

풍산짜 라이트유형

미적분 I

| 정답과 풀이 |

01

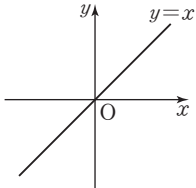
함수의 극한

기본을 다지는 유형

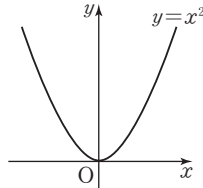
본문 009쪽

001

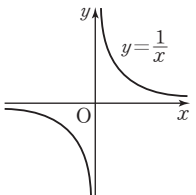
(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$



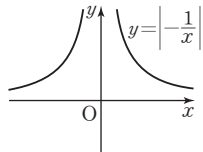
(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty$



(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$



(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left| -\frac{1}{x} \right| = 0$



답 (1) ∞ (2) ∞ (3) 0 (4) 0

002

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3) = 2^2 + 3 = 7$

(2) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{2x+3} = \sqrt{2 \times 3 + 3} = \sqrt{9} = 3$

(3) $\lim_{x \rightarrow -1} (x - x^3) = \{-1 - (-1)^3\} = 0$

(4) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{6}{x^2} = \frac{6}{(\sqrt{2})^2} = 3$

답 (1) 7 (2) 3 (3) 0 (4) 3

003

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4}{x+1} + \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+1}{4} = \frac{4}{-3+1} + \frac{3+1}{4} = -2 + 1 = -1$$

답 ③

004

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3}{x-2} = \frac{3^3}{3-2} = 27$$

답 27

005

$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + ax + 3) = 2$ 에서 $(-1)^2 - a + 3 = 2$

$-a = -2 \quad \therefore a = 2$

$\lim_{x \rightarrow 3} (bx - 4) = 5$ 에서 $3b - 4 = 5$

$3b = 9 \quad \therefore b = 3$

$\therefore a + b = 2 + 3 = 5$

답 ⑤

006

$\lim_{x \rightarrow a} (x^2 - 2x + 4) = 3$ 에서 $a^2 - 2a + 4 = 3$

$a^2 - 2a + 1 = 0, (a-1)^2 = 0$

$\therefore a = 1$ ①

$\lim_{x \rightarrow b} (x^2 - 4) = 12$ 에서 $b^2 - 4 = 12$

$b^2 = 16$

$\therefore b = -4$ 또는 $b = 4$ ②

따라서 $a=1, b=4$ 일 때, ab 는 최댓값 4를 갖는다. ③

답 4

채점 기준	비율
① a의 값을 구할 수 있다.	40 %
② b의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ ab의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

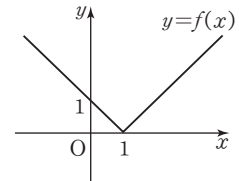
007

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

(1) $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 0$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 0$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$



답 (1) 0 (2) 0 (3) 0

[다른 풀이]

(1) $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x+1) = 0$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x-1) = 0$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

008

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

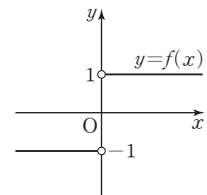
(1) $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

답 (1) -1 (2) 1 (3) 존재하지 않는다.



[다른 풀이]

(1) $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x}{x} = -1$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

009

ㄱ. $x=a$ 에서의 우극한이 존재하므로 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ 의 값이 존재한다.

ㄴ. $x=b$ 에서의 좌극한과 우극한이 일치하므로 $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ 의 값이 존재한다.

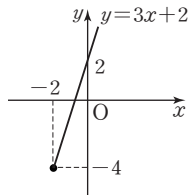
ㄷ. $x=c$ 에서의 좌극한과 우극한이 일치하지 않으므로 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는다.

ㄹ. $x=d$ 에서의 우극한이 존재하므로 $\lim_{x \rightarrow d^+} f(x)$ 의 값이 존재한다.
 ㅁ. $x=e$ 에서의 좌극한과 우극한이 일치하므로 $\lim_{x \rightarrow e} f(x)$ 의 값이 존재한다.
 ㅂ. $x=f$ 에서의 좌극한과 우극한이 일치하므로 $\lim_{x \rightarrow f} f(x)$ 의 값이 존재한다.
 따라서 극한값이 존재하지 않는 것은 ㄷ이다.

답 ㄷ

010

$x \geq -2$ 일 때 함수 $y=3x+2$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같고, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ 의 값이 존재하려면 $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ 이어야 하므로 $-2k = -4$
 $\therefore k=2$



답 ⑤

|다른 풀이|

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} kx = -2k$
 $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (3x+2) = -4$
 이때 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ 의 값이 존재하려면 $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ 이어야 하므로
 $-2k = -4$
 $\therefore k=2$

011

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x-k)^2 = (2-k)^2$
 $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (-x+k) = -2+k$
 이때 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ 의 값이 존재하려면 $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ 이어야 하므로
 $(2-k)^2 = -2+k$
 $4-4k+k^2 = -2+k$
 $k^2-5k+6=0, (k-2)(k-3)=0$
 $\therefore k=2$ 또는 $k=3$

답 2, 3

채점 기준	비율
① $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ 의 값이 존재하기 위한 조건을 알 수 있다.	50 %
② k 에 대한 식을 세울 수 있다.	30 %
③ k 의 값을 구할 수 있다.	20 %

012

- (1) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 3$
 (2) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 2$
 (3) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -3$
 (4) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -3$

답 (1) 3 (2) 2 (3) -3 (4) -3

013

$f(x) = |x-1| = \begin{cases} -(x-1) & (x < 1) \\ x-1 & (x \geq 1) \end{cases}$
 $x-1 < 0$ 이면 $x < 1$ 이고 $|x-1| = -(x-1)$
 $x-1 \geq 0$ 이면 $x \geq 1$ 이고 $|x-1| = x-1$
 (1) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$
 (2) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$

답 (1) -1 (2) 1

014

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2+1=3$

답 ③

015

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3+1+2=6$

답 ④

016

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 3$ 에서 $\lim_{x \rightarrow -2^-} (-x+a) = 3$
 $2+a=3 \therefore a=1$
 $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -3$ 에서 $\lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2+bx+1) = -3$
 $(-2)^2-2b+1=-3, -2b=-8$
 $\therefore b=4$
 $\therefore ab=1 \times 4=4$

답 4

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ ab 의 값을 구할 수 있다.	20 %

017

- (1) $x \rightarrow 1$ 일 때 $x-2 \rightarrow -1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1^+} [x-2] = -1$
 (2) $x \rightarrow 3$ 일 때 $x-3 \rightarrow 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 3^-} [x-3] = -1$
 (3) $x \rightarrow -2$ 일 때 $[x] = -3$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow -2^-} [x]^2 = (-3)^2 = 9$
 (4) $x \rightarrow 0$ 일 때 $[x] = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0}{x} = 0$

답 (1) -1 (2) -1 (3) 9 (4) 0

018

$x \rightarrow 1$ 일 때 $2x \rightarrow 2$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1^+} [2x] = 2$
 $x \rightarrow 1$ 일 때 $[x] = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1^-} 3[x] = 0$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} [2x] + \lim_{x \rightarrow 1^-} 3[x] = 2+0=2$

답 ④

019

$f(x) = t$ 로 놓으면
 (1) $x \rightarrow 1$ 일 때 $t=0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) = f(0) = 0$

(2) $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1+} f(t) = 1$$

(3) $x \rightarrow 0-$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(f(x)) = f(0) = 0$$

(4) $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(f(x)) = f(0) = 0$$

(5) $x \rightarrow -1-$ 일 때 $t \rightarrow 1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1+} f(t) = 1$$

(6) $x \rightarrow -1+$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(f(x)) = f(0) = 0$$

답 (1) 0 (2) 1 (3) 0 (4) 0 (5) 1 (6) 0

020

$f(x)=t$ 로 놓으면

(1) $x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0-} t = 0$$

(2) $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow -2+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -2+} f(t) = \lim_{t \rightarrow -2+} t = -2$$

답 (1) 0 (2) -2

021

$f(x)=t$ 로 놓으면

$x \rightarrow -1+$ 일 때 $t \rightarrow 3-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 3-} f(t) = 2$$

$x \rightarrow 2+$ 일 때 $t \rightarrow 1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1+} f(t) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} f(f(x)) + \lim_{x \rightarrow 2+} f(f(x)) = 2 + 3 = 5$$

답 ④

022

$f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} g(t) = 0 \quad \text{..... ①}$$

$g(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $s \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x)) = \lim_{s \rightarrow 0+} f(s) = -1 \quad \text{..... ②}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x)) = 0 + (-1) = -1 \quad \text{..... ③}$$

답 -1

채점 기준	비율
① $\lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x))$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $\lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x))$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $\lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x))$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

023

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3 + (-6) = -3$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 1} \{2f(x) - g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 1} 2f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \\ &= 2 \times 3 - (-6) = 12 \end{aligned}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3 \times (-6) = -18$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3g(x)}{2f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 3g(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} 2f(x)} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 1} g(x)}{2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x)} = \frac{3 \times (-6)}{2 \times 3} = -3$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \times 3 = 9$$

$$\begin{aligned} (6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{g(x)+4} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+1\}}{\lim_{x \rightarrow 1} \{g(x)+4\}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)+1}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)+4} \\ &= \frac{3+1}{-6+4} = -2 \end{aligned}$$

답 (1) -3 (2) 12 (3) -18 (4) -3 (5) 9 (6) -2

024

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow -2} (3x+1)(x-1) &= \{3 \times (-2) + 1\}(-2-1) \\ &= -5 \times (-3) = 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow -1} (x^2+1)(x+3) &= \{(-1)^2+1\}(-1+3) \\ &= 2 \times 2 = 4 \end{aligned}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{3^2-4}{3-2} = 5$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} \sqrt{x^2+9} = \sqrt{4} \sqrt{4^2+9} = 2 \times 5 = 10$$

답 (1) 15 (2) 4 (3) 5 (4) 10

025

$2f(x)+g(x)=h(x)$ 라고 하면

$\lim_{x \rightarrow 0} h(x)=7$ 이고 $g(x)=h(x)-2f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \{h(x) - 2f(x)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} h(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \\ &= 7 - 2 \times 3 = 1 \end{aligned}$$

답 ③

참고

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 의 값이 존재한다는 조건이 없으므로 위와 같은 방법을 이용한다.

026

$\lim_{x \rightarrow -3} g(x)$ 의 값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)g(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -3} f(x)g(x)}{\lim_{x \rightarrow -3} g(x)} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -3} \{f(x)\}^2 = (-2)^2 = 4$$

답 ④

027

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+f(x)}{x-f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\frac{f(x)}{x}}{1-\frac{f(x)}{x}} = \frac{1+\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}}{1-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}} \\ &= \frac{1+3}{1-3} = \frac{4}{-2} = -2 \end{aligned}$$

답 -2

028

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (x^2+2x-8)f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} (x-2)(x+4)f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x-2) \times \lim_{x \rightarrow 3} (x+4)f(x) \\ &= 1 \times (-3) = -3 \end{aligned}$$

답 ②

029

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ (α, β 는 실수)라고 하면

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha + \beta \quad (\text{참})$$

ㄴ. [반례] $f(x) = \begin{cases} 0 & (x < a) \\ 1 & (x \geq a) \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 1 & (x < a) \\ 0 & (x \geq a) \end{cases}$

이라고 하면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 의 값은 모두 존재하지 않지만

$f(x) + g(x) = 1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = 1$ 이다. (거짓)

ㄷ. [반례] $f(x) = \frac{x}{x-a}, g(x) = \frac{a}{x-a}$

라고 하면 $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = 1$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

의 값은 모두 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

030

$\frac{2f(x)}{f(x) + g(x)} = h(x)$ 라고 하면

$$\lim_{x \rightarrow 1000} h(x) = \frac{1}{2} \text{이고 } g(x) = \frac{2f(x)}{h(x)} - f(x) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1000} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1000} \left\{ \frac{2f(x)}{h(x)} - f(x) \right\} \\ &= \frac{2 \lim_{x \rightarrow 1000} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1000} h(x)} - \lim_{x \rightarrow 1000} f(x) \\ &= \frac{2 \times (-5)}{\frac{1}{2}} - (-5) = -20 + 5 = -15 \end{aligned}$$

답 ②

031

$x-2=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x-2) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = -3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3 \quad \text{..... ①}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - 6}{3 - f(x)} &= \frac{2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - 6}{3 - \lim_{x \rightarrow 0} f(x)} \\ &= \frac{2 \times (-3) - 6}{3 - (-3)} = \frac{-12}{6} = -2 \quad \text{..... ②} \end{aligned}$$

답 -2

채점 기준	비율
① $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %
② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - 6}{3 - f(x)}$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

032

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x-5)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x-5) = -5$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+1)(x+3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x+1) = -2$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1$$

$$\begin{aligned} (5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(x-3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+6}-2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x+6}+2)}{(\sqrt{x+6}-2)(\sqrt{x+6}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x+6}+2)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x+6}+2) \\ &= 2+2=4 \end{aligned}$$

답 (1) 2 (2) -5 (3) -2 (4) 1 (5) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (6) 4

033

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 16}{x^2 - 2x} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x+2)(x-2)}{x(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x+2)}{x} = \frac{4 \times 4}{2} = 8 \end{aligned}$$

답 ③

034

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-5}-1}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{2x-5}-1)(\sqrt{2x-5}+1)}{(x-3)(\sqrt{2x-5}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-5-1}{(x-3)(\sqrt{2x-5}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)}{(x-3)(\sqrt{2x-5}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{\sqrt{2x-5}+1} \\ &= \frac{2}{1+1} = 1 \end{aligned}$$

답 ①

035

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\frac{1}{x}+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{1+x} = \lim_{x \rightarrow -1} x = -1$$

답 ③

036

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)f(x)} \quad \text{..... ①} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}+1}{f(x)} \\ &= \frac{2}{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)} \quad \text{..... ②} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \frac{2}{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)} = -\frac{2}{5} \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -5 \quad \text{..... ③}$$

답 -5

채점 기준	비율
① 분모를 유리화 할 수 있다.	40 %
② $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)f(x)}$ 을 간단히 할 수 있다.	30 %
③ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

037

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

→ 분자, 분모를 x^2 으로 나눈다.

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3+3x}{x^2-x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 4x = \infty$$

→ 분자, 분모를 x^2 으로 나눈다.

(3) $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-8}{x^2-4x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t^3-8}{t^2+4t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t - \frac{8}{t^2}}{1 + \frac{4}{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} (-t) = -\infty$$

→ 분자, 분모를 t^2 으로 나눈다.

답 (1) 0 (2) ∞ (3) $-\infty$

참고

$\frac{\infty}{\infty}$ 의 꼴인 극한은 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나누어서 조사한다.

- (1) (분자의 차수) = (분모의 차수) $\Rightarrow$ 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.
 (2) (분자의 차수) < (분모의 차수) $\Rightarrow$ 극한값은 0이다.
 (3) (분자의 차수) > (분모의 차수) $\Rightarrow$ 극한값은 없다.

038

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+x-3}+3x}{\sqrt{4x^2-x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}} + 3}{\sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x+1}+2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2} = \frac{1}{2}$$

답 (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) $\frac{1}{2}$

039

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

$$B = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2+4x+1}}{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}}{-1} = \frac{\sqrt{4}}{-1} = -2$$

$$C = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-5x-6x^2}{(x+1)(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-5x-6x^2}{2x^2+5x+3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x^2} - \frac{5}{x} - 6}{2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\therefore A+B-C=0+(-2)-(-3)=1$$

답 ①

040

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-2}{\sqrt{9x^2-1}-\sqrt{4x^2-4}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-5t-2}{\sqrt{9t^2-1}-\sqrt{4t^2-4}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-5 - \frac{2}{t}}{\sqrt{9 - \frac{1}{t^2}} - \sqrt{4 - \frac{4}{t^2}}}$$

$$= \frac{-5}{3-2} = -5$$

답 ①

041

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3\{f(x)\}^2-x}{3x^2-f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2 - \frac{1}{x}}{3 - \frac{f(x)}{x} \times \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{3 \times (-2)^2 - 0}{3 - (-2) \times 0} = \frac{12}{3} = 4$$

답 ⑤

042

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x}-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+x)}{\sqrt{x}+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-x^2}{\sqrt{x}+x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x}{\sqrt{\frac{1}{x}}+1} = -\infty$$

답 (1) ∞ (2) $-\infty$

043

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+4x}-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}$$

$$= \frac{4}{1+1} = 2$$

답 ②

044

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}+x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t^2-t}+t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2-t}-t}{(\sqrt{t^2-t}+t)(\sqrt{t^2-t}-t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2-t}-t}{t^2-t-t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2-t}-t}{-t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1}{-1} = \frac{1+1}{-1} = -2\end{aligned}$$

답 -2

045

$$\begin{aligned}(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+1} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \times \frac{1-(x+1)}{x+1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \times \frac{-x}{x+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x+1} \right) = -1 \\ (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(x + \frac{x}{x+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \times \frac{x^2+x+x}{x+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \times \frac{x(x+2)}{x+1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x+1} = 2\end{aligned}$$

답 (1) -1 (2) 2

046

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right) &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} \times \frac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x+2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x+2}-1)(\sqrt{x+2}+1)}{(x+1)\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2-1}{(x+1)\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}+1)} \\ &= \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

047

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \left(2 + \frac{x^2-5x}{x+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{1}{x-2} \times \frac{2(x+1) + (x^2-5x)}{x+1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{1}{x-2} \times \frac{(x-1)(x-2)}{x+1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

답 ①

048

- (1) $x \rightarrow 0$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.
즉, $\lim_{x \rightarrow 0} (2x+a) = 0$ 이므로 $a=0$
- (2) $x \rightarrow 1$ 일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.
즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (x+a) = 0$ 이므로 $1+a=0 \quad \therefore a=-1$

답 (1) 0 (2) -1

049

$x \rightarrow -1$ 일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2+ax+4) = 0$ 이므로 $1-a+4=0$
 $\therefore a=5$

답 ④

050

$x \rightarrow 1$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (3x-a) = 0$ 이므로 $3-a=0$
 $\therefore a=3$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{x-1} = 3$
 $\therefore b=3$
 $\therefore ab=3 \times 3=9$

답 ⑤

051

$x \rightarrow -2$ 일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x+a}-b) = 0$ 이므로 $\sqrt{-2+a}-b=0$

$\therefore b = \sqrt{a-2}$ ㉠

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+a}-b} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})}{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a-2})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})}{x+a-(a-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2}) \\ &= \sqrt{-2+a}+\sqrt{a-2} \\ &= 2\sqrt{a-2}\end{aligned}$$

이때 $2\sqrt{a-2}=6$ 이므로 $\sqrt{a-2}=3$

$a-2=9 \quad \therefore a=11$

$a=11$ 을 ㉠에 대입하면

$b = \sqrt{11-2} = \sqrt{9} = 3$

$\therefore a+b=11+3=14$

답 14

052

$x=-t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{ax^2+bx}+x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{at^2-bt}-t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{at^2-bt}-t)(\sqrt{at^2-bt}+t)}{\sqrt{at^2-bt}+t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{at^2-bt-t^2}{\sqrt{at^2-bt}+t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(a-1)t^2-bt}{\sqrt{at^2-bt}+t} \quad \dots\dots\dots ㉡\end{aligned}$$

㉡의 극한값이 존재하므로 $a-1=0$

$\therefore a=1$

$a=1$ 을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-bt}{\sqrt{t^2 - bt} + t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-b}{\sqrt{1 - \frac{b}{t}} + 1} = \frac{-b}{1+1} = -\frac{b}{2}$$

이때 $-\frac{b}{2}=4$ 이므로 $b=-8$

$$\therefore a-b=1-(-8)=9$$

답 ⑤

053

$x \rightarrow 3$ 일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} (ax+b)=0$ 이므로 $3a+b=0$

$$\therefore b=-3a$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3\sqrt{x^2-5}-2x}{ax+b} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3\sqrt{x^2-5}-2x}{ax-3a} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3\sqrt{x^2-5}-2x)(3\sqrt{x^2-5}+2x)}{a(x-3)(3\sqrt{x^2-5}+2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9(x^2-5)-4x^2}{a(x-3)(3\sqrt{x^2-5}+2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2-45}{a(x-3)(3\sqrt{x^2-5}+2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5(x-3)(x+3)}{a(x-3)(3\sqrt{x^2-5}+2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5(x+3)}{a(3\sqrt{x^2-5}+2x)} \\ &= \frac{30}{12a} = \frac{5}{2a} \end{aligned}$$

이때 $\frac{5}{2a}=15$ 이므로 $a=\frac{1}{6}$

$a=\frac{1}{6}$ 을 ㉠에 대입하면 $b=-3 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}$

$$\therefore ab = \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$$

답 ①

054

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{a}{x-3} - \frac{b}{x^2-9} \right) = 1 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax+3a-b}{x^2-9} = 1 \quad \dots\dots\dots ㉠$$

㉠에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} (ax+3a-b)=0$ 이므로 $3a+3a-b=0$

$$\therefore b=6a$$

㉠에 ㉡을 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax+3a-b}{x^2-9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax+3a-6a}{(x-3)(x+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a(x-3)}{(x-3)(x+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a}{x+3} = \frac{a}{6} \end{aligned}$$

이때 $\frac{a}{6}=1$ 이므로 $a=6$

$a=6$ 을 ㉡에 대입하면 $b=6 \times 6 = 36$

$$\therefore b-a=36-6=30$$

답 ⑤

055

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b}{x-1} = -3 \quad \dots\dots\dots ㉠$$

㉠에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+ax+b)=0$ 이므로 $1+a+b=0$

$$\therefore b=-a-1$$

$\dots\dots\dots ㉡$

①

㉠에 ㉡을 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax-a-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+a+1) = a+2 \end{aligned}$$

이때 $a+2=-3$ 이므로 $a=-5$

$a=-5$ 를 ㉡에 대입하면

$$b=-(-5)-1=4 \quad \dots\dots\dots ㉢$$

따라서 $f(x)=x^2-5x+4$ 이므로

$$f(2)=2^2-5 \times 2 + 4 = -2 \quad \dots\dots\dots ㉣$$

답 -2

채점 기준	비율
① b 를 a 에 대한 식으로 정리할 수 있다.	30 %
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ $f(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

056

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ 에서 $f(x)$ 는 일차항의 계수가 3인 일차식이다.

즉, $f(x)=3x+k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+k}{x} = \frac{3+k}{1} = 3+k$$

이때 $3+k=3$ 이므로 $k=0$

따라서 $f(x)=3x$ 이므로

$$f(2)=3 \times 2 = 6$$

답 ⑤

057

조건 (가)에서 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 1인 이차식이다.

즉, $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)로 놓으면 조건 (나)의

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -2 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+ax+b}{x} = -2 \quad \dots\dots\dots ㉠$$

㉠에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2+ax+b)=0$ 이므로 $b=0$

$b=0$ 을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+a)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+a) = a = -2$$

따라서 $f(x)=x^2-2x$ 이므로

$$f(4)=4^2-2 \times 4 = 8$$

답 8

058

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$
이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이므로 $f(0) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$
이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 이므로 $f(1) = 0$

따라서 삼차함수 $f(x)$ 를

$f(x) = x(x-1)(ax+b)$ (a, b 는 상수)

로 놓으면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)(ax+b)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x-1)(ax+b) = -b\end{aligned}$$

이때 $-b=1$ 이므로 $b=-1$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(ax+b)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x(ax+b) = a+b\end{aligned}$$

이때 $a+b=1$ 이므로 $a-1=1$

$\therefore a=2$

따라서 $f(x) = x(x-1)(2x-1)$ 이므로

$$f(2) = 2 \times 1 \times 3 = 6$$

답 ②

059

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = -2$ 에서 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 -2 인 이차식이다.

즉, $f(x) = -2x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x^2 - 2x - 3} = 1 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2x^2 + ax + b}{x^2 - 2x - 3} = 1 \quad \dots\dots\dots ①$$

①에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로
(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} (-2x^2 + ax + b) = 0$ 이므로 $-18 + 3a + b = 0$

$\therefore b = -3a + 18 \quad \dots\dots\dots ②$

$b = -3a + 18$ 을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2x^2 + ax - 3a + 18}{(x-3)(x+1)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(-2x+a-6)}{(x-3)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2x+a-6}{x+1} = \frac{a-12}{4}\end{aligned}$$

이때 $\frac{a-12}{4} = 1$ 이므로 $a=16$

$a=16$ 을 ②에 대입하면 $b = -3 \times 16 + 18 = -30$

따라서 $f(x) = -2x^2 + 16x - 30$ 이므로

$$f(0) = -30$$

답 ①

060

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(x)}{x^2} + 1 \right\} = 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = -1$ 이므로

$f(x)$ 는 이차항의 계수가 -1 인 이차식이다. ①

즉, $f(x) = -x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-4}{x} = -1 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + ax + b - 4}{x} = -1 \quad \dots\dots\dots ①$$

①에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로
(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2 + ax + b - 4) = 0$ 이므로 $b - 4 = 0$

$\therefore b = 4$

$b = 4$ 를 ①에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x + a) = a$$

이므로 $a = -1$

$\therefore f(x) = -x^2 - x + 4 \quad \dots\dots\dots ②$

$\therefore f(3) = -3^2 - 3 + 4 = -8 \quad \dots\dots\dots ③$

답 -8

채점 기준	비율
① $f(x)$ 의 차수와 최고차항의 계수를 알 수 있다.	30 %
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	60 %
③ $f(3)$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

061

$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x - 3) = 2^2 - 2 \times 2 - 3 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 6x + 1) = 2 \times 2^2 - 6 \times 2 + 1 = -3$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = -3$

답 -3

참고

$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ 이고 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = a$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = a$ 이다.

062

양수 x 에 대하여 $3x+1 > 0$, $3x+2 > 0$ 이므로

$3x+1 < f(x) < 3x+2$ 에서

$$(3x+1)^2 < \{f(x)\}^2 < (3x+2)^2$$

$$3x^2 + 1 > 0 \text{이므로 } \frac{(3x+1)^2}{3x^2+1} < \frac{\{f(x)\}^2}{3x^2+1} < \frac{(3x+2)^2}{3x^2+1}$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)^2}{3x^2+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2+6x+1}{3x^2+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{9}{3} = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+2)^2}{3x^2+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2+12x+4}{3x^2+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{9}{3} = 3\end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{3x^2+1} = 3$

답 ⑤

063

$$\begin{aligned}
 (1) \overline{AP} &= \sqrt{(t-1)^2 + (\sqrt{t})^2} = \sqrt{t^2 - t + 1} \\
 (2) \overline{BP} &= \sqrt{(t-2)^2 + (\sqrt{t})^2} = \sqrt{t^2 - 3t + 4} \\
 (3) \lim_{t \rightarrow \infty} (\overline{AP} - \overline{BP}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 - t + 1} - \sqrt{t^2 - 3t + 4}) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2 - t + 1} - \sqrt{t^2 - 3t + 4})(\sqrt{t^2 - t + 1} + \sqrt{t^2 - 3t + 4})}{\sqrt{t^2 - t + 1} + \sqrt{t^2 - 3t + 4}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 - t + 1 - (t^2 - 3t + 4)}{\sqrt{t^2 - t + 1} + \sqrt{t^2 - 3t + 4}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t - 3}{\sqrt{t^2 - t + 1} + \sqrt{t^2 - 3t + 4}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{t}}{\sqrt{1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{t} + \frac{4}{t^2}}} \\
 &= \frac{2}{1+1} = 1 \\
 (4) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2 - t + 1}}{\sqrt{t^2 - 3t + 4}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}}}{\sqrt{1 - \frac{3}{t} + \frac{4}{t^2}}} = \frac{1}{1} = 1
 \end{aligned}$$

답 (1) $\sqrt{t^2 - t + 1}$ (2) $\sqrt{t^2 - 3t + 4}$ (3) 1 (4) 1

풍샘 개념 CHECK

두 점 사이의 거리 高 公通수학 2

두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

064

$$\begin{aligned}
 (1) S_A &= \frac{1}{2} \times 4 \times y = 2y = 2x^2 \quad (\because y = x^2) \\
 (2) S_B &= \frac{1}{2} \times 6 \times x = 3x \\
 (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S_A}{x S_B} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x \times 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

답 (1) $2x^2$ (2) $3x$ (3) $\frac{2}{3}$

065

$$P(t, \sqrt{t}) \text{이므로 } \overline{OP}^2 = t^2 + (\sqrt{t})^2 = t^2 + t$$

선분 PH의 길이는 점 $P(t, \sqrt{t})$ 와 직선 $y = \frac{1}{2}x$, 즉 $x - 2y = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{PH} = \frac{|t - 2\sqrt{t}|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|t - 2\sqrt{t}|}{\sqrt{5}}$$

삼각형 PHO는 직각삼각형이므로 $\rightarrow$ 피타고라스 정리 이용

$$\begin{aligned}
 \overline{OH}^2 &= \overline{OP}^2 - \overline{PH}^2 \\
 &= t^2 + t - \frac{(t - 2\sqrt{t})^2}{5} \\
 &= \frac{4t^2 + 4t\sqrt{t} + t}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{OH}^2}{\overline{OP}^2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{4t^2 + 4t\sqrt{t} + t}{5}}{t^2 + t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t^2 + 4t\sqrt{t} + t}{5t^2 + 5t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{4\sqrt{t}}{t} + \frac{1}{t}}{5 + \frac{5}{t}} = \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

답 ④

풍샘 개념 CHECK

점과 직선 사이의 거리 高 公通수학 2

점 (x_1, y_1) 과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

실력을 높이는 연습 문제

본문 022쪽

01

$$\neg. \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = -2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -2$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1, \text{ 즉 } \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \text{이므로}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = 5$$

따라서 극한값이 존재하는 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 ③

02

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} (-3x - 4) = -3a - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} (2x + 1) = 2a + 1$$

이때 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재하려면 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ 이어야 하므로

$$-3a - 4 = 2a + 1, -5a = 5$$

$$\therefore a = -1$$

답 ③

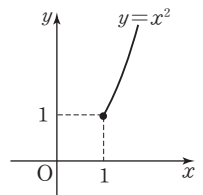
03

$x \geq 1$ 일 때 함수 $y = x^2$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같고, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으려면

$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$ 이어야 하므로

$$-1 + a \neq 1$$

$$\therefore a \neq 2$$



답 ②

|다른 풀이|

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x+a) = -1+a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으려면 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

이어야 하므로

$$-1+a \neq 1$$

$$\therefore a \neq 2$$

04

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때

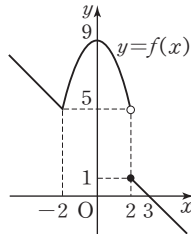
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로

$$a=2$$



답 ⑤

05

① $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ 의 값이 존재한다.

② $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값이 존재한다.

③ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이다.

④ $-2 < a < 1$ 인 실수 a 에 대하여 $x=a$ 의 좌극한과 우극한이 일치하므로 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 항상 존재한다.

⑤ $x=1$ 에서의 좌극한과 우극한이 모두 존재하지만

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \text{로 } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \text{이므로}$$

로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

06

$x \rightarrow 2+$ 일 때, $x-2 > 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

$x \rightarrow -2-$ 일 때, $x+2 < 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x+2|}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-(x+2)}{x+2} = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} + \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x+2|}{x+2} = 1 + (-1) = 0$$

답 ③

07

$x \rightarrow 1-$ 일 때 $x-1 \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [x-1] = -1 \quad \begin{matrix} \nearrow x-1 \rightarrow 0- \text{이면} \\ -1 < x-1 < 0 \end{matrix}$$

$x \rightarrow 1+$ 일 때 $[x] = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ([x]+a) = 1+a$$

이때 함수 $f(x)$ 의 $x=1$ 에서의 극한값이 존재하려면

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \text{ 이어야 하므로}$$

$$-1 = 1+a$$

$$\therefore a = -2$$

답 -2

08

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{x^2-2x}{x-2} \right] = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{x(x-2)}{x-2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 1 \quad \nearrow \lim_{x \rightarrow 2^+} [x-2] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x-2]}{x-2} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 + 0 = 1$$

답 1

09

$f(x)=t$ 로 놓으면

$x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이므로

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1^+} f(t) = 0$$

$x \rightarrow -1-$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$B = \lim_{x \rightarrow -1^-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 3$$

$g(x)=s$ 로 놓으면

$x \rightarrow 1+$ 일 때 $s \rightarrow 1-$ 이므로

$$C = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(g(x)) = \lim_{s \rightarrow 1^-} g(s) = 2$$

$$\therefore A < C < B$$

답 ②

10

문제 접근하기

함수의 극한에 대한 성질 중에서 관련된 성질이 무엇인지 생각해 보고, 참이 아니라면 [반례]를 이용해서 거짓을 확인한다.

① [반례] $f(x) = \begin{cases} -1 & (x < a) \\ 1 & (x \geq a) \end{cases}, g(x) = \begin{cases} -1 & (x < a) \\ 1 & (x \geq a) \end{cases}$ 이면

$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = 0$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

② [반례] $f(x) = \begin{cases} 0 & (x < a) \\ 1 & (x \geq a) \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 1 & (x < a) \\ 0 & (x \geq a) \end{cases}$ 이면

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ 이다.

③ [반례] $f(x) = 0, g(x) = \begin{cases} 1 & (x < a) \\ -1 & (x \geq a) \end{cases}$ 이면

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

④ [반례] $f(x) = 0, g(x) = \begin{cases} 1 & (x < a) \\ -1 & (x \geq a) \end{cases}$ 이면

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

⑤ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$ (α, β 는 상수)이면

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left[g(x) \times \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \beta$$

로 극한값이 존재한다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

11

$h(x) = 2f(x) - 3g(x)$ 라고 하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1 \text{이고 } f(x) = \frac{3g(x) + h(x)}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4f(x) + g(x)}{3f(x) - g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \times \frac{3g(x) + h(x)}{2} + g(x)}{3 \times \frac{3g(x) + h(x)}{2} - g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14g(x) + 4h(x)}{7g(x) + 3h(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14 + 4 \times \frac{h(x)}{g(x)}}{7 + 3 \times \frac{h(x)}{g(x)}} \\ &= \frac{14 + 4 \times 0}{7 + 3 \times 0} = 2 \end{aligned}$$

답 ②

12

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)f(x)}{x^3 - 8} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)f(x)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)f(x)}{x^2 + 2x + 4} \\ &= \frac{(2+2) \times 4}{2^2 + 2 \times 2 + 4} \\ &= \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

답 ④

13

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{x^2 - 1} = 2 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{1 - \frac{1}{x^2}} = 2 \text{이므로}$$

$$\frac{a}{1} = 2 \quad \therefore a = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x+1} \\ &= \frac{2}{1+1} = 1 \end{aligned}$$

이므로 $b = 1$

$$\therefore a + b = 2 + 1 = 3$$

답 3

14

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \text{에서 } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(-t)}{-t} = \alpha$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(-t)}{t} = -\alpha$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - 3f(x)}{2f(x) + \sqrt{2x - 3f(x)}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2 - 3f(-t)}{2f(-t) + \sqrt{-2t - 3f(-t)}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{t} - \frac{3f(-t)}{t}}{\frac{2f(-t)}{t} + \sqrt{-\frac{2}{t} - \frac{3f(-t)}{t^2}}} \\ &= \frac{-3 \times (-\alpha)}{2 \times (-\alpha)} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 ①

15

$A = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 - 4x})$ $\rightarrow \infty - \infty$ 의 꼴이므로 분모를 1로 생각하고 근호가 있는 부분을 유리화한다.

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 - 4x})(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 - 4x})}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 - 4x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - (x^2 - 4x)}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 - 4x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 - 4x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{4}{x}}} = \frac{3}{1 + 1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{2}{x+2} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \times \frac{2 - (x+2)}{x+2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \times \frac{-x}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x+2} \right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore 4AB = 4 \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -3$$

답 ①

16

$x \rightarrow 2$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - a) = 0 \text{이므로 } 8 - a = 0$$

$$\therefore a = 8$$

$$\begin{aligned} \therefore b &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - a}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) \\ &= 2^2 + 2 \times 2 + 4 = 12 \end{aligned}$$

$$\therefore a + b = 8 + 12 = 20$$

답 ④

17

$x \rightarrow 4$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 4} (x-a)=0$ 이므로 $4-a=0$

$\therefore a=4$

$$\begin{aligned}\therefore b &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}+2) \\ &= 2+2=4\end{aligned}$$

$\therefore ab=4 \times 4=16$

답 ③

18

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2+2x-8}=1$ 에서 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 1인 이차식이다.

즉, $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x+2}=3 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+ax+b}{x+2}=3 \quad \dots\dots\dots ①$$

이때 $x \rightarrow -2$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2+ax+b)=0$ 이므로 $4-2a+b=0$

$\therefore b=2a-4$

$\dots\dots\dots ②$

①에 ②을 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+ax+b}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+ax+2a-4}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+a-2)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (x+a-2) \\ &= a-4\end{aligned}$$

이때 $a-4=3$ 이므로 $a=7$

$a=7$ 을 ②에 대입하면 $b=2 \times 7 - 4 = 10$

따라서 $f(x)=x^2+7x+10$ 이므로

$$f(-3)=(-3)^2+7 \times (-3)+10=-2$$

답 ②

19

문제 접근하기

이차함수 $f(x)$ 는 실수 a 에 대하여 항상 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재하므로

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} = \frac{3}{5}$ 에서 함수의 극한의 성질을 이용할 수 있다.

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고, 방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ 이면 $\rightarrow$ 함수의 극한의 성질을 이용한다.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} = \frac{f(a)-(a-a)}{f(a)+(a-a)} = 1 \neq \frac{3}{5}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=0$ 이다.

즉, $f(x)$ 는 $x-a$ 를 인수로 가지므로 $a=a$ 라고 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-\beta)-(x-a)}{(x-a)(x-\beta)+(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-\beta-1}{x-\beta+1} \\ &= \frac{a-\beta-1}{a-\beta+1}\end{aligned}$$

이때 $\frac{a-\beta-1}{a-\beta+1} = \frac{3}{5}$ 이므로

$$5(a-\beta-1)=3(a-\beta+1), 2(a-\beta)=8$$

$$\therefore a-\beta=4$$

$$\therefore |a-\beta|=4$$

답 ④

참고

$a=\beta$ 라고 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} &= \lim_{x \rightarrow \beta} \frac{(x-a)(x-\beta)-(x-\beta)}{(x-a)(x-\beta)+(x-\beta)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \beta} \frac{x-a-1}{x-a+1} \\ &= \frac{\beta-a-1}{\beta-a+1}\end{aligned}$$

이때 $\frac{\beta-a-1}{\beta-a+1} = \frac{3}{5}$ 이므로

$$5(\beta-a-1)=3(\beta-a+1), 2(a-\beta)=-8$$

$$\therefore a-\beta=-4$$

$$\therefore |a-\beta|=4$$

20

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)g(x)}{2x^3} = -1$ 에서 $f(x)g(x)$ 는 삼차항의 계수가 -2 인 삼차식이다.

즉, $f(x)g(x)=-2x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2}=6 \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^3+ax^2+bx+c}{x^2}=6 \quad \dots\dots\dots ①$$

이때 $x \rightarrow 0$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} (-2x^3+ax^2+bx+c)=0$ 이므로 $c=0$

$c=0$ 을 ①에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^3+ax^2+bx}{x^2}=6 \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^2+ax+b}{x}=6 \quad \dots\dots\dots ②$$

이때 $x \rightarrow 0$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} (-2x^2+ax+b)=0$ 이므로 $b=0$

$b=0$ 을 ②에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^2+ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-2x+a) = a=6$$

따라서 $f(x)g(x)=-2x^3+6x^2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (-2x^3+6x^2) = -2+6=4$$

답 ①

21

$$\lim_{x \rightarrow 2} (-2x^2+8x-11) = -2 \times 2^2 + 8 \times 2 - 11 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-4x+1) = 2^2 - 4 \times 2 + 1 = -3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$$

답 ③

$$x^2 + 2x - 3 \leq f(x) \leq 2x^2 - 2 \text{에서}$$

$$(x-1)(x+3) \leq f(x) \leq 2(x-1)(x+1) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $x-1 < 0$, 즉 $x < 1$ 일 때

①의 각 변을 $x-1$ 로 나누면

$$2(x+1) \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq x+3 \quad \begin{array}{l} \text{↗} x-1 < 0 \text{이므로} \\ \text{부등호의 방향이 바뀐다.} \end{array}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow -1^-} 2(x+1) = 2 \times 2 = 4$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x+3) = 4$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)}{x-1} = 4$$

(ii) $x-1 > 0$, 즉 $x > 1$ 일 때

①의 각 변을 $x-1$ 로 나누면

$$x+3 \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq 2(x+1)$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x+3) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2(x+1) = 2 \times 2 = 4$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = 4$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4 \quad \begin{array}{l} \text{↗ (좌극한)} = (\text{우극한}) = 4 \end{array}$

답 ④

23

직선 l 의 기울기가 1이고 y 절편이 $g(t)$ 이므로 직선 l 의 방정식은 $y = x + g(t)$

두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α , β 라고 하면 α , β 는 이차방정식 $x^2 = x + g(t)$, 즉 $x^2 - x - g(t) = 0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -g(t) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$A(\alpha, \alpha + g(t))$, $B(\beta, \beta + g(t))$ 이므로

$$\overline{AB}^2 = (\alpha - \beta)^2 + [\alpha + g(t) - \{\beta + g(t)\}]^2$$

$$= (\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 2(\alpha - \beta)^2$$

①에서 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1 + 4g(t)$ 이므로

$$\overline{AB}^2 = 2 + 8g(t)$$

선분 AB의 길이가 $2t$ 이어야 하므로

$$2 + 8g(t) = 4t^2 \quad \therefore g(t) = \frac{2t^2 - 1}{4}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t^2 - 1}{4t^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{t^2}}{4}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

답 ④



함수의 연속

기초를 다지는 유형

본문 027쪽

001

$$(1) f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

(2) $f(0)$ 이 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = -1 \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{가 존재하지 않는다.}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

답 (1) 연속 (2) 불연속 (3) 불연속

002

(1) $f(a)$ 가 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 불연속이다.

$$(2) \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow b} f(x) \text{가 존재하지 않는다.}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=b$ 에서 불연속이다.

(3) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=c$ 에서 불연속이다.

답 풀이 참조

003

$$\neg. f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\neg. f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\square. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

따라서 $x=0$ 에서 연속인 함수는 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ④

004

$\neg$. $f(-1)$ 이 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이다.

$$\neg. f(-1) = -1 + 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (-x+1) = 1+1=2$$

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \neq f(-1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이다.

$$\square. f(-2) = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{x+2} = \sqrt{-2+2} = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 연속이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

따라서 모든 실수 x 에서 연속인 함수는 ㄷ이다.

답 ③

참고

- (1) 다항함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.
- (2) 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 유리함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $g(x) \neq 0$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다.
- (3) 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 무리함수 $\sqrt{f(x)}$ 는 $f(x) > 0$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다.

005

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{(x+1)(x-3)}$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = -1, x = 3$ 에서 불연속이다. 따라서 실수 k 의 값은 $-1, 3$ 이다.

답 $-1, 3$

채점 기준	비율
① $f(x)$ 의 분모를 인수분해할 수 있다.	40 %
② $f(x)$ 의 불연속을 조사할 수 있다.	40 %
③ k 의 값을 모두 구할 수 있다.	20 %

006

- (1) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
 함수 $f(x)$ 는 $x = -1, x = 0$ 에서 극한값이 존재하지 않는다.
- (2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 의 값이 존재하지 않고, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$
 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = -1, x = 0, x = 1$ 에서 불연속이다.

답 (1) $-1, 0$ (2) $-1, 0, 1$

007

주어진 그래프에서 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 이지만 $f(1)$ 의 값이 정의되어 있지 않으므로 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 불연속이다.
 $\therefore a = 1$

답 1

참고

열린구간 $(0, 4)$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서도 불연속이지만, 이때는 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ 이다.

008

- ① $f(-1) = 2$
 - ② $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$
 - ③ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$
 - ④ $f(1) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 함숫값을 갖는다.
 - ⑤ 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 불연속이므로 불연속이 되는 x 의 값은 1개이다.
- 따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

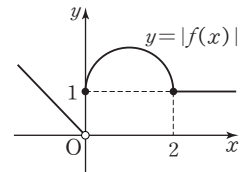
009

- ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ (참)
 - ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ (거짓)
 - ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 2^-} |f(x)| = |1| = 1, \lim_{x \rightarrow 2^+} |f(x)| = |-1| = 1$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 2} |f(x)| = 1$
 이때 $|f(2)| = |-1| = 1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} |f(x)| = |f(2)|$
 따라서 함수 $|f(x)|$ 는 $x = 2$ 에서 연속이다. (참)
- 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

참고

함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 즉, 함수 $y = |f(x)|$ 는 $x = 0$ 에서 불연속이다.



010

- $f(1) = 0$ 이므로 $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(0) = 1$
 $f(x) = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1^-$ 일 때 $t \rightarrow 1^-$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 1$ ㉠
- 또, $x \rightarrow 1^+$ 일 때 $t \rightarrow -1^+$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1^+} f(t) = 1$ ㉡
- ㉠, ㉡에서 $\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ f)(x) = 1$
 따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ f)(x) = (f \circ f)(1)$ 이므로 함수 $(f \circ f)(x)$ 는 $x = 1$ 에서 연속이다.

답 연속

011

- (1) $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(0) = 1$ ㉠
 $\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f(0) = 1$ ㉡
 ㉠, ㉡에서 $\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x) = (f \circ g)(0)$
 따라서 함수 $(f \circ g)(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이다.
- (2) $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = 1$ ㉢
 $f(x) = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0$ ㉣
 ㉢, ㉣에서 $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(0)$
 따라서 함수 $(g \circ f)(x)$ 는 $x = 0$ 에서 불연속이다.

답 (1) 연속 (2) 불연속

012

- ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ (참)
- ㄴ. $\frac{1}{t} = x$ 로 놓으면 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $x \rightarrow 0^+$ 이므로
 $\lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ (참)

ㄷ. $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 3-$ 일 때 $t \rightarrow 2+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2+} f(t) = 3$$

또, $x \rightarrow 3+$ 일 때 $t \rightarrow 2-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2-} f(t) = 1$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} f(f(x))$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(f(x))$ 는

$x=3$ 에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

참고

모든 실수 x 에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 합성함수 $(f \circ g)(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이라면 $\lim_{x \rightarrow a-} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow a+} f(g(x)) = f(g(a))$ 가 성립해야 한다.

013

$$\text{ㄱ. } g(f(-1)) = g(0) = 1 \quad \dots\dots\dots ㉠$$

$f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 1 \quad \dots\dots\dots ㉡$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } \lim_{x \rightarrow -1} g(f(x)) = g(f(-1))$$

따라서 함수 $g(f(x))$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다. (참)

$$\text{ㄴ. } f(g(0)) = f(1) = -1 \quad \dots\dots\dots ㉢$$

$g(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $s \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = \lim_{s \rightarrow 1-} f(s) = 0 \quad \dots\dots\dots ㉣$$

$$\text{㉢, ㉣에서 } \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) \neq f(g(0))$$

따라서 함수 $f(g(x))$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다. (거짓)

$$\text{ㄷ. } f(1)g(1) = -1 \times 0 = 0 \quad \dots\dots\dots ㉤$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \\ &= 0 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) \\ &= -1 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = 0 \quad \dots\dots\dots ㉥$$

$$\text{㉤, ㉥에서 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = f(1)g(1)$$

따라서 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

참고

ㄷ에서 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ 이면 극한에 대한 성질이 성립하므로

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = a\beta$ 임을 이용한다.

014

(1) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=2$ 에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = f(2)$ 이어야 한다. 이때

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} a = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (3x-1) = 5$$

$$f(2) = 3 \times 2 - 1 = 5$$

이므로 $a=5$

(2) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=-1$ 에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = f(-1)$ 이어야 한다.

이때

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (-2x+a) = 2+a$$

$$f(-1) = -2 \times (-1) + a = 2+a$$

$$\text{이므로 } 2+a=2$$

$$\therefore a=0$$

답 (1) 5 (2) 0

015

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이라면

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1) \text{이어야 한다. 이때}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (2x+a) = 2+a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x+5) = 6$$

$$f(1) = 1+5 = 6$$

$$\text{이므로 } 2+a=6$$

$$\therefore a=4$$

답 ④

016

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이라면 $x=-2$ 에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = f(-2)$ 이어야 한다.

이때

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} (5x+a) = -10+a$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} (x^2-a) = 4-a$$

$$f(-2) = 4-a$$

$$\text{이므로 } -10+a=4-a, 2a=14$$

$$\therefore a=7$$

답 ②

017

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=-2$, $x=2$ 에서 연속이어야 한다.

$x=-2$ 에서 연속이라면 $\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = f(-2)$ 이어야 하고

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} (x+a) = -2+a$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} (3x-2) = -8$$

$$f(-2) = 3 \times (-2) - 2 = -8$$

$$\text{이므로 } -2+a=-8$$

$$\therefore a=-6$$

$x=2$ 에서 연속이라면 $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = f(2)$ 이어야 하고

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (3x-2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} bx = 2b$$

$$f(2) = 2b$$

$$\text{이므로 } 2b=4$$

$$\therefore b=2$$

$$\therefore a+b = -6+2 = -4$$

답 ①

018

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이려면

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x) = f(1)g(1)$ 이어야 한다. 이때

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1)(x+a) \\ &= 2(1+a) = 2a+2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2)(x+a) \\ &= -(1+a) = -a-1\end{aligned}$$

$$f(1)g(1) = -(1+a) = -a-1$$

$$\text{이므로 } 2a+2 = -a-1, 3a = -3$$

$$\therefore a = -1$$

답 ②

019

(1) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이려면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이어야 한다. 이때

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+a) = 1+a$$

$$f(1) = 3$$

$$\text{이므로 } 1+a = 3$$

$$\therefore a = 2$$

(2) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이려면 $x=-3$ 에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = f(-3)$ 이어야 한다. 이때

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} (x+2) = -1$$

$$f(-3) = a$$

$$\text{이므로 } a = -1$$

답 (1) 2 (2) -1

020

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이려면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이어야 한다. 이때

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+4) = 5$$

$$f(1) = -a+3$$

$$\text{이므로 } -a+3 = 5$$

$$\therefore a = -2$$

답 ②

021

함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ 이어야 한다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - ax + 6}{x-3} = b \quad \dots\dots\dots ①$$

이때 $x \rightarrow 3$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - ax + 6) = 0 \text{이므로}$$

$$9 - 3a + 6 = 0, -3a = -15$$

$$\therefore a = 5$$

$a=5$ 를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x-2) = 1\end{aligned}$$

$$\therefore a+b = 5+1 = 6$$

답 ⑤

참고

미정계수가 포함된 분수의 꼴의 함수에서

(1) $x \rightarrow a$ 일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이면 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

(2) $x \rightarrow a$ 일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\rightarrow 0$ 이면 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

022

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이려면 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ 이어야 한다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax^2 + 4ax + 6}{x+1} = b \quad \dots\dots\dots ①$$

이때 $x \rightarrow -1$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} (ax^2 + 4ax + 6) = 0 \text{이므로}$$

$$a - 4a + 6 = 0, -3a = -6$$

$$\therefore a = 2$$

$a=2$ 를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 8x + 6}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)(x+3)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} 2(x+3) = 4\end{aligned}$$

$$\therefore a+b = 2+4 = 6$$

답 ⑤

023

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이려면 $x=0$ 에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이어야 한다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+a}+b}{x} = 2 \quad \dots\dots\dots ①$$

이때 $x \rightarrow 0$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+a}+b) = 0 \text{이므로}$$

$$\sqrt{a}+b = 0$$

$$\therefore b = -\sqrt{a} \quad \dots\dots\dots ②$$

②을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}{x(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}}\end{aligned}$$

이때 $\frac{1}{2\sqrt{a}}=2$ 이므로 $a=\frac{1}{16}$ ②

$a=\frac{1}{16}$ 을 ㉠에 대입하면

$b=-\sqrt{a}=-\frac{1}{4}$ ③

답 $a=\frac{1}{16}, b=-\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
① $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속인 조건을 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ b 의 값을 구할 수 있다.	20 %

024

ㄱ. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 연속 함수의 성질에 따라 $f(x)-g(x)$ 도 실수 전체의 집합에서 연속이다.

→ 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수끼리 빼도 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 연속 함수의 성질에 따라 $f(x)g(x)$ 도 실수 전체의 집합에서 연속이다.

→ 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수끼리 곱해도 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 $f(x)=0$ 일 때 불연속이므로 실수 전체의 집합에서 항상 연속이라고 할 수 없다.

ㄹ. 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $g(x)=0$ 일 때 불연속이므로 실수 전체의 집합에서 항상 연속이라고 할 수 없다.

따라서 실수 전체의 집합에서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

025

(1) 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 연속함수의 성질에 따라 $f(x)+g(x)$ 도 모든 실수 x 에서 연속이다. 따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$ 이다.

(2) 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 연속함수의 성질에 따라 $f(x)-g(x)$ 도 모든 실수 x 에서 연속이다. 따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$ 이다.

(3) 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 연속함수의 성질에 따라 $f(x)g(x)$ 도 모든 실수 x 에서 연속이다. 따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$ 이다.

(4) 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $g(x) \neq 0$, 즉 $x \neq 3$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다. 따라서 연속인 구간은 $(-\infty, 3), (3, \infty)$ 이다.

→ $x-3 \neq 0$ 에서 $x \neq 3$

(5) 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 $f(x) \neq 0$, 즉 $x \neq -1$ 이고 $x \neq 2$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다. 따라서 연속인 구간은 $(-\infty, -1), (-1, 2), (2, \infty)$ 이다.

답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, \infty)$
(3) $(-\infty, \infty)$ (4) $(-\infty, 3), (3, \infty)$
(5) $(-\infty, -1), (-1, 2), (2, \infty)$

다른 풀이

(1) $f(x)+g(x)=(x^2-x-2)+(x-3)=x^2-5$
즉, $f(x)+g(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다. 따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$ 이다.

(2) $f(x)-g(x)=(x^2-x-2)-(x-3)=x^2-2x+1$
즉, $f(x)-g(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다. 따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$ 이다.

(3) $f(x)g(x)=(x^2-x-2)(x-3)=x^3-4x^2+x+6$
즉, $f(x)g(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다. 따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$ 이다.

(4) $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-x-2}{x-3}=\frac{(x+1)(x-2)}{x-3}$
즉, $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $x-3 \neq 0$, 즉 $x \neq 3$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다. 따라서 연속인 구간은 $(-\infty, 3), (3, \infty)$ 이다.

(5) $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x-3}{x^2-x-2}=\frac{x-3}{(x+1)(x-2)}$
즉, $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 $(x+1)(x-2) \neq 0$, 즉 $x \neq -1$ 이고 $x \neq 2$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다. 따라서 연속인 구간은 $(-\infty, -1), (-1, 2), (2, \infty)$ 이다.

026

① 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 연속함수의 성질에 따라 $f(x)+g(x)$ 도 모든 실수 x 에서 연속이다.

② 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 연속함수의 성질에 따라 $f(x)g(x)$ 도 모든 실수 x 에서 연속이다.

③ 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $g(x) \neq 0$, 즉 $x \neq 1$ 인 실수 x 에서만 연속이다. 따라서 $x=1$ 에서 불연속이다.

→ $x-1 \neq 0$ 에서 $x \neq 1$

④ 모든 실수 x 에서 $f(x) \neq 0$ 이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.

⑤ $g(f(x))=(x^2+1)-1=x^2$ 이므로 함수 $g(f(x))$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.

답 ③

다른 풀이

① $f(x)+g(x)=x^2+x$ 이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

② $f(x)g(x)=(x^2+1)(x-1)=x^3-x^2+x-1$ 이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

③ $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2+1}{x-1}$ 이므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $x \neq 1$ 에서 연속이다. 즉, 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

④ $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x-1}{x^2+1}$ 이고, $x^2+1 \neq 0$ 이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.

027

ㄱ. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로 연속함수의 성질에 따라 $2f(x)-g(x)$, 즉 $f(x)+f(x)-g(x)$ 도 $x=a$ 에서 연속이다.

ㄴ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로 연속함수의 성질에 따라 $f(x)g(x)$ 도 $x=a$ 에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로 연속함수의 성질에 따라 $\{f(x)\}^2$, 즉 $f(x)f(x)$ 도 $x=a$ 에서 연속이다.

ㄹ. 함수 $\frac{f(x)}{\{g(x)\}^2}$ 는 $g(x)=0$ 인 x 의 값에서 불연속이다.

$g(a)=0$ 인지 알 수 없으므로 함수 $\frac{f(x)}{\{g(x)\}^2}$ 가 $x=a$ 에서 항상 연속이라고 할 수 없다.

따라서 $x=a$ 에서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

|다른 풀이|

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$$

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } \lim_{x \rightarrow a} \{2f(x) - g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow a} \{2f(x)\} - \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ &= 2f(a) - g(a) \end{aligned}$$

이므로 함수 $2f(x) - g(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

$$\text{ㄴ. } \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a)g(a)$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

$$\text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow a} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \{f(a)\}^2$$

이므로 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 $x=a$ 에서 연속이다.

028

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서만 불연속이므로 함수 $(f(x)+a)^2$ 이 실수 전체의 집합에서 연속하려면 $x=0$ 에서 연속이어야 한다.

즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0-} (f(x)+a)^2 = \lim_{x \rightarrow 0+} (f(x)+a)^2 = (f(0)+a)^2$$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{x \rightarrow 0-} (f(x)+a)^2 = \lim_{x \rightarrow 0-} \left(x - \frac{1}{2} + a\right)^2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (f(x)+a)^2 = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x^2 + 3 + a)^2 = (3+a)^2$$

$$(f(0)+a)^2 = (3+a)^2$$

$$\text{이므로 } \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = (3+a)^2$$

$$a^2 - a + \frac{1}{4} = a^2 + 6a + 9, 7a = -\frac{35}{4}$$

$$\therefore a = -\frac{5}{4}$$

답 ③

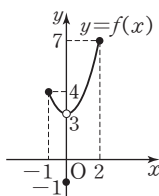
029

닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이고

$f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 7, $x=0$ 에서 최솟값 -1을 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은

$$7 + (-1) = 6$$

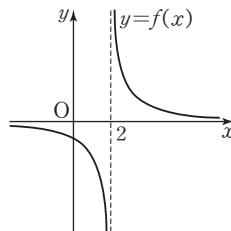


답 6

030

함수 $f(x) = \frac{1}{x-2}$ 은 $x \neq 2$ 인 모든 실수 x 에서 연속이고 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x < 2$ 일 때 x 의 값이 증가할수록 y 의 값이 감소하므로 구간 $[0, 2)$ 에서 최솟값이 존재하지 않는다.



답 ②

031

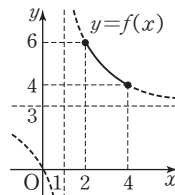
$$f(x) = \frac{3x}{x-1} = 3 + \frac{3}{x-1}$$

이므로 닫힌구간 $[2, 4]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 6, $x=4$ 에서 최솟값 4를 가지므로

$$M=6, m=4$$

$$\therefore M-m=6-4=2$$



답 ④

032

① 열린구간 $(-2, 4)$ 에서 함수 $f(x)$ 가 불연속이 되는 x 의 값은 0의 1개이다.

② 닫힌구간 $[-2, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 없다.

④ 닫힌구간 $[-2, 6]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 없고, 최댓값은 4이다.

⑤ 닫힌구간 $[0, 6]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 4이고, 최솟값은 1이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $4+1=5$ 이다.

따라서 옳은 것은 ③이다.

답 ③

033

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\frac{1}{x-3}\right) \\ &= \frac{1}{x-3} + 2 \end{aligned}$$

이므로 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $y=(f \circ g)(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $(f \circ g)(x)$ 의 최댓값은

$$(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = \frac{1}{-2-3} + 2 = \frac{9}{5} \quad \text{①}$$

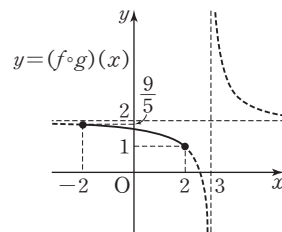
최솟값은

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = \frac{1}{2-3} + 2 = 1 \quad \text{②}$$

$$\text{이므로 } k = \frac{9}{5} + 1 = \frac{14}{5}$$

$$\therefore 5k = 5 \times \frac{14}{5} = 14 \quad \text{③}$$

답 14



채점 기준	비율
① $(f \circ g)(x)$ 의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %
② $(f \circ g)(x)$ 의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
③ $5k$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

034

$$f(-2)f(-1)=2 \times (-4)=-8<0$$

$$f(-1)f(0)=-4 \times 3=-12<0$$

$$f(0)f(1)=3 \times (-2)=-6<0$$

$$f(1)f(2)=-2 \times (-5)=10>0$$

$$f(2)f(3)=-5 \times 1=-5<0$$

이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 적어도 4개의 실근을 가지므로

$$n=4$$

답 ④

035

$f(x)=x^4-5x^3+8$ 로 놓으면 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고

$$f(-2)=64>0, f(-1)=14>0, f(0)=8>0, f(1)=4>0,$$

$$f(2)=-16<0, f(3)=-46<0$$

이때 $f(1)f(2)<0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 주어진 방정식이 적어도 하나의 실근을 갖는 구간은 $(1, 2)$ 이다.

답 ④

036

$$f(x)=x \text{에서 } f(x)-x=0$$

$g(x)=f(x)-x$ 로 놓으면 함수 $g(x)$ 는 연속함수이므로

$g(0)g(1)<0$ 이면 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)=x$ 는 열린구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. ①

$$f(0)=a, f(1)=a-2 \text{이므로}$$

$$g(0)=a, g(1)=(a-2)-1=a-3$$

$$g(0)g(1)=a(a-3)<0 \text{에서}$$

$$0<a<3 \quad \text{②}$$

$$\text{답 } 0<a<3$$

채점 기준	비율
① 방정식 $f(x)=x$ 가 열린구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖게 하기 위한 조건을 구할 수 있다.	70 %
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %

037

방정식 $f(x)=0$ 의 실근은 0, m , n 이고 m , n 은 자연수이므로 사잇값 정리에 의하여

$$f(1)f(3)<0 \text{에서 } f(2)=0$$

$$f(3)f(5)<0 \text{에서 } f(4)=0$$

$$\text{따라서 } f(x)=x(x-2)(x-4) \text{이므로}$$

$$f(6)=6 \times 4 \times 2=48$$

답 ④

038

현민이의 몸무게가 60 kg인 순간이 적어도 한 번 존재하는 때는 2주와 3주 사이, 3주와 4주 사이, 4주와 5주 사이이다.

따라서 6주 동안 현민이의 몸무게가 60 kg이었던 순간이 3번 이상 존재하므로 n 의 최솟값은 3이다.

답 ③

실력을 높이는 연습 문제

본문 035쪽

01

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$ 에서도 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1)$ 이다. 이때

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=4-f(1) \text{이므로 } f(1)=4-f(1)$$

$$\therefore f(1)=2$$

답 ②

02

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이라면

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)=\lim_{x \rightarrow a+} f(x)=f(a) \text{이어야 한다. 이때}$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)=\lim_{x \rightarrow a-} (x+3)=a+3$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)=\lim_{x \rightarrow a+} 2x=2a$$

$$f(a)=2a$$

$$\text{이므로 } a+3=2a$$

$$\therefore a=3$$

답 ②

03

$$\text{ㄱ. } \lim_{x \rightarrow -1} f(x)g(x)=\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1} g(x)=-1 \times 1=-1$$

$$\text{이고, } f(-1)g(-1)=-1 \times 1=-1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$$

따라서 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다. (참)

$$\text{ㄴ. } \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x)=\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0-} g(x)$$

$$=-1 \times 0=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x)=\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0+} g(x)$$

$$=1 \times 0=0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)=0$$

$$\text{이때 } f(0)g(0)=1 \times 0=0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$$

따라서 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다. (거짓)

$$\text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)=\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} g(x)=1 \times 1=1 \text{이고,}$$

$$f(1)g(1)=1 \times 1=1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)=f(1)g(1)$$

따라서 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

04

문제 접근하기

$x=a$ 에서 불연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 합성함수 $(f \circ f)(x)$ 는 $f(x)=a$ 인 점에서 불연속임을 이용한다.

주어진 그래프에서 함수 $f(x)=\begin{cases} x-3 & (x \neq 2) \\ 1 & (x=2) \end{cases}$ 이므로 합성함수

$(f \circ f)(x)$ 에 대하여

(i) $f(x) \neq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= f(f(x)) \\ &= \begin{cases} f(x)-3 & (f(x) \neq 2) \\ f(2)-3 & (f(x)=2) \end{cases} \\ &= \begin{cases} (x-3)-3 & (x-3 \neq 2) \\ 1-3 & (x=2) \end{cases} \\ &= \begin{cases} x-6 & (x \neq 5) \\ -2 & (x=2) \end{cases} \end{aligned}$$

(ii) $f(x)=2$ 일 때

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= f(f(x)) \\ &= \begin{cases} f(x)-3 & (x \neq 2) \\ 1 & (f(x)=2) \end{cases} \\ &= \begin{cases} (x-3)-3 & (x \neq 2) \\ 1 & (x-3=2) \end{cases} \\ &= \begin{cases} x-6 & (x \neq 2) \\ 1 & (x=5) \end{cases} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서

$$(f \circ f)(x) = \begin{cases} x-6 & (x \neq 2, x \neq 5) \\ -2 & (x=2) \\ 1 & (x=5) \end{cases}$$

이므로 함수 $(f \circ f)(x)$ 는 $x=2, x=5$ 에서 불연속이므로 $a=2, a=5$ 이다.

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$2+5=7$$

답 ⑤

05

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=-1, x=1$ 에서 연속이어야 한다.

$x=-1$ 에서 연속이려면 $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = f(-1)$ 이어야 한다. 이때

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (2x+a) = -2+a$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x^2+b) = 1+b$$

$$f(-1) = -2+a$$

$$\text{이므로 } -2+a = 1+b$$

$$\therefore a = b+3$$

또, $x=1$ 에서 연속이려면 $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1)$ 이어야 한다.

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2+b) = 1+b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (cx+3) = c+3$$

$$f(1) = c+3$$

$$\text{이므로 } 1+b = c+3$$

$$\therefore c = b-2$$

$$\text{이때 } f(0)=3 \text{이므로 } f(0)=b=3$$

$$\text{따라서 } a=b+3=3+3=6, c=b-2=3-2=1 \text{이므로}$$

$$abc=6 \times 3 \times 1=18$$

답 ④

06

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이려면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이어야 한다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax-4}{x-1} = b \quad \dots\dots\dots ①$$

이때 $x \rightarrow 1$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+ax-4) = 0 \text{이므로 } 1+a-4=0$$

$$\therefore a=3$$

$a=3$ 을 ①에 대입하면

$$b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+4)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x+4) = 1+4=5$$

$$\therefore a+b=3+5=8$$

답 ⑤

07

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = f(2) \text{이어야 한다. 이때}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (a[x] - [x])$$

$$= (a-1) \lim_{x \rightarrow 2-} [x]$$

$$= (a-1) \times 1 = a-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (a[x] - [x])$$

$$= (a-1) \lim_{x \rightarrow 2+} [x]$$

$$= (a-1) \times 2 = 2a-2$$

$$f(2) = 2a-2$$

$$\text{이므로 } a-1 = 2a-2$$

$$\therefore a=1$$

답 ④

참고

$[x]$ 가 x 보다 크지 않은 최대의 정수일 때, 정수 n 에 대하여

$$(1) x \rightarrow n- \text{이면 } n-1 \leq x < n \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow n-} [x] = n-1$$

$$(2) x \rightarrow n+ \text{이면 } n \leq x < n+1 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow n+} [x] = n$$

08

$$x \neq 2 \text{일 때, } f(x) = \frac{ax^2+bx}{x-2}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=2$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \text{이어야 한다.}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2+bx}{x-2} = 6 \quad \dots\dots\dots ①$$

이때 $x \rightarrow 2$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} (ax^2 + bx) = 0$ 이므로 $4a + 2b = 0$

$\therefore b = -2a$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2 - 2ax}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax(x - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} ax = 2a\end{aligned}$$

이때 $2a = 6$ 이므로 $a = 3$

$a = 3$ 을 ㉠에 대입하면 $b = -6$

$\therefore ab = 3 \times (-6) = -18$

답 -18

09

ㄱ. $h(x) = f(x) + g(x)$ 라고 하면 $g(x) = h(x) - f(x)$

이때 $f(x)$, $h(x)$ 가 연속함수이므로 연속함수의 성질에 의하여 $g(x)$ 도 연속함수이다. (참)

ㄴ. [반례] $f(x) = 0$, $g(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$ 이라고 하면 $f(x)$ 와

$f(x)g(x)$ 는 연속함수이지만 $g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. [반례] $f(x) = 0$, $g(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$ 이라고 하면 $f(x)$ 와

$\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 연속함수이지만 $g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

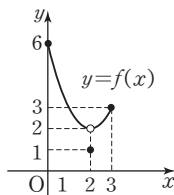
10

$x \neq 2$ 일 때

$$f(x) = x^2 - 4x + 6 = (x - 2)^2 + 2$$

이므로 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 불연속이고 $x = 0$ 일 때 최댓값 6, $x = 2$ 일 때 최솟값 1을 갖는다.



답 최댓값: 6, 최솟값: 1

11

문제 접근하기

방정식 $f(x) = g(x)$ 의 꼴은 $f(x) - g(x) = 0$ 의 꼴로 바꾼 후 사잇값 정리를 이용해서 방정식이 실근을 가질 때의 조건을 생각한다.

$\rightarrow$ 방정식 $f(x) = g(x)$ 는 방정식 $h(x) = 0$ 이다.

$h(x) = f(x) - g(x)$ 로 놓으면 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 함수 $h(x)$ 가 연속이므로 사잇값 정리에 의하여 $h(1)h(2) < 0$ 일 때 열린구간 $(1, 2)$ 에서 방정식 $h(x) = 0$ 이 적어도 하나의 실근을 갖는다.

다항함수 $h(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서도 연속이다.

이때 $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + k$, $g(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ 이므로

$$h(1) = f(1) - g(1) = (k - 1) - (-2) = k + 1$$

$$h(2) = f(2) - g(2) = (k - 4) - (-7) = k + 3$$

$$h(1)h(2) < 0 \text{에서 } (k + 1)(k + 3) < 0$$

$$\therefore -3 < k < -1$$

따라서 정수 k 는 -2의 1개이다.

답 ①

12

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 12 \text{에서 } f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x - 4} = 12 \text{에서 } f(4) = 0$$

$\rightarrow x \rightarrow a$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이면 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $f(x)$ 는 x , $x - 4$ 를 인수를 가지므로

$f(x) = x(x - 4)g(x)$ ($g(x)$ 는 다항함수)로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - 4)g(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (x - 4)g(x)$$

$$= -4g(0) = 12$$

$$\therefore g(0) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x(x - 4)g(x)}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} xg(x)$$

$$= 4g(4) = 12$$

$$\therefore g(4) = 3$$

$g(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이고, $g(0)g(4) < 0$

이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x) = 0$ 은 열린구간 $(0, 4)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 $x = 0$, $x = 4$, $g(x) = 0$ 일 때 적어도 3개의 실근을 갖는다.

답 ③

품셈 개념 CHECK

인수 정리_高 公통수학 1

다항식 $p(x)$ 에 대하여

(1) $p(a) = 0$ 이면 $p(x)$ 는 일차식 $x - a$ 로 나누어떨어진다.

(2) $p(x)$ 가 일차식 $x - a$ 로 나누어떨어지면 $p(a) = 0$ 이다.

03

미분계수와 도함수

기분을 다지는 유형

본문 039쪽

001

$$(1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{8 - 0}{2} = 4$$

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{3 - (-1)}{2} = 2$$

$$(3) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-5) - f(-1)}{-5 - (-1)} = \frac{15 - (-1)}{-4} = -4$$

답 (1) 4 (2) 2 (3) -4

002

$$(1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-3 - (-1)}{2} = -1$$

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{7 - 3}{2} = 2$$

$$(3) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{13 - (-3)}{2} = 8$$

답 (1) -1 (2) 2 (3) 8

003

x의 값이 -2에서 1까지 변할 때의 함수 f(x)의 평균변화율은

$$\frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{(-a+6) - (2a+9)}{3} = \frac{-3a-3}{3} = -a-1$$

이때 $-a-1=8$ 이므로 $a=-9$

답 ①

004

x의 값이 -2에서 0까지 변할 때의 함수 f(x)의 평균변화율은

$$\frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{0 - (-8)}{2} = 4 \quad \dots\dots ㉠$$

x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 함수 f(x)의 평균변화율은

$$\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{a(a+1)(a-2) - 0}{a} = (a+1)(a-2) \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $4 = (a+1)(a-2)$

$$a^2 - a - 6 = 0, (a+2)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 3 (\because a > 0)$$

답 ③

005

직선 AB의 기울기가 2이므로

$$\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{f(5) - f(1)}{4} = 2 \quad \therefore f(5) - f(1) = 8$$

x의 값이 0에서 1까지 변할 때의 함수 f(x)의 평균변화율은

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0) = f(1) - f(5) = -8$$

 $f(0) = f(5)$

답 ①

006

$$(1) f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{3 \times (1+\Delta x) + 4\} - (3 \times 1 + 4)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3 = 3$$

$$(2) f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{2 \times (1+\Delta x)^2\} - (2 \times 1^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + 2\Delta x) = 4$$

답 (1) 3 (2) 4

| 다른 풀이 |

$$(1) f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 4 - (3 \times 1 + 4)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 3 = 3$$

$$(2) f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2 \times 1^2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2(x+1) = 4$$

007

$$(1) f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(a+\Delta x)^2 + 1\} - (a^2 + 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 + 2a\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2a) = 2a$$

이때 $2a = 12$ 이므로 $a = 6$

$$(2) f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a+\Delta x)^3 - a^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^3 + 3a(\Delta x)^2 + 3a^2\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{(\Delta x)^2 + 3a\Delta x + 3a^2\} = 3a^2$$

이때 $3a^2 = 12$ 이므로 $a^2 = 4$

$$\therefore a = 2 (\because a > 0)$$

답 (1) 6 (2) 2

| 다른 풀이 |

$$(1) f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 + 1) - (a^2 + 1)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+a)(x-a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (x+a) = 2a$$

이때 $2a = 12$ 이므로 $a = 6$

$$(2) f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + ax + a^2) = 3a^2$$

이때 $3a^2=12$ 이므로 $a^2=4$
 $\therefore a=2$ ($\because a>0$)

008

x 의 값이 1에서 $1+h$ 까지 변할 때의 평균변화율이 h^2+2h+3 이므로

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} &= h^2+2h+3 \text{에서} \\ \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= h^2+2h+3 \\ \therefore f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h^2+2h+3) = 3\end{aligned}$$

답 ⑤

참고

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \text{에서} \\ \Delta x &= h \text{로 놓으면} \\ f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\end{aligned}$$

009

x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} &= \frac{(3b^2+2b-7)-(3a^2+2a-7)}{b-a} \xrightarrow{\text{분자를 인수분해하면}} \\ &= \frac{(b-a)(3a+3b+2)}{b-a} \begin{aligned} &= 3(b^2-a^2)+2(b-a) \\ &= 3(b+a)(b-a)+2(b-a) \\ &= (b-a)\{3(b+a)+2\} \\ &= (b-a)(3a+3b+2) \end{aligned} \\ &= 3a+3b+2 \end{aligned}$$

①

함수 $f(x)$ 의 $x=-1$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(-1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{3(-1+\Delta x)^2+2(-1+\Delta x)-7\}-(-6)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(\Delta x)^2-4\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3\Delta x-4) = -4\end{aligned}$$

②

①, ②에서 $3a+3b+2=-4$ 이므로 $3a+3b=-6$

$\therefore a+b=-2$

답 -2

채점 기준	비율
① x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율을 구할 수 있다.	40 %
② 함수 $f(x)$ 의 $x=-1$ 에서의 미분계수를 구할 수 있다.	40 %
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

|다른 풀이|

함수 $f(x)$ 의 $x=-1$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2+2x-7-(-6)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2+2x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3x-1)(x+1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (3x-1) = -4\end{aligned}$$

010

$f(x)=2x^2-x$ 라고 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 6)$ 에서의 접선의 기울기는 함수 $f(x)$ 의 $x=2$ 에서의 미분계수 $f'(2)$ 와 같으므로

$$\begin{aligned}f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{2(2+\Delta x)^2-(2+\Delta x)\}-(2 \times 2^2-2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(\Delta x)^2+7\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2\Delta x+7) = 7\end{aligned}$$

답 ⑤

011

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1-3\Delta x)-f(1)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1-3\Delta x)-f(1)}{-3\Delta x} \times (-3) \\ &= -3f'(1) = -3 \times (-2) = 6\end{aligned}$$

답 ⑤

참고

미분계수의 정의를 이용하도록 식을 변형할 때에는 다음과 같이 색칠한 부분을 같은 꼴로 만들어 준다.

실수 p 에 대하여

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+p\Delta x)-f(a)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+p\Delta x)-f(a)}{p\Delta x} \times p \\ &= pf'(a)\end{aligned}$$

012

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3-5h)-f(-3)}{4h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3-5h)-f(-3)}{-5h} \times \left(-\frac{5}{4}\right) \\ &= -\frac{5}{4}f'(-3) = -\frac{5}{4} \times 4 = -5\end{aligned}$$

답 ①

013

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{3h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{2h} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3}f'(a)\end{aligned}$$

답 ③

014

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3+\Delta x)-f(3-2\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{f(3+\Delta x)-f(3)\}-\{f(3-2\Delta x)-f(3)\}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3-2\Delta x)-f(3)}{-2\Delta x} \times (-2) \\ &= f'(3)+2f'(3) \\ &= 3f'(3) = 3 \times 2 = 6\end{aligned}$$

답 ⑤

015

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h)-5}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} \\ &= f'(-3) = -4\end{aligned}$$

답 ①

016

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} &= 2 \text{이므로 } f'(1) = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1-\Delta x)}{2\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{f(1+\Delta x) - f(1)\} - \{f(1-\Delta x) - f(1)\}}{2\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{2\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1-\Delta x) - f(1)}{2\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \times \frac{1}{2} \\ &\quad - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1-\Delta x) - f(1)}{-\Delta x} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}f'(1) + \frac{1}{2}f'(1) \\ &= f'(1) = 2 \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

답 ⑤

017

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3\Delta x) - f(-\Delta x)}{3\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{f(0+3\Delta x) - f(0)\} - \{f(0-\Delta x) - f(0)\}}{3\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+3\Delta x) - f(0)}{3\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0-\Delta x) - f(0)}{-\Delta x} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= f'(0) + \frac{1}{3}f'(0) \\ &= \frac{4}{3}f'(0) \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \text{이때 } \frac{4}{3}f'(0) &= 8 \text{이므로 } f'(0) = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

답 6

채점 기준	비율
① $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3\Delta x) - f(-\Delta x)}{3\Delta x}$ 를 $f'(0)$ 에 대한 식으로 정리할 수 있다.	80 %
② $f'(0)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

018

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - 4}{h} &= 6 \text{에서 } h \rightarrow 0 \text{일 때 극한값이 존재하고} \\ (\text{분모}) &\rightarrow 0 \text{이므로 } (\text{분자}) \rightarrow 0 \text{이어야 한다.} \\ \text{즉, } \lim_{h \rightarrow 0} \{f(1+2h) - 4\} &= 0 \text{이므로} \\ f(1) &= 4 \\ \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - 4}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2 \\ &= 2f'(1) \\ \text{이때 } 2f'(1) &= 6 \text{이므로 } f'(1) = 3 \\ \therefore f(1) + f'(1) &= 4 + 3 = 7 \end{aligned}$$

답 ③

019

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = f'(-2) = 5$$

답 ⑤

참고

미분계수의 정의 $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 를 이용하도록 식을 변형할 때
에는 주어진 식을 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(\text{●}) - f(\text{▲})}{\text{●} - \text{▲}}$ 의 꼴을 포함한 식으로 변형한다.
→ 같은 모양끼리 같은 꼴이 되게 한다.

020

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1} \right\} \\ &= \frac{1}{2}f'(1) = \frac{1}{2} \times (-2) = -1 \end{aligned}$$

답 ②

021

$$\begin{aligned} 2x = t \text{로 놓으면 } x &\rightarrow 3 \text{일 때 } t \rightarrow 6 \text{이므로 } \leftarrow \textcircled{1} \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(2x) - f(6)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(2x) - f(6)}{2x - 6} \times 2 \\ &= \lim_{t \rightarrow 6} \frac{f(t) - f(6)}{t - 6} \times 2 \quad \textcircled{2} \\ &= 2f'(6) = 2 \times (-2) = -4 \end{aligned}$$

답 ①

022

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(1) - f(x)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{xf(1) - f(1)\} - \{f(x) - f(1)\}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(1)}{x - 1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= f(1) - f'(1) = 2 - 3 = -1 \end{aligned}$$

답 ③

023

$$\begin{aligned} x^3 = t \text{로 놓으면 } x &\rightarrow a \text{일 때 } t \rightarrow a^3 \text{이므로 } \leftarrow \textcircled{1} \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x^3) - f(a^3)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x^3) - f(a^3)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)} \times (x^2+ax+a^2) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x^3) - f(a^3)}{x^3 - a^3} \times (x^2+ax+a^2) \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow a^3} \frac{f(t) - f(a^3)}{t - a^3} \times \lim_{x \rightarrow a} (x^2+ax+a^2) \quad \textcircled{2} \\ &= 3a^2f'(a^3) \end{aligned}$$

답 ③

024

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 + x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{(x-2)(x+3)} \quad (\because f(2) = 0) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times \frac{1}{x + 3} \right\} \\ &= \frac{1}{5}f'(2) = \frac{1}{5} \times 5 = 1 \end{aligned}$$

답 ④

025

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} f'(1)\end{aligned}$$

이때 $\frac{1}{2} f'(1) = -1$ 이므로 $f'(1) = -2$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1-2\Delta x) - f(1+3\Delta x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{f(1-2\Delta x) - f(1)\} - \{f(1+3\Delta x) - f(1)\}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1-2\Delta x) - f(1)}{-2\Delta x} \times (-2) \\ &\quad - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+3\Delta x) - f(1)}{3\Delta x} \times 3 \\ &= -2f'(1) - 3f'(1) \\ &= -5f'(1) \\ &= -5 \times (-2) = 10\end{aligned}$$

답 10

026

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1-\Delta x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{f(1+\Delta x) - f(1)\} - \{f(1-\Delta x) - f(1)\}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1-\Delta x) - f(1)}{-\Delta x} \times (-1) \\ &= f'(1) + f'(1) = 2f'(1) \quad \text{①} \\ \text{이때 } 2f'(1) &= 12 \text{ 이므로 } f'(1) = 6 \quad \text{②} \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{f(x) - f(1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{f(x) - f(1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{\frac{f(x) - f(1)}{x-1}} \\ &= \frac{2}{f'(1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{③}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
① $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1-\Delta x)}{\Delta x} = 12$ 의 좌변을 간단히 할 수 있다.	40 %
② $f'(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %
③ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{f(x) - f(1)}$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

027

(1) (i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고 미분가능하다.

(2) (i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1$$

이므로 극한값 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, 즉 $f'(0)$ 의 값이 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

(3) $f(0)$ 이 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

답 (1) 연속이고, 미분가능하다.

(2) 연속이고, 미분가능하지 않다.

(3) 불연속이고, 미분가능하지 않다.

참고

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속인지 알아보려면 다음을 모두 확인해야 한다.

(i) 함수값 $f(a)$ 가 존재하는지 확인한다.

(ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재하는지 확인한다.

⇒ $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ 의 값이 같은지 확인한다.

(iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 인지 확인한다.

028

ㄱ. (i) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이고 미분가능하다.

ㄴ. (i) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이고 미분가능하다.

ㄷ. (i) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned}(ii) \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x+1)(x-1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (-(x+1)) = -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x+1) = 2\end{aligned}$$

이므로 극한값 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, 즉 $f'(1)$ 의 값이 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

따라서 구하는 함수는 ㄷ이다.

답 ③

029

①, ②, ③의 그래프는 $x=a$ 에서 연속이지만 뽕족하므로 미분가능하지 않다.

④의 그래프는 $x=a$ 에서 끊어져 있어 불연속이므로 미분가능하지 않다.

따라서 $x=a$ 에서 미분가능한 것은 ⑤이다.

답 ⑤

030

① 함수 $f(x)$ 는 $x=1, x=4, x=5$ 에서 불연속이므로 이때의 x 의 값은 3개이다.

② 함수 $f(x)$ 는 $x=1, x=3, x=4, x=5$ 에서 미분가능하지 않으므로 이때의 x 의 값은 4개이다.

③ 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않으므로 이때의 x 의 값은 1개이다.

④ 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 그 값이 정의되지 않으므로 이때의 x 의 값은 1개이다.

⑤ 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 극한값이 존재하지 않으므로 이때의 x 의 값은 1개이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 2$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$

답 ④

031

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로 $x=2$ 에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$ 에서

$$4b + 4 = 4 + 4a \quad \therefore a = b \quad \text{..... ①}$$

또, $f'(2)$ 의 값이 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{bx^2 + 4 - (4 + 4a)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{bx^2 - 4b}{x - 2} \quad (\because \text{①}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{b(x+2)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} b(x+2) \\ &= 4b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2ax - (4 + 4a)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2ax - 2(2 + 2a)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2+2a)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+2+2a) \\ &= 4 + 2a \end{aligned}$$

에서 $4b = 4 + 2a$

①에서 $a = b$ 이므로

$$4a = 4 + 2a, \quad 2a = 4$$

$$\therefore a = 2, \quad b = 2$$

$$\therefore a + b = 2 + 2 = 4$$

답 4

|다른 풀이|

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + 4 & (x < 2) \\ x^2 + 2ax & (x \geq 2) \end{cases} \text{에서 } f'(x) = \begin{cases} 2bx & (x < 2) \\ 2x + 2a & (x > 2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$\rightarrow x=2$ 에서 미분가능 $\Rightarrow x=2$ 에서 연속

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (bx^2 + 4) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 2ax) = 4 + 4a$$

$$4b + 4 = 4 + 4a \quad \therefore a = b = 0 \quad \text{..... ①}$$

$f'(2)$ 의 값이 존재하므로

$\rightarrow x=2$ 에서 미분가능 $\Rightarrow f'(2)$ 의 값 존재

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 2bx = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 2a), \quad 4b = 4 + 2a$$

$$\therefore a - 2b = -2 \quad \text{..... ②}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 2, b = 2$

$$\therefore a + b = 2 + 2 = 4$$

032

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하므로 $x=0$ 에서 미분가능하고 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ 에서

$$b = -1$$

또, $f'(0)$ 의 값이 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + 2x - 1 - (-1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x^2 + 2)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax - 1 - (-1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} \\ &= a \end{aligned}$$

에서 $a = 2$

$$\therefore ab = 2 \times (-1) = -2$$

답 -2

033

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하므로 $x=-1$ 에서 미분가능하고 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$ 에서

$$-b = -6 + a \quad \therefore b = 6 - a \quad \text{..... ①}$$

또, $f'(-1)$ 의 값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{bx^3 - (-6 + a)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{bx^3 + b}{x + 1} \quad (\because \text{①})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{b(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} b(x^2 - x + 1)$$

$$= 3b$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{6x+a-(-6+a)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{6x+6}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{6(x+1)}{x+1} \\ &= 6\end{aligned}$$

에서 $3b=6 \quad \therefore b=2$

$b=2$ 를 ㉠에 대입하면 $2=6-a \quad \therefore a=4$

$\therefore ab=4 \times 2=8$

답 8

034

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1)$ 에서

$1=a(1+b) \quad \therefore a+ab=1$ ㉠

또, $f'(1)$ 의 값이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2-(a+ab)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2-1}{x-1} \quad (\because \text{㉠}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (x+1) \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{ax+ab-(a+ab)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{a(x-1)}{x-1} \\ &= a\end{aligned}$$

에서 $a=2$

$a=2$ 를 ㉠에 대입하면 $2+2b=1, 2b=-1$

$\therefore b=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x < 1) \\ 2\left(x-\frac{1}{2}\right) & (x \geq 1) \end{cases}$ 이므로

$$f(4) = 2 \times \left(4 - \frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{7}{2} = 7$$

답 7

035

함수 $f(x)$ 가 미분가능한 함수이므로 $x=0$ 에서 미분가능하고 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = f(0)$ 에서

$1=a+b$ ㉠

또, $f'(0)$ 의 값이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x+1-(a+b)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x+1-1}{x} \quad (\because \text{㉠}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x}{x} \\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{a(x-1)^2+b-(a+b)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{a\{(x-1)^2-1\}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{ax(x-2)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} a(x-2) \\ &= -2a\end{aligned}$$

에서 $-2a=-1 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$

$a=-\frac{1}{2}$ 을 ㉠에 대입하면 $1=-\frac{1}{2}+b \quad \therefore b=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x) = \begin{cases} -x+1 & (x < 0) \\ \frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2} & (x \geq 0) \end{cases}$ 이므로

$$f(1) = \frac{1}{2} \times (1-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

답 ②

036

$$\begin{aligned}(1) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)-x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1\end{aligned}$$

이므로 $f'(1)=1$

$$\begin{aligned}(2) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x\end{aligned}$$

이므로 $f'(1)=2 \times 1=2$

$$\begin{aligned}(3) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)-3x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3\end{aligned}$$

이므로 $f'(1)=3$

답 (1) $f'(x)=1, f'(1)=1$ (2) $f'(x)=2x, f'(1)=2$

(3) $f'(x)=3, f'(1)=3$

037

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{2(x+h)^2+3\}-(2x^2+3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh+2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (\textcircled{7} 4x+2h) = \textcircled{4} 4x\end{aligned}$$

$\therefore \textcircled{7}: 4x+2h, \textcircled{4}: 4x$

답 ㉠: $4x+2h$ ㉡: $4x$

038

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n-x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(\textcircled{7} x+h) - x\} \{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\dots+x^{n-1}\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\dots+x^{n-1}\} \\ &= \underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\dots+x^{n-1}}_{n\textcircled{7}} \\ &= \textcircled{4} n x^{n-1}\end{aligned}$$

∴ (가): $x+h$, (나): n

답 (가): $x+h$ (나): n

참고

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \cdots + b^{n-1})$$

039

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)f(x+h) - 2xf(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x\{f(x+h) - f(x)\} + \boxed{A} 2hf(x+h)}{h} \\ &= 2x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + 2 \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \\ &= 2xf'(x) + \boxed{B} 2f(x) \end{aligned}$$

∴ $A=2hf(x+h)$, $B=2f(x)$

답 $A=2hf(x+h)$, $B=2f(x)$

040

- (1) $y' = -2x$
 (2) $y' = (4 \times 2)x + 3 = 8x + 3$
 (3) $y' = -(2 \times 3)x^2 + 4 = -6x^2 + 4$
 (4) $y' = -(2 \times 5)x^4 = -10x^4$

답 (1) $y' = -2x$ (2) $y' = 8x + 3$
 (3) $y' = -6x^2 + 4$ (4) $y' = -10x^4$

041

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x - 2$ 라고 하면
 $f'(x) = x^2 + x + 4$
 따라서 $x = -3$ 에서의 미분계수는
 $f'(-3) = (-3)^2 + (-3) + 4 = 10$

답 ④

참고

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 미분가능할 때
 $y = af(x) \pm bg(x)$ (a , b 는 상수) $\Rightarrow y' = af'(x) \pm bf'(x)$ (복호동순)

042

$f'(x) = 6x^2 - 2x$ 이므로
 $f'(1) = 6 - 2 = 4$

답 ④

043

$f'(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^9$ 이므로 ①
 $f'(-1) = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + (-1) = 0$
 $f'(1) = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 10$ ②
 ∴ $f'(-1) + f'(1) = 0 + 10 = 10$ ③

답 10

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
② $f'(-1)$, $f'(1)$ 의 값을 구할 수 있다	40 %
③ $f'(-1) + f'(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

044

$f'(x) = 4x^3 + 2x$ 이므로 $f'(a) = 4a^3 + 2a$
 이때 $4a^3 + 2a = 36$ 이므로 $4a^3 + 2a - 36 = 0$
 $2(a-2)(2a^2 + 4a + 9) = 0 \rightarrow$ **조립제법을 이용해서 인수분해**
 ∴ $a = 2$ (∵ $2a^2 + 4a + 9 > 0$) $\rightarrow$ **a 는 실수이므로 $a = 2$**

답 ⑤

045

$f'(x) = -9x^2 + 2ax$ 이고, $f'(1) = -3$ 이므로
 $-9 + 2a = -3$, $2a = 6$
 ∴ $a = 3$

답 ④

046

$f(0) = -5$ 이므로 $b = -5$
 $f'(x) = 2x^2 - ax + 3$ 이고, $f'(-3) = 9$ 이므로
 $18 + 3a + 3 = 9$, $3a = -12$
 ∴ $a = -4$

따라서 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 5$ 이므로
 $f(3) = 18 + 18 + 9 - 5 = 40$

답 ③

047

$f(3) = -4$ 이므로 $9 + 3a + b = -4$
 ∴ $3a + b = -13$ ①
 $f'(x) = 2x + a$ 이고, $f'(-1) = -5$ 이므로
 $-2 + a = -5$ ∴ $a = -3$
 $a = -3$ 을 ①에 대입하면 $b = -4$
 ∴ $a + b = -3 + (-4) = -7$

답 ①

048

(1) $y' = (x+1)'(2x+3) + (x+1)(2x+3)'$
 $= (2x+3) + 2(x+1)$
 $= 2x + 3 + 2x + 2$
 $= 4x + 5$
 (2) $y' = (x^2-3)'(4x+1) + (x^2-3)(4x+1)'$
 $= 2x(4x+1) + 4(x^2-3)$
 $= 8x^2 + 2x + 4x^2 - 12$
 $= 12x^2 + 2x - 12$
 (3) $y' = x'(x+1)(x-2) + x(x+1)'(x-2) + x(x+1)(x-2)'$
 $= (x+1)(x-2) + x(x-2) + x(x+1)$
 $= x^2 - x - 2 + x^2 - 2x + x^2 + x$
 $= 3x^2 - 2x - 2$
 답 (1) $y' = 4x + 5$ (2) $y' = 12x^2 + 2x - 12$ (3) $y' = 3x^2 - 2x - 2$

049

(1) $y' = \{(2x-3)^3\}'$
 $= 3(2x-3)^{3-1}(2x-3)'$
 $= 6(2x-3)^2$

$$\begin{aligned}
 (2) y' &= \{(x^2+2x+3)^4\}' \\
 &= 4(x^2+2x+3)^{4-1}(x^2+2x+3)' \\
 &= 4(x^2+2x+3)^3(2x+2) \\
 &= 8(x+1)(x^2+2x+3)^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) y' &= (x^3)'(x+2)^2 + x^3\{(x+2)^2\}' \\
 &= 3x^2(x+2)^2 + x^3 \times 2(x+2)(x+2)' \\
 &= 3x^2(x+2)^2 + 2x^3(x+2) \\
 &= x^2(x+2)(3x+6+2x) \\
 &= x^2(x+2)(5x+6)
 \end{aligned}$$

$$\text{답 (1) } y' = 6(2x-3)^2 \quad (2) y' = 8(x+1)(x^2+2x+3)^3$$

$$(3) y' = x^2(x+2)(5x+6)$$

050

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (x^2+1)'(3x^2-x) + (x^2+1)(3x^2-x)' \\
 &= 2x(3x^2-x) + (x^2+1)(6x-1)
 \end{aligned}$$

$$\therefore f'(1) = 2 \times 2 + 2 \times 5 = 14$$

답 ④

051

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= x'(3x-1)(4x+2) + x(3x-1)'(4x+2) \\
 &\quad + x(3x-1)(4x+2)' \\
 &= (3x-1)(4x+2) + 3x(4x+2) + 4x(3x-1) \\
 &= 36x^2 + 4x - 2
 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f'(a) = -2 \text{이므로 } 36a^2 + 4a - 2 = -2$$

$$36a^2 + 4a = 0, 4a(9a+1) = 0$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = -\frac{1}{9}$$

$$\text{답 } 0, -\frac{1}{9}$$

052

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (3x^3+1)'(x-2)^2 + (3x^3+1)\{(x-2)^2\}' \\
 &= 9x^2(x-2)^2 + (3x^3+1) \times 2(x-2)(x-2)' \\
 &= 9x^2(x-2)^2 + 2(3x^3+1)(x-2) \\
 \therefore f'(1) &= 9 \times 1^2 \times (-1)^2 + 2 \times 4 \times (-1) = 1
 \end{aligned}$$

답 1

053

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \{(3x+a)^4\}' = 4(3x+a)^3(3x+a)' \\
 &= 12(3x+a)^3
 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f'(1) = 12 \text{이므로 } 12(3+a)^3 = 12$$

$$(3+a)^3 = 1, a^3 + 9a^2 + 27a + 26 = 0$$

$$(a+2)(a^2+7a+13) = 0$$

$$\therefore a = -2 (\because a^2+7a+13 > 0)$$

답 ②

054

$$f(x) = (x^2+3)^4 \text{이라고 하면}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \{(x^2+3)^4\}' = 4(x^2+3)^3(x^2+3)' \\
 &= 8x(x^2+3)^3 \quad \text{①}
 \end{aligned}$$

$$\text{곡선 } y=f(x) \text{ 위의 } x=1 \text{인 점에서의 접선의 기울기는 } f'(1) \text{이므로}$$

$$f'(1) = 8 \times 4^3 = 512 \quad \text{②}$$

답 512

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	60 %
② 접선의 기울기를 구할 수 있다.	40 %

055

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 \text{에서 } f'(x) = 2x + 2$$

$$g(x) = x^2 + 5x + 3 \text{에서 } g'(x) = 2x + 5$$

$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 이므로 함수 $f(x)g(x)$ 의 $x=0$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}
 \{f(0)g(0)\}' &= f'(0)g(0) + f(0)g'(0) \\
 &= 2 \times 3 + 1 \times 5 = 11
 \end{aligned}$$

답 ①

056

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2)$$

$$\text{이때 } f'(x) = 6x \text{이므로}$$

$$f'(2) = 6 \times 2 = 12$$

답 ④

057

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\} = \frac{1}{2} f'(1)$$

$$\text{이때 } f'(x) = -12x^3 + 6x^2 + 4 \text{이므로}$$

$$f'(1) = -12 + 6 + 4 = -2$$

따라서 구하는 값은

$$\frac{1}{2} f'(1) = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$$

답 ①

058

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(1+h) - f(1)\} - \{f(1-h) - f(1)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \times (-1)$$

$$= f'(1) + f'(1) = 2f'(1)$$

$$\text{이때 } f'(x) = 2x + 3 \text{이므로 } f'(1) = 2 + 3 = 5$$

따라서 구하는 값은

$$2f'(1) = 2 \times 5 = 10$$

답 ③

059

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(2x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x) - f(1)\} - \{f(2x-1) - f(1)\}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x-1) - f(1)}{(2x-1)-1} \times 2$$

$$= f'(1) - 2f'(1) = -f'(1) \quad \text{↗ } x \rightarrow 1 \text{일 때 } 2x-1 \rightarrow 1$$

$$\text{이때 } f'(x) = 6x + 2 \text{이므로 } f'(1) = 6 + 2 = 8$$

따라서 구하는 값은
 $-f'(1) = -8$

답 ①

060

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h} \times (-2) \\ = -2f'(a)$$

이때 $-2f'(a) = -10$ 이므로 $f'(a) = 5$ ㉠

한편, $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ 에서 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ 이므로

$$f'(a) = 3a^2 - 4a + 1 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서 $3a^2 - 4a + 1 = 5$

$$3a^2 - 4a - 4 = 0, (3a+2)(a-2) = 0$$

따라서 구하는 정수 a 의 값은 2이다.

답 ⑤

061

$f(x) = x^6 - 3x$ 라고 하면 $f(1) = 1 - 3 = -2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

이때 $f'(x) = 6x^5 - 3$ 이므로 구하는 값은

$$f'(1) = 6 - 3 = 3$$

답 ④

062

$f(x) = x^n - 5x^2 - 2x$ 라고 하면 $f(1) = 1 - 5 - 2 = -6$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 5x^2 - 2x + 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) \quad \text{..... ①}$$

이때 $f'(x) = nx^{n-1} - 10x - 2$ 이므로

$$f'(1) = n - 10 - 2 = n - 12 \quad \text{..... ②}$$

이때 $f'(1) = 0$ 이므로 $n - 12 = 0$

$$\therefore n = 12 \quad \text{..... ③}$$

답 12

채점 기준	비율
① $f(x) = x^n - 5x^2 - 2x$ 라고 하고 미분계수를 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	40 %
② $f'(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ n 의 값을 구할 수 있다.	20 %

063

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{h} = 3 \text{에서}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{-h} \times (-1) = 3$$

$$-f'(2) = 3 \quad \therefore f'(2) = -3 \quad \text{..... ㉠}$$

$f(x) = x^2 + ax + 3$ 에서 $f'(x) = 2x + a$

이때 ㉠에서 $f'(2) = -3$ 이므로

$$4 + a = -3 \quad \therefore a = -7$$

따라서 $f(x) = x^2 - 7x + 3$ 이므로

$$f(-2) = 4 + 14 + 3 = 21$$

답 21

064

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{2h} = 6 \text{에서}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \times \frac{1}{2} = 6$$

$$\frac{1}{2}f'(1) = 6 \quad \therefore f'(1) = 12 \quad \text{..... ㉠}$$

$f(x) = x^2 + ax$ 에서 $f'(x) = 2x + a$

이때 ㉠에서 $f'(1) = 12$ 이므로

$$2 + a = 12 \quad \therefore a = 10$$

답 ①

065

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h)-f(5-h)}{h} = 8 \text{에서}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(5+h)-f(5)\} - \{f(5-h)-f(5)\}}{h} = 8$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5-h)-f(5)}{-h} \times (-1) = 8$$

$$f'(5) + f'(5) = 8, 2f'(5) = 8$$

$$\therefore f'(5) = 4 \quad \text{..... ㉠}$$

$f(x) = ax^2 - 6x$ 에서 $f'(x) = 2ax - 6$

이때 ㉠에서 $f'(5) = 4$ 이므로

$$10a - 6 = 4 \quad \therefore a = 1$$

따라서 $f(x) = x^2 - 6x$ 이므로

$$f(2) = 4 - 12 = -8$$

답 ①

066

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 7$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$

이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 이므로 $f(1) = 0$

이때 $f(1) = 1 + a + b$ 이므로 $1 + a + b = 0$

$$\therefore a + b = -1 \quad \text{..... ㉠}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 7 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-0}{x-1} = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 7$$

$$\therefore f'(1) = 7 \quad \text{..... ㉡}$$

$f(x) = x^2 + ax + b$ 에서 $f'(x) = 2x + a$

이때 ㉡에서 $f'(1) = 7$ 이므로

$$2 + a = 7 \quad \therefore a = 5$$

$a = 5$ 를 ㉠에 대입하면

$$5 + b = -1 \quad \therefore b = -6$$

따라서 $f(x) = x^2 + 5x - 6$ 이므로

$$f'(x) = 2x + 5$$

$$\therefore f(2) + f'(2) = 8 + 9 = 17$$

답 ④

참고

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-b}{x-a} = c$ (c 는 실수)이면

$$\Rightarrow f(a) = b, f'(a) = c$$

067

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x^2+3x-1} = 1$ 에서 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 2인 이차식이므로 $f(x) = 2x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)로 놓자. ㉠

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-6}{x+1} = -4$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} \{f(x)-6\} = 0$ 이므로 $f(-1) = 6$

이때 ㉠에 $x = -1$ 을 대입하면 $f(-1) = 2 - a + b$ 이므로 $2 - a + b = 6$

$\therefore -a + b = 4$ ㉡

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-6}{x+1} = -4$ 에서 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = -4$

$\therefore f'(-1) = -4$ ㉢

한편, $f'(x) = 4x + a$ 이고, ㉢에서 $f'(-1) = -4$ 이므로 $-4 + a = -4 \quad \therefore a = 0$

$a = 0$ 을 ㉡에 대입하면 $b = 4$

따라서 $f(x) = 2x^2 + 4$ 이므로

$f(2) = 8 + 4 = 12$

답 12

068

(1) $f(x) = x^2 + ax$ 라고 하면 $f'(x) = 2x + a$

이때 곡선 $y = f(x)$ 위의 $x = 1$ 인 점에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(1) = 4$ 에서

$2 + a = 4 \quad \therefore a = 2$

(2) $f(x) = ax^3 + x + 1$ 이라고 하면 $f'(x) = 3ax^2 + 1$

이때 곡선 $y = f(x)$ 위의 $x = 1$ 인 점에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(1) = 4$ 에서

$3a + 1 = 4, 3a = 3 \quad \therefore a = 1$

답 (1) 2 (2) 1

참고

함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 m 이면

$\Rightarrow f(a) = b, f'(a) = m$

069

점 $(-1, 7)$ 이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

$f(-1) = 7$ 에서

$1 - a + 1 = 7, -a = 5 \quad \therefore a = -5$

$f(x) = x^2 - 5x + 1$ 이므로 $f'(x) = 2x - 5$

이때 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(-1, 7)$ 에서의 접선의 기울기가 m 이므로

$m = f'(-1) = -2 - 5 = -7$

$\therefore am = -5 \times (-7) = 35$

답 4

070

$f(x) = (2x+1)^3(x^2+k)$ 라고 하면

$f'(x) = \{(2x+1)^3\}'(x^2+k) + (2x+1)^3(x^2+k)'$
 $= 6(2x+1)^2(x^2+k) + 2x(2x+1)^3$
 $= 2(2x+1)^2(5x^2+x+3k)$

이때 곡선 $y = f(x)$ 위의 $x = -1$ 인 점에서의 접선의 기울기가 -4 이므로 $f'(-1) = -4$ 에서

$2 \times (-1)^2 \times (4+3k) = -4$

$8+6k = -4, 6k = -12$

$\therefore k = -2$

이때 $f(x) = (2x+1)^3(x^2-2)$ 이고, 곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(1, a)$ 를 지나므로

$a = f(1) = -27$

$\therefore a+k = -27-2 = -29$

답 3

071

점 $(a, 11)$ 이 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로 $f(a) = 11$ 에서

$3a^2 + ak + 3 = 11$

$\therefore 3a^2 + ak = 8$ ㉠

한편, $f'(x) = 6x + k$ 이고, 점 $(a, 11)$ 에서의 접선의 기울기가 -10 이므로 $f'(a) = -10$ 에서

$6a + k = -10$

$\therefore k = -6a - 10$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $3a^2 + a(-6a - 10) = 8$

$3a^2 + 10a + 8 = 0$

$(a+2)(3a+4) = 0$

$\therefore a = -2$ ($\because a$ 는 정수)

$a = -2$ 를 ㉡에 대입하면 $k = 12 - 10 = 2$

따라서 $f'(x) = 6x + 2$ 이므로

$a + f'(k) = -2 + f'(2) = -2 + 14 = 12$

답 3

072

점 $(2, -3)$ 이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

$f(2) = -3$ 에서

$4a + 2b + c = -3$ ㉠

또한, 점 $(-1, -9)$ 도 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

$f(-1) = -9$ 에서

$a - b + c = -9$ ㉡

1

㉠-㉡을 하면 $3a + 3b = 6$

$\therefore a + b = 2$ ㉢

한편, $f'(x) = 2ax + b$ 이고, 점 $(-1, -9)$ 에서의 접선의 기울기가 8이므로 $f'(-1) = 8$ 에서

$-2a + b = 8$ ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a = -2, b = 4$

$a = -2, b = 4$ 를 ㉡에 대입하면

$-2 - 4 + c = -9 \quad \therefore c = -3$ 2

따라서 $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$ 이므로

$f(3) = -18 + 12 - 3 = -9$ 3

답 -9

채점 기준	비율
① 두 점이 함수의 그래프 위의 점임을 이용하여 식을 세울 수 있다.	40 %
② a, b, c 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $f(3)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

073

다항식 x^3+ax+b 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라고 하면

$$x^3+ax+b=(x-1)^2Q(x) \quad \text{..... ㉠}$$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1+a+b=0$$

$$\therefore a+b=-1 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2+a=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$$

위 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$3+a=0 \quad \therefore a=-3$$

$a=-3$ 을 ㉡에 대입하면

$$-3+b=-1 \quad \therefore b=2$$

$$\therefore ab=-3 \times 2 = -6$$

답 ①

|다른 풀이|

$f(x)=x^3+ax+b$ 라고 하면 $f(x)$ 가 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지므로

$$f(1)=0, f'(1)=0$$

$$f(1)=0 \text{에서 } 1+a+b=0$$

$$\therefore a+b=-1 \quad \text{..... ㉠}$$

한편, $f(x)=x^3+ax+b$ 에서 $f'(x)=3x^2+a$ 이므로

$$f'(1)=0 \text{에서}$$

$$3+a=0 \quad \therefore a=-3$$

$a=-3$ 을 ㉠에 대입하면

$$-3+b=-1 \quad \therefore b=2$$

$$\therefore ab=-3 \times 2 = -6$$

참고

두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x)=(x-a)^2g(x)$ 이면

→ $f(x)$ 는 $(x-a)^2$ 으로 나누어떨어진다.

→ $f'(x)$ 는 $x-a$ 로 나누어떨어진다.

→ $f(a)=0, f'(a)=0$

074

다항식 $x^{10}+5x^2+1$ 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라고 하고, 나머지 $R(x)$ 를 $R(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라고 하면

$$x^{10}+5x^2+1=(x+1)^2Q(x)+R(x) \text{에서}$$

$$x^{10}+5x^2+1=(x+1)^2Q(x)+ax+b \quad \text{..... ㉠}$$

㉠의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$7=-a+b \quad \text{..... ㉡}$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$10x^9+10x=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$$

위 식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$a=-20$$

$a=-20$ 을 ㉡에 대입하면

$$7=20+b \quad \therefore b=-13$$

따라서 $R(x)=-20x-13$ 이므로

$$R(2)=-40-13=-53$$

답 -53

참고

다항식을 n 차식으로 나누었을 때의 나머지는 $(n-1)$ 차 이하이다.

실력을 높이는 연습 문제

본문 054쪽

01

x 의 값이 0에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{4-1}{3}=1$$

x 의 값이 -4에서 a 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned} \frac{f(a)-f(-4)}{a-(-4)} &= \frac{(-a^2+4a+1)-(-31)}{a+4} \\ &= \frac{-a^2+4a+32}{a+4} \\ &= \frac{-(a+4)(a-8)}{a+4} \\ &= -a+8 \end{aligned}$$

이때 $1=-a+8$ 이므로 $a=7$

답 ⑤

02

x 의 값이 0에서 2까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{(8+2a)-0}{2}=4+a$$

이때 $4+a=7$ 이므로 $a=3$

따라서 $f(x)=x^3+3x$ 이므로

$$f(1)=1+3=4$$

답 ④

03

x 의 값이 a 에서 1까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{f(1)-f(a)}{1-a}=\frac{5-(-a^2+2a+4)}{1-a}=\frac{(a-1)^2}{-(a-1)}=-a+1$$

함수 $f(x)$ 의 $x=2$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{-(2+\Delta x)^2+2(2+\Delta x)+4\}-4}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(\Delta x)^2-2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-\Delta x-2)=-2 \end{aligned}$$

이때 $-a+1=-2$ 이므로 $a=3$

답 ②

|다른 풀이|

함수 $f(x)$ 의 $x=2$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-x^2+2x+4)-4}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (-x)=-2 \end{aligned}$$

04

$f(x)=2x^2+x+3$ 이라고 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 3)$ 에서의 접선의 기울기는 함수 $f(x)$ 의 미분계수 $f'(0)$ 과 같으므로

$$\begin{aligned}
 f'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{2(\Delta x)^2 + 4\Delta x + 3\} - 3}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(\Delta x)^2 + 4\Delta x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2\Delta x + 4) = 4
 \end{aligned}$$

답 1

참고

미분법의 공식을 이용하여 다음과 같이 구할 수도 있다.

⇒ $f'(x) = 4x + 4$ | $f'(0) = 4$

05

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+4\Delta x) - f(1+2\Delta x)}{3\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{f(1+4\Delta x) - f(1)\} - \{f(1+2\Delta x) - f(1)\}}{3\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+4\Delta x) - f(1)}{4\Delta x} \times \frac{4}{3} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x) - f(1)}{2\Delta x} \times \frac{2}{3} \\
 &= \frac{4}{3} f'(1) - \frac{2}{3} f'(1) \\
 &= \frac{2}{3} f'(1) = \frac{2}{3} \times 6 = 4
 \end{aligned}$$

답 4

06

$x^2 = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -2$ 일 때 $t \rightarrow 4$ 이므로 $\leftarrow \text{㉠}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x^2) - f(4)}{f(x) - f(-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2} \left\{ \frac{f(x^2) - f(4)}{x^2 - 4} \times \frac{x^2 - 4}{f(x) - f(-2)} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \left[\frac{f(x^2) - f(4)}{x^2 - 4} \times \frac{x - (-2)}{f(x) - f(-2)} \times \{x + (-2)\} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x^2) - f(4)}{x^2 - 4} \times \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - (-2)}{f(x) - f(-2)} \times \lim_{x \rightarrow -2} \{x + (-2)\} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{f(t) - f(4)}{t - 4} \times \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{f(x) - f(-2)} \times \lim_{x \rightarrow -2} \{x + (-2)\} \\
 &\quad \text{㉠} \\
 &= f'(4) \times \frac{1}{f'(-2)} \times (-4) \\
 &= 6 \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times (-4) = 8
 \end{aligned}$$

답 8

07

ㄱ. 함수 $f(x)$ 의 불연속인 점은 $x = -1, x = 0$ 의 2개이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

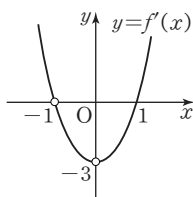
(거짓)

$$\text{ㄷ. } f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & (x < -1 \text{ 또는 } x > 0) \\ 3x^2 - 3 & (-1 < x < 0) \end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 - 3) \\
 &= -3 \text{ (참)}
 \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.



답 4

08

함수 $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 미분가능하므로 $x = 2$ 에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = f(2)$ 에서

$$2 - a = 4 + 2b + a$$

$$\therefore b = -a - 1$$

..... ㉠

또, $f'(2)$ 의 값이 존재하므로

$\rightarrow x = 2$ 에서 미분가능 $\Rightarrow f'(2)$ 의 값 존재

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x - a - (2 - a)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x - 2}{x - 2}$$

$$= 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2 + bx + a - (2 - a)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2 - (a+1)x + 2(a-1)}{x - 2} \quad (\because \text{㉠})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-2)\{x - (a-1)\}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} \{x - (a-1)\}$$

$$= 3 - a$$

$$\text{에서 } 1 = 3 - a \quad \therefore a = 2$$

$$a = 2 \text{를 ㉠에 대입하면 } b = -3$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} x - 2 & (x \leq 2) \\ x^2 - 3x + 2 & (x > 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(2) = 2 - 2 = 0$$

답 3

09

문제 접근하기

절댓값 기호가 나오면 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값을 기준으로 구간을 나누어 $f(x)$ 를 구한다.

$$f(x) = |x - 1|(x + a) = \begin{cases} -(x - 1)(x + a) & (x < 1) \\ (x - 1)(x + a) & (x \geq 1) \end{cases} \text{에 대하여}$$

$f'(1)$ 의 값이 존재하므로

$\rightarrow x = 1$ 에서 미분가능 $\Rightarrow f'(1)$ 의 값 존재

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x - 1)(x + a)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \{-(x + a)\} = -1 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x - 1)(x + a)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} (x + a) = 1 + a$$

$$\text{에서 } -1 - a = 1 + a, -2a = 2$$

$$\therefore a = -1$$

답 2

10

$$f(2) = 0 \text{이므로 } 4a + 2b + c = 0$$

..... ㉠

$$f'(x) = 2ax + b \text{이므로}$$

$$f'(-2) = 9 \text{에서 } -4a + b = 9$$

..... ㉡

$$f'(1) = 3 \text{에서 } 2a + b = 3$$

..... ㉢

㉔, ㉕을 연립하여 풀면 $a=-1, b=5$

$a=-1, b=5$ 를 ㉑에 대입하면

$$-4+10+c=0 \quad \therefore c=-6$$

따라서 $f(x)=-x^2+5x-6$ 이므로

$$f(1)=-1+5-6=-2$$

답 ②

11

$f(x)=3x^2-xf'(1)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=6x-f'(1)$$

위 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(1)=6-f'(1)$$

$$2f'(1)=6 \quad \therefore f'(1)=3$$

따라서 $f(x)=3x^2-3x$ 이므로 $f(2)=12-6=6$

$$f'(x)=6x-3 \text{이므로 } f'(2)=12-3=9$$

$$\therefore f(2)+f'(2)=6+9=15$$

답 15

12

$$f'(x)=\{(x^2+2x)^5\}'=5(x^2+2x)^4(x^2+2x)'$$

$$=5(x^2+2x)^4(2x+2)$$

$$=10(x+1)(x^2+2x)^4$$

$$\therefore f'(1)=10 \times 2 \times 3^4=1620$$

답 ③

13

$g(x)=(x^2-2x)f(x)$ 에서

$$g'(x)=(x^2-2x)'f(x)+(x^2-2x)f'(x)$$

$$=(2x-2)f(x)+(x^2-2x)f'(x)$$

$$g'(0)=-2f(0), g'(2)=2f(2) \text{이므로}$$

$$g'(0)+g'(2)=16 \text{에서}$$

$$-2f(0)+2f(2)=16$$

$$2\{f(2)-f(0)\}=16$$

$$\therefore f(2)-f(0)=8$$

답 ②

14

$$f'(x)$$

$$=(x-1)'(x-2)(x-3) \cdots (x-10)$$

$$+(x-1)(x-2)'(x-3) \cdots (x-10)$$

$$+ \cdots + (x-1)(x-2)(x-3) \cdots (x-10)'$$

$$=(x-2)(x-3) \cdots (x-10) + (x-1)(x-3) \cdots (x-10)$$

$$+ \cdots + (x-1)(x-2) \cdots (x-9)$$

이므로

$$f'(1)=(-1) \times (-2) \times \cdots \times (-9)$$

$$f'(2)=1 \times (-1) \times (-2) \times \cdots \times (-8)$$

$$\therefore \frac{f'(1)}{f'(2)} = \frac{(-1) \times (-2) \times \cdots \times (-9)}{1 \times (-1) \times (-2) \times \cdots \times (-8)} = \frac{-9}{1} = -9$$

답 ①

15

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x-1}=8$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 극한값이 존재하고

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-3\}=0 \text{이므로}$$

$$f(1)-3=0 \quad \therefore f(1)=3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x-1}=8 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=8$$

$$\therefore f'(1)=8$$

$$g(x)=xf(x) \text{에서 } g'(x)=f(x)+xf'(x)$$

$$\therefore g'(1)=f(1)+f'(1)=3+8=11$$

답 ④

16

$f(x)=x^3-3x^2+x$ 에서

$$f'(x)=3x^2-6x+1$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} f'(3)$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

답 ③

17

$f(x)=x^{10}-2x$ 라고 하면 $f(1)=-1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10}-2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

이때 $f'(x)=10x^9-2$ 이므로

$$f'(1)=10-2=8$$

답 ⑤

18

$f(-1)=1$ 이므로 $-1-a+b=1$

$$\therefore -a+b=2$$

..... ㉑

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x^2-1} = -\frac{7}{2} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left\{ \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \times \frac{1}{x+(-1)} \right\} = -\frac{7}{2}$$

$$-\frac{1}{2} f'(-1) = -\frac{7}{2}$$

$$\therefore f'(-1)=7$$

..... ㉒

$f(x)=x^3+ax+b$ 에서

$$f'(x)=3x^2+a$$

이때 ㉑에서 $f'(-1)=7$ 이므로

$$3+a=7 \quad \therefore a=4$$

$a=4$ 를 ㉑에 대입하면

$$-4+b=2 \quad \therefore b=6$$

따라서 $f(x)=x^3+4x+6$ 이므로

$$f(1)=1+4+6=11$$

답 ④

19

x 의 값이 -1 에서 k 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{f(k)-f(-1)}{k-(-1)} = \frac{(k^2+ak)-(1-a)}{k+1} = \frac{k^2+ak+a-1}{k+1} \quad \text{..... ㉠}$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=2$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(x)=2x+a \text{에서} \quad f'(2)=a+4 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } \frac{k^2+ak+a-1}{k+1} = a+4$$

$$\frac{(k^2-1)+a(k+1)}{k+1} = a+4, \quad \frac{(k+1)(k-1)+a(k+1)}{k+1} = a+4$$

이때 $k \neq -1$ 이므로 $k-1+a=a+4$

$$\therefore k=5$$

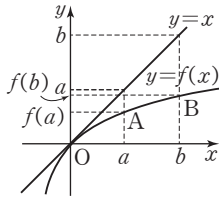
답 5

20

문제 접근하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$ 이고, 곡선 $y=f(x)$ 가 위로 볼록할 때 $a < b$ 이면 $f'(a) > f'(b)$ 임을 이용한다.

$A(a, f(a)), B(b, f(b))$ 로 놓자.



$$\text{① } f(a) < f(b)$$

$$\text{② (직선 OA의 기울기)} > \text{(직선 OB의 기울기)} \text{이므로}$$

$$\frac{f(a)}{a} > \frac{f(b)}{b}$$

$$\text{③ (직선 AB의 기울기)} < \text{(직선 } y=x \text{의 기울기)} \text{이므로}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 1 \quad \therefore f(b)-f(a) < b-a$$

$$\text{④ (점 A에서의 접선의 기울기)} < \text{(직선 } y=x \text{의 기울기)} \text{이므로}$$

$$f'(a) < 1$$

$$\text{⑤ (점 A에서의 접선의 기울기)} > \text{(점 B에서의 접선의 기울기)} \text{이므로}$$

$$f'(a) > f'(b)$$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

풍선 개념 CHECK

직선의 기울기 中 수학 2

직선이 y 축에 가까울수록 직선의 기울기의 절댓값은 크다.

21

삼차함수 $f(x)$ 가 $f(a)=0, f'(a)=0$ 을 만족시키므로 함수 $f(x)$ 는 $(x-a)^2$ 을 인수로 갖고, $f(b)=0$ 을 만족시키므로 $x-b$ 도 인수로 갖는다.

즉, 삼차함수 $f(x)$ 를 $f(x)=k(x-a)^2(x-b) \ (k \neq 0)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= k\{(x-a)^2\}'(x-b) + k(x-a)^2(x-b)' \\ &= 2k(x-a)(x-b) + k(x-a)^2 \\ &= k(x-a)(3x-a-2b) \end{aligned}$$

이때 $f'(c)=0$ 이므로

$$k(c-a)(3c-a-2b)=0$$

$$\therefore c-a=0 \text{ 또는 } 3c-a-2b=0 \ (\because k \neq 0)$$

이때 a, b, c 는 서로 다른 실수이므로

$$3c-a-2b=0 \quad \therefore c = \frac{a+2b}{3}$$

답 ④

22

$f(x)=x^6+6x+a$ 라고 하면 $f(x)$ 가 $(x+k)^2$ 으로 나누어떨어지므로

$$f(-k)=0, f'(-k)=0$$

$$f(-k)=0 \text{에서 } k^6-6k+a=0 \quad \text{..... ㉠}$$

한편, $f(x)=x^6+6x+a$ 에서 $f'(x)=6x^5+6$ 이므로

$$f'(-k)=0 \text{에서 } -6k^5+6=0$$

$$-6k^5=-6, \quad k^5=1$$

$$\therefore k=1 \ (\because k \text{는 정수})$$

$k=1$ 을 ㉠에 대입하면

$$1-6+a=0 \quad \therefore a=5$$

$$\therefore ak=5 \times 1=5$$

답 ②

23

함수 $f(x)$ 를 $(x-4)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하고, 나머지 $R(x)$ 를 $R(x)=ax+b \ (a, b \text{는 상수})$ 라고 하면

$$f(x)=(x-4)^2Q(x)+ax+b \quad \text{..... ㉠}$$

다항함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(4, -4)$ 를 지나므로

$$f(4)=-4 \text{에서}$$

$$4a+b=-4 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉠에서 } f'(x)=2(x-4)Q(x)+(x-4)^2Q'(x)+a \text{이고,}$$

점 $(4, -4)$ 에서의 접선의 기울기가 3이므로

$$f'(4)=3 \text{에서 } a=3$$

$a=3$ 을 ㉡에 대입하면

$$12+b=-4 \quad \therefore b=-16$$

따라서 $R(x)=3x-16$ 이므로

$$R(5)=15-16=-1$$

답 ②

04

도함수의 활용 (1)

기분을 다지는 유형

본문 059쪽

001

- (1) $f(x) = -2x^2$ 이라고 하면 $f'(x) = -4x$
따라서 곡선 위의 $x=2$ 인 점에서의 접선의 기울기는
 $f'(2) = -4 \times 2 = -8$
- (2) $f(x) = x^2 + 3x$ 라고 하면 $f'(x) = 2x + 3$
따라서 곡선 위의 $x=2$ 인 점에서의 접선의 기울기는
 $f'(2) = 2 \times 2 + 3 = 7$
- (3) $f(x) = x^3 + 3x^2$ 이라고 하면 $f'(x) = 3x^2 + 6x$
따라서 곡선 위의 $x=2$ 인 점에서의 접선의 기울기는
 $f'(2) = 3 \times 2^2 + 6 \times 2 = 24$

답 (1) -8 (2) 7 (3) 24

002

- (1) $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$ 라고 하면 $f'(x) = 6x + 2$
따라서 점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는
 $f'(1) = 6 \times 1 + 2 = 8$
- (2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x$ 라고 하면 $f'(x) = x^2 - 9$
따라서 점 (-3, 18)에서의 접선의 기울기는
 $f'(-3) = (-3)^2 - 9 = 0$

답 (1) 8 (2) 0

참고

(2)에서 기울기가 0인 접선은 x 축에 평행한 직선이다.

003

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}f'(1)$$

이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (1, $f(1)$)에서의 접선의 기울기가 4이므로

$$f'(1) = 4$$

따라서 구하는 값은

$$-\frac{1}{2}f'(1) = -\frac{1}{2} \times 4 = -2$$

답 ③

004

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 4$ 에서 $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x$
점 (a, b)가 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로 $f(a) = b$ 에서
 $a^4 - 4a^3 + 6a^2 + 4 = b$ ①
점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(a) = 4$ 에서
 $4a^3 - 12a^2 + 12a = 4$

$$4a^3 - 12a^2 + 12a - 4 = 0, 4(a-1)^3 = 0$$

$$\therefore a = 1$$

$$a = 1 \text{을 } ① \text{에 대입하면 } b = 1 - 4 + 6 + 4 = 7$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 1^2 + 7^2 = 50$$

답 50

005

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \text{라고 하면 } f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

두 점 (2, 12), (4, 0)이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(2) = 12, f(4) = 0 \text{에서}$$

$$8a + 4b + 2c = 12, 64a + 16b + 4c = 0$$

$$\therefore 4a + 2b + c = 6, 16a + 4b + c = 0$$

위 두 식에서 c 를 소거하여 정리하면

$$6a + b = -3$$

..... ①

두 점 (2, 12), (4, 0)에서의 접선이 서로 평행하므로 접선의 기울기가 서로 같다.

$$\text{즉, } f'(2) = f'(4) \text{에서}$$

$$12a + 4b + c = 48a + 8b + c$$

$$36a + 4b = 0$$

$$\therefore 9a + b = 0$$

..... ②

$$①, ② \text{을 연립하여 풀면 } a = 1, b = -9$$

$$16a + 4b + c = 0 \text{에 } a = 1, b = -9 \text{를 대입하면}$$

$$16 - 36 + c = 0 \quad \therefore c = 20$$

$$\therefore ab + c = 1 \times (-9) + 20 = 11$$

답 ③

006

$$(1) f(x) = -x^3 + 2x \text{라고 하면 } f'(x) = -3x^2 + 2$$

따라서 점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = -3 + 2 = -1$$

(2) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (1, 1)에서의 접선의 기울기가 -1이므로 접선의 방정식은

$$y - 1 = -(x - 1)$$

$$\therefore y = -x + 2$$

답 (1) -1 (2) $y = -x + 2$

007

$$f(x) = (x^2 - 1)(x + 2) \text{라고 하면}$$

$$f'(x) = (x^2 - 1)'(x + 2) + (x^2 - 1)(x + 2)'$$

$$= 2x(x + 2) + x^2 - 1$$

$$= 3x^2 + 4x - 1$$

따라서 점 (0, -2)에서의 접선의 기울기는

$$f'(0) = -1$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - (-2) = -x$$

$$\therefore y = -x - 2$$

답 ①

008

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2 \text{라고 하면 } f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 1$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$ 인 점에서의 접선의 기울기는
 $f'(1)=4+6+1=11$
 이고, $f(1)=1+2+1+2=6$
 점 $(1, 6)$ 에서의 접선의 방정식은
 $y-6=11(x-1)$
 $\therefore y=11x-5$
 이때 이 직선이 점 $(2, k)$ 를 지나므로
 $k=22-5=17$

답 ⑤

009

$f(x)=x^3-4x^2+x+2$ 라고 하면 $f'(x)=3x^2-8x+1$
 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 0)$ 에서의 접선 l 의 기울기는
 $f'(1)=3-8+1=-4$
 이므로 접선 l 의 방정식은
 $y=-4(x-1)$

$\therefore y=-4x+4$ ㉠

또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, -4)$ 에서의 접선 m 의 기울기는
 $f'(-1)=3+8+1=12$
 이므로 접선 m 의 방정식은
 $y-(-4)=12\{x-(-1)\}$
 $\therefore y=12x+8$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-\frac{1}{4}, y=5$

따라서 두 직선 l, m 의 교점의 좌표는 $(-\frac{1}{4}, 5)$ 이다.

답 $(-\frac{1}{4}, 5)$

010

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0)$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-f(0)=f'(0)(x-0)$
 $\therefore y=f'(0)x+f(0)$
 이때 접선의 방정식이 $y=3x-1$ 이므로
 $f'(0)=3, f(0)=-1$
 $g(x)=(x+2)f(x)$ 에서
 $g'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)$
 $\therefore g'(0)=f(0)+2f'(0)=-1+2\times 3=5$

답 ①

011

$f(x)=x^3+ax+b$ 라고 하면 $f'(x)=3x^2+a$
 점 $(-2, -2)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
 $f(-2)=-2$ 에서 $-8-2a+b=-2$
 $\therefore -2a+b=6$ ㉠
 점 $(-2, -2)$ 에서의 접선의 기울기가 7이므로
 $f'(-2)=7$ 에서 $12+a=7 \quad \therefore a=-5$
 $a=-5$ 를 ㉠에 대입하면
 $10+b=6 \quad \therefore b=-4$
 $\therefore a-b=-5-(-4)=-1$

답 ②

012

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2$ 이라고 하면

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx$$

점 $(-1, 2)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(-1)=2 \text{에서 } 1-a+b=2$$

$$\therefore -a+b=1 \quad \text{..... ㉠}$$

①

점 $(-1, 2)$ 에서의 접선 $y=2x+c$ 의 기울기가 2이므로

$$f'(-1)=2 \text{에서 } -4+3a-2b=2$$

$$\therefore 3a-2b=6 \quad \text{..... ㉡}$$

②

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8, b=9$

한편, 접선 $y=2x+c$ 가 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$2=-2+c \quad \therefore c=4$$

$$\therefore a+b-c=8+9-4=13 \quad \text{..... ③}$$

답 13

채점 기준	비율
① 곡선이 점 $(-1, 2)$ 를 지남을 이용하여 a, b 에 대한 식을 세울 수 있다.	30 %
② 점 $(-1, 2)$ 에서의 접선의 기울기를 이용하여 a, b 에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
③ $a+b-c$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

013

$f(x)=x^3-10$ 이라고 하면 $f'(x)=3x^2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(-2, -18)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(-2)=12$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(-18)=12\{x-(-2)\}$$

$$\therefore y=12x+6 \quad \text{..... ㉠}$$

$g(x)=x^3+k$ 라고 하면 $g'(x)=3x^2$

점 Q의 좌표를 (a, a^3+k) 라고 하면 곡선 $y=x^3+k$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기는

$$g'(a)=3a^2$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(a^3+k)=3a^2(x-a)$$

$$\therefore y=3a^2x-2a^3+k \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡이 일치하므로 $3a^2=12, -2a^3+k=6$

$$3a^2=12 \text{에서 } a^2=4$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=2$$

$$-2a^3+k=6 \text{에서}$$

$$a=-2 \text{일 때, } 16+k=6 \quad \therefore k=-10$$

$$a=2 \text{일 때, } -16+k=6 \quad \therefore k=22$$

$$k>0 \text{이므로 } k=22$$

답 22

014

(1) $f(x)=x^3+2x$ 라고 하면 $f'(x)=3x^2+2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, -3)$ 에서의 접선 l 의 기울기는

$$f'(-1)=3+2=5$$

(2) 접선 l 에 수직인 직선 m 의 기울기를 k 라고 하면

$$5k = -1 \quad \therefore k = -\frac{1}{5}$$

따라서 직선 m 의 기울기는 $-\frac{1}{5}$ 이다.

(3) 점 $(-1, 1)$ 을 지나고, 기울기가 $-\frac{1}{5}$ 인 직선의 방정식은

$$y - 1 = -\frac{1}{5}\{x - (-1)\}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$$

답 (1) 5 (2) $-\frac{1}{5}$ (3) $y = -\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$

문제 개념 CHECK

두 직선의 수직 조건 高 公通 수학 2

두 직선 $y = ax + b$, $y = cx + d$ 가 서로 수직이면 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다. 즉, $ac = -1$ 이다.

015

$f(x) = x^3 + ax^2 + b$ 라고 하면 $f'(x) = 3x^2 + 2ax$

점 $(-2, -6)$ 이 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로

$$f(-2) = -6 \text{에서 } -8 + 4a + b = -6$$

$$\therefore 4a + b = 2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{4}$ 이므로 접선의 기울기는 4이다.
서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다.

즉, 점 $(-2, -6)$ 에서의 접선의 기울기가 4이므로

$$f'(-2) = 4 \text{에서 } 12 - 4a = 4$$

$$-4a = -8 \quad \therefore a = 2$$

$a = 2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$8 + b = 2 \quad \therefore b = -6$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{-6}{2} = -3$$

답 ①

016

$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x$ 라고 하면 $f'(x) = 6x^2 - 8x + 3$

곡선 $y = f(x)$ 위의 $x = 1$ 인 점 P에서의 접선 l 의 기울기는

$$f'(1) = 6 - 8 + 3 = 1$$

이므로 접선 l 에 수직인 직선 m 의 기울기는 -1 이다.

(l의 기울기) $\times$ (m의 기울기) = -1

이때 $f(1) = 2 - 4 + 3 = 1$ 이므로 점 P의 좌표는 $(1, 1)$ 이고, 점 P를 지나고 기울기가 -1 인 직선 m 의 방정식은

$$y - 1 = -(x - 1)$$

$$\therefore y = -x + 2$$

따라서 직선 m 의 y 절편은 2이다. → y 절편은 $x = 0$ 일 때의 y 의 값이다.

답 ④

017

$f(x) = ax^3 - 3ax$ 라고 하면 $f'(x) = 3ax^2 - 3a$

곡선 $y = f(x)$ 위의 $x = 0$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(0) = -3a$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 $x = 2$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(2) = 12a - 3a = 9a$$

이때 두 접선이 서로 수직이므로

$$f'(0)f'(2) = -1 \text{에서 } -3a \times 9a = -1$$

$$-27a^2 = -1, a^2 = \frac{1}{27}$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{3}}{9} (\because a > 0)$$

답 ①

018

$f(x) = x(x-4)(x-a)$ 에서

$$f'(x) = (x-4)(x-a) + x(x-a) + x(x-4)$$

$$= 3x^2 - 2(a+4)x + 4a$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(0) = 4a$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(4, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(4) = -4a + 16$$

이때 두 접선이 서로 수직이므로

$$f'(0)f'(4) = -1 \text{에서 } 4a(-4a + 16) = -1$$

$$\therefore 16a^2 - 64a - 1 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a 의 값

$$\text{의 합은 } -\frac{-64}{16} = 4 \text{이다.}$$

답 4

참고

이차방정식 $16a^2 - 64a - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-32)^2 - 16 \times (-1) = 1040 > 0$$

이므로 이차방정식 $16a^2 - 64a - 1 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

019

$f(x) = x^3 - 2x + 7$ 이라고 하면 $f'(x) = 3x^2 - 2$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P(1, 6)에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = 3 - 2 = 1$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - 6 = x - 1 \quad \therefore y = x + 5$$

곡선 $y = x^3 - 2x + 7$ 과 직선 $y = x + 5$ 가 만나는 점의 x 좌표는

$$x^3 - 2x + 7 = x + 5 \text{에서}$$

$$x^3 - 3x + 2 = 0, (x+2)(x-1)^2 = 0$$

$$\therefore x = -2 (\because x \neq 1) \quad \text{점 P와 다른 점이므로}$$

이때 $f(-2) = -8 + 4 + 7 = 3$ 이므로 다시 만나는 점 Q의 좌표는 $(-2, 3)$ 이다.

$$\therefore PQ = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

답 $3\sqrt{2}$

문제 개념 CHECK

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리 高 公通 수학 2

두 점 P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) 사이의 거리는

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

020

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 에서 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

두 점 $(-1, 1)$, $(2, 4)$ 가 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로

$$f(-1)=1 \text{에서 } -1+a-b+c=1$$

$$\therefore a-b+c=2 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f(2)=4 \text{에서 } 8+4a+2b+c=4$$

$$\therefore 4a+2b+c=-4 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠-㉡을 하면

$$3a+3b=-6 \quad \therefore a+b=-2 \quad \text{..... ㉢}$$

①

두 점 $(-1, 1), (2, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{4-1}{2-(-1)}\{x-(-1)\}$$

$$\therefore y=x+2$$

즉, 점 $(-1, 1)$ 에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$f'(-1)=1 \text{에서 } 3-2a+b=1$$

$$\therefore -2a+b=-2 \quad \text{..... ㉣}$$

②

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=0, b=-2$
 $a=0, b=-2$ 를 ㉠에 대입하여 풀면 $c=0$
 따라서 $f(x)=x^3-2x$ 이므로
 $f(1)=1-2=-1$ ③

답 -1

채점 기준	비율
① 두 점이 곡선 위의 점임을 이용하여 a, b 에 대한 식을 구할 수 있다.	40 %
② 점 $(-1, 1)$ 에서의 접선의 기울기를 이용하여 a, b 에 대한 식을 구할 수 있다.	40 %
③ $f(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

품셈 개념 CHECK

두 점을 지나는 직선의 방정식_高 공통수학 2

두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

① $x_1 \neq x_2$ 일 때, $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$
 ② $x_1=x_2$ 일 때, $x=x_1$

021

(1) $f(x)=x^3-3x^2+4x+2$ 라고 하면 $f'(x)=3x^2-6x+4$
 접점의 좌표를 (k, k^3-3k^2+4k+2) 라고 하면 직선 $y=x+5$ 에 평행한 접선의 기울기는 1이므로 $f'(k)=1$ 에서
 $3k^2-6k+4=1, 3k^2-6k+3=0$
 $3(k-1)^2=0 \quad \therefore k=1$
 따라서 접점의 좌표는 $(1, 1-3+4+2)$, 즉 $(1, 4)$ 이다.

(2) 점 $(1, 4)$ 를 지나고 기울기가 1인 접선의 방정식은
 $y-4=x-1 \quad \therefore y=x+3$

답 (1) $(1, 4)$ (2) $y=x+3$

022

$f(x)=x^2+3x-2$ 라고 하면 $f'(x)=2x+3$
 접점의 좌표를 (k, k^2+3k-2) 라고 하면 직선 $y=x+1$ 에 평행한 접선의 기울기는 1이므로 $f'(k)=1$ 에서
 $2k+3=1, 2k=-2$
 $\therefore k=-1$

→ 직선 $y=x+1$ 을 평행 이동하여도 기울기는 변하지 않는다.

따라서 접점의 좌표는 $(-1, -4)$ 이고, 이 점을 지나고 기울기가 1인 접선의 방정식은
 $y-(-4)=x-(-1)$
 $\therefore y=x-3$

답 $y=x-3$

023

$f(x)=x^3-3x+5$ 라고 하면 $f'(x)=3x^2-3$
 접점의 좌표를 (k, k^3-3k+5) 라고 하면 x 축에 평행한 접선의 기울기는 0이므로 $f'(k)=0$ 에서
 $3k^2-3=0$
 $3k^2=3, k^2=1$
 $\therefore k=-1$ 또는 $k=1$
 $k=-1$ 일 때, 접점의 좌표는 $(-1, 7)$ 이므로 접선의 방정식은
 $y=7$
 $k=1$ 일 때, 접점의 좌표는 $(1, 3)$ 이므로 접선의 방정식은
 $y=3$
 따라서 두 접선이 직선 $x=3$ 과 만나는 두 점의 좌표는 $(3, 7), (3, 3)$ 이므로 구하는 y 좌표는 3, 7이다.

답 3, 7

품셈 개념 CHECK

x 축에 평행한 직선의 방정식_高 공통수학 2

점 (a, b) 를 지나고, x 축에 평행한 직선의 방정식은 $y=b$ 이다.

024

$f(x)=2x^3+3x^2+2x+1$ 이라고 하면 $f'(x)=6x^2+6x+2$
 접점의 좌표를 $(k, 2k^3+3k^2+2k+1)$ 이라고 하면 직선
 $x+2y-4=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 에 수직인 접선의 기울기는 2이므로 ①

$f'(k)=2$ 에서 $6k^2+6k+2=2$
 $6k^2+6k=0, 6k(k+1)=0$
 $\therefore k=-1$ 또는 $k=0$ ②

(i) $k=-1$ 일 때
 접점의 좌표는 $(-1, 0)$ 이므로 이 점을 지나고 기울기가 2인 접선의 방정식은
 $y-0=2\{x-(-1)\}$
 $\therefore y=2x+2$

(ii) $k=0$ 일 때
 접점의 좌표는 $(0, 1)$ 이므로 이 점을 지나고 기울기가 2인 접선의 방정식은
 $y-1=2(x-0)$
 $\therefore y=2x+1$

(i), (ii)에서 구하는 직선의 방정식은
 $y=2x+2, y=2x+1$ ③

답 $y=2x+2, y=2x+1$

채점 기준	비율
① 접선의 기울기를 구할 수 있다.	30 %
② 접점의 x 좌표를 구할 수 있다.	20 %
③ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %

025

$f(x) = x^3 - x^2 + 3$ 이라고 하면 $f'(x) = 3x^2 - 2x$

이때 곡선과 접선은 $x=k$ 인 점에서 접하고, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 이므로 기울기가 $\tan 45^\circ = 1$ 이다.

즉, $f'(k) = 1$ 에서 $3k^2 - 2k = 1$

$3k^2 - 2k - 1 = 0, (3k+1)(k-1) = 0$

$\therefore k = 1$ ($\because k$ 는 정수)

접점의 좌표는 $(1, 3)$ 이므로 이 점을 지나고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$y - 3 = x - 1 \quad \therefore y = x + 2$

따라서 접선의 y 절편은 2이다. $\rightarrow y$ 절편은 $x=0$ 일 때의 y 의 값이다.

답 ④

026

(1) $f(x) = -x^3 + x + 3$ 이라고 하면 $f'(x) = -3x^2 + 1$

접점의 좌표를 $(k, -k^3 + k + 3)$ 이라고 하면 접선의 기울기는

$f'(k) = -3k^2 + 1$

이므로 접선의 방정식은

$y - (-k^3 + k + 3) = (-3k^2 + 1)(x - k)$

$\therefore y = (-3k^2 + 1)x + 2k^3 + 3$

이 접선이 점 $(0, 5)$ 를 지나므로

$5 = 2k^3 + 3, 2k^3 = 2$

$k^3 = 1 \quad \therefore k = 1$ ($\because k$ 는 실수)

따라서 접점의 좌표는 $(1, 3)$ 이다.

(2) $f'(1) = -3 + 1 = -2$ 이므로 접선의 기울기는 -2 이다.

(3) $k = 1$ 을 (1)의 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y = (-3 + 1)x + 2 + 3$

$\therefore y = -2x + 5$

답 (1) $(1, 3)$ (2) -2 (3) $y = -2x + 5$

027

$f(x) = x^3 - 6x + 7$ 이라고 하면 $f'(x) = 3x^2 - 6$

접점의 좌표는 $(k, k^3 - 6k + 7)$ 이고 접선의 기울기는

$f'(k) = 3k^2 - 6$

이므로 접선의 방정식은

$y - (k^3 - 6k + 7) = (3k^2 - 6)(x - k)$

$\therefore y = (3k^2 - 6)x - 2k^3 + 7$

이 접선이 점 $(2, -1)$ 을 지나므로

$-1 = 2(3k^2 - 6) - 2k^3 + 7, 2k^3 - 6k^2 + 4 = 0$

$2(k-1)(k^2 - 2k - 2) = 0$

$\therefore k = 1$ ($\because k$ 는 정수)

답 ①

028

$f(x) = x^3 - x + 2$ 라고 하면 $f'(x) = 3x^2 - 1$

접점의 좌표를 $(k, k^3 - k + 2)$ 라고 하면 접선의 기울기는

$f'(k) = 3k^2 - 1$

이므로 접선의 방정식은

$y - (k^3 - k + 2) = (3k^2 - 1)(x - k)$

$\therefore y = (3k^2 - 1)x - 2k^3 + 2$

..... ㉠

이 접선이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$4 = -2k^3 + 2, 2k^3 = -2$

$k^3 = -1 \quad \therefore k = -1$ ($\because k$ 는 실수)

$k = -1$ 을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y = 2x + 4$

$y = 2x + 4$ 에 $y = 0$ 을 대입하면 $0 = 2x + 4$ 에서

$x = -2$

따라서 접선의 x 절편은 -2 이다.

답 ④

029

$f(x) = x^3 - 12x + 3$ 이라고 하면 $f'(x) = 3x^2 - 12$

접점의 좌표는 $(k, k^3 - 12k + 3)$ 이고 접선의 기울기는

$f'(k) = 3k^2 - 12$

이므로 접선의 방정식은

$y - (k^3 - 12k + 3) = (3k^2 - 12)(x - k)$

$\therefore y = (3k^2 - 12)x - 2k^3 + 3$

..... ㉠

이 접선이 점 $(-1, 10)$ 을 지나므로

$10 = -(3k^2 - 12) - 2k^3 + 3$

$2k^3 + 3k^2 - 5 = 0$

$(k-1)(2k^2 + 5k + 5) = 0$

$\therefore k = 1$ ($\because k$ 는 정수)

$k = 1$ 을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y = -9x + 1$

이 직선이 x 축과 점 $(\frac{1}{9}, 0)$ 에서 만나고, y 축과 점 $(0, 1)$ 에서 만난다. 따라서 접선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{9} \times 1 = \frac{1}{18}$

답 ①

030

점 $(0, 16)$ 을 지나고 기울기가 8인 접선의 방정식은

$y = 8x + 16$

..... ㉠

한편, $f(x) = x^3 - ax$ 에서 $f'(x) = 3x^2 - a$

접점의 좌표를 $(k, k^3 - ak)$ 라고 하면 접선의 기울기는 $3k^2 - a$ 이

므로 접선의 방정식은

$y - (k^3 - ak) = (3k^2 - a)(x - k)$

$\therefore y = (3k^2 - a)x - 2k^3$

..... ㉡

㉠, ㉡이 서로 같으므로

$-2k^3 = 16$ 에서 $k^3 = -8$

$\therefore k = -2$ ($\because k$ 는 실수)

$3k^2 - a = 8$ 에서 $12 - a = 8 \quad \therefore a = 4$

따라서 $f(x) = x^3 - 4x$ 이므로

$f(a) = f(4) = 4^3 - 4 \times 4 = 48$

답 48

031

(1) $f(2) = g(2)$ 에서 $4 + 2a + b = 4 - 3$

$\therefore 2a + b = -3$

..... ㉠

(2) $f'(x) = 2x + a, g'(x) = 2$ 이므로 $f'(2) = g'(2)$ 에서

$4 + a = 2 \quad \therefore a = -2$

(3) $a = -2$ 를 (1)의 ㉠에 대입하면

$$-4 + b = -3 \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 2x + 1$$

답 (1) $2a + b = -3$ (2) -2 (3) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

참고

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = g(x)$ 가 $x = k$ 인 점에서 접한다.

→ 직선은 곡선의 접선이다.

(1) $x = k$ 인 점에서 곡선과 직선이 만난다.

$$\Rightarrow f(k) = g(k)$$

(2) $x = k$ 인 점에서의 곡선 $y = f(x)$ 의 접선의 기울기는 직선 $y = g(x)$ 의 기울기와 같다.

$$\Rightarrow f'(k) = g'(k)$$

032

$f(x) = 2x^3 - x$, $g(x) = 5x + a$ 라고 하면

$$f'(x) = 6x^2 - 1, g'(x) = 5$$

곡선과 직선이 $x = k$ 인 점에서 접한다고 하면

$$f(k) = g(k) \text{이므로 } 2k^3 - k = 5k + a$$

$$\therefore a = 2k^3 - 6k$$

..... ㉠

$$f'(k) = g'(k) \text{이므로 } 6k^2 - 1 = 5$$

$$6k^2 = 6, k^2 = 1$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 1$$

$$k = -1 \text{을 ㉠에 대입하면 } a = -2 + 6 = 4$$

$$k = 1 \text{을 ㉠에 대입하면 } a = 2 - 6 = -4$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$4 \times (-4) = -16$$

답 -16

033

$f(x) = x^3 - 4x + 3$, $g(x) = ax - 13$ 이라고 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 4, g'(x) = a$$

곡선과 직선이 $x = k$ 인 점에서 접한다고 하면

$$f(k) = g(k) \text{이므로 } k^3 - 4k + 3 = ak - 13$$

$$\therefore k^3 - (a + 4)k + 16 = 0$$

..... ㉠

$$f'(k) = g'(k) \text{이므로 } 3k^2 - 4 = a$$

..... ㉡

$$\text{㉡을 ㉠에 대입하면 } k^3 - 3k^2 + 16 = 0$$

$$-2k^3 + 16 = 0, 2k^3 = 16$$

$$k^3 = 8 \quad \therefore k = 2 (\because k \text{는 실수})$$

$$k = 2 \text{를 ㉡에 대입하면 } a = 12 - 4 = 8$$

따라서 접선의 기울기가 8이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{8}$ 이다.

답 ②

034

$f(x) = -x^3 + x + 2$, $g(x) = ax - 2a$ 라고 하면

$$f'(x) = -3x^2 + 1, g'(x) = a$$

곡선과 직선이 $x = k$ 인 점에서 접하므로

$$f(k) = g(k) \text{에서 } -k^3 + k + 2 = ak - 2a$$

$$\therefore k^3 + (a - 1)k - 2a - 2 = 0$$

..... ㉠

$$f'(k) = g'(k) \text{에서 } -3k^2 + 1 = a$$

..... ㉡

①

㉡을 ㉠에 대입하면

$$k^3 + (-3k^2)k - 2(-3k^2 + 1) - 2 = 0$$

$$-2k^3 + 6k^2 - 4 = 0$$

$$-2(k - 1)(k^2 - 2k - 2) = 0$$

$$\therefore k = 1 (\because k \text{는 정수})$$

$$k = 1 \text{을 ㉡에 대입하면 } a = -3 + 1 = -2$$

②

$$\therefore a^2 + k^2 = (-2)^2 + 1^2 = 5$$

③

답 5

채점 기준	비율
① 곡선과 직선이 접함을 이용하여 a, k 에 대한 식을 세울 수 있다.	50 %
② a, k 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $a^2 + k^2$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

035

$f(x) = x^3 - 4x + 5$ 라고 하면 $f'(x) = 3x^2 - 4$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = 3 - 4 = -1$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - 2 = -(x - 1)$$

$$\therefore y = -x + 3$$

$g(x) = x^4 + 3x + a$, $h(x) = -x + 3$ 이라고 하면

$$g'(x) = 4x^3 + 3, h'(x) = -1$$

곡선 $y = g(x)$ 와 직선 $y = h(x)$ 가 $x = k$ 인 점에서 접한다고 하면

$$g(k) = h(k) \text{이므로 } k^4 + 3k + a = -k + 3$$

$$\therefore a = -k^4 - 4k + 3$$

..... ㉠

$$g'(k) = h'(k) \text{이므로 } 4k^3 + 3 = -1$$

$$4k^3 = -4, k^3 = -1$$

$$\therefore k = -1 (\because k \text{는 실수})$$

$$k = -1 \text{을 ㉠에 대입하면}$$

$$a = -1 + 4 + 3 = 6$$

답 ①

036

(1) $f(2) = g(2)$ 에서 $16 - 18 = 8a + 2b$ 이므로

$$8a + 2b = -2$$

$$\therefore 4a + b = -1$$

..... ㉠

(2) $f'(x) = 8x - 9$, $g'(x) = 3ax^2 + b$ 이므로

$$f'(2) = g'(2) \text{에서 } 16 - 9 = 12a + b$$

$$\therefore 12a + b = 7$$

..... ㉡

(3) ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 1, b = -5$

$$\therefore g(x) = x^3 - 5x$$

답 (1) $4a + b = -1$ (2) $12a + b = 7$ (3) $g(x) = x^3 - 5x$

참고

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 $x = k$ 인 점에서 공통인 접선을 갖는다.

(1) $x = k$ 인 점에서 두 곡선이 만난다.

$$\Rightarrow f(k) = g(k)$$

(2) $x = k$ 인 점에서의 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 기울기가 같다.

$$\Rightarrow f'(k) = g'(k)$$

037

$f(x) = x^3 + ax + b$, $g(x) = x^2 + 4x$ 라고 하면
 $f'(x) = 3x^2 + a$, $g'(x) = 2x + 4$
 두 곡선이 $x = -1$ 인 점에서 공통인 접선을 가지면
 $f(-1) = g(-1)$ 이므로 $-1 - a + b = 1 - 4$
 $\therefore a - b = 2$
 $f'(-1) = g'(-1)$ 이므로 $3 + a = -2 + 4$
 $\therefore a = -1$
 $a = -1$ 을 ①에 대입하면
 $-1 - b = 2 \quad \therefore b = -3$
 $\therefore ab = -1 \times (-3) = 3$

..... ⑦

답 ④

038

$f(x) = ax^3$, $g(x) = bx^2 + c$ 라고 하면
 $f'(x) = 3ax^2$, $g'(x) = 2bx$
 두 곡선이 점 $(2, 8)$ 에서 공통인 접선을 가지면
 $f(2) = g(2) = 8$ 이므로
 $f(2) = 8$ 에서 $8a = 8 \quad \therefore a = 1$
 $g(2) = 8$ 에서 $4b + c = 8$
 $f'(2) = g'(2)$ 이므로 $12a = 4b$
 $\therefore b = 3a = 3 (\because a = 1)$
 $b = 3$ 을 ⑦에 대입하면
 $12 + c = 8 \quad \therefore c = -4$
 $\therefore abc = 1 \times 3 \times (-4) = -12$

..... ⑦

답 ①

039

$f(x) = x^3 - x + 3$, $g(x) = x^2 + ax + 2$ 라고 하면
 $f'(x) = 3x^2 - 1$, $g'(x) = 2x + a$
 두 곡선이 $x = k$ 인 점에서 접한다고 하면
 $f(k) = g(k)$ 이므로 $k^3 - k + 3 = k^2 + ak + 2$
 $\therefore k^3 - k^2 - (a+1)k + 1 = 0$
 $f'(k) = g'(k)$ 이므로 $3k^2 - 1 = 2k + a$
 $\therefore a = 3k^2 - 2k - 1$
 ①을 ⑦에 대입하면
 $k^3 - k^2 - (3k^2 - 2k - 1)k + 1 = 0$
 $2k^3 - k^2 - 1 = 0$, $(k-1)(2k^2 + k + 1) = 0$
 $\therefore k = 1 (\because 2k^2 + k + 1 > 0)$
 $k = 1$ 을 ②에 대입하면 $a = 3 - 2 - 1 = 0$

..... ⑦

..... ②

답 ③

참고

두 곡선이 한 점에서 접한다.
 $\iff$ 두 곡선이 한 점에서 공통인 접선을 갖는다.

040

$f(x) = kx^4 - 4x^2$ 에서 $f'(x) = 4kx^3 - 8x$
 이때 물의 정리를 만족시키는 상수가 2이므로
 $f'(2) = 0$ 에서 $32k - 16 = 0$, $32k = 16$
 $\therefore k = \frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

참고

$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2$ 은 다항함수이므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 연속이면서 열린구간 $(-3, 3)$ 에서 미분가능하고 $f(-3) = f(3) = \frac{9}{2}$ 이다.
 따라서 물의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(-3, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 이때 $f'(x) = 2x^3 - 8x$ 이므로 $f'(c) = 0$ 에서
 $2c^3 - 8c = 0$, $2c(c+2)(c-2) = 0$
 $\therefore c = -2$ 또는 $c = 0$ 또는 $c = 2$

041

함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ 은 다항함수이므로 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 연속이면서 열린구간 $(0, 3)$ 에서 미분가능하고, $f(0) = f(3) = 3$ 이다.
 따라서 물의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 이때 $f'(x) = 3x^2 - 6x$ 이므로 $f'(c) = 0$ 에서
 $3c^2 - 6c = 0$, $3c(c-2) = 0$
 $\therefore c = 2 (\because 0 < c < 3)$
 따라서 물의 정리를 만족시키는 c 의 값은 2이다.

답 ③

042

함수 $f(x) = x^4 + x^2 - 2$ 는 다항함수이므로 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 연속이면서 열린구간 $(-2, 2)$ 에서 미분가능하고,
 $f(-2) = f(2) = 18$ 이다.
 따라서 물의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(-2, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 이때 $f'(x) = 4x^3 + 2x$ 이므로 $f'(c) = 0$ 에서
 $4c^3 + 2c = 0$, $2c(2c^2 + 1) = 0$
 $\therefore c = 0 (\because 2c^2 + 1 > 0)$

답 ③

043

함수 $f(x) = x^2 - ax$ 는 다항함수이므로 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 연속이면서 열린구간 $(0, 4)$ 에서 미분가능하다.
 이때 물의 정리를 만족시키려면 $f(0) = f(4)$ 이어야 하므로
 $0 = 16 - 4a$, $4a = 16 \quad \therefore a = 4$
 따라서 $f(x) = x^2 - 4x$ 에서 $f'(x) = 2x - 4$ 이다.
 한편, 물의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 4)$ 에 적어도 하나 존재하므로
 $f'(c) = 2c - 4 = 0$
 $2c = 4 \quad \therefore c = 2$
 $\therefore a - c = 4 - 2 = 2$

답 ⑤

044

함수 $f(x) = x^2 - 6x$ 는 다항함수이므로 닫힌구간 $[a, 2a]$ 에서 연속이면서 열린구간 $(a, 2a)$ 에서 미분가능하다.
 이때 물의 정리를 만족시키려면 $f(a) = f(2a)$ 이어야 하므로
 $a^2 - 6a = 4a^2 - 12a$, $3a^2 - 6a = 0$
 $3a(a-2) = 0 \quad \therefore a = 2 (\because a \neq 0)$

한편, 물의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(2, 4)$ 에 적어도 하나 존재하고, $f'(x)=2x-6$ 이므로 $f'(c)=0$ 에서
 $2c-6=0 \quad \therefore c=3$
 $\therefore ac=2 \times 3=6$

답 ④

045

함수 $f(x)=2x^2-x-1$ 은 다항함수이므로 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(c)$ 인 c 가 열린

구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=4x-1$ 이므로 $f'(c)=4c-1$

즉, $\frac{0-2}{2}=4c-1$ 이므로 $4c-1=-1$

$4c=0 \quad \therefore c=0$

답 0

046

함수 $f(x)=x(x-1)(x-2)$ 는 다항함수이므로 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$ 인 c 가 열린

구간 $(-1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f(x)=x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x$ 에서

$f'(x)=3x^2-6x+2$ 이므로 $f'(c)=3c^2-6c+2$

즉, $\frac{0-(-6)}{3}=3c^2-6c+2$ 이므로 $3c^2-6c+2=2$

$3c^2-6c=0, 3c(c-2)=0$

$\therefore c=0 (\because -1 < c < 2)$

답 ②

047

함수 $f(x)=x^3$ 은 다항함수이므로 닫힌구간 $[0, a]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, a)$ 에서 미분가능하다.

이때 $f'(x)=3x^2$ 이고 닫힌구간 $[0, a]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 상수가 $\sqrt{3}$ 이므로

$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(\sqrt{3})$

$\frac{a^3}{a}=9, a^2=9$

$\therefore a=3 (\because a > \sqrt{3})$

답 ④

048

함수 $f(x)=2x^2-5x$ 는 다항함수이므로 닫힌구간 $[-1, a]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, a)$ 에서 미분가능하다.

이때 $f'(x)=4x-5$ 이고 닫힌구간 $[-1, a]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 상수가 1이므로

$\frac{f(a)-f(-1)}{a-(-1)}=f'(1)$

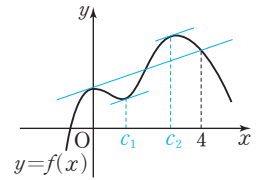
$\frac{(2a^2-5a)-7}{a+1}=-1, 2a^2-5a-7=-a-1$

$2a^2-4a-6=0, 2(a+1)(a-3)=0$
 $\therefore a=3 (\because a > 1)$

답 ②

049

닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c 는 두 점 $(0, f(0)), (4, f(4))$ 를 잇는 직선과 평행한 접선을 갖는 점의 x 좌표이고, 평행한 접선을 2개 그을 수 있으므로 상수 c 의 개수는 2이다.



답 ③

실력을 높이는 연습문제

본문 069쪽

01

$f(x)=x^3+3x^2+x+5$ 라고 하면

$f'(x)=3x^2+6x+1=3(x+1)^2-2$

이므로 $f'(x)$ 는 $x=-1$ 에서 최솟값 -2 를 갖는다.

따라서 접선의 기울기 m 의 최솟값은 -2 이다.

답 ①

02

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 라고 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

두 점 $(2, 5), (-2, 1)$ 은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(2)=5$ 에서 $8+4a+2b+c=5$

$\therefore 4a+2b+c=-3$

..... ㉠

$f(-2)=1$ 에서 $-8+4a-2b+c=1$

$\therefore 4a-2b+c=9$

..... ㉡

㉠-㉡을 하면

$4b=-12 \quad \therefore b=-3$

$f'(x)=3x^2+2ax-3$ 이고, 두 점 $(2, 5), (-2, 1)$ 에서의 두 접선이 서로 평행하므로 두 접선의 기울기는 서로 같다. 즉,

$f'(2)=f'(-2) \rightarrow f'(2), f'(-2)$

$12+4a-3=12-4a-3, 8a=0$

$\therefore a=0$

$a=0, b=-3$ 을 ㉠에 대입하면

$-6+c=-3 \quad \therefore c=3$

$\therefore a-b+c=0-(-3)+3=6$

답 ④

03

$f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2$ 이라고 하면 $f'(x)=2x^2-4x$

점 $(3, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=18-12=6$

이므로 접선의 방정식은

$y-0=6(x-3) \quad \therefore y=6x-18$

따라서 직선 $y=6x-18$ 이 지나는 점의 좌표는 ⑤ $(2, -6)$ 이다.

답 ⑤

참고

⑤에서 $x=2$, $y=-6$ 을 $y=6x-18$ 에 대입하면 $-6=12-18$ 로 등식이 성립하므로 점 $(2, -6)$ 이 접선이 지나는 점의 좌표임을 알 수 있다.

04

$f(x)=x^3-x^2+x-2$ 라고 하면 $f'(x)=3x^2-2x+1$

점 $(1, -1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=3-2+1=2$$

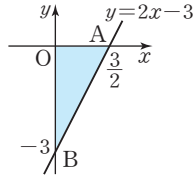
이므로 접선의 방정식은

$$y-(-1)=2(x-1)$$

$$\therefore y=2x-3$$

따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{4}$$



답 ②

05

$f(x)=x^3-2x^2+2x+a$ 에서 $f'(x)=3x^2-4x+2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=3-4+2=1$$

이고, $f(1)=1-2+2+a=a+1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(a+1)=x-1$$

$$\therefore y=x+a$$

따라서 $P(-a, 0)$, $Q(0, a)$ 이므로

$$PQ=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$$

$$\text{이때 } \sqrt{2}a=6 \text{이므로 } a=3\sqrt{2}$$

답 ③

06

$f(x)=x^3$, $g(x)=ax^2+bx$ 라고 하면

$$f'(x)=3x^2, g'(x)=2ax+b$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 모두 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$f(1)=g(1) \text{에서 } 1=a+b \quad \text{..... ㉠}$$

점 $(1, 1)$ 에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$$f'(1)g'(1)=-1 \text{에서 } 3(2a+b)=-1$$

$$6a+3b=-1 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-\frac{4}{3}, b=\frac{7}{3}$$

$$\therefore 9ab=9 \times \left(-\frac{4}{3}\right) \times \frac{7}{3} = -28$$

답 -28

07

$f(x)=-3x(x^2-1)=-3x^3+3x$ 라고 하면

$$f'(x)=-9x^2+3$$

점 P에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 이므로 접선의 기울기는 3이다.
 $\rightarrow$ 서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1임을 이용해서 구한다.

이때 $P(k, f(k))$ 라고 하면 $f'(k)=3$ 이므로

$$-9k^2+3=3, -9k^2=0$$

$$\therefore k=0$$

$$\therefore f(k)=f(0)=0$$

따라서 점 $P(0, 0)$ 을 지나고 기울기가 3인 접선의 방정식은

$$y=3x$$

$$\text{즉, } m=3, n=0 \text{이므로 } m+n=3+0=3$$

답 ④

08

문제 접근하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $(k, f(k))$ 에서의 접선의 방정식은

$y=f'(k)(x-k)+f(k)$ 이고, 곡선 $y=f(x)$ 와 접선

$y=f'(k)(x-k)+f(k)$ 의 교점의 x좌표는 방정식

$f(x)=f'(k)(x-k)+f(k)$ 의 해이다.

$f(x)=x^3+ax$ 에서 $f'(x)=3x^2+a$

점 $A(-1, -1-a)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(-1)=a+3$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(-1-a)=(a+3)\{x-(-1)\}$$

$$\therefore y=(a+3)x+2$$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=(a+3)x+2$ 가 만나는 점의 x좌표는

$$x^3+ax=(a+3)x+2 \text{에서}$$

$$x^3-3x-2=0, (x+1)^2(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

$$\therefore B(2, 2a+8)$$

점 B에서의 접선의 기울기는

$$f'(2)=a+12$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(2a+8)=(a+12)(x-2)$$

$$\therefore y=(a+12)x-16$$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=(a+12)x-16$ 이 만나는 점의 x좌표는

$$x^3+ax=(a+12)x-16 \text{에서}$$

$$x^3-12x+16=0, (x+4)(x-2)^2=0$$

$$\therefore x=-4 \text{ 또는 } x=2$$

$$\therefore C(-4, -4a-64)$$

따라서 $b=2$, $c=-4$ 이므로

$$f(b)+f(c)=f(2)+f(-4)$$

$$=(2a+8)+(-4a-64)$$

$$=-2a-56$$

이때 $-2a-56=-80$ 이므로

$$-2a=-24 \quad \therefore a=12$$

답 ③

09

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-6$ 이라고 하면 $f'(x)=x^2+2x$

구하는 접선이 직선 $x+3y+21=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x-7$ 에 수직이므로 접선의 기울기는 3이다.
 $\rightarrow$ 서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1임을 이용해서 구한다.

이때 접점의 좌표를 $(k, f(k))$ 라고 하면

$$f'(k)=3 \text{에서 } k^2+2k=3$$

$$k^2+2k-3=0, (k+3)(k-1)=0$$

$$\therefore k=-3 \text{ 또는 } k=1$$

(i) $k = -3$ 일 때

$$f(k) = f(-3) = \frac{1}{3} \times (-3)^3 + (-3)^2 - 6 = -6$$

이므로 접점의 좌표는 $(-3, -6)$ 이고, 이 점을 지나고 기울기가 3인 접선의 방정식은

$$y - (-6) = 3\{x - (-3)\}$$

$$\therefore y = 3x + 3$$

따라서 y 절편은 3이다. $\rightarrow y$ 절편은 $x=0$ 일 때의 y 의 값이다.

(ii) $k = 1$ 일 때

$$f(k) = f(1) = \frac{1}{3} \times 1^3 + 1^2 - 6 = -\frac{14}{3}$$

이므로 접점의 좌표는 $(1, -\frac{14}{3})$ 이고, 이 점을 지나고 기울기가 3인 접선의 방정식은

$$y - \left(-\frac{14}{3}\right) = 3(x - 1)$$

$$\therefore y = 3x - \frac{23}{3}$$

따라서 y 절편은 $-\frac{23}{3}$ 이다.

(i), (ii)에서 구하는 접선의 y 절편의 곱은

$$3 \times \left(-\frac{23}{3}\right) = -23$$

답 ②

10

문제 접근하기

점 $(1, -1)$ 을 지나는 접선의 기울기를 먼저 구하고, 평행한 두 직선의 기울기가 같음을 이용해서 다른 곡선에서의 접선의 방정식을 구한다.

$$f(x) = x^3 - 2x \text{라고 하면 } f'(x) = 3x^2 - 2$$

점 $(1, -1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = 3 - 2 = 1$$

$$h(x) = x^2 + 3x \text{라고 하면 } h'(x) = 2x + 3$$

곡선 $y = h(x)$ 와 직선 $y = g(x)$ 의 접점의 좌표를 $(k, k^2 + 3k)$ 라고 하면 접선의 기울기는

$$h'(k) = 2k + 3$$

평행한 두 직선의 기울기는 같으므로

$$f'(1) = h'(k)$$

$$1 = 2k + 3, 2k = -2$$

$$\therefore k = -1$$

즉, 곡선 $y = h(x)$ 에서의 접점의 좌표는 $(-1, -2)$ 이다.

접선 $y = g(x)$ 는 점 $(-1, -2)$ 를 지나고 기울기가 1인 직선이므로

$$y - (-2) = x - (-1)$$

$$\therefore y = x - 1$$

따라서 $g(x) = x - 1$ 이므로

$$g(5) = 5 - 1 = 4$$

답 ②

11

$$f(x) = x^3 - 4x + 3 \text{이라고 하면 } f'(x) = 3x^2 - 4$$

직선 $y = -x + 1$ 이 곡선 $y = f(x)$ 에 접할 때 그 접점의 좌표를

$(k, k^3 - 4k + 3)$ 이라고 하면 접선의 기울기는 -1 이므로

$$f'(k) = -1$$

$$3k^2 - 4 = -1, 3k^2 = 3$$

$$k^2 = 1 \quad \therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 1$$

즉, 접선의 기울기가 -1 일 때, 접점의 좌표는 $(-1, 6)$, $(1, 0)$ 이고, 이 중에서 점 $(1, 0)$ 만 직선 $y = -x + 1$ 위의 점이므로 구하는 접점의 좌표는 $(1, 0)$ 이다.

한편, 접선 $y = -x + 1$ 에 수직인 직선의 기울기는 1 이므로

점 $(1, 0)$ 을 지나고 기울기가 1 인 직선의 방정식은

$$y = x - 1$$

따라서 접선에 수직인 직선의 y 절편은 -1 이다.

답 ②

참고

오른쪽 그림과 같이

$y = x^3 - 4x + 3$ 의 그래프에 접하고

기울기가 -1 인 직선은

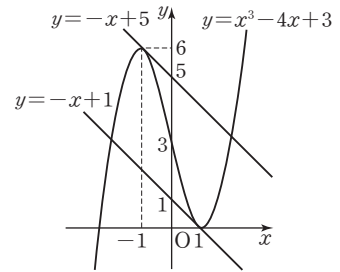
$y = -x + 1$, $y = -x + 5$ 로 2개가 있다.

접선이 $y = -x + 1$ 일 때의 접점은

$(1, 0)$ 이고, 접선이 $y = -x + 5$ 일

때의 접점은 $(-1, 6)$ 이므로 접점

을 구했을 때 그것이 문제의 조건에 맞는지 확인해야 한다.



12

$$f(x) = 2x^2 + 5x + 2 \text{라고 하면 } f'(x) = 4x + 5$$

접점의 좌표를 $(k, 2k^2 + 5k + 2)$ 라고 하면 접선의 기울기는

$$f'(k) = 4k + 5$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - (2k^2 + 5k + 2) = (4k + 5)(x - k)$$

$$\therefore y = (4k + 5)x - 2k^2 + 2$$

이 접선이 점 $(2, 12)$ 를 지나므로

$$12 = 2(4k + 5) - 2k^2 + 2$$

$$2k^2 - 8k = 0, 2k(k - 4) = 0$$

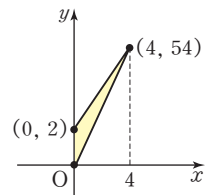
$$\therefore k = 0 \text{ 또는 } k = 4$$

$k = 0$ 일 때, 접점의 좌표는 $(0, 2)$ 이다.

$k = 4$ 일 때, 접점의 좌표는 $(4, 54)$ 이다.

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$



답 4

13

$$f(x) = (x+1)(-x^2 - x + a), g(x) = -4x - 7 \text{이라고 하면}$$

$$f'(x) = (-x^2 - x + a) + (x+1)(-2x-1)$$

$$= -3x^2 - 4x + a - 1$$

$$g'(x) = -4$$

곡선과 직선이 $x = k$ 인 점에서 접한다고 하면

(i) $f(k) = g(k)$ 이므로

$$(k+1)(-k^2 - k + a) = -4k - 7$$

$$\therefore -k^3 - 2k^2 + (a+3)k + a + 7 = 0 \quad \cdots \text{㉠}$$

(ii) $f'(k) = g'(k)$ 이므로

$$-3k^2 - 4k + a - 1 = -4$$

$$\therefore a = 3k^2 + 4k - 3 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉔을 ㉓에 대입하면

$$-k^3 - 2k^2 + (3k^2 + 4k)k + 3k^2 + 4k + 4 = 0$$

$$2k^3 + 5k^2 + 4k + 4 = 0$$

$$(k+2)(2k^2+k+2)=0$$

$$\therefore k = -2 \quad (\because 2k^2+k+2 > 0)$$

$k = -2$ 를 ㉔에 대입하면

$$a = 12 - 8 - 3 = 1$$

답 ④

14

$f(x) = x^3 + ax$, $g(x) = x^2 + a$ 라고 하면

$$f'(x) = 3x^2 + a, \quad g'(x) = 2x$$

두 곡선이 $x = k$ 인 점에서 공통인 접선을 가지면

$$(i) f(k) = g(k) \text{이므로 } k^3 + ak = k^2 + a$$

$$\therefore k^3 - k^2 + ak - a = 0$$

..... ㉑

$$(ii) f'(k) = g'(k) \text{이므로 } 3k^2 + a = 2k$$

$$\therefore a = -3k^2 + 2k$$

..... ㉒

㉔을 ㉑에 대입하면

$$k^3 - k^2 + (-3k^2 + 2k)k - (-3k^2 + 2k) = 0$$

$$-2k^3 + 4k^2 - 2k = 0$$

$$-2k(k-1)^2 = 0$$

$$\therefore k = 0 \text{ 또는 } k = 1$$

$k = 0$ 을 ㉒에 대입하면 $a = 0$

$k = 1$ 을 ㉒에 대입하면 $a = -1$

이때 $a \neq 0$ 이므로

$$a = -1$$

답 -1

15

$f(x) = -2x^2 + kx$ 에서

$$f'(x) = -4x + k$$

이때 롤의 정리를 만족시키는 상수가 5이므로 $f'(5) = 0$ 에서

$$-20 + k = 0 \quad \therefore k = 20$$

$$\therefore f(x) = -2x^2 + 20x$$

한편, 롤의 정리가 성립하려면 $f(2a) = f(3a)$ 이므로

$$-8a^2 + 40a = -18a^2 + 60a$$

$$10a^2 - 20a = 0$$

$$10a(a-2) = 0$$

이때 $a \neq 0$ 이므로

$$a = 2$$

답 $a = 2, k = 20$

16

함수 $f(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$$

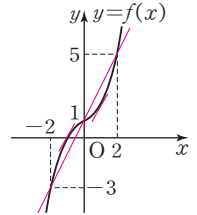
이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이고 미분가능하다.

즉, 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 연속이고 열린구간

$(-2, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리를 만족시키는 상수 c 가 존재한다.

이때 $f(-2) = -4 + 1 = -3$, $f(2) = 4 + 1 = 5$ 이므로 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 상수 c 가 평균값 정리를 만족시키면 $x = c$ 에서의 접선의 기울기는 두 점 $(-2, -3)$, $(2, 5)$ 를 잇는 직선의 기울기와 같다.

오른쪽 그림과 같이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프에서 두 점 $(-2, -3)$, $(2, 5)$ 를 잇는 직선과 평행한 접선은 2개 그을 수 있으므로 상수 c 의 개수는 2이다.

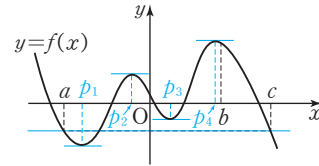


답 2

17

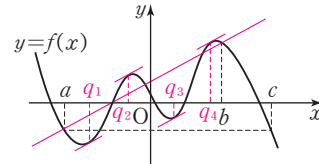
열린구간 (a, c) 에서 $f(a) = f(c)$ 이고, 롤의 정리를 만족시키는 실수 x 는 두 점 $(a, f(a))$, $(c, f(c))$ 를 잇는 직선, 즉 x 축과 평행한 접선을 갖는 점의 x 좌표이다. 이때 x 축에 평행한 접선을 다음 그림과 같이 4개 그을 수 있으므로 실수 x 의 개수는 4이다.

$$\therefore p = 4$$



열린구간 (a, b) 에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 x 는 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 를 잇는 직선과 평행한 접선을 갖는 점의 x 좌표이고, 평행한 접선을 다음 그림과 같이 4개 그을 수 있으므로 실수 x 의 개수는 4이다.

$$\therefore q = 4$$



$$\therefore p + q = 4 + 4 = 8$$

답 8

18

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 5]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 5)$ 에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = f'(c)$$

를 만족시키는 상수 c 가 열린구간 $(1, 5)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 조건 ㉔에 의하여 $f'(c) \geq 5$ 이므로

$$\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} \geq 5$$

조건 ㉓에서 $f(1) = 3$ 이므로

$$\frac{f(5) - 3}{4} \geq 5 \quad \therefore f(5) \geq 23$$

따라서 $f(5)$ 의 최솟값은 23이다.

답 ③



도함수의 활용 (2)

기본을 다지는 유형

본문 073쪽

001

(1) $0 < x_1 < x_2$ 인 임의의 두 양수 x_1, x_2 에 대하여

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) < 0$$

이므로 $f(x_1) < f(x_2)$ $\rightarrow x_1 + x_2 > 0, x_1 - x_2 < 0$

따라서 함수 $f(x) = x^2$ 은 구간 $(0, \infty)$ 에서 증가한다.

(2) $x_1 < x_2 < -1$ 인 임의의 두 음수 x_1, x_2 에 대하여

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1^2 + 1) - (x_2^2 + 1) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) > 0$$

이므로 $f(x_1) > f(x_2)$ $\rightarrow x_1 + x_2 < 0, x_1 - x_2 < 0$

따라서 함수 $f(x) = x^2 + 1$ 은 구간 $(-\infty, -1)$ 에서 감소한다.

(3) $x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) < 0$$

이므로 $f(x_1) < f(x_2)$ $\rightarrow x_1 - x_2 < 0, x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0$

따라서 함수 $f(x) = x^3$ 은 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가한다.

답 (1) 증가 (2) 감소 (3) 증가

002

$f(x) = x^3 - 3x + 1$ 에서 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

함수 $f(x)$ 는 $f'(x) \geq 0$ 인 구간에서 증가하므로

$$3(x+1)(x-1) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1$$

따라서 함수 $f(x)$ 가 증가하는 구간이 아닌 것은 ③ $(-1, 1)$ 이다.

답 ③

003

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 1$ 에서

$$f'(x) = x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5)$$

함수 $f(x)$ 는 $f'(x) \leq 0$ 인 구간에서 감소하므로

$$(x+1)(x-5) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 5$$

즉, 함수 $f(x)$ 가 감소하는 구간은 $[-1, 5]$ 이므로

$$-1 \leq a < b \leq 5$$

따라서 $b-a$ 의 최댓값은

$$5 - (-1) = 6$$

답 ①

004

$f(x) = -x^3 - ax^2 + bx + 8$ 에서 $f'(x) = -3x^2 - 2ax + b$

함수 $f(x)$ 가 $x = -4, x = 0$ 의 좌우에서 증가와 감소가 바뀌므로

$x = -4, x = 0$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀐다.

즉, 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 두 근은 $-4, 0$ 이므로 ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-4 + 0 = -\frac{-2a}{-3}, -4 \times 0 = \frac{b}{-3}$$

$$-4 = -\frac{2}{3}a, 0 = -\frac{b}{3}$$

$$\therefore a = 6, b = 0 \quad \text{②}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 6^2 + 0^2 = 36 \quad \text{③}$$

답 36

채점 기준	비율
① 방정식 $f'(x) = 0$ 의 두 근을 알 수 있다.	40 %
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $a^2 + b^2$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

005

$f'(x) \geq 0$ 인 구간에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

$a \leq x \leq c, x \geq g$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 증가하는 x 의 값의 범위는 ② $b \leq x \leq c$ 이다.

답 ②

006

$f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + 5$ 에서 $f'(x) = 3x^2 + 6x + a$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여

$f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 9 - 3a \leq 0, 3a \geq 9 \quad \therefore a \geq 3$$

답 ⑤

참고

삼차함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서

(1) 증가하면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$

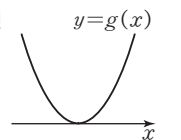
(2) 감소하면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$

풍뎡 개념 CHECK

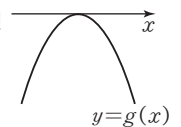
이차부등식이 항상 성립할 조건 高 公 通 수 학 1

이차함수 $g(x) = ax^2 + bx + c$ 에 대하여 이차방정식 $g(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 할 때

(1) 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq 0$ 이 성립하려면 $a > 0, D \leq 0$



(2) 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \leq 0$ 이 성립하려면 $a < 0, D \leq 0$



007

$f(x) = -x^3 + 2ax^2 - ax + 4$ 에서 $f'(x) = -3x^2 + 4ax - a$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 4a^2 - 3a \leq 0, a(4a - 3) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq \frac{3}{4}$$

따라서 정수 a 는 0의 1개이다.

답 ②

008

$$f(x) = x^3 + ax^2 - (a^2 - 8a)x + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - a^2 + 8a$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3(-a^2 + 8a) \leq 0, 4a^2 - 24a \leq 0$$

$$4a(a - 6) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq a \leq 6$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 6이다.

답 6

009

함수 $f(x)$ 가 일대일함수이려면 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다. 이때 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$ 는 증가해야 한다.

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 - 2ax + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax - 2a$$

함수 $f(x)$ 가 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 9a^2 + 6a \leq 0, 3a(3a + 2) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{2}{3} \leq a \leq 0$$

따라서 상수 a 의 값이 될 수 있는 것은 ③이다.

답 ③

010

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $f(x)$ 가 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$ 는 증가하거나 감소해야 한다. 이때 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이므로 $f(x)$ 는 감소해야 한다.

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + (a-2)x^2 - ax + 4 \text{에서}$$

$$f'(x) = -x^2 + 2(a-2)x - a$$

함수 $f(x)$ 가 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (a-2)^2 - a \leq 0, a^2 - 5a + 4 \leq 0$$

$$(a-1)(a-4) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq a \leq 4$$

따라서 모든 정수 a 의 값의 합은

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

답 ④

011

함수 $f(x)$ 가 주어진 조건을 만족시키므로 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

$$f(x) = -x^3 + 3ax^2 - (a+4)x \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6ax - a - 4$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 9a^2 - 3(a+4) \leq 0, 9a^2 - 3a - 12 \leq 0$$

$$3(a+1)(3a-4) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq \frac{4}{3}$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이다.

답 ④

012

함수 $f(x)$ 에 대하여 주어진 명제가 참이면 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$$f(x) = x^3 + (a+1)x^2 + (a+1)x \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2(a+1)x + a+1$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (a+1)^2 - 3(a+1) \leq 0, a^2 - a - 2 \leq 0$$

$$(a+1)(a-2) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq a \leq 2$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 2, 최솟값은 -1이므로 구하는 합은 $2 + (-1) = 1$

답 ③

013

함수 $f(x)$ 가 주어진 조건을 만족시키면 $f(x)$ 는 일대일함수이다. 이때 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이므로 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다. ①

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 3ax + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + 3a$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 + 9a \leq 0, a(a+9) \leq 0$$

$$\therefore -9 \leq a \leq 0 \quad \text{②}$$

따라서 정수 a 는 -9, -8, ..., 0의 10개이다. ③

답 10

채점 기준	비율
① 함수 $f(x)$ 가 감소해야 함을 알 수 있다.	40 %
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ 정수 a 의 개수를 구할 수 있다.	20 %

014

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + ax + 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - 2x + a = (x-1)^2 + a - 1$$

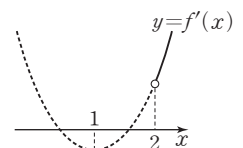
함수 $f(x)$ 가 $x > 2$ 에서 증가하려면

$x > 2$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$f'(2) = 4 - 4 + a \geq 0$$

$$\therefore a \geq 0$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 0이다.



답 0

015

$$f(x) = x^3 + ax + 2 \text{에서 } f'(x) = 3x^2 + a$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(0, 1)$ 에서 감소하려면

$0 < x < 1$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로

$$f'(0) = a \leq 0 \text{에서}$$

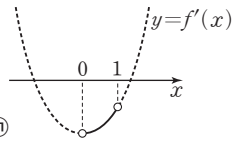
$$a \leq 0$$

$$f'(1) = 3 + a \leq 0 \text{에서}$$

$$a \leq -3$$

㉠, ㉡의 공통 범위는 $a \leq -3$

따라서 실수 a 의 최댓값은 -3 이다.



답 ①

016

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + ax \text{에서}$$

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + a = -6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + a + \frac{3}{2}$$

함수 $f(x)$ 가 $-1 < x < 2$ 에서 증가하려면

$-1 < x < 2$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$f'(-1) = -6 - 6 + a = a - 12 \geq 0 \text{에서}$$

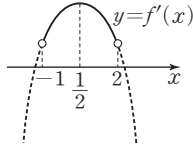
$$a \geq 12$$

$$f'(2) = -24 + 12 + a = a - 12 \geq 0 \text{에서}$$

$$a \geq 12$$

㉠, ㉡의 공통 범위는 $a \geq 12$

따라서 실수 a 의 최솟값은 12 이다.



답 ③

017

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 4x + 4 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + 4$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-1, 1)$ 에서 증가하려면

$-1 < x < 1$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$f'(-1) = -3 - 2a + 4 = -2a + 1 \geq 0 \text{에서}$$

$$a \leq \frac{1}{2}$$

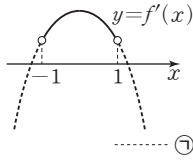
$$f'(1) = -3 + 2a + 4 = 2a + 1 \geq 0 \text{에서}$$

$$a \geq -\frac{1}{2}$$

㉠, ㉡의 공통 범위는 $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$

$$\text{따라서 } a = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2} \text{이므로 } |4\alpha\beta| = \left| 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} \right| = 1$$

답 ④



018

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - (a+1)x + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 8x - a - 1 = 3\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 - a - \frac{19}{3}$$

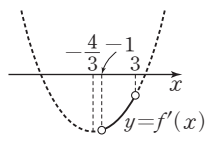
함수 $f(x)$ 가 구간 $(-1, 3)$ 에서 감소하려면

$-1 < x < 3$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로

$$f'(3) = 27 + 24 - a - 1 = -a + 50 \leq 0 \text{에서}$$

$$a \geq 50$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 50 이다.



답 ②

019

$$(1) f(x) = x^3 - 12x + 3 \text{에서 } f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$(2) f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	19	↘	-13	↗

(4) 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극댓값 19 , $x = 2$ 에서 극솟값 -13 을 갖는다.

답 (1) $f'(x) = 3x^2 - 12$ (2) $-2, 2$

(3) 풀이 참조

(4) 극댓값: 19 , 극솟값: -13

020

함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극대이고, 극댓값은 $f(-1) = 2$ 이다.

함수 $f(x)$ 가 $x = 2$ 의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극소이고, 극솟값은 $f(2) = -2$ 이다.

답 극댓값: 2 , 극솟값: -2

021

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 12x + 4 \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - 4x - 12 = (x+2)(x-6)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 6$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	6	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극대이고, $x = 6$ 에서 극소이다.

따라서 $\alpha = -2$, $\beta = 6$ 이므로

$$\beta - \alpha = 6 - (-2) = 8$$

답 ⑤

022

$$f(x) = \frac{3}{2}x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^3 - 12x^2 + 6x = 6x(x-1)^2$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	↘	1	↗		↗

이때 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극솟값 1 을 갖고, $x = 1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 $x = 1$ 에서 극값을 갖지 않는다.

따라서 $a = 0$, $b = 1$ 이므로

$$a - b = 0 - 1 = -1$$

답 ③

023

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{2}{3} \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

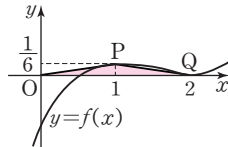
x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{1}{6}$	↘	0	↗

①

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 $\frac{1}{6}$,

$x=2$ 에서 극솟값 0을 가지므로

$P(1, \frac{1}{6})$, $Q(2, 0)$ 이다. ②



따라서 삼각형 OPQ의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore 12S = 12 \times \frac{1}{6} = 2 \quad \text{③}$$

답 2

채점 기준	비율
① 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소 상태를 알 수 있다.	40 %
② 두 점 P, Q의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
③ 12S의 값을 구할 수 있다.	30 %

024

$$(1) f(x) = 2x^3 - 6x^2 + a \text{에서 } f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	a	↘	$a-8$	↗

(3) 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값 $a-8$ 을 가지므로

$$a-8 = -5 \quad \therefore a=3$$

(4) 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 a 를 가지므로 구하는 극댓값은 3이다.

답 (1) 0, 2 (2) 풀이 참조 (3) 3 (4) 3

참고

미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값 b 를 갖는다.

$$\Rightarrow f(a) = b, f'(a) = 0$$

025

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + ax - 2 \text{에서 } f'(x) = 6x^2 - 24x + a$$

함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(3) = 0, 54 - 72 + a = 0 \quad \therefore a = 18$$

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 2 \text{이므로}$$

$$m = f(3) = 54 - 108 + 54 - 2 = -2$$

$$\therefore a + m = 18 + (-2) = 16$$

답 ④

참고

$$f'(x) = 6x^2 - 24x + 18 = 6(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	6	↘	-2	↗

함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극솟값 -2를 갖는다.

026

$$f(x) = -x^3 + ax \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + a$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(-2) = 0, -12 + a = 0$$

$$\therefore a = 12$$

$$f(x) = -x^3 + 12x \text{이므로}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 12 = -3(x+2)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	-16	↗	16	↘

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값 16을 가지므로

$$p = 16$$

$$\therefore a + p = 12 + 16 = 28$$

답 ⑤

027

$$f(x) = x^4 + ax^2 + b \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극소이므로

$$f'(1) = 0, 4 + 2a = 0$$

$$\therefore a = -2$$

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + b \text{이므로}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	$b-1$	↗	b	↘	$b-1$	↗

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 4를 가지므로

$$f(0) = b = 4$$

$$\therefore a + b = -2 + 4 = 2$$

답 2

028

$$f(x) = x^3 - 3x + a \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$a+2$	↘	$a-2$	↗

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값 $a+2$, $x=1$ 에서 극솟값 $a-2$ 를 갖는다.

이때 함수 $f(x)$ 의 모든 극값의 곱이 5이므로

$$(a+2)(a-2)=5, a^2-4=5$$

$$a^2-9=0, (a+3)(a-3)=0$$

$$\therefore a=3 \quad (\because a>0)$$

답 ②

029

$$f(x)=-2x^3+9x^2-12x+a \text{에서}$$

$$f'(x)=-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	$a-5$	↗	$a-4$	↘

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값 $a-5$, $x=2$ 에서 극댓값 $a-4$ 를 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 그 부호가 서로 다르므로

$$a-5=-(a-4), a-5=-a+4$$

$$2a=9 \quad \therefore a=\frac{9}{2}$$

답 ③

030

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \text{에서 } f'(x)=3x^2+2ax+b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 극댓값 0을 가지므로

$$f(-1)=0, f'(-1)=0$$

$$f(-1)=0 \text{에서 } -1+a-b+c=0$$

$$\therefore a-b+c=1 \quad \dots\dots\dots ㉠$$

$$f'(-1)=0 \text{에서 } 3-2a+b=0$$

$$\therefore -2a+b=-3 \quad \dots\dots\dots ㉡$$

①

$x=1$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(1)=0 \text{에서 } 3+2a+b=0 \quad \therefore 2a+b=-3 \quad \dots\dots\dots ㉢$$

②

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=0, b=-3$

$a=0, b=-3$ 을 ㉡에 대입하여 풀면 $c=-2$ $\dots\dots\dots ㉣$

따라서 $f(x)=x^3-3x-2$ 이므로 극솟값은

$$f(1)=1-3-2=-4 \quad \dots\dots\dots ㉤$$

④

답 -4

채점 기준	비율
① $x=-1$ 에서 극댓값 0을 가짐을 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
② $x=1$ 에서 극솟값을 가짐을 이용하여 식을 세울 수 있다.	20 %
③ a, b, c 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ 극솟값을 구할 수 있다.	20 %

031

$$f(x)=x^3+6ax^2-8a \text{에서 } f'(x)=3x^2+12ax=3x(x+4a)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=-4a$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=0, x=-4a$ 에서 극값을 갖고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축에 접하므로

$$f(0)=0 \text{ 또는 } f(-4a)=0$$

$$\text{이때 } f(0)=-8a \text{이고, } a \neq 0 \text{이므로 } f(0) \neq 0$$

$$\text{따라서 } f(-4a)=0 \text{이므로}$$

$$-64a^3+96a^3-8a=0$$

$$32a^3-8a=0$$

$$8a(2a+1)(2a-1)=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{2} \quad (\because a>0)$$

답 ③

032

$$f(x)=x^3+ax^2+ax \text{에서 } f'(x)=3x^2+2ax+a$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식

$$f'(x)=0 \text{이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.}$$

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-3a>0, a(a-3)>0$$

$$\therefore a<0 \text{ 또는 } a>3$$

$$\text{따라서 } a=0, \beta=3 \text{이므로}$$

$$a+\beta=3$$

답 ①

참고

삼차함수 $f(x)$ 에 대하여

(1) $f(x)$ 가 극댓값, 극솟값을 모두 갖는다.

→ 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $f(x)$ 가 극값을 갖지 않는다.

→ 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 갖는다.

풍뎡 개념 CHECK

이차방정식의 근의 판별 高 公通수학 1

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

(1) 서로 다른 두 실근을 갖는다. → $D=b^2-4ac>0$

(2) 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다. → $D=b^2-4ac=0$

(3) 서로 다른 두 허근을 갖는다. → $D=b^2-4ac<0$

033

$$f(x)=-\frac{2}{3}ax^3+3x^2-2ax+4 \text{에서 } f'(x)=-2ax^2+6x-2a$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지므로 이차방정식

$$f'(x)=0 \text{이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.}$$

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=9-4a^2>0, -(2a+3)(2a-3)>0$$

$$(2a+3)(2a-3)<0$$

$$\therefore -\frac{3}{2}<a<\frac{3}{2}$$

따라서 자연수 a 의 최댓값은 1이다.

답 ①

034

$$f(x) = 3x^3 + (a+1)x^2 + (a-1)x - 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 9x^2 + 2(a+1)x + a - 1$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. $\rightarrow$ 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (a+1)^2 - 9(a-1) > 0, a^2 - 7a + 10 > 0$$

$$(a-2)(a-5) > 0 \quad \therefore a < 2 \text{ 또는 } a > 5$$

따라서 실수 a 의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

참고

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖는다.

$\iff$ 삼차함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

035

$$f(x) = x^3 + x^2 + ax + 3 \text{에서 } f'(x) = 3x^2 + 2x + a$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - 3a \leq 0, -3a \leq -1$$

$$\therefore a \geq \frac{1}{3}$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이다.

답 ④

036

$$f(x) = x^3 + (a+1)x^2 + (a+1)x - 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2(a+1)x + a + 1$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (a+1)^2 - 3(a+1) \leq 0, a^2 - a - 2 \leq 0$$

$$(a+1)(a-2) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 2$$

답 ②

037

$$f(x) = -x^3 + ax^2 - ax + 4 \text{에서 } f'(x) = -3x^2 + 2ax - a$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3a \leq 0, a(a-3) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 3$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

답 ③

038

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + ax \text{에서 } f'(x) = x^2 - 2x + a$$

삼차함수 $f(x)$ 가 구간 $(0, 2)$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 $0 < x < 2$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - a > 0, -a > -1$$

$$\therefore a < 1$$

(ii) $f'(0) > 0$ 에서 $a > 0$

$$f'(2) > 0 \text{에서 } 4 - 4 + a > 0$$

$$\therefore a > 0$$

(iii) $f'(x) = x^2 - 2x + a = (x-1)^2 + a - 1$ 이므로 이차함수

$y = f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$ 이고 $0 < 1 < 2$ 이다.

(i)~(iii)에서 실수 a 의 값의 범위는 $0 < a < 1$ 이다.

답 ④

참고

삼차함수 $f(x)$ 가 $a < x < b$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 은 $a < x < b$ 에서 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이때 다음의 세 가지를 조사하여 문제를 해결한다.

(1) 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식 D 의 값의 부호

(2) $f'(a), f'(b)$ 의 값의 부호

(3) 이차함수 $y = f'(x)$ 의 그래프의 축의 위치

039

$$f(x) = -x^3 - x^2 + ax - 2 \text{에서 } f'(x) = -3x^2 - 2x + a$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(0, 1)$ 에서 극댓값을 갖고, 구간 $(-\infty, 0)$ 에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 두 실근을 α, β ($\alpha < \beta$)라고 할 때, $\alpha < 0, 0 < \beta < 1$ 이어야 한다. ①

(i) $f'(0) > 0$ 에서 $a > 0$

(ii) $f'(1) < 0$ 에서 $-3 - 2 + a < 0$

$$\therefore a < 5$$

(i), (ii)에서 $0 < a < 5$ ②

따라서 모든 정수 a 의 값의 합은

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \text{ ③}$$

답 10

채점 기준	비율
① $f'(x) = 0$ 의 두 실근의 범위를 구할 수 있다.	40 %
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ 모든 정수 a 의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

040

$$f(x) = x^4 - \frac{2}{3}(a+2)x^3 + ax^2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 2(a+2)x^2 + 2ax = 2x(x-1)(2x-a) \text{ ①}$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값을 가지려면 함수 $f(x)$ 는 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 하므로 삼차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이때 ㉠에서 방정식 $f'(x)=0$ 의 세 실근은

$$x=0, x=1, x=\frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} \neq 0 \text{이므로 } a \neq 0, \frac{a}{2} \neq 1 \text{이므로 } a \neq 2$$

따라서 실수 a 의 값이 될 수 없는 것은 ㉡이다.

답 ②

참고

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$ 는 항상 극솟값을 갖는다.

이때 사차함수 $f(x)$ 가

(1) 극댓값을 가지면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

(2) 극댓값을 갖지 않으면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근을 갖거나 삼중근을 갖는다.

041

$$f(x) = -x^4 + 4x^3 - ax^2 \text{에서}$$

$$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 2ax = -2x(2x^2 - 6x + a)$$

함수 $f(x)$ 가 극솟값을 가지려면 $f(x)$ 는 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 하므로 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이때 방정식 $f'(x)=0$ 의 한 실근이 $x=0$ 이므로 이차방정식 $2x^2 - 6x + a = 0$ 은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉, a 는 $a \neq 0$ 인 실수이어야 한다. ㉠

↪ $a=0$ 이면 $2x^2 - 6x = 0$ 에서 한 근이 0이 된다.

이차방정식 $2x^2 - 6x + a = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 9 - 2a > 0, -2a > -9$$

$$\therefore a < \frac{9}{2} \quad \dots\dots\dots ㉡$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a < 0 \text{ 또는 } 0 < a < \frac{9}{2}$$

따라서 모든 자연수 a 의 값의 합은

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

답 ①

참고

최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$ 는 항상 극댓값을 갖는다. 이때 사차함수 $f(x)$ 가

(1) 극솟값을 가지면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

(2) 극솟값을 갖지 않으면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근을 갖거나 삼중근을 갖는다.

042

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(a+1)x^3 + ax + 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = -x^3 - (a+1)x^2 + a = -(x+1)(x^2 + ax - a)$$

$$g(x) = x^2 + ax - a \text{라고 하면} \quad \text{↪ 조립제법을 이용해서 인수분해}$$

$$f'(x) = -(x+1)g(x)$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖고, 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근을 갖거나 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

$$-(x+1)(x^2 + ax - a) = 0 \text{의 한 근이 } x = -1 \text{이므로 이차방정}$$

$$\text{식 } x^2 + ax - a = 0 \text{이 허근을 가져야 한다.}$$

이차방정식 $x^2 + ax - a = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$= g(x)$$

$$D = a^2 + 4a < 0, a(a+4) < 0$$

$$\therefore -4 < a < 0$$

(ii) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 중근을 갖는 경우

$$-(x+1)(x^2 + ax - a) = 0 \text{의 한 근이 } x = -1 \text{이므로 이차방정}$$

$$= g(x)$$

$$\text{식 } x^2 + ax - a = 0 \text{이 } x = -1 \text{을 한 근으로 갖거나 } -1 \text{이 아닌}$$

$$= g(x)$$

실수를 중근으로 가져야 한다.

$$x^2 + ax - a = 0 \text{이 } x = -1 \text{을 한 근으로 가지면}$$

$$1 - a - a = 0, 1 - 2a = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

$$x^2 + ax - a = 0 \text{이 } -1 \text{이 아닌 실수를 중근으로 가지면 판별식을}$$

$$= g(x)$$

D 라고 할 때

$$D = a^2 + 4a = 0, a(a+4) = 0$$

$$\therefore a = -4 \text{ 또는 } a = 0$$

(iii) $f'(x)=0$ 이 삼중근을 갖는 경우

$$-(x+1)(x^2 - x + a) = 0 \text{에서 } x^2 - x + a = 0 \text{이 } x = -1 \text{을 중근으로 가질 수 없으므로 삼차방정식 } f'(x)=0 \text{은 삼중근을 가질 수 없다.}$$

$$(i) \sim (iii) \text{에서 } -4 \leq a \leq 0 \text{ 또는 } a = \frac{1}{2}$$

따라서 a 의 최솟값은 -4 이다.

답 ②

043

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3 \text{에서 } f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$f'(x)=0$ 의 두 실근이 α, β 이고, $\alpha < \beta < 0$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta < 0, \alpha\beta > 0$ 에서

$$-\frac{2a}{3} < 0, \frac{b}{3} > 0$$

$$\therefore a > 0, b > 0$$

답 $a > 0, b > 0$

044

함수 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$ 의 그래프에서 $x \rightarrow \infty$ 일 때

$$f(x) \rightarrow \infty \text{이므로 } a > 0$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{에서 } f'(x)=0 \text{의 두 실근이 } \alpha, \beta \text{이고,}$$

$0 < \alpha < \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0 \text{에서 } -\frac{2b}{3a} > 0, \frac{c}{3a} > 0$$

이때 $a > 0$ 이므로 $b < 0, c > 0$

$$\therefore ab < 0, ac > 0, a - b > 0, a + c > 0, a - bc > 0$$

따라서 옳은 것은 ㉡이다.

답 ⑤

045

함수 $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 y 축과 y 축의 양의 부분에서 만나므로 $c > 0$

$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$ 에서 $f'(x) = 0$ 의 두 실근이 α, β 이고, $\alpha < \beta < 0$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta < 0, \alpha\beta > 0 \text{에서 } -\frac{2a}{-3} < 0, \frac{b}{-3} > 0$$

$$\therefore a < 0, b < 0$$

$$\therefore a < 0, a - c < 0, c - b > 0, ac < 0, bc < 0$$

따라서 양수인 것은 ③이다.

답 ③

046

함수 $f(x) = ax^3 + bx^2 - cx + d$ 의 그래프에서 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $f(x) \rightarrow -\infty$ 이므로 $a < 0$

또, 함수의 그래프가 y 축과 y 축의 음의 부분에서 만나므로 $d < 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx - c$ 에서 $f'(x) = 0$ 의 두 실근이 α, β 이고, $0 < \alpha < \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0 \text{에서 } -\frac{2b}{3a} > 0, \frac{-c}{3a} > 0$$

이때 $a < 0$ 이므로 $b > 0, c > 0$

$$\therefore ab < 0, bc > 0, a - b < 0, cd < 0, a + d < 0$$

따라서 부호가 다른 하나는 ②이다.

답 ②

047

함수 $f(x) = ax^3 - bx^2 + cx - d$ 의 그래프에서 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $f(x) \rightarrow -\infty$ 이므로 $a < 0$

또, 함수의 그래프가 y 축과 y 축의 음의 부분에서 만나므로 $-d < 0$
 $\therefore d > 0$ ①

$f'(x) = 3ax^2 - 2bx + c$ 에서 $f'(x) = 0$ 의 두 실근이 α, β 이고, $\alpha < 0 < \beta, 0 < |\alpha| < \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta > 0, \alpha\beta < 0$ 에서

$$-\frac{-2b}{3a} > 0, \frac{c}{3a} < 0$$

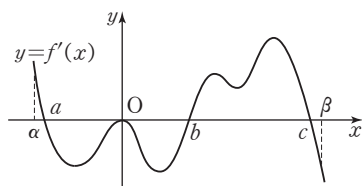
이때 $a < 0$ 이므로 $b < 0, c > 0$ ②

$$\therefore \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} + \frac{|d|}{d} = \frac{-a}{a} + \frac{-b}{b} + \frac{c}{c} + \frac{d}{d} = -1 - 1 + 1 + 1 = 0 \text{ ③}$$

답 0

채점 기준	비율
① a, d 의 값의 부호를 구할 수 있다.	30 %
② b, c 의 값의 부호를 구할 수 있다.	50 %
③ $\frac{ a }{a} + \frac{ b }{b} + \frac{ c }{c} + \frac{ d }{d}$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

048



위의 그림과 같이 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점의 x 좌표를 각각 a, b, c 라고 하자.

(1) $x=a, x=c$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=a, x=c$ 에서 극댓값을 갖는다.

따라서 극댓값을 갖는 x 의 값의 개수는 2이다.

(2) $x=b$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=b$ 에서 극솟값을 갖는다.

따라서 극솟값을 갖는 x 의 값의 개수는 1이다.

답 (1) 2 (2) 1

참고

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지면 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나고, 만나는 그 점의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀐다.

문제에서 $y=f'(x)$ 의 그래프가 $x=0$ 에서 x 축과 만나지만 $x=0$ 의 좌우에서는 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=0$ 에서는 극값을 갖지 않는다.

049

(1) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 에서 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $-1, 2$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$$f'(-1) = 0 \text{이므로 } 3 - 2a + b = 0$$

$$\therefore -2a + b = -3 \text{ ㉠}$$

$$f'(2) = 0 \text{이므로 } 12 + 4a + b = 0$$

$$\therefore 4a + b = -12 \text{ ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } a = -\frac{3}{2}, b = -6$$

(2) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + c$ 이고, 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 -5 이므로 $f(2) = -5$

$$8 - 6 - 12 + c = -5 \quad \therefore c = 5$$

(3) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 극댓값은

$$f(-1) = -1 - \frac{3}{2} + 6 + 5 = \frac{17}{2}$$

답 (1) $a = -\frac{3}{2}, b = -6$ (2) 5 (3) $\frac{17}{2}$

참고

$y=f'(x)$ 의 그래프를 이용한 삼차함수 $y=f(x)$ 의 해석

서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 접한다.	만나지 않는다.
$x = \alpha, x = \beta$ 에서 $f(x)$ 의 극값이 존재한다.	$x = \alpha$ 에서 $f(x)$ 의 극값이 존재하지 않는다.	

050

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 에서 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 0, 2이므로
 $f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f'(0)=0$ 이므로 $c=0$
 $f'(2)=0$ 이므로 $12a+4b=0$
 $\therefore 3a+b=0$ ㉠
 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+d$ 의 극댓값이 2이므로
 $f(0)=2 \quad \therefore d=2$
 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+2$ 의 극솟값이 -2이므로
 $f(2)=-2, 8a+4b+2=-2$
 $\therefore 2a+b=-1$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=-3$
 따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2$ 이므로
 $f(1)=1-3+2=0$

답 0

051

$x=4, x=10$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로
 함수 $f(x)$ 는 $x=4, x=10$ 에서 극댓값을 갖는다.
 따라서 구하는 모든 x 의 값의 합은
 $4+10=14$

답 ⑤

052

$y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 a, b 이므로
 $f'(x)=0$ 에서 $x=a$ 또는 $x=b$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	... (0) ...	b	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

- ① $f(x)$ 는 $x=b$ 에서 극솟값을 갖는다.
 - ② $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극댓값을 갖는다.
 - ③ 구간 $(0, b)$ 에서 $f'(x)<0$ 이므로 $f(x)$ 는 감소한다.
 - ④ 구간 (a, b) 에서 $f'(x)<0$ 이므로 $f(x)$ 는 감소한다.
 - ⑤ 구간 $(-\infty, a)$ 에서 $f'(x)>0$ 이므로 $f(x)$ 는 증가한다.
- 따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

053

$y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 -1, 1이므로
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

- ㄱ. $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값을 갖는다. (거짓)

056 정답과 풀이

- ㄴ. 구간 $(0, 1)$ 에서 $f'(x)>0$ 이므로 $f(x)$ 는 증가한다. (거짓)
 - ㄷ. 구간 $(1, \infty)$ 에서 $f'(x)<0$ 이므로 $f(x)$ 는 감소한다. (참)
- 따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ③

054

$y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 -1, 0, 1이므로
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

- ㄱ. $f(x)$ 는 $x=-1, x=1$ 에서 극솟값을 갖는다. (거짓)
 - ㄴ. $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다. (참)
 - ㄷ. 구간 $(0, 1)$ 에서 $f(x)$ 는 감소하므로 $f(0)>f(1)$ 이다. (참)
- 따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

055

$y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 -2, 0, 2이므로
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

- $x=-2, x=2$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로
 $f(x)$ 는 $x=-2, x=2$ 에서 극댓값을 갖는다.
 - $x=0$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$ 는
 $x=0$ 에서 극솟값을 갖는다.
- 따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

056

- (1) $f(x)=x^4-2x^2+3$ 에서
 $f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
 구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	1	...	2
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	2	↗	3	↘	2	↗	11

- (2) 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.
- (3) 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최댓값 11을 갖는다.

답 (1) 풀이 참조 (2) 2 (3) 11

057

$f(x)=-x^3+3x+2$ 에서
 $f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=1$ ($\because 0 \leq x \leq 2$)

구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	2	↗	4	↘	0

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최댓값 4를 갖는다.

따라서 $a=1, b=4$ 이므로

$$a+b=1+4=5$$

답 5

058

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+6\text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x)=0\text{에서 }x=1\text{ 또는 }x=3$$

구간 $[-1, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	1	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$	-10	↗	10	↘	6

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최댓값 10을 갖는다.

답 5

059

$$f(x)=-x^4+8x^3-16x^2+6\text{에서}$$

$$f'(x)=-4x^3+24x^2-32x=-4x(x-2)(x-4)$$

$$f'(x)=0\text{에서 }x=0\text{ 또는 }x=2\text{ (}\because -1\leq x\leq 2\text{)}$$

구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$	-19	↗	6	↘	-10

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최댓값 6을 갖고, $x=-1$ 일 때 최솟값 -19를 갖는다.

따라서 $M=6, m=-19$ 이므로

$$M+m=6+(-19)=-13$$

답 ①

060

$x+1=t$ 라고 하면 $-4\leq x\leq 0$ 에서

$$-3\leq t\leq 1$$

$$g(t)=t^3-3t+2\text{라고 하면}$$

$$g'(t)=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$$

$$g'(t)=0\text{에서 }t=-1\text{ 또는 }t=1\text{ ①}$$

$-3\leq t\leq 1$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-3	...	-1	...	1
$g'(t)$		+	0	-	0
$g(t)$	-16	↗	4	↘	0

②

함수 $g(t)$ 는 $t=-1$ 일 때 최댓값 4를 갖고, $t=-3$ 일 때 최솟값 -16을 갖는다.

따라서 $f(x)$ 의 최댓값은 4, 최솟값은 -16이다. ③

답 최댓값: 4, 최솟값: -16

채점 기준	비율
① $x+1=t$ 로 치환한 함수 $g(t)$ 의 도함수가 0이 되게 하는 t 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $g(t)$ 의 증가와 감소 상태를 알 수 있다.	40 %
③ $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

061

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+a\text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x)=0\text{에서 }x=1\text{ 또는 }x=3$$

구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$	a	↗	$a+4$	↘	a

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최댓값 $a+4$ 를 갖는다.

이때 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 12이므로

$$a+4=12 \quad \therefore a=8$$

답 ④

062

$$f(x)=x^3-6x^2+a\text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$$

$$f'(x)=0\text{에서 }x=4\text{ (}\because 1\leq x\leq 6\text{)}$$

구간 $[1, 6]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	4	...	6
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$a-5$	↘	$a-32$	↗	a

함수 $f(x)$ 는 $x=6$ 일 때 최댓값 a , $x=4$ 일 때 최솟값 $a-32$ 를 가지므로

$$M=a, m=a-32$$

이때 $M+m=2$ 이므로 $a+(a-32)=2$

$$2a-32=2 \quad \therefore a=17$$

답 17

063

$$f(x)=x^4-4x^3+a\text{에서}$$

$$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$$

$$f'(x)=0\text{에서 }x=0\text{ 또는 }x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	3	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	↘	a	↘	$a-27$	↗

함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최솟값 $a-27$ 을 갖는다.

이때 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -4 이므로
 $a-27=-4 \quad \therefore a=23$

답 ②

064

$$f(x)=ax^3-3ax^2+b \text{에서}$$

$$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \quad (\because -1 \leq x \leq 1)$$

이때 a, b 가 양수이므로 구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$b-4a$	$\nearrow$	b	$\searrow$	$b-2a$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최댓값 b , $x=-1$ 일 때 최솟값 $b-4a$ 를 가지므로

$$b=4, b-4a=-4$$

$$\therefore a=2, b=4$$

$$\therefore ab=2 \times 4=8$$

답 ④

065

$$f(x)=ax^4-2ax^2+b \text{에서}$$

$$f'(x)=4ax^3-4ax=4ax(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1 \quad (\because 0 \leq x \leq 2)$$

이때 a, b 가 양수이므로 구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	b	$\searrow$	$b-a$	$\nearrow$	$8a+b$

①

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최댓값 $8a+b$, $x=1$ 일 때 최솟값 $b-a$ 를 가지므로

②

$$8a+b=4, b-a=1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{3}, b=\frac{4}{3}$$

$$\therefore 9ab=9 \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{3}=4$$

③

답 4

채점 기준	비율
① $f(x)$ 의 증가와 감소 상태를 알 수 있다.	40 %
② $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 a, b 로 나타낼 수 있다.	30 %
③ $9ab$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

066

(1) 꼭짓점 C, D의 좌표가 각각 $(-a, -a^2+6)$, $(a, -a^2+6)$ 이므로 직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} S(a) &= 2a(-a^2+6) \\ &= -2a^3+12a \end{aligned}$$

$$(2) S'(a)=-6a^2+12=-6(a^2-2)$$

$$S'(a)=0 \text{에서 } a^2-2=0, a^2=2$$

$$\therefore a=\sqrt{2} \quad (\because 0 < a < \sqrt{6})$$

$0 < a < \sqrt{6}$ 에서 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	...	$\sqrt{2}$	...	$(\sqrt{6})$
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		$\nearrow$	$8\sqrt{2}$	$\searrow$	

$S(a)$ 는 $a=\sqrt{2}$ 일 때 극대이면서 최대이다.

따라서 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $S(\sqrt{2})=8\sqrt{2}$ 이다.

답 (1) $-2a^3+12a$ (2) $8\sqrt{2}$

067

곡선 $y=x^2$ 위를 움직이는 점의 좌표를 (t, t^2) 이라고 하면

점 (t, t^2) 과 점 $(0, 4)$ 사이의 거리 l 에 대하여

$$l^2=t^2+(t^2-4)^2=t^4-7t^2+16$$

$$f(t)=t^4-7t^2+16 \text{이라고 하면}$$

$$f'(t)=4t^3-14t=2t(2t^2-7)$$

$$f'(t)=0 \text{에서 } t=0 \text{ 또는 } t=\pm \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	$-\frac{\sqrt{14}}{2}$	...	0	...	$\frac{\sqrt{14}}{2}$	...
$f'(t)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(t)$	$\searrow$	$\frac{15}{4}$	$\nearrow$	16	$\searrow$	$\frac{15}{4}$	$\nearrow$

$f(t)$ 는 $t=-\frac{\sqrt{14}}{2}$ 또는 $t=\frac{\sqrt{14}}{2}$ 일 때 최솟값 $\frac{15}{4}$ 를 가지므로 l^2 의 최솟값은 $\frac{15}{4}$ 이다.

답 ②

068

$f(x)=x^3-3x^2+2x$ 라고 하면 $A(t, f(t))$, $B(t+1, f(t+1))$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{\{(t+1)-t\}^2 + \{f(t+1)-f(t)\}^2} \\ &= \sqrt{1+(3t^2-3t)^2} \quad \hookrightarrow \{(t+1)^3-3(t+1)^2+2(t+1)\} \\ &= \sqrt{1+9t^2(t-1)^2} \quad \quad \quad - (t^3-3t^2+2t) \\ & \quad \quad \quad = (t^3-t)-(t^3-3t^2+2t) \\ & \quad \quad \quad = 3t^2-3t \end{aligned}$$

이때 $g(t)=9t^2(t-1)^2$ 이라고 하면

$$\overline{AB}=\sqrt{1+g(t)} \quad \dots\dots\dots ①$$

$$g'(t)=18t(t-1)^2+18t^2(t-1)$$

$$=18t(t-1)(2t-1)$$

$$g'(t)=0 \text{에서 } t=\frac{1}{2} \quad (\because 0 < t < 1)$$

$0 < t < 1$ 에서 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	...	$\frac{1}{2}$	...	(1)
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$		$\nearrow$	$\frac{9}{16}$	$\searrow$	

$g(t)$ 는 $t=\frac{1}{2}$ 일 때 극대이면서 최대이므로 $g(t)$ 의 최댓값은

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{16} \text{이다.}$$

이때 ㉠에서 $g(t)$ 가 최대일 때 선분 AB의 길이도 최대이므로 구하는 선분 AB의 길이의 최댓값은

$$\sqrt{1+\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$$

답 ②

069

$$x^2-4=0 \text{에서 } (x+2)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

$$\therefore A(-2, 0), B(2, 0)$$

$$C(a, a^2-4) \text{ } (0 < a < 2) \text{라고 하면}$$

$$D(-a, a^2-4)$$

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(a)$ 라고

하면 $a^2-4 < 0$ 이므로

$$S(a)=\frac{1}{2} \times (4+2a) \times |a^2-4|$$

$$=\frac{1}{2} \times (4+2a) \times (4-a^2)$$

$$=-a^3-2a^2+4a+8$$

$$\therefore S'(a)=-3a^2-4a+4=-(a+2)(3a-2)$$

$$S'(a)=0 \text{에서 } a=\frac{2}{3} \text{ } (\because 0 < a < 2)$$

$0 < a < 2$ 에서 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	...	$\frac{2}{3}$	...	(2)
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		$\nearrow$	$\frac{256}{27}$	$\searrow$	

$S(a)$ 는 $a=\frac{2}{3}$ 일 때 극대이면서 최대이므로 사다리꼴의 넓이의 최

댓값은 $\frac{256}{27}$ 이다.

따라서 $k=\frac{256}{27}$ 이므로

$$27k=256$$

답 256

070

잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 x ($0 < x < 5$)라 하고, 상자의 부피를 $V(x)$ 라고 하면

$$V(x)=x(16-2x)(10-2x)$$

$$=4x^3-52x^2+160x$$

$$\therefore V'(x)=12x^2-104x+160$$

$$=4(x-2)(3x-20)$$

$$V'(x)=0 \text{에서 } x=2 \text{ } (\because 0 < x < 5)$$

$0 < x < 5$ 에서 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	2	...	(5)
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		$\nearrow$	144	$\searrow$	

$V(x)$ 는 $x=2$ 일 때 극대이면서 최대이므로 상자의 부피의 최댓값은 $V(2)=144$ 이다.

따라서 $k=2$, $M=144$ 이므로

$$k+M=2+144=146$$

답 ⑤

071

원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x

($0 < x < 6$), 높이를 y ($0 < y < 12$)라고 하면

$$6:12=x:(12-y)$$

$$1:2=x:(12-y), 2x=12-y$$

$$\therefore y=-2x+12$$

원기둥의 부피를 $V(x)$ 라고 하면

$$V(x)=\pi x^2 y$$

$$=\pi x^2 (-2x+12)$$

$$=-2\pi x^3+12\pi x^2$$

$$\therefore V'(x)=-6\pi x^2+24\pi x=-6\pi x(x-4)$$

$$V'(x)=0 \text{에서 } x=4 \text{ } (\because 0 < x < 6)$$

$0 < x < 6$ 에서 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	4	...	(6)
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		$\nearrow$	64π	$\searrow$	

$V(x)$ 는 $x=4$ 일 때 극대이면서 최대이므로 원기둥의 부피의 최댓값은 $V(4)=64\pi$ 이다.

답 64π

채점 기준	비율
① 원기둥의 밑면의 반지름의 길이와 높이에 대한 관계식을 구할 수 있다.	30 %
② 원기둥의 부피를 하나의 문자에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
③ 원기둥의 부피의 최댓값을 구할 수 있다.	50 %

실력을 높이는 연습 문제

본문 088쪽

01

$$f(x)=2x^3-ax^2+bx \text{에서 } f'(x)=6x^2-2ax+b$$

함수 $f(x)$ 가 감소하는 구간이 $[-1, 2]$ 이므로 이차방정식

$f'(x)=0$ 의 두 근은 $-1, 2$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+2=-\frac{-2a}{6}, -1 \times 2=\frac{b}{6}$$

이므로 $a=3$, $b=-12$

$$\therefore \frac{b}{a}=\frac{-12}{3}=-4$$

답 ①

02

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $f(x)$ 가 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$ 는 증가하거나 감소해야 한다. 이때 $a < 0$ 이므로 $f(x)$ 는 감소해야 한다.

$f(x) = ax^3 + 3x^2 + (a+2)x + 3$ 에서 $f'(x) = 3ax^2 + 6x + a + 2$
함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 9 - 3a(a+2) \leq 0, -3a^2 - 6a + 9 \leq 0$$

$$a^2 + 2a - 3 \geq 0, (a+3)(a-1) \geq 0$$

이때 a 가 음수이면 $a-1 < 0$ 이므로 $a+3 \leq 0$, 즉 $a \leq -3$ 이어야 한다. 따라서 음수 a 의 최댓값은 -3 이다.

답 ③

03

문제 접근하기

삼차함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하면 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 극댓값과 극솟값이 모두 존재하지 않는다. 즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이다.

한편, 함수 $f(x)$ 의 식에 절댓값 기호가 포함되어 있으므로 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x 의 값을 기준으로 구간을 나누어 $f(x)$ 를 구한다.

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

(i) $x - 2a \leq 0$, 즉 $x \leq 2a$ 이면

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 30a + 3 \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 3(x+5)(x-1)$$

이때 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$3(x+5)(x-1) \geq 0 \quad \therefore x \leq -5 \text{ 또는 } x \geq 1$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x \leq 2a$ 에서 증가하려면 $x \leq 2a$ 가 $x \leq -5$ 또는 $x \geq 1$ 에 포함되어야 하므로

$$2a \leq -5 \quad \therefore a \leq -\frac{5}{2}$$

(ii) $x - 2a > 0$, 즉 $x > 2a$ 이면

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x - 30a + 3 \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 15 = 3(x+2)^2 + 3$$

즉, $x > 2a$ 이면 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

(i), (ii)에서 $a \leq -\frac{5}{2}$ 이므로 실수 a 의 최댓값은 $-\frac{5}{2}$ 이다.

답 ①

04

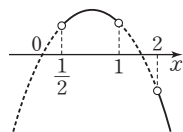
$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 3 \text{에서 } f'(x) = -3x^2 + 2ax$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 에서 증가하려면

$\frac{1}{2} < x < 1$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} + a \geq 0 \text{에서}$$

$$a \geq \frac{3}{4}$$



..... ⑦

$$f'(1) = -3 + 2a \geq 0 \text{에서}$$

$$a \geq \frac{3}{2} \quad \text{..... ④}$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(2, \infty)$ 에서 감소하려면 $x > 2$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로 $f'(2) = -12 + 4a \leq 0$ 에서

$$a \leq 3 \quad \text{..... ⑤}$$

⑦, ④, ⑤의 공통 범위는

$$\frac{3}{2} \leq a \leq 3$$

$$\text{따라서 } a = \frac{3}{2}, \beta = 3 \text{ 이므로}$$

$$2a\beta = 2 \times \frac{3}{2} \times 3 = 9$$

답 ⑤

05

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 2, $x=1$ 에서 극솟값 1을 가지므로 P(0, 2), Q(1, 1)이다.

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$\sqrt{(1-0)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

답 ①

06

$$f(x) = (x-1)^2(x+1)^2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 2(x-1)(x+1)^2 + 2(x-1)^2(x+1)$$

$$= 4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 1을 갖고, $x=-1$ 또는 $x=1$ 에서 극솟값 0을 가지므로 세 점 A, B, C의 좌표는 각각 (-1, 0),

(0, 1), (1, 0)이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$

답 ③

07

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + ax + b \text{에서 } f'(x) = x^2 - 3x + a$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극값을 가지므로 $f'(1) = 0$

$$1 - 3 + a = 0 \quad \therefore a = 2$$

즉, $f'(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ 이므로

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$b+\frac{5}{6}$	↘	$b+\frac{2}{3}$	↗

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 $b+\frac{5}{6}$, $x=2$ 에서 극솟값

$b+\frac{2}{3}$ 를 갖고, 극댓값과 극솟값의 합이 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\left(b+\frac{5}{6}\right)+\left(b+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}, 2b+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

$$2b=-1 \quad \therefore b=-\frac{1}{2}$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극솟값은

$$f(2)=b+\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

답 ①

08

$$f(x)=2x^3-3ax^2+a$$

$$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=a$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$, $x=a$ 에서 극댓값 또는 극솟값을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축에 접하므로

$$f(0)=0 \text{ 또는 } f(a)=0$$

이때 $f(0)=a$ 이고, $a \neq 0$ 이므로 $f(0) \neq 0$

$$\therefore f(a)=0$$

$$\text{즉, } 2a^3-3a^3+a=0 \text{에서 } -a^3+a=0$$

$$-a(a+1)(a-1)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=1 \quad (\because a \neq 0)$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$-1 \times 1 = -1$$

답 ②

09

문제 접근하기

함수 $y=f(x)=|g(x)|$ 의 그래프는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프에서 $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로, 절댓값 기호 안의 함수의 그래프를 파악하여 함수 $f(x)$ 가 2개의 극댓값을 갖게 하는 p 의 값을 구한다.

$$f(x)=|x^3-3x^2+p| \text{에서 } g(x)=x^3-3x^2+p \text{라고 하면}$$

$$g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)=|g(x)|$ 가 극대가 되는 x 의 값이 2개가 되려면

$$g(0) > 0, g(2) < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$g(0) > 0 \text{에서 } p > 0$$

$$g(2) < 0 \text{에서 } p-4 < 0 \quad \therefore p < 4$$

$$\therefore 0 < p < 4$$

이때 $f(x)$ 는 $x=0$ 과 $x=2$ 에서 극대이므로 $f(0)=f(2)$ 에서

$$|p|=|p-4|$$

$$p=-(p-4) \quad (\because 0 < p < 4)$$

$$2p=4 \quad \therefore p=2$$

답 ②

10

$$f(x)=ax^3-5x^2+4ax+4 \text{에서}$$

$$f'(x)=3ax^2-10x+4a$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=25-12a^2 > 0, 12a^2-25 < 0$$

$$(2\sqrt{3}a+5)(2\sqrt{3}a-5) < 0$$

$$\therefore -\frac{5\sqrt{3}}{6} < a < \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

이때 $1 < \frac{5\sqrt{3}}{6} < 2$ 이므로 정수 a 의 최댓값은 1이다.

답 ③

11

$$f(x)=x^3+(a+1)x^2+(2a-1)x-1 \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2+2(a+1)x+2a-1$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=(a+1)^2-3(2a-1) \leq 0, (a-2)^2 \leq 0$$

$$\therefore a=2$$

$$\text{즉, } f(x)=x^3+3x^2+3x-1 \text{이므로 } f'(x)=3x^2+6x+3$$

이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 접선의 기울기가 3인 점의 x 좌표를 k 라고 하면

$$f'(k)=3$$

$$3k^2+6k+3=3, 3k(k+2)=0$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=0$$

따라서 구하는 x 좌표의 합은

$$-2+0=-2$$

답 ②

12

$$f(x)=-x^4+2ax^2+4(a-1)x+3 \text{에서}$$

$$f'(x)=-4x^3+4ax+4(a-1)=-4(x+1)(x^2-x-a+1)$$

사차함수 $f(x)$ 가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근을 갖거나 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

$$-4(x+1)(x^2-x-a+1)=0 \text{의 한 근이 } x=-1 \text{이므로 이차방정식 } x^2-x-a+1=0 \text{이 허근을 가져야 한다.}$$

이차방정식 $x^2-x-a+1=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D=1-4(-a+1) < 0, 4a-3 < 0$$

$$\therefore a < \frac{3}{4}$$

(ii) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 중근을 갖는 경우

$-4(x+1)(x^2-x-a+1)=0$ 의 한 근이 $x=-1$ 이므로 이차방정식 $x^2-x-a+1=0$ 이 $x=-1$ 을 한 근으로 갖거나 -1 이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

$x^2-x-a+1=0$ 이 $x=-1$ 을 한 근으로 가지면

$$1+1-a+1=0 \quad \therefore a=3 \quad \dots\dots\dots \textcircled{7}$$

$x^2-x-a+1=0$ 이 -1 이 아닌 실수를 중근으로 가지면 판별식을 D 라고 할 때

$$D=1-4(-a+1)=0, 4a-3=0$$

$$\therefore a=\frac{3}{4} \quad \dots\dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 $a=\frac{3}{4}$ 또는 $a=3$

(iii) $f'(x)=0$ 이 삼중근을 갖는 경우

$-4(x+1)(x^2-x-a+1)=0$ 에서 $x^2-x-a+1=0$ 이 $x=-1$ 을 중근으로 가질 수 없으므로 삼차방정식 $f'(x)=0$ 은 삼중근을 가질 수 없다.

(i)~(iii)에서 $a \leq \frac{3}{4}$ 또는 $a=3$

$$\boxed{\text{답}} \quad a \leq \frac{3}{4} \text{ 또는 } a=3$$

참고

사차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$ 가 극솟값을 갖지 않으면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 은 다음 중에서 하나가 성립한다.

- (1) 한 실근과 두 허근을 갖는다.
- (2) 한 실근과 중근을 갖는다.
- (3) 삼중근을 갖는다.

13

$$f(x)=3x^4-4ax^3+6ax^2 \text{에서}$$

$$f'(x)=12x^3-12ax^2+12ax=12x(x^2-ax+a)$$

사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근을 갖거나 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

$$12x(x^2-ax+a)=0 \text{의 한 근이 } x=0 \text{이므로 이차방정식}$$

$$x^2-ax+a=0 \text{이 허근을 가져야 한다.}$$

이차방정식 $x^2-ax+a=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D=a^2-4a<0, a(a-4)<0$$

$$\therefore 0<a<4$$

(ii) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 중근을 갖는 경우

$$12x(x^2-ax+a)=0 \text{의 한 근이 } x=0 \text{이므로 이차방정식}$$

$x^2-ax+a=0$ 이 $x=0$ 을 한 근으로 갖거나 0 이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

$$x^2-ax+a=0 \text{이 } x=0 \text{을 한 근으로 가지면 } a=0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{9}$$

$x^2-ax+a=0$ 이 0 이 아닌 실수를 중근으로 가지면 판별식을 D 라고 할 때

$$D=a^2-4a=0, a(a-4)=0$$

$$\therefore a=4 (\because a \neq 0) \quad \dots\dots\dots \textcircled{10}$$

$\textcircled{9}, \textcircled{10}$ 에서 $a=0$ 또는 $a=4$

(iii) $f'(x)=0$ 이 삼중근을 갖는 경우

$$12x(x^2-ax+a)=0 \text{의 삼중근이 } x=0 \text{이어야 하므로}$$

$$a=0$$

(i)~(iii)에서 $0 \leq a \leq 4$

$$\boxed{\text{답}} \quad 0 \leq a \leq 4$$

14

함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 의 그래프에서 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $f(x) \rightarrow \infty$ 이므로 $a>0$

또, 함수의 그래프가 y 축과 y 축의 음의 부분에서 만나므로 $d<0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 에서 $f'(x)=0$ 의 두 실근이 α, β 이고,

$\alpha<0<\beta, |\alpha|>\beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta<0, \alpha\beta<0$ 에서

$$-\frac{2b}{3a}<0, \frac{c}{3a}<0$$

이때 $a>0$ 이므로 $b>0, c<0$

함수 $g(x)=-ax^2+bx-d$ 의 그래프는 $-a<0$ 이므로 위로 볼록

하고, $\frac{b}{2a}>0$ 이므로 축이 y 축의 오른쪽에 있다. 또, $-d>0$ 이므로 y 축과 y 축의 양의 부분에서 만난다.

따라서 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 $\textcircled{4}$ 이다.

$\boxed{\text{답}} \quad \textcircled{4}$

다른 풀이

$g(x)=-ax^2+bx-d$ 의 그래프는 $-a<0$ 이므로 위로 볼록하다.

$-ab<0$, 즉 $-a$ 와 b 의 부호가 다르므로 축은 y 축의 오른쪽에 있다.

$-d>0$ 이므로 y 축과 y 축의 양의 부분에서 만난다.

풍샘 개념 CHECK

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프와 a, b, c 의 부호 중 수학 3

(1) a 의 부호 $\rightarrow$ 그래프의 모양으로 결정

- ① 아래로 볼록 $\Rightarrow a>0$ ② 위로 볼록 $\Rightarrow a<0$

(2) b 의 부호 $\rightarrow$ 축의 위치로 결정

- ① 축이 y 축의 왼쪽에 위치 $\Rightarrow ab>0$
- ② 축이 y 축과 일치 $\Rightarrow b=0 \quad \rightarrow a, b$ 는 같은 부호
- ③ 축이 y 축의 오른쪽에 위치 $\Rightarrow ab<0 \quad \rightarrow a, b$ 는 다른 부호

(3) c 의 부호 $\rightarrow y$ 축과의 교점의 위치로 결정

- ① y 축과의 교점이 y 축의 양의 부분에 위치 $\Rightarrow c>0$
- ② y 축과의 교점이 원점과 일치 $\Rightarrow c=0$
- ③ y 축과의 교점이 y 축의 음의 부분에 위치 $\Rightarrow c<0$

15

ㄱ. 구간 (a, b) 에서 $y=f(x)$ 의 그래프가 감소하므로 $f'(x)<0$ 이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x=a, x=c$ 에서 극댓값을 가지므로

$$f'(a)=f'(c)=0 \text{이다. (참)}$$

ㄷ. 함수 $f(x)$ 가 $x=b, x=d$ 의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 극솟값을 가지며, 극솟값은 $f(b), f(d)$ 이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

$\boxed{\text{답}} \quad \textcircled{2}$

참고

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하지 않을 때에도 $x=a$ 에서 극값을 가질 수 있다. 이 문제에서도 $x=b$ 에서 함수 $f(x)$ 는 미분가능하지 않지만 $x=b$ 의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 극솟값을 갖는다.

16

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a>0, a, b, c, d$ 는 상수)라고 하면

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \quad \rightarrow y=f'(x) \text{의 그래프가 아래로 볼록하므로}$$

$y=f'(x)$ 의 그래프가 y 축과 점 $(0, -2)$ 에서 만나므로
 $f'(0)=-2$ 에서 $c=-2$
 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $-1, 2$ 이므로
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=2$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$$f'(-1)=0 \text{이므로 } 3a-2b-2=0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore 3a-2b=2$$

$$f'(2)=0 \text{이므로 } 12a+4b-2=0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore 6a+2b=1$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=\frac{1}{3}, b=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+d$$

이때 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(-1)$, 극솟값은 $f(2)$ 이므로

$$p-q=f(-1)-f(2)$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2+d\right)-\left(\frac{8}{3}-2-4+d\right)$$

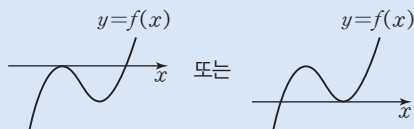
$$=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

17

문제 접근하기

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 접하면 다음 그림과 같이 삼차함수의 극댓값 또는 극솟값이 0이다.



$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라고 하면
 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $-1, 3$ 이므로
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=3$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$$f'(-1)=0 \text{이므로 } 3-2a+b=0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore -2a+b=-3$$

$$f'(3)=0 \text{이므로 } 27+6a+b=0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore 6a+b=-27$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=-3, b=-9$$

$$\therefore f(x)=x^3-3x^2-9x+c$$

이때 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축에 접하려면 극댓값 또는 극솟값이 0이어야 한다.

(i) $f(-1)=0$ 일 때 $\rightarrow$ 극대일 때 그래프가 x 축에 접한다.
 $-1-3+9+c=0 \quad \therefore c=-5$
 즉, $f(x)=x^3-3x^2-9x-5$ 이므로 $f(0)=-5$

(ii) $f(3)=0$ 일 때 $\rightarrow$ 극소일 때 그래프가 x 축에 접한다.
 $27-27-27+c=0 \quad \therefore c=27$
 즉, $f(x)=x^3-3x^2-9x+27$ 이므로 $f(0)=27$
 (i), (ii)에서 모든 $f(0)$ 의 값의 합은
 $-5+27=22$

답 22

18

$x^2-1=t$ 라고 하면 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $-1 \leq t \leq 3$
 $g(t)=2t^3-3t^2+2$ 라고 하면 $\rightarrow -1 \leq x \leq 2$ 이면 $0 \leq x^2 \leq 4$ 이므로 $-1 \leq x^2-1 \leq 3$

$$g'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$$

$$g'(t)=0 \text{에서 } t=0 \text{ 또는 } t=1$$

$-1 \leq t \leq 3$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	...	0	...	1	...	3
$g'(t)$		+	0	-	0	+	
$g(t)$	-3	↗	2	↘	1	↗	29

함수 $g(t)$ 는 $t=3$ 일 때 최댓값 29 를 갖고, $t=-1$ 일 때 최솟값 -3 을 갖는다.

따라서 $f(x)$ 의 최댓값은 29 , 최솟값은 -3 이므로

$$M=29, m=-3$$

$$\therefore M-m=29-(-3)=32$$

답 ④

19

$$f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2 \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(x+a)(3x-a)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-a \text{ 또는 } x=\frac{a}{3}$$

구간 $[-a, a]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-a$	...	$\frac{a}{3}$	...	a
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	$f(-a)$	↘	$f\left(\frac{a}{3}\right)$	↗	$f(a)$

함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{a}{3}$ 에서 극소이면서 최소이므로 최솟값 $f\left(\frac{a}{3}\right)$ 를 갖는다.

$$\text{이때 } f\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{14}{27} \text{이므로}$$

$$\frac{a^3}{27}+\frac{a^3}{9}-\frac{a^3}{3}+2=\frac{14}{27}$$

$$-5a^3=-40, a^3=8$$

$$\therefore a=2 (\because a>0)$$

$$\therefore f(x)=x^3+2x^2-4x+2$$

$$f(-2)=-8+8+8+2=10, f(2)=8+8-8+2=10 \text{이므로 함수 } f(x) \text{의 최댓값은 } 10 \text{이다.}$$

$$\therefore M=10$$

$$\therefore a+M=2+10=12$$

답 12

20

$$f(x)=2x^3-9x^2+12x-2 \text{에서}$$

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

구간 $[0, a]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2	...	a
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-2	↗	3	↘	2	↗	$f(a)$

이때 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 7이므로 $f(a)=7$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } 2a^3-9a^2+12a-2=7 \text{이므로}$$

$$2a^3-9a^2+12a-9=0$$

$$(a-3)(2a^2-3a+3)=0$$

$$\therefore a=3 \quad (\because 2a^2-3a+3>0)$$

답 ③

참고

구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 극댓값인 3이다. 그런데 문제에서 최댓값이 7이라고 했으므로 $a>2$ 이다.

21

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^3+8 \text{이라고 하면}$$

$$f'(x)=2x^3-6x^2$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(t, f(t))$ ($t>0$)에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t^3-6t^2$

이때 기울기가 최소인 접선의 기울기는 $f'(t)$ 의 최솟값이므로

$$f'(t)=g(t) \text{라고 하면}$$

$$g(t)=2t^3-6t^2 \text{에서}$$

$$g'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$$

$$g'(t)=0 \text{에서 } t=2 \quad (\because t>0)$$

$t>0$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	...	2	...
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$		↘	극소	↗

함수 $g(t)$, 즉 $f'(t)$ 는 $t=2$ 일 때 극소이면서 최소이므로 곡선

$y=f(x)$ ($x>0$) 위의 점에서 그은 접선 중 기울기가 최소인 접선의 기울기는

$$f'(2)=16-24=-8$$

이때 $f(2)=8-16+8=0$ 이므로 구하는 접선은 기울기가 -8 이고, 점 $(2, 0)$ 을 지나는 직선이다.

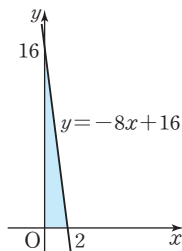
즉, 접선의 방정식은

$$y=-8(x-2)$$

$$\therefore y=-8x+16$$

따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 16 = 16$$



답 16

22

문제 접근하기

주어진 물통은 밑면의 모양이 등변사다리꼴인 사각기둥이다. 이때 등변사다리꼴의 한 변의 길이가 주어지지 않았으므로 등변사다리꼴의 성질을 이용하여 주어지지 않은 변의 길이를 미지수 x 로 나타낸다.

주어진 물통을 밑면이 등변사다리꼴인 사각기둥으로 보면 높이는 8 m로 일정하므로 등변사다리꼴의 넓이가 최대일 때 물통의 부피는 최대가 된다.

오른쪽 그림과 같이 등변사다리꼴 모양의 철판의 가장 긴 변의 길이를

$(1+2x) \text{ m}$ ($x>0$)라고 하면 높이는

$$\sqrt{1-x^2} \text{ m이다.}$$

이 등변사다리꼴의 넓이를 $S(x) \text{ m}^2$ 라고 하면

$$S(x)=\frac{1}{2} \times \{(1+2x)+1\} \times \sqrt{1-x^2}$$

$$=(1+x)\sqrt{1-x^2}$$

이때 $f(x)=(1+x)^2(1-x^2)$ 이라고 하면 $S(x)=\sqrt{f(x)}$ 이고,

$f(x)$ 가 최대일 때 $S(x)$ 도 최대가 된다.

$$f'(x)=2(1+x)(1-x^2)+(1+x)^2(-2x)$$

$$=-2(x+1)^2(2x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=\frac{1}{2} \quad (\because x>0)$$

$x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$\frac{27}{16}$	↘

$f(x)$ 는 $x=\frac{1}{2}$ 일 때 극대이면서 최대이므로 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{27}{16} \text{이다.}$$

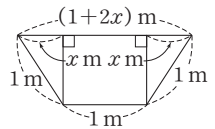
이때 등변사다리꼴의 넓이 $S(x)$ 의 최댓값은

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{27}{16}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

따라서 물통의 부피의 최댓값은

$$8 \times \frac{3\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \text{ (m}^3\text{)}$$

답 ②



06

도함수의 활용 (3)

기분을 다지는 유형

본문 093쪽

001

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ 라고 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

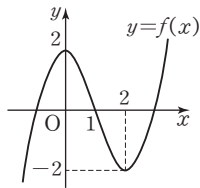
$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 세 점에서 만난다.

따라서 구하는 실근의 개수는 3이다.

(2) $f(x) = x^3 - 3x^2$ 라고 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

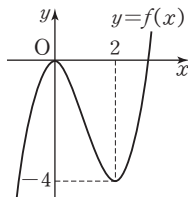
$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 한 점에서 만나고 다른 한 점에서 접한다.

따라서 구하는 실근의 개수는 2이다.

(3) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$ 라고 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

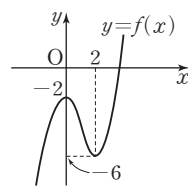
$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	-2	↘	-6	↗

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 한 점에서 만난다.

따라서 구하는 실근의 개수는 1이다.



답 (1) 3 (2) 2 (3) 1

|다른 풀이|

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ 라고 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

 $f(0)f(2) = 2 \times (-2) = -4 < 0$ 이므로 삼차방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

따라서 구하는 실근의 개수는 3이다.

(2) $f(x) = x^3 - 3x^2$ 이라고 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

 $f(0)f(2) = 0 \times (-4) = 0$ 이므로 삼차방정식 $f(x) = 0$ 은 한 실근과 중근을 갖는다.

따라서 구하는 실근의 개수는 2이다.

(3) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$ 라고 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

 $f(0)f(2) = -2 \times (-6) = 12 > 0$ 이므로 삼차방정식 $f(x) = 0$ 은 한 실근과 두 허근을 갖는다.

따라서 구하는 실근의 개수는 1이다.

002

방정식 $2x^3 + 3x^2 - 12x - k = 0$, 즉 $2x^3 + 3x^2 - 12x = k$ 의 실근의 개수는 곡선 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ 와 직선 $y = k$ 의 교점의 개수와 같다. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ 라고 하면

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$$

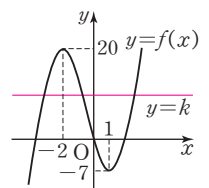
$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	20	↘	-7	↗

주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$$-7 < k < 20$$

따라서 정수 k 는 $-6, -5, \dots, 19$ 의 26개이다.

답 26

|다른 풀이|

 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - k$ 라고 하면

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$f(-2)f(1) < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$(-k+20)(-k-7) < 0, (k-20)(k+7) < 0$$

$$\therefore -7 < k < 20$$

따라서 정수 k 는 $-6, -5, \dots, 19$ 의 26개이다.

003

방정식 $x^3 - 3x^2 - 9x + k = 0$, 즉 $x^3 - 3x^2 - 9x = -k$ 의 실근의 개수는 곡선 $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ 와 직선 $y = -k$ 의 교점의 개수와 같다. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ 라고 하면

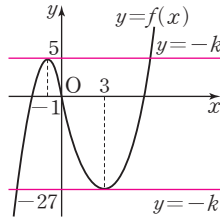
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	-27	↗

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-k$ 가 한 점에서 만나고, 다른 한 점에서 접해야 하므로 $-k=5$ 또는 $-k=-27$
 $\therefore k=-5$ 또는 $k=27$
 따라서 모든 실수 k 의 값의 합은 $-5+27=22$



답 ④

|다른 풀이|

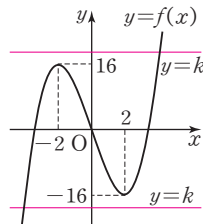
$f(x)=x^3-3x^2-9x+k$ 라고 하면
 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=3$
 삼차방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 한 개의 중근과 다른 한 실근을 가져야 하므로
 $f(-1)f(3)=0$
 $(k+5)(k-27)=0$
 $\therefore k=-5$ 또는 $k=27$
 따라서 모든 실수 k 의 값의 합은 22이다.

004

방정식 $x^3-12x-k=0$, 즉 $x^3-12x=k$ 의 실근의 개수는 곡선 $y=x^3-12x$ 와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와 같다.
 $f(x)=x^3-12x$ 라고 하면
 $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=2$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	16	↘	-16	↗

주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 한 점에서 만나야 하므로 $k<-16$ 또는 $k>16$
 따라서 음의 정수 k 의 최댓값은 -17이다.



답 -17

|다른 풀이|

$f(x)=x^3-12x-k$ 라고 하면
 $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=2$
 삼차방정식 $f(x)=0$ 이 오직 하나의 실근을 가지려면 $f(-2)f(2)>0$ 이어야 하므로
 $(-k+16)(-k-16)>0$
 $(k-16)(k+16)>0$
 $\therefore k<-16$ 또는 $k>16$
 따라서 음의 정수 k 의 최댓값은 -17이다.

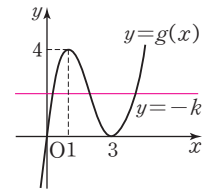
005

함수 $y=x^3-6x^2+9x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 그래프의 함수가 $y=f(x)$ 이므로

$f(x)=x^3-6x^2+9x+k$
 이때 방정식 $f(x)=0$ 에서 $x^3-6x^2+9x+k=0$, 즉 $x^3-6x^2+9x=-k$ 의 실근의 개수는 곡선 $y=x^3-6x^2+9x$ 와 직선 $y=-k$ 의 교점의 개수와 같다.
 $g(x)=x^3-6x^2+9x$ 라고 하면
 $g'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
 $g'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=3$
 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	4	↘	0	↗

방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=-k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 $0<-k<4$
 $\therefore -4<k<0$
 따라서 정수 k 의 최솟값은 -3이다.



답 -3

|다른 풀이|

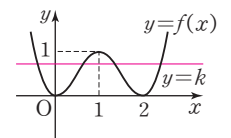
함수 $y=x^3-6x^2+9x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 그래프의 함수가 $y=f(x)$ 이므로
 $f(x)=x^3-6x^2+9x+k$
 $\therefore f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=3$
 삼차방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(1)f(3)<0$ 이어야 하므로
 $(k+4)k<0$
 $\therefore -4<k<0$
 따라서 정수 k 의 최솟값은 -3이다.

006

방정식 $x^4-4x^3+4x^2-k=0$, 즉 $x^4-4x^3+4x^2=k$ 의 실근의 개수는 곡선 $y=x^4-4x^3+4x^2$ 과 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와 같다.
 $f(x)=x^4-4x^3+4x^2$ 이라고 하면
 $f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	0	↗	1	↘	0	↗

주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로 실수 k 의 값의 범위는 $0<k<1$



답 $0<k<1$

007

방정식 $3x^4 - 8x^3 + 8 - k = 0$, 즉 $3x^4 - 8x^3 + 8 = k$ 의 실근의 개수는 곡선 $y = 3x^4 - 8x^3 + 8$ 과 직선 $y = k$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 8$ 이라고 하면

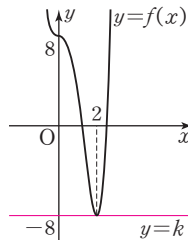
$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 = 12x^2(x - 2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	8	$\searrow$	-8	$\nearrow$

주어진 방정식이 오직 하나의 실근만을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = k$ 가 한 점에서 만나야 하므로 $k = -8$



답 -8

008

방정식 $x^4 - 2x^2 - k = 0$, 즉 $x^4 - 2x^2 = k$ 의 실근의 개수는 곡선 $y = x^4 - 2x^2$ 과 직선 $y = k$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x) = x^4 - 2x^2$ 이라고 하면

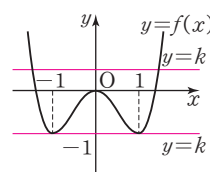
$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 1$ ①

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로



$k = -1$ 또는 $k > 0$

..... ②

따라서 구하는 자연수 k 의 최솟값은 1이다. ③

답 1

채점 기준	비율
① $f(x) = x^4 - 2x^2$ 으로 놓고 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ 자연수 k 의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

009

방정식 $x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 - k = 0$, 즉 $x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 = k$ 의 실근의 개수는 곡선 $y = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$ 과 직선 $y = k$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$ 이라고 하면

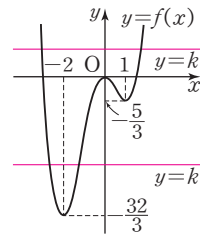
$$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x = 4x(x+2)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{32}{3}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\nearrow$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로



$$-\frac{32}{3} < k < -\frac{5}{3} \text{ 또는 } k > 0$$

따라서 상수 k 의 값이 될 수 없는 것은

③이다.

답 ③

010

방정식 $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3 - k = 0$, 즉 $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3 = k$ 의 실근의 개수는 곡선 $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3$ 과 직선 $y = k$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3$ 이라고 하면

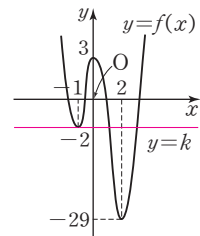
$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x+1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-29	$\nearrow$

주어진 방정식이 한 개의 음수인 근과 서로 다른 두 개의 양수인 근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = k$ 의 교점의 x 좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수이어야 하므로



$k = -2$

답 ②

011

두 곡선 $y = x^3 + 4x^2 - 3x$, $y = x^2 + 6x + k$ 가 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $x^3 + 4x^2 - 3x = x^2 + 6x + k$, 즉 $x^3 + 3x^2 - 9x - k = 0$ 이 오직 한 개의 실근만을 가져야 한다.

방정식 $x^3 + 3x^2 - 9x - k = 0$, 즉 $x^3 + 3x^2 - 9x = k$ 의 실근의 개수는 곡선 $y = x^3 + 3x^2 - 9x$ 과 직선 $y = k$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ 라고 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -3$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

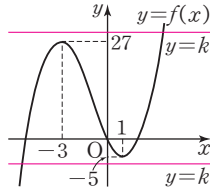
x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	27	$\searrow$	-5	$\nearrow$

방정식 $x^3+3x^2-9x-k=0$ 이 오직 한 개의 실근만을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 한 점에서 만나야 하므로

$$k < -5 \text{ 또는 } k > 27$$

$$\text{따라서 } a = -5, \beta = 27 \text{이므로}$$

$$a + \beta = -5 + 27 = 22$$



답 22

[다른 풀이]

두 곡선 $y=x^3+4x^2-3x$, $y=x^2+6x+k$ 가 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $x^3+4x^2-3x=x^2+6x+k$, 즉 $x^3+3x^2-9x-k=0$ 이 오직 한 개의 실근만을 가져야 한다.

$$f(x)=x^3+3x^2-9x-k \text{라고 하면}$$

$$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

삼차방정식 $f(x)=0$ 이 오직 한 개의 실근만을 가지려면

$$f(-3)f(1) > 0 \text{이어야 하므로}$$

$$(-k+27)(-k-5) > 0$$

$$(k-27)(k+5) > 0$$

$$\therefore k < -5 \text{ 또는 } k > 27$$

$$\text{따라서 } a = -5, \beta = 27 \text{이므로}$$

$$a + \beta = -5 + 27 = 22$$

012

두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$ 가 만나는 점의 개수가 2가 되려면 방정식 $2x^2-1=x^3-x^2+k$, 즉 $-x^3+3x^2-1-k=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

방정식 $-x^3+3x^2-1-k=0$, 즉 $-x^3+3x^2-1=k$ 의 실근의 개수는 곡선 $y=-x^3+3x^2-1$ 과 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와 같다.

$$f(x)=-x^3+3x^2-1 \text{이라고 하면}$$

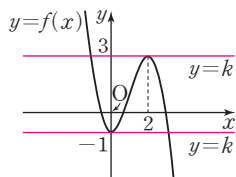
$$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	-1	/	3	\

방정식 $-x^3+3x^2-1=k$ 가 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 한 점에서 만나고, 다른 한 점에서 접해야 하므로 양수 k 의 값은 3이다.



답 ③

[다른 풀이]

두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$ 가 만나는 점의 개수가 2가 되려면 방정식 $2x^2-1=x^3-x^2+k$, 즉 $x^3-3x^2+1+k=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$$f(x)=x^3-3x^2+1+k \text{라고 하면}$$

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

삼차방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$$f(0)f(2)=0 \text{이어야 하므로}$$

$$(k+1)(k-3)=0$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 양수 k 의 값은 3이다.

013

두 함수 $f(x)=x^4-5x+k$, $g(x)=-x^2+x-k$ 의 그래프가 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $x^4-5x+k=-x^2+x-k$, 즉 $x^4+x^2-6x+2k=0$ 이 오직 한 개의 실근만을 가져야 한다.

방정식 $x^4+x^2-6x+2k=0$, 즉 $x^4+x^2-6x=-2k$ 의 실근의 개수는 곡선 $y=x^4+x^2-6x$ 와 직선 $y=-2k$ 의 교점의 개수와 같다.

$$h(x)=x^4+x^2-6x \text{라고 하면}$$

$$h'(x)=4x^3+2x-6=2(x-1)(2x^2+2x+3)$$

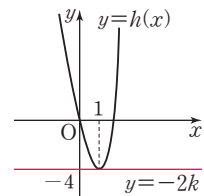
$$h'(x)=0 \text{에서 } x=1 (\because 2x^2+2x+3 > 0)$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	\	-4	/

방정식 $x^4+x^2-6x+2k=0$ 이 오직 한 개의 실근만을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=h(x)$ 와 직선 $y=-2k$ 가 한 점에서 만나야 하므로

$$-2k = -4 \quad \therefore k = 2$$



답 ②

014

$$f(x)=x^4+4x+k \text{라고 하면}$$

$$f'(x)=4x^3+4=4(x+1)(x^2-x+1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 (\because x^2-x+1 > 0)$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\	$k-3$	/

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극소이면서 최소이다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이려면 $f(-1) \geq 0$ 이어야 하므로 $k-3 \geq 0 \quad \therefore k \geq 3$

따라서 정수 k 의 최솟값은 3이다.

답 ⑤

015

$$6x^4-4x^3+x^2-k \geq 3x^4+x^2 \text{에서 } 3x^4-4x^3-k \geq 0$$

$$f(x)=3x^4-4x^3-k \text{라고 하면}$$

$$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	\	$-k$	\	$-k-1$	/

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이라면 $f(1) \geq 0$ 이어야 하므로
 $-k-1 \geq 0 \quad \therefore k \leq -1$
 따라서 정수 k 의 최댓값은 -1 이다.

답 ③

016

$-4x^4 - x + k \leq -3x^4 - 5x + 6$ 에서 $x^4 - 4x - k + 6 \geq 0$
 $f(x) = x^4 - 4x - k + 6$ 이라고 하면
 $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2 + x + 1)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$ ($\because x^2 + x + 1 > 0$)
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-k+3$	$\nearrow$

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이다.
 즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이라면 $f(1) \geq 0$ 이어야 하므로
 $-k+3 \geq 0, -k \geq -3$
 $\therefore k \leq 3$
 따라서 모든 자연수 k 의 값의 합은
 $1+2+3=6$

답 ④

017

$f(x) \geq g(x)$ 에서 $x^4 - 2x \geq 2x^2 - 2x + k$
 $\therefore x^4 - 2x^2 - k \geq 0$ ①
 $h(x) = x^4 - 2x^2 - k$ 라고 하면
 $h'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$
 $h'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 1$
 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	$-k-1$	$\nearrow$	$-k$	$\searrow$	$-k-1$	$\nearrow$

실수 전체의 집합에서 함수 $h(x)$ 는 $x = -1, x = 1$ 에서 극소이면서 최소이다.
 즉, 모든 실수 x 에 대하여 $h(x) \geq 0$ 이라면 $h(-1) \geq 0, h(1) \geq 0$ 이어야 하므로
 $-k-1 \geq 0, -k \geq 1$
 $\therefore k \leq -1$ ②
 따라서 정수 k 의 최댓값은 -1 이다. ③

답 -1

채점 기준	비율
① 부등식을 간단히 할 수 있다.	20 %
② k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
③ 정수 k 의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

참고

모든 실수 x 에서 부등식 $f(x) \geq g(x)$ 가 성립하도록 하려면
 $h(x) = f(x) - g(x)$ 로 놓고 부등식 $h(x) \geq 0$ 이 성립하도록 하면 된다.

018

$f(x) = x^4 - 4x - a^2 + a + 9$ 라고 하면
 $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2 + x + 1)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$ ($\because x^2 + x + 1 > 0$)
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-a^2+a+6$	$\nearrow$

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이다.
 즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이라면 $f(1) \geq 0$ 이어야 하므로
 $-a^2 + a + 6 \geq 0, a^2 - a - 6 \leq 0$
 $(a+2)(a-3) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq a \leq 3$
 따라서 정수 a 는 $-2, -1, \dots, 3$ 의 6개이다.

답 ①

019

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + k$ 라고 하면
 $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 1$
 $x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$	0	-	0	+
$f(x)$	k	$\searrow$	$k-1$	$\nearrow$

$x \geq 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이다.
 즉, $x \geq 0$ 일 때 $f(x) \geq 0$ 이라면 $f(1) \geq 0$ 이어야 하므로
 $k-1 \geq 0 \quad \therefore k \geq 1$
 따라서 상수 k 의 최솟값은 1이다.

답 ②

020

$4x^3 - 3x^2 - 6x \leq k$ 에서 $4x^3 - 3x^2 - 6x - k \leq 0$
 $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x - k$ 라고 하면
 $f'(x) = 12x^2 - 6x - 6 = 6(2x+1)(x-1)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -\frac{1}{2}$ ($\because x < 0$)
 $x < 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{1}{2}$	...	(0)
$f'(x)$	+	0	-	
$f(x)$	$\nearrow$	$-k+\frac{7}{4}$	$\searrow$	

$x < 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{1}{2}$ 에서 극대이면서 최대이다.

즉, $x < 0$ 일 때 $f(x) \leq 0$ 이라면 $f(-\frac{1}{2}) \leq 0$ 이어야 하므로

$$-k + \frac{7}{4} \leq 0, -k \leq -\frac{7}{4}$$

$$\therefore k \geq \frac{7}{4}$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 2이다.

답 ②

021

$$x^3 - 2x + 1 \geq x + k \text{에서 } x^3 - 3x - k + 1 \geq 0$$

$$f(x) = x^3 - 3x - k + 1 \text{이라고 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 (\because -1 < x < 3)$$

$-1 < x < 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(-1)	$\dots$	1	$\dots$	(3)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-k-1$	$\nearrow$	

$-1 < x < 3$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이다.

즉, $-1 < x < 3$ 일 때 $f(x) \geq 0$ 이라면 $f(1) \geq 0$ 이어야 하므로

$$-k-1 \geq 0, -k \geq 1$$

$$\therefore k \leq -1$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -1 이다.

답 ①

022

$$-x^3 - 6x + 6 > -2x^3 + 6x - k \text{에서 } x^3 - 12x + k + 6 > 0$$

$$f(x) = x^3 - 12x + k + 6 \text{이라고 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

이때 $x > 2$ 이므로 $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은 없다.

$x > 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(2)	...
$f'(x)$		+
$f(x)$		$\nearrow$

$x > 2$ 일 때 $f(x) > 0$ 이라면 $f(2) \geq 0$ 이어야 하므로

$$k - 10 \geq 0 \quad \therefore k \geq 10$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 10 이다.

답 ②

023

$$f(x) \geq g(x) \text{에서 } x^3 - x + 6 \geq x^2 + a$$

$$\therefore x^3 - x^2 - x + 6 - a \geq 0$$

$$h(x) = x^3 - x^2 - x + 6 - a \text{라고 하면}$$

$$h'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$$

$$h'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 (\because x \geq 0)$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\dots$	1	$\dots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$-a+6$	$\searrow$	$-a+5$	$\nearrow$

$x \geq 0$ 일 때, 함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이다.

즉, $x \geq 0$ 일 때 $h(x) \geq 0$ 이라면 $h(1) \geq 0$ 이어야 하므로

$$-a+5 \geq 0, -a \geq -5$$

$$\therefore a \leq 5$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 5 이다.

답 ⑤

참고

어떤 구간에서 부등식 $f(x) \geq g(x)$ 가 성립하도록 하려면

$h(x) = f(x) - g(x)$ 로 놓고 그 구간에서 부등식 $h(x) \geq 0$ 이 성립하도록 하면 된다.

024

(1) 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 8t$$

따라서 $t=2$ 일 때 점 P의 속도는

$$6 \times 2^2 - 8 \times 2 = 8$$

(2) 시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라고 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 8$$

따라서 $t=2$ 일 때 점 P의 가속도는

$$12 \times 2 - 8 = 16$$

답 (1) 8 (2) 16

025

시각 t 에서의 점 P의 가속도를 k 라고 하면

$$k = v'(t) = -2t + 10$$

이때 $t=a$ 에서의 점 P의 가속도가 0 이므로

$$k=0 \text{에서 } -2a+10=0, -2a=-10$$

$$\therefore a=5$$

답 ②

026

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 18t$$

이때 $t=k$ 에서의 점 P의 속도가 24 이므로

$$v=24 \text{에서 } 6k^2 - 18k = 24, 6(k+1)(k-4) = 0$$

$$\therefore k=4 (\because k \geq 0) \rightarrow t \geq 0 \rightarrow k \geq 0$$

답 ④

027

점 P가 원점을 지나는 순간의 위치는 0 이므로

$$x=0 \text{에서 } t^3 - 6t^2 = 0, t^2(t-6) = 0$$

$$\therefore t=6 (\because t > 0) \rightarrow \text{점 P가 출발 후 다시 원점을 지나므로 } t > 0$$

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t, a = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

따라서 $t=6$ 에서의 점 P의 가속도는

$$6 \times 6 - 12 = 24$$

답 ③

028

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 2pt + q, a = \frac{dv}{dt} = 6t - 2p \dots\dots\dots ①$$

이때 $t=4$ 에서의 점 P의 가속도가 12 이므로

$$a=12 \text{에서 } 6 \times 4 - 2p = 12, -2p = -12$$

$$\therefore p=6 \dots\dots\dots ②$$

또, $t=4$ 에서의 점 P의 속도가 9 이므로

$$v=9 \text{에서 } 3 \times 4^2 - 2 \times 6 \times 4 + q = 9$$

$$\therefore q=9 \dots\dots\dots ③$$

따라서 $x=t^3-6t^2+9t$ 이므로 $t=2$ 에서의 점 P의 위치는
 $2^3-6\times 2^2+9\times 2=2$ ④

답 2

채점 기준	비율
① 시각 t 에서의 점 P의 속도와 가속도를 구할 수 있다.	40 %
② p 의 값을 구할 수 있다.	20 %
③ q 의 값을 구할 수 있다.	20 %
④ $t=2$ 에서의 점 P의 위치를 구할 수 있다.	20 %

029

(1) 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=-t^2+1$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$v=0\text{에서 } -t^2+1=0, -(t+1)(t-1)=0$$

$$\therefore t=1 (\because t>0)$$

따라서 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은 1이다.

(2) 시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라고 하면

$$a=\frac{dv}{dt}=-2t$$

따라서 $t=1$ 에서의 점 P의 가속도는

$$-2\times 1=-2 \rightarrow \text{점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 시각}$$

답 (1) 1 (2) -2

030

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-4t-4$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$v=0\text{에서 } 3t^2-4t-4=0, (3t+2)(t-2)=0$$

$$\therefore t=2 (\because t>0) \rightarrow \text{점 P가 출발 후 운동 방향을 바꾸므로 } t>0$$

답 ②

031

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=2t^2-10t+12 \dots\dots\dots ①$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$v=0\text{에서 } 2t^2-10t+12=0, 2(t-2)(t-3)=0$$

$$\therefore t=2 \text{ 또는 } t=3$$

즉, 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 순간은 $t=3$ 일 때이다. ②

이때 시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라고 하면

$$a=\frac{dv}{dt}=4t-10$$

따라서 $t=3$ 에서의 점 P의 가속도는

$$4\times 3-10=2 \dots\dots\dots ③$$

답 2

채점 기준	비율
① 점 P의 속도를 t 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
② 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 순간의 시각을 구할 수 있다.	30 %
③ 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 순간의 가속도를 구할 수 있다.	40 %

032

시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라고 하면

$$v_P=\frac{d}{dt}x_1(t)=3t^2-6t-24, v_Q=\frac{d}{dt}x_2(t)=2t-a$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$v_P=0\text{에서 } 3t^2-6t-24=0, 3(t+2)(t-4)=0$$

$$\therefore t=4 (\because t>0)$$

$0< t<4$ 에서 $v_P<0$, $t>4$ 에서 $v_P>0$ 이므로 점 P의 운동 방향은
 시각 $t=4$ 에서만 바뀐다.

이때 두 점 P, Q의 운동 방향이 동시에 바뀌므로 점 Q의 운동 방
 향도 시각 $t=4$ 에서 바뀌어야 한다.

즉, $t=4$ 일 때 $v_Q=0$ 이어야 하므로

$$8-a=0 \quad \therefore a=8$$

따라서 $a=8, k=4$ 이므로

$$a+k=8+4=12$$

답 12

033

시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라고 하면

$$v_P=\frac{d}{dt}f(t)=6t-1, v_Q=\frac{d}{dt}g(t)=4t-12$$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_P v_Q < 0$ 이므로

$$(6t-1)(4t-12) < 0 \rightarrow \text{서로 반대 방향으로 움직이면 속도의 부호가 서로 반대이다.}$$

$$4(6t-1)(t-3) < 0$$

$$\therefore \frac{1}{6} < t < 3$$

$$\text{따라서 } \alpha=\frac{1}{6}, \beta=3 \text{이므로}$$

$$6\alpha\beta=6\times\frac{1}{6}\times 3=3$$

답 3

034

(1) 자동차가 브레이크를 밟고 t 초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=40-20t$$

자동차가 정지할 때의 속도는 0 m/s이므로

$$v=0\text{에서 } 40-20t=0$$

$$\therefore t=2$$

따라서 구하는 시간은 2초이다.

(2) 자동차가 브레이크를 밟은 후 정지할 때까지 2초 동안 움직인
 거리는

$$40\times 2-10\times 2^2=40 \text{ (m)}$$

답 (1) 2초 (2) 40 m

035

자동차에 제동을 걸고 t 초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 60 - 2kt$$

자동차가 정지할 때의 속도는 0 m/s이고, 정지할 때까지 걸린 시간은 3초이므로

$$v=0 \text{에서 } 60 - 2k \times 3 = 0, \quad 6k = 60$$

$$\therefore k = 10$$

따라서 이 자동차가 3초 동안 움직인 거리는

$$60 \times 3 - 10 \times 3^2 = 90 \text{ (m)}$$

답 90 m

036

(1) 물체의 t 초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = 30 - 10t$$

(2) 물체가 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0 m/s이므로

$$v=0 \text{에서 } 30 - 10t = 0, \quad -10t = -30$$

$$\therefore t = 3$$

따라서 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은 3초이다.

답 (1) $(30 - 10t)$ m/s (2) 3초

037

공이 지표면에 닿는 순간의 높이는 0 m이므로 $\rightarrow$ 지표면의 높이는 0 m

$$h=0 \text{에서 } 10t - 4t^2 = 0, \quad -2t(2t - 5) = 0$$

$$\therefore t = \frac{5}{2} \text{ (단, } t > 0 \text{)} \quad \text{단, } t = \frac{5}{2} \text{일 때 공이 떨어지므로 지표면에 닿는 순간의 시간}$$

공의 t 초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = 10 - 8t \quad \text{..... ②}$$

따라서 $t = \frac{5}{2}$ 일 때의 공의 속도는

$$10 - 8 \times \frac{5}{2} = -10 \text{ (m/s)} \quad \text{..... ③}$$

답 -10 m/s

채점 기준	비율
① 공이 지표면에 닿는 순간의 시간을 구할 수 있다.	40 %
② t 초 후의 공의 속도를 구할 수 있다.	30 %
③ 공이 지표면에 닿는 순간의 속도를 구할 수 있다.	30 %

038

$x(t)$ 가 점 P의 시각 t 에서의 위치이므로 점 P가 원점을 지나는 순간은 $t=b$, $t=d$ 의 2번이다. $\neq$ 움직인 거리

답 ②

039

$|x(t)|$ 의 값이 가장 큰 $t=1$ 일 때 점 P가 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

답 ①

040

시각 t 에서의 점 P의 속도는 시각 t 에 대하여 $x(t)$ 를 미분한 것이다. 이때 점 P가 원점을 지나는 순간은 $t=d$ 이고, 이때의 속도는 $x'(d)$ 이다.

답 ⑤

041

$t=d$ 의 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀌므로 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간은 $t=d$ 일 때이다.

답 ④

042

위치 $x(t)$ 의 그래프가 $t=0$, $t=2$, $t=3$ 에서 x 축과 만나므로

$$x(t) = at(t-2)(t-3) = at^3 - 5at^2 + 6at$$

$$\therefore b = -5a, \quad c = 6a, \quad d = 0$$

또, 위치 $x(t)$ 의 그래프에서 $a > 0$

$$\neg. bc = -5a \times 6a = -30a^2 < 0 \text{ (참)}$$

$\neg$. 시각 t 에서의 점 P의 속도를 $v(t)$ 라고 하면

$$v(t) = \frac{d}{dt} x(t) = 3at^2 - 10at + 6a$$

$$\text{이때 } v(2) = 12a - 20a + 6a = -2a \neq 0 \text{ (}\because a > 0\text{)} \text{이므로 } t=2$$

일 때의 점 P의 속도는 0이 아니다. (거짓)

$\neg$. 시각 t 에서의 점 P의 가속도는 $v'(t)$ 이고

$$v'(t) = 6at - 10a$$

$$\text{이때 } v'\left(\frac{5}{3}\right) = 6a \times \frac{5}{3} - 10a = 0 \text{이므로 } t = \frac{5}{3} \text{일 때의 점 P의}$$

가속도는 0이다. (참)

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 $\neg$, $\neg$

043

$$\frac{dl}{dt} = 2t + 2 \text{이므로 ③이다.}$$

답 ③

044

$$\frac{dl}{dt} = -t - 1 \text{이므로 } t=3 \text{에서의 초의 길이의 변화율은}$$

$$-3 - 1 = -4$$

답 ④

045

$$\frac{dl}{dt} = 3t^2 - 4t \text{이므로 } t=2 \text{에서의 고무줄 길이의 변화율은}$$

$$3 \times 2^2 - 4 \times 2 = 4$$

답 ④

046

t 초 후 정사각형의 한 변의 길이는 $(12 + 2t)$ cm

시각 t 에서의 정사각형의 한 대각선의 길이를 l cm라고 하면

$$l = (12 + 2t)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}t + 12\sqrt{2}$$

시각 t 에서의 정사각형의 한 대각선의 길이의 변화율은

$$\frac{dl}{dt} = 2\sqrt{2}$$

따라서 정사각형의 한 대각선의 길이의 변화율은 $2\sqrt{2}$ cm/s이므로

$$p = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore p^2 = 8$$

답 ⑤

047

t 초 동안 현민이가 움직인 거리를 y m라고

하면 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ 이

므로

$$4.8 : 1.6 = (x + y) : x$$

$$1.6(x + y) = 4.8x \quad \therefore y = 2x$$

$$\text{이때 } y = 1.6t \text{이므로 } 2x = 1.6t \quad \therefore x = 0.8t$$

따라서 시각 t 에서의 현민이의 그림자 길이의 변화율은

$$\frac{dx}{dt} = 0.8 \text{ (m/s)}$$

답 ①

048

$$\frac{dS}{dt} = 4t + 4 \text{이므로 ③이다.}$$

답 ③

049

$$\frac{dS}{dt} = 3t^2 - 3 \text{이므로 } t=2 \text{에서의 도형의 넓이의 변화율은}$$

$$3 \times 2^2 - 3 = 9$$

답 ④

050

→ 반지름의 길이가 r 인 구의 겹넓이는 $4\pi r^2$ 이다.

시각 t 에서의 구의 겹넓이를 S 라고 하면

$$S = 4\pi \times \left(\frac{1}{2}t\right)^2 = 4\pi \times \frac{1}{4}t^2 = \pi t^2$$

시각 t 에서의 구의 겹넓이의 변화율은

$$\frac{dS}{dt} = 2\pi t$$

따라서 $t=4$ 에서의 구의 겹넓이의 변화율은

$$2\pi \times 4 = 8\pi$$

답 ④

051

t 초 후 정사각형의 대각선의 길이는

$$(4\sqrt{2} + \sqrt{2}t) \text{ cm}$$

시각 t 에서의 정사각형의 넓이를 S cm²라고 하면

$$S = \frac{1}{2}(4\sqrt{2} + \sqrt{2}t)^2 = (4+t)^2 \quad \rightarrow \text{한 대각선의 길이가 } t \text{인 정사각형의 넓이는 } \frac{1}{2}t^2 \text{이다.}$$

정사각형의 넓이가 25 cm²가 되는 순간은

$$S = 25 \text{에서 } (4+t)^2 = 25$$

$$t^2 + 8t - 9 = 0, (t+9)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = 1 (\because t > 0)$$

시각 t 에서의 정사각형의 넓이의 변화율은

$$\frac{dS}{dt} = 2(4+t) = 8+2t$$

따라서 $t=1$ 에서의 정사각형의 넓이의 변화율은

$$8+2 \times 1 = 10 \text{ (cm}^2/\text{s)}$$

답 ⑤

052

추를 던진 지 t 초 후의 가장 바깥쪽 원의 반지름의 길이는 $10t$ cm이다.

시각 t 에서의 가장 바깥쪽 원의 넓이를 S cm²라고 하면

$$S = (10t)^2 \pi = 100\pi t^2$$

시각 t 에서의 가장 바깥쪽 원의 넓이의 변화율은

$$\frac{dS}{dt} = 200\pi t$$

따라서 $t=2$ 에서의 가장 바깥쪽 원의 넓이의 변화율은

$$200\pi \times 2 = 400\pi \text{ (cm}^2/\text{s)}$$

$$\therefore p = 400$$

답 ②

053

$$\frac{dV}{dt} = 2t^2 - 3t + 1$$

답 $2t^2 - 3t + 1$

054

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2}{3}t^2 + \frac{2}{3}t \text{이므로 } t=3 \text{에서의 도형의 부피의 변화율은}$$

$$\frac{2}{3} \times 3^2 + \frac{2}{3} \times 3 = 6 + 2 = 8$$

답 ①

055

→ 반지름의 길이가 r 인 구의 부피는 $\frac{4}{3}\pi r^3$ 이다.

시각 t 에서의 구의 부피를 V 라고 하면

$$V = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{3}{2}t\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{27}{8}t^3 = \frac{9}{2}\pi t^3$$

시각 t 에서의 부피의 변화율은

$$\frac{dV}{dt} = \frac{27}{2}\pi t^2$$

따라서 $t=2$ 에서의 구의 부피의 변화율은

$$\frac{27}{2}\pi \times 2^2 = 54\pi$$

답 ④

056

t 초 후 정육면체의 한 모서리의 길이는

$$(2+2t) \text{ cm}$$

시각 t 에서의 정육면체의 부피를 V cm³라고 하면

$$V = (2+2t)^3$$

시각 t 에서의 정육면체의 부피의 변화율은

$$\frac{dV}{dt} = 3(2+2t)^2 \times 2 = 6(2+2t)^2$$

따라서 $t=3$ 에서의 정육면체의 부피의 변화율은
 $6(2+2 \times 3)^2 = 6 \times 64 = 384 \text{ (cm}^3/\text{s)}$

답 ⑤

057

t 초 후 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는

$$(5+t) \text{ cm}$$

원기둥의 반지름의 길이가 8 cm가 되는 순간은

$$5+t=8$$

$$\therefore t=3$$

시각 t 에서의 원기둥의 부피를 $V \text{ cm}^3$ 라고 하면

$$V=(5+t)^2 \pi \times 10$$

$$=10\pi(5+t)^2$$

시각 t 에서의 원기둥의 부피의 변화율은

$$\frac{dV}{dt}=10\pi \times 2(5+t)$$

$$=20\pi(t+5)$$

따라서 $t=3$ 에서의 원기둥의 부피의 변화율은

$$20\pi \times (3+5) = 160\pi \text{ (cm}^3/\text{s)}$$

답 ④

실력을 높이는 연습 문제

본문 105쪽

01

방정식 $2x^3+6x^2+a=0$, 즉 $2x^3+6x^2=-a$ 의 실근의 개수는 곡선 $y=2x^3+6x^2$ 과 직선 $y=-a$ 의 교점의 개수와 같다.

$$f(x)=2x^3+6x^2 \text{이라고 하면}$$

$$f'(x)=6x^2+12x=6x(x+2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

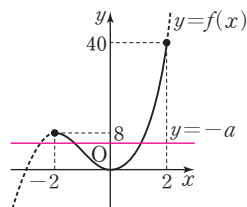
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	+	+
$f(x)$	↗	8	↘	0	↗	40	↗

주어진 방정식이 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$0 < -a \leq 8 \quad \therefore -8 \leq a < 0$$

따라서 정수 a 는 -8, -7, ..., -1의 8개이다.



답 ③

02

삼차방정식 $x^3-12x+22-4k=0$, 즉 $x^3-12x+22=4k$ 의 실근의 개수는 곡선 $y=x^3-12x+22$ 와 직선 $y=4k$ 가 만나는 교점의 개수와 같다.

$$g(x)=x^3-12x+22 \text{라고 하면}$$

$$g'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

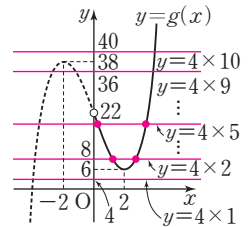
함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	2	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	38	↘	6	↗

$x>0$ 에서 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=4k$

의 교점은 오른쪽 그림과 같다.

$$\begin{aligned} \therefore f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9) \\ =0+2+2+1+1 \\ =6 \end{aligned}$$



답 6

참고

삼차방정식의 양의 실근의 개수를 구하는 문제이므로 $x>0$ 에서 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=4k$ 가 만나는 교점의 개수를 구한다.

03

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

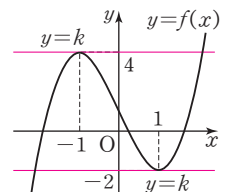
x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	-2	↗

방정식 $f(x)-k=0$, 즉 $f(x)=k$ 가 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$k=-2 \text{ 또는 } k=4$$

따라서 모든 정수 k 의 값의 곱은

$$(-2) \times 4 = -8$$



답 -8

참고

$y=f'(x)$ 의 그래프가 아래로 볼록하므로 함수 $y=f(x)$ 의 최고차항의 계수는 양수이다.

04

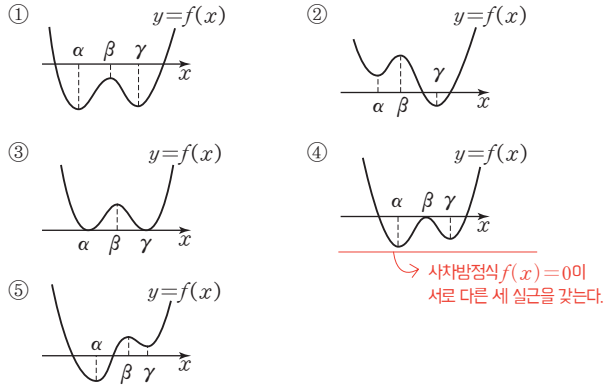
문제 접근하기

$f'(a)=f'(\beta)=f'(\gamma)=0$ 을 만족시키고, $x=a$, $x=\beta$, $x=\gamma$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 값의 부호가 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x=a$, $x=\beta$, $x=\gamma$ 에서 극값을 갖는다.

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 a , β , γ 이고 $a<\beta<\gamma$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	...	β	...	γ	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

①~⑤의 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



따라서 사차방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 조건이 아닌 것은 ④이다.

답 ④

05

원점을 지나고 삼차함수 $y=x^3+2$ 의 그래프에 접하는 직선이 $y=x^3+2$ 의 그래프와 만나는 점점의 좌표를 (t, t^3+2) 라고 하면 $y'=3x^2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (t^3+2) = 3t^2(x - t)$$

$$\therefore y = 3t^2x - 2t^3 + 2$$

이때 이 접선이 원점을 지나므로

$$-2t^3 + 2 = 0, t^3 = 1$$

$$\therefore t = 1 (\because t \text{는 실수})$$

즉, 원점을 지나는 접선의 방정식은 $y=3x$ 이다.

따라서 함수 $y=x^3+2$ 의 그래프와 직선

$y=kx$ 가 만나는 교점의 개수 $f(k)$ 는

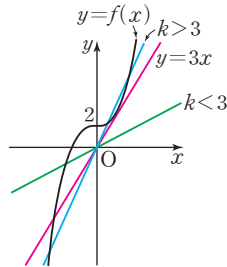
$$k < 3 \text{ 일 때 } f(k) = 1$$

$$k = 3 \text{ 일 때 } f(k) = 2$$

$$k > 3 \text{ 일 때 } f(k) = 3$$

이므로

$$f(1) + f(3) + f(5) = 1 + 2 + 3 = 6$$



답 6

06

$f(x) \geq g(x)$ 에서

$$2x^4 - x^3 + x^2 - k \geq -x^4 + 3x^3 + x^2 + k$$

$$\therefore 3x^4 - 4x^3 - 2k \geq 0$$

$h(x) = 3x^4 - 4x^3 - 2k$ 라고 하면

$$h'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1)$$

$$h'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$h'(x)$	-	0	-	0	+
$h(x)$	\	$-2k$	\	$-2k-1$	/

함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $h(x) \geq 0$ 이려면 $h(1) \geq 0$ 이어야 하므로

$$-2k - 1 \geq 0, -2k \geq 1$$

$$\therefore k \leq -\frac{1}{2}$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -1 이다.

답 ①

07

$$5x^3 - 3x^2 - 7x \geq x^3 - x + k \text{에서 } 4x^3 - 3x^2 - 6x - k \geq 0$$

$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x - k$ 라고 하면

$$f'(x) = 12x^2 - 6x - 6 = 6(2x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 (\because x \geq 0)$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		—	0	+
$f(x)$	$-k$	$\searrow$	$-k-5$	$\nearrow$

$x \geq 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이다.

즉, $x \geq 0$ 일 때 $f(x) \geq 0$ 이려면 $f(1) \geq 0$ 이어야 하므로

$$-k - 5 \geq 0, -k \geq 5$$

$$\therefore k \leq -5$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 -5 이다.

답 ②

08

$0 < x < 5$ 일 때, 곡선 $y=x^3-12x^2+37x-20$ 이 직선 $y=x+k$ 보다 항상 아래에 있으려면

$x^3-12x^2+37x-20 < x+k$, 즉 $x^3-12x^2+36x-k-20 < 0$ 이어야 한다.

$f(x) = x^3-12x^2+36x-k-20$ 이라고 하면

$$f'(x) = 3x^2-24x+36 = 3(x-2)(x-6)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 2 (\because 0 < x < 5)$$

$0 < x < 5$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	2	...	(5)
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		$\nearrow$	$-k+12$	$\searrow$	

$0 < x < 5$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대이면서 최대이다.

즉, $0 < x < 5$ 일 때 $f(x) < 0$ 이려면 $f(2) < 0$ 이어야 하므로

$$-k + 12 < 0, -k < -12$$

$$\therefore k > 12$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 13이다.

답 ④

09

시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라고 하면

$$v_P = \frac{dx_P}{dt} = t^2 - 3, v_Q = \frac{dx_Q}{dt} = 2t$$

$$v_P = v_Q \text{에서 } t^2 - 3 = 2t \rightarrow \text{두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간}$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = 3 (\because t > 0)$$

$t=3$ 에서의 점 P의 위치는

$$\frac{1}{3} \times 3^3 - 3 \times 3 + 10 = 10$$

$t=3$ 에서의 점 Q의 위치는
 $3^2-5=4$
 따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는
 $|10-4|=6$

답 ①

10

문제 접근하기

수직선 위를 움직이는 점 P가 움직이는 방향을 바꿀 때의 속도는 0이다. 이때 점 P의 시각 t 에서의 위치 x 가 $x=f(t)$ 이면 시각 t 에서의 점 P의 속도는 $v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$ 이다.

두 점 P, Q의 중점 M의 t 분 후의 좌표를 x_3 이라고 하면

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{(2t^3 - 9t^2) + (t^2 + 8t)}{2} = t^3 - 4t^2 + 4t$$

시각 t 에서의 세 점 P, Q, M의 속도를 각각 v_1, v_2, v_3 이라고 하면

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = 6t^2 - 18t = 6t(t-3)$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = 2t + 8 = 2(t+4)$$

$$v_3 = \frac{dx_3}{dt} = 3t^2 - 8t + 4 = (3t-2)(t-2)$$

움직이는 방향을 바꿀 때의 속도는 0이고, 이 점의 좌우에서 속도의 부호가 바뀌어야 한다.

$v_1=0$ 에서 $t=3$ 이고, $t=3$ 의 좌우에서 v_1 의 부호가 바뀌므로

$$a=1$$

$v_2=0$ 을 만족시키는 $0 < t \leq 4$ 인 t 는 존재하지 않으므로

$$b=0$$

$v_3=0$ 에서 $t=\frac{2}{3}$ 또는 $t=2$ 이고, $t=\frac{2}{3}$ 와 $t=2$ 의 좌우에서 모두 v_3

의 부호가 바뀌므로

$$c=2$$

$$\therefore a+b+c=1+0+2=3$$

답 ③

11

기차에 제동을 걸고 t 초 후의 속도를 v m/s, 가속도를 a m/s²이라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 72 - 2t^2, \quad a = \frac{dv}{dt} = -4t$$

$t=2$ 일 때의 기차의 가속도는

$$-4 \times 2 = -8 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

이므로 $p=-8$

기차가 정지할 때의 속도는 0 m/s이므로

$$v=0 \text{에서 } 72-2t^2=0$$

$$-2t^2 = -72, \quad t^2 = 36$$

$$\therefore t=6 \text{ (}\because t>0\text{)}$$

따라서 정지할 때까지 걸린 시간은 6초이므로

$$q=6$$

$$\therefore p+q = -8+6 = -2$$

답 ②

12

비행기의 바퀴가 지면에 닿고 t 초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 90 - 3t$$

비행기가 정지할 때의 속도는 0 m/s이므로

$$v=0 \text{에서 } 90-3t=0, \quad -3t=-90$$

$$\therefore t=30$$

따라서 비행기가 정지할 때까지 걸린 시간은 30초이므로

$$p=30$$

30초 동안 비행기가 움직인 거리는

$$x = 90 \times 30 - \frac{3}{2} \times 30^2 = 1350 \text{ (m)}$$

이므로 $q=1350$

$$\therefore \frac{q}{p} = \frac{1350}{30} = 45$$

답 ③

13

자동차의 브레이크를 밟고 t 초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 40 - 2kt$$

자동차가 멈출 때의 속도는 0 m/s이므로

$$v=0 \text{에서 } 40-2kt=0, \quad -2kt=-40$$

$$\therefore t = \frac{20}{k}$$

자동차가 멈출 때까지 걸린 시간은 $\frac{20}{k}$ 초이고, 자동차가 멈출 때까지 달린 거리는 100 m 이내이므로

$$40 \times \frac{20}{k} - k \times \left(\frac{20}{k}\right)^2 = \frac{400}{k} \leq 100$$

$$\therefore k \geq 4$$

따라서 양수 k 의 최솟값은 4이다.

답 ②

14

시각 t 에서의 물체의 속도를 v m/s, 가속도를 a m/s²이라고 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = 20 - 10t, \quad a = \frac{dv}{dt} = -10$$

① $t=1$ 일 때, $v=20-10=10$ (m/s)이므로 쏘아 올린 지 1초 후 물체의 속도는 10 m/s이다.

② $a=-10$ 이므로 물체의 가속도는 -10 m/s²으로 일정하다.

③ $v=0$ 일 때, $20-10t=0$ 에서 $t=2$ 이므로 물체가 최고 높이에 도달했을 때 속도는 0 m/s이다.
 → 최고 높이에 도달했을 때 속도는 0 m/s이다.
 달하는 데 걸리는 시간은 2초이다.

④ $t=2$ 일 때 $h=25+20 \times 2 - 5 \times 2^2 = 45$ (m)이므로 물체가 최고 높이에 도달했을 때, 지면으로부터의 높이는 45 m이다.

⑤ 물체가 지면에 닿는 순간의 높이는 0 m이므로

$$h=0 \text{에서 } 25+20t-5t^2=0, \quad -5(t+1)(t-5)=0$$

$$\therefore t=5 \text{ (}\because t>0\text{)}$$

즉, 물체가 지면에 도착할 때까지 걸린 시간은 5초이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

15

지상 1000 m 상공에서 낙하산의 조절 장치를 누르므로 조절 장치를 누르는 순간의 시각은 $h=1000$ 에서 $3000-5t^2=1000$
 $-5t^2=-2000, t^2=400$

$$\therefore t=20 (\because t>0)$$

시각 t 에서의 스카이다이버의 속도는

$$\frac{dh}{dt} = -10t$$

따라서 $t=20$ 에서의 스카이다이버의 속도는

$$-10 \times 20 = -200 \text{ (m/s)}$$

답 -200 m/s

16

문제 접근하기

시각 t 에서의 위치를 미분한 것이 그 점에서의 속도이다. 즉, 위치 그래프의 한 점에서의 접선의 기울기가 속도이므로 위치 그래프에서 극대 또는 극소일 때의 속도는 0이다.

ㄱ. 두 점 P, Q는 $t=b, t=d$ 일 때, 즉 두 번 만난다. (참)

ㄴ. $t=b$ 에서 두 점 P, Q의 속도 $f'(b), g'(b)$ 는 각각 $t=b$ 에서의 $y=f(t)$ 의 그래프와 $y=g(t)$ 의 그래프의 접선의 기울기이므로 $f'(b) < 0 < g'(b)$

또, $t=d$ 에서 두 점 P, Q의 속도 $f'(d), g'(d)$ 는 각각 $t=d$ 에서의 $y=f(t)$ 의 그래프와 $y=g(t)$ 의 그래프의 접선의 기울기이므로

$$0 < g'(d) < f'(d)$$

즉, $t=b, t=d$ 에서 두 점 P, Q의 속도는 다르다. (거짓)

ㄷ. $t=a$ 에서 두 점 P, Q의 속도 $f'(a), g'(a)$ 는 각각 $t=a$ 에서의 $y=f(t)$ 의 그래프와 $y=g(t)$ 의 그래프의 접선의 기울기이고, $f'(a)=0, g'(a)>0$, 즉 $f'(a) < g'(a)$ 이므로 $t=a$ 에서의 속도는 점 P가 점 Q보다 더 작다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

참고

ㄴ. $t=b, t=d$ 에서 두 점 P, Q의 속도가 같으려면 $f'(b)=g'(b), f'(d)=g'(d)$ 이어야 한다.

ㄷ. $y=f(t)$ 는 $t=a$ 에서 극대이므로 $f'(a)=0$ 이다.

17

출발한 지 t 초 후의 조명 바로 밑에서부터 무대장치의 그림자 끝까지의 길이를 x m라고 하자.

무대장치가 2 m/s의 속도로 움직이고 있으므로 무대장치가 출발한 후 t 초 동안 움직인 거리는 $2t$ m이다.

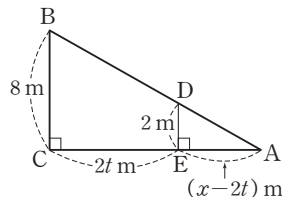
즉, 출발한 지 t 초 후의 무대장치의 그림자의 길이는 $(x-2t)$ m이고, 오른쪽 그림에서

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$ 이므로

$$8 : x = 2 : (x-2t)$$

$$2x = 8x - 16t$$

$$\therefore x = \frac{8}{3}t$$



따라서 시각 t 에서의 길이 x 의 변화율은

$$\frac{dx}{dt} = \frac{8}{3} \text{ (m/s)}$$

답 ①

18

t 초일 때 $\overline{AP}=2t, \overline{BQ}=t$ 이므로

$$\overline{PB}=10-2t \quad (0 \leq t \leq 5)$$

시각 t 에서의 삼각형 PBD와 삼각형 QDB의 넓이를 각각 S_P, S_Q 라고 하면

$$S_P = \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{PB} = \frac{1}{2} \times 10 \times (10-2t) = 50-10t$$

$$S_Q = \frac{1}{2} \times \overline{DC} \times \overline{BQ} = \frac{1}{2} \times 10 \times t = 5t$$

시각 t 에서의 사각형 DPBQ의 넓이는

$$S_P + S_Q = (50-10t) + 5t = 50-5t$$

이때 (사각형 DPBQ의 넓이) $= \frac{2}{5} \times$ (정사각형 ABCD의 넓이)이면

$$50-5t = \frac{2}{5} \times 10 \times 10$$

$$50-5t=40, -5t=-10$$

$$\therefore t=2$$

시각 t 에서의 삼각형 PBQ의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2} \times (10-2t) \times t = 5t-t^2$$

시각 t 에서의 삼각형 PBQ의 넓이의 변화율은

$$\frac{dS}{dt} = -2t+5$$

따라서 $t=2$ 에서의 삼각형 PBQ의 넓이의 변화율은

$$-2 \times 2 + 5 = 1$$

답 ②

19

t 초 후 가로 길이는 $(9+0.2t)$ cm, 세로 길이는 $(4+0.3t)$ cm 이고, 직사각형이 정사각형이 되는 순간 가로와 세로의 길이가 서로 같아지므로

$$9+0.2t=4+0.3t, 0.1t=5$$

$$\therefore t=50$$

시각 t 에서의 직사각형의 넓이를 $S \text{ cm}^2$ 라고 하면

$$S = (9+0.2t)(4+0.3t) \\ = 0.06t^2 + 3.5t + 36$$

시각 t 에서의 직사각형의 넓이의 변화율은

$$\frac{dS}{dt} = 0.12t + 3.5$$

따라서 $t=50$ 에서의 넓이의 변화율은

$$0.12 \times 50 + 3.5 = 9.5 \text{ (cm}^2/\text{초)}$$

답 ①

20

t 초 후 구의 반지름의 길이는

$$(8+t) \text{ cm}$$

시각 t 에서의 구의 부피를 $V \text{ cm}^3$ 라고 하면

$$V = \frac{4}{3}\pi(8+t)^3$$

시각 t 에서의 부피의 변화율은

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{4}{3}\pi \times 3 \times (8+t)^2 \\ &= 4\pi(8+t)^2\end{aligned}$$

따라서 $t=2$ 에서의 구의 부피의 변화율은

$$4\pi \times (8+2)^2 = 400\pi \text{ (cm}^3/\text{s)}$$

답 $400\pi \text{ cm}^3/\text{s}$

21

t 초 후 밑면의 가로와 세로의 길이는 $(2+2t) \text{ cm}$, 높이는 $(20-t) \text{ cm}$ 이다.

시각 t 에서의 정사각기둥의 부피를 $V \text{ cm}^3$ 라고 하면

$$V = (2+2t)^2(20-t)$$

시각 t 에서의 정사각기둥의 부피의 변화율은

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= 2(2+2t) \times 2 \times (20-t) - (2+2t)^2 \\ &= 12(t+1)(-t+13)\end{aligned}$$

따라서 $t=4$ 에서의 정사각기둥의 부피의 변화율은

$$12 \times (4+1) \times (-4+13) = 540 \text{ (cm}^3/\text{s)}$$

답 ③

22

문제 접근하기

그릇이 원뿔 모양이므로 물의 높이가 증가할수록 담긴 물의 밑면의 반지름의 길이, 즉 수면의 반지름의 길이도 증가하므로 비례식을 이용해서 시각 t 에서의 길이를 구한다.

t 초 후 수면의 높이는 $2t \text{ cm}$ 이므로 t 초 후

수면의 반지름의 길이를 $r \text{ cm}$ 라고 하면

$$r : 10 = 2t : 20, 20r = 10 \times 2t$$

$$\therefore r = t$$

t 초 후 그릇에 담긴 물의 부피를 $V \text{ cm}^3$ 라고 하면

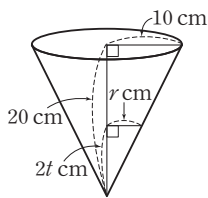
$$V = \frac{1}{3}\pi t^2 \times 2t = \frac{2}{3}\pi t^3$$

시각 t 에서의 물의 부피의 변화율은

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2}{3}\pi \times 3t^2 = 2\pi t^2$$

따라서 $t=2$ 에서의 물의 부피의 변화율은

$$2\pi \times 2^2 = 8\pi \text{ (cm}^3/\text{s)}$$



답 ⑤

III. 적분



부정적분

기본을 다지는 유형

본문 111쪽

001

$$(1) f(x) = (2x+C)' = 2$$

$$(2) f(x) = (x^2+C)' = 2x$$

$$(3) f(x) = (x^2+2x+C)' = 2x+2$$

답 (1) $f(x)=2$ (2) $f(x)=2x$ (3) $f(x)=2x+2$

002

$$(1) (5x)' = 5 \text{ 이므로 } \int 5 dx = 5x + C$$

$$(2) (-x^2)' = -2x \text{ 이므로 } \int (-2x) dx = -x^2 + C$$

$$(3) (x^4)' = 4x^3 \text{ 이므로 } \int 4x^3 dx = x^4 + C$$

답 (1) $5x+C$ (2) $-x^2+C$ (3) x^4+C

003

$$\int (ax^2 - 2x + b) dx = 2x^3 + cx^2 + 5x - 3 \text{ 에서}$$

$$ax^2 - 2x + b = 6x^2 + 2cx + 5$$

위 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$a=6, -2=2c, b=5$$

$$\text{즉, } a=6, b=5, c=-1 \text{ 이므로}$$

$$a+b-c = 6+5-(-1) = 12$$

답 ③

004

$$f'(x) = 2x, g'(x) = 3 \text{ 이므로 } \int F(x) dx = f(x)g(x) \text{ 에서}$$

$$F(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$= 2x(3x-2) + 3(x^2+1)$$

$$= 6x^2 - 4x + 3x^2 + 3$$

$$= 9x^2 - 4x + 3$$

따라서 $F(x)$ 의 일차항의 계수는 -4 이다.

답 ②

005

$$\int xf(x) dx = x^3 + 3x^2 + 5 \text{ 에서 } xf(x) = 3x^2 + 6x$$

$$\text{즉, } xf(x) = x(3x+6) \text{ 이므로 } f(x) = 3x+6 \rightarrow \text{함수 } f(x) \text{ 는 다항함수}$$

$$\therefore f(-1) = -3+6 = 3$$

답 ①

006

$$(1) \frac{d}{dx} \left\{ \int f(x) dx \right\} = f(x) \text{ 이므로}$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int (x^2+3x) dx \right\} = x^2+3x$$

$$(2) \int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx = f(x) + C \text{이므로}$$

$$\int \left\{ \frac{d}{dx} (x^2 + 3x) \right\} dx = x^2 + 3x + C$$

답 (1) $x^2 + 3x$ (2) $x^2 + 3x + C$

007

$$f(x) = 4x^2 + x + 3 \text{이므로 } f(2) = 16 + 2 + 3 = 21$$

답 ②

008

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int (x^2 + ax - 3) dx \right\} = x^2 + ax - 3 \text{이므로}$$

$$x^2 + ax - 3 = bx^2 + 2x + c$$

위 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$a = 2, b = 1, c = -3$$

$$\therefore abc = 2 \times 1 \times (-3) = -6$$

답 ①

009

$$f(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} (x^2 + 2x) \right\} dx = x^2 + 2x + C$$

방정식 $f(x) = 0$ 의 모든 근의 곱이 -2 이므로 $x^2 + 2x + C = 0$ 에서
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$C = -2$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^2 + 2x - 2 \text{이므로}$$

$$f(2) = 4 + 4 - 2 = 6$$

답 ①

010

$$\frac{d}{dx} \left[\int \{f(x) + x\} dx \right] = f(x) + x \text{이므로}$$

$$f(x) + x = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f(x) = 3x^2 + (2a - 1)x + b$$

$$f(0) = 3 \text{이므로 } b = 3 \quad \text{①}$$

$$\text{이때 } f'(x) = 6x + 2a - 1 \text{이고, } f'(1) = 3 \text{이므로}$$

$$6 + 2a - 1 = 3, 2a = -2$$

$$\therefore a = -1 \quad \text{②}$$

$$\text{따라서 } f(x) = 3x^2 - 3x + 3 \text{이므로}$$

$$f(-1) = 3 + 3 + 3 = 9 \quad \text{③}$$

답 9

채점 기준	비율
① b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $f(-1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

011

$$(1) \int (-2x + 3) dx = -x^2 + 3x + C$$

$$(2) \int (12x^3 + 6x) dx = 3x^4 + 3x^2 + C$$

$$(3) \int x(x+1)(x-2) dx = \int (x^3 - x^2 - 2x) dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C$$

$$\text{답 (1) } -x^2 + 3x + C \quad (2) 3x^4 + 3x^2 + C \quad (3) \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C$$

012

$$f(x) = \int x(3x+1) dx = \int (3x^2 + x) dx = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\text{이때 } f(0) = -1 \text{이므로 } C = -1$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1 \text{이므로}$$

$$f(2) = 8 + 2 - 1 = 9$$

답 9

013

$$f(x) = \int (x^2 + 2x - 3) dx - \int (x^2 - 4) dx$$

$$= \int \{(x^2 + 2x - 3) - (x^2 - 4)\} dx$$

$$= \int (2x + 1) dx = x^2 + x + C$$

$$\text{이때 } f(1) = -3 \text{이므로 } 1 + 1 + C = -3$$

$$\therefore C = -5$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^2 + x - 5 \text{이므로}$$

$$f(-2) = 4 - 2 - 5 = -3$$

답 ①

014

$$f(x) = \int \frac{x^2}{x+1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \int \frac{x^2 - 1}{x+1} dx = \int \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} dx$$

$$= \int (x-1) dx = \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

$$\text{이때 } f(2) = 8 \text{이므로 } 2 - 2 + C = 8$$

$$\therefore C = 8$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 8 \text{이므로}$$

$$f(-2) = 2 + 2 + 8 = 12$$

답 ④

015

$$f(x) = \int (x + \sqrt{3})^2 dx - \int (x - \sqrt{3})^2 dx$$

$$= \int \{(x + \sqrt{3})^2 - (x - \sqrt{3})^2\} dx$$

$$= \int \{(x + \sqrt{3}) + (x - \sqrt{3})\} \{(x + \sqrt{3}) - (x - \sqrt{3})\} dx$$

$$= \int (2x \times 2\sqrt{3}) dx = 2\sqrt{3}x^2 + C$$

$$\text{이때 } f(0) = 0 \text{이므로 } C = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = 2\sqrt{3}x^2 \text{이므로 } f(1) = 2\sqrt{3}$$

$$\text{즉, } k = 2\sqrt{3} \text{이므로 } k^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$$

답 ⑤

016

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (3x^2 + 2x + 1) dx \\ &= x^3 + x^2 + x + C \end{aligned}$$

이때 $f(0) = -2$ 이므로 $C = -2$

따라서 $f(x) = x^3 + x^2 + x - 2$ 이므로

$$f(1) = 1 + 1 + 1 - 2 = 1$$

답 ①

참고

함수 $f(x)$ 와 도함수 $f'(x)$ 에 대하여 $f(x) = \int f'(x) dx$ 가 성립함을 이용한다.

017

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (3x^2 - 4x + k) dx \\ &= x^3 - 2x^2 + kx + C \end{aligned}$$

이때 $f(0) = 3$ 이므로 $C = 3$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + kx + 3 \text{이고, } f(1) = 5 \text{이므로}$$

$$1 - 2 + k + 3 = 5 \quad \therefore k = 3$$

따라서 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 3$ 이므로

$$f(2) = 8 - 8 + 6 + 3 = 9$$

답 ②

018

$$f'(x) = -3x^2 + 4 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (-3x^2 + 4) dx \\ &= -x^3 + 4x + C \end{aligned}$$

이때 $f(-1) = -2$ 이므로

$$1 - 4 + C = -2 \quad \therefore C = -1$$

$$\therefore f(x) = -x^3 + 4x - 1$$

따라서 방정식 $f(x) = 0$, 즉 $-x^3 + 4x - 1 = 0$ 의 모든 근의 곱은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{1}{-1} = 1$$

답 ④

019

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int \{6x^2 - 2f(1)x\} dx \\ &= 2x^3 - f(1)x^2 + C \end{aligned}$$

이때 $f(0) = 4$ 이므로 $C = 4$

$$\therefore f(x) = 2x^3 - f(1)x^2 + 4$$

위 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = 2 - f(1) + 4 \quad \therefore f(1) = 3$$

따라서 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$ 이므로

$$f(2) = 16 - 12 + 4 = 8$$

답 ④

020

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{2x^3 + 2}{x^2 - x + 1} dx \\ &= \int \frac{2(x+1)(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} dx \\ &= \int (2x + 2) dx \\ &= x^2 + 2x + C \end{aligned}$$

①

이때 $f(-2) = 6$ 이므로

$$4 - 4 + C = 6 \quad \therefore C = 6$$

②

따라서 $f(x) = x^2 + 2x + 6$ 이므로 방정식 $f(x) = 0$, 즉 $x^2 + 2x + 6 = 0$ 의 모든 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{2}{1} = -2$$

③

답 -2

채점 기준	비율
① $f(x)$ 를 적분상수를 사용하여 나타낼 수 있다.	40 %
② 적분상수를 구할 수 있다.	20 %
③ 방정식 $f(x) = 0$ 의 모든 근의 합을 구할 수 있다.	40 %

021

$\int g(x) dx = x^2 f(x) + C$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} g(x) &= 2xf(x) + x^2 f'(x) \\ \therefore g(2) &= 4f(2) + 4f'(2) \\ &= 4 \times 1 + 4 \times (-4) \\ &= 4 - 16 = -12 \end{aligned}$$

답 -12

022

$\int f(x) dx = xf(x) - x^3 + x^2 + C$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 3x^2 + 2x$$

$$xf'(x) = 3x^2 - 2x$$

$$\therefore f'(x) = 3x - 2$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx$$

$$\begin{aligned} &= \int (3x - 2) dx \\ &= \frac{3}{2}x^2 - 2x + C_1 \end{aligned}$$

이때 $f(2) = 5$ 이므로

$$6 - 4 + C_1 = 5 \quad \therefore C_1 = 3$$

따라서 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + 3$ 이므로

$$f(-2) = 6 + 4 + 3 = 13$$

답 ④

023

$$F(x) + F'(x) = xf(x) - 3x^2 + 6x \text{에서}$$

$F(x) + f(x) = xf(x) - 3x^2 + 6x$ 이므로 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) + f'(x) = f(x) + xf'(x) - 6x + 6$$

$$f(x) + f'(x) = f(x) + xf'(x) - 6x + 6$$

$$-(x-1)f'(x) = -6(x-1)$$

$$\therefore f'(x) = 6$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int 6 dx = 6x + C$$

이때 $f(2) = 3$ 이므로

$$12 + C = 3 \quad \therefore C = -9$$

따라서 $f(x) = 6x - 9$ 이므로 $f(k) = -3$ 이면

$$6k - 9 = -3, 6k = 6$$

$$\therefore k = 1$$

답 ⑤

024

$F(x) = (x+2)f(x) - x^3 + 12x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + (x+2)f'(x) - 3x^2 + 12$$

$$(x+2)f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$(x+2)f'(x) = 3(x+2)(x-2)$$

$$\therefore f'(x) = 3x - 6$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (3x - 6) dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$$

또, $F(0) = 30$ 에서 $2f(0) = 30$, 즉 $f(0) = 15$ 이므로

$$C = 15$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 15 \text{이므로}$$

$$f(2) = 6 - 12 + 15 = 9$$

답 9

025

$f(x) + \int (x-1)f'(x) dx = 2x^4 - 2x^3 + 4x^2$ 의 양변을 x 에 대하여

미분하면

$$f'(x) + (x-1)f'(x) = 8x^3 - 6x^2 + 8x$$

$$xf'(x) = 8x^3 - 6x^2 + 8x$$

$$\therefore f'(x) = 8x^2 - 6x + 8 \quad \text{..... ①}$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (8x^2 - 6x + 8) dx$$

$$= \frac{8}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + C \quad \text{..... ②}$$

이때 $f(0) = 3$ 이므로 $C = 3$

$$\therefore f(x) = \frac{8}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + 3 \quad \text{..... ③}$$

$$\text{답 } f(x) = \frac{8}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + 3$$

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
② $f(x)$ 를 적분상수를 사용하여 나타낼 수 있다.	40 %
③ $f(x)$ 를 구할 수 있다.	20 %

026

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & (x < -1) \\ -3 & (x > -1) \end{cases}$$

$$\text{에서 } f(x) = \begin{cases} x^2 - x + C_1 & (x < -1) \\ -3x + C_2 & (x \geq -1) \end{cases} \quad \text{..... ㉠}$$

이고, $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ 이다.

이때 $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ 이므로 ㉠에서

$$3 + C_2 = 1 + 1 + C_1 \quad \therefore C_2 - C_1 = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore f(0) - f(-2) &= (0 + C_2) - (4 + 2 + C_1) \\ &= -6 + C_2 - C_1 \\ &= -6 - 1 = -7 \end{aligned}$$

답 -7

참고

함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 $f'(x) = \begin{cases} g(x) & (x < a) \\ h(x) & (x > a) \end{cases}$ 이고,

$f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이면

$$f(x) = \begin{cases} \int g(x) dx & (x < a) \\ \int h(x) dx & (x \geq a) \end{cases}$$

이고, $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 임을 이용한다.

027

$$f'(x) = \begin{cases} -4x & (x < 0) \\ 2x & (x > 0) \end{cases}$$

$$\text{에서 } f(x) = \begin{cases} -2x^2 + C_1 & (x < 0) \\ x^2 + C_2 & (x \geq 0) \end{cases} \quad \text{..... ㉠}$$

이고, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 이다.

이때 $f(-2) = 6$ 이므로 ㉠에서

$$-8 + C_1 = 6 \quad \therefore C_1 = 14$$

또, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 이므로 ㉠에서

$$C_2 = 14$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 14 & (x < 0) \\ x^2 + 14 & (x \geq 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(1) = 1 + 14 = 15$$

답 15

028

함수 $F(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $F(x)$ 는 연속 함수이고, $F'(x) = f(x)$ 이다.

$$f(x) = \begin{cases} -2x & (x < 0) \\ k(2x - x^2) & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$\text{에서 } F(x) = \begin{cases} -x^2 + C_1 & (x < 0) \\ k\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + C_2 & (x \geq 0) \end{cases} \text{이고, 함수 } F(x) \text{가}$$

$x=0$ 에서 연속이므로 $F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ 이다.

$$\therefore C_1 = C_2$$

$$\text{즉, } F(x) = \begin{cases} -x^2 + C_1 & (x < 0) \\ k\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + C_1 & (x \geq 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$F(2) - F(-3) = 21 \text{에서}$$

$$\left(\frac{4}{3}k + C_1\right) - (-9 + C_1) = 21, \quad \frac{4}{3}k = 12$$

$$\therefore k = 9$$

답 9

029

$$f'(x) = 4|x-1| + 3$$

$$= \begin{cases} -4(x-1) + 3 & (x < 1) \\ 4(x-1) + 3 & (x \geq 1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -4x + 7 & (x < 1) \\ 4x - 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 7x + C_1 & (x < 1) \\ 2x^2 - x + C_2 & (x \geq 1) \end{cases} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{이고, } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \text{이다.}$$

$$\text{이때 } f(0) = -6 \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$C_1 = -6 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또, } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$2 - 1 + C_2 = -2 + 7 - 6$$

$$\therefore C_2 = -2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 7x - 6 & (x < 1) \\ 2x^2 - x - 2 & (x \geq 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(3) = 18 - 3 - 2 = 13 \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

답 13

채점 기준	비율
① $x < 1$ 일 때의 적분상수를 구할 수 있다.	40 %
② $x \geq 1$ 일 때의 적분상수를 구할 수 있다.	40 %
③ $f(3)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고

함수 $f(x)$ 가 $x=k$ 에서 연속이면 다음을 모두 이용할 수 있다.

$$f(k) = \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) \text{ 또는 } f(k) = \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) \text{ 또는 } f(k) = \lim_{x \rightarrow k^+} f(x)$$

$$\text{또는 } \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} f(x)$$

030

$$f'(x) = \begin{cases} x & (x < 2) \\ 2 & (x > 2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C_1 & (x < 2) \\ 2x + C_2 & (x \geq 2) \end{cases} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{이고, } f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \text{이다.}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(0, 2)$ 를 지나므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$f(0) = 2 \quad \therefore C_1 = 2$$

$$\text{또, } f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$4 + C_2 = 2 + 2 \quad \therefore C_2 = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2 & (x < 2) \\ 2x & (x \geq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(3) = 2 \times 3 = 6$$

답 ④

031

$$f'(x) = -2x - 1 \text{이므로}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (-2x - 1) dx \\ = -x^2 - x + C$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$f(1) = 0, \quad -1 - 1 + C = 0 \quad \therefore C = 2$$

따라서 $f(x) = -x^2 - x + 2$ 이므로

$$f(-1) = -1 + 1 + 2 = 2$$

답 ②

참고

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$ 이고 $f(x) = \int f'(x) dx$ 이다.

032

$$f'(x) = 2x + 3 \text{이므로}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx \\ = \int (2x + 3) dx \\ = x^2 + 3x + C$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(0, -3)$ 을 지나므로

$$f(0) = -3 \quad \therefore C = -3$$

따라서 $f(x) = x^2 + 3x - 3$ 이므로

$$f(2) = 4 + 6 - 3 = 7$$

답 ③

033

$$f'(x) = 6x^2 - 2x + 1 \text{이므로}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx \\ = \int (6x^2 - 2x + 1) dx \\ = 2x^3 - x^2 + x + C$$

곡선 $y=f(x)$ 가 원점, 즉 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$f(0) = 0 \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = 2x^3 - x^2 + x$ 이므로 방정식 $f(x) = 0$, 즉

$2x^3 - x^2 + x = 0$ 의 모든 근의 합은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

답 ④

034

$$f'(x) = -3x^2 \text{이므로}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (-3x^2) dx \\ = -x^3 + C$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1, 7)$ 을 지나므로

$$f(1)=7, -1+C=7 \quad \therefore C=8$$

$$\therefore f(x)=-x^3+8$$

곡선 $y=f(x)$ 가 x 축과 만날 때 y 좌표가 0이므로

$$-x^3+8=0, x^3=8$$

$$\therefore x=2 (\because x \text{는 실수})$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 가 x 축과 만나는 점의 좌표는 $(2, 0)$ 이다.

답 ⑤

035

$$f(x)=\int(3x^2+4x+k)dx \text{에서 } f'(x)=3x^2+4x+k$$

점 $(-1, 6)$ 에서의 접선의 기울기가 -5 이므로

$$f'(-1)=-5, 3-4+k=-5$$

$$\therefore k=-4 \quad \text{..... ①}$$

$$\therefore f(x)=\int(3x^2+4x-4)dx=x^3+2x^2-4x+C$$

점 $(-1, 6)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(-1)=6, -1+2+4+C=6$$

$$\therefore C=1$$

$$\text{즉, } f(x)=x^3+2x^2-4x+1 \text{이므로} \quad \text{..... ②}$$

$$a=f(2)=8+8-8+1=9 \quad \text{..... ③}$$

답 9

채점 기준	비율
① k 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	20 %

036

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)-F(1)}{3x-3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} F'(1) = \frac{1}{3} f(1) \end{aligned}$$

따라서 구하는 값은

$$\frac{1}{3} f(1) = \frac{1}{3} \times (6-4-3) = \frac{1}{3} \times (-1) = -\frac{1}{3}$$

답 ②

037

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(2+h)-f(2)\} - \{f(2-h)-f(2)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{-h} \\ &= f'(2) + f'(2) = 2f'(2) \end{aligned}$$

$$f(x)=\int(x^2+2x)dx \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x)=x^2+2x$$

따라서 구하는 값은

$$2f'(2)=2 \times (4+4)=2 \times 8=16$$

답 ②

038

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3-h)}{2h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(3+h)-f(3)\} - \{f(3-h)-f(3)\}}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h)-f(3)}{-h} \\ &= \frac{1}{2} f'(3) + \frac{1}{2} f'(3) = f'(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{d}{dx} \left\{ \int 3x(x-2)dx \right\} = \frac{d}{dx} \left\{ \int (3x^2-6x)dx \right\} \\ &= 3x^2-6x \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } f'(x)=6x-6$$

따라서 구하는 값은

$$f'(3)=18-6=12$$

답 ③

039

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-f(-2)}{2x+4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} f'(-2) \end{aligned}$$

$$\int f(x)dx = -x^3-2x^2+3 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x)=-3x^2-4x$$

$$\therefore f'(x)=-6x-4$$

따라서 구하는 값은

$$\frac{1}{2} f'(-2) = \frac{1}{2} \times (12-4) = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

답 ①

040

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h)-f(x+h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x-h)-f(x)\} - \{f(x+h)-f(x)\}}{h} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= -f'(x) - f'(x) = -2f'(x) \quad \text{..... ①} \end{aligned}$$

$$\text{이고, } -2f'(x) = -6x^2+8x-4 \text{이므로}$$

$$f'(x)=3x^2-4x+2 \quad \text{..... ②}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x)dx = \int (3x^2-4x+2)dx \\ &= x^3-2x^2+2x+C \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f(1)=3 \text{이므로}$$

$$1-2+2+C=3 \quad \therefore C=2$$

$$\text{따라서 } f(x)=x^3-2x^2+2x+2 \text{이므로}$$

$$f(2)=8-8+4+2=6 \quad \text{..... ③}$$

답 6

채점 기준	비율
① 주어진 식의 좌변을 정리할 수 있다.	40 %
② $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	20 %
③ $f(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

041

$f(x) = -\int (x^2 - 6x + 5)dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = -(x^2 - 6x + 5) = -(x-1)(x-5)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=5$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	5	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=5$ 에서 극댓값을 가지므로

$k=5$

답 ⑤

042

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 4를 갖고, $x=2$ 에서 극솟값을 갖는다.

이때

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx = \int (3x^2 - 6x)dx \\ &= x^3 - 3x^2 + C \end{aligned}$$

이므로 $f(0)=4$ 에서 $C=4$

따라서 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ 이므로 극솟값은

$$f(2) = 8 - 12 + 4 = 0$$

답 ③

043

함수 $f(x)$ 의 최고차항이 $-x^3$ 이므로 $f'(x)$ 의 최고차항은 $-3x^2$ 이고, 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서 $f'(0)=f'(2)=0$ 이므로

$$f'(x) = -3x(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 갖고, $x=0$ 에서 극솟값 5를 갖는다.

이때

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx = \int \{-3x(x-2)\}dx \\ &= \int (-3x^2 + 6x)dx \\ &= -x^3 + 3x^2 + C \end{aligned}$$

이므로 $f(0)=5$ 에서 $C=5$

즉, $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 5$ 이므로 극댓값은

$$f(2) = -8 + 12 + 5 = 9$$

답 9

044

$f(x)$ 가 삼차함수이므로 $f'(x)$ 는 이차함수이고,

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서 $f'(-1)=f'(1)=0$ 이므로

$f'(x) = a(x+1)(x-1)$ ($a>0$)로 놓을 수 있다.

$\hookrightarrow y=f'(x)$ 의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값 4를 갖고, $x=1$ 에서 극솟값 0을 갖는다.

이때

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx \\ &= \int a(x+1)(x-1)dx \\ &= \int a(x^2 - 1)dx \\ &= a\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) + C \end{aligned}$$

$$f(-1) = 4 \text{에서 } \frac{2}{3}a + C = 4 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f(1) = 0 \text{에서 } -\frac{2}{3}a + C = 0 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=3, C=2$$

따라서 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ 이므로

$$f(3) = 27 - 9 + 2 = 20$$

답 ④

045

함수 $f(x)$ 의 최고차항이 x^3 이므로 $f'(x)$ 의 최고차항은 $3x^2$ 이고,

$f'(-1)=f'(2)=0$ 이므로

$$f'(x) = 3(x+1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값 p 를 갖고, $x=2$ 에서 극솟값 -9 를 갖는다. ①

이때

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx \\ &= \int 3(x+1)(x-2)dx \\ &= \int (3x^2 - 3x - 6)dx \\ &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + C \end{aligned}$$

이므로 $f(2) = -9$ 에서

$$8 - 6 - 12 + C = -9 \quad \therefore C=1$$

$$\therefore f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1 \quad \text{..... ②}$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은

$$f(-1) = -1 - \frac{3}{2} + 6 + 1 = \frac{9}{2}$$

이므로

$$p = \frac{9}{2}$$

$$\therefore 2p = 9 \quad \text{..... ③}$$

답 9

채점 기준	비율
① 극대, 극소일 때의 x 의 값을 알 수 있다.	40 %
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
③ $2p$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

046

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분이 $F(x)$ 이므로

$$F'(x) = f(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$= 3(x-1)(x-3)$$

$$F'(x) = 0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $F(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$F'(x)$	+	0	-	0	+
$F(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $F(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 6을 갖고, $x=3$ 에서 극솟값을 갖는다.

이때

$$F(x) = \int F'(x) dx$$

$$= \int (3x^2 - 12x + 9) dx$$

$$= x^3 - 6x^2 + 9x + C$$

$$\text{이므로 } F(1) = 6 \text{에서 } 1 - 6 + 9 + C = 6$$

$$\therefore C = 2$$

따라서 $F(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ 이므로 $F(x)$ 의 극솟값은

$$F(3) = 27 - 54 + 27 + 2 = 2$$

답 ④

047

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분이 $F(x)$ 이므로

$$F'(x) = f(x)$$

함수 $F(x)$ 가 $x=4$ 에서 극솟값, $x=-2$ 에서 극댓값을 가지므로

$$F'(4) = F'(-2) = 0$$

즉, $f(4) = f(-2) = 0$ 이고, $f(x)$ 의 최고차항이 x^2 이므로

$$f(x) = (x+2)(x-4)$$

$$= x^2 - 2x - 8$$

$$\therefore F(x) = \int f(x) dx$$

$$= \int (x^2 - 2x - 8) dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + C$$

$$F(4) = -20 \text{이므로}$$

$$\frac{64}{3} - 16 - 32 + C = -20$$

$$\therefore C = -\frac{20}{3}$$

따라서

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{20}{3}$$

이므로 극댓값 p 는

$$p = F(-2) = -\frac{8}{3} - 4 + 16 + \frac{20}{3} = 16$$

답 ①

048

$f(x+y) = f(x) + f(y) - 3$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) - 3$$

$$\therefore f(0) = 3 \quad \text{..... ①}$$

한편, $f'(0) = 1$ 이므로

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) - 3 - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \quad (\because \text{①})$$

$$= f'(0) = 1$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int dx = x + C \quad \rightarrow \text{①에서 } C=3$$

①에서 $C=3$

따라서 $f(x) = x + 3$ 이므로

$$f(-2) = -2 + 3 = 1$$

답 1

049

$f(x+y) = f(x) + xy + y^2$ 에서 $f(x+y) - f(x) = xy + y^2$ 이므로

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (x + h) = x$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int x dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + C$$

이때 $f(2) = 5$ 이므로

$$2 + C = 5 \quad \therefore C = 3$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $x=0$ 일 때 3이다.

답 3

01

$f(x)$ 의 한 부정적분이 $F(x)$ 이므로
 $f(x) = F'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
 $f(0) = 1$ 이므로 $b = 1$
 $F(1) = 2$ 이므로 $1 + a + 1 + 2 = 2$
 $\therefore a = -2$
 $\therefore ab = -2 \times 1 = -2$

답 ①

02

$f(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx}(-2x^2 + 4x - k) \right\} dx$
 $= -2x^2 + 4x - k + C$
 방정식 $f(x) = 0$, 즉 $-2x^2 + 4x - k + C = 0$ 의 모든 근의 곱이 -3
 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\frac{-k+C}{-2} = -3$ 에서 $-k+C = 6$
 따라서 $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$ 이므로
 $f(1) = -2 + 4 + 6 = 8$

답 ③

03

함수 $f(x)$ 의 상수항이 0이므로
 $G(x) = \int \left[\frac{d}{dx} \int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx \right] dx$
 $= \int \left[\frac{d}{dx} \{f(x) + C_1\} \right] dx$
 $= \int f'(x) dx = f(x) + C$
 $\therefore G(x) = \frac{1}{100}x^{100} + \frac{1}{99}x^{99} + \frac{1}{98}x^{98} + \dots + \frac{1}{2}x^2 + x + C$
 따라서 $G'(x) = x^{99} + x^{98} + x^{97} + \dots + x + 1$ 이므로 $\rightarrow f(x)$
 $G'(-1) = (-1)^{99} + (-1)^{98} + (-1)^{97} + \dots + (-1) + 1$
 $= (-1) + 1 + (-1) + 1 + \dots + (-1) + 1$
 $= \{(-1) + 1\} \times 50 = 0$

답 ③

04

$f(x) = \int dx + 2 \int x dx + 3 \int x^2 dx + 4 \int x^3 dx + 5 \int x^4 dx$
 $= x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + C$
 이때 $f(1) = 5$ 이므로
 $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + C = 5 \quad \therefore C = 0$
 따라서 $f(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ 이므로
 $f(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 = -1$

답 ①

05

$f'(1) = 4$ 이므로 $12 + 6a + 2b = 4$ 에서
 $3a + b = -4$

..... ㉠

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (12x^2 + 6ax + 2b) dx$$

$$= 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + C_1$$

$$f(0) = 3 \text{이므로 } C_1 = 3$$

$$f(1) = 2 \text{이므로 } 4 + 3a + 2b + 3 = 2 \text{에서}$$

$$3a + 2b = -5$$

..... ㉡

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = -1, b = -1$$

$$\therefore f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x + 3$$

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분이 $F(x)$ 이므로

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (4x^3 - 3x^2 - 2x + 3) dx$$

$$= x^4 - x^3 - x^2 + 3x + C_2$$

$$\therefore F(2) - F(1) = (16 - 8 - 4 + 6 + C_2) - (1 - 1 - 1 + 3 + C_2)$$

$$= (10 + C_2) - (2 + C_2) = 8$$

답 ①

06

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 모든 실수 x 에 대
 하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.
 즉, $f'(x) = \{3x - f(1)\}(x - 1) = 3(x - 1)^2$ 이어야 하므로
 $f(1) = 3$
 이때

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 3(x - 1)^2 dx$$

$$= \int (3x^2 - 6x + 3) dx = x^3 - 3x^2 + 3x + C$$

$$\text{이고 } f(1) = 3 \text{이므로}$$

$$1 - 3 + 3 + C = 3 \quad \therefore C = 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2 \text{이므로}$$

$$f(2) = 8 - 12 + 6 + 2 = 4$$

답 ②

07

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$ 이고, a, b, c 는 상수)라고 하면
 $f(0) = 0$ 이므로 $c = 0$
 $\therefore f(x) = ax^2 + bx$

$$g(x) = \int \{x^2 + f(x)\} dx$$

$$= \int (x^2 + ax^2 + bx) dx$$

$$= \int \{(a+1)x^2 + bx\} dx$$

$$= \frac{1}{3}(a+1)x^3 + \frac{b}{2}x^2 + C$$

$$\text{이때 } g(0) = 0 \text{이므로 } C = 0$$

$$\therefore g(x) = \frac{1}{3}(a+1)x^3 + \frac{b}{2}x^2$$

$$f(1) = 6 \text{이므로 } a + b = 6$$

..... ㉠

$$g(-1) = 1 \text{이므로 } -\frac{1}{3}(a+1) + \frac{b}{2} = 1$$

$$\therefore -2a + 3b = 8$$

..... ㉡

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = 2, b = 4$$

$$\text{따라서 } g(x) = x^3 + 2x^2 \text{이므로}$$

$$g(2) = 8 + 8 = 16$$

답 ②

08

문제 접근하기

$g(x)$ 가 이차함수이므로 $xg(x)$ 는 삼차함수이고, $\int xg(x)dx$, 즉 다항함수 $f(x)$ 는 사차함수이다.

조건 (ㄱ)에서 $f(x) = \int xg(x)dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f'(x) = xg(x)$ ㉠
 조건 (ㄷ)에서 $\frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} = 8x^3 - 2x$ 이므로
 $f'(x) - g'(x) = 8x^3 - 2x$
 $xg(x) - g'(x) = 8x^3 - 2x$ ($\because$ ㉠) ㉡
 이때 조건 (ㄴ)에서 $g(x)$ 는 이차함수이므로
 $g(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$ 이고, a, b, c 는 상수)라고 하면 ㉡에서
 $x(ax^2 + bx + c) - (2ax + b) = 8x^3 - 2x$
 $ax^3 + bx^2 + (c - 2a)x - b = 8x^3 - 2x$
 이 식이 x 에 대한 항등식이므로
 $a = 8, b = 0, c - 2a = -2$
 $\therefore a = 8, b = 0, c = 14$
 즉, $g(x) = 8x^2 + 14$ 이므로
 $f(x) = \int xg(x)dx$
 $= \int x(8x^2 + 14)dx$
 $= \int (8x^3 + 14x)dx$
 $= 2x^4 + 7x^2 + C$
 이때 $f(0) = -5$ 이므로 $C = -5$
 따라서 $f(x) = 2x^4 + 7x^2 - 5$ 이므로
 $f(1) = 2 + 7 - 5 = 4$

답 ④

09

$f'(x) = 3x^2 + |2x| = \begin{cases} 3x^2 - 2x & (x < 0) \\ 3x^2 + 2x & (x \geq 0) \end{cases}$
 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로
 $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + C_1 & (x < 0) \\ x^3 + x^2 + C_2 & (x \geq 0) \end{cases}$ ㉠
 이고, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 이다.
 이때 $f(1) = 4$ 이므로 ㉠에서
 $1 + 1 + C_2 = 4 \quad \therefore C_2 = 2$
 또, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 이므로 ㉠에서
 $C_1 = 2$
 따라서 $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + 2 & (x < 0) \\ x^3 + x^2 + 2 & (x \geq 0) \end{cases}$ 이므로
 $f(2) + f(-1) = (8 + 4 + 2) + (-1 - 1 + 2) = 14$

답 ②

10

$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & (|x| > 1) \\ -2x + 4 & (|x| < 1) \end{cases}$
 에서 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + C_1 & (x < -1) \\ -x^2 + 4x + C_2 & (-1 \leq x < 1) \\ x^2 + x + C_3 & (x \geq 1) \end{cases} \quad \text{..... ㉠}$$

이때 $f(3) = 7$ 이므로 ㉠에서
 $9 + 3 + C_3 = 7 \quad \therefore C_3 = -5$
 함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 연속이므로 ㉠에서
 $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
 $1 + 1 - 5 = -1 + 4 + C_2 \quad \therefore C_2 = -6$
 함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 연속이므로 ㉠에서
 $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$
 $-1 - 4 - 6 = 1 - 1 + C_1 \quad \therefore C_1 = -11$
 따라서 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 11 & (x < -1) \\ -x^2 + 4x - 6 & (-1 \leq x < 1) \\ x^2 + x - 5 & (x \geq 1) \end{cases}$ 이므로
 $f(-4) = 16 - 4 - 11 = 1$

답 ③

11

$f(x) = \int f'(x)dx$
 $= \int (8x + a - 1)dx$
 $= 4x^2 + (a - 1)x + C$
 이차함수 $f(x) = 4x^2 + (a - 1)x + C$ 의 그래프가 직선
 $y = 4x - 2$ 와 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식
 $4x^2 + (a - 1)x + C = 4x - 2$, 즉 $4x^2 + (a - 5)x + (C + 2) = 0$ 이
 서로 다른 두 실근을 갖는다.
 위 이차방정식의 두 근의 합이 -2 이므로 이차방정식의 근과 계수의
 관계에 의하여
 $-\frac{a-5}{4} = -2, a-5=8$
 $\therefore a = 13$

답 ④

12

함수 $f(x)$ 의 부정적분이 $F(x)$ 이므로
 $F(x) = \int f(x)dx = \int 2x dx = x^2 + C$
 이때 $y = F_k(x)$ 의 그래프가 $y = F(x)$ 의 그래프 중에서 하나이므로
 $F_k(x) = x^2 + C_k$ 라고 하면 $F_k'(x) = 2x$
 $y = F_k(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 4x + 5$ 가 접하므로 접점의 x 좌표
 를 t 라고 하면
 $F_k'(t) = 4, 2t = 4$
 $\therefore t = 2$ $\rightarrow$ 접선의 기울기
 즉, 접점의 x 좌표는 2이고, $y = 8 + 5 = 13$ 이므로 접점의 좌표는
 (2, 13)이다.
 또, 함수 $y = F_k(x)$ 의 그래프도 점 (2, 13)을 지나므로
 $F_k(2) = 13, 4 + C_k = 13$
 $\therefore C_k = 9$
 따라서 $F_k(x) = x^2 + 9$ 이므로
 $F_k(-3) = 9 + 9 = 18$

답 ③

13

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1+2h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(1+h) - f(1)\} - \{f(1+2h) - f(1)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2 \\ &= f'(1) - 2f'(1) \\ &= -f'(1) \\ & \int (x-1)f(x)dx = 3x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 18x + 6 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ & (x-1)f'(x) = 12x^3 - 6x^2 - 24x + 18 \\ & \quad = 6(x-1)(2x^2 + x - 3) \\ & \text{이므로 } f'(x) = 12x^2 + 6x - 18 \\ & \therefore f'(x) = 24x + 6 \\ & \text{따라서 구하는 값은} \\ & -f'(1) = -(24+6) = -30 \end{aligned}$$

답 -30

14

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - f(1)}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{xf(x) - xf(1) + xf(1) - f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x\{f(x) - f(1)\} + (x-1)f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ x \times \frac{f(x) - f(1)}{x-1} + f(1) \right\} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{2} \{f'(1) + f(1)\} \\ & f(x) = \int (x-2)(x+2)(x^2+4)dx \\ & \quad = \int (x^4 - 16)dx \\ & \quad = \frac{1}{5}x^5 - 16x + C \\ & \text{이때 } f(0) = -\frac{1}{5} \text{이므로 } C = -\frac{1}{5} \\ & \therefore f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 16x - \frac{1}{5}, f'(x) = x^4 - 16 \\ & \text{따라서} \\ & p = \frac{1}{2} \{f'(1) + f(1)\} = \frac{1}{2} \left\{ (1-16) + \left(\frac{1}{5} - 16 - \frac{1}{5} \right) \right\} \\ & \quad = \frac{1}{2} (-15 - 16) = -\frac{31}{2} \\ & \text{이므로 } 2p = -31 \end{aligned}$$

답 ①

15

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(x, y)$ 에서의 접선의 기울기가 $3x^2 - 12$ 이므로

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극댓값을 갖고, $x = 2$ 에서 극솟값 3을 갖는다.

이때

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx = \int (3x^2 - 12)dx \\ &= x^3 - 12x + C \end{aligned}$$

이므로 $f(2) = 3$ 에서

$$8 - 24 + C = 3 \quad \therefore C = 19$$

따라서 $f(x) = x^3 - 12x + 19$ 이므로 극댓값은

$$f(-2) = -8 + 24 + 19 = 35$$

답 35

16

문제 접근하기

삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고 $x=k$ (k 는 상수)에서 극값을 가지면 이 그래프는 원점을 지나면서 $x=-k$ 에서도 극값을 갖는다. 따라서 $f(x)$ 는 x 를 인수로 갖고, $f'(x)$ 는 $x-k, x+k$ 를 인수로 갖는다.

삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, $x=1$ 에서 극값을 가지므로 $x=-1$ 에서도 극값을 갖는다.

즉, $f'(x) = a(x+1)(x-1)$ ($a \neq 0$)이라고 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx = \int a(x+1)(x-1)dx \\ &= \int a(x^2 - 1)dx = a\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) + C \end{aligned}$$

이때 $f(x)$ 가 원점에 대하여 대칭이므로 $f(0) = 0$

$$\therefore C = 0$$

$$\therefore f(x) = a\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 x 좌표는 방정식

$f(x) = 0$ 의 실근이므로

$$a\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) = 0, \frac{1}{3}ax(x^2 - 3) = 0$$

$$\frac{1}{3}ax(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x = \sqrt{3} (\because x > 0)$$

답 ②

17

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극댓값, $x=-1$ 에서 극솟값을 가지므로 이를 만족시키도록 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

이때 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은 $-1, 1$ 이므로
 $f'(x)=a(x+1)(x-1)$ ($a<0$)이라고 하면

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int a(x+1)(x-1)dx$$

$$=\int a(x^2-1)dx=a\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)+C$$

$$f(1)=1\text{에서 }-\frac{2}{3}a+C=1$$

$$\therefore -2a+3C=3 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f(-1)=-3\text{에서 } \frac{2}{3}a+C=-3$$

$$\therefore 2a+3C=-9 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-3, C=-1$$

$$\therefore f(x)=-x^3+3x-1$$

곡선 $f(x)=-x^3+3x-1$ 과 직선 $y=mx-1$ 이 서로 다른 세 점
 에서 만나려면 방정식 $-x^3+3x-1=mx-1$, 즉

$x\{x^2+(m-3)\}=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이때 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식

$x^2+(m-3)=0$ 이 $x=0$ 이외의 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$$-(m-3)>0, m-3<0$$

$$\therefore m<3$$

$$\text{답 } m<3$$

18

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f'(x)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)}{h} + 2x \right\}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} 2x \quad (\because \text{㉠})$$

$$=f'(0)+2x$$

$f'(0)=a$ (a 는 상수)라고 하면

$$f'(x)=2x+a$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int (2x+a)dx$$

$$=x^2+ax+C$$

㉠에서 $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

$$\therefore f(x)=x^2+ax$$

이때 $f(-2)=2$ 이므로

$$4-2a=2 \quad \therefore a=1$$

따라서 $f(x)=x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ 이므로 함수 $f(x)$ 는

$x=-\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 $-\frac{1}{4}$ 을 갖는다.

$$\text{답 } -\frac{1}{4}$$



정적분

기본을 다지는 유형

본문 125쪽

001

$$(1) \int_0^1 2x dx = \left[x^2 \right]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

$$(2) \int_{-2}^0 (3x^2+1) dx = \left[x^3+x \right]_{-2}^0 = 0 - (-8-2) = 10$$

$$(3) \int_{-1}^3 (4x+2) dx = \left[2x^2+2x \right]_{-1}^3 = (18+6) - (2-2) = 24$$

$$\text{답 } (1) 1 \quad (2) 10 \quad (3) 24$$

002

$$(1) \int_1^1 f(x) dx = \int_1^1 (3x^2-4x+3) dx = 0$$

$$(2) \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (3x^2-4x+3) dx = \left[x^3-2x^2+3x \right]_{-1}^1$$

$$= (1-2+3) - (-1-2-3) = 2+6=8$$

$$(3) \int_1^{-1} f(x) dx = -\int_{-1}^1 f(x) dx = -8$$

$$\text{답 } (1) 0 \quad (2) 8 \quad (3) -8$$

003

$$\int_0^1 (x-1)(x+3) dx + \int_0^2 (t+1)(-t+1) dt$$

$$= \int_0^1 (x^2+2x-3) dx + \int_0^2 (-t^2+1) dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3+x^2-3x \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}t^3+t \right]_0^2$$

$$= \left(\frac{1}{3}+1-3 \right) + \left(-\frac{8}{3}+2 \right)$$

$$= -\frac{5}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$\text{답 } ①$$

004

$$\int_0^2 \frac{4x^2-1}{2x+1} dx = \int_0^2 \frac{(2x+1)(2x-1)}{2x+1} dx$$

$$= \int_0^2 (2x-1) dx$$

$$= \left[x^2-x \right]_0^2$$

$$= 4-2=2$$

$$\text{답 } ③$$

005

$f(x)=ax+b$ ($a \neq 0, a, b$ 는 상수)라고 하면

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (ax+b) dx = \left[\frac{1}{2}ax^2+bx \right]_0^1 = \frac{1}{2}a+b$$

이므로

$$\frac{1}{2}a+b=\frac{1}{2} \quad \therefore a+2b=1$$

$$\text{..... ㉠}$$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^0 xf(x)dx &= \int_{-2}^0 x(ax+b)dx \\ &= \int_{-2}^0 (ax^2+bx)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 \right]_{-2}^0 \\ &= 0 - \left(-\frac{8}{3}a + 2b \right) = \frac{8}{3}a - 2b\end{aligned}$$

이므로

$$\frac{8}{3}a - 2b = 10 \quad \therefore 4a - 3b = 15 \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

①, ㉠을 연립하여 풀면 $a=3, b=-1$

따라서 $f(x)=3x-1$ 이므로

$$f(2)=6-1=5$$

답 ④

006

$$\int_0^k (3x^2+8x-5)dx = \left[x^3+4x^2-5x \right]_0^k = k^3+4k^2-5k$$

이때 $k^3+4k^2-5k=0$ 이므로

$$k(k+5)(k-1)=0 \quad \therefore k=1 (\because k>0)$$

답 ⑤

007

$$\int_0^2 x(3x+k)dx = \int_0^2 (3x^2+kx)dx = \left[x^3 + \frac{1}{2}kx^2 \right]_0^2 = 8+2k$$

이때 $8+2k>4$ 이므로

$$2k>-4 \quad \therefore k>-2$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 -1 이다.

답 ③

008

$f(x)=4x^3+x+k$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx &= \int_0^2 (4x^3+x+k)dx = \left[x^4 + \frac{1}{2}x^2 + kx \right]_0^2 \\ &= 16+2+2k=18+2k\end{aligned}$$

이때 $18+2k=0$ 이므로

$$2k=-18 \quad \therefore k=-9$$

답 -9

009

$$\int_0^a (2x+4)dx = \left[x^2+4x \right]_0^a = a^2+4a = (a+2)^2-4$$

즉, 정적분 $\int_0^a (2x+4)dx$ 의 값은 $a=-2$ 일 때 최소이고, 그때의

정적분의 값은 -4 이므로

$$m=-2, n=-4$$

$$\therefore mn=(-2) \times (-4)=8$$

답 ④

010

$f'(x)=-2x+1$ 이므로

$$\begin{aligned}f(x) &= \int f'(x)dx = \int (-2x+1)dx \\ &= -x^2+x+C\end{aligned}$$

①

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-2}^2 f(x)dx &= \int_{-2}^2 (-x^2+x+C)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + Cx \right]_{-2}^2 \\ &= \left(-\frac{8}{3}+2+2C \right) - \left(\frac{8}{3}+2-2C \right) = -\frac{16}{3}+4C\end{aligned}$$

이때 $-\frac{16}{3}+4C=0$ 이므로

$$4C=\frac{16}{3} \quad \therefore C=\frac{4}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

따라서 $f(x)=-x^2+x+\frac{4}{3}$ 이므로

$$3f(-1)=3 \times \left(-1-1+\frac{4}{3} \right) = -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

답 -2

채점 기준	비율
① 정적분을 이용하여 $f(x)$ 의 식을 세울 수 있다.	40 %
② 적분상수를 구할 수 있다.	40 %
③ $3f(-1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

011

$$\begin{aligned}(1) \int_0^1 (x^2+x)dx + \int_0^1 (3x+1)dx &= \int_0^1 (x^2+x+3x+1)dx \\ &= \int_0^1 (x^2+4x+1)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}+2+1=\frac{10}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \int_0^1 (x^2+x)dx + \int_1^0 (3x+1)dx &= \int_0^1 (x^2+x)dx - \int_0^1 (3x+1)dx \\ &= \int_0^1 (x^2+x-3x-1)dx \\ &= \int_0^1 (x^2-2x-1)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}-1-1=-\frac{5}{3}\end{aligned}$$

답 (1) $\frac{10}{3}$ (2) $-\frac{5}{3}$

012

$$\begin{aligned}\int_0^{-3} (x^2+1)dx + 2 \int_{-3}^0 (x^2-2)dx &= -\int_{-3}^0 (x^2+1)dx + \int_{-3}^0 (2x^2-4)dx \\ &= \int_{-3}^0 (-x^2-1+2x^2-4)dx = \int_{-3}^0 (x^2-5)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 5x \right]_{-3}^0 \\ &= -(-9+15)=-6\end{aligned}$$

답 ②

013

$$\begin{aligned}
& \int_1^2 \frac{2x^3}{x+1} dx - \int_2^1 \frac{2}{x+1} dx \\
&= \int_1^2 \frac{2x^3}{x+1} dx + \int_1^2 \frac{2}{x+1} dx = \int_1^2 \left(\frac{2x^3}{x+1} + \frac{2}{x+1} \right) dx \\
&= \int_1^2 \frac{2x^3+2}{x+1} dx = \int_1^2 \frac{2(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} dx \\
&= \int_1^2 2(x^2-x+1) dx = 2 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_1^2 \\
&= 2 \times \left\{ \left(\frac{8}{3} - 2 + 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) \right\} = 2 \times \left(\frac{8}{3} - \frac{5}{6} \right) = \frac{11}{3} \\
&\text{따라서 } p = \frac{11}{3} \text{ 이므로 } 3p = 11
\end{aligned}$$

답 ⑤

014

$$\begin{aligned}
& 5 \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 (5x + f(x)) dx \\
&= \int_0^1 5f(x) dx - \int_0^1 (5x + f(x)) dx \\
&= \int_0^1 (5f(x) - 5x - f(x)) dx = \int_0^1 (4f(x) - 5x) dx \\
&= \int_0^1 \{4(x^2 + x) - 5x\} dx = \int_0^1 (4x^2 - x) dx \\
&= \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

답 ⑤

015

$$\begin{aligned}
& - \int_0^3 (x+k)^2 dx + 2 \int_3^0 (x^2 + kx - 1) dx \\
&= - \int_0^3 (x^2 + 2kx + k^2) dx - \int_0^3 (2x^2 + 2kx - 2) dx \\
&= - \int_0^3 (x^2 + 2kx + k^2 + 2x^2 + 2kx - 2) dx \\
&= - \int_0^3 (3x^2 + 4kx + k^2 - 2) dx \\
&= - \left[x^3 + 2kx^2 + k^2x - 2x \right]_0^3 \\
&= - (27 + 18k + 3k^2 - 6) = -3k^2 - 18k - 21 \\
&\text{이때 } -3k^2 - 18k - 21 = 6 \text{ 이므로} \\
&3k^2 + 18k + 27 = 0, 3(k+3)^2 = 0 \\
&\therefore k = -3
\end{aligned}$$

답 ①

016

$$\begin{aligned}
(1) & \int_0^2 (2x+1) dx + \int_2^5 (2x+1) dx = \int_0^5 (2x+1) dx = \left[x^2 + x \right]_0^5 \\
&= 25 + 5 = 30 \\
(2) & \int_{-2}^{-1} (3x^2-1) dx + \int_{-1}^2 (3x^2-1) dx = \int_{-2}^2 (3x^2-1) dx \\
&= \left[x^3 - x \right]_{-2}^2 \\
&= (8-2) - (-8+2) \\
&= 6+6=12
\end{aligned}$$

답 (1) 30 (2) 12

017

$$\begin{aligned}
& \int_0^4 (x-1)(x+3) dx + \int_4^2 (x^2+2x-3) dx \\
&= \int_0^4 (x^2+2x-3) dx + \int_4^2 (x^2+2x-3) dx \\
&= \int_0^2 (x^2+2x-3) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \right]_0^2 \\
&= \frac{8}{3} + 4 - 6 = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

답 ②

018

$$\begin{aligned}
& \int_0^4 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \\
&6 = 3 + \int_1^2 f(x) dx + 5 \\
&\therefore \int_1^2 f(x) dx = -2
\end{aligned}$$

답 ②

019

$$\begin{aligned}
& \int_{-2}^a f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \text{ 이므로 주어진 등식에서} \\
& \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx \\
&\therefore \int_0^a f(x) dx = 0 \\
&\text{이때 } f(x) = 3x^2 - 16x - 20 \text{ 이므로} \\
& \int_0^a (3x^2 - 16x - 20) dx = 0, \left[x^3 - 8x^2 - 20x \right]_0^a = 0 \\
&\text{즉, } a^3 - 8a^2 - 20a = 0 \text{ 이므로} \\
&a(a+2)(a-10) = 0 \\
&\therefore a = 10 (\because a > 0)
\end{aligned}$$

답 ④

020

$$\begin{aligned}
& \int_0^2 (-3x^2+5) dx - \int_a^2 (-3x^2+5) dx \\
&= \int_0^2 (-3x^2+5) dx + \int_2^a (-3x^2+5) dx \\
&= \int_0^a (-3x^2+5) dx \\
&= \left[-x^3 + 5x \right]_0^a \\
&= -a^3 + 5a \dots\dots\dots ①
\end{aligned}$$

이때 $-a^3 + 5a = -100$ 이므로

$$a^3 - 5a - 100 = 0, (a-5)(a^2+5a+20) = 0$$

$$\therefore a = 5 (\because a^2 + 5a + 20 > 0) \dots\dots\dots ②$$

답 5

채점 기준	비율
① 주어진 등식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	50 %
② a의 값을 구할 수 있다.	50 %

021

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx \\
 &= \int_{-1}^0 6x^2 dx + \int_0^2 (-3x^2) dx \\
 &= \left[2x^3 \right]_{-1}^0 + \left[-x^3 \right]_0^2 \\
 &= -(-2) + (-8) = -6
 \end{aligned}$$

답 ①

022

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \begin{cases} x+2 & (x < 0) \\ -x+2 & (x \geq 0) \end{cases} \text{이므로} \\
 \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx &= \int_{-2}^0 (x+2) dx - \int_0^1 (-x+2) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^0 - \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^1 \\
 &= -(2-4) - \left(-\frac{1}{2} + 2 \right) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

023

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

즉, $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 이므로

$$5 = -1 + k \quad \therefore k = 6$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\
 &= \int_0^1 (-x^2 + 6) dx + \int_1^2 (x+4) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 6x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 + 4x \right]_1^2 \\
 &= \left(-\frac{1}{3} + 6 \right) + (2+8) - \left(\frac{1}{2} + 4 \right) = \frac{67}{6}
 \end{aligned}$$

이므로

$$6 \int_0^2 f(x) dx = 6 \times \frac{67}{6} = 67$$

답 67

024

$$\begin{aligned}
 \int_0^{-1} f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx &= -\int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \\
 &= -\int_{-1}^0 (x^2 + 4x - 2) dx - \int_0^1 (3x^2 - 2ax + a) dx \\
 &= -\left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 2x \right]_{-1}^0 - \left[x^3 - ax^2 + ax \right]_0^1 \\
 &= \left(-\frac{1}{3} + 2 + 2 \right) - (1 - a + a) = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

답 ④

참고

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=0$ 에서도 연속이다. 즉,

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{이므로}$$

$$a = -2$$

025

$$\begin{aligned}
 \int_{-3}^3 f'(x) dx &= \int_{-3}^0 f'(x) dx + \int_0^3 f'(x) dx \\
 &= \left[f(x) \right]_{-3}^0 + \left[f(x) \right]_0^3 \\
 &= f(0) - f(-3) + f(3) - f(0) \\
 &= f(3) - f(-3) \\
 &= (27+9) - (-27+27) = 36
 \end{aligned}$$

답 ②

026

$$\begin{aligned}
 |x-1| &= \begin{cases} -x+1 & (x < 1) \\ x-1 & (x \geq 1) \end{cases} \text{이므로} \\
 \int_0^2 |x-1| dx &= \int_0^1 (-x+1) dx + \int_1^2 (x-1) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^2 \\
 &= \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) + (2-2) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = 1
 \end{aligned}$$

답 ④

027

$$\begin{aligned}
 |x^2(x-3)| &= \begin{cases} -x^2(x-3) & (x < 3) \\ x^2(x-3) & (x \geq 3) \end{cases} \text{이므로} \\
 \int_0^4 |x^2(x-3)| dx &= \int_0^3 \{-x^2(x-3)\} dx + \int_3^4 x^2(x-3) dx \\
 &= \int_0^3 (-x^3 + 3x^2) dx + \int_3^4 (x^3 - 3x^2) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 \right]_0^3 + \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 \right]_3^4 \\
 &= \left(-\frac{81}{4} + 27 \right) + (64 - 64) - \left(\frac{81}{4} - 27 \right) \\
 &= \frac{27}{2}
 \end{aligned}$$

답 ①

028

$$\begin{aligned}
 |x^2-1| &= \begin{cases} x^2-1 & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -x^2+1 & (-1 < x < 1) \end{cases} \text{이므로} \\
 \int_{-2}^0 \frac{|x^2-1|}{x-1} dx &= \int_{-2}^{-1} \frac{x^2-1}{x-1} dx + \int_{-1}^0 \frac{-x^2+1}{x-1} dx \\
 &= \int_{-2}^{-1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} dx + \int_{-1}^0 \frac{-(x+1)(x-1)}{x-1} dx \\
 &= \int_{-2}^{-1} (x+1) dx - \int_{-1}^0 (x+1) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^0 \\
 &= \left(\frac{1}{2} - 1 \right) - (2-2) - \left\{ -\left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right\} = -1
 \end{aligned}$$

답 ①

029

$$|x| = \begin{cases} -x & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-3}^2 (2x^3 + 6|x|) dx - \int_{-3}^{-2} (2x^3 - 6x) dx \\
&= \int_{-3}^0 (2x^3 - 6x) dx + \int_0^2 (2x^3 + 6x) dx - \int_{-3}^{-2} (2x^3 - 6x) dx \\
&= \int_0^2 (2x^3 + 6x) dx + \int_{-2}^{-3} (2x^3 - 6x) dx + \int_{-3}^0 (2x^3 - 6x) dx \\
&= \int_0^2 (2x^3 + 6x) dx + \int_{-2}^0 (2x^3 - 6x) dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 \right]_{-2}^0 \\
&= (8+12) + \{-(8-12)\} = 24
\end{aligned}$$

답 24

030

$$|2x-6| = \begin{cases} -2x+6 & (x < 3) \\ 2x-6 & (x \geq 3) \end{cases} \quad \text{①}$$

이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^a |2x-6| dx &= \int_0^3 (-2x+6) dx + \int_3^a (2x-6) dx \\
&= \left[-x^2 + 6x \right]_0^3 + \left[x^2 - 6x \right]_3^a \\
&= (-9+18) + (a^2-6a) - (9-18) \\
&= a^2 - 6a + 18 \quad \text{②}
\end{aligned}$$

이때 $a^2 - 6a + 18 = 10$ 이므로

$$a^2 - 6a + 8 = 0, (a-2)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 4 (\because a > 3) \quad \text{③}$$

답 4

채점 기준	비율
① 절댓값 기호를 포함한 식을 구간에 따라 정의할 수 있다.	20 %
② 주어진 등식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	20 %

031

$$(1) \int_{-2}^2 (2x+3) dx = 2 \int_0^2 3 dx = 2 \left[3x \right]_0^2 = 2 \times 6 = 12$$

$$(2) \int_{-3}^3 (x^2-2x) dx = 2 \int_0^3 x^2 dx = 2 \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 = 2 \times 9 = 18$$

답 (1) 12 (2) 18

032

$$\int_{-a}^a (x^2-3x) dx = 2 \int_0^a x^2 dx = 2 \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^a = \frac{2}{3}a^3$$

$$\text{이때 } \frac{2}{3}a^3 = 144 \text{이므로}$$

$$a^3 = 216 \quad \therefore a = 6$$

답 ④

033

$f(x) = f(-x)$ 에서 $f(x)$ 는 우함수이므로

$$\int_{-3}^3 f(x) dx = 2 \int_0^3 f(x) dx = 14$$

$$\therefore \int_0^3 f(x) dx = 7$$

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \text{에서}$$

$$\int_2^3 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx$$

$$= 7 - (-3) = 10$$

답 ④

034

$f(x) = f(-x)$ 에서 $f(x)$ 는 우함수이고, $g(x) = -g(-x)$ 에서 $g(x)$ 는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-3}^3 \{f(x) - g(x)\} dx = \int_{-3}^3 f(x) dx - \int_{-3}^3 g(x) dx$$

$$= 2 \int_0^3 f(x) dx$$

$$= 2 \times 3 = 6$$

답 ②

035

$f(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10}$ 에서

$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + 10x^9$ 이므로

$$\int_{-1}^1 f'(x) dx = \int_{-1}^1 (1 + 2x + 3x^2 + \dots + 10x^9) dx$$

$$= 2 \int_0^1 (1 + 3x^2 + 5x^4 + 7x^6 + 9x^8) dx$$

$$= 2 \left[x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 \right]_0^1$$

$$= 2(1+1+1+1+1)$$

$$= 2 \times 5 = 10$$

답 ④

036

$$\int_0^2 f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \text{라고 하면}$$

..... ①

$$f(x) = 4x + k$$

$$\text{위 식을 ①에 대입하면 } \int_0^2 (4t+k) dt = k$$

$$\left[2t^2 + kt \right]_0^2 = k, 8 + 2k = k$$

$$\therefore k = -8$$

따라서 $f(x) = 4x - 8$ 이므로

$$f(1) = 4 - 8 = -4$$

답 ①

037

$$\int_0^3 t f'(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \text{라고 하면}$$

..... ①

$$f(x) = x^2 - 2x + k$$

$$\therefore f'(x) = 2x - 2$$

$$\text{위 식을 ①에 대입하면 } \int_0^3 t(2t-2) dt = k$$

$$\int_0^3 (2t^2 - 2t) dt = k, \left[\frac{2}{3}t^3 - t^2 \right]_0^3 = k$$

$$\therefore k = 9$$

따라서 $f(x) = x^2 - 2x + 9$ 이므로

$$f(2) = 4 - 4 + 9 = 9$$

답 ⑤

038

$$\int_0^1 t f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \text{라고 하면} \quad \dots\dots\dots ㉠$$

$$f(x) = 4x^2 + 6x + k$$

위 식을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^1 t(4t^2 + 6t + k) dt = k$$

$$\int_0^1 (4t^3 + 6t^2 + kt) dt = k$$

$$\left[t^4 + 2t^3 + \frac{1}{2}kt^2 \right]_0^1 = k$$

$$3 + \frac{1}{2}k = k, \quad \frac{1}{2}k = 3$$

$$\therefore k = 6$$

따라서 $f(x) = 4x^2 + 6x + 6$ 이므로

$$f(2) = 16 + 12 + 6 = 34$$

답 ⑤

039

$$f(x) = -3x^2 + \int_0^2 (x+1)f(t) dt \text{에서}$$

$$f(x) = -3x^2 + (x+1) \int_0^2 f(t) dt$$

$$\int_0^2 f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \text{라고 하면} \quad \dots\dots\dots ㉠$$

$$f(x) = -3x^2 + (x+1)k = -3x^2 + kx + k$$

위 식을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^2 (-3t^2 + kt + k) dt = k$$

$$\left[-t^3 + \frac{1}{2}kt^2 + kt \right]_0^2 = k$$

$$4k - 8 = k, \quad 3k = 8$$

$$\therefore k = \frac{8}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x) = -3x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{8}{3} \text{이므로}$$

$$f(2) = -12 + \frac{16}{3} + \frac{8}{3} = -4$$

답 ②

040

$$\int_0^3 f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \text{라고 하면} \quad \dots\dots\dots ㉠$$

$$f(x) = \frac{16}{9}x^2 + 2xk + \frac{1}{3}k^2 \quad \dots\dots\dots ①$$

위 식을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^3 \left(\frac{16}{9}t^2 + 2kt + \frac{1}{3}k^2 \right) dt = k$$

$$\left[\frac{16}{27}t^3 + kt^2 + \frac{1}{3}k^2t \right]_0^3 = k$$

$$16 + 9k + k^2 = k$$

$$k^2 + 8k + 16 = 0$$

$$(k+4)^2 = 0$$

$$\therefore k = -4 \quad \dots\dots\dots ②$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{16}{9}x^2 - 8x + \frac{16}{3} \text{이므로}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{16}{9}x^2 - 8x + \frac{16}{3} \right) dx$$

$$= 2 \int_0^1 \left(\frac{16}{9}x^2 + \frac{16}{3} \right) dx \rightarrow \text{우함수와 기함수 미음}$$

$$= 2 \left[\frac{16}{27}x^3 + \frac{16}{3}x \right]_0^1$$

$$= \frac{320}{27} \quad \dots\dots\dots ③$$

답 $\frac{320}{27}$

채점 기준	비율
① $\int_0^3 f(t) dt = k$ 로 놓고 $f(x)$ 를 k 를 사용한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
② k 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $\int_{-1}^1 f(x) dx$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

041

$$\int_0^x f(t) dt = 3x^3 + 2x \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x) = 9x^2 + 2$$

$$\therefore f(1) = 9 + 2 = 11$$

답 ③

참고

$$\int_a^x f(t) dt = g(x) \quad (a \text{는 상수}) \text{가 주어지면}$$

$$\text{① 양변에 } x=a \text{를 대입한다. } \Rightarrow \int_a^a f(t) dt = g(a) \Rightarrow g(a) = 0$$

$$\text{② 양변을 } x \text{에 대하여 미분한다. } \Rightarrow f(x) = g'(x)$$

042

$$f(x) = \int_1^x (t^2 - 2t - 1) dt \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$f(1) = 0 \rightarrow \int_1^1 g(t) dt = 0$$

$$f(x) = \int_1^x (t^2 - 2t - 1) dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 1 \rightarrow \frac{d}{dx} \int_1^x g(t) dt = g(x)$$

$$\therefore f'(1) = 1 - 2 - 1 = -2$$

$$\therefore f(1) + f'(1) = 0 + (-2) = -2$$

답 ①

043

$$f(x) = \int_0^x (at + 3) dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x) = ax + 3$$

$$\text{이때 } f'(3) = 12 \text{이므로}$$

$$3a + 3 = 12, \quad 3a = 9$$

$$\therefore a = 3$$

답 ③

044

$f(x) = \int_0^x (6t^2 + 1)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 6x^2 + 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 24 + 1 = 25$$

답 25

045

$f(x) = \int_0^x (t^2 + 3t - 4)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$x = -4 \text{ 또는 } x = 1 \text{ ①}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-4	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = -4$ 에서 극댓값 a , $x = 1$ 에서 극솟값 b 를 가지므로

$$a = f(-4) = \int_0^{-4} (t^2 + 3t - 4)dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 4t \right]_0^{-4} = -\frac{64}{3} + 24 + 16$$

$$= -\frac{56}{3}$$

$$b = f(1) = \int_0^1 (t^2 + 3t - 4)dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 4t \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4$$

$$= -\frac{13}{6} \text{ ②}$$

$$\therefore a + b = -\frac{56}{3} + \left(-\frac{13}{6}\right) = -\frac{33}{2} \text{ ③}$$

답 $\frac{33}{2}$

채점 기준	비율
① $f'(x) = 0$ 인 x 의 값을 구할 수 있다.	20 %
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	60 %
③ $a + b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

046

$f'(x) = x^2 - 2x + 3$ 이라고 하면

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h (x^2 - 2x + 3)dx = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f'(x)dx$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[f(x) \right]_0^h$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$= f'(0) = 3$$

답 ④

047

$F'(x) = f(x)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+2h} f(x)dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[F(x) \right]_1^{1+2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+2h) - F(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+2h) - F(1)}{2h} \times 2 \\ &= 2F'(1) = 2f(1) \\ &= 2 \times (2 - 1 + 3) = 8 \end{aligned}$$

답 ⑤

048

$F'(x) = f(x)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x f(t)dt &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \left[F(t) \right]_2^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x-2} \\ &= F'(2) = f(2) \\ &= -16 + 12 + 1 = -3 \end{aligned}$$

답 ①

049

$f'(x) = 3x + k$ 라고 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{1-h}^{1+h} (3x + k)dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{1-h}^{1+h} f'(x)dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[f(x) \right]_{1-h}^{1+h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(1+h) - f(1)\} - \{f(1-h) - f(1)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \\ &= f'(1) + f'(1) = 2f'(1) \end{aligned}$$

이때 $2f'(1) = 4$ 이므로 $f'(1) = 2$

$$3 + k = 2 \quad \therefore k = -1$$

답 ③

050

$f'(x) = x^2 - 2x$ 라고 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} \int_1^x (t^2 - 2t)dt &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} \int_1^x f'(t)dt = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} \left[f(t) \right]_1^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\} = \frac{1}{2} f'(1) \\ &= \frac{1}{2} \times (1 - 2) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ②



01

$$\int_1^2 f'(x) dx = [f(x)]_1^2 = f(2) - f(1)$$

$f(x) - f(1) = x^3 + 4x^2 - 5x$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(2) - f(1) = 8 + 16 - 10 = 14$$

$$\therefore \int_1^2 f'(x) dx = f(2) - f(1) = 14$$

답 ③

02

$$\begin{aligned} \int_0^1 xf(x) dx &= \int_0^1 x(2x^2 - ax + 3) dx \\ &= \int_0^1 (2x^3 - ax^2 + 3x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{a}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{a}{3} + \frac{3}{2} = -\frac{a}{3} + 2 \end{aligned}$$

이때 $-\frac{a}{3} + 2 = \frac{2}{3}$ 이므로

$$-\frac{a}{3} = -\frac{4}{3} \quad \therefore a = 4$$

답 4

03

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, a, b, c 는 상수)라고 하면

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &= \int_{-1}^0 (ax^2 + bx + c) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx \right]_{-1}^0 \\ &= -\left(-\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b - c \right) \\ &= \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + c \end{aligned}$$

이때 $\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + c = 0$ 이므로

$$2a - 3b + 6c = 0 \quad \text{..... ㉠}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 점 $(0, 4)$, $(1, 7)$ 을 지나므로

$$f(0) = 4 \text{에서 } c = 4$$

$$f(1) = 7 \text{에서 } a + b + c = 7$$

$$\therefore a + b = 3 \quad \text{..... ㉡}$$

$c=4$ 를 ㉠에 대입하면

$$2a - 3b + 24 = 0$$

$$\therefore 2a - 3b = -24 \quad \text{..... ㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = -3$, $b = 6$

따라서 $f(x) = -3x^2 + 6x + 4$ 이므로

$$f(2) = -12 + 12 + 4 = 4$$

답 4

04

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x (t^3 - 1) dt = x^3 - 1$$

$$g(x) = \frac{d}{dx} \int_{-1}^x (t - 1) dt = x - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_2^3 \frac{f(x)}{g(x)} dx &= \int_2^3 \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx = \int_2^3 \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} dx \\ &= \int_2^3 (x^2 + x + 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right]_2^3 \\ &= \left(9 + \frac{9}{2} + 3 \right) - \left(\frac{8}{3} + 2 + 2 \right) = \frac{59}{6} \end{aligned}$$

답 $\frac{59}{6}$

05

$$\begin{aligned} &2 \int_0^1 (x+k)^2 dx - \int_1^0 (2x+k)^2 dx \\ &= 2 \int_0^1 (x^2 + 2kx + k^2) dx + \int_0^1 (4x^2 + 4kx + k^2) dx \\ &= \int_0^1 (2x^2 + 4kx + 2k^2 + 4x^2 + 4kx + k^2) dx \\ &= \int_0^1 (6x^2 + 8kx + 3k^2) dx \\ &= \left[2x^3 + 4kx^2 + 3k^2x \right]_0^1 \\ &= 2 + 4k + 3k^2 = 3 \left(k + \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

따라서 주어진 정적분은 $k = -\frac{2}{3}$ 일 때 최솟값 $\frac{2}{3}$ 를 갖는다.

답 $\frac{2}{3}$

06

$f(x) = 2x(2x+1)(x-1) = 4x^3 - 2x^2 - 2x$ 이므로

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{-3} \frac{f(x)}{2x^2+3} dx + \int_0^{-1} \frac{f(y)}{2y^2+3} dy - \int_{-3}^0 \frac{8x-3}{2x^2+3} dx \\ &= -\int_{-3}^{-1} \frac{f(x)}{2x^2+3} dx - \int_{-1}^0 \frac{f(x)}{2x^2+3} dx - \int_{-3}^0 \frac{8x-3}{2x^2+3} dx \\ &= -\int_{-3}^0 \frac{f(x)}{2x^2+3} dx - \int_{-3}^0 \frac{8x-3}{2x^2+3} dx \\ &= -\int_{-3}^0 \frac{f(x) + 8x - 3}{2x^2+3} dx \\ &= -\int_{-3}^0 \frac{4x^3 - 2x^2 - 2x + 8x - 3}{2x^2+3} dx \\ &= -\int_{-3}^0 \frac{4x^3 - 2x^2 + 6x - 3}{2x^2+3} dx \\ &= -\int_{-3}^0 \frac{(2x-1)(2x^2+3)}{2x^2+3} dx \\ &= -\int_{-3}^0 (2x-1) dx = -\left[x^2 - x \right]_{-3}^0 \\ &= 9 + 3 = 12 \end{aligned}$$

답 ⑤

07

$$\begin{aligned} \int_{-2}^a f(x) dx &= \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_{-2}^0 (x+3) dx + \int_0^a (-x^2 + x + 3) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_0^a \\ &= -(2-6) + \left(-\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 + 3a \right) \\ &= -\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 + 3a + 4 \end{aligned}$$

이때 $-\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 + 3a + 4 = \frac{43}{6}$ 이므로

$$2a^3 - 3a^2 - 18a + 19 = 0$$

$$(a-1)(2a^2 - a - 19) = 0$$

$$\therefore a = 1 (\because a \text{는 정수})$$

답 1

08

(i) $a < -1$ 일 때

$$\begin{aligned} \int_{-2}^a f(x) dx &= \int_{-2}^a (4x-1) dx \\ &= \left[2x^2 - x \right]_{-2}^a \\ &= (2a^2 - a) - (8 + 2) \\ &= 2a^2 - a - 10 \end{aligned}$$

이때 $2a^2 - a - 10 = -13$ 이므로

$$2a^2 - a + 3 = 0$$

a 는 정수이므로 조건을 만족시키는 a 는 존재하지 않는다.

(ii) $a \geq -1$ 일 때

$$\begin{aligned} \int_{-2}^a f(x) dx &= \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^a f(x) dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (4x-1) dx + \int_{-1}^a (-2x-7) dx \\ &= \left[2x^2 - x \right]_{-2}^{-1} + \left[-x^2 - 7x \right]_{-1}^a \\ &= (2+1) - (8+2) + (-a^2-7a) - (-1+7) \\ &= -a^2 - 7a - 13 \end{aligned}$$

이때 $-a^2 - 7a - 13 = -13$ 이므로

$$a^2 + 7a = 0$$

$$a(a+7) = 0$$

$$\therefore a = 0 (\because a \geq -1)$$

(i), (ii)에서 $a = 0$

답 0

09

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= x^2 - x + |x^2 - x| \\ &= \begin{cases} 2x^2 - 2x & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ 0 & (0 < x < 1) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-2}^2 f(g(x)) dx &= \int_{-2}^0 f(g(x)) dx + \int_0^1 f(g(x)) dx + \int_1^2 f(g(x)) dx \\ &= \int_{-2}^0 (2x^2 - 2x) dx + \int_0^1 0 dx + \int_1^2 (2x^2 - 2x) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 - x^2 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{2}{3}x^3 - x^2 \right]_1^2 \\ &= -\left(-\frac{16}{3} - 4\right) + \left(\frac{16}{3} - 4\right) - \left(\frac{2}{3} - 1\right) \\ &= 11 \end{aligned}$$

답 4

10

$$|x-1| = \begin{cases} -x+1 & (x < 1) \\ x-1 & (x \geq 1) \end{cases}, |x-2| = \begin{cases} -x+2 & (x < 2) \\ x-2 & (x \geq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^3 (2|x-1| + 4|x-2|) dx \\ &= \int_0^1 \{2(-x+1) + 4(-x+2)\} dx \\ &\quad + \int_1^2 \{2(x-1) + 4(-x+2)\} dx \\ &\quad + \int_2^3 \{2(x-1) + 4(x-2)\} dx \\ &= \int_0^1 (-6x+10) dx + \int_1^2 (-2x+6) dx + \int_2^3 (6x-10) dx \\ &= \left[-3x^2 + 10x \right]_0^1 + \left[-x^2 + 6x \right]_1^2 + \left[3x^2 - 10x \right]_2^3 \\ &= (-3+10) + (-4+12) - (-1+6) + (27-30) - (12-20) \\ &= 15 \end{aligned}$$

답 3

11

문제 접근하기

$f(x)$ 가 우함수이면 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ 이고, $f(x)$ 가 기함수이면 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ 임을 이용하여 $\int_{-1}^1 f(x) dx$ 를 간단히 한다.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}) dx \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

(i) n 이 짝수이면

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= 2 \int_0^1 \{1+3x^2+\dots+(n-1)x^{n-2}\} dx \\ &= 2 \left[x + x^3 + \dots + x^{n-1} \right]_0^1 \\ &= 2(1+1+\dots+1) \\ &= 2 \times \frac{(n-1)+1}{2} = n \\ \therefore n &= 20 \end{aligned}$$

(ii) n 이 홀수이면

$$\begin{aligned} \therefore k &= \frac{(n-1)+1}{2} \\ \textcircled{1} &= 2 \int_0^1 (1+3x^2+\dots+nx^{n-1}) dx \\ &= 2 \left[x + x^3 + \dots + x^n \right]_0^1 \\ &= 2(1+1+\dots+1) \\ &= 2 \times \frac{n+1}{2} = n+1 \end{aligned}$$

이때 $n+1=20$ 이므로 $n=19$

(i), (ii)에서 자연수 n 의 최댓값은 20이다.

답 20

12

$f(x) = f(-x)$ 이므로 $f(x)$ 는 우함수이고, $-xf(-x) = -xf(x)$ 이므로 $xf(x)$ 는 기함수이다.

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-1}^1 (x+1)f(x) dx &= \int_{-1}^1 xf(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= 0 + 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

답 6

참고

- (1) (우함수) $\times$ (우함수) $\Rightarrow$ (우함수)
- (2) (우함수) $\times$ (기함수) $\Rightarrow$ (기함수)
- (3) (기함수) $\times$ (기함수) $\Rightarrow$ (우함수)

13

문제 접근하기

$f(x)=f(x+4)$ 에서 함수 $f(x)$ 는 주기가 4인 함수이므로

$$\begin{aligned}\int_6^9 f(x)dx &= \int_2^5 f(x)dx = \int_2^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx \\ &= \int_2^4 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx\end{aligned}$$

이다.

$$f(x)=f(x+4)\text{이므로 } f(0)=f(4)$$

$$\text{이때 } f(0)=9, f(4)=a+12\text{이므로}$$

$$9=a+12 \quad \therefore a=-3$$

따라서

$$\begin{aligned}\int_6^9 f(x)dx &= \int_2^5 f(x)dx \\ &= \int_2^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx \\ &= \int_2^4 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx \\ &= \int_2^4 (x^2-x-3)dx + \int_0^1 (-5x+9)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x \right]_2^4 + \left[-\frac{5}{2}x^2 + 9x \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{64}{3} - 8 - 12 \right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 6 \right) + \left(-\frac{5}{2} + 9 \right) = \frac{79}{6}\end{aligned}$$

이므로

$$6 \int_6^9 f(x)dx = 6 \times \frac{79}{6} = 79$$

답 79

|다른 풀이|

함수 $f(x)$ 가 연속함수이므로 $x=2$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } f(2) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \text{이므로}$$

$$4-2+a=-10+9 \quad \therefore a=-3$$

14

$$\begin{aligned}f(x) &= 6x - \int_0^2 f(t)dt + \int_0^4 f(t)dt = 6x + \int_2^4 f(t)dt \\ \int_2^4 f(t)dt &= k \quad (k \text{는 상수}) \text{라고 하면} \quad \dots\dots\dots ①\end{aligned}$$

$$f(x) = 6x + k$$

위 식을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}\int_2^4 (6t+k)dt &= k \\ \left[3t^2 + kt \right]_2^4 &= k, (48+4k) - (12+2k) = k\end{aligned}$$

$$2k+36=k \quad \therefore k=-36$$

따라서 $f(x)=6x-36$ 이므로

$$f(6)=36-36=0$$

답 ③

15

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = -x^4 + 2x^3 + 3x^2 \text{에서}$$

$$x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = -x^4 + 2x^3 + 3x^2$$

앞 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = -4x^3 + 6x^2 + 6x$$

$$\therefore \int_0^x f(t)dt = -4x^3 + 6x^2 + 6x$$

위 등식의 양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = -12x^2 + 12x + 6 = -12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 9$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{1}{2}$ 일 때 최댓값 9를 갖는다.

답 ④

16

$$\int_1^x f(t)dt = xf(x) + 2x^3 - 3x^2 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x) = f(x) + xf'(x) + 6x^2 - 6x$$

$$xf'(x) = -6x^2 + 6x$$

이때 함수 $f(x)$ 가 다항함수이므로

$$f'(x) = -6x + 6$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int f'(x)dx = \int (-6x+6)dx \\ &= -3x^2 + 6x + C \quad \dots\dots\dots ①\end{aligned}$$

$$\int_1^x f(t)dt = xf(x) + 2x^3 - 3x^2 \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$0 = f(1) + 2 - 3 \quad \therefore f(1) = 1$$

①에 $x=1$ 을 대입하면

$$1 = -3 + 6 + C \quad \therefore C = -2$$

따라서 $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$ 이므로

$$f(2) = -12 + 12 - 2 = -2$$

답 ③

17

$$xf(x) = 2x^3 + ax^2 + 3a + \int_1^x f(t)dt \quad \dots\dots\dots ①$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = 2 + a + 3a + \int_1^1 f(t)dt = 2 + 4a$$

①의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 = 3a + \int_1^0 f(t)dt, \text{ 즉 } 0 = 3a - \int_0^1 f(t)dt$$

$$\text{이때 } f(1) = \int_0^1 f(t)dt \text{이고, } f(1) = 2 + 4a \text{이므로}$$

$$0 = 3a - (2 + 4a)$$

$$\therefore a = -2, f(1) = -6$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = 6x^2 + 2ax + f(x)$$

$$xf'(x) = 6x^2 - 4x \quad (\because a = -2)$$

이때 함수 $f(x)$ 가 다항함수이므로

$$f'(x) = 6x - 4$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx = 3x^2 - 4x + C$$

$$f(1) = -6 \text{에서 } 3 - 4 + C = -6 \text{이므로 } C = -5$$

따라서 $f(x) = 3x^2 - 4x - 5$ 이므로

$$f(3) = 27 - 12 - 5 = 10$$

$$\therefore a + f(3) = -2 + 10 = 8$$

답 ④

18

$f(x) = \int_0^x (3t^2 + at + b)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 + ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x = -2$ 에서 극댓값 28을 가지므로

$$f(-2) = 28, f'(-2) = 0$$

$$f(-2) = 28 \text{에서 } \int_0^{-2} (3t^2 + at + b)dt = 28$$

$$-\int_{-2}^0 (3t^2 + at + b)dt = 28, -\left[t^3 + \frac{1}{2}at^2 + bt\right]_{-2}^0 = 28$$

$$-8 + 2a - 2b = 28$$

$$\therefore a - b = 18 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f'(-2) = 0 \text{에서 } 12 - 2a + b = 0$$

$$\therefore 2a - b = 12 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -6, b = -24$

따라서 $f(x) = \int_0^x (3t^2 - 6t - 24)dt$ 이므로

$$f(2) = \int_0^2 (3t^2 - 6t - 24)dt$$

$$= \left[t^3 - 3t^2 - 24t\right]_0^2$$

$$= 8 - 12 - 48 = -52$$

답 -52

19

문제 접근하기

함수 $g(x)$ 의 한 부정적분을 $G(x)$ 라고 하면

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \int_a^x g(x)dx = \lim_{x \rightarrow a} \frac{G(x) - G(a)}{x-a} = G'(a) = g(a)$$

임을 이용한다.

$G(x) = \int_1^x (x-t)f(t)dt$ 라고 하면 $G(x)$ 는 다항함수이고

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_1^x (x-t)f(t)dt = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{G(x)}{x-2}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{G(x)}{x-2} = 3$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 극한값이 존재하고

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} G(x) = 0$ 이므로 $G(2) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{G(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{G(x) - G(2)}{x-2} = G'(2) = 3$$

$$G(x) = \int_1^x (x-t)f(t)dt = x \int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt \text{에서}$$

$$G'(x) = \int_1^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_1^x f(t)dt$$

$$G'(2) = 3 \text{에서 } \int_1^2 f(t)dt = 3$$

$$G(2) = 0 \text{에서 } 2 \int_1^2 f(t)dt - \int_1^2 tf(t)dt = 0 \text{이므로}$$

$$\int_1^2 tf(t)dt = 2 \int_1^2 f(t)dt = 2 \times 3 = 6$$

$$\therefore \int_1^2 (4x+1)f(x)dx = 4 \int_1^2 xf(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$$

$$= 4 \times 6 + 3 = 27$$

답 ⑤

III. 적분



정적분의 활용

기분을 다지는 유형

본문 139쪽

001

$$\int_0^2 \{-x^2(x-2)\}dx = \int_0^2 (-x^3 + 2x^2)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

002

곡선 $y = x^2 - 4$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 4 = 0, (x+2)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 구하는 넓이는

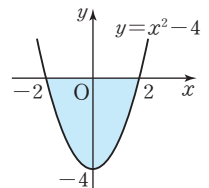
$$\int_{-2}^2 |x^2 - 4|dx = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4)dx$$

$$= 2 \int_0^2 (-x^2 + 4)dx$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_0^2$$

$$= 2 \times \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

답 $\frac{32}{3}$



|다른 풀이 ①|

함수 $f(x) = x^2 - 4$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-2}^0 |x^2 - 4|dx = \int_0^2 |x^2 - 4|dx$$

$$\therefore \int_{-2}^2 |x^2 - 4|dx = 2 \int_0^2 (-x^2 + 4)dx = 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_0^2$$

$$= 2 \times \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

|다른 풀이 ②|

함수 $f(x) = x^2 - 4$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-2, 2$ 이므로 구하는 넓이는

$$\frac{\{2 - (-2)\}^3}{6} = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}$$

참고

포물선 $y = ax^2 + bx + c$ 와 x 축의 교점의 x 좌표가 α, β ($\alpha < \beta$)일 때, 이 포물선과 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{|a|}{6}(\beta - \alpha)^3$$

003

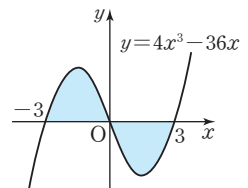
곡선 $y = 4x^3 - 36x$ 와 x 축의 교점의 x 좌

표는

$$4x^3 - 36x = 0$$

$$4x(x+3)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$



따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-3}^3 |4x^3 - 36x| dx \\ &= \int_{-3}^0 (4x^3 - 36x) dx + \int_0^3 (-4x^3 + 36x) dx \\ &= \left[x^4 - 18x^2 \right]_{-3}^0 + \left[-x^4 + 18x^2 \right]_0^3 \\ &= 81 + 81 = 162 \end{aligned}$$

답 162

|다른 풀이|

함수 $y = 4x^3 - 36x$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned} & \int_{-3}^0 |4x^3 - 36x| dx = \int_0^3 |4x^3 - 36x| dx \\ \therefore \int_{-3}^3 |4x^3 - 36x| dx &= 2 \int_0^3 (-4x^3 + 36x) dx \\ &= 2 \left[-x^4 + 18x^2 \right]_0^3 \\ &= 2 \times 81 = 162 \end{aligned}$$

004

곡선 $y = x^2 - ax$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - ax = 0, x(x - a) = 0$$

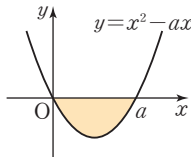
$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = a (\because a > 0)$$

따라서 곡선 $y = x^2 - ax$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^a |x^2 - ax| dx &= \int_0^a (-x^2 + ax) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^a \\ &= \frac{a^3}{6} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \frac{a^3}{6} = \frac{4}{3} \text{ 이므로 } a^3 = 8$$

$$\therefore a = 2 (\because a > 0)$$



답 ②

005

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^2 - 4) dx = \frac{1}{3}x^3 - 4x + C$$

곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(0, 0)$ 을 지나므로 $f(0) = 0$ 에서 $C = 0$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표는

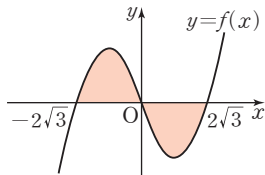
$$\frac{1}{3}x^3 - 4x = 0$$

$$\frac{1}{3}x(x + 2\sqrt{3})(x - 2\sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x = -2\sqrt{3} \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2\sqrt{3}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} |f(x)| dx &= \int_{-2\sqrt{3}}^0 \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x \right) dx + \int_0^{2\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{12}x^4 - 2x^2 \right]_{-2\sqrt{3}}^0 + \left[-\frac{1}{12}x^4 + 2x^2 \right]_0^{2\sqrt{3}} \\ &= 12 + 12 = 24 \end{aligned}$$



답 ④

|다른 풀이|

함수 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned} \int_{-2\sqrt{3}}^0 |f(x)| dx &= \int_0^{2\sqrt{3}} |f(x)| dx \\ \therefore \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} |f(x)| dx &= 2 \int_0^{2\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right) dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{12}x^4 + 2x^2 \right]_0^{2\sqrt{3}} \\ &= 2 \times 12 = 24 \end{aligned}$$

006

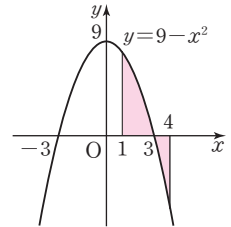
곡선 $y = 9 - x^2$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는

$$9 - x^2 = 0, -(x + 3)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-3}^3 |9 - x^2| dx \\ &= \int_{-3}^0 (9 - x^2) dx + \int_0^3 (-9 + x^2) dx \\ &= \left[9x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-3}^0 + \left[-9x + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 \\ &= \frac{28}{3} + \frac{10}{3} = \frac{38}{3} \end{aligned}$$



답 ③

007

$$y = |x^2 - 2x| + 1$$

$$= \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -x^2 + 2x + 1 & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^2 (|x^2 - 2x| + 1) dx &= \int_0^2 (-x^2 + 2x + 1) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_0^2 \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

답 ③

008

곡선 $y = x^2 + 2x + 2$ 와 x 축 및 두 직선

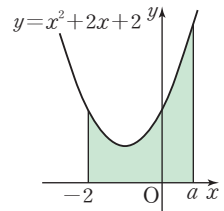
$x = -2$, $x = a$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^a |x^2 + 2x + 2| dx \\ &= \int_{-2}^a (x^2 + 2x + 2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x \right]_{-2}^a \\ &= \frac{1}{3}a^3 + a^2 + 2a + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \frac{1}{3}a^3 + a^2 + 2a + \frac{8}{3} = 6 \text{ 이므로}$$

$$a^3 + 3a^2 + 6a - 10 = 0, (a - 1)(a^2 + 4a + 10) = 0$$

$$\therefore a = 1 (\because a^2 + 4a + 10 > 0)$$



답 ①

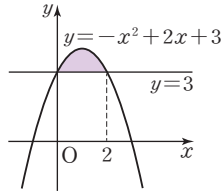
009

곡선 $y = -x^2 + 2x + 3$ 과 직선 $y = 3$ 의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x + 3 &= 3, \quad -x^2 + 2x = 0 \\ -x(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= 0 \text{ 또는 } x = 2 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^2 \{(-x^2 + 2x + 3) - 3\} dx &= \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



답 ②

|다른 풀이|

곡선 $y = -x^2 + 2x + 3$ 과 직선 $y = 3$ 의 교점의 x 좌표가 0, 2이므로 구하는 넓이는

$$\frac{|-1|}{6} (2-0)^3 = \frac{4}{3}$$

참고

포물선 $y = ax^2 + bx + c$ 와 직선 $y = mx + n$ 의 교점의 x 좌표가 α, β ($\alpha < \beta$)일 때, 이 포물선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{|a|}{6} (\beta - \alpha)^3$$

010

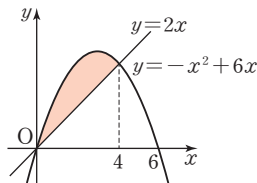
곡선 $y = -x^2 + 6x$ 와 직선 $y = 2x$ 의

교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} -x^2 + 6x &= 2x, \quad x^2 - 4x = 0 \\ x(x-4) &= 0 \\ \therefore x &= 0 \text{ 또는 } x = 4 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^4 \{(-x^2 + 6x) - 2x\} dx &= \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^4 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$



답 ①

011

곡선 $y = x^2 - 5x + 3$ 과 직선 $y = x - 2$ 의

교점의 x 좌표는

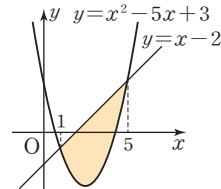
$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 3 &= x - 2, \quad x^2 - 6x + 5 = 0 \\ (x-1)(x-5) &= 0 \\ \therefore x &= 1 \text{ 또는 } x = 5 \end{aligned}$$

따라서 주어진 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_1^5 \{(x-2) - (x^2 - 5x + 3)\} dx \\ &= \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x \right]_1^5 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

이므로

$$3S = 3 \times \frac{32}{3} = 32$$

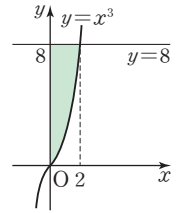


답 32

012

곡선 $y = x^3$ 과 직선 $y = 8$ 의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} x^3 &= 8 \quad \therefore x = 2 \quad (\because x \text{는 실수}) \\ \text{따라서 구하는 넓이는} \\ \int_0^2 (8 - x^3) dx &= \left[8x - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 \\ &= 12 \end{aligned}$$



답 ⑤

013

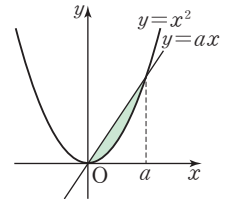
곡선 $y = x^2$ 과 직선 $y = ax$ 의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} x^2 &= ax, \quad x^2 - ax = 0, \quad x(x-a) = 0 \\ \therefore x &= 0 \text{ 또는 } x = a \end{aligned}$$

이때 a 가 양수이므로 곡선 $y = x^2$ 과 직선 $y = ax$ 는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^a (ax - x^2) dx &= \left[\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a \\ &= \frac{a^3}{6} \end{aligned}$$



답 ③

014

곡선 $y = |x^2 - 1|$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} |x^2 - 1| &= 0, \quad |(x+1)(x-1)| = 0 \\ \therefore x &= -1 \text{ 또는 } x = 1 \\ y &= |x^2 - 1| \\ &= \begin{cases} x^2 - 1 & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -x^2 + 1 & (-1 < x < 1) \end{cases} \end{aligned}$$

이고, 곡선 $y = |x^2 - 1|$ 과 직선 $y = 3$ 의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 3, \quad x^2 - 4 = 0, \quad (x+2)(x-2) = 0 \\ \therefore x &= -2 \text{ 또는 } x = 2 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_{-2}^{-1} \{3 - (x^2 - 1)\} dx + \int_{-1}^1 \{3 - (-x^2 + 1)\} dx \\ &\quad + \int_1^2 \{3 - (x^2 - 1)\} dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (-x^2 + 4) dx + \int_{-1}^1 (x^2 + 2) dx + \int_1^2 (-x^2 + 4) dx \\ &= 2 \int_0^1 (x^2 + 2) dx + 2 \int_1^2 (-x^2 + 4) dx \quad \rightarrow \text{피적분함수가 } y \text{축에 대하여 대칭이므로} \\ &\quad \text{정적분의 값이 서로 같다.} \\ &= 2 \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_0^1 + 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_1^2 \\ &= 2 \times \frac{7}{3} + 2 \times \frac{5}{3} = 8 \end{aligned}$$

답 ②

015

곡선 $y = x^2 - ax$ 과 직선 $y = 2x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} x^2 - ax &= 2x, \quad x^2 - (a+2)x = 0 \\ x\{x - (a+2)\} &= 0 \\ \therefore x &= 0 \text{ 또는 } x = a+2 \end{aligned}$$

이때 a 가 양수이므로 곡선 $y=x^2-ax$ 와 직선 $y=2x$ 는 오른쪽 그림과 같다.
곡선 $y=x^2-ax$ 와 직선 $y=2x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 36이므로

$$\int_0^{a+2} \{2x - (x^2 - ax)\} dx = 36$$

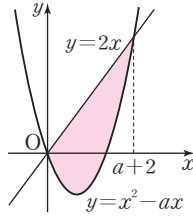
$$\int_0^{a+2} (2x - x^2 + ax) dx = 36$$

$$\int_0^{a+2} \{-x^2 + (a+2)x\} dx = 36$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(a+2)x^2\right]_0^{a+2} = 36, \frac{1}{6}(a+2)^3 = 36$$

$$(a+2)^3 = 6^3$$

$$\therefore a = 4 \quad (\because a > 0)$$



답 ④

016

곡선 $y=x^2+x$ 와 직선 $y=x+n^2$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 + x = x + n^2$$

$$x^2 - n^2 = 0$$

$$(x+n)(x-n) = 0$$

$$\therefore x = -n \text{ 또는 } x = n$$

따라서 도형의 넓이 S_n 은

$$S_n = \int_{-n}^n \{(x+n^2) - (x^2+x)\} dx$$

$$= \int_{-n}^n (n^2 - x^2) dx$$

$$= 2 \int_0^n (n^2 - x^2) dx$$

$$= 2 \left[n^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^n$$

$$= 2 \times \frac{2}{3} n^3$$

$$= \frac{4}{3} n^3$$

$$\therefore S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$$

$$= \frac{4}{3} (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3)$$

$$= \frac{4}{3} \times 225 = 300$$

답 300

채점 기준	비율
① 곡선과 직선의 교점의 x 좌표를 n 을 사용하여 나타낼 수 있다.	30 %
② S_n 을 n 에 대한 식으로 정리할 수 있다.	40 %
③ $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

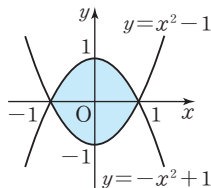
017

두 곡선 $y=x^2-1$ 과 $y=-x^2+1$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 1 = -x^2 + 1, 2x^2 - 2 = 0$$

$$2(x+1)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^1 \{(-x^2+1) - (x^2-1)\} dx = \int_{-1}^1 (-2x^2+2) dx$$

$$= 2 \int_0^1 (-2x^2+2) dx$$

$$= 2 \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x \right]_0^1$$

$$= 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

[다른 풀이]

두 곡선 $y=x^2-1$ 과 $y=-x^2+1$ 의 교점의 x 좌표가 $-1, 1$ 이므로 구하는 넓이는

$$\frac{|1-(-1)|}{6} \{1-(-1)\}^3 = \frac{2}{6} \times 8 = \frac{8}{3}$$

[참고]

두 포물선 $y=ax^2+bx+c$ 와 $y=a'x^2+b'x+c'$ 의 교점의 x 좌표가 α, β ($\alpha < \beta$)일 때, 두 포물선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{|a-a'|}{6} (\beta-\alpha)^3$$

018

두 곡선 $y=x^3-2x+1$ 과 $y=-x^2+1$ 의 교점의 x 좌표가

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

이므로 두 도형 S_1, S_2 의 넓이는

$$S_1 = \int_{-2}^0 \{(x^3-2x+1) - (-x^2+1)\} dx$$

$$= \int_{-2}^0 (x^3+x^2-2x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-2}^0 = \frac{8}{3}$$

$$S_2 = \int_0^1 \{(-x^2+1) - (x^3-2x+1)\} dx$$

$$= \int_0^1 (-x^3-x^2+2x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1 = \frac{5}{12}$$

$$\therefore S_1 - S_2 = \frac{8}{3} - \frac{5}{12} = \frac{9}{4}$$

답 $\frac{9}{4}$

019

두 곡선 $y=x^2-4x$ 와 $y=-x^3+x^2$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 4x = -x^3 + x^2, x^3 - 4x = 0$$

$$x(x+2)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^2 |(x^2-4x) - (-x^3+x^2)| dx$$

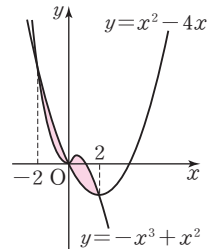
$$= \int_{-2}^0 \{(x^2-4x) - (-x^3+x^2)\} dx$$

$$+ \int_0^2 \{(-x^3+x^2) - (x^2-4x)\} dx$$

$$= \int_{-2}^0 (x^3-4x) dx + \int_0^2 (-x^3+4x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 \right]_0^2 = 4 + 4 = 8$$

답 ⑤



020

두 곡선 $y = -x^2 + ax + 6$ 과 $y = x^2 + bx + 4$ 가 모두 점 $(-3, 0)$ 을 지나므로

$$-9 - 3a + 6 = 0 \text{에서 } 3a = -3 \quad \therefore a = -1$$

$$9 - 3b = 0 \text{에서 } 3b = 9 \quad \therefore b = 3$$

두 곡선 $y = -x^2 - x + 6$ 과

$y = x^2 + 3x$ 의 교점의 x 좌표는

$$-x^2 - x + 6 = x^2 + 3x$$

$$2x^2 + 4x - 6 = 0$$

$$2(x+3)(x-1) = 0$$

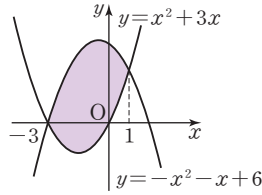
$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-3}^1 \{(-x^2 - x + 6) - (x^2 + 3x)\} dx$$

$$= \int_{-3}^1 (-2x^2 - 4x + 6) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 6x \right]_{-3}^1 = -\frac{64}{3}$$



답 ②

021

두 곡선 $y = x^2$ 과 $y = -x^2 + 2a^2$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 = -x^2 + 2a^2, 2x^2 - 2a^2 = 0$$

$$2(x+a)(x-a) = 0$$

$$\therefore x = -a \text{ 또는 } x = a$$

주어진 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이가 9이므로

$$\int_{-a}^a \{(-x^2 + 2a^2) - x^2\} dx = 9$$

$$\int_{-a}^a (-2x^2 + 2a^2) dx = 9, 2 \int_0^a (-2x^2 + 2a^2) dx = 9$$

$$2 \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2a^2x \right]_0^a = 9, \frac{8}{3}a^3 = 9$$

$$a^3 = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$\therefore a = \frac{3}{2} (\because a > 0)$$

022

$y = 3x^2 - 6x$ 에서 $y' = 6x - 6$

곡선 위의 점 $(2, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$6 \times 2 - 6 = 6$$

이므로 접선의 방정식은

$$y = 6(x - 2) \quad \therefore y = 6x - 12$$

곡선 $y = 3x^2 - 6x$ 와 직선 $y = 6x - 12$ 의

교점의 x 좌표는

$$3x^2 - 6x = 6x - 12, 3x^2 - 12x + 12 = 0$$

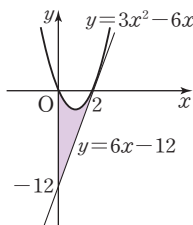
$$3(x-2)^2 = 0$$

$$\therefore x = 2$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 \{(3x^2 - 6x) - (6x - 12)\} dx = \int_0^2 (3x^2 - 12x + 12) dx$$

$$= \left[x^3 - 6x^2 + 12x \right]_0^2 = 8$$



답 ④

023

$y = x^3 - 3x^2 + x$ 에서 $y' = 3x^2 - 6x + 1$

곡선 위의 점 $(2, -2)$ 에서의 접선의 기울기는

$$3 \times 2^2 - 6 \times 2 + 1 = 1$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - (-2) = x - 2$$

$$\therefore y = x - 4$$

곡선 $y = x^3 - 3x^2 + x$ 와 직선 $y = x - 4$

의 교점의 x 좌표는

$$x^3 - 3x^2 + x = x - 4$$

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0$$

$$(x+1)(x-2)^2 = 0$$

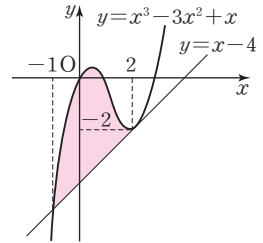
$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^2 \{(x^3 - 3x^2 + x) - (x - 4)\} dx$$

$$= \int_{-1}^2 (x^3 - 3x^2 + 4) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x \right]_{-1}^2 = \frac{27}{4}$$



답 $\frac{27}{4}$

024

$y = x^3 + 2x^2 - x$ 에서 $y' = 3x^2 + 4x - 1$

점점의 좌표를 $(t, t^3 + 2t^2 - t)$ 라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$3t^2 + 4t - 1$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - (t^3 + 2t^2 - t) = (3t^2 + 4t - 1)(x - t)$$

$$\therefore y = (3t^2 + 4t - 1)x - 2t^3 - 2t^2$$

..... ㉠

이 직선이 점 $(0, 8)$ 을 지나므로

$$8 = -2t^3 - 2t^2, 2t^3 + 2t^2 + 8 = 0$$

$$2(t+2)(t^2 - t + 2) = 0$$

$$\therefore t = -2 (\because t^2 - t + 2 > 0)$$

따라서 접선의 방정식은 ㉠에서

$$y = 3x + 8$$

곡선 $y = x^3 + 2x^2 - x$ 와 접선

$y = 3x + 8$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3 + 2x^2 - x = 3x + 8$$

$$x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$$

$$(x-2)(x+2)^2 = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

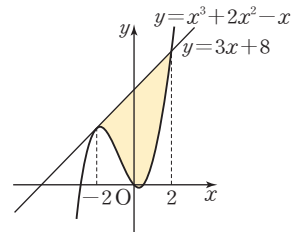
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^2 \{(3x + 8) - (x^3 + 2x^2 - x)\} dx$$

$$= \int_{-2}^2 (-x^3 - 2x^2 + 4x + 8) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 8x \right]_{-2}^2$$

$$= \frac{64}{3}$$



답 ③

참고

유함수와 기함수의 정적분을 이용할 수도 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^2 \{(3x+8)-(x^3+2x^2-x)\}dx \\ &= \int_{-2}^2 (-2x^2+8)dx \\ &= 2 \int_0^2 (-2x^2+8)dx \\ &= 2 \left[-\frac{2}{3}x^3+8x \right]_0^2 \\ &= 2 \times \frac{32}{3} = \frac{64}{3} \end{aligned}$$

025

$$y=x^2-6x+8 \text{에서 } y'=2x-6$$

곡선 위의 점 (2, 0)에서의 접선의 기울기는

$$2 \times 2 - 6 = -2$$

이므로 접선의 방정식은

$$y = -2(x-2) \quad \therefore y = -2x+4$$

곡선 위의 점 (4, 0)에서의 접선의 기울기는

$$2 \times 4 - 6 = 2$$

이므로 접선의 방정식은

$$y = 2(x-4) \quad \therefore y = 2x-8$$

두 직선 $y = -2x+4$ 와 $y = 2x-8$ 의

교점의 x 좌표는

$$-2x+4=2x-8, \quad 4x=12$$

$$\therefore x=3$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_2^3 \{(x^2-6x+8)-(-2x+4)\}dx \\ & \quad \text{직선 } x=3 \text{에 대하여 대칭이므로} \leftarrow + \int_3^4 \{(x^2-6x+8)-(2x-8)\}dx \\ & \quad \text{점적분의 값이 서로 같다.} \\ &= 2 \int_2^3 (x^2-4x+4)dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x \right]_2^3 \\ &= 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

답 ⑤

026

곡선 $y=ax^2+b$ 가 점 (1, 3)을 지나므로

$$a+b=3 \quad \dots\dots\dots ⑦$$

$$y=ax^2+b \text{에서 } y'=2ax$$

곡선 위의 점 (1, 3)에서의 접선의 기울기는

$$2a \times 1 = 2a$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-3=2a(x-1)$$

$$\therefore y=2ax-2a+3 \quad \dots\dots\dots ②$$

이때 곡선과 접선 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \{(ax^2+b)-(2ax-2a+3)\}dx = \frac{1}{3} \\ & \int_0^1 (ax^2-2ax+2a+b-3)dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\left[\frac{1}{3}ax^3-ax^2+2ax+bx-3x \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}a-a+2a+b-3=\frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{3}a+b=\frac{10}{3}$$

$$\therefore 4a+3b=10 \quad \dots\dots\dots ①$$

⑦, ①을 연립하여 풀면

$$a=1, b=2 \quad \dots\dots\dots ③$$

답 $a=1, b=2$

채점 기준	비율
① 곡선이 지나는 점의 좌표를 이용하여 a, b 에 대한 식을 세울 수 있다.	20 %
② 접선의 방정식을 세울 수 있다.	30 %
③ a, b 의 값을 구할 수 있다.	50 %

027

오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^a x(x-2)(x-a)dx=0$$

$$\int_0^a \{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2 \right]_0^a=0$$

$$-\frac{1}{12}a^3(a-4)=0$$

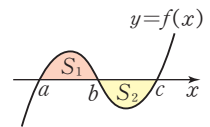
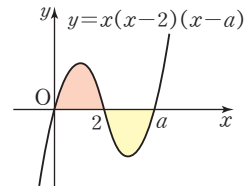
$$\therefore a=4 (\because a>2)$$

답 ④

참고

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2 라고 할 때, $S_1=S_2$ 이면

$$\int_a^c f(x)dx=0$$



028

색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^3 \{(-x^2+9)-a\}dx=0$$

$$\int_0^3 (-x^2+9-a)dx=0$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3+9x-ax \right]_0^3=0$$

$$-9+27-3a=0, \quad 3a=18$$

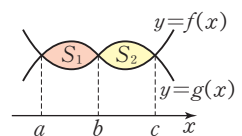
$$\therefore a=6$$

답 6

참고

오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2 라고 할 때, $S_1=S_2$ 이면

$$\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx=0$$



029

색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^a \{x(a-x) - x^2(a-x)\} dx = 0$$

$$\int_0^a \{x^3 - (a+1)x^2 + ax\} dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(a+1)x^3 + \frac{1}{2}ax^2 \right]_0^a = 0$$

$$\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}(a+1)a^3 + \frac{1}{2}a^3 = 0$$

$$-\frac{1}{12}a^3(a-2) = 0$$

$$\therefore a=2 \quad (\because a>1)$$

답 ②

030

$A=B$ 이므로

$$\int_0^2 \{(x^3+x^2) - (-x^2+k)\} dx = 0$$

$$\int_0^2 (x^3+2x^2-k) dx = 0, \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - kx \right]_0^2 = 0$$

$$\frac{28}{3} - 2k = 0 \quad \therefore k = \frac{14}{3}$$

답 ④

031

$$y=x(x-2)+a=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$$

이므로 이차함수 $y=x(x-2)+a$ 의 그래프의 축의 방정식은

$$x=1$$

이때 $S_1+S_3=S_2$ 이므로

$$S_1=S_3=\frac{1}{2}S_2$$

$$\text{즉, } \int_0^1 \{x(x-2)+a\} dx = 0 \text{이므로}$$

$$\int_0^1 (x^2-2x+a) dx = 0, \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + ax \right]_0^1 = 0$$

$$-\frac{2}{3} + a = 0 \quad \therefore a = \frac{2}{3}$$

답 2/3

032

$x<0$ 에서 곡선 $y=x^2$ 과 직선 $y=k^2$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2=k^2 \quad \therefore x=-k \quad (\because k>0)$$

곡선 $y=x^2$ 과 직선 $y=k^2$ 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-k}^0 (k^2-x^2) dx &= \left[k^2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-k}^0 \\ &= -\left(-k^3 + \frac{1}{3}k^3 \right) = \frac{2}{3}k^3 \end{aligned} \quad \text{..... ㉠}$$

$x \geq 0$ 에서 직선 $y=x$ 과 직선 $y=k^2$ 의 교점의 x 좌표는

$$x=k^2$$

직선 $y=x$ 과 직선 $y=k^2$ 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times k^2 \times k^2 = \frac{1}{2}k^4 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } \frac{2}{3}k^3 = \frac{1}{2}k^4 \text{이므로 } \frac{1}{2}k^3 \left(k - \frac{4}{3} \right) = 0$$

$$\therefore k = \frac{4}{3} \quad (\because k>0)$$

답 ④

033

곡선 $y=x^2$ 과 직선 $y=2x+8$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2=2x+8, x^2-2x-8=0$$

$$(x+2)(x-4)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=4$$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_{-2}^k \{(2x+8) - x^2\} dx$$

$$= \int_{-2}^k (-x^2+2x+8) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 8x \right]_{-2}^k$$

$$= -\frac{1}{3}k^3 + k^2 + 8k + \frac{28}{3}$$

..... ㉠

곡선 $y=x^2$ 과 직선 $y=2x+8$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^4 \{(2x+8) - x^2\} dx = \int_{-2}^4 (-x^2+2x+8) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 8x \right]_{-2}^4 = 36 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } -\frac{1}{3}k^3 + k^2 + 8k + \frac{28}{3} = \frac{1}{2} \times 36 \text{이므로}$$

$$k^3 - 3k^2 - 24k + 26 = 0, (k-1)(k^2 - 2k - 26) = 0$$

$$\therefore k=1 \quad (\because 0 < k < 4)$$

답 1

참고

$$k^2 - 2k - 26 = 0 \text{에서 } k = 1 \pm 3\sqrt{3}$$

이때 $1-3\sqrt{3} = -4. \times \times \times$, $1+3\sqrt{3} = 6. \times \times \times 0$ 이므로 $0 < k < 4$ 를 만족시키지 않는다.

034

함수 $f(x)=x^2+1$ 의 그래프와 x 축 및 두

직선 $x=0$, $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓

이를 A 라고 하면

$$A = \int_0^1 (x^2+1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

점 $(1, f(1))$, 즉 점 $(1, 2)$ 를 지나고 기

울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y-2=m(x-1) \quad \therefore y=mx-m+2$$

직선 $y=mx-m+2$ 가 x 축과 만나는 점의 좌표는

$$\left(1 - \frac{2}{m}, 0 \right) \quad m \geq 2 \text{이므로 } 1 - \frac{2}{m} \geq 0$$

세 점 $(1, 2)$, $(1, 0)$, $\left(1 - \frac{2}{m}, 0 \right)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의

넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{m} \times 2 = \frac{2}{m}$$

$$\text{이때 } \frac{2}{m} = \frac{A}{2} \text{이므로 } \frac{2}{m} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$$

$$\therefore m=3$$

답 ②

참고

$f'(x)=2x$ 이므로 점 $(1, f(1))$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 접선의 기울기는

$$f'(1)=2$$

이때 $m \geq 2$ 이므로 직선 $y=mx-m+2$ 의 기울기는 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 기울기보다 크다.

035

곡선 $y=x^2-4x$ 와 직선 $y=mx$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2-4x=mx, x^2-(m+4)x=0$$

$$x(x-m-4)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=m+4 \quad \text{①}$$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_0^{m+4} \{mx - (x^2-4x)\} dx$$

$$= \int_0^{m+4} \{-x^2 + (m+4)x\} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(m+4)x^2 \right]_0^{m+4}$$

$$= -\frac{1}{3}(m+4)^3 + \frac{1}{2}(m+4)^3$$

$$= \frac{1}{6}(m+4)^3 \quad \text{②}$$

곡선 $y=x^2-4x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^4 \{-(x^2-4x)\} dx = \int_0^4 (-x^2+4x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^4$$

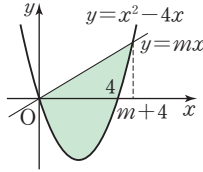
$$= \frac{32}{3} \quad \text{③}$$

$$\text{②, ③에서 } \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}(m+4)^3 = \frac{32}{3} \text{ 이므로}$$

$$(m+4)^3 = 128 \quad \text{④}$$

답 128

채점 기준	비율
① 곡선과 직선의 교점의 x 좌표를 구할 수 있다.	20 %
② 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	40 %
③ $(m+4)^3$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %



036

두 곡선 $y=a^2x^3$, $y=-\frac{1}{a^2}x^3$ 과 직선

$x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1 \left\{ a^2x^3 - \left(-\frac{1}{a^2}x^3 \right) \right\} dx$$

$$= \left(a^2 + \frac{1}{a^2} \right) \int_0^1 x^3 dx$$

$$= \left(a^2 + \frac{1}{a^2} \right) \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} \left(a^2 + \frac{1}{a^2} \right)$$

이때 $a^2 > 0$, $\frac{1}{a^2} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

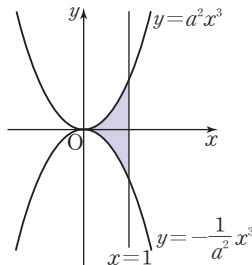
$$\frac{1}{4} \left(a^2 + \frac{1}{a^2} \right) \geq \frac{1}{4} \times 2 \sqrt{a^2 \times \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{2}$$

(단, 등호는 $a^2 = \frac{1}{a^2}$, 즉 $a = -1$ 또는 $a = 1$ 일 때 성립한다.)

따라서 $a = -1$ 또는 $a = 1$ 일 때 구하는 도형의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2}$ 이다.

답 $\frac{1}{2}$



품셈 개념 CHECK

산술평균과 기하평균의 관계_高 공통수학 2

$a > 0, b > 0$ 이면

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ (단, 등호는 } a=b \text{일 때 성립한다.)}$$

037

(1) 곡선 $f(x)=x^2$ 과 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2=x, x^2-x=0, x(x-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 \{x - f(x)\} dx = \int_0^1 (x - x^2) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6}$$

(2) 함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$

는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 즉, 두 곡선 $y=f(x)$ 와

$y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선

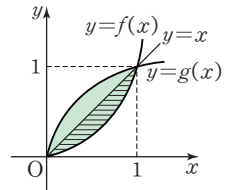
$y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 \{g(x) - f(x)\} dx$$

$$= 2 \int_0^1 \{x - f(x)\} dx$$

$$= 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$



답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{3}$

038

함수 $f(x)=(x-1)^3+1$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

곡선 $f(x)=(x-1)^3+1$ 과 직선

$y=x$ 의 교점의 x 좌표는

$$(x-1)^3+1=x, x^3-3x^2+2x=0$$

$$x(x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

이때 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$

로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선

$y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

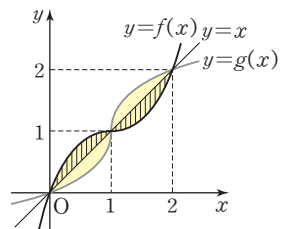
따라서 구하는 도형의 넓이는

$$2 \int_0^1 \{f(x) - x\} dx + 2 \int_1^2 \{x - f(x)\} dx$$

$$= 2 \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx + 2 \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \right]_0^1 + 2 \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$



답 ①

039

함수 $f(x)=3x^2+1$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 즉, 오른쪽 그림에서

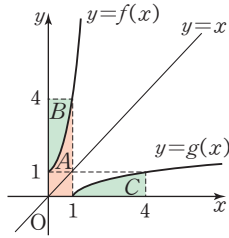
(B의 넓이)=(C의 넓이)이므로

$$\int_1^4 g(x)dx = (C의 넓이) = (B의 넓이)$$

$$= (A+B의 넓이) - (A의 넓이)$$

$$= 1 \times 4 - \int_0^1 f(x)dx = 4 - \int_0^1 (3x^2+1)dx$$

$$= 4 - \left[x^3 + x \right]_0^1 = 4 - 2 = 2$$



답 ①

040

함수 $f(x)=x^3+2$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 즉, 오른쪽 그림에서

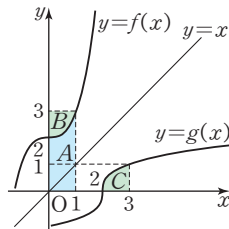
(B의 넓이)=(C의 넓이)이므로

$$\int_0^1 f(x)dx + \int_2^3 g(x)dx$$

$$= (A의 넓이) + (C의 넓이)$$

$$= (A의 넓이) + (B의 넓이)$$

$$= 1 \times 3 = 3$$



답 ③

041

(1) 시각 $t=0$ 에서의 점 P의 위치가 -3 이므로 시각 $t=2$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} -3 + \int_0^2 v(t)dt &= -3 + \int_0^2 (6-2t)dt \\ &= -3 + \left[-t^2 + 6t \right]_0^2 \\ &= -3 + 8 = 5 \end{aligned}$$

$$(2) \int_2^4 v(t)dt = \int_2^4 (6-2t)dt = \left[-t^2 + 6t \right]_2^4 = 8 - 8 = 0$$

$$\begin{aligned} (3) \int_2^4 |v(t)|dt &= \int_2^4 |6-2t|dt \\ &= \int_2^3 (6-2t)dt + \int_3^4 (-6+2t)dt \\ &= \left[-t^2 + 6t \right]_2^3 + \left[t^2 - 6t \right]_3^4 \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

답 (1) 5 (2) 0 (3) 2

참고

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t_0 에서의 위치가 x_0 이고, 시각 t 에서의 속도가 $v(t)$ 일 때

$$(1) \text{시각 } t \text{에서의 점 P의 위치} \Rightarrow x_0 + \int_{t_0}^t v(t)dt$$

$$(2) \text{시각 } t=a \text{에서 } t=b \text{까지 점 P의 위치의 변화량} \Rightarrow \int_a^b v(t)dt$$

$$(3) \text{시각 } t=a \text{에서 } t=b \text{까지 점 P가 움직인 거리} \Rightarrow \int_a^b |v(t)|dt$$

042

(1) 시각 $t=0$ 에서의 물체의 높이는 45 m이므로 시각 $t=2$ 에서의 지면으로부터의 높이는

$$\begin{aligned} 45 + \int_0^2 v(t)dt &= 45 + \int_0^2 (40-10t)dt \\ &= 45 + \left[-5t^2 + 40t \right]_0^2 \\ &= 45 + 60 = 105 \text{ (m)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_2^5 |v(t)|dt &= \int_2^5 |40-10t|dt \\ &= \int_2^4 (40-10t)dt + \int_4^5 (-40+10t)dt \\ &= \left[-5t^2 + 40t \right]_2^4 + \left[5t^2 - 40t \right]_4^5 \\ &= 20 + 5 = 25 \text{ (m)} \end{aligned}$$

(3) 최고 지점에서의 물체의 속도는 0 m/s이므로

$$v(t)=0 \text{에서 } 40-10t=0 \quad \therefore t=4$$

이때의 지면으로부터의 높이는

$$\begin{aligned} 45 + \int_0^4 v(t)dt &= 45 + \int_0^4 (40-10t)dt \\ &= 45 + \left[-5t^2 + 40t \right]_0^4 \\ &= 45 + 80 = 125 \text{ (m)} \end{aligned}$$

답 (1) 105 m (2) 25 m (3) 125 m

참고

물체가 최고 높이에 도달하면 물체가 운동 방향을 바꾸는 것이므로 이때의 속도는 0이다.

043

자동차가 정지하면 속도가 0 m/s이므로

$$v(t)=0 \text{에서 } 20-4t=0 \quad \therefore t=5$$

따라서 자동차는 제동을 건 지 5초 후에 정지하므로 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_0^5 |v(t)|dt = \int_0^5 (20-4t)dt = \left[-2t^2 + 20t \right]_0^5 = 50 \text{ (m)}$$

답 ⑤

044

점 P가 움직이는 방향이 바뀔 때의 속도는 0이므로

$$v(t)=0 \text{에서 } 12-2t=0 \quad \therefore t=6$$

따라서 좌표가 3인 점에서 출발한 점 P의 시각 $t=6$ 에서의 위치는

$$\begin{aligned} 3 + \int_0^6 v(t)dt &= 3 + \int_0^6 (12-2t)dt = 3 + \left[-t^2 + 12t \right]_0^6 \\ &= 3 + 36 = 39 \end{aligned}$$

답 ④

045

점 P가 움직이는 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$$v(t)=0 \text{에서 } 3t^2-12t=0$$

$$3t(t-4)=0 \quad \therefore t=4 \quad (\because t>0)$$

점 P가 움직이는 방향을 바꾸어 원점으로 돌아올 때의 시각을

$t=a$ ($a>0$)라고 하면 이때의 점 P의 위치는 0이므로

$$\int_0^a v(t)dt=0 \text{에서}$$

$$\int_0^a (3t^2-12t)dt=0$$

$$\left[t^3-6t^2\right]_0^a=0, a^3-6a^2=0$$

$$a^2(a-6)=0 \quad \therefore a=6 (\because a>0)$$

따라서 점 P가 움직이는 방향을 바꾼 후부터 다시 원점으로 돌아오는 데 걸린 시간은

$$6-4=2$$

답 ②

046

점 P가 시각 $t=0$ 에서 $t=6$ 까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^6 |v(t)|dt &= \int_0^4 (4t-t^2)dt + \int_4^6 (2t-8)dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2\right]_0^4 + \left[t^2-8t\right]_4^6 \\ &= \frac{32}{3}+4=\frac{44}{3} \end{aligned}$$

답 ④

047

점 P의 시각 t 에서의 가속도를 $a(t)$ 라고 하면

$$a(t)=v'(t)=12t^2-48$$

시각 $t=k$ 에서 점 P의 가속도가 0이므로

$$a(k)=0 \text{에서 } 12k^2-48=0$$

$$k^2=4 \quad \therefore k=2 (\because k>0)$$

$0 \leq k \leq 2$ 일 때 $v(t) \leq 0$ 이므로 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^2 |v(t)|dt &= \int_0^2 |4t^3-48t|dt = \int_0^2 (-4t^3+48t)dt \\ &= \left[-t^4+24t^2\right]_0^2=80 \end{aligned}$$

답 80

048

최고 높이에서의 물체의 속도는 0 m/s이므로

$$v(t)=0 \text{에서 } 10-10t=0 \quad \therefore t=1$$

이때의 지면으로부터의 높이는

$$\begin{aligned} 15 + \int_0^1 v(t)dt &= 15 + \int_0^1 (10-10t)dt \\ &= 15 + \left[-5t^2+10t\right]_0^1 \\ &= 15+5=20 \text{ (m)} \end{aligned}$$

$$\therefore p=20 \quad \text{..... ①}$$

물체가 최고 높이에 도달한 후 2초 동안 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_1^3 |v(t)|dt &= \int_1^3 |10-10t|dt = \int_1^3 (-10+10t)dt \\ &= \left[5t^2-10t\right]_1^3=20 \text{ (m)} \end{aligned}$$

$$\therefore q=20 \quad \text{..... ②}$$

$$\therefore p+q=20+20=40 \quad \text{..... ③}$$

답 40

채점 기준	비율
① p 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② q 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $p+q$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고

시각 t 에서의 속도가 $v(t)$ 이고, $a \leq t \leq c$ 일 때 $v(t) \geq 0$, $c \leq t \leq b$ 일 때 $v(t) \leq 0$ 인 점 P가 시각 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 움직인 거리 (단, $a < c < b$)

$$\Rightarrow \int_a^b |v(t)|dt = \int_a^c v(t)dt + \int_c^b \{-v(t)\}dt$$

049

$$(1) \int_0^4 v(t)dt = \frac{1}{2} \times (2+4) \times 2 = 6$$

$$(2) \int_0^4 |v(t)|dt = \int_0^4 v(t)dt = \frac{1}{2} \times (2+4) \times 2 = 6$$

답 (1) 6 (2) 6

050

$$\begin{aligned} (1) \int_0^5 v(t)dt &= \int_0^3 v(t)dt + \int_3^5 v(t)dt \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 + \frac{1}{2} \times (5-3) \times (-2) \\ &= 3-2=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^5 |v(t)|dt &= \int_0^3 v(t)dt + \int_3^5 \{-v(t)\}dt \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \\ &= 3+2=5 \end{aligned}$$

답 (1) 1 (2) 5

051

점 P는 $t=4$ 일 때 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있으므로 이때의 점 P의 위치는

$$\int_0^4 v(t)dt = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$$

답 ⑤

052

물체가 시각 $t=a$ 에서 원점을 다시 지난다고 하면

$$\int_0^a v(t)dt=0 \text{이어야 한다.}$$

이때 $\int_0^4 v(t)dt = -\int_4^8 v(t)dt$ 이므로 물체가 다시 원점을 지나는 시각은 $t=8$ 이다.

답 ⑤

053

점 P가 처음으로 운동 방향을 바꾸는 순간은 $v(t)=0$ 인 $t=3$ 일 때
이므로 구하는 위치는

$$2 + \int_0^3 v(t)dt = 2 + \frac{1}{2} \times 3 \times (-2) = 2-3=-1$$

답 ②

01

곡선 $y = -x^2 + n^2$ 과 x 축의 교점의 x 좌

표는

$$-x^2 + n^2 = 0$$

$$-(x+n)(x-n) = 0$$

$$\therefore x = -n \text{ 또는 } x = n$$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의

넓이 $S(n)$ 은

$$S(n) = \int_{-n}^n |-x^2 + n^2| dx$$

$$= \int_{-n}^n (-x^2 + n^2) dx$$

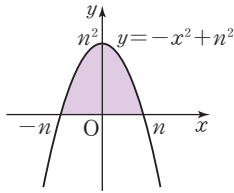
$$= 2 \int_0^n (-x^2 + n^2) dx$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + n^2x \right]_0^n$$

$$= 2 \times \frac{2}{3}n^3 = \frac{4}{3}n^3$$

$$\therefore \int_0^{\sqrt{3}} S(n) dn = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{4}{3}n^3 dn$$

$$= \left[\frac{1}{3}n^4 \right]_0^{\sqrt{3}} = 3$$



답 3

02

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (3x^2 - 3) dx$$

$$= x^3 - 3x + C$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(2, 4)$ 를 지나므로

$$f(2) = 4 \text{에서}$$

$$8 - 6 + C = 4 \quad \therefore C = 2$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x + 2$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의

x 좌표는

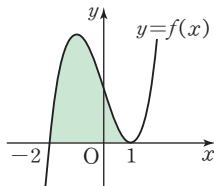
$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1)^2 = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 = \frac{27}{4}$$



답 ⑤

03

$$f(x) = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$$

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & (x < 2) \\ -x^2 + 6x - 8 & (x \geq 2) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -(x-1)^2 + 1 & (x < 2) \\ -(x-3)^2 + 1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

이므로 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프는 각각 직선 $x = 2$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $0 \leq x \leq 2$ 인 부분과 $2 \leq x \leq 4$ 인 부분의 넓이가 같으므로 구하는 넓이는

$$\int_0^4 \{g(x) - f(x)\} dx$$

$$= 2 \int_0^2 \{(-x^2 + 2x) - (x^2 - 4x)\} dx$$

$$= 2 \int_0^2 (-2x^2 + 6x) dx$$

$$= 2 \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^2$$

$$= 2 \times \frac{20}{3} = \frac{40}{3}$$

답 ①

04

$$y = 3x^2 + 1 \text{에서 } y' = 6x$$

점점의 좌표를 $(t, 3t^2 + 1)$ 이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $6t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (3t^2 + 1) = 6t(x - t)$$

$$\therefore y = 6tx - 3t^2 + 1$$

이 접선이 점 $(0, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = -3t^2 + 1$$

$$3t^2 = 3, t^2 = 1$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 1$$

$t = -1$ 일 때의 접선의 방정식은

$$y = -6x - 2$$

$t = 1$ 일 때의 접선의 방정식은

$$y = 6x - 2$$

따라서 구하는 넓이는

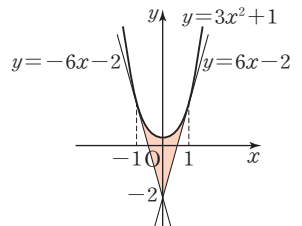
$$\int_{-1}^0 \{(3x^2 + 1) - (-6x - 2)\} dx + \int_0^1 \{(3x^2 + 1) - (6x - 2)\} dx$$

$$= 2 \int_0^1 (3x^2 - 6x + 3) dx$$

→ 그래프가 y 축에 대하여 대칭이므로
접점의 값이 서로 같다.

$$= 2 \left[x^3 - 3x^2 + 3x \right]_0^1$$

$$= 2 \times 1 = 2$$



답 2

05

문제 접근하기

구하는 넓이는 $\int_1^3 |g(x) - f(x)| dx$ 이다. 이때 두 함수의 그래프가 점

$(1, 0)$ 에서 접하고 점 $(3, 0)$ 에서 만나므로 방정식 $g(x) - f(x) = 0$ 은

중근 1과 한 실근 3을 갖는다.

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 삼차함수

$y = g(x)$ 의 그래프가 점 $(1, 0)$ 에서 접

하고 점 $(3, 0)$ 에서 만나므로

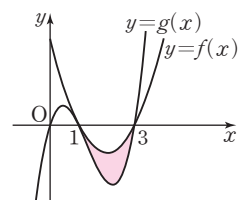
$$g(x) - f(x) = (x-1)^2(x-3)$$

$$x^3 - 4x^2 + 3x - f(x)$$

$$= x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 4x + 3$$

→ $x = 3$ 에서
만난다.
→ $x = 1$ 에서
접한다.



따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\int_1^3 \{f(x) - g(x)\} dx &= \int_1^3 \{(x^2 - 4x + 3) - (x^3 - 4x^2 + 3x)\} dx \\ &= \int_1^3 (-x^3 + 5x^2 - 7x + 3) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x \right]_1^3 \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

답 ③

참고

$g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로 $g(x) - f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

06

곡선 $y = -x^2 + 6x$ 와 직선 $y = ax$ 의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned}-x^2 + 6x &= ax \\ x^2 + (a-6)x &= 0 \\ x(x+a-6) &= 0 \\ \therefore x=0 \text{ 또는 } x &= -a+6 \\ S_1 &= \int_0^{-a+6} \{(-x^2 + 6x) - ax\} dx \\ &= \int_0^{-a+6} \{-x^2 + (-a+6)x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(-a+6)x^2 \right]_0^{-a+6} \\ &= \frac{1}{6}(-a+6)^3\end{aligned}$$

$S_1 = S_2$ 에서 $2S_1 = S_1 + S_2$ 이고,

$$\begin{aligned}S_1 + S_2 &= \int_0^6 (-x^2 + 6x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^6 = 36\end{aligned}$$

이므로 $2 \times \frac{1}{6}(-a+6)^3 = 36$

$$\therefore (-a+6)^3 = 108$$

답 ⑤

07

곡선 $y = f(x)$ 가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는

$$\begin{aligned}-x^3 - 3x^2 - 3x + 7 &= 0 \\ -(x-1)(x^2 + 4x + 7) &= 0 \\ \therefore x=1 \quad (\because x^2 + 4x + 7 > 0)\end{aligned}$$

따라서 점 P(1, 0)이므로 점 P를 지나고 x 축에 수직인 직선의 방정식은

$$\begin{aligned}x=1 \quad \therefore a=1 \\ \text{이때 } S_1 = S_2 \text{이므로}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \{f(x) - b\} dx &= 0 \\ \int_0^1 (-x^3 - 3x^2 - 3x + 7 - b) dx &= 0 \\ \left[-\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 + (7-b)x \right]_0^1 &= 0 \\ -\frac{1}{4} - 1 - \frac{3}{2} + 7 - b &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore b = \frac{17}{4}$$

$$\therefore a + 4b = 1 + 17 = 18$$

답 18

08

곡선 $y = a^2x^2$ 과 직선 $y = 1$ 의 교점의 x 좌표는

$$a^2x^2 = 1, x^2 = \frac{1}{a^2}$$

$$\therefore x = -\frac{1}{a} \text{ 또는 } x = \frac{1}{a}$$

곡선 $y = a^2x^2$ 과 직선 $y = 1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} (1 - a^2x^2) dx &= 2 \int_0^{\frac{1}{a}} (1 - a^2x^2) dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3}a^2x^3 + x \right]_0^{\frac{1}{a}} \\ &= 2 \times \frac{2}{3a} \\ &= \frac{4}{3a} \quad \dots\dots\dots ㉠\end{aligned}$$

곡선 $y = x^2$ 과 직선 $y = 1$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 = 1 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

곡선 $y = x^2$ 과 직선 $y = 1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (1 - x^2) dx &= 2 \int_0^1 (1 - x^2) dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 \\ &= 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad \dots\dots\dots ㉡\end{aligned}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } \frac{4}{3a} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \text{이므로}$$

$$a = 2$$

답 2

09

곡선 $y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x$ 와 직선 $y = mx + 2$ 의 교점의 x 좌표를 k 라고 하면

$$\begin{aligned}B - A &= \int_k^2 \left\{ \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x \right) - (mx + 2) \right\} dx \\ &\quad - \int_0^k \left\{ (mx + 2) - \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x \right) \right\} dx \\ &= \int_k^2 \left\{ \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x \right) - (mx + 2) \right\} dx \\ &\quad + \int_0^k \left\{ \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x \right) - (mx + 2) \right\} dx \\ &= \int_0^2 \left\{ \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x \right) - (mx + 2) \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{m}{2}x^2 - 2x \right]_0^2 \\ &= -2m - 2\end{aligned}$$

$$\text{이때 } -2m - 2 = \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$m = -\frac{4}{3}$$

답 ③

10

문제 접근하기

$S_1 + S_2$ 는 직각삼각형의 넓이를 이용하여 구할 수 있다. 이때 $S_1 : S_2 = 7 : 5$ 를 이용하여 S_1 을 구한다.

직선 $y = -3x + 6$ 이 x 축, y 축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(2, 0), (0, 6)$
이므로

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6$$

이때 $S_1 : S_2 = 7 : 5$ 이므로

$$S_1 = \frac{7}{7+5} \times 6 = \frac{7}{2}$$

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = ax^2$ 과 직선 $y = -3x + 6$ 이 만나는 교점의 x 좌표를 k ($0 < k < 2$)라고 하면

$$ak^2 = -3k + 6$$

한편, S_1 을 정적분을 이용해서 구하면

$$S_1 = \int_0^k \{(-3x + 6) - ax^2\} dx$$

$$= \int_0^k (-ax^2 - 3x + 6) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}ax^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x \right]_0^k$$

$$= -\frac{1}{3}ak^3 - \frac{3}{2}k^2 + 6k$$

$$= -\frac{1}{3}k(-3k + 6) - \frac{3}{2}k^2 + 6k \quad (\because \text{㉔})$$

$$= -\frac{1}{2}k^2 + 4k$$

이때 ㉔에 의하여 $-\frac{1}{2}k^2 + 4k = \frac{7}{2}$ 이므로

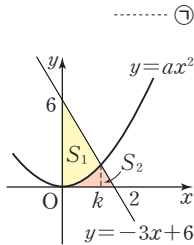
$$k^2 - 8k + 7 = 0$$

$$(k-1)(k-7) = 0$$

$$\therefore k = 1 \quad (\because 0 < k < 2)$$

$k = 1$ 을 ㉔에 대입하면

$$a = -3 + 6 = 3$$



..... ㉔

..... ㉔

답 3

11

곡선 $y = -x^2 + 2nx$ 와 직선 $y = nx$ 의 교점의 x 좌표는

$$-x^2 + 2nx = nx, \quad x^2 - nx = 0$$

$$x(x-n) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = n$$

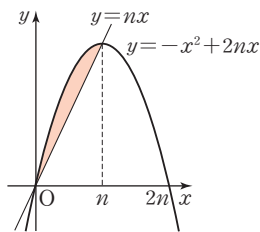
오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이 S_n 은

$$S_n = \int_0^n \{(-x^2 + 2nx) - nx\} dx$$

$$= \int_0^n (-x^2 + nx) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}nx^2 \right]_0^n$$

$$= \frac{1}{6}n^3$$



$$\text{이때 } S_n > 36 \text{이므로 } \frac{1}{6}n^3 > 36, \quad n^3 > 6^3$$

$$n^3 - 6^3 > 0, \quad (n-6)(n^2 + 12n + 36) > 0$$

$$\therefore n > 6 \quad (\because n^2 + 12n + 36 \geq 0)$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 7이다.

답 7

12

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 두 곡선 $y = f(x)$ 와

$y = g(x)$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점

의 x 좌표는 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$

의 교점의 x 좌표와 같으므로 1, 5이다.

따라서 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의

그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는

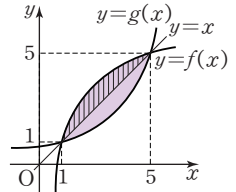
$$\int_1^5 \{f(x) - g(x)\} dx = 2 \int_1^5 \{f(x) - x\} dx$$

$$= 2 \left[\int_1^5 f(x) dx - \int_1^5 x dx \right]$$

$$= 2 \int_1^5 f(x) dx - 2 \int_1^5 x dx$$

$$= 2 \times 15 - 2 \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^5$$

$$= 30 - 24 = 6$$



답 4

13

함수 $f(x) = x^3 + 1$ 의 역함수가 $g(x)$ 이

므로 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = g(x)$ 의 그

래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

즉, 오른쪽 그림에서

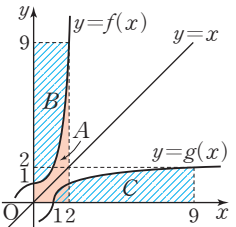
(B 의 넓이) = (C 의 넓이)이므로

$$\int_0^2 f(x) dx + \int_1^9 g(x) dx$$

$$= (A \text{의 넓이}) + (C \text{의 넓이})$$

$$= (A \text{의 넓이}) + (B \text{의 넓이})$$

$$= 2 \times 9 = 18$$



답 18

14

문제 접근하기

두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점을 이용하여 $f(x)$ 의

식을 구한 후, 두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대

하여 대칭임을 이용하여 $A - B$ 를 구한다.

함수 $f(x) = ax^2 + b$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $y = f(x)$ 의 그래프와

$y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 의 교점의 좌표가 $(1, 1), (2, 2)$ 이므로

$$f(1) = 1 \text{에서 } a + b = 1$$

$$f(2) = 2 \text{에서 } 4a + b = 2$$

$$\text{위 두 식을 연립하여 풀면 } a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{2}{3}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$$

두 부분의 넓이 A, B 는 각각 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로

$$\begin{aligned} A-B &= 2 \int_0^1 \{f(x)-x\} dx - 2 \int_1^2 \{x-f(x)\} dx \\ &= 2 \int_0^1 \{f(x)-x\} dx + 2 \int_1^2 \{f(x)-x\} dx \\ &= 2 \int_0^2 \{f(x)-x\} dx \\ &= 2 \int_0^2 \left\{ \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3} \right) - x \right\} dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x \right]_0^2 \\ &= 2 \times \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

답 ④

15

시각 $t=a$ 에서 점 P의 위치를 $P(a)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} P(a) &= \int_0^a (3t^2 + 6t - 6) dt \\ &= \left[t^3 + 3t^2 - 6t \right]_0^a \\ &= a^3 + 3a^2 - 6a \end{aligned}$$

시각 $t=a$ 에서 점 Q의 위치를 $Q(a)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} Q(a) &= \int_0^a (10t - 6) dt \\ &= \left[5t^2 - 6t \right]_0^a \\ &= 5a^2 - 6a \end{aligned}$$

두 점 P, Q가 출발 후 $t=a$ 에서 다시 만나면

$$\begin{aligned} P(a) &= Q(a) \text{ 이므로} \\ a^3 + 3a^2 - 6a &= 5a^2 - 6a \\ a^3 - 2a^2 &= 0, \quad a^2(a-2) = 0 \\ \therefore a &= 2 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

답 ③

16

시각 $t=6$ 에서 점 P의 위치는 0이므로

$$\begin{aligned} \int_0^6 v(t) dt &= 0 \\ \int_0^3 (-t^2) dt + \int_3^6 \{a(t-3) - 9\} dt &= 0 \\ \left[-\frac{1}{3}t^3 \right]_0^3 + \left[\frac{1}{2}at^2 - 3at - 9t \right]_3^6 &= 0 \\ -9 + \left(\frac{9}{2}a - 27 \right) &= 0, \quad \frac{9}{2}a = 36 \\ \therefore a &= 8 \end{aligned}$$

답 8

17

ㄱ. 시각 $t=4$ 의 좌우에서 속도는 모두 양이고, 시각 $t=6$ 의 좌우에서 처음으로 속도가 양에서 음으로 바뀌므로 점 P가 처음으로 운동 방향을 바꾸는 것은 시각 $t=6$ 일 때이다. (거짓)

ㄴ. 점 P가 처음 출발할 때의 위치는 원점인 0이고, 시각 $t=6$ 에서의 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^6 v(t) dt = \frac{1}{2} \times (2+6) \times 2 = 8$$

이므로 원점에 있지 않다.

즉, 시각 $t=6$ 일 때 점 P는 처음 출발한 위치에 있지 않다.

(거짓)

ㄷ. 점 P가 시각 $t=0$ 에서 시각 $t=9$ 까지 실제로 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^9 |v(t)| dt &= \int_0^6 v(t) dt + \int_6^9 \{-v(t)\} dt \\ &= \frac{1}{2} \times (2+6) \times 2 + \frac{1}{2} \times (3+1) \times 2 \\ &= 8 + 4 = 12 \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ②

18

원점을 출발한 점 P의 시각 $t=6$ 에서의 위치가 4이므로

$$\begin{aligned} \int_0^6 v(t) dt &= 4 \\ \int_0^4 v(t) dt + \int_4^6 v(t) dt &= 4 \\ 6 + \int_4^6 v(t) dt &= 4 \\ \therefore \int_4^6 v(t) dt &= -2 \end{aligned}$$

따라서 시각 $t=6$ 에서 시각 $t=8$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_6^8 |v(t)| dt &= \int_4^8 |v(t)| dt - \int_4^6 |v(t)| dt \\ &= 6 - 2 = 4 \end{aligned}$$

답 4