풍산자

반복수학

공통수학 1

구성과 특징

정확하고 빠른 풀이를 위한 반복 훈련서

1 한 권으로 기본 개념과 연산 실력 완성

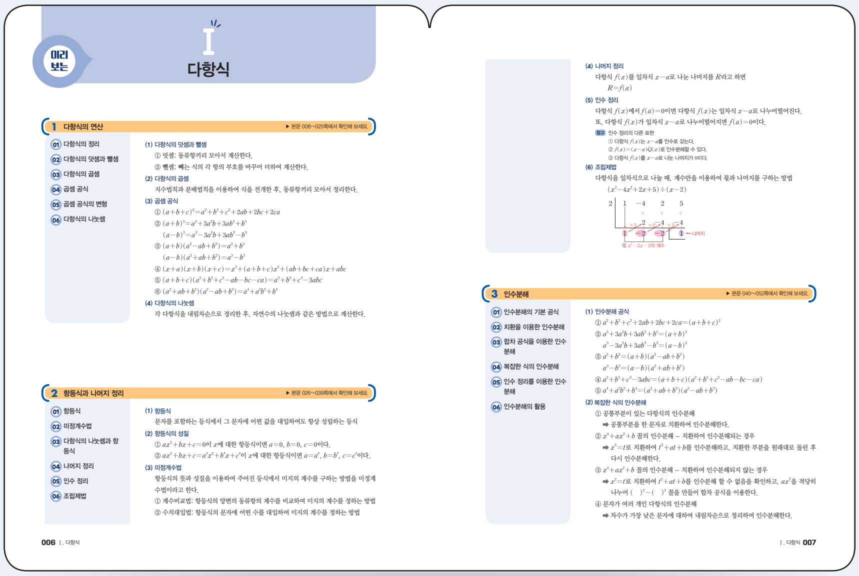
- 개념과 연산을 동시에 학습할 수 있도록 구성하여 기본 실력 완성
- 개념과 연산 유형의 집중 학습으로 수학 실력을 쌓고 자신감을 기르며 실전에서는 문제 풀이 시간 단축

2 기본 학습에 적합한 체계적인 주제별 구성

- 단원별로 학습 이해의 흐름에 맞춰 주제별 개념과 연산 유형을 체계적으로 학습
- 주제별 개념과 연산 학습으로 빈틈없는 기본 실력 향상

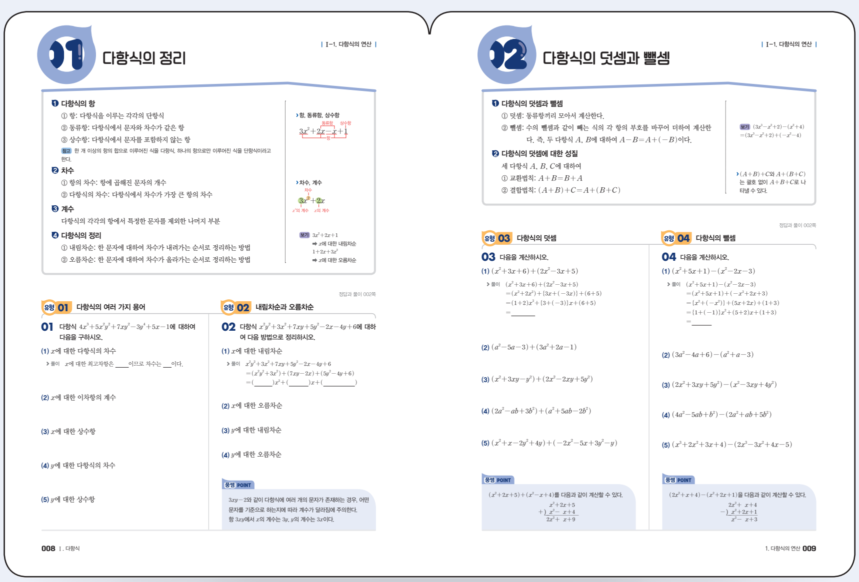
3 스스로 쉽게 학습할 수 있는 문제 연결 학습법

- 개념과 공식 등을 이용하여 바로 적용하여 풀 수 있도록 구성하여 수학의 기본 개념과 연산을 스스로 완성
- 개념 정리부터 연산 유형까지 풀면서 저절로 원리 터득



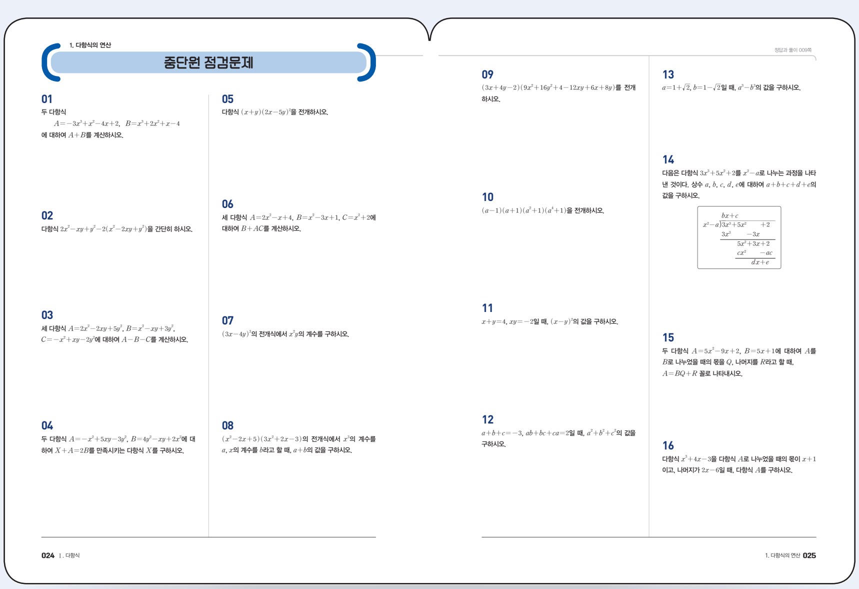
미리 보는 대단원

- 대단원별로 중단원과 핵심 주제를 한눈에 확인
- 중단원별 정리된 핵심 개념으로 개념과 연산 유형의 연계성 파악



주제별 개념 정리와 연산 유형

- 주제별로 중요한 개념 정리와 문제 풀이에 도움이 되는 참고, 보기, 보충 설명 제시
- 빈틈없는 개념과 연산 학습이 이루어지도록 체계적으로 연산 유형 분류
- 풍쌤 POINT 에서 연산 학습의 비법, 공식 등을 다시 한번 확인



중단원 점검문제

- 중단원별 기본 유형으로 구성하여 중단원 실력을 점검
- 실력을 점검하여 취약한 개념, 연산을 스스로 확인하고 보충 학습이 가능하도록 구성

차례

Ⅰ 다항식

Ⅱ 방정식과 부등식

Ⅲ 경우의 수

Ⅳ 행렬

I

다항식

1. 다항식의 연산
2. 항등식과 나머지 정리
3. 인수분해

미리 보는

I 다항식

1 다항식의 연산

▶ 본문 008~025쪽에서 확인해 보세요.

(1) 다항식의 덧셈과 뺄셈

① 덧셈: 동류항끼리 모아서 계산한다.

② 뺄셈: 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어 더하여 계산한다.

(2) 다항식의 곱셈

지수법칙과 분배법칙을 이용하여 식을 전개한 후, 동류항끼리 모아서 정리한다.

(3) 곱셈 공식

① $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

② $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

③ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

④ $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

⑥ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

(4) 다항식의 나눗셈

각 다항식을 내림차순으로 정리한 후, 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

2 항등식과 나머지 정리

▶ 본문 026~039쪽에서 확인해 보세요.

(1) 항등식

문자를 포함하는 등식에서 그 문자에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하는 등식

(2) 항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=0$, $b=0$, $c=0$이다.

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.

(3) 미정계수법

항등식의 뜻과 성질을 이용하여 주어진 등식에서 미지의 계수를 구하는 방법을 미정계수법이라고 한다.

① 계수비교법: 항등식의 양변의 동류항의 계수를 비교하여 미지의 계수를 정하는 방법

② 수치대입법: 항등식의 문자에 어떤 수를 대입하여 미지의 계수를 정하는 방법

(4) 나머지 정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나눈 나머지를 R라고 하면

$R=f(a)$

(5) 인수 정리

다항식 $f(x)$에서 $f(a)=0$이면 다항식 $f(x)$는 일차식 $x-a$로 나누어떨어진다.

또, 다항식 $f(x)$가 일차식 $x-a$로 나누어떨어지면 $f(a)=0$이다.

참고 인수 정리의 다른 표현

① 다항식 $f(x)$는 $x-a$를 인수로 갖는다.

② $f(x)=(x-a)Q(x)$로 인수분해할 수 있다.

③ 다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지가 0이다.

(6) 조립제법

다항식을 일차식으로 나눌 때, 계수만을 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법

$(x^3-4x^2+2x+5)\div(x-2)$

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 1 & -4 & 2 & 5 \\
 & & + & + & + \\
 & & 2 & -4 & -4 \\
\hline
 & 1 & -2 & -2 & \boxed{1}
\end{array}$$

$\times 2$ $\times 2$ $\times 2$

← 나머지

몫 x^2-2x-2의 계수

3 인수분해

▶ 본문 040~052쪽에서 확인해 보세요.

(1) 인수분해 공식

① $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

② $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

③ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

④ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

⑤ $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

(2) 복잡한 식의 인수분해

① 공통부분이 있는 다항식의 인수분해

➡ 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해한다.

② x^4+ax^2+b 꼴의 인수분해 – 치환하여 인수분해되는 경우

➡ $x^2=t$로 치환하여 t^2+at+b를 인수분해하고, 치환한 부분을 원래대로 돌린 후 다시 인수분해한다.

③ x^4+ax^2+b 꼴의 인수분해 – 치환하여 인수분해되지 않는 경우

➡ $x^2=t$로 치환하여 t^2+at+b를 인수분해 할 수 없음을 확인하고, ax^2을 적당히 나누어 $(\quad)^2-(\quad)^2$ 꼴을 만들어 합차 공식을 이용한다.

④ 문자가 여러 개인 다항식의 인수분해

➡ 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

01 다항식의 정리

❶ 다항식의 항

① 항: 다항식을 이루는 각각의 단항식

② 동류항: 다항식에서 문자와 차수가 같은 항

③ 상수항: 다항식에서 문자를 포함하지 않는 항

참고 한 개 이상의 항의 합으로 이루어진 식을 다항식, 하나의 항으로만 이루어진 식을 단항식이라고 한다.

❷ 차수

① 항의 차수: 항에 곱해진 문자의 개수

② 다항식의 차수: 다항식에서 차수가 가장 큰 항의 차수

❸ 계수

다항식의 각각의 항에서 특정한 문자를 제외한 나머지 부분

❹ 다항식의 정리

① 내림차순: 한 문자에 대하여 차수가 내려가는 순서로 정리하는 방법

② 오름차순: 한 문자에 대하여 차수가 올라가는 순서로 정리하는 방법

› 항, 동류항, 상수항

동류항 상수항

$3x^2+\overbrace{2x-x}^{\text{동류항}}+\overbrace{1}^{\text{상수항}}$

항

› 차수, 계수

차수

$3x^{2}+2x$

x^2의 계수 x의 계수

보기 $3x^2+2x+1$

➡ x에 대한 내림차순

$1+2x+3x^2$

➡ x에 대한 오름차순

정답과 풀이 002쪽

유형 01 다항식의 여러 가지 용어

01 다항식 $4x^3+5x^2y^2+7xy^2-3y^4+5x-1$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) x에 대한 다항식의 차수

› 풀이 x에 대한 최고차항은 ____이므로 차수는 ___이다.

(2) x에 대한 이차항의 계수

(3) x에 대한 상수항

(4) y에 대한 다항식의 차수

(5) y에 대한 상수항

유형 02 내림차순과 오름차순

02 다항식 $x^2y^2+3x^2+7xy+5y^2-2x-4y+6$에 대하여 다음 방법으로 정리하시오.

(1) x에 대한 내림차순

› 풀이 $x^2y^2+3x^2+7xy+5y^2-2x-4y+6$

$=(x^2y^2+3x^2)+(7xy-2x)+(5y^2-4y+6)$

$=(\_\_\_\_\_)x^2+(\_\_\_\_\_)x+(\_\_\_\_\_\_\_)$

(2) x에 대한 오름차순

(3) y에 대한 내림차순

(4) y에 대한 오름차순

풍쌤 POINT

$3xy-2$와 같이 다항식에 여러 개의 문자가 존재하는 경우, 어떤 문자를 기준으로 하는지에 따라 계수가 달라짐에 주의한다.
항 $3xy$에서 x의 계수는 $3y$, y의 계수는 $3x$이다.

02 다항식의 덧셈과 뺄셈

1 다항식의 덧셈과 뺄셈

① 덧셈: 동류항끼리 모아서 계산한다.

② 뺄셈: 수의 뺄셈과 같이 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어 더하여 계산한다. 즉, 두 다항식 A, B에 대하여 $A-B=A+(-B)$이다.

보기 $(3x^3-x^2+2)-(x^2+4)$
$=(3x^3-x^2+2)+(-x^2-4)$

2 다항식의 덧셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

① 교환법칙: $A+B=B+A$

② 결합법칙: $(A+B)+C=A+(B+C)$

› $(A+B)+C$와 $A+(B+C)$는 괄호 없이 $A+B+C$로 나타낼 수 있다.

정답과 풀이 002쪽

유형 03 다항식의 덧셈

03 다음을 계산하시오.

(1) $(x^2+3x+6)+(2x^2-3x+5)$

› 풀이 $(x^2+3x+6)+(2x^2-3x+5)$
$=(x^2+2x^2)+\{3x+(-3x)\}+(6+5)$
$=(1+2)x^2+\{3+(-3)\}x+(6+5)$
$=$ ______

(2) $(a^2-5a-3)+(3a^2+2a-1)$

(3) $(x^2+3xy-y^2)+(2x^2-2xy+5y^2)$

(4) $(2a^2-ab+3b^2)+(a^2+5ab-2b^2)$

(5) $(x^2+x-2y^2+4y)+(-2x^2-5x+3y^2-y)$

풍쌤 POINT

$(x^2+2x+5)+(x^2-x+4)$를 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{array}{rr} & x^2+2x+5 \\ +) & x^2-\ \ x+4 \\ \hline & 2x^2+\ \ x+9 \end{array}$$

유형 04 다항식의 뺄셈

04 다음을 계산하시오.

(1) $(x^2+5x+1)-(x^2-2x-3)$

› 풀이 $(x^2+5x+1)-(x^2-2x-3)$
$=(x^2+5x+1)+(-x^2+2x+3)$
$=\{x^2+(-x^2)\}+(5x+2x)+(1+3)$
$=\{1+(-1)\}x^2+(5+2)x+(1+3)$
$=$ ______

(2) $(3a^2-4a+6)-(a^2+a-3)$

(3) $(2x^2+3xy+5y^2)-(x^2-3xy+4y^2)$

(4) $(4a^2-5ab+b^2)-(2a^2+ab+5b^2)$

(5) $(x^3+2x^2+3x+4)-(2x^3-3x^2+4x-5)$

풍쌤 POINT

$(2x^2+x+4)-(x^2+2x+1)$을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{array}{rr} & 2x^2+\ \ x+4 \\ -) & x^2+2x+1 \\ \hline & x^2-\ \ x+3 \end{array}$$

05 두 다항식 $A=2x^2+3x+4$, $B=x^2+x+1$에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $A+B$

(2) $A-B$

(3) $2A-(A+2B)$

> 풀이 $2A-(A+2B)$
$=2A-A-2B$
$=A-2B$
$=2x^2+3x+4-2(x^2+x+1)$
$=(2x^2+3x+4)+(-2x^2-2x-2)$
$=\{2+(-2)\}x^2+\{3+(-2)\}x+\{4+(-2)\}$
$=$______

06 두 다항식 $A=-x^3+x^2-x$, $B=2x^3-x^2+x$에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $A+B$

(2) $A-B$

(3) $B-(A-B)$

풍쌤 POINT

계산하려는 식을 먼저 간단히 정리한 후 주어진 다항식을 대입하여 계산한다.

07 세 다항식 $A=3x^2-5xy+y^2$, $B=x^2-y^2+2xy$, $C=-2x^2+2xy-3y^2$에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $A+B+C$

> 풀이 $A+B+C$
$=(3x^2-5xy+y^2)+(x^2-y^2+2xy)$
$\quad+(-2x^2+2xy-3y^2)$
$=\{3+1+(-2)\}x^2+(-5+2+2)xy$
$\quad+\{1+(-1)+(-3)\}y^2$
$=$______

(2) $A-B+C$

(3) $A-(B+C)$

(4) $A+2C-(A-2B+C)$

풍쌤 POINT

세 다항식 A, B, C에 대하여
① $A+(B-C)=A+B-C$
➡ 괄호 밖의 부호가 +이면 괄호 안의 부호를 그대로!
② $A-(B-C)=A-B+C$
➡ 괄호 밖의 부호가 −이면 괄호 안의 부호를 반대로!

03 다항식의 곱셈

❶ 다항식의 곱셈

다항식의 곱셈은 지수법칙과 분배법칙을 이용하여 전개한 후, 동류항끼리 모아서 정리한다.

❷ 다항식의 곱셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

① 교환법칙: $AB=BA$

② 결합법칙: $(AB)C=A(BC)$

③ 분배법칙: $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

› **지수법칙**
$a\neq0$, $b\neq0$이고 m, n이 자연수일 때
$a^ma^n=a^{m+n}$

› $(AB)C$와 $A(BC)$는 괄호 없이 ABC로 나타낼 수 있다.

유형 06 식의 전개

정답과 풀이 003쪽

08 다음 식을 전개하시오.

(1) $xy(x^2-4xy+2y^2)$

› 풀이 $xy(x^2-4xy+2y^2)$
$=xy\times x^2-xy\times 4xy+xy\times 2y^2$
$=$ __________

(2) $2xy^2(2x^2+xy-3y^2)$

(3) $(a-2)(2a^2+a-5)$

(4) $(x+3)(3x^2-x+4)$

09 다음 식을 전개하시오.

(1) $(3x+2y)(x^2+x+y^2)$

(2) $(a+3b)(4a^2-2ab+3b)$

(3) $(x-1)(x-2)(x+2)$

(4) $(x-y)(2x-y)(x+3y)$

유형 07 다항식의 전개식에서 특정 항의 계수 구하기

정답과 풀이 004쪽

10 다음 전개식에서 [ ] 안의 항의 계수를 구하시오.

(1) $(x-3)(x^2+2x+3)$ [x^2]

> 풀이 $(x-3)(x^2+2x+3)$
> $=x(x^2+2x+3)-3(x^2+2x+3)$
> $=(x^3+2x^2+3x)+(-3x^2-6x-9)$
> $=x^3-x^2-3x-9$
> 따라서 x^2의 계수는 ____이다.

(2) $(3a+1)(2a+1)^2$ [a]

(3) $(x-2y)(x^2+xy-y^2)$ [xy^2]

(4) $(2x-3y)(x+y)+(x+4y)^2$ [y^2]

11 다음 전개식에서 [ ] 안의 항의 계수를 구하시오.

(1) $(x^2+2x+3)(2x^2+x-4)$ [x]

> 풀이 $(x^2+2x+3)(2x^2+x-4)$를 전개했을 때 x의 항이 나타나는 부분만 계산하면
> $2x\times(-4)+3\times x=-8x+3x=-5x$
> 이므로 x의 계수는 ____이다.

(2) $(2a^3+4a-1)(a^2-2a-5)$ [a^2]

(3) $(x^2+2xy-4y^2)(x^2+x+y)$ [x^2y]

풍쌤 POINT

다항식의 곱셈에서 특정 항의 계수를 구할 때는
① 전개가 간단한 경우에는 전개하여 구한다.
② 전개가 복잡한 경우에는 특정 항이 나타나는 부분만 따로 계산하여 구한다.

04 곱셈 공식

1 곱셈 공식 ①

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

② $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

③ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

④ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

2 곱셈 공식 ②

① $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$,
$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

② $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

③ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

④ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

⑥ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

› $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$에 b 대신 $-b$를 대입하면
$\{a+(-b)\}^2$
$=a^2+2a\times(-b)+(-b)^2$
$=a^2-2ab+b^2$
을 얻을 수 있다.
$(x-a)(x-b)(x-c)$,
$(a-b)^3$,
$(a-b)(a^2+ab+b^2)$
의 계산 결과도 같은 방법으로 생각한다.

정답과 풀이 004쪽

유형 08 $(a\pm b)^2$, $(a+b)(a-b)$ 꼴

12 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+2)^2$

› 풀이 $(x+2)^2=x^2+$___$x+$___

(2) $(2y-3)^2$

(3) $(a+4)(a-4)$

(4) $(5y-3x)(5y+3x)$

풍쌤 POINT

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

유형 09 $(x+a)(x+b)$, $(ax+b)(cx+d)$ 꼴

13 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+3)(a+1)$

› 풀이 $(a+3)(a+1)=a^2+$___$a+$___

(2) $(x-4)(x+2)$

(3) $(2x+1)(x-3)$

(4) $(3x-1)(4x+5)$

풍쌤 POINT

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

유형 10 $(x\pm a)(x\pm b)(x\pm c)$ 꼴

14 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+1)(x+2)(x+3)$

> 풀이 $(x+1)(x+2)(x+3)$
> $=x^3+\_\_\_x^2+\_\_\_x+\_\_\_$

(2) $(a+2)(a+4)(a+5)$

(3) $(x-1)(x-3)(x-5)$

(4) $(x-2)(x+3)(x-4)$

풍쌤 POINT

$(x+a)(x+b)(x+c)$
$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$
$(x-a)(x-b)(x-c)$
$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

유형 11 $(a+b+c)^2$ 꼴

15 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a-b+c)^2$

> 풀이 $(a-b+c)^2$
> $=a^2+(\_\_\_\_)^2+c^2+2a\times(\_\_\_\_)+2\times(-b)\times c$
> $+2ca$
> $=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

(2) $(a+b+2)^2$

(3) $(2x+y+z)^2$

(4) $(x-2y+z)^2$

(5) $(a+2b-3c)^2$

풍쌤 POINT

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

유형 12 $(a\pm b)^3$ 꼴

16 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+2)^3$

> 풀이 $(x+2)^3$
> $=x^3+\_\_x^2+\_\_\_x+\_\_$

(2) $(a-3)^3$

(3) $(2x+1)^3$

(4) $(4a-b)^3$

(5) $(3x+5y)^3$

풍쌤 POINT

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$-$와 $+$가 번갈아가며 나온다.

유형 13 $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$ 꼴 (복호동순)

17 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+3)(x^2-3x+9)$

> 풀이 $(x+3)(x^2-3x+9)$
> $=(x+3)(x^2-x\times 3+3^2)$
> $=\_\_\_\_\_\_$

(2) $(y-1)(y^2+y+1)$

(3) $(a-2)(a^2+2a+4)$

(4) $(2x+1)(4x^2-2x+1)$

(5) $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

풍쌤 POINT

$(a+b)(\underline{a^2-ab+b^2})=a^3+b^3$

$(a-b)(\underline{a^2+ab+b^2})=a^3-b^3$

$a^2+2ab+b^2$과 같은 완전제곱식이 아님에 주의!

유형 14 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 꼴

18 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-y-x)$

> 풀이 $(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-y-x)$
> $=(x+y+1)(x^2+y^2+1^2-xy-y\times1-1\times x)$
> $=$____________

(2) $(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ca)$

(3) $(a-c+2)(a^2+c^2+ac+2c-2a+4)$

(4) $(2a+3b+c)(4a^2+9b^2+c^2-6ab-3bc-2ca)$

(5) $(x-4y+3)(x^2+16y^2+9-3x+12y+4xy)$

풍쌤 POINT

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=a^3+b^3+c^3-3abc$

유형 15 $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$ 꼴

19 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

> 풀이 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
> $=(x^2+x\times1+1^2)(x^2-x\times1+1^2)$
> $=$__________

(2) $(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$

(3) $(9x^2+3x+1)(9x^2-3x+1)$

(4) $(4x^2+6xy+9y^2)(4x^2-6xy+9y^2)$

풍쌤 POINT

$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$
가운데 항의 부호만 다르고 나머지는 같은 식이다.

05 곱셈 공식의 변형

1 곱셈 공식의 변형 ①

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$, $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

② $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$, $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

③ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

④ $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$, $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

⑤ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4$, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$

2 곱셈 공식의 변형 ②

① $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

② $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

› 곱셈 공식의 변형은 곱셈 공식에서 일부 항을 적당히 이항하여 얻어낸 것이다.

정답과 풀이 005쪽

유형 16 a^2+b^2 꼴의 식의 값

20 두 수 a, b에 대하여 다음과 같은 조건이 주어질 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

(1) $a+b=3$, $ab=-1$

› 풀이 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$=3^2-2\times(-1)=$ ___

(2) $a+b=1$, $ab=-7$

(3) $a-b=-5$, $ab=2$

(4) $a-b=2$, $ab=4$

풍쌤 POINT

a^2+b^2 꼴의 식의 값을 구할 때는
① $a^2+b^2=(a\pm b)^2\mp 2ab$(복호동순)를 이용한다.
② $a+b$의 값 또는 $a-b$의 값과 ab의 값을 위의 식에 대입한다.

유형 17 $(a\pm b)^2$ 꼴의 식의 값

21 두 수 x, y에 대하여 다음과 같은 조건이 주어질 때, $(x+y)^2$의 값을 구하시오.

(1) $x-y=5$, $xy=-1$

› 풀이 $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$
$=5^2+4\times(-1)=$ ___

(2) $x-y=-2$, $xy=3$

22 두 수 x, y에 대하여 다음과 같은 조건이 주어질 때, $(x-y)^2$의 값을 구하시오.

(1) $x+y=3$, $xy=2$

› 풀이 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$
$=3^2-4\times 2=$ ___

(2) $x+y=1$, $xy=-9$

풍쌤 POINT

$(a\pm b)^2$ 꼴의 식의 값을 구할 때는
① $(a\pm b)^2=(a\mp b)^2\pm 4ab$(복호동순)를 이용한다.
② $a-b$의 값 또는 $a+b$의 값과 ab의 값을 위의 식에 대입한다.

유형 18 a^3+b^3 꼴의 식의 값

23 두 수 a, b에 대하여 다음과 같은 조건이 주어질 때, a^3+b^3의 값을 구하시오.

(1) $a+b=2$, $ab=1$

> 풀이 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
> $=2^3-3\times1\times2=$___

(2) $a+b=-4$, $ab=2$

(3) $a+b=-1$, $ab=-3$

(4) $a+b=2$, $ab=-5$

풍쌤 POINT

a^3+b^3 꼴의 식의 값을 구할 때는
① $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$를 이용한다.
② $a+b$의 값과 ab의 값을 위의 식에 대입한다.

유형 19 a^3-b^3 꼴의 식의 값

24 두 수 x, y에 대하여 다음과 같은 조건이 주어질 때, x^3-y^3의 값을 구하시오.

(1) $x-y=5$, $xy=-3$

> 풀이 $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
> $=5^3+3\times(-3)\times5=$___

(2) $x-y=3$, $xy=3$

(3) $x-y=-7$, $xy=4$

(4) $x-y=-4$, $xy=-1$

풍쌤 POINT

a^3-b^3 꼴의 식의 값을 구할 때는
① $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$를 이용한다.
② $a-b$의 값과 ab의 값을 위의 식에 대입한다.

유형 20 ab 꼴의 식의 값

25 두 수 a, b에 대하여 다음과 같은 조건이 주어질 때, ab의 값을 구하시오.

(1) $a^2+b^2=7$, $a+b=3$

> 풀이 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로
> $7=3^2-2ab$
> 따라서 $2ab=$___이므로 $ab=$___이다.

(2) $a^2+b^2=8$, $a-b=-2$

(3) $(a+b)^2=1$, $a-b=-3$

(4) $(a-b)^2=5$, $a+b=7$

(5) $a^3+b^3=-10$, $a+b=-1$

(6) $a^3-b^3=16$, $a-b=4$

26 두 수 x, y에 대하여 다음과 같은 조건이 주어질 때, xy의 값을 구하시오.

(1) $x^2+y^2=5$, $x+y=-3$

(2) $x^2+y^2=10$, $x-y=4$

(3) $(x+y)^2=5$, $x-y=-1$

(4) $(x-y)^2=0$, $x+y=-4$

(5) $x^3+y^3=9$, $x+y=3$

(6) $x^3-y^3=13$, $x-y=1$

풍쌤 POINT

ab 꼴의 식의 값을 구할 때는 다음 식 중에서 주어진 조건을 이용할 수 있는 것을 골라서 대입한다.

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
② $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
③ $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$
④ $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$
⑤ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
⑥ $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

유형 21 $x^2+\frac{1}{x^2}$ 꼴의 식의 값

27 0이 아닌 x에 대하여 다음과 같은 조건이 주어질 때, $x^2+\frac{1}{x^2}$의 값을 구하시오.

(1) $x+\frac{1}{x}=4$

> 풀이 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$
> $=4^2-2=$____

(2) $x+\frac{1}{x}=-2$

(3) $x-\frac{1}{x}=5$

(4) $x-\frac{1}{x}=-3$

풍쌤 POINT

$x^2+\frac{1}{x^2}$ 꼴은 $x\times\frac{1}{x}=1$이므로

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

에서 $ab=1$인 경우로 생각해서 풀면 된다.

유형 22 $\left(x\pm\frac{1}{x}\right)^2$ 꼴의 식의 값

28 0이 아닌 x에 대하여 다음과 같은 조건이 주어질 때, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$의 값을 구하시오.

(1) $x-\frac{1}{x}=-5$

> 풀이 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4$
> $=(-5)^2+4=$____

(2) $x-\frac{1}{x}=1$

29 0이 아닌 x에 대하여 다음과 같은 조건이 주어질 때, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$의 값을 구하시오.

(1) $x+\frac{1}{x}=7$

> 풀이 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$
> $=7^2-4=$____

(2) $x+\frac{1}{x}=-4$

풍쌤 POINT

$\left(x\pm\frac{1}{x}\right)^2$ 꼴은 $x\times\frac{1}{x}=1$이므로

$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$, $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

에서 $ab=1$인 경우로 생각해서 풀면 된다.

유형 23 $a^2+b^2+c^2$ 꼴의 식의 값

30 세 수 a, b, c에 대하여 다음과 같은 조건이 주어질 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오.

(1) $a+b+c=2$, $ab+bc+ca=1$

> 풀이 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
> $=2^2-2\times1=$___

(2) $a+b+c=-4$, $ab+bc+ca=6$

(3) $a+b+c=3$, $ab+bc+ca=-5$

(4) $a+b+c=-10$, $ab+bc+ca=-7$

풍쌤 POINT

$a^2+b^2+c^2$ 꼴의 식의 값을 구할 때는

① $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$를 이용한다.

② $a+b+c$의 값과 $ab+bc+ca$의 값을 위의 식에 대입한다.

유형 24 $a^3+b^3+c^3$ 꼴의 식의 값

31 세 수 a, b, c에 대하여 다음과 같은 조건이 주어질 때, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하시오.

(1) $a+b+c=-3$, $ab+bc+ca=2$, $abc=1$

> 풀이 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
> $=(-3)^2-2\times2=9-4=$___
> 이므로
> $a^3+b^3+c^3$
> $=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
> $=(-3)\times($___$-2)+3\times1=$____

(2) $a+b+c=5$, $ab+bc+ca=-1$, $abc=2$

(3) $a+b+c=-2$, $a^2+b^2+c^2=6$, $abc=5$

(4) $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=5$, $abc=-4$

풍쌤 POINT

$a^3+b^3+c^3$ 꼴의 식의 값을 구할 때는 주어진 조건에 따라 다음 중 한 가지 방법을 택한다.

① $a+b+c$의 값과 $ab+bc+ca$의 값을 이용해서 $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하고,
$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$를 이용한다.

② $a+b+c$의 값과 $a^2+b^2+c^2$의 값을 이용해서 $ab+bc+ca$의 값을 구하고,
$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$를 이용한다.

06 다항식의 나눗셈

❶ 다항식의 나눗셈

다항식을 다항식으로 나눌 때는 각 다항식을 내림차순으로 정리한 후, 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

❷ 다항식의 나눗셈에서 몫과 나머지

다항식 A를 다항식 B $(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라고 하면 $A=BQ+R$와 같이 나타낼 수 있다. (단, (R의 차수)<(B의 차수))
이때 $R=0$이면 A는 B로 나누어떨어진다고 한다.

보기

$$
\begin{array}{r}
3x-2 \leftarrow \text{몫} \\
x^2+x-2\overline{)\,3x^3+x^2-2x+5} \\
\underline{3x^3+3x^2-6x} \\
-2x^2+4x+5 \\
\underline{-2x^2-2x+4} \\
6x+1 \\
\uparrow \\
\text{나머지}
\end{array}
$$

유형 25 다항식의 나눗셈

32 다음 나눗셈에서 $\square$ 안에 알맞은 수 또는 식을 써넣고, 몫과 나머지를 구하시오.

(1)

$$
\begin{array}{r}
2x-\square \\
x-2\overline{)\,2x^2-5x+4} \\
\underline{2x^2-\square} \\
\square+4 \\
\underline{\square+2} \\
\square
\end{array}
$$

(2)

$$
\begin{array}{r}
\square-8x+\square \\
x+1\overline{)\,4x^3-4x^2+x+9} \\
\underline{4x^3+4x^2} \\
\square+x+9 \\
\underline{-8x^2-8x} \\
\square+\square \\
\underline{\square+9} \\
\square
\end{array}
$$

33 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(x^2-5x+3)\div(x-1)$

> 풀이

$$
\begin{array}{r}
x-4 \\
x-1\overline{)\,x^2-5x+3} \\
\underline{\square} \\
-4x+3 \\
\underline{\square} \\
\square
\end{array}
$$

따라서 몫은 ______, 나머지는 ______이다.

(2) $(4x^2-4x+2)\div(2x+1)$

(3) $(3x^3+10x^2+7)\div(x+4)$

(4) $(2x^3-5x^2+x-1)\div(2x-3)$

풍쌤 POINT

다항식의 나눗셈은 자연수의 나눗셈과 다르게 나머지가 음수인 경우도 있다.

34 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(x^3-x^2-8x+4)\div(x^2+2x-1)$

> 풀이

$$\begin{array}{r} x-\boxed{} \\ x^2+2x-1\overline{)\,x^3-x^2-8x+4} \\ \underline{x^3+2x^2-x} \\ -3x^2-7x+4 \\ \underline{-3x^2-6x+3} \\ \boxed{}+1 \end{array}$$

따라서 몫은 _____, 나머지는 ______이다.

(2) $(4x^3-x^2+x-2)\div(x^2-3x+2)$

(3) $(x^3+2x^2-3x-4)\div(x^2-2)$

(4) $(9x^3+3x^2-2x-4)\div(3x^2-x+1)$

풍쌤 POINT

다항식 A를 다항식 B로 나눌 때, 나누는 다항식 B가 n차이면 나머지 R는 $(n-1)$차 이하의 다항식이다.

유형 26 다항식 $A=BQ+R$ 꼴

35 다음 두 다항식 A, B에 대하여 A를 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라고 할 때, $A=BQ+R$ 꼴로 나타내시오.

(1) $A=x^2+4x+3$, $B=x-2$

> 풀이

$$\begin{array}{r} x+6 \\ x-2\overline{)\,x^2+4x+3} \\ \underline{x^2-2x} \\ 6x+3 \\ \underline{6x-12} \\ 15 \end{array}$$

따라서 $Q=x+6$, $R=15$이므로

$x^2+4x+3=$__________

(2) $A=3x^2-4x+2$, $B=3x+2$

(3) $A=2x^3+x^2-4x-5$, $B=x+1$

(4) $A=x^3-4x^2+x+1$, $B=x^2-x+4$

풍쌤 POINT

다항식 A를 다항식 $B(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라고 하면

$A=BQ+R$

이므로 A를 Q로 나눈 몫은 B, 나머지는 R이다.

(단, (Q의 차수)>(R의 차수))

중단원 점검문제

01

두 다항식

$A=-3x^3+x^2-4x+2,\ \ B=x^3+2x^2+x-4$

에 대하여 $A+B$를 계산하시오.

02

다항식 $2x^2-xy+y^2-2(x^2-2xy+y^2)$을 간단히 하시오.

03

세 다항식 $A=2x^2-2xy+5y^2$, $B=x^2-xy+3y^2$, $C=-x^2+xy-2y^2$에 대하여 $A-B-C$를 계산하시오.

04

두 다항식 $A=-x^2+5xy-3y^2$, $B=4y^2-xy+2x^2$에 대하여 $X+A=2B$를 만족시키는 다항식 X를 구하시오.

05

다항식 $(x+y)(2x-5y)^2$을 전개하시오.

06

세 다항식 $A=2x^2-x+4$, $B=x^2-3x+1$, $C=x^2+2$에 대하여 $B+AC$를 계산하시오.

07

$(3x-4y)^3$의 전개식에서 x^2y의 계수를 구하시오.

08

$(x^2-2x+5)(3x^2+2x-3)$의 전개식에서 x^3의 계수를 a, x의 계수를 b라고 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

09
$(3x+4y-2)(9x^2+16y^2+4-12xy+6x+8y)$를 전개하시오.

10
$(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)$을 전개하시오.

11
$x+y=4$, $xy=-2$일 때, $(x-y)^2$의 값을 구하시오.

12
$a+b+c=-3$, $ab+bc+ca=2$일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오.

13
$a=1+\sqrt{2}$, $b=1-\sqrt{2}$일 때, a^3-b^3의 값을 구하시오.

14
다음은 다항식 $3x^3+5x^2+2$를 x^2-a로 나누는 과정을 나타낸 것이다. 상수 a, b, c, d, e에 대하여 $a+b+c+d+e$의 값을 구하시오.

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & bx+c \\
x^2-a \big) & 3x^3+5x^2 \qquad +2 \\
 & 3x^3 \qquad -3x \\
\hline
 & 5x^2+3x+2 \\
 & cx^2 \qquad -ac \\
\hline
 & dx+e
\end{array}
$$

15
두 다항식 $A=5x^2-9x+2$, $B=5x+1$에 대하여 A를 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라고 할 때, $A=BQ+R$ 꼴로 나타내시오.

16
다항식 x^3+4x-3을 다항식 A로 나누었을 때의 몫이 $x+1$이고, 나머지가 $2x-6$일 때, 다항식 A를 구하시오.

01 항등식

❶ 항등식

등식 $(x+1)+(x-2)=2x-1$과 같이 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하는 등식을 항등식이라고 한다.

❷ 항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=0$, $b=0$, $c=0$이다.

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.

› 항등식은 항상 등호가 성립하거나 좌변과 우변이 같은 식이다.

정답과 풀이 011쪽

유형 01 항등식

01 다음 주어진 등식이 x에 대한 항등식인 것은 ○표, 항등식이 아닌 것은 ×표를 (　　) 안에 써넣으시오.

(1) $x=0$ (　　)

› 풀이　등식이 $x=$___일 때만 성립하므로 항등식이 아니다.

(2) $2x-4=2(x-2)$ (　　)

(3) $(x+1)(x-2)=x^2-x-2$ (　　)

(4) $x^2-2x+1=(x-1)^2$ (　　)

(5) $x^3-1=(x-1)(x^2+2x+1)$ (　　)

(6) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4+x^2+1$ (　　)

풍쌤 POINT

x에 대한 항등식은 임의의 x에 대하여 등식이 성립하여야 하므로 좌변과 우변을 정리하여 나타냈을 때 같은 식이어야 한다.

유형 02 항등식의 성질

02 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $ax=b$

› 풀이　$ax=b$에서 $ax-b=0$이므로 항등식의 성질에 의하여 $a=$___, $b=$___이다.

(2) $3x-5=ax-b$

03 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

(1) $(a+1)x^2-bx+(c-2)=0$

› 풀이　항등식의 성질에 의하여

$a+1=0$, $-b=0$, $c-2=0$

이므로 $a=$____, $b=$___, $c=$___이다.

(2) $(a+3)x^2+2bx-c-1=2x^2+4x-5$

풍쌤 POINT

$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$과 같은 항등식에서 미지수의 값을 구할 때는 우변의 항을 모두 좌변으로 이항하여 '$Ax^2+Bx+C=0$이 x에 대한 항등식이면 $A=0$, $B=0$, $C=0$이다.'를 이용해도 된다.

02 미정계수법

1 미정계수법

항등식의 뜻과 성질을 이용하여 주어진 등식에서 미지의 계수를 구하는 방법

2 미정계수법의 종류

① 계수비교법: 항등식의 양변의 동류항의 계수를 비교하여 미지의 계수를 정하는 방법

② 수치대입법: 항등식의 문자에 어떤 수를 대입하여 미지의 계수를 정하는 방법

› 미정계수를 정할 때는 계수비교법과 수치대입법 중 계산이 간단한 방법을 이용한다.

유형 03 미정계수법

정답과 풀이 011쪽

04 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $x+2=ax+b$

› 풀이 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면
$a=$___, $b=$___이다.

(2) $(a+4)x+3=2x-b$

(3) $-3x+(a-2)=(a-1)x+b$

(4) $(a-b)x-3=-ax+a+b$

05 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $2x^2-ax+5=bx^2+3x+5$

› 풀이 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면
$a=$____, $b=$___이다.

(2) $(2x+1)(x-4)=2x^2-ax+(b+3)$

(3) $x^2+3x+b=(x+1)(x+a)$

(4) $4x^2-ax+2=(bx+1)(x+2)$

06 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

(1) $x^2-5x+3=ax(x-1)-2bx+c$

> 풀이 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$x=0$, $x=-1$, $x=1$일 때도 성립한다.
양변에 $x=0$을 대입하면 $c=$___이므로 주어진 식은
$x^2-5x+3=ax(x-1)-2bx+3$
위의 식의 양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면
$a+b=3$ …… ㉠
$b=2$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $a=$___
따라서 $a=$___, $b=$___, $c=$___이다.

(2) $3x^2-ax+1=(bx+1)(x-3)+c+8$

(3) $4x^2+x-3=a(x+1)^2+b(x+1)+c$

(4) $x^2-x+1=a(x-1)^2+b(x-1)(x+1)+cx$

(5) $2x^2+x-5=a(x-2)^2+b(x-2)+c$

(6) $-x^2+3x+8=ax(x-1)+b(x+1)+cx$

(7) $a(x-1)^3+b(x-1)(x+1)+cx^2=-2x^3-6x-5$

(8) $x^3+ax-5=(x-1)(x^2+bx-c)$

풍쌤 POINT

미정계수법 문제를 해결할 때는 전개가 복잡하면 수치대입법,
그렇지 않으면 계수비교법이 편리하다.
x에 수를 대입할 때는 항을 없앨 수 있는 수를 선택한다.

03 다항식의 나눗셈과 항등식

❶ 다항식의 나눗셈과 항등식

다항식 A를 다항식 B $(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라고 하면 $A=BQ+R$와 같이 나타낼 수 있다. (단, (R의 차수)<(B의 차수))

이때 A가 B로 나누어떨어지면 $R=0$이고, $A=BQ+R$는 x에 대한 항등식이다.

› 다항식의 나눗셈

$$\begin{array}{r} Q \\ B\overline{)A} \\ \underline{BQ} \\ R \end{array}$$

(R의 차수)<(B의 차수)

유형 04 다항식의 나눗셈과 수치대입법

정답과 풀이 014쪽

07 다음 다항식 A를 다항식 B로 나눈 나머지를 R라고 할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $A=x^3-ax+b$, $B=(x+1)(x-3)$, $R=x+2$

› 풀이 x^3-ax+b를 $(x+1)(x-3)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지가 $x+2$이므로

$x^3-ax+b=(x+1)(x-3)Q(x)+x+2$

위의 식의 양변에 $x=-1$, $x=3$을 각각 대입하면

$a+b=2$ …… ㉠

$3a-b=22$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a=$___, $b=$____이다.

(2) $A=2x^3-ax^2+b$, $B=(x-1)(x-2)$, $R=-x+1$

(3) $A=ax^3-6x^2-6x-b$, $B=x^2+4x$, $R=2x+7$

(4) $A=3x^3+ax^2-bx+2$, $B=-x^2-x+2$, $R=3x+6$

08 다음 다항식 A가 다항식 B로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $A=2x^3+ax^2-13x+b$, $B=(x-2)(x+3)$

› 풀이 $2x^3+ax^2-13x+b$를 $(x-2)(x+3)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면

$2x^3+ax^2-13x+b=(x-2)(x+3)Q(x)$

위의 식의 양변에 $x=2$, $x=-3$을 각각 대입하면

$4a+b=10$ …… ㉠

$9a+b=15$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a=$___, $b=$___이다.

(2) $A=x^4-2x^3+ax^2+2x+b$, $B=x^2-3x-4$

(3) $A=x^8-ax^4+b$, $B=x(x+1)$

(4) $A=x^{10}-2ax^5-b$, $B=x^2-1$

풍쌤 POINT

다항식의 나눗셈과 항등식의 문제를 해결할 때, 다음과 같은 경우에는 수치대입법이 편리하다.

① 나누는 식이 인수분해가 된다.

② 나누어지는 식의 차수가 4차 이상이다.

정답과 풀이 014쪽

09 다음 다항식 A를 다항식 B로 나눈 나머지를 R라고 할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $A=x^3+ax+b$, $B=x^2+2$, $R=2x-1$

> 풀이 x^3+ax+b를 x^2+2로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지가 $2x-1$이므로
> $x^3+ax+b=(x^2+2)Q(x)+2x-1$
> 이때 좌변이 삼차식이고 삼차항의 계수가 1이므로
> $Q(x)=x+k$ (k는 상수)로 놓으면
> $x^3+ax+b=(x^2+2)(x+k)+2x-1$
> $\qquad=x^3+kx^2+4x+2k-1$
> 위의 식의 양변의 동류항의 계수를 비교하면
> $k=$___, $a=4$, $b=2k-1$
> 따라서 $a=$___, $b=$____이다.

(2) $A=2x^3+ax^2-b$, $B=x^2-2x-2$, $R=3$

(3) $A=ax^3+bx^2-2$, $B=x^2+1$, $R=-x+1$

(4) $A=4x^3-ax^2+bx+6$, $B=x^2-2$, $R=2x-4$

10 다음 다항식 A가 다항식 B로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $A=x^3-ax-b$, $B=x^2-3$

> 풀이 x^3-ax-b를 x^2-3으로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면
> $x^3-ax-b=(x^2-3)Q(x)$
> 이때 좌변이 삼차식이고 삼차항의 계수가 1이므로
> $Q(x)=x+k$ (k는 상수)로 놓으면
> $x^3-ax-b=(x^2-3)(x+k)$
> $\qquad=x^3+kx^2-3x-3k$
> 위의 식의 양변의 동류항의 계수를 비교하면
> $k=$___, $a=3$, $b=3k$
> 따라서 $a=$___, $b=$___이다.

(2) $A=3x^3-6x^2+ax-b$, $B=3x^2+1$

(3) $A=2x^3-ax^2+bx+8$, $B=x^2+x-4$

(4) $A=x^3+x^2-ax+2$, $B=x^2+b$

풍쌤 POINT

다항식의 나눗셈과 항등식의 문제를 해결할 때, 다음과 같은 경우에는 계수비교법이 편리하다.
① 나누는 식이 유리수의 범위에서 인수분해되지 않는다.
② 나누어지는 식의 차수가 3차 이하이다.

04 나머지 정리

❶ 나머지 정리

① 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나눈 나머지를 R라고 하면

$R=f(a)$ ← 방정식 $x-a=0$의 근을 $f(x)$에 대입한 값으로 생각한다.

② 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax-b$로 나눈 나머지를 R라고 하면

$R=f\left(\dfrac{b}{a}\right)$ ← 방정식 $ax-b=0$의 근을 $f(x)$에 대입한 값으로 생각한다.

› 다항식을 일차식으로 나눈 나머지를 구할 때는 나머지 정리를 이용한다.

정답과 풀이 015쪽

유형 06 다항식을 $x-a$로 나눈 나머지

11 다음 다항식 A를 다항식 B로 나눈 나머지를 구하시오.

(1) $A=x^2-4x+1$, $B=x-1$

› 풀이 $f(x)=x^2-4x+1$로 놓으면 나머지 정리에 의하여
$f(1)=$ ____

(2) $A=2x^2+3x+1$, $B=x+3$

(3) $A=x^3+4x^2-7$, $B=x+4$

(4) $A=3x^3+x^2-4x+6$, $B=x-2$

유형 07 다항식을 $ax-b$로 나눈 나머지

12 다음 다항식 A를 다항식 B로 나눈 나머지를 구하시오.

(1) $A=x^2-3x+4$, $B=2x-1$

› 풀이 $f(x)=x^2-3x+4$로 놓으면 나머지 정리에 의하여
$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=$ ____

(2) $A=3x^2-5x-2$, $B=3x+2$

(3) $A=x^3-2x+1$, $B=4x-5$

(4) $A=5x^3+2x^2+7x-2$, $B=5x+2$

풍쌤 POINT

나머지 정리를 이용할 때는 다음에 주의한다.
① 몫은 구할 수 없다.
② 나누는 식이 일차식일 때만 이용할 수 있다.

유형 08 나머지 정리를 이용하여 미정계수 구하기

13 다음 다항식 A를 다항식 B로 나눈 나머지를 R라고 할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

(1) $A=x^2-ax+2$, $B=x+2$, $R=10$

> 풀이 $f(x)=x^2-ax+2$로 놓으면 나머지 정리에 의하여
> $f(-2)=4+2a+2=10$
> 따라서 $a=$___이다.

(2) $A=3x^2+x-a$, $B=3x-1$, $R=1$

(3) $A=x^3+ax^2-4$, $B=x-1$, $R=2$

(4) $A=x^3+ax^2-2x$, $B=2x+3$, $R=-1$

(5) $A=2x^3+x^2-ax+1$, $B=x-2$, $R=9$

14 다항식 x^3+ax^2-bx-4를 $x-1$로 나눈 나머지가 1이고, $x+2$로 나눈 나머지가 -2일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

> 풀이 $f(x)=x^3+ax^2-bx-4$로 놓으면
> $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 1이므로
> $f($___$)=1+a-b-4=1$에서
> $a-b=4$ …… ㉠
> $f(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지가 -2이므로
> $f($____$)=-8+4a+2b-4=-2$에서
> $2a+b=5$ …… ㉡
> ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=$___, $b=$____이다.

15 다항식 $4x^3+4x^2+ax-b$는 $x+3$으로 나누어떨어지고, $2x-1$로 나눈 나머지가 $-\frac{7}{2}$일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

풍쌤 POINT

① 다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지 ➡ $f(a)$

② 다항식 $f(x)$를 $ax-b$로 나눈 나머지 ➡ $f\left(\frac{b}{a}\right)$

유형 09 다항식을 일차식으로 나눈 나머지

16 다항식 $f(x)$를 다음 다항식 A로 나눈 나머지가 R일 때, $f(x)$를 B로 나눈 나머지를 구하시오.

(1) $A=x^2-2x-3,\ R=x+5,\ B=x-3$

> 풀이 $f(x)$를 x^2-2x-3으로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면
> 나머지는 $x+5$이므로
> $f(x)=(x^2-2x-3)Q(x)+x+5$
> $\quad=(x+1)(x-3)Q(x)+x+5$
> 따라서 $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는
> $f(3)=$___

(2) $A=x^2-x-6,\ R=2x+3,\ B=x+2$

(3) $A=3x^2-x-2,\ R=x+1,\ B=3x+2$

(4) $A=x^3-1,\ R=4x-10,\ B=x-1$

풍쌤 POINT

다항식 $f(x)$가 이차 이상의 다항식 A로 나누어떨어지지 않을 때, $f(x)$를 일차식으로 나눈 나머지를 구하려면

$f(x)=AQ+R$

로 나타낸 다음 나머지 정리를 이용한다.

유형 10 다항식을 일차식으로 나눈 나머지의 응용

17 다항식 $f(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지가 -1일 때, 다항식 $f(x-1)$을 $x+1$로 나눈 나머지를 구하시오.

> 풀이 $f(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지가 -1이므로 $f(-2)=-1$
> 이때 $f(x-1)$을 $x+1$로 나눈 나머지는
> $f(-1-1)$이므로 $f($____$)$와 같다.
> 따라서 $f(x-1)$을 $x+1$로 나눈 나머지는 ____이다.

18 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 -5, $x+3$으로 나눈 나머지가 12일 때, 다항식 $f(x+1)f(x-4)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하시오.

19 다항식 $f(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지가 1, $2x+5$로 나눈 나머지가 4일 때, 다항식 $f(x+6)f\left(\frac{1}{4}x-2\right)$를 $x+2$로 나눈 나머지를 구하시오.

풍쌤 POINT

① 다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지는
$f(a)$

② 다항식 $f(x+a)$를 $x-a$로 나눈 나머지는
$f(a+a)=f(2a)$ ← $x=a$를 대입

③ 다항식 $f(x-a)$를 $x-a$로 나눈 나머지는
$f(a-a)=f(0)$ ← $x=a$를 대입

유형 11 다항식을 이차식으로 나눈 나머지

20 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 3, $x-3$으로 나눈 나머지가 5일 때, 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-3)$으로 나눈 나머지를 구하시오.

> 풀이 $f(x)$를 $(x-1)(x-3)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면
$f(x)=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b$
이때 나머지 정리에 의하여 $f(1)=3$, $f(3)=5$이므로
$f(1)=a+b=3$ …… ㉠
$f(3)=3a+b=5$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=$___, $b=$___이므로 구하는 나머지는 _____이다.

21 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 -5, $x+4$로 나눈 나머지가 19일 때, 다항식 $f(x)$를 $(x-2)(x+4)$로 나눈 나머지를 구하시오.

22 다항식 $f(x)$는 $x-1$로 나누어떨어지고, $x+2$로 나눈 나머지가 -6일 때, 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나눈 나머지를 구하시오.

23 다항식 $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지가 -4, x로 나눈 나머지가 8일 때, 다항식 $f(x)$를 x^2+3x로 나눈 나머지를 구하시오.

24 다항식 $f(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지가 1, $2x-1$로 나눈 나머지가 $\frac{1}{2}$일 때, 다항식 $f(x)$를 $2x^2-9x+4$로 나눈 나머지를 구하시오.

풍쌤 POINT

다항식 $f(x)$를 이차식으로 나누었을 때의 나머지를 구할 때는 $f(x)=(ax+b)(cx+d)Q(x)+R$ 꼴로 놓고 생각한다.
이때 R는 일차 이하임에 주의한다.

05 인수 정리

❶ 인수 정리

다항식 $f(x)$에서 $f(a)=0$이면 다항식 $f(x)$는 일차식 $x-a$로 나누어떨어진다. 또, 다항식 $f(x)$가 일차식 $x-a$로 나누어떨어지면 $f(a)=0$이다.

❷ 인수 정리의 다른 표현

① 다항식 $f(x)$는 $x-a$를 인수로 갖는다.

② $f(x)=(x-a)Q(x)$로 인수분해할 수 있다.

③ 다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지가 0이다.

› 인수
인수분해된 식에서 곱을 이루는 각각의 다항식

› 다항식 $f(x)$에서 $f\left(\frac{b}{a}\right)=0$이면 다항식 $f(x)$는 일차식 $ax-b$로 나누어떨어진다.

정답과 풀이 017쪽

유형 12 인수 정리

25 다음에 주어진 일차식이 다항식 $f(x)=2x^3+x^2-5x+2$의 인수인 것은 ○표, 인수가 아닌 것은 ×표를 ( ) 안에 써넣으시오.

(1) $x-1$ ( )

› 풀이 $f(1)=$___이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다.

(2) $x+1$ ( )

(3) $x+2$ ( )

(4) $x-3$ ( )

(5) $2x-1$ ( )

풍쌤 POINT

다항식 $f(x)$가 일차식 $x-a$로 나누어떨어지면 ➡ $f(a)=0$

다항식 $f(x)$가 일차식 $ax-b$로 나누어떨어지면 ➡ $f\left(\frac{b}{a}\right)=0$

유형 13 인수 정리를 이용하여 미정계수 구하기

26 다음 다항식 $f(x)$가 일차식 A를 인수로 가질 때, 상수 a의 값을 구하시오.

(1) $f(x)=x^2-ax-6$, $A=x+2$

› 풀이 $f(-2)=0$이므로 $f(-2)=4+2a-6=0$에서 $a=$___이다.

(2) $f(x)=-3x^2-x-a$, $A=x-1$

(3) $f(x)=x^3-4x-a$, $A=x+1$

(4) $f(x)=2x^3-ax^2+9$, $A=x-3$

(5) $f(x)=x^3+ax^2+3x-a+1$, $A=x-2$

풍쌤 POINT

다항식 $f(x)$가 $x-a$를 인수로 가지면 $f(a)=0$이다.

06 조립제법

❶ 조립제법

다항식을 일차식으로 나눌 때, 계수만을 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법

❷ 조립제법의 예

나눗셈

$$\begin{array}{r}
3x^2-2x+2 \leftarrow \text{몫} \\
x-2\,\overline{)\,3x^3-8x^2+6x+2} \\
3x^3-6x^2 \\
\hline
-2x^2+6x \\
-2x^2+4x \\
\hline
2x+2 \\
2x-4 \\
\hline
6 \leftarrow \text{나머지}
\end{array}$$

조립제법

$3x^3-8x^2+6x+2$의 계수

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 3 & -8 & 6 & 2 \\
 & & + & + & + \\
 & & 6 & -4 & 4 \\
\hline
 & 3 & -2 & 2 & \boxed{6} \leftarrow \text{나머지}
\end{array}$$

(×2, ×2, ×2)

몫 $3x^2-2x+2$의 계수

› 나머지 정리로 몫은 구할 수 없으므로 몫을 구할 때는 조립제법을 이용한다.

› 조립제법을 이용할 때 다항식 x^3+2x^2-1의 x항과 같이 해당되는 차수의 항이 없는 경우는 그 자리에 0을 적는다.

유형 14 조립제법

27 다음은 조립제법을 이용하여 다항식의 나눗셈에서의 몫과 나머지를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣고, 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(x^3+x^2-3x+3)\div(x-3)$

$$\begin{array}{c|cccc}
3 & 1 & \square & -3 & 3 \\
 & & \square & \square & \square \\
\hline
 & 1 & 4 & 9 & \square
\end{array}$$

› 풀이 조립제법에 의하여 몫은 x^2+4x+9, 나머지는 ___이다.

(2) $(2x^3-3x^2-5x+10)\div(x+2)$

$$\begin{array}{c|cccc}
\square & 2 & -3 & \square & \square \\
 & & \square & 14 & \square \\
\hline
 & 2 & \square & \square & \square
\end{array}$$

28 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(x^3-2x^2+5x+1)\div(x-1)$

› 풀이

$$\begin{array}{c|cccc}
\square & \square & \square & \square & \square \\
 & & \square & \square & \square \\
\hline
 & \square & \square & \square & \square
\end{array}$$

따라서 몫은 ________, 나머지는 ___이다.

(2) $(3x^3+x-6)\div(x-2)$

$$\begin{array}{c|cccc}
\square & \square & \square & \square & \square \\
 & & \square & \square & \square \\
\hline
 & \square & \square & \square & \square
\end{array}$$

29 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(x^3-6x^2+2x-3)\div(x+1)$

(2) $(4x^3-10x^2-7x-2)\div(x-3)$

(3) $(2x^3-x^2-4)\div(x-2)$

(4) $(3x^3+9x^2-8x+5)\div(x+4)$

30 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(2x^3+5x^2-3x+1)\div(2x-1)$

> 풀이

$\frac{1}{2}$	2	5	$\square$	1
		1	$\square$	0
	2	$\square$	0	$\square$

따라서

$$2x^3+5x^2-3x+1=\left(x-\underline{\quad}\right)(2x^2+6x)+1$$
$$=(2x-1)(\underline{\qquad})+1$$

과 같이 나타낼 수 있으므로 몫은 ______, 나머지는 1이다.

(2) $(3x^3-2x^2-7x-2)\div(3x+1)$

(3) $(4x^3+3x-5)\div(2x+3)$

(4) $(5x^3-2x^2+5x+4)\div(5x-2)$

풍쌤 POINT

$(2x^3-3x^2-8x+3)\div(2x+1)$과 같이 다항식을 x의 계수가 1이 아닌 일차식으로 나눌 때 다음과 같이 조립제법을 이용한다.

$-\frac{1}{2}$	2	-3	-8	3
		-1	2	3
방정식 $2x+1=0$의 근	2	-4	-6	6

이때 몫은 $2x^2-4x-6$이 아님에 주의한다.

➡ $2x^3-3x^2-8x+3=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x-6)+6$

$=(2x+1)(\underbrace{x^2-2x-3}_{\text{몫}})+6$

중단원 점검문제

01

다음 식이 항등식인지 판별하시오.

(1) $(2x+1)(3x-4)=6x^2+5x-4$

(2) $x^3+8y^3+6xy-1$
$=(x+2y-1)(x^2+4y^2-2xy+x+2y+1)$

02

다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $x^2-ax+b-2=x^2-5(x+2)+1$

(2) $x^2+x-5=(x+1)^2+a(x+1)+b$

03

다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.

$$(x+a)(bx^2-5x+9)=2x^3+cx^2+24x-27$$

04

다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하시오.

$$a(x-1)(x-2)+b(x-2)+c=x^2$$

05

다항식 x^4-ax^2+bx+2가 x^2+x-2로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

06

다항식 x^3+k를 x^2-3x+9로 나눈 나머지가 $2k+1$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

07

다항식 $-4x^3+x^2-2x-3$을 $x-1$로 나눈 나머지를 구하시오.

08

다항식 x^3+ax^2-20을 $x-2$로 나눈 나머지가 4일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

09

x^3+ax^2+bx-2가 $(x+1)(x+2)$로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

10

다항식 $f(x)=x^3+2x^2+x-1$을 $x-k$로 나눈 나머지와 $x+k$로 나눈 나머지의 합이 10일 때, $f(x)$를 $x-k^2$으로 나눈 나머지를 구하시오.

11

x에 대한 삼차다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+1$은 x^2-3x+2로 나누어떨어지고, $f(x)-1$은 x^2+3x+2로 나누어떨어진다. 이때 $f(x-3)f(x-4)+f(x-1)f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지를 구하시오.

12

$x^{10}+1$을 x^2-1로 나눈 나머지를 구하시오.

13

다항식 $f(x)=3x^3+5x^2+a$가 $x+2$를 인수로 가질 때, 상수 a의 값을 구하시오.

14

다음은 조립제법을 이용하여 다항식 $2x^3-5x^2-8x+4$를 $x-4$로 나눈 몫과 나머지를 구하는 과정이다. 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.

$$\begin{array}{c|cccc}
4 & 2 & -5 & -8 & 4 \\
 & & 8 & 12 & b \\
\hline
 & 2 & a & 4 & \boxed{c}
\end{array}$$

15

조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

$$(x^3-6x^2+x+12)\div(x-3)$$

16

조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

$$(3x^3-5x^2+x+4)\div(3x+1)$$

01 인수분해의 기본 공식

❶ 인수분해의 기본 공식 ①

① $ma+mb=m(a+b)$

② $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

③ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

④ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

⑤ $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

❷ 인수분해의 기본 공식 ②

① $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

② $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$, $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

③ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

④ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

⑤ $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

› 인수분해
하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것

› 곱셈 공식과 인수분해
$a^2+2ab+b^2 \underset{\text{인수분해}}{\overset{\text{곱셈 공식}}{\rightleftarrows}} (a+b)^2$

› 일반적으로 다항식의 인수분해는 계수가 유리수인 범위까지 한다.

유형 01 $ma+mb$ 꼴

01 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $2xy^2+4xy$

(2) $3a^2bc-12ab^2c+6abc^2$

(3) $ab(a+b)+b(b+a)$

› 풀이 $ab(a+b)+b(b+a)=ab(a+b)+b(a+b)$
$=(ab+b)(a+b)$
$=b(\_\_\_\_\_)(a+b)$

(4) $(x-2)^2-6(x-2)$

풍쌤 POINT

인수분해를 할 때는 인수분해의 공식을 적용하기 전에 공통부분부터 찾아 정리한다.

유형 02 $a^2\pm2ab+b^2$, a^2-b^2 꼴

02 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^2-4x+4

› 풀이 $x^2-4x+4=x^2-2\times2\times x+2^2$
$=\_\_\_\_\_\_$

(2) $9x^2+6x+1$

(3) y^2-4

(4) $9a^2-25b^2$

풍쌤 POINT

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

유형 03 $x^2+(a+b)x+ab$, $acx^2+(ad+bc)x+bd$ 꼴

03 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^2+x-6

> 풀이 $x^2+x-6=x^2+(3-2)x+3\times(-2)$
> $=$ __________

(2) a^2+3a-4

(3) $y^2-4y-12$

(4) $3a^2+4a+1$

(5) $4y^2-16y+15$

(6) $3x^2-4xy-4y^2$

풍쌤 POINT

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

유형 04 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ 꼴

04 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx$

> 풀이 $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx$
> $=x^2+(-y)^2+z^2+2\times x\times(-y)$
> $+2\times(-y)\times z+2\times z\times x$
> $=$ __________

(2) $a^2+b^2-2ab-4a+4b+4$

(3) $a^2+b^2+4c^2+2ab+4bc+4ca$

(4) $4x^2+y^2+z^2-4xy-2yz+4zx$

(5) $9x^2+y^2+16+6xy-24x-8y$

풍쌤 POINT

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

유형 05 $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ 꼴

05 다음 식을 인수분해하시오.

(1) a^3+3a^2+3a+1

> 풀이 a^3+3a^2+3a+1
> $=a^3+3\times a^2\times 1+3\times a\times 1^2+1^3$
> $=$ ________

(2) $x^3-6x^2+12x-8$

(3) $27x^3+27x^2+9x+1$

(4) $a^3-15a^2b+75ab^2-125b^3$

(5) $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$

풍쌤 POINT

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

$-$와 $+$가 번갈아가며 나온다.

유형 06 $a^3 \pm b^3$ 꼴

06 다음 식을 인수분해하시오.

(1) a^3-1

> 풀이 $a^3-1=a^3-1^3$
> $=(a-1)(a^2+a\times 1+1^2)$
> $=$ ________________

(2) x^3+8

(3) b^3-64

(4) $8x^3-1$

(5) $64a^3+27b^3$

풍쌤 POINT

그대로 반대로

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

그대로 반대로

유형 07 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 꼴

07 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^3+y^3-z^3+3xyz$

> 풀이 $x^3+y^3-z^3+3xyz$
> $=x^3+y^3+(-z)^3-3\times x\times y\times(-z)$
> $=(x+y-z)\{x^2+y^2+(-z)^2-x\times y$
> $-y\times(-z)-(-z)\times x\}$
> $=$ ________________

(2) $a^3+b^3-1+3ab$

(3) $x^3-y^3-27-9xy$

(4) $8x^3-y^3+64z^3+24xyz$

(5) $27a^3-8b^3-18ab-1$

풍쌤 POINT

$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

유형 08 $a^4+a^2b^2+b^4$ 꼴

08 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^4+4x^2+16

> 풀이 x^4+4x^2+16
> $=x^4+x^2\times2^2+2^4$
> $=(x^2+x\times2+2^2)(x^2-x\times2+2^2)$
> $=$ ________________

(2) a^4+9a^2+81

(3) $256y^4+16y^2+1$

(4) $81x^4+36x^2y^2+16y^4$

풍쌤 POINT

$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

02 치환을 이용한 인수분해

❶ 공통부분이 있는 다항식의 인수분해

① 식을 살펴본 후 공통부분을 치환한다.
② 치환한 식을 인수분해한다.
③ 치환한 부분을 원래대로 돌린 후 다시 인수분해한다.

❷ $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+k$ 꼴의 인수분해

① $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+k$에서 일차식을 두 개씩 묶는다.
② 묶은 일차식을 전개한 후 공통부분을 치환하여 인수분해한다.
③ 치환한 부분을 원래대로 돌린 후 다시 인수분해한다.

❸ x^4+ax^2+b 꼴의 인수분해 – 치환하여 인수분해되는 경우

① $x^2=t$로 치환하여 t^2+at+b를 인수분해한다.
② 치환한 부분을 원래대로 돌린 후 다시 인수분해한다.

› t^2+at+b가 인수분해되지 않는 경우는 46쪽에서 다룬다.

유형 09 공통부분이 있는 다항식의 인수분해

09 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $(x^2+4x-2)(x^2+4x+1)-18$

› 풀이 $(x^2+4x-2)(x^2+4x+1)-18$에서
$x^2+4x=t$로 놓으면
$(t-2)(t+1)-18=t^2-t-2-18$
$=t^2-t-20$
$=(t+4)(t-5)$
위의 식에 $t=x^2+4x$를 대입하면
$(x^2+4x+4)(x^2+4x-5)=$ ____________

(2) $(x^2-2x+2)(x^2-2x-4)+8$

(3) $(x^2-3x+1)(x^2-3x+3)-15$

(4) $(x^2+2x-1)(3x^2+6x+1)-4$

10 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $(x^2-x)^2-8x^2+8x+12$

› 풀이 $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12$에서 $x^2-x=t$로 놓으면
$t^2-8t+12=(t-2)(t-6)$
위의 식에 $t=x^2-x$를 대입하면
$(x^2-x-2)(x^2-x-6)$
$=$ ____________

(2) $(x^2+4x)^2+x^2+4x-6$

(3) $(x^2+6x)^2-9x^2-54x+14$

(4) $2(x^2-3x)^2+5x^2-15x+2$

풍쌤 POINT

공통부분을 치환하여 인수분해한 후에 치환한 부분을 원래대로 돌려 다시 인수분해해야 한다.

유형 10 $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+k$ 꼴의 인수분해

11 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)-60$

> 풀이 $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)-60$
$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-2)(x+3)\}-60$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-6)-60$
$x^2+x=t$로 놓으면
$(t-2)(t-6)-60=t^2-8t+12-60$
$=t^2-8t-48$
$=(t+4)(t-12)$
위의 식에 $t=x^2+x$를 대입하면
$(x^2+x+4)(x^2+x-12)$
$=$______________

(2) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$

(3) $x(x-4)(x-3)(x+1)-12$

(4) $(x-5)(x-4)(x+2)(x+3)+10$

풍쌤 POINT

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+k$ 꼴을 인수분해하기 위해 일차식을 묶을 때는 상수항의 합이 같은 것끼리 묶어야 치환할 수 있다.

유형 11 x^4+ax^2+b 꼴의 인수분해 (1)

12 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^4-20x^2+64

> 풀이 x^4-20x^2+64에서 $x^2=t$로 놓으면
$t^2-20t+64=(t-4)(t-16)$
위의 식에 $t=x^2$을 대입하면
$(x^2-4)(x^2-16)$
$=$______________

(2) x^4-7x^2-18

(3) x^4+4x^2-5

(4) x^4+10x^2+24

풍쌤 POINT

x^4+ax^2+b 꼴의 인수분해는 $x^2=t$로 놓고 인수분해하므로 치환한 것을 원래대로 돌렸을 때 합차 공식을 이용하는 경우가 많다.

03 합차 공식을 이용한 인수분해

❶ 공통부분이 없는 다항식의 인수분해

① 공통부분이 없고, 3개의 항을 묶어 완전제곱식으로 나타낼 수 있는지 확인한다.

② 완전제곱식으로 바꿀 수 있는 경우 3개의 항을 묶어 완전제곱식으로 나타낸다.

③ 남은 항도 제곱 꼴로 나타낸다.

④ $(\quad)^2-(\quad)^2$ 꼴을 만들어 합차 공식을 이용한다.

❷ x^4+ax^2+b 꼴의 인수분해 – 치환하여 인수분해되지 않는 경우

① $x^2=t$로 치환하여 t^2+at+b를 인수분해할 수 없음을 확인한다.

② ax^2을 적당히 나누어 $(\quad)^2-(\quad)^2$ 꼴을 만들어 합차 공식을 이용한다.

› t^2+at+b가 인수분해되는 경우는 44쪽에서 배웠다.

정답과 풀이 023쪽

유형 12 공통부분이 없는 다항식의 인수분해

13 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^2-y^2+4x+4

› 풀이 x^2-y^2+4x+4

$=(x^2+4x+4)-y^2$

$=(x+2)^2-y^2$

$=$ ______

(2) $x^2-y^2-8x+16$

(3) $9x^2-9-y^2+6y$

(4) $x^2+4y^2-4xy-25$

풍쌤 POINT

3개의 항을 묶어 완전제곱식으로 나타낸 후 합차 공식을 이용하므로 보통 항이 4개인 다항식으로 주어진다.

유형 13 x^4+ax^2+b 꼴의 인수분해 (2)

14 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^4-3x^2+1

› 풀이 x^4-3x^2+1

$=(x^4-2x^2+1)-x^2$

$=(x^2-1)^2-x^2$

$=$ ______

(2) x^4-8x^2+4

(3) x^4+4x^2+16

(4) x^4-3x^2+9

풍쌤 POINT

x^4+ax^2+b에서 kx^2을 빼거나 더하여

$x^4+(a+k)x^2+b-kx^2$

의 형태로 만들었을 때, $x^4+(a+k)x^2+b$가 완전제곱식이 되도록 k의 값을 정한다.

04 복잡한 식의 인수분해

1 문자가 여러 개인 다항식의 인수분해

차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

› 모든 문자의 차수가 같으면 임의의 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

유형 14 복잡한 식의 인수분해

정답과 풀이 024쪽

15 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^2-x-2y-xy-6$

› 풀이 y에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2-x-2y-xy-6$
$=-xy-2y+x^2-x-6$
$=-(xy+2y)+(x^2-x-6)$
$=-y(x+2)+(x+2)(x-3)$
$=$ ______________

(2) $a^2+2ab+5-6a-2b$

(3) $a^3-2a^2b+a^2-2ab-6b+3a$

(4) $3x^3+y-x^2y-6x^2-3x+2xy$

16 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^2-y^2+2x-6y-8$

(2) $x^2-3y^2+2xy+x-5y-2$

› 풀이 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2-3y^2+2xy+x-5y-2$
$=x^2+2xy+x-3y^2-5y-2$
$=x^2+(2xy+x)-(3y^2+5y+2)$
$=x^2+(2y+1)x-(3y+2)(y+1)$
$=x^2+\{(3y+2)-(y+1)\}x+(3y+2)\times\{-(y+1)\}$
$=$ ______________

(3) $2a^2-2b^2+3ab+a+7b-3$

(4) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

풍쌤 POINT

상수항을 두 다항식 A, B의 곱인 AB로 인수분해할 수 있으면 다음과 같은 형태인지 살펴본다.

$x^2+(A+B)x+AB=(x+A)(x+B)$
$abx^2+(aB+Ab)x+AB=(ax+A)(bx+B)$

05 인수 정리를 이용한 인수분해

❶ 인수 정리를 이용한 고차식의 인수분해

① 주어진 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$인 상수 a의 값을 찾는다.

② 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$를 구한다.

③ $f(x)=(x-a)Q(x)$로 나타내고, $Q(x)$가 인수분해되면 인수분해한다.

› $Q(x)$가 삼차 이상인 경우 다시 조립제법을 이용하여 나눈다.

유형 15 인수 정리를 이용한 인수분해

정답과 풀이 024쪽

17 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^3-2x^2-x+2

› 풀이 $f(x)=x^3-2x^2-x+2$로 놓으면
$f(1)=1-2-1+2=0$이므로 조립제법을 이용하여
$f(x)$를 $x-1$로 나누면

1	1	-2	-1	2
		1	-1	-2
	$\square$	$\square$	$\square$	0

따라서
$f(x)=(x-1)$__________
$=(x-1)$____________

(2) $x^3-3x^2-9x+27$

(3) x^3-3x^2+5x-3

(4) $2x^3-x^2-3x-1$

18 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^4-x^3-7x^2+x+6$

› 풀이 $f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$으로 놓으면
$f(1)=1-1-7+1+6=0$이므로 조립제법을 이용하여
$f(x)$를 $x-1$로 나누면

1	1	-1	-7	1	6
		1	0	-7	-6
	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	0

따라서 $f(x)=(x-1)$____________
이고, $g(x)=$____________으로 놓으면
$g(-1)=-1+7-6=0$이므로 조립제법을 이용하여
$g(x)$를 $x+1$로 나누면

-1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
		-1	1	6
	1	-1	-6	0

따라서
$g(x)=(x+1)(x^2-x-6)$
$=(x+1)(x+2)(x-3)$
이므로
$f(x)=$____________________

(2) $x^4+2x^3-5x^2-12x-4$

풍쌤 POINT

계수가 모두 정수인 다항식 $f(x)$에서 $f(a)=0$을 만족시키는 a가 될 수 있는 값은

$$\pm\frac{(f(x)\text{의 상수항의 약수})}{(f(x)\text{의 최고차항의 계수의 약수})}$$

06 인수분해의 활용

1 인수분해를 이용한 수의 계산

① 반복적으로 나타나는 수를 치환하여 나타낸다.

② 치환하여 나타낸 식을 인수분해한 후 치환한 수를 대입하여 수를 계산한다.

2 인수분해를 이용한 식의 값

① 식의 값을 대입하기 전에 주어진 식을 인수분해하여 나타낸다.

② 인수분해 과정 중 식의 값을 이용할 수도 있다.

› 반복적으로 나타나는 수뿐만 아니라 식에서 나타난 다른 수도 치환한 문자를 이용하여 나타낸다.

예 $98\times100\times104$에서 $98=x$로 놓으면 $x(x+2)(x+6)$

유형 16 인수분해를 이용한 수의 계산

정답과 풀이 025쪽

19 다음을 계산하시오.

(1) 98^2-2^2

› 풀이 98^2-2^2에서 $98=x$로 놓으면

$x^2-2^2=(x+2)(x-2)$

$=100\times$____$=$____

(2) 55^2-45^2

(3) $99^2+2\times99+1$

(4) $103^2-103-6$

20 다음을 계산하시오.

(1) $\dfrac{48^3+8}{48^2-2\times48+4}$

› 풀이 $\dfrac{48^3+8}{48^2-2\times48+4}$에서 $48=x$로 놓으면

$\dfrac{x^3+8}{x^2-2x+4}=\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4}$

$=$____$+2=$____$+2=$____

(2) $\dfrac{120^3-1}{120\times121+1}$

(3) $101^3-3\times101^2+3\times101-1$

(4) $98^3+6\times98^2+12\times98+8$

풍쌤 POINT

인수분해를 이용한 수의 계산에서 수를 치환할 때는 10의 배수가 나타나도록 치환하면 계산하기 편리하다.

21 다음을 구하시오.

(1) $a+b=1$, $b+c=4$, $c+a=5$일 때, $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$의 값

풀이 $(a+b)+(b+c)+(c+a)=2(a+b+c)$
$=1+4+5=10$
에서 $a+b+c=$ ___ 이므로
$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
$=(a+b+c)^2$
$=$ ___

(2) $x+y=5$, $xy=3$일 때, $x^4+x^2y^2+y^4$의 값

(3) $a+b+c=0$일 때, $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3abc}$의 값 (단, $abc\neq0$)

22 다음을 구하시오.

(1) $a+b=-3$, $a-b=1$일 때, a^2+2a-b^2-2b의 값

풀이 a^2+2a-b^2-2b
$=a^2-b^2+2a-2b$
$=(a+b)(a-b)+2(a-b)$
$=$ ______
$=1\times(-3+2)=$ ___

(2) $x-y=-2$, $xy=3$일 때, $x^4+y^4-x^3y-xy^3$의 값

(3) $a-b=1$, $b+c=5$, $a-c=-2$일 때, $a^2b+a^2c-ab^2-ac^2+b^2c+bc^2-2abc$의 값

풍쌤 POINT

조건을 이용하기 위해 주어진 식을 인수분해하여 나타낸 후 식의 값을 대입한다.

중단원 점검문제

정답과 풀이 027쪽

01

$x^2+y^2+2xy+2x+2y+1$을 인수분해하시오.

02

x^3-27y^3을 인수분해하시오.

03

$x^4+4x^2y^2+16y^4$이 $(x^2+axy+4y^2)(x^2-bxy+4y^2)$으로 인수분해될 때, 양수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

04

$(x^2+x)(x^2+x-8)+12$를 인수분해하시오.

05

$(x^2-2x)^2-7x^2+14x+12$를 인수분해하시오.

06

$(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)+24$를 인수분해하시오.

07

$16x^2-4-9y^2+12y$를 인수분해하시오.

08

x^4+4를 인수분해하시오.

09

$ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c-a)$를 인수분해하시오.

10

$x^2+2y^2-3xy+4x-5y+3$이 $(ax-y+b)(x-cy+d)$로 인수분해될 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하시오.

11

x^3-6x^2-x+30을 인수분해하시오.

12

다항식 $x^4-x^3+3x^2+ax+b$가 $(x+1)(x-1)f(x)$로 인수분해될 때, $f(x)$를 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

13

$32^2-3\times32+2$의 값을 구하시오.

14

$\dfrac{54^3-64}{54^2+4\times54+16}$의 값을 구하시오.

15

$x-y=-3$, $x^3-y^3+x^2y-xy^2=-3$일 때, xy의 값을 구하시오.

16

삼각형 ABC의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $a^3+b^3+c^3=3abc$가 성립할 때, 이 삼각형이 어떤 삼각형인지 구하시오.

Ⅱ

방정식과 부등식

미리 보는

Ⅱ 방정식과 부등식

1 복소수와 이차방정식

▶ 본문 056~081쪽에서 확인해 보세요.

(1) 복소수

① 허수단위: 제곱하여 -1이 되는 수, $i^2=-1$, $i=\sqrt{-1}$

② 복소수: 두 실수 a, b에 대하여 $a+bi$로 나타내어지는 수

③ 켤레복소수: 복소수 $a+bi$의 켤레복소수는 $\overline{a+bi}=a-bi$

허수부분
$a+bi$
실수부분

(2) 복소수의 연산

a, b, c, d가 실수일 때

① 덧셈: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

② 뺄셈: $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

③ 곱셈: $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

④ 나눗셈: $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ (단, $c+di\neq0$)

(3) 이차방정식의 판별식

a, b, c가 실수일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$은

① $D=b^2-4ac>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② $D=b^2-4ac=0$이면 중근을 갖는다.

③ $D=b^2-4ac<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(4) 이차방정식의 근과 계수의 관계

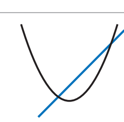
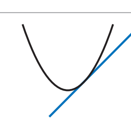
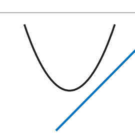
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

2 이차방정식과 이차함수

▶ 본문 082~097쪽에서 확인해 보세요.

(1) 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 두 식을 연립한 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+(c-n)=0$의 판별식 $D=(b-m)^2-4a(c-n)$의 값의 부호에 따라 결정된다.

판별식의 부호	$D>0$	$D=0$	$D<0$
이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 $(a>0,\ m>0)$	 서로 다른 두 점에서 만난다.	 한 점에서 만난다. (접한다.)	 만나지 않는다.

(2) 제한된 범위에서 이차함수의 최대 · 최소

x의 값의 범위가 $\alpha\leq x\leq\beta$일 때, 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은 그래프를 그려서 확인한다.

3 여러 가지 방정식

▶ 본문 098~117쪽에서 확인해 보세요.

01 삼차방정식과 사차방정식
02 복잡한 삼차방정식과 사차방정식
03 삼차방정식의 근과 계수의 관계
04 삼차방정식의 켤레근
05 방정식 $x^3=\pm1$의 허근
06 연립일차방정식
07 연립이차방정식
08 부정방정식

(1) 삼차방정식과 사차방정식의 풀이

방정식 $f(x)=0$을 인수분해하거나 인수 정리와 조립제법을 이용한다.

(2) 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라고 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

(3) 방정식 $x^3=1$의 허근의 성질

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 하면 (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

② $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

③ $\overline{\omega}=\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^3}{\omega}=\omega^2$

(4) 연립이차방정식의 풀이

① $\begin{cases}\text{일차방정식}\\ \text{이차방정식}\end{cases}$ 꼴 ➡ 일차방정식을 한 미지수에 대하여 정리한 후, 이차방정식에 대입하여 푼다.

② $\begin{cases}\text{이차방정식}\\ \text{이차방정식}\end{cases}$ 꼴 ➡ 인수분해가 되는 이차방정식을 인수분해하여 얻은 일차방정식을 다른 이차방정식에 각각 대입하여 푼다.

4 여러 가지 부등식

▶ 본문 118~142쪽에서 확인해 보세요.

01 부등식의 성질
02 부등식의 사칙연산
03 일차부등식
04 연립일차부등식
05 특수한 해를 갖는 연립일차부등식
06 절댓값 기호를 포함한 일차부등식
07 부등식과 함수의 그래프
08 이차부등식
09 이차함수와 이차부등식
10 이차부등식의 해의 조건
11 연립이차부등식
12 절댓값 기호를 포함한 이차부등식

(1) 연립부등식의 풀이

① 각각의 부등식의 해를 구한다.

② 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾는다.

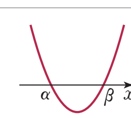
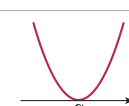
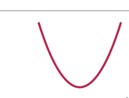
참고 $A<B<C$ 꼴의 부등식은 $\begin{cases}A<B\\ B<C\end{cases}$ 꼴로 고쳐서 푼다.

(2) 절댓값 기호를 포함한 부등식의 풀이

절댓값 기호 안을 0으로 하는 수를 기준으로 구간을 나누어 푼다.

(3) 이차함수와 이차부등식

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β $(\alpha\leq\beta)$라고 하면 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 이차부등식의 해 사이의 관계는 다음과 같다.

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$의 그래프			
$ax^2+bx+c>0$	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\neq\alpha$인 모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c\geq0$	$x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$	모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c<0$	$\alpha<x<\beta$	해는 없다.	해는 없다.
$ax^2+bx+c\leq0$	$\alpha\leq x\leq\beta$	$x=\alpha$	해는 없다.

01 복소수와 허수단위

❶ 허수단위

제곱하여 -1이 되는 수를 i라 하고, i를 **허수단위**라고 한다. 즉, $i^2=-1$이고 $i=\sqrt{-1}$이다.

❷ 복소수

① 두 실수 a, b에 대하여 $a+bi$로 나타내어지는 수를 **복소수**라고 한다.

② 복소수 $a+bi$에서 a는 **실수부분**, b는 **허수부분**이다.

❸ 허수와 순허수

① 실수가 아닌 복소수 $a+bi$ $(b\neq0)$를 **허수**라고 한다.

② 실수부분이 0인 허수 bi $(b\neq0)$를 **순허수**라고 한다.

› 복소수의 분류

실수 a, b에 대하여

복소수 $a+bi$

- 실수 a $(b=0)$
- 허수 $a+bi$ $(b\neq0)$
  - 순허수 bi $(a=0, b\neq0)$
  - 순허수가 아닌 허수 $a+bi$ $(a\neq0, b\neq0)$

유형 01 복소수의 실수부분과 허수부분

01 다음 복소수의 실수부분과 허수부분을 구하시오.

(1) $2+3i$

(2) $-1-5i$

(3) $3-8i$

(4) -4

(5) $10i$

02 다음 복소수의 실수부분과 허수부분을 구하시오.

(1) $\sqrt{2}-i$

(2) $-3+\sqrt{5}i$

(3) $\dfrac{3-7i}{2}$

› 풀이 $\dfrac{3-7i}{2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{2}i$이므로

실수부분은 ____, 허수부분은 ____ 이다.

(4) $-i^2$

(5) $(-\sqrt{2})^2 i$

풍쌤 POINT

$$\underbrace{a}_{\text{실수부분}}+\overbrace{b}^{\text{허수부분}}i$$

정답과 풀이 029쪽

03 다음 수를 보기에서 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $-4+5i$	ㄴ. $-i$
ㄷ. 2	ㄹ. $\sqrt{3}i+i$
ㅁ. $-2+\sqrt{7}i$	ㅂ. $17+\sqrt{5}$

(1) 실수

(2) 허수

(3) 순허수

04 다음 수를 보기에서 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $3i$	ㄴ. $2+i^2$
ㄷ. $i+1$	ㄹ. $i-\sqrt{2}i$
ㅁ. $4+2i$	ㅂ. $3+\pi$

(1) 실수

(2) 허수

(3) 순허수

풍쌤 POINT

복소수 $a+bi$에 대하여
① $b\neq0$이면 허수이다. 이때 $a=0$이면 순허수이다.
② $b=0$이면 실수이다.

02 복소수가 서로 같을 조건

❶ 복소수가 서로 같을 조건

실수 a, b, c, d에 대하여 두 복소수 $a+bi$, $c+di$의 실수부분과 허수부분이 각각 같을 때 두 복소수는 서로 같다. 즉,

① $a+bi=c+di$이면 $a=c$, $b=d$이다.

② $a+bi=0$이면 $a=b=0$이다.

보기 $3-4i=-4i+3$
$2+i\neq i-2$

유형 03 복소수가 서로 같을 조건

정답과 풀이 029쪽

05 다음 등식을 만족시키는 실수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $a+bi=3-3i$

> 풀이 두 복소수 $a+bi$, $3-3i$의 실수부분과 허수부분이 각각 같아야 하므로
> $a=$___, $b=$____

(2) $a-bi=-2-i$

(3) $5+4i=-a+bi$

(4) $a-bi=-6i$

(5) $a+2i=-1+bi$

06 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오.

(1) $(x+1)+(y-2)i=5+3i$

> 풀이 $x+1=5$, $y-2=3$이므로
> $x=$___, $y=$___

(2) $(2x-1)+(y+3)i=-3+9i$

(3) $(3x+5)-i=-1+(2y-1)i$

(4) $(5x-y)+(x+3y)i=3+7i$

(5) $(2x-y-2)+3i=(x+2y-3)i+5$

풍쌤 POINT

실수 a, b, c, d에 대하여 $a+bi=c+di$이면 $a=c$, $b=d$이다.

03 켤레복소수

❶ 켤레복소수

실수 a, b에 대하여 복소수 $a+bi$의 허수부분의 부호를 바꾼 복소수 $a-bi$를 $a+bi$의 켤레복소수라고 한다.

❷ 켤레복소수의 표현

복소수 $a+bi$의 켤레복소수인 $a-bi$를 기호 $\overline{a+bi}$로 나타낸다.
즉, $\overline{a+bi}=a-bi$이다.

보기 $\overline{4-3i}=4+3i$

유형 04 켤레복소수

정답과 풀이 029쪽

07 다음 복소수의 켤레복소수를 구하시오.

(1) $2-3i$

(2) $-11+10i$

(3) $4i-6$

(4) $2+\sqrt{2}$

(5) $-5i$

08 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오.

(1) $\overline{x+yi}=-4-i$

> 풀이 $\overline{x+yi}=x-yi$이므로
> $x-yi=-4-i$
> 따라서 $x=$____, $y=$___이다.

(2) $\overline{x-yi}=2i+5$

(3) $-5+xi=\overline{y-3i}$

(4) $(2x-2)+4i=\overline{6+(y-2)i}$

(5) $5+(x+y)i=\overline{(x-2)+4i}$

풍쌤 POINT

$a+bi \xleftrightarrow{\text{켤레복소수}} a-bi$

허수부분의 부호가 반대

04 복소수의 연산

1 복소수의 덧셈과 뺄셈

a, b, c, d가 실수일 때

① 덧셈: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

② 뺄셈: $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

2 복소수의 곱셈

a, b, c, d가 실수일 때

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

3 복소수의 나눗셈

a, b, c, d가 실수이고 $c+di\neq0$일 때

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

› 복소수의 연산에서도 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립한다.

유형 05 복소수의 덧셈과 뺄셈

09 다음을 계산하시오.

(1) $(4+3i)+(2-i)$

› 풀이 $(4+3i)+(2-i)$

$=(4+2)+(3-1)i$

$=$______

(2) $(-7i+1)+(2i-4)$

(3) $(5+2i)+(-3i+10)$

(4) $(i-\sqrt{2})+(-4i+2\sqrt{2})$

10 다음을 계산하시오.

(1) $(2i+5)-(i-1)$

› 풀이 $(2i+5)-(i-1)$

$=\{5-(-1)\}+(2-1)i$

$=$______

(2) $(-5i-5)-(3i-7)$

(3) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}i\right)-\left(i-\frac{1}{2}\right)$

(4) $(\sqrt{3}i+1)-(-3+\sqrt{3}i)$

풍쌤 POINT

복소수의 덧셈과 뺄셈은 허수단위 i를 문자처럼 생각하여 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 계산한다.

정답과 풀이 030쪽

11 다음을 계산하시오.

(1) $(1+i)(2-i)$

> 풀이 $(1+i)(2-i)$
> $=\{1\times2-1\times(-1)\}+\{1\times(-1)+1\times2\}i$
> $=$_____

(2) $(3-2i)(2-5i)$

(3) $(-3i-4)(2+2i)$

(4) $(i+6)(4i+1)$

(5) $(4-2i)(i-1)$

(6) $(3-2i)^2$

(7) $(-4i)^2$

(8) $(2-5i)(2+5i)$

풍쌤 POINT

$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2$ ← 전개
$=ac+adi+bci-bd$ ← $i^2=-1$
$=(ac-bd)+(ad+bc)i$

유형 07 복소수의 나눗셈

12 다음을 계산하시오.

(1) $\dfrac{1}{1-i}$

풀이 $\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{1+i}{(1-i)(1+i)}$

$=\dfrac{1+i}{1^2-i^2}$

$=\dfrac{1+i}{2}$

$=\_\_\_+\_\_\_i$

(2) $\dfrac{1}{3+4i}$

(3) $\dfrac{1-i}{2+2i}$

(4) $\dfrac{5i}{3-i}$

(5) $\dfrac{4-3i}{2-5i}$

(6) $\dfrac{3i-4}{2i-3}$

(7) $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$

(8) $\dfrac{3+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}$

풍쌤 POINT

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)\underline{(c-di)}}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

분모의 켤레복소수를 분자, 분모에 모두 곱한다.

유형 08 복소수의 사칙연산

13 다음을 계산하시오.

(1) $2i-(1+3i)(4i-2)$

> 풀이 $2i-(1+3i)(4i-2)$
> $=2i-(1+3i)(-2+4i)$
> $=2i-\{(-2-12)+(4-6)i\}$
> $=2i-(\underline{\qquad\qquad})$
> $=\underline{\qquad\qquad}$

(2) $(-i+2)\div(4i-3)+(3-i)$

(3) $\dfrac{2}{1-i}+\dfrac{4}{1+i}$

(4) $\dfrac{1+2i}{3-2i}-(2+i)^2$

풍쌤 POINT

덧셈: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

뺄셈: $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

곱셈: $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

나눗셈: $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

유형 09 복소수의 사칙연산과 미정계수

14 다음 등식을 만족시키는 실수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $a(1-i)+b(2i-3)=-7+5i$

> 풀이 $a(1-i)+b(2i-3)=a-ai+2bi-3b$
> $=(a-3b)+(-a+2b)i$
> $=-7+5i$
> 이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
> $a-3b=\underline{\qquad}$, $-a+2b=\underline{\qquad}$
> 두 식을 연립하여 풀면 $a=\underline{\qquad}$, $b=\underline{\qquad}$

(2) $(2-ai)(2+3i)=b-4i$

(3) $a(i+3)^2+(-4-2i)=b+4ai$

(4) $3+i=\dfrac{a}{1+i}-\dfrac{b}{1-i}$

풍쌤 POINT

좌변이나 우변을 전개한 후 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 미정계수를 구한다.

① $a+bi=c+di$이면 $a=c$, $b=d$이다.

② $a+bi=0$이면 $a=b=0$이다.

유형 10 복소수의 연산과 식의 값

15 $a=1-i$, $b=3+2i$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $a+b$

> 풀이 $a+b=(1-i)+(3+2i)$
> $=(1+3)+(-1+2)i$
> $=$ _____

(2) ab

(3) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

16 $a=1-2i$, $b=-i$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) a^2

(2) b^2

(3) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$

풍쌤 POINT

조건을 이용하기 위해 주어진 식을 정리한 후 식의 값을 대입한다.

유형 11 켤레복소수의 연산

17 복소수 $z=2-4i$에 대하여 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\overline{z}$

> 풀이 $\overline{z}=\overline{2-4i}=$ _____

(2) $z+\overline{z}$

(3) $z\overline{z}$

18 복소수 $z=3i-3$에 대하여 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\overline{z}$

(2) $z-\overline{z}$

(3) $z\overline{z}$

풍쌤 POINT

복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 $z+\overline{z}$와 $z\overline{z}$는 항상 실수이다.

05 음수의 제곱근

❶ 음수의 제곱근

양수 a에 대하여

① $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$

② $-a$의 제곱근은 $-\sqrt{a}i$, $\sqrt{a}i$이다.

❷ 음수의 제곱근의 성질

a, b가 실수일 때, 다음이 성립한다.

① $a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

② $a>0$, $b<0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

› $\sqrt{a}i$와 $-\sqrt{a}i$를 간단히 $\pm\sqrt{a}i$로 나타내기도 한다.

› $a<0$, $b<0$인 경우를 제외하면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
$a>0$, $b<0$인 경우를 제외하면 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

정답과 풀이 032쪽

유형 12 음수의 제곱근

19 다음 수의 제곱근을 구하시오.

(1) -2

(2) -4

(3) -7

(4) -9

(5) -24

풍쌤 POINT

$i=\sqrt{-1}$임을 이용하여 실수의 범위에서 구할 수 없는 제곱근을 구한다.

유형 13 음수의 제곱근의 연산

20 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt{-3}\sqrt{-4}+\sqrt{2}\sqrt{-2}$

› 풀이 $\sqrt{-3}\sqrt{-4}+\sqrt{2}\sqrt{-2}$
$=\sqrt{3}i\times 2i+\sqrt{2}\times\sqrt{2}i$
$=$ ______

(2) $(4-\sqrt{-2})(4+\sqrt{-2})+(\sqrt{-5})^2$

(3) $\sqrt{2}\sqrt{-3}+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-8}}$

(4) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{-2}}-\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{-2}}$

풍쌤 POINT

음수의 제곱근의 연산을 할 때는 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$를 이용하여 i의 꼴로 바꾼 후에 계산한다.

06 i의 거듭제곱

❶ i의 거듭제곱

① i의 거듭제곱인 i^n (n은 자연수)의 값을 차례대로 구하면

$$i,\ -1,\ -i,\ 1,\ i,\ -1,\ -i,\ 1,\ \cdots$$

과 같이 i, -1, $-i$, 1이 반복되어 나타난다.

② i의 거듭제곱은 다음과 같은 규칙을 갖는다.

$$i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i,\ i^{4k+4}=1\ (\text{단, } k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

› $i+i^2+i^3+i^4=0$

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=0$

유형 14 i의 거듭제곱

21 다음을 계산하시오.

(1) i^6

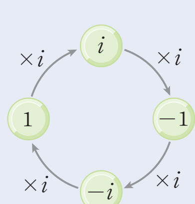
› 풀이 $i^6=i^4\times i^2=i^2=$ ____

(2) i^{15}

(3) i^{49}

(4) i^{1000}

풍쌤 POINT



유형 15 i의 거듭제곱의 합

22 다음을 계산하시오.

(1) $i^5+i^6+i^7$

› 풀이 $i^5+i^6+i^7$

$=i+i^2+i^3$

$=i-1-i=$ ____

(2) $i+i^2+i^3+\cdots+i^{20}$

(3) $\frac{1}{i^{100}}+\frac{1}{i^{101}}$

(4) $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{50}}$

풍쌤 POINT

n이 자연수일 때

$i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0$, $\frac{1}{i^n}+\frac{1}{i^{n+1}}+\frac{1}{i^{n+2}}+\frac{1}{i^{n+3}}=0$

정답과 풀이 032쪽

23 다음을 계산하시오.

(1) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$

풀이 $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3=i^3=$____

(2) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^9$

(3) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{72}$

(4) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{250}$

(5) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4$

(6) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{25}$

(7) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{102}$

(8) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{155}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{155}$

풍쌤 POINT

$\frac{1+i}{1-i}=i$, $\frac{1-i}{1+i}=-i$가 자주 이용되므로 기억해 두도록 한다.

07 방정식 $ax=b$

1 방정식 $ax=b$의 풀이

방정식을 $ax=b$ 꼴로 정리한 후 a의 값에 따라 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각한다.

① $a\neq0$일 때, $x=\frac{b}{a}$ (오직 하나의 해)

② $a=0$일 때,

$b\neq0$이면 해가 없다. (불능)

$b=0$이면 해가 무수히 많다. (부정)

› 방정식 $ax=b$에서 $a\neq0$일 때를 일차방정식이라 한다.

유형 17 방정식 $ax=b$의 해

정답과 풀이 033쪽

24 다음 방정식을 푸시오.

(1) $3x=9$

(2) $5x+1=11$

(3) $-4(x-2)=3x+8$

(4) $3x+2(x-1)=4(x+1)+x$

› 풀이 $3x+2x-2=5x+4$

$0\times x=6$

이므로 ________

25 다음 방정식을 푸시오.

(1) $ax+1=2$

› 풀이 $ax+1=2$에서 $ax=1$

(i) $a=0$이면 $0\times x=1$이므로 ________

(ii) $a\neq0$이면 $x=$ ____

(2) $a(x-1)+3x=5$

(3) $(a^2+1)x=2ax$

풍쌤 POINT

방정식 $ax=b$에서

① $a\neq0$일 때, $x=\frac{b}{a}$ (오직 하나의 해)

② $a=0$일 때,

$b\neq0$이면 해가 없다. (불능)

$b=0$이면 해가 무수히 많다. (부정)

08 절댓값 기호가 있는 방정식

❶ 절댓값 기호가 있는 방정식의 풀이

① 절댓값 기호가 있는 방정식은 절댓값 기호 안을 0으로 하는 수를 기준으로 구간을 나누어 절댓값 기호를 없앤다.

(i) $a\geq0$일 때, $|a|=a$

(ii) $a<0$일 때, $|a|=-a$

② 각 구간에서 해를 구한 후에 해가 해당 구간에 속하는지 확인한다.

❷ 간단한 절댓값 기호가 있는 방정식의 풀이

① $|x|=a$이면 $x=\pm a$ (단, $a>0$)

② $|x|=|y|$이면 $x=\pm y$

> 절댓값 a
수직선 위에서 어떤 실수 a에 대응하는 점과 원점 사이의 거리

유형 18 절댓값 기호가 있는 일차방정식

정답과 풀이 033쪽

26 다음 방정식을 푸시오.

(1) $|x-2|=5$

> 풀이 $x=2$를 기준으로 구간을 나누어 생각한다.
(i) $x\geq2$일 때
$x-2=5$이므로 $x=$___이다.
(ii) $x<2$일 때
$-(x-2)=5$
$-x+2=5$
이므로 $x=$____이다.
(i), (ii)에서 방정식의 해는 $x=$___ 또는 $x=$____이다.

(2) $|x-3|=1$

(3) $|x+1|-4=0$

(4) $|x-1|=2x-9$

(5) $|2x+3|=x-5$

(6) $|x+3|=|2x-1|$

(7) $|x|+|x-1|=5$

풍쌤 POINT

절댓값 기호가 있는 방정식은 절댓값 기호 안을 0으로 하는 수를 기준으로 구간을 나누어 푼다. 이때 각 구간에서 구한 해가 그 구간에 속하는지 확인한다.

09 이차방정식의 근

❶ 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이

x에 대한 이차방정식이 $(ax-b)(cx-d)=0$ 꼴로 인수분해되면

이 이차방정식의 근은 $x=\frac{b}{a}$ 또는 $x=\frac{d}{c}$이다.

❷ 근의 공식을 이용한 이차방정식의 풀이

x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

❸ 이차방정식의 근

계수가 실수인 이차방정식은 복소수의 범위에서 반드시 근을 가지며, 이 중 실수인 것을 실근, 허수인 것을 허근이라고 한다.

› x에 대한 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 근은 $x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

› 특별한 언급이 없는 한 이차방정식의 근은 복소수의 범위에서 구한다.

유형 19 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이

27 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2-3x+2=0$

› 풀이 $x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$이므로
$x=$ ___ 또는 $x=$ ___

(2) $x^2-10x+25=0$

(3) $2x^2+7x-4=0$

(4) $6x^2-11x-10=0$

풍쌤 POINT

$(ax-b)(cx-d)=0$의 근 ➡ $x=\frac{b}{a}$ 또는 $x=\frac{d}{c}$

유형 20 근의 공식을 이용한 이차방정식의 풀이

28 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2-3x+5=0$

› 풀이 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times5}}{2\times1}=\frac{3\pm\sqrt{-11}}{2}$$

$=$ ______

(2) $x^2-4x-2=0$

(3) $x^2+5x-3=0$

(4) $x^2+6x+11=0$

(5) $x^2-2x-1=0$

(6) $2x^2-x+3=0$

(7) $3x^2-4x+4=0$

(8) $3x^2+3x-5=0$

풍쌤 POINT

x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근

➡ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

x에 대한 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 근

➡ $x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

유형 21 이차방정식의 실근과 허근

29 다음 이차방정식을 풀고, 그 근이 실근인지 허근인지 구하시오.

(1) $x^2+x+1=0$

> 풀이 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times1}}{2\times1}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

$$=\underline{\qquad\qquad}$$

따라서 주어진 방정식의 근은 ______이다.

(2) $x^2-2x-4=0$

(3) $x^2-5x+8=0$

(4) $2x^2+4x+1=0$

풍쌤 POINT

계수가 실수인 이차방정식은 복소수의 범위에서 반드시 근을 가지며, 이 중 실수인 것을 실근, 허수인 것을 허근이라고 한다.

➡ 허근에는 i가 포함되어 있다.

10 이차방정식의 판별식

❶ 이차방정식의 판별식

a, b, c가 실수일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$에 대하여
$D=b^2-4ac$를 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식이라고 한다.

❷ 이차방정식의 근의 판별

a, b, c가 실수일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$은

① $D=b^2-4ac>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
또, 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$이다.

② $D=b^2-4ac=0$이면 중근을 갖는다.
또, 중근을 가지면 $D=0$이다.

③ $D=b^2-4ac<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.
또, 서로 다른 두 허근을 가지면 $D<0$이다.

› 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 판별식 D는 $\frac{D}{4}=b'^2-ac$와 같이 나타낼 수 있다.

유형 22 이차방정식의 근의 판별

30 다음 이차방정식의 근을 판별하시오.

(1) $x^2+5x-10=0$

› 풀이 $D=5^2-4\times1\times(-10)=65>0$이므로
____________을 갖는다.

(2) $x^2+3x+6=0$

(3) $x^2-4x+4=0$

(4) $x^2-3x+2=0$

(5) $x^2+2x-3=0$

(6) $x^2-x+8=0$

(7) $4x^2+4x+1=0$

(8) $5x^2+2x+1=0$

(9) $2x^2+6x-3=0$

(10) $4x^2-x+2=0$

(11) $4x^2+12x+9=0$

(12) $3x^2+5x-2=0$

풍쌤 POINT

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은
① $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
② $D=0$이면 중근을 갖는다.
③ $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

유형 23 이차방정식이 실근을 가질 조건

31 다음 x에 대한 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) $x^2+4x-k=0$

풀이 이차방정식 $x^2+4x-k=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=2^2-1\times(-k)=4+k$
이때 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로
$k+4>0$
따라서 ________이다.

(2) $x^2-x+(k+1)=0$

(3) $x^2+2(k-1)x+k^2=0$

(4) $kx^2+5x-5=0$

풍쌤 POINT

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면 판별식 D에 대하여 $D>0$이다.

유형 24 이차방정식이 중근을 가질 조건

32 다음 x에 대한 이차방정식이 중근을 갖도록 하는 실수 k의 값을 구하시오.

(1) $x^2+x+k=0$

> 풀이 이차방정식 $x^2+x+k=0$의 판별식을 D라고 하면
> $D=1^2-4\times1\times k=-4k+1$
> 이때 $D=0$이어야 하므로
> $-4k+1=0$
> 따라서 ______ 이다.

(2) $x^2-4x+(k+2)=0$

(3) $kx^2+6x-1=0$

(4) $(k-1)x^2+4(k-1)x-2=0$

풍쌤 POINT

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 가지면 판별식 D에 대하여 $D=0$이다.

유형 25 이차방정식이 허근을 가질 조건

33 다음 x에 대한 이차방정식이 서로 다른 두 허근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) $x^2+2x+k=0$

> 풀이 이차방정식 $x^2+2x+k=0$의 판별식을 D라고 하면
> $\frac{D}{4}=1^2-1\times k=-k+1$
> 이때 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로
> $-k+1<0$
> 따라서 ______ 이다.

(2) $3x^2-2x+(k-1)=0$

(3) $x^2+(2k+1)x+k^2=0$

(4) $kx^2-x-8=0$

풍쌤 POINT

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 허근을 가지면 판별식 D에 대하여 $D<0$이다.

11 이차방정식의 근과 계수의 관계

1 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면

① 두 근의 합: $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

② 두 근의 곱: $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

2 이차방정식의 작성

α, β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

› x^2-(두 근의 합)x $+$(두 근의 곱)$=0$ 과 같이 생각할 수 있다.

유형 26 이차방정식의 근과 계수의 관계

정답과 풀이 036쪽

34 다음 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 구하시오.

(1) $x^2-5x+4=0$

(2) $x^2+6x-3=0$

(3) $x^2+12x+36=0$

(4) $x^2-4x-1=0$

(5) $2x^2+3x-1=0$

(6) $2x^2+4x+9=0$

(7) $6x^2-3x+4=0$

(8) $5x^2-10x-2=0$

풍쌤 POINT

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면

➡ 두 근의 합: $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, 두 근의 곱: $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

유형 27 이차방정식의 근과 계수의 관계의 활용

35 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\alpha+\beta$

(2) $\alpha\beta$

(3) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

> 풀이 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=$ ____

(4) $(\alpha-\beta)^2$

(5) $\alpha^2+\beta^2$

(6) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$

36 이차방정식 $x^2+4x+3=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\alpha+\beta$

(2) $\alpha\beta$

(3) $(\alpha+2)(\beta+2)$

> 풀이 $(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4$
> $=$ ___ $+2\times($ ____ $)+4$
> $=$ ____

(4) $\alpha^2+\beta^2$

(5) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$

(6) $\alpha^3+\beta^3$

풍쌤 POINT

조건을 이용하기 위해 주어진 식을 정리한 후 식의 값을 대입한다.

정답과 풀이 036쪽

37 다음 두 수를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

(1) 1, 3

> 풀이 두 수의 합이 4, 곱이 3이므로 구하는 이차방정식은
> $\underline{\qquad\qquad}=0$

(2) 2, -8

(3) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$

(4) $-2-\sqrt{2}$, $-2+\sqrt{2}$

(5) $1-4i$, $1+4i$

38 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 다음을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

(1) $-\alpha$, $-\beta$

> 풀이 $-\alpha$, $-\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은
> 두 근의 합이 $-(\alpha+\beta)=\underline{\qquad}$,
> 두 근의 곱이 $(-\alpha)\times(-\beta)=\alpha\beta=\underline{\quad}$
> 이므로 구하는 이차방정식은
> $\underline{\qquad\qquad}=0$

(2) $\alpha+1$, $\beta+1$

(3) $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$

풍쌤 POINT

α, β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-\alpha)(x-\beta)=0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$
이므로 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 알면 된다.

12 이차방정식의 켤레근

❶ 이차방정식의 켤레근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서

① 계수 a, b, c가 유리수일 때, 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다.
(단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

② 계수 a, b, c가 실수일 때, 한 근이 $p+qi$이면 다른 한 근은 $p-qi$이다.
(단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

› 켤레근
$p+q\sqrt{m}$과 $p-q\sqrt{m}$, $p+qi$와 $p-qi$를 각각 켤레근이라고 한다. (단, $q\neq0$)

유형 29 이차방정식의 켤레근

정답과 풀이 037쪽

39 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 다음과 같을 때, 다른 한 근과 유리수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $1-\sqrt{2}$

› 풀이 계수가 유리수이고 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 ______이다.
따라서 두 근의 합은 ___, 두 근의 곱은 ____이다.
이때 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-a$, 두 근의 곱은 b이므로 $a=$____, $b=$____이다.

(2) $3+\sqrt{5}$

(3) $\sqrt{3}-2$

40 이차방정식 $x^2+ax-b=0$의 한 근이 다음과 같을 때, 다른 한 근과 실수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $i-1$

(2) $2-3i$

(3) $2i+\sqrt{2}$

풍쌤 POINT

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서
① 계수 a, b, c가 유리수일 때, 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$ ← 무리수 부분의 부호가 반대로!
② 계수 a, b, c가 실수일 때, 한 근이 $p+qi$이면 다른 한 근은 $p-qi$ ← 허수부분의 부호가 반대로! 켤레복소수와 같다.

중단원 점검문제

정답과 풀이 038쪽

01

복소수 $\frac{i-3}{2i}$의 실수부분과 허수부분을 구하시오.

02

다음 수를 보기에서 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. i^{25}	ㄴ. $2-i$
ㄷ. $9\sqrt{2}+(3\sqrt{2}i)^2$	ㄹ. 3.5
ㅁ. $-1-\sqrt{3}$	ㅂ. $i+\sqrt{2}i$

(1) 실수
(2) 허수
(3) 순허수

03

복소수 $(i+1)x^2-(1-i)x-(2+6i)$가 순허수가 되도록 하는 실수 x의 값을 구하시오.

04

$(3x+1-y)+i=(x-2y+5)i+4$를 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오.

05

$(2+3i)(5-i)+\frac{2(-3+2i)}{1+i}$를 계산한 결과가 $a+bi$였을 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

06

복소수 $z=1-2i$에 대하여 $z\bar{z}(z+\bar{z})$의 값을 구하시오.

07

$(2-i)z+4i\bar{z}=3-i$를 만족시키는 복소수 z를 구하시오.

08

$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}+\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}$을 간단히 하시오.

09

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{99}}=a+bi$일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

10

n이 홀수일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$의 값을 구하시오.

11

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{110}$의 값을 구하시오.

12

방정식 $|x+1|+|x-2|=x+3$을 푸시오.

13

이차방정식 $2x^2-5x+5=0$을 풀고, 그 근이 실근인지 허근인지 구하시오.

14

방정식 $|x^2-4x|=3$을 푸시오.

15

이차방정식 $2x^2+4x-9=0$의 근을 판별하시오.

16

이차방정식 $4x^2-2x+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 정수 k의 최댓값을 구하시오.

17
이차방정식 $x^2+(k-5)x+1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 k의 값을 모두 구하시오.

18
이차방정식 $kx^2-3x+2=0$이 서로 다른 두 허근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

19
이차방정식 $3x^2-6x+4=0$의 두 근의 합과 곱을 구하시오.

20
이차방정식 $2x^2-4x+1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$의 값을 구하시오.

21
$4-\sqrt{3}$, $4+\sqrt{3}$을 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

22
$-\frac{1}{3}$, -2를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 3인 이차방정식을 구하시오.

23
이차방정식 $x^2-6x+2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha+1$, $\beta+1$을 두 근으로 하는 x에 대한 이차방정식은 $x^2+px+q=0$이다. 상수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오.

24
이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 $2-i$일 때, 실수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

01 일차함수의 그래프

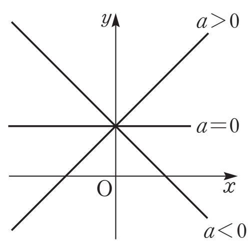
❶ 일차함수

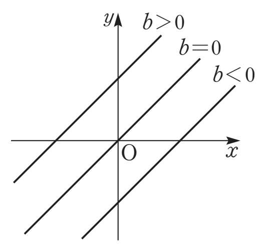
함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 대한 일차식 $y=ax+b\ (a\neq 0)$로 나타나는 함수

❷ 일차함수의 그래프

일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 $y=ax$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선이다.

이때 기울기 a의 값과 y절편 b의 값의 부호에 따른 그래프의 모양은 다음과 같다.





› $y=\underbrace{a}_{\text{기울기}}x+\underbrace{b}_{y\text{절편}}$

› 기울기가 양수이면 오른쪽 위로 향하는 직선이고, 기울기가 음수이면 오른쪽 아래로 향하는 직선이다.

유형 01 일차함수의 그래프

정답과 풀이 040쪽

01 다음 일차함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=x+2$

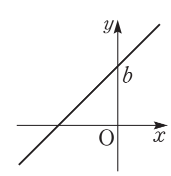
(2) $y=-3x+1$

(3) $y=5x-3$

02 다음과 같은 조건이 주어질 때, 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 지나지 않는 사분면을 구하시오.

(1) $a>0,\ b>0$

› 풀이 $a>0,\ b>0$에서 기울기가 양수이고 y절편이 양수이므로 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 그래프가 지나지 않는 사분면은 제___사분면이다.



(2) $a<0,\ b>0$

(3) $a<0,\ b<0$

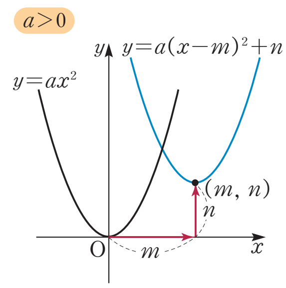
풍쌤 POINT

일차함수가 지나는 사분면과 지나지 않는 사분면은 그래프를 그려서 확인한다.

02 이차함수의 그래프

❶ 이차함수 $y=a(x-m)^2+n$의 그래프

이차함수 $y=a(x-m)^2+n$의 그래프는 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프이다.



❷ 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

이므로 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{2a}$만큼, y축의 방향으로 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$만큼 평행이동한 그래프이다.

› $y=a(x-m)^2+n$을 표준형이라고 한다.

› $y=ax^2+bx+c$를 일반형이라고 한다.

유형 02 이차함수의 그래프

정답과 풀이 041쪽

03 다음 이차함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=(x-1)^2+4$

(2) $y=(x+2)^2-1$

(3) $y=2(x+4)^2$

(4) $y=x^2-2x+2$

(5) $y=x^2+4x-3$

(6) $y=-2x^2+4x-5$

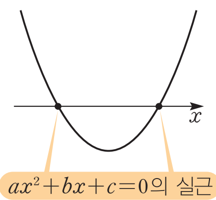
풍쌤 POINT

일반형 $y=ax^2+bx+c$ 꼴로 나타내어진 이차함수는 표준형 $y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형하면 그래프를 쉽게 그릴 수 있다.

03 이차함수의 그래프와 x축의 교점

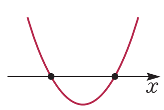
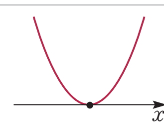
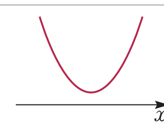
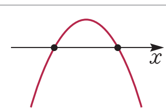
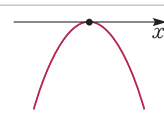
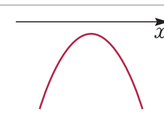
❶ 이차함수의 그래프와 x축의 교점

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근이다.



❷ 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$의 값의 부호에 따라 결정된다.

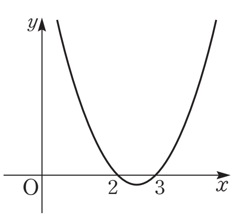
판별식의 부호	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$의 근	서로 다른 두 실근	중근	서로 다른 두 허근
$y=ax^2+bx+c$의 그래프 $(a>0)$			
$y=ax^2+bx+c$의 그래프 $(a<0)$			

› 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라고 하면 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는
(ⅰ) $D>0$이면 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
(ⅱ) $D=0$이면 x축과 한 점에서 만난다. (접한다.)
(ⅲ) $D<0$이면 x축과 만나지 않는다.

유형 03 이차함수의 그래프와 x축의 교점

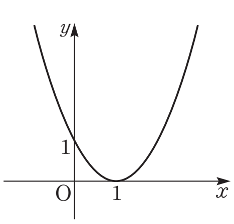
04 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 다음과 같을 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근을 구하시오.

(1)

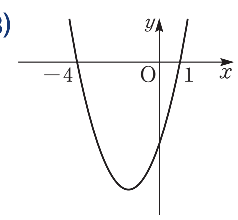


› 풀이 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 2, 3이므로 이차방정식의 실근은 $x=$___ 또는 $x=$___이다.

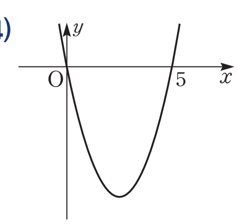
(2)



(3)



(4)



풍쌤 POINT

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근이다.

05 다음 이차함수와 x축의 교점의 좌표를 모두 구하시오.

(1) $y=x^2+x-2$

> 풀이 이차함수 $y=x^2+x-2$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+x-2=0$의 실근이다.
$x^2+x-2=0$에서
$(x+2)(x-1)=0$
이므로 $x=-2$ 또는 $x=1$
따라서 교점의 좌표는 (_____, 0), (___, 0)이다.

(2) $y=x^2+4x+3$

(3) $y=x^2-3x+8$

(4) $y=3x^2-6x-2$

(5) $y=9x^2-6x+1$

(6) $y=2x^2-2x+5$

풍쌤 POINT

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 허근을 가지면 실근을 갖지 않으므로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점은 없다.

유형 04 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수

06 다음 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구하시오.

(1) $y=x^2-5x+4$

> 풀이 이차방정식 $x^2-5x+4=0$의 판별식을 D라고 하면
> $D=(-5)^2-4\times1\times4=9>0$
> 이므로 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는
> ___이다.

(2) $y=4x^2-4x+1$

(3) $y=2x^2-3x+9$

(4) $y=3x^2+5x+3$

풍쌤 POINT

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$의 값의 부호에 따라 결정된다.

① $D>0$이면 교점의 개수는 2

② $D=0$이면 교점의 개수는 1

③ $D<0$이면 교점의 개수는 0

유형 05 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계

07 다음 이차함수의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) $y=x^2+3x+k$

> 풀이 이차방정식 $x^2+3x+k=0$의 판별식을 D라고 하면
> $D=3^2-4\times1\times k=-4k+9$
> 이때 $D>0$이어야 하므로 $-4k+9>0$
> 따라서 ______이다.

(2) $y=-x^2-x+2k$

(3) $y=x^2-(2k-4)x+k^2$

(4) $y=2kx^2-4x-1$

08 다음 이차함수의 그래프가 x축과 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값을 구하시오.

(1) $y=x^2-8x+k$

> 풀이 이차방정식 $x^2-8x+k=0$의 판별식을 D라고 하면
> $\frac{D}{4}=(-4)^2-1\times k=-k+16$
> 이때 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로
> $-k+16=0$
> 따라서 ______이다.

(2) $y=2x^2-2x+k$

(3) $y=x^2-2kx+(k+2)$

(4) $y=kx^2-4x-2$

09 다음 이차함수의 그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) $y=x^2+x+(k-1)$

> 풀이 이차방정식 $x^2+x+(k-1)=0$의 판별식을 D라고 하면
> $D=1^2-4\times1\times(k-1)=-4k+5$
> 이때 $D<0$이어야 하므로
> $-4k+5<0$
> 따라서 ______이다.

(2) $y=-4x^2-4x+k$

(3) $y=x^2-2(k+1)x+k^2$

(4) $y=-kx^2+6x-3$

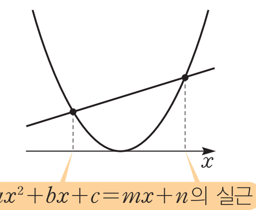
풍쌤 POINT

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계 문제는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 이용하여 해결한다.

04 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

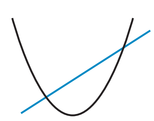
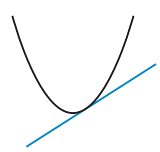
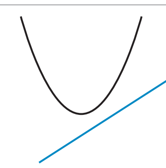
❶ 이차함수의 그래프와 직선의 교점

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는 두 식을 연립한 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$의 실근이다.



❷ 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 두 식을 연립한 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+(c-n)=0$의 판별식 $D=(b-m)^2-4a(c-n)$의 값의 부호에 따라 결정된다.

판별식의 부호	$D>0$	$D=0$	$D<0$
이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 $(a>0,\ m>0)$	 서로 다른 두 점에서 만난다.	 한 점에서 만난다. (접한다.)	 만나지 않는다.

› 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 x에 대한 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수와 같다.

유형 06 이차함수의 그래프와 직선의 교점

10 다음 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x좌표를 모두 구하시오.

(1) $y=x^2-3x+4$, $y=2x-2$

› 풀이 이차함수 $y=x^2-3x+4$의 그래프와 직선 $y=2x-2$의 교점의 x좌표는 두 식을 연립한 이차방정식 $x^2-3x+4=2x-2$의 실근이다.
$x^2-3x+4=2x-2$에서
$x^2-5x+6=0$
$(x-2)(x-3)=0$
따라서 교점의 x좌표는 ___, ___이다.

(2) $y=-x^2+5x-10$, $y=15x+11$

(3) $y=x^2-7x+7$, $y=x-9$

(4) $y=2x^2-x-7$, $y=-2x+3$

풍쌤 POINT

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는 두 식을 연립한 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+(c-n)=0$의 실근이다.

유형 07 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수

11 다음 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수를 구하시오.

(1) $y=x^2-2x+4$, $y=-x+1$

> 풀이 이차함수 $y=x^2-2x+4$와 직선 $y=-x+1$을 연립한 이차방정식 $x^2-x+3=0$의 판별식을 D라고 하면
> $D=(-1)^2-4\times1\times3=-11<0$
> 이므로 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 ___이다.

(2) $y=x^2-6x+1$, $y=3x-3$

(3) $y=4x^2+5x+1$, $y=x$

(4) $y=-3x^2+x-5$, $y=-2x+4$

풍쌤 POINT

이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 두 식을 연립한 이차방정식의 판별식 D의 값의 부호에 따라 결정된다.
① $D>0$이면 교점의 개수는 2
② $D=0$이면 교점의 개수는 1
③ $D<0$이면 교점의 개수는 0

유형 08 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

12 이차함수 $y=x^2+3x-2$의 그래프와 직선 $y=-x+k$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

> 풀이 이차함수 $y=x^2+3x-2$와 직선 $y=-x+k$를 연립한 이차방정식 $x^2+4x-(k+2)=0$의 판별식을 D라고 하면
> $\frac{D}{4}=2^2-1\times\{-(k+2)\}=k+6$
> 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로
> $k+6>0$
> 따라서 ______이다.

(2) 한 점에서 만난다.

(3) 만나지 않는다.

13 이차함수 $y=x^2-x+k$의 그래프와 직선 $y=5x-1$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다.

(3) 만나지 않는다.

14 이차함수 $y=kx^2-2x+1$의 그래프와 직선 $y=2x+4$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다.

(3) 만나지 않는다.

풍쌤 POINT

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계 문제는 두 식을 연립한 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+(c-n)=0$의 판별식을 이용하여 해결한다.

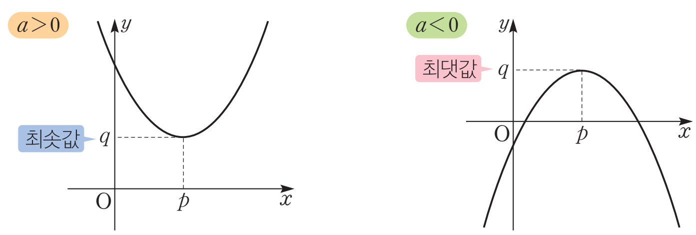
05 이차함수의 최대·최소

❶ 이차함수의 최대 · 최소

x가 모든 실수의 값을 가질 때, 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는

① $a>0$이면 $x=p$에서 최솟값 q를 갖고, 최댓값은 없다.

② $a<0$이면 $x=p$에서 최댓값 q를 갖고, 최솟값은 없다.



› x가 모든 실수의 값을 가질 때, 이차함수는 꼭짓점에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다.

유형 09 이차함수의 최대 · 최소

정답과 풀이 044쪽

15 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $y=x^2-2x+4$

› 풀이 $y=x^2-2x+4$
$=(x-1)^2+3$
이므로 최솟값은 ___, 최댓값은 없다.

(2) $y=-x^2+6x-1$

(3) $y=-x^2+2x-8$

(4) $y=5x^2+2$

(5) $y=-2x^2-2x+3$

(6) $y=3x^2+12x-2$

풍쌤 POINT

x가 모든 실수의 값을 가질 때, 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는

① $a>0$이면 최솟값 q를 갖고, 최댓값은 없다.

② $a<0$이면 최댓값 q를 갖고, 최솟값은 없다.

정답과 풀이 044쪽

16 다음을 구하시오.

(1) 이차함수 $y=x^2-4x+k$의 최솟값이 4일 때, 실수 k의 값

> 풀이 $y=x^2-4x+k$
> $=(x-2)^2+k-4$
> 이고, 최솟값이 4이므로 $k-4=4$이다.
> 따라서 $k=$___이다.

(2) 이차함수 $y=-2x^2+12x-k$의 최댓값이 -2일 때, 실수 k의 값

(3) 이차함수 $y=-4x^2-6x+2k$의 최댓값이 0일 때, 실수 k의 값

(4) 이차함수 $y=3x^2+6kx+8$의 최솟값이 -4일 때, 실수 k의 값

17 다음을 구하시오.

(1) 이차함수 $y=x^2-ax+b$가 $x=1$에서 최솟값 1을 가질 때, 상수 a, b의 값

> 풀이 $y=x^2-ax+b$는 꼭짓점에서 최솟값을 가지므로
> $y=(x-1)^2+1$과 같이 나타낼 수 있다. 즉,
> $x^2-ax+b=(x-1)^2+1$
> $=x^2-2x+2$
> 이므로 계수비교법에 의하여
> $a=$___, $b=$___이다.

(2) 이차함수 $y=-x^2+ax+2b$가 $x=2$에서 최댓값 -4를 가질 때, 상수 a, b의 값

(3) 이차함수 $y=2x^2+ax+b$가 $x=-3$에서 최솟값 -5를 가질 때, 상수 a, b의 값

(4) 이차함수 $y=-3x^2+2ax+2b$가 $x=-1$에서 최댓값 12를 가질 때, 상수 a, b의 값

풍쌤 POINT

x가 모든 실수의 값을 가질 때, 이차함수는 꼭짓점에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다.

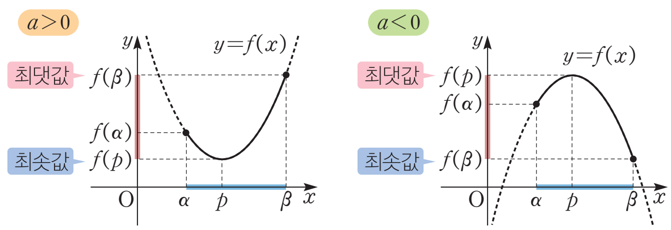
06 제한된 범위에서 이차함수의 최대·최소

❶ 제한된 범위에서 이차함수의 최대 · 최소

x의 값의 범위가 $\alpha \le x \le \beta$일 때, 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은 그래프를 그려서 확인한다.

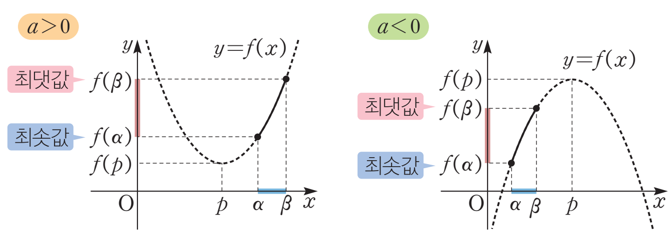
① 꼭짓점의 x좌표 p가 x의 값의 범위에 속하는 경우

$f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(p)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값



② 꼭짓점의 x좌표 p가 x의 값의 범위에 속하지 않는 경우

$f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값



› x의 값의 범위에 제한이 있는 이차함수의 최대 · 최소에서는 꼭짓점의 위치에 주의해야 한다.

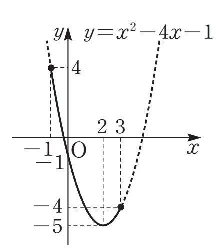
유형 11 제한된 범위에서 이차함수의 최대 · 최소

정답과 풀이 044쪽

18 다음 주어진 범위에서 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $y=x^2-4x-1$ $(-1\le x\le 3)$

› 풀이 $y=x^2-4x-1$
$=(x-2)^2-5$
이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x=$____에서
최댓값 ___, $x=$___에서
최솟값 ____를 갖는다.



(2) $y=-x^2+8x+4$ $(2\le x\le 6)$

(3) $y=x^2+2x+1$ $(0\le x\le 1)$

(4) $y=-2x^2+4x+3$ $(1\le x\le 2)$

(5) $y=2x^2+6x-10$ $(-5\le x\le -4)$

(6) $y=-3x^2+3x-2$ $(0\le x\le 2)$

유형 12 이차함수의 최대 · 최소와 미정계수

19 x의 값의 범위가 다음과 같을 때, 이차함수 $y=x^2+2x-3$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $-4\leq x\leq -3$

> 풀이 $y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$
> $-4\leq x\leq -3$이므로
> $x=$____에서 최댓값 ___,
> $x=$____에서 최솟값 ___을 갖는다.

(2) $-3\leq x\leq -1$

(3) $-2\leq x\leq 0$

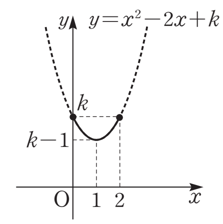
(4) $0\leq x\leq 1$

풍쌤 POINT

제한된 범위에서 이차함수의 최대 · 최소를 구할 때, 꼭짓점의 x좌표가 x의 값의 범위에 속하면 꼭짓점의 y좌표는 반드시 최댓값이나 최솟값 중 하나이다.

20 $0\leq x\leq 2$에서 이차함수 $f(x)=x^2-2x+k$의 최솟값이 5일 때, 실수 k의 값을 구하시오.

> 풀이 $f(x)=x^2-2x+k$
> $=(x-1)^2+k-1$
> 이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



> $0\leq x\leq 2$에서 꼭짓점의 x좌표가 범위에 포함되므로 최솟값은 $f(1)=$_____$=5$이다.
> 따라서 $k=$___이다.

21 $3\leq x\leq 4$에서 이차함수 $f(x)=-2x^2+8x+k$의 최댓값이 15일 때, 이차함수 $f(x)$의 최솟값을 구하시오.

풍쌤 POINT

제한된 범위에서 이차함수의 최대 · 최소를 구할 때는 주어진 범위에 꼭짓점이 포함되는지부터 확인한다.

07 이차함수의 최대·최소의 활용

❶ 이차함수의 최대 · 최소의 활용

이차함수의 최대 · 최소의 활용 문제는 다음과 같이 푼다.

① 주어진 조건 중에서 미지수 x로 놓을 조건을 정하고 상황을 x에 대한 이차 함수로 나타낸다.

② x의 값의 범위를 구한다.

③ ②의 제한된 범위에서 x에 대한 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

› 미지수로 정한 x가 시간, 길이 등을 나타내면 $x>0$임에 유의한다.

유형 13 이차함수의 최대 · 최소의 활용

정답과 풀이 046쪽

22 어떤 물체를 지면에서 초속 20 m로 똑바로 위로 쏘아 올렸을 때, x초 후 지면으로부터 이 물체까지의 높이를 $y\text{ m}$라고 하면 x와 y 사이에는 $y=-5x^2+20x$인 관계식이 성립한다고 한다. 이 물체를 쏘아 올린 후 4초 동안 물체의 높이를 측정할 때, 이 물체가 도달하는 최고 높이를 구하시오.

(단, 물체의 크기는 생각하지 않는다.)

› 풀이 $y=-5x^2+20x=-5(x-2)^2+20$

이고, $0\le x\le 4$이므로 함수 $y=-5x^2+20x$는

$x=$___에서 최댓값 ___을 가진다.

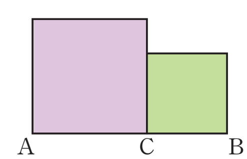
따라서 물체가 도달하는 최고 높이는 ___ m이다.

23 어떤 물체를 지면으로부터 40 m 높이에서 초속 30 m로 똑바로 위로 쏘아 올렸을 때, x초 후 지면으로부터 이 물체까지의 높이를 $y\text{ m}$라고 하면 x와 y 사이에는 $y=40+30x-5x^2$인 관계식이 성립한다고 한다. 이 물체를 쏘아 올린 후 6초 동안 물체의 높이를 측정할 때, 이 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 이때의 높이를 구하시오.

(단, 물체의 크기는 생각하지 않는다.)

24 길이가 80 m인 철망으로 직사각형 모양의 꽃밭을 만들 때, 꽃밭의 최대 넓이를 구하시오.

25 오른쪽 그림과 같이 선분 AC, CB를 각각 한 변으로 하는 두 개의 정사각형을 만들려고 한다. 선분 AB의 길이가 20 cm일 때, 두 개의 정사각형의 넓이의 합이 최소가 되도록 하는 선분 AC의 길이를 구하시오.



풍쌤 POINT

미지수 x를 정한 후 주어진 상황을 x로 표현할 때는 한 개의 미지수로 주어진 조건을 모두 나타낼 수 있도록 한다.

중단원 점검문제

01

$a>0$, $b<0$일 때, 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 지나지 않는 사분면을 구하시오.

02

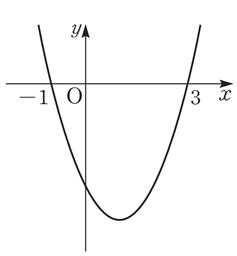
이차함수 $y=(x-2)^2+2$의 그래프를 그리시오.

03

이차함수 $y=-3x^2+6x-8$의 그래프를 그리시오.

04

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 다음과 같을 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근을 구하시오.



05

두 수 2, -3을 근으로 하는 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$이라고 할 때, 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프를 그리시오.

(단, a, b는 상수이다.)

06

이차함수 $y=8x^2-2x-3$과 x축의 교점의 좌표를 모두 구하시오.

07

이차함수 $y=x^2+3x-3$의 그래프와 x축의 교점의 개수를 a, 이차함수 $y=2x^2+2x+5$의 그래프와 x축의 교점의 개수를 b라고 할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

08

이차함수 $y=kx^2-3x+1$의 그래프가 x축과 접하도록 하는 실수 k의 값을 구하시오.

09

이차함수 $y=-x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=x+4$의 교점의 x좌표를 모두 구하시오.

10

이차함수 $y=ax^2+2bx$의 그래프가 점 $(-1,\ 3)$을 지나고 직선 $y=4x-\dfrac{b^2}{a}$과 접할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

11

이차함수 $y=2x^2+6x-3$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

12

이차함수 $y=-x^2+10x-k$의 최댓값이 4일 때, 실수 k의 값을 구하시오.

13

$-2\leq x\leq 1$일 때, 이차함수 $y=x^2-3$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

14

$x\leq 1$에서 이차함수 $y=-x^2+2kx$의 최댓값이 9일 때, 실수 k의 값을 모두 구하시오.

15

어떤 물체를 지면에서 초속 10 m로 똑바로 위로 쏘아 올렸을 때, x초 후 지면으로부터 이 물체까지의 높이를 y m라고 하면 x와 y 사이에는 $y=-5x^2+10x$인 관계식이 성립한다고 한다. 이 물체를 쏘아 올린 후 2초 동안 물체의 높이를 측정할 때, 이 물체가 도달하는 최고 높이를 구하시오.

(단, 물체의 크기는 생각하지 않는다.)

16

길이가 24인 철사로 직사각형을 만들 때, 직사각형의 최대 넓이를 구하시오.

01 삼차방정식과 사차방정식

❶ 인수분해를 이용한 방정식의 풀이

① 방정식 $f(x)=0$을 인수분해한다.

② $ABC=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$ 또는 $C=0$이다.

$ABCD=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$ 또는 $C=0$ 또는 $D=0$이다.

❷ 인수 정리를 이용한 방정식의 풀이

① 인수 정리를 이용하여 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$인 상수 a의 값을 찾는다.

② 조립제법을 이용하여 다항식 $f(x)$를 나눈 후 방정식을 푼다.

› 인수분해의 기본 공식을 이용할 수 없을 때, 인수 정리와 조립제법을 이용한다.

유형 01 인수분해를 이용한 방정식의 풀이

01 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^3-1=0$

› 풀이 $x^3-1=0$의 좌변을 인수분해하면
$(x-1)(x^2+x+1)=0$
이므로 $x=$___ 또는 $x=$________ 이다.

(2) $x^3+64=0$

(3) $x^3-2x^2-3x=0$

(4) $x^4-8x^2=0$

(5) $16x^4-81=0$

(6) $x^4-27x=0$

풍쌤 POINT

다음 인수분해의 기본 공식을 이용한다.

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

정답과 풀이 048쪽

02 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^3+2x^2-13x+10=0$

> 풀이 $f(x)=x^3+2x^2-13x+10$으로 놓으면
> $f(1)=1+2-13+10=0$이므로 조립제법을 이용하여
> $f(x)$를 $x-1$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & -13 & 10 \\ & & 1 & 3 & -10 \\ \hline & 1 & 3 & -10 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서

$f(x)=(x-1)(x^2+3x-10)$

$\quad=(x-1)(x+5)(x-2)$

에서 주어진 방정식은

$(x-1)(x+5)(x-2)=0$

이므로 $x=$___ 또는 $x=$____ 또는 $x=$___이다.

(2) $x^3-2x^2-4x-1=0$

(3) $x^3+x+10=0$

(4) $4x^3+8x^2-11x+3=0$

(5) $3x^4-7x^3+4x=0$

(6) $x^4-6x^3+12x^2-9x+2=0$

(7) $2x^4-3x^3-6x^2-7x-6=0$

풍쌤 POINT

계수가 모두 정수인 다항식 $f(x)$에서 $f(a)=0$을 만족시키는 a가 될 수 있는 값은

➡ $a=\pm\dfrac{(f(x)\text{의 상수항의 약수})}{(f(x)\text{의 최고차항의 계수의 약수})}$

03 다음 삼차방정식의 한 근이 주어졌을 때, 나머지 두 근을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

(1) $2x^3+(a-2)x^2-(2a-1)x+2=0$, 한 근 -2

> 풀이 주어진 방정식에 $x=-2$를 대입하면
> $-16+4(a-2)+2(2a-1)+2=0$
> $8a-24=0$이므로 $a=3$
> 이 값을 주어진 방정식에 대입하면
> $2x^3+x^2-5x+2=0$
> 한 근이 -2이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 1 & -5 & 2 \\ & & -4 & 6 & -2 \\ \hline & 2 & -3 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

> $(x+2)(2x^2-3x+1)=0$
> $(x+2)(x-1)(2x-1)=0$
> 이므로 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$
> 따라서 나머지 두 근은 ___, ___ 이다.

(2) $x^3-3ax^2+(5a-2)x-a-1=0$, 한 근 1

04 다음 사차방정식의 두 근이 주어졌을 때, 나머지 두 근을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

(1) $x^4+4ax^3+(b-3)x^2+16x+2a-5b=0$,
두 근 -2, 1

> 풀이 주어진 방정식에 $x=-2$와 $x=1$을 각각 대입하면
> $30a+b=-28$, $3a-2b=-7$
> 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$
> 이 값을 주어진 방정식에 대입하면
> $x^4-4x^3-x^2+16x-12=0$
> 두 근이 -2, 1이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\ & & -2 & 12 & -22 & 12 \\ \hline 1 & 1 & -6 & 11 & -6 & \boxed{0} \\ & & 1 & -5 & 6 & \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

> $(x+2)(x-1)(x^2-5x+6)=0$
> $(x+2)(x-1)(x-2)(x-3)=0$
> 이므로 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$
> 따라서 나머지 두 근은 ___, ___이다.

(2) $x^4-2ax^3+(3a+b)x^2+2bx-3a-2b=0$,
두 근 -1, 1

풍쌤 POINT

방정식의 한 근 α가 주어지면 방정식에 $x=\alpha$를 대입하여 미정계수를 구한 후, 조립제법을 이용하여 인수분해한다.

02 복잡한 삼차방정식과 사차방정식

❶ 공통부분이 있는 방정식의 풀이

공통부분을 치환하여 인수분해한 후 방정식을 푼다.

❷ $x^4+ax^2+b=0$ 꼴의 방정식의 풀이

① $x^2=t$로 치환하여 $t^2+at+b=0$을 인수분해하여 방정식을 푼다.

② $t^2+at+b=0$을 인수분해할 수 없으면 ax^2을 적당히 나누어 $(\quad)^2-(\quad)^2$ 꼴을 만들고 합차 공식을 이용하여 인수분해하여 방정식을 푼다.

❸ $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ 꼴의 방정식의 풀이

① $x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누고 $x+\frac{1}{x}=t$로 치환한다.

② 치환한 식을 정리한 후 인수분해하여 방정식을 푼다.

› 복이차방정식
$x^4+ax^2+b=0$과 같이 차수가 짝수인 항과 상수항으로만 이루어진 방정식
(단, a, b는 상수이다.)

› 상반방정식
중앙항을 기준으로 각 항의 계수가 좌우대칭인 방정식

정답과 풀이 050쪽

유형 04 공통부분이 있는 방정식의 풀이

05 다음 방정식을 푸시오.

(1) $(x^2-3x-5)(x^2-3x+3)+7=0$

› 풀이 $(x^2-3x-5)(x^2-3x+3)+7=0$에서
$x^2-3x=t$로 놓으면
$(t-5)(t+3)+7=0$, $t^2-2t-8=0$
$(t+2)(t-4)=0$
위의 식에 $t=x^2-3x$를 대입하면
$(x^2-3x+2)(x^2-3x-4)=0$
$(x-1)(x-2)(x+1)(x-4)=0$
따라서 $x=$___ 또는 $x=$___ 또는 $x=$____ 또는
$x=$___이다.

(2) $(x^2+x-3)(x^2+x+4)+6=0$

(3) $(x^2-2x)^2+3x^2-6x-4=0$

풍쌤 POINT

공통부분을 치환하여 인수분해한 후에 치환한 식을 원래대로 돌린 후 다시 인수분해해야 한다.

유형 05 $x^4+ax^2+b=0$ 꼴의 방정식의 풀이

06 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^4-5x^2+4=0$

› 풀이 $x^4-5x^2+4=0$에서 $x^2=t$로 놓으면
$t^2-5t+4=0$, $(t-1)(t-4)=0$
위의 식에 $t=x^2$을 대입하면
$(x^2-1)(x^2-4)=0$
$(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)=0$
따라서 $x=$____ 또는 $x=$___ 또는 $x=$____ 또는
$x=$___이다.

(2) $x^4+2x^2-48=0$

(3) $x^4+7x^2+10=0$

유형 06 좌우대칭인 꼴의 방정식의 풀이

07 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^4+2x^2+9=0$

> 풀이 $x^4+2x^2+9=0$에서
$(x^4+6x^2+9)-4x^2=0$
$(x^2+3)^2-(2x)^2=0$
$(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)=0$
따라서 $x=$________ 또는 $x=$______이다.

(2) $x^4+4=0$

(3) $x^4-11x^2+1=0$

풍쌤 POINT

x^4+ax^2+b에서 kx^2을 빼거나 더하여 $x^4+(a+k)x^2+b-kx^2$의 형태로 만들었을 때, $x^4+(a+k)x^2+b$가 완전제곱식이 되도록 k의 값을 정한다.

08 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$

> 풀이 $x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면
$x^2-5x+8-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$
$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0$
이때 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$이므로
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$
$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면
$t^2-5t+6=0$, $(t-2)(t-3)=0$
이므로 $t=2$ 또는 $t=3$이다.
(i) $t=2$일 때
$x+\frac{1}{x}=2$, $x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$
따라서 $x=1$ (중근)이다.
(ii) $t=3$일 때
$x+\frac{1}{x}=3$, $x^2-3x+1=0$
따라서 $x=$________이다.

(2) $x^4+3x^3-2x^2+3x+1=0$

(3) $x^4+4x^3+6x^2+4x+1=0$

풍쌤 POINT

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$를 기억하여 이용한다.

03 삼차방정식의 근과 계수의 관계

❶ 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라고 하면

① $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$

② $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$

③ $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

❷ 삼차방정식의 작성

α, β, γ를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$$

즉, $x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$

› x^3-(세 근의 합)x^2 +(두 근끼리의 곱의 합)x −(세 근의 곱)$=0$ 으로 생각할 수 있다.

유형 07 삼차방정식의 근과 계수의 관계

정답과 풀이 052쪽

09 다음 삼차방정식의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$의 값을 구하시오.

(1) $x^3-6x^2+4x-2=0$

(2) $x^3+x^2-x+7=0$

(3) $x^3+4x^2-3x-1=0$

(4) $x^3-5x^2+7=0$

(5) $2x^3-4x^2+3x-8=0$

(6) $3x^3+4x^2+6x-1=0$

(7) $6x^3-4x-12=0$

풍쌤 POINT

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라고 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

유형 08 삼차방정식의 근과 계수의 관계의 활용

10 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\alpha+\beta+\gamma$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

(3) $\alpha\beta\gamma$

(4) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

> 풀이 $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$
$=(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)(\gamma+1)$
$=\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma+\alpha\beta+\alpha+\beta+1$
$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$
$=\_\_\_+\_\_\_+\_\_\_+1=\_\_\_$

(5) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$

(6) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

11 삼차방정식 $x^3+x^2-2x-3=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\alpha+\beta+\gamma$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

(3) $\alpha\beta\gamma$

(4) $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

(5) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

> 풀이 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=(\_\_\_\_)^2-2\times(-2)$
$=\_\_\_$

(6) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

풍쌤 POINT

삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하기 위해 곱셈 공식의 변형을 이용하여 주어진 식을 정리한 후 식의 값을 대입한다.

유형 09 삼차방정식의 작성

12 다음 세 수를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하시오.

(1) $1,\ 2,\ 3$

> 풀이 주어진 세 수를 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라고 하면
$\alpha+\beta+\gamma=6$,
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=11$,
$\alpha\beta\gamma=6$
이므로 구하는 삼차방정식은
$\underline{\qquad\qquad\qquad}=0$

(2) $-2,\ 0,\ 2$

(3) $\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}$

(4) $-1,\ 3\sqrt{2},\ -3\sqrt{2}$

(5) $3,\ 2-2i,\ 2+2i$

13 삼차방정식 $x^3-2x^2+3x+1=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라고 할 때, 다음을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하시오.

(1) $-\alpha,\ -\beta,\ -\gamma$

> 풀이 삼차방정식 $x^3-2x^2+3x+1=0$의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$이므로
$\alpha+\beta+\gamma=2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,\ \alpha\beta\gamma=-1$
$-\alpha,\ -\beta,\ -\gamma$를 세 근으로 하는 삼차방정식은
세 근의 합이 $-(\alpha+\beta+\gamma)=-2$,
두 근끼리의 곱의 합이 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$,
세 근의 곱이 $-\alpha\beta\gamma=1$
이므로 구하는 삼차방정식은
$\underline{\qquad\qquad\qquad}=0$

(2) $\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1$

(3) $\dfrac{1}{\alpha},\ \dfrac{1}{\beta},\ \dfrac{1}{\gamma}$

풍쌤 POINT

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은
$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$
즉, $x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$이므로
세 근의 합 ➡ $\alpha+\beta+\gamma$,
두 근끼리의 곱의 합 ➡ $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$,
세 근의 곱 ➡ $\alpha\beta\gamma$
를 알면 된다.

04 삼차방정식의 켤레근

❶ 삼차방정식의 켤레근

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$에서

① 계수 a, b, c, d가 유리수일 때, $p+q\sqrt{m}$이 근이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다.
(단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

② 계수 a, b, c, d가 실수일 때, $p+qi$가 근이면 $p-qi$도 근이다.
(단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

› 삼차방정식에서
① 계수가 모두 유리수일 때, $p+q\sqrt{m}$, $p-q\sqrt{m}$ $(q\neq0)$이 근이면 나머지 한 근은 유리수이다.
② 계수가 모두 실수일 때, $p+qi$, $p-qi$ $(q\neq0)$가 근이면 나머지 한 근은 실수이다.

유형 10 삼차방정식의 켤레근

정답과 풀이 053쪽

14 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-1=0$의 한 근이 다음과 같을 때, 유리수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $-\sqrt{3}$

› 풀이 계수가 유리수이고 한 근이 $-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $\sqrt{3}$이다.
이때 나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-\sqrt{3})+\sqrt{3}=\alpha=-a$ …… ㉠
$-\alpha\sqrt{3}+\alpha\sqrt{3}+(-\sqrt{3})\times\sqrt{3}=-3=b$ …… ㉡
$\alpha\times(-\sqrt{3})\times\sqrt{3}=-3\alpha=1$ …… ㉢

㉡에서 $b=$____, ㉢에서 $\alpha=$____ 이므로
㉠에 대입하면 $a=$____ 이다.

(2) $\sqrt{2}-1$

(3) $2+\sqrt{5}$

15 삼차방정식 $x^3-2x^2+ax+b=0$의 한 근이 다음과 같을 때, 실수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $-i$

(2) $1+2i$

(3) $2i+3$

풍쌤 POINT

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$에서
① 계수 a, b, c, d가 유리수일 때, $p+q\sqrt{m}$이 근이면 $p-q\sqrt{m}$도 근 ← 무리수 부분의 부호가 반대로
② 계수 a, b, c, d가 실수일 때, $p+qi$가 근이면 $p-qi$도 근
허수부분의 부호가 반대로. 즉, 켤레복소수와 같다.

05 방정식 $x^3=\pm1$의 허근

❶ 방정식 $x^3=1$의 허근의 성질

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 하면 (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

② $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

③ $\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^3}{\omega}=\omega^2$

› $x^3=1$에서
$x^3-1=0$
$(x-1)(x^2+x+1)=0$
이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 근이다.

❷ 방정식 $x^3=-1$의 허근의 성질

방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라고 하면 (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

② $\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

③ $\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{-\omega^3}{\omega}=-\omega^2$

› $\omega^2=-\overline{\omega}=-\dfrac{1}{\omega}$

유형 11 방정식 $x^3=1$의 허근

정답과 풀이 054쪽

16 방정식 $x^3=1$의 허근을 ω라고 할 때, 다음 식의 값을 구하시오. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

(1) ω^3

(2) $\omega^2+\omega+1$

(3) $\omega+\overline{\omega}$

(4) $\omega\overline{\omega}$

(5) ω^9

› 풀이 $\omega^9=(\omega^3)^3=$___

(6) $\omega+\dfrac{1}{\omega}$

(7) $\omega^{20}+\omega^{10}+\omega^3+\omega+\overline{\omega}$

풍쌤 POINT

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 하면
(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

② $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

③ $\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^3}{\omega}=\omega^2$

유형 12 방정식 $x^3=-1$의 허근

정답과 풀이 054쪽

17 방정식 $x^3=-1$의 허근을 ω라고 할 때, 다음 식의 값을 구하시오. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

(1) $\omega^2-\omega+1$

(2) $\omega\overline{\omega}$

(3) $3\omega^2-3\omega+6$

> 풀이 $3\omega^2-3\omega+6=3(\omega^2-\omega+1)+3=$___

(4) ω^{15}

(5) $1-\omega+\omega^2+\omega^3-\omega^4+\omega^5$

(6) $\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}$

(7) $\dfrac{\overline{\omega}}{\omega^2}$

풍쌤 POINT

방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라고 하면
(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

② $\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

③ $\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{-\omega^3}{\omega}=-\omega^2$

06 연립일차방정식

❶ 연립일차방정식

2개 이상의 미지수를 포함하는 2개 이상의 일차방정식

❷ 연립일차방정식의 풀이

① 가감법: 두 식을 더하거나 빼서 미지수를 소거하여 푼다.

② 대입법: 하나의 미지수에 대하여 정리한 후 다른 방정식에 대입하여 푼다.

❸ 연립일차방정식의 특수한 해

연립일차방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$에 대하여

① $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$이면 해가 없다. (불능)

② $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$이면 해가 무수히 많다. (부정)

› 연립방정식의 해가 무수히 많은 경우는 두 식이 같은 경우이다.

정답과 풀이 054쪽

유형 13 미지수가 2개인 연립일차방정식

18 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$

› 풀이 $\begin{cases} x+y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-y=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$으로 놓고 ㉠+㉡을 하면

$2x=8$에서 $x=$___

$x=4$를 ㉠에 대입하면 $y=$___이다.

(2) $\begin{cases} y=2x+1 \\ 4x-y=-5 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x+y=10 \\ 2x-3y=3 \end{cases}$

풍쌤 POINT

미지수가 2개인 연립일차방정식은

① 가감법: 두 식을 더하거나 빼서 미지수를 소거한다.

② 대입법: 하나의 미지수에 대하여 정리한 후 다른 방정식에 대입한다.

의 두 방법 중 하나를 이용하여 푼다.

유형 14 특수한 해를 가진 연립일차방정식

19 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+y=5 \\ x+y=4 \end{cases}$

› 풀이 $\begin{cases} x+y=5 \\ x+y=4 \end{cases}$에서 $\frac{1}{1}=\frac{1}{1}$ ___ $\frac{5}{4}$이므로 해가 없다.

(2) $\begin{cases} y=x+2 \\ 3x-3y=-6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-4y=3 \\ 3x-12y=8 \end{cases}$

풍쌤 POINT

연립일차방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$에서

① $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$이면 해가 없다.

② $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$이면 해가 무수히 많다.

07 연립이차방정식

1 연립이차방정식

미지수가 2개인 연립방정식에서 차수가 가장 높은 방정식이 이차방정식인 연립방정식

2 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이

일차방정식을 한 미지수에 대하여 정리한 후 이차방정식에 대입하여 푼다.

3 두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이

인수분해가 되는 이차방정식을 인수분해하여 얻은 일차방정식을 다른 이차방정식에 각각 대입하여 푼다.

4 대칭형 연립이차방정식

x, y에 대하여 대칭인 식, 즉 x, y를 바꾸어 대입해도 바뀌지 않는 대칭형 연립이차방정식은 x, y를 두 근으로 갖는 이차방정식을 이용하여 푼다.

› 미지수가 2개인 연립이차방정식의 형태

① $\begin{cases} (\text{일차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases}$

② $\begin{cases} (\text{이차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases}$

› 대칭식

x, y를 바꾸어 대입해도 바뀌지 않는 식

유형 15 연립이차방정식 – $\begin{cases} (\text{일차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases}$

20 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} y=x+2 \\ x^2-y^2=-8 \end{cases}$

› 풀이 $\begin{cases} y=x+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=-8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓고 ㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2-(x+2)^2=-8$

$-4x-4=-8$

즉, $x=1$이므로 ㉠에 대입하면 $y=3$

따라서 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=___ \\ y=___ \end{cases}$이다.

(2) $\begin{cases} x-y=-1 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=-2 \\ 2x^2+y^2=3 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} y=2x+1 \\ x^2-xy=-20 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x+2y=3 \\ x^2-xy-y^2=9 \end{cases}$

풍쌤 POINT

일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식은 일차방정식을 한 미지수에 대하여 나타낸 후 이차방정식에 대입하여 푼다.

정답과 풀이 054쪽

21 다음 연립이차방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases}x^2-5xy+6y^2=0\\x^2+y^2=10\end{cases}$

> 풀이 $\begin{cases}x^2-5xy+6y^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

으로 놓고 ㉠의 좌변을 인수분해하면

$(x-2y)(x-3y)=0$

따라서 $x=2y$ 또는 $x=3y$이다.

(i) $x=2y$일 때

$x=2y$를 ㉡에 대입하면

$(2y)^2+y^2=10$

$5y^2=10$

$y^2=2$

따라서 $y=\sqrt{2}$일 때 $x=2\sqrt{2}$,

$y=-\sqrt{2}$일 때 $x=-2\sqrt{2}$이다.

(ii) $x=3y$일 때

$x=3y$를 ㉡에 대입하면

$(3y)^2+y^2=10$

$10y^2=10$

$y^2=1$

따라서 $y=1$일 때 $x=3$, $y=-1$일 때 $x=-3$이다.

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=2\sqrt{2}\\y=\underline{\qquad}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\sqrt{2}\\y=\underline{\qquad}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=\underline{\qquad}\end{cases}$ 또는

$\begin{cases}x=-3\\y=\underline{\qquad}\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x^2+2xy=0\\x^2+2y^2=12\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2-y^2=0\\2x^2+4xy-y^2=15\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x^2+3xy+2y^2=30\\x^2-5xy+4y^2=0\end{cases}$

(5) $\begin{cases}2x^2-3xy+y^2=0\\3x^2+y^2=28\end{cases}$

풍쌤 POINT

두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식에서 한 이차방정식이 인수분해되는 경우, 이차방정식을 인수분해하여 두 개의 일차방정식을 얻는다. 그리고 앞서 배운 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식으로 바꾸어 푼다.

22 연립방정식 $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x^2-y^2=-1 \end{cases}$ 의 근이 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=a \\ ax+by=-1 \end{cases}$ 을 만족시킬 때, 상수 a, b의 값을 모두 구하시오.

> 풀이 $\begin{cases} x+y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-y^2=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓고 ㉠을 $y=-x+5$로 정리하여 ㉡에 대입하면

$2x^2-(-x+5)^2=-1$

$x^2+10x-24=0$

$(x+12)(x-2)=0$

즉, $x=-12$ 또는 $x=2$이므로 ㉠에 대입하여 y의 값을 구하면 $x=-12$일 때 $y=17$, $x=2$일 때 $y=3$이다.

(i) $x=-12$, $y=17$일 때

$\begin{cases} x=-12 \\ y=17 \end{cases}$을 $\begin{cases} 2x+y=a \\ ax+by=-1 \end{cases}$에 대입하면

$\begin{cases} a=-7 \\ -12a+17b=-1 \end{cases}$

따라서 $a=-7$, $b=-5$이다.

(ii) $x=2$, $y=3$일 때

$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$을 $\begin{cases} 2x+y=a \\ ax+by=-1 \end{cases}$에 대입하면

$\begin{cases} a=7 \\ 2a+3b=-1 \end{cases}$

따라서 $a=7$, $b=-5$이다.

(i), (ii)에서

$a=-7$, $b=$____ 또는 $a=7$, $b=$____이다.

23 연립방정식 $\begin{cases} x+y=3 \\ ax+y=7 \end{cases}$ 의 근이 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=b \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$ 을 만족시킬 때, 상수 a, b의 값을 모두 구하시오.

24 다음 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지도록 하는 실수 a의 값을 모두 구하시오.

(1) $\begin{cases} x-y=a \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$

> 풀이 $\begin{cases} x-y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓고 ㉠을 $y=x-a$로 정리하여 ㉡에 대입하면

$x^2+(x-a)^2=10$

$2x^2-2ax+a^2-10=0$

이때 오직 한 쌍의 해를 가지려면 위의 이차방정식이 중근을 가져야 한다.

$2x^2-2ax+a^2-10=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(\_\_\_\_)^2-2\times(a^2-10)$

$=$________$=0$

따라서 $a=$______이다.

(2) $\begin{cases} 2x+y=-2 \\ x^2+y^2=a \end{cases}$

풍쌤 POINT

연립방정식 $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$을 만족시키는 근이 $\begin{cases} C=0 \\ D=0 \end{cases}$을 만족시키면

연립방정식 $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$의 근은 $\begin{cases} A=0 \\ C=0 \end{cases}$과 $\begin{cases} A=0 \\ D=0 \end{cases}$도 만족시킨다.

유형 18 대칭형 연립이차방정식

25 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-8 \end{cases}$

> 풀이 $x+y=-2$, $xy=-8$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은
> $t^2+2t-8=0$
> 으로 놓을 수 있다.
> $t^2+2t-8=0$에서 $(t+4)(t-2)=0$
> 이므로 $t=-4$ 또는 $t=2$이다.
> 따라서 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=\_\_\_ \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=\_\_\_\_\_ \end{cases}$ 이다.

(2) $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-54 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} xy=15 \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$

풍쌤 POINT

대칭형 연립이차방정식은 곱셈 공식의 변형과 x, y를 두 근으로 갖는 이차방정식을 이용하여 푼다.

유형 19 대칭형 연립이차방정식과 미정계수

26 다음 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지도록 하는 실수 a의 값을 모두 구하시오.

(1) $\begin{cases} x+y=2a-2 \\ xy=2a^2-a-1 \end{cases}$

> 풀이 $x+y=2a-2$, $xy=2a^2-a-1$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은
> $t^2-2(a-1)t+2a^2-a-1=0$ …… ㉠
> 으로 놓을 수 있다.
> 이때 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이차방정식 ㉠이 중근을 가져야 한다.
> 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면
> $\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-1\times(2a^2-a-1)$
> $=-a^2-a+2=0$
> $a^2+a-2=0$에서 $(a+2)(a-1)=0$이므로
> $a=\_\_\_\_$ 또는 $a=__$이다.

(2) $\begin{cases} x+y=4a+2 \\ xy=3a^2+1 \end{cases}$

풍쌤 POINT

대칭형 연립이차방정식의 미정계수는 x, y를 두 근으로 갖는 이차방정식을 만들고 판별식을 이용한다.

08 부정방정식

❶ 부정방정식

방정식의 개수가 미지수의 개수보다 적어 해가 무수히 많은 부정방정식은 정수 조건이나 실수 조건 등에 따라 유한개의 해로 정해진다.

① 정수 조건: (일차식)×(일차식)$=k$ 꼴로 변형하여 푼다.

(단, k는 정수이다.)

② 실수 조건: 실수 A, B에 대하여 $A^2+B^2=0$이면 $A=0$, $B=0$임을 이용한다.

보기 방정식 $x+y=10$은 미지수가 2개이고 방정식이 1개이므로 다음과 같이 해가 무수히 많다.

$\begin{cases} x=1 \\ x=9 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ x=5 \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=5+\sqrt{5} \\ x=5-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 …

유형 20 정수 조건이 주어진 부정방정식

27 다음 방정식을 만족시키는 정수 x, y의 값을 구하시오.

(1) $xy+2x-y-2=2$

> 풀이 $xy+2x-y-2=2$에서
$x(y+2)-(y+2)=2$
$(x-1)(y+2)=2$

1	2	➡ $x-1=1$, $y+2=2$이므로 $x=2$, $y=0$
2	1	➡ $x-1=2$, $y+2=1$이므로 $x=3$, $y=-1$
-1	-2	➡ $x-1=-1$, $y+2=-2$이므로 $x=0$, $y=-4$
-2	-1	➡ $x-1=-2$, $y+2=-1$이므로 $x=-1$, $y=-3$

따라서 $\begin{cases} x=2 \\ y=\_\_\_ \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=\_\_\_ \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=\_\_\_ \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=\_\_\_ \end{cases}$ 이다.

(2) $xy-6x-5y+29=0$

(3) $xy+3x-3y-6=8$

(4) $xy-4x+2y-12=0$

유형 21 실수 조건이 주어진 부정방정식

28 다음 이차방정식의 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 상수 a의 값을 모두 구하시오.

(1) $x^2-ax+a=0$

> 풀이 $x^2-ax+a=0$의 정수인 두 근을 α, β $(\alpha\geq\beta)$라고 하면 $\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=a$이다.
> 이때 $\alpha\beta-(\alpha+\beta)=a-a=0$이므로
> $\alpha\beta-\alpha-\beta=0$
> $\alpha(\beta-1)-(\beta-1)=1$
> $(\alpha-1)(\beta-1)=1$
> 1 1 ➡ $\alpha-1=1$, $\beta-1=1$이므로
> $\alpha=2$, $\beta=2$이다.
> -1 -1 ➡ $\alpha-1=-1$, $\beta-1=-1$이므로
> $\alpha=0$, $\beta=0$이다.
> (i) $\alpha=2$, $\beta=2$일 때
> $\alpha+\beta=a$에 $\alpha=2$, $\beta=2$를 대입하면 $a=4$
> (ii) $\alpha=0$, $\beta=0$일 때
> $\alpha+\beta=a$에 $\alpha=0$, $\beta=0$을 대입하면 $a=0$
> (i), (ii)에서 $a=$____ 또는 $a=$____이다.

(2) $x^2-2ax+2a-5=0$

풍쌤 POINT

정수 조건이 주어진 부정방정식은
(정수)×(정수)=(정수)임을 이용하여 푼다.
이때 자연수 조건이 주어지지 않은 경우, 예를 들어
(   )×(   )=2가 주어졌을 때 1×2, 2×1뿐만 아니라
$(-1)\times(-2)$와 $(-2)\times(-1)$과 같이 음수도 고려해야 한다.

29 다음 이차방정식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오.

(1) $x^2+y^2+6x-2y+10=0$

> 풀이 $x^2+y^2+6x-2y+10=0$에서
> $(x^2+6x+9)+(y^2-2y+1)=0$
> $(x+3)^2+(y-1)^2=0$
> 이때 x, y가 실수이므로
> $x+3=0$, $y-1=0$
> 따라서 $x=$_____, $y=$____이다.

(2) $x^2+5y^2+4xy-4y+4=0$

(3) $2x^2+4y^2-6x-4xy+9=0$

(4) $2x^2+y^2+6x+2xy+10y+29=0$

풍쌤 POINT

실수 조건이 주어진 부정방정식은
$A^2+B^2=0$이면 $A=0$, $B=0$임을 이용하여 푼다.
실수 조건이 주어진 부정방정식에서 제곱식으로 변형하기 힘든 경우, 한 문자에 대하여 판별식 D를 구한 후 $D\geq0$임을 이용할 수도 있다.

중단원 점검문제

01

삼차방정식 $x^3+27=0$을 푸시오.

02

사차방정식 $2x^4-3x^3-4x^2+3x+2=0$을 푸시오.

03

방정식 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$의 허근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

04

삼차방정식 $2x^3-5x^2+4x-10=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$의 값을 구하시오.

05

삼차방정식 $x^3-2x^2-ax-2=0$의 세 근 α, β, γ에 대하여 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=6$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

06

삼차방정식 $x^3+x^2+2x+2=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$의 값을 구하시오.

07

삼차방정식 $x^3-x^2+4x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$을 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하시오.

08

삼차방정식 $x^3+2ax^2-bx+8=0$의 한 근이 $\sqrt{2}$일 때, 삼차방정식 $x^3+bx^2-ax+1=0$을 푸시오.

(단, a, b는 유리수이다.)

09

방정식 $x^3=-1$의 허근을 ω라고 할 때, $\dfrac{1-\omega}{\omega^2}$의 값을 구하시오.

10

연립방정식 $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+ay=b \end{cases}$의 해가 무수히 많도록 하는 상수 a, b의 값을 구하시오.

11

연립방정식 $\begin{cases} 2x^2-2y^2+x+y=0 \\ 2x^2+xy-2y^2=-1 \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라고 할 때, $\alpha+\beta$의 최댓값을 구하시오.

12

연립방정식 $\begin{cases} x+y=b \\ x^2-y^2=-21 \end{cases}$의 근이 연립방정식 $\begin{cases} ax^2+y^2=5 \\ x+y=3 \end{cases}$을 만족시킬 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

13

연립방정식 $\begin{cases} -2x+y=a \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$가 오직 한 쌍의 해를 가지도록 하는 실수 a의 값을 모두 구하시오.

14

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x+y+xy=11 \end{cases}$의 실근을 구하시오.

15

이차방정식 $xy-2x+y+1=0$을 만족시키는 정수 x, y의 값을 구하시오.

16

이차방정식 $4x^2+4xy+2y^2-8x-2y+5=0$을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오.

01 부등식의 성질

❶ 부등식의 기본 성질

세 실수 a, b, c에 대하여 다음이 성립한다.

① $a>b$, $b>c$이면 $a>c$

② $a>b$이면 $a+c>b+c$, $a-c>b-c$

③ $a>b$, $c>0$이면 $ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

④ $a>b$, $c<0$이면 $ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

› 부등식의 양변에 곱하거나 나누는 수가 음수이면 부등호의 방향이 바뀐다.

유형 01 부등식의 기본 성질

정답과 풀이 063쪽

01 $a<b$일 때, 다음 □ 안에 알맞은 부등호를 써넣으시오.

(1) $a+2$ □ $b+2$

(2) $\frac{a-1}{3}$ □ $\frac{b-1}{3}$

(3) $-a$ □ $-b$

(4) $2a-10$ □ $2b-10$

(5) $\frac{7a+5}{-4}$ □ $\frac{7b+5}{-4}$

02 $1\le x\le 5$일 때, 다음 식의 값의 범위를 구하시오.

(1) $2x+3$

› 풀이 $1\le x\le 5$의 각 변에 2를 곱하면

$2\le 2x\le 10$

위의 부등식의 각 변에 3을 더하면

$\underline{\quad}\le 2x+3\le \underline{\quad}$

(2) $-\frac{x}{2}$

(3) $\frac{1}{x+5}$

풍쌤 POINT

부등식의 양변의 역수를 취할 때는

① 양변의 부호가 같으면 부등호의 방향이 바뀐다.

② 양변의 부호가 다르면 부등호의 방향은 그대로이다.

02 부등식의 사칙연산

❶ 부등식의 사칙연산

$a\le x\le b$이고 $c\le y\le d$일 때, $x+y$, $x-y$, xy, $\frac{x}{y}$의 값의 범위는 다음과 같다.

① $a+c\le x+y\le b+d$

② $a-d\le x-y\le b-c$

③ $(ac,\ ad,\ bc,\ bd$ 중 최솟값$)\le xy\le(ac,\ ad,\ bc,\ bd$ 중 최댓값$)$

④ $\left(\frac{a}{c},\ \frac{a}{d},\ \frac{b}{c},\ \frac{b}{d}\text{ 중 최솟값}\right)\le\frac{x}{y}\le\left(\frac{a}{c},\ \frac{a}{d},\ \frac{b}{c},\ \frac{b}{d}\text{ 중 최댓값}\right)$

› 부등식의 사칙연산은 각 범위의 양 끝 값을 이용하여 구할 수 있다.

유형 02 부등식의 사칙연산

정답과 풀이 063쪽

03 $-1\le x\le 1$, $2\le y\le 4$일 때, 다음 식의 값의 범위를 구하시오.

(1) $x+y$

› 풀이 $-1+2\le x+y\le 1+4$이므로
$\underline{\qquad}\le x+y\le\underline{\qquad}$

(2) $x-y$

(3) xy

(4) $\frac{x}{y}$

04 $-3\le x\le 0$, $-2\le y\le 3$일 때, 다음 식의 값의 범위를 구하시오.

(1) $2x+y$

› 풀이 $-6\le 2x\le 0$이므로
$-6+(-2)\le 2x+y\le 0+3$
따라서 $\underline{\qquad}\le 2x+y\le\underline{\qquad}$이다.

(2) $3x-2y$

(3) $-xy$

(4) $\frac{x}{y+6}$

풍쌤 POINT

$a<x<b$이고 $c<y<d$일 때, $x+y$, $x-y$의 값의 범위는

$$\begin{array}{rccccc} & a & < & x & < & b \\ +) & c & < & y & < & d \\ \hline & a+c & < & x+y & < & b+d \end{array} \qquad \begin{array}{rccccc} & a & < & x & < & b \\ -) & c & < & y & < & d \\ \hline & a-d & < & x-y & < & b-c \end{array}$$

03 일차부등식

❶ 일차부등식

모든 항을 좌변으로 이항하여 정리했을 때, 좌변이 x에 대한 일차식인 부등식

$$ax+b>0,\ ax+b\geq 0,\ ax+b<0,\ ax+b\leq 0$$

을 x에 대한 일차부등식이라고 한다.

❷ 일차부등식의 풀이

부등식 $ax>b$는

① $a>0$일 때 $x>\dfrac{b}{a}$

② $a<0$일 때 $x<\dfrac{b}{a}$

③ $a=0$일 때

$b\geq 0$이면 해는 없다. (불능)

$b<0$이면 해는 모든 실수이다. (부정)

보기 일차부등식 $2x>4$의 해는 $x>2$
일차부등식 $-3x\leq 6$의 해는 $x\geq -2$

유형 03 일차부등식

05 다음 부등식을 푸시오.

(1) $4x+1\geq 5$

풀이 $4x+1\geq 5$에서
$4x\geq 4$
$x\geq$ ___

(2) $x+3\leq 2x-8$

(3) $-(x-2)<3-x$

(4) $5(x+2)-1\geq x-1+2(x+3)$

(5) $\dfrac{3x+1}{2}>\dfrac{x}{2}+3$

(6) $x+\dfrac{5-x}{3}\leq\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{6}$

풍쌤 POINT

부등식 $ax>b$에서 $a=0$인 경우를 주의한다.
① $b\geq 0$일 때, 예를 들어 $0\times x\geq 5$와 같은 꼴이므로 해는 없다.
② $b<0$일 때, 예를 들어 $0\times x>-5$와 같은 꼴이므로 해는 모든 실수이다.

06 다음 x에 대한 부등식을 푸시오.

(1) $ax \leq 1$

(2) $a(x-1) > 2a-1$

(3) $a(2x-1)+4 > -a+6$

풀이 $a(2x-1)+4 > -a+6$에서

$2ax-a+4 > -a+6$

$ax > 1$

(i) $a>0$일 때 $x >$ ____

(ii) $a<0$일 때 $x <$ ____

(iii) $a=0$일 때 $0>1$이므로 ________

(4) $ax+x < 2a^2-4a-6$

(5) $a(x-a)+4 \geq 2x$

(6) $ax+2(6-a) \leq 3(a+4)$

풍쌤 POINT

부등식의 기본 성질에 의하여

$a>b$, $c<0$이면 $ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

와 같이 곱하거나 나누는 수가 음수인 경우에는 부등호의 방향이 바뀜에 주의한다.

04 연립일차부등식

❶ 연립일차부등식

2개 이상의 부등식을 한 쌍으로 묶어 나타낸 것을 연립부등식이라 하고, 각각의 부등식이 일차부등식인 연립부등식을 연립일차부등식이라고 한다.

❷ 연립일차부등식의 풀이

① 각각의 부등식의 해를 구한다.

② 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾는다.

› 연립부등식의 해를 구할 때는 수직선을 이용한다.

유형 05 연립일차부등식

07 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 3x+5>8 \\ x\geq -2 \end{cases}$

› 풀이 $\begin{cases} 3x+5>8 & \cdots\cdots ㉠ \\ x\geq -2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

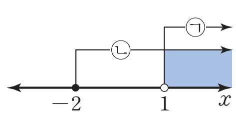
으로 놓으면

㉠에서 $3x>3$

$x>1$

㉡에서 $x\geq -2$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립일차부등식의 해는 $x>$____이다.

(2) $\begin{cases} 2x+3<11 \\ 4x-1>3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} -x\geq -12+3x \\ 2(x-1)\leq x \end{cases}$

(4) $\begin{cases} -x<x+2 \\ 3(x-2)\leq 2(x-2) \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \frac{1}{2}x<2 \\ -0.1x-0.35<0.55+0.2x \end{cases}$

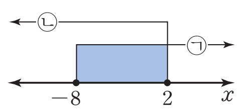
풍쌤 POINT

연립부등식의 해를 구할 때는 수직선을 그려 확인하는 것이 편리하다.

유형 06 $A<B<C$ 꼴의 일차부등식

08 다음 부등식을 푸시오.

(1) $-5\le x+3\le 5$

> 풀이 주어진 부등식을 $\begin{cases} -5\le x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+3\le 5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
>
> 으로 놓으면
>
> ㉠에서 $x\ge -8$
>
> ㉡에서 $x\le 2$
>
> ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면
>
> 
>
>
> 따라서 연립부등식의 해는 ____$\le x\le$___이다.

(2) $-3\le 2x+1<7$

(3) $2<x-5\le 3x+1$

(4) $x\le 3x+3\le 5x+10$

(5) $3x+2<2x-1<x-3$

풍쌤 POINT

$A<B<C$ 꼴의 부등식은 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 꼴로 고쳐서 푼다.

정답과 풀이 065쪽

09 연립부등식 $\begin{cases} x+a\ge -x+3 \\ 2x-1<7 \end{cases}$의 해가 $-1\le x<4$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

> 풀이 $\begin{cases} x+a\ge -x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-1<7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
으로 놓으면
㉠에서 $x\ge\dfrac{-a+3}{2}$
㉡에서 $x<4$
주어진 연립부등식의 해가 $-1\le x<4$이므로 ㉠의 해는 $x\ge -1$이다.
따라서 $\dfrac{-a+3}{2}=$____이므로 $a=$___이다.

10 연립부등식 $\begin{cases} -5+3x<2(x-a) \\ x+2\le 5(x-2) \end{cases}$의 해가 $3\le x<6$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

11 연립부등식 $\begin{cases} 2(1-x)>3(x+4)-10 \\ x<a-1 \end{cases}$의 해가 $x<-3$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

12 연립부등식 $\begin{cases} 3x+4\le 2x \\ -(2x-a)+3>-x+1 \end{cases}$의 해가 $x\le -4$일 때, 정수 a의 최솟값을 구하시오.

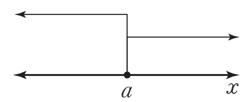
풍쌤 POINT

연립부등식에서 미정계수를 구할 때는 미지수를 포함한 채로 부등식을 풀고 주어진 해에 맞게 미정계수를 구한다. 어려울 때는 수직선을 그려 확인하는 것이 편리하다.

05 특수한 해를 갖는 연립일차부등식

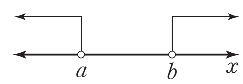
❶ 연립부등식의 해가 한 개인 경우

연립부등식 $\begin{cases} x \le a \\ x \ge a \end{cases}$의 해는 $x=a$이다.

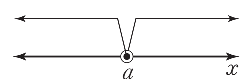


❷ 연립부등식의 해가 없는 경우

① $a<b$일 때, 연립부등식 $\begin{cases} x<a \\ x>b \end{cases}$의 해는 없다.



② 연립부등식 $\begin{cases} x \le a \\ x>a \end{cases}$의 해는 없다.



› $\begin{cases} x \le a \\ x>b \end{cases}$ $\begin{cases} x<a \\ x \ge b \end{cases}$ $\begin{cases} x \le a \\ x \ge b \end{cases}$ 의 해도 없다. (단, $a<b$)

› $\begin{cases} x<a \\ x \ge a \end{cases}$ $\begin{cases} x<a \\ x>a \end{cases}$의 해도 없다.

유형 08 특수한 해를 갖는 연립일차부등식 (1)

정답과 풀이 066쪽

13 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x \le 2 \\ x \ge 2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x<-3 \\ x \ge 7 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x \le -1 \\ x>-1 \end{cases}$

14 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+5 \ge 2 \\ 2x \ge 3(x+1) \end{cases}$

› 풀이 $\begin{cases} x+5 \ge 2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x \ge 3(x+1) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

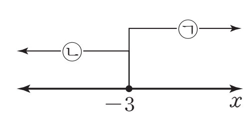
으로 놓으면

㉠에서 $x \ge -3$

㉡에서 $2x \ge 3x+3$

$x \le -3$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 ________이다.

(2) $\begin{cases} x+2 \ge 3 \\ 2x-2 \ge 3x+9 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2(x+1) \ge 3x-1 \\ -x<x-6 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x-4<4(x-2) \\ 5x\le x+4 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \frac{1}{3}x>\frac{1}{6}(x-1) \\ 10x\le 9(x-1)+8 \end{cases}$

(6) $-x+1\le 4x-4<-7(x+2)-1$

(7) $2(x-5)\le x-1\le 3(x-1)-16$

풍쌤 POINT

연립부등식의 해가 한 개인 경우와 해가 없는 경우를 일일이 기억하는 것보다는 수직선을 그려 확인하는 것이 편리하다.

유형 09 특수한 해를 갖는 연립일차부등식 (2)

15 연립부등식 $\begin{cases} 5x>4(x-4)+1 \\ x\le a-10 \end{cases}$의 해가 없을 때, 상수 a의 값의 범위를 구하시오.

> 풀이 $\begin{cases} 5x>4(x-4)+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x\le a-10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
> 으로 놓으면
> ㉠에서 $x>-15$이므로 주어진 연립부등식의 해가 없으려면 ㉡에서 $a-10\le -15$이어야 한다.
> 따라서 $a\le$______이다.

16 연립부등식 $\begin{cases} 3x+2a\le x+4 \\ -4-x\le 2x+8 \end{cases}$의 해가 없을 때, 상수 a의 값의 범위를 구하시오.

17 연립부등식 $\begin{cases} -x\le 2(x+1)+a \\ -\frac{1}{2}x\ge -\frac{1}{2}(b-3) \end{cases}$의 해가 $x=-3$일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

풍쌤 POINT

특수한 해를 갖는 연립부등식의 미정계수를 구할 때는 해를 이용하여 경계인 점에 등호가 성립하는지를 확인한다.

06 절댓값 기호를 포함한 일차부등식

❶ 절댓값 기호를 포함한 일차부등식의 풀이

① 절댓값 기호 안을 0으로 하는 수를 기준으로 구간을 나눈다.

② $|a|=\begin{cases} a & (a\geq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$, $|x-a|=\begin{cases} x-a & (x\geq a) \\ -(x-a) & (x<a) \end{cases}$

③ 해를 구한 후 해당 구간과의 공통부분을 구한다.

④ 각 구간에서 구한 범위를 다 합한 것이 구하는 부등식의 해이다.

❷ 구간을 나누지 않고 풀 수 있는 절댓값 기호를 포함한 일차부등식

a, b가 양수일 때

① $|x|<a$이면 $-a<x<a$

② $|x|>a$이면 $x<-a$ 또는 $x>a$

③ $a<|x|<b$이면 $-b<x<-a$ 또는 $a<x<b$

› $|x-a|+|x-b|<c$ $(a<b)$이면 두 수 a, b를 경계로 다음과 같이 x의 값의 범위를 나눈다.
(i) $x<a$
(ii) $a\leq x<b$
(iii) $x\geq b$

유형 10 절댓값 기호를 포함한 일차부등식

정답과 풀이 067쪽

18 다음 부등식을 푸시오.

(1) $|x|<4$

(2) $|x+2|\geq 6$

› 풀이 $|x+2|\geq 6$이므로
$x+2\leq -6$ 또는 $x+2\geq 6$
따라서 $x\leq$____ 또는 $x\geq$___이다.

(3) $1<|2x-1|\leq 3$

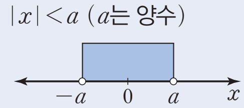
(4) $2\leq |x+5|-3<10$

(5) $|x|+|x+1|<3$

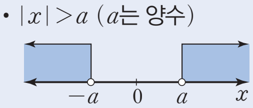
(6) $|x-1|+|x+2|\geq x+6$

풍쌤 POINT

• $|x|<a$ (a는 양수)



• $|x|>a$ (a는 양수)



07 부등식과 함수의 그래프

❶ 부등식 $f(x)>0$의 해

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이다.

❷ 부등식 $f(x)>g(x)$의 해

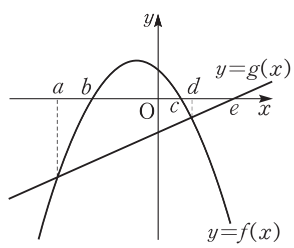
함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이다.

› 부등식 $f(x)<0$의 해
함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이다.

유형 11 부등식과 함수의 그래프

정답과 풀이 068쪽

19 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 부등식을 푸시오.



(1) $f(x)>0$

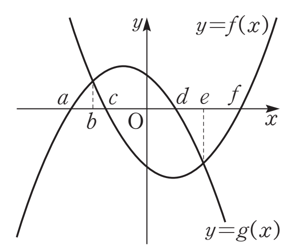
› 풀이 $f(x)>0$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로
__$<x<$__

(2) $g(x)<0$

(3) $f(x)\geq g(x)$

(4) $f(x)<g(x)$

20 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 부등식을 푸시오.



(1) $f(x)\geq 0$

(2) $g(x)\leq 0$

(3) $f(x)\leq g(x)$

(4) $f(x)g(x)<0$

풍쌤 POINT

① 부등식 $f(x)\geq 0$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있거나 x축과 만나는 x의 값의 범위

② 부등식 $f(x)\geq g(x)$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 두 함수의 그래프가 만나는 x의 값의 범위

08 이차부등식

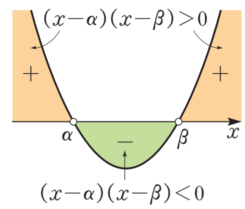
❶ 이차부등식

부등식에서 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리했을 때, 좌변이 미지수 x에 대한 이차식으로 나타내어지는 부등식을 x에 대한 이차부등식이라고 한다.

❷ $(x-\alpha)(x-\beta)>0$의 해

이차함수 $y=(x-\alpha)(x-\beta)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이다.

➡ $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$



❸ $(x-\alpha)(x-\beta)<0$의 해

이차함수 $y=(x-\alpha)(x-\beta)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이다.

➡ $\alpha<x<\beta$

› $\alpha<\beta$일 때, $(x-\alpha)(x-\beta)$의 값은
① $x<\alpha$일 때
(음수)×(음수)=(양수)
② $\alpha<x<\beta$일 때
(양수)×(음수)=(음수)
③ $x>\beta$일 때
(양수)×(양수)=(양수)

유형 12 이차부등식 (1)

정답과 풀이 068쪽

21 다음 부등식을 푸시오.

(1) $x^2-5x+6>0$

› 풀이 $x^2-5x+6>0$에서
$(x-2)(x-3)>0$
따라서 $x<$ __ 또는 $x>$ __이다.

(2) $x^2-x-2\le0$

(3) $x^2+7x+10\ge0$

(4) $x^2+x-12<0$

(5) $x^2+7x-60\le0$

(6) $2x^2+5x-3\ge0$

(7) $2x^2+x-3>0$

(8) $6x^2-13x-5<0$

풍쌤 POINT

$\alpha<\beta$일 때
① $(x-\alpha)(x-\beta)\ge0$의 해 ➡ $x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta$
② $(x-\alpha)(x-\beta)\le0$의 해 ➡ $\alpha\le x\le\beta$

22 다음 부등식을 푸시오.

(1) $x^2+x-3<0$

풀이 이차방정식 $x^2+x-3=0$의 근이

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$이므로

$x^2+x-3<0$의 해는

$\left\{x-\left(\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)\right\}\left\{x-\left(\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\right\}<0$

따라서 ________ $<x<$ ________ 이다.

(2) $x^2+5x-1\geq0$

(3) $x^2-6x+4\leq0$

(4) $2x^2-2x-1<0$

(5) $-x^2+2x+5<0$

(6) $x^2\leq-4x+6$

(7) $3x^2-2x-2<0$

(8) $2(x^2-3x)\geq3$

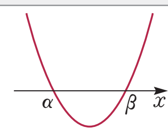
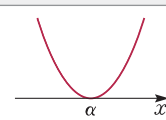
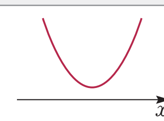
풍쌤 POINT

인수분해가 되지 않는 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$은 근의 공식을 이용하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해를 구하여 푼다.

09 이차함수와 이차부등식

❶ 이차함수와 이차부등식

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β $(\alpha\leq\beta)$라고 하면 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 이차부등식의 해 사이의 관계는 다음과 같다.

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$의 그래프			
$ax^2+bx+c>0$	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\neq\alpha$인 모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c\geq0$	$x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$	모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c<0$	$\alpha<x<\beta$	해는 없다.	해는 없다.
$ax^2+bx+c\leq0$	$\alpha\leq x\leq\beta$	$x=\alpha$	해는 없다.

› 129~130쪽에서 배운 이차부등식은 $D>0$인 이차부등식이다.

유형 14 $D=0$인 이차부등식

정답과 풀이 069쪽

23 다음 부등식을 푸시오.

(1) $x^2-4x+4<0$

› 풀이 $x^2-4x+4<0$에서
$(x-2)^2<0$
따라서 ________.

(2) $x^2+10x+25\geq0$

(3) $x^2-6x+9>0$

(4) $x^2+14x+49\leq0$

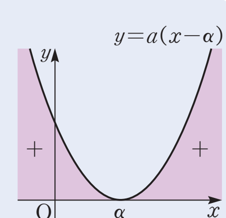
(5) $4x^2-4x+1\geq0$

(6) $x^2+x+\frac{1}{4}<0$

(7) $9x^2-30x+25\leq0$

풍쌤 POINT

$D=0$인 이차부등식의 해를 구할 때는 각 경우를 외우기보다 이차함수의 그래프를 그려 직관적으로 이해하는 것이 편리하다.



유형 15 $D<0$인 이차부등식

24 다음 부등식을 푸시오.

(1) $x^2+2x+3\geq 0$

> 풀이 $x^2+2x+3\geq 0$에서
> $(x^2+2x+1)+2\geq 0$
> $(x+1)^2+2\geq 0$
> 따라서 ____________이다.

(2) $x^2-6x+15<0$

(3) $x^2+4x+9>0$

(4) $x^2-10x+45\leq 0$

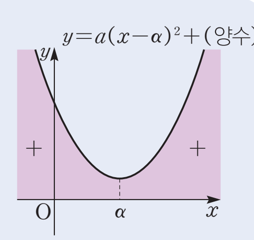
(5) $9x^2-6x+16>0$

(6) $4x^2+8x<-7$

(7) $-2x^2+4x-6\geq -x^2$

풍쌤 POINT

$D<0$인 이차부등식의 해를 구할 때는 각 경우를 외우기보다 이차함수의 그래프를 그려 직관적으로 이해하는 것이 좋다.



10 이차부등식의 해의 조건

❶ 이차부등식의 작성

① 해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-\alpha)(x-\beta)<0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta<0$

② 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-\alpha)(x-\beta)>0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta>0$

❷ 이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라고 할 때

① 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립할 조건: $a>0$, $D<0$

② 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\geq0$이 항상 성립할 조건: $a>0$, $D\leq0$

③ 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c<0$이 항상 성립할 조건: $a<0$, $D<0$

④ 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\leq0$이 항상 성립할 조건: $a<0$, $D\leq0$

› 다음은 같은 뜻이다.
① 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립한다.
② 부등식 $f(x)>0$의 해는 모든 실수이다.

유형 16 이차부등식의 작성

정답과 풀이 070쪽

25 다음과 같이 해가 주어졌을 때, x^2의 계수가 1인 이차부등식을 구하시오.

(1) $-2<x<2$

› 풀이 해가 $-2<x<2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$x^2-(-2+2)x+\{(-2)\times2\}<0$
x^2-___<0

(2) $x\leq1$ 또는 $x\geq3$

(3) $x<-6$ 또는 $x>-5$

(4) $-4\leq x\leq3$

26 다음과 같이 이차부등식과 그 해가 주어졌을 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

(1) 이차부등식 $x^2-ax-6<0$과 그 해 $-2<x<b$

› 풀이 해가 $-2<x<b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$x^2-(b-2)x-2b<0$
이므로 $x^2-ax-6<0$과 계수를 비교하면
$b-2=a$, $2b=6$에서 $a=$___, $b=$___이다.

(2) 이차부등식 $x^2+ax-5\geq0$과 그 해 $x\leq b$ 또는 $x\geq5$

(3) 이차부등식 $ax^2+bx+3\leq0$과 그 해 $x\leq-3$ 또는 $x\geq1$

풍쌤 POINT
해가 주어진 이차부등식의 문제를 해결할 때, 이차부등식의 x^2의 계수가 문자인 경우에는 부등호의 방향에 유의한다.

유형 17 이차부등식이 항상 성립할 조건

27 다음 이차부등식이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) $x^2-2x+k>0$

> 풀이 이차부등식 $x^2-2x+k>0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 한다.
>
> $\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times k<0$
>
> 따라서 $k>$___이다.

(2) $-x^2+6x+k\le0$

(3) $-x^2+4x\le k$

(4) $2x^2-4kx+1>0$

(5) $-x^2+kx-k<0$

(6) $kx^2-2x+3\ge0$

(7) $2kx^2+2kx-5\le0$

풍쌤 POINT

이차부등식이 항상 성립할 조건을 구할 때, 이차부등식의 x^2의 계수가 k와 같이 문자인 경우 부등호의 방향을 보고 $k<0$인지 $k>0$인지 파악한다.

28 다음 이차부등식의 해가 없도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) $x^2+4x+k<0$

› 풀이 이차부등식 $x^2+4x+k<0$의 해가 없으려면 이차방정식 $x^2+4x+k=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D\leq0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=2^2-1\times k\leq0$

따라서 $k\geq$___이다.

(2) $-x^2+5x-k\geq0$

(3) $2x^2-6x-k\leq0$

(4) $-x^2+kx-4>0$

(5) $-x^2+kx-2k\geq0$

(6) $kx^2+4x+1<0$

(7) $kx^2+2(k+2)x-1\geq0$

풍쌤 POINT

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라고 할 때, 모든 실수 x에 대하여

① $ax^2+bx+c>0$의 해가 없을 조건: $a<0$, $D\leq0$

② $ax^2+bx+c\geq0$의 해가 없을 조건: $a<0$, $D<0$

③ $ax^2+bx+c<0$의 해가 없을 조건: $a>0$, $D\leq0$

④ $ax^2+bx+c\leq0$의 해가 없을 조건: $a>0$, $D<0$

정답과 풀이 071쪽

29 이차함수 $y=x^2-2kx+3$의 그래프가 직선 $y=2x-k$보다 항상 위쪽에 있도록 하는 상수 k의 값의 범위를 구하시오.

> 풀이 이차함수 $y=x^2-2kx+3$의 그래프가 직선 $y=2x-k$보다 항상 위쪽에 있으려면
$x^2-2kx+3>2x-k$
이어야 한다.
$x^2-2(k+1)x+k+3>0$
이므로 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k+3=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 한다.
$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-1\times(k+3)<0$
$k^2+k-2<0$
$(k+2)(k-1)<0$
따라서 ____$<k<$__이다.

30 이차함수 $y=(k+2)x^2-(k+3)x+5$의 그래프가 직선 $y=-x+4$보다 항상 위쪽에 있도록 하는 상수 k의 값의 범위를 구하시오.

31 이차함수 $y=-x^2-ax+b$의 그래프가 직선 $y=x-2$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위가 $1<x<3$일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

> 풀이 이차함수 $y=-x^2-ax+b$의 그래프가 직선 $y=x-2$보다 위쪽에 있으므로
$-x^2-ax+b>x-2$
$x^2+(a+1)x-b-2<0$
이때 해가 $1<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$x^2-(1+3)x+3<0$
$x^2-4x+3<0$
이므로 $x^2+(a+1)x-b-2<0$과 계수를 비교하면
$a+1=-4$, $-b-2=3$
에서 $a=$____, $b=$____이다.

32 이차함수 $y=ax^2-bx+1$의 그래프가 직선 $y=2x+3$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위가 $x<-2$ 또는 $x>5$일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

풍쌤 POINT

함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위는 부등식 $f(x)>g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)>0$의 해와 같다.

11 연립이차부등식

1 연립이차부등식

연립부등식을 이루는 부등식 중에서 차수가 가장 높은 부등식이 이차부등식인 연립부등식을 연립이차부등식이라고 한다.

2 연립이차부등식의 풀이

① 각각의 부등식의 해를 구한다.

② 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾는다.

› 각각의 부등식의 해의 공통부분이 없을 경우 연립부등식의 해는 없다.

유형 20 연립이차부등식

정답과 풀이 072쪽

33 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 2x+3\geq 5 \\ x^2-x-6\leq 0 \end{cases}$

› 풀이 $\begin{cases} 2x+3\geq 5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-x-6\leq 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

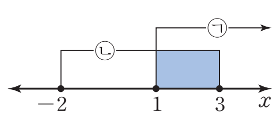
㉠에서 $x\geq 1$

㉡에서

$(x+2)(x-3)\leq 0$

$-2\leq x\leq 3$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 ___$\leq x\leq$___이다.

(2) $\begin{cases} -x+1<2x-5 \\ x^2-1>0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+x-12\leq 0 \\ -x-1<-2(x-2) \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x^2+6x<0 \\ x^2-2x-8\leq 0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x^2-5x+1>-2x+5 \\ x^2-7x+10\leq 0 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x^2-2x+1<2x^2-x-5 \\ 3x^2-4>2x^2-x-2 \end{cases}$

풍쌤 POINT

연립부등식의 해를 구할 때는 수직선을 그려 확인하는 것이 편리하다.

34 다음 부등식을 푸시오.

(1) $-3\le 1-2x<-x^2-6x-2$

> 풀이 주어진 부등식을 $\begin{cases} -3\le 1-2x & \cdots\cdots ㉠ \\ 1-2x<-x^2-6x-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

으로 놓으면

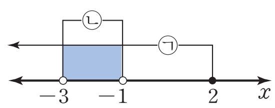
㉠에서 $2x\le 4$, $x\le 2$

㉡에서 $x^2+4x+3<0$

$(x+1)(x+3)<0$

$-3<x<-1$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 _____$<x<$_____이다.

(2) $x^2-3<x^2-x<2x^2-7x+5$

(3) $3x^2+10\le 2x^2-7x\le x^2-4x-2$

(4) $2x^2-4x+1<x+4<x^2-4x+8$

(5) $6<x^2-x\le 20$

(6) $-5\le -2x^2-3x\le -5x^2+5x+3$

풍쌤 POINT

$A<B<C$ 꼴의 부등식은 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 꼴로 고쳐서 푼다.

12 절댓값 기호를 포함한 이차부등식

❶ 절댓값 기호를 포함한 이차부등식의 풀이

절댓값 기호 안을 0으로 하는 수를 기준으로 구간을 나누어 푼다.

› 각 구간에서 구한 범위를 다 합한 것이 부등식의 해이다.

❷ 구간을 나누지 않고 풀 수 있는 절댓값 기호를 포함한 부등식

A가 이차식, a가 양수일 때

① $|A|<a$이면 $-a<A<a$

② $|A|>a$이면 $A<-a$ 또는 $A>a$

› $x^2=|x|^2$

유형 22 절댓값 기호를 포함한 이차부등식

정답과 풀이 074쪽

35 다음 부등식을 푸시오.

(1) $|x^2-6|\geq 10$

› 풀이 $|x^2-6|\geq 10$에서

$x^2-6\leq -10$ 또는 $x^2-6\geq 10$

(ⅰ) $x^2-6\leq -10$이면 $x^2\leq -4$이므로 해는 없다.

(ⅱ) $x^2-6\geq 10$이면 $x^2\geq 16$이므로

$x\leq -4$ 또는 $x\geq 4$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 해는 $x\leq$____ 또는 $x\geq$___이다.

(2) $|x^2-2x|<3$

(3) $x^2+|2x-2|\geq x$

(4) $-x^2+3x<|x-3|$

(5) $x^2-4|x|-5>0$

(6) $2x^2+5|x|-3\leq 0$

풍쌤 POINT

이차식 A, 양수 a에 대하여 $|A|<a$이면 $-a<A<a$이므로

연립부등식 $\begin{cases} -a<A \\ A<a \end{cases}$로 생각하여 푼다.

이때 $-a<A$의 해와 $A<a$의 해의 공통부분을 구해야 한다.

중단원 점검문제

01

$3\le x\le 7$일 때, $\frac{4}{x+1}$의 값의 범위를 구하시오.

02

$-1\le x\le 2$, $2\le y\le 4$일 때, $-2xy$의 값의 범위를 구하시오.

03

$-2\le x\le a$, $2\le y\le b$일 때, $-9\le 2x-y\le 2$가 되도록 하는 상수 a, b의 값을 구하시오.

04

부등식 $\frac{2x-4}{3}\le -\frac{x}{2}+\frac{1}{6}$을 푸시오.

05

x에 대한 부등식 $bx-(a+b)<0$의 해가 $x>3$일 때, x에 대한 부등식 $ax+2a+4b<0$의 해를 구하시오.

06

x에 대한 부등식 $ax-2x\ge 3(a^2-a-2)$를 푸시오.

07

x에 대한 부등식 $a^2x-a\le x-1$의 해가 모든 실수일 때의 a의 값을 m, 해가 없을 때의 a의 값을 n이라고 할 때, $m-n$의 값을 구하시오.

08

연립부등식 $\begin{cases} x+1\ge 3 \\ 2x-1<x+3 \end{cases}$을 만족시키는 정수를 모두 구하시오.

09

연립부등식 $\begin{cases} 3x>2(x-1) \\ 2x+3\geq a \end{cases}$ 의 해가 $x\geq 2$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

10

연립부등식 $\begin{cases} x+1\geq -4 \\ 3(x+1)<2x-2 \end{cases}$를 푸시오.

11

부등식 $3|x-1|>x+3$을 푸시오.

12

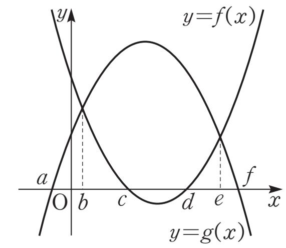
부등식 $2|x+2|\leq 8$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.

13

두 이차함수

$y=f(x)$, $y=g(x)$

의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 부등식 $f(x)g(x)>0$을 푸시오.



14

이차부등식 $x^2-5x-24\leq 0$의 해가 $a\leq x\leq b$일 때, 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하시오. (단, $a<b$)

15

이차부등식 $3(x^2-1)+4x\geq 0$을 푸시오.

16

이차부등식 $4x^2+4x+1\leq 0$을 만족시키는 모든 실수 x의 합을 m, 이차부등식 $2x^2+x+5<0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 n이라고 할 때, $m+n$의 값을 구하시오.

17

이차부등식 $ax^2+bx+12\leq 0$의 해가 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 4$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

18

이차부등식 $x^2-2(k-1)x+9>0$이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

19

x에 대한 이차부등식 $(k+1)x^2-2(k+1)x+1\leq 0$이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 k의 값을 구하시오.

20

이차함수 $y=x^2+4kx-1$의 그래프가 직선 $y=-2x+(k-1)$보다 항상 위쪽에 있도록 하는 상수 k의 값의 범위를 구하시오.

21

부등식 $-x^2+2|x|+35\leq 0$의 해를 구하시오.

22

연립부등식 $\begin{cases} x^2\geq x+12 \\ 2(x^2+2x)-6\leq 0 \end{cases}$을 푸시오.

23

부등식 $2x+3<x^2<6x-5$를 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.

24

연립부등식 $\begin{cases} x^2+x-2<0 \\ (x-a)(x-a-2)<0 \end{cases}$의 해가 존재하도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하시오.

Ⅲ 경우의 수

미리 보는

Ⅲ 경우의 수

1 경우의 수

▶ 본문 145~170쪽에서 확인해 보세요.

(1) 합의 법칙과 곱의 법칙

① 합의 법칙

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A와 사건 B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면

(사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수)$=m+n$

② 곱의 법칙

사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면

(두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수)$=m\times n$

(2) 순열

① 순열

서로 다른 n개에서 r $(0<r\le n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라 하고, 순열의 수 ${}_n\mathrm{P}_r$는

$${}_n\mathrm{P}_r=\underbrace{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)}_{r\text{개}}$$

$${}_n\mathrm{P}_r$$

서로 다른 것의 개수 (n)　택하는 것의 개수 (r)

② 계승

1부터 n까지의 자연수를 차례로 곱한 것을 n의 계승이라 하고, 기호 $n!$로 나타낸다.

③ ${}_n\mathrm{P}_n=n!$, $0!=1$, ${}_n\mathrm{P}_0=1$

④ ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

(3) 조합

① 조합

서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r $(0<r\le n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 조합의 수 ${}_n\mathrm{C}_r$는

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\ (\text{단, } 0\le r\le n)$$

$${}_n\mathrm{C}_r$$

서로 다른 것의 개수 (n)　택하는 것의 개수 (r)

② ${}_n\mathrm{C}_0=1$, ${}_n\mathrm{C}_n=1$

③ ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$

참고 서로 다른 n개에서 r개를 택할 때, 순서를 생각하면 순열을 이용하고 순서를 생각하지 않으면 조합을 이용한다.

01 경우의 수

1 사건과 경우의 수

① 사건: 같은 조건에서 여러 번 반복할 수 있는 실험이나 관찰에 의하여 나타나는 결과

② 경우의 수: 사건이 일어나는 가짓수

③ 수형도: 사건이 일어나는 모든 경우를 나뭇가지 모양으로 나타낸 그림

› 1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 카드에서 하나를 뽑을 때, 3의 배수가 나온다.
➡ 사건: 3의 배수가 나온다.
경우: 3, 6, 9
경우의 수: 3

유형 01 사건과 경우의 수

정답과 풀이 078쪽

01 주사위를 한 번 던질 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 나올 수 있는 모든 경우의 수

› 풀이 나올 수 있는 모든 경우는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 경우의 수는 ___이다.

(2) 2의 배수의 눈이 나오는 경우의 수

(3) 6의 약수의 눈이 나오는 경우의 수

02 1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 공 9개가 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 나올 수 있는 모든 경우의 수

(2) 홀수가 적힌 공이 나오는 경우의 수

(3) 9의 약수가 적힌 공이 나오는 경우의 수

03 파란 공 3개, 빨간 공 2개, 흰 공 5개가 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 파란 공이 나오는 경우의 수

(2) 빨간 공이 나오는 경우의 수

(3) 흰 공이 나오는 경우의 수

04 100원짜리 동전 2개를 동시에 던질 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 같은 면이 나오는 경우의 수

(2) 서로 다른 면이 나오는 경우의 수

풍쌤 POINT

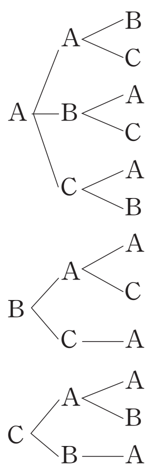
경우의 수
➡ 빠짐없이 중복되지 않게 가짓수를 센다.

정답과 풀이 078쪽

05 다음을 수형도를 이용하여 구하시오.

(1) 4개의 문자 A, A, B, C에서 3개를 골라 일렬로 배열하는 경우의 수

> 풀이



따라서 구하는 경우의 수는 ____이다.

(2) 3장의 카드 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$을 사용하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수

(3) 4명의 학생 A, B, C, D를 일렬로 세울 때, A를 가장 앞에 세우는 경우의 수

(4) 4개의 문자 A, B, B, C를 일렬로 배열하는 경우의 수

(5) 1부터 4까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 4장의 카드를 일렬로 배열하여 네 자리의 자연수 $a_1a_2a_3a_4$를 만들 때, $a_1 \neq 4$, $a_3=3$을 만족시키는 자연수의 개수

(6) 세 학생 A, B, C가 시험지를 하나씩 채점할 때, 자신의 것을 채점하지 않는 경우의 수

02 합의 법칙과 곱의 법칙

❶ 합의 법칙

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A와 사건 B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면

(사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수)$=m+n$

❷ 곱의 법칙

사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면

(두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수)$=m\times n$

› 세 개 이상의 사건에서 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않으면 합의 법칙이 성립한다.

› 세 개 이상의 사건에 대해서도 곱의 법칙이 성립한다.

유형 03 합의 법칙과 곱의 법칙

정답과 풀이 078쪽

06 커피 5종류와 과일음료 4종류가 있는 자동판매기가 있다. 이 자동판매기에서 다음과 같이 선택하는 경우의 수를 구하시오.

(1) 커피 또는 과일음료 중에서 한 병을 선택하는 경우의 수

› 풀이 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $5+4=$___

(2) 커피와 과일음료를 각각 한 병씩 선택하는 경우의 수

› 풀이 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $5\times4=$___

07 동원이의 옷장에는 셔츠 6종류, 스웨터 4종류가 있다. 이 옷장에서 다음과 같이 선택하는 경우의 수를 구하시오.

(1) 셔츠 또는 스웨터 중에서 한 벌을 선택하는 경우의 수

(2) 셔츠와 스웨터를 각각 한 벌씩 짝을 지어 입는 경우의 수

08 남학생 7명과 여학생 8명이 있는 동아리에서 대표를 뽑으려고 할 때, 다음과 같이 선택하는 경우의 수를 구하시오.

(1) 남학생 또는 여학생 중에서 한 명을 뽑는 경우의 수

(2) 남학생과 여학생을 각각 한 명씩 뽑는 경우의 수

09 수지의 친구는 소설책 6권, 시집 5권, 만화책 3권을 갖고 있다. 수지가 친구에게 책을 빌리려고 할 때, 다음과 같이 선택하는 경우의 수를 구하시오.

(1) 소설책 또는 시집 또는 만화책 중에서 한 권을 선택하는 경우의 수

(2) 소설책, 시집, 만화책을 각각 한 권씩 선택하는 경우의 수

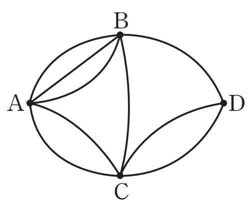
풍쌤 POINT

① A 또는 B, A이거나 B ➡ 합의 법칙
② A 그리고 B, A이고 B, A와 B가 동시에 ➡ 곱의 법칙

유형 04 도로망에서의 경우의 수

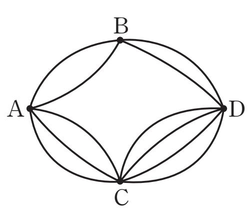
10 네 지점 A, B, C, D를 연결하는 도로망이 있다. 같은 지점을 두 번 이상 지나지 않고 A 지점에서 D 지점까지 가는 방법의 수를 구하시오.

(1)

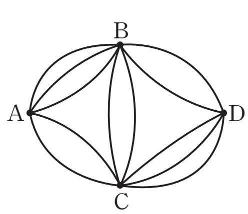


풀이 A→B→D의 경로로 가는 경우는 $3\times1=3$(가지)
A→C→D의 경로로 가는 경우는 $2\times2=4$(가지)
A→B→C→D의 경로로 가는 경우는
$3\times1\times2=6$(가지)
A→C→B→D의 경로로 가는 경우는
$2\times1\times1=2$(가지)
따라서 합의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는
$3+4+6+2=$____

(2)



(3)



풍쌤 POINT

도로망에서의 경우의 수
① 동시에 갈 수 없는 도로 ➡ 합의 법칙
② 동시에 갈 수 있는 도로 ➡ 곱의 법칙

유형 05 주사위를 던지는 경우의 수

11 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던질 때, 다음 경우의 수를 구하시오.

(1) 나오는 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우의 수

풀이 주사위의 눈의 수는 1, 2, 3, ⋯, 6이므로 눈의 수의 합은 2, 3, 4, ⋯, 12이다.
4의 배수가 될 때는 4 또는 8 또는 12이다.
(i) 눈의 수의 합이 4가 되는 경우는
(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지
(ii) 눈의 수의 합이 8이 되는 경우는
(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지
(iii) 눈의 수의 합이 12가 되는 경우는 (6, 6)의 1가지
따라서 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$3+5+1=$____

(2) 나오는 눈의 수의 합이 4 이하인 경우의 수

(3) 나오는 눈의 수의 합이 6의 배수인 경우의 수

풍쌤 POINT

주사위를 던지는 경우의 수
➡ 구체적인 경우를 나열해 본다.

유형 06 부정방정식의 해의 개수

12 다음 방정식을 만족시키는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하시오.

(1) $x+2y+5z=15$

> 풀이 z의 계수가 가장 크므로 z를 기준으로 구한다.
> (i) $z=1$일 때, $x+2y=10$이므로 순서쌍 (x, y)는
> $(8, 1)$, $(6, 2)$, $(4, 3)$, $(2, 4)$의 4개
> (ii) $z=2$일 때, $x+2y=5$이므로 순서쌍 (x, y)는
> (____), $(1, 2)$의 2개
> 따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $4+2=$___

(2) $x+2y+3z=11$

(3) $x+10y+2z=24$

(4) $4x+2y+z=20$

풍쌤 POINT

방정식 $ax+by+cz=d$ (a, b, c, d는 상수)를 만족시키는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수
➡ a, b, c 중 절댓값이 큰 것을 기준으로 구한다.

유형 07 전개식의 항의 개수

13 다음 식을 전개할 때, 서로 다른 항의 개수를 구하시오.

(1) $(a+b)(x+y+z)$

> 풀이 a, b 각각에 대하여 x, y, z 중 하나가 곱해진다.
> 따라서 구하는 항의 개수는
> $2\times$___$=$___

(2) $(a+b+c+d)(x+y)$

(3) $(1+x+x^2)(1+x^3+x^6)$

(4) $(a+b)(c+d+e)(f+g+h+i)$

풍쌤 POINT

서로 다른 항의 개수에 주의하여 곱의 법칙을 적용한다.
예를 들어 $(1+x+x^2)(1+x+x^2)$의 서로 다른 항의 개수는 1, x, x^2, x^3, x^4의 5이다.

유형 08 약수의 개수

14 다음 수의 양의 약수의 개수를 구하시오.

(1) 36

풀이 36을 소인수분해하면 $36=2^2\times3^2$이므로 36의 양의 약수는 2^2의 양의 약수인 1, 2, 2^2 중에서 하나의 수, 3^2의 양의 약수인 1, 3, 3^2 중에서 하나의 수를 각각 선택하여 곱한 수이다.

$\times$	1	2	2^2
1	1×1	1×2	1×2^2
3	3×1	3×2	3×2^2
3^2	$3^2\times1$	$3^2\times2$	$3^2\times2^2$

따라서 곱의 법칙에 의하여 36의 양의 약수의 개수는
$3\times$___$=$___

(2) 100

(3) 108

(4) 360

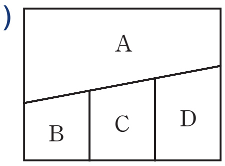
풍쌤 POINT

자연수 N이 $N=p^a\times q^b$(p, q는 서로 다른 소수, a, b는 자연수)으로 소인수분해될 때,
➡ N의 양의 약수는 1, p, p^2, $\cdots$, p^a 중에서 하나의 수, 1, q, q^2, $\cdots$, q^b 중에서 하나의 수를 각각 선택하여 곱한 수이다.

유형 09 도형에 색칠하는 방법의 수

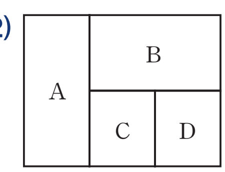
15 다음 그림에서 A, B, C, D의 영역을 4가지 색으로 칠하려고 한다. 같은 색을 여러 번 사용해도 되지만 인접한 영역은 서로 다른 색으로 칠할 때, 칠하는 방법의 수를 구하시오.

(1)

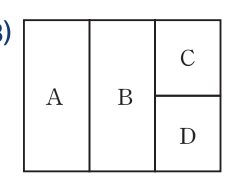


풀이 A에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지
D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 구하는 방법의 수는
$4\times3\times2\times2=$____

(2)



(3)



풍쌤 POINT

도형에 색을 칠하는 방법의 수
➡ 한 곳을 먼저 정해서 칠하는 방법의 수를 구한 후, 나머지를 칠하는 방법을 생각한다.

정답과 풀이 080쪽

16 다음 동전의 일부 또는 전부를 사용하여 거스름돈 없이 지불할 때, 지불할 수 있는 방법의 수와 지불할 수 있는 금액의 수를 구하시오.
(단, 0원을 지불하는 것은 제외한다.)

(1) 100원짜리 동전 1개, 50원짜리 동전 2개, 10원짜리 동전 3개

① 지불할 수 있는 방법의 수

② 지불할 수 있는 금액의 수

풀이 ① 100원짜리 1개로 지불할 수 있는 방법
➡ 0개, 1개의 2가지
50원짜리 2개로 지불할 수 있는 방법
➡ 0개, 1개, 2개의 3가지
10원짜리 3개로 지불할 수 있는 방법
➡ 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는
$2\times3\times4-\_\_\_=\_\_\_\_$

② 100원짜리 1개로 만들 수 있는 금액
➡ 0원, 100원 …… ㉠
50원짜리 2개로 만들 수 있는 금액
➡ 0원, 50원, 100원 …… ㉡
10원짜리 3개로 만들 수 있는 금액
➡ 0원, 10원, 20원, 30원
그런데 ㉠, ㉡에서 100원이 중복되므로 100원짜리 1개를 50원짜리 2개로 생각하면 구하는 금액의 수는 50원짜리 4개, 10원짜리 3개로 지불할 수 있는 방법의 수와 같다.
50원짜리 4개로 지불할 수 있는 방법
➡ 0개, 1개, 2개, 3개, 4개로 5가지
10원짜리 3개로 지불할 수 있는 방법
➡ 0개, 1개, 2개, 3개로 4가지
이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는
$5\times4-\_\_\_=\_\_\_\_$

(2) 500원짜리 동전 2개, 100원짜리 동전 2개, 50원짜리 동전 4개

① 지불할 수 있는 방법의 수

② 지불할 수 있는 금액의 수

(3) 1000원짜리 지폐 1장, 500원짜리 동전 2개, 100원짜리 동전 4개

① 지불할 수 있는 방법의 수

② 지불할 수 있는 금액의 수

풍쌤 POINT

① 지불할 수 있는 방법의 수
➡ 0원을 지불하는 것은 제외한다.

② 지불할 수 있는 금액의 수
➡ 금액이 중복되는 경우 큰 단위를 작은 단위로 바꾼다.

03 순열의 뜻

❶ 순열

서로 다른 n개에서 $r\ (0<r\le n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **순열**이라 하고, 기호 ${}_n\mathrm{P}_r$로 나타낸다.

❷ 계승

1부터 n까지의 자연수를 차례로 곱한 것을 n의 **계승**이라 하고, 기호 $n!$로 나타낸다.

❸ 순열의 수

서로 다른 n개에서 $r\ (0<r\le n)$개를 택하는 순열의 수는

$${}_n\mathrm{P}_r=\underbrace{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)}_{r\text{개}}$$

① ${}_n\mathrm{P}_n=n!$, $0!=1$, ${}_n\mathrm{P}_0=1$

② ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

› 순열

순서
↓
$${}_n\mathrm{P}_r$$
↑ ↑
서로 다른 것의 개수 / 택하는 것의 개수

유형 11 순열과 기호

17 다음을 기호로 나타내시오.

(1) 서로 다른 4개에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수

› 풀이 서로 다른 4개에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수는 ____

(2) 서로 다른 8개에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수

(3) 서로 다른 5개에서 5개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수

(4) 서로 다른 10개에서 1개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수

풍쌤 POINT

서로 다른 n개에서 $r\ (0<r\le n)$개를 택하여 일렬로 나열한다.
➡ ${}_n\mathrm{P}_r$

유형 12 순열의 수의 계산

18 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_{10}\mathrm{P}_2$

› 풀이 ${}_{10}\mathrm{P}_2=10\times9=$____

(2) ${}_7\mathrm{P}_3$

(3) ${}_6\mathrm{P}_6$

(4) ${}_5\mathrm{P}_1$

(5) $0!$

(6) $4!$

풍쌤 POINT

① ${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$ (단, $0<r\le n$)
② $n!=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$
(단, n은 자연수이다.)

유형 13 순열의 수를 만족시키는 값 구하기

19 다음을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오.

(1) ${}_{n}\mathrm{P}_{2}=30$

> 풀이 ${}_{n}\mathrm{P}_{2}=30$에서 $n(n-1)=6\times5$이므로 $n=$___

(2) ${}_{n}\mathrm{P}_{n}=24$

(3) ${}_{n}\mathrm{P}_{3}\times3!=360$

(4) ${}_{n}\mathrm{P}_{2}=5n$

(5) ${}_{n}\mathrm{P}_{4}=20{}_{n}\mathrm{P}_{2}$

(6) ${}_{n}\mathrm{P}_{3}:{}_{n}\mathrm{P}_{2}=7:1$

20 다음을 만족시키는 자연수 r의 값을 구하시오.

(1) ${}_{5}\mathrm{P}_{r}=60$

> 풀이 ${}_{5}\mathrm{P}_{r}=60=5\times4\times3$이므로 $r=$___

(2) ${}_{8}\mathrm{P}_{r}=56$

(3) ${}_{10}\mathrm{P}_{r}=90$

(4) ${}_{r}\mathrm{P}_{r}=720$

(5) ${}_{9}\mathrm{P}_{r}\times5!=8640$

(6) ${}_{6}\mathrm{P}_{r}=15{}_{4}\mathrm{P}_{3}$

풍쌤 POINT

${}_{n}\mathrm{P}_{r}=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$ (단, $0<r\le n$)

21 다음을 구하시오.

(1) 9명의 학생 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수

풀이 서로 다른 9개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_9P_2=9\times8=$____

(2) 3명의 학생을 일렬로 세우는 방법의 수

(3) 10명의 학생 중에서 회장, 부회장을 각각 1명씩 뽑는 방법의 수

(4) 8명의 학생 중에서 회장, 부회장, 총무를 각각 1명씩 뽑는 방법의 수

(5) 5개의 문자 a, b, c, d, e 중에서 2개의 문자를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수

(6) 4개의 문자 m, a, t, h를 일렬로 나열하는 방법의 수

(7) 서로 다른 20가지의 음료수 중에서 서로 다른 2가지를 선택하여 차례로 주문하는 방법의 수

(8) 서울, 대전, 대구, 부산의 네 곳 중에서 세 곳을 택한 후 순서를 정하여 관광하는 방법의 수

(9) 5명의 축구 선수가 승부차기를 하는 순서를 정하는 방법의 수

(10) 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수

풍쌤 POINT

서로 다른 n개에서 순서를 생각하여 r $(0<r\le n)$개를 택하는 경우의 수
➡ ${}_nP_r$

04 특정 조건이 있는 순열

❶ 이웃하는 순열

① 이웃하는 것을 하나로 묶는다.

② (하나로 묶었을 때의 순열의 수)×(한 묶음 안에서의 순서를 바꾸는 순열의 수)를 구한다.

❷ 이웃하지 않는 순열

① 이웃해도 상관없는 것만 먼저 배열한다.

② (이웃해도 되는 것들의 순열의 수)×(그 양 끝과 사이사이에 이웃하지 않아야 할 것을 끼워 넣는 순열의 수)를 구한다.

❸ '적어도'가 있는 경우의 순열

① 반대 경우의 수를 생각한다.

② (전체 경우의 수)−(반대 경우의 수)를 구한다.

❹ 교대로 배열하는 순열

① 두 개의 대상 중 하나를 일렬로 배열한다.

② 그 사이사이와 양 끝에 나머지 대상들을 일렬로 나열하여 구한다.

› 교대로 배열하는 순열

두 개의 대상 A, B의 개수가 같을 때, 어떤 대상이 맨 앞에 오느냐에 따라 두 가지 경우가 생긴다.

A B A B A B

B A B A B A

이 경우 각 경우의 수에 대하여 합의 법칙을 적용한다.

유형 15 이웃하는 순열

정답과 풀이 082쪽

22 다음을 구하시오.

(1) 남학생 3명, 여학생 3명을 일렬로 세울 때, 여학생 3명이 이웃하여 서는 경우의 수

› 풀이 여학생 3명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$

여학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $24\times6=$_____

(2) A, B를 포함한 6명을 일렬로 세울 때, A, B가 서로 이웃하여 서는 경우의 수

(3) 7개의 문자 a, b, c, d, e, f, g를 일렬로 나열할 때, a와 c가 이웃하는 경우의 수

(4) 5개의 문자 m, e, l, o, n을 일렬로 나열할 때, 모음끼리 이웃하는 경우의 수

(5) 중학생 4명, 고등학생 3명을 일렬로 세울 때, 중학생은 중학생끼리, 고등학생은 고등학생끼리 이웃하게 서는 경우의 수

(6) 서로 다른 국어책 3권, 영어책 2권, 수학책 3권을 책꽂이에 일렬로 꽂을 때, 국어책은 국어책끼리, 영어책은 영어책끼리 이웃하게 꽂는 경우의 수

풍쌤 POINT

'이웃한다.'

➡ 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 세운 후, 묶음 안에서 일렬로 세우는 경우를 생각한다.

유형 16 이웃하지 않는 순열

23 다음을 구하시오.

(1) 남학생 4명과 여학생 3명을 일렬로 세울 때, 여자끼리 이웃하지 않도록 서는 경우의 수

> 풀이 남학생 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$
>
> ∨㊚∨㊚∨㊚∨㊚∨
>
> 남학생의 양 끝과 사이사이의 5개의 자리에 여학생 3명을 세우는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_3=60$
>
> 따라서 구하는 경우의 수는 $24\times60=$______

(2) A, B를 포함한 5명의 학생을 일렬로 세울 때, A, B끼리 이웃하지 않도록 서는 경우의 수

(3) 6개의 문자 a, b, c, d, e, f를 일렬로 나열할 때, 모음끼리 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수

(4) 1학년 학생 3명과 2학년 학생 5명을 일렬로 세울 때, 1학년 학생끼리 이웃하지 않도록 서는 경우의 수

(5) 서로 다른 과학책 3권, 수학책 3권을 책꽂이에 일렬로 꽂을 때, 수학책끼리 이웃하지 않도록 꽂는 경우의 수

풍쌤 POINT

'이웃하지 않는다.'

➡ 이웃해도 상관없는 것만 먼저 배열한 후, 그 양 끝과 사이사이에 이웃하지 않아야 할 것을 끼워 넣는다.

유형 17 위치가 고정되어 있는 경우의 순열

24 다음을 구하시오.

(1) A를 포함한 학생 6명 중에서 5명을 택하여 일렬로 세울 때, A가 맨 앞에 서는 경우의 수

> 풀이 맨 앞에 A를 세우고 나머지 5명 중에서 4명을 택하여 일렬로 세우면 되므로 구하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_4=$______

(2) 선생님 1명과 학생 7명을 포함한 단체 8명 중에서 4명을 택하여 일렬로 세울 때, 선생님이 맨 뒤에 서는 경우의 수

(3) 6명의 학생 A, B, C, D, E, F 중에서 회장 1명, 부회장 1명, 총무 1명을 뽑을 때, F가 회장으로 뽑히는 경우의 수

(4) 7개의 문자 a, b, c, d, e, f, g 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열할 때, g가 맨 뒤에 오는 경우의 수

(5) 5개의 문자 w, a, t, e, r 중에서 4개를 택하여 일렬로 나열할 때, a가 맨 앞에 오는 경우의 수

풍쌤 POINT

위치가 고정되어 있는 경우

➡ 고정된 것을 먼저 놓은 후, 나머지를 배열하는 방법을 생각한다.

유형 18 '적어도'가 있는 경우의 순열

25 다음을 구하시오.

(1) orange에 있는 6개의 문자를 일렬로 나열할 때, 적어도 한쪽 끝에 자음이 오도록 나열하는 경우의 수

> 풀이 (ⅰ) 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
> $6!=720$
> (ⅱ) 양 끝에 모두 모음이 오는 경우의 수는
> (o, a, e 중 2개를 양 끝에 나열하는 경우의 수)
> $\times$(나머지 4개를 나열하는 경우의 수)
> 이므로 ____$\times 4!=6\times 24=144$
> (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $720-144=$____

(2) 남학생 5명, 여학생 5명 중에서 회장 1명, 부회장 1명을 뽑을 때, 회장, 부회장 중에서 적어도 한 명은 남학생을 뽑는 경우의 수

(3) power에 있는 5개의 문자를 일렬로 나열할 때, 적어도 한쪽 끝에 모음이 오도록 나열하는 경우의 수

(4) 5개의 문자 a, b, c, d, e를 일렬로 나열할 때, a, b, c 중에서 적어도 2개가 이웃하도록 나열하는 경우의 수

(5) special에 있는 7개의 문자를 일렬로 나열할 때, 적어도 2개의 모음이 이웃하도록 나열하는 경우의 수

풍쌤 POINT

(사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)
=(전체 경우의 수)−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

유형 19 교대로 서는 경우의 순열

26 다음을 구하시오.

(1) 남학생 3명과 여학생 3명을 일렬로 세울 때, 교대로 서는 경우의 수

> 풀이 (ⅰ) $\boxed{남}$여$\boxed{남}$여$\boxed{남}$여로 서는 경우
> 남학생 자리에 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!$
> 여학생 자리에 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!$
> 이므로 $3!\times 3!=36$
> (ⅱ) 여$\boxed{남}$여$\boxed{남}$여$\boxed{남}$으로 서는 경우
> 여학생 자리에 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!$
> 남학생 자리에 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!$
> 이므로 $3!\times 3!=36$
> (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $36+36=$____

(2) 서로 다른 영어책 4권과 중국어책 4권을 책꽂이에 일렬로 꽂을 때, 교대로 꽂는 경우의 수

27 다음을 구하시오.

(1) 중학생 3명과 고등학생 2명을 일렬로 세울 때, 교대로 서는 경우의 수

> 풀이 고등학생 2명을 일렬로 세우고 양 끝과 그 사이에 중학생 3명을 세우면 된다.
> $\boxed{중}$고$\boxed{중}$고$\boxed{중}$
> 따라서 구하는 경우의 수는 $2!\times 3!=$____

(2) justice에 있는 7개의 문자를 일렬로 나열할 때, 자음과 모음이 교대로 오는 경우의 수

풍쌤 POINT

교대로 배열
➡ 두 개의 대상 중 하나를 일렬로 배열하고, 다른 하나의 대상을 그 사이사이와 양 끝에 배열한다.

유형 20 사전식 배열법을 이용하는 경우의 순열

28 다음 물음에 답하시오.

(1) 4개의 문자 a, b, c, d를 한 번씩만 사용하여 만든 문자열을 사전식으로 배열할 때, $bdac$는 몇 번째로 나타나는지 구하시오.

> 풀이 a□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$
> ba□□, bc□□ 꼴인 문자열의 개수는 $2\times2!=4$
> bd□□ 꼴인 문자열에서 $bdac$의 순서는 1번째이다.
> 따라서 $bdac$가 나타나는 순서는 $6+4+$___$=$___

(2) 5개의 자음 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ을 한 번씩만 사용하여 만든 문자열을 사전식으로 배열할 때, ㄷㅁㄱㄹㄴ은 몇 번째로 나타나는지 구하시오.

29 다음을 구하시오.

(1) 4개의 문자 a, b, c, d를 한 번씩만 사용하여 만든 문자열을 사전식으로 배열할 때, 20번째로 나타나는 문자열

> 풀이 a□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$
> b□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$
> c□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$
> a 또는 b 또는 c를 시작으로 하는 문자열이 모두 18개이므로 20번째로 나타나는 문자열은 d□□□ 꼴인 문자열에서 2번째에 있다.
> d□□□ 꼴인 문자열의 순서는 $dabc$, $dacb$, ⋯
> 따라서 구하는 문자열은 _____이다.

(2) 5개의 자음 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ을 한 번씩만 사용하여 만든 문자열을 사전식으로 배열할 때, 75번째로 나타나는 문자열

풍쌤 POINT
문자를 사전식으로 배열
➡ 계승을 이용한다.

유형 21 자연수의 개수 (1)

30 다음을 구하시오.

(1) 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수

> 풀이 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지이다.
> 십의 자리와 일의 자리에는 백의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 ${}_4P_2=12$
> 따라서 구하는 자연수의 개수는 $4\times$___$=$___

(2) 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 4개의 숫자를 택하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수

(3) 6개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 4개의 숫자를 택하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수

(4) 7개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 서로 다른 4개의 숫자를 택하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수

풍쌤 POINT
자연수를 만드는 문제
➡ 맨 앞자리에 0이 올 수 없다.

유형 22 자연수의 개수(2)

31 다음을 구하시오.

(1) 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 만들 수 있는 세 자리의 짝수의 개수

> 풀이 (i) □□0 꼴
> 4개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 2개의 숫자를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 ${}_4P_2=$____
> (ii) □□2, □□4 꼴
> 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 3개의 숫자가 올 수 있고, 십의 자리에는 백의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자가 올 수 있으므로
> $3\times3\times2=18$
> (i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는 $12+18=$____

(2) 6개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 4개의 숫자를 택하여 만들 수 있는 네 자리의 짝수의 개수

32 다음을 구하시오.

(1) 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수 중 4의 배수의 개수

> 풀이 (i) □04, □20, □40 꼴
> 3개의 숫자에서 1개의 숫자를 택하면 되므로
> ${}_3P_1\times3=3\times3=9$
> (ii) □12, □24, □32 꼴
> 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 2개의 숫자가 올 수 있다.
> 따라서 $2\times3=6$이다.
> (i), (ii)에서 구하는 4의 배수의 개수는 $9+6=$____

(2) 6개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 4개의 숫자를 택하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 4의 배수의 개수

풍쌤 POINT

① 짝수 ➡ 일의 자리의 숫자가 0, 2, 4, 6, 8 중의 하나
② 4의 배수 ➡ 맨 끝 두 자리의 수가 4의 배수

유형 23 자연수의 개수(3)

33 다음을 구하시오.

(1) 4개의 숫자 1, 2, 3, 4를 한 번씩만 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 3200보다 작은 자연수의 개수

> 풀이 1□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$
> 2□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$
> 31□□ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$
> 따라서 3200보다 작은 자연수의 개수는
> $6+6+$____$=$____

(2) 4개의 숫자 1, 2, 3, 4를 한 번씩만 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 2300보다 큰 자연수의 개수

(3) 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 한 번씩만 사용하여 다섯 자리의 자연수를 만들 때, 24000보다 작은 자연수의 개수

(4) 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 한 번씩만 사용하여 다섯 자리의 자연수를 만들 때, 34000보다 큰 자연수의 개수

풍쌤 POINT

어떤 수보다 큰(작은) 수
➡ 사전식 배열을 이용한다.

05 조합의 뜻

❶ 조합

서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r $(0<r\le n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 기호 ${}_n\mathrm{C}_r$로 나타낸다.

❷ 조합의 수

서로 다른 n개에서 r $(0\le r\le n)$개를 택하는 조합의 수는

$$ {}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!} $$

① ${}_n\mathrm{C}_0=1$, ${}_n\mathrm{C}_n=1$

② ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$

› 조합

순서 없음

${}_n\mathrm{C}_r$

서로 다른 것의 개수　택하는 것의 개수

› 순열과 조합

순열은 순서를 생각하여 일렬로 배열한 것이고, 조합은 순서를 생각하지 않고 그 일부를 뽑은 것이다.

유형 24 조합과 기호

34 다음을 기호로 나타내시오.

(1) 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 방법의 수

› 풀이　서로 다른 5개에서 3개를 택하는 방법의 수는 ____

(2) 서로 다른 8개에서 2개를 택하는 방법의 수

(3) 서로 다른 4개에서 4개를 택하는 방법의 수

(4) 서로 다른 7개에서 6개를 택하는 방법의 수

(5) 서로 다른 9개에서 1개를 택하는 방법의 수

풍쌤 POINT

서로 다른 n개에서 r $(0<r\le n)$개를 택한다.

➡ ${}_n\mathrm{C}_r$

유형 25 조합의 수의 계산

35 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_{20}\mathrm{C}_2$

› 풀이　${}_{20}\mathrm{C}_2=\frac{{}_{20}\mathrm{P}_2}{2!}=\frac{20\times19}{2\times1}=$ ____

(2) ${}_{10}\mathrm{C}_3$

(3) ${}_{10}\mathrm{C}_0$

(4) ${}_5\mathrm{C}_5$

(5) ${}_{15}\mathrm{C}_{13}$

(6) ${}_{30}\mathrm{C}_{29}$

풍쌤 POINT

$0\le r\le n$일 때

① ${}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$　② ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$

유형 26 조합의 수를 만족시키는 값 구하기

36 다음을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오.

(1) ${}_{n}C_{3}=20$

> 풀이 ${}_{n}C_{3}=20$에서 $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=20$이므로
> $n(n-1)(n-2)=6\times5\times4$
> 따라서 $n=$___이다.

(2) ${}_{n}C_{2}=15$

(3) ${}_{n}C_{3}=35$

(4) ${}_{n}C_{3}={}_{n}C_{5}$

> 풀이 ${}_{n}C_{3}={}_{n}C_{n-3}$이므로 ${}_{n}C_{n-3}={}_{n}C_{5}$에서 $n-3=5$
> 따라서 $n=$___이다.

(5) ${}_{n}C_{4}={}_{n}C_{6}$

(6) ${}_{n}C_{7}={}_{n}C_{8}$

37 다음을 만족시키는 자연수 r의 값을 모두 구하시오.

(1) ${}_{7}C_{r}={}_{7}C_{4}$ (단, $r\neq4$)

> 풀이 ${}_{7}C_{4}={}_{7}C_{3}$이므로 $r=$___

(2) ${}_{12}C_{r}={}_{12}C_{5}$ (단, $r\neq5$)

(3) ${}_{8}C_{r}=28$

> 풀이 ${}_{8}C_{r}=28=\frac{8\times7}{2\times1}$이므로 $r=$___
> 또, ${}_{8}C_{2}={}_{8}C_{6}$이므로 $r=6$
> 따라서 $r=$___ 또는 $r=6$이다.

(4) ${}_{10}C_{r}=120$

(5) ${}_{9}C_{r}={}_{9}C_{r-3}$

(6) ${}_{14}C_{r}={}_{14}C_{r-6}$

풍쌤 POINT

${}_{n}C_{r}={}_{n}C_{n-r}$ $(0\le r\le n)$이므로 ${}_{n}C_{r}={}_{n}C_{s}$ $(0\le s\le n)$이면
➡ $s=r$ 또는 $s=n-r$

유형 27 조합을 이용한 경우의 수

38 다음을 구하시오.

(1) 6명의 학생 중에서 대표 2명을 뽑는 방법의 수

> 풀이 서로 다른 6개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로
> $_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=$____

(2) 5개의 문자 a, b, c, d, e 중에서 2개를 택하는 방법의 수

(3) 1부터 9까지의 자연수 중에서 3개를 택하는 방법의 수

(4) 서로 다른 30개의 사탕 중에서 2개를 택하는 방법의 수

(5) 서로 다른 소설책 8권 중에서 3권을 택하는 방법의 수

39 다음을 구하시오.

(1) 남학생 6명과 여학생 4명 중에서 남학생 2명과 여학생 2명을 뽑는 경우의 수

> 풀이 남학생 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 $_6C_2=15$
> 여학생 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 $_4C_2=6$
> 따라서 구하는 경우의 수는 $15\times6=$____

(2) 서로 다른 검은 공 5개와 흰 공 7개 중에서 검은 공 1개와 흰 공 2개를 뽑는 경우의 수

40 다음을 구하시오.

(1) 남학생 6명과 여학생 4명 중에서 3명을 뽑을 때, 뽑힌 학생의 성별이 모두 같은 경우의 수

> 풀이 남학생 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 $_6C_3=20$
> 여학생 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
> $_4C_3={}_4C_1=$__
> 따라서 구하는 경우의 수는 $20+4=$____

(2) 서로 다른 검은 공 8개와 흰 공 7개 중에서 5개의 공을 뽑을 때, 뽑힌 공의 색이 모두 같은 경우의 수

풍쌤 POINT

서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r $(0<r\leq n)$개를 택하는 경우의 수 ➡ $_nC_r$

06 특정 조건이 있는 조합

❶ 특정한 것을 포함하거나 제외하는 조합

서로 다른 n개에서 r개를 뽑을 때

① 특정한 k개를 반드시 포함하여 r개를 택하는 방법의 수

➡ $(n-k)$개에서 $(r-k)$개를 택하는 방법의 수

② 특정한 k개를 반드시 제외하고 r개를 택하는 방법의 수

➡ $(n-k)$개에서 r개를 택하는 방법의 수

❷ '적어도'가 있는 경우의 조합

① 반대 경우의 수를 생각한다.

② (전체 경우의 수)−(반대 경우의 수)를 구한다.

❸ 뽑아서 나열하는 경우의 수

뽑을 때는 조합을 이용하고, 뽑은 것을 나열할 때는 순열을 이용한다.

› 특정한 k개를 포함하여 뽑는 방법의 수
➡ 특정한 k개를 먼저 뽑아 놓고 나머지를 뽑는다.

› 특정한 k개를 포함하지 않고 뽑는 방법의 수
➡ 전체에서 특정한 k개를 제외하고 뽑는다.

유형 28 특정한 것을 포함하거나 제외하는 조합

정답과 풀이 085쪽

41 다음을 구하시오.

(1) 10명의 학생 중에서 3명의 대표를 뽑을 때, 특정한 학생 2명을 반드시 포함하여 뽑는 경우의 수

› 풀이 특정한 2명을 미리 뽑아 놓고 나머지 8명에서 ____명을 뽑으면 되므로 ${}_8C_1=$____

(2) 6개의 문자 A, B, C, D, E, F 중에서 4개를 뽑을 때, A를 반드시 포함하여 뽑는 경우의 수

(3) 1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 9개의 구슬이 들어 있는 상자에서 4개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 9의 약수가 적힌 구슬은 모두 반드시 포함하여 뽑는 경우의 수

(4) 남학생 5명과 여학생 5명 중에서 4명을 뽑을 때, 특정한 남학생 1명을 반드시 포함하여 뽑는 경우의 수

(5) 축구 선수 8명과 야구 선수 12명 중에서 6명을 뽑을 때, 야구 선수 중 특정한 3명을 반드시 포함하여 뽑는 경우의 수

(6) 중학생 7명과 고등학생 10명 중에서 8명을 뽑을 때, 특정한 고등학생 4명을 반드시 포함하여 뽑는 경우의 수

42 다음을 구하시오.

(1) 10명의 학생 중에서 3명의 대표를 뽑을 때, 특정한 학생 2명을 모두 포함하지 않고 뽑는 경우의 수

> 풀이 특정한 2명을 제외한 나머지 8명에서 ___명을 뽑으면 되므로 ${}_8C_3=$ ___

(2) 6개의 문자 A, B, C, D, E, F 중에서 3개를 뽑을 때, F를 포함하지 않고 뽑는 경우의 수

(3) 남학생 6명과 여학생 5명 중에서 5명을 뽑을 때, 특정한 남학생 2명을 모두 포함하지 않고 뽑는 경우의 수

(4) 배구 선수 6명과 야구 선수 6명 중에서 4명을 뽑을 때, 특정한 야구 선수 1명을 포함하지 않고 뽑는 경우의 수

(5) 초등학생 8명과 중학생 6명 중에서 3명을 뽑을 때, 특정한 초등학생 2명을 모두 포함하지 않고 뽑는 경우의 수

풍쌤 POINT

서로 다른 n개에서 r개를 뽑을 때
① 특정한 k개를 포함하는 경우
$(n-k)$개에서 $(r-k)$개를 택한다.
② 특정한 k개를 포함하지 않는 경우
$(n-k)$개에서 r개를 택한다.

유형 29 '적어도'가 있는 경우의 조합

43 다음을 구하시오.

(1) 남학생 7명과 여학생 6명 중에서 3명을 뽑을 때, 남학생을 적어도 1명 포함하여 뽑는 경우의 수

> 풀이 전체 13명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
> ${}_{13}C_3=$ ___
> 여학생 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
> ${}_6C_3=$ ___
> 따라서 구하는 경우의 수는 $286-20=$ ___

(2) 서로 다른 소설책 4권과 수필집 5권 중에서 3권을 뽑을 때, 수필집을 적어도 1권 포함하여 뽑는 경우의 수

(3) 수영 선수 6명과 체조 선수 6명 중에서 4명을 뽑을 때, 수영 선수와 체조 선수를 각각 적어도 1명씩 포함하여 뽑는 경우의 수

> 풀이 전체 12명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는
> ${}_{12}C_4=495$
> 수영 선수 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는
> ${}_6C_4={}_6C_2=15$
> 체조 선수 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는
> ${}_6C_4={}_6C_2=15$
> 따라서 구하는 경우의 수는
> $495-($ ___ $+$ ___ $)=$ ___

(4) 서로 다른 종류의 사인펜 8자루와 색연필 7자루 중에서 3자루를 뽑을 때, 사인펜과 색연필을 각각 적어도 1자루씩 포함하여 뽑는 경우의 수

풍쌤 POINT

(사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)
=(전체 경우의 수)−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

정답과 풀이 085쪽

44 다음을 구하시오.

(1) 남학생 6명과 여학생 5명 중에서 남학생 2명, 여학생 3명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수

풀이 (i) 남학생 6명 중에서 2명, 여학생 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_2 \times {}_5C_3 = 15 \times 10 = 150$

(ii) 뽑은 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5! =$ ____

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $150 \times 120 =$ ______

(2) 중학생 4명과 고등학생 6명 중에서 중학생 1명, 고등학생 2명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수

(3) 서로 다른 과학책 5권과 사회책 4권 중에서 과학책 2권, 사회책 2권을 뽑아 책꽂이에 일렬로 꽂는 경우의 수

45 다음을 구하시오.

(1) A, B를 포함한 8명 중에서 4명을 뽑아 일렬로 세울 때, A는 포함되고 B는 포함되지 않는 경우의 수

풀이 (i) 8명 중에서 4명을 뽑을 때 A는 포함되고 B는 포함되지 않아야 하므로 6명 중 3명을 뽑는 경우의 수와 같다.

따라서 경우의 수는 ${}_6C_3 =$ ____이다.

(ii) 뽑은 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $20 \times 24 =$ _____

(2) 학생 6명 중에서 4명을 뽑아 일렬로 세울 때, 특정한 2명을 반드시 포함하여 뽑는 경우의 수

(3) 학생 8명 중에서 5명을 뽑아 일렬로 세울 때, 특정한 학생 2명을 모두 포함하지 않고 뽑는 경우의 수

풍쌤 POINT

뽑아서 나열한다.

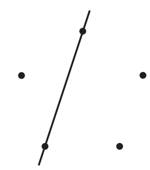
➡ 뽑는 단계와 나열 단계를 구분하여 생각한다.
(뽑는 단계: 조합, 나열 단계: 순열)

07 조합과 도형의 개수

❶ 직선의 개수

일직선 위에 있지 않은 n개의 점 중에서 2개의 점을 이어 만들 수 있는 직선의 개수 ➡ ${}_{n}C_{2}$ (단, $n \geq 2$)

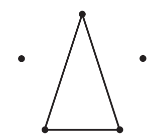
참고 볼록 n각형의 대각선의 개수: ${}_{n}C_{2}-n$ (단, $n \geq 3$)



› 일직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선은 1개뿐이다.

❷ 삼각형의 개수

일직선 위에 있지 않은 n개의 점 중에서 3개의 점을 이어 만들 수 있는 삼각형의 개수 ➡ ${}_{n}C_{3}$ (단, $n \geq 3$)

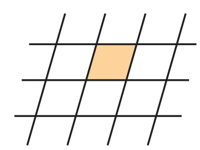


› 일직선 위에 있는 3개의 점을 이으면 삼각형이 생기지 않는다.

❸ 평행사변형의 개수

m개의 평행선과 n개의 평행선이 서로 만날 때 생기는 평행사변형의 개수

➡ ${}_{m}C_{2} \times {}_{n}C_{2}$ (단, $m \geq 2$, $n \geq 2$)

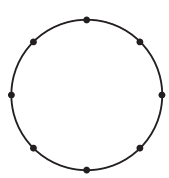


› 가로선 중에서 2개, 세로선 중에서 2개를 선택하면 하나의 평행사변형이 결정된다.

유형 31 직선의 개수

46 다음을 구하시오.

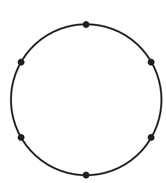
(1) 오른쪽 그림과 같이 원 위에 8개의 점이 놓여 있을 때, 주어진 점을 이어서 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수



› 풀이 8개의 점 중에서 ___개를 택하는 조합의 수는

${}_{8}C_{2}=$___

(2) 오른쪽 그림과 같이 원 위에 6개의 점이 놓여 있을 때, 주어진 점을 이어서 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수



(3) 한 평면 위에 있는 서로 다른 9개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않을 때, 주어진 점을 이어서 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수

(4) 오른쪽 그림과 같이 두 평행선 위에 7개의 점이 놓여 있을 때, 주어진 점을 이어서 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수

› 풀이 두 평행선 위의 점을 하나씩 택하여 연결하면 한 개의 직선을 만들 수 있으므로 ${}_{3}C_{1} \times {}_{4}C_{1}=3 \times 4=12$

주어진 평행선 2개를 포함하면 구하는 직선의 개수는

$12+$___$=$___

(5) 오른쪽 그림과 같이 두 평행선 위에 9개의 점이 놓여 있을 때, 주어진 점을 이어서 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수

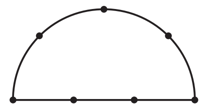
풍쌤 POINT

일직선 위에 있지 않은 n개의 점 중에서 2개의 점을 이어 만들 수 있는 직선의 개수 ➡ ${}_{n}C_{2}$ (단, $n \geq 2$)

유형 32 삼각형의 개수

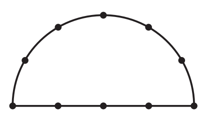
47 다음을 구하시오.

(1) 오른쪽 그림과 같이 반원 위에 7개의 점이 있을 때, 이 중 3개의 점을 연결하여 만들 수 있는 삼각형의 개수

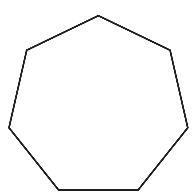


> 풀이 7개의 점 중에서 3개를 택하는 조합의 수는
> ${}_7\mathrm{C}_3=35$
> 일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 조합의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$
> 따라서 구하는 삼각형의 개수는 $35-4=$____

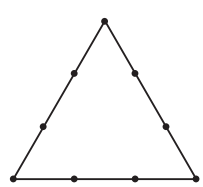
(2) 오른쪽 그림과 같이 반원 위에 10개의 점이 있을 때, 이 중 3개의 점을 연결하여 만들 수 있는 삼각형의 개수



(3) 오른쪽 그림과 같은 정칠각형의 꼭짓점 중에서 3개의 점을 연결하여 만들 수 있는 삼각형의 개수



(4) 오른쪽 그림과 같이 정삼각형의 세 꼭짓점과 세 변의 삼등분점으로 이루어진 9개의 점이 있을 때, 이 중 3개의 점을 연결하여 만들 수 있는 삼각형의 개수



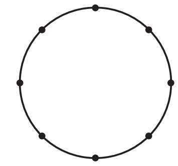
풍쌤 POINT

일직선 위에 있지 않은 n개의 점 중에서 3개의 점을 이어 만들 수 있는 삼각형의 개수 ➡ ${}_n\mathrm{C}_3$ (단, $n\geq 3$)

유형 33 사각형의 개수

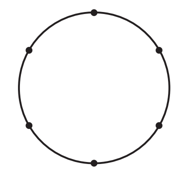
48 다음을 구하시오.

(1) 오른쪽 그림과 같이 원 위에 같은 간격으로 놓인 8개의 점 중에서 4개를 꼭짓점으로 하는 사각형의 개수

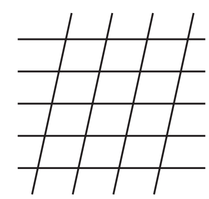


> 풀이 8개의 점 중에서 ____개를 택하는 조합의 수는
> ${}_8\mathrm{C}_4=$____

(2) 오른쪽 그림과 같이 원 위에 같은 간격으로 놓인 6개의 점 중에서 4개를 꼭짓점으로 하는 사각형의 개수

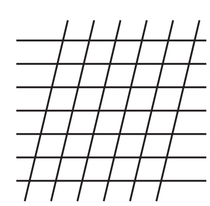


(3) 오른쪽 그림과 같이 5개의 평행선과 4개의 평행선이 만나서 만들어지는 평행사변형의 개수



> 풀이 5개의 평행선 중에서 2개, 4개의 평행선 중에서 2개를 택하면 하나의 평행사변형이 결정되므로 구하는 평행사변형의 개수는
> ${}_5\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=10\times 6=$____

(4) 오른쪽 그림과 같이 7개의 평행선과 6개의 평행선이 만나서 만들어지는 평행사변형의 개수



풍쌤 POINT

m개의 평행선과 n개의 평행선이 서로 만날 때 생기는 평행사변형의 개수 ➡ ${}_m\mathrm{C}_2\times{}_n\mathrm{C}_2$ (단, $m\geq 2$, $n\geq 2$)

08 분할과 분배

1 분할하는 방법의 수

서로 다른 n개를 p개, q개, r개 $(p+q+r=n)$의 3개의 조로 나누는 경우의 수는

① p, q, r가 모두 다른 수이면 ➡ ${}_{n}C_{p}\times{}_{n-p}C_{q}\times{}_{r}C_{r}$

② p, q, r 중 어느 두 수가 같으면 ➡ ${}_{n}C_{p}\times{}_{n-p}C_{q}\times{}_{r}C_{r}\times\frac{1}{2!}$

③ p, q, r가 모두 같으면 ➡ ${}_{n}C_{p}\times{}_{n-p}C_{q}\times{}_{r}C_{r}\times\frac{1}{3!}$

2 분배하는 방법의 수

n개의 조로 분할하여 n곳에 분배하는 경우의 수

➡ (n개의 조로 분할하는 경우의 수)$\times n!$

› 분할
서로 다른 것을 몇 개의 묶음으로 나누는 것

› 분배
분할된 묶음을 일렬로 나열하는 것

정답과 풀이 087쪽

유형 34 분할하는 방법의 수

49 다음을 구하시오.

(1) 11명의 학생을 2명, 4명, 5명의 3개의 조로 나누는 방법의 수

› 풀이 11명에서 2명을 뽑고, 나머지 9명에서 4명을 뽑고, 나머지 5명에서 5명을 뽑는다.
따라서 구하는 방법의 수는
${}_{11}C_{2}\times{}_{9}C_{4}\times{}_{5}C_{5}=55\times126\times1=$______

(2) 10명의 학생을 2명, 3명, 5명의 3개의 조로 나누는 방법의 수

(3) 7명의 학생을 2명, 2명, 3명의 3개의 조로 나누는 방법의 수

(4) 6명의 학생을 2명, 2명, 2명의 3개의 조로 나누는 방법의 수

풍쌤 POINT

n개의 조로 분할
➡ 크기가 같은 조가 k개이면 $k!$로 나누어 주어야 한다.

유형 35 분배하는 방법의 수

50 다음을 구하시오.

(1) 서로 다른 9송이의 꽃을 2송이, 3송이, 4송이의 3개의 꽃다발로 나누어 3명에게 선물하는 방법의 수

› 풀이 9송이의 꽃을 2송이, 3송이, 4송이로 3개의 꽃다발로 나누어 3명에게 선물하므로
$({}_{9}C_{2}\times{}_{7}C_{3}\times{}_{4}C_{4})\times3!=(36\times35\times1)\times6=$______

(2) 서로 다른 7개의 사탕을 1개, 2개, 4개의 3묶음으로 나누어 3명에게 선물하는 방법의 수

(3) 6명의 학생을 3명씩 2개의 조로 나누어 2대의 택시에 탑승시키는 방법의 수

(4) 10명의 관광객을 2명씩 5개의 조로 나누어 5곳의 호텔에 투숙시키는 방법의 수

풍쌤 POINT

n개로 쪼갠 후 n개의 다른 곳에 나누어 주면 분배이다.
➡ (n개의 조로 분할하는 경우의 수)$\times n!$

중단원 점검문제

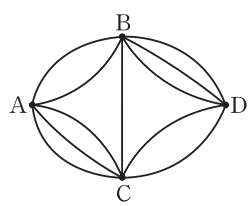
정답과 풀이 087쪽

01

1에서 20까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 20장의 카드 중에서 한 장의 카드를 뽑을 때, 4의 배수 또는 7의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우의 수를 구하시오.

02

오른쪽 그림과 같이 네 지점 A, B, C, D를 연결하는 도로망이 있다. 같은 지점을 두 번 이상 지나지 않고, A 지점에서 D 지점까지 가는 방법의 수를 구하시오.



03

부등식 $x+2y<7$을 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하시오.

04

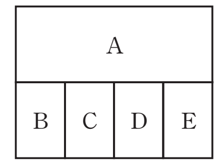
다항식

$$(a+b+c)(p+q+r)-(a+b)(s+t)$$

를 전개할 때, 서로 다른 항의 개수를 구하시오.

05

오른쪽 그림에서 A, B, C, D, E의 영역을 5가지 색으로 칠하려고 한다. 같은 색을 여러 번 사용해도 되지만 인접한 영역은 서로 다른 색으로 칠할 때, 칠하는 방법의 수를 구하시오.



06

등식 ${}_{n}\mathrm{P}_{2}+3{}_{n}\mathrm{P}_{1}=24$를 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오.

07

A_1역부터 A_{10}역까지 10개의 역이 일렬로 연결되어 있는 철도선이 있다. 각 역에서 사용하는 차표에는 출발역과 도착역이 표기되어 있다. 왕복 차표는 없다고 할 때, 사용되는 차표는 모두 몇 종류인지 구하시오.

08

안경을 쓴 학생 3명과 쓰지 않은 학생 4명이 한 줄로 설 때, 안경을 쓴 학생끼리 이웃하고, 쓰지 않은 학생끼리 이웃하는 방법의 수를 구하시오.

09

6개의 문자 A, B, C, D, E, F를 일렬로 나열할 때, A가 맨 앞에, F가 맨 뒤에 오는 경우의 수를 구하시오.

10

5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 4개의 숫자를 택하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 2300보다 작은 자연수의 개수를 구하시오.

11

등식 ${}_8\mathrm{C}_{r-1}={}_8\mathrm{C}_{2r+6}$을 만족시키는 자연수 r의 값을 구하시오.

12

$0<a<b<c<10$을 만족시키는 세 자리의 자연수 abc의 개수를 구하시오.

13

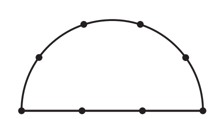
1부터 10까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 10개의 공 중에서 3개의 공을 뽑을 때, 3 이하의 수가 적힌 공이 적어도 하나 이상 나오는 경우의 수를 구하시오.

14

남학생 4명과 여학생 6명 중에서 남학생 2명, 여학생 3명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수를 구하시오.

15

오른쪽 그림과 같이 반원 위에 8개의 점이 있을 때, 이 중 2개의 점을 연결하여 만들 수 있는 직선의 개수를 구하시오.



16

9명의 학생을 2명, 2명, 2명, 3명으로 4개 조로 나누어 4개의 놀이기구에 탑승하는 방법의 수를 구하시오.

IV 행렬

1. 행렬과 그 연산

미리 보는

IV 행렬

1 행렬과 그 연산

▶ 본문 173~192쪽에서 확인해 보세요.

01 행렬의 뜻
02 행렬이 서로 같을 조건
03 행렬의 덧셈과 뺄셈
04 행렬의 실수배
05 행렬의 곱셈
06 행렬의 곱셈의 성질
07 케일리－해밀턴 정리

(1) 행렬의 뜻

① 행렬: 여러 가지 수나 문자를 직사각형 모양으로 배열하여 괄호로 묶은 것

② 성분: 행렬을 이루는 각각의 수 또는 문자

③ 행: 행렬에서 성분을 가로로 배열한 줄

④ 열: 행렬에서 성분을 세로로 배열한 줄

$$\begin{array}{cc} & \text{제}j\text{열} \\ \text{제}i\text{행} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$m\times n$ 행렬

⑤ $m\times n$ 행렬: m개의 행과 n개의 열로 이루어진 행렬

⑥ 정사각행렬: 행의 개수와 열의 개수가 같은 행렬

⑦ 행렬의 성분: 행렬 A의 제i행과 제j열이 만나는 위치에 있는 성분을 행렬 A의 (i, j) 성분이라고 하며, 기호 a_{ij}로 나타낸다.

(2) 행렬의 덧셈과 뺄셈

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여

① 덧셈: $A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$

② 뺄셈: $A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix}$

(3) 행렬의 실수배

행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$와 실수 k에 대하여

$$kA=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

(4) 행렬의 곱셈

① 행렬 A의 열의 개수와 행렬 B의 행의 개수가 같을 때에만 두 행렬의 곱셈 AB가 정의된다.

➡ $(m\times k$ 행렬$)\times(k\times n$ 행렬$)=(m\times n$ 행렬$)$

② 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

③ 정사각행렬 A와 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$AA=A^2,\ A^2A=A^3,\ \cdots,\ A^{n-1}A=A^n$$

01 행렬의 뜻

❶ 행렬

① 행렬: 여러 가지 수나 문자를 직사각형 모양으로 배열하여 괄호로 묶은 것
② 성분: 행렬을 이루는 각각의 수 또는 문자
③ 행: 행렬에서 성분을 가로로 배열한 줄
④ 열: 행렬에서 성분을 세로로 배열한 줄

❷ $m\times n$ 행렬

① $m\times n$ 행렬: m개의 행과 n개의 열로 이루어진 행렬
② 정사각행렬: 행의 개수와 열의 개수가 같은 행렬

❸ 행렬의 성분 표현

행렬 A의 제i행과 제j열이 만나는 위치에 있는 성분을 행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분이라고 하며, 기호 a_{ij}로 나타낸다.

보기

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc}\text{제1열} & \text{제2열} & \text{제3열}\end{array} \\ \begin{array}{r}\text{제1행} \to \\ \text{제2행} \to\end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

› 행렬은 보통 알파벳 대문자 A, B, C, …를 사용하여 나타내고, 성분은 보통 알파벳 소문자 a, b, c, …를 사용하여 나타낸다.

› $n\times n$ 행렬을 n차 정사각행렬이라고 한다.

› 행렬 A를 $A=(a_{ij})$로 나타내기도 한다.

유형 01 행렬의 구조

정답과 풀이 089쪽

01 행렬 $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 말하시오.

(1) 행의 개수 **(2)** 열의 개수

02 행렬 $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 제1행의 모든 성분의 합

› 풀이 제1행은 $(3\ \underline{\quad}\ 2)$이므로 구하는 값은
$3+\underline{\quad}+2=\underline{\quad}$

(2) 제3행의 모든 성분의 합

(3) 제2열의 모든 성분의 합

(4) 제3열의 모든 성분의 합

03 다음 행렬의 꼴을 말하시오. 또, 정사각행렬인 것을 찾으시오.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

풍쌤 POINT

행의 개수 → $m\times n$ 행렬 ← 열의 개수

유형 02 행렬의 성분

04 행렬 $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & -4 \\ 5 & 7 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $(1,\ 2)$ 성분

> 풀이 $(1,\ 2)$ 성분은 제1행과 제2열이 만나는 위치에 있는 성분이므로 ___이다.

(2) $(2,\ 1)$ 성분

(3) a_{13}

(4) a_{33}

05 행렬 $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $a_{12}+a_{32}$

> 풀이 $a_{12}=5$, $a_{32}=$____이므로
> $a_{12}+a_{32}=$___

(2) $a_{13}+a_{22}$

(3) $a_{21}-a_{33}$

(4) $a_{23}-a_{31}$

풍쌤 POINT

행렬의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij}는 제i행과 제j열이 만나는 위치에 있는 성분이다.

$$\begin{array}{cc} & \text{제}j\text{열} \\ & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \\ \text{제}i\text{행} & \end{array}$$

유형 03 성분으로 주어진 행렬

06 행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij}가 다음과 같이 주어질 때, 행렬 A를 구하시오.

(1) $a_{ij}=i+j+1$ (단, $i=1,\ 2,\ j=1,\ 2$)

> 풀이 $i=1,\ 2,\ j=1,\ 2$를 $a_{ij}=i+j+1$에 대입하여 행렬 A의 각 성분을 구하면 다음과 같다.
> $a_{11}=1+1+1=3$, $a_{12}=1+2+1=4$,
> $a_{21}=2+1+1=4$, $a_{22}=2+2+1=5$
> 따라서 구하는 행렬 A는 ______이다.

(2) $a_{ij}=i-2j-1$ (단, $i=1,\ 2,\ j=1,\ 2,\ 3$)

(3) $a_{ij}=(-1)^{i+j}$ (단, $i=1,\ 2,\ 3,\ j=1,\ 2$)

(4) $a_{ij}=\begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}$ (단, $i=1,\ 2,\ j=1,\ 2,\ 3$)

(5) $a_{ij}=\begin{cases} i-j & (i\geq j) \\ ij & (i<j) \end{cases}$ (단, $i=1,\ 2,\ j=1,\ 2,\ 3$)

(6) $a_{ij}=\begin{cases} i+j & (i>j) \\ ij & (i=j) \\ i-j & (i<j) \end{cases}$ (단, $i=1,\ 2,\ 3,\ j=1,\ 2,\ 3$)

풍쌤 POINT

행렬 $A=(a_{ij})$가 $m\times n$ 행렬이면 성분 a_{ij}를 나타내는 식에
$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$
을 각각 대입하여 $a_{11},\ a_{12},\ \cdots,\ a_{mn}$의 값을 구한다.

02 행렬이 서로 같을 조건

❶ 행렬이 서로 같을 조건

두 행렬 A, B가 같은 꼴이고 대응하는 성분이 각각 같을 때, 두 행렬 A, B는 서로 같다고 하며, 기호 $A=B$로 나타낸다.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\text{일 때, } A=B\text{이면 } \begin{cases} a_{11}=b_{11},\ a_{12}=b_{12} \\ a_{21}=b_{21},\ a_{22}=b_{22} \end{cases}$$

› 두 행렬 A, B가 서로 같지 않을 때, 기호 $A\neq B$로 나타낸다.

유형 04 행렬이 서로 같을 조건

정답과 풀이 090쪽

07 다음 등식이 성립하도록 실수 x, y, z의 값을 정하시오.

(1) $(x+y \quad z \quad y-z)=(4 \quad -2 \quad 3)$

› 풀이 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로
$x+y=4$, $z=-2$, $y-z=3$
따라서 $x=$___, $y=$___, $z=$____이다.

(2) $\begin{pmatrix} 3x-y \\ 2x-y \\ 4x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ z \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} x+2z & y \\ x-z & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} x^2-y^2 & 1 \\ 3 & x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & z \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} x^2-1 & z \\ y+1 & x^2-x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2y \\ 2 & yz \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} x+y & z^2+3z+4 \\ x-y & z^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} x+z & x+y & 1 \\ 7 & 2 & x-z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} x^2 & 3 \\ y-z & x^2+x \\ y+z & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

풍쌤 POINT

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여
$A=B$이면 $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$

03 행렬의 덧셈과 뺄셈

1 행렬의 덧셈과 뺄셈

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여

① $A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$ ② $A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix}$

2 영행렬

모든 성분이 0인 행렬을 영행렬이라 하고, 기호 O로 나타낸다.

3 행렬의 덧셈에 대한 성질

같은 꼴의 세 행렬 A, B, C에 대하여

① 교환법칙: $A+B=B+A$

② 결합법칙: $(A+B)+C=A+(B+C)$

› 행렬의 덧셈, 뺄셈은 같은 꼴의 경우에만 정의할 수 있다.

› 행렬 A의 모든 성분의 부호를 바꾸어 놓은 것을 성분으로 하는 행렬을 $-A$로 나타낸다.

› $(A+B)+C=A+(B+C)$이므로 이를 간단히 $A+B+C$로 나타낼 수 있다.

유형 05 행렬의 덧셈

08 다음을 계산하시오.

(1) $(-1 \quad 2)+(3 \quad 0)$

› 풀이 $(-1 \quad 2)+(3 \quad 0)=(-1+3 \quad 2+0)$

$=$ ______

(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 9 & 4 & -5 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & 12 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

풍쌤 POINT

같은 꼴의 두 행렬 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$에 대하여

$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$

유형 06 행렬의 뺄셈

09 다음을 계산하시오.

(1) $(1\quad -1)-(2\quad 3)$

> 풀이 $(1\quad -1)-(2\quad 3)=(1-2\quad -1-3)$
> $=$ ________

(2) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -1 & 0 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 7 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 0 & -7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

풍쌤 POINT

같은 꼴의 두 행렬 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$에 대하여
$A-B=(a_{ij}-b_{ij})$

유형 07 행렬의 덧셈에 대한 성질

10 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.
(단, O는 영행렬이다.)

(1) $A+O$

(2) $O+A$

(3) $A+(-A)$

(4) $(-A)+A$

11 세 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $A+B$

(2) $B+A$

(3) $(A+B)+C$

(4) $A+(B+C)$

풍쌤 POINT

임의의 행렬 A와 같은 꼴의 영행렬 O에 대하여
① $A+O=O+A=A$
② $A+(-A)=(-A)+A=O$

유형 08 행렬의 덧셈과 뺄셈

12 세 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $A+B-C$

풀이 $A+B-C=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$=$ ________

(2) $A-B+C$

(3) $A-(B+C)$

(4) $(B-A)-C$

풍쌤 POINT

행렬에서 덧셈, 뺄셈이 섞여 있는 식은 앞에서부터 차례대로 계산한다. 이때 괄호가 있으면 괄호 안부터 계산한다.

유형 09 어떤 행렬 구하기 (1)

13 다음 등식을 만족시키는 행렬 X를 구하시오.

(1) $X+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

풀이 양변에서 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$를 빼면

$X+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

이므로

$X=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}=$ ________

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}+X=O$ (단, O는 영행렬이다.)

(4) $X-\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}-X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

풍쌤 POINT

같은 꼴의 세 행렬 A, B, X에 대하여

① $A+X=B$이면 $X=B-A$

② $A-X=B$이면 $X=A-B$

04 행렬의 실수배

❶ 행렬의 실수배

행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$와 실수 k에 대하여

$$kA=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

❷ 행렬의 실수배의 성질

같은 꼴의 두 행렬 A, B와 두 실수 k, l에 대하여

① $(kl)A=k(lA)$

② $(k+l)A=kA+lA$, $k(A+B)=kA+kB$

› 행렬 A, 영행렬 O, 실수 k에 대하여
$1\times A=A$
$(-1)\times A=-A$
$0\times A=O$
$k\times O=O$

유형 10 행렬의 실수배

정답과 풀이 092쪽

14 다음을 계산하시오.

(1) $2(-1 \quad 3)$

› 풀이 $2(-1 \quad 3)=(2\times(-1) \quad \_\_\_\times 3)=(-2 \quad \_\_\_)$

(2) $-3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

(4) $0.5\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

(5) $0\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

15 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $3A$

› 풀이 $3A=3\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times 2 & 3\times(-4) \\ 3\times(-2) & 3\times 6 \end{pmatrix}$

$=\_\_\_\_\_\_$

(2) $-10A$

(3) $-\frac{1}{2}A$

(4) $1.2A$

(5) $1.5A$

유형 11 어떤 행렬 구하기 (2)

16 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $2A+A$

> 풀이 $2A+A=(2+1)A=3A$
>
> $=3\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times5 & 3\times3 \\ 3\times1 & 3\times(-4) \end{pmatrix}$
>
> $=$ __________

(2) $4B-2B$

(3) $4A-4B$

(4) $2(A+2B)$

(5) $3A-2(A+B)$

(6) $(A-3B)+(2A+B)$

17 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음 등식을 만족시키는 행렬 X를 구하시오.

(1) $2X+A=3A+4B$

> 풀이 $2X+A=3A+4B$에서 $2X=2A+4B$이므로
>
> $X=A+2B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
>
> $=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=$ __________

(2) $2(X-A)=X+B$

(3) $2X+A=3(A-B)$

(4) $2B-X=X-(A+B)$

(5) $2(X-3A)=3X-2(A+B)$

풍쌤 POINT

행렬의 등식에서도 수와 식에서와 마찬가지로 이항하여 계산할 수 있다.

유형 12 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배에서 미지수 구하기

18 두 이차정사각행렬 A, B가 다음을 만족시킬 때, 두 행렬 A, B를 구하시오.

(1) $A+B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

> 풀이 $A+B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ …… ㉠

$A-B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $2A=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$이므로 $A=$________

㉠−㉡을 하면 $2B=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$이므로 $B=$________

(2) $A+B=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$, $A+2B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $3A+B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $2A+B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $2A-B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A+3B=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

(5) $4A-B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$, $A+2B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

풍쌤 POINT

행렬의 연립방정식도 수와 식처럼 계산한다.

19 다음 등식이 성립하도록 정수 x, y의 값을 정하시오.

(1) $2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & -3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} y & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

> 풀이 $2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & -3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} y & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2x & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3y & 9 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4+3y & 7 \\ 2x+18 & 0 \end{pmatrix}$

이므로 $\begin{pmatrix} 4+3y & 7 \\ 2x+18 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$4+3y=1$, $2x+18=8$

따라서 $x=$_____, $y=$_____이다.

(2) $2\begin{pmatrix} x^2 & -1 \\ y & 4 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $x\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

(4) $x\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$

(5) $x\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}-y\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

풍쌤 POINT

세 행렬 A, B, C에 대하여 $xA+yB=C$로 주어지면 $xA+yB$를 간단히 정리한 후, 두 행렬이 서로 같을 조건을 이용한다.

05 행렬의 곱셈

❶ 행렬의 곱셈

① 행렬 A의 제i행의 성분과 행렬 B의 제j열의 성분을 각각 차례대로 곱하여 더한 값을 (i, j) 성분으로 하는 행렬을 두 행렬 A, B의 곱이라 하고, 기호 AB로 나타낸다.

② 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

❷ 단위행렬

왼쪽 위에서 오른쪽 아래로 내려가는 대각선 위의 성분은 모두 1이고, 그 외의 성분은 모두 0인 정사각행렬을 단위행렬이라 하고, 기호 E로 나타낸다.

❸ 행렬의 거듭제곱

정사각행렬 A와 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$AA=A^2,\ A^2A=A^3,\ \cdots,\ A^{n-1}A=A^n$$

› 행렬 A의 열의 개수와 행렬 B의 행의 개수가 같을 때에만 두 행렬의 곱셈 AB가 정의된다.
$(m\times k$ 행렬$)\times(k\times n$ 행렬$)$
$=(m\times n$ 행렬$)$

› $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$은 각각 이차단위행렬, 삼차단위행렬이다.

› 행렬 A가 정사각행렬일 때에만 행렬의 거듭제곱이 정의된다.

유형 13 행렬의 곱셈의 정의

20 다음 ( ) 안에 행렬의 곱셈이 정의되는 것은 ○표, 정의되지 않는 것은 ×표를 써넣으시오.

(1) $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}(-1 \quad 2)$ ( )

› 풀이 $A=\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $B=(-1 \quad 2)$라고 할 때
(행렬 A의 ___의 개수)$=$(행렬 B의 ___의 개수)
이므로 두 행렬의 곱셈 $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}(-1 \quad 2)$가 정의된다.

(2) $(2 \quad 3)(4 \quad -1)$ ( )

(3) $(-4 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ ( )

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}(3 \quad 5)$ ( )

풍쌤 POINT

$m_1\times n_1$ 행렬 A와 $m_2\times n_2$ 행렬 B에 대하여 $n_1=m_2$일 때에만 두 행렬의 곱셈 AB가 정의된다.

유형 14 행렬의 곱셈

21 다음을 계산하시오.

(1) $(1 \quad 3)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

› 풀이 $(1 \quad 3)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=(1\times(-1)+3\times2)=$____

(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}(3 \quad 1)$

(3) $(-1 \quad 2)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

풍쌤 POINT

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ① & ② \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1}\times① & \boxed{1}\times② \\ \boxed{2}\times① & \boxed{2}\times② \end{pmatrix}$$

유형 15 단위행렬과 행렬의 곱셈

22 다음을 계산하시오.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

23 주어진 행렬 A와 같은 꼴의 단위행렬 E에 대하여 AE와 EA를 계산하시오.

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

> 풀이 $AE=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$ ______
>
> $EA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=$ ______

(2) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

(3) $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

풍쌤 POINT

곱이 정의되는 두 행렬 A, E에 대하여

$AE=EA=A$ (단, E는 단위행렬이다.)

유형 16 행렬의 곱셈에서 미지수 구하기

24 다음 등식이 성립하도록 실수 x, y, z의 값을 정하시오.

(1) $\begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ y & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

> 풀이 $\begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ y & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x-y & -2x-1 \\ 2y & 2 \end{pmatrix}$
>
> 이므로 $\begin{pmatrix} 3x-y & -2x-1 \\ 2y & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
>
> 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
>
> $3x-y=z$, $-2x-1=3$, $2y=4$
>
> 따라서 $x=$____, $y=$___, $z=$____이다.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ y & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ z & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & -2 \\ -3 & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ z & -8 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} x & -2 \\ 3 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

유형 17 행렬의 곱셈의 변형

25 이차정사각행렬 A에 대하여

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$일 때, 행렬 $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$을 구하시오.

> 풀이 $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{aligned}A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}&=2A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\&=2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}\\&=\underline{\qquad}\end{aligned}$$

26 이차정사각행렬 A에 대하여

$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$일 때, 행렬 $A\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$를 구하시오.

27 이차정사각행렬 A에 대하여

$A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$일 때, 행렬 $A\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$을 구하시오.

풍쌤 POINT

이차정사각행렬 A에 대하여 $A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}$이면

$$A\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+r\\q+s\end{pmatrix}$$

유형 18 행렬의 거듭제곱

28 주어진 행렬 A에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}$

① A^2

② A^3

> 풀이 ① $A^2=AA=\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}=\underline{\qquad}$
>
> ② $A^3=A^2A=\begin{pmatrix}3&-5\\5&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}=\underline{\qquad}$

(2) $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}$

① A^2

② A^3

(3) $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}$

① A^2

② A^3

(4) $A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$

① A^2

② A^3

풍쌤 POINT

정사각행렬 A와 2 이상의 자연수 n에 대하여

$A^n=A^{n-1}A$

29 행렬 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) E^2

> 풀이 $E^2=EE=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$ ______

(2) E^3

(3) E^4

(4) E^{1000}

30 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) A^2

> 풀이 $A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$ ______

(2) A^3

(3) A^4

(4) A^{1000}

31 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) A^2

> 풀이 $A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=$ ______

(2) A^3

(3) A^4

(4) A^{1000}

32 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) A^2

> 풀이 $A^2=AA=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=$ ______

(2) A^3

(3) A^4

(4) A^{1000}

풍쌤 POINT

n이 자연수일 때

① $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이면 $E^2=E^3=E^4=\cdots=E^n=E$

② $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이면 $A^n=\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

③ $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$이면 $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$

④ $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$이면 $A^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$

33 아래 [표 1]은 경복궁과 덕수궁의 일인당 관람 요금을, [표 2]는 태호와 예지네 가족 수를 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하시오.

[표 1] (단위: 원)

	가격
경복궁	3000
덕수궁	1000

[표 2] (단위: 명)

	태호	예지
가족 수	a	b

(1) $X=\begin{pmatrix} 3000 \\ 1000 \end{pmatrix}$, $Y=(a \quad b)$라고 할 때, XY를 구하시오.

(2) 태호네 가족이 모두 경복궁을 관람할 때의 입장료는 15000원, 예지네 가족이 모두 덕수궁을 관람할 때의 입장료는 3000원이다. a, b의 값을 구하시오.

34 아래 [표 1]은 두 과자 A, B 한 봉지에 들어 있는 나트륨과 단백질의 양을, [표 2]는 나트륨과 단백질 1 mg당 제조 원가를 나타낸 것이다.

[표 1] (단위: mg)

	나트륨	단백질
A	8	a
B	b	4

[표 2] (단위: 원)

	제조 원가
나트륨	2
단백질	3

두 과자 A, B 한 봉지에 들어 있는 나트륨과 단백질을 만드는 데 필요한 비용이 각각 25원, 24원이다. 이때 필요한 비용을 행렬의 곱으로 나타내면 다음과 같을 때, a, b, c의 값을 구하시오.

$$\begin{pmatrix} 8 & a \\ b & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ 24 \end{pmatrix}$$

35 아래 [표 1]은 두 자동차 공장 A, B에서 한 달 동안 생산하는 차량의 대수를, [표 2]는 소형차와 중형차의 자동차 한 대당 가격 및 이익을 나타낸 것이다.

[표 1] (단위: 대)

	소형차	중형차
A	200	100
B	150	250

[표 2] (단위: 만 원)

	가격	이익
소형차	2000	150
중형차	4000	250

$X=\begin{pmatrix} 200 & 100 \\ 150 & 250 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 2000 & 150 \\ 4000 & 250 \end{pmatrix}$이라고 할 때, XY의 다음 성분이 나타내는 것을 말하시오.

(1) $(1,\ 1)$ 성분

(2) $(1,\ 2)$ 성분

(3) $(2,\ 1)$ 성분

(4) $(2,\ 2)$ 성분

36 다음 [표 1]은 현주와 미애가 사려는 볼펜과 형광펜의 개수를, [표 2]는 두 문구점 A, B에서 판매하는 볼펜과 형광펜의 개당의 판매 가격을 나타낸 것이다.

[표 1] (단위: 개)

	현주	미애
볼펜	4	3
형광펜	6	5

[표 2] (단위: 원)

	볼펜	형광펜
A	2000	1300
B	2100	1200

$X=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 2000 & 1300 \\ 2100 & 1200 \end{pmatrix}$이라고 할 때, 행렬 YX의 다음 성분이 나타내는 것을 말하시오.

(1) $(1,\ 1)$ 성분

(2) $(1,\ 2)$ 성분

(3) $(2,\ 1)$ 성분

(4) $(2,\ 2)$ 성분

06 행렬의 곱셈의 성질

1 행렬의 곱셈의 성질

합과 곱이 정의되는 세 행렬 A, B, C에 대하여

① 일반적으로 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하지 않는다.

➡ $AB \neq BA$

② 결합법칙: $(AB)C=A(BC)$

③ 분배법칙: $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

④ $k(AB)=(kA)B=A(kB)$ (단, k는 실수이다.)

› $(AB)C=A(BC)$이므로 이를 간단히 ABC로 나타낼 수 있다.

유형 21 행렬의 곱셈 – AB와 BA의 비교

정답과 풀이 099쪽

37 주어진 두 행렬 A, B에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

① AB

② BA

› 풀이 ① $AB=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=$ ______

② $BA=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=$ ______

(2) $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

① AB

② BA

(3) $A=\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

① AB

② BA

(4) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

① AB

② BA

(5) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

① AB

② BA

풍쌤 POINT

- 곱이 정의되는 두 행렬 A, B에 대하여

  $AB \neq BA$

- 곱이 정의되는 두 행렬 A, B와 영행렬 O에 대하여

  ① $A \neq O$, $B \neq O$이지만 $AB=O$인 행렬 A, B가 존재한다.

  ② $A=O$ 또는 $B=O$이면 $AB=O$이다.

  ③ $AB=O$라고 해서 반드시 $A=O$ 또는 $B=O$가 성립하는 것은 아니다.

38 세 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $(AB)C$

> 풀이 $(AB)C=ABC=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
$=$ ______

(2) $AB+AC$

(3) $AC+BC$

(4) $AB-AC$

(5) $AC-BC$

(6) $A(3B)$

39 세 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $ABA-ABC$

> 풀이 $ABA-ABC$
$=AB(A-C)$
$=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\right\}$
$=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=$ ______

(2) $(BC)A-A(CA)$

(3) $(4A)B-A(3B)$

(4) $(3A-B)C+A(B-3C)$

(5) $A(B-C)+(C-A)B-C(A+B)$

풍쌤 POINT

합과 곱이 정의되는 세 행렬 A, B, C에 대하여
① 결합법칙: $(AB)C=A(BC)$
② 분배법칙: $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$
③ $k(AB)=(kA)B=A(kB)$ (단, k는 실수이다.)

유형 23 $(A-B)^2$, $(B-A)^2$ 구하기

40 주어진 두 행렬 A, B에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

① $(A-B)^2$

② $(B-A)^2$

> 풀이 ① $A-B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$이므로
>
> $(A-B)^2=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}=$ ________
>
> ② $B-A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$이므로
>
> $(B-A)^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}=$ ________

(2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

① $(A-B)^2$

② $(B-A)^2$

(3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

① $(A-B)^2$

② $(B-A)^2$

풍쌤 POINT

합과 곱이 정의되는 두 행렬 A, B에 대하여

$(A-B)^2=(B-A)^2$

유형 24 행렬의 곱셈의 여러 가지 성질

41 주어진 두 행렬 A, B가 다음 조건을 만족시킬 때, 실수 x, y의 값을 구하시오.

(1) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ x & y \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $AB=BA$

> 풀이 $AB=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 2x-3y & -x+y \end{pmatrix}$
>
> $BA=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-x & -4-y \\ -9+x & 6+y \end{pmatrix}$
>
> 이므로
>
> $\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 2x-3y & -x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-x & -4-y \\ -9+x & 6+y \end{pmatrix}$
>
> 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
>
> $12=6-x$, $-5=-4-y$, $2x-3y=-9+x$,
>
> $-x+y=6+y$
>
> 따라서 $x=$____, $y=$____이다.

(2) $A=\begin{pmatrix} 2 & x \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} y & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

(3) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$,

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

(4) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & y \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

풍쌤 POINT

합과 곱이 정의되는 두 행렬 A, B에 대하여 $AB=BA$일 때에만 다음이 성립한다.

① $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

② $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

③ $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

07 케일리-해밀턴 정리

❶ 케일리-해밀턴 정리

세 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

가 성립한다. 그러나 $A^2-pA+qE=O$ (p, q는 실수)를 만족시키는 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 항상 $a+d=p$, $ad-bc=q$가 성립하지 않는다.

› 케일리-해밀턴 정리를 이용하면 A^2, A^3, $\cdots$, A^n 등의 거듭제곱을 $pA+qE$ (p, q는 실수) 꼴로 간단하게 나타낼 수 있다.

유형 25 케일리-해밀턴 정리

정답과 풀이 101쪽

42 주어진 행렬 A가 $A^2+pA+qE=O$를 만족시킬 때, 실수 p, q의 값을 구하시오.
(단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

(1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

› 풀이 $A^2=AA=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$이므로

$A^2+pA+qE=\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}+p\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 11+3p+q & 4+p \\ 8+2p & 3+p+q \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 11+3p+q & 4+p \\ 8+2p & 3+p+q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$11+3p+q=0$, $4+p=0$, $8+2p=0$, $3+p+q=0$

따라서 $p=$____, $q=$____이다.

(2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

43 주어진 행렬 A에 대하여 케일리-해밀턴 정리를 이용하여 $A^3=xA+yE$를 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오. (단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

(1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

› 풀이 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-(3+1)A+(3\times1-1\times2)E=O$

$A^2-4A+E=O$, 즉 $A^2=4A-E$

$A^3=A^2A=(4A-E)A=4A^2-A$

$=4(4A-E)-A=15A-4E$

이므로 $x=$____, $y=$____이다.

(2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

풍쌤 POINT

이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$와 단위행렬 E, 영행렬 O에 대하여

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

를 적절히 변형하여 이용하면 행렬에 대한 고차식의 차수를 낮추어 식을 간단히 할 수 있다.

중단원 점검문제

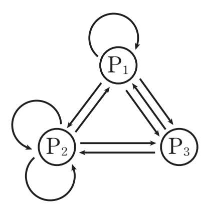
정답과 풀이 102쪽

01

행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$의 (i, j) 성분을 a_{ij}라고 할 때, $a_{11}-a_{23}+a_{31}$의 값을 구하시오.

02

오른쪽 그림은 세 지역 P_1, P_2, P_3 사이를 운행하는 버스 노선의 방향을 화살표로 나타낸 것이다. 행렬 A의 (i, j) 성분 a_{ij}를 P_i 지역에서 P_j 지역까지 바로 갈 수 있는 버스 노선의 수라고 할 때, 행렬 A를 구하시오. (단, $i=1, 2, 3$, $j=1, 2, 3$)



03

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} y+3 & 8 \\ 3xy+6 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x+2y & 8 \\ -6 & 2x+y \end{pmatrix}$에 대하여 $A=B$일 때, x^2+y^2의 값을 구하시오.

(단, x, y는 실수이다.)

04

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 3x \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 $A+B$의 모든 성분의 합이 8일 때, 실수 x의 값을 구하시오.

05

세 행렬

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

에 대하여 $B-(A-C)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$일 때, $ad-bc$의 값을 구하시오.

06

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $3(A+B)-A=2X+B$를 만족시키는 행렬 X를 구하시오.

07

세 행렬

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

에 대하여 $A=xB+yC$일 때, $xy+ab$의 값을 구하시오.

(단, a, b, x, y는 실수이다.)

08

등식 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 18 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하시오.

09

다음 [표 1]은 두 상점 P, Q에서의 빵과 우유의 개당 가격을 나타낸 것이고, [표 2]는 재성이와 준형이가 사려는 빵과 우유의 개수를 나타낸 것이다.

[표 1] (단위: 원)

	빵	우유
P	1200	1000
Q	1500	1200

[표 2] (단위: 개)

	재성	준형
빵	3	3
우유	3	4

$A=\begin{pmatrix} 1200 & 1000 \\ 1500 & 1200 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$라고 할 때, 행렬 AB의 $(2, 1)$ 성분이 나타내는 것을 말하시오.

10

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ y & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $AB=BA$가 성립할 때, x, y의 값을 구하시오. (단, x, y는 실수이다.)

11

세 행렬

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & b \\ -4 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -7 & c \end{pmatrix}$$

에 대하여 $AB+AC=\begin{pmatrix} 19 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$일 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

12

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 A^2+B^2의 모든 성분의 합을 구하시오.

13

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$일 때, $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 90 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오.

14

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$이 성립할 때, $a+2b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

15

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2-3AB+BA-3B^2$을 구하시오.

16

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$이 $A^2+pA+qE=O$를 만족시킬 때, 실수 p, q에 대하여 p^2+q^2의 값을 구하시오.

(단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)