풍산자 필 · 수 · 유 · 형

정답과 풀이

공통 수학1

I 다항식

01 다항식의 연산

001

$A-2B=2x^2+5x-1-2(x^2-3x+2)$

$=2x^2+5x-1-2x^2+6x-4$

$=11x-5$

정답_ $11x-5$

002

$2A-3X=-B$에서 $-3X=-2A-B$

$\therefore X=\frac{1}{3}(2A+B)$

$=\frac{1}{3}\{2(x^2-2x+7)+(6x^3+x^2+4x-8)\}$

$=\frac{1}{3}(6x^3+3x^2+6)$

$=2x^3+x^2+2$

정답_ ⑤

003

$2(3A+B-C)-(5A+B)$

$=6A+2B-2C-5A-B=A+B-2C$

$=(x^2-2xy+5y^2)+(2x^2-y^2)-2(-4x^2+xy+y^2)$

$=11x^2-4xy+2y^2$

따라서 $a=11$, $b=-4$, $c=2$이므로

$a+b+c=11+(-4)+2=9$

정답_ ⑤

004

$A-B=x^2-3x+2$ …… ㉠

$3A-4B=4x^2-5x+2$ …… ㉡

㉠$\times 4-$㉡을 하면

$$\begin{array}{rl} & 4A-4B=4x^2-12x+8 \\ -) & 3A-4B=4x^2-5x+2 \\ \hline & A\quad=\quad-7x+6 \end{array}$$

$A=-7x+6$을 ㉠에 대입하면

$-7x+6-B=x^2-3x+2$

$\therefore B=-x^2-4x+4$

$\therefore 2A-B=2(-7x+6)-(-x^2-4x+4)$

$=-14x+12+x^2+4x-4$

$=x^2-10x+8$

정답_ ③

005

$C=(x^3+x^2)+P(x)+(x^2+1)=P(x)+x^3+2x^2+1$,

$D=-2x^2+(2x+1)+(x^3+x^2)=x^3-x^2+2x+1$이므로

$P(x)+x^3+2x^2+1=x^3-x^2+2x+1$

$\therefore P(x)=-3x^2+2x$

또, $B=Q(x)+(x^3-3x^2)+(x^2+1)=Q(x)+x^3-2x^2+1$이므로

$Q(x)+x^3-2x^2+1=x^3-x^2+2x+1$

$\therefore Q(x)=x^2+2x$

$\therefore P(x)+Q(x)=(-3x^2+2x)+(x^2+2x)$

$=-2x^2+4x$

정답_ ②

다른 풀이

$-2x^2$이 포함된 두 변에서

$(x^3+1)+Q(x)=(2x+1)+(x^3+x^2)$

$\therefore Q(x)=x^2+2x$

x^3+x^2이 포함된 두 변에서

$-2x^2+(2x+1)=P(x)+(x^2+1)$

$\therefore P(x)=-3x^2+2x$

$\therefore P(x)+Q(x)=(-3x^2+2x)+(x^2+2x)$

$=-2x^2+4x$

006

$(A\blacktriangle B)*B=(2A+B)*B$

$=(2A+B)-2B$

$=2A-B$

$=2(3x^2-x+2)-(x^2+5x)$

$=6x^2-2x+4-x^2-5x$

$=5x^2-7x+4$

정답_ ①

007

$(x^3-3x^2+2x-1)(5x^2+2x+1)$의 전개식에서 x^4항은

$x^3\times 2x-3x^2\times 5x^2=-13x^4$

따라서 x^4의 계수는 -13이다.

정답_ ④

008

$(x^2-5x+2)(3x^2+x+4a)$의 전개식에서 x^2항은

$x^2\times 4a-5x\times x+2\times 3x^2=(4a+1)x^2$

이때 x^2의 계수가 13이므로

$4a+1=13\qquad \therefore a=3$

정답_ ③

009

$(x+1)(x-3)(x+5)(x-6)=(x^2-2x-3)(x^2-x-30)$의 전개식에서 x^2항은

$x^2\times(-30)-2x\times(-x)-3\times x^2=-31x^2$

따라서 x^2의 계수는 -31이다.

정답_ ②

010

$A+B=5x^2+7xy-3y^2$ …… ㉠

$3A-B=3x^2+xy-5y^2$ ⋯⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$4A=8x^2+8xy-8y^2$

$\therefore A=2x^2+2xy-2y^2$

$A=2x^2+2xy-2y^2$을 ㉠에 대입하면

$(2x^2+2xy-2y^2)+B=5x^2+7xy-3y^2$

$\therefore B=3x^2+5xy-y^2$

$AB=(2x^2+2xy-2y^2)(3x^2+5xy-y^2)$의 전개식에서 x^2y^2항은

$2x^2\times(-y^2)+2xy\times 5xy-2y^2\times 3x^2=2x^2y^2$

따라서 x^2y^2의 계수는 2이다.

정답_ ③

011

$(1+x+2x^2+\cdots+10x^{10})^2$

$=(1+x+2x^2+\cdots+10x^{10})(1+x+2x^2+\cdots+10x^{10})$

의 전개식에서 x^2항은

$1\times 2x^2+x\times x+2x^2\times 1=5x^2$

따라서 x^2의 계수가 5이므로 $a=5$

또, x^3항은

$1\times 3x^3+x\times 2x^2+2x^2\times x+3x^3\times 1=10x^3$

따라서 x^3의 계수가 10이므로 $b=10$

$\therefore a-b=5-10=-5$

정답_ ①

012

① $(x+y-1)^2=x^2+y^2+2xy-2x-2y+1$

② $(3x+2)^3=27x^3+54x^2+36x+8$

④ $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=x^3-8y^3$

⑤ $(x^2-2xy+4y^2)(x^2+2xy+4y^2)=x^4+4x^2y^2+16y^4$

따라서 옳은 것은 ③이다.

정답_ ③

013

$(x+3)(x-3)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

$=\{(x+3)(x^2-3x+9)\}\{(x-3)(x^2+3x+9)\}$

$=(x^3+27)(x^3-27)$

$=x^6-729$

정답_ ④

014

$(a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2+(-a+b+c)^2$

$=(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)$

$\quad+(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca)$

$\quad+(a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca)$

$\quad+(a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca)$

$=4a^2+4b^2+4c^2$

$=4\times 1^2+4\times(\sqrt{2})^2+4\times(\sqrt{3})^2$

$=4+8+12=24$

정답_ ④

015

$(x-1)^3(x+1)^3(x^2+1)^3=\{(x-1)(x+1)(x^2+1)\}^3$

$=\{(x^2-1)(x^2+1)\}^3$

$=(x^4-1)^3=\{(\sqrt{a})^4-1\}^3$

$=(a^2-1)^3=a^6-3a^4+3a^2-1$

정답_ ①

016

$x^2+x=A$로 놓으면

$(x^2+x+1)(x^2+x+2)=(A+1)(A+2)$

$=A^2+3A+2$

$=(x^2+x)^2+3(x^2+x)+2$

$=x^4+2x^3+x^2+3x^2+3x+2$

$=x^4+2x^3+4x^2+3x+2$

정답_ $x^4+2x^3+4x^2+3x+2$

017

$2x-y=A$로 놓으면

$(2x-y+3z)(2x-y-3z)=(A+3z)(A-3z)$

$=A^2-9z^2=(2x-y)^2-9z^2$

$=4x^2-4xy+y^2-9z^2$

정답_ ①

018

$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)=(x-1)(x+3)(x-2)(x+4)$

$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)$

에서 $x^2+2x=A$로 놓으면

$(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)=(A-3)(A-8)$

$=A^2-11A+24$

$=(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24$

$=x^4+4x^3+4x^2-11x^2-22x+24$

$=x^4+4x^3-7x^2-22x+24$

따라서 $a=-7$, $b=-22$이므로

$a-b=-7-(-22)=15$

정답_ 15

019

$(5+3x)^3=A$, $(5-3x)^3=B$로 놓으면

$\{(5+3x)^3-(5-3x)^3\}^2-\{(5+3x)^3+(5-3x)^3\}^2$

$=(A-B)^2-(A+B)^2$

$=(A^2-2AB+B^2)-(A^2+2AB+B^2)$

$=-4AB=-4(5+3x)^3(5-3x)^3$

$=-4\{(5+3x)(5-3x)\}^3$

$=-4(25-9x^2)^3$

$=-4\{25-9\times(\sqrt{3})^2\}^3$

$=-4(25-27)^3$

$=-4\times(-8)=32$

정답_ ④

020

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$에서

$26=2^3+3xy\times2$

$\therefore xy=3$

정답_ ②

021

$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$

$=\frac{6^2-2\times4}{4}=7$

정답_ ④

022

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$7=3^2-2ab \qquad \therefore ab=1$

$\therefore a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2$

$=7^2-2\times1^2=47$

정답_ ⑤

023

$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=1^2+4\times2=9$이므로

$x+y=3$ ($\because x>0, y>0$)

$\therefore (x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$

$=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=3^3-3\times2\times3=9$

정답_ ⑤

024

$x\neq0$이므로 $x^2-4x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-4-\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\frac{1}{x}=4$

$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=4^3+3\times4=76$

정답_ ⑤

참고 $x=0$을 $x^2-4x-1=0$의 좌변에 대입하면 $-1\neq0$이므로 $x\neq0$이다.

025

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$에서

$7=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9$

$\therefore x+\frac{1}{x}=3$ ($\because x>0$)

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=3^3-3\times3=18$

정답_ ①

026

$x\neq0$이므로 $x^2+3x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x+3+\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\frac{1}{x}=-3$

한편, $2x^3+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}=x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$ …… ㉠

이고, $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=(-3)^2-2=7$,

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=(-3)^3-3\times(-3)=-18$

이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$2x^3+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}=7+2\times(-18)=-29$

정답_ ②

027

(1) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=3^2-2\times(-1)=11$

(2) $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=3\times\{11-(-1)\}+3\times(-3)=27$

정답_ (1) 11 (2) 27

028

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$3=1^2-2(ab+bc+ca) \qquad \therefore ab+bc+ca=-1$

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$에서

$1=1\times\{3-(-1)\}+3abc$

$3abc=-3 \qquad \therefore abc=-1$

정답_ ①

029

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2}$

$=\frac{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)}{(abc)^2}$ …… ㉠

이때 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$7=1^2-2(ab+bc+ca) \qquad \therefore ab+bc+ca=-3$

이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{(-3)^2-2\times1\times1}{1^2}=7$

정답_ ④

030

$99^3+3\times99^2+3\times99+1=(99+1)^3=100^3=10^6$

정답_ ③

031

$(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)=(3-2)(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)$

$=(3^2-2^2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)$

$=(3^4-2^4)(3^4+2^4)=3^8-2^8$

정답_ ④

032

$2023=a$로 놓으면

$$\frac{2022\times(2023^2+2024)}{2024\times2023+1}=\frac{(a-1)\times\{a^2+(a+1)\}}{(a+1)\times a+1}$$
$$=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}$$
$$=a-1$$
$$=2023-1=2022$$

정답_ ③

033

$1000=X$로 놓으면

$$1001\times(1000^2-999)=(X+1)\{X^2-(X-1)\}$$
$$=(X+1)(X^2-X+1)$$
$$=X^3+1$$
$$=1000^3+1=10^9+1$$

$\therefore\ a=9,\ b=1$

정답_ ④

034

$781=a,\ \sqrt{785}=b$로 놓으면

$$\frac{(781-\sqrt{785})^3+(781+\sqrt{785})^3}{781}$$
$$=\frac{(a-b)^3+(a+b)^3}{a}$$
$$=\frac{(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)+(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)}{a}$$
$$=\frac{2a^3+6ab^2}{a}=2a^2+6b^2$$
$$=2\times781^2+6\times(\sqrt{785})^2$$
$$=2\times781^2+6\times785$$

2×781^2의 일의 자리의 숫자는 2, 6×785의 일의 자리의 숫자는 0이므로 구하는 일의 자리의 숫자는

$2+0=2$

정답_ 2

035

$$\begin{array}{r@{}l}
 & \ 2x+1 \\
x^2+1 & \overline{)\,2x^3+x^2+3x} \\
 & \ \underline{2x^3+2x} \\
 & \ x^2+x \\
 & \ \underline{x^2+1} \\
 & \ x-1
\end{array}$$

$\therefore$ 몫: $2x+1$, 나머지: $x-1$

정답_ ①

036

$x^3+x^2-5x+2=A(x-1)-2x+1$에서

$A(x-1)=x^3+x^2-3x+1$

$$\begin{array}{r@{}l}
 & \ x^2+2x-1 \\
x-1 & \overline{)\,x^3+x^2-3x+1} \\
 & \ \underline{x^3-x^2} \\
 & \ 2x^2-3x \\
 & \ \underline{2x^2-2x} \\
 & \ -x+1 \\
 & \ \underline{-x+1} \\
 & \ 0
\end{array}$$

$\therefore\ A=(x^3+x^2-3x+1)\div(x-1)$
$\quad=x^2+2x-1$

정답_ x^2+2x-1

037

$$\begin{array}{r@{}l}
 & \ 3x-7 \\
x^2+3x-2 & \overline{)\,3x^3+2x^2-x+5} \\
 & \ \underline{3x^3+9x^2-6x} \\
 & \ -7x^2+5x+5 \\
 & \ \underline{-7x^2-21x+14} \\
 & \ 26x-9
\end{array}$$

따라서 $Q(x)=3x-7,\ R(x)=26x-9$이므로

$Q(1)+R(0)=-4+(-9)=-13$

정답_ ②

038

$$\begin{array}{r@{}l}
 & \ 3x+1 \\
x^2-x+b & \overline{)\,3x^3-2x^2+5x+a} \\
 & \ \underline{3x^3-3x^2+3bx} \\
 & \ x^2+(5-3b)x+a \\
 & \ \underline{x^2-x+b} \\
 & \ (6-3b)x+a-b
\end{array}$$

따라서 나머지는 $(6-3b)x+a-b$이므로

$(6-3b)x+a-b=9x+6$

$6-3b=9,\ a-b=6$

$\therefore\ a=5,\ b=-1$

$\therefore\ a+b=4$

정답_ ⑤

039

$$\begin{array}{r@{}l}
 & \ x+a \\
x^2-1 & \overline{)\,x^3+ax^2-x-1} \\
 & \ \underline{x^3-x} \\
 & \ ax^2-1 \\
 & \ \underline{ax^2-a} \\
 & \ -1+a
\end{array}$$

따라서 $Q(x)=x+a,\ R=-1+a$이므로

$Q(a)=R$에서 $a+a=-1+a$

$\therefore\ a=-1$

정답_ ②

040

$$\begin{aligned} f(x)&=(x^3-x^2+5)(x^2+2)+3x^2-4x+1 \\ &=(x^3-x^2+5)(x^2+2)+3(x^2+2)-4x-5 \\ &=(x^2+2)(x^3-x^2+8)-4x-5 \end{aligned}$$

이므로 $f(x)$를 x^2+2로 나누었을 때의 나머지는 $-4x-5$이다.

정답_ ③

다른 풀이

$$\begin{aligned} f(x)&=(x^3-x^2+5)(x^2+2)+3x^2-4x+1 \\ &=x^5-x^4+2x^3+6x^2-4x+11 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{array}{r} x^3-x^2+8 \\ x^2+2\,\overline{)\,x^5-x^4+2x^3+6x^2-4x+11} \\ \underline{x^5+2x^3} \\ -x^4+6x^2 \\ \underline{-x^4-2x^2} \\ 8x^2-4x+11 \\ \underline{8x^2+16} \\ -4x-5 \end{array}$$

따라서 구하는 나머지는 $-4x-5$이다.

041

$$f(x)=(2x+1)Q(x)+R=\left(x+\frac{1}{2}\right)\times 2Q(x)+R$$

이므로 $f(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2Q(x)$, 나머지는 R이다.

정답_ 몫: $2Q(x)$, 나머지: R

042

$f(x)=\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R$이므로

$$\begin{aligned} xf(x)&=x\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+Rx \\ &=\frac{x}{3}(3x-2)Q(x)+\frac{R}{3}(3x-2)+\frac{2}{3}R \\ &=(3x-2)\left\{\frac{x}{3}Q(x)+\frac{R}{3}\right\}+\frac{2}{3}R \end{aligned}$$

따라서 $xf(x)$를 $3x-2$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{x}{3}Q(x)+\frac{R}{3}$, 나머지는 $\frac{2}{3}R$이다.

정답_ ②

043

$$\begin{array}{r} 3x^2+x \\ x-1\,\overline{)\,3x^3-2x^2-x} \\ \underline{3x^3-3x^2} \\ x^2-x \\ \underline{x^2-x} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore$ (세로의 길이)$=(3x^3-2x^2-x)\div(x-1)=3x^2+x$

정답_ $3x^2+x$

044

정육면체의 부피는

$(2x-3)^3=8x^3-36x^2+54x-27$

따라서 $a=-36$, $b=54$이므로

$a-b=-36-54=-90$

정답_ ①

045

직육면체의 부피는

$$\begin{aligned} (a^2+ab+b^2)(a-b)(a^3+b^3)&=(a^3-b^3)(a^3+b^3) \\ &=a^6-b^6 \end{aligned}$$

정답_ ①

046

직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 26이므로

$2(a+b)=26 \qquad \therefore a+b=13$

직사각형 ABCD의 넓이가 40이므로 $ab=40$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{BD}^2&=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab \\ &=13^2-2\times 40=89 \end{aligned}$$

정답_ 89

047

직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라고 하면 직육면체의 겉넓이가 62이므로

$2(ab+bc+ca)=62 \qquad \therefore ab+bc+ca=31$

$\overline{BD}^2+\overline{BG}^2+\overline{DG}^2=76$이므로

$(a^2+b^2)+(a^2+c^2)+(b^2+c^2)=76$

$\therefore a^2+b^2+c^2=38$

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)$이고

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2&=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \\ &=38+2\times 31=100 \end{aligned}$$

에서 $a+b+c=10$ ($\because a>0$, $b>0$, $c>0$)

$\therefore 4(a+b+c)=4\times 10=40$

정답_ ③

048

$A+B=3x^2+x-2$ …… ㉠

$B+C=-x^2+5x+1$ …… ㉡

$C+A=2x^2-4x-1$ …… ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$2A+2B+2C=4x^2+2x-2$ ❶

$\therefore A+B+C=2x^2+x-1$

따라서 $f(x)=2x^2+x-1$이므로 ❷

$f(1)=2+1-1=2$ ❸

정답_ 2

채점 기준	비율
❶ $2A+2B+2C$ 구하기	60 %
❷ $f(x)$ 구하기	20 %
❸ $f(1)$의 값 구하기	20 %

049

$(x+2)^2(2x-1)^3=(x^2+4x+4)(8x^3-12x^2+6x-1)$

의 전개식에서 x^2항은

$x^2\times(-1)+4x\times 6x+4\times(-12x^2)=-25x^2$

따라서 x^2의 계수가 -25이므로

$a=-25$ ❶

또, x^3항은

$x^2\times 6x+4x\times(-12x^2)+4\times 8x^3=-10x^3$

따라서 x^3의 계수가 -10이므로

$b=-10$ ❷

$\therefore a+b=-25+(-10)=-35$ ❸

정답_ -35

채점 기준	비율
❶ a의 값 구하기	40 %
❷ b의 값 구하기	40 %
❸ $a+b$의 값 구하기	20 %

050

$(x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^3+1)$

$=(x^3+1)(x^6-x^3+1)$

$=x^9+1$ ❶

$=24+1=25$ ❷

정답_ 25

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 간단히 하기	80 %
❷ 주어진 식의 값 구하기	20 %

051

$a+b=x$로 놓으면 $(a+b+1)\{(a+b)^2-a-b+1\}=28$에서

$(x+1)(x^2-x+1)=28$, $x^3+1=28$

$x^3=27$ $\quad\therefore x=3$ ($\because$ x는 실수)

따라서 $a+b=3$이므로 ❶

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ ❷

$\quad=3^2-2\times(-4)=17$ ❸

정답_ 17

채점 기준	비율
❶ $a+b$의 값 구하기	50 %
❷ a^2+b^2을 $a+b$와 ab에 대한 식으로 변형하기	30 %
❸ a^2+b^2의 값 구하기	20 %

052

$x^2+2x-1=0$이므로 x^3-5x^2+3x+2의 값은 이 식을 x^2+2x-1로 나누었을 때의 나머지의 값과 같다.

즉, x^3-5x^2+3x+2를 x^2+2x-1로 나누었을 때의 나머지는 $ax-5$이다. ❶

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-7 \\
x^2+2x-1 & x^3-5x^2+3x+2 \\
 & x^3+2x^2-x \\
\hline
 & -7x^2+4x+2 \\
 & -7x^2-14x+7 \\
\hline
 & 18x-5
\end{array}
$$

❷

$\therefore a=18$ ❸

정답_ 18

채점 기준	비율
❶ 주어진 삼차식을 x^2+2x-1로 나누었을 때의 나머지가 $ax-5$임을 알기	40 %
❷ 주어진 삼차식을 x^2+2x-1로 나누기	40 %
❸ a의 값 구하기	20 %

053

직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라고 하면 직육면체의 겉넓이가 22이므로

$2ab+2bc+2ca=22$

$\therefore ab+bc+ca=11$ ❶

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 24이므로

$4a+4b+4c=24$

$\therefore a+b+c=6$ ❷

따라서 직육면체의 대각선의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}$

$\quad=\sqrt{6^2-2\times 11}=\sqrt{14}$ ❸

정답_ $\sqrt{14}$

채점 기준	비율
❶ 직육면체의 겉넓이가 22임을 이용하여 식 세우기	30 %
❷ 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 24임을 이용하여 식 세우기	30 %
❸ 대각선의 길이 구하기	40 %

054

$A-3B=3x^2+2-3(x^2+3x-5)=-9x+17$

$2B+C=2(x^2+3x-5)+4x^2-5x=6x^2+x-10$

$C-A=4x^2-5x-(3x^2+2)=x^2-5x-2$

이므로

$(A-3B)(2B+C)(C-A)$

$=(-9x+17)(6x^2+x-10)(x^2-5x-2)$

이때 $(A-3B)(2B+C)(C-A)=P(x)$라고 하면 다항식 $P(x)$의 전개식이 $a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$이므로

$a_0+a_1+\cdots+a_5$의 값은 $P(1)$의 값과 같다.

$\therefore a_0+a_1+\cdots+a_5=P(1)$

$\quad=(-9+17)(6+1-10)(1-5-2)$

$\quad=8\times(-3)\times(-6)=144$

정답_ ④

055

조건 (가)에 의하여 $x-5$, $y-5$, $4z-5$ 중 적어도 하나는 0이므로

$(x-5)(y-5)(4z-5)=0$

즉, $(-5+x)(-5+y)(-5+4z)=0$이므로

$(-5)^3+(x+y+4z)\times(-5)^2+(xy+4yz+4zx)\times(-5)$

$+4xyz=0$

$-125+25(x+y+4z)-5(xy+4yz+4zx)+4xyz=0$

조건 (나)에 의하여 $xy+4yz+4zx=5(x+y+4z)$이므로

$-125+25(x+y+4z)-5\times5(x+y+4z)+4xyz=0$

$-125+4xyz=0 \qquad \therefore xyz=\frac{125}{4}$

$\therefore 8xyz=8\times\frac{125}{4}=250$

정답_ ④

056

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$3=2^2-2xy \qquad \therefore xy=\frac{1}{2}$

한편, $(x^3+y^3)(x^4+y^4)=x^7+x^3y^4+x^4y^3+y^7$이고

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=2^3-3\times\frac{1}{2}\times2=5$,

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=3^2-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{17}{2}$

이므로

$x^7+y^7+x^4y^3+x^3y^4=(x^3+y^3)(x^4+y^4)$

$=5\times\frac{17}{2}=\frac{85}{2}$

정답_ ③

057

$x-\frac{1}{y}=3+\sqrt{5}$ …… ㉠

$\frac{1}{x}-y=3-\sqrt{5}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$x-y+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=6$

$\therefore x-y-\frac{x-y}{xy}=6$ …… ㉢

㉠×㉡을 하면

$\left(x-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}-y\right)=4$, $1-xy-\frac{1}{xy}+1=4$

$\therefore xy+\frac{1}{xy}+2=0$

이때 $xy=t$로 놓으면

$t+\frac{1}{t}+2=0$, $t^2+2t+1=0$

$(t+1)^2=0 \qquad \therefore t=-1$

즉, $xy=-1$이므로 이것을 ㉢에 대입하면

$x-y+(x-y)=6 \qquad \therefore x-y=3$

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=3^3+3\times(-1)\times3=18$

정답_ ②

058

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$에서

$26=2^3+3xy\times2$, $6xy=18 \qquad \therefore xy=3$

한편, $x^5-y^5=(x^2+y^2)(x^3-y^3)-x^2y^2(x-y)$ …… ㉠

이고

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=2^2+2\times3=10$

이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$x^5-y^5=10\times26-3^2\times2=242$

정답_ 242

059

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$에서

$\frac{3}{2}=\frac{ab+bc+ca}{4} \qquad \therefore ab+bc+ca=6$

$a+b+c=A$로 놓으면 $(a+b)(b+c)(c+a)=50$에서

$(A-c)(A-a)(A-b)=50$

$A^3-(a+b+c)A^2+(ab+bc+ca)A-abc=50$

이때 $A=a+b+c$이므로

$(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc=50$

$6(a+b+c)-4=50 \qquad \therefore a+b+c=9$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=9^2-2\times6=69$

정답_ ③

060

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$에서

$9=1^2-2(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=-4$

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$에서

$1-3xyz=1\times(9+4)$, $-3xyz=12$

$\therefore xyz=-4$

이때

$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2$

$=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$

$=(-4)^2-2\times(-4)\times1=24$

$x^4+y^4+z^4=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$

$=9^2-2\times24=33$

이므로

$\frac{x^4+y^4+z^4}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}=\frac{33}{24}=\frac{11}{8}$

정답_ ③

061

$x^2+2x+3=(x^2+2)+(2x+1)$이므로

$x^2+2=A$, $2x+1=B$로 놓으면

$(x^2+2x+3)^3$

$=(A+B)^3$

$=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

$=A(A^2+3AB+3B^2)+B^3$

$=(x^2+2)\{(x^2+2)^2+3(x^2+2)(2x+1)+3(2x+1)^2\}$

$+(2x+1)^3$

따라서 $(x^2+2x+3)^3$을 x^2+2로 나누었을 때의 나머지는 $(2x+1)^3$, 즉 $8x^3+12x^2+6x+1$을 x^2+2로 나누었을 때의 나머지와 같다.

$$\begin{array}{r@{}l}
 & 8x+12 \\ \cline{2-2}
x^2+2 & \big)\,8x^3+12x^2+6x+1 \\
 & 8x^3+16x \\ \cline{2-2}
 & 12x^2-10x+1 \\
 & 12x^2+24 \\ \cline{2-2}
 & -10x-23
\end{array}$$

따라서 $R(x)=-10x-23$이므로

$R(-3)=-10\times(-3)-23=7$

정답_ ⑤

062

$f(x)=(x+1)Q(x)+R$이므로 양변에 x^2+1을 곱하면

$$\begin{aligned}(x^2+1)f(x)&=(x^2+1)(x+1)Q(x)+(x^2+1)R\\&=(x^2+1)(x+1)Q(x)+\{(x+1)(x-1)+2\}R\\&=(x^2+1)(x+1)Q(x)+(x+1)(x-1)R+2R\\&=(x+1)\{(x^2+1)Q(x)+(x-1)R\}+2R\end{aligned}$$

따라서 $(x^2+1)f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 $(x^2+1)Q(x)+(x-1)R$, 나머지는 $2R$이다.

정답_ ⑤

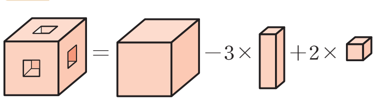
063

입체도형의 부피는

$$\begin{aligned}&(a+2b)^3-3a^2(a+2b)+2a^3\\&=a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3-3a^3-6a^2b+2a^3\\&=12ab^2+8b^3\end{aligned}$$

정답_ ④

참고



064

처음 직육면체의 부피는

$$\begin{aligned}(x+y)\times3y\times(x+2y)&=(x+y)(3xy+6y^2)\\&=3x^2y+6xy^2+3xy^2+6y^3\\&=3x^2y+9xy^2+6y^3\end{aligned}$$

따라서 18개의 작은 직육면체 중 부피가 x^2y인 것은 3개, 부피가 xy^2인 것은 9개, 부피가 y^3인 것은 6개이다.

이때 부피가 50인 직육면체가 9개이므로

$xy^2=50=2\times5^2=50\times1^2$

x, y는 서로소인 자연수이고 $x>y$이므로

$x=50$, $y=1$

$\therefore\ x+3y=50+3\times1=53$

정답_ ②

065

$\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$라고 하면

$a+b+c=9$

$\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA=13$에서

$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}ca=13$

$\therefore\ ab+bc+ca=26$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2&=a^2+b^2+c^2\\&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=9^2-2\times26=29\end{aligned}$$

정답_ 29

066

$\triangle ABC=\frac{4}{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times1=\frac{4}{3}$　　$\therefore\ \overline{AB}=\frac{8}{3}$

$\triangle AHC\backsim\triangle CHB$이므로

$\overline{AH}:\overline{CH}=\overline{CH}:\overline{BH}$, $\left(\frac{8}{3}-x\right):1=1:x$

$x\left(\frac{8}{3}-x\right)=1$, $3x^2-8x+3=0$

$\therefore\ x=\frac{4-\sqrt{7}}{3}\ (\because\ 0<x<1)$

한편, $3x^2-8x+3=0$이므로 $3x^3-5x^2+4x+7$을 $3x^2-8x+3$으로 나누면

$$\begin{array}{r@{}l}
 & x+1 \\ \cline{2-2}
3x^2-8x+3 & \big)\,3x^3-5x^2+4x+7 \\
 & 3x^3-8x^2+3x \\ \cline{2-2}
 & 3x^2+x+7 \\
 & 3x^2-8x+3 \\ \cline{2-2}
 & 9x+4
\end{array}$$

$$\begin{aligned}3x^3-5x^2+4x+7&=(3x^2-8x+3)(x+1)+9x+4\\&=9x+4=9\times\frac{4-\sqrt{7}}{3}+4\\&=16-3\sqrt{7}\end{aligned}$$

정답_ ④

참고　$\triangle ABC\backsim\triangle ACH\backsim\triangle CBH$ (AA 닮음)

02 나머지 정리

067

ㄱ. (좌변)$=4x-4\neq$(우변)이므로 항등식이 아니다.

ㄴ. $x^2-2x-3=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$

따라서 $x=-1$ 또는 $x=3$일 때에만 등식이 성립하므로 항등식이 아니다.

ㄷ. (좌변)$=x^2-6x+5\neq$(우변)이므로 항등식이 아니다.

ㄹ. (좌변)$=x^2+6x+1=$(우변)이므로 항등식이다.

따라서 항등식인 것은 ㄹ이다.

정답_ ②

068

① (우변)$=-5x-4\neq$(좌변)이므로 항등식이 아니다.

② (좌변)$=x^2-4x+4\neq$(우변)이므로 항등식이 아니다.

③ (좌변)$=2x-3$, (우변)$=2x-3$, 즉 (좌변)$=$(우변)이므로 항등식이다.

④ (좌변)$=x^2-2x+1$, (우변)$=x^2-2x+1$, 즉 (좌변)$=$(우변)이므로 항등식이다.

⑤ (좌변)$=16-x^2$, (우변)$=-x^2-2x+16$, 즉 (좌변)$\neq$(우변)이므로 항등식이 아니다.

따라서 항등식인 것은 ③, ④이다.

정답_ ③, ④

069

주어진 등식의 우변을 전개하여 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+4x+a=x^2+bx-2b$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$4=b$, $a=-2b$에서 $a=-8$, $b=4$

$\therefore a+b=-8+4=-4$

정답_ ②

070

주어진 등식의 우변을 전개하여 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$ax^3+bx^2+cx+d=x^3-3x+2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=1$, $b=0$, $c=-3$, $d=2$

$\therefore ad-bc=1\times2-0\times(-3)=2$

정답_ ③

071

주어진 등식의 좌변을 전개하여 x, y에 대하여 정리하면

$(a-2b+5)x+(3a+b)y=7x-8y$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a-2b+5=7$, $3a+b=-8$ $\quad\therefore a-2b=2$, $3a+b=-8$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=-2$

$\therefore ab=(-2)\times(-2)=4$

정답_ ①

072

주어진 등식의 좌변이 최고차항의 계수가 2인 삼차식이므로

$Q(x)=2x+c$ (c는 상수)로 놓으면

$2x^3+ax+b=(x^2-x-1)(2x+c)+3x-1$

$\qquad\qquad=2x^3+(c-2)x^2+(-c+1)x-c-1$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$0=c-2$, $a=-c+1$, $b=-c-1$ $\quad\therefore a=-1$, $b=-3$, $c=2$

$\therefore ab=(-1)\times(-3)=3$

정답_ ④

073

주어진 등식의 좌변을 k에 대하여 정리하면

$(x^2-y^2-9)k+2x-2y+6=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x^2-y^2-9=0$, $2x-2y+6=0$ $\quad\therefore x^2-y^2=9$, $x-y=-3$

이때 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$이므로

$9=-3(x+y)$ $\quad\therefore x+y=-3$

정답_ ①

074

주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$-5b=5$ $\quad\therefore b=-1$

$x=3$을 대입하면 $5a=10$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore a-b=2-(-1)=3$

정답_ ④

075

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$4=2c$ $\quad\therefore c=2$

$x=1$을 대입하면 $a+7=0$ $\quad\therefore a=-7$

$x=2$를 대입하면

$2a+16=2b$, $-14+16=2b$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore a+b+c=-7+1+2=-4$

정답_ ③

076

주어진 등식의 좌변의 x^3의 계수는 1이고, 우변의 x^3의 계수는 c이므로 $c=1$

$\therefore x^3-4x^2+ax+b=(x-2)(x+1)(x-3)$

이 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-a+b-5=0$ $\quad\therefore a-b=-5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x=2$를 대입하면

$2a+b-8=0$ $\quad\therefore 2a+b=8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=6$

$\therefore abc=1\times6\times1=6$

정답_ ②

077

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1-4+(a+b)-4a+1$ $\quad\therefore 3a-b=-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x=2$를 대입하면

$1=16-32+4(a+b)-8a+1 \quad \therefore a-b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=5$

$\therefore ab=1\times5=5$

정답_ ⑤

078

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a-3=-1 \quad \therefore a=2$

$\therefore x^3-5x^2+2x+1=(x-1)Q(x)-1$

따라서 $Q(a)=Q(2)$이므로 이 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$-7=Q(2)-1 \quad \therefore Q(2)=-6$

정답_ ①

079

주어진 방정식이 $x=1$을 근으로 가지므로

$1-(m+2)-(m-3)a+b+1=0$

$\therefore -(a+1)m+3a+b=0$

이 등식이 m에 대한 항등식이므로

$a+1=0$, $3a+b=0 \quad \therefore a=-1$, $b=3$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+3^2=10$

정답_ ⑤

080

$x-y=1$에서 $y=x-1$

이것을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$x^2+ax+b(x-1)^2+x(x-1)+2=0$

$\therefore (b+2)x^2+(a-2b-1)x+b+2=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$b+2=0$, $a-2b-1=0 \quad \therefore a=-3$, $b=-2$

$\therefore ab=(-3)\times(-2)=6$

정답_ 6

081

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(k+a+b)^2-(k^2+2k+ac)=0$

$2(a+b-1)k+a^2+b^2+2ab-ac=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$a+b-1=0$, $a^2+b^2+2ab-ac=0$

$\therefore a+b=1$, $(a+b)^2-ac=0$

$a+b=1$을 $(a+b)^2-ac=0$에 대입하면

$1-ac=0 \quad \therefore ac=1$

한편, a, c는 음이 아닌 정수이므로 $a=1$, $c=1$

$a+b=1$에서 $1+b=1 \quad \therefore b=0$

$\therefore a+b+c=1+0+1=2$

정답_ ②

082

$x+y=1$ …… ㉠

$y-z=-1$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $x+z=2$

$y=1-x$, $z=2-x$를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$x^2+(1-x)^2-(2-x)^2+x(1-x)-(2-x)x=ax^2+bx+c$

$\therefore x^2+x-3=ax^2+bx+c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 $a=1$, $b=1$, $c=-3$

$\therefore abc=1\times1\times(-3)=-3$

정답_ -3

083

(1) 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$3^3=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6$

$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6=27$

(2) 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-3)^3=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_6$

$\therefore a_0-a_1+a_2-\cdots+a_6=-27$

(3) 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$(-1)^3=a_0 \quad \therefore a_0=-1$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6=(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6)-a_0$

$=27-(-1)=28$

(4) $(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+(a_6-a_5)$

$=-a_1+a_2-\cdots+a_6$

$=(a_0-a_1+a_2-\cdots+a_6)-a_0$

$=-27-(-1)=-26$

정답_ (1) 27 (2) -27 (3) 28 (4) -26

084

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$(-1)^5=a_0 \quad \therefore a_0=-1$

$x=1$을 대입하면 $k^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{10}=k^5-a_0=k^5-(-1)=k^5+1$

이때 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=-31$이므로

$k^5+1=-31$, $k^5=-32 \quad \therefore k=-2$ ($\because$ k는 실수)

정답_ ①

085

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$ …… ㉠

$x=-1$을 대입하면

$2^5=a_{10}-a_9+\cdots-a_1+a_0$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $-32=2a_9+2a_7+2a_5+2a_3+2a_1$

$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-16$

정답_ ④

086

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$3^4=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8$ …… ㉠

$x=-2$를 대입하면

$1^4=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8$ …… ㉡

㉠$+$㉡을 하면 $82=2a_0+2a_2+2a_4+2a_6+2a_8$

$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=41$

정답_ ⑤

087

x^3-2x^2+ax+b를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라고 하면

$$x^3-2x^2+ax+b=(x-1)^2(x+c)$$
$$=x^3+(c-2)x^2+(1-2c)x+c$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$-2=c-2,\ a=1-2c,\ b=c \qquad \therefore a=1,\ b=0,\ c=0$

$\therefore a-b=1-0=1$

정답_ ④

088

x^3+ax^2+b를 x^2-x-4로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라고 하면

$$x^3+ax^2+b=(x^2-x-4)(x+c)+5x+6$$
$$=x^3+(c-1)x^2+(1-c)x-4c+6$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c-1,\ 0=1-c,\ b=-4c+6 \qquad \therefore a=0,\ b=2,\ c=1$

$\therefore a+b=0+2=2$

정답_ ③

089

$2x^3+a$를 x^2-x+b로 나누었을 때의 몫을 $2x+c$ (c는 상수)라고 하면

$$2x^3+a=(x^2-x+b)(2x+c)$$
$$=2x^3+(c-2)x^2+(2b-c)x+bc$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$0=c-2,\ 0=2b-c,\ a=bc \qquad \therefore a=2,\ b=1,\ c=2$

$\therefore a^2+b^2=2^2+1^2=5$

정답_ ④

090

$x^5+ax^2+(a+1)x+2=(x-1)Q(x)+6$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+(a+1)+2=6 \qquad \therefore a=1$

$\therefore x^5+x^2+2x+2=(x-1)Q(x)+6$

이 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$32+4+4+2=Q(2)+6 \qquad \therefore Q(2)=36$

$\therefore a+Q(2)=1+36=37$

정답_ ③

091

$f(x)=x^3+3x+9$라고 하면 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-1)=-1-3+9=5$

정답_ ⑤

092

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로 $f(2)=4$

따라서 $(x+5)f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$(2+5)f(2)=7\times 4=28$

정답_ ④

093

$f(x)=(2x-1)(x+3)+5$이므로 $f(x)$를 $x+4$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-4)=(-9)\times(-1)+5=14$

정답_ ④

094

나머지 정리에 의하여 $f(-3)=3,\ g(-3)=-2$

따라서 $2f(x)+3g(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$2f(-3)+3g(-3)=2\times 3+3\times(-2)=0$

정답_ ①

095

나머지 정리에 의하여

$f(-2)+g(-2)=-6,\ 2f(-2)-g(-2)=9$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $f(-2)=1,\ g(-2)=-7$

따라서 $f(x)g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-2)g(-2)=1\times(-7)=-7$

정답_ ②

096

$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}$이므로

$\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}=(2x^2+2x-7)h(x) \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때

$f(x)+g(x)=(x^2+2x-3)+(-x^2+4)=2x+1,$

$f(x)-g(x)=(x^2+2x-3)-(-x^2+4)=2x^2+2x-7$

이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$(2x+1)(2x^2+2x-7)=(2x^2+2x-7)h(x)$

$\therefore h(x)=2x+1$

따라서 $h(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는

$h(5)=2\times 5+1=11$

정답_ ⑤

097

나머지 정리에 의하여 $f(1)=f(2)$이므로

$1-a-4+8=8-4a-8+8$

$3a=3 \qquad \therefore a=1$

정답_ 1

098

$f(x)=x^3+ax^2-2x+b$라고 하면 나머지 정리에 의하여

$f(-1)=-1+a+2+b=7 \qquad \therefore a+b=6 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f(-2)=-8+4a+4+b=a \qquad \therefore 3a+b=4 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=7$

따라서 $f(x)=x^3-x^2-2x+7$이므로 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(3)=27-9-6+7=19$

정답_ ④

099

나머지 정리에 의하여

$f(7)=a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d=1234$

이때 a, b, c, d는 한 자리 자연수이므로

$a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$

따라서 $f(x)=(x+3)^3+2(x+3)^2+3(x+3)+4$이므로 $f(x)$를 $x+4$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-4)=-1+2-3+4=2$

정답_ 2

100

$P(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라고 하자.

조건 (가)에서 $P(1)=1$이므로

$P(1)=1+a+b=1 \quad \therefore a+b=0$ …… ㉠

조건 (나)에서 $2P(2)=2$, 즉 $P(2)=1$이므로

$P(2)=4+2a+b=1 \quad \therefore 2a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=3$

따라서 $P(x)=x^2-3x+3$이므로

$P(4)=16-12+3=7$

정답_ ②

101

조건 (가)에서 $g(x)=x^2f(x)$를 조건 (나)에 대입하면

$x^2f(x)+(3x^2+4x)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$

$4x(x+1)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$

이 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=b$

$x=-1$을 대입하면

$0=-1+a-2+b \quad \therefore a=3$

따라서 $4x(x+1)f(x)=x^3+3x^2+2x=x(x+1)(x+2)$이므로

$f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

$\therefore g(x)=x^2f(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2$

따라서 $g(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$g(4)=16+8=24$

정답_ ⑤

102

나머지 정리에 의하여

$f(-2)=1$, $f(1)=7$

$f(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(x)=(x^2+x-2)Q(x)+ax+b$

$\quad =(x+2)(x-1)Q(x)+ax+b$

이 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$f(-2)=-2a+b=1 \quad \therefore 2a-b=-1$ …… ㉠

$x=1$을 대입하면

$f(1)=a+b=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=5$

따라서 구하는 나머지는 $2x+5$이다.

정답_ ④

103

나머지 정리에 의하여 $f(-1)=3$, $f(3)=1$

$(x^2+2x-1)f(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$(x^2+2x-1)f(x)=(x^2-2x-3)Q(x)+ax+b$

$\quad =(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$

이 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-2f(-1)=-a+b$, $-6=-a+b$

$\therefore a-b=6$ …… ㉠

$x=3$을 대입하면

$14f(3)=3a+b$, $14=3a+b$

$\therefore 3a+b=14$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=-1$

따라서 구하는 나머지는 $5x-1$이다.

정답_ ④

104

$f(x)$를 x^2-4x+3, x^2+5x+4로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라고 하면

$f(x)=(x^2-4x+3)Q_1(x)+5x-1$

$\quad =(x-1)(x-3)Q_1(x)+5x-1$ …… ㉠

$f(x)=(x^2+5x+4)Q_2(x)+x+7$

$\quad =(x+1)(x+4)Q_2(x)+x+7$ …… ㉡

$f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$\quad =(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$ …… ㉢

㉠, ㉡에서 $f(1)=4$, $f(-1)=6$

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=a+b=4$ …… ㉣

$x=-1$을 대입하면

$f(-1)=-a+b=6 \quad \therefore a-b=-6$ …… ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=5$

따라서 $R(x)=-x+5$이므로

$R(-2)=2+5=7$

정답_ 7

105

$\{f(x)\}^8=(x-1)^8$, $f(x^2)=x^2-1$이므로 $\{f(x)\}^8$을 $f(x^2)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$(x-1)^8=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$\quad =(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$

이 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-2)^8=-a+b \quad \therefore a-b=-256$ …… ㉠

$x=1$을 대입하면

$0=a+b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-128$, $b=128$

따라서 구하는 나머지는 $-128x+128$이다.

정답_ ④

106

$f(x)$를 $x(x+1)$, $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라고 하면

$f(x)=x(x+1)Q_1(x)-5x+1$ …… ㉠

$f(x)=(x-1)(x-2)Q_2(x)+5x-1$ …… ㉡

$f(x)$를 $x(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라고 하면

$f(x)=x(x+1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉢

㉠, ㉡에서 $f(0)=1$, $f(-1)=6$, $f(2)=9$이므로

㉢의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=c=1$

$x=-1$을 대입하면

$f(-1)=a-b+c$, $6=a-b+1$

$\therefore a-b=5$ …… ㉣

$x=2$를 대입하면

$f(2)=4a+2b+c$, $9=4a+2b+1$

$\therefore 2a+b=4$ …… ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$

따라서 구하는 나머지는 $3x^2-2x+1$이다.

정답_ $3x^2-2x+1$

107

$f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라고 하면

$f(x)=(x+1)^2Q_1(x)+x-5$ …… ㉠

$f(x)$를 $(x+1)(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라고 하면

$f(x)=(x+1)(x-2)^2Q(x)+ax^2+bx+c$

이때 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+4$이므로

$f(x)=(x+1)(x-2)^2Q(x)+a(x-2)^2+x+4$ …… ㉡

㉠에서

$f(-1)=-1-5=-6$

이므로 ㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=9a+3$, $-6=9a+3$ $\quad\therefore a=-1$

따라서 구하는 나머지는

$-(x-2)^2+x+4=-x^2+5x$

정답_ $-x^2+5x$

108

$x^{12}-x^9+3x^5-1$을 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라고 하면

$x^{12}-x^9+3x^5-1$

$=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c$

$=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $-1=c$

$x=-1$을 대입하면

$1-(-1)-3-1=a-b+c$, $-2=a-b-1$

$\therefore a-b=-1$ …… ㉡

$x=1$을 대입하면

$1-1+3-1=a+b+c$, $2=a+b-1$

$\therefore a+b=3$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

따라서 $R(x)=x^2+2x-1$이므로 $R(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$R(-3)=9-6-1=2$

정답_ 2

109

$f(x)$를 $(x-2)(x^2+x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라고 하면

$f(x)=(x-2)(x^2+x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$

이때 $f(x)$를 x^2+x-1로 나누었을 때의 나머지가 $x-6$이므로

$f(x)=(x-2)(x^2+x-1)Q(x)+a(x^2+x-1)+x-6$ …… ㉠

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 11이므로

$f(2)=11$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=5a-4$, $11=5a-4$ $\quad\therefore a=3$

따라서 $R(x)=3(x^2+x-1)+x-6=3x^2+4x-9$이므로

$R(1)=3+4-9=-2$

정답_ ①

110

$f(x)$를 $(x+2)(x-6)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$f(x)=(x+2)(x-6)Q(x)+5x-1$

이 등식의 양변에 $x=6$을 대입하면 $f(6)=29$

따라서 $f(3x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(3\times2)=f(6)=29$

정답_ ②

111

$f(x)$를 x^2-9로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$f(x)=(x^2-9)Q(x)+x+6$

이 등식의 양변에 $x=3$을 대입하면 $f(3)=9$

따라서 $(x+2)f(x-1)$을 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$(4+2)f(4-1)=6f(3)=6\times9=54$

정답_ ③

112

나머지 정리에 의하여

$f(-3)-g(-3)=4$, $3f(-3)-g(-3)=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $f(-3)=1$, $g(-3)=-3$

따라서 $f(2x-5)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2\times1-5)=f(-3)=1$

정답_ 1

113

$f(x)=(x+2)(x-5)Q(x)+2x-1$ …… ㉠

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 -21이므로

$f(2)=-21$

$Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(2)$이므로 ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면
$f(2)=-12Q(2)+3,\ -21=-12Q(2)+3$
$\therefore\ Q(2)=2$

정답_ ②

114

$x^{10}+x^9+x^2$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 R라고 하면
$x^{10}+x^9+x^2=(x+1)Q(x)+R$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$1-1+1=R \qquad \therefore\ R=1$
$xQ(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 $-2Q(-2)$이므로 ㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면
$1024-512+4=-Q(-2)+1 \qquad \therefore\ Q(-2)=-515$
따라서 구하는 나머지는
$-2Q(-2)=-2\times(-515)=1030$

정답_ 1030

115

$x^3-3x^2+ax+2=(x-2)Q(x)+6$
이 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면
$8-12+2a+2=6 \qquad \therefore\ a=4$
$\therefore\ x^3-3x^2+4x+2=(x-2)Q(x)+6$ …… ㉠
$Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 b이므로
$Q(-1)=b$
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$-1-3-4+2=-3Q(-1)+6 \qquad \therefore\ Q(-1)=4$
$\therefore\ b=4$
$\therefore\ a+b=4+4=8$

정답_ ④

116

$f(x)=(x+1)Q(x)+3$ …… ㉠
$Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 1이므로
$Q(1)=1$
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$f(-1)=3$ …… ㉡
$x=1$을 대입하면
$f(1)=2Q(1)+3=2\times1+3=5$ …… ㉢
$f(x)$를 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면
$f(x)=(x+1)(x-1)Q'(x)+ax+b$
이 등식의 양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면
$f(-1)=-a+b,\ f(1)=a+b$
㉡, ㉢에 의하여
$-a+b=3,\ a+b=5$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=1,\ b=4$
따라서 $R(x)=x+4$이므로
$R(-6)=-6+4=-2$

정답_ ②

다른 풀이

$f(x)=(x+1)Q(x)+3$ …… ㉠
$Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라고 하면
$Q(x)=(x-1)Q_1(x)+1$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$f(x)=(x+1)\{(x-1)Q_1(x)+1\}+3$
$\quad=(x+1)(x-1)Q_1(x)+x+4$
따라서 $f(x)$를 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 나머지가 $x+4$이므로
$R(x)=x+4$
$\therefore\ R(-6)=-6+4=-2$

117

(1) $(x-1)^7$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면 $(x-1)^7=xQ(x)+R$
이 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$(-1)^7=R \qquad \therefore\ R=-1$
(2) $(x-1)^7=xQ(x)-1$
이 등식의 양변에 $x=60$을 대입하면
$59^7=60Q(60)-1$
$\quad=60\{Q(60)-1\}+60-1$
$\quad=60\{Q(60)-1\}+59$
따라서 59^7을 60으로 나누었을 때의 나머지는 59이다.

정답_ (1) -1 (2) 59

주의 다항식의 나눗셈에서는 나머지가 음수일 수도 있지만, 자연수의 나눗셈에서는 나머지가 0 또는 자연수이어야 한다.

118

$(4x+2)^{10}=xQ(x)+R$의 양변에 $x=0$을 대입하면
$2^{10}=R \qquad \therefore\ R=\boxed{1024}$
$(4x+2)^{10}=xQ(x)+\boxed{1024}$의 양변에 $x=505$를 대입하면
$2022^{10}=505\times Q(505)+\boxed{1024}$
$\quad=505\times Q(505)+505\times2+14$
$\quad=505\times\{Q(505)+\boxed{2}\}+\boxed{14}$
따라서 $a=1024$, $b=2$, $c=14$이므로
$a+b+c=1024+2+14=1040$

정답_ ②

참고 $2022^{10}=505\times Q(505)+1024$에서 2022^{10}을 505로 나누었을 때의 나머지는 505보다 작아야 하므로 1024를 505로 나누었을 때의 나머지와 같다.

119

$x^{29}+x^{30}$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면
$x^{29}+x^{30}=(x-1)Q(x)+R$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$1^{29}+1^{30}=R \qquad \therefore\ R=2$
$x=7$을 대입하면 $7^{29}+7^{30}=6Q(7)+2$
따라서 $7^{29}+7^{30}$을 6으로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

정답_ ②

120

$3^{100}+3^{101}+3^{102}=(3^2)^{50}+(3^2)^{50}\times3+(3^2)^{50}\times3^2$

$=(1+3+3^2)\times(3^2)^{50}=13\times9^{50}$

$13x^{50}$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면

$13x^{50}=(x-1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$13\times1^{50}=R \qquad \therefore R=13$

$x=9$를 대입하면

$13\times9^{50}=8Q(9)+13=8\{Q(9)+1\}+5$

따라서 $3^{100}+3^{101}+3^{102}$을 8로 나누었을 때의 나머지는 5이다.

정답_ ④

121

$f(x)=4x^3-x^2+ax-6$이 $x-2$로 나누어떨어지므로

$f(2)=0$

즉, $32-4+2a-6=0$이므로 $a=-11$

정답_ ⑤

122

$f(x)=ax^3-x^2+bx-2$가 $x+1$, $x-2$로 각각 나누어떨어지므로

$f(-1)=0$에서 $-a-1-b-2=0$

$\therefore a+b=-3$ …… ㉠

$f(2)=0$에서 $8a-4+2b-2=0$

$\therefore 4a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-5$

$\therefore f(x)=2x^3-x^2-5x-2$

따라서 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(3)=54-9-15-2=28$

정답_ ③

123

나머지 정리에 의하여 $f(1)=4$이므로

$1+a+b+6=4 \qquad \therefore a+b=-3$ …… ㉠

$f(x+2)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로

$f(1+2)=f(3)=0$

즉, $27+9a+3b+6=0 \qquad \therefore 3a+b=-11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=1$

$\therefore b-a=1-(-4)=5$

정답_ ②

124

$f(1)=3$, $f(2)=6$, $f(3)=9$에서

$f(1)-3=0$, $f(2)-6=0$, $f(3)-9=0$

이므로 $f(x)-3x$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 각각 나누어떨어진다.

이때 $f(x)$는 x^3의 계수가 1인 삼차식이므로

$f(x)-3x=(x-1)(x-2)(x-3)$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+3x$

따라서 $f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$f(4)=3\times2\times1+12=18$

정답_ ③

125

$P(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수), $Q(x)=x+c$ (c는 상수)라고 하자.

조건 ㈎에서 $P(x+1)-Q(x+1)$이 $x+1$로 나누어떨어지므로

$P(-1+1)-Q(-1+1)=P(0)-Q(0)=0$

즉, $b-c=0$이므로 $b=c$

한편,

$P(x)-Q(x)=(x^2+ax+b)-(x+c)$

$=x^2+(a-1)x+b-c$

$=x^2+(a-1)x$

이므로 방정식 $x^2+(a-1)x=0$의 판별식을 D라고 하면 조건 ㈏에 의하여

$D=(a-1)^2=0 \qquad \therefore a=1$

$\therefore P(x)=x^2+x+b$

다항식 $P(x)+Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 12이므로

$P(2)+Q(2)=12$, $(4+2+b)+(2+b)=12 \qquad \therefore b=2$

따라서 $P(x)=x^2+x+2$이므로

$P(2)=4+2+2=8$

정답_ ②

126

$f(x)=x^3+ax^2-bx-3$이 x^2+4x+3, 즉 $(x+1)(x+3)$으로 나누어떨어지므로 $f(x)$는 $x+1$과 $x+3$으로 각각 나누어떨어진다.

$\therefore f(-1)=0$, $f(-3)=0$

$f(-1)=0$에서 $-1+a+b-3=0$

$\therefore a+b=4$ …… ㉠

$f(-3)=0$에서 $-27+9a+3b-3=0$

$\therefore 3a+b=10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$

$\therefore ab=3\times1=3$

정답_ 3

127

$f(x)=x^3+ax^2-x+b$가 x^2-2x-3, 즉 $(x+1)(x-3)$으로 나누어떨어지므로 $f(x)$는 $x+1$과 $x-3$으로 각각 나누어떨어진다.

$\therefore f(-1)=0$, $f(3)=0$

$f(-1)=0$에서 $-1+a+1+b=0$

$\therefore a+b=0$ …… ㉠

$f(3)=0$에서 $27+9a-3+b=0$

$\therefore 9a+b=-24$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=3$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2-x+3$

따라서 $f(x+6)$을 $x+4$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-4+6)=f(2)=8-12-2+3=-3$

정답_ ②

128

$g(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라고 하면

$f(x)+g(x)=(x^5-x^4+x^3-x^2+4)+(ax+b)$

$\qquad\qquad\quad =x^5-x^4+x^3-x^2+ax+b+4$

$f(x)+g(x)$가 x^2-x-2, 즉 $(x+1)(x-2)$로 나누어떨어지므로 $f(x)+g(x)$는 $x+1$과 $x-2$로 각각 나누어떨어진다.

$\therefore f(-1)+g(-1)=0,\ f(2)+g(2)=0$

$f(-1)+g(-1)=0$에서 $-1-1-1-1-a+b+4=0$

$\therefore a-b=0$ …… ㉠

$f(2)+g(2)=0$에서 $32-16+8-4+2a+b+4=0$

$\therefore 2a+b=-24$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-8,\ b=-8$

따라서 $g(x)=-8x-8$이므로

$g(-5)=40-8=32$

정답_ 32

129

$f(x)+2$가 $(x+2)(x-6)$으로 나누어떨어지므로 $f(x)+2$는 $x+2$와 $x-6$으로 각각 나누어떨어진다.

즉, $f(-2)+2=0,\ f(6)+2=0$이므로

$f(-2)=-2,\ f(6)=-2$

$f(2x-2)$를 x^2-4x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(2x-2)=(x^2-4x)Q(x)+ax+b$

$\qquad\qquad\ =x(x-4)Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(-2)=b \qquad \therefore b=-2$

$x=4$를 대입하면

$f(6)=4a+b,\ -2=4a-2 \qquad \therefore a=0$

따라서 구하는 나머지는 -2이다.

정답_ ①

130

$f(x)=8x^3-2x^2+ax+10$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrr|r} -1 & 8 & -2 & a & 10 \\ & & -8 & 10 & -a-10 \\ \hline & 8 & -10 & a+10 & -a \end{array}$$

따라서 몫은 $8x^2-10x+a+10$, 나머지는 $-a$이므로

$-a=5 \qquad \therefore a=-5$

즉, $Q(x)=8x^2-10x+5$이므로

$Q(2)=32-20+5=17$

정답_ 17

131

주어진 과정에서 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+11$을 $x-3$으로 나누었을 때의 몫은 x^2+x-2, 나머지는 5이므로

$P(x)=(x-3)(x^2+x-2)+5$

따라서 $P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$P(4)=1\times(16+4-2)+5=23$

정답_ 23

다른 풀이

$$\begin{array}{r|rrr|r} 3 & a & b & c & 11 \\ & & \boxed{3} & \boxed{3} & \boxed{-6} \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 5 \end{array}$$

즉, $a=1,\ b+3=1,\ c+3=-2$이므로 $a=1,\ b=-2,\ c=-5$

$\therefore P(x)=x^3-2x^2-5x+11$

따라서 $P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$P(4)=64-32-20+11=23$

132

주어진 조립제법을 완성하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrr|r} \frac{1}{4} & 4 & -1 & a & 1 \\ & & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{\frac{1}{4}a} \\ \hline & \boxed{4} & \boxed{0} & \boxed{a} & 1+\frac{1}{4}a \end{array}$$

즉, $1+\frac{1}{4}a=2$이므로 $a=4$

따라서

$f(x)=\left(x-\frac{1}{4}\right)(4x^2+4)+2$

$\qquad =(4x-1)(x^2+1)+2$

이므로 $Q(x)=x^2+1$

$\therefore Q(5)=25+1=26$

정답_ ③

133

$$\begin{array}{r|rrr|r} 1 & 2 & -5 & 1 & 3 \\ & & 2 & -3 & -2 \\ \hline 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ & & 2 & -1 & \\ \hline 1 & 2 & -1 & -3 & \\ & & 2 & & \\ \hline & 2 & 1 & & \end{array}$$

위의 조립제법에서

$2x^3-5x^2+x+3=(x-1)(2x^2-3x-2)+1$

$\qquad =(x-1)\{(x-1)(2x-1)-3\}+1$

$\qquad =(x-1)[(x-1)\{2(x-1)+1\}-3]+1$

$\qquad =(x-1)\{2(x-1)^2+(x-1)-3\}+1$

$\qquad =2(x-1)^3+(x-1)^2-3(x-1)+1$

따라서 $a=2,\ b=1,\ c=-3,\ d=1$이므로

$a-b-c-d=2-1-(-3)-1=3$

정답_ 3

다른 풀이

주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면

$2x^3-5x^2+x+3$

$=ax^3+(-3a+b)x^2+(3a-2b+c)x-a+b-c+d$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

$2=a,\ -5=-3a+b,\ 1=3a-2b+c,\ 3=-a+b-c+d$

따라서 $a=2,\ b=1,\ c=-3,\ d=1$이므로

$a-b-c-d=2-1-(-3)-1=3$

134

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & -1 & 2 & 5 \\
 & & -1 & 2 & -4 \\ \hline
-1 & 1 & -2 & 4 & \boxed{1} \\
 & & -1 & 3 & \\ \hline
-1 & 1 & -3 & \boxed{7} & \\
 & & -1 & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{-4} & &
\end{array}$$

위의 조립제법에서

$x^3-x^2+2x+5=(x+1)(x^2-2x+4)+1$

$=(x+1)\{(x+1)(x-3)+7\}+1$

$=(x+1)[(x+1)\{(x+1)-4\}+7]+1$

$=(x+1)\{(x+1)^2-4(x+1)+7\}+1$

$=(x+1)^3-4(x+1)^2+7(x+1)+1$

따라서 $a=1$, $b=-4$, $c=7$, $d=1$이므로

$abcd=1\times(-4)\times7\times1=-28$

정답_ ④

135

$$\begin{array}{r|rrrr}
\frac{1}{2} & -4 & 3 & -1 & -1 \\
 & & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \hline
\frac{1}{2} & -4 & 1 & -\frac{1}{2} & \boxed{-\frac{5}{4}} \\
 & & -2 & -\frac{1}{2} & \\ \hline
\frac{1}{2} & -4 & -1 & \boxed{-1} & \\
 & & -2 & & \\ \hline
 & -4 & \boxed{-3} & &
\end{array}$$

위의 조립제법에서

$-4x^3+3x^2-x-1$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(-4x^2+x-\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{4}$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)(-4x-1)-1\right\}-\frac{5}{4}$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{-4\left(x-\frac{1}{2}\right)-3\right\}-1\right]-\frac{5}{4}$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{2}\right)-1\right\}-\frac{5}{4}$

$=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^3-3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{4}$

$=-\frac{1}{2}(2x-1)^3-\frac{3}{4}(2x-1)^2-\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{5}{4}$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{4}$, $c=-\frac{1}{2}$, $d=-\frac{5}{4}$이므로

$ab+cd=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{5}{4}\right)$

$=\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=1$

정답_ 1

136

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2+5-1+a=0 \qquad \therefore a=-6$ ……… ❶

$\therefore 2x^4+5x^2-x-6=(x-1)f(x)$

이 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$2+5+1-6=-2f(-1)$

$\therefore f(-1)=-1$ ……… ❷

정답_ -1

채점 기준	비율
❶ a의 값 구하기	50 %
❷ $f(-1)$의 값 구하기	50 %

137

나머지 정리에 의하여

$f(a)+f(-a)=8$ ……… ❶

이때

$f(a)+f(-a)=(a^3-a^2+a+6)+(-a^3-a^2-a+6)$

$=-2a^2+12$

이므로 $-2a^2+12=8$

$\therefore a^2=2$ ……… ❷

따라서 $f(x)$를 $x+a^2$, 즉 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-2)=-8-4-2+6=-8$ ……… ❸

정답_ -8

채점 기준	비율
❶ $f(a)+f(-a)=8$임을 알기	30 %
❷ a^2의 값 구하기	40 %
❸ $f(x)$를 $x+a^2$으로 나누었을 때의 나머지 구하기	30 %

138

조건 (가)에서 $x^2g(x)=x(x+3)f(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$9g(-3)=0 \qquad \therefore g(-3)=0$ ……… ❶

$g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차다항식이므로

$g(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$g(-3)=9-3a+b=0 \qquad \therefore 3a-b=9$ …… ㉡

조건 (나)에서 나머지 정리에 의하여 $g(2)=5$이므로

$g(2)=4+2a+b=5 \qquad \therefore 2a+b=1$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

$\therefore g(x)=x^2+2x-3$ ……… ❷

$g(x)$를 ㉠에 대입하면

$x^2(x^2+2x-3)=x(x+3)f(x)$

$x^2(x+3)(x-1)=x(x+3)f(x)$

따라서 $f(x)=x(x-1)$이므로 ……… ❸

$f(-1)=(-1)\times(-2)=2$ ……… ❹

정답_ 2

채점 기준	비율
❶ $g(-3)$의 값 구하기	20 %
❷ $g(x)$ 구하기	40 %
❸ $f(x)$ 구하기	30 %
❹ $f(-1)$의 값 구하기	10 %

139

$f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(x)=(x^2-4x+3)Q(x)+ax+b$

$\quad=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b$ …… ㉠

조건 (가)에서 $f(1)=3$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=a+b \qquad \therefore a+b=3$ …… ㉡

❶

조건 (나)에서 주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(3)=f(1)+2-1+1$

$\quad=3+2=5$ ❷

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f(3)=3a+b \qquad \therefore 3a+b=5$ …… ㉢

❸

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=2$

따라서 $f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 나머지는 $x+2$이다. ❹

정답_ $x+2$

채점 기준	비율
❶ $f(1)=3$을 이용하여 식 세우기	20 %
❷ $f(3)$의 값 구하기	30 %
❸ $f(3)$의 값을 이용하여 식 세우기	20 %
❹ $f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 나머지 구하기	30 %

140

$2x^3+ax+6=(x+1)Q(x)+3$

이 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-2-a+6=3 \qquad \therefore a=1$ ❶

$\therefore 2x^3+x+6=(x+1)Q(x)+3$ …… ㉠

$Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(2)$이므로 ❷

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$16+2+6=3Q(2)+3$

$\therefore Q(2)=7$ ❸

정답_ 7

채점 기준	비율
❶ a의 값 구하기	30 %
❷ $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 $Q(2)$임을 알기	40 %
❸ $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지 구하기	30 %

141

$f(x+5)$가 $x+4$로 나누어떨어지므로

$f(-4+5)=f(1)=0$ ❶

이때

$f(1)=1+a-3-4=a-6$

이므로 $a-6=0 \qquad \therefore a=6$

$\therefore f(x)=x^3+6x^2-3x-4$ ❷

따라서 $f(2x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2\times1)=f(2)=8+24-6-4=22$ ❸

정답_ 22

채점 기준	비율
❶ $f(1)=0$임을 알기	30 %
❷ $f(x)$ 구하기	30 %
❸ $f(2x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지 구하기	40 %

142

$\{P(x)-3\}^2=(x+2a)(x-3a)+25$

$\qquad=x^2-ax-6a^2+25$

이 등식이 x에 대한 항등식이고, 좌변이 완전제곱식이므로 우변도 완전제곱식이 되어야 한다.

즉, $x^2-ax-6a^2+25=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$이어야 하므로

$-6a^2+25=\frac{a^2}{4}$, $a^2=4 \qquad \therefore a=\pm2$

(i) $a=-2$일 때

$\{P(x)-3\}^2=(x+1)^2$이므로

$P(x)-3=-(x+1)$ 또는 $P(x)-3=x+1$

$\therefore P(x)=-x+2$ 또는 $P(x)=x+4$

$\therefore P(5)=-3$ 또는 $P(5)=9$

(ii) $a=2$일 때

$\{P(x)-3\}^2=(x-1)^2$이므로

$P(x)-3=-(x-1)$ 또는 $P(x)-3=x-1$

$\therefore P(x)=-x+4$ 또는 $P(x)=x+2$

$\therefore P(5)=-1$ 또는 $P(5)=7$

(i), (ii)에서 모든 $P(5)$의 값의 합은

$(-3)+9+(-1)+7=12$

정답_ ③

143

주어진 등식에서 $x^2-x=A$로 놓으면

$A(A+3)+Ak+8=(A+a)(A+b)$

이므로 양변을 각각 전개하여 정리하면

$A^2+(k+3)A+8=A^2+(a+b)A+ab$

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 이 등식은 A에 대한 항등식이다.

$\therefore k+3=a+b$, $8=ab$

a, b ($a<b$)는 자연수이므로 $ab=8=1\times8=2\times4$에서

$a=1$, $b=8$ 또는 $a=2$, $b=4$

$\therefore k=6$ 또는 $k=3$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은

$6+3=9$

정답_ ②

144

$P_1(x)=x-1$, $P_2(x)=(x-1)(x-2)$,

$P_3(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$이므로

x^3-4x^2

$=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)+d(x-1)(x-2)(x-3)$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$-3=a$

$x=2$를 대입하면

$-8=a+b,\ -8=-3+b \qquad \therefore b=-5$

$x=3$을 대입하면

$-9=a+2b+2c,\ -9=-3+2\times(-5)+2c$

$\therefore c=2$

$x=0$을 대입하면

$0=a-b+2c-6d,\ 0=-3-(-5)+2\times2-6d$

$\therefore d=1$

$\therefore abcd=(-3)\times(-5)\times2\times1=30$

정답_ 30

145

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $a_0=5$이므로 주어진 등식은

$(x^2-2x)^4=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$

$\therefore x^4(x-2)^4=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$

이 등식은 x에 대한 항등식이고, 좌변에서 삼차 이하의 항의 계수는 모두 0이므로

$a_1=a_2=a_3=0$

즉, $x^4(x-2)^4=a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+a_7x^7+a_8x^8$이므로

$(x-2)^4=a_4+a_5x+a_6x^2+a_7x^3+a_8x^4$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$(-2)^4=a_4 \qquad \therefore a_4=16$

$x=1$을 대입하면

$(-1)^4=a_4+a_5+a_6+a_7+a_8$ …… ㉡

$x=-1$을 대입하면

$(-3)^4=a_4-a_5+a_6-a_7+a_8$ …… ㉢

㉡$-$㉢을 하면

$-80=2a_5+2a_7 \qquad \therefore a_5+a_7=-40$

$\therefore a_4-(a_5+a_7)=16-(-40)=56$

정답_ ⑤

146

$x^n(x^2+ax+b)$를 $(x+3)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^n(x^2+ax+b)=(x+3)^2Q(x)+3^{n+1}(x+3)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$(-3)^n(9-3a+b)=0$

이때 $(-3)^n\neq0$이므로

$9-3a+b=0 \qquad \therefore b=3a-9$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^n(x^2+ax+3a-9)=(x+3)^2Q(x)+3^{n+1}(x+3)$

$x^n\{(x^2-9)+a(x+3)\}=(x+3)^2Q(x)+3^{n+1}(x+3)$

$x^n\{(x+3)(x-3)+a(x+3)\}=(x+3)^2Q(x)+3^{n+1}(x+3)$

$x^n(x+3)(x+a-3)=(x+3)^2Q(x)+3^{n+1}(x+3)$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$x^n(x+a-3)=(x+3)Q(x)+3^{n+1}$

이 등식의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$(-3)^n(-3+a-3)=3^{n+1}$

이때 n이 짝수이므로

$3^n(a-6)=3^{n+1}$

$a-6=3 \qquad \therefore a=9$

$a=9$를 ㉡에 대입하면 $b=18$

$\therefore a+b=9+18=27$

정답_ 27

147

조건 (가)에서 $2f(x)+g(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라고 하면

$2f(x)+g(x)=(x^2-3x+2)Q_1(x)+4x+3$

$=(x-1)(x-2)Q_1(x)+4x+3$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2f(1)+g(1)=7$ …… ㉠

$x=2$를 대입하면

$2f(2)+g(2)=11$ …… ㉡

조건 (나)에서 $f(x)g(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라고 하면

$f(x)g(x)=(x^2-3x+2)Q_2(x)+6x$

$=(x-1)(x-2)Q_2(x)+6x$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)g(1)=6$ …… ㉢

$x=2$를 대입하면

$f(2)g(2)=12$ …… ㉣

㉠에서 $g(1)=7-2f(1)$이므로 이것을 ㉢에 대입하여 정리하면

$2\{f(1)\}^2-7f(1)+6=0,\ \{2f(1)-3\}\{f(1)-2\}=0$

$\therefore f(1)=\frac{3}{2}$ 또는 $f(1)=2$

그런데 문제의 조건에서 n이 자연수일 때 $f(n)$은 정수이므로

$f(1)=2$

$\therefore g(1)=7-2f(1)=7-2\times2=3$

같은 방법으로 ㉡, ㉣을 연립하여 풀면

$f(2)=4,\ g(2)=3$

ㄱ. ㉠에서

$2f(1)+g(1)=7$ (참)

ㄴ. ㉢, ㉣에서

$f(1)g(1)+f(2)g(2)=6+12=18$ (참)

ㄷ. $f(x)+2g(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(x)+2g(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$

$=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)+2g(1)=a+b$

$\therefore a+b=8$ …… ㉤

$x=2$를 대입하면

$f(2)+2g(2)=2a+b$

$\therefore 2a+b=10$ …… ㉥

㉤, ㉥을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=6$

따라서 구하는 나머지는 $2x+6$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

148

$\{Q(x)\}^2+\{Q(x-2)\}^2=(x^2+2x)P(x)$

$=x(x+2)P(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $x=-2$를 각각 대입하면

$\{Q(0)\}^2+\{Q(-2)\}^2=0$, $\{Q(-2)\}^2+\{Q(-4)\}^2=0$

다항식 $Q(x)$의 계수가 실수이므로 $Q(0)$, $Q(-2)$, $Q(-4)$의 값도 실수이다.

$\therefore Q(0)=0,\ Q(-2)=0,\ Q(-4)=0$

따라서 다항식 $Q(x)$는 x, $x+2$, $x+4$로 각각 나누어떨어지고 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로

$Q(x)=x(x+2)(x+4)$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\{x(x+2)(x+4)\}^2+\{(x-2)x(x+2)\}^2=x(x+2)P(x)$

$\therefore P(x)=x(x+2)(x+4)^2+x(x+2)(x-2)^2$

$=x(x+2)\{(x+4)^2+(x-2)^2\}$

$=x(x+2)(2x^2+4x+20)$

$=x(x+2)\{2(x+4)(x-2)+36\}$

$=2x(x+2)(x+4)(x-2)+36x(x+2)$

$=2(x-2)Q(x)+36x(x+2)$ ($\because$ ㉡)

따라서 $P(x)$를 $Q(x)$로 나누었을 때의 나머지는 $36x(x+2)$이므로

$R(x)=36x(x+2)$

$\therefore R(1)=36\times1\times3=108$

정답_ ④

149

나머지 정리에 의하여

$f(1)=a+1$ …… ㉠

$f(x)$를 $(x-1)(x^2+x+1)$로 나누었을 때의 몫이 $Q_2(x)$, 나머지가 x^2+x+b이므로

$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)Q_2(x)+x^2+x+b$

$=(x-1)(x^2+x+1)Q_2(x)+(x-1)(x+2)+b+2$

$=(x-1)\{(x^2+x+1)Q_2(x)+x+2\}+b+2$ …… ㉡

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $(x^2+x+1)Q_2(x)+x+2$이므로

$Q_1(x)=(x^2+x+1)Q_2(x)+x+2$

따라서 $Q_1(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지는 $x+2$이므로

$R(x)=x+2$

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=b+2$이므로

㉠에서 $a+1=b+2$ $\quad\therefore a-b=1$

$\therefore R(a-b)=R(1)=1+2=3$

정답_ ①

150

$f(2-x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2-2)=f(0)=-4$

$xf(x)$는 $(x+1)(x-4)$로 나누어떨어지므로 $xf(x)$는 $x+1$과 $x-4$로 각각 나누어떨어진다.

즉, $-f(-1)=0$, $4f(4)=0$이므로

$f(-1)=0$, $f(4)=0$

따라서 $f(x)=a(x+1)(x-4)$ (a는 0이 아닌 상수)라고 하면

$f(0)=-4$에서 $-4a=-4$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore f(x)=(x+1)(x-4)$

따라서 $f(x-1)$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(3-1)=f(2)=3\times(-2)=-6$

정답_ ②

151

조건 (가)에서 $f(x)$를 $x+1$, x^2-3으로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, 나머지를 R라고 하면

$f(x)=(x+1)Q_1(x)+R$, $f(x)=(x^2-3)Q_2(x)+R$

$\therefore f(x)-R=(x+1)Q_1(x)=(x^2-3)Q_2(x)$

따라서 $f(x)-R$는 $x+1$, x^2-3으로 각각 나누어떨어지고 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차다항식이므로

$f(x)-R=(x+1)(x^2-3)(x+a)$ (a는 상수) …… ㉠

로 놓을 수 있다.

$f(x+1)-5$를 x^2+x로 나누었을 때의 몫을 $Q_3(x)$라고 하면

$f(x+1)-5=(x^2+x)Q_3(x)$

$=x(x+1)Q_3(x)$

이 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(1)-5=0$ $\quad\therefore f(1)=5$

$x=-1$을 대입하면

$f(0)-5=0$ $\quad\therefore f(0)=5$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)-R=-3a$, $5-R=-3a$

$\therefore R-3a=5$ …… ㉡

$x=1$을 대입하면

$f(1)-R=-4(1+a)$, $5-R=-4-4a$

$\therefore R-4a=9$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$R=-7$, $a=-4$

따라서 $f(x)=(x+1)(x^2-3)(x-4)-7$이므로

$f(4)=-7$

정답_ ③

152

$$\begin{array}{c|ccc}
m & a & b & c \\
 & & \boxed{3m} & \boxed{0} \\
\hline
n & 3 & 0 & 2 \\
 & & \boxed{3n} & \\
\hline
 & 3 & 6 &
\end{array}$$

위의 조립제법에서

$a=3$, $c=2$, $n=2$

이때 나머지가 $6x-4$이므로

$3x^2+bx+2=3(x-m)(x-2)+6x-4$

이 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$12+2b+2=12-4$ $\quad\therefore b=-3$

$\therefore a+b+c=3+(-3)+2=2$

정답_ ②

다른 풀이

주어진 조립제법에서 $a=3$, $c=2$, $n=2$이므로

$3x^2+bx+2=(x-m)\times 3x+2$

$=(x-m)\{(x-2)\times 3+6\}+2$

$=3(x-m)(x-2)+6(x-m)+2$

$=3(x-m)(x-2)+6x-6m+2$

따라서 $3x^2+bx+2$를 $(x-m)(x-n)$, 즉 $(x-m)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지는 $6x-6m+2$이므로

$6x-6m+2=6x-4$

즉, $-6m+2=-4$이므로 $m=1$

따라서

$3x^2+bx+2=3(x-1)(x-2)+6x-4$

$=3x^2-3x+2$

이므로 $b=-3$

$\therefore a+b+c=3+(-3)+2=2$

153

$f(x)$는 삼차식이므로 $f(x)+1$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라고 하면

$f(x)+1=(x+1)^2(ax+b)$

이 등식의 양변에 8을 더하면

$f(x)+9=(x+1)^2(ax+b)+8$

$=ax^3+(2a+b)x^2+(a+2b)x+b+8$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & a & 2a+b & a+2b & b+8 \\ & & a & 3a+b & 4a+3b \\ \hline 1 & a & 3a+b & 4a+3b & \boxed{4a+4b+8} \\ & & a & 4a+b & \\ \hline & a & 4a+b & \boxed{8a+4b} & \end{array}$$

$f(x)+9$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 위의 조립제법에서

$8a+4b=0$, $4a+4b+8=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-4$

즉, $f(x)+1=(x+1)^2(2x-4)$이므로

$f(x)=2(x+1)^2(x-2)-1$

따라서 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(3)=2\times 16\times 1-1=31$

정답_ ⑤

03 인수분해

154

(1) $x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$

$=x^2+y^2+z^2+2\times x\times(-y)+2\times(-y)\times(-z)$
$+2\times(-z)\times x$

$=(x-y-z)^2$

(2) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

$=(2x)^3-3\times(2x)^2\times y+3\times(2x)\times y^2-y^3$

$=(2x-y)^3$

(3) $a^3+27=a^3+3^3=(a+3)(a^2-3a+9)$

(4) $125a^3-8b^3=(5a)^3-(2b)^3$

$=(5a-2b)(25a^2+10ab+4b^2)$

정답_ (1) $(x-y-z)^2$
(2) $(2x-y)^3$
(3) $(a+3)(a^2-3a+9)$
(4) $(5a-2b)(25a^2+10ab+4b^2)$

155

$a^4-a^3+8a-8=a^3(a-1)+8(a-1)$

$=(a-1)(a^3+8)$

$=(a-1)(a+2)(a^2-2a+4)$

따라서 a^4-a^3+8a-8의 인수인 것은 ①, ④이다.

정답_ ①, ④

156

① $x^3-x^2-12x=x(x^2-x-12)$

$=x(x-4)(x+3)$

② $x^4+8x=x(x^3+8)$

$=x(x+2)(x^2-2x+4)$

③ $x^4+x^3-2x^2=x^2(x^2+x-2)$

$=x^2(x-1)(x+2)$

④ $a^2-(b-c)^2=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$

$=(a+b-c)(a-b+c)$

⑤ $x^2(a-b)-y^2(b-a)=x^2(a-b)+y^2(a-b)$

$=(a-b)(x^2+y^2)$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

157

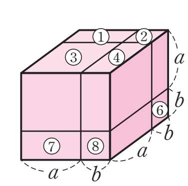
$x^3+y^3-8z^3+6xyz$

$=x^3+y^3+(-2z)^3-3xy\times(-2z)$

$=(x+y-2z)(x^2+y^2+4z^2-xy+2yz+2zx)$

정답_ ②

158



오른쪽 그림에서 보이지 않는 조각을 ⑤번이라고 하면 8조각의 부피의 합은

①+②+③+④+⑤+⑥+⑦+⑧

$=a^2b+ab^2+a^3+a^2b+ab^2+b^3+a^2b+ab^2$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ...... ㉠

전체 나무토막은 한 모서리의 길이가 $a+b$인 정육면체이므로 그 부피는

$(a+b)^3$ ...... ㉡

㉠과 ㉡이 같으므로 주어진 그림을 이용하여 유도할 수 있는 인수분해 공식은

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

정답_ ①

159

$x^4+81y^4+3x^3y+27xy^3$

$=(x^4+3x^3y)+(27xy^3+81y^4)$

$=x^3(x+3y)+27y^3(x+3y)$

$=(x+3y)(x^3+27y^3)$

$=(x+3y)(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$

$=(x+3y)^2(x^2-3xy+9y^2)$

따라서 $a=3$, $b=-3$, $c=9$이므로

$a+b+c=3+(-3)+9=9$

정답_ ⑤

160

$x^2+x=X$로 놓으면

$(x^2+x-5)(x^2+x-9)-21$

$=(X-5)(X-9)-21$

$=X^2-14X+24=(X-2)(X-12)$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)$

$=(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

따라서 인수가 아닌 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

161

$(x^2-4x)^2-3x^2+12x-10=(x^2-4x)^2-3(x^2-4x)-10$

$x^2-4x=X$로 놓으면

$(x^2-4x)^2-3(x^2-4x)-10=X^2-3X-10$

$=(X+2)(X-5)$

$=(x^2-4x+2)(x^2-4x-5)$

$=(x-5)(x+1)(x^2-4x+2)$

따라서 인수인 것은 ③, ④이다.

정답_ ③, ④

162

$x+3y=X$, $2x-y=Y$로 놓으면

$5(x+3y)^2-(x+3y)(2x-y)-6(2x-y)^2$

$=5X^2-XY-6Y^2$

$=(X+Y)(5X-6Y)$

$=\{(x+3y)+(2x-y)\}\{5(x+3y)-6(2x-y)\}$

$=(3x+2y)(-7x+21y)$

$=-7(x-3y)(3x+2y)$

따라서 $a=3$, $b=3$, $c=2$이므로

$abc=3\times3\times2=18$

정답_ 18

163

$(x-1)(x-3)(x+3)(x+5)+35$

$=(x-1)(x+3)(x-3)(x+5)+35$

$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-15)+35$

$x^2+2x=X$로 놓으면

$(x^2+2x-3)(x^2+2x-15)+35=(X-3)(X-15)+35$

$=X^2-18X+80$

$=(X-8)(X-10)$

$=(x^2+2x-8)(x^2+2x-10)$

$=(x-2)(x+4)(x^2+2x-10)$

따라서 $a=-2$, $b=4$ 또는 $a=4$, $b=-2$이고,

$f(x)=x^2+2x-10$이므로

$a+b+f(4)=(-2)+4+14=16$

정답_ ④

164

$x^2=X$로 놓으면

$x^4-x^2-12=X^2-X-12$

$=(X-4)(X+3)$

$=(x^2-4)(x^2+3)$

$=(x-2)(x+2)(x^2+3)$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로

$a+b=2+3=5$

정답_ ②

165

$x^4-16x^2+36=x^4-12x^2+36-4x^2$

$=(x^2-6)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x-6)(x^2-2x-6)$

따라서 인수인 것은 ④이다.

정답_ ④

166

$x^4+64y^4=x^4+16x^2y^2+64y^4-16x^2y^2$

$=(x^2+8y^2)^2-(4xy)^2$

$=(x^2+4xy+8y^2)(x^2-4xy+8y^2)$

따라서 $a=4$, $b=8$이므로

$a+b=4+8=12$

정답_ 12

167

$4x^4-8x^2y^2+y^4=4x^4-4x^2y^2+y^4-4x^2y^2$

$=(2x^2-y^2)^2-(2xy)^2$

$=(2x^2+2xy-y^2)(2x^2-2xy-y^2)$

따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=2$, $d=-1$이므로

$abcd=2\times(-1)\times2\times(-1)=4$

정답_ ④

168

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$4x^2+11xy-3y^2+3x-4y-1$

$=4x^2+(11y+3)x-(3y^2+4y+1)$

$=4x^2+(11y+3)x-(3y+1)(y+1)$

$=\{x+(3y+1)\}\{4x-(y+1)\}$

$=(x+3y+1)(4x-y-1)$

따라서 인수인 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

169

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$x^2+xy-2y^2+x+11y-12$

$=x^2+(y+1)x-(2y^2-11y+12)$

$=x^2+(y+1)x-(y-4)(2y-3)$

$=\{x-(y-4)\}\{x+(2y-3)\}$

$=(x-y+4)(x+2y-3)$

이때 $a<c$이므로

$a=-1,\ b=4,\ c=2,\ d=-3$

$\therefore\ ad-bc=(-1)\times(-3)-4\times2=-5$

정답_ ③

170

주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$a^2(b-c)-b^2(c-a)+c^2(a+b)-2abc$

$=(b-c)a^2-b^2c+ab^2+ac^2+bc^2-2abc$

$=(b-c)a^2+(b^2+c^2-2bc)a-b^2c+bc^2$

$=(b-c)a^2+(b-c)^2a-bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2+(b-c)a-bc\}$

$=(b-c)(a+b)(a-c)$

$=(a+b)(a-c)(b-c)$

정답_ $(a+b)(a-c)(b-c)$

171

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$x^2+2xy-8y^2+kx+2y+15$

$=x^2+(2y+k)x-(8y^2-2y-15)$

$=x^2+(2y+k)x-(2y-3)(4y+5)$

이 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면

$-(2y-3)+(4y+5)=2y+k$

가 되어야 한다.

즉, $3+5=k$이어야 하므로 $k=8$

정답_ ⑤

172

주어진 식을 b에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$a^3+a^2b+ab^2-c^3-bc^2-b^2c=0$에서

$(a-c)b^2+(a^2-c^2)b+a^3-c^3=0$

$(a-c)b^2+(a+c)(a-c)b+(a-c)(a^2+ac+c^2)=0$

$(a-c)\{b^2+(a+c)b+a^2+ac+c^2\}=0$

$(a-c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)=0$

이때 a, b, c는 양수이므로

$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\neq0$

따라서 주어진 등식이 항등식이 될 조건은

$a-c=0 \qquad \therefore\ a=c$

정답_ ②

173

$f(x)$가 $x-2$를 인수로 가지므로

$f(2)=8+12+2a-8=0 \qquad \therefore\ a=-6$

$\therefore\ f(x)=x^3+3x^2-6x-8$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 3 & -6 & -8 \\ & & 2 & 10 & 8 \\ \hline & 1 & 5 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

x^3+3x^2-6x-8

$=(x-2)(x^2+5x+4)$

$=(x-2)(x+1)(x+4)$

정답_ $(x-2)(x+1)(x+4)$

174

$f(x)=x^3+5x^2+5x-2$라고 하면 $f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 5 & 5 & -2 \\ & & -2 & -6 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3+5x^2+5x-2=(x+2)(x^2+3x-1)$

따라서 $a=2$, $b=3$, $c=-1$이므로

$abc=2\times3\times(-1)=-6$

정답_ ④

175

$f(x)=2x^3+ax^2+2x+3$이라고 하면 $f(x)$가 $x-1$을 인수로 가지므로 $f(1)=2+a+2+3=0 \qquad \therefore\ a=-7$

$\therefore\ f(x)=2x^3-7x^2+2x+3$

$f(x)$가 $x-1$, $x-3$을 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -7 & 2 & 3 \\ & & 2 & -5 & -3 \\ \hline 3 & 2 & -5 & -3 & \boxed{0} \\ & & 6 & 3 & \\ \hline & 2 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$2x^3-7x^2+2x+3$

$=(x-1)(x-3)(2x+1)$

따라서 $b=2$, $c=1$이므로

$a+b+c=-7+2+1=-4$

정답_ -4

176

$f(x)=2x^3-3x^2-12x-7$이라고 하면 $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -3 & -12 & -7 \\ & & -2 & 5 & 7 \\ \hline & 2 & -5 & -7 & \boxed{0} \end{array}$$

$2x^3-3x^2-12x-7=(x+1)(2x^2-5x-7)$

$=(x+1)(x+1)(2x-7)$

$=(x+1)^2(2x-7)$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=-7$이므로
$a+b+c=1+2+(-7)=-4$

정답_ ③

177

$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -a & a+13 & -15 \\ & & 2 & -a+2 & 15 \\ \hline & 2 & -a+2 & 15 & \boxed{0} \end{array}$$

$2x^3-ax^2+(a+13)x-15=(x-1)\{2x^2+(-a+2)x+15\}$
이때 $2x^2+(-a+2)x+15$가 상수항이 양수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우는
$(2x+15)(x+1)$, $(2x+5)(x+3)$,
$(2x+3)(x+5)$, $(2x+1)(x+15)$
의 4가지이다.
마찬가지로 상수항이 음수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우도 4가지이므로 $f(x)$가 계수가 모두 정수인 세 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우는
$4+4=8$(가지)
이다. 따라서 다항식 $f(x)$로 가능한 것은 8개이다.

정답_ ①

178

$f(-1)g(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)g(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & 1 & 2 & -8 & -18 & -9 \\ & & -1 & -1 & 9 & 9 \\ \hline & 1 & 1 & -9 & -9 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^4+2x^3-8x^2-18x-9&=(x+1)(x^3+x^2-9x-9) \\ &=(x+1)\{x^2(x+1)-9(x+1)\} \\ &=(x+1)^2(x^2-9) \\ &=(x+1)^2(x-3)(x+3) \end{aligned}$$

이때 $f(x)$, $g(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차다항식이고, 모두 $x+a$로 나누어떨어지므로
$f(x)=(x+1)(x-3)$, $g(x)=(x+1)(x+3)$
또는 $f(x)=(x+1)(x+3)$, $g(x)=(x+1)(x-3)$
따라서
$f(2)+g(2)=-3+15=12$
또는 $f(2)+g(2)=15+(-3)=12$
이므로 $f(2)+g(2)=12$

정답_ 12

179

$$\begin{aligned} x^4-7x^3+14x^2-7x+1&=x^2\left(x^2-7x+14-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \\ &=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+12\right\} \\ &=x^2\left(x+\frac{1}{x}-3\right)\left(x+\frac{1}{x}-4\right) \\ &=(x^2-3x+1)(x^2-4x+1) \end{aligned}$$

따라서 인수인 것은 ④이다.

정답_ ④

180

$$\begin{aligned} x^4-4x^3+5x^2-4x+1&=x^2\left(x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \\ &=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right\} \\ &=x^2\left(x+\frac{1}{x}-3\right)\left(x+\frac{1}{x}-1\right) \\ &=(x^2-3x+1)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

정답_ $(x^2-3x+1)(x^2-x+1)$

181

$$\begin{aligned} x^4-x^3-10x^2-x+1&=x^2\left(x^2-x-10-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \\ &=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)-12\right\} \\ &=x^2\left(x+\frac{1}{x}+3\right)\left(x+\frac{1}{x}-4\right) \\ &=(x^2+3x+1)(x^2-4x+1) \end{aligned}$$

따라서 $a=3$, $b=-4$ ($\because$ $a>b$)이므로
$a-b=3-(-4)=7$

정답_ ②

182

$$\begin{aligned} 1-9a^2+6ab-b^2&=1-(9a^2-6ab+b^2) \\ &=1-(3a-b)^2 \\ &=\{1+(3a-b)\}\{1-(3a-b)\} \\ &=(1+3a-b)(1-3a+b) \end{aligned}$$

이때 $3a+b+1=0$에서 $1+3a=-b$, $1+b=-3a$이므로
(주어진 식)$=(-b-b)(-3a-3a)=12ab$

정답_ ①

183

$x+4y-z=0$에서 $z=x+4y$이므로

$$\begin{aligned} 3x^2+12xy+z^2&=3x^2+12xy+(x+4y)^2 \\ &=3x(x+4y)+(x+4y)^2 \\ &=(x+4y)(3x+x+4y) \\ &=(x+4y)(4x+4y) \\ &=4z(x+y) \end{aligned}$$

정답_ ③

184

$$\begin{aligned} 1-4x^4+4x^2y-y^2&=1-(4x^4-4x^2y+y^2) \\ &=1-(2x^2-y)^2 \\ &=(1+2x^2-y)(1-2x^2+y) \qquad \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

이때 $2x^2+y+1=0$에서 $1+2x^2=-y$, $1+y=-2x^2$이므로 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} (1+2x^2-y)(1-2x^2+y)&=(-y-y)(-2x^2-2x^2) \\ &=(-2y)\times(-4x^2) \\ &=8x^2y \end{aligned}$$

$\therefore$ $a=8$

정답_ ②

185

$a^3-a^2b-a^2c+ac^2-bc^2+abc=0$에서

$-b(a^2-ac+c^2)+a(a^2-ac+c^2)=0$
$(a^2-ac+c^2)(a-b)=0$
이때
$a^2-ac+c^2=(a-c)^2+ac>0$ ($\because$ $a>0$, $c>0$)
이므로
$a-b=0$, 즉 $a=b$
따라서 이 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형이다.

정답_ $a=b$인 이등변삼각형

186

$a^3+b^3+a^2b+ab^2-ac^2-bc^2=0$에서
$-(a+b)c^2+a^3+a^2b+ab^2+b^3=0$
$-(a+b)c^2+a^2(a+b)+b^2(a+b)=0$
$(a+b)(-c^2+a^2+b^2)=0$
이때 $a+b\neq0$이므로 $-c^2+a^2+b^2=0$
$\therefore c^2=a^2+b^2$
따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

정답_ ③

187

$a^3+b^3+c^3=3abc$에서
$a^3+b^3+c^3-3abc=0$
$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$
$\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$
이때 $a+b+c\neq0$이므로
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$
즉, $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$이므로
$a=b=c$
따라서 이 삼각형은 정삼각형이다.

정답_ ⑤

188

$x^2y+xy^2+x+y=xy(x+y)+(x+y)$
$=(x+y)(xy+1)$
$x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$이므로
$x+y=(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{3}$
$xy=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=3-2=1$
$\therefore x^2y+xy^2+x+y=(x+y)(xy+1)$
$=2\sqrt{3}\times(1+1)$
$=4\sqrt{3}$

정답_ ④

189

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
이고 $a+b+c=0$이므로
$a^3+b^3+c^3-3abc=0$ $\quad\therefore a^3+b^3+c^3=3abc$
$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}=\frac{3abc}{3abc}=1$

정답_ ④

190

$a^2b+a^2c-ab^2-ac^2+b^2c+bc^2-2abc$
$=a^2(b+c)-a(b^2+c^2+2bc)+bc(b+c)$
$=a^2(b+c)-a(b+c)^2+bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=(b+c)(a-b)(a-c)$
$=5\times1\times(-2)=-10$

정답_ ②

191

$a^2b+2ab+a^2+2a+b+1=(a^2+2a+1)b+a^2+2a+1$
$=(a^2+2a+1)(b+1)$
$=(a+1)^2(b+1)$
이 식의 값이 245이고, $245=5\times7^2$이므로
$(a+1)^2(b+1)=7^2\times5$에서
$a+1=7$, $b+1=5$ ($\because$ a, b는 자연수)
따라서 $a=6$, $b=4$이므로 $a+b=10$

정답_ ②

192

$20=11.5+8.5$이므로 $11.5=a$, $8.5=b$라고 하면
(주어진 식)$=\frac{a^3-a^2b-ab^2+b^3}{a+b}$
$=\frac{a^2(a-b)-b^2(a-b)}{a+b}$
$=\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{a+b}$
$=\frac{(a+b)(a-b)^2}{a+b}$
$=(a-b)^2$
$=(11.5-8.5)^2=9$

정답_ ③

193

$30=x$로 놓으면
$30\times31\times32\times33+1=x(x+1)(x+2)(x+3)+1$
$=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1$
$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$
$x^2+3x=X$로 놓으면
$(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1=X(X+2)+1$
$=X^2+2X+1$
$=(X+1)^2$
$=(x^2+3x+1)^2=(30^2+3\times30+1)^2$
$=(900+90+1)^2=991^2$
$\therefore \sqrt{30\times31\times32\times33+1}=\sqrt{991^2}=991$

정답_ ①

194

$100=x$로 놓으면
$100^3+9\times100^2+23\times100+15=x^3+9x^2+23x+15$
$f(x)=x^3+9x^2+23x+15$라고 하면 $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 9 & 23 & 15 \\ & & -1 & -8 & -15 \\ \hline & 1 & 8 & 15 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3+9x^2+23x+15=(x+1)(x^2+8x+15)$

$\qquad\qquad\qquad\quad=(x+1)(x+3)(x+5)$

$\qquad\qquad\qquad\quad=101\times103\times105$

$\therefore a+b+c=101+103+105=309$

정답_ ②

195

$x^2-x=X$로 놓으면

$(x^2-x)(x^2-x+1)-6=X(X+1)-6$

$\qquad=X^2+X-6$ ………… ❶

$\qquad=(X+3)(X-2)$

$\qquad=(x^2-x+3)(x^2-x-2)$

$\qquad=(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$ ………… ❷

따라서 $a=-2$, $b=-1$, $c=3$이므로

$abc=(-2)\times(-1)\times3=6$ ………… ❸

정답_ 6

채점 기준	비율
❶ $x^2-x=X$로 치환하여 주어진 식을 X로 나타내기	30 %
❷ 주어진 식을 인수분해하기	40 %
❸ abc의 값 구하기	30 %

196

주어진 등식의 좌변을 정리하면

$(2x-1)(2x+1)(2x+3)(2x+5)+a$

$=\{(2x-1)(2x+5)\}\{(2x+1)(2x+3)\}+a$

$=(4x^2+8x-5)(4x^2+8x+3)+a$

$4x^2+8x=X$로 놓으면

$(4x^2+8x-5)(4x^2+8x+3)+a=(X-5)(X+3)+a$

$\qquad=X^2-2X-15+a$ ………… ❶

이 식이 완전제곱식이 되어야 하므로

$-15+a=(-1)^2 \qquad \therefore a=16$ ………… ❷

따라서

$X^2-2X-15+a=X^2-2X+1=(X-1)^2$

$\qquad=(4x^2+8x-1)^2$

이므로 $b=8$, $c=-1$ ………… ❸

$\therefore a+b+c=16+8+(-1)=23$ ………… ❹

정답_ 23

채점 기준	비율
❶ 공통부분이 나오도록 주어진 식을 전개하여 치환하기	30 %
❷ a의 값 구하기	30 %
❸ b, c의 값 구하기	30 %
❹ $a+b+c$의 값 구하기	10 %

197

$x^4-x^2+16=x^4+8x^2+16-9x^2$

$\qquad=(x^2+4)^2-(3x)^2$

$\qquad=(x^2+3x+4)(x^2-3x+4)$ ………… ❶

이때 $a>c$이므로

$a=3$, $b=4$, $c=-3$ ………… ❷

$\therefore a+b-c=3+4-(-3)=10$ ………… ❸

정답_ 10

채점 기준	비율
❶ 주어진 다항식을 인수분해하기	60 %
❷ a, b, c의 값 구하기	20 %
❸ $a+b-c$의 값 구하기	20 %

198

$a^4+(b+c)^2(b^2+c^2)=2(b^2+c^2+bc)a^2$에서

$a^4-2(b^2+c^2+bc)a^2+(b+c)^2(b^2+c^2)=0$

$$\begin{array}{lll} a^2 & -(b+c)^2 & \rightarrow\ -(b+c)^2a^2 \\ a^2 & -(b^2+c^2) & \rightarrow\ -(b^2+c^2)a^2 \\ \hline & & -2(b^2+c^2+bc)a^2 \end{array}$$

즉, $\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b^2+c^2)\}=0$이므로

$(a+b+c)(a-b-c)(a^2-b^2-c^2)=0$ ………… ❶

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a<b+c$

따라서 $a+b+c\neq0$, $a-b-c\neq0$이므로

$a^2-b^2-c^2=0 \qquad \therefore a^2=b^2+c^2$ ………… ❷

따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다. ………… ❸

정답_ **빗변의 길이가 a인 직각삼각형**

채점 기준	비율
❶ 우변의 식을 좌변으로 이항하여 인수분해하기	50 %
❷ a, b, c 사이의 관계식 구하기	30 %
❸ 삼각형 ABC의 모양 판단하기	20 %

199

주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$

$=(c-b)a^2+ab^2-b^2c+bc^2-ac^2$

$=(c-b)a^2+(b^2-c^2)a+bc(c-b)$

$=(c-b)a^2+(b+c)(b-c)a+bc(c-b)$

$=(c-b)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(c-b)(a-b)(a-c)$ …… ㉠

………… ❶

한편, $a-c=1+\sqrt{3}$, $c-b=1-\sqrt{3}$을 변끼리 더하면

$a-b=2$ ………… ❷

㉠에 $a-b=2$, $a-c=1+\sqrt{3}$, $c-b=1-\sqrt{3}$을 대입하면 구하는 식의 값은

$(1-\sqrt{3})\times2\times(1+\sqrt{3})=-4$ ………… ❸

정답_ -4

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 인수분해하기	50 %
❷ $a-b$의 값 구하기	30 %
❸ 주어진 식의 값 구하기	20 %

200

$f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -7 & -17 & -9 \\ & & -1 & 8 & 9 \\ \hline & 1 & -8 & -9 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-7x^2-17x-9$

$=(x+1)(x^2-8x-9)$

$=(x+1)(x+1)(x-9)$

$=(x+1)^2(x-9)$ ❶

$\therefore f(79)=80^2\times70=448000$ ❷

따라서 $m=6$, $n=4+4+8=16$이므로

$m+n=6+16=22$ ❸

정답_ 22

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 인수분해하기	50 %
❷ $f(79)$의 값 구하기	20 %
❸ $m+n$의 값 구하기	30 %

201

두 정육면체 P, Q의 부피가 각각 a^3, b^3이고, 두 직육면체 R, S의 부피가 각각 $(a+b)ab$, $3(a+b)(a-b)$이므로

$a^3+b^3=(a+b)ab+3(a+b)(a-b)$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)ab-3(a+b)(a-b)=0$

$(a+b)(a^2-ab+b^2-ab-3a+3b)=0$

$(a+b)(a^2-2ab+b^2-3a+3b)=0$

$(a+b)\{(a-b)^2-3(a-b)\}=0$

$(a+b)(a-b)(a-b-3)=0$

이때 $a+b>0$, $a\neq b$이므로

$a-b-3=0 \qquad \therefore a-b=3$

정답_ ②

202

$(x^2+5x+6)(x^2-3x+2)+3$

$=(x+2)(x+3)(x-1)(x-2)+3$

$=\{(x+2)(x-1)\}\{(x+3)(x-2)\}+3$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-6)+3$

$x^2+x=X$로 놓으면

$(x^2+x-2)(x^2+x-6)+3=(X-2)(X-6)+3$

$=X^2-8X+15$

$=(X-3)(X-5)$

$=(x^2+x-3)(x^2+x-5)$

(i) $f(x)=x^2+x-3$, $g(x)=x^2+x-5$일 때

$f(1)=-1$, $g(2)=1$

$\therefore f(1)+g(2)=-1+1=0$

(ii) $f(x)=x^2+x-5$, $g(x)=x^2+x-3$일 때

$f(1)=-3$, $g(2)=3$

$\therefore f(1)+g(2)=-3+3=0$

(i), (ii)에서 $f(1)+g(2)=0$

정답_ 0

203

[그림 2]의 입체의 부피는

$x^3-3xy^2+2y^3=x^3-xy^2-2xy^2+2y^3$

$=x(x^2-y^2)-2y^2(x-y)$

$=x(x+y)(x-y)-2y^2(x-y)$

$=(x-y)(x^2+xy-2y^2)$

$=(x-y)(x+2y)(x-y)$

$=(x-y)^2(x+2y)$

정답_ ①

204

$f(x)$가 삼차다항식이므로 조건 (나)에 의하여

$f(x)=(x^2-3x+3)(ax+b)+x-3$ (a, b는 상수, $a\neq0$) ······ ㉠

으로 놓을 수 있다.

조건 (가)에 주어진 식 $(x-3)f(x+1)=xf(x)$의 양변에

$x=0$을 대입하면

$-3f(1)=0 \qquad \therefore f(1)=0$

$x=3$을 대입하면

$0=3f(3) \qquad \therefore f(3)=0$

㉠의 양변에 $x=1$, $x=3$을 각각 대입하면

$f(1)=a+b-2=0$, $f(3)=3(3a+b)=0$

$\therefore a+b=2$, $3a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$

$\therefore f(x)=(x^2-3x+3)(-x+3)+x-3$

$=-(x-3)(x^2-3x+3)+x-3$

$=-(x-3)(x^2-3x+3-1)$

$=-(x-3)(x^2-3x+2)$

$=-(x-1)(x-2)(x-3)$

정답_ $-(x-1)(x-2)(x-3)$

205

$x^4+5x^2+9=(x^4+6x^2+9)-x^2$

$=(x^2+3)^2-x^2$

$=(x^2+x+3)(x^2-x+3)$

$=(x^2+x+3)\{(x-1)^2+(x-1)+3\}$

따라서 $f(x)=x^2+x+3$ 또는 $f(x)=-(x^2+x+3)$이므로

$f(2)=4+2+3=9$ 또는 $f(2)=-9$

즉, 모든 $f(2)$의 값의 곱은

$9\times(-9)=-81$

정답_ ①

206

조건 (나)에 주어진 등식의 좌변을 인수분해하여 정리하면

$\{P(x)\}^3-\{Q(x)\}^3$

$=\{P(x)-Q(x)\}[\{P(x)\}^2+P(x)Q(x)+\{Q(x)\}^2]$

$=5[\{P(x)\}^2+P(x)Q(x)+\{Q(x)\}^2]$ ($\because$ 조건 (가))

$=5[\{P(x)-Q(x)\}^2+3P(x)Q(x)]$

$=5\{25+3P(x)Q(x)\}$ ($\because$ 조건 (가))

즉, $5\{25+3P(x)Q(x)\}=15x^4+60x^3+45x^2-30x+35$이므로

$25+3P(x)Q(x)=3x^4+12x^3+9x^2-6x+7$

$\therefore P(x)Q(x)=x^4+4x^3+3x^2-2x-6$

이때 $P(1)Q(1)=0$, $P(-3)Q(-3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)Q(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 4 & 3 & -2 & -6 \\ & & 1 & 5 & 8 & 6 \\ \hline -3 & 1 & 5 & 8 & 6 & \boxed{0} \\ & & -3 & -6 & -6 & \\ \hline & 1 & 2 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$P(x)Q(x)=(x-1)(x+3)(x^2+2x+2)$

이때 $P(x)$, $Q(x)$는 모두 계수와 상수항이 정수인 이차다항식이고 $P(x)$는 상수항이 양수인 이차식이므로 가능한 경우는 다음과 같다.

(i) $P(x)=x^2+2x+2$, $Q(x)=(x-1)(x+3)$일 때

$P(0)+Q(2)=2+5=7$

(ii) $P(x)=-(x-1)(x+3)$, $Q(x)=-(x^2+2x+2)$일 때

$P(0)+Q(2)=3+(-10)=-7$

(i), (ii)에서 $P(0)+Q(2)$의 최댓값은 7이다.

정답_ 7

207

$p=n^4-8n^2+4=n^4-4n^2+4-4n^2$

$=(n^2-2)^2-(2n)^2$

$=(n^2+2n-2)(n^2-2n-2)$

이때 p는 소수이고 $n^2+2n-2>n^2-2n-2$이므로

$n^2+2n-2=p$, $n^2-2n-2=1$

$n^2-2n-2=1$에서 $n^2-2n-3=0$

$(n-3)(n+1)=0 \qquad \therefore n=3$ ($\because$ n은 자연수)

따라서

$p=n^2+2n-2=3^2+2\times3-2=13$,

$q=n^3-n^2+3n-10=3^3-3^2+3\times3-10=17$

이므로

$p+q=13+17=30$

정답_ 30

208

$x^3+1-f(x)=(x+1)(x+a)^2$의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1+1-f(-1)=0 \qquad \therefore f(-1)=0$

이때 $f(x)$는 일차식이므로 $f(x)=k(x+1)$ (k는 0이 아닌 상수)로 놓을 수 있다.

$\therefore x^3+1-f(x)=x^3+1-k(x+1)$

$=(x+1)(x^2-x+1)-k(x+1)$

$=(x+1)(x^2-x+1-k)$

즉, $(x+1)(x^2-x+1-k)=(x+1)(x+a)^2$이므로

$x^2-x+1-k=(x+a)^2$

$x^2-x+1-k=x^2+2ax+a^2$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$-1=2a$, $1-k=a^2 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$, $k=\frac{3}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{4}(x+1)$이므로

$f(7)=\frac{3}{4}\times8=6$

정답_ ③

209

$f(a)=a^3+(3b-4)a^2+(3b^2-8b)a+b^2(b-4)$라고 하면

$f(-b)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(a)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -b & 1 & 3b-4 & 3b^2-8b & b^2(b-4) \\ & & -b & -2b^2+4b & -b^3+4b^2 \\ \hline & 1 & 2b-4 & b^2-4b & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(a)=(a+b)\{a^2+(2b-4)a+b^2-4b\}$

이때 $g(a)=a^2+(2b-4)a+b^2-4b$라고 하면 $g(-b)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $g(a)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrr} -b & 1 & 2b-4 & b^2-4b \\ & & -b & -b^2+4b \\ \hline & 1 & b-4 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서 $g(a)=(a+b)(a+b-4)$이므로

$f(a)=(a+b)^2(a+b-4)$

즉, $(a+b)^2(a+b-4)=0$이고 $(a+b)^2>0$이므로

$a+b-4=0 \qquad \therefore a+b=4$

$\therefore a=1$, $b=3$ 또는 $a=2$, $b=2$ 또는 $a=3$, $b=1$

한편, a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이고 모두 자연수이므로

$a+b>c$에서

$c=1$ 또는 $c=2$ 또는 $c=3$

따라서 삼각형의 세 변의 길이의 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)는

$(1, 3, 3)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(3, 1, 3)$

의 5개이다.

정답_ ②

참고 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 커야 하므로 다음의 경우는 삼각형의 세 변의 길이가 될 수 없다.

$a=1$, $b=3$, $c=1$ ⇨ $a+c<b$

$a=1$, $b=3$, $c=2$ ⇨ $a+c=b$

$a=3$, $b=1$, $c=1$ ⇨ $b+c<a$

$a=3$, $b=1$, $c=2$ ⇨ $b+c=a$

210

$(b+c)a^2+(c^2+bc)a-b^3-2b^2c-bc^2=0$에서

$(b+c)a^2+(b+c)ac-b(b^2+2bc+c^2)=0$

$(b+c)a^2+(b+c)ac-b(b+c)^2=0$

$(b+c)(a^2+ac-b^2-bc)=0$

$(b+c)\{(a^2-b^2)+(ac-bc)\}=0$

$(b+c)\{(a+b)(a-b)+(a-b)c\}=0$

$(b+c)(a-b)(a+b+c)=0$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$b+c>0$, $a+b+c>0$

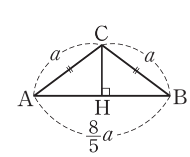
따라서 $a-b=0$이므로

$a=b$

한편, $2a+6b=5c$이므로 이 식에 $b=a$를 대입하면

$2a+6a=5c \qquad \therefore c=\frac{8}{5}a$

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{4}{5}a$

직각삼각형 BCH에서

$\overline{CH}=\sqrt{a^2-\left(\frac{4}{5}a\right)^2}=\frac{3}{5}a$ ($\because a>0$)

삼각형 ABC의 넓이가 60이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{8}{5}a\times\frac{3}{5}a=60$, $a^2=125$

$\therefore a=5\sqrt{5}$ ($\because a>0$)

따라서

$b=a=5\sqrt{5}$, $c=\frac{8}{5}a=8\sqrt{5}$

이므로 구하는 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$a+b+c=5\sqrt{5}+5\sqrt{5}+8\sqrt{5}=18\sqrt{5}$

정답_ ③

211

$f(n)=n^3+2n^2+2n-20$이라고 하면 $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(n)$을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & 2 & -20 \\ & & 2 & 8 & 20 \\ \hline & 1 & 4 & 10 & \boxed{0} \end{array}$$

$n^3+2n^2+2n-20=(n-2)(n^2+4n+10)$

$$\therefore \frac{n^3+2n^2+2n-20}{n^2+2n-8}=\frac{(n-2)(n^2+4n+10)}{(n+4)(n-2)}$$
$$=\frac{n^2+4n+10}{n+4}$$
$$=\frac{n(n+4)+10}{n+4}$$
$$=n+\frac{10}{n+4}$$

이 식의 값이 자연수가 되려면 $\frac{10}{n+4}$이 자연수가 되어야 한다.

따라서 $n+4$는 10의 약수이고 $n>1$에서 $n+4>5$이므로

$n+4=10$ $\quad\therefore n=6$

정답_ ④

212

$2025=x$로 놓으면

$$(\text{주어진 식})=\frac{x^4-2x^2-3(x-2)-8}{x^3-x^2-(x+2)}$$
$$=\frac{x^4-2x^2-3x-2}{x^3-x^2-x-2}$$

$f(x)=x^4-2x^2-3x-2$라고 하면 $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & -2 & -3 & -2 \\ & & -1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^4-2x^2-3x-2=(x+1)(x^3-x^2-x-2)$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\frac{x^4-2x^2-3x-2}{x^3-x^2-x-2}$$
$$=\frac{(x+1)(x^3-x^2-x-2)}{x^3-x^2-x-2}$$
$$=x+1=2025+1=2026$$

정답_ ③

213

$19=x$로 놓으면

$19^4+3\times19^3-3\times19^2-11\times19-6$

$=x^4+3x^3-3x^2-11x-6$

$f(x)=x^4+3x^3-3x^2-11x-6$이라고 하면 $f(-1)=0$, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 3 & -3 & -11 & -6 \\ & & -1 & -2 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 2 & -5 & -6 & \boxed{0} \\ & & 2 & 8 & 6 & \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+4x+3)$

$=(x+1)(x-2)(x+1)(x+3)$

$=(x+1)^2(x-2)(x+3)$

$\therefore f(19)=20^2\times17\times22$

$=(2^2\times5)^2\times17\times(2\times11)$

$=2^5\times5^2\times11\times17$

따라서 주어진 식은 $\sqrt{\frac{2^5\times5^2\times11\times17}{N}}$이고, 이 식이 자연수가 되려면 근호 안의 식이 (자연수)^{2}의 꼴이 되어야 하므로 자연수 N은

$2^5\times5^2\times11\times17$, $2^5\times11\times17$,

$2^3\times5^2\times11\times17$, $2^3\times11\times17$,

$2\times5^2\times11\times17$, $2\times11\times17$

의 6개이다.

정답_ ⑤

Ⅱ 방정식과 부등식

04 복소수

214

① $\sqrt{3}i^2=-\sqrt{3}$은 실수이다.
② $\sqrt{5}i=0+\sqrt{5}i$의 실수부분은 0, 허수부분은 $\sqrt{5}$이다.
③ 0은 복소수이다.
④ $4i+i^2=-1+4i$의 실수부분은 -1, 허수부분은 4이다.
⑤ 무리수는 실수이므로 모두 허수가 아니다.
따라서 옳은 것은 ④, ⑤이다.

정답_ ④, ⑤

215

$i^2=-1$이므로 i^2, 25, $1-\pi$, $\sqrt{10}+4$는 실수이다.
따라서 허수는 $-3i$, $6+2i$의 2개이다.

정답_ 2

216

$$(1+2i)(1-3i)=1-3i+2i-6i^2$$
$$=1-i+6=7-i$$

따라서 $a=7$, $b=-1$이므로
$a-b=7-(-1)=8$

정답_ ⑤

217

$$(4+i)(1+2i)+\frac{25i}{4+3i}$$
$$=4+8i+i+2i^2+\frac{25i(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}$$
$$=4+9i-2+\frac{25(3+4i)}{25}$$
$$=2+9i+3+4i$$
$$=5+13i$$

정답_ ⑤

218

$$x=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i+i^2}{2}=\frac{-2i}{2}=-i$$
$$y=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{2}=\frac{2i}{2}=i$$
$\therefore x+y=-i+i=0$

정답_ ③

219

$$z_1=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1+2i+i^2}{2}=\frac{2i}{2}=i$$
$$z_2=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+2i}{2}=1+i$$
$\therefore z_1z_2=i(1+i)=i+i^2=-1+i$
따라서 $a=-1$, $b=1$이므로
$ab=(-1)\times1=-1$

정답_ ②

220

$x=1-2i$에서 $x-1=-2i$
양변을 제곱하면
$x^2-2x+1=-4$ $\quad\therefore x^2-2x+5=0$
$\therefore x^3-2x^2+5x-10=x(x^2-2x+5)-10=-10$

정답_ ⑤

221

$x=\dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$에서 $3x-1=\sqrt{2}i$
양변을 제곱하면 $9x^2-6x+1=-2$
$\therefore 9x^2-6x=-3$
$\therefore 9x^3-6x^2+5=x(9x^2-6x)+5=x\times(-3)+5$
$$=\frac{1+\sqrt{2}i}{3}\times(-3)+5=4-\sqrt{2}i$$

정답_ ②

222

$x=\dfrac{i}{1+3i}=\dfrac{i(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{3+i}{10}$에서
$10x-3=i$
양변을 제곱하면
$100x^2-60x+9=-1$, $100x^2-60x+10=0$
$\therefore 10x^2-6x+1=0$
$\therefore 20x^4-12x^3+2x^2-x+\dfrac{13}{10}=2x^2(10x^2-6x+1)-x+\dfrac{13}{10}$
$$=-\frac{3+i}{10}+\frac{13}{10}=1-\frac{i}{10}$$

정답_ ②

223

$x^2=\dfrac{17}{1-4i}=\dfrac{17(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)}=1+4i$에서
$x^2-1=4i$
양변을 제곱하면 $x^4-2x^2+1=-16$
$\therefore x^4-2x^2+17=0$
$x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면
$x^3-2x+\dfrac{17}{x}=0$
$\therefore x^4+x^3-6x^2-2x+\dfrac{17}{x}=x^4-6x^2+\left(x^3-2x+\dfrac{17}{x}\right)$
$$=x^4-6x^2=(x^4-2x^2)-4x^2$$
$$=-17-4(1+4i)=-21-16i$$

정답_ ③

224

$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$ …… ㉠

이때

$x+y=(4+i)+(4-i)=8$, $xy=(4+i)(4-i)=17$

이므로 ㉠에서

$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{8^2-2\times17}{17}=\frac{30}{17}$

정답_ ④

225

$2x^2+2y^2-x^3y-xy^3=2(x^2+y^2)-xy(x^2+y^2)$

$=(x^2+y^2)(2-xy)$

$=\{(x+y)^2-2xy\}(2-xy)$ …… ㉠

이때

$x+y=(2-i)+(2+i)=4$, $xy=(2-i)(2+i)=5$

이므로 ㉠에서

$2x^2+2y^2-x^3y-xy^3=(4^2-2\times5)(2-5)=-18$

정답_ -18

226

$x^3+y^3-x-y=(x+y)^3-3xy(x+y)-(x+y)$ …… ㉠

이때

$x=\frac{17}{1-4i}=\frac{17(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)}=1+4i$,

$y=\frac{17}{1+4i}=\frac{17(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}=1-4i$

이므로

$x+y=(1+4i)+(1-4i)=2$, $xy=(1+4i)(1-4i)=17$

따라서 ㉠에서

$x^3+y^3-x-y=2^3-3\times17\times2-2=-96$

정답_ ①

227

z^2이 양의 실수가 되려면 z는 0이 아닌 실수이어야 한다.

즉, $z=3-x+(4+2x)i$에서

$3-x\neq0$, $4+2x=0$　　$\therefore x=-2$

정답_ ①

참고　복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여

① z^2이 실수 ⇨ z는 실수 또는 순허수 ⇨ $a=0$ 또는 $b=0$

② z^2이 양의 실수 ⇨ z는 0이 아닌 실수 ⇨ $a\neq0$, $b=0$

③ z^2이 음의 실수 ⇨ z는 순허수 ⇨ $a=0$, $b\neq0$

228

z^2이 음의 실수가 되므로 z는 순허수이다.

즉, $z=1+3i-x(1-2i)=1-x+(3+2x)i$에서

$1-x=0$, $3+2x\neq0$　　$\therefore x=1$

따라서 $z=5i$이므로

$\frac{z}{2-i}=\frac{5i}{2-i}=\frac{5i(2+i)}{(2-i)(2+i)}=i(2+i)=-1+2i$

정답_ ②

229

$(a^2+3a+2)+(a^2+2a)i=z$로 놓으면 z^2이 음의 실수가 되므로 z는 순허수이다.

$\therefore a^2+3a+2=0$, $a^2+2a\neq0$

$a^2+3a+2=0$에서 $(a+1)(a+2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=-2$ …… ㉠

$a^2+2a\neq0$에서 $a(a+2)\neq0$

$\therefore a\neq0$이고 $a\neq-2$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=-1$

정답_ ③

230

z^2이 실수가 되려면 z가 실수 또는 순허수이어야 한다.

즉, $z=a(a+i)-5a+4-3i=(a^2-5a+4)+(a-3)i$에서

$a^2-5a+4=0$ 또는 $a-3=0$

(ⅰ) $a^2-5a+4=0$에서 $(a-1)(a-4)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=4$

(ⅱ) $a-3=0$에서 $a=3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$1+4+3=8$

정답_ ⑤

231

$2z+\bar{z}=2(a+bi)+(a-bi)=3a+bi$

즉, $3a+bi=3+5i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3a=3$, $b=5$　　$\therefore a=1$, $b=5$

$\therefore a+b=1+5=6$

정답_ ①

232

$\frac{40i}{6+ai}=1+b+6i$에서 $(6+ai)\{(1+b)+6i\}=40i$

$\therefore (6+6b-6a)+\{36+a(1+b)\}i=40i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$6+6b-6a=0$, $36+a(1+b)=40$

$6+6b-6a=0$에서 $a=1+b$이므로

$36+a\times a=40$, $a^2=4$　　$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

$\therefore b=a-1=2-1=1$

$\therefore a+b=2+1=3$

정답_ 3

233

$z^2=2+i$이므로

$z^4+3z^2-ai=(2+i)^2+3(2+i)-ai$

$=(3+4i)+(6+3i)-ai$

$=9+(7-a)i$

즉, $9+(7-a)i=b+2i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $9=b$, $7-a=2$　　$\therefore a=5$, $b=9$

$\therefore ab=5\times9=45$

정답_ ④

234

$$\frac{a+i}{a-i}=\frac{(a+i)^2}{(a-i)(a+i)}=\frac{a^2-1+2ai}{a^2+1}$$
$$=\frac{a^2-1}{a^2+1}+\frac{2a}{a^2+1}i$$

즉, $\frac{a^2-1}{a^2+1}+\frac{2a}{a^2+1}i=x+yi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $x=\frac{a^2-1}{a^2+1}$, $y=\frac{2a}{a^2+1}$

$$\therefore x^2+y^2=\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2+\left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2=\frac{(a^2-1)^2+4a^2}{(a^2+1)^2}$$
$$=\frac{a^4+2a^2+1}{(a^2+1)^2}=\frac{(a^2+1)^2}{(a^2+1)^2}=1$$

정답_ ①

235

$f(x)=x^2+ax+b$에서

$f(1-i)=(1-i)^2+a(1-i)+b=(a+b)-(a+2)i$

즉, $(a+b)-(a+2)i=0$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a+b=0$, $a+2=0$ $\quad \therefore a=-2$, $b=2$

따라서 $f(x)=x^2-2x+2$이므로

$f(2)=4-4+2=2$

정답_ ③

236

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$이다.

① $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$이므로 실수이다.

② $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$이므로 $b\neq0$이면 허수이다.

③ $z^2+\bar{z}^2=(a+bi)^2+(a-bi)^2=2(a^2-b^2)$이므로 $a\neq\pm b$이면 $z^2+\bar{z}^2\neq0$이다.

④ $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=0$이면 $a=b=0$이므로 $z=0$이다.

⑤ $\frac{z}{\bar{z}}=-1$이면 $z=-\bar{z}$이므로

$a+bi=-(a-bi)$, $2a=0$ $\quad \therefore a=0$

즉, $z=bi$ $(b\neq0)$이므로 z는 순허수이다.

따라서 옳은 것은 ④, ⑤이다.

정답_ ④, ⑤

237

$\bar{z}=iz$에서 $a-bi=i(a+bi)$ $\quad \therefore a-bi=-b+ai$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-b$ $\quad \therefore z=a-ai$

① $z+\bar{z}=(a-ai)+(a+ai)=2a$

② $\bar{z}=iz$이므로 $z=\frac{\bar{z}}{i}=-i\bar{z}$

③ $z-\bar{z}=(a-ai)-(a+ai)=-2ai$

④ $z\bar{z}=(a-ai)(a+ai)=2a^2$

⑤ $\bar{z}=iz$이므로 $\frac{\bar{z}}{z}-\frac{z}{\bar{z}}=\frac{iz}{z}-\frac{z}{iz}=i-\frac{1}{i}=2i$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

정답_ ③

238

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$이다.

ㄱ. $z^2-z\bar{z}+\bar{z}^2=(a+bi)^2-(a+bi)(a-bi)+(a-bi)^2$
$=(a^2-b^2+2abi)-(a^2+b^2)+(a^2-b^2-2abi)$
$=a^2-3b^2$

이므로 $z^2-z\bar{z}+\bar{z}^2$은 실수이다. (참)

ㄴ. $\frac{\bar{z}}{z}=-i$에서 $\bar{z}=-iz$이므로

$z^2+\bar{z}^2=z^2+(-iz)^2=z^2-z^2=0$ (참)

ㄷ. $\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{a+bi}+\frac{1}{a-bi}$
$=\frac{a-bi+a+bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{2a}{a^2+b^2}$

이므로 $\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}$은 실수이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ③

239

$\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta}=\alpha(\bar{\alpha}+\bar{\beta})+\beta(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$
$=(\bar{\alpha}+\bar{\beta})(\alpha+\beta)$
$=(\overline{\alpha+\beta})(\alpha+\beta)$

이때 $\alpha+\beta=(5-2i)+(1+3i)=6+i$이므로

$\overline{\alpha+\beta}=6-i$

$\therefore \alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta}=(\overline{\alpha+\beta})(\alpha+\beta)$
$=(6-i)(6+i)=37$

정답_ ③

240

$iz=-\bar{z}$에서 $\frac{\bar{z}}{z}=-i$, $\frac{z}{\bar{z}}=\overline{\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)}=i$

$\therefore \left(\frac{\bar{z}}{z}-\frac{z}{\bar{z}}\right)^2=(-i-i)^2=(-2i)^2=(-2)^2i^2$
$=4\times(-1)=-4$

정답_ ①

241

$\bar{\alpha}-\bar{\beta}=4+i$에서 $\overline{\alpha-\beta}=4+i$ $\quad \therefore \alpha-\beta=4-i$

$\bar{\alpha}\bar{\beta}=2-5i$에서 $\overline{\alpha\beta}=2-5i$ $\quad \therefore \alpha\beta=2+5i$

$\therefore (\alpha+2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha-\beta)-4$
$=(2+5i)-2(4-i)-4$
$=-10+7i$

따라서 $x=-10$, $y=7$이므로

$x+y=-10+7=-3$

정답_ ②

242

$z=x^2-(5-i)x+4-2i$
$=(x^2-5x+4)+(x-2)i$

$\bar{z}=-z$가 성립하려면 z는 0 또는 순허수, 즉 실수부분이 0이어야 하므로

$x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은

$1+4=5$

정답_ ⑤

참고 $z=0$이면 $x^2-5x+4=0$이고 $x-2=0$이어야 한다. 그런데 두 식의 값을 동시에 0이 되게 하는 x의 값은 존재하지 않는다. 따라서 z는 순허수이어야 한다.

243

$\alpha+\beta+\gamma=5-i$에서

$\beta+\gamma=5-i-\alpha$, $\gamma+\alpha=5-i-\beta$, $\alpha+\beta=5-i-\gamma$

$\therefore \alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\gamma}+\gamma\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\overline{\beta}\gamma+\overline{\gamma}\alpha$

$=\overline{\alpha}(\beta+\gamma)+\overline{\beta}(\alpha+\gamma)+\overline{\gamma}(\alpha+\beta)$

$=\overline{\alpha}(5-i-\alpha)+\overline{\beta}(5-i-\beta)+\overline{\gamma}(5-i-\gamma)$

$=(5-i)\overline{\alpha}-\alpha\overline{\alpha}+(5-i)\overline{\beta}-\beta\overline{\beta}+(5-i)\overline{\gamma}-\gamma\overline{\gamma}$

$=(5-i)(\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma})-9$

$=(5-i)(\overline{\alpha+\beta+\gamma})-9$

$=(5-i)(\overline{5-i})-9$

$=(5-i)(5+i)-9$

$=26-9=17$

정답_ ②

244

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라고 하면 $\overline{z}=a-bi$

$\therefore (2-i)\overline{z}+4iz=(2-i)(a-bi)+4i(a+bi)$

$=2a-2bi-ai-b+4ai-4b$

$=(2a-5b)+(3a-2b)i$

즉, $(2a-5b)+(3a-2b)i=1+7i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a-5b=1$, $3a-2b=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=1$

따라서 $z=3+i$이므로

$z+\overline{z}=(3+i)+(3-i)=6$

정답_ ④

245

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라고 하면 $\overline{z}=a-bi$

$\therefore 5(z+\overline{z})-2(z-\overline{z})=5(a+bi+a-bi)-2\{a+bi-(a-bi)\}$

$=10a-4bi$

즉, $10a-4bi=10-16i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $10a=10$, $-4b=-16$

$\therefore a=1$, $b=4$

따라서 $z=1+4i$이므로

$z\overline{z}=(1+4i)(1-4i)=17$

정답_ ③

246

$z=1+ai$ (a는 실수)라고 하면 $\overline{z}=1-ai$

$\therefore \dfrac{z}{2+i}+\dfrac{\overline{z}}{2-i}=\dfrac{1+ai}{2+i}+\dfrac{1-ai}{2-i}$

$=\dfrac{(1+ai)(2-i)+(1-ai)(2+i)}{(2+i)(2-i)}$

$=\dfrac{(2+a)+(2a-1)i+(2+a)-(2a-1)i}{5}$

$=\dfrac{2a+4}{5}$

즉, $\dfrac{2a+4}{5}=2$이므로 $2a+4=10$ $\therefore a=3$

$\therefore z\overline{z}=(1+3i)(1-3i)=10$

정답_ ⑤

247

$z=x+yi$ (x, y는 실수)이므로 $\overline{z}=x-yi$

$z+\overline{z}=6$에서 $(x+yi)+(x-yi)=6$

$2x=6$ $\therefore x=3$ …… ㉠

$z\overline{z}=25$에서 $(x+yi)(x-yi)=25$

$x^2+y^2=25$ $\therefore y^2=16$ ($\because$ ㉠)

$\therefore x^2-y^2=3^2-16=-7$

정답_ ⑤

248

$z=a+bi$ (a, b는 0이 아닌 실수)라고 하면 $\overline{z}=a-bi$

$\overline{z}=\dfrac{z^2}{6i}$에서 $a-bi=\dfrac{a^2-b^2+2abi}{6i}$

$6i(a-bi)=a^2-b^2+2abi$

$\therefore 6b+6ai=a^2-b^2+2abi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$6b=a^2-b^2$, $6a=2ab$

$6a=2ab$에서 $2a(b-3)=0$ $\therefore b=3$ ($\because a\neq0$)

이것을 $6b=a^2-b^2$에 대입하면

$18=a^2-9$, $a^2=27$ $\therefore a=\pm3\sqrt{3}$

따라서 $z=\pm3\sqrt{3}+3i$이므로

$\left(\dfrac{z-3i}{i}\right)^2=\left(\dfrac{\pm3\sqrt{3}}{i}\right)^2=\dfrac{27}{-1}=-27$

정답_ ①

249

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라고 하면 $\overline{z}=a-bi$

$\dfrac{\overline{z}}{z}+\dfrac{z}{\overline{z}}=-2$에서 $\dfrac{a-bi}{a+bi}+\dfrac{a+bi}{a-bi}=-2$

$\dfrac{(a-bi)^2+(a+bi)^2}{(a+bi)(a-bi)}=-2$

$\dfrac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}=-2$, $2a^2-2b^2=-2a^2-2b^2$

$4a^2=0$ $\therefore a=0$

즉, $z=bi$이고 $z+z^2+z^3=-4+6i$에서

$bi+b^2i^2+b^3i^3=-4+6i$

$\therefore -b^2+(b-b^3)i=-4+6i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-b^2=-4$, $b-b^3=6$

즉, $b^2=4$, $b-b^2b=6$이므로

$b-4b=6$, $-3b=6$ $\therefore b=-2$

따라서 $z=-2i$이므로

$z^2+\bar{z}^2=(-2i)^2+(2i)^2=-4-4=-8$

정답_ ①

250

$i=i^5=i^9=\cdots=i^{997}$,

$i^2=i^6=i^{10}=\cdots=i^{998}=-1$,

$i^3=i^7=i^{11}=\cdots=i^{999}=-i$,

$i^4=i^8=i^{12}=\cdots=i^{1000}=1$이므로

$i+i^2+i^3+\cdots+i^{1000}$

$=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)$

$=0$

정답_ ④

251

$i^3+i^6+i^9+\cdots+i^{66}$

$=(i^3+i^6+i^9+i^{12})+\cdots+(i^{51}+i^{54}+i^{57}+i^{60})+i^{63}+i^{66}$

$=(-i-1+i+1)+\cdots+(-i-1+i+1)-i-1$

$=-1-i$

정답_ ③

252

$i+2i^2+3i^3+4i^4=i-2-3i+4=2-2i$

$5i^5+6i^6+7i^7+8i^8=5i-6-7i+8=2-2i$

$\vdots$

$37i^{37}+38i^{38}+39i^{39}+40i^{40}=37i-38-39i+40=2-2i$

$\therefore i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+40i^{40}$

$=\underbrace{(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)}_{10개}$

$=10(2-2i)$

$=20-20i$

따라서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=20$, $b=-20$이므로

$a-b=20-(-20)=40$

정답_ ③

253

한 자리 자연수 m, n에 대하여 i^m과 $(-i)^n$의 값은 각각 1, -1, i, $-i$ 중 하나이므로 $i^m-(-i)^n=2$가 성립하려면

$i^m=1$, $(-i)^n=-1$

이어야 한다.

$i^m=1$을 만족시키는 m의 값은 4, 8이고, $(-i)^n=-1$을 만족시키는 n의 값은 2, 6이다.

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$2\times2=4$

정답_ ②

254

한 자리 자연수 m, n에 대하여 i^m과 $(-i)^n$의 값은 각각 1, -1, i, $-i$ 중 하나이다.

$(1+i)\{i^m+(-i)^n\}$의 값이 양의 실수이므로 $i^m+(-i)^n$의 값은 $1+i$의 켤레복소수 $1-i$가 되어야 한다.

(i) $i^m=1$, $(-i)^n=-i$일 때

$i^m=1$을 만족시키는 m의 값은 4, 8이고 $(-i)^n=-i$를 만족시키는 n의 값은 1, 5, 9이다.

따라서 $m+n$의 값이 될 수 있는 것은 5, 9, 13, 17이다.

(ii) $i^m=-i$, $(-i)^n=1$일 때

$i^m=-i$를 만족시키는 m의 값은 3, 7이고 $(-i)^n=1$을 만족시키는 n의 값은 4, 8이다.

따라서 $m+n$의 값이 될 수 있는 것은 7, 11, 15이다.

(i), (ii)에서 $m+n$의 값이 될 수 있는 것은

5, 7, 9, 11, 13, 15, 17

이므로 $m+n$의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

255

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\therefore \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{20}=(-i)^{10}+i^{20}$

$=-1+1=0$

정답_ ③

256

$z^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1$

$\therefore z^8+z^{12}=(z^4)^2+(z^4)^3=(-1)^2+(-1)^3=0$

정답_ ③

257

$z=\left(\frac{i-1}{\sqrt{2}i}\right)^2=\frac{-2i}{-2}=i$이므로

$z+z^2+z^3+\cdots+z^{206}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)+\cdots$

$+(i^{201}+i^{202}+i^{203}+i^{204})+i^{205}+i^{206}$

$=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)+i-1$

$=-1+i$

따라서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=-1$, $b=1$이므로

$a^2+b^2=1+1=2$

정답_ 2

258

$iz=\sqrt{2}$에서 $z=\frac{\sqrt{2}}{i}=\frac{\sqrt{2}i}{i^2}=-\sqrt{2}i$이므로

$z^2=-2$, $z^3=2\sqrt{2}i$, $z^4=4$, $z^5=-4\sqrt{2}i$, $z^6=-8$, $z^7=8\sqrt{2}i$

$\therefore z+z^2+z^3+\cdots+z^7$

$=-\sqrt{2}i+(-2)+2\sqrt{2}i+4+(-4\sqrt{2}i)+(-8)+8\sqrt{2}i$

$=-6+5\sqrt{2}i$

따라서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=-6$, $b=5\sqrt{2}$이므로

$ab=-6\times5\sqrt{2}=-30\sqrt{2}$

정답_ ①

259

$z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2z+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하여 정리하면 $z^2+z+1=0$이므로

$z^2=-z-1=-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}-1=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$z^3=z^2z=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\times\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=1$

ㄱ. $f(1)+f(2)=z+z^2=-1$ (참)

ㄴ. $f(3)\times f(6)=z^3\times z^6=1\times1=1$ (참)

ㄷ. $f(3)=z^3=1$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)=z+z^2+z^3=z+z^2+1=0$

$f(4)+f(5)+f(6)=z^4+z^5+z^6=z+z^2+1=0$

즉, 자연수 k에 대하여

$f(3k-2)+f(3k-1)+f(3k)=0$

이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(30)$

$=\{f(1)+f(2)+f(3)\}+\cdots+\{f(28)+f(29)+f(30)\}$

$=0+\cdots+0=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

260

① $\sqrt{-3}\sqrt{-3}=-\sqrt{(-3)\times(-3)}=-\sqrt{9}=-3$

② $\sqrt{-2}\sqrt{7}=\sqrt{(-2)\times7}=\sqrt{-14}=\sqrt{14}i$

③ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-27}}=-\sqrt{\frac{3}{-27}}=-\sqrt{-\frac{1}{9}}=-\frac{1}{3}i$

④ $\frac{\sqrt{-15}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{-15}{5}}=\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$

⑤ $\frac{\sqrt{-20}}{\sqrt{-10}}=\sqrt{\frac{-20}{-10}}=\sqrt{2}$

따라서 옳은 것은 ②, ④이다.

정답_ ②, ④

참고 위의 계산은 음수의 제곱근의 성질을 이용하여 계산한 것이다. 그런데 음수의 제곱근의 정의, 즉 $a>0$일 때 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$를 이용하여 다음과 같이 계산할 수도 있다.

① $\sqrt{-3}\sqrt{-3}=\sqrt{3}i\times\sqrt{3}i=3i^2=-3$

② $\sqrt{-2}\sqrt{7}=\sqrt{2}i\times\sqrt{7}=\sqrt{14}i$

③ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-27}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}i}=\frac{i}{\sqrt{9}i^2}=-\frac{1}{3}i$

④ $\frac{\sqrt{-15}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}i}{\sqrt{5}}=\sqrt{3}i$

⑤ $\frac{\sqrt{-20}}{\sqrt{-10}}=\frac{\sqrt{20}i}{\sqrt{10}i}=\sqrt{2}$

261

$\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{-5}}+\frac{\sqrt{-64}}{\sqrt{-2}}+\sqrt{-4}\sqrt{-8}=-\sqrt{\frac{125}{-5}}+\sqrt{\frac{-64}{-2}}-\sqrt{32}$

$=-5i+4\sqrt{2}-4\sqrt{2}$

$=-5i$

따라서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=0$, $b=-5$이므로

$a-b=0-(-5)=5$

정답_ 5

262

$\sqrt{16}\sqrt{-1}+\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{-5}}-\frac{2-\sqrt{-4}}{2+\sqrt{-4}}=4i+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}i}-\frac{2-2i}{2+2i}$

$=4i-2i-\frac{(2-2i)^2}{(2+2i)(2-2i)}$

$=2i-\frac{-8i}{8}$

$=2i+i=3i$

정답_ ①

263

$z=\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-2}(\sqrt{-3}+\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}i(\sqrt{3}i+\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}(-1+i)}$

$=\frac{2(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=-1-i$

$\therefore z^2-\bar{z}^2=(-1-i)^2-(-1+i)^2$

$=2i-(-2i)=4i$

정답_ ④

264

$0<a<1$이므로 $1-a>0$, $2a-7<0$

$\therefore \sqrt{-a}\sqrt{-a}+\sqrt{\frac{(a-1)^2}{1-a}}\sqrt{1-a}-|2a-7|$

$=-\sqrt{(-a)\times(-a)}+\sqrt{1-a}\sqrt{1-a}-(-2a+7)$

$=-\sqrt{a^2}+\sqrt{(1-a)^2}+2a-7$

$=-a+1-a+2a-7=-6$

정답_ -6

265

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0$, $b<0$

① $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=|a|\sqrt{b}=-a\sqrt{b}$

③ $\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}\sqrt{b^2}=\sqrt{a}|b|=-b\sqrt{a}$

④ $\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{(-a)\times(-b)}=\sqrt{ab}$

⑤ $\sqrt{-a}\sqrt{b}=\sqrt{(-a)\times b}=\sqrt{-ab}$

따라서 항상 옳은 것은 ②이다.

정답_ ②

266

$\sqrt{a-7}\sqrt{2-a}=-\sqrt{(a-7)(2-a)}$이므로

$a-7<0$, $2-a<0$ 또는 $a-7=0$ 또는 $2-a=0$

$\therefore 2\le a\le7$

따라서 $a-8<0$, $-a<0$이므로

$\sqrt{(a-8)^2}-\sqrt{(-a)^2}=|a-8|-|-a|$

$=-(a-8)-a$

$=-2a+8$

정답_ ②

267

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이므로 $a>0$, $b<0$

ㄱ. $\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}|b|=-b\sqrt{a}$ (거짓)

ㄴ. $-a<0$, $-b>0$이므로

$\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{(-a)\times(-b)}=\sqrt{ab}$ (참)

ㄷ. $\frac{ab}{\sqrt{a^2b}}=\frac{ab}{|a|\sqrt{b}}=\frac{ab}{a\sqrt{b}}=\sqrt{b}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ④

268

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$이므로 $a<0$, $b>0$

$\sqrt{a}\sqrt{c}=-\sqrt{ac}$이므로 $a<0$, $c<0$

따라서 $b-a>0$, $c-b<0$이므로

$$|b-a|+\sqrt{c^2}+|c-b|=b-a-c-(c-b)$$
$$=-a+2b-2c$$

정답_ ⑤

269

α^2이 양의 실수이므로 α는 0이 아닌 실수이어야 한다.

즉, $\alpha=(1+4i)x+8i-5y=x-5y+(4x+8)i$에서

$x-5y\neq0$, $4x+8=0$ $\quad\therefore x=-2$, $y\neq-\frac{2}{5}$ ······ ㉠

······ ❶

β^2이 음의 실수이므로 β는 순허수이어야 한다.

즉, $\beta=(3-2i)x-i+4y=3x+4y-(2x+1)i$에서

$3x+4y=0$, $2x+1\neq0$

이때 ㉠에서 $x=-2$이므로 $-6+4y=0$ $\quad\therefore y=\frac{3}{2}$ ······ ❷

$\therefore xy=-2\times\frac{3}{2}=-3$ ······ ❸

정답_ -3

채점 기준	비율
❶ α가 0이 아닌 실수임을 이용하여 x의 값 구하기	40 %
❷ β가 순허수임을 이용하여 y의 값 구하기	40 %
❸ xy의 값 구하기	20 %

270

$\overline{\alpha^2}-\overline{\beta^2}=-4+7i$에서 $\overline{\alpha^2-\beta^2}=-4+7i$이므로

$\alpha^2-\beta^2=-4-7i$, $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=-4-7i$

$$\therefore \alpha-\beta=\frac{-4-7i}{\alpha+\beta}=\frac{-4-7i}{1-2i}=\frac{(-4-7i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$
$$=\frac{10-15i}{5}=2-3i \text{ ······ ❶}$$

$\alpha+\beta=1-2i$, $\alpha-\beta=2-3i$를 연립하여 풀면

$\alpha=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$, $\beta=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ ······ ❷

$\therefore \alpha\beta=\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{1}{2}+2i$

$\therefore 4\alpha\beta\times\overline{\alpha\beta}=4\left(\frac{1}{2}+2i\right)\left(\frac{1}{2}-2i\right)=4\times\frac{17}{4}=17$ ······ ❸

정답_ 17

채점 기준	비율
❶ $\alpha-\beta$의 값 구하기	40 %
❷ α, β의 값 구하기	30 %
❸ $4\alpha\beta\times\overline{\alpha\beta}$의 값 구하기	30 %

271

$z=x+yi$ (x, y는 실수)라고 하면 $\overline{z}=x-yi$

$\therefore z^2=(x+yi)^2=(x^2-y^2)+2xyi$ ······ ❶

즉, $(x^2-y^2)+2xyi=3+2i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2-y^2=3$, $xy=1$ ······ ❷

한편, $z\overline{z}=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2$이고

$(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=3^2+4=13$이므로

$z\overline{z}=x^2+y^2=\sqrt{13}$ ($\because x^2>0$, $y^2>0$) ······ ❸

정답_ $\sqrt{13}$

채점 기준	비율
❶ z^2을 $p+qi$ (p, q는 실수)의 꼴로 나타내기	40 %
❷ x^2-y^2, xy의 값 구하기	20 %
❸ $z\overline{z}$의 값 구하기	40 %

272

$(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+(i^4+i^5)$

$=(i-1)+(-1-i)+(-i+1)+(1+i)=0$ ······ ❶

이므로

(주어진 식)

$=\{(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+(i^4+i^5)\}$

$\quad+\{(i^5+i^6)+(i^6+i^7)+(i^7+i^8)+(i^8+i^9)\}$

$\quad+\cdots+\{(i^{97}+i^{98})+(i^{98}+i^{99})+(i^{99}+i^{100})+(i^{100}+i^{101})\}$

$\quad+(i^{101}+i^{102})$

$=0+0+\cdots+0+i-1$ ······ ❷

$=-1+i$ ······ ❸

정답_ $-1+i$

채점 기준	비율
❶ $(i+i^2)+\cdots+(i^4+i^5)=0$임을 알기	40 %
❷ 주어진 식 간단히 하기	40 %
❸ 주어진 식의 값 구하기	20 %

273

$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$이므로

$z^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z^3=z^2z=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=i$ ······ ❶

$\therefore z^6=(z^3)^2=i^2=-1$ ······ ❷

따라서 $z^n=-1$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 6이다. ······ ❸

정답_ 6

채점 기준	비율
❶ $z^3=i$임을 알기	50 %
❷ $z^6=-1$임을 알기	30 %
❸ n의 최솟값 구하기	20 %

274

$(1-i)^{2n}=\{(1-i)^2\}^n=(-2i)^n=2^n(-i)^n$

즉, $2^n(-i)^n=2^ni$이므로 $(-i)^n=i$ ❶

이때 $(-i)^n$의 값은 $-i$, -1, i, 1이 반복되므로 $(-i)^n=i$를 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 값은

$n=3, 7, 11, \cdots, 99$ ❷

따라서 구하는 자연수 n의 개수는 25이다. ❸

정답_ 25

채점 기준	비율
❶ $(-i)^n=i$임을 알기	40 %
❷ n의 값 구하기	40 %
❸ n의 개수 구하기	20 %

275

$$(2+\sqrt{3}i)\triangle(2-\sqrt{3}i)=\frac{2-\sqrt{3}i}{2+\sqrt{3}i}+\frac{2+\sqrt{3}i}{2-\sqrt{3}i}$$
$$=\frac{(2-\sqrt{3}i)^2+(2+\sqrt{3}i)^2}{(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)}$$
$$=\frac{(1-4\sqrt{3}i)+(1+4\sqrt{3}i)}{7}=\frac{2}{7}$$

정답_ ④

276

z^2이 실수가 되려면 z는 실수 또는 순허수이어야 하므로

$m-n=0$ 또는 $m+n-4=0$이어야 한다.

즉, $m=n$ 또는 $m+n=4$

(i) $m=n$일 때

$m=n$을 만족시키는 5 이하의 두 자연수 m, n의 모든 순서쌍은

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$

(ii) $m+n=4$일 때

$m+n=4$를 만족시키는 5 이하의 두 자연수 m, n의 모든 순서쌍은

$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$

(i), (ii)에서 $(2, 2)$는 중복되므로 z^2이 실수가 되도록 하는 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는 7이다.

정답_ ②

277

$z=a+bi$, $w=c+di$ (a, b, c, d는 0이 아닌 실수)라고 하면

$\overline{z}=a-bi$, $\overline{w}=c-di$

ㄱ. $z^2+\overline{z}^2=(a+bi)^2+(a-bi)^2=2a^2-2b^2$

이므로 $z^2+\overline{z}^2$은 실수이다.

ㄴ. $zw-\overline{z}\,\overline{w}=(a+bi)(c+di)-(a-bi)(c-di)$

$=2(ad+bc)i$

이때 $ad\neq-bc$이면 $zw-\overline{z}\,\overline{w}$는 순허수가 된다.

ㄷ. $\dfrac{z-\overline{z}}{4i}=\dfrac{(a+bi)-(a-bi)}{4i}=\dfrac{b}{2}$

이므로 $\dfrac{z-\overline{z}}{4i}$는 실수이다.

ㄹ. $\dfrac{z\overline{w}-\overline{z}w}{w\overline{w}-1}=\dfrac{(a+bi)(c-di)-(a-bi)(c+di)}{(c+di)(c-di)-1}$

$=\dfrac{2(-ad+bc)}{c^2+d^2-1}i$

이때 $ad\neq bc$이면 $\dfrac{z\overline{w}-\overline{z}w}{w\overline{w}-1}$는 순허수가 된다.

따라서 항상 실수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ④

278

$z^2-2z=(a+bi)^2-2(a+bi)$

$=a^2-b^2-2a+(2ab-2b)i$

z^2-2z가 실수이므로 $2ab-2b=0$

$2b(a-1)=0$ $\therefore a=1$ ($\because b\neq0$)

$\therefore z=1+bi$ …… ㉠

ㄱ. z^2-2z가 실수이므로 $z^2-2z=\overline{z^2-2z}$

$\therefore z^2-2z-\overline{z^2-2z}=0$ (참)

ㄴ. $z\overline{z}=(1+bi)(1-bi)=1+b^2$이고 $b\neq0$이므로

$z\overline{z}\neq1$ $\therefore \overline{z}\neq\dfrac{1}{z}$ (거짓)

ㄷ. ㉠에서 $z-1=bi$이므로

$z^2-2z+1=(z-1)^2=(bi)^2=-b^2<0$ ($\because b\neq0$)

$\therefore z^2-2z<-1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

정답_ ①

279

$z\overline{z}-\dfrac{\overline{z}}{z}=2$이므로

$\overline{\left(z\overline{z}-\dfrac{\overline{z}}{z}\right)}=2$ $\therefore \overline{z}z-\dfrac{z}{\overline{z}}=2$

따라서 $z\overline{z}-\dfrac{\overline{z}}{z}=\overline{z}z-\dfrac{z}{\overline{z}}$이므로

$\dfrac{\overline{z}}{z}=\dfrac{z}{\overline{z}}$, $\overline{z}^2=z^2$, $z^2-\overline{z}^2=0$ $\therefore (z+\overline{z})(z-\overline{z})=0$

이때 z는 실수가 아닌 복소수이므로 $z-\overline{z}\neq0$

따라서 $z+\overline{z}=0$, 즉 $z=-\overline{z}$이므로 z는 순허수이다.

$z=bi$ (b는 0이 아닌 실수)라고 하면

$z\overline{z}-\dfrac{\overline{z}}{z}=2$에서 $bi\times(-bi)-\dfrac{-bi}{bi}=2$

$b^2+1=2$ $\therefore b^2=1$

$z^2+\overline{z}^2=(bi)^2+(-bi)^2=-b^2-b^2$

$=-2b^2=-2\times1=-2$

정답_ -2

280

$\dfrac{3z-\overline{z}}{\overline{z\overline{z}}}=2-2i$에서 $\dfrac{3z-\overline{z}}{z\overline{z}}=2-2i$

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라고 하면

$\dfrac{3(a+bi)-(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\dfrac{2a+4bi}{a^2+b^2}=2-2i$

$\therefore \dfrac{a}{a^2+b^2}+\dfrac{2b}{a^2+b^2}i=1-i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\frac{a}{a^2+b^2}=1,\ \frac{2b}{a^2+b^2}=-1 \qquad \therefore\ a^2+b^2=a=-2b$

$a=-2b$를 $a^2+b^2=-2b$에 대입하면

$(-2b)^2+b^2=-2b,\ 5b^2+2b=0$

$b(5b+2)=0 \qquad \therefore\ b=0$ 또는 $b=-\frac{2}{5}$

$\therefore\ a=0,\ b=0$ 또는 $a=\frac{4}{5},\ b=-\frac{2}{5}$

그런데 z는 0이 아닌 복소수이므로 $a=\frac{4}{5},\ b=-\frac{2}{5}$

$\therefore\ z=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$

정답_ $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$

281

$z^2=3+4i$에서 $z^2-3=4i$이므로

$z^4-6z^2+30=(z^2-3)^2+21=(4i)^2+21=-16+21=5$

$\therefore\ zw=5$

즉, $z^2w^2=25$이므로

$w^2=\frac{25}{z^2}=\frac{25}{3+4i}=\frac{25(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=3-4i$

$(a+bi)^2=3-4i$이므로 $a^2-b^2+2abi=3-4i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=3,\ ab=-2$

이때

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)^2&=(a^2-b^2)^2+4a^2b^2\\&=3^2+4\times(-2)^2\\&=9+16=25\end{aligned}$$

이므로

$a^2+b^2=5\ (\because\ a^2+b^2>0)$

정답_ ②

282

자연수 n에 대하여

$i^n+i^{n+1}+i^{n+2}=i^n+i^{n+1}+i^n\times i^2=i^n+i^{n+1}-i^n=i^{n+1}$이므로

$$\begin{aligned}&(i+i^2+i^3)+(i^2+i^3+i^4)+(i^3+i^4+i^5)+\cdots+(i^{78}+i^{79}+i^{80})\\&=i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{79}\\&=(i^2+i^3+i^4+i^5)+(i^6+i^7+i^8+i^9)\\&\quad+\cdots+(i^{74}+i^{75}+i^{76}+i^{77})+i^{78}+i^{79}\\&=(-1-i+1+i)+(-1-i+1+i)\\&\quad+\cdots+(-1-i+1+i)-1-i\\&=-1-i\end{aligned}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=-1,\ b=-1$이므로

$a+b=-1+(-1)=-2$

정답_ -2

283

$-i^n+i^{n+m}+i^{3n}-i^{n+8m}=0$에서

$i^n(-1+i^m+i^{2n}-i^{8m})=0$

$i^n\{-1+i^m+(-1)^n-1\}=0$

이때 $i^n\neq0$이므로 $-1+i^m+(-1)^n-1=0$

$\therefore\ i^m+(-1)^n=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 i^m의 값은 $i,\ -1,\ -i,\ 1$ 중 하나이고, $(-1)^n$의 값은 -1, 1 중 하나이므로 ㉠이 성립하려면 $i^m=1,\ (-1)^n=1$이어야 한다.

$i^m=1$을 만족시키는 m의 값은 4, 8, 12, …, 100이고 $(-1)^n=1$을 만족시키는 n의 값은 2, 4, 6, …, 100이므로

$m+n$의 최댓값은 $100+100=200$, 최솟값은 $4+2=6$이다.

따라서 $m+n$의 최댓값과 최솟값의 합은

$200+6=206$

정답_ ③

284

$z_1=\frac{\sqrt{2}}{1+i}$이므로

$z_1^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\frac{2}{2i}=-i,$

$z_1^4=(z_1^2)^2=(-i)^2=-1,$

$z_1^8=(z_1^4)^2=(-1)^2=1,\ \cdots$

$z_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$이므로

$z_2^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},$

$z_2^3=z_2^2\times z_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\times\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=1,\ \cdots$

즉, $z_1^n=z_2^n$을 만족시키는 경우는 $z_1^n=z_2^n=1$일 때이다.

따라서 자연수 n은 8과 3의 공배수이므로 n의 최솟값은 8과 3의 최소공배수인 24이다.

정답_ 24

285

$z\neq0$이므로 $z^2-iz+1=0$의 양변을 z로 나누면

$z-i+\frac{1}{z}=0 \qquad \therefore\ z+\frac{1}{z}=i$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\frac{1}{z^3}(z^6+z^5+z^4-z^3+z^2+z+1)\\&=z^3+z^2+z-1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}\\&=\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1\\&=\left\{\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}+\left\{\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2\right\}+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1\\&=(i^3-3i)+(i^2-2)+i-1\\&=-4-3i\end{aligned}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=-4,\ b=-3$이므로

$b-a=-3-(-4)=1$

정답_ 1

286

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

즉, $f(n)=i^n+(-i)^n$이므로

$f(1)=i+(-i)=0$

$f(2)=i^2+(-i)^2=-2$

$f(3)=i^3+(-i)^3=0$
$f(4)=i^4+(-i)^4=2$
$f(5)=f(1)=0$
$f(6)=f(2)=-2$
$\vdots$
이때 $f(1)=0$, $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$,
$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=0$,
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(8)=0$, $\cdots$이므로
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=0$을 만족시키는 n의 값은 $4k-3$의 꼴 또는 $4k$의 꼴 (k는 자연수)이다.
따라서 주어진 등식을 만족시키는 40 이하의 자연수 n의 개수는
$10+10=20$

정답_ ⑤

287

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i$

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^2=i^2=-1$

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4\right\}^2=(-1)^2=1$

따라서 음이 아닌 정수 k에 대하여

$m=8k+1$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{8k}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$m=8k+2$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{8k}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=i$

$m=8k+3$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{8k}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$m=8k+4$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{8k}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4=-1$

$m=8k+5$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{8k}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$

$m=8k+6$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{8k}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=-i$

$m=8k+7$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{8k}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$
$=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

$m=8k+8$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8\right\}^{k+1}=1$

음이 아닌 정수 l에 대하여
$n=4l+1$일 때, $i^n=i^{4l}\times i=i$
$n=4l+2$일 때, $i^n=i^{4l}\times i^2=-1$
$n=4l+3$일 때, $i^n=i^{4l}\times i^3=-i$
$n=4l+4$일 때, $i^n=(i^4)^{l+1}=1$

$\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n\right\}^2=4$이므로

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=2$ 또는 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=-2$

(i) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=2$인 경우

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=1$, $i^n=-1$이므로 $m=8k+8$, $n=4l+2$

이때 $8k+8\le 49$, $4l+2\le 49$이므로 m의 최댓값은 48, n의 최댓값은 46이다.
따라서 $m+n$의 최댓값은 $48+46=94$이다.

(ii) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=-2$인 경우

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=-1$, $i^n=1$이므로 $m=8k+4$, $n=4l+4$

이때 $8k+4\le 49$, $4l+4\le 49$이므로 m의 최댓값은 44, n의 최댓값은 48이다.
따라서 $m+n$의 최댓값은 $44+48=92$이다.

(i), (ii)에서 $m+n$의 최댓값은 94이다.

정답_ 94

288

$1^5=1$, $(-1)^5=-1$, $i^5=i$, $(-i)^5=-i$이므로
$z_1^5+z_2^5+z_3^5+z_4^5+z_5^5=-1$이 되려면 i, $-i$의 개수는 서로 같아야 한다.

(i) z_1, z_2, z_3, z_4, z_5의 값 중 i, $-i$가 각각 2개이고, -1이 1개일 때
$z_1^{10}+z_2^{10}+z_3^{10}+z_4^{10}+z_5^{10}$
$=i^{10}+i^{10}+(-i)^{10}+(-i)^{10}+(-1)^{10}$
$=-1-1-1-1+1=-3$

(ii) z_1, z_2, z_3, z_4, z_5의 값 중 i, $-i$가 각각 1개이고, 1이 1개, -1이 2개일 때
$z_1^{10}+z_2^{10}+z_3^{10}+z_4^{10}+z_5^{10}$
$=i^{10}+(-i)^{10}+1^{10}+(-1)^{10}+(-1)^{10}$
$=-1-1+1+1+1=1$

(iii) z_1, z_2, z_3, z_4, z_5의 값 중 1이 2개, -1이 3개일 때
$z_1^{10}+z_2^{10}+z_3^{10}+z_4^{10}+z_5^{10}$
$=1^{10}+1^{10}+(-1)^{10}+(-1)^{10}+(-1)^{10}$
$=1+1+1+1+1=5$

(i)~(iii)에서 $z_1^{10}+z_2^{10}+z_3^{10}+z_4^{10}+z_5^{10}$의 모든 값의 합은
$-3+1+5=3$

정답_ ⑤

289

(i) $|a|>|b|$인 경우
$|a|-|b|>0$, $|b|-|a|<0$이므로

$\sqrt{\frac{|a|-|b|}{|b|-|a|}}=-\frac{\sqrt{|a|-|b|}}{\sqrt{|b|-|a|}}=-\frac{\sqrt{|a|-|b|}}{\sqrt{|a|-|b|}\,i}=-\frac{1}{i}=i$

$\frac{\sqrt{(|a|-|b|)^2}}{\sqrt{(|b|-|a|)^2}}=\frac{|a|-|b|}{|a|-|b|}=1$

$\therefore \sqrt{\frac{|a|-|b|}{|b|-|a|}}-\frac{\sqrt{(|a|-|b|)^2}}{\sqrt{(|b|-|a|)^2}}=-1+i$

(ii) $|a|<|b|$인 경우
$|a|-|b|<0$, $|b|-|a|>0$이므로

$\sqrt{\frac{|a|-|b|}{|b|-|a|}}=\frac{\sqrt{|a|-|b|}}{\sqrt{|b|-|a|}}=\frac{\sqrt{|b|-|a|}\,i}{\sqrt{|b|-|a|}}=i$

$\frac{\sqrt{(|a|-|b|)^2}}{\sqrt{(|b|-|a|)^2}}=\frac{|b|-|a|}{|b|-|a|}=1$

$\therefore \sqrt{\frac{|a|-|b|}{|b|-|a|}}-\frac{\sqrt{(|a|-|b|)^2}}{\sqrt{(|b|-|a|)^2}}=-1+i$

(i), (ii)에서 $\sqrt{\frac{|a|-|b|}{|b|-|a|}}-\frac{\sqrt{(|a|-|b|)^2}}{\sqrt{(|b|-|a|)^2}}=-1+i$

정답_ ③

05 이차방정식

290

$2x(x-2)+3=(x-1)^2$에서

$2x^2-4x+3=x^2-2x+1,\ x^2-2x+2=0$

$\therefore\ x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\times2}=1\pm i$

정답_ ⑤

291

$\dfrac{x^2+7x}{3}+1=x^2+x$에서

$x^2+7x+3=3x^2+3x,\ 2x^2-4x-3=0$

$\therefore\ x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\times(-3)}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{10}}{2}$

따라서 $a=2,\ b=10$이므로 $a+b=2+10=12$

정답_ ①

292

$(x \circledcirc x)+(x \circledcirc 1)=2$에서

$(3x^2-x+x)+(3x-x+1)=2$

$3x^2+2x-1=0,\ (x+1)(3x-1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1}{3}$

정답_ ③

293

주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면

$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2-(\sqrt{2}+1)^2x+2(\sqrt{2}+1)=0$

$x^2-(3+2\sqrt{2})x+2(\sqrt{2}+1)=0$

$(x-1)\{x-(2\sqrt{2}+2)\}=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=2\sqrt{2}+2$

따라서 $\alpha=2\sqrt{2}+2,\ \beta=1\ (\because\ \alpha>\beta)$이므로

$(\alpha-2\beta)^2=\{(2\sqrt{2}+2)-2\times1\}^2=(2\sqrt{2})^2=8$

정답_ ④

294

이차방정식 $x^2-12x+a=0$의 한 근이 4이므로

$4^2-12\times4+a=0 \qquad \therefore\ a=32$

$a=32$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-12x+32=0,\ (x-4)(x-8)=0$

$\therefore\ x=4$ 또는 $x=8$

따라서 $b=8$이므로 $a+b=32+8=40$

정답_ 40

295

이차방정식 $x^2-(a-1)x-a-\sqrt{2}=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이므로

$(1+\sqrt{2})^2-(a-1)(1+\sqrt{2})-a-\sqrt{2}=0$

$(2+\sqrt{2})a=4+2\sqrt{2} \qquad \therefore\ a=2$

$a=2$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-x-2-\sqrt{2}=0,\ x^2-x-\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$

$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}-1)=0 \qquad \therefore\ x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}+1$

따라서 $b=-\sqrt{2}$이므로 $ab=2\times(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$

정답_ ②

296

이차방정식 $x^2-(a+7)x+5a+1=0$의 한 근이 8이므로

$8^2-(a+7)\times8+5a+1=0,\ 3a=9 \qquad \therefore\ a=3$

$a=3$을 $x^2-(a+7)x+5a+1=0$에 대입하면

$x^2-10x+16=0,\ (x-2)(x-8)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=8$

따라서 이차방정식 $x^2+3kx-2k=0$의 한 근이 2이므로

$2^2+3k\times2-2k=0 \qquad \therefore\ k=-1$

정답_ -1

297

이차방정식 $2x^2-2x+1=0$의 한 근이 α이므로

$2\alpha^2-2\alpha+1=0,\ \alpha^2-\alpha+\dfrac{1}{2}=0$

따라서 $\alpha^2=\alpha-\dfrac{1}{2}$이므로 $\alpha^4=\left(\alpha-\dfrac{1}{2}\right)^2=\alpha^2-\alpha+\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ \alpha^4-\alpha^2+\alpha=\left(\alpha^2-\alpha+\dfrac{1}{4}\right)-\alpha^2+\alpha=\dfrac{1}{4}$

정답_ ①

다른 풀이

이차방정식 $2x^2-2x+1=0$의 한 근이 α이므로 $2\alpha^2-2\alpha+1=0$

$\alpha^4-\alpha^2+\alpha$를 $2\alpha^2-2\alpha+1$로 나누면

$$\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4} \\
\hline
2\alpha^2-2\alpha+1 & \alpha^4 \qquad\quad -\alpha^2+\alpha \\
 & \alpha^4-\alpha^3+\frac{1}{2}\alpha^2 \\
\hline
 & \qquad \alpha^3-\frac{3}{2}\alpha^2+\alpha \\
 & \qquad \alpha^3-\alpha^2+\frac{1}{2}\alpha \\
\hline
 & \qquad\quad -\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\alpha \\
 & \qquad\quad -\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4} \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{1}{4}
\end{array}$$

$\therefore\ \alpha^4-\alpha^2+\alpha=(2\alpha^2-2\alpha+1)\left(\dfrac{1}{2}\alpha^2+\dfrac{1}{2}\alpha-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{1}{4}\ (\because\ 2\alpha^2-2\alpha+1=0)$

298

이차방정식 $x^2+k(2p-3)x-(p^2-2)k+q+2=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 1을 근으로 가지므로

$1+k(2p-3)-(p^2-2)k+q+2=0$

이 식을 k에 대하여 정리하면 $-(p^2-2p+1)k+q+3=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로 $p^2-2p+1=0,\ q+3=0$

$p^2-2p+1=0$에서 $(p-1)^2=0 \qquad \therefore\ p=1$

$q+3=0$에서 $q=-3$

$\therefore\ p+q=1+(-3)=-2$

정답_ ②

299

(ⅰ) $x<0$일 때

$x^2+2x-8=0$, $(x+4)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-4$ 또는 $x=2$

그런데 $x<0$이므로 $x=-4$

(ⅱ) $x\ge0$일 때

$x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=4$

그런데 $x\ge0$이므로 $x=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 근은 $x=-4$ 또는 $x=4$

따라서 모든 근의 합은 $(-4)+4=0$

정답_ ③

300

(ⅰ) $x^2<6$일 때

$-(x^2-6)=5x$, $x^2+5x-6=0$

$(x+6)(x-1)=0$ $\therefore$ $x=-6$ 또는 $x=1$

그런데 $x^2<6$이므로 $x=1$

(ⅱ) $x^2\ge6$일 때

$x^2-6=5x$, $x^2-5x-6=0$

$(x+1)(x-6)=0$ $\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=6$

그런데 $x^2\ge6$이므로 $x=6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 근은 $x=1$ 또는 $x=6$

따라서 모든 근의 곱은 $1\times6=6$

정답_ ⑤

301

$||x^2-1|-4|=3$에서 $|x^2-1|-4=\pm3$

$\therefore$ $|x^2-1|=7$ 또는 $|x^2-1|=1$

(ⅰ) $|x^2-1|=7$일 때

$x^2-1=\pm7$, $x^2=8$ 또는 $x^2=-6$

$\therefore$ $x=\pm2\sqrt{2}$ ($\because$ x는 실근)

(ⅱ) $|x^2-1|=1$일 때

$x^2-1=\pm1$, $x^2=2$ 또는 $x^2=0$

$\therefore$ $x=\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 실근은

$x=\pm2\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=0$

따라서 $\alpha=2\sqrt{2}$, $\beta=-2\sqrt{2}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(2\sqrt{2})^2+(-2\sqrt{2})^2=16$

정답_ ④

302

$x^2-\sqrt{(x-2)^2}=\sqrt{x^2}+3$에서

$x^2-|x-2|=|x|+3$, $x^2-|x|-|x-2|-3=0$

(ⅰ) $x<0$일 때, $x-2<0$이므로

$x^2+x+(x-2)-3=0$, $x^2+2x-5=0$ $\therefore$ $x=-1\pm\sqrt{6}$

그런데 $x<0$이므로 $x=-1-\sqrt{6}$

(ⅱ) $0\le x<2$일 때, $x-2<0$이므로

$x^2-x+(x-2)-3=0$, $x^2=5$ $\therefore$ $x=\pm\sqrt{5}$

그런데 $0\le x<2$이므로 $x=\pm\sqrt{5}$는 근이 아니다.

(ⅲ) $x\ge2$일 때, $x-2\ge0$이므로

$x^2-x-(x-2)-3=0$, $x^2-2x-1=0$ $\therefore$ $x=1\pm\sqrt{2}$

그런데 $x\ge2$이므로 $x=1+\sqrt{2}$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 주어진 방정식의 근은 $x=-1-\sqrt{6}$ 또는 $x=1+\sqrt{2}$

따라서 모든 근의 합은

$(-1-\sqrt{6})+(1+\sqrt{2})=\sqrt{2}-\sqrt{6}$

정답_ ④

303

$2[x]^2-[x]-3=0$에서

$([x]+1)(2[x]-3)=0$ $\therefore$ $[x]=-1$ ($\because$ $[x]$는 정수)

$\therefore$ $-1\le x<0$

따라서 $a=-1$, $b=0$이므로 $ab=(-1)\times0=0$

정답_ ②

참고 $[x]=n$ (n은 정수)이면 $n\le x<n+1$

304

$[x]^2-4[x]+3=0$에서

$([x]-1)([x]-3)=0$ $\therefore$ $[x]=1$ 또는 $[x]=3$

$\therefore$ $1\le x<2$ 또는 $3\le x<4$

따라서 주어진 방정식의 해가 아닌 것은 ①, ③이다.

정답_ ①, ③

305

$x^2-2x+[x]=0$에서

(ⅰ) $0\le x<1$일 때, $[x]=0$이므로

$x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$ $\therefore$ $x=0$ ($\because$ $0\le x<1$)

(ⅱ) $1\le x<2$일 때, $[x]=1$이므로

$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$ $\therefore$ $x=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 해는 $x=0$ 또는 $x=1$이므로 모든 해의 합은 $0+1=1$

정답_ ⑤

306

연속하는 세 짝수인 자연수를 $x-2$, x, $x+2$라고 하면

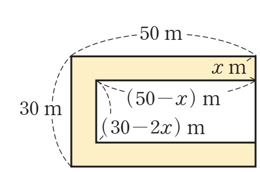
$(x+2)(x-2)=3x$, $x^2-3x-4=0$

$(x-4)(x+1)=0$ $\therefore$ $x=4$ ($\because$ $x>2$)

따라서 가장 큰 짝수는 $4+2=6$

정답_ 6

307



오른쪽 그림과 같이 길의 폭을 x m라고 하면 남은 땅의 넓이는

$(50-x)(30-2x)=900$

$2x^2-130x+600=0$

$x^2-65x+300=0$

$(x-5)(x-60)=0$ $\therefore$ $x=5$ 또는 $x=60$

이때 $x>0$, $50-x>0$, $30-2x>0$에서 $0<x<15$이므로

$x=5$

따라서 길의 폭은 5 m이다.

정답_ 5 m

308

가로의 길이를 x m만큼, 세로의 길이를 $(x-10)$ m만큼 늘린 밭의 넓이는

$(10+x)(10+x-10)=(10+x)x$

이때 올해 늘어난 밭의 넓이가 500 m^2이므로 밭의 총 넓이는 600 m^2이다.

따라서 $(10+x)x=600$이므로 $x^2+10x-600=0$

$(x+30)(x-20)=0 \qquad \therefore x=-30$ 또는 $x=20$

이때 $x>10$이므로 $x=20$

정답_ ①

309

$\triangle ABP \equiv \triangle ADQ$ (RHS 합동)이므로 $\overline{BP}=x$라고 하면

$\overline{DQ}=x \qquad \therefore \overline{CP}=\overline{CQ}=2-x$

직각삼각형 ABP에서 $\overline{AP}^2=4+x^2$

직각삼각형 PCQ에서 $\overline{PQ}^2=(2-x)^2+(2-x)^2$

$\triangle APQ$가 정삼각형이므로 $\overline{AP}=\overline{PQ}$

즉, $\overline{AP}^2=\overline{PQ}^2$이므로

$4+x^2=(2-x)^2+(2-x)^2$, $4+x^2=4-4x+x^2+4-4x+x^2$

$x^2-8x+4=0 \qquad \therefore x=4\pm2\sqrt{3}$

이때 $x>0$, $2-x>0$에서 $0<x<2$이므로

$x=4-2\sqrt{3} \qquad \therefore \overline{BP}=4-2\sqrt{3}$

정답_ ③

310

$\triangle ABC$가 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}=1:1:\sqrt{2} \qquad \therefore \overline{BC}=8\sqrt{2}$

$\overline{BD}=x$라고 하면 $\triangle FEC$도 직각이등변삼각형이므로

$\overline{EC}=\sqrt{2}x$

$\therefore \overline{BE}=\overline{BC}-\overline{EC}=8\sqrt{2}-\sqrt{2}x=\sqrt{2}(8-x)$

□DBEF의 넓이가 15이므로

$x\times\sqrt{2}(8-x)\times\sin 45^\circ=15$, $x(8-x)=15$

$x^2-8x+15=0$, $(x-3)(x-5)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=5$

$\overline{BD}=3$일 때, $\overline{BE}=5\sqrt{2}$

$\overline{BD}=5$일 때, $\overline{BE}=3\sqrt{2}$

이때 $\overline{BD}<\overline{BE}$이므로 $\overline{BD}=3$

정답_ ③

311

이차방정식 $x^2-4x+3k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=4-3k<0 \qquad \therefore k>\frac{4}{3}$

따라서 정수 k의 최솟값은 2이다.

정답_ ②

312

이차방정식 $x^2+2kx-6k-9=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(-6k-9)=0$

$k^2+6k+9=0$, $(k+3)^2=0 \qquad \therefore k=-3$

$k=-3$을 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-6x+9=0$, $(x-3)^2=0 \qquad \therefore x=3$

$\therefore a=3$

정답_ ⑤

313

이차방정식 $x^2+4(k-6)x+4k^2-18=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=\{2(k-6)\}^2-(4k^2-18)>0$

$-48k+162>0 \qquad \therefore k<\frac{27}{8}$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3의 3개이다.

정답_ 3

314

이차방정식 $x^2-8x+3k+1=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$\frac{D_1}{4}=16-(3k+1)\geq0$, $3k\leq15 \qquad \therefore k\leq5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $kx^2+6x+10=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$\frac{D_2}{4}=9-10k<0 \qquad \therefore k>\frac{9}{10} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{9}{10}<k\leq5$

따라서 정수 k는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

정답_ ④

315

이차방정식 $x^2-2(m+a)x+m^2+m+b=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(m+a)^2-(m^2+m+b)=0$, $(2a-1)m+a^2-b=0$

이 등식이 실수 m의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2a-1=0$, $a^2-b=0$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$이므로

$12(a+b)=12\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=9$

정답_ ①

316

이차방정식 $x^2-2kx+k^2+6k-18=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(k^2+6k-18)=-6k+18$

이때 $k>3$에서 $-6k+18<0$이므로 $\frac{D}{4}<0$

따라서 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

정답_ 서로 다른 두 허근

317

이차방정식 $x^2+2ax+2b^2+2=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-(2b^2+2)=0 \qquad \therefore a^2=2b^2+2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $2x^2-2ax+8b-15=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$\frac{D_2}{4}=a^2-2(8b-15)=2b^2+2-16b+30$ ($\because$ ㉠)

$=2b^2-16b+32=2(b-4)^2\ge 0$

따라서 이차방정식 $2x^2-2ax+8b-15=0$은 실근을 갖는다.

정답_ ①

318

이차방정식 $x^2-2(a+b)x+(a-b)^2+3ab+2a-3b+13=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(a+b)^2-\{(a-b)^2+3ab+2a-3b+13\}=0$

$ab-2a+3b-13=0$, $a(b-2)+3(b-2)-7=0$

$\therefore (a+3)(b-2)=7$

a, b는 정수이므로 $a+3$, $b-2$도 정수이다.

(i) $a+3=1$, $b-2=7$일 때

$a=-2$, $b=9$ $\quad\therefore ab=(-2)\times 9=-18$

(ii) $a+3=-1$, $b-2=-7$일 때

$a=-4$, $b=-5$ $\quad\therefore ab=(-4)\times(-5)=20$

(iii) $a+3=7$, $b-2=1$일 때

$a=4$, $b=3$ $\quad\therefore ab=4\times 3=12$

(iv) $a+3=-7$, $b-2=-1$일 때

$a=-10$, $b=1$ $\quad\therefore ab=(-10)\times 1=-10$

(i)~(iv)에서 가능한 ab의 값은 -18, -10, 12, 20이다.

정답_ ②

319

$(a^2-9)x^2=a+3$에서

$(a+3)(a-3)x^2=a+3$ ...... ㉠

a는 10보다 작은 자연수이므로 $a+3>0$

㉠의 양변을 $a+3$으로 나누면 $(a-3)x^2=1$ ...... ㉡

또, 주어진 식이 x에 대한 이차방정식이므로

$a-3\ne 0$

㉡의 양변을 $a-3$으로 나누면 $x^2=\frac{1}{a-3}$

이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$\frac{1}{a-3}>0$ $\quad\therefore a>3$

따라서 10보다 작은 자연수 a는 4, 5, 6, 7, 8, 9의 6개이다.

정답_ ④

320

이차방정식 $(a+c)x^2+2bx+a-c=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=b^2-(a+c)(a-c)<0$ $\quad\therefore a^2>b^2+c^2$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 둔각삼각형이다.

정답_ ⑤

321

$4ax+b(4-x^2)+c(x^2+4)=0$에서

$(c-b)x^2+4ax+4b+4c=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-4(c-b)(c+b)=0$

$4a^2-4c^2+4b^2=0$ $\quad\therefore c^2=a^2+b^2$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

정답_ ④

322

이차방정식 $3x^2+2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$의 판별식을 D라고 하면 $\frac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$ $\quad\therefore a=b=c$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

정답_ ①

323

주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식

$x^2+2(k-3)x+k^2-k-6=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(k-3)^2-(k^2-k-6)=0$, $-5k+15=0$

$\therefore k=3$

정답_ 3

324

주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식

$kx^2+8kx+6k+5=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=16k^2-k(6k+5)=0$

$10k^2-5k=0$, $2k^2-k=0$

$k(2k-1)=0$ $\quad\therefore k=0$ 또는 $k=\frac{1}{2}$

그런데 주어진 식이 x에 대한 이차식이므로 $k\ne 0$

$\therefore k=\frac{1}{2}$

정답_ ③

325

주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식

$x^2+2(k-a)x+k^2-6k+a^2=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2-6k+a^2)=0$

$-2ak+6k=0$, $(-2a+6)k=0$

이 등식이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-2a+6=0$ $\quad\therefore a=3$

정답_ ⑤

326

주어진 이차식이 완전제곱식이 되므로 x에 대한 이차방정식

$3x^2-2(m-5)x+m^2-8m+3=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(m-5)^2-3(m^2-8m+3)=0$

$-2m^2+14m+16=0$, $m^2-7m-8=0$

$(m+1)(m-8)=0 \qquad \therefore m=8\ (\because m>0)$

$m=8$을 주어진 이차식에 대입하면

$3x^2-6x+3=3(x-1)^2$이므로 $n=-1$

$\therefore m+n=8+(-1)=7$

정답_ 7

327

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-1$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=(-3)^3-3\times(-1)\times(-3)\\&=-27-9=-36\end{aligned}$$

정답_ ④

328

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-5$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1^2-4\times(-5)=21$

$\therefore |\alpha-\beta|=\sqrt{21}$

정답_ ②

329

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

① $\alpha+\beta=-\frac{-9}{6}=\frac{3}{2}$ ② $\alpha\beta=\frac{1}{6}$

①, ②를 이용하여 나머지 식의 값을 구하면

③ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{6}}=9$

④ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{6}=\frac{23}{12}$

⑤ $\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\beta}=\frac{(1-\beta)+(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)}=\frac{2-(\alpha+\beta)}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$

$=\frac{2-\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}+\frac{1}{6}}=-\frac{3}{2}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

정답_ ③

330

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-24$, $\alpha\beta=36$

따라서 $\alpha<0$, $\beta<0$이므로

$\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^2=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{2}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-\frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}$

$=\frac{-24}{36}-\frac{2}{\sqrt{36}}=-1$

정답_ ①

참고 $\alpha\beta=36>0$이므로 $\alpha>0$, $\beta>0$ 또는 $\alpha<0$, $\beta<0$
그런데 $\alpha+\beta=-24<0$이므로 $\alpha<0$, $\beta<0$

331

$|x^2-8x|=4$에서 $x^2-8x=\pm4$

(i) $x^2-8x=4$, 즉 $x^2-8x-4=0$일 때

이 이차방정식의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=-4$

(ii) $x^2-8x=-4$, 즉 $x^2-8x+4=0$일 때

이 이차방정식의 두 근을 γ, δ라고 하면

$\gamma+\delta=8$, $\gamma\delta=4$

(i), (ii)에서

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}=\frac{8}{-4}+\frac{8}{4}=0$

정답_ 0

332

α, β가 이차방정식 $x^2+4x-2=0$의 두 근이므로

$\alpha^2+4\alpha-2=0$, $\beta^2+4\beta-2=0$

$\therefore (\alpha^2+5\alpha-3)(\beta^2+5\beta-3)$

$=\{(\alpha^2+4\alpha-2)+\alpha-1\}\{(\beta^2+4\beta-2)+\beta-1\}$

$=(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$ …… ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=-2$

따라서 ㉠에서 (주어진 식)$=-2-(-4)+1=3$

정답_ ③

333

α, β가 이차방정식 $2x^2+6x-9=0$의 두 근이므로

$2\alpha^2+6\alpha-9=0$, $2\beta^2+6\beta-9=0$

$\therefore 2\alpha^2+6\alpha=9$, $2\beta^2+6\beta=9$

$$\begin{aligned}\therefore 2(2\alpha^2+\beta^2)+6(2\alpha+\beta)&=4\alpha^2+2\beta^2+12\alpha+6\beta\\&=2(2\alpha^2+6\alpha)+(2\beta^2+6\beta)\\&=2\times9+9=27\end{aligned}$$

정답_ 27

334

α, β가 이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 근이므로

$\alpha^2-4\alpha+1=0$, $\beta^2-4\beta+1=0$

$\therefore \frac{\alpha^3}{\alpha^2-3\alpha+1}+\frac{\beta^3}{\beta^2-3\beta+1}$

$=\frac{\alpha^3}{\alpha^2-4\alpha+1+\alpha}+\frac{\beta^3}{\beta^2-4\beta+1+\beta}$

$=\frac{\alpha^3}{\alpha}+\frac{\beta^3}{\beta}=\alpha^2+\beta^2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ …… ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=1$

따라서 ㉠에서 (주어진 식)$=4^2-2\times1=14$

정답_ ⑤

335

α가 이차방정식 $x^2-5x+2=0$의 근이므로

$\alpha^2-5\alpha+2=0$

$\therefore \alpha^4-4\alpha^3-3\alpha^2+\alpha-\beta+5\alpha\beta$

$=\alpha^2(\alpha^2-5\alpha+2)+\alpha(\alpha^2-5\alpha+2)-\alpha-\beta+5\alpha\beta$

$=-(\alpha+\beta)+5\alpha\beta$ …… ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=2$

이므로 ㉠에서

(주어진 식)$=-5+5\times2=5$

정답_ ①

336

이차방정식 $x^2-11x+k-3=0$의 두 근을 α, $\alpha+5$라고 하면

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+5)=11,\ 2\alpha=6 \quad \therefore \alpha=3$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+5)=k-3$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $3(3+5)=k-3 \quad \therefore k=27$

정답_ 27

337

이차방정식 $x^2+(2a-1)x+a-5=0$의 두 실근을 α, β라고 하면

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=a-5$

이때 α, β의 부호가 서로 다르므로 $a-5<0 \quad \therefore a<5$

따라서 정수 a의 최댓값은 4이다.

정답_ ③

338

이차방정식 $x^2-7(k-2)x+12k=0$의 두 근을 3α, 4α $(\alpha\neq0)$라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3\alpha+4\alpha=7(k-2) \quad \therefore \alpha=k-2$ …… ㉠

$3\alpha\times4\alpha=12k \quad \therefore \alpha^2=k$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(k-2)^2=k,\ k^2-5k+4=0$

$(k-1)(k-4)=0 \quad \therefore k=1$ 또는 $k=4$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $1+4=5$

정답_ ④

339

이차방정식 $x^2+(m^2+2m-3)x-5m+1=0$의 두 실근을 α, $-\alpha$ $(\alpha\neq0)$라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-\alpha)=-(m^2+2m-3),\ m^2+2m-3=0$

$(m+3)(m-1)=0 \quad \therefore m=-3$ 또는 $m=1$ …… ㉠

$\alpha\times(-\alpha)=-5m+1,\ -\alpha^2=-5m+1<0$

$\therefore m>\frac{1}{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $m=1$

정답_ ⑤

340

이차방정식 $x^2+(2m-1)x+6m-10=0$의 두 근을 α, β라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2m+1 \quad \therefore 2m=1-\alpha-\beta$ …… ㉠

$\alpha\beta=6m-10$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\alpha\beta=3(1-\alpha-\beta)-10$

$\alpha\beta+3\alpha+3\beta=-7 \quad \therefore (\alpha+3)(\beta+3)=2$

두 근 α, β가 정수이므로 $\alpha+3$, $\beta+3$도 정수이다.

(i) $\alpha+3=1,\ \beta+3=2$일 때

$\alpha=-2,\ \beta=-1$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$2m=1-(-2)-(-1)=4 \quad \therefore m=2$

(ii) $\alpha+3=-1,\ \beta+3=-2$일 때

$\alpha=-4,\ \beta=-5$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$2m=1-(-4)-(-5)=10 \quad \therefore m=5$

(iii) $\alpha+3=2,\ \beta+3=1$일 때

$\alpha=-1,\ \beta=-2$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$2m=1-(-1)-(-2)=4 \quad \therefore m=2$

(iv) $\alpha+3=-2,\ \beta+3=-1$일 때

$\alpha=-5,\ \beta=-4$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$2m=1-(-5)-(-4)=10 \quad \therefore m=5$

(i)~(iv)에서 $m=2$ 또는 $m=5$이므로 모든 실수 m의 값의 합은

$2+5=7$

정답_ ②

341

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=-4$

$\therefore \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{a^2+8}{-4}$

즉, $\frac{a^2+8}{-4}=-6$이므로

$a^2+8=24,\ a^2=16 \quad \therefore a=4\ (\because a>0)$

정답_ ②

342

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=2a-1$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4a^2-4(2a-1)$

$=4a^2-8a+4=4(a-1)^2$

$\alpha-\beta>6$이고 a는 자연수이므로

$\alpha-\beta=2(a-1)>6 \quad \therefore a>4$

따라서 자연수 a의 최솟값은 5이다.

정답_ ③

343

α, β가 이차방정식 $x^2-3x+k=0$의 두 근이므로

$\alpha^2-3\alpha+k=0,\ \beta^2-3\beta+k=0$

$\therefore \frac{1}{\alpha^2-\alpha+k}+\frac{1}{\beta^2-\beta+k}=\frac{1}{\alpha^2-3\alpha+k+2\alpha}+\frac{1}{\beta^2-3\beta+k+2\beta}$

$=\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\beta}=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}$

즉, $\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}=\frac{1}{4}$이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=k$이므로

$\frac{3}{2k}=\frac{1}{4}$ $\qquad \therefore k=\frac{3}{2}\times 4=6$

정답_ 6

344

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=k$

$\therefore (|\alpha|+|\beta|)^2=\alpha^2+\beta^2+2|\alpha||\beta|$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|$

$=25-2k+2|k|$

즉, $25-2k+2|k|=49$이므로 $-k+|k|=12$

(i) $k\geq 0$일 때, $0=12$이므로 모순이다.

(ii) $k<0$일 때, $-k-k=12$ $\qquad \therefore k=-6$

(i), (ii)에서 $k=-6$이므로

$\alpha^2+\beta^2+k=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+k=5^2-2k+k$

$=25-k=25-(-6)=31$

정답_ ②

345

이차방정식 $x^2-ax-2b=0$의 두 근이 -2, 4이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+4=a$, $(-2)\times 4=-2b$ $\qquad \therefore a=2$, $b=4$

$ax^2-4x+b-1=0$, 즉 $2x^2-4x+3=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 곱)$=\frac{3}{2}$

정답_ ③

346

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 두 근이 $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\beta}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=-b$에서 $\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=-b$ …… ㉡

$\frac{\beta}{\alpha}\times\frac{\alpha}{\beta}=a$에서 $a=1$ …… ㉢

㉡에 ㉠, ㉢을 대입하면

$\frac{1-2b}{b}=-b$, $1-2b=-b^2$, $(b-1)^2=0$ $\qquad \therefore b=1$

$\therefore 3a^2+5b^2=3\times 1^2+5\times 1^2=8$

정답_ ①

347

이차방정식 $x^2-2ax+8b=0$의 두 근이 $2a-2$, $b+1$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2a-2)+(b+1)=2a$ $\qquad \therefore b=1$

$(2a-2)(b+1)=8b$, $(2a-2)(1+1)=8$

$4(a-1)=8$, $a-1=2$ $\qquad \therefore a=3$

$x^2+bx-a+5=0$, 즉 $x^2+x+2=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=2$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-1)^3-3\times 2\times(-1)=5$

정답_ ④

348

이차방정식 $x^2+3x-5=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-5$

$\therefore 2\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)=2\times(-3)=-6$

$2\alpha\times 2\beta=4\alpha\beta=4\times(-5)=-20$

따라서 2α, 2β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+6x-20=0$

정답_ $x^2+6x-20=0$

349

이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-2$

$\therefore \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\frac{2^2-2\times(-2)}{-2}=-4$

$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=1$

따라서 $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+4x+1=0$이므로 $a=4$, $b=1$

$\therefore ab=4\times 1=4$

정답_ ④

350

$\overline{AB}=\overline{AH}+\overline{BH}$에서 $\alpha+\beta=14$

지름에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 $\angle ACB=90^\circ$

즉, 삼각형 ABC는 $\angle ACB=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{AH}\times\overline{BH}=\overline{CH}^2$에서 $\alpha\beta=36$

따라서 α, β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-14x+36=0$

정답_ $x^2-14x+36=0$

351

이차방정식 $x^2+3x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-1$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-3)^2-4\times(-1)=13$에서

$\alpha-\beta=\sqrt{13}$ ($\because \alpha>\beta$)

$\therefore \frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}{\alpha^2\beta^2}$

$=\frac{-(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^2}=\frac{-\sqrt{13}\times(-3)}{(-1)^2}=3\sqrt{13}$

따라서 $\alpha-\beta$, $\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}$, 즉 $\sqrt{13}$, $3\sqrt{13}$을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-\sqrt{13})(x-3\sqrt{13})=0$ $\therefore x^2-4\sqrt{13}x+39=0$

정답_ ②

352

유준이는 b를 바르게 보고 풀었으므로 $\frac{b}{2}=\frac{7}{2}$에서 $b=7$

이서는 a를 바르게 보고 풀었으므로 $-\frac{a}{2}=-\frac{5}{2}$에서 $a=5$

$\therefore a+b=5+7=12$

정답_ 12

353

도희는 a와 c를 바르게 보고 풀었으므로

$\frac{c}{a}=-10\times2=-20$ $\therefore c=-20a$ …… ㉠

은우는 a와 b를 바르게 보고 풀었으므로

$-\frac{b}{a}=(4+\sqrt{3})+(4-\sqrt{3})=8$ $\therefore b=-8a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면 $ax^2-8ax-20a=0$

$a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면 $x^2-8x-20=0$

$(x+2)(x-10)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=10$

따라서 원래의 이차방정식의 두 근은 -2, 10이다.

정답_ -2, 10

354

근의 공식을 잘못 적용하여 얻은 두 근이 -5, 3이므로

$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=-5+3$

$\frac{-2b}{2a}=-2$ $\therefore b=2a$ …… ㉠

$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=(-5)\times3$

$\frac{c}{4a}=-15$ $\therefore c=-60a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2+2ax-60a=0$

따라서 원래의 이차방정식의 두 근의 합은 $-\frac{2a}{a}=-2$

정답_ -2

355

$f(x)=0$의 한 근이 5이므로 $f(5)=0$

$f(2x-1)=0$의 한 근을 α라고 하면

$2\alpha-1=5$ $\therefore \alpha=3$

따라서 $f(2x-1)=0$의 근이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

356

$f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로 $f(2x-5)=0$의 두 근은

$2x-5=\alpha$ 또는 $2x-5=\beta$에서 $x=\frac{\alpha+5}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta+5}{2}$

따라서 $f(2x-5)=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha+5}{2}\times\frac{\beta+5}{2}=\frac{\alpha\beta+5(\alpha+\beta)+25}{4}$$
$$=\frac{3+5\times(-4)+25}{4}=2$$

정답_ ①

357

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라고 하면 $\alpha+\beta=16$

$f(2020-8x)=0$의 두 근은

$2020-8x=\alpha$ 또는 $2020-8x=\beta$에서

$x=\frac{2020-\alpha}{8}$ 또는 $x=\frac{2020-\beta}{8}$

따라서 $f(2020-8x)=0$의 두 근의 합은

$$\frac{2020-\alpha}{8}+\frac{2020-\beta}{8}=\frac{4040-(\alpha+\beta)}{8}$$
$$=\frac{4040-16}{8}=503$$

정답_ 503

358

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라고 하면 $\alpha\beta=2$ …… ㉠

$f(3x-1)=0$의 두 근은

$3x-1=\alpha$ 또는 $3x-1=\beta$에서 $x=\frac{\alpha+1}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+1}{3}$

$f(3x-1)=0$의 두 근의 곱이 -1이므로

$\frac{\alpha+1}{3}\times\frac{\beta+1}{3}=-1$, $(\alpha+1)(\beta+1)=-9$

$\alpha\beta+\alpha+\beta+1=-9$ $\therefore \alpha+\beta=-12$ ($\because$ ㉠)

따라서 α, β를 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2+12x+2=0$

즉, $f(x)=x^2+12x+2$이므로

$f(2)=2^2+12\times2+2=30$

정답_ ②

359

이차방정식 $x^2+2x+2=0$의 근이 $x=-1\pm i$이므로

$$x^2+2x+2=\{x-(-1+i)\}\{x-(-1-i)\}$$
$$=(x+1-i)(x+1+i)$$

따라서 인수인 것은 ④이다.

정답_ ④

360

$x^2-4x+13=(x-2+ai)(x+b-3i)$이므로 이차방정식

$x^2-4x+13=0$의 두 근은

$x=2-ai$ 또는 $x=-b+3i$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-ai)+(-b+3i)=4$ $\therefore (2-b)-(a-3)i=4$

이때 a, b는 실수이므로

$2-b=4$, $a-3=0$ $\therefore a=3$, $b=-2$

$\therefore ab=3\times(-2)=-6$

정답_ ④

361

주어진 이차식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2+(-y-1)x-ay^2+4y-1$

이 식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 x에 대한 이차방정식 $2x^2-(y+1)x-ay^2+4y-1=0$의 판별식을 D_1이라고 할 때, D_1이 완전제곱식이 되어야 한다.

$D_1=\{-(y+1)\}^2-4\times2\times(-ay^2+4y-1)$

$\quad=(1+8a)y^2-30y+9$

이 식이 완전제곱식이어야 하므로 $a\neq-\frac{1}{8}$이고, y에 대한 이차방정식 $(1+8a)y^2-30y+9=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-15)^2-9(1+8a)=0 \qquad \therefore a=3$

정답_ 3

참고 x에 대한 이차방정식 $2x^2-(y+1)x-ay^2+4y-1=0$의 근을 근의 공식을 이용하여 구하면

$x=\frac{(y+1)\pm\sqrt{D_1}}{4}$ (단, $D_1=(y+1)^2+8(ay^2-4y+1)$)

따라서 주어진 이차식은 $2\left\{x-\frac{(y+1)+\sqrt{D_1}}{4}\right\}\left\{x-\frac{(y+1)-\sqrt{D_1}}{4}\right\}$로 인수분해되므로 이것이 두 일차식의 곱이 되려면 D_1은 완전제곱식이어야 한다.

362

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $2-i$가 근이면 $2+i$도 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-i)+(2+i)=-\frac{a}{2}$에서 $a=-8$

$(2-i)(2+i)=\frac{b}{2}$에서 $b=10$

$\therefore b-a=10-(-8)=18$

정답_ ④

363

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 계수가 유리수이므로

$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$이 근이면 $2-\sqrt{3}$도 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=a$에서 $a=4$

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=b$에서 $b=1$

따라서 $x^2+ax+4b=0$, 즉 $x^2+4x+4=0$에서

$(x+2)^2=0 \qquad \therefore x=-2$

정답_ ⑤

364

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 계수가 실수이므로 $2+i$가 근이면 $2-i$도 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+i)+(2-i)=-a$에서 $a=-4$

$(2+i)(2-i)=b$에서 $b=5$

$\therefore a+b=1,\ \frac{a}{b}=-\frac{4}{5}$

두 수 $a+b,\ \frac{a}{b}$, 즉 $1,\ -\frac{4}{5}$를 두 근으로 하고, 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-1)\left\{x-\left(-\frac{4}{5}\right)\right\}=0 \qquad \therefore x^2-\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}=0$

따라서 $p=-\frac{1}{5},\ q=-\frac{4}{5}$이므로

$25pq=25\times\left(-\frac{1}{5}\right)\times\left(-\frac{4}{5}\right)=4$

정답_ ③

365

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $1+2i$가 근이면 $1-2i$도 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+2i)+(1-2i)=-(m-n)$에서 $m-n=-2$ ······ ㉠

$(1+2i)(1-2i)=m^2+n^2$에서 $m^2+n^2=5$ ······ ㉡

$m^2+n^2=(m-n)^2+2mn$이므로 이 식에 ㉠, ㉡을 대입하면

$5=(-2)^2+2mn \qquad \therefore mn=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{n}{m}+\frac{m}{n}=\frac{m^2+n^2}{mn}=\frac{5}{\frac{1}{2}}=10$

정답_ ④

366

이차방정식 $x^2-px+p+31=0$의 계수가 실수이므로 한 허근을 $a+4i$ (a는 실수)라고 하면 다른 한 허근은 $a-4i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a+4i)+(a-4i)=p,\ 2a=p \qquad \therefore a=\frac{1}{2}p$ ······ ㉠

$(a+4i)(a-4i)=p+31,\ a^2+16=p+31$

$\therefore a^2-p-15=0$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{1}{4}p^2-p-15=0,\ p^2-4p-60=0$

$(p+6)(p-10)=0 \qquad \therefore p=10\ (\because p>0)$

정답_ 10

367

α가 이차방정식 $x^2+4x-3=0$의 근이므로

$\alpha^2+4\alpha-3=0$ ❶

$\therefore \alpha(\alpha^2+5\alpha+3)(\alpha^2+3\alpha-1)$

$\quad=\alpha(\alpha^2+4\alpha-3+\alpha+6)(\alpha^2+4\alpha-3-\alpha+2)$

$\quad=\alpha(\alpha+6)(-\alpha+2)=\alpha(-\alpha^2-4\alpha+12)$

$\quad=\alpha\{-(\alpha^2+4\alpha-3)+9\}=9\alpha$ ······ ㉠

❷

이차방정식 $x^2+4x-3=0$의 근은 $x=-2\pm\sqrt{7}$이고 α는 양수인 근이므로 $\alpha=-2+\sqrt{7}$

이것을 ㉠에 대입하면

(주어진 식)$=9(-2+\sqrt{7})=-18+9\sqrt{7}$ ❸

정답_ $-18+9\sqrt{7}$

채점 기준	비율
❶ $\alpha^2+4\alpha-3=0$임을 알기	20 %
❷ $\alpha^2+4\alpha-3=0$임을 이용하여 주어진 식 정리하기	40 %
❸ 주어진 식의 값 구하기	40 %

368

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이므로 $a>0$, $b<0$ ❶

이차방정식 $x^2-2ax+3b=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3b$ ❷

$a>0$, $b<0$이므로 $a^2>0$, $-3b>0$

$\therefore \frac{D}{4}=a^2-3b>0$

따라서 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

❸

정답_ 서로 다른 두 실근

채점 기준	비율
❶ $a>0$, $b<0$임을 알기	30 %
❷ 이차방정식 $x^2-2ax+3b=0$의 판별식 구하기	30 %
❸ 주어진 이차방정식의 근 판별하기	40 %

369

$x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$ ······ ㉠

❶

$x^2-2\sqrt{10}x+6=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=2\sqrt{10}$에서 $2\alpha=2\sqrt{10}$ $\therefore \alpha=\sqrt{10}$

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=6$에서 $\alpha^2-\beta^2=6$, $10-\beta^2=6$

$\beta^2=4$ $\therefore \beta=2$ ($\because \beta>0$) ❷

$\alpha=\sqrt{10}$, $\beta=2$를 ㉠에 대입하면

$a=2+\sqrt{10}$, $b=2\sqrt{10}$

$\therefore a^2-2b=(2+\sqrt{10})^2-4\sqrt{10}=14$ ❸

정답_ 14

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 a, b로 나타내기	20 %
❷ α, β의 값 구하기	50 %
❸ a^2-2b의 값 구하기	30 %

370

$\overline{AE}=p$, $\overline{AG}=q$라고 하면 직사각형 AGIE의 둘레의 길이가 16이므로 $2(p+q)=16$ $\therefore p+q=8$ ······ ㉠

넓이가 14이므로 $pq=14$ ······ ㉡

❶

$\overline{IH}=10-p$, $\overline{IF}=10-q$는 $x^2-2ax+b=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(10-p)+(10-q)=2a$에서 $20-(p+q)=2a$

$2a=12$ ($\because$ ㉠) $\therefore a=6$

$(10-p)(10-q)=b$에서 $100-10(p+q)+pq=b$

$\therefore b=100-10\times8+14=34$ ($\because$ ㉠, ㉡) ❷

$\therefore b-a=34-6=28$ ❸

정답_ 28

채점 기준	비율
❶ □AGIE의 둘레의 길이와 넓이를 이용하여 식 세우기	30 %
❷ a, b의 값 구하기	50 %
❸ $b-a$의 값 구하기	20 %

371

주어진 이차방정식의 계수가 실수이고 서로 다른 두 허근이 α, β이므로 α, β는 서로 켤레복소수 관계이다.

$\therefore \overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$ ❶

$x^2-6x+11=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=11$ ❷

$$\therefore 11\left(\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}+\frac{\overline{\beta}}{\beta}\right)=11\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\right)=11\times\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$

$$=11\times\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$=11\times\frac{6^2-2\times11}{11}=14$$ ❸

정답_ 14

채점 기준	비율
❶ $\overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$임을 알기	30 %
❷ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	20 %
❸ 주어진 식의 값 구하기	50 %

372

이차방정식 $x^2+2abx-2a-2b-6=0$의 한 근이 2이므로

$4+4ab-2a-2b-6=0$, $4ab-2a-2b=2$

$(2a-1)(2b-1)=3$

이때 a, b는 서로 다른 자연수이므로 다음의 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $2a-1=1$, $2b-1=3$일 때, $a=1$, $b=2$

(ii) $2a-1=3$, $2b-1=1$일 때, $a=2$, $b=1$

(i), (ii)에서 $a+b=3$, $ab=2$

이것을 이차방정식 $x^2+2abx-2a-2b-6=0$, 즉

$x^2+2abx-2(a+b)-6=0$에 대입하면

$x^2+4x-12=0$

$(x+6)(x-2)=0$ $\therefore x=-6$ 또는 $x=2$

따라서 나머지 한 근은 -6이다.

정답_ -6

373

이차방정식 $x^2-2(a-3)x+4a-3b=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(a-3)^2-4a+3b=0$

$a^2-10a+3b+9=0$ $\therefore (a-5)^2=16-3b$ ······ ㉠

이때 a는 자연수이므로

$(a-5)^2=16-3b\geq0$ $\therefore b\leq\frac{16}{3}$

$\therefore b=1, 2, 3, 4, 5$ ($\because b$는 자연수)

또, a가 자연수이므로 $(a-5)^2$은 정수의 거듭제곱의 꼴이어야 한다.
따라서 가능한 경우는 다음 두 경우가 있다.
(i) $b=4$일 때, ㉠에서 $(a-5)^2=4$이므로
$a-5=-2$ 또는 $a-5=2$ $\quad\therefore a=3$ 또는 $a=7$
$\therefore a-b=-1$ 또는 $a-b=3$
(ii) $b=5$일 때, ㉠에서 $(a-5)^2=1$이므로
$a-5=-1$ 또는 $a-5=1$ $\quad\therefore a=4$ 또는 $a=6$
$\therefore a-b=-1$ 또는 $a-b=1$
(i), (ii)에서 $a-b$의 최댓값은 3이다.

정답_ ⑤

374

세 이차방정식 $ax^2-2cx+b=0$, $bx^2+2ax+c=0$, $cx^2+2bx+a=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2, D_3이라고 하면
$\frac{D_1}{4}=c^2-ab$, $\frac{D_2}{4}=a^2-bc$, $\frac{D_3}{4}=b^2-ca$
위의 세 식을 변끼리 더하면
$$\frac{D_1}{4}+\frac{D_2}{4}+\frac{D_3}{4}=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq 0$$
$\frac{D_1}{4}+\frac{D_2}{4}+\frac{D_3}{4}\geq 0$이므로 세 식 $\frac{D_1}{4}$, $\frac{D_2}{4}$, $\frac{D_3}{4}$의 값이 모두 음수일 수는 없다. 즉, 세 식 중 적어도 하나는 그 값이 0보다 크거나 같아야 한다.
따라서 세 이차방정식 중 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

정답_ ③

375

$\{f(x)+3\}^2=(x-2m)(x-3m)+9$에서
$\{f(x)+3\}^2=x^2-5mx+6m^2+9$ …… ㉠
좌변이 완전제곱식이므로 우변도 완전제곱식이 되어야 한다.
즉, $x^2-5mx+6m^2+9$가 완전제곱식이므로 x에 대한 이차방정식 $x^2-5mx+6m^2+9=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=(-5m)^2-4(6m^2+9)=0$, $m^2-36=0$
$(m+6)(m-6)=0$ $\quad\therefore m=-6$ 또는 $m=6$
(i) $m=-6$일 때, ㉠에서
$\{f(x)+3\}^2=x^2+30x+225=(x+15)^2$이므로
$f(x)+3=-(x+15)$ 또는 $f(x)+3=x+15$
$\therefore f(x)=-x-18$ 또는 $f(x)=x+12$
$\therefore f(3)=-21$ 또는 $f(3)=15$
(ii) $m=6$일 때, ㉠에서
$\{f(x)+3\}^2=x^2-30x+225=(x-15)^2$이므로
$f(x)+3=-(x-15)$ 또는 $f(x)+3=x-15$
$\therefore f(x)=-x+12$ 또는 $f(x)=x-18$
$\therefore f(3)=9$ 또는 $f(3)=-15$
(i), (ii)에서 $f(3)$의 최솟값은 -21이다.

정답_ ①

376

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$
$\alpha\beta=b$에서 b는 소수이므로 α, β 중 하나는 1이고 다른 하나는 소수이어야 한다.
이때 소수인 근이 3 이상의 홀수라고 하면 $\alpha+\beta=a$에서 a는 4 이상의 짝수가 되므로 이것은 a가 소수라는 조건에 모순이다.
따라서 소수인 근은 2이어야 한다.
$\therefore \alpha^2+\beta^2=1^2+2^2=5$

정답_ 5

377

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$$\alpha_n+\beta_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}-n}=\frac{\sqrt{n}\{\sqrt{n(n+1)}+n\}}{\{\sqrt{n(n+1)}-n\}\{\sqrt{n(n+1)}+n\}}$$
$$=\frac{\sqrt{n}\{\sqrt{n(n+1)}+n\}}{n(n+1)-n^2}=\frac{n\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}{n}$$
$$=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$
$\therefore (\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)+(\beta_1-\beta_2+\beta_3)$
$=(\alpha_1+\beta_1)-(\alpha_2+\beta_2)+(\alpha_3+\beta_3)$
$=(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(2+\sqrt{3})$
$=3$

정답_ ④

378

α, β가 이차방정식 $3x^2-2x+1=0$의 두 근이므로
$3\alpha^2-2\alpha+1=0$, $3\beta^2-2\beta+1=0$
$3\alpha^2-2\alpha+1=0$의 양변에 $2\alpha^3$을 곱하면 $6\alpha^5-4\alpha^4+2\alpha^3=0$
$\therefore 1-2\alpha+3\alpha^2+4\alpha^3-5\alpha^4+6\alpha^5$
$=(1-2\alpha+3\alpha^2)+(2\alpha^3-4\alpha^4+6\alpha^5)+2\alpha^3-\alpha^4$
$=-\alpha^4+2\alpha^3$
마찬가지 방법으로 $6\beta^5-4\beta^4+2\beta^3=0$이므로
$1-2\beta+3\beta^2+4\beta^3-5\beta^4+6\beta^5=-\beta^4+2\beta^3$
$\therefore$ (주어진 식)$=(-\alpha^4+2\alpha^3)(-\beta^4+2\beta^3)$
$=\alpha^4\beta^4-2\alpha^4\beta^3-2\alpha^3\beta^4+4\alpha^3\beta^3$
$=(\alpha\beta)^4-2(\alpha\beta)^3(\alpha+\beta)+4(\alpha\beta)^3$ …… ㉠
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=\frac{2}{3}$, $\alpha\beta=\frac{1}{3}$
이므로 ㉠에서
(주어진 식)$=\left(\frac{1}{3}\right)^4-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}+4\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{9}$

정답_ ①

379

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$ …… ㉠
또, 이차방정식 $x^2+3ax+3b=0$의 두 근이 $\alpha+2$, $\beta+2$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(\alpha+2)+(\beta+2)=-3a$, $(\alpha+2)(\beta+2)=3b$
$\therefore \alpha+\beta+4=-3a$, $\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=3b$
위의 두 식에 각각 ㉠을 대입하면
$-a+4=-3a$, $b-2a+4=3b$

$\therefore a=-2,\ b=4$

$\therefore \alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=4$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$, 즉 $x^2-2x+4=0$의 양변에 $x+2$를 곱하면 $(x+2)(x^2-2x+4)=0,\ x^3+8=0$

따라서 $x^3=-8$이므로 $\alpha^3=-8,\ \beta^3=-8$

$\alpha^1+\beta^1=2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\times4=-4$

$\alpha^3+\beta^3=-8+(-8)=-16$

$\alpha^4+\beta^4=\alpha\alpha^3+\beta\beta^3=-8(\alpha+\beta)=-16$

$\alpha^5+\beta^5=\alpha^2\alpha^3+\beta^2\beta^3=-8(\alpha^2+\beta^2)=32$

$\alpha^6+\beta^6=(\alpha^3)^2+(\beta^3)^2=(-8)^2+(-8)^2=128$

$\alpha^7+\beta^7=\alpha\alpha^6+\beta\beta^6=64(\alpha+\beta)=128$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 6이다.

정답_ 6

380

$x^2+2ax+b=0$의 두 근은 $x=-a\pm\sqrt{a^2-b}$

이 근이 정수가 되려면 a^2-b가 0 또는 제곱수이어야 한다.

이때 a, b는 9 이하의 서로 다른 양의 정수이므로 조건을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(2, 3), (2, 4), (3, 5), (3, 8), (3, 9), (4, 7), (5, 9)$

ㄱ. $a=2$, $b=4$인 경우는 a, b 모두 짝수이다. (거짓)

ㄴ. $a=5$, $b=9$일 때, $a+b$는 최대이므로 $a+b$의 최댓값은 14이다. (참)

ㄷ. 이차방정식 $x^2+2ax+b=0$의 두 근을 α, β $(\alpha>\beta)$라고 하면 $\alpha=-a+\sqrt{a^2-b}$, $\beta=-a-\sqrt{a^2-b}$이므로

$\alpha-\beta=(-a+\sqrt{a^2-b})-(-a-\sqrt{a^2-b})=2\sqrt{a^2-b}$

이때 a^2-b는 0 또는 제곱수이므로 $\sqrt{a^2-b}$는 음이 아닌 정수이다. 즉, $\alpha-\beta$는 $2n$ (n은 음이 아닌 정수)의 꼴이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ④

381

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2a,\ \alpha\beta=-b$

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=(-2a)^2-4\times(-b)\\&=4a^2+4b\end{aligned}$$

이므로 $|\alpha-\beta|=\sqrt{4a^2+4b}=2\sqrt{a^2+b}$ ($\because$ a, b는 자연수)

$|\alpha-\beta|<12$에서 $2\sqrt{a^2+b}<12$, $\sqrt{a^2+b}<6$

$\therefore a^2+b<36$

(i) $a=1$일 때

$b<35$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1), (1, 2), \cdots, (1, 34)$의 34개이다.

(ii) $a=2$일 때

$b<32$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1), (2, 2), \cdots, (2, 31)$의 31개이다.

(iii) $a=3$일 때

$b<27$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(3, 1), (3, 2), \cdots, (3, 26)$의 26개이다.

(iv) $a=4$일 때

$b<20$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(4, 1), (4, 2), \cdots, (4, 19)$의 19개이다.

(v) $a=5$일 때

$b<11$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(5, 1), (5, 2), \cdots, (5, 10)$의 10개이다.

(vi) $a\ge6$일 때

$b<0$이므로 이를 만족시키는 자연수 b는 존재하지 않는다.

(i)~(vi)에서 구하는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는

$34+31+26+19+10=120$

정답_ 120

382

$z+\bar{z}=-1$, $z\bar{z}=1$이므로 z, $\bar{z}$는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이다.

$x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0,\ x^3-1=0 \qquad \therefore x^3=1$

$\therefore z^3=1,\ \bar{z}^3=1$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{주어진 식})&=\frac{\bar{z}}{z^2}+\frac{\bar{z}^2}{z}+\frac{1}{1}+\frac{\bar{z}}{z^2}+\frac{\bar{z}^2}{z}\\&=\frac{2\bar{z}}{z^2}+\frac{2\bar{z}^2}{z}+1=\frac{2z\bar{z}}{z^3}+\frac{2z^2\bar{z}^2}{z^3}+1\\&=2+2+1=5\end{aligned}$$

정답_ ④

다른 풀이

$z^3=1$, $\bar{z}^3=1$이고 $z\bar{z}=1$에서 $\bar{z}=\frac{1}{z}$이므로

$(\text{주어진 식})=\bar{z}^6+\bar{z}^6+\bar{z}^6+\bar{z}^6+\bar{z}^6=5\bar{z}^6=5$

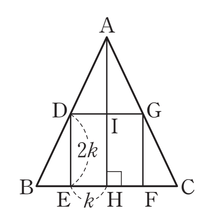
383

$x^2-8x+4=0$의 두 근이 $\overline{AH}$와 $\overline{BC}$의 길이이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\overline{AH}+\overline{BC}=8,\ \overline{AH}\times\overline{BC}=4 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\overline{EH}=k$라고 하면 $\overline{DE}=2k$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AH}$와 $\overline{DG}$의 교점을 I라고 하면 $\triangle AIG \backsim \triangle AHC$이므로



$\overline{AI}:\overline{IG}=\overline{AH}:\overline{HC}$

$(\overline{AH}-2k):k=\overline{AH}:\frac{1}{2}\overline{BC}$

$k\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{BC}(\overline{AH}-2k)$

$(\overline{AH}+\overline{BC})k=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{AH}$

$8k=2$ ($\because$ ㉠) $\qquad \therefore k=\frac{1}{4}$

$\therefore \overline{EH}=\frac{1}{4},\ \overline{DE}=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

따라서 $ax^2+bx+1=0$의 두 근이 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{b}{a},\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{a} \qquad \therefore a=8,\ b=-6$

$\therefore a+b=8+(-6)=2$

정답_ ①

384

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=S_1$

이차방정식 $f(3x-a)=0$의 두 근은 $3x-a=\alpha$ 또는 $3x-a=\beta$

에서 $x=\dfrac{\alpha+a}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+a}{3}$이므로

$\dfrac{\alpha+a}{3}+\dfrac{\beta+a}{3}=S_2$ $\quad\therefore\ \alpha+\beta+2a=3S_2$

$S_1-3S_2=-8$에서

$\alpha+\beta-(\alpha+\beta+2a)=-8$

$-2a=-8$ $\quad\therefore\ a=4$

정답_ 4

385

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$

$\therefore\ \beta=1-\alpha,\ \alpha=1-\beta$

$f(\alpha)=\beta$에서 $f(\alpha)=1-\alpha$ $\quad\therefore\ f(\alpha)+\alpha-1=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(\beta)=\alpha$에서 $f(\beta)=1-\beta$ $\quad\therefore\ f(\beta)+\beta-1=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)+x-1=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(x)+x-1=a(x^2-x+4)$ ($a\neq0$인 상수)로 놓을 수 있다.

이 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)-1=4a$, $4=4a$ ($\because f(0)=5$) $\quad\therefore\ a=1$

즉, $f(x)+x-1=x^2-x+4$이므로 $f(x)=x^2-2x+5$

$\therefore\ f(2)=2^2-2\times2+5=5$

정답_ ④

386

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로

$\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라고 하면 $\overline{\alpha}=a-bi$도 이 이차방정식의 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=3m-1$ $\quad\therefore\ 2a=3m-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\overline{\alpha}=2m^2+m+15$ $\quad\therefore\ a^2+b^2=2m^2+m+15$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

한편,

$\alpha^3=(a+bi)^3=a^3+3a^2bi+3ab^2i^2+b^3i^3$

$\quad=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i$

이므로 α^3이 실수가 되려면

$3a^2b-b^3=0$, $b(3a^2-b^2)=0$ $\quad\therefore\ 3a^2=b^2$ ($\because b\neq0$)

이것을 ㉡에 대입하면

$4a^2=2m^2+m+15$

㉠에서 $4a^2=(3m-1)^2$이므로

$(3m-1)^2=2m^2+m+15$, $7m^2-7m-14=0$

따라서 모든 실수 m의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -2이다.

정답_ -2

06 이차방정식과 이차함수

387

이차함수 $y=2x^2-ax+4b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -2, 6이므로 -2, 6은 이차방정식 $2x^2-ax+4b=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+6=\dfrac{a}{2}$, $-2\times6=\dfrac{4b}{2}$

$\therefore\ a=8,\ b=-6$

$\therefore\ ab=8\times(-6)=-48$

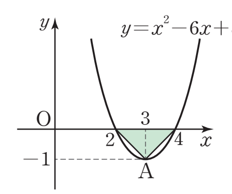
정답_ ②

388

이차함수 $y=x^2-ax+a+2=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+a+2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ -1)$이므로

$\dfrac{a}{2}=3$, $-\dfrac{a^2}{4}+a+2=-1$ $\quad\therefore\ a=6$

$\therefore\ y=x^2-6x+8$



이차방정식 $x^2-6x+8=0$에서

$(x-2)(x-4)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=4$

따라서 B$(2,\ 0)$, C$(4,\ 0)$ 또는 B$(4,\ 0)$, C$(2,\ 0)$이므로

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times(4-2)\times|-1|=1$

정답_ 1

389

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -3, 1이므로 -3, 1은 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+1=-a$, $-3\times1=b$ $\quad\therefore\ a=2,\ b=-3$

이차함수 $y=x^2-bx+a$, 즉 $y=x^2+3x+2$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+3x+2=0$의 실근과 같으므로 $x^2+3x+2=0$에서 $(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=-2$

따라서 이차함수 $y=x^2+3x+2$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 좌표는 $(-1,\ 0)$, $(-2,\ 0)$이므로 두 점 사이의 거리는

$|-2-(-1)|=1$

정답_ ①

390

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라고 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-ax+a=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=a$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{5}$이므로 $|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서

$5=a^2-4a$, $a^2-4a-5=0$

$(a+1)(a-5)=0$
이때 $a>0$이므로 $a=5$

정답_ 5

391

$y=x^2+ax-3a-10$에서 $(x-3)a+x^2-y-10=0$
이 식이 a의 값에 관계없이 성립하므로
$x-3=0,\ x^2-y-10=0 \qquad \therefore x=3,\ y=-1$
따라서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ -1)$이므로
$f(x)=(x-3)^2-1=x^2-6x+8$
이때 $y=f(x)$의 그래프의 x절편은 이차방정식 $f(x)=0$의 실근과 같으므로 $x^2-6x+8=0$에서 $(x-2)(x-4)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=4$
따라서 $y=f(x)$의 그래프의 x절편이 2, 4이므로 구하는 합은
$2+4=6$

정답_ ③

392

이차방정식 $x^2-4x-k=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-k)=4+k$

(1) $\frac{D}{4}=4+k>0$에서 $k>-4$

(2) $\frac{D}{4}=4+k=0$에서 $k=-4$

(3) $\frac{D}{4}=4+k<0$에서 $k<-4$

정답_ (1) $k>-4$ (2) $k=-4$ (3) $k<-4$

393

이차함수 $y=x^2-6x+a$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2-6x+a=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-3)^2-a<0 \qquad \therefore a>9$
따라서 정수 a의 최솟값은 10이다.

정답_ ②

394

이차함수 $y=-x^2+(m-3)x-m^2+2$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 이차방정식 $-x^2+(m-3)x-m^2+2=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=(m-3)^2-4\times(-1)\times(-m^2+2)=0$
$\therefore 3m^2+6m-17=0$
따라서 모든 실수 m의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $-\frac{6}{3}=-2$

정답_ ②

참고 m에 대한 이차방정식 $3m^2+6m-17=0$의 판별식을 D'이라고 하면
$\frac{D'}{4}=3^2-3\times(-17)=60>0$
이므로 이차방정식 $3m^2+6m-17=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
따라서 구하는 모든 실수 m의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 구할 수 있다.

395

이차함수 $y=x^2-2kx+k^2+4k-24$의 그래프가 x축과 만나므로
이차방정식 $x^2-2kx+k^2+4k-24=0$의 판별식을 D_1이라고 하면
$\frac{D_1}{4}=(-k)^2-(k^2+4k-24)\geq 0$
$-4k+24\geq 0 \qquad \therefore k\leq 6$ …… ㉠
또, 이차함수 $y=-x^2+2(k-4)x-k^2+3k$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $-x^2+2(k-4)x-k^2+3k=0$의 판별식을 D_2라고 하면
$\frac{D_2}{4}=(k-4)^2-(-1)\times(-k^2+3k)<0$
$-5k+16<0 \qquad \therefore k>\frac{16}{5}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $\frac{16}{5}<k\leq 6$
따라서 정수 k는 4, 5, 6의 3개이다.

정답_ ③

396

이차함수 $y=x^2+2(a-3k)x+9k^2-a+6k$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2+2(a-3k)x+9k^2-a+6k=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(a-3k)^2-(9k^2-a+6k)=0$
$a^2-6ak+a-6k=0 \qquad \therefore -6(a+1)k+a^2+a=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$a+1=0,\ a^2+a=a(a+1)=0 \qquad \therefore a=-1$

정답_ ②

397

이차함수 $y=2x^2-ax+1$의 그래프와 직선 $y=-x+b$의 두 교점의 x좌표가 -2, 3이므로 -2, 3은 이차방정식
$2x^2-ax+1=-x+b$, 즉 $2x^2+(1-a)x+1-b=0$의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-2+3=-\frac{1-a}{2},\ -2\times3=\frac{1-b}{2} \qquad \therefore a=3,\ b=13$
$\therefore ab=3\times13=39$

정답_ ①

398

주어진 두 그래프의 교점의 x좌표가 -8, 2이므로 -8, 2는 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$, 즉 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 두 근이다.
따라서 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 모든 실근의 합은
$-8+2=-6$

정답_ -6

399

이차함수 $y=3x^2+ax+1$의 그래프와 직선 $y=-2x+b$의 두 교점의 x좌표는 이차방정식 $3x^2+ax+1=-2x+b$, 즉

$3x^2+(a+2)x+1-b=0$의 두 근이다.
따라서 두 근의 합이 2, 곱이 -5이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{a+2}{3}=2,\ \frac{1-b}{3}=-5 \qquad \therefore a=-8,\ b=16$

$\therefore a-b=-8-16=-24$

정답_ ①

400

이차함수 $y=x^2-3x+a$의 그래프와 직선 $y=-x+7$의 두 교점의 x좌표가 4, b이므로 4, b는 이차방정식 $x^2-3x+a=-x+7$, 즉 $x^2-2x+a-7=0$의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$4+b=2,\ 4\times b=a-7 \qquad \therefore a=-1,\ b=-2$

$$\therefore \sqrt{4a}\sqrt{2b}+\frac{\sqrt{8b}}{\sqrt{4a}}=\sqrt{-4}\sqrt{-4}+\frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-4}}$$
$$=2i\times 2i+\frac{4i}{2i}=-4+2=-2$$

정답_ ②

다른 풀이

이차함수 $y=x^2-3x+a$의 그래프와 직선 $y=-x+7$의 두 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-3x+a=-x+7$, 즉

$x^2-2x+a-7=0$ …… ㉠

의 근이다.
따라서 ㉠의 한 근이 4이므로

$16-8+a-7=0 \qquad \therefore a=-1$

㉠에 $a=-1$을 대입하면

$x^2-2x-8=0,\ (x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 ㉠의 다른 한 근이 -2이므로 $b=-2$

$$\therefore \sqrt{4a}\sqrt{2b}+\frac{\sqrt{8b}}{\sqrt{4a}}=\sqrt{-4}\sqrt{-4}+\frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-4}}$$
$$=2i\times 2i+\frac{4i}{2i}=-4+2=-2$$

401

이차함수 $y=x^2+1$의 그래프와 직선 $y=mx-2m$의 두 교점의 x좌표를 α, β라고 하면 α, β는 이차방정식 $x^2+1=mx-2m$, 즉 $x^2-mx+2m+1=0$의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m,\ \alpha\beta=2m+1$

두 교점의 x좌표의 차가 3이므로 $|\alpha-\beta|=3$

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서

$9=m^2-4(2m+1),\ m^2-8m-13=0$

따라서 모든 실수 m의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -13이다.

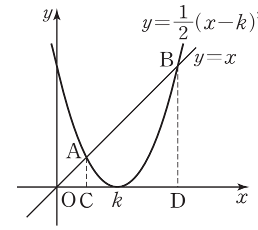
정답_ ④

402

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라고 하면 $\mathrm{C}(\alpha,\ 0)$, $\mathrm{D}(\beta,\ 0)$

이때 α, β는 이차방정식 $\frac{1}{2}(x-k)^2=x$, 즉

$x^2-2(k+1)x+k^2=0$의 두 근이다.



따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2(k+1),\ \alpha\beta=k^2$

$\overline{\mathrm{CD}}=6$이므로 $|\alpha-\beta|=6$

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서

$36=\{2(k+1)\}^2-4k^2$

$8k+4=36 \qquad \therefore k=4$

정답_ ②

403

이차방정식 $x^2-2x-2=2x+k$, 즉 $x^2-4x-2-k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-2-k)=6+k$

(1) $\frac{D}{4}=6+k>0$에서 $k>-6$

(2) $\frac{D}{4}=6+k=0$에서 $k=-6$

(3) $\frac{D}{4}=6+k<0$에서 $k<-6$

정답_ (1) $k>-6$ (2) $k=-6$ (3) $k<-6$

404

이차함수 $y=x^2+(2a-1)x+(a^2-a)$의 그래프와 직선 $y=x+4$가 만나므로 이차방정식 $x^2+(2a-1)x+(a^2-a)=x+4$, 즉 $x^2+2(a-1)x+a^2-a-4=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(a^2-a-4)\ge 0,\ -a+5\ge 0 \qquad \therefore a\le 5$

따라서 자연수 a의 최댓값은 5이다.

정답_ ③

405

이차함수 $y=-x^2+4x$의 그래프가 직선 $y=3x+k$보다 항상 아래쪽에 있으려면 이차함수의 그래프와 직선이 만나지 않아야 한다.
이차방정식 $-x^2+4x=3x+k$, 즉 $x^2-x+k=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-1)^2-4k<0,\ 1-4k<0 \qquad \therefore k>\frac{1}{4}$

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다.

정답_ 1

406

이차함수 $y=x^2+2kx+k^2-3k$의 그래프와 직선 $y=ax+b$가 접하므로 이차방정식 $x^2+2kx+k^2-3k=ax+b$, 즉 $x^2+(2k-a)x+k^2-3k-b=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(2k-a)^2-4(k^2-3k-b)=0$

$\therefore -4(a-3)k+a^2+4b=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a-3=0,\ a^2+4b=0 \qquad \therefore a=3,\ b=-\frac{9}{4}$

$\therefore 4ab=4\times 3\times\left(-\frac{9}{4}\right)=-27$

정답_ ④

407

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 직선 $x+y-3=0$, 즉 $y=-x+3$과 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=-x+3$, 즉 $x^2+(a+1)x+b-3=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$D_1=(a+1)^2-4(b-3)=0$

$\therefore a^2+2a-4b+13=0$ ...... ㉠

또, 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 직선 $3x-y+1=0$, 즉 $y=3x+1$과 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=3x+1$, 즉 $x^2+(a-3)x+b-1=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$D_2=(a-3)^2-4(b-1)=0$

$\therefore a^2-6a-4b+13=0$ ...... ㉡

㉠−㉡을 하면 $8a=0$ $\quad\therefore a=0$

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $-4b+13=0$ $\quad\therefore b=\frac{13}{4}$

$\therefore a+b=0+\frac{13}{4}=\frac{13}{4}$

정답_ ③

408

직선 $y=-x+k$가 이차함수 $y=x^2+4x+7$의 그래프와 만나지 않으므로 이차방정식 $-x+k=x^2+4x+7$, 즉 $x^2+5x+7-k=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$D_1=5^2-4(7-k)<0$

$4k-3<0$ $\quad\therefore k<\frac{3}{4}$ ...... ㉠

또, 직선 $y=-x+k$가 이차함수 $y=x^2+3x-1$의 그래프와 만나므로 이차방정식 $-x+k=x^2+3x-1$, 즉 $x^2+4x-1-k=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$\frac{D_2}{4}=2^2-(-1-k)\geq0$

$5+k\geq0$ $\quad\therefore k\geq-5$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $-5\leq k<\frac{3}{4}$

따라서 정수 k의 최댓값은 0, 최솟값은 -5이므로 구하는 합은

$0+(-5)=-5$

정답_ ③

409

y절편이 8인 직선을 $y=mx+8$이라고 하면 이 직선이 이차함수 $y=-x^2+4x-1$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-x^2+4x-1=mx+8$, 즉 $x^2+(m-4)x+9=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(m-4)^2-4\times9=0$, $m^2-8m-20=0$

$(m+2)(m-10)=0$ $\quad\therefore m=-2$ 또는 $m=10$

따라서 구하는 직선의 기울기는 -2 또는 10이다.

정답_ -2, 10

410

직선 $y=2x+5$에 평행한 직선의 기울기는 2이므로 $a=2$

직선 $y=2x+b$가 이차함수 $y=x^2-2x+3$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-2x+3=2x+b$, 즉 $x^2-4x+3-b=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(3-b)=0$, $1+b=0$ $\quad\therefore b=-1$

$\therefore a+b=2+(-1)=1$

정답_ ①

411

점 (3, 4)를 지나는 직선의 방정식을 $y=m(x-3)+4$라고 하면 이 직선이 이차함수 $y=x^2-3x+5$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-3x+5=mx-3m+4$, 즉 $x^2-(3+m)x+3m+1=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=\{-(3+m)\}^2-4(3m+1)=0$, $m^2-6m+5=0$

$(m-1)(m-5)=0$ $\quad\therefore m=1$ 또는 $m=5$

따라서 두 직선의 기울기의 합은

$1+5=6$

정답_ ④

412

구하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라고 하면 이 직선이 이차함수 $y=-x^2+2kx-k^2+k$의 그래프에 항상 접하므로 이차방정식 $-x^2+2kx-k^2+k=mx+n$, 즉 $x^2+(m-2k)x+k^2-k+n=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(m-2k)^2-4(k^2-k+n)=0$

$\therefore 4(1-m)k+m^2-4n=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$1-m=0$, $m^2-4n=0$ $\quad\therefore m=1$, $n=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=x+\frac{1}{4}$

정답_ ②

413

꼭짓점의 x좌표 2가 $1\leq x\leq4$에 포함되므로

$f(1)=14$, $f(2)=15$, $f(4)=11$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최솟값 11을 갖는다.

정답_ 11

참고 함수 $f(x)=-(x-2)^2+15$에서 대칭축이 $x=2$이고 그래프가 위로 볼록하므로 함수 $f(x)$는 대칭축에서 더 멀리 떨어진 지점에서 최솟값을 갖는다. 즉, $x=1$보다 $x=4$가 대칭축 $x=2$에서 더 멀리 떨어져 있으므로 $x=4$에서 최솟값을 갖는다.

414

$y=-x^2+2x+6=-(x-1)^2+7$

$0\leq x\leq3$에서 이 함수는 $x=1$일 때 최댓값 7, $x=3$일 때 최솟값 3을 가지므로 $M=7$, $m=3$

$\therefore M+m=7+3=10$

정답_ ①

415

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 3이므로 $f(x)=a(x+1)(x-3)$ $(a>0)$이라고 하자.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, -4)$를 지나므로

$-4=a\times2\times(-2)$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore f(x)=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$

따라서 $\frac{1}{2}\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $f(2)=-3$을 갖는다.

정답_ ⑤

416

$y=ax^2-6ax+b=a(x-3)^2-9a+b$

$a>0$이므로 $1\le x\le 2$에서 이 함수는 $x=1$일 때 최댓값 $-5a+b$, $x=2$일 때 최솟값 $-8a+b$를 갖는다.

$\therefore -5a+b=-5, -8a+b=-11$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=5$

$\therefore ab=2\times 5=10$

정답_ 10

417

$f(x)=-x^2-2kx-6k+7=-(x+k)^2+k^2-6k+7$

함수 $f(x)$는 $x=-k$에서 최댓값 k^2-6k+7을 가지므로

$g(k)=k^2-6k+7=(k-3)^2-2$

$0\le k\le 5$에서 $g(k)$는 $k=0$일 때 최댓값 7, $k=3$일 때 최솟값 -2를 가지므로 $M=7, m=-2$

$\therefore M-m=7-(-2)=9$

정답_ 9

418

$f(x)=-x^2+8x-6a+2=-(x-4)^2-6a+18$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=4$이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $0<a<4$일 때

$0\le x\le a$에서 함수 $f(x)$는 $x=a$일 때 최댓값을 갖는다.

즉, $f(a)=-1$이므로 $-a^2+8a-6a+2=-1$

$a^2-2a-3=0, (a-3)(a+1)=0$

$\therefore a=3 (\because 0<a<4)$

(ii) $a\ge 4$일 때

$0\le x\le a$에서 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값을 갖는다.

즉, $f(4)=-1$이므로 $-6a+18=-1$ $\therefore a=\frac{19}{6}$

그런데 $a\ge 4$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=3$

정답_ ②

419

$f(x)=-2x^2+8x+7k-1=-2(x-2)^2+7k+7$

조건 ㈎에서 함수 $f(x)$는 $0\le x\le 5$에서 최솟값 -4를 갖는다.

이때 $0\le x\le 5$에서 함수 $f(x)$는 $x=5$일 때 최소이므로

$f(5)=-4, 7k-11=-4$ $\therefore k=1$

$\therefore f(x)=-2(x-2)^2+14$

$-3\le x\le 0$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 6, $x=-3$일 때 최솟값 -36을 가지므로 조건 ㈏에서

$a\le -36, b\ge 6$

따라서 $b-a$의 최솟값은 $6-(-36)=42$

정답_ ③

420

$2x-1=t$로 놓으면 $1\le x\le 4$이므로 $1\le t\le 7$

이때 주어진 함수는

$y=(2x-1)^2-4(2x-1)+3$

$=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$

$1\le t\le 7$에서 이 함수는 $t=7$일 때 최댓값 24, $t=2$일 때 최솟값 -1을 가지므로

$M=24, m=-1$

$\therefore M-m=24-(-1)=25$

정답_ 25

421

$x^2+2x=t$로 놓으면 $t=(x+1)^2-1$

$0\le x\le 3$에서 t는 $x=3$일 때 최댓값 15, $x=0$일 때 최솟값 0을 가지므로 $0\le t\le 15$

이때 주어진 함수는

$y=(x^2+2x+1)(x^2+2x-5)-4(x^2+2x)-1$

$=(t+1)(t-5)-4t-1$

$=t^2-8t-6=(t-4)^2-22$

$0\le t\le 15$에서 이 함수는 $t=15$일 때 최댓값 99, $t=4$일 때 최솟값 -22를 가지므로 최댓값과 최솟값의 차는

$99-(-22)=121$

정답_ 121

422

$x^2+6x-1=t$로 놓으면 $t=(x+3)^2-10$

t는 $x=-3$일 때 최솟값 -10을 가지므로 $t\ge -10$

이때 주어진 함수는

$y=(x^2+6x-1)^2+2x^2+12x+3$

$=(x^2+6x-1)^2+2(x^2+6x-1)+5$

$=t^2+2t+5=(t+1)^2+4$

따라서 $t\ge -10$에서 이 함수는 $t=-1$일 때 최솟값 4를 갖는다.

정답_ ④

423

$x^2+x=t$로 놓으면 $t=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$-3\le x\le 3$에서 t는 $x=3$일 때 최댓값 12, $x=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{1}{4}$을 가지므로 $-\frac{1}{4}\le t\le 12$

이때 주어진 함수는

$y=(x^2+x-3)(x^2+x+1)-2(x^2+x)$

$=(t-3)(t+1)-2t$

$=t^2-4t-3=(t-2)^2-7$

$-\frac{1}{4}\le t\le 12$에서 이 함수는 $t=2$일 때 최솟값 -7을 가지므로

$c=-7$

$t=2$에서 $x^2+x=2$ $\therefore x^2+x-2=0$

$x^2+x-2=0$의 두 근이 a, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$ab=-2$

$\therefore abc=-2\times(-7)=14$

정답_ ④

424

$f(x)=2x^2+4|x|-3$에서

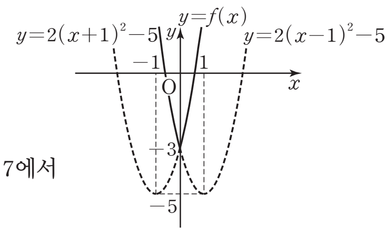
(i) $x<0$일 때

$f(x)=2x^2-4x-3=2(x-1)^2-5$

(ii) $x\geq 0$일 때

$f(x)=2x^2+4x-3=2(x+1)^2-5$

(i), (ii)에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$f(x)\geq -3$

$y=-\{f(x)\}^2-6f(x)+7$에서

$f(x)=t$로 놓으면

$t\geq -3$

이때 주어진 함수는

$y=-\{f(x)\}^2-6f(x)+7$

$=-t^2-6t+7=-(t+3)^2+16$

따라서 $t\geq -3$에서 이 함수는 $t=-3$일 때 최댓값 16을 갖는다.

정답_ 16

425

$2x^2+3y^2-4x+6y+9=2(x-1)^2+3(y+1)^2+4$

이때 x, y가 실수이므로 $(x-1)^2\geq 0$, $(y+1)^2\geq 0$

즉, $2(x-1)^2+3(y+1)^2+4\geq 4$이므로

$2x^2+3y^2-4x+6y+9\geq 4$

따라서 주어진 식의 최솟값은 4이다.

정답_ ④

426

$-4x^2-y^2-4x+8y-15=-(2x+1)^2-(y-4)^2+2$

이때 x, y가 실수이므로 $(2x+1)^2\geq 0$, $(y-4)^2\geq 0$

즉, $-(2x+1)^2-(y-4)^2+2\leq 2$이므로

$-4x^2-y^2-4x+8y-15\leq 2$

따라서 주어진 식은 $x=-\frac{1}{2}$, $y=4$일 때 최댓값 2를 가지므로

$\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=4$, $M=2$

$\therefore\ \alpha\beta M=-\frac{1}{2}\times 4\times 2=-4$

정답_ ②

427

$x^2+4xy+5y^2-2y+4=(x^2+4xy+4y^2)+(y^2-2y+1)+3$

$=(x+2y)^2+(y-1)^2+3$

이때 x, y가 실수이므로

$(x+2y)^2\geq 0$, $(y-1)^2\geq 0$

즉, $(x+2y)^2+(y-1)^2+3\geq 3$이므로

$x^2+4xy+5y^2-2y+4\geq 3$

따라서 주어진 식의 최솟값은 3이다.

정답_ 3

428

$2x-y-3=0$에서 $y=2x-3$

$\therefore\ -5x^2+y^2+10x-2y-10$

$=-5x^2+(2x-3)^2+10x-2(2x-3)-10$

$=-x^2-6x+5=-(x+3)^2+14$

따라서 주어진 식은 $x=-3$일 때 최댓값 14를 갖는다.

정답_ 14

429

$a+2b=4$에서 $b=\frac{4-a}{2}$

$\therefore\ ab=a\times\frac{4-a}{2}=-\frac{1}{2}a^2+2a=-\frac{1}{2}(a-2)^2+2$

$1\leq a\leq 6$에서 ab는 $a=2$일 때 최댓값 2를 갖고, $a=6$일 때 최솟값 -6을 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은

$2+(-6)=-4$

정답_ ②

430

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4a+3$, $\alpha\beta=a^2-5$

$\therefore\ (\alpha+3)(\beta+3)=\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9$

$=a^2-5+3(4a+3)+9$

$=a^2+12a+13=(a+6)^2-23$

따라서 $-5\leq a\leq -2$에서 $(\alpha+3)(\beta+3)$은 $a=-2$일 때 최댓값 -7을 갖는다.

정답_ -7

431

$z^2+\overline{z}^2=0$에서

$(a+2bi)^2+(a-2bi)^2=0$, $2a^2-8b^2=0$

$\therefore\ a^2=4b^2$

$\therefore\ 6a+12b^2+11=6a+3\times 4b^2+11$

$=6a+3a^2+11$

$=3(a+1)^2+8$

이때 a가 실수이므로 $(a+1)^2\geq 0$

즉, $3(a+1)^2+8\geq 8$이므로 $6a+12b^2+11\geq 8$

따라서 주어진 식의 최솟값은 8이다.

정답_ ③

432

직사각형의 가로의 길이를 x $(1\leq x\leq 4)$라고 하면 세로의 길이는 $10-x$이므로 직사각형의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$S(x)=x(10-x)=-x^2+10x=-(x-5)^2+25$

$1\leq x\leq 4$에서 $S(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 24를 갖는다.

따라서 이 직사각형의 넓이의 최댓값은 24이다.

정답_ ④

433

이차함수 $y=x^2-(a+4)x+3a+3$의 그래프가 x축과 만나는 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-(a+4)x+3a+3=0$의 두 근이다.

이차방정식 $x^2-(a+4)x+3a+3=0$에서

$x^2-(a+4)x+3(a+1)=0$, $(x-a-1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=a+1$ 또는 $x=3$

이때 $0<a<2$이므로 $1<a+1<3$
따라서 $A(a+1,\ 0)$, $B(3,\ 0)$, $C(0,\ 3a+3)$이므로 삼각형 ABC의 넓이를 $S(a)$라고 하면

$$S(a)=\frac{1}{2}(2-a)(3a+3)$$
$$=-\frac{3}{2}a^2+\frac{3}{2}a+3$$
$$=-\frac{3}{2}\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{8}$$

$0<a<2$에서 $S(a)$는 $a=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{27}{8}$을 갖는다.
따라서 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은 $\frac{27}{8}$이다.

정답_ ②

434

한 사람의 입장료를 $100x$원 올리면 하루 관람객은 $10x$명씩 줄어들므로 한 사람의 입장료가 $(5000+100x)$원일 때 하루 관람객은 $(600-10x)$명이다.
이때 하루 입장료 수입을 y원이라고 하면

$$y=(5000+100x)(600-10x)$$
$$=-1000x^2+10000x+3000000$$
$$=-1000(x-5)^2+3025000$$

이므로 y는 $x=5$일 때 최댓값 3025000을 갖는다.
따라서 하루 입장료 수입이 최대가 될 때, 한 사람의 입장료는
$5000+100\times5=5500$(원)

정답_ 5500원

435

두 점 D, E의 좌표가 각각 $(0,\ k)$, $(2,\ k)$이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\times\{(4-k)+(2-k)\}\times2=6-2k$$
$$S_2=2\times k=2k$$
$$\therefore\ S_1^2+S_2^2=(6-2k)^2+(2k)^2$$
$$=8k^2-24k+36$$
$$=8\left(k-\frac{3}{2}\right)^2+18$$

따라서 $0<k<2$에서 $S_1^2+S_2^2$은 $k=\frac{3}{2}$일 때 최솟값 18을 갖는다.

정답_ ⑤

436

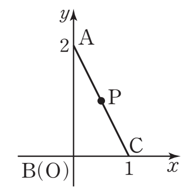
점 D의 좌표는 $(a,\ -a^2+4)$이므로
$A(-a,\ -a^2+4)$, $C(a,\ a^2-8)$
$\overline{AD}=2a$, $\overline{DC}=-2a^2+12$이므로 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 $f(a)$라고 하면

$$f(a)=2\{2a+(-2a^2+12)\}$$
$$=-4a^2+4a+24$$
$$=-4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+25$$

$0<a\le2$에서 $f(a)$는 $a=2$일 때 최솟값 16을 갖는다.
따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최솟값은 16이다.

정답_ 16

437



오른쪽 그림과 같이 점 B를 원점으로 하고 점 A는 y축, 점 C는 x축 위에 놓이도록 좌표평면을 잡으면
$A(0,\ 2)$, $B(0,\ 0)$, $C(1,\ 0)$
두 점 $A(0,\ 2)$, $C(1,\ 0)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{0-2}{1-0}=-2$$

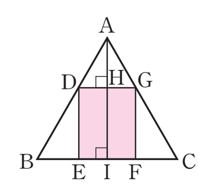
이므로 직선 AC의 방정식은
$y=-2x+2$
점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면 점 P가 선분 AC 위를 움직이므로 $0\le x\le1$

$$\therefore\ \overline{PB}^2+\overline{PC}^2=(x^2+y^2)+\{(x-1)^2+y^2\}$$
$$=2x^2+2y^2-2x+1$$
$$=2x^2+2(-2x+2)^2-2x+1$$
$$=10x^2-18x+9=10\left(x-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{9}{10}$$

따라서 $0\le x\le1$에서 $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은 $x=\frac{9}{10}$일 때 최솟값 $\frac{9}{10}$를 갖는다.

정답_ ④

438



오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{DG}$, $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 H, I라고 하자.
$\overline{DH}=a$ $(0<a<2)$라고 하면
$\overline{AH}=\sqrt{3}a$, $\overline{DE}=\overline{AI}-\overline{AH}=2\sqrt{3}-\sqrt{3}a$
이므로 직사각형 DEFG의 넓이를 $S(a)$라고 하면

$$S(a)=\overline{DG}\times\overline{DE}$$
$$=2a(2\sqrt{3}-\sqrt{3}a)$$
$$=-2\sqrt{3}a^2+4\sqrt{3}a$$
$$=-2\sqrt{3}(a-1)^2+2\sqrt{3}$$

$0<a<2$에서 $S(a)$는 $a=1$일 때 최댓값 $2\sqrt{3}$을 갖는다.
따라서 직사각형 DEFG의 넓이의 최댓값은 $2\sqrt{3}$이다.

정답_ $2\sqrt{3}$

참고 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 직각삼각형 ABI에서
$\overline{AB}:\overline{BI}:\overline{AI}=2:1:\sqrt{3}$
또, $\triangle ABI\backsim\triangle ADH$ (AA 닮음)이므로
$\overline{AD}:\overline{DH}:\overline{AH}=\overline{AB}:\overline{BI}:\overline{AI}=2:1:\sqrt{3}$

439

$\angle A=45^\circ$이므로 삼각형 AED는 직각이등변삼각형이다.
$\overline{EF}\,/\!/\,\overline{AC}$이므로 $\angle EFB=\angle C=45^\circ$ (동위각)
따라서 삼각형 EBF도 직각이등변삼각형이다.
$\overline{DE}=\overline{AD}=a$ $(0<a<3\sqrt{2})$라고 하면
$\overline{AE}=\sqrt{2}a$, $\overline{EB}=\overline{AB}-\overline{AE}=6-\sqrt{2}a$
$\overline{EF}=\sqrt{2}\,\overline{EB}=6\sqrt{2}-2a$
$\overline{DC}=\overline{AC}-\overline{AD}=6\sqrt{2}-a$
이므로 사각형 DEFC의 넓이를 $S(a)$라고 하면

$S(a)=\frac{1}{2}\times(\overline{DC}+\overline{EF})\times\overline{DE}$

$=\frac{1}{2}\times(6\sqrt{2}-a+6\sqrt{2}-2a)\times a$

$=6\sqrt{2}a-\frac{3}{2}a^2$

$=-\frac{3}{2}(a-2\sqrt{2})^2+12$

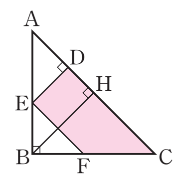
$0<a<3\sqrt{2}$에서 $S(a)$는 $a=2\sqrt{2}$일 때 최댓값 12를 갖는다.
따라서 사각형 DEFC의 넓이의 최댓값은 12이다.

정답_ 12

참고 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 삼각형 ABC가 직각이등변삼각형이므로 점 H는 $\overline{AC}$의 중점이다.
이때 $\overline{AB}=6$이므로 $\overline{AC}=6\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AH}=\overline{CH}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

따라서 $\overline{DE}=\overline{AD}=a$라고 하면 $0<\overline{AD}<\overline{AH}$이므로 $0<a<3\sqrt{2}$



440

이차함수 $y=x^2+ax-8$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 4, b이므로 4, b는 이차방정식 $x^2+ax-8=0$의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$4+b=-a$, $4\times b=-8$
$\therefore a=-2$, $b=-2$ ❶
이차함수 $y=x^2-bx+a-1$, 즉 $y=x^2+2x-3$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+2x-3=0$의 실근과 같으므로
$x^2+2x-3=0$에서 $(x+3)(x-1)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$ ❷
따라서 이차함수 $y=x^2+2x-3$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 좌표는 $(-3, 0)$, $(1, 0)$이므로 두 점 사이의 거리는
$|1-(-3)|=4$ ❸

정답_ 4

채점 기준	비율
❶ a, b의 값 구하기	40 %
❷ $y=x^2-bx+a-1$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표 구하기	40 %
❸ 두 점 사이의 거리 구하기	20 %

441

$f(\alpha)=4+\alpha$, $f(\beta)=4+\beta$에서
$f(\alpha)-\alpha-4=0$, $f(\beta)-\beta-4=0$
이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)-x-4=0$의 두 근이다. ❶
즉, α, β는 이차함수 $y=f(x)-x-4$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표이다.
한편,
$f(x)-x-4=(x^2-2x+5)-x-4=x^2-3x+1$
이므로 이차방정식 $f(x)-x-4=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$ ❷
따라서 구하는 x좌표의 차는

$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{3^2-4\times1}=\sqrt{5}$ ❸

정답_ $\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ α, β가 $f(x)-x-4=0$의 두 근임을 알기	20 %
❷ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	40 %
❸ 두 교점의 x좌표의 차 구하기	40 %

442

두 점 B, C의 x좌표를 각각 α, β라고 하면
$B(\alpha, k)$, $C(\beta, k)$
이때 α, β는 이차방정식 $x^2-8x+13=k$, 즉 $x^2-8x+13-k=0$의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=13-k$ …… ㉠
❶
이때 △AOB와 △AOC의 넓이의 합이 32이고

$\triangle AOB=\frac{1}{2}\alpha k$, $\triangle AOC=\frac{1}{2}\beta k$이므로

$\frac{1}{2}\alpha k+\frac{1}{2}\beta k=32$, $\frac{1}{2}k(\alpha+\beta)=32$

$4k=32$ ($\because$ ㉠) $\therefore k=8$ ❷
$\therefore \alpha\beta=13-8=5$ ❸

정답_ 5

채점 기준	비율
❶ 두 점 B, C의 x좌표의 합 구하기	20 %
❷ k의 값 구하기	50 %
❸ 두 점 B, C의 x좌표의 곱 구하기	30 %

443

$f(x)=-x^2+ax+b=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+b$

$f(-2)=f(4)$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{-2+4}{2}=1$

즉, $\frac{a}{2}=1$에서 $a=2$ ❶
$\therefore f(x)=-x^2+2x+b$
$3\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최대이므로
$f(3)=7$
즉, $-9+6+b=7$이므로 $b=10$ ❷
따라서 $f(x)=-x^2+2x+10$이므로
$f(1)=-1+2+10=11$ ❸

정답_ 11

채점 기준	비율
❶ a의 값 구하기	40 %
❷ b의 값 구하기	40 %
❸ $f(1)$의 값 구하기	20 %

444

조건 ㈎에서 이차함수 $y=-x^2+px-q$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $-x^2+px-q=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=p^2-4q=0 \qquad \therefore q=\frac{p^2}{4}$ ❶

$\therefore f(x)=-x^2+px-q=-x^2+px-\frac{p^2}{4}=-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$

조건 ㈏에 의하여 $-p\le x\le p$에서 함수 $f(x)$는 $x=-p$일 때 최솟값을 갖는다.

즉, $f(-p)=-54$이므로

$-\frac{9}{4}p^2=-54,\ p^2=24$ ❷

$\therefore q=\frac{1}{4}\times 24=6$

$\therefore p^2+q^2=24+36=60$ ❸

정답_ 60

채점 기준	비율
❶ q를 p에 대한 식으로 나타내기	30 %
❷ p^2의 값 구하기	50 %
❸ p^2+q^2의 값 구하기	20 %

445

두 점 A$(-2, 1)$, B$(2, -3)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-3-1}{2-(-2)}=-1$

이므로 직선 AB의 방정식을 $y=-x+b$로 놓고 $x=-2$, $y=1$을 대입하면

$1=-(-2)+b \qquad \therefore b=-1$

따라서 직선 AB의 방정식은 $y=-x-1$

점 P가 선분 AB 위를 움직이므로 $-2\le x\le 2$ ❶

$x^2+y^2+2x-3=x^2+(-x-1)^2+2x-3$

$=2x^2+4x-2$

$=2(x+1)^2-4$ ❷

$-2\le x\le 2$에서 주어진 식은 $x=2$일 때 최댓값 14, $x=-1$일 때 최솟값 -4를 가지므로 최댓값과 최솟값의 차는

$14-(-4)=18$ ❸

정답_ 18

채점 기준	비율
❶ 직선 AB의 방정식과 x의 값의 범위 구하기	40 %
❷ 주어진 식을 완전제곱식으로 변형하기	30 %
❸ 최댓값과 최솟값의 차 구하기	30 %

446

이차함수 $y=x^2-(3a+5)x+6a+6$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-(3a+5)x+6a+6=0$의 두 근이다.

이차방정식 $x^2-(3a+5)x+6a+6=0$에서

$x^2-(3a+5)x+2(3a+3)=0$

$(x-2)\{x-(3a+3)\}=0 \qquad \therefore x=2$ 또는 $x=3a+3$

$\therefore$ A$(2, 0)$, B$(3a+3, 0)$ 또는 A$(3a+3, 0)$, B$(2, 0)$

점 C는 이차함수 $y=x^2-(3a+5)x+6a+6$의 그래프와 y축의 교점이므로 C$(0, 6a+6)$

이때 $0<a<1$에서 $3<3a+3<6$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\{(3a+3)-2\}(6a+6)=9a^2+12a+3$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 8이므로

$9a^2+12a+3=8,\ 9a^2+12a-5=0$

$(3a+5)(3a-1)=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}\ (\because 0<a<1)$

정답_ ②

447

이차함수 $y=(x+2a)(x+2b)+2$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $(x+2a)(x+2b)+2=0$, 즉

$x^2+2(a+b)x+4ab+2=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(a+b)^2-4ab-2<0,\ a^2-2ab+b^2-2<0$

$(a-b)^2<2 \qquad \therefore |a-b|<\sqrt{2}$

(i) $|a-b|=0$일 때

$a=b$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$

의 6가지이다.

(ii) $|a-b|=1$일 때

$a=b+1$ 또는 $a=b-1$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5),$

$(5, 4), (5, 6), (6, 5)$

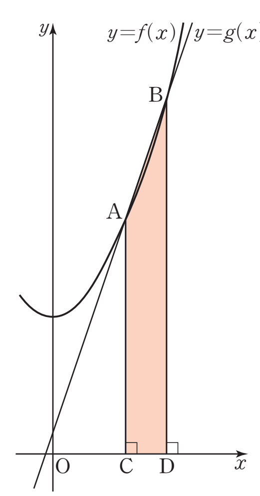
의 10가지이다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6+10=16$

정답_ 16

448



두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표를 구하면 이차방정식 $x^2+n^2=2nx+1$에서

$x^2-2nx+n^2-1=0$

$x^2-2nx+(n-1)(n+1)=0$

$(x-n+1)(x-n-1)=0$

$\therefore x=n-1$ 또는 $x=n+1$

따라서 A$(n-1, 2n^2-2n+1)$,

B$(n+1, 2n^2+2n+1)$로 놓으면

C$(n-1, 0)$, D$(n+1, 0)$이므로

사각형 ACDB의 넓이는

$\frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{BD})\times\overline{CD}$

$=\frac{1}{2}\{(2n^2-2n+1)+(2n^2+2n+1)\}\times\{(n+1)-(n-1)\}$

$=4n^2+2$

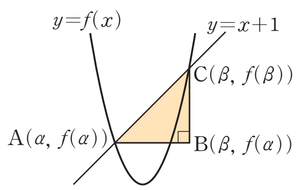
이때 사각형 ACDB의 넓이가 66이므로

$4n^2+2=66,\ 4n^2=64$

$n^2=16 \qquad \therefore n=4\ (\because n$은 자연수$)$

정답_ ④

449



직선 $y=x+1$의 기울기가 1이므로 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이다.
$A(\alpha,\ \alpha+1)$, $B(\beta,\ \alpha+1)$, $C(\beta,\ \beta+1)$이므로

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}$$
$$=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\beta-\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2$$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2=8$, $(\beta-\alpha)^2=16$

$\therefore \beta-\alpha=4\ (\because \beta>\alpha)$ ...... ㉠

한편, 이차함수 $y=x^2-x+k$의 그래프와 직선 $y=x+1$의 두 교점의 x좌표가 α, β이므로 α, β는 이차방정식 $x^2-x+k=x+1$, 즉 $x^2-2x+k-1=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$ ...... ㉡

$\alpha\beta=k-1$ ...... ㉢

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=-1$, $\beta=3$

$\alpha=-1$, $\beta=3$을 ㉢에 대입하면

$-1\times3=k-1 \qquad \therefore k=-2$

따라서 $f(x)=x^2-x-2$이므로

$f(6)=36-6-2=28$

정답_ ①

450

이차함수 $y=\frac{1}{2k}x^2+2x+8k+1$의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 $y=ax+b$라고 하면 이 직선이 이차함수 $y=\frac{1}{2k}x^2+2x+8k+1$의 그래프와 접하므로 이차방정식

$\frac{1}{2k}x^2+2x+8k+1=ax+b$, 즉

$x^2+2k(2-a)x+16k^2+2k-2kb=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=\{k(2-a)\}^2-(16k^2+2k-2kb)=0$

$(a^2-4a-12)k^2+2(b-1)k=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a^2-4a-12=0$에서 $(a+2)(a-6)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=6$

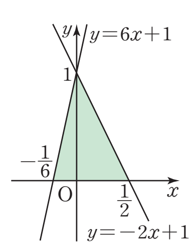
$b-1=0$에서 $b=1$

$a=-2$, $b=1$이면 직선의 방정식은

$y=-2x+1$

$a=6$, $b=1$이면 직선의 방정식은

$y=6x+1$

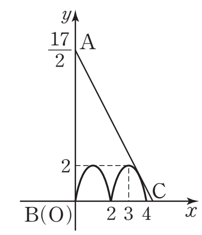


따라서 두 직선 $y=-2x+1$, $y=6x+1$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{6}\right)\right\}\times1=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times1=\frac{1}{3}$

정답_ ①

451



오른쪽 그림과 같이 점 B를 원점으로 하고 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 변 AC에 접하는 포물선의 방정식은

$y=a(x-2)(x-4)\ (a<0)$이다.

이 포물선이 점 $(3,\ 2)$를 지나므로

$2=-a \qquad \therefore a=-2$

$\therefore y=-2(x-2)(x-4)$

직선 AC의 방정식을 $y=mx+\frac{17}{2}\ (m<0)$로 놓으면 이 직선이 이차함수 $y=-2(x-2)(x-4)$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-2(x-2)(x-4)=mx+\frac{17}{2}$, 즉 $4x^2+2(m-12)x+49=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(m-12)^2-4\times49=0$, $m^2-24m-52=0$

$(m+2)(m-26)=0 \qquad \therefore m=-2\ (\because m<0)$

따라서 직선 AC의 방정식은 $y=-2x+\frac{17}{2}$이므로 x절편은

$0=-2x+\frac{17}{2}$에서 $x=\frac{17}{4}$

따라서 $C\left(\frac{17}{4},\ 0\right)$이므로 $\overline{BC}=\frac{17}{4}$이다.

정답_ $\frac{17}{4}$

452

조건 (가)에서 $f(x)=a(x-1)^2+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

조건 (다)에서 $f(0)=2$이므로 $a+b=2$ ...... ㉠

조건 (나)를 다음 두 경우로 나누어 생각해 보자.

(i) $a<0$일 때

$-1\le x\le4$에서 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최솟값 -6을 가지므로 $f(4)=9a+b=-6$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$

$\therefore f(x)=-(x-1)^2+3$

이차함수 $y=-(x-1)^2+3$의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 접하므로 이차방정식 $-(x-1)^2+3=-2x+k$, 즉 $x^2-4x+k-2=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(k-2)=0 \qquad \therefore k=6$

(ii) $a>0$일 때

$-1\le x\le4$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 -6을 가지므로 $f(1)=b=-6$

$b=-6$을 ㉠에 대입하면 $a=8$

$\therefore f(x)=8(x-1)^2-6$

이차함수 $y=8(x-1)^2-6$의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 접하므로 이차방정식 $8(x-1)^2-6=-2x+k$, 즉 $8x^2-14x+2-k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-7)^2-8(2-k)=0 \qquad \therefore k=-\frac{33}{8}$

그런데 k는 정수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $k=6$

정답_ ④

453

$f(x)=|x-1|^2+2|x|-5=(x-1)^2+2|x|-5$

(i) $-2\le x\le 0$일 때

$f(x)=(x-1)^2-2x-5=x^2-4x-4=(x-2)^2-8$

$-2\le x\le 0$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 8, $x=0$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

(ii) $0\le x\le 3$일 때

$f(x)=(x-1)^2+2x-5=x^2-4$

$0\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 5, $x=0$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 8, $x=0$일 때 최솟값 -4를 가지므로

$a=-2,\ M=8,\ b=0,\ m=-4$

$\therefore\ a+b+M+m=-2+0+8+(-4)=2$

정답_ ④

454

$f(x)=ax^2+bx+5$

$=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a}+5$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 $-\dfrac{b}{2a}$이다.

조건 (가)에서 $a<0,\ b<0$이므로

$-\dfrac{b}{2a}<0$

따라서 함수 $f(x)$는 $1\le x\le 2$에서 $x=1$일 때 최댓값을 갖는다.

조건 (나)에서 $1\le x\le 2$일 때 함수 $f(x)$의 최댓값은 3이므로

$f(1)=3$

즉, $a+b+5=3$이므로 $a+b=-2$

이때 $a,\ b$는 음의 정수이므로 $a=-1,\ b=-1$

따라서 $f(x)=-x^2-x+5$이므로

$f(-2)=-4+2+5=3$

정답_ 3

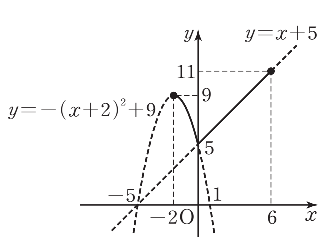
455

$x<0$에서

$f(x)=-x^2-4x+5=-(x+2)^2+9$

$-2\le x\le 6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로

$5\le f(x)\le 11$



$f(x)=t$로 놓으면 $5\le t\le 11$

$\therefore\ y=\{f(x)\}^2-6f(x)-3=t^2-6t-3=(t-3)^2-12$

$5\le t\le 11$에서 이 함수는 $t=11$일 때 최댓값 52, $t=5$일 때 최솟값 -8을 가지므로 최댓값과 최솟값의 차는

$52-(-8)=60$

정답_ ④

456

$2x+3y=6$에서 $3y=6-2x$

이때 $x,\ y$가 양의 실수이므로

$x>0,\ 6-2x>0\qquad \therefore\ 0<x<3$

$\therefore\ (\sqrt{15+2x}+\sqrt{13+3y})^2$

$=\{\sqrt{15+2x}+\sqrt{13+(6-2x)}\}^2$

$=(\sqrt{15+2x}+\sqrt{19-2x})^2$

$=15+2x+19-2x+2\sqrt{(15+2x)(19-2x)}$

$=34+2\sqrt{-4x^2+8x+285}$

$=34+2\sqrt{-4(x-1)^2+289}$

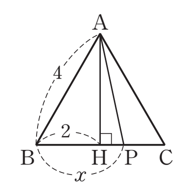
따라서 주어진 식은 $0<x<3$에서 $x=1$일 때 최대이고, 그 최댓값은

$34+2\sqrt{289}=34+2\times 17=68$

정답_ ⑤

457

오른쪽 그림과 같이 정삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 H, $\overline{BP}=x$라고 하면



$\overline{AH}=2\sqrt{3},\ 2\le x\le 4$이므로

$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\{(x-2)^2+(2\sqrt{3})^2\}+(4-x)^2$

$=2x^2-12x+32$

$=2(x-3)^2+14$

$2\le x\le 4$에서 $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2$은 $x=2$ 또는 $x=4$일 때 최댓값 16, $x=3$일 때 최솟값 14를 갖는다.

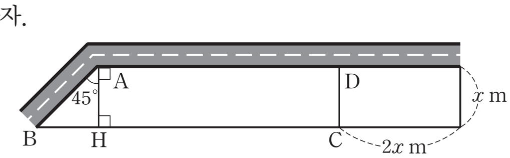
따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$16+14=30$

정답_ ③

458

다음 그림과 같이 직사각형 모양의 밭의 가로의 길이를 $2x$ m, 세로의 길이를 x m라 하고, A 지점에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



삼각형 ABH는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BH}=\overline{AH}=\overline{DC}=x$ m

$\overline{BC}=(90-4x)$ m

$\overline{AD}=\overline{HC}=\overline{BC}-\overline{BH}$

$=90-4x-x$

$=90-5x$ (m)

$x>0,\ 90-5x>0$에서 $0<x<18$

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$S(x)=\dfrac{1}{2}\{(90-5x)+(90-4x)\}\times x$

$=-\dfrac{9}{2}x^2+90x=-\dfrac{9}{2}(x-10)^2+450$

$0<x<18$에서 $S(x)$는 $x=10$일 때 최댓값 450을 가진다.

따라서 사다리꼴 모양의 밭의 넓이의 최댓값은 450 m^2이다.

정답_ ②

07 여러 가지 방정식

459

$f(x)=x^3+3x^2-5x+1$이라고 하면

$f(1)=1+3-5+1=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	3	-5	1
		1	4	-1
	1	4	-1	0

$f(x)=(x-1)(x^2+4x-1)$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 근은

$x=1$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{5}$

이므로 $a=1$, $b=-2$, $c=5$

$\therefore\ a+b+c=1+(-2)+5=4$

정답_ ②

460

$f(x)=x^3-9x^2+13x+23$이라고 하면

$f(-1)=-1-9-13+23=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	-9	13	23
		-1	10	-23
	1	-10	23	0

$f(x)=(x+1)(x^2-10x+23)$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 근은

$x=-1$ 또는 $x=5\pm\sqrt{2}$

$\therefore\ |\alpha|+|\beta|+|\gamma|=1+(5+\sqrt{2})+(5-\sqrt{2})=11$

정답_ ③

461

$f(x)=x^3+2x^2-3x-10$이라고 하면

$f(2)=8+8-6-10=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	1	2	-3	-10
		2	8	10
	1	4	5	0

$f(x)=(x-2)(x^2+4x+5)$

이때 방정식 $f(x)=0$의 두 허근 α, β는 방정식 $x^2+4x+5=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=5$

$\therefore\ \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-4)^3-3\times5\times(-4)=-4$

정답_ ③

참고 방정식 $x^2+4x+5=0$의 판별식을 D라고 하면 $\frac{D}{4}=2^2-5=-1<0$

따라서 방정식 $x^2+4x+5=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

462

$f(x)=x^4+3x^3+3x^2-x-6$이라고 하면

$f(-2)=16-24+12+2-6=0$

$f(1)=1+3+3-1-6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-2	1	3	3	-1	-6
		-2	-2	-2	6
1	1	1	1	-3	0
		1	2	3	
	1	2	3	0	

$f(x)=(x+2)(x-1)(x^2+2x+3)$

이때 방정식 $f(x)=0$의 두 허근 α, β는 방정식 $x^2+2x+3=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\times3=-2$

정답_ ②

참고 방정식 $x^2+2x+3=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=1^2-3=-2<0$

따라서 방정식 $x^2+2x+3=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

463

$f(x)=x^4+2x^3+3x^2-2x-4$라고 하면

$f(-1)=1-2+3+2-4=0$

$f(1)=1+2+3-2-4=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	2	3	-2	-4
		-1	-1	-2	4
1	1	1	2	-4	0
		1	2	4	
	1	2	4	0	

$f(x)=(x+1)(x-1)(x^2+2x+4)$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 근은

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

이므로 모든 실근의 합은 $(-1)+1=0$

정답_ 0

464

$(x^2-x-3)^2-2(x^2-x)+3=0$에서 $x^2-x=X$로 놓으면

$(X-3)^2-2X+3=0$, $X^2-8X+12=0$

$(X-2)(X-6)=0$ $\quad\therefore\ X=2$ 또는 $X=6$

(i) $X=2$일 때, $x^2-x=2$이므로

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) $X=6$일 때, $x^2-x=6$이므로

$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에서 $\alpha=-2$, $\beta=-1$, $\gamma=2$, $\delta=3$이므로

$\alpha-\beta+\gamma-\delta=-2-(-1)+2-3=-2$

정답_ ①

465

$(x^2-4x+1)(x^2-4x+2)=12$에서 $x^2-4x=X$로 놓으면

$(X+1)(X+2)=12$, $X^2+3X-10=0$

$(X+5)(X-2)=0$ $\quad\therefore\ X=-5$ 또는 $X=2$

(i) $X=-5$일 때, $x^2-4x=-5$이므로

$x^2-4x+5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라고 하면

$\frac{D_1}{4}=(-2)^2-5=-1<0$

즉, 방정식 $x^2-4x+5=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=2$일 때, $x^2-4x=2$이므로

$x^2-4x-2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라고 하면

$\frac{D_2}{4}=(-2)^2+2=6>0$

즉, 방정식 $x^2-4x-2=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 허근 α, β는 방정식 $x^2-4x+5=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=5$

한편, 계수가 실수인 이차방정식의 한 허근이 α이면 $\overline{\alpha}$도 근이므로 $\overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$

$\therefore (\alpha-\overline{\alpha})(\beta-\overline{\beta})=(\alpha-\beta)(\beta-\alpha)$
$=-(\alpha-\beta)^2=-(\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta$
$=-4^2+4\times5=4$

정답_ ②

466

$x(x-1)(x+2)(x+3)=10$에서

$\{x(x+2)\}\{(x-1)(x+3)\}-10=0$

$(x^2+2x)(x^2+2x-3)-10=0$

$x^2+2x=X$로 놓으면

$X(X-3)-10=0$, $X^2-3X-10=0$

$(X+2)(X-5)=0$ $\therefore X=-2$ 또는 $X=5$

(i) $X=-2$일 때, $x^2+2x=-2$이므로

$x^2+2x+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라고 하면

$\frac{D_1}{4}=1^2-2=-1<0$

즉, 방정식 $x^2+2x+2=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=5$일 때, $x^2+2x=5$이므로

$x^2+2x-5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라고 하면

$\frac{D_2}{4}=1^2+5=6>0$

즉, 방정식 $x^2+2x-5=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실근의 곱은 -5, 모든 허근의 곱은 2이므로

$a=-5$, $b=2$

$\therefore a+b=-5+2=-3$

정답_ ④

467

$x^4-13x^2+36=0$에서 $x^2=X$로 놓으면

$X^2-13X+36=0$, $(X-4)(X-9)=0$

$\therefore X=4$ 또는 $X=9$

즉, $x^2=4$ 또는 $x^2=9$이므로 $x=\pm2$ 또는 $x=\pm3$

따라서 음의 실근은 -2, -3이므로 모든 음의 실근의 합은

$-2+(-3)=-5$

정답_ ⑤

468

$x^4-8x^2+4=0$에서 $(x^4-4x^2+4)-4x^2=0$

$(x^2-2)^2-(2x)^2=0$, $(x^2+2x-2)(x^2-2x-2)=0$

$\therefore x^2+2x-2=0$ 또는 $x^2-2x-2=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}$

따라서 $\alpha=1+\sqrt{3}$, $\beta=-1-\sqrt{3}$이므로

$\alpha-\beta=1+\sqrt{3}-(-1-\sqrt{3})=2+2\sqrt{3}$

정답_ ⑤

참고 $-1-\sqrt{3}<1-\sqrt{3}<-1+\sqrt{3}<1+\sqrt{3}$

469

$x^4-9x^2+16=0$에서 $(x^4-8x^2+16)-x^2=0$

$(x^2-4)^2-x^2=0$, $(x^2+x-4)(x^2-x-4)=0$

$\therefore x^2+x-4=0$ 또는 $x^2-x-4=0$

$x^2+x-4=0$의 두 근을 α, β라 하고, $x^2-x-4=0$의 두 근을 γ, δ라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-4$, $\gamma+\delta=1$, $\gamma\delta=-4$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}=\frac{-1}{-4}+\frac{1}{-4}=0$

정답_ 0

470

$x\neq0$이므로 $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-3x+4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$, $x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2-3X+2=0$, $(X-1)(X-2)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=2$

(i) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$이므로

$x^2-x+1=0$ $\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ii) $X=2$일 때, $x+\frac{1}{x}=2$이므로

$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 허근은 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$이므로

$a=1$, $b=3$ $\therefore ab=1\times3=3$

정답_ ⑤

참고 $x=0$을 주어진 방정식에 대입하면 등식이 성립하지 않으므로 $x\neq0$이다.

471

$x\neq0$이므로 $x^4+5x^3+6x^2+5x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+5x+6+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$, $x^2+\frac{1}{x^2}+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+5X+4=0$, $(X+4)(X+1)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=-1$

(i) $X=-4$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=-4$이므로

$x^2+4x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라고 하면

$\dfrac{D_1}{4}=2^2-1=3>0$

즉, 방정식 $x^2+4x+1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $X=-1$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=-1$이므로

$x^2+x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라고 하면

$D_2=1^2-4=-3<0$

즉, 방정식 $x^2+x+1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 α는 $x+\dfrac{1}{x}=-4$의 근이고, β는 $x+\dfrac{1}{x}=-1$의 근이므로

$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=-4$, $\beta+\dfrac{1}{\beta}=-1$

$\therefore\ \alpha-\beta+\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}=\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)-\left(\beta+\dfrac{1}{\beta}\right)$

$=-4-(-1)=-3$

정답_ -3

472

방정식 $x^3+ax-6=0$의 한 근이 2이므로

$8+2a-6=0$ $\quad\therefore\ a=-1$

즉, 주어진 방정식은 $x^3-x-6=0$이므로

$f(x)=x^3-x-6$이라고 하면 $f(2)=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2+2x+3)$

이때 α, β는 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$

$\therefore\ a+\alpha+\beta=-1+(-2)=-3$

정답_ ③

473

방정식 $x^3+(k+1)x^2+(4k-3)x+k+7=0$의 한 근이 1이므로

$1+(k+1)+(4k-3)+k+7=0$

$6k+6=0$ $\quad\therefore\ k=-1$

즉, 주어진 방정식은 $x^3-7x+6=0$이므로

$f(x)=x^3-7x+6$이라고 하면 $f(1)=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+x-6)$

$=(x-1)(x+3)(x-2)$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 근은

$x=1$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=2$

이므로

$\alpha=-3$, $\beta=2$ 또는 $\alpha=2$, $\beta=-3$

$\therefore\ |\alpha-\beta|=|2-(-3)|=5$

정답_ ①

474

방정식 $x^4-3x^3-2x^2+(a+2)x+a=0$의 한 근이 2이므로

$16-24-8+2(a+2)+a=0$

$3a-12=0$ $\quad\therefore\ a=4$

즉, 주어진 방정식은 $x^4-3x^3-2x^2+6x+4=0$이므로

$f(x)=x^4-3x^3-2x^2+6x+4$라고 하면

$f(2)=0$, $f(-1)=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -3 & -2 & 6 & 4 \\ & & 2 & -2 & -8 & -4 \\ \hline -1 & 1 & -1 & -4 & -2 & \boxed{0} \\ & & -1 & 2 & 2 & \\ \hline & 1 & -2 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x+1)(x^2-2x-2)$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 근은

$x=2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}$

이므로 $\alpha=1+\sqrt{3}$

$\therefore\ a+\alpha=4+(1+\sqrt{3})=5+\sqrt{3}$

정답_ ②

참고 $-1<1-\sqrt{3}<1+\sqrt{3}$

475

방정식 $x^4-(k-4)x^3-x^2+(3k-8)x-8=0$의 한 근이 -2이므로

$16+8(k-4)-4-2(3k-8)-8=0$

$2k-12=0$ $\quad\therefore\ k=6$

즉, 주어진 방정식은 $x^4-2x^3-x^2+10x-8=0$이므로

$f(x)=x^4-2x^3-x^2+10x-8$이라고 하면

$f(-2)=0$, $f(1)=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & -2 & -1 & 10 & -8 \\ & & -2 & 8 & -14 & 8 \\ \hline 1 & 1 & -4 & 7 & -4 & \boxed{0} \\ & & 1 & -3 & 4 & \\ \hline & 1 & -3 & 4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+2)(x-1)(x^2-3x+4)$

이때 방정식 $f(x)=0$의 두 허근은 이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 근이므로 구하는 두 허근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 3이다.

정답_ ⑤

참고 방정식 $x^2-3x+4=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-3)^2-4\times1\times4=-7<0$

따라서 방정식 $x^2-3x+4=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

476

방정식 $x^4-3x^3-x^2+ax+b=0$의 두 근이 -1, 2이므로

$1+3-1-a+b=0$에서 $a-b=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$16-24-4+2a+b=0$에서 $2a+b=12$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=2$

즉, 주어진 방정식은 $x^4-3x^3-x^2+5x+2=0$이므로

$f(x)=x^4-3x^3-x^2+5x+2$라고 하면

$f(-1)=0$, $f(2)=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -3 & -1 & 5 & 2 \\ & & -1 & 4 & -3 & -2 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 3 & 2 & \boxed{0} \\ & & 2 & -4 & -2 & \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2-2x-1)$

이때 α, β는 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\times(-1)=6$

$\therefore\ a+b+\alpha^2+\beta^2=5+2+6=13$

정답_ 13

477

$f(x)=x^3-7x^2+(a+10)x-2a$라고 하면

$f(2)=8-28+2(a+10)-2a=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -7 & a+10 & -2a \\ & & 2 & -10 & 2a \\ \hline & 1 & -5 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2-5x+a)$

이때 방정식 $f(x)=0$의 세 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-5x+a=0$이 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-5x+a=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-5)^2-4a\geq 0\qquad \therefore\ a\leq\frac{25}{4}$

따라서 자연수 a는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.

정답_ ⑤

478

$f(x)=x^3-x^2+(k-1)x-k+1$이라고 하면

$f(1)=1-1+(k-1)-k+1=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & k-1 & -k+1 \\ & & 1 & 0 & k-1 \\ \hline & 1 & 0 & k-1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+k-1)$

이때 방정식 $f(x)=0$이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+k-1=0$이 두 개의 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+k-1=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=0-4(k-1)<0\qquad \therefore\ k>1$

따라서 정수 k의 최솟값은 2이다.

정답_ ⑤

479

$f(x)=x^3-x^2+(a-2)x+a$라고 하면

$f(-1)=-1-1-(a-2)+a=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -1 & a-2 & a \\ & & -1 & 2 & -a \\ \hline & 1 & -2 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2-2x+a)$

방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면 방정식 $x^2-2x+a=0$이 $x=-1$을 근으로 갖거나 중근을 가져야 한다.

(i) 방정식 $x^2-2x+a=0$이 $x=-1$을 근으로 갖는 경우

$1+2+a=0\qquad \therefore\ a=-3$

(ii) 방정식 $x^2-2x+a=0$이 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-a=0\qquad \therefore\ a=1$

(i), (ii)에서 $a=-3$ 또는 $a=1$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 $-3+1=-2$

정답_ ②

480

$f(x)=x^3-5x^2+(a+4)x-a$라고 하면

$f(1)=1-5+(a+4)-a=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & a+4 & -a \\ & & 1 & -4 & a \\ \hline & 1 & -4 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-4x+a)$

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 방정식 $x^2-4x+a=0$이 1과 1이 아닌 실근을 갖거나 1이 아닌 중근을 가져야 한다.

(i) 방정식 $x^2-4x+a=0$이 1과 1이 아닌 실근을 갖는 경우

$1-4+a=0\qquad \therefore\ a=3$

(ii) 방정식 $x^2-4x+a=0$이 1이 아닌 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-a=0\qquad \therefore\ a=4$

(i), (ii)에서 $a=3$ 또는 $a=4$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $3+4=7$

정답_ 7

참고 $a=3$이면 주어진 방정식은

$x^3-5x^2+7x-3=0$, $(x-1)^2(x-3)=0\qquad \therefore\ x=1$ 또는 $x=3$

$a=4$이면 주어진 방정식은

$x^3-5x^2+8x-4=0$, $(x-1)(x-2)^2=0\qquad \therefore\ x=1$ 또는 $x=2$

481

$f(x)=x^4+3x^3-(2a+1)x^2-3x+2a$라고 하면

$f(-1)=1-3-(2a+1)+3+2a=0$

$f(1)=1+3-(2a+1)-3+2a=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 3 & -(2a+1) & -3 & 2a \\ & & -1 & -2 & 2a+3 & -2a \\ \hline 1 & 1 & 2 & -2a-3 & 2a & \boxed{0} \\ & & 1 & 3 & -2a & \\ \hline & 1 & 3 & -2a & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-1)(x^2+3x-2a)$

이때 방정식 $f(x)=0$이 허근을 가지므로 이차방정식
$x^2+3x-2a=0$이 허근을 가져야 한다.
이차방정식 $x^2+3x-2a=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=3^2+8a<0 \qquad \therefore a<-\frac{9}{8}$
따라서 정수 a의 최댓값은 -2이다.

정답_ ①

482

$(x^2+ax+3)(x^2+ax+4)-2=0$에서 $x^2+ax=X$로 놓으면
$(X+3)(X+4)-2=0$, $X^2+7X+10=0$
$(X+2)(X+5)=0$, $(x^2+ax+2)(x^2+ax+5)=0$
두 이차방정식 $x^2+ax+2=0$, $x^2+ax+5=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라고 하면 $D_1=a^2-8$, $D_2=a^2-20$
주어진 사차방정식이 실근과 허근을 모두 갖는 경우는 다음과 같다.
(i) $D_1\geq 0$, $D_2<0$일 때
$a^2\geq 8$, $a^2<20$에서 $8\leq a^2<20$
이때 a는 자연수이므로 $a=3$ 또는 $a=4$
(ii) $D_1<0$, $D_2\geq 0$일 때
$a^2<8$, $a^2\geq 20$을 만족시키는 자연수 a의 값은 존재하지 않는다.
(i), (ii)에서 $a=3$ 또는 $a=4$이므로 구하는 곱은
$3\times 4=12$

정답_ 12

483

$f(x)=x^3-(2a+1)x^2+(a+1)^2x-(a^2+1)$이라고 하면
$f(1)=1-(2a+1)+(a+1)^2-(a^2+1)=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -(2a+1) & (a+1)^2 & -(a^2+1) \\ & & 1 & -2a & a^2+1 \\ \hline & 1 & -2a & a^2+1 & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-2ax+a^2+1)$
이때 α, β는 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+1=0$의 두 허근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=a^2+1$
한편, $\alpha+\beta=8$이므로 $2a=8 \qquad \therefore a=4$
$\therefore \alpha\beta=4^2+1=17$

정답_ ②

참고 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+1=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-a)^2-(a^2+1)=-1<0$
따라서 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

484

$f(x)=x^3+(a-3)x^2+2x-a$라고 하면
$f(1)=1+(a-3)+2-a=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a-3 & 2 & -a \\ & & 1 & a-2 & a \\ \hline & 1 & a-2 & a & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x-1)\{x^2+(a-2)x+a\}$
이때 α, β는 이차방정식 $x^2+(a-2)x+a=0$의 두 허근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-a+2$, $\alpha\beta=a$
한편, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-3$이므로
$\alpha\beta(\alpha+\beta)=-3$, $a(-a+2)=-3$, $a^2-2a-3=0$
$(a+1)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=3$ …… ㉠
또, 방정식 $f(x)=0$이 두 허근을 가지므로 이차방정식
$x^2+(a-2)x+a=0$이 허근을 가져야 한다.
이차방정식 $x^2+(a-2)x+a=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=(a-2)^2-4a<0 \qquad \therefore a^2-8a+4<0$ …… ㉡
㉠에서 ㉡을 만족시키는 a의 값은 3이다.

정답_ 3

485

$f(x)=x^3-8x^2+(k+12)x-2k$라고 하면
$f(2)=8-32+2(k+12)-2k=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -8 & k+12 & -2k \\ & & 2 & -12 & 2k \\ \hline & 1 & -6 & k & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2-6x+k)$
이때 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2-6x+k=0$이 2가 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-3)^2-k>0 \qquad \therefore k<9$ …… ㉠
또, 방정식 $x^2-6x+k=0$이 2를 근으로 갖지 않아야 하므로
$4-12+k\neq 0 \qquad \therefore k\neq 8$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $k<8$ 또는 $8<k<9$ …… ㉢
이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 두 실근을 α, β $(0<\alpha<\beta)$라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=k$
2, α, β가 직각삼각형의 세 변의 길이가 되는 경우는 다음과 같다.
(i) 빗변의 길이가 2인 경우
$\alpha^2+\beta^2=2^2$이므로
$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4$, $6^2-2k=4 \qquad \therefore k=16$
이것은 ㉢을 만족시키지 않으므로 조건을 만족시키는 실수 k의 값은 존재하지 않는다.
(ii) 빗변의 길이가 β인 경우
$2^2+\alpha^2=\beta^2$이므로
$\beta^2-\alpha^2=4$, $(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)=4$
$6(\beta-\alpha)=4 \qquad \therefore \beta-\alpha=\frac{2}{3}$
$\alpha+\beta=6$, $\beta-\alpha=\frac{2}{3}$를 연립하여 풀면
$\alpha=\frac{8}{3}$, $\beta=\frac{10}{3}$
$\therefore k=\alpha\beta=\frac{8}{3}\times\frac{10}{3}=\frac{80}{9}$
(i), (ii)에서 $k=\frac{80}{9}$

정답_ ⑤

참고 2, α, β가 직각삼각형의 세 변의 길이이고 $\alpha<\beta$일 때, $\alpha+\beta=6$이면
$6-\beta<\beta \quad \therefore \beta>3$
따라서 2, α, β 중에서 가장 큰 값이 β이므로 빗변의 길이는 β이다.

486

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \alpha\beta\gamma=1$

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=1^2-2\times2=-3$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{2}{1}=2$

정답_ (1) -3 (2) 2

487

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=-1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3,\ \alpha\beta\gamma=2$
$\therefore (2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$
$=8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
$=8-4\times(-1)+2\times(-3)-2=4$

정답_ ③

다른 풀이
$x^3+x^2-3x-2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로
$x^3+x^2-3x-2=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
위 식의 양변에 $x=2$를 대입하면
$8+4-6-2=(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$
$\therefore (2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=4$

488

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1,\ \alpha\beta\gamma=-2$
$\alpha+\beta+\gamma=3$에서
$\alpha+\beta=3-\gamma,\ \beta+\gamma=3-\alpha,\ \gamma+\alpha=3-\beta$
$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$
$=(3-\gamma)(3-\alpha)(3-\beta)$
$=27-9(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
$=27-9\times3+3\times1-(-2)=5$

정답_ 5

489

$(x-3)(x-1)(x+2)+1=x$에서 $x^3-2x^2-6x+7=0$
이 방정식의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-6,\ \alpha\beta\gamma=-7$
$\therefore \alpha^3+\beta^3+\gamma^3$
$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$
$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$
$=2\{2^2-3\times(-6)\}+3\times(-7)=23$

정답_ ②

490

주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 2α, 5α $(\alpha\neq0)$라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+2\alpha+5\alpha=16,\ 8\alpha=16 \quad \therefore \alpha=2$
따라서 세 근이 2, 4, 10이므로
$2\times4+4\times10+10\times2=a+5$에서 $a=63$
$2\times4\times10=-b$에서 $b=-80$
$\therefore a+b=63+(-80)=-17$

정답_ -17

491

주어진 삼차방정식의 세 실근의 합이 6이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\dfrac{a+3}{2}=6 \quad \therefore a=9$
즉, 주어진 방정식은 $2x^3-12x^2+(b^2+18)x-3b^2=0$이므로
$f(x)=2x^3-12x^2+(b^2+18)x-3b^2$이라고 하면
$f(3)=54-108+3(b^2+18)-3b^2=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

3	2	-12	b^2+18	$-3b^2$
		6	-18	$3b^2$
	2	-6	b^2	0

$f(x)=(x-3)(2x^2-6x+b^2)$
이때 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $2x^2-6x+b^2=0$이 3이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $2x^2-6x+b^2=0$의 판별식을 D라고 하면
$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-2b^2>0 \quad \therefore b^2<\dfrac{9}{2}$ ...... ㉠
또, 방정식 $2x^2-6x+b^2=0$이 3을 근으로 갖지 않아야 하므로
$18-18+b^2\neq0 \quad \therefore b^2\neq0$ ...... ㉡
㉠, ㉡에서 $0<b^2<\dfrac{9}{2}$
따라서 조건을 만족시키는 정수 b는 -2, -1, 1, 2이므로 순서쌍 (a, b)는
$(9, -2)$, $(9, -1)$, $(9, 1)$, $(9, 2)$
의 4개이다.

정답_ ②

492

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4,\ \alpha\beta\gamma=1$
$\therefore \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{-4}{1}=-4$
$\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\beta}\times\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\gamma}\times\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{2}{1}=2$
$\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{1}{\beta}\times\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{1}{\alpha\beta\gamma}=1$
즉, $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$, $\dfrac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은
$x^3+4x^2+2x-1=0$
따라서 $a=4$, $b=2$, $c=-1$이므로
$a+b+c=4+2+(-1)=5$

정답_ ③

493

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, $\alpha\beta\gamma=-10$

$\alpha+\beta+\gamma=0$에서

$\alpha+\beta=-\gamma$, $\beta+\gamma=-\alpha$, $\gamma+\alpha=-\beta$

$\therefore (\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=2(\alpha+\beta+\gamma)=0$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$

$=(-\gamma)\times(-\alpha)+(-\alpha)\times(-\beta)+(-\beta)\times(-\gamma)$

$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(-\gamma)\times(-\alpha)\times(-\beta)=-\alpha\beta\gamma=10$

따라서 $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3+x-10=0$

정답_ $x^3+x-10=0$

494

$f(1)=f(3)=f(5)=-2$에서

$f(1)+2=f(3)+2=f(5)+2=0$

이므로 삼차방정식 $f(x)+2=0$의 세 근이 1, 3, 5이다.

이때 1, 3, 5를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(1+3+5)x^2+(1\times3+3\times5+5\times1)x-1\times3\times5=0$

$\therefore x^3-9x^2+23x-15=0$

즉, $f(x)+2=x^3-9x^2+23x-15$이므로

$f(x)=x^3-9x^2+23x-17$

따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 17이다.

정답_ ⑤

495

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{2}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\frac{3}{2}$, $\alpha\beta\gamma=-1$

$\therefore \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)+\left(\beta+\frac{1}{2}\right)+\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)=\alpha+\beta+\gamma+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$

$\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(\beta+\frac{1}{2}\right)+\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)+\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+\frac{3}{4}$

$=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$

$\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)$

$=\alpha\beta\gamma+\frac{1}{2}(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma)+\frac{1}{8}$

$=-1-\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=-\frac{3}{2}$

따라서 $\alpha+\frac{1}{2}$, $\beta+\frac{1}{2}$, $\gamma+\frac{1}{2}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 4인 삼차방정식은

$4\left(x^3-2x^2-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\right)=0 \qquad \therefore 4x^3-8x^2-x+6=0$

정답_ $4x^3-8x^2-x+6=0$

496

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $-i$가 근이면 i도 근이다.

나머지 한 근을 α라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-i+i+\alpha=-4 \qquad \therefore \alpha=-4$

따라서 나머지 두 근의 곱은

$i\times(-4)=-4i$

정답_ ⑤

참고 주어진 삼차방정식의 세 근이 $-i$, i, -4이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-i\times i+i\times(-4)+(-4)\times(-i)=a$에서 $a=1$

$-i\times i\times(-4)=b$에서 $b=-4$

497

삼차방정식 $f(x)=0$의 계수가 실수이므로 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다.

따라서 $f(x)=(x-3)\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}$이므로

$f(1)=(1-3)(1-1-i)(1-1+i)=-2\times(-i)\times i=-2$

정답_ ①

다른 풀이

삼차방정식 $f(x)=0$의 계수가 실수이므로 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다.

이때

$3+(1+i)+(1-i)=5$,

$3(1+i)+(1+i)(1-i)+3(1-i)=8$,

$3(1+i)(1-i)=6$

이므로 3, $1+i$, $1-i$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3-5x^2+8x-6=0$

즉, $f(x)=x^3-5x^2+8x-6$이므로

$f(1)=1-5+8-6=-2$

498

주어진 사차방정식의 계수가 실수이므로 $2+i$, $1-i$가 근이면 $2-i$, $1+i$도 근이다.

이때 $2+i$, $2-i$, $1+i$, $1-i$를 네 근으로 하고 x^4의 계수가 a $(a\neq0)$인 사차방정식은

$a\{x-(2+i)\}\{x-(2-i)\}\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$

$a(x^2-4x+5)(x^2-2x+2)=0$

$\therefore a(x^4-6x^3+15x^2-18x+10)=0$

따라서 $m=15a$, $n=10a$이므로

$\frac{m}{n}=\frac{15a}{10a}=\frac{3}{2}$

정답_ $\frac{3}{2}$

499

$f(x)=2x^4-(2a-3)x^3+17x^2+11x-2a-5$라고 하면

$f(-1)=2+(2a-3)+17-11-2a-5=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & -(2a-3) & 17 & 11 & -2a-5 \\ & & -2 & 2a-1 & -2a-16 & 2a+5 \\ \hline & 2 & -2a+1 & 2a+16 & -2a-5 & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x+1)\{2x^3-(2a-1)x^2+(2a+16)x-2a-5\}$
방정식 $f(x)=0$의 계수가 유리수이므로 $3-\sqrt{2}$가 근이면 $3+\sqrt{2}$도 근이다.
이때 $3-\sqrt{2}$, $3+\sqrt{2}$는 방정식
$2x^3-(2a-1)x^2+(2a+16)x-2a-5=0$의 근이므로 이 방정식의 나머지 한 근을 α라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})+\alpha=\dfrac{2a-1}{2}$에서

$2\alpha=2a-13$ …… ㉠

$(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})+\alpha(3+\sqrt{2})+\alpha(3-\sqrt{2})=a+8$에서

$6\alpha=a+1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $\alpha=\dfrac{3}{2}$

정답_ ④

참고 $(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})\alpha=\dfrac{2a+5}{2}$에서

$14\alpha=2a+5$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀거나 ㉠, ㉢을 연립하여 풀어도 결과는 같다.

500

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $1-\sqrt{3}i$가 근이면 $1+\sqrt{3}i$도 근이다.
나머지 한 근을 α라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)+\alpha=-a$에서

$2+\alpha=-a$ …… ㉠

$(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)\alpha+(1-\sqrt{3}i)\alpha=b$에서

$4+2\alpha=b$ …… ㉡

$(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)\alpha=-c$에서

$4\alpha=-c$ …… ㉢

한편, 주어진 삼차방정식과 이차방정식의 공통인 근이 1개뿐이므로 공통인 근은 $x=\alpha$이다.

$\therefore \alpha^2+c\alpha+3=0$ …… ㉣

㉢에서 $c=-4\alpha$를 ㉣에 대입하면

$\alpha^2-4\alpha^2+3=0$, $\alpha^2=1$ $\quad\therefore \alpha=\pm1$

(i) $\alpha=1$일 때, ㉠, ㉡, ㉢에서 $a=-3$, $b=6$, $c=-4$
그런데 $c>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha=-1$일 때, ㉠, ㉡, ㉢에서 $a=-1$, $b=2$, $c=4$

(i), (ii)에서 $a=-1$, $b=2$, $c=4$

$\therefore a+b+c=-1+2+4=5$

정답_ ⑤

501

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$
ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로
$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

(1) $\omega^{909}=(\omega^3)^{303}=1$

(2) $\omega+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{-\omega}{\omega}=-1$

(3) $\omega^{10}+\omega^5+1=(\omega^3)^3\omega+\omega^3\omega^2+1$
$=\omega+\omega^2+1=0$

(4) $\omega^5+\dfrac{1}{\omega^5}=\omega^3\omega^2+\dfrac{1}{\omega^3\omega^2}=\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{\omega^4+1}{\omega^2}$
$=\dfrac{\omega^3\omega+1}{\omega^2}=\dfrac{\omega+1}{\omega^2}=\dfrac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

정답_ (1) 1 (2) -1 (3) 0 (4) -1

502

$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$
ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로
$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$
또, $\overline{\omega}$도 $x^3=1$, $x^2+x+1=0$의 근이므로
$(\overline{\omega})^3=1$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

$\therefore \dfrac{\omega^2}{1+\omega}+\dfrac{\overline{\omega}}{1+\overline{\omega}^2}=\dfrac{\omega^2}{-\omega^2}+\dfrac{\overline{\omega}}{-\overline{\omega}}$
$=-1-1=-2$

정답_ -2

503

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$
ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로
$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$\therefore$ (주어진 식)$=(1-\omega+\omega^2)-\omega^3(1-\omega+\omega^2)$
$+\cdots+\omega^{24}(1-\omega+\omega^2)-\omega^{27}(1-\omega)$
$=0-0+\cdots+0-(\omega^3)^9(1-\omega)$
$=-(-1)^9(1-\omega)=-\omega+1$

정답_ ⑤

504

$x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$
ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로
$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$\therefore \omega^{21}+3\omega^{20}+\omega=(\omega^3)^7+3(\omega^3)^6\omega^2+\omega$
$=(-1)^7+3\times(-1)^6\times\omega^2+\omega$
$=-1+3\omega^2+\omega$
$=-1+3(\omega-1)+\omega$
$=4\omega-4$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{4}{4\omega-4}=\dfrac{1}{\omega-1}=\dfrac{1}{\omega^2}$
$=\dfrac{\omega}{\omega^3}=-\omega$

정답_ ⑤

505

$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$
ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로
$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$
또, $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

ㄱ. $\dfrac{1}{\omega^2}+\dfrac{1}{\overline{\omega}^2}=\dfrac{\omega^2+\overline{\omega}^2}{\omega^2\overline{\omega}^2}=\dfrac{(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}}{(\omega\overline{\omega})^2}$
$=\dfrac{(-1)^2-2\times1}{1^2}=-1$ (참)

ㄴ. $\omega^3=1$에서 $\frac{1}{\omega^2}=\omega$이므로

$$1+\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=1+\omega^2+\omega=0 \text{ (참)}$$

ㄷ. $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{30}=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)$

$$+\cdots+\omega^{27}(1+\omega+\omega^2)+\omega^{30}$$

$$=0+0+\cdots+0+(\omega^3)^{10}=1 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

506

ω는 $x^3+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=-1$

$x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

ω, $\overline{\omega}$는 $x^2-x+1=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega\overline{\omega}=1$

$\omega^3=-1$에서 $-\frac{1}{\omega^2}=\omega$이고, $\omega\overline{\omega}=1$에서 $\frac{1}{\overline{\omega}}=\omega$이므로

$$f(n)=\left(1-\frac{1}{\omega^2}\right)^n-\left(1+\frac{1}{\overline{\omega}}\right)^n=(1+\omega)^n-(1+\omega)^n=0$$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=0$

정답_ 0

507

$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore \omega^{7n}+(\omega+1)^{4n}=\{(\omega^3)^2\omega\}^n+(-\omega^2)^{4n}=\omega^n+\omega^{8n}$

$$=\omega^n+\{(\omega^3)^2\omega^2\}^n=\omega^n+\omega^{2n}$$

이때 $\omega^{7n}+(\omega+1)^{4n}=-1$이므로 $\omega^n+\omega^{2n}=-1$

(i) $n=3k+1$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3k+1}+\omega^{6k+2}=(\omega^3)^k\omega+(\omega^3)^{2k}\omega^2$$
$$=\omega+\omega^2=-1$$

(ii) $n=3k+2$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3k+2}+\omega^{6k+4}=(\omega^3)^k\omega^2+(\omega^3)^{2k+1}\omega$$
$$=\omega^2+\omega=-1$$

(iii) $n=3k+3$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3k+3}+\omega^{6k+6}=(\omega^3)^{k+1}+(\omega^3)^{2k+2}=1+1=2$$

(i)~(iii)에서 자연수 n은 3의 배수가 아닌 수이어야 하므로 30 이하의 자연수 n의 개수는

$30-10=20$

정답_ 20

508

$x\neq0$이므로 $x^4-6x^3+7x^2-6x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2-6x+7-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}=0,\ x^2+\frac{1}{x^2}-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+7=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2-6X+5=0$, $(X-1)(X-5)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=5$

(i) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$이므로

$x^2-x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라고 하면

$D_1=(-1)^2-4=-3<0$

즉, 방정식 $x^2-x+1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=5$일 때, $x+\frac{1}{x}=5$이므로

$x^2-5x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라고 하면

$D_2=(-5)^2-4=21>0$

즉, 방정식 $x^2-5x+1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^2-\omega+1=0$

$(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$에서 $\omega^3+1=0$ $\quad\therefore \omega^3=-1$

또, $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1$

ㄱ. $\omega^{100}=(\omega^3)^{33}\omega=(-1)^{33}\omega=-\omega=-(1-\overline{\omega})=\overline{\omega}-1$ (참)

ㄴ. $(\omega^2+\omega+1)^{15}+(\omega^2+\omega-1)^{15}$

$$=(\omega-1+\omega+1)^{15}+(\omega^2+\omega^2)^{15}$$
$$=(2\omega)^{15}+(2\omega^2)^{15}=2^{15}\omega^{15}+2^{15}\omega^{30}$$
$$=2^{15}(\omega^3)^5+2^{15}(\omega^3)^{10}=2^{15}\times(-1)^5+2^{15}\times(-1)^{10}$$
$$=-2^{15}+2^{15}=0 \text{ (참)}$$

ㄷ. $1+2\omega+3\omega^2+4\omega^3+5\omega^4+6\omega^5+7\omega^6+8\omega^7+9\omega^8$

$$=1+2\omega+3\omega^2-4-5\omega-6\omega^2+7+8\omega+9\omega^2$$
$$=4+5\omega+6\omega^2=4+5\omega+6(\omega-1)$$
$$=11\omega-2 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

509

직육면체 모양의 상자의 부피가 192 cm^3이므로

$(20-2x)(10-2x)x=192$, $4x^3-60x^2+200x=192$

$\therefore x^3-15x^2+50x-48=0$

$f(x)=x^3-15x^2+50x-48$이라고 하면

$f(2)=8-60+100-48=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	1	-15	50	-48
		2	-26	48
	1	-13	24	0

$f(x)=(x-2)(x^2-13x+24)$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 근은

$x=2$ 또는 $x=\frac{13\pm\sqrt{73}}{2}$

그런데 x는 자연수이므로 $x=2$

정답_ 2

510

밑면의 반지름의 길이를 x m만큼 늘였다고 하면

$\pi\times3^2\times3=\pi(3+x)^2(3-x)$

$27=-x^3-3x^2+9x+27$, $x^3+3x^2-9x=0$

$x(x^2+3x-9)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=\frac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}$

그런데 $x>0$, $3-x>0$에서 $0<x<3$이므로

$x=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$

따라서 새로운 물탱크의 밑면의 반지름의 길이는

$3+\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}=\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$ (m)

정답_ $\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$ m

511

처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라고 하면

$(x+2)(x+3)(x-1)=\frac{5}{2}x^3$, $x^3+4x^2+x-6=\frac{5}{2}x^3$

$\therefore 3x^3-8x^2-2x+12=0$

$f(x)=3x^3-8x^2-2x+12$라고 하면

$f(2)=24-32-4+12=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -8 & -2 & 12 \\ & & 6 & -4 & -12 \\ \hline & 3 & -2 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(3x^2-2x-6)$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 근은

$x=2$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{19}}{3}$

그런데 x는 자연수이므로 $x=2$

따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 2 cm이다.

정답_ 2 cm

512

$A=4x^3$, $B=18x^2$이므로 $3A=B+24$에서

$3\times4x^3=18x^2+24 \qquad \therefore 2x^3-3x^2-4=0$

$f(x)=2x^3-3x^2-4$라고 하면

$f(2)=16-12-4=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -3 & 0 & -4 \\ & & 4 & 2 & 4 \\ \hline & 2 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(2x^2+x+2)$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 근은

$x=2$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{15}i}{4}$

그런데 $x>0$이므로 $x=2$

정답_ ②

513

$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x^2-2y^2=-1 \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3} & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2y^2=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2-2\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)^2=-1$, $x^2-8x+7=0$

$(x-1)(x-7)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=7$

이것을 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=1$, $y=1$ 또는 $x=7$, $y=5$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=1$ 또는 $\alpha=7$, $\beta=5$에서

$\alpha^2-\beta^2=0$ 또는 $\alpha^2-\beta^2=24$이므로 $\alpha^2-\beta^2$의 최댓값은 24이다.

정답_ 24

514

$6x^2-xy-2y^2=0$에서 $(3x-2y)(2x+y)=0$

$\therefore 3x-2y=0$ 또는 $2x+y=0$

그런데 주어진 연립방정식에서 $3x-2y=7$, 즉 $3x-2y\neq0$이므로

$2x+y=0$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} 3x-2y=7 \\ 2x+y=0 \end{cases}$

의 해와 같다.

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=-2$이므로

$\alpha-\beta=1-(-2)=3$

정답_ ③

515

주어진 두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} x+2y=4 \\ x^2+2y^2=22 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x=4-2y & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=22 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

를 만족시킨다.

㉠을 ㉡에 대입하면

$(4-2y)^2+2y^2=22$, $3y^2-8y-3=0$

$(3y+1)(y-3)=0 \qquad \therefore y=-\frac{1}{3}$ 또는 $y=3$

이것을 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=-2$, $y=3$ 또는 $x=\frac{14}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$

$x=-2$, $y=3$을 $ax^2-y^2=3$, $5x+by=2$에 각각 대입하면

$4a-9=3$, $-10+3b=2$

$\therefore a=3$, $b=4$

$x=\frac{14}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$을 $ax^2-y^2=3$, $5x+by=2$에 각각 대입하면

$\frac{196}{9}a-\frac{1}{9}=3$, $\frac{70}{3}-\frac{1}{3}b=2$

$\therefore a=\frac{1}{7}$, $b=64$

그런데 a, b는 자연수이므로 $a=3$, $b=4$

$\therefore a+b=3+4=7$

정답_ ⑤

516

$\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+y^2=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(x-2y)=0 \qquad \therefore x=-y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=-y$일 때, 이것을 ㉡에 대입하면

$2y^2+y^2=9$, $y^2=3 \qquad \therefore y=\pm\sqrt{3}$

$x=-y$이므로 $x=\pm\sqrt{3}$, $y=\mp\sqrt{3}$ (복호동순)

이것은 x, y가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x=2y$일 때, 이것을 ㉡에 대입하면

$8y^2+y^2=9$, $y^2=1 \qquad \therefore y=\pm1$

$x=2y$이므로 $x=\pm2$, $y=\pm1$ (복호동순)

(i), (ii)에서 $x=\pm2$, $y=\pm1$ (복호동순)

$\therefore xy=2$

정답_ 2

517

$\begin{cases} x^2+10y^2=26 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2+16y^2=8xy & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉡에서 $x^2-8xy+16y^2=0$, $(x-4y)^2=0$

$\therefore x=4y$

이것을 ㉠에 대입하면

$16y^2+10y^2=26$, $y^2=1$ $\quad \therefore y=\pm1$

$x=4y$이므로 $x=\pm4$, $y=\pm1$ (복호동순)

$x=4$, $y=1$일 때, $2x-9y=8-9=-1$

$x=-4$, $y=-1$일 때, $2x-9y=-8+9=1$

따라서 $2x-9y$의 최솟값은 -1이다.

정답_ ②

518

$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 2x^2-y^2=2 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x-2y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=y$일 때, 이것을 ㉡에 대입하면

$2y^2-y^2=2$, $y^2=2$ $\quad \therefore y=\pm\sqrt{2}$

$x=y$이므로 $x=\pm\sqrt{2}$, $y=\pm\sqrt{2}$ (복호동순)

(ii) $x=2y$일 때, 이것을 ㉡에 대입하면

$8y^2-y^2=2$, $y^2=\frac{2}{7}$ $\quad \therefore y=\pm\frac{\sqrt{14}}{7}$

$x=2y$이므로 $x=\pm\frac{2\sqrt{14}}{7}$, $y=\pm\frac{\sqrt{14}}{7}$ (복호동순)

(i), (ii)에서

$\alpha^2+\beta^2=4$ 또는 $\alpha^2+\beta^2=\frac{10}{7}$

이므로 $\alpha^2+\beta^2$의 최댓값은 4이다.

정답_ ①

519

주어진 두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 3x^2+xy-y^2=1 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

을 만족시킨다.

㉠에서 $(x+2y)(2x-y)=0$

$\therefore x=-2y$ 또는 $y=2x$

(i) $x=-2y$일 때, 이것을 ㉡에 대입하면

$12y^2-2y^2-y^2=1$, $y^2=\frac{1}{9}$ $\quad \therefore y=\pm\frac{1}{3}$

$x=-2y$이므로 $x=\pm\frac{2}{3}$, $y=\mp\frac{1}{3}$ (복호동순)

(ii) $y=2x$일 때, 이것을 ㉡에 대입하면

$3x^2+2x^2-4x^2=1$, $x^2=1$ $\quad \therefore x=\pm1$

$y=2x$이므로 $x=\pm1$, $y=\pm2$ (복호동순)

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 공통인 해는

$x=\pm\frac{2}{3}$, $y=\mp\frac{1}{3}$ 또는 $x=\pm1$, $y=\pm2$ (복호동순)

$\therefore x^2=\frac{4}{9}$, $y^2=\frac{1}{9}$ 또는 $x^2=1$, $y^2=4$

$x^2=\frac{4}{9}$, $y^2=\frac{1}{9}$을 $ax^2+by^2=-1$, $2ax^2-by^2=10$에 각각 대입하면

$\frac{4}{9}a+\frac{1}{9}b=-1$, $\frac{8}{9}a-\frac{1}{9}b=10$

$\therefore 4a+b=-9$, $8a-b=90$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{27}{4}$, $b=-36$

그런데 a, b는 정수이므로 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

$x^2=1$, $y^2=4$를 $ax^2+by^2=-1$, $2ax^2-by^2=10$에 각각 대입하면

$a+4b=-1$, $2a-4b=10$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-1$

$\therefore a+b=3+(-1)=2$

정답_ 2

520

$x+y=a$, $xy=b$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} a=4 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ b+2a=11 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면 $b+8=11$ $\quad \therefore b=3$

$\therefore x+y=4$, $xy=3$

x, y는 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-3)=0$ $\quad \therefore t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore x=1$, $y=3$ 또는 $x=3$, $y=1$

그런데 $x>y$이므로 $x=3$, $y=1$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=1$이므로

$2\alpha-\beta=2\times3-1=5$

정답_ ⑤

521

$\begin{cases} xy+x+y=19 \\ x^2y+xy^2=84 \end{cases}$에서 $\begin{cases} xy+x+y=19 \\ xy(x+y)=84 \end{cases}$

$x+y=a$, $xy=b$ (a, b는 자연수)로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} a+b=19 \\ ab=84 \end{cases}$

a, b는 이차방정식 $t^2-19t+84=0$의 두 근이므로

$(t-7)(t-12)=0$ $\quad \therefore t=7$ 또는 $t=12$

$\therefore a=7$, $b=12$ 또는 $a=12$, $b=7$

(i) $a=7$, $b=12$일 때

$x+y=7$, $xy=12$

x, y는 이차방정식 $X^2-7X+12=0$의 두 근이므로

$(X-3)(X-4)=0$ $\quad \therefore X=3$ 또는 $X=4$

$\therefore x=3$, $y=4$ 또는 $x=4$, $y=3$

$\therefore x^2+y^2=3^2+4^2=25$

(ii) $a=12$, $b=7$일 때

$x+y=12$, $xy=7$

x, y는 이차방정식 $X^2-12X+7=0$의 두 근이므로

$X=6\pm\sqrt{29}$

$\therefore x=6+\sqrt{29}$, $y=6-\sqrt{29}$ 또는 $x=6-\sqrt{29}$, $y=6+\sqrt{29}$

이것은 x, y가 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $x^2+y^2=25$

정답_ ③

522

주어진 두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식 $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-4 \end{cases}$를 만족시킨다.

이때 x, y는 이차방정식 $t^2-3t-4=0$의 두 근이므로

$(t+1)(t-4)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=4$

즉, 두 연립방정식의 공통인 해는

$x=-1$, $y=4$ 또는 $x=4$, $y=-1$

(i) $x=-1$, $y=4$일 때

이것을 $ax^2-y^2=15$, $x^2+bxy+y^2=5$에 각각 대입하면

$a-16=15$, $1-4b+16=5 \qquad \therefore a=31$, $b=3$

(ii) $x=4$, $y=-1$일 때

이것을 $ax^2-y^2=15$, $x^2+bxy+y^2=5$에 각각 대입하면

$16a-1=15$, $16-4b+1=5 \qquad \therefore a=1$, $b=3$

이것은 $a>b$를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=31$, $b=3$이므로

$a-b=31-3=28$

정답_ ⑤

523

$\begin{cases} 3x-y=2 \\ x^2-y^2=a \end{cases}$에서 $\begin{cases} y=3x-2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2-(3x-2)^2=a \qquad \therefore 8x^2-12x+a+4=0$

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-8(a+4)=0$, $8a=4 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

정답_ $\frac{1}{2}$

524

$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x^2+xy+y^2=-k-1 \end{cases}$에서 $\begin{cases} y=1-2x & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=-k-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2+x(1-2x)+(1-2x)^2=-k-1$

$\therefore 3x^2-3x+k+2=0$

주어진 연립방정식이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(-3)^2-4\times3(k+2)\geq0$, $-12k-15\geq0 \qquad \therefore k\leq-\frac{5}{4}$

따라서 정수 k의 최댓값은 -2이다.

정답_ ①

525

x, y는 이차방정식 $t^2-(2a-1)t+a^2-3=0$의 두 근이다.

주어진 연립방정식이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(2a-1)^2-4(a^2-3)<0$, $-4a+13<0 \qquad \therefore a>\frac{13}{4}$

따라서 정수 a의 최솟값은 4이다.

정답_ ④

526

$\begin{cases} (x+2)(y+2)=k \\ (x-3)(y-3)=k \end{cases}$에서 $\begin{cases} xy+2(x+y)+4=k & \cdots\cdots ㉠ \\ xy-3(x+y)+9=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면

$5(x+y)-5=0 \qquad \therefore x+y=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $xy+2+4=k$

$\therefore xy=k-6 \qquad \cdots\cdots (*)$

따라서 x, y는 이차방정식 $t^2-t+k-6=0$의 두 근이고, 주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=1-4(k-6)=0$, $25-4k=0 \qquad \therefore k=\frac{25}{4}$

이때 x, y는 이차방정식 $t^2-t+\frac{1}{4}=0$의 두 근이므로

$\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=0 \qquad \therefore t=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$, $k=\frac{25}{4}$이므로

$k\alpha\beta=\frac{25}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{25}{16}$

정답_ ①

참고 다음과 같이 $k\alpha\beta$의 값을 구할 수도 있다.

$k=\frac{25}{4}$이므로 위의 $(*)$에서 $xy=\frac{1}{4} \qquad \therefore ab=\frac{1}{4}$

$\therefore k\alpha\beta=\frac{25}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{25}{16}$

527

$r+2h=8$에서 $r=8-2h$

이것을 $r^2-2h^2=8$에 대입하면

$(8-2h)^2-2h^2=8$, $2h^2-32h+56=0$

$h^2-16h+28=0$, $(h-2)(h-14)=0$

$\therefore h=2$ 또는 $h=14$

이때 $h>0$, $r=8-2h>0$에서 $0<h<4$이므로 $h=2$

이것을 $r=8-2h$에 대입하면 $r=4$

따라서 구하는 용기의 부피는

$\pi\times4^2\times2=32\pi$

정답_ ⑤

528

$\begin{cases} a+b=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ a^2-2ab-3b^2-a+15b-12=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $a^2-(2b+1)a-3(b^2-5b+4)=0$

$a^2-(2b+1)a-3(b-1)(b-4)=0$

$(a-3b+3)(a+b-4)=0$

$\therefore a-3b+3=0$ 또는 $a+b-4=0$

그런데 ㉠에서 $a+b=5$, 즉 $a+b-4\neq0$이므로

$a-3b+3=0$

이 식과 ㉠을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$

따라서 직사각형의 대각선의 길이는

$\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

정답_ ③

529

처음 두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y $(x<y)$라고 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=97 \\ (10x+y)+(10y+x)=143 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x^2+y^2=97 & \cdots\cdots ㉠ \\ y=13-x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^2+(13-x)^2=97$, $2x^2-26x+72=0$

$x^2-13x+36=0$, $(x-4)(x-9)=0$ $\quad\therefore x=4$ 또는 $x=9$

$x=4$를 ㉡에 대입하면 $y=9$

$x=9$를 ㉡에 대입하면 $y=4$

이때 $x<y$이므로 $x=4$, $y=9$

따라서 구하는 처음 수는 49이다.

정답_ 49

530

$\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=b$라고 하면 직각삼각형 ABC에서

$a^2+b^2=(2\sqrt{13})^2$ $\quad\therefore a^2+b^2=52$ $\cdots\cdots$ ㉠

삼각형 ADE의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 2배이므로

$\frac{1}{2}ab\times2=\frac{1}{2}(a+2)(b+2)$

$\therefore ab=2(a+b)+4$ $\cdots\cdots$ ㉡

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로 ㉠, ㉡을 대입하면

$52=(a+b)^2-2\{2(a+b)+4\}$

$(a+b)^2-4(a+b)-60=0$, $(a+b+6)(a+b-10)=0$

이때 $a+b>0$이므로 $a+b=10$

이것을 ㉡에 대입하면 $ab=2\times10+4=24$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times24=12$

정답_ ③

531

$xy-2x-y-3=0$에서

$x(y-2)-(y-2)-5=0$ $\quad\therefore (x-1)(y-2)=5$

x, y는 정수이므로 $x-1$, $y-2$의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

$x-1$	1	5	-1	-5
$y-2$	5	1	-5	-1

따라서 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(2, 7)$, $(6, 3)$, $(0, -3)$, $(-4, 1)$의 4개이다.

정답_ ④

532

$6xy+2x-3y-3=0$에서

$2x(3y+1)-(3y+1)-2=0$ $\quad\therefore (2x-1)(3y+1)=2$

x, y는 정수이므로 $2x-1$, $3y+1$의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

$2x-1$	1	2	-1	-2
$3y+1$	2	1	-2	-1

이 중에서 x, y의 값이 정수인 것은 $2x-1=-1$, $3y+1=-2$일 때, $x=0$, $y=-1$이므로

$x^2+y^2=0^2+(-1)^2=1$

정답_ 1

533

x에 대한 이차방정식 $x^2+2(y-1)x+y^2-5=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(y-1)^2-(y^2-5)\geq0$

$-2y+6\geq0$ $\quad\therefore y\leq3$

그런데 y는 양의 정수이므로 $y=1, 2, 3$

(i) $y=1$일 때

주어진 방정식은 $x^2-4=0$이므로 $x=2$ $(\because x>0)$

(ii) $y=2$일 때

주어진 방정식은 $x^2+2x-1=0$이므로

$x=-1\pm\sqrt{2}$

이것은 x가 양의 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $y=3$일 때

주어진 방정식은 $x^2+4x+4=0$이므로

$(x+2)^2=0$ $\quad\therefore x=-2$

이것은 x가 양의 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에서 $x=2$, $y=1$이므로

$x-y=2-1=1$

정답_ ②

534

$x^2-4xy+5y^2+2y+1=0$에서

$(x^2-4xy+4y^2)+(y^2+2y+1)=0$

$\therefore (x-2y)^2+(y+1)^2=0$

x, y는 실수이므로 $x-2y=0$, $y+1=0$

따라서 $x=-2$, $y=-1$이므로 $x+y=-3$

정답_ ①

535

$x^2-4xy+2x+5y^2-10y+10=0$에서

$x^2-2(2y-1)x+5y^2-10y+10=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

x가 실수이므로 x에 대한 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 한다. ㉠의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(2y-1)^2-(5y^2-10y+10)\geq0$

$-y^2+6y-9\geq0$, $y^2-6y+9\leq0$ $\quad\therefore (y-3)^2\leq0$

이때 y는 실수이므로 $y-3=0$ $\quad\therefore y=3$

$y=3$을 ㉠에 대입하면

$x^2-10x+25=0$, $(x-5)^2=0$ $\quad\therefore x=5$

$\therefore x+y=5+3=8$

정답_ 8

536

$(x-y)^2+4x-12=0$에서

$x^2-2(y-2)x+y^2-12=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

x는 실수이므로 x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(y-2)^2-(y^2-12)\ge 0$

$-4y+16\ge 0 \quad \therefore y\le 4$

y는 양의 정수이므로 $y=1, 2, 3, 4$

(i) $y=1$일 때, 이것을 ㉠에 대입하면

$x^2+2x-11=0 \quad \therefore x=-1\pm 2\sqrt{3}$

이것은 x가 양의 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $y=2$일 때, 이것을 ㉠에 대입하면

$x^2-8=0 \quad \therefore x=\pm 2\sqrt{2}$

이것은 x가 양의 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $y=3$일 때, 이것을 ㉠에 대입하면

$x^2-2x-3=0, (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

x는 양의 정수이므로 $x=3$

(iv) $y=4$일 때, 이것을 ㉠에 대입하면

$x^2-4x+4=0, (x-2)^2=0 \quad \therefore x=2$

(i)~(iv)에서 $x=3, y=3$ 또는 $x=2, y=4$

따라서 xy의 최댓값은 $3\times 3=9$

정답_ ④

537

$f(x)=x^3+x-2$라고 하면

$f(1)=1+1-2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+x+2)$

$\therefore \alpha=1$ ❶

두 허근 β, γ는 $x^2+x+2=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\beta+\gamma=-1, \beta\gamma=2$ ❷

$\therefore \{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\}^2=\{(1-\beta)(1-\gamma)\}^2$

$=\{1-(\beta+\gamma)+\beta\gamma\}^2$

$=(1+1+2)^2=16$ ❸

정답_ 16

채점 기준	비율
❶ α의 값 구하기	30 %
❷ $\beta+\gamma, \beta\gamma$의 값 구하기	30 %
❸ $\{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\}^2$의 값 구하기	40 %

538

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1, \alpha\beta\gamma=2$ ❶

$\therefore \frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\gamma}=\frac{3-\alpha}{\alpha}+\frac{3-\beta}{\beta}+\frac{3-\gamma}{\gamma}$ ❷

$=\frac{3}{\alpha}+\frac{3}{\beta}+\frac{3}{\gamma}-3$

$=\frac{3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma}-3$

$=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$ ❸

정답_ $-\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta+\gamma, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha, \alpha\beta\gamma$의 값 구하기	30 %
❷ $\alpha+\beta+\gamma=3$을 이용하여 식 변형하기	30 %
❸ $\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$의 값 구하기	40 %

539

$f(x)=x^3-x^2-3x-9$라고 하면

$f(3)=27-9-9-9=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -1 & -3 & -9 \\ & & 3 & 6 & 9 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-3)(x^2+2x+3)$ ❶

이때 방정식 $f(x)=0$의 두 허근 α, β는 $x^2+2x+3=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=3$ ❷

또, α와 β는 서로 켤레복소수 관계이므로

$\overline{\alpha}=\beta, \overline{\beta}=\alpha$

$\therefore \frac{\overline{\alpha}^2}{\alpha}+\frac{\overline{\beta}^2}{\beta}=\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{\beta}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$

$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$=\frac{(-2)^3-3\times 3\times(-2)}{3}=\frac{10}{3}$ ❸

정답_ $\frac{10}{3}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하기	30 %
❷ $\alpha+\beta, \alpha\beta$의 값 구하기	30 %
❸ $\frac{\overline{\alpha}^2}{\alpha}+\frac{\overline{\beta}^2}{\beta}$의 값 구하기	40 %

540

$x^3-x^2+ax+b=0$의 계수가 실수이므로 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다.

$\therefore d=1-i$ ❶

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$c+(1+i)+(1-i)=1$에서 $c=-1$

$c(1+i)+c(1-i)+(1+i)(1-i)=a$에서

$2c+2=a \quad \therefore a=0$

$c(1+i)(1-i)=-b$에서

$2c=-b \quad \therefore b=2$ ❷

$\therefore ad+bc=0\times(1-i)+2\times(-1)=-2$ ❸

정답_ -2

채점 기준	비율
❶ d의 값 구하기	30 %
❷ a, b, c의 값 구하기	50 %
❸ $ad+bc$의 값 구하기	20 %

541

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$
허근 ω는 $x^2-x+1=0$의 근이다. 이때 이 방정식의 계수가 실수이므로 ω가 근이면 $\overline{\omega}$도 근이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$ ❶
$x^2+ax-8b=0$의 계수가 실수이므로 허근 4ω가 근이면 $\overline{4\omega}=4\overline{\omega}$도 근이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$4\omega+4\overline{\omega}=-a$에서 $a=-4(\omega+\overline{\omega})=-4\times1=-4$
$4\omega\times4\overline{\omega}=-8b$에서 $b=-2\omega\overline{\omega}=-2\times1=-2$ ❷
$\therefore ab=-4\times(-2)=8$ ❸

정답_ 8

채점 기준	비율
❶ $\omega+\overline{\omega}$, $\omega\overline{\omega}$의 값 구하기	40 %
❷ a, b의 값 구하기	40 %
❸ ab의 값 구하기	20 %

542

$\begin{cases} x-y=a \\ x^2+3y^2=12 \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} x=y+a & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3y^2=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠을 ㉡에 대입하면
$(y+a)^2+3y^2=12$ $\quad\therefore 4y^2+2ay+a^2-12=0$ ······ ㉢
❶
주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지므로 y에 대한 이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 한다.
이차방정식 ㉢의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=a^2-4(a^2-12)=0$, $a^2=16$
$\therefore a=4$ ($\because a>0$) ❷
이것을 ㉢에 대입하면
$4y^2+8y+4=0$, $4(y+1)^2=0$ $\quad\therefore y=-1$
이것을 ㉠에 대입하면 $x=-1+4=3$ ❸
따라서 $\alpha=3$, $\beta=-1$이므로
$a+\alpha+\beta=4+3+(-1)=6$ ❹

정답_ 6

채점 기준	비율
❶ 미지수가 1개인 이차방정식으로 만들기	20 %
❷ a의 값 구하기	40 %
❸ 연립방정식의 해 구하기	30 %
❹ $a+\alpha+\beta$의 값 구하기	10 %

543

$(x^2-5x+6)(x^2-3x+2)=42$에서
$(x-2)(x-3)(x-1)(x-2)-42=0$
$(x-2)^2(x-3)(x-1)-42=0$
$(x^2-4x+4)(x^2-4x+3)-42=0$
$x^2-4x=X$로 놓으면
$(X+4)(X+3)-42=0$, $X^2+7X-30=0$
$(X+10)(X-3)=0$ $\quad\therefore X=-10$ 또는 $X=3$
(i) $X=-10$일 때
$x^2-4x=-10$ $\quad\therefore x^2-4x+10=0$
이 이차방정식의 판별식을 D_1이라고 하면
$\frac{D_1}{4}=(-2)^2-10=-6<0$
이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.
(ii) $X=3$일 때
$x^2-4x=3$ $\quad\therefore x^2-4x-3=0$
이 이차방정식의 판별식을 D_2라고 하면
$\frac{D_2}{4}=(-2)^2+3=7>0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(i), (ii)에서 α는 이차방정식 $x^2-4x-3=0$의 근이고, β는 이차방정식 $x^2-4x+10=0$의 근이므로
$\alpha^2-4\alpha-3=0$, $\beta^2-4\beta+10=0$
$\therefore \alpha^2-4\alpha=3$, $\beta^2-4\beta=-10$
$\therefore \alpha^2-4\alpha-\beta^2+4\beta=(\alpha^2-4\alpha)-(\beta^2-4\beta)$
$=3-(-10)=13$

정답_ ⑤

544

$x^4-(2a-5)x^2+2=0$의 한 실근이 $x=\alpha$이면 $x=-\alpha$도 근이 되므로 주어진 사차방정식은 양의 실근 2개, 음의 실근 2개를 갖는다.
즉, 서로 다른 네 실근을 α, β, $-\beta(=\gamma)$, $-\alpha(=\delta)$ $(\alpha<\beta<0)$로 놓을 수 있다.
$x^2=X$로 놓으면 주어진 사차방정식은
$X^2-(2a-5)X+2=0$
이 X에 대한 이차방정식의 두 근은 α^2, β^2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha^2+\beta^2=2a-5$
이때 $\alpha^2+\beta^2=3$이므로
$2a-5=3$ $\quad\therefore a=4$

정답_ 4

545

(i) 1이 $x-a=0$의 근일 경우
$1-a=0$ $\quad\therefore a=1$
주어진 방정식은 $(x-1)(x^2-2x+4)=0$
이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-4=-3<0$
이므로 이차방정식 $x^2-2x+4=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
이것은 주어진 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 갖는다는 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) 1이 $x^2+(1-3a)x+4=0$의 근일 경우
$1+(1-3a)+4=0$ $\quad\therefore a=2$

주어진 방정식은 $(x-2)(x^2-5x+4)=0$

$(x-2)(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에서 $\alpha=2$, $\beta=4$ 또는 $\alpha=4$, $\beta=2$이므로

$\alpha\beta=8$

정답_ ③

다른 풀이

$(x-a)\{x^2+(1-3a)x+4\}=0$의 한 근이 1이므로

$(1-a)(1+1-3a+4)=0$, $3(a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=2$

$a=1$이면 앞의 풀이의 (i)과 같고, $a=2$이면 앞의 풀이의 (ii)와 같다.

546

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=4$

x^3-2x^2+4x-4를 x^2-x+3으로 나누면 다음과 같이 몫은 $x-1$, 나머지는 -1이다.

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ \hline x^2-x+3 & x^3-2x^2+4x-4 \\ & x^3-x^2+3x \\ \hline & -x^2+x-4 \\ & -x^2+x-3 \\ \hline & -1 \end{array}$$

$\therefore x^3-2x^2+4x-4=(x^2-x+3)(x-1)-1$

이때 $x^3-2x^2+4x-4=0$이므로 $(x^2-x+3)(x-1)-1=0$

$\therefore (x^2-x+3)(x-1)=1$

이 방정식의 세 근이 α, β, γ이므로

$(\alpha^2-\alpha+3)(\alpha-1)=1$

$(\beta^2-\beta+3)(\beta-1)=1$

$(\gamma^2-\gamma+3)(\gamma-1)=1$

$(\alpha^2-\alpha+3)(\beta^2-\beta+3)(\gamma^2-\gamma+3)=k$라 하고 양변에

$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$을 곱하면

$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)(\alpha^2-\alpha+3)(\beta^2-\beta+3)(\gamma^2-\gamma+3)$

$=(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)k$

$\{(\alpha^2-\alpha+3)(\alpha-1)\}\{(\beta^2-\beta+3)(\beta-1)\}\{(\gamma^2-\gamma+3)(\gamma-1)\}$

$=(\alpha\beta\gamma-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma-1)k$

$1=\{\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1\}k$

$1=(4-4+2-1)k$

$\therefore k=1$

정답_ ②

547

방정식 $P(x)=0$의 한 실근을 α, 서로 다른 두 허근을 β, γ라고 하면 조건 ㈎에서 $\beta\gamma=5$ …… ㉠

방정식 $P(3x-1)=0$에서

$3x-1=\alpha$ 또는 $3x-1=\beta$ 또는 $3x-1=\gamma$

$\therefore x=\dfrac{\alpha+1}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+1}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\gamma+1}{3}$

따라서 방정식 $P(3x-1)=0$의 한 실근은 $\dfrac{\alpha+1}{3}$이고 두 허근은 $\dfrac{\beta+1}{3}$, $\dfrac{\gamma+1}{3}$이므로 조건 ㈏에서 $\dfrac{\alpha+1}{3}=0$, $\dfrac{\beta+1}{3}+\dfrac{\gamma+1}{3}=2$

$\therefore \alpha=-1$, $\beta+\gamma=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 α, β, γ를 세 근으로 하고 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식은

$(x+1)(x^2-4x+5)=0$

$\therefore P(x)=(x+1)(x^2-4x+5)=x^3-3x^2+x+5$

따라서 $a=-3$, $b=1$, $c=5$이므로

$a+b+c=-3+1+5=3$

정답_ ①

548

조건 ㈎에서 $f(4)=0$이므로 $x=4$는 방정식 $f(x)=0$의 근이다.

조건 ㈏에서 계수가 실수인 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $2i$이므로 $-2i$도 근이다.

따라서 방정식 $f(x)=0$의 세 근은

$x=4$ 또는 $x=2i$ 또는 $x=-2i$

이므로 방정식 $f(2x)=0$에서

$2x=4$ 또는 $2x=2i$ 또는 $2x=-2i$

$\therefore x=2$ 또는 $x=i$ 또는 $x=-i$

그러므로 구하는 세 근의 곱은 $2\times i\times(-i)=-2i^2=2$

정답_ ②

549

방정식 $P(x)=0$의 계수가 실수이므로 $1+2i$가 근이면 $1-2i$도 근이다.

방정식 $P(x)$의 나머지 한 근을 α라고 하면 방정식

$P(-2x+3)=0$에서

$-2x+3=1+2i$ 또는 $-2x+3=1-2i$ 또는 $-2x+3=\alpha$

$\therefore x=1-i$ 또는 $x=1+i$ 또는 $x=\dfrac{3-\alpha}{2}$

방정식 $P(-2x+3)=0$의 세 근의 합이 5이므로

$(1-i)+(1+i)+\dfrac{3-\alpha}{2}=5$

$\dfrac{3-\alpha}{2}=3$ $\quad\therefore \alpha=-3$

따라서 $P(x)=(x-1-2i)(x-1+2i)(x+3)$이므로

$P(1)=(-2i)\times 2i\times 4=16$

정답_ ⑤

550

$f(x^{12})$을 $f(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 실수)라고 하면

$f(x^{12})=f(x)Q(x)+ax+b$ …… ㉠

방정식 $f(x)=0$의 한 근을 ω라고 하면 $\omega^2+\omega+1=0$ …… ㉡

㉡의 양변에 $\omega-1$을 곱하면 $\omega^3-1=0$ $\quad\therefore \omega^3=1$

$\therefore \omega^{12}=(\omega^3)^4=1$

㉠의 양변에 $x=\omega$를 대입하면

$f(\omega^{12})=f(\omega)Q(\omega)+a\omega+b$

$\therefore f(1)=a\omega+b$

이때 $f(1)=1+1+1=3$이고, $\omega=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$이므로

$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}a+b=3$, $\left(-\dfrac{a}{2}+b\right)\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}ai=3$

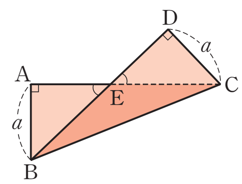
$\therefore a=0, b=3$

따라서 구하는 나머지는 3이다.

정답_ 3

551

오른쪽 그림과 같이 A, B, C, D, E를 잡으면 삼각형 ABE와 삼각형 DCE에서



$\overline{AB}=\overline{DC}$

$\angle A=\angle D=90^\circ$

$\angle ABE=90^\circ-\angle AEB$

$=90^\circ-\angle DEC=\angle DCE$

($\because$ $\angle AEB$와 $\angle DEC$는 맞꼭지각)

이므로 $\triangle ABE\equiv\triangle DCE$ (ASA 합동)

따라서 $\overline{AE}=\overline{DE}=b$라고 하면 $\overline{EC}=10-b$

직각삼각형 DCE에서 $\overline{DC}^2+\overline{DE}^2=\overline{EC}^2$이므로

$a^2+b^2=(10-b)^2$ $\quad\therefore b=5-\dfrac{1}{20}a^2$ ...... ㉠

한편, 삼각형 BCE의 넓이가 $\dfrac{58}{5}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{EC}\times\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\times(10-b)\times a=\dfrac{58}{5}$

$\therefore 5(10-b)a=116$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$5\left\{10-\left(5-\dfrac{1}{20}a^2\right)\right\}a=116$ $\quad\therefore a^3+100a-464=0$

$f(a)=a^3+100a-464$라고 하면

$f(4)=64+400-464=0$

조립제법을 이용하여 $f(a)$를 인수분해하면

4	1	0	100	-464
		4	16	464
	1	4	116	0

$f(a)=(a-4)(a^2+4a+116)$

$f(a)=0$에서 $a=4$ 또는 $a^2+4a+116=0$

이때 방정식 $a^2+4a+116=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=2^2-116=-112<0$

이므로 실근을 갖지 않는다.

그런데 $0<a<6$이므로

$a=4$

정답_ ④

552

$|x^2-4y^2|=12$에서 $|(x+2y)(x-2y)|=12$

$\therefore |x+2y||x-2y|=12$

이때 $|x-2y|=3$이므로 $|x+2y|=4$

$|x-2y|=3$에서

$x-2y=-3$ ...... ㉠

또는 $x-2y=3$ ...... ㉡

$|x+2y|=4$에서

$x+2y=-4$ ...... ㉢

또는 $x+2y=4$ ...... ㉣

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-\dfrac{7}{2}$, $y=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore 2x+8y=2\times\left(-\dfrac{7}{2}\right)+8\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-9$ ...... ㉤

㉠, ㉣을 연립하여 풀면 $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{7}{4}$

$\therefore 2x+8y=2\times\dfrac{1}{2}+8\times\dfrac{7}{4}=15$ ...... ㉥

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=-\dfrac{7}{4}$

$\therefore 2x+8y=2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+8\times\left(-\dfrac{7}{4}\right)=-15$ ...... ㉦

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $x=\dfrac{7}{2}$, $y=\dfrac{1}{4}$

$\therefore 2x+8y=2\times\dfrac{7}{2}+8\times\dfrac{1}{4}=9$ ...... ㉧

㉤~㉧에서 $2x+8y$의 최댓값은 15이다.

정답_ 15

553

(i) $x\ge y$일 때, 주어진 연립방정식은

$\begin{cases}2x-4y^2=x\\x-y+5=x\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}x-4y^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\-y+5=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉡에서 $y=5$

이것을 ㉠에 대입하면 $x=100$

(ii) $x<y$일 때, 주어진 연립방정식은

$\begin{cases}2x-4y^2=-y\\x-y+5=-y\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}2x+y-4y^2=0 & \cdots\cdots ㉢\\x+5=0 & \cdots\cdots ㉣\end{cases}$

㉣에서 $x=-5$

이것을 ㉢에 대입하여 정리하면

$4y^2-y+10=0$ $\quad\therefore y=\dfrac{1\pm\sqrt{159}i}{8}$

이것은 y가 실수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\alpha=100$, $\beta=5$이므로

$\alpha+\beta=100+5=105$

정답_ ⑤

554

$B(a, a)$, $D(b, b)$ $(a<b)$라고 하면

$A(a, b)$, $C(b, a)$

점 A는 $y=-2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{9}{8}$, 즉 $y=-2x^2+3x$의 그래프 위의 점이고, 점 C는 $y=x^2$의 그래프 위의 점이므로

$\begin{cases}b=-2a^2+3a & \cdots\cdots ㉠\\a=b^2 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면

$b=-2b^4+3b^2$, $2b^4-3b^2+b=0$

$\therefore b(2b^3-3b+1)=0$ ...... ㉢

$f(b)=2b^3-3b+1$이라고 하면

$f(1)=2-3+1=0$

조립제법을 이용하여 $f(b)$를 인수분해하면

1	2	0	-3	1
		2	2	-1
	2	2	-1	0

$f(b)=(b-1)(2b^2+2b-1)$

즉, 방정식 ㉢은 $b(b-1)(2b^2+2b-1)=0$이므로

$b=0$ 또는 $b=1$ 또는 $b=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

이것을 ㉡에 각각 대입하면

$a=0$ 또는 $a=1$ 또는 $a=\dfrac{2\mp\sqrt{3}}{2}$ (복호동순)

이때 $a<b$이므로 $a=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$, $b=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$

따라서 $\dfrac{m+\sqrt{n}}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$이고 m, n은 유리수이므로

$m=-1$, $n=3$

$\therefore m+n=-1+3=2$

정답_ ①

555

$f(x)=x^3-x^2+(3a-a^2)x-2a^2$이라고 하면

$f(a)=a^3-a^2+(3a-a^2)a-2a^2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} a & 1 & -1 & 3a-a^2 & -2a^2 \\ & & a & a^2-a & 2a^2 \\ \hline & 1 & a-1 & 2a & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-a)\{x^2+(a-1)x+2a\}$

방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 정수인 근을 가지려면 a는 정수이어야 하고, 방정식 $x^2+(a-1)x+2a=0$은 $x\neq a$인 서로 다른 두 정수인 근을 가져야 한다.

$x^2+(a-1)x+2a=0$의 근이 a가 되면 안되므로

$a^2+(a-1)a+2a\neq0$, $2a^2+a\neq0$

$a(2a+1)\neq0$ $\qquad\therefore a\neq0$이고 $a\neq-\dfrac{1}{2}$

$x^2+(a-1)x+2a=0$의 정수인 두 근을 α, β라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a+1$ …… ㉠

$\alpha\beta=2a$ …… ㉡

㉠$\times2+$㉡을 하면

$2\alpha+2\beta+\alpha\beta=2$, $(\alpha+2)(\beta+2)=6$

α, β는 정수이므로 $\alpha+2$, $\beta+2$의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

$\alpha+2$	1	2	3	6	-1	-2	-3	-6
$\beta+2$	6	3	2	1	-6	-3	-2	-1

따라서 순서쌍 (α, β)는

$(-1, 4)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(4, -1)$, $(-3, -8)$, $(-4, -5)$, $(-5, -4)$, $(-8, -3)$

이때 $\alpha\beta$의 값은 -4 또는 0 또는 20 또는 24이므로 이것을 ㉡에 각각 대입하면

$a=-2$ 또는 $a=0$ 또는 $a=10$ 또는 $a=12$

그런데 $a\neq0$이므로 모든 a의 값의 합은

$-2+10+12=20$

정답_ ④

참고 $a=0$이면 주어진 방정식은 $x^3-x^2=0$이므로

$x^2(x-1)=0$ $\qquad\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 서로 다른 세 정수인 근을 갖지 않는다.

$\therefore a\neq0$

08 일차부등식

556

(1) $2ax-5a>ax+4a$에서 $ax>9a$

이때 $a<0$이므로 $x<9$

(2) $bx+6a<2ax+3b$에서

$(b-2a)x<3b-6a$ $\qquad\therefore (b-2a)x<3(b-2a)$

이때 $b-2a>0$이므로 $x<3$

정답_ (1) $x<9$ (2) $x<3$

557

$a^2x+2x+1<a(3x+1)$에서

$(a^2-3a+2)x<a-1$ $\qquad\therefore (a-1)(a-2)x<a-1$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 부등식의 해는 모든 실수이다.

즉, $(a-1)(a-2)=0$, $a-1>0$이어야 하므로

$(a-1)(a-2)=0$에서 $a=1$ 또는 $a=2$ …… ㉠

$a-1>0$에서 $a>1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$

정답_ 2

558

$(2a-b)x\geq a+b$의 해가 없으므로 $2a-b=0$, $a+b>0$

$2a-b=0$에서 $b=2a$이므로 이것을 $a+b>0$에 대입하면

$3a>0$ $\qquad\therefore a>0$

$b=2a$를 $(a+3b)x-4a-5b>0$에 대입하면

$7ax-14a>0$, $7ax>14a$

이때 $a>0$이므로 $x>2$

정답_ ③

559

$\dfrac{b}{2a}=1$에서 $b=2a$ …… ㉠

$(4x-3)a>(x+2)b+1$에서 $(4a-b)x>3a+2b+1$

이 식에 ㉠을 대입하면 $2ax>7a+1$

이 부등식의 해가 $x>4$이므로 $2a>0$ $\qquad\therefore x>\dfrac{7a+1}{2a}$

즉, $\dfrac{7a+1}{2a}=4$이므로 $7a+1=8a$ $\qquad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=2$

따라서 부등식 $ax-4<bx+1$, 즉 $x-4<2x+1$의 해는

$x>-5$

이므로 정수 x의 최솟값은 -4이다.

정답_ ①

560

$\begin{cases} x+6\leq4x & \text{…… ㉠} \\ 3x+4<x+16 & \text{…… ㉡} \end{cases}$

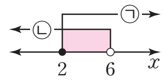
㉠에서 $-3x\leq-6$ $\qquad\therefore x\geq2$

㉡에서 $2x<12$ $\qquad\therefore x<6$

따라서 연립부등식의 해는

$2\le x<6$

이므로 정수 x는 2, 3, 4, 5의 4개이다.



정답_ ④

561

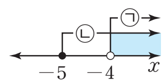
$$\begin{cases} 3x+7>-2-(x+7) & \cdots\cdots ㉠ \\ 2(x+1)-9\le 3(x-1)+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $3x+7>-x-9$, $4x>-16$　　$\therefore x>-4$

㉡에서 $2x-7\le 3x-2$, $-x\le 5$　　$\therefore x\ge -5$

따라서 연립부등식의 해는

$x>-4$



이므로 가장 작은 정수 x의 값은 -3이다.

정답_ ①

562

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}>\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{6} & \cdots\cdots ㉠ \\ 0.5x-1.1<0.3x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠의 양변에 6을 곱하면

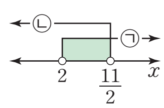
$3(x-1)>2x-1$, $3x-3>2x-1$　　$\therefore x>2$

㉡의 양변에 10을 곱하면

$5x-11<3x$, $2x<11$　　$\therefore x<\dfrac{11}{2}$

따라서 연립부등식의 해는

$2<x<\dfrac{11}{2}$



이므로 모든 자연수 x의 값의 합은

$3+4+5=12$

정답_ ③

563

$$\begin{cases} \dfrac{3x+2}{12}\le\dfrac{x}{2} & \cdots\cdots ㉠ \\ 5-2(x-4)>-x+10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

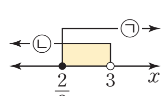
㉠의 양변에 12를 곱하면 $3x+2\le 6x$

$-3x\le -2$　　$\therefore x\ge\dfrac{2}{3}$

㉡에서 $-2x+13>-x+10$, $-x>-3$　　$\therefore x<3$

따라서 연립부등식의 해는 $\dfrac{2}{3}\le x<3$이므로

$a=\dfrac{2}{3}$, $b=3$



부등식 $ax<b$, 즉 $\dfrac{2}{3}x<3$의 해는

$x<\dfrac{9}{2}$

이므로 해가 아닌 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

564

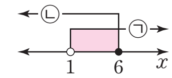
(1) $\begin{cases} -x+3<3x-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-1\le 2x+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-4x<-4$　　$\therefore x>1$

㉡에서 $x\le 6$

따라서 주어진 부등식의 해는

$1<x\le 6$



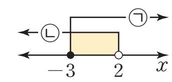
(2) $\begin{cases} x-6\le 2x-3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-3<-3x+7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-x\le 3$　　$\therefore x\ge -3$

㉡에서 $5x<10$　　$\therefore x<2$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-3\le x<2$



정답_ (1) $1<x\le 6$　(2) $-3\le x<2$

565

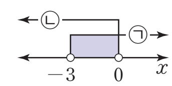
$$\begin{cases} 2x-9<3(x-2) & \cdots\cdots ㉠ \\ 3(x-2)<-4(x+3)+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $2x-9<3x-6$, $-x<3$　　$\therefore x>-3$

㉡에서 $3x-6<-4x-6$, $7x<0$　　$\therefore x<0$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-3<x<0$



이므로 모든 정수 x의 값의 합은

$-2+(-1)=-3$

정답_ ②

566

$$\begin{cases} 0.4x-0.6\le -\dfrac{1}{2}x+0.3 & \cdots\cdots ㉠ \\ -\dfrac{1}{2}x+0.3<\dfrac{1}{5}x+1.7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠의 양변에 10을 곱하면 $4x-6\le -5x+3$

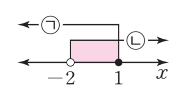
$9x\le 9$　　$\therefore x\le 1$

㉡의 양변에 10을 곱하면 $-5x+3<2x+17$

$-7x<14$　　$\therefore x>-2$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-2<x\le 1$



이므로 $a=-2$, $b=1$

$\therefore a+b=-2+1=-1$

정답_ -1

567

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{4}\le\dfrac{5-x}{2} & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{5-x}{2}\le\dfrac{-2x+7}{3} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠의 양변에 4를 곱하면 $x+2\le 2(5-x)$, $x+2\le -2x+10$

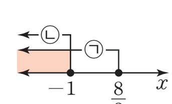
$3x\le 8$　　$\therefore x\le\dfrac{8}{3}$

㉡의 양변에 6을 곱하면 $3(5-x)\le 2(-2x+7)$

$-3x+15\le -4x+14$　　$\therefore x\le -1$

따라서 주어진 부등식의 해는

$x\le -1$



이때 $-x\ge 1$이므로

$-x+6\ge 7$　　$\therefore A\ge 7$

따라서 A의 최솟값은 7이다.

정답_ ③

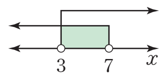
568

① $x+5>8$에서 $x>3$

$2x-3<11$에서 $2x<14$ $\quad\therefore x<7$

따라서 연립부등식의 해는

$3<x<7$



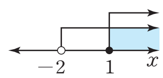
② $5x+1>3(x-1)$에서 $5x+1>3x-3$

$2x>-4$ $\quad\therefore x>-2$

$x+2\geq -4x+7$에서 $5x\geq 5$ $\quad\therefore x\geq 1$

따라서 연립부등식의 해는

$x\geq 1$



③ $3(x-7)\leq -x+3$에서 $3x-21\leq -x+3$

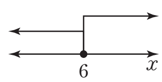
$4x\leq 24$ $\quad\therefore x\leq 6$

$2(x-9)\geq 3(4-x)$에서 $2x-18\geq 12-3x$

$5x\geq 30$ $\quad\therefore x\geq 6$

따라서 연립부등식의 해는

$x=6$



④ $6x-5<-(3x+2)$에서 $6x-5<-3x-2$

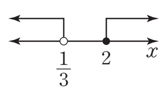
$9x<3$ $\quad\therefore x<\frac{1}{3}$

$7-5(x-1)\leq 6-2x$에서

$-5x+12\leq -2x+6$

$-3x\leq -6$ $\quad\therefore x\geq 2$

따라서 연립부등식의 해는 없다.



⑤ $\frac{3}{4}(x+4)<-\frac{1}{6}x-8$의 양변에 12를 곱하면

$9(x+4)<-2x-96$, $9x+36<-2x-96$

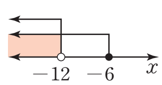
$11x<-132$ $\quad\therefore x<-12$

$0.3x-0.6\geq 0.4x$의 양변에 10을 곱하면

$3x-6\geq 4x$, $-x\geq 6$ $\quad\therefore x\leq -6$

따라서 연립부등식의 해는

$x<-12$



정답_ ④

569

$$\begin{cases} 5x-6\geq 2x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{x}{6}-\frac{5}{4}>\frac{x}{2}+\frac{5}{12} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

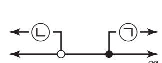
㉠에서 $3x\geq 9$ $\quad\therefore x\geq 3$

㉡의 양변에 12를 곱하면

$2x-15>6x+5$, $-4x>20$

$\therefore x<-5$

따라서 연립부등식의 해는 없다.



정답_ ④

570

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x-1\leq 2-x & \cdots\cdots ㉠ \\ 2-x\leq \frac{4-2x}{3} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠의 양변에 2를 곱하면

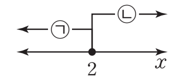
$x-2\leq 4-2x$, $3x\leq 6$ $\quad\therefore x\leq 2$

㉡의 양변에 3을 곱하면

$6-3x\leq 4-2x$, $-x\leq -2$ $\quad\therefore x\geq 2$

따라서 주어진 부등식의 해는

$x=2$



정답_ $x=2$

571

$$\begin{cases} x-1>8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-16\leq x+a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x>9$

㉡에서 $x\leq a+16$

연립부등식의 해가 $b<x\leq 28$이므로

$9=b$, $a+16=28$ $\quad\therefore a=12$, $b=9$

$\therefore a+b=12+9=21$

정답_ 21

572

$$\begin{cases} -x-2<2a & \cdots\cdots ㉠ \\ 4(x+1)\geq 3x+b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $-x<2a+2$ $\quad\therefore x>-2a-2$

㉡에서 $4x+4\geq 3x+b$ $\quad\therefore x\geq b-4$

이때 주어진 그림에서 $x\geq -3$, $x>4$이므로

$-2a-2=4$, $b-4=-3$ $\quad\therefore a=-3$, $b=1$

$\therefore a+b=-3+1=-2$

정답_ ①

573

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{a}{4}\leq \frac{1}{2}x+\frac{7}{6} & \cdots\cdots ㉠ \\ x+b\geq \frac{2x+11}{7} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠의 양변에 12를 곱하면

$8x+3a\leq 6x+14$, $2x\leq -3a+14$ $\quad\therefore x\leq \frac{-3a+14}{2}$

㉡의 양변에 7을 곱하면

$7x+7b\geq 2x+11$, $5x\geq -7b+11$ $\quad\therefore x\geq \frac{-7b+11}{5}$

주어진 부등식의 해가 $x=-2$이므로

$\frac{-3a+14}{2}=-2$, $\frac{-7b+11}{5}=-2$ $\quad\therefore a=6$, $b=3$

$\therefore a-b=6-3=3$

정답_ ⑤

574

$$\begin{cases} \frac{5x+a}{2}\leq 3x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+1\leq -2(x+b) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠의 양변에 2를 곱하면

$5x+a\leq 6x+2$, $-x\leq -a+2$ $\quad\therefore x\geq a-2$

㉡에서 $3x+1\leq -2x-2b$, $5x\leq -2b-1$

$\therefore x\leq \frac{-2b-1}{5}$

주어진 부등식의 해가 $-5\leq x\leq 1$이므로

$a-2=-5$, $\dfrac{-2b-1}{5}=1$　　$\therefore a=-3$, $b=-3$

$\therefore b-a=-3-(-3)=0$

정답_ ④

575

$(3a-b)x<2a+1$의 해가 $x>2$이므로 $3a-b<0$

$\therefore x>\dfrac{2a+1}{3a-b}$

즉, $\dfrac{2a+1}{3a-b}=2$이므로 $2a+1=2(3a-b)$

$2a+1=6a-2b$, $2b=4a-1$　　$\therefore b=2a-\dfrac{1}{2}$　　······ ㉠

연립부등식 $\begin{cases} (4a+1)x<2b(x-1)+3 \\ 8ax-1>4bx-7 \end{cases}$ 에 ㉠을 대입하면

$\begin{cases} (4a+1)x<2\left(2a-\dfrac{1}{2}\right)(x-1)+3 & \cdots\cdots ㉡ \\ 8ax-1>4\left(2a-\dfrac{1}{2}\right)x-7 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉡에서 $(4a+1)x<(4a-1)x-(4a-1)+3$

$2x<4-4a$　　$\therefore x<2-2a$

㉢에서 $8ax-1>(8a-2)x-7$, $2x>-6$　　$\therefore x>-3$

연립부등식의 해가 $a-1<x<6$이므로

$-3=a-1$, $2-2a=6$　　$\therefore a=-2$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=2\times(-2)-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{9}{2}$

$\therefore ab=-2\times\left(-\dfrac{9}{2}\right)=9$

정답_ ①

참고　㉠을 $3a-b<0$에 대입하면

$3a-\left(2a-\dfrac{1}{2}\right)<0$　　$\therefore a<-\dfrac{1}{2}$

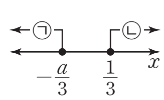
576

$\begin{cases} 2x-a\ge 5x & \cdots\cdots ㉠ \\ -2x+5\ge -5x+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-3x\ge a$　　$\therefore x\le -\dfrac{a}{3}$

㉡에서 $3x\ge 1$　　$\therefore x\ge \dfrac{1}{3}$

연립부등식의 해가 없으므로 오른쪽 그림에서



$-\dfrac{a}{3}<\dfrac{1}{3}$　　$\therefore a>-1$

정답_ ③

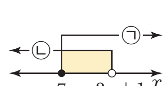
577

$\begin{cases} 2x+1\le 3(x-2) & \cdots\cdots ㉠ \\ x+3a<1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2x+1\le 3x-6$, $-x\le -7$　　$\therefore x\ge 7$

㉡에서 $x<-3a+1$

연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$-3a+1>7$, $-3a>6$　　$\therefore a<-2$

따라서 정수 a의 최댓값은 -3이다.

정답_ ③

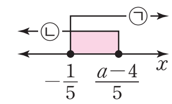
578

$\begin{cases} 3(1-2x)\le 4-x & \cdots\cdots ㉠ \\ 4-x\le a-6x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $3-6x\le 4-x$, $-5x\le 1$　　$\therefore x\ge -\dfrac{1}{5}$

㉡에서 $5x\le a-4$　　$\therefore x\le \dfrac{a-4}{5}$

주어진 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$\dfrac{a-4}{5}\ge -\dfrac{1}{5}$, $a-4\ge -1$

$\therefore a\ge 3$

정답_ $a\ge 3$

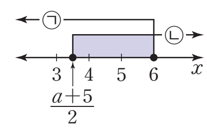
579

$\begin{cases} 2x-9\le 3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-a\ge x+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2x\le 12$　　$\therefore x\le 6$

㉡에서 $2x\ge a+5$　　$\therefore x\ge \dfrac{a+5}{2}$

연립부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이려면 오른쪽 그림에서



$3<\dfrac{a+5}{2}\le 4$, $6<a+5\le 8$

$\therefore 1<a\le 3$

정답_ ④

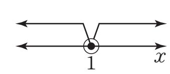
580

$\begin{cases} 5x+2\le 3x+k & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+4<6x+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

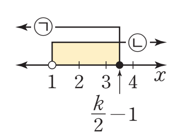
㉠에서 $2x\le k-2$　　$\therefore x\le \dfrac{k}{2}-1$　　······ ㉢

㉡에서 $-3x<-3$　　$\therefore x>1$

ㄱ. $k=4$이면 ㉢은 $x\le 1$이므로 연립부등식의 해는 없다. (거짓)



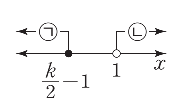
ㄴ. 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이려면 오른쪽 그림에서



$3\le \dfrac{k}{2}-1<4$, $4\le \dfrac{k}{2}<5$

$\therefore 8\le k<10$ (거짓)

ㄷ. 연립부등식의 해가 없으려면



$\dfrac{k}{2}-1\le 1$

$\dfrac{k}{2}\le 2$　　$\therefore k\le 4$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

정답_ ②

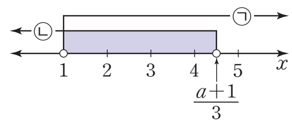
581

$\begin{cases} x+2>3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x<a+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x>1$

㉡에서 $x<\dfrac{a+1}{3}$

연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 9가 되어야 하므로 오른쪽 그림에서



$4<\frac{a+1}{3}\le 5$, $12<a+1\le 15$

$\therefore\ 11<a\le 14$

따라서 자연수 a의 최댓값은 14이다.

정답_ ⑤

참고 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값의 합이 9가 되어야 하므로 1보다 큰 정수인 2부터 연속하는 정수의 합이 9가 되는 경우를 생각한다.

582

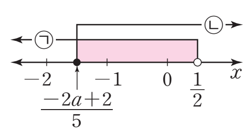
$\begin{cases} 5(x-1)+4>7x-2 & \cdots\cdots\ ㉠ \\ 3x-1\ge 1-2(x+a) & \cdots\cdots\ ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $5x-1>7x-2$, $-2x>-1$ $\qquad \therefore\ x<\frac{1}{2}$

㉡에서 $3x-1\ge 1-2x-2a$, $5x\ge -2a+2$

$\therefore\ x\ge \frac{-2a+2}{5}$

연립부등식을 만족시키는 정수 x가 -1과 0뿐이므로 오른쪽 그림에서



$-2<\frac{-2a+2}{5}\le -1$

$-10<-2a+2\le -5$, $-12<-2a\le -7$ $\qquad \therefore\ \frac{7}{2}\le a<6$

정답_ $\frac{7}{2}\le a<6$

583

연속하는 세 홀수를 $n-2$, n, $n+2$라고 하면

$\begin{cases} (n-2)+n+(n+2)>25 & \cdots\cdots\ ㉠ \\ 3(n+2)>2\{n+(n-2)\} & \cdots\cdots\ ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $3n>25$ $\qquad \therefore\ n>\frac{25}{3}$ $\qquad \cdots\cdots\ ㉢$

㉡에서 $3n+6>4n-4$, $-n>-10$ $\qquad \therefore\ n<10$ $\qquad \cdots\cdots\ ㉣$

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $\frac{25}{3}<n<10$

이때 n은 홀수이므로 $n=9$

따라서 가장 작은 홀수는 $9-2=7$

정답_ ④

584

놀이기구 A를 탄 횟수를 x라고 하면 놀이기구 B를 탄 횟수는 $6-x$이므로

$\begin{cases} 4000x+3000(6-x)\le 23000 & \cdots\cdots\ ㉠ \\ 6x+3(6-x)\le 25 & \cdots\cdots\ ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $1000x+18000\le 23000$

$1000x\le 5000$ $\qquad \therefore\ x\le 5$ $\qquad \cdots\cdots\ ㉢$

㉡에서 $3x+18\le 25$, $3x\le 7$ $\qquad \therefore\ x\le \frac{7}{3}$ $\qquad \cdots\cdots\ ㉣$

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $x\le \frac{7}{3}$

따라서 놀이기구 A는 최대 2번 탈 수 있다.

정답_ 2번

585

상자의 개수를 x라고 하면 구슬의 개수는 $4x+7$이므로

$5(x-2)+1\le 4x+7\le 5(x-2)+5$

$\therefore\ \begin{cases} 5(x-2)+1\le 4x+7 & \cdots\cdots\ ㉠ \\ 4x+7\le 5(x-2)+5 & \cdots\cdots\ ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $5x-9\le 4x+7$ $\qquad \therefore\ x\le 16$ $\qquad \cdots\cdots\ ㉢$

㉡에서 $4x+7\le 5x-5$, $-x\le -12$ $\qquad \therefore\ x\ge 12$ $\qquad \cdots\cdots\ ㉣$

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $12\le x\le 16$

따라서 상자의 최소 개수는 12이다.

정답_ ④

주의 구슬을 한 상자에 5개씩 담으면 1개의 상자가 남으므로 $(x-2)$개의 상자에는 구슬이 5개씩 들어 있고, 마지막 상자에는 구슬이 1개에서 5개까지 들어갈 수 있음에 주의한다.

586

농도가 20 %인 소금물 300 g에 들어 있는 소금의 양은

$\frac{20}{100}\times 300=60\ (\mathrm{g})$

농도가 5 %인 소금물을 x g 섞는다고 하면

$\frac{10}{100}(300+x)\le 60+\frac{5}{100}x\le \frac{15}{100}(300+x)$

$\begin{cases} \frac{10}{100}(300+x)\le 60+\frac{5}{100}x & \cdots\cdots\ ㉠ \\ 60+\frac{5}{100}x\le \frac{15}{100}(300+x) & \cdots\cdots\ ㉡ \end{cases}$

㉠의 양변에 20을 곱하면

$2(300+x)\le 1200+x$, $600+2x\le 1200+x$

$\therefore\ x\le 600$ $\qquad \cdots\cdots\ ㉢$

㉡의 양변에 20을 곱하면

$1200+x\le 3(300+x)$, $1200+x\le 900+3x$

$-2x\le -300$ $\qquad \therefore\ x\ge 150$ $\qquad \cdots\cdots\ ㉣$

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $150\le x\le 600$

따라서 농도가 5 %인 소금물을 150 g 이상 600 g 이하로 섞어야 한다.

정답_ 150 g 이상 600 g 이하

참고 소금물의 농도와 소금의 양

① $(\text{소금물의 농도})=\frac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})}\times 100\ (\%)$

② $(\text{소금의 양})=\frac{(\text{소금물의 농도})}{100}\times(\text{소금물의 양})$

587

작년에 참가한 남학생 수를 $8a$, 여학생 수를 $7a$, 올해 참가가 줄어든 남학생 수와 여학생 수를 각각 x라고 하면 올해 참가한 남학생 수는 $8a-x$, 여학생 수는 $7a-x$이므로

$(8a-x):(7a-x)=15:13$

$13(8a-x)=15(7a-x)$, $104a-13x=105a-15x$

$\therefore\ a=2x$

즉, 작년에 참가한 남학생 수는 $16x$, 여학생 수는 $14x$이므로

$\begin{cases} 16x+14x\ge 170 & \cdots\cdots\ ㉠ \\ (16x-x)+(14x-x)<170 & \cdots\cdots\ ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $30x\ge 170$ $\qquad \therefore\ x\ge \frac{17}{3}$ $\qquad \cdots\cdots\ ㉢$

ⓒ에서 $28x<170$ $\therefore x<\frac{85}{14}$ …… ⓔ

ⓒ, ⓔ의 공통부분을 구하면 $\frac{17}{3}\le x<\frac{85}{14}$

이때 x는 자연수이므로 $x=6$

따라서 작년에 비해 올해 줄어든 참가자 수는

$6+6=12$

정답_ ⑤

588

(1) $|x-4|<2$에서 $-2<x-4<2$

$\therefore 2<x<6$

(2) $|7-3x|>8$에서 $7-3x<-8$ 또는 $7-3x>8$

$-3x<-15$ 또는 $-3x>1$ $\therefore x>5$ 또는 $x<-\frac{1}{3}$

정답_ (1) $2<x<6$ (2) $x<-\frac{1}{3}$ 또는 $x>5$

589

$$\begin{cases} |x-3|\le 4 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{3x-1}{2}\ge x+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $-4\le x-3\le 4$ $\therefore -1\le x\le 7$

㉡의 양변에 2를 곱하면 $3x-1\ge 2x+2$ $\therefore x\ge 3$

따라서 연립부등식의 해가

$3\le x\le 7$

이므로 정수 x는 3, 4, 5, 6, 7의 5개이다.

정답_ ④

590

$|2x+a|\ge 6$에서 $2x+a\le -6$ 또는 $2x+a\ge 6$

$2x\le -a-6$ 또는 $2x\ge -a+6$

$\therefore x\le\frac{-a-6}{2}$ 또는 $x\ge\frac{-a+6}{2}$

부등식의 해가 $x\le -4$ 또는 $x\ge b$이므로

$\frac{-a-6}{2}=-4$, $\frac{-a+6}{2}=b$ $\therefore a=2, b=2$

$\therefore ab=2\times 2=4$

정답_ ①

591

$|x-7|\le a+1$에서 $-a-1\le x-7\le a+1$

$\therefore -a+6\le x\le a+8$

이때 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 9이므로

$a+8-(-a+6)+1=9$

$2a+3=9$ $\therefore a=3$

정답_ ③

참고 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수

정수 a, b $(a<b)$에 대하여

① $a<x<b$를 만족시키는 정수 x의 개수 ⇨ $b-a-1$

② $a\le x<b$ 또는 $a<x\le b$를 만족시키는 정수 x의 개수 ⇨ $b-a$

③ $a\le x\le b$를 만족시키는 정수 x의 개수 ⇨ $b-a+1$

592

$b<0$이면 $|ax+1|<b$의 해가 존재하지 않으므로 $b>0$

이때 $ab<0$이므로 $a<0$

$|ax+1|<b$에서 $-b<ax+1<b$

$-b-1<ax<b-1$ $\therefore \frac{b-1}{a}<x<\frac{-b-1}{a}$ ($\because a<0$)

부등식의 해가 $-4<x<5$이므로

$\frac{b-1}{a}=-4$, $\frac{-b-1}{a}=5$ $\therefore 4a+b=1$, $5a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=9$

$\therefore a+b=-2+9=7$

정답_ ④

593

$|4x+1|\le x+4$에서

(i) $x<-\frac{1}{4}$일 때

$-(4x+1)\le x+4$, $-4x-1\le x+4$

$-5x\le 5$ $\therefore x\ge -1$

그런데 $x<-\frac{1}{4}$이므로 $-1\le x<-\frac{1}{4}$

(ii) $x\ge -\frac{1}{4}$일 때

$4x+1\le x+4$, $3x\le 3$ $\therefore x\le 1$

그런데 $x\ge -\frac{1}{4}$이므로 $-\frac{1}{4}\le x\le 1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-1\le x\le 1$

따라서 $a=-1$, $b=1$이므로

$b-a=1-(-1)=2$

정답_ ②

594

$|2x-5|<7-x$에서

(i) $x<\frac{5}{2}$일 때

$-(2x-5)<7-x$, $-2x+5<7-x$

$-x<2$ $\therefore x>-2$

그런데 $x<\frac{5}{2}$이므로 $-2<x<\frac{5}{2}$

(ii) $x\ge\frac{5}{2}$일 때

$2x-5<7-x$, $3x<12$ $\therefore x<4$

그런데 $x\ge\frac{5}{2}$이므로 $\frac{5}{2}\le x<4$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2<x<4$

따라서 자연수 x는 1, 2, 3의 3개이다.

정답_ ③

595

$|1-x|<11-2x$에서

(i) $x<1$일 때

$1-x<11-2x$ $\therefore x<10$

그런데 $x<1$이므로 $x<1$

(ii) $x \geq 1$일 때

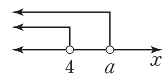
$-(1-x)<11-2x$, $-1+x<11-2x$

$3x<12 \qquad \therefore x<4$

그런데 $x \geq 1$이므로 $1 \leq x<4$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x<4$

따라서 $x<4$가 $x<a$에 포함되어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a \geq 4$

정답_ ⑤

596

$|3x-1|<x+a$에서

(i) $x<\frac{1}{3}$일 때

$-(3x-1)<x+a$, $-3x+1<x+a$

$-4x<a-1 \qquad \therefore x>\frac{-a+1}{4}$

그런데 $x<\frac{1}{3}$이므로 $\frac{-a+1}{4}<x<\frac{1}{3}$

(ii) $x \geq \frac{1}{3}$일 때

$3x-1<x+a$, $2x<a+1 \qquad \therefore x<\frac{a+1}{2}$

그런데 $x \geq \frac{1}{3}$이므로 $\frac{1}{3} \leq x<\frac{a+1}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $\frac{-a+1}{4}<x<\frac{a+1}{2}$

이 부등식의 해가 $-1<x<3$이므로

$\frac{-a+1}{4}=-1$, $\frac{a+1}{2}=3 \qquad \therefore a=5$

정답_ ⑤

참고 $a>0$이므로 $\frac{-a+1}{4}<\frac{1}{4}$, $\frac{a+1}{2}>\frac{1}{2}$

즉, $\frac{-a+1}{4}$은 항상 $\frac{1}{3}$보다 작고, $\frac{a+1}{2}$은 항상 $\frac{1}{3}$보다 크다.

597

$|x+1|+|x-2| \leq 5$에서

(i) $x<-1$일 때

$-(x+1)-(x-2) \leq 5$, $-2x+1 \leq 5$

$-2x \leq 4 \qquad \therefore x \geq -2$

그런데 $x<-1$이므로 $-2 \leq x<-1$

(ii) $-1 \leq x<2$일 때

$x+1-(x-2) \leq 5$, $3 \leq 5 \qquad \therefore$ 해는 모든 실수

그런데 $-1 \leq x<2$이므로 $-1 \leq x<2$

(iii) $x \geq 2$일 때

$x+1+(x-2) \leq 5$, $2x-1 \leq 5$

$2x \leq 6 \qquad \therefore x \leq 3$

그런데 $x \geq 2$이므로 $2 \leq x \leq 3$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2 \leq x \leq 3$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=3$이므로

$\beta-\alpha=3-(-2)=5$

정답_ ⑤

598

$|2x+5|>4|x+2|+x$에서

(i) $x<-\frac{5}{2}$일 때

$-(2x+5)>-4(x+2)+x$, $-2x-5>-3x-8$

$\therefore x>-3$

그런데 $x<-\frac{5}{2}$이므로 $-3<x<-\frac{5}{2}$

(ii) $-\frac{5}{2} \leq x<-2$일 때

$2x+5>-4(x+2)+x$, $2x+5>-3x-8$

$5x>-13 \qquad \therefore x>-\frac{13}{5}$

그런데 $-\frac{5}{2} \leq x<-2$이므로 $-\frac{5}{2} \leq x<-2$

(iii) $x \geq -2$일 때

$2x+5>4(x+2)+x$, $2x+5>5x+8$

$-3x>3 \qquad \therefore x<-1$

그런데 $x \geq -2$이므로 $-2 \leq x<-1$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-3<x<-1$

따라서 정수 x는 -2의 1개이다.

정답_ ①

599

$\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$이므로 $2|x+4|-3\sqrt{(x+1)^2} \geq 1$에서

$2|x+4|-3|x+1| \geq 1$

(i) $x<-4$일 때

$-2(x+4)+3(x+1) \geq 1$, $x-5 \geq 1 \qquad \therefore x \geq 6$

그런데 $x<-4$이므로 해는 없다.

(ii) $-4 \leq x<-1$일 때

$2(x+4)+3(x+1) \geq 1$, $5x+11 \geq 1$

$5x \geq -10 \qquad \therefore x \geq -2$

그런데 $-4 \leq x<-1$이므로 $-2 \leq x<-1$

(iii) $x \geq -1$일 때

$2(x+4)-3(x+1) \geq 1$, $-x+5 \geq 1$

$-x \geq -4 \qquad \therefore x \leq 4$

그런데 $x \geq -1$이므로 $-1 \leq x \leq 4$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2 \leq x \leq 4$

따라서 모든 자연수 x의 값의 합은

$1+2+3+4=10$

정답_ ⑤

600

$||x+1|-2|<3$에서 $-3<|x+1|-2<3$

$\therefore -1<|x+1|<5$

그런데 $|x+1| \geq 0$이므로 $0 \leq |x+1|<5$

$-5<x+1<5 \qquad \therefore -6<x<4$

따라서 정수 x는 $-5, -4, -3, \cdots, 3$의 9개이다.

정답_ ③

601

$m=a+1$, $n=a+5$를 주어진 부등식에 대입하면

$|x|+|x-(a+1)|<a+5$

(ⅰ) $x<0$일 때

$-x-\{x-(a+1)\}<a+5$, $-2x+a+1<a+5$

$-2x<4$ $\quad\therefore x>-2$

그런데 $x<0$이므로 $-2<x<0$

(ⅱ) $0\le x<a+1$일 때

$x-\{x-(a+1)\}<a+5$

즉, $0\times x<4$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $0\le x<a+1$이므로 $0\le x<a+1$

(ⅲ) $x\ge a+1$일 때

$x+\{x-(a+1)\}<a+5$, $2x-a-1<a+5$

$2x<2a+6$ $\quad\therefore x<a+3$

그런데 $x\ge a+1$이므로 $a+1\le x<a+3$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 부등식의 해는 $-2<x<a+3$

따라서 정수 x는 $-1, 0, 1, \cdots, a+2$의 $(a+4)$개이다.

이때 $N(a+1, a+5)=20$이므로

$a+4=20$ $\quad\therefore a=16$

정답_ 16

참고 a가 자연수이므로 $0<a+1<a+3$

602

$|3x+2|\ge0$이므로 주어진 부등식의 해가 모든 실수가 되려면

$a-4<0$ $\quad\therefore a<4$

정답_ ②

603

$|x+7|\ge0$이므로 주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$\frac{4}{5}k-8<0$, $\frac{4}{5}k<8$ $\quad\therefore k<10$

따라서 정수 k의 최댓값은 9이다.

정답_ ⑤

604

$\sqrt{(2x-5)^2}=|2x-5|$이므로 $\sqrt{(2x-5)^2}+a\le3$에서

$|2x-5|\le3-a$

$|2x-5|\ge0$이므로 주어진 부등식이 해를 가지려면

$3-a\ge0$, $-a\ge-3$ $\quad\therefore a\le3$

정답_ ④

605

$|x-k|\ge0$이므로 주어진 부등식이 오직 한 개의 해를 가지려면

$k^2+6k=0$, $k(k+6)=0$ $\quad\therefore k=0$ 또는 $k=-6$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $0+(-6)=-6$

정답_ ①

참고 $k=0$이면 주어진 부등식은 $|x|\le0$이므로 $x=0$
$k=-6$이면 주어진 부등식은 $|x+6|\le0$이므로 $x=-6$

606

$(a-2b)x-a+3b\le0$에서 $(a-2b)x\le a-3b$

이 부등식의 해가 없으므로

$a-2b=0$, $a-3b<0$ ········ ❶

$a=2b$를 $a-3b<0$에 대입하면

$2b-3b<0$, $-b<0$ $\quad\therefore b>0$ ········ ❷

$a=2b$를 $(3a-5b)x-2a+b<0$에 대입하면

$(6b-5b)x-4b+b<0$, $bx-3b<0$, $bx<3b$

이때 $b>0$이므로 $x<3$ ········ ❸

정답_ $x<3$

채점 기준	비율
❶ 부등식의 해가 없을 조건 구하기	40 %
❷ b의 값의 범위 구하기	20 %
❸ 주어진 부등식의 해 구하기	40 %

607

$$\begin{cases}\frac{2}{3}x+1<\frac{1}{2}x+4 & \cdots\cdots ㉠\\ \frac{1}{2}x+4<2(x-1) & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

········ ❶

㉠의 양변에 6을 곱하면

$4x+6<3x+24$ $\quad\therefore x<18$

㉡의 양변에 2를 곱하면

$x+8<4(x-1)$, $x+8<4x-4$, $-3x<-12$ $\quad\therefore x>4$

따라서 주어진 부등식의 해는 $4<x<18$ ········ ❷

즉, 정수 x는 5, 6, 7, $\cdots$, 17의 13개이다. ········ ❸

정답_ 13

채점 기준	비율
❶ 연립부등식으로 변형하기	20 %
❷ 주어진 부등식의 해 구하기	60 %
❸ 정수 x의 개수 구하기	20 %

608

$$\begin{cases}2(x-a)\le4(x+1) & \cdots\cdots ㉠\\ 3x+b\le5 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $2x-2a\le4x+4$, $-2x\le2a+4$ $\quad\therefore x\ge-a-2$

㉡에서 $3x\le5-b$ $\quad\therefore x\le\frac{5-b}{3}$ ········ ❶

연립부등식의 해가 $-4\le x\le3$이므로

$-a-2=-4$, $\frac{5-b}{3}=3$ $\quad\therefore a=2$, $b=-4$ ········ ❷

$\therefore a+b=2+(-4)=-2$ ········ ❸

정답_ -2

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해 구하기	50 %
❷ a, b의 값 구하기	40 %
❸ $a+b$의 값 구하기	10 %

609

$$\begin{cases}3x-1\le4x+a & \cdots\cdots ㉠\\ 5(x+1)<2x+11 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $-x \le a+1$ $\quad \therefore x \ge -a-1$

㉡에서 $5x+5<2x+11$, $3x<6$ $\quad \therefore x<2$

따라서 연립부등식의 해는 $-a-1 \le x<2$ ❶

즉, $M=1$, $-a-1=-7$이므로

$M=1$, $a=6$ ❷

$\therefore M+a=1+6=7$ ❸

정답_ 7

채점 기준	비율
❶ 연립부등식의 해 구하기	50 %
❷ M, a의 값 구하기	40 %
❸ $M+a$의 값 구하기	10 %

참고 a가 자연수이므로 $-a-1<2$

610

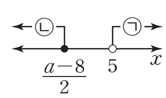
$$\begin{cases} \frac{1}{4}(x+1)<x-\frac{7}{2} & \cdots\cdots ㉠ \\ a-4x \ge 8-2x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠의 양변에 4를 곱하면

$x+1<4x-14$, $-3x<-15$ $\quad \therefore x>5$

㉡에서 $-2x \ge 8-a$ $\quad \therefore x \le \frac{a-8}{2}$ ❶

연립부등식의 해가 없으므로 오른쪽 그림에서



$\frac{a-8}{2} \le 5$, $a-8 \le 10$

$\therefore a \le 18$ ❷

따라서 a의 최댓값은 18이다. ❸

정답_ 18

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해 구하기	40 %
❷ a의 값의 범위 구하기	40 %
❸ a의 최댓값 구하기	20 %

611

$|3x-5|-|x-1|<4$에서

(i) $x<1$일 때

$-(3x-5)+(x-1)<4$, $-2x+4<4$

$-2x<0$ $\quad \therefore x>0$

그런데 $x<1$이므로 $0<x<1$ ❶

(ii) $1 \le x<\frac{5}{3}$일 때

$-(3x-5)-(x-1)<4$, $-4x+6<4$

$-4x<-2$ $\quad \therefore x>\frac{1}{2}$

그런데 $1 \le x<\frac{5}{3}$이므로 $1 \le x<\frac{5}{3}$ ❷

(iii) $x \ge \frac{5}{3}$일 때

$3x-5-(x-1)<4$, $2x-4<4$

$2x<8$ $\quad \therefore x<4$

그런데 $x \ge \frac{5}{3}$이므로 $\frac{5}{3} \le x<4$ ❸

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는 $0<x<4$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$1+2+3=6$ ❹

정답_ 6

채점 기준	비율
❶ $x<1$일 때 부등식의 해 구하기	25 %
❷ $1 \le x<\frac{5}{3}$일 때 부등식의 해 구하기	25 %
❸ $x \ge \frac{5}{3}$일 때 부등식의 해 구하기	25 %
❹ 모든 정수 x의 값의 합 구하기	25 %

612

$a(ax-1)-b \le (6-a)x$에서 $a^2x-a-b \le (6-a)x$

$(a^2+a-6)x \le a+b$ $\quad \therefore (a+3)(a-2)x \le a+b$

이 부등식의 해가 모든 실수이므로

$(a+3)(a-2)=0$, $a+b \ge 0$

$(a+3)(a-2)=0$에서 $a=-3$ 또는 $a=2$

(i) $a=-3$일 때

$a+b \ge 0$에서 $-3+b \ge 0$ $\quad \therefore b \ge 3$

그런데 $|b| \le 4$, 즉 $-4 \le b \le 4$이므로 $b=3$, 4

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(-3, 3)$, $(-3, 4)$의 2개이다.

(ii) $a=2$일 때

$a+b \ge 0$에서 $2+b \ge 0$ $\quad \therefore b \ge -2$

그런데 $|b| \le 4$, 즉 $-4 \le b \le 4$이므로

$b=-2$, -1, 0, 1, 2, 3, 4

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(2, -2)$, $(2, -1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$의 7개이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 $2+7=9$

정답_ ⑤

613

$a+b+c=k$ $(k>0)$라고 하면

$b+c=k-a$, $c+a=k-b$, $a+b=k-c$

이므로 주어진 부등식은

$$\frac{2x+k-a}{a}+\frac{2x+k-b}{b}+\frac{2x+k-c}{c}<-3$$

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)x+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)k-3<-3$$

$$\therefore \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(2x+k)<0$$

이때 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>0$이므로

$2x+k<0$, $2x<-k$ $\quad \therefore x<-\frac{k}{2}$

이 부등식의 해가 $x<-1$이므로

$-\frac{k}{2}=-1$ $\quad \therefore k=2$

즉, $a+b+c=2$이므로 $c=2-(a+b)$

이것을 $(a+b)x+4c>8$에 대입하면

$(a+b)x+4\{2-(a+b)\}>8$, $(a+b)x+8-4(a+b)>8$

$(a+b)x>4(a+b)$

이때 $a+b>0$이므로 구하는 해는 $x>4$

정답_ ⑤

614

조건 (가)에서

$x-8<0,\ 1-x<0$ 또는 $x-8=0$ 또는 $1-x=0$

이므로 $x<8,\ x>1$ 또는 $x=8$ 또는 $x=1$

$\therefore\ 1\le x\le 8$ …… ㉠

조건 (나)에서

$4x+9>0,\ 2x-7<0$ 또는 $4x+9=0,\ 2x-7\ne 0$

이므로 $x>-\frac{9}{4},\ x<\frac{7}{2}$ 또는 $x=-\frac{9}{4},\ x\ne\frac{7}{2}$

$\therefore\ -\frac{9}{4}\le x<\frac{7}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1\le x<\frac{7}{2}$

따라서 정수 x는 1, 2, 3의 3개이다.

정답_ ④

615

이차방정식 $x^2-(2k+1)x+k^2+2k-2=0$의 판별식을 D_1이라 고 하면

$D_1=\{-(2k+1)\}^2-4(k^2+2k-2)>0$

$-4k+9>0,\ -4k>-9\qquad\therefore\ k<\frac{9}{4}$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-2(k-1)x+k^2+7=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$\frac{D_2}{4}=\{-(k-1)\}^2-(k^2+7)<0$

$-2k-6<0,\ -2k<6\qquad\therefore\ k>-3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-3<k<\frac{9}{4}$

정답_ ③

616

$x+a\le 7-2x$에서 $3x\le -a+7\qquad\therefore\ x\le\frac{-a+7}{3}$

$x+a\le 3x+b$에서 $-2x\le -a+b\qquad\therefore\ x\ge\frac{a-b}{2}$

이 연립부등식의 해가 $-\frac{1}{2}\le x\le 2$이므로

$\frac{-a+7}{3}=2,\ \frac{a-b}{2}=-\frac{1}{2}\qquad\therefore\ a=1,\ b=2$

즉, 원래 부등식은 $x+1\le 7-2x\le 3x+2$이므로

$\begin{cases} x+1\le 7-2x & \cdots\cdots ㉠\\ 7-2x\le 3x+2 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $3x\le 6\qquad\therefore\ x\le 2$ …… ㉢

㉡에서 $-5x\le -5\qquad\therefore\ x\ge 1$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 원래 부등식의 해는

$1\le x\le 2$

정답_ $1\le x\le 2$

617

$2a-5b-5<(a-b)x<4a+b+1$에서

(i) $a-b>0$일 때

$\frac{2a-5b-5}{a-b}<x<\frac{4a+b+1}{a-b}$

주어진 부등식의 해가 $1<x<6$이므로

$\frac{2a-5b-5}{a-b}=1,\ \frac{4a+b+1}{a-b}=6$

$\therefore\ a-4b=5,\ 2a-7b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-31,\ b=-9$

이때 $a-b=-31-(-9)=-22<0$이므로 $a-b>0$을 만족하지 않는다.

(ii) $a-b<0$일 때

$\frac{4a+b+1}{a-b}<x<\frac{2a-5b-5}{a-b}$

주어진 부등식의 해가 $1<x<6$이므로

$\frac{4a+b+1}{a-b}=1,\ \frac{2a-5b-5}{a-b}=6$

$\therefore\ 3a+2b=-1,\ 4a-b=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=1$

이때 $a-b=-1-1=-2<0$이므로 $a-b<0$을 만족한다.

(i), (ii)에서 $a=-1,\ b=1$이므로

$ab=-1\times 1=-1$

정답_ ③

참고 $a-b=0$, 즉 $a=b$이면 주어진 부등식은

$-3a-5<0\times x<5a+1$

이 부등식의 해는 $1<x<6$이 될 수 없으므로 $a-b\ne 0$이다.

618

$\begin{cases} (a+1)x<(x+1)a-1 & \cdots\cdots ㉠\\ 2ax-a<(2a+1)x-3 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $x<a-1$

㉡에서 $-x<a-3\qquad\therefore\ x>-a+3$

따라서 연립부등식의 해는 $-a+3<x<a-1$

$\therefore\ f(a)=a-1-(-a+3)-1=2a-5$

$f(a)<3a-12$, 즉 $2a-5<3a-12$에서

$-a<-7\qquad\therefore\ a>7$

따라서 정수 a의 최솟값은 8이다.

정답_ ⑤

참고 $a>2$이므로 $-a+3<1,\ a-1>1\qquad\therefore\ -a+3<a-1$

619

처음 자연수의 십의 자리의 숫자를 x라고 하면 일의 자리의 숫자는 $x-2$이므로

$\begin{cases} x+(x-2)\le 15 & \cdots\cdots ㉠\\ 10x+(x-2)<2\{10(x-2)+x\}-40 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $2x-2\le 15,\ 2x\le 17\qquad\therefore\ x\le\frac{17}{2}$ …… ㉢

㉡에서 $11x-2<22x-80,\ -11x<-78$

$\therefore\ x>\frac{78}{11}$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $\frac{78}{11}<x\le\frac{17}{2}$

이때 x는 자연수이므로 $x=8$

따라서 처음 자연수는 86이다.

정답_ 86

620

학생 수를 x $(x>3)$라고 하면 밤 식빵의 조각 수는 $4(x-3)$이므로

$3x+1\le4(x-3)\le3x+8$

$\begin{cases}3x+1\le4(x-3) & \cdots\cdots ㉠\\ 4(x-3)\le3x+8 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $3x+1\le4x-12$, $-x\le-13$ $\quad\therefore x\ge13$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $4x-12\le3x+8$ $\quad\therefore x\le20$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$13\le x\le20$

이때 x는 $x>3$인 자연수이고, $4(x-3)$이 8의 배수이어야 하므로

$x=13$, 15, 17, 19

따라서 이 동아리의 최대 학생 수는 19이다.

정답_ ④

621

$|x+3k|<k^2+3$에서 $-k^2-3<x+3k<k^2+3$

$\therefore -k^2-3k-3<x<k^2-3k+3$

이 부등식의 해가 $-13<x<1$이므로

$-k^2-3k-3=-13$, $k^2-3k+3=1$

$-k^2-3k-3=-13$에서 $k^2+3k-10=0$

$(k+5)(k-2)=0$ $\quad\therefore k=-5$ 또는 $k=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$k^2-3k+3=1$에서 $k^2-3k+2=0$

$(k-1)(k-2)=0$ $\quad\therefore k=1$ 또는 $k=2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k=2$

따라서 부등식 $|x|<k$, 즉 $|x|<2$의 해는

$-2<x<2$

이므로 정수 x는 -1, 0, 1의 3개이다.

정답_ ②

622

$\left||x+1|+\sqrt{x^2+6x+9}\right|<5$에서 $\left||x+1|+\sqrt{(x+3)^2}\right|<5$

$\left||x+1|+|x+3|\right|<5$

$\therefore -5<|x+1|+|x+3|<5$

그런데 $|x+1|\ge0$, $|x+3|\ge0$이므로

$0\le|x+1|+|x+3|<5$

(i) $x<-3$일 때

$0\le-(x+1)-(x+3)<5$, $0\le-2x-4<5$

$4\le-2x<9$ $\quad\therefore -\frac{9}{2}<x\le-2$

그런데 $x<-3$이므로 $-\frac{9}{2}<x<-3$

(ii) $-3\le x<-1$일 때

$0\le-(x+1)+(x+3)<5$

$0\le2<5$ $\quad\therefore$ 해는 모든 실수

그런데 $-3\le x<-1$이므로 $-3\le x<-1$

(iii) $x\ge-1$일 때

$0\le x+1+(x+3)<5$, $0\le2x+4<5$

$-4\le2x<1$ $\quad\therefore -2\le x<\frac{1}{2}$

그런데 $x\ge-1$이므로 $-1\le x<\frac{1}{2}$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{9}{2}<x<\frac{1}{2}$

따라서 $a=-\frac{9}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$b-a=\frac{1}{2}-\left(-\frac{9}{2}\right)=5$

정답_ ⑤

623

$\overline{AP}=|x-3|$, $\overline{BP}=|x-7|$이므로 $\overline{AP}+\overline{BP}\le8$에서

$|x-3|+|x-7|\le8$

(i) $x<3$일 때

$-(x-3)-(x-7)\le8$, $-2x+10\le8$

$-2x\le-2$ $\quad\therefore x\ge1$

그런데 $x<3$이므로 $1\le x<3$

(ii) $3\le x<7$일 때

$x-3-(x-7)\le8$

즉, $0\times x\le4$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $3\le x<7$이므로 $3\le x<7$

(iii) $x\ge7$일 때

$x-3+(x-7)\le8$, $2x-10\le8$

$2x\le18$ $\quad\therefore x\le9$

그런데 $x\ge7$이므로 $7\le x\le9$

(i)~(iii)에서 부등식의 해는

$1\le x\le9$

이므로 선분 OP의 길이, 즉 $|x|$의 최댓값은 9, 최솟값은 1이다.

따라서 구하는 값은 $9+1=10$

정답_ ④

624

$|x+3|+|x-4|<k$에서

(i) $x<-3$일 때

$|x+3|+|x-4|=-(x+3)-(x-4)=-2x+1$

그런데 $x<-3$이므로 $-2x>6$, $-2x+1>7$

$\therefore |x+3|+|x-4|>7$

(ii) $-3\le x<4$일 때

$|x+3|+|x-4|=x+3-(x-4)=7$

(iii) $x\ge4$일 때

$|x+3|+|x-4|=x+3+(x-4)=2x-1$

그런데 $x\ge4$이므로 $2x\ge8$, $2x-1\ge7$

$\therefore |x+3|+|x-4|\ge7$

(i)~(iii)에서

$|x+3|+|x-4|\ge7$

따라서 주어진 부등식의 해가 없으려면

$k\le7$

이어야 하므로 k의 최댓값은 7이다.

정답_ ④

09 이차부등식

625

부등식 $f(x)<0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$-1<x<4$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은 $0+1+2+3=6$

정답_ ②

626

$f(x)-g(x)\le 0$에서 $f(x)\le g(x)$

부등식 $f(x)-g(x)\le 0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로

$-1\le x\le 3$

따라서 해가 아닌 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

627

$ax^2+(b-m)x+c-n\le 0$에서 $ax^2+bx+c\le mx+n$

따라서 주어진 부등식의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로 $-5\le x\le 3$

정답_ $-5\le x\le 3$

628

$f(x)g(x)>0$에서 $f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$

(i) $f(x)>0$, $g(x)>0$일 때

부등식 $f(x)>0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x<b$ 또는 $x>d$ …… ㉠

부등식 $g(x)>0$의 해는 $y=g(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$a<x<c$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $a<x<b$

(ii) $f(x)<0$, $g(x)<0$일 때

부등식 $f(x)<0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$b<x<d$ …… ㉢

부등식 $g(x)<0$의 해는 $y=g(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x<a$ 또는 $x>c$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $c<x<d$

(i), (ii)에서 부등식 $f(x)g(x)>0$의 해는

$a<x<b$ 또는 $c<x<d$

정답_ $a<x<b$ 또는 $c<x<d$

629

$(x-1)(x-5)\le 0$에서 $1\le x\le 5$

따라서 자연수 x는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

정답_ ⑤

630

$x^2-3x-18>0$에서 $(x+3)(x-6)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>6$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=6$이므로 $\alpha-\beta=-3-6=-9$

정답_ ①

631

① $x^2-6x+8\ge 0$에서 $(x-2)(x-4)\ge 0$

$\therefore x\le 2$ 또는 $x\ge 4$

② $9x^2+1\le 6x$에서 $9x^2-6x+1\le 0$

$(3x-1)^2\le 0 \quad \therefore x=\frac{1}{3}$

③ $x^2+4x<-4$에서 $x^2+4x+4<0$, $(x+2)^2<0$

그런데 $(x+2)^2\ge 0$이므로 $x^2+4x<-4$의 해는 없다.

④ $x^2-2x+1>0$에서 $(x-1)^2>0$

따라서 $x^2-2x+1>0$의 해는 $x\ne 1$인 모든 실수이다.

⑤ $-x^2-2x+3>0$에서 $x^2+2x-3<0$

$(x+3)(x-1)<0 \quad \therefore -3<x<1$

따라서 해가 존재하지 않는 것은 ③이다.

정답_ ③

632

$x^2-6x-7\le 0$에서 $(x+1)(x-7)\le 0 \quad \therefore -1\le x\le 7$

① $|x-2|\le 3$에서 $-3\le x-2\le 3 \quad \therefore -1\le x\le 5$

② $|x-3|\le 3$에서 $-3\le x-3\le 3 \quad \therefore 0\le x\le 6$

③ $|x-3|\le 4$에서 $-4\le x-3\le 4 \quad \therefore -1\le x\le 7$

④ $|x-4|\le 3$에서 $-3\le x-4\le 3 \quad \therefore 1\le x\le 7$

⑤ $|x-4|\le 4$에서 $-4\le x-4\le 4 \quad \therefore 0\le x\le 8$

따라서 부등식 $x^2-6x-7\le 0$과 해가 같은 것은 ③이다.

정답_ ③

633

$x^2-2x-8\le 2|x+2|$에서

(i) $x<-2$일 때

$x^2-2x-8\le -2(x+2)$, $x^2-4\le 0$

$(x+2)(x-2)\le 0 \quad \therefore -2\le x\le 2$

이때 $x<-2$이므로 해는 없다.

(ii) $x\ge -2$일 때

$x^2-2x-8\le 2(x+2)$, $x^2-4x-12\le 0$

$(x+2)(x-6)\le 0 \quad \therefore -2\le x\le 6$

이때 $x\ge -2$이므로 $-2\le x\le 6$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2\le x\le 6$

따라서 정수 x는 $-2, -1, 0, \cdots, 6$의 9개이다.

정답_ ④

634

$|x^2-2x-4|\ge 4$에서

$x^2-2x-4\le -4$ 또는 $x^2-2x-4\ge 4$

(ⅰ) $x^2-2x-4\le-4$일 때

$x^2-2x\le0$, $x(x-2)\le0$ $\therefore 0\le x\le2$

(ⅱ) $x^2-2x-4\ge4$일 때

$x^2-2x-8\ge0$, $(x+2)(x-4)\ge0$ $\therefore x\le-2$ 또는 $x\ge4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 부등식의 해는

$x\le-2$ 또는 $0\le x\le2$ 또는 $x\ge4$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=2$, $\gamma=4$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=-2+2+4=4$

정답_ ④

635

$x^2-3|x|-4\le0$에서

(ⅰ) $x<0$일 때

$x^2+3x-4\le0$, $(x+4)(x-1)\le0$ $\therefore -4\le x\le1$

이때 $x<0$이므로 $-4\le x<0$

(ⅱ) $x\ge0$일 때

$x^2-3x-4\le0$, $(x+1)(x-4)\le0$ $\therefore -1\le x\le4$

이때 $x\ge0$이므로 $0\le x\le4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 부등식의 해는 $-4\le x\le4$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$-4+(-3)+(-2)+\cdots+4=0$

정답_ 0

다른 풀이

$x^2=|x|^2$이므로 $x^2-3|x|-4\le0$에서

$|x|^2-3|x|-4\le0$, $(|x|+1)(|x|-4)\le0$

이때 $|x|+1>0$이므로

$|x|-4\le0$, $|x|\le4$ $\therefore -4\le x\le4$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$-4+(-3)+(-2)+\cdots+4=0$

636

해가 $-4<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+4)(x-3)<0$ $\therefore x^2+x-12<0$

이 부등식이 $x^2+ax+b<0$과 같으므로

$a=1$, $b=-12$

$\therefore a-b=1-(-12)=13$

정답_ ⑤

637

해가 $x=2$이고 x^2의 계수가 -1인 이차부등식은

$-(x-2)^2\ge0$ $\therefore -x^2+4x-4\ge0$

이 부등식이 $-x^2+ax+b\ge0$과 같으므로

$a=4$, $b=-4$

따라서 $ax^2+ax+2b>0$은 $4x^2+4x-8>0$이므로

$4(x+2)(x-1)>0$ $\therefore x<-2$ 또는 $x>1$

정답_ ①

638

부등식 $f(x)\ge0$의 해가 $-2\le x\le3$이므로

$f(x)=a(x+2)(x-3)$ $(a<0)$

이라고 하면 함수의 그래프가 점 $(1, 6)$을 지나므로

$6=-6a$ $\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=-(x+2)(x-3)$이므로

$f(0)=-1\times2\times(-3)=6$

정답_ ⑤

639

부등식 $|2x+1|<a$에서

$-a<2x+1<a$, $-a-1<2x<a-1$

$\therefore \frac{-a-1}{2}<x<\frac{a-1}{2}$

이차부등식 $x^2-bx-2<0$의 해가 $\frac{-a-1}{2}<x<\frac{a-1}{2}$이므로

$x^2-bx-2=\left(x+\frac{a+1}{2}\right)\left(x-\frac{a-1}{2}\right)$

즉, $x^2-bx-2=x^2+x-\frac{a^2-1}{4}$에서

$-b=1$, $2=\frac{a^2-1}{4}$ $\therefore a=3$, $b=-1$ $(\because a>0)$

$\therefore a+b=3+(-1)=2$

정답_ 2

640

주어진 그래프에서 $a>0$이고 부등식 $ax^2+bx+c\le0$의 해가

$-2\le x\le3$임을 알 수 있다.

즉, $ax^2+bx+c=a(x+2)(x-3)$ $(a>0)$이므로

$ax^2+bx+c=ax^2-ax-6a$

$\therefore b=-a$, $c=-6a$

이것을 $ax^2+cx-5b\le0$에 대입하면

$ax^2-6ax+5a\le0$, $a(x^2-6x+5)\le0$

$a(x-1)(x-5)\le0$

이때 $a>0$이므로 $(x-1)(x-5)\le0$

$\therefore 1\le x\le5$

따라서 자연수 x는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

정답_ 5

641

부등식 $f(x)>0$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>6$이므로

$f(x)=a(x+1)(x-6)$ $(a>0)$

이라고 하면

$f(-x)=a(-x+1)(-x-6)=a(x-1)(x+6)$

$f(-x)\le0$, 즉 $a(x-1)(x+6)\le0$에서

$(x-1)(x+6)\le0$ $(\because a>0)$

$\therefore -6\le x\le1$

따라서 정수 x는 -6, -5, -4, $\cdots$, 1의 8개이다.

정답_ 8

642

부등식 $f(x)>0$의 해가 $-1<x<3$이므로

$f(x)=a(x+1)(x-3)$ $(a<0)$

이라고 하면

$f(4-x)=a(4-x+1)(4-x-3)=a(x-5)(x-1)$

$f(4-x)>0$, 즉 $a(x-5)(x-1)>0$에서
$(x-5)(x-1)<0$ ($\because a<0$)
$\therefore 1<x<5$
따라서 정수 x의 최댓값은 4, 최솟값은 2이므로 그 합은
$4+2=6$

정답_ ②

643

주어진 그래프에서 부등식 $f(x)\le 0$의 해가 $2\le x\le 4$이므로
$f(x)=a(x-2)(x-4)$ $(a>0)$
라고 하면
$f(2x-4)=a(2x-4-2)(2x-4-4)=4a(x-3)(x-4)$
$f(2x-4)\le 0$, 즉 $4a(x-3)(x-4)\le 0$에서
$(x-3)(x-4)\le 0$ ($\because a>0$)
$\therefore 3\le x\le 4$
따라서 정수 x의 값의 합은 $3+4=7$

정답_ 7

다른 풀이
부등식 $f(x)\le 0$의 해가 $2\le x\le 4$이므로 부등식 $f(2x-4)\le 0$의 해는
$2\le 2x-4\le 4$, $6\le 2x\le 8$ $\therefore 3\le x\le 4$
따라서 정수 x의 값의 합은 $3+4=7$

644

이차부등식 $x^2+(k+3)x+4\le 0$의 해가 오직 한 개 존재하려면 이차방정식 $x^2+(k+3)x+4=0$이 중근을 가져야 한다.
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$D=(k+3)^2-4\times 1\times 4=0$
$k^2+6k-7=0$, $(k+7)(k-1)=0$
$\therefore k=-7$ 또는 $k=1$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $-7+1=-6$

정답_ ②

645

이차부등식 $(a+3)x^2-2(a+3)x+4\le 0$이 해를 오직 한 개만 가지려면
$a+3>0$ $\therefore a>-3$
또, 이차방정식 $(a+3)x^2-2(a+3)x+4=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(a+3)^2-4(a+3)=0$
$a^2+2a-3=0$, $(a+3)(a-1)=0$ $\therefore a=-3$ 또는 $a=1$
이때 $a>-3$이므로 $a=1$

정답_ 1

646

이차부등식 $-x^2+6x+4k-1\ge 0$, 즉 $x^2-6x-4k+1\le 0$이 해를 오직 한 개만 가지므로 이차방정식 $x^2-6x-4k+1=0$이 중근을 가져야 한다.
이차방정식 $x^2-6x-4k+1=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-3)^2-(-4k+1)=0$
$4k+8=0$ $\therefore k=-2$
따라서 $k=-2$를 주어진 부등식에 대입하면
$-x^2+6x-9\ge 0$, $-(x-3)^2\ge 0$ $\therefore (x-3)^2\le 0$
따라서 주어진 부등식의 해는 $x=3$
즉, $a=3$이므로
$ak=3\times(-2)=-6$

정답_ -6

647

이차부등식 $x^2-4x+a<0$이 해를 가지려면 이차방정식 $x^2-4x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-a>0$ $\therefore a<4$
따라서 자연수 a의 값은 1, 2, 3의 3개이다.

정답_ ③

648

(i) $k<0$일 때
주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $kx^2+2(k+2)x-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $kx^2+2(k+2)x-1=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(k+2)^2-k\times(-1)>0$
$k^2+5k+4>0$, $(k+4)(k+1)>0$
$\therefore k<-4$ 또는 $k>-1$
이때 $k<0$이므로 $k<-4$ 또는 $-1<k<0$
(ii) $k>0$일 때
이차함수 $y=kx^2+2(k+2)x-1$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.
(i), (ii)에서 $k<-4$ 또는 $-1<k<0$ 또는 $k>0$
따라서 주어진 부등식의 해가 존재하도록 하는 실수 k의 값이 아닌 것은 ②이다.

정답_ ②

649

이차부등식 $-x^2+(k-1)x+k-1\ge 0$, 즉 $x^2-(k-1)x-k+1\le 0$이 해를 가지려면 이차방정식 $x^2-(k-1)x-k+1=0$이 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $x^2-(k-1)x-k+1=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=\{-(k-1)\}^2-4(-k+1)\ge 0$
$k^2+2k-3\ge 0$, $(k-1)(k+3)\ge 0$
$\therefore k\le -3$ 또는 $k\ge 1$
$\therefore \alpha=-3$, $\beta=1$
따라서 해가 $-3\le x\le 1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+3)(x-1)\le 0$, 즉 $x^2+2x-3\le 0$이므로
$a=2$, $b=-3$
$\therefore a+b=2+(-3)=-1$

정답_ ②

650

(ⅰ) $k-4<0$, 즉 $k<4$일 때

주어진 부등식의 해가 존재하려면 이차방정식

$(k-4)x^2+(k-4)x-2=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $(k-4)x^2+(k-4)x-2=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(k-4)^2-4\times(k-4)\times(-2)>0$

$k^2-16>0$, $(k+4)(k-4)>0$

이때 $k-4<0$이므로 $k+4<0$ $\quad\therefore k<-4$

(ⅱ) $k-4=0$, 즉 $k=4$일 때

$(k-4)x^2+(k-4)x-2=0\times x^2+0\times x-2=-2<0$

이므로 주어진 부등식의 해는 존재하지 않는다.

(ⅲ) $k-4>0$, 즉 $k>4$일 때

이차함수 $y=(k-4)x^2+(k-4)x-2$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 부등식의 해는 항상 존재한다.

(ⅰ)~(ⅲ)에서 $k<-4$ 또는 $k>4$

정답_ $k<-4$ 또는 $k>4$

651

이차부등식 $x^2-2kx+2k+15\geq0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 이차방정식 $x^2-2kx+2k+15=0$의 판별식을 D라고 하면 $\frac{D}{4}=(-k)^2-(2k+15)\leq0$

$k^2-2k-15\leq0$, $(k+3)(k-5)\leq0$

$\therefore -3\leq k\leq5$

따라서 정수 k는 -3, -2, -1, $\cdots$, 5의 9개이다.

정답_ ②

652

이차부등식 $ax^2+ax+1\geq0$이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 $a>0$

또, 이차방정식 $ax^2+ax+1=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=a^2-4a\leq0$

$a(a-4)\leq0$ $\quad\therefore 0\leq a\leq4$

이때 $a>0$이므로 $0<a\leq4$

정답_ $0<a\leq4$

참고 $ax^2+ax+1\geq0$이 이차부등식이므로 $a\neq0$

653

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{x^2+ax+a-1}$이 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+a-1\geq0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2+ax+a-1=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=a^2-4(a-1)\leq0$

$a^2-4a+4\leq0$, $(a-2)^2\leq0$ $\quad\therefore a=2$

정답_ ②

654

(ⅰ) $m=2$일 때

$(m-2)x^2-2(m-2)x+3=0\times x^2-2\times0\times x+3=3>0$

이므로 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(ⅱ) $m\neq2$일 때

모든 실수 x에 대하여 $(m-2)x^2-2(m-2)x+3>0$이 성립하므로

$m-2>0$ $\quad\therefore m>2$

또, 이차방정식 $(m-2)x^2-2(m-2)x+3=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(m-2)^2-(m-2)\times3<0$

$(m-2)(m-5)<0$ $\quad\therefore 2<m<5$

이때 $m>2$이므로 $2<m<5$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $2\leq m<5$

따라서 정수 m은 2, 3, 4의 3개이다.

정답_ ③

655

$ax^2-2ax<2ax+k$에서 $ax^2-4ax-k<0$

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2-4ax-k<0$이 성립하므로 $a<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

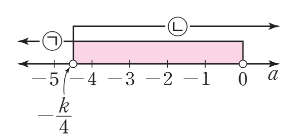
또, 이차방정식 $ax^2-4ax-k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=4a^2+ak<0$, $a(4a+k)<0$

이때 $a<0$이므로

$4a+k>0$, $4a>-k$ $\quad\therefore a>-\frac{k}{4}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 a의 개수가 4이므로 오른쪽 그림에서



$-5\leq-\frac{k}{4}<-4$

$\therefore 16<k\leq20$

정답_ ③

656

주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

$x^2+8x+(a-6)\geq0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+8x+(a-6)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=4^2-(a-6)\leq0$

$-a+22\leq0$ $\quad\therefore a\geq22$

따라서 실수 a의 최솟값은 22이다.

정답_ 22

657

주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

$x^2+2(k-3)x-2k+6\geq0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+2(k-3)x-2k+6=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(k-3)^2-(-2k+6)\leq0$

$k^2-4k+3\leq0$, $(k-1)(k-3)\leq0$

$\therefore 1\leq k\leq3$

정답_ $1\leq k\leq3$

658

$ax^2+(a-5)x+6a-1<-2x+4a$에서

$ax^2+(a-3)x+2a-1<0$

이 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

$ax^2+(a-3)x+2a-1\geq 0$

이 성립해야 하므로 $a>0$

또, 이차방정식 $ax^2+(a-3)x+2a-1=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(a-3)^2-4a(2a-1)\leq 0$

$-7a^2-2a+9\leq 0$, $7a^2+2a-9\geq 0$, $(7a+9)(a-1)\geq 0$

$\therefore\ a\leq -\dfrac{9}{7}$ 또는 $a\geq 1$

이때 $a>0$이므로 $a\geq 1$

따라서 실수 a의 최솟값은 1이다.

정답_ ④

659

(i) $k<1$일 때

$x^2-2x-k+1<0$의 해가 존재하지 않으므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2x-k+1\geq 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-2x-k+1=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$\dfrac{D_1}{4}=(-1)^2-(-k+1)\leq 0\qquad \therefore\ k\leq 0$

이때 $k<1$이므로 $k\leq 0$

(ii) $k\geq 1$일 때

$x^2-2x+k-1<0$의 해가 존재하지 않으므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2x+k-1\geq 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-2x+k-1=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$\dfrac{D_2}{4}=(-1)^2-(k-1)\leq 0$

$2-k\leq 0\qquad \therefore\ k\geq 2$

이때 $k\geq 1$이므로 $k\geq 2$

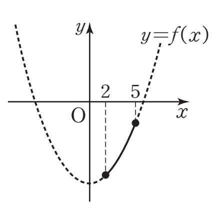
(i), (ii)에서 $k\leq 0$ 또는 $k\geq 2$

따라서 주어진 이차부등식의 해가 존재하지 않도록 하는 실수 k의 값이 아닌 것은 ①이다.

정답_ ①

660

$f(x)=x^2-a^2$이라고 하면 $2\leq x\leq 5$에서 $f(x)<0$이므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$2\leq x\leq 5$에서 $f(x)$는 $x=5$에서 최대이므로 $f(5)=25-a^2<0$

$a^2-25>0$, $(a+5)(a-5)>0$

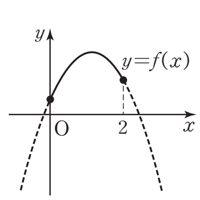
$\therefore\ a<-5$ 또는 $a>5$

정답_ ①

661

$f(x)=-x^2+4kx+1-k$라고 하면

$0\leq x\leq 2$에서 $f(x)\geq 0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$0\leq x\leq 2$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$ 또는 $x=2$일 때 최소이므로

$f(0)=1-k\geq 0$에서 $k\leq 1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=-4+8k+1-k\geq 0$에서 $7k-3\geq 0$

$\therefore\ k\geq \dfrac{3}{7}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\dfrac{3}{7}\leq k\leq 1$

따라서 $a=\dfrac{3}{7}$, $b=1$이므로 $7ab=7\times\dfrac{3}{7}\times 1=3$

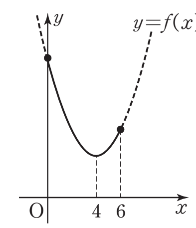
정답_ ①

662

$f(x)=x^2-8x+k^2-4k+11$이라고 하면

$f(x)=(x-4)^2+k^2-4k-5$

$0\leq x\leq 6$에서 $f(x)>0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$0\leq x\leq 6$에서 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최소이므로 $f(4)=k^2-4k-5>0$에서

$(k+1)(k-5)>0$

$\therefore\ k<-1$ 또는 $k>5$

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다.

정답_ ③

663

이차함수 $y=2x^2-5x$의 그래프가 이차함수 $y=x^2-2x+4$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는

$2x^2-5x<x^2-2x+4$

의 해이므로

$x^2-3x-4<0$, $(x+1)(x-4)<0$

$\therefore\ -1<x<4$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은 $0+1+2+3=6$

정답_ ⑤

664

이차함수 $y=-x^2+2ax+5$의 그래프가 직선 $y=x-2$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는

$-x^2+2ax+5>x-2$, 즉 $x^2+(1-2a)x-7<0$

의 해이다.

한편, 해가 $-1<x<b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-b)<0\qquad \therefore\ x^2+(1-b)x-b<0$

이 부등식이 $x^2+(1-2a)x-7<0$과 같으므로

$1-b=1-2a$, $-b=-7$에서 $a=\dfrac{7}{2}$, $b=7$

$\therefore\ ab=\dfrac{7}{2}\times 7=\dfrac{49}{2}$

정답_ $\dfrac{49}{2}$

665

이차함수 $y=3x^2+3x+a$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는

$3x^2+3x+a>0$

의 해이다.

한편, 해가 $x<-2$ 또는 $x>b$이고 x^2의 계수가 3인 이차부등식은
$3(x+2)(x-b)>0 \qquad \therefore 3x^2+3(2-b)x-6b>0$
이 부등식이 $3x^2+3x+a>0$과 같으므로
$3(2-b)=3,\ -6b=a \qquad \therefore a=-6,\ b=1$
이것을 $x^2-bx+a\le 0$에 대입하면
$x^2-x-6\le 0,\ (x+2)(x-3)\le 0 \qquad \therefore -2\le x\le 3$

정답_ $-2\le x\le 3$

666

이차함수 $y=ax^2+a$의 그래프가 직선 $y=8x+6$보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여
$ax^2+a<8x+6$, 즉 $ax^2-8x+a-6<0$
이 성립해야 하므로 $a<0$
또, 이차방정식 $ax^2-8x+a-6=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-4)^2-a(a-6)<0,\ -a^2+6a+16<0$
$a^2-6a-16>0,\ (a+2)(a-8)>0$
$\therefore a<-2$ 또는 $a>8$
이때 $a<0$이므로 $a<-2$
따라서 정수 a의 최댓값은 -3이다.

정답_ ⑤

667

이차함수 $y=x^2+6x-3$의 그래프는 아래로 볼록하므로 이 그래프와 직선 $y=kx-7$이 만나지 않으려면 이차함수 $y=x^2+6x-3$의 그래프가 직선 $y=kx-7$보다 항상 위쪽에 있어야 한다.
따라서 모든 실수 x에 대하여
$x^2+6x-3>kx-7$, 즉 $x^2+(6-k)x+4>0$
이 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2+(6-k)x+4=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=(6-k)^2-4\times1\times4<0$
$k^2-12k+20<0,\ (k-2)(k-10)<0 \qquad \therefore 2<k<10$
따라서 자연수 k는 3, 4, 5, $\cdots$, 9의 7개이다.

정답_ ⑤

668

함수 $y=(m-2)x^2+(m+2)x+3$의 그래프가 직선 $y=4x+2$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여
$(m-2)x^2+(m+2)x+3>4x+2$
즉, $(m-2)x^2+(m-2)x+1>0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
이 성립해야 한다.
(i) $m=2$일 때
$(m-2)x^2+(m-2)x+1=0\times x^2+0\times x+1=1>0$
이므로 부등식 ㉠은 항상 성립한다.
(ii) $m\ne 2$일 때
모든 실수 x에 대하여 이차부등식 ㉠이 성립하므로
$m-2>0 \qquad \therefore m>2$
또, 이차방정식 $(m-2)x^2+(m-2)x+1=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=(m-2)^2-4\times(m-2)\times1<0$
$m^2-8m+12<0,\ (m-2)(m-6)<0$
$\therefore 2<m<6$
이때 $m>2$이므로 $2<m<6$
(i), (ii)에서 $2\le m<6$
따라서 모든 정수 m의 값의 합은 $2+3+4+5=14$

정답_ 14

669

길의 폭을 x m라고 하면 길을 제외한 꽃밭을 직사각형 모양으로 이어 붙였을 때, 꽃밭의 가로, 세로의 길이는 각각 $(30-x)$ m, $(20-x)$ m이므로
$x>0,\ 30-x>0,\ 20-x>0 \qquad \therefore 0<x<20$
길을 제외한 꽃밭의 넓이가 375 m^2 이상이 되려면
$(30-x)(20-x)\ge 375$
$x^2-50x+225\ge 0,\ (x-5)(x-45)\ge 0$
$\therefore x\le 5$ 또는 $x\ge 45$
이때 $0<x<20$이므로 $0<x\le 5$
따라서 길의 폭의 최댓값은 5 m이다.

정답_ 5 m

670

t초 후의 공의 높이가 60 m 이상이 되려면
$-5t^2+30t+20\ge 60,\ -5t^2+30t-40\ge 0,\ t^2-6t+8\le 0$
$(t-2)(t-4)\le 0 \qquad \therefore 2\le t\le 4$
따라서 공의 높이가 60 m 이상인 시간은
$4-2=2$(초)
동안이다.

정답_ 2초

671

초콜릿의 판매 가격을 $100x$원 할인한다고 하면 판매 수량은 $5x$개 늘어나므로 판매 가격이 $(2000-100x)$원일 때, 판매 수량은 $(40+5x)$개이다.
초콜릿의 하루 판매 금액이 90000원 이상이 되려면
$(2000-100x)(40+5x)\ge 90000$
$100(20-x)\times5(8+x)\ge 90000$
$(20-x)(8+x)\ge 180,\ 160+12x-x^2\ge 180$
$x^2-12x+20\le 0,\ (x-2)(x-10)\le 0$
$\therefore 2\le x\le 10$
이때 $200\le 100x\le 1000$이므로 할인 금액의 범위는 200원 이상 1000원 이하이다.

정답_ 200원 이상 1000원 이하

672

$\begin{cases} 2x-6\ge 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-8x+12\le 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $2x\ge 6 \qquad \therefore x\ge 3 \qquad \cdots\cdots$ ㉢
㉡에서 $(x-2)(x-6)\le 0 \qquad \therefore 2\le x\le 6 \qquad \cdots\cdots$ ㉣
㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $3\le x\le 6$
따라서 모든 자연수 x의 값의 합은 $3+4+5+6=18$

정답_ ④

673

$$\begin{cases} x^2+6\le 2x^2-x & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 2x^2-x\le 8x-4 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $x^2-x-6\ge 0$, $(x+2)(x-3)\ge 0$

$\therefore x\le -2$ 또는 $x\ge 3$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $2x^2-9x+4\le 0$, $(2x-1)(x-4)\le 0$

$\therefore \frac{1}{2}\le x\le 4$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $3\le x\le 4$

따라서 정수 x는 3, 4의 2개이다.

정답_ 2

674

$$\begin{cases} x-2\le x^2-2x & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 3x^2+5x\le x^2+4x+6 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $x^2-3x+2\ge 0$

$(x-1)(x-2)\ge 0$ $\quad\therefore x\le 1$ 또는 $x\ge 2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $2x^2+x-6\le 0$

$(x+2)(2x-3)\le 0$ $\quad\therefore -2\le x\le \frac{3}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $-2\le x\le 1$

따라서 이차부등식 $ax^2+bx+c\le 0$의 해가 $-2\le x\le 1$이므로 $a>0$

해가 $-2\le x\le 1$이고 x^2의 계수가 a인 이차부등식은

$a(x+2)(x-1)\le 0$ $\quad\therefore ax^2+ax-2a\le 0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c\le 0$과 같으므로 $a=b$, $-2a=c$

$\therefore \frac{b+c}{a}=\frac{a+(-2a)}{a}=-1$

정답_ -1

675

$x^2-2y=1$에서 $y=\frac{x^2-1}{2}$

이것을 주어진 부등식에 대입하면

$$\begin{cases} -2\times\frac{x^2-1}{2}+3>2x+1 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 4\times\frac{x^2-1}{2}+3\le 2x+5 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $-x^2+4>2x+1$, $x^2+2x-3<0$

$(x+3)(x-1)<0$ $\quad\therefore -3<x<1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $2x^2+1\le 2x+5$, $2x^2-2x-4\le 0$

$x^2-x-2\le 0$, $(x+1)(x-2)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 2$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $-1\le x<1$

따라서 정수 x는 -1, 0의 2개이다.

정답_ ②

676

$$\begin{cases} |x-1|>2 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2-4x-12\le 0 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $x-1<-2$ 또는 $x-1>2$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>3$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $(x+2)(x-6)\le 0$

$\therefore -2\le x\le 6$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$-2\le x<-1$ 또는 $3<x\le 6$

따라서 정수 x는 -2, 4, 5, 6의 4개이다.

정답_ ④

677

$$\begin{cases} x^2+|x|-6<0 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2-4x+3\ge 0 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서

(i) $x<0$일 때

$x^2-x-6<0$, $(x+2)(x-3)<0$ $\quad\therefore -2<x<3$

이때 $x<0$이므로 $-2<x<0$

(ii) $x\ge 0$일 때

$x^2+x-6<0$, $(x+3)(x-2)<0$ $\quad\therefore -3<x<2$

이때 $x\ge 0$이므로 $0\le x<2$

(i), (ii)에서 $-2<x<2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $(x-1)(x-3)\ge 0$

$\therefore x\le 1$ 또는 $x\ge 3$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $-2<x\le 1$

정답_ $-2<x\le 1$

678

$$\begin{cases} |x^2-3x-8|<10 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 2x^2-5x-18\le 0 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $-10<x^2-3x-8<10$

(i) $-10<x^2-3x-8$에서

$x^2-3x+2>0$, $(x-1)(x-2)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>2$

(ii) $x^2-3x-8<10$에서

$x^2-3x-18<0$, $(x+3)(x-6)<0$

$\therefore -3<x<6$

(i), (ii)에서 $-3<x<1$ 또는 $2<x<6$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $(x+2)(2x-9)\le 0$

$\therefore -2\le x\le \frac{9}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$-2\le x<1$ 또는 $2<x\le \frac{9}{2}$

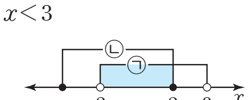
정답_ $-2\le x<1$ 또는 $2<x\le \frac{9}{2}$

679

$$\begin{cases} x^2-x-6<0 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ (x-2)(x-a)\le 0 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $(x+2)(x-3)<0$ $\quad\therefore -2<x<3$

연립부등식의 해가 $-2<x\le 2$이므로 ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 a의 값의 범위는 $a\le -2$

정답_ $a\le -2$

680

$\begin{cases} (x-a)^2<a^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+a<(a+1)x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2-2ax<0$, $x(x-2a)<0$

$\therefore 2a<x<0$ ($\because a<0$) $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $x^2-(a+1)x+a<0$, $(x-a)(x-1)<0$

$\therefore a<x<1$ ($\because a<0$) $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $a<x<0$

이것이 $b<x<b+1$과 같으므로

$a=b$, $0=b+1$ $\quad \therefore a=-1$, $b=-1$

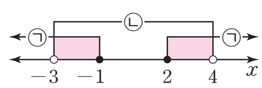
$\therefore a+b=-1+(-1)=-2$

정답_ ⑤

681

$\begin{cases} x^2-x+a\ge 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-x+b<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

연립부등식의 해가 $-3<x\le -1$ 또는 $2\le x<4$이므로 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



해가 $x\le -1$ 또는 $x\ge 2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-2)\ge 0$ $\quad \therefore x^2-x-2\ge 0$

이 부등식이 ㉠과 같아야 하므로 $a=-2$

또, 해가 $-3<x<4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-4)<0$ $\quad \therefore x^2-x-12<0$

이 부등식이 ㉡과 같아야 하므로 $b=-12$

$\therefore ab=-2\times(-12)=24$

정답_ 24

682

$\begin{cases} x^2-(2a+5)x+a^2+5a<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2x-24>0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

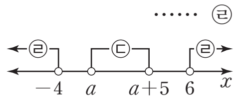
㉠에서 $(x-a)(x-a-5)<0$

$\therefore a<x<a+5$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $(x+4)(x-6)>0$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>6$ $\cdots\cdots$ ㉣

이때 연립부등식의 해가 존재하지 않으므로 ㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 $a\ge -4$, $a+5\le 6$이므로 $-4\le a\le 1$

정답_ $-4\le a\le 1$

683

$\begin{cases} -x^2+5x-3<x^2+a & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+a\le 3x^2-x+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2x^2-5x+a+3>0$

모든 실수 x에 대하여 $2x^2-5x+a+3>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $2x^2-5x+a+3=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$D_1=(-5)^2-4\times 2\times(a+3)<0$

$-8a+1<0$ $\quad \therefore a>\frac{1}{8}$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $2x^2-x+1-a\ge 0$

모든 실수 x에 대하여 $2x^2-x+1-a\ge 0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $2x^2-x+1-a=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$D_2=(-1)^2-4\times 2\times(1-a)\le 0$

$8a-7\le 0$ $\quad \therefore a\le \frac{7}{8}$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $\frac{1}{8}<a\le\frac{7}{8}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{8}$, $\beta=\frac{7}{8}$이므로

$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\frac{7}{8}}{\frac{1}{8}}=7$

정답_ 7

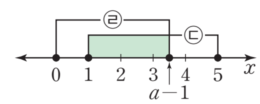
684

$\begin{cases} x^2-6x+5\le 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+(1-a)x\le 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-1)(x-5)\le 0$ $\quad \therefore 1\le x\le 5$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $x(x+1-a)\le 0$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 정수 x가 3개이므로 오른쪽 그림에서



$3\le a-1<4$ $\quad \therefore 4\le a<5$

따라서 실수 a의 최솟값은 4이다.

정답_ ③

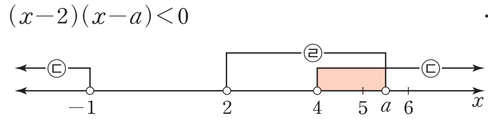
685

$\begin{cases} x^2-3x-4>0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-(a+2)x+2a<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+1)(x-4)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>4$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $(x-2)(x-a)<0$ $\cdots\cdots$ ㉣



㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 정수 x가 5뿐이어야 하므로 위의 그림에서 $5<a\le 6$

따라서 $m=5$, $n=6$이므로

$|m-n|=1$

정답_ ①

686

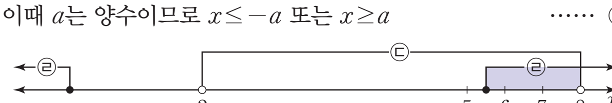
$\begin{cases} x^2-4x-15<2x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-a^2\ge 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2-6x-16<0$

$(x+2)(x-8)<0$ $\quad \therefore -2<x<8$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $(x+a)(x-a)\ge 0$

이때 a는 양수이므로 $x\le -a$ 또는 $x\ge a$ $\cdots\cdots$ ㉣



㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 정수 x가 2개 이하이어야 하므로 위의 그림에서 $a>5$

정답_ $a>5$

687

$$\begin{cases} x^2+2x-3\ge 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+(2a+1)x+a^2+a-2<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $(x+3)(x-1)\ge 0$

$\therefore$ $x\le -3$ 또는 $x\ge 1$ $\cdots\cdots$ ㉢

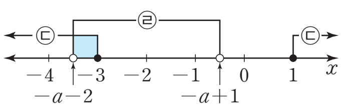
㉡에서 $x^2+(2a+1)x+(a+2)(a-1)<0$

$(x+a+2)(x+a-1)<0$

$\therefore$ $-a-2<x<-a+1$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 정수 x가 1개이므로 다음 두 가지 경우가 존재한다.

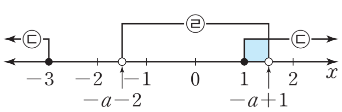
(i)



$-4\le -a-2<-3$이어야 하므로

$-2\le -a<-1$ $\quad\therefore$ $1<a\le 2$

(ii)



$1<-a+1\le 2$이어야 하므로

$0<-a\le 1$ $\quad\therefore$ $-1\le a<0$

(i), (ii)에서

$-1\le a<0$ 또는 $1<a\le 2$

이므로 $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=2$

$\therefore$ $\alpha+\beta+\gamma=1+0+2=3$

정답_ ②

688

$$\begin{cases} x^2+3x-10<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ ax\ge a^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $(x+5)(x-2)<0$ $\quad\therefore$ $-5<x<2$

㉡에서

(i) $a<0$일 때

$x\le a$이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 4이려면 $a=-1$

(ii) $a=0$일 때

$0\times x\ge 0$이므로 ㉡의 해는 모든 실수이다.

따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 -4, -3, -2, -1, 0, 1의 6개이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a>0$일 때

$x\ge a$이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 1의 1개이거나 없다.

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에서 $a=-1$

정답_ ②

689

가로의 길이가 x이면 세로의 길이는 $12-x$이므로

$$\begin{cases} x>2(12-x) & \cdots\cdots ㉠ \\ x(12-x)\ge 20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x>24-2x$, $3x>24$ $\quad\therefore$ $x>8$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $12x-x^2\ge 20$, $x^2-12x+20\le 0$

$(x-2)(x-10)\le 0$ $\quad\therefore$ $2\le x\le 10$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $8<x\le 10$

정답_ $8<x\le 10$

690

$x+2$, $x+1$, $x-2$가 삼각형의 변의 길이이므로

$x-2>0$ $\quad\therefore$ $x>2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x+2$가 가장 긴 변의 길이이므로 삼각형이 만들어질 조건에 의하여 $x+2<(x+1)+(x-2)$, $x+2<2x-1$

$\therefore$ $x>3$ $\cdots\cdots$ ㉡

둔각삼각형이 되려면

$(x+2)^2>(x+1)^2+(x-2)^2$, $x^2+4x+4>2x^2-2x+5$

$x^2-6x+1<0$

이차방정식 $x^2-6x+1=0$의 해가 $x=3\pm 2\sqrt{2}$이므로

$3-2\sqrt{2}<x<3+2\sqrt{2}$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $3<x<3+2\sqrt{2}$

따라서 $a=3$, $b=3+2\sqrt{2}$이므로

$b-a=(3+2\sqrt{2})-3=2\sqrt{2}$

정답_ ②

참고 삼각형의 변과 각 사이의 관계

삼각형 ABC의 세 변의 길이가 각각 a, b, c이고 가장 긴 변의 길이가 c일 때

① 삼각형 ABC가 예각삼각형 ⇨ $c^2<a^2+b^2$

② 삼각형 ABC가 직각삼각형 ⇨ $c^2=a^2+b^2$

③ 삼각형 ABC가 둔각삼각형 ⇨ $c^2>a^2+b^2$

691

원 C의 내부의 큰 원의 반지름의 길이를 x라고 하면 작은 원의 반지름의 길이는 $6-x$이므로

$x>6-x$, $2x>6$ $\quad\therefore$ $x>3$ $\cdots\cdots$ ㉠

색칠한 부분의 넓이가 원 C의 넓이의 $\frac{1}{3}$ 이상이므로 내접하는 두 원의 넓이의 합은 원 C의 넓이의 $\frac{2}{3}$ 이하가 되어야 한다.

즉, $\pi\{x^2+(6-x)^2\}\le\frac{2}{3}\times\pi\times 6^2$이므로

$2x^2-12x+36\le 24$, $x^2-6x+6\le 0$

이차방정식 $x^2-6x+6=0$의 해가 $x=3\pm\sqrt{3}$이므로

$3-\sqrt{3}\le x\le 3+\sqrt{3}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $3<x\le 3+\sqrt{3}$

따라서 큰 원의 반지름의 길이의 최댓값은 $3+\sqrt{3}$이다.

정답_ $3+\sqrt{3}$

692

이차방정식 $x^2+2(k-1)x+2k^2-5k-9=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(2k^2-5k-9)<0$

$-k^2+3k+10<0$, $k^2-3k-10>0$

$(k+2)(k-5)>0$ $\quad\therefore$ $k<-2$ 또는 $k>5$

정답_ ③

693

이차방정식 $x^2+2ax+3(a^2-2a)=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-3(a^2-2a)>0$

$-2a^2+6a>0$, $2a^2-6a<0$, $2a(a-3)<0$

$\therefore 0<a<3$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+(a-3)x+a=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$D_2=(a-3)^2-4a<0$

$a^2-10a+9<0$, $(a-1)(a-9)<0$

$\therefore 1<a<9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1<a<3$

따라서 정수 a는 2의 1개이다.

정답_ ①

694

이차방정식 $x^2-(3k-1)x+2k^2+ak=0$의 판별식을 D라고 하면 $D=\{-(3k-1)\}^2-4(2k^2+ak)\geq 0$

$\therefore k^2-2(2a+3)k+1\geq 0$

이 부등식이 실수 k의 값에 관계없이 성립하므로 이차방정식 $k^2-2(2a+3)k+1=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$\frac{D_1}{4}=(2a+3)^2-1\leq 0$

$4a^2+12a+8\leq 0$, $4(a+2)(a+1)\leq 0$

$\therefore -2\leq a\leq -1$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$-2+(-1)=-3$

정답_ ②

695

(i) 이차방정식 $x^2+(k+3)x+k+6=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(k+3)^2-4(k+6)\geq 0$

$k^2+2k-15\geq 0$, $(k+5)(k-3)\geq 0$

$\therefore k\leq -5$ 또는 $k\geq 3$

(ii) (두 근의 합)$=-(k+3)<0$

$k+3>0$ $\therefore k>-3$

(iii) (두 근의 곱)$=k+6>0$

$\therefore k>-6$

(i)~(iii)에서 $k\geq 3$

따라서 정수 k의 최솟값은 3이다.

정답_ ⑤

696

(i) 이차방정식 $x^2-2(a-1)x-a+3=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-(-a+3)\geq 0$

$a^2-a-2\geq 0$, $(a+1)(a-2)\geq 0$

$\therefore a\leq -1$ 또는 $a\geq 2$

(ii) (두 근의 합)$=2(a-1)>0$ $\therefore a>1$

(iii) (두 근의 곱)$=-a+3>0$ $\therefore a<3$

(i)~(iii)에서 $2\leq a<3$

정답_ $2\leq a<3$

697

(i) (두 근의 합)$=-(k^2-2k-15)=0$

$k^2-2k-15=0$, $(k+3)(k-5)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=5$

(ii) (두 근의 곱)$=k-3<0$ $\therefore k<3$

(i), (ii)에서 $k=-3$

정답_ -3

참고 이차방정식의 두 실근의 절댓값

이차방정식의 두 실근의 부호가 서로 다르고

① 양수인 근의 절댓값과 음수인 근의 절댓값이 서로 같을 때

⇨ (두 근의 합)$=0$, (두 근의 곱)<0

② 양수인 근의 절댓값이 음수인 근의 절댓값보다 클 때

⇨ (두 근의 합)>0, (두 근의 곱)<0

③ 양수인 근의 절댓값보다 음수인 근의 절댓값이 클 때

⇨ (두 근의 합)<0, (두 근의 곱)<0

698

이차방정식 $x^2-2kx-k+20=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(-k+20)>0$

$k^2+k-20>0$, $(k+5)(k-4)>0$ $\therefore k<-5$ 또는 $k>4$

이때 k는 자연수이므로 $k>4$ …… ㉠

$\alpha\beta=-k+20>0$에서 $k<20$ …… ㉡

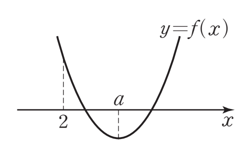
㉠, ㉡에서 $4<k<20$

따라서 자연수 k는 5, 6, 7, …, 19의 15개이다.

정답_ ②

699

$f(x)=x^2-2ax+3a$라고 하면 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 2보다 크므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $x^2-2ax+3a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a\geq 0$

$a(a-3)\geq 0$ $\therefore a\leq 0$ 또는 $a\geq 3$

(ii) $f(2)=4-4a+3a>0$

$4-a>0$ $\therefore a<4$

(iii) 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=a$이므로

$a>2$

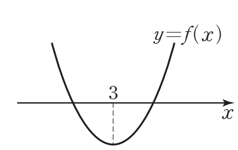
(i)~(iii)에서 $3\leq a<4$

따라서 실수 a의 최솟값은 3이다.

정답_ 3

700

$f(x)=x^2-(a^2+5)x+4a^2+5a$라고 하면 방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 3이 있으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(3)=9-3(a^2+5)+4a^2+5a<0$이므로 $a^2+5a-6<0$

$(a+6)(a-1)<0 \qquad \therefore -6<a<1$

따라서 정수 a는 $-5, -4, -3, -2, -1, 0$의 6개이다.

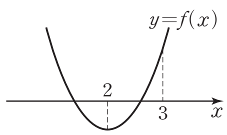
정답_ ⑤

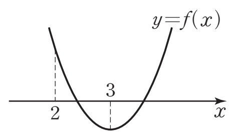
701

$x^2-5x+6=0$에서 $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

$f(x)=x^2-ax+2$라고 하면 방정식 $f(x)=0$의 한 근만이 2와 3 사이에 있으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 두 가지 경우가 존재한다.





따라서 $f(2)f(3)=(4-2a+2)(9-3a+2)<0$이므로

$2(a-3)(3a-11)<0 \qquad \therefore 3<a<\dfrac{11}{3}$

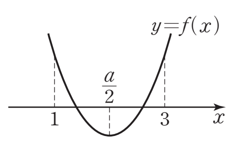
정답_ $3<a<\dfrac{11}{3}$

702

$x^2-4x+3<0$에서 $(x-1)(x-3)<0$

$\therefore 1<x<3$

$f(x)=x^2-ax+4$라고 하면 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1과 3 사이에 있으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=a^2-16\geq0$

$(a+4)(a-4)\geq0 \qquad \therefore a\leq-4$ 또는 $a\geq4$

(ii) $f(1)=1-a+4>0 \qquad \therefore a<5$

(iii) $f(3)=9-3a+4>0, \ -3a>-13 \qquad \therefore a<\dfrac{13}{3}$

(iv) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\dfrac{a}{2}$이므로

$1<\dfrac{a}{2}<3 \qquad \therefore 2<a<6$

(i)~(iv)에서 $4\leq a<\dfrac{13}{3}$

따라서 $\alpha=4, \ \beta=\dfrac{13}{3}$이므로 $3\alpha\beta=3\times4\times\dfrac{13}{3}=52$

정답_ ④

703

$x^2-5a\leq0$에서 $(x+\sqrt{5a})(x-\sqrt{5a})\leq0$

$\therefore -\sqrt{5a}\leq x\leq\sqrt{5a}$ ❶

주어진 이차부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 15이므로 x는 $-7, -6, -5, \cdots, 7$이어야 한다.

즉, $7\leq\sqrt{5a}<8$이어야 하므로 $49\leq5a<64$

$\therefore \dfrac{49}{5}\leq a<\dfrac{64}{5}$ ❷

따라서 자연수 a는 10, 11, 12의 3개이다. ❸

정답_ 3

채점 기준	비율
❶ 부등식 $x^2-5a\leq0$ 풀기	30 %
❷ a의 값의 범위 구하기	50 %
❸ 자연수 a의 개수 구하기	20 %

704

모든 실수 x에 대하여 $-x^2+2ax-6a+9\leq0$, 즉

$x^2-2ax+6a-9\geq0$이 성립하므로 이차방정식

$x^2-2ax+6a-9=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-(6a-9)\leq0$

$a^2-6a+9\leq0, \ (a-3)^2\leq0 \qquad \therefore a=3$ ❶

$|x-a|<b$, 즉 $|x-3|<b$에서

$-b<x-3<b \qquad \therefore 3-b<x<3+b$ ❷

이 식을 만족시키는 가장 큰 정수가 7이므로

$7<3+b\leq8 \qquad \therefore 4<b\leq5$ ❸

정답_ $4<b\leq5$

채점 기준	비율
❶ 판별식을 이용하여 a의 값 구하기	40 %
❷ 부등식 $\lvert x-a\rvert<b$의 해 구하기	30 %
❸ b의 값의 범위 구하기	30 %

705

$\mathrm{A}(0, \ k^2+2)$이므로 $a=k^2+2$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k^2+2$의 교점의 x좌표를 구하면

$-x^2+3kx+k^2+2=k^2+2$에서

$x^2-3kx=0, \ x(x-3k)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=3k$

$\therefore \mathrm{B}(3k, \ k^2+2), \ \mathrm{C}(3k, \ 0)$ ❶

사각형 AOCB의 둘레의 길이가 24 이하이려면

$2(\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{OC}})\leq24$

$2\{(k^2+2)+3k\}\leq24$ ❷

$k^2+3k+2\leq12, \ k^2+3k-10\leq0$

$(k+5)(k-2)\leq0 \qquad \therefore -5\leq k\leq2$ ❸

따라서 자연수 k는 1, 2의 2개이다. ❹

정답_ 2

채점 기준	비율
❶ 두 점 B, C의 좌표를 k에 대한 식으로 나타내기	30 %
❷ k에 대한 부등식 세우기	30 %
❸ k의 값의 범위 구하기	30 %
❹ 자연수 k의 개수 구하기	10 %

706

$\begin{cases} x^2-3x-4\leq0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+4x-3\geq3x-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+1)(x-4)\leq0 \qquad \therefore -1\leq x\leq4$ …… ㉢

㉡에서 $x^2+x-2\ge 0$

$(x+2)(x-1)\ge 0$　　$\therefore x\le -2$ 또는 $x\ge 1$　　…… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $1\le x\le 4$ ❶

따라서 이차부등식 $ax^2-10x+b\le 0$의 해가 $1\le x\le 4$이므로

$a>0$

해가 $1\le x\le 4$이고 x^2의 계수가 a $(a>0)$인 이차부등식은

$a(x-1)(x-4)\le 0$　　$\therefore ax^2-5ax+4a\le 0$ ❷

이 부등식이 $ax^2-10x+b\le 0$과 같으므로

$-5a=-10$, $4a=b$　　$\therefore a=2$, $b=8$ ❸

$\therefore ab=2\times 8=16$ ❹

정답_ 16

채점 기준	비율
❶ 연립부등식의 해 구하기	40 %
❷ 연립부등식의 해를 이용하여 이차부등식 세우기	30 %
❸ a, b의 값 구하기	20 %
❹ ab의 값 구하기	10 %

707

$\begin{cases} f(x)-g(x)\ge 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ g(x)<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $f(x)\ge g(x)$이므로 이 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위는 $-4\le x\le 4$　　…… ㉢

❶

㉡을 만족시키는 x의 값의 범위는 $x<2$　　…… ㉣

❷

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$-4\le x<2$ ❸

정답_ $-4\le x<2$

채점 기준	비율
❶ $f(x)-g(x)\ge 0$의 해 구하기	40 %
❷ $g(x)<0$의 해 구하기	40 %
❸ 연립부등식의 해 구하기	20 %

708

(i) (두 근의 합)$=-(m^2-10m+21)>0$

$m^2-10m+21<0$, $(m-3)(m-7)<0$

$\therefore 3<m<7$ ❶

(ii) (두 근의 곱)$=m^2-4m-5<0$

$(m+1)(m-5)<0$　　$\therefore -1<m<5$ ❷

(i), (ii)에서 $3<m<5$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=5$이므로 $\alpha\beta=3\times 5=15$ ❸

정답_ 15

채점 기준	비율
❶ (두 근의 합)>0임을 이용하여 m의 값의 범위 구하기	40 %
❷ (두 근의 곱)<0임을 이용하여 m의 값의 범위 구하기	40 %
❸ $\alpha\beta$의 값 구하기	20 %

709

$[x]^2-10[x]+9<0$에서

$([x]-1)([x]-9)<0$　　$\therefore 1<[x]<9$

이때 $[x]$는 정수이므로 $[x]=2, 3, 4, \cdots, 8$

$\therefore 2\le x<9$

따라서 $a=2$, $b=9$이므로 $a+b=2+9=11$

정답_ ④

710

$f(x)=ax^2-bx+c$이므로

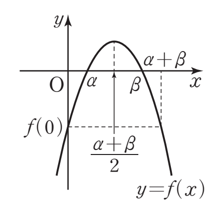
$f(\alpha+\beta)=a(\alpha+\beta)^2-b(\alpha+\beta)+c$

따라서 주어진 이차부등식은

$f(x)\ge f(\alpha+\beta)$　　…… ㉠

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은

$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$



이므로 $f(\alpha+\beta)=f(0)$

즉, 부등식 ㉠은

$f(x)\ge f(0)$

이므로 주어진 부등식의 해는

$0\le x\le \alpha+\beta$

정답_ ⑤

711

조건 ㈎에서 $P(x)+2x+3\ge 0$의 해가 $0\le x\le 1$이므로

$P(x)+2x+3=ax(x-1)$ $(a<0)$

로 놓으면 $P(x)=ax^2-(a+2)x-3$

조건 ㈏에서 $ax^2-(a+2)x-3=-3x-2$, 즉

$ax^2-(a-1)x-1=0$이 중근을 가지므로 이차방정식

$ax^2-(a-1)x-1=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(a-1)^2+4a=0$

$a^2+2a+1=0$, $(a+1)^2=0$　　$\therefore a=-1$

따라서 $P(x)=-x^2-x-3$이므로

$P(-1)=-1+1-3=-3$

정답_ ①

712

조건 ㈎, ㈏에서

$f(x)=(x-m)^2+a$, $g(x)=4(x-m)^2+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

한편, $f(x)\ge g(x)$에서

$(x-m)^2+a\ge 4(x-m)^2+b$

$x^2-2mx+m^2+a\ge 4x^2-8mx+4m^2+b$

$3x^2-6mx+3m^2-a+b\le 0$　　…… ㉠

조건 ㈐에서 부등식 ㉠의 해가 $-1\le x\le 7$이므로 ㉠은

$3(x+1)(x-7)\le 0$, 즉 $3x^2-18x-21\le 0$과 같아야 한다.

$-6m=-18$, $3m^2-a+b=-21$이므로

$m=3$, $a-b=48$

따라서 $f(x)=(x-3)^2+a$, $g(x)=4(x-3)^2+b$이므로

$\dfrac{f(3)-g(3)}{m}=\dfrac{a-b}{3}=\dfrac{48}{3}=16$

정답_ ③

713

$-x^2+4x+2\le(a+1)x+b$에서

$x^2+(a-3)x+b-2\ge0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 이차방정식

$x^2+(a-3)x+b-2=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$D_1=(a-3)^2-4(b-2)\le0$

$a^2-6a-4b+17\le0$ $\quad\therefore 4b\ge a^2-6a+17$ …… ㉠

$ax+b-1\le x^2-x+3$에서

$x^2-(a+1)x-b+4\ge0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 이차방정식

$x^2-(a+1)x-b+4=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$D_2=(a+1)^2-4(-b+4)\le0$

$a^2+2a+4b-15\le0$ $\quad\therefore 4b\le-a^2-2a+15$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a^2-6a+17\le4b\le-a^2-2a+15$ …… ㉢

이므로 $a^2-6a+17\le-a^2-2a+15$

$2a^2-4a+2\le0$, $2(a-1)^2\le0$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉢에 대입하면 $12\le4b\le12$이므로 $b=3$

$\therefore ab=1\times3=3$

정답_ ⑤

714

조건 ㈎에서 $\dfrac{1-x}{4}=t$로 놓으면

$1-x=4t$ $\quad\therefore x=1-4t$

부등식 $f\left(\dfrac{1-x}{4}\right)\le0$의 해가 $-7\le x\le9$이므로

$-7\le1-4t\le9$, $-8\le-4t\le8$ $\quad\therefore -2\le t\le2$

따라서 부등식 $f(t)\le0$의 해는 $-2\le t\le2$이므로

$f(x)=a(x+2)(x-2)$ $(a>0)$

로 놓을 수 있다.

조건 ㈏에서 모든 실수 x에 대하여 부등식

$a(x+2)(x-2)\ge2x-\dfrac{13}{3}$, 즉 $3ax^2-6x-12a+13\ge0$이 성립하므로 이차방정식 $3ax^2-6x-12a+13=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-3a(-12a+13)\le0$

$36a^2-39a+9\le0$, $3(3a-1)(4a-3)\le0$ $\quad\therefore \dfrac{1}{3}\le a\le\dfrac{3}{4}$

이때 $f(3)=5a$이고 $\dfrac{5}{3}\le5a\le\dfrac{15}{4}$이므로

$\dfrac{5}{3}\le f(3)\le\dfrac{15}{4}$

따라서 $M=\dfrac{15}{4}$, $m=\dfrac{5}{3}$이므로

$M-m=\dfrac{15}{4}-\dfrac{5}{3}=\dfrac{25}{12}$

정답_ ⑤

715

모든 실수 a, b에 대하여 $f(a)\ge g(b)$가 성립하려면

($f(a)$의 최솟값)$\ge$($g(b)$의 최댓값)이어야 한다.

$f(a)=a^2-4a+12=(a-2)^2+8$에서 $f(a)$의 최솟값은 8이다.

$g(b)=-b^2+2pb+4p-4=-(b-p)^2+p^2+4p-4$에서 $g(b)$의 최댓값은 p^2+4p-4이다.

즉, $8\ge p^2+4p-4$이어야 하므로 $p^2+4p-12\le0$

$(p+6)(p-2)\le0$ $\quad\therefore -6\le p\le2$ …… ㉠

임의의 실수 a에 대하여 $f(a)\ge g(a)$이려면 모든 실수 a에 대하여 $a^2-4a+12\ge-a^2+2pa+4p-4$, 즉

$2a^2-2(2+p)a-4p+16\ge0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $2a^2-2(2+p)a-4p+16=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(2+p)^2-2(-4p+16)\le0$

$p^2+12p-28\le0$, $(p+14)(p-2)\le0$

$\therefore -14\le p\le2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha=-6$, $\beta=2$, $\gamma=-14$, $\delta=2$이므로

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-6+2+(-14)+2=-16$

정답_ ③

716

두 이차방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라고 하면

$\dfrac{D_1}{4}=2^2-(-3k^2-12k+40)=3k^2+12k-36$

$=3(k+6)(k-2)$

$\dfrac{D_2}{4}=(-6)^2-(3k^2-36k+96)=-3k^2+36k-60$

$=-3(k-2)(k-10)$

(ⅰ) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수가 0으로 같을 때

$D_1<0$에서 $-6<k<2$ …… ㉠

$D_2<0$에서 $3(k-2)(k-10)>0$

$\therefore k<2$ 또는 $k>10$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-6<k<2$

따라서 정수 k는 -5, -4, -3, $\cdots$, 1의 7개이다.

(ⅱ) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수가 1로 같을 때

$D_1=0$에서 $k=-6$ 또는 $k=2$ …… ㉢

$D_2=0$에서 $k=2$ 또는 $k=10$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $k=2$

따라서 정수 k는 2의 1개이다.

(ⅲ) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수가 2로 같을 때

$D_1>0$에서 $k<-6$ 또는 $k>2$ …… ㉤

$D_2>0$에서 $3(k-2)(k-10)<0$

$\therefore 2<k<10$ …… ㉥

㉤, ㉥의 공통부분을 구하면 $2<k<10$

따라서 정수 k는 3, 4, 5, $\cdots$, 9의 7개이다.

(ⅰ)~(ⅲ)에서 모든 정수 k의 개수는

$7+1+7=15$

정답_ ③

717

$\{f(x)-x\}\{g(x)-x\}>0$에서

$f(x)-x>0,\ g(x)-x>0$ 또는 $f(x)-x<0,\ g(x)-x<0$

$\therefore f(x)>x,\ g(x)>x$ 또는 $f(x)<x,\ g(x)<x$

(i) $f(x)>x,\ g(x)>x$일 때

$f(x)>x$의 해는 $x<b$ 또는 $x>d$ …… ㉠

$g(x)>x$의 해는 $0<x<d$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 없다.

(ii) $f(x)<x,\ g(x)<x$일 때

$f(x)<x$의 해는 $b<x<d$ …… ㉢

$g(x)<x$의 해는 $x<0$ 또는 $x>d$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $b<x<0$

(i), (ii)에서 구하는 부등식의 해는

$b<x<0$

정답_ ①

718

$\begin{cases} x^2-(k^2-1)x-k^2<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+(k-3)x-3k>0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+1)(x-k^2)<0$

$\therefore\ -1<x<k^2$ ($\because\ k^2\geq 0$) …… ㉢

㉡에서 $(x-3)(x+k)>0$

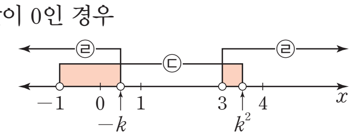
이때 $-k\geq 3$이면 부등식 ㉡의 해는 $x<3$ 또는 $x>-k$이고, ㉢과의 공통부분에서 정수 x의 개수가 3 이상이므로 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $-k<3$이고, 부등식 ㉡의 해는

$x<-k$ 또는 $x>3$ …… ㉣

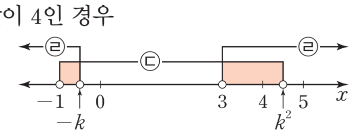
㉢, ㉣의 공통부분에서 정수 x의 개수가 1인 경우는 다음 두 가지 경우가 존재한다.

(i) 정수 x의 값이 0인 경우



$0<-k\leq 1$이고 $0<k^2\leq 4$이어야 하므로 $-1\leq k<0$

(ii) 정수 x의 값이 4인 경우



$-k\leq 0$이고 $4<k^2\leq 5$이어야 하므로 $2<k\leq\sqrt{5}$

(i), (ii)에서

$-1\leq k<0$ 또는 $2<k\leq\sqrt{5}$

따라서 실수 k의 최솟값은 -1, 최댓값은 $\sqrt{5}$이다.

정답_ ②

719

$\begin{cases} |x-n|>2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-14x+40\leq 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

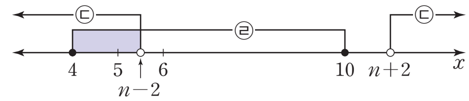
㉠에서 $x-n<-2$ 또는 $x-n>2$

$\therefore x<n-2$ 또는 $x>n+2$ …… ㉢

㉡에서 $(x-4)(x-10)\leq 0$ $\quad\therefore 4\leq x\leq 10$ …… ㉣

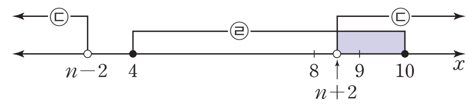
㉢, ㉣의 공통부분에서 자연수 x의 개수가 2인 경우는 다음 세 가지 경우가 존재한다.

(i) 자연수 x의 값이 4, 5인 경우



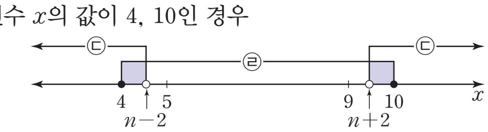
$5<n-2\leq 6$이고 $n+2\geq 10$이어야 하므로 $n=8$

(ii) 자연수 x의 값이 9, 10인 경우



$n-2\leq 4$이고 $8\leq n+2<9$이어야 하므로 $n=6$

(iii) 자연수 x의 값이 4, 10인 경우



$4<n-2\leq 5$이고 $9\leq n+2<10$이어야 하므로 $n=7$

(i)~(iii)에서 자연수 n의 값은 6, 7, 8이므로 모든 자연수 n의 값의 합은

$6+7+8=21$

정답_ 21

주의 (i)에서 $n=5$ 또는 $n=9$일 때 $x=7$은 주어진 연립부등식의 해가 아니다.
따라서 $n\leq 5$ 또는 $n\geq 9$일 때 주어진 연립부등식을 만족시키는 자연수 x의 개수는 4 이상이 아니라 3 이상임에 주의한다.

720

직각삼각형의 세 변의 길이를 각각 $a,\ b,\ c\ (a<b<c)$라고 하면 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

조건 (가)에 의하여

$a+b=13 \qquad \therefore b=13-a$ …… ㉠

조건 (나)에 의하여 $\frac{1}{2}ab>20 \qquad \therefore ab>40$

이 식에 ㉠을 대입하면 $a(13-a)>40$

$13a-a^2>40,\ a^2-13a+40<0$

$(a-5)(a-8)<0 \qquad \therefore 5<a<8$

이때 조건 (다)에 의하여 a는 자연수이므로

$a=6$ 또는 $a=7$

$a=6$을 ㉠에 대입하면 $b=7$

$a=7$을 ㉠에 대입하면 $b=6$

그런데 $a<b$이므로 $a=6,\ b=7$

따라서 직각삼각형의 가장 긴 변의 길이는

$c=\sqrt{6^2+7^2}=\sqrt{85}$

정답_ ⑤

III 경우의 수

10 순열

721

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 4인 경우는

$(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$의 3가지

(ii) 눈의 수의 합이 7인 경우는

$(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)$의 6가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3+6=9$

정답_ 9

722

세 장의 카드에 적힌 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 세 수의 합이 9인 경우는

$(1,\ 2,\ 6),\ (1,\ 3,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4)$의 3가지

(ii) 세 수의 합이 18인 경우는

$(3,\ 7,\ 8),\ (4,\ 6,\ 8),\ (5,\ 6,\ 7)$의 3가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3+3=6$

정답_ ②

723

(i) 꽃병 A에 장미를 꽂는 경우

꽃병 B에 꽂을 꽃 9송이 중 카네이션이 a송이, 백합이 b송이라고 하면 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 8),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (6,\ 3)$의 6가지

(ii) 꽃병 A에 카네이션을 꽂는 경우

꽃병 B에 꽂을 꽃 9송이 중 장미가 a송이, 백합이 b송이라고 하면 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 8),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (6,\ 3),\ (7,\ 2),$

$(8,\ 1)$의 8가지

(iii) 꽃병 A에 백합을 꽂는 경우

꽃병 B에 꽂을 꽃 9송이 중 장미가 a송이, 카네이션이 b송이라고 하면 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (6,\ 3),\ (7,\ 2),\ (8,\ 1)$의 6가지

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$6+8+6=20$

정답_ 20

724

15와 서로소인 자연수는 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 수이므로 1부터 100까지의 자연수 중에서

(i) 3의 배수는

$3,\ 6,\ 9,\ \cdots,\ 99$의 33개

(ii) 5의 배수는

$5,\ 10,\ 15,\ \cdots,\ 100$의 20개

(iii) 3과 5의 공배수인 15의 배수는

$15,\ 30,\ 45,\ \cdots,\ 90$의 6개

(i)~(iii)에서 3의 배수 또는 5의 배수의 개수는

$33+20-6=47$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $100-47=53$

정답_ ⑤

725

$x+5y+4z=12$에서

(i) $y=0$일 때, $x+4z=12$이므로 순서쌍 $(x,\ z)$는

$(12,\ 0),\ (8,\ 1),\ (4,\ 2),\ (0,\ 3)$의 4개

(ii) $y=1$일 때, $x+4z=7$이므로 순서쌍 $(x,\ z)$는

$(7,\ 0),\ (3,\ 1)$의 2개

(iii) $y=2$일 때, $x+4z=2$이므로 순서쌍 $(x,\ z)$는

$(2,\ 0)$의 1개

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

$4+2+1=7$

정답_ ④

726

$x,\ y$가 자연수이므로 $3x+y\le7$을 만족시키는 경우는 다음의 4가지로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $3x+y=4$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(1,\ 1)$의 1개

(ii) $3x+y=5$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(1,\ 2)$의 1개

(iii) $3x+y=6$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(1,\ 3)$의 1개

(iv) $3x+y=7$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(1,\ 4),\ (2,\ 1)$의 2개

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는

$1+1+1+2=5$

정답_ ④

727

삼각형의 세 변의 길이의 조건에서

$b+c>a$ …… ㉠

$a+b+c=20$에서 $b+c=20-a$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$20-a>a,\ 2a<20 \qquad \therefore a<10$

(i) $a=9$일 때

$b+c=11$이고 $a\ge b\ge c$이므로 순서쌍 $(b,\ c)$는

$(9,\ 2),\ (8,\ 3),\ (7,\ 4),\ (6,\ 5)$의 4개

(ii) $a=8$일 때

$b+c=12$이고 $a\ge b\ge c$이므로 순서쌍 $(b,\ c)$는

$(8,\ 4),\ (7,\ 5),\ (6,\ 6)$의 3개

(iii) $a=7$일 때

$b+c=13$이고 $a\ge b\ge c$이므로 순서쌍 $(b,\ c)$는

$(7,\ 6)$의 1개

(i)~(iii)에서 구하는 삼각형의 개수는 $4+3+1=8$

정답_ ①

참고 $a\le6$이면 $b+c\ge14$이므로 $a\ge b\ge c$를 만족시키는 순서쌍 (b, c)는 존재하지 않는다.

728

500원, 1000원, 1500원짜리 공책을 각각 x권, y권, z권 산다고 하면

$500x+1000y+1500z\le6000$ $\therefore x+2y+3z\le12$

이때 각 공책을 적어도 한 권씩은 사야 하므로 x, y, z는 자연수이다.

$x+2y+3z\le12$에서

(i) $z=1$일 때, $x+2y\le9$이므로 다음의 7가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

ⓐ $x+2y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1)$의 1개

ⓑ $x+2y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(2, 1)$의 1개

ⓒ $x+2y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(3, 1)$, $(1, 2)$의 2개

ⓓ $x+2y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(4, 1)$, $(2, 2)$의 2개

ⓔ $x+2y=7$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(5, 1)$, $(3, 2)$, $(1, 3)$의 3개

ⓕ $x+2y=8$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(6, 1)$, $(4, 2)$, $(2, 3)$의 3개

ⓖ $x+2y=9$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(7, 1)$, $(5, 2)$, $(3, 3)$, $(1, 4)$의 4개

ⓐ~ⓖ에서 $x+2y\le9$를 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수는
$1+1+2+2+3+3+4=16$

(ii) $z=2$일 때, $x+2y\le6$이므로 순서쌍 (x, y)의 개수는 (i)의 ⓐ~ⓓ에서
$1+1+2+2=6$

(iii) $z=3$일 때, $x+2y\le3$이므로 순서쌍 (x, y)의 개수는 (i)의 ⓐ에서 1

(i)~(iii)에서 구하는 방법의 수는

$16+6+1=23$

정답_ ⑤

729

$(a+b+c)(p+q)$를 전개할 때, a, b, c에 p, q를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 구하는 항의 개수는

$3\times2=6$

정답_ ②

730

백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 6의 4개

십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 4, 8의 2개

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7, 9의 5개

따라서 구하는 홀수의 개수는

$4\times2\times5=40$

정답_ ④

731

바닥에 닿은 면에 적힌 수의 합이 짝수이려면 두 수 모두 홀수이거나 짝수이어야 한다.

각 정팔면체에서 바닥에 닿은 면에 적힌 수가 홀수인 경우의 수는 1, 3, 5, 7의 4, 짝수인 경우의 수는 2, 4, 6, 8의 4이므로 구하는 경우의 수는

$4\times4+4\times4=32$

정답_ ⑤

참고 (짝수)+(짝수)=(짝수), (홀수)+(홀수)=(짝수),
(짝수)+(홀수)=(홀수), (홀수)+(짝수)=(홀수)

732

$abc+ab+bc+ca+a+b+c+1$
$=(abc+bc)+(ab+b)+(ca+c)+a+1$
$=(a+1)bc+(a+1)b+(a+1)c+(a+1)$
$=(a+1)(bc+b+c+1)$
$=(a+1)(b+1)(c+1)$

이 값이 짝수인 경우의 수는 전체 경우의 수에서 이 값이 홀수인 경우의 수를 뺀 것과 같다.

이때 주사위 한 개를 3번 던져서 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$

주어진 값이 홀수가 되려면 $a+1$, $b+1$, $c+1$이 모두 홀수, 즉 a, b, c가 모두 짝수이어야 하므로 그 경우의 수는

$3\times3\times3=27$

따라서 구하는 경우의 수는

$216-27=189$

정답_ 189

참고 세 수의 곱이 짝수이려면 세 수 중 적어도 하나는 짝수이어야 한다.

733

288을 소인수분해하면 $288=2^5\times3^2$

따라서 288의 양의 약수의 개수는

$(5+1)(2+1)=18$

정답_ ④

734

360과 420의 양의 공약수의 개수는 360과 420의 최대공약수의 양의 약수의 개수와 같다.

360을 소인수분해하면 $360=2^3\times3^2\times5$

420을 소인수분해하면 $420=2^2\times3\times5\times7$

따라서 360과 420의 최대공약수는 $2^2\times3\times5$이므로 조건 (가)에서

$m=(2+1)(1+1)(1+1)=12$

$12^n=(2^2\times3)^n=2^{2n}\times3^n$이고, 조건 (나)에서 12^n의 양의 약수의 개수가 66이므로

$(2n+1)(n+1)=66$, $2n^2+3n-65=0$

$(2n+13)(n-5)=0$ $\therefore n=5$ ($\because n$은 자연수)

$\therefore m+n=12+5=17$

정답_ 17

735

240을 소인수분해하면 $240=2^4\times3\times5$

ㄱ. $2^4\times3\times5=2\times(2^3\times3\times5)$

240의 양의 약수 중에서 짝수의 개수는 $2^3\times3\times5$의 양의 약수의 개수와 같으므로

$(3+1)(1+1)(1+1)=16$ (참)

ㄴ. $2^4\times3\times5=3\times(2^4\times5)$

240의 양의 약수 중에서 3의 배수의 개수는 $2^4\times5$의 양의 약수의 개수와 같으므로

$(4+1)(1+1)=10$ (거짓)

ㄷ. $2^4\times3\times5=5\times(2^4\times3)$

240의 양의 약수 중에서 5의 배수의 개수는 $2^4\times3$의 양의 약수의 개수와 같으므로

$(4+1)(1+1)=10$ (참)

ㄹ. 240의 양의 약수의 총합은

$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3)(1+5)=744$ (거짓)

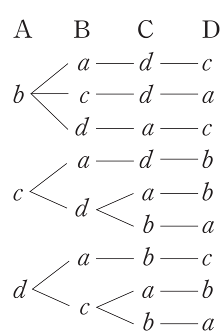
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ②

736

4명의 학생을 A, B, C, D라 하고, 네 학생의 이름표를 각각 a, b, c, d라고 할 때, 조건을 만족시키는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.

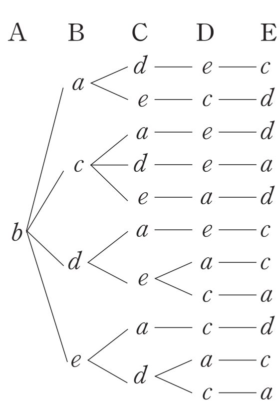
따라서 구하는 경우의 수는 9이다.



정답_ 9

737

A, B, C, D, E의 우산을 각각 a, b, c, d, e라고 할 때, 조건을 만족시키는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.

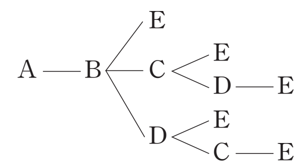


따라서 구하는 경우의 수는 11이다.

정답_ ③

738

주어진 육면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 B로 움직인 후 꼭짓점 E에 도착하는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



같은 방법으로 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 C 또는 D로 움직인 후 꼭짓점 E에 도착하는 경우도 각각 5가지씩이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $5\times3=15$

정답_ 15

739

500원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개의 2가지

100원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

50원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불하는 방법의 수는 $2\times5\times4-1=39$

정답_ ⑤

740

500원짜리 동전 2개로 지불하는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액이 같으므로 1000원짜리 지폐 2장을 500원짜리 동전 4개로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 7개와 100원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

500원짜리 동전 7개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 500원, 1000원, …, 3500원의 8가지

100원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 100원, 200원의 3가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는 $8\times3-1=23$

정답_ ②

741

(i) 지불하는 방법의 수

10000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

5000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장의 3가지

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장, 4장, 5장의 6가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불하는 방법의 수는 $m=4\times3\times6-1=71$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

5000원짜리 지폐 2장으로 지불하는 금액과 10000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액이 같고, 1000원짜리 지폐 5장으로 지불하는 금액과 5000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액이 같으므로 10000원짜리 지폐 3장과 5000원짜리 지폐 2장을 모두 1000원짜리 지폐 40장으로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 1000원짜리 지폐 45장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

1000원짜리 지폐 45장으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 1000원, 2000원, ⋯, 45000원의 46가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는 $n=46-1=45$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $m-n=71-45=26$

정답_ 26

742

(ⅰ) A→B→D로 가는 경우의 수는
$3\times2=6$
(ⅱ) A→C→D로 가는 경우의 수는
$2\times4=8$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$6+8=14$

정답_ 14

743

(ⅰ) A→B→D→C→A로 가는 경우의 수는
$3\times3\times2\times2=36$
(ⅱ) A→C→D→B→A로 가는 경우의 수는
$2\times2\times3\times3=36$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$36+36=72$

정답_ ③

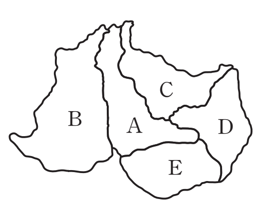
744

(ⅰ) A→B→D로 가는 경우의 수는
$2\times4=8$
(ⅱ) A→C→D로 가는 경우의 수는
$3\times1=3$
(ⅲ) A→B→C→D로 가는 경우의 수는
$2\times2\times1=4$
(ⅳ) A→C→B→D로 가는 경우의 수는
$3\times2\times4=24$
(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는
$8+3+4+24=39$

정답_ 39

745

오른쪽 그림과 같이 다섯 개의 구역을 A, B, C, D, E라고 하자.



A에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지
D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지
E에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 구하는 경우의 수는
$4\times3\times3\times2\times2=144$

정답_ ②

746

(ⅰ) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우
A에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지
D에 칠할 수 있는 색은 A(C)에 칠한 색을 제외한 3가지
따라서 경우의 수는 $4\times3\times1\times3=36$
(ⅱ) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우
A에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지
D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 경우의 수는 $4\times3\times2\times2=48$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$36+48=84$

정답_ 84

다른 풀이

A→B→C→D의 순서로 칠하고, 다음의 네 가지 경우로 나누어 생각해 보자.
(ⅰ) 네 개의 영역에 모두 다른 색을 칠하는 경우의 수는
$4\times3\times2\times1=24$
(ⅱ) A와 C에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는
$4\times3\times1\times2=24$
(ⅲ) B와 D에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는
$4\times3\times2\times1=24$
(ⅳ) A와 C, B와 D에 각각 같은 색을 칠하는 경우의 수는
$4\times3\times1\times1=12$
(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는
$24+24+24+12=84$

747

(ⅰ) B와 D에 같은 색을 칠하는 경우
A에 칠할 수 있는 색은 5가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지
C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지
D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지
E에 칠할 수 있는 색은 A, B(D)에 칠한 색을 제외한 3가지
따라서 경우의 수는
$5\times4\times3\times1\times3=180$
(ⅱ) B와 D에 다른 색을 칠하는 경우
A에 칠할 수 있는 색은 5가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지
C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지
D에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한 2가지
E에 칠할 수 있는 색은 A, B, D에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 경우의 수는
$5\times4\times3\times2\times2=240$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$180+240=420$

정답_ 420

748

서로 다른 6개에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는 ${}_6P_4=6\times5\times4\times3=360$

정답_ ③

749

서로 다른 8개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는 ${}_8P_3=8\times7\times6=336$

정답_ ④

750

서로 다른 n개에서 2개를 택하는 순열의 수가 42이므로

${}_nP_2=42$에서

$n(n-1)=42$, $n^2-n-42=0$

$(n+6)(n-7)=0$ $\quad\therefore n=7$ ($\because n>0$)

정답_ ⑤

751

(1) 남학생 4명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$

남학생 4명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는 $24\times24=576$

(2) 여학생 3명을 한 사람으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!=120$

여학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $120\times6=720$

(3) 남학생 4명을 한 사람으로, 여학생 3명을 한 사람으로 생각하여 2명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $2!=2$

남학생 4명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $4!=24$

여학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $2\times24\times6=288$

정답_ (1) 576 (2) 720 (3) 288

752

오토바이 3대를 한 대로 생각하여 $(n+1)$대를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $(n+1)!$

오토바이 3대가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 $(n+1)!\times6=720$이므로

$(n+1)!=120=5!$

즉, $n+1=5$이므로 $n=4$

정답_ ④

753

(i) b와 c를 이웃하게 나열하는 경우

b와 c를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$

b와 c가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 경우의 수는 $24\times2=48$

(ii) c와 d를 이웃하게 나열하는 경우

c와 d를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$

c와 d가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 경우의 수는 $24\times2=48$

(iii) b와 c, c와 d를 모두 이웃하게 나열하는 경우

b, c, d를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

b와 c, c와 d가 동시에 이웃하면서 자리를 바꾸는 경우는 bcd, dcb의 2가지

따라서 경우의 수는 $6\times2=12$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$48+48-12=84$

정답_ 84

754

여학생 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!=6$

∨여∨여∨여∨

여학생의 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 남학생 3명을 세우는 경우의 수는 ${}_4P_3=24$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times24=144$

정답_ 144

755

4개의 자음 c, p, t, r를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$

자음의 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 3개의 모음 a, u, e를 나열하는 경우의 수는 ${}_5P_3=60$

따라서 구하는 경우의 수는 $24\times60=1440$

정답_ ⑤

756

초등학생 2명을 한 사람으로 생각하여 고등학생을 제외한 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$

초등학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

일렬로 세운 4명의 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 고등학생 2명을 세우는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$

따라서 구하는 경우의 수는 $24\times2\times20=960$

정답_ 960

757

자음은 T, S, D, Y의 4개, 모음은 U, E, A의 3개이므로 자음 4개를 일렬로 나열하고 그 사이사이에 모음 3개를 나열하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 $4!\times3!=24\times6=144$

정답_ 144

758

4개의 홀수 번째 자리 중 2개의 자리에 흰 공 2개를 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

나머지 5개의 자리에 노란 공 5개를 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는 $12\times120=1440$

정답_ 1440

759

q와 t를 제외한 6개의 문자 중에서 2개의 문자를 택하여 q와 t 사이에 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_6P_2=30$

q, t와 그 사이의 2개의 문자를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!=120$

q와 t가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는 $30\times120\times2=7200$

정답_ 7200

760

2학년 학생 4명 중에서 양 끝에 있는 의자에 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

1학년 학생이 앉는 의자를 ①, 2학년 학생이 앉는 의자를 ②라고 하면 1학년 학생 2명과 양 끝에 앉는 2학년 학생을 제외한 2학년 학생 2명이 1학년 학생끼리 이웃하지 않게 앉는 경우는

①②①②, ①②②①, ②①②①

의 3가지가 있다.

이때 각각의 경우에서 1학년 학생 2명과 2학년 학생 2명이 의자에 앉는 경우의 수는 $2!\times2!=4$

따라서 구하는 경우의 수는 $12\times3\times4=144$

정답_ ③

다른 풀이

2학년 학생 4명을 일렬로 앉히는 경우의 수는 $4!=24$

2학년 학생 4명의 사이사이의 세 자리 중에서 두 자리를 골라 1학년 학생 2명을 앉히는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $24\times6=144$

761

적어도 한쪽 끝에 모음이 오도록 나열하는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 양 끝에 모두 자음이 오도록 나열하는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $7!=5040$

4개의 자음 m, s, c, l 중에서 2개를 택하여 양 끝에 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$이고, 양 끝의 자음을 제외한 나머지 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!=120$이므로 양 끝에 모두 자음이 오도록 나열하는 경우의 수는

$12\times120=1440$

따라서 구하는 경우의 수는 $5040-1440=3600$

정답_ ③

762

반장, 부반장 중에서 적어도 한 명은 여학생을 뽑는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 반장, 부반장 모두 남학생을 뽑는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

6명의 학생 중에서 반장 1명, 부반장 1명을 뽑는 경우의 수는 6명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_6P_2=30$

반장, 부반장 모두 남학생을 뽑는 경우의 수는 남학생 2명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_2P_2=2$

따라서 구하는 경우의 수는 $30-2=28$

정답_ ⑤

763

a, c, e 중에서 적어도 2개가 이웃하도록 나열하는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 3개의 문자 a, c, e 중에서 어느 것도 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!=120$

3개의 문자 a, c, e 중에서 어느 것도 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는 a, c, e를 일렬로 나열하고 그 사이사이에 b, d를 나열하는 경우의 수와 같으므로 $3!\times2!=6\times2=12$

따라서 구하는 경우의 수는 $120-12=108$

정답_ ③

764

홀수는 1, 3, 5이므로 천의 자리와 십의 자리에 홀수가 오는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$

백의 자리와 일의 자리에는 천의 자리와 십의 자리에 온 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는 ${}_5P_2=20$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $6\times20=120$

정답_ ④

765

3의 배수가 되려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 3개를 택했을 때, 그 합이 3의 배수가 되는 경우는

(1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5)의 4가지

이때 각각의 경우에서 3개의 숫자로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 $3!=6$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $4\times6=24$

정답_ ②

766

5의 배수가 되려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에는 0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는

${}_5P_3=60$

(ⅱ) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 5를 제외한 4가지이고, 백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는

$4\times{}_4P_2=48$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수의 개수는 $60+48=108$

정답_ 108

767

a□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $4!=24$

b□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $4!=24$

ca□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $3!=6$

cb□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $3!=6$

cda□□의 꼴의 문자열의 개수는 $2!=2$

cdb□□의 꼴의 문자열은 순서대로 cdbae, cdbea의 2개

이때

$24+24+6+6+2+2=64$

이므로 cdbea는 64번째에 온다.

정답_ 64번째

768

3□□□의 꼴의 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$

4□□□의 꼴의 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$

5□□□의 꼴의 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$

6□□□의 꼴의 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$

따라서 3100보다 큰 수의 개수는

$60\times4=240$

정답_ ③

769

a□□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $5!=120$

c□□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $5!=120$

da□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $4!=24$

dc□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $4!=24$

dea□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $3!=6$

acdeln부터 deanlc까지의 문자열의 개수는

$120+120+24+24+6=294$

이므로 295번째에 오는 문자열은 decaln이다.

정답_ ⑤

770

a, b는 6 이하의 자연수이므로 부등식 $|2a-b|\le1$에서

$2a-b=-1$ 또는 $2a-b=0$ 또는 $2a-b=1$ ❶

(ⅰ) $2a-b=-1$, 즉 $b=2a+1$일 때 순서쌍 (a, b)는

$(1, 3)$, $(2, 5)$의 2개

(ⅱ) $2a-b=0$, 즉 $b=2a$일 때 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$의 3개

(ⅲ) $2a-b=1$, 즉 $b=2a-1$일 때 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$의 3개 ❷

(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$2+3+3=8$ ❸

정답_ 8

채점 기준	비율
❶ $2a-b=-1$ 또는 $2a-b=0$ 또는 $2a-b=1$이 됨을 알기	30 %
❷ ❶의 각 경우의 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기	50 %
❸ 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기	20 %

771

(ⅰ) 본하는 A→B→D, 우빈이는 A→C→D로 가는 경우의 수는 $(3\times2)\times(2\times3)=36$ ❶

(ⅱ) 본하는 A→C→D, 우빈이는 A→B→D로 가는 경우의 수는 $(2\times3)\times(3\times2)=36$ ❷

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$36+36=72$ ❸

정답_ 72

채점 기준	비율
❶ 본하가 B 지점, 우빈이가 C 지점을 통과하는 경우의 수 구하기	40 %
❷ 본하가 C 지점, 우빈이가 B 지점을 통과하는 경우의 수 구하기	40 %
❸ 한 사람이 통과하는 중간 지점을 다른 사람은 통과하지 않으면서 가는 경우의 수 구하기	20 %

772

(ⅰ) A(E)와 C에 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 5가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지

C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지

D에 칠할 수 있는 색은 C(E)에 칠한 색을 제외한 4가지

E에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지

따라서 경우의 수는

$5\times4\times1\times4\times1=80$ ❶

(ⅱ) A(E)와 C에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 5가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지

C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지

D에 칠할 수 있는 색은 C, E(A)에 칠한 색을 제외한 3가지

E에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지

따라서 경우의 수는

$5\times4\times3\times3\times1=180$ ❷

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$80+180=260$ ❸

정답_ 260

채점 기준	비율
❶ A(E)와 C에 같은 색을 칠하는 경우의 수 구하기	40 %
❷ A(E)와 C에 다른 색을 칠하는 경우의 수 구하기	40 %
❸ A와 E에 같은 색을 칠하는 경우의 수 구하기	20 %

773

숫자 0, 1을 양 끝에 나열하는 경우의 수는

$2!=2$ ❶

3개의 알파벳 모음 o, u, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

알파벳 모음의 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 알파벳 자음 h, s를 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

즉, 알파벳 자음이 서로 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수는

$6\times12=72$ ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times72=144$ ❸

정답_ 144

채점 기준	비율
❶ 양 끝에 숫자가 오게 나열하는 경우의 수 구하기	30 %
❷ 알파벳 자음이 서로 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수 구하기	40 %
❸ 양 끝에 숫자가 오고 알파벳 자음은 서로 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수 구하기	30 %

774

적어도 한쪽 끝에 홀수가 오도록 나열하는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 양 끝에 모두 짝수가 오도록 나열하는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

6개의 자연수를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$ ❶

6개의 자연수 중에서 짝수의 개수를 n $(2\le n\le5)$이라고 하면 n개의 짝수 중에서 2개를 택하여 양 끝에 나열하는 경우의 수는

${}_nP_2=n(n-1)$

이고, 양 끝의 짝수를 제외한 나머지 4개의 자연수를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

이므로 양 끝에 모두 짝수가 오도록 나열하는 경우의 수는

$n(n-1)\times24=24n(n-1)$ ❷

따라서 적어도 한쪽 끝에 홀수가 오도록 나열하는 경우의 수는

$720-24n(n-1)$ ❸

즉, $720-24n(n-1)=432$이므로

$24n(n-1)-288=0$, $n^2-n-12=0$

$(n+3)(n-4)=0$ $\quad\therefore n=4$ $(\because 2\le n\le5)$

따라서 홀수의 개수는

$6-4=2$ ❹

정답_ 2

채점 기준	비율
❶ 6개의 자연수를 일렬로 나열하는 경우의 수 구하기	20 %
❷ 양 끝에 모두 짝수가 오도록 나열하는 경우의 수를 n으로 나타내기	30 %
❸ 적어도 한쪽 끝에 홀수가 오도록 나열하는 경우의 수를 n으로 나타내기	30 %
❹ 홀수의 개수 구하기	20 %

참고 적어도 한쪽 끝에 홀수가 오도록 나열하는 경우의 수가 432로 전체 경우의 수인 720보다 작다.
따라서 양 끝에 모두 짝수가 오도록 나열하는 경우가 존재하므로 6개의 자연수 중에서 짝수는 2개 이상 존재함을 알 수 있다.
또, 홀수도 1개 이상 존재하므로 짝수의 개수 n에 대하여 $2\le n\le5$가 성립한다.

775

4의 배수가 되려면 끝의 두 자리의 숫자가 4의 배수이어야 한다.

❶

(i) 끝의 두 자리의 숫자가 04, 20, 40인 경우
천의 자리와 백의 자리에는 끝의 두 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는
$3\times{}_3P_2=18$ ❷

(ii) 끝의 두 자리의 숫자가 12, 24, 32인 경우
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 끝의 두 자리에 온 숫자를 제외한 2가지이고, 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리와 끝의 두 자리에 온 숫자를 제외한 2가지이므로 경우의 수는
$3\times2\times2=12$ ❸

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$18+12=30$ ❹

정답_ 30

채점 기준	비율
❶ 4의 배수가 되기 위한 조건 알기	20 %
❷ 끝의 두 자리의 숫자가 04, 20, 40인 경우의 수 구하기	30 %
❸ 끝의 두 자리의 숫자가 12, 24, 32인 경우의 수 구하기	30 %
❹ 4의 배수의 개수 구하기	20 %

776

세 수의 합이 홀수이려면 세 수 모두 홀수이거나 한 수만 홀수이어야 한다.

(i) xy, yz, zx의 값이 모두 홀수인 경우
x, y, z가 모두 홀수이어야 하므로 경우의 수는
$2\times2\times2=8$

(ii) xy, yz, zx의 값 중 하나는 홀수, 나머지 두 개는 짝수인 경우
x, y, z 중 2개는 홀수이고, 나머지 하나는 짝수이어야 하므로 경우의 수는
$(2\times2\times4)\times3=48$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $8+48=56$

정답_ ⑤

777

500원짜리 동전 2개로 지불하는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액이 같고, 100원짜리 동전 5개로 지불하는 금액과 500원짜리 동전 1개로 지불하는 금액이 같으므로 1000원짜리 지폐 2장과 500원짜리 동전 n개를 모두 100원짜리 동전 $(5n+20)$개로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 100원짜리 동전 $(5n+30)$개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

100원짜리 동전 $(5n+30)$개로 지불할 수 있는 금액은
0원, 100원, 200원, $\cdots$, $(500n+3000)$원의 $(5n+31)$가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는
$(5n+31)-1=5n+30$
즉, $5n+30=50$이므로 $5n=20$ $\quad\therefore n=4$
2500원을 1000원짜리 지폐 x장, 500원짜리 동전 y개, 100원짜리 동전 z개를 사용하여 지불한다고 하면
$1000x+500y+100z=2500$
$\therefore 10x+5y+z=25$
이때 x, y, z는 $0\le x\le 2$, $0\le y\le 4$, $0\le z\le 10$인 정수이므로 다음과 같이 세 경우로 나누어 생각할 수 있다.
(i) $x=0$일 때, $5y+z=25$이므로 순서쌍 (y, z)는
$(3, 10)$, $(4, 5)$의 2개
(ii) $x=1$일 때, $5y+z=15$이므로 순서쌍 (y, z)는
$(1, 10)$, $(2, 5)$, $(3, 0)$의 3개
(iii) $x=2$일 때, $5y+z=5$이므로 순서쌍 (y, z)는
$(0, 5)$, $(1, 0)$의 2개
(i)~(iii)에서 2500원을 지불하는 방법의 수는
$2+3+2=7$

정답_ ④

778

B 지점과 C 지점을 연결하는 도로를 x개 추가했다고 하면
(i) A → B → D로 가는 경우의 수는
$2\times2=4$
(ii) A → C → D로 가는 경우의 수는
$3\times4=12$
(iii) A → B → C → D로 가는 경우의 수는
$2\times x\times4=8x$
(iv) A → C → B → D로 가는 경우의 수는
$3\times x\times2=6x$
(i)~(iv)에서 A 지점에서 출발하여 D 지점으로 가는 경우의 수는
$4+12+8x+6x=14x+16$
즉, $14x+16=100$이므로 $14x=84$ $\quad\therefore x=6$
따라서 추가한 도로의 개수는 6이다.

정답_ 6

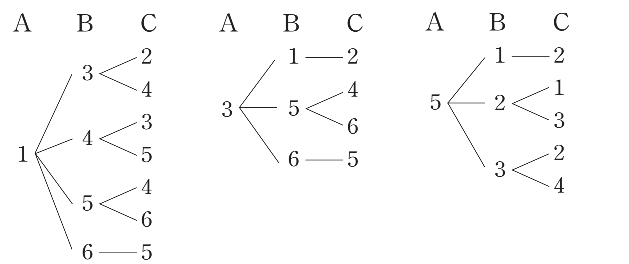
779

1이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 4가지
6이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1이 적힌 정사각형에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지
2가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 3가지
3이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6(1)이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지
5가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6(1)이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지
4가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1, 5가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 구하는 경우의 수는
$4\times1\times3\times2\times2\times2=96$

정답_ ③

780

A, B, C가 주어진 조건을 만족시키도록 사물함에 물건을 넣는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 A, B, C가 사물함에 물건을 넣는 경우의 수는
$7+4+5=16$
이고, 그 각각에 대하여 D, E가 남은 3개의 사물함 중에서 2개에 물건을 넣는 경우의 수는
${}_3P_2=6$
따라서 구하는 경우의 수는 $16\times6=96$

정답_ ⑤

781

남학생 12명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $12!$
∨남남∨남남∨남남∨남남∨남남∨남남∨
남학생을 2명씩 짝지어 그 2명을 한 사람으로 생각하여 6명의 사이사이와 양 끝의 7개의 자리에 여학생 2명을 세우는 경우의 수는
${}_7P_2=42$
따라서 $42\times12!=N\times12!$이므로 $N=42$

정답_ ④

782

A열과 B열의 각 열의 좌석을 왼쪽부터 순서대로 각각 1번, 2번, 3번, 4번, 5번이라고 하자.

A열	1번	2번	3번	4번	5번
B열	1번	2번	3번	4번	5번

(i) 아이가 B열 1번에 앉는 경우
아버지와 어머니가 B열에 앉는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$이고, 아버지와 어머니가 모두 아이와 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$이므로 아버지 또는 어머니가 아이와 이웃하게 앉는 경우의 수는
$12-6=6$
할아버지와 할머니가 A열 2, 3, 4, 5번 중에서 이웃하게 앉는 경우의 수는
$3\times2!=6$
따라서 경우의 수는 $6\times6=36$
(ii) 아이가 B열 2번에 앉는 경우
아버지와 어머니가 B열에 앉는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$이고, 아버지와 어머니가 모두 아이와 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는 ${}_2P_2=2$이므로 아버지 또는 어머니가 아이와 이웃하게 앉는 경우의 수는

$12-2=10$
할아버지와 할머니가 A열 1, 3, 4, 5번 중에서 이웃하게 앉는 경우의 수는
$2\times2!=4$
따라서 경우의 수는 $10\times4=40$
(iii) 아이가 B열 3번에 앉는 경우
아버지와 어머니가 B열에 앉는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$이고, 아버지와 어머니가 모두 아이와 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는 ${}_2P_2=2$이므로 아버지 또는 어머니가 아이와 이웃하게 앉는 경우의 수는
$12-2=10$
할아버지와 할머니가 A열 1, 2, 4, 5번 중에서 이웃하게 앉는 경우의 수는
$2\times2!=4$
따라서 경우의 수는 $10\times4=40$
(iv) 아이가 B열 4번에 앉는 경우
아이가 B열 2번에 앉는 경우의 수와 같으므로 경우의 수는 40
(v) 아이가 B열 5번에 앉는 경우
아이가 B열 1번에 앉는 경우의 수와 같으므로 경우의 수는 36
(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는
$36+40+40+40+36=192$

정답_ 192

783

1과 2 사이에 1과 2를 제외한 $(n-2)$개의 자연수 중에서 3개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수는
${}_{n-2}P_3=(n-2)(n-3)(n-4)$
1과 2의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
1□□□2를 한 개의 수로 생각하여 $(n-4)$개의 자연수를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $(n-4)!$
따라서 $(n-2)(n-3)(n-4)\times2\times(n-4)!=720$이므로
$$\begin{aligned}(n-2)(n-3)(n-4)\times(n-4)!&=360\\&=5\times4\times3\times3\times2\times1\\&=5\times4\times3\times3!\end{aligned}$$
즉, $n-2=5$이므로 $n=7$
$\therefore {}_nP_{n-4}={}_7P_3=210$

정답_ ③

784

여학생 3명 중 2명만 서로 이웃하고, 적어도 한쪽 끝에 여학생이 오도록 세우는 경우의 수는 여학생 3명 중 2명만 서로 이웃하게 세우는 경우의 수에서 양 끝에 모두 남학생이 오고 여학생 3명 중 2명만 서로 이웃하게 세우는 경우의 수를 뺀 것과 같다.
3명의 여학생 중에서 2명을 뽑아 서로 이웃하게 세우는 경우의 수는
${}_3P_2=6$
남학생 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!=6$
여학생은 2명만 서로 이웃해야 하므로 남학생의 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 이웃한 여학생 2명과 다른 여학생 1명을 세우는 경우의 수는
${}_4P_2=12$
따라서 여학생이 2명만 서로 이웃하게 세우는 경우의 수는
$6\times6\times12=432$
한편, 3명의 여학생 중에서 2명을 뽑아 서로 이웃하게 세우는 경우의 수가 ${}_3P_2=6$, 남학생 3명을 일렬로 세우는 경우의 수가 $3!=6$, 남학생의 사이사이에 이웃한 여학생 2명과 다른 여학생 1명을 세우는 경우의 수가 ${}_2P_2=2$이므로 양 끝에 모두 남학생을 세우고 여학생은 2명만 서로 이웃하게 세우는 경우의 수는
$6\times6\times2=72$
따라서 구하는 경우의 수는 $432-72=360$

정답_ ①

785

세 자리 자연수를 $100a+10b+c$ $(1\le a\le9,\ 0\le b\le9,\ 0\le c\le9$인 정수$)$라고 하자.
(i) $b=0$인 경우
$a=c$이어야 하므로
101, 202, 303, …, 909의 9가지
(ii) $c=0$인 경우
$a=b$이어야 하므로
110, 220, 330, …, 990의 9가지
(iii) $a=b+c$ $(b\ne0,\ c\ne0)$인 경우
$a=2$일 때, 순서쌍 (b, c)는 $(1, 1)$의 1가지
$a=3$일 때, 순서쌍 (b, c)는 $(1, 2)$, $(2, 1)$의 2가지
$a=4$일 때, 순서쌍 (b, c)는 $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3가지
⋮
$a=9$일 때, 순서쌍 (b, c)는 $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$, …, $(8, 1)$의 8가지
따라서 경우의 수는
$1+2+3+\cdots+8=36$
(iv) $b=a+c$ 또는 $c=a+b$ $(b\ne0,\ c\ne0)$인 경우
(iii)과 같은 방법으로 구하면 경우의 수는 각각 36
(i)~(iv)에서 구하는 자연수의 개수는
$9+9+36+36+36=126$

정답_ ⑤

786

4개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 3개를 사용하여 만들 수 있는 모든 세 자리 자연수의 백의 자리의 숫자의 합을 a, 십의 자리의 숫자의 합을 b, 일의 자리의 숫자의 합을 c라고 하면 구하는 모든 세 자리 자연수의 합은
$100a+10b+c$
한편,
1□□의 꼴의 자연수의 개수는 ${}_3P_2=6$
2□□의 꼴의 자연수의 개수는 ${}_3P_2=6$
3□□의 꼴의 자연수의 개수는 ${}_3P_2=6$
4□□의 꼴의 자연수의 개수는 ${}_3P_2=6$
이므로
$$\begin{aligned}a&=1\times6+2\times6+3\times6+4\times6\\&=(1+2+3+4)\times6=60\end{aligned}$$
같은 방법으로 구하면 $b=60$, $c=60$
따라서 구하는 세 자리 자연수의 합은
$100\times60+10\times60+60=6660$

정답_ 6660

11 조합

787

${}_{10}\mathrm{P}_3=n\times{}_{10}\mathrm{C}_3$에서

$10\times9\times8=n\times\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}$ $\quad\therefore n=6$

정답_ ③

다른 풀이

${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}$이므로 ${}_{10}\mathrm{C}_3=\dfrac{{}_{10}\mathrm{P}_3}{3!}$

${}_{10}\mathrm{P}_3=3!\times{}_{10}\mathrm{C}_3=6\times{}_{10}\mathrm{C}_3$ $\quad\therefore n=6$

788

${}_n\mathrm{C}_6={}_n\mathrm{C}_{14-n}$에서

$6=14-n$ 또는 $n-6=14-n$

$\therefore n=8$ 또는 $n=10$

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$8+10=18$

정답_ ③

789

$2\times{}_n\mathrm{P}_2={}_n\mathrm{C}_3$에서

$2n(n-1)=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}$ …… ㉠

${}_n\mathrm{C}_3$에서 $n\ge3$이므로 $n(n-1)>0$

따라서 ㉠의 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$2=\dfrac{n-2}{6}$ $\quad\therefore n=14$

$\therefore {}_{16}\mathrm{C}_n={}_{16}\mathrm{C}_{14}={}_{16}\mathrm{C}_2=\dfrac{16\times15}{2}=120$

정답_ ②

790

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{{}_n\mathrm{C}_6}{{}_n\mathrm{C}_2},\ \alpha\beta=\dfrac{{}_n\mathrm{C}_8}{{}_n\mathrm{C}_2}$

이때 $\alpha+\beta=-1$이므로 $-\dfrac{{}_n\mathrm{C}_6}{{}_n\mathrm{C}_2}=-1$

즉, ${}_n\mathrm{C}_6={}_n\mathrm{C}_2$이므로 $n-6=2$ $\quad\therefore n=8$

$\therefore \alpha\beta=\dfrac{{}_8\mathrm{C}_8}{{}_8\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{28}$

정답_ $\dfrac{1}{28}$

791

${}_{10}\mathrm{P}_r=\dfrac{10!}{6!}=10\times9\times8\times7$에서 $r=4$

${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{r-2}$, 즉 ${}_n\mathrm{C}_4={}_n\mathrm{C}_2$에서

$n-4=2$ $\quad\therefore n=6$

$\therefore nr=6\times4=24$

정답_ ②

792

$$n\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}=n\times\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{n-1-(r-1)\}!}$$
$$=n\times\frac{(n-1)!}{(r-1)!\boxed{(가)\ (n-r)!}}$$
$$=\frac{n!}{(r-1)!\boxed{(가)\ (n-r)!}}=r\times\frac{n!}{r(r-1)!(n-r)!}$$
$$=r\times\frac{n!}{\boxed{(나)\ r!}\,\boxed{(가)\ (n-r)!}}=r\times{}_n\mathrm{C}_r$$

$\therefore$ (가) $(n-r)!$ (나) $r!$

정답_ (가) $(n-r)!$ (나) $r!$

793

$${}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$$
$$=\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{n-1-(r-1)\}!}$$
$$=\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$
$$=\frac{(n-1)!(n-r)}{r!(n-1-r)!(n-r)}+\frac{(n-1)!r}{(r-1)!(n-r)!r}$$
$$=\frac{(\boxed{(가)\ n-r})(n-1)!}{r!(n-r)!}+\frac{\boxed{(나)\ r}(n-1)!}{r!(n-r)!}$$
$$=\frac{(n-1)!(n-r+r)}{r!(n-r)!}$$
$$=\frac{\boxed{(다)\ n}(n-1)!}{r!(n-r)!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}={}_n\mathrm{C}_r$$

$\therefore$ (가) $n-r$ (나) r (다) n

정답_ ⑤

794

축구 동아리 학생 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_3=20$

농구 동아리 학생 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_3=10$

따라서 구하는 경우의 수는 $20+10=30$

정답_ ①

795

상자는 4개 중에서 1개, 양말은 x켤레 중에서 3켤레를 동시에 선택하므로

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_x\mathrm{C}_3=80,\ 4\times\dfrac{x(x-1)(x-2)}{3\times2\times1}=80$

$x(x-1)(x-2)=120=6\times5\times4$ $\quad\therefore x=6$

정답_ 6

796

6개의 1을 일렬로 나열한 후 그 사이사이와 오른쪽 끝의 6개의 자리 중 3개를 택하여 0을 나열하면 된다.

$1\vee1\vee1\vee1\vee1\vee1\vee$

따라서 구하는 자연수의 개수는

${}_6\mathrm{C}_3=20$

정답_ ⑤

주의 자연수이므로 맨 앞자리, 즉 왼쪽 끝자리에는 0이 올 수 없음에 주의한다.

797

네 카드에 적힌 수의 합이 짝수이려면 네 수 모두 짝수이거나 두 수는 짝수, 나머지 두 수는 홀수 또는 네 수 모두 홀수이어야 한다.
따라서 구하는 경우의 수는
${}_4C_4+{}_4C_2\times{}_5C_2+{}_5C_4=1+6\times10+5=66$

정답_ ③

798

모임에 참석한 사람 수를 n이라고 하면 전체 악수 횟수는 서로 다른 n개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로
${}_nC_2=105$, $\frac{n(n-1)}{2\times1}=105$
$n(n-1)=210=15\times14 \qquad \therefore n=15$
따라서 모임에 참석한 사람 수는 15이다.

정답_ ④

799

실선을 1개, 2개, 3개, …, 7개 그으면 직사각형은 2개, 3개, 4개, …, 8개로 나누어진다.
이때 실선을 1개, 2개, 3개, …, 7개 긋는 경우의 수는 각각 ${}_7C_1$, ${}_7C_2$, ${}_7C_3$, …, ${}_7C_7$이므로 구하는 경우의 수는
${}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3+{}_7C_4+{}_7C_5+{}_7C_6+{}_7C_7$
$=7+21+35+35+21+7+1=127$

정답_ ②

800

1부터 30까지의 짝수 중에서 3으로 나누었을 때
나머지가 0인 수는 6, 12, 18, 24, 30 …… ㉠
나머지가 1인 수는 4, 10, 16, 22, 28 …… ㉡
나머지가 2인 수는 2, 8, 14, 20, 26 …… ㉢
두 수의 합이 3의 배수가 되려면 ㉠에서 2개를 택하거나 ㉡, ㉢에서 각각 1개씩 택하면 되므로 구하는 경우의 수는
${}_5C_2+{}_5C_1\times{}_5C_1=10+5\times5=35$

정답_ 35

801

혜인이와 준범이를 제외한 11명 중에서 2명을 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는 ${}_{11}C_2=55$

정답_ ①

802

4와 소수 2, 3, 5, 7이 적힌 공을 제외한 4개의 공 중에서 2개를 꺼내면 되므로 구하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

정답_ ②

803

(i) A만 포함하여 뽑는 경우
A, B를 제외한 10명 중에서 3명을 뽑으면 되므로 경우의 수는 ${}_{10}C_3=120$
(ii) B만 포함하여 뽑는 경우
A, B를 제외한 10명 중에서 3명을 뽑으면 되므로 경우의 수는 ${}_{10}C_3=120$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$120+120=240$

정답_ 240

804

뽑힌 6명 중에서 부부가 2쌍이므로 6쌍의 부부 중에서 2쌍의 부부를 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$
뽑힌 2쌍의 부부를 제외한 4쌍의 부부, 즉 8명 중에서 나머지 2명을 뽑으면 되는데 2명이 부부인 경우는 제외해야 하므로 경우의 수는 ${}_8C_2-{}_4C_1=28-4=24$
따라서 구하는 경우의 수는 $15\times24=360$

정답_ ①

805

(i) 똑같은 숫자를 0개 택하는 경우
진서가 2개의 숫자를 택하고 아영이는 그 2개의 숫자를 제외한 나머지 숫자 중에서 2개를 택하면 되므로 경우의 수는
${}_5C_2\times{}_3C_2=10\times3=30$
(ii) 똑같은 숫자를 1개 택하는 경우
진서가 2개의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$
아영이는 진서가 택한 2개의 숫자 중에서 1개를 택하고, 진서가 택하지 않은 나머지 숫자 중에서 1개를 택하면 되므로 경우의 수는 ${}_2C_1\times{}_3C_1=2\times3=6$
따라서 경우의 수는 $10\times6=60$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$30+60=90$

정답_ 90

다른 풀이

위의 (ii)의 경우는 다음과 같이 구할 수도 있다.
진서와 아영이가 똑같은 숫자를 1개 택하고, 그 숫자를 제외한 나머지 4개의 숫자 중에서 각각 1개씩 택하면 되므로 경우의 수는
${}_5C_1\times{}_4P_2=5\times12=60$

806

여학생이 적어도 한 명 포함되도록 뽑는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 모두 남학생을 뽑는 경우의 수를 뺀 것과 같다.
10명의 학생 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}C_3=120$
남학생만 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_3=4$
따라서 여학생이 적어도 한 명 포함되도록 뽑는 경우의 수는
$120-4=116$

정답_ ③

다른 풀이

여학생을 1명, 남학생을 2명 뽑는 경우의 수는
${}_6C_1\times{}_4C_2=6\times6=36$
여학생을 2명, 남학생을 1명 뽑는 경우의 수는
${}_6C_2\times{}_4C_1=15\times4=60$
여학생을 3명 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_3=20$
따라서 구하는 경우의 수는 $36+60+20=116$

807

과학책을 적어도 1권 꺼내는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 소설책 또는 역사책 중에서만 꺼내는 경우의 수를 뺀 것과 같다.
15권의 책 중에서 3권을 꺼내는 경우의 수는 ${}_{15}C_3=455$
소설책 또는 역사책 중에서만 3권을 꺼내는 경우의 수는
${}_{10}C_3=120$
따라서 구하는 경우의 수는 $455-120=335$

정답_ ④

808

회장, 부회장 중에서 적어도 한 명을 포함하여 뽑는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 회장, 부회장을 제외하고 뽑는 경우의 수를 뺀 것과 같다.
10명의 회원 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}C_4=210$
회장, 부회장을 제외한 8명의 회원 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는 ${}_8C_4=70$
따라서 구하는 경우의 수는 $210-70=140$

정답_ ⑤

809

남학생과 여학생이 적어도 한 명씩 포함되도록 선발하는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 남학생만 선발하거나 여학생만 선발하는 경우의 수를 뺀 것과 같다.
9명의 지원자 중에서 4명을 선발하는 경우의 수는 ${}_9C_4=126$
남학생만 4명을 선발하는 경우의 수는 ${}_5C_4=5$
여학생만 4명을 선발하는 경우의 수는 ${}_4C_4=1$
따라서 구하는 경우의 수는 $126-(5+1)=120$

정답_ 120

810

적어도 1개가 빨간색 공인 경우의 수는 전체 경우의 수에서 모두 파란색 공을 꺼내는 경우의 수를 뺀 것과 같다.
상자 안에 들어 있는 파란색 공의 개수를 n $(n\geq3)$이라고 하자.
12개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_{12}C_3=220$
파란색 공만 3개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_nC_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$
따라서 $220-\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=164$이므로
$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=56$
$n(n-1)(n-2)=336=8\times7\times6$ $\quad\therefore n=8$
따라서 파란색 공의 개수는 8이다.

정답_ ⑤

811

희재와 연아가 포함되도록 4명을 뽑는 경우의 수는 희재와 연아를 제외한 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수와 같으므로
${}_5C_2=10$
뽑은 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는 $10\times24=240$

정답_ ④

812

5개의 자음 s, p, k, n, g 중에서 3개를 택하는 경우의 수는
${}_5C_3=10$
3개의 모음 e, a, i 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_3C_2=3$
3개의 자음을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$
자음의 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 2개의 모음을 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$
따라서 구하는 경우의 수는 $10\times3\times6\times12=2160$

정답_ 2160

813

만의 자리와 백의 자리에는 6개의 숫자 중에서 2개를 택하여 큰 수부터 차례대로 만의 자리, 백의 자리로 정하면 되므로 경우의 수는
${}_6C_2=15$
천의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 만의 자리와 백의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는 ${}_4P_3=24$
따라서 구하는 자연수의 개수는 $15\times24=360$

정답_ ③

814

(i) 첫째날 2팀, 둘째날 3팀이 공연하는 경우
공연하는 팀을 정하는 경우의 수는
${}_5C_2\times{}_3C_3=10\times1=10$
첫째날 공연 순서를 정하는 경우의 수는 $2!=2$
둘째날 공연 순서를 정하는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 경우의 수는
$10\times2\times6=120$
(ii) 첫째날 3팀, 둘째날 2팀이 공연하는 경우
공연하는 팀을 정하는 경우의 수는
${}_5C_3\times{}_2C_2=10\times1=10$
첫째날 공연 순서를 정하는 경우의 수는 $3!=6$
둘째날 공연 순서를 정하는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 경우의 수는
$10\times6\times2=120$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$120+120=240$

정답_ ③

815

7개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는
${}_7C_2=21$

정답_ 21

816

8개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는
${}_8C_2=28$

정답_ ②

817

구하는 대각선의 개수는 6개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 6을 뺀 것과 같으므로

${}_6C_2-6=15-6=9$

정답_ ⑤

818

서로 다른 두 직선 위의 점을 각각 하나씩 택하여 이으면 1개의 직선을 만들 수 있으므로 그 직선의 개수는

${}_3C_1\times{}_4C_1=3\times4=12$

주어진 두 직선의 개수는 2

따라서 구하는 직선의 개수는

$12+2=14$

정답_ ③

다른 풀이

7개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_7C_2=21$

한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2=3$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

주어진 두 직선을 포함하면 구하는 직선의 개수는

$21-3-6+2=14$

819

서로 다른 대각선의 교점은 꼭짓점을 공유하지 않는 두 대각선에 의해 결정되고, 이 두 대각선은 4개의 꼭짓점에 의하여 결정된다.

따라서 구하는 서로 다른 대각선의 교점의 최대 개수는

${}_{12}C_4=495$

정답_ ①

820

8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_8C_3=56$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3=4$이고, 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 2개이다.

그런데 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$56-4\times2=48$

정답_ ②

다른 풀이

4개의 점이 있는 두 직선을 각각 l, m이라고 하자. 삼각형을 만들려면 직선 l에서 2개의 점을 택하고, 직선 m에서 1개의 점을 택하거나 직선 l에서 1개의 점을 택하고 직선 m에서 2개의 점을 택하면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_4C_1+{}_4C_1\times{}_4C_2=6\times4+4\times6=48$

821

${}_nC_2=36$이므로

$\dfrac{n(n-1)}{2}=36$, $n(n-1)=72=9\times8$ $\quad\therefore n=9$

따라서 9개의 점 중에서 3개의 점을 이어서 만들 수 있는 삼각형의 개수는 ${}_9C_3=84$

정답_ 84

822

세로로 그려진 6개의 직선 중에서 2개, 가로로 그려진 4개의 직선 중에서 1개를 택하면 한 개의 삼각형이 만들어지므로 구하는 삼각형의 개수는

${}_6C_2\times{}_4C_1=15\times4=60$

정답_ ④

823

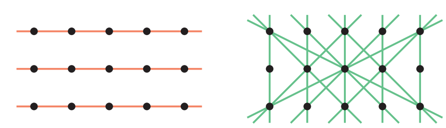
15개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_{15}C_3=455$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_3=10$

한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_3=1$



위의 그림과 같이 한 직선 위에 5개의 점이 있는 직선은 3개이고, 한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 13개이다.

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$455-10\times3-1\times13=412$

정답_ ③

824

직선 l 위의 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

직선 m 위의 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

따라서 구하는 사각형의 개수는 $10\times6=60$

정답_ 60

825

9개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_9C_4=126$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하고 나머지 5개의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3\times{}_5C_1=4\times5=20$

이고, 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 2개이다.

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_4=1$이고, 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 2개이다.

그런데 4개의 점 중에서 3개의 점이 한 직선 위에 있거나 4개의 점이 한 직선 위에 있으면 사각형이 될 수 없으므로 구하는 사각형의 개수는

$126-20\times2-1\times2=84$

정답_ 84

826

가로 방향의 3개의 평행선 중에서 2개, 세로 방향의 4개의 평행선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형을 만들 수 있으므로 구하는 평행사변형의 개수는

${}_3C_2\times{}_4C_2=3\times6=18$

정답_ ①

827

가로 방향의 4개의 평행선 중에서 2개, 세로 방향의 5개의 평행선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형을 만들 수 있으므로 평행사변형의 개수는

${}_4C_2\times{}_5C_2=6\times10=60$

한 변의 길이가 1, 2, 3인 마름모의 개수는 각각 12, 6, 2이므로 마름모의 개수는

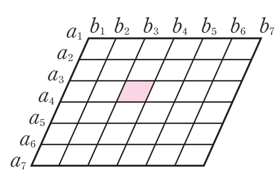
$12+6+2=20$

따라서 마름모가 아닌 평행사변형의 개수는

$60-20=40$

정답_ 40

828



오른쪽 그림과 같이 가로 방향의 평행선을 각각 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7이라 하고, 세로 방향의 평행선을 각각 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7이라고 하자.

색칠한 부분을 포함하는 평행사변형을 만들려면 가로 방향의 평행선은 a_1, a_2, a_3 중에서 하나, a_4, a_5, a_6, a_7 중에서 하나를 택해야 하므로 가로 방향의 평행선을 택하는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_4C_1=3\times4=12$

또, 세로 방향의 평행선은 b_1, b_2, b_3 중에서 하나, b_4, b_5, b_6, b_7 중에서 하나를 택해야 하므로 세로 방향의 평행선을 택하는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_4C_1=3\times4=12$

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

$12\times12=144$

정답_ ⑤

829

n개의 평행선 중에서 2개, $(n+4)$개의 평행선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형을 만들 수 있으므로

${}_nC_2\times{}_{n+4}C_2=360$에서

$\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{(n+4)(n+3)}{2}=360$

$(n+4)(n+3)n(n-1)=1440=9\times8\times5\times4$

$\therefore n=5$

정답_ 5

830

$a={}_7C_1\times{}_6C_2\times{}_4C_4=7\times15\times1=105$

$b={}_7C_1\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=7\times20\times1\times\frac{1}{2}=70$

$\therefore a+b=105+70=175$

정답_ ②

831

남학생 9명 중 1명이 여학생 3명과 한 조를 이루면 되므로 남학생 9명을 1명, 4명, 4명으로 나누는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_9C_1\times{}_8C_4\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}=9\times70\times1\times\frac{1}{2}=315$

정답_ ③

832

각 조에 적어도 한 명의 어린이가 포함되도록 나누는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 어른만 포함된 조가 있도록 나누는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

10명을 5명, 5명으로 나누는 경우의 수는

${}_{10}C_5\times{}_5C_5\times\frac{1}{2!}=252\times1\times\frac{1}{2}=126$

어른만 포함된 조가 있도록 나누는 경우의 수는 어른 7명을 2명, 5명으로 나누는 경우의 수와 같으므로

${}_7C_2\times{}_5C_5=21\times1=21$

따라서 구하는 경우의 수는

$126-21=105$

정답_ 105

833

남학생이 각 모둠에 적어도 한 명씩 있어야 하므로 남학생 4명을 2명, 1명, 1명으로 나누는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=6\times2\times1\times\frac{1}{2}=6$

여학생 3명을 세 모둠에 한 명씩 분배하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times6=36$

정답_ ④

834

꽃 5송이를 조건에 맞게 세 묶음으로 나누는 경우는

(1송이, 1송이, 3송이) 또는 (1송이, 2송이, 2송이)

(i) 1송이, 1송이, 3송이로 나누는 경우의 수는

${}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=5\times4\times1\times\frac{1}{2}=10$

(ii) 1송이, 2송이, 2송이로 나누는 경우의 수는

${}_5C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=5\times6\times1\times\frac{1}{2}=15$

(i), (ii)에서 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$10+15=25$

세 묶음을 3개의 꽃병에 분배하는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$25\times6=150$

정답_ ①

835

8명의 학생을 조건에 맞게 3개의 조로 나누는 경우는
(2명, 2명, 4명) 또는 (2명, 3명, 3명)
(i) 2명, 2명, 4명으로 나누는 경우의 수는
$${}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}=28\times15\times1\times\frac{1}{2}=210$$
(ii) 2명, 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는
$${}_8C_2\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=28\times20\times1\times\frac{1}{2}=280$$
(i), (ii)에서 3개의 조로 나누는 경우의 수는
$210+280=490$
3개의 조를 3대의 케이블카에 분배하는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$490\times6=2940$

정답_ ⑤

836

2층부터 6층까지 5개의 층 중에서 사람들이 내리는 3개의 층을 택하는 경우의 수는 ${}_5C_3=10$
10명을 2명, 4명, 4명의 3개의 조로 나누는 경우의 수는
$${}_{10}C_2\times{}_8C_4\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}=45\times70\times1\times\frac{1}{2}=1575$$
3개의 조를 3개의 층에 분배하는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$10\times1575\times6=94500$

정답_ ①

837

6개의 팀을 3개, 3개의 2개의 조로 나누는 경우의 수는
$${}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=20\times1\times\frac{1}{2}=10$$
각 조에서 나누어진 3개의 팀을 1개, 2개로 나누는 경우의 수는
$({}_3C_1\times{}_2C_2)\times({}_3C_1\times{}_2C_2)=(3\times1)\times(3\times1)=9$
따라서 구하는 경우의 수는
$10\times9=90$

정답_ ⑤

838

7개의 팀을 4개, 3개로 나누는 경우의 수는
${}_7C_4\times{}_3C_3=35\times1=35$
나누어진 4개의 팀을 2개, 2개로 나누는 경우의 수는
$${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=6\times1\times\frac{1}{2}=3$$
나누어진 3개의 팀을 2개, 1개로 나누는 경우의 수는
${}_3C_2\times{}_1C_1=3\times1=3$
따라서 구하는 경우의 수는 $35\times3\times3=315$

정답_ ②

839

정빈이와 시합을 하는 학생을 택하는 경우의 수는
${}_5C_1=5$
나머지 4명을 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는
$${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=6\times1\times\frac{1}{2}=3$$
따라서 구하는 경우의 수는 $5\times3=15$

정답_ 15

840

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$4+5={}_nC_{n-r}-1,\ 4\times5={}_nP_r$
$\therefore\ {}_nC_{n-r}=10,\ {}_nP_r=20$ ❶
이때 ${}_nC_{n-r}={}_nC_r$이므로 ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}=10$에서
$\frac{20}{r!}=10,\ r!=2 \qquad \therefore\ r=2$
${}_nP_2=20=5\times4$에서 $n=5$ ❷
$\therefore\ nr=5\times2=10$ ❸

정답_ 10

채점 기준	비율
❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식 세우기	40 %
❷ r, n의 값 구하기	40 %
❸ nr의 값 구하기	20 %

841

1부터 25까지의 홀수 13개 중에서 2개의 수를 택하는 경우의 수는 ${}_{13}C_2=78$ ❶
1부터 25까지의 홀수 중에서 4로 나누었을 때
나머지가 1인 수는 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25 …… ㉠
나머지가 3인 수는 3, 7, 11, 15, 19, 23 …… ㉡
1부터 25까지의 홀수 중에서 택한 두 수의 합이 4의 배수가 되려면 ㉠, ㉡ 중에서 각각 1개씩 택해야 하므로 그 경우의 수는
${}_7C_1\times{}_6C_1=7\times6=42$ ❷
따라서 구하는 경우의 수는
$78-42=36$ ❸

정답_ 36

채점 기준	비율
❶ 주어진 홀수 중에서 2개의 수를 택하는 경우의 수 구하기	30 %
❷ 주어진 홀수 중에서 택한 두 수의 합이 4의 배수가 되는 경우의 수 구하기	50 %
❸ 주어진 홀수 중에서 택한 두 수의 합이 4의 배수가 되지 않는 경우의 수 구하기	20 %

842

(ⅰ) 가장 큰 숫자가 7인 경우

7, 8이 적힌 공을 제외한 6개의 공 중에서 3개를 꺼내면 되므로 경우의 수는 ${}_6C_3=20$ ❶

(ⅱ) 가장 큰 숫자가 8인 경우

8이 적힌 공을 제외한 7개의 공 중에서 3개를 꺼내면 되므로 경우의 수는 ${}_7C_3=35$ ❷

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$20+35=55$ ❸

정답_ 55

채점 기준	비율
❶ 가장 큰 숫자가 7인 경우의 수 구하기	40 %
❷ 가장 큰 숫자가 8인 경우의 수 구하기	40 %
❸ 가장 큰 숫자가 7 이상인 경우의 수 구하기	20 %

843

파란 구슬이 적어도 1개 포함되는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 모두 노란 구슬인 경우의 수를 뺀 것과 같다.

$(n+4)$개의 구슬 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

${}_{n+4}C_3=\frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{6}$

노란 구슬만 3개를 꺼내는 경우의 수는

${}_nC_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

따라서

$\frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{6}-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=100$ ❶

이므로

$(n+4)(n+3)(n+2)-n(n-1)(n-2)=600$

$12(n^2+2n-48)=0,\ 12(n-6)(n+8)=0$

$\therefore n=6\ (\because n\geq 3)$ ❷

따라서 주머니에는 노란 구슬 6개, 파란 구슬 4개가 들어 있으므로 노란 구슬 2개, 파란 구슬 2개를 뽑는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_2=15\times 6=90$ ❸

정답_ 90

채점 기준	비율
❶ 파란 구슬이 적어도 1개 포함되는 경우의 수를 이용하여 식 세우기	30 %
❷ 노란 구슬의 개수 구하기	40 %
❸ 노란 구슬 2개, 파란 구슬 2개를 뽑는 경우의 수 구하기	30 %

844

두 모음 사이에 들어갈 1개의 문자를 정하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$ ❶

두 모음과 그 사이의 1개의 문자를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$ ❷

두 모음이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times 24\times 2=192$ ❸

정답_ 192

채점 기준	비율
❶ 두 모음 사이에 들어갈 문자를 정하는 경우의 수 구하기	30 %
❷ 두 모음과 그 사이의 문자를 한 문자로 생각하여 일렬로 나열하는 경우의 수 구하기	30 %
❸ 두 모음 사이에 1개의 문자가 들어가도록 나열하는 경우의 수 구하기	40 %

845

12개의 점 중에서 2개를 택하여 이으면 선분을 만들 수 있으므로 그 선분의 개수는 ${}_{12}C_2=66$ ❶

주어진 가로줄 위의 3개의 점 중에서 2개의 점을 택하거나 세로줄 위의 4개의 점 중에서 2개의 점을 택하여 만든 선분의 길이는 유리수이므로 길이가 유리수인 선분의 개수는

${}_3C_2\times 4+{}_4C_2\times 3=3\times 4+6\times 3=30$ ❷

따라서 길이가 무리수인 선분의 개수는

$66-30=36$ ❸

정답_ 36

채점 기준	비율
❶ 12개의 점으로 만들 수 있는 선분의 개수 구하기	30 %
❷ 길이가 유리수인 선분의 개수 구하기	50 %
❸ 길이가 무리수인 선분의 개수 구하기	20 %

846

$$
\begin{aligned}
{}_{n+5}C_n-{}_{n+5}C_{n-2}&=\frac{(n+5)!}{n!5!}-\frac{(n+5)!}{(n-2)!7!}\\
&=(\boxed{\text{(나) } n+5})!\left\{\frac{1}{n!5!}-\frac{1}{(n-2)!7!}\right\}\\
&=(n+5)!\left\{\frac{7\times 6}{n!7!}-\frac{n(n-1)}{n!7!}\right\}\\
&=(\boxed{\text{(나) } n+5})!\times\frac{\boxed{\text{(다) } 42+n-n^2}}{n!7!}\\
&=(n+5)!\times\frac{(6+n)(7-n)}{n!7!}\\
&=\frac{7-n}{n+7}\times\frac{(n+7)!}{n!7!}\\
&=\boxed{\text{(가) } \frac{7-n}{n+7}}\,{}_{n+7}C_n
\end{aligned}
$$

$\therefore$ (가) $\frac{7-n}{n+7}$ (나) $n+5$ (다) $42+n-n^2$

따라서

$f(n)=\frac{7-n}{n+7},\ g(n)=n+5,\ h(n)=42+n-n^2$

이므로

$\frac{h(3)-g(3)}{f(3)}=\frac{36-8}{\frac{2}{5}}=70$

정답_ 70

847

10개의 쌓기나무를 다섯 자리에

4층, 3층, 1층, 1층, 1층 또는 4층, 2층, 2층, 1층, 1층

으로 쌓으면 된다.

(i) 4층, 3층, 1층, 1층, 1층으로 쌓는 경우

4층을 쌓을 자리를 정하는 경우의 수는 ${}_5C_1=5$

3층을 쌓을 자리를 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

나머지 자리는 모두 1층으로 쌓으면 되므로 경우의 수는

$5\times4=20$

(ii) 4층, 2층, 2층, 1층, 1층으로 쌓는 경우

4층을 쌓을 자리를 정하는 경우의 수는 ${}_5C_1=5$

2층을 쌓을 자리를 정하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

나머지 자리는 모두 1층으로 쌓으면 되므로 경우의 수는

$5\times6=30$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $20+30=50$

정답_ ①

848

주어진 조건에 맞게 5명이 텐트에 들어가는 경우는 다음의 4가지로 생각할 수 있다.

	3인용 텐트	2인용 텐트	1인용 텐트
(i)	어린이 2명, 어른 1명	어른 2명	×
(ii)	어린이 2명, 어른 1명	어른 1명	어른 1명
(iii)	어린이 1명, 어른 2명	어린이 1명, 어른 1명	×
(iv)	어린이 1명, 어른 1명	어린이 1명, 어른 1명	어른 1명

(i)의 경우의 수는

$({}_2C_2\times{}_3C_1)\times{}_2C_2=(1\times3)\times1=3$

(ii)의 경우의 수는

$({}_2C_2\times{}_3C_1)\times{}_2C_1\times{}_1C_1=(1\times3)\times2\times1=6$

(iii)의 경우의 수는

$({}_2C_1\times{}_3C_2)\times({}_1C_1\times{}_1C_1)=(2\times3)\times(1\times1)=6$

(iv)의 경우의 수는

$({}_2C_1\times{}_3C_1)\times({}_1C_1\times{}_2C_1)\times{}_1C_1=(2\times3)\times(1\times2)\times1=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$3+6+6+12=27$

정답_ ③

849

a, b, c, d, e는 1부터 9까지의 서로 다른 자연수이고, 다섯 자리 자연수 $abcde$가 5의 배수이므로

$e=5$

따라서 $c<d<e$에서 $c<d<5$이므로

$c=1$ 또는 $c=2$ 또는 $c=3$

(i) $c=1$일 때

$1<d<5$에서 d는 2, 3, 4 중 하나이므로 경우의 수는

${}_3C_1=3$

$a>b>1$에서 a, b는 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 중에서 d의 값을 제외한 6개 중 2개를 택하여 큰 수부터 차례대로 a, b로 정하면 되므로 경우의 수는

${}_6C_2=15$

따라서 자연수의 개수는 $3\times15=45$

(ii) $c=2$일 때

$2<d<5$에서 d는 3, 4 중 하나이므로 경우의 수는

${}_2C_1=2$

$a>b>2$에서 a, b는 3, 4, 6, 7, 8, 9 중에서 d의 값을 제외한 5개 중 2개를 택하여 큰 수부터 차례대로 a, b로 정하면 되므로 경우의 수는

${}_5C_2=10$

따라서 자연수의 개수는 $2\times10=20$

(iii) $c=3$일 때

$3<d<5$에서 $d=4$

$a>b>3$에서 a, b는 6, 7, 8, 9의 4개 중 2개를 택하여 큰 수부터 차례대로 a, b로 정하면 되므로 경우의 수는

${}_4C_2=6$

따라서 자연수의 개수는 $1\times6=6$

(i)~(iii)에서 구하는 자연수의 개수는

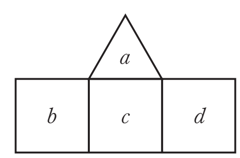
$45+20+6=71$

정답_ ③

참고 두 조건 $a>b>c$, $c<d<e$에 공통으로 c가 들어가 있으므로 c를 기준으로 경우를 나누어 a, b, d의 값을 구하면 편리하다. 이때 a, b, c, d, e가 서로 다른 자연수라는 것에 주의하여 그 값을 구한다.

850

오른쪽 그림과 같이 네 개의 정다각형에 적는 수를 각각 a, b, c, d라고 하자.



조건 (가)에서 $a>b$, $a>c$, $a>d$

조건 (나)에서 $b\neq c$, $c\neq d$

(i) $b\neq d$일 때

a, b, c, d는 서로 다르므로 6 이하의 자연수 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_4=15$

택한 4개의 수 중에서 가장 큰 수를 a로 하고 나머지 3개를 b, c, d로 정하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 경우의 수는 $15\times6=90$

(ii) $b=d$일 때

a, $b(=d)$, c는 서로 다르므로 6 이하의 자연수 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

택한 3개의 수 중에서 가장 큰 수를 a로 하고 나머지 2개의 수를 $b(=d)$, c로 정하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 경우의 수는 $20\times2=40$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$90+40=130$

정답_ 130

다른 풀이

조건 (가), (나)에서 a보다 작은 수가 적어도 2개 있어야 하므로

$a \geq 3$

(i) $a=3$일 때

c는 1, 2 중 하나이므로 2가지

b, d는 c를 제외한 수이어야 하므로 각각 1가지

따라서 경우의 수는

$2\times1\times1=2$

(ii) $a=4$일 때

c는 1, 2, 3 중 하나이므로 3가지

b, d는 c를 제외한 수이어야 하므로 각각 2가지

따라서 경우의 수는

$3\times2\times2=12$

(iii) $a=5$일 때

c는 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 4가지

b, d는 c를 제외한 수이어야 하므로 각각 3가지

따라서 경우의 수는

$4\times3\times3=36$

(iv) $a=6$일 때

c는 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이므로 5가지

b, d는 c를 제외한 수이어야 하므로 각각 4가지

따라서 경우의 수는

$5\times4\times4=80$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$2+12+36+80=130$

851

1, 2, 3, 4가 적힌 카드가 각각 적어도 한 장씩 포함되도록 택하는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 1 또는 2 또는 3 또는 4가 적힌 카드를 제외하고 택하는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

12장의 카드 중에서 7장의 카드를 택하는 경우의 수는

${}_{12}C_7=792$

1이 적힌 카드를 택하지 않는 경우의 수는 1이 적힌 카드를 제외한 9장의 카드 중에서 7장을 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_9C_7=36$

같은 방법으로 구하면 2, 3, 4가 적힌 카드를 택하지 않는 경우의 수도 각각 36이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$792-36\times4=648$

정답_ 648

참고 1, 2, 3, 4가 적힌 카드가 각각 3장씩 있으므로 1이 적힌 카드를 제외한 9장의 카드 중에서 7장을 택하면 2, 3, 4가 적힌 카드가 각각 적어도 한 장씩 포함되게 택해진다.

852

3의 배수가 되려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 하므로

0부터 9까지의 수를 3으로 나누었을 때

나머지가 0인 수는 0, 3, 6, 9 …… ㉠

나머지가 1인 수는 1, 4, 7 …… ㉡

나머지가 2인 수는 2, 5, 8 …… ㉢

(i) ㉠, ㉡, ㉢ 각각에서 3개를 택하는 경우

㉠의 3개의 수로 만들 수 있는 짝수인 3의 배수는 □□0 또는 □□6의 꼴이므로 그 개수는

${}_3P_2+2\times2=6+4=10$

㉡의 3개의 수로 만들 수 있는 짝수인 3의 배수는 □□4의 꼴이므로 그 개수는

$2!=2$

㉢의 3개의 수로 만들 수 있는 짝수인 3의 배수는 □□2 또는 □□8의 꼴이므로 그 개수는

$2!\times2=2\times2=4$

따라서 짝수인 3의 배수의 개수는

$10+2+4=16$

(ii) ㉠, ㉡, ㉢ 중에서 각각 1개씩 택하는 경우

만들 수 있는 짝수인 3의 배수는 □□0 또는 □□2 또는 □□4 또는 □□6 또는 □□8의 꼴이므로 그 개수는

${}_3C_1\times{}_3C_1\times2!+({}_4C_1\times{}_3C_1\times2!-3)+({}_4C_1\times{}_3C_1\times2!-3)$

$+{}_3C_1\times{}_3C_1\times2!+({}_4C_1\times{}_3C_1\times2!-3)$

$=3\times3\times2+(4\times3\times2-3)+(4\times3\times2-3)+3\times3\times2$

$+(4\times3\times2-3)$

$=18+21+21+18+21$

$=99$

(i), (ii)에서 구하는 짝수인 3의 배수의 개수는

$16+99=115$

정답_ ③

853

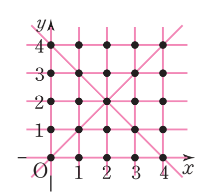
25개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_{25}C_2=300$

(i) 한 직선 위에 5개의 점이 있는 경우

5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

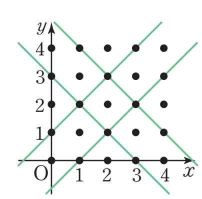
오른쪽 그림과 같이 한 직선 위에 5개의 점이 있는 직선은 12개이므로 경우의 수는 $10\times12=120$



(ii) 한 직선 위에 4개의 점이 있는 경우

4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

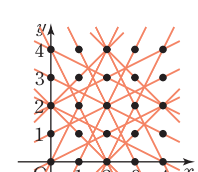
오른쪽 그림과 같이 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 4개이므로 경우의 수는 $6\times4=24$



(iii) 한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우

3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$

오른쪽 그림과 같이 한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 16개이므로 경우의 수는 $3\times16=48$



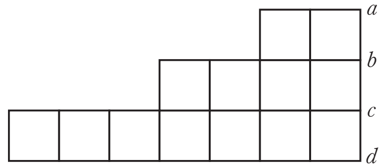
(i)~(iii)에서 구하는 직선의 개수는

$300-(120+24+48)+12+4+16=140$

정답_ 140

854

다음 그림과 같이 가로의 선들을 위에서부터 차례대로 a, b, c, d 라고 하자.



직사각형을 만들려면 가로줄 2개와 세로줄 2개를 택하면 되므로 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) 가로줄 a, b를 택한 경우
3개의 세로줄 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_3C_2=3$

(ⅱ) 가로줄 a, c를 택한 경우
3개의 세로줄 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_3C_2=3$

(ⅲ) 가로줄 a, d를 택한 경우
3개의 세로줄 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_3C_2=3$

(ⅳ) 가로줄 b, c를 택한 경우
5개의 세로줄 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_5C_2=10$

(ⅴ) 가로줄 b, d를 택한 경우
5개의 세로줄 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_5C_2=10$

(ⅵ) 가로줄 c, d를 택한 경우
8개의 세로줄 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_8C_2=28$

(ⅰ)~(ⅵ)에서 구하는 직사각형의 개수는
$3+3+3+10+10+28=57$

정답_ ①

855

6명의 학생을 조건에 맞게 3개의 조로 나누는 경우는
(1명, 1명, 4명), (1명, 2명, 3명), (2명, 2명, 2명)

(ⅰ) 1명, 1명, 4명으로 나누는 경우의 수는
$${}_6C_1\times{}_5C_1\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}=6\times5\times1\times\frac{1}{2}=15$$

(ⅱ) 1명, 2명, 3명으로 나누는 경우의 수는
$${}_6C_1\times{}_5C_2\times{}_3C_3=6\times10\times1=60$$

(ⅲ) 2명, 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는
$${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=15\times6\times1\times\frac{1}{6}=15$$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 3개의 조로 나누는 경우의 수는
$15+60+15=90$
3개의 조를 세 곳의 봉사활동 장소에 분배하는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$90\times6=540$

정답_ 540

856

4개의 정류장 A, B, C, D 중에서 승객이 내리는 3개의 정류장을 택하는 경우의 수는
${}_4C_3=4$
승객 7명을 조건에 맞게 3개의 조로 나누는 경우는
(1명, 1명, 5명), (1명, 2명, 4명), (1명, 3명, 3명), (2명, 2명, 3명)

(ⅰ) 1명, 1명, 5명으로 나누는 경우의 수는
$${}_7C_1\times{}_6C_1\times{}_5C_5\times\frac{1}{2!}=7\times6\times1\times\frac{1}{2}=21$$

(ⅱ) 1명, 2명, 4명으로 나누는 경우의 수는
$${}_7C_1\times{}_6C_2\times{}_4C_4=7\times15\times1=105$$

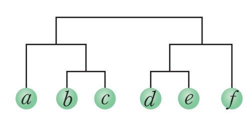
(ⅲ) 1명, 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는
$${}_7C_1\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=7\times20\times1\times\frac{1}{2}=70$$

(ⅳ) 2명, 2명, 3명으로 나누는 경우의 수는
$${}_7C_2\times{}_5C_2\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=21\times10\times1\times\frac{1}{2}=105$$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 3개의 조로 나누는 경우의 수는
$21+105+70+105=301$
3개의 조를 3개의 정류장에 분배하는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$4\times301\times6=7224$

정답_ ⑤

857



오른쪽 그림과 같이 각각 a, b, c, d, e, f라고 하자.
1반과 2반이 결승전 이전에는 대결하지 않으려면 1반과 2반을 a, b, c로 이루어진 조와 d, e, f로 이루어진 조에 나누어 배정해야 한다.
나머지 4개의 반을 2개의 반씩 2개의 조로 나누는 경우의 수는
$${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=6\times1\times\frac{1}{2}=3$$
2개의 조를 1반이 포함된 조와 2반이 포함된 조에 분배하는 경우의 수는
$2!=2$
1반이 포함된 3개의 반을 1개의 반, 2개의 반으로 나누는 경우의 수는
${}_3C_1\times{}_2C_2=3\times1=3$
마찬가지로 2반이 포함된 3개의 반을 2개의 반, 1개의 반으로 나누는 경우의 수도 3이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$2\times3\times3\times3=54$

정답_ ④

IV 행렬

12 행렬

858

$a_{11}=1^2-2\times1=-1$, $a_{12}=1^2-2\times2=-3$

$a_{21}=2^2-2\times1=2$, $a_{22}=2^2-2\times2=0$

따라서 $A=\begin{pmatrix}-1&-3\\2&0\end{pmatrix}$이므로 행렬 A의 모든 성분의 합은

$-1+(-3)+2+0=-2$

정답_ ①

859

$a_{11}=1+4=5$, $a_{12}=1-2\times2=-3$, $a_{13}=1-2\times3=-5$

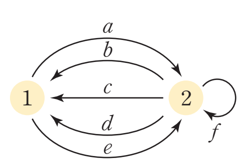
$a_{21}=-a_{12}=3$, $a_{22}=2+4=6$, $a_{23}=2-2\times3=-4$

$a_{31}=-a_{13}=5$, $a_{32}=-a_{23}=4$, $a_{33}=3+4=7$

$\therefore A=\begin{pmatrix}5&-3&-5\\3&6&-4\\5&4&7\end{pmatrix}$

정답_ $\begin{pmatrix}5&-3&-5\\3&6&-4\\5&4&7\end{pmatrix}$

860



1 지점에서 1 지점으로 가는 길은 없으므로 $a_{11}=0$

1 지점에서 2 지점으로 가는 길은 a, e의 2개이므로 $a_{12}=2$

2 지점에서 1 지점으로 가는 길은 b, c, d의 3개이므로 $a_{21}=3$

2 지점에서 2 지점으로 가는 길은 f의 1개이므로 $a_{22}=1$

$\therefore A=\begin{pmatrix}0&2\\3&1\end{pmatrix}$

정답_ ④

861

$a_{11}=$(3의 양의 약수의 개수)$=2$

$a_{12}=$(5의 양의 약수의 개수)$=2$

$a_{21}=$(4의 양의 약수의 개수)$=3$

$a_{22}=$(6의 양의 약수의 개수)$=4$

따라서 $A=\begin{pmatrix}2&2\\3&4\end{pmatrix}$이므로 행렬 A의 모든 성분의 합은

$2+2+3+4=11$

정답_ 11

862

$\begin{pmatrix}a-b&2c+d\\2b-a&-5c-3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$에서

$a-b=1$ ...... ㉠ $\quad 2c+d=0$ ...... ㉡

$2b-a=0$ ...... ㉢ $\quad -5c-3d=1$ ...... ㉣

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $c=1$, $d=-2$

$\therefore a+b+c+d=2+1+1+(-2)=2$

정답_ ②

863

$\begin{pmatrix}a-b&ab\\2&a^3-b^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\2&x\end{pmatrix}$에서

$a-b=-1$, $ab=3$, $a^3-b^3=x$

$\therefore x=a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$\quad =(-1)^3+3\times3\times(-1)=-10$

정답_ ③

864

$\begin{pmatrix}x&-ab\\a+b&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&2\\-1&b^2\end{pmatrix}$에서

$x=a^2$ ...... ㉠ $\quad -ab=2$ ...... ㉡

$a+b=-1$ ...... ㉢ $\quad y=b^2$ ...... ㉣

㉠, ㉣에서 $x+y=a^2+b^2$, $xy=a^2b^2$

㉡, ㉢에서 $a+b=-1$, $ab=-2$이므로

$x+y=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$\quad =(-1)^2-2\times(-2)=5$

$xy=a^2b^2=(ab)^2=(-2)^2=4$

$\therefore \dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}=\dfrac{x^3+y^3}{xy}=\dfrac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$

$\quad =\dfrac{5^3-3\times4\times5}{4}=\dfrac{65}{4}$

정답_ ④

다른 풀이

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x=a^2$, $-ab=2$, $a+b=-1$, $y=b^2$

즉, $a+b=-1$, $ab=-2$이므로 a, b는 t에 대한 이차방정식

$t^2+t-2=0$의 두 근이다.

$t^2+t-2=0$에서

$(t+2)(t-1)=0 \qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=1$

$\therefore a=-2$, $b=1$ 또는 $a=1$, $b=-2$

(i) $a=-2$, $b=1$일 때

$x=(-2)^2=4$, $y=1^2=1$이므로

$\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}=\dfrac{1^2}{4}+\dfrac{4^2}{1}=\dfrac{65}{4}$

(ii) $a=1$, $b=-2$일 때

$x=1^2=1$, $y=(-2)^2=4$이므로

$\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}=\dfrac{4^2}{1}+\dfrac{1^2}{4}=\dfrac{65}{4}$

(i), (ii)에서 $\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}=\dfrac{65}{4}$

865

$\begin{pmatrix}2x&0\\13z&60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&y+7\\5z^2+4y&3z^2+xz\end{pmatrix}$에서

$2x=6$ ...... ㉠ $\quad 0=y+7$ ...... ㉡

$13z=5z^2+4y$ ...... ㉢ $60=3z^2+xz$ ...... ㉣

㉠에서 $x=3$, ㉡에서 $y=-7$

$y=-7$을 ㉢에 대입하면

$13z=5z^2-28$, $5z^2-13z-28=0$

$(5z+7)(z-4)=0$ $\therefore z=-\frac{7}{5}$ 또는 $z=4$ ...... ㉤

$x=3$을 ㉣에 대입하면

$60=3z^2+3z$, $3z^2+3z-60=0$

$z^2+z-20=0$, $(z+5)(z-4)=0$

$\therefore z=-5$ 또는 $z=4$ ...... ㉥

㉤, ㉥에서 $z=4$

$\therefore x^3+y+z^2=3^3-7+4^2=36$

정답_ 36

866

$$A+2B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}4 & -3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & -6\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -4\\ 3 & -5\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A+2B$의 모든 성분의 합은

$7+(-4)+3+(-5)=1$

정답_ ①

867

$X-4A=2(X-B)$에서 $X-4A=2X-2B$

$$\therefore X=2B-4A=2\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4 & 10\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12 & -4\\ 4 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & 14\\ -4 & -6\end{pmatrix}$$

정답_ $\begin{pmatrix}-16 & 14\\ -4 & -6\end{pmatrix}$

868

$$xA+yB=x\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x & -2x\\ 2x & 3x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & y\\ -y & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & -2x+y\\ 2x-y & 3x\end{pmatrix}$$

즉, $\begin{pmatrix}x & -2x+y\\ 2x-y & 3x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -7\\ 7 & 6\end{pmatrix}$이므로

$x=2$, $2x-y=7$ $\therefore x=2$, $y=-3$

$\therefore x-y=2-(-3)=5$

정답_ ④

869

이차방정식 $x^2-4x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-2$

$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 2\beta^2 & \alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & 0\\ -b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\beta & 0\\ -2\alpha^2 & -\beta\end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix}\alpha+a & 0\\ 2\beta^2-b & \alpha+a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\beta & 0\\ -2\alpha^2 & -\beta\end{pmatrix}$$

따라서 $\alpha+a=-\beta$, $2\beta^2-b=-2\alpha^2$이므로

$a=-\alpha-\beta=-(\alpha+\beta)=-4$

$b=2\alpha^2+2\beta^2=2\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}=2\{4^2-2\times(-2)\}=40$

$\therefore a+b=-4+40=36$

정답_ ①

870

A(2, 3), B(5, 1), C(1, 3), D(4, 0)이므로

$P=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 0\end{pmatrix}$

$6X+4P=2(P+Q)+4X$에서 $2X=-2P+2Q$

$$\therefore X=-P+Q=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ -5 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$(-1)+0+(-1)+(-1)=-3$

정답_ -3

871

$X-Y=\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ ...... ㉠

$3X+Y=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 0 & 6\end{pmatrix}$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$4X=\begin{pmatrix}-8 & 0\\ 4 & 8\end{pmatrix}$ $\therefore X=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$\therefore 3X=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}$

정답_ ②

872

$A-2B=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 9 & -6\end{pmatrix}$ ...... ㉠

$A+B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -3 & 0\end{pmatrix}$ ...... ㉡

㉠+㉡×2를 하면

$$3A=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 9 & -6\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2 & -2\\ -3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -9\\ 3 & -6\end{pmatrix}$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

이것을 ㉡에 대입하면

$$\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}+B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -3 & 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -3 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$$

$$\therefore A-B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 5 & -4\end{pmatrix}$$

정답_ $\begin{pmatrix}2 & -4\\ 5 & -4\end{pmatrix}$

873

$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$이므로

$A(A+B)=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4\\1 & -3\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A(A+B)$의 모든 성분의 합은

$2+(-4)+1+(-3)=-4$

정답_ ①

874

ㄱ. B는 2×1 행렬, C는 1×3 행렬로 B, C가 같은 꼴의 행렬이 아니므로 $B+C$는 정의되지 않는다.

ㄴ. C의 열의 개수와 B의 행의 개수가 다르므로 CB는 정의되지 않는다.

ㄷ. A의 열의 개수와 C의 행의 개수가 다르므로 AC는 정의되지 않는다.

ㄹ. $BCD=(BC)D$로 생각하면 B의 열의 개수와 C의 행의 개수가 1로 같으므로 BC는 정의되고, BC는 2×3 행렬이다.
또, BC의 열의 개수와 D의 행의 개수가 3으로 같으므로 $(BC)D$는 정의된다.

따라서 행렬의 연산이 정의되는 것은 ㄹ이다.

정답_ ②

참고 행렬의 곱셈에서 결합법칙이 성립하므로 ㄹ에서 $BCD=B(CD)$로 생각해도 결과는 같다.

875

$\begin{pmatrix}1 & -3\\-1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & a\\5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}2-3a\\-2+4a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3a+ab\\5a-b\end{pmatrix}$

따라서 $2-3a=-3a+ab$, $-2+4a=5a-b$이므로

$ab=2$, $a-b=-2$

$\therefore a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=(-2)^3+3\times2\times(-2)=-20$

정답_ ③

876

$(x\ \ 1)\begin{pmatrix}a & 3\\1 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}=(ax+1\ \ \ 3x+a)\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$

$=(ax^2+4x+a)$

이 행렬의 성분이 음수가 아니므로

$ax^2+4x+a\geq0$ …… ㉠

이때 $a>0$이고 부등식 ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

이차방정식 $ax^2+4x+a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=4-a^2\leq0$, $a^2-4\geq0$

$(a+2)(a-2)\geq0$ $\quad\therefore a\leq-2$ 또는 $a\geq2$

$\therefore a\geq2\ (\because a>0)$

따라서 a의 최솟값은 2이다.

정답_ ④

877

$2\begin{pmatrix}-1 & 2\\0 & 3\end{pmatrix}+A=\begin{pmatrix}-3 & 5\\4 & 6\end{pmatrix}$에서

$A=\begin{pmatrix}-3 & 5\\4 & 6\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1 & 2\\0 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-3 & 5\\4 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 4\\0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\4 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore A^2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -1\\-4 & 4\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^2의 $(1, 2)$ 성분은 -1이다.

정답_ ②

878

$A=\begin{pmatrix}0 & -3\\-3 & 0\end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix}0 & -3\\-3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -3\\-3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 0\\0 & 9\end{pmatrix}$

$A^3=AA^2=\begin{pmatrix}0 & -3\\-3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 0\\0 & 9\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & -27\\-27 & 0\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}0 & -3\\-3 & 0\end{pmatrix}=9A$

$\therefore k=9$

정답_ ①

879

$A^2=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix}$

이때 $A^2=\begin{pmatrix}9 & 0\\1 & 4\end{pmatrix}$이므로

$a^2+bc=9$ …… ㉠

$ab+bd=0$ $\quad\therefore b(a+d)=0$ …… ㉡

$ac+cd=1$ $\quad\therefore c(a+d)=1$ …… ㉢

$bc+d^2=4$ …… ㉣

㉢에서 $a+d\neq0$이므로 ㉡에서 $b=0$

$b=0$을 ㉠에 대입하면 $a^2=9$ $\quad\therefore a=3\ (\because a>0)$

$b=0$을 ㉣에 대입하면 $d^2=4$ $\quad\therefore d=\pm2$

(i) $d=-2$일 때

$a=3$, $d=-2$를 ㉢에 대입하면

$c\{3+(-2)\}=1$ $\quad\therefore c=1$

(ii) $d=2$일 때

$a=3$, $d=2$를 ㉢에 대입하면

$c(3+2)=1$ $\quad\therefore c=\frac{1}{5}$

그런데 이것은 c가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $c=1$, $d=-2$

$\therefore ad-bc=3\times(-2)-0\times1=-6$

정답_ -6

880

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & (-2)^2\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & (-2)^3\end{pmatrix}$

⋮

에서 $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ (단, n은 자연수이다.)

따라서 $A^7=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -128 \end{pmatrix}$이므로

행렬 A^7의 모든 성분의 합은

$1+0+0+(-128)=-127$

정답_ -127

881

$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & (-3)^2 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -27 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & (-3)^3 \end{pmatrix}$

$\vdots$

에서 $A^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$이므로 $\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

따라서 $2^n=64$, $(-3)^n=a$이므로

$2^n=64=2^6$에서 $n=6$ $\quad \therefore a=(-3)^6=729$

$\therefore n+a=6+729=735$

정답_ 735

882

$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

에서 $A^n=\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (단, n은 자연수이다.)

$$\begin{aligned}\therefore\ & A^6-A^5+A^4-A^3+A^2-A+E \\ &=\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad+\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=A^3\end{aligned}$$

정답_ ①

883

$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=4A$

$A^3=A^2A=4AA=4A^2=4\times4A=4^2A$

$A^6=(A^3)^2=(4^2A)^2=4^4A^2=4^4\times4A=4^5A$

$A^{12}=(A^6)^2=(4^5A)^2=4^{10}A^2=4^{10}\times4A=4^{11}A$

따라서 $A^{12}=4^{11}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$이므로 행렬 A^{12}의 모든 성분의 합은

$4^{11}(3+1+3+1)=4^{11}\times8=2\times4^{12}$

즉, $k=2$, $a=12$이므로 $k+a=2+12=14$

정답_ 14

884

A형 선물 세트를 1개 만드는 데 필요한 비용은 $(6x+4y)$원, B형 선물 세트를 1개 만드는 데 필요한 비용은 $(3x+7y)$원이므로 A형, B형 선물 세트를 각각 1개씩 만드는 데 필요한 비용을 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

따라서 A형, B형 선물 세트를 각각 20개, 30개 만드는 데 필요한 총 비용은 $20(6x+4y)+30(3x+7y)$이므로 구하는 행렬은

$\begin{pmatrix} 20 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6x+4y \\ 3x+7y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

정답_ ④

885

$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$

따라서 $\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$이므로

$a=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}$, $b=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}$,

$c=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}$, $d=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}$

ㄱ. a는 제품 가, 나의 지난해 상반기에 판매된 제품의 제조원가 총액이고 b는 제품 가, 나의 지난해 하반기에 판매된 제품의 제조원가 총액이므로 $a+b$는 지난해 1년 동안에 판매된 제품의 제조원가 총액이다. (거짓)

ㄴ. c는 제품 가, 나의 지난해 상반기에 판매된 제품의 판매 총액이고 d는 제품 가, 나의 지난해 하반기에 판매된 제품의 판매 총액이므로 $c+d$는 지난해 1년 동안에 판매된 제품의 판매 총액이다. (참)

ㄷ. d는 제품 가, 나의 지난해 하반기에 판매된 제품의 판매 총액이고 b는 제품 가, 나의 지난해 하반기에 판매된 제품의 제조원가 총액이므로 $d-b$는 두 제품 가, 나의 지난해 하반기에 판매된 제품의 판매 이익금 총액이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ④

886

$(B-A)^2=(B-A)(B-A)=B^2-BA-AB+A^2$

이므로

$$\begin{aligned}A^2+B^2&=(B-A)^2+AB+BA \\ &=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 $a=7$, $b=2$, $c=-2$, $d=1$이므로

$ad-bc=7\times1-2\times(-2)=11$

정답_ 11

887

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$이므로

$AB=BA$

즉, $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ b & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ b & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} a+b & -2a+5 \\ 2+4b & 16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-4 & -7 \\ ab+10 & b+20 \end{pmatrix}$

따라서 $a+b=a-4$, $-2a+5=-7$, $2+4b=ab+10$, $16=b+20$이므로

$a+b=a-4$에서 $b=-4$

$-2a+5=-7$에서 $a=6$

$\therefore a-b=6-(-4)=10$

정답_ 10

주의 위의 풀이에서 $a+b=a-4$, $-2a+5=-7$, $2+4b=ab+10$, $16=b+20$의 네 식 중 두 식

$a+b=a-4$, $-2a+5=-7$

을 이용하여 $a=6$, $b=-4$를 구했다.

이때 나머지 두 식

$2+4b=ab+10$, $16=b+20$

에 $a=6$, $b=-4$를 대입하여도 등식이 성립하는지 반드시 확인하도록 한다.

888

ㄱ. $A*B=AB-BA$

$(-B)*A=-BA-A(-B)=AB-BA$

$B*(-A)=B(-A)-(-A)B=AB-BA$

$\therefore A*B=(-B)*A=B*(-A)$ (참)

ㄴ. $3A*3B=3A(3B)-3B(3A)=9AB-9BA$

$=9(AB-BA)=9(A*B)$ (거짓)

ㄷ. $(A-B)*C=(A-B)C-C(A-B)$

$=AC-BC-CA+CB$

$=(AC-CA)-(BC-CB)$

$=A*C-B*C$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ③

889

주어진 두 등식을 변끼리 더하면

$A\begin{pmatrix} 3a \\ b \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} a \\ 3b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 4a \\ 4b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$, $4A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

정답_ ②

890

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$A^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$

따라서 $A\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x \\ -x+6y \end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3x \\ -x+6y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+z \\ -x+6y+w \end{pmatrix}$

정답_ ③

891

실수 x, y에 대하여 $\begin{pmatrix} 31 \\ 2 \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$가 성립한다고 하면

$\begin{pmatrix} 31 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-y \\ x-5y \end{pmatrix}$

즉, $2x-y=31$, $x-5y=2$이므로 이 두 식을 연립하여 풀면

$x=17$, $y=3$

$\therefore \begin{pmatrix} 31 \\ 2 \end{pmatrix}=17\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

위의 등식의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$A\begin{pmatrix} 31 \\ 2 \end{pmatrix}=17A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+3A\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$=17\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 17 \\ -17 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 \\ -5 \end{pmatrix}$

따라서 $p=26$, $q=-5$이므로

$p+q=26+(-5)=21$

정답_ 21

892

$(A+E)(A^2-A+E)=A^3+E$이고

$A^2=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 25 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 125 & 19 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$

이므로

$(A+E)(A^2-A+E)=A^3+E$

$=\begin{pmatrix} 125 & 19 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 126 & 19 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

정답_ ④

893

$A^3+A^2=-2A-2E$이므로

$A^5+A^4=A^2(A^3+A^2)=A^2(-2A-2E)$

$=-2A^3-2A^2=-2(A^3+A^2)$

$=-2(-2A-2E)=4A+4E$

이때 행렬 A의 모든 성분의 합이 3이므로 행렬 $4A$의 모든 성분의 합은 $4\times3=12$

또, 행렬 $4E=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은 $4+0+0+4=8$

따라서 행렬 A^5+A^4의 모든 성분의 합은

$12+8=20$

정답_ ③

894

$A^2+4A+16E=O$의 양변의 왼쪽에 행렬 $A-4E$를 곱하면

$(A-4E)(A^2+4A+16E)=O$

$A^3-64E=O \qquad \therefore A^3=64E$

따라서

$A^{15}=(A^3)^5=(64E)^5=64^5E=\begin{pmatrix} 64^5 & 0 \\ 0 & 64^5 \end{pmatrix}$

이므로 행렬 A^{15}의 모든 성분의 합은

$64^5+0+0+64^5=2\times64^5$

정답_ ③

895

$A+B=3E$에서 $A=3E-B$

이것을 $AB=E$에 대입하면

$(3E-B)B=E,\ 3B-B^2=E \qquad \therefore B^2=3B-E$

또, $A+B=3E$에서 $B=3E-A$

이것을 $AB=E$에 대입하면

$A(3E-A)=E,\ 3A-A^2=E \qquad \therefore A^2=3A-E$

$\therefore A^2+B^2=(3A-E)+(3B-E)=3(A+B)-2E$

$=3\times3E-2E=7E$

$\therefore k=7$

정답_ 7

896

$(A^2-4E)(A^2+E)=-3A^2-5E$에서

$A^4+A^2-4A^2-4E=-3A^2-5E$

이므로 $A^4=-E$

$\therefore A^8=(A^4)^2=(-E)^2=E$

$\therefore A^{76}=(A^8)^9A^4=E^9(-E)=-E^{10}=-E$

정답_ ②

897

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

$\therefore A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$

$\therefore A^{2013}=(A^4)^{503}A=E^{503}A=A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^{2013}의 모든 성분의 합은

$2+(-1)+5+(-2)=4$

정답_ 4

898

$(E+2A)^2=(E+2A)(E+2A)=E+4A+4A^2$

$(E+2A)^3=(E+2A)^2(E+2A)$

$=(E+4A+4A^2)(E+2A)$

$=E+6A+12A^2+8A^3$

이때 $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E,$

$A^3=A^2A=EA=A$이므로

$(E+2A)^3=E+6A+12A^2+8A^3$

$=E+6A+12E+8A$

$=13E+14A$

따라서 $a=13,\ b=14$이므로

$a+b=13+14=27$

정답_ 27

899

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

$A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$

따라서 $A^n=E$가 되는 경우는 $n=6k$ (k는 자연수)일 때이므로

두 자리 자연수 중에서 가장 큰 수는 96이다.

정답_ 96

900

$a_{11}=1-1=0,\ a_{12}=2-1=1,\ a_{21}=1-2=-1,\ a_{22}=2-2=0$

이므로

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

$A^3=A^2A=-EA=-A$

$A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$

이므로

$A+A^2+A^3+A^4=A-E-A+E=O$

$\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^{2025}$

$=(A+A^2+A^3+A^4)+A^4(A+A^2+A^3+A^4)$

$+\cdots+A^{2020}(A+A^2+A^3+A^4)+A^{2025}$

$=(A^4)^{506}A=A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A+A^2+A^3+\cdots+A^{2025}$의 $(1,\ 2)$ 성분은 1이다.

정답_ 1

901

$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

$A^4=A^3A=-EA=-A$

$A^5=A^4A=-AA=-A^2$

$A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$

이므로

$A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6=A+A^2-E-A-A^2+E$
$=O$

$\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^{152}$
$=(A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6)$
$+A^6(A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6)$
$+\cdots+A^{144}(A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6)+A^{151}+A^{152}$
$=(A^6)^{25}A+(A^6)^{25}A^2=A+A^2$
$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$
$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A+A^2+A^3+\cdots+A^{152}$의 모든 성분의 합은

$0+1+(-3)+0=-2$

정답_ ①

902

ㄱ. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이면

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$

즉, $A\neq O$, $B\neq O$이지만 $AB=O$이다. (거짓)

ㄴ. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$이면

$AC=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$BC=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

즉, $C\neq O$, $AC=BC$이지만 $A\neq B$이다. (거짓)

ㄷ. $2A-B=-E$에서 $B=2A+E$이므로

$AB=A(2A+E)=2A^2+A$

$BA=(2A+E)A=2A^2+A$

$\therefore AB=BA$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

정답_ ②

903

ㄱ. $AE=A$이므로 $AE=O$이면 $A=O$ (참)

ㄴ. $A=2B^2$이면

$AB=2B^2B=2B^3$, $BA=B\times 2B^2=2B^3$

$\therefore AB=BA$ (참)

ㄷ. $A-B=E$의 양변의 왼쪽에 A를 곱하면

$A(A-B)=AE \qquad \therefore A^2-AB=A$

이때 $AB=O$이므로 $A^2=A$

또, $A-B=E$의 양변의 오른쪽에 B를 곱하면

$(A-B)B=EB \qquad \therefore AB-B^2=B$

이때 $AB=O$이므로 $B^2=-B$

$\therefore A^2+B^2=A-B=E$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ㄱ, ㄴ, ㄷ

904

ㄱ. $(A+B)^2=(A-B)^2$에서

$A^2+AB+BA+B^2=A^2-AB-BA+B^2$

$2AB+2BA=O \qquad \therefore AB+BA=O$

따라서 $AB=O$인지는 알 수 없다. (거짓)

ㄴ. $(ABA)^2=(ABA)(ABA)=ABAABA$

$=ABA^2BA=ABEBA$ ($\because A^2=E$)

$=AB^2A=ABA$ ($\because B^2=B$) (참)

ㄷ. $A(A+E)=E$에서 $A^2+A=E$

이 등식의 양변의 오른쪽에 B를 곱하면

$(A^2+A)B=EB$, $A^2B+AB=B$

즉, $AAB+AB=B$이고 $AB=-E$이므로

$-A-E=B$

$\therefore B^2=(-A-E)^2=A^2+2A+E$

이때 $A^2+A=E$에서 $A^2=E-A$이므로

$B^2=A^2+2A+E=(E-A)+2A+E=A+2E$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

참고 ㄱ. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$이면

$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$(A+B)^2=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$

$(A-B)^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$

$\therefore (A+B)^2=(A-B)^2$

그런데

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

이므로 $AB\neq O$ (거짓)

905

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라고 하면 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$

따라서 $a=3$, $b=-7$, $c=1$, $d=-3$이므로

$A=\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-\{3+(-3)\}A+\{3\times(-3)-(-7)\times 1\}E=0$

$A^2-2E=O \qquad \therefore A^2=2E$

$\therefore A^{10}=(A^2)^5=(2E)^5=32E$

정답_ ①

906

케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-\{(-2)+3\}A+\{(-2)\times 3-(-7)\times 1\}E=0$

$A^2-A+E=O \qquad \cdots\cdots ㉠$

㉠의 양변의 왼쪽에 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E)=O$, $A^3+E=O$

$\therefore A^3=-E$

$\therefore A^{100}+A^{101}+A^{102}$
$=(A^3)^{33}A+(A^3)^{33}A^2+(A^3)^{34}$
$=(-E)^{33}\times A+(-E)^{33}\times A^2+(-E)^{34}$
$=-EA-EA^2+E$
$=-A-A^2+E$
$=-A-(A-E)+E$ ($\because$ ㉠에서 $A^2=A-E$)
$=-2A+2E$
따라서 $x=-2$, $y=2$이므로 $xy=-2\times2=-4$

정답_ ①

907

(ⅰ) $A\neq kE$ (k는 실수)일 때
케일리-해밀턴 정리에 의하여 $a+d=1$
(ⅱ) $A=kE$ (k는 실수)일 때
$A=kE$를 $A^2-A-6E=O$에 대입하면
$(kE)^2-kE-6E=O$, $(k^2-k-6)E=O$
$(k+2)(k-3)E=O$ $\quad\therefore k=-2$ 또는 $k=3$
즉, $A=-2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix}$ 또는
$A=3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$이므로
$a+d=-4$ 또는 $a+d=6$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a+d$의 최솟값은 -4이다.

정답_ -4

908

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$에서
$A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$
$\therefore AB=BA$
즉, $\begin{pmatrix}2&a\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&2\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&2\\-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&a\\-1&1\end{pmatrix}$이므로
$\begin{pmatrix}2b-2a&4+4a\\-b-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b-2&ab+2\\-8&-2a+4\end{pmatrix}$
$\therefore 2b-2a=2b-2$, $4+4a=ab+2$,
$-b-2=-8$, $2=-2a+4$
$2b-2a=2b-2$에서 $-2a=-2$ $\quad\therefore a=1$
$-b-2=-8$에서 $b=6$
$\therefore A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&2\\-2&4\end{pmatrix}$
행렬 A에서 케일리-해밀턴 정리에 의하여
$A^2-(2+1)A+\{2\times1-1\times(-1)\}E=O$
$A^2-3A+3E=O$ $\quad\therefore A^2-3A=-3E$
또, 행렬 B에서 케일리-해밀턴 정리에 의하여
$B^2-(6+4)B+\{6\times4-2\times(-2)\}E=O$
$B^2-10B+28E=O$ $\quad\therefore B^2-10B=-28E$
$\therefore A^2+B^2-3A-10B=(A^2-3A)+(B^2-10B)$
$=-3E-28E=-31E$

정답_ ②

909

$a_{12}+a_{21}=9$이므로 $(2a-1)+(a+4)=9$
$3a+3=9$, $3a=6$ $\quad\therefore a=2$ ······ ❶
따라서 $A=\begin{pmatrix}3&3&3\\6&7&8\end{pmatrix}$이므로 ······ ❷
$a_{23}-a_{13}+a_{22}=8-3+7=12$ ······ ❸

정답_ 12

채점 기준	비율
❶ a의 값 구하기	40 %
❷ 행렬 A 구하기	40 %
❸ $a_{23}-a_{13}+a_{22}$의 값 구하기	20 %

910

$X-2Y=6A$ ······ ㉠
$3X+4Y=2B$ ······ ㉡
㉠+㉡을 하면
$4X+2Y=6A+2B$
$\therefore 2X+Y=3A+B$ ······ ❶
$=3\begin{pmatrix}3&-1\\4&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\2&4\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}9&-3\\12&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\2&4\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}10&-3\\14&10\end{pmatrix}$ ······ ❷
따라서 행렬 $2X+Y$의 모든 성분의 합은
$10+(-3)+14+10=31$ ······ ❸

정답_ 31

채점 기준	비율
❶ $2X+Y$를 A, B에 대한 식으로 나타내기	40 %
❷ $2X+Y$를 행렬로 나타내기	40 %
❸ $2X+Y$의 모든 성분의 합 구하기	20 %

911

$A+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ······ ㉠
$A-B=\begin{pmatrix}3-2k&12\\-14&13\end{pmatrix}$ ······ ㉡
㉠+㉡을 하면
$2A=\begin{pmatrix}4-2k&12\\-14&14\end{pmatrix}$ $\quad\therefore A=\begin{pmatrix}2-k&6\\-7&7\end{pmatrix}$ ······ ❶
㉠−㉡을 하면
$2B=\begin{pmatrix}-2+2k&-12\\14&-12\end{pmatrix}$ $\quad\therefore B=\begin{pmatrix}-1+k&-6\\7&-6\end{pmatrix}$ ······ ❷
$\therefore AB=\begin{pmatrix}2-k&6\\-7&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1+k&-6\\7&-6\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}-k^2+3k+40&6k-48\\-7k+56&0\end{pmatrix}$
이때 $AB=O$이므로
$-k^2+3k+40=0$, $6k-48=0$, $-7k+56=0$
$\therefore k=8$ ······ ❸

정답_ 8

채점 기준	비율
❶ 행렬 A 구하기	30 %
❷ 행렬 B 구하기	30 %
❸ k의 값 구하기	40 %

912

$A^2-2A-E=O$에서 $A^2=2A+E$이므로

$A^2\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=(2A+E)\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ ❶

$=2A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}+E\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ ❷

따라서 $a=3$, $b=5$이므로

$a-b=3-5=-2$ ❸

정답_ -2

채점 기준	비율
❶ $A^2=2A+E$를 대입하기	20 %
❷ 행렬 $A^2\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ 구하기	60 %
❸ $a-b$의 값 구하기	20 %

913

$A+B=4E$에서 $A=4E-B$

이것을 $AB=5B$에 대입하면 $(4E-B)B=5B$

$4B-B^2=5B \qquad \therefore B^2=-B$

$A+B=4E$에서 $B=4E-A$

이것을 $AB=5B$에 대입하면 $A(4E-A)=5B$

$4A-A^2=5B \qquad \therefore A^2=4A-5B$ ❶

$\therefore A^2-B^2=(4A-5B)-(-B)$

$=4A-4B=4(A-B)$ ❷

따라서 실수 x의 값은 4이다. ❸

정답_ 4

채점 기준	비율
❶ 행렬 A^2, B^2을 A, B에 대한 식으로 나타내기	60 %
❷ 행렬 A^2-B^2을 A, B에 대한 식으로 나타내기	30 %
❸ 실수 x의 값 구하기	10 %

914

케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-(1+2)A+(1\times2-1\times2)E=O \qquad \therefore A^2-3A=O$

즉, $A^2=3A$이므로

$A^3=A^2A=3AA=3A^2=3\times3A=3^2A$

$A^4=A^3A=3^2AA=3^2A^2=3^2\times3A=3^3A$

$A^5=A^4A=3^3AA=3^3A^2=3^3\times3A=3^4A$

$\vdots$

$\therefore A^{n+1}=3^nA$ (단, n은 자연수이다.) ❶

$\therefore A^{120}+A^{121}=3^{119}A+3^{120}A=3^{119}(1+3)A$

$=4\times3^{119}A=2^2\times3^{119}A$ ❷

따라서 $a=2$, $b=119$이므로

$a+b=2+119=121$ ❸

정답_ 121

채점 기준	비율
❶ $A^{n+1}=3^nA$ 임을 알기	40 %
❷ 행렬 $A^{120}+A^{121}$을 A에 대한 식으로 나타내기	40 %
❸ $a+b$의 값 구하기	20 %

915

조건 (가)에서 $a_{11}=1$, $a_{22}=1$, $a_{33}=1$

P_1에서 P_2로 갈 수 있는 경로의 수는 3이므로 $a_{12}=3$

P_1에서 P_3으로 갈 수 있는 경로의 수는 $3\times2=6$이므로 $a_{13}=6$

P_2에서 P_1로 갈 수 있는 경로의 수는 3이므로 $a_{21}=3$

P_2에서 P_3으로 갈 수 있는 경로의 수는 2이므로 $a_{23}=2$

P_3에서 P_1로 갈 수 있는 경로의 수는 $2\times3=6$이므로 $a_{31}=6$

P_3에서 P_2로 갈 수 있는 경로의 수는 2이므로 $a_{32}=2$

$\therefore A=\begin{pmatrix}1&3&6\\3&1&2\\6&2&1\end{pmatrix}$

정답_ ①

916

행렬 A_1의 $(1, 1)$ 성분 1은 $(1, 2)$ 성분 2보다 작으므로

$A_2=A_1P=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$

또, 행렬 A_2의 $(1, 1)$ 성분 2는 $(1, 2)$ 성분 1보다 작지 않으므로

$A_3=-PA_2=-\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-3\\-2&-1\end{pmatrix}$

같은 방법으로 계속하면

$A_4=A_3P=\begin{pmatrix}-5&-3\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-5\\-1&-2\end{pmatrix}$

$A_5=-PA_4=-\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&-5\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}=A_1$

$A_6=A_2$, $A_7=A_3$, $A_8=A_4$, $\cdots$

이므로 $A_{n+4}=A_n$

$\therefore A_{2005}=A_{4\times501+1}=A_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$

따라서 A_{2005}의 $(2, 1)$ 성분은 3이다.

정답_ 3

917

$A=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&0\\0&b^2\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}a^2&0\\0&b^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^3&0\\0&b^3\end{pmatrix}$

$A^5=A^2A^3=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^5 & 0 \\ 0 & b^5 \end{pmatrix}$

$f(1)=3$에서 $f(1)$은 행렬 A의 $(1,\ 1)$ 성분과 $(2,\ 2)$ 성분의 합이므로 $a+b=3$

$f(2)=7$에서 $f(2)$는 행렬 A^2의 $(1,\ 1)$ 성분과 $(2,\ 2)$ 성분의 합이므로 $a^2+b^2=7$

한편, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로

$7=3^2-2ab,\ 2ab=2 \qquad \therefore ab=1$

$f(5)$는 행렬 A^5의 $(1,\ 1)$ 성분과 $(2,\ 2)$ 성분의 합이므로

$$\begin{aligned} f(5)&=a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-a^2b^2(a+b) \\ &=(a^2+b^2)\{(a+b)^3-3ab(a+b)\}-(ab)^2(a+b) \\ &=7(3^3-3\times1\times3)-1^2\times3=123 \end{aligned}$$

정답_ ③

918

$A=\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}$라고 하면

$A^2=\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 6a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} a^2 & 6a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 & 9a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$

$\vdots$

이므로 $A^n=\begin{pmatrix} a^n & 3na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

행렬 A^n의 모든 성분의 합이 $4a^n$이므로

$a^n+3na^{n-1}+0+a^n=4a^n$

$2a^n=3na^{n-1},\ 2a=3n \qquad \therefore a=\frac{3}{2}n$

이때 n은 자연수, a는 20 이하의 자연수이므로

$a=3,\ 6,\ 9,\ \cdots,\ 18$

따라서 a의 최댓값과 최솟값의 차는

$18-3=15$

정답_ ②

919

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

에서 $A^n=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ㄱ. $A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$에서 $\qquad \therefore n=8$ (거짓)

ㄴ. $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$이므로 n의 값에 관계없이

$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$은 항상 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$이다. (참)

ㄷ. $A^n\begin{pmatrix} 2 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로

행렬 $A^n\begin{pmatrix} 2 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은 n의 값에 관계없이 항상 $2+1=3$이다. (참)

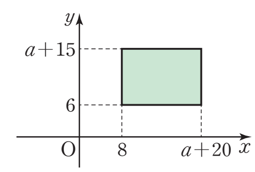
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ④

920

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & a+20 \\ 6 & a+15 \end{pmatrix}$

이므로 행렬 AB에 대응되는 직사각형은 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore S_{AB}=(a+20-8)(a+15-6)$

$\qquad =(a+12)(a+9)$

이때 $S_{AB}=154$이므로

$(a+12)(a+9)=154,\ a^2+21a-46=0$

$(a-2)(a+23)=0 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$

정답_ ③

921

1차, 2차, 3차 조사 결과 각각에서 찬성과 반대 비율을 조사하여 표로 나타내면 다음과 같다.

찬반 / 조사	찬성	반대
1차 조사 결과	0.6	0.4
2차 조사 결과	$0.6\times0.8+0.4\times0.3$	$0.6\times0.2+0.4\times0.7$
3차 조사 결과	$(0.6\times0.8+0.4\times0.3)\times0.9$ $+(0.6\times0.2+0.4\times0.7)\times0.4$	$(0.6\times0.8+0.4\times0.3)\times0.1$ $+(0.6\times0.2+0.4\times0.7)\times0.6$

위의 표에서 알 수 있듯이 3차 조사 결과 전체 사원 중에서 찬성하는 사원들의 비율은

$(0.6\times0.8+0.4\times0.3)\times0.9+(0.6\times0.2+0.4\times0.7)\times0.4$

이고, 이것은 행렬

$ABC=(0.6\ \ 0.4)\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$

의 $(1,\ 1)$ 성분이다.

정답_ ①

922

$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$에서

$AA\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \therefore A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

실수 a, b에 대하여

$a\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$

가 성립한다고 하면

$\begin{pmatrix}-a\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b\\-2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}\qquad \therefore \begin{pmatrix}-a+b\\-2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$

즉, $-a+b=6$, $-2b=-4$이므로 $a=-4$, $b=2$

따라서 $-4\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$이고, $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$이므로 $-4A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+2A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}-4\\-8\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}\qquad \therefore A\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$

즉, $x=-6$, $y=-8$이므로 $x-y=-6-(-8)=2$

정답_ ⑤

923

$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$이면 $A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=A$

$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$이면 $A^2=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=A$

$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$이면 $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=A$

$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$이면 $A^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=A$

$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$이면 $A^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$

즉, $A^2=E$를 만족시키는 행렬 A는 1개이므로 $x=1$

한편, $A^2=A$이면 $A^5=(A^2)^2A=A^2A=AA=A^2=A$

$A^2=E$이면 $A^5=(A^2)^2A=EA=A$

따라서 주어진 행렬은 모두 $A^5=A$를 만족시키므로 $y=5$

$\therefore x+y=1+5=6$

정답_ 6

924

$A^2=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2-b^2&-2ab\\2ab&a^2-b^2\end{pmatrix}$

ㄱ. $A^2=O$이면 $\begin{pmatrix}a^2-b^2&-2ab\\2ab&a^2-b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$이므로

$a^2-b^2=0$, $2ab=0\qquad \therefore a=b=0$

$\therefore A=O$ (참)

ㄴ. $A^2+E=O$이면 $A^2=-E$이므로

$\begin{pmatrix}a^2-b^2&-2ab\\2ab&a^2-b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

즉, $a^2-b^2=-1$, $2ab=0$이므로

$a=0$, $b=-1$ 또는 $a=0$, $b=1$

따라서 조건을 만족시키는 행렬 A는

$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

으로 2개이다. (참)

ㄷ. $A^2-A=O$이면 $A^2=A$이므로

$\begin{pmatrix}a^2-b^2&-2ab\\2ab&a^2-b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}\qquad \therefore a^2-b^2=a$, $2ab=b$

$2ab=b$에서 $(2a-1)b=0$이므로 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $b=0$

(i) $b=0$일 때, $a^2-b^2=a$에서

$a^2=a$, $a(a-1)=0\qquad \therefore a=0$ 또는 $a=1$

(ii) $b\neq0$일 때, $a=\frac{1}{2}$이므로 이것을 $a^2-b^2=a$에 대입하면

$\left(\frac{1}{2}\right)^2-b^2=\frac{1}{2}\qquad \therefore b^2=-\frac{1}{4}$

그런데 b는 실수이므로 이것을 만족시키는 실수 b는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 행렬 A는

$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

로 2개이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

925

$A^2=\begin{pmatrix}x&3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2&3x+3\\0&1\end{pmatrix}$이므로

$f(A^2)=x^2\times1-(3x+3)\times0=x^2$

$2A=2\begin{pmatrix}x&3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x&6\\0&2\end{pmatrix}$이므로

$f(2A)=2x\times2-6\times0=4x$

$f(A^2)=f(2A)$에서

$x^2=4x$, $x(x-4)=0\qquad \therefore x=4\ (\because x>0)$

즉, $A=\begin{pmatrix}4&3\\0&1\end{pmatrix}$이므로 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-(4+1)A+(4\times1-3\times0)E=O$

$\therefore A^2-5A+4E=O$

$\therefore A^3-5A^2+5A=A(A^2-5A+4E)+A$

$=AO+A=A$

정답_ ②

926

$A=\begin{pmatrix}5&-3\\2&-1\end{pmatrix}$에서 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-\{5+(-1)\}A+\{5\times(-1)-(-3)\times2\}E=0$

$A^2-4A+E=O$ …… ㉠

㉠의 양변의 왼쪽에 A^n을 곱하면

$A^{n+2}-4A^{n+1}+A^n=O\qquad \therefore A^{n+2}-4A^{n+1}=-A^n$ …… ㉡

$B=\begin{pmatrix}-1&-1\\3&2\end{pmatrix}$에서 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$B^2-\{(-1)+2\}B+\{(-1)\times2-(-1)\times3\}E=O$

$\therefore B^2-B+E=O$ …… ㉢

㉢의 양변의 왼쪽에 $B+E$를 곱하면

$(B+E)(B^2-B+E)=O$, $B^3+E=O\qquad \therefore B^3=-E$

$\therefore B^{6n}=(B^3)^{2n}=(-E)^{2n}=E$ …… ㉣

㉡, ㉣에서

$(A^{n+2}-4A^{n+1})B^{6n}=-A^nE=-A^n$

이므로 $-A^n=-A^5\qquad \therefore n=5$

정답_ ②