머리말

고등학교 수학의 내신이나 수능 기출 문제 중에는 무척 어렵게 느껴지는 문제들이 많지만 이 문제들은 모두 교과 과정의 개념에서 파생된 문제입니다. 문제를 척 보면

아하! 이것은 무엇을 묻는 문제이구나!

하고 바로 간파할 수 있을까요?

그럴 수 있어야 합니다.

고등학교 수학 문제는 수없이 많지만, 그 기저에는 뼈대가 되는 기본 문제 유형이 있습니다. 이 기본 문제 유형을 정복하는 것이 수학 문제 정복의 열쇠입니다.

- 어려운 문제처럼 보이지만 한 단계만 해결하면 쉬운 문제로 변신하는 문제가 있습니다.
- 낯선 문제처럼 보이지만 한 꺼풀만 벗기면 익숙한 문제로 바뀌는 문제가 있습니다.
- 겉모양은 전혀 다른데 본질을 파악하면 사실상 동일한 문제가 있습니다.

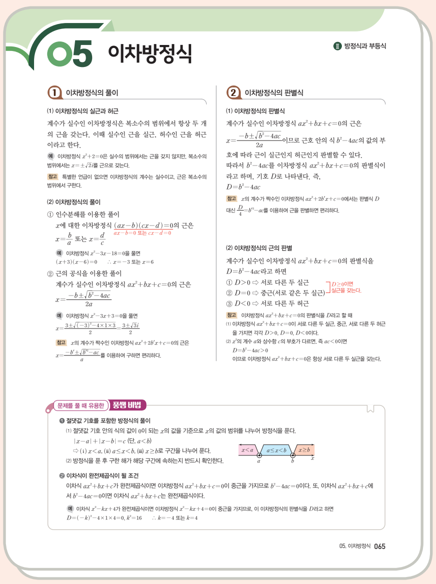
가면을 쓰고 다른 문제인 척 가장할 때 속아 넘어가지 않으려면 어떻게 해야 할까요?

풍산자 필수유형은 **어려운 문제를 쉬운 문제로, 낯선 문제를 익숙한 문제로 바꾸는 능력을 기를 수 있도록 구성한 문제 기본서**로, 세상의 모든 수학 문제를 유형별로 정리하고 분석하여 그 뼈대가 되는 문제들로 구성하였습니다.

몇천 문항씩 되는 많은 문제를 두서없이 풀기보다는 뼈대 문제를 완벽히 이해하고 푼다면 어떠한 수학 문제를 만나도 당당하게 맞설 수 있는 수학의 고수로 다시 태어날 것입니다.

구성과 특징

꼭 필요한 유형으로만 꽉 채운
풍산자 필·수·유·형



핵심 내용 정리

중단원별로 꼭 알아야 하는 개념을 간단하고 명쾌하게 정리하였으며, 예, 참고, 주의 등으로 개념을 쉽게 이해할 수 있도록 하였습니다.

문제를 풀 때 유용한 풍쌤 비법

핵심 내용과 연계되어 문제 풀이에 자주 이용되는 개념과 그 개념을 문제에 적용하는 방법 등을 소개하고 이를 활용할 수 있도록 하였습니다.

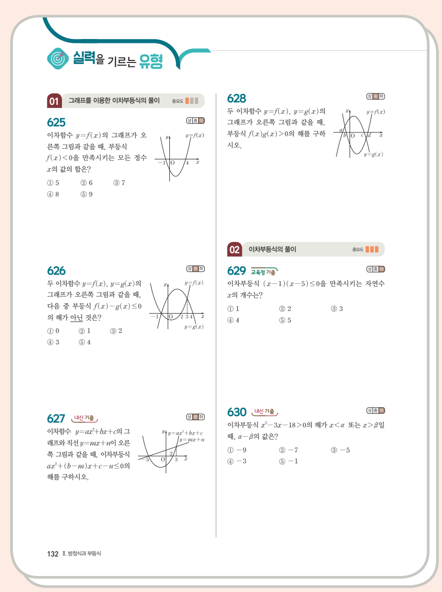
실력을 기르는 유형

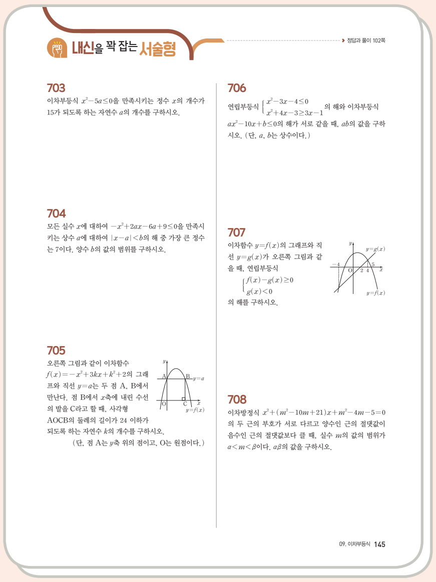
학습에 필요한 문제들을 유형별로 나누고 유형별 중요도와 문항별 난이도를 제시하여 학습 수준에 맞추어 충분한 연습을 할 수 있도록 구성하였습니다.

내신 기출 학교 기출 문제 중 자주 출제되는 유형의 문제입니다.

수능 기출 평가원 기출 교육청 기출

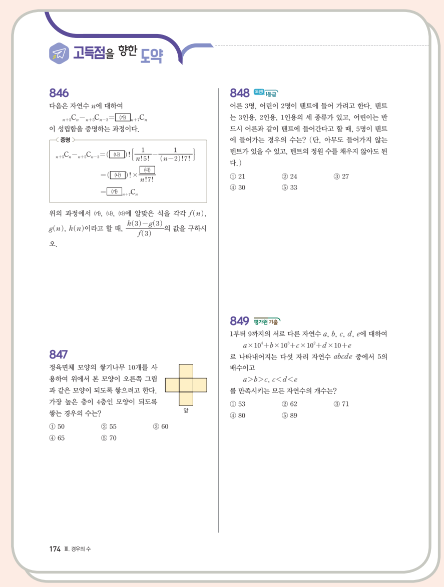
수능 기출 문제와 평가원, 교육청의 학력평가 기출 문제 중 자주 출제되는 유형의 문제입니다.





내신을 꽉 잡는 서술형

핵심적이고 출제 빈도가 높은 서술형 기출 문제로 구성하여 서술형 내신 평가에 대비할 수 있도록 하였습니다.



고득점을 향한 도약

난이도가 높고, 출제 비중이 높은 문제로 구성하여 수학적 사고력과 응용력을 기를 수 있도록 하였습니다.

도전! 1등급

사고력을 키우고 내신 고득점을 대비할 수 있는 고난도 문제입니다.

정답과 풀이

자세하고 친절한 풀이와 다른 풀이로 문제의 출제 의도와 다양한 해결 방향을 이해할 수 있도록 하였습니다.

차례

Ⅰ | 다항식

Ⅱ | 방정식과 부등식

Ⅲ | 경우의 수

Ⅳ | 행렬

I
다항식

01 다항식의 연산

1 다항식의 덧셈과 뺄셈

(1) 다항식의 정리

① 내림차순: 한 문자에 대하여 차수가 높은 항부터 낮은 항의 순서로 나타내는 것

② 오름차순: 한 문자에 대하여 차수가 낮은 항부터 높은 항의 순서로 나타내는 것

예 다항식 $5x+x^3+3$을

① 내림차순으로 정리하면 x^3+5x+3

② 오름차순으로 정리하면 $3+5x+x^3$

참고 다항식은 일반적으로 내림차순으로 정리하고, 다항식을 한 문자에 대하여 내림차순이나 오름차순으로 정리할 때 기준이 되는 문자를 제외한 나머지 문자는 상수로 생각한다.

(2) 다항식의 덧셈과 뺄셈

① 덧셈: 동류항끼리 모아서 정리한다.

② 뺄셈: 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어 더한다.

참고 괄호가 있는 식을 계산할 때, 괄호 앞에

① $+$가 있으면 $A+(B-C)=A+B-C$와 같이 괄호 안의 부호를 그대로 쓴다.

② 괄호 앞에 $-$가 있으면 $A-(B-C)=A-B+C$와 같이 괄호 안의 부호를 반대로 쓴다.

(3) 다항식의 덧셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

① 교환법칙: $A+B=B+A$

② 결합법칙: $(A+B)+C=A+(B+C)$

참고 다항식의 덧셈에서 결합법칙이 성립하므로 $(A+B)+C$와 $A+(B+C)$는 괄호를 생략하여 $A+B+C$로 나타내기도 한다.

2 다항식의 곱셈

(1) 다항식의 곱셈

분배법칙을 이용하여 식을 전개한 다음 동류항끼리 모아서 정리한다.

참고 다항식의 곱셈에서는 지수법칙 $a^m a^n = a^{m+n}$ (m, n은 자연수)을 이용한다.

(2) 다항식의 곱셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

① 교환법칙: $AB=BA$

② 결합법칙: $(AB)C=A(BC)$

③ 분배법칙: $A(B+C)=AB+AC$,
$(A+B)C=AC+BC$

참고 다항식의 곱셈에서 결합법칙이 성립하므로 $(AB)C$와 $A(BC)$는 괄호를 생략하여 ABC로 나타내기도 한다.

(3) 곱셈 공식

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

② $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

③ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

④ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

⑤ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

⑥ $\begin{cases}(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{cases}$

⑦ $\begin{cases}(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3\\(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3\end{cases}$

⑧ $(x+a)(x+b)(x+c)$
$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

⑨ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

⑩ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=a^3+b^3+c^3-3abc$

문제를 풀 때 유용한 풍쌤 비법

❶ **전개식에서 항의 계수 구하기**

전개식에서 특정한 항의 계수를 구하는 문제는 주어진 식을 모두 전개하기보다는 그 항이 나올 수 있는 경우를 찾아 계산하면 편리하다.

예를 들면, (삼차식)×(이차식)에서

(1) x^4의 계수 ⇨ (삼차항)×(일차항)+(이차항)×(이차항)을 계산한다.

(2) x^3의 계수 ⇨ (삼차항)×(상수항)+(이차항)×(일차항)+(일차항)×(이차항)을 계산한다.

(3) x^2의 계수 ⇨ (이차항)×(상수항)+(일차항)×(일차항)+(상수항)×(이차항)을 계산한다.

3 곱셈 공식의 변형

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$\quad=(a-b)^2+2ab$ $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

② $\begin{cases} a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b) \\ a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b) \end{cases}$

③ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

④ $\begin{cases} a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \\ =\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \\ a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \\ =\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\} \end{cases}$

⑤ $a^3+b^3+c^3$
$\quad=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

참고 ④에서

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

또, ①, ②에서 a 대신 x, b 대신 $\frac{1}{x}$을 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

$\begin{cases} x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right) \end{cases}$

4 다항식의 나눗셈

(1) 다항식의 나눗셈

각 다항식을 내림차순으로 정리한 다음 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

참고 다항식의 나눗셈은 나머지의 차수가 나누는 식의 차수보다 낮아질 때까지 나눈다.

(2) 다항식의 나눗셈에 대한 항등식

다항식 A를 다항식 $B\,(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라고 하면

$A=BQ+R$

이때 R는 상수이거나 R의 차수는 B의 차수보다 낮다.

특히, $R=0$, 즉 $A=BQ$이면 A는 B로 나누어떨어진다고 한다.

예 다항식 $3x^3-4x+5$를 다항식 $x+1$로 나누면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2-3x-1 \quad \leftarrow \text{몫} \\
x+1 & 3x^3 \qquad\quad -4x+5 \quad \leftarrow \text{해당 차수의 항이 없으면 그 자리는 비워 둔다.} \\
 & 3x^3+3x^2 \\
\hline
 & -3x^2-4x \\
 & -3x^2-3x \\
\hline
 & -x+5 \\
 & -x-1 \\
\hline
 & 6 \quad \leftarrow \text{나머지}
\end{array}
$$

$\therefore 3x^3-4x+5=(x+1)\underbrace{(3x^2-3x-1)}_{\text{몫}}+\underbrace{6}_{\text{나머지}}$

참고 다항식의 나눗셈은 자연수의 나눗셈과 다르게 나머지가 음수인 경우도 있다.

문제를 풀 때 유용한 **풍쌤 비법**

❷ 곱셈 공식의 변형에서 식의 값 구하기

합 또는 곱의 값이 주어지고 문자가 3개인 경우 식의 값을 구하는 문제는 다음의 곱셈 공식의 변형을 떠올린다.

(1) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

(2) $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

❸ 몫과 나머지의 변형

다항식 $f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$ $(a\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면

$f(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R=\frac{1}{a}(ax+b)Q(x)+R=(ax+b)\times\frac{1}{a}Q(x)+R$

⇨ $f(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{a}Q(x)$, 나머지는 R이다.

실력을 기르는 유형

01 다항식의 덧셈과 뺄셈

중요도

001

상 중 하

두 다항식

$$A=2x^2+5x-1,\ B=x^2-3x+2$$

에 대하여 $A-2B$를 계산하시오. $11x-5$

풀이

$A-2B=2x^2+5x-1-2(x^2-3x+2)$
$=2x^2+5x-1-2x^2+6x-4$
$=11x-5$

002

상 중 하

두 다항식

$$A=x^2-2x+7,\ B=6x^3+x^2+4x-8$$

에 대하여 $2A-3X=-B$를 만족시키는 다항식 X는?

① $2x^3-3x^2+2$　② $2x^3+3x^2+2$
③ $2x^3-x^2-2$　④ $2x^3-x^2+2$
√⑤ $2x^3+x^2+2$

풀이

$X=\frac{1}{3}(2A+B)$
$=\frac{1}{3}\{2(x^2-2x+7)+(6x^3+x^2+4x-8)\}$
$=2x^3+x^2+2$

003

상 중 하

세 다항식

$$A=x^2-2xy+5y^2,\ B=2x^2-y^2,$$
$$C=-4x^2+xy+y^2$$

에 대하여

$$2(3A+B-C)-(5A+B)=ax^2+bxy+cy^2$$

일 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

① -7　② -3　③ 5
④ 7　√⑤ 9

풀이

$2(3A+B-C)-(5A+B)=A+B-2C$
$=(x^2-2xy+5y^2)+(2x^2-y^2)-2(-4x^2+xy+y^2)$
$=11x^2-4xy+2y^2$

따라서 $a=11$, $b=-4$, $c=2$이므로
$a+b+c=9$

004

상 중 하

두 다항식 A, B에 대하여

$$A-B=x^2-3x+2,\ 3A-4B=4x^2-5x+2$$

일 때, $2A-B$를 계산하면?

① $-x^2-10x+4$　② $-x^2-4x+4$
√③ $x^2-10x+8$　④ x^2-4x-4
⑤ x^2+4x-4

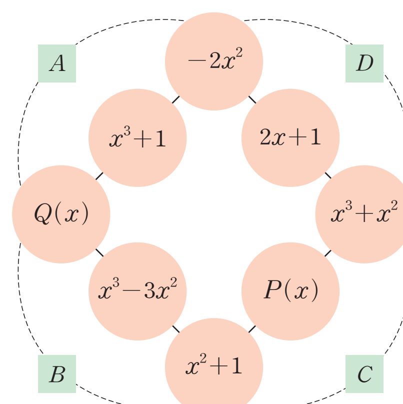
풀이

주어진 두 식을 연립하여 풀면 $A=-7x+6$, $B=-x^2-4x+4$이므로
$2A-B=x^2-10x+8$

005 교육청 기출

상 중 하

다음 그림과 같이 8개의 다항식을 사각형 모양으로 배열하고 각 변에 배열된 3개의 다항식의 합을 각각 A, B, C, D라고 하자. 다항식 A, B, C, D가 x의 값에 관계없이 모두 같을 때, 두 다항식의 합 $P(x)+Q(x)$는?



① $-3x^2+2x$　√② $-2x^2+4x$　③ $-x^2+4x+1$
④ $2x^2+4x$　⑤ $3x^2+2x$

풀이

$C=D=x^3-x^2+2x+1$에서 $P(x)=-3x^2+2x$
$B=D=x^3-x^2+2x+1$에서 $Q(x)=x^2+2x$
$\therefore P(x)+Q(x)=-2x^2+4x$

006 내신 기출

상 중 하

두 다항식 $A=3x^2-x+2$, $B=x^2+5x$에 대하여

$$A\blacktriangle B=2A+B,\ A*B=A-2B$$

로 정의할 때, $(A\blacktriangle B)*B$를 계산하면?

√① $5x^2-7x+4$ ② $5x^2-6x+4$
③ $5x^2-6x+2$ ④ $5x^2+3x+4$
⑤ $5x^2+3x+2$

풀이

$$\begin{aligned}(A\blacktriangle B)*B&=(2A+B)*B\\&=(2A+B)-2B\\&=2A-B\\&=2(3x^2-x+2)-(x^2+5x)\\&=5x^2-7x+4\end{aligned}$$

02 전개식에서 항의 계수

중요도

007 풍쌤 비법 ❶

상 중 하

다항식 $(x^3-3x^2+2x-1)(5x^2+2x+1)$의 전개식에서 x^4의 계수는?

① -4 ② -7 ③ -10
√④ -13 ⑤ -16

풀이

$(x^3-3x^2+2x-1)(5x^2+2x+1)$의 전개식에서 x^4항은
$x^3\times 2x-3x^2\times 5x^2=-13x^4$
따라서 x^4의 계수는 -13이다.

008

상 중 하

x에 대한 다항식 $(x^2-5x+2)(3x^2+x+4a)$의 전개식에서 x^2의 계수가 13일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 √③ 3
④ 4 ⑤ 5

풀이

$(x^2-5x+2)(3x^2+x+4a)$의 전개식에서 x^2항은
$x^2\times 4a-5x\times x+2\times 3x^2=(4a+1)x^2$
즉, $4a+1=13$이므로 $a=3$

009 내신 기출

상 중 하

$(x+1)(x-3)(x+5)(x-6)$의 전개식에서 x^2의 계수는?

① -33 √② -31 ③ -29
④ -27 ⑤ -25

풀이

$(x+1)(x-3)(x+5)(x-6)=(x^2-2x-3)(x^2-x-30)$의 전개식에서 x^2항은
$x^2\times(-30)-2x\times(-x)-3\times x^2=-31x^2$
따라서 x^2의 계수는 -31이다.

010

상 중 하

두 다항식 A, B에 대하여

$$A+B=5x^2+7xy-3y^2,$$
$$3A-B=3x^2+xy-5y^2$$

일 때, 다항식 AB의 전개식에서 x^2y^2의 계수는?

① -2 ② 0 √③ 2
④ 4 ⑤ 6

풀이

$A=2x^2+2xy-2y^2$, $B=3x^2+5xy-y^2$이므로
AB의 전개식에서 x^2y^2항은
$2x^2\times(-y^2)+2xy\times 5xy-2y^2\times 3x^2=2x^2y^2$
따라서 x^2y^2의 계수는 2이다.

011

상 중 하

다항식 $(1+x+2x^2+\cdots+10x^{10})^2$의 전개식에서 x^2의 계수를 a, x^3의 계수를 b라고 할 때, $a-b$의 값은?

√① -5 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 5

풀이

x^2항은
$1\times 2x^2+x\times x+2x^2\times 1=5x^2$
x^3항은
$1\times 3x^3+x\times 2x^2+2x^2\times x+3x^3\times 1=10x^3$
따라서 $a=5$, $b=10$이므로 $a-b=-5$

03 곱셈 공식을 이용한 다항식의 전개 중요도

012 내신 기출 상 중 하

다음 중 다항식의 전개가 옳은 것은?

① $(x+y-1)^2=x^2+y^2+2xy-2x-2y-1$

② $(3x+2)^3=27x^3+18x^2+36x+8$

√③ $(x-5)^3=x^3-15x^2+75x-125$

④ $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=x^3-6y^3$

⑤ $(x^2-2xy+4y^2)(x^2+2xy+4y^2)=x^4-4x^2y^2+16y^4$

풀이

① $(x+y-1)^2=x^2+y^2+2xy-2x-2y+1$

② $(3x+2)^3=27x^3+54x^2+36x+8$

④ $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=x^3-8y^3$

⑤ $(x^2-2xy+4y^2)(x^2+2xy+4y^2)=x^4+4x^2y^2+16y^4$

013 상 중 하

$(x+3)(x-3)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$를 전개하면?

① x^6-54x^3+729　② x^6+54x^3+729

③ x^6+54x^3-729　√④ x^6-729

⑤ x^6+729

풀이

$(x+3)(x-3)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

$=\{(x+3)(x^2-3x+9)\}\{(x-3)(x^2+3x+9)\}$

$=(x^3+27)(x^3-27)$

$=x^6-729$

014 상 중 하

$a=1,\ b=\sqrt{2},\ c=\sqrt{3}$일 때,

$$(a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2+(-a+b+c)^2$$

의 값은?

① 42　② 36　③ 30

√④ 24　⑤ 18

풀이

$(a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2+(-a+b+c)^2$

$=4a^2+4b^2+4c^2$

$=4\times1^2+4\times(\sqrt{2})^2+4\times(\sqrt{3})^2$

$=24$

015 상 중 하

$x=\sqrt{a}$일 때, $(x-1)^3(x+1)^3(x^2+1)^3$을 a에 대한 식으로 나타내면?

√① $a^6-3a^4+3a^2-1$　② $a^6-3a^4+3a^2+1$

③ $a^6+3a^4-3a^2-1$　④ $a^6+3a^4-3a^2+1$

⑤ a^6-2a^3+1

풀이

$(x-1)^3(x+1)^3(x^2+1)^3=\{(x-1)(x+1)(x^2+1)\}^3$

$=\{(x^2-1)(x^2+1)\}^3$

$=(x^4-1)^3$

$=\{(\sqrt{a})^4-1\}^3$

$=(a^2-1)^3$

$=a^6-3a^4+3a^2-1$

04 공통부분이 있는 다항식의 전개 중요도

016 상 중 하

다항식 $(x^2+x+1)(x^2+x+2)$를 전개하시오.

$x^4+2x^3+4x^2+3x+2$

풀이

$x^2+x=A$로 놓으면

$(x^2+x+1)(x^2+x+2)=(A+1)(A+2)$

$=A^2+3A+2$

$=(x^2+x)^2+3(x^2+x)+2$

$=x^4+2x^3+4x^2+3x+2$

017 상 중 하

$(2x-y+3z)(2x-y-3z)$를 전개하면?

√① $4x^2-4xy+y^2-9z^2$

② $4x^2-4xy+y^2-3z^2$

③ $4x^2-4xy+y^2+3z^2$

④ $4x^2+4xy+y^2-9z^2$

⑤ $4x^2+4xy+y^2-3z^2$

풀이

$2x-y=A$로 놓으면

$(2x-y+3z)(2x-y-3z)=(A+3z)(A-3z)$

$=A^2-9z^2$

$=(2x-y)^2-9z^2$

$=4x^2-4xy+y^2-9z^2$

018

상 중 하

$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)$를 전개한 식이 $x^4+4x^3+ax^2+bx+24$일 때, $a-b$의 값을 구하시오. 15

(단, a, b는 상수이다.)

풀이

$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)$

에서 $x^2+2x=A$로 놓으면

$(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)=(A-3)(A-8)=A^2-11A+24$

$=(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24$

$=x^4+4x^3-7x^2-22x+24$

따라서 $a=-7$, $b=-22$이므로 $a-b=15$

019

상 중 하

$x=\sqrt{3}$일 때,

$$\{(5+3x)^3-(5-3x)^3\}^2-\{(5+3x)^3+(5-3x)^3\}^2$$

의 값은?

① 20 ② 24 ③ 28

√④ 32 ⑤ 36

풀이

$(5+3x)^3=A$, $(5-3x)^3=B$로 놓으면

$\{(5+3x)^3-(5-3x)^3\}^2-\{(5+3x)^3+(5-3x)^3\}^2$

$=(A-B)^2-(A+B)^2$

$=-4AB=-4(5+3x)^3(5-3x)^3$

$=-4(25-9x^2)^3$

$=-4\{25-9\times(\sqrt{3})^2\}^3$

$=-4\times(-8)=32$

05 곱셈 공식의 변형(1)

중요도

020

상 중 하

$x-y=2$, $x^3-y^3=26$일 때, xy의 값은?

① 2 √② 3 ③ 4

④ 5 ⑤ 6

풀이

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$에서

$26=2^3+3xy\times2$ $\quad\therefore xy=3$

021

상 중 하

$x+y=6$, $xy=4$일 때, $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5

√④ 7 ⑤ 9

풀이

$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}$

$=\dfrac{6^2-2\times4}{4}=7$

022 교육청 기출

상 중 하

두 실수 a, b에 대하여 $a+b=3$, $a^2+b^2=7$일 때, a^4+b^4의 값은?

① 39 ② 41 ③ 43

④ 45 √⑤ 47

풀이

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$7=3^2-2ab$ $\quad\therefore ab=1$

$\therefore a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2$

$=7^2-2\times1^2=47$

023 내신 기출

상 중 하

$x-y=1$, $xy=2$일 때, $(x+y)(x^2-xy+y^2)$의 값은?

(단, $x>0$, $y>0$)

① 5 ② 6 ③ 7

④ 8 √⑤ 9

풀이

$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=1^2+4\times2=9$이므로

$x+y=3$ ($\because x>0, y>0$)

$\therefore (x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$

$=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=3^3-3\times2\times3=9$

024 내신 기출

상 중 하

$x^2-4x-1=0$일 때, $x^3-\frac{1}{x^3}$의 값은?

① 60　② 64　③ 68
④ 72　√⑤ 76

풀이
$x\neq0$이므로 $x^2-4x-1=0$의 양변을 x로 나누어 정리하면
$x-\frac{1}{x}=4$

$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$
$=4^3+3\times4=76$

025

상 중 하

$x^2+\frac{1}{x^2}=7$일 때, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값은? (단, $x>0$)

√① 18　② 20　③ 22
④ 24　⑤ 26

풀이
$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$에서 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9$　$\therefore x+\frac{1}{x}=3$ ($\because x>0$)

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=3^3-3\times3=18$

026

상 중 하

$x^2+3x+1=0$일 때, $2x^3+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}$의 값은?

① -28　√② -29　③ -30
④ -31　⑤ -32

풀이
$x\neq0$이므로 $x^2+3x+1=0$의 양변을 x로 나누어 정리하면
$x+\frac{1}{x}=-3$

한편, $2x^3+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}=x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$ …… ㉠

이고, $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=(-3)^2-2=7$,

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=(-3)^3-3\times(-3)=-18$

이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$2x^3+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}=7+2\times(-18)=-29$

06 곱셈 공식의 변형(2)

중요도

027 풍쌤 비법 ❷

상 중 하

$a+b+c=3$, $ab+bc+ca=-1$, $abc=-3$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $a^2+b^2+c^2$　11　　(2) $a^3+b^3+c^3$　27

풀이
(1) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=3^2-2\times(-1)=11$
(2) $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=3\times\{11-(-1)\}+3\times(-3)=27$

028

상 중 하

$a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=3$, $a^3+b^3+c^3=1$일 때, abc의 값은?

√① -1　② -2　③ -3
④ -4　⑤ -5

풀이
$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서
$3=1^2-2(ab+bc+ca)$　$\therefore ab+bc+ca=-1$
$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$에서
$1=1\times\{3-(-1)\}+3abc$
$\therefore abc=-1$

029

상 중 하

$a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=7$, $abc=1$일 때,
$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$의 값은?

① 1　② 3　③ 5
√④ 7　⑤ 9

풀이
$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2}$
$=\frac{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)}{(abc)^2}$ …… ㉠
이때 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서
$7=1^2-2(ab+bc+ca)$　$\therefore ab+bc+ca=-3$
이것을 ㉠에 대입하면
$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{(-3)^2-2\times1\times1}{1^2}=7$

07 곱셈 공식을 이용한 수의 계산 중요도

030 상중하

$99^3+3\times99^2+3\times99+1$을 계산하면?

① 10^4 ② 10^5 √③ 10^6
④ 10^7 ⑤ 10^8

풀이
$99^3+3\times99^2+3\times99+1=(99+1)^3=100^3=10^6$

031 상중하

$(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)$을 간단히 하면?

① $3^{16}+2^{16}$ ② $3^{16}-2^{16}$ ③ 3^8+2^8
√④ 3^8-2^8 ⑤ 3^4-2^4

풀이
$(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)=(3-2)(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)$
$=(3^2-2^2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)$
$=(3^4-2^4)(3^4+2^4)$
$=3^8-2^8$

032 교육청 기출 상중하

$\dfrac{2022\times(2023^2+2024)}{2024\times2023+1}$의 값은?

① 2018 ② 2020 √③ 2022
④ 2024 ⑤ 2026

풀이
$2023=a$로 놓으면
$\dfrac{2022\times(2023^2+2024)}{2024\times2023+1}=\dfrac{(a-1)\times\{a^2+(a+1)\}}{(a+1)\times a+1}$
$=\dfrac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}$
$=a-1=2023-1=2022$

033 내신 기출 상중하

$1001\times(1000^2-999)=10^a+b$일 때, 상수 a, b의 값은? (단, b는 한 자리 정수이다.)

① $a=6$, $b=-1$ ② $a=6$, $b=1$
③ $a=9$, $b=-1$ √④ $a=9$, $b=1$
⑤ $a=12$, $b=1$

풀이
$1000=X$로 놓으면
$1001\times(1000^2-999)=(X+1)\{X^2-(X-1)\}$
$=(X+1)(X^2-X+1)$
$=X^3+1=1000^3+1=10^9+1$
$\therefore a=9, b=1$

034 상중하

$\dfrac{(781-\sqrt{785})^3+(781+\sqrt{785})^3}{781}$의 일의 자리의 숫자를 구하시오. 2

풀이
$781=a$, $\sqrt{785}=b$로 놓으면
$\dfrac{(781-\sqrt{785})^3+(781+\sqrt{785})^3}{781}=\dfrac{(a-b)^3+(a+b)^3}{a}=2a^2+6b^2$
$=2\times781^2+6\times785$
2×781^2의 일의 자리의 숫자는 2, 6×785의 일의 자리의 숫자는 0이므로 구하는 일의 자리의 숫자는
$2+0=2$

08 다항식의 나눗셈 중요도

035 상중하

다항식 $2x^3+x^2+3x$를 x^2+1로 나누었을 때의 몫과 나머지는?

√① 몫: $2x+1$, 나머지: $x-1$
② 몫: $2x+1$, 나머지: $x+1$
③ 몫: $2x+1$, 나머지: $-x-1$
④ 몫: $2x-1$, 나머지: $x-1$
⑤ 몫: $2x-1$, 나머지: $x+1$

풀이

$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ x^2+1\,\overline{)\,2x^3+x^2+3x} \\ \underline{2x^3+2x} \\ x^2+x \\ \underline{x^2+1} \\ x-1 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $2x+1$, 나머지: $x-1$

036 내신 기출

상중하

다항식 x^3+x^2-5x+2를 다항식 A로 나누었을 때의 몫은 $x-1$, 나머지는 $-2x+1$이다. 이때 다항식 A를 구하시오. x^2+2x-1

풀이

$x^3+x^2-5x+2=A(x-1)-2x+1$에서

$A(x-1)=x^3+x^2-3x+1$

$\therefore A=(x^3+x^2-3x+1)\div(x-1)$

$=x^2+2x-1$

037

상중하

다항식 $3x^3+2x^2-x+5$를 x^2+3x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라고 할 때, $Q(1)+R(0)$의 값은?

① -11 √② -13 ③ -15

④ -17 ⑤ -19

풀이

$Q(x)=3x-7$, $R(x)=26x-9$이므로

$Q(1)+R(0)=-4+(-9)=-13$

038

상중하

다항식 $3x^3-2x^2+5x+a$를 x^2-x+b로 나누었을 때의 나머지가 $9x+6$일 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① -4 ② -2 ③ 0

④ 2 √⑤ 4

풀이

나머지는 $(6-3b)x+a-b$이므로

$(6-3b)x+a-b=9x+6$

$6-3b=9$, $a-b=6$ $\therefore a=5$, $b=-1$

$\therefore a+b=4$

039 교육청 기출

상중하

다항식 x^3+ax^2-x-1을 x^2-1로 나눈 몫은 $Q(x)$이고, 나머지는 상수 R이다. $Q(a)=R$일 때, 실수 a의 값은?

① -2 √② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

풀이

$Q(x)=x+a$, $R=-1+a$이므로

$Q(a)=R$에서 $a+a=-1+a$

$\therefore a=-1$

040 내신 기출

상중하

다항식 $f(x)$를 x^3-x^2+5로 나누었을 때의 몫은 x^2+2이고 나머지는 $3x^2-4x+1$이다. 이때 $f(x)$를 x^2+2로 나누었을 때의 나머지는?

① $4x+7$ ② $4x+5$ √③ $-4x-5$

④ $-4x-7$ ⑤ $-4x-9$

풀이

$f(x)=(x^3-x^2+5)(x^2+2)+3x^2-4x+1$

$=(x^3-x^2+5)(x^2+2)+3(x^2+2)-4x-5$

$=(x^2+2)(x^3-x^2+8)-4x-5$

이므로 $f(x)$를 x^2+2로 나누었을 때의 나머지는 $-4x-5$이다.

09 몫과 나머지의 변형

중요도

041 풍쌤 비법 ❸

상중하

다항식 $f(x)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 할 때, $f(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하시오. 몫: $2Q(x)$, 나머지: R

풀이

$f(x)=(2x+1)Q(x)+R=\left(x+\frac{1}{2}\right)\times 2Q(x)+R$

이므로 $f(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2Q(x)$, 나머지는 R이다.

042

상|중|하

다항식 $f(x)$를 $x-\frac{2}{3}$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 할 때, $xf(x)$를 $3x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 차례대로 나열한 것은?

① $\frac{x}{3}Q(x)+\frac{R}{3}$, $\frac{R}{3}$ √② $\frac{x}{3}Q(x)+\frac{R}{3}$, $\frac{2}{3}R$

③ $\frac{x}{3}Q(x)+\frac{R}{3}$, R ④ $xQ(x)+R$, R

⑤ $xQ(x)+R$, $2R$

풀이

$f(x)=\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R$이므로

$xf(x)=x\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+Rx=\frac{x}{3}(3x-2)Q(x)+\frac{R}{3}(3x-2)+\frac{2}{3}R$

$\quad=(3x-2)\left\{\frac{x}{3}Q(x)+\frac{R}{3}\right\}+\frac{2}{3}R$

따라서 $xf(x)$를 $3x-2$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{x}{3}Q(x)+\frac{R}{3}$, 나머지는 $\frac{2}{3}R$이다.

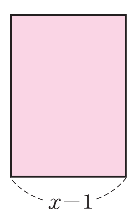
10 다항식의 연산의 도형에의 활용

중요도

043

상|중|하

오른쪽 그림과 같은 직사각형의 가로의 길이가 $x-1$, 넓이가 $3x^3-2x^2-x$일 때, 세로의 길이를 구하시오. $3x^2+x$



풀이

(세로의 길이)$=(3x^3-2x^2-x)\div(x-1)$

$\quad=3x^2+x$

044

상|중|하

한 모서리의 길이가 $2x-3$인 정육면체의 부피가 $8x^3+ax^2+bx-27$일 때, $a-b$의 값은?

√① -90 ② -54 ③ -18

④ 18 ⑤ 54

풀이

정육면체의 부피는

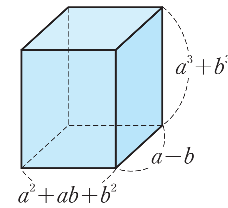
$(2x-3)^3=8x^3-36x^2+54x-27$

따라서 $a=-36$, $b=54$이므로 $a-b=-90$

045

상|중|하

오른쪽 그림과 같은 직육면체의 부피는?



√① a^6-b^6

② a^6+b^6

③ $a^6-a^3b^3+b^6$

④ $a^6+a^3b^3+b^6$

⑤ $a^6+2a^3b^3+b^6$

풀이

직육면체의 부피는

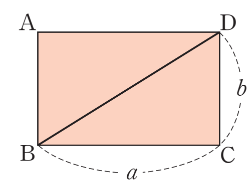
$(a^2+ab+b^2)(a-b)(a^3+b^3)=(a^3-b^3)(a^3+b^3)$

$\quad=a^6-b^6$

046

상|중|하

오른쪽 그림과 같은 직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 26, 넓이가 40일 때, $\overline{\mathrm{BD}}^2$의 값을 구하시오. 89



풀이

$a+b=13$, $ab=40$이므로

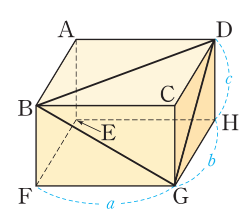
$\overline{\mathrm{BD}}^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$\quad=13^2-2\times40=89$

047 내신 기출

상|중|하

오른쪽 그림과 같은 직육면체의 겉넓이가 62이고, 삼각형 BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합이 76일 때, 이 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은?



① 36 ② 38 √③ 40

④ 42 ⑤ 44

풀이

$2(ab+bc+ca)=62$에서 $ab+bc+ca=31$

$(a^2+b^2)+(a^2+c^2)+(b^2+c^2)=76$에서 $a^2+b^2+c^2=38$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=38+2\times31=100$에서

$a+b+c=10$ ($\because a>0, b>0, c>0$)

$\therefore 4(a+b+c)=4\times10=40$

048

세 다항식 A, B, C에 대하여

$A+B=3x^2+x-2$, …… ㉠

$B+C=-x^2+5x+1$, …… ㉡

$C+A=2x^2-4x-1$ …… ㉢

이고 $f(x)=A+B+C$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. 2

풀이

㉠+㉡+㉢을 하면

$2A+2B+2C=4x^2+2x-2$ ---- 60 %

$\therefore A+B+C=2x^2+x-1$

따라서 $f(x)=2x^2+x-1$이므로 ---- 20 %

$f(1)=2+1-1=2$ ---- 20 %

049

다항식 $(x+2)^2(2x-1)^3$의 전개식에서 x^2의 계수를 a, x^3의 계수를 b라고 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. -35

풀이

$(x+2)^2(2x-1)^3=(x^2+4x+4)(8x^3-12x^2+6x-1)$

의 전개식에서 x^2항은

$x^2\times(-1)+4x\times6x+4\times(-12x^2)=-25x^2$

이므로 $a=-25$ ---- 40 %

또, x^3항은

$x^2\times6x+4x\times(-12x^2)+4\times8x^3=-10x^3$

이므로 $b=-10$ ---- 40 %

$\therefore a+b=-25+(-10)=-35$ ---- 20 %

050

$x^9=24$일 때, $(x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^3+1)$의 값을 구하시오. 25

풀이

$(x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^3+1)=(x^3+1)(x^6-x^3+1)$

$=x^9+1$ ---- 80 %

$=24+1=25$ ---- 20 %

051

두 실수 a, b에 대하여

$(a+b+1)\{(a+b)^2-a-b+1\}=28$,

$ab=-4$

일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. 17

풀이

$a+b=x$로 놓으면 $(a+b+1)\{(a+b)^2-a-b+1\}=28$에서

$(x+1)(x^2-x+1)=28$, $x^3+1=28$, $x^3=27$

$\therefore x=3$ ($\because$ x는 실수)

따라서 $a+b=3$이므로 ---- 50 %

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ ---- 30 %

$=3^2-2\times(-4)=17$ ---- 20 %

052

$x^2+2x-1=0$일 때, 삼차식 x^3-5x^2+3x+2의 값은 일차식 $ax-5$의 값과 같다. 이때 상수 a의 값을 구하시오. 18

풀이

주어진 조건에 의하여 x^3-5x^2+3x+2를 x^2+2x-1로 나누었을 때의 나머지는 $ax-5$이다. ---- 40 %

$$\begin{array}{r|l} & x-7 \\ x^2+2x-1 & x^3-5x^2+3x+2 \\ & x^3+2x^2-x \\ \hline & -7x^2+4x+2 \\ & -7x^2-14x+7 \\ \hline & 18x-5 \end{array}$$

---- 40 %

$\therefore a=18$ ---- 20 %

053

겉넓이가 22이고, 모든 모서리의 길이의 합이 24인 직육면체의 대각선의 길이를 구하시오. $\sqrt{14}$

풀이

직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라고 하면 직육면체의 겉넓이가 22이므로

$2ab+2bc+2ca=22$ $\therefore ab+bc+ca=11$ ---- 30 %

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 24이므로

$4a+4b+4c=24$ $\therefore a+b+c=6$ ---- 30 %

따라서 직육면체의 대각선의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}$

$=\sqrt{6^2-2\times11}=\sqrt{14}$ ---- 40 %

정답과 풀이 007쪽

054

세 다항식

$A=3x^2+2$, $B=x^2+3x-5$, $C=4x^2-5x$

에 대하여 다항식 $(A-3B)(2B+C)(C-A)$의 전개식이 $a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$일 때, $a_0+a_1+\cdots+a_5$의 값은?

① 126 ② 132 ③ 138
√④ 144 ⑤ 150

풀이
$A-3B=-9x+17$, $2B+C=6x^2+x-10$, $C-A=x^2-5x-2$이므로
$(A-3B)(2B+C)(C-A)=(-9x+17)(6x^2+x-10)(x^2-5x-2)$
이때 $(A-3B)(2B+C)(C-A)=P(x)$라고 하면 $a_0+a_1+\cdots+a_5$의 값은 $P(1)$의 값과 같다.
$\therefore a_0+a_1+\cdots+a_5=P(1)=8\times(-3)\times(-6)=144$

055

세 실수 x, y, z가 다음을 모두 만족시킬 때, $8xyz$의 값은?

(가) x, y, $4z$ 중에서 적어도 하나는 5이다.
(나) $5(x+y+4z)=xy+4yz+4zx$

① 100 ② 150 ③ 200
√④ 250 ⑤ 300

풀이
조건 (가)에 의하여 $(x-5)(y-5)(4z-5)=0$
즉, $(-5+x)(-5+y)(-5+4z)=0$이므로
$(-5)^3+(x+y+4z)\times(-5)^2+(xy+4yz+4zx)\times(-5)+4xyz=0$
$-125+25(x+y+4z)-5(xy+4yz+4zx)+4xyz=0$
조건 (나)에 의하여
$-125+25(x+y+4z)-5\times5(x+y+4z)+4xyz=0$ $\quad\therefore xyz=\frac{125}{4}$
$\therefore 8xyz=8\times\frac{125}{4}=250$

056

$x+y=2$, $x^2+y^2=3$일 때, $x^7+y^7+x^4y^3+x^3y^4$의 값은?

① $\frac{83}{2}$ ② 42 √③ $\frac{85}{2}$
④ 43 ⑤ $\frac{87}{2}$

풀이
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서 $3=2^2-2xy$ $\quad\therefore xy=\frac{1}{2}$
한편, $(x^3+y^3)(x^4+y^4)=x^7+x^3y^4+x^4y^3+y^7$이고
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=2^3-3\times\frac{1}{2}\times2=5$,
$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=3^2-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{17}{2}$
이므로
$x^7+y^7+x^4y^3+x^3y^4=(x^3+y^3)(x^4+y^4)$
$=5\times\frac{17}{2}=\frac{85}{2}$

057

$x-\frac{1}{y}=3+\sqrt{5}$, $\frac{1}{x}-y=3-\sqrt{5}$일 때, x^3-y^3의 값은?

① 16 √② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

풀이
$x-\frac{1}{y}=3+\sqrt{5}$ …… ㉠
$\frac{1}{x}-y=3-\sqrt{5}$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면 $x-y-\frac{x-y}{xy}=6$ …… ㉢
㉠×㉡을 하면 $xy+\frac{1}{xy}+2=0$
$xy=t$로 놓으면
$t+\frac{1}{t}+2=0$, $t^2+2t+1=0$, $(t+1)^2=0$ $\quad\therefore t=-1$
즉, $xy=-1$이므로 이것을 ㉢에 대입하여 정리하면 $x-y=3$
$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)=3^3+3\times(-1)\times3=18$

058

$x-y=2$, $x^3-y^3=26$일 때, x^5-y^5의 값을 구하시오. 242

풀이
$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$에서
$26=2^3+3xy\times2$, $6xy=18$ $\quad\therefore xy=3$
한편, $x^5-y^5=(x^2+y^2)(x^3-y^3)-x^2y^2(x-y)$ …… ㉠
이고
$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=2^2+2\times3=10$
이므로 이것을 ㉠에 대입하면
$x^5-y^5=10\times26-3^2\times2=242$

059

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3}{2}$, $abc=4$, $(a+b)(b+c)(c+a)=50$ 일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은?

① 61 ② 65 √③ 69
④ 73 ⑤ 77

풀이

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$에서

$\frac{3}{2}=\frac{ab+bc+ca}{4}$ $\therefore ab+bc+ca=6$

$a+b+c=A$로 놓으면 $(a+b)(b+c)(c+a)=50$에서

$(A-c)(A-a)(A-b)=50$

$A^3-(a+b+c)A^2+(ab+bc+ca)A-abc=50$

이때 $A=a+b+c$이므로

$(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc=50$

$6(a+b+c)-4=50$ $\therefore a+b+c=9$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=9^2-2\times6=69$

060

$x+y+z=1$, $x^2+y^2+z^2=9$, $x^3+y^3+z^3=1$일 때, $\frac{x^4+y^4+z^4}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$의 값은?

① $\frac{7}{13}$ ② $\frac{8}{11}$ √③ $\frac{11}{8}$
④ $\frac{13}{7}$ ⑤ $\frac{33}{8}$

풀이

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$에서

$9=1^2-2(xy+yz+zx)$ $\therefore xy+yz+zx=-4$

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$에서

$1-3xyz=1\times(9+4)$ $\therefore xyz=-4$

이때

$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2$

$=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$

$=(-4)^2-2\times(-4)\times1=24$

$x^4+y^4+z^4=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$

$=9^2-2\times24=33$

이므로

$\frac{x^4+y^4+z^4}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}=\frac{33}{24}=\frac{11}{8}$

061

다항식 $(x^2+2x+3)^3$을 x^2+2로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라고 할 때, $R(-3)$의 값은?

① -9 ② -5 ③ -1
④ 3 √⑤ 7

풀이

$x^2+2x+3=(x^2+2)+(2x+1)$이므로 $x^2+2=A$, $2x+1=B$로 놓으면

$(x^2+2x+3)^3$

$=(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3=A(A^2+3AB+3B^2)+B^3$

$=(x^2+2)\{(x^2+2)^2+3(x^2+2)(2x+1)+3(2x+1)^2\}+(2x+1)^3$

따라서 $(x^2+2x+3)^3$을 x^2+2로 나누었을 때의 나머지는 $(2x+1)^3$, 즉 $8x^3+12x^2+6x+1$을 x^2+2로 나누었을 때의 나머지와 같다.

$$\begin{array}{r} 8x+12 \\ x^2+2 \overline{)\,8x^3+12x^2+6x+1} \\ \underline{8x^3\quad\quad+16x} \\ 12x^2-10x+1 \\ \underline{12x^2\quad\quad+24} \\ -10x-23 \end{array}$$

따라서 $R(x)=-10x-23$이므로

$R(-3)=-10\times(-3)-23=7$

062

다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 할 때, 다음 중 $(x^2+1)f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 차례대로 나열한 것은?

① $(x^2+1)Q(x)$, R
② $(x^2+1)Q(x)$, $2R$
③ $(x^2+1)Q(x)+xR$, $-2R$
④ $(x^2+1)Q(x)+(x-1)R$, R
√⑤ $(x^2+1)Q(x)+(x-1)R$, $2R$

풀이

$f(x)=(x+1)Q(x)+R$이므로 양변에 x^2+1을 곱하면

$(x^2+1)f(x)=(x^2+1)(x+1)Q(x)+(x^2+1)R$

$=(x^2+1)(x+1)Q(x)+\{(x+1)(x-1)+2\}R$

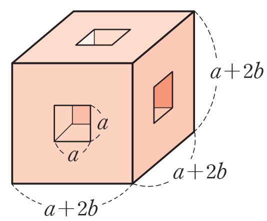
$=(x^2+1)(x+1)Q(x)+(x+1)(x-1)R+2R$

$=(x+1)\{(x^2+1)Q(x)+(x-1)R\}+2R$

따라서 $(x^2+1)f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 $(x^2+1)Q(x)+(x-1)R$, 나머지는 $2R$이다.

063

다음 그림은 한 모서리의 길이가 $a+2b$인 정육면체의 각 면의 한 가운데에 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이와 높이가 각각 a, a, $a+2b$인 직육면체 모양으로 구멍을 뚫은 것이다.



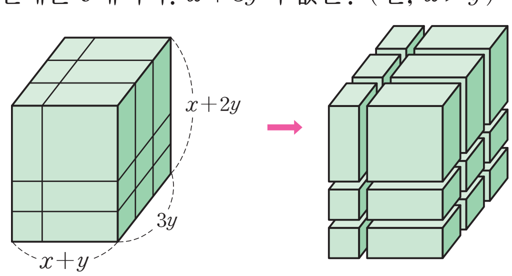
직육면체 모양의 각 밑면의 모서리가 정육면체의 모서리와 평행할 때, 이 입체도형의 부피는?

① $-a^3+12ab^2+8b^3$　② $a^3+12ab^2+8b^3$
③ $12ab^2+6b^3$　✓④ $12ab^2+8b^3$
⑤ $12a^2b+8b^3$

풀이
입체도형의 부피는
$(a+2b)^3-3a^2(a+2b)+2a^3=a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3-3a^3-6a^2b+2a^3$
$=12ab^2+8b^3$

064 도전! 1등급

서로소인 두 자연수 x, y에 대하여 세 모서리의 길이가 각각 $x+y$, $3y$, $x+2y$인 직육면체가 있다. 이 직육면체를 다음 그림과 같이 각 모서리의 길이가 x 또는 y가 되도록 18개의 작은 직육면체로 나누었을 때, 부피가 50인 직육면체는 9개이다. $x+3y$의 값은? (단, $x>y$)



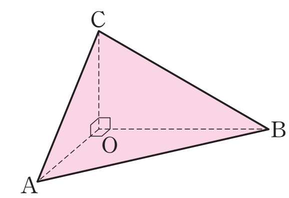
① 50　✓② 53　③ 56
④ 59　⑤ 62

풀이
처음 직육면체의 부피는 $(x+y)\times 3y\times(x+2y)=3x^2y+9xy^2+6y^3$
이때 부피가 50인 직육면체가 9개이므로
$xy^2=50=2\times 5^2=50\times 1^2$
x, y는 서로소인 자연수이고 $x>y$이므로 $x=50$, $y=1$
$\therefore x+3y=50+3\times 1=53$

065 교육청 기출

사면체 OABC가 다음 조건을 만족한다.

> (가) 세 선분 OA, OB, OC는 점 O에서 서로 수직이다.
> (나) $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=9$이다.
> (다) 세 삼각형 OAB, OBC, OCA의 넓이의 합은 13이다.

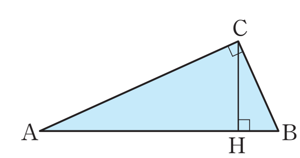


이때 $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2$의 값을 구하시오. 29

풀이
$\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$라고 하면 $a+b+c=9$
$\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA=13$에서
$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}ca=13$　$\therefore ab+bc+ca=26$
$\therefore \overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=a^2+b^2+c^2$
$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=9^2-2\times 26=29$

066 교육청 기출

오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 빗변으로 하는 직각삼각형 ABC가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, $\overline{CH}=1$이고 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{4}{3}$이다. $\overline{BH}=x$라고 할 때, $3x^3-5x^2+4x+7$의 값은? (단, $x<1$)



① $13-3\sqrt{7}$　② $14-3\sqrt{7}$　③ $15-3\sqrt{7}$
✓④ $16-3\sqrt{7}$　⑤ $17-3\sqrt{7}$

풀이
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times 1=\frac{4}{3}$　$\therefore \overline{AB}=\frac{8}{3}$
$\triangle AHC \backsim \triangle CHB$이므로
$\overline{AH}:\overline{CH}=\overline{CH}:\overline{BH}$, $\left(\frac{8}{3}-x\right):1=1:x$
$3x^2-8x+3=0$　$\therefore x=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$ ($\because 0<x<1$)
$\therefore 3x^3-5x^2+4x+7=(3x^2-8x+3)(x+1)+9x+4$
$=16-3\sqrt{7}$

02 나머지 정리

1 항등식과 미정계수법

(1) 항등식: 문자를 포함한 등식에서 그 문자에 어떤 값을 대입해도 항상 성립하는 등식

(2) 항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=0$, $b=0$, $c=0$이다. 또, $a=0$, $b=0$, $c=0$이면 $ax^2+bx+c=0$은 x에 대한 항등식이다.

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다. 또, $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이면 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$은 x에 대한 항등식이다.

(3) 미정계수법: 항등식의 뜻과 성질을 이용하여 등식에서 미지의 계수를 정하는 방법

① 계수 비교법: 등식의 양변에서 동류항의 계수를 비교하여 미정계수를 정하는 방법

② 수치 대입법: 등식의 문자에 적당한 수를 대입하여 미정계수를 정하는 방법

2 나머지 정리와 인수 정리

(1) 나머지 정리

① 다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라고 하면 $R=f(a)$이다.

② 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지를 R라고 하면 $R=f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$이다.

예 다항식 $f(x)=x^3-3x^2+x-2$에 대하여

① $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 R_1이라고 하면

$R_1=(-1)^3-3\times(-1)^2+(-1)-2=-7$

② $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 나머지를 R_2라고 하면

$R_2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3-3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{17}{8}$

참고 다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지는 상수이다.

(2) 인수 정리

① 다항식 $f(x)$가 $x-a$로 나누어떨어지면 $f(a)=0$이다. 또, $f(a)=0$이면 $f(x)$는 $x-a$로 나누어떨어진다.

② 다항식 $f(x)$가 일차식 $ax+b$로 나누어떨어지면 $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)=0$이다. 또, $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)=0$이면 $f(x)$는 일차식 $ax+b$로 나누어떨어진다.

참고 다항식 $f(x)$에 대하여 다음은 모두 $f(a)=0$임을 나타내는 표현이다.
① $f(x)$가 $x-a$로 나누어떨어진다.
② $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지가 0이다.
③ $f(x)$가 $x-a$를 인수로 갖는다.
④ $f(x)=(x-a)Q(x)$ (단, $Q(x)$는 다항식이다.)

3 조립제법

다항식을 일차식으로 나누었을 때, 계수만을 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법

예 다항식 $3x^3-8x-5$를 일차식 $x-2$로 나누었을 때, 다음과 같이 조립제법을 이용하면 몫은 $3x^2+6x+4$이고, 나머지는 3임을 알 수 있다.

2 ← $x-2=0$을 만족시키는 값	3	0	-8	-5
		6	12	8
	3	6	4	3 ← 나머지

몫: $3x^2+6x+4$

참고 조립제법을 이용할 때에는 차수가 높은 항의 계수부터 차례대로 적고, 해당되는 차수의 항이 없으면 그 자리에 0을 적는다.

문제를 풀 때 유용한 **풍쌤 비법**

❶ 미정계수법

(1) 계수 비교법: 식이 간단하여 전개하기 쉬운 경우에 이용하고, 전개한 식을 내림차순으로 정리하여 양변의 동류항의 계수를 비교한다.

(2) 수치 대입법: 전개하기 힘들거나 적당한 수를 대입하여 식이 간단해지는 경우에 이용한다.

① 괄호로 묶인 다항식이 있을 때 ⇨ 괄호 안의 다항식의 값을 0이 되게 하는 x의 값을 대입한다.

② 괄호로 묶인 다항식이 없을 때 ⇨ 계산하기 편리한 -1, 0, 1 등의 값을 x에 대입한다.

❷ 다항식을 일차식으로 나눌 때

(1) 나머지만 구하는 경우 ⇨ 나머지 정리 이용

(2) 몫과 나머지를 모두 구하는 경우 ⇨ 조립제법 이용

실력을 기르는 유형

정답과 풀이 010쪽

01 항등식의 뜻 중요도

067 상중하

다음 〈보기〉에서 항등식인 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉
ㄱ. $4(x-1)=4x+4$
ㄴ. $x^2-2x-3=0$
ㄷ. $(x-5)(x-1)=x^2-6x-5$
ㄹ. $(x+1)^2+4x=x^2+6x+1$

① ㄱ ✓② ㄹ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄷ, ㄹ

풀이
ㄱ. (좌변)$=4x-4\neq$(우변)이므로 항등식이 아니다.
ㄴ. $x^2-2x-3=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$
따라서 $x=-1$ 또는 $x=3$일 때에만 등식이 성립하므로 항등식이 아니다.
ㄷ. (좌변)$=x^2-6x+5\neq$(우변)이므로 항등식이 아니다.

068 상중하

다음 중 항등식인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $3x-4=-x+2-(4x+6)$
② $(-x+2)^2=-x^2-4x+4$
✓③ $2(x+1)-5=3(2x-1)-4x$
✓④ $(x-1)^2=(x+2)^2-6x-3$
⑤ $(4+x)(4-x)=2x+20-(x+2)^2$

풀이
① (우변)$=-5x-4\neq$(좌변)이므로 항등식이 아니다.
② (좌변)$=x^2-4x+4\neq$(우변)이므로 항등식이 아니다.
⑤ (좌변)$=16-x^2$, (우변)$=-x^2-2x+16$, 즉 (좌변)$\neq$(우변)이므로 항등식이 아니다.

02 계수 비교법 중요도

069 풍쌤 비법 ❶ 상중하

모든 실수 x에 대하여 등식

$$x^2+4x+a=x(x+b)-2b$$

가 성립할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -5 ✓② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

풀이
$x^2+4x+a=x^2+bx-2b$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$4=b$, $a=-2b$에서 $a=-8$, $b=4$
$\therefore a+b=-4$

070 내신 기출 상중하

등식 $ax^3+bx^2+cx+d=(x+2)(x-1)^2$이 x에 대한 항등식일 때, $ad-bc$의 값은?
(단, a, b, c, d는 상수이다.)

① 0 ② 1 ✓③ 2
④ 3 ⑤ 4

풀이
$ax^3+bx^2+cx+d=x^3-3x+2$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=1$, $b=0$, $c=-3$, $d=2$
$\therefore ad-bc=2$

071 상중하

임의의 실수 x, y에 대하여 등식

$$(x+3y)a-(2x-y)b+5x=7x-8y$$

가 성립할 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

✓① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

풀이
$(a-2b+5)x+(3a+b)y=7x-8y$
이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로
$a-2b+5=7$, $3a+b=-8$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=-2$, $b=-2$
$\therefore ab=4$

072 내신 기출 (상 중 하)

다항식 $Q(x)$에 대하여 등식

$$2x^3+ax+b=(x^2-x-1)Q(x)+3x-1$$

이 x에 대한 항등식일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -3 ② -1 ③ 1
√④ 3 ⑤ 5

풀이
$Q(x)=2x+c$ (c는 상수)로 놓으면
$2x^3+ax+b=(x^2-x-1)(2x+c)+3x-1$
$=2x^3+(c-2)x^2+(-c+1)x-c-1$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$0=c-2$, $a=-c+1$, $b=-c-1$ $\quad\therefore a=-1$, $b=-3$, $c=2$
$\therefore ab=3$

073 (상 중 하)

등식 $kx^2+2x-ky^2-2y-9k+6=0$이 임의의 실수 k에 대하여 성립할 때, $x+y$의 값은? (단, x, y는 상수이다.)

√① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

풀이
주어진 등식의 좌변을 k에 대하여 정리하면
$(x^2-y^2-9)k+2x-2y+6=0$
이 등식이 k에 대한 항등식이므로
$x^2-y^2-9=0$, $2x-2y+6=0$ $\quad\therefore x^2-y^2=9$, $x-y=-3$
이때 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$이므로
$9=-3(x+y)$ $\quad\therefore x+y=-3$

03 수치 대입법 중요도

074 풍쌤 비법 ❶ (상 중 하)

모든 실수 x에 대하여 등식

$$a(x+2)+b(x-3)=x+7$$

이 성립할 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -3 ② -1 ③ 1
√④ 3 ⑤ 5

풀이
주어진 등식의 양변에 $x=-2$, $x=3$을 각각 대입하면
$-5b=5$, $5a=10$ $\quad\therefore a=2$, $b=-1$
$\therefore a-b=3$

075 교육청 기출 (상 중 하)

x의 값에 관계없이 등식

$$3x^2+ax+4=bx(x-1)+c(x-1)(x-2)$$

가 항상 성립할 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

① -6 ② -5 √③ -4
④ -3 ⑤ -2

풀이
주어진 등식의 양변에 $x=0$, $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면
$4=2c$, $a+7=0$, $2a+16=2b$
이므로 $a=-7$, $b=1$, $c=2$
$\therefore a+b+c=-4$

076 (상 중 하)

등식 $x^3-4x^2+ax+b=(x-2)(x+1)(cx-3)$이 x에 대한 항등식일 때, abc의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

① 4 √② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

풀이
주어진 등식의 좌변의 x^3의 계수는 1이고, 우변의 x^3의 계수는 c이므로 $c=1$
$\therefore x^3-4x^2+ax+b=(x-2)(x+1)(x-3)$
위 등식의 양변에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하여 정리하면
$a-b=-5$, $2a+b=8$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=6$
$\therefore abc=6$

077 (상 중 하)

모든 실수 x에 대하여

$$(x-1)^4=x^4-4x^3+(a+b)x^2-4ax+1$$

이 성립할 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -2 ② 2 ③ 3
④ 4 √⑤ 5

풀이
주어진 등식의 양변에 $x=1$, $x=2$를 각각 대입하여 정리하면
$3a-b=-2$, $a-b=-4$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=5$
$\therefore ab=5$

078 교육청 기출

상중하

다항식 $Q(x)$에 대하여 등식

$$x^3-5x^2+ax+1=(x-1)Q(x)-1$$

이 x에 대한 항등식일 때, $Q(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

✓① -6　② -5　③ -4
④ -3　⑤ -2

풀이
주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$a-3=-1$　$\therefore a=2$
$\therefore x^3-5x^2+2x+1=(x-1)Q(x)-1$
따라서 $Q(a)=Q(2)$이므로 이 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면
$Q(2)=-6$

04 조건을 만족시키는 항등식

중요도

079

상중하

x에 대한 이차방정식

$$x^2-(m+2)x-(m-3)a+b+1=0$$

이 실수 m의 값에 관계없이 항상 1을 근으로 가질 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 6　② 7　③ 8
④ 9　✓⑤ 10

풀이
주어진 방정식이 $x=1$을 근으로 가지므로
$1-(m+2)-(m-3)a+b+1=0$
$\therefore -(a+1)m+3a+b=0$
이 등식이 m에 대한 항등식이므로
$a+1=0,\ 3a+b=0$　$\therefore a=-1,\ b=3$
$\therefore a^2+b^2=10$

080

상중하

$x-y=1$을 만족시키는 모든 실수 x, y에 대하여 등식 $x^2+ax+by^2+xy+2=0$이 성립할 때, ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) 6

풀이
$y=x-1$을 주어진 등식의 좌변에 대입하여 정리하면
$(b+2)x^2+(a-2b-1)x+b+2=0$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$b+2=0,\ a-2b-1=0$　$\therefore a=-3,\ b=-2$
$\therefore ab=6$

081

상중하

x에 대한 이차방정식

$$x^2-2(k+a+b)x+(k^2+2k+ac)=0$$

이 실수 k의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 음이 아닌 정수이다.)

① 1　✓② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

풀이
주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $\frac{D}{4}=(k+a+b)^2-(k^2+2k+ac)=0$
$2(a+b-1)k+a^2+b^2+2ab-ac=0$
이 등식이 k에 대한 항등식이므로 $a+b-1=0,\ a^2+b^2+2ab-ac=0$
$\therefore a+b=1,\ (a+b)^2-ac=0$
$a+b=1$을 $(a+b)^2-ac=0$에 대입하면 $ac=1$
한편, a, c는 음이 아닌 정수이므로 $a=1,\ c=1,\ a+b=1$에서 $b=0$
$\therefore a+b+c=2$

082 내신 기출

상중하

$\underset{㉠}{x+y=1}$, $\underset{㉡}{y-z=-1}$일 때, x의 값에 관계없이 등식

$$x^2+y^2-z^2+xy-zx=ax^2+bx+c$$

가 항상 성립한다. 이때 abc의 값을 구하시오. -3
(단, a, b, c는 상수이다.)

풀이
㉠－㉡을 하면 $x+z=2$
$y=1-x,\ z=2-x$를 주어진 등식의 좌변에 대입하여 정리하면
$x^2+x-3=ax^2+bx+c$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로 $a=1,\ b=1,\ c=-3$
$\therefore abc=-3$

05 항등식에서 항의 계수의 합

중요도

083

상중하

등식 $(x^2+3x-1)^3=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_6x^6$이 x에 대한 항등식일 때, 다음 식의 값을 구하시오.
(단, a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_6은 상수이다.)

(1) $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6$　27

(2) $a_0-a_1+a_2-\cdots+a_6$　-27

(3) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6$　28

(4) $(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+(a_6-a_5)$　-26

풀이
(1) 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6=27$
(2) 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $a_0-a_1+a_2-\cdots+a_6=-27$
(3) 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $a_0=-1$
$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6=(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6)-a_0$
$=27-(-1)=28$
(4) $(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+(a_6-a_5)=-a_1+a_2-\cdots+a_6$
$=(a_0-a_1+a_2-\cdots+a_6)-a_0$
$=-27-(-1)=-26$

084

상 중 하

임의의 실수 x에 대하여 등식

$$(x^2+kx-1)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$$

이 성립할 때, $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=-31$이다. 이때 실수 k의 값은? (단, a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_{10}은 상수이다.)

√① -2　② -1　③ 1
④ 2　⑤ 3

풀이
주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $a_0=-1$
$x=1$을 대입하면 $k^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$
$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{10}=k^5-a_0=k^5-(-1)=k^5+1$
이때 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=-31$이므로
$k^5+1=-31$　$\therefore k=-2$ ($\because k$는 실수)

085

상 중 하

x의 값에 관계없이 등식

$$(2x^2-x-1)^5=a_{10}x^{10}+a_9x^9+\cdots+a_1x+a_0$$

이 항상 성립할 때, $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값은?
(단, a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_{10}은 상수이다.)

① 32　② 16　③ -8
√④ -16　⑤ -32

풀이
주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $0=a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$ …… ㉠
$x=-1$을 대입하면 $2^5=a_{10}-a_9+\cdots-a_1+a_0$ …… ㉡
㉠－㉡을 하면
$-32=2a_9+2a_7+2a_5+2a_3+2a_1$
$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-16$

086

상 중 하

등식

$$(x^2+3x+3)^4$$
$$=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\cdots+a_8(x+1)^8$$

이 x에 대한 항등식일 때, $a_0+a_2+a_4+a_6+a_8$의 값은?
(단, a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_8은 상수이다.)

① 37　② 38　③ 39
④ 40　√⑤ 41

풀이
주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $3^4=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8$ …… ㉠
$x=-2$를 대입하면 $1^4=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8$ …… ㉡
㉠＋㉡을 하면
$82=2a_0+2a_2+2a_4+2a_6+2a_8$
$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=41$

06 다항식의 나눗셈과 항등식

중요도

087

상 중 하

다항식 x^3-2x^2+ax+b가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어질 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -2　② -1　③ 0
√④ 1　⑤ 2

풀이
x^3-2x^2+ax+b를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라고 하면
$x^3-2x^2+ax+b=(x-1)^2(x+c)$
$=x^3+(c-2)x^2+(1-2c)x+c$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$-2=c-2$, $a=1-2c$, $b=c$　$\therefore a=1$, $b=0$, $c=0$
$\therefore a-b=1$

088 내신 기출

상 중 하

다항식 x^3+ax^2+b를 x^2-x-4로 나누었을 때의 나머지가 $5x+6$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -4　② -2　√③ 2
④ 4　⑤ 6

풀이
x^3+ax^2+b를 x^2-x-4로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라고 하면
$x^3+ax^2+b=(x^2-x-4)(x+c)+5x+6$
$=x^3+(c-1)x^2+(1-c)x-4c+6$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=c-1$, $0=1-c$, $b=-4c+6$　$\therefore a=0$, $b=2$, $c=1$
$\therefore a+b=2$

089

상 중 하

다항식 $2x^3+a$가 x^2-x+b로 나누어떨어질 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 2　② 3　③ 4
√④ 5　⑤ 6

풀이
$2x^3+a$를 x^2-x+b로 나누었을 때의 몫을 $2x+c$ (c는 상수)라고 하면
$2x^3+a=(x^2-x+b)(2x+c)$
$=2x^3+(c-2)x^2+(2b-c)x+bc$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$0=c-2$, $0=2b-c$, $a=bc$　$\therefore a=2$, $b=1$, $c=2$
$\therefore a^2+b^2=5$

090 교육청 기출

상 중 하

x에 대한 다항식 $x^5+ax^2+(a+1)x+2$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$이고 나머지는 6이다. $a+Q(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 33 ② 35 √③ 37
④ 39 ⑤ 41

풀이
$x^5+ax^2+(a+1)x+2=(x-1)Q(x)+6$
이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $a=1$
$\therefore x^5+x^2+2x+2=(x-1)Q(x)+6$
이 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면 $Q(2)=36$
$\therefore a+Q(2)=37$

07 나머지 정리 – 일차식으로 나누었을 때의 나머지

중요도

091 풍쌤 비법 ❷ 교육청 기출

상 중 하

다항식 x^3+3x+9를 $x+1$로 나눈 나머지는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 √⑤ 5

풀이
$f(x)=x^3+3x+9$라고 하면 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는
$f(-1)=-1-3+9=5$

092

상 중 하

다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 4일 때, 다항식 $(x+5)f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는?

① 22 ② 24 ③ 26
√④ 28 ⑤ 30

풀이
$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로
$f(2)=4$
따라서 $(x+5)f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는
$(2+5)f(2)=7\times4=28$

093

상 중 하

다항식 $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫이 $x+3$이고 나머지가 5일 때, $f(x)$를 $x+4$로 나누었을 때의 나머지는?

① -14 ② -4 ③ 4
√④ 14 ⑤ 54

풀이
$f(x)=(2x-1)(x+3)+5$이므로 $f(x)$를 $x+4$로 나누었을 때의 나머지는
$f(-4)=(-9)\times(-1)+5=14$

094

상 중 하

다항식 $f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 3이고, 다항식 $g(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 -2일 때, 다항식 $2f(x)+3g(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는?

√① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

풀이
나머지 정리에 의하여 $f(-3)=3$, $g(-3)=-2$
따라서 $2f(x)+3g(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는
$2f(-3)+3g(-3)=2\times3+3\times(-2)=0$

095

상 중 하

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -6이고, $2f(x)-g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 9일 때, 다항식 $f(x)g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는?

① -8 √② -7 ③ -6
④ -5 ⑤ -4

풀이
나머지 정리에 의하여
$f(-2)+g(-2)=-6$, $2f(-2)-g(-2)=9$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$f(-2)=1$, $g(-2)=-7$
따라서 $f(x)g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는
$f(-2)g(-2)=1\times(-7)=-7$

096 내신 기출

상중하

세 다항식 $f(x)=x^2+2x-3$, $g(x)=-x^2+4$, $h(x)$에 대하여 등식

$$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=(2x^2+2x-7)h(x)$$

가 모든 실수 x에 대하여 성립할 때, $h(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는?

① -9 ② -2 ③ 2
④ 7 ✓⑤ 11

풀이
$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}$이므로
$\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}=(2x^2+2x-7)h(x)$ …… ㉠
이때 $f(x)+g(x)=2x+1$, $f(x)-g(x)=2x^2+2x-7$이므로 이것을 ㉠에 대입하면
$(2x+1)(2x^2+2x-7)=(2x^2+2x-7)h(x)$ $\therefore h(x)=2x+1$
따라서 $h(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는
$h(5)=2\times5+1=11$

08 나머지 정리 – 일차식으로 나누었을 때의 미정계수 구하기

중요도

097

상중하

다항식 $f(x)=x^3-ax^2-4x+8$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지와 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 같을 때, 상수 a의 값을 구하시오. 1

풀이
나머지 정리에 의하여 $f(1)=f(2)$이므로
$1-a-4+8=8-4a-8+8$
$3a=3$ $\therefore a=1$

098

상중하

다항식 x^3+ax^2-2x+b를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 7이고, $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 a일 때, 이 다항식을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는?

(단, a, b는 상수이다.)

① -61 ② -23 ③ -19
✓④ 19 ⑤ 23

풀이
$f(x)=x^3+ax^2-2x+b$라고 하면 나머지 정리에 의하여
$f(-1)=-1+a+2+b=7$ $\therefore a+b=6$ …… ㉠
$f(-2)=-8+4a+4+b=a$ $\therefore 3a+b=4$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=7$
따라서 $f(x)=x^3-x^2-2x+7$이므로 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는
$f(3)=27-9-6+7=19$

099

상중하

다항식 $f(x)=a(x+3)^3+b(x+3)^2+c(x+3)+d$를 $x-7$로 나누었을 때의 나머지가 1234일 때, $f(x)$를 $x+4$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. 2

(단, a, b, c, d는 한 자리 자연수이다.)

풀이
나머지 정리에 의하여 $f(7)=a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d=1234$
이때 a, b, c, d는 한 자리 자연수이므로
$a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$
따라서 $f(x)=(x+3)^3+2(x+3)^2+3(x+3)+4$이므로 $f(x)$를 $x+4$로 나누었을 때의 나머지는
$f(-4)=-1+2-3+4=2$

100 교육청 기출

상중하

최고차항의 계수가 1인 이차다항식 $P(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $P(4)$의 값은?

> (가) $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 1이다.
> (나) $xP(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

① 6 ✓② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

풀이
$P(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라고 하자.
조건 (가)에서 $P(1)=1$이므로 $a+b=0$ …… ㉠
조건 (나)에서 $2P(2)=2$, 즉 $P(2)=1$이므로 $2a+b=-3$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=3$
따라서 $P(x)=x^2-3x+3$이므로
$P(4)=16-12+3=7$

101 교육청 기출

상중하

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $g(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지는?

> (가) $g(x)=x^2f(x)$
> (나) $g(x)+(3x^2+4x)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$
> (단, a, b는 상수이다.)

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ✓⑤ 24

풀이
조건 (가)에서 $g(x)=x^2f(x)$를 조건 (나)에 대입하면
$4x(x+1)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$
이 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $b=0$, $x=-1$을 대입하면 $a=3$
따라서 $4x(x+1)f(x)=x^3+3x^2+2x=x(x+1)(x+2)$이므로
$f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ $\therefore g(x)=x^2f(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2$
따라서 $g(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는 $g(4)=24$이다.

09 나머지 정리 – 이차식으로 나누었을 때의 나머지

중요도

102

상 중 하

다항식 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 1이고, $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 7일 때, $f(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 나머지는?

① $-x+5$ ② $x+5$ ③ $2x-5$
✓④ $2x+5$ ⑤ $3x+5$

풀이
나머지 정리에 의하여 $f(-2)=1$, $f(1)=7$
$f(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면 $f(x)=(x^2+x-2)Q(x)+ax+b=(x+2)(x-1)Q(x)+ax+b$
이 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면
$f(-2)=-2a+b=1$ $\therefore 2a-b=-1$ …… ㉠
$x=1$을 대입하면 $f(1)=a+b=7$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=5$이므로 구하는 나머지는 $2x+5$이다.

103

상 중 하

다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 3이고, $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 1일 때, $(x^2+2x-1)f(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 나머지는?

① $2x-4$ ② $2x+4$ ③ $4x+3$
✓④ $5x-1$ ⑤ $5x+1$

풀이
나머지 정리에 의하여 $f(-1)=3$, $f(3)=1$
$(x^2+2x-1)f(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면
$(x^2+2x-1)f(x)=(x^2-2x-3)Q(x)+ax+b=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$
이 등식의 양변에 $x=-1$, $x=3$을 각각 대입하면 $a-b=6$, $3a+b=14$
따라서 $a=5$, $b=-1$이므로 구하는 나머지는 $5x-1$이다.

104 내신 기출

상 중 하

다항식 $f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 나머지가 $5x-1$이고, x^2+5x+4로 나누었을 때의 나머지가 $x+7$이다. $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라고 할 때, $R(-2)$의 값을 구하시오. 7

풀이
$f(x)$를 x^2-4x+3, x^2+5x+4로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라고 하면
$f(x)=(x-1)(x-3)Q_1(x)+5x-1$ …… ㉠
$f(x)=(x+1)(x+4)Q_2(x)+x+7$ …… ㉡
$f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면
$f(x)=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$ …… ㉢
㉠, ㉡에서 $f(1)=4$, $f(-1)=6$
㉢의 양변에 $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면 $a+b=4$, $a-b=-6$이므로
$a=-1$, $b=5$
따라서 $R(x)=-x+5$이므로 $R(-2)=2+5=7$이다.

105

상 중 하

다항식 $f(x)=x-1$에 대하여 $\{f(x)\}^8$을 $f(x^2)$으로 나누었을 때의 나머지는?

① $128x+64$ ② $128x-128$
③ $-128x+64$ ✓④ $-128x+128$
⑤ $-128x+256$

풀이
$\{f(x)\}^8=(x-1)^8$, $f(x^2)=x^2-1$이므로 $\{f(x)\}^8$을 $f(x^2)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면
$(x-1)^8=(x^2-1)Q(x)+ax+b$
$=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$
이 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $a-b=-256$ …… ㉠
$x=1$을 대입하면 $0=a+b$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-128$, $b=128$이므로 구하는 나머지는 $-128x+128$이다.

10 나머지 정리 – 삼차식으로 나누었을 때의 나머지

중요도

106

상 중 하

다항식 $f(x)$를 $x(x+1)$로 나누었을 때의 나머지가 $-5x+1$이고, $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지가 $5x-1$일 때, $f(x)$를 $x(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. $3x^2-2x+1$

풀이
$f(x)$를 $x(x+1)$, $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라고 하면
$f(x)=x(x+1)Q_1(x)-5x+1$ …… ㉠
$f(x)=(x-1)(x-2)Q_2(x)+5x-1$ …… ㉡
$f(x)$를 $x(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라고 하면 $f(x)=x(x+1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉢
㉠, ㉡에서 $f(0)=1$, $f(-1)=6$, $f(2)=9$이므로
㉢의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=c=1$
$x=-1$을 대입하면 $f(-1)=a-b+c$, $6=a-b+1$ $\therefore a-b=5$ …… ㉣
$x=2$를 대입하면 $f(2)=4a+2b+c$, $9=4a+2b+1$ $\therefore 2a+b=4$ …… ㉤
㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$이므로 구하는 나머지는 $3x^2-2x+1$이다.

107

상 중 하

다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x-5$이고, $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+4$일 때, $f(x)$를 $(x+1)(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. $-x^2+5x$

풀이
$f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라고 하면
$f(x)=(x+1)^2Q_1(x)+x-5$ …… ㉠
$f(x)$를 $(x+1)(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라고 하면
$f(x)=(x+1)(x-2)^2Q(x)+ax^2+bx+c$
이때 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+4$이므로
$f(x)=(x+1)(x-2)^2Q(x)+a(x-2)^2+x+4$ …… ㉡
㉠에서 $f(-1)=-1-5=-6$이므로 ㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$f(-1)=9a+3$, $-6=9a+3$ $\therefore a=-1$
따라서 구하는 나머지는 $-(x-2)^2+x+4=-x^2+5x$이다.

108

상 중 하

다항식 $x^{12}-x^9+3x^5-1$을 x^3-x로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라고 할 때, $R(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. 2

풀이

$x^{12}-x^9+3x^5-1$을 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라고 하면

$x^{12}-x^9+3x^5-1=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c$

$=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하여 풀면 $a=1$, $b=2$, $c=-1$

따라서 $R(x)=x^2+2x-1$이므로 $R(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$R(-3)=9-6-1=2$

109

상 중 하

다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 11이고, x^2+x-1로 나누었을 때의 나머지가 $x-6$이다. $f(x)$를 $(x-2)(x^2+x-1)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라고 할 때, $R(1)$의 값은?

√① -2　② -1　③ 0

④ 1　⑤ 2

풀이

$f(x)$를 $(x-2)(x^2+x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라고 하면

$f(x)=(x-2)(x^2+x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$

이때 $f(x)$를 x^2+x-1로 나누었을 때의 나머지가 $x-6$이므로

$f(x)=(x-2)(x^2+x-1)Q(x)+a(x^2+x-1)+x-6$ …… ㉠

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 11이므로 $f(2)=11$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=5a-4$, $11=5a-4$　∴ $a=3$

따라서 $R(x)=3(x^2+x-1)+x-6=3x^2+4x-9$이므로

$R(1)=3+4-9=-2$

11 나머지 정리 －$f(ax+b)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지

중요도

110

상 중 하

다항식 $f(x)$를 $(x+2)(x-6)$으로 나누었을 때의 나머지가 $5x-1$일 때, 다항식 $f(3x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는?

① 27　√② 29　③ 31

④ 33　⑤ 35

풀이

$f(x)$를 $(x+2)(x-6)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$f(x)=(x+2)(x-6)Q(x)+5x-1$

이 등식의 양변에 $x=6$을 대입하면 $f(6)=29$

따라서 $f(3x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(3\times2)=f(6)=29$

111 내신 기출

상 중 하

다항식 $f(x)$를 x^2-9로 나누었을 때의 나머지가 $x+6$일 때, 다항식 $(x+2)f(x-1)$을 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는?

① 42　② 48　√③ 54

④ 60　⑤ 66

풀이

$f(x)$를 x^2-9로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$f(x)=(x^2-9)Q(x)+x+6$

이 등식의 양변에 $x=3$을 대입하면 $f(3)=9$

따라서 $(x+2)f(x-1)$을 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$(4+2)f(4-1)=6f(3)=6\times9=54$

112

상 중 하

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)-g(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 4이고, $3f(x)-g(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 6일 때, 다항식 $f(2x-5)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. 1

풀이

나머지 정리에 의하여 $f(-3)-g(-3)=4$, $3f(-3)-g(-3)=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$f(-3)=1$, $g(-3)=-3$

따라서 $f(2x-5)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2\times1-5)=f(-3)=1$

12 나머지 정리 －몫을 다시 나누었을 때의 나머지

중요도

113

상 중 하

다항식 $f(x)$를 $(x+2)(x-5)$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $2x-1$이다. $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 -21일 때, $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는?

① 1　√② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

풀이

$f(x)=(x+2)(x-5)Q(x)+2x-1$ …… ㉠

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 -21이므로

$f(2)=-21$

$Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(2)$이므로 ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=-12Q(2)+3$, $-21=-12Q(2)+3$

∴ $Q(2)=2$

114

상 중 하

다항식 $x^{10}+x^9+x^2$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 할 때, $xQ(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. 1030

풀이

$x^{10}+x^9+x^2$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 R라고 하면

$x^{10}+x^9+x^2=(x+1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $R=1$

$xQ(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 $-2Q(-2)$이므로 ㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$1024-512+4=-Q(-2)+1$ $\quad\therefore Q(-2)=-515$

따라서 구하는 나머지는

$-2Q(-2)=-2\times(-515)=1030$

115

상 중 하

다항식 x^3-3x^2+ax+2를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 6이다. $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 b일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 5 ② 6 ③ 7
✓④ 8 ⑤ 9

풀이

$x^3-3x^2+ax+2=(x-2)Q(x)+6$

이 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$8-12+2a+2=6$ $\quad\therefore a=4$

$\therefore x^3-3x^2+4x+2=(x-2)Q(x)+6$ …… ㉠

$Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 b이므로

$Q(-1)=b$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1-3-4+2=-3Q(-1)+6$ $\quad\therefore Q(-1)=4$

$\therefore b=4$

$\therefore a+b=4+4=8$

116 내신 기출

상 중 하

다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이고, $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 1이다. $f(x)$를 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 나머지가 $R(x)$일 때, $R(-6)$의 값은?

① -1 ✓② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

풀이

$f(x)=(x+1)Q(x)+3$ …… ㉠

$Q(1)=1$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $f(-1)=3$ …… ㉡

$x=1$을 대입하면

$f(1)=2Q(1)+3=2\times1+3=5$ …… ㉢

$f(x)$를 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(x)=(x+1)(x-1)Q'(x)+ax+b$

㉡, ㉢에 의하여 $-a+b=3$, $a+b=5$이므로 $a=1$, $b=4$

따라서 $R(x)=x+4$이므로 $R(-6)=-2$이다.

13 나머지 정리를 활용한 수의 나눗셈

중요도

117

상 중 하

다음 물음에 답하시오.

(1) $(x-1)^7$을 x로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. -1

(2) (1)을 이용하여 59^7을 60으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. 59

풀이

(1) $(x-1)^7$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면

$(x-1)^7=xQ(x)+R$

이 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $R=-1$

(2) $(x-1)^7=xQ(x)-1$이므로

이 등식의 양변에 $x=60$을 대입하면

$59^7=60Q(60)-1=60\{Q(60)-1\}+60-1$

$=60\{Q(60)-1\}+59$

따라서 59^7을 60으로 나누었을 때의 나머지는 59이다.

118 교육청 기출

상 중 하

다음은 2022^{10}을 505로 나누었을 때의 나머지를 구하는 과정이다.

> 다항식 $(4x+2)^{10}$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면
>
> $(4x+2)^{10}=xQ(x)+R$
>
> 이다. 이때 $R=\boxed{(가)}$이다.
>
> 등식 $(4x+2)^{10}=xQ(x)+\boxed{(가)}$에 $x=505$를 대입하면
>
> $2022^{10}=505\times Q(505)+\boxed{(가)}$
>
> $=505\times\{Q(505)+\boxed{(나)}\}+\boxed{(다)}$
>
> 이다.
>
> 따라서 2022^{10}을 505로 나누었을 때의 나머지는 $\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라고 할 때, $a+b+c$의 값은?

① 1038 ✓② 1040 ③ 1042
④ 1044 ⑤ 1046

풀이

$a=1024$, $b=2$, $c=14$이므로

$a+b+c=1040$

119

상 중 하

$7^{29}+7^{30}$을 6으로 나누었을 때의 나머지는?

① 1 ✓② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

풀이
$x^{29}+x^{30}$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면
$x^{29}+x^{30}=(x-1)Q(x)+R$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $R=2$
$x=7$을 대입하면 $7^{29}+7^{30}=6Q(7)+2$
따라서 $7^{29}+7^{30}$을 6으로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

120

상 중 하

$3^{100}+3^{101}+3^{102}$을 8로 나누었을 때의 나머지는?

① 2 ② 3 ③ 4
✓④ 5 ⑤ 6

풀이
$3^{100}+3^{101}+3^{102}=(3^2)^{50}+(3^2)^{50}\times3+(3^2)^{50}\times3^2$
$=(1+3+3^2)\times(3^2)^{50}$
$=13\times9^{50}$
$13x^{50}$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면
$13x^{50}=(x-1)Q(x)+R$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $R=13$
$x=9$를 대입하면 $13\times9^{50}=8Q(9)+13=8\{Q(9)+1\}+5$
따라서 $3^{100}+3^{101}+3^{102}$을 8로 나누었을 때의 나머지는 5이다.

14 인수 정리 –일차식으로 나누어떨어지는 경우

중요도

121

상 중 하

다항식 $f(x)=4x^3-x^2+ax-6$이 $x-2$로 나누어떨어질 때, 상수 a의 값은?

① -21 ② -18 ③ -15
④ -13 ✓⑤ -11

풀이
$f(2)=0$이므로 $32-4+2a-6=0$ $\therefore a=-11$

122 내신 기출

상 중 하

다항식 $f(x)=ax^3-x^2+bx-2$가 $x+1$, $x-2$로 각각 나누어떨어질 때, $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는? (단, a, b는 상수이다.)

① 24 ② 26 ✓③ 28
④ 30 ⑤ 32

풀이
$f(-1)=0$에서 $a+b=-3$ …… ㉠
$f(2)=0$에서 $4a+b=3$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-5$
$\therefore f(x)=2x^3-x^2-5x-2$
따라서 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는
$f(3)=54-9-15-2=28$

123 교육청 기출

상 중 하

다항식 $f(x)=x^3+ax^2+bx+6$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 4이다. $f(x+2)$가 $x-1$로 나누어떨어질 때, $b-a$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 4 ✓② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

풀이
$f(1)=4$이므로 $a+b=-3$ …… ㉠
$f(x+2)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로 $f(1+2)=f(3)=0$
즉, $27+9a+3b+6=0$ $\therefore 3a+b=-11$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=1$
$\therefore b-a=5$

124

상 중 하

x^3의 계수가 1인 삼차식 $f(x)$에 대하여 $f(1)=3$, $f(2)=6$, $f(3)=9$일 때, $f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는?

① 14 ② 16 ✓③ 18
④ 20 ⑤ 22

풀이
$f(1)-3=0$, $f(2)-6=0$, $f(3)-9=0$이므로 $f(x)-3x$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 각각 나누어떨어진다.
이때 $f(x)$는 x^3의 계수가 1인 삼차식이므로
$f(x)-3x=(x-1)(x-2)(x-3)$
$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+3x$
따라서 $f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는
$f(4)=3\times2\times1+12=18$

125 교육청 기출

상 중 하

이차항의 계수가 1인 이차다항식 $P(x)$와 일차항의 계수가 1인 일차다항식 $Q(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 다항식 $P(x+1)-Q(x+1)$은 $x+1$로 나누어떨어진다.
> (나) 방정식 $P(x)-Q(x)=0$은 중근을 갖는다.

다항식 $P(x)+Q(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 12일 때, $P(2)$의 값은?

① 7　✓② 8　③ 9
④ 10　⑤ 11

풀이
$P(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수), $Q(x)=x+c$ (c는 상수)라고 하자.
조건 (가)에서 $P(-1+1)-Q(-1+1)=P(0)-Q(0)=0$이므로 $b=c$
$P(x)-Q(x)=(x^2+ax+b)-(x+c)=x^2+(a-1)x$
이므로 방정식 $x^2+(a-1)x=0$의 판별식을 D라고 하면 조건 (나)에 의하여
$D=(a-1)^2=0$, $a=1$　$\therefore P(x)=x^2+x+b$
$P(2)+Q(2)=(4+2+b)+(2+b)=12$이므로 $b=2$
따라서 $P(x)=x^2+x+2$이므로 $P(2)=4+2+2=8$

15 인수 정리 –이차식으로 나누어떨어지는 경우

중요도

126

상 중 하

다항식 $f(x)=x^3+ax^2-bx-3$이 x^2+4x+3을 인수로 가질 때, ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) 3

풀이
$f(x)=x^3+ax^2-bx-3$이 x^2+4x+3, 즉 $(x+1)(x+3)$으로 나누어떨어지므로 $f(x)$는 $x+1$과 $x+3$으로 각각 나누어떨어진다.
$f(-1)=0$에서 $a+b=4$　…… ㉠
$f(-3)=0$에서 $3a+b=10$　…… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$이므로 $ab=3$

127

상 중 하

다항식 $f(x)=x^3+ax^2-x+b$가 x^2-2x-3으로 나누어떨어질 때, $f(x+6)$을 $x+4$로 나누었을 때의 나머지는? (단, a, b는 상수이다.)

① -5　✓② -3　③ -1
④ 1　⑤ 3

풀이
$f(x)=x^3+ax^2-x+b$가 x^2-2x-3, 즉 $(x+1)(x-3)$으로 나누어떨어지므로 $f(x)$는 $x+1$과 $x-3$으로 각각 나누어떨어진다.
$f(-1)=0$에서 $a+b=0$　…… ㉠
$f(3)=0$에서 $9a+b=-24$　…… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=3$
$\therefore f(x)=x^3-3x^2-x+3$
따라서 $f(x+6)$을 $x+4$로 나누었을 때의 나머지는
$f(-4+6)=f(2)=-3$

128

상 중 하

다항식 $f(x)=x^5-x^4+x^3-x^2+4$와 일차다항식 $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$가 x^2-x-2로 나누어떨어질 때, $g(-5)$의 값을 구하시오. 32

풀이
$g(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라고 하면
$f(x)+g(x)=x^5-x^4+x^3-x^2+ax+b+4$
$f(x)+g(x)$가 x^2-x-2, 즉 $(x+1)(x-2)$로 나누어떨어지므로 $f(x)+g(x)$는 $x+1$과 $x-2$로 각각 나누어떨어진다.
$f(-1)+g(-1)=0$에서 $a-b=0$　…… ㉠
$f(2)+g(2)=0$에서 $2a+b=-24$　…… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-8$, $b=-8$
따라서 $g(x)=-8x-8$이므로
$g(-5)=32$

129 내신 기출

상 중 하

다항식 $f(x)+2$가 $(x+2)(x-6)$으로 나누어떨어질 때, 다항식 $f(2x-2)$를 x^2-4x로 나누었을 때의 나머지는?

✓① -2　② 2　③ 4
④ 6　⑤ 8

풀이
$f(x)+2$가 $(x+2)(x-6)$으로 나누어떨어지므로 $f(x)+2$는 $x+2$와 $x-6$으로 각각 나누어떨어진다.
$\therefore f(-2)=-2$, $f(6)=-2$
$f(2x-2)$를 x^2-4x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면
$f(2x-2)=(x^2-4x)Q(x)+ax+b$
$=x(x-4)Q(x)+ax+b$　…… ㉠
㉠의 양변에 $x=0$, $x=4$를 각각 대입하면 $a=0$, $b=-2$
따라서 구하는 나머지는 -2이다.

16 조립제법

중요도

130

상 중 하

다항식 $f(x)=8x^3-2x^2+ax+10$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$이고 나머지가 5일 때, $Q(2)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) 17

풀이

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 8 & -2 & a & 10 \\ & & -8 & 10 & -a-10 \\ \hline & 8 & -10 & a+10 & -a \end{array}$$

따라서 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 $8x^2-10x+a+10$, 나머지는 $-a$이므로
$-a=5$　$\therefore a=-5$
즉, $Q(x)=8x^2-10x+5$이므로
$Q(2)=32-20+5=17$

131 교육청 기출

상 중 하

다음은 삼차다항식 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+11$을 $x-3$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하는 과정의 일부를 나타낸 것이다.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & a & b & c & 11 \\ & & \square & \square & \square \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 5 \end{array}$$

$P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. 23

(단, a, b, c는 상수이다.)

풀이

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+11$을 $x-3$으로 나누었을 때의 몫은 x^2+x-2, 나머지는 5이므로

$P(x)=(x-3)(x^2+x-2)+5$

따라서 $P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$P(4)=1\times(16+4-2)+5=23$

132

상 중 하

다음은 다항식 $f(x)=4x^3-x^2+ax+1$을 $4x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하는 과정이다. 몫을 $Q(x)$라고 할 때, $Q(5)$의 값은?

(단, a는 상수이다.)

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{4} & 4 & -1 & a & 1 \\ & & \square & \square & \square \\ \hline & \square & \square & \square & 2 \end{array}$$

① 24　② 25　③ 26 ✓
④ 27　⑤ 28

풀이

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{4} & 4 & -1 & a & 1 \\ & & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{\frac{1}{4}a} \\ \hline & \boxed{4} & \boxed{0} & \boxed{a} & 1+\frac{1}{4}a \end{array}$$

즉, $1+\frac{1}{4}a=2$이므로 $a=4$

따라서 $f(x)=\left(x-\frac{1}{4}\right)(4x^2+4)+2=(4x-1)(x^2+1)+2$이므로

$Q(x)=x^2+1$

$\therefore Q(5)=25+1=26$

17 조립제법과 항등식

중요도

133

상 중 하

등식

$$2x^3-5x^2+x+3$$
$$=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$$

가 x에 대한 항등식일 때, $a-b-c-d$의 값을 구하시오. (단, a, b, c, d는 상수이다.) 3

풀이

오른쪽 조립제법에서

$2x^3-5x^2+x+3$

$=2(x-1)^3+(x-1)^2-3(x-1)+1$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=-3$, $d=1$이므로

$a-b-c-d=2-1-(-3)-1=3$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 3 \\ & & 2 & -3 & -2 \\ \hline 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ & & 2 & -1 & \\ \hline 1 & 2 & -1 & -3 & \\ & & 2 & & \\ \hline & 2 & 1 & & \end{array}$$

134

상 중 하

모든 실수 x에 대하여 등식

$$x^3-x^2+2x+5$$
$$=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$$

가 성립할 때, $abcd$의 값은?

① 28　② 14　③ -14
④ -28 ✓　⑤ -42

풀이

오른쪽 조립제법에서

x^3-x^2+2x+5

$=(x+1)^3-4(x+1)^2+7(x+1)+1$

따라서 $a=1$, $b=-4$, $c=7$, $d=1$이므로

$abcd=-28$

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ & & -1 & 2 & -4 \\ \hline -1 & 1 & -2 & 4 & 1 \\ & & -1 & 3 & \\ \hline -1 & 1 & -3 & 7 & \\ & & -1 & & \\ \hline & 1 & -4 & & \end{array}$$

135

상 중 하

x의 값에 관계없이 등식

$$-4x^3+3x^2-x-1$$
$$=a(2x-1)^3+b(2x-1)^2+c(2x-1)+d$$

가 항상 성립할 때, $ab+cd$의 값을 구하시오. 1

풀이

오른쪽 조립제법에서

$-4x^3+3x^2-x-1$

$=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^3-3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{4}$

$=-\frac{1}{2}(2x-1)^3-\frac{3}{4}(2x-1)^2-\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{5}{4}$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{4}$, $c=-\frac{1}{2}$, $d=-\frac{5}{4}$

이므로 $ab+cd=\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=1$

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & -4 & 3 & -1 & -1 \\ & & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \hline \frac{1}{2} & -4 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ & & -2 & -\frac{1}{2} & \\ \hline \frac{1}{2} & -4 & -1 & -1 & \\ & & -2 & & \\ \hline & -4 & -3 & & \end{array}$$

136

등식 $2x^4+5x^2-x+a=(x-1)f(x)$가 x의 값에 관계 없이 항상 성립할 때, $f(-1)$의 값을 구하시오. -1

(단, a는 상수이다.)

풀이

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2+5-1+a=0$ $\quad\therefore a=-6$ ········ 50 %

$\therefore 2x^4+5x^2-x-6=(x-1)f(x)$

이 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$2+5+1-6=-2f(-1)$

$\therefore f(-1)=-1$ ········ 50 %

137

다항식 $f(x)=x^3-x^2+x+6$을 $x-a$로 나누었을 때의 나머지와 $x+a$로 나누었을 때의 나머지의 합이 8일 때, $f(x)$를 $x+a^2$으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. -8

(단, a는 상수이다.)

풀이

나머지 정리에 의하여 $f(a)+f(-a)=8$ ········ 30 %

이때 $f(a)+f(-a)=-2a^2+12$이므로

$-2a^2+12=8$ $\quad\therefore a^2=2$ ········ 40 %

따라서 $f(x)$를 $x+a^2$, 즉 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-2)=-8-4-2+6=-8$ ········ 30 %

138

최고차항의 계수가 1인 두 이차다항식 $f(x)$, $g(x)$가 다음을 모두 만족시킬 때, $f(-1)$의 값을 구하시오. 2

(가) 모든 실수 x에 대하여 $x^2g(x)=(x^2+3x)f(x)$이다.

(나) $g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 5이다.

풀이

조건 (가)에서 $x^2g(x)=x(x+3)f(x)$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=-3$을 대입하면 $g(-3)=0$ ········ 20 %

$g(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$g(-3)=9-3a+b=0$ $\quad\therefore 3a-b=9$ ······ ㉡

조건 (나)에서 $g(2)=5$이므로

$g(2)=4+2a+b=5$ $\quad\therefore 2a+b=1$ ······ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$ $\quad\therefore g(x)=x^2+2x-3$ ········ 40 %

$g(x)$를 ㉠에 대입하면 $x^2(x^2+2x-3)=x(x+3)f(x)$

$x^2(x+3)(x-1)=x(x+3)f(x)$ $\quad\therefore f(x)=x(x-1)$ ········ 30 %

$\therefore f(-1)=(-1)\times(-2)=2$ ········ 10 %

139

다항식 $f(x)$가 다음을 모두 만족시킬 때, $f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. $x+2$

(가) $f(1)=3$

(나) $f(x+2)=f(x)+2x^2-x+1$

풀이

$f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 고 하면

$f(x)=(x^2-4x+3)Q(x)+ax+b=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b$ ······ ㉠

조건 (가)에서 $f(1)=3$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하여 정리하면

$a+b=3$ ······ ㉡

········ 20 %

조건 (나)에서 주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하여 정리하면

$f(3)=5$ ········ 30 %

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하여 정리하면 $3a+b=5$ ······ ㉢

········ 20 %

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

따라서 $f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 나머지는 $x+2$이다. ········ 30 %

140

다항식 $2x^3+ax+6$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3일 때, $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. (단, a는 상수이다.) 7

풀이

$2x^3+ax+6=(x+1)Q(x)+3$

이 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $-2-a+6=3$ $\quad\therefore a=1$ ········ 30 %

$\therefore 2x^3+x+6=(x+1)Q(x)+3$ ······ ㉠

$Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(2)$이므로 ········ 40 %

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$16+2+6=3Q(2)+3$ $\quad\therefore Q(2)=7$ ········ 30 %

141

다항식 $f(x)=x^3+ax^2-3x-4$에 대하여 $f(x+5)$가 $x+4$로 나누어떨어질 때, $f(2x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. (단, a는 상수이다.) 22

풀이

$f(x+5)$가 $x+4$로 나누어떨어지므로

$f(-4+5)=f(1)=0$ ········ 30 %

이때 $f(1)=a-6$이므로 $a-6=0$ $\quad\therefore a=6$

$\therefore f(x)=x^3+6x^2-3x-4$ ········ 30 %

따라서 $f(2x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2\times1)=f(2)=8+24-6-4=22$ ········ 40 %

142

모든 실수 x에 대하여 다항식 $P(x)$가

$$\{P(x)-3\}^2=(x+2a)(x-3a)+25$$

를 만족시킬 때, 모든 $P(5)$의 값의 합은?

(단, a는 실수이다.)

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

풀이

$\{P(x)-3\}^2=(x+2a)(x-3a)+25=x^2-ax-6a^2+25$

이 등식이 x에 대한 항등식이고, 좌변이 완전제곱식이므로 우변도 완전제곱식이 되어야 한다.

즉, $x^2-ax-6a^2+25=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$이어야 하므로

$-6a^2+25=\frac{a^2}{4}$, $a^2=4$ $\therefore a=\pm2$

(i) $a=-2$일 때

$\{P(x)-3\}^2=(x+1)^2$이므로

$P(x)=-x+2$ 또는 $P(x)=x+4$

$\therefore P(5)=-3$ 또는 $P(5)=9$

(ii) $a=2$일 때

$\{P(x)-3\}^2=(x-1)^2$이므로

$P(x)=-x+4$ 또는 $P(x)=x+2$

$\therefore P(5)=-1$ 또는 $P(5)=7$

(i), (ii)에서 모든 $P(5)$의 값의 합은

$(-3)+9+(-1)+7=12$

143 교육청 기출

두 자연수 a, b $(a<b)$와 모든 실수 x에 대하여 등식

$$(x^2-x)(x^2-x+3)+k(x^2-x)+8$$
$$=(x^2-x+a)(x^2-x+b)$$

를 만족시키는 모든 상수 k의 값의 합은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

풀이

주어진 등식에서 $x^2-x=A$로 놓으면

$A(A+3)+Ak+8=(A+a)(A+b)$

$A^2+(k+3)A+8=A^2+(a+b)A+ab$

이 등식은 A에 대한 항등식이므로

$k+3=a+b$, $8=ab$

a, b $(a<b)$는 자연수이므로 $ab=8=1\times8=2\times4$에서

$a=1$, $b=8$ 또는 $a=2$, $b=4$

$\therefore k=6$ 또는 $k=3$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은

$6+3=9$

144

n차다항식

$$P_n(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n)$$

에 대하여

$$x^3-4x^2=a+bP_1(x)+cP_2(x)+dP_3(x)$$

는 x에 대한 항등식이다. $abcd$의 값을 구하시오. 30

(단, n은 자연수이고, a, b, c, d는 상수이다.)

풀이

$P_1(x)=x-1$, $P_2(x)=(x-1)(x-2)$, $P_3(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$이므로

$x^3-4x^2=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)+d(x-1)(x-2)(x-3)$

이 등식의 양변에 $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$을 각각 대입하여 정리하면

$a=-3$, $b=-5$, $c=2$, $d=1$

$\therefore abcd=30$

145 도전! 1등급

모든 실수 x에 대하여

$$(x^2-2x)^4+5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$$

이 성립할 때, $a_4-(a_5+a_7)$의 값은?

(단, a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_8은 상수이다.)

① 36 ② 41 ③ 46 ④ 51 ⑤ 56

풀이

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $a_0=5$이므로 주어진 등식은

$x^4(x-2)^4=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$

좌변에서 삼차 이하의 항의 계수는 모두 0이므로

$x^4(x-2)^4=a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+a_7x^7+a_8x^8$

$(x-2)^4=a_4+a_5x+a_6x^2+a_7x^3+a_8x^4$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $a_4=16$

$x=1$을 대입하면

$(-1)^4=a_4+a_5+a_6+a_7+a_8$ …… ㉡

$x=-1$을 대입하면

$(-3)^4=a_4-a_5+a_6-a_7+a_8$ …… ㉢

㉡$-$㉢을 하면

$a_5+a_7=-40$ $\therefore a_4-(a_5+a_7)=16-(-40)=56$

146

짝수인 모든 자연수 n에 대하여 다항식 $x^n(x^2+ax+b)$를 $(x+3)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $3^{n+1}(x+3)$이다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 27

풀이
$x^n(x^2+ax+b)$를 $(x+3)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면
$x^n(x^2+ax+b)=(x+3)^2Q(x)+3^{n+1}(x+3)$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=-3$을 대입하면 $(-3)^n(9-3a+b)=0$
이때 $(-3)^n\neq0$이므로 $9-3a+b=0$ $\quad\therefore b=3a-9$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면
$x^n(x+3)(x+a-3)=(x+3)^2Q(x)+3^{n+1}(x+3)$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$x^n(x+a-3)=(x+3)Q(x)+3^{n+1}$
이 등식의 양변에 $x=-3$을 대입하면
$(-3)^n(-3+a-3)=3^{n+1}$
이때 n이 짝수이므로 $a-6=3$ $\quad\therefore a=9$
$a=9$를 ㉡에 대입하면 $b=18$ $\quad\therefore a+b=27$

147

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$가 다음을 모두 만족시킨다.

> (가) $2f(x)+g(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 나머지는 $4x+3$이다.
> (나) $f(x)g(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 나머지는 $6x$이다.

다음 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, n이 자연수일 때, $f(n)$, $g(n)$은 모두 정수이다.)

〈보기〉
ㄱ. $2f(1)+g(1)=7$
ㄴ. $f(1)g(1)+f(2)g(2)=18$
ㄷ. $f(x)+2g(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 나머지는 $2x+6$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이
조건 (가), (나)에서
$2f(1)+g(1)=7$, $2f(2)+g(2)=11$, $f(1)g(1)=6$, $f(2)g(2)=12$
$\therefore f(1)=2$, $g(1)=3$, $f(2)=4$, $g(2)=3$
ㄱ. $2f(1)+g(1)=7$ (참)
ㄴ. $f(1)g(1)+f(2)g(2)=6+12=18$ (참)
ㄷ. $f(x)+2g(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면
$f(x)+2g(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$
$=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$
이 등식의 양변에 $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면
$a+b=8$, $2a+b=10$이므로 $a=2$, $b=6$
따라서 구하는 나머지는 $2x+6$이다. (참)

148

다항식 $P(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $Q(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{Q(x)\}^2+\{Q(x-2)\}^2=(x^2+2x)P(x)$$

를 만족시킨다. $P(x)$를 $Q(x)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라고 할 때, $R(1)$의 값은?
(단, 다항식 $Q(x)$의 계수는 실수이다.)

① 0 ② 36 ③ 72
✓④ 108 ⑤ 144

풀이
$\{Q(x)\}^2+\{Q(x-2)\}^2=(x^2+2x)P(x)$
$=x(x+2)P(x)$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=0$, $x=-2$를 각각 대입하면
$\{Q(0)\}^2+\{Q(-2)\}^2=0$, $\{Q(-2)\}^2+\{Q(-4)\}^2=0$
따라서 $Q(0)=0$, $Q(-2)=0$, $Q(-4)=0$이므로
$Q(x)=x(x+2)(x+4)$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$\{x(x+2)(x+4)\}^2+\{(x-2)x(x+2)\}^2=x(x+2)P(x)$
$\therefore P(x)=x(x+2)(x+4)^2+x(x+2)(x-2)^2$
$=2x(x+2)(x+4)(x-2)+36x(x+2)$
$=2(x-2)Q(x)+36x(x+2)$ ($\because$ ㉡)
따라서 $R(x)=36x(x+2)$이므로
$R(1)=36\times1\times3=108$

149

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $Q_1(x)$, 나머지는 $a+1$이고, $(x-1)(x^2+x+1)$로 나누었을 때의 몫은 $Q_2(x)$, 나머지는 x^2+x+b이다. $Q_1(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라고 할 때, $R(a-b)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

✓① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

풀이
$f(1)=a+1$ …… ㉠
$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)Q_2(x)+x^2+x+b$
$=(x-1)(x^2+x+1)Q_2(x)+(x-1)(x+2)+b+2$
$=(x-1)\{(x^2+x+1)Q_2(x)+x+2\}+b+2$ …… ㉡
$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $(x^2+x+1)Q_2(x)+x+2$이므로
$Q_1(x)=(x^2+x+1)Q_2(x)+x+2$
$R(x)=x+2$
㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=b+2$이므로
㉠에서 $a+1=b+2$ $\quad\therefore a-b=1$
$\therefore R(a-b)=R(1)=1+2=3$

150

이차다항식 $f(x)$에 대하여 $f(2-x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 -4이고, $xf(x)$는 $(x+1)(x-4)$로 나누어떨어진다. 다항식 $f(x-1)$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는?

① -8　　✓② -6　　③ -4
④ -2　　⑤ 2

풀이
$f(2-x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는
$f(2-2)=f(0)=-4$
$xf(x)$는 $(x+1)(x-4)$로 나누어떨어지므로 $xf(x)$는 $x+1$과 $x-4$로 각각 나누어떨어진다.
즉, $-f(-1)=0$, $4f(4)=0$이므로
$f(-1)=0$, $f(4)=0$
따라서 $f(x)=a(x+1)(x-4)$ (a는 0이 아닌 상수)라고 하면
$f(0)=-4$에서 $-4a=-4$　　$\therefore a=1$
$\therefore f(x)=(x+1)(x-4)$
따라서 $f(x-1)$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는
$f(3-1)=f(2)=3\times(-2)=-6$

151 도전! 1등급 교육청 기출

최고차항의 계수가 1인 사차다항식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값은?

> (가) $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지와 $f(x)$를 x^2-3으로 나눈 나머지는 서로 같다.
> (나) $f(x+1)-5$는 x^2+x로 나누어떨어진다.

① -9　　② -8　　✓③ -7
④ -6　　⑤ -5

풀이
조건 (가)에서 $f(x)$를 $x+1$, x^2-3으로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, 나머지를 R라고 하면
$f(x)=(x+1)Q_1(x)+R$, $f(x)=(x^2-3)Q_2(x)+R$
$\therefore f(x)-R=(x+1)Q_1(x)=(x^2-3)Q_2(x)$
$f(x)-R$는 $x+1$, x^2-3으로 각각 나누어떨어지고 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차다항식이므로
$f(x)-R=(x+1)(x^2-3)(x+a)$ (a는 상수)　　…… ㉠
로 놓을 수 있다.
$f(x+1)-5$를 x^2+x로 나누었을 때의 몫을 $Q_3(x)$라고 하면
$f(x+1)-5=(x^2+x)Q_3(x)=x(x+1)Q_3(x)$
이 등식의 양변에 $x=0$, $x=-1$을 각각 대입하면 $f(1)=5$, $f(0)=5$
㉠의 양변에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면 $5-R=-3a$, $5-R=-4-4a$이므로
$R=-7$, $a=-4$
따라서 $f(x)=(x+1)(x^2-3)(x-4)-7$이므로
$f(4)=-7$

152

다음은 다항식 ax^2+bx+c를 $(x-m)(x-n)$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하는 과정이다. 나머지가 $6x-4$일 때, $a+b+c$의 값은?
(단, a, b, c는 상수이다.)

m	a	b	c
		$\boxed{3m}$	$\boxed{0}$
n	3	0	2
		$\boxed{3n}$	
	3	6	

① 1　　✓② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

풀이
주어진 조립제법에서 $a=3$, $c=2$, $n=2$
이때 나머지가 $6x-4$이므로
$3x^2+bx+2=3(x-m)(x-2)+6x-4$
이 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면
$12+2b+2=12-4$　　$\therefore b=-3$
$\therefore a+b+c=3+(-3)+2=2$

153

삼차식 $f(x)$에 대하여 다항식 $f(x)+1$은 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지고, 다항식 $f(x)+9$는 $(x-1)^2$으로 나누어떨어진다. 다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는?

① 23　　② 25　　③ 27
④ 29　　✓⑤ 31

풀이
$f(x)$는 삼차식이므로 $f(x)+1$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라고 하면
$f(x)+1=(x+1)^2(ax+b)$
$f(x)+9=(x+1)^2(ax+b)+8$
$\quad=ax^3+(2a+b)x^2+(a+2b)x+b+8$

1	a	$2a+b$	$a+2b$	$b+8$
		a	$3a+b$	$4a+3b$
1	a	$3a+b$	$4a+3b$	$4a+4b+8$
		a	$4a+b$	
	a	$4a+b$	$8a+4b$	

위의 조립제법에서 $8a+4b=0$, $4a+4b+8=0$이므로 두 식을 연립하여 풀면
$a=2$, $b=-4$
즉, $f(x)+1=(x+1)^2(2x-4)$이므로 $f(x)=2(x+1)^2(x-2)-1$
따라서 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는
$f(3)=2\times16\times1-1=31$

03 인수분해

1 인수분해

(1) 인수분해

하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것

$$x^2+5x+6 \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} (x+2)(x+3)$$

위와 같이 인수분해는 다항식의 전개 과정을 거꾸로 생각하면 된다.

참고 다항식을 인수분해할 때에는 일반적으로 계수가 유리수인 범위까지 인수분해한다. 예를 들어, $x^2-4=(x+2)(x-2)$로 인수분해하지만 $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$로 인수분해하지 않는다.

(2) 인수분해 공식

① $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

② $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

③ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

④ $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

⑤ $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

⑥ $\begin{cases} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3 \\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3 \end{cases}$

⑦ $\begin{cases} a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \end{cases}$

⑧ $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

⑨ $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

참고 인수분해 공식은 곱셈 공식의 좌변과 우변을 바꾸어 놓은 것과 같다.

2 복잡한 식의 인수분해

(1) 공통부분이 있는 다항식의 인수분해

① 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해한다.

② 공통부분이 바로 보이지 않을 때에는 공통부분이 생기도록 주어진 식을 변형한 다음 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해한다.

(2) x^4+ax^2+b의 꼴의 다항식의 인수분해

① $x^2=X$로 치환하여 X^2+aX+b를 인수분해한다.

② 치환한 식 X^2+aX+b가 인수분해되지 않는 경우에는 ax^2을 분리하여 $(x^2+p)^2-(qx)^2$의 꼴로 변형하여 인수분해한다.

참고 x^4+ax^2+b (a, b는 상수)와 같이 차수가 짝수인 항과 상수항만으로 이루어진 다항식을 복이차식이라고 한다.

(3) 여러 개의 문자를 포함한 다항식의 인수분해

차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해한다.

참고 차수가 모두 같을 때에는 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

(4) 인수 정리를 이용한 다항식의 인수분해

$f(x)$가 삼차 이상의 다항식이면 다음과 같은 순서로 인수분해한다.

[1단계] $f(\alpha)=0$을 만족시키는 상수 α의 값을 구한다. 이때 α의 값은 $\pm\frac{(\text{상수항의 약수})}{(\text{최고차항의 계수의 약수})}$ 중에서 찾을 수 있다.

[2단계] 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$를 구한 다음 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$의 꼴로 나타낸다.

[3단계] $Q(x)$가 더 이상 인수분해되지 않을 때까지 인수분해한다.

문제를 풀 때 유용한 풍쌤 비법

❶ ( )( )( )( )$+k$의 꼴의 다항식의 인수분해

공통부분이 보이지 않는다고 무턱대고 전개하여 인수분해하지 않도록 한다.

다음과 같이 상수항의 합이 같아지도록 2개씩 묶어 전개하면 공통부분이 생기므로 이것을 한 문자로 치환하여 인수분해할 수 있다.

상수항의 합: $2+3=5$

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+k=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}+k$

상수항의 합: $1+4=5$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+k$

공통부분인 x^2+5x를 한 문자로 치환하여 인수분해한다.

실력을 기르는 유형

01 인수분해 공식을 이용한 다항식의 인수분해

중요도 ■■■

154

상|중|하

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$ $(x-y-z)^2$

(2) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$ $(2x-y)^3$

(3) a^3+27 $(a+3)(a^2-3a+9)$

(4) $125a^3-8b^3$ $(5a-2b)(25a^2+10ab+4b^2)$

155

상|중|하

다음 중 a^4-a^3+8a-8의 인수인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

√① $a-1$ ② $a+1$ ③ $a-2$

√④ a^2-2a+4 ⑤ a^2+2a+4

풀이

$a^4-a^3+8a-8=a^3(a-1)+8(a-1)$

$=(a-1)(a^3+8)$

$=(a-1)(a+2)(a^2-2a+4)$

156

상|중|하

다음 중 옳은 것은?

① $x^3-x^2-12x=x(x-3)(x+4)$

② $x^4+8x=x(x+2)(x^2+2x+4)$

③ $x^4+x^3-2x^2=x^2(x+1)(x-2)$

④ $a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a-b-c)$

√⑤ $x^2(a-b)-y^2(b-a)=(a-b)(x^2+y^2)$

풀이

① $x^3-x^2-12x=x(x-4)(x+3)$

② $x^4+8x=x(x+2)(x^2-2x+4)$

③ $x^4+x^3-2x^2=x^2(x-1)(x+2)$

④ $a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a-b+c)$

157

상|중|하

다항식 $x^3+y^3-8z^3+6xyz$를 인수분해하면?

① $(x+y-2z)(x^2+y^2-4z^2-xy+2yz+2zx)$

√② $(x+y-2z)(x^2+y^2+4z^2-xy+2yz+2zx)$

③ $(x+y-2z)(x^2+y^2+4z^2+xy-2yz-2zx)$

④ $(x+y+2z)(x^2+y^2-4z^2-xy+2yz+2zx)$

⑤ $(x+y+2z)(x^2+y^2+4z^2-xy-2yz-2zx)$

풀이

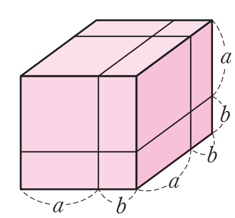
$x^3+y^3-8z^3+6xyz=x^3+y^3+(-2z)^3-3xy\times(-2z)$

$=(x+y-2z)(x^2+y^2+4z^2-xy+2yz+2zx)$

158

상|중|하

정육면체 모양의 나무토막을 오른쪽 그림과 같이 선을 따라 자르면 8조각으로 나누어진다. 다음 중 이것을 이용하여 유도할 수 있는 인수분해 공식은?



√① $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

② $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

③ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

④ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

⑤ $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

풀이

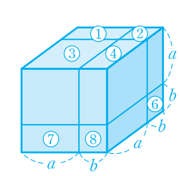
오른쪽 그림에서 보이지 않는 조각을 ⑤번이라고 하면

8조각의 부피의 합은

①+②+③+④+⑤+⑥+⑦+⑧

$=a^2b+ab^2+a^3+a^2b+ab^2+b^3+a^2b+ab^2$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ …… ㉠



전체 나무토막은 한 모서리의 길이가 $a+b$인 정육면체이므로

그 부피는

$(a+b)^3$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같으므로 주어진 그림을 이용하여 유도할 수 있는 인수분해 공식은

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

159 내신 기출

상 중 하

다항식 $x^4+81y^4+3x^3y+27xy^3$이

$(x+ay)^2(x^2+bxy+cy^2)$

으로 인수분해될 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① -9 ② -3 ③ 1

④ 3 ✓⑤ 9

풀이

$x^4+81y^4+3x^3y+27xy^3=x^3(x+3y)+27y^3(x+3y)$

$=(x+3y)(x^3+27y^3)$

$=(x+3y)^2(x^2-3xy+9y^2)$

따라서 $a=3$, $b=-3$, $c=9$이므로

$a+b+c=9$

02 공통부분이 있는 다항식의 인수분해

중요도

160 내신 기출

상 중 하

다음 중 $(x^2+x-5)(x^2+x-9)-21$의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $x+2$ ② $x+4$ ③ $x-1$

④ $x-3$ ✓⑤ $x-5$

풀이

$x^2+x=X$로 놓으면

$(x^2+x-5)(x^2+x-9)-21=(X-5)(X-9)-21$

$=X^2-14X+24$

$=(X-2)(X-12)$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)$

$=(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

161

상 중 하

다음 중 다항식 $(x^2-4x)^2-3x^2+12x-10$의 인수인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $x-1$ ② $x+5$ ✓③ $(x-5)(x+1)$

✓④ x^2-4x+2 ⑤ x^2-4x-2

풀이

$(x^2-4x)^2-3x^2+12x-10=(x^2-4x)^2-3(x^2-4x)-10$

$x^2-4x=X$로 놓으면

$(x^2-4x)^2-3(x^2-4x)-10=X^2-3X-10$

$=(X+2)(X-5)$

$=(x^2-4x+2)(x^2-4x-5)$

$=(x-5)(x+1)(x^2-4x+2)$

162

상 중 하

다항식 $5(x+3y)^2-(x+3y)(2x-y)-6(2x-y)^2$이

$-7(x-ay)(bx+cy)$

로 인수분해될 때, 자연수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하시오. 18

풀이

$x+3y=X$, $2x-y=Y$로 놓으면

$5(x+3y)^2-(x+3y)(2x-y)-6(2x-y)^2$

$=5X^2-XY-6Y^2$

$=(X+Y)(5X-6Y)$

$=\{(x+3y)+(2x-y)\}\{5(x+3y)-6(2x-y)\}$

$=(3x+2y)(-7x+21y)$

$=-7(x-3y)(3x+2y)$

따라서 $a=3$, $b=3$, $c=2$이므로

$abc=18$

163 풍쌤 비법 ❶

상 중 하

다항식 $(x-1)(x-3)(x+3)(x+5)+35$가

$(x+a)(x+b)f(x)$

로 인수분해될 때, $a+b+f(4)$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① 22 ② 20 ③ 18

✓④ 16 ⑤ 14

풀이

$(x-1)(x-3)(x+3)(x+5)+35=(x^2+2x-3)(x^2+2x-15)+35$

$x^2+2x=X$로 놓으면

$(x^2+2x-3)(x^2+2x-15)+35=(X-3)(X-15)+35$

$=X^2-18X+80$

$=(X-8)(X-10)$

$=(x^2+2x-8)(x^2+2x-10)$

$=(x-2)(x+4)(x^2+2x-10)$

따라서 $a=-2$, $b=4$ 또는 $a=4$, $b=-2$이고, $f(x)=x^2+2x-10$이므로

$a+b+f(4)=16$

03 x^4+ax^2+b의 꼴의 다항식의 인수분해

중요도

164 교육청 기출

상 중 하

다항식 x^4-x^2-12가

$(x-a)(x+a)(x^2+b)$

로 인수분해될 때, 두 양수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 4 ✓② 5 ③ 6

④ 7 ⑤ 8

풀이

$x^2=X$로 놓으면

$x^4-x^2-12=X^2-X-12$

$=(X-4)(X+3)$

$=(x^2-4)(x^2+3)$

$=(x-2)(x+2)(x^2+3)$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로

$a+b=5$

165

상 중 하

다음 중 다항식 x^4-16x^2+36의 인수인 것은?

① x^2+2x-9　② x^2+2x+6
③ x^2+2x+9　✓④ x^2-2x-6
⑤ x^2-2x+6

풀이

$x^4-16x^2+36=x^4-12x^2+36-4x^2$
$=(x^2-6)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x-6)(x^2-2x-6)$

166 내신 기출

상 중 하

다항식 x^4+64y^4이 $(x^2+axy+by^2)(x^2-axy+by^2)$으로 인수분해될 때, 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 12

풀이

$x^4+64y^4=x^4+16x^2y^2+64y^4-16x^2y^2$
$=(x^2+8y^2)^2-(4xy)^2$
$=(x^2+4xy+8y^2)(x^2-4xy+8y^2)$
따라서 $a=4$, $b=8$이므로
$a+b=12$

167

상 중 하

다항식 $4x^4-8x^2y^2+y^4$을 인수분해하면

$(2x^2+axy+by^2)(cx^2-2xy+dy^2)$

일 때, $abcd$의 값은? (단, a, b, c, d는 상수이다.)

① -4　② -2　③ 2
✓④ 4　⑤ 6

풀이

$4x^4-8x^2y^2+y^4=4x^4-4x^2y^2+y^4-4x^2y^2$
$=(2x^2-y^2)^2-(2xy)^2$
$=(2x^2+2xy-y^2)(2x^2-2xy-y^2)$
따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=2$, $d=-1$이므로
$abcd=4$

04 문자가 여러 개인 다항식의 인수분해

중요도

168

상 중 하

다음 중 $4x^2+11xy-3y^2+3x-4y-1$의 인수인 것은?

① $x+3y-1$　② $x-3y+1$
③ $4x+y+1$　④ $4x-y+1$
✓⑤ $4x-y-1$

풀이

$4x^2+11xy-3y^2+3x-4y-1=4x^2+(11y+3)x-(3y^2+4y+1)$
$=4x^2+(11y+3)x-(3y+1)(y+1)$
$=\{x+(3y+1)\}\{4x-(y+1)\}$
$=(x+3y+1)(4x-y-1)$

169

상 중 하

다항식 $x^2+xy-2y^2+x+11y-12$가

$(x+ay+b)(x+cy+d)$

로 인수분해될 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $ad-bc$의 값은? (단, $a<c$)

① -9　② -7　✓③ -5
④ -3　⑤ -1

풀이

$x^2+xy-2y^2+x+11y-12=x^2+(y+1)x-(2y^2-11y+12)$
$=x^2+(y+1)x-(y-4)(2y-3)$
$=(x-y+4)(x+2y-3)$
이때 $a<c$이므로
$a=-1$, $b=4$, $c=2$, $d=-3$
$\therefore ad-bc=-5$

170

상 중 하

다항식 $a^2(b-c)-b^2(c-a)+c^2(a+b)-2abc$를 인수분해하시오. $(a+b)(a-c)(b-c)$

풀이

$a^2(b-c)-b^2(c-a)+c^2(a+b)-2abc$
$=(b-c)a^2+(b^2+c^2-2bc)a-b^2c+bc^2$
$=(b-c)a^2+(b-c)^2a-bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2+(b-c)a-bc\}$
$=(b-c)(a+b)(a-c)$
$=(a+b)(a-c)(b-c)$

171

상 중 하

다항식 $x^2+2xy-8y^2+kx+2y+15$가 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 정수 k의 값은?

① -4　② -1　③ 2
④ 5　✓⑤ 8

풀이

$x^2+2xy-8y^2+kx+2y+15=x^2+(2y+k)x-(8y^2-2y-15)$
$=x^2+(2y+k)x-(2y-3)(4y+5)$
이 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면
$-(2y-3)+(4y+5)=2y+k$
가 되어야 한다.
즉, $3+5=k$이어야 하므로 $k=8$

172

상 중 하

세 양수 a, b, c에 대하여 등식

$$a^3+a^2b+ab^2-c^3-bc^2-b^2c=0$$

이 항등식이 될 조건은?

① $a=b$　✓② $a=c$　③ $b=c$
④ $a=2b$　⑤ $a=2c$

풀이

$a^3+a^2b+ab^2-c^3-bc^2-b^2c=0$에서
$(a-c)b^2+(a^2-c^2)b+a^3-c^3=0$
$(a-c)b^2+(a+c)(a-c)b+(a-c)(a^2+ac+c^2)=0$
$(a-c)\{b^2+(a+c)b+a^2+ac+c^2\}=0$
$(a-c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)=0$
이때 a, b, c는 양수이므로
$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\neq0$
따라서 주어진 등식이 항등식이 될 조건은
$a-c=0$　$\therefore a=c$

05 인수 정리를 이용한 다항식의 인수분해

중요도

173

상 중 하

다항식 $f(x)=x^3+3x^2+ax-8$이 $x-2$를 인수로 가질 때, 이 다항식을 인수분해하시오. (단, a는 상수이다.)

$(x-2)(x+1)(x+4)$

풀이

$f(x)$가 $x-2$를 인수로 가지므로
$f(2)=8+12+2a-8=0$　$\therefore a=-6$
$\therefore f(x)=x^3+3x^2-6x-8$
$=(x-2)(x^2+5x+4)$
$=(x-2)(x+1)(x+4)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 3 & -6 & -8 \\ & & 2 & 10 & 8 \\ \hline & 1 & 5 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

174 내신 기출

상 중 하

다항식 x^3+5x^2+5x-2가 $(x+a)(x^2+bx+c)$로 인수분해될 때, abc의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

① 6　② 4　③ -4
✓④ -6　⑤ -8

풀이

$f(x)=x^3+5x^2+5x-2$라고 하면
$f(-2)=0$이므로
$x^3+5x^2+5x-2=(x+2)(x^2+3x-1)$
따라서 $a=2$, $b=3$, $c=-1$이므로
$abc=-6$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 5 & 5 & -2 \\ & & -2 & -6 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

175

상 중 하

다항식 $2x^3+ax^2+2x+3$이 $(x-1)(x-3)(bx+c)$로 인수분해될 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. -4
(단, a, b, c는 상수이다.)

풀이

$f(x)=2x^3+ax^2+2x+3$이라고 하면
$f(1)=2+a+2+3=0$　$\therefore a=-7$
$\therefore f(x)=2x^3-7x^2+2x+3$
$=(x-1)(x-3)(2x+1)$
따라서 $b=2$, $c=1$이므로
$a+b+c=-4$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -7 & 2 & 3 \\ & & 2 & -5 & -3 \\ \hline 3 & 2 & -5 & -3 & \boxed{0} \\ & & 6 & 3 & \\ \hline & 2 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

176 교육청 기출

상 중 하

다항식 $2x^3-3x^2-12x-7$을 인수분해하면

$$(x+a)^2(bx+c)$$

일 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

① -6　② -5　✓③ -4
④ -3　⑤ -2

풀이

$f(x)=2x^3-3x^2-12x-7$이라고 하면
$f(-1)=0$이므로
$2x^3-3x^2-12x-7$
$=(x+1)(2x^2-5x-7)$
$=(x+1)^2(2x-7)$
따라서 $a=1$, $b=2$, $c=-7$이므로
$a+b+c=-4$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -3 & -12 & -7 \\ & & -2 & 5 & 7 \\ \hline & 2 & -5 & -7 & \boxed{0} \end{array}$$

177

상중하

다항식 $f(x)=2x^3-ax^2+(a+13)x-15$가 계수가 모두 정수인 세 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 다항식 $f(x)$로 가능한 것의 개수는? (단, a는 상수이다.)

√① 8　② 9　③ 10
④ 11　⑤ 12

풀이

$f(1)=0$이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -a & a+13 & -15 \\ & & 2 & -a+2 & 15 \\ \hline & 2 & -a+2 & 15 & \boxed{0} \end{array}$$

$2x^3-ax^2+(a+13)x-15$
$=(x-1)\{2x^2+(-a+2)x+15\}$

$2x^2+(-a+2)x+15$가 상수항이 양수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우는 $(2x+15)(x+1)$, $(2x+5)(x+3)$, $(2x+3)(x+5)$, $(2x+1)(x+15)$의 4가지이다.

마찬가지로 상수항이 음수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우도 4가지이므로 $f(x)$가 계수가 모두 정수인 세 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우는 $4+4=8$(가지)

따라서 다항식 $f(x)$로 가능한 것은 8개이다.

178

상중하

이차항의 계수가 1인 두 이차다항식 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $f(x)g(x)=x^4+2x^3-8x^2-18x-9$이다. $f(x)$와 $g(x)$ 모두 $x+a$로 나누어떨어질 때, $f(2)+g(2)$의 값을 구하시오. 12

풀이

$f(-1)g(-1)=0$이므로

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 2 & -8 & -18 & -9 \\ & & -1 & -1 & 9 & 9 \\ \hline & 1 & 1 & -9 & -9 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^4+2x^3-8x^2-18x-9$
$=(x+1)(x^3+x^2-9x-9)$
$=(x+1)\{x^2(x+1)-9(x+1)\}$
$=(x+1)^2(x^2-9)$
$=(x+1)^2(x-3)(x+3)$

$\therefore f(x)=(x+1)(x-3)$, $g(x)=(x+1)(x+3)$
또는 $f(x)=(x+1)(x+3)$, $g(x)=(x+1)(x-3)$

$\therefore f(2)+g(2)=12$

06 계수가 대칭인 사차식의 인수분해

중요도

179

상중하

다음 중 다항식 $x^4-7x^3+14x^2-7x+1$의 인수인 것은?

① x^2+3x-1　② x^2-3x-1
③ x^2+4x-1　√④ x^2-4x+1
⑤ x^2-4x-1

풀이

$$\begin{aligned} x^4-7x^3+14x^2-7x+1 &= x^2\left(x^2-7x+14-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+12\right\} \\ &= x^2\left(x+\frac{1}{x}-3\right)\left(x+\frac{1}{x}-4\right) \\ &= (x^2-3x+1)(x^2-4x+1) \end{aligned}$$

180

상중하

다항식 $x^4-4x^3+5x^2-4x+1$을 인수분해하시오.

$(x^2-3x+1)(x^2-x+1)$

풀이

$$\begin{aligned} x^4-4x^3+5x^2-4x+1 &= x^2\left(x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right\} \\ &= x^2\left(x+\frac{1}{x}-3\right)\left(x+\frac{1}{x}-1\right) \\ &= (x^2-3x+1)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

181 내신 기출

상중하

다항식 $x^4-x^3-10x^2-x+1$이

$(x^2+ax+1)(x^2+bx+1)$

로 인수분해될 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은? (단, $a>b$)

① 6　√② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

풀이

$$\begin{aligned} x^4-x^3-10x^2-x+1 &= x^2\left(x^2-x-10-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)-12\right\} \\ &= x^2\left(x+\frac{1}{x}+3\right)\left(x+\frac{1}{x}-4\right) \\ &= (x^2+3x+1)(x^2-4x+1) \end{aligned}$$

따라서 $a=3$, $b=-4$ ($\because a>b$)이므로
$a-b=7$

07 조건이 주어진 다항식의 인수분해

중요도

182

상중하

$3a+b+1=0$일 때, 다음 중 $1-9a^2+6ab-b^2$과 같은 것은?

√① $12ab$　② $10ab$　③ $8ab$
④ $-8ab$　⑤ $-10ab$

풀이

$$\begin{aligned} 1-9a^2+6ab-b^2 &= 1-(9a^2-6ab+b^2) \\ &= 1-(3a-b)^2 \\ &= \{1+(3a-b)\}\{1-(3a-b)\} \\ &= (1+3a-b)(1-3a+b) \end{aligned}$$

이때 $3a+b+1=0$에서 $1+3a=-b$, $1+b=-3a$이므로
(주어진 식)$=(-b-b)(-3a-3a)=12ab$

183

상중하

$x+4y-z=0$일 때, 다음 중 $3x^2+12xy+z^2$과 같은 것은?

① $4x(y+z)$ ② $4y(z+x)$ √③ $4z(x+y)$
④ $4xy(x+y)$ ⑤ $4yz(z+x)$

풀이

$z=x+4y$이므로

$3x^2+12xy+z^2=3x^2+12xy+(x+4y)^2$
$=3x(x+4y)+(x+4y)^2$
$=(x+4y)(4x+4y)$
$=4z(x+y)$

184

상중하

$2x^2+y+1=0$일 때, $1-4x^4+4x^2y-y^2=ax^2y$이다. 이때 상수 a의 값은?

① 6 √② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

풀이

$1-4x^4+4x^2y-y^2=1-(4x^4-4x^2y+y^2)$
$=1-(2x^2-y)^2$
$=(1+2x^2-y)(1-2x^2+y)$ …… ㉠

$2x^2+y+1=0$에서 $1+2x^2=-y$, $1+y=-2x^2$이므로 ㉠에 대입하면

$(1+2x^2-y)(1-2x^2+y)=(-y-y)(-2x^2-2x^2)=8x^2y$

$\therefore a=8$

08 인수분해를 이용한 삼각형의 모양 판단 중요도

185

상중하

$a^3-a^2b-a^2c+ac^2-bc^2+abc=0$일 때, a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하시오.

$a=b$인 이등변삼각형

풀이

$a^3-a^2b-a^2c+ac^2-bc^2+abc=0$에서

$-b(a^2-ac+c^2)+a(a^2-ac+c^2)=0$

$(a^2-ac+c^2)(a-b)=0$

이때 $a^2-ac+c^2=(a-c)^2+ac>0$ ($\because a>0$, $c>0$)이므로

$a-b=0$, 즉 $a=b$

따라서 이 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형이다.

186 내신 기출

상중하

세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형 ABC에서

$$a^3+b^3+a^2b+ab^2-ac^2-bc^2=0$$

이 성립할 때, 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

① 빗변의 길이가 a인 직각삼각형
② 빗변의 길이가 b인 직각삼각형
√③ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형
④ $a=b$인 이등변삼각형
⑤ $b=c$인 이등변삼각형

풀이

$a^3+b^3+a^2b+ab^2-ac^2-bc^2=0$에서

$-(a+b)c^2+a^3+a^2b+ab^2+b^3=0$

$-(a+b)c^2+a^2(a+b)+b^2(a+b)=0$

$(a+b)(-c^2+a^2+b^2)=0$

이때 $a+b\neq0$이므로 $-c^2+a^2+b^2=0$ $\therefore c^2=a^2+b^2$

따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

187

상중하

삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 사이에

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

인 관계가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 빗변의 길이가 a인 직각삼각형
② 빗변의 길이가 c인 직각삼각형
③ $a=b$인 이등변삼각형
④ $b=c$인 이등변삼각형
√⑤ 정삼각형

풀이

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$이므로

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

$\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

이때 $a+b+c\neq0$이므로 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

즉, $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$이므로 $a=b=c$

따라서 이 삼각형은 정삼각형이다.

09 인수분해를 이용한 식의 값 구하기 중요도

188 교육청 기출

상중하

$x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$일 때, x^2y+xy^2+x+y의 값은?

① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{3}$
√④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

풀이

$x^2y+xy^2+x+y=xy(x+y)+(x+y)$
$=(x+y)(xy+1)$

$x+y=2\sqrt{3}$, $xy=1$이므로

$\therefore x^2y+xy^2+x+y=(x+y)(xy+1)=4\sqrt{3}$

189

상 중 하

$a+b+c=0$일 때, $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3abc}$의 값은? (단, $abc\neq0$)

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

풀이
$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
이고 $a+b+c=0$이므로
$a^3+b^3+c^3-3abc=0$　$\therefore a^3+b^3+c^3=3abc$
$\therefore \dfrac{a^3+b^3+c^3}{3abc}=\dfrac{3abc}{3abc}=1$

190

상 중 하

$a-b=1$, $b+c=5$, $a-c=-2$일 때,
$a^2b+a^2c-ab^2-ac^2+b^2c+bc^2-2abc$의 값은?

① -12　② -10　③ -8
④ -6　⑤ -4

풀이
$a^2b+a^2c-ab^2-ac^2+b^2c+bc^2-2abc$
$=a^2(b+c)-a(b^2+c^2+2bc)+bc(b+c)$
$=a^2(b+c)-a(b+c)^2+bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=(b+c)(a-b)(a-c)$
$=5\times1\times(-2)=-10$

191 교육청 기출

상 중 하

두 자연수 a, b에 대하여 $a^2b+2ab+a^2+2a+b+1$의 값이 245일 때, $a+b$의 값은?

① 9　② 10　③ 11
④ 12　⑤ 13

풀이
$a^2b+2ab+a^2+2a+b+1=(a^2+2a+1)b+a^2+2a+1$
$=(a^2+2a+1)(b+1)$
$=(a+1)^2(b+1)$
이 식의 값이 245이고, $245=5\times7^2$이므로
$(a+1)^2(b+1)=7^2\times5$에서
$a+1=7$, $b+1=5$ ($\because$ a, b는 자연수)
따라서 $a=6$, $b=4$이므로
$a+b=10$

10 인수분해를 이용한 복잡한 수의 계산

중요도

192

상 중 하

$\dfrac{11.5^3-11.5^2\times8.5-11.5\times8.5^2+8.5^3}{20}$의 값은?

① 1　② 4　③ 9
④ 16　⑤ 25

풀이
$20=11.5+8.5$이므로 $11.5=a$, $8.5=b$라고 하면
(주어진 식)$=\dfrac{a^3-a^2b-ab^2+b^3}{a+b}$
$=\dfrac{a^2(a-b)-b^2(a-b)}{a+b}$
$=\dfrac{(a^2-b^2)(a-b)}{a+b}$
$=\dfrac{(a+b)(a-b)^2}{a+b}$
$=(a-b)^2$
$=(11.5-8.5)^2=9$

193 내신 기출

상 중 하

$\sqrt{30\times31\times32\times33+1}$의 값은?

① 991　② 981　③ 971
④ 961　⑤ 951

풀이
$30=x$로 놓으면
$30\times31\times32\times33+1=x(x+1)(x+2)(x+3)+1$
$=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1$
$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$
$x^2+3x=X$로 놓으면
$(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1=X(X+2)+1=X^2+2X+1$
$=(X+1)^2=(x^2+3x+1)^2$
$=(900+90+1)^2=991^2$
$\therefore \sqrt{30\times31\times32\times33+1}=\sqrt{991^2}=991$

194

상 중 하

$100^3+9\times100^2+23\times100+15$가 서로 다른 세 자리 자연수 a, b, c의 곱과 같을 때, $a+b+c$의 값은?

① 308　② 309　③ 310
④ 311　⑤ 312

풀이
$100=x$로 놓으면
$100^3+9\times100^2+23\times100+15=x^3+9x^2+23x+15$
$f(x)=x^3+9x^2+23x+15$라고 하면
$f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여
$f(x)$를 인수분해하면

-1	1	9	23	15
		-1	-8	-15
	1	8	15	0

$x^3+9x^2+23x+15$
$=(x+1)(x^2+8x+15)$
$=(x+1)(x+3)(x+5)$
$=101\times103\times105$
$\therefore a+b+c=309$

195

다항식 $(x^2-x)(x^2-x+1)-6$이

$$(x+1)(x+a)(x^2+bx+c)$$

로 인수분해될 때, 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하시오. 6

풀이

$x^2-x=X$로 놓으면

$(x^2-x)(x^2-x+1)-6=X(X+1)-6$

$=X^2+X-6$ ······ 30 %

$=(X+3)(X-2)$

$=(x^2-x+3)(x^2-x-2)$

$=(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$ ······ 40 %

따라서 $a=-2$, $b=-1$, $c=3$이므로

$abc=6$ ······ 30 %

196

모든 실수 x에 대하여

$$(2x-1)(2x+1)(2x+3)(2x+5)+a$$
$$=(4x^2+bx+c)^2$$

이 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. 23

(단, a, b, c는 상수이다.)

풀이

$(2x-1)(2x+1)(2x+3)(2x+5)+a=(4x^2+8x-5)(4x^2+8x+3)+a$

$4x^2+8x=X$로 놓으면

$(4x^2+8x-5)(4x^2+8x+3)+a=(X-5)(X+3)+a$

$=X^2-2X-15+a$ ······ 30 %

이 식이 완전제곱식이 되어야 하므로

$-15+a=(-1)^2$ $\therefore a=16$ ······ 30 %

따라서 $X^2-2X-15+a=X^2-2X+1=(X-1)^2=(4x^2+8x-1)^2$이므로

$b=8$, $c=-1$ ······ 30 %

$\therefore a+b+c=23$ ······ 10 %

197

다항식 x^4-x^2+16이 $(x^2+ax+b)(x^2+cx+b)$로 인수분해될 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b-c$의 값을 구하시오. (단, $a>c$) 10

풀이

$x^4-x^2+16=(x^2+4)^2-(3x)^2$

$=(x^2+3x+4)(x^2-3x+4)$ ······ 60 %

이때 $a>c$이므로

$a=3$, $b=4$, $c=-3$ ······ 20 %

$\therefore a+b-c=10$ ······ 20 %

198

삼각형 ABC의 세 변의 길이 a, b, c 사이에

$$a^4+(b+c)^2(b^2+c^2)=2(b^2+c^2+bc)a^2$$

이 성립할 때, 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 구하시오. 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

풀이

$a^4+(b+c)^2(b^2+c^2)=2(b^2+c^2+bc)a^2$에서

$a^4-2(b^2+c^2+bc)a^2+(b+c)^2(b^2+c^2)=0$

$\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b^2+c^2)\}=0$

$(a+b+c)(a-b-c)(a^2-b^2-c^2)=0$ ······ 50 %

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a<b+c$

따라서 $a+b+c\neq0$, $a-b-c\neq0$이므로

$a^2-b^2-c^2=0$ $\therefore a^2=b^2+c^2$ ······ 30 %

따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다. ······ 20 %

199

$a-c=1+\sqrt{3}$, $c-b=1-\sqrt{3}$일 때,

$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$의 값을 구하시오. -4

풀이

$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)=(c-b)a^2+(b^2-c^2)a+bc(c-b)$

$=(c-b)a^2+(b+c)(b-c)a+bc(c-b)$

$=(c-b)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(c-b)(a-b)(a-c)$ ······ ㉠

······ 50 %

한편, $a-c=1+\sqrt{3}$, $c-b=1-\sqrt{3}$을 변끼리 더하면

$a-b=2$ ······ 30 %

㉠에 $a-b=2$, $a-c=1+\sqrt{3}$, $c-b=1-\sqrt{3}$을 대입하면 구하는 식의 값은

$(1-\sqrt{3})\times2\times(1+\sqrt{3})=-4$ ······ 20 %

200

다항식 $f(x)=x^3-7x^2-17x-9$일 때, $f(79)$는 m자리 자연수이다. 자연수 $f(79)$의 모든 자리의 숫자의 합을 n이라고 할 때, $m+n$의 값을 구하시오. 22

풀이

$f(-1)=0$이므로

$x^3-7x^2-17x-9=(x+1)(x^2-8x-9)$

$=(x+1)(x+1)(x-9)$

$=(x+1)^2(x-9)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -7 & -17 & -9 \\ & & -1 & 8 & 9 \\ \hline & 1 & -8 & -9 & 0 \end{array}$$

······ 50 %

$\therefore f(79)=80^2\times70=448000$ ······ 20 %

따라서 $m=6$, $n=4+4+8=16$이므로

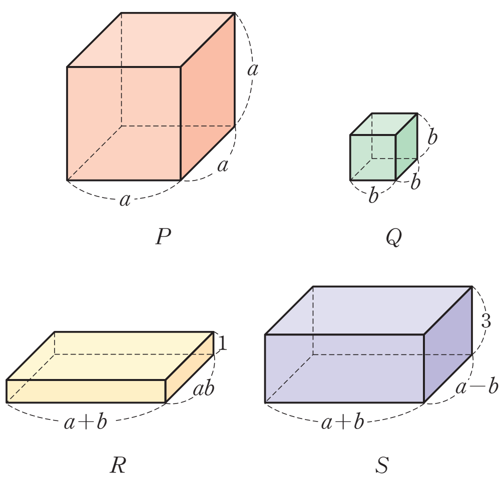
$m+n=22$ ······ 30 %

고득점을 향한 도약

201

다음 그림과 같이 2개의 정육면체와 2개의 직육면체가 있다. 2개의 정육면체 P, Q의 부피의 합과 2개의 직육면체 R, S의 부피의 합이 같을 때, $a-b$의 값은?

(단, $a \neq b$)



① 2　　✓② 3　　③ 4

④ 5　　⑤ 6

풀이

두 정육면체 P, Q의 부피가 각각 a^3, b^3이고, 두 직육면체 R, S의 부피가 각각 $(a+b)ab$, $3(a+b)(a-b)$이므로

$a^3+b^3=(a+b)ab+3(a+b)(a-b)$

$(a+b)(a-b)(a-b-3)=0$

이때 $a+b>0$, $a \neq b$이므로

$a-b-3=0$　　$\therefore a-b=3$

202

다항식 $(x^2+5x+6)(x^2-3x+2)+3$을 인수분해하면 이차항의 계수가 1인 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$의 곱으로 인수분해된다. 이때 $f(1)+g(2)$의 값을 구하시오. **0**

풀이

$(x^2+5x+6)(x^2-3x+2)+3=(x+2)(x+3)(x-1)(x-2)+3$

$=\{(x+2)(x-1)\}\{(x+3)(x-2)\}+3$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-6)+3$

$x^2+x=X$로 놓으면

$(x^2+x-2)(x^2+x-6)+3=(X-2)(X-6)+3=X^2-8X+15$

$=(X-3)(X-5)=(x^2+x-3)(x^2+x-5)$

(i) $f(x)=x^2+x-3$, $g(x)=x^2+x-5$일 때

$f(1)+g(2)=-1+1=0$

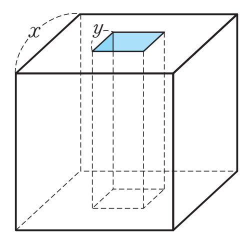
(ii) $f(x)=x^2+x-5$, $g(x)=x^2+x-3$일 때

$f(1)+g(2)=-3+3=0$

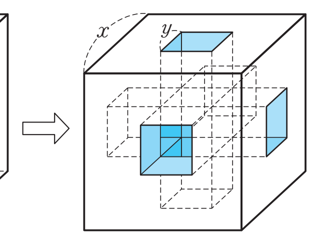
(i), (ii)에서 $f(1)+g(2)=0$

203 교육청 기출

한 모서리의 길이가 x인 정육면체 모양의 나무토막이 있다. [그림 1]과 같이 이 나무토막의 윗면의 중앙에서 한 변의 길이가 y인 정사각형 모양으로 아랫면의 중앙까지 구멍을 뚫었다. 구멍은 정사각기둥 모양이고, 각 모서리는 처음 정육면체의 모서리와 평행하다. 이와 같은 방법으로 각 면에서 구멍을 뚫어 [그림 2]와 같은 입체를 얻었다.



[그림 1]



[그림 2]

이때 [그림 2]의 입체의 부피를 x, y로 나타낸 것은?

✓① $(x-y)^2(x+2y)$　　② $(x-y)(x+2y)^2$

③ $(x+y)^2(x-2y)$　　④ $(x+y)(x-2y)^2$

⑤ $(x+y)^2(x+2y)$

풀이

[그림 2]의 입체의 부피는

$x^3-3xy^2+2y^3=x^3-xy^2-2xy^2+2y^3$

$=x(x^2-y^2)-2y^2(x-y)$

$=x(x+y)(x-y)-2y^2(x-y)$

$=(x-y)(x^2+xy-2y^2)$

$=(x-y)(x+2y)(x-y)$

$=(x-y)^2(x+2y)$

204

삼차다항식 $f(x)$가 다음을 모두 만족시킬 때, $f(x)$를 인수분해하시오. **$-(x-1)(x-2)(x-3)$**

> ㈎ $(x-3)f(x+1)=xf(x)$
>
> ㈏ $f(x)$를 x^2-3x+3으로 나눈 나머지는 $x-3$이다.

풀이

$f(x)$가 삼차다항식이므로 조건 ㈏에 의하여

$f(x)=(x^2-3x+3)(ax+b)+x-3$ (a, b는 상수, $a \neq 0$)　　…… ㉠

으로 놓을 수 있다.

조건 ㈎에 주어진 식의 양변에 $x=0$, $x=3$을 각각 대입하면

$-3f(1)=0$, $0=3f(3)$　　$\therefore f(1)=f(3)=0$

㉠의 양변에 $x=1$, $x=3$을 각각 대입하여 정리하면

$a+b=2$, $3a+b=0$　　$\therefore a=-1$, $b=3$

$\therefore f(x)=(x^2-3x+3)(-x+3)+x-3$

$=-(x-3)(x^2-3x+2)$

$=-(x-1)(x-2)(x-3)$

205

다항식 $f(x)$에 대하여 다항식 x^4+5x^2+9가 $f(x)f(x-1)$로 인수분해될 때, 모든 $f(2)$의 값의 곱은?

① -81 ② -9 ③ 3
④ 9 ⑤ 81

풀이

$x^4+5x^2+9=(x^4+6x^2+9)-x^2$
$=(x^2+3)^2-x^2$
$=(x^2+x+3)(x^2-x+3)$
$=(x^2+x+3)\{(x-1)^2+(x-1)+3\}$

따라서 $f(x)=x^2+x+3$ 또는 $f(x)=-(x^2+x+3)$이므로
$f(2)=4+2+3=9$ 또는 $f(2)=-9$
즉, 모든 $f(2)$의 값의 곱은
$9\times(-9)=-81$

206 도전! 1등급

모든 계수와 상수항이 정수인 이차다항식 $P(x)$, $Q(x)$가 다음을 모두 만족시킨다.

> (가) $P(x)-Q(x)=5$
> (나) $\{P(x)\}^3-\{Q(x)\}^3$
> $=15x^4+60x^3+45x^2-30x+35$

$P(x)$의 상수항이 양수일 때, $P(0)+Q(2)$의 최댓값을 구하시오. 7

풀이

$\{P(x)\}^3-\{Q(x)\}^3=\{P(x)-Q(x)\}[\{P(x)\}^2+P(x)Q(x)+\{Q(x)\}^2]$
$=5[\{P(x)\}^2+P(x)Q(x)+\{Q(x)\}^2]$ ($\because$ 조건 (가))
$=5[\{P(x)-Q(x)\}^2+3P(x)Q(x)]$
$=5\{25+3P(x)Q(x)\}$ ($\because$ 조건 (가))

즉, $5\{25+3P(x)Q(x)\}=15x^4+60x^3+45x^2-30x+35$이므로
$P(x)Q(x)=x^4+4x^3+3x^2-2x-6$
$P(1)Q(1)=0$, $P(-3)Q(-3)=0$
이므로

1	1	4	3	-2	-6
		1	5	8	6
-3	1	5	8	6	0
		-3	-6	-6	
	1	2	2	0	

$P(x)Q(x)$
$=(x-1)(x+3)(x^2+2x+2)$
(i) $P(x)=x^2+2x+2$,
$Q(x)=(x-1)(x+3)$일 때
$P(0)+Q(2)=7$
(ii) $P(x)=-(x-1)(x+3)$, $Q(x)=-(x^2+2x+2)$일 때
$P(0)+Q(2)=-7$
(i), (ii)에서 $P(0)+Q(2)$의 최댓값은 7이다.

207

자연수 n에 대하여 두 소수 p, q가

$$p=n^4-8n^2+4,\ q=n^3-n^2+3n-10$$

일 때, $p+q$의 값을 구하시오. 30

풀이

$p=n^4-8n^2+4=n^4-4n^2+4-4n^2$
$=(n^2-2)^2-(2n)^2$
$=(n^2+2n-2)(n^2-2n-2)$

이때 p는 소수이고 $n^2+2n-2>n^2-2n-2$이므로
$n^2+2n-2=p$, $n^2-2n-2=1$
$n^2-2n-2=1$에서 $(n-3)(n+1)=0$ $\quad\therefore n=3$ ($\because$ n은 자연수)
따라서 $p=n^2+2n-2=13$, $q=n^3-n^2+3n-10=17$이므로
$p+q=30$

208 교육청 기출

일차식 $f(x)$에 대하여 다항식 $x^3+1-f(x)$가

$$(x+1)(x+a)^2$$

으로 인수분해될 때, $f(7)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

풀이

$x^3+1-f(x)=(x+1)(x+a)^2$의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $f(-1)=0$
이때 $f(x)$는 일차식이므로 $f(x)=k(x+1)$ (k는 0이 아닌 상수)로 놓을 수 있다.
$\therefore x^3+1-f(x)=x^3+1-k(x+1)$
$=(x+1)(x^2-x+1)-k(x+1)$
$=(x+1)(x^2-x+1-k)$

즉, $(x+1)(x^2-x+1-k)=(x+1)(x+a)^2$이므로
$x^2-x+1-k=x^2+2ax+a^2$
위의 등식은 x에 대한 항등식이므로 $a=-\frac{1}{2}$, $k=\frac{3}{4}$
따라서 $f(x)=\frac{3}{4}(x+1)$이므로
$f(7)=6$

209

세 변의 길이 a, b, c가 모두 자연수인 삼각형에서

$$a^3+(3b-4)a^2+(3b^2-8b)a+b^2(b-4)=0$$

이 성립할 때, 순서쌍 (a, b, c)의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

풀이

$f(a)=a^3+(3b-4)a^2+(3b^2-8b)a+b^2(b-4)$라고 하면
$f(a)=(a+b)\{a^2+(2b-4)a+b^2-4b\}$
이때 $g(a)=a^2+(2b-4)a+b^2-4b$라고 하면
$g(a)=(a+b)(a+b-4)$ $\quad\therefore f(a)=(a+b)^2(a+b-4)$
즉, $(a+b)^2(a+b-4)=0$이고 $(a+b)^2>0$이므로 $a+b=4$
$\therefore a=1, b=3$ 또는 $a=2, b=2$ 또는 $a=3, b=1$
한편, a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이고 모두 자연수이므로 $a+b>c$에서
$c=1$ 또는 $c=2$ 또는 $c=3$
따라서 삼각형의 세 변의 길이의 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)는
$(1, 3, 3)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(3, 1, 3)$의 5개이다.

210 도전! 1등급

삼각형 ABC의 세 변의 길이 a, b, c가

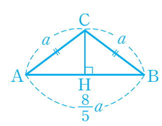
$$2a+6b=5c,$$
$$(b+c)a^2+(c^2+bc)a-b^3-2b^2c-bc^2=0$$

을 만족시킨다. 삼각형 ABC의 넓이가 60일 때, 이 삼각형의 둘레의 길이는?

① $10\sqrt{5}$ ② $14\sqrt{5}$ ✓③ $18\sqrt{5}$
④ $22\sqrt{5}$ ⑤ $26\sqrt{5}$

풀이

$(b+c)a^2+(c^2+bc)a-b^3-2b^2c-bc^2=0$에서
$(b+c)a^2+(b+c)ac-b(b+c)^2=0$
$(b+c)(a^2+ac-b^2-bc)=0$
$(b+c)\{(a+b)(a-b)+(a-b)c\}=0$
$(b+c)(a-b)(a+b+c)=0$
이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a=b$
$2a+6b=5c$이므로 이 식에 $b=a$를 대입하면 $c=\frac{8}{5}a$
오른쪽 그림에서



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{4}{5}a$

$\overline{CH}=\sqrt{a^2-\left(\frac{4}{5}a\right)^2}=\frac{3}{5}a$ ($\because a>0$)

삼각형 ABC의 넓이가 60이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{8}{5}a\times\frac{3}{5}a=60$, $a^2=125$ $\therefore a=5\sqrt{5}$ ($\because a>0$)

따라서 $b=a=5\sqrt{5}$, $c=\frac{8}{5}a=8\sqrt{5}$이므로 구하는 삼각형 ABC의 둘레의 길이는
$a+b+c=18\sqrt{5}$

211

자연수 n에 대하여 $\dfrac{n^3+2n^2+2n-20}{n^2+2n-8}$의 값이 자연수가 되게 하는 n의 값은? (단, $n>1$)

① 3 ② 4 ③ 5
✓④ 6 ⑤ 7

풀이

$f(n)=n^3+2n^2+2n-20$이라고 하면
$f(2)=0$이므로

2	1	2	2	−20
		2	8	20
	1	4	10	0

$n^3+2n^2+2n-20=(n-2)(n^2+4n+10)$

$$\therefore \frac{n^3+2n^2+2n-20}{n^2+2n-8}=\frac{(n-2)(n^2+4n+10)}{(n+4)(n-2)}=\frac{n^2+4n+10}{n+4}=\frac{n(n+4)+10}{n+4}=n+\frac{10}{n+4}$$

이 식의 값이 자연수가 되려면 $\frac{10}{n+4}$이 자연수가 되어야 한다.
따라서 $n+4$는 10의 약수이고 $n>1$에서 $n+4>5$이므로
$n+4=10$ $\therefore n=6$

212

$\dfrac{2025^4-2\times2025^2-3\times2023-8}{2025^3-2025^2-2027}$의 값은?

① 2024 ② 2025 ✓③ 2026
④ 2027 ⑤ 2028

풀이

$2025=x$로 놓으면

$$(\text{주어진 식})=\frac{x^4-2x^2-3(x-2)-8}{x^3-x^2-(x+2)}=\frac{x^4-2x^2-3x-2}{x^3-x^2-x-2}$$

$f(x)=x^4-2x^2-3x-2$라고 하면 $f(-1)=0$이므로

−1	1	0	−2	−3	−2
		−1	1	1	2
	1	−1	−1	−2	0

$x^4-2x^2-3x-2=(x+1)(x^3-x^2-x-2)$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\frac{x^4-2x^2-3x-2}{x^3-x^2-x-2}=\frac{(x+1)(x^3-x^2-x-2)}{x^3-x^2-x-2}=x+1=2025+1=2026$$

213

$\sqrt{\dfrac{19^4+3\times19^3-3\times19^2-11\times19-6}{N}}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 N의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ✓⑤ 6

풀이

$19=x$로 놓으면
$19^4+3\times19^3-3\times19^2-11\times19-6=x^4+3x^3-3x^2-11x-6$
$f(x)=x^4+3x^3-3x^2-11x-6$이라고 하면 $f(-1)=0$, $f(2)=0$이므로

−1	1	3	−3	−11	−6
		−1	−2	5	6
2	1	2	−5	−6	0
		2	8	6	
	1	4	3	0	

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+4x+3)=(x+1)^2(x-2)(x+3)$
$\therefore f(19)=20^2\times17\times22=2^5\times5^2\times11\times17$

따라서 주어진 식은 $\sqrt{\frac{2^5\times5^2\times11\times17}{N}}$이고, 이 식이 자연수가 되려면 근호 안의 식이 (자연수)^{2}의 꼴이 되어야 하므로 자연수 N은
$2^5\times5^2\times11\times17$, $2^5\times11\times17$,
$2^3\times5^2\times11\times17$, $2^3\times11\times17$,
$2\times5^2\times11\times17$, $2\times11\times17$
의 6개이다.

Ⅱ

방정식과 부등식

04 복소수

1 복소수

(1) 허수단위 i

제곱하여 -1이 되는 수를 허수단위라고 하며, 기호 i로 나타낸다. 즉,

$i^2=-1$, $i=\sqrt{-1}$

참고 허수단위 i는 허수를 뜻하는 imaginary number의 첫 글자이다.

(2) 복소수

실수 a, b에 대하여 $a+bi$의 꼴로 나타낼 수 있는 수를 복소수라 하고, a를 이 복소수의 실수부분, b를 이 복소수의 허수부분이라고 한다.

$$\underset{\text{실수부분}}{\underset{\uparrow}{a}} + \underset{\text{허수부분}}{\underset{\uparrow}{bi}}$$

예 $2-i$의 실수부분은 2, 허수부분은 -1이고, $-5i$의 실수부분은 0, 허수부분은 -5이다.

(3) 복소수의 분류

① 복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)에서 실수가 아닌 복소수 $a+bi$ $(b\neq0)$를 허수라 하고, 특히 실수부분이 0인 허수 bi $(b\neq0)$를 순허수라고 한다.

참고 허수에서는 대소 관계가 존재하지 않는다.

② 복소수의 분류

$$\text{복소수 } a+bi\ (a,\ b\text{는 실수}) \begin{cases} \text{실수 } a & (b=0) \\ \text{허수 } a+bi & (b\neq0) \end{cases}$$

예 -3, $2+\sqrt{3}$은 모두 실수이고, $2i$, $3-i$는 모두 허수이다.

참고 (1) $0i=0$으로 정하면 실수 $a=a+0=a+0i$로 나타낼 수 있으므로 실수도 복소수이다.

(2) 복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여

① z가 실수이면 $b=0$이다.

② z가 허수이면 $b\neq0$이다.

2 복소수가 서로 같을 조건

두 복소수에서 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 서로 같을 때, 두 복소수는 서로 같다고 한다.

(1) a, b, c, d가 실수일 때, 두 복소수 $a+bi$, $c+di$에 대하여

① $a=c$, $b=d$이면 $a+bi=c+di$

② $a+bi=c+di$이면 $a=c$, $b=d$

$$\overbrace{a+bi=c}^{\text{같다}}+di \qquad a+\underbrace{bi=c+di}_{\text{같다}}$$

예 a, b가 실수일 때, $a+bi=5-3i$이면 $a=5$, $b=-3$

(2) a, b가 실수일 때, 복소수 $a+bi$에 대하여

① $a=0$, $b=0$이면 $a+bi=0$

② $a+bi=0$이면 $a=0$, $b=0$

3 켤레복소수

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 허수부분의 부호를 바꾼 복소수 $a-bi$를 $a+bi$의 켤레복소수라고 하며, 기호 $\bar{z}$로 나타낸다. 즉,

$\bar{z}=\overline{a+bi}=a-bi$

부호가 바뀐다.

예 $\overline{2-3i}=2+3i$, $\overline{2i}=-2i$, $\overline{1}=1$

참고 a, b가 실수일 때, $\overline{a-bi}=a+bi$이므로 두 복소수 $a+bi$, $a-bi$는 서로 켤레복소수이다.

문제를 풀 때 유용한 풍쌤 비법

❶ 복소수 z와 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여

(1) $\overline{(\bar{z})}=z$ ⇨ 어떤 복소수의 켤레복소수의 켤레복소수는 자기 자신이다.

(2) $\bar{z}=z$이면 z는 실수 ⇨ 복소수와 그 켤레복소수가 같으면 그 복소수는 실수이다.

(3) $\bar{z}=-z$이면 z는 0 또는 순허수 ⇨ 복소수와 그 켤레복소수의 부호가 서로 다르면 그 복소수는 0 또는 순허수이다.

4 복소수의 사칙연산

(1) 복소수의 사칙연산

a, b, c, d가 실수일 때

① 덧셈: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

② 뺄셈: $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

③ 곱셈: $(a+bi)\times(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

④ 나눗셈: $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ (단, $c+di\neq0$)

참고 분모에 허수가 있으면 분모의 켤레복소수를 분모, 분자에 각각 곱하여 분모를 실수로 고친다.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$
$$=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$
$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

(2) 복소수의 덧셈과 곱셈에 대한 성질

세 복소수 z_1, z_2, z_3에 대하여

① 교환법칙: $z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1z_2=z_2z_1$

② 결합법칙: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$,
$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$

③ 분배법칙: $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$,
$(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$

참고 복소수의 덧셈에서 결합법칙이 성립하므로 $(z_1+z_2)+z_3$과 $z_1+(z_2+z_3)$은 괄호를 생략하여 $z_1+z_2+z_3$으로 나타내기도 한다. 또, 복소수의 곱셈에서 결합법칙이 성립하므로 $(z_1z_2)z_3$과 $z_1(z_2z_3)$은 괄호를 생략하여 $z_1z_2z_3$으로 나타내기도 한다.

(3) 켤레복소수의 성질

두 복소수 z_1, z_2의 켤레복소수를 각각 $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$라고 하면

① $z_1+\overline{z_1}=$(실수), $z_1\overline{z_1}=$(실수)

② $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

③ $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq0$)

5 음수의 제곱근

(1) 음수의 제곱근

$a>0$일 때

① $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$

② $-a$의 제곱근은 $\sqrt{a}i$와 $-\sqrt{a}i$이다.

예 $\sqrt{-2}=\sqrt{2}i$, $\sqrt{-4}=\sqrt{4}i=2i$

참고 $\sqrt{a}i$와 $-\sqrt{a}i$를 간단히 $\pm\sqrt{a}i$로 나타내기도 한다.

(2) 음수의 제곱근의 성질

① $a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

$a<0$, $b<0$ 이외의 경우에는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

② $a>0$, $b<0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

$a>0$, $b<0$ 이외의 경우에는 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (단, $b\neq0$)

예 $\sqrt{-3}\sqrt{-2}=\sqrt{3}i\times\sqrt{2}i=\sqrt{6}i^2=-\sqrt{6}$

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}i}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{3}i^2}=\dfrac{\sqrt{2}i}{-\sqrt{3}}=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}i=-\sqrt{\dfrac{2}{-3}}$

참고 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a<0$, $b<0$

② $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이면 $a>0$, $b<0$

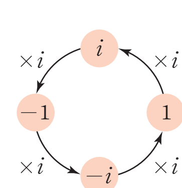
문제를 풀 때 유용한 **풍쌤 비법**

❷ i의 거듭제곱

i^n (n은 자연수)의 값은 i, -1, $-i$, 1이 반복되어 나타난다.

⇨ i^n의 값은 n을 4로 나누었을 때의 나머지가 같으면 그 값이 같다.

⇨ $\begin{cases} i^{4n}=1 \\ i^{4n+1}=i \\ i^{4n+2}=i^2=-1 \\ i^{4n+3}=i^3=-i \end{cases}$ (단, n은 자연수이다.)



실력을 기르는 유형

01 복소수의 뜻과 분류 중요도

214
상|중|하

다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\sqrt{3i^2}$은 허수이다.

② $\sqrt{5}i$의 실수부분은 0, 허수부분은 $\sqrt{5}i$이다.

③ 0은 복소수가 아니다.

√④ $4i+i^2$의 실수부분은 -1, 허수부분은 4이다.

√⑤ 무리수는 모두 허수가 아니다.

풀이
① $\sqrt{3}i^2=-\sqrt{3}$은 실수이다.
② $\sqrt{5}i=0+\sqrt{5}i$의 실수부분은 0, 허수부분은 $\sqrt{5}$이다.
③ 0은 복소수이다.

215
상|중|하

다음 복소수 중 허수의 개수를 구하시오. 2

$-3i$,	i^2,	25,	$1-\pi$,	$\sqrt{10}+4$,	$6+2i$

풀이
허수는 $-3i$, $6+2i$의 2개이다.

02 복소수의 사칙연산 중요도

216
상|중|하

$(1+2i)(1-3i)$를 $a+bi$ (a, b는 실수)의 꼴로 나타낼 때, $a-b$의 값은?

① -7 ② -6 ③ 6
④ 7 √⑤ 8

풀이
$(1+2i)(1-3i)=7-i$
따라서 $a=7$, $b=-1$이므로
$a-b=8$

217 내신 기출
상|중|하

$(4+i)(1+2i)+\dfrac{25i}{4+3i}$의 값은?

① $-5-13i$ ② $-5+13i$ ③ 5
④ $5-13i$ √⑤ $5+13i$

풀이
$(4+i)(1+2i)+\dfrac{25i}{4+3i}=4+8i+i+2i^2+\dfrac{25i(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}$
$=5+13i$

218 교육청 기출
상|중|하

두 복소수 $x=\dfrac{1-i}{1+i}$, $y=\dfrac{1+i}{1-i}$에 대하여 $x+y$의 값은?

(단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-4i$ ② $2i$ √③ 0
④ 2 ⑤ 4

풀이
$x=\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-i$
$y=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=i$
$\therefore x+y=0$

219
상|중|하

두 복소수 $z_1=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2$, $z_2=\dfrac{2}{1-i}$에 대하여 z_1z_2의 실수부분을 a, 허수부분을 b라고 할 때, ab의 값은?

① -2 √② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

풀이
$z_1=i$, $z_2=1+i$이므로 $z_1z_2=-1+i$
따라서 $a=-1$, $b=1$이므로
$ab=-1$

03 복소수가 주어질 때의 식의 값 구하기 중요도

220
상 중 하

$x=1-2i$일 때, $x^3-2x^2+5x-10$의 값은?

① -18 ② -16 ③ -14
④ -12 ✓⑤ -10

풀이
$x=1-2i$에서 $x-1=-2i$
양변을 제곱하여 정리하면 $x^2-2x+5=0$
$\therefore x^3-2x^2+5x-10=x(x^2-2x+5)-10=-10$

221
상 중 하

$x=\dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$일 때, $9x^3-6x^2+5$의 값은?

① $2-\sqrt{2}i$ ✓② $4-\sqrt{2}i$ ③ $6-\sqrt{2}i$
④ $6+\sqrt{2}i$ ⑤ $8-\sqrt{2}i$

풀이
$x=\dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$에서 $3x-1=\sqrt{2}i$
양변을 제곱하여 정리하면 $9x^2-6x=-3$
$\therefore 9x^3-6x^2+5=x(9x^2-6x)+5=x\times(-3)+5$
$=\dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}\times(-3)+5=4-\sqrt{2}i$

222 내신 기출
상 중 하

$x=\dfrac{i}{1+3i}$일 때, $20x^4-12x^3+2x^2-x+\dfrac{13}{10}$의 값은?

① $1+\dfrac{i}{10}$ ✓② $1-\dfrac{i}{10}$ ③ $-1+\dfrac{i}{10}$
④ $-1-\dfrac{i}{10}$ ⑤ $-10+i$

풀이
$x=\dfrac{i}{1+3i}=\dfrac{3+i}{10}$에서 $10x-3=i$
양변을 제곱하여 정리하면 $10x^2-6x+1=0$
$\therefore 20x^4-12x^3+2x^2-x+\dfrac{13}{10}=2x^2(10x^2-6x+1)-x+\dfrac{13}{10}$
$=-\dfrac{3+i}{10}+\dfrac{13}{10}=1-\dfrac{i}{10}$

223
상 중 하

$x^2=\dfrac{17}{1-4i}$일 때, $x^4+x^3-6x^2-2x+\dfrac{17}{x}$의 값은?

① $-23-16i$ ② $-21+16i$ ✓③ $-21-16i$
④ $-19-19i$ ⑤ $-19+19i$

풀이
$x^2=\dfrac{17}{1-4i}=1+4i$에서 $x^2-1=4i$
양변을 제곱하여 정리하면 $x^4-2x^2+17=0$
$x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면 $x^3-2x+\dfrac{17}{x}=0$
$\therefore x^4+x^3-6x^2-2x+\dfrac{17}{x}=x^4-6x^2+\left(x^3-2x+\dfrac{17}{x}\right)=x^4-6x^2$
$=(x^4-2x^2)-4x^2=-17-4(1+4i)=-21-16i$

04 켤레복소수가 주어질 때의 식의 값 구하기 중요도

224
상 중 하

$x=4+i$, $y=4-i$일 때, $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$의 값은?

① $\dfrac{15}{17}$ ② $\dfrac{20}{17}$ ③ $\dfrac{25}{17}$
✓④ $\dfrac{30}{17}$ ⑤ $\dfrac{35}{17}$

풀이
$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}$
이때 $x+y=(4+i)+(4-i)=8$, $xy=(4+i)(4-i)=17$이므로
$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{8^2-2\times17}{17}=\dfrac{30}{17}$

225 내신 기출
상 중 하

$x=2-i$, $y=2+i$일 때, $2x^2+2y^2-x^3y-xy^3$의 값을 구하시오. -18

풀이
$2x^2+2y^2-x^3y-xy^3=2(x^2+y^2)-xy(x^2+y^2)$
$=(x^2+y^2)(2-xy)$
$=\{(x+y)^2-2xy\}(2-xy)$
이때 $x+y=(2-i)+(2+i)=4$, $xy=(2-i)(2+i)=5$이므로
$2x^2+2y^2-x^3y-xy^3=(4^2-2\times5)(2-5)$
$=-18$

226
상 중 하

$x=\dfrac{17}{1-4i}$, $y=\dfrac{17}{1+4i}$일 때, x^3+y^3-x-y의 값은?

✓① -96 ② -62 ③ -48
④ 62 ⑤ 96

풀이
$x^3+y^3-x-y=(x+y)^3-3xy(x+y)-(x+y)$
이때 $x=\dfrac{17}{1-4i}=1+4i$, $y=\dfrac{17}{1+4i}=1-4i$이므로
$x+y=(1+4i)+(1-4i)=2$
$xy=(1+4i)(1-4i)=17$
$\therefore x^3+y^3-x-y=2^3-3\times17\times2-2=-96$

05 복소수 z^2이 실수가 되는 조건 중요도

227
상중하

복소수 $z=3-x+(4+2x)i$에 대하여 z^2이 양의 실수가 되도록 하는 실수 x의 값은?

√① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

풀이
z^2이 양의 실수가 되려면 z는 0이 아닌 실수이어야 한다.
즉, $z=3-x+(4+2x)i$에서
$3-x\neq0$, $4+2x=0$
$\therefore x=-2$

228
상중하

복소수 $z=1+3i-x(1-2i)$에 대하여 z^2이 음의 실수가 될 때, $\dfrac{z}{2-i}$의 값은? (단, x는 실수이다.)

① $-1-2i$ √② $-1+2i$ ③ $1-2i$
④ $2-i$ ⑤ $2+i$

풀이
z^2이 음의 실수가 되므로 z는 순허수이다.
즉, $z=1+3i-x(1-2i)=1-x+(3+2x)i$에서
$1-x=0$, $3+2x\neq0$
$\therefore x=1$
따라서 $z=5i$이므로
$\dfrac{z}{2-i}=\dfrac{5i}{2-i}=\dfrac{5i(2+i)}{(2-i)(2+i)}=i(2+i)=-1+2i$

229 교육청 기출
상중하

복소수 $(a^2+3a+2)+(a^2+2a)i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이때 실수 a의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 √③ -1
④ 0 ⑤ 1

풀이
$(a^2+3a+2)+(a^2+2a)i=z$로 놓으면 z^2이 음의 실수가 되므로 z는 순허수이다.
$\therefore a^2+3a+2=0$, $a^2+2a\neq0$
$a^2+3a+2=0$에서 $(a+1)(a+2)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=-2$ …… ㉠
$a^2+2a\neq0$에서 $a(a+2)\neq0$
$\therefore a\neq0$이고 $a\neq-2$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $a=-1$

230 내신 기출
상중하

복소수 $z=a(a+i)-5a+4-3i$에 대하여 z^2이 실수가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 7 √⑤ 8

풀이
z^2이 실수가 되려면 z가 실수 또는 순허수이어야 한다.
즉, $z=a(a+i)-5a+4-3i=(a^2-5a+4)+(a-3)i$에서
$a^2-5a+4=0$ 또는 $a-3=0$
(i) $a^2-5a+4=0$에서 $a=1$ 또는 $a=4$
(ii) $a-3=0$에서 $a=3$
(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은
$1+4+3=8$

06 복소수가 서로 같을 조건 중요도

231 교육청 기출
상중하

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 등식

$$2z+\overline{z}=3+5i$$

가 성립할 때, $a+b$의 값은?

(단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

√① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

풀이
$2z+\overline{z}=2(a+bi)+(a-bi)=3a+bi$
즉, $3a+bi=3+5i$이므로 $a=1$, $b=5$
$\therefore a+b=6$

232 내신 기출
상중하

등식 $\dfrac{40i}{6+ai}=1+b+6i$를 만족시키는 양의 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 3

풀이
$\dfrac{40i}{6+ai}=1+b+6i$를 정리하면
$(6+6b-6a)+\{36+a(1+b)\}i=40i$
이므로
$6+6b-6a=0$, $36+a(1+b)=40$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$ ($\because a>0$, $b>0$)
$\therefore a+b=3$

233

상 중 하

복소수 z에 대하여 $z^2=2+i$이고 $z^4+3z^2-ai=b+2i$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 실수이다.)

① 35 ② 36 ③ 40
√④ 45 ⑤ 54

풀이
$z^4+3z^2-ai=(2+i)^2+3(2+i)-ai$
$=9+(7-a)i$
즉, $9+(7-a)i=b+2i$이므로 $a=5$, $b=9$
$\therefore ab=45$

234

상 중 하

세 실수 a, x, y에 대하여 $\dfrac{a+i}{a-i}=x+yi$가 성립할 때, x^2+y^2의 값은?

√① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

풀이
$\dfrac{a+i}{a-i}=\dfrac{(a+i)^2}{(a-i)(a+i)}=\dfrac{a^2-1}{a^2+1}+\dfrac{2a}{a^2+1}i$
즉, $\dfrac{a^2-1}{a^2+1}+\dfrac{2a}{a^2+1}i=x+yi$이므로
$x=\dfrac{a^2-1}{a^2+1}$, $y=\dfrac{2a}{a^2+1}$
$\therefore x^2+y^2=\left(\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2+\left(\dfrac{2a}{a^2+1}\right)^2$
$=\dfrac{a^4+2a^2+1}{(a^2+1)^2}=\dfrac{(a^2+1)^2}{(a^2+1)^2}=1$

235

상 중 하

$f(x)=x^2+ax+b$에 대하여 $f(1-i)=0$일 때, $f(2)$의 값은? (단, a, b는 실수이다.)

① 0 ② 1 √③ 2
④ 3 ⑤ 4

풀이
$f(1-i)=(1-i)^2+a(1-i)+b$
$=(a+b)-(a+2)i$
즉, $(a+b)-(a+2)i=0$이므로
$a=-2$, $b=2$
따라서 $f(x)=x^2-2x+2$이므로 $f(2)=2$

07 켤레복소수의 성질

중요도

236

상 중 하

복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $z+\overline{z}$는 허수이다.
② $z-\overline{z}$는 실수이다.
③ $z^2+\overline{z}^2=0$이다.
√④ $z\overline{z}=0$이면 $z=0$이다.
√⑤ $z\neq0$이고 $\dfrac{z}{\overline{z}}=-1$이면 z는 순허수이다.

풀이
$z=a+bi$ (a, b는 실수)라고 하면
① $z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$이므로 실수이다.
② $z-\overline{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$이므로 $b\neq0$이면 허수이다.
③ $z^2+\overline{z}^2=(a+bi)^2+(a-bi)^2=2(a^2-b^2)$이므로 $a\neq\pm b$이면 $z^2+\overline{z}^2\neq0$이다.

237

상 중 하

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 0이 아닌 실수)에 대하여 $\overline{z}=iz$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?
(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① $z+\overline{z}=2a$ ② $z=-i\overline{z}$ √③ $z-\overline{z}=2ai$
④ $z\overline{z}=2a^2$ ⑤ $\dfrac{\overline{z}}{z}-\dfrac{z}{\overline{z}}=2i$

풀이
$\overline{z}=iz$에서 $a-bi=i(a+bi)$ $\therefore a-bi=-b+ai$
즉, $a=-b$이므로 $z=a-ai$
③ $z-\overline{z}=(a-ai)-(a+ai)=-2ai$

238

상 중 하

복소수 z에 대하여 다음 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

〈보기〉
ㄱ. $z^2-z\overline{z}+\overline{z}^2$은 실수이다.
ㄴ. $\dfrac{\overline{z}}{z}=-i$이면 $z^2+\overline{z}^2=0$이다.
ㄷ. $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}$은 순허수이다. (단, $z\neq0$)

① ㄱ ② ㄷ √③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이
$z=a+bi$ (a, b는 실수)라고 하자.
ㄷ. $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}=\dfrac{1}{a+bi}+\dfrac{1}{a-bi}$
$=\dfrac{a-bi+a+bi}{(a+bi)(a-bi)}=\dfrac{2a}{a^2+b^2}$
이므로 $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}$은 실수이다. (거짓)

08 켤레복소수의 성질을 이용한 계산 중요도

239 상 중 하

$\alpha=5-2i$, $\beta=1+3i$일 때, $\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}$의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

① 35 ② 36 ✓③ 37
④ 38 ⑤ 39

풀이
$\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=(\overline{\alpha}+\overline{\beta})(\alpha+\beta)=(\overline{\alpha+\beta})(\alpha+\beta)$
이때 $\alpha+\beta=6+i$이므로
$\overline{\alpha+\beta}=6-i$
$\therefore \alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=(\overline{\alpha+\beta})(\alpha+\beta)=(6-i)(6+i)=37$

240 상 중 하

복소수 z에 대하여 $iz=-\overline{z}$일 때, $\left(\frac{\overline{z}}{z}-\frac{z}{\overline{z}}\right)^2$의 값은?
(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

✓① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

풀이
$iz=-\overline{z}$에서 $\frac{\overline{z}}{z}=-i$, $\frac{z}{\overline{z}}=\overline{\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)}=i$
$\therefore \left(\frac{\overline{z}}{z}-\frac{z}{\overline{z}}\right)^2=(-i-i)^2=(-2i)^2=-4$

241 상 중 하

두 복소수 α, β에 대하여
$\overline{\alpha}-\overline{\beta}=4+i$, $\overline{\alpha}\overline{\beta}=2-5i$
일 때, $(\alpha+2)(\beta-2)=x+yi$이다. 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

① -4 ✓② -3 ③ -2
④ -1 ⑤ 0

풀이
$\alpha-\beta=4-i$, $\alpha\beta=2+5i$이므로
$(\alpha+2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha-\beta)-4$
$=(2+5i)-2(4-i)-4$
$=-10+7i$
따라서 $x=-10$, $y=7$이므로
$x+y=-3$

242 풍쌤 비법 ❶ 교육청 기출 상 중 하

복소수 $z=x^2-(5-i)x+4-2i$에 대하여
$\overline{z}=-z$
를 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합은?
(단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ✓⑤ 5

풀이
$z=x^2-(5-i)x+4-2i$
$=(x^2-5x+4)+(x-2)i$
$\overline{z}=-z$가 성립하려면 z는 0 또는 순허수, 즉 실수부분이 0이어야 하므로
$x^2-5x+4=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=4$
따라서 모든 실수 x의 값의 합은
$1+4=5$

243 내신 기출 상 중 하

세 복소수 α, β, γ에 대하여
$\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}=\gamma\overline{\gamma}=3$, $\alpha+\beta+\gamma=5-i$
가 성립할 때, $\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\gamma}+\gamma\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\overline{\beta}\gamma+\overline{\gamma}\alpha$의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

① 16 ✓② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

풀이
$\beta+\gamma=5-i-\alpha$, $\gamma+\alpha=5-i-\beta$, $\alpha+\beta=5-i-\gamma$
$\therefore \alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\gamma}+\gamma\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\overline{\beta}\gamma+\overline{\gamma}\alpha=\overline{\alpha}(\beta+\gamma)+\overline{\beta}(\alpha+\gamma)+\overline{\gamma}(\alpha+\beta)$
$=\overline{\alpha}(5-i-\alpha)+\overline{\beta}(5-i-\beta)+\overline{\gamma}(5-i-\gamma)$
$=(5-i)\overline{\alpha}-\alpha\overline{\alpha}+(5-i)\overline{\beta}-\beta\overline{\beta}+(5-i)\overline{\gamma}-\gamma\overline{\gamma}$
$=(5-i)(\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma})-9$
$=(5-i)(\overline{\alpha+\beta+\gamma})-9$
$=(5-i)(5+i)-9$
$=17$

09 조건을 만족시키는 복소수 구하기 중요도

244 상 중 하

$(2-i)\overline{z}+4iz=1+7i$를 만족시키는 복소수 z에 대하여 $z+\overline{z}$의 값은? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① -2 ② 2 ③ 4
✓④ 6 ⑤ 8

풀이
$z=a+bi$ (a, b는 실수)라고 하면
$(2-i)\overline{z}+4iz=(2-i)(a-bi)+4i(a+bi)$
$=(2a-5b)+(3a-2b)i$
즉, $(2a-5b)+(3a-2b)i=1+7i$이므로
$2a-5b=1$, $3a-2b=7$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$
따라서 $z=3+i$이므로
$z+\overline{z}=(3+i)+(3-i)=6$

245

상중하

복소수 z가 등식 $5(z+\bar{z})-2(z-\bar{z})=10-16i$를 만족시킬 때, $z\bar{z}$의 값은? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 15　② 16　✓③ 17　④ 18　⑤ 19

풀이
$z=a+bi$ (a, b는 실수)라고 하면
$5(z+\bar{z})-2(z-\bar{z})=5(a+bi+a-bi)-2\{a+bi-(a-bi)\}$
$=10a-4bi$
즉, $10a-4bi=10-16i$이므로 $a=1$, $b=4$
따라서 $z=1+4i$이므로
$z\bar{z}=(1+4i)(1-4i)=17$

246 교육청 기출

상중하

실수부분이 1인 복소수 z에 대하여 $\dfrac{z}{2+i}+\dfrac{\bar{z}}{2-i}=2$일 때, $z\bar{z}$의 값은?

(단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 2　② 4　③ 6　④ 8　✓⑤ 10

풀이
$z=1+ai$ (a는 실수)라고 하면 $\bar{z}=1-ai$
$\therefore \dfrac{z}{2+i}+\dfrac{\bar{z}}{2-i}=\dfrac{1+ai}{2+i}+\dfrac{1-ai}{2-i}$
$=\dfrac{(1+ai)(2-i)+(1-ai)(2+i)}{(2+i)(2-i)}$
$=\dfrac{2a+4}{5}$
즉, $\dfrac{2a+4}{5}=2$이므로 $a=3$
$\therefore z\bar{z}=(1+3i)(1-3i)=10$

247

상중하

$z+\bar{z}=6$, $z\bar{z}=25$를 만족시키는 복소수 z의 실수부분을 x, 허수부분을 y라고 할 때, x^2-y^2의 값은?

(단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 7　② 6　③ -3　④ -6　✓⑤ -7

풀이
$z=x+yi$ (x, y는 실수)이므로
$z+\bar{z}=6$에서 $2x=6$　$\therefore x=3$　…… ㉠
$z\bar{z}=25$에서 $x^2+y^2=25$　$\therefore y^2=16$ ($\because$ ㉠)
$\therefore x^2-y^2=3^2-16=-7$

248

상중하

실수부분과 허수부분이 0이 아닌 복소수 z가 $\bar{z}=\dfrac{z^2}{6i}$을 만족시킬 때, $\left(\dfrac{z-3i}{i}\right)^2$의 값은?

(단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

✓① -27　② -18　③ 9　④ 18　⑤ 27

풀이
$z=a+bi$ (a, b는 0이 아닌 실수)라고 하면
$\bar{z}=\dfrac{z^2}{6i}$에서 $a-bi=\dfrac{a^2-b^2+2abi}{6i}$
$6i(a-bi)=a^2-b^2+2abi$　$\therefore 6b+6ai=a^2-b^2+2abi$
즉, $6b=a^2-b^2$, $6a=2ab$이므로 두 식을 연립하여 풀면
$a=\pm3\sqrt{3}$, $b=3$ ($\because a\neq0$)
따라서 $z=\pm3\sqrt{3}+3i$이므로 $\left(\dfrac{z-3i}{i}\right)^2=\left(\dfrac{\pm3\sqrt{3}}{i}\right)^2=-27$

249 내신 기출

상중하

0이 아닌 복소수 z에 대하여

$$\frac{\bar{z}}{z}+\frac{z}{\bar{z}}=-2,\ z+z^2+z^3=-4+6i$$

일 때, $z^2+\bar{z}^2$의 값은? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

✓① -8　② -4　③ 0　④ 4　⑤ 8

풀이
$z=a+bi$ (a, b는 실수)라고 하면 $\dfrac{\bar{z}}{z}+\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{a-bi}{a+bi}+\dfrac{a+bi}{a-bi}=-2$
$\dfrac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}=-2$, $4a^2=0$　$\therefore a=0$
즉, $z=bi$이고 $z+z^2+z^3=bi+b^2i^2+b^3i^3=-4+6i$
$\therefore -b^2+(b-b^3)i=-4+6i$
$-b^2=-4$, $b-b^3=6$에서 $b=-2$
따라서 $z=-2i$이므로 $z^2+\bar{z}^2=(-2i)^2+(2i)^2=-8$

10 허수단위 i의 거듭제곱

중요도

250 풍쌤 비법 ❷

상중하

$i+i^2+i^3+\cdots+i^{1000}$을 간단히 하면?

① $-i$　② i　③ -1　✓④ 0　⑤ 1

풀이
$i+i^2+i^3+\cdots+i^{1000}$
$=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)$
$=0$

251

상 중 하

$i^3+i^6+i^9+\cdots+i^{66}$을 간단히 하면?

① i　② $1-i$　✓③ $-1-i$　④ $-i$　⑤ 0

풀이

$i^3+i^6+i^9+\cdots+i^{66}$

$=(i^3+i^6+i^9+i^{12})+\cdots+(i^{51}+i^{54}+i^{57}+i^{60})+i^{63}+i^{66}$

$=(-i-1+i+1)+\cdots+(-i-1+i+1)-i-1$

$=-1-i$

252 내신 기출

상 중 하

$i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+40i^{40}=a+bi$일 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 실수이다.)

① 36　② 38　✓③ 40　④ 42　⑤ 44

풀이

$i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+40i^{40}$

$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)+\cdots+(37i-38-39i+40)$

$=(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)$

$=10(2-2i)=20-20i$

따라서 $a=20$, $b=-20$이므로

$a-b=40$

253

상 중 하

한 자리 자연수 m, n에 대하여 $i^m-(-i)^n=2$를 만족시키는 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수는?

① 3　✓② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

풀이

한 자리 자연수 m, n에 대하여 i^m과 $(-i)^n$의 값은 각각 1, -1, i, $-i$ 중 하나이므로

$i^m-(-i)^n=2$가 성립하려면 $i^m=1$, $(-i)^n=-1$이어야 한다.

$i^m=1$을 만족시키는 m의 값은 4, 8이고, $(-i)^n=-1$을 만족시키는 n의 값은 2, 6이다.

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$2\times2=4$

254

상 중 하

한 자리 자연수 m, n에 대하여 $(1+i)\{i^m+(-i)^n\}$의 값이 양의 실수가 될 때, 다음 중 $m+n$의 값이 될 수 없는 것은?

① 7　② 9　③ 13　④ 15　✓⑤ 18

풀이

$(1+i)\{i^m+(-i)^n\}$의 값이 양의 실수이므로 $i^m+(-i)^n$의 값은 $1+i$의 켤레복소수 $1-i$가 되어야 한다.

(i) $i^m=1$, $(-i)^n=-i$일 때

$m=4$, 8이고 $n=1$, 5, 9

(ii) $i^m=-i$, $(-i)^n=1$일 때

$m=3$, 7이고 $n=4$, 8

(i), (ii)에서 $m+n$의 값이 될 수 있는 것은 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17이다.

11 복소수의 거듭제곱

중요도

255

상 중 하

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{20}$을 간단히 하면?

① -2　② -1　✓③ 0　④ 1　⑤ 2

풀이

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-i$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=i$

$\therefore \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{20}=(-i)^{10}+i^{20}=-1+1=0$

256 교육청 기출

상 중 하

$z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$일 때, z^8+z^{12}의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-2i$　② -2　✓③ 0　④ $2i$　⑤ 2

풀이

$z^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1$

$\therefore z^8+z^{12}=(z^4)^2+(z^4)^3=(-1)^2+(-1)^3=0$

257 내신 기출

상 중 하

복소수 $z=\left(\dfrac{i-1}{\sqrt{2}i}\right)^2$에 대하여

$$z+z^2+z^3+\cdots+z^{206}=a+bi$$

일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.) 2

풀이

$z=\left(\dfrac{i-1}{\sqrt{2}i}\right)^2=\dfrac{-2i}{-2}=i$이므로

$z+z^2+z^3+\cdots+z^{206}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)+\cdots+(i^{201}+i^{202}+i^{203}+i^{204})+i^{205}+i^{206}$

$=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)+i-1$

$=-1+i$

따라서 $a=-1$, $b=1$이므로

$a^2+b^2=2$

258

상 중 하

복소수 z에 대하여 $iz=\sqrt{2}$일 때

$$z+z^2+z^3+\cdots+z^7=a+bi$$

이다. 실수 a, b에 대하여 ab의 값은?

✓① $-30\sqrt{2}$ ② $-25\sqrt{2}$ ③ $-20\sqrt{2}$
④ $-15\sqrt{2}$ ⑤ $-10\sqrt{2}$

풀이

$iz=\sqrt{2}$에서 $z=\dfrac{\sqrt{2}}{i}=\dfrac{\sqrt{2}i}{i^2}=-\sqrt{2}i$이므로

$z^2=-2$, $z^3=2\sqrt{2}i$, $z^4=4$, $z^5=-4\sqrt{2}i$, $z^6=-8$, $z^7=8\sqrt{2}i$

$\therefore z+z^2+z^3+\cdots+z^7$

$=-\sqrt{2}i+(-2)+2\sqrt{2}i+4+(-4\sqrt{2}i)+(-8)+8\sqrt{2}i$

$=-6+5\sqrt{2}i$

따라서 $a=-6$, $b=5\sqrt{2}$이므로

$ab=-30\sqrt{2}$

259

상 중 하

복소수 $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에 대하여 $f(n)=z^n$이라고 할 때, 다음 〈 보기 〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, n은 자연수이다.)

〈 보기 〉

ㄱ. $f(1)+f(2)=-1$

ㄴ. $f(3)\times f(6)=1$

ㄷ. $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(30)=0$

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

$z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2z+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하여 정리하면 $z^2+z+1=0$이므로 $z^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $z^3=1$

ㄱ. $f(1)+f(2)=z+z^2=-1$ (참)

ㄴ. $f(3)\times f(6)=z^3\times z^6=1$ (참)

ㄷ. 자연수 k에 대하여 $f(3k-2)+f(3k-1)+f(3k)=0$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(30)$

$=\{f(1)+f(2)+f(3)\}+\cdots+\{f(28)+f(29)+f(30)\}$

$=0+\cdots+0=0$ (참)

12 음수의 제곱근

중요도

260

상 중 하

다음 중 계산이 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\sqrt{-3}\sqrt{-3}=3$ ✓② $\sqrt{-2}\sqrt{7}=\sqrt{14}i$

③ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-27}}=\dfrac{1}{3}i$ ✓④ $\dfrac{\sqrt{-15}}{\sqrt{5}}=\sqrt{3}i$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-20}}{\sqrt{-10}}=-\sqrt{2}$

풀이

① $\sqrt{-3}\sqrt{-3}=-\sqrt{(-3)\times(-3)}=-\sqrt{9}=-3$

③ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-27}}=-\sqrt{\dfrac{3}{-27}}=-\sqrt{-\dfrac{1}{9}}=-\dfrac{1}{3}i$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-20}}{\sqrt{-10}}=\sqrt{\dfrac{-20}{-10}}=\sqrt{2}$

261

상 중 하

$\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{-5}}+\dfrac{\sqrt{-64}}{\sqrt{-2}}+\sqrt{-4}\sqrt{-8}=a+bi$일 때, 실수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오. 5

풀이

$\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{-5}}+\dfrac{\sqrt{-64}}{\sqrt{-2}}+\sqrt{-4}\sqrt{-8}=-\sqrt{\dfrac{125}{-5}}+\sqrt{\dfrac{-64}{-2}}-\sqrt{32}$

$=-5i+4\sqrt{2}-4\sqrt{2}=-5i$

따라서 $a=0$, $b=-5$이므로

$a-b=5$

262

상 중 하

$\sqrt{16}\sqrt{-1}+\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{-5}}-\dfrac{2-\sqrt{-4}}{2+\sqrt{-4}}$의 값은?

✓① $3i$ ② $2i$ ③ 0
④ $-2i$ ⑤ $-3i$

풀이

$\sqrt{16}\sqrt{-1}+\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{-5}}-\dfrac{2-\sqrt{-4}}{2+\sqrt{-4}}=4i+\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}i}-\dfrac{2-2i}{2+2i}$

$=4i-2i-\dfrac{(2-2i)^2}{(2+2i)(2-2i)}$

$=2i-\dfrac{-8i}{8}$

$=2i+i=3i$

263

상 중 하

복소수 $z=\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-2}(\sqrt{-3}+\sqrt{3})}$에 대하여 $z^2-\overline{z}^2$의 값은?

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① $-4i$ ② $-2i$ ③ $2i$

√④ $4i$ ⑤ $8i$

풀이

$z=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}i(\sqrt{3}i+\sqrt{3})}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}(-1+i)}$

$=\dfrac{2(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=-1-i$

$\therefore z^2-\overline{z}^2=(-1-i)^2-(-1+i)^2$

$=2i-(-2i)=4i$

264

상 중 하

$0<a<1$일 때,

$$\sqrt{-a}\sqrt{-a}+\sqrt{\frac{(a-1)^2}{1-a}}\sqrt{1-a}-|2a-7|$$

을 간단히 하시오. -6

풀이

$0<a<1$이므로 $1-a>0$, $2a-7<0$

$\therefore \sqrt{-a}\sqrt{-a}+\sqrt{\dfrac{(a-1)^2}{1-a}}\sqrt{1-a}-|2a-7|=-a+1-a-(-2a+7)$

$=-6$

13 음수의 제곱근의 성질

중요도

265 내신 기출

상 중 하

0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

√② $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

③ $\sqrt{ab^2}=b\sqrt{a}$

④ $\sqrt{-a}\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}$

⑤ $\sqrt{-a}\sqrt{b}=-\sqrt{-ab}$

풀이

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0$, $b<0$

① $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=|a|\sqrt{b}=-a\sqrt{b}$

③ $\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}\sqrt{b^2}=\sqrt{a}|b|=-b\sqrt{a}$

④ $\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{(-a)\times(-b)}=\sqrt{ab}$

⑤ $\sqrt{-a}\sqrt{b}=\sqrt{(-a)\times b}=\sqrt{-ab}$

266

상 중 하

실수 a에 대하여

$$\sqrt{a-7}\sqrt{2-a}=-\sqrt{(a-7)(2-a)}$$

일 때, $\sqrt{(a-8)^2}-\sqrt{(-a)^2}$을 간단히 하면?

① $2a+8$ √② $-2a+8$ ③ $-2a-8$

④ 8 ⑤ -8

풀이

$a-7<0$, $2-a<0$ 또는 $a-7=0$ 또는 $2-a=0$이므로 $2\le a\le 7$

따라서 $a-8<0$, $-a<0$이므로

$\sqrt{(a-8)^2}-\sqrt{(-a)^2}=|a-8|-|-a|$

$=-(a-8)-a=-2a+8$

267

상 중 하

0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$일 때, 다음 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $\sqrt{ab^2}=b\sqrt{a}$

ㄴ. $\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{ab}$

ㄷ. $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2b}}=\sqrt{b}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

√④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

$a>0$, $b<0$이므로

ㄱ. $\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}|b|=-b\sqrt{a}$ (거짓)

268

상 중 하

0이 아닌 세 실수 a, b, c에 대하여

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}},\ \sqrt{a}\sqrt{c}=-\sqrt{ac}$$

일 때, $|b-a|+\sqrt{c^2}+|c-b|$를 간단히 하면?

① $-a$ ② $-a+2b$

③ $a-2c$ ④ $-a-2c$

√⑤ $-a+2b-2c$

풀이

$a<0$, $b>0$, $c<0$이므로

$b-a>0$, $c-b<0$

$\therefore |b-a|+\sqrt{c^2}+|c-b|=b-a-c-(c-b)$

$=-a+2b-2c$

정답과 풀이 037쪽

269

두 복소수

$$\alpha=(1+4i)x+8i-5y,\ \beta=(3-2i)x-i+4y$$

에 대하여 α^2이 양의 실수, β^2이 음의 실수가 될 때, xy의 값을 구하시오. (단, x, y는 실수이다.) -3

풀이

α^2이 양의 실수이므로 α는 0이 아닌 실수이어야 한다.

$\therefore x=-2,\ y\neq-\frac{2}{5}$ ········· 40 %

β^2이 음의 실수이므로 β는 순허수이어야 한다.

$\therefore y=\frac{3}{2}$ ········· 40 %

$\therefore xy=-2\times\frac{3}{2}=-3$ ········· 20 %

270

두 복소수 α, β에 대하여

$$\alpha+\beta=1-2i,\ \overline{\alpha^2}-\overline{\beta^2}=-4+7i$$

일 때, $4\alpha\beta\times\overline{\alpha\beta}$의 값을 구하시오.

(단, $\overline{\alpha^2}$, $\overline{\beta^2}$, $\overline{\alpha\beta}$는 각각 α^2, β^2, $\alpha\beta$의 켤레복소수이다.) 17

풀이

$\overline{\alpha^2}-\overline{\beta^2}=-4+7i$이므로 $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=-4-7i$

$\therefore \alpha-\beta=\frac{-4-7i}{\alpha+\beta}=\frac{-4-7i}{1-2i}=2-3i$ ········· 40 %

$\alpha+\beta=1-2i$, $\alpha-\beta=2-3i$를 연립하여 풀면

$\alpha=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$, $\beta=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ ········· 30 %

$\therefore \alpha\beta=\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{1}{2}+2i$

$\therefore 4\alpha\beta\times\overline{\alpha\beta}=4\left(\frac{1}{2}+2i\right)\left(\frac{1}{2}-2i\right)=17$ ········· 30 %

271

복소수 z가 $z^2=3+2i$를 만족시킬 때, $z\bar{z}$의 값을 구하시오. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) $\sqrt{13}$

풀이

$z=x+yi$ (x, y는 실수)라고 하면

$z^2=(x+yi)^2=(x^2-y^2)+2xyi$ ········· 40 %

즉, $(x^2-y^2)+2xyi=3+2i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2-y^2=3$, $xy=1$ ········· 20 %

한편, $z\bar{z}=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2$이고

$(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=3^2+4=13$이므로

$z\bar{z}=x^2+y^2=\sqrt{13}$ ($\because x^2>0,\ y^2>0$) ········· 40 %

272

다음 식의 값을 구하시오.

$$(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{101}+i^{102})$$

$-1+i$

풀이

$(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+(i^4+i^5)$

$=(i-1)+(-1-i)+(-i+1)+(1+i)=0$ ········· 40 %

$\therefore$ (주어진 식)

$=\{(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+(i^4+i^5)\}$

$+\{(i^5+i^6)+(i^6+i^7)+(i^7+i^8)+(i^8+i^9)\}$

$+\cdots+\{(i^{97}+i^{98})+(i^{98}+i^{99})+(i^{99}+i^{100})+(i^{100}+i^{101})\}+(i^{101}+i^{102})$

$=0+0+\cdots+0+i-1$ ········· 40 %

$=-1+i$ ········· 20 %

273

복소수 $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$에 대하여 $z^n=-1$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. 6

풀이

$z^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z^3=z^2z=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=i$ ········· 50 %

$\therefore z^6=(z^3)^2=i^2=-1$ ········· 30 %

따라서 $z^n=-1$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 6이다. ········· 20 %

274

100 이하의 자연수 n에 대하여

$$(1-i)^{2n}=2^n i$$

를 만족시키는 모든 n의 개수를 구하시오. 25

풀이

$(1-i)^{2n}=\{(1-i)^2\}^n=(-2i)^n=2^n(-i)^n$

즉, $2^n(-i)^n=2^n i$이므로 $(-i)^n=i$ ········· 40 %

이때 $(-i)^n$의 값은 $-i$, -1, i, 1이 반복되므로

$(-i)^n=i$를 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 값은

$n=3,\ 7,\ 11,\ \cdots,\ 99$ ········· 40 %

따라서 구하는 자연수 n의 개수는 25이다. ········· 20 %

고득점을 향한 도약

275

두 복소수 α, β에 대하여

$$\alpha \triangle \beta = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\ (\alpha \neq \beta,\ \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0)$$

로 정의할 때, $(2+\sqrt{3}i)\triangle(2-\sqrt{3}i)$를 간단히 하면?

① $-\frac{4}{7}$ ② $-\frac{2}{7}$ ③ 0

√④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{4}{7}$

풀이

$$(2+\sqrt{3}i)\triangle(2-\sqrt{3}i) = \frac{2-\sqrt{3}i}{2+\sqrt{3}i} + \frac{2+\sqrt{3}i}{2-\sqrt{3}i}$$
$$= \frac{(2-\sqrt{3}i)^2 + (2+\sqrt{3}i)^2}{(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{(1-4\sqrt{3}i)+(1+4\sqrt{3}i)}{7} = \frac{2}{7}$$

276 교육청 기출

5 이하의 두 자연수 m, n에 대하여 복소수 z를

$$z = (m-n) + (m+n-4)i$$

라고 하자. z^2이 실수가 되도록 하는 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 5 √② 7 ③ 9

④ 11 ⑤ 13

풀이

z^2이 실수가 되려면 z는 실수 또는 순허수이어야 하므로 $m-n=0$ 또는 $m+n-4=0$이어야 한다.

(i) $m=n$일 때, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$

(ii) $m+n=4$일 때, $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$

(i), (ii)에서 z^2이 실수가 되도록 하는 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는 7이다.

277

z, w가 순허수가 아닌 허수일 때, 다음 〈보기〉에서 항상 실수인 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, $\bar{z}$, $\bar{w}$는 각각 z, w의 켤레복소수이고, $w\bar{w} \neq 1$이다.)

보기

ㄱ. $z^2 + \bar{z}^2$

ㄴ. $zw - \bar{z}\bar{w}$

ㄷ. $\frac{z-\bar{z}}{4i}$

ㄹ. $\frac{z\bar{w} - \bar{z}w}{w\bar{w} - 1}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

√④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄷ, ㄹ

풀이

$z=a+bi$, $w=c+di$ (a, b, c, d는 0이 아닌 실수)라고 하면

ㄴ. $zw-\bar{z}\bar{w}=(a+bi)(c+di)-(a-bi)(c-di)=2(ad+bc)i$

이때 $ad \neq -bc$이면 $zw-\bar{z}\bar{w}$는 순허수가 된다.

ㄹ. $\frac{z\bar{w}-\bar{z}w}{w\bar{w}-1} = \frac{(a+bi)(c-di)-(a-bi)(c+di)}{(c+di)(c-di)-1} = \frac{2(-ad+bc)}{c^2+d^2-1}i$

이때 $ad \neq bc$이면 $\frac{z\bar{w}-\bar{z}w}{w\bar{w}-1}$는 순허수가 된다.

278

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 0이 아닌 실수)에 대하여 z^2-2z가 실수일 때, 다음 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

보기

ㄱ. $z^2-2z-\overline{z^2-2z}=0$

ㄴ. $z=\frac{1}{\bar{z}}$

ㄷ. $z^2-2z \geq -1$

√① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

풀이

$z^2-2z=(a+bi)^2-2(a+bi)$

$=a^2-b^2-2a+(2ab-2b)i$

z^2-2z가 실수이므로 $2ab-2b=0$ $\therefore a=1$ ($\because b \neq 0$)

$\therefore z=1+bi$

ㄴ. $z\bar{z}=(1+bi)(1-bi)=1+b^2$이고 $b\neq 0$이므로

$z\bar{z}\neq 1$ $\therefore z \neq \frac{1}{\bar{z}}$ (거짓)

ㄷ. $z^2-2z+1=(z-1)^2=(bi)^2=-b^2<0$ ($\because b \neq 0$)

$\therefore z^2-2z<-1$ (거짓)

279

실수가 아닌 복소수 z에 대하여

$$z\overline{z}-\frac{\overline{z}}{z}=2$$

일 때, $z^2+\overline{z}^2$의 값을 구하시오. -2

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

풀이

$z\overline{z}-\frac{\overline{z}}{z}=2$이므로 $\overline{\left(z\overline{z}-\frac{\overline{z}}{z}\right)}=2$ $\quad\therefore \overline{z}z-\frac{z}{\overline{z}}=2$

따라서 $z\overline{z}-\frac{\overline{z}}{z}=\overline{z}z-\frac{z}{\overline{z}}$이므로 $\frac{\overline{z}}{z}=\frac{z}{\overline{z}}$, $z^2-\overline{z}^2=0$

$(z+\overline{z})(z-\overline{z})=0$ $\quad\therefore z+\overline{z}=0$ $(\because z-\overline{z}\neq 0)$

즉, $z=-\overline{z}$이므로 z는 순허수이다.

$z=bi$ (b는 0이 아닌 실수)라고 하면 $z\overline{z}-\frac{\overline{z}}{z}=2$에서

$bi\times(-bi)-\frac{-bi}{bi}=2$, $b^2+1=2$ $\quad\therefore b^2=1$

$\therefore z^2+\overline{z}^2=(bi)^2+(-bi)^2=-2b^2=-2$

280

0이 아닌 복소수 z에 대하여

$$\frac{3z-\overline{z}}{\overline{\overline{z}z}}=2-2i$$

가 성립할 때, 복소수 z를 구하시오. $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

풀이

$\frac{3z-\overline{z}}{\overline{\overline{z}z}}=2-2i$에서 $\frac{3z-\overline{z}}{z\overline{z}}=2-2i$

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라고 하면 $\frac{3(a+bi)-(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=2-2i$

즉, $\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{2b}{a^2+b^2}i=1-i$이므로

$\frac{a}{a^2+b^2}=1$, $\frac{2b}{a^2+b^2}=-1$ $\quad\therefore a^2+b^2=a=-2b$

$a=-2b$를 $a^2+b^2=-2b$에 대입하면 $(-2b)^2+b^2=-2b$

$b(5b+2)=0$ $\quad\therefore b=0$ 또는 $b=-\frac{2}{5}$

그런데 z는 0이 아닌 복소수이므로 $a=\frac{4}{5}$, $b=-\frac{2}{5}$ $\quad\therefore z=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$

281

두 복소수 z, w에 대하여 $z^2=3+4i$, $w=a+bi$일 때, $z^4-6z^2+30=zw$이다. 실수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은?

① 3 ✓② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

풀이

$z^4-6z^2+30=(z^2-3)^2+21=(4i)^2+21=5$이므로 $zw=5$

즉, $z^2w^2=25$이므로

$w^2=\frac{25}{z^2}=\frac{25}{3+4i}=3-4i$

즉, $(a+bi)^2=3-4i$이므로

$a^2-b^2+2abi=3-4i$ $\quad\therefore a^2-b^2=3$, $ab=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-1$ 또는 $a=-2$, $b=1$

$\therefore a^2+b^2=5$

282

등식

$$(i+i^2+i^3)+(i^2+i^3+i^4)+(i^3+i^4+i^5)$$
$$+\cdots+(i^{78}+i^{79}+i^{80})=a+bi$$

를 만족시키는 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. -2

풀이

자연수 n에 대하여

$i^n+i^{n+1}+i^{n+2}=i^n+i^{n+1}-i^n=i^{n+1}$이므로

$(i+i^2+i^3)+(i^2+i^3+i^4)+(i^3+i^4+i^5)+\cdots+(i^{78}+i^{79}+i^{80})$

$=i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{79}$

$=(i^2+i^3+i^4+i^5)+(i^6+i^7+i^8+i^9)+\cdots+(i^{74}+i^{75}+i^{76}+i^{77})+i^{78}+i^{79}$

$=(-1-i+1+i)+(-1-i+1+i)+\cdots+(-1-i+1+i)-1-i$

$=-1-i$

따라서 $a=-1$, $b=-1$이므로 $a+b=-2$

283

100 이하의 두 자연수 m, n에 대하여 등식

$$-i^n+i^{n+m}+i^{3n}-i^{n+8m}=0$$

이 성립할 때, $m+n$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 204 ② 205 ✓③ 206
④ 207 ⑤ 208

풀이

$-i^n+i^{n+m}+i^{3n}-i^{n+8m}=0$에서 $i^n\{-1+i^m+(-1)^n-1\}=0$

이때 $i^n\neq 0$이므로 $i^m+(-1)^n=2$ …… ㉠

이때 i^m의 값은 i, -1, $-i$, 1 중 하나이고, $(-1)^n$의 값은 -1, 1 중 하나이므로 ㉠이 성립하려면 $i^m=1$, $(-1)^n=1$이어야 한다.

$i^m=1$을 만족시키는 m의 값은 4, 8, 12, …, 100이고 $(-1)^n=1$을 만족시키는 n의 값은 2, 4, 6, …, 100이므로

$m+n$의 최댓값은 $100+100=200$, 최솟값은 $4+2=6$이다.

따라서 $m+n$의 최댓값과 최솟값의 합은 $200+6=206$

284

두 복소수 $z_1=\frac{\sqrt{2}}{1+i}$, $z_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에 대하여 $z_1^n=z_2^n$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. 24

풀이

$z_1^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\frac{2}{2i}=-i$, $z_1^4=(z_1^2)^2=(-i)^2=-1$,

$z_1^8=(z_1^4)^2=(-1)^2=1$, …

$z_2^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$,

$z_2^3=z_2^2\times z_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\times\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=1$, …

즉, $z_1^n=z_2^n$을 만족시키는 경우는 $z_1^n=z_2^n=1$일 때이다.

따라서 자연수 n은 8과 3의 공배수이므로 n의 최솟값은 8과 3의 최소공배수인 24이다.

285

$z^2-iz+1=0$을 만족시키는 복소수 z에 대하여

$$\frac{1}{z^3}(z^6+z^5+z^4-z^3+z^2+z+1)=a+bi$$

일 때, $b-a$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.) 1

풀이

$z\neq0$이므로 $z^2-iz+1=0$의 양변을 z로 나누면

$z-i+\frac{1}{z}=0 \quad \therefore z+\frac{1}{z}=i$

$\therefore \frac{1}{z^3}(z^6+z^5+z^4-z^3+z^2+z+1)$

$=z^3+z^2+z-1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}$

$=\left\{\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}+\left\{\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2\right\}+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1$

$=(i^3-3i)+(i^2-2)+i-1=-4-3i$

따라서 $a=-4$, $b=-3$이므로

$b-a=1$

286

$$f(n)=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n \text{에 대하여}$$

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=0$$

을 만족시키는 40 이하의 자연수 n의 개수는?

① 10 ② 12 ③ 16

④ 18 ✓⑤ 20

풀이

$f(n)=i^n+(-i)^n$이므로

$f(1)=i+(-i)=0$, $f(2)=i^2+(-i)^2=-2$, $f(3)=i^3+(-i)^3=0$

$f(4)=i^4+(-i)^4=2$, $f(5)=f(1)=0$, $f(6)=f(2)=-2$, $\cdots$

이때 $f(1)=0$, $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$, $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=0$,

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(8)=0$, $\cdots$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=0$을 만족시키는 n의 값은 $4k-3$의 꼴 또는 $4k$의 꼴 (k는 자연수)이다.

따라서 주어진 등식을 만족시키는 40 이하의 자연수 n의 개수는

$10+10=20$

287 도전! 1등급 교육청 기출

49 이하의 두 자연수 m, n이

$$\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n\right\}^2=4$$

를 만족시킬 때, $m+n$의 최댓값을 구하시오. 94

(단, $i=\sqrt{-1}$)

풀이

$\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n\right\}^2=4$이므로 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=2$ 또는 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=-2$

(i) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=2$인 경우 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=1$, $i^n=-1$이므로

$m=8k+8$, $n=4l+2$ (k, l은 음이 아닌 정수)의 꼴이어야 한다.

따라서 m의 최댓값은 48, n의 최댓값은 46이므로 $m+n$의 최댓값은 94이다.

(ii) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=-2$인 경우 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=-1$, $i^n=1$이므로

$m=8k+4$, $n=4l+4$ (k, l은 음이 아닌 정수)의 꼴이어야 한다.

따라서 m의 최댓값은 44, n의 최댓값은 48이므로 $m+n$의 최댓값은 92이다.

(i), (ii)에서 $m+n$의 최댓값은 94이다.

288

복소수 z_1, z_2, z_3, z_4, z_5는 1, -1, i, $-i$ 중 어느 하나의 값을 갖고

$$z_1^5+z_2^5+z_3^5+z_4^5+z_5^5=-1$$

일 때, $z_1^{10}+z_2^{10}+z_3^{10}+z_4^{10}+z_5^{10}$의 모든 값의 합은?

① -1 ② 0 ③ 1

④ 2 ✓⑤ 3

풀이

$1^5=1$, $(-1)^5=-1$, $i^5=i$, $(-i)^5=-i$이므로

$z_1^5+z_2^5+z_3^5+z_4^5+z_5^5=-1$이 되려면 i, $-i$의 개수는 서로 같아야 한다.

(i) z_1, z_2, z_3, z_4, z_5의 값 중 i, $-i$가 각각 2개이고, -1이 1개일 때

$z_1^{10}+z_2^{10}+z_3^{10}+z_4^{10}+z_5^{10}=i^{10}+i^{10}+(-i)^{10}+(-i)^{10}+(-1)^{10}$

$=-1-1-1-1+1=-3$

(ii) z_1, z_2, z_3, z_4, z_5의 값 중 i, $-i$가 각각 1개이고, 1이 1개, -1이 2개일 때

$z_1^{10}+z_2^{10}+z_3^{10}+z_4^{10}+z_5^{10}=i^{10}+(-i)^{10}+1^{10}+(-1)^{10}+(-1)^{10}$

$=-1-1+1+1+1=1$

(iii) z_1, z_2, z_3, z_4, z_5의 값 중 1이 2개, -1이 3개일 때

$z_1^{10}+z_2^{10}+z_3^{10}+z_4^{10}+z_5^{10}=1^{10}+1^{10}+(-1)^{10}+(-1)^{10}+(-1)^{10}$

$=1+1+1+1+1=5$

(i)~(iii)에서 $z_1^{10}+z_2^{10}+z_3^{10}+z_4^{10}+z_5^{10}$의 모든 값의 합은

$-3+1+5=3$

289 도전! 1등급

a, b가 실수일 때,

$$\sqrt{\frac{|a|-|b|}{|b|-|a|}}-\frac{\sqrt{(|a|-|b|)^2}}{\sqrt{(|b|-|a|)^2}}$$

의 값은? (단, $|a|\neq|b|$)

① -2 ② 0

✓③ $-1+i$ ④ $-1-i$

⑤ $-1+i$ 또는 $-1-i$

풀이

(i) $|a|>|b|$인 경우

$|a|-|b|>0$, $|b|-|a|<0$이므로

$\sqrt{\frac{|a|-|b|}{|b|-|a|}}=-\frac{\sqrt{|a|-|b|}}{\sqrt{|b|-|a|}}=-\frac{\sqrt{|a|-|b|}}{\sqrt{|a|-|b|}\,i}=-\frac{1}{i}=i$

$\frac{\sqrt{(|a|-|b|)^2}}{\sqrt{(|b|-|a|)^2}}=\frac{|a|-|b|}{|a|-|b|}=1$

$\therefore \sqrt{\frac{|a|-|b|}{|b|-|a|}}-\frac{\sqrt{(|a|-|b|)^2}}{\sqrt{(|b|-|a|)^2}}=-1+i$

(ii) $|a|<|b|$인 경우

$|a|-|b|<0$, $|b|-|a|>0$이므로

$\sqrt{\frac{|a|-|b|}{|b|-|a|}}=\frac{\sqrt{|a|-|b|}}{\sqrt{|b|-|a|}}=\frac{\sqrt{|b|-|a|}\,i}{\sqrt{|b|-|a|}}=i$

$\frac{\sqrt{(|a|-|b|)^2}}{\sqrt{(|b|-|a|)^2}}=\frac{|b|-|a|}{|b|-|a|}=1$

$\therefore \sqrt{\frac{|a|-|b|}{|b|-|a|}}-\frac{\sqrt{(|a|-|b|)^2}}{\sqrt{(|b|-|a|)^2}}=-1+i$

(i), (ii)에서 $\sqrt{\frac{|a|-|b|}{|b|-|a|}}-\frac{\sqrt{(|a|-|b|)^2}}{\sqrt{(|b|-|a|)^2}}=-1+i$

05 이차방정식

1 이차방정식의 풀이

(1) 이차방정식의 실근과 허근

계수가 실수인 이차방정식은 복소수의 범위에서 항상 두 개의 근을 갖는다. 이때 실수인 근을 실근, 허수인 근을 허근이라고 한다.

예 이차방정식 $x^2+2=0$은 실수의 범위에서는 근을 갖지 않지만, 복소수의 범위에서는 $x=\pm\sqrt{2}i$를 근으로 갖는다.

참고 특별한 언급이 없으면 이차방정식의 계수는 실수이고, 근은 복소수의 범위에서 구한다.

(2) 이차방정식의 풀이

① 인수분해를 이용한 풀이

x에 대한 이차방정식 $\underline{(ax-b)(cx-d)=0}$의 근은
$ax-b=0$ 또는 $cx-d=0$

$x=\dfrac{b}{a}$ 또는 $x=\dfrac{d}{c}$

예 이차방정식 $x^2-3x-18=0$을 풀면
$(x+3)(x-6)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=6$

② 근의 공식을 이용한 풀이

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

예 이차방정식 $x^2-3x+3=0$을 풀면
$x=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times3}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$

참고 x의 계수가 짝수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 근은
$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$를 이용하여 구하면 편리하다.

2 이차방정식의 판별식

(1) 이차방정식의 판별식

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은
$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$이므로 근호 안의 식 b^2-4ac의 값의 부호에 따라 근이 실근인지 허근인지 판별할 수 있다.
따라서 b^2-4ac를 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식이라고 하며, 기호 D로 나타낸다. 즉,
$D=b^2-4ac$

참고 x의 계수가 짝수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$에서는 판별식 D 대신 $\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$를 이용하여 근을 판별하면 편리하다.

(2) 이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라고 하면

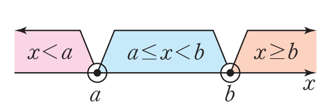
① $D>0$ ⇨ 서로 다른 두 실근
② $D=0$ ⇨ 중근(서로 같은 두 실근)
$D\ge0$이면 실근을 갖는다.
③ $D<0$ ⇨ 서로 다른 두 허근

참고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라고 할 때
(1) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근, 중근, 서로 다른 두 허근을 가지면 각각 $D>0$, $D=0$, $D<0$이다.
(2) x^2의 계수 a와 상수항 c의 부호가 다르면, 즉 $ac<0$이면
$D=b^2-4ac>0$
이므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

문제를 풀 때 유용한 풍쌤 비법

❶ 절댓값 기호를 포함한 방정식의 풀이

(1) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나누어 방정식을 푼다.
$|x-a|+|x-b|=c$ (단, $a<b$)
⇨ (ⅰ) $x<a$, (ⅱ) $a\le x<b$, (ⅲ) $x\ge b$로 구간을 나누어 푼다.
(2) 방정식을 푼 후 구한 해가 해당 구간에 속하는지 반드시 확인한다.



❷ 이차식이 완전제곱식이 될 조건

이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식이면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 가지므로 $b^2-4ac=0$이다. 또, 이차식 ax^2+bx+c에서 $b^2-4ac=0$이면 이차식 ax^2+bx+c는 완전제곱식이다.

예 이차식 x^2-kx+4가 완전제곱식이면 이차방정식 $x^2-kx+4=0$이 중근을 가지므로, 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$D=(-k)^2-4\times1\times4=0$, $k^2=16$ $\quad\therefore k=-4$ 또는 $k=4$

3 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

참고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$라고 하면

$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=\frac{c}{a}$

예 이차방정식 $4x^2-3x+5=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=-\frac{-3}{4}=\frac{3}{4}$, $\alpha\beta=\frac{5}{4}$

4 이차방정식의 근과 계수의 관계의 활용

(1) 두 수를 근으로 하는 이차방정식

두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$, 즉 $x^2-\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{두 근의 합}}x+\underbrace{\alpha\beta}_{\text{두 근의 곱}}=0$

예 두 수 $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$을 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-\{(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})\}x+(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=0$

$\therefore\ x^2-2x-2=0$

참고 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은

$a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$

(2) 이차식의 인수분해

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

예 이차방정식 $x^2-4x-3=0$의 근은

$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\times(-3)}=2\pm\sqrt{7}$

이므로

$x^2-4x-3=\{x-(2+\sqrt{7})\}\{x-(2-\sqrt{7})\}$

$=(x-2-\sqrt{7})(x-2+\sqrt{7})$

참고 계수가 실수인 이차식은 복소수의 범위에서 항상 두 일차식의 곱으로 인수분해할 수 있다.

5 이차방정식의 켤레근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서

① a, b, c가 유리수일 때, $p+q\sqrt{m}$이 근이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다. (단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

② a, b, c가 실수일 때, $p+qi$가 근이면 $p-qi$도 근이다.
(단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$이다.)

참고 $q\neq0$일 때, $p+q\sqrt{m}$과 $p-q\sqrt{m}$, $p+qi$와 $p-qi$를 각각 켤레근이라고 한다.

주의 이차방정식의 계수가 모두 유리수라는 조건이 없으면 방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$일 때, 다른 한 근이 반드시 $p-q\sqrt{m}$이 되는 것은 아니다.
예를 들어 이차방정식 $x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$에서 $\sqrt{2}$는 이 방정식의 근이지만, $-\sqrt{2}$는 이 방정식의 근이 아니다. 이 이차방정식의 두 근은 1, $\sqrt{2}$이다.

문제를 풀 때 유용한 풍쌤 비법

③ 두 근에 대한 조건이 주어진 이차방정식에서 미정계수 구하기

이차방정식의 두 근에 대한 조건이 주어진 경우 두 근을 다음과 같이 놓고 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수를 구한다.

(1) 두 근의 비가 $m:n$ ⇨ $m\alpha$, $n\alpha$ $(\alpha\neq0)$
(2) 두 근의 차가 n ⇨ α, $\alpha+n$ 또는 $\alpha-n$, α
(3) 한 근이 다른 근의 k배 ⇨ α, $k\alpha$ $(\alpha\neq0)$
(4) 두 근이 연속인 정수 ⇨ α, $\alpha+1$ 또는 $\alpha-1$, α (α는 정수)

정답과 풀이 041쪽

01 이차방정식의 풀이 중요도

290
상 중 하

이차방정식 $2x(x-2)+3=(x-1)^2$의 해는?

① $x=-1\pm\sqrt{3}$　② $x=1\pm\sqrt{3}$
③ $x=-2\pm i$　④ $x=-1\pm i$
√⑤ $x=1\pm i$

풀이
$2x(x-2)+3=(x-1)^2$에서
$x^2-2x+2=0$　$\therefore x=1\pm i$

291
상 중 하

이차방정식 $\frac{x^2+7x}{3}+1=x^2+x$의 해가 $x=\frac{a\pm\sqrt{b}}{2}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

√① 12　② 13　③ 14
④ 15　⑤ 16

풀이
$\frac{x^2+7x}{3}+1=x^2+x$에서
$2x^2-4x-3=0$　$\therefore x=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$
따라서 $a=2$, $b=10$이므로
$a+b=12$

292
상 중 하

두 실수 a, b에 대하여

$a◎b=3ab-a+b$

라고 할 때, $(x◎x)+(x◎1)=2$를 만족시키는 x의 값은?

① $x=1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$　② $x=1$ 또는 $x=-\frac{1}{3}$
√③ $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$　④ $x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{3}$
⑤ $x=\pm\frac{1}{3}$

풀이
$(x◎x)+(x◎1)=2$에서
$(3x^2-x+x)+(3x-x+1)=2$
$3x^2+2x-1=0$, $(x+1)(3x-1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

293
상 중 하

이차방정식 $(\sqrt{2}-1)x^2-(\sqrt{2}+1)x+2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $(\alpha-2\beta)^2$의 값은? (단, $\alpha>\beta$)

① 2　② 4　③ 6
√④ 8　⑤ 10

풀이
주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하여 정리하면
$x^2-(3+2\sqrt{2})x+2(\sqrt{2}+1)=0$
$(x-1)\{x-(2\sqrt{2}+2)\}=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2\sqrt{2}+2$
따라서 $\alpha=2\sqrt{2}+2$, $\beta=1$ ($\because \alpha>\beta$)이므로
$(\alpha-2\beta)^2=(2\sqrt{2})^2=8$

02 한 근이 주어진 이차방정식 중요도

294 내신 기출
상 중 하

이차방정식 $x^2-12x+a=0$의 한 근이 4일 때, 다른 한 근을 b라고 하자. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 40

풀이
$x^2-12x+a=0$의 한 근이 4이므로
$4^2-12\times4+a=0$　$\therefore a=32$
$a=32$를 주어진 방정식에 대입하면
$x^2-12x+32=0$, $(x-4)(x-8)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=8$
따라서 $b=8$이므로 $a+b=40$

295
상 중 하

이차방정식 $x^2-(a-1)x-a-\sqrt{2}=0$의 두 근이 $1+\sqrt{2}$, b일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① $-\sqrt{2}$　√② $-2\sqrt{2}$　③ $-3\sqrt{2}$
④ $2-\sqrt{2}$　⑤ $-2-\sqrt{2}$

풀이
$x^2-(a-1)x-a-\sqrt{2}=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이므로
$(1+\sqrt{2})^2-(a-1)(1+\sqrt{2})-a-\sqrt{2}=0$
$(2+\sqrt{2})a=4+2\sqrt{2}$　$\therefore a=2$
$a=2$를 주어진 방정식에 대입하면
$x^2-x-2-\sqrt{2}=0$, $x^2-x-\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$
$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}-1)=0$　$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}+1$
따라서 $b=-\sqrt{2}$이므로 $ab=-2\sqrt{2}$

296 내신 기출

상 중 하

이차방정식 $x^2-(a+7)x+5a+1=0$의 한 근이 8이고, 다른 한 근이 이차방정식 $x^2+3kx-2k=0$의 한 근일 때, k의 값을 구하시오. (단, a, k는 상수이다.) -1

풀이

$x^2-(a+7)x+5a+1=0$의 한 근이 8이므로

$8^2-(a+7)\times8+5a+1=0$, $3a=9$ $\quad\therefore a=3$

$a=3$을 $x^2-(a+7)x+5a+1=0$에 대입하면

$x^2-10x+16=0$, $(x-2)(x-8)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=8$

따라서 $x^2+3kx-2k=0$의 한 근이 2이므로

$2^2+3k\times2-2k=0$ $\quad\therefore k=-1$

297 교육청 기출

상 중 하

이차방정식 $2x^2-2x+1=0$의 한 근을 α라고 할 때, $\alpha^4-\alpha^2+\alpha$의 값은?

✓① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{16}$ ③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

풀이

$2x^2-2x+1=0$의 한 근이 α이므로

$2\alpha^2-2\alpha+1=0$, $\alpha^2-\alpha+\frac{1}{2}=0$

따라서 $\alpha^2=\alpha-\frac{1}{2}$이므로

$\alpha^4=\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2=\alpha^2-\alpha+\frac{1}{4}$

$\therefore \alpha^4-\alpha^2+\alpha=\left(\alpha^2-\alpha+\frac{1}{4}\right)-\alpha^2+\alpha=\frac{1}{4}$

298 교육청 기출

상 중 하

x에 대한 이차방정식

$$x^2+k(2p-3)x-(p^2-2)k+q+2=0$$

이 실수 k의 값에 관계없이 항상 1을 근으로 가질 때, 두 상수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은?

① -5 ✓② -2 ③ 1

④ 4 ⑤ 7

풀이

$x^2+k(2p-3)x-(p^2-2)k+q+2=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 1을 근으로 가지므로

$1+k(2p-3)-(p^2-2)k+q+2=0$

이 식을 k에 대하여 정리하면

$-(p^2-2p+1)k+q+3=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$p^2-2p+1=0$, $q+3=0$

따라서 $p=1$, $q=-3$이므로 $p+q=-2$

03 절댓값 기호를 포함한 방정식

중요도

299 풍쌤 비법 ❶

상 중 하

방정식 $x^2-2|x|-8=0$의 모든 근의 합은?

① 2 ② 1 ✓③ 0

④ -1 ⑤ -2

풀이

(i) $x<0$일 때

$x^2+2x-8=0$, $(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ ($\because x<0$)

(ii) $x\geq0$일 때

$x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=4$ ($\because x\geq0$)

(i), (ii)에서 $x=-4$ 또는 $x=4$이므로 모든 근의 합은

$(-4)+4=0$

300

상 중 하

방정식 $|x^2-6|=5x$의 모든 근의 곱은?

① 2 ② 3 ③ 4

④ 5 ✓⑤ 6

풀이

(i) $x^2<6$일 때

$-(x^2-6)=5x$, $(x+6)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=1$ ($\because x^2<6$)

(ii) $x^2\geq6$일 때

$x^2-6=5x$, $(x+1)(x-6)=0$ $\quad\therefore x=6$ ($\because x^2\geq6$)

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=6$이므로 모든 근의 곱은

$1\times6=6$

301

상 중 하

방정식 $||x^2-1|-4|=3$의 실근 중 가장 큰 근을 α, 가장 작은 근을 β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14

✓④ 16 ⑤ 18

풀이

$||x^2-1|-4|=3$에서 $|x^2-1|-4=\pm3$

$\therefore |x^2-1|=7$ 또는 $|x^2-1|=1$

(i) $|x^2-1|=7$일 때

$x^2-1=\pm7$, $x^2=8$ 또는 $x^2=-6$

$\therefore x=\pm2\sqrt{2}$ ($\because x$는 실근)

(ii) $|x^2-1|=1$일 때

$x^2-1=\pm1$, $x^2=2$ 또는 $x^2=0$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=0$

(i), (ii)에서 $\alpha=2\sqrt{2}$, $\beta=-2\sqrt{2}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=16$

› 정답과 풀이 041쪽

302 내신 기출
상 중 하

방정식 $x^2-\sqrt{(x-2)^2}=\sqrt{x^2}+3$의 모든 근의 합은?

① $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ② $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

✓④ $\sqrt{2}-\sqrt{6}$ ⑤ $-\sqrt{2}-\sqrt{6}$

풀이

$x^2-\sqrt{(x-2)^2}=\sqrt{x^2}+3$에서 $x^2-|x|-|x-2|-3=0$

(i) $x<0$일 때, $x^2+x+(x-2)-3=0$ ∴ $x=-1-\sqrt{6}$

(ii) $0\le x<2$일 때, $x^2-x+(x-2)-3=0$ ∴ $x=\pm\sqrt{5}$

그런데 $0\le x<2$이므로 $x=\pm\sqrt{5}$는 근이 아니다.

(iii) $x\ge 2$일 때, $x^2-x-(x-2)-3=0$ ∴ $x=1+\sqrt{2}$

(i)~(iii)에서 주어진 방정식의 모든 근의 합은 $\sqrt{2}-\sqrt{6}$

04 가우스 기호를 포함한 방정식
중요도

303
상 중 하

방정식 $2[x]^2-[x]-3=0$을 만족시키는 x의 값의 범위가 $a\le x<b$일 때, ab의 값은?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① -2 ✓② 0 ③ 2

④ 4 ⑤ 6

풀이

$2[x]^2-[x]-3=0$에서

$([x]+1)(2[x]-3)=0$ ∴ $[x]=-1$ ($\because [x]$는 정수)

∴ $-1\le x<0$

따라서 $a=-1$, $b=0$이므로 $ab=0$

304
상 중 하

다음 중 방정식 $[x]^2-4[x]+3=0$의 해가 아닌 것을 모두 고르면? (정답 2개)

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

✓① $\frac{1}{2}$ ② 1 ✓③ $\frac{5}{2}$

④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

풀이

$[x]^2-4[x]+3=0$에서

$([x]-1)([x]-3)=0$ ∴ $[x]=1$ 또는 $[x]=3$

∴ $1\le x<2$ 또는 $3\le x<4$

305
상 중 하

$0\le x<2$일 때, 방정식 $x^2-2x+[x]=0$의 모든 해의 합은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① -3 ② -2 ③ -1

④ 0 ✓⑤ 1

풀이

(i) $0\le x<1$일 때, $[x]=0$이므로

$x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$

∴ $x=0$ ($\because 0\le x<1$)

(ii) $1\le x<2$일 때, $[x]=1$이므로

$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$

∴ $x=1$

(i), (ii)에서 $x=0$ 또는 $x=1$이므로 모든 해의 합은 1

05 이차방정식의 활용
중요도

306
상 중 하

연속하는 세 짝수인 자연수 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱이 가운데 수의 3배와 같을 때, 가장 큰 짝수를 구하시오. 6

풀이

연속하는 세 짝수인 자연수를 $x-2$, x, $x+2$라고 하면

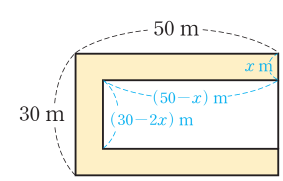
$(x+2)(x-2)=3x$, $x^2-3x-4=0$

$(x-4)(x+1)=0$ ∴ $x=4$ ($\because x>2$)

따라서 가장 큰 짝수는 $4+2=6$

307
상 중 하

오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 50 m, 30 m인 직사각형 모양의 땅에 폭이 일정한 ㄷ자 모양의 길을 만들었더니 남은 땅의 넓이가 900 m^{2}가 되었다. 이때 길의 폭은 몇 m인지 구하시오. 5 m



풀이

$(50-x)(30-2x)=900$, $2x^2-130x+600=0$

$x^2-65x+300=0$, $(x-5)(x-60)=0$

∴ $x=5$ 또는 $x=60$

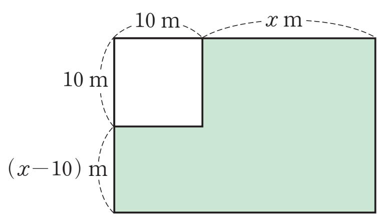
이때 $0<x<15$이므로 $x=5$

따라서 길의 폭은 5 m이다.

308 교육청 기출

상 중 하

어느 가족이 작년까지 한 변의 길이가 10 m인 정사각형 모양의 밭을 가꾸었다. 올해는 다음 그림과 같이 가로의 길이를 x m만큼, 세로의 길이를 $(x-10)$ m만큼 늘여서 새로운 직사각형 모양의 밭을 가꾸었다. 올해 늘어난 ⌐ 모양의 밭의 넓이가 500 m^{2}일 때, x의 값은? (단, $x>10$)



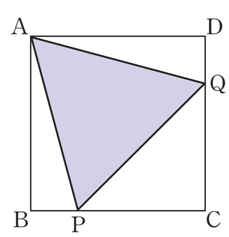
✓① 20　　② 21　　③ 22
④ 23　　⑤ 24

풀이
올해 늘어난 밭의 넓이가 500 m^{2}이므로 밭의 총 넓이는 600 m^{2}이다.
따라서 $(10+x)x=600$이므로
$x^2+10x-600=0$, $(x+30)(x-20)=0$
$\therefore x=-30$ 또는 $x=20$
이때 $x>10$이므로 $x=20$

309

상 중 하

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD가 있다. 두 변 BC, CD 위에 각각 두 점 P, Q를 잡아 삼각형 APQ가 정삼각형이 되도록 하였다. 이때 선분 BP의 길이는?



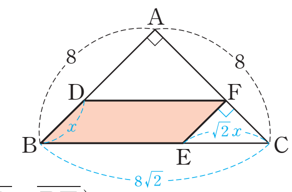
① $\frac{1}{4}$　　② $\frac{1}{3}$　　✓③ $4-2\sqrt{3}$
⑤ $2\sqrt{3}-2$　　④ $4+2\sqrt{3}$

풀이
$\triangle ABP \equiv \triangle ADQ$ (RHS 합동)이므로 $\overline{BP}=x$라고 하면
$\overline{DQ}=x$　　$\therefore \overline{CP}=\overline{CQ}=2-x$
$\overline{AP}^2=4+x^2$, $\overline{PQ}^2=(2-x)^2+(2-x)^2$
$\overline{AP}^2=\overline{PQ}^2$이므로
$4+x^2=(2-x)^2+(2-x)^2$
$x^2-8x+4=0$　　$\therefore x=4\pm2\sqrt{3}$
이때 $0<x<2$이므로
$x=4-2\sqrt{3}$　　$\therefore \overline{BP}=4-2\sqrt{3}$

310 내신 기출

상 중 하

오른쪽 그림은 직각이등변삼각형 ABC의 내부에 평행사변형 DBEF를 그린 것이다. 사각형 DBEF의 넓이가 15일 때, $\overline{BD}$의 길이는? (단, $\overline{BD}<\overline{BE}$)



① 2　　② $2\sqrt{2}$　　✓③ 3
④ $3\sqrt{2}$　　⑤ $3\sqrt{3}$

풀이
$\overline{BE}=\overline{BC}-\overline{EC}=8\sqrt{2}-\sqrt{2}x=\sqrt{2}(8-x)$
□DBEF의 넓이가 15이므로 $x\times\sqrt{2}(8-x)\times\sin 45^\circ=15$
$x^2-8x+15=0$, $(x-3)(x-5)=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=5$
$\overline{BD}=3$일 때 $\overline{BE}=5\sqrt{2}$, $\overline{BD}=5$일 때 $\overline{BE}=3\sqrt{2}$
이때 $\overline{BD}<\overline{BE}$이므로 $\overline{BD}=3$

06 이차방정식의 근의 판별

중요도

311

상 중 하

이차방정식 $x^2-4x+3k=0$이 허근을 가질 때, 정수 k의 최솟값은?

① 1　　✓② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

풀이
이차방정식 $x^2-4x+3k=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=4-3k<0$　　$\therefore k>\frac{4}{3}$
따라서 정수 k의 최솟값은 2이다.

312

상 중 하

이차방정식 $x^2+2kx-6k-9=0$이 중근 α를 가질 때, α의 값은?

① -2　　② -1　　③ 1
④ 2　　✓⑤ 3

풀이
이차방정식 $x^2+2kx-6k-9=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=k^2-(-6k-9)=0$
$(k+3)^2=0$　　$\therefore k=-3$
$k=-3$을 주어진 방정식에 대입하면
$x^2-6x+9=0$, $(x-3)^2=0$　　$\therefore x=3$
$\therefore \alpha=3$

313 내신 기출

상 중 하

x에 대한 이차방정식 $x^2+4(k-6)x+4k^2-18=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 자연수 k의 개수를 구하시오. 3

풀이
이차방정식 $x^2+4(k-6)x+4k^2-18=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=\{2(k-6)\}^2-(4k^2-18)>0$

$\therefore k<\frac{27}{8}$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3의 3개이다.

314

상 중 하

이차방정식 $x^2-8x+3k+1=0$은 실근을 갖고, 이차방정식 $kx^2+6x+10=0$은 서로 다른 두 허근을 가질 때, 정수 k의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4
√④ 5 ⑤ 6

풀이
이차방정식 $x^2-8x+3k+1=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$\frac{D_1}{4}=16-(3k+1)\geq0 \quad \therefore k\leq5$ …… ㉠

$kx^2+6x+10=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$\frac{D_2}{4}=9-10k<0 \quad \therefore k>\frac{9}{10}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{9}{10}<k\leq5$

따라서 정수 k는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

315 교육청 기출

상 중 하

x에 대한 이차방정식 $x^2-2(m+a)x+m^2+m+b=0$이 실수 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, $12(a+b)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

√① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

풀이
이차방정식 $x^2-2(m+a)x+m^2+m+b=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(m+a)^2-(m^2+m+b)=0$

$(2a-1)m+a^2-b=0$

이 등식이 실수 m의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2a-1=0,\ a^2-b=0$

따라서 $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{4}$이므로

$12(a+b)=12\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=9$

07 계수의 조건이 주어진 이차방정식의 근의 판별

중요도

316

상 중 하

$k>3$일 때, x에 대한 이차방정식

$x^2-2kx+k^2+6k-18=0$의 근을 판별하시오.

서로 다른 두 허근

풀이
이차방정식 $x^2-2kx+k^2+6k-18=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(k^2+6k-18)=-6k+18$

이때 $k>3$이므로 $\frac{D}{4}<0$

따라서 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

317

상 중 하

x에 대한 이차방정식 $x^2+2ax+2b^2+2=0$이 중근을 가질 때, x에 대한 이차방정식 $2x^2-2ax+8b-15=0$의 근을 판별하면? (단, a, b는 실수이다.)

√① 실근을 갖는다.
② 중근을 갖는다.
③ 서로 다른 두 실근을 갖는다.
④ 서로 다른 두 허근을 갖는다.
⑤ 판별할 수 없다.

풀이
이차방정식 $x^2+2ax+2b^2+2=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-(2b^2+2)=0 \quad \therefore a^2=2b^2+2$ …… ㉠

이차방정식 $2x^2-2ax+8b-15=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$\frac{D_2}{4}=a^2-2(8b-15)=2b^2+2-16b+30$ ($\because$ ㉠)

$=2b^2-16b+32=2(b-4)^2\geq0$

따라서 이차방정식 $2x^2-2ax+8b-15=0$은 실근을 갖는다.

318

상 중 하

x에 대한 이차방정식

$x^2-2(a+b)x+(a-b)^2+3ab+2a-3b+13=0$이 중근을 가질 때, 다음 중 ab의 값이 될 수 없는 것은?

(단, a, b는 정수이다.)

① 20 √② 18 ③ 12
④ -10 ⑤ -18

풀이
이차방정식 $x^2-2(a+b)x+(a-b)^2+3ab+2a-3b+13=0$의 판별식을 D라고 하면 $\frac{D}{4}=(a+b)^2-\{(a-b)^2+3ab+2a-3b+13\}=0$

$\therefore (a+3)(b-2)=7$

(i) $a+3=1$, $b-2=7$일 때, $a=-2$, $b=9 \quad \therefore ab=-18$

(ii) $a+3=-1$, $b-2=-7$일 때, $a=-4$, $b=-5 \quad \therefore ab=20$

(iii) $a+3=7$, $b-2=1$일 때, $a=4$, $b=3 \quad \therefore ab=12$

(iv) $a+3=-7$, $b-2=-1$일 때, $a=-10$, $b=1 \quad \therefore ab=-10$

(i)~(iv)에서 가능한 ab의 값은 -18, -10, 12, 20이다.

319 교육청 기출

상 중 하

x에 대한 이차방정식 $(a^2-9)x^2=a+3$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 10보다 작은 자연수 a의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5
√④ 6 ⑤ 7

풀이
$(a+3)(a-3)x^2=a+3$에서 $x^2=\frac{1}{a-3}$ ($\because a+3>0,\ a-3\neq0$)
이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면
$\frac{1}{a-3}>0 \quad \therefore a>3$
따라서 10보다 작은 자연수 a는 4, 5, 6, 7, 8, 9의 6개이다.

08 이차방정식의 판별식을 이용한 삼각형의 모양 판단

중요도

320

상 중 하

x에 대한 이차방정식 $(a+c)x^2+2bx+a-c=0$이 서로 다른 두 허근을 가질 때, a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인가?

(단, a, b, c는 양수이다.)

① 정삼각형 ② $b=c$인 이등변삼각형
③ $c=a$인 이등변삼각형 ④ 직각삼각형
√⑤ 둔각삼각형

풀이
이차방정식 $(a+c)x^2+2bx+a-c=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=b^2-(a+c)(a-c)<0 \quad \therefore a^2>b^2+c^2$
따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 둔각삼각형이다.

321

상 중 하

x에 대한 이차방정식 $4ax+b(4-x^2)+c(x^2+4)=0$이 중근을 가질 때, a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인가? (단, a, b, c는 양수이다.)

① 정삼각형
② $a=b$인 이등변삼각형
③ 빗변의 길이가 a인 직각삼각형
√④ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형
⑤ 둔각삼각형

풀이
$4ax+b(4-x^2)+c(x^2+4)=0$에서 $(c-b)x^2+4ax+4b+4c=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=4a^2-4(c-b)(c+b)=0 \quad \therefore c^2=a^2+b^2$
따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

322

상 중 하

x에 대한 이차방정식

$$3x^2+2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$$

이 중근을 가질 때, a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인가? (단, a, b, c는 양수이다.)

√① 정삼각형
② $a=b$, $b\neq c$인 이등변삼각형
③ $b=c$인 직각이등변삼각형
④ 빗변의 길이가 b인 직각삼각형
⑤ 둔각삼각형

풀이
이차방정식 $3x^2+2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=0,\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$
$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0 \quad \therefore a=b=c$
따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

09 이차식이 완전제곱식이 될 조건

중요도

323 풍쌤 비법 ❷

상 중 하

x에 대한 이차식 $x^2+2(k-3)x+k^2-k-6$이 완전제곱식이 될 때, 실수 k의 값을 구하시오. 3

풀이
x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-3)x+k^2-k-6=0$이 중근을 가져야 한다.
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(k-3)^2-(k^2-k-6)=0$
$\therefore k=3$

324

상 중 하

x에 대한 이차식 $kx^2+8kx+6k+5$가 완전제곱식이 되도록 하는 실수 k의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ √③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

풀이
x에 대한 이차방정식 $kx^2+8kx+6k+5=0$이 중근을 가져야 한다.
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=16k^2-k(6k+5)=0,\ k(2k-1)=0 \quad \therefore k=0$ 또는 $k=\frac{1}{2}$
그런데 주어진 식이 x에 대한 이차식이므로 $k\neq0$
$\therefore k=\frac{1}{2}$

325 내신 기출

상 중 하

x에 대한 이차식 $x^2+2(k-a)x+k^2-6k+a^2$이 실수 k의 값에 관계없이 완전제곱식이 될 때, 상수 a의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ✓⑤ 3

풀이
x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2-6k+a^2=0$이 중근을 가져야 한다.
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2-6k+a^2)=0$
$(-2a+6)k=0$
이 등식이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$a=3$

326

상 중 하

x에 대한 이차식 $3x^2-2(m-5)x+m^2-8m+3$이 $3(x+n)^2$으로 인수분해될 때, 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오. (단, $m>0$) 7

풀이
x에 대한 이차방정식 $3x^2-2(m-5)x+m^2-8m+3=0$이 중근을 가져야 한다.
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(m-5)^2-3(m^2-8m+3)=0$
$(m+1)(m-8)=0$ $\quad\therefore m=8\ (\because m>0)$
$m=8$을 주어진 이차식에 대입하면
$3x^2-6x+3=3(x-1)^2$이므로 $n=-1$
$\therefore m+n=7$

10 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기 (1)

중요도

327 내신 기출

상 중 하

이차방정식 $x^2+3x-1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값은?

① -39 ② -38 ③ -37
✓④ -36 ⑤ -35

풀이
$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-1$
$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(-3)^3-3\times(-1)\times(-3)$
$=-36$

328

상 중 하

이차방정식 $x^2-x-5=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은?

① $\sqrt{19}$ ✓② $\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{23}$
④ 5 ⑤ $3\sqrt{3}$

풀이
$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-5$
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1^2-4\times(-5)=21$
$\therefore |\alpha-\beta|=\sqrt{21}$

329

상 중 하

이차방정식 $6x^2-9x+1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\alpha+\beta=\frac{3}{2}$ ② $\alpha\beta=\frac{1}{6}$
✓③ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=12$ ④ $\alpha^2+\beta^2=\frac{23}{12}$
⑤ $\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\beta}=-\frac{3}{2}$

풀이
③ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{6}}=9$

330

상 중 하

이차방정식 $x^2+24x+36=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^2$의 값은?

✓① -1 ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 1

풀이
$\alpha+\beta=-24$, $\alpha\beta=36$
따라서 $\alpha<0$, $\beta<0$이므로
$\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^2=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{2}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}$
$=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-\frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}$
$=\frac{-24}{36}-\frac{2}{\sqrt{36}}=-1$

331

상 중 하

방정식 $|x^2-8x|=4$의 근을 α, β, γ, δ라고 할 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}$의 값을 구하시오. 0

풀이

$|x^2-8x|=4$에서 $x^2-8x=\pm4$

(i) $x^2-8x=4$, 즉 $x^2-8x-4=0$일 때
이 이차방정식의 두 근을 α, β라고 하면
$\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=-4$

(ii) $x^2-8x=-4$, 즉 $x^2-8x+4=0$일 때
이 이차방정식의 두 근을 γ, δ라고 하면
$\gamma+\delta=8$, $\gamma\delta=4$

(i), (ii)에서 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}=\frac{8}{-4}+\frac{8}{4}=0$

11 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기 (2)

중요도

332

상 중 하

이차방정식 $x^2+4x-2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $(\alpha^2+5\alpha-3)(\beta^2+5\beta-3)$의 값은?

① 1 ② 2 ✓③ 3
④ 4 ⑤ 5

풀이

α, β가 이차방정식 $x^2+4x-2=0$의 두 근이므로
$\alpha^2+4\alpha-2=0$, $\beta^2+4\beta-2=0$

$\therefore (\alpha^2+5\alpha-3)(\beta^2+5\beta-3)$
$=\{(\alpha^2+4\alpha-2)+\alpha-1\}\{(\beta^2+4\beta-2)+\beta-1\}$
$=(\alpha-1)(\beta-1)$
$=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$ …… ㉠

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=-2$이므로 ㉠에서
(주어진 식)$=-2-(-4)+1=3$

333 교육청 기출

상 중 하

이차방정식 $2x^2+6x-9=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $2(2\alpha^2+\beta^2)+6(2\alpha+\beta)$의 값을 구하시오. 27

풀이

α, β가 이차방정식 $2x^2+6x-9=0$의 두 근이므로
$2\alpha^2+6\alpha-9=0$, $2\beta^2+6\beta-9=0$ $\therefore 2\alpha^2+6\alpha=9$, $2\beta^2+6\beta=9$

$\therefore 2(2\alpha^2+\beta^2)+6(2\alpha+\beta)=4\alpha^2+2\beta^2+12\alpha+6\beta$
$=2(2\alpha^2+6\alpha)+(2\beta^2+6\beta)$
$=2\times9+9=27$

334

상 중 하

이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\frac{\alpha^3}{\alpha^2-3\alpha+1}+\frac{\beta^3}{\beta^2-3\beta+1}$의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ✓⑤ 14

풀이

α, β가 이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 근이므로
$\alpha^2-4\alpha+1=0$, $\beta^2-4\beta+1=0$

$\therefore \frac{\alpha^3}{\alpha^2-3\alpha+1}+\frac{\beta^3}{\beta^2-3\beta+1}=\frac{\alpha^3}{\alpha^2-4\alpha+1+\alpha}+\frac{\beta^3}{\beta^2-4\beta+1+\beta}$
$=\frac{\alpha^3}{\alpha}+\frac{\beta^3}{\beta}$
$=\alpha^2+\beta^2$
$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ …… ㉠

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=1$이므로 ㉠에서
(주어진 식)$=4^2-2\times1=14$

335 내신 기출

상 중 하

이차방정식 $x^2-5x+2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^4-4\alpha^3-3\alpha^2+\alpha-\beta+5\alpha\beta$의 값은?

✓① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

풀이

α가 이차방정식 $x^2-5x+2=0$의 근이므로
$\alpha^2-5\alpha+2=0$

$\therefore \alpha^4-4\alpha^3-3\alpha^2+\alpha-\beta+5\alpha\beta=\alpha^2(\alpha^2-5\alpha+2)+\alpha(\alpha^2-5\alpha+2)-\alpha-\beta+5\alpha\beta$
$=-(\alpha+\beta)+5\alpha\beta$ …… ㉠

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=2$이므로 ㉠에서
(주어진 식)$=-5+5\times2=5$

12 두 근의 조건이 주어질 때 미정계수 구하기

중요도

336 풍쌤 비법 ❸

상 중 하

이차방정식 $x^2-11x+k-3=0$의 두 근의 차가 5일 때, 상수 k의 값을 구하시오. 27

풀이

두 근을 α, $\alpha+5$라고 하면
$\alpha+(\alpha+5)=11$, $2\alpha=6$ $\therefore \alpha=3$ …… ㉠
$\alpha(\alpha+5)=k-3$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$3(3+5)=k-3$ $\therefore k=27$

337

상중하

x에 대한 이차방정식 $x^2+(2a-1)x+a-5=0$의 두 실근의 부호가 서로 다를 때, 정수 a의 최댓값은?

① 2　② 3　√③ 4
④ 5　⑤ 6

풀이
두 실근을 α, β라고 하면
$\alpha\beta=a-5<0$　　$\therefore a<5$
따라서 정수 a의 최댓값은 4이다.

338 내신 기출

상중하

이차방정식 $x^2-7(k-2)x+12k=0$의 두 근의 비가 $3:4$일 때, 모든 실수 k의 값의 합은?

① 2　② 3　③ 4
√④ 5　⑤ 6

풀이
두 근을 3α, 4α $(\alpha\neq0)$라고 하면
$3\alpha+4\alpha=7(k-2)$　　$\therefore \alpha=k-2$　　…… ㉠
$3\alpha\times4\alpha=12k$　　$\therefore \alpha^2=k$　　…… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$(k-2)^2=k$, $k^2-5k+4=0$
$(k-1)(k-4)=0$　　$\therefore k=1$ 또는 $k=4$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은
$1+4=5$

339

상중하

x에 대한 이차방정식

$$x^2+(m^2+2m-3)x-5m+1=0$$

의 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다를 때, 실수 m의 값은?

① -3　② -1　③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{4}{5}$　√⑤ 1

풀이
두 실근을 α, $-\alpha$ $(\alpha\neq0)$라고 하면
$\alpha+(-\alpha)=-(m^2+2m-3)$, $m^2+2m-3=0$
$(m+3)(m-1)=0$　　$\therefore m=-3$ 또는 $m=1$　　…… ㉠
$\alpha\times(-\alpha)=-5m+1$, $-\alpha^2=-5m+1<0$
$\therefore m>\frac{1}{5}$　　…… ㉡
㉠, ㉡에서 $m=1$

340

상중하

x에 대한 이차방정식 $x^2+(2m-1)x+6m-10=0$의 두 근이 정수가 되도록 하는 모든 실수 m의 값의 합은?

① 6　√② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

풀이
두 근을 α, β라고 하면
$\alpha+\beta=-2m+1$　　$\therefore 2m=1-\alpha-\beta$　　…… ㉠
$\alpha\beta=6m-10$　　…… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $\alpha\beta=3(1-\alpha-\beta)-10$　　$\therefore (\alpha+3)(\beta+3)=2$
(i) $\alpha+3=1$, $\beta+3=2$일 때, $\alpha=-2$, $\beta=-1$　　$\therefore m=2$
(ii) $\alpha+3=-1$, $\beta+3=-2$일 때, $\alpha=-4$, $\beta=-5$　　$\therefore m=5$
(iii) $\alpha+3=2$, $\beta+3=1$일 때, $\alpha=-1$, $\beta=-2$　　$\therefore m=2$
(iv) $\alpha+3=-2$, $\beta+3=-1$일 때, $\alpha=-5$, $\beta=-4$　　$\therefore m=5$
(i)~(iv)에서 $m=2$ 또는 $m=5$이므로 모든 실수 m의 값의 합은 $2+5=7$

13 두 근의 관계식이 주어질 때 미정계수 구하기

중요도

341 교육청 기출

상중하

x에 대한 이차방정식 $x^2-ax-4=0$의 두 근을 α, β라고 하자. $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=-6$일 때, 양수 a의 값은?

① 3　√② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

풀이
$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-4$
$\therefore \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{a^2+8}{-4}$
즉, $\frac{a^2+8}{-4}=-6$이므로
$a^2=16$　　$\therefore a=4$ $(\because a>0)$

342

상중하

이차방정식 $x^2-2ax+2a-1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha-\beta>6$을 만족시키는 자연수 a의 최솟값은?

① 3　② 4　√③ 5
④ 6　⑤ 7

풀이
$\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=2a-1$
$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4a^2-4(2a-1)$
$=4a^2-8a+4=4(a-1)^2$
$\alpha-\beta>6$이고 a는 자연수이므로
$\alpha-\beta=2(a-1)>6$　　$\therefore a>4$
따라서 자연수 a의 최솟값은 5이다.

343 교육청 기출

상 중 하

x에 대한 이차방정식 $x^2-3x+k=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\dfrac{1}{\alpha^2-\alpha+k}+\dfrac{1}{\beta^2-\beta+k}=\dfrac{1}{4}$을 만족시키는 실수 k의 값을 구하시오. 6

풀이

α, β가 이차방정식 $x^2-3x+k=0$의 두 근이므로

$\alpha^2-3\alpha+k=0$, $\beta^2-3\beta+k=0$

$\therefore \dfrac{1}{\alpha^2-\alpha+k}+\dfrac{1}{\beta^2-\beta+k}=\dfrac{1}{\alpha^2-3\alpha+k+2\alpha}+\dfrac{1}{\beta^2-3\beta+k+2\beta}$

$=\dfrac{1}{2\alpha}+\dfrac{1}{2\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}$

즉, $\dfrac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}=\dfrac{1}{4}$이고 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=k$이므로 $\dfrac{3}{2k}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore k=\dfrac{3}{2}\times 4=6$

344

상 중 하

이차방정식 $x^2-5x+k=0$의 두 실근을 α, β라고 할 때, $|\alpha|+|\beta|=7$을 만족시키는 상수 k에 대하여 $\alpha^2+\beta^2+k$의 값은?

① 30 ✓② 31 ③ 32
④ 33 ⑤ 34

풀이

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=k$

$\therefore (|\alpha|+|\beta|)^2=\alpha^2+\beta^2+2|\alpha||\beta|=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|$

$=25-2k+2|k|$

즉, $25-2k+2|k|=49$이므로 $-k+|k|=12$

(i) $k\geq 0$일 때, $0=12$이므로 모순이다.

(ii) $k<0$일 때, $-k-k=12$ $\therefore k=-6$

(i), (ii)에서 $k=-6$이므로

$\alpha^2+\beta^2+k=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+k=5^2-2k+k=25-k$

$=25-(-6)=31$

14 두 이차방정식이 주어질 때 미정계수 구하기

중요도

345

상 중 하

이차방정식 $x^2-ax-2b=0$의 두 근이 -2, 4일 때, 이차방정식 $ax^2-4x+b-1=0$의 두 근의 곱은?

(단, a, b는 상수이다.)

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ✓③ $\dfrac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

풀이

이차방정식 $x^2-ax-2b=0$의 두 근이 -2, 4이므로

$-2+4=a$, $(-2)\times 4=-2b$

$\therefore a=2$, $b=4$

$ax^2-4x+b-1=0$, 즉 $2x^2-4x+3=0$에서

(두 근의 곱)$=\dfrac{3}{2}$

346

상 중 하

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이고, 이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 두 근이 $\dfrac{\beta}{\alpha}$, $\dfrac{\alpha}{\beta}$일 때, 실수 a, b에 대하여 $3a^2+5b^2$의 값은?

✓① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

풀이

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$ ······ ㉠

이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 두 근이 $\dfrac{\beta}{\alpha}$, $\dfrac{\alpha}{\beta}$이므로

$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=-b$에서 $\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=-b$ ······ ㉡

$\dfrac{\beta}{\alpha}\times\dfrac{\alpha}{\beta}=a$에서 $a=1$ ······ ㉢

㉡에 ㉠, ㉢을 대입하면 $\dfrac{1-2b}{b}=-b$, $1-2b=-b^2$, $(b-1)^2=0$ $\therefore b=1$

$\therefore 3a^2+5b^2=3\times 1^2+5\times 1^2=8$

347 내신 기출

상 중 하

이차방정식 $x^2-2ax+8b=0$의 두 근이 $2a-2$, $b+1$이고, 이차방정식 $x^2+bx-a+5=0$의 두 근이 α, β일 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
✓④ 5 ⑤ 6

풀이

이차방정식 $x^2-2ax+8b=0$의 두 근이 $2a-2$, $b+1$이므로

$(2a-2)+(b+1)=2a$ $\therefore b=1$

$(2a-2)(b+1)=8b$, $(2a-2)(1+1)=8$

$4(a-1)=8$ $\therefore a=3$

$x^2+bx-a+5=0$, 즉 $x^2+x+2=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=2$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-1)^3-3\times 2\times(-1)=5$

15 이차방정식의 작성

중요도

348

상 중 하

이차방정식 $x^2+3x-5=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 2α, 2β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오. $x^2+6x-20=0$

풀이

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-5$

$\therefore 2\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)=-6$

$2\alpha\times 2\beta=4\alpha\beta=-20$

따라서 2α, 2β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+6x-20=0$

349

상중하

이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$를 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+ax+b=0$이다. 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
✓④ 4 ⑤ 5

풀이

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-2$이므로

$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{2^2-2\times(-2)}{-2}=-4$

$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=1$

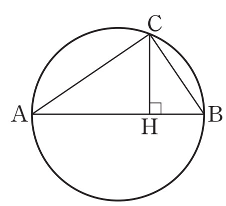
따라서 $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+4x+1=0$이므로 $a=4$, $b=1$ $\therefore ab=4$

350

상중하

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC가 $\overline{\text{AB}}$를 지름으로 하는 원에 내접하고 있다. 꼭짓점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, $\overline{\text{AB}}=14$, $\overline{\text{CH}}=6$, $\overline{\text{AH}}=\alpha$, $\overline{\text{BH}}=\beta$이다. α, β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오. $x^2-14x+36=0$



풀이

$\overline{\text{AB}}=\overline{\text{AH}}+\overline{\text{BH}}$에서 $\alpha+\beta=14$

삼각형 ABC는 $\angle\text{ACB}=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{\text{AH}}\times\overline{\text{BH}}=\overline{\text{CH}}^2$에서 $\alpha\beta=36$

따라서 α, β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-14x+36=0$

351 내신 기출

상중하

이차방정식 $x^2+3x-1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha-\beta$, $\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}$을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은? (단, $\alpha>\beta$)

① $x^2-4\sqrt{13}x-39=0$ ✓② $x^2-4\sqrt{13}x+39=0$
③ $x^2-2\sqrt{13}x-39=0$ ④ $x^2+2\sqrt{13}x-39=0$
⑤ $x^2+4\sqrt{13}x+39=0$

풀이

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-1$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=13$에서 $\alpha-\beta=\sqrt{13}$ ($\because \alpha>\beta$)

$\therefore \frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{-(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^2}=3\sqrt{13}$

따라서 $\alpha-\beta$, $\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}$, 즉 $\sqrt{13}$, $3\sqrt{13}$을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-4\sqrt{13}x+39=0$

16 잘못 보고 푼 이차방정식

중요도

352

상중하

유준이와 이서가 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$을 푸는데, 유준이는 a를 잘못 보고 풀어 두 근의 합과 곱이 각각 6, $\frac{7}{2}$이라 하였고, 이서는 b를 잘못 보고 풀어 두 근의 합과 곱이 각각 $-\frac{5}{2}$, 3이라고 하였다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 12

풀이

유준이는 b를 바르게 보고 풀었으므로

$\frac{b}{2}=\frac{7}{2}$에서 $b=7$

이서는 a를 바르게 보고 풀었으므로

$-\frac{a}{2}=-\frac{5}{2}$에서 $a=5$

$\therefore a+b=12$

353

상중하

도희와 은우가 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 푸는데, 도희는 x의 계수를 잘못 보고 풀어 두 근 -10, 2를 얻었고, 은우는 상수항을 잘못 보고 풀어 두 근 $4+\sqrt{3}$, $4-\sqrt{3}$을 얻었다. 원래의 이차방정식의 두 근을 구하시오.
-2, 10 (단, a, b, c는 상수이다.)

풀이

도희는 a와 c를 바르게 보고 풀었으므로

$\frac{c}{a}=-10\times2=-20$ $\therefore c=-20a$ …… ㉠

은우는 a와 b를 바르게 보고 풀었으므로

$-\frac{b}{a}=(4+\sqrt{3})+(4-\sqrt{3})=8$ $\therefore b=-8a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면 $ax^2-8ax-20a=0$

$a\neq0$이므로 $x^2-8x-20=0$, $(x+2)(x-10)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=10$

따라서 원래의 이차방정식의 두 근은 -2, 10이다.

354

상중하

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근을 구하는데, 근의 공식을 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$로 잘못 적용하여 풀어 두 근 -5, 3을 얻었다. 원래의 이차방정식의 두 근의 합을 구하시오. (단, a, b, c는 실수이다.) -2

풀이

근의 공식을 잘못 적용하여 얻은 두 근이 -5, 3이므로

$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=-5+3$ $\therefore b=2a$ …… ㉠

$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=(-5)\times3$ $\therefore c=-60a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면 $ax^2+2ax-60a=0$

따라서 원래의 이차방정식의 두 근의 합은

$-\frac{2a}{a}=-2$

17 이차방정식 $f(x)=0$의 근을 이용하여 $f(ax+b)=0$의 근 구하기

중요도

355

상 중 하

이차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 5일 때, 방정식 $f(2x-1)=0$의 근이 될 수 있는 것은?

① -1　② 0　③ 1
④ 2　⑤ 3

풀이
$f(x)=0$의 한 근이 5이므로 $f(5)=0$
$f(2x-1)=0$의 한 근을 α라고 하면
$2\alpha-1=5$　$\therefore \alpha=3$

356

상 중 하

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 α, β에 대하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=3$

일 때, 이차방정식 $f(2x-5)=0$의 두 근의 곱은?

① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

풀이
$f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로 $f(2x-5)=0$의 두 근은
$x=\frac{\alpha+5}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta+5}{2}$
따라서 $f(2x-5)=0$의 두 근의 곱은
$\frac{\alpha+5}{2}\times\frac{\beta+5}{2}=\frac{\alpha\beta+5(\alpha+\beta)+25}{4}=\frac{3+5\times(-4)+25}{4}=2$

357 교육청 기출

상 중 하

x에 대한 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 16일 때, x에 대한 이차방정식 $f(2020-8x)=0$의 두 근의 합을 구하시오. 503

풀이
$f(x)=0$의 두 근을 α, β라고 하면 $\alpha+\beta=16$
$f(2020-8x)=0$의 두 근은
$x=\frac{2020-\alpha}{8}$ 또는 $x=\frac{2020-\beta}{8}$
따라서 $f(2020-8x)=0$의 두 근의 합은
$\frac{2020-\alpha}{8}+\frac{2020-\beta}{8}=\frac{4040-(\alpha+\beta)}{8}=\frac{4040-16}{8}=503$

358 내신 기출

상 중 하

최고차항의 계수가 1인 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 곱이 2이고, 방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근의 곱이 -1일 때, $f(2)$의 값은?

① 28　② 30　③ 32
④ 34　⑤ 36

풀이
$f(x)=0$의 두 근을 α, β라고 하면 $\alpha\beta=2$ ······ ㉠
$f(3x-1)=0$의 두 근은 $x=\frac{\alpha+1}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+1}{3}$
$f(3x-1)=0$의 두 근의 곱이 -1이므로
$\frac{\alpha+1}{3}\times\frac{\beta+1}{3}=-1$, $(\alpha+1)(\beta+1)=-9$　$\therefore \alpha+\beta=-12$ ($\because$ ㉠)
따라서 α, β를 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2+12x+2=0$
즉, $f(x)=x^2+12x+2$이므로 $f(2)=30$

18 이차식의 인수분해

중요도

359

상 중 하

다음 중 이차식 x^2+2x+2의 인수인 것은?

① $x-1-i$　② $x-1+i$
③ $x+1-2i$　④ $x+1-i$
⑤ $x+1+2i$

풀이
이차방정식 $x^2+2x+2=0$의 근이 $x=-1\pm i$이므로
$x^2+2x+2=\{x-(-1+i)\}\{x-(-1-i)\}$
$=(x+1-i)(x+1+i)$

360

상 중 하

이차식 $x^2-4x+13$을 복소수의 범위에서 인수분해하면 $(x-2+ai)(x+b-3i)$이다. 실수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -3　② -4　③ -5
④ -6　⑤ -7

풀이
$x^2-4x+13=(x-2+ai)(x+b-3i)$이므로 이차방정식 $x^2-4x+13=0$의 두 근은
$x=2-ai$ 또는 $x=-b+3i$
$(2-ai)+(-b+3i)=4$에서 $(2-b)-(a-3)i=4$
이때 a, b는 실수이므로
$2-b=4$, $a-3=0$　$\therefore a=3$, $b=-2$
$\therefore ab=-6$

361

상 중 하

x, y에 대한 이차식 $2x^2-xy-ay^2-x+4y-1$이 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 실수 a의 값을 구하시오. 3

풀이

주어진 이차식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2+(-y-1)x-ay^2+4y-1$

이 식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 x에 대한 이차방정식

$2x^2-(y+1)x-ay^2+4y-1=0$의 판별식을 D_1이라고 할 때, D_1이 완전제곱식이 되어야 한다.

$D_1=\{-(y+1)\}^2-4\times2\times(-ay^2+4y-1)=(1+8a)y^2-30y+9$

이 식이 완전제곱식이어야 하므로 $a\neq-\frac{1}{8}$이고, y에 대한 이차방정식

$(1+8a)y^2-30y+9=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-15)^2-9(1+8a)=0 \qquad \therefore a=3$

19 이차방정식의 켤레근

중요도

362 교육청 기출

상 중 하

x에 대한 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-i$일 때, $b-a$의 값은?

(단, a, b는 실수이고, $i=\sqrt{-1}$이다.)

① 12 ② 14 ③ 16
✓④ 18 ⑤ 20

풀이

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $2-i$가 근이면 $2+i$도 근이다.

$(2-i)+(2+i)=-\frac{a}{2}$에서 $a=-8$

$(2-i)(2+i)=\frac{b}{2}$에서 $b=10$

$\therefore b-a=18$

363

상 중 하

계수가 유리수인 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$일 때, 이차방정식 $x^2+ax+4b=0$의 해는?

① $x=3$ ② $x=2$ ③ $x=1$
④ $x=-1$ ✓⑤ $x=-2$

풀이

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 계수가 유리수이므로

$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$이 근이면 $2-\sqrt{3}$도 근이다.

$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=a$에서 $a=4$

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=b$에서 $b=1$

따라서 $x^2+ax+4b=0$, 즉 $x^2+4x+4=0$에서 $(x+2)^2=0$

$\therefore x=-2$

364 내신 기출

상 중 하

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2+i$이고, 두 수 $a+b$, $\frac{a}{b}$를 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+px+q=0$이다. 이때 $25pq$의 값은? (단, a, b, p, q는 실수이다.)

① 2 ② 3 ✓③ 4
④ 5 ⑤ 6

풀이

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 계수가 실수이므로 $2+i$가 근이면 $2-i$도 근이다.

$(2+i)+(2-i)=-a$에서 $a=-4$

$(2+i)(2-i)=b$에서 $b=5$

$\therefore a+b=1,\ \frac{a}{b}=-\frac{4}{5}$

두 수 1, $-\frac{4}{5}$를 두 근으로 하고, 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-1)\left\{x-\left(-\frac{4}{5}\right)\right\}=0 \qquad \therefore x^2-\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}=0$

따라서 $p=-\frac{1}{5}$, $q=-\frac{4}{5}$이므로 $25pq=4$

365

상 중 하

x에 대한 이차방정식 $x^2+(m-n)x+m^2+n^2=0$의 한 근이 $1+2i$일 때, 실수 m, n에 대하여 $\frac{n}{m}+\frac{m}{n}$의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9
✓④ 10 ⑤ 11

풀이

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $1+2i$가 근이면 $1-2i$도 근이다.

$(1+2i)+(1-2i)=-(m-n)$에서 $m-n=-2$ …… ㉠

$(1+2i)(1-2i)=m^2+n^2$에서 $m^2+n^2=5$ …… ㉡

$m^2+n^2=(m-n)^2+2mn$이므로 이 식에 ㉠, ㉡을 대입하면

$5=(-2)^2+2mn \qquad \therefore mn=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{n}{m}+\frac{m}{n}=\frac{m^2+n^2}{mn}=\frac{5}{\frac{1}{2}}=10$

366

상 중 하

x에 대한 이차방정식 $x^2-px+p+31=0$이 서로 다른 두 허근을 갖는다. 한 허근의 허수부분이 4일 때, 양의 실수 p의 값을 구하시오. 10

풀이

이차방정식 $x^2-px+p+31=0$의 계수가 실수이므로 한 허근을 $a+4i$ (a는 실수)라고 하면 다른 한 허근은 $a-4i$이다.

$(a+4i)+(a-4i)=p$, $2a=p \qquad \therefore a=\frac{1}{2}p$ …… ㉠

$(a+4i)(a-4i)=p+31 \qquad \therefore a^2-p-15=0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{4}p^2-p-15=0$, $p^2-4p-60=0$

$(p+6)(p-10)=0 \qquad \therefore p=10\ (\because p>0)$

367

이차방정식 $x^2+4x-3=0$의 양수인 근을 α라고 할 때, $\alpha(\alpha^2+5\alpha+3)(\alpha^2+3\alpha-1)$의 값을 구하시오. $-18+9\sqrt{7}$

풀이

α가 이차방정식 $x^2+4x-3=0$의 근이므로

$\alpha^2+4\alpha-3=0$ ······ 20 %

$\therefore \alpha(\alpha^2+5\alpha+3)(\alpha^2+3\alpha-1)=\alpha(\alpha^2+4\alpha-3+\alpha+6)(\alpha^2+4\alpha-3-\alpha+2)$

$=\alpha(\alpha+6)(-\alpha+2)$

$=\alpha(-\alpha^2-4\alpha+12)$

$=\alpha\{-(\alpha^2+4\alpha-3)+9\}=9\alpha$ ······ ㉠

······ 40 %

이차방정식 $x^2+4x-3=0$의 근은 $x=-2\pm\sqrt{7}$이고 α는 양수인 근이므로

$\alpha=-2+\sqrt{7}$

이것을 ㉠에 대입하면

(주어진 식)$=9(-2+\sqrt{7})=-18+9\sqrt{7}$ ······ 40 %

368

0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$가 성립할 때, 이차방정식 $x^2-2ax+3b=0$의 근을 판별하시오.

서로 다른 두 실근

풀이

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이므로 $a>0$, $b<0$ ······ 30 %

이차방정식 $x^2-2ax+3b=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-3b$ ······ 30 %

$a>0$, $b<0$이므로 $a^2>0$, $-3b>0$

$\therefore \dfrac{D}{4}=a^2-3b>0$

따라서 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다. ······ 40 %

369

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이고, 이차방정식 $x^2-2\sqrt{10}x+6=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$일 때, a^2-2b의 값을 구하시오. 14

(단, a, b는 상수이고, $\beta>0$이다.)

풀이

$x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$ ······ ㉠

······ 20 %

$x^2-2\sqrt{10}x+6=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$이므로

$(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=2\sqrt{10}$에서 $\alpha=\sqrt{10}$

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=6$에서 $10-\beta^2=6$

$\beta^2=4$ $\quad\therefore \beta=2$ ($\because \beta>0$) ······ 50 %

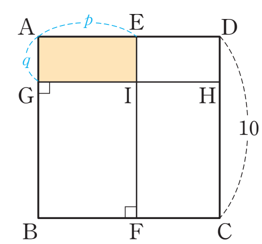
$\alpha=\sqrt{10}$, $\beta=2$를 ㉠에 대입하면

$a=2+\sqrt{10}$, $b=2\sqrt{10}$

$\therefore a^2-2b=(2+\sqrt{10})^2-4\sqrt{10}=14$ ······ 30 %

370

다음 그림은 한 변의 길이가 10인 정사각형 ABCD의 내부에 $\overline{EF}\perp\overline{BC}$, $\overline{AB}\perp\overline{GH}$가 되도록 $\overline{EF}$, $\overline{GH}$를 그은 것이다. 직사각형 AGIE의 둘레의 길이가 16, 넓이가 14이고 $\overline{IH}$, $\overline{IF}$의 길이를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식이 $x^2-2ax+b=0$일 때, $b-a$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) 28



풀이

직사각형 AGIE의 둘레의 길이가 16이므로

$2(p+q)=16$ $\quad\therefore p+q=8$ ······ ㉠

넓이가 14이므로 $pq=14$ ······ ㉡

······ 30 %

$\overline{IH}=10-p$, $\overline{IF}=10-q$는 $x^2-2ax+b=0$의 두 근이므로

$(10-p)+(10-q)=2a$에서 $20-(p+q)=2a$

$2a=12$ ($\because$ ㉠) $\quad\therefore a=6$

$(10-p)(10-q)=b$에서 $100-10(p+q)+pq=b$

$\therefore b=100-10\times8+14=34$ ($\because$ ㉠, ㉡) ······ 50 %

$\therefore b-a=34-6=28$ ······ 20 %

371

이차방정식 $x^2-6x+11=0$의 서로 다른 두 허근을 α, β라고 할 때, $11\left(\dfrac{\overline{\alpha}}{\alpha}+\dfrac{\overline{\beta}}{\beta}\right)$의 값을 구하시오. 14

(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

풀이

주어진 이차방정식의 계수가 실수이고 서로 다른 두 허근이 α, β이므로 α, β는 서로 켤레복소수 관계이다.

$\therefore \overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$ ······ 30 %

$x^2-6x+11=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=11$ ······ 20 %

$\therefore 11\left(\dfrac{\overline{\alpha}}{\alpha}+\dfrac{\overline{\beta}}{\beta}\right)=11\left(\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}\right)=11\times\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$=11\times\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=11\times\dfrac{6^2-2\times11}{11}=14$ ······ 50 %

› 정답과 풀이 050쪽

372

이차방정식 $x^2+2abx-2a-2b-6=0$의 한 근이 2일 때, 나머지 한 근을 구하시오. -6

(단, a, b는 서로 다른 자연수이다.)

풀이

$x^2+2abx-2a-2b-6=0$의 한 근이 2이므로

$4+4ab-2a-2b-6=0$, $(2a-1)(2b-1)=3$

(i) $2a-1=1$, $2b-1=3$일 때, $a=1$, $b=2$

(ii) $2a-1=3$, $2b-1=1$일 때, $a=2$, $b=1$

(i), (ii)에서 $a+b=3$, $ab=2$

이것을 이차방정식 $x^2+2abx-2a-2b-6=0$, 즉 $x^2+2abx-2(a+b)-6=0$에 대입하면 $x^2+4x-12=0$

$(x+6)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-6$ 또는 $x=2$

따라서 나머지 한 근은 -6이다.

373

이차방정식 $x^2-2(a-3)x+4a-3b=0$이 중근을 갖도록 하는 자연수 a, b에 대하여 $a-b$의 최댓값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ✓⑤ 3

풀이

이차방정식 $x^2-2(a-3)x+4a-3b=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(a-3)^2-4a+3b=0$ $\quad\therefore (a-5)^2=16-3b$

이때 a, b는 자연수이므로 $(a-5)^2=16-3b\ge0$에서 $b=1, 2, 3, 4, 5$

(i) $b=4$일 때, $a=3$ 또는 $a=7$

$\therefore a-b=-1$ 또는 $a-b=3$

(ii) $b=5$일 때, $a=4$ 또는 $a=6$

$\therefore a-b=-1$ 또는 $a-b=1$

(i), (ii)에서 $a-b$의 최댓값은 3이다.

374

세 이차방정식

$ax^2-2cx+b=0$, $bx^2+2ax+c=0$, $cx^2+2bx+a=0$

의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?

(단, a, b, c는 실수이다.)

① 모두 실근을 갖는다.

② 모두 허근을 갖는다.

✓③ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

④ 적어도 하나의 방정식은 허근을 갖는다.

⑤ 근을 판별할 수 없다.

풀이

세 이차방정식 $ax^2-2cx+b=0$, $bx^2+2ax+c=0$, $cx^2+2bx+a=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2, D_3이라고 하면

$\frac{D_1}{4}+\frac{D_2}{4}+\frac{D_3}{4}=c^2-ab+a^2-bc+b^2-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\ge0$

따라서 세 식 $\frac{D_1}{4}$, $\frac{D_2}{4}$, $\frac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 그 값이 0보다 크거나 같아야 하므로 세 이차방정식 중 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

375

모든 실수 x에 대하여 다항식 $f(x)$가

$\{f(x)+3\}^2=(x-2m)(x-3m)+9$

를 만족시킬 때, $f(3)$의 최솟값은? (단, m은 실수이다.)

✓① -21 ② -15 ③ -9 ④ -3 ⑤ 3

풀이

$\{f(x)+3\}^2=(x-2m)(x-3m)+9$에서

$\{f(x)+3\}^2=x^2-5mx+6m^2+9$ …… ㉠

$x^2-5mx+6m^2+9$가 완전제곱식이므로 x에 대한 이차방정식

$x^2-5mx+6m^2+9=0$의 판별식을 D라고 하면 $D=(-5m)^2-4(6m^2+9)=0$

$(m+6)(m-6)=0$ $\quad\therefore m=-6$ 또는 $m=6$

(i) $m=-6$일 때, ㉠에서 $\{f(x)+3\}^2=(x+15)^2$이므로

$f(x)=-x-18$ 또는 $f(x)=x+12$ $\quad\therefore f(3)=-21$ 또는 $f(3)=15$

(ii) $m=6$일 때, ㉠에서 $\{f(x)+3\}^2=(x-15)^2$이므로

$f(x)=-x+12$ 또는 $f(x)=x-18$ $\quad\therefore f(3)=9$ 또는 $f(3)=-15$

(i), (ii)에서 $f(3)$의 최솟값은 -21이다.

376

이차방정식 $x^2-ax+b=0$이 서로 다른 두 자연수 α, β를 근으로 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$을 구하시오. 5

(단, a, b는 소수이다.)

풀이

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$

$\alpha\beta=b$에서 b는 소수이므로 α, β 중 하나는 1이고 다른 하나는 소수이어야 한다.

이때 소수인 근이 3 이상의 홀수라고 하면 $\alpha+\beta=a$에서 a는 4 이상의 짝수가 되므로 이것은 a가 소수라는 조건에 모순이다.

따라서 소수인 근은 2이어야 한다.

$\therefore \alpha^2+\beta^2=1^2+2^2=5$

377

자연수 n에 대하여 이차방정식

$\{\sqrt{n(n+1)}-n\}x^2-\sqrt{n}x+n=0$의 두 근을 α_n, β_n이라고 할 때, $(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)+(\beta_1-\beta_2+\beta_3)$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ✓④ 3 ⑤ 5

풀이

$\alpha_n+\beta_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}-n}=\frac{\sqrt{n}\{\sqrt{n(n+1)}+n\}}{\{\sqrt{n(n+1)}-n\}\{\sqrt{n(n+1)}+n\}}$

$=\frac{n\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}{n}=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$

$\therefore (\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)+(\beta_1-\beta_2+\beta_3)$

$=(\alpha_1+\beta_1)-(\alpha_2+\beta_2)+(\alpha_3+\beta_3)$

$=(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(2+\sqrt{3})$

$=3$

378

이차방정식 $3x^2-2x+1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때,

$$(1-2\alpha+3\alpha^2+4\alpha^3-5\alpha^4+6\alpha^5)$$
$$\times(1-2\beta+3\beta^2+4\beta^3-5\beta^4+6\beta^5)$$

의 값은?

√① $\frac{1}{9}$　② $\frac{2}{9}$　③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{4}{9}$　⑤ $\frac{5}{9}$

풀이

α, β가 이차방정식 $3x^2-2x+1=0$의 두 근이므로
$3\alpha^2-2\alpha+1=0$, $3\beta^2-2\beta+1=0$
$3\alpha^2-2\alpha+1=0$의 양변에 $2\alpha^3$을 곱하면 $6\alpha^5-4\alpha^4+2\alpha^3=0$
$\therefore 1-2\alpha+3\alpha^2+4\alpha^3-5\alpha^4+6\alpha^5$
$=(1-2\alpha+3\alpha^2)+(2\alpha^3-4\alpha^4+6\alpha^5)+2\alpha^3-\alpha^4$
$=-\alpha^4+2\alpha^3$
마찬가지 방법으로 $6\beta^5-4\beta^4+2\beta^3=0$이므로
$1-2\beta+3\beta^2+4\beta^3-5\beta^4+6\beta^5=-\beta^4+2\beta^3$
$\therefore$ (주어진 식)$=(-\alpha^4+2\alpha^3)(-\beta^4+2\beta^3)$
$=(\alpha\beta)^4-2(\alpha\beta)^3(\alpha+\beta)+4(\alpha\beta)^3$ …… ㉠
$\alpha+\beta=\frac{2}{3}$, $\alpha\beta=\frac{1}{3}$이므로 ㉠에서
(주어진 식)$=\left(\frac{1}{3}\right)^4-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}+4\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{9}$

379 교육청 기출

두 실수 a, b에 대하여 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 서로 다른 두 근은 α, β이고, 이차방정식 $x^2+3ax+3b=0$의 서로 다른 두 근은 $\alpha+2$, $\beta+2$이다. 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. 6

(가) $\alpha^n+\beta^n>0$
(나) $\alpha^n+\beta^n=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}$

풀이

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로
$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$ …… ㉠
이차방정식 $x^2+3ax+3b=0$의 두 근이 $\alpha+2$, $\beta+2$이므로
$(\alpha+2)+(\beta+2)=-3a$, $(\alpha+2)(\beta+2)=3b$
$\therefore \alpha+\beta+4=-3a$, $\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=3b$
위의 두 식에 각각 ㉠을 대입하면 $a=-2$, $b=4$
$\therefore \alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=4$
이차방정식 $x^2+ax+b=0$, 즉 $x^2-2x+4=0$의 양변에 $x+2$를 곱하면 $x^3+8=0$
따라서 $x^3=-8$이므로 $\alpha^3=-8$, $\beta^3=-8$
$\alpha^1+\beta^1=2$, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-4$
$\alpha^3+\beta^3=-8+(-8)=-16$, $\alpha^4+\beta^4=-8(\alpha+\beta)=-16$
$\alpha^5+\beta^5=-8(\alpha^2+\beta^2)=32$, $\alpha^6+\beta^6=(-8)^2+(-8)^2=128$
$\alpha^7+\beta^7=64(\alpha+\beta)=128$
따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 6이다.

380 도전! 1등급

9 이하의 서로 다른 두 양의 정수 a, b에 대하여 이차방정식 $x^2+2ax+b=0$이 정수인 해를 가질 때, 다음 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉
ㄱ. a, b 중 적어도 하나는 홀수이다.
ㄴ. $a+b$의 최댓값은 14이다.
ㄷ. 두 근의 차는 $2n$의 꼴이다.
(단, n은 음이 아닌 정수이다.)

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄷ
√④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

$x^2+2ax+b=0$의 두 근은 $x=-a\pm\sqrt{a^2-b}$
이 근이 정수가 되려면 a^2-b가 0 또는 제곱수이어야 한다.
이때 a, b는 9 이하의 서로 다른 양의 정수이므로 조건을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$, $(3, 8)$, $(3, 9)$, $(4, 7)$, $(5, 9)$
ㄱ. $a=2$, $b=4$인 경우는 a, b 모두 짝수이다. (거짓)

381 교육청 기출

x에 대한 이차방정식 $x^2+2ax-b=0$의 두 근을 α, β라 고 할 때, $|\alpha-\beta|<12$를 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. 120

풀이

$\alpha+\beta=-2a$, $\alpha\beta=-b$
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=(-2a)^2-4\times(-b)$
$=4a^2+4b$
$|\alpha-\beta|=\sqrt{4a^2+4b}=2\sqrt{a^2+b}$ ($\because$ a, b는 자연수)
$|\alpha-\beta|<12$에서 $2\sqrt{a^2+b}<12$, $\sqrt{a^2+b}<6$
$\therefore a^2+b<36$
(i) $a=1$일 때, $b<35$이므로 순서쌍 (a, b)는 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $\cdots$, $(1, 34)$의 34개이다.
(ii) $a=2$일 때, $b<32$이므로 순서쌍 (a, b)는 $(2, 1)$, $(2, 2)$, $\cdots$, $(2, 31)$의 31개이다.
(iii) $a=3$일 때, $b<27$이므로 순서쌍 (a, b)는 $(3, 1)$, $(3, 2)$, $\cdots$, $(3, 26)$의 26개이다.
(iv) $a=4$일 때, $b<20$이므로 순서쌍 (a, b)는 $(4, 1)$, $(4, 2)$, $\cdots$, $(4, 19)$의 19개이다.
(v) $a=5$일 때, $b<11$이므로 순서쌍 (a, b)는 $(5, 1)$, $(5, 2)$, $\cdots$, $(5, 10)$의 10개이다.
(vi) $a\geq6$일 때, $b<0$이므로 이를 만족시키는 자연수 b는 존재하지 않는다.
(i)~(vi)에서 구하는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는
$34+31+26+19+10=120$

382 교육청 기출

복소수 z에 대하여 $z+\overline{z}=-1$, $z\overline{z}=1$일 때,

$$\frac{\overline{z}}{z^5}+\frac{\overline{z}^2}{z^4}+\frac{\overline{z}^3}{z^3}+\frac{\overline{z}^4}{z^2}+\frac{\overline{z}^5}{z}$$

의 값은? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 2　　② 3　　③ 4

✓④ 5　　⑤ 6

풀이

z, $\overline{z}$는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이다.

$x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3-1=0$　　$\therefore x^3=1$

$\therefore z^3=1$, $\overline{z}^3=1$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{\overline{z}}{z^2}+\dfrac{\overline{z}^2}{z}+\dfrac{1}{1}+\dfrac{\overline{z}}{z^2}+\dfrac{\overline{z}^2}{z}$

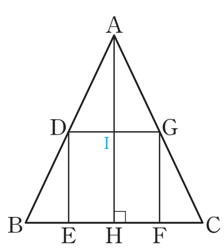
$=\dfrac{2\overline{z}}{z^2}+\dfrac{2\overline{z}^2}{z}+1=\dfrac{2z\overline{z}}{z^3}+\dfrac{2z^2\overline{z}^2}{z^3}+1$

$=2+2+1=5$

383

오른쪽 그림은 이등변삼각형 ABC 안에 내접하는 정사각형 DEFG를 그린 것이다. $\overline{\mathrm{AH}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이를 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2-8x+4=0$이고, $\overline{\mathrm{DE}}$와 $\overline{\mathrm{EH}}$의 길이를 두 근으로 하는 이차방정식이 $ax^2+bx+1=0$일 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)



✓① 2　　② 3　　③ 4

④ 5　　⑤ 6

풀이

$x^2-8x+4=0$의 두 근이 $\overline{\mathrm{AH}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이이므로

$\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{BC}}=8$, $\overline{\mathrm{AH}}\times\overline{\mathrm{BC}}=4$　　…… ㉠

$\overline{\mathrm{EH}}=k$라고 하면 $\overline{\mathrm{DE}}=2k$

$\triangle\mathrm{AIG}\backsim\triangle\mathrm{AHC}$이므로 $\overline{\mathrm{AI}}:\overline{\mathrm{IG}}=\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{HC}}$, $(\overline{\mathrm{AH}}-2k):k=\overline{\mathrm{AH}}:\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}$

$k\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}(\overline{\mathrm{AH}}-2k)$, $(\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{BC}})k=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AH}}$

$8k=2$ ($\because$ ㉠)　　$\therefore k=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \overline{\mathrm{EH}}=\dfrac{1}{4}$, $\overline{\mathrm{DE}}=2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

따라서 $ax^2+bx+1=0$의 두 근이 $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$이므로

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{a}$　　$\therefore a=8$, $b=-6$

$\therefore a+b=2$

384

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합을 S_1, 이차방정식 $f(3x-a)=0$의 두 근의 합을 S_2라고 하면

$$S_1-3S_2=-8$$

이 성립할 때, 상수 a의 값을 구하시오. 4

풀이

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=S_1$

이차방정식 $f(3x-a)=0$의 두 근은 $3x-a=\alpha$ 또는 $3x-a=\beta$에서

$x=\dfrac{\alpha+a}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+a}{3}$이므로

$\dfrac{\alpha+a}{3}+\dfrac{\beta+a}{3}=S_2$　　$\therefore \alpha+\beta+2a=3S_2$

$S_1-3S_2=-8$에서

$-2a=-8$　　$\therefore a=4$

385

이차방정식 $x^2-x+4=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 이차식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\alpha$, $f(0)=5$가 성립한다. 이때 $f(2)$의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4

✓④ 5　　⑤ 6

풀이

$f(\alpha)=\beta$에서 $f(\alpha)=1-\alpha$　　$\therefore f(\alpha)+\alpha-1=0$　　…… ㉠

$f(\beta)=\alpha$에서 $f(\beta)=1-\beta$　　$\therefore f(\beta)+\beta-1=0$　　…… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)+x-1=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(x)+x-1=a(x^2-x+4)$ ($a\neq 0$인 상수)로 놓을 수 있다.

이 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)-1=4a$, $4=4a$ ($\because f(0)=5$)　　$\therefore a=1$

즉, $f(x)+x-1=x^2-x+4$이므로 $f(x)=x^2-2x+5$

$\therefore f(2)=5$

386 도전 1등급

x에 대한 이차방정식

$$x^2-(3m-1)x+2m^2+m+15=0$$

이 허근 α를 갖는다. α^3이 실수가 되도록 하는 모든 실수 m의 값의 곱을 구하시오. -2

풀이

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq 0$)라고 하면

$\overline{\alpha}=a-bi$도 이 이차방정식의 근이다.

$\alpha+\overline{\alpha}=3m-1$　　$\therefore 2a=3m-1$　　…… ㉠

$\alpha\overline{\alpha}=2m^2+m+15$　　$\therefore a^2+b^2=2m^2+m+15$　　…… ㉡

$\alpha^3=(a+bi)^3=a^3+3a^2bi+3ab^2i^2+b^3i^3=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i$이므로 α^3이 실수가 되려면

$3a^2b-b^3=0$, $b(3a^2-b^2)=0$　　$\therefore 3a^2=b^2$ ($\because b\neq 0$)

이것을 ㉡에 대입하면 $4a^2=2m^2+m+15$

㉠에서 $4a^2=(3m-1)^2$이므로

$(3m-1)^2=2m^2+m+15$, $7m^2-7m-14=0$

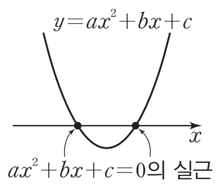
따라서 모든 실수 m의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -2이다.

06 이차방정식과 이차함수

1 이차방정식과 이차함수의 관계

(1) 이차함수의 그래프와 이차방정식의 해

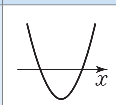
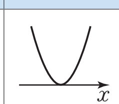
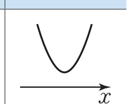
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근과 같다.



참고 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

(2) 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$의 부호에 따라 다음과 같다.

판별식의 부호	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$의 그래프			
$ax^2+bx+c=0$의 해	서로 다른 두 실근	중근	서로 다른 두 허근
$y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	만나지 않는다.

참고 $D\geq0$이면 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 x축과 적어도 한 점에서 만난다.

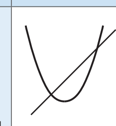
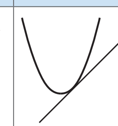
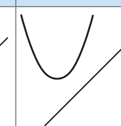
2 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$, 즉

$$ax^2+(b-m)x+c-n=0 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

의 실근과 같다.

따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 ㉠의 판별식 $D=(b-m)^2-4a(c-n)$의 부호에 따라 다음과 같다.

판별식의 부호	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$의 그래프와 직선 $y=mx+n$ $(m>0)$의 위치 관계			
	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	만나지 않는다.

예 이차함수 $y=x^2-x$의 그래프와 직선 $y=3x+1$에서 이차방정식 $x^2-x=3x+1$, 즉 $x^2-4x-1=0$의 판별식을 D라고 할 때,

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times(-1)=5>0$

이므로 이차함수 $y=x^2-x$의 그래프와 직선 $y=3x+1$은 서로 다른 두 점에서 만난다.

참고 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

문제를 풀 때 유용한 풍쌤 비법

❶ 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 주어지면 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, β이다.

⇨ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근이 α, β이다.

⇨ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

❷ 이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식

(1) 기울기가 m이고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에 접하는 직선

⇨ $y=mx+b$로 놓고 이차방정식 $f(x)=mx+b$, 즉 $f(x)-mx-b=0$의 판별식을 D라고 할 때, $D=0$임을 이용하여 b의 값을 구한다.

(2) 점 (p, q)를 지나고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에 접하는 직선

⇨ $y=m(x-p)+q$로 놓고 이차방정식 $f(x)=m(x-p)+q$, 즉 $f(x)-m(x-p)-q=0$의 판별식을 D라고 할 때, $D=0$임을 이용하여 m의 값을 구한다.

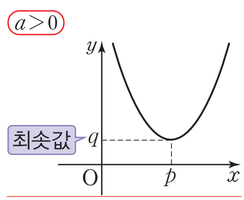
3 이차함수의 최대·최소

(1) 이차함수의 최대·최소

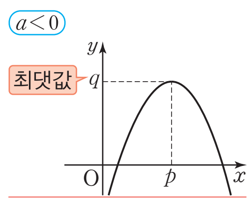
x의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은 a의 부호에 따라 다음과 같다.

① $a>0$이면 $x=p$에서 최솟값 q를 갖고, 최댓값은 없다.

② $a<0$이면 $x=p$에서 최댓값 q를 갖고, 최솟값은 없다.



꼭짓점에서 최솟값을 갖는다.



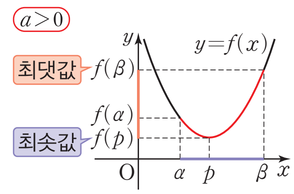
꼭짓점에서 최댓값을 갖는다.

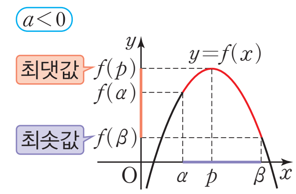
참고 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최댓값과 최솟값은 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 변형하여 구한다.

(2) 제한된 범위에서의 이차함수의 최대·최소

x의 값의 범위가 $\alpha\le x\le\beta$일 때, 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q\ (a\ne0)$의 최댓값과 최솟값은 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표 p의 값에 따라 다음과 같다.

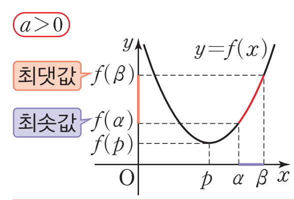
① 꼭짓점의 x좌표가 x의 값의 범위에 속하면, 즉 $\alpha\le p\le\beta$이면 $f(p)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$의 값 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

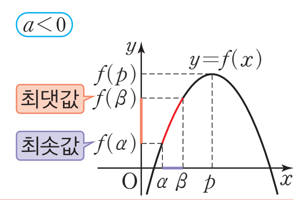




꼭짓점의 x좌표가 제한된 범위에 속하면 꼭짓점의 y좌표는 반드시 최댓값 또는 최솟값이 된다.

② 꼭짓점의 x좌표가 x의 값의 범위에 속하지 않으면, 즉 $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$이면 $f(\alpha)$, $f(\beta)$의 값 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.





꼭짓점의 x좌표가 제한된 범위에 속하지 않으면 x의 양 끝 값에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

참고 제한된 범위에서 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 때에는 꼭짓점의 x좌표가 제한된 범위에 포함되는지부터 확인한다.

주의 함수식이 같아도 x의 값의 범위가 다르면 함수의 최댓값과 최솟값은 달라질 수 있다.

문제를 풀 때 유용한 풍쌤 비법

❸ 공통부분이 있는 함수의 최대·최소

함수 $y=\{f(x)\}^2+af(x)+b$의 최댓값과 최솟값

⇨ $f(x)=t$로 놓고 t의 값의 범위를 구한다.

⇨ $y=t^2+at+b$를 $y=(t-p)^2+q$의 꼴로 변형한다.

⇨ t의 값의 범위에서 치환한 식의 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

❹ 완전제곱식을 이용한 이차식의 최대·최소

x, y가 실수일 때, 이차식 $ax^2+by^2+cx+dy+e$의 최댓값과 최솟값

⇨ 주어진 이차식을 $a(x-p)^2+b(y-q)^2+k$의 꼴로 변형한 후 (실수)$^2\ge0$임을 이용한다.

⇨ 주어진 이차식은 $x=p$, $y=q$일 때, 최댓값 또는 최솟값은 k이다.

예 x, y가 실수일 때, $x^2+y^2-2x-6y+3$에서 $x^2+y^2-2x-6y+3=(x-1)^2+(y-3)^2-7$

이때 x, y가 실수이므로 $(x-1)^2\ge0$, $(y-3)^2\ge0$

따라서 주어진 식은 $x=1$, $y=3$일 때 최솟값 -7을 갖는다.

실력을 기르는 유형

01 이차함수의 그래프와 x축의 교점 중요도

387 풍쌤 비법 ❶ 상 중 하

이차함수 $y=2x^2-ax+4b$의 그래프가 x축과 두 점 $(-2,\ 0)$, $(6,\ 0)$에서 만날 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -72 ✓② -48 ③ -24
④ 24 ⑤ 48

풀이
-2, 6은 이차방정식 $2x^2-ax+4b=0$의 두 근이므로
$-2+6=\frac{a}{2}$, $-2\times6=\frac{4b}{2}$ $\therefore a=8, b=-6$
$\therefore ab=-48$

388 상 중 하

이차함수 $y=x^2-ax+a+2$의 그래프의 꼭짓점이 $A(3,\ -1)$이고 x축과 만나는 두 점을 B, C라고 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. (단, a는 상수이다.) 1

풀이
$y=x^2-ax+a+2=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+a+2$이므로
$\frac{a}{2}=3$, $-\frac{a^2}{4}+a+2=-1$ $\therefore a=6$ $\therefore y=x^2-6x+8$
이차방정식 $x^2-6x+8=0$에서 $(x-2)(x-4)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=4$
따라서 $B(2,\ 0)$, $C(4,\ 0)$ 또는 $B(4,\ 0)$, $C(2,\ 0)$이므로
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times(4-2)\times|-1|=1$

389 상 중 하

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -3, 1일 때, 이차함수 $y=x^2-bx+a$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는?

(단, a, b는 상수이다.)

✓① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

풀이
-3, 1은 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이므로
$-3+1=-a$, $-3\times1=b$ $\therefore a=2, b=-3$
이차함수 $y=x^2-bx+a$, 즉 $y=x^2+3x+2$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 $x^2+3x+2=0$에서 $(x+1)(x+2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=-2$
따라서 구하는 두 점 사이의 거리는
$|-2-(-1)|=1$

390 내신 기출 상 중 하

이차함수 $y=x^2-ax+a$의 그래프가 x축과 두 점 A, B에서 만날 때, $\overline{AB}=\sqrt{5}$가 되도록 하는 양수 a의 값을 구하시오. 5

풀이
두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라고 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-ax+a=0$의 두 근이므로
$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=a$
이때 $\overline{AB}=\sqrt{5}$이므로 $|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$
$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서
$5=a^2-4a$, $a^2-4a-5=0$, $(a+1)(a-5)=0$
이때 $a>0$이므로 $a=5$

391 상 중 하

이차함수 $f(x)=x^2+ax-3a-10$의 그래프는 a의 값에 관계없이 일정한 점을 지나고, 이 점은 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점이다. $y=f(x)$의 그래프의 모든 x절편의 합은?

① 2 ② 4 ✓③ 6
④ 8 ⑤ 10

풀이
$y=x^2+ax-3a-10$에서 $(x-3)a+x^2-y-10=0$
이 식이 a의 값에 관계없이 성립하므로
$x-3=0$, $x^2-y-10=0$ $\therefore x=3, y=-1$
$f(x)=(x-3)^2-1=x^2-6x+8$이므로
$x^2-6x+8=0$에서 $(x-2)(x-4)=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=4$
따라서 x절편의 합은 $2+4=6$이다.

02 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계 중요도

392 상 중 하

이차함수 $y=x^2-4x-k$의 그래프와 x축의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다. $k>-4$
(2) 한 점에서 만난다. $k=-4$
(3) 만나지 않는다. $k<-4$

풀이
이차방정식 $x^2-4x-k=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-k)=4+k$
(1) $\frac{D}{4}=4+k>0$에서 $k>-4$
(2) $\frac{D}{4}=4+k=0$에서 $k=-4$
(3) $\frac{D}{4}=4+k<0$에서 $k<-4$

393 교육청 기출

상|중|하

이차함수 $y=x^2-6x+a$의 그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 정수 a의 최솟값은?

① 8 ✓② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

풀이
이차방정식 $x^2-6x+a=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-3)^2-a<0$ $\quad\therefore a>9$
따라서 정수 a의 최솟값은 10이다.

394

상|중|하

이차함수 $y=-x^2+(m-3)x-m^2+2$의 그래프가 x축과 한 점에서 만날 때, 모든 실수 m의 값의 합은?

① -3 ✓② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

풀이
이차방정식 $-x^2+(m-3)x-m^2+2=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=(m-3)^2-4\times(-1)\times(-m^2+2)=0$
$\therefore 3m^2+6m-17=0$
따라서 모든 실수 m의 값의 합은
$-\frac{6}{3}=-2$

395

상|중|하

이차함수 $y=x^2-2kx+k^2+4k-24$의 그래프는 x축과 만나고, 이차함수 $y=-x^2+2(k-4)x-k^2+3k$의 그래프는 x축과 만나지 않을 때, 정수 k의 개수는?

① 1 ② 2 ✓③ 3
④ 4 ⑤ 5

풀이
이차방정식 $x^2-2kx+k^2+4k-24=0$의 판별식을 D_1이라고 하면
$\frac{D_1}{4}=(-k)^2-(k^2+4k-24)\geq 0$ $\quad\therefore k\leq 6$ …… ㉠
이차방정식 $-x^2+2(k-4)x-k^2+3k=0$의 판별식을 D_2라고 하면
$\frac{D_2}{4}=(k-4)^2-(-1)\times(-k^2+3k)<0$ $\quad\therefore k>\frac{16}{5}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $\frac{16}{5}<k\leq 6$
따라서 정수 k는 4, 5, 6의 3개이다.

396 내신 기출

상|중|하

이차함수 $y=x^2+2(a-3k)x+9k^2-a+6k$의 그래프가 실수 k의 값에 관계없이 항상 x축에 접할 때, 실수 a의 값은?

① -2 ✓② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

풀이
이차방정식 $x^2+2(a-3k)x+9k^2-a+6k=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(a-3k)^2-(9k^2-a+6k)=0$
$\therefore -6(a+1)k+a^2+a=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$a+1=0,\ a^2+a=a(a+1)=0$
$\therefore a=-1$

03 이차함수의 그래프와 직선의 교점

중요도

397 내신 기출

상|중|하

이차함수 $y=2x^2-ax+1$의 그래프와 직선 $y=-x+b$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. A, B의 x좌표가 각각 -2, 3일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

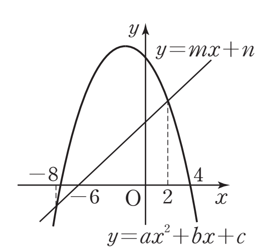
✓① 39 ② 40 ③ 41
④ 42 ⑤ 43

풀이
-2, 3은 이차방정식 $2x^2-ax+1=-x+b$, 즉 $2x^2+(1-a)x+1-b=0$의 두 근이므로
$-2+3=-\frac{1-a}{2},\ -2\times 3=\frac{1-b}{2}$ $\quad\therefore a=3,\ b=13$
$\therefore ab=39$

398

상|중|하

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 오른쪽 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만난다. 이때 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 모든 실근의 합을 구하시오. -6



(단, a, b, c, m, n은 상수이다.)

풀이
주어진 두 그래프의 교점의 x좌표가 -8, 2이므로 -8, 2는 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$, 즉 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 두 근이다.
따라서 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 모든 실근의 합은
$-8+2=-6$

399

상 중 하

이차함수 $y=3x^2+ax+1$의 그래프와 직선 $y=-2x+b$의 두 교점의 x좌표의 합이 2이고, 곱이 -5일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

✓① -24 ② -8 ③ -4
④ 8 ⑤ 24

풀이
이차방정식 $3x^2+ax+1=-2x+b$, 즉 $3x^2+(a+2)x+1-b=0$의 두 근의 합이 2, 곱이 -5이므로
$-\frac{a+2}{3}=2$, $\frac{1-b}{3}=-5$ $\therefore a=-8, b=16$
$\therefore a-b=-24$

400

상 중 하

이차함수 $y=x^2-3x+a$의 그래프와 직선 $y=-x+7$이 만나는 점의 x좌표가 4, b일 때, $\sqrt{4a}\sqrt{2b}+\frac{\sqrt{8b}}{\sqrt{4a}}$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -3 ✓② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

풀이
4, b는 이차방정식 $x^2-3x+a=-x+7$, 즉 $x^2-2x+a-7=0$의 두 근이므로
$4+b=2$, $4\times b=a-7$ $\therefore a=-1, b=-2$
$\therefore \sqrt{4a}\sqrt{2b}+\frac{\sqrt{8b}}{\sqrt{4a}}=\sqrt{-4}\sqrt{-4}+\frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-4}}$
$=-4+2=-2$

401

상 중 하

이차함수 $y=x^2+1$의 그래프와 직선 $y=mx-2m$의 두 교점의 x좌표의 차가 3일 때, 모든 실수 m의 값의 곱은?

① -10 ② -11 ③ -12
✓④ -13 ⑤ -14

풀이
이차함수 $y=x^2+1$의 그래프와 직선 $y=mx-2m$의 두 교점의 x좌표를 α, β라고 하면 α, β는 이차방정식 $x^2+1=mx-2m$, 즉 $x^2-mx+2m+1=0$의 두 근이므로
$\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=2m+1$
두 교점의 x좌표의 차가 3이므로 $|\alpha-\beta|=3$
$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서
$9=m^2-4(2m+1)$, $m^2-8m-13=0$
따라서 모든 실수 m의 값의 곱은 -13이다.

402 교육청 기출

상 중 하

이차함수 $y=\frac{1}{2}(x-k)^2$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라고 하자. 선분 CD의 길이가 6일 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{7}{2}$ ✓② 4 ③ $\frac{9}{2}$
④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

풀이
두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라고 하면 $C(\alpha, 0)$, $D(\beta, 0)$
α, β는 이차방정식 $\frac{1}{2}(x-k)^2=x$, 즉 $x^2-2(k+1)x+k^2=0$의 두 근이므로
$\alpha+\beta=2(k+1)$, $\alpha\beta=k^2$
$\overline{CD}=6$이므로 $|\alpha-\beta|=6$
$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서
$36=\{2(k+1)\}^2-4k^2$ $\therefore k=4$

04 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 중요도

403

상 중 하

이차함수 $y=x^2-2x-2$의 그래프와 직선 $y=2x+k$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다. $k>-6$
(2) 한 점에서 만난다. $k=-6$
(3) 만나지 않는다. $k<-6$

풀이
이차방정식 $x^2-2x-2=2x+k$, 즉 $x^2-4x-2-k=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-2-k)=6+k$
(1) $\frac{D}{4}=6+k>0$에서 $k>-6$
(2) $\frac{D}{4}=6+k=0$에서 $k=-6$
(3) $\frac{D}{4}=6+k<0$에서 $k<-6$

404 내신 기출

상 중 하

이차함수 $y=x^2+(2a-1)x+(a^2-a)$의 그래프와 직선 $y=x+4$가 만나도록 하는 자연수 a의 최댓값은?

① 3 ② 4 ✓③ 5
④ 6 ⑤ 7

풀이
이차방정식 $x^2+(2a-1)x+(a^2-a)=x+4$, 즉 $x^2+2(a-1)x+a^2-a-4=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(a^2-a-4)\geq 0$ $\therefore a\leq 5$
따라서 자연수 a의 최댓값은 5이다.

405

상 중 하

이차함수 $y=-x^2+4x$의 그래프가 직선 $y=3x+k$보다 항상 아래쪽에 있도록 하는 정수 k의 최솟값을 구하시오. 1

풀이

이차방정식 $-x^2+4x=3x+k$, 즉 $x^2-x+k=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-1)^2-4k<0 \qquad \therefore k>\frac{1}{4}$

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다.

406

상 중 하

x에 대한 이차함수 $y=x^2+2kx+k^2-3k$의 그래프와 직선 $y=ax+b$가 실수 k의 값에 관계없이 항상 접할 때, $4ab$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -24 ② -25 ③ -26
√④ -27 ⑤ -28

풀이

이차방정식 $x^2+2kx+k^2-3k=ax+b$, 즉 $x^2+(2k-a)x+k^2-3k-b=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(2k-a)^2-4(k^2-3k-b)=0 \qquad \therefore -4(a-3)k+a^2+4b=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a-3=0,\ a^2+4b=0 \qquad \therefore a=3,\ b=-\frac{9}{4}$

$\therefore 4ab=4\times3\times\left(-\frac{9}{4}\right)=-27$

407

상 중 하

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 두 직선 $x+y-3=0$, $3x-y+1=0$에 동시에 접할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① $\frac{11}{4}$ ② 3 √③ $\frac{13}{4}$
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

풀이

이차방정식 $x^2+ax+b=-x+3$, 즉 $x^2+(a+1)x+b-3=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$D_1=(a+1)^2-4(b-3)=0 \qquad \therefore a^2+2a-4b+13=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $x^2+ax+b=3x+1$, 즉 $x^2+(a-3)x+b-1=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$D_2=(a-3)^2-4(b-1)=0 \qquad \therefore a^2-6a-4b+13=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠−㉡을 하면 $a=0$

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{13}{4}$

$\therefore a+b=\frac{13}{4}$

408 내신 기출

상 중 하

직선 $y=-x+k$가 이차함수 $y=x^2+4x+7$의 그래프와는 만나지 않고, 이차함수 $y=x^2+3x-1$의 그래프와는 만나도록 하는 정수 k의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -3 ② -4 √③ -5
④ -6 ⑤ -7

풀이

이차방정식 $-x+k=x^2+4x+7$, 즉 $x^2+5x+7-k=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$D_1=5^2-4(7-k)<0 \qquad \therefore k<\frac{3}{4} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $-x+k=x^2+3x-1$, 즉 $x^2+4x-1-k=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$\frac{D_2}{4}=2^2-(-1-k)\geq0 \qquad \therefore k\geq-5 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-5\leq k<\frac{3}{4}$

따라서 정수 k의 최댓값은 0, 최솟값은 -5이므로 구하는 합은

$0+(-5)=-5$

05 이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식

중요도

409 풍쌤 비법 ❷

상 중 하

이차함수 $y=-x^2+4x-1$의 그래프에 접하고 y절편이 8인 직선의 기울기를 모두 구하시오. -2, 10

풀이

y절편이 8인 직선을 $y=mx+8$이라고 하자.

이차방정식 $-x^2+4x-1=mx+8$, 즉 $x^2+(m-4)x+9=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(m-4)^2-4\times9=0$

$(m+2)(m-10)=0 \qquad \therefore m=-2$ 또는 $m=10$

따라서 구하는 직선의 기울기는 -2 또는 10이다.

410

상 중 하

이차함수 $y=x^2-2x+3$의 그래프에 접하고, 직선 $y=2x+5$에 평행한 직선의 방정식은 $y=ax+b$이다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

√① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

풀이

직선 $y=2x+5$에 평행한 직선의 기울기는 2이므로 $a=2$

이차방정식 $x^2-2x+3=2x+b$, 즉 $x^2-4x+3-b=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(3-b)=0 \qquad \therefore b=-1$

$\therefore a+b=1$

411 내신 기출

상중하

점 $(3,\ 4)$를 지나고 이차함수 $y=x^2-3x+5$의 그래프에 접하는 두 직선의 기울기의 합은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

풀이

점 $(3, 4)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=m(x-3)+4$라고 하자.
이차방정식 $x^2-3x+5=mx-3m+4$, 즉 $x^2-(3+m)x+3m+1=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=\{-(3+m)\}^2-4(3m+1)=0$
$(m-1)(m-5)=0 \quad \therefore m=1$ 또는 $m=5$
따라서 두 직선의 기울기의 합은 $1+5=6$이다.

412

상중하

실수 k의 값에 관계없이 이차함수 $y=-x^2+2kx-k^2+k$의 그래프에 항상 접하는 직선의 방정식은?

① $y=x-\frac{1}{4}$ ② $y=x+\frac{1}{4}$ ③ $y=x-\frac{1}{2}$
④ $y=x+\frac{1}{2}$ ⑤ $y=x-1$

풀이

구하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라고 하자.
이차방정식 $-x^2+2kx-k^2+k=mx+n$, 즉 $x^2+(m-2k)x+k^2-k+n=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=(m-2k)^2-4(k^2-k+n)=0 \quad \therefore 4(1-m)k+m^2-4n=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$1-m=0,\ m^2-4n=0 \quad \therefore m=1,\ n=\frac{1}{4}$
따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=x+\frac{1}{4}$이다.

06 제한된 범위에서의 이차함수의 최대·최소

중요도

413 교육청 기출

상중하

$1\le x\le 4$에서 이차함수 $f(x)=-(x-2)^2+15$의 최솟값을 구하시오. 11

풀이

꼭짓점의 x좌표 2가 $1\le x\le 4$에 포함되므로
$f(1)=14,\ f(2)=15,\ f(4)=11$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최솟값 11을 갖는다.

414

상중하

$0\le x\le 3$에서 이차함수 $y=-x^2+2x+6$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, $M+m$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

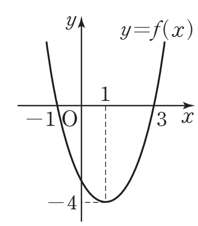
풀이

$y=-x^2+2x+6=-(x-1)^2+7$
$0\le x\le 3$에서 이 함수는 $x=1$일 때 최댓값 7, $x=3$일 때 최솟값 3을 가지므로
$M=7,\ m=3$
$\therefore M+m=7+3=10$

415

상중하

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $\frac{1}{2}\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은?



① -1 ② $-\frac{3}{2}$
③ -2 ④ $-\frac{5}{2}$
⑤ -3

풀이

$f(x)=a(x+1)(x-3)\ (a>0)$이라고 하자.
함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ -4)$를 지나므로
$-4=a\times 2\times(-2) \quad \therefore a=1$
$\therefore f(x)=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$
따라서 $\frac{1}{2}\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $f(2)=-3$을 갖는다.

416

상중하

$1\le x\le 2$에서 이차함수 $y=ax^2-6ax+b$의 최댓값이 -5, 최솟값이 -11일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. (단, $a>0$) 10

풀이

$y=ax^2-6ax+b=a(x-3)^2-9a+b$
$a>0$이므로 $1\le x\le 2$에서 이 함수는 $x=1$일 때 최댓값 $-5a+b$, $x=2$일 때 최솟값 $-8a+b$를 갖는다.
$\therefore -5a+b=-5,\ -8a+b=-11$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=5$
$\therefore ab=10$

417

상 중 하

함수 $f(x)=-x^2-2kx-6k+7$의 최댓값을 $g(k)$라고 할 때, $0\le k\le 5$에서 $g(k)$의 최댓값은 M, 최솟값은 m이다. 이때 $M-m$의 값을 구하시오. 9

풀이

$f(x)=-x^2-2kx-6k+7=-(x+k)^2+k^2-6k+7$

함수 $f(x)$는 $x=-k$에서 최댓값 k^2-6k+7을 가지므로

$g(k)=k^2-6k+7=(k-3)^2-2$

$0\le k\le 5$에서 $g(k)$는 $k=0$일 때 최댓값 7, $k=3$일 때 최솟값 -2를 가지므로

$M=7$, $m=-2$

$\therefore M-m=9$

418 내신 기출

상 중 하

$0\le x\le a$일 때, 이차함수 $f(x)=-x^2+8x-6a+2$의 최댓값은 -1이다. 양수 a의 값은?

① 2 ✓② 3 ③ 4

④ 5 ⑤ 6

풀이

$f(x)=-x^2+8x-6a+2=-(x-4)^2-6a+18$

(i) $0<a<4$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다.

즉, $f(a)=-1$이므로 $-a^2+8a-6a+2=-1$

$(a-3)(a+1)=0$ $\therefore a=3$ ($\because 0<a<4$)

(ii) $a\ge 4$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값을 갖는다.

즉, $f(4)=-1$이므로 $-6a+18=-1$ $\therefore a=\frac{19}{6}$

그런데 $a\ge 4$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=3$

419

상 중 하

이차함수 $f(x)=-2x^2+8x+7k-1$이 다음을 모두 만족시킬 때, $b-a$의 최솟값은?

(단, a, b, k는 상수이다.)

> (가) $0\le x\le 5$에서 $f(x)$의 최솟값은 -4이다.
> (나) $-3\le x\le 0$에서 $a\le f(x)\le b$

① 40 ② 41 ✓③ 42

④ 43 ⑤ 44

풀이

$f(x)=-2x^2+8x+7k-1=-2(x-2)^2+7k+7$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 $0\le x\le 5$에서 최솟값 -4를 갖는다.

이때 $0\le x\le 5$에서 함수 $f(x)$는 $x=5$일 때 최소이므로

$f(5)=-4$, $7k-11=-4$ $\therefore k=1$

$\therefore f(x)=-2(x-2)^2+14$

$-3\le x\le 0$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 6, $x=-3$일 때 최솟값 -36을 가지므로 조건 (나)에서 $a\le -36$, $b\ge 6$

따라서 $b-a$의 최솟값은 $6-(-36)=42$

07 공통부분이 있는 함수의 최대·최소

중요도

420 풍쌤 비법 ❸ 교육청 기출

상 중 하

$1\le x\le 4$에서 이차함수 $y=(2x-1)^2-4(2x-1)+3$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, $M-m$의 값을 구하시오. 25

풀이

$2x-1=t$로 놓으면 $1\le t\le 7$

$y=(2x-1)^2-4(2x-1)+3$

$=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$

$1\le t\le 7$에서 이 함수는 $t=7$일 때 최댓값 24, $t=2$일 때 최솟값 -1을 가지므로

$M=24$, $m=-1$

$\therefore M-m=25$

421

상 중 하

$0\le x\le 3$에서 함수

$$y=(x^2+2x+1)(x^2+2x-5)-4(x^2+2x)-1$$

의 최댓값과 최솟값의 차를 구하시오. 121

풀이

$x^2+2x=t$로 놓으면 $t=(x+1)^2-1$

$0\le x\le 3$에서 $0\le t\le 15$

$y=(x^2+2x+1)(x^2+2x-5)-4(x^2+2x)-1$

$=(t+1)(t-5)-4t-1$

$=t^2-8t-6=(t-4)^2-22$

$0\le t\le 15$에서 이 함수는 $t=15$일 때 최댓값 99, $t=4$일 때 최솟값 -22를 가지므로

최댓값과 최솟값의 차는

$99-(-22)=121$

422

상 중 하

함수 $y=(x^2+6x-1)^2+2x^2+12x+3$의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3

✓④ 4 ⑤ 5

풀이

$x^2+6x-1=t$로 놓으면 $t=(x+3)^2-10$

t는 $x=-3$일 때 최솟값 -10을 가지므로 $t\ge -10$

$y=(x^2+6x-1)^2+2x^2+12x+3$

$=(x^2+6x-1)^2+2(x^2+6x-1)+5$

$=t^2+2t+5=(t+1)^2+4$

따라서 $t\ge -10$에서 이 함수는 $t=-1$일 때 최솟값 4를 갖는다.

423

상 중 하

$-3 \le x \le 3$에서 함수

$$y=(x^2+x-3)(x^2+x+1)-2(x^2+x)$$

는 $x=a$ 또는 $x=b$에서 최솟값 c를 가질 때, abc의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

① -14 ② -10 ③ 10

✓④ 14 ⑤ 24

풀이

$x^2+x=t$로 놓으면 $t=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$-3 \le x \le 3$에서 $-\frac{1}{4} \le t \le 12$

$y=(x^2+x-3)(x^2+x+1)-2(x^2+x)$
$\quad =(t-3)(t+1)-2t=(t-2)^2-7$

$-\frac{1}{4} \le t \le 12$에서 이 함수는 $t=2$일 때 최솟값 -7을 가지므로 $c=-7$

$t=2$에서 $x^2+x=2$ $\quad \therefore x^2+x-2=0$

$x^2+x-2=0$의 두 근이 a, b이므로

$ab=-2$ $\quad \therefore abc=14$

424

상 중 하

함수 $f(x)=2x^2+4|x|-3$에 대하여 함수

$y=-\{f(x)\}^2-6f(x)+7$의 최댓값을 구하시오. 16

풀이

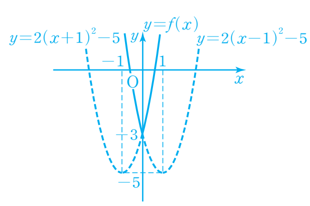
$f(x)=2x^2+4|x|-3$에서

(i) $x<0$일 때

$\quad f(x)=2x^2-4x-3=2(x-1)^2-5$

(ii) $x \ge 0$일 때

$\quad f(x)=2x^2+4x-3=2(x+1)^2-5$



(i), (ii)에서 $f(x) \ge -3$

$f(x)=t$ $(t \ge -3)$로 놓으면

$y=-\{f(x)\}^2-6f(x)+7=-t^2-6t+7=-(t+3)^2+16$

따라서 $t \ge -3$에서 이 함수는 $t=-3$일 때 최댓값 16을 갖는다.

08 완전제곱식을 이용한 이차식의 최대·최소

중요도

425 풍쌤 비법 ❹

상 중 하

x, y가 실수일 때, $2x^2+3y^2-4x+6y+9$의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3

✓④ 4 ⑤ 5

풀이

$2x^2+3y^2-4x+6y+9=2(x-1)^2+3(y+1)^2+4$

이때 x, y가 실수이므로 $(x-1)^2 \ge 0$, $(y+1)^2 \ge 0$

$\therefore 2x^2+3y^2-4x+6y+9 \ge 4$

따라서 주어진 식의 최솟값은 4이다.

426

상 중 하

실수 x, y에 대하여 $-4x^2-y^2-4x+8y-15$는 $x=\alpha$, $y=\beta$일 때 최댓값 M을 갖는다. 상수 α, β, M에 대하여 $\alpha\beta M$의 값은?

① -8 ✓② -4 ③ 0

④ 4 ⑤ 8

풀이

$-4x^2-y^2-4x+8y-15=-(2x+1)^2-(y-4)^2+2$

이때 x, y가 실수이므로 $(2x+1)^2 \ge 0$, $(y-4)^2 \ge 0$

$\therefore -4x^2-y^2-4x+8y-15 \le 2$

따라서 주어진 식은 $x=-\frac{1}{2}$, $y=4$일 때 최댓값 2를 가지므로

$\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=4$, $M=2$

$\therefore \alpha\beta M=-4$

427

상 중 하

x, y가 실수일 때, $x^2+4xy+5y^2-2y+4$의 최솟값을 구하시오. 3

풀이

$x^2+4xy+5y^2-2y+4=(x+2y)^2+(y-1)^2+3$

이때 x, y가 실수이므로 $(x+2y)^2 \ge 0$, $(y-1)^2 \ge 0$

$\therefore x^2+4xy+5y^2-2y+4 \ge 3$

따라서 주어진 식의 최솟값은 3이다.

09 조건이 주어진 이차식의 최대·최소

중요도

428

상 중 하

실수 x, y가 $2x-y-3=0$을 만족시킬 때,

$-5x^2+y^2+10x-2y-10$의 최댓값을 구하시오. 14

풀이

$2x-y-3=0$에서 $y=2x-3$

$\therefore -5x^2+y^2+10x-2y-10$
$\quad =-5x^2+(2x-3)^2+10x-2(2x-3)-10$
$\quad =-x^2-6x+5$
$\quad =-(x+3)^2+14$

따라서 주어진 식은 $x=-3$일 때 최댓값 14를 갖는다.

429
상 중 하

실수 a, b에 대하여 $1\le a\le 6$이고 $a+2b=4$일 때, ab의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -8 ✓② -4 ③ 0
④ 4 ⑤ 8

풀이

$a+2b=4$에서 $b=\frac{4-a}{2}$

$\therefore ab=a\times\frac{4-a}{2}=-\frac{1}{2}a^2+2a=-\frac{1}{2}(a-2)^2+2$

$1\le a\le 6$에서 ab는 $a=2$일 때 최댓값 2를 갖고, $a=6$일 때 최솟값 -6을 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은

$2+(-6)=-4$

430 내신 기출
상 중 하

x에 대한 이차방정식 $x^2-(4a+3)x+a^2-5=0$의 두 실근을 α, β라고 할 때, $-5\le a\le -2$에서 $(\alpha+3)(\beta+3)$의 최댓값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) -7

풀이

$\alpha+\beta=4a+3$, $\alpha\beta=a^2-5$이므로

$(\alpha+3)(\beta+3)=\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9$
$=a^2-5+3(4a+3)+9$
$=(a+6)^2-23$

따라서 $-5\le a\le -2$에서 $(\alpha+3)(\beta+3)$은 $a=-2$일 때 최댓값 -7을 갖는다.

431 교육청 기출
상 중 하

두 실수 a, b에 대하여 복소수 $z=a+2bi$가 $z^2+\overline{z}^2=0$을 만족시킬 때, $6a+12b^2+11$의 최솟값은?

(단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 6 ② 7 ✓③ 8
④ 9 ⑤ 10

풀이

$z^2+\overline{z}^2=0$에서

$(a+2bi)^2+(a-2bi)^2=0$, $2a^2-8b^2=0$ $\quad\therefore a^2=4b^2$

$\therefore 6a+12b^2+11=6a+3\times 4b^2+11$
$=6a+3a^2+11=3(a+1)^2+8$

이때 a가 실수이므로 $(a+1)^2\ge 0$

$\therefore 6a+12b^2+11\ge 8$

따라서 주어진 식의 최솟값은 8이다.

10 이차함수의 최대·최소의 활용
중요도

432
상 중 하

길이가 20인 끈으로 가로의 길이가 1 이상 4 이하인 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 넓이의 최댓값은?

① 21 ② 22 ③ 23
✓④ 24 ⑤ 25

풀이

직사각형의 가로의 길이를 x $(1\le x\le 4)$라고 하면 세로의 길이는 $10-x$이므로 직사각형의 넓이를 $S(x)$라고 하면

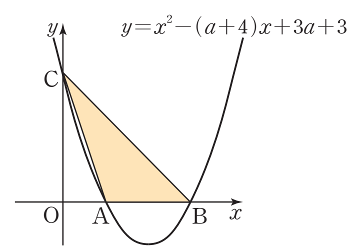
$S(x)=x(10-x)=-x^2+10x=-(x-5)^2+25$

$1\le x\le 4$에서 $S(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 24를 갖는다.

따라서 이 직사각형의 넓이의 최댓값은 24이다.

433 교육청 기출
상 중 하

다음 그림과 같이 이차함수 $y=x^2-(a+4)x+3a+3$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하고, y축과 만나는 점을 C라고 하자.



삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은? (단, $0<a<2$)

① $\frac{13}{4}$ ✓② $\frac{27}{8}$ ③ $\frac{7}{2}$
④ $\frac{29}{8}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

풀이

이차방정식 $x^2-(a+4)x+3a+3=0$에서

$(x-a-1)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=a+1$ 또는 $x=3$

이때 $0<a<2$이므로 $1<a+1<3$

따라서 $\mathrm{A}(a+1, 0)$, $\mathrm{B}(3, 0)$, $\mathrm{C}(0, 3a+3)$이므로 삼각형 ABC의 넓이를 $S(a)$라고 하면

$S(a)=\frac{1}{2}(2-a)(3a+3)$
$=-\frac{3}{2}\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{8}$

$0<a<2$에서 $S(a)$는 $a=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{27}{8}$을 갖는다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은 $\frac{27}{8}$이다.

정답과 풀이 059쪽

434

상 중 하

어느 전시관에서는 한 사람의 입장료로 5000원을 받으면 하루 600명의 관람객이 입장하고, 한 사람의 입장료를 100원씩 올릴 때마다 하루 관람객이 10명씩 줄어든다고 한다. 이 전시관의 하루 입장료 수입이 최대가 되게 하려면 한 사람의 입장료를 얼마로 정해야 하는지 구하시오. 5500원

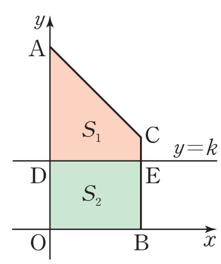
풀이

한 사람의 입장료가 $(5000+100x)$원일 때 하루 관람객은 $(600-10x)$명이다.
하루 입장료 수입을 y원이라고 하면
$y=(5000+100x)(600-10x)=-1000(x-5)^2+3025000$
이므로 y는 $x=5$일 때 최댓값 3025000을 갖는다.
따라서 하루 입장료 수입이 최대가 될 때, 한 사람의 입장료는
$5000+100\times5=5500$(원)

435

상 중 하

오른쪽 그림과 같이 사각형 AOBC와 직선 $y=k$ $(0<k<2)$가 만나는 점을 각각 D, E라고 하자. A$(0, 4)$, B$(2, 0)$, C$(2, 2)$이고 사각형 ADEC의 넓이를 S_1, 사각형 DOBE의 넓이를 S_2라고 할 때, $S_1^2+S_2^2$의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)



① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ✓⑤ 18

풀이

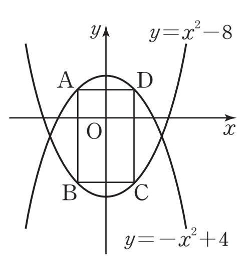
두 점 D, E의 좌표가 각각 $(0, k)$, $(2, k)$이므로
$S_1=\frac{1}{2}\times\{(4-k)+(2-k)\}\times2=6-2k$, $S_2=2\times k=2k$
$\therefore S_1^2+S_2^2=(6-2k)^2+(2k)^2=8\left(k-\frac{3}{2}\right)^2+18$
따라서 $0<k<2$에서 $S_1^2+S_2^2$은 $k=\frac{3}{2}$일 때 최솟값 18을 갖는다.

436 내신 기출

상 중 하

오른쪽 그림의 직사각형 ABCD에서 두 점 A, D는 이차함수 $y=-x^2+4$의 그래프 위에 있고, 두 점 B, C는 이차함수 $y=x^2-8$의 그래프 위에 있다. 점 D의 x좌표를 a라고 할 때, 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오. 16

(단, $0<a\le2$)



풀이

점 D의 좌표는 $(a, -a^2+4)$이므로 A$(-a, -a^2+4)$, C(a, a^2-8)
$\overline{AD}=2a$, $\overline{DC}=-2a^2+12$이므로 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 $f(a)$라고 하면
$f(a)=2\{2a+(-2a^2+12)\}=-4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+25$
$0<a\le2$에서 $f(a)$는 $a=2$일 때 최솟값 16을 갖는다.
따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최솟값은 16이다.

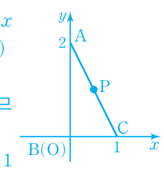
437

상 중 하

$\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=1$이고 점 P가 선분 AC 위를 움직일 때, $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 최솟값은?

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{7}{10}$ ③ $\frac{4}{5}$
✓④ $\frac{9}{10}$ ⑤ 1

풀이

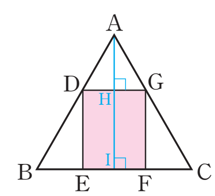


오른쪽 그림과 같이 점 B를 원점으로 하고 점 A는 y축, 점 C는 x축 위에 놓이도록 좌표평면을 잡으면 A$(0, 2)$, B$(0, 0)$, C$(1, 0)$
직선 AC의 방정식은 $y=-2x+2$
점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면 점 P가 선분 AC 위를 움직이므로 $0\le x\le1$
$\therefore \overline{PB}^2+\overline{PC}^2=(x^2+y^2)+\{(x-1)^2+y^2\}=2x^2+2y^2-2x+1$
$=2x^2+2(-2x+2)^2-2x+1$
$=10\left(x-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{9}{10}$
따라서 $0\le x\le1$에서 $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은 $x=\frac{9}{10}$일 때 최솟값 $\frac{9}{10}$를 갖는다.

438

상 중 하

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC에 내접하는 직사각형 DEFG가 있다. 직사각형 DEFG의 넓이의 최댓값을 구하시오. $2\sqrt{3}$



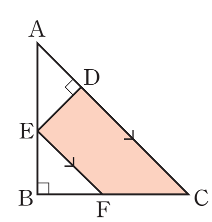
풀이

$\overline{DH}=a$ $(0<a<2)$라고 하면
$\overline{AH}=\sqrt{3}a$, $\overline{DE}=\overline{AI}-\overline{AH}=2\sqrt{3}-\sqrt{3}a$
이므로 직사각형 DEFG의 넓이를 $S(a)$라고 하면
$S(a)=\overline{DG}\times\overline{DE}$
$=2a(2\sqrt{3}-\sqrt{3}a)$
$=-2\sqrt{3}(a-1)^2+2\sqrt{3}$
$0<a<2$에서 $S(a)$는 $a=1$일 때 최댓값 $2\sqrt{3}$을 갖는다.
따라서 직사각형 DEFG의 넓이의 최댓값은 $2\sqrt{3}$이다.

439

상 중 하

오른쪽 그림과 같은 직각이등변삼각형 ABC에서 $\overline{ED}\perp\overline{AC}$, $\overline{EF}/\!/\overline{AC}$이고 $\overline{AB}=6$일 때, 사각형 DEFC의 넓이의 최댓값을 구하시오. 12



풀이

$\overline{DE}=\overline{AD}=a$ $(0<a<3\sqrt{2})$라고 하면
$\overline{AE}=\sqrt{2}a$, $\overline{EB}=\overline{AB}-\overline{AE}=6-\sqrt{2}a$
$\overline{EF}=\sqrt{2}\,\overline{EB}=6\sqrt{2}-2a$, $\overline{DC}=\overline{AC}-\overline{AD}=6\sqrt{2}-a$
이므로 사각형 DEFC의 넓이를 $S(a)$라고 하면
$S(a)=\frac{1}{2}\times(\overline{DC}+\overline{EF})\times\overline{DE}$
$=\frac{1}{2}\times(6\sqrt{2}-a+6\sqrt{2}-2a)\times a$
$=-\frac{3}{2}(a-2\sqrt{2})^2+12$
$0<a<3\sqrt{2}$에서 $S(a)$는 $a=2\sqrt{2}$일 때 최댓값 12를 갖는다.
따라서 사각형 DEFC의 넓이의 최댓값은 12이다.

› 정답과 풀이 060쪽

440

실수 a에 대하여 이차함수 $y=x^2+ax-8$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 4, b일 때, 이차함수 $y=x^2-bx+a-1$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리를 구하시오. 4

풀이

4, b는 이차방정식 $x^2+ax-8=0$의 두 근이므로

$4+b=-a$, $4\times b=-8$ $\quad\therefore a=-2$, $b=-2$ ······ 40 %

이차함수 $y=x^2-bx+a-1$, 즉 $y=x^2+2x-3$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 $x^2+2x-3=0$에서 $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$ ······ 40 %

따라서 이차함수 $y=x^2+2x-3$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 좌표는 $(-3, 0)$, $(1, 0)$이므로 두 점 사이의 거리는

$|1-(-3)|=4$ ······ 20 %

441

이차함수 $f(x)=x^2-2x+5$에 대하여 $f(\alpha)=4+\alpha$, $f(\beta)=4+\beta$가 성립할 때, 이차함수 $y=f(x)-x-4$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표의 차를 구하시오. (단, α, β는 서로 다른 실수이다.) $\sqrt{5}$

풀이

$f(\alpha)=4+\alpha$, $f(\beta)=4+\beta$에서

$f(\alpha)-\alpha-4=0$, $f(\beta)-\beta-4=0$

이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)-x-4=0$의 두 근이다. ······ 20 %

한편,

$f(x)-x-4=(x^2-2x+5)-x-4=x^2-3x+1$

이므로 이차방정식 $f(x)-x-4=0$에서

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$ ······ 40 %

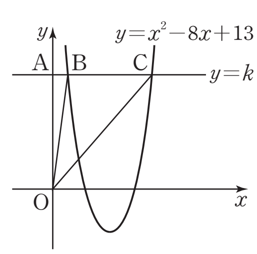
따라서 구하는 x좌표의 차는

$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{3^2-4\times1}=\sqrt{5}$ ······ 40 %

442

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=k$가 y축과 만나는 점을 A, 이차함수 $y=x^2-8x+13$의 그래프와 만나는 두 점을 각각 B, C라 고 하자. 삼각형 AOB와 삼각형 AOC의 넓이의 합이 32일 때, 두 점 B, C의 x좌표의 곱을 구하시오. 5

(단, O는 원점이다.)



풀이

두 점 B, C의 x좌표를 각각 α, β라고 하면 $B(\alpha, k)$, $C(\beta, k)$

α, β는 이차방정식 $x^2-8x+13=k$, 즉 $x^2-8x+13-k=0$의 두 근이므로

$\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=13-k$ ······ ㉠

······ 20 %

$\triangle AOB=\frac{1}{2}\alpha k$, $\triangle AOC=\frac{1}{2}\beta k$이므로 $\frac{1}{2}\alpha k+\frac{1}{2}\beta k=32$

$\frac{1}{2}k(\alpha+\beta)=32$, $4k=32$ ($\because$ ㉠) $\quad\therefore k=8$ ······ 50 %

$\therefore \alpha\beta=13-8=5$ ······ 30 %

443

$3\le x\le 4$에서 이차함수 $f(x)=-x^2+ax+b$의 최댓값은 7이고 $f(-2)=f(4)$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. 11

(단, a, b는 상수이다.)

풀이

$f(x)=-x^2+ax+b=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+b$

$f(-2)=f(4)$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$

즉, $\frac{a}{2}=1$에서 $a=2$ ······ 40 %

$\therefore f(x)=-x^2+2x+b$

$3\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최대이므로 $f(3)=7$

즉, $-9+6+b=7$이므로 $b=10$ ······ 40 %

따라서 $f(x)=-x^2+2x+10$이므로

$f(1)=11$ ······ 20 %

444

두 양수 p, q에 대하여 이차함수 $f(x)=-x^2+px-q$가 다음을 모두 만족시킬 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. 60

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접한다.
(나) $-p\le x\le p$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 -54이다.

풀이

이차방정식 $-x^2+px-q=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=p^2-4q=0$ $\quad\therefore q=\frac{p^2}{4}$ ······ 30 %

$\therefore f(x)=-x^2+px-q=-x^2+px-\frac{p^2}{4}=-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$

$-p\le x\le p$에서 함수 $f(x)$는 $x=-p$일 때 최솟값을 갖는다.

즉, $f(-p)=-54$이므로

$-\frac{9}{4}p^2=-54$, $p^2=24$ ······ 50 %

$\therefore q=\frac{1}{4}\times24=6$

$\therefore p^2+q^2=60$ ······ 20 %

445

점 $P(x, y)$가 두 점 $A(-2, 1)$, $B(2, -3)$을 이은 선분 AB 위를 움직일 때, x^2+y^2+2x-3의 최댓값과 최솟값의 차를 구하시오. 18

풀이

직선 AB의 방정식은 $y=-x-1$

점 P가 선분 AB 위를 움직이므로 $-2\le x\le 2$ ······ 40 %

$x^2+y^2+2x-3=x^2+(-x-1)^2+2x-3$

$=2(x+1)^2-4$ ······ 30 %

$-2\le x\le 2$에서 주어진 식은 $x=2$일 때 최댓값 14, $x=-1$일 때 최솟값 -4를 가지므로 최댓값과 최솟값의 차는

$14-(-4)=18$ ······ 30 %

446

이차함수 $y=x^2-(3a+5)x+6a+6$의 그래프가 x축과 두 점 A, B에서 만나고, y축과 점 C에서 만난다. 삼각형 ABC의 넓이가 8일 때, 상수 a의 값은? (단, $0<a<1$)

① $\frac{1}{6}$ ✓② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

풀이
이차방정식 $x^2-(3a+5)x+6a+6=0$에서 $x^2-(3a+5)x+2(3a+3)=0$
$(x-2)\{x-(3a+3)\}=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=3a+3$
$\therefore$ A$(2, 0)$, B$(3a+3, 0)$ 또는 A$(3a+3, 0)$, B$(2, 0)$, C$(0, 6a+6)$
이때 $0<a<1$에서 $3<3a+3<6$이므로
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\{(3a+3)-2\}(6a+6)=9a^2+12a+3$
삼각형 ABC의 넓이가 8이므로 $9a^2+12a+3=8$
$(3a+5)(3a-1)=0$ $\therefore a=\frac{1}{3}$ ($\because 0<a<1$)

447

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라고 할 때, 이차함수 $y=(x+2a)(x+2b)+2$의 그래프가 x축과 만나지 않는 경우의 수를 구하시오. 16

풀이
이차방정식 $(x+2a)(x+2b)+2=0$, 즉 $x^2+2(a+b)x+4ab+2=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(a+b)^2-4ab-2<0$, $(a-b)^2<2$ $\therefore |a-b|<\sqrt{2}$
(i) $|a-b|=0$일 때, 순서쌍 (a, b)는 $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$의 6가지이다.
(ii) $|a-b|=1$일 때, 순서쌍 (a, b)는 $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(5, 6)$, $(6, 5)$의 10가지이다.
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $6+10=16$

448 교육청 기출

자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)=x^2+n^2$과 $g(x)=2nx+1$의 그래프가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 점 A와 B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라고 하자. 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이가 66이 되도록 하는 n의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
✓④ 4 ⑤ 5

풀이
이차방정식 $x^2+n^2=2nx+1$에서 $x^2-2nx+n^2-1=0$
$(x-n+1)(x-n-1)=0$ $\therefore x=n-1$ 또는 $x=n+1$
따라서 A$(n-1, 2n^2-2n+1)$, B$(n+1, 2n^2+2n+1)$로 놓으면 C$(n-1, 0)$, D$(n+1, 0)$이므로 사각형 ACDB의 넓이는
$\frac{1}{2}\{(2n^2-2n+1)+(2n^2+2n+1)\}\times\{(n+1)-(n-1)\}=4n^2+2=66$
$\therefore n=4$ ($\because n$은 자연수)

449

이차함수 $f(x)=x^2-x+k$의 그래프와 직선 $y=x+1$이 두 점에서 만날 때, 그 교점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라고 하자. 세 점 A$(\alpha, f(\alpha))$, B$(\beta, f(\alpha))$, C$(\beta, f(\beta))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이가 8일 때, $f(6)$의 값은? (단, k는 상수이다.)

✓① 28 ② 29 ③ 30
④ 31 ⑤ 32

풀이
A$(\alpha, \alpha+1)$, B$(\beta, \alpha+1)$, C$(\beta, \beta+1)$이고, $\triangle ABC$는 직각이등변삼각형이므로
$\triangle ABC=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2=8$
$\therefore \beta-\alpha=4$ ($\because \beta>\alpha$) …… ㉠
α, β는 이차방정식 $x^2-x+k=x+1$, 즉 $x^2-2x+k-1=0$의 두 근이므로
$\alpha+\beta=2$ …… ㉡
$\alpha\beta=k-1$ …… ㉢
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=-1$, $\beta=3$
$\alpha=-1$, $\beta=3$을 ㉢에 대입하면 $-1\times3=k-1$ $\therefore k=-2$
따라서 $f(x)=x^2-x-2$이므로 $f(6)=28$이다.

450

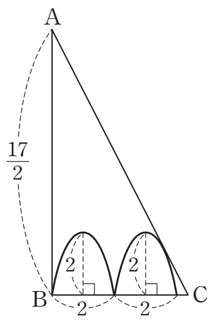
이차함수 $y=\frac{1}{2k}x^2+2x+8k+1$의 그래프는 실수 k $(k\neq0)$의 값에 관계없이 항상 서로 다른 두 직선 l, m과 접한다. 두 직선 l, m과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

✓① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

풀이
이차함수 $y=\frac{1}{2k}x^2+2x+8k+1$의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 $y=ax+b$라고 하자.
이차방정식 $\frac{1}{2k}x^2+2x+8k+1=ax+b$, 즉 $x^2+2k(2-a)x+16k^2+2k-2kb=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=\{k(2-a)\}^2-(16k^2+2k-2kb)=0$
$\therefore (a^2-4a-12)k^2+2(b-1)k=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$a^2-4a-12=0$에서 $(a+2)(a-6)=0$ $\therefore a=-2$ 또는 $a=6$
$b-1=0$에서 $b=1$
따라서 두 직선 $y=-2x+1$, $y=6x+1$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{6}\right)\right\}\times1=\frac{1}{3}$

451 도전! 1등급

오른쪽 그림은 직각삼각형 ABC에 서로 합동인 포물선의 일부를 그린 것이다. 점 B는 포물선 위의 점이고 변 AC는 포물선에 접할 때, 변 BC의 길이를 구하시오. $\frac{17}{4}$



풀이

변 AC에 접하는 포물선의 방정식을 $y=a(x-2)(x-4)$ $(a<0)$라고 하면 이 포물선이 점 $(3, 2)$를 지나므로

$a=-2$

$\therefore y=-2(x-2)(x-4)$

직선 AC의 방정식을 $y=mx+\frac{17}{2}$ $(m<0)$이라고 하자.

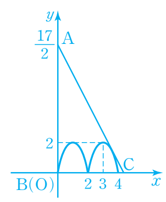
이차방정식 $-2(x-2)(x-4)=mx+\frac{17}{2}$, 즉

$4x^2+2(m-12)x+49=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(m-12)^2-4\times49=0$ $\quad\therefore m=-2$ $(\because m<0)$

따라서 직선 AC의 방정식은 $y=-2x+\frac{17}{2}$이므로

$\overline{BC}=\frac{17}{4}$



452

이차함수 $f(x)$가 다음을 모두 만족시킬 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-2x+k$는 접한다. 이때 정수 k의 값은?

> (가) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.
> (나) $-1\le x\le4$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 -6이다.
> (다) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 2)$이다.

① 3 ② 4 ③ 5
✓④ 6 ⑤ 7

풀이

조건 (가)에서 $f(x)=a(x-1)^2+b$ (a, b는 상수, $a\ne0$)로 놓으면

조건 (다)에서 $f(0)=2$이므로 $a+b=2$ ······ ㉠

(i) $a<0$일 때, $-1\le x\le4$에서 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최솟값 -6을 가지므로

$f(4)=9a+b=-6$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$ $\quad\therefore f(x)=-(x-1)^2+3$

이차방정식 $-(x-1)^2+3=-2x+k$, 즉 $x^2-4x+k-2=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(k-2)=0$ $\quad\therefore k=6$

(ii) $a>0$일 때, $-1\le x\le4$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 -6을 가지므로

$f(1)=b=-6$, $a=8$ $\quad\therefore f(x)=8(x-1)^2-6$

이차방정식 $8(x-1)^2-6=-2x+k$, 즉 $8x^2-14x+2-k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-7)^2-8(2-k)=0$ $\quad\therefore k=-\frac{33}{8}$

그런데 k는 정수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $k=6$

453

$-2\le x\le3$에서 함수

$$f(x)=|x-1|^2+2|x|-5$$

는 $x=a$에서 최댓값 M, $x=b$에서 최솟값 m을 갖는다. 이때 $a+b+M+m$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
✓④ 2 ⑤ 4

풀이

$f(x)=|x-1|^2+2|x|-5=(x-1)^2+2|x|-5$

(i) $-2\le x\le0$일 때

$f(x)=(x-1)^2-2x-5=(x-2)^2-8$

$-2\le x\le0$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 8, $x=0$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

(ii) $0\le x\le3$일 때

$f(x)=(x-1)^2+2x-5=x^2-4$

$0\le x\le3$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 5, $x=0$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

(i), (ii)에서 $a=-2$, $M=8$, $b=0$, $m=-4$

$\therefore a+b+M+m=2$

454 교육청 기출

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+5$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. 3

> (가) a, b는 음의 정수이다.
> (나) $1\le x\le2$일 때, 이차함수 $f(x)$의 최댓값은 3이다.

풀이

$f(x)=ax^2+bx+5=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+5$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 $-\frac{b}{2a}$이다.

조건 (가)에서 $a<0$, $b<0$이므로 $-\frac{b}{2a}<0$

따라서 함수 $f(x)$는 $1\le x\le2$에서 $x=1$일 때 최댓값을 갖는다.

조건 (나)에서 $f(1)=a+b+5=3$이므로 $a+b=-2$

이때 a, b는 음의 정수이므로 $a=-1$, $b=-1$

따라서 $f(x)=-x^2-x+5$이므로

$f(-2)=3$

455

함수

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-4x+5 & (x<0)\\ x+5 & (x\geq 0)\end{cases}$$

에 대하여 함수

$$y=\{f(x)\}^2-6f(x)-3\ (-2\leq x\leq 6)$$

의 최댓값과 최솟값의 차는?

① 54　　② 56　　③ 58

✓④ 60　　⑤ 62

풀이

$-2\leq x\leq 6$에서 $5\leq f(x)\leq 11$

$f(x)=t$로 놓으면 $5\leq t\leq 11$

$\therefore y=\{f(x)\}^2-6f(x)-3=t^2-6t-3=(t-3)^2-12$

$5\leq t\leq 11$에서 이 함수는 $t=11$일 때 최댓값 52, $t=5$일 때 최솟값 -8을 가지므로 최댓값과 최솟값의 차는

$52-(-8)=60$

456

$2x+3y=6$을 만족시키는 양의 실수 x, y에 대하여 $(\sqrt{15+2x}+\sqrt{13+3y})^2$의 최댓값은?

① 52　　② 56　　③ 60

④ 64　　✓⑤ 68

풀이

$2x+3y=6$에서 $3y=6-2x$

이때 x, y는 양의 실수이므로

$x>0$, $6-2x>0$　　$\therefore 0<x<3$

$$\begin{aligned}\therefore (\sqrt{15+2x}+\sqrt{13+3y})^2 &=\{\sqrt{15+2x}+\sqrt{13+(6-2x)}\}^2\\ &=(\sqrt{15+2x}+\sqrt{19-2x})^2\\ &=15+2x+19-2x+2\sqrt{(15+2x)(19-2x)}\\ &=34+2\sqrt{-4(x-1)^2+289}\end{aligned}$$

따라서 주어진 식은 $0<x<3$에서 $x=1$일 때 최대이고, 그 최댓값은

$34+2\sqrt{289}=34+2\times 17=68$

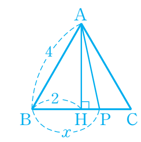
457

한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC가 있다. 점 P가 $\overline{BC}$의 중점에서 출발하여 점 C까지 $\overline{BC}$ 위를 움직일 때, $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 26　　② 28　　✓③ 30

④ 32　　⑤ 34

풀이



선분 BC의 중점을 H, $\overline{BP}=x$라고 하면

$\overline{AH}=2\sqrt{3}$, $2\leq x\leq 4$이므로

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2+\overline{PC}^2&=\{(x-2)^2+(2\sqrt{3})^2\}+(4-x)^2\\ &=2(x-3)^2+14\end{aligned}$$

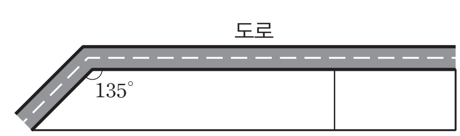
$2\leq x\leq 4$에서 $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2$은 $x=2$ 또는 $x=4$일 때 최댓값 16, $x=3$일 때 최솟값 14를 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$16+14=30$

458

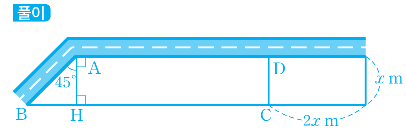
다음 그림과 같이 도로와 인접한 땅에 길이가 90 m인 철망으로 사다리꼴과 직사각형 모양의 밭을 만들려고 한다. 직사각형 모양의 밭의 가로의 길이가 세로의 길이의 2배일 때, 사다리꼴 모양의 밭의 넓이의 최댓값은? (단, 도로와 이어진 땅에는 철망을 설치하지 않고, 철망의 두께는 무시한다.)



① 440 m^2　　✓② 450 m^2　　③ 460 m^2

④ 470 m^2　　⑤ 480 m^2

풀이



$\overline{BH}=\overline{AH}=\overline{DC}=x$ m라고 하면 $\overline{BC}=(90-4x)$ m

$\overline{AD}=\overline{HC}=\overline{BC}-\overline{BH}=90-5x$

$x>0$, $90-5x>0$에서 $0<x<18$

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$$\begin{aligned}S(x)&=\frac{1}{2}\{(90-5x)+(90-4x)\}\times x\\ &=-\frac{9}{2}(x-10)^2+450\end{aligned}$$

$0<x<18$에서 $S(x)$는 $x=10$일 때 최댓값 450을 가진다.

따라서 사다리꼴 모양의 밭의 넓이의 최댓값은 450 m^2이다.

07 여러 가지 방정식

1 삼차방정식과 사차방정식

(1) 삼차방정식과 사차방정식

① 다항식 $P(x)$가 x에 대한 삼차식, 사차식일 때, 방정식 $P(x)=0$을 각각 x에 대한 삼차방정식, 사차방정식이라고 한다.

② 방정식 $P(x)=0$은 $P(x)$를 인수분해한 후 다음을 이용하여 푼다.

- $ABC=0$이면
  $A=0$ 또는 $B=0$ 또는 $C=0$
- $ABCD=0$이면
  $A=0$ 또는 $B=0$ 또는 $C=0$ 또는 $D=0$

예 $x^3-1=0$은 x에 대한 삼차방정식이고, $x^4-2x+1=0$은 x에 대한 사차방정식이다.

참고 계수가 실수인 삼차방정식과 사차방정식은 복소수의 범위에서 각각 3개, 4개의 근을 갖는다.

(2) 삼·사차방정식 $P(x)=0$의 풀이

① 인수분해 공식을 이용한 풀이
인수분해 공식을 이용하여 다항식 $P(x)$를 인수분해한 후 푼다.

② 인수 정리와 조립제법을 이용한 풀이
다항식 $P(x)$가 인수분해 공식을 이용하여 간단히 인수분해되지 않을 때에는 다음과 같이 인수 정리와 조립제법을 이용하여 다항식 $P(x)$를 인수분해한 후 푼다.

[1단계] $P(\alpha)=0$을 만족시키는 상수 α의 값을 찾는다.
[2단계] 조립제법을 이용하여 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$의 꼴로 인수분해하여 푼다.

참고 다항식 $P(x)$의 계수가 모두 정수일 때, $P(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값은 $\pm\frac{(P(x)\text{의 상수항의 약수})}{(P(x)\text{의 최고차항의 계수의 약수})}$ 중에서 찾는다.

③ 치환을 이용한 풀이
방정식에 공통부분이 있으면 공통부분을 한 문자로 치환하여 그 문자에 대한 방정식으로 변형한 후 인수분해하여 푼다.

2 특수한 꼴의 사차방정식의 풀이

(1) $x^4+ax^2+b=0$의 꼴

차수가 짝수인 항과 상수항만으로 이루어진 방정식을 복이차방정식이라고 한다.

[방법 1] $x^2=X$로 치환한 후 좌변을 인수분해하여 푼다.
[방법 2] [방법 1]을 이용했을 때, 좌변이 바로 인수분해되지 않는 경우에는 이차항 ax^2을 적당히 분리하여 $(x^2+A)^2-(Bx)^2=0$의 꼴로 변형한 후 인수분해하여 푼다.

(2) $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$의 꼴

가운데 항을 중심으로 각 항의 계수가 대칭으로 같은 방정식을 상반방정식이라고 한다.

양변을 x^2으로 나눈 후 $x+\frac{1}{x}=X$로 치환하여 X에 대한 이차방정식을 푼다.

문제를 풀 때 유용한 풍쌤 비법

❶ ( )( )( )( )$+k=0$ $(k\neq0)$의 꼴의 사차방정식

( )( )( )( )$+k=0$의 꼴의 사차방정식은 공통부분이 생기도록 ( )( )( )( )에서 두 개씩 짝을 지어 전개한 후 공통부분을 치환하여 푼다.
두 일차식의 상수항의 합이 서로 같아지도록 짝을 지어 전개한다.

예 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=120$에서
$x-1$과 $x-4$, $x-2$와 $x-3$을 짝 지으면 각각 상수항의 합이 -5로 같다.
$\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}-120=0$, $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-120=0$
⇨ $x^2-5x=t$로 치환하여 푼다.

❷ 삼차방정식의 근의 판별

주어진 삼차방정식을 $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)=0$ (α는 실수)의 꼴로 변형한 후 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 D를 이용한다.
(1) 세 근이 모두 실수이다. ⇨ $D\geq0$
(2) 한 개의 실근 α와 두 개의 허근을 갖는다. ⇨ $D<0$
(3) 중근을 갖는다. ⇨ $D=0$ 또는 $a\alpha^2+b\alpha+c=0$

3 삼차방정식의 근과 계수의 관계

(1) 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라고 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

예 삼차방정식 $x^3-3x^2+3x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라고 하면
$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=1$

(2) 세 수를 근으로 하는 삼차방정식

세 수 α, β, γ를 근으로 하고, x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$, 즉

$$x^3-\underbrace{(\alpha+\beta+\gamma)}_{\text{세 근의 합}}x^2+\underbrace{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}_{\text{두 근끼리의 곱의 합}}x-\underbrace{\alpha\beta\gamma}_{\text{세 근의 곱}}=0$$

참고 세 수 α, β, γ를 근으로 하고 x^3의 계수가 a인 삼차방정식은
$a\{x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma\}=0$

4 삼차방정식의 켤레근

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$에서

① a, b, c, d가 유리수일 때, $p+q\sqrt{m}$이 근이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다.
(단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

② a, b, c, d가 실수일 때, $p+qi$가 근이면 $p-qi$도 근이다. (단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$이다.)

참고 켤레근의 성질 ①, ②는 이차 이상의 모든 방정식에서 성립한다. 삼차방정식에서 두 근이 서로 켤레근이면 ①의 경우에 나머지 한 근은 유리수이고, ②의 경우에 나머지 한 근은 실수이다.

5 방정식 $x^3=1$의 허근의 성질

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 하면 다른 한 허근은 $\overline{\omega}$이므로 다음이 성립한다. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$
$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로
$x^3=1$의 한 허근 ω는 $x^2+x+1=0$의 근이다.

② $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$
ω와 $\overline{\omega}$는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이다.

③ $\omega^2=\dfrac{1}{\omega}=\overline{\omega}$

6 연립이차방정식의 풀이

(1) $\begin{cases}(\text{일차식})=0\\(\text{이차식})=0\end{cases}$ 의 꼴

일차방정식을 한 문자에 대하여 정리한 후 이것을 이차방정식에 대입하여 푼다.

(2) $\begin{cases}(\text{이차식})=0\\(\text{이차식})=0\end{cases}$ 의 꼴

두 이차방정식 중 인수분해할 수 있는 식을 인수분해하여 일차방정식을 얻은 후 이것을 나머지 이차방정식과 연립하여 푼다.

(3) x, y에 대한 대칭식인 연립이차방정식
x, y를 서로 바꾸어 대입하여도 변하지 않는 식

$x+y=a$, $xy=b$로 놓고 주어진 연립방정식을 a, b에 대한 연립방정식으로 변형하여 방정식을 푼 후 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-at+b=0$의 두 근임을 이용한다.

참고 미지수가 2개인 연립방정식에서 차수가 가장 높은 방정식이 이차방정식일 때, 이 연립방정식을 연립이차방정식이라고 한다.

문제를 풀 때 유용한 풍쌤 비법

❸ 부정방정식의 풀이
방정식의 개수가 미지수의 개수보다 적어 해가 무수히 많은 방정식으로 정수 조건이나 실수 조건이 주어지면 해가 유한개가 된다.

(1) 해가 정수라는 조건이 주어진 부정방정식
⇨ 주어진 방정식을 (일차식)×(일차식)=(정수)의 꼴로 변형한다.
⇨ 약수와 배수의 성질을 이용하여 곱해서 정수가 되는 두 일차식의 값을 구한다.

(2) 해가 실수라는 조건이 주어진 부정방정식
[방법 1] $A^2+B^2=0$의 꼴로 변형할 수 있고, A, B가 실수이면 $A=0$, $B=0$임을 이용한다.
[방법 2] [방법 1]을 이용할 수 없으면 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 이차방정식의 판별식 D에 대하여 $D\geq0$임을 이용한다.

› 정답과 풀이 064쪽

01 삼·사차방정식의 풀이 중요도

459
상중하

삼차방정식 $x^3+3x^2-5x+1=0$의 세 근이 $x=a$, $x=b\pm\sqrt{c}$일 때, $a+b+c$의 값은?

(단, a, b, c는 유리수이고, $c>0$이다.)

① 3 ✓② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

풀이
$x^3+3x^2-5x+1=0$에서 $(x-1)(x^2+4x-1)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{5}$
따라서 $a=1$, $b=-2$, $c=5$이므로
$a+b+c=4$

460
상중하

삼차방정식 $x^3-9x^2+13x+23=0$의 세 실근을 α, β, γ라고 할 때, $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$의 값은?

① 5 ② 9 ✓③ 11
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}+1$

풀이
$x^3-9x^2+13x+23=0$에서 $(x+1)(x^2-10x+23)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=5\pm\sqrt{2}$
$\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|=11$

461 교육청 기출
상중하

삼차방정식 $x^3+2x^2-3x-10=0$의 서로 다른 두 허근을 α, β라고 할 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값은?

① -2 ② -3 ✓③ -4
④ -5 ⑤ -6

풀이
$x^3+2x^2-3x-10=0$에서 $(x-2)(x^2+4x+5)=0$
주어진 방정식의 두 허근 α, β는 방정식 $x^2+4x+5=0$의 근이므로
$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=5$
$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(-4)^3-3\times5\times(-4)=-4$

462
상중하

사차방정식 $x^4+3x^3+3x^2-x-6=0$의 두 허근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① -4 ✓② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

풀이
$x^4+3x^3+3x^2-x-6=0$에서 $(x+2)(x-1)(x^2+2x+3)=0$
주어진 방정식의 두 허근 α, β는 방정식 $x^2+2x+3=0$의 근이므로
$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$
$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=(-2)^2-2\times3=-2$

463
상중하

사차방정식 $x^4+2x^3+3x^2-2x-4=0$의 모든 실근의 합을 구하시오. 0

풀이
$x^4+2x^3+3x^2-2x-4=0$에서 $(x+1)(x-1)(x^2+2x+4)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$
따라서 모든 실근의 합은
$(-1)+1=0$

02 공통부분이 있는 사차방정식의 풀이 중요도

464
상중하

방정식 $(x^2-x-3)^2-2(x^2-x)+3=0$의 네 근을 작은 것부터 차례대로 α, β, γ, δ라고 할 때, $\alpha-\beta+\gamma-\delta$의 값은?

✓① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

풀이
$x^2-x=X$로 놓으면
$(X-3)^2-2X+3=0$, $X^2-8X+12=0$
$(X-2)(X-6)=0$ $\therefore X=2$ 또는 $X=6$
(i) $X=2$일 때, $x^2-x=2$이므로 $(x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
(ii) $X=6$일 때, $x^2-x=6$이므로 $(x+2)(x-3)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$
(i), (ii)에서 $\alpha=-2$, $\beta=-1$, $\gamma=2$, $\delta=3$이므로
$\alpha-\beta+\gamma-\delta=-2$

465 내신 기출
상중하

사차방정식 $(x^2-4x+1)(x^2-4x+2)=12$의 서로 다른 두 허근을 α, β라고 할 때, $(\alpha-\overline{\alpha})(\beta-\overline{\beta})$의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

① 2 ✓② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

풀이
$x^2-4x=X$로 놓으면 $(X+1)(X+2)=12$, $X^2+3X-10=0$
$(X+5)(X-2)=0$ $\quad\therefore X=-5$ 또는 $X=2$
(i) $X=-5$일 때, $x^2-4x=-5 \Rightarrow x^2-4x+5=0 \Rightarrow$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.
(ii) $X=2$일 때, $x^2-4x=2 \Rightarrow x^2-4x-2=0 \Rightarrow$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(i), (ii)에서 α, β는 방정식 $x^2-4x+5=0$의 근이므로 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=5$
한편, 계수가 실수인 이차방정식의 한 허근이 α이면 $\overline{\alpha}$도 근이므로 $\overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$
$\therefore (\alpha-\overline{\alpha})(\beta-\overline{\beta})=(\alpha-\beta)(\beta-\alpha)=-(\alpha-\beta)^2$
$=-(\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta=-4^2+4\times5=4$

466 풍쌤 비법 1
상중하

사차방정식 $x(x-1)(x+2)(x+3)=10$의 모든 실근의 곱을 a, 모든 허근의 곱을 b라고 할 때, $a+b$의 값은?

① -9 ② -7 ③ -5
✓④ -3 ⑤ -1

풀이
$x(x-1)(x+2)(x+3)=10$에서 $(x^2+2x)(x^2+2x-3)-10=0$
$x^2+2x=X$로 놓으면 $X(X-3)-10=0$, $X^2-3X-10=0$
$(X+2)(X-5)=0$ $\quad\therefore X=-2$ 또는 $X=5$
(i) $X=-2$일 때, $x^2+2x=-2$
방정식 $x^2+2x+2=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
(ii) $X=5$일 때, $x^2+2x=5$
방정식 $x^2+2x-5=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(i), (ii)에서 모든 실근의 곱은 -5, 모든 허근의 곱은 2이므로 $a=-5$, $b=2$
$\therefore a+b=-3$

03 $x^4+ax^2+b=0$의 꼴의 방정식의 풀이 중요도

467
상중하

사차방정식 $x^4-13x^2+36=0$의 모든 음의 실근의 합은?

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ✓⑤ -5

풀이
$x^4-13x^2+36=0$에서 $x^2=X$로 놓으면
$X^2-13X+36=0$, $(X-4)(X-9)=0$
$\therefore X=4$ 또는 $X=9$
즉, $x^2=4$ 또는 $x^2=9$이므로 $x=\pm2$ 또는 $x=\pm3$
따라서 음의 실근은 -2, -3이므로 모든 음의 실근의 합은
$-2+(-3)=-5$

468
상중하

사차방정식 $x^4-8x^2+4=0$의 네 실근 중 가장 큰 근을 α, 가장 작은 근을 β라고 할 때, $\alpha-\beta$의 값은?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ $2+2\sqrt{2}$ ✓⑤ $2+2\sqrt{3}$

풀이
$x^4-8x^2+4=0$에서 $(x^4-4x^2+4)-4x^2=0$
$(x^2-2)^2-(2x)^2=0$, $(x^2+2x-2)(x^2-2x-2)=0$
$\therefore x^2+2x-2=0$ 또는 $x^2-2x-2=0$
$\therefore x=-1\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}$
따라서 $\alpha=1+\sqrt{3}$, $\beta=-1-\sqrt{3}$이므로
$\alpha-\beta=2+2\sqrt{3}$

469
상중하

사차방정식 $x^4-9x^2+16=0$의 네 근을 α, β, γ, δ라고 할 때, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\delta}$의 값을 구하시오. 0

풀이
$x^4-9x^2+16=0$에서 $(x^4-8x^2+16)-x^2=0$
$(x^2-4)^2-x^2=0$, $(x^2+x-4)(x^2-x-4)=0$
$\therefore x^2+x-4=0$ 또는 $x^2-x-4=0$
$x^2+x-4=0$의 두 근을 α, β라 하고, $x^2-x-4=0$의 두 근을 γ, δ라고 하면
$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-4$, $\gamma+\delta=1$, $\gamma\delta=-4$
$\therefore \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\delta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\dfrac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}=\dfrac{-1}{-4}+\dfrac{1}{-4}=0$

04 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$의 꼴의 방정식의 풀이 중요도

470
상중하

사차방정식 $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$의 두 허근이 $x=\dfrac{a\pm\sqrt{b}i}{2}$일 때, ab의 값은?
(단, a, b는 실수이고, $b>0$이다.)

① -3 ② -2 ③ 1
④ 2 ✓⑤ 3

풀이
$x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누어 정리하면
$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2=0$
$x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면
$X^2-3X+2=0$, $(X-1)(X-2)=0$ $\quad\therefore X=1$ 또는 $X=2$
(i) $X=1$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=1$이므로 $x^2-x+1=0$ $\quad\therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$
(ii) $X=2$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=2$이므로 $x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$ $\quad\therefore x=1$
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 허근은 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$이므로 $a=1$, $b=3$
$\therefore ab=3$

471

상중하

사차방정식 $x^4+5x^3+6x^2+5x+1=0$의 한 실근을 α, 한 허근을 β라고 할 때, $\alpha-\beta+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}$의 값을 구하시오. -3

풀이

$x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누어 정리하면

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓고 풀면 $X=-4$ 또는 $X=-1$

(i) $X=-4$일 때, $x+\frac{1}{x}=-4 \Rightarrow x^2+4x+1=0 \Rightarrow$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $X=-1$일 때, $x+\frac{1}{x}=-1 \Rightarrow x^2+x+1=0 \Rightarrow$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=-4$, $\beta+\frac{1}{\beta}=-1$이므로

$\alpha-\beta+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=-3$

05 근이 주어진 삼·사차방정식

중요도

472

상중하

삼차방정식 $x^3+ax-6=0$의 한 근이 2이다. 이 방정식의 다른 두 근을 α, β라고 할 때, $a+\alpha+\beta$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -5 ② -4 √③ -3 ④ -2 ⑤ -1

풀이

$x^3+ax-6=0$의 한 근이 2이므로

$8+2a-6=0 \qquad \therefore a=-1$

즉, 주어진 방정식은 $x^3-x-6=0$이므로

$(x-2)(x^2+2x+3)=0$

이때 α, β는 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근이므로

$\alpha+\beta=-2$

$\therefore a+\alpha+\beta=-1+(-2)=-3$

473 교육청 기출

상중하

삼차방정식 $x^3+(k+1)x^2+(4k-3)x+k+7=0$은 서로 다른 세 실근 1, α, β를 갖는다. $|\alpha-\beta|$의 값은? (단, k는 상수이다.)

√① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

풀이

$x^3+(k+1)x^2+(4k-3)x+k+7=0$의 한 근이 1이므로

$1+(k+1)+(4k-3)+k+7=0 \qquad \therefore k=-1$

즉, 주어진 방정식은 $x^3-7x+6=0$이므로

$(x-1)(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=2$ 또는 $\alpha=2$, $\beta=-3$이므로

$|\alpha-\beta|=5$

474

상중하

사차방정식 $x^4-3x^3-2x^2+(a+2)x+a=0$의 한 근이 2일 때, 나머지 근 중 가장 큰 근을 α라고 하자. $a+\alpha$의 값은?

① 7 √② $5+\sqrt{3}$ ③ 6 ④ $4+\sqrt{3}$ ⑤ 5

풀이

$x^4-3x^3-2x^2+(a+2)x+a=0$의 한 근이 2이므로

$16-24-8+2(a+2)+a=0 \qquad \therefore a=4$

즉, 주어진 방정식은 $x^4-3x^3-2x^2+6x+4=0$이므로

$(x-2)(x+1)(x^2-2x-2)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}$

따라서 $\alpha=1+\sqrt{3}$이므로

$a+\alpha=5+\sqrt{3}$

475

상중하

사차방정식 $x^4-(k-4)x^3-x^2+(3k-8)x-8=0$의 한 근이 -2일 때, 나머지 세 근 중 두 허근의 합은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 √⑤ 3

풀이

$x^4-(k-4)x^3-x^2+(3k-8)x-8=0$의 한 근이 -2이므로

$16+8(k-4)-4-2(3k-8)-8=0 \qquad \therefore k=6$

즉, 주어진 방정식은 $x^4-2x^3-x^2+10x-8=0$이므로

$(x+2)(x-1)(x^2-3x+4)=0$

이때 주어진 방정식의 두 허근은 이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 근이므로 구하는 두 허근의 합은 3이다.

476 내신 기출

상중하

사차방정식 $x^4-3x^3-x^2+ax+b=0$의 두 근이 -1, 2이다. 이 방정식의 다른 두 근을 α, β라고 할 때, $a+b+\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) 13

풀이

$x^4-3x^3-x^2+ax+b=0$의 두 근이 -1, 2이므로

$1+3-1-a+b=0$에서 $a-b=3$ …… ㉠

$16-24-4+2a+b=0$에서 $2a+b=12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=2$

즉, 주어진 방정식은 $x^4-3x^3-x^2+5x+2=0$이므로

$(x+1)(x-2)(x^2-2x-1)=0$

이때 α, β는 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근이므로

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$

$\therefore a+b+\alpha^2+\beta^2=a+b+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=5+2+2^2-2\times(-1)=13$

06 삼·사차방정식의 근의 판별

중요도

477 풍쌤 비법 ❷

상 중 하

삼차방정식 $x^3-7x^2+(a+10)x-2a=0$의 세 근이 모두 실수가 되도록 하는 자연수 a의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ✓⑤ 6

풀이

$x^3-7x^2+(a+10)x-2a=0$에서 $(x-2)(x^2-5x+a)=0$

이때 주어진 방정식의 세 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-5x+a=0$이 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-5x+a=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-5)^2-4a\ge0$　　$\therefore a\le\frac{25}{4}$

따라서 자연수 a는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.

478

상 중 하

삼차방정식 $x^3-x^2+(k-1)x-k+1=0$이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 갖도록 하는 정수 k의 최솟값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ✓⑤ 2

풀이

$x^3-x^2+(k-1)x-k+1=0$에서 $(x-1)(x^2+k-1)=0$

이때 주어진 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+k-1=0$이 두 개의 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+k-1=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=0-4(k-1)<0$　　$\therefore k>1$

따라서 정수 k의 최솟값은 2이다.

479 내신 기출

상 중 하

삼차방정식 $x^3-x^2+(a-2)x+a=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은?

① -4 ✓② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

풀이

$x^3-x^2+(a-2)x+a=0$에서 $(x+1)(x^2-2x+a)=0$

(i) 방정식 $x^2-2x+a=0$이 $x=-1$을 근으로 갖는 경우

$1+2+a=0$　　$\therefore a=-3$

(ii) 방정식 $x^2-2x+a=0$이 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-a=0$　　$\therefore a=1$

(i), (ii)에서 $a=-3$ 또는 $a=1$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$-3+1=-2$

480 교육청 기출

상 중 하

삼차방정식 $x^3-5x^2+(a+4)x-a=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오. 7

풀이

$x^3-5x^2+(a+4)x-a=0$에서 $(x-1)(x^2-4x+a)=0$

(i) 방정식 $x^2-4x+a=0$이 1과 1이 아닌 실근을 갖는 경우

$1-4+a=0$　　$\therefore a=3$

(ii) 방정식 $x^2-4x+a=0$이 1이 아닌 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-a=0$　　$\therefore a=4$

(i), (ii)에서 $a=3$ 또는 $a=4$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$3+4=7$

481

상 중 하

사차방정식 $x^4+3x^3-(2a+1)x^2-3x+2a=0$이 허근을 가질 때, 정수 a의 최댓값은?

✓① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

풀이

$x^4+3x^3-(2a+1)x^2-3x+2a=0$에서 $(x+1)(x-1)(x^2+3x-2a)=0$

이때 주어진 방정식이 허근을 가지므로 이차방정식 $x^2+3x-2a=0$이 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+3x-2a=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=3^2+8a<0$　　$\therefore a<-\frac{9}{8}$

따라서 정수 a의 최댓값은 -2이다.

482

상 중 하

사차방정식 $(x^2+ax+3)(x^2+ax+4)-2=0$이 실근과 허근을 모두 가질 때, 모든 자연수 a의 값의 곱을 구하시오. 12

풀이

$x^2+ax=X$로 놓으면

$(X+3)(X+4)-2=0$, $X^2+7X+10=0$

$(X+2)(X+5)=0$, $(x^2+ax+2)(x^2+ax+5)=0$

두 이차방정식 $x^2+ax+2=0$, $x^2+ax+5=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라고 하면

$D_1=a^2-8$, $D_2=a^2-20$

(i) $D_1\ge0$, $D_2<0$일 때

$a^2\ge8$, $a^2<20$에서 $8\le a^2<20$

이때 a는 자연수이므로 $a=3$ 또는 $a=4$

(ii) $D_1<0$, $D_2\ge0$일 때

$a^2<8$, $a^2\ge20$을 만족시키는 자연수 a의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=3$ 또는 $a=4$이므로 구하는 곱은

$3\times4=12$

07 근에 대한 관계식이 주어진 경우 중요도

483 교육청 기출 상 중 하

x에 대한 삼차방정식

$$x^3-(2a+1)x^2+(a+1)^2x-(a^2+1)=0$$

의 서로 다른 두 허근을 α, β라고 하자. $\alpha+\beta=8$일 때, $\alpha\beta$의 값은? (단, a는 실수이다.)

① 16 ✓② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

풀이
$x^3-(2a+1)x^2+(a+1)^2x-(a^2+1)=0$에서 $(x-1)(x^2-2ax+a^2+1)=0$
이때 α, β는 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+1=0$의 두 허근이므로
$\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=a^2+1$
한편, $\alpha+\beta=8$이므로 $2a=8$ $\therefore a=4$
$\therefore \alpha\beta=4^2+1=17$

484 상 중 하

삼차방정식 $x^3+(a-3)x^2+2x-a=0$의 두 허근 α, β에 대하여 $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-3$일 때, 실수 a의 값을 구하시오. 3

풀이
$x^3+(a-3)x^2+2x-a=0$에서 $(x-1)\{x^2+(a-2)x+a\}=0$
이때 α, β는 이차방정식 $x^2+(a-2)x+a=0$의 두 허근이므로
$\alpha+\beta=-a+2$, $\alpha\beta=a$
한편, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-3$이므로 $\alpha\beta(\alpha+\beta)=-3$, $a(-a+2)=-3$
$(a+1)(a-3)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=3$ …… ㉠
또, 주어진 방정식이 두 허근을 가지므로 이차방정식 $x^2+(a-2)x+a=0$이 허근을 가져야 한다.
이차방정식 $x^2+(a-2)x+a=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=(a-2)^2-4a<0$ $\therefore a^2-8a+4<0$ …… ㉡
㉠에서 ㉡을 만족시키는 a의 값은 3이다.

485 상 중 하

삼차방정식 $x^3-8x^2+(k+12)x-2k=0$의 서로 다른 세 실근이 직각삼각형의 세 변의 길이일 때, 실수 k의 값은?

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{14}{3}$ ③ 6
④ $\frac{68}{9}$ ✓⑤ $\frac{80}{9}$

풀이
$x^3-8x^2+(k+12)x-2k=0$에서 $(x-2)(x^2-6x+k)=0$
이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 판별식을 D라고 하면 $\frac{D}{4}>0$이고
$4-12+k\neq0$이어야 하므로 $k<8$ 또는 $8<k<9$ …… ㉠
이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 두 실근을 α, β $(0<\alpha<\beta)$라고 하면 $\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=k$
빗변의 길이가 2이면 $\alpha^2+\beta^2=2^2$이므로
$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4$ $\therefore k=16$ (㉠을 만족시키지 않는다.)
빗변의 길이가 β이면 $2^2+\alpha^2=\beta^2$이므로
$(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)=4$ $\therefore \beta-\alpha=\frac{2}{3}$
$\alpha+\beta=6$, $\beta-\alpha=\frac{2}{3}$를 연립하여 풀면 $\alpha=\frac{8}{3}$, $\beta=\frac{10}{3}$이므로 $k=\alpha\beta=\frac{80}{9}$

08 삼차방정식의 근과 계수의 관계 중요도

486 상 중 하

삼차방정식 $x^3-x^2+2x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ −3 (2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$ 2

풀이
$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=1$
(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=1^2-2\times2=-3$
(2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2}{1}=2$

487 내신 기출 상 중 하

삼차방정식 $x^3+x^2-3x-2=0$의 세 근이 α, β, γ일 때, $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$의 값은?

① 2 ② 3 ✓③ 4
④ 5 ⑤ 6

풀이
$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$, $\alpha\beta\gamma=2$
$\therefore (2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
$=8-4\times(-1)+2\times(-3)-2$
$=4$

488 상 중 하

삼차방정식 $x^3-3x^2+x+2=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$의 값을 구하시오. 5

풀이
$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, $\alpha\beta\gamma=-2$
$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(3-\gamma)(3-\alpha)(3-\beta)$
$=27-9(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
$=27-9\times3+3\times1-(-2)$
$=5$

489 교육청 기출

상중하

방정식 $(x-3)(x-1)(x+2)+1=x$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$의 값은?

① 21 ✓② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

풀이

$(x-3)(x-1)(x+2)+1=x$에서 $x^3-2x^2-6x+7=0$

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-6$, $\alpha\beta\gamma=-7$이므로

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$

$=2\{2^2-3\times(-6)\}+3\times(-7)=23$

490

상중하

삼차방정식 $x^3-16x^2+(a+5)x+b=0$의 세 근의 비가 $1:2:5$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. -17

풀이

주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 2α, 5α $(\alpha\neq0)$라고 하면

$\alpha+2\alpha+5\alpha=16$ $\therefore \alpha=2$

따라서 세 근이 2, 4, 10이므로

$2\times4+4\times10+10\times2=a+5$에서 $a=63$

$2\times4\times10=-b$에서 $b=-80$

$\therefore a+b=-17$

491

상중하

삼차방정식 $2x^3-(a+3)x^2+(b^2+2a)x-3b^2=0$의 서로 다른 세 실근의 합이 6일 때, 정수 a, b에 대하여 순서쌍 (a, b)의 개수는?

① 2 ✓② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

풀이

세 실근의 합이 6이므로 $\frac{a+3}{2}=6$ $\therefore a=9$

즉, $2x^3-12x^2+(b^2+18)x-3b^2=0$에서 $(x-3)(2x^2-6x+b^2)=0$

이차방정식 $2x^2-6x+b^2=0$의 판별식을 D라고 하면 $\frac{D}{4}>0$이고

$18-18+b^2\neq0$이어야 하므로 $0<b^2<\frac{9}{2}$

따라서 조건을 만족시키는 정수 b는 -2, -1, 1, 2이므로 순서쌍 (a, b)는 4개이다.

09 삼차방정식의 작성

중요도

492

상중하

삼차방정식 $x^3-2x^2-4x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라고 때, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3+ax^2+bx+c=0$이다. 이때 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① 1 ② 3 ✓③ 5
④ 7 ⑤ 9

풀이

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4$, $\alpha\beta\gamma=1$이므로

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-4}{1}=-4$

$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\times\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2}{1}=2$

$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=1$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3+4x^2+2x-1=0$이므로 $a=4$, $b=2$, $c=-1$ $\therefore a+b+c=5$

493

상중하

삼차방정식 $x^3+x+10=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하시오. $x^3+x-10=0$

풀이

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, $\alpha\beta\gamma=-10$이므로

$(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=2(\alpha+\beta+\gamma)=0$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$

$=(-\gamma)\times(-\alpha)+(-\alpha)\times(-\beta)+(-\beta)\times(-\gamma)=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(-\gamma)\times(-\alpha)\times(-\beta)=-\alpha\beta\gamma=10$

따라서 $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3+x-10=0$

494 내신 기출

상중하

x^3의 계수가 1인 삼차식 $f(x)$에 대하여

$$f(1)=f(3)=f(5)=-2$$

가 성립할 때, 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은?

① -17 ② -15 ③ 0
④ 15 ✓⑤ 17

풀이

$f(1)=f(3)=f(5)=-2$에서 $f(1)+2=f(3)+2=f(5)+2=0$

따라서 삼차방정식 $f(x)+2=0$의 세 근이 1, 3, 5이다.

이때 1, 3, 5를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(1+3+5)x^2+(1\times3+3\times5+5\times1)x-1\times3\times5=0$

$\therefore x^3-9x^2+23x-15=0$

즉, $f(x)+2=x^3-9x^2+23x-15$이므로 $f(x)=x^3-9x^2+23x-17$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 17이다.

495

상 중 하

삼차방정식 $2x^3-x^2-3x+2=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $\alpha+\frac{1}{2}$, $\beta+\frac{1}{2}$, $\gamma+\frac{1}{2}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 4인 삼차방정식을 구하시오. $4x^3-8x^2-x+6=0$

풀이

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{2}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\frac{3}{2}$, $\alpha\beta\gamma=-1$이므로

$\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)+\left(\beta+\frac{1}{2}\right)+\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)=\alpha+\beta+\gamma+\frac{3}{2}=2$

$\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(\beta+\frac{1}{2}\right)+\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)+\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$

$\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)=\alpha\beta\gamma+\frac{1}{2}(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma)+\frac{1}{8}=-\frac{3}{2}$

따라서 $\alpha+\frac{1}{2}$, $\beta+\frac{1}{2}$, $\gamma+\frac{1}{2}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 4인 삼차방정식은

$4\left(x^3-2x^2-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\right)=0$ $\quad\therefore 4x^3-8x^2-x+6=0$

10 삼·사차방정식의 켤레근

중요도

496 내신 기출

상 중 하

삼차방정식 $x^3+4x^2+ax-b=0$의 한 허근이 $-i$일 때, 나머지 두 근의 곱은? (단, a, b는 실수이다.)

① $4i$ ② $\frac{i}{4}$ ③ $-\frac{i}{4}$

④ $-2i$ ✓⑤ $-4i$

풀이

주어진 방정식의 계수가 실수이므로 $-i$가 근이면 i도 근이다.

나머지 한 근을 α라고 하면

$-i+i+\alpha=-4$ $\quad\therefore \alpha=-4$

따라서 나머지 두 근의 곱은

$i\times(-4)=-4i$

497

상 중 하

계수가 실수이고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 3, $1+i$일 때, $f(1)$의 값은?

✓① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

풀이

주어진 방정식의 계수가 실수이므로 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다.

따라서 $f(x)=(x-3)\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}$이므로

$f(1)=(1-3)(1-1-i)(1-1+i)=-2$

498

상 중 하

계수가 실수이고, $2+i$, $1-i$를 근으로 갖는 사차방정식의 x^2의 계수를 m, 상수항을 n이라고 할 때, $\frac{m}{n}$의 값을 구하시오. $\frac{3}{2}$

풀이

주어진 방정식의 계수가 실수이므로 $2+i$, $1-i$가 근이면 $2-i$, $1+i$도 근이다.

이때 $2+i$, $2-i$, $1+i$, $1-i$를 네 근으로 하고 x^4의 계수가 a $(a\neq0)$인 사차방정식은

$a\{x-(2+i)\}\{x-(2-i)\}\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$

$\therefore a(x^4-6x^3+15x^2-18x+10)=0$

따라서 $m=15a$, $n=10a$이므로

$\frac{m}{n}=\frac{15a}{10a}=\frac{3}{2}$

499

상 중 하

사차방정식 $2x^4-(2a-3)x^3+17x^2+11x-2a-5=0$의 한 근이 $3-\sqrt{2}$일 때, 유리수 a의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6

✓④ 8 ⑤ 10

풀이

$2x^4-(2a-3)x^3+17x^2+11x-2a-5=0$에서

$(x+1)\{2x^3-(2a-1)x^2+(2a+16)x-2a-5\}=0$

주어진 방정식의 계수가 유리수이므로 $3-\sqrt{2}$가 근이면 $3+\sqrt{2}$도 근이다.

이때 $3-\sqrt{2}$, $3+\sqrt{2}$는 방정식 $2x^3-(2a-1)x^2+(2a+16)x-2a-5=0$의 근이므로 이 방정식의 나머지 한 근을 α라고 하면

$(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})+\alpha=\frac{2a-1}{2}$에서 $2\alpha=2a-13$ ...... ㉠

$(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})+\alpha(3+\sqrt{2})+\alpha(3-\sqrt{2})=a+8$에서 $6\alpha=a+1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $\alpha=\frac{3}{2}$

500

상 중 하

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $1-\sqrt{3}i$이고 이차방정식 $x^2+cx+3=0$과 오직 하나의 공통인 근을 가질 때, $a+b+c$의 값은?

(단, a, b, c는 실수이고, $c>0$이다.)

① -3 ② -1 ③ 1

④ 3 ✓⑤ 5

풀이

주어진 방정식의 계수가 실수이므로 $1-\sqrt{3}i$가 근이면 $1+\sqrt{3}i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라고 하면

$(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)+\alpha=-a$에서 $2+\alpha=-a$ ...... ㉠

$(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)\alpha+(1-\sqrt{3}i)\alpha=b$에서 $4+2\alpha=b$ ...... ㉡

$(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)\alpha=-c$에서 $4\alpha=-c$ ...... ㉢

한편, 주어진 삼차방정식과 이차방정식의 공통인 근이 1개뿐이므로 공통인 근은 $x=\alpha$이다. 즉, $\alpha^2+c\alpha+3=0$ ...... ㉣

㉢에서 $c=-4\alpha$를 ㉣에 대입하면 $\alpha^2-4\alpha^2+3=0$, $\alpha^2=1$ $\quad\therefore \alpha=\pm1$

(i) $\alpha=1$일 때, ㉠, ㉡, ㉢에서 $a=-3$, $b=6$, $c=-4$

그런데 $c>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha=-1$일 때, ㉠, ㉡, ㉢에서 $a=-1$, $b=2$, $c=4$

(i), (ii)에서 $a=-1$, $b=2$, $c=4$이므로 $a+b+c=5$

11 방정식 $x^3=1$, $x^3=-1$의 허근의 성질 중요도

501 상 중 하

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때, 다음 식을 간단히 하시오.

(1) ω^{909} 1

(2) $\omega+\dfrac{1}{\omega}$ -1

(3) $\omega^{10}+\omega^5+1$ 0

(4) $\omega^5+\dfrac{1}{\omega^5}$ -1

풀이

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore\ \omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

(1) $\omega^{909}=(\omega^3)^{303}=1$

(2) $\omega+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{-\omega}{\omega}=-1$

(3) $\omega^{10}+\omega^5+1=(\omega^3)^3\omega+\omega^3\omega^2+1=\omega+\omega^2+1=0$

(4) $\omega^5+\dfrac{1}{\omega^5}=\omega^3\omega^2+\dfrac{1}{\omega^3\omega^2}=\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{\omega^4+1}{\omega^2}=\dfrac{\omega^3\omega+1}{\omega^2}=\dfrac{\omega+1}{\omega^2}=\dfrac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

502 상 중 하

방정식 $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라고 할 때,

$\dfrac{\omega^2}{1+\omega}+\dfrac{\overline{\omega}}{1+\overline{\omega}^2}$의 값을 구하시오. -2

(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

풀이

$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore\ \omega^2+\omega+1=0$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

$\therefore\ \dfrac{\omega^2}{1+\omega}+\dfrac{\overline{\omega}}{1+\overline{\omega}^2}=\dfrac{\omega^2}{-\omega^2}+\dfrac{\overline{\omega}}{-\overline{\omega}}=-1-1=-2$

503 상 중 하

방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라고 할 때,

$1-\omega+\omega^2-\omega^3+\cdots+\omega^{28}$을 간단히 하면?

① -1 ② 0 ③ 1

④ $-\omega-1$ √⑤ $-\omega+1$

풀이

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore\ \omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$\therefore$ (주어진 식) $=(1-\omega+\omega^2)-\omega^3(1-\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{24}(1-\omega+\omega^2)-\omega^{27}(1-\omega)$

$=0-0+\cdots+0-(\omega^3)^9(1-\omega)$

$=-(-1)^9(1-\omega)=-\omega+1$

504 상 중 하

방정식 $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라고 할 때,

$\dfrac{4}{\omega^{21}+3\omega^{20}+\omega}$를 간단히 하면?

① $\omega+1$ ② ω ③ $\omega-1$

④ $-\omega+1$ √⑤ $-\omega$

풀이

$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$이므로

$\omega^{21}+3\omega^{20}+\omega=(\omega^3)^7+3(\omega^3)^6\omega^2+\omega=(-1)^7+3\times(-1)^6\times\omega^2+\omega$

$=-1+3\omega^2+\omega=-1+3(\omega-1)+\omega$

$=4\omega-4$

$\therefore$ (주어진 식) $=\dfrac{4}{4\omega-4}=\dfrac{1}{\omega-1}=\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{\omega}{\omega^3}=-\omega$

505 상 중 하

방정식 $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라고 할 때, 다음 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

〈보기〉

ㄱ. $\dfrac{1}{\omega^2}+\dfrac{1}{\overline{\omega}^2}=-1$

ㄴ. $1+\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=0$

ㄷ. $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{30}=1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ √⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

ㄱ. $\dfrac{1}{\omega^2}+\dfrac{1}{\overline{\omega}^2}=\dfrac{\omega^2+\overline{\omega}^2}{\omega^2\overline{\omega}^2}=\dfrac{(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}}{(\omega\overline{\omega})^2}=\dfrac{(-1)^2-2\times1}{1^2}=-1$ (참)

ㄴ. $\omega^3=1$에서 $\dfrac{1}{\omega^2}=\omega$이므로 $1+\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=1+\omega^2+\omega=0$ (참)

ㄷ. $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{30}$

$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{27}(1+\omega+\omega^2)+\omega^{30}$

$=1$ (참)

506 내신 기출 상 중 하

방정식 $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라고 하자. 자연수 n에 대하여 $f(n)=\left(1-\dfrac{1}{\omega^2}\right)^n-\left(1+\dfrac{1}{\overline{\omega}}\right)^n$일 때,

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)$의 값을 구하시오. 0

(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

풀이

$\omega^3=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\omega^3=-1$에서 $-\dfrac{1}{\omega^2}=\omega$이고, $\omega\overline{\omega}=1$에서 $\dfrac{1}{\overline{\omega}}=\omega$이므로

$f(n)=\left(1-\dfrac{1}{\omega^2}\right)^n-\left(1+\dfrac{1}{\overline{\omega}}\right)^n=(1+\omega)^n-(1+\omega)^n=0$

$\therefore\ f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=0$

507 내신 기출

상 중 하

방정식 $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라고 할 때,

$$\omega^{7n}+(\omega+1)^{4n}=-1$$

을 만족시키는 30 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오. 20

풀이

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore \omega^{7n}+(\omega+1)^{4n}=\{(\omega^3)^2\omega\}^n+(-\omega^2)^{4n}=\omega^n+\omega^{8n}=\omega^n+\{(\omega^3)^2\omega^2\}^n=\omega^n+\omega^{2n}$

(ⅰ) $n=3k+1$ (k는 음이 아닌 정수)일 때, $\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3k+1}+\omega^{6k+2}=\omega+\omega^2=-1$

(ⅱ) $n=3k+2$ (k는 음이 아닌 정수)일 때, $\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3k+2}+\omega^{6k+4}=\omega^2+\omega=-1$

(ⅲ) $n=3k+3$ (k는 음이 아닌 정수)일 때, $\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3k+3}+\omega^{6k+6}=1+1=2$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 자연수 n의 개수는 $30-10=20$

508

상 중 하

사차방정식 $x^4-6x^3+7x^2-6x+1=0$의 한 허근을 ω라 고 할 때, 다음 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

〈보기〉

ㄱ. $\omega^{100}=\overline{\omega}-1$

ㄴ. $(\omega^2+\omega+1)^{15}+(\omega^2+\omega-1)^{15}=0$

ㄷ. $1+2\omega+3\omega^2+\cdots+9\omega^8=11\omega-2$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

$x^4-6x^3+7x^2-6x+1=0$에서 $(x^2-x+1)(x^2-5x+1)=0$

$\therefore \omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$, $\omega+\overline{\omega}=1$

ㄱ. $\omega^{100}=(\omega^3)^{33}\omega=-\omega=-(1-\overline{\omega})=\overline{\omega}-1$ (참)

ㄴ. $(\omega^2+\omega+1)^{15}+(\omega^2+\omega-1)^{15}=(2\omega)^{15}+(2\omega^2)^{15}=2^{15}\omega^{15}+2^{15}\omega^{30}$
$=-2^{15}+2^{15}=0$ (참)

ㄷ. $1+2\omega+3\omega^2+4\omega^3+5\omega^4+6\omega^5+7\omega^6+8\omega^7+9\omega^8$
$=1+2\omega+3\omega^2-4-5\omega-6\omega^2+7+8\omega+9\omega^2$
$=4+5\omega+6\omega^2=4+5\omega+6(\omega-1)=11\omega-2$ (참)

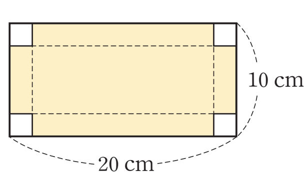
12 삼차방정식의 활용

중요도

509

상 중 하

오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 20 cm, 10 cm인 직사각형 모양의 종이가 있다. 이 종이의 네 귀퉁이에서 한 변의 길이가 x cm인 정사각형을 잘라 내고 점선을 따라 접었더니 부피가 192 cm^{3}인 직육면체 모양의 뚜껑 없는 상자가 되었다. 이때 자연수 x의 값을 구하시오. 2



풀이

$(20-2x)(10-2x)x=192$이므로

$x^3-15x^2+50x-48=0$, $(x-2)(x^2-13x+24)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=\dfrac{13\pm\sqrt{73}}{2}$

그런데 x는 자연수이므로 $x=2$

510

상 중 하

밑면의 반지름의 길이와 높이가 각각 3 m인 원기둥 모양의 물탱크가 있다. 이 물탱크의 밑면의 반지름의 길이를 적당히 늘이고, 같은 길이만큼 높이를 줄여 새로운 원기둥 모양의 물탱크를 만들었더니 물탱크의 부피가 처음과 같았다. 이때 새로운 물탱크의 밑면의 반지름의 길이를 구하시오. $\dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}$ m

풀이

밑면의 반지름의 길이를 x m만큼 늘였다고 하면

$\pi\times3^2\times3=\pi(3+x)^2(3-x)$이므로

$x^3+3x^2-9x=0$, $x(x^2+3x-9)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}$

그런데 $x>0$, $3-x>0$에서 $0<x<3$이므로 $x=\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}$

따라서 새로운 물탱크의 밑면의 반지름의 길이는

$3+\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}$ (m)

511

상 중 하

어떤 정육면체의 밑면의 가로, 세로의 길이를 각각 2 cm, 3 cm씩 늘이고, 높이를 1 cm 줄여서 직육면체를 만들었더니 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\dfrac{5}{2}$배가 되었다. 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 구하시오. 2 cm
(단, 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 자연수이다.)

풀이

처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라고 하면

$(x+2)(x+3)(x-1)=\dfrac{5}{2}x^3$이므로

$3x^3-8x^2-2x+12=0$, $(x-2)(3x^2-2x-6)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{19}}{3}$

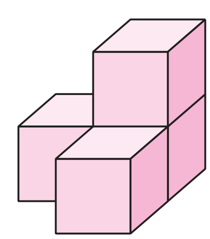
그런데 x는 자연수이므로 $x=2$

따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 2 cm이다.

512 교육청 기출

상 중 하

한 모서리의 길이가 x cm인 정육면체 네 개를 오른쪽 그림과 같이 쌓아 놓은 입체의 부피는 A cm^3, 겉넓이는 B cm^{2}이다. $3A=B+24$일 때, x의 값은?



① $\dfrac{3}{2}$ ✓② 2 ③ $1+\sqrt{2}$

④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

풀이

$3\times4x^3=18x^2+24$이므로

$2x^3-3x^2-4=0$, $(x-2)(2x^2+x+2)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{4}$

그런데 $x>0$이므로 $x=2$

13 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식

중요도 ■■■

513 내신 기출

상 중 하

연립방정식 $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x^2-2y^2=-1 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라고 할 때, $\alpha^2-\beta^2$의 최댓값을 구하시오. 24

풀이

$y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$을 $x^2-2y^2=-1$에 대입하여 정리하면

$x^2-8x+7=0$, $(x-1)(x-7)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=7$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$x=1$, $y=1$ 또는 $x=7$, $y=5$

이므로 $\alpha^2-\beta^2$의 최댓값은 $7^2-5^2=24$

514 교육청 기출

상 중 하

연립방정식 $\begin{cases} 3x-2y=7 \\ 6x^2-xy-2y^2=0 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라고 할 때, $\alpha-\beta$의 값은?

① 1 ② 2 √③ 3
④ 4 ⑤ 5

풀이

$6x^2-xy-2y^2=0$에서 $(3x-2y)(2x+y)=0$

그런데 $3x-2y=7$이므로 $2x+y=0$

$3x-2y=7$, $2x+y=0$을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=-2$이므로 $\alpha-\beta=3$

515

상 중 하

두 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=4 \\ ax^2-y^2=3 \end{cases}$, $\begin{cases} 5x+by=2 \\ x^2+2y^2=22 \end{cases}$ 가 공통인 해를 가질 때, 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 √⑤ 7

풀이

주어진 두 연립방정식의 해는 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=4 \\ x^2+2y^2=22 \end{cases}$ 의 해와 같다.

$x=4-2y$를 $x^2+2y^2=22$에 대입하여 정리하면

$3y^2-8y-3=0$, $(3y+1)(y-3)=0$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{3}$ 또는 $y=3$

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=-2$, $y=3$ 또는 $x=\frac{14}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$

$x=-2$, $y=3$일 때, $a=3$, $b=4$

$x=\frac{14}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$일 때, $a=\frac{1}{7}$, $b=64$

그런데 a, b는 자연수이므로 $a=3$, $b=4$ $\quad\therefore a+b=7$

14 두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식

중요도 ■■■

516

상 중 하

연립방정식 $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 \\ 2x^2+y^2=9 \end{cases}$ 를 만족시키는 정수 x, y에 대하여 xy의 값을 구하시오. 2

풀이

$x^2-xy-2y^2=0$에서 $(x+y)(x-2y)=0$ $\quad\therefore x=-y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=-y$를 $2x^2+y^2=9$에 대입하여 정리하면 $y^2=3$

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$, $y=\mp\sqrt{3}$ (복호동순)

이것은 x, y가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x=2y$를 $2x^2+y^2=9$에 대입하여 정리하면 $y^2=1$

$\therefore x=\pm 2$, $y=\pm 1$ (복호동순)

(i), (ii)에서 $x=\pm 2$, $y=\pm 1$ (복호동순)

$\therefore xy=2$

517 내신 기출

상 중 하

연립방정식 $\begin{cases} x^2+10y^2=26 \\ x^2+16y^2=8xy \end{cases}$ 를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2x-9y$의 최솟값은?

① -2 √② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

풀이

$x^2+16y^2=8xy$에서 $(x-4y)^2=0$ $\quad\therefore x=4y$

이것을 $x^2+10y^2=26$에 대입하여 정리하면 $y^2=1$

$\therefore x=\pm 4$, $y=\pm 1$ (복호동순)

$x=4$, $y=1$일 때, $2x-9y=8-9=-1$

$x=-4$, $y=-1$일 때, $2x-9y=-8+9=1$

따라서 $2x-9y$의 최솟값은 -1이다.

518 교육청 기출

상 중 하

연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ 2x^2-y^2=2 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최댓값은?

√① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5
④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

풀이

$x^2-3xy+2y^2=0$에서 $(x-y)(x-2y)=0$ $\quad\therefore x=y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=y$를 $2x^2-y^2=2$에 대입하여 정리하면 $y^2=2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}$, $y=\pm\sqrt{2}$ (복호동순)

(ii) $x=2y$를 $2x^2-y^2=2$에 대입하여 정리하면 $y^2=\frac{2}{7}$

$\therefore x=\pm\frac{2\sqrt{14}}{7}$, $y=\pm\frac{\sqrt{14}}{7}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 $\alpha^2+\beta^2$의 최댓값은 $(\pm\sqrt{2})^2+(\pm\sqrt{2})^2=4$이다.

519

상 중 하

두 연립방정식 $\begin{cases} ax^2+by^2=-1 \\ 3x^2+xy-y^2=1 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0 \\ 2ax^2-by^2=10 \end{cases}$ 이 공통인 해를 가질 때, 정수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 2

풀이

$2x^2+3xy-2y^2=0$에서 $(x+2y)(2x-y)=0$ $\quad\therefore x=-2y$ 또는 $y=2x$

연립방정식 $\begin{cases} x=-2y \\ 3x^2+xy-y^2=1 \end{cases}$의 해는 $x=\pm\frac{2}{3}$, $y=\mp\frac{1}{3}$ (복호동순)

연립방정식 $\begin{cases} y=2x \\ 3x^2+xy-y^2=1 \end{cases}$의 해는 $x=\pm1$, $y=\pm2$ (복호동순)

$x^2=\frac{4}{9}$, $y^2=\frac{1}{9}$일 때, $a=\frac{27}{4}$, $b=-36$

$x^2=1$, $y^2=4$일 때, $a=3$, $b=-1$

그런데 a, b는 정수이므로 $a=3$, $b=-1$ $\quad\therefore a+b=2$

15 x, y에 대한 대칭식인 연립이차방정식

중요도

520

상 중 하

연립방정식 $\begin{cases} x+y=4 \\ xy+2(x+y)=11 \end{cases}$의 해 중에서 $x>y$인 것을 $x=\alpha$, $y=\beta$라고 할 때, $2\alpha-\beta$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ✓⑤ 5

풀이

$x+y=a$, $xy=b$로 놓으면 $\begin{cases} a=4 \\ b+2a=11 \end{cases}$이므로

$a=4$, $b=3$ $\quad\therefore x+y=4$, $xy=3$

x, y는 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore x=1$, $y=3$ 또는 $x=3$, $y=1$

그런데 $x>y$이므로 $x=3$, $y=1$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=1$이므로 $2\alpha-\beta=5$

521

상 중 하

연립방정식 $\begin{cases} xy+x+y=19 \\ x^2y+xy^2=84 \end{cases}$를 만족시키는 자연수 x, y에 대하여 x^2+y^2의 값은?

① 35 ② 30 ✓③ 25
④ 20 ⑤ 15

풀이

$x+y=a$, $xy=b$ (a, b는 자연수)로 놓으면 $\begin{cases} a+b=19 \\ ab=84 \end{cases}$이므로 a, b는 이차방정식 $t^2-19t+84=0$의 두 근이다.

$(t-7)(t-12)=0$에서 $t=7$ 또는 $t=12$ $\quad\therefore a=7$, $b=12$ 또는 $a=12$, $b=7$

(i) $a=7$, $b=12$, 즉 $x+y=7$, $xy=12$일 때, x, y는 이차방정식 $X^2-7X+12=0$의 두 근이므로 $(X-3)(X-4)=0$ $\quad\therefore X=3$ 또는 $X=4$

$\therefore x=3$, $y=4$ 또는 $x=4$, $y=3$ $\quad\therefore x^2+y^2=25$

(ii) $a=12$, $b=7$, 즉 $x+y=12$, $xy=7$이고, 이를 만족시키는 자연수 x, y는 없다.

(i), (ii)에서 $x^2+y^2=25$

522

상 중 하

두 연립방정식 $\begin{cases} x+y=3 \\ ax^2-y^2=15 \end{cases}$, $\begin{cases} xy=-4 \\ x^2+bxy+y^2=5 \end{cases}$의 공통인 해가 존재하도록 하는 실수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은? (단, $a>b$)

① 8 ② 13 ③ 18
④ 23 ✓⑤ 28

풀이

$x+y=3$, $xy=-4$이므로 x, y는 이차방정식 $t^2-3t-4=0$의 두 근이다.

$(t+1)(t-4)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=4$

따라서 주어진 두 연립방정식의 공통인 해는

$x=-1$, $y=4$ 또는 $x=4$, $y=-1$

(i) $x=-1$, $y=4$일 때, $a=31$, $b=3$

(ii) $x=4$, $y=-1$일 때, $a=1$, $b=3$

이것은 $a>b$를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=31$, $b=3$이므로

$a-b=28$

16 연립이차방정식의 해의 조건

중요도

523

상 중 하

연립방정식 $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x^2-y^2=a \end{cases}$가 오직 한 쌍의 해를 가질 때, 실수 a의 값을 구하시오. $\frac{1}{2}$

풀이

$y=3x-2$를 $x^2-y^2=a$에 대입하여 정리하면 $8x^2-12x+a+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-8(a+4)=0$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

524

상 중 하

연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x^2+xy+y^2=-k-1 \end{cases}$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 최댓값은?

✓① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

풀이

$y=1-2x$를 $x^2+xy+y^2=-k-1$에 대입하여 정리하면 $3x^2-3x+k+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(-3)^2-4\times3(k+2)\geq0$ $\quad\therefore k\leq-\frac{5}{4}$

따라서 정수 k의 최댓값은 -2이다.

525

상 중 하

연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a-1 \\ xy=a^2-3 \end{cases}$ 이 허근을 갖도록 하는 정수 a의 최솟값은?

① 1　　② 2　　③ 3
✓④ 4　　⑤ 5

풀이

x, y는 이차방정식 $t^2-(2a-1)t+a^2-3=0$의 두 근이다.
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$D=(2a-1)^2-4(a^2-3)<0$　　$\therefore a>\frac{13}{4}$
따라서 정수 a의 최솟값은 4이다.

526

상 중 하

연립방정식 $\begin{cases} \underline{(x+2)(y+2)=k}_{\text{㉠}} \\ \underline{(x-3)(y-3)=k}_{\text{㉡}} \end{cases}$가 오직 한 쌍의 실근 $x=\alpha$, $y=\beta$를 가질 때, $k\alpha\beta$의 값은?

✓① $\frac{25}{16}$　　② $\frac{13}{8}$　　③ $\frac{25}{8}$
④ $\frac{15}{4}$　　⑤ $\frac{25}{4}$

풀이

㉠－㉡을 하여 정리하면 $x+y=1$
이것을 ㉡에 대입하여 정리하면 $xy=k-6$
따라서 x, y는 이차방정식 $t^2-t+k-6=0$의 두 근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=1-4(k-6)=0$　　$\therefore k=\frac{25}{4}$
즉, $t^2-t+\frac{1}{4}=0$이므로 $\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=0$, $t=\frac{1}{2}$　　$\therefore x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$
$\therefore k\alpha\beta=\frac{25}{16}$

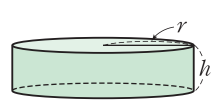
17 연립방정식의 활용

중요도

527 교육청 기출

상 중 하

밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원기둥 모양의 용기에 대하여



$$r+2h=8,\ r^2-2h^2=8$$

일 때, 이 용기의 부피는? (단, 용기의 두께는 무시한다.)

① 16π　　② 20π　　③ 24π
④ 28π　　✓⑤ 32π

풀이

$r=8-2h$를 $r^2-2h^2=8$에 대입하여 정리하면
$h^2-16h+28=0$, $(h-2)(h-14)=0$　　$\therefore h=2$ 또는 $h=14$
이때 $h>0$, $r=8-2h>0$에서 $0<h<4$이므로 $h=2$
이것을 $r=8-2h$에 대입하면 $r=4$
따라서 구하는 용기의 부피는 $\pi\times 4^2\times 2=32\pi$

528

상 중 하

둘레의 길이가 10인 직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라고 하면 $a^2-2ab-3b^2-a+15b-12=0$을 만족시킨다. 이 직사각형의 대각선의 길이는?

① $\sqrt{10}$　　② $2\sqrt{3}$　　✓③ $\sqrt{13}$
④ 4　　⑤ $\sqrt{17}$

풀이

$\begin{cases} a+b=5 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ a^2-2ab-3b^2-a+15b-12=0 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$
㉡에서 $a^2-(2b+1)a-3(b^2-5b+4)=0$
$a^2-(2b+1)a-3(b-1)(b-4)=0$
$(a-3b+3)(a+b-4)=0$　　$\therefore a-3b+3=0$ 또는 $a+b-4=0$
그런데 ㉠에서 $a+b-4\neq 0$이므로
$a-3b+3=0$
이 식과 ㉠을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$
따라서 직사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

529

상 중 하

두 자리 자연수에서 각 자리의 숫자의 제곱의 합은 97이고, 일의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자를 바꾼 수와 처음 수의 합은 143이다. 처음 수를 구하시오. 49
(단, 십의 자리의 숫자보다 일의 자리의 숫자가 더 크다.)

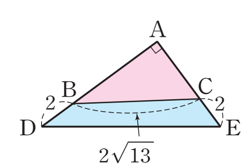
풀이

처음 두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y $(x<y)$라고 하면
$\begin{cases} x^2+y^2=97 \\ (10x+y)+(10y+x)=143 \end{cases}$　$\therefore \begin{cases} x^2+y^2=97 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ y=13-x & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$
㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 $x^2-13x+36=0$
$(x-4)(x-9)=0$　　$\therefore x=4$ 또는 $x=9$
$\therefore x=4, y=9$ 또는 $x=9, y=4$
이때 $x<y$이므로 $x=4$, $y=9$, 즉 처음 수는 49이다.

530 내신 기출

상 중 하

오른쪽 그림에서 두 점 B, C는 각각 직각삼각형 ADE의 두 변 AD, AE 위의 점이다. 삼각형 ABC의 넓이와 사각형 BDEC의 넓이가 같을 때, 삼각형 ABC의 넓이는?



① 8　　② 10　　✓③ 12
④ 18　　⑤ 20

풀이

$\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=b$라고 하면 $a^2+b^2=(2\sqrt{13})^2$　　$\therefore a^2+b^2=52$　　$\cdots\cdots$ ㉠
$\frac{1}{2}ab\times 2=\frac{1}{2}(a+2)(b+2)$　　$\therefore ab=2(a+b)+4$　　$\cdots\cdots$ ㉡
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로 ㉠, ㉡을 대입하면
$52=(a+b)^2-2\{2(a+b)+4\}$
$(a+b)^2-4(a+b)-60=0$, $(a+b+6)(a+b-10)=0$
이때 $a+b>0$이므로 $a+b=10$　　$\therefore ab=2\times 10+4=24$
따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times 24=12$

› 정답과 풀이 075쪽

18 정수 조건의 부정방정식 중요도

531 풍쌤 비법 ③ 상 중 하

방정식 $xy-2x-y-3=0$을 만족시키는 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
√④ 4 ⑤ 5

풀이
$xy-2x-y-3=0$에서 $(x-1)(y-2)=5$

$x-1$	1	5	-1	-5
$y-2$	5	1	-5	-1

따라서 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(2, 7)$, $(6, 3)$, $(0, -3)$, $(-4, 1)$의 4개이다.

532 내신 기출 상 중 하

방정식 $6xy+2x-3y-3=0$을 만족시키는 정수 x, y에 대하여 x^2+y^2의 값을 구하시오. 1

풀이
$6xy+2x-3y-3=0$에서 $(2x-1)(3y+1)=2$

$2x-1$	1	2	-1	-2
$3y+1$	2	1	-2	-1

이 중에서 x, y의 값이 정수인 것은 $2x-1=-1$, $3y+1=-2$일 때, $x=0$, $y=-1$이므로
$x^2+y^2=0^2+(-1)^2=1$

533 상 중 하

방정식 $x^2+2(y-1)x+y^2-5=0$을 만족시키는 양의 정수 x, y에 대하여 $x-y$의 값은?

① 2 √② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

풀이
x에 대한 이차방정식 $x^2+2(y-1)x+y^2-5=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(y-1)^2-(y^2-5)\geq 0$ ∴ $y\leq 3$

(i) $y=1$일 때, $x^2-4=0$이므로 $x=2$ ($\because x>0$)
(ii) $y=2$일 때, $x^2+2x-1=0$이므로 $x=-1\pm\sqrt{2}$
이것은 x가 양의 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.
(iii) $y=3$일 때, $x^2+4x+4=0$이므로
$(x+2)^2=0$ ∴ $x=-2$
이것은 x가 양의 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.
(i)~(iii)에서 $x=2$, $y=1$이므로 $x-y=1$

19 실수 조건의 부정방정식 중요도

534 풍쌤 비법 ③ 상 중 하

방정식 $x^2-4xy+5y^2+2y+1=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?

√① -3 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 3

풀이
$x^2-4xy+5y^2+2y+1=0$에서
$(x^2-4xy+4y^2)+(y^2+2y+1)=0$
∴ $(x-2y)^2+(y+1)^2=0$
x, y는 실수이므로 $x-2y=0$, $y+1=0$
따라서 $x=-2$, $y=-1$이므로
$x+y=-3$

535 상 중 하

방정식 $x^2-4xy+2x+5y^2-10y+10=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하시오. 8

풀이
$x^2-4xy+2x+5y^2-10y+10=0$에서
$x^2-2(2y-1)x+5y^2-10y+10=0$ …… ㉠
㉠의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(2y-1)^2-(5y^2-10y+10)\geq 0$ ∴ $(y-3)^2\leq 0$

이때 y는 실수이므로 $y-3=0$ ∴ $y=3$
$y=3$을 ㉠에 대입하면
$x^2-10x+25=0$, $(x-5)^2=0$ ∴ $x=5$
∴ $x+y=8$

536 상 중 하

방정식 $(x-y)^2+4x-12=0$을 만족시키는 양의 정수 x, y에 대하여 xy의 최댓값은?

① 6 ② 7 ③ 8
√④ 9 ⑤ 10

풀이
$(x-y)^2+4x-12=0$에서 $x^2-2(y-2)x+y^2-12=0$ …… ㉠
이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(y-2)^2-(y^2-12)\geq 0$ ∴ $y\leq 4$

(i) $y=1$일 때, 이것을 ㉠에 대입하면 $x^2+2x-11=0$ ∴ $x=-1\pm 2\sqrt{3}$
이것은 x가 양의 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $y=2$일 때, 이것을 ㉠에 대입하면 $x^2-8=0$ ∴ $x=\pm 2\sqrt{2}$
이것은 x가 양의 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.
(iii) $y=3$일 때, 이것을 ㉠에 대입하면 $x^2-2x-3=0$ ∴ $x=-1$ 또는 $x=3$
x는 양의 정수이므로 $x=3$
(iv) $y=4$일 때, 이것을 ㉠에 대입하면 $x^2-4x+4=0$ ∴ $x=2$
(i)~(iv)에서 $x=3$, $y=3$ 또는 $x=2$, $y=4$
따라서 xy의 최댓값은 $3\times 3=9$

537

삼차방정식 $x^3+x-2=0$의 한 실근을 α라 하고 두 허근을 β, γ라고 할 때, $\{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\}^2$의 값을 구하시오. 16

풀이

$x^3+x-2=0$에서 $(x-1)(x^2+x+2)=0$

$\therefore \alpha=1$ ········ 30 %

β, γ는 $x^2+x+2=0$의 두 근이므로

$\beta+\gamma=-1$, $\beta\gamma=2$ ········ 30 %

$\therefore \{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\}^2=\{(1-\beta)(1-\gamma)\}^2$

$=\{1-(\beta+\gamma)+\beta\gamma\}^2$

$=(1+1+2)^2$

$=16$ ········ 40 %

538

삼차방정식 $x^3-3x^2+x-2=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}+\dfrac{\gamma+\alpha}{\beta}+\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$의 값을 구하시오. $-\frac{3}{2}$

풀이

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, $\alpha\beta\gamma=2$이므로 ········ 30 %

$\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}+\dfrac{\gamma+\alpha}{\beta}+\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}=\dfrac{3-\alpha}{\alpha}+\dfrac{3-\beta}{\beta}+\dfrac{3-\gamma}{\gamma}$ ········ 30 %

$=\dfrac{3}{\alpha}+\dfrac{3}{\beta}+\dfrac{3}{\gamma}-3$

$=\dfrac{3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma}-3$

$=\dfrac{3}{2}-3=-\dfrac{3}{2}$ ········ 40 %

539

삼차방정식 $x^3-x^2-3x-9=0$의 서로 다른 두 허근을 α, β라고 할 때, $\dfrac{\overline{\alpha}^2}{\alpha}+\dfrac{\overline{\beta}^2}{\beta}$의 값을 구하시오. $\frac{10}{3}$

(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

풀이

$x^3-x^2-3x-9=0$에서 $(x-3)(x^2+2x+3)=0$ ········ 30 %

α, β는 $x^2+2x+3=0$의 두 근이므로

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$ ········ 30 %

또, α와 β는 서로 켤레복소수 관계이므로

$\overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$

$\therefore \dfrac{\overline{\alpha}^2}{\alpha}+\dfrac{\overline{\beta}^2}{\beta}=\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{\beta}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(-2)^3-3\times3\times(-2)}{3}=\dfrac{10}{3}$ ········ 40 %

540

실수 a, b, c와 허수 d에 대하여 삼차방정식 $x^3-x^2+ax+b=0$의 세 근이 c, d, $1+i$일 때, $ad+bc$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$) -2

풀이

주어진 방정식의 계수가 실수이므로 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다.

$\therefore d=1-i$ ········ 30 %

$c+(1+i)+(1-i)=1$에서 $c=-1$

$c(1+i)+c(1-i)+(1+i)(1-i)=a$에서 $2c+2=a$ $\quad\therefore a=0$

$c(1+i)(1-i)=-b$에서 $2c=-b$ $\quad\therefore b=2$ ········ 50 %

$\therefore ad+bc=0\times(1-i)+2\times(-1)=-2$ ········ 20 %

541

삼차방정식 $x^3=-1$의 한 허근이 ω일 때, 4ω는 이차방정식 $x^2+ax-8b=0$의 근이다. 실수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. 8

풀이

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

ω, $\overline{\omega}$는 $x^2-x+1=0$의 근이므로

$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$ ········ 40 %

$x^2+ax-8b=0$의 계수가 실수이므로 4ω가 근이면 $4\overline{\omega}$도 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$4\omega+4\overline{\omega}=-a$에서 $a=-4(\omega+\overline{\omega})=-4$

$4\omega\times4\overline{\omega}=-8b$에서 $b=-2\omega\overline{\omega}=-2$ ········ 40 %

$\therefore ab=-4\times(-2)=8$ ········ 20 %

542

연립방정식 $\begin{cases} x-y=a \\ x^2+3y^2=12 \end{cases}$가 오직 한 쌍의 해 $x=\alpha$, $y=\beta$를 가질 때, $a+\alpha+\beta$의 값을 구하시오. (단, $a>0$) 6

풀이

$x=y+a$를 $x^2+3y^2=12$에 대입하여 정리하면

$4y^2+2ay+a^2-12=0$ ········ 20 %

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-4(a^2-12)=0$, $a^2=16$ $\quad\therefore a=4$ ($\because a>0$) ········ 40 %

$4y^2+8y+4=0$, $4(y+1)^2=0$ $\quad\therefore y=-1$

$x=-1+4=3$ ········ 30 %

따라서 $\alpha=3$, $\beta=-1$이므로

$a+\alpha+\beta=4+3+(-1)=6$ ········ 10 %

정답과 풀이 078쪽

543

방정식 $(x^2-5x+6)(x^2-3x+2)=42$의 한 실근을 α, 한 허근을 β라고 할 때, $\alpha^2-4\alpha-\beta^2+4\beta$의 값은?

① -13 ② -7 ③ -1
④ 7 ⑤ 13

풀이
$(x^2-5x+6)(x^2-3x+2)=42$에서
$(x-2)^2(x-3)(x-1)-42=0$, $(x^2-4x+4)(x^2-4x+3)-42=0$
$x^2-4x=X$로 놓으면 $(X+4)(X+3)-42=0$, $X^2+7X-30=0$
$(X+10)(X-3)=0$ $\therefore X=-10$ 또는 $X=3$
(i) $X=-10$일 때, $x^2-4x=-10$ $\therefore x^2-4x+10=0$
이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
(ii) $X=3$일 때, $x^2-4x=3$ $\therefore x^2-4x-3=0$
이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(i), (ii)에서 $\alpha^2-4\alpha=3$, $\beta^2-4\beta=-10$이므로
$\alpha^2-4\alpha-\beta^2+4\beta=(\alpha^2-4\alpha)-(\beta^2-4\beta)=13$

544

x에 대한 사차방정식 $x^4-(2a-5)x^2+2=0$이 서로 다른 네 실근 α, β, γ, δ $(\alpha<\beta<\gamma<\delta)$를 갖는다. $\alpha^2+\beta^2=3$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. 4

풀이
$x^4-(2a-5)x^2+2=0$의 한 실근이 $x=\alpha$이면 $x=-\alpha$도 근이 되므로 주어진 사차방정식은 양의 실근 2개, 음의 실근 2개를 갖는다.
즉, 서로 다른 네 실근을 α, β, $-\beta(=\gamma)$, $-\alpha(=\delta)$ $(\alpha<\beta<0)$로 놓을 수 있다.
$x^2=X$로 놓으면 주어진 사차방정식은
$X^2-(2a-5)X+2=0$
이 이차방정식의 두 근은 α^2, β^2이므로
$\alpha^2+\beta^2=2a-5$
이때 $\alpha^2+\beta^2=3$이므로
$2a-5=3$ $\therefore a=4$

545 교육청 기출

x에 대한 삼차방정식 $(x-a)\{x^2+(1-3a)x+4\}=0$이 서로 다른 세 실근 1, α, β를 가질 때, $\alpha\beta$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

풀이
(i) 1이 $x-a=0$의 근일 경우
$a=1$이므로 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2-2x+4)=0$
이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-4=-3<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.
이것은 주어진 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 갖는다는 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) 1이 $x^2+(1-3a)x+4=0$의 근일 경우
$a=2$이므로 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2-5x+4)=0$
$(x-2)(x-1)(x-4)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$
(i), (ii)에서 $\alpha=2$, $\beta=4$ 또는 $\alpha=4$, $\beta=2$이므로
$\alpha\beta=8$

546

삼차방정식 $x^3-2x^2+4x-4=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $(\alpha^2-\alpha+3)(\beta^2-\beta+3)(\gamma^2-\gamma+3)$의 값은?

① -1 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

풀이
$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=4$
x^3-2x^2+4x-4를 x^2-x+3으로 나누면 몫은 $x-1$, 나머지는 -1이다.
$\therefore x^3-2x^2+4x-4=(x^2-x+3)(x-1)-1$
이때 $x^3-2x^2+4x-4=0$이므로 $(x^2-x+3)(x-1)=1$
$\therefore (\alpha^2-\alpha+3)(\alpha-1)=1$, $(\beta^2-\beta+3)(\beta-1)=1$, $(\gamma^2-\gamma+3)(\gamma-1)=1$
$(\alpha^2-\alpha+3)(\beta^2-\beta+3)(\gamma^2-\gamma+3)=k$라 하고 양변에 $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$을 곱하면
$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)(\alpha^2-\alpha+3)(\beta^2-\beta+3)(\gamma^2-\gamma+3)$
$=(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)k$
$1=\{\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1\}k$
$1=(4-4+2-1)k$ $\therefore k=1$

547 교육청 기출

세 실수 a, b, c에 대하여 삼차다항식

$$P(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) x에 대한 삼차방정식 $P(x)=0$은 한 실근과 서로 다른 두 허근을 갖고, 서로 다른 두 허근의 곱은 5이다.
> (나) x에 대한 삼차방정식 $P(3x-1)=0$은 한 근 0과 서로 다른 두 허근을 갖고, 서로 다른 두 허근의 합은 2이다.

$a+b+c$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

풀이
방정식 $P(x)=0$의 한 실근을 α, 서로 다른 두 허근을 β, γ라고 하면 조건 (가)에서
$\beta\gamma=5$ …… ㉠
방정식 $P(3x-1)=0$의 한 실근은 $\frac{\alpha+1}{3}$이고 두 허근은 $\frac{\beta+1}{3}$, $\frac{\gamma+1}{3}$이므로
조건 (나)에서 $\frac{\alpha+1}{3}=0$, $\frac{\beta+1}{3}+\frac{\gamma+1}{3}=2$ $\therefore \alpha=-1$, $\beta+\gamma=4$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 α, β, γ를 세 근으로 하고 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식은
$(x+1)(x^2-4x+5)=0$
$\therefore P(x)=(x+1)(x^2-4x+5)=x^3-3x^2+x+5$
따라서 $a=-3$, $b=1$, $c=5$이므로
$a+b+c=3$

548

계수가 실수인 삼차식 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 다음을 모두 만족시킬 때, 삼차방정식 $f(2x)=0$의 세 근의 곱은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

> (가) $f(x)$는 $x-4$로 나누어떨어진다.
> (나) 삼차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $2i$이다.

① 1 ✓② 2 ③ 4
④ 8 ⑤ 16

풀이
조건 (가), (나)에서 방정식 $f(x)=0$의 세 근은
$x=4$ 또는 $x=2i$ 또는 $x=-2i$
방정식 $f(2x)=0$에서
$2x=4$ 또는 $2x=2i$ 또는 $2x=-2i$
$\therefore x=2$ 또는 $x=i$ 또는 $x=-i$
따라서 세 근의 곱은 $2\times i\times(-i)=2$

549

계수가 모두 실수이고 삼차항의 계수가 1인 삼차식 $P(x)$에 대하여 방정식 $P(x)=0$의 한 근은 $1+2i$이다. 방정식 $P(-2x+3)=0$의 세 근의 합이 5일 때, $P(1)$의 값은?

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ✓⑤ 16

풀이
방정식 $P(x)=0$의 계수가 실수이므로 $1+2i$가 근이면 $1-2i$도 근이다.
방정식 $P(x)$의 나머지 한 근을 a라고 하면 방정식 $P(-2x+3)=0$에서
$-2x+3=1+2i$ 또는 $-2x+3=1-2i$ 또는 $-2x+3=a$
$\therefore x=1-i$ 또는 $x=1+i$ 또는 $x=\frac{3-a}{2}$
방정식 $P(-2x+3)=0$의 세 근의 합이 5이므로
$(1-i)+(1+i)+\frac{3-a}{2}=5 \qquad \therefore a=-3$
따라서 $P(x)=(x-1-2i)(x-1+2i)(x+3)$이므로
$P(1)=(-2i)\times 2i\times 4=16$

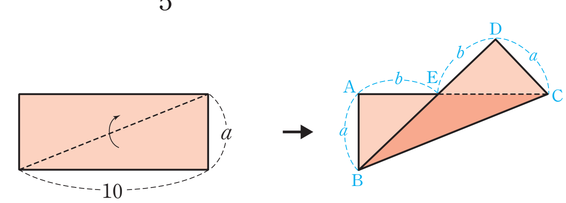
550

다항식 $f(x)=x^2+x+1$에 대하여 $f(x^{12})$을 $f(x)$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. 3

풀이
$f(x^{12})$을 $f(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 실수)라고 하면
$f(x^{12})=f(x)Q(x)+ax+b$ …… ㉠
방정식 $f(x)=0$의 한 근을 ω라고 하면 $\omega^2+\omega+1=0$
양변에 $\omega-1$을 곱하면 $\omega^3-1=0 \qquad \therefore \omega^3=1$
$\therefore \omega^{12}=(\omega^3)^4=1$
㉠의 양변에 $x=\omega$를 대입하면
$f(\omega^{12})=f(\omega)Q(\omega)+a\omega+b$
$\therefore f(1)=a\omega+b$
이때 $f(1)=1+1+1=3$이고, $\omega=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$이므로
$\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}a+b=3$, $\left(-\frac{a}{2}+b\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}ai=3$
$\therefore a=0,\ b=3$
따라서 구하는 나머지는 3이다.

551 도전! 1등급

다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 10, a인 직사각형 모양의 종이를 대각선을 따라 접었더니 겹쳐진 부분의 넓이가 $\frac{58}{5}$이었다. a의 값은? (단, $0<a<6$)



① 1 ② 2 ③ 3
✓④ 4 ⑤ 5

풀이
$\triangle ABE\equiv\triangle DCE$ (ASA 합동)
따라서 $\overline{AE}=\overline{DE}=b$라고 하면 $\overline{EC}=10-b$
직각삼각형 DCE에서
$a^2+b^2=(10-b)^2 \qquad \therefore b=5-\frac{1}{20}a^2$ …… ㉠
한편, $\triangle BCE=\frac{1}{2}\times(10-b)\times a=\frac{58}{5}$이므로
$5(10-b)a=116$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $a^3+100a-464=0$
$(a-4)(a^2+4a+116)=0$
이때 방정식 $a^2+4a+116=0$은 실근을 갖지 않고, $0<a<6$이므로
$a=4$

› 정답과 풀이 079쪽

552

연립방정식 $\begin{cases} |x-2y|=3 \\ |x^2-4y^2|=12 \end{cases}$ 를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2x+8y$의 최댓값을 구하시오. 15

풀이

$|x^2-4y^2|=12$에서 $|x+2y||x-2y|=12$

이때 $|x-2y|=3$이므로 $|x+2y|=4$

$|x-2y|=3$에서 $x-2y=-3$ ⋯⋯ ㉠ 또는 $x-2y=3$ ⋯⋯ ㉡

$|x+2y|=4$에서 $x+2y=-4$ ⋯⋯ ㉢ 또는 $x+2y=4$ ⋯⋯ ㉣

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-\frac{7}{2}$, $y=-\frac{1}{4}$ $\quad\therefore 2x+8y=-9$ ⋯⋯ ㉤

㉠, ㉣을 연립하여 풀면 $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{7}{4}$ $\quad\therefore 2x+8y=15$ ⋯⋯ ㉥

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{7}{4}$ $\quad\therefore 2x+8y=-15$ ⋯⋯ ㉦

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $x=\frac{7}{2}$, $y=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore 2x+8y=9$ ⋯⋯ ㉧

㉤~㉧에서 $2x+8y$의 최댓값은 15이다.

553

실수 x, y에 대하여

$$<x,\ y>=\begin{cases} x & (x\geq y) \\ -y & (x<y) \end{cases}$$

로 정의하자. 연립방정식 $\begin{cases} 2x-4y^2=<x,\ y> \\ x-y+5=<x,\ y> \end{cases}$ 의 해가 $x=\alpha$, $y=\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① 101 ② 102 ③ 103
④ 104 ✓⑤ 105

풀이

(ⅰ) $x\geq y$일 때, 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} 2x-4y^2=x \\ x-y+5=x \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x-4y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ -y+5=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=5$

이것을 ㉠에 대입하면 $x=100$

(ⅱ) $x<y$일 때, 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} 2x-4y^2=-y \\ x-y+5=-y \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} 2x+y-4y^2=0 & \cdots\cdots ㉢ \\ x+5=0 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉣에서 $x=-5$

이것을 ㉢에 대입하여 정리하면

$4y^2-y+10=0$ $\quad\therefore y=\frac{1\pm\sqrt{159}i}{8}$

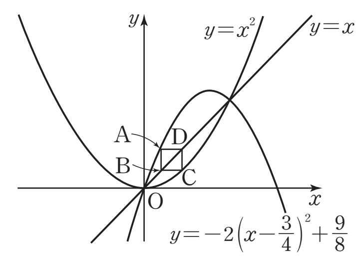
이것은 y가 실수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\alpha=100$, $\beta=5$이므로

$\alpha+\beta=105$

554

다음 그림에서 두 점 A, C는 각각 이차함수 $y=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$, $y=x^2$의 그래프 위에 있고, 두 점 B, D는 직선 $y=x$ 위에 있다. 사각형 ABCD가 정사각형일 때, 점 C의 x좌표는 $\frac{m+\sqrt{n}}{2}$이다. 유리수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은? (단, $n>0$)



✓① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

풀이

$B(a,\ a)$, $D(b,\ b)$ $(a<b)$라고 하면 $A(a,\ b)$, $C(b,\ a)$

$\therefore \begin{cases} b=-2a^2+3a & \cdots\cdots ㉠ \\ a=b^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 $2b^4-3b^2+b=0$, $b(b-1)(2b^2+2b-1)=0$

$\therefore b=0$ 또는 $b=1$ 또는 $b=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

이것을 ㉡에 각각 대입하면 $a=0$ 또는 $a=1$ 또는 $a=\frac{2\mp\sqrt{3}}{2}$ (복호동순)

이때 $a<b$이므로 $a=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$, $b=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

따라서 $\frac{m+\sqrt{n}}{2}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$이고 m, n은 유리수이므로

$m=-1$, $n=3$ $\quad\therefore m+n=2$

555 도전! 1등급

삼차방정식 $x^3-x^2+(3a-a^2)x-2a^2=0$이 서로 다른 세 정수인 근을 가질 때, 모든 a의 값의 합은?

① 14 ② 16 ③ 18
✓④ 20 ⑤ 22

풀이

$x^3-x^2+(3a-a^2)x-2a^2=0$에서 $(x-a)\{x^2+(a-1)x+2a\}=0$

방정식 $x^2+(a-1)x+2a=0$은 $x\neq a$인 서로 다른 두 정수인 근을 가져야 한다.

$x^2+(a-1)x+2a=0$의 근이 a가 되면 안되므로

$a^2+(a-1)a+2a\neq0$, $a(2a+1)\neq0$ $\quad\therefore a\neq0$이고 $a\neq-\frac{1}{2}$

$x^2+(a-1)x+2a=0$의 정수인 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=-a+1$ ⋯⋯ ㉠

$\alpha\beta=2a$ ⋯⋯ ㉡

㉠$\times2+$㉡을 하면 $2\alpha+2\beta+\alpha\beta=2$, $(\alpha+2)(\beta+2)=6$

따라서 정수 α, β의 순서쌍 $(\alpha,\ \beta)$는

$(-1,\ 4)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$, $(4,\ -1)$, $(-3,\ -8)$, $(-4,\ -5)$, $(-5,\ -4)$, $(-8,\ -3)$

이때 $\alpha\beta$의 값은 -4 또는 0 또는 20 또는 24이므로 이것을 ㉡에 각각 대입하면

$a=-2$ 또는 $a=0$ 또는 $a=10$ 또는 $a=12$

그런데 $a\neq0$이므로 모든 a의 값의 합은 $-2+10+12=20$

08 일차부등식

1 부등식의 기본 성질

실수 a, b, c에 대하여

① $a>b$, $b>c$이면 $a>c$

② $a>b$이면 $a+c>b+c$, $a-c>b-c$

③ $a>b$, $c>0$이면 $ac>bc$, $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$

④ $a>b$, $c<0$이면 $ac<bc$, $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$

부등식의 양변에 음수를 곱하거나 양변을 음수로 나누면 부등호의 방향이 바뀐다.

참고 허수에서는 대소 관계를 생각할 수 없으므로 부등식에 포함된 문자는 모두 실수로 생각한다.

2 부등식 $ax>b$의 풀이

부등식 $ax>b$의 해는

① $a>0$일 때, $x>\dfrac{b}{a}$

② $a<0$일 때, $x<\dfrac{b}{a}$

③ $a=0$일 때, $\begin{cases} b\geq 0\text{이면 해는 없다.} \\ b<0\text{이면 해는 모든 실수이다.} \end{cases}$

3 연립일차부등식

(1) 연립부등식과 연립일차부등식

두 개 이상의 부등식을 한 쌍으로 묶어서 나타낸 것을 연립부등식이라 하고, 각각의 부등식이 일차부등식인 연립부등식을 연립일차부등식이라고 한다.

(2) 연립일차부등식의 해

연립부등식에서 두 부등식을 동시에 만족시키는 미지수의 값의 범위를 연립부등식의 해라 하고, 연립부등식의 해를 구하는 것을 연립부등식을 푼다고 한다.

(3) 연립일차부등식의 풀이 순서

[1단계] 각각의 일차부등식을 푼다.

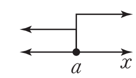
[2단계] 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타낸다.

[3단계] 공통부분을 찾아 주어진 연립부등식의 해를 구한다.

참고 특수한 해를 갖는 연립일차부등식

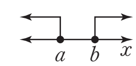
(1) 해가 한 개인 경우

$\begin{cases} x\geq a \\ x\leq a \end{cases}$이면 해는 $x=a$

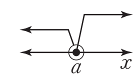


(2) 해가 없는 경우

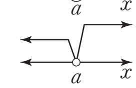
① $\begin{cases} x\leq a \\ x\geq b \end{cases}$ $(a<b)$이면 해는 없다.



② $\begin{cases} x<a \\ x\geq a \end{cases}$이면 해는 없다.



③ $\begin{cases} x<a \\ x>a \end{cases}$이면 해는 없다.



4 $A<B<C$의 꼴의 부등식

$A<B<C$의 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$의 꼴로 바꾸어 푼다.

주의 $A<B<C$의 꼴의 부등식을 $\begin{cases} A<B \\ A<C \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} A<C \\ B<C \end{cases}$의 꼴로 바꾸어 풀지 않도록 주의한다.

5 절댓값 기호를 포함한 부등식

(1) $a>0$일 때

① $|x|<a$의 해는 $-a<x<a$

② $|x|>a$의 해는 $x<-a$ 또는 $x>a$

(2) 절댓값 기호를 포함한 부등식의 풀이 순서

[1단계] 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나눈다.

[2단계] 각 범위에서 절댓값 기호를 없앤 후 식을 정리하여 해를 구한다.

[3단계] [2단계]에서 구한 해를 모두 합친 x의 값의 범위를 구한다.

문제를 풀 때 유용한 풍쌤 비법

❶ 절댓값 기호가 두 개인 부등식

두 일차식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(a)=0$, $g(b)=0$ $(a<b)$일 때, $|f(x)|+|g(x)|<c$의 꼴의 부등식

⇨ x의 값의 범위를 $x<a$, $a\leq x<b$, $x\geq b$로 나누어 푼다.

정답과 풀이 081쪽

01 부등식 $ax>b$의 풀이 중요도

556 상중하

$a<0$, $b>0$일 때, 다음 x에 대한 부등식을 푸시오.

(1) $2ax-5a>ax+4a$ $x<9$

(2) $bx+6a<2ax+3b$ $x<3$

풀이

(1) $2ax-5a>ax+4a$에서 $ax>9a$

이때 $a<0$이므로 $x<9$

(2) $bx+6a<2ax+3b$에서 $(b-2a)x<3(b-2a)$

이때 $b-2a>0$이므로 $x<3$

557 상중하

부등식 $a^2x+2x+1<a(3x+1)$이 모든 실수 x에 대하여 성립할 때, 상수 a의 값을 구하시오. 2

풀이

$a^2x+2x+1<a(3x+1)$에서 $(a-1)(a-2)x<a-1$

이 부등식의 해가 모든 실수이므로 $(a-1)(a-2)=0$, $a-1>0$

$(a-1)(a-2)=0$에서 $a=1$ 또는 $a=2$ …… ㉠

$a-1>0$에서 $a>1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$

558 상중하

부등식 $(2a-b)x\ge a+b$의 해가 없을 때, 부등식 $(a+3b)x-4a-5b>0$의 해는? (단, a, b는 실수이다.)

① $x>-2$ ② $x<-2$ ✓③ $x>2$
④ $x<2$ ⑤ $-2<x<2$

풀이

$(2a-b)x\ge a+b$의 해가 없으므로 $2a-b=0$, $a+b>0$

$2a-b=0$에서 $b=2a$이므로 이것을 $a+b>0$에 대입하면 $3a>0$ $\therefore a>0$

$b=2a$를 $(a+3b)x-4a-5b>0$에 대입하면

$7ax-14a>0$, $7ax>14a$

이때 $a>0$이므로 $x>2$

559 상중하

$\dfrac{b}{2a}=1$일 때, $(4x-3)a>(x+2)b+1$의 해가 $x>4$이다. 부등식 $ax-4<bx+1$을 만족시키는 정수 x의 최솟값은? (단, a, b는 상수이다.)

✓① -4 ② -5 ③ -6
④ -7 ⑤ -8

풀이

$b=2a$를 $(4x-3)a>(x+2)b+1$에 대입하여 정리하면 $2ax>7a+1$

이 부등식의 해가 $x>4$이므로 $2a>0$ $\therefore x>\dfrac{7a+1}{2a}$

즉, $\dfrac{7a+1}{2a}=4$이므로 $a=1$, $a=1$을 $b=2a$에 대입하면 $b=2$

부등식 $ax-4<bx+1$, 즉 $x-4<2x+1$에서 $x>-5$

따라서 정수 x의 최솟값은 -4이다.

02 연립일차부등식의 풀이 중요도

560 교육청 기출 상중하

연립부등식 $\begin{cases} x+6\le 4x \\ 3x+4<x+16 \end{cases}$을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
✓④ 4 ⑤ 5

풀이

$x+6\le 4x$에서 $x\ge 2$

$3x+4<x+16$에서 $x<6$

따라서 연립부등식의 해는

$2\le x<6$

이므로 정수 x는 2, 3, 4, 5의 4개이다.

561 상중하

연립부등식 $\begin{cases} 3x+7>-2-(x+7) \\ 2(x+1)-9\le 3(x-1)+1 \end{cases}$을 만족시키는 가장 작은 정수 x의 값은?

✓① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

풀이

$3x+7>-2-(x+7)$에서 $x>-4$

$2(x+1)-9\le 3(x-1)+1$에서 $x\ge -5$

따라서 연립부등식의 해는

$x>-4$

이므로 가장 작은 정수 x의 값은 -3이다.

562 내신 기출 상중하

연립부등식 $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}>\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{6} \\ 0.5x-1.1<0.3x \end{cases}$를 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은?

① 10 ② 11 ✓③ 12
④ 13 ⑤ 14

풀이

$\dfrac{x-1}{2}>\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{6}$의 양변에 6을 곱하여 풀면 $x>2$

$0.5x-1.1<0.3x$의 양변에 10을 곱하여 풀면 $x<\dfrac{11}{2}$

따라서 연립부등식의 해는

$2<x<\dfrac{11}{2}$

이므로 모든 자연수 x의 값의 합은 $3+4+5=12$

563
상 중 하

연립부등식 $\begin{cases} \frac{3x+2}{12} \le \frac{x}{2} \\ 5-2(x-4) > -x+10 \end{cases}$ 의 해가 $a \le x < b$

일 때, 다음 중 부등식 $ax < b$의 해가 아닌 것은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 √⑤ 5

풀이
$\frac{3x+2}{12} \le \frac{x}{2}$의 양변에 12를 곱하여 풀면 $x \ge \frac{2}{3}$
$5-2(x-4) > -x+10$을 풀면 $x<3$
따라서 연립부등식의 해는 $\frac{2}{3} \le x < 3$이므로 $a=\frac{2}{3}$, $b=3$
부등식 $ax<b$, 즉 $\frac{2}{3}x<3$의 해는 $x<\frac{9}{2}$이므로 해가 아닌 것은 ⑤이다.

03 $A<B<C$의 꼴의 부등식
중요도

564
상 중 하

다음 부등식을 푸시오.

(1) $-x+3<3x-1 \le 2x+5$ $1<x\le 6$

(2) $x-6 \le 2x-3 < -3x+7$ $-3 \le x < 2$

풀이
(1) $\begin{cases} -x+3<3x-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-1 \le 2x+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $x>1$, ㉡에서 $x \le 6$이므로 주어진 부등식의 해는 $1<x\le 6$
(2) $\begin{cases} x-6 \le 2x-3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-3<-3x+7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $x \ge -3$, ㉡에서 $x<2$이므로 주어진 부등식의 해는 $-3 \le x < 2$

565
상 중 하

부등식 $2x-9<3(x-2)<-4(x+3)+6$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은?

① -6 √② -3 ③ -1
④ 1 ⑤ 3

풀이
$\begin{cases} 2x-9<3(x-2) & \cdots\cdots ㉠ \\ 3(x-2)<-4(x+3)+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $x>-3$, ㉡에서 $x<0$이므로 주어진 부등식의 해는 $-3<x<0$
따라서 모든 정수 x의 값의 합은 $-2+(-1)=-3$

566 내신 기출
상 중 하

부등식 $0.4x-0.6 \le -\frac{1}{2}x+0.3 < \frac{1}{5}x+1.7$의 해가 $a<x\le b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. -1

풀이
$\begin{cases} 0.4x-0.6 \le -\frac{1}{2}x+0.3 & \cdots\cdots ㉠ \\ -\frac{1}{2}x+0.3 < \frac{1}{5}x+1.7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠, ㉡의 양변에 10을 곱하여 풀면 각각 $x \le 1$, $x>-2$이므로 주어진 부등식의 해는 $-2<x\le 1$
따라서 $a=-2$, $b=1$이므로 $a+b=-1$

567
상 중 하

부등식 $\frac{x+2}{4} \le \frac{5-x}{2} \le \frac{-2x+7}{3}$을 만족시키는 x에 대하여 $A=-x+6$일 때, A의 최솟값은?

① -1 ② 3 √③ 7
④ 10 ⑤ 13

풀이
$\begin{cases} \frac{x+2}{4} \le \frac{5-x}{2} & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{5-x}{2} \le \frac{-2x+7}{3} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠의 양변에 4를 곱하여 풀면 $x \le \frac{8}{3}$, ㉡의 양변에 6을 곱하여 풀면 $x \le -1$
따라서 주어진 부등식의 해는 $x \le -1$
이때 $-x+6 \ge 7$이므로 $A \ge 7$
따라서 A의 최솟값은 7이다.

04 특수한 해를 갖는 연립일차부등식
중요도

568
상 중 하

다음 연립부등식 중 해가 없는 것은?

① $\begin{cases} x+5>8 \\ 2x-3<11 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 5x+1>3(x-1) \\ x+2 \ge -4x+7 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 3(x-7) \le -x+3 \\ 2(x-9) \ge 3(4-x) \end{cases}$ √④ $\begin{cases} 6x-5<-(3x+2) \\ 7-5(x-1) \le 6-2x \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} \frac{3}{4}(x+4) < -\frac{1}{6}x-8 \\ 0.3x-0.6 \ge 0.4x \end{cases}$

풀이
① $3<x<7$ ② $x \ge 1$ ③ $x=6$
④ 해는 없다. ⑤ $x<-12$

569
상 중 하

연립부등식 $\begin{cases} 5x-6 \ge 2x+3 \\ \frac{x}{6}-\frac{5}{4} > \frac{x}{2}+\frac{5}{12} \end{cases}$ 를 풀면?

① $x \le 3$ ② $3 \le x < 5$ ③ $x>5$
√④ 해는 없다. ⑤ 모든 실수

풀이
$5x-6 \ge 2x+3$을 풀면 $x \ge 3$
$\frac{x}{6}-\frac{5}{4} > \frac{x}{2}+\frac{5}{12}$의 양변에 12를 곱하여 풀면 $x<-5$
따라서 연립부등식의 해는 없다.

570

상 중 하

부등식 $\frac{1}{2}x-1\le 2-x\le \frac{4-2x}{3}$를 푸시오. $x=2$

풀이

$\begin{cases} \frac{1}{2}x-1\le 2-x & \cdots\cdots ㉠ \\ 2-x\le \frac{4-2x}{3} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 양변에 2를 곱하여 풀면 $x\le 2$
㉡의 양변에 3을 곱하여 풀면 $x\ge 2$
따라서 주어진 부등식의 해는 $x=2$

05 해가 주어진 연립일차부등식

중요도

571 교육청 기출

상 중 하

x에 대한 연립부등식 $\begin{cases} x-1>8 \\ 2x-16\le x+a \end{cases}$의 해가 $b<x\le 28$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 21

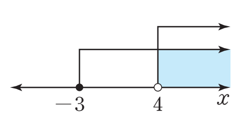
풀이

$x-1>8$에서 $x>9$
$2x-16\le x+a$에서 $x\le a+16$
연립부등식의 해가 $b<x\le 28$이므로
$9=b$, $a+16=28$ $\therefore a=12, b=9$
$\therefore a+b=21$

572

상 중 하

연립부등식 $\begin{cases} -x-2<2a \\ 4(x+1)\ge 3x+b \end{cases}$의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같을 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)



✓① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

풀이

$-x-2<2a$에서 $x>-2a-2$
$4(x+1)\ge 3x+b$에서 $x\ge b-4$
주어진 그림에서 $x\ge -3$, $x>4$이므로
$-2a-2=4$, $b-4=-3$ $\therefore a=-3, b=1$
$\therefore a+b=-2$

573

상 중 하

연립부등식 $\begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{a}{4}\le \frac{1}{2}x+\frac{7}{6} \\ x+b\ge \frac{2x+11}{7} \end{cases}$의 해가 $x=-2$일 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ✓⑤ 3

풀이

$\frac{2}{3}x+\frac{a}{4}\le \frac{1}{2}x+\frac{7}{6}$의 양변에 12를 곱하여 풀면 $x\le \frac{-3a+14}{2}$
$x+b\ge \frac{2x+11}{7}$의 양변에 7을 곱하여 풀면 $x\ge \frac{-7b+11}{5}$
주어진 부등식의 해가 $x=-2$이므로
$\frac{-3a+14}{2}=-2$, $\frac{-7b+11}{5}=-2$ $\therefore a=6, b=3$
$\therefore a-b=3$

574 내신 기출

상 중 하

부등식 $\frac{5x+a}{2}\le 3x+1\le -2(x+b)$의 해가 $-5\le x\le 1$일 때, $b-a$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -3 ② -2 ③ -1
✓④ 0 ⑤ 1

풀이

$\begin{cases} \frac{5x+a}{2}\le 3x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+1\le -2(x+b) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 양변에 2를 곱하여 풀면 $x\ge a-2$
㉡을 풀면 $x\le \frac{-2b-1}{5}$
주어진 부등식의 해가 $-5\le x\le 1$이므로
$a-2=-5$, $\frac{-2b-1}{5}=1$ $\therefore a=-3, b=-3$
$\therefore b-a=0$

575

상 중 하

일차부등식 $(3a-b)x<2a+1$의 해가 $x>2$일 때, 연립부등식 $\begin{cases} (4a+1)x<2b(x-1)+3 \\ 8ax-1>4bx-7 \end{cases}$의 해는 $a-1<x<6$이다. 이때 ab의 값은?

✓① 9 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 15

풀이

$(3a-b)x<2a+1$의 해가 $x>2$이므로
$\frac{2a+1}{3a-b}=2$에서 $b=2a-\frac{1}{2}$ $\cdots\cdots ㉠$
주어진 연립부등식에 ㉠을 대입하여 정리하면
$\begin{cases} x<2-2a \\ x>-3 \end{cases}$
연립부등식의 해가 $a-1<x<6$이므로
$-3=a-1$, $2-2a=6$ $\therefore a=-2, b=-\frac{9}{2}$ ($\because$ ㉠)
$\therefore ab=9$

06 해를 갖거나 갖지 않는 연립일차부등식 중요도

576 내신 기출

상 중 하

연립부등식 $\begin{cases} 2x-a\geq 5x \\ -2x+5\geq -5x+6 \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a<-1$ ② $a\leq -1$ √③ $a>-1$
④ $a\geq -1$ ⑤ $a\geq 1$

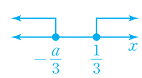
풀이

$2x-a\geq 5x$에서 $x\leq -\frac{a}{3}$

$-2x+5\geq -5x+6$에서 $x\geq \frac{1}{3}$

연립부등식의 해가 없으므로

$-\frac{a}{3}<\frac{1}{3}$ $\therefore a>-1$



577

상 중 하

연립부등식 $\begin{cases} 2x+1\leq 3(x-2) \\ x+3a<1 \end{cases}$ 이 해를 갖도록 하는 정수 a의 최댓값은?

① -5 ② -4 √③ -3
④ -2 ⑤ -1

풀이

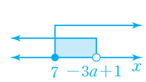
$2x+1\leq 3(x-2)$에서 $x\geq 7$

$x+3a<1$에서 $x<-3a+1$

연립부등식이 해를 가지려면

$-3a+1>7$ $\therefore a<-2$

따라서 정수 a의 최댓값은 -3이다.



578

상 중 하

부등식 $3(1-2x)\leq 4-x\leq a-6x$가 해를 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오. $a\geq 3$

풀이

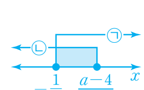
$\begin{cases} 3(1-2x)\leq 4-x & \cdots\cdots ㉠ \\ 4-x\leq a-6x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\geq -\frac{1}{5}$

㉡에서 $x\leq \frac{a-4}{5}$

주어진 부등식이 해를 가지려면

$\frac{a-4}{5}\geq -\frac{1}{5}$ $\therefore a\geq 3$



07 정수인 해의 개수가 주어진 연립일차부등식 중요도

579

상 중 하

연립부등식 $\begin{cases} 2x-9\leq 3 \\ 3x-a\geq x+5 \end{cases}$ 를 만족시키는 정수 x가 3개일 때, 실수 a의 값의 범위는?

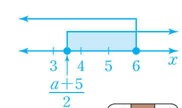
① $-1\leq a<1$ ② $-1<a\leq 1$ ③ $1\leq a<3$
√④ $1<a\leq 3$ ⑤ $3\leq a<5$

풀이

$2x-9\leq 3$에서 $x\leq 6$, $3x-a\geq x+5$에서 $x\geq \frac{a+5}{2}$

연립부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이려면

$3<\frac{a+5}{2}\leq 4$ $\therefore 1<a\leq 3$



580

상 중 하

연립부등식 $\begin{cases} 5x+2\leq 3x+k \\ 3x+4<6x+1 \end{cases}$ 에 대하여 다음 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 상수이다.)

〈보기〉

ㄱ. $k=4$이면 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 1개이다.

ㄴ. 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개일 때, k의 값의 범위는 $8<k\leq 10$이다.

ㄷ. 연립부등식의 해가 없을 때, k의 값의 범위는 $k\leq 4$이다.

① ㄴ √② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

$5x+2\leq 3x+k$에서 $x\leq \frac{k}{2}-1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$3x+4<6x+1$에서 $x>1$

ㄱ. $k=4$이면 ㉠은 $x\leq 1$이므로 연립부등식의 해는 없다. (거짓)

ㄴ. 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이려면 $3\leq \frac{k}{2}-1<4$ $\therefore 8\leq k<10$ (거짓)

581 교육청 기출

상 중 하

x에 대한 연립부등식 $\begin{cases} x+2>3 \\ 3x<a+1 \end{cases}$ 을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 9가 되도록 하는 자연수 a의 최댓값은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 √⑤ 14

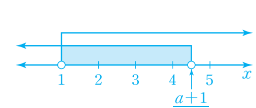
풀이

$x+2>3$에서 $x>1$, $3x<a+1$에서 $x<\frac{a+1}{3}$

연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 9가 되어야 하므로

$4<\frac{a+1}{3}\leq 5$ $\therefore 11<a\leq 14$

따라서 자연수 a의 최댓값은 14이다.



582

상 중 하

연립부등식 $\begin{cases} 5(x-1)+4>7x-2 \\ 3x-1\geq 1-2(x+a) \end{cases}$ 를 만족시키는 정수 x가 -1과 0뿐일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

$\frac{7}{2}\leq a<6$

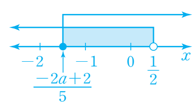
풀이

$5(x-1)+4>7x-2$에서 $x<\frac{1}{2}$

$3x-1\geq 1-2(x+a)$에서 $x\geq\frac{-2a+2}{5}$

연립부등식을 만족시키는 정수 x가 -1과 0뿐이므로

$-2<\frac{-2a+2}{5}\leq -1$ $\quad\therefore \frac{7}{2}\leq a<6$



08 연립일차부등식의 활용

중요도

583

상 중 하

연속하는 세 홀수의 합은 25보다 크고, 가장 큰 홀수의 3배는 나머지 두 홀수의 합의 2배보다 클 때, 가장 작은 홀수는?

① 13 ② 11 ③ 9

√④ 7 ⑤ 5

풀이

연속하는 세 홀수를 $n-2$, n, $n+2$라고 하면

$\begin{cases} (n-2)+n+(n+2)>25 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3(n+2)>2\{n+(n-2)\} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $n>\frac{25}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $n<10$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $\frac{25}{3}<n<10$

따라서 $n=9$이므로 가장 작은 홀수는 $9-2=7$

584

상 중 하

다음 표는 어느 놀이공원의 두 놀이기구 A, B의 요금과 타는 시간을 나타낸 것이다.

놀이기구	A	B
요금	4000원	3000원
타는 시간	6분	3분

23000원 이하의 요금으로 25분 이내에 놀이기구 A, B를 합하여 6번 탈 때, 놀이기구 A는 최대 몇 번 탈 수 있는지 구하시오. 2번

(단, 이동 시간과 대기 시간은 무시한다.)

풀이

놀이기구 A를 탄 횟수를 x라고 하면

$\begin{cases} 4000x+3000(6-x)\leq 23000 & \cdots\cdots ㉠ \\ 6x+3(6-x)\leq 25 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\leq 5$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $x\leq\frac{7}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $x\leq\frac{7}{3}$

따라서 놀이기구 A는 최대 2번 탈 수 있다.

585 내신 기출

상 중 하

상자에 구슬을 나누어 담으려고 한다. 한 상자에 구슬을 4개씩 담으면 7개의 구슬이 남고, 한 상자에 5개씩 담으면 1개의 상자가 남는다고 한다. 상자의 최소 개수는?

① 9 ② 10 ③ 11

√④ 12 ⑤ 13

풀이

상자의 개수를 x라고 하면 구슬의 개수는 $4x+7$이므로

$5(x-2)+1\leq 4x+7\leq 5(x-2)+5$

$\therefore \begin{cases} 5(x-2)+1\leq 4x+7 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+7\leq 5(x-2)+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\leq 16$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $x\geq 12$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $12\leq x\leq 16$

따라서 상자의 최소 개수는 12이다.

586

상 중 하

농도가 20 %인 소금물 300 g에 농도가 5 %인 소금물을 섞어서 농도가 10 % 이상 15 % 이하인 소금물을 만들려고 할 때, 농도가 5 %인 소금물의 양의 범위를 구하시오. **150 g 이상 600 g 이하**

풀이

농도가 20 %인 소금물 300 g에 들어 있는 소금의 양은 $\frac{20}{100}\times 300=60$ (g)

농도가 5 %인 소금물을 x g 섞는다고 하면

$\frac{10}{100}(300+x)\leq 60+\frac{5}{100}x\leq\frac{15}{100}(300+x)$

$\frac{10}{100}(300+x)\leq 60+\frac{5}{100}x$에서 $x\leq 600$ $\cdots\cdots$ ㉠

$60+\frac{5}{100}x\leq\frac{15}{100}(300+x)$에서 $x\geq 150$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $150\leq x\leq 600$

따라서 농도가 5 %인 소금물을 150 g 이상 600 g 이하로 섞어야 한다.

587

상 중 하

어느 학교에서 작년 수학 경시대회에 참가한 학생 수는 170 이상이었고, 남녀 학생 수의 비는 8 : 7이었다. 올해에는 같은 수로 남녀 학생의 참가가 줄어 참가한 학생 수는 170 미만이 되었고, 남녀 학생 수의 비는 15 : 13이 되었다. 작년에 비해 올해 줄어든 참가자 수는?

① 4 ② 6 ③ 8

④ 10 √⑤ 12

풀이

작년에 참가한 남학생 수를 $8a$, 여학생 수를 $7a$, 올해 참가가 줄어든 남학생 수와 여학생 수를 각각 x라고 하면

$(8a-x):(7a-x)=15:13$ $\quad\therefore a=2x$

즉, 작년에 참가한 남학생 수는 $16x$, 여학생 수는 $14x$이므로

$\begin{cases} 16x+14x\geq 170 & \cdots\cdots ㉠ \\ (16x-x)+(14x-x)<170 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\geq\frac{17}{3}$, ㉡에서 $x<\frac{85}{14}$이므로 공통부분을 구하면 $\frac{17}{3}\leq x<\frac{85}{14}$

이때 x는 자연수이므로 $x=6$

따라서 올해 줄어든 참가자 수는 $6+6=12$

09 $|ax+b|<c$, $|ax+b|>c$의 꼴의 부등식 중요도

588
상 중 하

다음 부등식을 푸시오.

(1) $|x-4|<2$ $2<x<6$

(2) $|7-3x|>8$ $x<-\frac{1}{3}$ 또는 $x>5$

풀이

(1) $|x-4|<2$에서 $-2<x-4<2$

$\therefore 2<x<6$

(2) $|7-3x|>8$에서 $7-3x<-8$ 또는 $7-3x>8$

$-3x<-15$ 또는 $-3x>1$ $\therefore x>5$ 또는 $x<-\frac{1}{3}$

589
상 중 하

연립부등식 $\begin{cases} |x-3|\le 4 \\ \frac{3x-1}{2}\ge x+1 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4

✓④ 5 ⑤ 6

풀이

$|x-3|\le 4$에서 $-1\le x\le 7$

$\frac{3x-1}{2}\ge x+1$에서 $x\ge 3$

따라서 연립부등식의 해가

$3\le x\le 7$

이므로 정수 x는 3, 4, 5, 6, 7의 5개이다.

590
상 중 하

부등식 $|2x+a|\ge 6$의 해가 $x\le -4$ 또는 $x\ge b$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

✓① 4 ② 5 ③ 6

④ 7 ⑤ 8

풀이

$|2x+a|\ge 6$에서 $x\le \frac{-a-6}{2}$ 또는 $x\ge \frac{-a+6}{2}$

부등식의 해가 $x\le -4$ 또는 $x\ge b$이므로

$\frac{-a-6}{2}=-4$, $\frac{-a+6}{2}=b$ $\therefore a=2, b=2$

$\therefore ab=4$

591
교육청 기출

상 중 하

x에 대한 부등식 $|x-7|\le a+1$을 만족시키는 모든 정수 x의 개수가 9가 되도록 하는 자연수 a의 값은?

① 1 ② 2 ✓③ 3

④ 4 ⑤ 5

풀이

$|x-7|\le a+1$에서 $-a+6\le x\le a+8$

이때 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 9이므로

$a+8-(-a+6)+1=9$ $\therefore a=3$

592
상 중 하

부등식 $|ax+1|<b$의 해가 $-4<x<5$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $ab<0$)

① -11 ② -7 ③ -3

✓④ 7 ⑤ 11

풀이

$b<0$이면 $|ax+1|<b$의 해가 존재하지 않으므로 $b>0$

이때 $ab<0$이므로 $a<0$

$|ax+1|<b$에서 $-b-1<ax<b-1$

$\therefore \frac{b-1}{a}<x<\frac{-b-1}{a}$ ($\because a<0$)

부등식의 해가 $-4<x<5$이므로

$\frac{b-1}{a}=-4$, $\frac{-b-1}{a}=5$

$\therefore 4a+b=1$, $5a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=9$

$\therefore a+b=7$

10 $|ax+b|<cx+d$의 꼴의 부등식 중요도

593
상 중 하

부등식 $|4x+1|\le x+4$의 해가 $a\le x\le b$일 때, $b-a$의 값은?

① 1 ✓② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

풀이

(i) $x<-\frac{1}{4}$일 때, $-(4x+1)\le x+4$ $\therefore x\ge -1$

그런데 $x<-\frac{1}{4}$이므로 $-1\le x<-\frac{1}{4}$

(ii) $x\ge -\frac{1}{4}$일 때, $4x+1\le x+4$ $\therefore x\le 1$

그런데 $x\ge -\frac{1}{4}$이므로 $-\frac{1}{4}\le x\le 1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-1\le x\le 1$이므로 $a=-1$, $b=1$

$\therefore b-a=2$

594
상중하

부등식 $|2x-5|<7-x$를 만족시키는 자연수 x의 개수는?

① 1　　② 2　　√③ 3
④ 4　　⑤ 5

풀이

(i) $x<\frac{5}{2}$일 때, $-(2x-5)<7-x$　　$\therefore x>-2$

그런데 $x<\frac{5}{2}$이므로 $-2<x<\frac{5}{2}$

(ii) $x\geq\frac{5}{2}$일 때, $2x-5<7-x$　　$\therefore x<4$

그런데 $x\geq\frac{5}{2}$이므로 $\frac{5}{2}\leq x<4$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2<x<4$
따라서 자연수 x는 1, 2, 3의 3개이다.

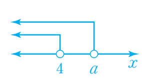
595 내신 기출
상중하

부등식 $|1-x|<11-2x$의 해가 $x<a$에 포함되도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a<-4$　　② $a\geq-4$　　③ $a\leq4$
④ $a>4$　　√⑤ $a\geq4$

풀이

(i) $x<1$일 때, $1-x<11-2x$　　$\therefore x<10$
그런데 $x<1$이므로 $x<1$
(ii) $x\geq1$일 때, $-(1-x)<11-2x$　　$\therefore x<4$
그런데 $x\geq1$이므로 $1\leq x<4$
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x<4$
$x<4$가 $x<a$에 포함되어야 하므로
$a\geq4$



596
상중하

x에 대한 부등식 $|3x-1|<x+a$의 해가 $-1<x<3$일 때, 양수 a의 값은?

① 4　　② $\frac{17}{4}$　　③ $\frac{9}{2}$
④ $\frac{19}{4}$　　√⑤ 5

풀이

(i) $x<\frac{1}{3}$일 때, $-(3x-1)<x+a$　　$\therefore x>\frac{-a+1}{4}$

그런데 $x<\frac{1}{3}$이므로 $\frac{-a+1}{4}<x<\frac{1}{3}$

(ii) $x\geq\frac{1}{3}$일 때, $3x-1<x+a$　　$\therefore x<\frac{a+1}{2}$

그런데 $x\geq\frac{1}{3}$이므로 $\frac{1}{3}\leq x<\frac{a+1}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $\frac{-a+1}{4}<x<\frac{a+1}{2}$

이 부등식의 해가 $-1<x<3$이므로

$\frac{-a+1}{4}=-1$, $\frac{a+1}{2}=3$　　$\therefore a=5$

11 절댓값 기호가 두 개인 부등식
중요도

597 풍쌤 비법 ❶
상중하

부등식 $|x+1|+|x-2|\leq5$의 해가 $\alpha\leq x\leq\beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값은?

① -3　　② -1　　③ 1
④ 3　　√⑤ 5

풀이

(i) $x<-1$일 때, $-(x+1)-(x-2)\leq5$　　$\therefore x\geq-2$
그런데 $x<-1$이므로 $-2\leq x<-1$
(ii) $-1\leq x<2$일 때, $x+1-(x-2)\leq5$, $3\leq5$　　$\therefore$ 해는 모든 실수
그런데 $-1\leq x<2$이므로 $-1\leq x<2$
(iii) $x\geq2$일 때, $x+1+(x-2)\leq5$　　$\therefore x\leq3$
그런데 $x\geq2$이므로 $2\leq x\leq3$
(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2\leq x\leq3$이므로 $\alpha=-2$, $\beta=3$
$\therefore \beta-\alpha=5$

598
상중하

부등식 $|2x+5|>4|x+2|+x$를 만족시키는 정수 x의 개수는?

√① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

풀이

(i) $x<-\frac{5}{2}$일 때, $-(2x+5)>-4(x+2)+x$　　$\therefore x>-3$

그런데 $x<-\frac{5}{2}$이므로 $-3<x<-\frac{5}{2}$

(ii) $-\frac{5}{2}\leq x<-2$일 때, $2x+5>-4(x+2)+x$　　$\therefore x>-\frac{13}{5}$

그런데 $-\frac{5}{2}\leq x<-2$이므로 $-\frac{5}{2}\leq x<-2$

(iii) $x\geq-2$일 때, $2x+5>4(x+2)+x$　　$\therefore x<-1$
그런데 $x\geq-2$이므로 $-2\leq x<-1$
(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-3<x<-1$이므로 정수 x는 -2의 1개이다.

599 내신 기출
상중하

부등식 $2|x+4|-3\sqrt{(x+1)^2}\geq1$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은?

① 6　　② 7　　③ 8
④ 9　　√⑤ 10

풀이

$2|x+4|-3\sqrt{(x+1)^2}\geq1$에서 $2|x+4|-3|x+1|\geq1$
(i) $x<-4$일 때, $-2(x+4)+3(x+1)\geq1$　　$\therefore x\geq6$
그런데 $x<-4$이므로 해는 없다.
(ii) $-4\leq x<-1$일 때, $2(x+4)+3(x+1)\geq1$　　$\therefore x\geq-2$
그런데 $-4\leq x<-1$이므로 $-2\leq x<-1$
(iii) $x\geq-1$일 때, $2(x+4)-3(x+1)\geq1$　　$\therefore x\leq4$
그런데 $x\geq-1$이므로 $-1\leq x\leq4$
(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2\leq x\leq4$
따라서 모든 자연수 x의 값의 합은 $1+2+3+4=10$

600
상 중 하

부등식 $||x+1|-2|<3$을 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 7　② 8　√③ 9
④ 10　⑤ 11

풀이
$||x+1|-2|<3$에서 $-3<|x+1|-2<3$
$\therefore -1<|x+1|<5$
그런데 $|x+1|\ge 0$이므로 $0\le|x+1|<5$
$-5<x+1<5$　$\therefore -6<x<4$
따라서 정수 x는 $-5, -4, -3, \cdots, 3$의 9개이다.

601
상 중 하

양수 m, n에 대하여 부등식

$$|x|+|x-m|<n$$

을 만족시키는 정수 x의 개수를 $N(m, n)$이라고 할 때, $N(a+1, a+5)=20$을 만족시키는 자연수 a의 값을 구하시오. 16

풀이
$m=a+1$, $n=a+5$를 주어진 부등식에 대입하면 $|x|+|x-(a+1)|<a+5$
(i) $x<0$일 때, $-x-\{x-(a+1)\}<a+5$　$\therefore x>-2$
　그런데 $x<0$이므로 $-2<x<0$
(ii) $0\le x<a+1$일 때, $x-\{x-(a+1)\}<a+5$
　즉, $0\times x<4$이므로 해는 모든 실수이다.
　그런데 $0\le x<a+1$이므로 $0\le x<a+1$
(iii) $x\ge a+1$일 때, $x+\{x-(a+1)\}<a+5$　$\therefore x<a+3$
　그런데 $x\ge a+1$이므로 $a+1\le x<a+3$
(i)~(iii)에서 부등식의 해는 $-2<x<a+3$
따라서 정수 x의 개수는 $a+4$이므로 $a+4=20$　$\therefore a=16$

12 절댓값 기호를 포함한 부등식의 해의 조건
중요도

602
상 중 하

부등식 $|3x+2|>a-4$의 해가 모든 실수가 되도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a<-4$　√② $a<4$　③ $a\le 4$
④ $a>4$　⑤ $a\ge 4$

풀이
$|3x+2|\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해가 모든 실수가 되려면
$a-4<0$　$\therefore a<4$

603
상 중 하

부등식 $|x+7|\le\frac{4}{5}k-8$의 해가 존재하지 않도록 하는 정수 k의 최댓값은?

① 1　② 3　③ 5
④ 7　√⑤ 9

풀이
$|x+7|\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면
$\frac{4}{5}k-8<0$, $\frac{4}{5}k<8$　$\therefore k<10$
따라서 정수 k의 최댓값은 9이다.

604
상 중 하

부등식 $\sqrt{(2x-5)^2}+a\le 3$이 해를 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a<0$　② $a\le 0$　③ $a<3$
√④ $a\le 3$　⑤ $a\ge 3$

풀이
$\sqrt{(2x-5)^2}+a\le 3$에서 $|2x-5|\le 3-a$
$|2x-5|\ge 0$이므로 주어진 부등식이 해를 가지려면
$3-a\ge 0$　$\therefore a\le 3$

605
상 중 하

부등식 $|x-k|\le k^2+6k$가 오직 한 개의 해를 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?

√① -6　② -3　③ 0
④ 3　⑤ 6

풀이
$|x-k|\ge 0$이므로 주어진 부등식이 오직 한 개의 해를 가지려면
$k^2+6k=0$, $k(k+6)=0$　$\therefore k=0$ 또는 $k=-6$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은
$0+(-6)=-6$

내신을 꽉 잡는 서술형

› 정답과 풀이 088쪽

606

부등식 $(a-2b)x-a+3b\le 0$의 해가 없을 때, 부등식 $(3a-5b)x-2a+b<0$의 해를 구하시오. $x<3$

(단, a, b는 상수이다.)

풀이

$(a-2b)x-a+3b\le 0$에서 $(a-2b)x\le a-3b$

이 부등식의 해가 없으므로

$a-2b=0$, $a-3b<0$ ······ 40 %

$a=2b$를 $a-3b<0$에 대입하면

$2b-3b<0$ $\quad\therefore b>0$ ······ 20 %

$a=2b$를 $(3a-5b)x-2a+b<0$에 대입하면

$(6b-5b)x-4b+b<0$, $bx<3b$

이때 $b>0$이므로 $x<3$ ······ 40 %

607

부등식 $\frac{2}{3}x+1<\frac{1}{2}x+4<2(x-1)$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오. 13

풀이

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x+1<\frac{1}{2}x+4 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ \frac{1}{2}x+4<2(x-1) & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$$

······ 20 %

㉠의 양변에 6을 곱하여 풀면 $x<18$

㉡의 양변에 2를 곱하여 풀면 $x>4$

따라서 주어진 부등식의 해는

$4<x<18$ ······ 60 %

즉, 정수 x는 5, 6, 7, …, 17의 13개이다. ······ 20 %

608

연립부등식 $\begin{cases} 2(x-a)\le 4(x+1) \\ 3x+b\le 5 \end{cases}$ 의 해가 $-4\le x\le 3$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) -2

풀이

$2(x-a)\le 4(x+1)$에서 $x\ge -a-2$

$3x+b\le 5$에서 $x\le \frac{5-b}{3}$ ······ 50 %

연립부등식의 해가 $-4\le x\le 3$이므로

$-a-2=-4$, $\frac{5-b}{3}=3$ $\quad\therefore a=2$, $b=-4$ ······ 40 %

$\therefore a+b=-2$ ······ 10 %

609

연립부등식 $\begin{cases} 3x-1\le 4x+a \\ 5(x+1)<2x+11 \end{cases}$ 을 만족시키는 x의 값 중 가장 큰 정수가 M, 가장 작은 정수가 -7일 때, $M+a$의 값을 구하시오. (단, a는 자연수이다.) 7

풀이

$3x-1\le 4x+a$에서 $x\ge -a-1$

$5(x+1)<2x+11$에서 $x<2$

따라서 연립부등식의 해는 $-a-1\le x<2$ ······ 50 %

즉, $M=1$, $-a-1=-7$이므로

$M=1$, $a=6$ ······ 40 %

$\therefore M+a=7$ ······ 10 %

610

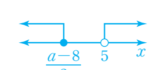
연립부등식 $\begin{cases} \frac{1}{4}(x+1)<x-\frac{7}{2} \\ a-4x\ge 8-2x \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 실수 a의 최댓값을 구하시오. 18

풀이

$\frac{1}{4}(x+1)<x-\frac{7}{2}$의 양변에 4를 곱하여 풀면 $x>5$

$a-4x\ge 8-2x$를 풀면 $x\le \frac{a-8}{2}$ ······ 40 %

연립부등식의 해가 없으므로



$\frac{a-8}{2}\le 5$, $a-8\le 10$

$\therefore a\le 18$ ······ 40 %

따라서 a의 최댓값은 18이다. ······ 20 %

611

부등식 $|3x-5|-|x-1|<4$를 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. 6

풀이

(i) $x<1$일 때, $-(3x-5)+(x-1)<4$ $\quad\therefore x>0$

그런데 $x<1$이므로 $0<x<1$ ······ 25 %

(ii) $1\le x<\frac{5}{3}$일 때, $-(3x-5)-(x-1)<4$ $\quad\therefore x>\frac{1}{2}$

그런데 $1\le x<\frac{5}{3}$이므로 $1\le x<\frac{5}{3}$ ······ 25 %

(iii) $x\ge\frac{5}{3}$일 때, $3x-5-(x-1)<4$ $\quad\therefore x<4$

그런데 $x\ge\frac{5}{3}$이므로 $\frac{5}{3}\le x<4$ ······ 25 %

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는 $0<x<4$이므로 모든 정수 x의 값의 합은

$1+2+3=6$ ······ 25 %

고득점을 향한 도약

612

부등식 $a(ax-1)-b\le(6-a)x$의 해가 모든 실수이고 $|b|\le4$일 때, 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ✓⑤ 9

풀이
$a(ax-1)-b\le(6-a)x$에서 $(a+3)(a-2)x\le a+b$
이 부등식의 해가 모든 실수이므로
$(a+3)(a-2)=0$, $a+b\ge0$
$(a+3)(a-2)=0$에서 $a=-3$ 또는 $a=2$
(i) $a=-3$일 때
$a+b\ge0$에서 $-3+b\ge0$ $\quad\therefore b\ge3$
그런데 $|b|\le4$이므로 $b=3, 4$
따라서 순서쌍 (a, b)는 $(-3, 3)$, $(-3, 4)$의 2개이다.
(ii) $a=2$일 때
$a+b\ge0$에서 $2+b\ge0$ $\quad\therefore b\ge-2$
그런데 $|b|\le4$이므로 $b=-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$
따라서 순서쌍 (a, b)는 $(2, -2)$, $(2, -1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$의 7개이다.
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 $2+7=9$

613

세 양수 a, b, c에 대하여 부등식

$$\frac{2x+b+c}{a}+\frac{2x+c+a}{b}+\frac{2x+a+b}{c}<-3$$

의 해가 $x<-1$일 때, 부등식 $(a+b)x+4c>8$의 해는?

① $x<2$ ② $x<4$ ③ $x<6$
④ $x>2$ ✓⑤ $x>4$

풀이
$a+b+c=k$ $(k>0)$라고 하면 주어진 부등식은
$\frac{2x+k-a}{a}+\frac{2x+k-b}{b}+\frac{2x+k-c}{c}<-3$
$\therefore \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(2x+k)<0$
이때 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>0$이므로 $2x+k<0$ $\quad\therefore x<-\frac{k}{2}$
이 부등식의 해가 $x<-1$이므로 $-\frac{k}{2}=-1$ $\quad\therefore k=2$
즉, $a+b+c=2$이므로 $c=2-(a+b)$
이것을 $(a+b)x+4c>8$에 대입하여 정리하면
$(a+b)x>4(a+b)$
이때 $a+b>0$이므로 구하는 해는 $x>4$

614

다음을 모두 만족시키는 정수 x의 개수는?

(가) $\sqrt{x-8}\sqrt{1-x}=-\sqrt{(x-8)(1-x)}$
(나) $\dfrac{\sqrt{4x+9}}{\sqrt{2x-7}}=-\sqrt{\dfrac{4x+9}{2x-7}}$

① 0 ② 1 ③ 2
✓④ 3 ⑤ 4

풀이
조건 (가)에서
$x-8<0$, $1-x<0$ 또는 $x-8=0$ 또는 $1-x=0$
이므로 $1\le x\le8$ …… ㉠
조건 (나)에서
$4x+9>0$, $2x-7<0$ 또는 $4x+9=0$, $2x-7\ne0$
이므로 $-\frac{9}{4}\le x<\frac{7}{2}$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1\le x<\frac{7}{2}$이므로 정수 x는 1, 2, 3의 3개이다.

615

x에 대한 이차방정식 $x^2-(2k+1)x+k^2+2k-2=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, $x^2-2(k-1)x+k^2+7=0$은 서로 다른 두 허근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k<-3$ ② $k>-3$ ✓③ $-3<k<\frac{9}{4}$
④ $k<\frac{9}{4}$ ⑤ $k>\frac{9}{4}$

풀이
이차방정식 $x^2-(2k+1)x+k^2+2k-2=0$의 판별식을 D_1이라고 하면
$D_1=\{-(2k+1)\}^2-4(k^2+2k-2)>0$ $\quad\therefore k<\frac{9}{4}$ …… ㉠
이차방정식 $x^2-2(k-1)x+k^2+7=0$의 판별식을 D_2라고 하면
$\frac{D_2}{4}=\{-(k-1)\}^2-(k^2+7)<0$ $\quad\therefore k>-3$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$-3<k<\frac{9}{4}$

616

부등식 $x+a\le 7-2x\le 3x+b$를 연립부등식 $\begin{cases} x+a\le 7-2x \\ x+a\le 3x+b \end{cases}$로 잘못 변형하여 풀었더니 해가 $-\frac{1}{2}\le x\le 2$이었다. 이때 원래 부등식의 해를 구하시오.

$1\le x\le 2$ (단, a, b는 상수이다.)

풀이

$x+a\le 7-2x$에서 $x\le \frac{-a+7}{3}$

$x+a\le 3x+b$에서 $x\ge \frac{a-b}{2}$

이 연립부등식의 해가 $-\frac{1}{2}\le x\le 2$이므로

$\frac{-a+7}{3}=2$, $\frac{a-b}{2}=-\frac{1}{2}$ $\therefore a=1$, $b=2$

즉, 원래 부등식은 $x+1\le 7-2x\le 3x+2$이므로

$\begin{cases} x+1\le 7-2x & \cdots\cdots ㉠ \\ 7-2x\le 3x+2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\le 2$ ⋯⋯ ㉢

㉡에서 $x\ge 1$ ⋯⋯ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 원래 부등식의 해는 $1\le x\le 2$이다.

617 도전! 1등급

부등식 $2a-5b-5<(a-b)x<4a+b+1$의 해가 $1<x<6$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 정수이다.)

① -6 ② -2 ✓③ -1

④ 2 ⑤ 3

풀이

(i) $a-b>0$일 때

$\frac{2a-5b-5}{a-b}<x<\frac{4a+b+1}{a-b}$이므로

$\frac{2a-5b-5}{a-b}=1$, $\frac{4a+b+1}{a-b}=6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-31$, $b=-9$

이때 $a-b=-22<0$이므로 $a-b>0$을 만족시키지 않는다.

(ii) $a-b<0$일 때

$\frac{4a+b+1}{a-b}<x<\frac{2a-5b-5}{a-b}$이므로

$\frac{4a+b+1}{a-b}=1$, $\frac{2a-5b-5}{a-b}=6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

이때 $a-b=-2<0$이므로 $a-b<0$을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=-1$, $b=1$이므로

$ab=-1$

618

연립부등식 $\begin{cases} (a+1)x<(x+1)a-1 \\ 2ax-a<(2a+1)x-3 \end{cases}$을 만족시키는 정수 x의 개수를 $f(a)$라고 하자. 부등식 $f(a)<3a-12$를 만족시키는 정수 a의 최솟값은? (단, $a>2$)

① 4 ② 5 ③ 6

④ 7 ✓⑤ 8

풀이

$(a+1)x<(x+1)a-1$에서 $x<a-1$

$2ax-a<(2a+1)x-3$에서 $x>-a+3$

따라서 연립부등식의 해는 $-a+3<x<a-1$

$\therefore f(a)=a-1-(-a+3)-1=2a-5$

$f(a)<3a-12$, 즉 $2a-5<3a-12$에서 $a>7$

따라서 정수 a의 최솟값은 8이다.

619

일의 자리의 숫자가 십의 자리의 숫자보다 2만큼 작은 두 자리 자연수가 있다. 이 자연수의 각 자리의 숫자의 합은 15 이하이고, 이 자연수는 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수의 2배에서 40을 뺀 수보다 작다. 처음 자연수를 구하시오. 86

풀이

처음 자연수의 십의 자리의 숫자를 x라고 하면

$\begin{cases} x+(x-2)\le 15 & \cdots\cdots ㉠ \\ 10x+(x-2)<2\{10(x-2)+x\}-40 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\le \frac{17}{2}$ ⋯⋯ ㉢

㉡에서 $x>\frac{78}{11}$ ⋯⋯ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$\frac{78}{11}<x\le \frac{17}{2}$

이때 x는 자연수이므로 $x=8$

따라서 처음 자연수는 86이다.

620

어떤 동아리의 학생들이 밤 식빵 몇 봉지를 나누어 먹으려고 한다. 각 봉지에는 한 덩어리의 밤 식빵이 들어 있고, 각 봉지의 모든 밤 식빵을 똑같이 8조각으로 각각 자른 후 한 명이 4조각씩 먹으면 3명이 밤 식빵을 한 조각도 먹을 수 없고, 한 명이 3조각씩 먹으면 밤 식빵이 한 봉지 이하로 남는다고 한다. 이때 이 동아리의 최대 학생 수는?

① 16　　② 17　　③ 18
✓④ 19　　⑤ 20

풀이
학생 수를 $x\ (x>3)$라고 하면
$3x+1\le 4(x-3)\le 3x+8$
$\begin{cases} 3x+1\le 4(x-3) & \cdots\cdots ㉠ \\ 4(x-3)\le 3x+8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $x\ge 13$ ······ ㉢
㉡에서 $x\le 20$ ······ ㉣
㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $13\le x\le 20$
이때 x는 $x>3$인 자연수이고, $4(x-3)$이 8의 배수이어야 하므로
$x=13,\ 15,\ 17,\ 19$
따라서 이 동아리의 최대 학생 수는 19이다.

621

부등식 $|x+3k|<k^2+3$의 해가 $-13<x<1$일 때, 부등식 $|x|<k$를 만족시키는 정수 x의 개수는? (단, k는 상수이다.)

① 1　　✓② 3　　③ 5
④ 7　　⑤ 9

풀이
$|x+3k|<k^2+3$에서 $-k^2-3<x+3k<k^2+3$
$\therefore -k^2-3k-3<x<k^2-3k+3$
이 부등식의 해가 $-13<x<1$이므로
$-k^2-3k-3=-13$에서 $k^2+3k-10=0$
$(k+5)(k-2)=0 \quad \therefore k=-5$ 또는 $k=2$ ······ ㉠
$k^2-3k+3=1$에서 $k^2-3k+2=0$
$(k-1)(k-2)=0 \quad \therefore k=1$ 또는 $k=2$ ······ ㉡
㉠, ㉡에서 $k=2$
따라서 부등식 $|x|<k$, 즉 $|x|<2$의 해는 $-2<x<2$이므로 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1$의 3개이다.

622

부등식 $\left||x+1|+\sqrt{x^2+6x+9}\right|<5$의 해가 $a<x<b$일 때, $b-a$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　✓⑤ 5

풀이
$\left||x+1|+\sqrt{x^2+6x+9}\right|<5$에서 $\left||x+1|+|x+3|\right|<5$
$-5<|x+1|+|x+3|<5 \quad \therefore 0\le |x+1|+|x+3|<5$
(i) $x<-3$일 때, $0\le -(x+1)-(x+3)<5 \quad \therefore -\frac{9}{2}<x\le -2$
그런데 $x<-3$이므로 $-\frac{9}{2}<x<-3$
(ii) $-3\le x<-1$일 때, $0\le -(x+1)+(x+3)<5,\ 0\le 2<5 \quad \therefore$ 해는 모든 실수
그런데 $-3\le x<-1$이므로 $-3\le x<-1$
(iii) $x\ge -1$일 때, $0\le x+1+(x+3)<5 \quad \therefore -2\le x<\frac{1}{2}$
그런데 $x\ge -1$이므로 $-1\le x<\frac{1}{2}$
(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-\frac{9}{2}<x<\frac{1}{2}$이므로 $a=-\frac{9}{2},\ b=\frac{1}{2} \quad \therefore b-a=5$

623 교육청 기출

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(3)$, $\mathrm{B}(7)$에 대하여 점 $\mathrm{P}(x)$가 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}\le 8$을 만족시킬 때, 선분 OP의 길이의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, O는 원점이다.)

① 7　　② 8　　③ 9
✓④ 10　　⑤ 11

풀이
$\overline{\mathrm{AP}}=|x-3|$, $\overline{\mathrm{BP}}=|x-7|$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}\le 8$에서 $|x-3|+|x-7|\le 8$
(i) $x<3$일 때, $-(x-3)-(x-7)\le 8 \quad \therefore x\ge 1$
그런데 $x<3$이므로 $1\le x<3$
(ii) $3\le x<7$일 때, $x-3-(x-7)\le 8$
즉, $0\times x\le 4$이므로 해는 모든 실수이다.
그런데 $3\le x<7$이므로 $3\le x<7$
(iii) $x\ge 7$일 때, $x-3+(x-7)\le 8 \quad \therefore x\le 9$
그런데 $x\ge 7$이므로 $7\le x\le 9$
(i)~(iii)에서 부등식의 해는 $1\le x\le 9$이므로 선분 OP의 길이, 즉 $|x|$의 최댓값은 9, 최솟값은 1이다.
따라서 구하는 값은 $9+1=10$

624 도전 1등급

부등식 $|x+3|+|x-4|<k$의 해가 없을 때, 실수 k의 최댓값은?

① 1　　② 3　　③ 5
✓④ 7　　⑤ 9

풀이
(i) $x<-3$일 때, $|x+3|+|x-4|=-(x+3)-(x-4)=-2x+1$
그런데 $x<-3$이므로 $-2x+1>7 \quad \therefore |x+3|+|x-4|>7$
(ii) $-3\le x<4$일 때, $|x+3|+|x-4|=x+3-(x-4)=7$
(iii) $x\ge 4$일 때, $|x+3|+|x-4|=x+3+(x-4)=2x-1$
그런데 $x\ge 4$이므로 $2x-1\ge 7 \quad \therefore |x+3|+|x-4|\ge 7$
(i)~(iii)에서 $|x+3|+|x-4|\ge 7$
따라서 주어진 부등식의 해가 없으려면 $k\le 7$이어야 하므로 k의 최댓값은 7이다.

09 이차부등식

1 이차부등식과 이차함수의 관계

(1) 이차부등식

부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하였을 때, 좌변이 미지수 x에 대한 이차식으로 나타내어지는 부등식

(2) 이차부등식의 해와 이차함수의 그래프의 관계

① $ax^2+bx+c>0$의 해

⇨ $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위

$y=ax^2+bx+c$에서 $y>0$인 x의 값의 범위

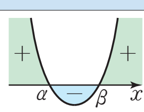
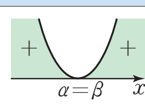
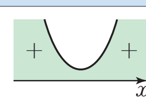
② $ax^2+bx+c<0$의 해

⇨ $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위

$y=ax^2+bx+c$에서 $y<0$인 x의 값의 범위

2 이차부등식의 해

이차식 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0)$에 대하여 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하고, 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라고 하면 D의 부호에 따라 이차부등식의 해는 다음과 같다.

판별식의 부호	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=f(x)$의 그래프			
$f(x)>0$의 해	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\neq\alpha$인 모든 실수	모든 실수
$f(x)\geq 0$의 해	$x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$	모든 실수	모든 실수
$f(x)<0$의 해	$\alpha<x<\beta$	없다.	없다.
$f(x)\leq 0$의 해	$\alpha\leq x\leq\beta$	$x=\alpha$	없다.

참고 $a<0$인 경우에는 부등식의 양변에 -1을 곱하여 x^2의 계수가 양수가 되도록 고쳐서 푼다.

3 이차부등식의 작성

x^2의 계수가 1이고

(1) 해가 $\alpha<x<\beta$인 이차부등식은

$(x-\alpha)(x-\beta)<0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta<0$

(2) 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$ $(\alpha<\beta)$인 이차부등식은

$(x-\alpha)(x-\beta)>0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta>0$

참고 해가 $x=\alpha$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-\alpha)^2\leq 0$

4 이차부등식이 항상 성립할 조건

모든 실수 x에 대하여

(1) $ax^2+bx+c>0$이 성립 ⇨ $a>0$, $b^2-4ac<0$

(2) $ax^2+bx+c\geq 0$이 성립 ⇨ $a>0$, $b^2-4ac\leq 0$

(3) $ax^2+bx+c<0$이 성립 ⇨ $a<0$, $b^2-4ac<0$

(4) $ax^2+bx+c\leq 0$이 성립 ⇨ $a<0$, $b^2-4ac\leq 0$

5 연립이차부등식

(1) 연립이차부등식

연립부등식을 이루는 부등식 중에서 차수가 가장 높은 부등식이 이차부등식인 연립부등식

(2) 연립이차부등식의 풀이

각 부등식의 해를 구한 다음 이들의 공통부분을 구하여 푼다.

6 이차방정식의 실근의 부호

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하고, 두 실근을 α, β라고 하면

(1) 두 근이 모두 양수 ⇨ $D\geq 0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

(2) 두 근이 모두 음수 ⇨ $D\geq 0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

(3) 두 근이 서로 다른 부호 ⇨ $\alpha\beta<0$

$\alpha\beta<0$이면 $ac<0$이므로 항상 $D>0$이다.

문제를 풀 때 유용한 **풍쌤 비법**

❶ 이차방정식의 근의 위치

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 판별식을 D라 하고, $f(x)=ax^2+bx+c$라고 하면

(1) 두 근이 모두 p보다 크다. ⇨ $D\geq 0$, $f(p)>0$, $-\dfrac{b}{2a}>p$

(2) 두 근이 모두 p보다 작다. ⇨ $D\geq 0$, $f(p)>0$, $-\dfrac{b}{2a}<p$

(3) 두 근 사이에 p가 있다 ⇨ $f(p)<0$

(4) 두 근이 모두 p, q $(p<q)$ 사이에 있다. ⇨ $D\geq 0$, $f(p)>0$, $f(q)>0$, $p<-\dfrac{b}{2a}<q$

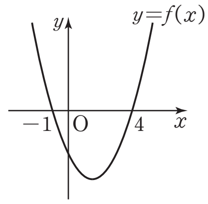
실력을 기르는 유형

01 그래프를 이용한 이차부등식의 풀이 중요도

625

상 중 하

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 부등식 $f(x)<0$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은?



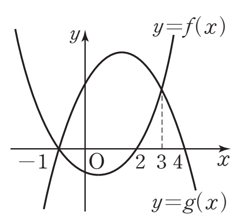
① 5 ✓② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

풀이
부등식 $f(x)<0$의 해는 $-1<x<4$
따라서 정수 x의 값의 합은
$0+1+2+3=6$

626

상 중 하

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 부등식 $f(x)-g(x)\le0$의 해가 아닌 것은?



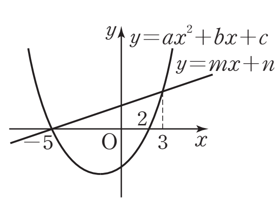
① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ✓⑤ 4

풀이
$f(x)-g(x)\le0$에서 $f(x)\le g(x)$
$\therefore -1\le x\le3$

627 내신 기출

상 중 하

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 오른쪽 그림과 같을 때, 이차부등식 $ax^2+(b-m)x+c-n\le0$의 해를 구하시오. $-5\le x\le3$

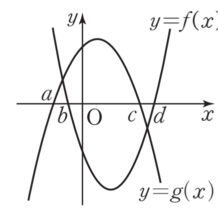


풀이
$ax^2+(b-m)x+c-n\le0$에서
$ax^2+bx+c\le mx+n$
$\therefore -5\le x\le3$

628

상 중 하

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 부등식 $f(x)g(x)>0$의 해를 구하시오. $a<x<b$ 또는 $c<x<d$



풀이
$f(x)g(x)>0$에서
$f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$
(i) $f(x)>0$, $g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는
$a<x<b$
(ii) $f(x)<0$, $g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는
$c<x<d$
(i), (ii)에서 부등식 $f(x)g(x)>0$의 해는
$a<x<b$ 또는 $c<x<d$

02 이차부등식의 풀이 중요도

629 교육청 기출

상 중 하

이차부등식 $(x-1)(x-5)\le0$을 만족시키는 자연수 x의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ✓⑤ 5

풀이
$(x-1)(x-5)\le0$에서 $1\le x\le5$
따라서 자연수 x는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

630 내신 기출

상 중 하

이차부등식 $x^2-3x-18>0$의 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$일 때, $\alpha-\beta$의 값은?

✓① -9 ② -7 ③ -5
④ -3 ⑤ -1

풀이
$x^2-3x-18>0$에서 $(x+3)(x-6)>0$
$\therefore x<-3$ 또는 $x>6$
따라서 $\alpha=-3$, $\beta=6$이므로
$\alpha-\beta=-9$

631 내신 기출

상중하

다음 이차부등식 중 해가 존재하지 않는 것은?

① $x^2-6x+8\geq0$　② $9x^2+1\leq 6x$
√③ $x^2+4x<-4$　④ $x^2-2x+1>0$
⑤ $-x^2-2x+3>0$

풀이

① $x\leq2$ 또는 $x\geq4$　② $x=\frac{1}{3}$
③ 해는 없다.　④ $x\neq1$인 모든 실수
⑤ $-3<x<1$

632

상중하

다음 부등식 중 이차부등식 $x^2-6x-7\leq0$과 해가 같은 것은?

① $|x-2|\leq3$　② $|x-3|\leq3$　√③ $|x-3|\leq4$
④ $|x-4|\leq3$　⑤ $|x-4|\leq4$

풀이

$x^2-6x-7\leq0$에서 $(x+1)(x-7)\leq0$　∴ $-1\leq x\leq7$
① $-1\leq x\leq5$　② $0\leq x\leq6$　③ $-1\leq x\leq7$
④ $1\leq x\leq7$　⑤ $0\leq x\leq8$

03 절댓값 기호를 포함한 이차부등식의 풀이 중요도

633

상중하

부등식 $x^2-2x-8\leq2|x+2|$를 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 6　② 7　③ 8
√④ 9　⑤ 10

풀이

(i) $x<-2$일 때
$x^2-2x-8\leq-2(x+2)$
$(x+2)(x-2)\leq0$　∴ $-2\leq x\leq2$
이때 $x<-2$이므로 해는 없다.
(ii) $x\geq-2$일 때
$x^2-2x-8\leq2(x+2)$
$(x+2)(x-6)\leq0$　∴ $-2\leq x\leq6$
이때 $x\geq-2$이므로 $-2\leq x\leq6$
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2\leq x\leq6$
따라서 정수 x는 $-2, -1, 0, \cdots, 6$의 9개이다.

634

상중하

부등식 $|x^2-2x-4|\geq4$의 해가 $x\leq\alpha$ 또는 $0\leq x\leq\beta$ 또는 $x\geq\gamma$일 때, $\alpha+\beta+\gamma$의 값은?

① -2　② 0　③ 2
√④ 4　⑤ 6

풀이

$|x^2-2x-4|\geq4$에서
$x^2-2x-4\leq-4$ 또는 $x^2-2x-4\geq4$
(i) $x^2-2x-4\leq-4$일 때
$x(x-2)\leq0$　∴ $0\leq x\leq2$
(ii) $x^2-2x-4\geq4$일 때
$(x+2)(x-4)\geq0$　∴ $x\leq-2$ 또는 $x\geq4$
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x\leq-2$ 또는 $0\leq x\leq2$ 또는 $x\geq4$
따라서 $\alpha=-2$, $\beta=2$, $\gamma=4$이므로 $\alpha+\beta+\gamma=4$

635

상중하

부등식 $x^2-3|x|-4\leq0$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. 0

풀이

(i) $x<0$일 때
$(x+4)(x-1)\leq0$　∴ $-4\leq x\leq1$
이때 $x<0$이므로 $-4\leq x<0$
(ii) $x\geq0$일 때
$(x+1)(x-4)\leq0$　∴ $-1\leq x\leq4$
이때 $x\geq0$이므로 $0\leq x\leq4$
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-4\leq x\leq4$
따라서 모든 정수 x의 값의 합은
$-4+(-3)+(-2)+\cdots+4=0$

04 해가 주어진 이차부등식 중요도

636 교육청 기출

상중하

x에 대한 이차부등식 $x^2+ax+b<0$의 해가 $-4<x<3$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① 5　② 7　③ 9
④ 11　√⑤ 13

풀이

해가 $-4<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+4)(x-3)<0$　∴ $x^2+x-12<0$
이 부등식이 $x^2+ax+b<0$과 같으므로
$a=1$, $b=-12$
∴ $a-b=13$

637

상 중 하

이차부등식 $-x^2+ax+b\geq 0$의 해가 $x=2$일 때, 이차부등식 $ax^2+ax+2b>0$의 해는?

(단, a, b는 상수이다.)

√① $x<-2$ 또는 $x>1$ ② $x<-1$ 또는 $x>2$
③ $-2<x<1$ ④ $-1<x<2$
⑤ $1<x<2$

풀이

해가 $x=2$이고 x^2의 계수가 -1인 이차부등식은
$-(x-2)^2\geq 0$ $\quad\therefore -x^2+4x-4\geq 0$
이 부등식이 $-x^2+ax+b\geq 0$과 같으므로
$a=4,\ b=-4$
따라서 $ax^2+ax+2b>0$은 $4x^2+4x-8>0$이므로
$4(x+2)(x-1)>0$ $\quad\therefore x<-2$ 또는 $x>1$

638

상 중 하

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 6)$을 지나고 부등식 $f(x)\geq 0$의 해가 $-2\leq x\leq 3$일 때, $f(0)$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 √⑤ 6

풀이

부등식 $f(x)\geq 0$의 해가 $-2\leq x\leq 3$이므로
$f(x)=a(x+2)(x-3)\ (a<0)$
이라고 하면 함수의 그래프가 점 $(1,\ 6)$을 지나므로
$6=-6a$ $\quad\therefore a=-1$
따라서 $f(x)=-(x+2)(x-3)$이므로
$f(0)=-1\times 2\times(-3)=6$

639

상 중 하

부등식 $|2x+1|<a$의 해와 이차부등식 $x^2-bx-2<0$의 해가 같을 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $a>0$) 2

풀이

부등식 $|2x+1|<a$에서 $-a<2x+1<a$ $\quad\therefore \frac{-a-1}{2}<x<\frac{a-1}{2}$

이차부등식 $x^2-bx-2<0$의 해가 $\frac{-a-1}{2}<x<\frac{a-1}{2}$이므로

$x^2-bx-2=\left(x+\frac{a+1}{2}\right)\left(x-\frac{a-1}{2}\right)$

즉, $x^2-bx-2=x^2+x-\frac{a^2-1}{4}$에서

$-b=1,\ 2=\frac{a^2-1}{4}$ $\quad\therefore a=3,\ b=-1\ (\because a>0)$

$\therefore a+b=2$

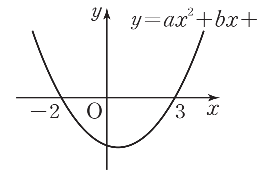
640 내신 기출

상 중 하

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 부등식

$$ax^2+cx-5b\leq 0$$

을 만족시키는 자연수 x의 개수를 구하시오. (단, a, b, c는 실수이다.) 5



풀이

주어진 그래프에서 $a>0$이고 부등식 $ax^2+bx+c\leq 0$의 해가 $-2\leq x\leq 3$임을 알 수 있다.
즉, $ax^2+bx+c=a(x+2)(x-3)\ (a>0)$이므로 $ax^2+bx+c=ax^2-ax-6a$
$\therefore b=-a,\ c=-6a$
이것을 $ax^2+cx-5b\leq 0$에 대입하면
$ax^2-6ax+5a\leq 0,\ a(x-1)(x-5)\leq 0$
이때 $a>0$이므로 $(x-1)(x-5)\leq 0$ $\quad\therefore 1\leq x\leq 5$
따라서 자연수 x는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

05 부등식 $f(x)<0$과 부등식 $f(ax+b)<0$의 관계

중요도

641

상 중 하

이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>6$일 때, $f(-x)\leq 0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오. 8

풀이

$f(x)=a(x+1)(x-6)\ (a>0)$이라고 하면
$f(-x)=a(-x+1)(-x-6)=a(x-1)(x+6)$
$f(-x)\leq 0$, 즉 $a(x-1)(x+6)\leq 0$에서
$(x-1)(x+6)\leq 0\ (\because a>0)$ $\quad\therefore -6\leq x\leq 1$
따라서 정수 x는 $-6,\ -5,\ -4,\ \cdots,\ 1$의 8개이다.

642

상 중 하

이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $-1<x<3$일 때, 부등식 $f(4-x)>0$을 만족시키는 정수 x의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 5 √② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

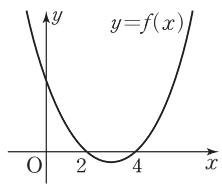
풀이

$f(x)=a(x+1)(x-3)\ (a<0)$이라고 하면
$f(4-x)=a(4-x+1)(4-x-3)=a(x-5)(x-1)$
$f(4-x)>0$, 즉 $a(x-5)(x-1)>0$에서
$(x-5)(x-1)<0\ (\because a<0)$
$\therefore 1<x<5$
따라서 정수 x의 최댓값은 4, 최솟값은 2이므로 그 합은
$4+2=6$

643

상 중 하

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 부등식 $f(2x-4)\le 0$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. 7



풀이

$f(x)=a(x-2)(x-4)\ (a>0)$라고 하면
$f(2x-4)=a(2x-4-2)(2x-4-4)=4a(x-3)(x-4)$
$f(2x-4)\le 0$, 즉 $4a(x-3)(x-4)\le 0$에서
$(x-3)(x-4)\le 0\ (\because a>0)$
$\therefore 3\le x\le 4$
따라서 정수 x의 값의 합은
$3+4=7$

06 이차부등식이 해를 한 개만 가질 조건

중요도

644

상 중 하

이차부등식 $x^2+(k+3)x+4\le 0$의 해가 오직 한 개 존재하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?

① -7 ✓② -6 ③ -5
④ -4 ⑤ -3

풀이

이차방정식 $x^2+(k+3)x+4=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$D=(k+3)^2-4\times1\times4=0$
$(k+7)(k-1)=0 \qquad \therefore k=-7$ 또는 $k=1$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은
$-7+1=-6$

645

상 중 하

이차부등식 $(a+3)x^2-2(a+3)x+4\le 0$이 해를 오직 한 개만 갖도록 하는 실수 a의 값을 구하시오. 1

풀이

이차부등식 $(a+3)x^2-2(a+3)x+4\le 0$이 해를 오직 한 개만 가지려면
$a+3>0 \qquad \therefore a>-3$
이차방정식 $(a+3)x^2-2(a+3)x+4=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(a+3)^2-4(a+3)=0$
$(a+3)(a-1)=0 \qquad \therefore a=-3$ 또는 $a=1$
이때 $a>-3$이므로 $a=1$

646 내신 기출

상 중 하

이차부등식 $-x^2+6x+4k-1\ge 0$의 해가 $x=a$뿐일 때, ak의 값을 구하시오. (단, k는 실수이다.) -6

풀이

이차부등식 $-x^2+6x+4k-1\ge 0$, 즉 $x^2-6x-4k+1\le 0$이 해를 오직 한 개만 가지므로 이차방정식 $x^2-6x-4k+1=0$이 중근을 가져야 한다.
이차방정식 $x^2-6x-4k-1=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-3)^2-(-4k+1)=0 \qquad \therefore k=-2$
따라서 $k=-2$를 주어진 부등식에 대입하면
$-x^2+6x-9\ge 0$, $-(x-3)^2\ge 0 \qquad \therefore (x-3)^2\le 0$
따라서 주어진 부등식의 해는 $x=3$
즉, $a=3$이므로
$ak=3\times(-2)=-6$

07 이차부등식이 해를 가질 조건

중요도

647

상 중 하

이차부등식 $x^2-4x+a<0$이 해를 갖도록 하는 자연수 a의 개수는?

① 1 ② 2 ✓③ 3
④ 4 ⑤ 5

풀이

이차방정식 $x^2-4x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-a>0 \qquad \therefore a<4$
따라서 자연수 a의 값은 1, 2, 3의 3개이다.

648

상 중 하

다음 중 이차부등식 $kx^2+2(k+2)x-1>0$의 해가 존재하도록 하는 실수 k의 값이 아닌 것은?

① -5 ✓② -2 ③ 1
④ 4 ⑤ 7

풀이

(i) $k<0$일 때
이차방정식 $kx^2+2(k+2)x-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $kx^2+2(k+2)x-1=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(k+2)^2-k\times(-1)>0$
$(k+4)(k+1)>0 \qquad \therefore k<-4$ 또는 $k>-1$
이때 $k<0$이므로 $k<-4$ 또는 $-1<k<0$
(ii) $k>0$일 때
주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.
(i), (ii)에서 $k<-4$ 또는 $-1<k<0$ 또는 $k>0$

649

상 중 하

이차부등식 $-x^2+(k-1)x+k-1\geq 0$이 해를 갖도록 하는 k의 값의 범위가 $k\leq\alpha$ 또는 $k\geq\beta$이고, 이차부등식 $x^2+ax+b\leq 0$의 해가 $\alpha\leq x\leq\beta$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -2 ✓② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

풀이

이차부등식 $-x^2+(k-1)x+k-1\geq 0$, 즉 $x^2-(k-1)x-k+1\leq 0$이 해를 가지려면 이차방정식 $x^2-(k-1)x-k+1=0$이 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-(k-1)x-k+1=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=\{-(k-1)\}^2-4(-k+1)\geq 0$

$(k-1)(k+3)\geq 0$ $\quad\therefore k\leq -3$ 또는 $k\geq 1$

$\therefore \alpha=-3,\ \beta=1$

따라서 해가 $-3\leq x\leq 1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-1)\leq 0$, 즉 $x^2+2x-3\leq 0$이므로 $a=2$, $b=-3$

$\therefore a+b=-1$

650

상 중 하

부등식 $(k-4)x^2+(k-4)x-2>0$의 해가 존재하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오. **$k<-4$ 또는 $k>4$**

풀이

(i) $k-4<0$, 즉 $k<4$일 때 주어진 부등식의 해가 존재하려면 이차방정식 $(k-4)x^2+(k-4)x-2=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $(k-4)x^2+(k-4)x-2=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(k-4)^2-4\times(k-4)\times(-2)>0$

$(k+4)(k-4)>0$

이때 $k-4<0$이므로 $k+4<0$ $\quad\therefore k<-4$

(ii) $k-4=0$, 즉 $k=4$일 때 주어진 부등식의 해는 존재하지 않는다.

(iii) $k-4>0$, 즉 $k>4$일 때 주어진 부등식의 해는 항상 존재한다.

(i)~(iii)에서 $k<-4$ 또는 $k>4$

08 이차부등식이 항상 성립할 조건

중요도

651 교육청 기출

상 중 하

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-2kx+2k+15\geq 0$이 성립하도록 하는 정수 k의 개수는?

① 7 ✓② 9 ③ 11

④ 13 ⑤ 15

풀이

이차방정식 $x^2-2kx+2k+15=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(2k+15)\leq 0$

$(k+3)(k-5)\leq 0$ $\quad\therefore -3\leq k\leq 5$

따라서 정수 k는 $-3, -2, -1, \cdots, 5$의 9개이다.

652

상 중 하

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+ax+1\geq 0$이 성립할 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오. **$0<a\leq 4$**

풀이

이차부등식 $ax^2+ax+1\geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 $a>0$

또, 이차방정식 $ax^2+ax+1=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=a^2-4a\leq 0$

$a(a-4)\leq 0$ $\quad\therefore 0\leq a\leq 4$

이때 $a>0$이므로 $0<a\leq 4$

653

상 중 하

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{x^2+ax+a-1}$이 실수가 되도록 하는 실수 a의 값은?

① 1 ✓② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

풀이

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{x^2+ax+a-1}$이 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+a-1\geq 0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2+ax+a-1=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=a^2-4(a-1)\leq 0$

$(a-2)^2\leq 0$ $\quad\therefore a=2$

654 내신 기출

상 중 하

부등식 $(m-2)x^2-2(m-2)x+3>0$이 x의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 정수 m의 개수는?

① 1 ② 2 ✓③ 3

④ 4 ⑤ 5

풀이

(i) $m=2$일 때

주어진 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $m\neq 2$일 때

모든 실수 x에 대하여 $(m-2)x^2-2(m-2)x+3>0$이 성립하므로

$m-2>0$ $\quad\therefore m>2$

이차방정식 $(m-2)x^2-2(m-2)x+3=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(m-2)^2-(m-2)\times 3<0$

$(m-2)(m-5)<0$ $\quad\therefore 2<m<5$

이때 $m>2$이므로 $2<m<5$

(i), (ii)에서 $2\leq m<5$이므로 정수 m은 2, 3, 4의 3개이다.

655

상 중 하

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2-2ax<2ax+k$가 성립하도록 하는 정수 a의 개수가 4일 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $12<k\le 16$　② $12\le k<16$
√③ $16<k\le 20$　④ $16\le k<20$
⑤ $16\le k\le 20$

풀이

$ax^2-2ax<2ax+k$에서 $ax^2-4ax-k<0$

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2-4ax-k<0$이 성립하므로 $a<0$ …… ㉠

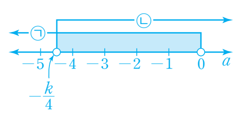
이차방정식 $ax^2-4ax-k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=4a^2+ak<0$, $a(4a+k)<0$

이때 $a<0$이므로

$4a+k>0$　$\therefore a>-\frac{k}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 a의 개수가 4이므로



$-5\le -\frac{k}{4}<-4$　$\therefore 16<k\le 20$

09 이차부등식이 해를 갖지 않을 조건

중요도

656 교육청 기출

상 중 하

x에 대한 이차부등식 $x^2+8x+(a-6)<0$이 해를 갖지 않도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오. 22

풀이

모든 실수 x에 대하여 $x^2+8x+(a-6)\ge 0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+8x+(a-6)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=4^2-(a-6)\le 0$　$\therefore a\ge 22$

따라서 실수 a의 최솟값은 22이다.

657

상 중 하

이차부등식 $x^2+2(k-3)x-2k+6<0$이 해를 갖지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오. $1\le k\le 3$

풀이

모든 실수 x에 대하여 $x^2+2(k-3)x-2k+6\ge 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+2(k-3)x-2k+6=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(k-3)^2-(-2k+6)\le 0$

$(k-1)(k-3)\le 0$　$\therefore 1\le k\le 3$

658 내신 기출

상 중 하

이차부등식 $ax^2+(a-5)x+6a-1<-2x+4a$의 해가 없을 때, 실수 a의 최솟값은?

① $-\frac{9}{7}$　② -1　③ $-\frac{1}{7}$
√④ 1　⑤ $\frac{9}{7}$

풀이

$ax^2+(a-5)x+6a-1<-2x+4a$에서 $ax^2+(a-3)x+2a-1<0$

이 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

$ax^2+(a-3)x+2a-1\ge 0$이 성립해야 하므로 $a>0$

이차방정식 $ax^2+(a-3)x+2a-1=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(a-3)^2-4a(2a-1)\le 0$

$7a^2+2a-9\ge 0$, $(7a+9)(a-1)\ge 0$

$\therefore a\le -\frac{9}{7}$ 또는 $a\ge 1$

이때 $a>0$이므로 $a\ge 1$

따라서 실수 a의 최솟값은 1이다.

659

상 중 하

다음 중 이차부등식 $x^2-2x+|k-1|<0$의 해가 존재하지 않도록 하는 실수 k의 값이 아닌 것은?

√① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

풀이

(i) $k<1$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2x-k+1\ge 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-2x-k+1=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-(-k+1)\le 0$　$\therefore k\le 0$

이때 $k<1$이므로 $k\le 0$

(ii) $k\ge 1$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2x+k-1\ge 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-2x+k-1=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-(k-1)\le 0$　$\therefore k\ge 2$

이때 $k\ge 1$이므로 $k\ge 2$

(i), (ii)에서 $k\le 0$ 또는 $k\ge 2$

10 제한된 범위에서 이차부등식이 항상 성립할 조건

중요도

660

상 중 하

$2\le x\le 5$에서 부등식 $x^2-a^2<0$이 항상 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

√① $a<-5$ 또는 $a>5$　② $a\le -5$ 또는 $a\ge 5$
③ $-5<a<5$　④ $-5\le a\le 5$
⑤ $a>5$

풀이

$f(x)=x^2-a^2$이라고 하면

$2\le x\le 5$에서 $f(x)$는 $x=5$에서 최대이므로

$f(5)=25-a^2<0$

$a^2-25>0$, $(a+5)(a-5)>0$

$\therefore a<-5$ 또는 $a>5$

661 내신 기출

상중하

$0 \le x \le 2$에서 부등식 $-x^2+4kx+1-k \ge 0$이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $a \le k \le b$일 때, $7ab$의 값은?

√① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

풀이
$f(x)=-x^2+4kx+1-k$라고 하면
$0 \le x \le 2$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$ 또는 $x=2$일 때 최소이므로
$f(0)=1-k \ge 0$에서 $k \le 1$ ...... ㉠
$f(2)=-4+8k+1-k \ge 0$에서 $k \ge \frac{3}{7}$ ...... ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{3}{7} \le k \le 1$
따라서 $a=\frac{3}{7}$, $b=1$이므로
$7ab=3$

662

상중하

$0 \le x \le 6$에서 이차부등식 $x^2-8x+k^2-4k+11>0$이 항상 성립할 때, 자연수 k의 최솟값은?

① 2 ② 4 √③ 6
④ 8 ⑤ 10

풀이
$f(x)=x^2-8x+k^2-4k+11$이라고 하면
$f(x)=(x-4)^2+k^2-4k-5$
$0 \le x \le 6$에서 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최소이므로
$f(4)=k^2-4k-5>0$에서 $(k+1)(k-5)>0$
$\therefore k<-1$ 또는 $k>5$
따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다.

11 두 그래프의 위치 관계와 이차부등식 — 만나는 경우

중요도

663

상중하

이차함수 $y=2x^2-5x$의 그래프가 이차함수 $y=x^2-2x+4$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 모든 정수 x의 값의 합은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 √⑤ 6

풀이
이차함수 $y=2x^2-5x$의 그래프가 이차함수 $y=x^2-2x+4$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 $2x^2-5x<x^2-2x+4$의 해이므로
$x^2-3x-4<0$, $(x+1)(x-4)<0$
$\therefore -1<x<4$
따라서 모든 정수 x의 값의 합은
$0+1+2+3=6$

664

상중하

이차함수 $y=-x^2+2ax+5$의 그래프가 직선 $y=x-2$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위가 $-1<x<b$일 때, ab의 값을 구하시오. (단, a는 실수이다.) $\frac{49}{2}$

풀이
이차함수 $y=-x^2+2ax+5$의 그래프가 직선 $y=x-2$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는
$-x^2+2ax+5>x-2$, 즉 $x^2+(1-2a)x-7<0$
의 해이다.
한편, 해가 $-1<x<b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+1)(x-b)<0$ $\therefore x^2+(1-b)x-b<0$
이 부등식이 $x^2+(1-2a)x-7<0$과 같으므로
$1-b=1-2a$, $-b=-7$에서 $a=\frac{7}{2}$, $b=7$
$\therefore ab=\frac{7}{2}\times 7=\frac{49}{2}$

665

상중하

이차함수 $y=3x^2+3x+a$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위가 $x<-2$ 또는 $x>b$일 때, $x^2-bx+a \le 0$의 해를 구하시오. (단, $b>-2$) $-2 \le x \le 3$

풀이
이차함수 $y=3x^2+3x+a$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는
$3x^2+3x+a>0$의 해이다.
한편, 해가 $x<-2$ 또는 $x>b$이고 x^2의 계수가 3인 이차부등식은
$3(x+2)(x-b)>0$ $\therefore 3x^2+3(2-b)x-6b>0$
이 부등식이 $3x^2+3x+a>0$과 같으므로
$3(2-b)=3$, $-6b=a$ $\therefore a=-6$, $b=1$
이것을 $x^2-bx+a \le 0$에 대입하면
$x^2-x-6 \le 0$, $(x+2)(x-3) \le 0$
$\therefore -2 \le x \le 3$

12 두 그래프의 위치 관계와 이차부등식 — 만나지 않는 경우

중요도

666

상중하

이차함수 $y=ax^2+a$의 그래프가 직선 $y=8x+6$보다 항상 아래쪽에 있도록 하는 정수 a의 최댓값은?

① 1 ② 0 ③ -1
④ -2 √⑤ -3

풀이
모든 실수 x에 대하여 $ax^2+a<8x+6$, 즉 $ax^2-8x+a-6<0$이 성립해야 하므로
$a<0$
또, 이차방정식 $ax^2-8x+a-6=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-4)^2-a(a-6)<0$
$(a+2)(a-8)>0$ $\therefore a<-2$ 또는 $a>8$
이때 $a<0$이므로 $a<-2$
따라서 정수 a의 최댓값은 -3이다.

667 교육청 기출

상 중 하

이차함수 $y=x^2+6x-3$의 그래프와 직선 $y=kx-7$이 만나지 않도록 하는 자연수 k의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ✓⑤ 7

풀이
이차함수 $y=x^2+6x-3$의 그래프가 직선 $y=kx-7$보다 항상 위쪽에 있어야 하므로
모든 실수 x에 대하여
$x^2+6x-3>kx-7$, 즉 $x^2+(6-k)x+4>0$
이 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2+(6-k)x+4=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=(6-k)^2-4\times1\times4<0$, $(k-2)(k-10)<0$ $\therefore 2<k<10$
따라서 자연수 k는 3, 4, 5, ⋯, 9의 7개이다.

668

상 중 하

함수 $y=(m-2)x^2+(m+2)x+3$의 그래프가 직선 $y=4x+2$보다 항상 위쪽에 있도록 하는 모든 정수 m의 값의 합을 구하시오. 14

풀이
모든 실수 x에 대하여 $(m-2)x^2+(m+2)x+3>4x+2$, 즉
$(m-2)x^2+(m-2)x+1>0$ ⋯⋯ ㉠
이 성립해야 한다.
(i) $m=2$일 때, 부등식 ㉠은 항상 성립한다.
(ii) $m\neq2$일 때, 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 ㉠이 성립하므로 $m>2$
또, 이차방정식 $(m-2)x^2+(m-2)x+1=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=(m-2)^2-4\times(m-2)\times1<0$, $(m-2)(m-6)<0$
$\therefore 2<m<6$
이때 $m>2$이므로 $2<m<6$
(i), (ii)에서 $2\le m<6$이므로 모든 정수 m의 값의 합은
$2+3+4+5=14$

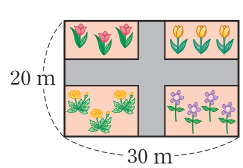
13 이차부등식의 활용

중요도

669 내신 기출

상 중 하

오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 30 m, 20 m인 직사각형 모양의 꽃밭에 폭이 일정한 길을 만들려고 한다. 길을 제외한 꽃밭의 넓이가 375 m^2 이상이 되도록 할 때, 길의 폭의 최댓값을 구하시오. 5 m



풀이
길의 폭을 x m라고 하면
$x>0$, $30-x>0$, $20-x>0$ $\therefore 0<x<20$
길을 제외한 꽃밭의 넓이가 375 m^2 이상이 되려면
$(30-x)(20-x)\ge375$
$(x-5)(x-45)\ge0$ $\therefore x\le5$ 또는 $x\ge45$
이때 $0<x<20$이므로 $0<x\le5$
따라서 길의 폭의 최댓값은 5 m이다.

670

상 중 하

지면으로부터 높이가 20 m인 건물에서 똑바로 위로 던진 공의 t초 후의 지면으로부터의 높이를 h m라고 하면

$$h=-5t^2+30t+20$$

인 관계가 성립한다고 한다. 이 공의 높이가 60 m 이상인 시간은 몇 초 동안인지 구하시오. 2초

풀이
$-5t^2+30t+20\ge60$, $t^2-6t+8\le0$
$(t-2)(t-4)\le0$ $\therefore 2\le t\le4$
따라서 공의 높이가 60 m 이상인 시간은
$4-2=2$(초)
동안이다.

671

상 중 하

어느 편의점에서 초콜릿 한 개를 2000원에 팔면 하루에 40개가 팔리고, 가격을 100원씩 할인할 때마다 초콜릿은 5개씩 더 팔린다고 한다. 초콜릿의 하루 판매 금액이 90000원 이상이 되려면 초콜릿을 얼마 할인해야 하는지 할인 금액의 범위를 구하시오. **200원 이상 1000원 이하**

풀이
초콜릿의 판매 가격을 $100x$원 할인한다고 하면 판매 가격이 $(2000-100x)$원일 때, 판매 수량은 $(40+5x)$개이다.
초콜릿의 하루 판매 금액이 90000원 이상이 되려면
$(2000-100x)(40+5x)\ge90000$
$x^2-12x+20\le0$, $(x-2)(x-10)\le0$
$\therefore 2\le x\le10$
이때 $200\le100x\le1000$이므로 할인 금액의 범위는 200원 이상 1000원 이하이다.

14 연립이차부등식의 풀이

중요도

672 교육청 기출

상 중 하

연립부등식 $\begin{cases}2x-6\ge0\\x^2-8x+12\le0\end{cases}$ 을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은?

① 15 ② 16 ③ 17
✓④ 18 ⑤ 19

풀이
$2x-6\ge0$에서 $x\ge3$ ⋯⋯ ㉠
$x^2-8x+12\le0$에서 $(x-2)(x-6)\le0$ $\therefore 2\le x\le6$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $3\le x\le6$
따라서 모든 자연수 x의 값의 합은
$3+4+5+6=18$

673

상중하

부등식 $x^2+6\le 2x^2-x\le 8x-4$를 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오. 2

풀이

$\begin{cases} x^2+6\le 2x^2-x & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-x\le 8x-4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+2)(x-3)\ge 0$ $\quad\therefore x\le -2$ 또는 $x\ge 3$ …… ㉢

㉡에서 $(2x-1)(x-4)\le 0$ $\quad\therefore \frac{1}{2}\le x\le 4$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $3\le x\le 4$

따라서 정수 x는 3, 4의 2개이다.

674

상중하

연립부등식 $\begin{cases} x-2\le x^2-2x \\ 3x^2+5x\le x^2+4x+6 \end{cases}$의 해가 이차부등식 $ax^2+bx+c\le 0$의 해와 같을 때, $\frac{b+c}{a}$의 값을 구하시오. -1

풀이

$x-2\le x^2-2x$에서 $x\le 1$ 또는 $x\ge 2$ …… ㉠

$3x^2+5x\le x^2+4x+6$에서 $-2\le x\le \frac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-2\le x\le 1$

따라서 이차부등식 $ax^2+bx+c\le 0$의 해가 $-2\le x\le 1$이므로 $a>0$

해가 $-2\le x\le 1$이고 x^2의 계수가 a인 이차부등식은

$a(x+2)(x-1)\le 0$ $\quad\therefore ax^2+ax-2a\le 0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c\le 0$과 같으므로 $a=b$, $-2a=c$

$\therefore \frac{b+c}{a}=\frac{a+(-2a)}{a}=-1$

675 내신 기출

상중하

$x^2-2y=1$을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 연립부등식 $\begin{cases} -2y+3>2x+1 \\ 4y+3\le 2x+5 \end{cases}$를 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 1 ✓② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

풀이

$y=\frac{x^2-1}{2}$을 주어진 부등식에 대입하면

$\begin{cases} -x^2+4>2x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+1\le 2x+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-3<x<1$ …… ㉢

㉡에서 $-1\le x\le 2$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $-1\le x<1$

따라서 정수 x는 -1, 0의 2개이다.

15 절댓값 기호를 포함한 연립이차부등식의 풀이

중요도

676

상중하

연립부등식 $\begin{cases} |x-1|>2 \\ x^2-4x-12\le 0 \end{cases}$을 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
✓④ 4 ⑤ 5

풀이

$|x-1|>2$에서 $x<-1$ 또는 $x>3$ …… ㉠

$x^2-4x-12\le 0$에서 $-2\le x\le 6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-2\le x<-1$ 또는 $3<x\le 6$

따라서 정수 x는 -2, 4, 5, 6의 4개이다.

677

상중하

연립부등식 $\begin{cases} x^2+|x|-6<0 \\ x^2-4x+3\ge 0 \end{cases}$의 해를 구하시오. $-2<x\le 1$

풀이

$x^2+|x|-6<0$에서

$x<0$일 때, $x^2-x-6<0$이므로 $-2<x<0$ …… ㉠

$x\ge 0$일 때, $x^2+x-6<0$이므로 $0\le x<2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x^2+|x|-6<0$의 해는 $-2<x<2$ …… ㉢

$x^2-4x+3\ge 0$을 풀면 $x\le 1$ 또는 $x\ge 3$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $-2<x\le 1$

678

상중하

연립부등식 $\begin{cases} |x^2-3x-8|<10 \\ 2x^2-5x-18\le 0 \end{cases}$의 해를 구하시오.

$-2\le x<1$ 또는 $2<x\le \frac{9}{2}$

풀이

$|x^2-3x-8|<10$에서 $-10<x^2-3x-8<10$

$-10<x^2-3x-8$에서 $x<1$ 또는 $x>2$ …… ㉠

$x^2-3x-8<10$에서 $-3<x<6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $|x^2-3x-8|<10$의 해는

$-3<x<1$ 또는 $2<x<6$ …… ㉢

$2x^2-5x-18\le 0$에서 $-2\le x\le \frac{9}{2}$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$-2\le x<1$ 또는 $2<x\le \frac{9}{2}$

16 해가 주어진 연립이차부등식

중요도

679

상 중 하

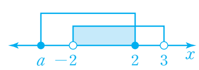
연립부등식 $\begin{cases} x^2-x-6<0 \\ (x-2)(x-a)\le 0 \end{cases}$의 해가 $-2<x\le 2$가 되도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오. $a\le -2$

풀이

$x^2-x-6<0$을 풀면 $-2<x<3$

연립부등식의 해가 $-2<x\le 2$이므로

오른쪽 그림에서 $a\le -2$



680 교육청 기출

상 중 하

$a<0$일 때, x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} (x-a)^2<a^2 \\ x^2+a<(a+1)x \end{cases}$$

의 해가 $b<x<b+1$이다. $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① 2　② 1　③ 0

④ -1　✓⑤ -2

풀이

$(x-a)^2<a^2$을 풀면 $2a<x<0$ ($\because a<0$) …… ㉠

$x^2+a<(a+1)x$를 풀면 $a<x<1$ ($\because a<0$) …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $a<x<0$

이것이 $b<x<b+1$과 같으므로

$a=b$, $0=b+1$　$\therefore a=-1$, $b=-1$

$\therefore a+b=-2$

681 내신 기출

상 중 하

연립부등식 $\begin{cases} x^2-x+a\ge 0 \\ x^2-x+b<0 \end{cases}$의 해가 $-3<x\le -1$ 또는 $2\le x<4$가 되도록 하는 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. 24

풀이

주어진 연립부등식의 해가 $-3<x\le -1$ 또는 $2\le x<4$이므로 부등식 $x^2-x+a\ge 0$의 해는 $x\le -1$ 또는 $x\ge 2$이고, 부등식 $x^2-x+b<0$의 해는 $-3<x<4$이다.

해가 $x\le -1$ 또는 $x\ge 2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-2)\ge 0$　$\therefore x^2-x-2\ge 0$　$\therefore a=-2$

해가 $-3<x<4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-4)<0$　$\therefore x^2-x-12<0$　$\therefore b=-12$

$\therefore ab=24$

682

상 중 하

연립부등식 $\begin{cases} x^2-(2a+5)x+a^2+5a<0 \\ x^2-2x-24>0 \end{cases}$의 해가 존재하지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

$-4\le a\le 1$

풀이

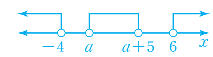
$x^2-(2a+5)x+a^2+5a<0$에서 $a<x<a+5$

$x^2-2x-24>0$에서 $x<-4$ 또는 $x>6$

해가 존재하지 않으므로 오른쪽 그림에서

$a\ge -4$, $a+5\le 6$

$\therefore -4\le a\le 1$



683

상 중 하

모든 실수 x에 대하여 부등식

$$-x^2+5x-3<x^2+a\le 3x^2-x+1$$

이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위가 $\alpha<a\le\beta$일 때, $\dfrac{\beta}{\alpha}$의 값을 구하시오. 7

풀이

$\begin{cases} -x^2+5x-3<x^2+a & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+a\le 3x^2-x+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2x^2-5x+a+3>0$, ㉡에서 $2x^2-x+1-a\ge 0$

두 이차방정식 $2x^2-5x+a+3=0$, $2x^2-x+1-a=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라고 하면

$D_1=(-5)^2-4\times 2\times(a+3)<0$　$\therefore a>\dfrac{1}{8}$ …… ㉢

$D_2=(-1)^2-4\times 2\times(1-a)\le 0$　$\therefore a\le\dfrac{7}{8}$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $\dfrac{1}{8}<a\le\dfrac{7}{8}$이므로 $\alpha=\dfrac{1}{8}$, $\beta=\dfrac{7}{8}$　$\therefore \dfrac{\beta}{\alpha}=7$

17 정수인 해의 개수가 주어진 연립이차부등식

중요도

684

상 중 하

연립부등식 $\begin{cases} x^2-6x+5\le 0 \\ x^2+(1-a)x\le 0 \end{cases}$을 만족시키는 정수 x가 3개일 때, 실수 a의 최솟값은?

① 2　② 3　✓③ 4

④ 5　⑤ 6

풀이

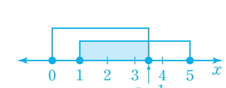
$x^2-6x+5\le 0$에서 $1\le x\le 5$

$x^2+(1-a)x\le 0$에서 $x(x+1-a)\le 0$

연립부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이므로 오른쪽 그림에서

$3\le a-1<4$　$\therefore 4\le a<5$

따라서 실수 a의 최솟값은 4이다.



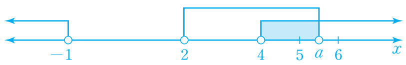
685

상 중 하

연립부등식 $\begin{cases} x^2-3x-4>0 \\ x^2-(a+2)x+2a<0 \end{cases}$ 의 정수인 해가 5뿐이도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $m<a\le n$이다. 이때 $|m-n|$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

풀이
$x^2-3x-4>0$에서 $x<-1$ 또는 $x>4$
$x^2-(a+2)x+2a<0$에서 $(x-2)(x-a)<0$
연립부등식의 정수인 해가 5뿐이어야 하므로 다음 그림에서



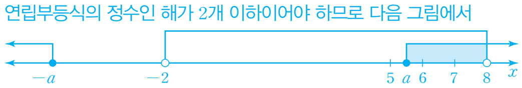
$5<a\le 6$
따라서 $m=5$, $n=6$이므로
$|m-n|=1$

686

상 중 하

연립부등식 $\begin{cases} x^2-4x-15<2x+1 \\ x^2-a^2\ge 0 \end{cases}$ 의 정수인 해가 2개 이하가 되기 위한 양수 a의 값의 범위를 구하시오. $a>5$

풀이
$x^2-4x-15<2x+1$에서 $-2<x<8$
$x^2-a^2\ge 0$에서 $x\le -a$ 또는 $x\ge a$ ($\because a>0$)
연립부등식의 정수인 해가 2개 이하이어야 하므로 다음 그림에서



$a>5$

687

상 중 하

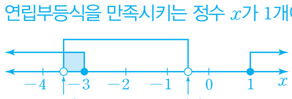
연립부등식 $\begin{cases} x^2+2x-3\ge 0 \\ x^2+(2a+1)x+a^2+a-2<0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x가 1개일 때, 실수 a의 값의 범위는

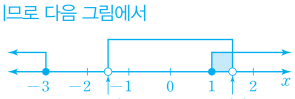
$-\alpha\le a<\beta$ 또는 $\alpha<a\le\gamma$

이다. 이때 $\alpha+\beta+\gamma$의 값은? (단, $\alpha>0$)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

풀이
$x^2+2x-3\ge 0$에서 $x\le -3$ 또는 $x\ge 1$
$x^2+(2a+1)x+a^2+a-2<0$에서 $-a-2<x<-a+1$
연립부등식을 만족시키는 정수 x가 1개이므로 다음 그림에서





$\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=2$
$\therefore \alpha+\beta+\gamma=3$

688 교육청 기출

상 중 하

x에 대한 연립부등식 $\begin{cases} x^2+3x-10<0 \\ ax\ge a^2 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수가 4가 되도록 하는 정수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

풀이
$x^2+3x-10<0$에서 $-5<x<2$
$ax\ge a^2$에서
(i) $a<0$일 때, $x\le a$이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 4이려면 $a=-1$
(ii) $a=0$일 때, $0\times x\ge 0$이므로 $ax\ge a^2$의 해는 모든 실수이다.
따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1$의 6개이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(iii) $a>0$일 때, $x\ge a$이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 1의 1개이거나 없다. 따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(i)~(iii)에서 $a=-1$

18 연립이차부등식의 활용

중요도

689 내신 기출

상 중 하

길이가 24인 철사로 가로의 길이가 세로의 길이의 2배보다 긴 직사각형을 만들었다. 직사각형의 넓이가 20 이상일 때, 가로의 길이 x의 값의 범위를 구하시오. $8<x\le 10$

풀이
$\begin{cases} x>2(12-x) & \cdots\cdots ㉠ \\ x(12-x)\ge 20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $x>8$ ······ ㉢
㉡에서 $2\le x\le 10$ ······ ㉣
㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $8<x\le 10$

690

상 중 하

세 변의 길이가 $x+2$, $x+1$, $x-2$인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x의 값의 범위가 $a<x<b$일 때, $b-a$의 값은?

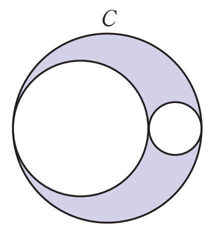
① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$
④ $3+2\sqrt{2}$ ⑤ $6+2\sqrt{2}$

풀이
$x+2$, $x+1$, $x-2$가 삼각형의 변의 길이이므로 $x>2$ ······ ㉠
삼각형이 만들어질 조건에 의하여
$x+2<(x+1)+(x-2)$ $\therefore x>3$ ······ ㉡
둔각삼각형이 되려면
$(x+2)^2>(x+1)^2+(x-2)^2$, $x^2-6x+1<0$
$\therefore 3-2\sqrt{2}<x<3+2\sqrt{2}$ ······ ㉢
㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $3<x<3+2\sqrt{2}$
따라서 $a=3$, $b=3+2\sqrt{2}$이므로
$b-a=2\sqrt{2}$

691

상 중 하

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 6인 원 C의 내부에 원 C에 내접하는 두 원이 서로 외접하고 있다. 색칠한 부분의 넓이가 원 C의 넓이의 $\frac{1}{3}$ 이상이 되도록 할 때, 내접하는 두 원 중 큰 원의 반지름의 길이의 최댓값을 구하시오. (단, 세 원의 중심은 일직선 위에 있다.) $3+\sqrt{3}$



풀이

원 C의 내부의 큰 원의 반지름의 길이를 x라고 하면 작은 원의 반지름의 길이는 $6-x$이므로 $x>6-x$ $\quad\therefore x>3$ ······ ㉠

내접하는 두 원의 넓이의 합이 원 C의 넓이의 $\frac{2}{3}$ 이하가 되어야 하므로

$\pi\{x^2+(6-x)^2\}\le\frac{2}{3}\times\pi\times6^2 \quad \therefore 3-\sqrt{3}\le x\le3+\sqrt{3}$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $3<x\le3+\sqrt{3}$

따라서 큰 원의 반지름의 길이의 최댓값은 $3+\sqrt{3}$이다.

19 이차방정식의 근의 판별과 이차부등식

중요도

692

상 중 하

x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+2k^2-5k-9=0$이 허근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $-5<k<2$
② $-2<k<5$
✓③ $k<-2$ 또는 $k>5$
④ $k<-5$ 또는 $k>2$
⑤ $k>5$

풀이

이차방정식 $x^2+2(k-1)x+2k^2-5k-9=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(2k^2-5k-9)<0$

$(k+2)(k-5)>0 \quad \therefore k<-2$ 또는 $k>5$

693

상 중 하

x에 대한 이차방정식 $x^2+2ax+3(a^2-2a)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 이차방정식 $x^2+(a-3)x+a=0$은 허근을 갖도록 하는 정수 a의 개수는?

✓① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

풀이

이차방정식 $x^2+2ax+3(a^2-2a)=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-3(a^2-2a)>0$

$2a(a-3)<0 \quad \therefore 0<a<3$ ······ ㉠

이차방정식 $x^2+(a-3)x+a=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$D_2=(a-3)^2-4a<0$

$(a-1)(a-9)<0 \quad \therefore 1<a<9$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1<a<3$

따라서 정수 a는 2의 1개이다.

694

상 중 하

x에 대한 이차방정식 $x^2-(3k-1)x+2k^2+ak=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은?

① -4
✓② -3
③ -2
④ 2
⑤ 3

풀이

이차방정식 $x^2-(3k-1)x+2k^2+ak=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=\{-(3k-1)\}^2-4(2k^2+ak)\ge0$

$k^2-2(2a+3)k+1\ge0$

이 부등식이 실수 k의 값에 관계없이 성립하므로 이차방정식 $k^2-2(2a+3)k+1=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$\frac{D_1}{4}=(2a+3)^2-1\le0$

$4(a+2)(a+1)\le0 \quad \therefore -2\le a\le-1$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$-2+(-1)=-3$

20 이차방정식의 실근의 부호

중요도

695

상 중 하

이차방정식 $x^2+(k+3)x+k+6=0$이 두 음의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 최솟값은?

① -5
② -3
③ -1
④ 1
✓⑤ 3

풀이

(i) 이차방정식 $x^2+(k+3)x+k+6=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(k+3)^2-4(k+6)\ge0$

$(k+5)(k-3)\ge0 \quad \therefore k\le-5$ 또는 $k\ge3$

(ii) (두 근의 합)$=-(k+3)<0$

$\therefore k>-3$

(iii) (두 근의 곱)$=k+6>0$

$\therefore k>-6$

(i)~(iii)에서 $k\ge3$

따라서 정수 k의 최솟값은 3이다.

696 내신 기출

상 중 하

이차방정식 $x^2-2(a-1)x-a+3=0$이 두 양의 실근을 가질 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오. $2\le a<3$

풀이

(i) 이차방정식 $x^2-2(a-1)x-a+3=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-(-a+3)\ge0$

$(a+1)(a-2)\ge0$

$\therefore a\le-1$ 또는 $a\ge2$

(ii) (두 근의 합)$=2(a-1)>0 \quad \therefore a>1$

(iii) (두 근의 곱)$=-a+3>0 \quad \therefore a<3$

(i)~(iii)에서 $2\le a<3$

697

상 중 하

이차방정식 $x^2+(k^2-2k-15)x+k-3=0$의 두 근의 부호가 서로 다르고 절댓값이 같을 때, 실수 k의 값을 구하시오. -3

풀이

(i) (두 근의 합)$=-(k^2-2k-15)=0$

$(k+3)(k-5)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=5$

(ii) (두 근의 곱)$=k-3<0$

$\therefore k<3$

(i), (ii)에서 $k=-3$

698 교육청 기출

상 중 하

x에 대한 이차방정식 $x^2-2kx-k+20=0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 가질 때, $\alpha\beta>0$을 만족시키는 모든 자연수 k의 개수는?

① 14 ✓② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

풀이

이차방정식 $x^2-2kx-k+20=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(-k+20)>0$

$(k+5)(k-4)>0$ $\therefore k<-5$ 또는 $k>4$

이때 k는 자연수이므로 $k>4$ …… ㉠

$\alpha\beta=-k+20>0$에서 $k<20$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $4<k<20$

따라서 자연수 k는 $5, 6, 7, \cdots, 19$의 15개이다.

21 이차방정식의 근의 위치

중요도

699 풍쌤 비법 1

상 중 하

이차방정식 $x^2-2ax+3a=0$의 두 근이 모두 2보다 클 때, 실수 a의 최솟값을 구하시오. 3

풀이

$f(x)=x^2-2ax+3a$라고 하면

(i) 이차방정식 $x^2-2ax+3a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a\geq0$, $a(a-3)\geq0$ $\therefore a\leq0$ 또는 $a\geq3$

(ii) $f(2)=4-4a+3a>0$ $\therefore a<4$

(iii) 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=a$이므로 $a>2$

(i)~(iii)에서 $3\leq a<4$

따라서 실수 a의 최솟값은 3이다.

700 내신 기출

상 중 하

x에 대한 이차방정식 $x^2-(a^2+5)x+4a^2+5a=0$의 두 실근 사이에 3이 있을 때, 정수 a의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ✓⑤ 6

풀이

$f(x)=x^2-(a^2+5)x+4a^2+5a$라고 하면

$f(3)=9-3(a^2+5)+4a^2+5a<0$이므로

$(a+6)(a-1)<0$ $\therefore -6<a<1$

따라서 정수 a는 $-5, -4, -3, -2, -1, 0$의 6개이다.

701

상 중 하

이차방정식 $x^2-ax+2=0$의 한 근만이 이차방정식 $x^2-5x+6=0$의 두 근 사이에 있도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오. $3<a<\frac{11}{3}$

풀이

$x^2-5x+6=0$에서 $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

$f(x)=x^2-ax+2$라고 하면 방정식 $f(x)=0$의 한 근만이 2와 3 사이에 있으므로

$f(2)f(3)=(4-2a+2)(9-3a+2)<0$

$2(a-3)(3a-11)<0$

$\therefore 3<a<\frac{11}{3}$

702

상 중 하

이차방정식 $x^2-ax+4=0$의 두 근이 이차부등식 $x^2-4x+3<0$의 해의 범위 안에 있도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $\alpha\leq a<\beta$이다. $3\alpha\beta$의 값은?

① 40 ② 44 ③ 48
✓④ 52 ⑤ 56

풀이

$x^2-4x+3<0$에서 $1<x<3$

$f(x)=x^2-ax+4$라고 하면 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1과 3 사이에 있으므로

(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라고 하면 $D=a^2-16\geq0$

$(a+4)(a-4)\geq0$ $\therefore a\leq-4$ 또는 $a\geq4$

(ii) $f(1)=1-a+4>0$ $\therefore a<5$

(iii) $f(3)=9-3a+4>0$ $\therefore a<\frac{13}{3}$

(iv) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{a}{2}$이므로 $1<\frac{a}{2}<3$

$\therefore 2<a<6$

(i)~(iv)에서 $4\leq a<\frac{13}{3}$

따라서 $\alpha=4$, $\beta=\frac{13}{3}$이므로 $3\alpha\beta=52$

내신을 꽉 잡는 서술형

정답과 풀이 102쪽

703

이차부등식 $x^2-5a\le0$을 만족시키는 정수 x의 개수가 15가 되도록 하는 자연수 a의 개수를 구하시오. 3

풀이

$x^2-5a\le0$에서 $(x+\sqrt{5a})(x-\sqrt{5a})\le0$

$\therefore -\sqrt{5a}\le x\le\sqrt{5a}$ ········· 30 %

주어진 이차부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 15이므로

x는 $-7, -6, -5, \cdots, 7$이어야 한다.

즉, $7\le\sqrt{5a}<8$이어야 하므로 $\frac{49}{5}\le a<\frac{64}{5}$ ········· 50 %

따라서 자연수 a는 10, 11, 12의 3개이다. ········· 20 %

704

모든 실수 x에 대하여 $-x^2+2ax-6a+9\le0$을 만족시키는 상수 a에 대하여 $|x-a|<b$의 해 중 가장 큰 정수는 7이다. 양수 b의 값의 범위를 구하시오. $4<b\le5$

풀이

모든 실수 x에 대하여 $-x^2+2ax-6a+9\le0$, 즉 $x^2-2ax+6a-9\ge0$이 성립하므로 이차방정식 $x^2-2ax+6a-9=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(6a-9)\le0$

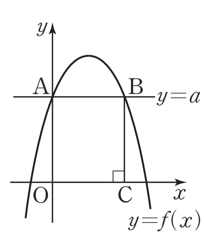
$(a-3)^2\le0$ $\quad\therefore a=3$ ········· 40 %

$|x-a|<b$, 즉 $|x-3|<b$에서 $3-b<x<3+b$ ········· 30 %

이 식을 만족시키는 가장 큰 정수가 7이므로

$7<3+b\le8$ $\quad\therefore 4<b\le5$ ········· 30 %

705



오른쪽 그림과 같이 이차함수 $f(x)=-x^2+3kx+k^2+2$의 그래프와 직선 $y=a$는 두 점 A, B에서 만난다. 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라고 할 때, 사각형 AOCB의 둘레의 길이가 24 이하가 되도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. 2

(단, 점 A는 y축 위의 점이고, O는 원점이다.)

풀이

$A(0, k^2+2)$이므로 $a=k^2+2$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k^2+2$의 교점의 x좌표를 구하면

$-x^2+3kx+k^2+2=k^2+2$에서 $x^2-3kx=0$, $x(x-3k)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3k$

$\therefore B(3k, k^2+2)$, $C(3k, 0)$ ········· 30 %

사각형 AOCB의 둘레의 길이가 24 이하이려면

$2\{(k^2+2)+3k\}\le24$ ········· 30 %

$(k+5)(k-2)\le0$ $\quad\therefore -5\le k\le2$ ········· 30 %

이때 k는 자연수이므로 1, 2의 2개이다. ········· 10 %

706

연립부등식 $\begin{cases} x^2-3x-4\le0 \\ x^2+4x-3\ge3x-1 \end{cases}$의 해와 이차부등식 $ax^2-10x+b\le0$의 해가 서로 같을 때, ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) 16

풀이

$x^2-3x-4\le0$에서 $-1\le x\le4$

$x^2+4x-3\ge3x-1$에서 $x\le-2$ 또는 $x\ge1$

따라서 연립부등식의 해는 $1\le x\le4$ ········· 40 %

따라서 이차부등식 $ax^2-10x+b\le0$의 해가 $1\le x\le4$이므로 $a>0$

해가 $1\le x\le4$이고 x^2의 계수가 a $(a>0)$인 이차부등식은

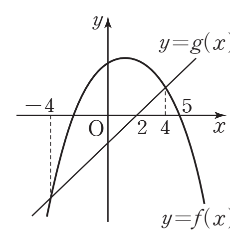
$a(x-1)(x-4)\le0$ $\quad\therefore ax^2-5ax+4a\le0$ ········· 30 %

이 부등식이 $ax^2-10x+b\le0$과 같으므로

$-5a=-10$, $4a=b$ $\quad\therefore a=2, b=8$ ········· 20 %

$\therefore ab=2\times8=16$ ········· 10 %

707



이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 오른쪽 그림과 같을 때, 연립부등식

$\begin{cases} f(x)-g(x)\ge0 & \cdots\cdots ㉠ \\ g(x)<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해를 구하시오. $-4\le x<2$

풀이

㉠에서 $f(x)\ge g(x)$이므로 $-4\le x\le4$ $\cdots\cdots$ ㉢

········· 40 %

㉡에서 $x<2$ $\cdots\cdots$ ㉣

········· 40 %

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $-4\le x<2$ ········· 20 %

708

이차방정식 $x^2+(m^2-10m+21)x+m^2-4m-5=0$의 두 근의 부호가 서로 다르고 양수인 근의 절댓값이 음수인 근의 절댓값보다 클 때, 실수 m의 값의 범위가 $\alpha<m<\beta$이다. $\alpha\beta$의 값을 구하시오. 15

풀이

(i) (두 근의 합)$=-(m^2-10m+21)>0$

$(m-3)(m-7)<0$

$\therefore 3<m<7$ ········· 40 %

(ii) (두 근의 곱)$=m^2-4m-5<0$

$(m+1)(m-5)<0$ $\quad\therefore -1<m<5$ ········· 40 %

(i), (ii)에서 $3<m<5$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=5$이므로

$\alpha\beta=3\times5=15$ ········· 20 %

고득점을 향한 도약

709

부등식 $[x]^2-10[x]+9<0$의 해가 $a\le x<b$일 때, $a+b$의 값은?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

풀이

$[x]^2-10[x]+9<0$에서

$([x]-1)([x]-9)<0 \quad \therefore 1<[x]<9$

이때 $[x]$는 정수이므로 $[x]=2, 3, 4, \cdots, 8$

$\therefore 2\le x<9$

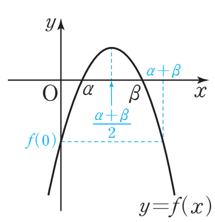
따라서 $a=2$, $b=9$이므로

$a+b=11$

710

오른쪽 그림과 같이 이차함수 $f(x)=ax^2-bx+c$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표가 α, β $(\alpha<\beta)$일 때, x에 대한 이차부등식

$ax^2-bx+c\ge a(\alpha+\beta)^2-b(\alpha+\beta)+c$의 해는?



① $x\le 0$ ② $0\le x<\alpha$
③ $\alpha\le x\le\beta$ ④ $x<\alpha+\beta$
⑤ $0\le x\le\alpha+\beta$

풀이

$f(x)=ax^2-bx+c$이므로 $f(\alpha+\beta)=a(\alpha+\beta)^2-b(\alpha+\beta)+c$

따라서 주어진 이차부등식은

$f(x)\ge f(\alpha+\beta)$ …… ㉠

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$이므로

$f(\alpha+\beta)=f(0)$

즉, 부등식 ㉠은 $f(x)\ge f(0)$이므로 주어진 부등식의 해는

$0\le x\le\alpha+\beta$

711

이차다항식 $P(x)$가 다음을 모두 만족시킬 때, $P(-1)$의 값은?

(가) 부등식 $P(x)\ge -2x-3$의 해는 $0\le x\le 1$이다.
(나) 방정식 $P(x)=-3x-2$는 중근을 갖는다.

① -3 ② -4 ③ -5
④ -6 ⑤ -7

풀이

조건 (가)에서 $P(x)+2x+3\ge 0$의 해가 $0\le x\le 1$이므로

$P(x)+2x+3=ax(x-1)$ $(a<0)$로 놓으면

$P(x)=ax^2-(a+2)x-3$

조건 (나)에서 $ax^2-(a+2)x-3=-3x-2$, 즉 $ax^2-(a-1)x-1=0$이 중근을 가지므로 이차방정식 $ax^2-(a-1)x-1=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(a-1)^2+4a=0$

$(a+1)^2=0 \quad \therefore a=-1$

따라서 $P(x)=-x^2-x-3$이므로

$P(-1)=-1+1-3=-3$

712

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음을 모두 만족시킬 때, $\dfrac{f(3)-g(3)}{m}$의 값은?

(가) 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 최고차항의 계수는 각각 1, 4이다.
(나) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=m$이다.
(다) 부등식 $f(x)\ge g(x)$의 해는 $-1\le x\le 7$이다.

① -48 ② -16 ③ 16
④ 24 ⑤ 48

풀이

조건 (가), (나)에서 $f(x)=(x-m)^2+a$, $g(x)=4(x-m)^2+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

한편, $f(x)\ge g(x)$에서 $(x-m)^2+a\ge 4(x-m)^2+b$

$3x^2-6mx+3m^2-a+b\le 0$ …… ㉠

조건 (다)에서 부등식 ㉠의 해가 $-1\le x\le 7$이므로 ㉠은 $3(x+1)(x-7)\le 0$, 즉 $3x^2-18x-21\le 0$과 같아야 한다.

즉, $-6m=-18$, $3m^2-a+b=-21$이므로 $m=3$, $a-b=48$

따라서 $f(x)=(x-3)^2+a$, $g(x)=4(x-3)^2+b$이므로

$\dfrac{f(3)-g(3)}{m}=\dfrac{a-b}{3}=\dfrac{48}{3}=16$

713

모든 실수 x에 대하여 부등식

$$-x^2+4x+2\le(a+1)x+b,$$
$$ax+b-1\le x^2-x+3$$

이 성립할 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 2 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2

④ $\frac{5}{2}$ √⑤ 3

풀이

$-x^2+4x+2\le(a+1)x+b$에서 $x^2+(a-3)x+b-2\ge0$

이차방정식 $x^2+(a-3)x+b-2=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$D_1=(a-3)^2-4(b-2)\le0$ $\quad\therefore 4b\ge a^2-6a+17$ …… ㉠

$ax+b-1\le x^2-x+3$에서 $x^2-(a+1)x-b+4\ge0$

이차방정식 $x^2-(a+1)x-b+4=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$D_2=(a+1)^2-4(-b+4)\le0$ $\quad\therefore 4b\le -a^2-2a+15$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2-6a+17\le4b\le-a^2-2a+15$ …… ㉢

이므로 $a^2-6a+17\le-a^2-2a+15$

$2(a-1)^2\le0$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉢에 대입하면 $b=3$

$\therefore ab=1\times3=3$

714 교육청 기출

다음 조건을 만족시키는 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(3)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, $M-m$의 값은?

(가) 부등식 $f\left(\frac{1-x}{4}\right)\le0$의 해가 $-7\le x\le9$이다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\ge2x-\frac{13}{3}$이 성립한다.

① $\frac{7}{4}$ ② $\frac{11}{6}$ ③ $\frac{23}{12}$

④ 2 √⑤ $\frac{25}{12}$

풀이

조건 (가)에서 $\frac{1-x}{4}=t$로 놓으면 $x=1-4t$

부등식 $f\left(\frac{1-x}{4}\right)\le0$의 해가 $-7\le x\le9$이므로 $-7\le1-4t\le9$ $\quad\therefore -2\le t\le2$

따라서 부등식 $f(t)\le0$의 해는 $-2\le t\le2$이므로 $f(x)=a(x+2)(x-2)$ $(a>0)$로 놓을 수 있다.

모든 실수 x에 대하여 $a(x+2)(x-2)\ge2x-\frac{13}{3}$, 즉 $3ax^2-6x-12a+13\ge0$이 성립하므로 이차방정식 $3ax^2-6x-12a+13=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-3a(-12a+13)\le0$ $\quad\therefore \frac{1}{3}\le a\le\frac{3}{4}$

이때 $f(3)=5a$이므로 $\frac{5}{3}\le f(3)\le\frac{15}{4}$

따라서 $M=\frac{15}{4}$, $m=\frac{5}{3}$이므로 $M-m=\frac{25}{12}$

715 도전! 1등급

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x)=x^2-4x+12,\ g(x)=-x^2+2px+4p-4$$

일 때, 모든 실수 a, b에 대하여 부등식 $f(a)\ge g(b)$가 성립하도록 하는 실수 p의 값의 범위는 $\alpha\le p\le\beta$이다. 또, 모든 실수 a에 대하여 $f(a)\ge g(a)$가 성립하도록 하는 실수 p의 값의 범위는 $\gamma\le p\le\delta$일 때, $\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값은?

① -14 ② -15 √③ -16

④ -17 ⑤ -18

풀이

$f(a)=a^2-4a+12=(a-2)^2+8$에서 $f(a)$의 최솟값은 8이다.

$g(b)=-b^2+2pb+4p-4=-(b-p)^2+p^2+4p-4$에서 $g(b)$의 최댓값은 p^2+4p-4이다.

즉, $8\ge p^2+4p-4$이어야 하므로

$(p+6)(p-2)\le0$ $\quad\therefore -6\le p\le2$ …… ㉠

임의의 실수 a에 대하여 $f(a)\ge g(a)$이려면 모든 실수 a에 대하여 $a^2-4a+12\ge-a^2+2pa+4p-4$, 즉 $2a^2-2(2+p)a-4p+16\ge0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $2a^2-2(2+p)a-4p+16=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(2+p)^2-2(-4p+16)\le0$ $\quad\therefore -14\le p\le2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha=-6$, $\beta=2$, $\gamma=-14$, $\delta=2$이므로

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-16$

716 교육청 기출

함수 $f(x)=x^2+4x-3k^2-12k+40$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수와, 함수 $g(x)=x^2-12x+3k^2-36k+96$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수가 서로 같도록 하는 모든 정수 k의 개수는?

① 11 ② 13 √③ 15

④ 17 ⑤ 19

풀이

두 이차방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라고 하면

$\frac{D_1}{4}=2^2-(-3k^2-12k+40)=3(k+6)(k-2)$

$\frac{D_2}{4}=(-6)^2-(3k^2-36k+96)=-3(k-2)(k-10)$

(i) x축과 만나는 점의 개수가 0으로 같을 때 $D_1<0$, $D_2<0$이므로 $-6<k<2$

따라서 정수 k는 -5, -4, -3, $\cdots$, 1의 7개이다.

(ii) x축과 만나는 점의 개수가 1로 같을 때 $D_1=0$, $D_2=0$이므로 $k=2$

따라서 정수 k는 2의 1개이다.

(iii) x축과 만나는 점의 개수가 2로 같을 때 $D_1>0$, $D_2>0$이므로 $2<k<10$

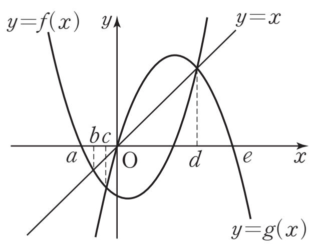
따라서 정수 k는 3, 4, 5, $\cdots$, 9의 7개이다.

(i)~(iii)에서 모든 정수 k의 개수는

$7+1+7=15$

717

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 일차함수 $y=x$의 그래프가 다음 그림과 같다.



이때 부등식 $\{f(x)-x\}\{g(x)-x\}>0$의 해는?

√① $b<x<0$　② $c<x<0$

③ $0<x<d$　④ $a<x<b$ 또는 $0<x<e$

⑤ $a<x<c$ 또는 $0<x<d$

풀이

$\{f(x)-x\}\{g(x)-x\}>0$에서 $f(x)>x$, $g(x)>x$ 또는 $f(x)<x$, $g(x)<x$

(i) $f(x)>x$, $g(x)>x$일 때

$f(x)>x$의 해는 $x<b$ 또는 $x>d$ …… ㉠

$g(x)>x$의 해는 $0<x<d$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 없다.

(ii) $f(x)<x$, $g(x)<x$일 때

$f(x)<x$의 해는 $b<x<d$ …… ㉢

$g(x)<x$의 해는 $x<0$ 또는 $x>d$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $b<x<0$

(i), (ii)에서 구하는 부등식의 해는

$b<x<0$

718 도전! 1등급

x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x^2-(k^2-1)x-k^2<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+(k-3)x-3k>0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

을 만족시키는 정수 x의 개수가 1일 때, 실수 k의 최솟값과 최댓값을 차례대로 나열한 것은?

① -1, 0　√② -1, $\sqrt{5}$　③ 0, 2

④ 0, $\sqrt{5}$　⑤ 2, $\sqrt{5}$

풀이

㉠에서 $(x+1)(x-k^2)<0$　$\therefore -1<x<k^2$ ($\because k^2\ge 0$) …… ㉢

㉡에서 $(x-3)(x+k)>0$

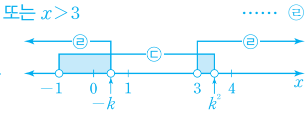
이때 $-k\ge 3$이면 부등식의 해는 $x<3$ 또는 $x>-k$이고, ㉢과의 공통부분에 있는 정수 x의 개수가 3 이상이므로 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $-k<3$이고, 부등식의 해는 $x<-k$ 또는 $x>3$ …… ㉣

(i) 정수 x의 값이 0인 경우

$0<-k\le 1$이고 $0<k^2\le 4$이어야 하므로

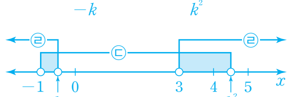
$-1\le k<0$



(ii) 정수 x의 값이 4인 경우

$-k\le 0$이고 $4<k^2\le 5$이어야 하므로

$2<k\le\sqrt{5}$



(i), (ii)에서 $-1\le k<0$ 또는 $2<k\le\sqrt{5}$

따라서 실수 k의 최솟값은 -1, 최댓값은 $\sqrt{5}$이다.

719

자연수 n에 대하여 x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} |x-n|>2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-14x+40\le 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

을 만족시키는 자연수 x의 개수가 2가 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. 21

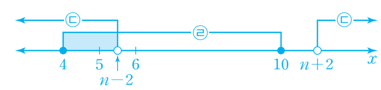
풀이

㉠에서 $x<n-2$ 또는 $x>n+2$ …… ㉢

㉡에서 $4\le x\le 10$ …… ㉣

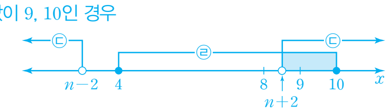
㉢, ㉣의 공통부분에서 자연수 x의 개수가 2인 경우는 다음 세 가지 경우가 존재한다.

(i) 자연수 x의 값이 4, 5인 경우



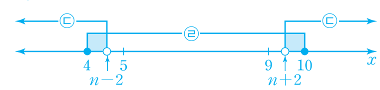
$5<n-2\le 6$이고 $n+2\ge 10$이어야 하므로 $n=8$

(ii) 자연수 x의 값이 9, 10인 경우



$n-2\le 4$이고 $8\le n+2<9$이어야 하므로 $n=6$

(iii) 자연수 x의 값이 4, 10인 경우



$4<n-2\le 5$이고 $9\le n+2<10$이어야 하므로 $n=7$

(i)~(iii)에서 모든 자연수 n의 값의 합은 $6+7+8=21$

720

세 변의 길이가 모두 다른 직각삼각형이 다음을 모두 만족시킬 때, 이 직각삼각형의 가장 긴 변의 길이는?

(가) 빗변이 아닌 두 변의 길이의 합은 13이다. (나) 삼각형의 넓이는 20보다 크다. (다) 가장 짧은 변의 길이는 자연수이다.

① 9　② $\sqrt{82}$　③ $\sqrt{83}$

④ $2\sqrt{21}$　√⑤ $\sqrt{85}$

풀이

세 변의 길이를 각각 a, b, c ($a<b<c$)라고 하면 조건 (가)에 의하여

$a+b=13$　$\therefore b=13-a$ …… ㉠

조건 (나)에 의하여 $\frac{1}{2}ab>20$　$\therefore ab>40$

이 식에 ㉠을 대입하면 $a(13-a)>40$

$(a-5)(a-8)<0$　$\therefore 5<a<8$

이때 조건 (다)에 의하여 a는 자연수이므로 $a=6$ 또는 $a=7$

$a=6$을 ㉠에 대입하면 $b=7$, $a=7$을 ㉠에 대입하면 $b=6$

그런데 $a<b$이므로 $a=6$, $b=7$

따라서 직각삼각형의 가장 긴 변의 길이는

$c=\sqrt{6^2+7^2}=\sqrt{85}$

III

경우의 수

10 순열

1 경우의 수

(1) 합의 법칙

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$

참고 (1) 합의 법칙은 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않는 셋 이상의 사건에 대해서도 성립한다.
(2) 두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이고 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수가 l이면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n-l$
(3) '또는', '~이거나' 등의 표현이 있으면 합의 법칙을 이용한다.

(2) 곱의 법칙

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는
$m\times n$

참고 (1) 곱의 법칙은 동시에 일어나는 셋 이상의 사건에 대해서도 성립한다.
(2) '동시에', '~이고', '연이어(잇달아)' 등의 표현이 있으면 곱의 법칙을 이용한다.

2 순열

(1) 순열

서로 다른 n개에서 r $(0<r\le n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라고 하며, 이 순열의 수를 기호 ${}_n\mathrm{P}_r$로 나타낸다.

${}_n\mathrm{P}_r$
서로 다른 것의 개수 (n)
택하는 것의 개수 (r)

(2) 계승

1부터 n까지의 자연수를 차례대로 곱한 것을 n의 계승이라고 하며, 기호 $n!$로 나타낸다. 즉,
$n!=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1$

(3) 순열의 수

① ${}_n\mathrm{P}_r=\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{개}}$ (단, $0<r\le n$)

② ${}_n\mathrm{P}_n=n!$, ${}_n\mathrm{P}_0=1$, $0!=1$

③ ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

문제를 풀 때 유용한 풍쌤 비법

❶ 방정식과 부등식의 해의 개수 구하기

(1) 방정식 $ax+by+cz=d$ (a, b, c, d는 상수)를 만족시키는 해의 개수
⇨ 계수의 절댓값이 가장 큰 문자를 기준으로 수를 대입하여 구한다.
예를 들어, 방정식 $x+2y+3z=9$를 만족시키는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
z의 계수의 절댓값이 가장 크므로 z를 기준으로 생각한다.
(i) $z=1$일 때, $x+2y=6$ ⇨ 순서쌍 (x, y)는 $(2, 2)$ 또는 $(4, 1)$
(ii) $z=2$일 때, $x+2y=3$ ⇨ 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$
⇨ $2+1=3$
각 경우는 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙을 이용한다.

(2) 부등식 $ax+by\le c$ (a, b, c는 상수)를 만족시키는 해의 개수
⇨ 부등식이 성립하는 $ax+by$의 값을 찾은 후 $ax+by=d$ (d는 상수)의 꼴로 만들어 이 방정식의 해의 개수를 구한다.

❷ 조건이 있는 순열의 수 구하기

(1) 이웃하는 경우 ⇨ 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 경우의 수를 구한 후, 한 묶음 안에서 자리를 바꾸는 경우의 수를 곱한다.
(2) 이웃하지 않는 경우 ⇨ 이웃해도 상관없는 것을 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한 후, 나열한 것의 사이사이와 양 끝에 이웃하지 않는 것을 나열하는 경우의 수를 곱한다.
(3) '적어도'의 조건이 있는 경우
⇨ (사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)$=$(모든 경우의 수)$-$(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

❸ 자연수의 개수 구하기

주어진 조건에 따라 기준이 되는 자리부터 먼저 배열하고, 나머지 자리에 남은 숫자들을 배열한다. 이때 맨 앞자리에 0이 올 수 없음에 주의한다.
짝수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 짝수, 홀수: 일의 자리의 숫자가 홀수,
3의 배수: 모든 자리의 숫자의 합이 3의 배수, 4의 배수: 끝의 두 자리의 수가 4의 배수, 5의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 5

정답과 풀이 106쪽

실력을 기르는 유형

01 합의 법칙 중요도

721

상 중 하

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 4 또는 7이 되는 경우의 수를 구하시오. 9

풀이

(i) 눈의 수의 합이 4인 경우는
(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지
(ii) 눈의 수의 합이 7인 경우는
(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)의 6가지
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$3+6=9$

722

상 중 하

1부터 8까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 8장의 카드 중에서 3장의 카드를 동시에 뽑을 때, 카드에 적힌 세 수의 합이 9의 배수가 되는 경우의 수는?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

풀이

(i) 세 수의 합이 9인 경우는
(1, 2, 6), (1, 3, 5), (2, 3, 4)의 3가지
(ii) 세 수의 합이 18인 경우는
(3, 7, 8), (4, 6, 8), (5, 6, 7)의 3가지
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$3+3=6$

723 교육청 기출

상 중 하

장미 8송이, 카네이션 6송이, 백합 8송이가 있다. 이 중 1송이를 골라 꽃병 A에 꽂고, 이 꽃과는 다른 종류의 꽃들 중 꽃병 B에 꽂을 꽃 9송이를 고르는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 종류의 꽃은 서로 구분하지 않는다.) 20

꽃병 A 꽃병 B

풀이

(i) 꽃병 A에 장미를 꽂는 경우
꽃병 B에 꽂을 꽃 9송이 중 카네이션이 a송이, 백합이 b송이라고 하면 순서쌍 (a, b)는 (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)의 6가지
(ii) 꽃병 A에 카네이션을 꽂는 경우
꽃병 B에 꽂을 꽃 9송이 중 장미가 a송이, 백합이 b송이라고 하면 순서쌍 (a, b)는 (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1)의 8가지
(iii) 꽃병 A에 백합을 꽂는 경우
꽃병 B에 꽂을 꽃 9송이 중 장미가 a송이, 카네이션이 b송이라고 하면 순서쌍 (a, b)는 (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1)의 6가지
(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는 $6+8+6=20$

724

상 중 하

1부터 100까지의 자연수 중에서 15와 서로소인 자연수의 개수는?

① 49 ② 50 ③ 51
④ 52 ⑤ 53

풀이

3의 배수는 3, 6, 9, ⋯, 99의 33개
5의 배수는 5, 10, 15, ⋯, 100의 20개
3과 5의 공배수인 15의 배수는 15, 30, 45, ⋯, 90의 6개
3의 배수 또는 5의 배수의 개수는
$33+20-6=47$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$100-47=53$

02 방정식과 부등식의 해의 개수 중요도

725 풍쌤 비법 1 내신 기출

상 중 하

방정식 $x+5y+4z=12$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

풀이

(i) $y=0$일 때, $x+4z=12$이므로 순서쌍 (x, z)는
(12, 0), (8, 1), (4, 2), (0, 3)의 4개
(ii) $y=1$일 때, $x+4z=7$이므로 순서쌍 (x, z)는
(7, 0), (3, 1)의 2개
(iii) $y=2$일 때, $x+4z=2$이므로 순서쌍 (x, z)는
(2, 0)의 1개
(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
$4+2+1=7$

726 풍쌤 비법 1

상 중 하

부등식 $3x+y\le 7$을 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

풀이

(i) $3x+y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는 (1, 1)의 1개
(ii) $3x+y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는 (1, 2)의 1개
(iii) $3x+y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는 (1, 3)의 1개
(iv) $3x+y=7$일 때, 순서쌍 (x, y)는 (1, 4), (2, 1)의 2개
(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는
$1+1+1+2=5$

727 내신 기출

상중하

삼각형의 세 변의 길이 a, b, c가

$a \geq b \geq c$, $a+b+c=20$

을 만족시킬 때, 가능한 삼각형의 개수는?

(단, a, b, c는 자연수이다.)

√① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

풀이

삼각형의 세 변의 길이 조건에서 $b+c>a$ …… ㉠

$a+b+c=20$에서 $b+c=20-a$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $a<10$

(i) $a=9$일 때

$b+c=11$이므로 순서쌍 (b, c)는 $(9, 2)$, $(8, 3)$, $(7, 4)$, $(6, 5)$의 4개

(ii) $a=8$일 때

$b+c=12$이므로 순서쌍 (b, c)는 $(8, 4)$, $(7, 5)$, $(6, 6)$의 3개

(iii) $a=7$일 때

$b+c=13$이므로 순서쌍 (b, c)는 $(7, 6)$의 1개

(i)~(iii)에서 구하는 삼각형의 개수는

$4+3+1=8$

728

상중하

500원, 1000원, 1500원짜리 3종류의 공책이 있다. 이 공책을 6000원어치 이하로 사는 방법의 수는?

(단, 각 공책을 적어도 한 권씩은 산다.)

① 19 ② 20 ③ 21
④ 22 √⑤ 23

풀이

500원, 1000원, 1500원짜리 공책을 각각 x권, y권, z권 산다고 하면

$500x+1000y+1500z \leq 6000$ $\therefore x+2y+3z \leq 12$

이때 각 공책을 적어도 한 권씩은 사야 하므로 x, y, z는 자연수이다.

(i) $z=1$일 때, $x+2y \leq 9$이므로 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(1, 2)$, $(4, 1)$, $(2, 2)$, $(5, 1)$, $(3, 2)$, $(1, 3)$, $(6, 1)$, $(4, 2)$, $(2, 3)$, $(7, 1)$, $(5, 2)$, $(3, 3)$, $(1, 4)$의 16개이다.

(ii) $z=2$일 때, $x+2y \leq 6$이므로 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(1, 2)$, $(4, 1)$, $(2, 2)$의 6개이다.

(iii) $z=3$일 때, $x+2y \leq 3$이므로 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$의 1개이다.

(i)~(iii)에서 구하는 방법의 수는 $16+6+1=23$

03 곱의 법칙

중요도

729

상중하

$(a+b+c)(p+q)$를 전개할 때, 항의 개수는?

① 4 √② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

풀이

$3 \times 2=6$

730

상중하

백의 자리의 숫자는 6의 약수이고 십의 자리의 숫자는 4의 배수인 세 자리 자연수 중 홀수의 개수는?

(단, 모든 자리의 숫자는 자연수이다.)

① 25 ② 30 ③ 35
√④ 40 ⑤ 45

풀이

백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 2, 3, 6의 4개

십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

4, 8의 2개

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 3, 5, 7, 9의 5개

따라서 구하는 홀수의 개수는

$4 \times 2 \times 5=40$

731 내신 기출

상중하

각 면에 1부터 8까지의 숫자가 각각 하나씩 적힌 서로 다른 정팔면체 2개를 동시에 던질 때, 바닥에 닿은 면에 적힌 수의 합이 짝수가 되는 경우의 수는?

① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 √⑤ 32

풀이

각 정팔면체에서 바닥에 닿은 면에 적힌 수가 홀수인 경우의 수는 1, 3, 5, 7의 4, 짝수인 경우의 수는 2, 4, 6, 8의 4이므로 구하는 경우의 수는

$4 \times 4+4 \times 4=32$

732

상중하

주사위 한 개를 3번 던져서 나오는 눈의 수를 차례대로 a, b, c라고 할 때, $abc+ab+bc+ca+a+b+c+1$의 값이 짝수가 되는 경우의 수를 구하시오. 189

풀이

$abc+ab+bc+ca+a+b+c+1=(a+1)(b+1)(c+1)$

이 값이 짝수인 경우의 수는 전체 경우의 수에서 이 값이 홀수인 경우의 수를 뺀 것과 같다.

주어진 값이 홀수가 되려면 $a+1$, $b+1$, $c+1$이 모두 홀수, 즉 a, b, c가 모두 짝수이어야 하므로 구하는 경우의 수는

$6 \times 6 \times 6-3 \times 3 \times 3=216-27=189$

정답과 풀이 106쪽

04 약수의 개수 중요도

733 상중하

288의 양의 약수의 개수는?

① 9　② 12　③ 15　④ 18　⑤ 21

풀이
$288=2^5\times3^2$
따라서 288의 양의 약수의 개수는
$(5+1)(2+1)=18$

734 상중하

다음을 모두 만족시키는 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오. 17

(가) 360과 420의 양의 공약수의 개수는 m이다.
(나) 12^n의 양의 약수의 개수는 66이다.

풀이
$360=2^3\times3^2\times5$
$420=2^2\times3\times5\times7$
따라서 360과 420의 최대공약수는 $2^2\times3\times5$이므로
$m=(2+1)(1+1)(1+1)=12$
$12^n=(2^2\times3)^n=2^{2n}\times3^n$
$(2n+1)(n+1)=66$, $2n^2+3n-65=0$
$(2n+13)(n-5)=0$　$\therefore n=5$ ($\because n$은 자연수)
$\therefore m+n=12+5=17$

735 상중하

240의 양의 약수에 대한 다음 〈보기〉의 설명 중에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉
ㄱ. 짝수의 개수는 16이다.
ㄴ. 3의 배수의 개수는 12이다.
ㄷ. 5의 배수의 개수는 10이다.
ㄹ. 양의 약수의 총합은 700이다.

① ㄱ, ㄴ　② ㄱ, ㄷ　③ ㄴ, ㄷ　④ ㄴ, ㄹ　⑤ ㄷ, ㄹ

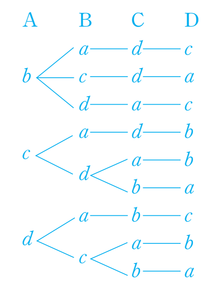
풀이
$240=2^4\times3\times5$
ㄴ. $2^4\times3\times5=3\times(2^4\times5)$
240의 양의 약수 중에서 3의 배수의 개수는
$(4+1)(1+1)=10$ (거짓)
ㄹ. 240의 양의 약수의 총합은
$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3)(1+5)=744$ (거짓)

05 수형도를 이용하는 경우의 수 중요도

736 상중하

이름이 서로 다른 4명의 학생이 교복에 부착할 이름표를 각각 하나씩 받을 때, 4명 모두 다른 학생의 이름표를 받는 경우의 수를 구하시오. 9

풀이
4명의 학생을 A, B, C, D라 하고, 네 학생의 이름표를 각각 a, b, c, d라고 할 때, 조건을 만족시키는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 구하는 경우의 수는 9이다.

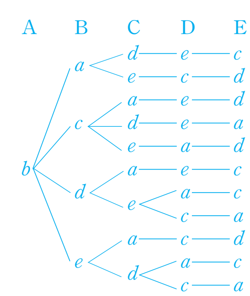


737 상중하

A, B, C, D, E 다섯 사람이 각각 서로 다른 우산을 한 개씩 가지고 가게에 들어갔다가 우산을 임의로 한 개씩 가지고 나올 때, A는 B의 우산을 가지고 나오고 B, C, D, E는 모두 다른 사람의 우산을 가지고 나오는 경우의 수는?

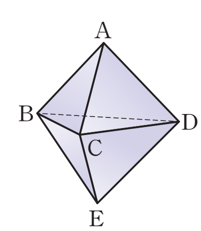
① 7　② 9　③ 11　④ 13　⑤ 15

풀이
A, B, C, D, E의 우산을 각각 a, b, c, d, e라고 할 때, 조건을 만족시키는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 구하는 경우의 수는 11이다.

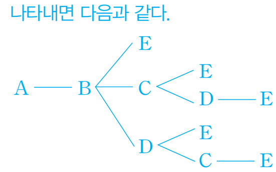


738 상중하

오른쪽 그림과 같은 육면체에서 꼭짓점 A를 출발하여 모서리를 따라 움직여 꼭짓점 E에 도착하는 경우의 수를 구하시오. (단, 한 번 지난 꼭짓점은 다시 지나지 않는다.) 15



풀이
꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 B로 움직인 후 꼭짓점 E에 도착하는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



같은 방법으로 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 C 또는 D로 움직인 후 꼭짓점 E에 도착하는 경우도 각각 5가지씩이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $5\times3=15$이다.

06 지불 방법의 수와 지불 금액의 수

중요도

739

상 중 하

500원짜리 동전 1개, 100원짜리 동전 4개, 50원짜리 동전 3개의 일부 또는 전부를 사용하여 지불하는 방법의 수는? (단, 0원을 지불하는 경우는 제외한다.)

① 31　　② 33　　③ 35

④ 37　　✓⑤ 39

풀이

500원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개의 2가지

100원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

50원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불하는 방법의 수는

$2\times5\times4-1=39$

740

상 중 하

1000원짜리 지폐 2장, 500원짜리 동전 3개, 100원짜리 동전 2개의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 금액의 수는? (단, 0원을 지불하는 경우는 제외한다.)

① 21　　✓② 23　　③ 25

④ 27　　⑤ 29

풀이

1000원짜리 지폐 2장을 500원짜리 동전 4개로 바꾸어 생각하면 500원짜리 동전 7개와 100원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액의 수는

$8\times3-1=23$

741

상 중 하

10000원짜리 지폐 3장, 5000원짜리 지폐 2장, 1000원짜리 지폐 5장의 일부 또는 전부를 사용하여 지불하는 방법의 수를 m, 지불할 수 있는 금액의 수를 n이라고 할 때, $m-n$의 값을 구하시오. 26

(단, 0원을 지불하는 경우는 제외한다.)

풀이

$m=4\times3\times6-1=71$

10000원짜리 지폐 3장과 5000원짜리 지폐 2장을 모두 1000원짜리 지폐 40장으로 바꾸어 생각하면 1000원짜리 지폐 45장으로 지불할 수 있는 금액의 수는

$n=46-1=45$

$\therefore m-n=26$

07 도로망에서의 경우의 수

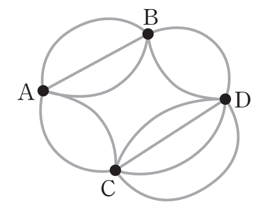
중요도

742

상 중 하

오른쪽 그림과 같이 네 개의 도시 A, B, C, D를 연결하는 도로가 있다. A 도시에서 출발하여 D 도시로 가는 경우의 수를 구하시오. 14

(단, 한 번 지나간 도시는 다시 지나지 않는다.)



풀이

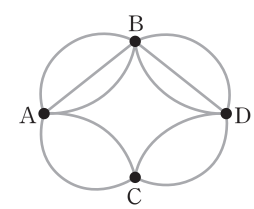
A → B → D 또는 A → C → D로 가면 되므로 구하는 경우의 수는

$3\times2+2\times4=6+8=14$

743

상 중 하

오른쪽 그림과 같이 네 지점 A, B, C, D를 연결하는 도로가 있다. A 지점에서 출발하여 D 지점으로 갔다가 다시 A 지점으로 돌아오는 경우의 수는? (단, A 지점을 제외하고 한 번 지나간 지점은 다시 지나지 않는다.)



① 48　　② 60　　✓③ 72

④ 84　　⑤ 96

풀이

A → B → D → C → A 또는 A → C → D → B → A로 가면 되므로 구하는 경우의 수는

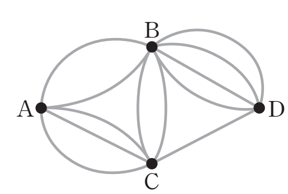
$3\times3\times2\times2+2\times2\times3\times3=36+36=72$

744

상 중 하

오른쪽 그림과 같이 네 지점 A, B, C, D를 연결하는 도로가 있다. A 지점에서 출발하여 D 지점으로 가는 경우의 수를 구하시오. 39

(단, 한 번 지나간 지점은 다시 지나지 않는다.)



풀이

A → B → D 또는 A → C → D 또는 A → B → C → D 또는 A → C → B → D로 가면 되므로 구하는 경우의 수는

$2\times4+3\times1+2\times2\times1+3\times2\times4=8+3+4+24=39$

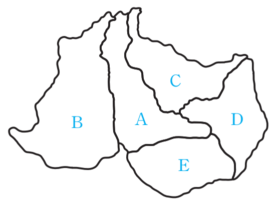
08 색칠하는 경우의 수 중요도

745 교육청 기출

상 중 하

서로 다른 네 가지의 색이 있다. 이 중 네 가지 이하의 색을 이용하여 인접한 행정 구역을 구별할 수 있도록 모두 칠하고자 한다. 다섯 개의 구역을 서로 다른 색으로 칠할 수 있는 모든 경우의 수는?

(단, 행정 구역에는 한 가지 색만을 칠한다.)



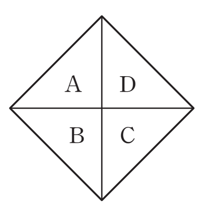
① 108 √② 144 ③ 216
④ 288 ⑤ 324

풀이
A→B→C→D→E의 순서로 칠할 수 있는 색을 생각하면 구하는 경우의 수는
$4\times3\times3\times2\times2=144$

746 내신 기출

상 중 하

오른쪽 그림의 A, B, C, D 네 개의 영역을 서로 다른 4가지 색으로 칠하려고 한다. 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 인접한 영역은 서로 다른 색으로 칠할 때, 칠하는 경우의 수를 구하시오. (단, 한 영역에는 한 가지 색만 칠한다.) 84

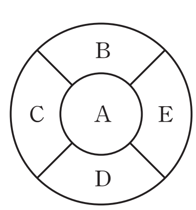


풀이
A→B→C→D의 순서로 칠하고, A와 C에 같은 색을 칠하는 경우와 다른 색을 칠하는 경우로 나누어 생각하면 구하는 경우의 수는
$4\times3\times1\times3+4\times3\times2\times2=36+48=84$

747

상 중 하

오른쪽 그림의 A, B, C, D, E 다섯 개의 영역을 서로 다른 5가지 색으로 칠하려고 한다. 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 인접한 영역은 서로 다른 색으로 칠할 때, 칠하는 경우의 수를 구하시오. (단, 한 영역에는 한 가지 색만 칠한다.) 420



풀이
A→B→C→D→E의 순서로 칠하고, B와 D에 같은 색을 칠하는 경우와 다른 색을 칠하는 경우로 나누어 생각하면 구하는 경우의 수는
$5\times4\times3\times1\times3+5\times4\times3\times2\times2=180+240=420$

09 순열의 수 중요도

748

상 중 하

golden에 있는 6개의 문자 중에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는?

① 120 ② 240 √③ 360
④ 480 ⑤ 600

풀이
${}_6P_4=6\times5\times4\times3=360$

749

상 중 하

어떤 동아리의 회원 8명 중에서 회장, 부회장, 총무를 각각 한 명씩 뽑는 경우의 수는?

① 210 ② 252 ③ 294
√④ 336 ⑤ 378

풀이
${}_8P_3=8\times7\times6=336$

750

상 중 하

서로 다른 n권의 책 중에서 2권을 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수가 42일 때, n의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 √⑤ 7

풀이
${}_nP_2=42$이므로
$n(n-1)=42,\ n^2-n-42=0$
$(n+6)(n-7)=0 \quad \therefore n=7\ (\because n>0)$

10 이웃하는 순열의 수 중요도

751 풍쌤 비법 ❷ 상 중 하

남학생 4명과 여학생 3명을 일렬로 세울 때, 다음을 구하시오.

(1) 남학생끼리 이웃하게 세우는 경우의 수 576

(2) 여학생끼리 이웃하게 세우는 경우의 수 720

(3) 남학생끼리, 여학생끼리 이웃하게 세우는 경우의 수 288

풀이

(1) $4!\times4!=576$

(2) $5!\times3!=720$

(3) $2!\times4!\times3!=288$

752 상 중 하

서로 다른 자전거 n대와 오토바이 3대를 일렬로 나열할 때, 오토바이끼리 이웃하게 나열하는 경우의 수는 720이다. 이때 n의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
√④ 4 ⑤ 5

풀이

$(n+1)!\times3!=720$이므로

$(n+1)!\times6=720$, $(n+1)!=120=5!$

즉, $n+1=5$이므로 $n=4$

753 상 중 하

5개의 문자 a, b, c, d, e를 일렬로 나열할 때, b와 c 또는 c와 d를 이웃하게 나열하는 경우의 수를 구하시오. 84

풀이

b와 c를 이웃하게 나열하는 경우의 수는 $4!\times2!=48$

c와 d를 이웃하게 나열하는 경우의 수는 $4!\times2!=48$

b와 c, c와 d를 모두 이웃하게 나열하는 경우의 수는 $3!\times2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$48+48-12=84$

11 이웃하지 않는 순열의 수 중요도

754 풍쌤 비법 ❷ 내신 기출 상 중 하

여학생 3명과 남학생 3명을 일렬로 세울 때, 남학생끼리 이웃하지 않게 세우는 경우의 수를 구하시오. 144

풀이

여학생 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!=6$

여학생의 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 남학생 3명을 세우는 경우의 수는 ${}_4P_3=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times24=144$

755 상 중 하

capture에 있는 7개의 문자를 일렬로 나열할 때, 모음끼리 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수는?

① 1360 ② 1380 ③ 1400
④ 1420 √⑤ 1440

풀이

4개의 자음 c, p, t, r를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$

자음의 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 3개의 모음 a, u, e를 나열하는 경우의 수는 ${}_5P_3=60$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times60=1440$

756 상 중 하

초등학생 2명, 중학생 3명, 고등학생 2명을 일렬로 세울 때, 초등학생끼리는 이웃하고 고등학생끼리는 이웃하지 않게 세우는 경우의 수를 구하시오. 960

풀이

고등학생을 제외한 5명의 학생을 일렬로 세울 때, 초등학생 2명을 이웃하게 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!\times2!=48$

일렬로 세운 4명의 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 고등학생 2명을 세우는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$48\times20=960$

12 자리에 대한 조건이 있는 순열의 수 중요도

757 상 중 하

TUESDAY에 있는 7개의 문자를 일렬로 나열할 때, 자음과 모음이 교대로 오도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. 144

풀이

자음은 T, S, D, Y의 4개, 모음은 U, E, A의 3개이므로 자음 4개를 일렬로 나열하고 그 사이사이에 모음 3개를 나열하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$4!\times3!=24\times6=144$

758

상 중 하

노란 공 5개, 흰 공 2개를 일렬로 나열할 때, 흰 공이 홀수 번째에 오도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. 1440

(단, 공의 종류는 모두 다르다.)

풀이

4개의 홀수 번째 자리 중 2개의 자리에 흰 공 2개를 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

나머지 5개의 자리에 노란 공 5개를 나열하는 경우의 수는 $5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times120=1440$

759 내신 기출

상 중 하

question에 있는 8개의 문자를 일렬로 나열할 때, q와 t 사이에 2개의 문자가 오도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. 7200

풀이

q와 t를 제외한 6개의 문자 중에서 2개의 문자를 택하여 q와 t 사이에 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_6P_2=30$

q, t와 그 사이의 2개의 문자를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!=120$

q와 t가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$30\times120\times2=7200$

760 교육청 기출

상 중 하

1학년 학생 2명과 2학년 학생 4명이 있다. 이 6명의 학생이 일렬로 나열된 6개의 의자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 앉는 경우의 수는?

(가) 1학년 학생끼리는 이웃하지 않는다.
(나) 양 끝에 있는 의자에는 모두 2학년 학생이 앉는다.

① 96　② 120　③ 144
④ 168　⑤ 192

풀이

2학년 학생 4명 중에서 양 끝에 있는 의자에 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

1학년 학생이 앉는 의자를 ①, 2학년 학생이 앉는 의자를 ②라고 하면 1학년 학생 2명과 양 끝에 앉는 2학년 학생을 제외한 2학년 학생 2명이 1학년 학생끼리 이웃하지 않게 앉는 경우는 ①②①②, ①②②①, ②①②①의 3가지가 있다.

이때 각각의 경우에서 1학년 학생 2명과 2학년 학생 2명이 의자에 앉는 경우의 수는

$2!\times2!=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times3\times4=144$

13 '적어도'의 조건이 있는 순열의 수

중요도

761 풍쌤 비법 ❷

상 중 하

musical에 있는 7개의 문자를 일렬로 나열할 때, 적어도 한쪽 끝에 모음이 오도록 나열하는 경우의 수는?

① 720　② 1440　③ 3600
④ 4800　⑤ 5040

풀이

전체 경우의 수에서 양 끝에 모두 자음이 오도록 나열하는 경우의 수를 빼면 되므로 구하는 경우의 수는

$7!-{}_4P_2\times5!=3600$

762

상 중 하

남학생 2명, 여학생 4명 중에서 반장 1명, 부반장 1명을 뽑을 때, 반장, 부반장 중에서 적어도 한 명은 여학생을 뽑는 경우의 수는?

① 20　② 22　③ 24
④ 26　⑤ 28

풀이

전체 경우의 수에서 반장, 부반장 모두 남학생을 뽑는 경우의 수를 빼면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_6P_2-{}_2P_2=28$

763

상 중 하

5개의 문자 a, b, c, d, e를 일렬로 나열할 때, a, c, e 중에서 적어도 2개가 이웃하도록 나열하는 경우의 수는?

① 96　② 102　③ 108
④ 114　⑤ 120

풀이

전체 경우의 수에서 3개의 문자 a, c, e 중에서 어느 것도 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수를 빼면 되므로 구하는 경우의 수는

$5!-3!\times2!=108$

14 자연수의 개수 중요도

764 풍쌤 비법 ❸ 상 중 하

7개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 4개의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수 중 천의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자가 모두 홀수인 수의 개수는?

① 30 ② 60 ③ 90
√④ 120 ⑤ 150

풀이
홀수는 1, 3, 5이므로 천의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자가 모두 홀수인 네 자리 자연수의 개수는
${}_3P_2 \times {}_5P_2 = 120$

765 상 중 하

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 사용하여 세 자리 자연수를 만들 때, 3의 배수의 개수는?

① 12 √② 24 ③ 36
④ 48 ⑤ 60

풀이
5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 3개를 택했을 때, 그 합이 3의 배수가 되는 경우는
(1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5)의 4가지
이때 각각의 경우에서 3개의 숫자로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 $3! = 6$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$4 \times 6 = 24$

766 상 중 하

6개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 4개의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수 중 5의 배수의 개수를 구하시오. 108

풀이
(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우
천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에는 0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는 ${}_5P_3 = 60$
(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 5를 제외한 4가지이고, 백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는 $4 \times {}_4P_2 = 48$
(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는
$60 + 48 = 108$

15 사전식으로 배열하는 경우의 수 중요도

767 내신 기출 상 중 하

5개의 문자 a, b, c, d, e를 모두 한 번씩 사용하여 사전식으로 배열할 때, cdbea는 몇 번째에 오는지 구하시오. 64번째

풀이
a, b로 시작하는 것의 개수는 각각 $4!$
ca, cb로 시작하는 것의 개수는 각각 $3!$
cda로 시작하는 것의 개수는 $2!$
cdb로 시작하는 것은 순서대로 cdbae, cdbea의 2개
따라서 cdbea는 $2 \times 4! + 2 \times 3! + 2! + 2 = 64$(번째)

768 상 중 하

6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 4개의 숫자를 사용하여 네 자리 자연수를 만들 때, 3100보다 큰 수의 개수는?

① 120 ② 180 √③ 240
④ 300 ⑤ 360

풀이
3100보다 큰 네 자리 자연수는 3□□□, 4□□□, 5□□□, 6□□□의 꼴이므로 구하는 자연수의 개수는
$4 \times {}_5P_3 = 240$

769 상 중 하

candle에 있는 6개의 문자를 모두 한 번씩 사용하여 사전식으로 배열할 때, 295번째에 오는 문자열은?

① dcealn ② dcelan ③ deacln
④ dealcn √⑤ decaln

풀이
a, c로 시작하는 것의 개수는 각각 $5!$
da, dc로 시작하는 것의 개수는 각각 $4!$
dea로 시작하는 것의 개수는 $3!$
따라서 acdeln부터 deanlc까지의 문자열의 개수는
$2 \times 5! + 2 \times 4! + 3! = 294$
이므로 295번째에 오는 문자열은 decaln이다.

정답과 풀이 112쪽

770

서로 다른 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라고 할 때, 부등식 $|2a-b|\le 1$을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. 8

풀이

a, b는 6 이하의 자연수이므로 부등식 $|2a-b|\le 1$에서

$2a-b=-1$ 또는 $2a-b=0$ 또는 $2a-b=1$ ······ 30 %

(i) $2a-b=-1$일 때, 순서쌍 (a, b)는 $(1, 3)$, $(2, 5)$의 2개

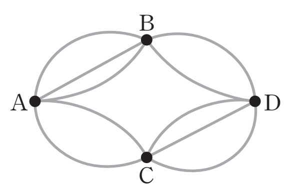
(ii) $2a-b=0$일 때, 순서쌍 (a, b)는 $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$의 3개

(iii) $2a-b=1$일 때, 순서쌍 (a, b)는 $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$의 3개 ······ 50 %

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는 $2+3+3=8$ ······ 20 %

771

오른쪽 그림과 같이 네 지점 A, B, C, D를 연결하는 도로가 있다. 본하와 우빈이가 A 지점에서 출발하여 D 지점으로 갈 때, 한 사람이 통과하는 중간 지점을 다른 사람은 통과하지 않으면서 가는 경우의 수를 구하시오. 72



풀이

(i) 본하는 A → B → D, 우빈이는 A → C → D로 가는 경우의 수는

$(3\times 2)\times(2\times 3)=36$ ······ 40 %

(ii) 본하는 A → C → D, 우빈이는 A → B → D로 가는 경우의 수는

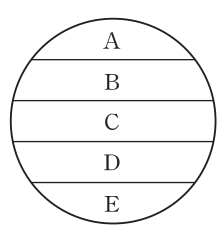
$(2\times 3)\times(3\times 2)=36$ ······ 40 %

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $36+36=72$ ······ 20 %

772

오른쪽 그림의 A, B, C, D, E 다섯 개의 영역을 서로 다른 5가지 색으로 칠하려고 한다. 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 인접한 영역은 서로 다른 색으로 칠할 때, A와 E에 같은 색을 칠하는 경우의 수를 구하시오. 260

(단, 한 영역에는 한 가지 색만 칠한다.)



풀이

A → B → C → D → E의 순서로 색을 칠할 때

(i) A(E)와 C에 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times 4\times 1\times 4\times 1=80$ ······ 40 %

(ii) A(E)와 C에 다른 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times 4\times 3\times 3\times 1=180$ ······ 40 %

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $80+180=260$ ······ 20 %

773

숫자 0, 1과 알파벳 h, o, u, s, e를 일렬로 나열할 때, 양 끝에 숫자가 오고 알파벳 자음은 서로 이웃하지 않는 경우의 수를 구하시오. 144

풀이

숫자 0, 1을 양 끝에 나열하는 경우의 수는 $2!=2$ ······ 30 %

3개의 알파벳 모음 o, u, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

알파벳 모음의 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 알파벳 자음 h, s를 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

즉, 알파벳 자음이 서로 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수는 $6\times 12=72$ ······ 40 %

따라서 구하는 경우의 수는 $2\times 72=144$ ······ 30 %

774

서로 다른 한 자리 자연수 6개를 일렬로 나열할 때, 적어도 한쪽 끝에 홀수가 오도록 나열하는 경우의 수가 432이다. 이때 홀수의 개수를 구하시오. 2

풀이

6개의 자연수를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $6!=720$ ······ 20 %

6개의 자연수 중에서 짝수의 개수를 n $(2\le n\le 5)$이라고 하면 양 끝에 모두 짝수가 오도록 나열하는 경우의 수는 ${}_nP_2\times 4!=24n(n-1)$ ······ 30 %

따라서 적어도 한쪽 끝에 홀수가 오도록 나열하는 경우의 수는

$720-24n(n-1)$ ······ 30 %

즉, $720-24n(n-1)=432$이므로 $n^2-n-12=0$

$(n+3)(n-4)=0$ $\therefore n=4$ $(\because 2\le n\le 5)$

따라서 홀수의 개수는 $6-4=2$ ······ 20 %

775

5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 4개의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수 중 4의 배수의 개수를 구하시오. 30

풀이

4의 배수가 되려면 끝의 두 자리의 숫자가 4의 배수이어야 한다. ······ 20 %

(i) 끝의 두 자리의 숫자가 04, 20, 40인 경우의 수는 $3\times {}_3P_2=18$ ······ 30 %

(ii) 끝의 두 자리의 숫자가 12, 24, 32인 경우의 수는 $3\times 2\times 2=12$ ······ 30 %

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는 $18+12=30$ ······ 20 %

고득점을 향한 도약

776

각 면에 1, 2, 3, 4, 6, 12가 각각 하나씩 적힌 서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수를 각각 x, y, z라고 하자. $xy+yz+zx$의 값이 홀수가 되는 경우의 수는?

① 24 ② 32 ③ 40
④ 48 √⑤ 56

풀이
(i) xy, yz, zx의 값이 모두 홀수인 경우
x, y, z가 모두 홀수이어야 하므로 경우의 수는
$2\times2\times2=8$
(ii) xy, yz, zx의 값 중 하나는 홀수, 나머지 두 개는 짝수인 경우
x, y, z 중 2개는 홀수이고, 나머지 하나는 짝수이어야 하므로 경우의 수는
$(2\times2\times4)\times3=48$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$8+48=56$

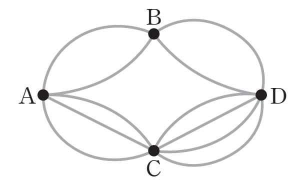
777

1000원짜리 지폐 2장, 500원짜리 동전 n개, 100원짜리 동전 10개의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 금액의 수가 50일 때, 2500원을 지불하는 방법의 수는?
(단, 0원을 지불하는 경우는 제외한다.)

① 4 ② 5 ③ 6
√④ 7 ⑤ 8

풀이
1000원짜리 지폐 2장과 500원짜리 동전 n개를 모두 100원짜리 동전 $(5n+20)$개로 바꾸어 생각하면 100원짜리 동전 $(5n+30)$개로 지불할 수 있는 금액의 수는
$5n+30=50$이므로 $5n=20$ $\therefore n=4$
2500원을 1000원짜리 지폐 x장, 500원짜리 동전 y개, 100원짜리 동전 z개를 사용하여 지불한다고 하면
$1000x+500y+100z=2500$ $\therefore 10x+5y+z=25$
이때 x, y, z는 $0\le x\le2$, $0\le y\le4$, $0\le z\le10$인 정수이므로 다음과 같이 세 경우로 나누어 생각할 수 있다.
(i) $x=0$일 때, $5y+z=25$이므로 순서쌍 (y, z)는 $(3, 10)$, $(4, 5)$의 2개
(ii) $x=1$일 때, $5y+z=15$이므로 순서쌍 (y, z)는 $(1, 10)$, $(2, 5)$, $(3, 0)$의 3개
(iii) $x=2$일 때, $5y+z=5$이므로 순서쌍 (y, z)는 $(0, 5)$, $(1, 0)$의 2개
(i)~(iii)에서 2500원을 지불하는 방법의 수는
$2+3+2=7$

778



오른쪽 그림과 같이 네 지점을 연결하는 도로에서 B 지점과 C 지점을 연결하는 도로를 추가하였더니 A 지점에서 출발하여 D 지점으로 가는 경우의 수가 100이었다고 한다. B 지점과 C 지점 사이에 추가한 도로의 개수를 구하시오. 6
(단, 한 번 지나간 지점은 다시 지나지 않고, 도로끼리는 서로 만나지 않는다.)

풀이
x개의 도로를 추가했다고 하면
A → B → D 또는 A → C → D 또는 A → B → C → D 또는 A → C → B → D
로 가면 되므로 경우의 수는
$2\times2+3\times4+2\times x\times4+3\times x\times2=100$
$14x+16=100$, $14x=84$ $\therefore x=6$
따라서 추가한 도로의 개수는 6이다.

779 교육청 기출

오른쪽 그림과 같이 크기가 같은 6개의 정사각형에 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있다. 서로 다른 4가지 색의 일부 또는 전부를 사용하여 다음 조건을 만족시키도록 6개의 정사각형에 색을 칠하는 경우의 수는?
(단, 한 정사각형에 한 가지 색만을 칠한다.)

1	2	3
4	5	6

(가) 1이 적힌 정사각형과 6이 적힌 정사각형에는 같은 색을 칠한다.
(나) 변을 공유하는 두 정사각형에는 서로 다른 색을 칠한다.

① 72 ② 84 √③ 96
④ 108 ⑤ 120

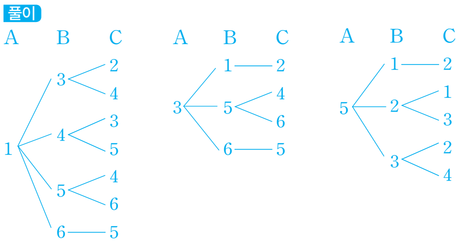
풀이
1, 6, 2, 3, 5, 4가 적힌 정사각형의 순서로 칠할 수 있는 색을 생각하면 구하는 경우의 수는
$4\times1\times3\times2\times2\times2=96$

780

A, B, C, D, E 5명의 학생이 다음과 같은 사물함에 물건을 넣으려고 한다. A는 홀수 번호의 사물함에 넣고, B는 A와 이웃하지 않은 사물함에 넣고, C는 B와 이웃한 사물함에 넣는 경우의 수는?

① 48　② 64　③ 72
④ 80　√⑤ 96

풀이



위의 수형도에서 A, B, C가 사물함에 물건을 넣는 경우의 수는 16이고, 그 각각에 대하여 D, E가 물건을 넣는 경우의 수는 ${}_{3}P_{2}=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$16\times6=96$

781

남학생 12명과 여학생 2명을 일렬로 세울 때, 여학생끼리는 이웃하지 않고 남학생끼리는 서로 이웃한 학생 수가 항상 짝수가 되도록 세우는 경우의 수는

$N\times12!$

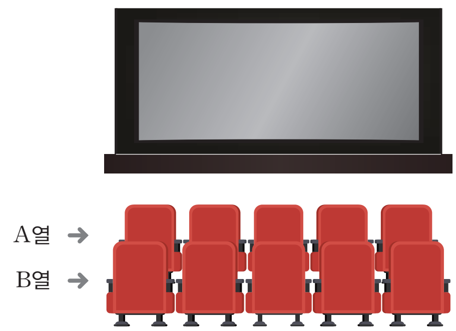
이다. 이때 자연수 N의 값은?

① 36　② 38　③ 40
√④ 42　⑤ 44

풀이
남학생 12명을 일렬로 세우는 경우의 수는 12!
남학생을 2명씩 짝지어 그 2명을 한 사람으로 생각하여 6명의 사이사이와 양 끝의 7개의 자리에 여학생 2명을 세우는 경우의 수는 ${}_{7}P_{2}=42$
따라서 $42\times12!=N\times12!$이므로 $N=42$

782 도전 1등급 교육청 기출

할아버지, 할머니, 아버지, 어머니, 아이로 구성된 5명의 가족이 영화를 보려고 한다. 영화관의 좌석은 다음 그림과 같이 A, B 두 개의 열로 이루어져 있고, 각 열에는 5개의 좌석이 있다.



A열에는 할아버지와 할머니가 이웃하여 앉고, B열에는 아버지, 어머니, 아이가 앉되 아이는 아버지 또는 어머니와 이웃하고, 아이의 바로 앞에 있는 좌석은 비어 있도록 한다. 이때 5명이 모두 좌석에 앉는 경우의 수를 구하시오. 192
(단, 2명이 같은 열의 바로 옆에 앉을 때에만 이웃한 것으로 본다. 또, 한 좌석에는 한 명만 앉고, 다른 관람객은 없다.)

풀이

A열	1번	2번	3번	4번	5번
B열	1번	2번	3번	4번	5번

(i) 아이가 B열 1번에 앉는 경우
아버지 또는 어머니가 아이와 이웃하게 앉는 경우의 수는
${}_{4}P_{2}-{}_{3}P_{2}=6$
할아버지와 할머니가 A열 2, 3, 4, 5번 중에서 이웃하게 앉는 경우의 수는
$3\times2!=6$
따라서 경우의 수는 $6\times6=36$
(ii) 아이가 B열 2번에 앉는 경우
아버지 또는 어머니가 아이와 이웃하게 앉는 경우의 수는
${}_{4}P_{2}-{}_{2}P_{2}=10$
할아버지와 할머니가 A열 1, 3, 4, 5번 중에서 이웃하게 앉는 경우의 수는
$2\times2!=4$
따라서 경우의 수는 $10\times4=40$
(iii) 아이가 B열 3번에 앉는 경우
아버지 또는 어머니가 아이와 이웃하게 앉는 경우의 수는
${}_{4}P_{2}-{}_{2}P_{2}=10$
할아버지와 할머니가 A열 1, 2, 4, 5번 중에서 이웃하게 앉는 경우의 수는
$2\times2!=4$
따라서 경우의 수는 $10\times4=40$
(iv) 아이가 B열 4번에 앉는 경우
아이가 B열 2번에 앉는 경우의 수와 같으므로 경우의 수는 40
(v) 아이가 B열 5번에 앉는 경우
아이가 B열 1번에 앉는 경우의 수와 같으므로 경우의 수는 36
(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는
$36+40+40+40+36=192$

783

1부터 n까지의 자연수를 일렬로 나열할 때, 1과 2 사이에 3개의 자연수가 들어가도록 나열하는 경우의 수가 720이다. 이때 ${}_{n}P_{n-4}$의 값은? (단, $n\geq5$)

① 5 ② 30 √③ 210
④ 840 ⑤ 1680

풀이
${}_{n-2}P_3\times2!\times(n-4)!=720$이므로
$(n-2)(n-3)(n-4)\times(n-4)!=360$
$=5\times4\times3\times3\times2\times1$
$=5\times4\times3\times3!$
즉, $n-2=5$이므로 $n=7$
$\therefore {}_{n}P_{n-4}={}_{7}P_{3}=210$

784

남학생 3명과 여학생 3명을 다음을 모두 만족시키도록 일렬로 세울 때, 그 경우의 수는?

(가) 여학생 3명 중 2명만 서로 이웃한다.
(나) 적어도 한쪽 끝에 여학생이 온다.

√① 360 ② 392 ③ 420
④ 432 ⑤ 452

풀이
여학생 3명 중 2명만 서로 이웃하게 세우는 경우의 수에서 양 끝에 모두 남학생이 오고 여학생 3명 중 2명만 서로 이웃하게 세우는 경우의 수를 빼면 되므로 구하는 경우의 수는
${}_{3}P_2\times3!\times{}_{4}P_2-{}_{3}P_2\times3!\times{}_{2}P_2=432-72=360$

785

세 자리 자연수 중 101, 121, 954와 같이 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자 중에서 두 자리의 숫자의 합이 나머지 한 자리의 숫자와 같은 자연수의 개수는?

① 102 ② 108 ③ 114
④ 120 √⑤ 126

풀이
세 자리 자연수를 $100a+10b+c$ $(1\leq a\leq9,\ 0\leq b\leq9,\ 0\leq c\leq9$인 정수$)$라고 하자.
(i) $b=0$인 경우
$a=c$이어야 하므로 101, 202, 303, ⋯, 909의 9가지
(ii) $c=0$인 경우
$a=b$이어야 하므로 110, 220, 330, ⋯, 990의 9가지
(iii) $a=b+c$ $(b\neq0,\ c\neq0)$인 경우
$a=2$일 때, 순서쌍 $(b,\ c)$는 $(1,\ 1)$의 1가지
$a=3$일 때, 순서쌍 $(b,\ c)$는 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$의 2가지
$a=4$일 때, 순서쌍 $(b,\ c)$는 $(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$의 3가지
⋮
$a=9$일 때, 순서쌍 $(b,\ c)$는 $(1,\ 8)$, $(2,\ 7)$, $(3,\ 6)$, ⋯, $(8,\ 1)$의 8가지
따라서 경우의 수는
$1+2+3+\cdots+8=36$
(iv) $b=a+c$ 또는 $c=a+b$ $(b\neq0,\ c\neq0)$인 경우
(iii)과 같은 방법으로 구하면 경우의 수는 각각 36
(i)~(iv)에서 구하는 자연수의 개수는
$9+9+36+36+36=126$

786 도전! 1등급

4개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 모든 세 자리 자연수의 합을 구하시오. 6660

풀이
4개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 3개를 사용하여 만들 수 있는 모든 세 자리 자연수의 백의 자리의 숫자의 합을 a, 십의 자리의 숫자의 합을 b, 일의 자리의 숫자의 합을 c라고 하면 구하는 모든 세 자리 자연수의 합은
$100a+10b+c$
1□□, 2□□, 3□□, 4□□의 꼴의 자연수의 개수는 각각 ${}_{3}P_2=6$이므로
$a=1\times6+2\times6+3\times6+4\times6$
$=(1+2+3+4)\times6=60$
같은 방법으로 구하면 $b=60$, $c=60$
따라서 구하는 세 자리 자연수의 합은
$100\times60+10\times60+60=6660$

11 조합

1 조합

(1) 조합

서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r $(0<r\le n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라고 하며, 이 조합의 수를 기호 ${}_n\mathrm{C}_r$로 나타낸다.

$${}_{\underset{\text{서로 다른 것의 개수}}{n}}\mathrm{C}_{\underset{\text{택하는 것의 개수}}{r}}$$

참고 서로 다른 n개에서 r개를 택할 때, 순서를 생각해야 하면 순열을 이용하고, 순서를 생각하지 않으면 조합을 이용한다.

(2) 조합의 수

① $${}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$
$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}\ (\text{단, } 0\le r\le n)$$

참고 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 ${}_n\mathrm{C}_r$이고, 그 각각에 대하여 r개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $r!$이다. 이때 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수는 ${}_n\mathrm{P}_r$이므로

${}_n\mathrm{C}_r\times r!={}_n\mathrm{P}_r\qquad \therefore {}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}$

② ${}_n\mathrm{C}_0=1,\ {}_n\mathrm{C}_n=1$

③ ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$)
${}_n\mathrm{C}_r$의 계산에서 $r>\frac{n}{2}$일 때 이용한다.

④ ${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ (단, $1\le r<n$)
서로 다른 n개에서 r개를 택하는 경우의 수는 특정한 1개를 제외하고 r개를 택하는 경우의 수와 특정한 1개를 이미 택했다고 생각한 후 그 것을 제외한 $(r-1)$개를 택하는 경우의 수의 합과 같다.

2 분할과 분배

(1) 분할과 분배

여러 개의 물건을 몇 개의 묶음으로 나누는 것을 분할이라 하고, 분할된 묶음을 나누어 주는 것을 분배라고 한다.

(2) 분할의 수

서로 다른 n개를 p개, q개, r개 $(p+q+r=n)$의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

① $p,\ q,\ r$가 모두 다른 수일 때
⇨ ${}_n\mathrm{C}_p\times{}_{n-p}\mathrm{C}_q\times{}_r\mathrm{C}_r$

② $p,\ q,\ r$ 중 어느 두 수가 같을 때
⇨ ${}_n\mathrm{C}_p\times{}_{n-p}\mathrm{C}_q\times{}_r\mathrm{C}_r\times\frac{1}{2!}$

③ $p,\ q,\ r$가 모두 같은 수일 때
⇨ ${}_n\mathrm{C}_p\times{}_{n-p}\mathrm{C}_q\times{}_r\mathrm{C}_r\times\frac{1}{3!}$

예 서로 다른 6개의 볼펜을 1개, 2개, 3개의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_3=6\times10\times1=60$

참고 A, B, C, D를 2개씩 두 묶음으로 나누면
(AB / CD), (AC / BD), (AD / BC), (BC / AD), (BD / AC), (CD / AB)로 같은 것이 $2!$가지씩 생긴다.

(3) 분배의 수

n묶음으로 나누어 n명에게 나누어 주는 경우의 수는
(n묶음으로 나누는 경우의 수)$\times n!$

예 서로 다른 6개의 볼펜을 1개, 2개, 3개의 세 묶음으로 나누어 세 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 $({}_6\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_3)\times3!=60\times6=360$

문제를 풀 때 유용한 풍쌤 비법

❶ 특정한 것을 포함하거나 포함하지 않는 조합의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택할 때

① 특정한 k개를 포함하여 r개를 택하는 경우의 수 ⇨ $(n-k)$개에서 $(r-k)$개를 택하는 경우의 수와 같다. ⇨ ${}_{n-k}\mathrm{C}_{r-k}$
특정한 k개를 이미 택했다고 생각한다.

② 특정한 k개를 제외하고 r개를 택하는 경우의 수 ⇨ $(n-k)$개에서 r개를 택하는 경우의 수와 같다. ⇨ ${}_{n-k}\mathrm{C}_r$
특정한 k개를 제외하고 생각한다.

❷ 도형의 개수

(1) 직선과 삼각형의 개수

어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 n개의 점으로 만들 수 있는 $\begin{cases}\text{직선의 개수 ⇨ } {}_n\mathrm{C}_2\\ \text{삼각형의 개수 ⇨ } {}_n\mathrm{C}_3\end{cases}$
한 직선 위의 세 점은 삼각형을 만들 수 없다.

(2) 평행사변형의 개수

m개의 평행선과 n개의 평행선이 서로 만날 때, 이 직선으로 만들어지는 평행사변형의 개수 ⇨ ${}_m\mathrm{C}_2\times{}_n\mathrm{C}_2$

실력을 기르는 유형

01 $_nP_r$와 $_nC_r$의 계산

중요도

787 교육청 기출

상중하

등식 $_{10}P_3=n\times{}_{10}C_3$을 만족시키는 n의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

풀이

$_{10}P_3=n\times{}_{10}C_3$에서

$10\times9\times8=n\times\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}$ $\therefore n=6$

788

상중하

등식 $_nC_6={}_nC_{14-n}$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은?

① 16 ② 17 ③ 18

④ 19 ⑤ 20

풀이

$_nC_6={}_nC_{14-n}$에서

$6=14-n$ 또는 $n-6=14-n$

$\therefore n=8$ 또는 $n=10$

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$8+10=18$

789 내신 기출

상중하

$2\times{}_nP_2={}_nC_3$을 만족시키는 자연수 n에 대하여 $_{16}C_n$의 값은?

① 16 ② 120 ③ 560

④ 1820 ⑤ 4360

풀이

$2\times{}_nP_2={}_nC_3$에서

$2n(n-1)=\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}$ …… ㉠

$_nC_3$에서 $n\geq3$이므로 $n(n-1)>0$

따라서 ㉠의 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$2=\frac{n-2}{6}$ $\therefore n=14$

$\therefore {}_{16}C_n={}_{16}C_{14}={}_{16}C_2=\frac{16\times15}{2}=120$

790

상중하

x에 대한 이차방정식 $_nC_2x^2+{}_nC_6x+{}_nC_8=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha+\beta=-1$이다. 이때 $\alpha\beta$의 값을 구하시오. (단, n은 자연수이다.) $\frac{1}{28}$

풀이

$\alpha+\beta=-\frac{{}_nC_6}{{}_nC_2}$, $\alpha\beta=\frac{{}_nC_8}{{}_nC_2}$

이때 $\alpha+\beta=-1$이므로 $-\frac{{}_nC_6}{{}_nC_2}=-1$에서 $n-6=2$ $\therefore n=8$

$\therefore \alpha\beta=\frac{{}_8C_8}{{}_8C_2}=\frac{1}{28}$

791

상중하

두 자연수 n, r에 대하여

$$_{10}P_r=\frac{10!}{6!},\quad {}_nC_r={}_nC_{r-2}$$

가 성립할 때, nr의 값은?

① 21 ② 24 ③ 25

④ 27 ⑤ 28

풀이

$_{10}P_r=\frac{10!}{6!}=10\times9\times8\times7$에서 $r=4$

$_nC_r={}_nC_{r-2}$, 즉 $_nC_4={}_nC_2$에서 $n-4=2$ $\therefore n=6$

$\therefore nr=24$

02 $_nC_r$를 이용한 증명

중요도

792

상중하

다음은 $r\times{}_nC_r=n\times{}_{n-1}C_{r-1}$ $(1\leq r\leq n)$임을 증명하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것을 구하시오. (가) $(n-r)!$ (나) $r!$

증명

$$n\times{}_{n-1}C_{r-1}=n\times\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,\boxed{(가)}}$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!\,\boxed{(가)}}$$

$$=r\times\frac{n!}{\boxed{(나)}\,\boxed{(가)}}=r\times{}_nC_r$$

$\therefore r\times{}_nC_r=n\times{}_{n-1}C_{r-1}$

793

상중하

다음은 ${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$ $(1\le r<n)$임을 증명하는 과정이다.

증명

$${}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$$
$$=\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$
$$=\frac{(\boxed{(가)})(n-1)!}{r!(n-r)!}+\frac{\boxed{(나)}(n-1)!}{r!(n-r)!}$$
$$=\frac{\boxed{(다)}(n-1)!}{r!(n-r)!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}={}_nC_r$$
$$\therefore {}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$$

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$n-1-r$	$r-1$	$n-2$
②	$n-1-r$	r	$n-1$
③	$n-r$	$r-1$	$n-1$
④	$n-r$	$r-1$	n
√⑤	$n-r$	r	n

03 조합의 수

중요도

794 내신 기출

상중하

축구 동아리 학생 6명과 농구 동아리 학생 5명 중에서 3명을 뽑을 때, 3명 모두 같은 동아리의 학생인 경우의 수는?

√① 30 ② 40 ③ 50
④ 60 ⑤ 70

풀이
${}_6C_3+{}_5C_3=20+10=30$

795

상중하

서로 다른 상자 4개와 서로 다른 색깔의 양말 x켤레가 있다. 상자 1개와 양말 3켤레를 동시에 선택하여 상자에 양말을 담는 경우의 수가 80일 때, x의 값을 구하시오. 6

풀이
${}_4C_1\times{}_xC_3=80$, $4\times\frac{x(x-1)(x-2)}{3\times2\times1}=80$
$x(x-1)(x-2)=120=6\times5\times4$ $\therefore x=6$

796 교육청 기출

상중하

9개의 숫자 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1을 0끼리는 어느 것도 이웃하지 않도록 일렬로 나열하여 만들 수 있는 아홉 자리의 자연수의 개수는?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 √⑤ 20

풀이
6개의 1을 일렬로 나열한 후 그 사이사이와 오른쪽 끝의 6개의 자리 중 3개를 택하여 0을 나열하면 된다.
1∨1∨1∨1∨1∨1∨
따라서 구하는 자연수의 개수는
${}_6C_3=20$

797

상중하

1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 9장의 카드 중에서 4장의 카드를 뽑을 때, 네 카드에 적힌 수의 합이 짝수인 경우의 수는?

① 64 ② 65 √③ 66
④ 67 ⑤ 68

풀이
${}_4C_4+{}_4C_2\times{}_5C_2+{}_5C_4=1+6\times10+5=66$

798 내신 기출 상|중|하

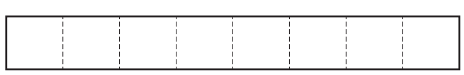
어느 모임에 참석한 사람들이 모든 사람들과 서로 한 번씩 악수를 했더니 전체 악수 횟수는 105번이었다. 이 모임에 참석한 사람 수는?

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

풀이
모임에 참석한 사람 수를 n이라고 하면
${}_{n}C_{2}=105$, $\frac{n(n-1)}{2\times1}=105$
$n(n-1)=210=15\times14$ $\therefore n=15$
따라서 모임에 참석한 사람 수는 15이다.

799 상|중|하

다음 그림과 같은 직사각형을 7개의 점선 중 일부 또는 전부에 실선을 그어 2개 이상의 직사각형으로 나누는 경우의 수는?



① 126 ② 127 ③ 128
④ 129 ⑤ 130

풀이
${}_{7}C_{1}+{}_{7}C_{2}+{}_{7}C_{3}+{}_{7}C_{4}+{}_{7}C_{5}+{}_{7}C_{6}+{}_{7}C_{7}=7+21+35+35+21+7+1$
$=127$

800 상|중|하

1부터 30까지의 짝수 중에서 서로 다른 두 수를 택할 때, 택한 두 수의 합이 3의 배수가 되는 경우의 수를 구하시오. 35

풀이
1부터 30까지의 짝수 중에서 3으로 나누었을 때
나머지가 0인 수는 6, 12, 18, 24, 30 …… ㉠
나머지가 1인 수는 4, 10, 16, 22, 28 …… ㉡
나머지가 2인 수는 2, 8, 14, 20, 26 …… ㉢
두 수의 합이 3의 배수가 되려면 ㉠에서 2개를 택하거나 ㉡, ㉢에서 각각 1개씩 택하면 되므로 구하는 경우의 수는
${}_{5}C_{2}+{}_{5}C_{1}\times{}_{5}C_{1}=10+5\times5=35$

04 특정한 것을 포함하거나 포함하지 않는 조합의 수

중요도

801 풍쌤 비법 1 상|중|하

혜인이와 준범이를 포함한 13명의 학생 중에서 4명의 대표를 뽑으려고 한다. 혜인이와 준범이가 모두 뽑히는 경우의 수는?

① 55 ② 78 ③ 280
④ 330 ⑤ 715

풀이
혜인이와 준범이를 제외한 11명 중에서 2명을 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는
${}_{11}C_{2}=55$

802 상|중|하

1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 9개의 공이 들어 있는 주머니에서 동시에 3개의 공을 꺼낼 때, 4가 적힌 공은 반드시 꺼내고, 소수가 적힌 공은 꺼내지 않는 경우의 수는?

① 3 ② 6 ③ 15
④ 21 ⑤ 28

풀이
4와 소수 2, 3, 5, 7이 적힌 공을 제외한 4개의 공 중에서 2개를 꺼내면 되므로 구하는 경우의 수는
${}_{4}C_{2}=6$

803 상|중|하

A, B를 포함한 12명의 학생 중에서 4명을 뽑을 때, A와 B 중에서 한 명만 포함하여 뽑는 경우의 수를 구하시오. 240

풀이
${}_{10}C_{3}+{}_{10}C_{3}=120+120=240$

804

상 중 하

6쌍의 부부가 참가한 어떤 모임에서 6명을 뽑아 기념품을 준다고 한다. 뽑힌 6명 중에서 부부가 2쌍일 경우의 수는?

√① 360 ② 380 ③ 400
④ 420 ⑤ 440

풀이
${}_6C_2\times({}_8C_2-{}_4C_1)=15\times24=360$

805

상 중 하

1부터 5까지의 자연수 중 진서와 아영이가 각각 2개의 숫자를 택할 때, 진서와 아영이가 똑같은 숫자를 1개 이하로 택할 경우의 수를 구하시오. 90

풀이
(ⅰ) 똑같은 숫자를 0개 택하는 경우의 수는
${}_5C_2\times{}_3C_2=10\times3=30$
(ⅱ) 똑같은 숫자를 1개 택하는 경우의 수는
${}_5C_2\times{}_2C_1\times{}_3C_1=10\times2\times3=60$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$30+60=90$

05 '적어도'의 조건이 있는 조합의 수

중요도

806

상 중 하

교내 수학 경시대회 본선에 진출한 남학생은 4명, 여학생은 6명이다. 이 중에서 학교 대표로 출전할 3명을 뽑을 때, 여학생이 적어도 한 명 포함되도록 뽑는 경우의 수는?

① 112 ② 114 √③ 116
④ 118 ⑤ 120

풀이
${}_{10}C_3-{}_4C_3=120-4=116$

807

상 중 하

책꽂이에 소설책, 과학책, 역사책이 각각 5권씩 있다. 이 중에서 3권의 책을 꺼낼 때, 과학책을 적어도 1권 꺼내는 경우의 수는?

① 326 ② 329 ③ 332
√④ 335 ⑤ 338

풀이
${}_{15}C_3-{}_{10}C_3=455-120=335$

808 내신 기출

상 중 하

독서 동아리 회원 10명 중에서 독서 감상문을 쓸 4명을 뽑으려고 한다. 동아리의 회장, 부회장 중에서 적어도 한 명을 포함하여 4명을 뽑는 경우의 수는?
(단, 동아리의 회장, 부회장은 각각 1명이다.)

① 60 ② 80 ③ 100
④ 120 √⑤ 140

풀이
${}_{10}C_4-{}_8C_4=210-70=140$

809

상 중 하

남학생 5명과 여학생 4명이 연극반에 지원하였다. 지원자 중에서 4명을 선발할 때, 남학생과 여학생이 적어도 한 명씩 포함되도록 선발하는 경우의 수를 구하시오. 120

풀이
${}_9C_4-({}_5C_4+{}_4C_4)=126-(5+1)=120$

810
상 중 하

빨간색 공과 파란색 공을 합하여 12개의 공이 들어 있는 상자에서 3개의 공을 꺼낼 때, 적어도 1개가 빨간색 공인 경우의 수는 164이다. 상자 안에 들어 있는 파란색 공의 개수는?

① 4　　② 5　　③ 6
④ 7　　⑤ 8

풀이
파란색 공의 개수를 n $(n\geq3)$이라고 하면
${}_{12}C_3-{}_nC_3=164$, $220-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=164$
$n(n-1)(n-2)=336=8\times7\times6$　　$\therefore n=8$
따라서 파란색 공의 개수는 8이다.

06 뽑아서 나열하는 경우의 수
중요도

811
상 중 하

희재와 연아를 포함한 동아리 회원 7명 중에서 희재와 연아를 포함한 4명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수는?

① 180　　② 200　　③ 220
④ 240　　⑤ 260

풀이
${}_5C_2\times4!=10\times24=240$

812
상 중 하

speaking에 있는 8개의 문자 중에서 자음 3개와 모음 2개를 택하여 일렬로 나열할 때, 모음끼리 이웃하지 않는 경우의 수를 구하시오. 2160

풀이
${}_5C_3\times{}_3C_2\times3!\times{}_4P_2=10\times3\times6\times12=2160$

813 내신 기출
상 중 하

6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 5개의 숫자를 사용하여 다섯 자리 자연수를 만들 때, 만의 자리의 숫자가 백의 자리의 숫자보다 큰 수의 개수는?

① 180　　② 300　　③ 360
④ 480　　⑤ 720

풀이
${}_6C_2\times{}_4P_3=15\times24=360$

814 평가원 기출
상 중 하

이틀 동안 진행하는 어느 축제에 모두 다섯 개의 팀이 참가하여 공연한다. 매일 두 팀 이상이 공연하도록 다섯 팀의 공연 날짜와 공연 순서를 정하는 경우의 수는? (단, 공연은 한 팀씩 하고, 축제 기간 중 각 팀은 1회만 공연한다.)

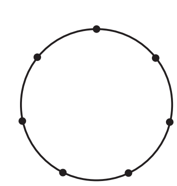
① 180　　② 210　　③ 240
④ 270　　⑤ 300

풀이
첫째날 2팀, 둘째날 3팀이 공연하거나 첫째날 3팀, 둘째날 2팀이 공연을 하면 되므로 구하는 경우의 수는
${}_5C_2\times{}_3C_3\times2!\times3!+{}_5C_3\times{}_2C_2\times3!\times2!=120+120=240$

07 직선과 대각선의 개수
중요도

815 풍쌤 비법 ❷
상 중 하

오른쪽 그림과 같이 원 위에 7개의 점이 같은 간격으로 놓여 있을 때, 주어진 점을 이어서 만들 수 있는 직선의 개수를 구하시오. 21



풀이
${}_7C_2=21$

816

상 중 하

한 평면 위에 있는 서로 다른 8개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않을 때, 주어진 점을 이어서 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는?

① 25 √② 28 ③ 31
④ 33 ⑤ 36

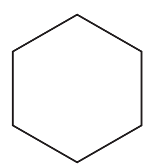
풀이

${}_8C_2=28$

817

상 중 하

오른쪽 그림과 같은 정육각형의 대각선의 개수는?



① 5 ② 6
③ 7 ④ 8
√⑤ 9

풀이

${}_6C_2-6=15-6=9$

818

상 중 하

오른쪽 그림과 같이 평행한 두 직선 위에 7개의 점이 있을 때, 주어진 점을 이어서 만들 수 있는 직선의 개수는?

① 10 ② 12 √③ 14
④ 16 ⑤ 18

풀이

${}_3C_1\times{}_4C_1+2=3\times4+2=14$

819

상 중 하

십이각형의 서로 다른 대각선의 교점의 최대 개수는?
(단, 꼭짓점은 교점에서 제외한다.)

√① 495 ② 500 ③ 505
④ 510 ⑤ 515

풀이

구하는 서로 다른 대각선의 교점의 최대 개수는 12개의 꼭짓점 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로
${}_{12}C_4=495$

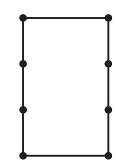
08 삼각형의 개수

중요도

820 풍쌤 비법 ❷

상 중 하

오른쪽 그림과 같이 직사각형 위에 8개의 점이 있다. 이 중에서 3개의 점을 이어서 만들 수 있는 삼각형의 개수는?



① 44 √② 48 ③ 52
④ 56 ⑤ 60

풀이

${}_8C_3-{}_4C_3\times2=56-4\times2=48$

821 내신 기출

상 중 하

어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않은 n개의 점 중에서 두 점을 이어서 만들 수 있는 직선이 36개일 때, 3개의 점을 이어서 만들 수 있는 삼각형의 개수를 구하시오. 84

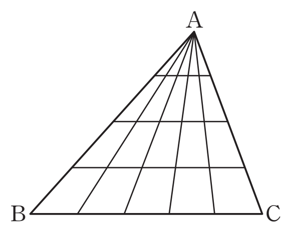
풀이

${}_nC_2=36$이므로
$\frac{n(n-1)}{2}=36,\ n(n-1)=72=9\times8 \quad \therefore n=9$
따라서 9개의 점 중에서 3개의 점을 이어서 만들 수 있는 삼각형의 개수는
${}_9C_3=84$

822 교육청 기출

상중하

삼각형 ABC에서 꼭짓점 A와 선분 BC 위의 네 점을 연결하는 4개의 선분을 그리고, 선분 AB 위의 세 점과 선분 AC 위의 세 점을 연결하는 3개의 선분을 그려 다음 그림과 같은 도형을 만들었다. 이 도형의 선들로 만들 수 있는 삼각형의 개수는?



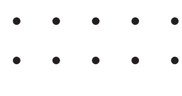
① 30　② 40　③ 50
√④ 60　⑤ 70

풀이
${}_6C_2\times{}_4C_1=15\times4=60$

823

상중하

오른쪽 그림과 같이 같은 간격으로 놓인 15개의 점 중에서 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는?



① 400　② 406　√③ 412
④ 418　⑤ 424

풀이
${}_{15}C_3-{}_5C_3\times3-{}_3C_3\times13=455-30-13=412$

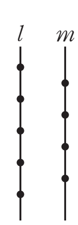
09 사각형의 개수

중요도

824

상중하

오른쪽 그림과 같이 평행한 두 직선 l, m 위에 각각 5개, 4개의 점이 있다. 이 중에서 4개의 점을 이어서 만들 수 있는 사각형의 개수를 구하시오. 60

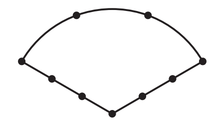


풀이
${}_5C_2\times{}_4C_2=10\times6=60$

825

상중하

오른쪽 그림과 같이 부채꼴 위에 9개의 점이 있다. 이 점들 중에서 4개의 점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 개수를 구하시오. 84



풀이
${}_9C_4-{}_4C_3\times{}_5C_1\times2-{}_4C_4\times2=126-4\times5\times2-1\times2=84$

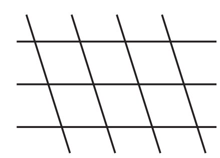
10 평행사변형의 개수

중요도

826 풍쌤 비법 ❷

상중하

오른쪽 그림과 같이 3개의 평행선과 4개의 평행선이 서로 만날 때, 이들 평행선으로 만들 수 있는 평행사변형의 개수는?



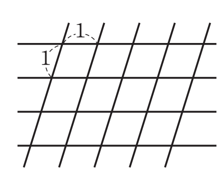
√① 18　② 19　③ 20
④ 21　⑤ 22

풀이
${}_3C_2\times{}_4C_2=3\times6=18$

827 내신 기출

상중하

오른쪽 그림과 같이 간격이 모두 1로 일정한 4개의 평행선과 5개의 평행선이 서로 만날 때, 이들 평행선으로 만들 수 있는 마름모가 아닌 평행사변형의 개수를 구하시오. 40

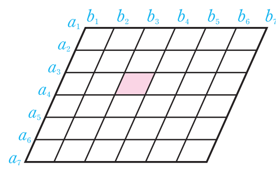


풀이
${}_4C_2\times{}_5C_2-(12+6+2)=6\times10-20=40$

828

상 중 하

오른쪽 그림은 평행사변형의 각 변을 6등분하여 얻은 도형이다. 이 도형의 선들로 만들 수 있는 평행사변형 중에서 색칠한 부분을 포함하는 평행사변형의 개수는?



① 136 ② 138 ③ 140
④ 142 √⑤ 144

풀이

가로 방향의 평행선은 a_1, a_2, a_3 중에서 하나, a_4, a_5, a_6, a_7 중에서 하나를 택해야 하므로 가로 방향의 평행선을 택하는 경우의 수는

${}_3C_1 \times {}_4C_1 = 3 \times 4 = 12$

또, 세로 방향의 평행선은 b_1, b_2, b_3 중에서 하나, b_4, b_5, b_6, b_7 중에서 하나를 택해야 하므로 세로 방향의 평행선을 택하는 경우의 수는

${}_3C_1 \times {}_4C_1 = 3 \times 4 = 12$

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

$12 \times 12 = 144$

829

상 중 하

한 평면 위에 n개의 평행선과 서로 만나는 $(n+4)$개의 평행선이 있다. 이들 평행선으로 만들 수 있는 평행사변형의 개수가 360일 때, n의 값을 구하시오. 5

풀이

${}_nC_2 \times {}_{n+4}C_2 = 360$에서

$\frac{n(n-1)}{2} \times \frac{(n+4)(n+3)}{2} = 360$

$(n+4)(n+3)n(n-1) = 1440 = 9 \times 8 \times 5 \times 4$

$\therefore n = 5$

11 분할하는 경우의 수

중요도

830

상 중 하

7명의 동아리 회원을 1명, 2명, 4명으로 나누는 경우의 수를 a라 하고, 1명, 3명, 3명으로 나누는 경우의 수를 b라고 할 때, $a+b$의 값은?

① 140 √② 175 ③ 210
④ 245 ⑤ 280

풀이

$a = {}_7C_1 \times {}_6C_2 \times {}_4C_4 = 7 \times 15 \times 1 = 105$

$b = {}_7C_1 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 7 \times 20 \times 1 \times \frac{1}{2} = 70$

$\therefore a+b = 105 + 70 = 175$

831

상 중 하

남학생 9명, 여학생 3명을 4명씩 세 개의 조로 나눌 때, 여학생 3명이 같은 조에 속하는 경우의 수는?

① 105 ② 210 √③ 315
④ 420 ⑤ 630

풀이

${}_9C_1 \times {}_8C_4 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} = 9 \times 70 \times 1 \times \frac{1}{2} = 315$

832

상 중 하

어른 7명과 어린이 3명을 5명씩 두 개의 조로 나눌 때, 각 조에 적어도 한 명의 어린이가 포함되도록 나누는 경우의 수를 구하시오. 105

풀이

${}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{2!} - {}_7C_2 \times {}_5C_5 = 252 \times 1 \times \frac{1}{2} - 21 \times 1 = 105$

12 분배하는 경우의 수

중요도

833 교육청 기출

상 중 하

남학생 4명과 여학생 3명을 세 개의 모둠으로 나누려 할 때, 모든 모둠에 남학생과 여학생이 각각 1명 이상 포함되도록 하는 경우의 수는?

① 30 ② 32 ③ 34
√④ 36 ⑤ 38

풀이

남학생 4명을 2명, 1명, 1명으로 나누는 경우의 수는

${}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 6 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 6$

여학생 3명을 세 모둠에 한 명씩 분배하는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6 \times 6 = 36$

834 내신 기출

상 중 하

서로 다른 종류의 꽃 5송이를 서로 다른 꽃병 3개에 나누어 꽂는 경우의 수는?

(단, 꽃병에는 적어도 한 송이의 꽃을 꽂는다.)

① 150 ② 180 ③ 210
④ 240 ⑤ 300

풀이
(i) 1송이, 1송이, 3송이로 나누는 경우의 수는

$_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 5 \times 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = 10$

(ii) 1송이, 2송이, 2송이로 나누는 경우의 수는

$_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 5 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 15$

(i), (ii)에서 세 묶음으로 나누는 경우의 수는 $10+15=25$
세 묶음을 3개의 꽃병에 분배하는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는 $25 \times 6 = 150$

835

상 중 하

정원이 6명인 서로 다른 케이블카 3대에 8명의 학생이 나누어 타는 경우의 수는?

(단, 각 케이블카에는 적어도 2명의 학생이 탄다.)

① 980 ② 1470 ③ 1960
④ 2540 ⑤ 2940

풀이
(i) 2명, 2명, 4명으로 나누는 경우의 수는

$_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} = 28 \times 15 \times 1 \times \frac{1}{2} = 210$

(ii) 2명, 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$_8C_2 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 28 \times 20 \times 1 \times \frac{1}{2} = 280$

(i), (ii)에서 3개의 조로 나누는 경우의 수는 $210+280=490$
3개의 조를 3대의 케이블카에 분배하는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는 $490 \times 6 = 2940$

836

상 중 하

6층짜리 건물의 1층에서 10명이 승강기를 함께 탄 후 6층까지 올라가는 동안 3개의 층에서 각각 2명, 4명, 4명이 내리는 경우의 수는?

(단, 승강기에 새로 탄 사람은 없다.)

① 94500 ② 94000 ③ 93500
④ 93000 ⑤ 92500

풀이
2층부터 6층까지 5개의 층 중에서 사람들이 내리는 3개의 층을 택하는 경우의 수는
$_5C_3 = 10$
10명을 2명, 4명, 4명의 3개의 조로 나누는 경우의 수는

$_{10}C_2 \times {}_8C_4 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} = 45 \times 70 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1575$

3개의 조를 3개의 층에 분배하는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는 $10 \times 1575 \times 6 = 94500$

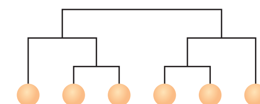
13 대진표 작성하기

중요도

837

상 중 하

6개의 팀이 오른쪽 그림과 같은 대진표로 경기를 할 때, 대진표를 작성하는 경우의 수는?



① 30 ② 45 ③ 60
④ 75 ⑤ 90

풀이
6개의 팀을 3개, 3개의 2개의 조로 나누는 경우의 수는

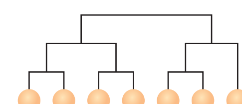
$_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 20 \times 1 \times \frac{1}{2} = 10$

각 조에서 나누어진 3개의 팀을 1개, 2개로 나누는 경우의 수는
$({}_3C_1 \times {}_2C_2) \times ({}_3C_1 \times {}_2C_2) = (3 \times 1) \times (3 \times 1) = 9$
따라서 구하는 경우의 수는
$10 \times 9 = 90$

838

상 중 하

7개의 팀이 오른쪽 그림과 같은 대진표로 축구 시합을 할 때, 대진표를 작성하는 경우의 수는?



① 105 ② 315 ③ 420
④ 525 ⑤ 630

풀이
7개의 팀을 4개, 3개로 나누는 경우의 수는
$_7C_4 \times {}_3C_3 = 35 \times 1 = 35$
나누어진 4개의 팀을 2개, 2개로 나누는 경우의 수는

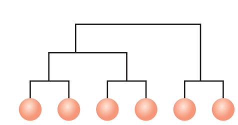
$_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$

나누어진 3개의 팀을 2개, 1개로 나누는 경우의 수는
$_3C_2 \times {}_1C_1 = 3 \times 1 = 3$
따라서 구하는 경우의 수는
$35 \times 3 \times 3 = 315$

839

상 중 하

정빈이를 포함한 6명이 오른쪽 그림과 같은 대진표로 탁구 시합을 할 때, 정빈이가 한 번만 이기면 결승에 진출하도록 대진표를 작성하는 경우의 수를 구하시오. 15



풀이
정빈이와 시합을 하는 학생을 택하는 경우의 수는 $_5C_1 = 5$
나머지 4명을 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는

$_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$

따라서 구하는 경우의 수는
$5 \times 3 = 15$

정답과 풀이 121쪽

840

x에 대한 이차방정식 $x^2-({}_nC_{n-r}-1)x+{}_nP_r=0$의 두 근이 4, 5일 때, nr의 값을 구하시오. 10

(단, n, r는 자연수이다.)

풀이

$4+5={}_nC_{n-r}-1$, $4\times5={}_nP_r$

$\therefore {}_nC_{n-r}=10$, ${}_nP_r=20$ ······ 40 %

이때 ${}_nC_{n-r}={}_nC_r$이므로 ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}=10$에서

$\frac{20}{r!}=10$, $r!=2$ $\quad\therefore r=2$

${}_nP_2=20=5\times4$에서 $n=5$ ······ 40 %

$\therefore nr=5\times2=10$ ······ 20 %

841

1부터 25까지의 홀수 중에서 서로 다른 두 수를 택할 때, 택한 두 수의 합이 4의 배수가 되지 않는 경우의 수를 구하시오. 36

풀이

1부터 25까지의 홀수 13개 중에서 2개의 수를 택하는 경우의 수는

${}_{13}C_2=78$ ······ 30 %

1부터 25까지의 홀수 중에서 4로 나누었을 때

나머지가 1인 수는 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25 ······ ㉠

나머지가 3인 수는 3, 7, 11, 15, 19, 23 ······ ㉡

1부터 25까지의 홀수 중에서 택한 두 수의 합이 4의 배수가 되려면 ㉠, ㉡ 중에서 각각 1개씩 택해야 하므로 그 경우의 수는

${}_7C_1\times{}_6C_1=7\times6=42$ ······ 50 %

따라서 구하는 경우의 수는

$78-42=36$ ······ 20 %

842

1부터 8까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 8개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 동시에 4개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 숫자 중에서 가장 큰 숫자가 7 이상인 경우의 수를 구하시오. 55

풀이

(i) 가장 큰 숫자가 7인 경우의 수는 ${}_6C_3=20$ ······ 40 %

(ii) 가장 큰 숫자가 8인 경우의 수는 ${}_7C_3=35$ ······ 40 %

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $20+35=55$ ······ 20 %

843

노란 구슬 n개와 파란 구슬 4개가 들어 있는 주머니에서 3개의 구슬을 꺼낼 때, 파란 구슬이 적어도 1개 포함되는 경우의 수는 100이다. 이 주머니에서 노란 구슬 2개, 파란 구슬 2개를 뽑는 경우의 수를 구하시오. 90

(단, $n\geq3$)

풀이

${}_{n+4}C_3-{}_nC_3=100$이므로

$\frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{6}-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=100$ ······ 30 %

$12(n^2+2n-48)=0$, $12(n-6)(n+8)=0$

$\therefore n=6$ ($\because n\geq3$) ······ 40 %

따라서 노란 구슬 2개, 파란 구슬 2개를 뽑는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_2=15\times6=90$ ······ 30 %

844

friend에 있는 6개의 문자를 일렬로 나열할 때, 두 모음 사이에 1개의 문자가 들어가도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. 192

풀이

두 모음 사이에 들어갈 1개의 문자를 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$ ······ 30 %

두 모음과 그 사이의 1개의 문자를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$ ······ 30 %

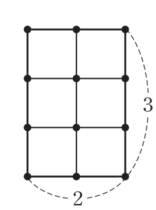
두 모음이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times24\times2=192$ ······ 40 %

845

오른쪽 그림은 가로의 길이가 2, 세로의 길이가 3인 직사각형을 작은 정사각형 6개로 나눈 후 점을 찍은 것이다. 이 중에서 두 점을 이은 선분 중 그 길이가 무리수인 것의 개수를 구하시오. 36



풀이

12개의 점으로 만들 수 있는 선분의 개수는 ${}_{12}C_2=66$ ······ 30 %

길이가 유리수인 선분의 개수는

${}_3C_2\times4+{}_4C_2\times3=3\times4+6\times3=30$ ······ 50 %

따라서 길이가 무리수인 선분의 개수는

$66-30=36$ ······ 20 %

846

다음은 자연수 n에 대하여

$${}_{n+5}\mathrm{C}_n - {}_{n+5}\mathrm{C}_{n-2} = \boxed{(가)}\,{}_{n+7}\mathrm{C}_n$$

이 성립함을 증명하는 과정이다.

증명

$${}_{n+5}\mathrm{C}_n - {}_{n+5}\mathrm{C}_{n-2} = (\boxed{(나)})!\left\{\frac{1}{n!5!} - \frac{1}{(n-2)!7!}\right\}$$

$$= (\boxed{(나)})! \times \frac{\boxed{(다)}}{n!7!}$$

$$= \boxed{(가)}\,{}_{n+7}\mathrm{C}_n$$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라고 할 때, $\dfrac{h(3)-g(3)}{f(3)}$의 값을 구하시오. **70**

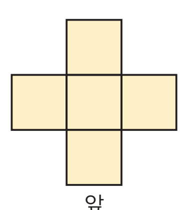
풀이

$f(n)=\dfrac{7-n}{n+7}$, $g(n)=n+5$, $h(n)=42+n-n^2$이므로

$\dfrac{h(3)-g(3)}{f(3)}=\dfrac{36-8}{\frac{2}{5}}=70$

847

정육면체 모양의 쌓기나무 10개를 사용하여 위에서 본 모양이 오른쪽 그림과 같은 모양이 되도록 쌓으려고 한다. 가장 높은 층이 4층인 모양이 되도록 쌓는 경우의 수는?



✓① 50 ② 55 ③ 60
④ 65 ⑤ 70

풀이

10개의 쌓기나무를 다섯 자리에
4층, 3층, 1층, 1층, 1층 또는 4층, 2층, 2층, 1층, 1층
으로 쌓으면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는
${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_1 + {}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2 = 5\times4+5\times6=50$

848 도전! 1등급

어른 3명, 어린이 2명이 텐트에 들어 가려고 한다. 텐트는 3인용, 2인용, 1인용의 세 종류가 있고, 어린이는 반드시 어른과 같이 텐트에 들어간다고 할 때, 5명이 텐트에 들어가는 경우의 수는? (단, 아무도 들어가지 않는 텐트가 있을 수 있고, 텐트의 정원 수를 채우지 않아도 된다.)

① 21 ② 24 ✓③ 27
④ 30 ⑤ 33

풀이

	3인용 텐트	2인용 텐트	1인용 텐트
(i)	어린이 2명, 어른 1명	어른 2명	×
(ii)	어린이 2명, 어른 1명	어른 1명	어른 1명
(iii)	어린이 1명, 어른 2명	어린이 1명, 어른 1명	×
(iv)	어린이 1명, 어른 1명	어린이 1명, 어른 1명	어른 1명

(i)의 경우의 수는 $({}_2\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1)\times{}_2\mathrm{C}_2=3$
(ii)의 경우의 수는 $({}_2\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1)\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1=6$
(iii)의 경우의 수는 $({}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2)\times({}_1\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1)=6$
(iv)의 경우의 수는 $({}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1)\times({}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1)\times{}_1\mathrm{C}_1=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$3+6+6+12=27$

849 평가원 기출

1부터 9까지의 서로 다른 자연수 a, b, c, d, e에 대하여

$$a\times10^4+b\times10^3+c\times10^2+d\times10+e$$

로 나타내어지는 다섯 자리 자연수 $abcde$ 중에서 5의 배수이고

$$a>b>c,\ c<d<e$$

를 만족시키는 모든 자연수의 개수는?

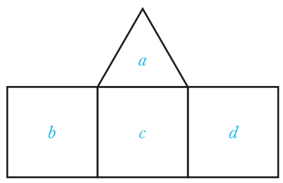
① 53 ② 62 ✓③ 71
④ 80 ⑤ 89

풀이

다섯 자리 자연수 $abcde$가 5의 배수이므로 $e=5$
$c<d<5$에서 $c=1$ 또는 $c=2$ 또는 $c=3$
(i) $c=1$일 때
$1<d<5$에서 d는 2, 3, 4 중 하나이고, $a>b>1$에서 a, b는 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 중에서 d의 값을 제외한 6개 중 2개를 택하여 큰 수부터 차례대로 a, b로 정하면 되므로 자연수의 개수는
${}_3\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_2=3\times15=45$
(ii) $c=2$ 또는 $c=3$일 때
(i)과 같은 방법으로 구하면
${}_2\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2+1\times{}_4\mathrm{C}_2=20+6=26$
(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는
$45+26=71$

850 교육청 기출

다음 그림과 같이 한 개의 정삼각형과 세 개의 정사각형으로 이루어진 도형이 있다.



숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 네 개를 택해 네 개의 정다각형 내부에 하나씩 적을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. 130

> (가) 세 개의 정사각형에 적혀 있는 수는 모두 정삼각형에 적혀 있는 수보다 작다. $a>b$, $a>c$, $a>d$
>
> (나) 변을 공유하는 두 정사각형에 적혀 있는 수는 서로 다르다. $b\neq c$, $c\neq d$

풀이

(ⅰ) $b\neq d$인 경우의 수는

$_6C_4\times 3!=15\times 6=90$

(ⅱ) $b=d$인 경우의 수는

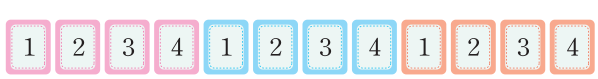
$_6C_3\times 2!=20\times 2=40$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$90+40=130$

851

다음 그림과 같이 숫자 1, 2, 3, 4가 각각 하나씩 적힌 12장의 숫자 카드가 있다. 이 중에서 서로 다른 7장의 카드를 택할 때, 숫자 1, 2, 3, 4가 적힌 카드가 각각 적어도 한 장씩 포함되도록 택하는 경우의 수를 구하시오. 648



풀이

12장의 카드 중에서 7장의 카드를 택하는 경우의 수는 $_{12}C_7=792$

1이 적힌 카드를 택하지 않는 경우의 수는 1이 적힌 카드를 제외한 9장의 카드 중에서 7장을 택하는 경우의 수와 같으므로 $_9C_7=36$

같은 방법으로 구하면 2, 3, 4가 적힌 카드를 택하지 않는 경우의 수도 각각 36이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$792-36\times 4=648$

852

0부터 9까지의 10개의 정수 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 사용하여 세 자리 자연수를 만들 때, 짝수인 3의 배수의 개수는?

① 105 ② 110 ✓③ 115

④ 120 ⑤ 125

풀이

나머지가 0인 수는 0, 3, 6, 9 …… ㉠

나머지가 1인 수는 1, 4, 7 …… ㉡

나머지가 2인 수는 2, 5, 8 …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢ 각각에서 3개의 수를 택하여 만들 수 있는 짝수인 3의 배수의 개수는

$(_3P_2+2\times 2)+2!+(2!\times 2)=16$

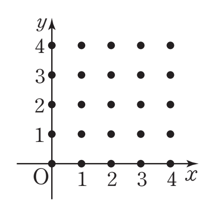
㉠, ㉡, ㉢ 중에서 각각 1개씩 택하여 만들 수 있는 짝수인 3의 배수의 개수는

$_3C_1\times {_3C_1}\times 2!+(_4C_1\times {_3C_1}\times 2!-3)+(_4C_1\times {_3C_1}\times 2!-3)+{_3C_1}\times {_3C_1}\times 2!$
$+(_4C_1\times {_3C_1}\times 2!-3)$
$=99$

따라서 구하는 짝수인 3의 배수의 개수는 $16+99=115$

853 도전! 1등급

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 25개의 점 (a, b)가 있다. 주어진 점을 이어서 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수를 구하시오. (단, a, b는 0 이상 4 이하의 정수이다.) 140

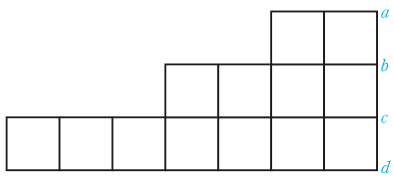


풀이

$_{25}C_2-(_5C_2\times 12+{_4C_2}\times 4+{_3C_2}\times 16)+12+4+16=140$

854

다음 그림과 같이 합동인 13개의 정사각형이 연결된 도형이 있다. 이 도형의 선들로 이루어진 직사각형의 개수는?



✓① 57 ② 60 ③ 63
④ 66 ⑤ 69

풀이
(i) 가로줄 a, b를 택한 경우
3개의 세로줄 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$
(ii) 가로줄 a, c를 택한 경우
3개의 세로줄 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$
(iii) 가로줄 a, d를 택한 경우
3개의 세로줄 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$
(iv) 가로줄 b, c를 택한 경우
5개의 세로줄 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$
(v) 가로줄 b, d를 택한 경우
5개의 세로줄 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$
(vi) 가로줄 c, d를 택한 경우
8개의 세로줄 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_8C_2=28$
(i)~(vi)에서 구하는 직사각형의 개수는
$3+3+3+10+10+28=57$

855

6명의 학생이 유기견 보호 센터, 요양원, 아동복지센터의 세 곳 중 한 곳을 택하여 봉사활동을 하기로 하였다. 유기견 보호 센터, 요양원, 아동복지센터의 세 곳에서 모든 학생이 봉사활동을 하는 경우의 수를 구하시오. 540

풀이
(i) 1명, 1명, 4명으로 나누는 경우의 수는
$${}_6C_1\times{}_5C_1\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}=6\times5\times1\times\frac{1}{2}=15$$
(ii) 1명, 2명, 3명으로 나누는 경우의 수는
$${}_6C_1\times{}_5C_2\times{}_3C_3=6\times10\times1=60$$
(iii) 2명, 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는
$${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=15\times6\times1\times\frac{1}{6}=15$$
(i)~(iii)에서 3개의 조로 나누는 경우의 수는
$15+60+15=90$
3개의 조를 세 곳의 봉사활동 장소에 분배하는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$90\times6=540$

856

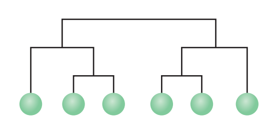
승객 7명이 타고 있는 버스가 A, B, C, D의 4개의 정류장에 정차할 때, 이들 정류장 중에서 3개의 정류장에 모든 승객이 내리는 경우의 수는?
(단, 새로 타는 승객은 없다.)

① 7128 ② 7152 ③ 7176
④ 7200 ✓⑤ 7224

풀이
4개의 정류장 A, B, C, D 중에서 승객이 내리는 3개의 정류장을 택하는 경우의 수는
${}_4C_3=4$
(i) 1명, 1명, 5명으로 나누는 경우의 수는
$${}_7C_1\times{}_6C_1\times{}_5C_5\times\frac{1}{2!}=7\times6\times1\times\frac{1}{2}=21$$
(ii) 1명, 2명, 4명으로 나누는 경우의 수는
$${}_7C_1\times{}_6C_2\times{}_4C_4=7\times15\times1=105$$
(iii) 1명, 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는
$${}_7C_1\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=7\times20\times1\times\frac{1}{2}=70$$
(iv) 2명, 2명, 3명으로 나누는 경우의 수는
$${}_7C_2\times{}_5C_2\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=21\times10\times1\times\frac{1}{2}=105$$
(i)~(iv)에서 3개의 조로 나누는 경우의 수는
$21+105+70+105=301$
3개의 조를 3개의 정류장에 분배하는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는 $4\times301\times6=7224$

857

1반부터 6반까지 6개의 반이 오른쪽 그림과 같은 대진표로 줄다리기를 할 때, 1반과 2반이 결승전에서만 만나도록 대진표를 정하는 경우의 수는?



① 36 ② 42 ③ 48
✓④ 54 ⑤ 60

풀이
$$\left({}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\right)\times2!\times({}_3C_1\times{}_2C_2)\times({}_3C_2\times{}_1C_1)$$
$$=\left(6\times1\times\frac{1}{2}\right)\times2\times(3\times1)\times(3\times1)=54$$

IV

행렬

12 행렬

1 행렬의 뜻

(1) **행렬:** 여러 개의 수 또는 문자를 직사각형 모양으로 배열하여 괄호로 묶은 것

(2) **성분:** 행렬을 구성하고 있는 각각의 수 또는 문자

참고 보통 행렬은 알파벳 대문자 A, B, C, $\cdots$를 사용하여 나타내고, 성분은 알파벳 소문자 a, b, c, $\cdots$를 사용하여 나타낸다.

(3) **행:** 행렬에서 성분을 가로로 배열한 줄
위에서부터 차례대로 제1행, 제2행, 제3행, $\cdots$이라고 한다.

(4) **열:** 행렬에서 성분을 세로로 배열한 줄
왼쪽에서부터 차례대로 제1열, 제2열, 제3열, $\cdots$이라고 한다.

(5) **$m\times n$ 행렬:** m개의 행과 n개의 열로 이루어진 행렬

행의 개수 → $m \times n$ 행렬 ← 열의 개수

(6) **정사각행렬:** 행의 개수와 열의 개수가 같은 행렬
⇨ $n\times n$ 행렬을 n차 정사각행렬이라고 한다.

예 $\begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ⇨ 2×3 행렬, $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$ ⇨ 이차 정사각행렬

(7) **(i, j) 성분:** 행렬에서 제i행과 제j열이 만나는 위치에 있는 성분으로 기호 a_{ij}로 나타낸다.

참고 2×3 행렬 A는 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$과 같이 나타내고, 이것을 간단히 $A=(a_{ij})$ $(i=1, 2,\ j=1, 2, 3)$로 나타내기도 한다.

2 두 행렬이 서로 같을 조건

(1) **같은 꼴인 행렬:** 두 행렬 A, B에서 행의 수와 열의 수가 각각 같을 때, 두 행렬 A, B는 같은 꼴이라고 한다.

(2) **두 행렬이 서로 같을 조건:** 두 행렬 A, B가 같은 꼴이고 대응하는 성분이 각각 같을 때, 두 행렬 A, B는 서로 같다고 하며, 기호 $A=B$로 나타낸다.

즉, 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여

① $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$이면 $A=B$
② $A=B$이면 $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$

참고 두 행렬 A, B가 서로 같지 않을 때, 기호 $A\neq B$로 나타낸다.

3 행렬의 덧셈과 뺄셈

(1) **행렬의 덧셈과 뺄셈**

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여

① 덧셈: $A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$

② 뺄셈: $A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix}$

참고 행렬의 덧셈과 뺄셈은 두 행렬이 같은 꼴일 때에만 정의된다.

(2) **행렬의 덧셈에 대한 성질**

같은 꼴의 세 행렬 A, B, C에 대하여
① 교환법칙: $A+B=B+A$
② 결합법칙: $(A+B)+C=A+(B+C)$

참고 행렬의 덧셈에서 결합법칙이 성립하므로 $(A+B)+C$와 $A+(B+C)$는 괄호를 생략하여 $A+B+C$로 나타내기도 한다.

(3) **영행렬**

① 행렬의 성분이 모두 0인 행렬을 영행렬이라고 하며, 일반적으로 기호 O로 나타낸다.
② 행렬 A와 같은 꼴의 영행렬 O에 대하여
$A+O=O+A=A$
$A+(-A)=(-A)+A=O$

참고 행렬 A의 모든 성분의 부호를 바꾼 것을 성분으로 하는 행렬을 기호 $-A$로 나타낸다. 즉, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$일 때, $-A=\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$이다.

4 행렬의 실수배

(1) **행렬의 실수배**

일반적으로 k가 실수일 때, 행렬 A의 각 성분에 일정한 수 k를 곱한 것을 성분으로 하는 행렬을 행렬 A의 k배라고 하며, 기호 kA로 나타낸다.

즉, 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$와 실수 k에 대하여

$$kA=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

(2) **행렬의 실수배에 대한 성질**

같은 꼴의 두 행렬 A, B와 두 실수 k, l에 대하여
① 결합법칙: $(kl)A=k(lA)=l(kA)$
② 분배법칙: $(k+l)A=kA+lA$, $k(A+B)=kA+kB$

5 행렬의 곱셈

(1) 행렬의 곱셈

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

참고 두 행렬 A, B의 곱 AB는 행렬 A의 열의 개수와 행렬 B의 행의 개수가 같을 때에만 정의된다.

⇨ $(m\times l$ 행렬$)\times(l\times n$ 행렬$)=(m\times n$ 행렬$)$

같다

주의 행렬의 곱셈에서는 $AB=O$라고 해서 항상 $A=O$ 또는 $B=O$인 것은 아니다. 예를 들어, 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

이지만 $A\neq O$, $B\neq O$이다.

(2) 행렬의 거듭제곱

행렬 A가 정사각행렬이고, m, n이 자연수일 때

① $A^2=AA$, $A^3=A^2A$, $A^4=A^3A$, $\cdots$, $A^{n+1}=A^nA$

② $A^mA^n=A^{m+n}$, $(A^m)^n=A^{mn}$

참고 행렬의 거듭제곱은 정사각행렬일 때에만 정의할 수 있다.

6 행렬의 곱셈에 대한 성질

(1) 행렬의 곱셈에 대한 성질

합과 곱이 가능한 세 행렬 A, B, C와 실수 k에 대하여

① $AB\neq BA$ ← 일반적으로 교환법칙이 성립하지 않는다.

② 결합법칙: $(AB)C=A(BC)$

③ 분배법칙: $A(B+C)=AB+AC$,
$(A+B)C=AC+BC$

④ $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

주의 행렬의 곱셈에서는 일반적으로 교환법칙이 성립하지 않으므로 지수법칙과 곱셈 공식이 성립하지 않음에 주의한다.
즉, 합과 곱이 가능한 두 행렬 A, B와 자연수 n에 대하여

① $(AB)^n\neq A^nB^n$
② $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$
③ $(A-B)^2\neq A^2-2AB+B^2$
④ $(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$

(2) 단위행렬

① 왼쪽 위에서 오른쪽 아래로 내려가는 대각선 위의 성분은 모두 1이고, 그 이외의 성분은 모두 0인 정사각행렬을 단위행렬이라고 하며, 일반적으로 기호 E로 나타낸다.

② 정사각행렬 A와 같은 꼴인 단위행렬 E에 대하여
$AE=EA=A$, $E^n=E$ (단, n은 자연수이다.)

문제를 풀 때 유용한 풍쌤 비법

❶ n이 자연수일 때, $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이면 $A^n=\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$이면 $A^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$

❷ **$AB=BA$가 성립하는 경우**

일반적으로 행렬의 곱셈에서는 교환법칙이 성립하지 않으므로 곱셈 공식이 성립하지 않는다. 그런데 문제에서
$(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$ (복호동순), $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$
등의 조건이 주어지면 이것은 교환법칙이 성립한다는 의미이므로 $AB=BA$임을 이용하여 문제를 해결한다.

❸ **세 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2-pA+qE=O$ (p, q는 실수)의 조건이 주어진 경우**

⇨ $A\neq kE$인 경우와 $A=kE$인 경우로 나누어 생각한다. (단, k는 실수이다.)

(i) $A\neq kE$이면 케일리-해밀턴 정리에 의하여 $a+d=p$, $ad-bc=q$

(ii) $A=kE$이면 $A=kE$를 $A^2-pA+qE=O$에 대입하여 k의 값을 구한다.

케일리-해밀턴 정리

세 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

가 성립하고, 이것을 케일리-해밀턴 정리라고 한다. 일반적으로 이 정리의 역은 성립하지 않는다.

실력을 기르는 유형

01 행렬의 성분 중요도

858
상|중|하

행렬 A의 (i, j) 성분 a_{ij}가 $a_{ij}=i^2-2j$일 때, 행렬 A의 모든 성분의 합은? (단, $i=1, 2, j=1, 2$)

✓① -2　　② -1　　③ 0
④ 1　　⑤ 2

풀이
$a_{11}=1^2-2\times1=-1$, $a_{12}=1^2-2\times2=-3$
$a_{21}=2^2-2\times1=2$, $a_{22}=2^2-2\times2=0$
따라서 $A=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$이므로 행렬 A의 모든 성분의 합은
$-1+(-3)+2+0=-2$

859 내신 기출
상|중|하

삼차 정사각행렬 A의 (i, j) 성분 a_{ij}가

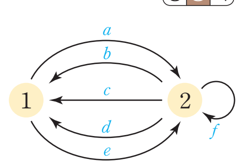
$$a_{ij}=\begin{cases} i+4 & (i=j)\\ i-2j & (i<j)\\ -a_{ji} & (i>j)\end{cases}$$

일 때, 행렬 A를 구하시오. $\begin{pmatrix}5 & -3 & -5\\ 3 & 6 & -4\\ 5 & 4 & 7\end{pmatrix}$

풀이
$a_{11}=1+4=5$, $a_{12}=1-2\times2=-3$, $a_{13}=1-2\times3=-5$
$a_{21}=-a_{12}=3$, $a_{22}=2+4=6$, $a_{23}=2-2\times3=-4$
$a_{31}=-a_{13}=5$, $a_{32}=-a_{23}=4$, $a_{33}=3+4=7$
$\therefore A=\begin{pmatrix}5 & -3 & -5\\ 3 & 6 & -4\\ 5 & 4 & 7\end{pmatrix}$

860
상|중|하

오른쪽 그림은 어느 유적지의 1, 2 두 지점 사이의 일방통행 길을 나타낸 것이다. 행렬 A의 (i, j) 성분 a_{ij}가 i 지점에서 j 지점까지 갈 수 있는 일방통행 길의 수일 때, 행렬 A는?



(단, $i=1, 2, j=1, 2$)

① $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$　　② $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$　　③ $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$
✓④ $\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$　　⑤ $\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$

풀이
1 지점에서 1 지점으로 가는 길은 없으므로 $a_{11}=0$
1 지점에서 2 지점으로 가는 길은 a, e의 2개이므로 $a_{12}=2$
2 지점에서 1 지점으로 가는 길은 b, c, d의 3개이므로 $a_{21}=3$
2 지점에서 2 지점으로 가는 길은 f의 1개이므로 $a_{22}=1$
$\therefore A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

861 교육청 기출
상|중|하

이차 정사각행렬 A의 (i, j) 성분 a_{ij}가

$a_{ij}=(i+2j$의 양의 약수의 개수$)$

일 때, 행렬 A의 모든 성분의 합을 구하시오. 11

(단, $i=1, 2, j=1, 2$)

풀이
$a_{11}=(3$의 양의 약수의 개수$)=2$
$a_{12}=(5$의 양의 약수의 개수$)=2$
$a_{21}=(4$의 양의 약수의 개수$)=3$
$a_{22}=(6$의 양의 약수의 개수$)=4$
따라서 $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$이므로 행렬 A의 모든 성분의 합은
$2+2+3+4=11$

02 두 행렬이 서로 같을 조건 중요도

862
상|중|하

등식 $\begin{pmatrix}a-b & 2c+d\\ 2b-a & -5c-3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$이 성립할 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값은?

① 1　　✓② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

풀이
$a-b=1$, $2b-a=0$을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$
$2c+d=0$, $-5c-3d=1$을 연립하여 풀면 $c=1$, $d=-2$
$\therefore a+b+c+d=2$

863
상|중|하

등식 $\begin{pmatrix}a-b & ab\\ 2 & a^3-b^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & x\end{pmatrix}$가 성립할 때, 상수 x의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -14　　② -12　　✓③ -10
④ -8　　⑤ -6

풀이
$a-b=-1$, $ab=3$, $a^3-b^3=x$
$\therefore x=a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=(-1)^3+3\times3\times(-1)=-10$

864

상중하

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} x & -ab \\ a+b & y \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a^2 & 2 \\ -1 & b^2 \end{pmatrix}$에 대하여 $A=B$일 때, $\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}$의 값은?

(단, a, b, x, y는 상수이다.)

① $\dfrac{31}{2}$ ② $\dfrac{63}{4}$ ③ 16

√④ $\dfrac{65}{4}$ ⑤ $\dfrac{33}{2}$

풀이

$x=a^2$, $-ab=2$, $a+b=-1$, $y=b^2$이므로

$x+y=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(-1)^2-2\times(-2)=5$

$xy=a^2b^2=(ab)^2=(-2)^2=4$

$\therefore \dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}=\dfrac{x^3+y^3}{xy}=\dfrac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$

$=\dfrac{5^3-3\times4\times5}{4}=\dfrac{65}{4}$

865

상중하

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 13z & 60 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & y+7 \\ 5z^2+4y & 3z^2+xz \end{pmatrix}$에 대하여 $A=B$일 때, x^3+y+z^2의 값을 구하시오. 36

(단, x, y, z는 상수이다.)

풀이

$2x=6$, $0=y+7$, $13z=5z^2+4y$, $60=3z^2+xz$이므로 $x=3$, $y=-7$

$13z=5z^2-28$에서 $z=-\dfrac{7}{5}$ 또는 $z=4$ …… ㉠

$60=3z^2+3z$에서 $z=-5$ 또는 $z=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $z=4$

$\therefore x^3+y+z^2=3^3-7+4^2=36$

03 행렬의 덧셈과 뺄셈, 실수배

중요도

866 교육청 기출

상중하

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A+2B$의 모든 성분의 합은?

√① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

풀이

$A+2B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A+2B$의 모든 성분의 합은

$7+(-4)+3+(-5)=1$

867 내신 기출

상중하

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여

$$X-4A=2(X-B)$$

를 만족시키는 행렬 X를 구하시오. $\begin{pmatrix} -16 & 14 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$

풀이

$X-4A=2(X-B)$에서 $X-4A=2X-2B$

$\therefore X=2B-4A=2\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -16 & 14 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$

868

상중하

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $xA+yB=\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$일 때, $x-y$의 값은?

(단, x, y는 상수이다.)

① -6 ② -5 ③ -1

√④ 5 ⑤ 6

풀이

$xA+yB=\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} x & -2x+y \\ 2x-y & 3x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$이므로

$x=2$, $2x-y=7$ $\quad\therefore x=2$, $y=-3$

$\therefore x-y=5$

869

상중하

이차방정식 $x^2-4x-2=0$의 두 근이 α, β이고 다음 등식이 성립할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 2\beta^2 & \alpha \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ -2\alpha^2 & -\beta \end{pmatrix}$$

√① 36 ② 38 ③ 40

④ 42 ⑤ 44

풀이

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-2$

$\begin{pmatrix} \alpha+a & 0 \\ 2\beta^2-b & \alpha+a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ -2\alpha^2 & -\beta \end{pmatrix}$이므로

$\alpha+a=-\beta$, $2\beta^2-b=-2\alpha^2$

$\therefore a=-(\alpha+\beta)=-4$

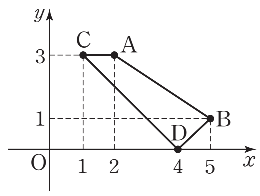
$b=2(\alpha^2+\beta^2)=2\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}=40$

$\therefore a+b=36$

870

상중하

좌표평면 위의 네 점 A(a, b), B(c, d), C(e, f), D(g, h)를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABDC에 대하여 두 행렬 P, Q를



$$P=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

라고 하자. 사각형 ABDC가 위의 그림과 같을 때,

$$6X+4P=2(P+Q)+4X$$

를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합을 구하시오. -3

풀이

$P=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$이고 주어진 등식을 정리하면

$X=Q-P$이므로 $X=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은 -3이다.

04 행렬에 대한 두 등식을 만족시키는 행렬

중요도

871

상중하

두 이차 정사각행렬 X, Y에 대하여

$$\underbrace{X-Y=\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}_{㉠},\ \underbrace{3X+Y=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}}_{㉡}$$

일 때, 행렬 $3X$는?

① $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ √② $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

풀이

㉠+㉡을 하면

$4X=\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore X=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore 3X=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

872 내신 기출

상중하

두 행렬 A, B에 대하여

$$\underbrace{A-2B=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}}_{㉠},\ \underbrace{A+B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}}_{㉡}$$

일 때, 행렬 $A-B$를 구하시오. $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

풀이

㉠+㉡×2를 하면

$3A=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

이것을 ㉡에 대입하여 정리하면 $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore A-B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

05 행렬의 곱셈

중요도

873 교육청 기출

상중하

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A(A+B)$의 모든 성분의 합은?

√① -4 ② -2 ③ 0

④ 2 ⑤ 4

풀이

$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$이므로

$A(A+B)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A(A+B)$의 모든 성분의 합은

$2+(-4)+1+(-3)=-4$

874

상중하

네 행렬 A, B, C, D가 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$일 때, 행렬의 연산이 정의되는 것만을 다음 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $-(B+C)$	ㄴ. $A+CB$
ㄷ. AC	ㄹ. BCD

① ㄷ √② ㄹ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

풀이

ㄱ. B와 C는 같은 꼴의 행렬이 아니므로 $B+C$는 정의되지 않는다.

ㄴ. C의 열의 개수와 B의 행의 개수가 다르므로 CB는 정의되지 않는다.

ㄷ. A의 열의 개수와 C의 행의 개수가 다르므로 AC는 정의되지 않는다.

875

상중하

등식 $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & a \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$가 성립할 때, 상수 a, b에 대하여 a^3-b^3의 값은?

① -16 ② -18 √③ -20

④ -22 ⑤ -24

풀이

주어진 등식에서 $\begin{pmatrix} 2-3a \\ -2+4a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3a+ab \\ 5a-b \end{pmatrix}$이므로

$2-3a=-3a+ab$, $-2+4a=5a-b$

즉, $ab=2$, $a-b=-2$이므로

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=(-2)^3+3\times2\times(-2)=-20$

876

상|중|하

모든 실수 x에 대하여 행렬의 곱 $(x\ \ 1)\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$의 성분이 음수가 아닐 때, 실수 a의 최솟값은? (단, $a>0$)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

√④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

풀이

$(x\ \ 1)\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}=(ax^2+4x+a)$

$\therefore ax^2+4x+a\ge0$

이차방정식 $ax^2+4x+a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=4-a^2\le0$ $\therefore a\le-2$ 또는 $a\ge2$

이때 $a>0$이므로 $a\ge2$

따라서 a의 최솟값은 2이다.

06 행렬의 거듭제곱

중요도

877

상|중|하

등식 $2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+A=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$을 만족시키는 행렬 A에 대하여 행렬 A^2의 $(1,\ 2)$ 성분은?

① -4 √② -1 ③ 1

④ 4 ⑤ 5

풀이

$A=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore A^2=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^2의 $(1,\ 2)$ 성분은 -1이다.

878 교육청 기출

상|중|하

행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^3=kA$일 때, 실수 k의 값은?

√① 9 ② 12 ③ 15

④ 18 ⑤ 21

풀이

$A^2=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$A^3=AA^2=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & -27 \\ -27 & 0 \end{pmatrix}=9\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}=9A$

$\therefore k=9$

879

상|중|하

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 $A^2=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$를 만족시킬 때, $ad-bc$의 값을 구하시오. -6

(단, $a,\ b,\ c,\ d$는 정수이고, $a>0$이다.)

풀이

$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$이므로

$a^2+bc=9,\ b(a+d)=0,\ c(a+d)=1,\ bc+d^2=4$

위의 식을 만족시키는 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 값을 구하면

$a=3,\ b=0,\ c=1,\ d=-2$

$\therefore ad-bc=-6$

07 행렬의 거듭제곱 — 규칙 찾기

중요도

880 풍쌤 비법 1

상|중|하

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^7의 모든 성분의 합을 구하시오. -127

풀이

$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ (n은 자연수)이므로

$A^7=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -128 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^7의 모든 성분의 합은 $1+0+0+(-128)=-127$

881 내신 기출

상|중|하

행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^n=\begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$일 때, $n+a$의 값을 구하시오. 735

(단, n은 자연수, a는 상수이다.)

풀이

$A^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$이므로 $\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

따라서 $2^n=64,\ (-3)^n=a$이므로 $n=6,\ a=729$

$\therefore n+a=6+729=735$

882

상|중|하

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여

$A^6-A^5+A^4-A^3+A^2-A+E$를 간단히 하면?

(단, E는 단위행렬이다.)

√① A^3 ② $-A^3$ ③ E

④ $-E$ ⑤ $A+E$

풀이

$A^n=\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (n은 자연수)이므로

$A^6-A^5+A^4-A^3+A^2-A+E$

$=\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=A^3$

883

상 중 하

행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^{12}의 모든 성분의 합은 $k\times 4^a$이다. 이때 자연수 k, a에 대하여 $k+a$의 값을 구하시오. (단, k는 소수이다.) 14

풀이

$A^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=4A$

$A^3=A^2A=4AA=4A^2=4\times 4A=4^2A$

$A^6=(A^3)^2=(4^2A)^2=4^4A^2=4^4\times 4A=4^5A$

$A^{12}=(A^6)^2=(4^5A)^2=4^{10}A^2=4^{10}\times 4A=4^{11}A$

따라서 $A^{12}=4^{11}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$이므로 행렬 A^{12}의 모든 성분의 합은

$4^{11}(3+1+3+1)=4^{11}\times 8=2\times 4^{12}$

즉, $k=2$, $a=12$이므로

$k+a=14$

08 행렬의 곱셈의 활용

중요도

884

상 중 하

오렌지 주스와 사과 주스를 담아서 A형, B형의 두 종류의 선물 세트를 만들려고 한다. A형, B형 선물 세트에 들어가는 오렌지 주스와 사과 주스의 개수 및 선물 세트의 개수는 아래 표와 같다.

	오렌지 주스	사과 주스	선물 세트
A형	6개	4개	20개
B형	3개	7개	30개

오렌지 주스와 사과 주스 1개의 가격이 각각 x원, y원일 때, 다음 중 A형, B형 선물 세트를 각각 20개, 30개 만드는 데 필요한 총 비용을 나타내는 행렬은?

(단, 포장지의 가격은 생각하지 않는다.)

① $(x \quad y)\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$
② $\begin{pmatrix} x & 20 \\ y & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$
③ $\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}(6 \quad 4)\begin{pmatrix} 3 & x \\ 7 & y \end{pmatrix}$
√④ $(20 \quad 30)\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
⑤ $\begin{pmatrix} 6x & 4y \\ 3x & 7y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$

풀이

A형 선물 세트를 1개 만드는 데 필요한 비용은 $(6x+4y)$원, B형 선물 세트를 1개 만드는 데 필요한 비용은 $(3x+7y)$원이므로 A형, B형 선물 세트를 각각 1개씩 만드는 데 필요한 비용을 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

따라서 A형, B형 선물 세트를 각각 20개, 30개 만드는 데 필요한 총 비용은 $20(6x+4y)+30(3x+7y)$이므로 구하는 행렬은

$(20 \quad 30)\begin{pmatrix} 6x+4y \\ 3x+7y \end{pmatrix}=(20 \quad 30)\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

885 수능 기출

상 중 하

다음은 지난해에 어느 회사에서 생산한 두 제품 가와 나의 제품 한 개당 제조원가와 판매 가격 및 그 해 판매량을 나타낸 표이다.

가격 \ 제품명	가	나
제조원가	a_{11}	a_{12}
판매 가격	a_{21}	a_{22}

제품명 \ 판매량	상반기	하반기
가	b_{11}	b_{12}
나	b_{21}	b_{22}

위의 표를 각각 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$와 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$로 나타내고, 이 두 행렬의 곱 AB를 $AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라고 하자. 제품 한 개당 판매 이익금을 판매 가격에서 제조원가를 뺀 값으로 정의할 때, 다음 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $a+b$는 지난해 상반기에 판매된 제품의 제조원가 총액이다.

ㄴ. $c+d$는 지난해 1년 동안에 판매된 제품의 판매 총액이다.

ㄷ. $d-b$는 지난해 하반기에 판매된 제품의 판매 이익금 총액이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
√④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$이므로

$a=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}$, $b=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}$,

$c=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}$, $d=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}$

ㄱ. a는 제품 가, 나의 지난해 상반기에 판매된 제품의 제조원가 총액이고 b는 제품 가, 나의 지난해 하반기에 판매된 제품의 제조원가 총액이므로 $a+b$는 지난해 1년 동안에 판매된 제품의 제조원가 총액이다. (거짓)

09 행렬의 곱셈에 대한 성질 중요도

886 상 중 하

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여

$B-A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $AB+BA=\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$이고,

$A^2+B^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$일 때, $ad-bc$의 값을 구하시오. 11

(단, a, b, c, d는 상수이다.)

풀이

$(B-A)^2=(B-A)(B-A)=B^2-BA-AB+A^2$이므로

$A^2+B^2=(B-A)^2+AB+BA$

$=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 $a=7$, $b=2$, $c=-2$, $d=1$이므로

$ad-bc=7\times1-2\times(-2)=11$

887 풍쌤 비법 ❷ 내신 기출 상 중 하

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ b & 5 \end{pmatrix}$에 대하여

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$$

이 성립할 때, $a-b$의 값을 구하시오. 10

(단, a, b는 상수이다.)

풀이

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$이므로 $AB=BA$

즉, $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ b & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ b & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} a+b & -2a+5 \\ 2+4b & 16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-4 & -7 \\ ab+10 & b+20 \end{pmatrix}$

따라서 $a+b=a-4$, $-2a+5=-7$, $2+4b=ab+10$, $16=b+20$이므로

$a+b=a-4$에서 $b=-4$, $-2a+5=-7$에서 $a=6$ $\quad\therefore a-b=6-(-4)=10$

888 상 중 하

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여

$$A*B=AB-BA$$

로 정의할 때, 다음 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $A*B=(-B)*A=B*(-A)$

ㄴ. $3A*3B=6(A*B)$

ㄷ. $(A-B)*C=A*C-B*C$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　✓③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

ㄴ. $3A*3B=3A(3B)-3B(3A)$

$=9AB-9BA$

$=9(AB-BA)=9(A*B)$ (거짓)

10 행렬의 변형 중요도

889 상 중 하

이차 정사각행렬 A에 대하여

$$A\begin{pmatrix} 3a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} a \\ 3b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix}$$

가 성립할 때, 행렬 $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$는?

① $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$　✓② $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

풀이

주어진 두 등식을 변끼리 더하면

$A\begin{pmatrix} 3a \\ b \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} a \\ 3b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 4a \\ 4b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$, $4A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

890 상 중 하

이차 정사각행렬 A에 대하여

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

가 성립할 때, 다음 중 행렬 $A\begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix}$와 같은 것은?

① $\begin{pmatrix} 3x \\ -x+6y \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 3x-z \\ -x+6y-w \end{pmatrix}$

✓③ $\begin{pmatrix} 3x+z \\ -x+6y+w \end{pmatrix}$　④ $\begin{pmatrix} z \\ 6y+w \end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix} 3x+z \\ -x-6y+w \end{pmatrix}$

풀이

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면 $A^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$

따라서 $A\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x \\ -x+6y \end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3x \\ -x+6y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+z \\ -x+6y+w \end{pmatrix}$

891 상 중 하

이차 정사각행렬 A에 대하여

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 31 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

가 성립할 때, $p+q$의 값을 구하시오. 21

(단, p, q는 상수이다.)

풀이

실수 x, y에 대하여 $\begin{pmatrix} 31 \\ 2 \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$가 성립한다고 하면 $\begin{pmatrix} 31 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-y \\ x-5y \end{pmatrix}$

즉, $2x-y=31$, $x-5y=2$이므로 이 두 식을 연립하여 풀면 $x=17$, $y=3$

따라서 $\begin{pmatrix} 31 \\ 2 \end{pmatrix}=17\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$이므로 이 등식의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$A\begin{pmatrix} 31 \\ 2 \end{pmatrix}=17A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+3A\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}=17\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 \\ -5 \end{pmatrix}$

따라서 $p=26$, $q=-5$이므로 $p+q=21$

11 단위행렬의 성질

중요도

892

상 중 하

행렬 $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $(A+E)(A^2-A+E)$는? (단, E는 단위행렬이다.)

① $\begin{pmatrix} 125 & 19 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 125 & 19 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 126 & -19 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ √④ $\begin{pmatrix} 126 & 19 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix} -126 & 19 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

풀이

$(A+E)(A^2-A+E)=A^3+E$이고

$A^2=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 25 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 125 & 19 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$이므로

$(A+E)(A^2-A+E)=A^3+E=\begin{pmatrix} 125 & 19 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 126 & 19 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

893

상 중 하

모든 성분의 합이 3인 이차 정사각행렬 A에 대하여 $A^3+A^2=-2A-2E$가 성립할 때, 행렬 A^5+A^4의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이다.)

① 16 ② 18 √③ 20

④ 22 ⑤ 24

풀이

$A^5+A^4=A^2(A^3+A^2)=A^2(-2A-2E)$

$=-2A^3-2A^2=-2(A^3+A^2)$

$=-2(-2A-2E)=4A+4E$

이때 행렬 A의 모든 성분의 합이 3이므로 행렬 $4A$의 모든 성분의 합은 $4\times3=12$

또, 행렬 $4E=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은 $4+0+0+4=8$

따라서 행렬 A^5+A^4의 모든 성분의 합은

$12+8=20$

894

상 중 하

이차 정사각행렬 A가 $A^2+4A+16E=O$를 만족시킬 때, 행렬 A^{15}의 모든 성분의 합은?

(단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

① 128 ② 64^5 √③ 2×64^5

④ 64^{10} ⑤ 2×64^{15}

풀이

$A^2+4A+16E=O$의 양변의 왼쪽에 행렬 $A-4E$를 곱하면

$(A-4E)(A^2+4A+16E)=O$

$A^3-64E=O$ $\quad\therefore A^3=64E$

따라서 $A^{15}=(A^3)^5=(64E)^5=64^5E=\begin{pmatrix} 64^5 & 0 \\ 0 & 64^5 \end{pmatrix}$

이므로 행렬 A^{15}의 모든 성분의 합은

$64^5+0+0+64^5=2\times64^5$

895

상 중 하

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여

$$A+B=3E,\ AB=E$$

일 때, $A^2+B^2=kE$이다. 이때 상수 k의 값을 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.) 7

풀이

$A+B=3E$에서 $A=3E-B$

이것을 $AB=E$에 대입하면

$(3E-B)B=E,\ 3B-B^2=E$ $\quad\therefore B^2=3B-E$

또, $A+B=3E$에서 $B=3E-A$

이것을 $AB=E$에 대입하면

$A(3E-A)=E,\ 3A-A^2=E$ $\quad\therefore A^2=3A-E$

$\therefore A^2+B^2=(3A-E)+(3B-E)=3(A+B)-2E$

$=3\times3E-2E=7E$

$\therefore k=7$

12 $A^n=E$ 이용하기

중요도

896

상 중 하

이차 정사각행렬 A가

$$(A^2-4E)(A^2+E)=-3A^2-5E$$

를 만족시킬 때, 다음 중 행렬 A^{76}과 같은 것은?

(단, E는 단위행렬이다.)

① $-A$ √② $-E$ ③ E

④ $A-E$ ⑤ $A+E$

풀이

$(A^2-4E)(A^2+E)=-3A^2-5E$에서

$A^4+A^2-4A^2-4E=-3A^2-5E$

이므로 $A^4=-E$

$\therefore A^8=(A^4)^2=(-E)^2=E$

$\therefore A^{76}=(A^8)^9A^4=E^9(-E)=-E^{10}=-E$

897 교육청 기출

상 중 하

행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^{2013}의 모든 성분의 합을 구하시오. 4

풀이

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

$\therefore A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$

$\therefore A^{2013}=(A^4)^{503}A=E^{503}A=A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^{2013}의 모든 성분의 합은

$2+(-1)+5+(-2)=4$

898

상 중 하

행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $(E+2A)^3=aE+bA$가 성립할 때, $a+b$의 값을 구하시오. 27

(단, E는 단위행렬이고, a, b는 상수이다.)

풀이

$(E+2A)^2=(E+2A)(E+2A)=E+4A+4A^2$

$(E+2A)^3=(E+2A)^2(E+2A)=(E+4A+4A^2)(E+2A)$

$=E+6A+12A^2+8A^3$

이때 $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$, $A^3=A^2A=EA=A$이므로

$(E+2A)^3=E+6A+12E+8A$

$=13E+14A$

따라서 $a=13$, $b=14$이므로

$a+b=27$

899

상 중 하

행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^n=E$를 만족시키는 두 자리 자연수 n의 값 중에서 가장 큰 수를 구하시오. 96

(단, E는 단위행렬이다.)

풀이

$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

$A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$

따라서 $A^n=E$가 되는 경우는 $n=6k$ (k는 자연수)일 때이므로 두 자리 자연수 중에서 가장 큰 수는 96이다.

900

상 중 하

이차 정사각행렬 A의 (i, j) 성분 a_{ij}가

$a_{ij}=j-i$

일 때, 행렬 $A+A^2+A^3+\cdots+A^{2025}$의 $(1, 2)$ 성분을 구하시오. 1

풀이

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$이므로 $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

$A^3=A^2A=-EA=-A$, $A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$이므로

$A+A^2+A^3+A^4=A-E-A+E=O$

$\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^{2025}=(A+A^2+A^3+A^4)+A^4(A+A^2+A^3+A^4)$

$+\cdots+A^{2020}(A+A^2+A^3+A^4)+A^{2025}$

$=(A^4)^{506}A=A$

따라서 행렬 $A+A^2+A^3+\cdots+A^{2025}$의 $(1, 2)$ 성분은 1이다.

901

상 중 하

행렬 $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여

$A+A^2+A^3+\cdots+A^{152}$

의 모든 성분의 합은?

√① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

풀이

$A^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3=A^2A=-E$

$A^4=-A$, $A^5=-A^2$, $A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$이므로

$A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6=A+A^2-E-A-A^2+E=O$

$\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^{152}$

$=(A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6)+A^6(A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6)$

$+\cdots+A^{144}(A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6)+A^{151}+A^{152}$

$=A+A^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A+A^2+A^3+\cdots+A^{152}$의 모든 성분의 합은

$0+1+(-3)+0=-2$

13 행렬의 곱셈의 여러 가지 성질

중요도

902 내신 기출

상 중 하

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여 다음 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

〈보기〉

ㄱ. $A\neq O$, $B\neq O$이면 $AB\neq O$이다.

ㄴ. $C\neq O$일 때, $AC=BC$이면 $A=B$이다.

ㄷ. $2A-B=-E$이면 $AB=BA$이다.

① ㄱ √② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

ㄱ. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이면 $AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$

즉, $A\neq O$, $B\neq O$이지만 $AB=O$이다. (거짓)

ㄴ. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$이면

$AC=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$BC=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

즉, $C\neq O$, $AC=BC$이지만 $A\neq B$이다. (거짓)

903

상 중 하

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여 다음 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. ㄱ, ㄴ, ㄷ

(단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

〈보기〉
ㄱ. $AE=O$이면 $A=O$이다.
ㄴ. $A=2B^2$이면 $AB=BA$이다.
ㄷ. $A-B=E$, $AB=O$이면 $A^2+B^2=E$이다.

풀이
ㄱ. $AE=A$이므로 $AE=O$이면 $A=O$ (참)
ㄴ. $AB=2B^2B=2B^3$, $BA=B\times 2B^2=2B^3$ $\quad\therefore AB=BA$ (참)
ㄷ. $A-B=E$의 양변의 왼쪽에 A를 곱하면 $A^2-AB=A$
이때 $AB=O$이므로 $A^2=A$
같은 방법으로 이용하면 $B^2=-B$이므로 $A^2+B^2=A-B=E$ (참)

904 수능 기출

상 중 하

이차 정사각행렬 A와 B에 대하여 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?

(단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.)

〈보기〉
ㄱ. $(A+B)^2=(A-B)^2$이면 $AB=O$이다.
ㄴ. $A^2=E$, $B^2=B$이면 $(ABA)^2=ABA$이다.
ㄷ. $A(A+E)=E$, $AB=-E$이면 $B^2=A+2E$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ✓⑤ ㄴ, ㄷ

풀이
ㄱ. $(A+B)^2=(A-B)^2$에서
$A^2+AB+BA+B^2=A^2-AB-BA+B^2$
$2AB+2BA=O$ $\quad\therefore AB+BA=O$
따라서 $AB=O$인지는 알 수 없다. (거짓)

14 케일리-해밀턴 정리

중요도

905 내신 기출

상 중 하

이차 정사각행렬 A에 대하여

$$\underbrace{A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}}_{㉠},\ \underbrace{A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-3\end{pmatrix}}_{㉡}$$

이 성립할 때, 다음 중 A^{10}과 같은 행렬은?

(단, E는 단위행렬이다.)

✓① $32E$ ② $48E$ ③ $64E$
④ $80E$ ⑤ $128E$

풀이
$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$라고 하면 ㉠, ㉡에서 $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-3\end{pmatrix}$
따라서 $a=3$, $b=-7$, $c=1$, $d=-3$이므로 $A=\begin{pmatrix}3&-7\\1&-3\end{pmatrix}$
케일리-해밀턴 정리에 의하여 $A^2-\{3+(-3)\}A+\{3\times(-3)-(-7)\times1\}E=O$
$\therefore A^2=2E$ $\quad\therefore A^{10}=(A^2)^5=(2E)^5=32E$

906

상 중 하

행렬 $A=\begin{pmatrix}-2&-7\\1&3\end{pmatrix}$에 대하여

$$A^{100}+A^{101}+A^{102}=xA+yE$$

가 성립할 때, xy의 값은?

(단, x, y는 상수이고, E는 단위행렬이다.)

✓① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

풀이
케일리-해밀턴 정리에 의하여 $A^2-A+E=O$ ...... ㉠
㉠의 양변의 왼쪽에 $A+E$를 곱하면
$(A+E)(A^2-A+E)=O$ $\quad\therefore A^3=-E$
$\therefore A^{100}+A^{101}+A^{102}$
$=(A^3)^{33}A+(A^3)^{33}A^2+(A^3)^{34}=(-E)^{33}\times A+(-E)^{33}\times A^2+(-E)^{34}$
$=-A-A^2+E=-A-(A-E)+E$ ($\because$ ㉠에서 $A^2=A-E$)
$=-2A+2E$
따라서 $x=-2$, $y=2$이므로 $xy=-4$

907 풍쌤 비법 ❸

상 중 하

행렬 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$가 $A^2-A-6E=O$를 만족시킬 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+d$의 최솟값을 구하시오. -4

(단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

풀이
(i) $A\neq kE$ (k는 실수)일 때
케일리-해밀턴 정리에 의하여 $a+d=1$
(ii) $A=kE$ (k는 실수)일 때
$A=kE$를 $A^2-A-6E=O$에 대입하여 정리하면
$(k^2-k-6)E=O$, $(k+2)(k-3)E=O$ $\quad\therefore k=-2$ 또는 $k=3$
즉, $A=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$이므로 $a+d=-4$ 또는 $a+d=6$
(i), (ii)에서 $a+d$의 최솟값은 -4이다.

908

상 중 하

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}2&a\\-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b&2\\-2&4\end{pmatrix}$에 대하여 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$이 성립할 때, 다음 중 $A^2+B^2-3A-10B$와 같은 행렬은?

(단, a, b는 상수이고, E는 단위행렬이다.)

① $-30E$ ✓② $-31E$ ③ $-32E$
④ $-33E$ ⑤ $-34E$

풀이
$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$에서 $AB=BA$이므로
$\begin{pmatrix}2&a\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&2\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&2\\-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&a\\-1&1\end{pmatrix}$
$\therefore 2b-2a=2b-2$, $4+4a=ab+2$, $-b-2=-8$, $2=-2a+4$
$\therefore a=1$, $b=6$
따라서 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&2\\-2&4\end{pmatrix}$이므로 케일리-해밀턴 정리에 의하여
$A^2-3A+3E=O$, $B^2-10B+28E=O$
$\therefore A^2+B^2-3A-10B=(A^2-3A)+(B^2-10B)=-3E-28E=-31E$

› 정답과 풀이 133쪽

909

행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2a-1 & -a+5 \\ a+4 & 7 & 3a+2 \end{pmatrix}$에 대하여 $A=(a_{ij})$라고 하자. $a_{12}+a_{21}=9$일 때, $a_{23}-a_{13}+a_{22}$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) 12

풀이

$a_{12}+a_{21}=9$이므로 $(2a-1)+(a+4)=9$

$\therefore a=2$ ········· 40 %

따라서 $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$이므로 ········· 40 %

$a_{23}-a_{13}+a_{22}=8-3+7=12$ ········· 20 %

910

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여

$$\underbrace{X-2Y=6A}_{\text{㉠}},\ \underbrace{3X+4Y=2B}_{\text{㉡}}$$

를 만족시키는 행렬 X, Y가 있다. 이때 행렬 $2X+Y$의 모든 성분의 합을 구하시오. 31

풀이

㉠+㉡을 하면 $4X+2Y=6A+2B$

$\therefore 2X+Y=3A+B$ ········· 40 %

$=3\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 14 & 10 \end{pmatrix}$ ········· 40 %

따라서 행렬 $2X+Y$의 모든 성분의 합은

$10+(-3)+14+10=31$ ········· 20 %

911

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여 $AB=O$이고

$\underbrace{A+B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{㉠}}$, $\underbrace{A-B=\begin{pmatrix} 3-2k & 12 \\ -14 & 13 \end{pmatrix}}_{\text{㉡}}$이 성립할 때, 상수 k의 값을 구하시오. (단, O는 영행렬이다.) 8

풀이

㉠+㉡을 하면

$2A=\begin{pmatrix} 4-2k & 12 \\ -14 & 14 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore A=\begin{pmatrix} 2-k & 6 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}$ ········· 30 %

㉠−㉡을 하면

$2B=\begin{pmatrix} -2+2k & -12 \\ 14 & -12 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore B=\begin{pmatrix} -1+k & -6 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$ ········· 30 %

$\therefore AB=\begin{pmatrix} 2-k & 6 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1+k & -6 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -k^2+3k+40 & 6k-48 \\ -7k+56 & 0 \end{pmatrix}$

이때 $AB=O$이므로 $-k^2+3k+40=0$, $6k-48=0$, $-7k+56=0$

$\therefore k=8$ ········· 40 %

912

이차 정사각행렬 A에 대하여 $A^2-2A-E=O$, $A\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$이 성립한다. $A^2\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오. −2

(단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

풀이

$A^2=2A+E$이므로

$A^2\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}=(2A+E)\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ········· 20 %

$=2A\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}+E\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$=2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ········· 60 %

따라서 $a=3$, $b=5$이므로

$a-b=3-5=-2$ ········· 20 %

913

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여

$$A+B=4E,\ AB=5B$$

일 때, $A^2-B^2=x(A-B)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.(단, E는 단위행렬이다.) 4

풀이

$A=4E-B$를 $AB=5B$에 대입하여 정리하면 $B^2=-B$

$B=4E-A$를 $AB=5B$에 대입하여 정리하면 $A^2=4A-5B$ ········· 60 %

$\therefore A^2-B^2=(4A-5B)-(-B)$

$=4(A-B)$ ········· 30 %

따라서 실수 x의 값은 4이다. ········· 10 %

914

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^{120}+A^{121}=2^a\times 3^b A$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.) 121

풀이

케일리-해밀턴 정리에 의하여 $A^2-3A=O$

즉, $A^2=3A$이므로

$A^3=A^2A=3A^2=3^2A$

$A^4=A^3A=3^2A^2=3^3A$

$A^5=A^4A=3^3A^2=3^4A$

⋮

$\therefore A^{n+1}=3^nA$ (단, n은 자연수이다.) ········· 40 %

$\therefore A^{120}+A^{121}=3^{119}A+3^{120}A=3^{119}(1+3)A$

$=2^2\times 3^{119}A$ ········· 40 %

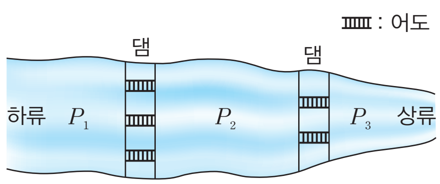
따라서 $a=2$, $b=119$이므로

$a+b=121$ ········· 20 %

915 평가원 기출

수량을 조절하기 위하여 아래 그림과 같이 강에 댐 2개를 설치하고, 물고기를 위한 통로(어도)를 상류 댐에 2개, 하류 댐에 3개를 설치하였다. 행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij}를 다음과 같이 정의할 때, 행렬 A의 표현으로 옳은 것은?

> (가) $i=j$일 때, $a_{ij}=1$
> (나) $i\neq j$일 때, a_{ij}는 물고기가 수역 P_i에서 수역 P_j로 갈 수 있는 경로의 수



① $\begin{pmatrix}1&3&6\\3&1&2\\6&2&1\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&6\\3&6&1\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}1&3&3\\3&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}1&2&6\\2&1&3\\6&3&1\end{pmatrix}$

풀이
$a_{11}=1,\ a_{22}=1,\ a_{33}=1$이고 $a_{12}=3,\ a_{13}=3\times2=6,\ a_{21}=3,\ a_{23}=2,$
$a_{31}=2\times3=6,\ a_{32}=2$이므로

$A=\begin{pmatrix}1&3&6\\3&1&2\\6&2&1\end{pmatrix}$

916

두 행렬 $A_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A_{n+1}을 다음과 같이 정의한다. (단, n은 자연수이다.)

> (가) 행렬 A_n의 $(1,\ 1)$ 성분이 $(1,\ 2)$ 성분보다 작으면 $A_{n+1}=A_nP$
> (나) 행렬 A_n의 $(1,\ 1)$ 성분이 $(1,\ 2)$ 성분보다 작지 않으면 $A_{n+1}=-PA_n$

이때 행렬 A_{2005}의 $(2,\ 1)$ 성분을 구하시오. 3

풀이
$A_2=A_1P=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$, $A_3=-PA_2=\begin{pmatrix}-5&-3\\-2&-1\end{pmatrix}$
$A_4=A_3P=\begin{pmatrix}-3&-5\\-1&-2\end{pmatrix}$, $A_5=-PA_4=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}=A_1$
$A_6=A_2,\ A_7=A_3,\ A_8=A_4,\ \cdots$이므로 $A_{n+4}=A_n$
$\therefore A_{2005}=A_{4\times501+1}=A_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$
따라서 A_{2005}의 $(2,\ 1)$ 성분은 3이다.

917

행렬 $A=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$와 자연수 n에 대하여 행렬 A^n의 $(1,\ 1)$ 성분과 $(2,\ 2)$ 성분의 합을 $f(n)$이라고 하자. $f(1)=3,\ f(2)=7$일 때, $f(5)$의 값은?

① 117 ② 120 ③ 123
④ 126 ⑤ 129

풀이
$A^2=\begin{pmatrix}a^2&0\\0&b^2\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}a^3&0\\0&b^3\end{pmatrix}$, $A^5=A^2A^3=\begin{pmatrix}a^5&0\\0&b^5\end{pmatrix}$이므로
$f(1)=a+b=3,\ f(2)=a^2+b^2=7$
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로
$7=3^2-2ab \quad \therefore ab=1$
$\therefore f(5)=a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-a^2b^2(a+b)$
$=(a^2+b^2)\{(a+b)^3-3ab(a+b)\}-(ab)^2(a+b)$
$=7(3^3-3\times1\times3)-1^2\times3=123$

918

자연수 $n,\ a$에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}^n$의 모든 성분의 합이 $4a^n$일 때, a의 최댓값과 최솟값의 차는? (단, $a\leq20$)

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

풀이
$A=\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}$라고 하면
$A^2=\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&6a\\0&a^2\end{pmatrix}$
$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}a^2&6a\\0&a^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^3&9a^2\\0&a^3\end{pmatrix}$
$\vdots$
이므로 $A^n=\begin{pmatrix}a^n&3na^{n-1}\\0&a^n\end{pmatrix}$
행렬 A^n의 모든 성분의 합이 $4a^n$이므로
$a^n+3na^{n-1}+0+a^n=4a^n$
$2a^n=3na^{n-1},\ 2a=3n \quad \therefore a=\frac{3}{2}n$
이때 n은 자연수, a는 20 이하의 자연수이므로
$a=3,\ 6,\ 9,\ \cdots,\ 18$
따라서 a의 최댓값과 최솟값의 차는
$18-3=15$

919

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, n은 자연수이다.)

〈보기〉

ㄱ. $A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$을 만족시키는 n의 값은 4이다.

ㄴ. $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$은 n의 값에 관계없이 항상 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$이다.

ㄷ. $A^n\begin{pmatrix} 2 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은 n의 값에 관계없이 항상 3이다.

① ㄴ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
✓④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

⋮

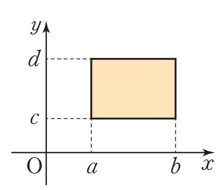
에서 $A^n=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ㄱ. $A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$　　$\therefore n=8$ (거짓)

920

좌표평면에서 오른쪽 그림과 같은 직사각형을 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대응시키고, 이차 정사각행렬 M과 대응되는 직사각형의 넓이를 S_M이라고 하자. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$에 대하여 $S_{AB}=154$일 때, 양수 a의 값은?

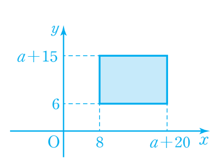


① 1　② $\frac{3}{2}$　✓③ 2
④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

풀이

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & a+20 \\ 6 & a+15 \end{pmatrix}$

이므로 행렬 AB에 대응되는 직사각형은 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore S_{AB}=(a+20-8)(a+15-6)$
$=(a+12)(a+9)$

이때 $S_{AB}=154$이므로

$(a+12)(a+9)=154$, $a^2+21a-46=0$

$(a-2)(a+23)=0$　　$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

921 교육청 기출

어떤 회사에서 새로 추진하려는 사업에 대하여 전체 사원을 대상으로 세 차례에 걸쳐 찬반 의견을 조사하였다. 1차 조사 결과 찬성이 60 %, 반대가 40 %였다. 아래 표는 사업 설명회 이후 2차 조사 결과 1차 조사와 달리 찬반 의견을 바꾼 비율과 사원 토론회 이후 3차 조사 결과 2차 조사와 달리 찬반 의견을 바꾼 비율을 각각 나타낸 것이다.

조사 \ 변화	직전 조사에서 찬성한 사원 중 반대로 의견을 바꾼 비율	직전 조사에서 반대한 사원 중 찬성으로 의견을 바꾼 비율
2차 조사 결과	20 %	30 %
3차 조사 결과	10 %	40 %

$A=(0.6\ \ 0.4)$, $B=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$일 때, 3차 조사 결과 전체 사원 중에서 찬성하는 사원들의 비율을 나타내는 것은? (단, 기권한 사원은 없다.)

✓① ABC의 (1, 1) 성분　② ABC의 (1, 2) 성분
③ ACB의 (1, 1) 성분　④ ACB의 (1, 2) 성분
⑤ AB^2의 (1, 1) 성분

풀이

3차 조사 결과 전체 사원 중에서 찬성하는 사원들의 비율은

$(0.6\times0.8+0.4\times0.3)\times0.9+(0.6\times0.2+0.4\times0.7)\times0.4$

이고, 이것은 행렬

$ABC=(0.6\ \ 0.4)\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$

의 (1, 1) 성분이다.

922

이차 정사각행렬 A에 대하여

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

가 성립한다. 이때 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$를 만족시키는 상수 x, y에 대하여 $x-y$의 값은?

① -2　② -1　③ 0
④ 1　✓⑤ 2

풀이

$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$에서

$AA\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$　　$\therefore A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

실수 a, b에 대하여 $a\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$가 성립한다고 하면

$\begin{pmatrix} -a+b \\ -2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$　　$\therefore a=-4$, $b=2$

따라서 $-4\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$이므로

$-4A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+2A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$　　$\therefore A\begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

즉, $x=-6$, $y=-8$이므로 $x-y=2$

923

5개의 행렬

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}}_{\text{㉠}},\ \underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}_{\text{㉡}}$$

중에서 임의의 한 행렬을 A라고 할 때, $A^2=E$를 만족시키는 행렬 A의 개수를 x, $A^5=A$를 만족시키는 행렬 A의 개수를 y라고 하자. 이때 $x+y$의 값을 구하시오. 6

풀이

㉠의 행렬은 모두 $A^2=A$를 만족시키고,
㉡의 행렬은 $A^2=E$를 만족시킨다.
따라서 $A^2=E$를 만족시키는 행렬은 1개이므로 $x=1$
한편, $A^2=A$이면 $A^5=(A^2)^2A=A^2A=AA=A^2=A$
$A^2=E$이면 $A^5=(A^2)^2A=EA=A$
따라서 주어진 행렬은 모두 $A^5=A$를 만족시키므로 $y=5$
$\therefore x+y=6$

924 교육청 기출

두 실수 a, b에 대하여 행렬 A를 $A=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$라고 할 때, 옳은 것만을 다음 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?
(단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

보기

ㄱ. $A^2=O$이면 $A=O$이다.
ㄴ. $A^2+E=O$를 만족시키는 행렬 A의 개수는 2이다.
ㄷ. $A^2-A=O$를 만족시키는 행렬 A의 개수는 2이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

$A^2=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2-b^2&-2ab\\2ab&a^2-b^2\end{pmatrix}$

ㄱ. $A^2=O$이면 $\begin{pmatrix}a^2-b^2&-2ab\\2ab&a^2-b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$이므로
$a^2-b^2=0,\ 2ab=0$　$\therefore a=b=0$　$\therefore A=O$ (참)

ㄴ. $A^2+E=O$이면 $A^2=-E$이므로 $\begin{pmatrix}a^2-b^2&-2ab\\2ab&a^2-b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$
즉, $a^2-b^2=-1$, $2ab=0$이므로 $a=0$, $b=-1$ 또는 $a=0$, $b=1$
따라서 행렬 A는 $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$으로 2개이다. (참)

ㄷ. $A^2-A=O$이면 $A^2=A$이므로
$\begin{pmatrix}a^2-b^2&-2ab\\2ab&a^2-b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$　$\therefore a^2-b^2=a,\ 2ab=b$
$2ab=b$에서 $(2a-1)b=0$이므로 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $b=0$
(i) $b=0$일 때, $a^2-b^2=a$에서 $a^2=a$　$\therefore a=0$ 또는 $a=1$
(ii) $b\neq0$일 때, $a=\frac{1}{2}$이므로 이것을 $a^2-b^2=a$에 대입하면 $b^2=-\frac{1}{4}$
그런데 b는 실수이므로 이것을 만족시키는 실수 b는 존재하지 않는다.
(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 행렬 A는 $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$로 2개이다. (참)

925

행렬 $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$에 대하여

$$f(X)=ad-bc$$

라고 하자. 행렬 $A=\begin{pmatrix}x&3\\0&1\end{pmatrix}$에 대하여 $f(A^2)=f(2A)$가 성립할 때, 다음 중 A^3-5A^2+5A와 같은 것은?
(단, a, b, c, d, x는 실수이고, $x>0$이다.)

① $2A$　✓② A　③ E
④ $-A$　⑤ $-2A$

풀이

$A^2=\begin{pmatrix}x&3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2&3x+3\\0&1\end{pmatrix}$이므로
$f(A^2)=x^2$
$2A=2\begin{pmatrix}x&3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x&6\\0&2\end{pmatrix}$이므로
$f(2A)=4x$
$f(A^2)=f(2A)$에서
$x^2=4x,\ x(x-4)=0$　$\therefore x=4\ (\because x>0)$
즉, $A=\begin{pmatrix}4&3\\0&1\end{pmatrix}$이므로 케일리-해밀턴 정리에 의하여
$A^2-5A+4E=O$
$\therefore A^3-5A^2+5A=A(A^2-5A+4E)+A$
$=AO+A=A$

926 도전! 1등급

9 이하의 자연수 n과 두 행렬

$$A=\begin{pmatrix}5&-3\\2&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&-1\\3&2\end{pmatrix}$$

에 대하여 $(A^{n+2}-4A^{n+1})B^{6n}=-A^5$을 만족시키는 n의 값은?

① 4　✓② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

풀이

$A=\begin{pmatrix}5&-3\\2&-1\end{pmatrix}$에서 케일리-해밀턴 정리에 의하여
$A^2-4A+E=O$ …… ㉠
㉠의 양변의 왼쪽에 A^n을 곱하면
$A^{n+2}-4A^{n+1}+A^n=O$　$\therefore A^{n+2}-4A^{n+1}=-A^n$ …… ㉡
$B=\begin{pmatrix}-1&-1\\3&2\end{pmatrix}$에서 케일리-해밀턴 정리에 의하여
$B^2-B+E=O$ …… ㉢
㉢의 양변의 왼쪽에 $B+E$를 곱하면
$(B+E)(B^2-B+E)=O$　$\therefore B^3=-E$
$\therefore B^{6n}=(B^3)^{2n}=(-E)^{2n}=E$ …… ㉣
㉡, ㉣에서
$(A^{n+2}-4A^{n+1})B^{6n}=-A^nE=-A^n$
이므로 $-A^n=-A^5$　$\therefore n=5$