풍산자

라이트유형

확률과 통계

정답과 풀이

01 여러 가지 순열과 중복조합

기본을 다지는 유형

본문 009쪽

001

(1) ${}_2\Pi_5=2^5=32$

(2) ${}_3\Pi_3=3^3=27$

(3) ${}_5\Pi_2=5^2=25$

(4) ${}_6\Pi_4=6^4=1296$

답 (1) 32 (2) 27 (3) 25 (4) 1296

002

(1) ${}_n\Pi_4=256$에서 $n^4=4^4$ $\quad\therefore n=4$

(2) ${}_n\Pi_3=343$에서 $n^3=7^3$ $\quad\therefore n=7$

(3) ${}_2\Pi_r=512$에서 $2^r=2^9$ $\quad\therefore r=9$

(4) ${}_5\Pi_r=625$에서 $5^r=5^4$ $\quad\therefore r=4$

답 (1) 4 (2) 7 (3) 9 (4) 4

003

$${}_2\Pi_2+{}_3\Pi_2+{}_4\Pi_2+{}_5\Pi_2=2^2+3^2+4^2+5^2$$
$$=4+9+16+25=54$$

답 ③

004

구하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 7개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_7=2^7=128$

답 ⑤

005

구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_4=4^4=256$

답 ①

006

첫 번째 자리에 문자가 오는 경우의 수는 3

나머지 세 자리에 문자 또는 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_7\Pi_3=7^3=343$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times343=1029$

답 ③

007

주머니 A에 넣을 3개의 공을 택하는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

남은 3개의 공을 두 주머니 B, C에 나누어 넣는 경우의 수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\times8=160$

답 ⑤

008

구슬 A를 주머니에 넣는 경우의 수는 2 ······ ❶

구슬 B, C, D를 4개의 주머니에 넣는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$ ······ ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times64=128$ ······ ❸

답 128

채점 기준	비율
❶ 구슬 A를 주머니에 넣는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 구슬 B, C, D를 주머니에 넣는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 4개의 구슬을 주머니에 넣을 때, 구슬 A가 빨간색 또는 노란색 주머니에 들어가는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %

009

구하는 신호의 개수는 서로 다른 2개에서 8개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_8=2^8=256$

답 ②

010

구하는 신호의 개수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$

답 81

011

전구 6개를 각각 켜거나 끄는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_6=2^6=64$

이때 전구가 모두 꺼진 경우는 신호에서 제외되므로 구하는 신호의 개수는

$64-1=63$

답 ③

012

(1) 구하는 자연수의 개수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$

(2) 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

2, 4의 2개

백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 짝수인 세 자리 자연수의 개수는

$2\times16=32$

답 (1) 64 (2) 32

013

천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

3, 5, 6, 8의 4개

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

0, 5의 2개

백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 5의 배수인 네 자리 자연수의 개수는

$4\times2\times25=200$

답 ③

014

숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허용하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$2\times{}_3\Pi_3=2\times3^3=54$ → 천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 1, 2의 2개이다.

이때 각 자리의 수의 합이 7보다 큰 자연수는 2222뿐이므로 네 자리 자연수 중에서 각 자리의 수의 합이 7 이하인 자연수의 개수는

$54-1=53$

답 ⑤

015

5개의 숫자 1, 3, 5, 7, 9 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

4개의 숫자 1, 5, 7, 9 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 → 숫자 3을 포함하지 않는 세 자리 자연수

${}_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 세 자리 자연수 중에서 숫자 3이 한 개 이상 포함된 것의 개수는

$125-64=61$

답 ④

016

세 자리 자연수가 331보다 작은 경우는 1□□, 2□□, 31□, 32□의 꼴이다.

(i) 1□□인 세 자리 자연수의 개수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$ ······ ❶

(ii) 2□□인 세 자리 자연수의 개수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$ ······ ❷

(iii) 31□인 세 자리 자연수의 개수는 4

(iv) 32□인 세 자리 자연수의 개수는 4 ······ ❸

(i)~(iv)에서 세 자리 자연수 중에서 331보다 작은 자연수의 개수는

$16+16+4+4=40$

$\therefore k=40$ ······ ❹

답 40

채점 기준	비율
❶ 1□□인 세 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 2□□인 세 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 31□, 32□인 세 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❹ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

|다른 풀이|

4개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

세 자리 자연수가 331보다 크거나 같은 경우는 33□, 34□, 4□□의 꼴이므로 그 경우의 수는

$4+4+{}_4\Pi_2=4+4+4^2=24$

$\therefore k=64-24=40$

017

X에서 Y로의 함수는 Y의 원소 -1, 0, 1의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 X의 원소 a, b에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_2=3^2=9$

답 ④

018

$f(3)=1$이므로 주어진 함수는 Y의 원소 1, 3, 5, 7의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 X의 원소 0, 1, 2에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$

답 ②

019

A에서 B로의 함수 f는 B의 원소 -1, 0, 1, 2, 3의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 A의 원소 a, b, c에 대응시키면 되므로

$p={}_5\Pi_3=5^3=125$ ······ ❶

함수 f 중에서 일대일함수는 B의 원소 -1, 0, 1, 2, 3의 5개에서 서로 다른 3개를 택하여 A의 원소 a, b, c에 대응시키면 되므로

$q={}_5P_3=5\times4\times3=60$ ······ ❷

$\therefore p+q=125+60=185$ ······ ❸

답 185

채점 기준	비율
❶ p의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ q의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

풍쌤 개념 CHECK

일대일함수_高 공통수학2

함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$일 때, 이 함수 f를 일대일함수라고 한다.

참고

두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n일 때

(1) X에서 Y로의 함수의 개수는 ${}_n\Pi_m=n^m$

(2) X에서 Y로의 일대일함수의 개수는 ${}_nP_m$ (단, $n\geq m$)

(3) X에서 Y로의 일대일대응의 개수는 ${}_nP_m$ (단, $m=n$)

020

$f(4) \neq -2$이므로 $f(4)$의 값이 될 수 있는 것은

$-1, 0, 1, 2$의 4개

Y의 원소 $-2, -1, 0, 1, 2$의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 X의 원소 2, 3, 5에 대응시키는 경우의 수는

${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$

따라서 구하는 함수의 개수는

$4 \times 125 = 500$

답 ③

021

$f(3) \neq b$이므로 $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은

a, c의 2개

B의 원소 a, b, c의 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 A의 원소 1, 4, 5에 대응시키는 경우의 수는

${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$

따라서 구하는 함수의 개수는

$2 \times 27 = 54$

답 ④

022

5개의 문자 x, x, y, y, z에는 x가 2개, y가 2개 있으므로 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2! \times 2!} = \dfrac{120}{2 \times 2} = 30$

답 ③

023

(1) 7개의 문자 b, l, o, s, s, o, m에는 o가 2개, s가 2개 있으므로 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2! \times 2!} = \dfrac{5040}{2 \times 2} = 1260$

(2) 양 끝에 2개의 o를 나열하고, 2개의 o를 제외한 5개의 문자 b, l, s, s, m을 일렬로 나열하는 경우의 수는

s가 2개

$\dfrac{5!}{2!} = \dfrac{120}{2} = 60$

(3) 2개의 s를 한 문자 A로 생각하면 6개의 문자 A, b, l, o, o, m을 일렬로 나열하는 경우의 수는

o가 2개

$\dfrac{6!}{2!} = \dfrac{720}{2} = 360$

답 (1) 1260 (2) 60 (3) 360

024

모음 e, e, i, a를 한 문자 A로 생각하면 6개의 문자 A, s, s, n, t, l을 일렬로 나열하는 경우의 수는

s가 2개

$\dfrac{6!}{2!} = \dfrac{720}{2} = 360$

이때 모음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

e가 2개

$\dfrac{4!}{2!} = \dfrac{24}{2} = 12$

따라서 구하는 경우의 수는

$360 \times 12 = 4320$

답 ②

025

u와 i를 제외한 5개의 문자 f, l, f, l, l을 일렬로 나열하는 경우의 수는

f가 2개, l이 3개

$\dfrac{5!}{2! \times 3!} = \dfrac{120}{2 \times 6} = 10$

이때 f, l, f, l, l의 사이사이와 양 끝의 6개의 자리에 u와 i를 나열하는 경우의 수는

${}_6P_2 = 6 \times 5 = 30$

따라서 구하는 경우의 수는

$10 \times 30 = 300$

답 ④

|다른 풀이|

7개의 문자 f, u, l, f, i, l, l에는 f가 2개, l이 3개 있으므로 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2! \times 3!} = \dfrac{5040}{2 \times 6} = 420$

u와 i를 한 문자 A로 생각하면 6개의 문자 A, f, l, f, l, l을 일렬로 나열하는 경우의 수는

f가 2개, l이 3개

$\dfrac{6!}{2! \times 3!} = \dfrac{720}{2 \times 6} = 60$

이때 u와 i가 자리를 바꾸는 경우의 수는 2이므로 u와 i가 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$60 \times 2 = 120$

따라서 구하는 경우의 수는 $420 - 120 = 300$

026

모음 o, e, e를 한 문자 A로 생각하면 7개의 문자 A, c, m, p, t, n, t를 일렬로 나열하는 경우의 수는

t가 2개

$\dfrac{7!}{2!} = \dfrac{5040}{2} = 2520$

이때 모음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

e가 2개

$\dfrac{3!}{2!} = 3$

$\therefore x = 2520 \times 3 = 7560$ ······ ❶

자음 c, m, p, t, n, t를 한 문자 B로 생각하면 4개의 문자 B, o, e, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

e가 2개

$\dfrac{4!}{2!} = \dfrac{24}{2} = 12$

이때 자음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

t가 2개

$\dfrac{6!}{2!} = \dfrac{720}{2} = 360$

$\therefore y = 12 \times 360 = 4320$ ······ ❷

$\therefore x - y = 7560 - 4320 = 3240$ ······ ❸

답 3240

채점 기준	비율
❶ x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ y의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $x-y$의 값을 구할 수 있다.	20 %

027

(1) 5개의 숫자 1, 2, 2, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는 2가 2개, 5가 2개

$\frac{5!}{2!\times2!}=\frac{120}{2\times2}=30$

(2) 짝수가 되려면 일의 자리의 숫자가 2가 되어야 하므로 4개의 숫자 1, 2, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는 5가 2개

$\frac{4!}{2!}=\frac{24}{2}=12$

(3) 5의 배수가 되려면 일의 자리의 숫자가 5가 되어야 하므로 4개의 숫자 1, 2, 2, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는 2가 2개

$\frac{4!}{2!}=\frac{24}{2}=12$

답 (1) 30 (2) 12 (3) 12

028

(i) 일의 자리의 숫자가 1인 경우

5개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 2가 2개, 3이 2개

$\frac{5!}{2!\times2!}=\frac{120}{2\times2}=30$

(ii) 일의 자리의 숫자가 3인 경우

5개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 1이 2개, 2가 2개

$\frac{5!}{2!\times2!}=\frac{120}{2\times2}=30$

(i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는

$30+30=60$

답 ③

| 다른 풀이 |

6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3을 모두 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리 자연수의 개수는 1이 2개, 2가 2개, 3이 2개

$\frac{6!}{2!\times2!\times2!}=\frac{720}{2\times2\times2}=90$

짝수가 되려면 일의 자리의 숫자가 2가 되어야 하므로 5개의 숫자 1, 1, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 1이 2개, 3이 2개

$\frac{5!}{2!\times2!}=\frac{120}{2\times2}=30$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$90-30=60$

029

(i) 맨 앞자리의 숫자가 2인 경우

4개의 숫자 0, 1, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 3이 2개

$\frac{4!}{2!}=\frac{24}{2}=12$

(ii) 맨 앞자리의 숫자가 3인 경우

4개의 숫자 0, 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

(i), (ii)에서 20000보다 큰 자연수의 개수는

$12+24=36$

답 36

030

십의 자리, 백의 자리, 천의 자리, 만의 자리에 짝수 2, 2, 4, 4를 나열하는 경우의 수는 2가 2개, 4가 2개

$\frac{4!}{2!\times2!}=\frac{24}{2\times2}=6$

나머지 자리에 3, 3, 5를 나열하는 경우의 수는 3이 2개

$\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$6\times3=18$

답 ④

031

a와 b의 순서가 정해져 있으므로 a, b를 한 문자 X로 생각하여 4개의 문자 X, X, c, d를 일렬로 나열한 후 첫 번째 X는 b, 두 번째 X는 a로 바꾸면 된다. X가 2개

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=\frac{24}{2}=12$

답 ③

032

자음 g, n, r, l, l, y를 일렬로 나열한 후 그 뒤에 모음 e, e, a를 일렬로 나열하면 된다.

자음 g, n, r, l, l, y를 일렬로 나열하는 경우의 수는 l이 2개

$\frac{6!}{2!}=\frac{720}{2}=360$

모음 e, e, a를 일렬로 나열하는 경우의 수는 e가 2개

$\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$360\times3=1080$

답 1080

033

1, 3, 5의 순서가 정해져 있으므로 1, 3, 5를 한 문자 A로 생각하여 A, 2, 2, A, 4, A를 일렬로 나열한 후 첫 번째 A는 1, 두 번째 A는 3, 세 번째 A는 5로 바꾸면 된다. A가 3개, 2가 2개

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times2!}=\frac{720}{6\times2}=60$

답 ②

034

l과 s, t와 e의 순서가 정해져 있으므로 l과 s를 한 문자 A로, t와 e를 한 문자 B로 생각하여 10개의 문자 A, i, g, h, B, h, o, u, A, B를 일렬로 나열한 후 첫 번째 A는 l, 두 번째 A는 s로 바꾸고 첫 번째 B는 t, 두 번째 B는 e로 바꾸면 된다. A가 2개, B가 2개, h가 2개

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{10!}{2!\times2!\times2!}=\frac{10\times9\times8\times7!}{8}=90\times7!$

답 ②

035

3과 5의 순서가 정해져 있고, 짝수 2, 4, 6의 순서가 정해져 있으므

로 3, 5를 한 문자 A로, 2, 4, 6을 한 문자 B로 생각하여 1, B, A, B, A, B, 7을 일렬로 나열한 후 첫 번째 A는 5, 두 번째 A는 3으로 바꾸고 첫 번째 B는 6, 두 번째 B는 4, 세 번째 B는 2로 바꾸면 된다.
A가 2개, B가 3개
따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2!\times3!}=\frac{5040}{2\times6}=420$$

답 420

036

(1) A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{9!}{5!\times4!}=\frac{9\times8\times7\times6\times5!}{5!\times4\times3\times2\times1}=126$$

(2) A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!\times3!}=\frac{120}{2\times6}=10$$

P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times4=40$

(3) (1), (2)에서 $126-40=86$

답 (1) 126 (2) 40 (3) 86

037

A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{4!\times2!}=\frac{720}{24\times2}=15$$

P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}=3$$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times3=45$

답 45

038

A 지점에서 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{4!\times2!}=\frac{720}{24\times2}=15$$

이때 A 지점에서 P 지점을 지나 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=3\times3=9$$

이므로 A 지점에서 P 지점을 지나지 않고 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$15-9=6$

또, Q 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}=3$$

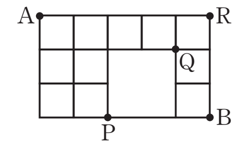
따라서 구하는 경우의 수는

$6\times3=18$

답 ②

039

오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 방법은 다음 중 하나이다.



$A\longrightarrow P\longrightarrow B$, $A\longrightarrow Q\longrightarrow B$,
$A\longrightarrow R\longrightarrow B$

(i) $A\longrightarrow P\longrightarrow B$로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times3!}\times1=10$ ❶

(ii) $A\longrightarrow Q\longrightarrow B$로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{4!}\times\frac{3!}{2!}=5\times3=15$ ❷

(iii) $A\longrightarrow R\longrightarrow B$로 가는 경우의 수는

$1\times1=1$ ❸

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

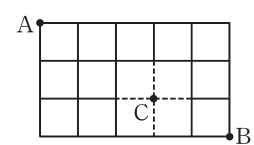
$10+15+1=26$ ❹

답 26

채점 기준	비율
❶ $A\longrightarrow P\longrightarrow B$로 가는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ $A\longrightarrow Q\longrightarrow B$로 가는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ $A\longrightarrow R\longrightarrow B$로 가는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있다.	10 %

| 다른 풀이 |

오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 C 지점을 잡으면 구하는 경우의 수는 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 A 지점에서 C 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 빼면 된다.



따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{5!\times3!}-\frac{5!}{3!\times2!}\times\frac{3!}{2!}=56-10\times3=56-30=26$$

040

(1) ${}_5H_2={}_{5+2-1}C_2={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

(2) ${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

(3) ${}_7H_3={}_{7+3-1}C_3={}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

(4) ${}_4H_8={}_{4+8-1}C_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$

답 (1) 15 (2) 21 (3) 84 (4) 165

풍쌤 개념 CHECK

조합의 수_高 공통수학1

(1) ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}=\frac{n!}{r!\times(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

(2) ${}_nC_0=1$, ${}_nC_n=1$

(3) ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$)

(4) ${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$ (단, $1\le r<n$)

041

${}_6\Pi_2+{}_2H_6=6^2+{}_{2+6-1}C_6=36+{}_7C_6=36+{}_7C_1=36+7=43$

답 43

042

(1) ${}_nH_2={}_{n+2-1}C_2={}_{n+1}C_2$이므로 ${}_nH_2=36$에서 $\dfrac{(n+1)n}{2}=36$

$(n+1)n=72=9\times8 \qquad \therefore n=8$

(2) ${}_3H_r={}_{3+r-1}C_r={}_{2+r}C_r={}_{2+r}C_2$이므로

${}_3H_r=10$에서 $\dfrac{(2+r)(1+r)}{2}=10$

$\underbrace{(2+r)(1+r)=20=5\times4}_{2+r=5,\,1+r=4} \qquad \therefore r=3$

(3) ${}_nH_4={}_{n+4-1}C_4={}_{n+3}C_4$이므로

${}_nH_4={}_7C_3$에서 ${}_{n+3}C_4={}_7C_3$, ${}_{n+3}C_4={}_7C_4$

따라서 $n+3=7$이므로 $n=4$

(4) ${}_5H_r={}_{5+r-1}C_r={}_{4+r}C_r={}_{4+r}C_4$이므로 ${}_5H_r={}_8C_4$에서 ${}_{4+r}C_4={}_8C_4$

따라서 $4+r=8$이므로 $r=4$

답 (1) 8 (2) 3 (3) 4 (4) 4

043

구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

답 ③

044

(1) 구하는 항의 개수는 a, b의 2개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_3={}_4C_3={}_4C_1=4$

(2) 구하는 항의 개수는 x, y, z의 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

(3) $(a+b)^3$의 전개식에서 한 개의 항, $(x+y+z)^5$의 전개식에서 한 개의 항을 택하는 경우의 수와 같으므로 구하는 항의 개수는

$4\times21=84$

답 (1) 4 (2) 21 (3) 84

045

A에게 공 3개를 주고 남은 7개의 공을 B, C에게 남김없이 나누어 주면 되므로 구하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 ${}_2H_7={}_8C_7={}_8C_1=8$

답 8

046

구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=\dfrac{10\times9}{2\times1}=45$

답 ④

참고

무기명 투표는 유권자가 어느 후보를 뽑았는지 알 수 없으므로 후보 중에서 중복을 허용하여 택하는 중복조합으로 생각할 수 있다.

047

사과 주스를 4개 택하고 나머지 6개를 사과 주스와 포도 주스 중에서 택하면 되므로 구하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_2H_6={}_7C_6={}_7C_1=7$

답 ①

048

(1) 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 x, y, z의 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=\dfrac{9\times8}{2\times1}=36$

(2) x, y, z가 양의 정수이므로

$x-1=A$, $y-1=B$, $z-1=C$ (A, B, C는 음이 아닌 정수)로 놓으면 $x=A+1$, $y=B+1$, $z=C+1$

$x+y+z=7$에서 $(A+1)+(B+1)+(C+1)=7$

$\therefore A+B+C=4$

따라서 구하는 양의 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 방정식 $A+B+C=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C의 순서쌍 (A, B, C)의 개수와 같으므로

${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

답 (1) 36 (2) 15

049

구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 a, b, c, d의 4개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_9={}_{12}C_9={}_{12}C_3=\dfrac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$

답 ⑤

050

주어진 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 a, b, c의 3개에서 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_n=28$, 즉 ${}_{n+2}C_n=28$이므로

${}_{n+2}C_2=28$, $\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}=28$

$\underbrace{(n+2)(n+1)=56=8\times7}_{n+2=8,\ n+1=7} \qquad \therefore n=6$

답 ④

051

x, y, z가 음이 아닌 정수이므로 부등식 $x+y+z\le4$를 만족시키는 $x+y+z$가 가질 수 있는 값은

0, 1, 2, 3, 4 ········· ❶

(i) $x+y+z=0$일 때, 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_0={}_2C_0=1$

(ii) $x+y+z=1$일 때, 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$$

(iii) $x+y+z=2$일 때, 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

(iv) $x+y+z=3$일 때, 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

(v) $x+y+z=4$일 때, 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$ ❷

(i)~(v)에서 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

$1+3+6+10+15=35$ ❸

답 35

채점 기준	비율
❶ $x+y+z$가 가질 수 있는 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ 방정식 $x+y+z=0,\ x+y+z=1,\ x+y+z=2,$ $x+y+z=3,\ x+y+z=4$의 해의 개수를 구할 수 있다.	60 %
❸ 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구할 수 있다.	20 %

052

$x=2X+1,\ y=2Y+1,\ z=2Z+1$ ($X,\ Y,\ Z$는 음이 아닌 정수)로 놓으면 $x+y+z=21$에서

$(2X+1)+(2Y+1)+(2Z+1)=21$

$2X+2Y+2Z=18 \qquad \therefore\ X+Y+Z=9$

따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 $X,\ Y,\ Z$의 3개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_9={}_{11}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_2=\frac{11\times10}{2\times1}=55$$

답 ③

053

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4가지이다.

$f(2)\le f(3)\le f(4)$이므로 $f(2),\ f(3),\ f(4)$의 값은 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크지 않은 값부터 차례대로 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$$4\times{}_4\mathrm{H}_3=4\times{}_6\mathrm{C}_3=4\times\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=80$$

답 ⑤

참고

두 집합 $X,\ Y$의 원소의 개수가 각각 $m,\ n$이고 $a\in X,\ b\in X$일 때, 함수 $f: X \longrightarrow Y$ 중에서

(1) $a<b$이면 $f(a)<f(b)$를 만족시키는 함수의 개수

➡ 공역 Y의 원소 중에서 정의역 X의 원소의 개수만큼 택하는 조합의 수

➡ ${}_n\mathrm{C}_m$ (단, $m\le n$)

(2) $a<b$이면 $f(a)\le f(b)$를 만족시키는 함수의 개수

➡ 공역 Y의 원소 중에서 정의역 X의 원소의 개수만큼 택하는 중복조합의 수

➡ ${}_n\mathrm{H}_m$

054

조건 ㈎에서 $f(2)=5$이므로 주어진 함수는 조건 ㈏에 의하여 $f(0)$, $f(1)$의 값은 5, 6, 7 중에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 작지 않은 값부터 차례대로 대응시키면 되고, $f(3),\ f(4)$의 값은 4, 5 중에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 작지 않은 값부터 차례대로 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_2\times{}_2\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1=\frac{4\times3}{2\times1}\times3=18$$

답 18

실력을 높이는 연습 문제

본문 020쪽

01

${}_n\mathrm{P}_2+{}_n\Pi_2=n(n-1)+n^2=2n^2-n$

이때 $2n^2-n=91$이므로

$2n^2-n-91=0,\ (n-7)(2n+13)=0$

n은 자연수이므로 $n=7$

답 ②

02

조건 ㈎에서 양 끝 모두에 대문자 X 또는 Y가 나와야 하므로 양 끝에 나열되는 문자를 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$

조건 ㈏에 의하여 문자 a의 위치를 정하는 경우의 수는 4

나머지 3곳에 문자를 나열하는 경우의 수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times4\times27=432$

답 ③

03

문제 접근하기

B를 연속하여 나열하는 경우를 B가 두 번 연속하는 경우, 세 번 연속하는 경우로 나누어 구한 후 전체 경우의 수에서 B를 연속하여 나열하는 경우의 수를 뺀다.

A, B, C, D 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_3=4^3=64$

(i) B를 두 번 연속하여 나열하는 경우의 수는

ABB, BBA, BBC, CBB, BBD, DBB의 6

(ii) B를 연속하여 세 번 나열하는 경우의 수는

BBB의 1

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$64-(6+1)=57$

답 ③

| 다른 풀이 |

B를 연속하여 나열하지 않는 경우는 다음의 세 가지가 있다.

(i) B를 빼고 나열하는 경우

A, C, D 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

(ii) B를 1개만 나열하는 경우

B○○, ○B○, ○○B

B의 자리를 위와 같이 정한 후 나머지 두 자리에 A, C, D 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는

$3 \times {}_3\Pi_2 = 3 \times 3^2 = 27$

(iii) B를 2개 나열하는 경우

B○B

B의 자리는 위와 같이 정해져 있고 가운데에 올 문자를 A, C, D 중에서 택하면 되므로 경우의 수는

$1 \times 3 = 3$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$27 + 27 + 3 = 57$

04

깃발을 2번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$

같은 방법으로 깃발을 3번, 4번, 5번, 6번, 7번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수를 각각 구하면

${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$, ${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$, ${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$, ${}_2\Pi_6 = 2^6 = 64$,
${}_2\Pi_7 = 2^7 = 128$

따라서 깃발을 2번 이상 7번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 252$

답 252

05

조건 (가)에서 N은 짝수이므로 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 2, 4의 2개

조건 (나)에 의하여 N의 천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 2, 3, 4의 3개

이때 백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_5\Pi_2 = 5^2 = 25$

따라서 구하는 자연수 N의 개수는

$2 \times 3 \times 25 = 150$

답 ④

06

5개의 숫자 3, 4, 5, 6, 7로 만들 수 있는 5445보다 작은 자연수의 개수는 다음과 같다.

(i) 한 자리 자연수의 개수는 ${}_5\Pi_1 = 5$

(ii) 두 자리 자연수의 개수는 ${}_5\Pi_2 = 5^2 = 25$

(iii) 세 자리 자연수의 개수는 ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$

(iv) 네 자리 자연수 중에서

천의 자리의 숫자가 3인 자연수의 개수는 ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$

천의 자리의 숫자가 4인 자연수의 개수는 ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$

천의 자리의 숫자가 5, 백의 자리의 숫자가 3인 자연수의 개수는

${}_5\Pi_2 = 5^2 = 25$

천의 자리의 숫자가 5, 백의 자리의 숫자가 4, 십의 자리의 숫자가 3인 자연수의 개수는 ${}_5\Pi_1 = 5$

천의 자리의 숫자가 5, 백의 자리의 숫자가 4, 십의 자리의 숫자가 4인 자연수 중에서 5445보다 작은 자연수의 개수는

5443, 5444의 2

(i)~(iv)에서 5445보다 작은 자연수의 개수는

$5 + 25 + 125 + 125 + 125 + 25 + 5 + 2 = 437$

이므로 5445는 438번째 수이다.

답 ③

07

$f(c) > 2$이므로 $f(c)$의 값이 될 수 있는 것은

3, 4, 6의 3가지

Y의 원소 0, 1, 3, 4, 6의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 X의 원소 a, b, d에 대응시키는 경우의 수는

${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$

따라서 구하는 함수의 개수는

$3 \times 125 = 375$

답 ①

08

문제 접근하기

$f(1) + f(2) = 4$를 만족시키는 경우는 $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ 또는 $f(1) = f(2) = 2$ 또는 $f(1) = 3$, $f(2) = 1$일 때이므로 각 경우의 수를 구하여 함수의 개수를 구한다.

(i) $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ 또는 $f(1) = 3$, $f(2) = 1$인 경우

조건 (나)를 만족시킨다.

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$

(ii) $f(1) = f(2) = 2$인 경우

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값 중에서 적어도 하나는 1이어야 하므로 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수에서 2, 3, 4 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수를 뺀 것과 같다.

$\therefore {}_4\Pi_3 - {}_3\Pi_3 = 4^3 - 3^3 = 37$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$64 \times 2 + 37 = 165$

답 ⑤

09

(i) a가 두 번 나오는 경우

a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{24}{2 \times 2} = 6$

a, a, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$

a, a, b, d를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$

a, a, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{24}{2 \times 2} = 6$

a, a, c, d를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=\frac{24}{2}=12$

a, a, d, d를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=\frac{24}{2\times2}=6$

따라서 a가 두 번 나오는 경우의 수는

$6+12+12+6+12+6=54$

(ii) a가 세 번 나오는 경우

a, a, a, b를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

a, a, a, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

a, a, a, d를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

따라서 a가 세 번 나오는 경우의 수는

$4+4+4=12$

(iii) a가 네 번 나오는 경우

a, a, a, a를 일렬로 나열하는 경우의 수는 1

(i)~(iii)에서 a가 두 번 이상 나오는 경우의 수는

$54+12+1=67$

답 67

|다른 풀이|

네 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

(i) a가 안 나오는 경우

b, c, d 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$

(ii) a가 한 번 나오는 경우

a○○○, ○a○○, ○○a○, ○○○a의 4가지 경우가 있고 3개의 ○에는 b, c, d 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$4\times{}_3\Pi_3=4\times3^3=108$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$256-(81+108)=67$

10

(i) e끼리 이웃하는 경우

3개의 e를 한 문자 A로 생각하면 7개의 문자 A, t, i, q, u, t, t를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{3!}=\frac{5040}{6}=840$

(ii) t끼리 이웃하는 경우

3개의 t를 한 문자 B로 생각하면 7개의 문자 B, e, i, q, u, e, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{3!}=\frac{5040}{6}=840$

(iii) e끼리, t끼리 이웃하는 경우

3개의 e를 한 문자 A, 3개의 t를 한 문자 B로 생각하면 5개의 문자 A, B, i, q, u를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$840+840-120=1560$

답 ①

11

흰 공 3개, 빨간 공 4개, 파란 공 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{9!}{3!\times4!\times2!}=\frac{9\times8\times7\times6\times5\times4!}{6\times4!\times2}=1260$

파란 공 2개를 1개로 생각하면 흰 공 3개, 빨간 공 4개, 파란 공 1개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

파란 공끼리 이웃하도록 나열하는 경우의 수

$\frac{8!}{3!\times4!}=\frac{8\times7\times6\times5\times4!}{6\times4!}=280$

따라서 구하는 경우의 수는

$1260-280=980$

답 ⑤

12

6개의 숫자 2, 2, 4, 4, 5, 6에서 4개를 택하는 경우는

2, 2, 4, 4 또는 2, 2, 4, 5 또는 2, 2, 4, 6 또는 2, 2, 5, 6 또는 2, 4, 4, 5 또는 2, 4, 4, 6 또는 2, 4, 5, 6 또는 4, 4, 5, 6

(i) 2, 2, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=\frac{24}{2\times2}=6$

(ii) 2, 2, 4, 5 또는 2, 2, 4, 6 또는 2, 2, 5, 6 또는 2, 4, 4, 5 또는 2, 4, 4, 6 또는 4, 4, 5, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6\times\frac{4!}{2!}=6\times\frac{24}{2}=72$

(iii) 2, 4, 5, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

(i)~(iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$6+72+24=102$

답 102

13

다음 그림에서 홀수 1, 1, 3, 5는 □의 자리에, 짝수 2, 4, 4, 6은 ○의 자리에 나열하면 된다.

□○□○□○□○

홀수 1, 1, 3, 5를 □의 자리에 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=\frac{24}{2}=12$

짝수 2, 4, 4, 6을 ○의 자리에 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=\frac{24}{2}=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times12=144$

답 ③

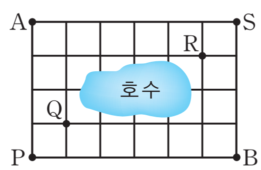
14

자음 t, c, h, r를 모두 한 문자 A로 생각하여 7개의 문자 A, e, a, A, A, e, A를 일렬로 나열한 후 첫 번째 A는 c, 두 번째 A는 h, 세 번째 A는 r, 네 번째 A는 t로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는
$\frac{7!}{4!\times 2!}=\frac{7\times 6\times 5\times 4!}{4!\times 2}=105$

답 ②

15

오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 방법은 다음 중에서 하나이다.

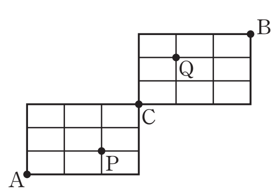


$A \longrightarrow P \longrightarrow B$, $A \longrightarrow Q \longrightarrow B$,
$A \longrightarrow R \longrightarrow B$, $A \longrightarrow S \longrightarrow B$
(i) $A \longrightarrow P \longrightarrow B$로 가는 경우의 수는
$1\times 1=1$
(ii) $A \longrightarrow Q \longrightarrow B$로 가는 경우의 수는
$\frac{4!}{3!}\times\frac{6!}{5!}=4\times 6=24$
(iii) $A \longrightarrow R \longrightarrow B$로 가는 경우의 수는
$\frac{6!}{5!}\times\frac{4!}{3!}=6\times 4=24$
(iv) $A \longrightarrow S \longrightarrow B$로 가는 경우의 수는
$1\times 1=1$
(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는
$1+24+24+1=50$

답 50

16

오른쪽 그림과 같이 C 지점을 잡자.
A 지점에서 P 지점을 지나 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는



$\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=3\times 3=9$
C 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$\frac{6!}{3!\times 3!}=\frac{720}{6\times 6}=20$
이고, C 지점에서 Q 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=3\times 3=9$
이므로 C 지점에서 Q 지점을 지나지 않고 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$20-9=11$
따라서 구하는 경우의 수는
$9\times 11=99$

답 ④

17

${}_{n}H_{6}={}_{n+5}C_{6}$이므로
${}_{n}H_{6}={}_{8}C_{2}$에서 ${}_{n+5}C_{6}={}_{8}C_{2}$, ${}_{n+5}C_{6}={}_{8}C_{6}$
따라서 $n+5=8$에서 $n=3$이므로
${}_{n}H_{3}={}_{3}H_{3}={}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=\frac{5\times 4}{2\times 1}=10$

답 ①

18

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 5개를 택할 때, 홀수가 3개이어야 하므로 짝수는 2개가 되어야 한다.
홀수 1, 3, 5 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 경우의 수는
${}_{3}H_{3}={}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=\frac{5\times 4}{2}=10$
짝수 2, 4 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 경우의 수는
${}_{2}H_{2}={}_{3}C_{2}={}_{3}C_{1}=3$
따라서 구하는 경우의 수는
$10\times 3=30$

답 30

19

4개의 자연수 2, 3, 5, 6에서 중복을 허용하여 3개의 수를 택하는 경우의 수는
${}_{4}H_{3}={}_{6}C_{3}=\frac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1}=20$
$5\times 5\times 6=150$
이 중에서 세 수의 곱이 150을 초과하는 경우는
$6\times 6\times 5=180$, $6\times 6\times 6=216$
의 2가지이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$20-2=18$

답 ④

20

컵 8개를 4명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는
${}_{4}H_{8}={}_{11}C_{8}={}_{11}C_{3}=\frac{11\times 10\times 9}{3\times 2\times 1}=165$
4명의 학생에게 각각 컵을 1개씩 나누어 주고 나머지 컵 4개를 4명에게 나누어 주는 경우의 수는
${}_{4}H_{4}={}_{7}C_{4}={}_{7}C_{3}=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}=35$
따라서 적어도 한 명은 컵을 하나도 받지 못하는 경우의 수는
$165-35=130$

답 130

21

$x\geq 3$, $y\geq 1$, $z\geq 1$이므로
$x-3=X$, $y-1=Y$, $z-1=Z$ (X, Y, Z는 음이 아닌 정수)
로 놓으면
$x=X+3$, $y=Y+1$, $z=Z+1$
$x+y+z=15$에서
$(X+3)+(Y+1)+(Z+1)=15$
$\therefore X+Y+Z=10$

따라서 구하는 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 방정식 $X+Y+Z=10$의 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같으므로

$${}_3H_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=\frac{12\times11}{2\times1}=66$$

답 66

22

x, y, z, w가 음이 아닌 정수이므로 w의 값을 다음과 같이 나누어 생각해 보자.

(i) $w=0$일 때

$x+y+z=10$이므로 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_3H_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=\frac{12\times11}{2\times1}=66$$

(ii) $w=1$일 때

$x+y+z=4$이므로 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

(iii) $w\geq2$일 때

$x+y+z<0$이므로 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z가 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$66+15=81$

답 ②

23

문제 접근하기

주어진 부등식을 만족시키는 $|a|$, $|b|$, $|c|$의 순서쌍 $(|a|, |b|, |c|)$의 개수를 구한 후, 절댓값을 만족시키는 a, b, c는 각각 2개의 값을 가질 수 있음을 이용한다.

주어진 부등식을 만족시키는 모든 순서쌍 $(|a|, |b|, |c|)$의 개수는 6개의 숫자 2, 3, 4, 5, 6, 7 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

크지 않은 수부터 차례대로 $|a|$, $|b|$, $|c|$에 대응

$${}_6H_3={}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

이때 a, b, c는 0이 아닌 정수이므로 각각 절댓값이 같고 부호가 다른 2개의 값을 가질 수 있다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$56\times2\times2\times2=448$

답 ③

24

일대일함수의 개수는 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$a={}_5P_4=5\times4\times3\times2=120$

$f(0)\leq f(1)\leq f(2)\leq f(3)$을 만족시키는 함수의 개수는 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

크지 않은 수부터 차례대로 0, 1, 2, 3에 대응

$$b={}_5H_4={}_8C_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$$

$\therefore a-b=120-70=50$

답 ②

02 이항정리

기본을 다지는 유형

본문 025쪽

001

(1) $(x-1)^4$

$={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3\times(-1)+{}_4C_2x^2\times(-1)^2+{}_4C_3x\times(-1)^3+{}_4C_4\times(-1)^4$

$=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$

(2) $(x+y)^5$

$={}_5C_0x^5+{}_5C_1x^4y+{}_5C_2x^3y^2+{}_5C_3x^2y^3+{}_5C_4xy^4+{}_5C_5y^5$

$=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

(3) $(2a+1)^4$

$={}_4C_0(2a)^4+{}_4C_1(2a)^3+{}_4C_2(2a)^2+{}_4C_32a+{}_4C_4$

$=16a^4+32a^3+24a^2+8a+1$

(4) $(a-2b)^5$

$={}_5C_0a^5+{}_5C_1a^4\times(-2b)+{}_5C_2a^3\times(-2b)^2+{}_5C_3a^2\times(-2b)^3+{}_5C_4a\times(-2b)^4+{}_5C_5\times(-2b)^5$

$=a^5-10a^4b+40a^3b^2-80a^2b^3+80ab^4-32b^5$

답 (1) $x^4-4x^3+6x^2-4x+1$
(2) $x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$
(3) $16a^4+32a^3+24a^2+8a+1$
(4) $a^5-10a^4b+40a^3b^2-80a^2b^3+80ab^4-32b^5$

002

$(x^2-2)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(x^2)^{5-r}(-2)^r={}_5C_r(-2)^rx^{10-2r}$

x^6항은 $10-2r=6$일 때이므로 $r=2$

따라서 x^6의 계수는

${}_5C_2(-2)^2=10\times4=40$

답 ④

|다른 풀이|

$(x^2-2)^5$에서 x^6항은 x^2을 3번, -2를 2번 곱한 경우이므로

${}_5C_2(x^2)^3(-2)^2={}_5C_2(-2)^2x^6$

따라서 x^6의 계수는

${}_5C_2(-2)^2=10\times4=40$

003

$(x+a)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_rx^{6-r}a^r={}_6C_ra^rx^{6-r}$

x^4항은 $6-r=4$일 때이므로 $r=2$

즉, x^4의 계수는 ${}_6C_2a^2=15a^2$

x^5항은 $6-r=5$일 때이므로 $r=1$

즉, x^5의 계수는 ${}_6C_1a=6a$

이때 x^4의 계수가 x^5의 계수의 5배이므로

$15a^2=5\times6a$, $15a^2-30a=0$

$15a(a-2)=0$ $\qquad\therefore a=2\ (\because a\neq0)$

답 2

004

$\left(x+\frac{y}{2}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r x^{5-r}\left(\frac{y}{2}\right)^r={}_5C_r\left(\frac{1}{2}\right)^r x^{5-r}y^r$

x^2y^3항은 $5-r=2$, $r=3$일 때이므로 $r=3$

즉, x^2y^3의 계수는

$a={}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=10\times\frac{1}{8}=\frac{5}{4}$

xy^4항은 $5-r=1$, $r=4$일 때이므로 $r=4$

즉, xy^4의 계수는

$b={}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4=5\times\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$

$\therefore \frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}=\frac{5}{4}\times\frac{16}{5}=4$

답 ②

005

$\left(2x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r(2x)^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_6C_r 2^{6-r}\frac{x^{6-r}}{x^r}$

상수항은 $6-r=r$일 때이므로

$2r=6 \qquad \therefore r=3$

따라서 상수항은

${}_6C_3 2^3=20\times8=160$

답 ③

풍쌤 개념 CHECK

거듭제곱의 나눗셈_中 수학 2

$a\neq0$이고 m, n이 자연수일 때

(1) $m>n$이면 $a^m\div a^n=a^{m-n}$

(2) $m=n$이면 $a^m\div a^n=1$

(3) $m<n$이면 $a^m\div a^n=\frac{1}{a^{n-m}}$

006

$(x^2-2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^4=x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-2\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$ .... ㉠

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r x^{4-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_4C_r\frac{x^{4-r}}{x^r}$

(1) ㉠에 의하여 $(x^2-2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 x^4항은 x^2과 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 x^2항이 곱해질 때와 -2와 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 x^4항이 곱해질 때 나타난다.

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 x^2항은

$\frac{x^{4-r}}{x^r}=x^2$에서 $(4-r)-r=2 \qquad \therefore r=1$

${}_4C_1\frac{x^3}{x}=4x^2$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 x^4항은

$\frac{x^{4-r}}{x^r}=x^4$에서 $(4-r)-r=4 \qquad \therefore r=0$

${}_4C_0\frac{x^4}{x^0}=x^4$

따라서 $(x^2-2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 x^4항은

$x^2\times4x^2-2\times x^4=4x^4-2x^4=2x^4$

이므로 x^4의 계수는 2이다.

(2) ㉠에 의하여 $(x^2-2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 x^2항은 x^2과 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 상수항이 곱해질 때와 -2와 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 x^2항이 곱해질 때 나타난다.

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 상수항은

$\frac{x^{4-r}}{x^r}=1$에서 $4-r=r \qquad \therefore r=2$

${}_4C_2\frac{x^2}{x^2}=6$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 x^2항은

${}_4C_1\frac{x^3}{x}=4x^2$

따라서 $(x^2-2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 x^2항은

$x^2\times6-2\times4x^2=6x^2-8x^2=-2x^2$

이므로 x^2의 계수는 -2이다.

(3) ㉠에 의하여 $(x^2-2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 상수항은 x^2과 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 $\frac{1}{x^2}$항이 곱해질 때와 -2와 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 상수항이 곱해질 때 나타난다.

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 $\frac{1}{x^2}$항은

$\frac{x^{4-r}}{x^r}=\frac{1}{x^2}$에서 $r-(4-r)=2 \qquad \therefore r=3$

${}_4C_3\frac{x}{x^3}=\frac{4}{x^2}$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 상수항은

${}_4C_2\frac{x^2}{x^2}=6$

따라서 $(x^2-2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 상수항은

$x^2\times\frac{4}{x^2}-2\times6=4-12=-8$

(4) ㉠에 의하여 $(x^2-2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 $\frac{1}{x^2}$항은 x^2과 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 $\frac{1}{x^4}$항이 곱해질 때와 -2와 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 $\frac{1}{x^2}$항이 곱해질 때 나타난다.

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 $\frac{1}{x^4}$항은

$\frac{x^{4-r}}{x^r}=\frac{1}{x^4}$에서 $r-(4-r)=4 \qquad \therefore r=4$

${}_4C_4\frac{x^0}{x^4}=\frac{1}{x^4}$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 $\frac{1}{x^2}$항은

${}_4C_3\frac{x}{x^3}=\frac{4}{x^2}$

따라서 $(x^2-2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 $\frac{1}{x^2}$항은

$x^2\times\frac{1}{x^4}-2\times\frac{4}{x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{8}{x^2}=-\frac{7}{x^2}$

이므로 $\frac{1}{x^2}$의 계수는 -7이다.

답 (1) 2 (2) -2 (3) -8 (4) -7

007

$(ax+3)(1+x)^7=ax(1+x)^7+3(1+x)^7$이므로
$(ax+3)(1+x)^7$의 전개식에서 x^5항은 ax와 $(1+x)^7$의 x^4항이 곱해질 때와 3과 $(1+x)^7$의 x^5항이 곱해질 때 나타난다. ······ ❶
$(1+x)^7$의 전개식의 일반항은 ${}_7C_r x^r$이므로
$(1+x)^7$의 전개식에서 x^4항은 ${}_7C_4 x^4=35x^4$
$(1+x)^7$의 전개식에서 x^5항은 ${}_7C_5 x^5=21x^5$
따라서 $(ax+3)(1+x)^7$의 전개식에서 x^5항은
$ax\times 35x^4+3\times 21x^5=(35a+63)x^5$ ······ ❷
이때 $(ax+3)(1+x)^7$의 전개식에서 x^5의 계수는 168이므로
$35a+63=168$, $35a=105$
$\therefore a=3$ ······ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $(ax+3)(1+x)^7$의 전개식에서 x^5항이 나타나는 경우를 설명할 수 있다.	30 %
❷ $(ax+3)(1+x)^7$의 전개식에서 x^5항을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

008

$(3+x)^4$의 전개식의 일반항은 ${}_4C_r 3^{4-r}x^r$
$(1+2x)^3$의 전개식의 일반항은 ${}_3C_s(2x)^s={}_3C_s 2^s x^s$
따라서 $(3+x)^4(1+2x)^3$의 전개식의 일반항은
${}_4C_r 3^{4-r}x^r\times{}_3C_s 2^s x^s={}_4C_r\times{}_3C_s 3^{4-r}2^s x^{r+s}$
$r+s=1$을 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는
r, s는 $0\le r\le 4$, $0\le s\le 3$인 정수
$(0, 1)$, $(1, 0)$
이므로 구하는 x의 계수는
${}_4C_0\times{}_3C_1\times 3^4\times 2+{}_4C_1\times{}_3C_0\times 3^3=486+108=594$

답 ④

009

$(1+x)^6$의 전개식의 일반항은 ${}_6C_r x^r$
$(a+x)^3$의 전개식의 일반항은 ${}_3C_s a^{3-s}x^s$
따라서 $(1+x)^6(a+x)^3$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r x^r\times{}_3C_s a^{3-s}x^s={}_6C_r\times{}_3C_s a^{3-s}x^{r+s}$
$r+s=1$을 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는
r, s는 $0\le r\le 6$, $0\le s\le 3$인 정수
$(0, 1)$, $(1, 0)$
이고 x의 계수는 60이므로
${}_6C_0\times{}_3C_1 a^2+{}_6C_1\times{}_3C_0 a^3=60$
$3a^2+6a^3=60$, $a^2+2a^3=20$, $2a^3+a^2-20=0$
$(a-2)(2a^2+5a+10)=0$ $\therefore a=2$ ($\because$ a는 실수)
$2a^2+5a+10=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=5^2-4\times 2\times 10=-55<0$
이므로 $2a^2+5a+10=0$은 허근을 갖는다.

답 2

010

(1) ${}_2C_1+{}_2C_2={}_3C_2$
(2) ${}_4C_0+{}_4C_1={}_5C_1$
(3) ${}_5C_0+{}_5C_1+{}_6C_2={}_6C_1+{}_6C_2={}_7C_2$
(4) ${}_7C_2+{}_7C_3+{}_8C_4={}_8C_3+{}_8C_4={}_9C_4$

답 (1) ${}_3C_2$ (2) ${}_5C_1$ (3) ${}_7C_2$ (4) ${}_9C_4$

011

${}_1C_1={}_2C_2$이므로
${}_1C_1+{}_2C_1+{}_3C_1+{}_4C_1+\cdots+{}_9C_1$
$={}_2C_2+{}_2C_1+{}_3C_1+{}_4C_1+\cdots+{}_9C_1$
$={}_3C_2+{}_3C_1+{}_4C_1+\cdots+{}_9C_1$
$={}_4C_2+{}_4C_1+\cdots+{}_9C_1$
$={}_5C_2+\cdots+{}_9C_1$
$=\cdots$
$={}_9C_2+{}_9C_1={}_{10}C_2$

답 ③

012

${}_1C_0={}_2C_0$이므로
${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$
$={}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$
$={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$
$={}_4C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$
$={}_5C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$
$={}_6C_4+{}_6C_5$
$={}_7C_5$

답 ③

|다른 풀이|
${}_1C_0={}_2C_2$, ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로
${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$
$={}_2C_2+{}_2C_1+{}_3C_1+{}_4C_1+{}_5C_1+{}_6C_1$
$={}_3C_2+{}_3C_1+{}_4C_1+{}_5C_1+{}_6C_1$
$={}_4C_2+{}_4C_1+{}_5C_1+{}_6C_1$
$={}_5C_2+{}_5C_1+{}_6C_1$
$={}_6C_2+{}_6C_1$
$={}_7C_2={}_7C_5$

013

${}_{n-1}C_3+{}_{n-1}C_4={}_nC_5$에서 ${}_nC_4={}_nC_5$
${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로 ${}_nC_4={}_nC_{n-5}$
즉, $4=n-5$
$\therefore n=4+5=9$

답 ③

014

${}_3C_3={}_4C_4$이므로
${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_8C_3$
$={}_4C_4+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_8C_3$
$={}_5C_4+{}_5C_3+\cdots+{}_8C_3$
$={}_6C_4+\cdots+{}_8C_3$
$=\cdots$
$={}_8C_4+{}_8C_3$
$={}_9C_4$
$=\frac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1}=126$

답 ④

015

${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_{10}=2^{10}$,

${}_{15}C_1+{}_{15}C_3+{}_{15}C_5+\cdots+{}_{15}C_{15}=2^{15-1}=2^{14}$이므로

$$\frac{{}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_{10}}{{}_{15}C_1+{}_{15}C_3+{}_{15}C_5+\cdots+{}_{15}C_{15}}=\frac{2^{10}}{2^{14}}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$$

답 $\frac{1}{16}$

016

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$ ← ${}_nC_0=1$

즉, $2^n-1=1023$이므로

$2^n=1024=2^{10}$ $\quad\therefore n=10$

답 ④

017

짝수 n에 대하여

${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$

이므로 주어진 부등식은

$2000<2^{n-1}<3000$

이때 $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로

$n-1=11$ $\quad\therefore n=12$

답 ④

018

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=3$, $n=4$를 대입하면

$(1+3)^4={}_4C_0+{}_4C_1\times3+{}_4C_2\times3^2+{}_4C_3\times3^3+{}_4C_4\times3^4$

이므로

${}_4C_0+{}_4C_1\times3+{}_4C_2\times3^2+{}_4C_3\times3^3+{}_4C_4\times3^4=4^4=(2^2)^4$

$=2^8=256$

답 ⑤

019

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+{}_nC_3x^3+\cdots+{}_nC_nx^n$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=20$, $n=10$을 대입하면

$(1+20)^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1\times20+{}_{10}C_2\times20^2+{}_{10}C_3\times20^3+\cdots$

$+{}_{10}C_{10}\times20^{10}$ ······ ❶

$\therefore 21^{10}=1+10\times20+45\times20^2+120\times20^3+\cdots+20^{10}$

$=1+200+20^2(45+120\times20+\cdots+20^8)$

$=201+400(45+120\times20+\cdots+20^8)$

이때 $400(45+120\times20+\cdots+20^8)$은 400으로 나누어떨어지므로 21^{10}을 400으로 나누었을 때의 나머지는 201을 400으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서 구하는 나머지는 201이다. ······ ❷

답 201

채점 기준	비율
❶ $(1+x)^n$의 전개식을 이용하여 21^{10}을 이항계수의 합으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ 21^{10}을 400으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	50 %

실력을 높이는 연습 문제

본문 029쪽

01

$(x+a)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_rx^{7-r}a^r={}_7C_ra^rx^{7-r}$

$(x+a)^7$의 전개식에서 x^2항은

${}_7C_5a^5x^2$ ← $7-r=2$일 때이므로 $r=5$

$(x+a)^7$의 전개식에서 x^5항은

${}_7C_2a^2x^5$ ← $7-r=5$일 때이므로 $r=2$

x^2의 계수와 x^5의 계수가 같으므로

${}_7C_5a^5={}_7C_2a^2$

이때 ${}_7C_5={}_7C_2$이므로 $a^5=a^2$

$a^5-a^2=0$, $a^2(a^3-1)=0$

$a^2(a-1)(a^2+a+1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because$ a는 0이 아닌 실수)

$a^2+a+1=0$의 판별식을 D라고 하면 $D=1^2-4\times1\times1=-3<0$ 이므로 $a^2+a+1=0$은 허근을 갖는다.

답 ①

02

$\left(x^2+\frac{1}{x^n}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(x^2)^{5-r}\left(\frac{1}{x^n}\right)^r={}_5C_r\frac{x^{10-2r}}{x^{nr}}$

상수항은 $10-2r=nr$일 때이므로

$r(n+2)=10$

이를 만족시키는 r, n의 순서쌍 (r, n)은

$(1, 8)$, $(2, 3)$ ← r는 $0\le r\le5$인 정수, n은 자연수

따라서 상수항이 존재하도록 하는 자연수 n의 최댓값은 8이다.

답 ④

03

문제 접근하기

다항식 $f(x)$의 각 항의 계수의 총합은 $f(1)$의 값과 같으므로 $\left(ax-\frac{2}{ax}\right)^7$의 전개식에서 각 항의 계수의 총합은 $\left(ax-\frac{2}{ax}\right)^7$에 $x=1$을 대입한 값과 같다.

$\left(ax-\frac{2}{ax}\right)^7$의 각 항의 계수의 총합 1은 $\left(ax-\frac{2}{ax}\right)^7$에 $x=1$을 대입한 값과 같으므로

$\left(a-\frac{2}{a}\right)^7=1$ $\quad\therefore a-\frac{2}{a}=1$

양변에 a를 곱하여 정리하면

$a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_r(2x)^{7-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_7C_r2^{7-r}(-1)^r\frac{x^{7-r}}{x^r}$

$\frac{1}{x}$항은 $r-(7-r)=1$일 때이므로 $r=4$

따라서 $\frac{1}{x}$의 계수는

${}_7C_42^3(-1)^4=35\times8\times1=280$

답 ④

04

$(x-2y)(2x+y)^5=x(2x+y)^5-2y(2x+y)^5$이므로

$(x-2y)(2x+y)^5$의 전개식에서 x^3y^3항은 x와 $(2x+y)^5$의 x^2y^3항이 곱해질 때와 $-2y$와 $(2x+y)^5$의 x^3y^2항이 곱해질 때 나타난다.

$(2x+y)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(2x)^{5-r}y^r={}_5C_r2^{5-r}x^{5-r}y^r$

$(2x+y)^5$의 전개식에서 x^2y^3항은

$5-r=2, r=3$일 때이므로 $r=3$

${}_5C_3 2^2x^2y^3=40x^2y^3$

$(2x+y)^5$의 전개식에서 x^3y^2항은

$5-r=3, r=2$일 때이므로 $r=2$

${}_5C_2 2^3x^3y^2=80x^3y^2$

따라서 $(x-2y)(2x+y)^5$의 전개식에서 x^3y^3항은

$x\times 40x^2y^3-2y\times 80x^3y^2=40x^3y^3-160x^3y^3$

$=-120x^3y^3$

이므로 x^3y^3의 계수는 -120이다.

답 -120

05

$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^5=x^2\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^5+\frac{1}{x}\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^5$이므로

$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^5$의 전개식에서 x항은 x^2과 $\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^5$의 $\frac{1}{x}$항이 곱해질 때와 $\frac{1}{x}$과 $\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^5$의 x^2항이 곱해질 때 나타난다.

$\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_rx^{5-r}\left(\frac{a}{x^2}\right)^r={}_5C_ra^r\frac{x^{5-r}}{x^{2r}}$

$\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^5$의 전개식에서 $\frac{1}{x}$항은

$2r-(5-r)=1$일 때이므로 $r=2$

${}_5C_2a^2\frac{1}{x}=10a^2\frac{1}{x}$

$\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^5$의 전개식에서 x^2항은

$(5-r)-2r=2$일 때이므로 $r=1$

${}_5C_1ax^2=5ax^2$

따라서 $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^5$의 전개식에서 x항은

$x^2\times 10a^2\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\times 5ax^2=(10a^2+5a)x$

이고 x의 계수가 30이므로

$10a^2+5a=30,\ 2a^2+a-6=0$

$(a+2)(2a-3)=0$

$\therefore a=-2$ ($\because a$는 정수)

답 ①

06

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_rx^r$

$(1+x^3)^4$의 전개식의 일반항은 ${}_4C_s(x^3)^s={}_4C_sx^{3s}$

이므로 $(1+x)^n(1+x^3)^4$의 전개식의 일반항은

${}_nC_rx^r\times{}_4C_sx^{3s}={}_nC_r\times{}_4C_sx^{r+3s}$

$r+3s=3$을 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

r, s는 $0\le r\le n, 0\le s\le 4$인 정수

$(0, 1), (3, 0)$

이고 x^3의 계수는 39이므로

${}_nC_0\times{}_4C_1+{}_nC_3\times{}_4C_0=39$

$4+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=39,\ \frac{n(n-1)(n-2)}{6}=35$

$n(n-1)(n-2)=35\times 6=7\times 6\times 5$

$\therefore n=7$

답 ③

07

$(1+3x)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r(3x)^r={}_nC_r3^rx^r$

x^4항이 나오는 경우는 $4\le n\le 6$일 때이다.

$(1+3x)^4$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_4C_43^4=1\times 81$

$(1+3x)^5$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_5C_43^4=5\times 81$

$(1+3x)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_6C_43^4=15\times 81$

따라서 $(1+3x)+(1+3x)^2+(1+3x)^3+\cdots+(1+3x)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는

$1\times 81+5\times 81+15\times 81=(1+5+15)\times 81$

$=21\times 81=1701$

답 ④

08

${}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5$

$={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5-{}_3C_0$

$={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5-{}_3C_0$

$={}_5C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5-{}_3C_0$

$={}_6C_3+{}_6C_4+{}_7C_5-{}_3C_0$

$={}_7C_4+{}_7C_5-{}_3C_0$

$={}_8C_5-{}_3C_0$

$={}_8C_3-{}_3C_0$

$=56-1=55$

답 55

09

$f(n)={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n}=2^{2n-1}$이므로

$f(6)=2^{11}=2048$

답 ③

10

문제 접근하기

$f(n)$은 1부터 30까지의 자연수 중에서 n을 포함하여 서로 다른 n개의 자연수를 택하는 경우의 수이므로 n을 제외한 29개의 자연수 중에서 $(n-1)$개의 자연수를 택하는 경우의 수와 같다. 이를 이용하여 $f(n)$을 조합의 수로 나타낸 후 이항계수의 성질을 이용한다.

$f(n)$은 1부터 30까지의 자연수에서 n을 제외한 29개의 자연수 중 $(n-1)$개의 자연수를 택하는 조합의 수와 같다.

따라서 $f(n)={}_{29}\mathrm{C}_{n-1}$이므로
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(30)$
$={}_{29}\mathrm{C}_0+{}_{29}\mathrm{C}_1+{}_{29}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{29}\mathrm{C}_{29}$
$=2^{29}$
$\therefore k=29$

답 29

11

문제 접근하기

$(1+x)^n$의 전개식을 이용하여 11^{15}을 이항계수의 합으로 나타낸 후 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자가 나오는 경우를 생각해 본다.

$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+{}_n\mathrm{C}_3x^3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$ ········· ㉠
㉠의 양변에 $x=10$, $n=15$를 대입하면
$(1+10)^{15}={}_{15}\mathrm{C}_0+{}_{15}\mathrm{C}_1\times10+{}_{15}\mathrm{C}_2\times10^2+{}_{15}\mathrm{C}_3\times10^3+\cdots$
$+{}_{15}\mathrm{C}_{15}\times10^{15}$
$\therefore 11^{15}=1+15\times10+105\times10^2+455\times10^3+\cdots+10^{15}$
$=1+150+10500+10^3(455+\cdots+10^{12})$
$=10651+10^3(455+\cdots+10^{12})$
이때 $10^3(455+\cdots+10^{12})$에서 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자는 모두 0이므로 11^{15}의 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자는 각각 10651의 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자와 같다.
따라서 $a=6$, $b=5$, $c=1$이므로
$a+b+c=6+5+1=12$

답 ③

12

집합 $A=\{x|x$는 25 이하의 자연수$\}$의 부분집합 중에서 두 원소 1, 2를 모두 포함하고 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는 집합 $\{3, 4, 5, \cdots, 25\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수와 같다.
따라서 구하는 부분집합의 개수는
${}_{23}\mathrm{C}_1+{}_{23}\mathrm{C}_3+{}_{23}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{23}\mathrm{C}_{23}=2^{23-1}=2^{22}$

답 ⑤

03 확률의 뜻과 활용

기본을 다지는 유형

본문 034쪽

001

(1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
(2) $\{1, 2, 3, 6\}$
(3) $\{1, 3, 5\}$
(4) $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

답 풀이 참조

002

표본공간을 S라고 하면
$S=\{\mathrm{HH, HT, TH, TT}\}$, $A=\{\mathrm{HH, TT}\}$, $B=\{\mathrm{TT}\}$
(1) $A\cup B=\{\mathrm{HH, TT}\}$ (2) $A\cap B=\{\mathrm{TT}\}$
(3) $A^C=\{\mathrm{HT, TH}\}$ (4) $B^C=\{\mathrm{HH, HT, TH}\}$

답 풀이 참조

003

표본공간을 S라고 하면
$S=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$, $A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 2, 4, 8\}$
⑤ $A^C=\{1, 4, 6, 8\}$, $B^C=\{3, 5, 6, 7\}$이므로
$A^C\cap B^C=\{6\}$

답 ⑤

| 다른 풀이 |
⑤ $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$이므로
$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{6\}$

풍쌤 개념 CHECK

드모르간의 법칙_高 공통수학 2
전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여
$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$, $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

004

주어진 벤 다이어그램에서
$A\cap C=\{8\}$, $B\cap C=\varnothing$, $(A\cap B)\cap C=\varnothing$
이므로 사건 C와 배반인 사건은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

005

사건 A와 배반인 사건은 A^C의 부분집합이고, 사건 B와 배반인 사건은 B^C의 부분집합이므로 두 사건 A, B와 모두 배반인 사건은 $A^C\cap B^C$의 부분집합이다. ········· ❶
이때 표본공간을 S라고 하면
$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{3, 6\}$

이므로

$A^C=\{1, 3, 5, 7\}$, $B^C=\{1, 2, 4, 5, 7\}$

$\therefore A^C\cap B^C=\{1, 5, 7\}$ ❷

따라서 두 사건 A, B와 모두 배반인 사건의 개수는

$2^3=8$ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 두 사건 A, B와 모두 배반인 사건의 조건을 설명할 수 있다.	40 %
❷ $A^C\cap B^C$을 구할 수 있다.	30 %
❸ 두 사건 A, B와 모두 배반인 사건의 개수를 구할 수 있다.	30 %

풍쌤 개념 CHECK

부분집합의 개수_高 공통수학 2

집합 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여

(1) 부분집합의 개수 ➡ 2^n

(2) 진부분집합의 개수 ➡ 2^n-1

006

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

(1) 두 눈의 수가 같은 경우는

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$의 6가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(2) 두 눈의 수의 합이 3의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 눈의 수의 합이 3인 경우

$(1, 2)$, $(2, 1)$의 2가지

(ii) 두 눈의 수의 합이 6인 경우

$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$의 5가지

(iii) 두 눈의 수의 합이 9인 경우

$(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$의 4가지

(iv) 두 눈의 수의 합이 12인 경우

$(6, 6)$의 1가지

(i)~(iv)에서 두 눈의 수의 합이 3의 배수가 되는 경우의 수는

$2+5+4+1=12$

이므로 구하는 확률은

$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

(3) 두 눈의 수의 차가 4 이상이 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 눈의 수의 차가 4인 경우

$(1, 5)$, $(2, 6)$, $(5, 1)$, $(6, 2)$의 4가지

(ii) 두 눈의 수의 차가 5인 경우

$(1, 6)$, $(6, 1)$의 2가지

(i), (ii)에서 두 눈의 수의 차가 4 이상이 되는 경우의 수는

$4+2=6$

이므로 구하는 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{6}$

007

동전 한 개와 주사위 한 개를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$2\times6=12$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라고 하자.

(1) 동전의 앞면이 나오고 주사위의 눈이 소수인 경우는

$(\mathrm{H}, 2)$, $(\mathrm{H}, 3)$, $(\mathrm{H}, 5)$의 3가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

(2) 동전의 앞면이 나오고 주사위의 눈이 짝수인 경우는

$(\mathrm{H}, 2)$, $(\mathrm{H}, 4)$, $(\mathrm{H}, 6)$의 3가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

(3) 동전의 뒷면이 나오고 주사위의 눈이 6의 약수인 경우는

$(\mathrm{T}, 1)$, $(\mathrm{T}, 2)$, $(\mathrm{T}, 3)$, $(\mathrm{T}, 6)$의 4가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{3}$

008

집합 A의 부분집합의 개수는

$2^5=32$

집합 A의 부분집합 중에서 원소 3, 7을 모두 포함하는 집합의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

따라서 구하는 확률은

$\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$

답 ⑤

풍쌤 개념 CHECK

특정한 원소를 갖거나 갖지 않는 부분집합의 개수_高 공통수학 2

집합 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$의 부분집합 중에서

(1) 특정한 원소 p개를 반드시 원소로 갖거나 갖지 않는 부분집합의 개수 ➡ 2^{n-p} (단, $p<n$)

(2) 특정한 원소 p개는 반드시 원소로 갖고, q개는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수 ➡ 2^{n-p-q} (단, $p+q<n$)

009

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

이차방정식 $x^2+2ax+b-1=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(b-1)=0$ $\therefore b=a^2+1$

$b=a^2+1$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2)$, $(2, 5)$의 2개

따라서 구하는 확률은

$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

답 $\frac{1}{18}$

풍쌤 개념 CHECK

이차방정식의 근의 판별_高 공통수학 1

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac$라고 할 때

(1) $D>0$ ➡ 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(2) $D=0$ ➡ 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.
(3) $D<0$ ➡ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

010

모든 경우의 수는 $4\times4=16$

$a\times b>31$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(5, 8), (7, 6), (7, 8)$의 3개

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{16}$

답 ③

011

(1) 모든 경우의 수는 $5!=120$

(2) 승현이와 미애를 양 끝에 세우고 가운데에 3명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!=6$

이때 승현이와 미애가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수가 2이므로 승현이와 미애를 양 끝에 세우는 경우의 수는

$6\times2=12$

(3) 구하는 확률은 $\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$

답 (1) 120 (2) 12 (3) $\frac{1}{10}$

012

서로 다른 소설책 4권과 서로 다른 시집 2권을 책꽂이에 일렬로 꽂는 경우의 수는

$6!=720$

(1) 시집 2권을 한 권으로 생각하여 5권을 일렬로 꽂는 경우의 수는

$5!=120$

이때 시집 2권이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수가 2이므로 시집 2권을 이웃하게 꽂는 경우의 수는

$120\times2=240$

따라서 구하는 확률은

$\frac{240}{720}=\frac{1}{3}$

(2) 시집 2권을 양 끝에 꽂고 그 가운데에 소설책 4권을 꽂는 경우의 수는 $4!=24$

시집 2권의 자리를 바꾸는 경우의 수가 2이므로 시집 2권을 양 끝에 꽂는 경우의 수는

$24\times2=48$

따라서 구하는 확률은

$\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$

(3) 소설책 4권을 1권으로, 시집 2권을 1권으로 생각하여 2권을 꽂는 경우의 수는 $2!=2$

이때 소설책 4권이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $4!=24$, 시집 2권이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 소설책끼리, 시집끼리 서로 이웃하게 책꽂이에 꽂는 경우의 수는

$2\times24\times2=96$

따라서 구하는 확률은

$\frac{96}{720}=\frac{2}{15}$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{15}$ (3) $\frac{2}{15}$

013

8개의 좌석에 네 쌍의 부부가 임의로 앉는 경우의 수는 8명을 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로 $8!$

각 부부를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!$

이때 부부끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2\times2\times2\times2=16$

이므로 네 쌍의 부부끼리 이웃하여 앉는 경우의 수는

$4!\times16$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4!\times16}{8!}=\frac{1}{105}$

답 ③

014

8개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $8!$ ······ ❶

a와 e 사이에 들어가는 3개의 문자를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_6P_3=120$

a와 e를 포함한 5개의 문자를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!$이고 a와 e가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2이므로 a와 e 사이에 3개의 문자가 있도록 나열하는 경우의 수는

$120\times4!\times2$ ······ ❷

따라서 구하는 확률은

$\frac{120\times4!\times2}{8!}=\frac{1}{7}$ ······ ❸

답 $\frac{1}{7}$

채점 기준	비율
❶ 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ a와 e 사이에 3개의 문자가 있도록 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
❸ a와 e 사이에 3개의 문자가 있을 확률을 구할 수 있다.	30 %

015

9장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $9!$

문자 A가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 숫자가 적혀 있는 카드가 놓이는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

이때 (숫자, A, 숫자)를 하나의 카드로 생각하여 7장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $7!$이므로 문자 A가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 숫자가 적혀 있는 카드가 놓이는 경우의 수는

$12\times7!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12\times7!}{9!}=\frac{1}{6}$

답 ④

016

X에서 X로의 함수 f의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

이때 일대일대응의 개수는

${}_4\mathrm{P}_4=4!=24$

따라서 구하는 확률은

$\frac{24}{256}=\frac{3}{32}$

답 ③

참고

두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n일 때

(1) X에서 Y로의 함수의 개수는 ${}_n\Pi_m=n^m$

(2) X에서 Y로의 일대일함수의 개수는 ${}_n\mathrm{P}_m$ (단, $n\geq m$)

(3) X에서 Y로의 일대일대응의 개수는 ${}_n\mathrm{P}_m$ (단, $m=n$)

017

다섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$4\times{}_5\Pi_2=4\times5^2=100$

십의 자리와 일의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 나열한다.

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 2, 3, 4의 4가지

5의 배수가 되려면 일의 자리에 0이 와야 하므로 5의 배수의 개수는

$4\times5\times1=20$

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0의 1가지

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 1, 2, 3, 4의 5가지

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 2, 3, 4의 4가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$

답 $\frac{1}{5}$

018

3명의 학생이 다섯 개의 메뉴 중에서 임의로 각각 한 가지 메뉴를 선택하는 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

3명이 서로 같은 메뉴를 선택하는 경우의 수는

5

따라서 구하는 확률은

$\frac{5}{125}=\frac{1}{25}$

답 ①

019

4명의 학생이 5일 중에서 하루를 택하는 경우의 수는

${}_5\Pi_4=5^4=625$

4명이 서로 다른 날을 택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_4=120$

따라서 구하는 확률은

$\frac{120}{625}=\frac{24}{125}$

답 ④

020

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

${}_5\Pi_4=5^4=625$

선택한 수가 3500보다 큰 경우는 다음과 같다.

(i) 35□□의 꼴인 경우

십의 자리와 일의 자리에는 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 2개를 택해 일렬로 나열하면 되므로 35□□의 꼴인 자연수의 개수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

(ii) 4□□□ 또는 5□□□의 꼴인 경우

천의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 2

그 각각에 대하여 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 3개를 택해 일렬로 나열하면 되므로 4□□□ 또는 5□□□의 꼴인 자연수의 개수는

$2\times{}_5\Pi_3=2\times5^3=250$

(i), (ii)에서 3500보다 큰 자연수의 개수는

$25+250=275$

따라서 구하는 확률은

$\frac{275}{625}=\frac{11}{25}$

답 ③

021

6개의 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times2!}=60$

맨 앞에 2를 나열하고 그 뒤에 나머지 숫자 1, 1, 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

따라서 구하는 확률은

$\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

022

8개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{8!}{2!\times3!}=3360$

짝수 2, 2, 4와 홀수 1, 3, 3, 3, 5를 각각 한 숫자로 생각하여 2개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

이때 짝수끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

홀수끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!}=20$

이므로 짝수는 짝수끼리 홀수는 홀수끼리 이웃하는 경우의 수는

$2\times3\times20=120$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{120}{3360}=\dfrac{1}{28}$

답 ①

023

주어진 6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!\times2!}=60$

양 끝에 A가 적힌 카드를 나열하고 그 사이에 A, B, B, C가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{12}{60}=\dfrac{1}{5}$

답 ②

024

A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{9!}{5!\times4!}=126$

A 지점에서 P 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\times2!}\times\dfrac{5!}{3!\times2!}=6\times10=60$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{60}{126}=\dfrac{10}{21}$

답 ④

025

X에서 Y로의 함수 f의 개수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$ ❶

$f(0)+f(2)+f(4)=18$을 만족시키는 함수 f의 개수는 2, 8, 8 또는 5, 5, 8을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$2+8+8=18,\ 5+5+8=18$

$\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}=3+3=6$ ❷

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{6}{64}=\dfrac{3}{32}$ ❸

답 $\dfrac{3}{32}$

채점 기준	비율
❶ X에서 Y로의 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(0)+f(2)+f(4)=18$을 만족시키는 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	50 %
❸ 함수 f가 $f(0)+f(2)+f(4)=18$을 만족시킬 확률을 구할 수 있다.	20 %

026

회원 28명 중에서 2명의 대표를 뽑는 경우의 수는

${}_{28}\mathrm{C}_2=378$

이때 남자 1명, 여자 1명을 대표로 뽑는 경우의 수는

${}_{18}\mathrm{C}_1\times{}_{10}\mathrm{C}_1=18\times10=180$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{180}{378}=\dfrac{10}{21}$

답 ③

027

흰 공 3개, 빨간 공 2개, 파란 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_9\mathrm{C}_3=84$

3개의 공의 색깔이 모두 다른 경우는 흰 공, 빨간 공, 파란 공이 각각 1개씩 나와야 하므로 그 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=3\times2\times4=24$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{24}{84}=\dfrac{2}{7}$

답 $\dfrac{2}{7}$

028

상자에 들어 있는 당첨 제비의 개수를 n이라고 하면

$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{14},\ \dfrac{n(n-1)}{8\times7}=\dfrac{3}{14}$

$n(n-1)=12=4\times3 \qquad \therefore n=4$

따라서 상자에 들어 있는 당첨 제비의 개수는 4이다.

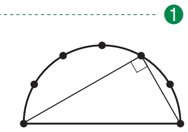
답 ④

029

반원 위의 7개의 점 중에서 3개의 점을 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는

${}_7\mathrm{C}_3=35$ ❶

이때 반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 오른쪽 그림과 같이 반원의 지름의 양 끝 점을 택하고 나머지 5개의 점 중에서 한 점을 택하면 직각삼각형이 만들어진다.



즉, 직각삼각형의 개수는

${}_5\mathrm{C}_1=5$ ❷

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{5}{35}=\dfrac{1}{7}$ ❸

답 $\dfrac{1}{7}$

채점 기준	비율
❶ 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 만들 수 있는 직각삼각형의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 만든 삼각형이 직각삼각형일 확률을 구할 수 있다.	30 %

030

$p>0$이므로 $p=q$에서 $q>0$이다.
따라서 흰 공의 개수를 $n(2\le n\le 39)$이라고 하면 검은 공의 개수는 $40-n$이므로

$p=\dfrac{{}_{n}C_{2}}{{}_{40}C_{2}}$, $q=\dfrac{{}_{n}C_{1}\times{}_{40-n}C_{1}}{{}_{40}C_{2}}$

$p=q$이므로

${}_{n}C_{2}={}_{n}C_{1}\times{}_{40-n}C_{1}$

$\dfrac{n(n-1)}{2}=n\times(40-n)$

$n-1=80-2n$, $3n=81$

$\therefore n=27$

따라서 흰 공의 개수는 27, 검은 공의 개수는 13이므로

$r=\dfrac{{}_{13}C_{2}}{{}_{40}C_{2}}=\dfrac{78}{780}=\dfrac{1}{10}$

$\therefore 60r=60\times\dfrac{1}{10}=6$

답 6

031

20명의 회원이 3명의 후보에게 무기명으로 투표하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 20개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}H_{20}={}_{22}C_{20}={}_{22}C_{2}=231$

진수가 한 표도 받지 못하는 경우는 20명의 회원이 두 후보 영미와 현우 중 한 사람에게 투표하는 경우이므로 그 경우의 수는 서로 다른 2개에서 20개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉,

${}_{2}H_{20}={}_{21}C_{20}={}_{21}C_{1}=21$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{21}{231}=\dfrac{1}{11}$

답 ③

032

야채김밥, 참치김밥, 멸치김밥, 진미채김밥, 매운어묵김밥 중에서 중복을 허용하여 김밥 6줄을 사는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{5}H_{6}={}_{10}C_{6}={}_{10}C_{4}=210$

참치김밥은 2줄이 되도록 사는 경우는 야채김밥, 멸치김밥, 진미채김밥, 매운어묵김밥 중에서 중복을 허용하여 김밥 4줄을 사는 경우이므로 그 경우의 수는 서로 다른 4개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉,

${}_{4}H_{4}={}_{7}C_{4}={}_{7}C_{3}=35$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{35}{210}=\dfrac{1}{6}$

답 $\dfrac{1}{6}$

033

구하는 확률은

$\dfrac{120}{200}=\dfrac{3}{5}$

답 $\dfrac{3}{5}$

034

이 공장에서 생산된 제품 1000개 중에서 980개가 정상 제품이므로 구하는 확률은

$\dfrac{980}{1000}=\dfrac{49}{50}$

답 $\dfrac{49}{50}$

035

구하는 확률은

$\dfrac{20}{80}=\dfrac{1}{4}$

답 ③

036

조사한 전체 학생 수는

$12+18+24+20+10+16=100$

이때 하루 동안 스마트폰을 2시간 이상 5시간 미만 사용한 학생 수는

$24+20+10=54$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{54}{100}=\dfrac{27}{50}$

답 $\dfrac{27}{50}$

037

검은 구슬이 나올 확률은 $\dfrac{125}{1000}=\dfrac{1}{8}$

상자 속에 파란 구슬이 n개 들어 있다고 하면

$\dfrac{1}{8}=\dfrac{2}{3+2+n}$이므로 $3+2+n=16$

$\therefore n=11$

따라서 파란 구슬의 개수는 11이다.

답 11

038

12등분되어 있으므로 각 영역의 넓이를 1이라고 하면 전체의 넓이는 12이다.

(1) 12의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12이므로 12의 약수가 적힌 영역의 넓이는 6이다.
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$

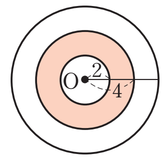
(2) 3의 배수는 3, 6, 9, 12이므로 3의 배수가 적힌 영역의 넓이는 4이다.
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$

(3) 소수는 2, 3, 5, 7, 11이므로 소수가 적힌 영역의 넓이는 5이다.
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{5}{12}$

답 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{1}{3}$ (3) $\dfrac{5}{12}$

039

$2 \le \overline{OP} \le 4$이려면 점 P가 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 있어야 한다.



따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\text{반지름의 길이가 6인 원의 넓이})}$$
$$=\frac{\pi\times4^2-\pi\times2^2}{\pi\times6^2}$$
$$=\frac{16\pi-4\pi}{36\pi}$$
$$=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

답 ②

040

조사한 전체 고객의 수는

$125+198+402+200+75=1000$ ❶

서비스 만족도가 '매우 만족'인 고객의 수는 125이므로

$p=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}$

서비스 만족도가 '매우 불만족'인 고객의 수는 75이므로

$q=\frac{75}{1000}=\frac{3}{40}$ ❷

$\therefore p-q=\frac{1}{8}-\frac{3}{40}=\frac{1}{20}$ ❸

답 $\frac{1}{20}$

채점 기준	비율
❶ 조사한 전체 고객의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ p, q의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $p-q$의 값을 구할 수 있다.	30 %

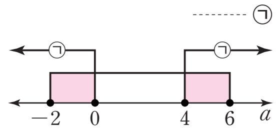
041

이차방정식 $x^2+ax+a=0$이 실근을 가지므로 그 판별식을 D라고 하면

$D=a^2-4a\ge0,\ a(a-4)\ge0$

$\therefore a\le0$ 또는 $a\ge4$ ㉠

이때 $-2\le a\le6$과 ㉠의 공통부분은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 확률은



$$\frac{\{0-(-2)\}+(6-4)}{6-(-2)}=\frac{2+2}{8}=\frac{1}{2}$$

답 ④

042

6개의 구슬이 들어 있는 주머니에서 3개의 구슬을 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

(1) 흰 구슬 1개, 검은 구슬 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_2C_2=4\times1=4$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

(2) 검은 구슬이 2개뿐이므로 흰 구슬은 반드시 나온다.

따라서 구하는 확률은 1이다.

(3) 검은 구슬이 2개뿐이므로 검은 구슬이 3개 나오는 사건은 절대로 일어나지 않는다.

따라서 구하는 확률은 0이다.

답 (1) $\frac{1}{5}$ (2) 1 (3) 0

043

ㄱ. $A=\{2, 3, 5, 7\}$이므로 $P(A)=1$

ㄴ. $(x+2)(x-6)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=6$

$-2\notin S$, $6\notin S$이므로

$B=\varnothing \qquad \therefore P(B)=0$

ㄷ. $(x-2)(x-7)>0$에서 $x<2$ 또는 $x>7$

즉, $C=\varnothing$이므로 $P(C)=0$

따라서 확률이 0인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

044

(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-\frac{9}{20}=\frac{9}{10}$

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(A)$

$=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

답 (1) $\frac{9}{10}$ (2) $\frac{2}{3}$

045

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$A\cap B=\varnothing \qquad \therefore P(A\cap B)=0$

또, $P(A\cup B)=P(S)=1$이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$1=P(A)+P(B)$

$\therefore P(A)=1-P(B)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$

답 ⑤

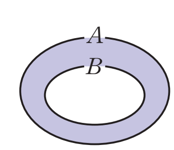
046

A^C과 B는 서로 배반사건이므로

$A^C\cap B=\varnothing$

$B\subset A$

이때 $A\cap B^C$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같으므로



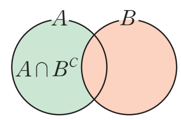
$P(B)=P(A)-P(A\cap B^C)$

$=\frac{1}{2}-\frac{2}{7}=\frac{3}{14}$

답 $\frac{3}{14}$

047

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{7}{18}=\frac{11}{18}$



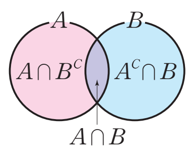
이때 $A\cap B^C$과 B는 오른쪽 그림과 같고 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{9}+\frac{11}{18}=\frac{13}{18}$

답 ④

048



$A\cap B^C$과 $A\cap B$, $A^C\cap B$는 오른쪽 그림과 같고 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A\cap B)$

$+\mathrm{P}(A^C\cap B)$ ····· ❶

즉, $\frac{3}{4}=\frac{1}{8}+\mathrm{P}(A\cap B)+\frac{1}{8}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}$ ····· ❷

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(A\cup B)$를 $\mathrm{P}(A\cap B^C)$, $\mathrm{P}(A\cap B)$, $\mathrm{P}(A^C\cap B)$로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

049

A 상점을 이용한 손님을 택하는 사건을 A, B 상점을 이용한 손님을 택하는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{48}{100}=\frac{12}{25}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{52}{100}=\frac{13}{25}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{22}{100}=\frac{11}{50}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{12}{25}+\frac{13}{25}-\frac{11}{50}$

$=\frac{39}{50}$

답 $\frac{39}{50}$

050

3의 배수가 적힌 공이 나오는 사건을 A, 4의 배수가 적힌 공이 나오는 사건을 B라고 하면 $A\cap B$는 3과 4의 최소공배수인 12의 배수가 적힌 공이 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{20}$

3, 6, 9, 12, 15, 18의 6가지 / 4, 8, 12, 16, 20의 5가지 / 12의 1가지

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{3}{10}+\frac{1}{4}-\frac{1}{20}$

$=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

051

A가 뽑히는 사건을 A, B가 뽑히는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_9\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_9\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_8\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}-\frac{1}{15}$

$=\frac{8}{15}$

답 $\frac{8}{15}$

052

$f(1)=1$인 사건을 A, $f(2)=1$인 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3\Pi_3}{{}_3\Pi_4}=\frac{3^3}{3^4}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\Pi_3}{{}_3\Pi_4}=\frac{3^3}{3^4}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_3\Pi_2}{{}_3\Pi_4}=\frac{3^2}{3^4}=\frac{1}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}$

$=\frac{5}{9}$

답 ③

053

문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허용하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 문자열의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4$

문자 a가 한 개만 포함되는 사건을 A, 문자 b가 한 개만 포함되는 사건을 B라고 하자.

이때 사건 A가 일어나는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\Pi_3=4\times3^3$

문자 a가 나열될 한 곳을 택한 후 나머지 세 곳에는 b, c, d 중에서 중복을 허용하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{4\times3^3}{4^4}=\frac{27}{64}$

사건 B가 일어나는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\Pi_3=4\times3^3$

문자 b가 나열될 한 곳을 택한 후 나머지 세 곳에는 a, c, d 중에서 중복을 허용하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{4\times3^3}{4^4}=\frac{27}{64}$

두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_2\times{}_2\Pi_2=12\times2^2=3\times4^2$

문자 a와 b가 나열될 두 곳을 택하여 두 문자 a, b를 나열한 후 나머지 두 곳에는 c, d 중에서 중복을 허용하여 2개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3\times4^2}{4^4}=\frac{3}{16}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{27}{64}+\frac{27}{64}-\frac{3}{16}$

$=\frac{21}{32}$

답 ③

054

3명 모두 농구 선수인 사건을 A, 3명 모두 배구 선수인 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{4}{84}=\frac{1}{21},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{10}{84}=\frac{5}{42}$$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{21}+\frac{5}{42}=\frac{1}{6}$$

답 ⑤

055

두 눈의 수의 합이 10인 사건을 A, 두 눈의 수의 차가 3인 사건을 B라고 하면

(4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지

(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)의 6가지

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6\times6}=\frac{1}{12},\ \mathrm{P}(B)=\frac{6}{6\times6}=\frac{1}{6}$$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$$

답 ③

056

꺼낸 두 개의 공에 적힌 수 중에서 15의 약수가 아닌 수가 있는 사건을 A라고 하면 A^C은 두 개의 공에 적힌 수가 모두 15의 약수인 사건이므로

1, 3, 5, 15의 4개

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\frac{6}{105}=\frac{2}{35}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{35}=\frac{33}{35}$$

답 $\frac{33}{35}$

|다른 풀이|

(i) 꺼낸 두 개의 공에 적힌 수가 모두 15의 약수가 아닐 확률은

$$\frac{{}_{11}\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\frac{55}{105}=\frac{11}{21}$$

(ii) 꺼낸 두 개의 공 중에서 한 개의 공에 적힌 숫자가 15의 약수일 확률은

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_{11}\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\frac{4\times11}{105}=\frac{44}{105}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{11}{21}+\frac{44}{105}=\frac{33}{35}$$

057

임의로 한 함수를 택할 때, 일대일함수가 아닌 사건을 A라고 하면 A^C은 일대일함수인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_5\mathrm{P}_5}{{}_5\Pi_5}=\frac{5!}{5^5}=\frac{24}{625}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{24}{625}=\frac{601}{625}$$

답 ⑤

058

상자에서 임의로 3개의 마스크를 동시에 꺼낼 때, 적어도 한 개가 흰색 마스크인 사건을 A라고 하면 A^C은 3개가 모두 검은색 마스크인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_9\mathrm{C}_3}{{}_{14}\mathrm{C}_3}=\frac{84}{364}=\frac{3}{13}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{13}=\frac{10}{13}$$

답 ⑤

|다른 풀이|

(i) 꺼낸 3개의 마스크 중에서 흰색 마스크가 1개일 확률은

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_9\mathrm{C}_2}{{}_{14}\mathrm{C}_3}=\frac{5\times36}{364}=\frac{45}{91}$$

(ii) 꺼낸 3개의 마스크 중에서 흰색 마스크가 2개일 확률은

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_2\times{}_9\mathrm{C}_1}{{}_{14}\mathrm{C}_3}=\frac{10\times9}{364}=\frac{45}{182}$$

(iii) 꺼낸 3개의 마스크 중에서 흰색 마스크가 3개일 확률은

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{14}\mathrm{C}_3}=\frac{10}{364}=\frac{5}{182}$$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{45}{91}+\frac{45}{182}+\frac{5}{182}=\frac{10}{13}$$

059

임의로 2개의 제비를 동시에 뽑을 때, 적어도 한 개가 당첨 제비인 사건을 A라고 하면 A^C은 2개 모두 당첨 제비가 아닌 사건이다.

당첨 제비의 개수를 x라고 하면

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_{10-x}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{(10-x)(9-x)}{90}$$

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$이므로

$$1-\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{3},\ 1-\frac{(10-x)(9-x)}{90}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{(10-x)(9-x)}{90}=\frac{1}{3},\ (10-x)(9-x)=30=6\times5$$

$10-x=6$, $9-x=5$이므로 $x=4$

$\therefore x=4$

따라서 당첨 제비의 개수는 4이다.

답 4

060

다섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 4개의 숫자를 뽑아 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$4\times{}_4\mathrm{P}_3=4\times24=96$ ❶

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 천의 자리에 오는 숫자를 제외한 4개의 숫자에서 3개를 택하여 나열한다.

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 2, 3, 4의 4가지

네 자리 자연수가 3400 이하인 사건을 A라고 하면 A^C은 3400보다 큰 사건이고, 3400보다 큰 네 자리 자연수는 34□□ 또는 4□□□의 꼴이다.

(i) 34□□의 꼴일 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{P}_2}{96}=\frac{6}{96}=\frac{1}{16}$$

(ii) 4□□□의 꼴일 확률은

$\frac{{}_4P_3}{96}=\frac{24}{96}=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서

$P(A^C)=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$ ……… ❷

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{16}=\frac{11}{16}$ ……… ❸

답 $\frac{11}{16}$

채점 기준	비율
❶ 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 3400보다 큰 자연수일 확률을 구할 수 있다.	40 %
❸ 3400 이하일 확률을 구할 수 있다.	30 %

| 다른 풀이 |

3400 이하인 네 자리 자연수는 1□□□ 또는 2□□□ 또는 30□□ 또는 31□□ 또는 32□□의 꼴이다.

(i) 1□□□의 꼴일 확률은

$\frac{{}_4P_3}{96}=\frac{24}{96}=\frac{1}{4}$

(ii) 2□□□의 꼴일 확률은

$\frac{{}_4P_3}{96}=\frac{24}{96}=\frac{1}{4}$

(iii) 30□□의 꼴일 확률은

$\frac{{}_3P_2}{96}=\frac{6}{96}=\frac{1}{16}$

(iv) 31□□의 꼴일 확률은

$\frac{{}_3P_2}{96}=\frac{6}{96}=\frac{1}{16}$

(v) 32□□의 꼴일 확률은

$\frac{{}_3P_2}{96}=\frac{6}{96}=\frac{1}{16}$

(i)~(v)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$

061

임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 3 이하이거나 6 이상인 사건을 A라고 하면 A^C은 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4 또는 5인 사건이다.

(i) 가장 작은 수가 4일 확률은

$\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{15}{120}=\frac{1}{8}$ → 4가 적힌 공을 하나 꺼내고, 5, 6, 7, 8, 9, 10이 적힌 공 중에서 2개를 꺼내면 된다.

(ii) 가장 작은 수가 5일 확률은

$\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$ → 5가 적힌 공을 하나 꺼내고, 6, 7, 8, 9, 10이 적힌 공 중에서 2개를 꺼내면 된다.

(i), (ii)에서 $P(A^C)=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{5}{24}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{24}=\frac{19}{24}$

답 ④

실력을 높이는 연습 문제

01

$A=\{1, 2, 5, 10\}$, $B=\{3, 6, 9\}$, $C=\{1, 5, 9\}$이므로

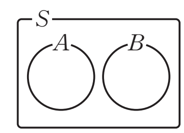
$A\cap B=\varnothing$, $A\cap C=\{1, 5\}$, $B\cap C=\{9\}$

따라서 서로 배반사건인 것은 ㄱ이다.

답 ①

02

표본공간 S의 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄴ. [반례] $S=\{-1, 0, 1\}$, $A=\{0\}$, $B=\{1\}$이면 두 사건 A, B는 서로 배반사건이지만 $A\cup B\neq S$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

03

방정식 $x+y=50$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(0, 50)$, $(1, 49)$, $(2, 48)$, $\cdots$, $(50, 0)$의 51개 ……… ㉠

$x+y=50$에서 $y=50-x$이므로 $xy\geq 600$에서

$x(50-x)\geq 600$, $x^2-50x+600\leq 0$

$(x-20)(x-30)\leq 0$ $\quad\therefore 20\leq x\leq 30$

㉠에서 $20\leq x\leq 30$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(20, 30)$, $(21, 29)$, $(22, 28)$, $\cdots$, $(30, 20)$의 11개

따라서 구하는 확률은 $\frac{11}{51}$

답 $\frac{11}{51}$

04

문제 접근하기

a, b, c는 주사위의 눈의 수이므로 1 이상 6 이하의 자연수임을 이용하여 주어진 부등식에서 b의 값의 범위를 구한 후, b의 값을 기준으로 주어진 부등식을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구한다.

한 개의 주사위를 세 번 던지므로 모든 경우의 수는

$6\times 6\times 6=216$

$a<b-2\leq c$에서 $a\geq 1$이므로

$b-2>1$ $\quad\therefore b>3$

이때 b는 주사위의 눈의 수이므로 $3<b\leq 6$

(i) $b=4$일 때, $a<2\leq c$이므로 이를 만족시키는 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)는

$(1, 4, 2)$, $(1, 4, 3)$, $(1, 4, 4)$, $(1, 4, 5)$, $(1, 4, 6)$의 5개

(ii) $b=5$일 때, $a<3\leq c$이므로 이를 만족시키는 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)는

$(1, 5, 3)$, $(1, 5, 4)$, $(1, 5, 5)$, $(1, 5, 6)$, $(2, 5, 3)$, $(2, 5, 4)$, $(2, 5, 5)$, $(2, 5, 6)$의 8개

(iii) $b=6$일 때, $a<4\le c$이므로 이를 만족시키는 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)는
$(1, 6, 4)$, $(1, 6, 5)$, $(1, 6, 6)$, $(2, 6, 4)$, $(2, 6, 5)$, $(2, 6, 6)$, $(3, 6, 4)$, $(3, 6, 5)$, $(3, 6, 6)$의 9개

(i)~(iii)에서 $a<b-2\le c$를 만족시키는 경우의 수는
$5+8+9=22$
따라서 구하는 확률은
$\frac{22}{216}=\frac{11}{108}$

답 ④

05

네 개의 숫자 1, 2, 3, 4를 모두 사용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는
$4!=24$
십의 자리의 숫자가 백의 자리와 일의 자리의 숫자보다 작으려면 십의 자리에는 1 또는 2가 와야 한다.

(i) 십의 자리의 숫자가 1인 경우
나머지 세 수를 일렬로 세우고 세 번째 자리에 1을 배열하면 되므로 그 자연수의 개수는
$3!=6$

(ii) 십의 자리의 숫자가 2인 경우
숫자 1을 천의 자리에 배열하고 나머지 두 수를 백의 자리와 일의 자리에 배열하면 되므로 그 자연수의 개수는
$1\times 2!=2$

(i), (ii)에서 십의 자리의 숫자가 백의 자리와 일의 자리의 숫자보다 작은 자연수의 개수는
$6+2=8$
따라서 구하는 확률은
$\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$

답 ②

06

3명이 의자에 앉는 모든 경우의 수는
${}_7P_3=210$
3명이 어느 누구와도 서로 이웃하지 않게 앉는 경우는 빈 의자 4개를 먼저 놓고 빈 의자의 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 학생이 앉을 의자 3개를 놓는 경우의 수와 같으므로
${}_5P_3=60$
따라서 구하는 경우의 수는
$\frac{60}{210}=\frac{2}{7}$

답 ②

07

$X=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$이므로 X에서 X로의 함수 f의 개수는
${}_7\Pi_7=7^7$
주어진 조건을 만족시키려면 $f(0)=0$이어야 하고, $x\ne 0$인 x에 대하여 $f(x)$의 값이 정해지면 $f(-x)=-f(x)$이므로 $f(-x)$의 값도 정해진다.
$f(-3)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 7, $f(-2)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 7, $f(-1)$, $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 7이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$1\times 7\times 7\times 7=7^3$
따라서 구하는 확률은
$\frac{7^3}{7^7}=\frac{1}{7^4}=\frac{1}{2401}$

답 $\frac{1}{2401}$

08

한 개의 주사위를 네 번 던질 때 모든 경우의 수는
$6\times 6\times 6\times 6=6^4$
곱이 12가 되는 1부터 6까지의 네 수는
1, 1, 2, 6 또는 1, 1, 3, 4 또는 1, 2, 2, 3
이어야 한다.

(i) 1, 1, 2, 6을 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!}=\frac{24}{2}=12$

(ii) 1, 1, 3, 4를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!}=\frac{24}{2}=12$

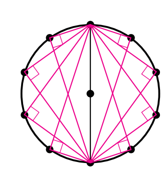
(iii) 1, 2, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!}=\frac{24}{2}=12$

(i)~(iii)에서 $a\times b\times c\times d=12$가 되는 경우의 수는
$12+12+12=36$
따라서 구하는 확률은
$\frac{36}{6^4}=\frac{1}{36}$

답 ①

09

10개의 점 중에서 3개의 점을 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는
${}_{10}C_3=120$
오른쪽 그림과 같이 지름 1개에 대하여 8개의 직각삼각형을 만들 수 있고, 10개의 점으로 만들 수 있는 지름은 5개이므로 직각삼각형의 개수는



$8\times 5=40$
따라서 구하는 확률은
$\frac{40}{120}=\frac{1}{3}$

답 ③

10

수현이가 주머니 A에서 2개의 공을 꺼내고, 민우가 주머니 B에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는
${}_4C_2\times{}_4C_2=6\times 6=36$
수현이와 민우가 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자의 합이 같은 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 수현이가 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자와 민우가 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자가 같은 경우

$\underbrace{{}_4C_2\times1}=6$

수현이가 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는 $_4C_2$이고 그 각각에 대하여 민우가 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는 1이다.

(ⅱ) 수현이가 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자와 민우가 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자가 서로 다르지만 그 합은 같은 경우

수현이가 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자가 2, 8이고 민우가 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자가 4, 6인 경우와 수현이가 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자가 4, 6이고 민우가 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자 2, 8인 경우의 2가지

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 사람이 꺼낸 공에 적힌 두 숫자의 합이 같은 경우의 수는

$6+2=8$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$

답 $\dfrac{2}{9}$

11

문제 접근하기

세 수의 합이 2의 배수가 아니려면 세 수 중에서 두 수는 2의 배수이고 나머지 한 수는 2의 배수가 아니어야 하거나, 세 수 모두 2의 배수가 아니어야 한다.

집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 3인 집합의 개수는

$_8C_3=56$

$\underbrace{A_0}_{\text{2로 나눈 나머지가 0}}=\{2, 4, 6, 8\}$, $\underbrace{A_1}_{\text{2로 나눈 나머지가 1}}=\{1, 3, 5, 7\}$이라고 하면 집합 X의 모든 원소의 합이 2의 배수가 아닌 경우에 집합 X의 원소는 다음과 같다.

(ⅰ) A_0에서 2개의 원소, A_1에서 1개의 원소를 택한 경우

$_4C_2\times{}_4C_1=6\times4=24$

(ⅱ) A_1에서 3개의 원소를 택한 경우

$_4C_3=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 집합 X의 모든 원소의 합이 2의 배수가 아닌 경우의 수는

$24+4=28$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{28}{56}=\dfrac{1}{2}$

답 ③

참고

(1) $\underbrace{(\text{짝수})+(\text{짝수})}_{(\text{짝수})}+(\text{짝수})=(\text{짝수})$

(2) $\underbrace{(\text{홀수})+(\text{홀수})}_{(\text{짝수})}+(\text{홀수})=(\text{홀수})$

(3) $\underbrace{(\text{짝수})+(\text{짝수})}_{(\text{짝수})}+(\text{홀수})=(\text{홀수})$

(4) $(\text{짝수})+\underbrace{(\text{홀수})+(\text{홀수})}_{(\text{짝수})}=(\text{짝수})$

12

초콜릿 16개를 서로 다른 3개의 선물상자에 넣는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 16개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_{16}={}_{18}C_{16}={}_{18}C_2=153$

각 선물상자에 적어도 2개의 초콜릿을 넣으려면 3개의 선물상자에 각각 2개의 초콜릿을 넣은 후 남은 10개의 초콜릿을 3개의 선물상자에 나누어 넣으면 된다.

즉, 각 선물상자에 적어도 2개의 초콜릿을 넣는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{66}{153}=\dfrac{22}{51}$

답 $\dfrac{22}{51}$

13

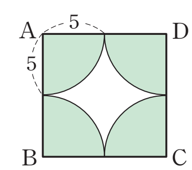
실험 대상인 쥐는 100마리이고 3일 이내에 완치된 쥐의 수는

$8+10+25=43$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{43}{100}$

답 $\dfrac{43}{100}$

14



점 P에서 가장 가까운 꼭짓점까지의 거리가 5 이하이려면 점 P가 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 있어야 한다.

이때 색칠한 부분은 반지름의 길이가 5인 4개의 사분원이므로 그 넓이는 반지름의 길이가 5인 원의 넓이와 같다.

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square\text{ABCD의 넓이})}=\dfrac{\pi\times5^2}{10^2}$

$=\dfrac{25\pi}{100}=\dfrac{\pi}{4}$

답 $\dfrac{\pi}{4}$

15

1, 2, 3, ⋯, 8이 나올 확률을 각각 p_1, p_2, p_3, ⋯, p_8로 놓으면

$p_1+p_2+p_3+\cdots+p_8=1$ ㉠

조건 ㈎에 의하여

$p_2=p_4=p_5=p_6=p_7=p_8$

$\therefore p_2=p_4,\ p_5=p_4,\ p_6=p_4,\ p_7=p_4,\ p_8=p_4$ ㉡

조건 ㈏에 의하여 $p_1=3p_4$ ㉢

조건 ㈐에 의하여 $p_3=2p_1=6p_4$ ($\because$ ㉢) ㉣

㉡, ㉢, ㉣을 ㉠에 대입하면

$3p_4+p_4+6p_4+p_4+p_4+p_4+p_4+p_4=1$

$15p_4=1 \qquad \therefore p_4=\dfrac{1}{15}$

따라서 4가 나올 확률은 $\dfrac{1}{15}$이다.

답 $\dfrac{1}{15}$

참고

$p_4=\frac{1}{15}$이므로 ⓒ에서 $p_2=p_5=p_6=p_7=p_8=\frac{1}{15}$

ⓒ, ⓔ에서 $p_1=\frac{1}{5}$, $p_3=\frac{2}{5}$

16

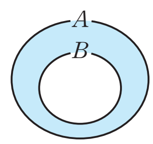
A^C과 B는 서로 배반사건이므로 $B\subset A$

$\therefore A\cap B=B$

$\mathrm{P}(A)=3\mathrm{P}(B)=\frac{5}{9}$에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{9}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{27}$

$A\cap B^C$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같으므로



$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)\\&=\frac{5}{9}-\frac{5}{27}=\frac{10}{27}\end{aligned}$$

답 ②

17

→2, 4, 6, ⋯, 30의 15개　　→3, 6, 9, ⋯, 30의 10개

2의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 A, 3의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라고 하면 $A\cap B$는 2와 3의 최소공배수인 6의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건이므로

6, 12, 18, 24, 30의 5개

$\mathrm{P}(A)=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{2}{3}$

18

1부터 5까지의 5개의 자연수를 모두 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리 자연수의 개수는 $5!$

만든 자연수가 홀수인 사건을 A, 20000보다 작은 사건을 B라고 하면 $A\cap B$는 20000보다 작은 홀수인 사건이다.

만든 자연수가 홀수이려면 일의 자리에는 1, 3, 5 중의 하나가 올 수 있고 나머지 네 자리에는 일의 자리의 숫자를 제외한 4개의 숫자를 배열하면 되므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{4!\times 3}{5!}=\frac{3}{5}$

만든 자연수가 20000보다 작으려면 1□□□□의 꼴이어야 하므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$

만든 자연수가 20000보다 작은 홀수이려면 만의 자리에는 1이 오고, 일의 자리에는 3, 5 중에서 하나가 올 수 있고, 나머지 자리에는 만의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 3개의 숫자를 배열하면 되므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1\times 3!\times 2}{5!}=\frac{1}{10}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{7}{10}\end{aligned}$$

답 $\frac{7}{10}$

19

문제 접근하기

치역과 공역이 같으므로 정의역의 원소 중에서 함숫값이 같은 두 원소가 존재하고, $f(a)\times f(c)=f(b)\times f(d)$를 만족시키려면 함수 f의 모든 함숫값의 곱이 제곱수가 되어야 한다.

치역과 공역이 같으므로 정의역의 4개의 원소 중에서 함숫값이 같은 두 원소가 존재한다.

따라서 치역과 공역이 같은 함수 $f: X\longrightarrow Y$의 개수는

${}_4\mathrm{C}_2\times 3!=6\times 6=36$

또, 주어진 조건

$f(a)\times f(c)=f(b)\times f(d)$ ⋯⋯ ㉠

가 성립하려면 함수 f의 모든 함숫값의 곱이 제곱수가 되어야 한다.

정의역의 함숫값이 같은 두 원소의 함숫값을 x라고 하면

(i) $x=2$일 때

함수 f의 모든 함숫값의 곱은 $2\times 2\times 4\times 8=128$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $x=4$일 때

함수 f의 모든 함숫값의 곱은 $2\times 4\times 4\times 8=256=16^2$이므로 ㉠을 만족시킨다. 이때 ㉠을 만족시키는 경우는

$2\times 8=4\times 4$

이므로 그 경우의 수는

$2!\times 2=4$

→ $f(a)$, $f(c)$의 값을 정하면 $f(b)$, $f(d)$의 값도 1가지로 정해진다.
$f(a)$, $f(c)$에 2, 8을 대응시키는 경우의 수는 $2!$이고,
$f(b)$, $f(d)$에 2, 8을 대응시키는 경우의 수도 $2!$이다.

즉, 그 확률은

$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

(iii) $x=8$일 때

함수 f의 모든 함숫값의 곱은 $2\times 4\times 8\times 8=512$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에서 구하는 확률은 $\frac{1}{9}$이다.

답 ④

참고

위의 (ii)의 경우를 실제로 구해 보면 다음과 같다.

ⓐ $f(a)=f(c)=4$인 경우

$f(b)=2$, $f(d)=8$ 또는 $f(b)=8$, $f(d)=2$

의 2가지

ⓑ $f(b)=f(d)=4$인 경우

$f(a)=2$, $f(c)=8$ 또는 $f(a)=8$, $f(c)=2$

의 2가지

ⓐ, ⓑ에서 $x=4$인 경우의 수는

$2+2=4$

20

같은 숫자가 적혀 있는 공이 서로 이웃하지 않는 사건을 A라고 하면 A^C은 같은 숫자가 적혀 있는 공이 서로 이웃하는 사건이다.

6개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

2가 적힌 흰 공과 검은 공을 하나로 생각하여 5개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

이때 2가 적힌 흰 공과 검은 공이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2이므로 같은 숫자가 적혀 있는 공이 서로 이웃하게 나열되는 경우

의 수는
$120\times2=240$
즉, $P(A^C)=\frac{240}{720}=\frac{1}{3}$이므로
$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$
따라서 $p=3$, $q=2$이므로
$p+q=3+2=5$

답 5

21

카드에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 A, 4의 배수인 사건을 B라고 하면 구하는 확률은 $P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)$이다.
또, $A\cap B$는 카드에 적힌 수가 3과 4의 최소공배수인 12의 배수인 사건이므로

$P(A)=\frac{16}{50}=\frac{8}{25}$, $P(B)=\frac{12}{50}=\frac{6}{25}$, $P(A\cap B)=\frac{4}{50}=\frac{2}{25}$

3, 6, 9, ⋯, 48의 16개
4, 8, 12, ⋯, 48의 12개
12, 24, 36, 48의 4개

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$=\frac{8}{25}+\frac{6}{25}-\frac{2}{25}=\frac{12}{25}$
따라서 구하는 확률은
$P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)$
$=1-\frac{12}{25}=\frac{13}{25}$

답 ④

22

수지와 준수 사이에 적어도 한 명의 학생을 세우는 사건을 A라고 하면 A^C은 수지와 준수를 이웃하게 세우는 사건이다.
7명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는 $7!$
수지와 준수를 한 사람으로 생각하여 6명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는 $6!$
이때 수지와 준수가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2이므로 수지와 준수를 이웃하게 세우는 경우의 수는
$6!\times2$
$\therefore P(A^C)=\frac{6!\times2}{7!}=\frac{2}{7}$
따라서 구하는 확률은
$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$

답 $\frac{5}{7}$

23

공에 적힌 수 중에서 연속하는 자연수가 2개 이상인 사건을 A라고 하면 A^C은 연속하는 자연수가 없는 사건이다.
8개의 공 중에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는
${}_8C_3=56$
3개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 작은 수부터 차례대로 나열했을 때, 세 수가 연속하지 않는 경우는 다음과 같다.
(i) 두 번째 수가 3인 경우
첫 번째 수는 1이어야 하고, 세 번째 수는 5, 6, 7, 8 중에서 하나이어야 하므로 그 경우의 수는
$1\times{}_4C_1=1\times4=4$
(ii) 두 번째 수가 4인 경우
첫 번째 수는 1, 2 중에서 하나이어야 하고, 세 번째 수는 6, 7, 8 중에서 하나이어야 하므로 그 경우의 수는
${}_2C_1\times{}_3C_1=2\times3=6$
(iii) 두 번째 수가 5인 경우
첫 번째 수는 1, 2, 3 중에서 하나이어야 하고, 세 번째 수는 7, 8 중에서 하나이어야 하므로 그 경우의 수는
${}_3C_1\times{}_2C_1=3\times2=6$
(iv) 두 번째 수가 6인 경우
첫 번째 수는 1, 2, 3, 4 중에서 하나이어야 하고, 세 번째 수는 8이어야 하므로 그 경우의 수는
${}_4C_1\times1=4\times1=4$
(i)~(iv)에서
$P(A^C)=\frac{4+6+6+4}{56}=\frac{5}{14}$
따라서 구하는 확률은
$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$

답 $\frac{9}{14}$

24

시행을 3번 반복한 후 숫자 7이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.
시행을 3번 반복한 후 숫자 7이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 1 이상인 사건을 A라고 하면 A^C은 숫자 7이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 0인 사건이다.
시행을 3번 반복한 후 숫자 7이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 0이려면 주사위를 3번 던져 나온 눈의 수가 모두 달라야 하므로
$P(A^C)=\frac{{}_6P_3}{6^3}=\frac{120}{216}=\frac{5}{9}$
따라서 구하는 확률은
$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$

답 ④

04 조건부확률

기본을 다지는 유형

본문 052쪽

001

(1) $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{0.2}{0.8}=0.25$

(2) $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{0.2}{0.4}=0.5$

답 (1) 0.25 (2) 0.5

002

(1) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{9}{10}=\dfrac{9}{20}$

(2) $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{9}{20}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{3}{4}$

답 (1) $\dfrac{9}{20}$ (2) $\dfrac{3}{4}$

003

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cup B)+\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A)$

$=0.7+0.1-0.3=0.5$

$\therefore\ \mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{0.1}{0.5}=0.2$

답 ③

004

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$, $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$이고

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B|A)$이므로

$\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$ $\quad\therefore\ \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cup B)=1$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$1=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\dfrac{1}{4}$, $2\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{4}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{8}$

답 ③

005

$\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{2}{5}$에서

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{5}-\dfrac{3}{10}=\dfrac{4}{5}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}$

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$에서 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(B^C|A^C)=\dfrac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{5}$

답 ④

006

$A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B=\{3, 6, 9, 12\}$, $A\cap B=\{6, 12\}$

(1) $\mathrm{P}(A)=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$

(2) $\mathrm{P}(B)=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}$

답 (1) $\dfrac{1}{3}$ (2) $\dfrac{1}{2}$

| 다른 풀이 |

(1) $n(A)=6$, $n(A\cap B)=2$이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

(2) $n(B)=4$, $n(A\cap B)=2$이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

007

(1) 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 A, 홀수인 눈이 나오는 사건을 B라고 하면

$A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{1, 3, 5\}$, $A\cap B=\{1, 3\}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{2}$

(2) 2의 배수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면

$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $A\cap B=\{2\}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$

답 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{1}{3}$

008

임의로 택한 한 학생의 혈액형이 A형일 사건을 A, 여학생일 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=0.7$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.5$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.5}{0.7}=\frac{5}{7}$$

답 ⑤

009

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던지는 경우의 수는

$6\times6=36$

나온 두 눈의 수의 합이 12의 약수인 사건을 A, 9의 약수인 사건을 B라고 하면

1, 2, 3, 4, 6, 12 　 1, 3, 9

$A=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)\}$

$B=\{(1, 2), (2, 1), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$

$A\cap B=\{(1, 2), (2, 1)\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{6}$$

답 ③

010

임의로 꺼낸 공이 흰 공일 사건을 A, 공에 적힌 수가 소수일 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{7}{11}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{11}$ ❶

2, 3, 5, 7이 적힌 흰 공이 나오는 사건

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{4}{11}}{\frac{7}{11}}=\frac{4}{7}$$ ❷

답 $\frac{4}{7}$

채점 기준	비율
❶ 임의로 꺼낸 공이 흰 공일 사건을 A, 소수일 사건을 B로 놓고 $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ $\mathrm{P}(B\|A)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

011

등산 동우회의 회원 중에서 임의로 선택한 한 명의 자켓의 색이 파란색일 사건을 A, 남자일 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{26}{53}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{18}{53}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{18}{53}}{\frac{26}{53}}=\frac{9}{13}$$

답 $\frac{9}{13}$

|다른 풀이|

$n(A)=26$, $n(A\cap B)=18$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{18}{26}=\frac{9}{13}$$

012

조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 한 명이 진로활동 B를 선택한 학생일 사건을 A, 1학년일 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{9}{20}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{20}}=\frac{5}{9}$$

답 ②

013

이 고등학교의 1학년 학생 수는

$50+65=115$

이므로 배구를 좋아하는 학생 수는

$115\times\frac{60}{100}=69$

농구를 좋아하는 학생 수는

$115\times\frac{40}{100}=46$ ❶

다음 표와 같이 배구와 농구를 좋아하는 여학생의 수를 각각 a, b라 하고 배구와 농구를 좋아하는 남학생 수를 각각 c, d라고 하자.

(단위: 명)

구분	배구	농구	합계
여학생	a	b	50
남학생	c	d	65
합계	69	46	115

이 학교의 1학년 학생 중에서 임의로 선택한 한 명이 배구를 좋아하는 학생일 사건을 A, 여학생일 사건을 B라고 하면 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{23}$이므로

$$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{5}{23},\quad \frac{\frac{a}{115}}{\frac{69}{115}}=\frac{5}{23}$$

$\frac{a}{69}=\frac{5}{23}$ 　 $\therefore a=15$

$a+b=50$이므로 $b=50-15=35$

$a+c=69$이므로 $c=69-15=54$

$c+d=65$이므로 $d=65-54=11$ ❷

이 학교의 1학년 학생 중에서 임의로 선택한 한 명이 농구를 좋아하는 학생일 사건을 C, 남학생일 사건을 D라고 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(D|C)=\frac{\mathrm{P}(C\cap D)}{\mathrm{P}(C)}=\frac{\frac{11}{115}}{\frac{46}{115}}=\frac{11}{46}$$ ❸

답 $\frac{11}{46}$

채점 기준	비율
❶ 전체 학생 수와 배구를 좋아하는 학생 수, 농구를 좋아하는 학생 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 배구와 농구를 각각 좋아하는 여학생의 수와 배구와 농구를 각각 좋아하는 남학생의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 임의로 선택한 한 명이 농구를 좋아하는 학생일 때, 그 학생이 남학생일 확률을 구할 수 있다.	30 %

참고

앞의 표를 완성하면 다음과 같다.

(단위: 명)

구분	배구	농구	합계
여학생	15	35	50
남학생	54	11	65
합계	69	46	115

014

첫 번째에 흰 구슬을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 흰 구슬을 꺼내는 사건을 B라고 하자.

(1) $\mathrm{P}(A)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{14}$이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{5}\times\frac{5}{14}=\frac{1}{7}$

(2) $\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{9}{14}$이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{2}{5}\times\frac{9}{14}=\frac{9}{35}$

(3) $\mathrm{P}(A^C)=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{9}{35}$

답 (1) $\frac{1}{7}$ (2) $\frac{9}{35}$ (3) $\frac{9}{35}$

015

1, 2, 3, 6, 9, 18

첫 번째에 18의 약수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 18의 약수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{6}{17}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{3}\times\frac{6}{17}=\frac{4}{17}$

답 $\frac{4}{17}$

016

첫 번째에 남자 회원이 뽑히는 사건을 A, 두 번째에 여자 회원이 뽑히는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{10}{22}=\frac{5}{11}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{11}\times\frac{4}{7}=\frac{20}{77}$

답 ④

017

첫 번째에 크림치즈가 들어간 쿠키를 먹는 사건을 A, 두 번째에 초콜릿이 들어간 쿠키를 먹는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{13}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{13}\times\frac{2}{3}=\frac{10}{39}$

답 ②

018

딸기 맛 사탕의 개수를 x라 하고, 민수가 딸기 맛 사탕을 먹는 사건을 A, 영미가 포도 맛 사탕을 먹는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{x}{16}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{16-x}{15}$ ❶

민수만 딸기 맛 사탕을 먹을 확률이 $\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{4}$

$\frac{x}{16}\times\frac{16-x}{15}=\frac{1}{4}$, $x(16-x)=60$

$x^2-16x+60=0$, $(x-6)(x-10)=0$

$\therefore x=6$ 또는 $x=10$ ❷

이때 $x<16-x$이므로

$2x<16$ $\quad\therefore x<8$

따라서 딸기 맛 사탕의 개수는 6이다. ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 딸기 맛 사탕의 개수를 x로 놓고, 민수가 딸기 맛 사탕을 먹을 확률과 그때의 영미가 포도 맛 사탕을 먹을 확률을 x로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 민수만 딸기 맛 사탕을 먹을 확률을 이용하여 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 딸기 맛 사탕의 개수를 구할 수 있다.	30 %

019

금요일에 비가 오는 사건을 A, 토요일에 비가 오는 사건을 E라고 하면 A^C은 금요일에 비가 오지 않는 사건이다.

(1) $\mathrm{P}(A)=0.4$, $\mathrm{P}(E|A)=0.4$이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)$

$=0.4\times0.4=0.16$

(2) $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-0.4=0.6$, $\mathrm{P}(E|A^C)=0.7$이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)$

$=0.6\times0.7=0.42$

(3) $\mathrm{P}(A\cap E)=0.16$, $\mathrm{P}(A^C\cap E)=0.42$이고 $A\cap E$와 $A^C\cap E$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

$=0.16+0.42=0.58$

답 (1) 0.16 (2) 0.42 (3) 0.58

020

A가 당첨 복권을 뽑는 사건을 A, B가 당첨 복권을 뽑는 사건을 B라고 하면 A^C은 A가 당첨 복권을 뽑지 않는 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}=\frac{1}{22}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{9}{12}\times\frac{3}{11}=\frac{9}{44}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{22}+\frac{9}{44}=\frac{1}{4}$

답 ②

021

A 상자를 택하는 사건을 A, 파란 공을 꺼내는 사건을 E라고 하면 A^C은 B 상자를 택하는 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}=\frac{2}{7}$

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{1}{2}\times\frac{6}{10}=\frac{3}{10}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{2}{7}+\frac{3}{10}=\frac{41}{70}$

답 ①

022

수미네 반 학생을 뽑는 사건을 A, 주말 체험 학습을 신청한 학생을 뽑는 사건을 E라고 하면 A^C은 현우네 반 학생을 뽑는 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{30}{65}\times\frac{30}{100}=\frac{9}{65}$

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{35}{65}\times\frac{40}{100}=\frac{14}{65}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{9}{65}+\frac{14}{65}=\frac{23}{65}$

답 $\frac{23}{65}$

023

윤지가 당첨 제비를 뽑는 사건을 A, 진우가 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라고 하자.

(1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{2}{15}$

(2) $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$

(3) $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{2}{15}+\frac{4}{15}=\frac{2}{5}$

이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{3}$

답 (1) $\frac{2}{15}$ (2) $\frac{4}{15}$ (3) $\frac{1}{3}$

024

주머니 A를 선택하는 사건을 A, 꺼낸 2개의 구슬이 모두 흰 구슬인 사건을 E라고 하면 A^C은 주머니 B를 선택하는 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{15}=\frac{1}{10}$

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{20}$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{1}{10}+\frac{3}{20}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^C|E)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{4}}=\frac{3}{5}$

답 ④

025

임의로 뽑은 한 명의 학생이 여학생인 사건을 A, 봄을 선택한 학생인 사건을 E라고 하면 A^C은 남학생인 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{400}{1000}\times\frac{65}{100}=\frac{13}{50}$

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{600}{1000}\times\frac{55}{100}=\frac{33}{100}$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{13}{50}+\frac{33}{100}=\frac{59}{100}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{13}{50}}{\frac{59}{100}}=\frac{26}{59}$

답 ④

026

서로 다른 세 개의 동전을 동시에 던지는 경우의 수는

$2\times2\times2=8$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내면

$A=\{\mathrm{HHH}, \mathrm{TTT}\}$, $B=\{\mathrm{HHH}, \mathrm{HHT}, \mathrm{HTH}, \mathrm{THH}\}$

(1) $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

(2) $A\cap B=\{\mathrm{HHH}\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$

(3) (1), (2)에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

답 (1) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{8}$ (3) **서로 독립이다.**

027

$\mathrm{P}(B^C)=\frac{2}{3}$이므로

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ ······ ❶

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$ ······ ❷

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다. ❸

답 서로 독립이다.

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(B)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 사건 A와 B가 서로 독립임을 알 수 있다.	30 %

028

$A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B=\{3, 6, 9, 12\}$, $C=\{5, 6, 7, 8, 9\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{5}{12}$

ㄱ. $A\cap B=\{6, 12\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

즉, $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

ㄴ. $A\cap C=\{6, 8\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

즉, $\mathrm{P}(A\cap C)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$이므로 두 사건 A와 C는 서로 종속이다.

ㄷ. $B\cap C=\{6, 9\}$이므로 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

즉, $\mathrm{P}(B\cap C)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$이므로 두 사건 B와 C는 서로 종속이다.

따라서 서로 독립인 사건은 ㄱ이다.

답 ①

029

$A=\{1, 2, 4, 8\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$, $C=\{2, 3, 5, 7\}$, $D=\{1, 5\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(D)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

① $A\cap B=\{2, 4, 8\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{8}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 종속이다.

② $A\cap D=\{1\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap D)=\frac{1}{8}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap D)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(D)$이므로 두 사건 A와 D는 서로 독립이다.

③ $B\cap C=\{2\}$이므로 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{8}$

따라서 $\mathrm{P}(B\cap C)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$이므로 두 사건 B와 C는 서로 종속이다.

④ $B\cap D=\varnothing$이므로 $\mathrm{P}(B\cap D)=0$

따라서 $\mathrm{P}(B\cap D)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(D)$이므로 두 사건 B와 D는 서로 종속이다.

⑤ $C\cap D=\{5\}$이므로 $\mathrm{P}(C\cap D)=\frac{1}{8}$

따라서 $\mathrm{P}(C\cap D)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(D)$이므로 두 사건 C와 D는 서로 독립이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

030

두 사건 A, B^C이 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$

이때 $A=(\boxed{(가)\ A\cap B^C})\cup(A\cap B)$이고 $\boxed{(가)\ A\cap B^C}$과 $A\cap B$는 서로 $\boxed{(나)\ \text{배반}}$사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(\boxed{(가)\ A\cap B^C})+\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(\boxed{(가)\ A\cap B^C})$

$=\mathrm{P}(A)-\boxed{(다)\ \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)}$

$=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B^C)\}$

$=\boxed{(라)\ \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}$

따라서 두 사건 A와 B도 서로 독립이다.

$\therefore$ (가): $A\cap B^C$, (나): 배반, (다): $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$, (라): $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

답 ③

031

ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

이때 $\mathrm{P}(A)\neq0$, $\mathrm{P}(B)\neq0$이므로 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq0$

즉, $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 A, B는 서로 종속이다. (참)

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A^C과 B, A와 B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C|B)=\mathrm{P}(A^C)$, $\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)$

$\therefore \mathrm{P}(A^C|B)+\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A^C)+\mathrm{P}(A)=1$ (거짓)

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0}{\mathrm{P}(B)}=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

032

(1) 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$에서

$\frac{3}{5}\times\mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

(2) $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

또, 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{12}$에서

$\frac{3}{4}\times\mathrm{P}(B)=\frac{1}{12}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{9}$

(3) 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 A^C과 B도 서로 독립이다.

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{3}$에서

$\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$, $\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times \mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}\times \mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{9}$ (3) $\frac{1}{6}$

033

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{15}$, $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{10}$이므로

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\frac{1}{6}$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\frac{1}{15}=\mathrm{P}(A)\times\frac{1}{6}$ $\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$

답 ③

034

두 농구 선수 A, B가 자유투를 성공시키는 사건을 각각 A, B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{6}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}$

(1) 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{6}$

(2) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{5}{6}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{13}{15}$

(3) 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 A와 B^C, A^C과 B도 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$
$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$

한편

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$

$=\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$

답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{13}{15}$ (3) $\frac{7}{10}$

035

A 상자에서 흰 공을 꺼내는 사건을 A라고 하면 A^C은 A 상자에서 검은 공을 꺼내는 사건이고, B 상자에서 흰 공을 꺼내는 사건을 B라고 하면 B^C은 B 상자에서 검은 공을 꺼내는 사건이다.

이때 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 ❶

(i) A 상자에서 흰 공을 꺼내고 B 상자에서 검은 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{5}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$ ❷

두 사건 A, B^C은 서로 독립이다.

(ii) A 상자에서 검은 공을 꺼내고 B 상자에서 흰 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}\times\frac{4}{9}=\frac{8}{45}$ ❸

두 사건 A^C, B는 서로 독립이다.

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{8}{45}=\frac{23}{45}$ ❹

답 $\frac{23}{45}$

채점 기준	비율
❶ 사건 A, B를 정하고 두 사건 A, B가 서로 독립임을 알 수 있다.	20 %
❷ $\mathrm{P}(A\cap B^C)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\mathrm{P}(A^C\cap B)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 서로 다른 색의 공을 꺼낼 확률을 구할 수 있다.	20 %

036

두 사격선수 A, B가 표적을 명중시키는 사건을 각각 A, B라고 하면 $\mathrm{P}(A)=0.7$, $\mathrm{P}(A\cup B)=0.88$

이때 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.7\times\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cup B)=0.88$에서

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=0.88$

$0.7+\mathrm{P}(B)-0.7\times\mathrm{P}(B)=0.88$

$0.3\times\mathrm{P}(B)=0.18$ $\therefore\ \mathrm{P}(B)=0.6$

따라서 B가 표적을 명중시킬 확률은 0.6이다.

답 ③

037

두 점수의 합이 70이 되는 경우는 다음의 세 가지가 있다.

(i) 관람객 투표는 점수 A, 심사 위원은 점수 C를 받는 경우

$40+30=70$

이때의 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

(ii) 관람객 투표는 점수 B, 심사 위원은 점수 B를 받는 경우

$30+40=70$

이때의 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

(iii) 관람객 투표는 점수 C, 심사 위원은 점수 A를 받는 경우

$20+50=70$

이때의 확률은 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{5}{18}$

답 ③

038

(1) ${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(1-\frac{3}{4}\right)^3=10\times\frac{9}{16}\times\frac{1}{64}=\frac{45}{512}$

(2) ${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(1-\frac{3}{4}\right)^1=5\times\frac{81}{256}\times\frac{1}{4}=\frac{405}{1024}$

답 (1) $\frac{45}{512}$ (2) $\frac{405}{1024}$

039

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 짝수의 눈이 나올 확률은

2, 4, 6

$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 확률은

$${}_7C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=21\times\frac{1}{32}\times\frac{1}{4}=\frac{21}{128}$$

답 ④

040

주어진 주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때, 흰 공이 나올 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

공을 꺼내고 그 색을 확인하고 주머니 속에 다시 공을 넣는 시행을 8번 반복하므로

$$\mathrm{P}(x)={}_8C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(1-\frac{1}{3}\right)^{8-x}={}_8C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{8-x}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{P}(3)}{\mathrm{P}(6)}=\frac{{}_8C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^5}{{}_8C_6\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{56\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^5}{28\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^2}=16$$

답 ②

041

한 개의 주사위를 네 번 던질 때 나오는 네 눈의 수의 곱이 27의 배수이려면 3의 배수의 눈이 3번 이상 나와야 한다.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(1-\frac{1}{3}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(1-\frac{1}{3}\right)^0=\frac{8}{81}+\frac{1}{81}=\frac{1}{9}$$

답 ①

042

A반이 이기는 경우는 다음의 두 가지이다.

(i) A반이 첫 번째, 두 번째 경기에서 이기는 경우

이때의 확률은 $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$ ❶

(ii) A반이 첫 번째와 두 번째 경기 중 한 경기에서 이기고 세 번째 경기에서 이기는 경우

이때의 확률은 ${}_2C_1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(1-\frac{3}{4}\right)^1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{32}$ ❷

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{9}{16}+\frac{9}{32}=\frac{27}{32}$ ❸

답 $\frac{27}{32}$

채점 기준	비율
❶ A반이 첫 번째, 두 번째 경기에서 이길 확률을 구할 수 있다.	40 %
❷ A반이 첫 번째, 두 번째 경기 중 한 경기에서 이기고 세 번째 경기에서 이길 확률을 구할 수 있다.	40 %
❸ A반이 우승할 확률을 구할 수 있다.	20 %

043

다섯 번째 경기에서 우승 팀이 결정되려면 네 번째 경기까지 2번 이긴 팀이 다섯 번째 경기에서도 이겨야 한다.

(i) A 팀이 우승할 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=6\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$$

(ii) B 팀이 우승할 확률은

$${}_4C_2\underbrace{\left(1-\frac{2}{3}\right)}_{\text{B 팀이 이길 확률}}{}^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=6\times\frac{1}{9}\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{16}{81}+\frac{8}{81}=\frac{24}{81}=\frac{8}{27}$

답 $\frac{8}{27}$

044

한 개의 동전을 1번 던져 앞면이 나오면 3점, 뒷면이 나오면 1점을 얻으므로 이 시행을 4번 반복하여 얻은 점수의 합이 8 이하인 경우는 다음의 세 가지이다.

(i) $\underbrace{\text{4번 모두 뒷면이 나오는 경우}}_{1+1+1+1=4}$

이때의 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

(ii) $\underbrace{\text{앞면이 1번, 뒷면이 3번 나오는 경우}}_{3+1+1+1=6}$

이때의 확률은

$${}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$$

(iii) $\underbrace{\text{앞면이 2번, 뒷면이 2번 나오는 경우}}_{3+3+1+1=8}$

이때의 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은 $\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{11}{16}$

답 $\frac{11}{16}$

| 다른 풀이 |

주어진 시행을 4번 반복하여 얻은 점수의 합이 8 이하인 사건을 A라고 하면 A^C은 얻은 점수의 합이 9 이상인 사건이고 그 경우는 다음의 두 가지이다.

(i) $\underbrace{\text{앞면이 3번, 뒷면이 1번 나오는 경우}}_{3+3+3+1=10}$

이때의 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$$

(ii) $\underbrace{\text{4번 모두 앞면이 나오는 경우}}_{3+3+3+3=12}$

이때의 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{16}=\frac{11}{16}$$

참고

주어진 시행을 4번 반복하여 얻을 수 있는 $\underbrace{\text{최저 점수는 4}}_{\text{모두 뒷면이 나오는 경우}}$이고, $\overbrace{\text{최대 점수는 12}}^{\text{모두 앞면이 나오는 경우}}$이다.

4번의 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 x라고 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $4-x$이므로, 이때 얻을 수 있는 점수의 합은

$3x+(4-x)=2x+4=2(x+2)$

즉, 얻을 수 있는 점수의 합은 항상 짝수이다.

따라서 얻은 점수의 합이 8 이하인 경우는 점수의 합이 4, 6, 8인 경우이고, 8 초과인 경우는 점수의 합이 10, 12인 경우이다.

실력을 높이는 연습 문제

본문 063쪽

01

$A=(A\cap B^C)\cup(A\cap B)$이고 두 사건 $A\cap B^C$과 $A\cap B$는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{5}-\frac{1}{15}=\frac{2}{15}$

$$\therefore \mathrm{P}(B^C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{5}}=\frac{2}{3}$$

답 ③

02

조건 (나)에서 $\mathrm{P}(B)\{1-\mathrm{P}(A|B)\}=\frac{1}{4}$이므로

$$\mathrm{P}(B)\left\{1-\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\right\}=\frac{1}{4}$$

$\therefore \mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$

조건 (가)에서 $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{4}{5}$이므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{5}$

$\mathrm{P}(A)+\frac{1}{4}=\frac{4}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{11}{20}$

답 ⑤

03

나온 두 눈의 수의 차가 3인 사건을 A, 나온 두 눈의 수의 곱이 10 이상인 사건을 B라고 하면

$A=\{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$

$B=\{(2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

이므로

$A\cap B=\{(2, 5), (3, 6), (5, 2), (6, 3)\}$

따라서

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{6\times 6}=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{6\times 6}=\frac{1}{9}$

이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{6}}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

04

A 공장에서 생산된 제품을 택하는 사건을 A, 인형을 택하는 사건을 E라고 하면

$\mathrm{P}(E)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(E\cap A)=\frac{3}{20}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap A)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{4}}=\frac{3}{5}$$

답 ②

05

문제 접근하기

여성 직원의 수를 x라 하고 문제에 주어진 조건을 표로 나타내어 본다.

주어진 조건에서 A 부서에 속해 있는 직원의 50 %가 여성이므로 A 부서의 20명 중에서 남성과 여성은 각각 10명씩이다.
전체 여성 직원의 수를 x라고 하면 이 회사의 여성 직원 중에서 60 %가 B 부서에 속해 있으므로 B 부서의 여성 직원의 수는

$\frac{60}{100}x=0.6x$

따라서 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

구분	남성	여성	합계
A 부서	10	10	20
B 부서		$0.6x$	40
합계		x	60

위의 표에서

$10+0.6x=x$, $0.4x=10$ $\therefore x=25$

따라서 B 부서의 여성 직원의 수는

$0.6\times 25=15$

이 회사의 직원 60명 중에서 임의로 택한 한 명이 B 부서에 속해 있을 사건을 B, 여성일 사건을 E라고 하면

$\mathrm{P}(B)=\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$

따라서 $p=\mathrm{P}(E|B)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{8}$이므로

$80p=80\times\frac{3}{8}=30$

답 30

참고

위의 표를 완성하면 다음과 같다.

(단위: 명)

구분	남성	여성	합계
A 부서	10	10	20
B 부서	25	15	40
합계	35	25	60

06

첫 번째에 불량품이 아닌 제품을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 불량품이 아닌 제품을 꺼내는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{11}{14}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{5}\times\frac{11}{14}=\frac{22}{35}$

답 ⑤

07

빨간 공의 개수를 x라고 하면 파란 공의 개수는 $12-x$이다.
이때 빨간 공이 파란 공보다 많으므로
$x>12-x$, $2x>12$
$\therefore x>6$
영진이가 빨간 공을 꺼내는 사건을 A, 성은이가 파란 공을 꺼내는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{x}{12}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{12-x}{11}$

영진이만 빨간 공을 꺼낼 확률이 $\frac{8}{33}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{8}{33}$, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{8}{33}$

$\frac{x}{12}\times\frac{12-x}{11}=\frac{8}{33}$, $x(12-x)=32$

$x^2-12x+32=0$, $(x-4)(x-8)=0$

$\therefore x=8$ ($\because x>6$)

따라서 빨간 공의 개수는 8이다.

답 ②

08

A 모델의 자전거를 구입한 고객을 택하는 사건을 A, 구입한 후 1년 이내에 고장 수리를 요청한 고객을 택하는 사건을 E라고 하면 A^C은 B 모델의 자전거를 구입한 고객을 택하는 사건이다.
이때

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{65}{100}\times\frac{15}{100}=\frac{39}{400}$

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{35}{100}\times\frac{5}{100}=\frac{7}{400}$

이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{39}{400}+\frac{7}{400}=\frac{23}{200}$

답 $\frac{23}{200}$

09

문제 접근하기

주머니 A에서 꺼낸 공이 흰 공인 경우와 검은 공인 경우로 나누어서 생각한다.

주머니 A에서 흰 공을 꺼내는 사건을 A, 주머니 B에서 임의로 꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 흰 공인 사건을 E라고 하면 A^C은 주머니 A에서 검은 공을 꺼내는 사건이다.

(i) 주머니 A에서 흰 공을 꺼내는 경우 주머니 B에 흰 공을 1개 넣는다.

주머니 B에는 흰 공 4개, 검은 공 3개가 있으므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)$

$=\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}\right)$ (주머니 B에서 꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 흰 공일 확률) $=1-$(주머니 B에서 꺼낸 3개의 공이 모두 검은 공일 확률)

$=\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{35}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{34}{35}=\frac{34}{105}$

(ii) 주머니 A에서 검은 공을 꺼내는 경우 주머니 B에 검은 공을 1개 넣는다.

주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 4개가 있으므로

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)$

$=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}\right)$

$=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{4}{35}\right)$

$=\frac{2}{3}\times\frac{31}{35}=\frac{62}{105}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

$=\frac{34}{105}+\frac{62}{105}=\frac{32}{35}$

답 ④

10

상자 B에 처음에 들어 있던 초콜릿의 개수를 x라고 하면 사탕의 개수는 $10-x$이다.
상자 A에서 초콜릿을 꺼내는 사건을 A, 상자 B에서 초콜릿을 꺼내는 사건을 E라고 하면 A^C은 상자 A에서 사탕을 꺼내는 사건이다.

(i) 상자 A에서 초콜릿을 꺼내는 경우 상자 B에 초콜릿을 1개 넣는다.

상자 B에는 초콜릿 $(x+1)$개, 사탕 $(10-x)$개가 있으므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{5}{10}\times\frac{x+1}{11}=\frac{x+1}{22}$

(ii) 상자 A에서 사탕을 꺼내는 경우 상자 B에 사탕을 1개 넣는다.

상자 B에는 초콜릿 x개, 사탕 $(11-x)$개가 있으므로

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{5}{10}\times\frac{x}{11}=\frac{x}{22}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

$=\frac{x+1}{22}+\frac{x}{22}=\frac{2x+1}{22}$

즉, $\frac{2x+1}{22}=\frac{9}{22}$이므로

$2x+1=9$ $\quad\therefore x=4$

따라서 상자 B에 처음 들어 있던 초콜릿의 개수는 4이다.

답 ③

11

문제 접근하기

임의로 택한 학생이 여학생일 사건을 A, 안경을 쓴 학생일 사건을 E라 고 하면 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A\cap E^C)$이고 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A^C|E^C)$이다.

수영이네 반 학생 중에서 임의로 택한 학생이 여학생일 사건을 A, 안경을 쓴 학생일 사건을 E라고 하면 A^C은 임의로 택한 학생이 남학생일 사건이다.
남녀 학생 수의 비가 5 : 4이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{5+4}=\frac{4}{9}$

또, 전체 학생의 60 %가 안경을 쓰고 있고, 임의로 택한 학생이 안경을 쓴 여학생일 확률이 $\frac{1}{9}$이므로

$\mathrm{P}(E)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap E)=\frac{1}{9}$

이때 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A\cap E^C)$이므로

$\mathrm{P}(A\cap E^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap E)=\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$

한편, $\mathrm{P}(E^C)=1-\mathrm{P}(E)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$이고

$\mathrm{P}(E^C)=\mathrm{P}(A\cap E^C)+\mathrm{P}(A^C\cap E^C)$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap E^C)=\mathrm{P}(E^C)-\mathrm{P}(A\cap E^C)=\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A^C|E^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap E^C)}{\mathrm{P}(E^C)}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{6}$$

답 ①

| 다른 풀이 |

남녀 학생 수의 비가 5 : 4이므로 남학생 수를 $5a$, 여학생 수를 $4a$ (a는 자연수)로 놓으면 전체 학생 수는

$5a+4a=9a$

이때 전체 학생의 60 %가 안경을 쓰고 있으므로 안경을 쓴 학생 수는

$9a\times0.6=5.4a$

또, 임의로 택한 한 명의 학생이 안경을 쓴 여학생일 확률이 $\frac{1}{9}$이므로 안경을 쓴 여학생의 수는 a이다.

따라서 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

구분	남학생	여학생	합계
안경 쓴 학생	$4.4a$	a	$5.4a$
안경 안 쓴 학생	$0.6a$	$3a$	$3.6a$
합계	$5a$	$4a$	$9a$

수영이네 반 학생 중에서 임의로 택한 학생이 남학생일 사건을 A, 안경을 쓰고 있지 않을 사건을 E라고 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{n(A\cap E)}{n(E)}=\frac{0.6a}{3.6a}=\frac{1}{6}$$

12

A 주머니를 택하는 사건을 A, 당첨 제비가 나오는 사건을 E라고 하면 A^C은 B 주머니를 택하는 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{16}$

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{12}=\frac{5}{24}$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{3}{16}+\frac{5}{24}=\frac{19}{48}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{19}{48}}=\frac{9}{19}$$

답 $\frac{9}{19}$

13

ㄱ. $A_4=\{4, 8, 12, 16, 20\}$, $A_5=\{5, 10, 15, 20\}$이므로

$\mathrm{P}(A_4)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A_5)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

이때 $A_4\cap A_5=\{20\}$에서 $\mathrm{P}(A_4\cap A_5)=\frac{1}{20}$이므로

$\mathrm{P}(A_4\cap A_5)=\mathrm{P}(A_4)\mathrm{P}(A_5)$

즉, A_4와 A_5는 서로 독립이다. (참)

ㄴ. $A_3=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $A_7=\{7, 14\}$이므로

$A_3\cap A_7=\varnothing$

즉, A_3과 A_7은 서로 배반사건이다. (참)

ㄷ. $A_2=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$,

$A_5=\{5, 10, 15, 20\}$이므로

$\mathrm{P}(A_2)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A_5)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

이때 $A_2\cap A_5=\{10, 20\}$에서 $\mathrm{P}(A_2\cap A_5)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$이므로

$\mathrm{P}(A_2\cap A_5)=\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_5)$

즉, A_2와 A_5는 서로 독립이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

14

ㄱ. $\mathrm{P}(B|A^C)=0$에서 $\frac{\mathrm{P}(B\cap A^C)}{\mathrm{P}(A^C)}=0$

$\therefore \mathrm{P}(B\cap A^C)=0$

즉, $B\cap A^C=\varnothing$이므로 $B\subset A$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\times\mathrm{P}(A)$

$=\underbrace{\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)}_{B\subset A\text{이므로 } A\cap B=B}$ (참)

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이때 $\mathrm{P}(A)\neq0$, $\mathrm{P}(B)\neq0$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq0$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\neq\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$ (거짓)

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(A|B^C)=2\mathrm{P}(A)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

15

$\mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(A)$에서

$1-\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(A)$, $3\mathrm{P}(A)=1$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$에서

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

답 ④

16

수현이는 두 사건 A, B가 서로 배반사건이라고 생각했으므로

$A\cap B=\varnothing$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=0.8 \quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

종완이는 두 사건 A, B가 서로 독립임을 이용하였으므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.65 \quad\cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $0.8-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.65$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.15$

따라서

$$\begin{aligned}|\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)|^2&=\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\}^2-4\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=(0.8)^2-4\times0.15\\&=0.64-0.6=0.04\end{aligned}$$

이므로

$|\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)|=0.2\ (\because\ |\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)|\ge0)$

답 0.2

풍쌤 개념 CHECK

곱셈 공식의 변형_高 공통수학 1

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ (2) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

(3) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$ (4) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

17

승기가 전 구간을 완주하는 사건을 A, 미애가 전 구간을 완주하는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B)=p$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로 승기만 완주할 확률은

A, B^C도 서로 독립

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{3}{5}(1-p)$

즉, $\dfrac{3}{5}(1-p)=\dfrac{4}{15}$이므로

$1-p=\dfrac{4}{9}\qquad\therefore\ p=\dfrac{5}{9}$

따라서 두 사람 중에서 미애만 완주할 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\left(1-\dfrac{3}{5}\right)\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{2}{9}$

답 $\dfrac{2}{9}$

18

주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

구분	1학년	2학년	합계
남학생	10	5	15
여학생	8	x	$x+8$
합계	18	$x+5$	$x+23$

따라서

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{15}{x+23}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{x+5}{x+23}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{5}{x+23}$

이고 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

즉, $\dfrac{5}{x+23}=\dfrac{15}{x+23}\times\dfrac{x+5}{x+23}$이므로

$\dfrac{1}{3}=\dfrac{x+5}{x+23}\ (\because\ x+23>0)$

$x+23=3x+15$, $2x=8$

$\therefore\ x=4$

답 4

19

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 5의 약수의 눈이 나올 확률은

1, 5

$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$이므로

$p_1={}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^1=3\times\dfrac{1}{9}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$

한 개의 동전을 5번 던져서 앞면이 2번 이상 나오는 사건을 A라고 하면 A^C은 앞면이 1번도 안 나오거나 1번 나오는 사건이다. 이때

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C)&={}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1-\frac{1}{2}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(1-\frac{1}{2}\right)^4\\&=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}=\frac{3}{16}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}p_2&=\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)\\&=1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}\end{aligned}$$

$\therefore\ 144p_1p_2=144\times\dfrac{2}{9}\times\dfrac{13}{16}=26$

답 ①

20

앞면이 나오는 횟수를 x라고 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $8-x$이다.

이때 $x=(8-x)+2$이므로

$2x=10\qquad\therefore\ x=5$

즉, 앞면이 뒷면보다 2번 더 많이 나올 확률은 앞면이 5번 나올 확률과 같으므로

${}_8\mathrm{C}_5\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^3=56\times\dfrac{1}{32}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{32}$

따라서 $p=32$, $q=7$이므로

$p+q=32+7=39$

답 39

21

(i) 주머니에서 빨간 공을 꺼내고 1개의 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나오는 경우

이때의 확률은

$\dfrac{3}{7}\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^1=\dfrac{3}{7}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{9}{56}$

(ii) 주머니에서 파란 공을 꺼내고 1개의 동전을 5번 던져서 앞면이 2번 나오는 경우

이때의 확률은

$\dfrac{4}{7}\times{}_5\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{4}{7}\times\dfrac{5}{16}=\dfrac{5}{28}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\dfrac{9}{56}+\dfrac{5}{28}=\dfrac{19}{56}$

답 ⑤

05 확률변수와 확률분포

기본을 다지는 유형

본문 070쪽

001

(1) 서로 다른 3개의 동전을 동시에 던질 때, 나올 수 있는 앞면의 개수는 0, 1, 2, 3이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은
0, 1, 2, 3

(2) 한 개의 주사위를 5번 던질 때, 나올 수 있는 짝수의 횟수는 0, 1, 2, 3, 4, 5이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은
0, 1, 2, 3, 4, 5

(3) 4개의 당첨 제비를 포함한 10개의 제비 중에서 임의로 4개의 제비를 뽑을 때, 나올 수 있는 당첨 제비의 개수는 0, 1, 2, 3, 4이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은
0, 1, 2, 3, 4

답 (1) 0, 1, 2, 3　(2) 0, 1, 2, 3, 4, 5　(3) 0, 1, 2, 3, 4

002

흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 나올 수 있는 흰 공의 개수는 0, 1, 2이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값의 개수는 3이다.

답 3

003

뽑힌 카드에 적힌 두 수를 a, b $(a<b)$라고 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수의 차가
1인 경우는 $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$의 4가지
2인 경우는 $(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$의 3가지
3인 경우는 $(1, 4)$, $(2, 5)$의 2가지
4인 경우는 $(1, 5)$의 1가지
이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이다. ······ ❶
또, 그 확률은 각각 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$$ ······ ❷

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

······ ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X가 가지는 값과 그 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ $X=1$, 2, 3, 4일 때의 확률을 각각 구할 수 있다.	40 %
❸ 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낼 수 있다.	20 %

004

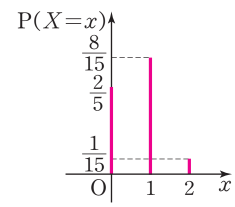
확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 각 값을 가질 확률은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2\times4}{15}=\frac{8}{15}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$$

따라서 X의 확률분포를 그래프로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



답 ③

005

(1) 6의 약수가 적힌 공은 4개이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은
1, 2, 3, 6
0, 1, 2
12개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는
${}_{12}\mathrm{C}_2=66$
꺼낸 2개의 공 중에서 6의 약수가 적힌 공의 개수가 x인 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_x\times{}_8\mathrm{C}_{2-x}$
따라서 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_4\mathrm{C}_x\times{}_8\mathrm{C}_{2-x}}{66}\ (x=0,\ 1,\ 2)$$

(2) $$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_0\times{}_8\mathrm{C}_2}{66}=\frac{1\times28}{66}=\frac{14}{33}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_8\mathrm{C}_1}{66}=\frac{4\times8}{66}=\frac{16}{33}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_8\mathrm{C}_0}{66}=\frac{6\times1}{66}=\frac{1}{11}$$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{14}{33}$	$\frac{16}{33}$	$\frac{1}{11}$	1

답 (1) $\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_4\mathrm{C}_x\times{}_8\mathrm{C}_{2-x}}{66}\ (x=0,\ 1,\ 2)$　(2) 풀이 참조

006

확률변수 X가 가질 수 있는 값은
0, 1, 2, 3
15개의 제비 중에서 3개의 제비를 꺼내는 경우의 수는
${}_{15}\mathrm{C}_3$
꺼낸 3개의 제비 중에서 당첨 제비가 x개인 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_x\times{}_{12}\mathrm{C}_{3-x}$
따라서 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)=\dfrac{{}_{3}\mathrm{C}_{x}\times{}_{12}\mathrm{C}_{3-x}}{{}_{15}\mathrm{C}_{3}}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

이므로 $p=3,\ q=12,\ r=3$

$\therefore\ p+q+r=3+12+3=18$

답 ④

007

(1) 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=1$

$k+k+k+k=1$

$4k=1$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{4}$

(2) 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=1$

$3k+4k+5k=1$

$12k=1$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{12}$

답 (1) $\dfrac{1}{4}$ (2) $\dfrac{1}{12}$

008

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=1$

$a+\dfrac{1}{5}+b+\dfrac{1}{10}=1$

$a+b+\dfrac{3}{10}=1$

$\therefore\ a+b=\dfrac{7}{10}$

답 $\dfrac{7}{10}$

009

(1) 확률의 총합은 1이므로

$\dfrac{1}{4}+a+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=1$

$a+\dfrac{3}{4}=1 \qquad \therefore\ a=\dfrac{1}{4}$

(2) $\mathrm{P}(X\le 1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

(3) $\mathrm{P}(X=1$ 또는 $X=3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{12}$

답 (1) $\dfrac{1}{4}$ (2) $\dfrac{1}{2}$ (3) $\dfrac{5}{12}$

010

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=1$

$a+\left(a+\dfrac{1}{4}\right)+\left(a+\dfrac{1}{2}\right)=1,\ 3a+\dfrac{3}{4}=1$

$3a=\dfrac{1}{4} \qquad \therefore\ a=\dfrac{1}{12}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X\le 2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\dfrac{1}{12}+\left(\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{5}{12}$

답 ⑤

| 다른 풀이 |

$\mathrm{P}(X\le 2)=1-\mathrm{P}(X=3)$

$=1-\left(\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{12}$

011

확률의 총합이 1이므로

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=1$

$2k+4k+6k+8k=1,\ 20k=1$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{20}$ ······ ❶

따라서 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)=\dfrac{x+1}{10}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ ······ ❷

이므로

$\mathrm{P}(2\le X\le 3)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\dfrac{3}{10}+\dfrac{4}{10}=\dfrac{7}{10}$ ······ ❸

답 $\dfrac{7}{10}$

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ X의 확률질량함수를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\mathrm{P}(2\le X\le 3)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

012

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\cdots+\mathrm{P}(X=10)=1$

$\dfrac{k+1}{65}+\dfrac{2k+1}{65}+\dfrac{3k+1}{65}+\cdots+\dfrac{10k+1}{65}=1$

$\dfrac{(1+2+3+\cdots+10)k+10}{65}=1$

$\dfrac{55k+10}{65}=1,\ 55k+10=65$

$55k=55 \qquad \therefore\ k=1$

따라서 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)=\dfrac{x+1}{65}$ $(x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10)$

$X^2-8X+12\le 0$에서

$(X-2)(X-6)\le 0 \qquad \therefore\ 2\le X\le 6$

$\therefore\ \mathrm{P}(X^2-8X+12\le 0)$

$=\mathrm{P}(2\le X\le 6)$

$=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)$

$=\dfrac{3}{65}+\dfrac{4}{65}+\dfrac{5}{65}+\dfrac{6}{65}+\dfrac{7}{65}$

$=\dfrac{5}{13}$

답 ①

013

(1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은

$0,\ 1,\ 2,\ 3$

7개의 과일 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

${}_{7}C_{3}=35$

꺼낸 3개의 과일 중에서 사과의 개수가 x인 경우의 수는

${}_{3}C_{x}\times{}_{4}C_{3-x}$

따라서 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\frac{{}_{3}C_{x}\times{}_{4}C_{3-x}}{35}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

(2) $P(X=1)=\frac{{}_{3}C_{1}\times{}_{4}C_{2}}{35}=\frac{3\times6}{35}=\frac{18}{35}$

(3) $P(2\le X\le3)=P(X=2)+P(X=3)$

$$=\frac{{}_{3}C_{2}\times{}_{4}C_{1}}{35}+\frac{{}_{3}C_{3}\times{}_{4}C_{0}}{35}$$

$$=\frac{3\times4}{35}+\frac{1\times1}{35}=\frac{13}{35}$$

(4) 사과를 적어도 1개 꺼낼 확률은 $P(X\ge1)$이므로

$$P(X\ge1)=1-P(X=0)=1-\frac{{}_{3}C_{0}\times{}_{4}C_{3}}{35}$$

$$=1-\frac{1\times4}{35}=\frac{31}{35}$$

답 (1) $P(X=x)=\frac{{}_{3}C_{x}\times{}_{4}C_{3-x}}{35}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

(2) $\frac{18}{35}$ (3) $\frac{13}{35}$ (4) $\frac{31}{35}$

014

$X^2-9X+14=0$에서

$(X-2)(X-7)=0$

$\therefore X=2$ 또는 $X=7$

두 눈의 수 $a,\ b$를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면

$X=2$, 즉 두 눈의 수의 합이 2인 경우는

$(1,\ 1)$의 1가지

이므로 $P(X=2)=\frac{1}{6\times6}=\frac{1}{36}$

$X=7$, 즉 두 눈의 수의 합이 7인 경우는

$(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)$의 6가지

이므로 $P(X=7)=\frac{6}{6\times6}=\frac{1}{6}$

$\therefore P(X^2-9X+14=0)=P(X=2)+P(X=7)$

$$=\frac{1}{36}+\frac{1}{6}=\frac{7}{36}$$

답 ⑤

참고

확률변수 X의 확률질량함수는 다음과 같다.

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{36} & (x=2,\ 12)\\ \frac{1}{18} & (x=3,\ 11)\\ \frac{1}{12} & (x=4,\ 10)\\ \frac{1}{9} & (x=5,\ 9)\\ \frac{5}{36} & (x=6,\ 8)\\ \frac{1}{6} & (x=7)\end{cases}$$

015

확률변수 X가 가질 수 있는 값은

$1,\ 2,\ 3,\ 4$

8개의 공 중에서 4개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_{8}C_{4}=70$

꺼낸 4개의 공 중에서 파란 공이 x개인 경우의 수는

${}_{5}C_{x}\times{}_{3}C_{4-x}$

따라서 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\frac{{}_{5}C_{x}\times{}_{3}C_{4-x}}{70}\ (x=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$ ❶

이때

$$P(X=1)=\frac{{}_{5}C_{1}\times{}_{3}C_{3}}{70}=\frac{5\times1}{70}=\frac{1}{14}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_{5}C_{2}\times{}_{3}C_{2}}{70}=\frac{10\times3}{70}=\frac{3}{7}$$

❷

이므로

$P(X\le2)=P(X=1)+P(X=2)$

$$=\frac{1}{14}+\frac{3}{7}=\frac{1}{2}$$ ❸

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ X의 확률질량함수를 구할 수 있다.	40 %
❷ $P(X=1)$, $P(X=2)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $P(X\le2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$	1

016

확률변수 X가 가질 수 있는 값은

$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

9장의 카드 중에서 4장의 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_{9}C_{4}=126$

뽑은 4장의 카드 중에서 짝수가 적힌 카드가 x개인 경우의 수는

${}_{4}C_{x}\times{}_{5}C_{4-x}$

따라서 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\frac{{}_{4}C_{x}\times{}_{5}C_{4-x}}{126}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

$X^2\le2X$에서 $X^2-2X\le0$

$X(X-2)\le0$ $\therefore 0\le X\le2$

$\therefore P(X^2\le2X)=P(0\le X\le2)$

$$=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$

$$=\frac{{}_{4}C_{0}\times{}_{5}C_{4}}{126}+\frac{{}_{4}C_{1}\times{}_{5}C_{3}}{126}+\frac{{}_{4}C_{2}\times{}_{5}C_{2}}{126}$$

$$=\frac{1\times5}{126}+\frac{4\times10}{126}+\frac{6\times10}{126}=\frac{5}{6}$$

답 ④

참고

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{126}$	$\frac{20}{63}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{63}$	$\frac{1}{126}$	1

017

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times4\times k=1,\ 2k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+k\right)\times3=1,\ \frac{1}{4}+k=\frac{2}{3} \qquad \therefore k=\frac{5}{12}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{5}{12}$

018

확률밀도함수의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

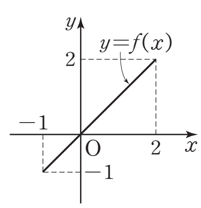
$\frac{1}{2}\times a+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times a=1,\ \frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a=1$

$\frac{3}{4}a=1 \qquad \therefore a=\frac{4}{3}$

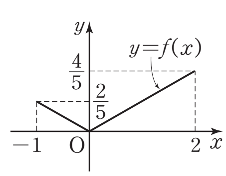
답 ③

019

ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $-1\le x<0$에서 $f(x)<0$이므로 $f(x)$는 확률밀도함수가 될 수 없다.



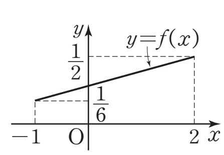
ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times2\times\frac{4}{5}=1$

이므로 $f(x)$는 확률밀도함수이다.

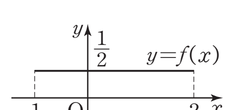
ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\times3=1$

이므로 $f(x)$는 확률밀도함수이다.

ㄹ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ne1$

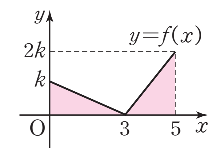
이므로 $f(x)$는 확률밀도함수가 될 수 없다.

따라서 확률밀도함수가 될 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

020

$0\le x\le5$에서 $f(x)\ge0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ❶



$y=f(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times3\times k+\frac{1}{2}\times2\times2k=1$

$\frac{3}{2}k+2k=1,\ \frac{7}{2}k=1$

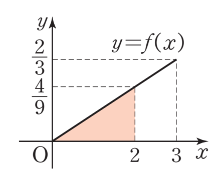
$\therefore k=\frac{2}{7}$ ❷

답 $\frac{2}{7}$

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	60 %

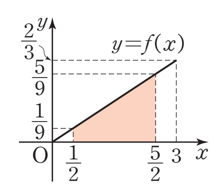
021

(1) $\mathrm{P}(0\le X\le2)$의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이이므로



$\mathrm{P}(0\le X\le2)=\frac{1}{2}\times2\times\frac{4}{9}=\frac{4}{9}$

(2) $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le\frac{5}{2}\right)$의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{5}{2}$로 둘러싸인 도형의 넓이이므로



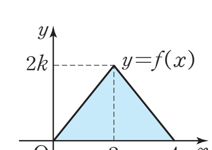
$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{9}+\frac{5}{9}\right)\times2$

$=\frac{2}{3}$

답 (1) $\frac{4}{9}$ (2) $\frac{2}{3}$

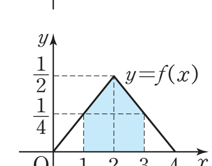
022

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로



$\frac{1}{2}\times4\times2k=1,\ 4k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{4}$

(2) $\mathrm{P}(1\le X\le3)$의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이이므로



$\mathrm{P}(1\le X\le3)=2\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\times1\right\}$

$=2\times\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{3}{4}$

023

주어진 확률밀도함수를 $f(x)$라고 하면 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times\left\{2+\left(a-\frac{1}{3}\right)\right\}\times\frac{3}{4}=1$

$\frac{3}{8}\left(a+\frac{5}{3}\right)=1$

$a+\frac{5}{3}=\frac{8}{3}\qquad\therefore a=1$

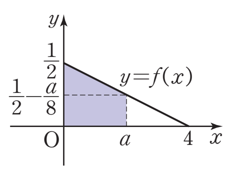
따라서 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3}\le X\le a\right)$, 즉 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3}\le X\le 1\right)$의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\frac{1}{3}$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이이므로

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{3}\le X\le a\right)=\mathrm{P}\left(\frac{1}{3}\le X\le 1\right)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$

답 ④

024

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $\mathrm{P}(0\le X\le a)$의 값은 $y=f(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.



이때 $\mathrm{P}(0\le X\le a)=\frac{3}{4}$이므로

$\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{8}\right)\right\}\times a=\frac{3}{4}$

$\frac{a}{2}\left(1-\frac{a}{8}\right)=\frac{3}{4}$

양변에 16을 곱하여 정리하면

$a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0$

$\therefore a=2\ (\because 0<a<4)$

답 2

025

(1) $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{4}+1+\frac{3}{4}=2$

(2) $\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{4}+2+\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{9}{2}-2^2=\frac{1}{2}$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 (1) 2 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

026

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-3	-1	0	1	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{20}$	1

이때

$\mathrm{E}(X)=(-3)\times\frac{1}{20}+(-1)\times\frac{3}{20}+0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{1}{4}+3\times\frac{7}{20}$

$=-\frac{3}{20}-\frac{3}{20}+\frac{1}{4}+\frac{21}{20}=1$

$\mathrm{E}(X^2)=(-3)^2\times\frac{1}{20}+(-1)^2\times\frac{3}{20}+0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{7}{20}$

$=\frac{9}{20}+\frac{3}{20}+\frac{1}{4}+\frac{63}{20}=4$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=4-1^2=3$

따라서 구하는 표준편차는

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{3}$

답 $\sqrt{3}$

027

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{2}a+a+\frac{1}{2}=1$

$\frac{5}{2}a=\frac{1}{2}$

$\therefore a=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+1=1$

답 1

028

확률의 총합은 1이므로

$a+(a+b)+b=1$

$\therefore a+b=\frac{1}{2}$ ……… ㉠

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times a+2^2\times(a+b)+3^2\times b$

$=5a+13b$

이고, $\mathrm{E}(X^2)=a+5$이므로

$5a+13b=a+5$

$\therefore 4a+13b=5$ ……… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{3}$

$\therefore b-a=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

답 ②

029

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{6}+a+\frac{1}{3}+b=1$

$\therefore a+b=\frac{1}{2}$ ……… ㉠

$\mathrm{E}(X)=3$이므로

$1\times\frac{1}{6}+2a+3\times\frac{1}{3}+4b=3$

$\therefore 2a+4b=\frac{11}{6}$ ……… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{12}$, $b=\frac{5}{12}$

따라서

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{12}+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{5}{12}$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+3+\frac{20}{3}=\frac{61}{6}$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{61}{6}-3^2=\frac{7}{6}$

답 ②

030

(1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이고 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

$\mathrm{P}(X=1)={}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=2)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

$\mathrm{P}(X=3)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=4)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{16}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	1

(2) $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{16}$

$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=2$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{16}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{16}$

$=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+1=5$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=5-2^2=1$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=1$

답 (1) 풀이 참조 (2) $\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{V}(X)=1$, $\sigma(X)=1$

031

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_0\times{}_6\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{1\times20}{56}=\frac{5}{14}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{2\times15}{56}=\frac{15}{28}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{1\times6}{56}=\frac{3}{28}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=0\times\frac{5}{14}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{28}$

$=\frac{15}{28}+\frac{3}{14}=\frac{3}{4}$

답 ①

032

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

$\mathrm{P}(X=1)={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

$\mathrm{P}(X=2)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{9}$

$\mathrm{P}(X=3)={}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{27}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$	1

❶

이때

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{8}{27}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{27}$

$=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=1$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{8}{27}+1^2\times\frac{4}{9}+2^2\times\frac{2}{9}+3^2\times\frac{1}{27}$

$=\frac{4}{9}+\frac{8}{9}+\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{5}{3}-1^2=\frac{2}{3}$ ❷

$\therefore\ \sigma(X)==\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ❸

답 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\mathrm{V}(X)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\sigma(X)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

033

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5이고 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_5\mathrm{C}_0}{2^5}=\frac{1}{32}$

집합 A의 원소의 개수가 5이므로 집합 A의 부분집합의 개수는 2^5

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1}{2^5}=\frac{5}{32}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{2^5}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{2^5}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{2^5}=\frac{5}{32}$

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{{}_5\mathrm{C}_5}{2^5}=\frac{1}{32}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

이때

$E(X)=0\times\frac{1}{32}+1\times\frac{5}{32}+2\times\frac{5}{16}+3\times\frac{5}{16}+4\times\frac{5}{32}+5\times\frac{1}{32}$

$=\frac{5}{32}+\frac{5}{8}+\frac{15}{16}+\frac{5}{8}+\frac{5}{32}=\frac{5}{2}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{32}+1^2\times\frac{5}{32}+2^2\times\frac{5}{16}+3^2\times\frac{5}{16}+4^2\times\frac{5}{32}+5^2\times\frac{1}{32}$

$=\frac{5}{32}+\frac{5}{4}+\frac{45}{16}+\frac{5}{2}+\frac{25}{32}=\frac{15}{2}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{15}{2}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

답 $\frac{5}{4}$

풍쌤 개념 CHECK

부분집합의 개수_高 공통수학2

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여

(1) 집합 A의 부분집합의 개수 ➡ 2^n

(2) 집합 A의 진부분집합의 개수 ➡ 2^n-1

034

한 장의 행운권으로 받을 수 있는 상금의 금액을 X원으로 놓고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	100000	50000	10000	5000	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{11}{20}$	1

$\therefore E(X)=100000\times\frac{1}{20}+50000\times\frac{1}{10}+10000\times\frac{3}{10}+5000\times\frac{11}{20}$

$=5000+5000+3000+2750=15750$

따라서 행운권 한 장으로 받을 수 있는 상금의 기댓값은 15750원이다.

답 15750원

035

임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 각 경우에 받을 수 있는 금액은 다음과 같다.

(빨간 공, 빨간 공) ➡ $1000+1000=2000$(원)

(빨간 공, 파란 공) ➡ $1000-500=500$(원)

(파란 공, 파란 공) ➡ $-500-500=-1000$(원)

이 시행에서 받을 수 있는 금액을 X원이라고 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 -1000, 500, 2000이고 ❶

그 확률은 각각

$P(X=-1000)=\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$

$P(X=500)=\frac{{}_4C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{4\times2}{15}=\frac{8}{15}$

$P(X=2000)=\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1000	500	2000	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$	1

❷

$\therefore E(X)=-1000\times\frac{1}{15}+500\times\frac{8}{15}+2000\times\frac{2}{5}$

$=-\frac{200}{3}+\frac{800}{3}+800$

$=1000$

따라서 받을 수 있는 금액의 기댓값은 1000원이다. ❸

답 1000원

채점 기준	비율
❶ 받을 수 있는 금액을 X로 놓고 확률변수 X가 가질 수 있는 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 받을 수 있는 금액의 기댓값을 구할 수 있다.	30 %

036

(1) $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$

$=3+1^2=4$

$\therefore E(3X^2-4)=3E(X^2)-4=3\times4-4=8$

(2) $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=100-8^2=36$이므로

$\sigma(X)=\sqrt{36}=6$

$\therefore \sigma(5X+2)=|5|\sigma(X)=5\times6=30$

(3) $V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$

$=180-10^2=80$

이때 $Y=2X+3$이므로

$V(Y)=V(2X+3)=2^2V(X)=80$

$\therefore V(X)=20$

답 (1) 8 (2) 30 (3) 20

037

$E(Y)=E(aX+b)=aE(X)+b$이므로

$30a+b=55$ ······ ㉠

$V(Y)=V(aX+b)=a^2V(X)$이므로

$10a^2=40$, $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$30\times2+b=55$

$\therefore b=-5$

$\therefore a-b=2-(-5)=7$

답 ③

038

$E(X)=-4\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{10}+4\times\frac{1}{5}+8\times\frac{1}{2}$

$=-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+4=4$

이므로

$E(3X)=3E(X)=3\times4=12$

답 ⑤

039

확률의 총합은 1이므로

$3k+k+3k+k=1,\ 8k=1$

$\therefore\ k=\frac{1}{8}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

이때

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{3}{8}+4\times\frac{1}{8}$$
$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{9}{8}+\frac{1}{2}=\frac{9}{4}$$
$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{1}{8}+3^2\times\frac{3}{8}+4^2\times\frac{1}{8}$$
$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}+\frac{27}{8}+2=\frac{25}{4}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{25}{4}-\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{19}{16}$$
$$\therefore\ \mathrm{V}(4X-1)=4^2\mathrm{V}(X)=16\times\frac{19}{16}=19$$

답 19

040

1, 2, 5, 10

10의 약수가 적힌 카드가 4장이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$$
$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{4\times15}{120}=\frac{1}{2}$$
$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{6\times6}{120}=\frac{3}{10}$$
$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	1

이때

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{1}{10}=\frac{6}{5}$$
$$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{30}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{6}{5}+\frac{3}{10}=2$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=2-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{14}{25}$$
$$\therefore\ \mathrm{V}(5X+2)=5^2\mathrm{V}(X)=25\times\frac{14}{25}=14$$

답 14

041

한 개의 주사위를 2번 던져서 얻을 수 있는 점수는 다음과 같다.

(짝수, 짝수) ➡ $5+5=10$(점)

(짝수, 홀수), (홀수, 짝수) ➡ $5-3=2$(점)

(홀수, 홀수) ➡ $-3-3=-6$(점)

이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 -6, 2, 10이고 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=-6)={}_2\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

한 개의 주사위를 1번 던졌을 때 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$$\mathrm{P}(X=2)={}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$$
$$\mathrm{P}(X=10)={}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{4}$$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-6	2	10	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

❶

이때

$$\mathrm{E}(X)=-6\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+10\times\frac{1}{4}=-\frac{3}{2}+1+\frac{5}{2}=2$$
$$\mathrm{E}(X^2)=(-6)^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{2}+10^2\times\frac{1}{4}=9+2+25=36$$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=36-2^2=32$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ ❷

$\therefore\ \sigma(\sqrt{2}X)=|\sqrt{2}|\sigma(X)=\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=8$ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ 확률변수 X의 표준편차를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\sigma(\sqrt{2}X)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

| 다른 풀이 |

$\mathrm{V}(X)=32$이므로 $\mathrm{V}(\sqrt{2}X)=(\sqrt{2})^2\mathrm{V}(X)=2\times32=64$

$\therefore\ \sigma(\sqrt{2}X)=\sqrt{\mathrm{V}(\sqrt{2}X)}=\sqrt{64}=8$

실력을 높이는 연습 문제

본문 080쪽

01

꺼낸 2개의 공에 적힌 두 수의 합은

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 모든 값은

$\frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 3,\ \frac{7}{2},\ 4,\ \frac{9}{2},\ 5,\ \frac{11}{2},\ 6,\ \frac{13}{2},\ 7,\ \frac{15}{2}$

따라서 X가 가질 수 있는 모든 값의 합은

$$\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+3+\frac{7}{2}+4+\frac{9}{2}+5+\frac{11}{2}+6+\frac{13}{2}+7+\frac{15}{2}=\frac{117}{2}$$

답 ④

02

ㄱ, ㄹ. 손님의 수, 짝수가 나온 횟수는 셀 수 있으므로 이산확률변수이다.
ㄴ, ㄷ. 기온, 속도는 실수의 값을 가지므로 연속확률변수이다.
따라서 이산확률변수인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

03

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$$

$$\left(k+\frac{1}{18}\right)+\left(k+\frac{1}{36}\right)+k+\left(k+\frac{1}{36}\right)+\left(k+\frac{1}{18}\right)=1$$

$$5k+\frac{1}{6}=1,\ 5k=\frac{5}{6}$$

$$\therefore k=\frac{1}{6}$$

답 ⑤

04

확률의 총합은 1이므로

$a+3a^2+a^2+2a^2=1$, $6a^2+a-1=0$

$(2a+1)(3a-1)=0$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$ $(\because a>0)$

$$\therefore P(X\le 3)=1-P(X=4)=1-2a^2=1-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

답 $\frac{7}{9}$

|다른 풀이|

$$P(X\le 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=a+3a^2+a^2=\frac{1}{3}+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{7}{9}$$

참고

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	1

05

$X^2-4X+3=0$에서

$(X-1)(X-3)=0$ $\quad\therefore X=1$ 또는 $X=3$

$$\therefore P(X^2-4X+3=0)=P(X=1 \text{ 또는 } X=3)=P(X=1)+P(X=3)$$

정사면체 모양의 서로 다른 두 개의 주사위를 던져서 바닥에 닿는 두 면의 수를 각각 a, b라고 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수 중에서 작지 않은 수가 1인 경우는

크거나 같은 수

(1, 1)의 1가지

3인 경우는

(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)의 5가지

따라서 $P(X=1)=\frac{1}{16}$, $P(X=3)=\frac{5}{16}$이므로

$$P(X^2-4X+3=0)=P(X=1)+P(X=3)=\frac{1}{16}+\frac{5}{16}=\frac{3}{8}$$

답 ③

참고

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

06

문제 접근하기

먼저 확률변수 X가 가질 수 있는 값을 구한 후 그 확률을 각각 구하여 확률분포를 표로 나타낸다. 이때 당첨 제비의 개수는 2이고 전체 제비의 개수는 6이므로 당첨 제비가 2개 모두 나올 때까지의 시행 횟수는 최소 2, 최대 6이다.

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6이고 그 확률은 각각

$$P(X=2)=\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_2C_1\times{}_4C_1}{{}_6C_2}\times\frac{1}{4}=\frac{2\times 4}{15}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{15}$$

처음 2개까지는 당첨 제비 1개, 당첨 제비가 아닌 제비 1개를 꺼내고 세 번째에 당첨 제비를 꺼낼 확률

$$P(X=4)=\frac{{}_2C_1\times{}_4C_2}{{}_6C_3}\times\frac{1}{3}=\frac{2\times 6}{20}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$$

처음 3개까지는 당첨 제비 1개, 당첨 제비가 아닌 제비 2개를 꺼내고 네 번째에 당첨 제비를 꺼낼 확률

$$P(X=5)=\frac{{}_2C_1\times{}_4C_3}{{}_6C_4}\times\frac{1}{2}=\frac{2\times 4}{15}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{15}$$

처음 4개까지는 당첨 제비 1개, 당첨 제비가 아닌 제비 3개를 꺼내고 다섯 번째에 당첨 제비를 꺼낼 확률

$$P(X=6)=\frac{{}_2C_1\times{}_4C_4}{{}_6C_5}\times 1=\frac{2\times 1}{6}\times 1=\frac{1}{3}$$

처음 5개까지는 당첨 제비 1개, 당첨 제비가 아닌 제비 4개를 꺼내고 여섯 번째에 당첨 제비를 꺼낼 확률

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	1

$$\therefore P(X\ge 5)=P(X=5)+P(X=6)=\frac{4}{15}+\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$$

답 ④

|다른 풀이|

당첨 제비를 ●, 당첨 제비가 아닌 제비를 ○로 나타내면

$X=2$, 3, 4, 5, 6일 때의 확률은 다음과 같다.

(i) $X=2$일 때

●● ➡ $P(X=2)=\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$

6개의 제비 중에서 당첨 제비를 뽑고, 남은 5개의 제비 중에서 또 당첨 제비를 뽑을 확률

(ii) $X=3$일 때

○●● ➡ $\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{15}$

●○● ➡ $\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{15}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{2}{15}$

(iii) $X=4$일 때

○○●● ➡ $\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$

○●○● ➡ $\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$

●○○● ➡ $\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{1}{5}$

(iv) $X=5$일 때

○○○●● ➡ $\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{15}$

○○●○● ➡ $\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{15}$

○●○○● ➡ $\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{15}$

●○○○● ➡ $\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{15}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(X=5)=\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{4}{15}$

(v) $X=6$일 때

○○○○●● ➡ $\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}\times1=\frac{1}{15}$

○○○●○● ➡ $\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{15}$

○○●○○● ➡ $\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{15}$

○●○○○● ➡ $\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{15}$

●○○○○● ➡ $\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{15}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{1}{3}$

07

ㄱ. $0\le x\le3$에서 (함숫값)≥0이고 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times\frac{2}{3}=1$

이므로 주어진 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 될 수 있다.

ㄴ. $0\le x\le3$에서 (함숫값)≥0이고 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(1+3)\times\frac{1}{2}=1$

이므로 주어진 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 될 수 있다.

ㄷ. $0\le x\le2$에서 (함숫값)≤0이므로 주어진 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 될 수 없다.

ㄹ. 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}\pi=\frac{9}{8}\pi\ne1$

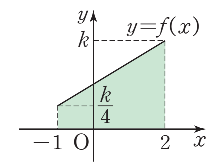
이므로 주어진 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 될 수 없다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

08

$-1\le x\le2$에서 $f(x)\ge0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

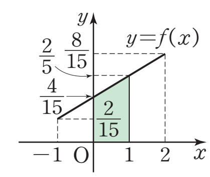


이때 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{k}{4}+k\right)\times3=1$, $\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}k=1$

$\frac{15}{8}k=1$ $\therefore$ $k=\frac{8}{15}$

$\mathrm{P}(0\le X\le1)$의 값은 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(0\le X\le1)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{15}+\frac{2}{5}\right)\times1$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times1=\frac{1}{3}$

답 ②

09

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0\le X\le8$이고 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 직선 $x=4$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le4)=\mathrm{P}(4\le X\le8)=\frac{1}{2}$ ········ ㉠

$\mathrm{P}(0\le X\le2)=\mathrm{P}(6\le X\le8)$ ········ ㉡

$\mathrm{P}(2\le X\le4)=\mathrm{P}(4\le X\le6)$ ········ ㉢

이때 $3\mathrm{P}(2\le X\le4)=4\mathrm{P}(6\le X\le8)$이므로

$3\mathrm{P}(2\le X\le4)=4\mathrm{P}(0\le X\le2)$ ($\because$ ㉡)

$\therefore$ $\mathrm{P}(0\le X\le2)=\frac{3}{4}\mathrm{P}(2\le X\le4)$ ········ ㉣

㉠에서 $\mathrm{P}(0\le X\le4)=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le2)+\mathrm{P}(2\le X\le4)=\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}\mathrm{P}(2\le X\le4)+\mathrm{P}(2\le X\le4)=\frac{1}{2}$ ($\because$ ㉣)

$\frac{7}{4}\mathrm{P}(2\le X\le4)=\frac{1}{2}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(2\le X\le4)=\frac{2}{7}$

$\mathrm{P}(4\le X\le6)=\mathrm{P}(2\le X\le4)=\frac{2}{7}$ ($\because$ ㉢)

$\therefore$ $\mathrm{P}(2\le X\le6)=\mathrm{P}(2\le X\le4)+\mathrm{P}(4\le X\le6)$

$=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$

답 ③

10

문제 접근하기

$f(1+x)=f(1-x)$에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=1$에 대하여 대칭임을 이해하고, 확률밀도함수의 성질을 이용하여 주어진 확률을 구한다.

$f(1+x)=f(1-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.
따라서

$P(-2\le X\le 1)=P(1\le X\le 4)=\frac{1}{2}$ ······ ㉠

$P(0\le X\le 1)=P(1\le X\le 2)$ ······ ㉡

이고 $P(2\le X\le 4)=\frac{1}{6}$이므로

$$\begin{aligned}P(0\le X\le 2)&=P(0\le X\le 1)+P(1\le X\le 2)\\&=2P(1\le X\le 2)\ (\because ㉡)\\&=2\{P(1\le X\le 4)-P(2\le X\le 4)\}\\&=2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{3}\ (\because ㉠)\end{aligned}$$

답 $\frac{2}{3}$

11

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{5}+a+\frac{1}{3}+b=1$

$\therefore a+b=\frac{7}{15}$ ······ ㉠

$E(X)=\frac{13}{3}$이므로

$1\times\frac{1}{5}+3\times a+5\times\frac{1}{3}+7\times b=\frac{13}{3}$

$\therefore 3a+7b=\frac{37}{15}$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{5},\ b=\frac{4}{15}$

$\therefore \frac{3b}{a}=3b\times\frac{1}{a}=3\times\frac{4}{15}\times 5=4$

답 4

12

확률변수 Y가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 그 확률은 각각

$P(Y=0)=P(X=0)={}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

$P(Y=1)=P(X=1)={}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}P(Y=2)&=P(X\ge 2)\\&=1-P(X<2)\\&=1-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\right)=\frac{11}{16}\end{aligned}$$

이므로 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	0	1	2	합계
$P(Y=y)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{16}$	1

$$\begin{aligned}\therefore E(Y)&=0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{11}{16}\\&=\frac{1}{4}+\frac{11}{8}=\frac{13}{8}\end{aligned}$$

답 ②

13

꺼낸 한 개의 공에 적힌 수에 대한 상금을 X원이라고 하면
공에 적힌 수가 1일 때 $X=1\times 400=400$
공에 적힌 수가 2일 때 $X=2\times 200=400$
공에 적힌 수가 3일 때 $X=3\times 400=1200$
공에 적힌 수가 4일 때 $X=4\times 200=800$
공에 적힌 수가 5일 때 $X=5\times 400=2000$
이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은
400, 800, 1200, 2000
이고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	400	800	1200	2000	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$$\begin{aligned}\therefore E(X)&=400\times\frac{2}{5}+800\times\frac{1}{5}+1200\times\frac{1}{5}+2000\times\frac{1}{5}\\&=\frac{4800}{5}=960\end{aligned}$$

따라서 이 시행에서 받을 수 있는 상금의 기댓값은 960원이다.

답 960원

14

$E(X)=3,\ E(X^2)=18$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=18-3^2=9$

$E(Y)=E\left(\frac{X+6}{3}\right)=\frac{1}{3}E(X)+2=\frac{1}{3}\times 3+2=3$

$V(Y)=V\left(\frac{X+6}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2V(X)=\frac{1}{9}\times 9=1$

이때 $V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$이므로

$E(Y^2)=V(Y)+\{E(Y)\}^2=1+3^2=10$

$\therefore E(Y)+E(Y^2)=3+10=13$

답 13

15

확률의 총합은 1이므로

$\frac{{}_4C_1}{k}+\frac{{}_4C_2}{k}+\frac{{}_4C_3}{k}+\frac{{}_4C_4}{k}=1,\ \frac{1}{k}({}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4)=1$

${}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4=4+6+4+1=15$

이므로

$\frac{1}{k}\times 15=1 \qquad \therefore k=15$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	8	16	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$$\begin{aligned}\therefore E(X)&=2\times\frac{4}{15}+4\times\frac{2}{5}+8\times\frac{4}{15}+16\times\frac{1}{15}\\&=\frac{8}{15}+\frac{8}{5}+\frac{32}{15}+\frac{16}{15}=\frac{16}{3}\end{aligned}$$

$\therefore E(3X+1)=3E(X)+1=3\times\frac{16}{3}+1=17$

답 ⑤

16

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{-2k+3}{16}+\frac{3}{16}+\frac{2k+3}{16}+\frac{4k+3}{16}=1$$

$$\frac{k+3}{4}=1,\ k+3=4 \qquad \therefore k=1$$

따라서 $\mathrm{P}(X=x)=\frac{x+3}{16}$ $(x=-2,\ 0,\ 2,\ 4)$이므로

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	0	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

이때

$$\mathrm{E}(X)=-2\times\frac{1}{16}+0\times\frac{3}{16}+2\times\frac{5}{16}+4\times\frac{7}{16}$$

$$=-\frac{1}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{4}=\frac{9}{4}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{16}+0^2\times\frac{3}{16}+2^2\times\frac{5}{16}+4^2\times\frac{7}{16}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{5}{4}+7=\frac{17}{2}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{17}{2}-\left(\frac{9}{4}\right)^2$$

$$=\frac{17}{2}-\frac{81}{16}=\frac{55}{16}$$

$$\therefore \mathrm{V}(4X+1)=4^2\mathrm{V}(X)=16\times\frac{55}{16}=55$$

답 ⑤

17

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $-4,\ 0,\ 4$이고 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=-4)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2\times2}{10}=\frac{2}{5}$$

두 수의 곱이 -4인 경우는 $-2\times2=-4$

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$$

두 수의 곱이 4인 경우는 $-2\times(-2)=4,\ 2\times2=4$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-4	0	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

이때

$$\mathrm{E}(X)=-4\times\frac{2}{5}+0\times\frac{2}{5}+4\times\frac{1}{5}$$

$$=-\frac{8}{5}+\frac{4}{5}=-\frac{4}{5}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=(-4)^2\times\frac{2}{5}+0^2\times\frac{2}{5}+4^2\times\frac{1}{5}$$

$$=\frac{32}{5}+\frac{16}{5}=\frac{48}{5}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{48}{5}-\left(-\frac{4}{5}\right)^2$$

$$=\frac{48}{5}-\frac{16}{25}=\frac{224}{25}$$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{\frac{224}{25}}=\frac{4\sqrt{14}}{5}$이므로

$$\sigma(-10X+2)=|-10|\sigma(X)=10\times\frac{4\sqrt{14}}{5}=8\sqrt{14}$$

답 $8\sqrt{14}$

| 다른 풀이 |

$$\mathrm{V}(-10X+2)=(-10)^2\mathrm{V}(X)=100\times\frac{224}{25}=896$$

$$\therefore \sigma(-10X+2)=\sqrt{\mathrm{V}(-10X+2)}=\sqrt{896}=8\sqrt{14}$$

06 이항분포와 정규분포

기본을 다지는 유형

본문 085쪽

001

(1) 확률변수 X의 확률질량함수가

$$P(X=x)={}_9C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{9-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$$

이므로 X는 이항분포 $B\left(9,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore\ n=9,\ p=\frac{1}{3}$

(2) $P(X=2)={}_9C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^7,\ P(X=4)={}_9C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^5$

이므로

$$\frac{P(X=4)}{P(X=2)}=\frac{{}_9C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^5}{{}_9C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^7}=\frac{126\times\frac{2^5}{3^9}}{36\times\frac{2^7}{3^9}}=\frac{7}{8}$$

(3) $P(X=1)={}_9C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^8,\ P(X=3)={}_9C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^6$

이므로

$$k=\frac{P(X=1)}{P(X=3)}=\frac{{}_9C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^8}{{}_9C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^6}=\frac{9\times\frac{2^8}{3^9}}{84\times\frac{2^6}{3^9}}=\frac{3}{7}$$

답 (1) $n=9,\ p=\frac{1}{3}$ (2) $\frac{7}{8}$ (3) $\frac{3}{7}$

002

확률변수 X가 이항분포 $B\left(6,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_6C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{6-x}={}_6C_x\left(\frac{1}{2}\right)^6\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$$

$$\therefore\ P(X=5)={}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^6=6\times\frac{1}{64}=\frac{3}{32}$$

답 ③

003

(1) 문제가 20개이므로 20회의 독립시행이고, 한 문제를 맞힐 확률은 $\frac{1}{5}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(20,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

(2) 확률변수 X의 확률질량함수가

$$P(X=x)={}_{20}C_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\Bigg(\underbrace{\frac{4}{5}}_{1-\frac{1}{5}}\Bigg)^{20-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 20)$$

이므로

$$P(X=18)={}_{20}C_{18}\left(\frac{1}{5}\right)^{18}\left(\frac{4}{5}\right)^2,\ P(X=20)={}_{20}C_{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{20}\left(\frac{4}{5}\right)^0$$

$$\therefore\ k=\frac{P(X=18)}{P(X=20)}=\frac{{}_{20}C_{18}\left(\frac{1}{5}\right)^{18}\left(\frac{4}{5}\right)^2}{{}_{20}C_{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{20}\left(\frac{4}{5}\right)^0}=\frac{190\times\frac{4^2}{5^{20}}}{1\times\frac{1}{5^{20}}}=3040$$

답 (1) $B\left(20,\ \frac{1}{5}\right)$ (2) 3040

004

슛을 5번 할 때, 득점에 성공하는 횟수를 확률변수 X라고 하자.
5번의 슛을 하므로 5회의 독립시행이고, 한 번 슛을 할 때의 득점에 성공할 확률은 $\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$이다.

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5,\ \frac{3}{4}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{5-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

따라서 4번 이상 득점에 성공할 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge4)&=P(X=4)+P(X=5)\\&={}_5C_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^1+{}_5C_5\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^0\\&=\frac{405}{1024}+\frac{243}{1024}=\frac{81}{128}\end{aligned}$$

답 ②

005

$$E(X)=30\times\frac{1}{5}=6$$

답 ①

006

$E(X)=40$이므로

$100p=40\qquad\therefore\ p=\frac{2}{5}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$$V(X)=100\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=24$$

답 ④

007

$V(X)=15$이므로

$64p(1-p)=15,\ 64p^2-64p+15=0$

$(8p-3)(8p-5)=0\qquad\therefore\ p=\frac{3}{8}\ \left(\because\ p<\frac{1}{2}\right)$

답 ⑤

008

확률변수 X가 이항분포 $B\left(n,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$$E(X)=n\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}n$$

$$V(X)=n\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}n$$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=\frac{2}{9}n+\left(\frac{2}{3}n\right)^2$

이때 $E(X^2)=V(X)+16$이므로

$\frac{2}{9}n+\left(\frac{2}{3}n\right)^2=\frac{2}{9}n+16,\ \frac{4}{9}n^2=16$

$n^2=36$ $\therefore n=6$ ($\because n$은 자연수)

답 ③

009

확률변수 X의 확률질량함수가

$$P(X=x)={}_{50}C_x\frac{9^x}{10^{50}}$$
$$={}_{50}C_x\left(\frac{9}{10}\right)^x\left(\frac{1}{10}\right)^{50-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 50)$$

이므로 X는 이항분포 $B\left(50,\ \frac{9}{10}\right)$를 따른다. ❶

따라서 $V(X)=50\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{9}{2}$이므로 ❷

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ❸

답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X가 이항분포 $B\left(50,\ \frac{9}{10}\right)$를 따름을 알 수 있다.	40 %
❷ $V(X)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\sigma(X)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

010

한 개의 주사위를 36번 던지므로 36회의 독립시행이고, 한 개의 주사위를 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다.

3, 6

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(36,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$V(X)=36\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=8$

답 ②

011

가위바위보를 45번 하므로 45회의 독립시행이고, 한 번의 가위바위보에서 영미가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(45,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$E(X)=45\times\frac{1}{3}=15,\ V(X)=45\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=10$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=10+15^2=235$

답 ③

012

쿠키 100개를 검사하므로 100회의 독립시행이고, 한 번의 검사에서 쿠키에 초콜릿 칩이 들어 있지 않을 확률은 $\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\sigma(X)=\sqrt{100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}=4$

답 4

013

젤리 하나를 꺼내어 먹은 후 같은 색 젤리를 다시 넣으므로 매회 시행에서 봉지 안의 빨간 젤리와 초록 젤리의 개수는 변하지 않는다.

이때 한 번의 시행에서 빨간 젤리가 나올 확률은 $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{3}{4}\right)$을 따른다.

$E(X)=12$이므로

$n\times\frac{3}{4}=12$ $\therefore n=16$

답 ②

014

열쇠를 꺼내어 확인하고 다시 넣는 시행을 150회 반복하므로 150회의 독립시행이고, 한 번의 시행에서 황금 열쇠가 나올 확률은 $\frac{4}{4+m}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(150,\ \frac{4}{4+m}\right)$를 따른다.

$E(X)=30$이므로

$150\times\frac{4}{4+m}=30,\ 4+m=20$

$\therefore m=16$

즉, X는 이항분포 $B\left(150,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$V(X)=150\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=24$

$\therefore m+V(X)=16+24=40$

답 40

015

(1) $E(X)=100\times\frac{1}{4}=25$이므로

$E(3X+2)=3E(X)+2$
$=3\times25+2=77$

(2) $V(X)=100\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{75}{4}$이므로

$V(-2X+7)=(-2)^2V(X)$
$=4\times\frac{75}{4}=75$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\frac{75}{4}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$이므로

$\sigma(-2X+5)=|-2|\sigma(X)=2\times\frac{5\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

답 (1) 77 (2) 75 (3) $5\sqrt{3}$

016

확률변수 X가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$E(X)=\frac{1}{3}n$

$E(3X-1)=3E(X)-1=3\times\frac{1}{3}n-1=n-1$

$E(3X-1)=17$이므로

$n-1=17$ $\therefore n=18$

$\therefore V(X)=18\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=4$

답 ④

017

확률변수 X가 이항분포 $B\left(50, \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$E(X)=50\times\frac{2}{5}=20$, $V(X)=50\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=12$

$E(3X-a)=V(3X-a)$에서

$3E(X)-a=3^2V(X)$, $3\times20-a=9\times12$

$\therefore a=60-108=-48$

답 ②

018

1000개의 상품을 판매하였으므로 1000회의 독립시행이고, 특정 상품이 반품될 확률은 $\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(1000, \frac{1}{50}\right)$을 따른다. ❶

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{1000\times\frac{1}{50}\times\frac{49}{50}}=\frac{7\sqrt{10}}{5}$ ❷

$\therefore \sigma(-5X-10)=|-5|\sigma(X)$

$=5\times\frac{7\sqrt{10}}{5}$

$=7\sqrt{10}$ ❸

답 $7\sqrt{10}$

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X가 이항분포 $B\left(1000, \frac{1}{50}\right)$을 따름을 알 수 있다.	40 %
❷ $\sigma(X)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\sigma(-5X-10)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

019

공연을 500명이 예매하였으므로 500회의 독립시행이고, 공연을 예매한 사람이 공연을 보러 갈 확률은 $1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(500, \frac{19}{20}\right)$를 따르므로

$E(X)=500\times\frac{19}{20}=475$

$\therefore E(4X-20)=4E(X)-20=4\times475-20=1880$

답 ④

020

(1) 곡선 B의 대칭축이 곡선 A의 대칭축보다 오른쪽에 있으므로

$m_A \boxed{<} m_B$

(2) 곡선 C의 대칭축이 곡선 A의 대칭축보다 오른쪽에 있으므로

$m_A \boxed{<} m_C$

(3) 곡선 B와 곡선 C의 대칭축이 같으므로

$m_B \boxed{=} m_C$

(4) 곡선 A는 곡선 B보다 높이가 낮고 폭이 넓으므로

$\sigma_A \boxed{>} \sigma_B$

(5) 곡선 A와 곡선 C의 모양이 같으므로

$\sigma_A \boxed{=} \sigma_C$

(6) 곡선 C는 곡선 B보다 높이가 낮고 폭이 넓으므로

$\sigma_B \boxed{<} \sigma_C$

답 (1) < (2) < (3) = (4) > (5) = (6) <

021

ㄷ. m이 일정할 때, σ의 값이 작을수록 곡선의 가운데 부분은 높아진다. (거짓)

ㄹ. 곡선과 x축 사이의 넓이는 m의 값에 관계없이 항상 1이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

022

정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고

$P(X\le6)=P(X\ge18)$이므로

$m=\frac{6+18}{2}=12$

답 12

023

정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 조건 ㈎에서

$P(X\le3)=P(X\ge9)$이므로

$m=\frac{3+9}{2}=6$ ❶

조건 ㈏에서 $V\left(\frac{1}{3}X\right)=1$이므로

$\left(\frac{1}{3}\right)^2V(X)=1$, $\frac{1}{9}V(X)=1$

$\therefore V(X)=9$

즉, $\sigma^2=9$이므로 $\sigma=3$ ($\because \sigma>0$) ❷

$\therefore m+\sigma=6+3=9$ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ σ의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $m+\sigma$의 값을 구할 수 있다.	20 %

024

정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭임을 이용하면

(1) $P(m-2\sigma\le X\le m)=P(m\le X\le m+2\sigma)=B$

(2) $P(m-2\sigma\le X\le m+2\sigma)$
$=P(m-2\sigma\le X\le m)+P(m\le X\le m+2\sigma)$
$=2P(m\le X\le m+2\sigma)=2B$

(3) $P(m-\sigma\le X\le m+2\sigma)$
$=P(m-\sigma\le X\le m)+P(m\le X\le m+2\sigma)$
$=P(m\le X\le m+\sigma)+P(m\le X\le m+2\sigma)$
$=A+B$

(4) $P(X\le m+\sigma)=P(X\le m)+P(m\le X\le m+\sigma)$
$=0.5+A$

(5) $P(X\ge m+2\sigma)=P(X\ge m)-P(m\le X\le m+2\sigma)$
$=0.5-B$

답 (1) B (2) $2B$ (3) $A+B$ (4) $0.5+A$ (5) $0.5-B$

025

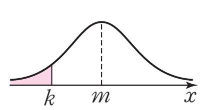
$P(m-2\sigma\le X\le m+2\sigma)=0.9544$이므로

$2P(m\le X\le m+2\sigma)=0.9544$ $\therefore P(m\le X\le m+2\sigma)=0.4772$

답 ④

026

$P(X\le k)=0.0228<0.5$이므로 오른쪽 그림과 같이 k는 대칭축의 왼쪽에 위치한다.



$\therefore k<m$

따라서

$P(X\le k)=P(X\le m)-P(k\le X\le m)$
$=0.5-P(k\le X\le m)$
$=0.0228$

이므로

$P(k\le X\le m)=0.5-0.0228=0.4772$ ······ ㉠

주어진 표에서 $P(m\le X\le m+2\sigma)=0.4772$이므로

$P(m-2\sigma\le X\le m)=0.4772$ ······ ㉡

$m=50$, $\sigma=6$이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$k=m-2\sigma=50-2\times6=38$

답 38

027

정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 조건 (가)에서

$P(X\ge 64)=P(X\le 56)$이므로

$m=\dfrac{64+56}{2}=60$

조건 (나)에서 $E(X^2)=3616$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$
$=3616-60^2=16$

$\therefore \sigma=\sqrt{16}=4$

$\therefore P(X\le 68)=P(X\le 60+2\times4)$
$=P(X\le m+2\sigma)$
$=P(X\le m)+P(m\le X\le m+2\sigma)$
$=0.5+0.4772$
$=0.9772$

답 ④

028

(1) $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$

(2) $P(-0.5\le Z\le 0)=P(0\le Z\le 0.5)$
$=0.1915$

(3) $P(0.5\le Z\le 1)=P(0\le Z\le 1)-P(0\le Z\le 0.5)$
$=0.3413-0.1915$
$=0.1498$

(4) $P(-2\le Z\le 0.5)=P(-2\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 0.5)$
$=P(0\le Z\le 2)+P(0\le Z\le 0.5)$
$=0.4772+0.1915$
$=0.6687$

답 (1) 0.4332 (2) 0.1915 (3) 0.1498 (4) 0.6687

029

$P(Z\le a)=0.8413>0.5$이므로 → a는 대칭축의 오른쪽에 존재한다.

$P(Z\le a)=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le a)$
$=0.5+P(0\le Z\le a)$

즉, $0.5+P(0\le Z\le a)=0.8413$이므로

$P(0\le Z\le a)=0.3413$

$\therefore a=1$

$P(a\le Z\le b)=0.1574$에서

$P(0\le Z\le b)-P(0\le Z\le a)=0.1574$

$P(0\le Z\le b)-0.3413=0.1574$

$P(0\le Z\le b)=0.4987$

$\therefore b=3$

$\therefore a+b=1+3=4$

답 ④

030

(1) $Z=\dfrac{X-20}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(15\le X\le 25)=P\left(\dfrac{15-20}{5}\le Z\le\dfrac{25-20}{5}\right)$
$=P(-1\le Z\le 1)$

$\therefore a=-1,\ b=1$

(2) $Z=\frac{X-12}{3}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(24\le X\le 30)=\mathrm{P}\left(\frac{24-12}{3}\le Z\le\frac{30-12}{3}\right)$$
$$=\mathrm{P}(4\le Z\le 6)$$

$\therefore a=4,\ b=6$

답 (1) $a=-1,\ b=1$ (2) $a=4,\ b=6$

031

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 $m=10,\ \sigma=2$이므로

$m+\sigma=10+2=12$

답 ④

032

두 확률변수 $X,\ Y$가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 10^2),\ \mathrm{N}(40,\ 8^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-50}{10},\ Z_Y=\frac{Y-40}{8}$으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(50\le X\le k)=\mathrm{P}(24\le Y\le 40)$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{50-50}{10}\le Z_X\le\frac{k-50}{10}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{24-40}{8}\le Z_Y\le\frac{40-40}{8}\right)$$

$$\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le\frac{k-50}{10}\right)=\mathrm{P}(-2\le Z_Y\le 0)=\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 2)$$

따라서 $\frac{k-50}{10}=2$이므로

$k-50=20 \qquad \therefore k=70$

답 70

033

두 확률변수 $X,\ Y$가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(130,\ 4^2),\ \mathrm{N}(110,\ 7^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-130}{4},\ Z_Y=\frac{Y-110}{7}$으로 놓으면 두 확률변수 $Z_X,\ Z_Y$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때

$$a=\mathrm{P}(X\le 142)=\mathrm{P}\left(Z_X\le\frac{142-130}{4}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z_X\le 3)$$
$$=\mathrm{P}(Z_X\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z_X\le 3)$$
$$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z_X\le 3)$$

$$b=\mathrm{P}(Y\ge 124)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{124-110}{7}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z_Y\ge 2)$$
$$=\mathrm{P}(Z_Y\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 2)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 2)$$

이므로

$a>0.5,\ b<0.5 \qquad \therefore a>b$

한편

$$c=\mathrm{P}(Z\ge -0.5)=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+0.5$$

$c>0.5$이고 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)<\mathrm{P}(0\le Z_X\le 3)$이므로

$b<c<a$

답 ③

034

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(25,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-25}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(25\le X\le 37)=\mathrm{P}\left(\frac{25-25}{4}\le Z\le\frac{37-25}{4}\right)$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 3)=0.4987$$

(2) $\mathrm{P}(19\le X\le 25)=\mathrm{P}\left(\frac{19-25}{4}\le Z\le\frac{25-25}{4}\right)$
$$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 0)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$$

(3) $\mathrm{P}(23\le X\le 27)=\mathrm{P}\left(\frac{23-25}{4}\le Z\le\frac{27-25}{4}\right)$
$$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0.5)$$
$$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$$
$$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$$
$$=2\times 0.1915=0.3830$$

(4) $\mathrm{P}(29\le X\le 33)=\mathrm{P}\left(\frac{29-25}{4}\le Z\le\frac{33-25}{4}\right)$
$$=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.4772-0.3413=0.1359$$

답 (1) 0.4987 (2) 0.4332 (3) 0.3830 (4) 0.1359

035

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(36,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-36}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(X\le 33)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{33-36}{3}\right)=\mathrm{P}(Z\le -1)$
$$=\mathrm{P}(Z\le 0)-\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.5-0.3413$$
$$=0.1587$$

(2) $\mathrm{P}(X\ge 33)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{33-36}{3}\right)=\mathrm{P}(Z\ge -1)$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(Z\ge 0)$$
$$=0.3413+0.5$$
$$=0.8413$$

(3) $\mathrm{P}(X\le 39)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{39-36}{3}\right)=\mathrm{P}(Z\le 1)$
$$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.5+0.3413$$
$$=0.8413$$

(4) $P(X\geq 39)=P\left(Z\geq \frac{39-36}{3}\right)=P(Z\geq 1)$
$=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 1)$
$=0.5-0.3413$
$=0.1587$

답 (1) 0.1587　(2) 0.8413　(3) 0.8413　(4) 0.1587

036

확률변수 X가 정규분포 $N(18,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-18}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ P(X\leq 21)-P(16\leq X\leq 22)$
$=P\left(Z\leq \frac{21-18}{2}\right)-P\left(\frac{16-18}{2}\leq Z\leq \frac{22-18}{2}\right)$
$=P(Z\leq 1.5)-P(-1\leq Z\leq 2)$
$=\{P(Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 1.5)\}$
$\quad-\{P(-1\leq Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 2)\}$
$=\{P(Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 1.5)\}$
$\quad-\{P(0\leq Z\leq 1)+P(0\leq Z\leq 2)\}$
$=(0.5+0.4332)-(0.3413+0.4772)$
$=0.9332-0.8185$
$=0.1147$

답 0.1147

037

$P(|X-55|\leq 2)=0.3830$에서
$P(-2\leq X-55\leq 2)=0.3830$
$\therefore\ P(53\leq X\leq 57)=0.3830$ ······ ㉠

확률변수 X가 정규분포 $N(55,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-55}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

㉠에서
$P\left(\frac{53-55}{4}\leq Z\leq \frac{57-55}{4}\right)=0.3830$
$P(-0.5\leq Z\leq 0.5)=0.3830$
$P(-0.5\leq Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 0.5)=0.3830$
$2P(0\leq Z\leq 0.5)=0.3830$
$\therefore\ P(0\leq Z\leq 0.5)=0.1915$

$\therefore\ P(X\leq 53)=P\left(Z\leq \frac{53-55}{4}\right)=P(Z\leq -0.5)$
$=P(Z\leq 0)-P(-0.5\leq Z\leq 0)$
$=P(Z\leq 0)-P(0\leq Z\leq 0.5)$
$=0.5-0.1915$
$=0.3085$

답 ④

038

$E(X)=40,\ \sigma(X)=6$이므로
$E(Y)=E(3X-4)=3E(X)-4=3\times 40-4=116$
$\sigma(Y)=\sigma(3X-4)=|3|\sigma(X)=3\times 6=18$

이때 확률변수 X가 정규분포 $N(40,\ 6^2)$을 따르므로 확률변수 Y도 정규분포 $N(116,\ 18^2)$을 따른다. ······ ❶

따라서 $Z=\frac{Y-116}{18}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. ······ ❷

$\therefore\ P(125\leq Y\leq 143)=P\left(\frac{125-116}{18}\leq Z\leq \frac{143-116}{18}\right)$
$=P(0.5\leq Z\leq 1.5)$
$=P(0\leq Z\leq 1.5)-P(0\leq Z\leq 0.5)$
$=0.4332-0.1915$
$=0.2417$ ······ ❸

답 0.2417

채점 기준	비율
❶ 확률변수 Y가 정규분포 $N(116,\ 18^2)$을 따름을 알 수 있다.	40 %
❷ 확률변수 Y를 표준화할 수 있다.	20 %
❸ $P(125\leq Y\leq 143)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

|다른 풀이|

$Y=3X-4$이므로
$P(125\leq Y\leq 143)=P(125\leq 3X-4\leq 143)$
$=P(129\leq 3X\leq 147)$
$=P(43\leq X\leq 49)$

이때 확률변수 X가 정규분포 $N(40,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-40}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ P(125\leq Y\leq 143)=P(43\leq X\leq 49)$
$=P\left(\frac{43-40}{6}\leq Z\leq \frac{49-40}{6}\right)$
$=P(0.5\leq Z\leq 1.5)$
$=P(0\leq Z\leq 1.5)-P(0\leq Z\leq 0.5)$
$=0.4332-0.1915$
$=0.2417$

039

확률변수 X가 정규분포 $N(12,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-12}{3}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(k\leq X\leq 21)=0.84$에서
$P\left(\frac{k-12}{3}\leq Z\leq \frac{21-12}{3}\right)=0.84$
$P\left(\frac{k-12}{3}\leq Z\leq 3\right)=0.84>0.5$ $\frac{k-12}{3}<0$
$P\left(\frac{k-12}{3}\leq Z\leq 0\right)+P(0\leq Z\leq 3)=0.84$
$P\left(0\leq Z\leq \frac{12-k}{3}\right)+0.4987=0.84$
$P\left(0\leq Z\leq \frac{12-k}{3}\right)=0.84-0.4987=0.3413$

따라서 $\frac{12-k}{3}=1$이므로
$12-k=3$　　$\therefore\ k=9$

답 ⑤

040

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\le 60)=0.0013$에서

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{60-m}{5}\right)=0.0013<0.5$

$\mathrm{P}(Z\le 0)-\mathrm{P}\left(\frac{60-m}{5}\le Z\le 0\right)=0.0013$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m-60}{5}\right)=0.0013$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m-60}{5}\right)=0.5-0.0013=0.4987$

따라서 $\frac{m-60}{5}=3$이므로 $m-60=15$ $\quad\therefore m=75$

답 ③

041

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{m}{3}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\frac{m}{3}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}\left(X\le\frac{9}{2}\right)=0.9987$에서

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{\frac{9}{2}-m}{\frac{m}{3}}\right)=0.9987>0.5$

$\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\frac{9}{2}-m}{\frac{m}{3}}\right)=0.9987$

$0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\frac{9}{2}-m}{\frac{m}{3}}\right)=0.9987$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\frac{9}{2}-m}{\frac{m}{3}}\right)=0.9987-0.5=0.4987$

따라서 $\frac{\frac{9}{2}-m}{\frac{m}{3}}=3$이므로 $\frac{9}{2}-m=m$

$2m=\frac{9}{2}\quad\therefore m=\frac{9}{4}$

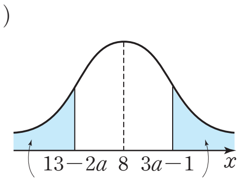
답 ④

042

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(8,\ 2^2)$을 따르므로 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=8$에 대하여 대칭이다.

이때 $\mathrm{P}(X\le 13-2a)=\mathrm{P}(X\ge 3a-1)$

이므로



$\mathrm{P}(X\le 13-2a)$ $\mathrm{P}(X\ge 3a-1)$

$\frac{(13-2a)+(3a-1)}{2}=8$

$\frac{a+12}{2}=8$

$a+12=16$

$\therefore a=4$ ❶

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(8,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-8}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. ❷

$\therefore \mathrm{P}(13-2a\le X\le 3a-1)=\mathrm{P}(13-2\times 4\le X\le 3\times 4-1)$

$=\mathrm{P}(5\le X\le 11)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{5-8}{2}\le Z\le\frac{11-8}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 1.5)$

$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=2\times 0.4332$

$=0.8664$ ❸

답 0.8664

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 확률변수 X를 표준화할 수 있다.	20 %
❸ $\mathrm{P}(13-2a\le X\le 3a-1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

043

(1) 이 공장에서 생산된 연필 한 자루의 길이를 X mm라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(165,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-165}{3}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X\ge 168)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{168-165}{3}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 1)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.5-0.34$

$=0.16$

따라서 길이가 168 mm 이상인 연필은 전체의 16 %이다.

(2) $\mathrm{P}(X\le 159)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{159-165}{3}\right)=\mathrm{P}(Z\le -2)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0)-\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.48$

$=0.02$

따라서 길이가 159 mm 이하인 연필은

$0.02\times 500=10$(자루)

답 (1) 16 % (2) 10자루

044

이 공장에서 생산하는 축구공 1개의 무게를 X g이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(430,\ 14^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-430}{14}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X\ge 409)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{409-430}{14}\right)=\mathrm{P}(Z\ge -1.5)$

$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)+0.5$

$=0.4332+0.5=0.9332$

답 ③

045

효주가 등교하는 데 걸리는 시간을 X분이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(25,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-25}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. ❶

$X>30$일 때 지각을 하게 되므로 지각할 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X>30)&=\mathrm{P}\left(Z>\frac{30-25}{4}\right)=\mathrm{P}(Z>1.25)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.25)\\&=0.5-0.3944\\&=0.1056\end{aligned}$$ ❷

답 0.1056

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X를 정하고 표준화할 수 있다.	50 %
❷ 효주가 지각할 확률을 구할 수 있다.	50 %

046

이 양계장에서 생산된 달걀 1개의 무게를 X g이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-60}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(57\leq X\leq 65)&=\mathrm{P}\left(\frac{57-60}{2}\leq Z\leq\frac{65-60}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-1.5\leq Z\leq 2.5)\\&=\mathrm{P}(-1.5\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.5)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.5)\\&=0.4332+0.4938\\&=0.9270\end{aligned}$$

따라서 구하는 달걀의 개수는

$0.9270\times 1000=927$

답 ⑤

047

이 농장에서 수확된 토마토 1개의 무게를 X g이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 9^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-200}{9}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(X\geq 213.5)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{213.5-200}{9}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

따라서 구하는 토마토의 개수는

$0.0668\times 5000=334$

답 334

048

응시자의 점수를 X점이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(420,\ 85^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-420}{85}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 k점이라고 하면

$\mathrm{P}(X\geq k)=\frac{270}{1000}=0.27$

이어야 하므로 ↳ 합격자의 성적은 전체 응시자의 성적의 상위 27 % 이내에 있어야 한다.

$$\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{k-420}{85}\right)=0.27<0.5$$

$$\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-420}{85}\right)=0.27$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-420}{85}\right)=0.27$$

$$\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-420}{85}\right)=0.5-0.27=0.23$$

따라서 $\frac{k-420}{85}=0.6$이므로

$k-420=51\qquad\therefore\ k=471$

즉, 합격자의 최저 점수는 471점이다.

답 ④

049

학생의 키를 X cm라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(166,\ 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-166}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

키가 큰 쪽에서 30번째인 학생의 키를 k cm라고 하면

$\mathrm{P}(X\geq k)=\frac{30}{300}=0.1$

이어야 하므로

$$\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{k-166}{8}\right)=0.1<0.5$$

$$\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-166}{8}\right)=0.1$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-166}{8}\right)=0.1$$

$$\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-166}{8}\right)=0.5-0.1=0.4$$

따라서 $\frac{k-166}{8}=1.3$이므로

$k-166=10.4\qquad\therefore\ k=176.4$

즉, 키가 큰 쪽에서 30번째인 학생의 키는 176.4 cm이다.

답 ⑤

050

$m=150\times\frac{3}{5}=90,\ \sigma=\sqrt{150\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}}=6$

따라서 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(90,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-90}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\leq 84)=\mathrm{P}(Z\geq k)$에서

$\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{84-90}{6}\right)=\mathrm{P}(Z\geq k),\ \mathrm{P}(Z\leq -1)=\mathrm{P}(Z\geq k)$

↳ 표준정규분포곡선은 직선 $z=0$에 대하여 대칭이므로 $\frac{-1+k}{2}=0$

$\therefore\ k=1$

$\therefore\ m+\sigma+k=90+6+1=97$

답 ④

051

$\mathrm{E}(X)=192\times\frac{3}{4}=144$

$\mathrm{V}(X)=192\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=36$

따라서 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(144,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-144}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(147\le X\le 156)=\mathrm{P}\left(\frac{147-144}{6}\le Z\le\frac{156-144}{6}\right)$
$=\mathrm{P}(0.5\le Z\le 2)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$
$=0.4772-0.1915$
$=0.2857$

(2) $\mathrm{P}(138\le X\le 144)=\mathrm{P}\left(\frac{138-144}{6}\le Z\le\frac{144-144}{6}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.3413$

(3) $\mathrm{P}(X\ge 153)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{153-144}{6}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$=0.5-0.4332$
$=0.0668$

(4) $\mathrm{P}(X\le 132)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{132-144}{6}\right)=\mathrm{P}(Z\le -2)$
$=\mathrm{P}(Z\le 0)-\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)$
$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.5-0.4772$
$=0.0228$

답 (1) 0.2857 (2) 0.3413 (3) 0.0668 (4) 0.0228

052

확률변수 X의 확률질량함수가

$\mathrm{P}(X=x)={}_{400}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{400-x}\quad(x=0,\ 1,\ \cdots,\ 400)$

이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다. ······ ❶

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=400\times\frac{1}{5}=80,\ \mathrm{V}(X)=400\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=64$

따라서 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-80}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. ······ ❷

$\therefore\ \mathrm{P}(68\le X\le 88)=\mathrm{P}\left(\frac{68-80}{8}\le Z\le\frac{88-80}{8}\right)$
$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 1)$
$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.43+0.34$
$=0.77$ ······ ❸

답 0.77

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{5}\right)$을 따름을 알 수 있다.	30 %
❷ 확률변수 X가 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 8^2)$을 따름을 알고 표준화할 수 있다.	40 %
❸ $\mathrm{P}(68\le X\le 88)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

053

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르고 $\mathrm{V}(X)=81$이므로

$n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=81\qquad\therefore\ n=432$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=432\times\frac{1}{4}=108$

$\mathrm{V}(X)=81$이면 $\sigma(X)=9$

따라서 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(108,\ 9^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-108}{9}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}\left(\frac{13}{48}n\le X\le\frac{5}{16}n\right)=\mathrm{P}\left(\frac{13}{48}\times 432\le X\le\frac{5}{16}\times 432\right)$
$=\mathrm{P}(117\le X\le 135)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{117-108}{9}\le Z\le\frac{135-108}{9}\right)$
$=\mathrm{P}(1\le Z\le 3)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 3)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.4987-0.3413=0.1574$

답 ③

054

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(72,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

6의 약수는 1, 2, 3, 6이므로 한 개의 주사위를 1번 던질 때 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$\mathrm{E}(X)=72\times\frac{2}{3}=48$

$\mathrm{V}(X)=72\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=16$

따라서 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(48,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-48}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(44\le X\le 52)=\mathrm{P}\left(\frac{44-48}{4}\le Z\le\frac{52-48}{4}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=2\times 0.3413=0.6826$

(2) $\mathrm{P}(X\ge 52)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{52-48}{4}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 1)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.5-0.3413=0.1587$

답 (1) 0.6826 (2) 0.1587

055

동전의 앞면이 나오는 횟수를 X라고 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=100\times\frac{1}{2}=50,\ V(X)=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25$

따라서 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(50,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(45\le X\le 60)&=P\left(\frac{45-50}{5}\le Z\le\frac{60-50}{5}\right)\\&=P(-1\le Z\le 2)\\&=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)\\&=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 2)\\&=0.3413+0.4772=0.8185\end{aligned}$$

답 ④

056

응답할 확률이 $\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$이므로 응답한 조사자의 수를 X라고 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5400,\ \frac{2}{5}\right)$를 따른다.

$\therefore E(X)=5400\times\frac{2}{5}=2160,\ V(X)=5400\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=1296$

따라서 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(2160,\ 36^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-2160}{36}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때 $P(X\ge k)=0.9$이므로

$P\left(Z\ge\frac{k-2160}{36}\right)=0.9>0.5$

$P\left(\frac{k-2160}{36}\le Z\le 0\right)+P(Z\ge 0)=0.9$

$P\left(0\le Z\le\frac{2160-k}{36}\right)+0.5=0.9$

$P\left(0\le Z\le\frac{2160-k}{36}\right)=0.9-0.5=0.4$

따라서 $\frac{2160-k}{36}=1.25$이므로

$2160-k=45 \qquad \therefore k=2115$

답 2115

057

이 과수원에서 수확한 사과 한 개의 무게를 X g이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(400,\ 50^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-400}{50}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

사과의 무게가 442 g 이상일 때 1등급 상품이 되므로 수확한 사과가 1등급 상품일 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge 442)&=P\left(Z_X\ge\frac{442-400}{50}\right)=P(Z_X\ge 0.84)\\&=P(Z_X\ge 0)-P(0\le Z_X\le 0.84)\\&=0.5-0.30=0.2\end{aligned}$$

1등급 사과일 확률이 $0.2=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$이므로 사과 100개 중에서 1등급 사과의 개수를 Y라고 하면 확률변수 Y는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

$\therefore E(Y)=100\times\frac{1}{5}=20,\ V(Y)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$

따라서 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $N(20,\ 4^2)$을 따르므로 $Z_Y=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(Y\ge 24)&=P\left(Z_Y\ge\frac{24-20}{4}\right)\\&=P(Z_Y\ge 1)\\&=P(Z_Y\ge 0)-P(0\le Z_Y\le 1)\\&=0.5-0.34=0.16\end{aligned}$$

답 ②

실력을 높이는 연습 문제

본문 098쪽

01

확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_4C_x(2p)^x(1-2p)^{4-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

확률변수 Y의 확률질량함수는

$P(Y=y)={}_3C_y p^y(1-p)^{3-y}$ $(y=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

이때 $9P(X=4)=4P(Y=2)$이므로

$9\times{}_4C_4(2p)^4(1-2p)^0=4\times{}_3C_2p^2(1-p)^1$

$9\times16\times p^4=4\times3\times p^2(1-p)$

$12p^2=1-p$ $(\because p\ne0)$

$12p^2+p-1=0$

$(3p+1)(4p-1)=0$

$\therefore p=\frac{1}{4}$ $(\because p>0)$

답 ③

02

공을 4번 던졌을 때, 스트라이크가 되는 횟수를 확률변수 X라고 하자.

공을 4번 던지므로 4회의 독립시행이고, 공을 한 번 던져 스트라이크가 될 확률은 $\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$이다.

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(4,\ \frac{4}{5}\right)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{4-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

따라서 적어도 1번은 스트라이크가 될 확률은

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$

$= 1 - {}_4C_0\left(\frac{4}{5}\right)^0\left(\frac{1}{5}\right)^4$

$= 1 - \frac{1}{625} = \frac{624}{625}$

답 ⑤

03

확률변수 X가 이항분포 $B(12, p)$를 따르므로

$E(X) = 12p$, $V(X) = 12p(1-p)$

이때 $\{E(X)\}^2 = V(X)$이므로

$(12p)^2 = 12p(1-p)$

$12p = 1 - p$ ($\because p \neq 0$)

$13p = 1 \qquad \therefore p = \frac{1}{13}$

답 $\frac{1}{13}$

04

문제 접근하기

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 사건 A가 일어날 확률을 구한 후 확률변수 X가 따르는 분포를 $B(n, p)$의 꼴로 나타낸다.

m은 주사위의 눈의 수이므로 m이 가질 수 있는 값은

1, 2, 3, 4, 5, 6

또, 주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록한 포물선이고 $f(0)=f(3)=0$이므로

$f(1)>0$, $f(2)>0$,

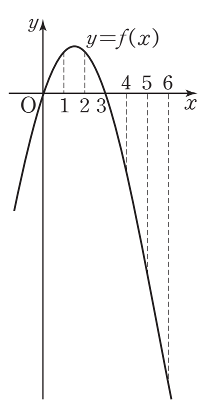
$f(4)<0$, $f(5)<0$, $f(6)<0$

따라서 $f(m)$의 값이 0보다 큰 경우는

$m=1$, $m=2$

일 때이므로 사건 A가 일어날 확률은

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$이다.



주사위를 15회 던지는 독립시행이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(15, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore E(X) = 15 \times \frac{1}{3} = 5$

답 ⑤

05

한 개의 공을 n번 꺼내므로 n회의 독립시행이고, 1회의 시행에서 흰 공이 나올 확률은 $\frac{x}{x+4}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{x}{x+4}\right)$를 따른다.

이때 $E(X)=30$이므로

$n \times \frac{x}{x+4} = 30$ ········ ㉠

또, $V(X)=12$이므로

$n \times \frac{x}{x+4} \times \frac{4}{x+4} = 12$ ········ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$30 \times \frac{4}{x+4} = 12$, $x+4=10$

$\therefore x=6$

$x=6$을 ㉠에 대입하면

$n \times \frac{6}{10} = 30 \qquad \therefore n=50$

$\therefore n+x = 50+6 = 56$

답 56

06

3개의 동전을 동시에 60번 던지므로 60회의 독립시행이고, 3개의 동전을 동시에 한 번 던져서 앞면이 1개, 뒷면이 2개 나올 확률은

${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(60, \frac{3}{8}\right)$을 따르므로

$\sigma(X) = \sqrt{60 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8}} = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4}$

$\therefore \sigma(-8X+3) = |-8|\sigma(X) = 8 \times \frac{15}{4} = 30$

답 30

07

확률변수 X의 평균이 30이므로 X의 확률밀도함수는 $x=30$에서 최댓값을 갖고, 그 그래프는 직선 $x=30$에 대하여 대칭이다.

따라서 $P(k-2 \leq X \leq k+6)$의 값이 최대가 되려면

$\frac{(k-2)+(k+6)}{2} = 30$, $\frac{2k+4}{2} = 30$

$k+2 = 30 \qquad \therefore k=28$

답 ③

08

ㄱ. A, B 두 고등학교의 평균은 65점으로 같으므로 어느 학교 학생들이 더 우수하다고 할 수 없다. (거짓)

ㄴ. A, B 두 고등학교의 2학년 학생 수가 같고, 70점 이상인 부분에서 B 고등학교의 그래프가 A 고등학교의 그래프보다 위에 있으므로 70점 이상인 학생들은 B 고등학교에 더 많다. (참)

ㄷ. A 고등학교의 성적의 표준편차가 C 고등학교의 성적의 표준편차보다 작으므로 A 고등학교 학생들의 성적이 더 고른 편이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

09

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

$\mathrm{P}(X \le a-4)=\mathrm{P}(X \ge b+3)$이므로

$\dfrac{(a-4)+(b+3)}{2}=m$, $\dfrac{a+b-1}{2}=m$

$\therefore a+b=2m+1$

확률변수 $Y=\dfrac{1}{4}X+1$의 평균이 36이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{4}X+1\right)=\dfrac{1}{4}\mathrm{E}(X)+1=36$

$\mathrm{E}(X)=m$이므로

$\dfrac{1}{4}m+1=36$, $\dfrac{1}{4}m=35$

$\therefore m=140$

확률변수 $Y=\dfrac{1}{4}X+1$의 분산이 $\dfrac{9}{16}$이므로

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}\left(\dfrac{1}{4}X+1\right)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\mathrm{V}(X)=\dfrac{9}{16}$

$\mathrm{V}(X)=\sigma^2$이므로

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\sigma^2=\dfrac{9}{16}$, $\sigma^2=9$

$\therefore \sigma=3$ ($\because \sigma>0$)

$\therefore a+b+\sigma=(2m+1)+\sigma$
$=(2\times 140+1)+3=284$

답 ⑤

10

$\mathrm{P}(|X-10| \le 6)=0.9544$에서

$\mathrm{P}(-6 \le X-10 \le 6)=0.9544$

$\therefore \mathrm{P}(4 \le X \le 16)=0.9544$

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(10, 3^2)$을 따르므로 그 정규분포곡선은 직선 $x=10$에 대하여 대칭이다. $\mathrm{P}(X \le 10)=\mathrm{P}(X \ge 10)=0.5$

$\therefore \mathrm{P}(4 \le X \le 10)=\mathrm{P}(10 \le X \le 16)$
$=\dfrac{1}{2}\mathrm{P}(4 \le X \le 16)$
$=\dfrac{1}{2}\times 0.9544=0.4772$

$\therefore \mathrm{P}(Y \ge 47)=\mathrm{P}(3X-1 \ge 47)$
$=\mathrm{P}(X \ge 16)$
$=\mathrm{P}(X \ge 10)-\mathrm{P}(10 \le X \le 16)$
$=0.5-0.4772=0.0228$

답 ②

| 다른 풀이 |

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(10, 3^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-10}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(|X-10| \le 6)=0.9544$에서

$\mathrm{P}(4 \le X \le 16)=0.9544$

$\mathrm{P}\left(\dfrac{4-10}{3} \le Z_X \le \dfrac{16-10}{3}\right)=0.9544$

$\mathrm{P}(-2 \le Z_X \le 2)=0.9544$

$\mathrm{P}(-2 \le Z_X \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z_X \le 2)=0.9544$

$2\mathrm{P}(0 \le Z_X \le 2)=0.9544$

$\therefore \mathrm{P}(0 \le Z_X \le 2)=0.4772$

$Y=3X-1$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(3X-1)=3\mathrm{E}(X)-1=3\times 10-1=29$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(3X-1)=3^2\mathrm{V}(X)=9\times 9=81$

따라서 확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(29, 9^2)$을 따르므로

$Z_Y=\dfrac{Y-29}{9}$로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(Y \ge 47)=\mathrm{P}\left(Z_Y \ge \dfrac{47-29}{9}\right)$
$=\mathrm{P}(Z_Y \ge 2)$
$=\mathrm{P}(Z_Y \ge 0)-\mathrm{P}(0 \le Z_Y \le 2)$
$=0.5-0.4772=0.0228$

11

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(15, 4^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-15}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(21 \le X \le a)=0.0655$에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{21-15}{4} \le Z \le \dfrac{a-15}{4}\right)=0.0655$

$\mathrm{P}\left(1.5 \le Z \le \dfrac{a-15}{4}\right)=0.0655$

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{a-15}{4}\right)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)=0.0655$

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{a-15}{4}\right)-0.4332=0.0655$

$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{a-15}{4}\right)=0.0655+0.4332=0.4987$

따라서 $\dfrac{a-15}{4}=3$이므로

$a-15=12$ $\quad\therefore a=27$

답 ⑤

12

문제 접근하기

두 확률변수 X, Y를 표준화하고, 표준정규분포곡선은 $z=0$에 대하여 대칭임을 이용하여 m, σ에 대한 식을 세운다.

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m, 3^2)$, $\mathrm{N}(3m, \sigma^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-m}{3}$, $Z_Y=\dfrac{Y-3m}{\sigma}$으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(Y \le 2m+3)=0.1587$에서

$\mathrm{P}\left(Z_Y \le \dfrac{(2m+3)-3m}{\sigma}\right)=0.1587$

$\mathrm{P}\left(Z_Y \le \dfrac{3-m}{\sigma}\right)=0.1587<0.5$

$\mathrm{P}(Z_Y \le 0)-\mathrm{P}\left(\dfrac{3-m}{\sigma} \le Z_Y \le 0\right)=0.1587$

$0.5-\mathrm{P}\left(0 \le Z_Y \le \dfrac{m-3}{\sigma}\right)=0.1587$

$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z_Y \le \dfrac{m-3}{\sigma}\right)=0.5-0.1587=0.3413$

따라서 $\frac{m-3}{\sigma}=1$이므로 $\sigma=m-3$ ·········· ㉠

또, $\mathrm{P}(X\le 12)+\mathrm{P}(Y\le 12)=1$에서

$\mathrm{P}\left(Z_X\le\frac{12-m}{3}\right)+\mathrm{P}\left(Z_Y\le\frac{12-3m}{\sigma}\right)=1$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(Z_X\le\frac{12-m}{3}\right)=1-\mathrm{P}\left(Z_Y\le\frac{12-3m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{12-3m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z_Y\le\frac{3m-12}{\sigma}\right)$

표준정규분포곡선은 직선 $z=0$에 대하여 대칭

따라서 $\frac{12-m}{3}=\frac{3m-12}{\sigma}$이므로 이 식에 ㉠을 대입하면

$\frac{12-m}{3}=\frac{3m-12}{m-3}$

$12m-m^2-36+3m=9m-36$

$m^2-6m=0$

$m(m-6)=0$

$\therefore\ m=6\ (\because\ m\ne 0)$

이것을 ㉠에 대입하면

$\sigma=3$

$\therefore\ \mathrm{P}(X\le\sigma)+\mathrm{P}(Y\le m+2\sigma)$

$=\mathrm{P}(X\le 3)+\mathrm{P}(Y\le 12)$

$=\mathrm{P}\left(Z_X\le\frac{3-6}{3}\right)+\mathrm{P}\left(Z_Y\le\frac{12-18}{3}\right)$

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(6, 3^2)$, $\mathrm{N}(18, 3^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-6}{3}$, $Z_Y=\frac{Y-18}{3}$은 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$=\mathrm{P}(Z_X\le -1)+\mathrm{P}(Z_Y\le -2)$

$=\{\mathrm{P}(Z_X\le 0)-\mathrm{P}(-1\le Z_X\le 0)\}$

$+\{\mathrm{P}(Z_Y\le 0)-\mathrm{P}(-2\le Z_Y\le 0)\}$

$=\{0.5-\mathrm{P}(0\le Z_X\le 1)\}+\{0.5-\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 2)\}$

$=(0.5-0.3413)+(0.5-0.4772)$

$=0.1587+0.0228=0.1815$

답 0.1815

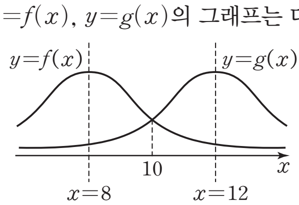
13

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(8, 2^2)$, $\mathrm{N}(12, 2^2)$을 따르고 표준편차가 2로 같으므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 대칭축은 다르지만 곡선의 모양은 같다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 각각 직선 $x=8$, $x=12$에 대하여 대칭이므로 두 그래프가 만나는 점의 x좌표 a는

$a=\frac{8+12}{2}=10$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$Z=\frac{Y-12}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(8\le Y\le a)=\mathrm{P}(8\le Y\le 10)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{8-12}{2}\le Z\le\frac{10-12}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le -1)$

$=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4772-0.3413=0.1359$

답 ①

14

이 고등학교 학생의 하루 인터넷 사용 시간을 X분이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(60, 15^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-60}{15}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(X\ge 75)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{75-60}{15}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 1)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.5-0.3413=0.1587$

따라서 하루 인터넷 사용 시간이 75분 이상인 학생은 전체의 15.87 %이다.

답 15.87 %

15

이 공장에서 생산하는 전기 자동차 배터리 1개의 용량을 X kWh라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(64.8, 0.2^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-64.8}{0.2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

이때 $\mathrm{P}(X\ge k)=0.0228$이므로

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-64.8}{0.2}\right)=0.0228<0.5$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-64.8}{0.2}\right)=0.0228$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-64.8}{0.2}\right)=0.0228$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-64.8}{0.2}\right)=0.5-0.0228=0.4772$

따라서 $\frac{k-64.8}{0.2}=2$이므로

$k-64.8=0.4\qquad\therefore\ k=65.2$

답 65.2

16

이 인스턴트 커피 제조 회사에서 생산하는 A, B 제품 1개의 중량을 각각 X, Y라고 하면 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(9, 0.4^2)$, $\mathrm{N}(20, 1^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-9}{0.4}$, $Z_Y=\frac{Y-20}{1}$으로 놓으면 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

A 제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 8.9 이상 9.4 이하일 확률과 B 제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 19 이상 k 이하일 확률이 서로 같으므로

$\mathrm{P}(8.9\le X\le 9.4)=\mathrm{P}(19\le Y\le k)$

에서 $\mathrm{P}\left(\frac{8.9-9}{0.4}\le Z_X\le\frac{9.4-9}{0.4}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{19-20}{1}\le Z_Y\le\frac{k-20}{1}\right)$

$\mathrm{P}(-0.25\le Z_X\le 1)=\mathrm{P}(-1\le Z_Y\le k-20)$

$\mathrm{P}(-1\le Z_X\le 0.25)=\mathrm{P}(-1\le Z_Y\le k-20)$

따라서 $k-20=0.25$이므로

$k=20.25$

답 ④

17

이 지역 고등학교 학생 한 명의 몸무게를 X kg이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-60}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X\ge 66)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{66-60}{3}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 2)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.48=0.02$

따라서 구하는 학생 수는

$500\times 0.02=10$(명)

답 10명

18

세 확률변수 $X,\ Y,\ W$가 각각 이항분포 $\mathrm{B}\left(18,\ \frac{1}{3}\right)$, $\mathrm{B}\left(72,\ \frac{1}{3}\right)$, $\mathrm{B}\left(288,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=18\times\frac{1}{3}=6,\ \mathrm{V}(X)=18\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=4$

$\mathrm{E}(Y)=72\times\frac{1}{3}=24,\ \mathrm{V}(Y)=72\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=16$

$\mathrm{E}(W)=288\times\frac{1}{3}=96,\ \mathrm{V}(W)=288\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=64$

따라서 세 확률변수 $X,\ Y,\ W$가 각각 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(6,\ 2^2),\ \mathrm{N}(24,\ 4^2),\ \mathrm{N}(96,\ 8^2)$을 따르므로

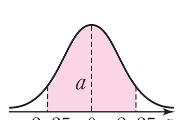
$Z_X=\frac{X-6}{2},\ Z_Y=\frac{Y-24}{4},\ Z_W=\frac{W-96}{8}$

으로 놓으면 세 확률변수 $Z_X,\ Z_Y,\ Z_W$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때

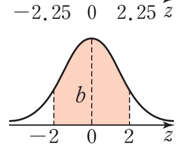
$a=\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{18}-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{4}\right)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{X-6}{18}\right|<\frac{1}{4}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\left|\frac{X-6}{2}\right|<\frac{9}{4}\right)=\mathrm{P}(|Z_X|<2.25)$



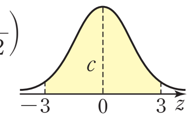
$b=\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{72}-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{9}\right)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y-24}{72}\right|<\frac{1}{9}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y-24}{4}\right|<\frac{18}{9}\right)=\mathrm{P}(|Z_Y|<2)$



$c=\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{288}-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{12}\right)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{W-96}{288}\right|<\frac{1}{12}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\left|\frac{W-96}{8}\right|<\frac{36}{12}\right)=\mathrm{P}(|Z_W|<3)$



이므로 $b<a<c$

답 ③

19

${}_{432}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{432-x}$은 한 번의 시행에서 일어날 확률이 $\frac{1}{4}$인 어떤 사건이 432번의 독립시행에서 x번 일어날 확률이다.

이 사건이 일어나는 횟수를 X라고 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(432,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=432\times\frac{1}{4}=108,\ \mathrm{V}(X)=432\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=81$

따라서 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(108,\ 9^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-108}{9}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore {}_{432}\mathrm{C}_{99}\left(\frac{1}{4}\right)^{99}\left(\frac{3}{4}\right)^{333}+{}_{432}\mathrm{C}_{100}\left(\frac{1}{4}\right)^{100}\left(\frac{3}{4}\right)^{332}$

$+{}_{432}\mathrm{C}_{101}\left(\frac{1}{4}\right)^{101}\left(\frac{3}{4}\right)^{331}+\cdots+{}_{432}\mathrm{C}_{126}\left(\frac{1}{4}\right)^{126}\left(\frac{3}{4}\right)^{306}$

$=\mathrm{P}(X=99)+\mathrm{P}(X=100)+\mathrm{P}(X=101)$

$+\cdots+\mathrm{P}(X=126)$

$=\mathrm{P}(99\le X\le 126)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{99-108}{9}\le Z\le\frac{126-108}{9}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.3413+0.4772=0.8185$

답 0.8185

20

불량품의 개수를 X라고 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(11200,\ \frac{1}{8}\right)$을 따르므로

$\frac{12.5}{100}=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}$

$\mathrm{E}(X)=11200\times\frac{1}{8}=1400,\ \mathrm{V}(X)=11200\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{8}=1225$

따라서 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(1400,\ 35^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-1400}{35}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X\le 1295)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{1295-1400}{35}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le -3)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0)-\mathrm{P}(-3\le Z\le 0)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$

$=0.5-0.4987=0.0013$

답 0.0013

21

문제 접근하기

주사위를 16200번 던졌을 때 5 이상의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X로 놓고 점 A의 위치를 X로 나타내어 X에 대한 확률을 구한다.

주사위를 16200번 던졌을 때 5 이상의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(16200, \frac{1}{3}\right)$을 따르고

한 개의 주사위를 1번 던질 때 5 이상의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{E}(X)=16200\times\frac{1}{3}=5400$

$\mathrm{V}(X)=16200\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=3600$

이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(5400, 60^2)$을 따른다.

한편, 주사위를 16200번 던졌을 때 4 이하의 눈이 나오는 횟수는 $16200-X$이므로 점 A의 위치가 5700 이하이려면

$(16200-X)-X\le5700 \qquad \therefore X\ge5250$

$Z=\frac{X-5400}{60}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge5250)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{5250-5400}{60}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge-2.5)\\&=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le0)+\mathrm{P}(Z\ge0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)+\mathrm{P}(Z\ge0)\\&=0.494+0.5=0.994\end{aligned}$$

따라서 $k=0.994$이므로

$1000\times k=1000\times0.994=994$

답 994

07 통계적 추정

기본을 다지는 유형

본문 104쪽

001

ㄱ, ㄷ은 표본조사가 적합하고, ㄴ은 전수조사가 적합하다.

답 ④

참고

(1) 전수조사
① 조사 대상 전체를 조사한다.
② 모집단에 대한 정확한 정보를 얻을 수 있다.
③ 시간과 비용이 많이 든다.
④ 우리나라 인구 주택 총조사, 우리나라 자동차 대수 조사 등에 적합하다.

(2) 표본조사
① 조사 대상 중에서 일부분을 뽑아 조사한다.
② 모집단에 대한 정보를 근사적으로 알 수 있다.
③ 시간과 비용을 아낄 수 있다.
④ 전구의 수명, 타이어의 수명 조사와 같이 생산 제품의 품질 검사 등에 적합하다.

002

(1) 공을 한 개씩 복원추출하는 경우의 수는 6개에서 3개를 뽑는 중복순열의 수와 같으므로

${}_6\Pi_3=6^3=216$

(2) 공을 한 개씩 비복원추출하는 경우의 수는 6개에서 3개를 뽑는 순열의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{P}_3=6\times5\times4=120$

(3) 공을 동시에 3개 추출하는 경우의 수는 6개에서 3개를 뽑는 조합의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{C}_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

답 (1) 216 (2) 120 (3) 20

003

모집단 $\{4, 6, 8\}$에서 크기가 2인 표본을 임의로 복원추출하는 경우의 수는 3개에서 2개를 뽑는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_2=3^2=9$ ······ ❶

$\overline{X}=4$인 경우를 순서쌍으로 나타내면 $(4, 4)$의 1가지이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=4)=\frac{1}{9}$

$\therefore a=\frac{1}{9}$ ······ ❷

$\overline{X}=6$인 경우를 순서쌍으로 나타내면 $(4, 8)$, $(6, 6)$, $(8, 4)$의 3가지이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=6)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

$\therefore b=\frac{1}{3}$ ······ ❸

$\overline{X}=7$인 경우를 순서쌍으로 나타내면 $(6, 8)$, $(8, 6)$의 2가지이므로

$P(\overline{X}=7)=\frac{2}{9}$

$\therefore c=\frac{2}{9}$ ······ ❹

답 $a=\frac{1}{9}$, $b=\frac{1}{3}$, $c=\frac{2}{9}$

채점 기준	비율
❶ 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의로 복원추출하는 경우의 수를 구할 수 있다.	25 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	25 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	25 %
❹ c의 값을 구할 수 있다.	25 %

004

표본평균을 $\overline{X}$라고 하면

$\overline{X}=\frac{1+4+5+6}{4}=\frac{16}{4}=4$

표본분산과 표본표준편차를 각각 S^2, S라고 하면

$S^2=\frac{1}{4-1}\{(1-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2\}=\frac{14}{3}$

$\therefore S=\sqrt{\frac{14}{3}}=\frac{\sqrt{42}}{3}$

답 $\frac{\sqrt{42}}{3}$

005

(1) $E(\overline{X})=40$, $V(\overline{X})=\frac{4^2}{8}=2$, $\sigma(\overline{X})=\frac{4}{\sqrt{8}}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

(2) $E(\overline{X})=96$, $V(\overline{X})=\frac{12^2}{16}=9$, $\sigma(\overline{X})=\frac{12}{\sqrt{16}}=\frac{12}{4}=3$

(3) $E(\overline{X})=160$, $V(\overline{X})=\frac{6^2}{64}=\frac{9}{16}$, $\sigma(\overline{X})=\frac{6}{\sqrt{64}}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

답 (1) $E(\overline{X})=40$, $V(\overline{X})=2$, $\sigma(\overline{X})=\sqrt{2}$
(2) $E(\overline{X})=96$, $V(\overline{X})=9$, $\sigma(\overline{X})=3$
(3) $E(\overline{X})=160$, $V(\overline{X})=\frac{9}{16}$, $\sigma(\overline{X})=\frac{3}{4}$

006

모표준편차가 14, 표본의 크기가 n이므로 $\sigma(\overline{X})=2$에서

$\frac{14}{\sqrt{n}}=2$, $\sqrt{n}=7$ $\quad\therefore n=49$

답 ⑤

007

모평균이 15, 모분산이 $5^2=25$, 표본의 크기가 10이므로

$E(\overline{X})=15$, $V(\overline{X})=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$

이때 $V(\overline{X})=E(\overline{X}^2)-\{E(\overline{X})\}^2$이므로

$E(\overline{X}^2)=V(\overline{X})+\{E(\overline{X})\}^2=\frac{5}{2}+15^2=\frac{455}{2}$

답 ④

008

모평균이 56, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 16이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{10}{\sqrt{16}}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

$\therefore \sigma\left(\frac{1}{5}\overline{X}+3\right)=\left|\frac{1}{5}\right|\sigma(\overline{X})=\frac{1}{5}\times\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$

답 ③

009

모표준편차가 10, 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$의 표준편차가 $\sqrt{2}$ 이하가 되려면

$\frac{10}{\sqrt{n}}\le\sqrt{2}$, $\sqrt{2n}\ge 10$

$2n\ge 100$ $\quad\therefore n\ge 50$

따라서 n의 최솟값은 50이다.

답 ③

010

(1) $E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

$V(X)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

이때 표본의 크기가 30이므로

$E(\overline{X})=E(X)=\frac{3}{2}$

$V(\overline{X})=\frac{1}{30}V(X)=\frac{1}{30}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{40}$

(2) $E(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{1}{10}=3$

$V(X)=1^2\times\frac{1}{10}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{3}{10}+5^2\times\frac{1}{10}-3^2$

$=\frac{7}{5}$

이때 표본의 크기가 30이므로

$E(\overline{X})=E(X)=3$

$V(\overline{X})=\frac{1}{30}V(X)=\frac{1}{30}\times\frac{7}{5}=\frac{7}{150}$

답 (1) $E(\overline{X})=\frac{3}{2}$, $V(\overline{X})=\frac{1}{40}$ (2) $E(\overline{X})=3$, $V(\overline{X})=\frac{7}{150}$

011

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	1

$\therefore E(X)=1\times\frac{2}{9}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{4}{9}=\frac{20}{9}$

$V(X)=1^2\times\frac{2}{9}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{4}{9}-\left(\frac{20}{9}\right)^2=\frac{50}{81}$

표본의 크기가 50이므로

$V(\overline{X})=\frac{1}{50}V(X)=\frac{1}{50}\times\frac{50}{81}=\frac{1}{81}$

답 ②

012

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{6}+a+b=1 \qquad \therefore a+b=\frac{5}{6}$ ······ ㉠

$E(X^2)=\frac{16}{3}$이므로

$0^2\times\frac{1}{6}+2^2\times a+4^2\times b=\frac{16}{3}$

$4a+16b=\frac{16}{3} \qquad \therefore a+4b=\frac{4}{3}$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{6}$

따라서

$E(X)=0\times\frac{1}{6}+2\times\frac{2}{3}+4\times\frac{1}{6}=2$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{16}{3}-2^2=\frac{4}{3}$

표본의 크기가 20이므로

$V(\overline{X})=\frac{1}{20}V(X)=\frac{1}{20}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{15}$

답 ④

013

$E(X)=-1\times\frac{1}{9}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{2}{9}=\frac{2}{3}$

$V(X)=(-1)^2\times\frac{1}{9}+0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{2}{9}-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$=\frac{8}{9}$ ······ ❶

표본의 크기가 n인 표본평균 $\overline{X}$의 분산이 $\frac{1}{9}$이므로

$V(\overline{X})=\frac{1}{n}V(X)=\frac{1}{n}\times\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$

$\therefore n=8$ ······ ❷

답 8

채점 기준	비율
❶ $E(X)$, $V(X)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	50 %

014

주머니에서 임의로 1개의 동전을 꺼낼 때, 동전의 금액을 X원이라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	10	50	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{n+2}$	$\frac{n}{n+2}$	1

$\therefore E(X)=10\times\frac{2}{n+2}+50\times\frac{n}{n+2}=\frac{20+50n}{n+2}$

이때 $E(\overline{X})=45$이고 $E(\overline{X})=E(X)$이므로

$\frac{20+50n}{n+2}=45$, $20+50n=45n+90$

$5n=70 \qquad \therefore n=14$

즉, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	10	50	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

$\therefore V(X)=10^2\times\frac{1}{8}+50^2\times\frac{7}{8}-45^2=175$

표본의 크기가 5이므로

$V(\overline{X})=\frac{1}{5}V(X)=\frac{1}{5}\times175=35$

답 35

015

상자에서 임의로 1개의 구슬을 꺼낼 때, 구슬의 무게를 X g이라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$\therefore E(X)=1\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{4}+7\times\frac{1}{4}=4$

$V(X)=1^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{4}+5^2\times\frac{1}{4}+7^2\times\frac{1}{4}-4^2=5$

표본의 크기가 n일 때 $V(\overline{X})=\frac{5}{4}$이므로

$V(\overline{X})=\frac{1}{n}V(X)=\frac{1}{n}\times5=\frac{5}{4}$

$\therefore n=4$

답 4

016

모집단이 정규분포 $N(90, 8^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(90, \frac{8^2}{4}\right)$, 즉 $N(90, 4^2)$을 따른다.

답 ②

017

모집단이 정규분포 $N(120, 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(120, \frac{10^2}{n}\right)$을 따른다.

따라서 $\frac{10^2}{n}=2^2$이므로

$n=25$

답 ⑤

018

모집단이 정규분포 $N(95, 20^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(95, \frac{20^2}{100}\right)$, 즉 $N(95, 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-95}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

(1) $P(95\le\overline{X}\le100)=P\left(\frac{95-95}{2}\le Z\le\frac{100-95}{2}\right)$
$=P(0\le Z\le2.5)$
$=0.4938$

(2) $P(90\le\overline{X}\le98)=P\left(\frac{90-95}{2}\le Z\le\frac{98-95}{2}\right)$
$=P(-2.5\le Z\le1.5)$
$=P(-2.5\le Z\le0)+P(0\le Z\le1.5)$
$=P(0\le Z\le2.5)+P(0\le Z\le1.5)$
$=0.4938+0.4332$
$=0.9270$

답 (1) 0.4938 (2) 0.9270

019

모집단이 정규분포 $N(60,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(60,\ \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(60,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-60}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(61\le\overline{X}\le63)=P\left(\frac{61-60}{2}\le Z\le\frac{63-60}{2}\right)$
$=P(0.5\le Z\le1.5)$
$=P(0\le Z\le1.5)-P(0\le Z\le0.5)$
$=0.4332-0.1915$
$=0.2417$

답 ②

020

모집단이 정규분포 $N(30,\ \sigma^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(30,\ \frac{\sigma^2}{25}\right)$, 즉 $N\left(30,\ \left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$을 따른다. ❶

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-30}{\frac{\sigma}{5}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은 ❷

$P\left(|\overline{X}-30|\le\frac{\sigma}{5}\right)=P\left(\left|\frac{\overline{X}-30}{\frac{\sigma}{5}}\right|\le1\right)=P(|Z|\le1)$
$=P(-1\le Z\le1)=2P(0\le Z\le1)$
$=2\times0.3413$
$=0.6826$ ❸

답 0.6826

채점 기준	비율
❶ 확률변수 $\overline{X}$가 정규분포 $N\left(30,\ \left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$을 따름을 알 수 있다.	30 %
❷ 확률변수 $\overline{X}$를 표준화할 수 있다.	30 %
❸ $P\left(|\overline{X}-30|\le\frac{\sigma}{5}\right)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

021

이 도시의 시민 한 명이 1년 동안 병원을 이용한 횟수를 X라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(14,\ 3.2^2)$을 따른다. 모집단이 정규분포 $N(14,\ 3.2^2)$을 따르고 표본의 크기가 256이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(14,\ \frac{3.2^2}{256}\right)$, 즉 $N(14,\ 0.2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-14}{0.2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(13.7\le\overline{X}\le14.2)=P\left(\frac{13.7-14}{0.2}\le Z\le\frac{14.2-14}{0.2}\right)$
$=P(-1.5\le Z\le1)$
$=P(-1.5\le Z\le0)+P(0\le Z\le1)$
$=P(0\le Z\le1.5)+P(0\le Z\le1)$
$=0.4332+0.3413$
$=0.7745$

답 ②

022

모집단이 정규분포 $N(80,\ 20^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(80,\ \frac{20^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(80,\ \left(\frac{20}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-80}{\frac{20}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(75\le\overline{X}\le80)=P(0\le Z\le1.5)$에서

$P\left(\frac{75-80}{\frac{20}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{80-80}{\frac{20}{\sqrt{n}}}\right)=P(0\le Z\le1.5)$

$P\left(-\frac{\sqrt{n}}{4}\le Z\le0\right)=P(0\le Z\le1.5)$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=P(0\le Z\le1.5)$

따라서 $\frac{\sqrt{n}}{4}=1.5$이므로

$\sqrt{n}=6 \quad \therefore n=36$

답 ②

023

모집단이 정규분포 $N(150,\ 50^2)$을 따르므로 표본의 크기가 n인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(150,\ \frac{50^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(150,\ \left(\frac{50}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-150}{\frac{50}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $P(\overline{X}\le140)=0.16$에서

$P\left(Z\le\frac{140-150}{\frac{50}{\sqrt{n}}}\right)=0.16$

$P\left(Z\le-\frac{\sqrt{n}}{5}\right)=0.16<0.5$

$\mathrm{P}(Z\le 0)-\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{5}\le Z\le 0\right)=0.16$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{5}\right)=0.16$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{5}\right)=0.5-0.16=0.34$

따라서 $\frac{\sqrt{n}}{5}=1$이므로

$\sqrt{n}=5 \qquad \therefore n=25$

(2) $\mathrm{P}(140\le \overline{X}\le 160)=0.84$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{140-150}{\frac{50}{\sqrt{n}}}\le Z\le \frac{160-150}{\frac{50}{\sqrt{n}}}\right)=0.84$

$\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{5}\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{5}\right)=0.84$

$2\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{5}\right)=0.84$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{5}\right)=0.42$

따라서 $\frac{\sqrt{n}}{5}=1.4$이므로

$\sqrt{n}=7 \qquad \therefore n=49$

답 (1) 25 (2) 49

024

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 24^2)$을 따르므로 표본의 크기가 64인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(120,\ \frac{24^2}{64}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(120,\ 3^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-120}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\le k)=0.8413$에서

$\mathrm{P}\left(Z\le \frac{k-120}{3}\right)=0.8413>0.5$

$\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-120}{3}\right)=0.8413$

$0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-120}{3}\right)=0.8413$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-120}{3}\right)=0.8413-0.5=0.3413$

따라서 $\frac{k-120}{3}=1$이므로

$k-120=3 \qquad \therefore k=123$

답 123

025

(1) 표본평균이 40, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 36이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$40-2.58\times\frac{5}{\sqrt{36}}\le m\le 40+2.58\times\frac{5}{\sqrt{36}}$

$40-2.15\le m\le 40+2.15$

$\therefore 37.85\le m\le 42.15$

(2) 표본평균이 120, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$120-2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}\le m\le 120+2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}$

$120-1.29\le m\le 120+1.29$

$\therefore 118.71\le m\le 121.29$

답 (1) $37.85\le m\le 42.15$ (2) $118.71\le m\le 121.29$

026

표본평균이 72, 모표준편차가 15, 표본의 크기가 400이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$72-1.96\times\frac{15}{\sqrt{400}}\le m\le 72+1.96\times\frac{15}{\sqrt{400}}$

$72-1.47\le m\le 72+1.47$

$\therefore 70.53\le m\le 73.47$

답 ②

027

표본평균이 320, 모표준편차가 15, 표본의 크기가 324이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$320-2.58\times\frac{15}{\sqrt{324}}\le m\le 320+2.58\times\frac{15}{\sqrt{324}}$

$320-2.15\le m\le 320+2.15$

$\therefore 317.85\le m\le 322.15$

따라서 $a=317.85$, $b=322.15$이므로

$2a-b=2\times 317.85-322.15=313.55$

답 313.55

028

모표준편차가 16, 표본의 크기가 64이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{16}{\sqrt{64}}\le m\le \overline{x}+1.96\times\frac{16}{\sqrt{64}}$

$\therefore \overline{x}-3.92\le m\le \overline{x}+3.92$

따라서 $\overline{x}-3.92=240.12$, $\overline{x}+3.92=a$이므로

$\overline{x}=240.12+3.92=244.04$

$a=244.04+3.92=247.96$

$\therefore \overline{x}+a=244.04+247.96=492$

답 ③

029

표본평균이 340, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 100이므로

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라고 할 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$340-k\times\frac{10}{\sqrt{100}}\le m\le 340+k\times\frac{10}{\sqrt{100}}$

$\therefore 340-k\le m\le 340+k$ ······ ❶

따라서 $340-k=338.45$, $340+k=341.55$이므로

$k=1.55$ ······ ❷

이때

$\mathrm{P}(|Z|\le 1.55)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.55)=2\times 0.44=0.88$

이므로

$\frac{\alpha}{100}=0.88$

$\therefore \alpha=88$ ❸

답 88

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(\|Z\|\le k)=\frac{\alpha}{100}$로 놓고 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간을 k를 사용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ α의 값을 구할 수 있다.	30 %

030

표본의 크기 100이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 25를 사용할 수 있다.

(1) 표본평균이 90이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$90-1.96\times\frac{25}{\sqrt{100}}\le m\le 90+1.96\times\frac{25}{\sqrt{100}}$

$90-4.9\le m\le 90+4.9$ $\therefore 85.1\le m\le 94.9$

(2) 표본평균이 90이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$90-2.58\times\frac{25}{\sqrt{100}}\le m\le 90+2.58\times\frac{25}{\sqrt{100}}$

$90-6.45\le m\le 90+6.45$ $\therefore 83.55\le m\le 96.45$

답 (1) $85.1\le m\le 94.9$ (2) $83.55\le m\le 96.45$

031

표본의 크기 500이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 $180\sqrt{5}$를 사용할 수 있다. 표본평균이 $\overline{x}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\frac{180\sqrt{5}}{\sqrt{500}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{180\sqrt{5}}{\sqrt{500}}$

$\therefore \overline{x}-46.44\le m\le\overline{x}+46.44$ $\therefore k=46.44$

답 46.44

032

(1) 표본평균이 66, 모표준편차가 4, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$66-2\times\frac{4}{\sqrt{n}}\le m\le 66+2\times\frac{4}{\sqrt{n}}$

$\therefore 66-\frac{8}{\sqrt{n}}\le m\le 66+\frac{8}{\sqrt{n}}$

따라서 $66-\frac{8}{\sqrt{n}}=65$, $66+\frac{8}{\sqrt{n}}=67$이므로

$\frac{8}{\sqrt{n}}=1$, $\sqrt{n}=8$ $\therefore n=64$

(2) 표본평균이 66, 모표준편차가 4, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$66-3\times\frac{4}{\sqrt{n}}\le m\le 66+3\times\frac{4}{\sqrt{n}}$

$\therefore 66-\frac{12}{\sqrt{n}}\le m\le 66+\frac{12}{\sqrt{n}}$

따라서 $66-\frac{12}{\sqrt{n}}=65.2$, $66+\frac{12}{\sqrt{n}}=66.8$이므로

$\frac{12}{\sqrt{n}}=0.8$, $\sqrt{n}=15$ $\therefore n=225$

답 (1) 64 (2) 225

033

표본평균이 3.3, 모표준편차가 0.4, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$3.3-3\times\frac{0.4}{\sqrt{n}}\le m\le 3.3+3\times\frac{0.4}{\sqrt{n}}$

$\therefore 3.3-\frac{1.2}{\sqrt{n}}\le m\le 3.3+\frac{1.2}{\sqrt{n}}$

따라서 $3.3-\frac{1.2}{\sqrt{n}}=3.2$, $3.3+\frac{1.2}{\sqrt{n}}=3.4$이므로

$\frac{1.2}{\sqrt{n}}=0.1$, $\sqrt{n}=12$ $\therefore n=144$

답 ③

034

표본평균이 67.27, 모표준편차가 0.5, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$67.27-1.96\times\frac{0.5}{\sqrt{n}}\le m\le 67.27+1.96\times\frac{0.5}{\sqrt{n}}$

$\therefore 67.27-\frac{0.98}{\sqrt{n}}\le m\le 67.27+\frac{0.98}{\sqrt{n}}$

따라서 $67.27-\frac{0.98}{\sqrt{n}}=a$, $67.27+\frac{0.98}{\sqrt{n}}=67.41$이므로

$67.27+\frac{0.98}{\sqrt{n}}=67.41$에서

$\frac{0.98}{\sqrt{n}}=0.14$, $\sqrt{n}=7$

$\therefore n=49$

$67.27-\frac{0.98}{\sqrt{n}}=a$에서

$a=67.27-\frac{0.98}{\sqrt{49}}=67.13$

$\therefore n+a=49+67.13=116.13$

답 ⑤

035

표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 8, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-3\times\frac{8}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+3\times\frac{8}{\sqrt{n}}$

$\therefore \overline{x}-\frac{24}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+\frac{24}{\sqrt{n}}$ ❶

$\therefore \begin{cases} \overline{x}-\frac{24}{\sqrt{n}}=88.5 & \cdots\cdots ㉠ \\ \overline{x}+\frac{24}{\sqrt{n}}=91.5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡−㉠을 하면

$\frac{48}{\sqrt{n}}=3$, $\sqrt{n}=16$

$\therefore n=256$ ➋

답 256

채점 기준	비율
➊ 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 $\overline{X}$와 n을 사용하여 나타낼 수 있다.	40 %
➋ n의 값을 구할 수 있다.	60 %

참고

㉠+㉡을 하면 $2\overline{x}=180$ $\therefore \overline{x}=90$

036

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하고 신뢰도 α %로 추정한 각각의 모평균의 신뢰구간의 길이를 구하면 다음과 같다.

(가) $2k\times\frac{4}{\sqrt{64}}=k$

(나) $2k\times\frac{14}{\sqrt{49}}=4k$

(다) $2k\times\frac{9}{\sqrt{81}}=2k$

따라서 신뢰구간의 길이가 짧은 것부터 순서대로 나열하면

(가), (다), (나)

답 (가), (다), (나)

037

모표준편차가 15, 표본의 크기가 144이므로

$a=2\times1.96\times\frac{15}{\sqrt{144}}=4.9$

$b=2\times2.58\times\frac{15}{\sqrt{144}}=6.45$

$\therefore b-a=6.45-4.9=1.55$

답 1.55

038

표본평균을 $\overline{x}$라고 하면 모표준편차가 5, 표본의 크기가 625이므로 신뢰도 95 %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은

$\overline{x}-2\times\frac{5}{\sqrt{625}}\le m\le\overline{x}+2\times\frac{5}{\sqrt{625}}$

$-2\times\frac{5}{\sqrt{625}}\le m-\overline{x}\le2\times\frac{5}{\sqrt{625}}$

$|m-\overline{x}|\le2\times\frac{5}{\sqrt{625}}$ $\therefore |m-\overline{x}|\le0.4$

따라서 모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차의 최댓값은 0.4이다.

답 ④

039

표본의 크기를 n이라고 하면 모표준편차가 20이므로 신뢰도 99 %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은

$\overline{x}-3\times\frac{20}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+3\times\frac{20}{\sqrt{n}}$

$-3\times\frac{20}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le3\times\frac{20}{\sqrt{n}}$

$\therefore |m-\overline{x}|\le3\times\frac{20}{\sqrt{n}}$

이때 모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 10 m 이하가 되어야 하므로

$3\times\frac{20}{\sqrt{n}}\le10$, $\sqrt{n}\ge6$ $\therefore n\ge36$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 36이다.

답 36

040

표본의 크기를 n, $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라고 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이 신뢰구간의 길이의 $\frac{1}{4}$배는

$\frac{1}{4}\times2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{16n}}$

따라서 신뢰도가 일정할 때, 신뢰구간의 길이를 $\frac{1}{4}$배 하려면 표본의 크기는 16배를 해야 한다.

답 16배

041

(1) 전체 회원 800명 중에서 160명이 한 달에 3권 이상의 책을 대출하므로

$p=\frac{160}{800}=\frac{1}{5}$

(2) 임의추출한 200명 중에서 50명이 한 달에 3권 이상의 책을 대출하므로

$\hat{p}=\frac{50}{200}=\frac{1}{4}$

답 (1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{1}{4}$

042

모비율 $p=0.25$, 표본의 크기 $n=300$이므로

(1) $\mathrm{E}(\hat{p})=p=0.25$

$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{300}}=0.025$

(2) 표본의 크기 300은 충분히 큰 수이므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(0.25,\ 0.025^2)$을 따른다.

(3) $Z=\frac{\hat{p}-0.25}{0.025}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\hat{p}\le0.275)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{0.275-0.25}{0.025}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le1)\\&=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.5+0.3413=0.8413\end{aligned}$$

답 (1) $\mathrm{E}(\hat{p})=0.25$, $\sigma(\hat{p})=0.025$ (2) $\mathrm{N}(0.25,\ 0.025^2)$ (3) 0.8413

043

임의추출된 100명 중에서 주말에 운동을 즐겨하는 학생의 비율을 $\hat{p}$이라고 하자.

표본의 크기 $n=100$, 모비율 $p=0.2$이므로 표본비율 $\hat{p}$의 평균과 표준편차는

$E(\hat{p})=p=0.2$

$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\dfrac{0.2\times0.8}{100}}=0.04$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.2,\ 0.04^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{\hat{p}-0.2}{0.04}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(0.16\le\hat{p}\le0.24)&=P\left(\frac{0.16-0.2}{0.04}\le Z\le\frac{0.24-0.2}{0.04}\right)\\&=P(-1\le Z\le1)=2P(0\le Z\le1)\\&=2\times0.3413=0.6826\end{aligned}$$

답 ④

044

임의추출된 100명 중에서 체지방률 과다 판정을 받은 사원의 비율을 $\hat{p}$이라고 하자.

표본의 크기 $n=100$, 모비율 $p=\dfrac{1}{2}=0.5$이므로 표본비율 $\hat{p}$의 평균과 표준편차는

$E(\hat{p})=p=0.5$

$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\dfrac{0.5\times0.5}{100}}=0.05$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.5,\ 0.05^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{\hat{p}-0.5}{0.05}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P\left(\hat{p}\ge\frac{65}{100}\right)&=P(\hat{p}\ge0.65)\\&=P\left(Z\ge\frac{0.65-0.5}{0.05}\right)\\&=P(Z\ge3)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le3)\\&=0.5-0.4987=0.0013\end{aligned}$$

답 ①

045

표본의 크기 $n=600$, 표본비율 $\hat{p}=0.6$이고, n이 충분히 크므로

(1) 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.6-1.96\sqrt{\dfrac{0.6\times0.4}{600}}\le p\le0.6+1.96\sqrt{\dfrac{0.6\times0.4}{600}}$

$0.6-0.0392\le p\le0.6+0.0392$

$\therefore\ 0.5608\le p\le0.6392$

(2) 모비율 p에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.6-2.58\sqrt{\dfrac{0.6\times0.4}{600}}\le p\le0.6+2.58\sqrt{\dfrac{0.6\times0.4}{600}}$

$0.6-0.0516\le p\le0.6+0.0516$

$\therefore\ 0.5484\le p\le0.6516$

답 (1) $0.5608\le p\le0.6392$ (2) $0.5484\le p\le0.6516$

046

표본의 크기 $n=100$, 표본비율 $\hat{p}=\dfrac{80}{100}=0.8$이고, n이 충분히 크므로 모비율 p에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.8-2.58\sqrt{\dfrac{0.8\times0.2}{100}}\le p\le0.8+2.58\sqrt{\dfrac{0.8\times0.2}{100}}$

$\therefore\ 0.8-0.1032\le p\le0.8+0.1032$

따라서 $a=0.8$, $k=0.1032$이므로

$2a+k=1.6+0.1032=1.7032$

답 1.7032

047

표본비율 $\hat{p}=\dfrac{300}{1200}=0.25$이므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\times\sqrt{\dfrac{0.25\times0.75}{1200}}=0.049$

답 ②

실력을 높이는 연습 문제

본문 116쪽

01

상자에는 $(n+1)$장의 카드가 들어 있으므로 한 번의 시행에서 숫자 1이 적힌 카드를 꺼낼 확률은 $\dfrac{1}{n+1}$, 숫자 5가 적힌 카드를 꺼낼 확률은 $\dfrac{n}{n+1}$이다.

$\overline{X}=1$이 되는 경우를 순서쌍으로 나타내면 $(1,\ 1)$이므로

$P(\overline{X}=1)=\dfrac{1}{n+1}\times\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)^2}$

즉, $\dfrac{1}{(n+1)^2}=\dfrac{1}{16}$이므로

$n+1=\pm4$

$\therefore\ n=3\ (\because\ n$은 자연수$)$

$\overline{X}=3$이 되는 경우를 순서쌍으로 나타내면 $(1,\ 5)$, $(5,\ 1)$이므로

$P(\overline{X}=3)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{16}+\dfrac{3}{16}=\dfrac{3}{8}$

$\therefore\ a=\dfrac{3}{8}$

$\overline{X}=5$가 되는 경우를 순서쌍으로 나타내면 $(5,\ 5)$이므로

$P(\overline{X}=5)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$

$\therefore\ b=\frac{9}{16}$

$\therefore\ \frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}=\frac{3}{8}\times\frac{16}{9}=\frac{2}{3}$

답 ④

02

모평균이 28, 모분산이 $4^2=16$, 표본의 크기가 64이므로

$E(\overline{X})=28,\ V(\overline{X})=\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$

$\therefore\ E(\overline{X})\times V(\overline{X})=28\times\frac{1}{4}=7$

답 7

03

$E(X)=3\times\frac{1}{3}+6\times\left(\frac{2}{3}-a\right)+9\times a=3a+5$

$E(\overline{X})=6$이고 $E(X)=E(\overline{X})$이므로

$3a+5=6 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{3}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	6	9	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$E(X)=6$이므로

$V(X)=3^2\times\frac{1}{3}+6^2\times\frac{1}{3}+9^2\times\frac{1}{3}-6^2=6$

표본의 크기가 15이므로

$V(\overline{X})=\frac{1}{15}V(X)=\frac{1}{15}\times 6=\frac{2}{5}$

답 $\frac{2}{5}$

04

주머니에서 임의로 1장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적혀 있는 수를 X라고 하면

$E(X)=\frac{1+3+5+7+9}{5}=5$

$V(X)=\frac{(1-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(7-5)^2+(9-5)^2}{5}$

$=8$

크기가 3인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 분산은

$V(\overline{X})=\frac{1}{3}V(X)=\frac{8}{3}$

$V(a\overline{X}+6)=24$에서

$a^2V(\overline{X})=24,\ \frac{8}{3}a^2=24$

$a^2=9 \qquad \therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$

답 ③

05

문제 접근하기

주머니에서 크기가 12인 표본을 임의추출할 때, 그 공에 적힌 숫자의 평균을 $\overline{X}$라고 하면 $Y=12\overline{X}$가 됨을 이용한다.

주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 그 공에 적혀 있는 수를 X라고 하면 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

$\therefore\ E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{2}=\frac{7}{3}$

$V(X)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{2}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

주머니에서 크기가 12인 표본을 임의추출할 때, 그 공에 적힌 숫자의 평균을 $\overline{X}$라고 하면

$E(\overline{X})=\frac{7}{3}$

$V(\overline{X})=\frac{1}{12}V(X)=\frac{1}{12}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{108}$

주머니에서 n번째에 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 X_n이라고 하면

$Y=X_1+X_2+X_3+\cdots+X_{12}$

$=12\overline{X}$

이므로

$E(Y)=E(12\overline{X})$

$=12E(\overline{X})$

$=12\times\frac{7}{3}=28$

$V(Y)=V(12\overline{X})$

$=12^2V(\overline{X})$

$=144\times\frac{5}{108}=\frac{20}{3}$

$\therefore\ E(Y)-V(Y)=28-\frac{20}{3}=\frac{64}{3}$

답 ⑤

06

이 공장에서 생산한 손 세정제 1개의 용량을 X mL라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(500,\ 4^2)$을 따른다. 모집단이 정규분포 $N(500,\ 4^2)$을 따르므로 표본의 크기가 25인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(500,\ \frac{4^2}{25}\right)$, 즉 $N(500,\ 0.8^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-500}{0.8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(\overline{X}\geq 502)=P\left(Z\geq\frac{502-500}{0.8}\right)$

$=P(Z\geq 2.5)$

$=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 2.5)$

$=0.5-0.4938=0.0062$

답 0.0062

07

문제 접근하기

확률변수 X의 표준편차를 σ로 놓고 주어진 조건을 이용하여 두 확률변수 X, Y가 따르는 정규분포를 σ를 이용하여 나타낸다. 또, 이를 이용하여 두 표본평균 $\overline{X}$, $\overline{Y}$가 따르는 정규분포를 구한 후 $\overline{X}$, $\overline{Y}$를 각각 표준화한다.

확률변수 X의 표준편차를 σ라고 하면 주어진 조건 (가), (나)에 의하여 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(220,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(240,\ (1.5\sigma)^2)$을 따른다.

따라서 표본의 크기가 n인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(220,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(220,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르고, 표본의 크기가 $9n$인 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(240,\ \frac{(1.5\sigma)^2}{9n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(240,\ \left(\frac{0.5\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$\frac{1.5\sigma}{\sqrt{9n}}=\frac{1.5\sigma}{3\sqrt{n}}=\frac{0.5\sigma}{\sqrt{n}}$

$Z_{\overline{X}}=\dfrac{\overline{X}-220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\le 215)=0.1587$에서

$\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\le\dfrac{215-220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=0.1587$

$\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\le-\dfrac{5}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=0.1587<0.5$이므로

$\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\le 0)-\mathrm{P}\left(-\dfrac{5}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le Z_{\overline{X}}\le 0\right)=0.1587$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\dfrac{5}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=0.1587$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\dfrac{5}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=0.5-0.1587=0.3413$

즉, $\dfrac{5}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=1$이므로 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=5$ ········ ㉠

한편, $Z_{\overline{Y}}=\dfrac{\overline{Y}-240}{\frac{0.5\sigma}{\sqrt{n}}}=\dfrac{\overline{Y}-240}{2.5}$ ($\because$ ㉠)으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{Y}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{Y}\ge 235)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\ge\dfrac{235-240}{2.5}\right)=\mathrm{P}(Z_{\overline{Y}}\ge -2)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z_{\overline{Y}}\le 0)+\mathrm{P}(Z_{\overline{Y}}\ge 0)$

$=\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{Y}}\le 2)+0.5$

$=0.4772+0.5=0.9772$

답 ⑤

08

이 공장에서 생산되는 드럼 스틱 한 개의 길이를 X cm라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(40.6,\ 2^2)$을 따르므로 표본의 크기가 n인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(40.6,\ \frac{2^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(40.6,\ \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-40.6}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(40.2\le\overline{X}\le 41)\le 0.9$에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{40.2-40.6}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\le Z\le\dfrac{41-40.6}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)\le 0.9$

$\mathrm{P}(-0.2\sqrt{n}\le Z\le 0.2\sqrt{n})\le 0.9$

$2\mathrm{P}(0\le Z\le 0.2\sqrt{n})\le 0.9$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le 0.2\sqrt{n})\le 0.45$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.6)=0.45$이므로

$0.2\sqrt{n}\le 1.6$, $\sqrt{n}\le 8$

$\therefore\ n\le 64$

따라서 n의 최댓값은 64이다.

답 64

09

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(1,\ 5^2)$을 따르므로 표본의 크기가 16인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(1,\ \frac{5^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(1,\ \left(\frac{5}{4}\right)^2\right)$을 따른다.

또, 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(4,\ 10^2)$을 따르므로 표본의 크기가 25인 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(4,\ \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(4,\ 2^2)$을 따른다.

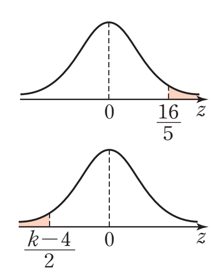
따라서 $Z_{\overline{X}}=\dfrac{\overline{X}-1}{\frac{5}{4}}$, $Z_{\overline{Y}}=\dfrac{\overline{Y}-4}{2}$로 놓으면 두 확률변수 $Z_{\overline{X}}$, $Z_{\overline{Y}}$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 5)=\mathrm{P}(\overline{Y}\le k)$에서

$\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge\dfrac{5-1}{\frac{5}{4}}\right)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\le\dfrac{k-4}{2}\right)$

$\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge\dfrac{16}{5}\right)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\le\dfrac{k-4}{2}\right)$

이때 표준정규분포곡선은 직선 $z=0$에 대하여 대칭이므로



$-\dfrac{16}{5}=\dfrac{k-4}{2}$

$-32=5k-20$

$5k=-12$

$\therefore\ k=-2.4$

답 ①

10

표본평균을 $\overline{x}$라고 하면 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이것이 $38.24\le m\le 61.76$과 같으므로

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=38.24$, $\overline{x}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=61.76$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$\overline{x}=50$, $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=6$

따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$50-2.58\times 6\le m\le 50+2.58\times 6$

$50-15.48\le m\le 50+15.48$

$\therefore\ 34.52\le m\le 65.48$

답 $34.52\le m\le 65.48$

11

표본의 크기가 16일 때의 표본평균을 $\overline{x_1}$이라고 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{16}}$

이것이 $746.1\le m\le 755.9$와 같으므로

$\overline{x_1}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{16}}=746.1$

$\overline{x_1}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{16}}=755.9$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$\overline{x_1}=751,\ \sigma=10$

표본의 크기가 n일 때의 표본평균을 $\overline{x_2}$라고 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-2.58\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}$

이므로

$b-a=2\times 2.58\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}=\dfrac{51.6}{\sqrt{n}}$

이때 $b-a$의 값이 6 이하이려면

$\dfrac{51.6}{\sqrt{n}}\le 6$

$\sqrt{n}\ge 8.6$

$\therefore\ n\ge 73.96$

따라서 자연수 n의 최솟값은 74이다.

답 ②

12

문제 접근하기

확률변수 X를 표준화하여 주어진 확률을 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$의 꼴로 나타낸 후 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간을 구한다.

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(90,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-90}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 $\mathrm{P}(75\le X\le 105)=\dfrac{\alpha}{100}$이므로

$\mathrm{P}\left(\dfrac{75-90}{6}\le Z\le\dfrac{105-90}{6}\right)=\dfrac{\alpha}{100}$

$\mathrm{P}(-2.5\le Z\le 2.5)=\dfrac{\alpha}{100}$

$\therefore\ \mathrm{P}(|Z|\le 2.5)=\dfrac{\alpha}{100}$

표본의 크기 75는 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 $\sqrt{3}$을 사용할 수 있고, 표본평균이 60이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$60-2.5\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}}\le m\le 60+2.5\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}}$

$60-0.5\le m\le 60+0.5$

$\therefore\ 59.5\le m\le 60.5$

답 ⑤

13

49명의 학생들이 하루 동안 도보로 이동한 거리의 총합이 367.5 km이므로 표본평균을 $\overline{x}$라고 하면

$\overline{x}=\dfrac{367.5}{49}=7.5$

모표준편차가 σ, 표본의 크기가 49이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$7.5-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}\le m\le 7.5+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}$

$\therefore\ 7.5-0.28\sigma\le m\le 7.5+0.28\sigma$

이것이 $a\le m\le a+2.24$와 같으므로

$a=7.5-0.28\sigma,\ a+2.24=7.5+0.28\sigma$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=6.38,\ \sigma=4$

$\therefore\ a-\sigma=6.38-4=2.38$

답 2.38

14

표본평균을 $\overline{x}$라고 하면 모표준편차가 $\dfrac{1}{4}$, 표본의 크기가 64이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-k\times\dfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{64}}\le m\le\overline{x}+k\times\dfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{64}}$

$\therefore\ \overline{x}-\dfrac{k}{32}\le m\le\overline{x}+\dfrac{k}{32}$

이것이 $a\le m\le b$와 같으므로

$a=\overline{x}-\dfrac{k}{32},\ b=\overline{x}+\dfrac{k}{32}$

위의 두 식을 변끼리 빼면

$a-b=-\dfrac{k}{16}\qquad\therefore\ k=16(b-a)$

답 ④

15

모표준편차가 σ이고 표본의 크기가 n이므로 신뢰도 76 %로 모평균을 추정할 때의 신뢰구간의 길이 l은

$\mathrm{P}(|Z|\le 1.2)=2\times 0.38=0.76$

$l=2\times 1.2\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{2.4\sigma}{\sqrt{n}}$ ······ ㉠

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라고 하면 신뢰도 α %로 모평균을 추정할 때의 신뢰구간의 길이 $\dfrac{2}{3}l$은

$\dfrac{2}{3}l=2\times k\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\qquad\therefore\ l=\dfrac{3k\sigma}{\sqrt{n}}$ ······ ㉡

㉠, ㉡이 서로 같으므로

$\frac{2.4\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{3k\sigma}{\sqrt{n}}$ $\quad\therefore k=0.8$

따라서 $\mathrm{P}(|Z|\le 0.8)=\frac{\alpha}{100}$이므로

$\alpha=100\mathrm{P}(|Z|\le 0.8)=100\times 2\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)$

$=100\times 2\times 0.29=58$

답 58

16

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.475$이므로

$\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=2\times 0.475=0.95$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2.58)=0.495$이므로

$\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)=2\times 0.495=0.99$

ㄱ. B 지역의 고등학교 3학년 학생의 키에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times 1.96\times\frac{4}{\sqrt{400}}=0.784$

C 지역의 고등학교 3학년 학생의 키에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times 1.96\times\frac{4}{\sqrt{400}}=0.784$

즉, B와 C의 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는 같다. (참)

ㄴ. A 지역의 고등학교 3학년 학생의 키에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times 1.96\times\frac{6}{\sqrt{100}}=2.352$

C 지역의 고등학교 3학년 학생의 키에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times 2.58\times\frac{4}{\sqrt{400}}=1.032$

$2.352>1.032$이므로 A의 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이가 C의 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이보다 길다. (거짓)

ㄷ. B 지역의 고등학교 3학년 학생의 키에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times 1.96\times\frac{4}{\sqrt{400}}=0.784$

D 지역의 고등학교 3학년 학생의 키에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times 1.96\times\frac{5}{\sqrt{100}}=1.96$

$0.784<1.96$이므로 B의 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이가 D의 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이보다 짧다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

17

표본의 크기를 n, $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라고 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ㄱ. 신뢰도를 낮추면 k의 값이 작아지고 표본의 크기를 크게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 커지므로 $2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값은 작아진다.

즉, 신뢰구간의 길이는 짧아진다. (참)

ㄴ. 신뢰도가 일정하면 k의 값은 일정하고 표본의 크기가 작아지면 $\sqrt{n}$의 값이 작아지므로 $2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값은 커진다.

즉, 신뢰구간의 길이는 길어진다. (참)

ㄷ. 표본의 크기가 n일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이를 l이라고 하면

$l=2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

표본의 크기가 9배, 즉 표본의 크기가 $9n$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{9n}}=\frac{1}{3}\times 2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$=\frac{1}{3}l$

즉, 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{3}$배가 된다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

18

임의추출된 100명 중에서 2시간 이상 게임을 하는 학생의 비율을 $\hat{p}$이라고 하자.

표본의 크기 $n=100$, 모비율 $p=0.5$이므로 표본비율 $\hat{p}$의 평균과 표준편차는

$\mathrm{E}(\hat{p})=p=0.5$

$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{0.5\times 0.5}{100}}=0.05$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(0.5,\ 0.05^2)$을 따르고, $Z=\frac{\hat{p}-0.5}{0.05}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}\left(\hat{p}\ge\frac{a}{100}\right)=0.0228$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\frac{a}{100}-0.5}{0.05}\right)=0.0228<0.5$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\frac{a}{100}-0.5}{0.05}\right)=0.0228$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\frac{a}{100}-0.5}{0.05}\right)=0.5-0.0228=0.4772$

따라서 $\frac{\frac{a}{100}-0.5}{0.05}=2$이므로

$\frac{a}{100}-0.5=0.1$

$\frac{a}{100}=0.6$

$\therefore a=60$

답 60

19

표본비율 $\hat{p}=\frac{90}{100}=0.9$이고, n이 충분히 크므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.9-2\times\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}\le p\le0.9+2\times\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}$

$\therefore\ 0.9-\frac{0.6}{\sqrt{n}}\le p\le0.9+\frac{0.6}{\sqrt{n}}$

따라서 $0.9-\frac{0.6}{\sqrt{n}}=0.84,\ 0.9+\frac{0.6}{\sqrt{n}}=0.96$이므로

$\frac{0.6}{\sqrt{n}}=0.06,\ \sqrt{n}=10$

$\therefore\ n=100$

답 100

20

표본비율 $\hat{p}=\frac{20}{100}=0.2$이고, n이 충분히 크므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.2-2\times\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}\le p\le0.2+2\times\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}$

$-2\times\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}\le p-0.2\le2\times\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}$

$|p-0.2|\le2\times\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}$

이때 모비율과 표본비율의 차가 0.04 이하가 되어야 하므로

$2\times\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}\le0.04,\ \frac{0.8}{\sqrt{n}}\le0.04$

$\sqrt{n}\ge20\qquad\therefore\ n\ge400$

따라서 n의 최솟값은 400이다.

답 400