frac{1}{(n+1)}<0$ 이므로 $a^{-\frac{1}{n+1}}>1$

$b>1$, $\frac{2n+1}{n(n+1)}>0$ 이므로 $b^{\frac{2n+1}{n(n+1)}}>1$

$\therefore a^{-\frac{1}{n+1}} \times b^{\frac{2n+1}{n(n+1)}}>1$

즉, $\frac{C}{B}>1$ 이므로 $C>B$

(i), (ii)에서 $A<B<C$

정답 ①

070

$\sqrt[3]{7}=a$ 로 놓으면

$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{7}-\frac{1}{\sqrt[3]{7}}\right)=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)$

이므로

$1+x^2=1+\left[\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\right]^2=1+\frac{1}{4}\left(a^2-2+\frac{1}{a^2}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(a^2+2+\frac{1}{a^2}\right)=\left[\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]^2$

이때 $a > 0$ 에서 $a + \frac{1}{a} > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2} &= \sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right\}^2} = \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right) \\ \therefore 49\{(x+\sqrt{1+x^2})^6 + (x-\sqrt{1+x^2})^6\} \\ &= 49\left[\left\{\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right\}^6 \right. \\ &\quad \left. + \left\{\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right\}^6\right] \\ &= 49\left\{a^6 + \left(-\frac{1}{a}\right)^6\right\} = 49\left\{a^6 + \left(\frac{1}{a}\right)^6\right\} \\ &= 49\left\{\left(\sqrt[3]{7}\right)^6 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{7}}\right)^6\right\} \\ &= 49\left(49 + \frac{1}{49}\right) = 2402\end{aligned}$$

정답_ 2402

071

$3^a + 3^{-a} = t$ 로 놓으면 $3^a > 0$, $3^{-a} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3^a + 3^{-a} \geq 2\sqrt{3^a \times 3^{-a}} = 2 \quad (\text{단, 등호는 } 3^a = 3^{-a} \text{일 때 성립한다.})$$

$$\therefore t \geq 2$$

이때 주어진 등식은

$$t^2 = 2t + 8, \quad t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$(t+2)(t-4) = 0 \quad \therefore t = 4 \quad (\because t \geq 2)$$

즉, $3^a + 3^{-a} = 4$ 이므로

$$\begin{aligned}27^a + 27^{-a} &= 3^{3a} + 3^{-3a} = (3^a + 3^{-a})^3 - 3(3^a + 3^{-a}) \\ &= 4^3 - 3 \times 4 = 64 - 12 \\ &= 52\end{aligned}$$

정답_ 52

참고 산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0, b > 0$ 일 때

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{일 때 성립한다.})$$

072

$a^{3x} + a^{-3x} = 2$ 에서

$$(a^x + a^{-x})^3 - 3(a^x + a^{-x}) = 2$$

$$\therefore (a^x + a^{-x})^3 - 3(a^x + a^{-x}) - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$a^x + a^{-x} = t$ 로 놓으면 $a^x > 0$, $a^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^x + a^{-x} \geq 2\sqrt{a^x \times a^{-x}} = 2 \quad (\text{단, 등호는 } a^x = a^{-x} \text{일 때 성립한다.})$$

$$\therefore t \geq 2$$

이때 $\textcircled{1}$ 은

$$t^3 - 3t - 2 = 0, \quad (t+1)^2(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 2 \quad (\because t \geq 2)$$

즉, $a^x + a^{-x} = 2$ 이므로

$$a^{2x} + a^{-2x} = (a^x + a^{-x})^2 - 2 = 2^2 - 2 = 2$$

$$(a^{\frac{3}{2}x} + a^{-\frac{3}{2}x})^2 = a^{3x} + a^{-3x} + 2 = 2 + 2 = 4$$

이때 $a^{\frac{3}{2}x} + a^{-\frac{3}{2}x} > 0$ 이므로 $a^{\frac{3}{2}x} + a^{-\frac{3}{2}x} = 2$

$$\therefore \frac{a^{\frac{3}{2}x} + a^{-\frac{3}{2}x}}{a^{2x} + a^{-2x}} = \frac{2}{2} = 1$$

정답_ ③

073

$3^a = 2^b = k$ ($k > 0$)로 놓으면

$$3 = k^{\frac{1}{a}}, \quad 2 = k^{\frac{1}{b}}$$

$(a-2)(b-2) = 4$ 에서

$$ab - 2(a+b) + 4 = 4, \quad ab = 2(a+b)$$

$$\therefore \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{2} \quad (\because ab > 0)$$

이때 $k^{\frac{1}{a}} \times k^{\frac{1}{b}} = 6$ 이므로

$$k^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = 6, \quad k^{\frac{a+b}{ab}} = 6$$

$$k^{\frac{1}{2}} = 6 \quad \therefore k = 6^2 = 36$$

$$\therefore 9^a \times 2^{-b} = \frac{(3^a)^2}{2^b} = \frac{k^2}{k} = k = 36$$

정답_ ③

074

조건 (나)에서 $a^{6x} = \frac{1}{(2b)^{5y}} = k$ ($k > 0$)로 놓으면

$$a^3 = k^{\frac{1}{2x}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{(2b)^{5y}} = k \text{에서 } (2b)^{-5y} = k, \quad 2b = k^{-\frac{1}{5y}}$$

$$\therefore (2b)^2 = k^{-\frac{2}{5y}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$\begin{aligned}k^{\frac{1}{2x} - \frac{2}{5y}} &= k^{\frac{1}{2x}} k^{-\frac{2}{5y}} = a^3 \times (2b)^2 \\ &= 4a^3 b^2 = 4 \times 250 \quad (\because \textcircled{7}) \\ &= 1000\end{aligned}$$

조건 (다)에서 $\frac{1}{2x} - \frac{2}{5y} = 3$ 이므로

$$k^3 = 1000 = 10^3 \quad \therefore k = 10 \quad (\because k \text{는 실수})$$

즉, $a^{6x} = 10$ 이므로

$$\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^{3x} - a^{-3x}} = \frac{a^{3x}(a^{3x} + a^{-3x})}{a^{3x}(a^{3x} - a^{-3x})} = \frac{a^{6x} + 1}{a^{6x} - 1} = \frac{10 + 1}{10 - 1} = \frac{11}{9}$$

따라서 $p = 9, q = 11$ 이므로

$$p + q = 9 + 11 = 20$$

정답_ 20

075

주어진 등식 $T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1}$ 에 $\gamma = \frac{5}{3}$ 를 대입하면

$$T_i V_i^{\frac{5}{3}-1} = T_f V_f^{\frac{5}{3}-1}$$

$$\therefore T_i V_i^{\frac{2}{3}} = T_f V_f^{\frac{2}{3}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 조건에서 $T_i = 480, V_i = 3$ 이고 $T_f = 270$ 이므로 이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$480 \times 3^{\frac{2}{3}} = 270 \times V_f^{\frac{2}{3}}$$

$$16 \times 3^{\frac{2}{3}} = 9 \times V_f^{\frac{2}{3}}$$

$$V_f^{\frac{2}{3}} = \frac{16}{9} \times 3^{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned}\therefore V_f &= \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{3}{2}} \times \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \times 3 \\ &= \frac{64}{27} \times 3 = \frac{64}{9} \quad (\text{m}^3)\end{aligned}$$

정답_ ④

076

(1) $\log_{\frac{1}{3}} x = 3$ 에서

$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

(2) $\log_7 x = \frac{1}{2}$ 에서

$$x = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$$

(3) $\log_x 16 = 4$ 에서

$$x^4 = 16 \quad \therefore x = 16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2$$

(4) $\log_x \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ 에서

$$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$$

정답_ (1) $\frac{1}{27}$ (2) $\sqrt{7}$ (3) 2 (4) 4

077

$\log_7 \{\log_3 (\log_4 x)\} = 0$ 에서

$$\log_3 (\log_4 x) = 7^0 = 1, \log_4 x = 3^1 = 3$$

$$\therefore x = 4^3 = 64$$

$\log_{15} \{\log_4 (\log_2 y)\} = 0$ 에서

$$\log_4 (\log_2 y) = 15^0 = 1, \log_2 y = 4^1 = 4$$

$$\therefore y = 2^4 = 16$$

$$\therefore x - y = 64 - 16 = 48$$

정답_ 48

078

$$x = \log_2 (\sqrt{2} + 1) \text{에서 } 2^x = \sqrt{2} + 1$$

$$\text{따라서 } 2^{-x} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1 \text{이므로}$$

$$2^x + 2^{-x} = 2\sqrt{2}, 2^x - 2^{-x} = 2$$

$$\therefore \frac{2^x - 2^{-x}}{4^x + 4^{-x} + 2} = \frac{2^x - 2^{-x}}{(2^x + 2^{-x})^2} = \frac{2}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{4}$$

정답_ ④

079

밑의 조건에서 $x-3 > 0$, $x-3 \neq 1$, $8-x > 0$, $8-x \neq 1$ 이므로

$$x > 3, x \neq 4, x < 8, x \neq 7$$

$$\therefore 3 < x < 4 \text{ 또는 } 4 < x < 7 \text{ 또는 } 7 < x < 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

진수의 조건에서 $x-1 > 0$, $7-x > 0$ 이므로

$$x > 1, x < 7 \quad \therefore 1 < x < 7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분을 구하면

$$3 < x < 4 \text{ 또는 } 4 < x < 7$$

따라서 정수 x 는 5, 6이므로 구하는 합은

$$5 + 6 = 11$$

정답_ ⑤

080

밑의 조건에서 $x-3 > 0$, $x-3 \neq 1$ 이므로

$$x > 3, x \neq 4$$

$$\therefore 3 < x < 4 \text{ 또는 } x > 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

진수의 조건에서 $-x^2 + 10x - 16 > 0$ 이므로

$$x^2 - 10x + 16 < 0, (x-2)(x-8) < 0$$

$$\therefore 2 < x < 8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분을 구하면

$$3 < x < 4 \text{ 또는 } 4 < x < 8$$

따라서 정수 x 는 5, 6, 7의 3개이다.

정답_ ③

081

밑의 조건에서 $|a-2| > 0$, $|a-2| \neq 1$

$$\therefore a \neq 1, a \neq 2, a \neq 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

진수의 조건에서 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + ax + 2a > 0$ 이어야 하

므로 이차방정식 $x^2 + ax + 2a = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = a^2 - 4 \times 2a < 0$$

$$a^2 - 8a < 0, a(a-8) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분을 구하면

$$0 < a < 1 \text{ 또는 } 1 < a < 2 \text{ 또는 } 2 < a < 3 \text{ 또는 } 3 < a < 8$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 7, 최솟값은 4이므로 구하는 합은

$$7 + 4 = 11$$

정답_ 11

참고 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 D 라고 할 때, 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식이 항상 성립할 조건은 다음과 같다.

$$(1) ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow a > 0, D < 0$$

$$(2) ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow a < 0, D < 0$$

082

$$(1) \log_2 3 + \log_2 6 - \log_2 9 = \log_2 \left(\frac{3 \times 6}{9}\right) = \log_2 2 = 1$$

$$(2) \log_4 \sqrt{16} + \log_{2^{-1}} \frac{1}{2} - \log_8 1 = \log_4 4 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} - \log_8 1$$

$$= 1 + 1 - 0$$

$$= 2$$

정답_ (1) 1 (2) 2

083

$$\log_2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log_2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \log_2 \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \dots + \log_2 \left(1 - \frac{1}{32}\right)$$

$$= \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{3}{4} + \dots + \log_2 \frac{31}{32}$$

$$= \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{31}{32}\right)$$

$$= \log_2 \frac{1}{32} = \log_2 2^{-5}$$

$$= -5 \log_2 2$$

$$= -5$$

정답_ ①

084

$$\begin{aligned}
 &2 \log_4 2\sqrt{x} - \log_4 \frac{y}{8} + \frac{1}{3} \log_4 z^3 = 3 \text{에서} \\
 &\log_4 (2\sqrt{x})^2 - \log_4 \frac{y}{8} + \log_4 (z^3)^{\frac{1}{3}} = 3 \\
 &\log_4 4x - \log_4 \frac{y}{8} + \log_4 z = 3, \log_4 \left(4x \div \frac{y}{8} \times z\right) = 3 \\
 &\log_4 \frac{32xz}{y} = 3, \frac{32xz}{y} = 4^3 = 64 \\
 &\therefore \frac{xz}{y} = \frac{64}{32} = 2
 \end{aligned}$$

정답_ ④

085

두 점 $(1, \log_2 5)$, $(2, \log_2 10)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\begin{aligned}
 \frac{\log_2 10 - \log_2 5}{2 - 1} &= \frac{\log_2 \frac{10}{5}}{1} \\
 &= \log_2 2 = 1
 \end{aligned}$$

정답_ ①

086

$n = 3^3 \times 5^4$ 의 양의 약수의 개수는

$$(3+1)(4+1) = 20$$

이 20개의 약수를 작은 수부터 차례대로 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ 이라고 하면

$$a_1 \times a_{20} = n, a_2 \times a_{19} = n, \dots, a_{10} \times a_{11} = n$$

따라서 $M = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{20} = n^{10}$ 이므로

$$\log_n M = \log_n n^{10} = 10$$

정답_ 10

참고 약수의 개수

자연수 A 가 $A = a^m \times a^n$ (a, b 는 서로 다른 소수, m, n 은 자연수)으로 소인수 분해될 때, A 의 약수의 개수는

$$(m+1)(n+1)$$

087

$$\begin{aligned}
 (1) \log_2 5 \times \log_5 7 \times \log_7 8 &= \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} \times \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 5} \times \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 7} \\
 &= \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 2} \\
 &= \frac{3 \log_{10} 2}{\log_{10} 2} \\
 &= 3 \\
 (2) \frac{1}{\log_6 3} + 2 \log_3 2 - \frac{3}{\log_2 3} &= \log_3 6 + 2 \log_3 2 - 3 \log_3 2 \\
 &= \log_3 6 - \log_3 2 = \log_3 \frac{6}{2} \\
 &= \log_3 3 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

정답_ (1) 3 (2) 1

088

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_5 x} \text{에서} \\
 &\log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 4 = \log_x a + \log_x 5 \\
 &\log_x (2 \times 3 \times 4) = \log_x 5a \\
 &5a = 24 \quad \therefore a = \frac{24}{5} = 4.8
 \end{aligned}$$

정답_ ⑤

089

$$\begin{aligned}
 &\log_a x = \frac{1}{2}, \log_b x = \frac{1}{3}, \log_c x = \frac{2}{3} \text{에서} \\
 &\log_x a = 2, \log_x b = 3, \log_x c = \frac{3}{2} \\
 &\therefore \log_{abc} x = \frac{1}{\log_x abc} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \log_x c} \\
 &= \frac{1}{2 + 3 + \frac{3}{2}} = \frac{2}{13}
 \end{aligned}$$

정답_ ④

090

수직선 위의 두 점 $P(\log_5 3)$, $Q(\log_5 12)$ 에 대하여 선분 PQ 를 $m : (1-m)$ 으로 내분하는 점의 좌표가 1이므로

$$\begin{aligned}
 \frac{m \times \log_5 12 + (1-m) \times \log_5 3}{m + (1-m)} &= 1 \\
 m \log_5 12 + (1-m) \log_5 3 &= 1 \\
 m(\log_5 12 - \log_5 3) &= 1 - \log_5 3 \\
 m \log_5 \frac{12}{3} &= \log_5 \frac{5}{3}, m \log_5 4 = \log_5 \frac{5}{3} \\
 \therefore m &= \frac{\log_5 \frac{5}{3}}{\log_5 4} = \log_4 \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{5}{3}$ 이다.

정답_ ④

참고 수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 $m : n$ ($m > 0$, $n > 0$)으로 내분하는 점 P 의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}\right)$$

091

$$\begin{aligned}
 (1) 2 \log_{\frac{1}{3}} \frac{4}{3} - \log_9 \frac{9}{16} + \log_{\sqrt{3}} 2\sqrt{3} \\
 &= 2 \log_{3^{-1}} \frac{4}{3} - \log_3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \log_{3^{\frac{1}{2}}} 2\sqrt{3} \\
 &= -2 \log_3 \frac{4}{3} - \log_3 \frac{3}{4} + 2 \log_3 2\sqrt{3} \\
 &= \log_3 \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} - \log_3 \frac{3}{4} + \log_3 (2\sqrt{3})^2 \\
 &= \log_3 \frac{9}{16} - \log_3 \frac{3}{4} + \log_3 12 \\
 &= \log_3 \left(\frac{9}{16} \div \frac{3}{4} \times 12\right) = \log_3 \left(\frac{9 \times 4 \times 12}{16 \times 3}\right) \\
 &= \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & (5^{\log_5 9 - \log_5 3})^{\log_5 2} + 4^{\log_5 7} = (5^{2 \log_5 3 - \log_5 3})^{\log_5 2} + 7^{\log_5 4} \\
 & = (5^{\log_5 3})^{\log_5 2} + 7^{2 \log_5 2} \\
 & = 5^{\log_5 2} + 7^2 \\
 & = 2 + 49 = 51
 \end{aligned}$$

정답_ (1) 2 (2) 51

092

$$\begin{aligned}
 \log_5 30 - \log_{25} 4 &= \log_5 30 - \log_{5^2} 2^2 \\
 &= \log_5 30 - \log_5 2 \\
 &= \log_5 \frac{30}{2} = \log_5 15 \\
 \therefore (\log_5 30 - \log_{25} 4) \log_3 5 - 1 &= \log_5 15 \times \log_3 5 - 1 \\
 &= \frac{\log_3 15}{\log_3 5} \times \log_3 5 - 1 \\
 &= \log_3 15 - 1 \\
 &= \log_3 15 - \log_3 3 \\
 &= \log_3 \frac{15}{3} = \log_3 5
 \end{aligned}$$

정답_ ④

093

$$\begin{aligned}
 \neg. (\log_2 3 + \log_4 3)(\log_3 2 + \log_9 2) &= (\log_2 3 + \log_{2^2} 3)(\log_3 2 + \log_{3^2} 2) \\
 &= \left(\log_2 3 + \frac{1}{2} \log_2 3\right) \left(\log_3 2 + \frac{1}{2} \log_3 2\right) \\
 &= \frac{3}{2} \log_2 3 \times \frac{3}{2} \log_3 2 \\
 &= \frac{9}{4} \times \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \times \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} \\
 &= \frac{9}{4} \text{ (참)} \\
 \angle. 2 \log_3 2 + \log_3 10 - \log_9 64 &= \log_3 2^2 + \log_3 10 - \log_{3^2} 8^2 \\
 &= \log_3 4 + \log_3 10 - \log_3 8 \\
 &= \log_3 \left(\frac{4 \times 10}{8}\right) \\
 &= \log_3 5 \\
 \therefore 9^{2 \log_3 2 + \log_3 10 - \log_9 64} &= 9^{\log_3 5} = 5^{\log_3 9} = 5^{2 \log_3 3^2} \\
 &= 5^2 = 25 \text{ (참)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqsubset. \log_5 1 + \log_5 2 + \log_5 3 + \log_5 4 + \log_5 5 &= \log_5 (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5) = \log_5 120 \\
 \therefore 5^{\log_5 1 + \log_5 2 + \log_5 3 + \log_5 4 + \log_5 5} &= 5^{\log_5 120} = 120 \text{ (거짓)}
 \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\angle$ 이다.

정답_ ②

094

조건 (가)에서 $\sqrt[3]{a}$ 는 ab 의 네제곱근이므로

$$ab = (\sqrt[3]{a})^4 = a^{\frac{4}{3}} \quad \therefore b = a^{\frac{1}{3}}$$

조건 (나)에서 $\log_a bc + \log_b ac = 4$ 이므로 이 식에 $b = a^{\frac{1}{3}}$ 을 대입하면

$$\log_a a^{\frac{1}{3}}c + \log_{a^{\frac{1}{3}}} ac = 4$$

$$\frac{1}{3} \log_a a + \log_a c + 3(\log_a a + \log_a c) = 4$$

$$\frac{10}{3} + 4 \log_a c = 4, \log_a c = \frac{1}{6} \quad \therefore c = a^{\frac{1}{6}}$$

$$\therefore \frac{b}{c} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{6}}$$

$$\text{즉, } a = \left(\frac{b}{c}\right)^6 \text{이므로 } k=6$$

정답_ ①

095

$\log_a b = x, \log_c a = y$ 라고 하면

$$a^x = b, c^y = a$$

이때 $b = a^x = (c^y)^x = c^{\boxed{(가) xy}}$ 이므로

$$\boxed{(가) xy} = \log_c b$$

즉, $\log_a b \times \log_c a = \log_c b$ 이다.

여기서 $\boxed{(나) a \neq 1}$ 이므로 $\log_c a \neq 0$ 이다.

$$\therefore \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\therefore (가) xy \quad (나) a \neq 1$$

정답_ ①

096

$a^{\log_b c} = x$ 로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$$\log_b c = \boxed{(가) \log_a x}$$

위 식의 양변을 각각 c 를 밑으로 하는 로그로 나타내면

$$\frac{1}{\log_c \boxed{(나) b}} = \frac{\log_c x}{\log_c \boxed{(다) a}}$$

$$\therefore \log_c x = \frac{\log_c \boxed{(다) a}}{\log_c \boxed{(나) b}} = \log_b a$$

따라서 로그의 정의에 의하여

$$x = c^{\log_b a}$$

$$\therefore a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

$$\therefore (가) \log_a x \quad (나) b \quad (다) a$$

정답_ ②

097

$\log_{10} 5$ 가 $\boxed{(가) \text{ 유리수}}$ 라고 가정하면 서로소인 두 자연수 m, n ($m < n$)에 대하여

$$\log_{10} 5 = \frac{m}{n}$$

으로 나타내어진다.

로그의 정의에 의하여

$$10^{\frac{m}{n}} = 5, 10^m = 5^n$$

위의 식의 양변을 5^m 으로 나누면

$$\frac{10^m}{5^m} = \frac{5^n}{5^m} \quad \therefore \boxed{(나) 2^m} = 5^{n-m} \quad \dots\dots ㉠$$

이때 ㉠의 좌변은 $\boxed{(다) \text{ 짝수}}$ 이고 우변은 홀수이므로 모순이다.

따라서 $\log_{10} 5$ 는 무리수이다.

$$\therefore (가) \text{ 유리수} \quad (나) 2^m \quad (다) \text{ 짝수}$$

정답_ (가) 유리수 (나) 2^m (다) 짝수

098

$$\begin{aligned}\log_{15} \sqrt{45} &= \frac{\log_7 \sqrt{45}}{\log_7 15} = \frac{\log_7 (3^2 \times 5)^{\frac{1}{2}}}{\log_7 (3 \times 5)} \\ &= \frac{2 \log_7 3 + \log_7 5}{2(\log_7 3 + \log_7 5)} = \frac{2a+b}{2(a+b)}\end{aligned}$$

정답_ ②

099

$$\begin{aligned}\log_2 35 &= \log_2 (5 \times 7) = \log_2 5 + \log_2 7 \text{이므로} \\ \log_2 5 + \log_2 7 &= a \quad \dots\dots \textcircled{7} \\ \log_2 245 &= \log_2 (5 \times 7^2) = \log_2 5 + 2 \log_2 7 \text{이므로} \\ \log_2 5 + 2 \log_2 7 &= b \quad \dots\dots \textcircled{8} \\ 2 \times \textcircled{7} - \textcircled{8} \text{을 하면} \\ \log_2 5 &= 2a - b \\ \textcircled{8} - \textcircled{7} \text{을 하면} \\ \log_2 7 &= b - a \\ \therefore \log_2 175 &= \log_2 (5^2 \times 7) \\ &= 2 \log_2 5 + \log_2 7 \\ &= 2(2a - b) + b - a \\ &= 3a - b\end{aligned}$$

정답_ ③

100

$$\begin{aligned}\log_6 9 &= \log_6 3^2 = 2 \log_6 3 \text{이므로} \\ 2 \log_6 3 &= a \quad \therefore \log_6 3 = \frac{a}{2} \\ \therefore \log_6 2 &= \log_6 \frac{6}{3} = \log_6 6 - \log_6 3 \\ &= 1 - \log_6 3 = 1 - \frac{a}{2} \\ \therefore \log_{18} 12 &= \frac{\log_6 12}{\log_6 18} = \frac{\log_6 (6 \times 2)}{\log_6 (6 \times 3)} \\ &= \frac{\log_6 6 + \log_6 2}{\log_6 6 + \log_6 3} \\ &= \frac{1 + \left(1 - \frac{a}{2}\right)}{1 + \frac{a}{2}} = \frac{4 - a}{2 + a}\end{aligned}$$

정답_ ③

101

$$\begin{aligned}\log_5 7 &= \frac{\log_3 7}{\log_3 5} \text{이므로} \\ \frac{\log_3 7}{\log_3 5} &= b, \quad \frac{\log_3 7}{a} = b \\ \therefore \log_3 7 &= ab \\ \therefore \log_{14} 42 &= \frac{\log_3 42}{\log_3 14} = \frac{\log_3 (2 \times 3 \times 7)}{\log_3 (2 \times 7)} \\ &= \frac{\log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 7}{\log_3 2 + \log_3 7} \\ &= \frac{ab + c + 1}{ab + c}\end{aligned}$$

정답_ $\frac{ab+c+1}{ab+c}$

102

$$\begin{aligned}7^x &= 3, \quad 7^y = 5 \text{에서} \\ x &= \log_7 3, \quad y = \log_7 5 \\ \therefore \log_{\sqrt{3}} 25 &= \frac{\log_7 25}{\log_7 \sqrt{3}} = \frac{2 \log_7 5}{\frac{1}{2} \log_7 3} \\ &= \frac{2y}{\frac{1}{2}x} = \frac{4y}{x}\end{aligned}$$

정답_ ①

103

$$\begin{aligned}2^a &= x, \quad 2^b = y, \quad 2^c = z \text{에서} \\ a &= \log_2 x, \quad b = \log_2 y, \quad c = \log_2 z \\ \therefore \log_{x^2 y} y z^2 &= \frac{\log_2 y z^2}{\log_2 x^2 y} \\ &= \frac{\log_2 y + 2 \log_2 z}{2 \log_2 x + \log_2 y} \\ &= \frac{b + 2c}{2a + b}\end{aligned}$$

정답_ ③

104

$$\begin{aligned}a^x &= b^y = 3 \text{의 각 변에 밑이 3인 로그를 취하면} \\ \log_3 a^x &= \log_3 b^y = \log_3 3, \quad x \log_3 a = y \log_3 b = 1 \\ \therefore \log_3 a &= \frac{1}{x}, \quad \log_3 b = \frac{1}{y} \\ \therefore \log_{ab} \sqrt{\sqrt{b}} &= \frac{\log_3 \sqrt{\sqrt{b}}}{\log_3 ab} = \frac{\log_3 b^{\frac{1}{4}}}{\log_3 ab} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \log_3 b}{\log_3 a + \log_3 b} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \\ &= \frac{x}{4(x+y)}\end{aligned}$$

정답_ ①

105

$$\begin{aligned}a^4 b^5 &= 1 \text{의 양변에 밑이 } a \text{인 로그를 취하면} \\ \log_a a^4 b^5 &= \log_a 1, \quad \log_a a^4 + \log_a b^5 = 0 \\ 4 + 5 \log_a b &= 0 \quad \therefore \log_a b = -\frac{4}{5} \\ \therefore \log_a a^5 b^4 &= \log_a a^5 + \log_a b^4 = 5 + 4 \log_a b \\ &= 5 + 4 \times \left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{9}{5}\end{aligned}$$

정답_ ①

106

$2^x = 9^y = 18^z = k$ ($k > 0, k \neq 1$)로 놓으면

$$2^x = k \text{에서 } x = \log_2 k = \frac{1}{\log_k 2}$$

$$9^y = k \text{에서 } y = \log_9 k = \frac{1}{\log_k 9}$$

$$18^z = k \text{에서 } z = \log_{18} k = \frac{1}{\log_k 18}$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \log_k 2, \frac{1}{y} = \log_k 9, \frac{1}{z} = \log_k 18$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= \log_k 2 + \log_k 9 - \log_k 18 \\ &= \log_k \left(\frac{2 \times 9}{18} \right) = \log_k 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

다른 풀이

$2^x = 9^y = 18^z = k$ ($k > 0, k \neq 1$)로 놓으면

$$2^x = k \text{에서 } 2 = k^{\frac{1}{x}}$$

$$9^y = k \text{에서 } 9 = k^{\frac{1}{y}}$$

$$18^z = k \text{에서 } 18 = k^{\frac{1}{z}}$$

$$\textcircled{1} \times \textcircled{2} \div \textcircled{3} \text{을 하면 } \frac{2 \times 9}{18} = k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}}$$

$$k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}} = 1 \quad \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$$

정답_ ③

..... ㉠

..... ㉡

..... ㉢

107

$a > 1, b > 1, c > 1$ 이므로

$\log_a b > 0, \log_b c > 0, \log_c a > 0$

$$\log_a b = \frac{\log_b c}{3} = \frac{\log_c a}{9} = k \text{ ($k > 0$)로 놓으면}$$

$$\log_a b = k, \log_b c = 3k, \log_c a = 9k$$

이때 $\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$ 이므로

$$k \times 3k \times 9k = 1$$

$$k^3 = \frac{1}{27} \quad \therefore k = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a b + \log_b c + \log_c a &= k + 3k + 9k = 13k \\ &= 13 \times \frac{1}{3} = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

정답_ ⑤

108

$$\log_a b = 81 \text{에서 } \frac{\log_c b}{\log_c a} = 81$$

$$\therefore \log_c b = 81 \log_c a$$

$$\log_c \sqrt{a} = \log_{\sqrt{b}} c \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \log_c a = 2 \log_b c, \frac{1}{2} \log_c a = \frac{2}{\log_c b}$$

$$\therefore \log_c b = \frac{4}{\log_c a}$$

㉠ $\times$ ㉡을 하면

$$(\log_c b)^2 = 324 = 18^2$$

b 와 c 는 1보다 큰 실수이므로 $\log_c b > 0$

$$\therefore \log_c b = 18$$

정답_ 18

109

$3^a = 2^b = c$ 이므로

$$3^a = c \text{에서 } a = \log_3 c = \frac{1}{\log_c 3}$$

$$\therefore \frac{1}{a} = \log_c 3$$

$$2^b = c \text{에서 } b = \log_2 c = \frac{1}{\log_c 2}$$

$$\therefore \frac{1}{b} = \log_c 2$$

따라서 $\log_c 6 = \log_c 2 + \log_c 3 = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{a+b}{ab}$ 이므로

$$\log_6 c = \frac{1}{\log_c 6} = \frac{ab}{a+b}$$

이때 $a^2 + b^2 = 2ab(a+b-1)$ 에서

$$a^2 + b^2 = 2ab(a+b) - 2ab$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 2ab(a+b)$$

$$(a+b)^2 = 2ab(a+b)$$

$$\therefore \frac{ab}{a+b} = \frac{1}{2} \quad (\because a+b > 0)$$

$$\therefore \log_6 c = \frac{1}{2}$$

정답_ ②

110

$x^2 - 6x + 2 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_3 (\alpha + 1) + \log_3 (\beta + 1) &= \log_3 (\alpha + 1)(\beta + 1) \\ &= \log_3 (\alpha\beta + \alpha + \beta + 1) \\ &= \log_3 (2 + 6 + 1) \\ &= \log_3 9 = \log_3 3^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

정답_ ②

참고 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$$(1) \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$(2) \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

111

$x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이 $\log_5 a, \log_5 b$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_5 a + \log_5 b = 3, \log_5 a \times \log_5 b = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a b + \log_b a &= \frac{\log_5 b}{\log_5 a} + \frac{\log_5 a}{\log_5 b} \\ &= \frac{(\log_5 b)^2 + (\log_5 a)^2}{\log_5 a \times \log_5 b} \\ &= \frac{(\log_5 a + \log_5 b)^2 - 2 \log_5 a \times \log_5 b}{\log_5 a \times \log_5 b} \\ &= \frac{3^2 - 2 \times 1}{1} \\ &= 7 \end{aligned}$$

정답_ ②

112

$x^2 + 3x \log_{12} 4 + \log_{12} 3 - 2 \log_{12} 4 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -3 \log_{12} 4, \alpha\beta = \log_{12} 3 - 2 \log_{12} 4$$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha - 1)(\beta - 1) &= \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 \\ &= \log_{12} 3 - 2 \log_{12} 4 - (-3 \log_{12} 4) + 1 \\ &= \log_{12} 3 + \log_{12} 4 + 1 \\ &= \log_{12} 12 + 1 \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

정답_ ④

113

$x^2 - 4x + k = 0$ 의 두 근이 $\log_2 a, \log_2 b$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 a + \log_2 b = 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\log_2 a \times \log_2 b = k \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } \log_2 ab = 4$$

$$\therefore ab = 2^4 = 16$$

$a + b = 10, ab = 16$ 이므로 a, b 는 이차방정식 $t^2 - 10t + 16 = 0$ 의 두 근이다.

$$t^2 - 10t + 16 = 0 \text{에서 } (t - 2)(t - 8) = 0$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 8$$

따라서 $a = 2, b = 8$ 또는 $a = 8, b = 2$ 이므로 $\textcircled{㉡}$ 에서

$$k = \log_2 2 \times \log_2 8 = 1 \times 3 = 3$$

정답_ ①

114

$$A = 2 \log_3 \frac{1}{9} = 2 \log_3 3^{-2} = 2 \times (-2) = -4$$

$$B = 4^{\log_5 5^{-2}} = 4^{\log_5 5 - \log_5 4} = 4^{\log_5 \frac{5}{4}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{\log_5 4} = \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$C = \log_{\frac{1}{2}} 16 + \log_5 25 = \log_{2^{-1}} 2^4 + \log_5 5^2 = -4 + 2 = -2$$

$$\text{이때 } -4 < -2 < \frac{25}{16} \text{이므로}$$

$$A < C < B$$

정답_ ②

115

$a^2 = b^3 = c^5$ 의 각 변에 밑이 a 인 로그를 취하면

$$\log_a a^2 = \log_a b^3 = \log_a c^5, 2 = 3 \log_a b = 5 \log_a c$$

$$\therefore \log_a b = \frac{2}{3}, \log_a c = \frac{2}{5}$$

$a^2 = b^3 = c^5$ 의 각 변에 밑이 b 인 로그를 취하면

$$\log_b a^2 = \log_b b^3 = \log_b c^5, 2 \log_b a = 3 = 5 \log_b c$$

$$\therefore \log_b a = \frac{3}{2}, \log_b c = \frac{3}{5}$$

$a^2 = b^3 = c^5$ 의 각 변에 밑이 c 인 로그를 취하면

$$\log_c a^2 = \log_c b^3 = \log_c c^5, 2 \log_c a = 3 \log_c b = 5$$

$$\therefore \log_c a = \frac{5}{2}, \log_c b = \frac{5}{3}$$

$$\text{이때 } \frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{2} < \frac{5}{3} < \frac{5}{2} \text{이므로}$$

$$\log_a c < \log_b c < \log_a b < \log_b a < \log_c b < \log_c a$$

$$\text{따라서 } M = \log_c a = \frac{5}{2}, m = \log_a c = \frac{2}{5} \text{이므로}$$

$$M - m = \frac{5}{2} - \frac{2}{5} = \frac{21}{10}$$

정답_ $\frac{21}{10}$

116

$$\log_3 3 = 1, \log_3 9 = 2 \text{이므로}$$

$$1 < \log_3 8 < 2$$

따라서 $\log_3 8$ 의 정수 부분은 1이므로

$$a = 1$$

$$\therefore b = \log_3 8 - 1 = \log_3 8 - \log_3 3 = \log_3 \frac{8}{3}$$

$$\therefore 2^a + 3^b = 2 + 3^{\log_3 \frac{8}{3}} = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

정답_ ④

117

$$\log_{10} 10 = 1, \log_{10} 100 = 2 \text{이므로}$$

$$1 < \log_{10} 35 < 2$$

따라서 $\log_{10} 35$ 의 정수 부분은 1이므로

$$n = 1$$

$$\therefore \alpha = \log_{10} 35 - 1 = \log_{10} 35 - \log_{10} 10$$

$$= \log_{10} \frac{35}{10} = \log_{10} \frac{7}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore 10^n - 2 \times 10^\alpha &= 10 - 2 \times 10^{\log_{10} \frac{7}{2}} \\ &= 10 - 2 \times \frac{7}{2} = 3 \end{aligned}$$

정답_ ②

118

$$\frac{\log_5 100}{\log_5 4} = \log_4 100 = \log_{2^2} 10^2 = \log_2 10$$

$$\log_2 8 = 3, \log_2 16 = 4 \text{이므로}$$

$$3 < \log_2 10 < 4$$

따라서 $\log_2 10$ 의 정수 부분은 3이므로

$$x = 3$$

$$\therefore y = \log_2 10 - 3 = \log_2 10 - \log_2 8$$

$$= \log_2 \frac{10}{8} = \log_2 \frac{5}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2^x + 2^y}{2^{-x} + 2^{-y}} &= \frac{2^3 + 2^{\log_2 \frac{5}{4}}}{2^{-3} + 2^{-\log_2 \frac{5}{4}}} \\ &= \frac{8 + \frac{5}{4}}{\frac{1}{8} + \frac{4}{5}} = \frac{\frac{37}{4}}{\frac{37}{40}} = 10 \end{aligned}$$

정답_ 10

119

$\log_i N = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)라고 하면 이차방정식 $3x^2 - 7x + k = 0$ 의 두 근이 n, α 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$n + \alpha = \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$n\alpha = \frac{k}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 n 은 정수이고, $0 \leq \alpha < 1$ 이므로 $\textcircled{㉠}$ 에서

$$n = 2, \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\text{이것을 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면 } 2 \times \frac{1}{3} = \frac{k}{3}$$

$$\therefore k = 2$$

정답_ 2

120

$$(1) \log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 \\ = 2 \times 0.3010 \\ = 0.6020$$

$$(2) \log 6 = \log (2 \times 3) = \log 2 + \log 3 \\ = 0.3010 + 0.4771 \\ = 0.7781$$

$$(3) \log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \\ = 1 - 0.3010 \\ = 0.6990$$

$$(4) \log 72 = \log (2^3 \times 3^2) = 3 \log 2 + 2 \log 3 \\ = 3 \times 0.3010 + 2 \times 0.4771 \\ = 0.9030 + 0.9542 \\ = 1.8572$$

정답_ (1) 0.6020 (2) 0.7781 (3) 0.6990 (4) 1.8572

121

$$\log \sqrt[3]{87.6} = \frac{1}{3} \log 87.6 = \frac{1}{3} \log (8.76 \times 10) \\ = \frac{1}{3} (\log 8.76 + \log 10) \\ = \frac{1}{3} (0.9425 + 1) \quad (\because \log 8.76 = 0.9425) \\ = 0.6475$$

정답_ 0.6475

122

양수 x 에 대하여 $\log \sqrt{x} = 0.477$ 이므로

$$\frac{1}{2} \log x = 0.477$$

$$\therefore \log x = 2 \times 0.477 = 0.954$$

$$\therefore \log \frac{x^4}{1000} - \log \sqrt[3]{x^2} = 4 \log x - \log 1000 - \frac{2}{3} \log x \\ = \frac{10}{3} \log x - 3 = \frac{10}{3} \times 0.954 - 3 \\ = 3.18 - 3 \\ = 0.18$$

정답_ 0.18

123

$$\log 321 = \log (10^2 \times 3.21) = \log 10^2 + \log 3.21 \\ = 2 + \log 3.21$$

$$\text{즉, } 2 + \log 3.21 = 2.5065 \text{이므로}$$

$$\log 3.21 = 0.5065$$

$$\log N = -2.4935 \text{에서}$$

$$\log N = -3 + 0.5065 = \log 10^{-3} + \log 3.21 \\ = \log (10^{-3} \times 3.21) = \log 0.00321$$

$$\therefore N = 0.00321$$

정답_ ①

124

$$\log x^2 - \log \sqrt[3]{x} = 2 \log x - \frac{1}{3} \log x = \frac{5}{3} \log x \\ = \frac{5}{3} \times (-3.3768) = -5.628 \\ = -6 + 0.372$$

따라서 정수 부분은 -6 , 소수 부분은 0.372 이다.

정답_ ④

125

$\log 1 = 0, \log 10 = 1, \log 100 = 2, \log 1000 = 3$ 이므로

$$f(2) = f(4) = f(6) = f(8) = 0$$

$$f(10) = f(12) = f(14) = \dots = f(98) = 1$$

$$f(100) = f(102) = f(104) = \dots = f(150) = 2$$

$$\therefore f(2) + f(4) + f(6) + \dots + f(150) \\ = \{f(2) + f(4) + f(6) + f(8)\} \\ + \{f(10) + f(12) + f(14) + \dots + f(98)\} \\ + \{f(100) + f(102) + f(104) + \dots + f(150)\} \\ = 0 \times 4 + 1 \times 45 + 2 \times 26 = 97$$

정답_ ③

126

$$\log N + \log \frac{1}{100N} = \log \left(N \times \frac{1}{100N} \right) \\ = \log \frac{1}{100} = -2$$

$\log N$ 과 $\log \frac{1}{100N}$ 의 소수 부분을 각각

α, β ($0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < 1$)라고 하면

$$\log N = m + \alpha, \log \frac{1}{100N} = n + \beta \text{이므로}$$

$$m + \alpha + n + \beta = -2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < 1 \text{에서}$$

$$0 \leq \alpha + \beta < 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

m, n 은 정수이므로 $\textcircled{㉠}$ 에 의하여 $\alpha + \beta$ 도 정수이다.

즉, $\textcircled{㉡}$ 에 의하여

$$\alpha + \beta = 0 \text{ 또는 } \alpha + \beta = 1$$

이므로 $\textcircled{㉠}$ 에서

$m+n=-2$ 또는 $m+n=-3$
따라서 모든 $m+n$ 의 값의 합은
 $-2+(-3)=-5$

정답_ ①

127

$\log x$ 의 소수 부분과 $\log \frac{1}{x}$ 의 소수 부분이 같으므로
 $\log x - \log \frac{1}{x} = \log x + \log x = 2 \log x = (\text{정수})$
 $100 < x < 1000$ 에서 $2 < \log x < 3$
 $\therefore 4 < 2 \log x < 6$
이때 $2 \log x$ 가 정수이므로
 $2 \log x = 5, \log x = \frac{5}{2}$
 $\therefore x = 10^{\frac{5}{2}}$
 $\therefore x^2 = (10^{\frac{5}{2}})^2 = 10^5 = 100000$

정답_ 100000

128

$\log x$ 의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합이 1이므로
 $\log x + \log \sqrt{x} = \log x + \frac{1}{2} \log x = \frac{3}{2} \log x = (\text{정수})$
한편, $\log x$ 의 정수 부분이 2이므로
 $2 \leq \log x < 3$
 $\therefore 3 \leq \frac{3}{2} \log x < \frac{9}{2}$
이때 $\frac{3}{2} \log x$ 가 정수이므로
 $\frac{3}{2} \log x = 3$ 또는 $\frac{3}{2} \log x = 4$
 $\therefore \log x = 2$ 또는 $\log x = \frac{8}{3}$
그런데 $\log x = 2$ 이면 $\log \sqrt{x} = 1$ 이 되어 $\log x$ 와 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합은 0이므로 조건을 만족시키지 않는다.
 $\therefore \log x = \frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$
따라서 $\log x$ 의 소수 부분은 $\frac{2}{3}$ 이다.

정답_ ④

다른 풀이

$\log x$ 의 소수 부분을 a 라고 하면
 $\log x = 2 + a$ (단, $0 \leq a < 1$)
 $\therefore \log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x = \frac{1}{2}(2+a) = 1 + \frac{a}{2}$
즉, $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분은 $\frac{a}{2}$ 이므로
 $a + \frac{a}{2} = 1, \frac{3}{2}a = 1$
 $\therefore a = \frac{2}{3}$
따라서 $\log x$ 의 소수 부분은 $\frac{2}{3}$ 이다.

129

$\log x^2$ 의 소수 부분과 $\log x^5$ 의 소수 부분이 같으므로
 $\log x^5 - \log x^2 = 5 \log x - 2 \log x = 3 \log x = (\text{정수})$
 $\log x$ 의 정수 부분이 3이므로
 $3 \leq \log x < 4$
 $\therefore 9 \leq 3 \log x < 12$
이때 $3 \log x$ 가 정수이므로
 $3 \log x = 9$ 또는 $3 \log x = 10$ 또는 $3 \log x = 11$
 $\log x = 3$ 또는 $\log x = \frac{10}{3}$ 또는 $\log x = \frac{11}{3}$
 $\therefore x = 10^3$ 또는 $x = 10^{\frac{10}{3}}$ 또는 $x = 10^{\frac{11}{3}}$
따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은
 $10^3 \times 10^{\frac{10}{3}} \times 10^{\frac{11}{3}} = 10^{3+\frac{10}{3}+\frac{11}{3}} = 10^{10}$

정답_ ③

130

x 의 정수 부분이 두 자리의 자연수이고, x 는 정수가 아니므로
 $\log x = 1.\times\times\times$
 $\therefore 1 < \log x < 2$ ㉠
 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분과 $\log x^2$ 의 소수 부분이 같으므로
 $\log x^2 - \log \sqrt{x} = 2 \log x - \frac{1}{2} \log x = \frac{3}{2} \log x = (\text{정수})$
㉠에 의하여 $\frac{3}{2} < \frac{3}{2} \log x < 3$
이때 $\frac{3}{2} \log x$ 가 정수이므로
 $\frac{3}{2} \log x = 2$
 $\therefore \log x = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$
따라서 $\log x$ 의 소수 부분은 $\frac{1}{3}$ 이다.

정답_ $\frac{1}{3}$

131

$\log a$ 의 소수 부분과 $\log b$ 의 소수 부분의 합이 1이므로
 $\log a + \log b = \log ab = (\text{정수})$ ㉠
이고 $\log a$ 와 $\log b$ 의 소수 부분이 모두 0이 아니다.
즉, a, b 는 1 또는 10의 거듭제곱이 아니어야 한다.
또, ㉠에서 $ab = 10^n$ (n 은 정수)의 꼴이고 a, b 는 100보다 작은 자연수이므로 ab 의 값은 10, 100, 1000이다.
이때 $a < b < 100$ 이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는
(i) $ab = 10$ 일 때, $(2, 5)$
(ii) $ab = 100$ 일 때, $(2, 50), (4, 25), (5, 20)$
(iii) $ab = 1000$ 일 때, $(20, 50), (25, 40)$
(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는
 $1+3+2=6$

정답_ ③

주의 $\log a$ 의 소수 부분과 $\log b$ 의 소수 부분의 합이 1이라는 조건에서 두 상용로그 $\log a$ 와 $\log b$ 의 값이 모두 정수가 아님에 주의한다.
즉, $ab = 10$ 일 때, $a = 1, b = 10$ 이 될 수 없다.

132

절대 등급이 4.8, 1.3인 별을 각각 A, B라고 하면

$$M_A = 4.8, L_A = L$$

$$M_B = 1.3, L_B = kL$$

$$\text{즉, } 4.8 - 1.3 = -2.5 \log \frac{L}{kL} \text{이므로}$$

$$3.5 = -2.5 \log \frac{1}{k}, 3.5 = 2.5 \log k$$

$$\log k = \frac{3.5}{2.5} = \frac{7}{5} \quad \therefore k = 10^{\frac{7}{5}}$$

정답_ ④

133

두 지역 A, B에서 측정한 지진의 규모가 각각 8.2, 7.4이므로

$$8.2 = \log \frac{I_1}{S} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$7.4 = \log \frac{I_2}{S} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠ - ㉡을 하면

$$8.2 - 7.4 = \log \frac{I_1}{S} - \log \frac{I_2}{S}, 0.8 = \log \left(\frac{I_1}{S} \div \frac{I_2}{S} \right)$$

$$\therefore \log \frac{I_1}{I_2} = 0.8$$

주어진 상용로그표에서 $\log 6.31 = 0.8000$ 이므로

$$\frac{I_1}{I_2} = 6.31$$

정답_ 6.31

134

(i) $t = a$ 일 때, $\log Q_a - \log Q_0 = ak$

$$Q_a = \frac{1}{3} Q_0 \text{이므로}$$

$$\log \frac{1}{3} Q_0 - \log Q_0 = ak, \log \left(\frac{1}{3} Q_0 \div Q_0 \right) = ak$$

$$\therefore \log \frac{1}{3} = ak$$

(ii) $t = b$ 일 때, $\log Q_b - \log Q_0 = bk$

$$Q_b = \frac{1}{10} Q_0 \text{이므로}$$

$$\log \frac{1}{10} Q_0 - \log Q_0 = bk, \log \left(\frac{1}{10} Q_0 \div Q_0 \right) = bk$$

$$\therefore \log \frac{1}{10} = bk$$

(iii) $t = 2a + b$ 일 때, $\log Q_{2a+b} - \log Q_0 = (2a + b)k$

$$Q_{2a+b} = \frac{1}{p} Q_0 \text{이므로}$$

$$\log \frac{1}{p} Q_0 - \log Q_0 = (2a + b)k, \log \left(\frac{1}{p} Q_0 \div Q_0 \right) = (2a + b)k$$

$$\therefore \log \frac{1}{p} = (2a + b)k \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이때

$$(2a + b)k = 2ak + bk = 2 \log \frac{1}{3} + \log \frac{1}{10}$$

$$= \log \frac{1}{9} + \log \frac{1}{10} = \log \left(\frac{1}{9} \times \frac{1}{10} \right)$$

$$= \log \frac{1}{90}$$

..... ㉡

이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{90} \quad \therefore p = 90$$

정답_ ⑤

135

첫 주에 달린 거리를 x 라 하고, 매주 $r\%$ 씩 달릴 거리를 늘려 나간다고 하면 5주 후에 달린 거리가 첫 주에 달린 거리의 2배가 되어야 하므로

$$x \left(1 + \frac{r}{100} \right)^5 = 2x \quad \therefore \left(1 + \frac{r}{100} \right)^5 = 2$$

위 식의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log \left(1 + \frac{r}{100} \right)^5 = \log 2, 5 \log \left(1 + \frac{r}{100} \right) = \log 2$$

$$\therefore \log \left(1 + \frac{r}{100} \right) = \frac{1}{5} \log 2 = \frac{1}{5} \times 0.3 = 0.06$$

이때 $\log 1.15 = 0.06$ 이므로

$$1 + \frac{r}{100} = 1.15, \frac{r}{100} = 0.15$$

$$\therefore r = 15$$

따라서 매주 달릴 거리를 15%씩 늘려야 한다.

정답_ ③

136

올해 초 공유 자전거 수는

$$500 \times 10^4 \times \frac{5}{100}$$

5년 후 공유 자전거 수는

$$500 \times 10^4 \times \frac{5}{100} \times \left(1 + \frac{20}{100} \right)^5 = 500 \times 10^4 \times \frac{5}{100} \times 1.2^5$$

$1.2^5 = x$ 라고 하면

$$\log x = \log 1.2^5 = 5 \log 1.2 = 5 \times 0.079 = 0.395$$

이때 $\log 2.48 = 0.395$ 이므로

$$x = 2.48$$

따라서 5년 후 공유 자전거 수는

$$500 \times 10^4 \times \frac{5}{100} \times 2.48 = 500 \times 10^4 \times \frac{12.4}{100}$$

이므로 5년 후 A시의 공유 자전거 수는 전체 인구의 12.4%이다.

정답_ ②

137

밑의 조건에서 $x - 1 > 0$, $x - 1 \neq 1$ 이므로

$$x > 1, x \neq 2$$

$$\therefore 1 < x < 2 \text{ 또는 } x > 2$$

..... ㉠

..... ①

진수의 조건에서 $-x^2 - 4x + 12 > 0$ 이므로

$$x^2 + 4x - 12 < 0, (x + 6)(x - 2) < 0$$

$$\therefore -6 < x < 2$$

..... ㉡

..... ②

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$1 < x < 2 \dots\dots\dots ③$$

따라서 $a=1, b=2$ 이므로

$$a+b=1+2=3 \dots\dots\dots ④$$

정답_ 3

채점 기준	비율
① 밑의 조건 구하기	30 %
② 진수의 조건 구하기	30 %
③ x 의 값의 범위 구하기	20 %
④ $a+b$ 의 값 구하기	20 %

138

$\log_a b = \log_b a$ 에서

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, (\log_a b)^2 = 1$$

$$\therefore \log_a b = -1 \text{ 또는 } \log_a b = 1$$

이때 $a \neq b$ 이므로

$$\log_a b = -1 \dots\dots\dots ①$$

$$\therefore b = \frac{1}{a} \dots\dots\dots ②$$

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4a + 9b = 4a + \frac{9}{a} \geq 2\sqrt{4a \times \frac{9}{a}} = 12$$

(단, 등호는 $4a = \frac{9}{a}$, 즉 $a = \frac{3}{2}$ 일 때 성립한다.)

$$\therefore \text{따라서 } 4a + 9b \text{의 최솟값은 } 12 \text{이다.} \dots\dots\dots ③$$

정답_ 12

채점 기준	비율
① $\log_a b$ 의 값 구하기	40 %
② a, b 사이의 관계식 구하기	10 %
③ $4a + 9b$ 의 최솟값 구하기	50 %

참고 산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0, b > 0$ 일 때, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.)

139

$$\begin{pmatrix} \log_a 3 & 2 \\ 3 & \log_a b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \log_b 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} \log_a 3 - 3 \log_b 3 & -1 \\ 0 & \log_a b - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$\log_a 3 - 3 \log_b 3 = 1 \dots\dots\dots ㉠$$

$$\log_a b - 1 = 3 \dots\dots\dots ㉡$$

㉡에서 $\log_a b = 4$

$$\therefore b = a^4 \dots\dots\dots ①$$

$b = a^4$ 을 ㉠에 대입하면

$$\log_a 3 - 3 \log_{a^4} 3 = 1$$

$$\log_a 3 - \frac{3}{4} \log_a 3 = 1, \frac{1}{4} \log_a 3 = 1$$

$$\log_a 3 = 4, a^4 = 3$$

$$\therefore a = 3^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore b = a^4 = (3^{\frac{1}{4}})^4 = 3 \dots\dots\dots ②$$

$$\therefore \sqrt[k]{a^8 b^4} = \sqrt[k]{(3^{\frac{1}{4}})^8 3^4} = \sqrt[k]{3^6} = 3^{\frac{6}{k}}$$

$3^{\frac{6}{k}}$ 이 자연수가 되려면 k 는 6의 양의 약수이어야 하고, k 는 2 이상의 자연수이므로

$$k = 2, 3, 6$$

따라서 모든 k 의 값의 합은

$$2 + 3 + 6 = 11 \dots\dots\dots ③$$

정답_ 11

채점 기준	비율
① a, b 사이의 관계식 구하기	30 %
② a, b 의 값 구하기	40 %
③ 모든 k 의 값의 합 구하기	30 %

140

$\log_c a : \log_c b = 3 : 5$ 이므로

$$3 \log_c b = 5 \log_c a, \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \log_a b = \frac{5}{3} \dots\dots\dots ①$$

$$\therefore \log_b a = \frac{1}{\log_a b} = \frac{3}{5} \dots\dots\dots ②$$

$$\therefore 9 \log_a b + 10 \log_b a = 9 \times \frac{5}{3} + 10 \times \frac{3}{5} = 21 \dots\dots\dots ③$$

정답_ 21

채점 기준	비율
① $\log_a b$ 의 값 구하기	40 %
② $\log_b a$ 의 값 구하기	40 %
③ $9 \log_a b + 10 \log_b a$ 의 값 구하기	20 %

141

$$x = \log_9 63 = \log_{3^2} (3^2 \times 7) = \log_{3^2} 3^2 + \log_{3^2} 7 = 1 + \frac{1}{2} \log_3 7$$

$$\log_3 3 = 1, \log_3 9 = 2 \text{이므로 } 1 < \log_3 7 < 2$$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2} \log_3 7 < 1 \quad \therefore \frac{3}{2} < 1 + \frac{1}{2} \log_3 7 < 2$$

$$\therefore \frac{3}{2} < x < 2$$

따라서 x 에 가장 가까운 정수는 2이므로

$$y = 2 \dots\dots\dots ①$$

$$\therefore 3^x + 3^y = 3^{\log_9 63} + 3^2 = 63^{\log_9 3} + 9$$

$$= 63^{\frac{1}{2}} + 9 = \sqrt{63} + 9$$

$$= 9 + 3\sqrt{7} \dots\dots\dots ②$$

정답_ $9 + 3\sqrt{7}$

채점 기준	비율
① y 의 값 구하기	60 %
② $3^x + 3^y$ 의 값 구하기	40 %

142

‘도’음의 초당 진동수가 440 Hz이므로 ‘도’음보다 한 음 높은 ‘레’음의 초당 진동수는

$$440 \times (2^{\frac{1}{12}})^2 = 440 \times 2^{\frac{1}{6}} \text{ (Hz)} \dots\dots\dots ①$$

$x=2^{\frac{1}{6}}$ 으로 놓고 양변에 상용로그를 취하면

$$\log x = \log 2^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} \log 2 = \frac{1}{6} \times 0.30 = 0.05$$

주어진 표에서 $\log 1.12 = 0.05$ 이므로

$$x = 1.12 \dots\dots\dots ②$$

따라서 ‘레’음의 초당 진동수는

$$440 \times 2^{\frac{1}{6}} = 440 \times 1.12 = 492.8 \text{ (Hz)} \dots\dots\dots ③$$

정답_ 492.8 Hz

채점 기준	비율
① ‘레’음의 초당 진동수 나타내기	20 %
② 주어진 표를 이용하여 $2^{\frac{1}{6}}$ 의 값 구하기	60 %
③ ‘레’음의 초당 진동수 구하기	20 %

143

집합 B 의 원소는 모두 자연수이므로 a, b, c 는 모두 2^k (k 는 자연수)의 꼴이다.

이때 $a+b=24$ 이므로

$$a=8, b=16 \text{ 또는 } a=16, b=8$$

$$\therefore A = \{8, 16, c\}, B = \{3, 4, \log_2 c\}$$

한편, 집합 B 의 모든 원소의 합이 12이므로

$$3+4+\log_2 c = 12, \log_2 c = 5$$

$$\therefore c = 2^5 = 32$$

따라서 $A = \{8, 16, 32\}$ 이므로 집합 A 의 모든 원소의 합은

$$8+16+32=56$$

정답_ 56

144

조건 (가)에서 $\log_3 a \times \log_b 5 = 0$ 이므로

$$\log_3 a = 0 \text{ 또는 } \log_b 5 = 0$$

이때 $\log_b 5 = 0$ 을 만족시키는 b 의 값은 존재하지 않으므로

$$\log_3 a = 0 \quad \therefore a = 1$$

조건 (나)에서 $\log_3 a + \log_b 5 = 2$ 이므로

$$\log_b 5 = 2 \quad \therefore b^2 = 5$$

따라서 $a=1, b^2=5$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 1^2 + 5 = 6$$

정답_ ④

다른 풀이

$\log_3 a$ 와 $\log_b 5$ 를 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2 - (\log_3 a + \log_b 5)x + \log_3 a \times \log_b 5 = 0$$

조건 (가), (나)에 의하여

$$x^2 - 2x = 0, x(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 $\log_3 a = 0, \log_b 5 = 2$ 또는 $\log_3 a = 2, \log_b 5 = 0$ 이다.

이때 $\log_b 5 = 0$ 을 만족시키는 b 의 값은 존재하지 않으므로

$$\log_3 a = 0, \log_b 5 = 2$$

따라서 $a=1, b^2=5$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 1^2 + 5 = 6$$

145

말의 조건에서

$$x^2 + a > 0, x^2 + a \neq 1$$

이것이 임의의 실수 x 에 대하여 성립해야 하고, a 는 정수이므로 a 는 2 이상의 정수이어야 한다.

$$\therefore a = 2, 3, 4, \dots\dots\dots ㉠$$

진수의 조건에서

$$bx^2 - 2bx + 5 > 0 \dots\dots\dots ㉡$$

위 부등식이 임의의 실수 x 에 대하여 성립해야 한다.

(i) $b=0$ 일 때

$5 > 0$ 이므로 임의의 실수 x 에 대하여 ㉡이 성립한다.

(ii) $b \neq 0$ 일 때

임의의 실수 x 에 대하여 ㉡이 성립해야 하므로 이차방정식

$$bx^2 - 2bx + 5 = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라고 하면}$$

$$b > 0, D < 0$$

이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (-b)^2 - 5b < 0 \text{에서}$$

$$b(b-5) < 0 \quad \therefore 0 < b < 5$$

즉, $b > 0$ 이고 $0 < b < 5$ 이므로

$$0 < b < 5$$

이때 b 는 정수이므로

$$b = 1, 2, 3, 4$$

(i), (ii)에서 $b = 0, 1, 2, 3, 4 \dots\dots\dots ㉢$

㉠, ㉢에서 $a+b$ 의 값은 $a=2, b=0$ 일 때 최소이므로 $a+b$ 의 최소값은

$$2+0=2$$

정답_ ⑤

146

조건 (가)에서 $a \log_{1800} 2 + b \log_{1800} 3 + c \log_{1800} 5 = d$ 이므로

$$\log_{1800} 2^a + \log_{1800} 3^b + \log_{1800} 5^c = d$$

$$\log_{1800} (2^a \times 3^b \times 5^c) = d$$

$$\therefore 2^a \times 3^b \times 5^c = 1800^d \dots\dots\dots ㉠$$

$$1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \text{이므로}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2^a \times 3^b \times 5^c = (2^3 \times 3^2 \times 5^2)^d = 2^{3d} \times 3^{2d} \times 5^{2d}$$

$$\therefore a = 3d, b = 2d, c = 2d$$

이때 $a=3d, b=2d, c=2d$ 의 최대공약수는 d 이고, 조건 (나)에서 a, b, c 의 최대공약수가 5이므로

$$d = 5$$

따라서 $a=15, b=10, c=10, d=5$ 이므로

$$a+b+c+d = 15+10+10+5 = 40$$

정답_ ⑤

147

$$\log_n 4 \times \log_2 9 = \frac{\log_2 4}{\log_2 n} \times \log_2 9 = \frac{2}{\log_2 n} \times 2 \log_2 3$$

$$= 4 \times \frac{\log_2 3}{\log_2 n} = 4 \log_n 3$$

$4 \log_n 3 = k$ (k 는 자연수)로 놓으면

$$\log_n 3 = \frac{k}{4}, n^{\frac{k}{4}} = 3$$

$$\therefore n = 3^{\frac{4}{k}}$$

이때 n 이 2 이상의 자연수이므로 k 는 4의 양의 약수이어야 한다.

$$\therefore k = 1, 2, 4$$

$$k=1 \text{ 일 때, } n=3^4=81$$

$$k=2 \text{ 일 때, } n=3^2=9$$

$$k=4 \text{ 일 때, } n=3$$

따라서 모든 n 의 값의 합은

$$81 + 9 + 3 = 93$$

정답_ ①

148

$$\log_9 3n^2 - \frac{1}{2} \log_3 \sqrt{n} = \log_9 3n^2 - \log_9 \sqrt{n}$$

$$= \log_9 \frac{3n^2}{\sqrt{n}} = \log_9 3n^{\frac{3}{2}}$$

이 값이 30 이하의 자연수가 되려면

$$3n^{\frac{3}{2}} = 9^k \quad (k=1, 2, 3, \dots, 30)$$

이어야 한다.

$$3n^{\frac{3}{2}} = 9^k \text{ 에서}$$

$$3n^{\frac{3}{2}} = 3^{2k}, n^{\frac{3}{2}} = 3^{2k-1}$$

$$\therefore n = 3^{\frac{2(2k-1)}{3}} = 9^{\frac{2k-1}{3}}$$

n 이 자연수이므로 $\frac{2k-1}{3}$ 은 음이 아닌 정수이어야 한다.

$k=1, 2, 3, \dots, 30$ 중에서 이를 만족시키는 k 의 값은

$$2, 5, 8, \dots, 29$$

이므로 자연수 n 은

$$9, 9^3, 9^5, \dots, 9^{19}$$

의 10개이다.

정답_ 10

149

ㄱ. $a=\sqrt{b}$ 이면 $\log_a b \times \log_c d = 1$ 에서

$$\log_{\sqrt{b}} b \times \log_c d = 1, 2 \log_b b \times \log_c d = 1$$

$$\log_c d = \frac{1}{2} \quad \therefore d = c^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore c = d^2 \text{ (거짓)}$$

ㄴ. $ad=1$ 이면 $d=\frac{1}{a}$ 이므로 $\log_a b \times \log_c d = 1$ 에서

$$\log_a b \times \log_c \frac{1}{a} = 1, \log_a b \times (-\log_c a) = 1$$

$$\frac{\log b}{\log a} \times \left(-\frac{\log a}{\log c} \right) = 1, \frac{\log b}{\log c} = -1$$

$$\log_c b = -1, b = \frac{1}{c}$$

$$\therefore bc = 1 \text{ (참)}$$

ㄷ. $a=d$ 이면 $\log_a b \times \log_c d = 1$ 에서

$$\log_a b \times \log_c a = 1, \frac{\log b}{\log a} \times \frac{\log a}{\log c} = 1$$

$$\frac{\log b}{\log c} = 1, \log_c b = 1$$

$$\therefore b = c \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ④

150

조건 (가)에서 $3^a = 5^b = k^c = d$ ($d > 1$)로 놓으면

$$3^a = d \text{ 에서 } a = \log_3 d \quad \dots\dots ㉠$$

$$5^b = d \text{ 에서 } b = \log_5 d \quad \dots\dots ㉡$$

$$k^c = d \text{ 에서 } c = \log_k d \quad \dots\dots ㉢$$

조건 (나)에서 $\log c = \log(2ab) - \log(2a+b)$ 이므로

$$\log c = \log \frac{2ab}{2a+b}, c = \frac{2ab}{2a+b}$$

$$\frac{1}{c} = \frac{2a+b}{2ab} \quad \therefore \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{2a}$$

위의 식에 ㉠, ㉡, ㉢을 대입하면

$$\frac{1}{\log_k d} = \frac{1}{\log_5 d} + \frac{1}{2 \log_3 d}, \log_d k = \log_d 5 + \frac{1}{2} \log_d 3$$

$$2 \log_d k = 2 \log_d 5 + \log_d 3, \log_d k^2 = \log_d (5^2 \times 3)$$

$$\therefore k^2 = 5^2 \times 3 = 75$$

정답_ 75

다른 풀이

조건 (가)에서 $3^a = 5^b = k^c = d$ ($d > 1$)로 놓으면

$$3^a = d \text{ 에서 } 3 = d^{\frac{1}{a}} \quad \dots\dots ㉠$$

$$5^b = d \text{ 에서 } 5 = d^{\frac{1}{b}} \quad \dots\dots ㉡$$

$$k^c = d \text{ 에서 } k = d^{\frac{1}{c}} \quad \dots\dots ㉢$$

조건 (나)의 식을 정리하면 $\frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{2a}$ 이므로

$$d^{\frac{1}{c}} = d^{\frac{1}{b} + \frac{1}{2a}} \quad \therefore d^{\frac{1}{c}} = d^{\frac{1}{b}} \times d^{\frac{1}{2a}} = d^{\frac{1}{b}} \times \sqrt{d^{\frac{1}{a}}}$$

위의 식에 ㉠, ㉡, ㉢을 대입하면

$$k = 5\sqrt{3} \quad \therefore k^2 = (5\sqrt{3})^2 = 75$$

151

$a > \log_2 a, b > \log_2 b, c > \log_2 c$ 이고 $a < b < c$ 이므로 조건 (가)에 의하여

$$a = \log_2 b, b = \log_2 c$$

$$\therefore b = 2^a, c = 2^b \quad \dots\dots ㉠$$

조건 (나)에 의하여

$$\log_2 a + \log_2 b + \log_2 c = n \quad (n \text{은 자연수})$$

으로 놓을 수 있으므로

$$\log_2 abc = n$$

$$\therefore abc = 2^n \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$a = 2^m \quad (m \text{은 음이 아닌 정수})$$

로 놓을 수 있고 $a < b < c$ 이므로

$$m < a < b$$

- (i) $m=0$ 일 때
 $a=2^0=1, b=2^1=2, c=2^2=4$
- (ii) $m=1$ 일 때
 $a=2^1=2, b=2^2=4, c=2^4=16$
- (iii) $m=2$ 일 때
 $a=2^2=4, b=2^4=16, c=2^{16}$
- (iv) $m \geq 3$ 이면 a, b, c 가 2^{30} 이하의 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.
- (i)~(iv)에서 abc 의 값은 $a=2^2, b=2^4, c=2^{16}$ 일 때 최대이고,
 $a=2^0, b=2^1, c=2^2$ 일 때 최소이므로
 $M=2^2 \times 2^4 \times 2^{16}=2^{22}, m=2^0 \times 2^1 \times 2^2=2^3$
 $\therefore \log_2 \frac{M}{m} = \log_2 \frac{2^{22}}{2^3} = \log_2 2^{19} = 19$

정답_ 19

152

- $\log_3 27=3, \log_3 81=4$ 이므로
 $3 < \log_3 45 < 4 \quad \therefore n=3$
 $\log_3 45=3+k \quad (0 \leq k < 1)$ 라고 하면
 $x - \log_3 45$ 가 정수가 되도록 하는 양의 실수 x 의 최솟값은 k , 즉 $\log_3 45$ 의 소수 부분이므로
 $a=k \log_3 45 - 3 = \log_3 45 - \log_3 27 = \log_3 \frac{45}{27} = \log_3 \frac{5}{3}$
 이때
 $\frac{n}{a+1} = \frac{3}{\log_3 \frac{5}{3} + 1} = \frac{3}{\log_3 \frac{5}{3} + \log_3 3} = \frac{3}{\log_3 5} = 3 \log_5 3$
 이므로
 $5^{\frac{n}{a+1}} = 5^{3 \log_5 3} = 5^{\log_5 27} = 27$

정답_ 27

153

- $10 \leq p \leq 100$ 에서
 $\log_2 10 \leq \log_2 p \leq \log_2 100 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $f\left(\frac{p}{2}\right) = f\left(\frac{2}{p}\right)$ 이므로 $\log_2 \frac{p}{2}$ 의 소수 부분과 $\log_2 \frac{2}{p}$ 의 소수 부분이 같다.
 즉, $\log_2 \frac{p}{2} - \log_2 \frac{2}{p} = n$ (n 은 정수)으로 놓을 수 있으므로
 $(\log_2 p - \log_2 2) - (\log_2 2 - \log_2 p) = n$
 $2 \log_2 p - 2 = n, 2 \log_2 p = n + 2$
 $\therefore \log_2 p = \frac{n+2}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 ㉠을 ㉡에 대입하면
 $\log_2 10 \leq \frac{n+2}{2} \leq \log_2 100$
 $2 \log_2 10 \leq n+2 \leq 2 \log_2 100$
 $2 \log_2 10 - 2 \leq n \leq 2 \log_2 100 - 2$
 $\log_2 100 - \log_2 4 \leq n \leq \log_2 10000 - \log_2 4$
 $\therefore \log_2 25 \leq n \leq \log_2 2500$
 $\log_2 16 < \log_2 25 < \log_2 32, \log_2 2048 < \log_2 2500 < \log_2 4096$ 이므로
 $\log_2 2^4 < \log_2 25 \leq n \leq \log_2 2500 < \log_2 2^{12}$
 $\therefore 4 < n < 12$

- 이때 n 은 정수이므로
 $n=5, 6, 7, \dots, 11$
 따라서 ㉠에서
 $\log_2 p = \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, \dots, \frac{13}{2}$
 이므로
 $p = 2^{\frac{7}{2}}, 2^4, 2^{\frac{9}{2}}, \dots, 2^{\frac{13}{2}}$
 따라서 p 의 개수는 7이다.

정답_ 7

154

- 100 이하의 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 은 $\log n$ 의 정수 부분이므로
 $f(n)=0$ 또는 $f(n)=1$ 또는 $f(n)=2$
 (i) $f(n)=0$, 즉 $1 \leq n < 10$ 일 때 $\dots\dots \textcircled{1}$
 $f(n+10)=f(n)+1$ 에서 $f(n+10)=1$ 이므로
 $10 \leq n+10 < 100$
 $\therefore 0 \leq n < 90 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 ㉠, ㉡에서 $1 \leq n < 10$ 이므로 자연수 n 은 1, 2, 3, ..., 9의 9개이다.
 (ii) $f(n)=1$, 즉 $10 \leq n < 100$ 일 때 $\dots\dots \textcircled{3}$
 $f(n+10)=f(n)+1$ 에서 $f(n+10)=2$ 이므로
 $100 \leq n+10 < 1000$
 $\therefore 90 \leq n < 990 \quad \dots\dots \textcircled{4}$
 ㉢, ㉣에서 $90 \leq n < 100$ 이므로 자연수 n 은 90, 91, 92, ..., 99의 10개이다.
 (iii) $f(n)=2$, 즉 $n=100$ 일 때 $\dots\dots \textcircled{5}$
 $f(n+10)=f(n)+1$ 에서 $f(n+10)=3$ 이므로
 $1000 \leq n+10 < 10000$
 $\therefore 990 \leq n < 9990 \quad \dots\dots \textcircled{6}$
 ㉤, ㉥을 동시에 만족시키는 자연수 n 은 존재하지 않는다.
 (i)~(iii)에서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n 의 개수는
 $9+10=19$

정답_ ⑤

155

- $\log 5a = \log 5 + \log a = f(a) + g(a) + \log 5$
 이때 $0 \leq g(a) < 1$ 이므로 다음과 같이 $g(a) + \log 5$ 의 값이 1보다 작은 경우와 큰 경우로 나누어 생각할 수 있다.
 (i) $\log 5 \leq g(a) + \log 5 < 1$, 즉 $0 \leq g(a) < \log 2$ 일 때
 $g(5a) = g(a) + \log 5$ 이므로
 $f(a) = g(a) + g(5a) = g(a) + g(a) + \log 5$
 $= 2g(a) + \log 5$
 이때 $0 \leq g(a) < \log 2$ 에서
 $\log 5 \leq 2g(a) + \log 5 < 2 \log 2 + \log 5$
 $\log 5 \leq 2g(a) + \log 5 < \log 2 + \log 10$
 $\therefore \log 5 \leq f(a) < 1 + \log 2$
 그런데 $f(a)$ 는 정수이므로 $f(a)=1$
 즉, $f(a) = 2g(a) + \log 5 = 1$ 이므로
 $g(a) = \frac{1}{2}(1 - \log 5) = \frac{1}{2} \log 2 = \log \sqrt{2}$
 $\therefore \log a = f(a) + g(a) = 1 + \log \sqrt{2} = \log 10\sqrt{2}$
 $\therefore a = 10\sqrt{2}$

(ii) $1 \leq g(a) + \log 5 < 1 + \log 5$, 즉 $\log 2 \leq g(a) < 1$ 일 때
 $g(5a) = g(a) + \log 5 - 1$ 이므로
 $f(a) = g(a) + g(5a)$
 $= g(a) + g(a) + \log 5 - 1$
 $= 2g(a) + \log 5 - 1$
 이때 $\log 2 \leq g(a) < 1$ 에서
 $2 \log 2 + \log 5 - 1 \leq 2g(a) + \log 5 - 1 < 2 + \log 5 - 1$
 $\log 2 + \log 10 - 1 \leq 2g(a) + \log 5 - 1 < 1 + \log 5$
 $\therefore \log 2 \leq f(a) < 1 + \log 5$
 그런데 $f(a)$ 는 정수이므로 $f(a) = 1$
 즉, $2g(a) + \log 5 - 1 = 1$ 이므로
 $g(a) = \frac{1}{2}(2 - \log 5) = \frac{1}{2} \log 20 = \log 2\sqrt{5}$
 $\therefore \log a = f(a) + g(a) = 1 + \log 2\sqrt{5} = \log 20\sqrt{5}$
 $\therefore a = 20\sqrt{5}$
 (i), (ii)에서 $a = 10\sqrt{2}$ 또는 $a = 20\sqrt{5}$
 따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은
 $10\sqrt{2} \times 20\sqrt{5} = 200\sqrt{10}$

정답_ ④

156

물이 증발하기 시작하여 처음 양의 60 %가 증발하는 데 t_1 시간이 걸린다고 하면
 $\log 60 = \log(1 - k^{t_1}) + 2$
 $\log 60 - 2 = \log(1 - k^{t_1})$
 $\log 60 - \log 100 = \log(1 - k^{t_1})$
 $\log \frac{3}{5} = \log(1 - k^{t_1})$
 $\frac{3}{5} = 1 - k^{t_1}, k^{t_1} = \frac{2}{5}$
 $\therefore t_1 = \log_k \frac{2}{5}$
 물이 증발하기 시작하여 처음 양의 84 %가 증발하는 데 t_2 시간이 걸린다고 하면
 $\log 84 = \log(1 - k^{t_2}) + 2$
 $\log 84 - 2 = \log(1 - k^{t_2})$
 $\log 84 - \log 100 = \log(1 - k^{t_2})$
 $\log \frac{21}{25} = \log(1 - k^{t_2})$
 $\frac{21}{25} = 1 - k^{t_2}, k^{t_2} = \frac{4}{25}$
 $\therefore t_2 = \log_k \frac{4}{25}$
 $\therefore \frac{t_2}{t_1} = \frac{\log_k \frac{4}{25}}{\log_k \frac{2}{5}} = \frac{2 \log_k \frac{2}{5}}{\log_k \frac{2}{5}} = 2$
 따라서 물이 증발하기 시작하여 처음 양의 84 %가 증발하는 데 걸리는 시간은 처음 양의 60 %가 증발하는 데 걸리는 시간의 2배이다.

정답_ ②

157

pH가 3인 용액 6 L 속에 들어 있는 수소 이온은
 6×10^{-3} g

pH가 5인 용액 4 L 속에 들어 있는 수소 이온은
 4×10^{-5} g
 따라서 혼합 용액 1 L 속에 들어 있는 수소 이온은
 $\frac{1}{10}(6 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-5}) = \frac{1}{10}(6 \times 10^{-3} + 0.04 \times 10^{-3})$
 $= \frac{1}{10} \times 6.04 \times 10^{-3}$
 $= 6.04 \times 10^{-4}$ (g)

이 혼합 용액의 pH를 n 이라고 하면
 $10^{-n} = 6.04 \times 10^{-4}$
 위의 식의 양변에 상용로그를 취하면
 $-n = \log 6.04 - 4$
 $\therefore n = 4 - \log 6.04 = 4 - \log(60.4 \times 10^{-1})$
 $= 5 - \log 60.4 = 5 - 1.781$
 $= 3.219$
 따라서 혼합 용액의 pH는 3.219이다.

정답_ 3.219

03 지수함수

158

$$f(m)=8\text{에서 } a^m=8$$

$$f(n)=4\text{에서 } a^n=4$$

$$\therefore f(m-n)=a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n}=\frac{8}{4}=2$$

정답_ ③

159

$$f(1)=3\text{에서 } a^{b+c}=3$$

$$f(2)=9\text{에서 } a^{2b+c}=9$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1}\text{을 하면 } a^b=3$$

$$\textcircled{1}\text{에서 } a^b \times a^c=3\text{이므로 이 식에 } \textcircled{2}\text{을 대입하면}$$

$$3 \times a^c=3 \quad \therefore a^c=1$$

$$\therefore f(3)=a^{3b+c}=(a^b)^3 \times a^c=3^3 \times 1=27$$

참고 $a^c=1$ 에서 $a>0, a \neq 1$ 이므로 $c=0$

..... ①

..... ②

..... ③

정답_ ⑤

160

$$f(2a)f(b)=4\text{에서 } 2^{-2a} \times 2^{-b}=4, 2^{-2a-b}=2^2$$

$$\therefore 2a+b=-2$$

$$f(a-b)=2\text{에서 } 2^{-(a-b)}=2, 2^{-a+b}=2$$

$$\therefore -a+b=1$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}\text{을 연립하여 풀면}$$

$$a=-1, b=0$$

$$\therefore 2^{2a}+2^{2b}=2^{-2}+2^0=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$$

..... ①

..... ②

정답_ $\frac{5}{4}$

다른 풀이

$$f(2a)f(b)=4\text{에서 } 2^{-2a} \times 2^{-b}=4$$

$$f(a-b)=2\text{에서 } 2^{-(a-b)}=2 \quad \therefore 2^{-a} \times 2^b=2$$

$$\textcircled{2} \times \textcircled{1}\text{을 하면}$$

$$2^{-3a}=8, 2^{-3a}=2^3$$

$$-3a=3 \quad \therefore a=-1$$

$$a=-1\text{을 } \textcircled{2}\text{에 대입하면}$$

$$2 \times 2^b=2, 2^b=1 \quad \therefore b=0$$

$$\therefore 2^{2a}+2^{2b}=2^{-2}+2^0=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$$

..... ③

..... ④

161

$$\neg. f(-m)=a^{-m}=\frac{1}{a^m}=\frac{1}{f(m)} \text{ (참)}$$

$$\neg. f(2m)=a^{2m}=(a^m)^2=\{f(m)\}^2 \text{ (거짓)}$$

$$\neg. f(m+n)=a^{m+n}=a^m a^n=f(m)f(n) \text{ (참)}$$

$$\neg. f(m-n)=a^{m-n}=a^m \times \frac{1}{a^n}=\frac{f(m)}{f(n)} \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

정답_ $\neg, \neg$

162

④ $f(x)=5^x$ 에서 밑이 1보다 크므로 함수 $f(x)$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

즉, $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

정답_ ④

163

임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $a < b$ 일 때 $f(a) > f(b)$ 를 만족시키는 함수는 x 의 값이 증가할 때 $f(x)$ 의 값은 감소하는 함수이므로 $0 < (\text{밑}) < 1$ 이어야 한다.

각 지수함수의 밑의 범위를 구하면 다음과 같다.

$$\neg. \frac{3}{2} > 1$$

$$\neg. 0 < 0.5 < 1$$

$$\neg. f(x)=\left(\frac{5}{4}\right)^{-x}=\left(\frac{4}{5}\right)^x \text{에서 } 0 < \frac{4}{5} < 1$$

$$\neg. 0 < \sqrt{\frac{2}{2}} < 1$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 $\neg, \neg, \neg$ 의 3개이다.

정답_ 3

164

$y=(a^2-a+1)^x$ 에서 x 의 값이 증가할 때 y 의 값이 감소하려면 $0 < (\text{밑}) < 1$ 이어야 하므로

$$0 < a^2-a+1 < 1$$

$$(i) 0 < a^2-a+1 \text{에서 } \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

따라서 모든 실수 a 에 대하여 성립한다.

$$(ii) a^2-a+1 < 1 \text{에서 } a^2-a < 0$$

$$a(a-1) < 0 \quad \therefore 0 < a < 1$$

(i), (ii)에서 실수 a 의 값의 범위는

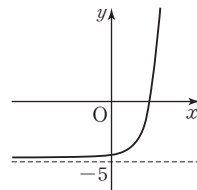
$$0 < a < 1$$

정답_ ④

165

함수 $y=3^{x-2}-5$ 의 그래프는 함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=3^{x-2}-5$ 의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ④이다.



정답_ ④

166

$\neg. y=\frac{1}{5^x}=5^{-x}$ 이므로 함수 $y=\frac{1}{5^x}$ 의 그래프는 함수 $y=5^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄴ. $y = \sqrt{5^x} = (5^x)^{\frac{1}{2}} = (5^{\frac{1}{2}})^x = (\sqrt{5})^x$ 이므로 함수 $y = \sqrt{5^x}$ 의 그래프는 함수 $y = 5^x$ 의 그래프와 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 겹쳐질 수 없다.

ㄷ. $y = 25 \times 5^x = 5^2 \times 5^x = 5^{x+2}$ 이므로 함수 $y = 25 \times 5^x$ 의 그래프는 함수 $y = 5^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y = 5^x$ 의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ③

167

함수 $y = 3^{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y - n = 3^{2(x-m)}$$

$$\therefore y = 3^{-2m} \times 3^{2x} + n$$

이 식이 $y = 9 \times 3^{2x} + 11$ 과 일치하므로

$$3^{-2m} = 9 = 3^2, n = 11$$

따라서 $m = -1, n = 11$ 이므로

$$m + n = -1 + 11 = 10$$

정답_ 10

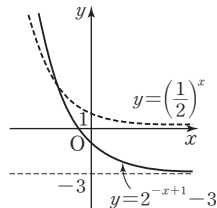
168

$$y = 2^{-x+1} - 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 3$$

함수 $y = 2^{-x+1} - 3$ 의 그래프는 함수

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{의 그래프를 } x\text{축의 방향으로 } 1$$

만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 치역은 $\{y | y > -3\}$ 이다. (참)

ㄴ. 그래프의 점근선의 방정식은 $y = -3$ 이다. (거짓)

ㄷ. $0 < (\text{밑}) < 1$ 이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

(거짓)

ㄹ. 그래프가 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

정답_ ②

169

함수 $y = 4^x - 6$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = 4^{x-a} - 6 + b$$

이 함수의 그래프의 점근선이 직선 $y = -2$ 이므로

$$-6 + b = -2 \quad \therefore b = 4$$

함수 $y = 4^{x-a} - 2$ 의 그래프가 원점을 지나므로

$$0 = 4^{-a} - 2, 2^{-2a} = 2$$

$$-2a = 1 \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore ab = \left(-\frac{1}{2}\right) \times 4 = -2$$

정답_ ④

170

함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식

$$\text{은 } y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 3^x$$

이 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = 3^{x-a} + b$$

이 그래프의 점근선의 방정식이 $y = 2$ 이므로

$$b = 2$$

함수 $y = 3^{x-a} + 2$ 의 그래프가 점 $(0, 5)$ 를 지나므로

$$5 = 3^{-a} + 2, 3^{-a} = 3 \quad \therefore a = -1$$

$$\therefore ab = (-1) \times 2 = -2$$

정답_ ②

171

$$f(x) = -2^{3-2x} + k = -\left(\frac{1}{4}\right)^{x-\frac{3}{2}} + k$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 의 그래프를 x 축

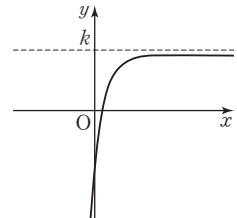
에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

한편, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 제2사분면을 지나지 않아야 하므로 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

즉, $f(0) \leq 0$ 이어야 하므로

$$-2^3 + k \leq 0 \quad \therefore k \leq 8$$

따라서 자연수 k 의 최댓값은 8이다.



정답_ ②

172

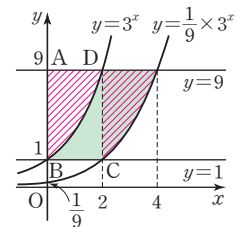
$$y = \frac{1}{9} \times 3^x = 3^{-2} \times 3^x = 3^{x-2}$$

이므로 함수 $y = \frac{1}{9} \times 3^x$ 의 그래프는 함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

즉, 오른쪽 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이는 서로 같으므로 구하는 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\overline{BC} \times \overline{CD} = (2-0) \times (9-1) = 16$$



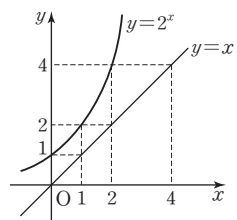
정답_ ④

173

직선 $y = x$ 위의 점은 x 좌표와 y 좌표가 서로 같으므로 오른쪽 그림에서

$$a = 1, b = 2, c = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{a-b+c} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{1-2+4} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$



정답_ $\frac{1}{8}$

174

점 C는 함수 $y=2^x$ 의 그래프 위의 점이므로 점 C의 x 좌표를 a 라고 하면 $C(a, 16)$

즉, $2^a=16=2^4$ 이므로

$$2^a=2^4 \quad \therefore a=4$$

$$\therefore \overline{CD}=4$$

따라서 사각형 ABCD는 한 변의 길이가 4인 정사각형이므로

$$\overline{AD}=4 \quad \therefore A(0, 12), B(4, 12)$$

점 E는 함수 $y=2^x$ 의 그래프 위의 점이므로 점 E의 x 좌표를 b 라고 하면 $E(b, 12)$

즉, $2^b=12$ 이므로 $b=\log_2 12$

$$\therefore \overline{EB}=4-\log_2 12$$

$$=\log_2 16-\log_2 12$$

$$=\log_2 \frac{4}{3}$$

정답_ ③

175

함수 $y=3^{x-3}$ 의 그래프는 함수 $y=3^{x+1}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$$\overline{AB}=4$$

$$\overline{AB}=\overline{AC} \text{이므로 } \overline{AC}=4$$

점 A의 좌표를 $(a, 3^{a+1})$ 이라고 하면 점 C의 좌표는 $(a, 3^{a-3})$ 이므로

$$\overline{AC}=3^{a+1}-3^{a-3}=3 \times 3^a - \frac{1}{27} \times 3^a$$

$$=\frac{80}{27} \times 3^a$$

즉, $\frac{80}{27} \times 3^a=4$ 이므로

$$3^a=\frac{27}{20}$$

따라서 점 A의 y 좌표는

$$3^{a+1}=3 \times 3^a=3 \times \frac{27}{20}=\frac{81}{20}$$

정답_ $\frac{81}{20}$

176

$A(1, n), B(1, 2), C(2, n^2), D(2, 4)$ 이므로

$$\overline{AB}=n-2, \overline{CD}=n^2-4$$

사다리꼴 ABDC의 넓이가 12 이하이므로

$$\frac{1}{2} \times (n-2+n^2-4) \times 1 \leq 12, \frac{1}{2}(n^2+n-6) \leq 12$$

$$n^2+n-30 \leq 0, (n+6)(n-5) \leq 0$$

$$\therefore -6 \leq n \leq 5$$

따라서 3 이상의 자연수 n 의 값은 3, 4, 5이므로 구하는 n 의 값의 합은

$$3+4+5=12$$

정답_ 12

177

점 B의 좌표가 $(0, 2^a)$ 이므로

$$\overline{OB}=2^a$$

$$\overline{OB}=3 \times \overline{OH} \text{에서 } \overline{OH}=\frac{2^a}{3}$$

점 A의 x 좌표를 k 라고 하면 $A(k, \frac{2^a}{3})$

점 A는 곡선 $y=2^{-x+a}$ 위의 점이므로

$$2^{-k+a}=\frac{2^a}{3} \text{에서 } 2^{-k}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore 2^k=3$$

..... ㉠

또, 점 A는 곡선 $y=2^x-1$ 위의 점이므로

$$\frac{2^a}{3}=2^k-1=3-1=2 \quad (\because \text{㉠}) \quad \therefore 2^a=6$$

$$\therefore a=\log_2 6$$

정답_ ③

178

$$A=2^{\sqrt{3}}, B=\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^4}=2^{\frac{4}{3}}, C=\sqrt[4]{256}=\sqrt[4]{2^8}=2^{\frac{8}{4}}=2^2$$

이때 $\frac{4}{3} < \sqrt{3} < 2$ 이고 밑이 1보다 크므로

$$2^{\frac{4}{3}} < 2^{\sqrt{3}} < 2^2$$

$$\therefore B < A < C$$

정답_ ③

179

$$\text{ㄱ. } \sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}, \sqrt[4]{32}=\sqrt[4]{2^5}=2^{\frac{5}{4}}$$

이때 $\frac{3}{2} > \frac{5}{4}$ 이고 밑이 1보다 크므로

$$2^{\frac{3}{2}} > 2^{\frac{5}{4}}$$

$$\therefore \sqrt{8} > \sqrt[4]{32} \text{ (참)}$$

$$\text{ㄴ. } \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{4}}, \left(\frac{1}{2} \right)^{\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

이때 $\frac{1}{4} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고 밑이 1보다 작으므로

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{4}} > \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\therefore \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{2} \right)^{\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}}} \text{ (참)}$$

$$\text{ㄷ. } \{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\}^{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2, (\sqrt{2})^{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}}=(\sqrt{2})^{(2^{\frac{1}{2}})^{\sqrt{2}}}=(\sqrt{2})^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

먼저 2와 $2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ 의 대소를 비교하면 $1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고 밑이 1보다 크므로

$$2 > 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

또, $(\sqrt{2})^2$ 과 $(\sqrt{2})^{2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$ 에서 $2 > 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ 이고 밑이 1보다 크므로

$$(\sqrt{2})^2 > (\sqrt{2})^{2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$$\therefore \{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\}^{\sqrt{2}} > (\sqrt{2})^{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

180

$0 < a < 1$ 이고 $m < n$ 이므로

$$a^m > a^n \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$b > 1$ 이고 $m < n$ 이므로

$$b^m < b^n \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$0 < a < 1 < b$ 이고 $n < 0$ 이므로

$$a^n > b^n \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에서

$$b^m < b^n < a^n < a^m$$

정답_ $b^m < b^n < a^n < a^m$

181

$y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$ 은 밑이 1보다 작으므로 $-2 \leq x \leq 1$ 에서 $x = -2$ 일 때
최댓값, $x = 1$ 일 때 최솟값을 갖는다.

$$\text{따라서 } M = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}, m = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \text{이므로}$$

$$3Mm = 3 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{9} = 2$$

정답_ ②

182

$$f(x) = a \times 2^{2-x} + b = a \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} + b$$

이때 $a > 0$ 이고, 밑이 1보다 작으므로 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는
 $x = -1$ 일 때 최댓값 5를 갖고, $x = 2$ 일 때 최솟값 -2를 갖는다.

$$f(-1) = 5 \text{에서 } 8a + b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f(2) = -2 \text{에서 } a + b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = -3$$

$$\text{따라서 } f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 3 \text{이므로}$$

$$f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 3 = 4 - 3 = 1$$

정답_ ①

183

$$f(x) = a^{x-1} \text{에서 } f(2) = a, f(5) = a^4$$

(i) $0 < a < 1$ 일 때, 최댓값은 $f(2)$, 최솟값은 $f(5)$ 이므로

$$f(2) = 27f(5) \text{에서 } a = 27a^4$$

$$a^3 = \frac{1}{27} \quad \therefore a = \frac{1}{3} \quad (\because a \text{는 실수})$$

(ii) $a > 1$ 일 때, 최댓값은 $f(5)$, 최솟값은 $f(2)$ 이므로

$$f(5) = 27f(2) \text{에서 } a^4 = 27a$$

$$a^3 = 27 \quad \therefore a = 3 \quad (\because a \text{는 실수})$$

(i), (ii)에서 구하는 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$\frac{1}{3} \times 3 = 1$$

정답_ ①

184

(1) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 으로 놓으면

$$f(x) = (x-1)^2 + 2$$

이므로 $-2 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x)$ 는 $x = -2$ 일 때 최댓값 11, $x = 1$
일 때 최솟값 2를 갖는다.

$y = 2^{x^2-2x+3} = 2^{f(x)}$ 에서 밑이 1보다 크므로 주어진 함수는 $f(x)$
가 최대일 때 최댓값을 갖고, $f(x)$ 가 최소일 때 최솟값을 갖는다.
따라서 주어진 함수는 $x = -2$ 일 때 최댓값 $2^{11} = 2048$, $x = 1$ 일
때 최솟값 $2^2 = 4$ 를 갖는다.

(2) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ 으로 놓으면

$$f(x) = -(x-2)^2 + 1$$

이므로 $f(x)$ 는 $x = 2$ 일 때 최댓값 1을 갖고 최솟값은 없다.

$y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2+4x-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)}$ 에서 밑이 1보다 작으므로 주어진 함
수는 $f(x)$ 가 최대일 때 최솟값을 갖고, $f(x)$ 가 최소일 때 최댓
값을 갖는다.

따라서 주어진 함수는 최댓값은 없고, $x = 2$ 일 때 최솟값

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3} \text{를 갖는다.}$$

정답_ (1) 최댓값: 2048, 최솟값: 4

(2) 최댓값: 없다., 최솟값: $\frac{2}{3}$

185

$f(x) = x^2 - 8x + 14$ 로 놓으면

$$f(x) = (x-4)^2 - 2$$

이므로 $f(x)$ 는 $x = 4$ 일 때 최솟값 -2를 갖는다.

$y = a^{x^2-8x+14} = a^{f(x)}$ 에서 밑이 1보다 작으므로 주어진 함수는 $f(x)$
가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

이때 주어진 함수의 최댓값이 4이므로

$$a^{-2} = 4, a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \quad (\because 0 < a < 1)$$

정답_ ①

186

$f(x) = -x^2 + 2x + 3$ 으로 놓으면

$$f(x) = -(x-1)^2 + 4$$

이므로 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 는 $x = 1$ 일 때 최댓값 4, $x = -1$ 일
때 최솟값 0을 갖는다.

$y = a^{-x^2+2x+3} = a^{f(x)}$ 에서 밑이 1보다 작으므로 주어진 함수는 $f(x)$
가 최대일 때 최솟값을 갖고, $f(x)$ 가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 주어진 함수는 $x = 1$ 일 때 최솟값 $\frac{1}{81}$ 을 가지므로

$$a^4 = \frac{1}{81} \quad \therefore a = \frac{1}{3} \quad (\because 0 < a < 1)$$

함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2+2x+3}$ 은 $x = -1$ 일 때 최대이고, 최댓값은 m 이므로

$$\left(\frac{1}{3}\right)^0 = m \quad \therefore m = 1$$

정답_ 1

187

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left(\frac{3}{2}\right)^{g(x)}$$

$$g(x) = -x^2 + 6x + a = -(x-3)^2 + 9 + a$$

이므로 $g(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최댓값 $9+a$ 를 갖는다.

$y = \left(\frac{3}{2}\right)^{g(x)}$ 에서 밑이 1보다 크므로 이 함수는 $g(x)$ 가 최대일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 함수 $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{g(x)}$ 은 $x=3$ 일 때 최댓값 $\left(\frac{3}{2}\right)^{9+a}$ 을 가지므로

$$b = 3, \left(\frac{3}{2}\right)^{9+a} = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{9+a} = \frac{2}{3} \text{에서}$$

$$9+a = -1 \quad \therefore a = -10$$

$$\therefore a+b = -10+3 = -7$$

정답_ -7

188

$$y = 25^x - \frac{2}{5} \times 5^{x+1} + 1 = (5^x)^2 - 2 \times 5^x + 1$$

$5^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $-1 \leq x \leq 1$ 에서

$$\frac{1}{5} \leq t \leq 5$$

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$$

따라서 $t=5$, 즉 $x=1$ 일 때 최댓값 16을 갖고, $t=1$, 즉 $x=0$ 일 때 최솟값 0을 갖는다.

따라서 $a=1, b=16, c=0, d=0$ 이므로

$$a+b+c+d = 1+16+0+0 = 17$$

정답_ 17

189

$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 3k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - 6k \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$$
 ($t > 0$)로 놓으면 주어진 함수는

$$y = t^2 - 6kt + 3 = (t-3k)^2 - 9k^2 + 3$$

따라서 $t=3k$ 일 때 최솟값 $-9k^2+3$ 을 갖는다.

$$\text{즉, } -9k^2+3 = -6 \text{이므로}$$

$$-9k^2 = -9, k^2 = 1$$

$$\therefore k = 1 \quad (\because k > 0)$$

정답_ ①

190

$$y = 2^{x+2} - 2^{2x+1} = 2^x \times 4 - (2^x)^2 \times 2$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $x \leq a$ 에서

$$0 < t \leq 2^a$$

한편, $a > 1$ 이므로 $2^a > 2$

이때 주어진 함수는

$$y = 4t - 2t^2 = -2(t-1)^2 + 2$$

이므로 $t=1$ 일 때 최댓값 2, $t=2^a$ 일 때 최솟값 $-2(2^a-1)^2+2$ 를 가지므로

$$b = 2, -2(2^a-1)^2+2 = -96$$

$$-2(2^a-1)^2+2 = -96 \text{에서}$$

$$(2^a-1)^2 = 49, 2^a-1 = 7 \quad (\because 2^a > 2)$$

$$2^a = 8 = 2^3 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore a^2+b^2 = 3^2+2^2 = 13$$

정답_ ④

191

$7^{2-x} > 0, 7^{2+x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$y = 7^{2-x} + 7^{2+x} \geq 2\sqrt{7^{2-x} \times 7^{2+x}}$$

$$= 2\sqrt{7^4} = 2 \times 7^2 = 98$$

..... (*)

(단, 등호는 $x=0$ 일 때 성립한다.)

따라서 주어진 함수의 최솟값은 98이다.

정답_ 98

참고 위의 (*)에서 등호는 $7^{2-x} = 7^{2+x}$ 일 때 성립한다.

$$\text{즉, } 2-x = 2+x \text{이므로}$$

$$2x = 0 \quad \therefore x = 0$$

따라서 (*)에서 등호는 $x=0$ 일 때 성립한다.

192

$5^x > 0, 5^y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$5^x + 5^y \geq 2\sqrt{5^x \times 5^y} = 2\sqrt{5^{x+y}}$$

$$= 2\sqrt{5^2} = 10 \quad (\because x+y=2)$$

..... (*)

(단, 등호는 $x=y=1$ 일 때 성립한다.)

따라서 $5^x + 5^y$ 의 최솟값은 10이다.

정답_ 10

참고 위의 (*)에서 등호는 $5^x = 5^y$, 즉 $x=y$ 일 때 성립한다.

그런데 $x+y=2$ 이므로 $x=y=1$ 일 때 등호가 성립한다.

193

$$4 \times 3^{x+a} = 4 \times 3^{a+x} > 0, 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x-a} = 9 \times 3^{a-x} > 0 \text{이므로 산술평균}$$

과 기하평균의 관계에 의하여

$$y = 4 \times 3^{a+x} + 9 \times 3^{a-x} \geq 2\sqrt{4 \times 3^{a+x} \times 9 \times 3^{a-x}}$$

$$= 2\sqrt{36 \times 3^{2a}} = 12 \times 3^a$$

..... (*)

(단, 등호는 $3^x = \frac{3}{2}$ 일 때 성립한다.)

따라서 주어진 함수의 최솟값은 12×3^a 이므로

$$12 \times 3^a = 108 \text{에서}$$

$$3^a = 9, 3^a = 3^2$$

$$\therefore a = 2$$

정답_ ②

참고 위의 (*)에서 등호는 $4 \times 3^{a+x} = 9 \times 3^{a-x}$ 일 때 성립한다.

$$4 \times 3^{a+x} = 9 \times 3^{a-x} \text{의 양변에 } \frac{1}{4} \times 3^{-a+x} \text{을 곱하면}$$

$$3^{2x} = \frac{9}{4} \quad \therefore 3^x = \frac{3}{2} \quad (\because 3^x > 0)$$

따라서 (*)에서 등호는 $3^x = \frac{3}{2}$ 일 때 성립한다.

194

$$y = 4^x + 4^{-x} + 6(2^x + 2^{-x}) + 4$$

$$= (2^x + 2^{-x})^2 + 6(2^x + 2^{-x}) + 2$$

$2^x + 2^{-x} = t$ 로 놓으면 $2^x > 0$, $2^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \times 2^{-x}} = 2$ (단, 등호는 $x=0$ 일 때 성립한다.)
 이때 주어진 함수는
 $y = t^2 + 6t + 2 = (t+3)^2 - 7$
 이므로 $t=2$ 일 때 최솟값 18을 갖는다.

정답_ 18

195

(1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{1-x} = 8\sqrt[4]{2}$ 에서 $2^{-2+2x} = 2^{\frac{13}{4}}$ 이므로
 $-2+2x = \frac{13}{4}$, $2x = \frac{21}{4}$ $\therefore x = \frac{21}{8}$
 (2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+6} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2x^2-5x}$ 에서 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+6} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2+5x}$ 이므로
 $x^2+6 = 2x^2+5x$, $x^2+5x-6=0$
 $(x+6)(x-1)=0$ $\therefore x = -6$ 또는 $x = 1$
 정답_ (1) $x = \frac{21}{8}$ (2) $x = -6$ 또는 $x = 1$

196

$\frac{9^{x^2+1}}{3^{3x-1}} = 9$ 에서 $\frac{3^{2(x^2+1)}}{3^{3x-1}} = 3^2$ 이므로 $3^{2x^2-3x+3} = 3^2$
 $2x^2-3x+3=2$, $2x^2-3x+1=0$
 $(2x-1)(x-1)=0$ $\therefore x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = 1$
 따라서 두 근의 차는
 $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

정답_ ①

197

$(2^x-16)(3^{2x}-9)=0$ 에서 $2^x=16$ 또는 $3^{2x}=9$
 $2^x=16=2^4$ 에서 $x=4$
 $3^{2x}=9=3^2$ 에서 $2x=2$ $\therefore x=1$
 따라서 $\alpha=4$, $\beta=1$ 또는 $\alpha=1$, $\beta=4$ 이므로
 $\alpha\beta=4 \times 1 = 4$

정답_ ②

198

$9^x - 10 \times 3^{x+1} + 81 = 0$ 에서
 $(3^x)^2 - 30 \times 3^x + 81 = 0$
 $3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $t^2 - 30t + 81 = 0$, $(t-3)(t-27) = 0$
 $\therefore t=3$ 또는 $t=27$
 즉, $3^x=3$ 또는 $3^x=27=3^3$ 이므로
 $x=1$ 또는 $x=3$
 따라서 $\alpha=1$, $\beta=3$ 또는 $\alpha=3$, $\beta=1$ 이므로
 $\alpha^2 + \beta^2 = 1^2 + 3^2 = 10$

정답_ 10

199

$a^x + \frac{1}{a^x} = \frac{5}{2}$ 의 한 근이 1이므로 $x=1$ 을 대입하면
 $a + \frac{1}{a} = \frac{5}{2}$, $2a^2 - 5a + 2 = 0$
 $(2a-1)(a-2) = 0$ $\therefore a=2$ ($\because a > 1$)
 $2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{5}{2}$ 에서 $2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$, $2t^2 - 5t + 2 = 0$
 $(2t-1)(t-2) = 0$ $\therefore t = \frac{1}{2}$ 또는 $t=2$
 즉, $2^x = \frac{1}{2}$ 또는 $2^x = 2$ 이므로 $x = -1$ 또는 $x = 1$
 따라서 구하는 다른 한 근은 -1 이다.

정답_ ①

200

$4^x - 2^{x+1} - a = 0$ 에서 $(2^x)^2 - 2 \times 2^x - a = 0$ ㉠
 $2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $t^2 - 2t - a = 0$ ㉡
 ㉠의 두 근을 α , β 라고 하면
 $\alpha + \beta = -1$
 ㉡의 두 근은 2^α , 2^β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $2^\alpha \times 2^\beta = -a$, $2^{\alpha+\beta} = -a$
 $2^{-1} = -a$ $\therefore a = -\frac{1}{2}$
 $\therefore 40a^2 = 40 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 10$

정답_ ⑤

201

$2^{2x} - a \times 2^x + 4 = 0$ 에서 $(2^x)^2 - a \times 2^x + 4 = 0$
 $2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $t^2 - at + 4 = 0$ ㉠
 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.
 ㉠의 서로 다른 두 양의 실근을 α , β , 판별식을 D 라고 하면
 (i) $D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$
 $\therefore a < -4$ 또는 $a > 4$
 (ii) $\alpha + \beta = a > 0$
 (iii) $\alpha\beta = 4 > 0$
 (i)~(iii)에서 $a > 4$

정답_ ①

참고 이차방정식의 실근의 부호

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

(1) 서로 다른 두 근이 모두 양수일 조건

$$\Leftrightarrow D > 0, (\text{두 근의 합}) = -\frac{b}{a} > 0, (\text{두 근의 곱}) = \frac{c}{a} > 0$$

(2) 서로 다른 두 근이 모두 음수일 조건

$$\Leftrightarrow D > 0, (\text{두 근의 합}) = -\frac{b}{a} < 0, (\text{두 근의 곱}) = \frac{c}{a} > 0$$

(3) 두 근이 서로 다른 부호일 조건

$$\Leftrightarrow (\text{두 근의 곱}) = \frac{c}{a} < 0$$

202

$3(9^x + 9^{-x}) - 7(3^x + 3^{-x}) - 4 = 0$ 에서
 $3(3^x + 3^{-x})^2 - 7(3^x + 3^{-x}) - 10 = 0$
 $3^x + 3^{-x} = X$ 로 놓으면 $3^x > 0$, $3^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $X = 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \times 3^{-x}} = 2$ (단, 등호는 $x=0$ 일 때 성립한다.)
 이때 주어진 방정식은
 $3X^2 - 7X - 10 = 0$, $(X+1)(3X-10)=0$
 $\therefore X = \frac{10}{3}$ ($\because X \geq 2$)
 즉, $3^x + 3^{-x} = \frac{10}{3}$ 이므로
 $3 \times (3^x)^2 + 3 = 10 \times 3^x$
 $\therefore 3 \times (3^x)^2 - 10 \times 3^x + 3 = 0$
 $3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $3t^2 - 10t + 3 = 0$, $(3t-1)(t-3)=0$
 $\therefore t = \frac{1}{3}$ 또는 $t = 3$
 즉, $3^x = \frac{1}{3}$ 또는 $3^x = 3$ 이므로
 $x = -1$ 또는 $x = 1$
 따라서 구하는 모든 실근의 합은
 $-1 + 1 = 0$

정답_ 0

203

- (1) 밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1이어야 한다.
- (i) $x+3=9-x$ 에서
 $2x=6 \quad \therefore x=3$
- (ii) $x=1$ 이면 주어진 방정식은 $1^4=1^8$ 이므로 등식이 성립한다.
- (i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=3$
- (2) 지수가 같으므로 밑이 같거나 지수가 0이어야 한다.
- (i) $x-1=2$ 에서 $x=3$
- (ii) $x-2=0$ 이면 $x=2$ 이므로 주어진 방정식은 $1^0=2^0$ 으로 등식이 성립한다.
- (i), (ii)에서 $x=2$ 또는 $x=3$

정답_ (1) $x=1$ 또는 $x=3$ (2) $x=2$ 또는 $x=3$

204

- (i) $(x+1)^{x^2+3x-2} = (x+1)^{x+1}$ ($x > -1$)에서
 밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1이어야 한다.
- ㉠ $x^2+3x-2=x+1$ 에서
 $x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$
 $\therefore x=1$ ($\because x > -1$)
- ㉢ $x+1=1$ 이면 $x=0$ 이므로 주어진 방정식은 $1^{-2}=1$ 로 등식이 성립한다.
- ㉠, ㉢에서 $x=0$ 또는 $x=1$
- (ii) $(x^2-x+1)^{x+2}=1$ 에서
 우변의 값이 1이므로 좌변의 밑이 1이거나 지수가 0이어야 한다.
- ㉠ $x^2-x+1=1$ 에서
 $x^2-x=0$, $x(x-1)=0$
 $\therefore x=0$ 또는 $x=1$

- ㉢ $x+2=0$ 이면 $x=-2$ 이므로 주어진 방정식은 $7^0=1$ 로 등식이 성립한다.
- ㉠, ㉢에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
- (i), (ii)에서 $A=\{0, 1\}$, $B=\{-2, 0, 1\}$ 이므로
 $B-A=\{-2\}$

정답_ $\{-2\}$

205

$\begin{cases} 3^{x+1} + 3^{y+1} = 36 \\ 3^{x+y-1} = 9 \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} 3^x + 3^y = 12 \\ 3^x \times 3^y = 27 \end{cases}$
 $3^x = A$, $3^y = B$ ($A > 0$, $B > 0$)로 놓으면
 $\begin{cases} A+B=12 \\ AB=27 \end{cases}$
 합이 12, 곱이 27인 두 수는 3과 9이므로
 $A=3$, $B=9$ 또는 $A=9$, $B=3$
 즉, $3^x=3$, $3^y=9$ 또는 $3^x=9$, $3^y=3$ 이므로
 $x=1$, $y=2$ 또는 $x=2$, $y=1$
 따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$ 또는 $\alpha=2$, $\beta=1$ 이므로
 $\alpha^2 + \beta^2 = 1^2 + 2^2 = 5$

정답_ ③

참고 합이 12, 곱이 27인 두 수는 이차방정식 $t^2 - 12t + 27 = 0$ 의 두 근이므로
 $(t-3)(t-9)=0 \quad \therefore t=3$ 또는 $t=9$
 따라서 합이 12, 곱이 27인 두 수는 3과 9이다.

206

$\begin{cases} 3 \times 2^x - 2 \times 3^y = 6 \\ 2^{x-2} - 3^{y-1} = -1 \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} 3 \times 2^x - 2 \times 3^y = 6 \\ \frac{2^x}{4} - \frac{3^y}{3} = -1 \end{cases}$
 $\therefore \begin{cases} 3 \times 2^x - 2 \times 3^y = 6 \\ 3 \times 2^x - 4 \times 3^y = -12 \end{cases}$

$2^x = A$, $3^y = B$ ($A > 0$, $B > 0$)로 놓으면

$$\begin{cases} 3A - 2B = 6 \\ 3A - 4B = -12 \end{cases} \quad \begin{matrix} \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \cdots \cdots \textcircled{2} \end{matrix}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$A=8, B=9$$

즉, $2^x=8=2^3$, $3^y=9=3^2$ 이므로

$$x=3, y=2$$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=2$ 이므로

$$\alpha + \beta = 3 + 2 = 5$$

정답_ 5

207

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$ 에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{x}{2}}$

이때 밑이 1보다 작으므로

$$3x+1 > -\frac{x}{2}, \frac{7}{2}x > -1$$

$$\therefore x > -\frac{2}{7}$$

(2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3-x} \geq 25^{x-2}$ 에서 $5^{x-3} \geq 5^{2x-4}$

이때 밑이 1보다 크므로

$$x-3 \geq 2x-4 \quad \therefore x \leq 1$$

정답_ (1) $x > -\frac{2}{7}$ (2) $x \leq 1$

208

$\left(\frac{1}{7}\right)^{f(x)} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{g(x)}$ 에서 밑이 1보다 작으므로

$$f(x) \leq g(x)$$

따라서 주어진 부등식의 해는 곡선 $y=f(x)$ 가 직선 $y=g(x)$ 와 만나거나 그 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로

$$x \leq a \text{ 또는 } 0 \leq x \leq d$$

정답_ ②

209

$$9^x < 3^{-ax} \text{에서 } 3^{2x} < 3^{-ax}$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$2x^2 < -ax, 2x^2 + ax < 0$$

$$x(2x+a) < 0 \quad \therefore -\frac{a}{2} < x < 0 \quad (\because a \text{는 자연수})$$

이때 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수가 3이므로

$$-4 \leq -\frac{a}{2} < -3 \quad \therefore 6 < a \leq 8$$

따라서 자연수 a 는 7, 8이므로 구하는 합은

$$7+8=15$$

정답_ 15

210

$$(1) \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} - 3 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^x > 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$$

$$\therefore \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 - \frac{28}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3 > 0$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - \frac{28}{3}t + 3 > 0, 3t^2 - 28t + 9 > 0$$

$$(3t-1)(t-9) > 0$$

$$\therefore 0 < t < \frac{1}{3} \text{ 또는 } t > 9 \quad (\because t > 0)$$

$$\text{즉, } 0 < \left(\frac{1}{3}\right)^x < \frac{1}{3} \text{ 또는 } \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \text{이고 밑이 1보다 작으므로}$$

$$x > 1 \text{ 또는 } x < -2$$

$$(2) 5^{x+2} + 5^{1-x} \leq 30 \text{에서}$$

$$25 \times 5^x + \frac{5}{5^x} \leq 30 \quad \therefore 5 \times (5^x)^2 - 6 \times 5^x + 1 \leq 0$$

$$5^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$5t^2 - 6t + 1 \leq 0, (5t-1)(t-1) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{5} \leq t \leq 1$$

$$\text{즉, } 5^{-1} \leq 5^x \leq 5^0 \text{이고 밑이 1보다 크므로}$$

$$-1 \leq x \leq 0$$

정답_ (1) $x > 1$ 또는 $x < -2$ (2) $-1 \leq x \leq 0$

211

$$2^{2x+3} + 2 \leq 17 \times 2^x \text{에서 } 8 \times (2^x)^2 - 17 \times 2^x + 2 \leq 0$$

$$2^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$8t^2 - 17t + 2 \leq 0, (8t-1)(t-2) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{8} \leq t \leq 2$$

$$\text{즉, } 2^{-3} \leq 2^x \leq 2 \text{이고 밑이 1보다 크므로}$$

$$-3 \leq x \leq 1$$

따라서 정수 x 는 $-3, -2, -1, 0, 1$ 의 5개이다.

정답_ ③

212

$$a^{2x} - 28 \times a^x + b < 0 \text{에서 } a^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 28t + b < 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 부등식의 해가 $0 < x < 3$ 이므로 $a^0 < a^x < a^3 \quad (\because a > 1)$

$$\therefore 1 < t < a^3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

즉, $\textcircled{7}$ 의 해가 $\textcircled{8}$ 이므로 이차방정식 $t^2 - 28t + b = 0$ 의 두 근은 1, a^3 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1 + a^3 = 28, 1 \times a^3 = b$$

$$a^3 = 27, a^3 = b$$

따라서 $a = 3, b = 27$ 이므로

$$a + b = 3 + 27 = 30$$

정답_ ④

213

$$x^{2x-1} < x^{x+3} \text{에서}$$

(i) $0 < x < 1$ 일 때, $2x-1 > x+3$ 이므로

$$x > 4$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해는 없다.

(ii) $x = 1$ 일 때, $1 < 1^4$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x > 1$ 일 때, $2x-1 < x+3$ 이므로

$$x < 4$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x < 4$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$1 < x < 4$$

따라서 $\alpha = 1, \beta = 4$ 이므로

$$\alpha + \beta = 1 + 4 = 5$$

정답_ ③

214

$$(x-1)^{x^2-6} > (x-1)^x \text{에서}$$

(i) $0 < x-1 < 1$, 즉 $1 < x < 2$ 일 때

$$x^2 - 6 < x \text{이므로 } x^2 - x - 6 < 0$$

$$(x+2)(x-3) < 0 \quad \therefore -2 < x < 3$$

그런데 $1 < x < 2$ 이므로 $1 < x < 2$

(ii) $x-1 = 1$, 즉 $x = 2$ 일 때

$$1^{-2} > 1^2 \text{이므로 부등식이 성립하지 않는다.}$$

(iii) $x-1 > 1$, 즉 $x > 2$ 일 때

$$x^2 - 6 > x \text{이므로 } x^2 - x - 6 > 0$$

$$(x+2)(x-3) > 0 \quad \therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 3$$

그런데 $x > 2$ 이므로 $x > 3$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$1 < x < 2 \text{ 또는 } x > 3$$

$$\therefore S = \{x \mid 1 < x < 2 \text{ 또는 } x > 3\}$$

따라서 집합 S 의 원소인 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

215

$(x^2+2x+1)^{x+1} < 1$ 에서

(i) $0 < x^2+2x+1 < 1$ 일 때

㉠ $x^2+2x+1 > 0$ 에서

$$(x+1)^2 > 0 \quad \therefore x \neq -1$$

㉡ $x^2+2x+1 < 1$ 에서

$$x^2+2x < 0, x(x+2) < 0 \quad \therefore -2 < x < 0$$

㉠, ㉡에서 $-2 < x < -1$ 또는 $-1 < x < 0$ ㉦

주어진 부등식 $(x^2+2x+1)^{x+1} < 1$ 에서 밑이 1보다 작으므로

$$x+1 > 0 \quad \therefore x > -1 \quad \text{..... ㉧}$$

㉦, ㉧의 공통부분을 구하면 $-1 < x < 0$

(ii) $x^2+2x+1=1$ 일 때

$1 < 1$ 이므로 주어진 부등식은 성립하지 않는다.

따라서 $x^2+2x+1 \neq 1$ 에서 $x^2+2x \neq 0$

$$x(x+2) \neq 0 \quad \therefore x \neq -2, x \neq 0$$

(iii) $x^2+2x+1 > 1$ 일 때

$$x^2+2x > 0 \text{에서 } x(x+2) > 0$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 0 \quad \text{..... ㉨}$$

주어진 부등식 $(x^2+2x+1)^{x+1} < 1$ 에서 밑이 1보다 크므로

$$x+1 < 0 \quad \therefore x < -1 \quad \text{..... ㉩}$$

㉨, ㉩의 공통부분을 구하면 $x < -2$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$x < -2 \text{ 또는 } -1 < x < 0$$

따라서 $\alpha = -2, \beta = -1, \gamma = 0$ 이므로

$$\alpha + \beta + \gamma = -2 + (-1) + 0 = -3$$

정답_ ㉡

216

(i) $\left(\frac{1}{10}\right)^{x-3} > \left(\frac{1}{10}\right)^{2-x}$ 에서 밑이 1보다 작으므로

$$x-3 < 2-x, 2x < 5 \quad \therefore x < \frac{5}{2}$$

(ii) $4^x - 3 \times 2^{x+2} + 32 \leq 0$ 에서 $(2^x)^2 - 12 \times 2^x + 32 \leq 0$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 12t + 32 \leq 0, (t-4)(t-8) \leq 0$$

$$\therefore 4 \leq t \leq 8$$

즉, $2^2 \leq 2^x \leq 2^3$ 이고 밑이 1보다 크므로

$$2 \leq x \leq 3$$

(i), (ii)에서 주어진 연립부등식의 해는

$$2 \leq x < \frac{5}{2}$$

따라서 $\alpha = 2, \beta = \frac{5}{2}$ 이므로

$$\alpha\beta = 2 \times \frac{5}{2} = 5$$

정답_ ㉤

217

$\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} < 3^{-x^2+1} < \left(\frac{1}{27}\right)^{-x+1}$ 에서

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x+3}$$

이때 밑이 1보다 작으므로

$$-3x+3 < x^2-1 < 2x+2$$

(i) $-3x+3 < x^2-1$ 에서

$$x^2+3x-4 > 0, (x+4)(x-1) > 0$$

$$\therefore x < -4 \text{ 또는 } x > 1$$

(ii) $x^2-1 < 2x+2$ 에서

$$x^2-2x-3 < 0, (x+1)(x-3) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 3$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$1 < x < 3$$

정답_ $1 < x < 3$

218

$(2^x-8)\left(\frac{1}{3^x}-9\right) \geq 0$ 에서

$$2^x-8 \leq 0, \frac{1}{3^x}-9 \leq 0 \text{ 또는 } 2^x-8 \geq 0, \frac{1}{3^x}-9 \geq 0$$

(i) $2^x-8 \leq 0, \frac{1}{3^x}-9 \leq 0$ 일 때

$$2^x-8 \leq 0 \text{에서 } 2^x \leq 2^3$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$x \leq 3$$

..... ㉠

$$\frac{1}{3^x}-9 \leq 0 \text{에서 } 3^{-x} \leq 3^2$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$-x \leq 2 \quad \therefore x \geq -2$$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-2 \leq x \leq 3$

(ii) $2^x-8 \geq 0, \frac{1}{3^x}-9 \geq 0$ 일 때

$$2^x-8 \geq 0 \text{에서 } 2^x \geq 2^3$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$x \geq 3$$

..... ㉢

$$\frac{1}{3^x}-9 \geq 0 \text{에서 } 3^{-x} \geq 3^2$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$-x \geq 2 \quad \therefore x \leq -2$$

..... ㉣

㉢, ㉣의 공통부분은 없으므로 해는 없다.

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$-2 \leq x \leq 3$$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ 의 6개이다.

정답_ ㉠

219

$2^{2x+1}-2^{x+2}+a \geq 0$ 에서 $2 \times (2^x)^2-4 \times 2^x+a \geq 0$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$2t^2-4t+a \geq 0$$

..... ㉦

주어진 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 부등식 ㉦이 $t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 성립해야 한다.

$f(t) = 2t^2-4t+a$ 로 놓으면

$$f(t) = 2(t-1)^2+a-2$$

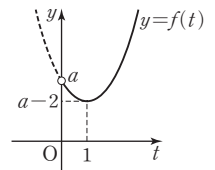
이므로 $t > 0$ 에서 $f(t)$ 는 $t=1$ 일 때 최솟값

$a-2$ 를 갖는다.

즉, $a-2 \geq 0$ 이어야 하므로

$$a \geq 2$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 2이다.



정답_ ㉤

220

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x - 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + a > 0 \text{에서 } \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 - 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + a > 0$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면 밑이 1보다 작으므로 } x > 0 \text{에서 } t < 1$$

$$\therefore 0 < t < 1$$

이때 주어진 부등식은 $t^2 - 4t + a > 0$

주어진 부등식이 모든 양의 실수 x 에 대하여 성립하려면 부등식 ㉠이 $0 < t < 1$ 인 모든 실수 t 에 대하여 성립해야 한다.

$f(t) = t^2 - 4t + a$ 로 놓으면

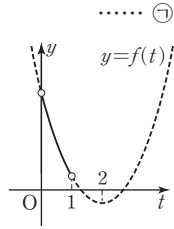
$$f(t) = (t-2)^2 + a - 4$$

따라서 $0 < t < 1$ 에서 부등식 ㉠이 성립하려면

$$f(1) \geq 0 \text{이어야 한다.}$$

즉, $1 - 4 + a \geq 0$ 이어야 하므로

$$a \geq 3$$



정답_ $a \geq 3$

221

$$9^x - 2a \times 3^{x+1} + 9 \geq 0 \text{에서 } (3^x)^2 - 6a \times 3^x + 9 \geq 0$$

$$3^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 6at + 9 \geq 0 \quad \dots\dots ㉠$$

주어진 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 부등식 ㉠이 $t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 성립해야 한다.

$f(t) = t^2 - 6at + 9$ 로 놓으면

$$f(t) = (t-3a)^2 + 9 - 9a^2$$

(i) $3a > 0$, 즉 $a > 0$ 일 때

$f(t)$ 는 $t = 3a$ 에서 최솟값 $9 - 9a^2$ 을

가지므로

$$9 - 9a^2 \geq 0, \ a^2 - 1 \leq 0$$

$$(a+1)(a-1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 1$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $0 < a \leq 1$

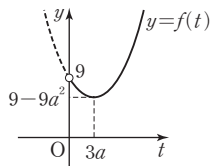
(ii) $3a \leq 0$, 즉 $a \leq 0$ 일 때

$f(0) = 9 \geq 0$ 이므로 $t > 0$ 인 모든 실수

t 에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $a \leq 1$

따라서 실수 a 의 최댓값은 1이다.



정답_ ②

222

3000마리의 유산균이 60분 후에 24000마리가 되므로

$$3000a^{60} = 24000, \ a^{60} = 8 \quad \therefore a = 8^{\frac{1}{60}}$$

따라서 한 마리의 유산균이 x 분 후 $8^{\frac{x}{60}}$ 마리가 되므로

$$3000 \times 8^{\frac{x}{60}} = 192000, \ 8^{\frac{x}{60}} = 64 = 8^2$$

$$\frac{x}{60} = 2 \quad \therefore x = 120$$

즉, 120분 후에 192000마리가 된다.

정답_ 120분 후

223

진통제를 인체에 투여한 직후의 진통제의 혈중 농도를 a 라고 하면 이 진통제의 혈중 농도가 3시간마다 그 절반으로 줄어드므로 투여한 지 x 시간 후의 진통제의 혈중 농도는 $a \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}}$ 이다.

진통제를 투여한 지 x 시간 후의 진통제의 혈중 농도가 투여한 직후의 혈중 농도의 $\frac{1}{32}$ 이하가 된다고 하면

$$a \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}} \leq \frac{1}{32} a$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^5 \ (\because a > 0)$$

이때 밑이 1보다 작으므로

$$\frac{x}{3} \geq 5 \quad \therefore x \geq 15$$

따라서 최소 15시간이 걸린다.

정답_ 15시간

224

x 시간이 경과한 후 영상 A의 조회수는 20000×2^x , 영상 B의 조회수는 40000×4^x 이므로

$$20000 \times 2^x + 40000 \times 4^x = 2720000$$

$$\therefore 2 \times (2^x)^2 + 2^x - 136 = 0$$

$$2^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$2t^2 + t - 136 = 0, \ (2t+17)(t-8) = 0$$

$$\therefore t = 8 \ (\because t > 0)$$

$$\text{즉, } 2^x = 8 = 2^3 \text{이므로 } x = 3$$

따라서 3시간이 경과한 후이다.

정답_ ②

225

함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = 2^{x-m} + n \quad \dots\dots ㉠$$

이 함수의 그래프가 두 점 $(-2, -1)$, $(0, 5)$ 를 지나므로

$$-1 = 2^{-2-m} + n \quad \dots\dots ㉡$$

$$5 = 2^{-m} + n \quad \dots\dots ㉢$$

㉠-㉡을 하면

$$2^{-m} - 2^{-2-m} = 6, \ 2^{-m} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 6$$

$$2^{-m} = 8 = 2^3 \quad \therefore m = -3 \quad \dots\dots ㉣$$

$m = -3$ 을 ㉢에 대입하면

$$5 = 2^3 + n \quad \therefore n = -3 \quad \dots\dots ㉤$$

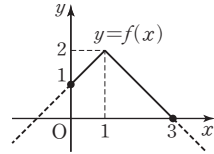
$$\therefore m+n = -3 + (-3) = -6 \quad \dots\dots ㉥$$

정답_ -6

채점 기준	비율
① 평행이동한 그래프의 식 구하기	30 %
② m 의 값 구하기	40 %
③ n 의 값 구하기	20 %
④ $m+n$ 의 값 구하기	10 %

226

$f(x) = -|x-1| + 2$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최댓값 2, $x=3$ 일 때 최솟값 0을 갖는다.



$y=3^{-|x-1|+2}=3^{f(x)}$ 에서 밑이 1보다 크므로 주어진 함수는 $f(x)$ 가 최대일 때 최댓값을 갖고, $f(x)$ 가 최소일 때 최솟값을 갖는다. 즉, 함수 $y=3^{-|x-1|+2}$ 은 $x=1$ 일 때 최댓값 $3^2=9$, $x=3$ 일 때 최솟값 $3^0=1$ 을 갖는다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$$9+1=10$$

정답 10

채점 기준	비율
① $f(x) = - x-1 + 2$ 로 놓고 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값 구하기	40%
② 주어진 함수의 최댓값과 최솟값 구하기	50%
③ 최댓값과 최솟값의 합 구하기	10%

227

두 함수 $y=2^x$, $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프와 직선 $x=k$ 의 교점은 각각

$P(k, 2^k)$, $Q(k, -\left(\frac{1}{2}\right)^k)$ 이므로

$$\overline{PQ} = 2^k + \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

이때 $2^k > 0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^k > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{PQ} = 2^k + \left(\frac{1}{2}\right)^k \geq 2\sqrt{2^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^k} = 2$$

(단, 등호는 $k=0$ 일 때 성립한다.)

따라서 $\overline{PQ}$ 의 길이의 최솟값은 2이다.

정답 2

채점 기준	비율
① $\overline{PQ}$ 의 길이를 k 에 대한 식으로 나타내기	50%
② $\overline{PQ}$ 의 길이의 최솟값 구하기	50%

228

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1 \text{ 이므로}$$

$$2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

따라서 주어진 방정식은

$$(2+\sqrt{3})^x + \frac{1}{(2+\sqrt{3})^x} = 4$$

$$(2+\sqrt{3})^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t + \frac{1}{t} = 4, \ t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\therefore t = 2 \pm \sqrt{3}$$

(i) $t=2+\sqrt{3}$ 일 때

$$(2+\sqrt{3})^x = 2+\sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$x=1$$

(ii) $t=2-\sqrt{3}$ 일 때

$$(2+\sqrt{3})^x = 2-\sqrt{3}, \text{ 즉 } (2+\sqrt{3})^x = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \text{ 이므로}$$

$$x=-1$$

(i), (ii)에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 이므로 구하는 모든 근의 곱은

$$-1 \times 1 = -1$$

정답 -1

채점 기준	비율
① $(2+\sqrt{3})^x = t$ 로 놓고 t 의 값 구하기	50%
② 주어진 방정식의 근 구하기	40%
③ 모든 근의 곱 구하기	10%

229

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-1}} = -\sqrt{\frac{a}{a-1}} \text{ 이므로}$$

$$a > 0, \ a-1 < 0 \quad \therefore 0 < a < 1$$

부등식 $a^{x(x+2)} > a^{4x+3}$ 에서 밑이 1보다 작으므로

$$x(x+2) < 4x+3$$

$$x^2 - 2x - 3 < 0, \ (x+1)(x-3) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 3$$

따라서 정수 x 는 0, 1, 2의 3개이다.

정답 3

채점 기준	비율
① a 의 값의 범위 구하기	40%
② 주어진 부등식의 해 구하기	50%
③ 정수 x 의 개수 구하기	10%

참고 0이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여

$$(1) \sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{ 이면 } a < 0, \ b < 0$$

$$(2) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}} \text{ 이면 } a > 0, \ b < 0$$

230

$$\frac{1}{2} < 2^{ax(x+1)} \text{ 에서 } 2^{ax(x+1)} > 2^{-1}$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$ax(x+1) > -1 \quad \therefore ax^2 + ax + 1 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립해야 한다.

(i) $a=0$ 일 때

부등식 $\textcircled{1}$ 은 $1 > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때

이차방정식 $ax^2 + ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면 $a > 0$,

$D < 0$ 이어야 한다.

$$D = a^2 - 4a < 0 \text{ 에서}$$

$$a(a-4) < 0 \quad \therefore 0 < a < 4$$

즉, $a > 0$ 이고 $0 < a < 4$ 이므로 $0 < a < 4$

(i), (ii)에서 $0 \leq a < 4$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

정답 4

채점 기준	비율
① 부등식 $ax^2+ax+1>0$ 세우기	30%
② a 의 값의 범위 구하기	60%
③ 정수 a 의 개수 구하기	10%

231

$$\neg. f(-x) = \frac{2^{-x}+2^x}{2}, f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2^{\frac{1}{x}}+2^{-\frac{1}{x}}}{2}$$

$$\therefore f(-x) \neq f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ (거짓)}$$

$$\begin{aligned} \neg. f(x)g(x) &= \frac{2^x+2^{-x}}{2} \times \frac{2^x-2^{-x}}{2} = \frac{(2^x)^2 - (2^{-x})^2}{4} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2^{2x}-2^{-2x}}{2} = \frac{1}{2}g(2x) \text{ (참)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 &= \left(\frac{2^x+2^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2^x-2^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{2^{2x}+2^{-2x}+2}{4} + \frac{2^{2x}+2^{-2x}-2}{4} \\ &= \frac{2(2^{2x}+2^{-2x})}{4} \\ &= \frac{2^{2x}+2^{-2x}}{2} = f(2x) \text{ (참)} \end{aligned}$$

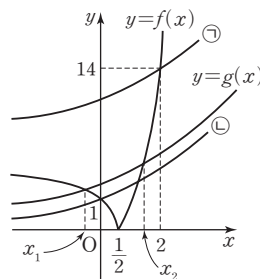
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ④

232

$f(x) = |4^x - 2|$, $g(x) = 2^{x+k}$ 으로 놓으면 $f(2) = |4^2 - 2| = 14$,

$f(0) = |4^0 - 2| = 1$ 이므로 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 점 (2, 14)를 지나는 ㉠보다 위쪽에 존재하면 $x_2 > 2$ 가 되고, 점 (0, 1)을 지나는 ㉡보다 아래쪽에 존재하면 $x_1 > 0$ 이 된다.



따라서 $x_1 < 0$, $0 < x_2 < 2$ 를 만족시키려면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 ㉠과 ㉡의 사이에 존재해야 한다.

즉, $g(2) < f(2)$, $g(0) > f(0)$ 이어야 한다.

(i) $g(2) < f(2)$ 에서 $2^{2+k} < 14$ 이므로

$$4 \times 2^k < 14 \quad \therefore 2^k < \frac{7}{2}$$

(ii) $g(0) > f(0)$ 에서 $2^k > 1$

(i), (ii)에서 $1 < 2^k < \frac{7}{2}$ 이므로 조건을 만족시키는 자연수 k 의 값은 1이다.

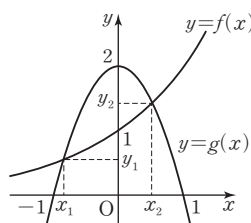
정답_ 1

233

$f(x) = 2^x$, $g(x) = -2x^2 + 2$ 로 놓으면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$$\neg. f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}, g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < g\left(\frac{1}{2}\right)$$



따라서 $x > 0$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는 $\frac{1}{2}$ 보다 크므로

$$x_2 > \frac{1}{2} \text{ (거짓)}$$

ㄴ. 두 점 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 를 지나

$$\text{는 직선의 기울기는 } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

두 점 (0, 1), (1, 2)를 지나는

$$\text{직선의 기울기는 } \frac{2-1}{1-0} = 1$$

이때 두 점 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 를

지나는 직선의 기울기가 1보다 작으므로

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 1$$

$$\therefore y_2 - y_1 < x_2 - x_1 \text{ (} \because x_2 - x_1 > 0 \text{)} \text{ (참)}$$

$$\neg. f(-1) = \frac{1}{2} \text{이므로 } y_1 > \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \text{이므로 } y_2 > \sqrt{2}$$

$$\therefore y_1 y_2 > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

..... ㉠

또, 오른쪽 그림과 같이 이차함수

$y=g(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여

대칭이므로 $-x_1 > x_2$ 이다.

$$\therefore x_1 + x_2 < 0$$

이때 $y_1 = 2^{x_1}$, $y_2 = 2^{x_2}$ 이므로

$$y_1 y_2 = 2^{x_1} \times 2^{x_2} = 2^{x_1 + x_2} < 2^0 = 1$$

..... ㉡

$$\text{㉠, ㉡에서 } \frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ④

234

$$A = {}^{n+1}\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{n+1}}, B = {}^{n+2}\sqrt{a^{n+1}} = a^{\frac{n+1}{n+2}}, C = {}^{n+3}\sqrt{a^{n+2}} = a^{\frac{n+2}{n+3}}$$

$$\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$$

$$\therefore \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \text{ ㉠}$$

$$\frac{n+1}{n+2} - \frac{n+2}{n+3} = \frac{(n+1)(n+3) - (n+2)^2}{(n+2)(n+3)} = \frac{-1}{(n+2)(n+3)} < 0$$

$$\therefore \frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+3} \text{ ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+3} \text{ ㉢}$$

$$\neg. a=1 \text{이면 } A=B=C=1 \text{ (참)}$$

ㄴ. $0 < a < 1$ 이면 ㉢에 의하여

$$a^{\frac{n}{n+1}} > a^{\frac{n+1}{n+2}} > a^{\frac{n+2}{n+3}}$$

$$\therefore C < B < A \text{ (거짓)}$$

ㄷ. $a > 1$ 이면 ㉢에 의하여

$$a^{\frac{n}{n+1}} < a^{\frac{n+1}{n+2}} < a^{\frac{n+2}{n+3}}$$

$$\therefore A < B < C \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㉠이다.

정답_ ①

235

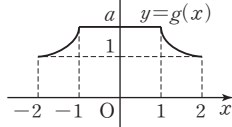
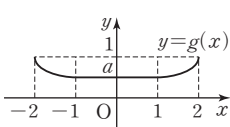
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (-2 \leq x \leq -1) \\ 1 & (-1 \leq x \leq 1) \\ -x+2 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$g(x) = \begin{cases} a^{x+2} & (-2 \leq x \leq -1) \\ a & (-1 \leq x \leq 1) \\ a^{-x+2} & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

이때 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

(i) $0 < a < 1$ 일 때

(ii) $a > 1$ 일 때



ㄱ. 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 a 의 값의 범위에 관계없이 y 축에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. $0 < a < 1$ 일 때, 함수 $y=g(x)$ 의 최댓값은 1이다. (참)

ㄷ. $a > 1$ 일 때, 함수 $y=g(x)$ 의 최솟값은 1이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

236

$$f(x) = x^2 - 4x - 2 = (x-2)^2 - 6$$

이므로 $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값 -6 , $x=0$ 에서 최댓값 -2 를 갖는다.

$$\therefore -6 \leq f(x) \leq -2$$

함수 $(g \circ f)(x)$ 에서 $f(x)=t$ 로 놓으면

$$-6 \leq t \leq -2 \text{이고}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(t) = a^t$$

(i) $0 < a < 1$ 일 때

$g(t) = a^t$ 에서 밑이 1보다 작으므로 함수 $g(x)$ 는 t 가 최소일 때 $g(t)$ 는 최댓값을 갖고, t 가 최대일 때 $g(t)$ 는 최솟값을 갖는다.

즉, $t = -6$ 일 때 $g(t)$ 가 최댓값 27을 가지므로

$$a^{-6} = 27 = 3^3$$

$$\therefore a = (3^3)^{-\frac{1}{6}} = 3^{-\frac{1}{2}}$$

이때 $t = -2$ 일 때 $g(t)$ 가 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은

$$a^{-2} = (3^{-\frac{1}{2}})^{-2} = 3$$

(ii) $a > 1$ 일 때

$g(t) = a^t$ 에서 밑이 1보다 크므로 함수 $g(t)$ 는 t 가 최대일 때 $g(t)$ 도 최댓값을 갖고, t 가 최소일 때 $g(t)$ 도 최솟값을 갖는다.

즉, $t = -2$ 일 때 $g(t)$ 가 최댓값 27을 가지므로

$$a^{-2} = 27 = 3^3$$

$$\therefore a = (3^3)^{-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{3}{2}}$$

그런데 $3^{-\frac{3}{2}} < 3^0 = 1$ 이므로 $a > 1$ 을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 최솟값은 3이다.

정답 ④

237

함수 $y=3^x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=-3^{-x}$ 이므로

$$g(x) = -3^{-x}$$

$$b-a=4 \text{에서 } b=a+4$$

네 점 P, Q, R, S를 꼭짓점으로 하는 사각형 PQRS는 오른쪽 그림과 같은 직사각형이므로

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= f(a) - g(b) = 3^a - (-3^{-b}) \\ &= 3^a + 3^{-b} = 3^a + 3^{-a-4} \end{aligned}$$

이때 $3^a > 0$, $3^{-a-4} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3^a + 3^{-a-4} \geq 2\sqrt{3^a \times 3^{-a-4}} = 2\sqrt{3^{-4}} = \frac{2}{9} \quad \dots\dots (*)$$

(단, 등호는 $a = -2$ 일 때 성립한다.)

따라서 $\overline{PQ}$ 의 길이의 최솟값이 $\frac{2}{9}$ 이고 $\overline{PS} = b-a=4$ 이므로 사각형 PQRS의 넓이의 최솟값은

$$\frac{2}{9} \times 4 = \frac{8}{9}$$

즉, $p=9$, $q=8$ 이므로

$$p+q=9+8=17$$

정답 17

참고 위의 (*)에서 등호는 $3^a = 3^{-a-4}$ 일 때 성립한다.

$$3^a = 3^{-a-4} \text{에서 } a = -a-4 \text{이므로}$$

$$2a = -4 \quad \therefore a = -2$$

따라서 (*)에서 등호는 $a = -2$ 일 때 성립한다.

238

$$2^x + 1 = 2^{x+1} \text{에서}$$

$$2^x + 1 = 2 \times 2^x, 2^x = 1 \quad \therefore x = 0$$

따라서 점 P의 좌표는 (0, 2)

서로 다른 두 점 $A(a, 2^a+1)$, $B(b, 2^{b+1})$ 에 대하여 선분 AB의 중점이 P이므로

$$\frac{a+b}{2} = 0, \frac{2^a+1+2^{b+1}}{2} = 2$$

$$\frac{a+b}{2} = 0 \text{에서 } a+b=0 \quad \therefore b=-a$$

$$\text{이것을 } \frac{2^a+1+2^{b+1}}{2} = 2 \text{에 대입하면}$$

$$\frac{2^a+1+2^{-a+1}}{2} = 2, 2^a+1+2^{-a+1} = 4$$

$$2^a+2^{-a+1}-3=0, 2^{2a}-3 \times 2^a+2=0$$

$$2^a = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0, (t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=2$$

$$\text{즉, } 2^a=1 \text{ 또는 } 2^a=2 \text{이므로}$$

$$a=0 \text{ 또는 } a=1$$

그런데 $a=0$ 이면 $b=0$ 이므로 A, B가 서로 다른 점이라는 조건을 만족하지 않는다.

따라서 $a=1$, $b=-1$ 이므로

$$A(1, 3), B(-1, 1)$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$$

정답 ①

참고 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 에 대하여

(1) 선분 AB의 중점의 좌표 $\Rightarrow \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

(2) 두 점 A, B 사이의 거리 $\Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

239

$9^x + 9^{-x} + 3^{1+x} + 3^{1-x} + k = 0$ 에서

$(3^x)^2 + (3^{-x})^2 + 3 \times (3^x + 3^{-x}) + k = 0$

$\therefore (3^x + 3^{-x})^2 + 3 \times (3^x + 3^{-x}) + k - 2 = 0$

$3^x + 3^{-x} = t$ 로 놓으면 $3^x > 0$, $3^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t = 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \times 3^{-x}} = 2$ (단, 등호는 $x=0$ 일 때 성립한다.)

이때 주어진 방정식은

$t^2 + 3t + k - 2 = 0$ ㉠

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 $t \geq 2$ 에서 실근을 가져야 한다.

$f(t) = t^2 + 3t + k - 2$ 로 놓으면

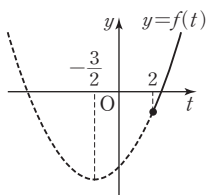
$f(t) = \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + k - \frac{17}{4}$

따라서 $t \geq 2$ 에서 이차방정식 ㉠이 실근을

가지려면 $f(2) \leq 0$ 이어야 하므로

$4 + 6 + k - 2 \leq 0 \quad \therefore k \leq -8$

따라서 실수 k 의 최댓값은 -8 이다.



정답_ ①

240

$\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)g(x)} \leq \left(\frac{1}{27}\right)^{-g(x)}$ 에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)g(x)} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3g(x)}$

이때 밑이 1보다 작으므로

$f(x)g(x) \geq -3g(x)$, $\{f(x)+3\}g(x) \geq 0$

$\therefore f(x)+3 \leq 0, g(x) \leq 0$ 또는 $f(x)+3 \geq 0, g(x) \geq 0$

(i) $f(x)+3 \leq 0, g(x) \leq 0$ 일 때

$f(x)+3 \leq 0$ 에서 $f(x) \leq -3$ 이므로

$x \leq 1$ 또는 $x \geq 5$ ㉠

$g(x) \leq 0$ 에서 $x \leq 3$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $x \leq 1$

(ii) $f(x)+3 \geq 0, g(x) \geq 0$ 일 때

$f(x)+3 \geq 0$ 에서 $f(x) \geq -3$ 이므로

$1 \leq x \leq 5$ ㉢

$g(x) \geq 0$ 에서 $x \geq 3$ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $3 \leq x \leq 5$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x \leq 1$ 또는 $3 \leq x \leq 5$

따라서 자연수 x 의 값은 1, 3, 4, 5이므로 모든 자연수 x 의 값의 합은

$1 + 3 + 4 + 5 = 13$

정답_ ④

241

곡선 $y=2^x$ 의 점근선의 방정식은

$y=0$

곡선 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+a} - \left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} + 8$ 의 점근선의 방정식은

$y = -\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} + 8$

(i) $x < 3$ 일 때

$0 < y < 2^3$, 즉 $0 < y < 8$ 이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서

y 좌표가 정수인 점은 $y=1, 2,$

$3, \dots, 7$ 의 7개이다.

(ii) $x \geq 3$ 일 때

$y \leq 8$ 이므로 $y > 0$ 에서 곡선

$y=f(x)$ 에서 y 좌표가 정수인

점은 $y=1, 2, \dots, 8$ 의 8개이

다.

(i), (ii)에 의하여 $y > 0$ 에서 y 좌표가 정수인 점의 개수는

$7+8=15$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y 좌표가 정수인

점의 개수가 23이라면 $y \leq 0$ 에서 y 좌표가 정수인 점의 개수는

$23-15=8$

이어야 한다.

즉, $-8 \leq -\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} + 8 < -7$ 이어야 하므로

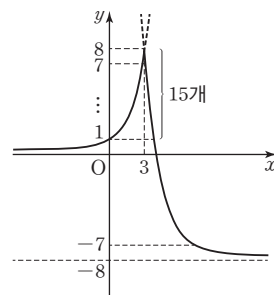
$15 < \left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} \leq 16 \quad \therefore 4 < 15 < 4^{-3-a} \leq 4^2$

이때 밑이 1보다 크므로

$1 < -3-a \leq 2 \quad \therefore -5 \leq a < -4$

따라서 구하는 정수 a 의 값은 -5 이다.

정답_ ③



242

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 함수 $y=-2^{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향

으로 $\frac{3}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 7만큼 평행이동한 것이고, 함수

$y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=3^{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4

만큼, y 축의 방향으로 -8 만큼 평행이동한 것이다.

또, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근

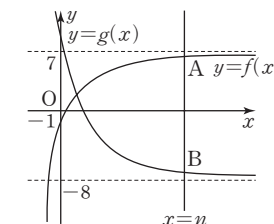
선의 방정식은 $y=7$ 이고, 함수

$y=g(x)$ 의 그래프의 점근선의 방

정식은 $y=-8$ 이므로 두 함수

$y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 오

른쪽 그림과 같다.



$\therefore f(1)=7-2=5, g(1)=3^3-8=19$ 이므로

$h(1)=15$

$f(2)=7-2^{-1}=\frac{13}{2}, g(2)=3^2-8=1$ 이므로

$h(2)=6$

$\therefore h(1) > h(2)$ (참)

$\therefore h(n)=h(n+1)$ 을 만족시키려면 $f(n) \geq 6, g(n) \leq -7$ 이어야 한다.

$f(n)=7-2^{-2n+3} \geq 6$ 에서 $2^{-2n+3} \leq 1$

이때 밑이 1보다 크므로

$$-2n+3 \leq 0 \quad \therefore n \geq \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$g(n) = 3^{-n+4} - 8 \leq -7 \text{에서 } 3^{-n+4} \leq 1$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$-n+4 \leq 0 \quad \therefore n \geq 4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧의 공통부분을 구하면 $n \geq 4$ 이므로 자연수 n 의 최솟값은 4이다. (참)

$$\therefore f(3) = 7 - 2^{-3} = \frac{55}{8}, g(3) = 3 - 8 = -5 \text{이므로}$$

$$h(3) = 12$$

$$f(4) = 7 - 2^{-5} = \frac{223}{32}, g(4) = 1 - 8 = -7 \text{이므로}$$

$$h(4) = 14$$

①에서 $h(1) > h(2)$ 이고, ②에서 $h(4) = h(5) = \dots$ 이므로

$$h(2) < h(3) < h(4) = h(5) = \dots$$

즉, $h(n) < h(n+1)$ 을 만족시키는 자연수 n 은 2, 3의 2개이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ①, ②이다.

정답_ ③

243

이 금융 상품에 초기 자산 w_0 을 투자하고 10년이 지난 시점에서의 기대 자산은 초기 자산의 2배이므로

$$2w_0 = \frac{w_0}{3} 10^{10a} (1 + 10^{10a})$$

$$10^{10a} (1 + 10^{10a}) = 6 \quad \therefore (10^{10a})^2 + 10^{10a} - 6 = 0$$

$$10^{10a} = x \quad (x > 0) \text{로 놓으면}$$

$$x^2 + x - 6 = 0, (x+3)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 2 \quad (\because x > 0)$$

이 금융 상품에 초기 자산 w_0 을 투자하고 30년이 지난 시점에서의 기대 자산은

$$\begin{aligned} \frac{w_0}{3} 10^{30a} (1 + 10^{30a}) &= \frac{w_0}{3} \times (10^{10a})^3 \{1 + (10^{10a})^3\} \\ &= \frac{w_0}{3} \times 2^3 (1 + 2^3) \quad (\because 10^{10a} = 2) \\ &= 24w_0 \end{aligned}$$

$$\therefore k = 24$$

정답_ ⑤

04 로그함수

244

$$f(1) = 4 \text{에서 } \log_a 3 + 3 = 4$$

$$\log_a 3 = 1 \quad \therefore a = 3$$

$$\text{따라서 } f(x) = \log_3 (2x+1) + 3 \text{이므로}$$

$$f(13) = \log_3 27 + 3 = 3 + 3 = 6$$

정답_ ④

245

$$(g \circ f)(-6) = g(f(-6)) = g(5^{-6}) = \log_{\frac{1}{25}} 5^{-6}$$

$$= \log_{5^{-2}} 5^{-6} = \frac{-6}{-2} = 3$$

정답_ 3

참고 함수 $f(x) = 5^x$ 의 치역은 양의 실수 전체의 집합이고, 함수 $g(x) = \log_{\frac{1}{25}} x$ 의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이므로 함수 f 의 치역이 함수 g 의 정의역에 포함된다. 따라서 합성함수 $(g \circ f)(x)$ 가 정의된다.

246

$$\textcircled{1} f(ab) = \log ab = \log a + \log b = f(a) + f(b)$$

$$\textcircled{2} f\left(\frac{a}{2}\right) = \log \frac{a}{2} = \log \frac{5a}{10} = \log 5a - 1 = f(5a) - 1$$

$$\textcircled{3} f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = \log a + \log \frac{1}{a} = \log a - \log a = 0$$

$$\textcircled{4} f(a) - f(b) = \log a - \log b = \log \frac{a}{b} = f\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\textcircled{5} f(a^b) = \log a^b = b \log a = bf(a)$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

정답_ ③

247

$$f(x) = \log_2 \sqrt{1 + \frac{1}{x+1}} = \log_2 \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 \frac{x+2}{x+1}$$

이므로

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(k)$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{5}{4} + \dots + \frac{1}{2} \log_2 \frac{k+2}{k+1}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\log_2 \frac{3}{2} + \log_2 \frac{4}{3} + \log_2 \frac{5}{4} + \dots + \log_2 \frac{k+2}{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{k+2}{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 \frac{k+2}{2}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \log_2 \frac{k+2}{2} = 4 \text{이므로}$$

$$\log_2 \frac{k+2}{2} = 8, \frac{k+2}{2} = 2^8 = 256$$

$$\therefore k = 512 - 2 = 510$$

정답_ 510

248

① 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 지난다.

② 점근선은 $x=0$ 이다.

③ 밑이 1보다 큰 로그함수이므로 $0 < x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.

④ 그래프는 함수 $y=3^x$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

249

함수 $f(x)=2\log_7 x$ 가 정의되려면
 $x>0 \quad \therefore A=\{x|x>0\}$
 함수 $g(x)=2\log_7 |x|$ 가 정의되려면
 $|x|>0, x\neq 0 \quad \therefore B=\{x|x\neq 0 \text{인 실수}\}$
 함수 $h(x)=\log_7 x^2$ 이 정의되려면
 $x^2>0, x\neq 0 \quad \therefore C=\{x|x\neq 0 \text{인 실수}\}$
 $\therefore A\subset B=C$

정답_ ③

참고 두 함수 $f(x)=2\log_7 x, h(x)=\log_7 x^2$ 은 정의역이 다르므로 서로 다른 함수이다.
 그러나 두 함수 $g(x)=2\log_7 |x|, h(x)=\log_7 x^2$ 은 서로 같은 함수이다.

250

함수 $y=\log_2 (x^2+ax+4)$ 가 실수 전체의 집합에서 정의되려면
 모든 실수 x 에 대하여 부등식
 $x^2+ax+4>0$
 이 성립해야 한다.
 이차방정식 $x^2+ax+4=0$ 의 판별식을 D 라고 하면
 $D=a^2-16<0, (a+4)(a-4)<0$
 $\therefore -4<a<4$
 따라서 정수 a 는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 의 7개이다.

정답_ ④

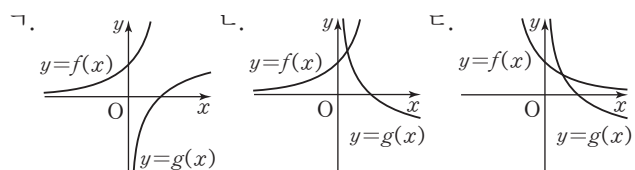
251

$y=\log_a bx$ 의 그래프에서 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소하므로
 $0<a<1$
 또, $x=1$ 일 때 $y<0$ 이므로
 $\log_a b<0$
 따라서 함수 $y=\log_b ax$ 는 밑이 1보다 크므로 x 의 값이 증가할 때
 y 의 값도 증가한다. 또, $x=1$ 일 때 $y=\log_b a=\frac{1}{\log_a b}<0$ 이므로
 함수 $y=\log_b ax$ 의 그래프의 개형은 ③과 같다.

정답_ ③

252

보기의 각 경우 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 두 함수의 그래프가 항상 만나는 경우는 ㉠, ㉢이다.

정답_ ⑤

253

$y=\log_5 (x+2)-1$ 에서 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면
 $y+1=\log_5 (x+2), 5^{y+1}=x+2$
 $\therefore x=5^{y+1}-2$
 x 와 y 를 서로 바꾸면 역함수는
 $y=5^{x+1}-2$
 따라서 $a=5, b=1, c=-2$ 이므로
 $a+b+c=5+1+(-2)=4$

정답_ ②

254

$f^{-1}(5)=k$ 라고 하면 $f(k)=5$
 즉, $\log_3 (k+12)+2=5$ 이므로
 $\log_3 (k+12)=3, k+12=3^3=27$
 $\therefore k=15$

정답_ ①

다른 풀이

$y=\log_3 (x+12)+2$ 로 놓고 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면
 $y-2=\log_3 (x+12), 3^{y-2}=x+12$
 $\therefore x=3^{y-2}-12$
 x 와 y 를 서로 바꾸면 역함수는
 $y=3^{x-2}-12$
 따라서 $f^{-1}(x)=3^{x-2}-12$ 이므로
 $f^{-1}(5)=3^{5-2}-12=15$

255

$(f \circ g)(x)=x$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.
 $(g \circ g)(a)=66$ 에서 $g(g(a))=66$
 $g(a)=b$ 라고 하면 $g(b)=66$ 이므로
 $f(66)=b$
 즉, $\log_2 64=b$ 이므로
 $\log_2 2^6=b \quad \therefore b=6$
 따라서 $g(a)=6$ 이므로
 $f(6)=a$, 즉 $\log_2 4=a$ 이므로
 $\log_2 2^2=a \quad \therefore a=2$

정답_ 2

다른 풀이

$(f \circ g)(x)=x$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.
 $y=\log_2 (x-2)$ 로 놓고 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면
 $x-2=2^y$
 $\therefore x=2^y+2$
 x 와 y 를 서로 바꾸면 역함수는
 $y=2^x+2$
 따라서 $g(x)=2^x+2$ 이므로 $(g \circ g)(a)=66$ 에서
 $g(g(a))=66, g(2^a+2)=66, 2^{2^a+2}+2=66$
 $2^{2^a+2}=64=2^6, 2^a+2=6, 2^a=4=2^2$
 $\therefore a=2$

256

ㄱ. $y = \log(2x+1) = \log 2 \left(x + \frac{1}{2}\right) = \log \left(x + \frac{1}{2}\right) + \log 2$
 이므로 함수 $y = \log(2x+1)$ 의 그래프는 함수 $y = \log x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 $\log 2$ 만큼 평행이동한 것이다.
 ㄴ. $y = \log \frac{1}{2}x = \log x - \log 2$
 이므로 함수 $y = \log \frac{1}{2}x$ 의 그래프는 함수 $y = \log x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $-\log 2$ 만큼 평행이동한 것이다.
 ㄷ. $y = 2 \log x - 1$ 의 그래프는 함수 $y = \log x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.
 ㄹ. $y = \log(-x+1) = \log\{-(x-1)\}$
 이므로 함수 $y = \log(-x+1)$ 의 그래프는 함수 $y = \log(-x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
 한편, 함수 $y = \log(-x)$ 의 그래프는 함수 $y = \log x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이다.
 따라서 함수 $y = \log x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

정답 ⑤

257

$y = \log_3(6x-72) = \log_3\{3 \times 2(x-12)\}$
 $= \log_3 3 + \log_3 2(x-12)$
 $= \log_3 2(x-12) + 1$
 따라서 함수 $y = \log_3(6x-72)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_3 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 12만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로
 $m=12, n=1$
 $\therefore m+n=12+1=13$

정답 13

258

함수 $y = \log_2 x + 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y = \log_2(x-a) + 1$
 이 함수의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
 $x = \log_2(y-a) + 1, x-1 = \log_2(y-a)$
 $2^{x-1} = y-a \quad \therefore y = 2^{x-1} + a$
 이 함수의 그래프가 함수 $y = 2^{x-1} + 5$ 의 그래프와 일치하므로
 $a=5$

정답 ⑤

259

함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
 $y = -\log_3 x$
 이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y = -\log_3(x-m) + n$

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x = -3$ 이므로

$$m = -3$$

이때 함수 $y = -\log_3(x+3) + n$ 의 그래프가 점 $(0, -5)$ 를 지나므로

$$-5 = -\log_3 3 + n, -5 = -1 + n$$

$$\therefore n = -4$$

$$\therefore m+n = -3 + (-4) = -7$$

정답 -7

260

$$y = \log_3 k(x+1) = \log_3(x+1) + \log_3 k$$

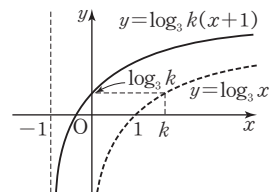
이므로 함수 $y = \log_3 k(x+1)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 $\log_3 k$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프가 제4사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$ 일 때 함수값이 0 이상이어야 하므로

$$\log_3 k \geq 0$$

함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프에서 $k \geq 1$

따라서 양수 k 의 최솟값은 1이다.



정답 1

261

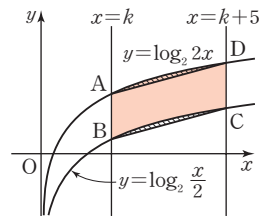
$$y = \log_2 2x = \log_2 x + 1, y = \log_2 \frac{x}{2} = \log_2 x - 1$$

이므로 함수 $y = \log_2 \frac{x}{2}$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는 평행사변형 ABCD의 넓이와 같다.

이때 $\overline{AB}=2$ 이고 두 직선 $x=k, x=k+5$ 사이의 거리는 5이므로 구하는 넓이는

$$2 \times 5 = 10$$



정답 10

262

점 A의 좌표를 $(a, 2)$ 라고 하면 점 A는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 점 이므로

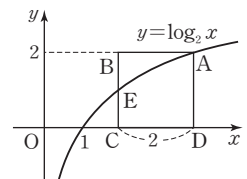
$$\log_2 a = 2 \quad \therefore a = 4$$

사각형 ABCD는 한 변의 길이가 2인

정사각형이므로 점 C의 좌표는 $(2, 0)$

따라서 $\log_2 2 = 1$ 이므로 점 E의 좌표는 $(2, 1)$

$$\therefore \overline{CE} = 1$$



정답 1

263

A(1, 0), B(4, 2), C(4, $\log_a 4$)이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (4-1) \times (2-\log_a 4) = \frac{3}{2}(2-\log_a 4)$$

$$\text{즉, } \frac{3}{2}(2-\log_a 4) = \frac{9}{2} \text{이므로}$$

$$2-\log_a 4=3, \log_a 4=-1$$

$$\therefore a = \frac{1}{4}$$

정답_ ④

264

$\overline{QR}=2$ 이므로 $b-a=2$

두 점 Q, R의 y좌표가 같으므로

$$\log_{\frac{1}{3}} a = \log_3 b, \log_{3^{-1}} a = \log_3 b$$

$$-\log_3 a = \log_3 b, \log_3 a + \log_3 b = 0, \log_3 ab = 0$$

$$\therefore ab=1$$

$$\therefore a^2+b^2=(b-a)^2+2ab=2^2+2 \times 1=6$$

정답_ 6

265

점 A는 함수 $y=\log_a x$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점이므로

$$A(1, 0)$$

함수 $y=\log_a(x-b)$ 의 그래프는 함수 $y=\log_a x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로

$$B(1+b, 0) \quad \therefore \overline{AB}=\overline{DE}=b$$

이때 C(0, 2)이고 점 D가 선분 CE의 중점이므로

$$D(b, 2), E(2b, 2)$$

점 D가 함수 $y=\log_a x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$2=\log_a b \text{에서 } b=a^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 AE의 기울기가 $\frac{2}{3}$ 이므로

$$\frac{2}{2b-1}=\frac{2}{3}, 2(2b-1)=6$$

$$\therefore b=2$$

$b=2$ 를 ①에 대입하면

$$a=\sqrt{2} (\because a>1)$$

$$\therefore ab=\sqrt{2} \times 2=2\sqrt{2}$$

정답_ $2\sqrt{2}$

266

A(0, 1)이고 선분 AB가 x 축과 평행하므로 점 B의 y좌표는 1이다.

따라서 점 B의 x좌표는 $\log_4 x=1$ 에서 $x=4$

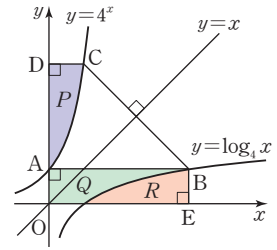
$$\therefore B(4, 1)$$

두 함수 $y=4^x, y=\log_4 x$ 는 서로 역함수 관계이므로 이 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

이때 두 점 B, C가 기울기가 -1인 직선 위에 있으므로 두 점 B, C는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

$$\therefore C(1, 4)$$

오른쪽 그림과 같이 점 B에서 x 축에 내린 수선의 발을 E라 하고, 선분 BE와 x 축 및 함수 $y=\log_4 x$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 R라고 하면 $P=R$ 이므로
 $P+Q=R+Q=\square \text{AOEB}$
 $=4 \times 1=4$



정답_ ②

267

$$A=-\log_{\frac{1}{5}} 7=\log_{\frac{1}{5}} 7^{-1}=\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{7}$$

$$B=2=\log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^2=\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{25}$$

$$C=-2 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{3}=\log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=\log_{\frac{1}{5}} 9$$

이때 $\frac{1}{25} < \frac{1}{7} < 9$ 이고 밑이 1보다 작으므로

$$\log_{\frac{1}{5}} 9 < \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{7} < \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{25}$$

$$\therefore C < A < B$$

정답_ ④

268

$1 < x < 3$ 의 각 변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$0 < \log_3 x < 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad A-B &= \log_3 x^2 - (\log_3 x)^2 \\ &= 2 \log_3 x - (\log_3 x)^2 \\ &= (2 - \log_3 x) \log_3 x \end{aligned}$$

이때 $1 < 2 - \log_3 x < 2, 0 < \log_3 x < 1$ ($\because \textcircled{1}$)이므로

$$A-B > 0 \quad \therefore A > B$$

(ii) $0 < \log_3 x < 1$ 에서 $0 < (\log_3 x)^2 < 1$ 이므로

$$0 < B < 1$$

$\log_3 x < 1$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 (\log_3 x) < 0$$

$$\therefore C < B$$

(i), (ii)에서 $C < B < A$

정답_ ⑤

269

$0 < a < 1$ 이므로 $b < a$ 의 양변에 밑이 a 인 로그를 취하면

$$\log_a b > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$0 < b < 1$ 이므로 $b < a$ 의 양변에 밑이 b 인 로그를 취하면

$$1 > \log_b a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \log_b a < \log_a b \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\log_a ab = \log_a b + 1, \log_b \frac{a}{b} = \log_b a - 1 \text{이므로}$$

$$\log_a b < \log_a ab, \log_b \frac{a}{b} < \log_b a \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{에서 } \log_b \frac{a}{b} < \log_b a < \log_a b < \log_a ab$$

정답_ $\log_b \frac{a}{b} < \log_b a < \log_a b < \log_a ab$

270

- (1) $y = \log_3(2x+3)$ 은 밑이 1보다 크므로 $3 \leq x \leq 12$ 에서 $x=3$ 일 때 최솟값 $\log_3 9=2$, $x=12$ 일 때 최댓값 $\log_3 27=3$ 을 갖는다.
 (2) $y = \log_{\frac{1}{2}} 4x$ 는 밑이 1보다 작으므로 $2 \leq x \leq 8$ 에서 $x=2$ 일 때 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$, $x=8$ 일 때 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$ 를 갖는다.

정답_ (1) 최댓값: 3, 최솟값: 2 (2) 최댓값: -3, 최솟값: -5

271

$y = \log_2(3x-1)+k$ 는 밑이 1보다 크므로 $1 \leq x \leq 3$ 에서 $x=1$ 일 때 최솟값 $\log_2 2+k=1+k$, $x=3$ 일 때 최댓값 $\log_2 8+k=3+k$ 를 갖는다.

이때 최댓값이 최솟값의 2배이므로

$$3+k=2(1+k) \quad \therefore k=1$$

정답_ ⑤

272

$y = \log_{\frac{1}{2}}(x-a)$ 는 밑이 1보다 작으므로 $6 \leq x \leq 8$ 에서 $x=6$ 일 때 최댓값을 갖고, $x=8$ 일 때 최솟값을 갖는다.

이때 최솟값이 -2이므로 $-2 = \log_{\frac{1}{2}}(8-a)$ 에서

$$8-a = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4 \quad \therefore a=4$$

따라서 최댓값 M 은

$$M = \log_{\frac{1}{2}}(6-4) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$$

$$\therefore aM = 4 \times (-1) = -4$$

정답_ ④

273

- (1) $f(x) = x^2 - 2x + 6$ 으로 놓으면

$$f(x) = (x-1)^2 + 5$$

이므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최솟값 5를 갖고 최댓값은 없다.

$$y = \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 2x + 6) = \log_{\frac{1}{5}} f(x)$$
에서 밑이 1보다 작으므로

주어진 함수는 $f(x)$ 가 최대일 때 최솟값을 갖고, $f(x)$ 가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 주어진 함수는 $x=1$ 일 때 최댓값 $\log_{\frac{1}{5}} 5 = -1$ 을 갖고, 최솟값은 없다.

- (2) $f(x) = -x^2 + 2x + 7$ 로 놓으면

$$f(x) = -(x-1)^2 + 8$$

이므로 $f(x)$ 는 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $x=-1$ 일 때 최솟값 4, $x=1$ 일 때 최댓값 8을 갖는다.

$y = \log_2(-x^2 + 2x + 7) = \log_2 f(x)$ 에서 밑이 1보다 크므로 주어진 함수는 $f(x)$ 가 최소일 때 최솟값을 갖고, $f(x)$ 가 최대일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 주어진 함수는 $x=1$ 일 때 최댓값 $\log_2 8=3$, $x=-1$ 일 때 최솟값 $\log_2 4=2$ 를 갖는다.

정답_ (1) 최댓값: -1, 최솟값: 없다. (2) 최댓값: 3, 최솟값: 2

274

$$g(x) = x^2 - 4x + k$$
로 놓으면

$$g(x) = (x-2)^2 + k-4$$

이므로 $g(x)$ 는 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $x=0$ 일 때 최댓값 k , $x=2$ 일 때 최솟값 $k-4$ 를 갖는다.

$f(x) = \log_3(x^2 - 4x + k) = \log_3 g(x)$ 에서 밑이 1보다 크므로 $f(x)$ 는 $g(x)$ 가 최대일 때 최댓값을 갖고, $g(x)$ 가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최솟값 $\log_3(k-4)$ 를 가지므로 $\log_3(k-4) = \log_3 5$, $k-4=5$

$$\therefore k=9$$

즉, $f(x) = \log_3(x^2 - 4x + 9)$ 이므로 구하는 최댓값은 $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$

정답_ ①

275

진수의 조건에서 $x+3 > 0$, $1-x > 0$ 이므로

$$x > -3, x < 1 \quad \therefore -3 < x < 1$$

$$y = \log_a(x+3) + \log_a(1-x) = \log_a(x+3)(1-x) = \log_a(-x^2 - 2x + 3)$$

에서 $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ 으로 놓으면

$$f(x) = -(x+1)^2 + 4$$

이므로 $f(x)$ 는 $-3 < x < 1$ 에서 $x=-1$ 일 때 최댓값 4를 갖고 최솟값은 없다.

즉, $y = \log_a(x+3) + \log_a(1-x) = \log_a f(x)$ 에서 $f(x)$ 가 최댓값을 갖고 최솟값은 없으므로 밑이 1보다 크면 주어진 함수는 최댓값을 갖고 최솟값은 없다. 또, 밑이 1보다 작으면 주어진 함수는 최솟값을 갖고 최댓값은 없다.

그런데 주어진 함수는 최솟값 -2를 가지므로 $0 < a < 1$ 이어야 한다. 즉, $\log_a 4 = -2$ 이므로

$$a^{-2} = 4, a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \quad (\because 0 < a < 1)$$

정답_ $\frac{1}{2}$

276

- (1) $y = (\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x - 8$ 에서 $\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$\frac{1}{4} \leq x \leq 4$$
에서

$$\log_2 \frac{1}{4} \leq \log_2 x \leq \log_2 4, \log_2 2^{-2} \leq \log_2 x \leq \log_2 2^2$$

$$-2 \leq \log_2 x \leq 2 \quad \therefore -2 \leq t \leq 2$$

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 - 2t - 8 = (t-1)^2 - 9$$

이므로 $-2 \leq t \leq 2$ 에서 $t=-2$ 일 때 최댓값 0, $t=1$ 일 때 최솟값 -9를 갖는다.

- (2) $y = (\log_3 x)(\log_{\frac{1}{3}} x) - 2 \log_{\frac{1}{3}} x + 10$

$$= (\log_3 x)(-\log_3 x) + 2 \log_3 x + 10$$

$$= -(\log_3 x)^2 + 2 \log_3 x + 10$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 $1 \leq x \leq 81$ 에서

$$\log_3 1 \leq \log_3 x \leq \log_3 81, \log_3 1 \leq \log_3 x \leq \log_3 3^4$$

$$0 \leq \log_3 x \leq 4 \quad \therefore 0 \leq t \leq 4$$

이때 주어진 함수는

$$y = -t^2 + 2t + 10 = -(t-1)^2 + 11$$

이므로 $0 \leq t \leq 4$ 에서 $t=1$ 일 때 최댓값 11, $t=4$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.

정답_ (1) 최댓값: 0, 최솟값: -9 (2) 최댓값: 11, 최솟값: 2

277

$$\begin{aligned}
 y &= \log_2 \frac{x}{4} \times \log_4 \frac{x}{2} + k \\
 &= \log_2 \frac{x}{2^2} \times \log_{2^2} \frac{x}{2} + k \\
 &= \frac{1}{2}(\log_2 x - \log_2 2^2)(\log_2 x - \log_2 2) + k \\
 &= \frac{1}{2}(\log_2 x - 2)(\log_2 x - 1) + k \\
 \log_2 x &= t \text{로 놓으면} \\
 y &= \frac{1}{2}(t-2)(t-1) + k = \frac{1}{2}(t^2 - 3t + 2) + k \\
 &= \frac{1}{2}\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + k - \frac{1}{8} \\
 \text{따라서 } t &= \frac{3}{2} \text{일 때 최솟값 } k - \frac{1}{8} \text{을 가지므로} \\
 k - \frac{1}{8} &= \frac{1}{2} \quad \therefore k = \frac{5}{8}
 \end{aligned}$$

정답_ ②

278

$$\begin{aligned}
 2^{\log x} &= x^{\log 2} \text{이므로} \\
 y &= 2^{\log x} \times x^{\log 2} - 2(2^{\log x} + x^{\log 2}) - 3 \\
 &= (2^{\log x})^2 - 4 \times 2^{\log x} - 3 \\
 2^{\log x} &= t \text{로 놓으면 } x > 1 \text{에서} \\
 \log x &> 0 \text{이므로} \\
 2^{\log x} &> 1 \quad \therefore t > 1 \\
 \text{이때 주어진 함수는} \\
 y &= t^2 - 4t - 3 = (t-2)^2 - 7 \\
 \text{이므로 } t > 1 \text{에서 } t &= 2 \text{일 때 최솟값 } -7 \text{을 갖는다.} \\
 t &= 2 \text{에서 } 2^{\log x} = 2 \\
 \log x &= 1 \quad \therefore x = 10 \\
 \text{따라서 } a &= 10, b = -7 \text{이므로} \\
 a + b &= 10 + (-7) = 3
 \end{aligned}$$

정답_ ③

279

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{x^4}{100} \div x^{\log x} = \frac{x^4}{100x^{\log x}} \text{의 양변에 상용로그를 취하면} \\
 \log y &= \log \frac{x^4}{100x^{\log x}} \\
 &= \log x^4 - \log 100 - \log x^{\log x} \\
 &= -(\log x)^2 + 4 \log x - 2 \\
 \log x &= t \text{로 놓으면} \\
 \log y &= -t^2 + 4t - 2 = -(t-2)^2 + 2 \\
 \text{이므로 } t &= 2 \text{일 때 함수 } \log y \text{는 최댓값 } 2 \text{를 갖는다.} \\
 t &= 2 \text{에서 } \log x = 2 \\
 \therefore x &= 100 \\
 \log y &= 2 \text{에서 } y = 100 \\
 \text{따라서 } a &= 100, b = 100 \text{이므로} \\
 \frac{a+b}{100} &= \frac{100+100}{100} = 2
 \end{aligned}$$

정답_ ②

280

$$\begin{aligned}
 y &= 4x^{2-\log_2 x} \text{의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면} \\
 \log_2 y &= \log_2 4x^{2-\log_2 x} = \log_2 4 + \log_2 x^{2-\log_2 x} \\
 &= 2 + (2 - \log_2 x) \log_2 x \\
 &= -(\log_2 x)^2 + 2 \log_2 x + 2 \\
 \log_2 x &= t \text{로 놓으면 } 1 \leq x \leq 8 \text{에서} \\
 \log_2 1 &\leq \log_2 x \leq \log_2 8 \\
 0 &\leq \log_2 x \leq 3 \quad \therefore 0 \leq t \leq 3 \\
 \text{이때} \\
 \log_2 y &= -t^2 + 2t + 2 = -(t-1)^2 + 3 \\
 \text{이므로 } 0 &\leq t \leq 3 \text{에서 함수 } \log_2 y \text{는 } t=1 \text{일 때 최댓값 } 3, t=3 \text{일} \\
 &\text{때 최솟값 } -1 \text{을 갖는다.} \\
 \log_2 y &= 3 \text{에서 } M = 2^3 = 8 \\
 \log_2 y &= -1 \text{에서 } m = 2^{-1} = \frac{1}{2} \\
 \therefore Mm &= 8 \times \frac{1}{2} = 4
 \end{aligned}$$

정답_ 4

281

$$\begin{aligned}
 \log_2 \left(x + \frac{4}{y}\right) + \log_2 \left(y + \frac{4}{x}\right) &= \log_2 \left(x + \frac{4}{y}\right) \left(y + \frac{4}{x}\right) \\
 &= \log_2 \left(xy + \frac{16}{xy} + 8\right) \\
 x > 0, y > 0 \text{이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여} \\
 xy + \frac{16}{xy} &\geq 2\sqrt{xy \times \frac{16}{xy}} = 8 \quad (\text{단, 등호는 } xy = 4 \text{일 때 성립한다.}) \\
 \therefore \log_2 \left(x + \frac{4}{y}\right) + \log_2 \left(y + \frac{4}{x}\right) &= \log_2 \left(xy + \frac{16}{xy} + 8\right) \\
 &\geq \log_2 (8 + 8) = \log_2 16 \\
 &= \log_2 2^4 = 4 \\
 \text{따라서 } \log_2 \left(x + \frac{4}{y}\right) + \log_2 \left(y + \frac{4}{x}\right) \text{의 최솟값은 } 4 \text{이다.}
 \end{aligned}$$

정답_ ④

282

$$\begin{aligned}
 \log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} y &= \log_{\frac{1}{3}} xy \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
 \text{이고, 밑이 1보다 작으므로 } \textcircled{1} \text{은 } xy \text{가 최대일 때 최솟값을 갖는} \\
 &\text{다.} \\
 x > 0, y > 0 \text{이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여} \\
 3x + y &\geq 2\sqrt{3xy} \quad (\text{단, 등호는 } 3x = y \text{일 때 성립한다.}) \\
 \text{이때 } 3x + y &= 6 \text{이므로} \\
 6 &\geq 2\sqrt{3xy}, \quad 3 \geq \sqrt{3xy} \\
 9 &\geq 3xy \quad \therefore xy \leq 3 \\
 \therefore \log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} y &= \log_{\frac{1}{3}} xy \\
 &\geq \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1 \\
 \text{따라서 } \textcircled{1} \text{의 최솟값은 } -1 \text{이다.}
 \end{aligned}$$

정답_ ②

283

$x > 1, y > 1$ 이므로

$\log_2 x > 0, \log_2 y > 0$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3 = \log_2 x + \log_2 y$$

$\geq 2\sqrt{\log_2 x \times \log_2 y}$ (단, 등호는 $\log_2 x = \log_2 y$ 일 때 성립한다.)

$$\therefore \sqrt{\log_2 x \times \log_2 y} \leq \frac{3}{2}$$

양변을 제곱하면 $\log_2 x \times \log_2 y \leq \frac{9}{4}$

$$\begin{aligned} \therefore \log_x 2 + \log_y 2 &= \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_2 y} = \frac{\log_2 x + \log_2 y}{\log_2 x \times \log_2 y} \\ &= \frac{3}{\log_2 x \times \log_2 y} \\ &\geq 3 \times \frac{4}{9} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

따라서 $\log_x 2 + \log_y 2$ 의 최솟값은 $\frac{4}{3}$ 이다.

정답_ ⑤

284

진수의 조건에서 $x+1 > 0, x-3 > 0$ 이므로

$x > -1, x > 3$

$\therefore x > 3$

..... ①

$\log_2(x+1) - 5 = \log_{\frac{1}{2}}(x-3)$ 에서

$$\log_2(x+1) - 5 = -\log_2(x-3)$$

$$\log_2(x+1) + \log_2(x-3) = 5$$

$$\log_2(x+1)(x-3) = 5, (x+1)(x-3) = 2^5 = 32$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0, (x+5)(x-7) = 0$$

$$\therefore x = 7 \quad (\because \text{①})$$

정답_ 7

285

밑과 진수의 조건에서

$$x^2 + 1 > 0, x^2 + 1 \neq 1, 2x + 16 > 0, 2x + 16 \neq 1, 2x - 3 > 0$$

$$\therefore x > \frac{3}{2}$$

..... ①

$\log_{x^2+1}(2x-3) = \log_{2x+16}(2x-3)$ 에서 밑이 같거나 진수가 1이어야 한다.

(i) $x^2 + 1 = 2x + 16$ 일 때

$$x^2 - 2x - 15 = 0, (x+3)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 5$$

이때 ①에 의하여 $x = 5$

(ii) $2x - 3 = 1$ 일 때, $x = 2$

$x = 2$ 는 ①을 만족시키므로 근이다.

(i), (ii)에서 $x = 2$ 또는 $x = 5$

따라서 모든 근의 합은

$$2 + 5 = 7$$

정답_ 7

286

진수의 조건에서 $x > 0, 4 - x > 0$ 이므로

$x > 0, x < 4$

$\therefore 0 < x < 4$

..... ①

$\log_2 x + \log_2(4-x) - k = 0$ 에서

$$\log_2 x(4-x) = k$$

$$\therefore x(4-x) = 2^k$$

..... ②

주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 실근을 가지려면 ①의 범위에서 ②이 서로 다른 두 개의 실근을 가져야 한다.

즉, $0 < x < 4$ 에서 곡선 $y = x(4-x)$ 와

직선 $y = 2^k$ 의 교점이 2개이어야 하므로

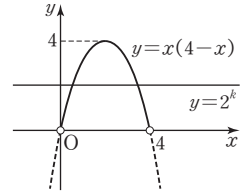
함수 $y = x(4-x)$ 의 그래프와 직선

$y = 2^k$ 은 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉, $0 < 2^k < 4$ 이어야 하므로

$$k < 2$$

따라서 자연수 k 는 1의 1개이다.



정답_ ①

287

밑과 진수의 조건에서

$x > 0, x \neq 1$

..... ①

$\log_2 x - 2 = \log_x 8$ 에서 $\log_2 x - 2 = 3 \log_x 2$

$$\therefore \log_2 x - 2 = \frac{3}{\log_2 x}$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t - 2 = \frac{3}{t}, t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 3$$

즉, $\log_2 x = -1$ 또는 $\log_2 x = 3$ 이므로

$$x = 2^{-1} = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 2^3 = 8$$

이것은 모두 ①을 만족시키므로 주어진 방정식의 근이다.

따라서 구하는 모든 근의 곱은

$$\frac{1}{2} \times 8 = 4$$

정답_ 4

288

진수의 조건에서 $x > 0$

..... ①

$2^{\log x} = x^{\log 2}$ 이므로 $2^{\log x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2 = 6t - 8, t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$(t-2)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 4$$

즉, $2^{\log x} = 2$ 또는 $2^{\log x} = 4$ 이므로

$$\log x = 1 \text{ 또는 } \log x = 2$$

$$\therefore x = 10 \text{ 또는 } x = 100$$

이것은 모두 ①을 만족시키므로 주어진 방정식의 근이다.

따라서 $\alpha = 10, \beta = 100$ 또는 $\alpha = 100, \beta = 10$ 이므로

$$\alpha + \beta = 10 + 100 = 110$$

정답_ 110

289

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠
 $\log_{\frac{1}{2}} x \times \log_2 x + 2 \log_2 x + k = 0$ 의 한 근이 16이므로
 $\log_{\frac{1}{2}} 16 \times \log_2 16 + 2 \log_2 16 + k = 0$
 $(-4) \times 4 + 2 \times 4 + k = 0$
 $-16 + 8 + k = 0 \quad \therefore k = 8$
 즉, 주어진 방정식은 $\log_{\frac{1}{2}} x \times \log_2 x + 2 \log_2 x + 8 = 0$
 $(-\log_2 x) \times \log_2 x + 2 \log_2 x + 8 = 0$
 $\therefore (\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x - 8 = 0$
 $\log_2 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 2t - 8 = 0, (t+2)(t-4) = 0$
 $\therefore t = -2$ 또는 $t = 4$
 즉, $\log_2 x = -2$ 또는 $\log_2 x = 4$ 이므로
 $x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ 또는 $x = 2^4 = 16$
 이것은 모두 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 근이다.
 따라서 구하는 다른 한 근은 $\frac{1}{4}$ 이다.

정답_ ①

290

$\log x = t$ 로 놓으면 주어진 방정식은
 $t^2 - kt - 2 = 0$ ㉠
 주어진 방정식의 두 근을 α, β 라고 하면 $\alpha\beta = 100$ 이고 ㉠의 두 근
 은 $\log \alpha, \log \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\log \alpha + \log \beta = k$
 $\therefore k = \log \alpha\beta = \log 100 = 2$

정답_ 2

291

이차방정식 $(2 \log a - 3)x^2 - x \log a + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라고
 하면
 $D = (-\log a)^2 - 4(2 \log a - 3) = 0$
 $(\log a)^2 - 8 \log a + 12 = 0$
 $\log a = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 8t + 12 = 0, (t-2)(t-6) = 0$
 $\therefore t = 2$ 또는 $t = 6$
 즉, $\log a = 2$ 또는 $\log a = 6$ 이므로
 $a = 10^2$ 또는 $a = 10^6$
 따라서 모든 상수 a 의 값의 곱은
 $10^2 \times 10^6 = 10^8$

정답_ ①

292

$\log_3 x \times \log_3 \frac{9^a}{x} = a + 6$ 에서
 $\log_3 x (\log_3 9^a - \log_3 x) = a + 6$
 $\log_3 x (\log_3 3^{2a} - \log_3 x) = a + 6$
 $\log_3 x (2a - \log_3 x) = a + 6$
 $\therefore (\log_3 x)^2 - 2a \log_3 x + a + 6 = 0$ ㉠
 $\log_3 x = t$ 로 놓으면

$t^2 - 2at + a + 6 = 0$ ㉡
 방정식 ㉠의 두 근이 모두 1보다 크므로
 $x > 1$ 에서 $\log_3 x > \log_3 1, \log_3 x > 0$
 $\therefore t > 0$
 즉, 방정식 ㉡의 두 근은 모두 0보다 커야 한다.
 (i) 이차방정식 ㉡의 판별식을 D 라고 하면
 $\frac{D}{4} = a^2 - (a+6) \geq 0$
 $a^2 - a - 6 \geq 0, (a+2)(a-3) \geq 0$
 $\therefore a \leq -2$ 또는 $a \geq 3$
 (ii) 이차방정식 ㉡의 두 근의 합이 0보다 커야 하므로
 $2a > 0 \quad \therefore a > 0$
 (iii) 이차방정식 ㉡의 두 근의 곱이 0보다 커야 하므로
 $a + 6 > 0 \quad \therefore a > -6$
 (i)~(iii)에서 $a \geq 3$
 따라서 실수 a 의 최솟값은 3이다.

정답_ ⑤

293

(1) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠
 $x^{1-\log x} = \frac{x^2}{100}$ 의 양변에 상용로그를 취하면
 $\log x^{1-\log x} = \log \frac{x^2}{100}$
 $(1 - \log x) \log x = 2 \log x - \log 100$
 $(\log x)^2 + \log x - 2 = 0$
 $\log x = t$ 로 놓으면
 $t^2 + t - 2 = 0, (t+2)(t-1) = 0$
 $\therefore t = -2$ 또는 $t = 1$
 즉, $\log x = -2$ 또는 $\log x = 1$ 이므로
 $x = 10^{-2} = \frac{1}{100}$ 또는 $x = 10$
 이것은 모두 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 근이다.
 (2) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉡
 $2^{\log 2x} = 5^{\log 5x}$ 의 양변에 상용로그를 취하면
 $\log 2^{\log 2x} = \log 5^{\log 5x}$
 $\log 2x \times \log 2 = \log 5x \times \log 5$
 $(\log 2 + \log x) \log 2 = (\log 5 + \log x) \log 5$
 $(\log 5 - \log 2) \log x = (\log 2)^2 - (\log 5)^2$
 $\therefore \log x = -\frac{(\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2)}{\log 5 - \log 2}$
 $= -(\log 5 + \log 2)$
 $= -\log 10 = -1$
 $\therefore x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$
 이것은 ㉡을 만족시키므로 주어진 방정식의 근이다.

정답_ (1) $x = \frac{1}{100}$ 또는 $x = 10$ (2) $x = \frac{1}{10}$

294

밑과 진수의 조건에서 $x > 0, x \neq 1, \frac{1}{9}x > 0$
 $\therefore 0 < x < 1$ 또는 $x > 1$ ㉠
 $x^{\log_3 x} \times 3^{\log_3 \frac{1}{9}x} = 81$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면
 $\log_3 (x^{\log_3 x} \times 3^{\log_3 \frac{1}{9}x}) = \log_3 81$

$$\log_3 x^{\log_3 x} + \log_3 3^{\log_3 \frac{1}{9}x} = \log_3 3^4$$

$$(\log_3 x)^2 + \log_x \frac{1}{9}x = 4, (\log_3 x)^2 + \frac{\log_3 \frac{1}{9}x}{\log_3 x} = 4$$

$$\therefore (\log_3 x)^2 + \frac{\log_3 x - 2}{\log_3 x} = 4$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + \frac{t-2}{t} = 4, t^3 - 3t - 2 = 0$$

$$(t+1)^2(t-2) = 0 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 2$$

즉, $\log_3 x = -1$ 또는 $\log_3 x = 2$ 이므로

$$x = 3^{-1} = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 3^2 = 9$$

이것은 모두 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 근이다.

따라서 모든 근의 곱은

$$\frac{1}{3} \times 9 = 3$$

정답_ ④

295

진수의 조건에서 $x > 0, y > 0$

..... ㉠

$$\log_3 \{\log_5 (x^2 + y^2)\} = 0 \text{에서 } \log_5 (x^2 + y^2) = 1$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 5$$

$$\log_2 \sqrt{x} + \log_4 y = \frac{1}{2} \text{에서 } \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 y = \frac{1}{2}$$

$$\log_2 x + \log_2 y = 1, \log_2 xy = 1$$

$$\therefore xy = 2$$

즉, 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$ 이므로

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 2 \times 2 = 9$$

㉠에 의하여 $x+y > 0$ 이므로 $x+y = 3$

$$\therefore a + \beta = 3$$

정답_ 3

참고 $x+y=3, xy=2$ 이므로 x, y 는 이차방정식 $t^2 - 3t + 2 = 0$ 의 두 근이다.

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \text{에서 } (t-1)(t-2) = 0 \quad \therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 2$$

$$\therefore x=1, y=2 \text{ 또는 } x=2, y=1$$

296

진수의 조건에서 $x > 0, y > 0$

..... ㉠

$$\log_3 x \times \log_2 y = \frac{\log x}{\log 3} \times \frac{\log y}{\log 2} = \frac{\log x}{\log 2} \times \frac{\log y}{\log 3}$$

$$= \log_2 x \times \log_3 y$$

이므로 주어진 방정식의 해는 연립방정식 $\begin{cases} \log_2 x + \log_3 y = 6 \\ \log_2 x \times \log_3 y = 8 \end{cases}$ 의

해와 같다.

$\log_2 x = X, \log_3 y = Y$ 로 놓으면

$$\begin{cases} X + Y = 6 \\ XY = 8 \end{cases}$$

이므로 X, Y 는 이차방정식 $t^2 - 6t + 8 = 0$ 의 두 근이다.

$$t^2 - 6t + 8 = 0 \text{에서 } (t-2)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 4$$

$$\therefore X = 2, Y = 4 \text{ 또는 } X = 4, Y = 2$$

(i) $X = 2, Y = 4$, 즉 $\log_2 x = 2, \log_3 y = 4$ 일 때

$$x = 2^2 = 4, y = 3^4 = 81$$

이것은 ㉠을 만족시키지만 $a > \beta$, 즉 $x > y$ 를 만족시키지 않으므로 근이 아니다.

(ii) $X = 4, Y = 2$, 즉 $\log_2 x = 4, \log_3 y = 2$ 일 때

$$x = 2^4 = 16, y = 3^2 = 9$$

이것은 ㉠과 $a > \beta$, 즉 $x > y$ 를 모두 만족시키므로 주어진 방정식의 근이다.

(i), (ii)에서 $a = 16, \beta = 9$ 이므로

$$\sqrt{a\beta} = \sqrt{16 \times 9} = 12$$

정답_ ②

297

(1) 진수의 조건에서 $x+2 > 0$ 이므로

$$x > -2$$

..... ㉠

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+2) > 1 \text{에서 } \log_{\frac{1}{2}}(x+2) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

이때 밑이 1보다 작으므로

$$x+2 < \frac{1}{2} \quad \therefore x < -\frac{3}{2}$$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 해는

$$-2 < x < -\frac{3}{2}$$

(2) 진수의 조건에서 $x-4 > 0, x-2 > 0$ 이므로

$$\therefore x > 4$$

..... ㉠

$$2 \log_3 (x-4) \geq \log_3 (x-2) \text{에서}$$

$$\log_3 (x-4)^2 \geq \log_3 (x-2)$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$(x-4)^2 \geq x-2, x^2 - 9x + 18 \geq 0$$

$$(x-3)(x-6) \geq 0 \quad \therefore x \leq 3 \text{ 또는 } x \geq 6$$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 해는

$$x \geq 6$$

정답_ (1) $-2 < x < -\frac{3}{2}$ (2) $x \geq 6$

298

진수의 조건에서 $x+3 > 0, 9-x > 0$ 이므로

$$x > -3, x < 9$$

$$\therefore -3 < x < 9$$

..... ㉠

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+3) < k - \log_{\frac{1}{3}}(9-x) \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+3) + \log_{\frac{1}{3}}(9-x) < k$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+3)(9-x) < \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

이때 밑이 1보다 작으므로

$$(x+3)(9-x) > \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$\therefore x^2 - 6x + \left(\frac{1}{3}\right)^k - 27 < 0$$

..... ㉡

주어진 부등식의 해가 $0 < x < 6$ 이고 $0 < x < 6$ 이 ㉠에 포함되므로

㉡의 해가 $0 < x < 6$ 이어야 한다.

해가 $0 < x < 6$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$x(x-6) < 0 \quad \therefore x^2 - 6x < 0$$

이것이 ㉠과 일치해야 하므로

$$\left(\frac{1}{3}\right)^k - 27 = 0, 3^{-k} = 3^3$$

$$-k = 3 \quad \therefore k = -3$$

정답_ ①

299

진수의 조건에서 $\log_5 x > 0$, $x > 0$

$\log_5 x > 0$ 에서 $\log_5 x > \log_5 1$

이때 밑이 1보다 크므로

$x > 1$

즉, $x > 1$ 이고 $x > 0$ 이어야 하므로

$x > 1$

$\log_2 (\log_5 x) \leq 1$ 에서

$\log_2 (\log_5 x) \leq \log_2 2$

이때 밑 2가 1보다 크므로

$\log_5 x \leq 2$, $\log_5 x \leq \log_5 25$

이때 밑 5가 1보다 크므로

$x \leq 25$

㉠, ㉡에서 주어진 부등식의 해는

$1 < x \leq 25$

따라서 $\alpha = 1$, $\beta = 25$ 이므로

$\alpha + \beta = 1 + 25 = 26$

..... ㉠

..... ㉡

정답_ 26

300

진수의 조건에서 $x \neq 5$, $x > 0$, $x + 2 > 0$ 이므로

$0 < x < 5$ 또는 $x > 5$

$\log_{\frac{1}{2}} |x-5| > -3$ 에서

$\log_{\frac{1}{2}} |x-5| > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

이때 밑이 1보다 작으므로

$|x-5| < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$, $|x-5| < 8$

$-8 < x-5 < 8$ $\therefore -3 < x < 13$

$\log_3 x + \log_3 (x+2) \geq 1$ 에서

$\log_3 x(x+2) \geq \log_3 3$

이때 밑이 1보다 크므로

$x(x+2) \geq 3$, $x^2 + 2x - 3 \geq 0$

$(x+3)(x-1) \geq 0$

$\therefore x \leq -3$ 또는 $x \geq 1$

㉠, ㉡, ㉢에서 주어진 부등식의 해는

$1 \leq x < 5$ 또는 $5 < x < 13$

따라서 정수 x 는 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, ..., 12의 11개이다.

..... ㉠

..... ㉡

..... ㉢

정답_ ㉣

301

진수의 조건에서 $4x+2 > 0$, $x^2+k > 0$

$4x+2 > 0$ 에서 $x > -\frac{1}{2}$

$x^2+k > 0$ 에서 k 가 양수이므로 이것은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

㉠, ㉡에서 $x > -\frac{1}{2}$

$\log_{\frac{1}{7}} (4x+2) \leq \log_{\frac{1}{7}} (x^2+k)$ 에서 밑이 1보다 작으므로

$4x+2 \geq x^2+k$

$\therefore x^2 - 4x + k - 2 \leq 0$

..... ㉠

..... ㉡

..... ㉢

..... ㉣

$f(x) = x^2 - 4x + k - 2$ 로 놓으면 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x 의 개수가 3이 되도록 하는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore f(0) > 0$, $f(1) \leq 0$, $f(3) \leq 0$,

$f(4) > 0$

$f(0) = f(4) = k - 2$ 이므로 $k - 2 > 0$ 에서

$k > 2$

$f(1) = f(3) = k - 5$ 이므로 $k - 5 \leq 0$ 에서

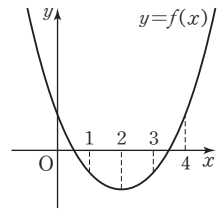
$k \leq 5$

㉠, ㉢에서 $2 < k \leq 5$

정답_ $2 < k \leq 5$

참고 $f(x) = x^2 - 4x + k - 2 = (x-2)^2 + k - 6$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = 2$ 에 대하여 대칭이다.

$\therefore f(0) = f(4)$, $f(1) = f(3)$



302

진수의 조건에서 $2x > 0$, $x > 0$, $x^6 > 0$ 이므로

$x > 0$

$\log_2 2x \times \log_2 x \geq \log_2 x^6 - 6$ 에서

$(1 + \log_2 x) \log_2 x \geq 6 \log_2 x - 6$

$(\log_2 x)^2 - 5 \log_2 x + 6 \geq 0$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$t^2 - 5t + 6 \geq 0$, $(t-2)(t-3) \geq 0$

$\therefore t \leq 2$ 또는 $t \geq 3$

즉, $\log_2 x \leq 2$ 또는 $\log_2 x \geq 3$ 이므로

$\log_2 x \leq \log_2 2^2$ 또는 $\log_2 x \geq \log_2 2^3$

이때 밑이 1보다 크므로

$x \leq 4$ 또는 $x \geq 8$

㉠, ㉡에서 주어진 부등식의 해는

$0 < x \leq 4$ 또는 $x \geq 8$

정답_ $0 < x \leq 4$ 또는 $x \geq 8$

303

진수의 조건에서 $\frac{4}{x} > 0$, $\frac{x}{16} > 0$ 이므로

$x > 0$

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{4}{x} \times \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{16} \geq -3$ 에서

$(\log_{\frac{1}{2}} 4 - \log_{\frac{1}{2}} x)(\log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} 16) \geq -3$

$(-2 + \log_2 x)(-\log_2 x + 4) \geq -3$

$(\log_2 x)^2 - 6 \log_2 x + 5 \leq 0$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$t^2 - 6t + 5 \leq 0$, $(t-1)(t-5) \leq 0$

$\therefore 1 \leq t \leq 5$

즉, $1 \leq \log_2 x \leq 5$ 이므로

$\log_2 2 \leq \log_2 x \leq \log_2 2^5$

이때 밑이 1보다 크므로

$2 \leq x \leq 32$

㉠, ㉡에서 주어진 부등식의 해는

$2 \leq x \leq 32$

따라서 자연수 x 는 2, 3, 4, ..., 32의 31개이다.

정답_ ㉣

304

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠
 $3^{\log x} = x^{\log 3}$ 이므로 주어진 방정식은
 $(3^{\log x})^2 - 12 \times 3^{\log x} + 27 < 0$
 $3^{\log x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $t^2 - 12t + 27 < 0$, $(t-3)(t-9) < 0$
 $\therefore 3 < t < 9$
 즉, $3 < 3^{\log x} < 9$ 이므로 $3^1 < 3^{\log x} < 3^2$
 이때 밑 3이 1보다 크므로 $1 < \log x < 2$
 $\therefore \log 10 < \log x < \log 100$
 마찬가지로 밑 10이 1보다 크므로
 $10 < x < 100$ ㉡
 ㉠, ㉡에서 주어진 부등식의 해는
 $10 < x < 100$

정답_ 10 < x < 100

305

$(1 + \log_{\frac{1}{5}} x)(a - \log_{\frac{1}{5}} x) > 0$ 에서
 $(1 - \log_5 x)(a + \log_5 x) > 0$
 $\log_5 x = t$ 로 놓으면
 $(1-t)(a+t) > 0$
 $\therefore t^2 + (a-1)t - a < 0$ ㉠
 이때 주어진 부등식의 해가 $\frac{1}{5} < x < 5$ 이고 밑이 1보다 크므로
 $\log_5 \frac{1}{5} < \log_5 x < \log_5 5$, $\log_5 5^{-1} < t < \log_5 5$
 $\therefore -1 < t < 1$
 해가 $-1 < t < 1$ 이고 t^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(t+1)(t-1) < 0 \quad \therefore t^2 - 1 < 0$
 이것이 ㉠과 일치해야 하므로
 $a-1=0 \quad \therefore a=1$

정답_ ㉣

다른 풀이

부등식 $(1 + \log_{\frac{1}{5}} x)(a - \log_{\frac{1}{5}} x) > 0$ 의 해가 $\frac{1}{5} < x < 5$ 이므로
 방정식 $(1 + \log_{\frac{1}{5}} x)(a - \log_{\frac{1}{5}} x) = 0$ 의 해는 $x = \frac{1}{5}$ 또는 $x = 5$ 이다.
 이때 $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5} = 1$, $\log_{\frac{1}{5}} 5 = -1$ 이므로
 방정식 $(1 + \log_{\frac{1}{5}} x)(a - \log_{\frac{1}{5}} x) = 0$ 의 해는
 $\log_{\frac{1}{5}} x = -1$ 또는 $\log_{\frac{1}{5}} x = a$
 $\therefore x = 5$ 또는 $x = \left(\frac{1}{5}\right)^a$
 따라서 $\left(\frac{1}{5}\right)^a = \frac{1}{5}$ 이므로 $a = 1$

306

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠
 $x^{\log x} < 1000x^2$ 의 양변에 상용로그를 취하면
 $\log x^{\log x} < \log 1000x^2$, $(\log x)^2 < 3 + 2 \log x$
 $\therefore (\log x)^2 - 2 \log x - 3 < 0$
 $\log x = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 2t - 3 < 0$, $(t+1)(t-3) < 0$

$\therefore -1 < t < 3$
 즉, $-1 < \log x < 3$ 이므로 $\log 10^{-1} < \log x < \log 10^3$
 이때 밑이 1보다 크므로
 $\frac{1}{10} < x < 1000$ ㉡
 ㉠, ㉡에서 주어진 부등식의 해는
 $\frac{1}{10} < x < 1000$
 따라서 $a = \frac{1}{10}$, $\beta = 1000$ 이므로
 $a\beta = \frac{1}{10} \times 1000 = 100$

정답_ ㉢

307

$3^{x-1} > 2^{2x+1}$ 의 양변에 상용로그를 취하면
 $\log 3^{x-1} > \log 2^{2x+1}$
 $(x-1)\log 3 > (2x+1)\log 2$ ㉠
 $(\log 3 - 2 \log 2)x > \log 3 + \log 2$
 이때 $\log 3 < 2 \log 2$ 이므로 $\log 3 - 2 \log 2 < 0$
 ㉠의 양변을 $\log 3 - 2 \log 2$ 로 나누면
 $x < \frac{\log 3 + \log 2}{\log 3 - 2 \log 2} = \frac{0.48 + 0.3}{0.48 - 2 \times 0.3} = \frac{0.78}{-0.12} = -6.5$
 따라서 정수 x 의 최댓값은 -7 이다.

정답_ ㉠

308

부등식 $3x^2 - 2(\log_2 n)x + \log_2 n > 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2 - 2(\log_2 n)x + \log_2 n = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면
 $\frac{D}{4} = (-\log_2 n)^2 - 3 \log_2 n < 0$
 $(\log_2 n - 3)\log_2 n < 0$, $0 < \log_2 n < 3$
 $\log_2 1 < \log_2 n < \log_2 2^3$
 이때 밑이 1보다 크므로
 $1 < n < 8$
 따라서 자연수 n 은 2, 3, 4, ..., 7의 6개이다.

정답_ 6

309

$\log_3 \frac{x^3}{a} \times \log_3 \frac{x}{a} + 3 \geq 0$ 에서
 $(3 \log_3 x - \log_3 a)(\log_3 x - \log_3 a) + 3 \geq 0$
 $3(\log_3 x)^2 - 4 \log_3 a \times \log_3 x + (\log_3 a)^2 + 3 \geq 0$ ㉠
 $\log_3 x = t$ 로 놓으면
 $3t^2 - 4 \log_3 a \times t + (\log_3 a)^2 + 3 \geq 0$ ㉡
 모든 양의 실수 x 에 대하여 부등식 ㉠이 성립하므로 모든 실수 t 에 대하여 이차부등식 ㉡이 성립한다.
 이차방정식 $3t^2 - 4 \log_3 a \times t + (\log_3 a)^2 + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면
 $\frac{D}{4} = (-2 \log_3 a)^2 - 3\{(\log_3 a)^2 + 3\} \leq 0$
 $(\log_3 a)^2 - 9 \leq 0$, $(\log_3 a + 3)(\log_3 a - 3) \leq 0$
 $-3 \leq \log_3 a \leq 3$, $\log_3 3^{-3} \leq \log_3 a \leq \log_3 3^3$

이때 밑이 1보다 크므로

$$\frac{1}{27} \leq a \leq 27$$

따라서 $M=27$, $m=\frac{1}{27}$ 이므로

$$M+27m=27+27 \times \frac{1}{27}=28$$

정답_ ③

310

$x^{\log_3 x} \geq ax^4$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 x^{\log_3 x} \geq \log_3 ax^4, (\log_3 x)^2 \geq \log_3 a + \log_3 x^4$$

$$\therefore (\log_3 x)^2 - 4 \log_3 x - \log_3 a \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 4t - \log_3 a \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

모든 양의 실수 x 에 대하여 부등식 ①이 항상 성립하므로 모든 실수 t 에 대하여 이차부등식 ②이 성립한다.

이차방정식 $t^2 - 4t - \log_3 a = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - (-\log_3 a) \leq 0$$

$$\log_3 a \leq -4, \log_3 a \leq \log_3 3^{-4}$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$a \leq \frac{1}{81}$$

한편, a 는 양수이므로

$$0 < a \leq \frac{1}{81}$$

정답_ $0 < a \leq \frac{1}{81}$

311

여과기를 1개 설치하면 미세플라스틱의 $\frac{3}{4}$ 이 여과기를 통과하므로

n 개 설치하면 미세플라스틱의 $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 이 여과기를 통과한다.

전체 미세플라스틱의 양을 a 라고 하면 여과기를 n 개 설치했을 때,

전체 미세플라스틱의 $\frac{1}{100}$ 만 여과기를 통과해야 하므로

$$a \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{a}{100}, \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{100}$$

위의 식의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log \left(\frac{3}{4}\right)^n = \log \frac{1}{100}, n \log \frac{3}{4} = \log \frac{1}{100}$$

$$n(\log 3 - 2 \log 2) = -2$$

$$\therefore n = \frac{-2}{\log 3 - 2 \log 2}$$

$$= \frac{-2}{0.5 - 2 \times 0.3}$$

$$= \frac{-2}{-0.1} = 20$$

따라서 필요한 여과기의 개수는 20이다.

정답_ 20

312

태풍의 중심 기압이 900 hPa일 때

$$V_A = 4.86(1010 - 900)^{0.5} = 4.86 \times 110^{0.5}$$

태풍의 중심 기압이 960 hPa일 때

$$V_B = 4.86(1010 - 960)^{0.5} = 4.86 \times 50^{0.5}$$

$$\therefore \frac{V_A}{V_B} = \frac{4.86 \times 110^{0.5}}{4.86 \times 50^{0.5}} = 2.2^{0.5}$$

위의 식의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log \frac{V_A}{V_B} = \log 2.2^{0.5} = \frac{1}{2} \log (2 \times 1.1)$$

$$= \frac{1}{2} (\log 2 + \log 1.1)$$

$$= \frac{1}{2} (0.3010 + 0.0414)$$

$$= 0.1712$$

이때 $\log 1.483 = 0.1712$ 이므로

$$\frac{V_A}{V_B} = 1.483$$

정답_ ④

313

신호의 주파수 대역폭이 B 이고 신호잡음전력비가 a , 전송할 수 있는 신호의 최대 전송 속도를 C 라고 하면

$$C = B \times \log_2 (1 + a) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

신호의 주파수 대역폭은 B 로 일정하고 신호잡음전력비를 $33a$ 로 높였을 때, 전송할 수 있는 신호의 최대 전송 속도는 $2C$ 이므로

$$2C = B \times \log_2 (1 + 33a) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①에 ②을 대입하면

$$2B \times \log_2 (1 + a) = B \times \log_2 (1 + 33a)$$

$$\log_2 (1 + a)^2 = \log_2 (1 + 33a)$$

$$(1 + a)^2 = 1 + 33a, a^2 - 31a = 0$$

$$a(a - 31) = 0 \quad \therefore a = 31 (\because a > 0)$$

정답_ 31

314

3개월 후 노트북 A, B의 가격은 각각 $240(1 - 0.1)^n$ 만 원,

$160(1 - 0.05)^n$ 만 원이다.

3개월 후에 노트북 A를 구입할 수 있다고 하면

$$240(1 - 0.1)^n - 160(1 - 0.05)^n \leq \frac{20}{100} \times 160(1 - 0.05)^n$$

$$240 \times 0.9^n - 160 \times 0.95^n \leq 32 \times 0.95^n$$

$$240 \times 0.9^n \leq 192 \times 0.95^n$$

$$\left(\frac{0.9}{0.95}\right)^n \leq \frac{192}{240} \quad \therefore \left(\frac{0.9}{0.95}\right)^n \leq \frac{4}{5}$$

위의 부등식의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log \left(\frac{0.9}{0.95}\right)^n \leq \log \frac{4}{5}$$

$$n(\log 0.9 - \log 0.95) \leq \log 4 - \log 5$$

$$n\left(\log \frac{9}{10} - \log 0.95\right) \leq \log 2^2 - \log \frac{10}{2}$$

$$n(\log 3^2 - 1 - \log 0.95) \leq 2 \log 2 - (1 - \log 2)$$

$$n(2 \log 3 - 1 - \log 0.95) \leq 3 \log 2 - 1$$

$$n(2 \times 0.48 - 1 + 0.02) \leq 3 \times 0.30 - 1$$

$$-0.02n \leq -0.1 \quad \therefore n \geq 5$$

따라서 노트북 A를 최초로 구입할 수 있는 시기는

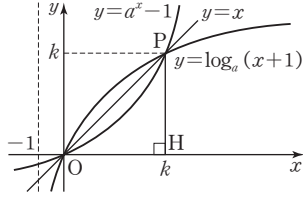
$3 \times 5 = 15$ (개월) 후이다.

정답_ ②

315

함수 $y=\log_a(x+1)$ ($a>1$)의 역함수가 $y=a^x-1$ 이므로 오른 쪽 그림과 같이 두 함수

$y=\log_a(x+1)$, $y=a^x-1$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고 점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이다.



점 P(k, k)라고 하면 점 P는 곡선 $y=\log_a(x+1)$ 위의 점이고

함수 $y=\log_a(x+1)$ 의 정의역이 $\{x|x>-1\}$ 이므로

$k>-1$

삼각형 OHP의 넓이가 8이므로

$$\frac{1}{2} \times |k| \times |k| = 8, k^2 = 16$$

$\therefore k=4$ ($\because k>-1$)

따라서 곡선 $y=a^x-1$ 이 점 P(4, 4)를 지나므로

$$4=a^4-1, a^4=5$$

$\therefore a=\sqrt[4]{5}$ ($\because a>1$)

정답 $\sqrt[4]{5}$

채점 기준	비율
① 점 P는 직선 $y=x$ 위의 점임을 알기	40%
② P(k, k)로 놓고 k 의 값의 범위 구하기	20%
③ k 의 값 구하기	20%
④ a 의 값 구하기	20%

316

$f(x)=x^2-4x+11$ 로 놓으면

$$f(x)=(x-2)^2+7$$

이므로 $f(x)$ 는 $2 \leq x \leq 5$ 에서 $x=2$ 일 때 최솟값 7, $x=5$ 일 때 최댓값 16을 갖는다.

$y=\log_a(x^2-4x+11)=\log_a f(x)$ 에서

(i) $0<a<1$ 일 때, 밑이 1보다 작으므로 주어진 함수는 $f(x)$ 가 최소일 때 최댓값을 갖고, $f(x)$ 가 최대일 때 최솟값을 갖는다.

이때 주어진 함수의 최솟값이 -2 이므로

$$\log_a 16 = -2, a^{-2} = 16$$

$$a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \frac{1}{4} \quad (\because 0 < a < 1)$$

(ii) $a>1$ 일 때, 밑이 1보다 크므로 주어진 함수는 $f(x)$ 가 최소일 때 최솟값을 갖고, $f(x)$ 가 최대일 때 최댓값을 갖는다.

이때 주어진 함수의 최솟값이 -2 이므로

$$\log_a 7 = -2, a^{-2} = 7, a^2 = \frac{1}{7}$$

그런데 $a>1$ 에서 $a^2>1$ 이어야 하므로 이것을 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{4}$

따라서 주어진 함수의 최댓값은

$$\log_{\frac{1}{4}} 7 = \log_{4^{-1}} 7 = -\log_4 7 = \log_4 7^{-1} = \log_4 \frac{1}{7}$$

이므로 $k=7$

정답 7

채점 기준	비율
① $f(x)=x^2-4x+11$ 로 놓고 $f(x)$ 의 최댓값, 최솟값 구하기	30%
② a 의 값 구하기	50%
③ k 의 값 구하기	20%

317

곡선 $y=\log_2 x$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = -\log_2(-x)$$

이 곡선을 x 축의 방향으로 $\frac{17}{4}$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -\log_2 \left\{ -\left(x - \frac{17}{4}\right) \right\} = -\log_2 \left(-x + \frac{17}{4} \right)$$

$\therefore f(x) = -\log_2 \left(-x + \frac{17}{4} \right)$

두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, β ($\alpha < \beta$)라고 하면 α, β 는 방정식

$$\log_2 x = -\log_2 \left(-x + \frac{17}{4} \right) \text{의 해이다.}$$

$$\log_2 x = -\log_2 \left(-x + \frac{17}{4} \right) \text{에서}$$

$$\log_2 x + \log_2 \left(-x + \frac{17}{4} \right) = 0, \log_2 x \left(-x + \frac{17}{4} \right) = 0$$

$$x \left(-x + \frac{17}{4} \right) = 1, 4x^2 - 17x + 4 = 0, (4x-1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{4} \text{ 또는 } x = 4$$

이때 $\alpha < \beta$ 이므로 $\alpha = \frac{1}{4}, \beta = 4$

$\therefore A\left(\frac{1}{4}, -2\right), B(4, 2)$

따라서 직선 AB의 기울기는

$$\frac{2 - (-2)}{4 - \frac{1}{4}} = \frac{16}{15}$$

이므로 $p=15, q=16$

$\therefore p+q=15+16=31$

정답 31

채점 기준	비율
① 함수 $f(x)$ 의 식 구하기	40%
② 두 점 A, B의 좌표 구하기	40%
③ $p+q$ 의 값 구하기	20%

318

밑의 조건에서 $x>0, x \neq 1, y>0, y \neq 1$

..... ①

..... ①

$$\begin{cases} \log_x 4 - \log_y 8 = 4 \\ \log_x 16 + \log_y 2 = 1 \end{cases} \text{에서}$$

$$\begin{cases} 2 \log_x 2 - 3 \log_y 2 = 4 \\ 4 \log_x 2 + \log_y 2 = 1 \end{cases}$$

$\log_x 2 = X, \log_y 2 = Y$ 로 놓으면

$$\begin{cases} 2X - 3Y = 4 \\ 4X + Y = 1 \end{cases}$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$X = \frac{1}{2}, Y = -1$$

즉, $\log_x 2 = \frac{1}{2}$, $\log_y 2 = -1$ 이므로 ②

$x^{\frac{1}{2}} = 2$, $y^{-1} = 2$ $\therefore x = 4$, $y = \frac{1}{2}$

이것은 모두 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 근이다.

따라서 $\alpha = 4$, $\beta = \frac{1}{2}$ 이므로 ③

$\alpha\beta = 4 \times \frac{1}{2} = 2$ ④

정답_ 2

채점 기준	비율
① 밑의 조건 구하기	10 %
② $\log_x 2$, $\log_y 2$ 의 값 구하기	50 %
③ α , β 의 값 구하기	30 %
④ $\alpha\beta$ 의 값 구하기	10 %

319

진수의 조건에서 $f(x) > 0$, $x + 3 > 0$ 이므로

$-6 < x < 1$, $x > -3$

$\therefore -3 < x < 1$ ㉠

..... ①

$\log_2 f(x) + \log_{\frac{1}{2}}(x+3) \geq 0$ 에서

$\log_2 f(x) - \log_2(x+3) \geq 0$

$\therefore \log_2 f(x) \geq \log_2(x+3)$

이때 밑이 1보다 크므로

$f(x) \geq x+3$

주어진 그래프에서 $f(x) \geq x+3$ 의 해는

$-7 \leq x \leq 0$ ㉡

㉠, ㉡에서 주어진 부등식의 해는

$-3 < x \leq 0$ ②

따라서 정수 x 는 -2 , -1 , 0 의 3개이다. ③

정답_ 3

채점 기준	비율
① 진수의 조건 구하기	20 %
② 주어진 부등식의 해 구하기	60 %
③ 정수 x 의 개수 구하기	20 %

320

n 년 후 A, B 두 도시의 인구는 각각 $100(1+0.03)^n$ 만 명,
 $200(1+0.02)^n$ 만 명이다.

n 년 후 A 도시의 인구가 B 도시의 인구보다 많아진다고 하면
 $100(1+0.03)^n > 200(1+0.02)^n$

$1.03^n > 2 \times 1.02^n$ ①

위의 부등식의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 1.03^n > \log(2 \times 1.02^n)$

$n \log 1.03 > \log 2 + n \log 1.02$

$n(\log 1.03 - \log 1.02) > \log 2$

$n(0.013 - 0.009) > 0.301$

$0.004n > 0.301$ $\therefore n > 75.25$ ②

따라서 A 도시의 인구가 처음으로 B 도시의 인구보다 많아지는
 것은 76년 후이다. ③

정답_ 76년 후

채점 기준	비율
① n 년 후 A 도시의 인구가 B 도시의 인구보다 많아지는 것을 식으로 나타내기	40 %
② n 의 값의 범위 구하기	40 %
③ A 도시의 인구가 처음으로 B 도시의 인구보다 많아지는 것이 몇 년 후인지 구하기	20 %

321

(i) $0 < t < 1$ 일 때, $\frac{1}{t} > 1$ 이므로

$f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right) = 3$ 에서 $0 + \log_2 \frac{1}{t} = 3$

$\frac{1}{t} = 2^3$ $\therefore t = \frac{1}{8}$

(ii) $t = 1$ 일 때, $f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right) = 0$ 이므로 $f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right) = 3$ 을 만족시키
 지 않는다.

(iii) $t > 1$ 일 때, $0 < \frac{1}{t} < 1$ 이므로

$f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right) = 3$ 에서 $\log_2 t + 0 = 3$

$t = 2^3$ $\therefore t = 8$

(i)~(iii)에서 $t = \frac{1}{8}$ 또는 $t = 8$

따라서 모든 양수 t 의 값의 합은

$\frac{1}{8} + 8 = \frac{65}{8}$

정답_ ③

322

함수 $y = \log_3(x-a)$ 의 그래프의 점근선은 직선 $x=a$ 이므로 곡선

$y = \log_3 \frac{x}{9}$ 와 직선 $x=a$ 가 만나는 점 A의 좌표는

$\left(a, \log_3 \frac{a}{9}\right)$

곡선 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 와 직선 $x=a$ 가 만나는 점 B의 좌표는

$\left(a, \log_{\frac{1}{3}} a\right)$

한편, $a > 3$ 에서 $\log_3 \frac{a}{9} > \log_3 \frac{3}{9} = -1$, $\log_{\frac{1}{3}} a < \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$ 이
 므로

$\log_3 \frac{a}{9} > \log_{\frac{1}{3}} a$

$\therefore \overline{AB} = \log_3 \frac{a}{9} - \log_{\frac{1}{3}} a$

$= (\log_3 a - 2) + \log_3 a$

$= 2 \log_3 a - 2$

이때 $\overline{AB} = 2$ 이므로

$2 \log_3 a - 2 = 2$, $\log_3 a = 2$

$\therefore a = 3^2 = 9$

정답_ ③

323

$$f(x) = \begin{cases} a(4-x^2) & (0 \leq x < 3) \\ b \log_2 \frac{x}{3} - 5a & (x \geq 3) \end{cases} \quad \text{이므로 } 0 \leq x < 3 \text{에서 함수}$$

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$a(4-x^2)=0 \text{에서 } x=2$$

이때 $A(2, 0)$ 이라고 하면 $\overline{AB}=10$ 에서 $B(12, 0)$

즉, 함수 $y=b \log_2 \frac{x}{3} - 5a$ 의 그래프가 점 $B(12, 0)$ 을 지나야 하므로

$$0=b \log_2 \frac{12}{3} - 5a, b \log_2 4=5a, 2b=5a$$

$$\therefore a=\frac{2}{5}b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, $f(b)=2b$ 이므로

(i) $0 < b < 3$ 일 때

$$a(4-b^2)=2b \text{이므로 이 식에 } \textcircled{1} \text{을 대입하면}$$

$$\frac{2}{5}b(4-b^2)=2b, 4-b^2=5 \quad (\because b>0)$$

$$b^2=-1$$

이것은 b 가 양수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $b \geq 3$ 일 때

$$b \log_2 \frac{b}{3} - 5a=2b \text{이므로 이 식에 } \textcircled{1} \text{을 대입하면}$$

$$b \log_2 \frac{b}{3} - 5 \times \frac{2}{5}b=2b, \log_2 b - \log_2 3 - 2=2 \quad (\because b \geq 3)$$

$$\log_2 b = \log_2 3 + 4, \log_2 b = \log_2 3 + \log_2 2^4 = \log_2 48$$

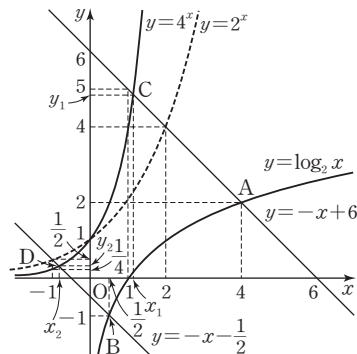
$$\therefore b=48$$

$$(i), (ii) \text{에서 } b=48 \text{이므로 } a=\frac{96}{5}$$

$$\therefore 5a+b=5 \times \frac{96}{5} + 48=144$$

정답_ 144

324



점 $A(4, 2)$ 를 지나고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y-2=-(x-4) \quad \therefore y=-x+6$$

점 $B(\frac{1}{2}, -1)$ 을 지나고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y-(-1)=-(x-\frac{1}{2}) \quad \therefore y=-x-\frac{1}{2}$$

이때 함수 $y=2^x$ 의 그래프와 직선 $y=-x+6$ 의 교점을 A' 이라고 하면 $A'(2, 4)$

한편, 함수 $y=4^x$ 의 그래프는 점 $(1, 4)$ 를 지나고 직선

$y=-x+6$ 은 점 $(1, 5)$ 를 지나므로 위의 그림에서

$$1 < x_1 < 2, 4 < y_1 < 5$$

마찬가지 방법으로

$$-1 < x_2 < -\frac{1}{2}, \frac{1}{4} < y_2 < \frac{1}{2}$$

$$\neg. 1+(-1) < x_1+x_2 < 2+(-\frac{1}{2})$$

$$\therefore 0 < x_1+x_2 < \frac{3}{2} \quad (\text{거짓})$$

$$\neg. 4 \times \frac{1}{4} < y_1 y_2 < 5 \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore 1 < y_1 y_2 < \frac{5}{2} \quad (\text{거짓})$$

$$\neg. 1-(-\frac{1}{2}) < x_1-x_2 < 2-(-1) \text{에서 } \frac{3}{2} < x_1-x_2 < 3,$$

$$4-\frac{1}{2} < y_1-y_2 < 5-\frac{1}{4} \text{에서 } \frac{7}{2} < y_1-y_2 < \frac{19}{4} \text{이므로}$$

$$\frac{7}{2} < \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} < \frac{19}{4}$$

$$\therefore \frac{7}{6} < \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} < \frac{19}{6} \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 $\neg$ 이다.

정답_ ②

325

조건 ㉑에서 점 $A(a, b)$ 가 곡선 $y=\log_2(x+2)+k$ 위에 있으므로

$$b=\log_2(a+2)+k, b-k=\log_2(a+2)$$

$$a+2=2^{b-k} \quad \therefore a=2^{b-k}-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 ㉒에서 점 $A(a, b)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 (b, a) 가 곡선 $y=4^{x+k}+2$ 위에 있으므로

$$a=4^{b+k}+2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면

$$0=4^{b+k}-2^{b-k}+4, 4^b \times 4^k - 2^b \times 2^{-k} + 4 = 0$$

$$\therefore 4^k \times (2^b)^2 - 2^{-k} \times 2^b + 4 = 0$$

$$2^b=t \quad (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$4^k t^2 - 2^{-k} t + 4 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

주어진 조건을 만족시키는 점 $A(a, b)$ 가 오직 하나 존재하므로 t 에 대한 이차방정식 $\textcircled{3}$ 의 근도 오직 하나 존재한다.

이차방정식 $\textcircled{3}$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D=(-2^{-k})^2 - 4 \times 4^k \times 4 = 0$$

$$4^{-k} - 16 \times 4^k = 0, (4 \times 4^k)^2 - 1 = 0$$

$$(4 \times 4^k + 1)(4 \times 4^k - 1) = 0$$

$$4^k > 0 \text{이므로}$$

$$4 \times 4^k - 1 = 0 \quad \therefore 4^k = \frac{1}{4} = 4^{-1} \quad (\because 4^k > 0)$$

$$\therefore k=-1$$

이것을 $\textcircled{3}$ 에 대입하면

$$\frac{1}{4}t^2 - 2t + 4 = 0, t^2 - 8t + 16 = 0$$

$$(t-4)^2 = 0 \quad \therefore t=4$$

$$\text{즉, } 2^b = 4 = 2^2 \text{이므로 } b=2$$

$$k=-1, b=2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$a=2^{2-(-1)}-2=6$$

$$\therefore a \times b = 6 \times 2 = 12$$

정답_ 12

326

진수의 조건에서 $4x > 0$, $x+3 > 0$ 이므로 $x > 0$

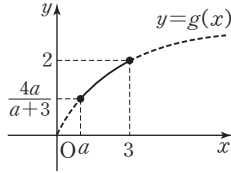
$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} 4x - \log_{\frac{1}{2}} (x+3) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{4x}{x+3} \text{에서}$$

$$g(x) = \frac{4x}{x+3} \text{로 놓으면}$$

$$g(x) = \frac{4x}{x+3} = \frac{4(x+3)-12}{x+3} = 4 - \frac{12}{x+3} \quad (\text{단, } x > 0)$$

$a \leq x \leq 3$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $g(x)$ 는

$x=a$ 일 때 최솟값 $\frac{4a}{a+3}$, $x=3$ 일 때 최댓값 2를 갖는다.



$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{4x}{x+3} = \log_{\frac{1}{2}} g(x)$ 에서 밑이 1보다 작으므로 $f(x)$ 는 $g(x)$ 가 최소일 때 최댓값을 갖고, $g(x)$ 가 최대일 때 최솟값을 갖는다.

이때 $f(x)$ 의 최댓값이 2이므로 $f(a) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{4a}{a+3} = 2$ 에서

$$\frac{4a}{a+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad 16a = a+3$$

$$15a = 3 \quad \therefore a = \frac{1}{5}$$

또, $f(x)$ 의 최솟값이 b 이므로 $f(3) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = b$ 에서

$$b = -1$$

$$\therefore a-b = \frac{1}{5} - (-1) = \frac{6}{5}$$

정답_ ②

327

$f(x) = \log_3 (x^2 - xy + y^2) - \log_3 (x^2 + xy + y^2)$ 으로 놓으면

$$f(x) = \log_3 \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$$

이때 밑이 1보다 크므로 $f(x)$ 는 $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$ 의 값이 최소일 때 최솟값을 갖는다.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} &= \frac{(x^2 + xy + y^2) - 2xy}{x^2 + xy + y^2} \\ &= 1 - \frac{2xy}{x^2 + xy + y^2} \\ &= 1 - \frac{2}{\frac{x}{y} + 1 + \frac{y}{x}} \end{aligned}$$

$xy > 0$ 에서 $\frac{x}{y} > 0$, $\frac{y}{x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \times \frac{y}{x}} = 2 \quad (\text{단, 등호는 } x=y \text{일 때 성립한다.})$$

즉, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ 이므로

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1 \geq 3, \quad 0 < \frac{2}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1} \leq \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq -\frac{2}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1} < 1$$

따라서 $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$ 의 최솟값이 $\frac{1}{3}$ 이고, $f(x)$ 의 밑이 1보다 크므로 $f(x)$ 의 최솟값은

$$\log_3 \frac{1}{3} = -1$$

정답_ ②

328

진수의 조건에서 $x-1 > 0$, $4-x > 0$, $a-x > 0$ 이므로

$$1 < x < 4 \text{이고 } x < a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log(x-1) + \log(4-x) = \log(a-x) \text{에서}$$

$$\log(x-1)(4-x) = \log(a-x)$$

$$\therefore (x-1)(4-x) = a-x$$

이때

$$f(x) = (x-1)(4-x) = -x^2 + 5x - 4$$

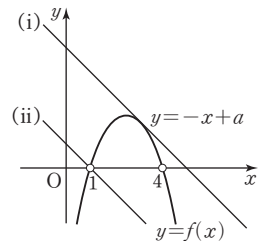
$$y = a - x = -x + a$$

로 놓으면 주어진 방정식의 실근은 함수 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -x + a$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

따라서 주어진 방정식이 적어도 한 개의 실근을 가지려면 ①의 범위에서 함수 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -x + a$ 가 적어도 한 점에 서 만나야 한다.

직선 $y = -x + a$ 의 기울기가 -1 이므로 오른쪽 그림과 같이 직선

$y = -x + a$ 가 함수 $f(x)$ 의 그래프에 접하거나 그 아래쪽에 있어야 하고, 점 $(1, 0)$ 을 지날 때보다는 위쪽에 있어야 한다.



(i) 직선 $y = -x + a$ 가 함수 $f(x)$ 의 그래프에 접할 때

$$-x^2 + 5x - 4 = -x + a \text{에서}$$

$$x^2 - 6x + 4 + a = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - (4+a) = 0$$

$$5-a=0 \quad \therefore a=5$$

(ii) 직선 $y = -x + a$ 가 점 $(1, 0)$ 을 지날 때

$$0 = -1 + a \text{이므로 } a=1$$

(i), (ii)에서 구하는 실수 a 의 값의 범위는

$$1 < a \leq 5$$

정답_ $1 < a \leq 5$

329

방정식 $(\log_5 x)^2 - 6 \log_5 x - a = 0$ 에서 $\log_5 x = t$ 로 놓으면 방정식 $t^2 - 6t - a = 0$ 의 두 실근은 $\log_5 \alpha$, $\log_5 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_5 \alpha + \log_5 \beta = 6 \quad \therefore \log_5 \alpha\beta = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_5 \alpha \times \log_5 \beta = -a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

방정식 $(\log_5 x)^2 + b \log_5 x - 9 = 0$ 에서 방정식 $t^2 + bt - 9 = 0$ 의 두 실근은 $\log_5 \frac{25}{\alpha}$, $\log_5 \frac{25}{\beta}$, 즉 $2 - \log_5 \alpha$, $2 - \log_5 \beta$ 이므로 이차방

정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(2 - \log_5 \alpha) + (2 - \log_5 \beta) = -b \text{이므로}$$

$$4 - \log_5 a\beta = -b, 4 - 6 = -b \quad (\because \textcircled{7})$$

$$\therefore b = 2$$

$$\text{또, } (2 - \log_5 a) \times (2 - \log_5 \beta) = -9 \text{ 이므로}$$

$$4 - 2(\log_5 a + \log_5 \beta) + \log_5 a \times \log_5 \beta = -9$$

$$4 - 2 \log_5 a\beta + \log_5 a \times \log_5 \beta = -9$$

$$4 - 2 \times 6 - a = -9 \quad (\because \textcircled{7}, \textcircled{8})$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore a + b = 1 + 2 = 3$$

정답_ ⑤

330

진수의 조건에서 $x > 0, y > 0, xy > 0$

$$\therefore x > 0, y > 0$$

$$\log_2 x + \log_2 y = (\log_2 xy)^2 \text{에서}$$

$$\log_2 xy = (\log_2 xy)^2, \log_2 xy(\log_2 xy - 1) = 0$$

$$\therefore \log_2 xy = 0 \text{ 또는 } \log_2 xy = 1$$

즉, $xy = 1$ 또는 $xy = 2$ 이므로

$$y = \frac{1}{x} \text{ 또는 } y = \frac{2}{x}$$

주어진 연립방정식의 해는 $x > 0,$

$y > 0$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 25$ 와 곡선

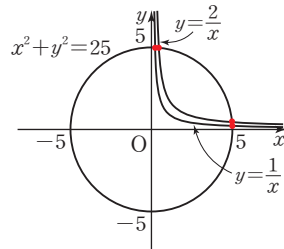
$y = \frac{1}{x}$ 또는 $y = \frac{2}{x}$ 의 교점의 x 좌

표, y 좌표와 같다.

따라서 오른쪽 그림에 의하여 구

하는 해의 순서쌍 (x, y) 의 개수

는 4이다.



정답_ ④

331

$\log_3 |x - a| < 1$ 의 진수의 조건에서

$$x \neq a$$

$$A = \{x | \log_3 |x - a| < 1\}$$

$$= \{x | 0 < |x - a| < 3\}$$

$$= \{x | a - 3 < x < a \text{ 또는 } a < x < a + 3\}$$

또, $\log_{\frac{9}{a}} (2x + 20) < \log_{\frac{9}{a}} (x^2 + 5)$ 의 밑의 조건에서 $\frac{9}{a} > 0,$

$$\frac{9}{a} \neq 1 \text{ 이므로}$$

$$a > 0, a \neq 9$$

진수의 조건에서 $2x + 20 > 0, x^2 + 5 > 0$ 이므로

$$x > -10$$

..... ⑦

(i) 밑이 1보다 작을 때, 즉 $a > 9$ 일 때

$$\log_{\frac{9}{a}} (2x + 20) < \log_{\frac{9}{a}} (x^2 + 5) \text{에서}$$

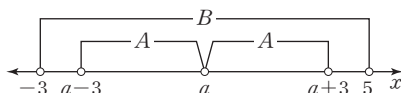
$$2x + 20 > x^2 + 5, x^2 - 2x - 15 < 0$$

$$(x + 3)(x - 5) < 0 \quad \therefore -3 < x < 5$$

..... ⑧

⑦, ⑧의 공통부분을 구하면 $-3 < x < 5$

즉, $B = \{x | -3 < x < 5\}$ 이므로 $A \subset B$ 이려면 다음 그림과 같아야 한다.



$$\text{즉, } -3 \geq -3, a + 3 \leq 5 \text{ 이므로 } 0 \leq a \leq 2$$

그런데 이것은 $a > 9$ 라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 밑이 1보다 클 때, 즉 $0 < a < 9$ 일 때

$$\log_{\frac{9}{a}} (2x + 20) < \log_{\frac{9}{a}} (x^2 + 5) \text{에서}$$

$$2x + 20 < x^2 + 5, x^2 - 2x - 15 > 0$$

$$(x + 3)(x - 5) > 0 \quad \therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 5 \quad \text{..... ⑨}$$

⑦, ⑨의 공통부분을 구하면 $-10 < x < -3$ 또는 $x > 5$

$$\therefore B = \{x | -10 < x < -3 \text{ 또는 } x > 5\}$$

$0 < a < 9$, 즉, $a - 3 > -3$ 이므로 $A \subset B$ 이려면 다음 그림과 같아야 한다.



$$\text{즉, } a - 3 \geq 5 \text{ 이므로 } a \geq 8$$

$$\text{이때 } 0 < a < 9 \text{ 이므로 } 8 \leq a < 9$$

(i), (ii)에서 $8 \leq a < 9$ 이므로 a 의 최솟값은 8이다.

정답_ 8

332

함수 $f(x)$ 와 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 교점은 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 의 교점이다.

즉, 두 점 A, B는 직선 $y = x$ 위에 있으므로 $A(t, t), B(s, s)$ ($t < s$)로 놓으면 $\overline{AB} = \sqrt{2}n$ 에서

$$\sqrt{(s-t)^2 + (s-t)^2} = \sqrt{2}n, |s-t|\sqrt{2} = \sqrt{2}n$$

$$\therefore |s-t| = n$$

이때 $t < s$ 이므로

$$s - t = n \quad \therefore s = t + n$$

따라서 $x = t, x = t + n$ 은 방정식 $\log_2 (x + k) = x$ 의 두 실근이므로

$$\log_2 (t + k) = t \quad \text{..... ①}$$

$$\log_2 (t + n + k) = t + n \quad \text{..... ②}$$

② - ①을 하면

$$\log_2 (t + n + k) - \log_2 (t + k) = n, \log_2 \frac{t + n + k}{t + k} = n$$

$$\log_2 \left(1 + \frac{n}{t + k} \right) = n, 1 + \frac{n}{t + k} = 2^n, \frac{n}{t + k} = 2^n - 1$$

$$\therefore t + k = \frac{n}{2^n - 1} \quad \text{..... ③}$$

③을 ①에 대입하면

$$t = \log_2 \frac{n}{2^n - 1}$$

따라서 $g(n) = \log_2 \frac{n}{2^n - 1}$ 이므로

$$g(n) - g(2n) = \log_2 \frac{n}{2^n - 1} - \log_2 \frac{2n}{2^{2n} - 1}$$

$$= \log_2 \frac{n}{2^n - 1} - \log_2 \frac{2n}{(2^n + 1)(2^n - 1)}$$

$$= \log_2 \frac{\frac{n}{2^n - 1}}{\frac{2n}{(2^n + 1)(2^n - 1)}}$$

$$= \log_2 \frac{2^n + 1}{2}$$

이때 $g(n) - g(2n) > 8$ 이므로

$$\log_2 \frac{2^n+1}{2} > 8 \text{에서 } \log_2 \frac{2^n+1}{2} > \log_2 2^8$$

이때 밑이 1보다 크므로 $\frac{2^n+1}{2} > 2^8$

즉, $2^n > 2^9 - 1$ 이므로 자연수 n 의 최솟값은 9이다.

정답_ ②

333

$x > 2$ 일 때, 부등식 $2^{x+6} < (x-2)^6$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 2^{x+6} < \log_2 (x-2)^6, x+6 < 2 \log_2 (x-2)^3$$

$$\frac{x+6}{2} < \log_2 (x-2)^3, \frac{x+6}{2} - 2 < \log_2 (x-2)^3 - 2$$

$$\frac{x+2}{2} < \log_2 (x-2)^3 - \log_2 2^2$$

$$\therefore \frac{x+2}{2} < \log_2 \frac{(x-2)^3}{4}$$

$x-2=t$ 로 놓으면

$$\frac{t+4}{2} < \log_2 \frac{t^3}{4} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

주어진 그래프에서 부등식 ⑦의 해가 $4 < t < 16$ 이므로

$$4 < x-2 < 16 \quad \therefore 6 < x < 18$$

따라서 $\alpha=6, \beta=18$ 이므로

$$\alpha+\beta=6+18=24$$

정답_ ④

334

올해의 이 도시의 전체 예산을 A , 재난 안전 예산을 B 라고 하면

$$B = \frac{4}{100}A$$

n 년 후의 전체 예산은

$$\left(1 + \frac{12}{100}\right)^n A = 1.12^n A$$

n 년 후의 재난 안전 예산은

$$\left(1 + \frac{20}{100}\right)^n B = 1.2^n B$$

n 년 후 전체 예산에서 재난 안전 예산이 차지하는 비율이 6% 이상이 된다고 하면

$$\frac{1.2^n B}{1.12^n A} \geq \frac{6}{100}, \frac{1.2^n \times \frac{4}{100} A}{1.12^n \times A} \geq \frac{6}{100}$$

$$\therefore \left(\frac{1.2}{1.12}\right)^n \geq \frac{3}{2}$$

위의 식의 양변에 상용로그를 취하면

$$n \log \frac{1.2}{1.12} \geq \log \frac{3}{2}$$

$$n(\log 1.2 - \log 1.12) \geq \log 3 - \log 2$$

$$n(0.0792 - 0.0492) \geq 0.4771 - 0.3010$$

$$0.03n \geq 0.1761$$

$$\therefore n \geq 5.87$$

따라서 올해를 기준으로 6년 후 처음으로 전체 예산에서 재난 안전 예산이 차지하는 비율이 6% 이상이 된다.

정답_ ②

II ❖ 삼각함수

05 삼각함수

335

$$\textcircled{1} 1090^\circ = 360^\circ \times 3 + 10^\circ \quad \therefore \alpha = 10$$

$$\textcircled{2} 400^\circ = 360^\circ \times 1 + 40^\circ \quad \therefore \alpha = 40$$

$$\textcircled{3} 125^\circ = 360^\circ \times 0 + 125^\circ \quad \therefore \alpha = 125$$

$$\textcircled{4} -40^\circ = 360^\circ \times (-1) + 320^\circ \quad \therefore \alpha = 320$$

$$\textcircled{5} -520^\circ = 360^\circ \times (-2) + 200^\circ \quad \therefore \alpha = 200$$

따라서 α 의 값이 가장 큰 것은 ④이다.

정답_ ④

336

$$\textcircled{1} -1030^\circ = 360^\circ \times (-3) + 50^\circ$$

$$\textcircled{2} -210^\circ = 360^\circ \times (-1) + 150^\circ$$

$$\textcircled{3} 410^\circ = 360^\circ \times 1 + 50^\circ$$

$$\textcircled{4} 770^\circ = 360^\circ \times 2 + 50^\circ$$

$$\textcircled{5} 1130^\circ = 360^\circ \times 3 + 50^\circ$$

따라서 동경 OP가 나타낼 수 없는 각은 ②이다.

정답_ ②

337

$$390^\circ = 360^\circ \times 1 + 30^\circ$$

$$\neg. 750^\circ = 360^\circ \times 2 + 30^\circ$$

$$\neg. 690^\circ = 360^\circ \times 1 + 330^\circ$$

$$\neg. 1410^\circ = 360^\circ \times 3 + 330^\circ$$

$$\neg. -330^\circ = 360^\circ \times (-1) + 30^\circ$$

$$\neg. -390^\circ = 360^\circ \times (-2) + 330^\circ$$

따라서 390° 를 나타내는 동경과 일치하지 않는 것은 $\neg, \neg, \neg$ 의 3개이다.

정답_ ③

338

$$\textcircled{1} 670^\circ = 360^\circ \times 1 + 310^\circ \text{이므로 제4사분면의 각이다.}$$

$$\textcircled{2} 315^\circ \text{는 제4사분면의 각이다.}$$

$$\textcircled{3} 280^\circ \text{는 제4사분면의 각이다.}$$

$$\textcircled{4} 420^\circ = 360^\circ \times 1 + 60^\circ \text{이므로 제1사분면의 각이다.}$$

$$\textcircled{5} -60^\circ = 360^\circ \times (-1) + 300^\circ \text{이므로 제4사분면의 각이다.}$$

따라서 제4사분면의 각이 아닌 것은 ④이다.

정답_ ④

339

θ 가 제3사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수이다.})$$

$$\therefore 120^\circ \times n + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n + 90^\circ$$

(i) $n=3k$ (k 는 정수)일 때

$$120^\circ \times 3k + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times 3k + 90^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 90^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때

$$120^\circ \times (3k+1) + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times (3k+1) + 90^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 180^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 210^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때

$$120^\circ \times (3k+2) + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times (3k+2) + 90^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 300^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 330^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각이다.

(i)~(iii)에서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제2사분면이다.

정답_ 제2사분면

340

θ 가 제2사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수이다.})$$

$$\therefore 180^\circ \times n + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 90^\circ$$

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때

$$180^\circ \times 2k + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times 2k + 90^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 90^\circ$$

(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때

$$180^\circ \times (2k+1) + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times (2k+1) + 90^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 225^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 270^\circ$$

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 모든 영역을 좌표평면 위에 나타낸 것은 ④이다.

정답_ ④

341

$$\textcircled{1} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 60^\circ$$

$$\textcircled{2} 36^\circ = 36 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$$

$$\textcircled{3} 110^\circ = 110 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11}{18}\pi$$

$$\textcircled{4} 195^\circ = 195 \times \frac{\pi}{180} = \frac{13}{12}\pi$$

$$\textcircled{5} \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 270^\circ$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

정답_ ③

342

$$\neg. 280^\circ = 280 \times \frac{\pi}{180} = \frac{14}{9}\pi \quad (\text{거짓})$$

$$\neg. \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{90^\circ}{\pi} \quad (\text{거짓})$$

$$\neg. -500^\circ = 360^\circ \times (-2) + 220^\circ \text{이므로 제3사분면의 각이다. (참)}$$

$$\neg. -\frac{5}{4}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{3}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi = 2\pi + \frac{3}{4}\pi \text{이므로 } -\frac{5}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi,$$

$$\frac{11}{4}\pi \text{를 나타내는 동경은 모두 일치한다. (참)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

정답_ ⑤

343

$$\textcircled{1} 380^\circ = 360^\circ \times 1 + 20^\circ \text{이므로 동경이 제1사분면에 존재한다.}$$

$$\textcircled{2} 780^\circ = 360^\circ \times 2 + 60^\circ \text{이므로 동경이 제1사분면에 존재한다.}$$

$$\textcircled{3} -\frac{16}{3}\pi = 2\pi \times (-3) + \frac{2}{3}\pi \text{이므로 동경이 제2사분면에 존재한다.}$$

$$\textcircled{4} -\frac{18}{5}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{2}{5}\pi \text{이므로 동경이 제1사분면에 존재한다.}$$

$$\textcircled{5} \frac{9}{4}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{\pi}{4} \text{이므로 동경이 제1사분면에 존재한다.}$$

따라서 동경이 존재하는 사분면이 나머지 넷과 다른 것은 ③이다.

정답_ ③

344

각 α 를 나타내는 동경과 각 β 를 나타내는 동경이 일치하면

$$\alpha - \beta = 360^\circ \times n \quad (\text{단, } n \text{은 정수이다.})$$

따라서 $\alpha - \beta$ 의 값이 될 수 없는 것은 ②이다.

정답_ ②

345

오른쪽 그림과 같이 각 θ 를 나타내는 동경

과 각 4θ 를 나타내는 동경이 일치하므로

$$4\theta - \theta = 2n\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수이다.})$$

$$3\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n}{3}\pi \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

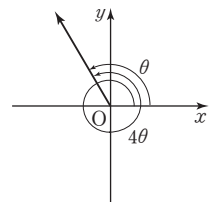
$$0 < \theta < \pi \text{에서 } 0 < \frac{2n}{3}\pi < \pi \text{이므로}$$

$$0 < n < \frac{3}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=1$

$$\text{이 값을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \theta = \frac{2}{3}\pi$$

정답_ $\frac{2}{3}\pi$



346

오른쪽 그림과 같이 각 θ 를 나타내는 동경

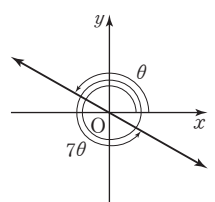
과 각 7θ 를 나타내는 동경이 일치선 위에

있고 방향이 반대이므로

$$7\theta - \theta = 2n\pi + \pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수이다.})$$

$$6\theta = (2n+1)\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{2n+1}{6}\pi \quad \dots\dots \textcircled{1}$$



$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{에서 } \frac{\pi}{2} < \frac{2n+1}{6}\pi < \pi, 3 < 2n+1 < 6$$

$$\therefore 1 < n < \frac{5}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=2$

이 값을 ㉠에 대입하면 $\theta = \frac{5}{6}\pi$

$$\therefore \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

정답_ 1

347

오른쪽 그림과 같이 각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로 두 동경은 일직선 위에 있고 방향이 반대이다. 즉,

$$5\theta - \theta = 2n\pi + \pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수이다.})$$

$$4\theta = (2n+1)\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{2n+1}{4}\pi$$

$$0 < \theta < 2\pi \text{에서 } 0 < \frac{2n+1}{4}\pi < 2\pi \text{이므로}$$

$$0 < 2n+1 < 8 \quad \therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{7}{2}$$

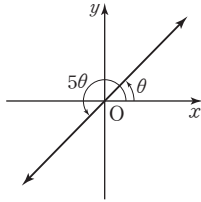
이때 n 은 정수이므로 $n=0, 1, 2, 3$

이 값을 ㉠에 대입하면 $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

따라서 모든 θ 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi = 4\pi$$

정답_ 4π



..... ㉠

348

오른쪽 그림과 같이 각 θ 를 나타내는 동경과 각 2θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 2\theta = 2n\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수이다.})$$

$$3\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n}{3}\pi \quad \text{..... ㉠}$$

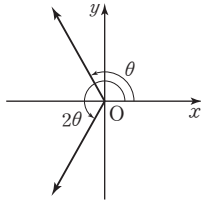
$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{에서 } \frac{\pi}{2} < \frac{2n}{3}\pi < \pi$$

$$\therefore \frac{3}{4} < n < \frac{3}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=1$

이 값을 ㉠에 대입하면 $\theta = \frac{2}{3}\pi$

정답_ ①

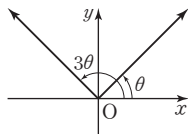


349

오른쪽 그림과 같이 각 θ 를 나타내는 동경과 각 3θ 를 나타내는 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 3\theta = 2n\pi + \pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수이다.})$$

$$4\theta = (2n+1)\pi$$



$$\therefore \theta = \frac{2n+1}{4}\pi$$

..... ㉠

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } 0 < \frac{2n+1}{4}\pi < \frac{\pi}{2}, 0 < 2n+1 < 2$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{1}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0$

이 값을 ㉠에 대입하면 $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore \cos \theta = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

정답_ ②

350

오른쪽 그림과 같이 각 θ 를 나타내는 동경과 각 6θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 6\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\text{단, } n \text{은 정수이다.})$$

$$7\theta = \frac{4n+1}{2}\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{4n+1}{14}\pi$$

..... ㉠

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } 0 < \frac{4n+1}{14}\pi < \frac{\pi}{2}, 0 < 4n+1 < 7$$

$$\therefore -\frac{1}{4} < n < \frac{3}{2}$$

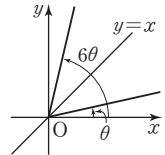
이때 n 은 정수이므로 $n=0, 1$

이 값을 ㉠에 대입하면 $\theta = \frac{\pi}{14}, \frac{5}{14}\pi$

따라서 모든 θ 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{14} + \frac{5}{14}\pi = \frac{3}{7}\pi$$

정답_ $\frac{3}{7}\pi$



351

반지름의 길이가 4, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 인 부채꼴의 호의 길이는

$$4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$$

정답_ ④

352

부채꼴의 호의 길이를 l 이라고 하면

$$3\pi = \frac{1}{2} \times 3 \times l$$

$$\therefore l = 2\pi$$

정답_ 2π

[다른 풀이]

부채꼴의 중심각의 크기를 θ , 호의 길이를 l 이라고 하면

$$3\pi = \frac{1}{2} \times 3^2 \times \theta \text{에서 } \theta = \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore l = 3 \times \frac{2}{3}\pi = 2\pi$$

353

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라고 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 $20+2\pi$ 이므로

$$2r + r \times \frac{\pi}{5} = 20 + 2\pi, (10 + \pi)r = 100 + 10\pi$$

$$\therefore r = 10$$

따라서 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 10^2 \times \frac{\pi}{5} = 10\pi$$

정답_ ①

354

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라고 하면 둘레의 길이가 12이므로

$$2r + l = 12 \quad \therefore l = 12 - 2r$$

이때 $r > 0$, $12 - 2r > 0$ 이므로

$$0 < r < 6$$

부채꼴의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(12 - 2r)$$

$$= -r^2 + 6r$$

$$= -(r - 3)^2 + 9$$

따라서 $r = 3$ 일 때 S 는 최댓값 9를 가지므로 넓이가 최대일 때 부채꼴의 반지름의 길이는 3이다.

정답_ ①

355

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라고 하면 둘레의 길이가 20이므로

$$2r + l = 20 \quad \therefore l = 20 - 2r$$

이때 $r > 0$, $20 - 2r > 0$ 이므로

$$0 < r < 10$$

부채꼴의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(20 - 2r)$$

$$= -r^2 + 10r$$

$$= -(r - 5)^2 + 25$$

따라서 $r = 5$ 일 때 S 는 최댓값 25를 가지므로 부채꼴의 넓이의 최댓값은 25이다.

이때 중심각의 크기를 θ 라고 하면

$$\frac{1}{2} \times 5^2 \times \theta = 25 \quad \therefore \theta = 2$$

정답_ ③

356

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라고 하면 넓이가 100이므로

$$\frac{1}{2}rl = 100 \quad \therefore l = \frac{200}{r}$$

따라서 부채꼴의 둘레의 길이는

$$2r + l = 2r + \frac{200}{r}$$

이때 $2r > 0$, $\frac{200}{r} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2r + \frac{200}{r} \geq 2\sqrt{2r \times \frac{200}{r}} = 2 \times 20 = 40$$

(단, 등호는 $2r = \frac{200}{r}$, 즉 $r = 10$ 일 때 성립한다.)

따라서 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값은 40이다.

정답_ 40

357

두 부채꼴의 중심각의 크기는 같으므로 중심각의 크기를 θ 라고 하면 색칠한 부분의 둘레의 길이가 36이므로

$$r_1\theta + r_2\theta + 2(r_1 - r_2) = 36$$

$$\therefore (r_1 + r_2)\theta = 36 - 2(r_1 - r_2)$$

색칠한 부분의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2}r_1^2\theta - \frac{1}{2}r_2^2\theta = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2)\theta$$

$$= \frac{1}{2}(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)\theta$$

$$= \frac{1}{2}(r_1 - r_2)\{36 - 2(r_1 - r_2)\} \quad (\because \text{㉞})$$

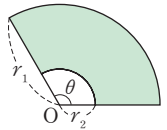
$r_1 - r_2 = X$ 로 놓으면

$$S = \frac{1}{2}X(36 - 2X) = -X^2 + 18X$$

$$= -(X - 9)^2 + 81$$

따라서 $X = 9$, 즉 $r_1 - r_2 = 9$ 일 때 S 는 최댓값 81을 가지므로 색칠한 부분의 넓이의 최댓값은 81이다.

정답_ ④



..... ㉞

358

그림을 그릴 수 있는 종이의 넓이는 부채꼴 OCD의 넓이에서 부채꼴 OAB의 넓이를 빼면 되므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 20^2 \times \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2} \times 8^2 \times \frac{3}{4}\pi &= 150\pi - 24\pi \\ &= 126\pi \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

정답_ $126\pi \text{ cm}^2$

359

주어진 조건을 이용하여 전개도를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

옆면인 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$$2\pi \times 2 = 4\pi$$

따라서 옆면인 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4\pi = 6\pi$$

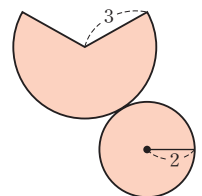
이므로 원뿔의 겉넓이는

(옆면인 부채꼴의 넓이) + (밑면인 원의 넓이)

$$= 6\pi + \pi \times 2^2 = 6\pi + 4\pi$$

$$= 10\pi$$

정답_ ③



360

부채꼴의 반지름의 길이를 r ($r > 0$)라고 하면 점 P는 선분 OA를 3:1로 내분하는 점이므로

$$\overline{OP} = \frac{3}{4}r$$

점 Q는 선분 OB를 1:2로 내분하는 점이므로

$$\overline{OQ} = \frac{1}{3}r$$

이때 삼각형 OPQ의 넓이가 $4\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}r \times \frac{1}{3}r \times \sin \frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{16}r^2 = 4\sqrt{3}, r^2 = 64$$

$$\therefore r = 8$$

따라서 호 AB의 길이는

$$8 \times \frac{\pi}{3} = \frac{8}{3}\pi$$

정답_ ④

참고 삼각형의 넓이

삼각형 ABC에서 두 변의 길이 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 와 그 끼인각 $\angle B$ 의 크기를 알 때, 삼각형 ABC의 넓이 S는

$$(1) \angle B \text{가 예각일 때} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin B$$

$$(2) \angle B \text{가 둔각일 때} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin (180^\circ - B)$$

361

부채꼴의 반지름의 길이를 r cm라고 하면 호의 길이가 6π cm, 넓이가 15π cm²이므로

$$\frac{1}{2} \times r \times 6\pi = 15\pi \quad \therefore r = 5$$

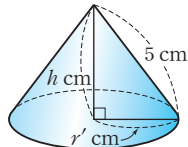
오른쪽 그림과 같이 주어진 부채꼴이 옆면인 원뿔의 높이를 h cm, 밑면인 원의 반지름의 길이를 r' cm라고 하면 밑면인 원의 둘레의 길이는 부채꼴의 호의 길이와 같으므로

$$2\pi r' = 6\pi \quad \therefore r' = 3$$

$$\therefore h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

따라서 원뿔의 부피는

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$



정답_ ②

362

오른쪽 그림과 같이 원점 O와

점 P(2, -1)을 지나는 동경 OP를 나타내면

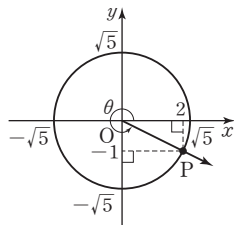
$$\overline{OP} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

이므로

$$\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan \theta = -\frac{1}{2}$$



$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{5} \sin \theta + \sqrt{5} \cos \theta - 4 \tan \theta \\ = \sqrt{5} \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ = -1 + 2 + 2 = 3 \end{aligned}$$

정답_ ②

363

$$\overline{OP} = \sqrt{(-1)^2 + (-a)^2} = \sqrt{1+a^2} \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{1+a^2}} = -\frac{2}{3}, 2\sqrt{1+a^2} = 3$$

$$4(1+a^2) = 9, a^2 = \frac{5}{4}$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{5}}{2} (\because a > 0)$$

정답_ ⑤

364

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로 오른쪽 그림과 같이

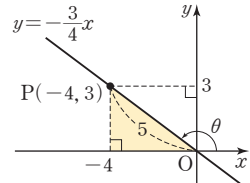
점 P의 좌표를 $(-4, 3)$ 으로 놓으면

$$\overline{OP} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

$$\text{따라서 } \sin \theta = \frac{3}{5}, \cos \theta = -\frac{4}{5},$$

$$\tan \theta = -\frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} 5 \sin \theta + 5 \cos \theta - 4 \tan \theta &= 5 \times \frac{3}{5} + 5 \times \left(-\frac{4}{5}\right) - 4 \times \left(-\frac{3}{4}\right) \\ &= 3 - 4 + 3 = 2 \end{aligned}$$



정답_ ③

365

$x^2 + y^2 = 13$ 에 $x = -3$ 을 대입하면

$$(-3)^2 + y^2 = 13, y^2 = 4$$

$$\therefore y = -2 \text{ 또는 } y = 2$$

점 A는 제2사분면 위의 점이므로 $A(-3, 2)$ 이고

$$\overline{OA} = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13} \text{이므로}$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}, \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

또, 점 B는 제3사분면 위의 점이므로 $B(-3, -2)$ 이고

$$\overline{OB} = \sqrt{13} \text{이므로}$$

$$\sin \beta = -\frac{2}{\sqrt{13}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \cos \beta = -\frac{3}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\therefore \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\sqrt{13}}{13} \times \left(-\frac{3\sqrt{13}}{13}\right) - \left(-\frac{3\sqrt{13}}{13}\right) \times \left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right) \\ &= -\frac{6}{13} - \frac{6}{13} = -\frac{12}{13} \end{aligned}$$

정답_ $-\frac{12}{13}$

366

θ 가 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

$$\textcircled{1} \sin \theta > 0$$

② $\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$ 이므로 $\cos \theta \tan \theta > 0$

③ $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$ 이므로 $\sin \theta \cos \theta < 0$

④ $\sin \theta > 0, \tan \theta < 0$ 이므로 $\frac{\sin \theta}{\tan \theta} < 0$

⑤ $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$ 이므로 $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} < 0$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

367

$\sin \theta \cos \theta > 0$ 이므로

$\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ 또는 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$

즉, θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이므로 항상 옳은 것은 ④이다.

정답_ ④

368

(i) $\sin \theta \tan \theta < 0$ 에서 $\sin \theta$ 와 $\tan \theta$ 의 부호가 서로 다르므로 θ 는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\cos \theta \tan \theta < 0$ 에서 $\cos \theta$ 와 $\tan \theta$ 의 부호가 서로 다르므로 θ 는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제3사분면의 각이므로 주어진 조건을 만족시키는 θ 의 크기가 될 수 있는 것은 $\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{6}\pi$ 의 2개이다.

정답_ ②

369

$$\frac{\sqrt{\cos \theta}}{\sqrt{\tan \theta}} = -\sqrt{\frac{\cos \theta}{\tan \theta}}, \sin \theta \neq 0 \text{이므로}$$

$$\cos \theta > 0, \tan \theta < 0$$

따라서 θ 는 제4사분면의 각이다.

① $\sin \theta < 0$

② $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta \cos \theta < 0$$

③ $\tan \theta < 0, \sin \theta < 0$ 이므로

$$\frac{\tan \theta}{\sin \theta} > 0$$

④ $\cos \theta > 0, \sin \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta - \sin \theta > 0$$

⑤ $\sin \theta < 0, \tan \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta + \tan \theta < 0$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

370

θ 가 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

$$\therefore \tan \theta - \sin \theta < 0, \tan \theta + \cos \theta < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore |\sin \theta| - \sqrt{\cos^2 \theta} - \sqrt{(\tan \theta - \sin \theta)^2} + |\tan \theta + \cos \theta| \\ = |\sin \theta| - |\cos \theta| - |\tan \theta - \sin \theta| + |\tan \theta + \cos \theta| \\ = \sin \theta - (-\cos \theta) - \{-(\tan \theta - \sin \theta)\} - (\tan \theta + \cos \theta) \\ = \sin \theta + \cos \theta + \tan \theta - \sin \theta - \tan \theta - \cos \theta \\ = 0 \end{aligned}$$

정답_ ①

371

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \theta + 1}{\sin \theta} \times \frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta} \times \frac{\sin \theta - 1}{\sin \theta} \times \frac{\cos \theta - 1}{\cos \theta} \\ &= \left(\frac{\sin \theta + 1}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta - 1}{\sin \theta} \right) \times \left(\frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta} \times \frac{\cos \theta - 1}{\cos \theta} \right) \\ &= \frac{\sin^2 \theta - 1}{\sin^2 \theta} \times \frac{\cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{-\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \times \frac{-\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

정답_ 1

372

$$\begin{aligned} & \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} - \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta} - \frac{1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\ &= \frac{(\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta)^2} - \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \\ &= \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} - \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \\ &= 0 \end{aligned}$$

정답_ ②

373

$$\begin{aligned} \neg. \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} &= \frac{(1 + \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{1 + 2 \sin \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{2(1 + \sin \theta)}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{2}{\cos \theta} \text{ (거짓)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. (1 + \tan^2 \theta) \left(1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) (1 - \sin^2 \theta) (1 - \cos^2 \theta) \\ = \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) \left(1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) (1 - \sin^2 \theta) (1 - \cos^2 \theta) \\ = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \times \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \times \cos^2 \theta \times \sin^2 \theta \\ = \frac{1}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{\sin^2 \theta} \times \cos^2 \theta \times \sin^2 \theta \\ = 1 \text{ (참)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \tan^2 \theta - \sin^2 \theta &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \sin^2 \theta \\ &= \frac{\sin^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \times \sin^2 \theta \\ &= \tan^2 \theta \sin^2 \theta \text{ (참)} \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

정답_ ④

374

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta} + \sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta} \\
 &= \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta} \\
 & \quad + \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta} \\
 &= \sqrt{(\sin\theta + \cos\theta)^2} + \sqrt{(\sin\theta - \cos\theta)^2} \\
 &= |\sin\theta + \cos\theta| + |\sin\theta - \cos\theta| \\
 &= -(\sin\theta + \cos\theta) + (\sin\theta - \cos\theta) \quad (\because \cos\theta < \sin\theta < 0) \\
 &= -2\cos\theta
 \end{aligned}$$

정답_ ①

375

$$\begin{aligned}
 & \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \text{에서} \\
 & \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)^2 = \frac{4}{7} \\
 & \text{이때 } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{이므로} \\
 & \cos\theta = -\frac{2\sqrt{7}}{7} \\
 & \therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{7}}{-\frac{2\sqrt{7}}{7}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

정답_ ①

376

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{1+\cos\theta} + \frac{1}{1-\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta+1+\cos\theta}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} \\
 & \quad = \frac{2}{1-\cos^2\theta} = \frac{2}{\sin^2\theta} \\
 & \text{즉, } \frac{2}{\sin^2\theta} = \frac{9}{4} \text{이므로} \\
 & \sin^2\theta = \frac{8}{9} \quad \dots\dots \text{㉠} \\
 & \text{한편, } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \text{이므로} \\
 & \frac{8}{9} + \cos^2\theta = 1 \quad \therefore \cos^2\theta = \frac{1}{9} \quad \dots\dots \text{㉡} \\
 & \text{이때 } \theta \text{는 제3사분면의 각이므로 ㉠, ㉡에서} \\
 & \sin\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos\theta = -\frac{1}{3} \\
 & \therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2} \\
 & \therefore \tan^2\theta - \frac{1}{\cos\theta} = (2\sqrt{2})^2 - \frac{1}{-\frac{1}{3}} \\
 & \quad = 8 + 3 = 11
 \end{aligned}$$

정답_ 11

377

$$\begin{aligned}
 & \sin\theta\sqrt{\tan^2\theta+1} = \sin\theta\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1} \\
 & \quad = \sin\theta\sqrt{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}} \\
 & \quad = \sin\theta\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}} = \sin\theta \times \frac{1}{|\cos\theta|} \\
 & \quad = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad (\because \cos\theta > 0)
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\cos\theta = 2\sin\theta$$

..... ㉠

한편, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 이므로 이 식에 ㉠을 대입하면

$$\sin^2\theta + (2\sin\theta)^2 = 1, \sin^2\theta = \frac{1}{5}$$

$$\text{이때 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{이 값을 ㉠에 대입하면 } \cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{5}$$

정답_ ③

378

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \text{에서}$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$(i) \sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{일 때}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\sqrt{2}$$

이때 $\sin\theta + \tan\theta = \frac{\sqrt{6}}{3} - \sqrt{2} < 0$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$$(ii) \sin\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3} \text{일 때}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{\sqrt{6}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{2}$$

이때 $\sin\theta + \tan\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2} > 0$ 이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

$$(i), (ii) \text{에서 } \sin\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}, \tan\theta = \sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2}\tan\theta - \sqrt{6}\sin\theta &= \sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{6} \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \\
 &= 2 + 2 = 4
 \end{aligned}$$

정답_ ②

379

$$(1) \sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{2}$$

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}, 2\sin\theta\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta = -\frac{1}{4}$$

$$(2) (\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$$

$$= 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} \quad (\because (1))$$

θ 가 제2사분면의 각이므로

$$\sin\theta > 0, \cos\theta < 0$$

따라서 $\sin \theta - \cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

정답_ (1) $-\frac{1}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

380

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}, \quad 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} \therefore (2 \sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta + 2 \cos \theta) \\ &= 2 \sin^2 \theta + 5 \sin \theta \cos \theta + 2 \cos^2 \theta \\ &= 2 + 5 \sin \theta \cos \theta \\ &= 2 + 5 \times \left(-\frac{3}{8}\right) \\ &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

정답_ ①

381

$$\begin{aligned} (\cos \theta - \sin \theta)^2 &= \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta \\ &= 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

이고 θ 가 제4사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$$

즉, $\cos \theta - \sin \theta > 0$ 이므로

$$\cos \theta - \sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{3}}{-\frac{1}{3}} = -\sqrt{15}$$

정답_ ①

382

$$\begin{aligned} \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 2 \text{이므로}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

한편,

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

이고 θ 가 제1사분면의 각이므로

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$$

$$\therefore \sin^3 \theta + \cos^3 \theta$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= (\sqrt{2})^3 - 3 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

정답_ ③

참고 곱셈 공식의 변형

$$(1) a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$(2) a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

383

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 - \cos \theta}{\tan \theta} \\ &= \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{\cos \theta (1 - \cos \theta)}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta \cos \theta + \cos \theta (1 - \cos \theta)^2}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} \\ &= \frac{\cos \theta \{1 - \cos^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2\}}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} \\ &= \frac{\cos \theta \{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) + (1 - \cos \theta)^2\}}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} \\ &= \frac{\cos \theta (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta + 1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} \\ &= \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \quad (\because 1 - \cos \theta \neq 0) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} = 1 \text{이므로}$$

$$\sin \theta = 2 \cos \theta$$

..... ①

한편, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로 이 식에 ①을 대입하면

$$(2 \cos \theta)^2 + \cos^2 \theta = 1, \quad 5 \cos^2 \theta = 1$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

이때 $\pi < \theta < 2\pi$ 이고 ①에 의하여 $\sin \theta$ 와 $\cos \theta$ 의 부호가 서로 같으므로 θ 는 제3사분면의 각이다.

따라서 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

정답_ ②

384

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta - \sin^4 \theta &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= (\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } (\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta) = \frac{1}{5} \text{이므로 이 식의 양변을 제}$$

곱하면

$$\begin{aligned} (\cos^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta) \\ &= \frac{1}{25} \end{aligned}$$

$$(1 + 2 \cos \theta \sin \theta)(1 - 2 \cos \theta \sin \theta) = \frac{1}{25}$$

$$1 - 4(\cos \theta \sin \theta)^2 = \frac{1}{25}$$

$$(\cos \theta \sin \theta)^2 = \frac{6}{25}$$

이때 $\sin \theta \cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

정답_ $\frac{\sqrt{6}}{5}$

385

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{a}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{4}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{5}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{5}{18}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } -\frac{a}{3} = -\frac{5}{18}$$

$$\therefore a = \frac{5}{6}$$

정답_ ④

386

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\sin \theta + \cos \theta) + (\sin \theta - \cos \theta) = \frac{a}{2}$$

$$2 \sin \theta = \frac{a}{2}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{a}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ 이므로 이를 ㉡에 대입하면

$$\sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta) = \frac{1}{2}$$

$$2 \sin^2 \theta = \frac{3}{2} \quad \therefore \sin^2 \theta = \frac{3}{4}$$

㉠을 위의 식에 대입하면

$$\left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{3}{4}, a^2 = 12$$

$$\therefore a = 2\sqrt{3} \quad (\because a > 0)$$

정답_ ②

387

계수가 유리수인 이차방정식 $4x^2 - 8(\sin \theta + \cos \theta)x - 1 = 0$ 의

한 근이 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 이므로 다른 한 근은 $\frac{-\sqrt{2}-1}{2}$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) + \left(\frac{-\sqrt{2}-1}{2}\right) = 2(\sin \theta + \cos \theta)$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

위 식의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

정답_ ⑤

참고 a, b, c 가 유리수일 때, 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 한 근이

$p + q\sqrt{m}$ 이면 다른 한 근은 $p - q\sqrt{m}$ 이다.

(단, p, q 는 유리수, $q \neq 0$, $\sqrt{m}$ 은 무리수이다.)

388

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β 라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1 + 2 \sin \theta, \alpha\beta = -\cos^2 \theta$$

이때 $|\alpha - \beta| = 2$ 이고 $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로

$$2^2 = (1 + 2 \sin \theta)^2 - 4(-\cos^2 \theta)$$

$$4 = 1 + 4 \sin \theta + 4 \sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta$$

$$4 = 5 + 4 \sin \theta$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{1}{4}$$

한편, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$$

$$\therefore \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{15}{16} - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{8}$$

정답_ ⑤

389

$\sin 3\theta > 0, \cos 3\theta < 0$ 에서 3θ 가 제2사분면의 각이므로

$360^\circ \times n + 90^\circ < 3\theta < 360^\circ \times n + 180^\circ$ (단, n 은 정수이다.)

$$\therefore 120^\circ \times n + 30^\circ < \theta < 120^\circ \times n + 60^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $n = 3k$ (k 는 정수)일 때

$$120^\circ \times 3k + 30^\circ < \theta < 120^\circ \times 3k + 60^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 30^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 60^\circ$$

따라서 θ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n = 3k + 1$ (k 는 정수)일 때

$$120^\circ \times (3k + 1) + 30^\circ < \theta < 120^\circ \times (3k + 1) + 60^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 150^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 180^\circ$$

따라서 θ 는 제2사분면의 각이다.

(iii) $n = 3k + 2$ (k 는 정수)일 때

$$120^\circ \times (3k + 2) + 30^\circ < \theta < 120^\circ \times (3k + 2) + 60^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 270^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 300^\circ$$

따라서 θ 는 제4사분면의 각이다. $\dots\dots \textcircled{2}$

(i)~(iii)에서 θ 의 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제3사분면이다.

$\dots\dots \textcircled{3}$

정답_ 제3사분면

채점 기준	비율
① θ 의 값의 범위를 n 에 대한 부등식으로 나타내기	30 %
② $n = 3k, 3k + 1, 3k + 2$ 로 경우를 나누어 θ 가 제몇 사분면의 각인지 구하기	60 %
③ θ 의 동경이 존재할 수 없는 사분면 구하기	10 %

390

각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 5\theta = 2n\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수이다.})$$

$$6\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{n}{3}\pi \quad \dots\dots ㉠$$

$0 < \theta < 2\pi$ 에서

$$0 < \frac{n}{3}\pi < 2\pi \quad \therefore 0 < n < 6$$

이때 n 은 정수이므로

$$n = 1, 2, 3, 4, 5 \quad \dots\dots ㉡$$

이 값을 ㉠에 대입하면

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

따라서 각 θ 의 최댓값은 $\frac{5}{3}\pi$, 최솟값은 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 각 θ 의 크기의 최댓값과 최솟값의 합은

$$\frac{5}{3}\pi + \frac{\pi}{3} = 2\pi \quad \dots\dots ㉢$$

정답_ 2π

채점 기준	비율
㉠ θ 를 n 에 대한 식으로 나타내기	30 %
㉡ n 의 값 구하기	30 %
㉢ 각 θ 의 크기의 최댓값과 최솟값의 합 구하기	40 %

391

반지름의 길이가 r , 중심각의 크기가 θ 인 부채꼴의 호의 길이는 $r\theta$ 이므로 이 부채꼴의 둘레의 길이는

$$2r + r\theta = r(2 + \theta) \quad \dots\dots ㉠$$

한편, 반지름의 길이가 $2r$ 인 원의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 2r = 4\pi r \quad \dots\dots ㉡$$

㉠과 ㉡이 서로 같으므로

$$r(2 + \theta) = 4\pi r$$

$$\therefore \theta = 4\pi - 2 \quad \dots\dots ㉢$$

$$\therefore \sin \frac{\theta + 2}{8} = \sin \frac{(4\pi - 2) + 2}{8}$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \dots\dots ㉣$$

정답_ 1

채점 기준	비율
㉠ 부채꼴의 둘레의 길이와 원의 둘레의 길이를 r, θ 에 대한 식으로 나타내기	40 %
㉢ θ 의 크기 구하기	30 %
㉣ $\sin \frac{\theta + 2}{8}$ 의 값 구하기	30 %

392

$\angle AOP = \theta$ 로 놓으면 $\widehat{AP} = r\theta$

이때 $\widehat{AP} = \widehat{AB}$ 이므로

$$r\theta = 2r \quad \therefore \theta = 2 \quad \dots\dots ㉠$$

$\angle AOP = 2$ 이므로

$$\angle BOP = \pi - \theta = \pi - 2 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{(\text{부채꼴 OAP의 넓이})}{(\text{부채꼴 OBP의 넓이})} &= \frac{\frac{1}{2} \times r^2 \times 2}{\frac{1}{2} \times r^2 \times (\pi - 2)} \\ &= \frac{2}{\pi - 2} \quad \dots\dots ㉢ \end{aligned}$$

정답_ $\frac{2}{\pi - 2}$

채점 기준	비율
㉠ $\angle AOP$ 의 크기 구하기	40 %
㉡ $\angle BOP$ 의 크기 구하기	20 %
㉢ $\frac{(\text{부채꼴 OAP의 넓이})}{(\text{부채꼴 OBP의 넓이})}$ 의 값 구하기	40 %

393

$\sqrt{\sin \theta \cos \theta} = -\sqrt{\sin \theta} \sqrt{\cos \theta}$ 이므로

$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} > 0, \sin \theta - \tan \theta < 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{1 - \sin^2 \theta} - \sqrt{\tan^2 \theta} + |\sin \theta - \tan \theta| - |\cos \theta| \\ = \sqrt{\cos^2 \theta} - |\tan \theta| + |\sin \theta - \tan \theta| - |\cos \theta| \\ = |\cos \theta| - |\tan \theta| + |\sin \theta - \tan \theta| - |\cos \theta| \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

$$= -\tan \theta - (\sin \theta - \tan \theta)$$

$$= -\tan \theta - \sin \theta + \tan \theta$$

$$= -\sin \theta \quad \dots\dots ㉢$$

정답_ $-\sin \theta$

채점 기준	비율
㉠ $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta, \sin \theta - \tan \theta$ 의 부호 구하기	40 %
㉡ 주어진 식의 근호 없애기	30 %
㉢ 주어진 식 간단히 하기	30 %

394

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{8}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9} \quad \dots\dots ㉠$$

$$\therefore (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1 - 2 \times \left(-\frac{4}{9}\right)$$

$$= \frac{17}{9}$$

이때 θ 가 제2사분면의 각이므로

$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$

즉, $\sin \theta - \cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{17}}{3} \dots\dots\dots ②$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan^2 \theta - \frac{1}{\tan^2 \theta} &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^4 \theta - \cos^4 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{17}}{3}}{\left(-\frac{4}{9}\right)^2} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{9}}{\frac{16}{81}} \\ &= \frac{9\sqrt{17}}{16} \dots\dots\dots ③ \end{aligned}$$

정답 $\frac{9\sqrt{17}}{16}$

채점 기준	비율
① $\sin \theta \cos \theta$ 의 값 구하기	20%
② $\sin \theta - \cos \theta$ 의 값 구하기	40%
③ $\tan^2 \theta - \frac{1}{\tan^2 \theta}$ 의 값 구하기	40%

395

- (i) 각 2θ 를 나타내는 동경과 각 7θ 를 나타내는 동경이 일치할 때
 $7\theta - 2\theta = 2n\pi$ (단, n 은 정수이다.)

$$5\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n}{5}\pi \quad \dots\dots\dots ①$$

$$0 < \theta < \pi \text{에서}$$

$$0 < \frac{2n}{5}\pi < \pi \quad \therefore 0 < n < \frac{5}{2}$$

이때 n 은 정수이므로

$$n = 1, 2$$

이 값을 ①에 대입하면

$$\theta = \frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi$$

- (ii) 각 2θ 를 나타내는 동경과 각 7θ 를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대일 때

$$7\theta - 2\theta = 2n\pi + \pi \text{ (단, } n \text{은 정수이다.)}$$

$$5\theta = 2n\pi + \pi$$

$$\therefore \theta = \frac{2n+1}{5}\pi \quad \dots\dots\dots ②$$

$$0 < \theta < \pi \text{에서}$$

$$0 < \frac{2n+1}{5}\pi < \pi \quad \therefore -\frac{1}{2} < n < 2$$

이때 n 은 정수이므로

$$n = 0, 1$$

이 값을 ②에 대입하면

$$\theta = \frac{\pi}{5}, \frac{3}{5}\pi$$

- (i), (ii)에서 θ 의 최댓값은 $\frac{4}{5}\pi$, 최솟값은 $\frac{\pi}{5}$ 이므로 구하는 차는

$$\frac{4}{5}\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{3}{5}\pi$$

정답 ③

396

- (i) 각 θ 를 나타내는 동경과 각 3θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 3\theta = 2n\pi \text{ (단, } n \text{은 정수이다.)}$$

$$4\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{n}{2}\pi \quad \dots\dots\dots ①$$

$$0 < \theta < 2\pi \text{에서}$$

$$0 < \frac{n}{2}\pi < 2\pi \quad \therefore 0 < n < 4$$

이때 n 은 정수이므로

$$n = 1, 2, 3$$

이 값을 ①에 대입하면

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$$

- (ii) 각 θ 를 나타내는 동경과 각 6θ 를 나타내는 동경이 직선

$$y = -x \text{에 대하여 대칭이므로}$$

$$\theta + 6\theta = 2n\pi + \frac{3}{2}\pi \text{ (단, } n \text{은 정수이다.)}$$

$$7\theta = \frac{4n+3}{2}\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{4n+3}{14}\pi \quad \dots\dots\dots ②$$

$$0 < \theta < 2\pi \text{에서 } 0 < \frac{4n+3}{14}\pi < 2\pi \text{이므로}$$

$$0 < 4n+3 < 28$$

$$\therefore -\frac{3}{4} < n < \frac{25}{4}$$

이때 n 은 정수이므로

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

이 값을 ②에 대입하면

$$\theta = \frac{3}{14}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{11}{14}\pi, \frac{15}{14}\pi, \frac{19}{14}\pi, \frac{23}{14}\pi, \frac{27}{14}\pi$$

- (i), (ii)에서 $\theta = \frac{\pi}{2}$

정답 $\frac{\pi}{2}$

참고 두 동경이 나타내는 각의 크기가 각각 α, β 일 때, 두 동경이 직선

$$y = -x \text{에 대하여 대칭이면}$$

$$\alpha + \beta = 360^\circ \times n + 270^\circ \text{ (단, } n \text{은 정수이다.)}$$

397

부채꼴의 중심각의 크기를 θ , 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라고 하면

$$2r + l = 44$$

$$\therefore l = 44 - 2r \quad \dots\dots\dots ①$$

부채꼴의 넓이가 40 이상이어야 하므로

$$\frac{1}{2}r\theta \geq 40$$

위의 식에 ①을 대입하면

$$\frac{1}{2}r(44 - 2r) \geq 40$$

$$r^2 - 22r + 40 \leq 0$$

$$(r-2)(r-20) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq r \leq 20$$

$$\begin{aligned} \text{한편, } l=r\theta \text{에서} \\ \theta &= \frac{l}{r} = \frac{44-2r}{r} \\ &= \frac{44}{r} - 2 \end{aligned}$$

이므로 r 가 최솟값을 가질 때 θ 는 최댓값을 갖는다.
따라서 $r=2$ 일 때 구하는 중심각의 크기가 최대이고 그 최댓값은 $\frac{44}{2} - 2 = 20$

정답 ⑤

398

오른쪽 그림과 같이 주어진 입체의 단면도의 한 부분을 나타내면 점 A, B, C는 각각 원기둥의 밑면의 중심이다. 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로 그 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$$

부채꼴 APQ의 중심각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 그 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

세 개의 원기둥으로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S 라고 하면 $S = (\text{삼각형 ABC의 넓이}) - 3 \times (\text{부채꼴 APQ의 넓이})$

$$= \sqrt{3} - 3 \times \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$$

위의 그림에서 어두운 부분을 밑면으로 하고 높이가 5인 입체도형의 부피를 V 라고 하면

$$V = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right) \times 5$$

따라서 구하는 원기둥 사이의 어두운 부분의 부피는 $4V$ 이므로

$$4V = 4 \left\{ \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right) \times 5 \right\} = 20\sqrt{3} - 10\pi$$

따라서 $a=20$, $b=-10$ 이므로

$$a+b=20+(-10)=10$$

정답 10

399

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원이 세 동경 OP, OQ, OR와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하고, 세 점과 세 동경을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

점 P는 제1사분면 위의 점이고

$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

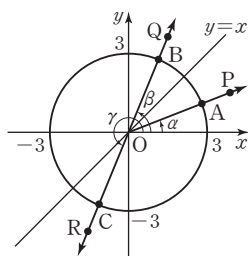
$$A(2\sqrt{2}, 1)$$

점 Q는 점 P를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이므로 동경 OQ와 동경 OP도 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

$$\therefore B(1, 2\sqrt{2})$$

또, 점 R는 점 Q를 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 동경 OR와 동경 OQ도 원점에 대하여 대칭이다.

$$\therefore C(-1, -2\sqrt{2})$$



$$\text{따라서 } \sin \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan \gamma = \frac{-2\sqrt{2}}{-1} = 2\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} 9(\sin^2 \beta + \tan^2 \gamma) &= 9 \times \left\{ \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 + (2\sqrt{2})^2 \right\} \\ &= 9 \times \left(\frac{8}{9} + 8 \right) \\ &= 80 \end{aligned}$$

정답 80

400

$$\frac{1-\tan \theta}{1+\tan \theta} = 2 + \sqrt{3} \text{에서}$$

$$1 - \tan \theta = (1 + \tan \theta)(2 + \sqrt{3})$$

$$(3 + \sqrt{3})\tan \theta = -1 - \sqrt{3}$$

$$\therefore \tan \theta = -\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

θ 가 제2사분면의 각이고

$$\tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{이므로 } \theta \text{의 동경은}$$

오른쪽 그림의 반직선 OP와 같다.

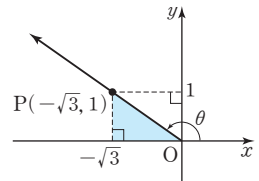
이때 $P(-\sqrt{3}, 1)$ 이므로

$$OP = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\text{따라서 } \sin \theta = \frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이므로

$$\sin \theta - \cos^2 \theta = \frac{1}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = -\frac{1}{4}$$



정답 ②

참고 $\tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 $P(-3, \sqrt{3})$ 으로 놓을 수도 있지만 $P(-\sqrt{3}, 1)$ 로 놓으면 계산이 더 간편하다.

401

점 P의 좌표를 (x, y) ($x > 0, y < 0$)라고 하면

$$x^2 + y^2 = 10$$

..... ㉠

이때

$$\sin \alpha = \frac{x\sqrt{10}}{10}, \sin \beta = \frac{y\sqrt{10}}{10}, \tan \alpha = \frac{x}{y}$$

이므로 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \tan^2 \alpha - 8$ 에 대입하면

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{10} = \left(\frac{x}{y} \right)^2 - 8$$

$$\frac{x^2 + y^2}{10} = \left(\frac{x}{y} \right)^2 - 8$$

$$1 = \left(\frac{x}{y} \right)^2 - 8 \quad (\because \text{㉠})$$

$$\left(\frac{x}{y} \right)^2 = 9 \quad \therefore \frac{x}{y} = -3 \quad (\because x > 0, y < 0)$$

즉, $x = -3y$ 이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$$(-3y)^2 + y^2 = 10, 10y^2 = 10$$

$$y^2 = 1 \quad \therefore y = -1 \quad (\because y < 0)$$

따라서 $x = -3 \times (-1) = 3$ 이므로

$$\overline{PQ} = x = 3$$

정답 ⑤

402

$\cos \theta > 0$ 이므로 θ 는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i) θ 가 제1사분면의 각일 때

① $\tan \theta > 0$

② $\cos \theta > 0, \tan \theta > 0$ 이므로

$\cos \theta \tan \theta > 0$

③ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$0 < 2\theta < \pi \quad \therefore \sin 2\theta > 0$

④ $0 < \frac{\theta}{3} < \frac{\pi}{6}$ 이므로

$\cos \frac{\theta}{3} > 0$

⑤ $-\frac{\pi}{2} < \theta - \frac{\pi}{2} < 0$ 이므로 $\theta - \frac{\pi}{2}$ 는 제4사분면의 각이다.

$\therefore \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) < 0$

따라서 옳은 것은 ①, ③, ⑤이다.

(ii) θ 가 제4사분면의 각일 때

① $\tan \theta < 0$

② $\cos \theta > 0, \tan \theta < 0$ 이므로

$\cos \theta \tan \theta < 0$

③ $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 이므로

$3\pi < 2\theta < 4\pi \quad \therefore \sin 2\theta < 0$

④ $\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{3} < \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$\cos \frac{\theta}{3} < 0$

⑤ $\pi < \theta - \frac{\pi}{2} < \frac{3}{2}\pi$ 이므로 $\theta - \frac{\pi}{2}$ 는 제3사분면의 각이다.

$\therefore \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) < 0$

따라서 옳은 것은 ②, ④, ⑤이다.

(i), (ii)에서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

403

$$\begin{aligned} & \left(\sin \theta + \frac{1}{\sin \theta} \right)^2 + \left(\cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right)^2 - \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right)^2 \\ &= \left(\sin^2 \theta + 2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) + \left(\cos^2 \theta + 2 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \\ &\quad - \left(\tan^2 \theta + 2 + \frac{1}{\tan^2 \theta} \right) \\ &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\tan^2 \theta} \right) + \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta \right) + 2 \\ &= 1 + \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) + \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) + 2 \\ &= \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 3 \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 3 \\ &= 1 + 1 + 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

정답_ ③

404

$$\begin{aligned} & (\sin \theta - \cos \theta)(\sin \theta + \cos \theta)(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)(\sin^8 \theta + \cos^8 \theta) \\ &= (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)(\sin^8 \theta + \cos^8 \theta) \\ &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ &\quad \times (\sin^8 \theta + \cos^8 \theta) \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1) \\ &= (\sin^4 \theta - \cos^4 \theta)(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)(\sin^8 \theta + \cos^8 \theta) \\ &= (\sin^8 \theta - \cos^8 \theta)(\sin^8 \theta + \cos^8 \theta) \\ &= \sin^{16} \theta - \cos^{16} \theta \end{aligned}$$

따라서 자연수 n 의 값은 16이다.

정답_ ②

405

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1} + \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1}}{\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1} + \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1}} \\ &= \frac{\frac{1}{\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} - 1} + \frac{1}{\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} - 1}}{\frac{1}{\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} - 1} + \frac{1}{\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} - 1}} \\ &= \frac{\frac{1}{\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - 1} + \frac{1}{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - 1}}{\frac{1}{\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - 1} + \frac{1}{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - 1}} \\ &= \frac{\frac{1}{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - 1} + \frac{1}{\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - 1}}{\frac{1}{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - 1} + \frac{1}{\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - 1}} \\ &= \frac{\frac{1}{\frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}} + \frac{1}{\frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}}}{\frac{1}{\frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}} + \frac{1}{\frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}}} \\ &= \frac{\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}}{\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}}{\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}} \\ &= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} = \frac{-(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} \\ &= -1 \end{aligned}$$

정답_ ①

406

$\log_3 \sin \theta - \log_3 \cos \theta = -1$ 에서

$\log_3 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -1, \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

$\therefore \cos \theta = 3 \sin \theta$

..... ㉠

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$\sin^2 \theta + (3 \sin \theta)^2 = 1, 10 \sin^2 \theta = 1$

$\therefore \sin^2 \theta = \frac{1}{10}$

이때 θ 는 제1사분면의 각이므로 $\sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$\therefore \cos \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10} \quad (\because \text{㉠})$

$\therefore \log \sin \theta + \log \cos \theta = \log (\sin \theta \cos \theta)$

$= \log \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} \right)$

$= \log \frac{3}{10}$

$= \log 3 - 1$

정답_ ②

다른 풀이

$$\log_3 \sin \theta - \log_3 \cos \theta = -1 \text{에서}$$

$$\log_3 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -1, \log_3 \tan \theta = -1$$

$$\therefore \tan \theta = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

θ 가 제1사분면의 각이므로 θ 의 동경은 점 P(3, 1)에 대하여 반직선 OP와 같다. (단, O는 원점이다.)

$OP = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ 이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log \sin \theta + \log \cos \theta &= \log (\sin \theta \cos \theta) \\ &= \log \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} \right) \\ &= \log \frac{3}{10} \\ &= \log 3 - 1 \end{aligned}$$

407

이차방정식 $2x^2 + x \cos \theta - 3 \sin \theta \cos \theta = 0$ 의 두 실근을 α, β 라고 할 때, 서로 다른 부호의 실근을 가지고 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 크려면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{\cos \theta}{2} < 0$$

$$\therefore \cos \theta > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta = -\frac{3 \sin \theta \cos \theta}{2} < 0$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta > 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①에서 $\cos \theta > 0$ 이라면 θ 는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이어야 한다.

②에서 $\sin \theta \cos \theta > 0$ 이라면 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이어야 한다.

따라서 ①, ②을 동시에 만족시키는 θ 는 제1사분면의 각이므로 θ 의 크기가 될 수 있는 것은 ③이다.

정답_ ③

408

계수가 실수인 이차방정식 $x^2 - \sqrt{3}x + 2a = 0$ 의 한 근이 $\cos \theta + i \sin \theta$ 이므로 다른 한 근은 $\cos \theta - i \sin \theta$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\cos \theta + i \sin \theta) + (\cos \theta - i \sin \theta) = \sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta) = 2a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①에서

$$2 \cos \theta = \sqrt{3} \quad \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

θ 가 제1사분면의 각이므로

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

②에서

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 2a, 2a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a\theta = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

정답_ ④

참고 a, b, c 가 실수일 때, 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 한 근이 $p + qi$ 이면 다른 한 근은 $p - qi$ 이다. (단, p, q 는 실수, $q \neq 0, i = \sqrt{-1}$ 이다.)

409

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{2}$$

위 식의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{9}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{9}{4}, 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{5}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{5}{8}$$

이때

$$\begin{aligned} \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

$$\tan \theta \times \frac{1}{\tan \theta} = 1$$

따라서 $\tan \theta, \frac{1}{\tan \theta}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 5인

이차방정식은

$$5\left(x^2 - \frac{8}{5}x + 1\right) = 0$$

$$\therefore 5x^2 - 8x + 5 = 0$$

정답_ $5x^2 - 8x + 5 = 0$

06 삼각함수의 그래프

410

$f(x)$ 의 주기가 p 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x+p)=f(x)$$

이 식에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(p)=f(0)=\sin 0+\cos 0-1=0+1-1=0$$

정답_ ③

411

조건 (가)에 의하여

$$f\left(\frac{225}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}+56\right)=f\left(\frac{1}{4}+4\times 14\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)$$

조건 (나)에 의하여 $0\leq x<4$ 일 때 $f(x)=\sin \pi x$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\sin \frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore f\left(\frac{225}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

정답_ ④

412

모든 실수 x 에 대하여 $f(x-1)=f(x-3)$ 이 성립하므로 양변에 x 대신 $x+3$ 을 대입하면

$$f(x+2)=f(x)$$

따라서

$$f(101)=f(99)=f(97)=\cdots=f(1)=2$$

$$f(100)=f(98)=f(96)=\cdots=f(2)=-1$$

이므로

$$f(99)+f(100)+f(101)=2+(-1)+2=3$$

정답_ 3

413

① 정의역은 실수 전체의 집합이다.

② 치역은 $\{y \mid -1\leq y\leq 1\}$ 이다.

④ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

⑤ 주기가 2π 인 주기함수이므로 2π 의 간격으로 같은 함수값을 갖는다. 즉, 함수 $f(x)$ 는 일대일함수가 아니다.

따라서 옳은 것은 ③이다.

정답_ ③

414

ㄱ. 정의역은 실수 전체의 집합이다. (참)

ㄴ. 치역은 $\{y \mid -1\leq y\leq 1\}$ 이다. (거짓)

ㄷ. 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다. (거짓)

따라서 옳지 않은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ④

415

① 정의역은 $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)인 실수 전체의 집합이다.

② 치역은 실수 전체의 집합이다.

③ 주기는 π 이다.

④ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

416

ㄱ. $\cos(-x)=\cos x$ (거짓)

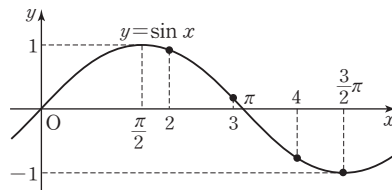
ㄷ. $y=\tan x$ 의 주기는 π 이므로 $\tan(x+p)=\tan x$ 를 만족시키는 최소의 양수 p 는 π 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

정답_ ㄴ, ㄷ, ㄹ

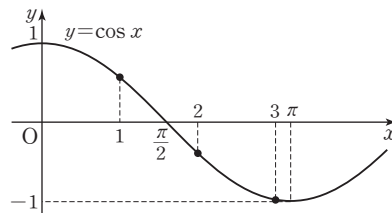
417

ㄱ. $\frac{\pi}{2}<2<3<\pi<4<\frac{3}{2}\pi$ 이므로 함수 $y=\sin x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore \sin 4<\sin 3<\sin 2$ (참)

ㄴ. $0<1<\frac{\pi}{2}<2<3<\pi$ 이므로 함수 $y=\cos x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



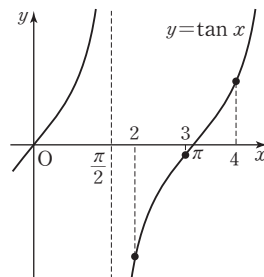
$\therefore \cos 3<\cos 2<\cos 1$ (거짓)

ㄷ. $\frac{\pi}{2}<2<3<\pi<4$ 이므로 함수

$y=\tan x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore \tan 2<\tan 3<\tan 4$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.



정답_ ①

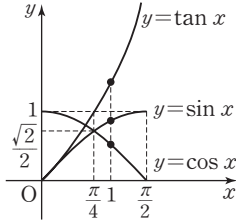
418

$\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 세 함수 $y = \sin x$,

$y = \cos x$, $y = \tan x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$\cos 1 < \sin 1 < \tan 1$ 이므로 옳은 것은 ③이다.



정답_ ③

419

(1) 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sin(x-1) + 3$$

(2) 함수 $y = \cos 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 π 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \cos 2(x+2) + \pi \quad \therefore y = \cos(2x+4) + \pi$$

(3) 함수 $y = \tan \pi x + \frac{\pi}{2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \tan \pi(x-3) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \quad \therefore y = \tan(\pi x - 3\pi) + \frac{\pi}{6}$$

정답_ (1) $y = \sin(x-1) + 3$

(2) $y = \cos(2x+4) + \pi$

(3) $y = \tan(\pi x - 3\pi) + \frac{\pi}{6}$

420

함수 $y = -2 \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -2 \sin x + k$$

이 그래프가 점 $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$ 를 지나므로

$$\sqrt{2} = -2 \sin \frac{\pi}{4} + k, \sqrt{2} = -\sqrt{2} + k$$

$$\therefore k = 2\sqrt{2}$$

정답_ ⑤

421

$$y = 3 \sin(4x-8) - 3 = 3 \sin 4(x-2) - 3$$

이므로 함수 $y = 3 \sin(4x-8) - 3$ 의 그래프는 함수 $y = 3 \sin 4x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=2$, $b=-3$ 이므로

$$a+b=2+(-3)=-1$$

정답_ ⑤

422

함수 $y = -\tan 3x + 1$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하면

$$-y = -\tan 3x + 1 \quad \therefore y = \tan 3x - 1$$

이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 1

만큼 평행이동하면

$$y = \tan 3(x+3) - 1 + 1$$

$$\therefore y = \tan 3(x+3)$$

정답_ ③

423

ㄱ. 함수 $y = \pi \cos x$ 의 그래프는 평행이동 또는 대칭이동하여 함수 $y = \cos \pi x$ 의 그래프와 겹쳐질 수 없다.

ㄴ. 함수 $y = -\cos \pi(x+2)$ 의 그래프는 함수 $y = \cos \pi x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄷ. 함수 $y = \cos \pi x + \pi - 1$ 의 그래프는 함수 $y = \cos \pi x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\pi - 1$ 만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄹ. 함수 $y = -2 \cos \pi(x-\pi) + 3$ 의 그래프는 함수 $y = 2 \cos \pi x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 π 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것과 같다.

즉, 평행이동 또는 대칭이동하여 함수 $y = \cos \pi x$ 의 그래프와 겹쳐질 수 없다.

따라서 함수 $y = \cos \pi x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ③

424

(1) $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ 이므로 $0 \leq \sin 2x + 1 \leq 2$

따라서 함수 $y = \sin 2x + 1$ 의 최댓값은 2, 최솟값은 0이고 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이다.

(2) $-1 \leq \cos(x+1) \leq 1$ 이므로 $-3 \leq 3 \cos(x+1) \leq 3$

따라서 함수 $y = 3 \cos(x+1)$ 의 최댓값은 3, 최솟값은 -3이고 주기는 2π 이다.

(3) 함수 $y = \tan \pi x - 4$ 의 최댓값과 최솟값은 없고, 주기는 $\frac{\pi}{\pi} = 1$ 이다.

정답_ (1) 최댓값: 2, 최솟값: 0, 주기: π

(2) 최댓값: 3, 최솟값: -3, 주기: 2π

(3) 최댓값: 없다., 최솟값: 없다., 주기: 1

425

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \text{이므로 } -4 \leq 4 \cos x \leq 4$$

$$\therefore -1 \leq 4 \cos x + 3 \leq 7$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 7이다.

정답_ ②

426

주어진 함수의 주기를 구하면 다음과 같다.

$$\textcircled{1} \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$\textcircled{2} \frac{2\pi}{\sqrt{2}\pi} = \sqrt{2}$$

$$\textcircled{3} \frac{2\pi}{\sqrt{2}\pi} = \sqrt{2}$$

$$\textcircled{4} \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{2}}{\pi}} = \sqrt{2}\pi^2$$

$$\textcircled{5} \frac{\pi}{\pi} = 1$$

따라서 주어진 함수 중에서 주기가 2인 것은 ①이다.

정답 ①

427

함수 $y = \tan 2x + \pi$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$

(보기)의 각 함수의 주기를 구하면 다음과 같다.

$$\text{㉠. } 2\pi \quad \text{㉡. } \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \text{㉢. } \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{㉣. } \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \text{㉤. } \frac{\pi}{2} \quad \text{㉥. } \frac{\pi}{2} = 2$$

따라서 함수 $y = \tan 2x + \pi$ 와 주기가 같은 함수는 ㉣, ㉤의 2개이다.

정답 ②

428

함수 $y = -\pi \sin \frac{\pi}{2}x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2π 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -\pi \sin \frac{\pi}{2}(x-1) + 2\pi$$

이 함수의 최솟값은 $-|\pi| + 2\pi = \pi$, 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ 이므로

$$a = \pi, b = 4$$

$$\therefore ab = \pi \times 4 = 4\pi$$

정답 4π

참고 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 평행이동하면 함수의 주기와 최댓값, 최솟값은 변하지 않고, y 축의 방향으로 평행이동하면 함수의 주기는 변하지 않지만 최댓값과 최솟값은 변한다.

429

① 함수 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 주기는 2π 이다.

② 함수 $y = 6 \tan 2\pi x - 3$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$ 이다.

③ 함수 $y = -\frac{\cos x}{2} + 3$ 의 최댓값은 $-\frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$ 이다.

④ 함수 $y = \tan \frac{x}{2} + 1$ 의 점근선의 방정식은 $\frac{x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$, 즉 $x = 2n\pi + \pi$ (n 은 정수)이다.

⑤ $-1 \leq \sin(2x + \pi) \leq 1$ 에서

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin(2x + \pi) \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore -\frac{3}{2} \leq \frac{1}{2} \sin(2x + \pi) - 1 \leq -\frac{1}{2}$$

따라서 함수 $y = \frac{1}{2} \sin(2x + \pi) - 1$ 의 치역은

$$\left\{y \mid -\frac{3}{2} \leq y \leq -\frac{1}{2}\right\} \text{이다.}$$

따라서 옳은 것은 ④이다.

정답 ④

430

함수 $f(x) = a \tan \frac{\pi}{7}x$ 의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{7}} = 7$ 이므로 모든 실수 x 에 대

하여

$$f(x+7) = f(x)$$

$$\text{또, } \tan(-x) = -\tan x \text{이므로}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

따라서

$$f(6) = f(-1+7) = f(-1) = -f(1)$$

$$f(12) = f(5+7) = f(5) = f(-2+7) = f(-2) = -f(2)$$

$$f(16) = f(9+7) = f(9) = f(2+7) = f(2)$$

이므로

$$\begin{aligned} f(6) + f(12) + f(16) &= -f(1) - f(2) + f(2) \\ &= -f(1) = -3 \end{aligned}$$

정답 -3

431

함수 $f(x) = a \sin bx + c$ 의 최댓값이 1, 최솟값이 -3이고 $a > 0$ 이므로

$$a + c = 1, -a + c = -3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 2, c = -1$$

또, 주기가 π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

정답 $a=2, b=2, c=-1$

432

$f(x) = a \cos bx + 3$ 의 주기가 4π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -1이고 $a > 0$ 이므로

$$-a + 3 = -1 \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore a + b = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

정답 ①

433

$f(x) = a \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + b$ 의 최댓값이 6이고 $a < 0$ 이므로

$$-a + b = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f\left(\frac{5}{12}\pi\right) = 0 \text{이므로}$$

$$a \sin\left(\frac{5}{12}\pi - \frac{\pi}{4}\right) + b = 0, a \sin \frac{\pi}{6} + b = 0$$

$$\frac{1}{2}a + b = 0 \quad \therefore a + 2b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = -4, b = 2$$

따라서 $f(x) = -4 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$-4 + 2 = -2$$

정답 -2

434

조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 의 주기가 4π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -1 이고 $a > 0$ 이므로

$$-a + c = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (다)에서 $f(\pi) = 2$ 이므로

$$a \cos \frac{\pi}{2} + c = 2 \quad \therefore c = 2$$

$c = 2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a = 3$

$$\therefore abc = 3 \times \frac{1}{2} \times 2 = 3$$

정답_ ⑤

435

함수 $y = \tan(ax + b)$ 의 주기가 $\frac{1}{2}$ 이고 $a > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{a} = \frac{1}{2} \quad \therefore a = 2\pi$$

따라서 함수 $y = \tan(2\pi x + b)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$2\pi x + b = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \text{는 정수}), \quad 2\pi x = k\pi + \frac{\pi}{2} - b$$

$$\therefore x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} - \frac{b}{2\pi}$$

이 방정식이 $x = n$ (n 은 정수)과 일치해야 하므로

$$\frac{k}{2} = m, \quad \frac{1}{4} - \frac{b}{2\pi} = l \quad (m, l \text{은 정수})$$

의 꼴이어야 한다.

$$\frac{1}{4} - \frac{b}{2\pi} = l \text{에서}$$

$$-\frac{b}{2\pi} = l - \frac{1}{4} \quad \therefore b = \frac{\pi}{2} - 2\pi l \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$-2\pi < b < -\pi$ 이므로

$$-2\pi < \frac{\pi}{2} - 2\pi l < -\pi, \quad -\frac{5}{2}\pi < -2\pi l < -\frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore \frac{3}{4} < l < \frac{5}{4}$$

이때 l 은 정수이므로

$$l = 1$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$b = -\frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore a + b = 2\pi + \left(-\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{\pi}{2}$$

정답_ $\frac{\pi}{2}$

참고 k 는 정수이므로 $\frac{k}{2} + \frac{1}{4}$ 의 값이 정수가 될 수 없다.

따라서 $\frac{k}{2}, \frac{1}{4} - \frac{b}{2\pi}$ 가 정수가 되어야 한다.

436

주어진 함수의 최댓값이 3, 최솟값이 -3 이고 $a > 0$ 이므로

$$a = 3$$

주어진 함수의 주기가 π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore a + b = 3 + 2 = 5$$

정답_ 5

437

주어진 함수의 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 $a > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore a = 2$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = \tan 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향

으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행이동한 것이므로

$$f(x) = \tan 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore f\left(\frac{3}{8}\pi\right) = \tan\left(2 \times \frac{3}{8}\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

정답_ 1

다른 풀이

주어진 함수의 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 $a > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore a = 2$$

즉, 주어진 함수는 $f(x) = \tan(2x - b)$ 이고 그 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

을 지나므로

$$\tan\left(2 \times \frac{\pi}{4} - b\right) = 0$$

$$\therefore \tan\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $0 < b < \pi$ 이므로

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - b < \frac{\pi}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$\frac{\pi}{2} - b = 0 \quad \therefore b = \frac{\pi}{2}$$

따라서 $f(x) = \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ 이므로

$$f\left(\frac{3}{8}\pi\right) = \tan\left(2 \times \frac{3}{8}\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

438

주어진 함수의 최댓값이 1이고 $a < 0$ 이므로

$$-a = 1 \quad \therefore a = -1$$

따라서 주어진 함수는 $y = -\cos\left(\frac{1}{2}x - b\right)$ 이고 그 그래프가 점

$\left(\frac{3}{2}\pi, 1\right)$ 을 지나므로

$$-\cos\left(\frac{3}{4}\pi - b\right) = 1$$

$$\therefore \cos\left(\frac{3}{4}\pi - b\right) = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $-\frac{\pi}{2} < b < 0$ 이므로

$$\frac{3}{4}\pi < \frac{3}{4}\pi - b < \frac{5}{4}\pi \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$\frac{3}{4}\pi - b = \pi \quad \therefore b = -\frac{\pi}{4}$$

한편, 이 함수의 그래프의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ 이고 두 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right),$

$(c, 0)$ 을 지나므로

$$2\left(c - \frac{\pi}{2}\right) = 4\pi, c - \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

$$\therefore c = \frac{5}{2}\pi$$

$$\therefore ab + c = -1 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{5}{2}\pi = \frac{11}{4}\pi$$

정답 $\frac{11}{4}\pi$

참고 주어진 함수의 그래프에서 주기는 $c - \frac{\pi}{2}$ 의 2배와 같으므로

$$2\left(c - \frac{\pi}{2}\right) = 4\pi$$

439

함수 $y = a \sin b\pi x$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{b} \quad (\because b > 0)$$

이므로 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = a \sin b\pi x$ ($0 \leq x \leq \frac{3}{b}$)

가 x 축과 만나는 원점이 아닌 두 점을 각각 C, D라고 하면

$$C\left(\frac{1}{b}, 0\right), D\left(\frac{2}{b}, 0\right)$$

이때 점 A는 선분 OC의 수직이등분선 위의 점이므로

$$A\left(\frac{1}{2b}, a\right)$$

따라서 점 B의 좌표는 $\left(\frac{1}{2b} + \frac{2}{b}, a\right)$

$$\therefore B\left(\frac{5}{2b}, a\right)$$

한편, 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times |a| = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2b} - \frac{1}{2b}\right) \times a = \frac{a}{b}$$

$$\text{즉, } \frac{a}{b} = 5 \text{이므로 } a = 5b$$

..... ㉠

직선 OA의 기울기는 $\frac{a}{\frac{1}{2b}} = 2ab$, 직선 OB의 기울기는

$$\frac{a}{\frac{5}{2b}} = \frac{2ab}{5} \text{이므로}$$

$$2ab \times \frac{2ab}{5} = \frac{5}{4}, \frac{4a^2b^2}{5} = \frac{5}{4}$$

$$a^2b^2 = \frac{25}{16} \quad \therefore ab = \frac{5}{4} \quad (\because a > 0, b > 0)$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = \frac{5}{2}, b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + b = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

정답 ③

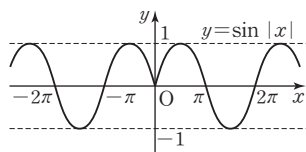
440

함수 $y = \sin |x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

① 주기함수가 아니다.

② 최댓값은 1이다.

③ 최솟값은 -1이다.



④ 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

⑤ 정의역은 실수 전체의 집합이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

정답 ⑤

441

함수 $y = \sin \pi x + 1$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

ㄱ. 함수 $y = \sin 2\pi x$ 의 주기가 $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$ 이므로 함수 $y = |\sin 2\pi x|$ 의 주기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

ㄴ. 함수 $y = \cos \frac{\pi}{2}x$ 의 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ 이므로 함수 $y = \left|\cos \frac{\pi}{2}x\right|$ 의 주기는 2이다.

ㄷ. 함수 $y = \tan \frac{\pi}{2}x$ 의 주기가 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2$ 이므로 함수 $y = \left|\tan \frac{\pi}{2}x\right|$ 의 주기는 2이다.

따라서 함수 $y = \sin \pi x + 1$ 과 주기가 같은 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

정답 ㄴ, ㄷ

참고 절댓값 기호를 포함한 삼각함수의 주기

(1) 함수 $y = |\sin x|$ 의 주기는 π 이고, 함수 $y = |\sin bx|$ 의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$ 이다.

(2) 함수 $y = |\cos x|$ 의 주기는 π 이고, 함수 $y = |\cos bx|$ 의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$ 이다.

(3) 함수 $y = |\tan x|$ 의 주기는 π 이고, 함수 $y = |\tan bx|$ 의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$ 이다.

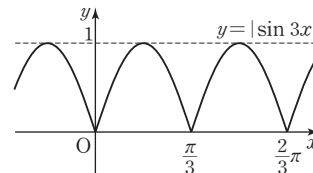
442

함수 $g(x) = |\sin 3x|$ 의 그래프는 $y = \sin 3x$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분은 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

함수 $y = \sin 3x$ 는 최댓값이 1,

최솟값이 -1, 주기가 $\frac{2}{3}\pi$ 이므로

함수 $y = |\sin 3x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $g(x) = |\sin 3x|$ 의 주기는 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

이때 함수 $f(x) = \cos(ax) + 1$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$ ($\because a > 0$)이고, 두 함수 $f(x), g(x)$ 의 주기가 서로 같으므로

$$\frac{2\pi}{a} = \frac{\pi}{3} \quad \therefore a = 6$$

정답 ②

443

함수 $f(x)$ 의 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore b = 2$$

이때 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 1이므로

$$c = 1$$

또, 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 3이고 $a > 0$ 이므로

$$a + c = 3 \quad \therefore a = 2$$

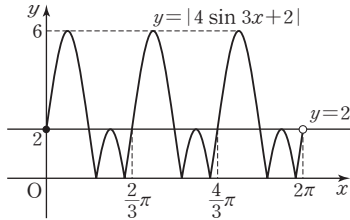
$$\therefore abc = 2 \times 2 \times 1 = 4$$

정답 4

444

함수 $y = |4 \sin 3x + 2|$ 의 그래프는 $y = 4 \sin 3x + 2$ 의 그래프를 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분은 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

함수 $y = 4 \sin 3x + 2$ 는 최댓값이 6, 최솟값이 -2, 주기가 $\frac{2}{3}\pi$ 이므로 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $y = |4 \sin 3x + 2|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $0 \leq x < 2\pi$ 일 때 곡선 $y = |4 \sin 3x + 2|$ 와 직선 $y = 2$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수는 9이다.

정답_ ③

445

$$(1) \sin \frac{5}{4}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(2) \tan\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\tan \frac{2}{3}\pi = -\tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ = -\left(-\tan \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$(3) \cos 390^\circ = \cos(360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

정답_ (1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\sqrt{3}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

446

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \\ = \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{4} \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1$$

정답_ ②

447

$$\frac{\sin(\pi - \theta)}{1 - \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)} + \frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)}{1 + \cos(\pi + \theta)} \\ = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \\ = \frac{\sin \theta(1 - \cos \theta) + \sin \theta(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} \\ = \frac{2 \sin \theta}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2 \sin \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{2}{\sin \theta}$$

정답_ ④

448

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{에서 } -\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

즉, $\tan \theta < 0$, $\sin \theta < 0$ 이므로 θ 는 제4사분면의 각이다.

이때 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (\because \cos \theta > 0)$$

정답_ ⑤

449

$$\neg. \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta, \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta \text{이므로}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \neq \cos(\pi + \theta) \text{ (거짓)}$$

$$\neg. \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta, \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta \text{이므로}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sin(\pi + \theta) \text{ (참)}$$

$$\neg. \tan(\pi + \theta) = \tan \theta, -\tan(\pi - \theta) = -(-\tan \theta) = \tan \theta$$

$$\text{이므로 } \tan(\pi + \theta) = -\tan(\pi - \theta) \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

정답_ ④

450

$35^\circ + \theta = x$ 로 놓으면 $55^\circ - \theta = 90^\circ - x$ 이므로

$$\sin^2(35^\circ + \theta) + \sin^2(55^\circ - \theta) = \sin^2 x + \sin^2(90^\circ - x) \\ = \sin^2 x + \cos^2 x \\ = 1$$

정답_ 1

451

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 π 이므로

$$A + B + C = \pi \quad \therefore B + C = \pi - A$$

$$\therefore \sin \frac{B+C-2\pi}{2} = \sin \frac{\pi-A-2\pi}{2}$$

$$= \sin\left(-\frac{\pi+A}{2}\right) = -\sin \frac{\pi+A}{2}$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}\right) = -\cos \frac{A}{2}$$

$$= -\frac{4}{5}$$

정답_ ①

452

$$\cos 89^\circ = \cos(90^\circ - 1^\circ) = \sin 1^\circ$$

$$\cos 88^\circ = \cos(90^\circ - 2^\circ) = \sin 2^\circ$$

$\vdots$

$$\cos 46^\circ = \cos(90^\circ - 44^\circ) = \sin 44^\circ$$

이므로

$$\begin{aligned}
& \cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \cdots + \cos^2 89^\circ \\
&= (\cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ) + (\cos^2 2^\circ + \cos^2 88^\circ) + \cdots \\
&\quad + (\cos^2 44^\circ + \cos^2 46^\circ) + \cos^2 45^\circ \\
&= (\cos^2 1^\circ + \sin^2 1^\circ) + (\cos^2 2^\circ + \sin^2 2^\circ) + \cdots \\
&\quad + (\cos^2 44^\circ + \sin^2 44^\circ) + \cos^2 45^\circ \\
&= \underbrace{1+1+\cdots+1+1}_{44\text{개}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
&= 44 + \frac{1}{2} = \frac{89}{2}
\end{aligned}$$

정답_ ②

453

$$\begin{aligned}
\tan \frac{9}{20}\pi &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{20}\right) = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{20}} \\
\tan \frac{7}{20}\pi &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{20}\pi\right) = \frac{1}{\tan \frac{3}{20}\pi} \\
\therefore \tan \frac{\pi}{20} \times \tan \frac{3}{20}\pi \times \tan \frac{5}{20}\pi \times \tan \frac{7}{20}\pi \times \tan \frac{9}{20}\pi \\
&= \tan \frac{\pi}{20} \times \tan \frac{3}{20}\pi \times \tan \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{\tan \frac{3}{20}\pi} \times \frac{1}{\tan \frac{\pi}{20}} \\
&= 1 \times 1 \times 1 = 1
\end{aligned}$$

정답_ 1

454

$$\begin{aligned}
& \theta = \frac{\pi}{8} \text{에서 } 8\theta = \pi \text{이므로} \\
& \sin 14\theta = \sin(8\theta + 6\theta) = \sin(\pi + 6\theta) = -\sin 6\theta \\
& \sin 12\theta = \sin(8\theta + 4\theta) = \sin(\pi + 4\theta) = -\sin 4\theta \\
& \sin 10\theta = \sin(8\theta + 2\theta) = \sin(\pi + 2\theta) = -\sin 2\theta \\
& \therefore \sin 2\theta + \sin 4\theta + \sin 6\theta + \sin 8\theta + \sin 10\theta + \sin 12\theta + \sin 14\theta \\
&= (\sin 2\theta + \sin 10\theta) + (\sin 4\theta + \sin 12\theta) \\
&\quad + (\sin 6\theta + \sin 14\theta) + \sin 8\theta \\
&= (\sin 2\theta - \sin 2\theta) + (\sin 4\theta - \sin 4\theta) \\
&\quad + (\sin 6\theta - \sin 6\theta) + \sin \pi \\
&= 0
\end{aligned}$$

정답_ ③

455

$$\begin{aligned}
& \angle P_1OP_2 = \theta \text{라고 하면} \\
& \angle P_1OP_n = (n-1)\theta \quad (\text{단, } 2 \leq n \leq 12) \\
& \text{이때 } \overline{OP_n} = 1 \text{이므로 } y_n = \sin(n-1)\theta \\
& \angle P_1OP_4 = 3\theta = \frac{\pi}{2} \text{이므로 } 6\theta = \pi, 9\theta = \frac{3}{2}\pi \\
& \text{따라서}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin 4\theta &= \sin(3\theta + \theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta \\
\sin 5\theta &= \sin(3\theta + 2\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right) = \cos 2\theta \\
\sin 7\theta &= \sin(6\theta + \theta) = \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta \\
\sin 8\theta &= \sin(6\theta + 2\theta) = \sin(\pi + 2\theta) = -\sin 2\theta \\
\sin 10\theta &= \sin(9\theta + \theta) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = -\cos \theta \\
\sin 11\theta &= \sin(9\theta + 2\theta) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 2\theta\right) = -\cos 2\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \therefore y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + \cdots + y_{12}^2 \\
&= \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \cdots + \sin^2 11\theta \\
&= (\sin^2 \theta + \sin^2 4\theta) + (\sin^2 2\theta + \sin^2 5\theta) + \sin^2 3\theta \\
&\quad + \sin^2 6\theta + (\sin^2 7\theta + \sin^2 10\theta) + (\sin^2 8\theta + \sin^2 11\theta) \\
&\quad + \sin^2 9\theta \\
&= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + (\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) + \sin^2 \frac{\pi}{2} \\
&\quad + \sin^2 \pi + (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + (\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) \\
&\quad + \sin^2 \frac{3}{2}\pi \\
&= 1 + 1 + 1^2 + 0 + 1 + 1 + (-1)^2 \\
&= 6
\end{aligned}$$

정답_ 6

다른 풀이

$$\begin{aligned}
& \angle P_1OP_2 = \theta \text{라고 하면} \\
& \angle P_1OP_n = (n-1)\theta \quad (\text{단, } 2 \leq n \leq 12) \\
& \text{이때 } \overline{OP_n} = 1 \text{이므로} \\
& y_n = \sin(n-1)\theta \\
& \angle P_1OP_4 = 3\theta = \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \theta = \frac{\pi}{6} \\
& \therefore y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + \cdots + y_{12}^2 \\
&= \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \sin^2 4\theta + \sin^2 5\theta + \sin^2 6\theta \\
&\quad + \sin^2 7\theta + \sin^2 8\theta + \sin^2 9\theta + \sin^2 10\theta + \sin^2 11\theta \\
&= \sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{2}{3}\pi + \sin^2 \frac{5}{6}\pi + \sin^2 \pi \\
&\quad + \sin^2 \frac{7}{6}\pi + \sin^2 \frac{4}{3}\pi + \sin^2 \frac{3}{2}\pi + \sin^2 \frac{5}{3}\pi + \sin^2 \frac{11}{6}\pi \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (-1)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= 6
\end{aligned}$$

456

$$\begin{aligned}
y &= 3 \cos x - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \\
&= 3 \cos x - \cos x - 1 \\
&= 2 \cos x - 1 \\
&-1 \leq \cos x \leq 1 \text{이므로} \\
&-2 \leq 2 \cos x \leq 2 \\
&\therefore -3 \leq 2 \cos x - 1 \leq 1 \\
&\text{따라서 주어진 함수의 최댓값은 1, 최솟값은 -3이므로} \\
& M=1, m=-3 \\
& \therefore Mm = 1 \times (-3) = -3
\end{aligned}$$

정답_ ②

457

$$\begin{aligned}
& -1 \leq \cos bx \leq 1 \text{이므로 } -3 \leq \cos bx - 2 \leq -1 \\
& \text{따라서 } 1 \leq |\cos bx - 2| \leq 3 \text{이고 } a > 0 \text{이므로} \\
& a + c \leq a|\cos bx - 2| + c \leq 3a + c \\
& \text{이때 함수 } y = a|\cos bx - 2| + c \text{의 최댓값이 7, 최솟값이 3이므로} \\
& 3a + c = 7, a + c = 3 \\
& \text{위의 두 식을 연립하여 풀면} \\
& a = 2, c = 1
\end{aligned}$$

함수 $y = -2 \tan 2x$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이므로

함수 $y = a|\cos bx - 2| + c$, 즉 $y = 2|\cos bx - 2| + 1$ 의 주기도 $\frac{\pi}{2}$

이다.

$b > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore a + b - c = 2 + 2 - 1 = 3$$

정답_ 3

458

$$y = |2 \sin(\pi + x) - 1| + 2$$

$$= |-2 \sin x - 1| + 2$$

$$= |2 \sin x + 1| + 2$$

$\sin x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면

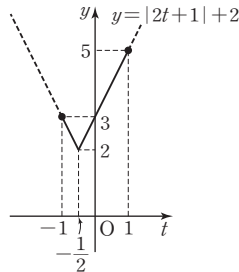
$$y = |2t + 1| + 2$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 $y = |2t + 1| + 2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t = 1$ 일 때 최댓값 5, $t = -\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.

즉, $M = 5$, $m = 2$ 이므로

$$M + m = 5 + 2 = 7$$



정답_ ②

459

$$y = 3 - 4 \sin^2 x + 4 \cos x$$

$$= 3 - 4(1 - \cos^2 x) + 4 \cos x$$

$$= 4 \cos^2 x + 4 \cos x - 1$$

이때 $\cos x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면

$$y = 4t^2 + 4t - 1 = 4\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - 2$$

따라서 $t = 1$ 일 때 최댓값 7, $t = -\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 -2를 가지므로

$$M = 7, m = -2$$

$$\therefore M + m = 7 + (-2) = 5$$

정답_ ⑤

460

$$y = a \cos^2 x + a \sin x + b$$

$$= a(1 - \sin^2 x) + a \sin x + b$$

$$= -a \sin^2 x + a \sin x + a + b$$

$\sin x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면

$$y = -at^2 + at + a + b = -a\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}a + b$$

$a > 0$ 이므로 $t = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{5}{4}a + b$, $t = -1$ 일 때 최솟값

$-a + b$ 를 갖는다.

$$\therefore \frac{5}{4}a + b = 8, -a + b = -1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 4, b = 3$$

$$\therefore a + b = 4 + 3 = 7$$

정답_ ③

461

$$y = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(x + \pi)$$

$$= \cos^2 x + \sin x - (-\sin x)$$

$$= 1 - \sin^2 x + 2 \sin x$$

이때 $\sin x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면

$$y = 1 - t^2 + 2t = -(t - 1)^2 + 2$$

따라서 $t = 1$ 일 때 최댓값 2, $t = -1$ 일 때 최솟값 -2를 가지므로

$$M = 2, m = -2$$

$$\therefore M + m = 2 + (-2) = 0$$

정답_ 0

462

$$f(x) = \cos^2\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

$$= \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

$$= \cos^2\left\{\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right\} - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

$$= \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

$$= 1 - \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

이때 $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면

$$y = 1 - t^2 - t + k = -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + k + \frac{5}{4}$$

따라서 $t = -\frac{1}{2}$ 일 때 최댓값 $k + \frac{5}{4}$, $t = 1$ 일 때 최솟값 $k - 1$ 을 갖는다.

$$\text{즉, } k + \frac{5}{4} = 3, k - 1 = m \text{이므로}$$

$$k = \frac{7}{4}, m = \frac{3}{4}$$

$$\therefore k + m = \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{2}$$

정답_ ③

463

$\sin x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면

$$y = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 2} = \frac{t + 1}{t - 2}$$

$$= \frac{(t - 2) + 3}{t - 2}$$

$$= \frac{3}{t - 2} + 1$$

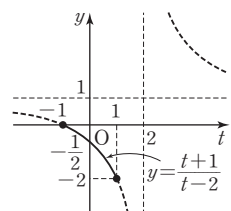
함수 $y = \frac{t + 1}{t - 2}$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{3}{t}$ 의

그래프를 t 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $t = -1$ 일 때 최댓값 0, $t = 1$ 일 때 최솟값 -2를 가지므로

$$M = 0, m = -2$$

$$\therefore M + m = 0 + (-2) = -2$$



정답_ ①

464

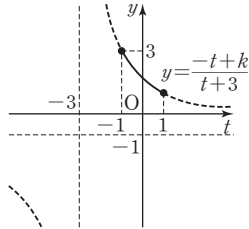
$\cos x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면

$$\begin{aligned} y &= \frac{-\cos x + k}{\cos x + 3} = \frac{-t + k}{t + 3} \\ &= \frac{-(t+3) + k + 3}{t + 3} \\ &= \frac{k+3}{t+3} - 1 \end{aligned}$$

이때 $k > -3$ 이므로 오른쪽 그림과 같이 $t = -1$ 일 때 최댓값 3을 가져야 한다.

즉, $\frac{k+3}{2} - 1 = 3$ 이어야 하므로

$$k = 5$$



정답_ 5

465

$\tan x = t$ ($t \geq 1$)로 놓으면

$\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\tan x \geq 1$ 이므로

$$\begin{aligned} y &= \frac{2 \tan x - 3}{\tan x + 1} = \frac{2t - 3}{t + 1} \\ &= \frac{2(t+1) - 5}{t + 1} \\ &= -\frac{5}{t+1} + 2 \end{aligned}$$

따라서 오른쪽 그림과 같이 $t = 1$ 일

때 최솟값 $-\frac{1}{2}$ 을 가지므로

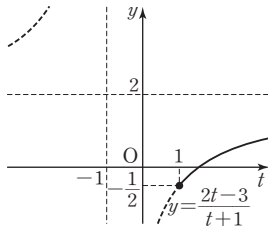
$$b = -\frac{1}{2}$$

이때 $t = 1$, 즉 $\tan x = 1$ 에서

$x = \frac{\pi}{4}$ ($\because \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$)이므로

$$a = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore ab = \frac{\pi}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{8}$$



정답_ ②

466

(1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는 함수

$y = \sin x$ 의 그래프와 직선

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 x 좌표와 같

다.

따라서 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 구하는 해는

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{2\pi}{3}$$

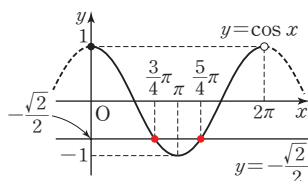
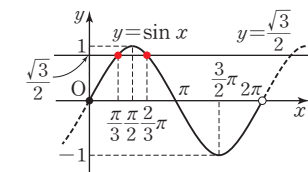
(2) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는 함수

$y = \cos x$ 의 그래프와 직선

$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 교점의 x 좌표

와 같다.

따라서 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 구하는 해는



$$x = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{4}\pi$$

(3) $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 해는 함수

$y = \tan x$ 의 그래프와 직선

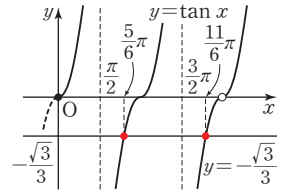
$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 교점의 x 좌표와 같

다.

따라서 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 구하는

해는

$$x = \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi$$



정답_ (1) $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{2\pi}{3}$

(2) $x = \frac{3}{4}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{4}\pi$

(3) $x = \frac{5}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

467

$\frac{x}{2} = t$ 로 놓으면

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 $0 \leq \frac{x}{2} < \pi$ 이므로

$0 \leq t < \pi$

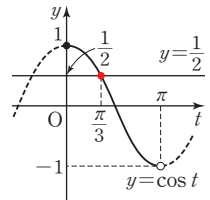
이때 주어진 방정식은 $\cos t = \frac{1}{2}$

$0 \leq t < \pi$ 에서 $\cos t = \frac{1}{2}$ 의 해는

$$t = \frac{\pi}{3}$$

즉, $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$x = \frac{2\pi}{3}$$



정답_ $x = \frac{2\pi}{3}$

468

$x - \frac{\pi}{4} = t$ 로 놓으면

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} < \frac{7}{4}\pi$ 이므로

$$-\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{7}{4}\pi$$

이때 주어진 방정식은 $-2 \sin t = 1$

$$\therefore \sin t = -\frac{1}{2}$$

$-\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{7}{4}\pi$ 에서

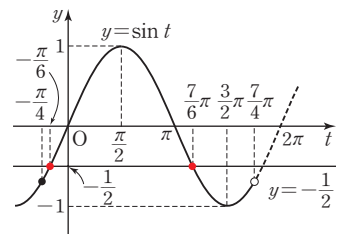
$\sin t = -\frac{1}{2}$ 의 해는

$$t = -\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } t = \frac{7}{6}\pi$$

즉, $x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6}$ 또는

$x - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{6}\pi$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{12} \text{ 또는 } x = \frac{17}{12}\pi$$



따라서 $\alpha = \frac{17}{12}\pi$, $\beta = \frac{\pi}{12}$ 이므로

$$\begin{aligned}\tan(\alpha - \beta) &= \tan\left(\frac{17}{12}\pi - \frac{\pi}{12}\right) \\ &= \tan \frac{4}{3}\pi \\ &= \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

정답_ ①

469

진수의 조건에 의하여 $\sin 2x > 0$, $\cos 2x > 0$ ㉠

이때 $0 < x < \pi$ 에서 $0 < 2x < 2\pi$ 이므로 ㉠을 만족시키는 $2x$ 의 값의 범위는 $0 < 2x < \frac{\pi}{2}$

$$\log \sin 2x - \log \cos 2x = \frac{1}{2} \log 3 \text{에서}$$

$$\log \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \log \sqrt{3}$$

$$\therefore \tan 2x = \sqrt{3}$$

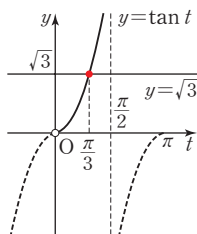
$$2x = t \text{로 놓으면 } 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

이때 주어진 방정식은 $\tan t = \sqrt{3}$

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ 에서 방정식 $\tan t = \sqrt{3}$ 의 해는

$$t = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{즉, } 2x = \frac{\pi}{3} \text{이므로 } x = \frac{\pi}{6}$$



정답_ $x = \frac{\pi}{6}$

470

$x \neq 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 \leq \cos x < 1$ 이므로

$$0 \leq \frac{\pi}{2} \cos x < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \cos x = t \text{로 놓으면 } 0 \leq t < \frac{\pi}{2}$$

이때 주어진 방정식은 $\tan t = 1$

$0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\tan t = 1$ 의 해는

$$t = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{즉, } \frac{\pi}{2} \cos x = \frac{\pi}{4} \text{이므로}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

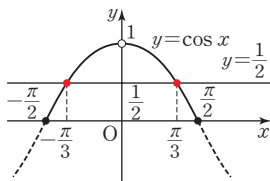
$x \neq 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서

$\cos x = \frac{1}{2}$ 의 해는

$$x = -\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{3}$$

따라서 $\alpha = -\frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi$$



정답_ $\frac{2}{3}\pi$

471

$2 \sin^2 x - 3 \cos x - 3 = 0$ 에서

$$2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x - 3 = 0$$

$$2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$(2 \cos x + 1)(\cos x + 1) = 0$$

$$\therefore \cos x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x = -1$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서

(i) $\cos x = -\frac{1}{2}$ 의 해는

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$

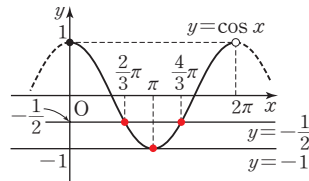
(ii) $\cos x = -1$ 의 해는

$$x = \pi$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$

정답_ $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$



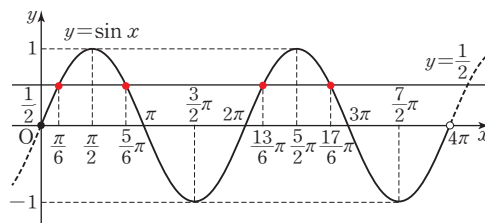
472

$4 \sin^2 x - 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3 = 0$ 에서

$$4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3 = 0$$

$$(2 \sin x - 1)(2 \sin x + 3) = 0$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{2} \quad (\because -1 \leq \sin x \leq 1)$$



$0 \leq x < 4\pi$ 에서 $\sin x = \frac{1}{2}$ 의 해는

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{13}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{17}{6}\pi$$

따라서 모든 해의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi + \frac{13}{6}\pi + \frac{17}{6}\pi = 6\pi$$

정답_ ②

473

$\sqrt{2} \cos x = \tan x$ 에서

$$\sqrt{2} \cos x = \frac{\sin x}{\cos x}, \sqrt{2} \cos^2 x = \sin x$$

$$\sqrt{2}(1 - \sin^2 x) = \sin x$$

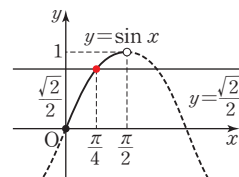
$$\sqrt{2} \sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} = 0$$

$$(\sin x + \sqrt{2})(\sqrt{2} \sin x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because 0 \leq \sin x < 1)$$

$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는

$$x = \frac{\pi}{4}$$



정답_ ④

474

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 x + (2 + \sqrt{3}) \cos x &= 2 + \sqrt{3} \text{에서} \\ 2 \sin^2 x + (2 + \sqrt{3}) \cos x - \sqrt{3} - 2 &= 0 \\ 2(1 - \cos^2 x) + (2 + \sqrt{3}) \cos x - \sqrt{3} - 2 &= 0 \\ 2 \cos^2 x - (2 + \sqrt{3}) \cos x + \sqrt{3} &= 0 \\ (2 \cos x - \sqrt{3})(\cos x - 1) &= 0 \\ \therefore \cos x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } \cos x = 1 \end{aligned}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서

(i) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi$$

(ii) $\cos x = 1$ 의 해는

$$x = 0$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

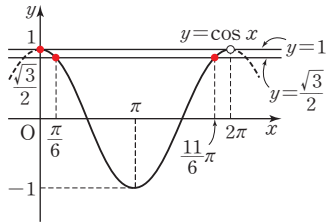
한편, $\sin x \cos x \leq 0$ 이므로 $\sin x > 0$, $\cos x < 0$ 또는 $\sin x < 0$, $\cos x > 0$ 또는 $\sin x = 0$ 또는 $\cos x = 0$ 이어야 한다.

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi \leq x < 2\pi \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 ①, ②을 동시에 만족시키는 x 의 값은

$$x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi$$

정답 ①, ⑤



475

$$\tan A + \frac{3}{\tan A} = -2\sqrt{3} \text{의 양변에 } \tan A \text{를 곱하여 정리하면}$$

$$\tan^2 A + 2\sqrt{3} \tan A + 3 = 0$$

$$(\tan A + \sqrt{3})^2 = 0$$

$$\therefore \tan A = -\sqrt{3}$$

$0 < A < \pi$ 이므로

$$A = \frac{2}{3}\pi$$

한편, $A + B + C = \pi$ 이므로

$$B + C = \pi - A = \frac{\pi}{3}$$

이때 삼각형 ABC는 이등변삼각형이고 $A > \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$B = C \quad \therefore B = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \sin B = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

정답 $\frac{1}{2}$

476

$$\sin^2 x = 1 + \sin x \cos x \text{에서}$$

$$1 - \cos^2 x = 1 + \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x + \sin x \cos x = 0$$

$$\cos x (\cos x + \sin x) = 0$$

$$\therefore \cos x = 0 \text{ 또는 } \cos x = -\sin x$$

$0 \leq x < \pi$ 에서

(i) $\cos x = 0$ 일 때

$\cos x = 0$ 의 해는

$$x = \frac{\pi}{2}$$

(ii) $\cos x = -\sin x$ 일 때

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -1 \quad (\cos x \neq 0) \text{이므로}$$

$$\tan x = -1$$

$0 \leq x < \pi$ 에서 $\tan x = -1$ 의 해는

$$x = \frac{3}{4}\pi$$

(i), (ii)에서 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{3}{4}\pi$ 이므로

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{3}{4}\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$$

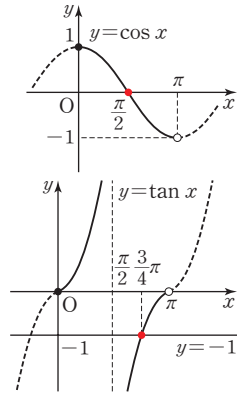
정답 ③

참고 (ii)에서 $\cos x = 0$ 이면 $x = \frac{\pi}{2}$ ($\because 0 \leq x < \pi$)

그런데 $x = \frac{\pi}{2}$ 이면 $\sin x = 1$ 이므로 $\cos x \neq -\sin x$

따라서 $\cos x = -\sin x$ 이려면 $x \neq \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \cos x \neq 0$$



477

$f(x) = \sin x$ 라고 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = \frac{\pi}{2}$ 에 대하여 대칭이다.

이때 $0 \leq x \leq \pi$ 이고 $f(\alpha) = f(\beta) = k$ 이므로

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \alpha + \beta = \pi$$

정답 π

참고 $\pi \leq x \leq 2\pi$ 이고 $f(\alpha) = f(\beta) = k$ ($-1 < k < 0$)이면

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{2}\pi \quad \therefore \alpha + \beta = 3\pi$$

478

$f(x) = \cos x$ 라고 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = \pi$ 에 대하여 대칭이다.

이때 $0 < x < 2\pi$ 이고 $f(\alpha) = f(\beta) = \frac{3}{5}$ 이므로

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \pi \quad \therefore \alpha + \beta = 2\pi$$

$$\therefore \sin\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

정답 ②

479

$f(x) = \tan x$ 라고 하면 $f(a) = f(c) = k$ 이므로

$$c - a = \pi$$

또, $f(b) = f(d) = 2k$ 이므로

$$d - b = \pi$$

$$\therefore d + c - a - b = (d - b) + (c - a) = \pi + \pi = 2\pi$$

정답 ③

480

$f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$ 라고 하면

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $\pi \leq x < 2\pi$ 에서 직선 $x=\frac{3}{2}\pi$ 에 대하여

대칭이고, $f(c)=f(d)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$$\frac{c+d}{2}=\frac{3}{2}\pi \quad \therefore c+d=3\pi$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 직선 $x=\pi$ 에 대하여

대칭이고 $g(a)=g(b)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$$\frac{a+b}{2}=\pi \quad \therefore a+b=2\pi$$

$$\therefore \cos \frac{a+b+c+d}{2} = \cos \frac{2\pi+3\pi}{2} = \cos \frac{5}{2}\pi$$

$$= \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

정답_ 0

다른 풀이

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는

$$x = \frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는

$$x = \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{6}\pi$$

따라서 $a=\frac{5}{6}\pi$, $b=\frac{7}{6}\pi$, $c=\frac{4}{3}\pi$, $d=\frac{5}{3}\pi$ 이므로

$$\cos \frac{a+b+c+d}{2} = \cos \frac{\frac{5}{6}\pi + \frac{7}{6}\pi + \frac{4}{3}\pi + \frac{5}{3}\pi}{2}$$

$$= \cos \frac{5}{2}\pi = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

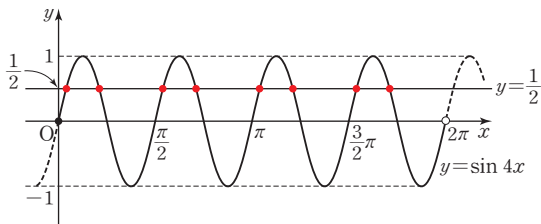
481

방정식 $\sin 4x = \frac{1}{2}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=\sin 4x$ 의

그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$ 의 교점의 개수와 같다.

이때 함수 $y=\sin 4x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수

$y=\sin 4x$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$ 은 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=\sin 4x$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$ 의 교점은 8개이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 8이다.

정답_ ④

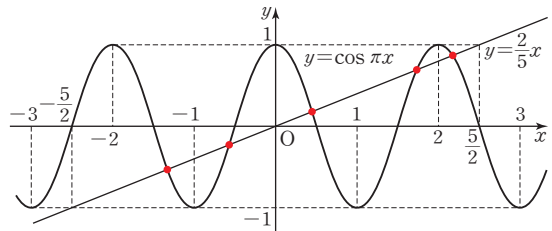
482

방정식 $\cos \pi x = \frac{2}{5}x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=\cos \pi x$

의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{5}x$ 의 교점의 개수와 같다.

함수 $y=\cos \pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$ 이고 $y=\frac{2}{5}x$ 에서 $y=1$ 이면

$x=\frac{5}{2}$, $y=-1$ 이면 $x=-\frac{5}{2}$ 이므로 그 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=\cos \pi x$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{5}x$ 의 교점은 5개이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

정답_ ③

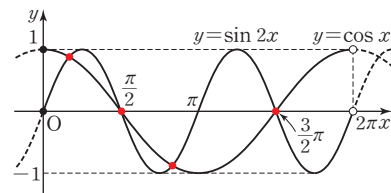
483

방정식 $\sin 2x = \cos x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수

$y=\sin 2x$ 와 함수 $y=\cos x$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.

이때 함수 $y=\sin 2x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$ 이므로 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수

$y=\sin 2x$ 와 함수 $y=\cos x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=\sin 2x$ 와 함수 $y=\cos x$ 의 그래프의 교점은 4개이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

정답_ 4

484

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(3\pi - x) + k \text{에서}$$

$$\cos x = -\cos x + k \quad \therefore 2 \cos x = k$$

이 방정식이 하나의 실근을 가지려면

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y=2 \cos x$ 의

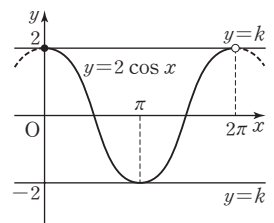
그래프와 직선 $y=k$ 가 한 점에서 만

나야 하므로 오른쪽 그림과 같이

$k=2$ 또는 $k=-2$ 이어야 한다.

따라서 $M=2$, $m=-2$ 이므로

$$M-m=2-(-2)=4$$



정답_ ⑤

485

$2 \cos^2 x - 2 \sin x = k$ 에서

$$2(1 - \sin^2 x) - 2 \sin x = k$$

$$-2 \sin^2 x - 2 \sin x + 2 = k$$

이 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y = -2 \sin^2 x - 2 \sin x + 2$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점이 존재해야 한다.

$\sin x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면

$$y = -2t^2 - 2t + 2$$

$$= -2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$$

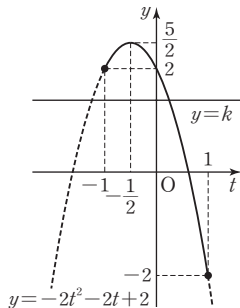
함수 $y = -2t^2 - 2t + 2$ 의 그래프는 오

른쪽 그림과 같으므로 $t = -\frac{1}{2}$ 일 때

최댓값 $\frac{5}{2}$, $t = 1$ 일 때 최솟값 -2 를
갖는다.

따라서 주어진 방정식이 실근을 갖도록 하는 실수 k 의 값의 범위는

$$-2 \leq k \leq \frac{5}{2}$$



정답 $-2 \leq k \leq \frac{5}{2}$

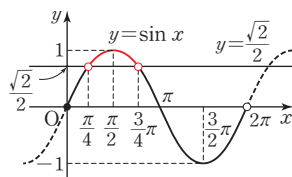
486

(1) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는 함수

$y = \sin x$ 의 그래프가 직선

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 보다 위쪽에 있는 x 의
값의 범위이므로

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

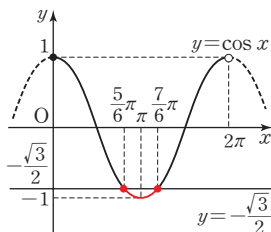


(2) $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는 함수

$y = \cos x$ 의 그래프가 직선

$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 과 만나거나 그 아래
쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로

$$\frac{5\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$$



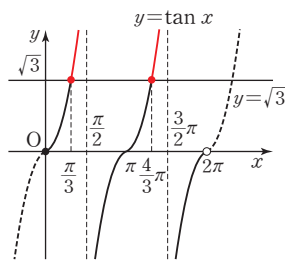
(3) $\tan x \geq \sqrt{3}$ 의 해는 함수

$y = \tan x$ 의 그래프가 직선

$y = \sqrt{3}$ 과 만나거나 그 위쪽에
있는 x 의 값의 범위이므로

$$\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ 또는}$$

$$\frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{3\pi}{2}$$



정답 (1) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ (2) $\frac{5\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$

(3) $\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{3\pi}{2}$

487

부등식 $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는 함수

$y = \sin x$ 의 그래프가 직선

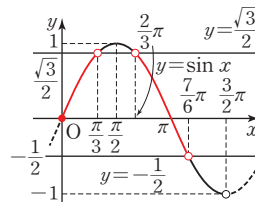
$y = -\frac{1}{2}$ 보다 위쪽에 있고 직선

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 보다 아래쪽에 있는 x 의 값의

범위이다.

$$\therefore 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{6}$$

따라서 해가 될 수 없는 것은 ⑤ $\frac{4\pi}{3}$ 이다.



정답 ⑤

488

$2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) < 1$ 에서

$$\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}$$

$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-\frac{\pi}{3} \leq \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}$ 이므로

$$-\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{2\pi}{3}$$

이때 주어진 부등식은 $\cos t < \frac{1}{2}$

$-\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{2\pi}{3}$ 에서 부등식 $\cos t < \frac{1}{2}$ 의

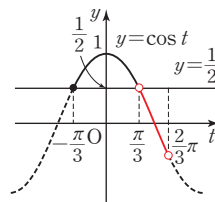
해는

$$\frac{\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} < \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3} \quad \therefore \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi$$

따라서 $a = \frac{4\pi}{3}$, $b = 2\pi$ 이므로

$$b - a = 2\pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$



정답 ①

489

(i) $2^{x+1} > 4$ 에서

$$2^{x+1} > 2^2$$

즉, $x+1 > 2$ 이므로 $x > 1$

이때 $0 \leq x < 2\pi$ 이므로 $1 < x < 2\pi$

(ii) $2 \sin(\pi + x) \leq -1$ 에서

$$-2 \sin x \leq -1$$

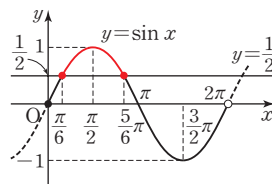
$$\therefore \sin x \geq \frac{1}{2}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 $\sin x \geq \frac{1}{2}$ 의 해

$$\text{는 } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$$

(i), (ii)에서 주어진 연립부등식의

해는 $1 < x \leq \frac{5\pi}{6}$



정답 $1 < x \leq \frac{5\pi}{6}$

490

$\sin \frac{\pi}{7} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = \cos \frac{5}{14}\pi$ 이므로 주어진 부등식은

$\cos x \leq \cos \frac{5}{14}\pi$ 와 같다.

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수

$y = \cos x$ 의 그래프와 직선

$y = \cos \frac{5}{14}\pi$ 가 만나는 두 점

의 x 좌표를 각각 a, b ($a < b$)

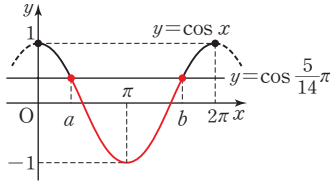
라고 하면

$$a = \frac{5}{14}\pi, b = 2\pi - a = 2\pi - \frac{5}{14}\pi = \frac{23}{14}\pi$$

따라서 주어진 부등식의 해는 $\frac{5}{14}\pi \leq x \leq \frac{23}{14}\pi$ 이므로

$$\alpha = \frac{5}{14}\pi, \beta = \frac{23}{14}\pi$$

$$\therefore \beta - \alpha = \frac{23}{14}\pi - \frac{5}{14}\pi = \frac{9}{7}\pi$$



정답 ③

491

$2 \cos^2 x + 5 \sin x + 1 < 0$ 에서

$2(1 - \sin^2 x) + 5 \sin x + 1 < 0, 2 \sin^2 x - 5 \sin x - 3 > 0$

$(2 \sin x + 1)(\sin x - 3) > 0$

이때 $\sin x - 3 < 0$ 이므로

$$2 \sin x + 1 < 0 \quad \therefore \sin x < -\frac{1}{2}$$

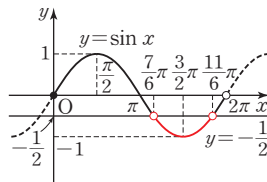
$0 \leq x < 2\pi$ 에서 부등식

$\sin x < -\frac{1}{2}$ 의 해는

$$\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$$

따라서 $a = \frac{7}{6}\pi, b = \frac{11}{6}\pi$ 이므로

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{11}{6}\pi}{\frac{7}{6}\pi} = \frac{11}{7}$$



정답 11/7

492

$2 \cos^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos x - 1 \geq 0$ 에서

$2 \sin^2 x + \cos x - 1 \geq 0, 2(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 \geq 0$

$2 \cos^2 x - \cos x - 1 \leq 0, (2 \cos x + 1)(\cos x - 1) \leq 0$

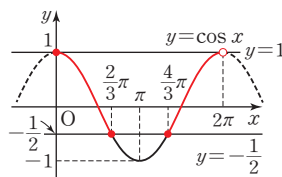
$$\therefore -\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 부등식

$-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$ 의 해는

$$0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{4}{3}\pi \leq x < 2\pi$$

따라서 해가 아닌 것은 ④ π 이다.



정답 ④

493

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos x > 0$ 이므로 주어진 부등식의 양변을 $\cos^2 x$ 로 나누어 정리하면

$$(\sqrt{3} \tan x - 1)(\tan x - \sqrt{3}) < 0 \quad \therefore \frac{\sqrt{3}}{3} < \tan x < \sqrt{3}$$

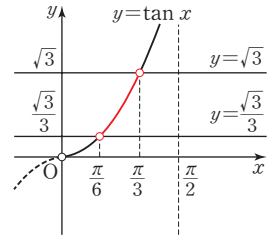
$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 부등식

$\frac{\sqrt{3}}{3} < \tan x < \sqrt{3}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$$

따라서 $a = \frac{\pi}{6}, b = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$b - a = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$



정답 ④

494

$x + \frac{\pi}{6} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서

$$\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi \quad \therefore \frac{\pi}{6} \leq t < \frac{13}{6}\pi$$

이때 $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right) = \cos t$ 이므로 주어진 부등식은

$2 \cos^2 t - \sqrt{3} \sin t + 1 \leq 0$

$2(1 - \sin^2 t) - \sqrt{3} \sin t + 1 \leq 0, 2 \sin^2 t + \sqrt{3} \sin t - 3 \geq 0$

$(2 \sin t - \sqrt{3})(\sin t + \sqrt{3}) \geq 0$

이때 $\sin t + \sqrt{3} > 0$ 이므로

$$2 \sin t - \sqrt{3} \geq 0 \quad \therefore \sin t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

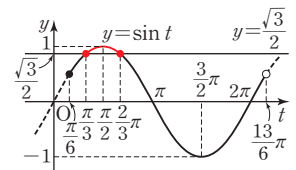
$\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{13}{6}\pi$ 에서 부등식

$\sin t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}\pi \text{ 이므로}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$



정답 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

495

$\cos^2 x + 6 \sin x \leq k + 1$ 에서

$(1 - \sin^2 x) + 6 \sin x \leq k + 1$

$\sin^2 x - 6 \sin x + k \geq 0$

$\sin x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면

$t^2 - 6t + k \geq 0$

$f(t) = t^2 - 6t + k$ 라고 하면

$f(t) = t^2 - 6t + k = (t - 3)^2 + k - 9$

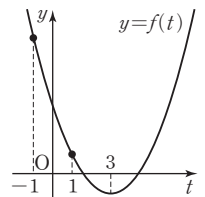
함수 $y = f(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과

같고 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 $f(t) \geq 0$ 이라면

$f(1) \geq 0$ 이어야 한다.

즉, $f(1) = k - 5 \geq 0$ 이므로 $k \geq 5$

따라서 주어진 부등식이 항상 성립하기 위한 k 의 최솟값은 5이다.



정답 5

496

이차방정식 $x^2 - 4x \sin \theta + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-2 \sin \theta)^2 - 3 = 0$$

$$4 \sin^2 \theta = 3 \quad \therefore \sin^2 \theta = \frac{3}{4}$$

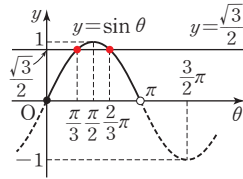
이때 $0 \leq \theta < \pi$ 에서 $\sin \theta \geq 0$ 이므로 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leq \theta < \pi$ 에서 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{또는} \quad \theta = \frac{2\pi}{3}$$

따라서 구하는 모든 θ 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$$



정답_ ③

497

이차방정식 $6x^2 + (4 \cos \theta)x + \sin \theta = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (2 \cos \theta)^2 - 6 \sin \theta < 0$$

$$4 \cos^2 \theta - 6 \sin \theta < 0, \quad 4(1 - \sin^2 \theta) - 6 \sin \theta < 0$$

$$2 \sin^2 \theta + 3 \sin \theta - 2 > 0, \quad (2 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 2) > 0$$

이때 $\sin \theta + 2 > 0$ 이므로

$$2 \sin \theta - 1 > 0 \quad \therefore \sin \theta > \frac{1}{2}$$

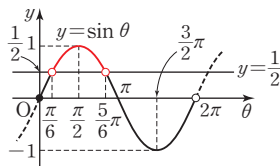
$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 부등식 $\sin \theta > \frac{1}{2}$ 의

해는

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5\pi}{6}$ 이므로

$$3\alpha + \beta = 3 \times \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$$



정답_ ④

498

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2x + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 0$ 이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지려면 두 근의 곱이 음수이어야 한다.

즉, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta < 0$$

$$(1 - \cos^2 \theta) - \cos^2 \theta < 0, \quad 2 \cos^2 \theta - 1 > 0$$

$$(\sqrt{2} \cos \theta - 1)(\sqrt{2} \cos \theta + 1) > 0$$

$$\therefore \cos \theta > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{또는} \quad \cos \theta < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서

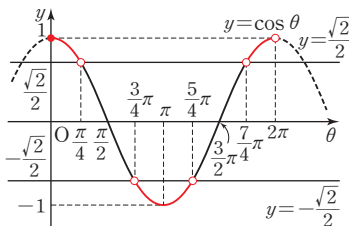
(i) $\cos \theta > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{4} \quad \text{또는}$$

$$\frac{7\pi}{4} < \theta < 2\pi$$

(ii) $\cos \theta < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는

$$\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4}$$



(i), (ii)에서 주어진 조건을 만족시키는 θ 의 값의 범위는

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{4} \quad \text{또는} \quad \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4} \quad \text{또는} \quad \frac{7\pi}{4} < \theta < 2\pi$$

따라서 θ 의 값이 아닌 것은 ④ $\frac{3\pi}{2}$ 이다.

정답_ ④

499

$f(x) = x^2 - 3x \tan \theta + 2$ 라 하고, 방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면 $\alpha < 1 < \beta$ 이어야 하므로

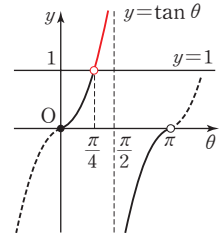
$$f(1) < 0$$

즉, $1 - 3 \tan \theta + 2 < 0$ 이어야 하므로

$$\tan \theta > 1$$

$0 \leq \theta < \pi$ 에서 부등식 $\tan \theta > 1$ 의 해는

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$$



정답_ ②

500

함수 $y = 4 \sin \frac{\pi}{6}x$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12 \text{이므로 함수}$$

$y = 4 \sin \frac{\pi}{6}x$ 의 그래프는 점

(3, 4)를 지난다.

따라서 두 점 B, C는 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이다.

이때 $B(b, 0), C(c, 0)$ 이라고 하면

$$\frac{b+c}{2} = 3$$

$$\therefore b+c=6$$

$$\text{또, } \overline{BC} = 4 \text{이므로}$$

$$c-b=4$$

①, ④을 연립하여 풀면

$$b=1, c=5$$

$$\therefore B(1, 0), C(5, 0) \quad \dots\dots ①$$

한편, $x=1$ 일 때 $y = 4 \sin \frac{\pi}{6} = 2$ 이므로

$$A(1, 2) \quad \dots\dots ②$$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$$\overline{AB} \times \overline{BC} = 2 \times 4 = 8 \quad \dots\dots ③$$

정답_ 8

채점 기준	비율
① 점 B, C의 좌표 구하기	50 %
② 점 A의 좌표 구하기	30 %
③ 직사각형 ABCD의 넓이 구하기	20 %

501

함수 $f(x) = a \sin bx + c$ 에서 $a > 0$ 이므로 최댓값은 $a+c$, 최솟값은 $-a+c$ 이다.

조건 ㉞에서 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 -6 이므로

$$(a+c) + (-a+c) = -6 \text{에서}$$

$$2c = -6 \quad \therefore c = -3$$

$f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 12이므로

$$(a+c) - (-a+c) = 12 \text{에서}$$

$$2a = 12 \quad \therefore a = 6 \dots\dots\dots ①$$

조건 ④에서 함수 $f(x)$ 의 주기는 4π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi \quad \therefore b = \frac{1}{2} \dots\dots\dots ②$$

따라서 $f(x) = 6 \sin \frac{1}{2}x - 3$ 이고, 이 함수의 그래프가 점 $(k, 0)$ 을 지나므로

$$6 \sin \frac{k}{2} - 3 = 0 \quad \therefore \sin \frac{k}{2} = \frac{1}{2}$$

이때 $0 \leq k \leq \pi$ 에서 $0 \leq \frac{k}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\frac{k}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \therefore k = \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots ③$$

정답 $\frac{\pi}{3}$

채점 기준	비율
① a, c 의 값 구하기	40 %
② b 의 값 구하기	20 %
③ k 의 값 구하기	40 %

502

$$\frac{\cos(-\theta)}{\cos(\pi+\theta) \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)} - \frac{\sin(-\theta) \tan^2(\pi-\theta)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)}$$

$$= \frac{\cos \theta}{-\cos \theta \times (-\cos \theta)^2} - \frac{-\sin \theta \times (-\tan \theta)^2}{\sin \theta}$$

$$= -\frac{1}{\cos^2 \theta} + \tan^2 \theta \dots\dots\dots ①$$

$$= -\frac{1-\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \dots\dots\dots ②$$

$$= -\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= -1 \dots\dots\dots ③$$

정답 -1

채점 기준	비율
① 여러 가지 각에 대한 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 식 정리하기	40 %
② $\sin \theta, \cos \theta$ 에 대한 식으로 정리하기	30 %
③ 주어진 식의 값 구하기	30 %

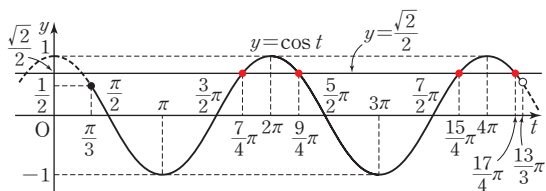
503

$2x + \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{13}{3}\pi$ 이므로

$$\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{13}{3}\pi$$

이때 주어진 방정식은

$$\sqrt{2} \cos t = 1 \quad \therefore \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots ①$$



$\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{13}{3}\pi$ 에서 방정식 $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는

$$t = \frac{7}{4}\pi \text{ 또는 } t = \frac{9}{4}\pi \text{ 또는 } t = \frac{15}{4}\pi \text{ 또는 } t = \frac{17}{4}\pi \dots\dots\dots ②$$

$$\text{즉, } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{7}{4}\pi \text{ 또는 } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{9}{4}\pi \text{ 또는 } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{15}{4}\pi \text{ 또는}$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = \frac{17}{4}\pi \text{이므로}$$

$$x = \frac{17}{24}\pi \text{ 또는 } x = \frac{23}{24}\pi \text{ 또는 } x = \frac{41}{24}\pi \text{ 또는 } x = \frac{47}{24}\pi$$

따라서 모든 근의 합은

$$\frac{17}{24}\pi + \frac{23}{24}\pi + \frac{41}{24}\pi + \frac{47}{24}\pi = \frac{16}{3}\pi \dots\dots\dots ③$$

정답 $\frac{16}{3}\pi$

채점 기준	비율
① $2x + \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓고 주어진 방정식을 t 에 대한 식으로 정리하기	20 %
② $\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{13}{3}\pi$ 에서 $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해 구하기	40 %
③ 모든 근의 합 구하기	40 %

504

방정식 $|2 \sin \frac{\pi}{3}x| = \frac{1}{2}x - 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수

$y = |2 \sin \frac{\pi}{3}x|$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}x - 1$ 의 교점의 개수와 같다. $\dots\dots\dots ①$

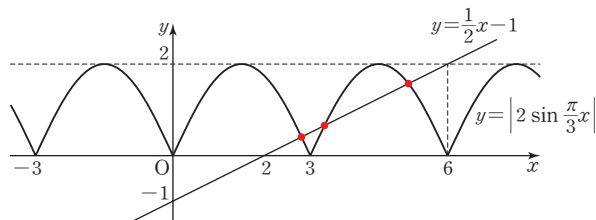
함수 $y = |2 \sin \frac{\pi}{3}x|$ 의 그래프는 $y = 2 \sin \frac{\pi}{3}x$ 의 그래프를 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분은 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

함수 $y = 2 \sin \frac{\pi}{3}x$ 는 최댓값이 2, 최솟값이 -2 , 주기가 $\frac{2\pi}{3} = 6$ 이

므로 함수 $y = |2 \sin \frac{\pi}{3}x|$ 의 최댓값은 2, 최솟값은 0, 주기는 3이다.

또, 직선 $y = \frac{1}{2}x - 1$ 에서 $y = 2$ 이면 $x = 6$, $y = 0$ 이면 $x = 2$ 이므로

함수 $y = |2 \sin \frac{\pi}{3}x|$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}x - 1$ 은 다음 그림과 같다.



$\dots\dots\dots ②$

따라서 함수 $y = |2 \sin \frac{\pi}{3}x|$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}x - 1$ 의 교점은 3개이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. $\dots\dots\dots ③$

정답 3

채점 기준	비율
① 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y = \left 2 \sin \frac{\pi}{3} x \right $ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}x - 1$ 의 교점의 개수와 같음을 알기	25%
② 함수 $y = \left 2 \sin \frac{\pi}{3} x \right $ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}x - 1$ 그리기	50%
③ 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수 구하기	25%

505

$$\cos\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \text{이므로}$$

$$2 \cos^2\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) - 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 \leq 0 \text{에서}$$

$$2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 \leq 0 \dots\dots\dots ①$$

$$x - \frac{\pi}{6} = t \text{로 놓으면 } 0 \leq x < 2\pi \text{에서 } -\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi \text{이므로}$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11}{6}\pi$$

이때 주어진 부등식은

$$2 \sin^2 t - 3 \sin t + 1 \leq 0, (2 \sin t - 1)(\sin t - 1) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq \sin t \leq 1$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11}{6}\pi \text{에서}$$

부등식 $\frac{1}{2} \leq \sin t \leq 1$ 의 해는

$$\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{5}{6}\pi \dots\dots\dots ②$$

$$\text{즉, } \frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5}{6}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi \dots\dots\dots ③$$

정답_ $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$

채점 기준	비율
① 주어진 부등식을 사인함수만으로 이루어진 부등식으로 변형하기	30%
② $x - \frac{\pi}{6} = t$ 로 놓고 부등식 풀기	50%
③ 주어진 부등식의 해 구하기	20%

506

$f(x)$ 의 주기가 p 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = f(x+p) = f(x+2p) = f(x+3p) = \dots\dots\dots ①$$

를 만족시킨다.

①에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(p) = f(2p) = f(3p) = \dots$$

$$\therefore f(p) + f(2p) + f(3p) + f(4p) + f(5p)$$

$$= 5f(0)$$

$$= 5 \times \frac{\sin 0 + \cos 0 + 2}{1 - 2 \sin 0}$$

$$= 5 \times 3 = 15$$

정답_ ⑤

507

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } 0 < \cos \theta < \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \theta < 1 \text{이므로}$$

$$0 < \cos \theta < \sin \theta < 1$$

즉, 함수 $y = (\cos \theta)^x$ 은 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소한다.

이때 $0 < \cos \theta < \sin \theta$ 이므로

$$(\cos \theta)^{\sin \theta} < (\cos \theta)^{\cos \theta}$$

$$\therefore B < A \dots\dots\dots ㉠$$

또, A 와 C 에서 밑은 $0 < \cos \theta < \sin \theta$ 이고 지수는 $\cos \theta$ 로 같으므로

$$(\cos \theta)^{\cos \theta} < (\sin \theta)^{\cos \theta}$$

$$\therefore A < C \dots\dots\dots ㉡$$

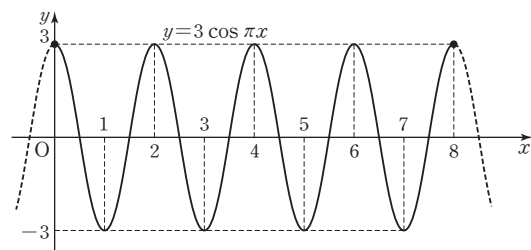
$$\text{㉠, ㉡에서 } B < A < C$$

정답_ $B < A < C$

508

함수 $y = 3 \cos \pi x$ 는 최댓값이 3, 최솟값이 -3 , 주기가 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ 이

므로 $0 \leq x \leq 8$ 에서 함수 $y = 3 \cos \pi x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) y 좌표가 -3 일 때

y 좌표가 -3 인 점의 개수는 함수 $y = 3 \cos \pi x$ 의 그래프와 직선 $y = -3$ 의 교점의 개수와 같으므로 그 개수는 4

(ii) y 좌표가 $-2, -1, 0, 1, 2$ 일 때

y 좌표가 -2 인 점의 개수는 함수 $y = 3 \cos \pi x$ 의 그래프와 직선 $y = -2$ 의 교점의 개수와 같으므로 그 개수는 8

y 좌표가 $-1, 0, 1, 2$ 인 경우도 마찬가지이므로 y 좌표가 $-2, -1, 0, 1, 2$ 인 점의 개수는 $5 \times 8 = 40$

(iii) y 좌표가 3일 때

y 좌표가 3인 점의 개수는 함수 $y = 3 \cos \pi x$ 의 그래프와 직선 $y = 3$ 의 교점의 개수와 같으므로 그 개수는 5

(i)~(iii)에서 y 좌표가 정수인 점의 개수는

$$4 + 40 + 5 = 49$$

정답_ 49

509

함수 $y = a \sin bt$ 의 주기가 5초이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 5 \quad \therefore b = \frac{2}{5}\pi$$

함수 $y = a \sin bt$ 의 최댓값이 0.6(리터/초)이고 $a > 0$ 이므로

$$a = 0.6$$

따라서 $y=0.6 \sin \frac{2}{5}\pi t$ 이므로 처음으로 흡입률이 -0.3 (리터/초) 일 때에는
 $-0.3=0.6 \sin \frac{2}{5}\pi t$ 에서 $\sin \frac{2}{5}\pi t = -\frac{1}{2}$
 이때 $0 \leq t \leq 5$ 에서 $0 \leq \frac{2}{5}\pi t \leq 2\pi$ 이므로
 $\frac{2}{5}\pi t = \frac{7}{6}\pi \quad \therefore t = \frac{35}{12}$ (초)

정답_ ③

510

주어진 함수 $y=\tan ax$ 의 그래프에서 주기가 2이고 $a>0$ 이므로
 $\frac{\pi}{a}=2 \quad \therefore a=\frac{\pi}{2}$

한편, $-1 < x < 1$ 에서 함수

$y=\tan \frac{\pi}{2}x$ 의 그래프는 원점에 대

하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서
 ㉠과 ㉡의 넓이가 같다.

마찬가지로 ㉢과 ㉣의 넓이도 같으
 므로 함수 $y=\tan \frac{\pi}{2}x$ 의 그래프와

두 직선 $y=b, y=-b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 가로가 2, 세로
 가 $2b$ 인 직사각형의 넓이와 같다.

즉, $2 \times 2b = 4b$ 에서

$4b=8 \quad \therefore b=2$

$\therefore ab = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$

정답_ π

511

직선 AB가 y 축과 일치하므로 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의
 발을 H라고 하면

$$\overline{CH} = \left| m \cos \frac{n\pi}{3} \right|$$

이때 m 은 1, 2, 3, 4, 5, 6의 자연수이므로

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH}$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times \left| m \cos \frac{n\pi}{3} \right|$$

$$= 4m \left| \cos \frac{n\pi}{3} \right|$$

$$4m \left| \cos \frac{n\pi}{3} \right| < 12 \text{ 이려면}$$

$$m \left| \cos \frac{n\pi}{3} \right| < 3 \text{ 이어야 한다.}$$

이때 n 의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로

$$n=1 \text{ 일 때, } \left| \cos \frac{\pi}{3} \right| = \frac{1}{2}$$

$$n=2 \text{ 일 때, } \left| \cos \frac{2\pi}{3} \right| = \left| \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right| = \left| -\cos \frac{\pi}{3} \right| = \frac{1}{2}$$

$$n=3 \text{ 일 때, } \left| \cos \frac{3\pi}{3} \right| = \left| \cos \pi \right| = 1$$

$$n=4 \text{ 일 때, } \left| \cos \frac{4\pi}{3} \right| = \left| \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) \right| = \left| -\cos \frac{\pi}{3} \right| = \frac{1}{2}$$

$$n=5 \text{ 일 때, } \left| \cos \frac{5\pi}{3} \right| = \left| \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right| = \left| \cos \frac{\pi}{3} \right| = \frac{1}{2}$$

$$n=6 \text{ 일 때, } \left| \cos \frac{6\pi}{3} \right| = \left| \cos 2\pi \right| = 1$$

즉, $\left| \cos \frac{n\pi}{3} \right|$ 의 값은

$n=1, 2, 4, 5$ 일 때 $\frac{1}{2}$, $n=3, 6$ 일 때 1이다.

(i) $\left| \cos \frac{n\pi}{3} \right| = \frac{1}{2}$ 일 때

$$m \left| \cos \frac{n\pi}{3} \right| < 3 \text{ 에서 } \frac{1}{2}m < 3 \quad \therefore m < 6$$

따라서 자연수 m 은 1, 2, 3, 4, 5의 5개이고, n 은 1, 2, 4, 5의
 4개이므로 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$5 \times 4 = 20$$

(ii) $\left| \cos \frac{n\pi}{3} \right| = 1$ 일 때

$$m \left| \cos \frac{n\pi}{3} \right| < 3 \text{ 에서 } m < 3$$

따라서 자연수 m 은 1, 2의 2개이고, n 은 3, 6의 2개이므로 순
 서쌍 (m, n) 의 개수는

$$2 \times 2 = 4$$

(i), (ii)에서 삼각형 ABC의 넓이가 12보다 작은 경우의 수는

$$20 + 4 = 24$$

한편, 주사위를 두 번 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

정답_ ④

512

각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여
 대칭이므로

$$\theta + 5\theta = 2n\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수이다.})$$

$$6\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{n}{3}\pi$$

..... ㉠

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 에서 } 0 < \frac{n}{3}\pi < \frac{\pi}{2} \quad \therefore 0 < n < \frac{3}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=1$

이 값을 ㉠에 대입하면 $\theta = \frac{\pi}{3}$

이때 $3\theta = \pi, 6\theta = 2\pi$ 이므로

$$\sin 3\theta = \sin \pi = 0$$

$$\sin 4\theta = \sin (3\theta + \theta) = \sin (\pi + \theta) = -\sin \theta$$

$$\sin 5\theta = \sin (3\theta + 2\theta) = \sin (\pi + 2\theta) = -\sin 2\theta$$

$$\sin 6\theta = \sin 2\pi = 0$$

$$\sin 7\theta = \sin (6\theta + \theta) = \sin (2\pi + \theta) = \sin \theta$$

$$\sin 8\theta = \sin (6\theta + 2\theta) = \sin (2\pi + 2\theta) = \sin 2\theta$$

$$\therefore \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \cdots + \sin 8\theta$$

$$= \sin \theta + \sin 2\theta + 0 - \sin \theta - \sin 2\theta + 0 + \sin \theta + \sin 2\theta$$

$$= \sin \theta + \sin 2\theta = \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$= \sin \frac{\pi}{3} + \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

정답_ ④

참고 두 동경이 나타내는 각의 크기를 각각 α, β 라고 할 때, 두 동경이 x 축에
 대하여 대칭이면
 $\alpha + \beta = 2n\pi$ (단, n 은 정수이다.)

513

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5}{12} \pi \right) = \cos^2 \frac{5}{12} \pi$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{6} = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = \cos^2 \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{5}{12} \pi \\ = \cos^2 \frac{5}{12} \pi + \cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{5}{12} \pi \\ = \left(\cos^2 \frac{5}{12} \pi + \sin^2 \frac{5}{12} \pi \right) + \left(\cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3} \right) + \sin^2 \frac{\pi}{4} \\ = 1 + 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

정답 ⑤

514

$\tan x = t$ 로 놓으면

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{에서 } \tan x \geq 1 \text{이므로}$$

$$t \geq 1$$

이때 주어진 방정식은

$$y = t^2 - 2at + a = (t-a)^2 - a^2 + a$$

(i) $a < 1$ 일 때

$t=1$ 에서 최솟값 $1-a$ 를 갖는다.

즉, $1-a = -6$ 이므로 $a=7$

이때 $a=7$ 은 $a < 1$ 을 만족시키지 않는다.

(ii) $a \geq 1$ 일 때

$t=a$ 에서 최솟값 $-a^2+a$ 를 갖는다.

즉, $-a^2+a = -6$ 이므로 $a^2-a-6=0$

$$(a+2)(a-3)=0 \quad \therefore a=3 \quad (\because a \geq 1)$$

(i), (ii)에서 $a=3$

정답 ①

515

$$\begin{aligned} y &= \frac{4 \sin^2 x + 1}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} = \frac{4 \sin^2 x + 1}{\sin x} \\ &= 4 \sin x + \frac{1}{\sin x} \end{aligned}$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4 \sin x + \frac{1}{\sin x} \geq 2 \sqrt{4 \sin x \times \frac{1}{\sin x}} = 4$$

(단, 등호는 $4 \sin x = \frac{1}{\sin x}$ 일 때 성립한다.)

따라서 주어진 함수의 최솟값은 4이므로

$$b=4$$

등호는 $4 \sin x = \frac{1}{\sin x}$ 일 때 성립하므로

$$4 \sin^2 x = 1 \quad \therefore \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

이때 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin x > 0$ 이므로

$$\sin x = \frac{1}{2}, x = \frac{\pi}{6} \quad \therefore a = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore ab = \frac{\pi}{6} \times 4 = \frac{2}{3} \pi$$

정답 ②

516

함수 $f(x) = 2 \sin \frac{1}{4}(x-\pi)$ ($0 \leq x \leq 10\pi$)의 그래프와 직선 $y=1$

이 만나는 점의 x 좌표는 방정식 $2 \sin \frac{1}{4}(x-\pi) = 1$ 의 해와 같다.

$$\frac{1}{4}(x-\pi) = t \text{로 놓으면}$$

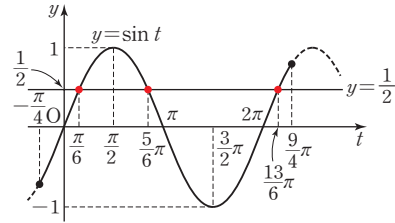
$$0 \leq x \leq 10\pi \text{에서 } -\frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{4}(x-\pi) \leq \frac{9}{4}\pi \text{이므로}$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{9}{4}\pi$$

이때 주어진 함수는 $y = 2 \sin t$ 이므로 방정식 $2 \sin t = 1$, 즉

$$\sin t = \frac{1}{2} \text{의 해는}$$

$$t = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } t = \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } t = \frac{13}{6}\pi$$



$$\text{즉, } \frac{1}{4}(x-\pi) = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{1}{4}(x-\pi) = \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{1}{4}(x-\pi) = \frac{13}{6}\pi$$

$$\text{이므로 } x = \frac{5}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{13}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{29}{3}\pi$$

따라서 함수 $y = 2 \sin \frac{1}{4}(x-\pi)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 이 만나는

점의 좌표는

$$\left(\frac{5}{3}\pi, 1 \right), \left(\frac{13}{3}\pi, 1 \right), \left(\frac{29}{3}\pi, 1 \right)$$

삼각형 PAB의 넓이는 밑변의 길이와 높이가 모두 최대일 때 최댓값을 갖는다.

삼각형 PAB의 밑변을 $\overline{AB}$ 로 놓으면 $\overline{AB}$ 의 최댓값은

$$\frac{29}{3}\pi - \frac{5}{3}\pi = 8\pi$$

$0 \leq x \leq 10\pi$ 에서 함수 $f(x) = 2 \sin \frac{1}{4}(x-\pi)$ 의 그래프는 최댓값

이 2, 최솟값이 -2이고, 두 점 A, B가 직선 $y=1$ 위에 있으므로 높이가 최대가 되는 경우는 점 P의 y 좌표가 -2가 될 때이다.

따라서 구하는 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 8\pi \times \{1 - (-2)\} = 12\pi$$

정답 12π

참고 구하려는 것이 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값이므로 점 P의 x 좌표를 구할 필요는 없지만 점 P의 x 좌표는 다음과 같이 구할 수 있다.

점 P는 함수 $f(x) = 2 \sin \frac{1}{4}(x-\pi)$ 의 그래프와 직선 $y=-2$ 의 교점이므로

$$2 \sin \frac{1}{4}(x-\pi) = -2 \text{에서 } \sin \frac{1}{4}(x-\pi) = -1$$

$$0 \leq x \leq 10\pi \text{에서 } -\frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{4}(x-\pi) \leq \frac{9}{4}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{1}{4}(x-\pi) = \frac{3}{2}\pi \quad \therefore x = 7\pi$$

$$\therefore P(7\pi, -2)$$

517

함수 $f(x) = \cos \frac{\pi x}{6}$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$

따라서 $0 \leq x \leq 12$ 이고 $f(a_1) = f(a_2) = k$ 이므로

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = 6 \quad \therefore a_1 + a_2 = 12 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $a_2 < a_1$ 이라고 하면 $|a_1 - a_2| = 8$ 에서

$$a_1 - a_2 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a_1 = 10, a_2 = 2$$

$$\text{즉, } k = f(a_2) = f(2) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

따라서 방정식 $g(x) = k$ 에서

$$-3 \cos \frac{\pi x}{6} - 1 = \frac{1}{2} \quad \therefore \cos \frac{\pi x}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$0 \leq x \leq 12 \text{에서 } 0 \leq \frac{\pi x}{6} \leq 2\pi \text{이므로}$$

$$\text{방정식 } \cos \frac{\pi x}{6} = -\frac{1}{2} \text{의 해는}$$

$$\frac{\pi x}{6} = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{\pi x}{6} = \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = 8$$

따라서 곡선 $y = g(x)$ 와 직선 $y = k$ 가 만나는 두 점의 x 좌표는 4, 8이므로

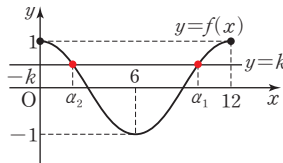
$$|\beta_1 - \beta_2| = |8 - 4| = 4$$

정답_ ③

참고 $0 \leq x \leq 12$ 에서

$f(a_1) = f(a_2) = k$ 이면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = 6$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = 6 \quad \therefore a_1 + a_2 = 12$$



518

$$y = x^2 - 2x \sin \theta + 1 = (x - \sin \theta)^2 + 1 - \sin^2 \theta$$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(\sin \theta, 1 - \sin^2 \theta)$ 이므로

$$1 - \sin^2 \theta < \sqrt{2} \sin \theta - \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 \theta + \sqrt{2} \sin \theta - \frac{3}{2} > 0$$

$$2 \sin^2 \theta + 2\sqrt{2} \sin \theta - 3 > 0$$

$$(\sqrt{2} \sin \theta - 1)(\sqrt{2} \sin \theta + 3) > 0$$

이때 $0 \leq \theta \leq \pi$ 에서 $\sqrt{2} \sin \theta + 3 > 0$ 이므로

$$\sqrt{2} \sin \theta - 1 > 0 \quad \therefore \sin \theta > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

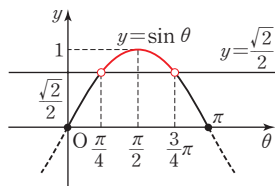
$$0 \leq \theta \leq \pi \text{에서 부등식 } \sin \theta > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

의 해는

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{\pi}{4}, b = \frac{3\pi}{4} \text{이므로}$$

$$b - a = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$



정답_ ③

519

$$\sin^2 x + (k-1) \cos x - k^2 - 1 < 0 \text{에서}$$

$$(1 - \cos^2 x) + (k-1) \cos x - k^2 - 1 < 0$$

$$\cos^2 x - (k-1) \cos x + k^2 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 에서 $-1 \leq t \leq 1$

이때 $\textcircled{1}$ 은 $t^2 - (k-1)t + k^2 > 0$ 이므로

$f(t) = t^2 - (k-1)t + k^2$ 으로 놓으면

$$f(t) = \left(t - \frac{k-1}{2}\right)^2 - \frac{(k-1)^2}{4} + k^2$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 $f(t) > 0$ 이어야 하고, 이차함수 $y = f(t)$ 의 그래프

의 꼭짓점의 t 좌표가 $\frac{k-1}{2}$ 이므로 주어진 부등식이 성립하려면 k

의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

(i) $\frac{k-1}{2} < -1$, 즉 $k < -1$ 일 때

$f(-1) > 0$ 이어야 하므로

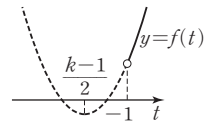
$$f(-1) = (-1)^2 - (k-1) \times (-1) + k^2 > 0$$

$$k^2 + k > 0, k(k+1) > 0$$

$$\therefore k < -1 \text{ 또는 } k > 0$$

이때 $k < -1$ 이므로

$$k < -1$$



(ii) $-1 \leq \frac{k-1}{2} < 1$, 즉 $-1 \leq k < 3$ 일 때

(꼭짓점의 y 좌표) > 0 이어야 하므로

$$-\frac{(k-1)^2}{4} + k^2 > 0$$

$$-\frac{k^2 - 2k + 1}{4} + k^2 > 0$$

$$-\frac{k^2 + 2k - 1 + 4k^2}{4} > 0$$

$$3k^2 + 2k - 1 > 0, (k+1)(3k-1) > 0$$

$$\therefore k < -1 \text{ 또는 } k > \frac{1}{3}$$

이때 $-1 \leq k < 3$ 이므로

$$\frac{1}{3} < k < 3$$

(iii) $\frac{k-1}{2} \geq 1$, 즉 $k \geq 3$ 일 때

$f(1) > 0$ 이어야 하므로

$$f(1) = 1 - (k-1) + k^2 > 0$$

$$k^2 - k + 2 > 0$$

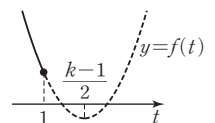
$$\text{이때 } k^2 - k + 2 = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \text{이므로}$$

로

$$f(1) > 0 \quad \therefore k \geq 3$$

(i)~(iii)에서 $k < -1$ 또는 $k > \frac{1}{3}$ 이므로 구하는 자연수 k 의 최솟값은 1이다.

정답_ 1



07 삼각함수의 활용

520

(1) 사인법칙에 의하여 $\frac{4}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ}$ 이므로

$$4 \sin 60^\circ = b \sin 45^\circ, 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = b \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore b = 2\sqrt{6}$$

(2) 사인법칙에 의하여 $\frac{6\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = \frac{6}{\sin C}$ 이므로

$$6\sqrt{3} \sin C = 6 \sin 120^\circ, 6\sqrt{3} \sin C = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sin C = \frac{1}{2}$$

$$0^\circ < C < 180^\circ \text{ 이므로 } C = 30^\circ \text{ 또는 } C = 150^\circ$$

$$\text{이때 } A + C < 180^\circ \text{ 이어야 하므로 } C = 30^\circ$$

정답_ (1) $2\sqrt{6}$ (2) 30°

521

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \text{ 이므로}$$

$$\angle C = 180^\circ - (45^\circ + 15^\circ) = 120^\circ$$

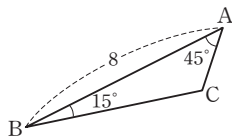
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ} = \frac{8}{\sin 120^\circ}$$

$$\overline{BC} \sin 120^\circ = 8 \sin 45^\circ$$

$$\overline{BC} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \overline{BC} = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$$



정답_ ③

522

사인법칙에 의하여 $\frac{6}{\sin A} = \frac{9}{\sin 135^\circ}$ 이므로

$$6 \sin 135^\circ = 9 \sin A, 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 9 \sin A$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$$

정답_ ④

523

$\overline{BM} = \overline{CM} = k$ ($k > 0$), $\angle BMA = \theta$ 로 놓으면

삼각형 ABM에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{k}{\sin \alpha} = \frac{12}{\sin \theta} \quad \therefore \sin \alpha = \frac{k \sin \theta}{12}$$

삼각형 AMC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{k}{\sin \beta} = \frac{8}{\sin (180^\circ - \theta)}, \frac{k}{\sin \beta} = \frac{8}{\sin \theta}$$

$$\therefore \sin \beta = \frac{k \sin \theta}{8}$$

$$\therefore \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\frac{k \sin \theta}{8}}{\frac{k \sin \theta}{12}} = \frac{3}{2}$$

정답_ ⑤

524

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 변 BC

에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

삼각형 ABH에서

$$\overline{BH} = \overline{AB} \cos 45^\circ = 2\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3}$$

삼각형 AHC에서

$$\overline{CH} = \overline{AC} \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\therefore \overline{BC} = \overline{BH} + \overline{CH} = 2\sqrt{3} + 2$$

이때 $A + B + C = 180^\circ$ 이므로

$$A = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$$

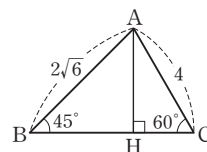
따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{3}+2}{\sin 75^\circ} = \frac{4}{\sin 45^\circ}, (2\sqrt{3}+2) \sin 45^\circ = 4 \sin 75^\circ$$

$$(2\sqrt{3}+2) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \sin 75^\circ$$

$$\therefore \sin 75^\circ = \frac{1}{4} \times (2\sqrt{3}+2) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

정답_ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$



525

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 30이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 120^\circ} = 2 \times 30$$

$$\therefore \overline{BC} = 2 \times 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$$

정답_ ④

526

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{4}{\sin C} = 2 \times 2\sqrt{2} \quad \therefore \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0^\circ < C < 180^\circ \text{ 이므로 } C = 45^\circ \text{ 또는 } C = 135^\circ$$

이때 $B + C < 180^\circ$ 이어야 하므로 $C = 45^\circ$

$$\therefore A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ$$

정답_ ①

527

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 12이므로 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C &= \frac{a}{2 \times 12} + \frac{b}{2 \times 12} + \frac{c}{2 \times 12} \\ &= \frac{a+b+c}{24} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{a+b+c}{24} = \frac{4}{3} \text{ 이므로}$$

$$a+b+c=32$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 32이다.

정답_ ⑤

528

$\overline{AC}$ 가 원의 지름이므로 $\angle ABC = 90^\circ$
 따라서 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이므로
 $\overline{AC} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4$
 $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD$ 이므로
 $90^\circ = 60^\circ + \angle CBD \quad \therefore \angle CBD = 30^\circ$
 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여
 $\frac{\overline{CD}}{\sin 30^\circ} = 2 \overline{OA}, \frac{\overline{CD}}{\sin 30^\circ} = \overline{AC}$
 $\therefore \overline{CD} = \overline{AC} \sin 30^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

정답_ ①

529

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 외접원의 넓이가 50π 이므로
 $\pi R^2 = 50\pi, R^2 = 50 \quad \therefore R = 5\sqrt{2} (\because R > 0)$
 $\overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{2} : 1$ 이므로
 $\overline{AB} = \sqrt{2}k, \overline{AC} = k (k > 0)$
 로 놓으면 직각삼각형 AHC에
 서
 $\frac{2}{\sin C} = k \quad \therefore \sin C = \frac{2}{k}$
 따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
 $\frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R, \frac{\sqrt{2}k}{\frac{2}{k}} = 2 \times 5\sqrt{2}$
 $k^2 = 20 \quad \therefore k = 2\sqrt{5} (\because k > 0)$
 즉, $\overline{AB} = \sqrt{2}k = 2\sqrt{10}$ 이므로 직각삼각형 ABH에서
 $\overline{BH} = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - 2^2} = 6$

정답_ ①

530

$A + B + C = 180^\circ$ 이므로 $A + C = 180^\circ - B$
 따라서 $\tan(A + C) = \tan(180^\circ - B) = -\tan B$ 이므로
 $9 \sin B \cos B \tan(A + C) = 9 \sin B \cos B \times (-\tan B)$
 $= -9 \sin B \cos B \times \frac{\sin B}{\cos B}$
 $= -9 \sin^2 B$
 즉, $-9 \sin^2 B = -1$ 이므로
 $\sin^2 B = \frac{1}{9}$
 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $\sin B > 0$
 $\therefore \sin B = \frac{1}{3}$
 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 3이므로 사인법칙에
 의하여
 $\frac{\overline{AC}}{\sin B} = 2 \times 3$
 $\therefore \overline{AC} = 6 \sin B = 6 \times \frac{1}{3} = 2$

정답_ 2

531

$A + B + C = 180^\circ$ 이고 $A : B : C = 1 : 2 : 3$ 이므로
 $A = 180^\circ \times \frac{1}{6} = 30^\circ$
 $B = 180^\circ \times \frac{2}{6} = 60^\circ$
 $C = 180^\circ \times \frac{3}{6} = 90^\circ$
 사인법칙에 의하여
 $a : b : c = \sin 30^\circ : \sin 60^\circ : \sin 90^\circ$
 $= \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 = 1 : \sqrt{3} : 2$
 따라서 $a = k, b = \sqrt{3}k, c = 2k (k > 0)$ 로 놓으면
 $\frac{b^2}{ac} = \frac{(\sqrt{3}k)^2}{k \times 2k} = \frac{3}{2}$

정답_ ⑤

532

$a + b = 5k, b + c = 7k, c + a = 6k (k > 0)$ ㉠
 로 놓고 위의 세 식의 양변을 변끼리 더하면
 $2a + 2b + 2c = 18k$
 $\therefore a + b + c = 9k$ ㉡
 ㉡에서 ㉠의 각 식을 빼면
 $a = 2k, b = 3k, c = 4k$
 따라서 사인법칙에 의하여
 $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 2k : 3k : 4k$
 $= 2 : 3 : 4$

정답_ ②

533

$A + B + C = 180^\circ$ 이고 $A : B : C = 2 : 1 : 1$ 이므로
 $A = 180^\circ \times \frac{2}{4} = 90^\circ$
 $B = 180^\circ \times \frac{1}{4} = 45^\circ$
 $C = 180^\circ \times \frac{1}{4} = 45^\circ$
 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙
 에 의하여
 $a = 2R \sin A = 2R \sin 90^\circ = 2R$
 $b = 2R \sin B = 2R \sin 45^\circ = \sqrt{2}R$
 $c = 2R \sin C = 2R \sin 45^\circ = \sqrt{2}R$
 이때 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 8이므로
 $a + b + c = 8, 2R + \sqrt{2}R + \sqrt{2}R = 8$
 $2(\sqrt{2} + 1)R = 8$
 $\therefore R = \frac{4}{\sqrt{2} + 1} = 4(\sqrt{2} - 1)$

정답_ ④

534

$A + B + C = 180^\circ$ 이므로
 $A + B = 180^\circ - C, B + C = 180^\circ - A, C + A = 180^\circ - B$
 $\therefore \sin(A + B) : \sin(B + C) : \sin(C + A)$
 $= \sin(180^\circ - C) : \sin(180^\circ - A) : \sin(180^\circ - B)$
 $= \sin C : \sin A : \sin B$

즉, $\sin C : \sin A : \sin B = 3 : 5 : 6$ 이므로

$$a : b : c = 5 : 6 : 3$$

따라서 $a=5k, b=6k, c=3k (k>0)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2-c^2}{ab-bc} &= \frac{(5k)^2+(6k)^2-(3k)^2}{5k \times 6k - 6k \times 3k} \\ &= \frac{52k^2}{12k^2} = \frac{13}{3}\end{aligned}$$

정답_ $\frac{13}{3}$

535

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이것을 $\sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B$ 에 대입하면

$$\left(\frac{c}{2R}\right)^2 = \left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 \quad \therefore c^2 = a^2 + b^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

정답_ ③

536

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이것을 $a \sin B = b \sin C = c \sin A$ 에 대입하면

$$a \times \frac{b}{2R} = b \times \frac{c}{2R} = c \times \frac{a}{2R} \quad \therefore ab=bc=ca$$

$ab=bc$ 에서 $b>0$ 이므로 $a=c$

..... ㉠

$ab=ca$ 에서 $a>0$ 이므로 $b=c$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 $a=b=c$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

정답_ 정삼각형

537

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-\sqrt{b} \sin B)^2 - a \sin^2 A = 0$$

$$\therefore b \sin^2 B = a \sin^2 A$$

..... ㉠

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$b \times \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = a \times \left(\frac{a}{2R}\right)^2, b^3 = a^3$$

$$a^3 - b^3 = 0, (a-b)(a^2+ab+b^2) = 0$$

$$a^2+ab+b^2 \neq 0 \text{이므로 } a=b$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

정답_ ②

538

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 2m이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 30^\circ} = 2 \times 2$$

$$\therefore \overline{BC} = 4 \sin 30^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2(\text{m})$$

따라서 두 지점 B, C 사이의 거리는 2m이다.

정답_ 2 m

539

헬리콥터의 위치를 C라고 하자.

점 A에서 헬리콥터를 올려다 본 각의 크기가 75° 이므로

$$\angle CAB = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

삼각형 ABC에서 $A+B+C=180^\circ$ 이므로

$$C = 180^\circ - (105^\circ + 30^\circ) = 45^\circ$$

사인법칙에 의하여

$$\frac{50}{\sin 45^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\sin 30^\circ}, 50 \sin 30^\circ = \overline{AC} \sin 45^\circ$$

$$50 \times \frac{1}{2} = \overline{AC} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \overline{AC} = 50 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 25\sqrt{2}(\text{m})$$

따라서 지점 A에서 헬리콥터까지의 거리는 $25\sqrt{2}$ m이다.

정답_ $25\sqrt{2}$ m

540

삼각형 ABC에서

$$\angle BAC = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ,$$

$$\angle ACB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

이므로

$$\begin{aligned}\angle ABC &= 180^\circ - (105^\circ + 30^\circ) \\ &= 45^\circ\end{aligned}$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 105^\circ} = \frac{4}{\sin 45^\circ}$$

$$\overline{BC} \sin 45^\circ = 4 \sin 105^\circ$$

이때

$$\sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

이므로

$$\overline{BC} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \overline{BC} = 4 \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{3} + 2(\text{m})$$

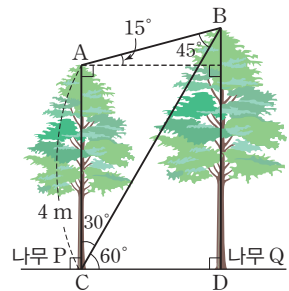
삼각형 BCD에서

$$\overline{BD} = \overline{BC} \sin 60^\circ = (2\sqrt{3} + 2) \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 3 + \sqrt{3}(\text{m})$$

따라서 나무 Q의 높이 $\overline{BD}$ 의 길이는 $(3 + \sqrt{3})$ m이다.

정답_ $(3 + \sqrt{3})$ m



541

(1) 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= (2\sqrt{3})^2 + 3^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 3 \times \cos 30^\circ \\ &= 12 + 9 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = \sqrt{3}$$

(2) 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ &= (\sqrt{2})^2 + 4^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 4 \times \cos 45^\circ \\ &= 2 + 16 - 2 \times \sqrt{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$b > 0 \text{ 이므로 } b = \sqrt{10}$$

정답_ (1) $\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{10}$

542

오른쪽 그림과 같이 선분 BD를 그으면
삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= 1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \times \cos 120^\circ \\ &= 1 + 9 - 2 \times 1 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 13 \end{aligned}$$

원에 내접하는 사각형의 대각의 크기의
합은 180° 이므로

$$C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

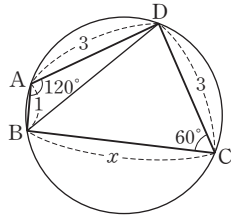
$\overline{BC} = x$ 라고 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= x^2 + 3^2 - 2 \times x \times 3 \times \cos 60^\circ \\ 13 &= x^2 + 9 - 2 \times x \times 3 \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0, (x+1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 4 (\because x > 0)$$

따라서 $\overline{BC}$ 의 길이는 4이다.



정답_ 4

543

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{11}}{6} \text{ 이므로}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

$$\text{또, } \angle DCG = \theta, \angle BCD = \angle ECG = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

$$\angle BCE = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \theta\right) = \pi - \theta$$

따라서 삼각형 DCG와 삼각형 BEC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{DG}^2 &= 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \cos \theta \\ &= 25 - 24 \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{BE}^2 &= 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \cos(\pi - \theta) \\ &= 25 - 24 \times (-\cos \theta) \\ &= 25 + 24 \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{DG} \times \overline{BE} &= \sqrt{25 - 24 \cos \theta} \sqrt{25 + 24 \cos \theta} \\ &= \sqrt{25^2 - 24^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{25^2 - 24^2 \times \frac{25}{36}} \\ &= \sqrt{225} \\ &= 15 \end{aligned}$$

정답_ ①

544

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= x^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2 - 2 \times x \times \frac{4}{x} \times \cos 120^\circ \\ &= x^2 + \frac{16}{x^2} - 2 \times x \times \frac{4}{x} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= x^2 + \frac{16}{x^2} + 4 \end{aligned}$$

$x^2 > 0, \frac{16}{x^2} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{BC}^2 = x^2 + \frac{16}{x^2} + 4 \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{16}{x^2}} + 4 = 12$$

(단, 등호는 $x^2 = \frac{16}{x^2}$ 일 때 성립한다.)

$$\therefore \overline{BC} \geq \sqrt{12} = 2\sqrt{3} (\because \overline{BC} > 0)$$

따라서 변 BC의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{3}$ 이다.

정답_ $2\sqrt{3}$

545

$$2a + b - 2c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$4a - 4b - c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$2 \times \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 을 하면}$$

$$6b - 3c = 0 \quad \therefore c = 2b \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{ 을 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면}$$

$$2a + b - 4b = 0 \quad \therefore a = \frac{3}{2}b$$

$$\therefore a : b : c = \frac{3}{2}b : b : 2b = 3 : 2 : 4$$

따라서 $a = 3k, b = 2k, c = 4k (k > 0)$ 로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(3k)^2 + (2k)^2 - (4k)^2}{2 \times 3k \times 2k} \\ &= \frac{-3k^2}{12k^2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

정답_ ②

546

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{7^2 + 3^2 - 5^2}{2 \times 7 \times 3} = \frac{11}{14}$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AD}^2 &= 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos B \\ &= 9 + 4 - 2 \times 3 \times 2 \times \frac{11}{14} = \frac{25}{7} \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AD} = \frac{5\sqrt{7}}{7} (\because \overline{AD} > 0)$$

정답_ $\frac{5\sqrt{7}}{7}$

547

$$(b-c)^2 = a^2 - bc \text{에서}$$

$$b^2 - 2bc + c^2 = a^2 - bc$$

$$\therefore b^2 + c^2 - a^2 = bc$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$$

$$0 < A < \pi \text{이므로 } \sin A > 0$$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \times 2 = \sqrt{3}$$

정답 ⑤

다른 풀이

$$(b-c)^2 = a^2 - bc \text{에서}$$

$$b^2 - 2bc + c^2 = a^2 - bc$$

$$\therefore b^2 + c^2 - a^2 = bc$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$$

$$\text{이때 } 0 < A < \pi \text{이고 } \cos A = \frac{1}{2} \text{이므로 } A = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \tan A = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

548

세 내각 중 크기가 가장 작은 각의 크기는 가장 짧은 변의 대각의 크기이다.

이때 $\sqrt{2} < 2 < \sqrt{3} + 1$ 이므로 가장 작은 각의 크기는 변 BC의 대각의 크기인 A이다.

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{2^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \times 2 \times (\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \frac{6 + 2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{4(\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0^\circ < A < 180^\circ \text{이므로 } A = 30^\circ$$

따라서 세 내각 중 가장 작은 각의 크기는 30° 이다.

정답 ②

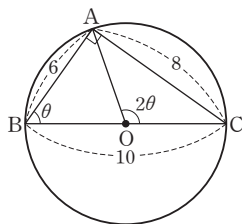
549

삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O라고 하면 삼각형 ABC는 직각삼각형이므로 점 O는 빗변 BC의 중점이다.

이때 $\overline{BC} = 10$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

한편, 호 AC의 원주각의 크기가 θ 이



므로 중심각의 크기는

$$\angle AOC = 2\theta$$

따라서 삼각형 AOC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \frac{\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - \overline{AC}^2}{2 \times \overline{OA} \times \overline{OC}} \\ &= \frac{5^2 + 5^2 - 8^2}{2 \times 5 \times 5} = -\frac{7}{25} \end{aligned}$$

정답 ②

550

$$\overline{BE} : \overline{EC} = 1 : 5 \text{이므로}$$

$$\overline{BE} = \overline{BC} \times \frac{1}{6} = 6 \times \frac{1}{6} = 1$$

$$\overline{EC} = \overline{BC} \times \frac{5}{6} = 6 \times \frac{5}{6} = 5$$

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$$

직각삼각형 ABE에서

$$\overline{AE} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

따라서 삼각형 AEC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{AE}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{EC}^2}{2 \times \overline{AE} \times \overline{AC}} \\ &= \frac{(\sqrt{10})^2 + (3\sqrt{5})^2 - 5^2}{2 \times \sqrt{10} \times 3\sqrt{5}} \\ &= \frac{30}{30\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \sin \theta > 0$$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore 50 \sin \theta \cos \theta = 50 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 25$$

정답 25

551

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \cos 120^\circ \\ &= 9 + 36 - 2 \times 3 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 63 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AC} = 3\sqrt{7} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{3\sqrt{7}}{\sin 120^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{21}$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{21})^2 = 21\pi$$

정답 ④

552

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2 \times 7$$

$$\therefore \overline{BC} = 14 \times \sin \frac{\pi}{3} = 14 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$$

한편, $\overline{AC} = k$ 이고 $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 1$ 이므로

$$\overline{AB} = 3k$$

따라서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= (3k)^2 + k^2 - 2 \times 3k \times k \times \frac{1}{2}$$

$$= 7k^2$$

$$\therefore \overline{BC} = \sqrt{7}k \quad (\because \overline{BC} > 0)$$

즉, $7\sqrt{3} = \sqrt{7}k$ 이므로

$$k = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{21} \quad \therefore k^2 = 21$$

정답_ 21

553

사인법칙에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 2 : 5 : 4$$

따라서 $a = 2k$, $b = 5k$, $c = 4k$ ($k > 0$)로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{(5k)^2 + (4k)^2 - (2k)^2}{2 \times 5k \times 4k} = \frac{37k^2}{40k^2} = \frac{37}{40}$$

정답_ ⑤

554

코사인법칙에 의하여

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$= (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \times \cos 60^\circ$$

$$= 8 + 8 + 4\sqrt{3} - (4\sqrt{3} + 4)$$

$$= 12$$

$$\therefore a = 2\sqrt{3} \quad (\because a > 0)$$

사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin B}, \quad 2\sqrt{3} \sin B = 2\sqrt{2} \sin 60^\circ$$

$$2\sqrt{3} \sin B = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sin B = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0^\circ < B < 180^\circ \text{이므로 } B = 45^\circ \text{ 또는 } B = 135^\circ$$

이때 $A + B < 180^\circ$ 이어야 하므로 $B = 45^\circ$

$$\therefore C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$$

정답_ ②

555

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

이것을 $2\sqrt{13} \sin A = 2\sqrt{3} \sin B = \sqrt{39} \sin C$ 에 대입하면

$$2\sqrt{13} \times \frac{a}{2R} = 2\sqrt{3} \times \frac{b}{2R} = \sqrt{39} \times \frac{c}{2R}$$

$$\therefore 2\sqrt{13}a = 2\sqrt{3}b = \sqrt{39}c$$

각 변을 $2\sqrt{39}$ 로 나누면

$$\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{b}{\sqrt{13}} = \frac{c}{2}$$

$$\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{b}{\sqrt{13}} = \frac{c}{2} = k \quad (k > 0) \text{로 놓으면}$$

$$a = \sqrt{3}k, \quad b = \sqrt{13}k, \quad c = 2k$$

따라서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{(2k)^2 + (\sqrt{3}k)^2 - (\sqrt{13}k)^2}{2 \times 2k \times \sqrt{3}k}$$

$$= \frac{-6k^2}{4\sqrt{3}k^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B = 150^\circ$

정답_ 150°

556

삼각형 CED에서

$$\angle CED = \pi - \frac{3}{4}\pi = \frac{\pi}{4}$$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{ED}^2 - 2 \times \overline{CE} \times \overline{ED} \times \cos \frac{\pi}{4}$$

$$= 4^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 4 \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 10$$

$$\therefore \overline{CD} = \sqrt{10} \quad (\because \overline{CD} > 0)$$

한편, 반원의 반지름의 길이를 R 라고 하면

$$\overline{OD} = R, \quad \overline{OE} = R - 4, \quad \angle OED = \angle CEA = \frac{3}{4}\pi$$

이므로 삼각형 OED에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{OD}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{ED}^2 - 2 \times \overline{OE} \times \overline{ED} \times \cos \frac{3}{4}\pi$$

$$R^2 = (R - 4)^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \times (R - 4) \times 3\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$R^2 = R^2 - 8R + 34 + 6(R - 4)$$

$$2R = 10 \quad \therefore R = 5$$

즉, 삼각형 CAD는 반지름의 길이가 5인 원에 내접하는 삼각형이므로 $\angle CAD = \theta$ 라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{10}}{\sin \theta} = 2 \times 5 \quad \therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

따라서 삼각형 CAE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \frac{3}{4}\pi} = \frac{4}{\sin \theta}, \quad \overline{AC} \sin \theta = 4 \sin \frac{3}{4}\pi$$

$$\overline{AC} \times \frac{\sqrt{10}}{10} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \overline{AC} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{10}{\sqrt{10}} = 4\sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{AC} \times \overline{CD} = 4\sqrt{5} \times \sqrt{10} = 20\sqrt{2}$$

정답_ ⑤

557

코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이것을 $b \cos C - c \cos B = a$ 에 대입하면

$$b \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - c \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = a$$

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a} = a$$

$$a^2 + b^2 - c^2 - (c^2 + a^2 - b^2) = 2a^2$$

$$2b^2 - 2c^2 = 2a^2$$

$$\therefore b^2 = a^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $B=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

정답 ⑤

558

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

이것을 $2 \sin A \cos B = \sin C$ 에 대입하면

$$2 \times \frac{a}{2R} \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{c}{2R}$$

$$c^2 + a^2 - b^2 = c^2, a^2 = b^2$$

$$\therefore a = b (\because a > 0, b > 0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

정답 ①

559

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

이것을 조건 ㉞의 $\sin A = \sin C \cos B$ 에 대입하면

$$\frac{a}{2R} = \frac{c}{2R} \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$2a^2 = c^2 + a^2 - b^2 \therefore c^2 = a^2 + b^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

이때 조건 ㉝에서 $a^2 = b^2 + c^2 - \sqrt{2}bc$ 이므로

$$b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{2}bc$$

한편, 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{2}bc}{2bc} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

그런데 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A=45^\circ$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이다.

정답 $C=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형

560

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos A \\ &= 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos 120^\circ \\ &= 16 + 36 - 2 \times 4 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 76 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{BC} = 2\sqrt{19} \text{ (m)} (\because \overline{BC} > 0)$$

따라서 두 오리 배 B, C 사이의 거리는 $2\sqrt{19}$ m이다.

정답 $2\sqrt{19}$ m

561

오른쪽 그림과 같이 지점

A에서 지면에 내린 수선

의 발을 A'이라고 하면

직각삼각형 AA'O에서

$$\begin{aligned} \overline{AO} &= \frac{10\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} \\ &= 10\sqrt{2} \times 2 \\ &= 20\sqrt{2} \text{ (m)} \end{aligned}$$

또, 지점 B에서 지면에 내린 수선의 발을 B'이라고 하면 직각삼각형 BB'O에서

$$\overline{BO} = \frac{10\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 10\sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 20 \text{ (m)}$$

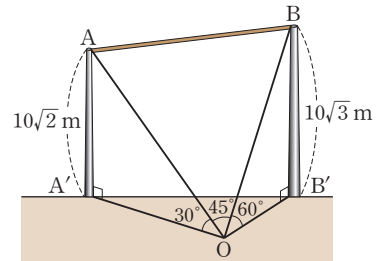
따라서 삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 - 2 \times \overline{AO} \times \overline{BO} \times \cos 45^\circ \\ &= (20\sqrt{2})^2 + 20^2 - 2 \times 20\sqrt{2} \times 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 400 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB} = 20 \text{ (m)} (\because \overline{AB} > 0)$$

따라서 케이블 AB의 길이는 20 m이다.

정답 20 m



562

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{3^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 3 \times 7} = -\frac{1}{7}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $\sin A > 0$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{8}{\sin A} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{1}{2} \times \frac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

따라서 깨지기 전 접시의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{49}{3}\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

정답 ①

563

$$(1) \triangle ABC = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \frac{1}{2}$$

$$= 12$$

$$(2) \triangle ABC = \frac{1}{2}bc \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 4\sqrt{3} \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 6\sqrt{2}$$

정답_ (1) 12 (2) $6\sqrt{2}$

564

$\overline{BC} = a$ 로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{5})^2 = (\sqrt{2})^2 + a^2 - 2 \times \sqrt{2} \times a \times \cos 45^\circ$$

$$5 = 2 + a^2 - 2 \times \sqrt{2} \times a \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0, (a+1)(a-3) = 0$$

이때 $a > 0$ 이므로 $a = 3$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 3 \times \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

정답_ ②

565

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{7} \times \sin \theta = \sqrt{7} \sin \theta$$

$$\text{즉, } \sqrt{7} \sin \theta = \sqrt{6} \text{이므로 } \sin \theta = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

삼각형 ABC가 예각삼각형이므로

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

한편, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$ 이고 $\cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{42}}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

정답_ ⑤

566

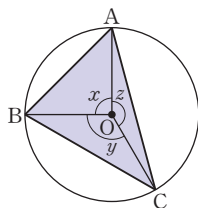
오른쪽 그림과 같이 선분 OB, OC를 그은

후 $\angle AOB = \angle x$, $\angle BOC = \angle y$,

$\angle AOC = \angle z$ 로 놓자.

부채꼴의 중심각의 크기는 호의 길이에 정비례하므로

$\angle x : \angle y : \angle z = 3 : 4 : 5$ 에서



$$\angle x = 360^\circ \times \frac{3}{12} = 90^\circ$$

$$\angle y = 360^\circ \times \frac{4}{12} = 120^\circ$$

$$\angle z = 360^\circ \times \frac{5}{12} = 150^\circ$$

따라서

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 1 = 2$$

$$\triangle OBC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\triangle OCA = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

이므로

$$\triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA$$

$$= 2 + \sqrt{3} + 1$$

$$= 3 + \sqrt{3}$$

정답_ $3 + \sqrt{3}$

567

$a + b = 8$ 에서 $b = 8 - a$

$a > 0$, $b > 0$ 이므로

$0 < a < 8$

삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S = \frac{1}{2} \times a \times (8 - a) \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times (8 - a) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}(-a^2 + 8a)$$

$$= -\frac{1}{4}(a - 4)^2 + 4$$

따라서 $a = 4$ 일 때 S는 최대이므로 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은 4이다.

정답_ ①

다른 풀이

$a > 0$, $b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, 8 \geq 2\sqrt{ab}, \sqrt{ab} \leq 4$$

$\therefore ab \leq 16$ (단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립한다.)

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ab \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}ab \leq 4$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은 4이다.

568

$\angle BAD = \theta$ 라고 하면 삼각형 ABD

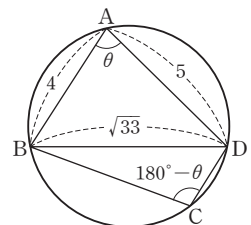
에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{4^2 + 5^2 - (\sqrt{33})^2}{2 \times 4 \times 5} = \frac{1}{5}$$

$0 < \theta < 180^\circ$ 이므로 $\sin \theta > 0$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$



한편, 원에 내접하는 사각형의 두 대각의 크기의 합은 180° 이므로

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - \theta$$

$$\sin(\angle BCD) = \sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

삼각형 BCD의 넓이가 $2\sqrt{6}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \sin(\angle BCD) = 2\sqrt{6}$$

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore \overline{BC} \times \overline{CD} = 10$$

정답_ ①

569

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \triangle AMN &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} b \times \frac{1}{2} c \times \sin A \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{S}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle BMP &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} c \times \frac{2}{3} a \times \sin B \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{S}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle CNP &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} a \times \frac{3}{4} b \times \sin C \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{S}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore S' = S - \left(\frac{S}{8} + \frac{S}{3} + \frac{S}{4} \right) = \frac{7}{24} S$$

$$\therefore \frac{S}{S'} = \frac{24}{7}$$

정답_ $\frac{24}{7}$

570

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R , 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{abc}{4R} \text{이므로}$$

$$3 = \frac{abc}{4 \times 6} \quad \therefore abc = 3 \times 4 \times 6 = 72$$

정답_ ④

571

삼각형 ABC의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{3 \times 7 \times 8}{4R} = \frac{42}{R}$$

$$\therefore R = \frac{42}{S}$$

$$S = \frac{1}{2} r(3+7+8) = 9r \text{이므로}$$

$$r = \frac{S}{9}$$

$$\therefore Rr = \frac{42}{S} \times \frac{S}{9} = \frac{14}{3}$$

정답_ ③

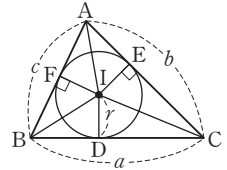
참고 삼각형의 내접원의 반지름의 길이와 삼각형의 넓이

원 I가 $\triangle ABC$ 의 내접원일 때

$$\triangle ABC = \triangle IAB + \triangle IBC + \triangle ICA$$

$$= \frac{1}{2} \times c \times r + \frac{1}{2} \times a \times r + \frac{1}{2} \times b \times r$$

$$= \frac{1}{2} r(a+b+c)$$



572

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 4이므로 사인법칙에 의하여

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{a}{2 \times 4} + \frac{b}{2 \times 4} + \frac{c}{2 \times 4} = \frac{a}{8} + \frac{b}{8} + \frac{c}{8}$$

$$\text{즉, } \frac{a+b+c}{8} = \frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$a+b+c=12$$

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 2이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times (a+b+c) = \frac{1}{2} \times 2 \times 12 = 12$$

정답_ 12

573

헤론의 공식에서 $s = \frac{7+9+12}{2} = 14$ 이므로 구하는 삼각형의 넓

이는

$$\begin{aligned} \sqrt{14 \times (14-7) \times (14-9) \times (14-12)} &= \sqrt{14 \times 7 \times 5 \times 2} \\ &= 14\sqrt{5} \end{aligned}$$

정답_ ④

다른 풀이

주어진 삼각형을 ABC라 하고, $a=7$, $b=9$, $c=12$ 로 놓으면

$$\cos A = \frac{9^2 + 12^2 - 7^2}{2 \times 9 \times 12} = \frac{22}{27}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $\sin A > 0$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{22}{27}\right)^2} = \frac{7\sqrt{5}}{27}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 9 \times 12 \times \frac{7\sqrt{5}}{27} = 14\sqrt{5}$$

574

헤론의 공식에서 $s = \frac{5+7+8}{2} = 10$ 이므로 삼각형의 넓이는

$$\begin{aligned} \sqrt{10 \times (10-5) \times (10-7) \times (10-8)} &= \sqrt{10 \times 5 \times 3 \times 2} \\ &= 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

삼각형의 내접원의 반지름의 길이를 r 라고 하면

$$\frac{1}{2} \times r \times (a+b+c) = 10\sqrt{3}$$

$$\frac{r}{2} (5+7+8) = 10\sqrt{3}$$

$$\therefore r = \sqrt{3}$$

정답_ ③

575

사인법칙에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 2$$

이므로 $a=2k$, $b=3k$, $c=2k$ ($k>0$)로 놓으면 헤론의 공식에서

$$s = \frac{2k+3k+2k}{2} = \frac{7}{2}k$$

삼각형 ABC의 넓이가 $12\sqrt{7}$ 이므로

$$\sqrt{\frac{7}{2}k \times \left(\frac{7}{2}k - 2k\right) \times \left(\frac{7}{2}k - 3k\right) \times \left(\frac{7}{2}k - 2k\right)} = 12\sqrt{7}$$

$$\sqrt{\frac{7}{2}k \times \frac{3}{2}k \times \frac{1}{2}k \times \frac{3}{2}k} = 12\sqrt{7}$$

$$\frac{3}{4}\sqrt{7}k^2 = 12\sqrt{7}, k^2 = 16$$

$$\therefore k=4 (\because k>0)$$

즉, $a=8$, $b=12$, $c=8$ 이므로 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $8+12+8=28$

정답_ 28

576

헤론의 공식에서 $s = \frac{5+6+7}{2} = 9$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\sqrt{9 \times (9-5) \times (9-6) \times (9-7)} = \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} = 6\sqrt{6}$$

오른쪽 그림에서

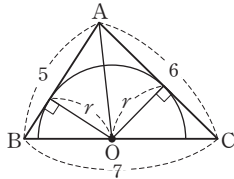
$$\triangle ABO = \frac{1}{2} \times 5 \times r = \frac{5}{2}r$$

$$\triangle AOC = \frac{1}{2} \times 6 \times r = 3r$$

이때 $\triangle ABC = \triangle ABO + \triangle AOC$ 이므로

$$6\sqrt{6} = \frac{5}{2}r + 3r, 6\sqrt{6} = \frac{11}{2}r$$

$$\therefore r = \frac{12\sqrt{6}}{11}$$



정답_ $\frac{12\sqrt{6}}{11}$

577

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$ 를 그으면

사각형 ABCD의 넓이는

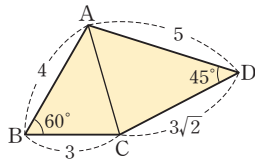
$$\triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \sin 60^\circ$$

$$+ \frac{1}{2} \times 5 \times 3\sqrt{2} \times \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 5 \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 3\sqrt{3} + \frac{15}{2}$$



정답_ $3\sqrt{3} + \frac{15}{2}$

578

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4 \times \cos 60^\circ$$

$$= 4 + 16 - 16 \times \frac{1}{2} = 12$$

$$\therefore \overline{BD} = 2\sqrt{3} (\because \overline{BD} > 0)$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\triangle ABD + \triangle BCD = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3 \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3 \times \frac{1}{2}$$

$$= 2\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

정답_ $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

579

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$ 를 그으

면 삼각형 ABC에서 코사인법칙

에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 4^2 + (2+2\sqrt{3})^2$$

$$- 2 \times 4 \times (2+2\sqrt{3}) \times \cos 30^\circ$$

$$= 16 + (16 + 8\sqrt{3}) - (16 + 16\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 8$$

$$\therefore \overline{AC} = 2\sqrt{2} (\because \overline{AC} > 0)$$

$\angle ACB = \theta$ 로 놓으면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{4}{\sin \theta}, 2\sqrt{2} \sin \theta = 4 \sin 30^\circ$$

$$2\sqrt{2} \sin \theta = 4 \times \frac{1}{2} \quad \therefore \sin \theta = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $0^\circ < \theta < 105^\circ$ 이므로 $\theta = 45^\circ$

$$\therefore \angle ACD = 105^\circ - 45^\circ = 60^\circ$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times (2+2\sqrt{3}) \times \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times (2+2\sqrt{3}) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= (2+2\sqrt{3}) + \sqrt{3} = 2+3\sqrt{3}$$

즉, $p=2$, $q=3$ 이므로

$$p+q=2+3=5$$

정답_ ③

580

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$ 를 그으면 삼

각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \times 10 \times 8 \times \cos 60^\circ$$

$$= 100 + 64 - 2 \times 10 \times 8 \times \frac{1}{2}$$

$$= 84$$

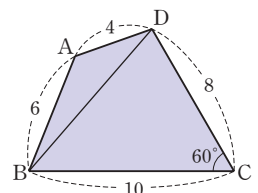
$$\therefore \overline{BD} = 2\sqrt{21} (\because \overline{BD} > 0)$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{6^2 + 4^2 - (2\sqrt{21})^2}{2 \times 6 \times 4} = -\frac{2}{3}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $\sin A > 0$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$



따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\begin{aligned} & \triangle ABD + \triangle BCD \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin A + \frac{1}{2} \times 10 \times 8 \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{1}{2} \times 10 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 4\sqrt{5} + 20\sqrt{3} \end{aligned}$$

정답_ $4\sqrt{5} + 20\sqrt{3}$

581

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$ 를 긋고

$\angle BAD = \theta$ 로 놓으면 삼각형 ABD에서
코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= 3^2 + 8^2 - 2 \times 3 \times 8 \times \cos \theta \\ &= 73 - 48 \cos \theta \end{aligned}$$

또, 사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - \theta$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos(180^\circ - \theta) \\ &= 16 + 36 - 2 \times 4 \times 6 \times (-\cos \theta) \\ &= 52 + 48 \cos \theta \end{aligned}$$

즉, $73 - 48 \cos \theta = 52 + 48 \cos \theta$ 이므로

$$96 \cos \theta = 21 \quad \therefore \cos \theta = \frac{7}{32}$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로 $\sin \theta > 0$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{32}\right)^2} = \frac{5\sqrt{39}}{32}$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\begin{aligned} & \triangle ABD + \triangle BCD \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times \sin \theta + \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin(180^\circ - \theta) \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times \sin \theta + \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times \frac{5\sqrt{39}}{32} + \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{5\sqrt{39}}{32} \\ &= \frac{15\sqrt{39}}{4} \end{aligned}$$

즉, $a = 4$, $b = 15$ 이므로

$$a + b = 4 + 15 = 19$$

정답_ 19

582

$$(1) \square ABCD = 2 \times 6 \times \sin 30^\circ$$

$$= 2 \times 6 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$(2) C = A = 120^\circ \text{이므로}$$

$$\square ABCD = 4 \times 5 \times \sin 120^\circ$$

$$= 4 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

정답_ (1) 6 (2) $10\sqrt{3}$

참고 평행사변형의 성질

- (1) 두 쌍의 대변이 각각 평행하다. (정의)
- (2) 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.
- (3) 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.
- (4) 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.

583

$\overline{CD} = \overline{AB} = 6$ 이고 평행사변형 ABCD의 넓이가 $21\sqrt{2}$ 이므로

$$6 \times 7 \times \sin C = 21\sqrt{2} \quad \therefore \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 90^\circ$ 이므로 $C = 45^\circ$

정답_ 45°

584

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{5^2 + 6^2 - 9^2}{2 \times 5 \times 6} = -\frac{1}{3}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $\sin A > 0$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$5 \times 6 \times \sin A = 5 \times 6 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 20\sqrt{2}$$

정답_ ②

585

평행사변형 ABCD의 넓이가 $14\sqrt{3}$ 이므로

$$\overline{AD} \times 4 \times \sin 60^\circ = 14\sqrt{3}, \quad \overline{AD} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{AD} = 7$$

따라서 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 7^2 + 4^2 - 2 \times 7 \times 4 \times \cos 60^\circ \\ &= 49 + 16 - 2 \times 7 \times 4 \times \frac{1}{2} = 37 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{37} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

정답_ ②

586

사각형 ABCD의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 12 \times 15 \times \sin 135^\circ &= \frac{1}{2} \times 12 \times 15 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 45\sqrt{2} \end{aligned}$$

정답_ $45\sqrt{2}$

587

등변사다리꼴의 두 대각선의 길이는 같으므로 대각선의 길이를 x 라고 하면

$$\frac{1}{2} \times x \times x \times \sin 30^\circ = 10$$

$$\frac{1}{2} \times x \times x \times \frac{1}{2} = 10$$

$$x^2 = 40 \quad \therefore x = 2\sqrt{10} \quad (\because x > 0)$$

정답_ ④

588

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로 $\sin \theta > 0$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = 16\sqrt{6}$$

정답_ $16\sqrt{6}$

589

사각형의 한 대각선의 길이를 x 라고 하면 다른 한 대각선의 길이는 $16-x$ 이다.

두 대각선이 이루는 각의 크기가 60° 이므로 사각형의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times x \times (16-x) \times \sin 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (-x^2 + 16x) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4} (x-8)^2 + 16\sqrt{3} \end{aligned}$$

따라서 $x=8$ 일 때 사각형의 넓이의 최댓값은 $16\sqrt{3}$ 이다.

정답_ ⑤

590

$$3a+b-c=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a-3b+c=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$4a-2b=0 \quad \therefore b=2a$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$3a+2a-c=0 \quad \therefore c=5a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$$

$$= a : 2a : 5a$$

$$= 1 : 2 : 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

정답_ $1 : 2 : 5$

채점 기준	비율
① a, b, c 를 하나의 문자로 정리하기	40%
② $\sin A : \sin B : \sin C$ 구하기	60%

591

$$\cos^2 C = \cos^2 A + \cos^2 B - 1 \text{에서}$$

$$(1 - \sin^2 C) = (1 - \sin^2 A) + (1 - \sin^2 B) - 1$$

$$\therefore \sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\left(\frac{c}{2R}\right)^2 = \left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다. $\dots\dots \textcircled{3}$

정답_ $C=90^\circ$ 인 직각삼각형

채점 기준	비율
① 주어진 식을 $\sin$ 에 대한 식으로 정리하기	30%
② 사인법칙을 이용하여 a, b, c 에 대한 식으로 정리하기	40%
③ 삼각형 ABC가 어떤 삼각형인지 말하기	30%

592

오른쪽 그림과 같이 두 직선

$y=-3x, y=x$ 가 직선 $y=3$ 과 만나

는 점을 각각 A, B라고 하면

$$A(-1, 3), B(3, 3) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore \overline{OA} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

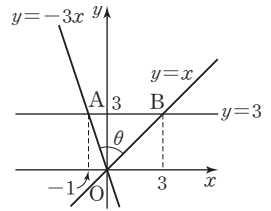
$$\overline{OB} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\overline{AB} = 3 - (-1) = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{(\sqrt{10})^2 + (3\sqrt{2})^2 - 4^2}{2 \times \sqrt{10} \times 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

정답_ $\frac{\sqrt{5}}{5}$



채점 기준	비율
① 두 직선 $y=-3x, y=x$ 위의 점 A, B 정하기	30%
② $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{AB}$ 의 길이 구하기	30%
③ $\cos \theta$ 의 값 구하기	40%

593

$$\frac{\sin A}{3} = \frac{\sin B}{7} = \frac{\sin C}{5} = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$\sin A = 3t, \sin B = 7t, \sin C = 5t$$

$$\therefore a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

$$= 3t : 7t : 5t$$

$$= 3 : 7 : 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 내각 중 가장 큰 각의 크기는 가장 긴 변의 대각의 크기이므로

$a=3k, b=7k, c=5k \quad (k > 0)$ 로 놓으면 가장 큰 각의 크기는 변

AC의 대각의 크기인 B이다. $\dots\dots \textcircled{2}$

코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{(3k)^2 + (5k)^2 - (7k)^2}{2 \times 3k \times 5k} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B=120^\circ$

따라서 삼각형 ABC의 세 내각 중에서 가장 큰 각의 크기는 120° 이다. $\dots\dots \textcircled{3}$

정답_ 120°

채점 기준	비율
① 사인법칙을 이용하여 $a : b : c$ 구하기	30%
② 세 변의 길이의 비를 이용하여 크기가 가장 큰 각 구하기	30%
③ 가장 큰 각의 크기 구하기	40%

594

사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sqrt{6}}{\sin B}, \quad 2\sqrt{2} \sin B = 2\sqrt{6} \sin 30^\circ$$

$$2\sqrt{2} \sin B = 2\sqrt{6} \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B=60^\circ$ 또는 $B=120^\circ$

이때 $B=60^\circ$ 이면

$$C=180^\circ-(30^\circ+60^\circ)=90^\circ$$

가 되어 삼각형 ABC가 둔각삼각형이라는 조건을 만족시키지 않으므로

$$B=120^\circ \dots\dots\dots ②$$

따라서 $C=180^\circ-(30^\circ+120^\circ)=30^\circ$ 이므로

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} \times \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} \times \frac{1}{2} \\ &= 2\sqrt{3} \dots\dots\dots ③ \end{aligned}$$

정답 2√3

채점 기준	비율
① sin B의 값 구하기	30%
② B의 크기 구하기	30%
③ 삼각형 ABC의 넓이 구하기	40%

595

삼각형 BCD에서

$$\angle BCD=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ \dots\dots\dots ①$$

이므로 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{4}{\sin 30^\circ} &= \frac{\overline{BD}}{\sin 120^\circ}, 4 \sin 120^\circ = \overline{BD} \sin 30^\circ \\ 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} &= \overline{BD} \times \frac{1}{2} \\ \therefore \overline{BD} &= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = 4\sqrt{3} \dots\dots\dots ② \end{aligned}$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18 \dots\dots\dots ③$$

정답 18

채점 기준	비율
① ∠BCD의 크기 구하기	20%
② 사인법칙을 이용하여 BD의 길이 구하기	40%
③ 사각형 ABCD의 넓이 구하기	40%

다른 풀이

삼각형 BCD에서

$$\angle BCD=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$$

또, $\angle DBC = \angle CDB$ 이므로 삼각형 BCD는 $\overline{BC} = \overline{CD}$ 인 이등변 삼각형이다.

$$\therefore \overline{CD} = 4$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \cos C \\ &= 4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 4 \times \cos 120^\circ \\ &= 16 + 16 - 2 \times 4 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 48 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{BD} = 4\sqrt{3} (\because \overline{BD} > 0)$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18$$

596

오른쪽 그림과 같이 원 위에 한 점 P를 잡으면

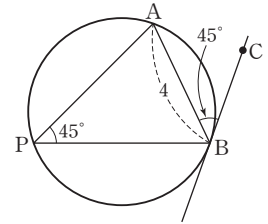
$$\angle APB = \angle ABC = 45^\circ$$

원의 반지름의 길이를 R라고 하면 삼각형 PAB에서 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{4}{\sin 45^\circ} &= 2R \\ \therefore R &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 원의 둘레의 길이는

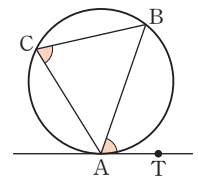
$$2\pi \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi$$



정답 ②

참고 원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.

$$\Rightarrow \angle BAT = \angle BCA$$



597

원 O의 반지름의 길이를 R라고 하면

$$\pi R^2 = 100\pi \quad \therefore R = 10 (\because R > 0)$$

부채꼴 OAB에서 호 AB의 길이가 반지름의 길이의 2배이므로

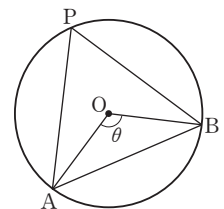
$$10\theta = 2 \times 10 \quad \therefore \theta = 2$$

오른쪽 그림과 같이 원 O 위에 한 점 P를 잡으면

$$\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB = 1$$

따라서 삼각형 PAB에서 사인법칙에 의하여

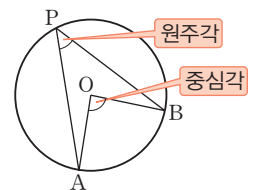
$$\frac{\overline{AB}}{\sin 1} = 2 \times 10 \quad \therefore \overline{AB} = 20 \sin 1$$



정답 ②

참고 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 1/2이다.

$$\Rightarrow \angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$$

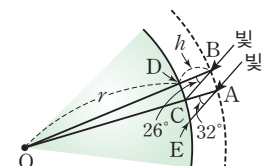


598

오른쪽 그림에서 두 점 A, B를 지나 는 빛은 평행하므로 평행선의 성질에 의하여

$$\angle BCA = \angle CAE = 32^\circ (\text{엇각})$$

$$\therefore \angle OCB = 180^\circ - 32^\circ = 148^\circ$$



삼각형 OBC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{r+h}{\sin 148^\circ} = \frac{r}{\sin 26^\circ}$$

$$(r+h) \sin 26^\circ = r \sin 148^\circ$$

$$r \sin 26^\circ + h \sin 26^\circ = r \sin (180^\circ - 32^\circ)$$

$$r \sin 26^\circ + h \sin 26^\circ = r \sin 32^\circ$$

$$h \sin 26^\circ = (\sin 32^\circ - \sin 26^\circ)r$$

$$\therefore h = \left(\frac{\sin 32^\circ}{\sin 26^\circ} - 1 \right) r$$

참고 평행선의 성질

한 평면 위에 있는 두 직선이 한 직선과 만날 때

- (1) 두 직선이 서로 평행하면 동위각의 크기는 서로 같고, 동위각의 크기가 서로 같으면 그 두 직선은 서로 평행하다.
- (2) 두 직선이 서로 평행하면 엇각의 크기는 서로 같고, 엇각의 크기가 서로 같으면 그 두 직선은 평행하다.

599

$0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 B 의 크기가 최대일 때 $\cos B$ 는 최솟값을 갖는다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{7^2 + a^2 - 4^2}{2 \times 7 \times a} = \frac{a}{14} + \frac{33}{14a}$$

$$\frac{a}{14} > 0, \frac{33}{14a} > 0 \text{이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여}$$

$$\frac{a}{14} + \frac{33}{14a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{14} \times \frac{33}{14a}} = \frac{\sqrt{33}}{7}$$

이때 등호는 $\frac{a}{14} = \frac{33}{14a}$ 일 때 성립하므로 B 의 크기가 최대일 때,

즉 $\cos B$ 가 최소일 때 a 의 값은

$$\frac{a}{14} = \frac{33}{14a}, a^2 = 33$$

$$\therefore a = \sqrt{33} (\because a > 0)$$

정답 ③

600

직각삼각형 ABD에서

$$\overline{BD} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$\overline{PB} = \overline{PD} = x$ 로 놓으면 삼각형 PDB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{x^2 + x^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \times x \times x} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

삼각형 BCE는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \overline{PB} \leq 1, \text{ 즉 } \frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 1 \text{에서}$$

$$\frac{3}{4} \leq x^2 \leq 1, 1 \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{4}{3}$$

$$-\frac{4}{3} \leq -\frac{1}{x^2} \leq -1$$

$$-\frac{1}{3} \leq 1 - \frac{1}{x^2} \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{3} \leq \cos \theta \leq 0$$

따라서 $\cos \theta$ 의 최댓값은 0, 최솟값은 $-\frac{1}{3}$ 이므로 그 합은

$$0 + \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

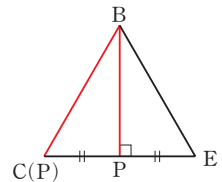
정답 $-\frac{1}{3}$

참고 정삼각형 BCE에서 점 P가 $\overline{CE}$ 의 중점에 위치할 때, $\overline{PB}$ 의 길이는 최소가 된다. 이때 $\overline{PB}$ 는 정삼각형 BCE의 높이이므로

$$\overline{PB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

또, 점 P가 C 또는 E에 위치할 때, $\overline{PB}$ 의 길이는 최대가 되고, 이때 $\overline{PB}$ 의 길이는 1이다.

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \overline{PB} \leq 1$$



601

삼각형 PAC에서 $\overline{AC}$ 를 밑변으로 생각하면 넓이가 최대가 되는 경우는 높이가 최대일 때이다.

따라서 점 Q는 오른쪽 그림과 같이 선분 AC의 수직이등분선 위에 있다.

사각형 QABC는 원 O에 내접하는

사각형이고, $\cos(\angle ABC) = -\frac{5}{8}$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos(\angle AQC) &= \cos(180^\circ - \angle ABC) \\ &= -\cos(\angle ABC) \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

또, 삼각형 QAC는 이등변삼각형이므로

$$\overline{QC} = \overline{QA} = 6\sqrt{10}$$

따라서 삼각형 QAC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= (6\sqrt{10})^2 + (6\sqrt{10})^2 - 2 \times 6\sqrt{10} \times 6\sqrt{10} \times \cos(\angle AQC) \\ &= 360 + 360 - 720 \times \frac{5}{8} \\ &= 270 \end{aligned}$$

$\overline{AB} = k$ ($k > 0$)로 놓으면 $\overline{BC} = 2k$ 이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= k^2 + (2k)^2 - 2 \times k \times 2k \times \cos(\angle ABC) \\ &= k^2 + 4k^2 - 2 \times k \times 2k \times \left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{15}{2}k^2 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{15}{2}k^2 = 270 \text{이므로}$$

$$k^2 = 36 \quad \therefore k = 6 (\because k > 0)$$

$$\therefore \overline{AB} = 6, \overline{BC} = 12$$

삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 삼각형 CDB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle CDB)} = 2R, \frac{12}{\sin \frac{2}{3}\pi} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{1}{2} \times \frac{12}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

정답 ②

602

$A + B + C = 180^\circ$ 이므로 $A + C = 180^\circ - B$

$\tan A \cos^2 A + \sin(A + C) \cos(A + C) = 0$ 에서

$$\frac{\sin A}{\cos A} \times \cos^2 A + \sin(180^\circ - B) \times \cos(180^\circ - B) = 0$$

$$\sin A \cos A + \sin B \times (-\cos B) = 0$$

$$\therefore \sin A \cos A - \sin B \cos B = 0$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

이것을 $\sin A \cos A - \sin B \cos B = 0$ 에 대입하면

$$\frac{a}{2R} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - \frac{b}{2R} \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = 0$$

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) - b^2(c^2 + a^2 - b^2) = 0$$

$$a^2b^2 + a^2c^2 - a^4 - b^2c^2 - a^2b^2 + b^4 = 0$$

$$a^2c^2 - b^2c^2 - a^4 + b^4 = 0$$

$$c^2(a^2 - b^2) - (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = 0$$

$$(a^2 - b^2)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

$$(a+b)(a-b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

$$\therefore a=b \text{ 또는 } c^2 = a^2 + b^2 \quad (\because a>0, b>0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형 또는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 삼각형 ABC의 모양이 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답 ㄱ, ㄴ

603

$\overline{OP} = x$ m로 놓으면

직각삼각형 PBO에서

$$\overline{PB} = \sqrt{x^2 + 1} \text{ (m)}$$

직각삼각형 PAO에서

$$\overline{PA} = \sqrt{x^2 + 6^2} = \sqrt{x^2 + 36} \text{ (m)}$$

이때 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ 에서 α 의 값이 증가하면

$\cos \alpha$ 의 값은 감소하므로 $\alpha \geq 45^\circ$ 가 되려면

$$\cos \alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 이어야 한다.}$$

삼각형 PAB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \alpha = \frac{(x^2 + 1) + (x^2 + 36) - 5^2}{2\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{x^2 + 36}}$$

$$= \frac{x^2 + 6}{\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{x^2 + 36}}$$

$$\text{즉, } \frac{x^2 + 6}{\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{x^2 + 36}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 이어야 하므로}$$

$$\frac{(x^2 + 6)^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 36)} \leq \frac{1}{2}$$

$$2(x^4 + 12x^2 + 36) \leq x^4 + 37x^2 + 36$$

$$x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$$

$$x^2 = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 13t + 36 \leq 0, (t-4)(t-9) \leq 0$$

$$\therefore 4 \leq t \leq 9$$

따라서 $4 \leq x^2 \leq 9$ 이므로

(i) $x^2 \geq 4$ 에서

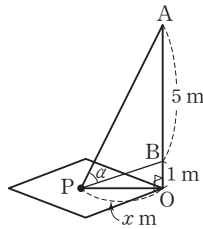
$$x^2 - 4 \geq 0, (x+2)(x-2) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2$$

$$\text{이때 } x > 0 \text{이므로 } x \geq 2$$

(ii) $x^2 \leq 9$ 에서

$$x^2 - 9 \leq 0, (x+3)(x-3) \leq 0$$



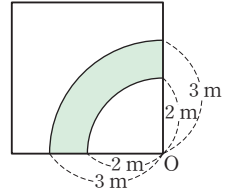
$$\therefore -3 \leq x \leq 3$$

이때 $x > 0$ 이므로 $0 < x \leq 3$

(i), (ii)에서 $2 \leq x \leq 3$ 이므로 점 P가 존재하는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분 (경계 포함)과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{4} \times (\pi \times 3^2 - \pi \times 2^2) = \frac{5}{4}\pi \text{ (m}^2\text{)}$$



정답 ②

604

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 3 \times \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$$

$\overline{AP} = x$, $\overline{AQ} = y$ 로 놓으면 삼각형 APQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}xy \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}xy$$

$$\triangle APQ = \frac{1}{6} \triangle ABC \text{에서}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}xy = \frac{1}{6} \times 6\sqrt{3}$$

$$\therefore xy = 4$$

삼각형 APQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PQ}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 60^\circ$$

$$= x^2 + y^2 - 2 \times 4 \times \frac{1}{2}$$

$$= x^2 + y^2 - 4$$

이때 $x^2 > 0$, $y^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 y^2} = 2xy \quad (\because x > 0, y > 0)$$

$$= 2 \times 4 = 8 \text{ (단, 등호는 } x^2 = y^2, \text{ 즉 } x = y \text{일 때 성립한다.)}$$

따라서 $\overline{PQ}^2 = x^2 + y^2 - 4 \geq 8 - 4 = 4$ 이므로

$$\overline{PQ} \geq 2 \quad (\because \overline{PQ} > 0)$$

즉, 선분 PQ의 길이의 최솟값은 2이다.

정답 2

605

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 외접원의 넓이가 9π 이므로

$$\pi R^2 = 9\pi \quad \therefore R = 3 \quad (\because R > 0)$$

조건 (가)에서 $3 \sin A = 2 \sin B$ 이므로

$$\sin A : \sin B = 2 : 3$$

$$\text{즉, } a : b = \sin A : \sin B = 2 : 3 \text{이므로 } a = \frac{2}{3}b$$

조건 (나)에서 $\cos B = \cos C$ 이고 $0^\circ < B < 180^\circ$, $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로

$$B = C$$

즉, 삼각형 ABC는 $b = c$ 인 이등변삼각형이다.

$$a = \frac{2}{3}b, b = c \text{이므로}$$

$$a : b : c = \frac{2}{3}b : b : b = 2 : 3 : 3$$

따라서 $a = 2k$, $b = c = 3k$ ($k > 0$)로 놓으면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{(3k)^2 + (3k)^2 - (2k)^2}{2 \times 3k \times 3k} = \frac{14k^2}{18k^2} = \frac{7}{9}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ 에서 $\sin A > 0$ 이므로

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = 2 \times 3 = 6$ 이므로

$$a = 6 \sin A = 6 \times \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore b = c = \frac{3}{2}a = \frac{3}{2} \times \frac{8\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}$$

따라서 구하는 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin A &= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} \times \frac{4\sqrt{2}}{9} \\ &= \frac{64\sqrt{2}}{9} \end{aligned}$$

정답 ⑤

참고 함수 $y = \cos x$ 는 $0^\circ < x < 180^\circ$ 에서 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소하므로 일대일 대응이다.

따라서 $0^\circ < B < 180^\circ$, $0^\circ < C < 180^\circ$ 에서 $\cos B = \cos C$ 이면 $B = C$ 이다.

606

삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크므로

$$2 + (x+2) > 6-x \text{에서 } x > 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$(6-x) + 2 > x+2 \text{에서 } x < 3 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1 < x < 3$

헤론의 공식에서

$$s = \frac{(6-x) + 2 + (x+2)}{2} = 5$$

이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} &\sqrt{5 \times \{5 - (6-x)\} \times (5-2) \times \{5 - (x+2)\}} \\ &= \sqrt{5 \times (x-1) \times 3 \times (3-x)} \\ &= \sqrt{-15x^2 + 60x - 45} \\ &= \sqrt{-15(x-2)^2 + 15} \end{aligned}$$

$1 < x < 3$ 에서 삼각형 ABC의 넓이는 $x=2$ 일 때 최댓값을 갖는다.

이때 $a=4$, $b=2$, $c=4$ 이므로 넓이가 최대일 때 삼각형 ABC는 $a=c$ 인 이등변삼각형이다.

정답 $a=c$ 인 이등변삼각형

607

$\overline{BD}$ 가 원의 지름이므로

$$\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$$

직각삼각형 ABD에서

$$\overline{BD} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

또, 삼각형 BCD는 직각이등변삼각형이므로

$$\angle DBC = \angle BDC = 45^\circ$$

$$\therefore \overline{BC} = \overline{CD} = 13 \sin 45^\circ = 13 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{13\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times 5 \times 12 + \frac{1}{2} \times \frac{13\sqrt{2}}{2} \times \frac{13\sqrt{2}}{2} \\ &= 30 + \frac{169}{4} = \frac{289}{4} \end{aligned}$$

한편, 호 BC에 대한 원주각의 크기가 $\angle BDC = 45^\circ$ 이므로

$$\angle BAC = \angle BDC = 45^\circ$$

또, 호 CD에 대한 원주각의 크기가 $\angle DBC = 45^\circ$ 이므로

$$\angle CAD = \angle DBC = 45^\circ$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin 45^\circ$$

$$+ \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{AD} \times \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times \overline{AC} \times \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times 5 \times \sin 45^\circ$$

$$= 6 \times \overline{AC} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{2} \times \overline{AC} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 3\sqrt{2} \overline{AC} + \frac{5\sqrt{2}}{4} \overline{AC}$$

$$= \frac{17\sqrt{2}}{4} \overline{AC}$$

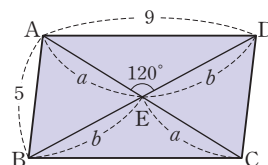
$$\text{즉, } \frac{17\sqrt{2}}{4} \overline{AC} = \frac{289}{4} \text{이므로}$$

$$\overline{AC} = \frac{17\sqrt{2}}{2}$$

정답 ③

608

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 오른쪽 그림과 같이 두 대각선의 교점을 E라고 하고 $\overline{AE} = \overline{CE} = a$, $\overline{BE} = \overline{DE} = b$ 로 놓자.



삼각형 ABE에서 $\angle AEB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$$5^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos 60^\circ$$

$$25 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 - ab = 25 \quad \dots\dots ㉠$$

삼각형 AED에서 코사인법칙에 의하여

$$9^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos 120^\circ$$

$$81 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore a^2 + b^2 + ab = 81 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠-㉡을 하면

$$2ab = 56 \quad \therefore ab = 28$$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2a \times 2b \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 2a \times 2b \times \sin 60^\circ$$

$$= 2ab \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 \times 28 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 28\sqrt{3}$$

정답 $28\sqrt{3}$

III 수열

08 등차수열과 등비수열

609

(1) $a_5 = 3 \times 5 + 2 = 17$

(2) $a_5 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}$

정답_ (1) 17 (2) $\frac{1}{5}$

610

(1) $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 규칙을 찾아보면

$$a_1 = 2 = 2 \times 1^2, a_2 = 8 = 2 \times 2^2$$

$$a_3 = 18 = 2 \times 3^2, a_4 = 32 = 2 \times 4^2, \dots$$

$$\therefore a_n = 2n^2$$

(2) $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 규칙을 찾아보면

$$a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}, a_2 = \frac{1}{3} = \frac{1}{2+1},$$

$$a_3 = \frac{1}{4} = \frac{1}{3+1}, a_4 = \frac{1}{5} = \frac{1}{4+1}, \dots$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{n+1}$$

정답_ (1) $a_n = 2n^2$ (2) $a_n = \frac{1}{n+1}$

611

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 규칙을 찾아보면

$$a_1 = \frac{2}{3} = \frac{1+1}{1+2}, a_2 = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2+2},$$

$$a_3 = \frac{4}{5} = \frac{3+1}{3+2}, a_4 = \frac{5}{6} = \frac{4+1}{4+2}, \dots$$

$$\therefore a_n = \frac{n+1}{n+2}$$

$$a_k = \frac{97}{98} \text{에서 } \frac{k+1}{k+2} = \frac{97}{98} \text{이므로}$$

$$98k + 98 = 97k + 194$$

$$\therefore k = 96$$

정답_ ③

612

(1) 첫째항이 3, 공차가 $8-3=5$ 이므로

$$a_n = 3 + (n-1) \times 5$$

$$= 5n - 2$$

(2) 첫째항이 -2, 공차가 $-5 - (-2) = -3$ 이므로

$$a_n = -2 + (n-1) \times (-3)$$

$$= -3n + 1$$

정답_ (1) $a_n = 5n - 2$ (2) $a_n = -3n + 1$

613

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_2 = -5 \text{이므로}$$

$$a + d = -5$$

..... ㉠

$$a_7 = -25 \text{이므로}$$

$$a + 6d = -25$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -1, d = -4$$

$$\therefore a_n = -1 + (n-1) \times (-4)$$

$$= -4n + 3$$

$$a_m = -77 \text{에서}$$

$$-4m + 3 = -77 \quad \therefore m = 20$$

정답_ ②

614

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_4 - a_1 = a_5 - a_2 = \dots = a_{78} - a_{75}$$

$$= a_{79} - a_{76} = a_{80} - a_{77}$$

$$= 3d$$

이므로

$$a_{80} + a_{79} + a_{78} - a_{77} - a_{76} - a_{75}$$

$$= (a_{80} - a_{77}) + (a_{79} - a_{76}) + (a_{78} - a_{75})$$

$$= 3 \times 3d = 27$$

따라서 $9d = 27$ 이므로

$$d = 3$$

$$\therefore a_7 - a_2 = (a + 6d) - (a + d)$$

$$= 5d = 5 \times 3 = 15$$

정답_ 15

615

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 = 15 \text{이므로}$$

$$a + (a + d) + (a + 2d) = 15, 3a + 3d = 15$$

$$\therefore a + d = 5$$

..... ㉠

$$a_3 + a_4 + a_5 = 39 \text{이므로}$$

$$(a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d) = 39, 3a + 9d = 39$$

$$\therefore a + 3d = 13$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 1, d = 4$$

따라서 구하는 공차는 4이다.

정답_ ④

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_3 = a_1 + 2d, a_4 = a_2 + 2d, a_5 = a_3 + 2d$$

$$\therefore a_3 + a_4 + a_5 = (a_1 + 2d) + (a_2 + 2d) + (a_3 + 2d)$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + 6d$$

이때 $a_1 + a_2 + a_3 = 15, a_3 + a_4 + a_5 = 39$ 이므로

$$39 = 15 + 6d, 6d = 24$$

$$\therefore d = 4$$

따라서 구하는 공차는 4이다.

616

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라고 하면 공차가 -3 이므로

$$a_n = a + (n-1) \times (-3)$$

$$= a - 3(n-1)$$

이때 $a_3 a_7 = 64$ 이므로

$$(a-6)(a-18) = 64, a^2 - 24a + 44 = 0$$

$$(a-2)(a-22) = 0$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } a=22 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

이때 $a_8 > 0$ 에서 $a-21 > 0$ 이므로

$$a > 21 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에 의하여

$$a=22$$

따라서 $a_n = 22 - 3(n-1) = -3n + 25$ 이므로

$$a_2 = -3 \times 2 + 25 = 19$$

정답_ ③

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 -3 이므로

$$a_7 = a_3 + 4 \times (-3) = a_3 - 12$$

이때 $a_3 a_7 = 64$ 이므로

$$a_3(a_3 - 12) = 64, a_3^2 - 12a_3 - 64 = 0$$

$$(a_3 + 4)(a_3 - 16) = 0$$

$$\therefore a_3 = -4 \text{ 또는 } a_3 = 16$$

$$a_8 = a_3 + 5 \times (-3) = a_3 - 15 \text{이므로}$$

$$a_8 > 0 \text{에서}$$

$$a_3 - 15 > 0 \quad \therefore a_3 > 15$$

따라서 $a_3 = 16$ 이므로

$$a_2 = a_3 - (-3) = 16 + 3 = 19$$

617

주어진 등차수열의 일반항을 a_n 이라고 하면 첫째항이 -61 , 공차가 $-57 - (-61) = 4$ 이므로

$$a_n = -61 + (n-1) \times 4 = 4n - 65$$

$$a_n > 0 \text{에서}$$

$$4n - 65 > 0 \quad \therefore n > 16.25$$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제17항이다.

정답_ 제17항

618

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_3 = a_1 + 2d \text{이므로 } a_1 = a_3 + 8 \text{에서}$$

$$a_1 = (a_1 + 2d) + 8 \quad \therefore d = -4$$

또, $a_4 = a_1 + 3d$, $a_6 = a_1 + 5d$ 이므로 $2a_4 - 3a_6 = 3$ 에서

$$2(a_1 + 3d) - 3(a_1 + 5d) = 3$$

$$-a_1 - 9d = 3, -a_1 - 9 \times (-4) = 3$$

$$\therefore a_1 = 33$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 33, 공차가 -4 인 등차수열이므로

$$a_n = 33 + (n-1) \times (-4) = -4n + 37$$

$$a_k < 0 \text{에서}$$

$$-4k + 37 < 0 \quad \therefore k > 9.25$$

따라서 구하는 자연수 k 의 최솟값은 10이다.

정답_ ②

619

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_{15} = 7 \text{이므로}$$

$$49 + 14d = 7 \quad \therefore d = -3$$

$$\therefore a_n = 49 + (n-1) \times (-3) = -3n + 52$$

$$-3n + 52 = 0 \text{에서 } n = 17.3 \cdots$$

이때

$$a_{17} = -3 \times 17 + 52 = 1$$

$$a_{18} = -3 \times 18 + 52 = -2$$

이므로

$$|a_{17}| < |a_{18}|$$

따라서 구하는 자연수 n 의 값은 17이다.

정답_ ④

620

n 개의 수를 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 이라고 하면 등차수열 4, $a_1, a_2, \dots, a_n$,

34는 첫째항이 4, 제 $(n+2)$ 항이 34이고 공차가 2이므로

$$4 + \{(n+2) - 1\} \times 2 = 34$$

$$\therefore n = 14$$

정답_ ④

참고 두 수 사이에 수를 넣어 만든 등차수열

두 수 x 와 y 사이에 n 개의 수를 넣어 만든 수열 $x, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, y$ 가 등차수열일 때

(1) 첫째항은 x , 제 $(n+2)$ 항은 y 이다.

(2) a_1 은 둘째항, a_n 은 제 $(n+1)$ 항이다.

(3) 공차를 d 라고 할 때, $y = x + (n+1)d$

621

등차수열 $-3, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}, 36$ 은 첫째항이 -3 , 제14항이

36이므로 공차를 d 라고 하면

$$-3 + 13d = 36 \quad \therefore d = 3$$

이때 a_{10} 은 제11항이므로

$$a_{10} = -3 + 10 \times 3 = 27$$

정답_ ⑤

622

등차수열 3, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, 48$ 은 첫째항이 3, 제 $(n+2)$ 항이

48이므로 공차를 d 라고 하면

$$3 + (n+1)d = 48$$

$$(n+1)d = 45 \quad \therefore d = \frac{45}{n+1}$$

이때 n 은 자연수이므로 d 가 될 수 있는 값은

$$n=2 \text{일 때, } d = \frac{45}{2+1} = 15$$

$$n=4 \text{일 때, } d = \frac{45}{4+1} = 9$$

$$n=8 \text{일 때, } d = \frac{45}{8+1} = 5$$

$$n=14 \text{일 때, } d = \frac{45}{14+1} = 3$$

$$n=44\text{일 때, } d=\frac{45}{44+1}=1$$

따라서 공차가 될 수 없는 것은 ④이다.

정답_ ④

623

등차수열 $-5, a_1, a_2, \dots, a_m, 10, b_1, b_2, \dots, b_n, 55$ 의 공차를 d 라고 하면 수열 $-5, a_1, a_2, \dots, a_m, 10$ 에서 10은 제 $(m+2)$ 항이므로

$$-5 + \{(m+2)-1\}d = 10$$

$$\therefore d = \frac{15}{m+1} \quad \dots\dots ㉠$$

수열 $10, b_1, b_2, \dots, b_n, 55$ 에서 55는 제 $(n+2)$ 항이므로 $10 + \{(n+2)-1\}d = 55$

$$\therefore d = \frac{45}{n+1} \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } \frac{15}{m+1} = \frac{45}{n+1} \text{이므로}$$

$$15(n+1) = 45(m+1), n+1 = 3(m+1)$$

$$\therefore n = 3m+2$$

정답_ ⑤

624

$x-5, x^2-4x, x-7$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2(x^2-4x) = (x-5) + (x-7), 2x^2-8x = 2x-12$$

$$2x^2-10x+12=0, x^2-5x+6=0$$

$$(x-2)(x-3)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 구하는 모든 실수 x 의 값의 합은

$$2+3=5$$

정답_ ④

참고 $x=2$ 이면 주어진 세 수는 $-3, -4, -5$ 이므로 첫째항이 -3 , 공차가 -1 인 등차수열을 이룬다.

$x=3$ 이면 주어진 세 수는 $-2, -3, -4$ 이므로 첫째항이 -2 , 공차가 -1 인 등차수열을 이룬다.

625

다항식 $f(x)$ 를 $x+1, x-1, x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여 각각

$$f(-1), f(1), f(2)$$

이 세 수가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2f(1) = f(-1) + f(2)$$

$$2(1+a+2) = (1-a+2) + (4+2a+2)$$

$$2a+6=a+9 \quad \therefore a=3$$

정답_ ②

참고 나머지 정리

다항식 $f(x)$ 를 $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지를 R 라고 하면 $R=f(a)$ 이다.

626

세 수 α, k, β 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2k = \alpha + \beta \quad \dots\dots ㉠$$

이차방정식 $x^2-14x+10=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 14 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $2k=14$ 이므로

$$k=7$$

정답_ ②

참고 이차방정식의 근과 계수의 관계

x 에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

627

세 수 a_1, a_1+a_2, a_2+a_3 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2(a_1+a_2) = a_1 + (a_2+a_3)$$

$$\therefore a_3 = a_1 + a_2 \quad \dots\dots ㉠$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d \text{이므로 } ㉠\text{에서}$$

$$a_1 + 2d = a_1 + (a_1 + d) \quad \therefore a_1 = d$$

$$\therefore \frac{a_3}{a_2} = \frac{3a_1}{2a_1} = \frac{3}{2} \quad (\because a_1 \neq 0)$$

정답_ ③

628

등차수열을 이루는 세 수를 $a-d, a, a+d$ 로 놓으면

세 수의 합이 15이므로

$$(a-d) + a + (a+d) = 15$$

$$3a = 15 \quad \therefore a = 5$$

세 수의 제곱의 합이 83이므로

$$(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 83$$

$$3a^2 + 2d^2 = 83, 3 \times 5^2 + 2d^2 = 83$$

$$d^2 = 4 \quad \therefore d = \pm 2$$

따라서 주어진 세 수는 3, 5, 7이므로 세 수의 곱은

$$3 \times 5 \times 7 = 105$$

정답_ ①

629

삼차방정식 $x^3+6x^2+x-k=0$ 의 세 근을 $a-d, a, a+d$ 로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a-d) + a + (a+d) = -6$$

$$3a = -6 \quad \therefore a = -2$$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 -2 이므로 $x=-2$ 를 주어진 방정식에 대입하면

$$-8 + 24 - 2 - k = 0 \quad \therefore k = 14$$

정답_ ⑤

참고 삼차방정식의 근과 계수의 관계

x 에 대한 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

630

직각삼각형의 세 변의 길이를 $a-d, a, a+d$ ($d>0$)로 놓으면 빗변의 길이가 20이므로

$$a+d=20 \quad \dots\dots ㉠$$

피타고라스 정리에 의하여

$$(a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2 \quad \therefore a^2 = 4ad$$

이때 $a > 0$ 이므로

$$a = 4d$$

..... ㉠

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 16, d = 4$$

따라서 세 변의 길이는 12, 16, 20이므로 직각삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 12 \times 16 = 96$$

정답_ ④

참고 직각삼각형의 세 변의 길이를 $a-d, a, a+d$ ($d < 0$)로 놓을 수 있다.
이때 빗변의 길이는 $a+d$ 가 아니라 $a-d$ 가 됨에 주의한다.

631

등차수열을 이루는 네 수를 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ ($d > 0$)

로 놓으면 네 수의 합이 24이므로

$$(a-3d) + (a-d) + (a+d) + (a+3d) = 24$$

$$4a = 24 \quad \therefore a = 6$$

가장 큰 수가 나머지 세 수의 합과 같으므로

$$(6-3d) + (6-d) + (6+d) = 6+3d$$

$$18-3d = 6+3d, 12=6d$$

$$\therefore d = 2$$

따라서 가장 큰 수는 $6+3 \times 2 = 12$ 이다.

정답_ 12

632

(1) 수열 2, 5, 8, ..., 29는 첫째항이 2, 공차가 $5-2=3$ 인 등차수열이므로 29를 제 n 항이라고 하면

$$2 + (n-1) \times 3 = 29, 3n-1=29$$

$$\therefore n = 10$$

따라서 항수가 10이므로 이 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{10\{2 \times 2 + (10-1) \times 3\}}{2} = 155$$

(2) 수열 -19, -17, -15, ..., 1은 첫째항이 -19, 공차가

$-17 - (-19) = 2$ 인 등차수열이므로 1을 제 n 항이라고 하면

$$-19 + (n-1) \times 2 = 1, 2n-21=1$$

$$\therefore n = 11$$

따라서 항수가 11이므로 이 수열의 첫째항부터 제11항까지의 합은

$$\frac{11\{2 \times (-19) + (11-1) \times 2\}}{2} = -99$$

정답_ (1) 155 (2) -99

다른 풀이

(1) 주어진 합은 첫째항이 2, 제10항이 29인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$2+5+8+11+\dots+29 = \frac{10(2+29)}{2} = 155$$

(2) 주어진 합은 첫째항이 -19, 제11항이 1인 등차수열의 첫째항부터 제11항까지의 합이므로

$$-19 + (-17) + (-15) + (-13) + \dots + 1 = \frac{11(-19+1)}{2} = -99$$

633

첫째항이 -6, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 260이므로

$$\frac{n\{2 \times (-6) + (n-1) \times 2\}}{2} = 260$$

$$-6n + n(n-1) = 260, n^2 - 7n - 260 = 0$$

$$(n+13)(n-20) = 0$$

이때 n 은 자연수이므로

$$n = 20$$

정답_ 20

634

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_3 = 4 \text{이므로}$$

$$a + 2d = 4$$

..... ㉠

$$a_6 = 10 \text{이므로}$$

$$a + 5d = 10$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 0, d = 2$$

따라서 첫째항부터 제15항까지의 합은

$$\frac{15\{2 \times 0 + (15-1) \times 2\}}{2} = 210$$

정답_ ②

635

등차수열 -3, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_6, 11$ 은 첫째항이 -3, 끝항은 11, 항수가 $6+2=8$ 이므로 이 수열의 모든 항의 합은

$$\frac{8(-3+11)}{2} = 32$$

$$\text{즉, } -3 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_6 + 11 = 32 \text{이므로}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_6 = 32 - (-3+11) = 24$$

정답_ ④

636

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$S_5 = \frac{5\{2a + (5-1)d\}}{2} = 25 \text{이므로}$$

$$a + 2d = 5$$

..... ㉠

$$S_{10} = \frac{10\{2a + (10-1)d\}}{2} = 100 \text{이므로}$$

$$2a + 9d = 20$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 1, d = 2$$

$$\therefore S_{30} = \frac{30\{2 \times 1 + (30-1) \times 2\}}{2} = 900$$

정답_ ⑤

637

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_{20} = 60, S_{20} = 630 \text{이므로}$$

$$\frac{20(a+60)}{2} = 630 \quad \therefore a = 3$$

$$a_{20}=60\text{이므로}$$

$$3+(20-1)d=60 \quad \therefore d=3$$

$$\therefore S_{40}=\frac{40\{2\times 3+(40-1)\times 3\}}{2}=2460$$

정답_ ⑤

638

$$S_7-S_4=0\text{에서 } S_7-S_4=a_5+a_6+a_7\text{이므로}$$

$$a_5+a_6+a_7=0$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_5=a_6-d, a_7=a_6+d\text{이므로 } \textcircled{1}\text{에서}$$

$$(a_6-d)+a_6+(a_6+d)=0, 3a_6=0$$

$$\therefore a_6=0$$

$$\text{또, } S_6=30\text{에서}$$

$$\frac{6(a_1+a_6)}{2}=30, \frac{6(a_1+0)}{2}=30$$

$$\therefore a_1=10$$

$$\text{즉, } a_6=a_1+5d=10+5d\text{이므로}$$

$$10+5d=0 \quad \therefore d=-2$$

$$\therefore a_2=a_1+d=10+(-2)=8$$

..... ①

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$S_7-S_4=0\text{에서 } S_7=S_4\text{이므로}$$

$$\frac{7(2a+6d)}{2}=\frac{4(2a+3d)}{2}$$

$$14a+42d=8a+12d$$

$$\therefore a+5d=0$$

$$S_6=30\text{에서}$$

$$\frac{6(2a+5d)}{2}=30$$

$$\therefore 2a+5d=10$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a=10, d=-2$$

$$\therefore a_2=a+d=10+(-2)=8$$

정답_ ②

..... ①

..... ②

639

주어진 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

첫째항부터 제10항까지의 합이 -30 이므로

$$\frac{10(2a+9d)}{2}=-30$$

$$\therefore 2a+9d=-6$$

제11항부터 제20항까지의 합이 370 이므로

$$\frac{20(2a+19d)}{2}-(-30)=370$$

$$\therefore 2a+19d=34$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a=-21, d=4$$

따라서 제21항부터 제30항까지의 합은

$$\frac{30\{2\times(-21)+(30-1)\times 4\}}{2}-(-30+370)=1110-340$$

$$=770$$

정답_ ④

다른 풀이

주어진 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하고, 첫째항부터 제10항까지의 합을 A 라고 하면

$$A=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+9d)$$

제11항부터 제20항까지의 합을 B 라고 하면

$$B=(a+10d)+(a+11d)+\cdots+(a+19d)$$

$$=\{a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+9d)\}+10\times 10d$$

$$=A+10\times 10d$$

제21항부터 제30항까지의 합을 C 라고 하면

$$C=(a+20d)+(a+21d)+\cdots+(a+29d)$$

$$=\{a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+9d)\}+10\times 20d$$

$$=A+10\times 20d$$

따라서 A, B, C 는 이 순서대로 $10\times 10d$ 를 공차로 하는 등차수열을 이루고, $A=-30, B=370$ 이므로

$$2B=A+C\text{에서}$$

$$2\times 370=-30+C \quad \therefore C=770$$

즉, 제21항부터 제30항까지의 합은 770 이다.

640

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a\geq 2$), 공차를 d 라고 하면

$$S_3=54\text{이므로}$$

$$\frac{3(2a+2d)}{2}=54$$

$$\therefore a+d=18$$

또, $|S_{12}|=54$ 이므로

$$\left|\frac{12(2a+11d)}{2}\right|=54, |2a+11d|=9$$

$$\therefore 2a+11d=9 \text{ 또는 } 2a+11d=-9$$

(i) $2a+11d=9$ 일 때

①과 $2a+11d=9$ 를 연립하여 풀면

$$a=21, d=-3$$

이때 $a=21<22$ 이므로 모순이다.

(ii) $2a+11d=-9$ 일 때

①과 $2a+11d=-9$ 를 연립하여 풀면

$$a=23, d=-5$$

이때 $a=23>22$ 이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 주어진 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 23 , 공차가 -5 이므로

$$a_9=23+(9-1)\times(-5)=-17$$

정답_ ②

641

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_3=-22\text{이므로}$$

$$a+2d=-22$$

$$a_{11}=26\text{이므로}$$

$$a+10d=26$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a=-34, d=6$$

$$\therefore a_n=-34+(n-1)\times 6=6n-40$$

$$a_n>0\text{에서}$$

$$6n-40>0 \quad \therefore n>6, \dots$$

..... ①

..... ②

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 제7항부터 양수이므로 첫째항부터 제6항까지의 합이 최소이다.

$$\therefore n=6$$

정답_ ②

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_3 = -22 \text{이므로}$$

$$a + 2d = -22 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_{11} = 26 \text{이므로}$$

$$a + 10d = 26 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -34, d = 6$$

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n\{2 \times (-34) + (n-1) \times 6\}}{2} \\ &= 3n^2 - 37n \\ &= 3\left(n - \frac{37}{6}\right)^2 - \frac{1369}{12} \end{aligned}$$

이므로 S_n 은 $n = \frac{37}{6}$ 일 때 최소이다.

그런데 n 은 자연수이고 $\frac{37}{6} = 6.1\cdots$ 에 가장 가까운 자연수는 6이므로 S_n 은 $n=6$ 일 때 최소이다.

642

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_{11} = -10 \text{이므로}$$

$$a + 10d = -10 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

첫째항부터 제12항까지의 합이 42이므로

$$\begin{aligned} \frac{12(2a + 11d)}{2} &= 42 \\ \therefore 2a + 11d &= 7 \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 20, d = -3$$

$$\therefore a_n = 20 + (n-1) \times (-3) = -3n + 23$$

$$a_n < 0 \text{에서}$$

$$-3n + 23 < 0 \quad \therefore n > 7.\cdots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 제8항부터 음수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최대이다.

정답_ ③

643

$S_8 - S_6 = a_7 + a_8$ 이므로 $S_8 - S_6 = -19$ 에서

$$a_7 + a_8 = -19 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_7 = -29 + 6d, a_8 = -29 + 7d$$

이므로 ㉠에서

$$(-29 + 6d) + (-29 + 7d) = -19$$

$$13d = 39 \quad \therefore d = 3$$

$$\therefore a_n = -29 + (n-1) \times 3 = 3n - 32$$

$$a_n > 0 \text{에서}$$

$$3n - 32 > 0 \quad \therefore n > 10.\cdots$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 제11항부터 양수이므로 첫째항부터 제10항까지의 합이 최소이다.

따라서 S_n 의 최솟값은

$$S_{10} = \frac{10\{2 \times (-29) + (10-1) \times 3\}}{2} = -155$$

정답_ ④

644

100 이하의 자연수 중에서 5의 배수를 작은 수부터 차례대로 나열하면

$$5, 10, 15, 20, \cdots, 100$$

이 수열은 첫째항이 5, 공차가 5인 등차수열이므로 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = 5 + (n-1) \times 5 = 5n$$

이때 $5n = 100$ 에서 $n = 20$ 이므로 100은 제20항이다.

따라서 100 이하의 자연수 중에서 5의 배수의 총합은

$$\frac{20(5+100)}{2} = 1050$$

정답_ ⑤

645

120 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수를 작은 수부터 차례대로 나열하면

$$2, 5, 8, 11, \cdots, 119$$

이 수열은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$$

이때 $3n - 1 = 119$ 에서 $n = 40$ 이므로 119는 제40항이다.

따라서 120 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수의 총합은

$$\frac{40(2+119)}{2} = 2420$$

정답_ ③

646

50부터 100까지의 자연수 중에서 3으로 나누어떨어지는 수를 작은 수부터 차례대로 나열하면

$$51, 54, 57, \cdots, 99 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

수열 ㉠은 첫째항이 51, 공차가 3인 등차수열이므로 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = 51 + (n-1) \times 3 = 3n + 48$$

이때 $3n + 48 = 99$ 에서 $n = 17$ 이므로 99는 제17항이다.

따라서 수열 ㉠의 모든 항의 합은

$$\frac{17(51+99)}{2} = 1275$$

50부터 100까지의 자연수 중에서 7로 나누어떨어지는 수를 작은

수부터 차례대로 나열하면

56, 63, 70, ..., 98 ㉠

수열 ㉠은 첫째항이 56, 공차가 7인 등차수열이므로 일반항을 b_n 이라고 하면

$$b_n = 56 + (n-1) \times 7 = 7n + 49$$

이때 $7n + 49 = 98$ 에서 $n = 7$ 이므로 98은 제7항이다.

따라서 수열 ㉠의 모든 항의 합은

$$\frac{7(56+98)}{2} = 539$$

한편, 3과 7의 최소공배수는 21이므로 50부터 100까지의 자연수 중에서 21로 나누어떨어지는 수는 63, 84이므로 그 합은

$$63 + 84 = 147$$

따라서 50부터 100까지의 자연수 중에서 3 또는 7로 나누어떨어지는 수의 총합은

$$1275 + 539 - 147 = 1667$$

정답_ 1667

647

연속하는 15개의 자연수 중에서 가장 작은 수를 a 라고 하면 15개의 자연수는 첫째항이 a , 공차가 1인 등차수열을 이루므로

$$\frac{15\{2a + (15-1) \times 1\}}{2} = 300$$

$$2a + 14 = 40, 2a = 26$$

$$\therefore a = 13$$

따라서 구하는 가장 큰 수는

$$13 + 14 = 27$$

정답_ ㉠

648

탑의 각 층에 쌓은 벽돌의 개수는 한 층씩 위로 올라갈수록 일정 한 수만큼 줄어드므로 등차수열을 이룬다.

n 층에 쌓은 벽돌의 개수를 a_n , 공차를 d 라고 하면

15층에 쌓은 벽돌의 개수가 9이므로

$$a_{15} = a_1 + 14d = 9 \quad \dots\dots ㉠$$

탑을 쌓는데 사용한 벽돌의 총수는 3층에 쌓은 벽돌의 개수의 10배이므로

$$\frac{15(2a_1 + 14d)}{2} = 10(a_1 + 2d)$$

$$3(a_1 + 7d) = 2(a_1 + 2d)$$

$$\therefore a_1 + 17d = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a_1 = 51, d = -3$$

따라서 탑을 쌓는데 사용한 벽돌의 총수는

$$\frac{15(2a_1 + 14d)}{2} = \frac{15\{2 \times 51 + 14 \times (-3)\}}{2} = 450$$

정답_ ㉤

649

n 각형의 내각의 크기는 공차가 20° 인 등차수열을 이루고 가장 큰 내각의 크기가 170° 이므로 n 각형의 외각의 크기는 첫째항이

$180^\circ - 170^\circ = 10^\circ$, 공차가 20° 인 등차수열을 이룬다.

다각형의 외각의 크기의 총합은 항상 360° 이므로

$$\frac{n\{2 \times 10^\circ + (n-1) \times 20^\circ\}}{2} = 360^\circ$$

$$10n^2 = 360, n^2 = 36$$

이때 n 은 3보다 큰 자연수이므로

$$n = 6$$

정답_ ㉡

다른 풀이

n 각형의 내각의 크기의 합은

$$180^\circ \times (n-2) = 180^\circ \times n - 360^\circ \quad \dots\dots ㉠$$

n 각형의 내각의 크기가 공차가 20° 인 등차수열을 이루는 경우는 첫째항을 가장 작은 각으로 놓았을 때이므로 가장 큰 각인 170° 를 첫째항으로 놓으면 n 각형의 내각의 크기는 공차가 -20° 인 등차수열을 이룬다.

첫째항이 170° , 공차가 -20° , 항수가 n 인 등차수열의 합은

$$\frac{n\{2 \times 170^\circ + (n-1) \times (-20^\circ)\}}{2}$$

$$= -10^\circ \times n^2 + 180^\circ \times n \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡이 서로 같으므로

$$180^\circ \times n - 360^\circ = -10^\circ \times n^2 + 180^\circ \times n$$

$$n^2 = 36$$

이때 n 은 3보다 큰 자연수이므로 $n = 6$

참고 (1) n 각형의 내각의 크기의 합은 $180^\circ \times (n-2)$

(2) 다각형의 외각의 크기의 합은 항상 360° 이다.

650

(i) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 2 \times 1 = -1$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 - 2n) - \{(n-1)^2 - 2(n-1)\} \\ &= 2n - 3 \end{aligned} \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $a_1 = -1$ 은 ㉠에 $n = 1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n = 2n - 3$$

$$\therefore a_8 = 2 \times 8 - 3 = 13$$

정답_ ㉡

다른 풀이

$$\begin{aligned} a_8 &= S_8 - S_7 \\ &= (8^2 - 2 \times 8) - (7^2 - 2 \times 7) \\ &= 48 - 35 = 13 \end{aligned}$$

651

(i) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 1 - 2 = -1$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 - n - 2) - \{2(n-1)^2 - (n-1) - 2\} \\ &= 4n - 3 \end{aligned} \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $a_1 = -1$ 은 ㉠에 $n = 1$ 을 대입하여 얻은 값과 다르므로

$$a_1 = -1, a_n = 4n - 3 \text{ (단, } n \geq 2 \text{)}$$

따라서 $a_k = 17$ 에서

$$4k - 3 = 17, 4k = 20$$

$$\therefore k = 5$$

정답_ ③

652

(i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 = -1$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 - 3n) - \{2(n-1)^2 - 3(n-1)\} \\ &= 4n - 5 \end{aligned} \quad \dots\dots ①$$

이때 $a_1 = -1$ 은 ①에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n = 4n - 5$$

$$a_n > 100 \text{에서}$$

$$4n - 5 > 100, 4n > 105$$

$$\therefore n > 26.25$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 27이다.

정답_ ②

653

(i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \times 1 = 4$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + 3n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\ &= 2n + 2 \end{aligned} \quad \dots\dots ①$$

이때 $a_1 = 4$ 는 ①에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n = 2n + 2$$

$$\therefore a_{2n} = 2 \times 2n + 2 = 4n + 2$$

따라서 $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{100}$ 은 첫째항이 6, 공차가 4인 등차수열의 첫째항부터 제50항까지의 합이므로

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{100} = \frac{50\{2 \times 6 + (50-1) \times 4\}}{2} = 5200$$

정답_ ②

654

(i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 3 \times 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 2$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (3n^2 - 2n + 1) - \{3(n-1)^2 - 2(n-1) + 1\} \\ &= 6n - 5 \end{aligned} \quad \dots\dots ①$$

이때 $a_1 = 2$ 는 ①에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 다르므로

$$a_1 = 2, a_n = 6n - 5 \text{ (단, } n \geq 2 \text{)}$$

따라서 $a_3 + a_5 + \dots + a_{15}$ 는 첫째항이 $a_3 = 13$, 끝항이 $a_{15} = 85$,

항수가 7인 등차수열의 합이므로

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{15} &= 2 + \frac{7(13+85)}{2} \\ &= 2 + 343 = 345 \end{aligned}$$

정답_ ①

참고 $a_1 = 2, a_n = 6n - 5$ ($n \geq 2$)이므로 $a_3, a_5, a_7, a_9, \dots$ 는 첫째항이 13, 공차가 12인 등차수열을 이룬다.

655

(1) 첫째항이 3, 공비가 $\frac{9}{3} = 3$ 이므로

$$a_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$$

(2) 첫째항이 16, 공비가 $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ 이므로

$$a_n = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}$$

정답_ (1) $a_n = 3^n$ (2) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}$

656

공비가 -4 이므로 첫째항을 a 라고 하면

$$a_n = a \times (-4)^{n-1}$$

$$a_6 = -128 \text{이므로}$$

$$a \times (-4)^{6-1} = -128$$

$$a \times (-2^{10}) = -2^7, a = \frac{1}{2^3}$$

$$\therefore a = \frac{1}{8}$$

따라서 $a_n = \frac{1}{8} \times (-4)^{n-1}$ 이므로

$$a_4 = \frac{1}{8} \times (-4)^{4-1} = -8$$

정답_ -8

657

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r ($r > 0$)라고 하면

$$a_4 = 10 \text{이므로}$$

$$a_4 = ar^3 = 10 \quad \dots\dots ①$$

$$a_8 = 40 \text{이므로}$$

$$a_8 = ar^7 = 40 \quad \dots\dots ②$$

$$① \div ② \text{을 하면 } r^4 = 4$$

이때 r 는 양수이므로 $r = \sqrt{2}$

$r = \sqrt{2}$ 를 ①에 대입하면

$$2\sqrt{2}a = 10 \quad \therefore a = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore a_n = \frac{5\sqrt{2}}{2} \times (\sqrt{2})^{n-1} = 5 \times (\sqrt{2})^{n-2}$$

$$a_2 = 5, a_{10} = 5 \times (\sqrt{2})^8 = 80 \text{이므로}$$

$$\frac{a_{10}}{a_2} = \frac{80}{5} = 16$$

정답_ ④

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$\frac{a_8}{a_4} = \frac{ar^7}{ar^3} = r^4$$

이때 $a_4 = 10$, $a_8 = 40$ 이므로

$$\frac{a_8}{a_4} = \frac{40}{10} = 4$$

$$\therefore r^4 = 4$$

$$\therefore \frac{a_{10}}{a_2} = \frac{ar^9}{ar} = r^8 = (r^4)^2 = 4^2 = 16$$

참고 등비수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로 공비도 양수이어야 한다. 즉, $r > 0$ 이다.

658

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_3 = 4 \text{이므로}$$

$$ar^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$a_6 = 32 \text{이므로}$$

$$ar^5 = 32 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} \div \textcircled{B}$ 을 하면

$$r^3 = 8$$

이때 r 는 실수이므로

$$r = 2$$

$r = 2$ 를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$4a = 4 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore a_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$a_m = 256 \text{에서}$$

$$2^{m-1} = 256, \quad 2^{m-1} = 2^8$$

$$m-1 = 8 \quad \therefore m = 9$$

정답_ ③

659

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_3 = ar^2, \quad a_6 = ar^5 \text{이므로 } a_3 : a_6 = 8 : 1 \text{에서}$$

$$ar^2 : ar^5 = 8 : 1, \quad 8ar^5 = ar^2$$

$$8r^3 = 1, \quad r^3 = \frac{1}{8}$$

이때 r 는 실수이므로 $r = \frac{1}{2}$

$r = \frac{1}{2}$ 을 $a_2 - a_4 = 18$ 에 대입하면

$$\frac{1}{2}a - \left(\frac{1}{2}\right)^3 a = 18$$

$$\frac{3}{8}a = 18 \quad \therefore a = 48$$

$$\therefore a_n = 48 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_5 = 48 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = 3$$

정답_ 3

660

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_3 = ar^2, \quad a_5 = ar^4, \quad a_7 = ar^6 \text{이므로 } (가) \text{에서}$$

$$ar^2 \times ar^4 \times ar^6 = 125, \quad a^3 r^{12} = 125$$

$$(ar^4)^3 = 125 \quad \therefore ar^4 = 5$$

또, $a_4 = ar^3, \quad a_6 = ar^5, \quad a_8 = ar^7$ 이므로 (나)에서

$$\frac{ar^3 + ar^7}{ar^5} = \frac{13}{6}, \quad \frac{ar^3(1+r^4)}{ar^5} = \frac{13}{6}$$

$$\frac{1+r^4}{r^2} = \frac{13}{6}, \quad 6r^4 - 13r^2 + 6 = 0$$

$$(2r^2 - 3)(3r^2 - 2) = 0$$

$$\therefore r^2 = \frac{3}{2} \text{ 또는 } r^2 = \frac{2}{3}$$

이때 $r > 1$ 이므로

$$r^2 = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a_9 = ar^8 = ar^4 \times (r^2)^2$$

$$= 5 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}$$

정답_ ②

661

첫째항이 9, 공비가 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ 이므로 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$$

제 n 항이 처음으로 $\frac{1}{80}$ 보다 작아진다고 하면

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} < \frac{1}{80} \quad \therefore 3^{n-3} > 80$$

이때 $3^3 = 27, \quad 3^4 = 81$ 이므로

$$n-3 \geq 4 \quad \therefore n \geq 7$$

따라서 처음으로 $\frac{1}{80}$ 보다 작아지는 항은 제 7항이다.

정답_ ①

662

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r > 0$)라고 하면 $a_1 = 1, \quad a_5 - a_3 = 12$ 이므로

$$r^4 - r^2 = 12, \quad r^4 - r^2 - 12 = 0, \quad (r^2 + 3)(r^2 - 4) = 0$$

이때 r^2 은 양수이므로

$$r^2 = 4 \quad \therefore r = 2 \quad (\because r > 0)$$

$$\therefore a_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

즉, $a_8 = 2^7 = 128, \quad a_9 = 2^8 = 256$ 이므로 250에 가장 가까운 항은 제 9항이다.

정답_ ⑤

663

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r ($r > 0$)라고 하면

$$a_2 = 4 \text{이므로}$$

$$ar = 4 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$a_4 = 16 \text{이므로}$$

$$ar^3 = 16 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} \div \textcircled{B}$ 을 하면

$$r^2 = 4 \quad \therefore r = 2 \quad (\because r > 0)$$

$r=2$ 를 ㉠에 대입하면

$$2a=4 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

$$128 < a_n < 1024 \text{에서}$$

$$128 < 2^n < 1024, 2^7 < 2^n < 2^{10}$$

$$\therefore 7 < n < 10$$

따라서 자연수 n 은 8, 9의 2개이다.

정답_ ①

664

등비수열 3, a_1 , a_2 , a_3 , 768의 공비를 r ($r>0$)라고 하면 첫째항이 3, 제5항이 768이므로

$$3r^4 = 768, r^4 = 256$$

$$\therefore r = 4 \quad (\because r > 0)$$

$$\text{따라서 } a_1 = 3 \times 4 = 12, a_2 = 3 \times 4^2 = 48, a_3 = 3 \times 4^3 = 192 \text{이므로}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 12 + 48 + 192 = 252$$

정답_ ③

665

n 개의 수를 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 이라고 하면 등비수열 32, $a_1, a_2, a_3,$

$\dots, a_n, \frac{1}{8}$ 은 첫째항이 32, 제 $(n+2)$ 항이 $\frac{1}{8}$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{8}, \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$\text{따라서 } n+1=8 \text{이므로}$$

$$n=7$$

정답_ ④

참고 두 수 사이에 수를 넣어 만든 등비수열

두 수 x 와 y 사이에 n 개의 수를 넣어 만든 수열 $x, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, y$ 가 등비수열을 이룰 때

(1) 첫째항은 x , 제 $(n+2)$ 항은 y 이다.

(2) a_1 은 둘째항, a_n 은 제 $(n+1)$ 항이다.

(3) 공비를 r 라고 할 때, $y = x \times r^{n+1}$ 이다.

666

등비수열 1, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_7$, 81의 공비를 r ($r>0$)라고 하면 첫째항이 1, 제9항이 81이므로

$$r^8 = 81, r^2 = 3$$

$$\therefore r = \sqrt{3} \quad (\because r > 0)$$

$$\text{따라서 } a_n = \sqrt{3} \times (\sqrt{3})^{n-1} = 3^{\frac{n}{2}} \text{이므로}$$

$$\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \log_3 a_3 + \dots + \log_3 a_7$$

$$= \log_3 (a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_7)$$

$$= \log_3 (3^{\frac{1}{2}} \times 3 \times 3^{\frac{3}{2}} \times \dots \times 3^{\frac{7}{2}})$$

$$= \log_3 3^{\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{7}{2}}$$

$$= \log_3 3^{14}$$

$$= 14$$

정답_ ③

참고 로그의 성질

$a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ 일 때

$$(1) \log_a 1 = 0, \log_a a = 1$$

$$(2) \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$(3) \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$(4) \log_a N^k = k \log_a N \text{ (단, } k \text{는 실수이다.)}$$

667

세 양수 $x, x+12, 16x$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(x+12)^2 = x \times 16x, 15x^2 - 24x - 144 = 0$$

$$5x^2 - 8x - 48 = 0, (5x+12)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 4 \quad (\because x > 0)$$

정답_ ①

668

등비수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 a 이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$a_3 = a \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{a}{4}$$

$$a_7 = a \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{a}{64}$$

$a_3, 2, a_7$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$2^2 = a_3 \times a_7, 4 = \frac{a}{4} \times \frac{a}{64}$$

$$a^2 = 4 \times 4 \times 64 = 32^2$$

$$\therefore a = 32 \quad (\because a > 0)$$

정답_ ⑤

669

이차방정식 $x^2 - kx + 125 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = k, \alpha\beta = 125 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\alpha, \beta - \alpha, \beta$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(\beta - \alpha)^2 = \alpha\beta \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로 ㉠에 대입하면

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha\beta$$

$$\therefore (\alpha + \beta)^2 = 5\alpha\beta$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$k^2 = 5 \times 125, k^2 = 625$$

$$\therefore k = 25 \quad (\because k > 0)$$

정답_ ③

670

등비수열을 이루는 세 수를 a, ar, ar^2 으로 놓으면

세 수의 합이 $\frac{7}{2}$ 이므로

$$a + ar + ar^2 = \frac{7}{2}$$

$$\therefore a(1 + r + r^2) = \frac{7}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 수의 곱이 1이므로

$$a \times ar \times ar^2 = 1$$

$$\therefore (ar)^3 = 1$$

ar 는 실수이므로

$$ar = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠ $\div$ ㉡을 하면

$$\frac{a(1 + r + r^2)}{ar} = \frac{7}{2}, 1 + r + r^2 = \frac{7}{2}r \quad (\because a \neq 0)$$

$$2r^2 - 5r + 2 = 0, (2r - 1)(r - 2) = 0$$

$$\therefore r = \frac{1}{2} \text{ 또는 } r = 2$$

(i) $r = \frac{1}{2}$ 일 때, $a = 2$ 이므로 주어진 세 수는

$$2, 1, \frac{1}{2}$$

(ii) $r = 2$ 일 때, $a = \frac{1}{2}$ 이므로 주어진 세 수는

$$\frac{1}{2}, 1, 2$$

(i), (ii)에서 주어진 세 수는 $\frac{1}{2}, 1, 2$ 이므로 세 수의 제곱의 합은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 2^2 = \frac{21}{4}$$

정답_ ⑤

다른 풀이

등비수열을 이루는 세 수를 $\frac{a}{r}, a, ar$ 로 놓으면

세 수의 합이 $\frac{7}{2}$ 이므로

$$\frac{a}{r} + a + ar = \frac{7}{2} \quad \dots\dots ①$$

세 수의 곱이 1이므로

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 1, \quad a^3 = 1$$

$$\therefore a = 1$$

$a = 1$ 을 ①에 대입하면

$$\frac{1}{r} + 1 + r = \frac{7}{2}, \quad 2r^2 - 5r + 2 = 0$$

$$(2r-1)(r-2) = 0 \quad \therefore r = \frac{1}{2} \text{ 또는 } r = 2$$

따라서 주어진 세 수는 $\frac{1}{2}, 1, 2$ 이므로 세 수의 제곱의 합은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 2^2 = \frac{21}{4}$$

671

직육면체의 밑면의 가로 길이, 세로 길이와 높이를 각각 a, ar, ar^2 으로 놓으면

모든 모서리의 길이의 합이 104이므로

$$4(a + ar + ar^2) = 104 \quad \dots\dots ①$$

겉넓이가 312이므로

$$2(a \times ar + ar \times ar^2 + ar^2 \times a) = 312 \quad \dots\dots ②$$

① $\div$ ②을 하면

$$ar = 6$$

따라서 직육면체의 부피는

$$a \times ar \times ar^2 = (ar)^3 = 6^3 = 216$$

정답_ 216

672

곡선 $y = -x^3 + 8x^2 + 32x$ 와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $-x^3 + 8x^2 + 32x = k$, 즉 $x^3 - 8x^2 - 32x + k = 0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

세 실근을 a, ar, ar^2 으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + ar + ar^2 = 8 \text{이므로}$$

$$a(1+r+r^2) = 8 \quad \dots\dots ①$$

$$a \times ar + ar \times ar^2 + ar^2 \times a = -32 \text{이므로}$$

$$a^2 r(1+r+r^2) = -32 \quad \dots\dots ②$$

$$a \times ar \times ar^2 = -k \text{이므로}$$

$$k = -(ar)^3 \quad \dots\dots ③$$

① $\div$ ②을 하면

$$ar = -4 \quad \dots\dots ④$$

④을 ③에 대입하면

$$k = -(-4)^3 = 64$$

정답_ ⑤

참고 함수의 그래프와 방정식의 실근

두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 에 대하여

(1) 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근은 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.

(2) 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.

673

1등급인 별의 밝기가 6등급인 별의 밝기의 100배이므로

$$a_1 = 100a_6$$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a = 100ar^5 \quad \therefore r = 10^{-\frac{2}{5}} (\because a \neq 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore \log a_1 - \log a_3 &= \log \frac{a_1}{a_3} = \log \frac{a}{ar^2} \\ &= \log r^{-2} = \log 10^{\frac{4}{5}} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

정답_ $\frac{4}{5}$

674

처음 광선의 양을 a 라고 하면

광선이 1장의 유리를 통과할 때 광선의 양은

$$a(1-0.2)$$

광선이 2장의 유리를 통과할 때 광선의 양은

$$a(1-0.2) \times (1-0.2) = a(1-0.2)^2$$

광선이 3장의 유리를 통과할 때 광선의 양은

$$a(1-0.2)^2 \times (1-0.2) = a(1-0.2)^3$$

$\vdots$

광선이 n 장의 유리를 통과할 때 광선의 양은

$$a(1-0.2)^n$$

광선이 n 장의 유리를 통과할 때 처음 양의 $\frac{1}{10}$ 이 되므로

$$a(1-0.2)^n = \frac{1}{10}a$$

$$\left(\frac{8}{10}\right)^n = \frac{1}{10} (\because a \neq 0)$$

양변에 상용로그를 취하면

$$n(\log 8 - \log 10) = \log \frac{1}{10}$$

$$n(3 \log 2 - 1) = -1$$

$$\therefore n = \frac{-1}{3 \log 2 - 1} = \frac{-1}{3 \times 0.3 - 1} = \frac{1}{0.1} = 10$$

따라서 10장을 통과해야 처음 광선의 양의 $\frac{1}{10}$ 이 된다.

정답_ ④

675

$\overline{A_1B_1}=4$ 이므로

$$\triangle A_1B_1C_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$$

$$\overline{A_2C_2} = \frac{1}{2} \overline{A_1B_1} = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \text{이므로}$$

$$\triangle A_2B_2C_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \times \frac{1}{4}$$

$$\overline{A_3C_3} = \frac{1}{2} \overline{A_2B_2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \text{이므로}$$

$$\triangle A_3B_3C_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

⋮

따라서 삼각형 $A_nB_nC_n$ 의 넓이는

$$\triangle A_nB_nC_n = 4\sqrt{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \triangle A_6B_6C_6 = 4\sqrt{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{\sqrt{3}}{256}$$

정답 $\frac{\sqrt{3}}{256}$

676

(1) 수열 2, 4, 8, ..., 256은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{4}{2}=2$ 인 등비수열

이므로 256을 제 n 항이라고 하면

$$2 \times 2^{n-1} = 256, 2^n = 256 = 2^8$$

$$\therefore n=8$$

따라서 항수가 8이므로 이 수열의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$$\frac{2(2^8-1)}{2-1} = 510$$

(2) 수열 $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{243}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열

이므로 $\frac{1}{243}$ 을 제 n 항이라고 하면

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{243} = \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$n-1=5 \quad \therefore n=6$$

따라서 항수가 6이므로 이 수열의 첫째항부터 제6항까지의 합은

$$\frac{1 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6\right\}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{364}{243}$$

정답 (1) 510 (2) $\frac{364}{243}$

주의 첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 을 구할 때, 분모가 음수가 되지 않도록

$$r > 1 \text{이면 } S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, r < 1 \text{ 이면 } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

을 이용한다.

677

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 3, 공비가 2이므로

$S_k=189$ 에서

$$\frac{3(2^k-1)}{2-1} = 189$$

$$2^k-1=63, 2^k=64=2^6$$

$$\therefore k=6$$

정답 ②

678

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_4=6 \text{이므로}$$

$$ar^3=6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_6=54 \text{이므로}$$

$$ar^5=54 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$r^2=9 \quad \therefore r=3 (\because r>0)$$

$r=3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$27a=6 \quad \therefore a=\frac{2}{9}$$

따라서 첫째항부터 제6항까지의 합은

$$\frac{\frac{2}{9}(3^6-1)}{3-1} = \frac{728}{9}$$

정답 $\frac{728}{9}$

679

$$800=2^5 \times 5^2 \text{이므로}$$

$$x=(5+1)(2+1)=6 \times 3=18$$

$$y=(1+2+2^2+\dots+2^5)(1+5+5^2)$$

$$= \frac{1 \times (2^6-1)}{2-1} \times 31 = 63 \times 31$$

$$= 1953$$

$$\therefore x+y=18+1953=1971$$

정답 ③

참고 자연수의 양의 약수의 개수와 양의 약수의 총합

자연수 $N=p^m \times q^n$ (p, q 는 서로 다른 소수, m, n 은 자연수)에 대하여

(1) N 의 양의 약수의 개수는

$$(m+1)(n+1)$$

(2) N 의 양의 약수의 총합은

$$(1+p+p^2+\dots+p^m)(1+q+q^2+\dots+q^n) = \frac{p^{m+1}-1}{p-1} \times \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

680

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r \neq 1$)라고 하면

$S_8=3S_4$ 에서

$$\frac{3(r^8-1)}{r-1} = 3 \times \frac{3(r^4-1)}{r-1}$$

$$\frac{(r^4+1)(r^4-1)}{r-1} = 3 \times \frac{r^4-1}{r-1}$$

$$r^4+1=3 (\because r \neq 1) \quad \therefore r^4=2$$

$$\therefore a_9=3r^8=3 \times (r^4)^2$$

$$= 3 \times 2^2 = 12$$

정답 ③

681

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 a , 공비가 r 이므로 $a_n = ar^{n-1}$

$$2a = S_2 + S_3 \text{에서}$$

$$2a = (a + ar) + (a + ar + ar^2)$$

$$ar(2+r) = 0 \quad \therefore r = -2 \quad (\because a > 0, r \neq 0)$$

$$\text{또, } r^2 = 64a^2 \text{에서 } 4 = 64a^2 \text{이므로}$$

$$a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \frac{1}{4} \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore a_5 = \frac{1}{4} \times (-2)^4 = 4$$

정답_ ②

682

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$S_3 = 21 \text{이므로}$$

$$\frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} = 21 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_6 = 189 \text{이므로}$$

$$\frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} = 189 \quad \therefore \frac{a(r^3 - 1)(r^3 + 1)}{r - 1} = 189 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$r^3 + 1 = 9 \quad \therefore r^3 = 8$$

이때 r 는 실수이므로 $r = 2$

$r = 2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{a(2^3 - 1)}{2 - 1} = 21, 7a = 21$$

$$\therefore a = 3 \quad \therefore a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

$$\therefore a_6 = 3 \times 2^5 = 96$$

정답_ 96

683

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

첫째항부터 제10항까지의 합이 30이므로

$$\frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} = 30 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

제11항부터 제20항까지의 합이 60이므로

$$\frac{a(r^{20} - 1)}{r - 1} - 30 = 60, \frac{a(r^{20} - 1)}{r - 1} = 90$$

$$\therefore \frac{a(r^{10} - 1)(r^{10} + 1)}{r - 1} = 90 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$r^{10} + 1 = 3 \quad \therefore r^{10} = 2$$

따라서 제21항부터 제30항까지의 합은

$$\frac{a(r^{30} - 1)}{r - 1} - (30 + 60) = \frac{a(r^{10} - 1)(r^{20} + r^{10} + 1)}{r - 1} - 90$$

$$= \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} \times (r^{20} + r^{10} + 1) - 90$$

$$= 30 \times (2^2 + 2 + 1) - 90 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= 210 - 90 = 120$$

정답_ ①

684

이동 거리를 전날의 10%씩 줄여서 여행하므로

첫째 날 이동 거리는 10 (km)

둘째 날 이동 거리는 10×0.9 (km)

셋째 날 이동 거리는 10×0.9^2 (km)

$\vdots$

서른째 날 이동 거리는 10×0.9^{29} (km)

따라서 30일 동안 진기가 이동할 거리는

$$10 + 10 \times 0.9 + 10 \times 0.9^2 + \dots + 10 \times 0.9^{29}$$

$$= \frac{10(1 - 0.9^{30})}{1 - 0.9} = \frac{10(1 - 0.04)}{0.1}$$

$$= 96 \text{ (km)}$$

정답_ 96 km

685

규칙 (나)에 의하여 네 번째 줄의 네 번째 칸의 수는

$$4 \times 2 = 8$$

규칙 (가)에 의하여 네 번째 줄의 8의 왼쪽 칸의 수는

$$8 \div 2 = 4$$

규칙 (가)에 의하여 네 번째 줄의 8의 오른쪽 칸의 수는

$$8 \times 2 = 16$$

이와 같은 방법으로 네 번째 줄의 모든 칸에 들어갈 수를 구하면 다음과 같다.

첫 번째 줄 →							
두 번째 줄 →				2	4		
세 번째 줄 →				4			
네 번째 줄 →	1	2	4	8	16	32	64

따라서 네 번째 줄에 있는 모든 수의 합은

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$$

$$= \frac{1 \times (2^7 - 1)}{2 - 1} = 127$$

정답_ ②

686

2019년의 쓰레기 배출량을 a 만 톤이라 하고 매년 쓰레기 배출량을 줄이는 일정한 비율을 r 라고 하면

2019년부터 2021년까지의 쓰레기 배출량은 50만 톤이므로

$$a + ar + ar^2 = \frac{a(1 - r^3)}{1 - r} = 50 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

2022년부터 2024년까지의 쓰레기 배출량은 10만 톤이므로

$$ar^3 + ar^4 + ar^5 = \frac{ar^3(1 - r^3)}{1 - r} = 10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$r^3 = \frac{1}{5}$$

이때 2021년의 쓰레기 배출량은 ar^2 , 2024년의 쓰레기 배출량은 ar^5 이므로

$$\frac{ar^5}{ar^2} = r^3 = \frac{1}{5}$$

따라서 2024년의 쓰레기 배출량은 2021년의 쓰레기 배출량의 $\frac{1}{5}$ 배이다.

정답_ ②

687

(i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1 + 2 = 3$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n+2^n) - \{(n-1) + 2^{n-1}\} \\ &= 1 + 2^{n-1} \end{aligned}$$

..... ㉠

이때 $a_1=3$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 다르므로

$$a_1=3, a_n=1+2^{n-1} \text{ (단, } n \geq 2 \text{)}$$

$$\therefore a_6 = 1 + 2^5 = 1 + 32 = 33$$

정답_ ②

다른 풀이

$$\begin{aligned} a_6 &= S_6 - S_5 = (6+2^6) - (5+2^5) \\ &= 70 - 37 = 33 \end{aligned}$$

688

(i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 3 + 3 = 6$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (3^n + 3) - (3^{n-1} + 3) \\ &= 2 \times 3^{n-1} \end{aligned}$$

..... ㉠

이때 $a_1=6$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 다르므로

$$a_1=6, a_n=2 \times 3^{n-1} \text{ (단, } n \geq 2 \text{)}$$

따라서 $a_1=6, a_2=2 \times 3=6, a_4=2 \times 3^3=54$ 이므로

$$\frac{a_2+a_4}{a_1} = \frac{6+54}{6} = 10$$

정답_ 10

다른 풀이

$$a_1 = S_1 = 3 + 3 = 6$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = (3^2 + 3) - 6 = 6$$

$$a_4 = S_4 - S_3 = (3^4 + 3) - (3^3 + 3) = 84 - 30 = 54$$

$$\therefore \frac{a_2+a_4}{a_1} = \frac{6+54}{6} = 10$$

689

(i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2^0 + k = 1 + k$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2^{n-1} + k) - (2^{n-2} + k) \\ &= 2^{n-2} \end{aligned}$$

..... ㉠

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $a_1=1+k$ 가

㉠에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 같아야 하므로

$$1+k = \frac{1}{2} \quad \therefore k = -\frac{1}{2}$$

정답_ ③

690

$\log(S_n+1)=n$ 에서

$$S_n+1=10^n \quad \therefore S_n=10^n-1$$

(i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 10 - 1 = 9$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (10^n - 1) - (10^{n-1} - 1) \\ &= 9 \times 10^{n-1} \end{aligned}$$

..... ㉠

이때 $a_1=9$ 는 ㉠에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

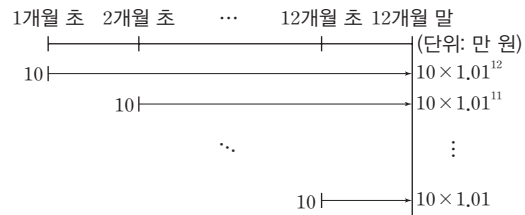
$$a_n = 9 \times 10^{n-1}$$

$$\therefore a_5 = 9 \times 10^4 = 90000$$

정답_ 90000

691

매월 초에 10만 원씩 적립할 때, 12개월째 말의 적립금의 원리합계를 S라고 하면

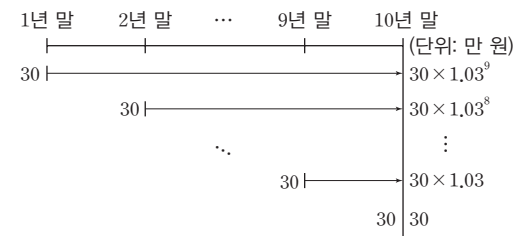


$$\begin{aligned} S &= 10 \times 1.01 + 10 \times 1.01^2 + 10 \times 1.01^3 + \dots + 10 \times 1.01^{12} \\ &= \frac{10 \times 1.01(1.01^{12} - 1)}{1.01 - 1} \\ &= \frac{10 \times 1.01(1.13 - 1)}{0.01} \\ &= \frac{10 \times 1.01 \times 0.13}{0.01} = 131.3 \text{ (만 원)} \\ &= 1313000 \text{ (원)} \end{aligned}$$

정답_ 1313000원

692

매년 말에 30만원씩 적립할 때, 10년째 말의 적립금의 원리합계를 S라고 하면



$$\begin{aligned} S &= 30 + 30 \times 1.03 + 30 \times 1.03^2 + \dots + 30 \times 1.03^9 \\ &= \frac{30(1.03^{10} - 1)}{1.03 - 1} \\ &= \frac{30(1.34 - 1)}{0.03} \\ &= \frac{30 \times 0.34}{0.03} = 340 \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

정답_ ④

693

적립 금액은 매년 5%의 비율로 증가하므로

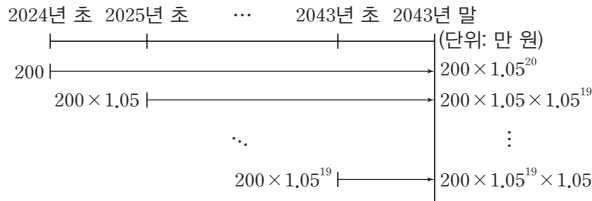
2024년 초 적립 금액은 200만 원

2025년 초 적립 금액은 200×1.05 (만 원)

2026년 초 적립 금액은 200×1.05^2 (만 원)

⋮

2043년 초 적립 금액은 200×1.05^{19} (만 원)



적립 금액이 증가할 때마다 이자를 받는 기간이 줄어드므로 매년 초의 적립 금액은 2043년 말에 모두 200×1.05^{20} 만 원이 된다.

따라서 2043년 말까지 적립되는 금액의 원리합계는

$$(200 \times 1.05^{20}) \times 20 = 200 \times 2.65 \times 20 = 10600 \text{ (만 원)}$$

즉, 1억 600만 원이다.

정답_ ②

694

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하자.
제3항과 제8항은 절댓값이 같고 부호가 반대이므로

$$a_3 = -a_8, a + 2d = -(a + 7d)$$

$$\therefore 2a + 9d = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

제5항이 -2 이므로

$$a + 4d = -2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -18, d = 4 \quad \dots\dots ①$$

$$\therefore a_n = -18 + (n-1) \times 4 = 4n - 22 \quad \dots\dots ②$$

246을 제 n 항이라고 하면

$$4n - 22 = 246, 4n = 268$$

$$\therefore n = 67$$

따라서 246은 제67항이다. $\dots\dots ③$

정답_ 제67항

채점 기준	비율
① 첫째항과 공차 구하기	50 %
② 일반항 a_n 구하기	20 %
③ 246이 제몇 항인지 구하기	30 %

695

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_7 = 24 \text{ 이므로}$$

$$a + 6d = 24 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a_5 : a_{15} = 3 : 8 \text{ 에서 } 8a_5 = 3a_{15} \text{ 이므로}$$

$$8(a + 4d) = 3(a + 14d)$$

$$\therefore a - 2d = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 6, d = 3$$

$$\therefore a_n = 6 + (n-1) \times 3 = 3n + 3 \quad \dots\dots ①$$

$$a_n > 108 \text{ 에서}$$

$$3n + 3 > 108 \quad \dots\dots ②$$

$$\therefore n > 35$$

따라서 제36항에서 처음으로 108보다 커진다. $\dots\dots ③$

정답_ 제36항

채점 기준	비율
① 일반항 a_n 구하기	40 %
② n 에 대한 부등식 세우기	30 %
③ 처음으로 108보다 커지는 항 구하기	30 %

696

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$S_5 = -80 \text{ 이므로}$$

$$\frac{5(2a + 4d)}{2} = -80$$

$$\therefore a + 2d = -16 \quad \dots\dots ㉠$$

$$S_{11} = -11 \text{ 이므로}$$

$$\frac{11(2a + 10d)}{2} = -11$$

$$\therefore a + 5d = -1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -26, d = 5$$

$$\therefore a_n = -26 + (n-1) \times 5 = 5n - 31 \quad \dots\dots ①$$

$a_n > 0$ 에서

$$5n - 31 > 0 \quad \therefore n > 6.2$$

따라서 제7항부터는 양수이므로 첫째항부터 제6항까지의 합이 최소이다.

$$\therefore p = 6 \quad \dots\dots ②$$

$n = 6$ 일 때 S_n 은 최소가 되므로 S_n 의 최솟값은

$$q = S_6 = \frac{6\{2 \times (-26) + (6-1) \times 5\}}{2} = -81 \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore p + q = 6 + (-81) = -75 \quad \dots\dots ④$$

정답_ -75

채점 기준	비율
① 일반항 a_n 구하기	30 %
② p 의 값 구하기	30 %
③ q 의 값 구하기	30 %
④ $p+q$ 의 값 구하기	10 %

697

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_3 = 18 \text{ 이므로}$$

$$ar^2 = 18 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a_6 = 486 \text{ 이므로}$$

$$ar^5 = 486 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡ $\div$ ㉠을 하면

$$r^3 = 27$$

이때 r 는 실수이므로

$$r = 3$$

$r = 3$ 을 ㉠에 대입하면

$$9a = 18 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore a_n = 2 \times 3^{n-1} \quad \dots\dots ①$$

$a_n > 1000$ 에서
 $2 \times 3^{n-1} > 1000 \quad \therefore 3^{n-1} > 500$
 이때 $3^5 = 243, 3^6 = 729$ 이므로
 $n-1 \geq 6 \quad \therefore n \geq 7$
 따라서 자연수 n 의 최솟값은 7이다. ②

정답_ 7

채점 기준	비율
① 일반항 a_n 구하기	60 %
② 자연수 n 의 최솟값 구하기	40 %

698

이차방정식 $x^2 - mx + n = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = m, \alpha\beta = n$ ①
 $\alpha, 2, \beta$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루므로
 $2 \times 2 = \alpha + \beta \quad \therefore \alpha + \beta = 4$
 $\therefore m = 4$ ②
 $\alpha, 3, \beta$ 는 이 순서대로 등비수열을 이루므로
 $3^2 = \alpha\beta \quad \therefore \alpha\beta = 9$
 $\therefore n = 9$ ③
 $\therefore m + n = 4 + 9 = 13$ ④

정답_ 13

채점 기준	비율
① $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 를 m, n 으로 나타내기	30 %
② m 의 값 구하기	30 %
③ n 의 값 구하기	30 %
④ $m + n$ 의 값 구하기	10 %

699

(i) $n=1$ 일 때
 $a_1 = S_1 = 5^2 - 5 = 20$
 (ii) $n \geq 2$ 일 때
 $a_n = S_n - S_{n-1}$
 $= (5^{n+1} - 5) - (5^n - 5)$
 $= 4 \times 5^n$ ①

이때 $a_1 = 20$ 은 ①에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로
 $a_n = 4 \times 5^n$ ①
 $\therefore a_2 = 4 \times 5^2 = 100, a_4 = 4 \times 5^4 = 2500$ ②
 $\therefore a_2 + a_4 = 100 + 2500 = 2600$ ③

정답_ 2600

채점 기준	비율
① 일반항 a_n 구하기	70 %
② a_2, a_4 의 값 구하기	20 %
③ $a_2 + a_4$ 의 값 구하기	10 %

700

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면
 $a_3 = -4$ 이므로
 $a + 2d = -4$ ①

이때 $a_3 = -4 < 0, d$ 는 자연수이므로

$$a_2 < a_3 < 0 \quad \therefore |a_2| = -a_2$$

(i) $a_6 \geq 0$ 일 때

$$|a_6| = |a_2| - 2 \text{에서 } a_6 = -a_2 - 2 \text{이므로}$$

$$a + 5d = -(a + d) - 2, 2a + 6d = -2$$

$$\therefore a + 3d = -1$$

..... ①

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = -10, d = 3$$

(ii) $a_6 < 0$ 일 때

$$|a_6| = |a_2| - 2 \text{에서 } -a_6 = -a_2 - 2 \text{이므로}$$

$$-(a + 5d) = -(a + d) - 2$$

$$4d = 2 \quad \therefore d = \frac{1}{2}$$

그런데 d 는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a = -10, d = 3$ 이므로

$$a_n = -10 + (n-1) \times 3 = 3n - 13$$

$$\therefore a_{15} = 3 \times 15 - 13 = 32$$

정답_ ④

701

접선 l 과 선분 AB 가 이루는 예각의 크기가 18° 이고, $l \perp \overline{OA}$ 이므로
 $\angle OAB = \angle OBA = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$

$$\therefore \angle AOB = 180^\circ - (72^\circ + 72^\circ) = 36^\circ$$

삼각형 OAC 에서 $\angle OAC = \alpha, \angle OCA = \beta$ 라고 하면 가장 긴 변 이 선분 OA 이므로 가장 큰 내각의 크기는 β 이다.

이때 $\angle AOC = 36^\circ$ 이므로

$$\alpha + \beta + 36^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore \alpha + \beta = 144^\circ$$

..... ①

삼각형 OAC 의 세 내각의 크기가 등차수열을 이루므로

(i) $36^\circ, \alpha, \beta$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때

$$2\alpha = \beta + 36^\circ$$

..... ②

①, ②를 연립하여 풀면

$$\alpha = 60^\circ, \beta = 84^\circ$$

(ii) $\alpha, 36^\circ, \beta$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때

$$\alpha + \beta = 72^\circ \text{가 되므로 ①에 모순이다.}$$

(i), (ii)에서 가장 큰 내각의 크기는 84° 이다.

정답_ ⑤

702

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1) \times (-4)\}}{2} = -2n^2 + (a+2)n$$

$$S_n < 800 \text{에서 } -2n^2 + (a+2)n < 800$$

$$\therefore 2n^2 - (a+2)n + 800 > 0$$

..... ①

n 에 대한 이차방정식 $2n^2 - (a+2)n + 800 = 0$ 의 판별식을 D 라고 할 때, 모든 자연수 n 에 대하여 ①이 성립하므로

$$D = (a+2)^2 - 4 \times 2 \times 800 < 0$$

$$a^2 + 4a - 6396 < 0, (a+82)(a-78) < 0$$

$$\therefore -82 < a < 78$$

따라서 자연수 a 의 최댓값은 77이다.

정답_ 77

다른 풀이

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1) \times (-4)\}}{2} = n(a - 2n + 2)$$

이때 모든 자연수 n 에 대하여 $S_n < 800$ 이므로

$$n(a - 2n + 2) < 800, \quad a - 2n + 2 < \frac{800}{n} \quad (\because n > 0)$$

$$\therefore 2n + \frac{800}{n} > a + 2$$

한편, $2n > 0, \frac{800}{n} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2n + \frac{800}{n} \geq 2\sqrt{2n \times \frac{800}{n}} = 80$$

(단, 등호는 $2n = \frac{800}{n}$ 일 때 성립한다.)

즉, 모든 자연수 n 에 대하여 $2n + \frac{800}{n} > a + 2$ 가 성립하려면

$$a + 2 < 80 \quad \therefore a < 78$$

따라서 자연수 a 의 최댓값은 77이다.

참고 산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0, b > 0$ 일 때

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립한다.})$$

703

수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로 $a_{k-3}, a_{k-2}, a_{k-1}$ 은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

즉, a_{k-2} 는 a_{k-3} 과 a_{k-1} 의 등차중항이므로

$$a_{k-2} = \frac{a_{k-3} + a_{k-1}}{2}$$

조건 (가)에서

$$a_{k-2} = \frac{-24}{2} = -12$$

한편, 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 k 항까지의 합은

$$S_k = \frac{k(a_1 + a_k)}{2}$$

이때 $a_3 - a_1 = a_k - a_{k-2}$ 이므로

$$a_1 + a_k = a_3 + a_{k-2}$$

$$\therefore S_k = \frac{k(a_3 + a_{k-2})}{2} = \frac{k(42 - 12)}{2} = 15k$$

조건 (나)에서

$$15k = k^2, \quad k(k-15) = 0$$

이때 k 는 4 이상의 자연수이므로

$$k = 15$$

정답 ③

704

조건 (가)에서 처음 4개 항의 합은 26이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 26 \quad \dots\dots ㉠$$

조건 (나)에서 마지막 4개 항의 합은 134이므로

$$a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 134 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠ + ㉡을 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 160$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3}$$

즉, $4(a_1 + a_n) = 160$ 이므로

$$a_1 + a_n = 40$$

조건 (다)에서 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 260$ 이므로

$$\frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 260, \quad 20n = 260$$

$$\therefore n = 13$$

정답 13

참고 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_1 + a_n = a + \{a + (n-1)d\} = 2a + (n-1)d$$

$$a_2 + a_{n-1} = (a+d) + \{a + (n-2)d\} = 2a + (n-1)d$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a+2d) + \{a + (n-3)d\} = 2a + (n-1)d$$

$\vdots$

이므로

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$$

705

직선 $x=n$ ($n=1, 2, \dots, 15$)이 두 곡선 $y=x^2+12, y=x^2-6x+12$

와 만나서 생긴 선분의 길이는

$$(n^2+12) - (n^2-6n+12) = 6n$$

따라서 직선 $x=1, x=2, \dots, x=15$ 가 두 곡선 $y=x^2+12,$

$y=x^2-6x+12$ 와 만나서 생긴 15개의 선분의 길이의 합은

$$6 \times 1 + 6 \times 2 + 6 \times 3 + \dots + 6 \times 15 = 6(1+2+3+\dots+15)$$

$$= 6 \times \frac{15(1+15)}{2}$$

$$= 720$$

정답 ②

706

(i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 10 \times 1 = -9$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^2 - 10n) - \{(n-1)^2 - 10(n-1)\}$$

$$= 2n - 11$$

$\dots\dots ㉠$

이때 $a_1 = -9$ 는 ㉠에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n = 2n - 11$$

$a_n > 0$ 에서

$$2n - 11 > 0 \text{에서 } n > 5.5$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 제5항까지 음수이고 제6항부터 양수이므로

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_{10}|$$

$$= -(a_1 + a_2 + \dots + a_5) + (a_6 + a_7 + \dots + a_{10})$$

$$= -S_5 + (S_{10} - S_5)$$

$$= S_{10} - 2S_5$$

$$= (10^2 - 10 \times 10) - 2(5^2 - 10 \times 5)$$

$$= 50$$

정답 50

707

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d , 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 r 라고 하면

$$a_7 = a_6 + d = 9 + d$$

$$b_7 = b_6 \times r = 9r$$

조건 (가)에서 $a_7 = b_7$ 이므로

$$9 + d = 9r \quad \therefore r = 1 + \frac{d}{9} \quad \dots\dots ㉠$$

$a_{11} = a_6 + 5d = 9 + 5d$ 이므로 조건 (나)에서

$$94 < 9 + 5d < 109, \quad 85 < 5d < 100$$

$$\therefore 17 < d < 20$$

이때 r 는 자연수이므로 ㉠에 의하여 d 는 9의 배수이어야 한다.

$$\therefore d=18$$

$d=18$ 을 ㉠에 대입하면

$$r=1+\frac{18}{9}=3$$

$$\begin{aligned}\therefore a_7+b_8 &= a_6+d+b_6 \times r^2 \\ &= 9+18+9 \times 3^2=108\end{aligned}$$

정답_ ⑤

708

$n \geq 2$ 일 때

$$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n, \quad a_n=S_n-S_{n-1} \text{이므로}$$

$$S_{n+1}=a_{n+1}+S_n, \quad S_{n-1}=S_n-a_n$$

$$\therefore S_{n+1}-S_{n-1}=a_{n+1}+S_n-(S_n-a_n)=a_{n+1}+a_n$$

$$\text{즉, } (S_{n+1}-S_{n-1})^2=4a_na_{n+1}+9 \text{에서}$$

$$(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+9$$

$$a_{n+1}^2-2a_na_{n+1}+a_n^2=9$$

$$\therefore (a_{n+1}-a_n)^2=9$$

이때 $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots$ 이므로

$$a_{n+1}-a_n > 0 \quad \therefore a_{n+1}-a_n=3$$

한편, $a_2-a_1=5-2=3$ 이므로 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1}-a_n=3 \text{이 성립한다.}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로

$$a_{10}=2+9 \times 3=29$$

정답_ ⑤

709

a, b, c 가 자연수이고 조건 ㉠에서

$$[\log a]+[\log b]+[\log c]=0 \text{이므로}$$

$$[\log a]=[\log b]=[\log c]=0$$

따라서 a, b, c 는 모두 한 자리 자연수이다.

이때 조건 ㉡에서 a, b, c 는 이 순서대로 등비수열을 이루므로 공비를 r ($r \neq 1$)라고 하면

(i) $r=2$ 일 때

등비수열을 이루는 세 수 a, b, c 는 모두 한 자리 자연수이므로

$$a=1, b=2, c=4 \text{ 또는 } a=2, b=4, c=8$$

$$\therefore a+b+c=7 \text{ 또는 } a+b+c=14$$

(ii) $r=3$ 일 때

등비수열을 이루는 세 수 a, b, c 는 모두 한 자리 자연수이므로

$$a=1, b=3, c=9$$

$$\therefore a+b+c=13$$

(i), (ii)에서 $a+b+c$ 의 최솟값은 7이다.

정답_ ②

710

조건 ㉠에서 $e=\sqrt{cd}$, 즉 $e^2=cd$ 이므로 e 는 c 와 d 의 등비중항이다. 즉, c, e, d 또는 d, e, c 의 순서대로 등비수열을 이룬다. ㉠

조건 ㉡에서 $\frac{a}{e}=\frac{c}{d}$ 이므로 ㉠에 의하여 a, c, e, d 또는 d, e, c, a 의 순서대로 등비수열을 이룬다. ㉡

조건 ㉢에서 $a < b$ 이고 a, b, c, d, e 를 적당히 나열하여 공비가 1보

다 큰 등비수열을 만들어야 하므로 ㉡에 의하여 a, c, e, d, b 또는 d, e, c, a, b 의 순서대로 등비수열을 이룬다. 따라서 b 는 제5항이다.

정답_ ⑤

711

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{10}} &= \frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 1-\frac{1}{2^{10}} \\ &= \frac{1023}{1024}\end{aligned}$$

이므로 제외된 세 수를 $\frac{1}{2^a}, \frac{1}{2^b}, \frac{1}{2^c}$ (a, b, c 는 자연수)이라고 하면

$$\frac{1023}{1024}-\left(\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^b}+\frac{1}{2^c}\right)=\frac{431}{512}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^b}+\frac{1}{2^c} &= \frac{1023}{1024}-\frac{431}{512} \\ &= \frac{161}{1024}\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}\frac{161}{1024} &= \frac{128}{1024}+\frac{32}{1024}+\frac{1}{1024} \\ &= \frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^{10}}\end{aligned}$$

이므로 제외된 세 수는 $\frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^5}, \frac{1}{2^{10}}$ 이다.

따라서 세 수의 곱은 $\frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2^5} \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{2^{3+5+10}} = \frac{1}{2^{18}}$ 이므로

$$k=18$$

정답_ 18

712

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라고 하면

$$a_1+a_3+a_5+\dots+a_{2n-1}=3+3r^2+3r^4+\dots+3r^{2(n-1)}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{3\{(r^2)^n-1\}}{r^2-1} \\ &= \frac{3(r^{2n}-1)}{r^2-1}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{3(r^{2n}-1)}{r^2-1}=2^{42}-1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a_3+a_5+a_7+\dots+a_{2n+1}=3r^2+3r^4+3r^6+\dots+3r^{2n}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{3r^2\{(r^2)^n-1\}}{r^2-1} \\ &= \frac{3r^2(r^{2n}-1)}{r^2-1}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{3r^2(r^{2n}-1)}{r^2-1}=2^{44}-4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$r^2(2^{42}-1)=2^{44}-4$$

$$r^2(2^{42}-1)=4(2^{42}-1)$$

$$\therefore r^2=4$$

$r^2=4$ 를 ㉠에 대입하면

$$\frac{3(4^n-1)}{4-1}=2^{42}-1$$

$$4^n-1=2^{42}-1, \quad 2^{2n}=2^{42}$$

$$2n=42 \quad \therefore n=21$$

정답_ 21

713

[1단계]에서 색칠된 부분의 넓이는

$$3^2 \times \frac{1}{9} = 1$$

[2단계]에서는 [1단계]에서 색칠하지 않은 8개의 정사각형을 각각 9등분하여 중앙의 정사각형에 색칠하므로 새로 색칠된 부분의 넓이는

$$8 \times \left(1^2 \times \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{9}$$

[3단계]에서는 [2단계]에서 색칠하지 않은 (8×8) 개의 정사각형을 각각 9등분하여 중앙의 정사각형에 색칠하므로 새로 색칠된 부분의 넓이는

$$(8 \times 8) \times \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{9}\right\} = \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

⋮

[8단계]에서 새로 색칠된 부분의 넓이는

$$\left(\frac{8}{9}\right)^7$$

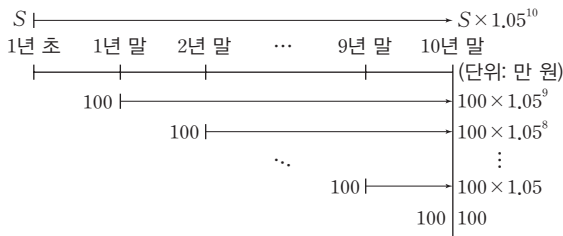
따라서 [8단계]에서 색칠된 모든 부분의 넓이의 합은

$$1 + \frac{8}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{8}{9}\right)^7 = \frac{1 \times \left\{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^8\right\}}{1 - \frac{8}{9}} \\ = 9 \left\{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^8\right\}$$

정답_ ⑤

714

올해 초에 한꺼번에 받는 금액을 S 만 원이라고 하면 S 만 원의 10년 후의 원리합계와 매년 말에 100만 원씩 10년 동안 받는 금액의 원리합계가 같아야 한다.



S 만 원의 10년 후의 원리합계는

$$S \times 1.05^{10} = 1.6 \times S \text{ (만 원)} \quad \cdots \textcircled{1}$$

매년 말에 100만 원씩 10년 동안 받는 금액의 원리합계는

$$100 + 100 \times 1.05 + 100 \times 1.05^2 + \cdots + 100 \times 1.05^9$$

$$= \frac{100(1.05^{10} - 1)}{1.05 - 1}$$

$$= \frac{100(1.6 - 1)}{0.05}$$

$$= 1200 \text{ (만 원)} \quad \cdots \textcircled{2}$$

①과 ②이 같아야 하므로

$$1.6 \times S = 1200 \quad \therefore S = 750$$

따라서 올해 초에 한꺼번에 받는 금액은 750만 원이다.

정답_ ②

09 수열의 합

715

$$\text{ㄴ. } 2 + 4 + 6 + \cdots + 2(n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} 2k \text{ (거짓)}$$

$$\text{ㄷ. } \sum_{k=1}^8 2^k = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^8 = 2 + 4 + 8 + \cdots + 256 \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

정답_ ①

716

$$\sum_{k=1}^{2024} a_{k+1} - \sum_{n=2}^{2025} a_{n-1}$$

$$= (a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2025}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2024})$$

$$= a_{2025} - a_1$$

$$= 110 - 10$$

$$= 100$$

정답_ ④

717

$$\sum_{k=1}^5 a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$\sum_{k=1}^6 (a_k - 1) = (a_1 - 1) + (a_2 - 1) + (a_3 - 1) + \cdots + (a_6 - 1) \\ = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_6 - 6$$

$$\sum_{k=1}^5 a_k = \sum_{k=1}^6 (a_k - 1) \text{ 이므로}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_6 - 6$$

$$\therefore a_6 = 6$$

정답_ ③

718

$$\text{ㄱ. } \sum_{k=1}^{10} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3$$

$$\sum_{k=0}^9 (k+1)^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} k^3 = \sum_{k=0}^9 (k+1)^3 \text{ (참)}$$

$$\text{ㄴ. } \sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k})$$

$$= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n})$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} a_k \text{ (참)}$$

$$\text{ㄷ. } \sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{j=m}^n a_j$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{m-1}) + (a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n)$$

$$= \sum_{k=1}^n a_k \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

참고 $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^3 = \cdots$

719

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) \\
 &= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) \\
 &= a_1 - a_{n+1} \\
 &= 1 - a_{n+1} \quad (\because a_1 = 1) \\
 &\text{즉, } 1 - a_{n+1} = -n^2 + n \text{ 이므로} \\
 &a_{n+1} = n^2 - n + 1 \\
 &\therefore a_{11} = 10^2 - 10 + 1 = 91
 \end{aligned}$$

정답_ ②

720

$$\begin{aligned}
 (1) \sum_{k=1}^{10} (2a_k + b_k) &= 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k \\
 &= 2 \times 6 + 14 = 26 \\
 (2) \sum_{k=1}^{10} (a_k - 3b_k + 1) &= \sum_{k=1}^{10} a_k - 3 \sum_{k=1}^{10} b_k + \sum_{k=1}^{10} 1 \\
 &= 6 - 3 \times 14 + 1 \times 10 \\
 &= -26
 \end{aligned}$$

정답_ (1) 26 (2) -26

721

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^7 (a_k + 2)(a_k - 3) &= \sum_{k=1}^7 (a_k^2 - a_k - 6) \\
 &= \sum_{k=1}^7 a_k^2 - \sum_{k=1}^7 a_k - \sum_{k=1}^7 6 \\
 &= 15 - 2 - 6 \times 7 \\
 &= -29
 \end{aligned}$$

정답_ -29

722

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{10} (3a_k - 2b_k) &= 11 \text{에서} \\
 3 \sum_{k=1}^{10} a_k - 2 \sum_{k=1}^{10} b_k &= 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\
 \sum_{k=1}^{10} (2a_k - b_k) &= 9 \text{에서} \\
 2 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k &= 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\
 \textcircled{2} \times 2 - \textcircled{1} \text{을 하면 } \sum_{k=1}^{10} a_k &= 7 \\
 \text{이것을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면} \\
 14 - \sum_{k=1}^{10} b_k &= 9 \quad \therefore \sum_{k=1}^{10} b_k = 5 \\
 \therefore \sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k \\
 &= 7 + 5 \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

정답_ ④

723

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n a_k &= 2n^2 \text{에 } n=20, n=10 \text{을 각각 대입하면} \\
 \sum_{k=1}^{20} a_k &= 2 \times 20^2 = 800, \quad \sum_{k=1}^{10} a_k = 2 \times 10^2 = 200
 \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^n b_k = 4n$ 에 $n=20, n=10$ 을 각각 대입하면

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{20} b_k &= 4 \times 20 = 80, \quad \sum_{k=1}^{10} b_k = 4 \times 10 = 40 \\
 \sum_{k=11}^{20} (a_k - 2b_k) &= \sum_{k=1}^{20} (a_k - 2b_k) - \sum_{k=1}^{10} (a_k - 2b_k) \\
 &= \sum_{k=1}^{20} a_k - 2 \sum_{k=1}^{20} b_k - \sum_{k=1}^{10} a_k + 2 \sum_{k=1}^{10} b_k \\
 &= 800 - 2 \times 80 - 200 + 2 \times 40 \\
 &= 520
 \end{aligned}$$

정답_ ②

724

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^2 &= 28 \text{에서} \\
 \sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^2 &= \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 + 2a_k + 1) \\
 &= \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 1 \\
 &= \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + 10
 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + 10 = 28$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k = 18 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k (a_k + 1) = 16 \text{에서}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{10} a_k (a_k + 1) &= \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 + a_k) \\
 &= \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + \sum_{k=1}^{10} a_k
 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + \sum_{k=1}^{10} a_k = 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \times 2 - \textcircled{1} \text{을 하면}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 14$$

정답_ 14

725

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열이므로
 $a_n = 3 \times 2^{n-1}$

$$\therefore a_{2k-1} = 3 \times 2^{(2k-1)-1} = \frac{3}{4} \times 4^k$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^5 a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^5 \left(\frac{3}{4} \times 4^k \right) = \frac{3}{4} \sum_{k=1}^5 4^k \\
 &= \frac{3}{4} \times \frac{4(4^5 - 1)}{4 - 1} \\
 &= 1023
 \end{aligned}$$

정답_ ①

참고 $a_n = 3 \times 2^{n-1}$ 이므로

$$a_{2n-1} = 3 \times 2^{(2n-1)-1} = 3 \times 4^{n-1}$$

즉, 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 3이고 공비가 4인 등비수열이다.

따라서 $\sum_{k=1}^5 a_{2k-1}$ 은 등비수열 $\{a_{2n-1}\}$ 의 첫째항부터 제5항까지의 합이므로 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$\sum_{k=1}^5 a_{2k-1} = \frac{3(4^5 - 1)}{4 - 1} = 1023$$

726

수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로

$$a_1 + a_{12} = a_2 + a_{11} = a_3 + a_{10} = a_4 + a_9 = a_5 + a_8 = a_6 + a_7 = 20$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=4}^9 a_k &= a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \\ &= (a_4 + a_9) + (a_5 + a_8) + (a_6 + a_7) \\ &= 20 + 20 + 20 \\ &= 60 \end{aligned}$$

정답_ ①

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_1 + a_{12} = (a_1 + 3d) + (a_{12} - 3d) = a_4 + a_9$$

$$a_1 + a_{12} = 20 \text{이므로 } a_4 + a_9 = 20$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=4}^9 a_k &= \frac{6(a_4 + a_9)}{2} \\ &= 3 \times 20 = 60 \end{aligned}$$

727

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r ($r > 0$)라고 하면

$$a_2 = 6 \text{에서}$$

$$ar = 6$$

$$a_6 = 9a_4 \text{에서}$$

$$\frac{a_6}{a_4} = 9, r^2 = 9$$

$$\therefore r = 3 \quad (\because r > 0)$$

$$r = 3 \text{을 ①에 대입하면}$$

$$a = 2 \quad \therefore a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = 242 \text{에서}$$

$$\frac{2 \times (3^n - 1)}{3 - 1} = 242, 3^n - 1 = 242$$

$$3^n = 243 = 3^5 \quad \therefore n = 5$$

..... ㉠

정답_ ②

728

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_3 = 5 \text{에서}$$

$$a + 2d = 5$$

$$a_6 = 11 \text{에서}$$

$$a + 5d = 11$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 1, d = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} a_{2k} - \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} &= (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19}) \\ &= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_6 - a_5) + \dots + (a_{20} - a_{19}) \\ &= d + d + d + \dots + d = 10d \\ &= 10 \times 2 = 20 \end{aligned}$$

정답_ ①

729

$$\begin{aligned} (1) \sum_{k=1}^{20} (k+1)(k-3) &= \sum_{k=1}^{20} (k^2 - 2k - 3) \\ &= \sum_{k=1}^{20} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} 3 \\ &= \frac{20 \times 21 \times 41}{6} - 2 \times \frac{20 \times 21}{2} - 3 \times 20 \\ &= 2870 - 420 - 60 \\ &= 2390 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{k=1}^{10} \frac{k^3}{k-1} - \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k-1} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{k^3 - 1}{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{(k-1)(k^2 + k + 1)}{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{10} (k^2 + k + 1) \\ &= \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{10 \times 11}{2} + 1 \times 10 \\ &= 385 + 55 + 10 \\ &= 450 \end{aligned}$$

정답_ (1) 2390 (2) 450

730

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{30} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + k}{3k + 3} &= \sum_{k=1}^{30} \frac{\frac{k(k+1)}{2}}{3(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{30} \frac{k}{6} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{30} k \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{30 \times 31}{2} \\ &= \frac{155}{2} \end{aligned}$$

정답_ ⑤

731

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (4k + a) &= 4 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} a \\ &= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} + a \times 10 \\ &= 220 + 10a \end{aligned}$$

즉, $220 + 10a = 250$ 이므로

$$a = 3$$

정답_ 3

732

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n (2k-1) &= \sum_{k=1}^n (2k-1) - (2 \times 1 - 1) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 - 1 \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n - 1 \\ &= n^2 - 1 \end{aligned}$$

즉, $n^2 - 1 = 63$ 이므로

$$n^2 = 64 \quad \therefore n = 8 \quad (\because n \geq 2)$$

정답_ ④

733

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = n - 1, \alpha_n \beta_n = -3 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \alpha_n^2 + \beta_n^2 &= (\alpha_n + \beta_n)^2 - 2\alpha_n \beta_n \\ &= (n-1)^2 - 2 \times (-3) \\ &= n^2 - 2n + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) &= \sum_{k=1}^{10} (k^2 - 2k + 7) \\ &= \sum_{k=1}^{10} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 7 \\ &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 2 \times \frac{10 \times 11}{2} + 7 \times 10 \\ &= 385 - 110 + 70 \\ &= 345 \end{aligned}$$

정답_ ⑤

734

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n (k^2 + k - 2) - \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + 3) \\ &= \sum_{k=1}^n (k^2 + k - 2) - \left\{ \sum_{k=1}^n (k^2 + 3) - (n^2 + 3) \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^n (k^2 + k - 2) - \sum_{k=1}^n (k^2 + 3) \right\} + (n^2 + 3) \\ &= \sum_{k=1}^n \{ (k^2 + k - 2) - (k^2 + 3) \} + (n^2 + 3) \\ &= \sum_{k=1}^n (k - 5) + (n^2 + 3) \\ &= \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 5 + (n^2 + 3) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - 5n + n^2 + 3 \\ &= \frac{3}{2}n^2 - \frac{9}{2}n + 3 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{3}{2}n^2 - \frac{9}{2}n + 3 = 3 \text{ 이므로}$$

$$\frac{3}{2}n^2 - \frac{9}{2}n = 0$$

$$\frac{3}{2}(n^2 - 3n) = 0, \frac{3}{2}n(n-3) = 0$$

$$\therefore n=0 \text{ 또는 } n=3$$

이때 n 은 1보다 큰 자연수이므로

$$n=3$$

정답_ ②

735

수열 $1 \times 1, 2 \times 3, 3 \times 5, \dots, 15 \times 29$ 의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$a_k = k(2k-1) = 2k^2 - k$$

이때 $15 \times 29 = a_{15}$ 이므로

$$\begin{aligned} 1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + \dots + 15 \times 29 \\ &= \sum_{k=1}^{15} a_k = \sum_{k=1}^{15} (2k^2 - k) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{15} k \\ &= 2 \times \frac{15 \times 16 \times 31}{6} - \frac{15 \times 16}{2} \\ &= 2480 - 120 \\ &= 2360 \end{aligned}$$

정답_ ⑤

736

주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$\begin{aligned} a_k &= 2 + 4 + 6 + \dots + 2k \\ &= 2(1 + 2 + 3 + \dots + k) \\ &= 2 \times \frac{k(k+1)}{2} \\ &= k^2 + k \end{aligned}$$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)\{(2n+1)+3\}}{6} \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

정답_ ②

737

주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$\begin{aligned} a_k &= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} \\ &= \frac{1 \times (2^k - 1)}{2 - 1} \\ &= 2^k - 1 \end{aligned}$$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 a_k &= \sum_{k=1}^8 (2^k - 1) \\ &= \sum_{k=1}^8 2^k - \sum_{k=1}^8 1 \\ &= \frac{2(2^8 - 1)}{2 - 1} - 1 \times 8 \\ &= 510 - 8 \\ &= 502 \end{aligned}$$

정답_ 502

738

수열 $1 \times n, 2 \times (n-1), 3 \times (n-2), \dots, (n-1) \times 2, n \times 1$ 의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$a_k = k\{n - (k-1)\} = -k^2 + (n+1)k$$

주어진 식은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \{-k^2 + (n+1)k\} \\ &= -\sum_{k=1}^n k^2 + (n+1) \sum_{k=1}^n k \\ &= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1) \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)\{-(2n+1)+3(n+1)\}}{6} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

정답_ ⑤

739

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^7 \left\{ \sum_{k=1}^j (2k+1) \right\} &= \sum_{j=1}^7 \left(2 \sum_{k=1}^j k + \sum_{k=1}^j 1 \right) \\
 &= \sum_{j=1}^7 \left[2 \times \frac{j(j+1)}{2} + j \right] \\
 &= \sum_{j=1}^7 (j^2 + 2j) \\
 &= \sum_{j=1}^7 j^2 + 2 \sum_{j=1}^7 j \\
 &= \frac{7 \times 8 \times 15}{6} + 2 \times \frac{7 \times 8}{2} \\
 &= 140 + 56 \\
 &= 196
 \end{aligned}$$

정답_ ④

740

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^n \left(\sum_{k=1}^m k \right) &= \sum_{m=1}^n \frac{m(m+1)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^n m^2 + \sum_{m=1}^n m \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6} \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\
 \therefore \frac{n(n+1)(n+2)}{6} &= 56 = 7 \times 8 \text{ 이므로} \\
 n(n+1)(n+2) &= 6 \times 7 \times 8 \\
 \therefore n &= 6
 \end{aligned}$$

정답_ ②

741

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^6 a_i &= \sum_{i=1}^6 (2^i - 10) = \sum_{i=1}^6 2^i - \sum_{i=1}^6 10 \\
 &= \frac{2(2^6 - 1)}{2 - 1} - 10 \times 6 \\
 &= 126 - 60 \\
 &= 66 \\
 \sum_{j=1}^6 b_j &= \sum_{j=1}^6 (2j - 6) = 2 \sum_{j=1}^6 j - \sum_{j=1}^6 6 \\
 &= 2 \times \frac{6 \times 7}{2} - 6 \times 6 \\
 &= 42 - 36 \\
 &= 6 \\
 \therefore \sum_{i=1}^6 \left(\sum_{j=1}^6 a_i b_j \right) &= \sum_{i=1}^6 \left(a_i \sum_{j=1}^6 b_j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^6 (a_i \times 6) \\
 &= 6 \sum_{i=1}^6 a_i \\
 &= 6 \times 66 \\
 &= 396
 \end{aligned}$$

정답_ ⑤

742

이차방정식 $x^2 - 9x + 18 = 0$ 의 두 근이 m, n 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$m + n = 9, mn = 18$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{l=1}^m \left\{ \sum_{k=1}^n (k+l) \right\} &= \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n l \right) \\
 &= \sum_{l=1}^m \left\{ \frac{n(n+1)}{2} + ln \right\} \\
 &= \sum_{l=1}^m \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{l=1}^m ln \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} \times m + n \times \frac{m(m+1)}{2} \\
 &= \frac{mn(m+n+2)}{2} \\
 &= \frac{18(9+2)}{2} \\
 &= 99
 \end{aligned}$$

정답_ ③

참고 이차방정식 $x^2 - 9x + 18 = 0$ 에서

$$(x-3)(x-6) = 0 \quad \therefore x=3 \text{ 또는 } x=6$$

따라서 $m=3, n=6$ 또는 $m=6, n=3$ 이므로 주어진 식은 다음의 두 가지 방법으로 구할 수 있다.

(i) $m=3, n=6$ 일 때

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^m \left\{ \sum_{k=1}^n (k+l) \right\} &= \sum_{l=1}^3 \left\{ \sum_{k=1}^6 (k+l) \right\} = \sum_{l=1}^3 \left\{ \sum_{k=1}^6 k + \sum_{k=1}^6 l \right\} \\
 &= \sum_{l=1}^3 \left\{ \frac{6 \times 7}{2} + 6l \right\} = \sum_{l=1}^3 21 + 6 \sum_{l=1}^3 l \\
 &= 21 \times 3 + 6 \times \frac{3 \times 4}{2} \\
 &= 63 + 36 \\
 &= 99
 \end{aligned}$$

(ii) $m=6, n=3$ 일 때

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^m \left\{ \sum_{k=1}^n (k+l) \right\} &= \sum_{l=1}^6 \left\{ \sum_{k=1}^3 (k+l) \right\} = \sum_{l=1}^6 \left(\sum_{k=1}^3 k + \sum_{k=1}^3 l \right) \\
 &= \sum_{l=1}^6 \left(\frac{3 \times 4}{2} + 3l \right) = \sum_{l=1}^6 6 + 3 \sum_{l=1}^6 l \\
 &= 6 \times 6 + 3 \times \frac{6 \times 7}{2} \\
 &= 36 + 63 \\
 &= 99
 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 주어진 식의 값은 99이다.

743

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2n^2 + 3 \text{ 으로 놓으면}$$

(i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 + 3 = 5$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= 2n^2 + 3 - \{2(n-1)^2 + 3\} \\
 &= 4n - 2
 \end{aligned}$$

..... ㉠

이때 $a_1=5$ 는 ㉠에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 다르므로

$$a_1 = 5, a_n = 4n - 2 \quad (\text{단, } n \geq 2)$$

$$\therefore a_7 = 4 \times 7 - 2 = 26$$

정답_ ③

다른 풀이

$$\begin{aligned} a_7 &= \sum_{k=1}^7 a_k - \sum_{k=1}^6 a_k \\ &= (2 \times 7^2 + 3) - (2 \times 6^2 + 3) \\ &= 101 - 75 \\ &= 26 \end{aligned}$$

744

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2n^2 + n \text{으로 놓으면}$$

(i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 + 1 = 3$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 + n - \{2(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 4n - 1 \end{aligned}$$

..... ㉠

이때 $a_1=3$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n = 4n - 1$$

$$\therefore a_{2k-1} = 4(2k-1) - 1 = 8k - 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} ka_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{10} k(8k-5) \\ &= 8 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 5 \sum_{k=1}^{10} k \\ &= 8 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 5 \times \frac{10 \times 11}{2} \\ &= 3080 - 275 \\ &= 2805 \end{aligned}$$

정답_ ②

745

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2^n - 1 \text{로 놓으면}$$

(i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2^1 - 1 = 1$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) \\ &= 2^n - 2^{n-1} \\ &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

..... ㉠

이때 $a_1=1$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n = 2^{n-1}$$

따라서 $a_{2k+1} = 2^{(2k+1)-1} = 4^k$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 a_{2k+1} &= \sum_{k=1}^5 4^k = \frac{4(4^5 - 1)}{4 - 1} \\ &= \frac{4 \times 1023}{3} = 1364 \end{aligned}$$

정답_ ③

746

$$S_n = \sum_{k=1}^n ka_k = n(n+1)(n+2) \text{로 놓으면}$$

(i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} na_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1) \\ &= n(n+1)\{(n+2) - (n-1)\} \\ &= 3n(n+1) \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = 3(n+1) \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이때 $a_1=6$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n = 3(n+1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{14} a_k &= \sum_{k=1}^{14} 3(k+1) \\ &= 3 \left(\sum_{k=1}^{14} k + \sum_{k=1}^{14} 1 \right) \\ &= 3 \left(\frac{14 \times 15}{2} + 14 \right) \\ &= 3(105 + 14) = 357 \end{aligned}$$

정답_ ②

주의 주어진 합은 $\sum_{k=1}^n a_k$ 가 아니라 $\sum_{k=1}^n ka_k$ 이므로 $a_n = 3n(n+1)$ 과 같이 구하지 않도록 주의한다.

747

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_{2k-1} = 3n^2 + n \text{으로 놓으면}$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3n^2 + n - \{3(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 6n - 2 \end{aligned}$$

$$\therefore a_7 = 6 \times 4 - 2 = 22, \quad a_9 = 6 \times 5 - 2 = 28$$

이때 a_8 은 a_7 과 a_9 의 등차중항이므로

$$a_8 = \frac{a_7 + a_9}{2} = \frac{22 + 28}{2} = 25$$

정답_ ④

다른 풀이

$n=1$ 일 때

$$\sum_{k=1}^1 a_{2k-1} = a_1 = 3 \times 1^2 + 1 = 4$$

$n=2$ 일 때

$$\sum_{k=1}^2 a_{2k-1} = a_1 + a_3 = 3 \times 2^2 + 2 = 14$$

$$\therefore a_3 = 14 - a_1 = 14 - 4 = 10$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면 $a_3 = a_1 + 2d$ 이므로

$$10 = 4 + 2d \quad \therefore d = 3$$

$$\therefore a_8 = a_1 + 7d = 4 + 7 \times 3 = 25$$

748

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^9 \frac{3}{k(k+1)} \\ &= 3 \sum_{k=1}^9 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 3 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \right\} \\ &= 3 \left(1 - \frac{1}{10} \right) \\ &= \frac{27}{10} \end{aligned}$$

정답_ ⑤

749

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)} \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots \\
 &\quad + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} \\
 &\approx \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = \frac{58}{45} \text{ 이므로} \\
 &\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = \frac{19}{90}, \quad 19n^2 - 123n - 232 = 0 \\
 &(19n+29)(n-8) = 0 \\
 &\therefore n=8 \quad (\because n \text{은 자연수})
 \end{aligned}$$

정답_ ①

750

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{12} \frac{1}{a_n a_{n+1}} \\
 &= \sum_{n=1}^{12} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\
 &= \sum_{n=1}^{12} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{27} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27} \right) \\
 &= \frac{4}{27}
 \end{aligned}$$

정답_ ②

751

주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{1+2+3+\dots+k} \\
 &= \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{2}{k(k+1)} \\
 &= 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)
 \end{aligned}$$

따라서 첫째항부터 제50항까지의 합은

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{50} a_k &= 2 \sum_{k=1}^{50} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{50} - \frac{1}{51} \right) \right\} \\
 &= 2 \left(1 - \frac{1}{51} \right) \\
 &= \frac{100}{51}
 \end{aligned}$$

정답_ ⑤

752

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n \text{으로 놓으면}$$

(i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 1 = 2$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= n^2 + n - \{ (n-1)^2 + (n-1) \} \\
 &= 2n
 \end{aligned}
 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $a_1=2$ 는 ①에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n = 2n$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k \times 2(k+1)} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k(k+1)} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{m+1} \right) \\
 &= \frac{m}{4(m+1)}
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{m}{4(m+1)} = \frac{3}{13} \text{ 이므로}$$

$$13m = 12m + 12 \quad \therefore m = 12$$

정답_ ③

753

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = -4, \quad \alpha_n \beta_n = -(2n-1)(2n+1)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right) &= \sum_{n=1}^{10} \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} \\
 &= \sum_{n=1}^{10} \frac{-4}{-(2n-1)(2n+1)} \\
 &= 4 \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\
 &= 2 \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\
 &= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \right\} \\
 &= 2 \left(1 - \frac{1}{21} \right) \\
 &= \frac{40}{21}
 \end{aligned}$$

따라서 $p=21$, $q=40$ 이므로

$$p+q=21+40=61$$

정답_ 61

754

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{24} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) \\
 &= (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + \dots + (\sqrt{49} - \sqrt{47}) \\
 &= \sqrt{49} - \sqrt{1} = 7 - 1 \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

정답_ ②

755

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(k)} &= \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\ &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} \\ &= \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \\ \therefore \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{f(k)} &= \sum_{k=1}^{99} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) \\ &= \sqrt{100} - \sqrt{1} = 10 - 1 \\ &= 9\end{aligned}$$

정답_ ⑤

756

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_k} &= \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}} \\ &= \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})} \\ &= \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \\ \therefore \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + \cdots + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \\ &= \sqrt{n+2} - \sqrt{2} \\ \text{즉, } \sqrt{n+2} - \sqrt{2} &= 5\sqrt{2} \text{이므로} \\ \sqrt{n+2} &= 6\sqrt{2}, n+2=72 \\ \therefore n &= 70\end{aligned}$$

정답_ ⑤

757

수열 $\frac{1}{\sqrt{3+1}}, \frac{1}{\sqrt{5+3}}, \frac{1}{\sqrt{7+5}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{121+119}}$ 의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1}} \\ &= \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})\end{aligned}$$

이때 $\frac{1}{\sqrt{121+119}} = a_{60}$ 이므로 구하는 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{60} a_k &= \sum_{k=1}^{60} \frac{1}{2}(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) \\ &= \frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + (\sqrt{7}-\sqrt{5}) + \cdots + (\sqrt{121}-\sqrt{119})\} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{121}-1) = \frac{1}{2}(11-1) \\ &= 5\end{aligned}$$

정답_ ⑤

758

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차를 a ($a > 0$)라고 하면

$$\begin{aligned}a_n &= a + (n-1) \times a = na \text{이므로} \\ \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} &= \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k})} \\ &= \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{a_{k+1} - a_k} \\ &= \frac{1}{a}(\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}) \quad (\because a_{k+1} - a_k = a) \\ \therefore \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} &= \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{15} (\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}) \\ &= \frac{1}{a}\{(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}) + (\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}) + (\sqrt{a_4} - \sqrt{a_3}) + \cdots \\ &\quad + (\sqrt{a_{16}} - \sqrt{a_{15}})\} \\ &= \frac{1}{a}(\sqrt{a_{16}} - \sqrt{a_1}) = \frac{1}{a}(\sqrt{16a} - \sqrt{a}) \\ &= \frac{1}{a}(4\sqrt{a} - \sqrt{a}) \\ &= \frac{3\sqrt{a}}{a} \\ \text{즉, } \frac{3\sqrt{a}}{a} &= 2 \text{이므로}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3\sqrt{a} &= 2a, 9a = 4a^2 \\ 4a^2 - 9a &= 0, a(4a-9) = 0\end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{9}{4} \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore a_4 = 4a = 4 \times \frac{9}{4} = 9$$

정답_ ④

759

$$\begin{aligned}&\sum_{n=2}^{63} \left\{ \frac{1}{\log_2 n} - \frac{1}{\log_2 (n+1)} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{\log_2 2} - \frac{1}{\log_2 3} \right) + \left(\frac{1}{\log_2 3} - \frac{1}{\log_2 4} \right) + \left(\frac{1}{\log_2 4} - \frac{1}{\log_2 5} \right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{\log_2 63} - \frac{1}{\log_2 64} \right) \\ &= \frac{1}{\log_2 2} - \frac{1}{\log_2 64} = \frac{1}{\log_2 2} - \frac{1}{\log_2 2^6} \\ &= 1 - \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

정답_ ④

760

$$a_k = \log_2 \frac{k+1}{k} = \log_2 (k+1) - \log_2 k$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{15} a_k &= \sum_{k=1}^{15} \{\log_2 (k+1) - \log_2 k\} \\ &= (\log_2 2 - \log_2 1) + (\log_2 3 - \log_2 2) \\ &\quad + (\log_2 4 - \log_2 3) + \cdots + (\log_2 16 - \log_2 15) \\ &= \log_2 16 - \log_2 1 \\ &= \log_2 2^4 - 0 \\ &= 4\end{aligned}$$

정답_ ②

761

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{60} \log_5 \{ \log_{2k+3} (2k+5) \} \\
 &= \log_5 (\log_5 7) + \log_5 (\log_7 9) + \log_5 (\log_9 11) + \cdots \\
 & \quad + \log_5 (\log_{123} 125) \\
 &= \log_5 (\log_5 7 \times \log_7 9 \times \log_9 11 \times \cdots \times \log_{123} 125) \\
 &= \log_5 \left(\frac{\log 7}{\log 5} \times \frac{\log 9}{\log 7} \times \frac{\log 11}{\log 9} \times \cdots \times \frac{\log 125}{\log 123} \right) \\
 &= \log_5 \frac{\log 125}{\log 5} \\
 &= \log_5 (\log_5 125) \\
 &= \log_5 (\log_5 5^3) \\
 &= \log_5 3
 \end{aligned}$$

정답_ ②

762

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \log_2 (n^2 + n) \text{으로 놓으면}$$

(i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = \log_2 (1^2 + 1) = \log_2 2 = 1$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= \log_2 (n^2 + n) - \log_2 \{ (n-1)^2 + (n-1) \} \\
 &= \log_2 (n^2 + n) - \log_2 (n^2 - n) \\
 &= \log_2 \frac{n^2 + n}{n^2 - n} = \log_2 \frac{n(n+1)}{n(n-1)} \\
 &= \log_2 \frac{n+1}{n-1}
 \end{aligned}$$

..... ①

①은 $n=1$ 일 때 정의되지 않으므로

$$a_1 = 1, a_n = \log_2 \frac{n+1}{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore a_{2n+1} &= \log_2 \frac{(2n+1)+1}{(2n+1)-1} \\
 &= \log_2 \frac{n+1}{n} \quad (n \geq 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{n=1}^{15} a_{2n+1} &= \sum_{n=1}^{15} \log_2 \frac{n+1}{n} \\
 &= \log_2 2 + \log_2 \frac{3}{2} + \log_2 \frac{4}{3} + \cdots + \log_2 \frac{16}{15} \\
 &= \log_2 \left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{16}{15} \right) \\
 &= \log_2 16 = \log_2 2^4 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

정답_ 4

763

주어진 수열을

(1), (2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4, 4), ...

와 같이 묶으면

n 번째 묶음에 포함된 수는 모두 n 이고 항수는 n 이다.

첫 번째 묶음부터 n 번째 묶음까지의 항수는

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

이때 첫 번째 묶음부터 12번째 묶음까지의 항수는

$$\frac{12 \times 13}{2} = 78$$

이므로 제80항은 13번째 묶음의 두 번째 항이다.

따라서 제80항은 13이다.

정답_ ③

764

주어진 수열을

(1), (2, 1), (3, 2, 1), (4, 3, 2, 1), ...

과 같이 묶으면

처음으로 나타나는 9는 9번째 묶음의 첫 번째 항이다.

n 번째 묶음의 항수는 n 이므로 첫 번째 묶음부터 n 번째 묶음까지의 항수는

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

이때 첫 번째 묶음부터 8번째 묶음까지의 항수는

$$\frac{8 \times 9}{2} = 36$$

따라서 처음으로 나타나는 9는 제37항이다.

정답_ ②

765

제 n 행은 첫째항이 n , 공차가 n , 항수가 n 인 등차수열을 이루므로 제15행에 나열된 수는 첫째항이 15, 공차가 15, 항수가 15인 등차수열을 이룬다.

따라서 제15행에 나열된 모든 수의 합은

$$\frac{15 \{ 2 \times 15 + (15-1) \times 15 \}}{2} = 1800$$

정답_ 1800

766

주어진 수열을

$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right), \dots$

과 같이 분모가 같은 항끼리 묶으면

n 번째 묶음의 k 번째 항은 $\frac{2k-1}{2^n}$, 항수는 2^{n-1} 이다.

첫 번째 묶음부터 n 번째 묶음까지의 항수는

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$$

이때 첫 번째 묶음부터 6번째 묶음까지의 항수는

$$2^6-1=63$$

이므로 제67항은 7번째 묶음의 4번째 항이다.

$$\text{따라서 제67항은 } \frac{2 \times 4 - 1}{2^7} = \frac{7}{128}$$

정답_ ①

767

위에서 n 번째 행에 나열된 수들은 첫째항이 1, 공차가 $n-1$ 인 등차수열을 이룬다.

즉, 위에서 9번째 행에 나열된 수들은 첫째항이 1이고 공차가 8인 등차수열을 이루므로 9행의 왼쪽에서 n 번째에 나열된 수를 a_n 이라고 하면

$$a_n = 1 + (n-1) \times 8 = 8n - 7$$

따라서 위에서 9번째 행과 왼쪽에서 10번째 열이 만나는 곳의 수는

$$a_{10} = 8 \times 10 - 7 = 73$$

정답_ ③

참고 위에서 2번째 행부터 각 행에 나열된 수의 규칙을 살펴보면

2번째 행: 1, 2, 3, 4, 5, ... $\Rightarrow$ 공차가 1인 등차수열

3번째 행: 1, 3, 5, 7, 9, ... $\Rightarrow$ 공차가 2인 등차수열

4번째 행: 1, 4, 7, 10, 13, ... $\Rightarrow$ 공차가 3인 등차수열

5번째 행: 1, 5, 9, 13, 17, ... $\Rightarrow$ 공차가 4인 등차수열

$\vdots$

이므로 9번째 행에 나열된 수는 공차가 8인 등차수열을 이룬다.

768

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_8 = 4(a_7 - a_6) \text{에서}$$

$$ar^7 = 4(ar^6 - ar^5)$$

$$ar^5(r^2 - 4r + 4) = 0$$

$$ar^5(r-2)^2 = 0$$

$$\text{이때 } \sum_{k=1}^7 a_k = 254 \text{이므로}$$

$$a \neq 0, r \neq 0 \quad \therefore r = 2 \quad \text{..... ①}$$

즉, 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비가 2이므로 $\sum_{k=1}^7 a_k = 254$ 에서

$$\frac{a(2^7 - 1)}{2 - 1} = 254, 127a = 254$$

$$\therefore a = 2 \quad \text{..... ②}$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항은 2, 공비는 2이므로

$$a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n \quad \text{..... ③}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^5 \frac{1}{a_{2k-1}} = \sum_{k=1}^5 \frac{1}{2^{2k-1}} = \sum_{k=1}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^5 \left\{ 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \right\} = \sum_{k=1}^5 \left\{ 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^k \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^5 \left\{ \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \right\}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5 \right\}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{341}{512} \quad \text{..... ④}$$

정답_ $\frac{341}{512}$

채점 기준	비율
① 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비 구하기	30 %
② 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항 구하기	20 %
③ 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 구하기	20 %
④ $\sum_{k=1}^5 \frac{1}{a_{2k-1}}$ 의 값 구하기	30 %

769

자연수 n 에 대하여 다항식 $3x^2 + x - 2$ 를 $x - n$ 으로 나누었을 때의 나머지 a_n 은 나머지 정리에 의하여

$$a_n = 3n^2 + n - 2 \quad \text{..... ①}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^5 (a_k - 2k^2 + k) = \sum_{k=1}^5 \{(3k^2 + k - 2) - 2k^2 + k\}$$

$$= \sum_{k=1}^5 (k^2 + 2k - 2) \quad \text{..... ②}$$

$$= \sum_{k=1}^5 k^2 + 2 \sum_{k=1}^5 k - \sum_{k=1}^5 2$$

$$= \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + 2 \times \frac{5 \times 6}{2} - 2 \times 5$$

$$= 55 + 30 - 10$$

$$= 75 \quad \text{..... ③}$$

정답_ 75

채점 기준	비율
① a_n 구하기	30 %
② $\sum_{k=1}^5 (a_k - 2k^2 + k)$ 를 k 에 대한 식으로 나타내기	30 %
③ $\sum_{k=1}^5 (a_k - 2k^2 + k)$ 의 값 구하기	40 %

770

$S_n = 2a_1 + 6a_2 + 12a_3 + \dots + n(n+1)a_n = 2n$ 으로 놓으면

(i) $n=1$ 일 때

$$2a_1 = S_1 = 2 \text{에서 } a_1 = 1$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} n(n+1)a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n - 2(n-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{n(n+1)} \quad \text{..... ①}$$

이때 $a_1 = 1$ 은 ①에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n = \frac{2}{n(n+1)} \quad \text{..... ①}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \frac{2}{k(k+1)}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 2 \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) \right]$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{11}\right)$$

$$= \frac{20}{11} \quad \text{..... ②}$$

즉, $p=11$, $q=20$ 이므로

$$p+q = 11+20=31 \quad \text{..... ③}$$

정답_ 31

채점 기준	비율
① a_n 구하기	40 %
② $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값 구하기	50 %
③ $p+q$ 의 값 구하기	10 %

771

주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$a_k = \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) \dots\dots\dots ①$$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{28} - \frac{1}{31} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{31} \right) \\ &= \frac{10}{31} \dots\dots\dots ② \end{aligned}$$

즉, $p=31$, $q=10$ 이므로

$$p+q=31+10=41 \dots\dots\dots ③$$

정답_ 41

채점 기준	비율
① 일반항 구하기	40 %
② 첫째항부터 제10항까지의 합 구하기	50 %
③ $p+q$ 의 값 구하기	10 %

772

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{3}$ 이고 공비가 3인 등비수열이므로

$$a_n = \frac{1}{3} \times 3^{n-1} = 3^{n-2} \dots\dots\dots ①$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{15} \log_3 a_k &= \sum_{k=1}^{15} \log_3 3^{k-2} \\ &= \sum_{k=1}^{15} (k-2) \dots\dots\dots ② \\ &= \sum_{k=1}^{15} k - \sum_{k=1}^{15} 2 \\ &= \frac{15 \times 16}{2} - 2 \times 15 \\ &= 120 - 30 \\ &= 90 \dots\dots\dots ③ \end{aligned}$$

정답_ 90

채점 기준	비율
① a_n 구하기	30 %
② $\sum_{k=1}^{15} \log_3 a_k$ 를 k 에 대한 식으로 나타내기	40 %
③ $\sum_{k=1}^{15} \log_3 a_k$ 의 값 구하기	30 %

773

주어진 수열을

$$\left(\frac{1}{1} \right), \left(\frac{2}{1}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4} \right), \dots$$

과 같이 분모와 분자의 합이 같은 분수끼리 묶으면 n 번째 묶음의 분모와 분자의 합은 $n+1$ 이고 n 번째 묶음의 k 번째 항은 $\frac{n-k+1}{k}$, 항수는 n 이다. ①

따라서 $\frac{11}{13}$ 은 $\frac{23-13+1}{13}$ 이므로 23번째 묶음의 13번째 항이다.

②

n 번째 묶음의 항수는 n 이므로 첫 번째 묶음부터 n 번째 묶음까지의 항수는

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

이때 첫 번째 묶음부터 22번째 묶음까지의 항수는

$$\frac{22 \times 23}{2} = 253$$

이므로 $\frac{11}{13}$ 은 $253+13=266$, 즉 제266항이다. ③

정답_ 제266항

채점 기준	비율
① 주어진 수열의 항을 묶어 특징 알아내기	40 %
② $\frac{11}{13}$ 이 몇 번째 묶음의 몇 번째 항인지 구하기	30 %
③ $\frac{11}{13}$ 이 제몇 항인지 구하기	30 %

참고 수열 $n, n-1, n-2, \dots$ 는 첫째항이 n , 공차가 -1 인 등차수열이므로 k 번째 항은

$$n + (k-1) \times (-1) = n - k + 1$$

774

$3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, \dots$ 의 일의 자리의 숫자를 차례대로 나열하면 $3, 9, 7, 1, 3, \dots$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 $3, 9, 7, 1$ 이 이 순서대로 반복된다.

이때 $259 = (3+9+7+1) \times 12 + 3+9+7$ 이므로

$$n = 4 \times 12 + 3 = 51$$

정답_ ④

참고 수열 $\{a_n\}$ 은 $3, 9, 7, 1$ 이 이 순서대로 반복되므로

$$\sum_{k=1}^4 a_k = 3+9+7+1=20,$$

$$\sum_{k=1}^8 a_k = (3+9+7+1) \times 2 = 40,$$

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = (3+9+7+1) \times 3 = 60,$$

$\vdots$

$$\sum_{k=1}^{4m} a_k = (3+9+7+1) \times m = 20m$$

775

$$S_n = \frac{n\{2 \times (-25) + (n-1) \times 2\}}{2}$$

$$= n^2 - 26n$$

$$= (n-13)^2 - 169$$

따라서 S_n 의 값은 $n=13$ 일 때 최소이고, n 에 대한 함수 S_n 의 그래프는 직선 $n=13$ 에 대하여 대칭이다.

이때 $\sum_{k=m}^{m+2} S_k = S_m + S_{m+1} + S_{m+2}$ 의 값이 최소가 되려면 $S_{m+1} = S_{13}$

이어야 한다.

즉, $m+1=13$ 이므로

$$m=12$$

정답_ 12

776

첫째항이 3인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r (r 는 정수)라고 하면

$$a_n = 3 \times r^{n-1}$$

(㉞)에 의하여

$$6 < 3r + 3r^2 \leq 18 \quad \therefore 2 < r(r+1) \leq 6$$

이때 $r(r+1)$ 은 연속한 두 정수의 곱이므로

$$r(r+1) > 2 \text{에서}$$

$$r^2 + r - 2 > 0, (r+2)(r-1) > 0$$

$$\therefore r < -2 \text{ 또는 } r > 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$$

$$r(r+1) \leq 6 \text{에서}$$

$$r^2 + r - 6 \leq 0, (r+3)(r-2) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq r \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉟}$$

㉞, ㉟에서 $-3 \leq r < -2$ 또는 $1 < r \leq 2$ 이고 r 는 정수이므로

$$r = -3 \text{ 또는 } r = 2$$

(i) $r = -3$ 일 때

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3이고 공비가 -3인 등비수열이므로

$$a_n = 3 \times (-3)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^m a_k = \frac{3\{1 - (-3)^m\}}{1 - (-3)}$$

$$= \frac{3}{4}\{1 - (-3)^m\}$$

$$\text{(ㄴ)에서 } \sum_{k=1}^m a_k = 189 \text{이므로}$$

$$\frac{3}{4}\{1 - (-3)^m\} = 189, (-3)^m = -251$$

이때 위의 식을 만족시키는 자연수 m 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $r = 2$ 일 때

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^m a_k = \frac{3(2^m - 1)}{2 - 1} = 3(2^m - 1)$$

$$\text{(ㄴ)에서 } \sum_{k=1}^m a_k = 189 \text{이므로}$$

$$3(2^m - 1) = 189, 2^m = 64 = 2^6$$

$$\therefore m = 6$$

(i), (ii)에서 $r = 2, m = 6$ 이므로

$$a_m = a_6 = 3 \times 2^5 = 96$$

정답_ ③

777

$$f(x) = \sum_{k=1}^{10} (x-k)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (x^2 - 2kx + k^2)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} x^2 - 2x \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} k^2$$

$$= 10x^2 - 2x \times \frac{10 \times 11}{2} + \frac{10 \times 11 \times 21}{6}$$

$$= 10x^2 - 110x + 385$$

$$= 10\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \frac{65}{2}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{11}{2}$ 에서 최솟값을 가지므로

$$a = \frac{11}{2}$$

정답_ ③

778

첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_n = 1 + (n-1) \times d = nd + 1 - d$$

$$\therefore b_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n$$

$$= \sum_{k=1}^n ka_k = \sum_{k=1}^n k(kd + 1 - d)$$

$$= \sum_{k=1}^n \{dk^2 + (1-d)k\}$$

$$= d \sum_{k=1}^n k^2 + (1-d) \sum_{k=1}^n k$$

$$= d \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (1-d) \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$b_{10} = 715 \text{이므로}$$

$$d \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + (1-d) \times \frac{10 \times 11}{2} = 715$$

$$385d + 55(1-d) = 715$$

$$330d = 660 \quad \therefore d = 2$$

$$\therefore b_n = 2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)\{2(2n+1) - 3\}}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

$$\text{따라서 } \frac{b_n}{n(n+1)} = \frac{4n-1}{6} \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{b_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{10} \frac{4n-1}{6}$$

$$= \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{10} n - \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{6}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{10 \times 11}{2} - \frac{1}{6} \times 10$$

$$= \frac{110}{3} - \frac{5}{3}$$

$$= 35$$

정답_ ②

779

$y = x^2$ 의 그래프와 직선 $y = nx$ 가 제1사분면에서 만나는 점 A_n 의 x 좌표는 $x^2 = nx$ 에서

$$x(x-n) = 0 \quad \therefore x = n \quad (\because x > 0)$$

점 A_n 의 y 좌표는 $y = n^2$ 이므로

$$A_n(n, n^2)$$

이때 점 A_n 을 지나고 직선 $y = nx$ 에 수직인 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{n}(x-n) + n^2$$

$$\therefore y = -\frac{1}{n}x + n^2 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$$

직선 ㉞이 x 축과 만나는 점 B_n 의 x 좌표는

$$0 = -\frac{1}{n}x + n^2 + 1 \quad \therefore x = n(n^2 + 1)$$

$$\therefore B_n(n(n^2 + 1), 0)$$

직선 ㉞이 y 축과 만나는 점 C_n 의 y 좌표는

$$y = -\frac{1}{n} \times 0 + n^2 + 1 \quad \therefore y = n^2 + 1$$

$$\therefore C_n(0, n^2 + 1)$$

$$\begin{aligned}
\therefore S_n &= \frac{1}{2} \times \overline{OB_n} \times \overline{OC_n} \\
&= \frac{1}{2} \times n(n^2+1) \times (n^2+1) \\
&= \frac{n}{2} (n^2+1)^2 \\
\therefore \sum_{n=1}^{10} \frac{2S_n}{n(n^2+1)} &= \sum_{n=1}^{10} \frac{2 \times \frac{n}{2} (n^2+1)^2}{n(n^2+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{10} (n^2+1) \\
&= \sum_{n=1}^{10} n^2 + \sum_{n=1}^{10} 1 \\
&= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 10 \\
&= 385 + 10 \\
&= 395
\end{aligned}$$

참고 두 직선의 위치 관계

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$ 에 대하여

(1) 평행할 조건 $\Leftrightarrow m=m'$, $n \neq n'$

(2) 일치할 조건 $\Leftrightarrow m=m'$, $n=n'$

(3) 수직일 조건 $\Leftrightarrow mm' = -1$

780

주어진 조건에 의하여 $f(x)$ 의 값은 x 가 정수일 때 1, x 가 정수가 아닐 때 3이다.

$1 \leq k \leq 20$ 에서 $f(\sqrt{k})$ 의 값은

$k=1, 4, 9, 16$ 일 때, $f(\sqrt{k})=1$

$k \neq 1, 4, 9, 16$ 일 때, $f(\sqrt{k})=3$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3} &= \sum_{k=1}^{20} k - (1+4+9+16) + \frac{1}{3}(1+4+9+16) \\
&= \sum_{k=1}^{20} k - \frac{2}{3}(1+4+9+16) \\
&= \frac{20 \times 21}{2} - \frac{2}{3} \times 30 \\
&= 210 - 20 \\
&= 190
\end{aligned}$$

정답_ ⑤

참고 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+1)=f(x)$ 이고 $f(1)=1$ 이므로

$f(2)=f(1)=1$, $f(3)=f(2)=1$, $f(4)=f(3)=1$, ...

$\therefore f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=\dots=1$

즉, x 가 정수일 때 $f(x)$ 의 값은 1이다.

또, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+1)=f(x)$ 이고 $0 < x < 1$ 일 때 $f(x)=3$ 이므로 x 가 정수가 아닐 때 $f(x)$ 의 값은 3이다.

781

오른쪽 그림과 같이 위에서 내려다보며 추가되는 정육면체의 개수를 관찰해 보자.

n 층 탑을 쌓을 때, 맨 위층에서부터 각 층에 필요한 정육면체의 개수를 a_n 이라고 하면

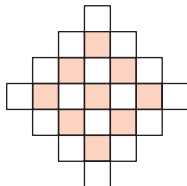
$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + 4$$

$$a_3 = 1 + 4 + 8$$

$$a_4 = 1 + 4 + 8 + 12$$

⋮



$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + 4 + 8 + 12 + \dots + 4(n-1) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4k \\
&= 1 + 4 \times \frac{(n-1)n}{2} \\
&= 2n^2 - 2n + 1
\end{aligned}$$

따라서 10층 탑을 쌓는 데 필요한 정육면체의 개수는

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{10} a_n &= \sum_{n=1}^{10} (2n^2 - 2n + 1) \\
&= 2 \sum_{n=1}^{10} n^2 - 2 \sum_{n=1}^{10} n + \sum_{n=1}^{10} 1 \\
&= 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 2 \times \frac{10 \times 11}{2} + 10 \\
&= 770 - 110 + 10 \\
&= 670
\end{aligned}$$

정답_ ②

782

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{a_k} = n^2 + 5n \text{으로 놓으면}$$

(i) $n=1$ 일 때

$$\frac{1}{a_1} = S_1 = 1^2 + 5 \times 1 = 6 \quad \therefore a_1 = \frac{1}{6}$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}
\frac{2n-1}{a_n} &= S_n - S_{n-1} \\
&= n^2 + 5n - \{(n-1)^2 + 5(n-1)\} \\
&= 2n + 4
\end{aligned}$$

$$\therefore a_n = \frac{2n-1}{2n+4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $a_1 = \frac{1}{6}$ 은 ①에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n = \frac{2n-1}{2n+4}$$

$$\therefore a_6 + a_{10} = \frac{11}{16} + \frac{19}{24} = \frac{71}{48}$$

정답_ ⑤

783

함수 $f(x) = x^2 - x - \frac{1}{2}$ 에서 $f(n) < m < f(n) + 1$ 이므로

$$n^2 - n - \frac{1}{2} < m < n^2 - n - \frac{1}{2} + 1$$

$$\therefore n^2 - n - \frac{1}{2} < m < n^2 - n + \frac{1}{2}$$

이것을 만족시키는 정수 m 의 값은 $n^2 - n$ 이므로

$$a_n = n^2 - n$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{n=2}^{50} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=2}^{50} \frac{1}{n^2 - n} = \sum_{n=2}^{50} \frac{1}{n(n-1)} \\
&= \sum_{n=2}^{50} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{50} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{50} \\
&= \frac{49}{50}
\end{aligned}$$

정답_ $\frac{49}{50}$

784

$$\begin{aligned}
 \{2^x - 2f(x)\}(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) &= 2 \text{에서} \\
 2^x - 2f(x) &= \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \\
 \therefore f(x) &= 2^{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \\
 &= 2^{x-1} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})} \\
 &= 2^{x-1} + (\sqrt{x-1} - \sqrt{x}) \\
 \therefore f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(9) \\
 &= \sum_{k=1}^9 \{2^{k-1} + (\sqrt{k-1} - \sqrt{k})\} \\
 &= \sum_{k=1}^9 2^{k-1} + \sum_{k=1}^9 (\sqrt{k-1} - \sqrt{k}) \\
 &= \frac{1 \times (2^9 - 1)}{2 - 1} \\
 &\quad + \{(0 - \sqrt{1}) + (\sqrt{1} - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{8} - \sqrt{9})\} \\
 &= (2^9 - 1) - \sqrt{9} \\
 &= 511 - 3 \\
 &= 508
 \end{aligned}$$

정답 ①

785

$$\begin{aligned}
 T_n &= \sum_{k=1}^n (\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \log_2 a_3 + \dots + \log_2 a_k) \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{2}
 \end{aligned}$$

로 놓으면

(i) $n=1$ 일 때

$$\log_2 a_1 = T_1 = 3$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}
 \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \log_2 a_3 + \dots + \log_2 a_n \\
 &= T_n - T_{n-1} \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{3n(n+1)}{2} \dots\dots ㉠
 \end{aligned}$$

이때 $\log_2 a_1 = 3$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \log_2 a_3 + \dots + \log_2 a_n = \frac{3n(n+1)}{2}$$

$S_n = \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \log_2 a_3 + \dots + \log_2 a_n = \frac{3n(n+1)}{2}$ 로 놓으면

(iii) $n=1$ 일 때

$$\log_2 a_1 = S_1 = 3$$

(iv) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}
 \log_2 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= \frac{3n(n+1)}{2} - \frac{3(n-1)n}{2} \\
 &= 3n \dots\dots ㉡
 \end{aligned}$$

이때 $\log_2 a_1 = 3$ 은 ㉡에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$\log_2 a_n = 3n$$

$$\therefore a_n = 2^{3n}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^4 a_k &= \sum_{k=1}^4 2^{3k} = \sum_{k=1}^4 8^k \\
 &= \frac{8(8^4 - 1)}{8 - 1} = \frac{8}{7} \times (2^{12} - 1) \\
 &= \frac{8}{7} \times 4095 \\
 &= 4680
 \end{aligned}$$

정답 ④

786

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^m a_k &= \sum_{k=1}^m \log_2 \sqrt{\frac{2(k+1)}{k+2}} \\
 &= \sum_{k=1}^m \log_2 \left(2 \times \frac{k+1}{k+2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(1 + \log_2 \frac{k+1}{k+2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \log_2 \frac{k+1}{k+2} \\
 &= \frac{m}{2} + \frac{1}{2} \left(\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{3}{4} + \log_2 \frac{4}{5} + \dots + \log_2 \frac{m+1}{m+2} \right) \\
 &= \frac{m}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{m+1}{m+2} \right) \\
 &= \frac{m}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{2}{m+2} \\
 &= \frac{m}{2} + \frac{1}{2} \{1 - \log_2 (m+2)\} \\
 &= \frac{m+1 - \log_2 (m+2)}{2}
 \end{aligned}$$

$\log_2 (m+2)$ 가 자연수가 되려면 2 이상의 자연수 k 에 대하여

$m+2=2^k$ 의 꼴이어야 한다.

이때 $m=2^k-2$ 이므로 $m+1=2^k-1$ 이고, 이것은 항상 홀수이다.

즉, $\sum_{k=1}^m a_k$ 의 값이 자연수가 되려면 $m+1-\log_2 (m+2)$ 가 짝수이

어야 하므로 $\log_2 (m+2)=k$ 도 홀수이어야 한다.

(i) $k=3$, 즉 $m=6$ 일 때

$$\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^6 a_k = \frac{6+1-3}{2} = 2$$

(ii) $k=5$, 즉 $m=30$ 일 때

$$\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^{30} a_k = \frac{30+1-5}{2} = 13$$

(iii) $k=7$, 즉 $m=126$ 일 때

$$\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^{126} a_k = \frac{126+1-7}{2} = 60$$

(iv) $k \geq 9$, 즉 $m \geq 2^9 - 2$ 일 때

$$\sum_{k=1}^m a_k \geq \frac{2^9 - 2 + 1 - 9}{2} = 251$$

즉, $k \geq 9$ 이면 $\sum_{k=1}^m a_k$ 의 값은 251 이상이 되므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 $\sum_{k=1}^m a_k$ 의 값이 100 이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 m 의 값의 합은

$$6 + 30 + 126 = 162$$

정답 ④

참고 $k=10$ 이면 $m=00$ 이 되므로 m 이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

주어진 수열을

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{1}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{5}{1}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{5}{2}, \frac{7}{1}\right), \dots$$

과 같이 묶으면

n 번째 묶음의 k 번째 항은 $\frac{2k-1}{2^{n-k}}$, 항수는 n 이다.

첫번째 묶음부터 n 번째 묶음까지의 항수는

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

이때 첫번째 묶음부터 10번째 묶음까지의 항수는

$$\frac{10 \times 11}{2} = 55$$

이므로 제60항은 11번째 묶음의 5번째 항이다.

$$\text{따라서 제60항은 } \frac{2 \times 5 - 1}{2^{11-5}} = \frac{9}{64}$$

정답_ ②

10 수학적 귀납법

788

(1) $a_{n+1} = a_n + 2$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 2인 등차수열이다.

이때 첫째항이 -1 이므로

$$a_n = -1 + (n-1) \times 2 = 2n - 3$$

(2) $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

이때 첫째항이 2, (공차) $= -1 - 2 = -3$ 이므로

$$a_n = 2 + (n-1) \times (-3) = -3n + 5$$

정답_ (1) $a_n = 2n - 3$ (2) $a_n = -3n + 5$

789

$a_n = a_{n+1} - 6$ 에서 $a_{n+1} = a_n + 6$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 6인 등차수열이다.

이때 첫째항이 3이므로

$$a_n = 3 + (n-1) \times 6 = 6n - 3$$

$$a_k = 111 \text{에서}$$

$$6k - 3 = 111, 6k = 114$$

$$\therefore k = 19$$

정답_ ②

790

$a_{n+1} = a_n + 4$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 4인 등차수열이다.

$a_5 = 22$ 이므로 첫째항을 a 라고 하면

$$a_n = a + (n-1) \times 4 = a + 4(n-1)$$

$$a_5 = 22 \text{이므로}$$

$$a + 4 \times (5-1) = 22$$

$$a + 16 = 22 \quad \therefore a = 6$$

따라서 $a_n = 6 + 4(n-1) = 4n + 2$ 이므로

$$a_{10} = 4 \times 10 + 2 = 42$$

정답_ ⑤

791

$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_3 = 6 \text{이므로}$$

$$a + 2d = 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_5 = 10 \text{이므로}$$

$$a + 4d = 10 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 2, d = 2$$

따라서 $a_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} 2k = 2 \times \frac{10 \times 11}{2} = 110$$

정답_ ④

참고 $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{10 \{2 \times 2 + (10-1) \times 2\}}{2} = 110$$

792

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_4=22\text{이므로}$$

$$a+3d=22 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_8=14\text{이므로}$$

$$a+7d=14 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a=28, d=-2$$

$$\therefore a_n=28+(n-1)\times(-2)=-2n+30$$

$$a_k<0\text{에서 }-2k+30<0 \quad \therefore k>15$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 16이다.

정답_ ③

793

(1) $a_{n+1}=7a_n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 7인 등비수열이다.

이때 첫째항이 2이므로

$$a_n=2\times 7^{n-1}$$

(2) $a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

이때 첫째항이 1, (공비) $=\frac{3}{1}=3$ 이므로

$$a_n=1\times 3^{n-1}=3^{n-1}$$

정답_ (1) $a_n=2\times 7^{n-1}$ (2) $a_n=3^{n-1}$

794

$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다.

이때 첫째항이 4이므로

$$a_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

$$a_k=\frac{1}{64}\text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k-3}=\frac{1}{64}, \left(\frac{1}{2}\right)^{k-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$k-3=6 \quad \therefore k=9$$

정답_ ⑤

795

$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_2=12\text{이므로}$$

$$ar=12 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_4=108\text{이므로}$$

$$ar^3=108 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉡}\div\textcircled{㉠}$ 을 하면

$$r^2=9 \quad \therefore r=3 (\because r>0)$$

$r=3$ 을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$a=4 \quad \therefore a_n=4\times 3^{n-1}$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제5항까지의 합은

$$\frac{4(3^5-1)}{3-1}=2(243-1)=484$$

정답_ ④

796

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라고 하면

$$a_n=1\times r^{n-1}=r^{n-1}$$

$$a_6=32\text{이므로}$$

$$r^5=32, r^5=2^5 \quad \therefore r=2$$

$$\therefore a_n=2^{n-1}$$

$$a_k>128\text{에서}$$

$$2^{k-1}>128, 2^{k-1}>2^7$$

$$k-1>7 \quad \therefore k>8$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 9이다.

정답_ ④

797

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2 a_n+2\text{에서}$$

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2 a_n+\log_2 4$$

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2 4a_n$$

$$\therefore a_{n+1}=4a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 8, 공비가 4인 등비수열이므로

$$a_n=8\times 4^{n-1}=2^{2n+1}$$

$$a_k=512\text{에서}$$

$$2^{2k+1}=512, 2^{2k+1}=2^9$$

$$2k+1=9 \quad \therefore k=4$$

정답_ ②

798

이차방정식 $a_nx^2-a_{n+1}x+a_n=0$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 중근

을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$D=a_{n+1}^2-4a_n^2=0$$

$$(a_{n+1}+2a_n)(a_{n+1}-2a_n)=0$$

$$\therefore a_{n+1}=-2a_n \text{ 또는 } a_{n+1}=2a_n$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로

$$a_{n+1}=2a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n=2\times 2^{n-1}=2^n$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^8 a_k &= \sum_{k=1}^8 2^k = \frac{2(2^8-1)}{2-1} \\ &= 2\times 255=510 \end{aligned}$$

정답_ 510

참고 이차방정식의 근의 판별

x 에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 $D=b^2-4ac$ 라고 하면

(1) 서로 다른 두 실근을 갖는다. $\Leftrightarrow D>0$

(2) 중근을 갖는다. $\Leftrightarrow D=0$

(3) 서로 다른 두 허근을 갖는다. $\Leftrightarrow D<0$

799

$a_{n+1}=a_n+2n-1$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여

변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + 2 \times 1 - 1 \\
a_3 &= a_2 + 2 \times 2 - 1 \\
a_4 &= a_3 + 2 \times 3 - 1 \\
&\vdots \\
+) \quad a_n &= a_{n-1} + 2(n-1) - 1 \\
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \\
&= 2 + 2 \times \frac{(n-1)n}{2} - (n-1) \quad (\because a_1=2) \\
&= n^2 - 2n + 3 \\
\therefore a_{10} &= 10^2 - 2 \times 10 + 3 = 83
\end{aligned}$$

정답_ ③

800

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)} \text{에서 } a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + 1 - \frac{1}{2} \\
a_3 &= a_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
a_4 &= a_3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\
&\vdots \\
+) \quad a_n &= a_{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\
a_n &= a_1 + 1 - \frac{1}{n} \\
&= 4 + 1 - \frac{1}{n} \quad (\because a_1=4) \\
&= 5 - \frac{1}{n} \\
\therefore a_8 &= 5 - \frac{1}{8} = \frac{39}{8}
\end{aligned}$$

정답_ $\frac{39}{8}$

801

$a_n = a_{n-1} + 3^{n-1}$ ($n=2, 3, 4, \dots$)의 양변에 n 대신 $n+1$ 을 대입하면

$$a_{n+1} = a_n + 3^n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + 3^1 \\
a_3 &= a_2 + 3^2 \\
a_4 &= a_3 + 3^3 \\
&\vdots \\
+) \quad a_n &= a_{n-1} + 3^{n-1} \\
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 1 + \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} \quad (\because a_1=1) \\
&= \frac{3^n - 1}{2}
\end{aligned}$$

$a_k = 364$ 에서

$$\frac{3^k - 1}{2} = 364, \quad 3^k = 729 = 3^6$$

$$\therefore k=6$$

정답_ ②

802

$a_{n+1} = a_n + f(n)$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + f(1) \\
a_3 &= a_2 + f(2) \\
a_4 &= a_3 + f(3) \\
&\vdots \\
+) \quad a_n &= a_{n-1} + f(n-1) \\
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = 1 + (n-1)n \quad (\because a_1=1) \\
&= n^2 - n + 1 \\
\therefore a_{20} &= 20^2 - 20 + 1 \\
&= 400 - 20 + 1 = 381
\end{aligned}$$

정답_ ④

803

조건 (나)에서 $a_{n+1} - a_n = 2n - 4$ 이므로 이 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= 2 \times 1 - 4 \\
a_3 - a_2 &= 2 \times 2 - 4 \\
a_4 - a_3 &= 2 \times 3 - 4 \\
&\vdots \\
+) \quad a_n - a_{n-1} &= 2(n-1) - 4 \\
a_n - a_1 &= \sum_{k=1}^{n-1} (2k-4) \\
\therefore a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k-4) \\
&= -4 + 2 \times \frac{(n-1)n}{2} - 4(n-1) \quad (\because a_1=-4) \\
&= n^2 - 5n
\end{aligned}$$

$a_n = -6$ 이므로

$$n^2 - 5n = -6, \quad n^2 - 5n + 6 = 0$$

$$(n-2)(n-3) = 0 \quad \therefore n=2 \text{ 또는 } n=3$$

따라서 구하는 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$2+3=5$$

정답_ ②

804

$a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{2} a_1 \\
a_3 &= \frac{2}{3} a_2 \\
a_4 &= \frac{3}{4} a_3 \\
&\vdots \\
\times) \quad a_n &= \frac{n-1}{n} a_{n-1} \\
a_n &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times a_1 \\
&= \frac{3}{n} \quad (\because a_1=3) \\
\therefore a_9 &= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

정답_ ①

805

$a_{n+1}=2^n a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 번끼리 곱하면

$$\begin{aligned} a_2 &= 2^1 a_1 \\ a_3 &= 2^2 a_2 \\ a_4 &= 2^3 a_3 \\ &\vdots \\ \times) a_n &= 2^{n-1} a_{n-1} \\ \hline a_n &= 2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots \times 2^{n-1} \times a_1 \\ &= 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \times 1 \quad (\because a_1=1) \\ &= 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \end{aligned}$$

$a_k=1024$ 에서

$$2^{\frac{k(k-1)}{2}}=1024, \quad 2^{\frac{k(k-1)}{2}}=2^{10}$$

$$\frac{k(k-1)}{2}=10, \quad k^2-k-20=0$$

$$(k+4)(k-5)=0 \quad \therefore k=5 \quad (\because k \text{는 자연수})$$

정답_ ②

806

$$\sqrt{n}a_{n+1}=\sqrt{n+1}a_n \text{에서 } a_{n+1}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}a_n$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 번끼리 곱하면

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} a_1 \\ a_3 &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} a_2 \\ a_4 &= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} a_3 \\ &\vdots \\ \times) a_n &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} a_{n-1} \\ \hline a_n &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} \times \cdots \times \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \times a_1 \\ &= 2\sqrt{n} \quad (\because a_1=2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} (a_k a_{k+1})^2 &= \sum_{k=1}^{10} (2\sqrt{k} \times 2\sqrt{k+1})^2 \\ &= \sum_{k=1}^{10} (16k^2 + 16k) \\ &= 16 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 16 \times \frac{10 \times 11}{2} \\ &= 6160 + 880 = 7040 \end{aligned}$$

정답_ ⑤

다른 풀이

$$\sqrt{n}a_{n+1}=\sqrt{n+1}a_n \text{에서 } \frac{a_{n+1}}{\sqrt{n+1}}=\frac{a_n}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{a_n}{\sqrt{n}}=b_n \text{으로 놓으면 } b_{n+1}=b_n$$

$$\therefore b_n=b_{n-1}=\cdots=b_3=b_2=b_1$$

$$\text{이때 } b_1=\frac{a_1}{\sqrt{1}}=2 \text{이므로 } b_n=2$$

$$\therefore a_n=b_n\sqrt{n}=2\sqrt{n}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} (a_k a_{k+1})^2 &= \sum_{k=1}^{10} (2\sqrt{k} \times 2\sqrt{k+1})^2 \\ &= \sum_{k=1}^{10} (16k^2 + 16k) \\ &= 16 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 16 \times \frac{10 \times 11}{2} \\ &= 6160 + 880 = 7040 \end{aligned}$$

807

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n^2+2n}{(n+1)^2} \text{에서}$$

$$a_{n+1}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}a_n$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 번끼리 곱하면

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1 \times 3}{2^2} a_1 \\ a_3 &= \frac{2 \times 4}{3^2} a_2 \\ a_4 &= \frac{3 \times 5}{4^2} a_3 \\ &\vdots \\ \times) a_n &= \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} a_{n-1} \\ \hline a_n &= \frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n} \times a_1 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n} \times 2 \quad (\because a_1=2) \\ &= \frac{n+1}{n} \\ \therefore a_{50} &= \frac{51}{50} \end{aligned}$$

정답_ ③

808

$a_1=2$ 이므로 $a_{n+1}=2a_n+5$ 의 n 에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1+5=2 \times 2+5=9 \\ a_3 &= 2a_2+5=2 \times 9+5=23 \\ a_4 &= 2a_3+5=2 \times 23+5=51 \\ a_5 &= 2a_4+5=2 \times 51+5=107 \\ a_6 &= 2a_5+5=2 \times 107+5=219 \end{aligned}$$

정답_ ④

809

$a_1=-2$ 이므로 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{a_1}{2a_1+1}=\frac{-2}{2 \times (-2)+1}=\frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2a_2+1} = \frac{\frac{2}{3}}{2 \times \frac{2}{3} + 1} = \frac{2}{7}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{2a_3+1} = \frac{\frac{2}{7}}{2 \times \frac{2}{7} + 1} = \frac{2}{11}$$

$$a_5 = \frac{a_4}{2a_4+1} = \frac{\frac{2}{11}}{2 \times \frac{2}{11} + 1} = \frac{2}{15}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{2}{4n-5}$$

$$a_k = \frac{2}{75} \text{에서}$$

$$\frac{2}{4k-5} = \frac{2}{75}, 4k-5=75$$

$$\therefore k=20$$

정답 ②

참고 각 항의 분모 $-1, 3, 7, 11, 15, \dots$ 로 이루어진 수열을 $\{b_n\}$ 이라고 하면 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 -1 , 공차가 4 인 등차수열을 이룬다.

$$\therefore b_n = -1 + (n-1) \times 4 = 4n-5$$

다른 풀이

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+1} \text{의 양변의 역수를 취하면}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n+1}{a_n} \quad \therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 2$$

$$\frac{1}{a_n} = b_n \text{으로 놓으면}$$

$$b_{n+1} = b_n + 2$$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 공차가 2 인 등차수열이다.

$$\text{이때 } b_1 = \frac{1}{a_1} = -\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$b_n = -\frac{1}{2} + (n-1) \times 2 = \frac{4n-5}{2}$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{4n-5}$$

$$a_k = \frac{2}{75} \text{에서}$$

$$\frac{2}{4k-5} = \frac{2}{75}, 4k-5=75$$

$$\therefore k=20$$

810

$$a_{n+1} + a_n = (-1)^{n+1} \times n \text{에서}$$

$$a_{n+1} = -a_n + (-1)^{n+1} \times n$$

$$a_1 = 12 \text{이므로 위의 식의 } n \text{에 } 1, 2, 3, \dots, 7 \text{을 차례대로 대입하면}$$

$$a_2 = -a_1 + (-1)^2 \times 1 = -12 + 1 = -11$$

$$a_3 = -a_2 + (-1)^3 \times 2 = 11 - 2 = 9$$

$$a_4 = -a_3 + (-1)^4 \times 3 = -9 + 3 = -6$$

$$a_5 = -a_4 + (-1)^5 \times 4 = 6 - 4 = 2$$

$$a_6 = -a_5 + (-1)^6 \times 5 = -2 + 5 = 3$$

$$a_7 = -a_6 + (-1)^7 \times 6 = -3 - 6 = -9$$

$$a_8 = -a_7 + (-1)^8 \times 7 = 9 + 7 = 16$$

따라서 $a_8 = 16 > a_1$ 이므로 $a_k > a_1$ 인 자연수 k 의 최솟값은 8 이다.

정답 ④

811

$$a_{n+1} + a_n = 2n + 1 \text{의 } n \text{에 } 1, 2, 3, 4 \text{를 차례대로 대입하면}$$

$$a_2 + a_1 = 2 \times 1 + 1 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_3 + a_2 = 2 \times 2 + 1 = 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$a_4 + a_3 = 2 \times 3 + 1 = 7 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$a_5 + a_4 = 2 \times 4 + 1 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉡} - \textcircled{㉠} \text{을 하면}$$

$$a_3 - a_1 = 2$$

$$a_3 = 2 \text{이므로 } a_1 = 0$$

$$\textcircled{㉣} - \textcircled{㉢} \text{을 하면}$$

$$a_5 - a_3 = 2$$

$$a_3 = 2 \text{이므로 } a_5 = 4$$

$$\therefore a_1 + a_5 = 0 + 4 = 4$$

정답 ②

812

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{의 } n \text{에 } 1, 2, 3 \text{을 차례대로 대입하면}$$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 5 + a_1 \quad (\because a_2 = 3)$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = (5 + a_1) + 5 = 10 + a_1$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = (10 + a_1) + (5 + a_1) = 2a_1 + 15$$

$$\text{이때 } a_5 = 21 \text{이므로}$$

$$2a_1 + 15 = 21 \quad \therefore a_1 = 3$$

따라서 $a_4 = 10 + 3 = 13$ 이므로 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 의 n 에 4 를 대입하면

$$a_6 = a_5 + a_4 = 21 + 13 = 34$$

정답 ②

813

$$a_1 = 2 \text{이므로 } a_{n+1} = (-1)^n \times a_n - 3 \text{의 } n \text{에 } 1, 2, 3, 4, 5, \dots \text{를 차례대로 대입하면}$$

$$a_2 = (-1) \times a_1 - 3 = -2 - 3 = -5$$

$$a_3 = (-1)^2 \times a_2 - 3 = -5 - 3 = -8$$

$$a_4 = (-1)^3 \times a_3 - 3 = -(-8) - 3 = 5$$

$$a_5 = (-1)^4 \times a_4 - 3 = 5 - 3 = 2$$

$$a_6 = (-1)^5 \times a_5 - 3 = -2 - 3 = -5$$

$$\vdots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 $2, -5, -8, 5$ 가 이 순서대로 반복되어 나타나므로 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+4} = a_n$$

$$\text{이때 } 2026 = 4 \times 506 + 2 \text{이므로}$$

$$a_{2026} = a_2 = -5$$

정답 ②

814

$$a_1 = 1 < 7 \text{이므로}$$

$$a_2 = 2a_1 = 2 \times 1 = 2$$

$$a_2 = 2 < 7 \text{이므로}$$

$$a_3 = 2a_2 = 2 \times 2 = 4$$

$$a_3=4<7\text{이므로}$$

$$a_4=2a_3=2\times 4=8$$

$$a_4=8>7\text{이므로}$$

$$a_5=a_4-7=8-7=1$$

$$a_5=1<7\text{이므로}$$

$$a_6=2a_5=2\times 1=2$$

∴

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 1, 2, 4, 8이 이 순서대로 반복되어 나타나므로 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+4}=a_n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^8 a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

$$= 2(1+2+4+8)=30$$

정답 ①

815

$S_{n+1} = \frac{1}{3}S_n + 1$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$S_2 = \frac{1}{3}S_1 + 1 = \frac{1}{3} \times 2 + 1 = \frac{5}{3} \quad (\because S_1 = a_1 = 2)$$

$$S_3 = \frac{1}{3}S_2 + 1 = \frac{1}{3} \times \frac{5}{3} + 1 = \frac{14}{9}$$

$$S_4 = \frac{1}{3}S_3 + 1 = \frac{1}{3} \times \frac{14}{9} + 1 = \frac{41}{27}$$

이때 $a_4 = S_4 - S_3$ 이므로

$$a_4 = \frac{41}{27} - \frac{14}{9} = -\frac{1}{27}$$

정답 $-\frac{1}{27}$

816

$S_n = 2a_n - 2$ 의 양변에 n 대신 $n+1$ 을 대입하면 $S_{n+1} = 2a_{n+1} - 2$ 이므로

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

$$= 2a_{n+1} - 2 - (2a_n - 2)$$

$$= 2a_{n+1} - 2a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

$$\therefore a_5 = 2^5 = 32$$

정답 ①

다른 풀이

$S_n = 2a_n - 2$ 의 양변에 n 대신 $n+1$ 을 대입하면 $S_{n+1} = 2a_{n+1} - 2$

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로 위의 식에 대입하면

$$S_{n+1} = 2(S_{n+1} - S_n) - 2$$

$$\therefore S_{n+1} = 2S_n + 2$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$S_2 = 2S_1 + 2 = 2 \times 2 + 2 = 6 \quad (\because S_1 = a_1 = 2)$$

$$S_3 = 2S_2 + 2 = 2 \times 6 + 2 = 14$$

$$S_4 = 2S_3 + 2 = 2 \times 14 + 2 = 30$$

$$S_5 = 2S_4 + 2 = 2 \times 30 + 2 = 62$$

$$\therefore a_5 = S_5 - S_4 = 62 - 30 = 32$$

817

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \text{이므로 } S_{n+1} = a_{n+1} + S_n$$

이것을 $a_{n+1}S_n = a_nS_{n+1}$ 에 대입하면

$$a_{n+1}S_n = a_n(a_{n+1} + S_n)$$

$$(S_n - a_n)a_{n+1} = a_nS_n$$

이때 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 에서 $S_n - a_n = S_{n-1}$ 이므로

$$S_{n-1}a_{n+1} = a_nS_n \quad \therefore a_{n+1} = \frac{a_nS_n}{S_{n-1}} \quad (\text{단, } n \geq 2)$$

$$a_1 = 2, a_2 = 4 \text{이므로}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 2 + 4 = 6$$

$a_{n+1} = \frac{a_nS_n}{S_{n-1}}$ 의 n 에 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$a_3 = \frac{a_2S_2}{S_1} = \frac{4 \times 6}{2} = 12$$

$$a_4 = \frac{a_3S_3}{S_2} = \frac{12 \times 18}{6} = 36 \quad (\because S_3 = a_3 + S_2 = 12 + 6 = 18)$$

$$a_5 = \frac{a_4S_4}{S_3} = \frac{36 \times 54}{18} = 108 \quad (\because S_4 = a_4 + S_3 = 36 + 18 = 54)$$

$$\therefore S_5 = a_5 + S_4 = 108 + 54 = 162$$

정답 162

다른 풀이

$$a_1 = 2, a_2 = 4 \text{이므로}$$

$$S_1 = a_1 = 2, S_2 = a_1 + a_2 = 2 + 4 = 6$$

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n, a_n = S_n - S_{n-1} \text{이므로 이것을}$$

$$a_{n+1}S_n = a_nS_{n+1} \text{에 대입하면}$$

$$(S_{n+1} - S_n)S_n = (S_n - S_{n-1})S_{n+1}$$

$$S_{n+1}S_n - S_n^2 = S_nS_{n+1} - S_{n-1}S_{n+1}$$

$$\therefore S_n^2 = S_{n-1}S_{n+1} \quad (\text{단, } n \geq 2)$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 2, (공비) $= \frac{S_2}{S_1} = \frac{6}{2} = 3$ 인 등비수열

이므로

$$S_n = 2 \times 3^{n-1}$$

$$\therefore S_5 = 2 \times 3^4 = 162$$

818

8%의 소금물 50g에 들어 있는 소금의 양은

$$\frac{8}{100} \times 50 = 4 \text{ (g)}$$

a_n %의 소금물 150g에 들어 있는 소금의 양은

$$\frac{a_n}{100} \times 150 = \frac{3}{2}a_n \text{ (g)}$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{\frac{3}{2}a_n + 4}{200} \times 100 = \frac{3}{4}a_n + 2$$

따라서 $p = \frac{3}{4}, q = 2$ 이므로

$$2pq = 2 \times \frac{3}{4} \times 2 = 3$$

정답 3

819

n 시간 후의 미생물의 수를 a_n 마리라고 하자.

처음에 6마리가 있었고, 1시간마다 2마리는 죽고 나머지는 각각 3마리로 분열하므로

(i) 1시간 후의 미생물의 수는

$$a_1 = 3(6-2) = 12$$

(ii) $(n+1)$ 시간 후의 미생물의 수는

$$a_{n+1} = 3(a_n - 2)$$

$a_1 = 12$ 이므로 $a_{n+1} = 3(a_n - 2)$ 의 n 에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$$a_2 = 3(a_1 - 2) = 3(12 - 2) = 30$$

$$a_3 = 3(a_2 - 2) = 3(30 - 2) = 84$$

$$a_4 = 3(a_3 - 2) = 3(84 - 2) = 246$$

$$a_5 = 3(a_4 - 2) = 3(246 - 2) = 732$$

$$a_6 = 3(a_5 - 2) = 3(732 - 2) = 2190$$

따라서 6시간 후의 미생물의 수는 2190이다.

정답_ 2190

820

용암이 분출하기 시작한 후 n 분부터 $(n+1)$ 분 동안 흘러간 거리를 a_n m라고 하면 처음 1분 동안 용암이 200 m를 흘러갔으므로

$$a_1 = 200$$

$(n+1)$ 분부터 $(n+2)$ 분 동안 흘러간 거리는 n 번째 1분 동안 흘러간 거리의 0.5배보다 20 m를 더 흘러가므로

$$a_{n+1} = 0.5a_n + 20 = \frac{1}{2}a_n + 20$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + 20 = \frac{1}{2} \times 200 + 20 = 120$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 + 20 = \frac{1}{2} \times 120 + 20 = 80$$

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 + 20 = \frac{1}{2} \times 80 + 20 = 60$$

$$a_5 = \frac{1}{2}a_4 + 20 = \frac{1}{2} \times 60 + 20 = 50$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 200 + 120 + 80 + 60 + 50 = 510$$

따라서 용암이 분출하기 시작한 후 5분 동안 흘러간 총거리는 510 m이다.

정답_ ③

821

$n=1, 2, 3, \dots, n$ 일 때, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 을 구하면

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = a_1 + 6 = a_1 + 3 \times 2$$

$$a_3 = a_2 + 9 = a_2 + 3 \times 3$$

$\vdots$

$$a_n = a_{n-1} + 3n$$

위의 식들을 변끼리 더하면

$$a_n = 3(1+2+3+4+\dots+n)$$

$$= 3 \sum_{k=1}^n k$$

$$= 3 \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{3}{2}n(n+1)$$

$$\therefore a_{20} = \frac{3}{2} \times 20 \times 21 = 630$$

정답_ ④

822

명제 $p(n)$ 이 모든 홀수에 대하여 성립함을 증명하려면 일단 $p(1)$ 이 참임을 보여야 한다.

$p(1)$ 이 참일 때, $\vdash$ 을 보이면 $p(1), p(3), p(5), p(7), \dots$ 이 참이다.

따라서 보기에서 반드시 보여야 할 것은 $\neg, \vdash$ 이다.

정답_ ②

참고 $p(1)$ 이 참일 때, $\vdash$ 을 보이면 $p(1), p(3), p(7), p(15), \dots$ 가 참이다.

823

조건 (가)에서 $p(1)$ 이 참이므로

조건 (나)에 의하여 $p(3), p(3^2), p(3^3), \dots$ 이 참이고

조건 (다)에 의하여 $p(5), p(5^2), p(5^3), \dots$ 이 참이다.

즉, 조건 (나), (다)에 의하여 $p(3^a \times 5^b)$ (a, b 는 음이 아닌 정수)은 참이다.

$$\textcircled{1} 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

$$\textcircled{2} 130 = 2 \times 5 \times 13$$

$$\textcircled{3} 144 = 2^4 \times 3^2$$

$$\textcircled{4} 225 = 3^2 \times 5^2$$

$$\textcircled{5} 315 = 3^2 \times 5 \times 7$$

따라서 반드시 참인 명제는 ④이다.

정답_ ④

824

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 2 \times 2 = 4, (\text{우변}) = 1 \times 2^2 = 4$$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \dots + (k+1) \times 2^k = k \times 2^{k+1}$$

위의 식의 양변에 $\textcircled{가} (k+2) \times 2^{k+1}$ 을 더하면

$$2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \dots + (k+1) \times 2^k + \textcircled{가} (k+2) \times 2^{k+1}$$

$$= k \times 2^{k+1} + \textcircled{가} (k+2) \times 2^{k+1}$$

$$= 2^{k+1}(k+k+2)$$

$$= \textcircled{나} (k+1) \times 2^{k+2}$$

즉, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

$$\therefore \textcircled{가} (k+2) \times 2^{k+1}, \textcircled{나} (k+1) \times 2^{k+2}$$

따라서 $f(k) = (k+2) \times 2^{k+1}, g(k) = (k+1) \times 2^{k+2}$ 이므로

$$f(2) - g(1) = 4 \times 2^3 - 2 \times 2^3 = 32 - 16 = 16$$

정답_ ②

825

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = \frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{3}, (\text{우변}) = \frac{1}{2 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ & + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ & = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ & = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} \\ & = \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} \\ & = \frac{k+1}{2k+3} \end{aligned}$$

즉, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

$$\therefore \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, \frac{k+1}{2k+3}$$

따라서 $f(k) = \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, g(k) = \frac{k+1}{2k+3}$ 이므로

$$\frac{g(1)}{f(1)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{15}} = 6$$

정답_ ②

826

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = a_1 = (2^2 - 1) \times 2^0 + 0 \times \frac{1}{2} = 3,$$

$$(\text{우변}) = 2^2 - 2 \times \frac{1}{2} = 3$$

이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m}$$

$n=m+1$ 일 때

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} a_k &= \sum_{k=1}^m a_k + a_{m+1} \\ &= 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m} \\ & \quad + (2^{2m+2} - 1) \times \frac{1}{2^{m+1}} + m \times 2^{-m-1} \\ &= 2^{m(m+1)} \times \{1 + (2^{2m+2} - 1)\} - 2^{-m} \left\{ (m+1) - \frac{m}{2} \right\} \\ &= \frac{2^{m(m+1)}}{2} \times \frac{2^{2m+2}}{2} - \frac{m+2}{2} \times 2^{-m} \\ &= 2^{m^2+3m+2} - (m+2) \times \frac{1}{2} \times 2^{-m} \\ &= 2^{(m+1)(m+2)} - (m+2) \times 2^{-(m+1)} \end{aligned}$$

따라서 $n=m+1$ 일 때에도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1) \times 2^{-n}$$

$$\therefore \frac{1}{2^{m(m+1)}}, \frac{2^{2m+2}}{2^{m+1}}$$

따라서 $f(m) = \frac{1}{2^{m(m+1)}}, g(m) = \frac{2^{2m+2}}{2^{m+1}}$ 이므로

$$\frac{g(7)}{f(3)} = \frac{2^{16}}{2^{12}} = 2^4 = 16$$

정답_ ④

827

(i) $n=2$ 일 때

$$(\text{좌변}) = (1+h)^2 = 1+2h+h^2, (\text{우변}) = 1+2h$$

이때 $h^2 > 0$ 이므로

$$(1+h)^2 > 1+2h$$

즉, 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$(1+h)^k > 1+kh$$

위의 식의 양변에 $(1+h)$ 를 곱하면

$$(1+h)^{k+1} > (1+kh)(1+h)$$

우변을 전개하여 정리하면

$$1 + (k+1)h + kh^2$$

이때 $1 + (k+1)h + kh^2 > 1 + (k+1)h$ ($\because kh^2 > 0$)이므로

$$(1+h)^{k+1} > 1 + (k+1)h$$

즉, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

$$\therefore \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

따라서 $p=2, f(h)=1+2h, g(h)=1+h$ 이므로

$$f(p) \times g(p) = f(2) \times g(2) = 5 \times 3 = 15$$

정답_ ④

828

(i) $n=2$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, (\text{우변}) = \sqrt{2}$$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} &> \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &= \frac{\sqrt{k(k+1)} + 1}{\sqrt{k+1}} \\ &= \frac{\sqrt{k^2+k+1}}{\sqrt{k+1}} \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k^2+k+1}}{\sqrt{k+1}} &> \frac{\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{k+1}} \\ &= \frac{k+1}{\sqrt{k+1}} \quad (\because k \geq 2) \\ &= \sqrt{k+1} \end{aligned}$$

이므로

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$$

즉, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 2 이상인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{k^2+k+1}}, \frac{1}{k+1}$$

따라서 $f(k)=\sqrt{k^2+k}+1$, $g(k)=k+1$ 이므로
 $f(2)-\sqrt{g(5)}=(\sqrt{6}+1)-\sqrt{6}=1$

정답_ ①

829

(i) $n=2$ 일 때

$$(\text{좌변})=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}, (\text{우변})=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$$

위의 식의 양변에 $\left(\frac{1}{(k+1)^2}\right)$ 을 더하면

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

이때

$$\left(2-\frac{1}{k+1}\right)-\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$$

$$=-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$=-\frac{k(k+1)+(k+1)^2-k}{k(k+1)^2}$$

$$=\frac{1}{k(k+1)^2}>0 \quad (\because k \geq 2)$$

이므로

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

$$\therefore \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

즉, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

$$\therefore \left(\frac{1}{(k+1)^2}\right), \left(\frac{1}{k(k+1)^2}\right)$$

따라서 $f(k)=\frac{1}{(k+1)^2}$, $g(k)=\frac{1}{k(k+1)^2}$ 이므로

$$\frac{f(2)}{g(2)}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{18}}=2$$

정답_ ①

830

(i) $n=5$ 일 때

$$(\text{좌변})=2^5=32, (\text{우변})=5^2=25$$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 5$)일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$2^k > k^2$$

위의 식의 양변에 2를 곱하면

$$2^{k+1} > 2k^2$$

이때 $k \geq 5$ 이면 $k^2-2k-1=(k-1)^2-2 > 0$ 이므로

$$k^2 > 2k+1$$

$$\therefore 2^{k+1} > 2k^2 = k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

즉, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 5 이상인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

정답_ 풀이 참조

831

$$(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+4$$

$$a_{n+1}^2+2a_na_{n+1}+a_n^2=4a_na_{n+1}+4$$

$$a_{n+1}^2-2a_na_{n+1}+a_n^2=4$$

$$(a_{n+1}-a_n)^2=4$$

$$\therefore a_{n+1}-a_n=2 \quad (\because a_n < a_{n+1})$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 2인 등차수열이다. ①

이때 첫째항이 5이므로

$$a_n=5+(n-1) \times 2=2n+3 \quad \text{②}$$

$$\therefore a_{15}=2 \times 15+3=33 \quad \text{③}$$

정답_ 33

채점 기준	비율
① 수열 $\{a_n\}$ 이 공차가 2인 등차수열임을 알기	50 %
② 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 구하기	30 %
③ a_{15} 의 값 구하기	20 %

832

$$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$$
이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다. ①

이때 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$S_2=24$$
이므로

$$\frac{a(r^2-1)}{r-1}=24 \quad \text{..... ㉠}$$

$$S_4=240$$
이므로

$$\frac{a(r^4-1)}{r-1}=240$$

$$\therefore \frac{a(r^2-1)(r^2+1)}{r-1}=240 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉡} \div \text{㉠} \text{을 하면}$$

$$r^2+1=10, r^2=9$$

$$\therefore r=3 \quad (\because r > 0) \quad \text{②}$$

$r=3$ 을 ㉠에 대입하면

$$\frac{a(9-1)}{3-1}=24$$

$$\therefore a=6 \quad \text{③}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 6, 공비가 3인 등비수열이므로

$$S_6=\frac{6(3^6-1)}{3-1}=3(3^6-1)$$

$$=2184 \quad \text{④}$$

정답_ 2184

채점 기준	비율
① 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열임을 알기	20 %
② 수열 $\{a_n\}$ 의 공비 구하기	30 %
③ 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항 구하기	20 %
④ S_6 의 값 구하기	30 %

833

$a_{n+1}=a_n+4n$ 의 n 에 1을 대입하면
 $a_2=a_1+4$
 이것을 $3a_1=a_2$ 에 대입하면
 $3a_1=a_1+4, 2a_1=4$
 $\therefore a_1=2$ ①
 $a_1=2$ 이므로 $a_{n+1}=a_n+4n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면
 $a_2=a_1+4$
 $a_3=a_2+4 \times 2$
 $a_4=a_3+4 \times 3$
 $\vdots$
 $+) a_n=a_{n-1}+4(n-1)$
 $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} 4k=2+4 \times \frac{(n-1)n}{2} (\because a_1=2)$
 $=2n^2-2n+2$ ②
 $\therefore a_{16}=2 \times 16^2-2 \times 16+2=482$ ③

정답_ 482

채점 기준	비율
① a_1 의 값 구하기	30 %
② a_n 구하기	40 %
③ a_{16} 의 값 구하기	30 %

834

$a_1=2 \geq 2$ 이므로
 $a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2} \times 2=1$
 $a_2=1 < 2$ 이므로
 $a_3=\sqrt{2}a_2=\sqrt{2}$
 $a_3=\sqrt{2} < 2$ 이므로
 $a_4=\sqrt{2}a_3=\sqrt{2} \times \sqrt{2}=2$ ①
 $\vdots$
 따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 2, 1, $\sqrt{2}$ 가 이 순서대로 반복되어 나타나므로 모든 자연수 n 에 대하여
 $a_{n+3}=a_n$ ②
 이때 $2025=3 \times 675$ 이므로
 $a_{2025}=a_3=\sqrt{2}$ ③

정답_ $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
① a_2, a_3, a_4 의 값 구하기	30 %
② 수열 $\{a_n\}$ 의 규칙 찾기	30 %
③ a_{2025} 의 값 구하기	40 %

835

$2S_n=(n+1)a_n$ ㉠
 의 양변에 n 대신 $n+1$ 을 대입하면
 $2S_{n+1}=(n+2)a_{n+1}$ ㉡

㉠-㉡을 하면

$$2(S_{n+1}-S_n)=(n+2)a_{n+1}-(n+1)a_n$$

$$2a_{n+1}=(n+2)a_{n+1}-(n+1)a_n$$

$$na_{n+1}=(n+1)a_n$$

$$\therefore a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n \text{ ①}$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2=\frac{2}{1}a_1$$

$$a_3=\frac{3}{2}a_2$$

$$a_4=\frac{4}{3}a_3$$

$\vdots$

$$\times) a_n=\frac{n}{n-1}a_{n-1}$$

$$a_n=\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n-1} \times a_1$$

$$=n \times a_1$$

$$=3n (\because a_1=3) \text{ ②}$$

$$\therefore a_{12}=3 \times 12=36 \text{ ③}$$

정답_ 36

채점 기준	비율
① a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식 구하기	40 %
② a_n 구하기	40 %
③ a_{12} 의 값 구하기	20 %

836

(i) $n=2$ 일 때, $2^3-2=6$ 이므로 3의 배수이다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, k^3-k 가 3의 배수라고 가정하면

$$\begin{aligned}
 (k+1)^3-(k+1) &= (k^3+3k^2+3k+1)-(k+1) \\
 &= k^3+3k^2+2k \\
 &= (k^3-k) + (3k^2+3k) \\
 &= \boxed{(\text{㉠}) k^3-k} + 3\boxed{(\text{㉡}) k^2+k}
 \end{aligned}$$

이때 $\boxed{(\text{㉠}) k^3-k}, 3\boxed{(\text{㉡}) k^2+k}$ 는 모두 3의 배수이므로

$(k+1)^3-(k+1)$ 도 3의 배수이다.

즉, $n=k+1$ 일 때에도 n^3-n 은 3의 배수이다.

(i), (ii)에서 2 이상인 모든 자연수 n 에 대하여 n^3-n 은 3의 배수이다.

$$\therefore \boxed{(\text{㉠}) k^3-k}, \boxed{(\text{㉡}) k^2+k} \text{ ①}$$

따라서 $f(k)=k^3-k, g(k)=k^2+k$ 이므로

$$f(2)+g(2)=(2^3-2)+(2^2+2)=6+6=12 \text{ ②}$$

정답_ 12

채점 기준	비율
① ㉠, ㉡에 알맞은 식 구하기	70 %
② $f(2)+g(2)$ 의 값 구하기	30 %

참고 $k^3-k=k(k^2-1)=k(k+1)(k-1)$ 이고 $k \geq 2$ 이므로 k^3-k 는 연속한 세 자연수의 곱이다. 이때 연속한 세 자연수의 곱은 항상 3의 배수이다.

837

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_6 - a_4 = -6 \text{이므로}$$

$$(a+5d) - (a+3d) = -6$$

$$2d = -6 \quad \therefore d = -3$$

$$a_2 a_4 = 7 \text{이므로}$$

$$(a-3)(a-9) = 7, \quad a^2 - 12a + 20 = 0$$

$$(a-2)(a-10) = 0$$

이때 $a_1 < 3$, 즉 $a < 3$ 이므로 $a = 2$

$$\therefore a_n = 2 + (n-1) \times (-3) = -3n + 5$$

따라서 $a_{2k-1} = -3(2k-1) + 5 = -6k + 8$ 이므로

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19} &= \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{10} (-6k + 8) \\ &= -6 \times \frac{10 \times 11}{2} + 8 \times 10 \\ &= -250 \end{aligned}$$

정답_ ⑤

838

$$a_{n+1} - a_n = (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n^2+n} \text{에서}$$

$$a_{n+1} - a_n = (-1)^{n+1} \frac{n+(n+1)}{n(n+1)}$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., 9를 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2 - a_1 = (-1)^2 \times \left(1 + \frac{1}{2} \right) = 1 + \frac{1}{2}$$

$$a_3 - a_2 = (-1)^3 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$a_4 - a_3 = (-1)^4 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

⋮

$$+) \quad a_{10} - a_9 = (-1)^{10} \times \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right) = \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

$$a_{10} - a_1 = 1 + \frac{1}{10}$$

$$\therefore a_{10} = a_1 + 1 + \frac{1}{10} = 3 + 1 + \frac{1}{10} \quad (\because a_1 = 3)$$

$$= \frac{41}{10}$$

정답_ ⑤

839

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^n (2k-1)a_k \text{의 } n \text{에 } 1 \text{을 대입하면}$$

$$a_2 = \sum_{k=1}^1 (2k-1)a_k = (2 \times 1 - 1)a_1 = 1 \quad (\because a_1 = 1)$$

이때

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^n (2k-1)a_k$$

$$= a_1 + 3a_2 + 5a_3 + \cdots + (2n-3)a_{n-1} + (2n-1)a_n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이므로

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1)a_k$$

$$= a_1 + 3a_2 + 5a_3 + \cdots + (2n-5)a_{n-2} + (2n-3)a_{n-1} \quad (\text{단, } n \geq 2)$$

..... ②

①-②을 하면

$$a_{n+1} - a_n = (2n-1)a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = 2na_n \quad (\text{단, } n \geq 2)$$

$$\therefore a_5 = (2 \times 4)a_4$$

$$= (2 \times 4) \times (2 \times 3)a_3$$

$$= (2 \times 4) \times (2 \times 3) \times (2 \times 2)a_2$$

$$= (2 \times 4) \times (2 \times 3) \times (2 \times 2) \times 1$$

$$= 192$$

정답_ ④

다른 풀이

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 \times a_1 = 1$$

$$a_3 = a_1 + 3a_2 = 1 + 3 = 4$$

$$a_4 = a_1 + 3a_2 + 5a_3 = 4 + 5 \times 4 = 24$$

$$a_5 = a_1 + 3a_2 + 5a_3 + 7a_4 = 24 + 7 \times 24 = 192$$

840

$a_{n+1} + a_n = n$ 의 n 에 1, 3, 5, ..., 19를 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2 + a_1 = 1$$

$$a_4 + a_3 = 3$$

$$a_6 + a_5 = 5$$

⋮

$$+) \quad \frac{a_{20} + a_{19} = 19}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20} = 1 + 3 + 5 + \cdots + 19}$$

$$= \frac{10(1+19)}{2}$$

$$= 100$$

..... ①

$a_{n+1} + a_n = n$ 의 n 에 2, 4, 6, ..., 18을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_3 + a_2 = 2$$

$$a_5 + a_4 = 4$$

$$a_7 + a_6 = 6$$

⋮

$$+) \quad \frac{a_{19} + a_{18} = 18}{a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{19} = 2 + 4 + 6 + \cdots + 18}$$

$$= \frac{9(2+18)}{2}$$

$$= 90$$

..... ②

①-②을 하면

$$a_1 + a_{20} = 10$$

$$\therefore a_{20} = 10 - a_1 = 10 - 1 = 9 \quad (\because a_1 = 1)$$

정답_ ④

841

조건 (가)에서

$$a_{2n} = a_2 a_n + 1$$

..... ①

조건 ㄴ에서

$$a_{2n+1} = a_2 a_n - 2 \quad \dots\dots \textcircled{ㄴ}$$

ㄴ의 n 에 3을 대입하면

$$a_7 = a_2 a_3 - 2$$

즉, $a_2 a_3 - 2 = 2$ ($\because a_7 = 2$)이므로

$$a_2 a_3 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{ㄷ}$$

㉑의 n 에 1을 대입하면

$$a_2 = a_2 a_1 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{ㄹ}$$

ㄴ의 n 에 1을 대입하면

$$a_3 = a_2 a_1 - 2 \quad \dots\dots \textcircled{ㅁ}$$

ㄷ, ㄹ을 ㄱ에 대입하면

$$(a_2 a_1 + 1)(a_2 a_1 - 2) = 4$$

$$(a_2 a_1)^2 - a_2 a_1 - 6 = 0$$

$$(a_2 a_1 + 2)(a_2 a_1 - 3) = 0$$

$$\therefore a_2 a_1 = -2 \text{ 또는 } a_2 a_1 = 3$$

(i) $a_2 a_1 = -2$ 일 때

$$\textcircled{ㄷ} \text{에서 } a_2 = -1$$

$$\therefore a_1 = \frac{-2}{a_2} = 2$$

그런데 이것은 $0 < a_1 < 1$ 을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_2 a_1 = 3$ 일 때

$$\textcircled{ㄷ} \text{에서 } a_2 = 4$$

$$\therefore a_1 = \frac{3}{a_2} = \frac{3}{4}$$

(i), (ii)에서 $a_1 = \frac{3}{4}, a_2 = 4$

$$a_1 = \frac{3}{4}, a_2 = 4 \text{를 } \textcircled{ㅁ} \text{에 대입하면}$$

$$a_3 = \frac{3}{4} \times 4 - 2 = 1$$

ㄴ의 n 에 12를 대입하면

$$a_{25} = a_2 a_{12} - 2 = 4a_{12} - 2$$

㉑의 n 에 6을 대입하면

$$a_{12} = a_2 a_6 + 1 = 4a_6 + 1$$

㉑의 n 에 3을 대입하면

$$a_6 = a_2 a_3 + 1$$

$$= 4a_3 + 1$$

$$= 4 \times 1 + 1 = 5 \quad (\because a_3 = 1)$$

$$\therefore a_{25} = 4a_{12} - 2 = 4(4a_6 + 1) - 2$$

$$= 4(4 \times 5 + 1) - 2$$

$$= 82$$

정답_ ③

842

$n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{3S_k}{k+2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3S_k}{k+2}$$

$$= \frac{3S_n}{n+2}$$

이므로

$$3S_n = (n+2)a_n \quad (\text{단, } n \geq 2)$$

$$S_1 = a_1 \text{에서 } 3S_1 = 3a_1 \text{이므로}$$

$$3S_n = (n+2)a_n \quad (\text{단, } n \geq 1)$$

$$3a_n = 3(S_n - S_{n-1})$$

$$= (n+2)a_n - (n-1+2)a_{n-1}$$

$$= (n+2)a_n - (\textcircled{㉑} n+1)a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$3a_n - (n+2)a_n = -(n+1)a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$(n-1) \times a_n = (n+1)a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(\textcircled{㉑} n+1)}{n-1} \quad (n \geq 2)$$

따라서

$$a_{10} = a_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \dots \times \frac{a_9}{a_8} \times \frac{a_{10}}{a_9}$$

$$= 2 \times \left(\frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \dots \times \frac{10}{8} \times \frac{11}{9} \right) \quad (\because a_1 = 2)$$

$$= 2 \times \frac{10 \times 11}{1 \times 2}$$

$$= \textcircled{㉑} 110$$

$$\therefore \textcircled{㉑} n+1, \textcircled{㉑} \frac{n+1}{n-1}, \textcircled{㉑} 110$$

$$\text{이상에서 } f(n) = n+1, g(n) = \frac{n+1}{n-1}, p = 110 \text{이므로}$$

$$\frac{f(p)}{g(p)} = \frac{f(110)}{g(110)} = \frac{111}{\frac{111}{109}} = 109$$

정답_ ①

843

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \text{이므로 } a_n = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} \text{에서}$$

$$S_n - S_{n-1} = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}$$

$$(\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}})(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}$$

$$\therefore \sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} = 1 \quad (\text{단, } n = 2, 3, 4, \dots)$$

$$T_n = \sqrt{S_n} \text{으로 놓으면}$$

$$T_n - T_{n-1} = 1 \quad (\text{단, } n = 2, 3, 4, \dots)$$

이때 $T_1 = \sqrt{S_1} = \sqrt{a_1} = \sqrt{4} = 2$ 이므로 수열 $\{T_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 1인 등차수열을 이룬다.

$$\therefore T_n = 2 + (n-1) = n+1$$

$$\text{따라서 } S_n = T_n^2 = (n+1)^2 \text{이므로}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n+1)^2 - n^2$$

$$= 2n+1 \quad (\text{단, } n = 2, 3, 4, \dots)$$

$$\therefore a_{20} = 2 \times 20 + 1 = 41$$

정답_ ④

844

제품 P_n 을 한 개 만드는 데 걸리는 시간을 a_n 이라고 하면

$$a_1 = 1$$

이때 제품 P_{2n} 을 한 개 만드는 데 걸리는 시간은 제품 P_n 을 두 개 만드는 데 걸리는 시간과 연결하는 데 걸리는 시간 $2n$ 의 합이므로

$$a_{2n} = 2a_n + 2n$$

위의 식의 n 에 1, 2, 4, 8을 차례대로 대입하면

$$a_2 = 2a_1 + 2 \times 1 = 2 \times 1 + 2 = 4$$

$$a_4 = 2a_2 + 2 \times 2 = 2 \times 4 + 4 = 12$$

$$a_8 = 2a_4 + 2 \times 4 = 2 \times 12 + 8 = 32$$

$$a_{16} = 2a_8 + 2 \times 8 = 2 \times 32 + 16 = 80$$

따라서 제품 P_{16} 을 한 개 만드는 데 걸리는 시간은 80시간이다.

정답_ ③

845

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = \frac{(-1)^0 \times {}_1C_1}{1} = 1, (\text{우변}) = \frac{1}{1} = 1$$

이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1} {}_mC_k}{k} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$n=m+1$ 일 때

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^{k-1} {}_{m+1}C_k}{k} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1} {}_mC_k}{k} + \frac{(-1)^m {}_{m+1}C_{m+1}}{m+1} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1} ({}_mC_k + {}_mC_{k-1})}{k} + \frac{(-1)^m {}_{m+1}C_{m+1}}{m+1} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1} {}_mC_k}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1} {}_mC_{k-1}}{k} + \frac{(-1)^m {}_{m+1}C_{m+1}}{m+1} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1} {}_mC_k}{k} + \sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^{k-1} {}_mC_{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{m+1} \left\{ \frac{(-1)^{k-1}}{k} \times \frac{({}_{(k)}m!}{(m-k+1)!(k-1)!} \right\} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{m+1} \left\{ \frac{(-1)^{k-1}}{({}_{(k)}m+1)} \times \frac{(m+1)!}{(m-k+1)!k!} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} {}_{m+1}C_k \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \frac{1}{m+1} \left\{ \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{k-1} {}_{m+1}C_k - (-1)^{-1} {}_{m+1}C_0 \right\} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \frac{1}{m+1} \left(\because \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{k-1} {}_{m+1}C_k = 0 \right) \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

따라서 $n=m+1$ 일 때에도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 (*)이 성립한다.

$$\therefore ({}_{(7)}\frac{(-1)^m}{m+1}, ({}_{(4)}\frac{1}{2}, ({}_{(4)}\frac{m+1}{2} + 1$$

따라서 $f(m) = \frac{(-1)^m}{m+1}$, $g(m) = m!$, $h(m) = m+1$ 이므로

$$\frac{g(3)+h(3)}{f(4)} = \frac{3!+4}{\frac{1}{5}} = 50$$

정답_ ③

참고 조합의 수

- (1) ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0 \leq r \leq n$)
- (2) ${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$ (단, $1 \leq r < n$)
- (3) ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \dots + (-1)^n {}_nC_n = 0$

846

(i) $n=2$ 일 때

$$(\text{좌변}) = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12},$$

$$(\text{우변}) = \frac{2}{2} + 1 = 2$$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=m$ ($m \geq 2$)일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} > \frac{m}{2} + 1$$

위의 식의 양변에 $\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k}$ 을 더하면

$$\sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} > \frac{m}{2} + 1 + \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{({}_{(7)}2^{m+1})} \frac{1}{k} > \frac{m}{2} + 1 + \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k}$$

이때

$$\begin{aligned} \sum_{k=2^m+1}^{({}_{(7)}2^{m+1})} \frac{1}{k} &= \frac{1}{2^m+1} + \frac{1}{2^m+2} + \frac{1}{2^m+3} + \dots + \frac{1}{({}_{(7)}2^{m+1})} \\ &= \frac{1}{2^m+1} + \frac{1}{(2^m+1)+1} + \frac{1}{(2^m+1)+2} \\ &\quad + \dots + \frac{1}{2^{m+1}} \\ &> \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} + \dots + \frac{1}{2^{m+1}} \\ &= \frac{2^m}{2^{m+1}} = \frac{({}_{(4)}1}{2} \end{aligned}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{({}_{(7)}2^{m+1})} \frac{1}{k} > \frac{m}{2} + 1 + \frac{({}_{(4)}1)}{2} = \frac{({}_{(4)}m+1)}{2} + 1$$

즉, $n=m+1$ 일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 2 이상인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

$$\therefore ({}_{(7)}2^{m+1}, ({}_{(4)}\frac{1}{2}, ({}_{(4)}\frac{m+1}{2} + 1$$

따라서 $f(m) = 2^{m+1}$, $g(m) = \frac{m+1}{2} + 1$, $p = \frac{1}{2}$ 이므로

$$p \times f(1) \times g(1) = \frac{1}{2} \times 2^2 \times 2 = 4$$

정답_ ②