

풍산짜 라이트유형

대수

| 정답과 풀이 |

01

지수

기초를 다지는 유형

본문 009쪽

001

- (1) 27의 세제곱근을
- x
- 라고 하면
- $x^3=27$

$$x^3-27=0, (x-3)(x^2+3x+9)=0$$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x=\frac{-3\pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 27의 세제곱근은 $3, \frac{-3+3\sqrt{3}i}{2}, \frac{-3-3\sqrt{3}i}{2}$ 이다.

- (2) -27의 세제곱근을
- x
- 라고 하면
- $x^3=-27$

$$x^3+27=0, (x+3)(x^2-3x+9)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=\frac{3\pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 -27의 세제곱근은 $-3, \frac{3+3\sqrt{3}i}{2}, \frac{3-3\sqrt{3}i}{2}$ 이다.

- (3) 16의 네제곱근을
- x
- 라고 하면
- $x^4=16$

$$x^4-16=0, (x^2+4)(x^2-4)=0$$

$$(x^2+4)(x+2)(x-2)=0$$

$$\therefore x=\pm 2i \text{ 또는 } x=\pm 2$$

따라서 16의 네제곱근은 $2i, -2i, 2, -2$ 이다.

- (4) 4의 네제곱근을
- x
- 라고 하면
- $x^4=4$

$$x^4-4=0, (x^2+2)(x^2-2)=0$$

$$(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$$

$$\therefore x=\pm\sqrt{2}i \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{2}$$

따라서 4의 네제곱근은 $\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ 이다.

$$\text{답 (1) } 3, \frac{-3+3\sqrt{3}i}{2}, \frac{-3-3\sqrt{3}i}{2} \quad (2) -3, \frac{3+3\sqrt{3}i}{2}, \frac{3-3\sqrt{3}i}{2}$$

$$(3) 2i, -2i, 2, -2$$

$$(4) \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

002

- (1) 8의 제곱근을
- x
- 라고 하면
- $x^2=8$

$$\therefore x=\pm 2\sqrt{2}$$

따라서 8의 제곱근 중에서 실수인 것은 $2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}$ 이다.

- (2) -64의 세제곱근을
- x
- 라고 하면
- $x^3=-64$

$$x^3+64=0, (x+4)(x^2-4x+16)=0$$

$$\therefore x=-4 \text{ 또는 } x=2\pm 2\sqrt{3}i$$

따라서 -64의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -4이다.

- (3) 1의 세제곱근을
- x
- 라고 하면
- $x^3=1$

$$x^3-1=0, (x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 1의 세제곱근 중에서 실수인 것은 1이다.

- (4) 25의 네제곱근을
- x
- 라고 하면
- $x^4=25$

$$x^4-25=0, (x^2+5)(x^2-5)=0$$

$$(x^2+5)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})=0$$

$$\therefore x=\pm\sqrt{5}i \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{5}$$

따라서 25의 네제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt{5}, -\sqrt{5}$ 이다.

$$\text{답 (1) } 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2} \quad (2) -4$$

$$(3) 1$$

$$(4) \sqrt{5}, -\sqrt{5}$$

003

-12의 세제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^3=-12$ 의 실근이므로 1개이다.

$$\therefore m=1$$

또, 15의 네제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^4=15$ 의 실근이므로 2개이다.

$$\therefore n=2$$

$$\therefore m+n=1+2=3$$

답 ③

004

양수인 것은 α, β 의 2개이므로

$$a=2 \dots\dots\dots ①$$

음수인 것은 $\gamma, \delta, \epsilon, \varsigma$ 의 4개이므로

$$b=4 \dots\dots\dots ②$$

$$\therefore b-a=4-2=2 \dots\dots\dots ③$$

답 2

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	45 %
② b 의 값을 구할 수 있다.	45 %
③ $b-a$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

참고

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \varsigma$ 는 허수이다.

005

- (i)
- $n=3$
- 일 때,
- $2n^2-9n=2\times 3^2-9\times 3=-9$

-9의 세제곱근 중에서 실수인 것은 1개이므로

$$f(3)=1$$

- (ii)
- $n=4$
- 일 때,
- $2n^2-9n=2\times 4^2-9\times 4=-4$

-4의 네제곱근 중에서 실수인 것은 없으므로

$$f(4)=0$$

- (iii)
- $n=5$
- 일 때,
- $2n^2-9n=2\times 5^2-9\times 5=5$

5의 다섯제곱근 중에서 실수인 것은 1개이므로

$$f(5)=1$$

- (iv)
- $n=6$
- 일 때,
- $2n^2-9n=2\times 6^2-9\times 6=18$

18의 여섯제곱근 중에서 실수인 것은 2개이므로

$$f(6)=2$$

- (i)~(iv)에서

$$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1+0+1+2=4$$

답 4

006

$$(1) \sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2\times 8}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$$

$$(2) \sqrt[3]{\frac{1}{81}}\times\sqrt[3]{\frac{1}{9}}=\sqrt[3]{\frac{1}{81}\times\frac{1}{9}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^6}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

$$(3) \sqrt[3]{\frac{64}{8}}=\sqrt[3]{\frac{64}{8}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$$

$$(4) \sqrt[4]{\frac{2}{162}}=\sqrt[4]{\frac{2}{162}}=\sqrt[4]{\frac{1}{81}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^4}=\frac{1}{3}$$

$$\text{답 (1) } 2 \quad (2) \frac{1}{9} \quad (3) 2 \quad (4) \frac{1}{3}$$

007

- (1) $(\sqrt[4]{9})^2 = \sqrt[4]{9^2} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$
 (2) $\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{2^8} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$
 (3) $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{9}\right)^9} = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^{18}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$
 (4) $\sqrt[5]{8} \times \sqrt[10]{16} = \sqrt[10]{8^2} \times \sqrt[10]{16} = \sqrt[10]{2^6 \times 2^4} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$

답 (1) 3 (2) 2 (3) $\frac{1}{27}$ (4) 2

|다른 풀이|

- (2) $\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{2^8} = \sqrt{2^2} = 2$
 (4) $\sqrt[5]{8} \times \sqrt[10]{16} = \sqrt[5]{2^3} \times \sqrt[10]{2^4} = \sqrt[5]{2^3 \times 2^2} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

008

$$\sqrt[4]{48} + \sqrt[4]{243} - \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4 \times 3} + \sqrt[4]{3^4 \times 3} - \sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3} + 3\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3} = 4\sqrt[4]{3}$$

$$\therefore a = 4$$

답 4

009

$$(\sqrt[3]{2 \times \sqrt[4]{6}})^4 = \sqrt[3]{(2 \times \sqrt[4]{6})^4} = \sqrt[3]{2^4 \times (\sqrt[4]{6})^4} = \sqrt[3]{16 \times 6} = \sqrt[3]{96}$$

이때 $\sqrt[3]{64} < \sqrt[3]{96} < \sqrt[3]{125}$ 이므로

$$4 < \sqrt[3]{96} < 5$$

따라서 $(\sqrt[3]{2 \times \sqrt[4]{6}})^4$ 보다 작은 자연수 중에서 가장 큰 수는 4이다.

답 ③

010

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a}} \times \frac{\sqrt[4]{a^2}}{\sqrt[5]{a^6}} &= \frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a}} \times \frac{\sqrt[4]{a^2}}{\sqrt[5]{a^6}} = \frac{10\sqrt[5]{a^4}}{20\sqrt[5]{a^6}} \times \frac{4\sqrt[4]{a^2}}{20\sqrt[4]{a^6}} \\ &= \frac{10\sqrt[5]{a^4}}{20\sqrt[5]{a^6}} = \frac{20\sqrt[5]{a^8}}{20\sqrt[5]{a^6}} = \sqrt[5]{a^2} = \sqrt[10]{a} \end{aligned}$$

$$\therefore n = 1$$

답 ①

011

$\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{25}$, $\sqrt[3]{2\sqrt{7}} = \sqrt[3]{\sqrt{28}} = \sqrt[3]{28}$ 이고 $10 < 25 < 28$ 이므로

$$\sqrt[6]{10} < \sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{28}$$

따라서 $M = \sqrt[6]{28}$, $m = \sqrt[6]{10}$ 이므로

$$M^6 - m^6 = 28 - 10 = 18$$

답 18

|다른 풀이|

$A = \sqrt[3]{25}$, $B = \sqrt[3]{10}$, $C = \sqrt[3]{2\sqrt{7}}$ 이라고 하면

$$A^6 = (\sqrt[3]{25})^6 = (\sqrt[6]{25})^6 = 25$$

$$B^6 = (\sqrt[3]{10})^6 = 10$$

$$C^6 = (\sqrt[3]{2\sqrt{7}})^6 = (\sqrt[3]{\sqrt{28}})^6 = (\sqrt[3]{28})^6 = 28$$

$$\therefore B^6 < A^6 < C^6$$

이때 A, B, C 는 양수이므로

$$B < A < C$$

따라서 $M = \sqrt[3]{2\sqrt{7}}$, $m = \sqrt[6]{10}$ 이므로

$$M^6 - m^6 = 28 - 10 = 18$$

012

$$\begin{aligned} A - C &= \sqrt{2} + \sqrt[3]{5} - (\sqrt[4]{3} + \sqrt[3]{5}) \\ &= \sqrt{2} - \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{4} - \sqrt[4]{3} > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore A > C$$

..... ㉠

$$\begin{aligned} B - C &= \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3} - (\sqrt[4]{3} + \sqrt[3]{5}) \\ &= \sqrt[4]{2} - \sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{8} - \sqrt[12]{625} < 0 \end{aligned}$$

$$\therefore B < C$$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 $B < C < A$

답 ④

참고

두 수의 차를 이용하여 실수의 대소를 비교할 수 있다.

→ 실수 a, b 에 대하여

$$a - b > 0 \text{이면 } a > b$$

$$a - b = 0 \text{ 이면 } a = b$$

$$a - b < 0 \text{ 이면 } a < b$$

013

$$(1) 4^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$(2) \left(-\frac{1}{5}\right)^0 = 1$$

$$(3) (a^3 \div a^4)^{-3} = (a^{3-4})^{-3} = (a^{-1})^{-3} = a^3$$

$$(4) (a^{-1})^2 \div (a^2)^{-4} \times a^{-3} = a^{-2} \div a^{-8} \times a^{-3} = a^{-2-(-8)-3} = a^3$$

답 (1) $\frac{1}{16}$ (2) 1 (3) a^3 (4) a^3

014

$$\begin{aligned} (1) (3^{-2})^{-2} \div 3^6 \times 3^{-1} &= 3^4 \div 3^6 \times 3^{-1} \\ &= 3^{4-6-1} = 3^{-3} = \frac{1}{27} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left\{\left(\frac{64}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{2}{3}} &= \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{64}{81}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{81}{64}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{8}{3} \times \frac{81}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3\right\}^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \left(\frac{2^{\sqrt{7}}}{8}\right)^{\sqrt{7}+3} &= \left(\frac{2^{\sqrt{7}}}{2^3}\right)^{\sqrt{7}+3} = (2^{\sqrt{7}-3})^{\sqrt{7}+3} = 2^{(\sqrt{7}-3)(\sqrt{7}+3)} \\ &= 2^{7-9} = 2^{-2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{1}{27}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{1}{4}$

015

$$\begin{aligned} 9 \times 4^{-\frac{1}{6}} \times (3^{\sqrt{2}} \times 2^{\frac{2\sqrt{2}}{3}})^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} &= 3^2 \times 2^{-\frac{1}{3}} \times \{3^{\sqrt{2} \times (-\frac{\sqrt{2}}{2})} \times 2^{\frac{2\sqrt{2}}{3} \times (-\frac{\sqrt{2}}{2})}\} \\ &= 3^2 \times 2^{-\frac{1}{3}} \times 3^{-1} \times 2^{-\frac{2}{3}} \\ &= 3^{2-1} \times 2^{-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}} \\ &= 3 \times 2^{-1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{2}$

016

$$12^{\frac{2}{3}} \div 18^{-\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{8}{9}} = (2^2 \times 3)^{\frac{2}{3}} \div (2 \times 3^2)^{-\frac{1}{2}} \times (2^3)^{\frac{8}{9}}$$

$$= (2^{\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}) \times (2^{\frac{1}{2}} \times 3) \times 2^{\frac{8}{3}}$$

$$= 2^{\frac{4}{3} + \frac{1}{2} + \frac{8}{3}} \times 3^{\frac{2}{3} + 1} = 2^{\frac{9}{2}} \times 3^{\frac{5}{3}}$$

따라서 $a = \frac{9}{2}$, $\beta = \frac{5}{3}$ 이므로

$$a\beta = \frac{9}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{2}$$

답 15/2

017

$$\neg. 36^{-0.25} = (6^2)^{-\frac{1}{4}} = 6^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ (참)}$$

$$\neg. \left(\frac{9^{\sqrt{2}}}{27}\right)^{2\sqrt{2}+3} = \left(\frac{3^{2\sqrt{2}}}{3^3}\right)^{2\sqrt{2}+3} = (3^{2\sqrt{2}-3})^{2\sqrt{2}+3} = 3^{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)}$$

$$= 3^{-1} = \frac{1}{3} \text{ (참)}$$

$$\neg. (\sqrt{5})^{5\sqrt{5}} = \{(\sqrt{5})^5\}^{\sqrt{5}} = (25\sqrt{5})^{\sqrt{5}} \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ③

018

$$\frac{27^{10}}{27^{10} - 27^{-10}} + \frac{9^{-15}}{9^{-15} - 9^{15}} = \frac{(3^3)^{10}}{(3^3)^{10} - (3^3)^{-10}} + \frac{(3^2)^{-15}}{(3^2)^{-15} - (3^2)^{15}}$$

$$= \frac{3^{30}}{3^{30} - 3^{-30}} + \frac{3^{-30}}{3^{-30} - 3^{30}}$$

$$= \frac{3^{60}}{3^{60} - 1} + \frac{1}{1 - 3^{60}} \rightarrow \text{두 항의 분자와 분모에 각각 } 3^{60} \text{을 곱한다.}$$

$$= \frac{3^{60} - 1}{3^{60} - 1} = 1$$

답 ③

019

$$f(x) = \frac{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}{x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}+x^{-5}+x^{-6}+x^{-7}}$$

$$= \frac{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^7}}$$

$$= \frac{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}{\frac{1}{x^7}(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x^7}} = x^7$$

$$\therefore f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^7 = 8\sqrt{2}$$

답 ④

020

$$\left(\frac{1}{512}\right)^{\frac{1}{n}} = (2^{-9})^{\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{9}{n}} \dots\dots\dots ①$$

즉, $2^{-\frac{9}{n}}$ 이 자연수가 되려면 $-n$ 은 9의 양의 약수이어야 한다.

②

9의 양의 약수는 1, 3, 9이므로 주어진 조건을 만족시키는 n 은 -1, -3, -9의 3개이다. $\dots\dots\dots ③$

답 3

채점 기준	비율
① 주어진 식을 밑이 자연수가 되도록 바꿀 수 있다.	35 %
② 주어진 식이 자연수가 되도록 하는 $-n$ 의 조건을 찾을 수 있다.	35 %
③ 조건을 만족시키는 n 을 찾고, 그 개수를 구할 수 있다.	30 %

021

$$\sqrt[4]{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt[8]{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{\sqrt{a}}$$

$$= \sqrt[8]{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt[6]{a} \times \sqrt[12]{a}$$

$$= a^{\frac{1}{8}} \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{6}} \times a^{\frac{1}{12}}$$

$$= a^{\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}}$$

$$= a^{\frac{3+12+4+2}{24}} = a^{\frac{7}{8}}$$

답 ④

022

$$\sqrt[4]{a\sqrt{a^k}} = \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{\sqrt{a^k}} = \sqrt[4]{a} \times \sqrt[8]{a^k}$$

$$= a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{k}{8}} = a^{\frac{1}{4} + \frac{k}{8}} = a^{\frac{2+k}{8}}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{5}{3}} = (a^{-1})^{\frac{5}{3}} = a^{-\frac{5}{3}}$$

$$\text{이므로 } a^{\frac{2+k}{8}} = a^{-\frac{5}{3}}$$

$$\text{즉, } \frac{2+k}{8} = -\frac{5}{3} \text{ 이므로}$$

$$3(2+k) = -40, 3k = -46$$

$$\therefore k = -\frac{46}{3}$$

답 ①

023

$$\frac{\sqrt{4\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3}}}{\sqrt[12]{12}} = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{\sqrt{2}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[12]{12}} = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt[12]{3}}{\sqrt[12]{2^2 \times 3}}$$

$$= \frac{4^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{12}}}{(2^2 \times 3)^{\frac{1}{12}}} = \frac{2 \times 2^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{12}}}{2^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{12}}}$$

$$= 2^{1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = 2^{\frac{13}{12}}$$

$$= (2^{13})^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2^{13}}$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 양수 a 의 값은 2^{13} 이다.

답 ③

024

$$A = \sqrt[4]{\sqrt[3]{32}} \times \sqrt[6]{4} = \sqrt[12]{32} \times \sqrt[6]{4} = \sqrt[12]{2^5} \times \sqrt[6]{2}$$

$$= 2^{\frac{5}{12}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{12} + \frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{4}}$$

즉, $A^n = (2^{\frac{3}{4}})^n = 2^{\frac{3}{4}n}$ 이 정수가 되려면 n 은 4의 배수이어야 한다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 4이다.

답 ②

025

$$(\sqrt[n]{a})^3 = a^{\frac{3}{n}}$$

$\dots\dots\dots ①$

㉠에 $a=4$ 를 대입하면 $4^{\frac{3}{n}}=2^{\frac{6}{n}}$

이 값이 자연수가 되려면 n 이 2 이상인 6의 약수이어야 하므로
 $n=2, 3, 6 \quad \therefore f(4)=6$

㉡에 $a=27$ 을 대입하면 $27^{\frac{3}{n}}=3^{\frac{9}{n}}$

이 값이 자연수가 되려면 n 이 2 이상인 9의 약수이어야 하므로
 $n=3, 9 \quad \therefore f(27)=9$
 $\therefore f(4)+f(27)=6+9=15$

답 ③

026

$a=2^{\frac{1}{2}}$ 에서 $2=a^2$

$b=3^{\frac{2}{3}}$ 에서 $3=b^{\frac{3}{2}}$

이때 $648=2^3 \times 3^4$ 이므로

$a^m b^n = 648 = 2^3 \times 3^4$
 $= (a^2)^3 \times (b^{\frac{3}{2}})^4 = a^6 b^6$

따라서 $m=6, n=6$ 이므로

$m+n=6+6=12$

답 ②

027

$a^2=\sqrt[4]{3}$ 에서 $a^2=3^{\frac{1}{4}} \quad \therefore a=3^{\frac{1}{8}}$

$b^3=\sqrt[3]{4}$ 에서 $b^3=4^{\frac{1}{3}} \quad \therefore b=4^{\frac{1}{9}}$

$\therefore (ab)^9 = a^9 b^9 = (3^{\frac{1}{8}})^9 \times (4^{\frac{1}{9}})^9 = 3^{\frac{9}{8}} \times 4$

답 ④

028

$28^a \div 28^b = 81 \div 9 = 9$ 이므로 $a-b$ 가 나오도록 식을 변형한다.

$28^{a-b} = 9$

$\therefore 9^{\frac{1}{a-b}} = (28^{a-b})^{\frac{1}{a-b}} = 28$

답 ①

029

$3^{a-1}=2$ 에서 $\frac{3^a}{3}=2 \quad \therefore 3^a=6$

$6^{2b}=5$ 에서 $(3^a)^{2b}=5 \quad \therefore 3^{2ab}=5$

$\therefore 5^{\frac{1}{ab}} = (3^{2ab})^{\frac{1}{ab}} = 3^2 = 9$

답 9

030

$31^x=8$ 에서 $31^x=2^3 \quad \therefore 31=2^{\frac{3}{x}}$

$496^y=32$ 에서 $496^y=2^5 \quad \therefore 496=2^{\frac{5}{y}}$

이때 $2^{\frac{5}{y} \cdot \frac{3}{x}} = \frac{2^{\frac{5}{y}}}{2^{\frac{3}{x}}} = \frac{496}{31} = 16 = 2^4$ 이므로

$\frac{5}{y} - \frac{3}{x} = 4$

답 ③

031

$7^{\frac{1}{2}}=A, 3^{\frac{1}{2}}=B$ 로 놓으면

(주어진 식) $= (A+B)^2 + (A-B)^2$
 $= (A^2+2AB+B^2) + (A^2-2AB+B^2)$
 $= 2(A^2+B^2)$
 $= 2\{(7^{\frac{1}{2}})^2 + (3^{\frac{1}{2}})^2\}$
 $= 2(7+3) = 20$

답 ④

032

$2^{\frac{1}{3}}=A, 3^{\frac{1}{3}}=B$ 로 놓으면

$4^{\frac{1}{3}}=A^2, 9^{\frac{1}{3}}=B^2$ 이므로

(주어진 식) $= (A+B)(A^2-AB+B^2)$
 $= A^3+B^3$
 $= (2^{\frac{1}{3}})^3 + (3^{\frac{1}{3}})^3$
 $= 2+3=5$

답 5

품셈 개념 CHECK

곱셈 공식_高 公通 수학 1

(1) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

(2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

033

앞에서부터 두 항씩 차례대로 통분하여 곱셈 공식

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 을 연쇄적으로 적용하면

$$\begin{aligned} & \frac{2}{1-5^{\frac{1}{8}}} + \frac{2}{1+5^{\frac{1}{8}}} + \frac{4}{1+5^{\frac{1}{4}}} + \frac{8}{1+5^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{4}{(1-5^{\frac{1}{8}})(1+5^{\frac{1}{8}})} + \frac{4}{1+5^{\frac{1}{4}}} + \frac{8}{1+5^{\frac{1}{2}}} \rightarrow \frac{2(1+5^{\frac{1}{8}})+2(1-5^{\frac{1}{8}})}{(1-5^{\frac{1}{8}})(1+5^{\frac{1}{8}})} \\ &= \frac{4}{1-5^{\frac{1}{4}}} + \frac{4}{1+5^{\frac{1}{4}}} + \frac{8}{1+5^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{8}{(1-5^{\frac{1}{4}})(1+5^{\frac{1}{4}})} + \frac{8}{1+5^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{8}{1-5^{\frac{1}{2}}} + \frac{8}{1+5^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{16}{(1-5^{\frac{1}{2}})(1+5^{\frac{1}{2}})} \\ &= \frac{16}{1-5} = -4 \end{aligned}$$

답 ②

034

$$\begin{aligned} \{4^{\sqrt{3}}+(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\} \{4^{\sqrt{3}}-(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\} &= (4^{\sqrt{3}})^2 - \{(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\}^2 \\ &= 4^{2\sqrt{3}} - \{(\sqrt{2})^2\}^{\sqrt{3}} \\ &= 2^{4\sqrt{3}} - 2^{\sqrt{3}} \\ &= 2^{\sqrt{3}} \times 2^{3\sqrt{3}} - 2^{\sqrt{3}} \\ &= 2^{\sqrt{3}}(2^{3\sqrt{3}}-1) \end{aligned}$$

답 ③

043

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{3})^{\frac{1}{x}} &= a \text{에서 } a^x = \sqrt{3} \dots\dots\dots ① \\
 \therefore \frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} &= \frac{a^x(a^x + a^{-x})}{a^x(a^x - a^{-x})} = \frac{a^{2x} + 1}{a^{2x} - 1} \dots\dots\dots ② \\
 &= \frac{(\sqrt{3})^2 + 1}{(\sqrt{3})^2 - 1} = 2 \dots\dots\dots ③
 \end{aligned}$$

답 2

채점 기준	비율
① a^x 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② 주어진 식의 분모와 분자에 a^x 를 곱하여 정리할 수 있다.	50 %
③ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

|다른 풀이|

주어진 식에 $a^x = \sqrt{3}$ 을 대입하면

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}} &= \frac{\frac{3+1}{\sqrt{3}}}{\frac{3-1}{\sqrt{3}}} = \frac{4}{2} = 2
 \end{aligned}$$

044

$$\begin{aligned}
 a^{-2x} &= 3 \text{에서 } a^{2x} = \frac{1}{3} \\
 \therefore \frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^{3x} + a^{-3x}} &= \frac{a^x(a^{3x} - a^{-3x})}{a^x(a^{3x} + a^{-3x})} = \frac{a^{4x} - a^{-2x}}{a^{4x} + a^{-2x}} \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 3}{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3} = -\frac{13}{14}
 \end{aligned}$$

답 ④

045

$$\begin{aligned}
 \frac{a^x - 2a^{-x}}{a^x + a^{-x}} &= \frac{a^x(a^x - 2a^{-x})}{a^x(a^x + a^{-x})} = \frac{a^{2x} - 2}{a^{2x} + 1} \\
 \text{즉, } \frac{a^{2x} - 2}{a^{2x} + 1} &= \frac{1}{4} \text{이므로} \\
 4(a^{2x} - 2) &= a^{2x} + 1, 3a^{2x} = 9 \\
 \therefore a^{2x} &= 3 \\
 \therefore a^{2x} + a^{-2x} &= 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}
 \end{aligned}$$

답 ③

실력을 높이는 연습 문제

본문 018쪽

01

집합 X 의 원소 중에서 양수의 개수를 p , 음수의 개수를 q 라고 하자. 양수의 네제곱근 중 실수인 것은 2개, 0의 네제곱근 중 실수인 것은 1개, 음수의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.
 이때 $n(A) = 9$ 이므로 $0 \in X$
 $n(A) = 2p + 1 = 9$ 에서 $p = 4$
 실수의 세제곱근 중 실수인 것은 항상 1개이므로
 $n(B) = p + q + 1 = 7$ 에서 $q = 2$
 따라서 집합 X 의 원소는 4개의 양수, 0, 2개의 음수이어야 한다.

이때 집합 X 의 모든 원소의 합은

$$X = \{-2, -1, 0, 2, 3, 4, 5\}$$

일 때 최대이므로 구하는 최댓값은

$$-2 + (-1) + 0 + 2 + 3 + 4 + 5 = 11$$

답 11

02

3, 2, 4의 최소공배수가 12이므로

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{ab^2} \times \sqrt{a^2b} \div \sqrt[4]{b^2} &= \sqrt[12]{(ab^2)^4} \times \sqrt[12]{(a^2b)^6} \div \sqrt[12]{(b^2)^3} \\
 &= \frac{\sqrt[12]{a^4b^8} \times \sqrt[12]{a^{12}b^6}}{\sqrt[12]{b^6}} \\
 &= \sqrt[12]{\frac{a^4b^8 \times a^{12}b^6}{b^6}} \\
 &= \sqrt[12]{a^{16}b^8} = \sqrt[3]{a^4b^2}
 \end{aligned}$$

답 ③

|다른 풀이|

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{ab^2} \times \sqrt{a^2b} \div \sqrt[4]{b^2} &= a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} \times ab^{\frac{1}{2}} \div b^{\frac{1}{2}} \\
 &= a^{\frac{1}{3}+1}b^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \\
 &= a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}} = (a^4b^2)^{\frac{1}{3}} \\
 &= \sqrt[3]{a^4b^2}
 \end{aligned}$$

03

$$\begin{aligned}
 \sqrt[6]{\frac{12\sqrt{16}}{\sqrt{64}}} &= \frac{72\sqrt{16}}{36\sqrt{64}} = \frac{72\sqrt{2^4}}{36\sqrt{2^6}} = \frac{18\sqrt{2}}{18\sqrt{2^3}} \\
 &= \frac{18\sqrt{2}}{18\sqrt{2^3}} = \sqrt[18]{\frac{2}{2^3}} = \sqrt[18]{\frac{1}{4}} = \sqrt[18]{2^{-2}}
 \end{aligned}$$

$$\therefore k = -2$$

답 ①

04

$3 = \sqrt[3]{27}$ 이고 $\sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{36}$ 이므로

$$3 < \sqrt[3]{36}$$

$$\therefore 3 * \sqrt[3]{36} = (\sqrt[3]{36})^3 = 36$$

또, $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고 $36 > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$36 > 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore (3 * \sqrt[3]{36}) * 2^{-\frac{1}{2}} &= 36 * \frac{\sqrt{2}}{2} = 36^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
 &= (36^{\frac{1}{2}})^{\sqrt{2}} = 6^{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

답 ③

05

문제 접근하기

$x^3 = 64^{\frac{1}{7}}$ 이므로 이 식을 이용하여 x 의 값을 구한다. 또, x^n 이 1000 이하의 자연수이어야 하므로 x^n 이 '자연수가 되는' 조건과 '1000 이하의 수가 되는' 조건을 둘 다 확인해야 한다.

x 는 $64^{\frac{1}{7}}$ 의 세제곱근이므로 $x^3 = 64^{\frac{1}{7}}$

$$x^3 = (2^6)^{\frac{1}{7}}, x^3 = 2^{\frac{6}{7}} \quad \therefore x = 2^{\frac{2}{7}}$$

즉, $x^n = 2^{\frac{2}{7}n}$ 이 자연수가 되려면 n 은 0 또는 7의 양의 배수이어야 한다.

이때 $n=28$ 이면 $x^{28} = 2^8 = 256$, $n=35$ 이면 $x^{35} = 2^{10} = 1024$ 이므로 x^n 이 1000 이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n 은 28 이하의 7의 배수이다.

따라서 구하는 자연수 n 은 7, 14, 21, 28의 4개이다.

답 ④

06

$$\begin{aligned} 2^{ab+a+b} &= (2^a)^b \times 2^a \times 2^b = 3^b \times 3 \times 2^b \\ &= (3^b \times 2^b) \times 3 = (3 \times 2)^b \times 3 \\ &= 6^b \times 3 = 5 \times 3 = 15 \end{aligned}$$

답 ①

07

$$a = 4^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}}, b = 8^{\frac{1}{12}} = 2^{\frac{1}{4}} \text{이므로}$$

$$(\sqrt[11]{a^2b})^n = (a^2b)^{\frac{n}{11}} = (2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{4}})^{\frac{n}{11}} = (2^{\frac{11}{12}})^{\frac{n}{11}} = 2^{\frac{n}{12}}$$

즉, $2^{\frac{n}{12}}$ 이 자연수가 되려면 n 은 0 또는 12의 양의 배수이어야 한다.

이때 n 은 100 이하의 자연수이므로 12, 24, 36, ..., 96의 8개이다.

답 ⑤

08

$$\sqrt[3]{15} = A, \sqrt[3]{7} = B \text{로 놓으면}$$

$$\sqrt[3]{225} = \sqrt[3]{15^2} = (\sqrt[3]{15})^2 = A^2$$

$$\sqrt[3]{105} = \sqrt[3]{15 \times 7} = \sqrt[3]{15} \times \sqrt[3]{7} = AB$$

$$\sqrt[3]{49} = \sqrt[3]{7^2} = (\sqrt[3]{7})^2 = B^2$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = (A+B)(A^2-AB+B^2)$$

$$= A^3 + B^3$$

$$= (\sqrt[3]{15})^3 + (\sqrt[3]{7})^3$$

$$= 15 + 7 = 22$$

답 ④

09

$$\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 3 \text{에서 } x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} = 3 \text{이므로 양변을 제곱하면}$$

$$(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}})^2 = x^{\frac{2}{3}} + 2 + x^{-\frac{2}{3}} = 9 \quad \therefore x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{2}{3}} = 7$$

또, 위 식의 양변을 제곱하면

$$(x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{2}{3}})^2 = x^{\frac{4}{3}} + 2 + x^{-\frac{4}{3}} = 49 \quad \therefore x^{\frac{4}{3}} + x^{-\frac{4}{3}} = 47$$

$$(x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}})^2 = x^{\frac{4}{3}} - 2 + x^{-\frac{4}{3}} = 47 - 2 = 45 \text{이므로}$$

$$x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}} = 3\sqrt{5} \quad (\because x > 1 \text{에서 } x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}} > 0)$$

$$\therefore \sqrt[3]{x^4} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = x^{\frac{4}{3}} - x^{-\frac{4}{3}} = (x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{2}{3}})(x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}})$$

$$= 7 \times 3\sqrt{5} = 21\sqrt{5}$$

답 $21\sqrt{5}$

10

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = 10$$

..... ⑦

008 정답과 풀이

한편,

$$\frac{\alpha^{-2} - \beta^{-2}}{\alpha^{-1} - \beta^{-1}} = \frac{\alpha^2 \beta^2 (\alpha^{-2} - \beta^{-2})}{\alpha^2 \beta^2 (\alpha^{-1} - \beta^{-1})} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha \beta^2 - \alpha^2 \beta}$$

$$= \frac{(\beta + \alpha)(\beta - \alpha)}{\alpha \beta (\beta - \alpha)} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha \beta} \quad (\because \beta - \alpha \neq 0)$$

$\rightarrow \alpha, \beta$ 는 서로 다른 두 실근이므로
 $\alpha \neq \beta \quad \therefore \beta - \alpha \neq 0$

$$\text{이므로 } \frac{\alpha + \beta}{\alpha \beta} = \frac{2}{5}$$

위의 식에 ①을 대입하면

$$\frac{-a}{10} = \frac{2}{5} \quad \therefore a = -4$$

답 ④

풍샘 개념 CHECK

이차방정식의 근과 계수의 관계 高 公 通 수 학 1

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 실근을 α, β 라고 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

11

$$f(2\alpha) = \frac{3^{2\alpha} - 3^{-2\alpha}}{3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha}} = \frac{3}{5} \text{에서}$$

$$5(3^{2\alpha} - 3^{-2\alpha}) = 3(3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha}), 2 \times 3^{2\alpha} = 8 \times 3^{-2\alpha}$$

$$(3^{2\alpha})^2 = 4 \quad \therefore 3^{2\alpha} = 2 \quad (\because 3^{2\alpha} > 0)$$

$$f(2\beta) = \frac{3^{2\beta} - 3^{-2\beta}}{3^{2\beta} + 3^{-2\beta}} = \frac{4}{5} \text{에서}$$

$$5(3^{2\beta} - 3^{-2\beta}) = 4(3^{2\beta} + 3^{-2\beta}), 3^{2\beta} = 9 \times 3^{-2\beta}$$

$$(3^{2\beta})^2 = 9 \quad \therefore 3^{2\beta} = 3 \quad (\because 3^{2\beta} > 0)$$

$$\therefore f(\alpha + \beta) = \frac{3^{\alpha + \beta} - 3^{-(\alpha + \beta)}}{3^{\alpha + \beta} + 3^{-(\alpha + \beta)}} = \frac{3^{\alpha + \beta} \{3^{\alpha + \beta} - 3^{-(\alpha + \beta)}\}}{3^{\alpha + \beta} \{3^{\alpha + \beta} + 3^{-(\alpha + \beta)}\}}$$

$$= \frac{3^{2(\alpha + \beta)} - 1}{3^{2(\alpha + \beta)} + 1} = \frac{3^{2\alpha} \times 3^{2\beta} - 1}{3^{2\alpha} \times 3^{2\beta} + 1}$$

$$= \frac{2 \times 3 - 1}{2 \times 3 + 1} = \frac{5}{7}$$

답 $\frac{5}{7}$

12

문제 접근하기

주어진 조건이 어떤 문자에 대입되는 숫자인지 파악한다. 4년, 10년은 $t=4, t=10$ 으로 나타낼 수 있고, 처음 물질의 양은 m_0 , 4년 후의 물질의 양은 $\frac{1}{4}m_0$ 과 같이 나타낼 수 있다.

4년 후 이 방사능 물질의 양은 $\frac{1}{4}m_0$ 이므로

$$\frac{1}{4}m_0 = m_0 \times a^{-4} \quad \therefore a^{-4} = \frac{1}{4}$$

따라서 10년 후의 이 방사능 물질의 양 m_{10} 은

$$m_{10} = m_0 \times a^{-10} = m_0 \times (a^{-4})^{\frac{5}{2}} = m_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{32}m_0$$

$$\therefore k = \frac{1}{32}$$

답 ③

02 로그

기본을 다지는 유형

본문 021쪽

001

(1) $\log_2 x = 3$ 에서 $x = 2^3 = 8$

(2) $\log_9 x = \frac{1}{2}$ 에서 $x = 9^{\frac{1}{2}} = 3$

(3) $\log_x 32 = 5$ 에서 $x^5 = 32$

양변에 $\frac{1}{5}$ 제곱을 하면 $(x^5)^{\frac{1}{5}} = 32^{\frac{1}{5}}$

$\therefore x = (2^5)^{\frac{1}{5}} = 2$

(4) $\log_x 27 = -3$ 에서 $x^{-3} = 27$

양변에 $-\frac{1}{3}$ 제곱을 하면 $(x^{-3})^{-\frac{1}{3}} = 27^{-\frac{1}{3}}$

$\therefore x = (3^3)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

답 (1) 8 (2) 3 (3) 2 (4) $\frac{1}{3}$

002

$\log_{\sqrt{2}} a = 6$ 에서 $a = (\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8$

$\log_{\frac{1}{4}} 16 = b$ 에서 $16 = \left(\frac{1}{4}\right)^b$

$4^2 = 4^{-b} \therefore b = -2$

따라서 $b^6 = (-2)^6 = 64$ 이므로

$\log_a b^6 = \log_8 64$

이때 $\log_8 64 = k$ 로 놓으면

$8^k = 64 = 8^2 \therefore k = 2$

답 ③

003

$a^{\frac{1}{2}} = 8$ 의 양변을 제곱하면

$(a^{\frac{1}{2}})^2 = 8^2 = (2^3)^2 = 2^6 \therefore a = 2^6$

$\therefore \log_2 a = 6$

답 6

004

$\log_2 \{\log_3 (\log_4 x)\} = 0$ 에서

$\log_3 (\log_4 x) = 2^0 = 1 \rightarrow \log_3 (\log_4 x) = A$ 로 놓으면
 $\log_2 A = 0$ 에서 $A = 2^0$ 으로 생각할 수 있다.

또, $\log_3 (\log_4 x) = 1$ 에서

$\log_4 x = 3^1 = 3 \therefore x = 4^3 = 64$

답 ②

005

$\log_2 (5 + \log_3 x) = 5$ 에서

$5 + \log_3 x = 2^5$

$\therefore \log_3 x = 32 - 5 = 27$

$\log_3 x = 27$ 에서 $x = 3^{27}$

따라서 $a = 3, b = 27$ 이므로

$a + b = 3 + 27 = 30$

답 ⑤

006

밑의 조건에 의하여 $x - 9 > 0, x - 9 \neq 1$

$x > 9, x \neq 10$

$\therefore 9 < x < 10$ 또는 $x > 10$

답 ④

007

밑의 조건에 의하여 $x + 4 > 0, x + 4 \neq 1$

$x > -4, x \neq -3$

$\therefore -4 < x < -3$ 또는 $x > -3$ ㉠

진수의 조건에 의하여 $-x^2 - 6x + 7 > 0$

$x^2 + 6x - 7 < 0, (x + 7)(x - 1) < 0$

$\therefore -7 < x < 1$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-4 < x < -3$ 또는 $-3 < x < 1$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0$ 의 3개이다.

답 ③

008

밑의 조건에 의하여

$|x - 3| > 0, |x - 3| \neq 1$

$\therefore x \neq 2, x \neq 3, x \neq 4$ ㉠

진수의 조건에 의하여

$12 + 4x - x^2 > 0, x^2 - 4x - 12 < 0$

$(x + 2)(x - 6) < 0 \therefore -2 < x < 6$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-2 < x < 2$ 또는 $2 < x < 3$ 또는 $3 < x < 4$ 또는 $4 < x < 6$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x 는 $-1, 0, 1, 5$ 이므로 모든 정수 x 의 값의 합은

$-1 + 0 + 1 + 5 = 5$ ③

답 5

채점 기준	비율
① 밑의 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
② 진수의 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ 주어진 로그가 정의되도록 하는 정수 x 를 구하고, 그 합을 구할 수 있다.	20 %

009

ㄱ. 진수 x^4 이 양수이므로 로그가 항상 정의된다.

ㄴ. $x < 0$ 이면 $x^5 < 0$ 이므로 진수의 조건에 의하여 로그가 정의되지 않는다.

ㄷ. 진수 $|x|$ 가 양수이므로 로그가 항상 정의된다.

르, $x = -1$ 또는 $x = 1$ 이면 $|x| = 1$ 이므로 밑의 조건에 의하여 로그가 정의되지 않는다.
따라서 로그가 항상 정의되는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

010

(i) $\log_{x-3}(x-8)^2$ 의 밑의 조건에 의하여

$$x-3 > 0, x-3 \neq 1$$

$$\therefore 3 < x < 4 \text{ 또는 } x > 4$$

진수의 조건에 의하여

$$(x-8)^2 > 0 \quad \therefore x \neq 8$$

①, ④의 공통부분을 구하면

$$3 < x < 4 \text{ 또는 } 4 < x < 8 \text{ 또는 } x > 8$$

(ii) $\log_{6-x}|x-5|$ 의 밑의 조건에 의하여

$$6-x > 0, 6-x \neq 1$$

$$\therefore x < 5 \text{ 또는 } 5 < x < 6$$

진수의 조건에 의하여

$$|x-5| > 0 \quad \therefore x \neq 5$$

㉔, ㉕의 공통부분을 구하면

$$x < 5 \text{ 또는 } 5 < x < 6$$

(i), (ii)에서 주어진 로그가 모두 정의되도록 하는 x 의 값의 범위는

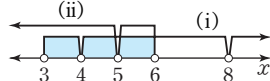
$$3 < x < 4 \text{ 또는 } 4 < x < 5 \text{ 또는 } 5 < x < 6$$

따라서 실수 x 의 값의 범위가 아닌 것은 ①, ⑤이다.

답 ①, ⑤

참고

(i), (ii)를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



011

$$(1) \log_2 7 + \log_2 \frac{8}{7} = \log_2 \left(7 \times \frac{8}{7} \right) = \log_2 8 \\ = \log_2 2^3 = 3$$

$$(2) \log_3 108 - \log_3 12 = \log_3 \frac{108}{12} = \log_3 9 \\ = \log_3 3^2 = 2$$

$$(3) 6 \log_5 \sqrt[3]{10} - 2 \log_5 2 = \log_5 (\sqrt[3]{10})^6 - \log_5 2^2 \\ = \log_5 10^2 - \log_5 2^2 = \log_5 \frac{100}{4} \\ = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$$

$$(4) \log_2 \sqrt{5} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{36^2}{5} - \log_2 9 \\ = \log_2 \sqrt{5} + \log_2 \left(\frac{36^2}{5} \right)^{\frac{1}{2}} - \log_2 9 \\ = \log_2 \sqrt{5} + \log_2 \frac{36}{\sqrt{5}} - \log_2 9 \\ = \log_2 \left(\sqrt{5} \times \frac{36}{\sqrt{5}} \div 9 \right) \\ = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$$

답 (1) 3 (2) 2 (3) 2 (4) 2

012

$$\log_2 4x + 3 \log_2 y - \frac{1}{2} \log_2 z = \log_2 4x + \log_2 y^3 - \log_2 \sqrt{z} \\ = \log_2 \frac{4xy^3}{\sqrt{z}}$$

$$\text{즉, } \log_2 \frac{4xy^3}{\sqrt{z}} = 3 \text{이므로}$$

$$\frac{4xy^3}{\sqrt{z}} = 2^3 \quad \therefore \frac{xy^3}{\sqrt{z}} = 2$$

$$\therefore \frac{x^2 y^6}{z} = \left(\frac{xy^3}{\sqrt{z}} \right)^2 = 2^2 = 4$$

답 ④

013

$$\log_2 32 + \frac{4}{3} \log_2 \frac{1}{2} - 2 \log_2 \sqrt[3]{2} - 5 \\ = \log_2 2^5 + \log_2 2^{-\frac{4}{3}} - \log_2 2^{\frac{2}{3}} - \log_2 2^5 \\ = \log_2 2^{-\frac{4}{3}} - \log_2 2^{\frac{2}{3}} \\ = \log_2 (2^{-\frac{4}{3} \div \frac{2}{3}}) \\ = \log_2 2^{-\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}} = -2 \\ \text{따라서 } \log_3 x = -2 \text{이므로} \\ x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

답 ①

014

$$\log_5 1 + \log_5 2 + \log_5 \frac{3}{2} + \log_5 \frac{4}{3} + \dots + \log_5 \frac{125}{124} \\ \xrightarrow{\text{정리}} \log_5 \frac{2}{1} + \log_5 \frac{3}{2} + \log_5 \frac{4}{3} + \dots + \log_5 \frac{125}{124} \\ = \log_5 \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{125}{124} \right) \\ = \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$$

답 ③

015

$$\log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{x} = \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x^{-1} \\ = \log_2 x - \frac{1}{2} \log_2 x \\ = \frac{1}{2} \log_2 x$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \log_2 x = 8 \text{이므로}$$

$$\log_2 x = 16 \quad \therefore x = 2^{16} \quad \text{①}$$

$$\therefore \log_4 x - \log_2 \frac{1}{x} = \log_4 2^{16} - \log_2 \frac{1}{2^{16}} \\ = \log_4 4^8 - \log_2 2^{-16} \\ = 8 - (-16) = 24 \quad \text{②}$$

답 24

채점 기준	비율
① 주어진 조건을 이용하여 x 의 값을 구할 수 있다.	50 %
② 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	50 %

[다른 풀이]

$$\log_4 x - \log_2 \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 x \\ = \frac{3}{2} \log_2 x = \frac{3}{2} \log_2 2^{16} \\ = \frac{3}{2} \times 16 = 24$$

016

$$\begin{aligned}\log_4 8 + \frac{\log_8 48}{\log_8 4} - \frac{1}{\log_{24} 4} &= \log_4 8 + \log_4 48 - \log_4 24 \\ &= \log_4 \frac{8 \times 48}{24} \\ &= \log_4 16 \\ &= \log_4 4^2 = 2\end{aligned}$$

답 ②

017

$$\begin{aligned}\log_a x &= \frac{1}{2}, \log_b x = \frac{1}{4}, \log_c x = \frac{1}{8} \text{에서} \\ \log_x a &= 2, \log_x b = 4, \log_x c = 8 \\ \therefore \log_{abc} x &= \frac{1}{\log_x abc} \\ &= \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \log_x c} \\ &= \frac{1}{2+4+8} \\ &= \frac{1}{14}\end{aligned}$$

답 ⑤

018

$$\begin{aligned}\log_5 a \times \log_a 2a \times \log_{2a} 4a &= \log_5 a \times \frac{\log_5 2a}{\log_5 a} \times \frac{\log_5 4a}{\log_5 2a} \\ &= \log_5 4a \\ \text{즉, } \log_5 4a &= \log_5 a^2 \text{이므로} \\ 4a &= a^2, a^2 - 4a = 0 \\ a(a-4) &= 0 \quad \therefore a=4 \quad (\because a>0)\end{aligned}$$

답 ③

019

$$\begin{aligned}\log_a \frac{a^3}{b^2} &= \log_a a^3 - \log_a b^2 \\ &= 3 - 2 \log_a b \\ \text{즉, } 3 - 2 \log_a b &= 2 \text{이므로} \\ 2 \log_a b &= 1 \quad \therefore \log_a b = \frac{1}{2} \\ \therefore \log_b a &= \frac{1}{\log_a b} = 2 \\ \therefore \log_a b + 3 \log_b a &= \frac{1}{2} + 3 \times 2 \\ &= \frac{13}{2}\end{aligned}$$

답 ⑤

020

$$\begin{aligned}\text{주어진 식에서 밑을 모두 } x \text{로 바꾸면} \\ \log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 7 &= \log_x a - \log_x 4 \\ \therefore \log_x a &= \log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 7 + \log_x 4 \\ &= \log_x (2 \times 3 \times 7 \times 4) \\ &= \log_x 168 \\ \therefore a &= 168\end{aligned}$$

답 168

021

$$\begin{aligned}(\log_2 \sqrt{3} + \log_{\sqrt{2}} 3) \times \frac{1}{2} \log_{27} 2\sqrt{2} \\ &= (\log_2 3^{\frac{1}{2}} + \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3) \times \frac{1}{2} \log_{3^3} 2^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2} \log_2 3 + 2 \log_2 3 \right) \times \frac{1}{4} \log_3 2 \\ &= \frac{5}{2} \log_2 3 \times \frac{1}{4} \log_3 2 \\ &= \frac{5}{2} \times \frac{1}{4} \times \log_2 3 \times \frac{1}{\log_2 3} = \frac{5}{8}\end{aligned}$$

답 ①

022

$$\begin{aligned}(\log_4 27 + \log_8 3)(\log_9 2 + \log_3 2) \\ &= (\log_{2^2} 3^3 + \log_{2^3} 3)(\log_{3^2} 2 + \log_3 2) \\ &= \left(\frac{3}{2} \log_2 3 + \frac{1}{3} \log_2 3 \right) \left(\frac{1}{2} \log_3 2 + \log_3 2 \right) \\ &= \frac{11}{6} \log_2 3 \times \frac{3}{2} \log_3 2 \\ &= \frac{11}{6} \times \frac{3}{2} \times \log_2 3 \times \frac{1}{\log_2 3} = \frac{11}{4}\end{aligned}$$

답 $\frac{11}{4}$

023

$$\begin{aligned}A &= \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^{-2} \\ &= -2 \times 2 \log_2 2 = -4 \\ B &= -2 \log_8 \frac{1}{8} = -2 \log_{2^3} 2^{-3} \\ &= -2 \times (-3) \times \frac{1}{3} \log_2 2 = 2 \\ C &= 4^{\log_2 3} = 2^{2 \log_2 3} = 2^{\log_2 9} = 9 \\ \therefore A &< B < C\end{aligned}$$

답 ①

024

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{5}} 2 + 2 \log_5 3 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{5}} 9 &= \log_{5^{\frac{1}{2}}} 2 + 2 \log_5 3 - \frac{1}{2} \log_{5^{-1}} 9 \\ &= 2 \log_5 2 + 2 \log_5 3 + \frac{1}{2} \log_5 9 \\ &= \log_5 2^2 + \log_5 3^2 + \log_5 9^{\frac{1}{2}} \\ &= \log_5 (4 \times 9 \times 3) = \log_5 108\end{aligned}$$

이므로

$$(\text{주어진 식}) = 5^{\log_5 108} = 108$$

답 108

025

$$\log_3 4 + \log_3 2 = \log_3 (4 \times 2) = \log_3 2^3 = 3 \log_3 2$$

이므로

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= (3^{3 \log_3 2})^2 + (2^{3 \log_3 2})^{\log_3 3} \\ &= (3^{\log_3 2})^6 + 2^{3 \log_3 2 \times \log_3 3} \\ &= (2^{\log_3 3})^6 + 2^3 = 2^6 + 2^3 \\ &= 64 + 8 = 72\end{aligned}$$

답 ③

026

$$\begin{aligned}\log_2 3 = a \text{에서 } \log_3 2 &= \frac{1}{a} \\ \therefore \log_{20} 90 &= \frac{\log_3 90}{\log_3 20} = \frac{\log_3 (2 \times 3^2 \times 5)}{\log_3 (2^2 \times 5)} \\ &= \frac{\log_3 2 + \log_3 3^2 + \log_3 5}{\log_3 2^2 + \log_3 5} \\ &= \frac{\log_3 2 + 2 \log_3 3 + \log_3 5}{2 \log_3 2 + \log_3 5} \\ &= \frac{\frac{1}{a} + 2 + b}{\frac{2}{a} + b} = \frac{ab + 2a + 1}{ab + 2}\end{aligned}$$

답 ⑤

027

$$\begin{aligned}\log_{10} 18 &= \log_{10} (2 \times 3^2) = \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 \\ \text{이므로} \\ \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 &= a \quad \dots\dots\dots ㉠ \\ \log_{10} 36 &= \log_{10} (2^2 \times 3^2) = 2 \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 \\ \text{이므로} \\ 2 \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 &= b \quad \dots\dots\dots ㉡ \\ ㉠, ㉡ \text{을 연립하여 } \log_{10} 2, \log_{10} 3 \text{을 } a, b \text{로 나타내면} \\ \log_{10} 2 &= b - a, \log_{10} 3 = a - \frac{b}{2} \\ \therefore \log_{10} 12 &= \log_{10} (2^2 \times 3) = 2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3 \\ &= 2(b - a) + a - \frac{b}{2} = -a + \frac{3}{2}b\end{aligned}$$

답 ②

028

$$\begin{aligned}\log_3 15 &= \log_3 (3 \times 5) = \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + \log_3 5 \\ \text{즉, } 1 + \log_3 5 &= a \text{이므로} \\ \log_3 5 &= a - 1 \\ \therefore \log_{75} 45 &= \frac{\log_3 45}{\log_3 75} = \frac{\log_3 (3^2 \times 5)}{\log_3 (3 \times 5^2)} \\ &= \frac{\log_3 3^2 + \log_3 5}{\log_3 3 + \log_3 5^2} = \frac{2 + \log_3 5}{1 + 2 \log_3 5} \\ &= \frac{2 + a - 1}{1 + 2(a - 1)} = \frac{a + 1}{2a - 1}\end{aligned}$$

답 ③

029

$$\begin{aligned}10^x &= 5 \text{에서} \\ x &= \log_{10} 5 \\ \therefore \log_{100} 125 &= \log_{10^2} 5^3 = \frac{3}{2} \log_{10} 5 = \frac{3}{2}x \\ \therefore k &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

답 ④

030

$$\begin{aligned}10^x &= a, 10^y = b \text{에서} \\ x &= \log_{10} a, y = \log_{10} b \quad \dots\dots\dots ①\end{aligned}$$

012 정답과 풀이

$$\begin{aligned}\therefore \log_{\sqrt[3]{a}} b^2 &= \frac{\log_{10} b^2}{\log_{10} \sqrt[3]{a}} = \frac{2 \log_{10} b}{\frac{1}{3} \log_{10} a} \\ &= \frac{2y}{\frac{1}{3}x} = \frac{6y}{x} \quad \dots\dots\dots ②\end{aligned}$$

답 $\frac{6y}{x}$

채점 기준	비율
① x, y 를 밑이 10인 로그로 나타낼 수 있다.	40 %
② 주어진 식을 정리하여 x, y 로 나타낼 수 있다.	60 %

031

$$\begin{aligned}2^a &= 70 \text{에서} \\ a &= \log_2 70 \\ 5^b &= 70 \text{에서} \\ b &= \log_5 70 \\ 7^c &= 70 \text{에서} \\ c &= \log_7 70 \\ \text{밑의 변환에 의하여} \\ \frac{1}{a} &= \log_{70} 2, \frac{1}{b} = \log_{70} 5, \frac{1}{c} = \log_{70} 7 \\ \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \log_{70} 2 + \log_{70} 5 + \log_{70} 7 \\ &= \log_{70} (2 \times 5 \times 7) \\ &= \log_{70} 70 = 1\end{aligned}$$

답 ②

032

$$\begin{aligned}3^a &= \sqrt{7} \text{에서} \\ a &= \log_3 \sqrt{7} = \frac{1}{2} \log_3 7 \\ 7^b &= 9 \text{에서} \\ b &= \log_7 9 = \log_7 3^2 = 2 \log_7 3 \\ \therefore ab &= \frac{1}{2} \log_3 7 \times 2 \log_7 3 \\ &= \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 3} \times \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 7} = 1\end{aligned}$$

답 ⑤

033

$$\begin{aligned}8^a &= 243 \text{에서} \\ a &= \log_8 243 \\ 24^b &= 27 \text{에서} \\ b &= \log_{24} 27 \\ \text{밑의 변환에 의하여} \\ \frac{5}{a} &= 5 \log_{243} 8 = 5 \log_{3^5} 8 = \log_3 8 \\ \frac{3}{b} &= 3 \log_{27} 24 = 3 \log_{3^3} 24 = \log_3 24 \\ \therefore \frac{5}{a} - \frac{3}{b} &= \log_3 8 - \log_3 24 = \log_3 \frac{8}{24} \\ &= \log_3 \frac{1}{3} = -1\end{aligned}$$

답 ①

| 다른 풀이 |

$p^x = q$ 의 양변에 $\frac{1}{x}$ 제곱을 하면 $p = q^{\frac{1}{x}}$ 임을 이용한다.

$$8^a = 243 \text{에서 } 8 = 243^{\frac{1}{a}} = (3^5)^{\frac{1}{a}}$$

$$\therefore 8 = 3^{\frac{5}{a}}$$

..... ㉠

$$24^b = 27 \text{에서 } 24 = 27^{\frac{1}{b}} = (3^3)^{\frac{1}{b}}$$

$$\therefore 24 = 3^{\frac{3}{b}}$$

..... ㉡

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{을 하면 } \frac{8}{24} = \frac{3^{\frac{5}{a}}}{3^{\frac{3}{b}}}$$

$$\frac{1}{3} = 3^{\frac{5}{a} - \frac{3}{b}}, 3^{-1} = 3^{\frac{5}{a} - \frac{3}{b}} \quad \therefore \frac{5}{a} - \frac{3}{b} = -1$$

034

$$2^x = 3^y = \sqrt{6^z} = k \text{로 놓자.}$$

$$2^x = k \text{에서}$$

$$x = \log_2 k$$

$$3^y = k \text{에서}$$

$$y = \log_3 k$$

$$\sqrt{6^z} = k, \text{ 즉 } 6^z = k^2 \text{에서}$$

$$z = \log_6 k^2 = 2 \log_6 k$$

밑의 변환에 의하여

$$\frac{1}{x} = \log_k 2, \frac{1}{y} = \log_k 3, \frac{2}{z} = \log_k 6$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z} = \log_k 2 + \log_k 3 - \log_k 6$$

$$= \log_k \frac{2 \times 3}{6} = \log_k 1 = 0$$

답 ①

035

$$2^x = \log_2 3 \text{에서}$$

$$x = \log_2 (\log_2 3)$$

$$2^y = \log_3 16 \text{에서}$$

$$y = \log_2 (\log_3 16)$$

$$\therefore x + y = \log_2 (\log_2 3) + \log_2 (\log_3 16)$$

$$= \log_2 (\log_2 3 \times \log_3 16)$$

$$= \log_2 (\log_2 3 \times \log_3 2^4)$$

$$= \log_2 (\log_2 3 \times 4 \log_3 2)$$

$$= \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \quad \rightarrow \log_2 3 \times 4 \log_3 2$$

$$= \log_2 3 \times \frac{4}{\log_2 3} = 4$$

답 2

| 다른 풀이 |

$$2^x \times 2^y = \log_2 3 \times \log_3 16 = \log_2 3 \times \log_3 2^4$$

$$= 4 \times \log_2 3 \times \log_3 2 = 4$$

이때 $2^x \times 2^y = 2^{x+y}$ 이므로

$$2^{x+y} = 4 = 2^2 \quad \therefore x + y = 2$$

036

$$3^{a+b} = 8 \text{에서}$$

$$a + b = \log_3 8 = \log_3 2^3 = 3 \log_3 2$$

$$2^{a-b} = 7 \text{에서}$$

$$a - b = \log_2 7$$

$$\therefore a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$= 3 \log_3 2 \times \log_2 7$$

$$= 3 \times \log_3 2 \times \frac{\log_3 7}{\log_3 2} = 3 \log_3 7$$

$$\therefore 3^{a^2 - b^2} = 3^{3 \log_3 7} = 7^{3 \log_3 3} = 7^3$$

답 ③

037

$$\log_{\sqrt{2}} a = \log_{2^{\frac{1}{2}}} a = 2 \log_2 a$$

$$= 2 \log_2 a^3 = \log_8 a^6 \quad \dots\dots\dots ①$$

즉, $\log_8 a^6 = \log_8 ab^2$ 이므로

$$a^6 = ab^2, a^5 = b^2 \quad \therefore b = a^{\frac{5}{2}} \quad \dots\dots\dots ②$$

$$\therefore \log_a b = \log_a a^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \quad \dots\dots\dots ③$$

답 $\frac{5}{2}$

채점 기준	비율
① $\log_{\sqrt{2}} a$ 를 밑이 8인 로그로 바꿀 수 있다.	50 %
② a 와 b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
③ $\log_a b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

| 다른 풀이 |

$$\log_8 ab^2 = \log_{2^3} ab^2 = \frac{1}{3} \log_2 ab^2$$

$$= \frac{1}{3} \log_{\sqrt{2}} (ab^2)^{\frac{1}{2}} = \log_{\sqrt{2}} (ab^2)^{\frac{1}{6}}$$

즉, $\log_{\sqrt{2}} a = \log_{\sqrt{2}} (ab^2)^{\frac{1}{6}}$ 이므로

$$a = (ab^2)^{\frac{1}{6}}, a = a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{3}}$$

$$a^{\frac{5}{6}} = b^{\frac{1}{3}} \quad \therefore b = a^{\frac{5}{2}}$$

$$\therefore \log_a b = \log_a a^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$$

038

$a^2 b^3 = 1$ 의 양변에 밑이 a 인 로그를 취하면

$$\log_a a^2 b^3 = \log_a 1, \log_a a^2 + \log_a b^3 = 0$$

$$2 + 3 \log_a b = 0 \quad \therefore \log_a b = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \log_a a^4 b^3 = \log_a a^4 + \log_a b^3$$

$$= \log_a a^2 + \frac{3}{2} \log_a b$$

$$= 2 + \frac{3}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 1$$

답 ③

| 다른 풀이 |

$$a^2 b^3 = 1 \text{에서 } b^3 = \frac{1}{a^2} = a^{-2}$$

$$\therefore \log_a a^4 b^3 = \log_a a^4 a^{-2} = \log_a a^2 = 2$$

039

$$\log_c a : \log_c b = 2 : 3 \text{이므로}$$

$$2 \log_c b = 3 \log_c a, \log_c b = \frac{3}{2} \log_c a$$

$$\log_c b = \log_c a^{\frac{3}{2}} \quad \therefore b = a^{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned}\therefore 10 \log_a b + 9 \log_b a &= 10 \log_a a^{\frac{3}{2}} + 9 \log_{a^{\frac{3}{2}}} a \\ &= 10 \times \frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3} \\ &= 15 + 6 = 21\end{aligned}$$

답 21

|다른 풀이|

$$\begin{aligned}\log_c a : \log_c b &= 2 : 3 \text{이므로} \\ \log_c a &= 2k, \log_c b = 3k \quad (k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수}) \\ \text{로 놓으면 밑의 변환에 의하여} \\ \log_a b &= \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{3k}{2k} = \frac{3}{2} \quad \therefore \log_b a = \frac{2}{3} \\ \therefore 10 \log_a b + 9 \log_b a &= 10 \times \frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3} \\ &= 15 + 6 = 21\end{aligned}$$

040

$$\begin{aligned}\log_2 a + \log_2 b + \log_2 c &= 0 \text{에서} \\ \log_2 abc &= 0 \quad \therefore abc = 1 \\ \text{따라서 } bc &= \frac{1}{a}, ac = \frac{1}{b}, ab = \frac{1}{c} \text{이므로} \\ \log_{\frac{1}{a}} bc + \log_{\frac{1}{b}} ac + \log_{\frac{1}{c}} ab &= \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{a} + \log_{\frac{1}{b}} \frac{1}{b} + \log_{\frac{1}{c}} \frac{1}{c} \\ &= \log_{a^{-1}} a^{-1} + \log_{b^{-1}} b^{-1} + 1 \\ &= -2 - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

답 ④

041

$$\begin{aligned}16 < 27 < 32 \text{이므로} \\ \log_2 16 < \log_2 27 < \log_2 32, \log_2 2^4 < \log_2 27 < \log_2 2^5 \\ \therefore 4 < \log_2 27 < 5 \\ \text{즉, } \log_2 27 \text{의 정수 부분은 } 4 \text{이므로} \\ a &= 4 \\ \log_2 27 \text{의 소수 부분은 } \log_2 27 \text{에서 정수 부분을 뺀 수와 같으므로} \\ b &= \log_2 27 - 4 = \log_2 27 - \log_2 16 = \log_2 \frac{27}{16} \\ \therefore 3^{\frac{a}{4}} + 2^b &= 3 + 2^{\log_2 \frac{27}{16}} = 3 + \frac{27}{16} = \frac{75}{16}\end{aligned}$$

답 ④

042

$$\begin{aligned}9 < 10 < 27 \text{이므로} \\ \log_3 9 < \log_3 10 < \log_3 27, \log_3 3^2 < \log_3 10 < \log_3 3^3 \\ \therefore 2 < \log_3 10 < 3 \\ \text{즉, } \log_3 10 \text{의 정수 부분은 } 2 \text{이므로} \\ n &= 2 \\ \log_3 10 \text{의 소수 부분은 } \log_3 10 \text{에서 정수 부분을 뺀 수와 같으므로} \\ a &= \log_3 10 - 2 = \log_3 10 - \log_3 9 = \log_3 \frac{10}{9} \\ \therefore \frac{n-3^a}{n+3^a} &= \frac{2-3^{\log_3 \frac{10}{9}}}{2+3^{\log_3 \frac{10}{9}}} = \frac{2-\frac{10}{9}}{2+\frac{10}{9}} = \frac{2}{7}\end{aligned}$$

답 ②

043

$$\begin{aligned}\text{이차방정식 } x^2 - 18x + 6 = 0 \text{의 두 근이 } \alpha, \beta \text{이므로 이차방정식의} \\ \text{근과 계수의 관계에 의하여} \\ \alpha + \beta &= 18, \alpha\beta = 6 \\ \therefore \log_2 (\alpha + \beta) - 2 \log_2 \alpha\beta &= \log_2 18 - 2 \log_2 6 \\ &= \log_2 18 - \log_2 6^2 \\ &= \log_2 \frac{18}{36} \\ &= \log_2 \frac{1}{2} = -1\end{aligned}$$

답 ⑤

044

$$\begin{aligned}\text{이차방정식 } x^2 - ax + b = 0 \text{의 두 근이 } 2, \log_2 5 \text{이므로 이차방정식의} \\ \text{근과 계수의 관계에 의하여} \\ a &= 2 + \log_2 5 = \log_2 4 + \log_2 5 \\ &= \log_2 (4 \times 5) = \log_2 20 \\ b &= 2 \times \log_2 5 = \log_2 5^2 = \log_2 25 \\ \therefore \frac{b}{a} &= \frac{\log_2 25}{\log_2 20} = \log_{20} 25 \\ &= \log_{20} 5^2 = 2 \log_{20} 5\end{aligned}$$

답 ④

045

$$\begin{aligned}\text{이차방정식 } x^2 - 3x \log_5 4 + 4 \log_5 2 = 0 \text{의 두 근이 } \alpha, \beta \text{이므로 이} \\ \text{차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여} \\ \alpha + \beta &= 3 \log_5 4, \alpha\beta = 4 \log_5 2 \quad \text{①} \\ \therefore 5^{(\alpha-1)(\beta-1)} &= 5^{a\beta - \alpha - \beta + 1} = 5^{a\beta - (\alpha + \beta) + 1} \quad \text{②} \\ &= 5^{4 \log_5 2 - 3 \log_5 4 + 1} \\ &= 5^{4 \log_5 2 - 3 \log_5 2^2 + 1} \\ &= 5^{4 \log_5 2 - 6 \log_5 2 + 1} \\ &= 5^{-2 \log_5 2 + 1} \\ &= 5^{\log_5 2^{-2}} \times 5 \\ &= 2^{-2} \times 5 = \frac{5}{4} \quad \text{③}\end{aligned}$$

답 ⑤/4

채점 기준	비율
① 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 가 나타나도록 주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
③ 로그의 성질과 지수법칙을 이용하여 $5^{(\alpha-1)(\beta-1)}$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

046

$$\begin{aligned}\text{이차방정식 } x^2 - 3x + 1 = 0 \text{의 두 근이 } \alpha, \beta \text{이므로 이차방정식의 근} \\ \text{과 계수의 관계에 의하여} \\ \alpha + \beta &= 3, \alpha\beta = 1 \\ (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{이므로} \\ a^2 &= 3^2 - 4 \times 1 = 5 \\ \therefore a &= \alpha - \beta = \sqrt{5} \quad (\because \alpha > \beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \log_a \frac{\beta+1}{\alpha} + \log_a \frac{\alpha+1}{\beta} &= \log_{\sqrt{5}} \left(\frac{\beta+1}{\alpha} \times \frac{\alpha+1}{\beta} \right) \\ &= \log_{\sqrt{5}} \frac{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}{\alpha\beta} \\ &= \log_{\sqrt{5}} \frac{1+3+1}{1} \\ &= \log_{\sqrt{5}} 5 = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5 \\ &= 2 \log_5 5 = 2\end{aligned}$$

답 ③

047

- (1) $\log 100 = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2$
 (2) $\log 0.001 = \log 10^{-3} = -3 \log 10 = -3$
 (3) $\log \sqrt[4]{1000} = \log 1000^{\frac{1}{4}} = \log (10^3)^{\frac{1}{4}}$
 $= \log 10^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \log 10 = \frac{3}{4}$
 (4) $\log \frac{1}{\sqrt[6]{10}} = \log (10^{\frac{1}{6}})^{-1} = \log (10^{\frac{1}{6}})^{-1}$
 $= \log 10^{-\frac{1}{6}} = -\frac{1}{6} \log 10 = -\frac{1}{6}$

답 (1) 2 (2) -3 (3) $\frac{3}{4}$ (4) $-\frac{1}{6}$

048

- (1) $\log 6 = \log (2 \times 3) = \log 2 + \log 3$
 $= 0.3010 + 0.4771 = 0.7781$
 (2) $\log 12 = \log (2^2 \times 3) = 2 \log 2 + \log 3$
 $= 2 \times 0.3010 + 0.4771 = 1.0791$
 (3) $\log 25 = \log 5^2 = 2 \log 5 = 2 \log \frac{10}{2}$
 $= 2(\log 10 - \log 2)$
 $= 2(1 - 0.3010)$
 $= 2 \times 0.6990 = 1.3980$
 (4) $\log 15 = \log (3 \times 5) = \log 3 + \log 5$
 $= 0.4771 + 0.6990 = 1.1761$ (3)에서 $\log 5 = 0.6990$
 답 (1) 0.7781 (2) 1.0791 (3) 1.3980 (4) 1.1761

049

$\log x^{20} = 20 \log x = 5.712$ 이므로
 $\log x = 0.2856$
 주어진 상용로그표에서 $\log 1.93 = 0.2856$ 이므로
 $x = 1.93 \quad \therefore 100x = 193$

답 193

050

$$\begin{aligned}\log_{21} 147 &= \frac{\log 147}{\log 21} = \frac{\log (3 \times 7^2)}{\log (3 \times 7)} \\ &= \frac{\log 3 + \log 7^2}{\log 3 + \log 7} \\ &= \frac{\log 3 + 2 \log 7}{\log 3 + \log 7} \\ &= \frac{a + 2b}{a + b}\end{aligned}$$

답 ①

051

$$\begin{aligned}\log a &= 2.5 & \dots\dots\dots ㉠ \\ \log b &= 1.2 & \dots\dots\dots ㉡ \\ ㉠ - 2 \times ㉡ \text{을 하면} \\ \log a - 2 \log b &= 0.1 & \therefore \log \frac{a}{b^2} = 0.1 \\ \therefore \log N &= 2.1 = 2 + 0.1 = 2 \log 10 + \log \frac{a}{b^2} \\ &= \log 10^2 + \log \frac{a}{b^2} = \log \frac{100a}{b^2} \\ \therefore N &= \frac{100a}{b^2}\end{aligned}$$

답 ⑤

052

$$\begin{aligned}\log 7570 &= \log (7.57 \times 10^3) \\ &= \log 7.57 + \log 10^3 \\ &= 3 + \log 7.57 \\ \log 0.0757 &= \log (7.57 \times 10^{-2}) \\ &= \log 7.57 + \log 10^{-2} \\ &= -2 + \log 7.57 \\ \text{이때 } 0 &\leq \log 7.57 < 1 \text{이므로} \\ a &= \log 7.57 = 0.8791, b = -2 \\ \therefore a + b &= 0.8791 + (-2) = -1.1209\end{aligned}$$

답 ④

참고

양수 N 에 대하여 $\log N$ 의 정수 부분을 n , 소수 부분을 a 라고 하면
 (1) $10^n \leq N < 10^{n+1}$
 (2) $a = \log N - n$ (단, $0 \leq a < 1$)

053

$$\begin{aligned}15^{30} \text{에 상용로그를 취하면} \\ \log 15^{30} &= 30 \log 15 = 30 \log (3 \times 5) \\ &= 30(\log 3 + \log 5) \\ &= 30\left(\log 3 + \log \frac{10}{2}\right) \\ &= 30(\log 3 + \log 10 - \log 2) \dots\dots\dots ① \\ &= 30(0.4771 + 1 - 0.3010) \\ &= 30 \times 1.1761 = 35.283 \dots\dots\dots ② \\ \text{이때 } \log 15^{30} \text{의 정수 부분이 } 35 \text{이므로 } 15^{30} \text{은 } 36 \text{자리의 정수이다.} \\ &\dots\dots\dots ③\end{aligned}$$

답 36자리

채점 기준	비율
① $\log 15^{30}$ 을 $\log 2, \log 3$ 을 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
② 주어진 조건을 이용하여 $\log 15^{30}$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ 15^{30} 이 몇 자리의 정수인지 구할 수 있다.	30 %

054

$$\begin{aligned}\log \frac{1}{x^2} &= \log x^{-2} = -2 \log x \\ &= -2 \times (-3.12) = 6.24 \\ \therefore a &= 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log x^2 &= 2 \log x = 2 \times (-3.12) \\ &= -6.24 = -6 - 0.24 \\ &= (-6-1) + (1-0.24) \\ &= -7 + 0.76 \quad \rightarrow 0 \leq b < 1 \text{이며 } a \text{ 하므로 소수 부분이 } a \text{가 되도록 변형한다.} \\ \therefore b &= 0.76 \\ \therefore a+b &= 6+0.76=6.76\end{aligned}$$

답 ⑤

055

$\log x$ 와 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분이 같으므로

$$\log x - \log \sqrt{x} = (\text{정수}), \log x - \log x^{\frac{1}{2}} = (\text{정수})$$

$$\log x - \frac{1}{2} \log x = (\text{정수}) \quad \therefore \frac{1}{2} \log x = (\text{정수})$$

$\frac{1}{10} \leq x < 10$ 의 각 변에 상용로그를 취하면

$$-1 \leq \log x < 1 \quad \therefore -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \log x < \frac{1}{2}$$

이때 $\frac{1}{2} \log x$ 는 정수이므로 $\frac{1}{2} \log x = 0$

$$\log x = 0 \quad \therefore x = 1$$

따라서 $10^a = 1 = 10^0$ 이므로

$$a = 0$$

답 ③

056

A^{10} 이 소수점 아래 5째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나므로 $\log A^{10}$ 의 정수 부분은 -5 이다.

즉, $-5 \leq \log A^{10} < -4$ 이므로 $\rightarrow$ 소수 부분은 0 이상 1 미만이므로 $\log A^{10}$ 의 값은 -5 보다 크거나 같고, -4 보다 작다.

$$-5 \leq 10 \log A < -4$$

이때 $\log A^{20} = 20 \log A$ 이므로 위 부등식의 각 변에 2를 곱하면

$$-10 \leq 20 \log A < -8 \quad \therefore -10 \leq \log A^{20} < -8$$

따라서 $\log A^{20}$ 의 정수 부분이 될 수 있는 수는 $-10, -9$ 이므로 A^{20} 은 소수점 아래 9째 또는 10째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타날 수 있다.

답 ②, ③

057

2^n 이 10자리의 정수이면 $\log 2^n$ 의 정수 부분은 9이다.

즉, $9 \leq \log 2^n < 10$ 이므로

$$9 \leq n \log 2 < 10, 9 \leq 0.3010n < 10$$

$$\frac{9}{0.3010} \leq n < \frac{10}{0.3010} \quad \therefore 29. \dots \leq n < 33. \dots$$

따라서 2^n 이 10자리의 정수가 되도록 하는 자연수 n 은 30, 31, 32, 33의 4개이다.

답 ③

058

(i) $1 \leq x < 10$ 일 때, $f(x) = 0$ $\rightarrow x$ 가 1자리의 수이므로 정수 부분이 0

(ii) $10 \leq x < 100$ 일 때, $f(x) = 1$ $\rightarrow x$ 가 2자리의 수이므로 정수 부분이 1

(iii) $100 \leq x < 1000$ 일 때, $f(x) = 2$ $\rightarrow x$ 가 3자리의 수이므로 정수 부분이 2

(iv) $1000 \leq x \leq 1500$ 일 때, $f(x) = 3$

016 정답과 풀이

(i)~(iv)에서

$$\begin{aligned}f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(1500) \\ &= 0 \times 9 + 1 \times 90 + 2 \times 900 + 3 \times 501 \\ &= 90 + 1800 + 1503 = 3393\end{aligned}$$

$\rightarrow 1000$ 부터 1500 까지의 숫자의 개수는 500 이 아닌 501 일에 주의한다.

답 ②

059

처음 빛의 밝기를 A , 통과시킨 유리의 장수를 n 이라고 하면 n 장의 유리를 통과시킨 후의 빛의 밝기는 $A\left(1 - \frac{50}{100}\right)^n = A\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이므로

$$A\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{20}A \quad \therefore \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{20}$$

위 부등식의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \log \frac{1}{20}, -n \log 2 \leq -\log (2 \times 10)$$

$$\therefore n \geq \frac{\log 2 + \log 10}{\log 2} = \frac{1.3}{0.3} = 4. \dots$$

따라서 적어도 5장의 유리를 통과시켜야 한다.

답 5장

참고

상용로그의 활용 — 일정한 비율로 증가, 감소할 때

초기 양이 A 이고 매번 $a\%$ 씩 증가하는 경우 n 번 시행한 후의 양은 $A\left(1 + \frac{a}{100}\right)^n$ 이다.

또, $a\%$ 씩 감소하는 경우 n 번 시행한 후의 양은 $A\left(1 - \frac{a}{100}\right)^n$ 이다.

060

소리의 크기가 20 dB인 소리의 세기를 I_{20} , 소리의 크기가 10 dB인 소리의 세기를 I_{10} 이라고 하면

$$20 = 120 + 10 \log I_{20} \quad \dots \text{㉠}$$

$$10 = 120 + 10 \log I_{10} \quad \dots \text{㉡}$$

㉠-㉡을 하면

$$10 = 10(\log I_{20} - \log I_{10}), \log \frac{I_{20}}{I_{10}} = 1$$

$$\therefore \frac{I_{20}}{I_{10}} = 10$$

따라서 크기가 20 dB인 소리의 세기는 크기가 10 dB인 소리의 세기의 10배이다.

답 ③

061

박테리아의 수가 두 배가 되는 데에 걸리는 시간은 6시간, 즉 $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ 일이므로 박테리아의 수는 하루에 2^4 배씩 늘어난다.

따라서 초기 박테리아의 수를 A 라고 하면 x 일 후의 박테리아의 수는 $A \times 2^{4x}$ 이므로

$$A \times 2^{4x} \geq 10^6 A \quad \therefore 2^{4x} \geq 10^6$$

위 부등식의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log 2^{4x} \geq \log 10^6, 4x \log 2 \geq 6$$

$$\therefore x \geq \frac{6}{4 \log 2} = \frac{6}{4 \times 0.3} = 5$$

따라서 처음으로 초기 박테리아의 수의 10^6 배 이상이 되는 것은 5일 후이다.

답 ⑤

062

1000원이었던 재료의 가격이 매년 $a\%$ 씩 상승하여 5년 후에 1110원이 되었으므로

$$1000 \times \left(1 + \frac{a}{100}\right)^5 = 1110 \quad \text{..... ①}$$

$$\left(1 + \frac{a}{100}\right)^5 = 1.11$$

위 식의 양변에 상용로그를 취하면

$$5 \log \left(1 + \frac{a}{100}\right) = \log 1.11$$

상용로그표에서 $\log 1.11 = 0.045$ 이므로

$$\log \left(1 + \frac{a}{100}\right) = \frac{0.045}{5} = 0.009 \quad \text{..... ②}$$

이때 상용로그표에서 $\log 1.02 = 0.009$ 이므로

$$1 + \frac{a}{100} = 1.02, \quad \frac{a}{100} = 0.02$$

$$\therefore a = 2 \quad \text{..... ③}$$

답 2

채점 기준	비율
① 주어진 조건을 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
② 상용로그표를 이용하여 $\log \left(1 + \frac{a}{100}\right)$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ 상용로그표를 이용하여 a 의 값을 구할 수 있다.	30 %

실력을 높이는 연습 문제

본문 034쪽

01

$$\log_2 \{ \log_3 (\log_5 x) \} = 0 \text{에서}$$

$$\log_3 (\log_5 x) = 1, \log_5 x = 3$$

$$\therefore x = 5^3 = 125$$

$$\text{또, } \log_5 \{ \log_3 (\log_2 y) \} = 0 \text{에서}$$

$$\log_3 (\log_2 y) = 1, \log_2 y = 3$$

$$\therefore y = 2^3 = 8$$

$$\therefore x + y = 125 + 8 = 133$$

답 ④

02

$$\log_3 (a+b) = 2 \text{에서 } a+b = 3^2 = 9$$

$$\log_{ab} 4 = 2 \text{에서 } (ab)^2 = 4 = 2^2 \quad \therefore ab = 2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$= 9^2 - 2 \times 2 = 77$$

답 ⑤

03

문제 접근하기

모든 실수 x 에 대하여 진수의 조건인 $x^2 + ax + a + 8 > 0$ 을 만족시키는 a 의 값의 범위를 구해야 한다. 이때 '모든 실수 x 에 대하여'라는 조건이 있으므로 이차부등식이 항상 성립할 조건을 이용한다.

밑의 조건에 의하여

$$a > 0, a \neq 1 \quad \therefore 0 < a < 1 \text{ 또는 } a > 1 \quad \text{..... ⑦}$$

진수의 조건에 의하여 모든 실수 x 에 대하여

$$x^2 + ax + a + 8 > 0$$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2 + ax + a + 8 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = a^2 - 4(a + 8) < 0$$

$$a^2 - 4a - 32 < 0, (a + 4)(a - 8) < 0$$

$$\therefore -4 < a < 8 \quad \text{..... ⑧}$$

⑦, ⑧의 공통부분을 구하면

$$0 < a < 1 \text{ 또는 } 1 < a < 8$$

따라서 모든 정수 a 의 값의 합은

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$$

답 ①

풍샘 개념 CHECK

이차부등식이 항상 성립할 조건_高 公通 수학 1

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면 모든 실수 x 에 대하여 주어진 이차부등식이 성립할 조건은 다음과 같다.

$$(1) ax^2 + bx + c > 0 \text{이 성립} \Rightarrow a > 0, D < 0$$

$$(2) ax^2 + bx + c \geq 0 \text{이 성립} \Rightarrow a > 0, D \leq 0$$

$$(3) ax^2 + bx + c < 0 \text{이 성립} \Rightarrow a < 0, D < 0$$

$$(4) ax^2 + bx + c \leq 0 \text{이 성립} \Rightarrow a < 0, D \leq 0$$

04

$$a = \log_2 5 \text{에서}$$

$$2^a = 5$$

$$b = \log_2 7 \text{에서}$$

$$2^b = 7$$

$$c = \log_2 11 \text{에서}$$

$$2^c = 11$$

$$\therefore 2^{a+b+c} = 2^a \times 2^b \times 2^c = 5 \times 7 \times 11 = 385$$

답 385

|다른 풀이|

$$a + b + c = \log_2 5 + \log_2 7 + \log_2 11$$

$$= \log_2 (5 \times 7 \times 11)$$

$$= \log_2 385$$

이므로

$$2^{a+b+c} = 2^{\log_2 385} = 385$$

05

$$\log_2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log_2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \log_2 \left(1 - \frac{1}{1024}\right)$$

$$= \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \frac{2}{3} + \cdots + \log_2 \frac{1023}{1024}$$

$$= \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{1023}{1024}\right)$$

$$= \log_2 \frac{1}{1024}$$

$$= \log_2 2^{-10}$$

$$= -10 \log_2 2 = -10$$

답 ①

06

$\log_{15} 3 = A$, $\log_{15} 5 = B$ 라고 하면

$$\begin{aligned} A+B &= \log_{15} 3 + \log_{15} 5 \\ &= \log_{15} (3 \times 5) \\ &= \log_{15} 15 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{15} 27 &= \log_{15} 3^3 = 3 \log_{15} 3 = 3A \text{ 이므로} \\ (\log_{15} 3)^3 + \log_{15} 27 \times \log_{15} 5 + (\log_{15} 5)^3 \\ &= A^3 + 3AB + B^3 \\ &= A^3 + 3AB(A+B) + B^3 \quad (\because A+B=1) \\ &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \\ &= (A+B)^3 = 1 \end{aligned}$$

답 ①

07

문제 접근하기

로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 정리하여 삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계를 파악한 후 다음을 이용하여 삼각형의 모양을 판단한다.

→ 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 a, b, c 일 때

- (1) $a=b=c$ 이면 삼각형 ABC는 정삼각형이다.
- (2) $a=b \neq c$ 이면 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.
- (3) $a^2+b^2=c^2$ 이면 삼각형 ABC는 $\angle C=90^\circ$, 즉 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

$$\log_c (a+b) + \log_c (a-b) = 2 \text{에서}$$

$$\log_c (a+b)(a-b) = 2, \log_c (a^2 - b^2) = 2$$

$$a^2 - b^2 = c^2 \quad \therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

답 ④

08

$$\log_a b = 81 \text{에서}$$

$$\frac{\log_c b}{\log_c a} = 81 \quad \therefore \log_c b = 81 \log_c a \quad \dots\dots\dots ㉠$$

$$\log_c \sqrt{a} = \log_{\sqrt{b}} c \text{에서}$$

$$\log_c a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\log_c b^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{2} \log_c a = \frac{2}{\log_c b}$$

$$\therefore \log_c b = \frac{4}{\log_c a} \quad \dots\dots\dots ㉡$$

㉠ $\times$ ㉡을 하면

$$(\log_c b)^2 = 81 \times 4$$

$$b > 1, c > 1 \text{이므로 } \log_c b > 0$$

$$\therefore \log_c b = \sqrt{81 \times 4} = 18$$

답 18

09

$$\begin{aligned} & \left(\log_3 a^2 - 6 \log_{27} \frac{1}{b} \right) \times \log_{\sqrt{ab}} 9 \\ &= (2 \log_3 a - 6 \log_3 b^{-1}) \times \log_{(ab)^{\frac{1}{2}}} 3^2 \\ &= 2(\log_3 a + \log_3 b) \times 4 \log_{ab} 3 \\ &= 8 \log_3 ab \times \log_{ab} 3 \\ &= 8 \times \log_3 ab \times \frac{1}{\log_3 ab} = 8 \end{aligned}$$

답 ③

10

선분 PQ를 $m : (1-m)$ 으로 내분하는 점의 좌표가 1이므로

$$\frac{m \log_5 12 + (1-m) \log_5 3}{m + (1-m)} = 1$$

$$m \log_5 12 + (1-m) \log_5 3 = 1$$

$$m(\log_5 12 - \log_5 3) = 1 - \log_5 3$$

$$m \log_5 4 = \log_5 \frac{5}{3} \quad \rightarrow \log_5 5 - \log_5 3$$

$$\therefore m = \frac{\log_5 \frac{5}{3}}{\log_5 4} = \log_4 \frac{5}{3}$$

$$\therefore 4^m = 4^{\log_4 \frac{5}{3}} = \frac{5}{3}$$

답 ④

풍샘 개념 CHECK

수직선 위의 선분의 내분점 高 公通수학 2

수직선 위의 두 점 $A(x_1), B(x_2)$ 에 대하여 선분 AB를

$$m : n \quad (m > 0, n > 0) \text{으로 내분하는 점 P의 좌표는 } P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}\right)$$

$$\text{특히, 선분 AB의 중점 M의 좌표는 } M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

11

$$A = \sqrt{9^{\log_5 2}} = (9^{\log_5 2})^{\frac{1}{2}} = (9^{\frac{1}{2}})^{\log_5 2} = 3^{\log_5 2} = 2$$

$$B = \log_5 16 \times \log_8 25$$

$$= \frac{\log 16}{\log 5} \times \frac{\log 25}{\log 8} = \frac{\log 2^4}{\log 5} \times \frac{\log 5^2}{\log 2^3}$$

$$= \frac{4 \log 2}{\log 5} \times \frac{2 \log 5}{3 \log 2} = \frac{8}{3}$$

$$C = \log_4 2 + \log_9 \frac{1}{3} = \log_{2^2} 2 + \log_{3^2} 3^{-1}$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 2 - \frac{1}{2} \log_3 3 = 0$$

$$\therefore C < A < B$$

답 ⑤

12

$$\log_2 10 = \log_2 (2 \times 5)$$

$$= \log_2 2 + \log_2 5$$

$$= 1 + \log_2 5$$

이므로

$$1 + \log_2 5 = a \quad \therefore \log_2 5 = a - 1 \quad \dots\dots\dots ㉠$$

$$\log_2 \frac{3}{5} = \log_2 3 - \log_2 5 \text{이므로}$$

$$\log_2 3 - \log_2 5 = b$$

위 식에 ㉠을 대입하면

$$b = \log_2 3 - (a - 1) \quad \therefore \log_2 3 = a + b - 1$$

이때 밑의 변환에 의하여

$$\log_3 2 = \frac{1}{a+b-1}$$

$$\therefore \log_3 48 = \log_3 (2^4 \times 3)$$

$$= \log_3 2^4 + \log_3 3 = 4 \log_3 2 + 1$$

$$= \frac{4}{a+b-1} + 1 = \frac{a+b+3}{a+b-1}$$

답 ③

13

$$\sqrt[3]{2\sqrt{14}} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{14} = 2^{\frac{1}{3}} \times (2 \times 7)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 7^{\frac{1}{6}},$$

$$\sqrt[3]{7\sqrt{2}} = \sqrt[3]{7} \times \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{6}} \times 7^{\frac{1}{3}}$$

이므로

$$\begin{aligned} \log_7 \sqrt[3]{2\sqrt{14}} - \log_2 \sqrt[3]{7\sqrt{2}} &= \log_7 (2^{\frac{1}{2}} \times 7^{\frac{1}{6}}) - \log_2 (2^{\frac{1}{6}} \times 7^{\frac{1}{3}}) \\ &= \log_7 2^{\frac{1}{2}} + \log_7 7^{\frac{1}{6}} - \log_2 2^{\frac{1}{6}} - \log_2 7^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \log_7 2 + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \log_2 7 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\log_2 7} - \frac{1}{3} \log_2 7 \\ &= \frac{1}{2a} - \frac{a}{3} = \frac{3-2a^2}{6a} \end{aligned}$$

답 ②

14

$$2^a = \frac{3}{5} \text{에서}$$

$$a = \log_2 \frac{3}{5}$$

$$3^b = \frac{3}{5} \text{에서}$$

$$b = \log_3 \frac{3}{5}$$

$$10^c = \frac{3}{5} \text{에서}$$

$$c = \log_{10} \frac{3}{5}$$

밑의 변환에 의하여

$$\frac{1}{a} = \log_{\frac{3}{5}} 2, \frac{1}{b} = \log_{\frac{3}{5}} 3, \frac{1}{c} = \log_{\frac{3}{5}} 10$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} &= \log_{\frac{3}{5}} 2 + \log_{\frac{3}{5}} 3 - \log_{\frac{3}{5}} 10 \\ &= \log_{\frac{3}{5}} \frac{2 \times 3}{10} = \log_{\frac{3}{5}} \frac{3}{5} = 1 \end{aligned}$$

답 1

15

$x^5 = y^3$ 의 양변에 밑이 y 인 로그를 취하면

$$\log_y x^5 = \log_y y^3, \quad 5 \log_y x = 3 \log_y y$$

$$5 \log_y x = 3 \quad \therefore \log_y x = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_y \frac{x^4}{y^5} &= \log_y x^4 - \log_y y^5 = 2 \log_y x - \frac{5}{2} \\ &= 2 \times \frac{3}{5} - \frac{5}{2} = -\frac{13}{10} \end{aligned}$$

답 ①

16

$64 < 100 < 256$ 이므로

$$\log_4 64 < \log_4 100 < \log_4 256, \quad \log_4 4^3 < \log_4 100 < \log_4 4^4$$

$$\therefore 3 < \log_4 100 < 4$$

$\log_4 100$ 의 정수 부분은 3이므로

$$n = 3$$

$\log_4 100$ 의 소수 부분은 $\log_4 100$ 에서 정수 부분을 뺀 수와 같으므로

$$\alpha = \log_4 100 - 3 = \log_4 100 - \log_4 64 = \log_4 \frac{100}{64} = \log_4 \frac{25}{16}$$

$$\begin{aligned} \therefore 4^n - 8^\alpha &= 4^3 - 8^{\log_4 \frac{25}{16}} = 64 - \left(\frac{25}{16}\right)^{\log_4 8} \rightarrow \log_2 2^3 = \frac{3}{2} \log_2 2 = \frac{3}{2} \\ &= 64 - \left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{3}{2}} = 64 - \left\{\left(\frac{5}{4}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}} \\ &= 64 - \left(\frac{5}{4}\right)^3 = 64 - \frac{125}{64} \end{aligned}$$

따라서 $k = \frac{125}{64}$ 이므로

$$64k = 125$$

답 ⑤

17

문제 접근하기

$\log_2 \frac{1}{3}$ 에서 (밑) > 1 이고 $0 < (\text{진수}) < 1$ 이므로 $\log_2 \frac{1}{3}$ 의 값은 음수이다. 따라서 (정수 부분) < 0 , $0 \leq (\text{소수 부분}) < 1$ 이 되도록 $\log_2 \frac{1}{3}$ 의 값을 적절히 분해해야 한다.

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \text{에서 } \log_2 \frac{1}{4} < \log_2 \frac{1}{3} < \log_2 \frac{1}{2}$$

$$-2 < \log_2 \frac{1}{3} < -1 \quad \therefore \log_2 \frac{1}{3} = -1, \dots$$

이때 $\log_2 \frac{1}{3} = -1 - \alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$)라고 하면

$$\log_2 \frac{1}{3} = -1 - \alpha = -2 + (1 - \alpha)$$

즉, $\log_2 \frac{1}{3}$ 의 정수 부분은 -2 이다. 로그의 소수 부분은 0 이상 1 미만이어야 하므로 정수 부분은 -1 이 아닌 -2 가 된다.

$$\therefore x = -2$$

$\log_2 \frac{1}{3}$ 의 소수 부분은 $\log_2 \frac{1}{3}$ 에서 정수 부분을 뺀 수와 같으므로

$$y = \log_2 \frac{1}{3} - (-2) = \log_2 \frac{1}{3} + \log_2 4 = \log_2 \frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{2^x + 2^y}{2^{-x} + 2^{-y}} = \frac{2^{-2} + 2^{\log_2 \frac{4}{3}}}{2^2 + 2^{-\log_2 \frac{4}{3}}} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{4}{3}}{4 + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{19}{12}}{\frac{19}{4}} = \frac{1}{3}$$

답 ⑤

18

이차방정식 $x^2 - 11x + 4 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 11, \quad \alpha\beta = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_2 (\alpha + 1) + \log_2 (\beta + 1) &= \log_2 (\alpha + 1)(\beta + 1) \\ &= \log_2 (\alpha\beta + \alpha + \beta + 1) \\ &= \log_2 (4 + 11 + 1) \\ &= \log_2 16 \\ &= \log_2 2^4 = 4 \end{aligned}$$

답 ④

19

$$\begin{aligned} \log 231^5 &= 5 \log 231 = 5 \log (2.31 \times 10^2) \\ &= 5(\log 2.31 + \log 10^2) \\ &= 5(0.3636 + 2) \\ &= 5 \times 2.3636 = 11.818 \end{aligned}$$

답 11.818

20

a^2 이 5자리의 수이므로 $\log a^2$ 의 정수 부분은 4이다.

즉, $4 \leq \log a^2 < 5$ 이므로 $4 \leq 2 \log a < 5$

$$\therefore 2 \leq \log a < \frac{5}{2} \quad \dots\dots\dots ㉑$$

또, ab^4 이 10자리의 수이므로 $\log ab^4$ 의 정수 부분은 9이다.

즉, $9 \leq \log ab^4 < 10$ 이므로 $9 \leq \log a + 4 \log b < 10$ ㉒

㉑-㉒을 하면

$$9 - \frac{5}{2} < 4 \log b < 10 - 2, \quad \frac{13}{2} < 4 \log b < 8$$

$$\frac{13}{8} < \log b < 2 \quad \therefore 1.625 < \log b < 2$$

따라서 $\log b$ 의 정수 부분이 1이므로 b 는 2자리의 수이다.

답 ①

참고

$a < x < b$ 이고 $c < y < d$ 일 때, $x+y$, $x-y$ 의 값의 범위는

$$\begin{array}{cc} \text{+) } \begin{array}{c} a < x < b \\ c < y < d \\ \hline a+c < x+y < b+d \end{array} & \text{-) } \begin{array}{c} a < x < b \\ c < y < d \\ \hline a-d < x-y < b-c \end{array} \end{array}$$

21

$$\log \frac{100}{x} = \log 100 - \log x = 2 - \log x$$

정수 부분이 -1이므로

$$-1 \leq 2 - \log x < 0, \quad -3 \leq -\log x < -2$$

$$2 < \log x \leq 3 \quad \therefore 100 < x \leq 1000$$

따라서 이를 만족시키는 자연수 x 는 101, 102, 103, ..., 1000의 900개이다.

답 ③

22

문제 접근하기

최고 자리의 숫자는 숫자의 배열과 관련이 있으므로 상용로그의 소수 부분을 이용할 수 있다. 즉, $\log 5^{20}$ 의 소수 부분을 구한 후 맨 앞자리 수를 추측해 본다.

$$\log 5^{20} = 20 \log 5 = 20 \log \frac{10}{2} = 20(\log 10 - \log 2)$$

$$= 20(1 - \log 2) = 20(1 - 0.3010)$$

$$= 20 \times 0.6990 = 13.980$$

이때 $\log 5^{20}$ 의 소수 부분은 0.980이고,

$$\log 9 = \log 3^2 = 2 \log 3 = 2 \times 0.4771 = 0.9542 \text{이므로}$$

$$\log 9 < 0.980 < \log 10, \quad 13 + \log 9 < 13.980 < 13 + \log 10$$

$$\log (9 \times 10^{13}) < \log 5^{20} < \log (10 \times 10^{13})$$

$$\therefore 9 \times 10^{13} < 5^{20} < 10^{14}$$

따라서 5^{20} 의 최고 자리의 숫자는 9이다.

답 9

23

문제 접근하기

$\log x$ 의 정수 부분은 자릿수와 관련이 있고, 소수 부분은 진수의 숫자의 배열과 관련이 있음을 이용한다.

ㄱ. $\log 1111$ 과 $\log 111.1$ 에서 진수 1111과 111.1의 숫자의 배열이 일치하므로 두 상용로그의 소수 부분은 같다.

$$\therefore \langle 1111 \rangle = \langle 111.1 \rangle \text{ (거짓)}$$

ㄴ. $\log x$ 의 정수 부분이 10이므로 자연수 x 는 11자리의 수이다. (참)

ㄷ. $\log x$ 의 소수 부분과 $\log y$ 의 소수 부분의 합이 1이므로 $\log x + \log y = \log xy = (\text{정수})$

즉, $xy = 10^n$ (n 은 정수)의 꼴로 나타낼 수 있다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

참고

ㄱ에서

$$\log 1111 = \log (1.111 \times 10^3) = \log 1.111 + 3$$

$$\log 111.1 = \log (1.111 \times 10^2) = \log 1.111 + 2$$

이때 $0 < \log 1.111 < 1$ 이므로

$$\langle 1111 \rangle = 3, \quad \langle 111.1 \rangle = 2$$

$$\therefore \langle 1111 \rangle + 1 = \langle 111.1 \rangle + 2$$

즉, 주어진 식은 소수 부분이 아닌 정수 부분일 때 성립한다.

24

처음 수조에 들어 있던 물의 양을 A L라고 하면 t 분 후 수조에 들어 있는 물의 양은

$$A \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{5}} \text{ L}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

수조에 남은 물의 양이 25 L, 5 L일 때까지 걸린 시간을 각각 t_1 분, t_2 분이라고 하면

$$A \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t_1}{5}} = 25, \quad A \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t_2}{5}} = 5$$

$$\text{따라서 } \frac{A \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t_1}{5}}}{A \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t_2}{5}}} = \frac{25}{5} \text{이므로}$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t_1}{5} - \frac{t_2}{5}} = 5 \quad \therefore 2^{\frac{t_2 - t_1}{5}} = 5$$

위 식의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log 2^{\frac{t_2 - t_1}{5}} = \log 5, \quad \frac{t_2 - t_1}{5} \log 2 = \log 5$$

$$\frac{t_2 - t_1}{5} = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{1 - \log 2}{\log 2} = \frac{1 - 0.3}{0.3} = \frac{7}{3}$$

$$\therefore t_2 - t_1 = 5 \times \frac{7}{3} = \frac{35}{3} \rightarrow \log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$$

$$\text{따라서 } a = t_2 - t_1 = \frac{35}{3} \text{이므로}$$

$$3a = 3 \times \frac{35}{3} = 35$$

답 35

03

지수함수

기초를 다지는 유형

본문 039쪽

001

$$y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

ㄷ. 함수 $y = a^{-x}$ 의 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지나고, 점근선은 x 축이다. (거짓)

ㄹ. $a > 1$ 에서 $0 < \frac{1}{a} < 1$ 이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

002

$$f(k) = 2f(5) \text{에서}$$

$$3^k = 2 \times 3^5$$

로그의 정의에 의하여

$$k = \log_3 (2 \times 3^5) = \log_3 2 + \log_3 3^5 = 5 + \log_3 2$$

답 ⑤

003

함수 $y = a^x$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$ 를 지나므로

$$5 = a^{\frac{1}{2}} \quad \therefore a = 5^2 = 25$$

즉, 함수 $y = 25^x$ 의 그래프가 점 $\left(-\frac{3}{2}, k\right)$ 를 지나므로

$$k = 25^{-\frac{3}{2}} = (5^2)^{-\frac{3}{2}} = 5^{-3} = \frac{1}{125}$$

답 ⑤

004

$$\textcircled{1} f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 2^x \text{에서 } 2 > 1 \text{이므로 } f(x_1) < f(x_2)$$

$$\textcircled{2} f(x) = (0.3)^x = \left(\frac{3}{10}\right)^x \text{에서 } 0 < \frac{3}{10} < 1 \text{이므로 } f(x_1) > f(x_2)$$

$$\textcircled{3} f(x) = 2^x \text{에서 } 2 > 1 \text{이므로 } f(x_1) < f(x_2)$$

$$\textcircled{4} f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x \text{에서 } \frac{4}{3} > 1 \text{이므로 } f(x_1) < f(x_2)$$

$$\textcircled{5} f(x) = (\sqrt{3})^x \text{에서 } \sqrt{3} > 1 \text{이므로 } f(x_1) < f(x_2)$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ②이다.

답 ②

005

$$\textcircled{1} f(0) = a^0 = 1 \text{ (참)}$$

$$\textcircled{2} f(x+y) = a^{x+y} = a^x \times a^y = f(x)f(y) \text{ (참)}$$

$$\textcircled{3} f(xy) = a^{xy} = (a^x)^y \neq f(x) + f(y) \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

006

ㄱ. $y = \frac{1}{4^x} = 4^{-x}$ 이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y = 4^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

ㄴ. $y = 2^x = 4^{\frac{1}{2}x}$ 이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y = 4^x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 없다.

ㄷ. $y = \frac{1}{2} \times 4^x = 4^{-\frac{1}{2}} \times 4^x = 4^{x-\frac{1}{2}}$ 이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y = 4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄹ. $-y = \left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^{-x}$ 에서 $y = -4^{-x}$ 이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y = 4^x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

따라서 함수 $y = 4^x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

007

함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면

$$y - n = 3^{x-m}$$

$$\therefore y = 3^{x-m} + n \text{ ①}$$

이때 $y = 3^{x-m} + n$ 의 그래프가 두 점 $(2, -2)$, $(3, 4)$ 를 지나므로
 $-2 = 3^{2-m} + n$ ② $4 = 3^{3-m} + n$ ③

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{을 하면}$$

$$6 = 3^{3-m} - 3^{2-m}, \quad 3^{-m}(27-9) = 6$$

$$3^{-m} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \quad \therefore m = 1$$

$m = 1$ 을 ①에 대입하면

$$-2 = 3 + n \quad \therefore n = -5 \text{ ④}$$

$$\therefore m + n = 1 + (-5) = -4 \text{ ⑤}$$

답 -4

채점 기준	비율
① m, n 을 이용하여 함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 평행이동한 그래프의 식을 나타낼 수 있다.	30 %
② 평행이동한 그래프가 지나는 두 점을 이용하여 두 방정식을 세울 수 있다.	30 %
③ m, n 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $m+n$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

008

선분 AB의 중점의 x 좌표가 0이므로

$$\frac{a+b}{2} = 0 \quad \therefore a+b=0 \quad \rightarrow y \text{축 위의 점의 } x \text{좌표는 0이다.}$$

함수 $y = \frac{1}{3^x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면

$$y = \frac{1}{3^{x-k}} \quad \therefore f(x) = \frac{1}{3^{x-k}}$$

$$\text{따라서 } f(a) = \frac{1}{3^{a-k}}, f(b) = \frac{1}{3^{b-k}} \text{이므로}$$

$$f(a)f(b) = 3^{-a+k} \times 3^{-b+k} \\ = 3^{2k-(a+b)} = 3^{2k} \quad (\because a+b=0)$$

이때 $f(a)f(b)=3$ 이므로

$$3^{2k}=3, 2k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{2}$$

답 ②

009

$$f(x)=-2^{4-3x}+k=-2^{-3(x-\frac{4}{3})}+k=-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-\frac{4}{3}}+k$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 $\frac{4}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 제2사분면을 지나지 않아야 하므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

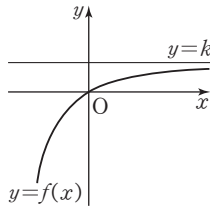
즉, $f(0)\leq 0$ 이어야 하므로

$$-\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}+k\leq 0 \quad \begin{array}{l} \rightarrow x=0 \text{ 일 때의 함수값} \\ f(0) \text{ 이 } 0 \text{ 보다 크면} \\ \text{제2사분면을 지난다.} \end{array}$$

$$k\leq (2^{-3})^{-\frac{4}{3}}$$

$$\therefore k\leq 16$$

따라서 자연수 k 의 최댓값은 16이다.



답 ④

010

함수 $y=2^x$ 의 그래프가 두 점 $(1, a), (b, 32)$ 를 지나므로

$$a=2^1=2$$

$$32=2^b \text{에서 } 2^5=2^b \quad \therefore b=5$$

$$\therefore a+b=2+5=7$$

답 ③

011

함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 의 그래프가 세 점 $(0.1, a), (0.2, b), (0.3, c)$ 를 지나므로

$$a=\left(\frac{1}{4}\right)^{0.1}, b=\left(\frac{1}{4}\right)^{0.2}, c=\left(\frac{1}{4}\right)^{0.3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_4 a^2 b^3 c^4 &= \log_4 a^2 + \log_4 b^3 + \log_4 c^4 \\ &= \log_4 \left(\frac{1}{4}\right)^{0.2} + \log_4 \left(\frac{1}{4}\right)^{0.6} + \log_4 \left(\frac{1}{4}\right)^{1.2} \\ &= 0.2 \log_4 4^{-1} + 0.6 \log_4 4^{-1} + 1.2 \log_4 4^{-1} \\ &= -0.2 - 0.6 - 1.2 = -2 \end{aligned}$$

답 -2

012

직선 $y=x$ 위의 점은 x 좌표와 y 좌표가 서로 같으므로 오른쪽 그림에서

$$a=3^0=1$$

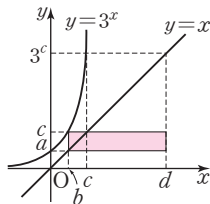
$$b=a=1$$

$$c=3^b=3$$

$$d=3^c=3^3=27$$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$(d-b)(c-a)=(27-1)(3-1)=26 \times 2=52$$



답 ②

013

두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 α, β ($\alpha < \beta$)라고 하면 두 점 P, Q의 y 좌표가 모두 10이므로

$$3^{-\alpha}=10, 9^{-\beta}=10$$

$$-\alpha=\log_3 10, -\beta=\log_9 10$$

$$\therefore \alpha=-\log_3 10, \beta=-\log_9 10$$

따라서 선분 PQ의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \beta - \alpha \\ &= -\log_9 10 - (-\log_3 10) \\ &= -\frac{1}{2} \log_3 10 + \log_3 10 \\ &= \frac{1}{2} \log_3 10 \end{aligned}$$

답 ②

014

함수 $y=2^{x+2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 함수 $y=2^{x-2}$ 의 그래프와 겹친다.

$$\therefore \overline{AB}=4$$

이때 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 이므로 $\overline{AC}=4$

점 A의 좌표를 $(a, 2^{a+2})$ 으로 놓으면 점 C의 좌표는 $(a, 2^{a-2})$ 이므로

$$\overline{AC}=2^{a+2}-2^{a-2}=4 \times 2^a - \frac{1}{4} \times 2^a = \frac{15}{4} \times 2^a$$

$$\text{즉, } \frac{15}{4} \times 2^a = 4 \text{ 이므로 } 2^a = \frac{16}{15}$$

따라서 점 C의 y 좌표는

$$2^{a-2} = \frac{1}{4} \times 2^a = \frac{1}{4} \times \frac{16}{15} = \frac{4}{15}$$

답 ②

015

$f(x)=3^x$ 이라고 하면 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 역함수 관계이므로

$$g(k)=2 \text{에서 } f(2)=k$$

$$\therefore k=3^2=9$$

답 9

016

함수 $y=5^x+1$ 의 역함수의 그래프가 점 $(4, \log_5 a)$ 를 지나므로 함수 $y=5^x+1$ 의 그래프는 점 $(\log_5 a, 4)$ 를 지난다.

따라서 $4=5^{\log_5 a}+1$ 이므로

$$a+1=4$$

$$\therefore a=3$$

답 ③

017

$(f \circ g)(x)=x$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이다.

$g(9)=k$ 로 놓으면 $f(k)=9$ 이므로

$$\left(\frac{1}{3}\right)^k=9=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$\therefore k=-2$$

답 ①

018

$g(m^2)=l$ 로 놓으면

$$f(l)=m^2 \dots\dots\dots ①$$

이때 $f(k)=m$ 에서 $a^k=m$ 이므로

$$f(l)=a^l=m^2=(a^k)^2=a^{2k} \quad \therefore l=2k$$

$$\therefore g(m^2)=l=2k \dots\dots\dots ②$$

답 2k

채점 기준	비율
① m^2 을 함수 $f(x)$ 를 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
② 주어진 조건과 지수법칙을 이용하여 $g(m^2)$ 을 k 를 이용하여 나타낼 수 있다.	60 %

019

$g(2)=k$ 로 놓으면 $f(k)=2$ 이므로

$$\frac{2^k+2^{-k}}{2^k-2^{-k}}=2, \quad \frac{2^{2k}+1}{2^{2k}-1}=2$$

$2^{2k}+1=2(2^{2k}-1), 2^{2k}=3 \rightarrow$ 분자와 분모에 각각 2^k 을 곱한다.

$$2k=\log_2 3$$

$$\therefore k=\frac{1}{2}\log_2 3=\log_2 \sqrt{3}$$

답 ①

020

주어진 세 수를 밑이 $\frac{1}{2}$ 인 거듭제곱의 꼴로 변형하면

$$A=\sqrt{\frac{1}{4}}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$B=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$C=\sqrt[5]{\frac{1}{16}}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}^{\frac{1}{5}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{5}}$$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $\frac{1}{3}<\frac{4}{5}<1$ 에서

$$\frac{1}{2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{5}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore A<C<B$$

답 ②

021

주어진 세 수를 밑이 3인 거듭제곱의 꼴로 변형하면

$$A=\sqrt{3^{\sqrt{3}}}=(3^{\sqrt{3}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$B=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$$

$$C=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}=3^{-\sqrt{3}}$$

이때 밑이 1보다 크므로 $-\sqrt{3}<\frac{1}{3}<\frac{\sqrt{3}}{2}$ 에서

$$3^{-\sqrt{3}}<3^{\frac{1}{3}}<3^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\therefore C<B<A$$

답 ⑤

022

주어진 세 수를 밑이 2인 거듭제곱의 꼴로 변형하면

$$A=\frac{1}{2^2}=2^{-2}$$

$$B=\sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{4}}$$

$$C=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=2^{-\frac{1}{3}}$$

이때 밑이 1보다 크므로 $-2<-\frac{1}{3}<\frac{1}{4}$ 에서

$$2^{-2}<2^{-\frac{1}{3}}<2^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore A<C<B$$

답 ②

|다른 풀이|

주어진 세 수를 밑이 $\frac{1}{2}$ 인 거듭제곱의 꼴로 변형하면

$$A=\frac{1}{2^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$B=\sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

$$C=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $-\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<2$ 에서

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

$$\therefore A<C<B$$

023

$0<a<1$ 이므로

ㄱ. $1<2$ 에서 $a^2<a$ (거짓)

ㄴ. $a<1$ 에서 $a<a^a$ (참)

ㄷ. $a^2<a$ 에서 $a^a<a^{a^2}$ (참)

ㄹ. $a^2<1$ 에서 $a<a^{a^2}$ (참) $\rightarrow$ ㄱ을 통해 알 수 있다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

024

$0<a<1$ 이므로 $a<1<2$ 에서

$$a^2<a<a^a$$

세 수 $\left(\frac{5}{3}\right)^a, \left(\frac{5}{3}\right)^{a^2}, \left(\frac{5}{3}\right)^{a^a}$ 의 밑이 1보다 크므로 $a^2<a<a^a$ 에서

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{a^2}<\left(\frac{5}{3}\right)^a<\left(\frac{5}{3}\right)^{a^a}$$

답 ③

025

(1) 함수 $y=3^{x-1}$ 은 밑이 1보다 크므로 $x=-1$ 일 때 최솟값, $x=1$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$$x=-1\text{일 때, }y=3^{-1-1}=3^{-2}=\frac{1}{9}$$

$$x=1\text{일 때, }y=3^{1-1}=3^0=1$$

따라서 최댓값은 1, 최솟값은 $\frac{1}{9}$ 이다.

(2) 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}$ 은 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $x=0$ 일 때 최댓값, $x=3$ 일 때 최솟값을 갖는다.

$$x=0\text{일 때, }y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2\times 0+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$$

$$x=3\text{일 때, } y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2 \times 3+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{128}$$

따라서 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 $\frac{1}{128}$ 이다.

답 (1) 최댓값: 1, 최솟값: $\frac{1}{9}$ (2) 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $\frac{1}{128}$

참고

$m \leq x \leq n$ 에서 지수함수 $y=a^x$ ($a>0, a \neq 1$)은

(1) $a>1$ 이면 최댓값 a^n , 최솟값 a^m 을 갖는다.

(2) $0<a<1$ 이면 최댓값 a^m , 최솟값 a^n 을 갖는다.

026

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ 은 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 구하는 최댓값은

$$f(1)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^{1-1}=1+1=2$$

답 2

027

$$y=2^{x-1} \times 4^{-x+1}=2^{x-1} \times 4^{-(x-1)}=\left(\frac{2}{4}\right)^{x-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 주어진 함수는 $x=-1$ 일 때 최댓값, $x=1$ 일 때 최솟값을 갖는다.

$$\therefore M=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4, m=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$$

$$\therefore Mm=4 \times 1=4$$

답 4

028

$$y=\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}=4^{x-2}$$

이때 밑이 1보다 크므로 주어진 함수는 $x=-3$ 일 때 최솟값 a , $x=4$ 일 때 최댓값 b 를 갖는다.

$$\therefore a=4^{-3-2}=\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{1}{1024}, b=4^{4-2}=4^2=16$$

$$\therefore ab=\frac{1}{1024} \times 16=\frac{1}{64}$$

답 ①

참고

주어진 함수의 치역은 $\left\{y \mid \frac{1}{1024} \leq y \leq 16\right\}$ 이다.

029

$$f(x)=2^{a-x}+4=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}+4$$

이때 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}$ 은 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 함수 $f(x)$ 는

$x=-2$ 일 때 최솟값 20을 갖고, $x=-4$ 일 때 최댓값을 갖는다.

즉, $f(-2)=20$ 이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2-a}+4=20, \left(\frac{1}{2}\right)^{-2-a}=16$$

$$2^{2+a}=2^4, 2+a=4$$

$$\therefore a=2$$

따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}+4$ 이므로 구하는 최댓값은

$$f(-4)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4-2}+4=2^6+4=64+4=68$$

답 ④

030

(1) $f(x)=x^2-4x+1$ 이라고 하면

$$f(x)=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$$

이므로 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최솟값 -3 을 갖는다.

이때 함수 $y=2^{f(x)}$ 은 밑이 1보다 크므로 $f(x)$ 가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

즉, 주어진 함수는 $x=2$ 일 때 최솟값 $2^{-3}=\frac{1}{8}$ 을 갖는다.

(2) $f(x)=x^2+2x+2$ 라고 하면

$$f(x)=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$$

이므로 $f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 최솟값 1을 갖는다.

이때 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 은 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $f(x)$ 가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

즉, 주어진 함수는 $x=-1$ 일 때 최댓값 $\frac{1}{2}$ 을 갖는다.

(3) $f(x)=-x^2+3$ 이라고 하면 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최댓값 3을 갖는다.

이때 함수 $y=\left(\frac{4}{3}\right)^{f(x)}$ 은 밑이 1보다 크므로 $f(x)$ 가 최대일 때 최댓값을 갖는다.

즉, 주어진 함수는 $x=0$ 일 때 최댓값 $\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}$ 를 갖는다.

(4) $f(x)=-x^2+2x-4$ 라고 하면

$$f(x)=-x^2+2x-4=-(x-1)^2-3$$

이므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최댓값 -3 을 갖는다.

이때 함수 $y=\left(\frac{2}{5}\right)^{f(x)}$ 은 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $f(x)$ 가 최대일 때 최솟값을 갖는다.

즉, 주어진 함수는 $x=1$ 일 때 최솟값 $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{8}$ 를 갖는다.

답 (1) 최솟값: $\frac{1}{8}$ (2) 최댓값: $\frac{1}{2}$

(3) 최댓값: $\frac{64}{27}$ (4) 최솟값: $\frac{125}{8}$

031

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=2^{-(x^2-6x+1)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-6x+1}$$

$g(x)=x^2-6x+1=(x-3)^2-8$ 은 $x=3$ 일 때 최솟값 -8 을 갖는다.

이때 $(f \circ g)(x)$ 의 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 함수 $(f \circ g)(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최댓값 $f(-8)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-8}=2^8=256$ 을 갖는다.

따라서 $a=3, b=256$ 이므로

$$a+b=3+256=259$$

답 ⑤

032

$$(i) -1 \leq x \leq 0 \text{일 때, } f(x)=2^{|x|}=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $-1 \leq x \leq 0$ 에서 $f(x)$ 는

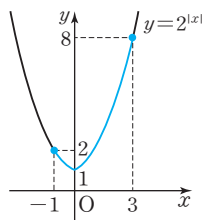
$x = -1$ 일 때 최댓값 $f(-1) = 2^{-(-1)} = 2$ 를 갖고,
 $x = 0$ 일 때 최솟값 $f(0) = 2^0 = 1$ 을 갖는다.
(ii) $0 \leq x \leq 3$ 일 때, $f(x) = 2^{|x|} = 2^x$
 밑이 1보다 크므로 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x)$ 는
 $x = 0$ 일 때 최솟값 $f(0) = 2^0 = 1$ 을 갖고,
 $x = 3$ 일 때 최댓값 $f(3) = 2^3 = 8$ 을 갖는다.
(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 8, 최솟값은 1이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은
 $8 + 1 = 9$

답 ③

다른 풀이 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & (-1 \leq x < 0) \\ 2^x & (0 \leq x \leq 3) \end{cases}$

$-1 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x) = 2^{|x|}$ 의 그래프는 오른쪽 그림의 색선과 같다.

함수 $f(x)$ 는 $x = 3$ 일 때 최댓값 $f(3) = 2^{|3|} = 8$ 을 갖고, $x = 0$ 일 때 최솟값 $f(0) = 2^{|0|} = 1$ 을 갖는다.
 따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은
 $8 + 1 = 9$



033

$f(x) = x^2 + 2x - 3$ 이라고 하면
 $f(x) = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$
 $x = -1$ 은 정의역에 속하지 않고 $1 \leq x \leq 4$ 에서 $f(1) = 0$, $f(4) = 21$
 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 일 때 최솟값 0, $x = 4$ 일 때 최댓값 21을 갖는다. ①
 이때 함수 $y = 2^{f(x)}$ 은 밑이 1보다 크므로 $f(x)$ 가 최대일 때 최댓값을 갖는다. ②
 즉, 주어진 함수는 $x = 4$ 일 때 최댓값 2^{21} 을 가지므로
 $a = 4$, $b = 21$
 $\therefore b - a = 21 - 4 = 17$ ③

답 17

채점 기준	비율
① 주어진 범위에서 $x^2 + 2x - 3$ 의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
② 주어진 함수가 최댓값을 갖는 경우를 찾을 수 있다.	30 %
③ a, b의 값을 구하여 $b - a$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

034

$g(x) = x^2 - 4x + 2$ 라고 하면
 $g(x) = x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 2$
 $1 \leq x \leq 5$ 에서 $g(1) = -1$, $g(2) = -2$, $g(5) = 7$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x = 2$ 일 때 최솟값 -2 , $x = 5$ 일 때 최댓값 7을 갖는다.
 이때 $0 < a < 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $g(x)$ 가 최대일 때 최솟값을 갖고, $g(x)$ 가 최소일 때 최댓값을 갖는다.
 즉, $f(5) = b$, $f(2) = 3$ 이므로
 $a^7 = b$, $a^{-2} = 3$
 $a^{-2} = 3$ 에서 $\frac{1}{a^2} = 3$, $a^2 = \frac{1}{3}$ $\therefore a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ($\because 0 < a < 1$)
 $\therefore b = a^7 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^7 = \frac{\sqrt{3}}{81}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{81}$

035

$y = -9^x + k \times 3^{x+2} - 20 = -(3^x)^2 + 9k \times 3^x - 20$
 $3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $y = -t^2 + 9kt - 20 = -\left(t - \frac{9}{2}k\right)^2 + \frac{81}{4}k^2 - 20$
 이므로 $t = \frac{9}{2}k$ 일 때 최댓값 $\frac{81}{4}k^2 - 20$ 을 갖는다.
 즉, $\frac{81}{4}k^2 - 20 = \frac{1}{4}$ 이므로
 $\frac{81}{4}k^2 = \frac{81}{4}$, $k^2 = 1$
 $\therefore k = 1$ ($\because k > 0$)

답 ①

036

$y = 4^x - 2^{x+2} + 6 = (2^x)^2 - 4 \times 2^x + 6$
 $2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 $\frac{1}{4} \leq t \leq 4$
 이때 주어진 함수는
 $y = t^2 - 4t + 6 = (t-2)^2 + 2$
 이므로
 $t = 2$, 즉 $x = 1$ 일 때 최솟값 2를 갖고,
 $t = 4$, 즉 $x = 2$ 일 때 최댓값 6을 갖는다.
 따라서 $M = 6$, $m = 2$ 이므로
 $M + m = 6 + 2 = 8$

답 ②

참고

$2^x = t$ 로 치환하므로 문제에서 주어진 x 의 값의 범위를 t 에 대하여 변환하는 것을 잊지 말아야 한다.

037

$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} + 5 = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 5$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $-2 \leq x \leq 3$ 에서 $\frac{1}{8} \leq t \leq 4$
 이때 주어진 함수는
 $y = t^2 - 4t + 5 = (t-2)^2 + 1$
 이므로
 $t = 2$, 즉 $x = -1$ 일 때 최솟값 1을 갖고,
 $t = 4$, 즉 $x = -2$ 일 때 최댓값 5를 갖는다.
 따라서
 $a = -1$, $b = 1$, $c = -2$, $d = 5$
 이므로 $a + b + c + d = -1 + 1 + (-2) + 5 = 3$

답 ②

038

$y = 4^x - 2^{x+a} + b = (2^x)^2 - 2^a \times 2^x + b$
 $2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $y = t^2 - 2^a t + b = (t - 2^{a-1})^2 + b - (2^{a-1})^2$ ①
 이므로 $t = 2^{a-1}$ 일 때 최솟값 $b - (2^{a-1})^2$ 을 갖는다.
 이때 주어진 함수는 $x = 3$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로
 $2^{a-1} = 2^3$, $b - (2^{a-1})^2 = -1$
 $2^{a-1} = 2^3$ 에서 $a - 1 = 3$ $\therefore a = 4$

$$b - (2^{a-1})^2 = -1 \text{에서}$$

$$b = (2^{a-1})^2 - 1 = (2^3)^2 - 1 = 63 \quad \text{②}$$

$$\therefore a + b = 4 + 63 = 67 \quad \text{③}$$

답 67

채점 기준	비율
① $2^x = t$ 로 놓고 주어진 함수를 t 에 대한 이차함수로 나타낼 수 있다.	30 %
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	60 %
③ $a + b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

039

(1) $2^{x-3} = 16$ 에서 $2^{x-3} = 2^4$ 이므로
 $x - 3 = 4 \quad \therefore x = 7$

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = 8$ 에서 $2^{-2(x-1)} = 2^3$ 이므로
 $-2(x-1) = 3, x-1 = -\frac{3}{2} \quad \therefore x = -\frac{1}{2}$

(3) $9^{x+1} = 3\sqrt{3}$ 에서 $3^{2(x+1)} = 3^{\frac{3}{2}}$ 이므로
 $2(x+1) = \frac{3}{2}, x+1 = \frac{3}{4} \quad \therefore x = -\frac{1}{4}$

(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = 27^{x+2}$ 에서 $3^{-(x+2)} = 3^{3(x+2)}$ 이므로
 $-(x+2) = 3(x+2), -x-2 = 3x+6$
 $4x = -8 \quad \therefore x = -2$

답 (1) $x = 7$ (2) $x = -\frac{1}{2}$ (3) $x = -\frac{1}{4}$ (4) $x = -2$

040

$$3^{x-8} = \left(\frac{1}{27}\right)^x \text{에서 } 3^{x-8} = 3^{-3x} \text{이므로}$$

$$x - 8 = -3x, 4x = 8 \quad \therefore x = 2$$

답 2

041

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x} = 3 \times \sqrt[4]{27} \text{에서}$$

$$3^{-(1-2x)} = 3 \times 3^{\frac{3}{4}}, 3^{-1+2x} = 3^{\frac{7}{4}}$$

$$-1 + 2x = \frac{7}{4}, 2x = \frac{11}{4} \quad \therefore x = \frac{11}{8}$$

따라서 $a = \frac{11}{8}$ 이므로

$$16a = 16 \times \frac{11}{8} = 22$$

답 ③

042

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x^2} = 4^{x+a} \text{에서 } 2^{-(2-x^2)} = 2^{2(x+a)} \text{이므로}$$

$$-(2-x^2) = 2(x+a), x^2 - 2 = 2x + 2a$$

$$\therefore x^2 - 2x - 2a - 2 = 0 \quad \text{..... ①}$$

이때 주어진 방정식의 한 근이 -1 이므로 ①에 $x = -1$ 을 대입하면

$$(-1)^2 - 2 \times (-1) - 2a - 2 = 0, 2a = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{2} \text{을 ①에 대입하면}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0, (x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 다른 한 근은 3이다.

답 3

043

$$\frac{(16^x)^x}{2} = 2^{3x} \text{에서}$$

$$(2^{4x})^x = 2^{3x} \times 2, 2^{4x^2} = 2^{3x+1}$$

$$4x^2 = 3x + 1, 4x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$(4x+1)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -\frac{1}{4} \text{ 또는 } x = 1$$

즉, $\alpha = -\frac{1}{4}, \beta = 1$ 또는 $\alpha = 1, \beta = -\frac{1}{4}$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2 = \frac{17}{16}$$

답 ①

[다른 풀이]

이차방정식 $4x^2 - 3x - 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{3}{4}, \alpha\beta = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{17}{16}$$

044

$$9^x - 6 \times 3^{x+1} + 9 = 0 \text{에서 } (3^x)^2 - 18 \times 3^x + 9 = 0$$

$$3^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 18t + 9 = 0$$

위 이차방정식의 두 근은 $3^a, 3^b$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$3^a \times 3^b = 9, 3^{a+b} = 3^2$$

$$\therefore a + b = 2$$

답 ③

045

$$a^{2x} - 2a^x = 3 \text{에서 } (a^x)^2 - 2a^x - 3 = 0$$

$$a^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \quad \text{..... ①}$$

$$(t+1)(t-3) = 0 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 3$$

$$t > 0 \text{이므로 } t = 3$$

$$\therefore a^x = 3 \quad \text{..... ②}$$

이때 한 근이 $x = 2$ 이므로 위의 식에 대입하면

$$a^2 = 3 \quad \therefore a = \sqrt{3} \ (\because a > 0) \quad \text{..... ③}$$

답 $\sqrt{3}$

채점 기준	비율
① $a^x = t$ 로 놓고 주어진 방정식을 t 에 대한 이차방정식으로 나타낼 수 있다.	40 %
② a^x 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ 주어진 조건을 이용하여 a 의 값을 구할 수 있다.	30 %

046

방정식 $4^x - 3 \times 2^{x+1} + 2^a = 0$ 의 한 근이 1이므로 방정식에 $x=1$ 을 대입하면

$$4 - 3 \times 2^2 + 2^a = 0, 2^a = 8 = 2^3$$

$$\therefore a = 3$$

$a=3$ 을 주어진 방정식에 대입하면

$$4^x - 3 \times 2^{x+1} + 2^3 = 0 \quad \therefore (2^x)^2 - 6 \times 2^x + 8 = 0$$

$$2^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 6t + 8 = 0, (t-2)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 4$$

$$\text{즉, } 2^x = 2 \text{ 또는 } 2^x = 4 = 2^2 \text{이므로}$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 다른 한 근은 2이므로 $b=2$

$$\therefore a+b=3+2=5$$

답 ①

047

방정식 $a^x + \frac{1}{a^x} = \frac{10}{3}$ 의 한 근이 1이므로 방정식에 $x=1$ 을 대입하면

$$a + \frac{1}{a} = \frac{10}{3}$$

양변에 $3a$ 를 곱하여 정리하면

$$3a^2 - 10a + 3 = 0, (3a-1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{3} \ (\because 0 < a < 1)$$

주어진 방정식에 $a = \frac{1}{3}$ 을 대입하면

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x + \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^x} = \frac{10}{3}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3}, 3t^2 - 10t + 3 = 0$$

$$(3t-1)(t-3) = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{3} \text{ 또는 } t = 3$$

$$\text{즉, } \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3 \text{이므로}$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = -1$$

따라서 구하는 다른 한 근은 -1 이다.

답 ④

048

$$\frac{4^x + 4^{-x}}{4^x - 4^{-x}} = 3 \text{에서 } 4^x + 4^{-x} = 3(4^x - 4^{-x})$$

$$4^x + 4^{-x} = 3 \times 4^x - 3 \times 4^{-x}$$

$$2 \times 4^x - 4 \times 4^{-x} = 0, 4^x - 2 \times 4^{-x} = 0$$

양변에 4^x 을 곱하면

$$4^{2x} - 2 = 0$$

$$4^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2 = 0, t^2 = 2$$

$$\therefore t = \sqrt{2} \ (\because t > 0)$$

$$\text{따라서 } 4^x = \sqrt{2} \text{이므로 } 4^x = 2^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{4}} \text{에서}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

답 ④

049

지수가 같으므로 밑이 같거나 지수가 0이어야 한다.

(i) 밑이 같을 때

$$x^2 - 1 = 8 \text{이므로 } x^2 = 9$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 3$$

(ii) 지수가 0일 때

$$x - 10 = 0 \text{이므로 } x = 10 \quad \text{→ } x=10 \text{이던 주어진 방정식은 } 99^0 = 8^0 = 1 \text{로 등식이 성립한다.}$$

(i), (ii)에서 $x = -3$ 또는 $x = 3$ 또는 $x = 10$ 이므로 모든 x 의 값의 합은

$$(-3) + 3 + 10 = 10$$

답 ⑤

050

지수가 같으므로 밑이 같거나 지수가 0이어야 한다.

(i) 밑이 같을 때

$$x + 1 = 4 \text{이므로 } x = 3$$

(ii) 지수가 0일 때

$$x^2 - 8 = 0 \text{이므로 } x^2 = 8 \quad \therefore x = 2\sqrt{2} \ (\because x > -1)$$

(i), (ii)에서 $x = 3$ 또는 $x = 2\sqrt{2}$ 이므로 모든 근의 곱은

$$3 \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

답 ⑥

051

밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1이어야 한다.

(i) 지수가 같을 때

$$2x - 4 = 8 - x \text{이므로 } 3x = 12 \quad \therefore x = 4$$

(ii) 밑이 1, 즉 $x=1$ 일 때

$$\text{주어진 방정식은 } 1^{-2} = 1^7 \text{이므로 등식이 성립한다.}$$

(i), (ii)에서 $x = 1$ 또는 $x = 4$ 이므로 모든 근의 합은

$$1 + 4 = 5$$

답 5

052

밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1이어야 한다.

(i) 지수가 같을 때

$$x^2 - 2x - 5 = 2x + 7 \text{이므로 } x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x+2)(x-6) = 0 \quad \therefore x = 6 \ (\because x > 2)$$

(ii) 밑이 1, 즉 $x=3$ 일 때

$$\text{주어진 방정식은 } 1^{-2} = 1^{13} \text{이므로 등식이 성립한다.}$$

(i), (ii)에서 $x = 3$ 또는 $x = 6$ 이므로 모든 근의 합은

$$3 + 6 = 9$$

답 ④

053

밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1이어야 한다.

(i) 지수가 같을 때

$$2(x+2) = x^2 + x - 2 \text{이므로 } 2x + 4 = x^2 + x - 2$$

$$x^2 - x - 6 = 0, (x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

(ii) 밑이 1, 즉 $x=-5$ 일 때

$$\text{주어진 방정식은 } 1^{-6} = 1^{18} \text{이므로 등식이 성립한다.}$$

(i), (ii)에서 $x = -5$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 3$ 이므로 모든 근의 곱은 $(-5) \times (-2) \times 3 = 30$

답 ③

054

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{5-x} \text{에서 } \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{x-5}$$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$$2x \leq x-5 \quad \therefore x \leq -5 \quad \rightarrow \text{부등호 방향이 반대로 바뀐다.}$$

답 $x \leq -5$

055

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x} \leq 5^{x+4} \text{에서 } 5^{2x-1} \leq 5^{x+4}$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$2x-1 \leq x+4 \quad \therefore x \leq 5$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x 는 1, 2, 3, 4, 5이므로 그 합은

$$1+2+3+4+5=15$$

답 ⑤

056

$$a^{2x-1} > \sqrt[3]{a^9} \times a^{3x} \text{에서}$$

$$a^{2x-1} > a^{\frac{2}{3}} \times a^{3x} \quad \therefore a^{2x-1} > a^{\frac{2}{3}+3x}$$

이때 $0 < a < 1$ 이므로 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 부등호 방향이 반대로 바뀐다.

$$2x-1 < \frac{2}{3}+3x \quad \therefore x > -\frac{5}{3}$$

답 ①

057

$$\left(\frac{1}{25}\right)^x < \frac{1}{125} \text{에서 } \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{5}\right)^3$$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$$2x > 3 \quad \therefore x > \frac{3}{2} \quad \dots\dots\dots ㉠$$

$$2^{x^2+x} \leq 4^{x^2+x-6} \text{에서 } 2^{x^2+x} \leq 2^{2(x^2+x-6)}$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$x^2+x \leq 2(x^2+x-6), \quad x^2+x \leq 2x^2+2x-12$$

$$x^2+x-12 \geq 0, \quad (x+4)(x-3) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq 3 \quad \dots\dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$x \geq 3$$

따라서 구하는 정수 x 의 최솟값은 3이다.

답 ②

058

$$3^{ax(x-2)} < 9 \text{에서 } 3^{ax^2-2ax} < 3^2$$

이때 밑이 1보다 크므로 $ax^2-2ax < 2$

$$\therefore ax^2-2ax-2 < 0 \quad \dots\dots\dots ㉠$$

㉠이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 한다.

(i) $a=0$ 일 때

㉠은 $-2 < 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때

이차방정식 $ax^2-2ax-2=0$ 의 판별식을 D 라고 하면 $a < 0$, $D < 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - a \times (-2) < 0 \text{에서}$$

$$a^2+2a < 0, \quad a(a+2) < 0 \quad \therefore -2 < a < 0$$

(i), (ii)에서 $-2 < a \leq 0$

따라서 정수 a 는 $-1, 0$ 의 2개이다.

$a < 0, D < 0$ 을 모두 만족시킨다.

답 ②

059

$$4^x - 10 \times 2^x + 16 \leq 0 \text{에서 } (2^x)^2 - 10 \times 2^x + 16 \leq 0$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 10t + 16 \leq 0, \quad (t-2)(t-8) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq t \leq 8$$

즉, $2 \leq 2^x \leq 2^3$ 이고 밑이 1보다 크므로

$$1 \leq x \leq 3$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x 는 1, 2, 3이므로 그 합은

$$1+2+3=6$$

답 6

060

$$9^x - 90 \times 3^{x-1} + 81 < 0 \text{에서 } (3^x)^2 - 30 \times 3^x + 81 < 0$$

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 30t + 81 < 0, \quad (t-3)(t-27) < 0$$

$$\therefore 3 < t < 27$$

즉, $3 < 3^x < 3^3$ 이고 밑이 1보다 크므로

$$1 < x < 3$$

따라서 주어진 부등식의 해가 아닌 것은 ①이다.

답 ①

061

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 1 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^x < 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$$

$$\therefore \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 < 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t \text{ } (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - \frac{3}{2}t - 1 < 0, \quad 2t^2 - 3t - 2 < 0$$

$$(2t+1)(t-2) < 0 \quad \therefore -\frac{1}{2} < t < 2$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $0 < t < 2$

즉, $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ 이고 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$$x > -1$$

답 ③

062

$$9^{-x} - 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 6 > 0 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^x - 6 > 0 \quad \text{..... ①}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - t - 6 > 0, (t+2)(t-3) > 0$$

$$\therefore t < -2 \text{ 또는 } t > 3$$

$$\text{그런데 } t > 0 \text{이므로 } t > 3$$

$$\text{즉, } \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \text{이고 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로}$$

$$x < -1 \quad \text{..... ②}$$

$$\text{따라서 구하는 정수 } x \text{의 최댓값은 } -2 \text{이다.} \quad \text{..... ③}$$

답 -2

채점 기준	비율
① a^x 의 꼴이 반복되도록 주어진 부등식을 정리할 수 있다.	20 %
② 치환을 이용하여 주어진 부등식을 풀 수 있다.	60 %
③ 정수 x 의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

063

$$(2^x - 10)(2^x - 1000) < 0 \text{에서}$$

$$10 < 2^x < 1000$$

$$\text{이때 } 2^3 = 8, 2^4 = 16 \text{이고 } 2^9 = 512, 2^{10} = 1024 \text{이므로}$$

$$10 < 2^4 \leq 2^x \leq 2^9 < 1000$$

$$\text{즉, } 2^4 \leq 2^x \leq 2^9 \text{이고 밑이 1보다 크므로}$$

$$4 \leq x \leq 9$$

$$\text{따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 } x \text{는 } 4, 5, 6, 7, 8, 9 \text{이}$$

$$\text{므로 그 합은}$$

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$$

답 ②

064

$$(i) 0 < x < 1 \text{일 때}$$

$$3x - 1 > 2(x + 2), 3x - 1 > 2x + 4$$

$$\therefore x > 5$$

$$\text{그런데 } 0 < x < 1 \text{이므로 해는 없다.}$$

$$(ii) x = 1 \text{일 때, } 1 < 1 \text{이므로 부등식이 성립하지 않는다.}$$

$$(iii) x > 1 \text{일 때}$$

$$3x - 1 < 2(x + 2), 3x - 1 < 2x + 4$$

$$\therefore x < 5$$

$$\text{그런데 } x > 1 \text{이므로 } 1 < x < 5$$

$$(i) \sim (iii) \text{에서 주어진 부등식의 해는}$$

$$1 < x < 5$$

$$\text{따라서 } \alpha = 1, \beta = 5 \text{이므로}$$

$$\alpha + \beta = 1 + 5 = 6$$

답 6

065

$$(i) 0 < x < 1 \text{일 때}$$

$$x^2 - 8 < 2x + 7, x^2 - 2x - 15 < 0$$

$$(x + 3)(x - 5) < 0 \quad \therefore -3 < x < 5$$

$$\text{그런데 } 0 < x < 1 \text{이므로 } 0 < x < 1$$

$$(ii) x = 1 \text{일 때, } 1 > 1 \text{이므로 부등식이 성립하지 않는다.}$$

$$(iii) x > 1 \text{일 때}$$

$$x^2 - 8 > 2x + 7, x^2 - 2x - 15 > 0$$

$$(x + 3)(x - 5) > 0 \quad \therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 5$$

$$\text{그런데 } x > 1 \text{이므로 } x > 5$$

$$(i) \sim (iii) \text{에서 주어진 부등식의 해는}$$

$$0 < x < 1 \text{ 또는 } x > 5$$

$$\text{따라서 주어진 부등식을 만족시키는 } x \text{의 값은 ⑤이다.}$$

답 ⑤

066

$$(i) 0 < x < 1 \text{일 때}$$

$$x^x \geq x^4 \quad \therefore x \leq 4$$

→ 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 부등호의 방향이 바뀐다.

$$\text{그런데 } 0 < x < 1 \text{이므로 } 0 < x < 1$$

$$(ii) x = 1 \text{일 때, } 1 \leq 1 \text{이므로 부등식이 성립한다.}$$

$$(iii) x > 1 \text{일 때}$$

$$x^x \leq x^4 \quad \therefore x \leq 4$$

$$\text{그런데 } x > 1 \text{이므로 } 1 < x \leq 4$$

$$(i) \sim (iii) \text{에서 주어진 부등식의 해는}$$

$$0 < x \leq 4$$

답 ④

067

$$(i) 0 < x - 1 < 1, \text{ 즉 } 1 < x < 2 \text{일 때}$$

$$3x - 1 \leq 5x + 4, 2x \geq -5$$

$$\therefore x \geq -\frac{5}{2}$$

$$\text{그런데 } 1 < x < 2 \text{이므로 } 1 < x < 2 \quad \text{..... ①}$$

$$(ii) x - 1 = 1, \text{ 즉 } x = 2 \text{일 때}$$

$$1 \geq 1 \text{이므로 부등식이 성립한다.} \quad \text{..... ②}$$

$$(iii) x - 1 > 1, \text{ 즉 } x > 2 \text{일 때}$$

$$3x - 1 \geq 5x + 4, 2x \leq -5$$

$$\therefore x \leq -\frac{5}{2}$$

$$\text{그런데 } x > 2 \text{이므로 해는 없다.} \quad \text{..... ③}$$

$$(i) \sim (iii) \text{에서 주어진 부등식의 해는}$$

$$1 < x \leq 2 \quad \text{..... ④}$$

답 1 < x ≤ 2

채점 기준	비율
① 0 < (밑) < 1일 때, x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
② (밑) = 1일 때, 주어진 부등식이 성립함을 알 수 있다.	30 %
③ (밑) > 1일 때, 주어진 부등식의 해가 없음을 알 수 있다.	30 %
④ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	10 %

068

$$(i) 0 < x + 2 < 1, \text{ 즉 } -2 < x < -1 \text{일 때}$$

$$2x^2 - 3x > -x^2 + 4x - 2, 3x^2 - 7x + 2 > 0$$

$$(3x - 1)(x - 2) > 0 \quad \therefore x < \frac{1}{3} \text{ 또는 } x > 2$$

$$\text{그런데 } -2 < x < -1 \text{이므로 } -2 < x < -1$$

$$(ii) x + 2 = 1, \text{ 즉 } x = -1 \text{일 때, } 1 < 1 \text{이므로 부등식이 성립하지 않는다.}$$

(iii) $x+2>1$, 즉 $x>-1$ 일 때

$$2x^2-3x<-x^2+4x-2, 3x^2-7x+2<0$$

$$(3x-1)(x-2)<0 \quad \therefore \frac{1}{3}<x<2$$

그런데 $x>-1$ 이므로 $\frac{1}{3}<x<2$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$-2<x<-1 \text{ 또는 } \frac{1}{3}<x<2$$

따라서 $a=-2, b=-1, c=\frac{1}{3}, d=2$ 이므로

$$\begin{aligned} 6(a+b+c+d) &= 6\left\{-2+(-1)+\frac{1}{3}+2\right\} \\ &= 6 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -4 \end{aligned}$$

답 ①

실력을 높이는 연습 문제

본문 053쪽

01

$$\textcircled{1} f(3)=a^3, f(1)f(2)=a \times a^2=a^3 \quad \therefore f(3)=f(1)f(2)$$

$$\textcircled{2} f(4)=a^4, \{f(2)\}^2=(a^2)^2=a^4 \quad \therefore f(4)=\{f(2)\}^2$$

$$\textcircled{3} f(6)=a^6, \sqrt{f(12)}=\sqrt{a^{12}}=a^6 \quad \therefore f(6)=\sqrt{f(12)}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} f(-4) &= a^{-4} = \left(\frac{1}{a}\right)^4, \frac{1}{f(8)} = \frac{1}{a^8} = \left(\frac{1}{a}\right)^8 \\ \therefore f(-4) &\neq \frac{1}{f(8)} \end{aligned}$$

$$\textcircled{5} f\left(\frac{1}{10}\right) = a^{\frac{1}{10}}, {}^{20}\sqrt{f(2)} = {}^{20}\sqrt{a^2} = a^{\frac{1}{10}} \quad \therefore f\left(\frac{1}{10}\right) = {}^{20}\sqrt{f(2)}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

02

조건 (가)에 의하여 $f(x)=a^{bx-1}$ 의 그래프와 $g(x)=a^{1-bx}$ 의 그래프가 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이므로 $f(1)=g(1)$ 이 성립한다.

즉, $a^{b-1}=a^{1-b}$ 이고 $a>1$ 이므로

$$b-1=1-b, 2b=2 \quad \therefore b=1$$

$$\therefore f(x)=a^{x-1}, g(x)=a^{1-x}$$

또, 조건 (나)에 의하여 $f(2)+g(2)=\frac{17}{4}$ 이므로

$$a+a^{-1}=\frac{17}{4}$$

양변에 $4a$ 를 곱하면

$$4a^2+4=17a, 4a^2-17a+4=0$$

$$(4a-1)(a-4)=0 \quad \therefore a=4 \quad (\because a>1)$$

$$\therefore a+b=4+1=5$$

답 ⑤

03

함수 $y=4^x-6$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$$y=4^{x-a}-6+b$$

이 함수의 그래프의 점근선이 직선 $y=-2$ 이므로

$$-6+b=-2 \quad \therefore b=4$$

함수 $y=4^{x-a}-2$ 의 그래프가 원점을 지나므로

$$0=4^{-a}-2, 4^{-a}=2$$

$$2^{-2a}=2, -2a=1 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore ab=-\frac{1}{2} \times 4 = -2$$

답 ④

참고

함수 $y=a^{x-m}+n$ ($a>0, a \neq 1$)에서

(1) 치역: $\{y|y>n\}$

(2) 점근선의 방정식: $y=n$

04

$f(x)=2^x, g(x)=\sqrt{x}$ 로 놓으면 $f(a)=g\left(\frac{1}{2}\right)$ 이므로

$$2^a=\sqrt{\frac{1}{2}}, 2^a=2^{-\frac{1}{2}} \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$$

또, $f\left(\frac{1}{2}\right)=g(b)$ 이므로

$$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{b} \quad \therefore b=(2^{\frac{1}{2}})^2=2$$

$$\therefore ab=-\frac{1}{2} \times 2 = -1$$

답 ②

05

$g\left(\frac{3}{4}\right)=k$ 로 놓으면 $f(k)=\frac{3}{4}$ 이므로

$$\frac{2^k-2^{-k}}{2}=\frac{3}{4}, 2^k-2^{-k}=\frac{3}{2}$$

$2^k=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$t-\frac{1}{t}=\frac{3}{2}, 2t^2-3t-2=0$$

$$(2t+1)(t-2)=0 \quad \therefore t=2 \quad (\because t>0)$$

즉, $2^k=2$ 이므로 $k=1$

$$\therefore g\left(\frac{3}{4}\right)=1$$

답 ②

06

(i) $0<a<1$ 일 때

밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $x=-3$ 일 때 최댓값, $x=2$ 일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $f(-3)=32f(2)$ 이므로

$$a^{-3}=32a^2, a^5=\frac{1}{32}=\left(\frac{1}{2}\right)^5 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

(ii) $a>1$ 일 때

밑이 1보다 크므로 $x=-3$ 일 때 최솟값, $x=2$ 일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 $f(2)=32f(-3)$ 이므로

$$a^2=32a^{-3}, a^5=32=2^5 \quad \therefore a=2$$

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$ 이므로 모든 실수 a 의 값의 합은

$$\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

답 ④

07

(i) $x \leq 2$ 일 때

$$y = 3^{-|x-2|+1} = 3^{-(x-2)+1} = 3^{x-1}$$

밑이 1보다 크므로 $x=2$ 일 때 최대이다.

따라서 최댓값은 $3^{2-1}=3 \rightarrow x \leq 2$ 의 범위에서 가장 큰 수이다.

(ii) $x \geq 2$ 일 때

$$y = 3^{-|x-2|+1} = 3^{-(x-2)+1} = 3^{-x+3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}$$

밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $x=2$ 일 때 최대이다.

따라서 최댓값은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3} = 3 \rightarrow x \geq 2$ 의 범위에서 가장 작은 수이다.

(i), (ii)에서 구하는 최댓값은 3이다.

답 ③

|다른 풀이|

$$y = 3^{-|x-2|+1} = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|}$$

밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $|x-2|$ 가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

$|x-2|$ 는 $x=2$ 일 때 최솟값 0을 가지므로 함수 $y = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|}$ 의 최댓값은 $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 3$

08

$$25^x - 2 \times 5^{x+1} + k > 0 \text{에서}$$

$$(5^x)^2 - 10 \times 5^x + k > 0$$

$$5^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 10t + k > 0$$

$t > 0$ 에서 위 부등식이 항상 성립하려면 이차함수 $y = t^2 - 10t + k$ 의 $t > 0$ 에서의 최솟값이 0보다 커야 한다.

이때 함수 $y = t^2 - 10t + k = (t-5)^2 + k - 25$ 는 $t=5$ 일 때 최솟값 $k-25$ 를 가지므로

$$k-25 > 0 \quad \therefore k > 25$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 26이다.

답 ④

참고

이차방정식 $t^2 - 10t + k = 0$ 의 판별식을 이용하는 방법을 생각할 수도 있지만 $t > 0$ 이라는 조건이 있으므로 $t > 0$ 에서의 최솟값을 이용하여 구한다.

09

문제 접근하기

4^{3+x} 과 4^{3-x} 은 모두 양수이고, 두 식을 곱하면 미지수가 사라지고 상수만 남는다. 이와 같은 경우는 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면 최솟값이나 최댓값을 쉽게 구할 수 있다.

$4^{3+x} > 0$, $4^{3-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4^{3+x} + 4^{3-x} \geq 2\sqrt{4^{3+x} \times 4^{3-x}} = 2\sqrt{4^6}$$

$$= 2 \times 4^3 = 128 \text{ (단, 등호는 } x=0 \text{일 때 성립한다.)}$$

따라서 주어진 함수의 최솟값은 128이다.

$$\rightarrow 4^{3+x} = 4^{3-x} \text{에서}$$

$$3+x=3-x$$

$$\therefore x=0$$

답 ③

풍샘 개념 CHECK

산술평균과 기하평균의 관계_高 公統 수학 2

$a > 0$, $b > 0$ 일 때

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.)

10

$$\frac{4^{x^2-1}}{2^{x-2}} = 8 \text{에서 } \frac{2^{2(x^2-1)}}{2^{x-2}} = 2^3$$

$$2^{2x^2-2-(x-2)} = 2^3, 2^{2x^2-x} = 2^3$$

$$2x^2-x=3, 2x^2-x-3=0$$

$$(x+1)(2x-3)=0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}$$

이때 $\alpha > \beta$ 이므로

$$\alpha = \frac{3}{2}, \beta = -1$$

$$\therefore 2\alpha + \beta = 2 \times \frac{3}{2} + (-1) = 2$$

답 2

11

문제 접근하기

3^x 의 꼴이 반복되는 지수방정식이므로 $3^x = t$ 로 놓고 주어진 방정식을 t 에 대한 이차방정식으로 바꾸어 생각한다. 이때 $t > 0$ 이어야 하므로 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 때, t 에 대한 이차방정식은 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

$$9^x - 2(k+1) \times 3^x + 4 = 0 \text{에서}$$

$$(3^x)^2 - 2(k+1) \times 3^x + 4 = 0$$

$$3^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2(k+1)t + 4 = 0$$

..... ①

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 방정식 ①이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다. $\rightarrow t > 0$ 이므로 두 실근은 양수이어야 한다.

방정식 ①의 서로 다른 두 양의 실근을 α , β , 판별식을 D 라고 하면

$$(i) \frac{D}{4} = (k+1)^2 - 4 > 0 \text{에서}$$

$$k^2 + 2k + 1 - 4 > 0, k^2 + 2k - 3 > 0$$

$$(k+3)(k-1) > 0$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k > 1$$

$$(ii) \alpha + \beta = 2(k+1) > 0 \text{에서 } k > -1$$

$$(iii) \alpha\beta = 4 > 0 \text{이므로 모든 실수 } k \text{에 대하여 성립한다.}$$

$$(i) \sim (iii) \text{에서 } k \text{의 값의 범위는}$$

$$k > 1$$

답 ⑤

풍샘 개념 CHECK

이차방정식의 실근의 부호_高 公統 수학 1

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 서로 다른 두 실근을 α , β , 판별식을 D 라고 하면

$$(1) \text{ 두 근이 모두 양수일 조건 } \Rightarrow D > 0, \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$$

$$(2) \text{ 두 근이 모두 음수일 조건 } \Rightarrow D > 0, \alpha + \beta < 0, \alpha\beta > 0$$

$$(3) \text{ 두 근이 서로 다른 부호일 조건 } \Rightarrow \alpha\beta < 0$$

12

$$\begin{cases} 2^x + 4^y = 12 \\ 2^{x+2y} = 32 \end{cases} \text{에서 } \begin{cases} 2^x + 2^{2y} = 12 \\ 2^x \times 2^{2y} = 32 \end{cases}$$

$2^x = A, 2^{2y} = B$ ($A > 0, B > 0$)로 놓으면

$$\begin{cases} A + B = 12 \\ AB = 32 \end{cases}$$

A, B 는 이차방정식 $t^2 - 12t + 32 = 0$ 의 두 근이므로

$$(t-4)(t-8)=0 \quad \therefore t=4 \text{ 또는 } t=8$$

따라서 $A=4, B=8$ 또는 $A=8, B=4$ 이므로

$$2^x=4, 2^{2y}=8 \text{ 또는 } 2^x=8, 2^{2y}=4$$

$$\text{즉, } 2^x=2^2, 2^{2y}=2^3 \text{ 또는 } 2^x=2^3, 2^{2y}=2^2 \text{이므로}$$

$$\therefore x=2, y=\frac{3}{2} \text{ 또는 } x=3, y=1$$

이때 α, β 는 정수이므로 $\alpha=3, \beta=1$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

답 10

13

밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1이어야 한다.

(i) 지수가 같을 때

$$2x+10=x^2-a \text{이므로 } x^2-2x-a-10=0$$

이 이차방정식의 두 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-a-10$$

(ii) 밑이 1, 즉 $x=-1$ 일 때

주어진 방정식은 $1^8=1^{1-a}$ 이므로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식을 만족시키는 모든 x 의 값의 곱은

$$(-a-10) \times (-1) = a+10$$

$$\text{즉, } a+10=5 \text{이므로 } a=-5$$

답 ②

참고

$a=-50$ 이면 이차방정식 $x^2-2x-a-10=0$ 은 $x^2-2x-5=0$ 이므로 $x=1 \pm \sqrt{6}$

따라서 주어진 이차방정식은 실근을 갖고, 두 실근은 조건 $x > -2$ 를 만족시킨다.

14

문제 접근하기

$A \cap B = B$ 이면 집합 B 의 모든 원소가 집합 A 에 모두 속한다. 즉, 두 집합 A, B 의 원소를 $a < x < \beta$ 의 꼴로 나타낸 후 $B \subset A$ 를 만족시키는 a 의 값의 범위를 구해야 한다.

이때 부등식에서 등호가 없음에 주의한다.

$$(x-1)(x-a) < 0 \text{에서}$$

$$1 < x < a \quad (\because a > 1) \quad \therefore A = \{x \mid 1 < x < a\}$$

$$\text{또, } 4^x - 5 \times 2^{x+2} + 64 < 0 \text{에서}$$

$$(2^x)^2 - 20 \times 2^x + 64 < 0$$

$$2^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 20t + 64 < 0, (t-4)(t-16) < 0$$

$$\therefore 4 < t < 16$$

$$\text{즉, } 2^2 < 2^x < 2^4 \text{이고 밑이 1보다 크므로}$$

$$2 < x < 4 \quad \therefore B = \{x \mid 2 < x < 4\}$$

이때 $A \cap B = B$ 에서 $B \subset A$ 이어야

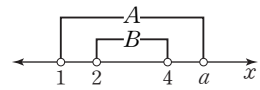
하므로 집합 B 의 모든 원소가 집합

A 에 속하려면

$$a \geq 4 \rightarrow a=4 \text{이더라도 } B \subset A, \text{ 즉 } A \cap B = B \text{가 성립한다.}$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 4이다.

답 ②



15

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4} \leq 2^{k(3-2x)} \text{에서 } \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k(2x-3)}$$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$$x^2+4 \geq k(2x-3)$$

$$\therefore x^2 - 2kx + 3k + 4 \geq 0$$

위 이차부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식

$$x^2 - 2kx + 3k + 4 = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라고 하면}$$

$$\frac{D}{4} = k^2 - (3k + 4) \leq 0$$

$$k^2 - 3k - 4 \leq 0, (k+1)(k-4) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq k \leq 4$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 4, 최솟값은 -1이므로 구하는 값은

$$4 + (-1) = 3$$

답 3

16

$a^{2x} - b \times a^x + 5 < 0$ 에서 $a^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - bt + 5 < 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{7}$$

$$\text{또, } -1 < x < 2 \text{에서 } a^{-1} < a^x < a^2 \quad (\because a > 1)$$

$$\therefore \frac{1}{a} < t < a^2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{8}$$

이때 ⑦의 해가 ⑧이므로 이차방정식 $t^2 - bt + 5 = 0$ 의 두 근은 $\frac{1}{a}, a^2$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{a} + a^2 = b, \frac{1}{a} \times a^2 = 5$$

$$\frac{1}{a} \times a^2 = 5 \text{에서 } a=5 \text{이므로}$$

$$b = \frac{1}{a} + a^2 = \frac{1}{5} + 25 = \frac{126}{5}$$

$$\therefore ab = 5 \times \frac{126}{5} = 126$$

답 126

17

$$(i) \left(\frac{1}{6}\right)^{x-2} > \left(\frac{1}{36}\right)^{2-x} \text{에서 } \left(\frac{1}{6}\right)^{x-2} > \left(\frac{1}{6}\right)^{2(2-x)}$$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$$x-2 < 2(2-x), x-2 < 4-2x$$

$$3x < 6 \quad \therefore x < 2$$

$$(ii) 4^x - 9 \times 2^x + 8 < 0 \text{에서 } (2^x)^2 - 9 \times 2^x + 8 < 0$$

$$2^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 9t + 8 < 0, (t-1)(t-8) < 0$$

$$\therefore 1 < t < 8$$

$$\text{즉, } 2^0 < 2^x < 2^3 \text{이고 밑이 1보다 크므로}$$

$$0 < x < 3$$

(i), (ii)에서 주어진 연립부등식의 해는
 $0 < x < 2$
 따라서 $a=0$, $\beta=2$ 이므로
 $\alpha+\beta=0+2=2$

답 ②

18

$$\frac{1}{x^2} > x^{x^2-3x} \text{에서 } x^{-2} > x^{x^2-3x}$$

(i) $0 < x < 1$ 일 때

$$-2 < x^2 - 3x \text{이므로 } x^2 - 3x + 2 > 0$$

$$(x-1)(x-2) > 0 \quad \therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 2$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $0 < x < 1$

(ii) $x=1$ 일 때, $1 > 1$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x > 1$ 일 때

$$-2 > x^2 - 3x \text{이므로 } x^2 - 3x + 2 < 0$$

$$(x-1)(x-2) < 0 \quad \therefore 1 < x < 2$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x < 2$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$0 < x < 1 \text{ 또는 } 1 < x < 2$$

따라서 $a=0$, $b=1$, $c=1$, $d=2$ 이므로

$$a+b+c+d=0+1+1+2=4$$

답 4



로그함수

기본을 다지는 유형

본문 057쪽

001

(1) $-x+6 > 0$ 에서 $x < 6$ 이므로 정의역은 $\{x | x < 6\}$

(2) $2x-4 > 0$ 에서 $x > 2$ 이므로 정의역은 $\{x | x > 2\}$

(3) $|x-2| > 0$ 에서 $x \neq 2$ 이므로 정의역은 $\{x | x \neq 2\}$

답 (1) $\{x | x < 6\}$ (2) $\{x | x > 2\}$ (3) $\{x | x \neq 2\}$

002

$$\neg. y = \log_4 \frac{1}{x} = \log_4 x^{-1} = -\log_4 x$$

$$\sqcup. y = \frac{1}{2} \log_2 x = \log_{2^2} x = \log_4 x$$

$$\sqsubset. y = \log_{16} \sqrt{x} = \log_{4^2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \log_4 x$$

$$\sqsupset. y = \log_{\frac{1}{4}} (-x) = \log_{4^{-1}} (-x) = -\log_4 (-x)$$

따라서 함수 $y = \log_4 x$ 와 같은 함수는 $\sqcup$ 이다.

답 ②

003

$f(f(x))=1$ 에서

$$\log_3 (\log_3 x) = 1, \log_3 x = 3$$

$$\therefore x = 3^3 = 27$$

답 ③

004

함수 $y = \log_2 (x^2 + 2x + a)$ 가 실수 전체의 집합에서 정의되려면
 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 + 2x + a > 0$ 이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2 + 2x + a = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 1^2 - a < 0 \quad \therefore a > 1$$

따라서 구하는 정수 a 의 최솟값은 2이다.

답 ⑤

|다른 풀이|

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 + 2x + a > 0$ 이 성립하려면 이차함수 $y = x^2 + 2x + a$ 의 최솟값이 0보다 커야 한다.

$y = x^2 + 2x + a = (x+1)^2 + a - 1$ 이므로 $x = -1$ 일 때 최솟값 $a - 1$ 을 갖는다.

즉, $a - 1 > 0$ 이어야 하므로 $a > 1$

따라서 구하는 정수 a 의 최솟값은 2이다.

005

①, ② $a > 0$ 이면 $-a < 0$ 이므로 $f(-a)$ 는 정의되지 않는다.

$$\textcircled{3} f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = \log_{10} a + \log_{10} \frac{1}{a} = \log_{10} a - \log_{10} a = 0$$

$$\textcircled{4} f(a)f\left(\frac{1}{a}\right) = \log_{10} a \times \log_{10} \frac{1}{a} = -(\log_{10} a)^2$$

$$\textcircled{5} f(a) - f\left(\frac{1}{a}\right) = \log_{10} a - \log_{10} \frac{1}{a} = 2 \log_{10} a$$

따라서 항상 일정한 값을 갖는 것은 ③이다.

답 ③

006

함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동하면

$$y - 4 = \log_3 (x - 2)$$

이 함수의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면

$$y - 4 = \log_3 (-x - 2)$$

$$\therefore y = \log_3 (-x - 2) + 4$$

답 ④

007

곡선 $y = \log_2 (x + 6)$ 은 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x = 0$ 이므로 곡선 $y = \log_2 (x + 6)$ 의 점근선의 방정식은

$$x = -6$$

$$\therefore k = -6$$

답 -6

참고

로그함수 $y = \log_a (x - m) + n$ ($a > 0, a \neq 1$)에서

(1) 정의역: $\{x | x > m\}$

(2) 점근선의 방정식: $x = m$

008

함수 $y = \frac{1}{2} \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$$y - 3 = \frac{1}{2} \log_2 (x + 1)$$

이 함수의 그래프가 점 $(3, a)$ 를 지나므로

$$a - 3 = \frac{1}{2} \log_2 4, a - 3 = 1 \quad \therefore a = 4$$

답 ④

참고

$y = \frac{1}{2} \log_2 x = \log_{\sqrt{2}} x = \log_4 x$ 로 고쳐서 풀 수도 있다.

009

함수 $y = \log_3 (x + a) + b$ 의 그래프는 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x = 0$ 이므로 함수 $y = \log_3 (x + a) + b$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -a$$

$$\therefore a = 4$$

또, 함수 $y = \log_3 (x + 4) + b$ 의 그래프가 점 $(5, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \log_3 (5 + 4) + b$$

$$\therefore b = -\log_3 9 = -2$$

$$\therefore a + b = 4 + (-2) = 2$$

답 ①

010

ㄱ. 함수 $y = \log \left(x + \frac{1}{2}\right)$ 의 그래프는 함수 $y = \log x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{ㄴ. } y = \log \frac{1}{2}x = \log \frac{1}{2} + \log x = \log x - \log 2$$

$$\therefore y + \log 2 = \log x$$

이 함수의 그래프는 함수 $y = \log x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $-\log 2$ 만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. 함수 $y = 2 \log x = \log x^2$ 의 그래프는 함수 $y = \log x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 없다.

ㄹ. 함수 $y = \log x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하면

$$y = -\log x = \log \frac{1}{x}$$

또, 이 함수의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면

$$y = \log \left(-\frac{1}{x}\right)$$

즉, 함수 $y = \log \left(-\frac{1}{x}\right)$ 의 그래프는 함수 $y = \log x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y = \log x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ⑤

011

$$\begin{aligned} f(20) &= \log_a 20 = \log_a (2^2 \times 5) \\ &= \log_a 2^2 + \log_a 5 \\ &= 2 \log_a 2 + \log_a 5 \end{aligned}$$

이때 주어진 그래프에 의하여

$$\log_a 2 = p, \log_a 5 = q$$

이므로

$$f(20) = 2 \log_a 2 + \log_a 5 = 2p + q$$

답 ②

012

$A(1, 0), B(4, 2), C(4, \log_a 4)$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times (4 - 1) \times (2 - \log_a 4)$$

$$= \frac{3}{2} \times (2 - \log_a 4)$$

→ 변 BC를 밑변으로 보고 계산한다.

$$= 3 - \frac{3}{2} \log_a 4$$

$$\text{즉, } 3 - \frac{3}{2} \log_a 4 = \frac{9}{2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{3}{2} \log_a 4 = -\frac{3}{2}, \log_a 4 = -1 \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

답 ④

013

$A(0, \log_6 3), B(0, \log_6 12), M(0, \log_6 a)$ ①

이때 점 M이 선분 AB의 중점이므로

$$\log_6 a = \frac{\log_6 3 + \log_6 12}{2} \text{ ②}$$

$$= \frac{\log_6 (3 \times 12)}{2} = \frac{\log_6 36}{2} = 1 \quad \rightarrow \text{선분 AB는 y축 위에 있으므로 y좌표로 식을 세운다.}$$

$\therefore a=6$ ③

답 6

채점 기준	비율
① 세 점 A, B, M의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
② 선분의 중점의 좌표를 구하는 방법을 이용하여 a에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
③ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

014

정사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{9}{4}$ 이므로 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $\frac{3}{2}$ 이다.

점 A의 x좌표를 k라고 하면

$$\log_3 k - \log_3 \frac{1}{k} = \frac{3}{2}, \log_3 k - \log_3 k^{-1} = \frac{3}{2}$$

↗ 점 B의 y좌표
↘ 점 A의 y좌표

$$\log_3 k + \frac{1}{2} \log_3 k = \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \log_3 k = \frac{3}{2}$$

$$\log_3 k = 1 \quad \therefore k=3$$

이때 점 D의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같으므로

$$(\text{점 D의 y좌표}) = \log_3 k = \log_3 3 = 1$$

답 1

015

$$f(a)=b \text{에서 } \log_{\sqrt{2}} a=b$$

$$g(4b)=k \text{로 놓으면 } f(k)=4b \text{이므로}$$

$$\log_{\sqrt{2}} k=4b$$

$$\therefore k=(\sqrt{2})^{4b}=(\sqrt{2})^{4 \log_{\sqrt{2}} a}=a^4$$

답 ④

016

$$y=\log_3 x+1 \text{로 놓으면}$$

$$\log_3 x=y-1 \quad \therefore x=3^{y-1}$$

x와 y를 서로 바꾸면

$$y=3^{x-1} \quad \therefore g(x)=3^{x-1}$$

$$\text{또, } y=f(x-3)=\log_3(x-3)+1 \text{에서}$$

$$\log_3(x-3)=y-1$$

$$x-3=3^{y-1} \quad \therefore x=3^{y-1}+3$$

x와 y를 서로 바꾸면

$$y=3^{x-1}+3=g(x)+3$$

따라서 함수 $f(x-3)$ 의 역함수는 $g(x)+3$ 이다.

답 ③

017

주어진 그래프가 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$a^{-1}=2 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 역함수가 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 이므로

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x \text{에서 } \log_{\frac{1}{2}} y=x$$

x와 y를 서로 바꾸면

$$y=\log_{\frac{1}{2}} x \quad \therefore f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$$

$$\therefore f(8)=\log_{\frac{1}{2}} 8=\log_{2^{-1}} 2^3=-3$$

답 ①

참고

지수함수 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$)과 로그함수 $y=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1$)는 서로 역함수 관계이다.

018

함수 $y=5^{x+1}$ 에서

$$\log_5 y=x+1 \quad \therefore x=\log_5 y-1$$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$$y=\log_5 x-1 \quad \dots\dots\dots ①$$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면

$$y=\log_5(x-1)-4 \quad \dots\dots\dots ②$$

이 함수의 그래프가 점 $(k, -2)$ 를 지나므로

$$-2=\log_5(k-1)-4, 2=\log_5(k-1)$$

$$k-1=5^2 \quad \therefore k=26 \quad \dots\dots\dots ③$$

답 26

채점 기준	비율
① 주어진 지수함수의 역함수를 구할 수 있다.	40 %
② 로그함수의 그래프를 평행이동한 함수의 식을 구할 수 있다.	30 %
③ 그래프가 지나는 점을 이용하여 상수 k의 값을 구할 수 있다.	30 %

019

함수 $y=2^x+2$ 의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동하면

$$y=2^{x-m}+2 \quad \dots\dots\dots ①$$

또, 함수 $y=\log_2 8x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$$y=\log_2 8(x-2)$$

$$=\log_2 8+\log_2(x-2)$$

$$=\log_2(x-2)+3 \quad \dots\dots\dots ②$$

이때 두 함수 ①, ②의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다.

즉, ①에서

$$y-2=2^{x-m}, \log_2(y-2)=x-m$$

$$\therefore x=\log_2(y-2)+m$$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$$y=\log_2(x-2)+m$$

위 식이 ②과 같아야 하므로 $m=3$

답 ③

020

주어진 세 수를 밑이 3인 로그로 변형하면

$$A=\log_3 \sqrt{5}$$

$$B=\log_{\frac{1}{3}} 8=-\log_3 8=\log_3 \frac{1}{8}$$

$$C=\log_{\sqrt{3}} \sqrt{10}=\log_{3^{\frac{1}{2}}} 10^{\frac{1}{2}}=\log_3 10$$

이때 밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{8} < \sqrt{5} < 10$ 에서

$$\log_3 \frac{1}{8} < \log_3 \sqrt{5} < \log_3 10$$

$$\therefore B < A < C$$

답 ③

참고

밑을 $\frac{1}{3}$ 로 통일하여 풀 수도 있다. 이 경우에는 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 부등호의 방향이 바뀐다.

021

주어진 세 수를 밑이 2인 로그로 변형하면

$$A = -3 \log_2 \frac{1}{5} = \log_2 \left(\frac{1}{5} \right)^{-3} = \log_2 125$$

$$B = 6 = \log_2 2^6 = \log_2 64$$

$$C = \log_{\frac{1}{4}} 3 = \log_{2^{-2}} 3 = -\frac{1}{2} \log_2 3 = \log_2 \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이때 밑이 1보다 크므로 $\frac{\sqrt{3}}{3} < 64 < 125$ 에서

$$\log_2 \frac{\sqrt{3}}{3} < \log_2 64 < \log_2 125$$

$$\therefore C < B < A$$

답 ⑤

022

$1 < x < 5$ 의 각 변에 밑이 5인 로그를 취하면

$$0 < \log_5 x < 1$$

$$(i) A - B = \log_5 x - (\log_5 x)^2$$

$$= (1 - \log_5 x) \times \log_5 x > 0$$

$$\therefore A > B \quad \rightarrow \log_5 x < 1 \text{에서 } 1 - \log_5 x > 0 \text{이고, } \log_5 x > 0$$

$$(ii) 0 < \log_5 x < 1 \text{이므로}$$

$$0 < (\log_5 x)^2 < 1 \quad \therefore 0 < B < 1$$

또, $\log_5 x < 1$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 (\log_5 x) < 0 \quad \therefore C < 0$$

$$\therefore C < B$$

$$(i), (ii) \text{에서 } C < B < A$$

답 ⑤

참고

밑을 통일할 수 없거나 진수가 미지수인 경우는 두 수의 차를 이용하여 대소를 비교할 수 있다.

023

$1 < x < 3$ 의 각 변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$0 < \log_3 x < 1$$

$$(i) A = \frac{1}{2} \log_3 x^2 = \log_3 x \text{이므로}$$

$$0 < A < 1$$

또, $B = \log_3 (\log_3 x)^2 = 2 \log_3 (\log_3 x)$ 이고

$\log_3 x < 1$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 (\log_3 x) < 0$$

이므로

$$2 \log_3 (\log_3 x) < 0 \quad \therefore B < 0$$

$$\therefore B < A$$

$$(ii) C = \log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x} \text{이므로 } 0 < \log_3 x < 1 \text{에서}$$

$$\frac{1}{\log_3 x} > 1 \quad \therefore C > 1$$

$$\therefore A < C$$

$$(i), (ii) \text{에서 } B < A < C$$

답 ②

024

(i) 함수 $y = \log_{\sqrt{2}} x$ 는 밑이 1보다 크므로 $x=2$ 일 때 최솟값, $x=8$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$$x=2 \text{일 때, } y = \log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$x=8 \text{일 때, } y = \log_{\sqrt{2}} 8 = \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^6 = 6$$

따라서 최댓값은 6, 최솟값은 2이다.

(2) 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} (2x-3) - 2$ 는 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $x=6$ 일 때 최댓값, $x=15$ 일 때 최솟값을 갖는다.

$x=6$ 일 때

$$y = \log_{\frac{1}{3}} (2 \times 6 - 3) - 2 = \log_{\frac{1}{3}} 9 - 2$$

$$= \log_{3^{-1}} 3^2 - 2 = -2 - 2 = -4$$

$x=15$ 일 때

$$y = \log_{\frac{1}{3}} (2 \times 15 - 3) - 2 = \log_{\frac{1}{3}} 27 - 2$$

$$= \log_{3^{-1}} 3^3 - 2 = -3 - 2 = -5$$

따라서 최댓값은 -4, 최솟값은 -5이다.

답 (1) 최댓값: 6, 최솟값: 2 (2) 최댓값: -4, 최솟값: -5

025

함수 $y = \log_4 2(x-1)$ 은 밑이 1보다 크므로 $x=2$ 일 때 최솟값, $x=9$ 일 때 최댓값을 갖는다.

따라서

$$m = \log_4 2(2-1) = \log_4 2 = \log_{2^2} 2 = \frac{1}{2},$$

$$M = \log_4 2(9-1) = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$$

이므로

$$M - m = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

026

함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} (x-a)$ 는 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $x=10$ 일 때 최솟값 -1을 갖는다.

즉, $\log_{\frac{1}{3}} (10-a) = -1$ 이므로 $\rightarrow x=9$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$$10-a = \left(\frac{1}{3} \right)^{-1} = 3 \quad \therefore a=7$$

답 ②

027

함수 $f(x) = 2 \log_{\frac{1}{2}} (x+k)$ 는 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $x=0$ 일 때 최댓값 -4, $x=12$ 일 때 최솟값 m 을 갖는다.

즉, $f(0) = -4$ 이므로

$$2 \log_{\frac{1}{2}} k = -4, \log_{2^{-1}} k = -2$$

$$\log_2 k = 2 \quad \therefore k=2^2=4$$

따라서 $f(x) = 2 \log_{\frac{1}{2}}(x+4)$ 이므로

$$\begin{aligned} m &= f(12) = 2 \log_{\frac{1}{2}}(12+4) \\ &= 2 \log_{\frac{1}{2}} 16 = 2 \log_{2^{-1}} 2^4 \\ &= 2 \times (-1) \times 4 = -8 \\ \therefore k+m &= 4 + (-8) = -4 \end{aligned}$$

답 ④

028

함수 $y = \log_2(4x-2) + k$ 는 밑이 1보다 크므로 $x=1$ 일 때 최솟값,
 $x = \frac{17}{2}$ 일 때 최댓값을 갖는다.

최솟값은

$$\begin{aligned} f(1) &= \log_2(4-2) + k \\ &= \log_2 2 + k = k+1 \end{aligned}$$

최댓값은

$$\begin{aligned} f\left(\frac{17}{2}\right) &= \log_2\left(4 \times \frac{17}{2} - 2\right) + k = \log_2 32 + k \\ &= \log_2 2^5 + k = k+5 \end{aligned}$$

이때 최댓값이 최솟값의 2배이므로

$$k+5 = 2(k+1), k+5 = 2k+2 \quad \therefore k=3$$

답 ①

029

(1) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 라고 하면

$$f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$$

이므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최솟값 1을 갖는다.

이때 함수 $y = \log_2 f(x)$ 는 밑이 1보다 크므로 $f(x)$ 가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

즉, 주어진 함수는 $x=1$ 일 때 최솟값 $\log_2 1 = 0$ 을 갖는다.

(2) $f(x) = x^2 + 6x + 18$ 이라고 하면

$$f(x) = x^2 + 6x + 18 = (x+3)^2 + 9$$

이므로 $f(x)$ 는 $x=-3$ 일 때 최솟값 9를 갖는다.

이때 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} f(x)$ 는 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$f(x)$ 가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

즉, 주어진 함수는 $x=-3$ 일 때 최댓값 $\log_{\frac{1}{3}} 9 = \log_{3^{-1}} 3^2 = -2$ 를 갖는다.

(3) $f(x) = -x^2 + 8$ 이라고 하면 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최댓값 8을 갖는다.

이때 함수 $y = \log_4 f(x)$ 는 밑이 1보다 크므로 $f(x)$ 가 최대일 때 최댓값을 갖는다.

즉, 주어진 함수는 $x=0$ 일 때 최댓값 $\log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}$ 을 갖는다.

(4) $f(x) = -x^2 + 4x + 4$ 라고 하면

$$f(x) = -x^2 + 4x + 4 = -(x-2)^2 + 8$$

이므로 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최댓값 8을 갖는다.

이때 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ 는 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$f(x)$ 가 최대일 때 최솟값을 갖는다.

즉, 주어진 함수는 $x=2$ 일 때 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{2^{-1}} 2^3 = -3$ 을 갖는다.

답 (1) 최솟값: 0 (2) 최댓값: -2 (3) 최댓값: $\frac{3}{2}$ (4) 최솟값: -3

030

$f(x) = -x^2 + 2x + 4$ 라고 하면

$$f(x) = -x^2 + 2x + 4 = -(x-1)^2 + 5$$

$-1 \leq x \leq 3$ 에서 $f(-1)=1$, $f(1)=5$, $f(3)=1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최댓값 5, $x=-1$ 또는 $x=3$ 일 때 최솟값 1을 갖는다.

이때 함수 $y = \log_{\frac{1}{5}} f(x)$ 는 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $f(x)$

가 최대일 때 최솟값을 갖는다.

즉, 주어진 함수는 $x=1$ 일 때 최솟값 $\log_{\frac{1}{5}} 5 = -1$ 을 가지므로

$$a=1, b=-1$$

$$\therefore a+b = 1 + (-1) = 0$$

답 0

031

$f(x) = x^2 + 2x + 3$ 이라고 하면

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.

그런데 함수 $y = \log_a(x^2 + 2x + 3)$ 이 최댓값을 가져야 하므로

$0 < a < 1$ 이어야 한다.

따라서 주어진 함수는 $x=-1$ 일 때 최댓값 -2를 가지므로

$$\log_a 2 = -2, a^{-2} = 2$$

$$\therefore a = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ③

032

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \log_2(-x^2 + 2x + 15)$$

$h(x) = -x^2 + 2x + 15$ 라고 하면

$$h(x) = -x^2 + 2x + 15 = -(x-1)^2 + 16$$

이므로 $x=1$ 일 때 최댓값 16을 갖는다.

함수 $(f \circ g)(x)$ 의 밑이 1보다 크므로 함수 $(f \circ g)(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최댓값 $f(g(1)) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ 를 갖는다.

따라서 $a=1$, $b=4$ 이므로

$$a+b = 1 + 4 = 5$$

답 ⑤

033

$f(x) = x^2 - x + \frac{9}{4}$ 라고 하면

$$f(x) = x^2 - x + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2$$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $f(-1) = \frac{17}{4}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, $f(1) = \frac{9}{4}$ 이므로 함수

$f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 최댓값 $\frac{17}{4}$, $x=\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.

①

이때 $0 < a < 1$ 이므로 주어진 함수는 $f(x)$ 가 최대일 때 최솟값을 갖고, $f(x)$ 가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

즉, 주어진 함수는 $x=-1$ 일 때 최솟값 $\log_a \frac{17}{4}$, $x=\frac{1}{2}$ 일 때 최댓값 $\log_a 2$ 를 가지므로

$$\log_a \frac{17}{4} = \log_a b + 1, \log_a 2 = -\frac{1}{2} \quad \text{②}$$

$$\log_a 2 = -\frac{1}{2} \text{에서 } a^{-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\therefore a = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$a = \frac{1}{4} \text{을 } \log_a \frac{17}{4} = \log_a b + 1 \text{에 대입하면}$$

$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{17}{4} = \log_{\frac{1}{4}} b + 1$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 17 + \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{4}} b + 1$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 17 + 1 = \log_{\frac{1}{4}} b + 1$$

$$\therefore b = 17 \quad \text{..... ③}$$

답 17

채점 기준	비율
① $f(x) = x^2 - x + \frac{9}{4}$ 로 놓고 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	30 %
② 주어진 치역을 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
③ a, b 의 값을 구할 수 있다.	40 %

034

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = t^2 + at + b = \left(t + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b$$

이 함수가 $x = \frac{1}{3}$, 즉 $t = -1$ 일 때 최솟값 3을 가지므로

$$-\frac{a}{2} = -1, \quad -\frac{a^2}{4} + b = 3$$

$$-\frac{a}{2} = -1 \text{에서 } a = 2$$

$$a = 2 \text{를 } -\frac{a^2}{4} + b = 3 \text{에 대입하면}$$

$$-1 + b = 3 \quad \therefore b = 4$$

$$\therefore ab = 2 \times 4 = 8$$

답 ④

참고

지수함수 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)의 치역은 양의 실수의 집합이므로 $a^x = t$ 로 치환하면 $t > 0$ 이다. 이와 달리 로그함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)의 치역은 실수 전체의 집합이므로 $\log_a x = t$ 로 치환했을 때 t 는 실수 전체의 값을 가질 수 있다. 단, $x > 0$ 임에 주의한다.

035

$$y = (\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + \log_2 x^6 + 2$$

$$= (\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - 6 \log_{\frac{1}{2}} x + 2$$

$\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 로 놓으면

$$y = t^2 - 6t + 2 = (t - 3)^2 - 7 \quad \text{..... ①}$$

따라서 주어진 함수는 $t = 3$ 일 때 최솟값 -7 을 가지므로

$$b = -7 \quad \text{..... ②}$$

이때 $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$ 에서 $x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ 이므로

$$a = \frac{1}{8} \quad \text{..... ③}$$

$$\therefore ab = \frac{1}{8} \times (-7) = -\frac{7}{8} \quad \text{..... ④}$$

답 $-\frac{7}{8}$

채점 기준	비율
① 치환을 이용하여 주어진 로그함수를 이차함수의 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
② b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ ab 의 값을 구할 수 있다.	10 %

036

$$y = (\log_3 x)(\log_{\frac{1}{3}} x) + 4 \log_3 x$$

$$= (\log_3 x)(-\log_3 x) + 4 \log_3 x$$

$$= -(\log_3 x)^2 + 4 \log_3 x$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 $3 \leq x \leq 27$ 에서

$$\log_3 3 \leq \log_3 x \leq \log_3 27$$

$$\log_3 3^1 \leq \log_3 x \leq \log_3 3^3$$

$$\therefore 1 \leq t \leq 3$$

이때 주어진 함수는

$$y = -t^2 + 4t = -(t - 2)^2 + 4$$

$1 \leq t \leq 3$ 에서 주어진 함수는 $t = 2$ 일 때 최댓값 4, $t = 1$ 또는 $t = 3$ 일 때 최솟값 3을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$$4 + 3 = 7$$

답 ②

037

$$y = (\log_2 2x) \left(\log_4 \frac{x}{4} \right)$$

$$= (\log_2 x + \log_2 2)(\log_{2^2} x - \log_2 4)$$

$$= (\log_2 x + 1) \left(\frac{1}{2} \log_2 x - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} (\log_2 x)^2 - \frac{1}{2} \log_2 x - 1$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$y = \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} t - 1 = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{9}{8}$$

따라서 주어진 함수는 $t = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 $-\frac{9}{8}$ 를 가지므로

$$b = -\frac{9}{8}$$

$$\log_2 x = \frac{1}{2} \text{에서 } x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \text{이므로}$$

$$a = \sqrt{2}$$

$$\therefore a^6 b = (\sqrt{2})^6 \times \left(-\frac{9}{8} \right) = 8 \times \left(-\frac{9}{8} \right) = -9$$

답 -9

038

$$y = (\log_3 27x) \left(\log_3 \frac{3}{x^2} \right)$$

$$= (\log_3 x + \log_3 27)(\log_3 3 - \log_3 x^2)$$

$$= (\log_3 x + 3)(1 - 2 \log_3 x)$$

$$= -2(\log_3 x)^2 - 5 \log_3 x + 3$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{81} \leq x \leq 9$ 에서

$$\log_3 \frac{1}{81} \leq \log_3 x \leq \log_3 9$$

$$\log_3 3^{-4} \leq \log_3 x \leq \log_3 3^2$$

$$\therefore -4 \leq t \leq 2$$

이때 주어진 함수는

$$y = -2t^2 - 5t + 3 = -2\left(t + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{49}{8}$$

$-4 \leq t \leq 2$ 에서 주어진 함수는 $t = -\frac{5}{4}$ 일 때 최댓값 $\frac{49}{8}$, $t = 2$ 일 때 최솟값 -15 를 갖는다.

$$\text{따라서 } M = \frac{49}{8}, m = -15 \text{이므로}$$

$$8M + 2m = 8 \times \frac{49}{8} + 2 \times (-15) = 49 - 30 = 19$$

답 19

039

(1) 진수의 조건에서

$$x+1 > 0 \quad \therefore x > -1$$

$$\log_2 (x+1) = 4 \text{에서}$$

$$x+1 = 2^4 \quad \therefore x = 2^4 - 1 = 15$$

$x = 15$ 는 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(2) 진수의 조건에서

$$x-1 > 0, \log_3 (x-1) > 0 \quad \therefore x > 2$$

$$\log_4 \{\log_3 (x-1)\} = 1 \text{에서}$$

$$\log_4 \{\log_3 (x-1)\} = \log_4 4$$

$$\log_3 (x-1) = 4, x-1 = 3^4$$

$$\therefore x = 3^4 + 1 = 82$$

$x = 82$ 는 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(3) 진수의 조건에서

$$x+2 > 0 \quad \therefore x > -2$$

$$\log_{\frac{1}{2}} (x+2) = 2 \log_{\frac{1}{2}} 3 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} (x+2) = \log_{\frac{1}{2}} 3^2$$

$$x+2 = 3^2 \quad \therefore x = 3^2 - 2 = 7$$

$x = 7$ 은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(4) 진수의 조건에서

$$x > 0, x-3 > 0 \quad \therefore x > 3$$

$$\log_3 x = 1 + \log_3 (x-3) \text{에서}$$

$$\log_3 x = \log_3 3 + \log_3 (x-3)$$

$$\log_3 x = \log_3 3(x-3)$$

$$x = 3(x-3), x = 3x - 9$$

$$2x = 9 \quad \therefore x = \frac{9}{2}$$

$x = \frac{9}{2}$ 는 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

$$\text{답 (1) } x = 15 \quad (2) x = 82 \quad (3) x = 7 \quad (4) x = \frac{9}{2}$$

참고

로그방정식을 풀 때에는 x 의 값을 구한 후, 진수가 양수인 조건을 만족시키는지 확인해야 한다.

040

진수의 조건에서

$$x-3 > 0, x-4 > 0 \quad \therefore x > 4$$

$$\log_2 (x-3) = 1 - \log_2 (x-4) \text{에서}$$

$$\log_2 (x-3) + \log_2 (x-4) = 1$$

$$\log_2 (x-3)(x-4) = \log_2 2$$

$$(x-3)(x-4) = 2, x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 5$$

따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = 5$

답 5

041

진수의 조건에서

$$x-1 > 0, x-\frac{5}{3} > 0 \quad \therefore x > \frac{5}{3}$$

$$\log_3 (x-1) - \log_9 \left(x-\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\log_3 (x-1) - \frac{1}{2} \log_3 \left(x-\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{2} \log_3 3$$

$$2 \log_3 (x-1) = \log_3 3 + \log_3 \left(x-\frac{5}{3}\right)$$

$$\log_3 (x-1)^2 = \log_3 3 \left(x-\frac{5}{3}\right)$$

$$(x-1)^2 = 3 \left(x-\frac{5}{3}\right)$$

$$x^2 - 2x + 1 = 3x - 5$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0, (x-2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

이것은 모두 ㉠을 만족시킨다.

따라서 모든 근의 합은

$$2 + 3 = 5$$

답 ①

다른 풀이

다음과 같이 로그의 밑을 9로 통일하여 풀어도 결과는 같다.

$$\log_3 (x-1) - \log_9 \left(x-\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\log_9 (x-1)^2 - \log_9 \left(x-\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{2} \log_9 9$$

$$\log_9 (x-1)^2 - \log_9 \left(x-\frac{5}{3}\right) = \log_9 9^{\frac{1}{2}}$$

$$\log_9 (x-1)^2 = \log_9 \left(x-\frac{5}{3}\right) + \log_9 3$$

$$\log_9 (x-1)^2 = \log_9 3 \left(x-\frac{5}{3}\right)$$

$$(x-1)^2 = 3 \left(x-\frac{5}{3}\right)$$

042

밑의 조건에서

$$x > 0, x \neq 1 \quad \therefore 0 < x < 1 \text{ 또는 } x > 1$$

$$\log_{\sqrt{2}} 8 = \log_{\sqrt{2}} 2^3 = 3 \times 2 \times \log_2 2 = 6 \text{이므로}$$

$$\log_x (\log_{\sqrt{2}} 8) = 2 \text{에서}$$

$$\log_x 6 = 2, x^2 = 6$$

$$\therefore x = -\sqrt{6} \text{ 또는 } x = \sqrt{6}$$

㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x = \sqrt{6}$$

답 ⑤

043

진수의 조건에서

$$x > 0, 6 - x > 0 \quad \therefore 0 < x < 6 \quad \text{..... ㉠}$$

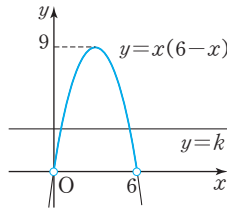
$$\log_4 x + \log_4 (6 - x) - \log_4 k = 0 \text{에서}$$

$$\log_4 x(6 - x) = \log_4 k \quad \therefore x(6 - x) = k \quad \text{..... ㉡}$$

주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 실근을 가지려면 ㉠의 범위에서 ㉡이 서로 다른 두 개의 실근을 가져야 한다.

즉, $0 < x < 6$ 에서 곡선 $y = x(6 - x)$ 와 직선 $y = k$ 의 교점이 2개이어야 하므로 오른쪽 그림에서 $0 < k < 9$

따라서 자연수 k 는 1, 2, 3, ..., 8의 8개이다.



답 ③

044

$$(\log_3 x)^2 - 4 \log_3 x - 3 = 0 \text{에서}$$

$$(\log_3 x)^2 - 4 \log_3 x - 3 = 0$$

$$\therefore (\log_3 x)^2 - 2 \log_3 x - 3 = 0$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0, (t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 3$$

$$\text{즉, } \log_3 x = -1 \text{ 또는 } \log_3 x = 3 \text{이므로}$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 27$$

따라서 모든 실근의 곱은

$$\frac{1}{3} \times 27 = 9$$

답 ①

|다른 풀이|

주어진 방정식의 두 근을 α, β 라고 하면 방정식 $t^2 - 2t - 3 = 0$ 의 두 근은 $\log_3 \alpha, \log_3 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\log_3 \alpha + \log_3 \beta = 2, \log_3 \alpha \beta = 2$

$$\therefore \alpha \beta = 3^2 = 9$$

045

$$(\log_2 2x) \left(\log_2 \frac{x}{2} \right) = 8 \text{에서}$$

$$(\log_2 2 + \log_2 x)(\log_2 x - \log_2 2) = 8$$

$$(\log_2 x + 1)(\log_2 x - 1) = 8$$

$$(\log_2 x)^2 - 1 = 8 \quad \therefore (\log_2 x)^2 - 9 = 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 9 = 0, (t+3)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 3$$

$$\text{즉, } \log_2 x = -3 \text{ 또는 } \log_2 x = 3 \text{이므로}$$

$$x = \frac{1}{8} \text{ 또는 } x = 8$$

$$\text{답 } x = \frac{1}{8} \text{ 또는 } x = 8$$

046

$$\log_2 x - 3 = \log_x 16 \text{에서}$$

$$\log_2 x - 3 = \frac{\log_2 16}{\log_2 x} \quad \therefore \log_2 x - 3 = \frac{4}{\log_2 x}$$

$$\log_2 x = t \ (t \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$t - 3 = \frac{4}{t}, t^2 - 3t = 4$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0, (t+1)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 4$$

$$\text{즉, } \log_2 x = -1 \text{ 또는 } \log_2 x = 4 \text{이므로}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 16$$

따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은

$$\frac{1}{2} \times 16 = 8$$

답 8

047

$$\log_{\frac{1}{3}} x \times \log_3 x + \log_3 x^3 + k = 0 \text{의 한 근이 } \frac{1}{9} \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} \times \log_3 \frac{1}{9} + \log_3 \left(\frac{1}{9} \right)^3 + k = 0$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right)^2 \times \log_3 3^{-2} + \log_3 3^{-6} + k = 0$$

$$2 \times (-2) + (-6) + k = 0 \quad \therefore k = 10$$

따라서 주어진 방정식은

$$\log_{\frac{1}{3}} x \times \log_3 x + 3 \log_3 x + 10 = 0$$

$$-(\log_3 x)^2 + 3 \log_3 x + 10 = 0$$

$$\therefore (\log_3 x)^2 - 3 \log_3 x - 10 = 0$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 3t - 10 = 0, (t+2)(t-5) = 0$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 5$$

$$\text{즉, } \log_3 x = -2 \text{ 또는 } \log_3 x = 5 \text{이므로}$$

$$x = \frac{1}{9} \text{ 또는 } x = 243$$

따라서 구하는 다른 한 근은 243이다.

답 ⑤

048

$$\log_3 x - \log_x 9 + 1 = 0 \text{에서}$$

$$\log_3 x - \frac{\log_3 9}{\log_3 x} + 1 = 0$$

$$\therefore \log_3 x - \frac{2}{\log_3 x} + 1 = 0$$

$$\log_3 x = t \ (t \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$t - \frac{2}{t} + 1 = 0, t^2 + t - 2 = 0$$

$$(t-1)(t+2) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = -2$$

$$\text{즉, } \log_3 x = 1 \text{ 또는 } \log_3 x = -2 \text{이므로}$$

$$x = 3 \text{ 또는 } x = \frac{1}{9}$$

두 수 $3, \frac{1}{9}$ 을 근으로 하고 x^2 의 계수가 9인 이차방정식은

$$9(x-3) \left(x - \frac{1}{9} \right) = 0$$

$$\therefore 9x^2 - 28x + 3 = 0$$

따라서 $a = -28, b = 3$ 이므로

$$a + b = -28 + 3 = -25$$

답 ①

풍뎡 개념 CHECK

이차방정식의 작성 高 公通수학 1

- (1) 두 수 α, β 를 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은
 $(x-\alpha)(x-\beta)=0 \Rightarrow x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$
 (2) 두 수 α, β 를 근으로 하고 x^2 의 계수가 a 인 이차방정식은
 $a(x-\alpha)(x-\beta)=0 \Rightarrow a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$

|다른 풀이|

이차방정식 $9x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 $3, \frac{1}{9}$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$3+\frac{1}{9}=-\frac{a}{9}, \frac{28}{9}=-\frac{a}{9} \quad \therefore a=-28$$

$$3 \times \frac{1}{9}=\frac{b}{9}, \frac{1}{3}=\frac{b}{9} \quad \therefore b=3$$

049

밑과 진수의 조건에서

$$x^2>0, x^2 \neq 1, 6-x>0, 6-x \neq 1, x+1>0$$

$$\therefore -1<x<0 \text{ 또는 } 0<x<1 \text{ 또는 } 1<x<5 \text{ 또는 } 5<x<6$$

진수가 같으므로 밑이 같거나 진수가 1이어야 한다.

(i) 밑이 같을 때

$$x^2=6-x \text{ 이므로}$$

$$x^2+x-6=0, (x+3)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

이때 밑과 진수의 조건에 의하여 $x=2$

(ii) 진수가 1일 때

$$x+1=1 \text{ 이므로 } x=0$$

이때 밑과 진수의 조건에 의하여 해는 없다.

(i), (ii)에서 $x=2$

답 ②

050

밑과 진수의 조건에서

$$\frac{12x+4>0, 12x+4 \neq 1, 4x^2-3x>0,}{\begin{array}{l} \rightarrow x>-\frac{1}{3} \quad \rightarrow x \neq -\frac{1}{4} \quad \rightarrow x<0 \text{ 또는 } x>\frac{3}{4} \end{array}}$$

$$\frac{4x^2-3x \neq 1, 4x-5>0}{\begin{array}{l} \rightarrow x \neq -\frac{1}{4}, x \neq 1 \quad \rightarrow x>\frac{5}{4} \end{array}}$$

$$\therefore x>\frac{5}{4} \quad \dots\dots\dots ①$$

진수가 같으므로 밑이 같거나 진수가 1이어야 한다.

(i) 밑이 같을 때

$$12x+4=4x^2-3x \text{ 이므로}$$

$$4x^2-15x-4=0, (4x+1)(x-4)=0$$

$$\therefore x=-\frac{1}{4} \text{ 또는 } x=4$$

이때 밑과 진수의 조건에 의하여 $x=4$ ②

(ii) 진수가 1일 때

$$4x-5=1 \text{ 이므로 } x=\frac{3}{2}$$

이것은 밑과 진수의 조건을 만족시킨다. ③

$$(i), (ii) \text{에서 } x=4 \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}$$

따라서 모든 실근의 곱은

$$4 \times \frac{3}{2}=6 \quad \dots\dots\dots ④$$

답 6

채점 기준	비율
① 밑과 진수의 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
② 밑이 같을 때, 밑과 진수의 조건을 만족시키는 근을 구할 수 있다.	30 %
③ 진수가 1일 때, 밑과 진수의 조건을 만족시키는 근을 구할 수 있다.	30 %
④ 모든 실근의 곱을 구할 수 있다.	10 %

051

$$x^{\log x}=\frac{x^3}{100} \text{의 양변에 상용로그를 취하면}$$

$$\log x^{\log x}=\log \frac{x^3}{100}$$

$$\log x \times \log x=\log x^3-\log 100$$

$$(\log x)^2=3 \log x-2$$

$$\therefore (\log x)^2-3 \log x+2=0$$

$$\log x=t \text{로 놓으면}$$

$$t^2-3t+2=0, (t-1)(t-2)=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=2$$

$$\text{즉, } \log x=1 \text{ 또는 } \log x=2 \text{ 이므로}$$

$$x=10 \text{ 또는 } x=100$$

$$\text{따라서 } \alpha=10, \beta=100 \text{ 또는 } \alpha=100, \beta=10 \text{ 이므로}$$

$$\alpha\beta=10 \times 100=1000$$

답 ④

|다른 풀이|

주어진 방정식의 두 근이 α, β 이므로 방정식 $t^2-3t+2=0$ 의 두 근은 $\log \alpha, \log \beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log \alpha+\log \beta=3, \log \alpha\beta=3$$

$$\therefore \alpha\beta=10^3=1000$$

052

$$(64x)^{\log_2 x}=x^3 \text{의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면}$$

$$\log_2 (64x)^{\log_2 x}=\log_2 x^3$$

$$\log_2 x \times \log_2 64x=\log_2 x^3$$

$$\log_2 x \times (\log_2 64+\log_2 x)=\log_2 x^3$$

$$\log_2 x \times (6+\log_2 x)=3 \log_2 x$$

$$\therefore (\log_2 x)^2+3 \log_2 x=0$$

$$\log_2 x=t \text{로 놓으면}$$

$$t^2+3t=0, t(t+3)=0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=-3$$

$$\text{즉, } \log_2 x=0 \text{ 또는 } \log_2 x=-3 \text{ 이므로}$$

$$x=1 \text{ 또는 } x=\frac{1}{8}$$

따라서 모든 실근의 곱은

$$1 \times \frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

답 ②

053

(1) 진수의 조건에서

$$x+3>0 \quad \therefore x>-3 \quad \text{..... ㉠}$$

$$\log_3(x+3) \leq 3 \text{에서 } \log_3(x+3) \leq \log_3 3^3$$

$$\log_3(x+3) \leq \log_3 27$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$x+3 \leq 27 \quad \therefore x \leq 24 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-3 < x \leq 24$

(2) 진수의 조건에서

$$1-2x>0 \quad \therefore x<\frac{1}{2} \quad \text{..... ㉢}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(1-2x) > 1 \text{에서 } \log_{\frac{1}{2}}(1-2x) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$$1-2x < \frac{1}{2} \quad \therefore x > \frac{1}{4} \quad \text{..... ㉣}$$

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$

(3) 진수의 조건에서

$$3x+1>0, x-1>0 \quad \therefore x>1 \quad \text{..... ㉤}$$

$\log_4(3x+1) > \log_4(x-1)$ 에서 밑이 1보다 크므로

$$3x+1 > x-1 \quad \therefore x > -1 \quad \text{..... ㉥}$$

㉤, ㉥의 공통부분을 구하면 $x > 1$

(4) 진수의 조건에서

$$4-x>0, 2x+2>0 \quad \therefore -1 < x < 4 \quad \text{..... ㉦}$$

$\log_{\frac{1}{3}}(4-x) \leq \log_{\frac{1}{3}}(2x+2)$ 에서 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$$4-x \geq 2x+2 \quad \therefore x \leq \frac{2}{3} \quad \text{..... ㉧}$$

㉦, ㉧의 공통부분을 구하면 $-1 < x \leq \frac{2}{3}$

$$\text{답 (1) } -3 < x \leq 24 \quad (2) \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$$

$$(3) x > 1 \quad (4) -1 < x \leq \frac{2}{3}$$

054

진수의 조건에서

$$x-5>0, x+5>0 \quad \therefore x>5 \quad \text{..... ㉨}$$

$$\log_3(x-5) + \log_3(x+5) \leq 3 \text{에서}$$

$$\log_3(x-5) + \log_3(x+5) \leq \log_3 3^3$$

$$\log_3(x-5)(x+5) \leq \log_3 27$$

$$\log_3(x^2-25) \leq \log_3 27$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$x^2-25 \leq 27, x^2-52 \leq 0, (x+2\sqrt{13})(x-2\sqrt{13}) \leq 0$$

$$\therefore -2\sqrt{13} \leq x \leq 2\sqrt{13} \quad \text{..... ㉩}$$

㉨, ㉩의 공통부분을 구하면 $5 < x \leq 2\sqrt{13}$

따라서 $\alpha=5, \beta=2\sqrt{13}$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = 5^2 + (2\sqrt{13})^2 = 25 + 52 = 77$$

답 77

055

진수의 조건에서

$$n^2-9n+18>0, (n-3)(n-6)>0$$

$$\therefore n<3 \text{ 또는 } n>6 \quad \text{..... ㉪}$$

$$\log_{18}(n^2-9n+18) < 1 \text{에서}$$

$$\log_{18}(n^2-9n+18) < \log_{18} 18$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$n^2-9n+18 < 18, n^2-9n < 0$$

$$n(n-9) < 0 \quad \therefore 0 < n < 9 \quad \text{..... ㉫}$$

㉪, ㉫의 공통부분을 구하면

$$0 < n < 3 \text{ 또는 } 6 < n < 9$$

따라서 구하는 자연수 n 은 1, 2, 7, 8이므로 그 합은

$$1+2+7+8=18$$

답 5

056

진수의 조건에서

$$3(x+5)>0, x-1>0 \quad \therefore x>1 \quad \text{..... ㉬}$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 3(x+5) > \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \text{에서}$$

$$\log_{(\frac{1}{2})^2} 3(x+5) > \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$$

$$\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 3(x+5) > \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 3(x+5) > 2 \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 3(x+5) > \log_{\frac{1}{2}}(x-1)^2$$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$$3(x+5) < (x-1)^2, 3x+15 < x^2-2x+1$$

$$x^2-5x-14 > 0, (x+2)(x-7) > 0$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 7 \quad \text{..... ㉭}$$

㉬, ㉭의 공통부분을 구하면 $x > 7$

따라서 구하는 정수 x 의 최솟값은 8이다.

답 2

057

진수의 조건에서

$$|x-2| > 0 \quad \therefore x \neq 2 \quad \text{..... ㉮}$$

$$2 \log_5 |x-2| \leq 2 - \log_5 16 \text{에서}$$

$$2 \log_5 |x-2| \leq \log_5 25 - \log_5 16$$

$$2 \log_5 |x-2| \leq \log_5 \frac{25}{16}$$

$$2 \log_5 |x-2| \leq \log_5 \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$\log_5 |x-2| \leq \frac{1}{2} \log_5 \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$\log_5 |x-2| \leq \log_5 \frac{5}{4}$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$|x-2| \leq \frac{5}{4}, -\frac{5}{4} \leq x-2 \leq \frac{5}{4}$$

$$\therefore \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{13}{4} \quad \text{..... ㉯}$$

㉮, ㉯의 공통부분을 구하면

$$\frac{3}{4} \leq x < 2 \text{ 또는 } 2 < x \leq \frac{13}{4} \quad \text{..... ㉺}$$

따라서 구하는 정수 x 는 1, 3이므로 그 합은

$$1+3=4 \quad \text{..... ㉻}$$

답 4

채점 기준	비율
① 진수의 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
② 로그부등식을 만족시키는 x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
③ 정수 x 를 구하고, 그 합을 구할 수 있다.	20 %

058

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$(\log_2 x)^2 + \log_2 \frac{32}{x^6} \leq 0 \text{에서}$$

$$(\log_2 x)^2 + \log_2 32 - \log_2 x^6 \leq 0$$

$$(\log_2 x)^2 + \log_2 2^5 - 6 \log_2 x \leq 0$$

$$(\log_2 x)^2 - 6 \log_2 x + 5 \leq 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 6t + 5 \leq 0, (t-1)(t-5) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq t \leq 5$$

$$\text{즉, } 1 \leq \log_2 x \leq 5 \text{이므로 } \log_2 2 \leq \log_2 x \leq \log_2 2^5$$

밑이 1보다 크므로 $2 \leq x \leq 32$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$2 \leq x \leq 32$$

따라서 $\alpha = 2, \beta = 32$ 이므로

$$\alpha + \beta = 2 + 32 = 34$$

답 ④

059

진수의 조건에서 $x > 0, x^2 > 0 \therefore x > 0$ ㉠

$$(\log_3 x)^2 > \log_{\frac{1}{3}} x^2 + 3 \text{에서}$$

$$(\log_3 x)^2 > \log_{3^{-1}} x^2 + 3, (\log_3 x)^2 > -2 \log_3 x + 3$$

$$(\log_3 x)^2 + 2 \log_3 x - 3 > 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 2t - 3 > 0, (t+3)(t-1) > 0$$

$$\therefore t < -3 \text{ 또는 } t > 1$$

$$\text{즉, } \log_3 x < -3 \text{ 또는 } \log_3 x > 1 \text{이므로}$$

$$\log_3 x < \log_3 3^{-3} \text{ 또는 } \log_3 x > \log_3 3$$

밑이 1보다 크므로 $x < \frac{1}{27}$ 또는 $x > 3$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$0 < x < \frac{1}{27} \text{ 또는 } x > 3$$

따라서 구하는 정수 x 의 최솟값은 4이다.

답 4

060

$$f(x) = x^2, g(x) = \log_7 x \text{에서}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\log_7 x)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \log_7 x^2 = 2 \log_7 x$$

$$(f \circ g)(x) \leq (g \circ f)(x) \text{에서}$$

$$(\log_7 x)^2 \leq 2 \log_7 x$$

$\log_7 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 \leq 2t, t^2 - 2t \leq 0$$

$$t(t-2) \leq 0 \therefore 0 \leq t \leq 2$$

$$\text{즉, } 0 \leq \log_7 x \leq 2 \text{이므로 } \log_7 1 \leq \log_7 x \leq \log_7 7^2$$

밑이 1보다 크므로 $1 \leq x \leq 49$

따라서 구하는 자연수 x 는 1, 2, 3, ..., 49의 49개이다.

답 ②

참고

자연수 a, b 에 대하여

(1) $a < x < b$ 를 만족시키는 자연수 x 는 $(b-a-1)$ 개이다.

(2) $a \leq x < b$ 또는 $a < x \leq b$ 를 만족시키는 자연수 x 는 $(b-a)$ 개이다.

(3) $a \leq x \leq b$ 를 만족시키는 자연수 x 는 $(b-a+1)$ 개이다.

061

진수의 조건에서

$$\frac{2}{x} > 0, x > 0 \therefore x > 0 \text{ ㉠}$$

$$\log_2 \frac{2}{x} \times \log_2 x \geq -20 \text{에서}$$

$$(\log_2 2 - \log_2 x)(\log_2 x) \geq -20$$

$$(1 - \log_2 x)(\log_2 x) \geq -20$$

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 20 \leq 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - t - 20 \leq 0, (t+4)(t-5) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq t \leq 5$$

$$\text{즉, } -4 \leq \log_2 x \leq 5 \text{이므로 } \log_2 2^{-4} \leq \log_2 x \leq \log_2 2^5$$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{16} \leq x \leq 32$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$\frac{1}{16} \leq x \leq 32$$

따라서 구하는 자연수 x 의 최댓값은 32이다.

답 ②

062

진수의 조건에서

$$\frac{x}{9} > 0, \frac{x}{27} > 0 \therefore x > 0 \text{ ㉠}$$

$$\left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{9}\right) \left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{27}\right) < 2 \text{에서}$$

$$\left(\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}\right) \left(\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}\right) < 2$$

$$(\log_{\frac{1}{3}} x + 2)(\log_{\frac{1}{3}} x + 3) < 2$$

$$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 + 5 \log_{\frac{1}{3}} x + 4 < 0$$

$\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 5t + 4 < 0, (t+1)(t+4) < 0$$

$$\therefore -4 < t < -1$$

$$\text{즉, } -4 < \log_{\frac{1}{3}} x < -1 \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} < \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 81 < \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} 3$$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$$3 < x < 81 \text{ ㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$3 < x < 81$$

따라서 $\alpha = 3, \beta = 81$ 이므로

$$\beta - \alpha = 81 - 3 = 78$$

답 ④

063

진수의 조건에서

$$x > 0, \log_2 x > 0 \quad \therefore x > 1 \quad \text{..... ㉠}$$

$$\log_2 (\log_2 x) \leq 2 \text{에서 } \log_2 (\log_2 x) \leq \log_2 2^2$$

밑이 1보다 크므로

$$\log_2 x \leq 2^2, \log_2 x \leq 4, \log_2 x \leq \log_2 2^4$$

또, 밑이 1보다 크므로

$$x \leq 2^4 \quad \therefore x \leq 16 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$1 < x \leq 16 \quad \text{..... ㉢}$$

따라서 구하는 정수 x 는 2, 3, 4, ..., 16의 15개이다. ㉢

답 15

채점 기준	비율
① 진수의 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
② 로그부등식을 만족시키는 x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
③ 정수 x 의 개수를 구할 수 있다.	20 %

064

진수의 조건에서

$$x > 0, \log_8 x > 0 \quad \therefore x > 1 \quad \text{..... ㉠}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} (\log_8 x) > 1 \text{에서 } \log_{\frac{1}{3}} (\log_8 x) > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$$

밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$$\log_8 x < \frac{1}{3}, \log_8 x < \log_8 8^{\frac{1}{3}}$$

밑이 1보다 크므로

$$x < 8^{\frac{1}{3}} \quad \therefore x < 2 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$1 < x < 2$$

따라서 $a=1, \beta=2$ 이므로

$$a+\beta=1+2=3$$

답 ③

065

$x^{\log_3 x} > 27x^4$ 의 양변에 밑이 $\frac{1}{3}$ 인 로그를 취하면

$$\log_{\frac{1}{3}} x \times \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} 27x^4, (\log_{\frac{1}{3}} x)^2 < \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + \log_{\frac{1}{3}} x^4$$

$$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 < -3 + 4 \log_{\frac{1}{3}} x, (\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - 4 \log_{\frac{1}{3}} x + 3 < 0$$

$\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 4t + 3 < 0, (t-1)(t-3) < 0$$

$$\therefore 1 < t < 3$$

$$\text{즉, } 1 < \log_{\frac{1}{3}} x < 3 \text{이므로 } \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} < \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$$\frac{1}{27} < x < \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{27}, \beta = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$\frac{a+\beta}{a\beta} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = 27 + 3 = 30$$

답 ①

다른 풀이

$x^{\log_3 x} > 27x^4$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_{\frac{1}{3}} x \times \log_3 x > \log_3 27x^4$$

→ 밑이 1보다 크므로
부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

$$-\log_3 x \times \log_3 x > \log_3 3^3 + \log_3 x^4$$

$$-(\log_3 x)^2 > 3 + 4 \log_3 x$$

$$(\log_3 x)^2 + 4 \log_3 x + 3 < 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 4t + 3 < 0, (t+1)(t+3) < 0$$

$$\therefore -3 < t < -1$$

$$\text{즉, } -3 < \log_3 x < -1 \text{이므로 } \log_3 \frac{1}{27} < \log_3 x < \log_3 \frac{1}{3}$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \frac{1}{27} < x < \frac{1}{3}$$

066

$x^{\log_4 \frac{1}{x}} > \frac{1}{256}$ 의 양변에 밑이 4인 로그를 취하면

$$\log_4 \frac{1}{x} \times \log_4 x > \log_4 \frac{1}{256}$$

$$-\log_4 x \times \log_4 x > \log_4 4^{-4}$$

$$-(\log_4 x)^2 > -4, (\log_4 x)^2 - 4 < 0$$

$\log_4 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 4 < 0, (t+2)(t-2) < 0$$

$$\therefore -2 < t < 2$$

$$\text{즉, } -2 < \log_4 x < 2 \text{이므로 } \log_4 \frac{1}{16} < \log_4 x < \log_4 16$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \frac{1}{16} < x < 16$$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x 의 최댓값은 15이다.

답 ③

실력을 높이는 연습 문제

본문 071쪽

01

$f(4) = 2f(8)$ 에서

$$\log_2 4 + k \log_4 8 = 2(\log_2 8 + k \log_8 8)$$

$$\log_2 2^2 + k \log_2 2^3 = 2(\log_2 2^3 + k \log_8 8)$$

$$2 + \frac{3}{2}k = 2(3 + k), 2 + \frac{3}{2}k = 6 + 2k$$

$$\frac{k}{2} = -4 \quad \therefore k = -8$$

답 ①

02

함수 $f(x) = \log_a x + 3$ 의 그래프와 직선 $x=2$ 의 교점의 좌표가

$(2, 2)$ 이므로

$$f(2) = \log_a 2 + 3 = 2, \log_a 2 = -1$$

$$a^{-1} = 2 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

또, 함수 $g(x) = \log_b (x+6)$ 의 그래프와 직선 $x=2$ 의 교점의 좌

표가 $(2, 3)$ 이므로

$$g(2) = \log_b(2+6) = 3, \log_b 8 = 3$$

$$b^3 = 8 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore \log_b a = \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

답 ①

|다른 풀이|

$$f(2) = 2 \text{에서 } \log_a 2 = -1 \text{이므로}$$

$$\frac{\log_2 2}{\log_2 a} = -1, \frac{1}{\log_2 a} = -1 \quad \therefore \log_2 a = -1$$

$$g(2) = 3 \text{에서 } \log_b 8 = 3 \text{이므로}$$

$$\frac{\log_2 8}{\log_2 b} = 3, \frac{3}{\log_2 b} = 3 \quad \therefore \log_2 b = 1$$

$$\therefore \log_b a = \frac{\log_2 a}{\log_2 b} = \frac{-1}{1} = -1$$

03

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-1}{x} \text{이므로}$$

$$f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(27)$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{3} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{4} + \dots + \log_{\frac{1}{3}} \frac{26}{27}$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{26}{27} \right)$$

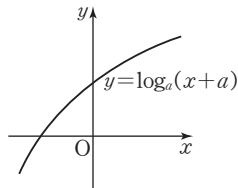
$$= \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right)^3 = 3$$

답 ④

04

함수 $y = \log_a(x+a)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_a x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.
 이때 제4사분면만을 지나지 않는 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $a > 1$ 이어야 하고, 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표의 값이 음수이어야 한다.
 $0 = \log_a(x+a)$ 에서
 $x+a=1 \quad \therefore x=1-a$
 즉, $1-a < 0$ 이어야 하므로 $a > 1$



답 ①

05

곡선 $y = \log_4 x$ 위의 점 A의 y 좌표가 1이므로 A(4, 1)
 선분 AB와 x 축이 만나는 점을 C라고 하면 x 축이 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하므로 점 C는 선분 AB의 중점이다.
 점 B의 좌표를 (a, b) 라고 하면
 $\frac{1+b}{2} = 0 \quad \therefore b = -1$
 또, 점 B는 곡선 $y = -\log_4(x+1)$ 위의 점이므로
 $-1 = -\log_4(a+1), \log_4(a+1) = 1$
 $a+1 = 4 \quad \therefore a = 3$
 따라서 B(3, -1)이므로
 $OB = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

답 ③

06

$$(f^{-1} \circ g)(25) = f^{-1}(g(25)) = f^{-1}(\log_5 25) = f^{-1}(2)$$

$$f^{-1}(2) = k \text{로 놓으면 } f(k) = 2 \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} k = 2 \quad \therefore k = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore (f^{-1} \circ g)(25) = \frac{1}{4}$$

답 ③

|다른 풀이|

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x \text{에서 } y = \log_{\frac{1}{2}} x \text{로 놓으면 } \left(\frac{1}{2} \right)^y = x$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \left(\frac{1}{2} \right)^x$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2} \right)^x$$

$$\therefore (f^{-1} \circ g)(25) = f^{-1}(2) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

07

문제 접근하기

주어진 세 수의 밑을 쉽게 통일할 수 없으므로 진수를 비교하는 방법이 아니라 주어진 조건인 $0 < a < 1 < b$ 를 이용하여 세 수를 표현하여 비교하는 방법을 사용한다.
 이때 a 와 b 사이에 1이 있으므로 로그값들을 양수와 음수로 표현하고 이를 이용한다.

$a < 1 < b$ 의 각 변에 밑이 a 인 로그를 취하면 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 부등호의 방향이 바뀐다. $\leftarrow$

$$\log_a b < \log_a 1 < \log_a a \quad \therefore \log_a b < 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{A}$$

또, $a < 1 < b$ 의 각 변에 밑이 b 인 로그를 취하면 밑이 1보다 크므로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다. $\leftarrow$

$$\log_b a < \log_b 1 < \log_b b$$

$$\log_b a < 0, -\log_b a > 0$$

$$\therefore \log_b \frac{1}{a} > 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{B}$$

$$\text{또, } \log_a \frac{b}{a} = \log_a b - \log_a a = \log_a b - 1 \text{이므로}$$

$$\log_a \frac{b}{a} < \log_a b \quad \dots\dots\dots \textcircled{C}$$

①, ②, ③에서

$$\log_a \frac{b}{a} < \log_a b < \log_b \frac{1}{a}$$

답 ④

08

함수 $y = \log_4(x+a)$ 의 밑이 1보다 크므로 주어진 함수는 $x=8$ 일 때 최댓값 2를 갖는다.
 즉, $\log_4(8+a) = 2$ 이므로
 $8+a = 4^2 \quad \therefore a = 8$

답 8

09

$f(x) = |x-4| + 4$ 라고 하면 $f(x)$ 는 $x=4$ 일 때 최솟값 4를 갖는다.
 주어진 함수에서 밑이 1보다 크므로 주어진 함수는 $f(x)$ 가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

$$t^2 - kt - 4 = 0$$

주어진 방정식의 두 근을 α, β 라고 하면 위 이차방정식의 두 근은 $\log_{\frac{1}{4}} \alpha, \log_{\frac{1}{4}} \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_{\frac{1}{4}} \alpha + \log_{\frac{1}{4}} \beta = k, \log_{\frac{1}{4}} \alpha \beta = k$$

이때 $\alpha\beta = 16$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{4}} 16 = k, \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = k \quad \therefore k = -2$$

답 ①

16

$a(\log_3 x)^2 + b \log_3 x + c = 0$ 에서 $\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$at^2 + bt + c = 0 \quad \dots\dots\dots ㉠$$

다영이는 a, c 를 바르게 보았으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 ㉠의 두 근의 곱을 구할 수 있다.

다영이가 구한 ㉠의 두 근은 $\log_3 9 = 2, \log_3 \frac{1}{81} = -4$ 이므로

$$(\text{두 근의 곱}) = 2 \times (-4) = -8 = \frac{c}{a}$$

$$\therefore c = -8a \quad \dots\dots\dots ㉡$$

현수는 a, b 를 바르게 보았으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 ㉠의 두 근의 합을 구할 수 있다.

현수가 구한 ㉠의 두 근은 $\log_3 \frac{1}{3} = -1, \log_3 27 = 3$ 이므로

$$(\text{두 근의 합}) = -1 + 3 = 2 = -\frac{b}{a}$$

$$\therefore b = -2a \quad \dots\dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 $at^2 - 2at - 8a = 0$

$a \neq 0$ 이므로

$$t^2 - 2t - 8 = 0, (t+2)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 4$$

즉, $\log_3 x = -2$ 또는 $\log_3 x = 4$ 이므로

$$x = \frac{1}{9} \text{ 또는 } x = 81$$

따라서 $\alpha = \frac{1}{9}, \beta = 81$ 또는 $\alpha = 81, \beta = \frac{1}{9}$ 이므로

$$\alpha\beta = \frac{1}{9} \times 81 = 9$$

답 9

17

$\log_3(x+y) = 2$ 에서

$$x+y = 3^2 = 9$$

$\log_2 x + \log_2 y = 0$ 에서

$$\log_2 xy = 0 \quad \therefore xy = 1$$

$$\therefore (x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = 9^2 - 4 \times 1 = 81 - 4 = 77$$

답 ③

공식 개념 CHECK

곱셈 공식의 변형_중 수학 3

$$(1) a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab \\ = (a+b)^2 - 2ab$$

$$(2) (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab \\ (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$$

18

문제 접근하기

$x > 0$ 에서 $4x \neq 5x$ 이고 $\log 4 \neq \log 5$ 이므로 밑이나 지수를 비교하는 방법으로는 주어진 방정식의 해를 구할 수 없다. 이와 같은 문제는 양변에 로그를 취하여 지수를 아래로 내려 식을 정리하여 해결할 수 있다.

주어진 식의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log 4 \times \log 4x = \log 5 \times \log 5x$$

로 정리할 수 있다.

$(4x)^{\log 4} = (5x)^{\log 5}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log 4 \times \log 4x = \log 5 \times \log 5x$$

$$\log 4 \times (\log 4 + \log x) = \log 5 \times (\log 5 + \log x)$$

$$(\log 4)^2 + \log 4 \times \log x = (\log 5)^2 + \log 5 \times \log x$$

$$\log 4 \times \log x - \log 5 \times \log x = (\log 5)^2 - (\log 4)^2$$

$$(\log 4 - \log 5) \log x = (\log 5)^2 - (\log 4)^2$$

$$\therefore \log x = \frac{(\log 5)^2 - (\log 4)^2}{\log 4 - \log 5}$$

$$= \frac{(\log 5 + \log 4)(\log 5 - \log 4)}{-(\log 5 - \log 4)}$$

$$= -(\log 5 + \log 4)$$

$$= -\log 20 = \log \frac{1}{20}$$

$$\therefore x = \frac{1}{20}$$

$$\text{답 } x = \frac{1}{20}$$

19

(i) $\log_2(x+1) \leq k$ 의 진수의 조건에서

$$x+1 > 0 \quad \therefore x > -1 \quad \dots\dots\dots ㉠$$

$$\log_2(x+1) \leq k \text{에서}$$

$$\log_2(x+1) \leq \log_2 2^k$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$x+1 \leq 2^k \quad \therefore x \leq 2^k - 1 \quad \dots\dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-1 < x \leq 2^k - 1$
 $\therefore A = \{x \mid -1 < x \leq 2^k - 1\}$ $\rightarrow k$ 는 자연수이므로 $2^k - 1 \geq 1$ 이다.

(ii) $\log_2(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \geq 2$ 의 진수의 조건에서

$$x-2 > 0, x+1 > 0 \quad \therefore x > 2 \quad \dots\dots\dots ㉢$$

$$\log_2(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \geq 2 \text{에서}$$

$$\log_2(x-2) + \log_2(x+1) \geq \log_2 2^2$$

$$\log_2(x-2)(x+1) \geq \log_2 4$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$(x-2)(x+1) \geq 4, x^2 - x - 6 \geq 0$$

$$(x+2)(x-3) \geq 0 \quad \therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 3 \quad \dots\dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $x \geq 3$

$$\therefore B = \{x \mid x \geq 3\}$$

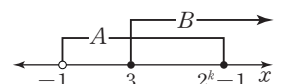
(i), (ii)에서 구한 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

이때 $n(A \cap B) = 5$ 이므로

$A \cap B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } 7 \leq 2^k - 1 < 8 \quad \therefore 8 \leq 2^k < 9$$

따라서 구하는 자연수 k 의 값은 3이다.



답 ①

20

진수의 조건에서

$$x > 0, \frac{9}{x^3} > 0 \quad \therefore x > 0$$

$$(\log_3 x)^2 \leq \log_3 \frac{9}{x^3} + 16 \text{에서}$$

$$(\log_3 x)^2 \leq \log_3 3^2 - \log_3 x^3 + 16$$

$$(\log_3 x)^2 \leq 2 - 3 \log_3 x + 16$$

$$(\log_3 x)^2 + 3 \log_3 x - 18 \leq 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 3t - 18 \leq 0, (t+6)(t-3) \leq 0$$

$$\therefore -6 \leq t \leq 3$$

즉, $-6 \leq \log_3 x \leq 3$ 이고 밑이 1보다 크므로

$$3^{-6} \leq x \leq 3^3$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$3^{-6} \leq x \leq 3^3$$

따라서 $\alpha = 3^{-6}$, $\beta = 3^3$ 이므로

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3^3}{3^{-6}} = 3^9$$

..... ㉠

..... ㉡

답 ③

21

진수의 조건에서

$$x > 0, \log_2 x - 2 > 0 \quad \rightarrow \log_2 x > \log_2 4$$

밑이 1보다 크므로 $x > 4$

$$\log_4 (\log_2 x - 2) \leq \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\log_4 (\log_2 x - 2) \leq \log_4 4^{\frac{1}{2}}$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$\log_2 x - 2 \leq 4^{\frac{1}{2}}, \log_2 x - 2 \leq 2$$

$$\log_2 x \leq 4, \log_2 x \leq \log_2 2^4$$

또, 밑이 1보다 크므로

$$x \leq 2^4 \quad \therefore x \leq 16$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$4 < x \leq 16$$

따라서 구하는 정수 x 는 5, 6, 7, ..., 16의 12개이다.

..... ㉠

답 ④

22

$$(i) 32^{2-x} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-4} \text{에서}$$

$$2^{5(2-x)} \leq 2^{-2(x^2-4)}$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$5(2-x) \leq -2(x^2-4), 10-5x \leq -2x^2+8$$

$$2x^2-5x+2 \leq 0, (2x-1)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq x \leq 2$$

(ii) $(\log_2 x)^2 < \log_2 x^3$ 의 진수의 조건에서

$$x > 0, x^3 > 0 \quad \therefore x > 0$$

$$(\log_2 x)^2 < \log_2 x^3 \text{에서}$$

$$(\log_2 x)^2 < 3 \log_2 x, (\log_2 x)^2 - 3 \log_2 x < 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 3t < 0, t(t-3) < 0$$

$$\therefore 0 < t < 3$$

..... ㉠

..... ㉡

즉, $0 < \log_2 x < 3$ 이고 밑이 1보다 크므로

$$1 < x < 8$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$1 < x < 8$$

(i), (ii)에서 $1 < x \leq 2$

따라서 구하는 자연수 x 의 값은 2이다.

..... ㉡

답 2

23

$4^{\log x} = x^{\log 4}$ 이므로 주어진 부등식은

$$4^{\log x} \times 4^{\log x} - \frac{9}{2}(4^{\log x} + 4^{\log x}) + 8 < 0$$

$$(4^{\log x})^2 - 9 \times 4^{\log x} + 8 < 0$$

$4^{\log x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 9t + 8 < 0, (t-1)(t-8) < 0$$

$$\therefore 1 < t < 8$$

즉, $1 < 4^{\log x} < 8$ 이므로 $4^0 < 4^{\log x} < 4^{\frac{3}{2}}$

이때 밑이 1보다 크므로 $0 < \log x < \frac{3}{2}$

또, 로그의 밑이 1보다 크므로 $1 < x < 10\sqrt{10}$

따라서 $\alpha = 1$, $\beta = 10\sqrt{10}$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1^2 + (10\sqrt{10})^2 = 1 + 1000 = 1001$$

답 ②

24

문제 접근하기

x 에 대한 이차방정식이므로 판별식을 D 라고 할 때 $D \geq 0$ 임을 이용한 다. 이때 로그의 진수 a^2 이 미지수이므로 진수의 조건에 의하여 $a^2 > 0$ 임에 주의한다.

진수의 조건에서

$$a^2 > 0 \quad \therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 0$$

$x^2 - (2 - \log_2 a^2)x + 4 = 0$ 이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$D = (2 - \log_2 a^2)^2 - 4 \times 4 \geq 0$$

$$(2 - 2 \log_2 |a|)^2 - 16 \geq 0, 4(1 - \log_2 |a|)^2 - 16 \geq 0$$

$$(1 - \log_2 |a|)^2 - 4 \geq 0, (\log_2 |a|)^2 - 2 \log_2 |a| - 3 \geq 0$$

$\log_2 |a| = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 2t - 3 \geq 0, (t+1)(t-3) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -1 \text{ 또는 } t \geq 3$$

즉, $\log_2 |a| \leq -1$ 또는 $\log_2 |a| \geq 3$ 이고 밑이 1보다 크므로

$$|a| \leq \frac{1}{2} \text{ 또는 } |a| \geq 8$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2} \text{ 또는 } a \leq -8 \text{ 또는 } a \geq 8$$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$a \leq -8 \text{ 또는 } -\frac{1}{2} \leq a < 0 \text{ 또는 } 0 < a \leq \frac{1}{2} \text{ 또는 } a \geq 8$$

답 ⑤



삼각함수

기본을 다지는 유형

본문 078쪽

001

- (1) $350^\circ = 360^\circ \times 0 + 350^\circ$ 이므로
 $360^\circ \times n + 350^\circ$
 (2) $600^\circ = 360^\circ \times 1 + 240^\circ$ 이므로
 $360^\circ \times n + 240^\circ$
 (3) $-240^\circ = 360^\circ \times (-1) + 120^\circ$ 이므로
 $360^\circ \times n + 120^\circ$
 (4) $-540^\circ = 360^\circ \times (-2) + 180^\circ$ 이므로
 $360^\circ \times n + 180^\circ$

답 (1) $360^\circ \times n + 350^\circ$ (2) $360^\circ \times n + 240^\circ$
 (3) $360^\circ \times n + 120^\circ$ (4) $360^\circ \times n + 180^\circ$

002

- ① $390^\circ = 360^\circ \times 1 + 30^\circ$
 ② $750^\circ = 360^\circ \times 2 + 30^\circ$
 ③ $1100^\circ = 360^\circ \times 3 + 20^\circ$
 ④ $-330^\circ = 360^\circ \times (-1) + 30^\circ$
 ⑤ $-690^\circ = 360^\circ \times (-2) + 30^\circ$
 따라서 동경 OP가 나타낼 수 없는 각은 ③이다.

답 ③

003

$\frac{\theta}{3} = \frac{1560^\circ}{3} = 520^\circ = 360^\circ \times 1 + 160^\circ$
 따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제2사분면의 각이다.

답 ②

참고

정수 n 에 대하여

- (1) θ 가 제1사분면의 각 $\Rightarrow 360^\circ \times n < \theta < 360^\circ \times n + 90^\circ$
 (2) θ 가 제2사분면의 각 $\Rightarrow 360^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 180^\circ$
 (3) θ 가 제3사분면의 각 $\Rightarrow 360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ$
 (4) θ 가 제4사분면의 각 $\Rightarrow 360^\circ \times n + 270^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 360^\circ$

004

- ① $200^\circ = 360^\circ \times 0 + 200^\circ$ 이므로 제3사분면의 각이다.
 ② $610^\circ = 360^\circ \times 1 + 250^\circ$ 이므로 제3사분면의 각이다.
 ③ $1380^\circ = 360^\circ \times 3 + 300^\circ$ 이므로 제4사분면의 각이다.
 ④ $-160^\circ = 360^\circ \times (-1) + 200^\circ$ 이므로 제3사분면의 각이다.
 ⑤ $-510^\circ = 360^\circ \times (-2) + 210^\circ$ 이므로 제3사분면의 각이다.
 따라서 동경이 위치하는 사분면이 나머지 넷과 다른 것은 ③이다.

답 ③

005

ㄱ. $120^\circ = 360^\circ \times 0 + 120^\circ$ 이므로 제2사분면의 각이다.

- ㄴ. 180° 를 나타내는 동경은 x 축 위에 있으므로 어느 사분면의 각도 아니다.
 ㄷ. $815^\circ = 360^\circ \times 2 + 95^\circ$ 이므로 제2사분면의 각이다.
 ㄹ. $-230^\circ = 360^\circ \times (-1) + 130^\circ$ 이므로 제2사분면의 각이다.
 ㅁ. $-470^\circ = 360^\circ \times (-2) + 250^\circ$ 이므로 제3사분면의 각이다.
 ㅂ. $-780^\circ = 360^\circ \times (-3) + 300^\circ$ 이므로 제4사분면의 각이다.
 따라서 제2사분면의 각은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ②

006

θ 가 제2사분면의 각이므로

$360^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 180^\circ$ (단, n 은 정수이다.)

$\therefore 180^\circ \times n + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 90^\circ$ ①

(i) $n = 2k$ (k 는 정수)일 때

$$180^\circ \times 2k + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times 2k + 90^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 90^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제1사분면의 각이다. ②

(ii) $n = 2k + 1$ (k 는 정수)일 때

$$180^\circ \times (2k + 1) + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times (2k + 1) + 90^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 225^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 270^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제3사분면의 각이다. ③

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제1사분면, 제3사분면이다. ④

답 제1사분면, 제3사분면

채점 기준	비율
① θ 가 제2사분면의 각임을 이용하여 $\frac{\theta}{2}$ 의 범위를 n 에 대한 부등식으로 나타낼 수 있다.	30 %
② $n = 2k$ 일 때, 각 $\frac{\theta}{2}$ 가 제몇 사분면의 각인지 구할 수 있다.	30 %
③ $n = 2k + 1$ 일 때, 각 $\frac{\theta}{2}$ 가 제몇 사분면의 각인지 구할 수 있다.	30 %
④ 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면을 모두 구할 수 있다.	10 %

007

3θ 가 제4사분면의 각이므로

$360^\circ \times n + 270^\circ < 3\theta < 360^\circ \times n + 360^\circ$ (단, n 은 정수이다.)

$$\therefore 120^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 120^\circ \times n + 120^\circ$$

(i) $n = 3k$ (k 는 정수)일 때

$$120^\circ \times 3k + 90^\circ < \theta < 120^\circ \times 3k + 120^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 120^\circ$$

따라서 θ 는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n = 3k + 1$ (k 는 정수)일 때

$$120^\circ \times (3k + 1) + 90^\circ < \theta < 120^\circ \times (3k + 1) + 120^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 210^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 240^\circ$$

따라서 θ 는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때

$$120^\circ \times (3k+2) + 90^\circ < \theta < 120^\circ \times (3k+2) + 120^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 330^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 360^\circ$$

따라서 θ 는 제4사분면의 각이다.

(i)~(iii)에서 각 θ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제1사분면이다.

답 ①

008

각 θ 를 나타내는 동경과 각 11θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 11\theta = 360^\circ \times n \quad (\text{단, } n \text{은 정수이다.})$$

$$12\theta = 360^\circ \times n \quad \therefore \theta = 30^\circ \times n \quad \text{----- ㉠}$$

이때 $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ 이므로

$$0^\circ < 30^\circ \times n \leq 90^\circ \quad \therefore 0 < n \leq 3$$

n 은 정수이므로 $n=1, 2, 3$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

따라서 구하는 합은

$$30^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

답 180°

009

각 θ 를 나타내는 동경과 각 3θ 를 나타내는 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$3\theta + \theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수이다.})$$

$$4\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad \therefore \theta = 90^\circ \times n + 45^\circ \quad \text{----- ㉠}$$

이때 $90^\circ < \theta < 270^\circ$ 이므로

$$90^\circ < 90^\circ \times n + 45^\circ < 270^\circ, \quad 45^\circ < 90^\circ \times n < 225^\circ$$

$$\therefore \frac{1}{2} < n < \frac{5}{2}$$

n 은 정수이므로 $n=1, 2$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=135^\circ, 225^\circ$

따라서 구하는 합은

$$135^\circ + 225^\circ = 360^\circ$$

답 ③

010

두 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로 두 동경은 원점에 대하여 대칭이다.

$$6\theta - \theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수}) \text{이므로}$$

$$5\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad \therefore \theta = 72^\circ \times n + 36^\circ$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$0^\circ < 72^\circ \times n + 36^\circ < 180^\circ, \quad -36^\circ < 72^\circ \times n < 144^\circ$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < n < 2$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0, 1$

$$\therefore \theta = 36^\circ, 108^\circ$$

답 36°, 108°

011

각 α 를 나타내는 동경과 각 β 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대

하여 대칭이므로

$$\alpha + \beta = 360^\circ \times n + 90^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수이다.})$$

$$\textcircled{1} \quad 150^\circ = 360^\circ \times 0 + 150^\circ$$

$$\textcircled{2} \quad 180^\circ = 360^\circ \times 0 + 180^\circ$$

$$\textcircled{3} \quad 360^\circ = 360^\circ \times 1$$

$$\textcircled{4} \quad 420^\circ = 360^\circ \times 1 + 60^\circ$$

$$\textcircled{5} \quad 810^\circ = 360^\circ \times 2 + 90^\circ$$

따라서 $\alpha + \beta$ 의 크기가 될 수 있는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

012

각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$$5\theta - \theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수이다.})$$

$$4\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad \therefore \theta = 90^\circ \times n + 45^\circ$$

이때 $\theta \geq 0^\circ$ 이므로

$$\theta = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, \dots \quad \text{----- ㉠}$$

①

또, 각 θ 를 나타내는 동경과 각 9θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 9\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수이다.})$$

$$10\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ \quad \therefore \theta = 36^\circ \times n + 9^\circ$$

이때 $\theta \geq 0^\circ$ 이므로

$$\theta = 9^\circ, 45^\circ, 81^\circ, \dots \quad \text{----- ㉡}$$

②

따라서 ㉠, ㉡에서 구하는 각 θ 의 크기의 최솟값은 45° 이다.

③

답 45°

채점 기준	비율
① 각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이 되도록 하는 각 θ 의 크기를 구할 수 있다.	40 %
② 각 θ 를 나타내는 동경과 각 9θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이 되도록 하는 각 θ 의 크기를 구할 수 있다.	40 %
③ ①, ②를 만족시키는 각 θ 의 크기의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

013

$$(1) \quad 45^\circ = 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$$

$$(2) \quad 210^\circ = 210 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7}{6}\pi$$

$$(3) \quad -300^\circ = -300 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{5}{3}\pi$$

$$(4) \quad \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 120^\circ$$

$$(5) \quad -\frac{5}{6}\pi = -\frac{5}{6}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -150^\circ$$

$$(6) \quad 2 = 2 \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{360^\circ}{\pi}$$

→ 단위 라디안이 생략된 것이므로

$$2 \text{라디안} = 2 \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

답 (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{7}{6}\pi$ (3) $-\frac{5}{3}\pi$

(4) 120° (5) -150° (6) $\frac{360^\circ}{\pi}$

014

- (1) $\frac{\pi}{3}$ 의 동경이 나타내는 일반각은 $2n\pi + \frac{\pi}{3}$
 (2) $\frac{12}{5}\pi = 2\pi + \frac{2}{5}\pi$ 이므로 $\frac{12}{5}\pi$ 의 동경이 나타내는 일반각은
 $2n\pi + \frac{2}{5}\pi$
 (3) $-3\pi = 2\pi \times (-2) + \pi$ 이므로 -3π 의 동경이 나타내는 일반각은 $2n\pi + \pi$
 (4) $-\frac{19}{6}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{5}{6}\pi$ 이므로 $-\frac{19}{6}\pi$ 의 동경이 나타내는 일반각은 $2n\pi + \frac{5}{6}\pi$

답 (1) $2n\pi + \frac{\pi}{3}$ (2) $2n\pi + \frac{2}{5}\pi$
 (3) $2n\pi + \pi$ (4) $2n\pi + \frac{5}{6}\pi$

015

$$135^\circ + \frac{\pi}{3} - 240^\circ = 135^\circ \times \frac{\pi}{180} + \frac{\pi}{3} - 240^\circ \times \frac{\pi}{180}$$

$$= \frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{4}{3}\pi = -\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{4}$$

답 ①

|다른 풀이|

$$135^\circ + \frac{\pi}{3} - 240^\circ = 135^\circ + \frac{\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} - 240^\circ$$

$$= 135^\circ + 60^\circ - 240^\circ = -45^\circ$$

$$= -45^\circ \times \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{4}$$

016

반지름의 길이가 r 이고, 중심이 O인 원에서 호의 길이가 r 인 부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 α° 라고 하면 호 AB의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$$r : \overset{(\text{호})}{2\pi r} = \alpha^\circ : 360^\circ, 2\pi r \alpha^\circ = 360^\circ r$$

$$\therefore \alpha^\circ = \frac{360^\circ r}{2\pi r} = \overset{(\text{라})}{\frac{180^\circ}{\pi}}$$

따라서 중심각의 크기 α° 는 원의 반지름의 길이 r 에 관계없이 항상 일정하다.

이 일정한 각의 크기 $\overset{(\text{라})}{\frac{180^\circ}{\pi}}$ 를 1라디안이라 하고, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법이라고 한다.

$$\therefore (\text{라}) : 2\pi r, (\text{라}) : \frac{180^\circ}{\pi}$$

답 ④

017

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라고 하면

$$\frac{2}{3}\pi = r \times \frac{3}{4}\pi \quad \therefore r = \frac{8}{9}$$

답 ⑤

018

반지름의 길이가 6인 부채꼴의 호의 길이를 l 이라고 하면 이 부채꼴의 넓이와 반지름의 길이가 2인 원의 넓이가 같으므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times l = \pi \times 2^2 \quad \therefore l = \frac{4}{3}\pi \quad \text{①}$$

따라서 부채꼴의 둘레의 길이는

$$2 \times 6 + \frac{4}{3}\pi = 12 + \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{이므로 } a = 12, b = \frac{4}{3} \quad \text{②}$$

$$\therefore a + 3b = 12 + 3 \times \frac{4}{3}$$

$$= 12 + 4 = 16 \quad \text{③}$$

답 16

채점 기준	비율
① 부채꼴의 호의 길이를 구할 수 있다.	40 %
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $a + 3b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

019

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라고 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 $4 + \pi$ 이므로

$$2r + r \times \frac{\pi}{2} = 4 + \pi$$

$$\frac{4 + \pi}{2} r = 4 + \pi \quad \therefore r = 2$$

따라서 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$$

답 ①

|다른 풀이|

중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴은 사분원과 같으므로 반지름의 길이가 2인 사분원의 넓이는

$$\frac{1}{4} \times \pi \times 2^2 = \pi$$

020

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라고 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 20이므로

$$20 = 2r + l \quad \therefore l = 20 - 2r$$

이때 $r > 0, l > 0$ 이므로

$$r > 0, 20 - 2r > 0 \quad \therefore 0 < r < 10$$

부채꼴의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2} r l = \frac{1}{2} r (20 - 2r)$$

$$= -r^2 + 10r$$

$$= -(r - 5)^2 + 25$$

따라서 S 는 $r = 5$ 일 때 최댓값 25를 가지므로 넓이가 최대인 부채꼴의 반지름의 길이는 5이다.

답 ④

021

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라고 하면 부채꼴의

둘레의 길이가 12이므로

$$2r + l = 12 \quad \therefore l = 12 - 2r$$

이때 $r > 0$, $l > 0$ 이므로

$$r > 0, 12 - 2r > 0 \quad \therefore 0 < r < 6$$

부채꼴의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(12 - 2r)$$

$$= -r^2 + 6r$$

$$= -(r - 3)^2 + 9$$

따라서 S 는 $r = 3$ 일 때 최댓값 9를 갖는다.

$r = 3$ 일 때 $l = 12 - 2 \times 3 = 6$ 이므로 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라고 하면

$$6 = 3\theta \quad \therefore \theta = 2$$

즉, 구하는 중심각의 크기는 2이다.

답 ②

022

주어진 부채꼴로 원뿔을 만들면 오른쪽 그림과 같다.

옆면인 부채꼴의 호의 길이는

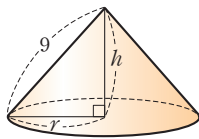
$$9 \times \frac{4}{3}\pi = 12\pi$$

이때 옆면인 부채꼴의 호의 길이와 밑면인 원의 둘레의 길이가 같으므로 밑면인 원의 반지름의 길이를 r 라고 하면

$$2\pi r = 12\pi \quad \therefore r = 6$$

원뿔의 높이를 h 라고 하면

$$h = \sqrt{9^2 - 6^2} = 3\sqrt{5}$$



답 ①

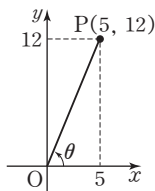
023

$$\overline{OP} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

$$(1) \sin \theta = \frac{12}{13}$$

$$(2) \cos \theta = \frac{5}{13}$$

$$(3) \tan \theta = \frac{12}{5}$$



답 (1) $\frac{12}{13}$ (2) $\frac{5}{13}$ (3) $\frac{12}{5}$

024

$$\overline{OP} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5} \text{이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{-6}{3\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{-3}{3\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

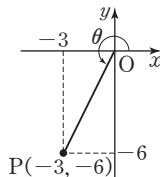
$$\tan \theta = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$\therefore 5 \cos \theta - 25 \sin \theta - \tan \theta$$

$$= 5 \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - 25 \times \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) - 2$$

$$= -\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 2$$

$$= 9\sqrt{5} - 2$$



답 ④

025

점 $P(-3, a)$ 에서 $\tan \theta = \frac{a}{-3}$ 이므로

$$\frac{a}{-3} = -\frac{\sqrt{13}}{6} \quad \therefore a = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\therefore r = \overline{OP} = \sqrt{(-3)^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2} = \frac{7}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2 + r^2 &= \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\ &= \frac{13}{4} + \frac{49}{4} = \frac{31}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{31}{2}$

026

점 D 의 좌표를 (x_1, y_1) 이라고 하면 $\overline{OD} = 2$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{y_1}{2} \text{에서 } y_1 = 2 \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{x_1}{2} \text{에서 } x_1 = 2 \cos \theta$$

$$\therefore D(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$$

이때 점 C 는 점 D 와 x 축에 대하여 대칭이므로

$$C(2 \cos \theta, -2 \sin \theta)$$

따라서 점 C 의 y 좌표는 $-2 \sin \theta$ 이다.

답 ③

027

직선 $4x + 3y = 0$ 위의 한 점 $P(-3, 4)$ 를 잡으면

$$\overline{OP} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \quad \text{①}$$

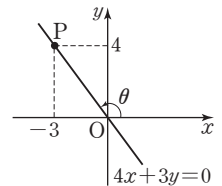
이므로

$$\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = -\frac{3}{5}, \tan \theta = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore 25 \sin \theta \cos \theta \tan \theta = 25 \times \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right) \quad \text{②}$$

$$= 16 \quad \text{③}$$

답 16



채점 기준	비율
① 주어진 직선 위의 임의의 한 점 P 를 잡고, $\overline{OP}$ 의 길이를 구할 수 있다.	30 %
② $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ $25 \sin \theta \cos \theta \tan \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

[다른 풀이]

$$4x + 3y = 0 \text{에서 } y = -\frac{4}{3}x$$

$$\therefore \tan \theta = -\frac{4}{3}$$

이때 직선 $4x + 3y = 0$ 위의 한 점 $P(-3, 4)$ 를 잡으면

$$\overline{OP} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \text{이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore 25 \sin \theta \cos \theta \tan \theta = 25 \times \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$= 16$$

직선 $4x + 3y = 0$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ 이므로
(기울기) $= \tan \theta = -\frac{4}{3}$

028

$\sin \theta \tan \theta > 0$ 에서 $\sin \theta$ 와 $\tan \theta$ 의 부호가 서로 같으므로 각 θ 는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.
따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

답 ③

029

- (i) $\sin \theta \cos \theta > 0$ 에서 $\sin \theta$ 와 $\cos \theta$ 의 부호가 서로 같으므로 각 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.
(ii) $\sin \theta \tan \theta < 0$ 에서 $\sin \theta$ 와 $\tan \theta$ 의 부호가 서로 다르므로 각 θ 는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.
(i), (ii)에서 각 θ 는 제3사분면의 각이다.

답 ③

030

- (i) $\sin \theta \tan \theta > 0$ 에서 $\sin \theta$ 와 $\tan \theta$ 의 부호가 서로 같으므로 각 θ 는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.
(ii) $\cos \theta \tan \theta > 0$ 에서 $\cos \theta$ 와 $\tan \theta$ 의 부호가 서로 같으므로 각 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.
(i), (ii)에서 각 θ 는 제1사분면의 각이다.
따라서 주어진 조건을 만족시키는 각 θ 의 크기가 될 수 있는 것은 ①이다.

답 ①

031

$\sin \theta \cos \theta > 0$ 에서 $\sin \theta$ 와 $\cos \theta$ 의 부호가 서로 같으므로 각 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

ㄱ. θ 가 제3사분면의 각이면

$$|\sin \theta| = -\sin \theta$$

$$\therefore \sin \theta \neq |\sin \theta| \text{ (거짓)}$$

ㄴ. θ 가 제3사분면의 각이면

$$\sqrt{\cos^2 \theta} = |\cos \theta| = -\cos \theta$$

$$\therefore \sqrt{\cos^2 \theta} \neq \cos \theta \text{ (거짓)}$$

ㄷ. 제1사분면 또는 제3사분면에서 $\tan \theta > 0$ 이므로

$$|\tan \theta| + \tan \theta = \tan \theta + \tan \theta = 2 \tan \theta \text{ (참)}$$

따라서 항상 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ③

032

$$\frac{\sqrt{\sin \theta}}{\sqrt{\tan \theta}} = -\sqrt{\frac{\sin \theta}{\tan \theta}} \text{ 에서}$$

$$\sin \theta > 0, \tan \theta < 0$$

즉, θ 는 제2사분면의 각이므로 ①

$$\cos \theta < 0, \sin \theta - \cos \theta > 0$$

$$\therefore \sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2} = |\cos \theta| + |\sin \theta|$$

$$= |\sin \theta - \cos \theta| - |\cos \theta| + |\sin \theta|$$

$$= (\sin \theta - \cos \theta) - (-\cos \theta) + \sin \theta \text{ ②}$$

$$= \sin \theta - \cos \theta + \cos \theta + \sin \theta$$

$$= 2 \sin \theta \text{ ③}$$

답 2 sin θ

채점 기준	비율
① θ 가 제2사분면의 각임을 알 수 있다.	30 %
② 절댓값 기호를 풀 수 있다.	50 %
③ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	20 %

풍샘 개념 CHECK

음수의 제곱근의 성질_高 公通수학 1

0이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여

$$(1) \sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{ 이면 } a < 0, b < 0$$

$$(2) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}} \text{ 이면 } a > 0, b < 0$$

033

$$\begin{aligned} \sin \theta + \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} &= \sin \theta + \frac{1 - \sin^2 \theta}{1 + \sin \theta} \quad \begin{matrix} \nearrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 에서} \\ \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \end{matrix} \\ &= \sin \theta + \frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{1 + \sin \theta} \\ &= \sin \theta + (1 - \sin \theta) \\ &= 1 \end{aligned}$$

답 ③

034

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta}{1 - \tan \theta} + \frac{\sin \theta}{1 - \frac{1}{\tan \theta}} &= \frac{\cos \theta}{1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} + \frac{\sin \theta}{1 - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}} \\ &= \frac{\cos \theta}{\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta}} + \frac{\sin \theta}{\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta}} \\ &= \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \\ &= \frac{(\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta)}{\cos \theta - \sin \theta} \\ &= \sin \theta + \cos \theta \end{aligned}$$

답 ⑤

035

θ 가 제3사분면의 각이므로

$$\cos \theta < 0$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 에서}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{5}{13} \text{ (} \because \cos \theta < 0 \text{)}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$$

따라서 $\cos \theta, \tan \theta$ 의 값을 차례대로 나열하면 $-\frac{5}{13}, \frac{12}{5}$ 이다.

답 $-\frac{5}{13}, \frac{12}{5}$

036

$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 에서 θ 는 제4사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{에서}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\because \sin \theta < 0)$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ②

037

θ 가 제4사분면의 각이므로 $\cos \theta > 0$

$$\frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta} = \frac{1}{4} \text{에서 } 1-\sin \theta = 4(1+\sin \theta)$$

$$1-\sin \theta = 4+4\sin \theta, \quad 5\sin \theta = -3$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{에서}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{4}{5} \quad (\because \cos \theta > 0)$$

답 $\frac{4}{5}$

038

θ 가 제2사분면의 각이므로 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 의 양변을 $\cos^2 \theta$ 로 나누면

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

위의 식에 $\tan \theta = -\frac{1}{3}$ 을 대입하면

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad \cos^2 \theta = \frac{9}{10}$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10} \quad (\because \cos \theta < 0)$$

또, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{10} \quad (\because \sin \theta > 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore 10(\sin \theta - \cos \theta) &= 10 \times \left\{ \frac{\sqrt{10}}{10} - \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \right\} \\ &= 10 \times \frac{4\sqrt{10}}{10} = 4\sqrt{10} \end{aligned}$$

답 ④

[다른 풀이]

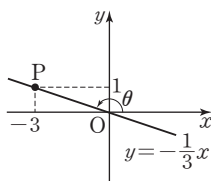
θ 가 제2사분면의 각이고 $\tan \theta = -\frac{1}{3}$ 이므로

로 오른쪽 그림과 같이 직선 $y = -\frac{1}{3}x$ 위의

한 점 $P(-3, 1)$ 을 잡으면

$$OP = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

이때



$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \quad \cos \theta = \frac{-3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

이므로

$$\begin{aligned} 10(\sin \theta - \cos \theta) &= 10 \times \left\{ \frac{\sqrt{10}}{10} - \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \right\} \\ &= 10 \times \frac{4\sqrt{10}}{10} = 4\sqrt{10} \end{aligned}$$

039

θ 가 제3사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 의 양변을 $\cos^2 \theta$ 로 나누면

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

위의 식에 $\tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 를 대입하면

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad \cos^2 \theta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{\sqrt{6}}{3} \quad (\because \cos \theta < 0) \quad \text{①}$$

또, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\because \sin \theta < 0) \quad \text{②}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{1 + 2 \cos \theta \sin \theta} &= \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}}{1 + 2 \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} \\ &= \frac{-\frac{1}{3}}{1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{-1}{3 + 2\sqrt{2}} \\ &= -3 + 2\sqrt{2} \quad \text{③} \end{aligned}$$

답 $-3 + 2\sqrt{2}$

채점 기준	비율
① $\cos \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $\sin \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	30 %

[다른 풀이]

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{1 + 2 \cos \theta \sin \theta} &= \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta} \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta)^2} \\ &= \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \\ &= \frac{\tan \theta - 1}{\tan \theta + 1} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \theta \text{가 제3사분면의 각이므로 } \cos \theta < 0 \\ \text{즉, } \cos \theta \neq 0 \text{이므로 분모, 분자를 } \cos \theta \text{로 나눈다.} \end{array} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2} + 2} = -3 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

040

(1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}, 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{8}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

$$(2) (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 - 2 \times \left(-\frac{4}{9}\right) \quad (\because (1))$$

$$= 1 + \frac{8}{9} = \frac{17}{9}$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{17}}{3}$$

$$\text{답 (1)} -\frac{4}{9} \quad (2) \pm \frac{\sqrt{17}}{3}$$

041

$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}, 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$$

따라서

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 + 2 \times \frac{3}{8} = \frac{7}{4}$$

이므로

$$\sin \theta + \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\therefore \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)$$

$$= \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \times \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$$

답 ①

042

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}, 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

$$\therefore (2 \sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta + 2 \cos \theta)$$

$$= 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 5 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 2 \times 1 + 5 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

답 ①

043

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$\sin \theta \cos \theta - 1 = -\frac{2}{5}, \sin \theta - a = -\cos \theta$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{5}, a = \sin \theta + \cos \theta$$

$$\therefore a^2 = (\sin \theta + \cos \theta)^2$$

$$= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 + 2 \times \frac{3}{5} = \frac{11}{5}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta > 0 \rightarrow \theta \text{는 제1사분면의 각}$$

즉, $a > 0$ 이므로

$$a = \sqrt{\frac{11}{5}} = \frac{\sqrt{55}}{5}$$

답 ④

044

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{7}{5} \dots\dots\dots ①$$

이때 θ 가 제2사분면의 각이므로 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$

즉, $\sin \theta - \cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{\frac{7}{5}} = \frac{\sqrt{35}}{5} \dots\dots\dots ②$$

$$\therefore \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{35}}{5}}{-\frac{1}{5}} = -\sqrt{35} \dots\dots\dots ③$$

답 $-\sqrt{35}$

채점 기준	비율
① $(\sin \theta - \cos \theta)^2$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② $\sin \theta - \cos \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	30 %

045

$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}, 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

이때 θ 가 제4사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$

즉, $\sin \theta - \cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

답 ①

046

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{이므로 } \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = -3 \text{에서} \\ \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} &= -3, \quad \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = -3 \\ \therefore \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} &= -3 \\ \therefore \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \left(\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \right)^2 \\ &= (-3)^2 = 9 \end{aligned}$$

답 ②

실력을 높이는 연습 문제

본문 088쪽

01

$-100^\circ = 360^\circ \times (-1) + 260^\circ$ 이므로 주어진 각의 동경은 260° 의 동경과 일치한다.
따라서 일반각은
 $360^\circ \times n + 260^\circ$ (단, n 은 정수이다.)

답 ④

02

θ 가 제3사분면의 각이므로

$360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ$ (단, n 은 정수이다.)

$$\therefore 120^\circ \times n + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n + 90^\circ$$

(i) $n = 3k$ (k 는 정수)일 때

$$120^\circ \times 3k + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times 3k + 90^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 90^\circ$$

(ii) $n = 3k + 1$ (k 는 정수)일 때

$$120^\circ \times (3k + 1) + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times (3k + 1) + 90^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 180^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 210^\circ$$

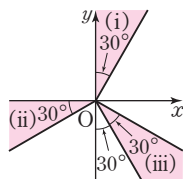
(iii) $n = 3k + 2$ (k 는 정수)일 때

$$120^\circ \times (3k + 2) + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times (3k + 2) + 90^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 300^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 330^\circ$$

(i)~(iii)에서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 속하는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.
(단, 경계선은 제외한다.)

답 ⑤



03

각 2θ 를 나타내는 동경과 각 6θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

056 정답과 풀이

$2\theta + 6\theta = 2n\pi$ (단, n 은 정수이다.)

$$8\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{n}{4}\pi$$

이때 $0 < \theta < 2\pi$ 이므로

$$0 < \frac{n}{4}\pi < 2\pi \quad \therefore 0 < n < 8$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 n 은 1, 2, ..., 7이므로 θ 는 $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2},$

..., $\frac{7}{4}\pi$ 의 7개이다.

답 ③

04

문제 접근하기

각 α 를 나타내는 동경과 각 β 를 나타내는 동경이 일치선 위에 있는 경우는 다음의 두 경우로 나누어 생각한다.

(i) 두 동경이 일치하는 경우

(ii) 두 동경이 원점에 대하여 대칭인 경우

→ 두 동경이 일치선 위에 있고
방향이 반대인 경우

(i) 두 동경이 일치하는 경우

$$5\theta - 3\theta = 2n\pi \quad (n \text{은 정수}) \text{이므로}$$

$$2\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = n\pi$$

$0 < \theta < 2\pi$ 이므로

$$0 < n\pi < 2\pi \quad \therefore 0 < n < 2$$

이때 n 은 정수이므로 $n = 1$

$$\therefore \theta = \pi$$

(ii) 두 동경이 원점에 대하여 대칭인 경우

$$5\theta - 3\theta = 2n\pi + \pi \quad (n \text{은 정수}) \text{이므로}$$

$$2\theta = (2n + 1)\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n + 1}{2}\pi$$

$0 < \theta < 2\pi$ 이므로

$$0 < \frac{2n + 1}{2}\pi < 2\pi, \quad 0 < 2n + 1 < 4$$

$$-1 < 2n < 3 \quad \therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n = 0, 1$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \theta = \frac{3}{2}\pi$$

(i), (ii)에서 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 또는 $\theta = \pi$ 또는 $\theta = \frac{3}{2}\pi$ 이므로 그 합은

$$\frac{\pi}{2} + \pi + \frac{3}{2}\pi = 3\pi$$

답 3π

05

$$\textcircled{1} \quad 30^\circ = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

$$\textcircled{2} \quad 150^\circ = 150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{6}\pi$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{2}{5}\pi = \frac{2}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 72^\circ$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{7}{4}\pi = \frac{7}{4}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 315^\circ$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{13}{6}\pi = \frac{13}{6}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 390^\circ$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

06

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라고 하면 부채꼴의 둘레의 길이는

$$2r + l = 2r + r \times \frac{3}{5} = \frac{13}{5}r$$

$$\text{즉, } \frac{13}{5}r = 26 \text{이므로 } r = 10$$

따라서 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 10^2 \times \frac{3}{5} = 30$$

답 ②

07

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l , 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2}rl$$

부채꼴의 둘레의 길이는

$$2r + l$$

이때 $r > 0$, $l > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2r + l \geq 2\sqrt{2rl} = 2\sqrt{2 \times 2S} = 4\sqrt{S}$$

$$S = \frac{1}{2}rl \text{에서 } rl = 2S \leftarrow \text{(단, 등호는 } 2r = l \text{일 때 성립한다.)}$$

따라서 $2r = l$ 일 때 둘레의 길이가 최소가 되므로 $l = r\theta$ 에서

$$2r = r\theta \quad \therefore \theta = 2$$

답 2

풍뎡 개념 CHECK

산술평균과 기하평균의 관계_高 公通 수학 2

두 양수 a, b 에 대하여

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \text{ (단, 등호는 } a = b \text{일 때 성립한다.)}$$

08

문제 접근하기

잘라 낸 부분은 원뿔이고 두 원뿔의 밑면인 원의 반지름의 길이의 비는 1:2이다. 즉, 모선의 길이의 비도 1:2이므로 반지름의 길이의 비가 1:2인 두 개의 부채꼴을 생각할 수 있다.

잘라 낸 부분은 밑면의 반지름의 길이가 3인 원뿔이므로 오른쪽 그림과 같이 잘라 낸 원뿔의 높이를 h 라고 하자.

이때 $\triangle OAB \sim \triangle OCD$ 이므로

$$h:3 = (h+4):6$$

$$3(h+4) = 6h$$

$$h+4 = 2h \quad \therefore h = 4$$

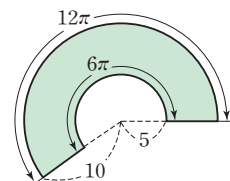
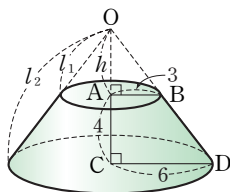
밑면인 원의 반지름의 길이가 3인 원뿔의 모선의 길이를 l_1 , 밑면인 원의 반지름의 길이가 6인 원뿔의 모선의 길이를 l_2 라고 하면

$$l_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad l_2 = 2l_1 = 10$$

따라서 두 원뿔의 옆면인 부채꼴을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

즉, 구하는 원뿔대의 옆면의 넓이는 큰 부채꼴의 넓이에서 작은 부채꼴의 넓이를 뺀 것과 같다.

이때 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의



둘레의 길이와 같으므로

$$(\text{큰 원뿔의 옆면인 부채꼴의 호의 길이}) = 2\pi \times 6 = 12\pi$$

$$(\text{작은 원뿔의 옆면인 부채꼴의 호의 길이}) = 2\pi \times 3 = 6\pi$$

따라서 원뿔대의 옆면의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 10 \times 12\pi - \frac{1}{2} \times 5 \times 6\pi = 60\pi - 15\pi = 45\pi$$

답 ④

09

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라고 하자.

점 P는 선분 OA를 3:1로 내분하는 점이므로

$$\overline{OP} = \frac{3}{4}r$$

점 Q는 선분 OB를 1:2로 내분하는 점이므로

$$\overline{OQ} = \frac{1}{3}r$$

$$\therefore \triangle OPQ = \frac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{OQ} \times \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}r \times \frac{1}{3}r \times \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{16}r^2 \quad \leftarrow \sin \frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{즉, } \frac{\sqrt{3}}{16}r^2 = 4\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$r^2 = 4\sqrt{3} \times \frac{16}{\sqrt{3}} = 64 \quad \therefore r = 8 \quad (\because r > 0)$$

따라서 호 AB의 길이는

$$8 \times \frac{\pi}{3} = \frac{8}{3}\pi$$

답 ④

풍뎡 개념 CHECK

삼각형의 넓이_中 수학 3

삼각형 ABC에서 두 변 AB, BC의 길이와 그 끼인각 $\angle B$ 의 크기를 알 때, 삼각형 ABC의 넓이 S는 다음과 같다.

(1) $\angle B$ 가 예각일 때

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin B$$

(2) $\angle B$ 가 둔각일 때

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin (180^\circ - B)$$

10

$$3x - 4y = 0 \text{에서 } y = \frac{3}{4}x \text{이므로 } x^2 + y^2 = 25 \text{에 대입하면}$$

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 = 25, \quad \frac{25}{16}x^2 = 25$$

$$x^2 = 16 \quad \therefore x = \pm 4$$

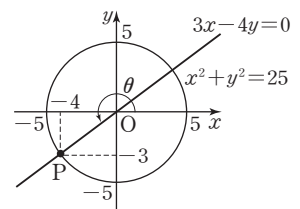
$$x = \pm 4 \text{를 } y = \frac{3}{4}x \text{에 대입하면}$$

$$y = \pm 3 \text{ (복호동순)}$$

이때 점 P는 제3사분면의 점이므로 점 P의 좌표는 $(-4, -3)$ 이고,

$$\overline{OP} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5 \text{이므로}$$

$$\sin \theta = -\frac{3}{5}, \quad \cos \theta = -\frac{4}{5}$$



$$\begin{aligned}\therefore 5(\sin \theta + \cos \theta) &= 5\left\{-\frac{3}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right)\right\} \\ &= 5 \times \left(-\frac{7}{5}\right) = -7\end{aligned}$$

답 ①

11

$\sin \theta < 0$, $\tan \theta > 0$ 을 만족시키는 각 θ 는 제3사분면의 각이므로

$$2n\pi + \pi < \theta < 2n\pi + \frac{3}{2}\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수이다.})$$

$$\therefore n\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < n\pi + \frac{3}{4}\pi$$

(i) $n = 2k$ (k 는 정수)일 때

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + \frac{3}{4}\pi$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n = 2k + 1$ (k 는 정수)일 때

$$(2k + 1)\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < (2k + 1)\pi + \frac{3}{4}\pi$$

$$2k\pi + \frac{3}{2}\pi < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + \frac{7}{4}\pi$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$ 의 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제2사분면, 제4사분면이다.

답 제2사분면, 제4사분면

12

$$\sqrt{\tan \theta} \sqrt{\cos \theta} = -\sqrt{\tan \theta \cos \theta} \text{에서}$$

$$\tan \theta < 0, \cos \theta < 0$$

즉, θ 는 제2사분면의 각이므로

$$2n\pi + \frac{\pi}{2} < \theta < 2n\pi + \pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수이다.})$$

따라서 $\alpha = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $\beta = 2n\pi + \pi$ (n 은 정수)이므로

$$\beta - \alpha = (2n\pi + \pi) - \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

답 ③

13

$$\begin{aligned}&\left(1 + \frac{1}{\sin \theta}\right) \times \frac{\tan \theta}{1 + \cos \theta} \times \left(1 - \frac{1}{\sin \theta}\right) \times \frac{\tan \theta}{1 - \cos \theta} \\&= \left(1 + \frac{1}{\sin \theta}\right) \left(1 - \frac{1}{\sin \theta}\right) \times \frac{\tan \theta}{1 + \cos \theta} \times \frac{\tan \theta}{1 - \cos \theta} \\&= \left(1 - \frac{1}{\sin^2 \theta}\right) \times \frac{\tan^2 \theta}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} \\&= \frac{\sin^2 \theta - 1}{\sin^2 \theta} \times \frac{\tan^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta} \\&= \frac{-\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \times \frac{\tan^2 \theta}{\sin^2 \theta} \rightarrow \sin^2 \theta - 1 = \sin^2 \theta - (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\&= -\cos^2 \theta \\&= \frac{-\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \times \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{\sin^2 \theta} = -\frac{1}{\sin^2 \theta}\end{aligned}$$

답 ①

14

$$\sin \theta + \cos \theta \tan \theta = -1 \text{에서}$$

$$\sin \theta + \cos \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -1$$

$$2 \sin \theta = -1 \quad \therefore \sin \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{에서}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\text{이때 } \cos \theta > 0 \text{이므로 } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ②

15

문제 접근하기

곱셈 공식의 변형과 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 을 이용하여 $f(4)$ 와 $f(8)$ 의 관계를 알아본다.

$$f(n) = \sin^n \theta + \cos^n \theta \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}f(4) &= \sin^4 \theta + \cos^4 \theta \\ &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta\end{aligned}$$

$$\therefore \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{1}{2} \{1 - f(4)\}$$

따라서

$$\begin{aligned}f(8) &= \sin^8 \theta + \cos^8 \theta \\ &= (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)^2 - 2 \sin^4 \theta \cos^4 \theta \\ &= (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)^2 - 2(\sin^2 \theta \cos^2 \theta)^2 \\ &= \{f(4)\}^2 - 2 \times \left[\frac{1}{2} \{1 - f(4)\}\right]^2 \\ &= \{f(4)\}^2 - \frac{1}{2} [\{f(4)\}^2 - 2f(4) + 1] \\ &= \frac{1}{2} \{f(4)\}^2 + f(4) - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}2f(8) + 1 &= 2 \left[\frac{1}{2} \{f(4)\}^2 + f(4) - \frac{1}{2} \right] + 1 \\ &= \{f(4)\}^2 + 2f(4)\end{aligned}$$

답 ③

16

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}, \quad 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

또,

$$\begin{aligned}(\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

이고, θ 는 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$$

즉, $\sin \theta - \cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan^2 \theta - \frac{1}{\tan^2 \theta} &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^4 \theta - \cos^4 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)}{(\sin \theta \cos \theta)^2} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{15}}{3}}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

답 ③

17

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\sin \theta + \cos \theta) + (\sin \theta - \cos \theta) = \sqrt{3} \quad \text{..... ㉠}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) = a \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉠에서 } 2 \sin \theta = \sqrt{3} \quad \therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

㉡에서

$$\begin{aligned} a &= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta) \\ &= 2 \sin^2 \theta - 1 \\ &= 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ⑤

공백 개념 CHECK

이차방정식의 근과 계수의 관계_高 公統 수학 1

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$$(1) \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad (2) \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

06

삼각함수의 그래프

기초를 다지는 유형

본문 092쪽

001

함수 $y = \tan 2x$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

주어진 함수의 주기를 구하면

- ① $\frac{2\pi}{1} = 8\pi$ ② $\frac{2\pi}{2} = 1$ ③ $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
④ $\frac{2\pi}{2} = \pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2} = 2$

따라서 구하는 함수는 ③이다.

답 ③

002

모든 실수 x 에 대하여 $f(x+p) = f(x)$ 를 만족시키는 최소의 양수 p 는 주기이므로 주기가 π 인 함수를 찾는다. 주어진 함수의 주기를 구하면

- ① $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ ② $\frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi$ ③ $\frac{2\pi}{2} = \pi$
④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\frac{\pi}{1} = 2\pi$

따라서 구하는 함수는 ③이다.

답 ③

003

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x+1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 주기함수이고 함수 $f(x)$ 의 주기를 p ($p > 0$)라고 할 때, $pn = 1$ (n 은 자연수)이므로

$$p = \frac{1}{n}$$

즉, 함수 $f(x)$ 의 주기는 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ 중 하나이다.

주어진 함수의 주기를 구하면

- ① $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$ ② $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ ③ $\frac{2\pi}{\pi} = 2$
④ $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$ ⑤ $\frac{\pi}{3} = 3$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ④이다.

답 ④

004

주어진 함수의 주기를 구하면 다음과 같다.

- ① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{1} = \pi$ ③ $\frac{2\pi}{\pi} = 2$
④ $\frac{\pi}{1} = \pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2} = 2\pi$

이때 $4 < 2\pi$ 이므로 주기가 가장 큰 것은 ⑤이다.

→ 6.28...

답 ⑤

005

함수 $y = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 의 그래프는 $y = \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방

향으로 3배한 후, x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 치역은 $\{y | -3 \leq y \leq 3\}$ 이고, 주기는 2π 이므로

$$a = -3, b = 3, c = 2\pi$$

$$\therefore a + b + c = -3 + 3 + 2\pi = 2\pi$$

답 2π

006

함수 $f(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 2 = 2 \sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$ 의 그래프는

$y = \sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배한 후 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행이동하고, y 축의 방향으로 2배한 후 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 4, 최솟값은 0이므로

$$0 \leq f(x) \leq 4 \text{ (참)}$$

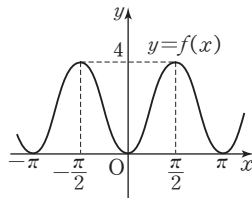
ㄴ. 함수 $f(x)$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{2} = \pi$$

이므로 임의의 실수 x 에 대하여 $f(x + \pi) = f(x)$ 이다. (참)

ㄷ. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 원점을 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.



답 ⑤

[다른 풀이]

$$\text{ㄱ. } f(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 2 \text{에서}$$

$$-1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 1 \text{이므로}$$

$$-2 \leq 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 2 \rightarrow x \text{축의 방향으로 평행이동하거나 늘리는 것은 최댓값, 최솟값과 관계없다.}$$

$$0 \leq 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 2 \leq 4$$

$$\therefore 0 \leq f(x) \leq 4 \text{ (참)}$$

$$\text{ㄷ. } f(0) = 2 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2 = 2 \times (-1) + 2 = 0$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 원점을 지난다. (참)

007

함수 $y = \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{5}{2}$ 의 그래프는 $y = \cos x$ 의 그래프를 x 축의

방향으로 $\frac{1}{4}$ 배하고 y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배한 후, y 축의 방향으로 $\frac{5}{2}$

만큼 평행이동한 것이다. → $1 \times \frac{1}{2} + \frac{5}{2}$

따라서 치역은 $\{y | 2 \leq y \leq 3\}$ 이고, 주기는 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$a = 2, b = 3, c = \frac{1}{2} \rightarrow (-1) \times \frac{1}{2} + \frac{5}{2}$$

060 정답과 풀이

$$\therefore a + b + c = 2 + 3 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$

답 $\frac{11}{2}$

008

함수 $y = -2 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \pi$ 의 그래프는 $y = \tan x$ 의 그래프를

x 축에 대하여 대칭이동하고 y 축의 방향으로 2배한 후, x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$ 만큼, y 축으로 π 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 정의역은 $x + \frac{\pi}{3} \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수), 즉 $x \neq n\pi + \frac{\pi}{6}$ 인 실수 전체의 집합이고, 주기는 π 이므로

$$a = \frac{\pi}{6}, b = \pi$$

$$\therefore a + b = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7}{6}\pi$$

답 $\frac{7}{6}\pi$

009

함수 $y = 3 \tan\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x - \frac{3}{4}\pi = n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ (단, } n \text{은 정수이다.)}$$

$$\therefore x = n\pi + \frac{5}{4}\pi$$

$$\text{즉, } \dots, x = -\frac{7}{4}\pi, x = -\frac{3}{4}\pi, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5}{4}\pi, x = \frac{9}{4}\pi, \dots \text{이므로}$$

로 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 아닌 것은 ①이다.

답 ①

[참고]

정수 n 에 대하여 $x = n\pi + \frac{5}{4}\pi$ 는 $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$ 와 같이 나타낼 수도 있다.

$$= n\pi + \pi + \frac{\pi}{4} = (n+1)\pi + \frac{\pi}{4}$$

010

함수 $f(x) = \sin x$ 의 그래프의 대칭성에 의하여

$$\frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore a+b=\pi$$

$$\frac{c+d}{2} = \frac{3}{2}\pi \quad \therefore c+d=3\pi$$

$$\therefore a+b+c+d=\pi+3\pi=4\pi$$

답 ①

[참고]

함수 $y = \sin x$ 의 그래프는 직선 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)에 대하여 대칭이다.

즉, $f(x) = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$)에서 $f(a) = f(b)$ ($0 \leq a < b \leq \pi$)이면

$$\frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore a+b=\pi$$

011

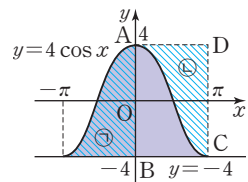
오른쪽 그림에서 ㉠, ㉡의 넓이가 같다.

즉, 구하는 부분의 넓이는 직사각형

ABCD의 넓이와 같으므로

$$\pi \times \{4 - (-4)\} = 8\pi$$

답 8π

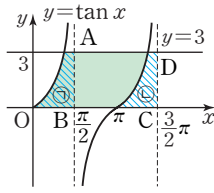


012

오른쪽 그림에서 ㉠, ㉡의 넓이가 같다.
즉, 구하는 부분의 넓이는 직사각형
ABCD의 넓이와 같으므로

$$3 \times \left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2} \right) = 3\pi$$

답 3π



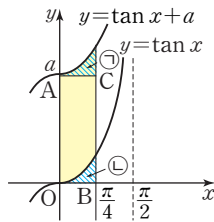
013

함수 $y = \tan x + a$ 의 그래프는 $y = \tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림에서 ㉠, ㉡의 넓이가 같다.
따라서 주어진 부분의 넓이는 직사각형
AOBC의 넓이와 같으므로

$$a \times \frac{\pi}{4} = \pi$$

$$\therefore a = 4$$

답 4



014

- (1) $y = \sin 2x$ 에서 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.
(2) $y = -2 \cos(x + \pi) + 1$ 에서 최댓값은 $|-2| + 1 = 3$, 최솟값은 $-|-2| + 1 = -1$ 이다.
(3) $y = 4 \tan \frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{4}$ 에서 최댓값과 최솟값은 없다.

답 (1) 최댓값: 1, 최솟값: -1

(2) 최댓값: 3, 최솟값: -1

(3) 최댓값: 없다., 최솟값: 없다.

015

함수 $f(x) = 4 \cos x + 3$ 에서 최댓값은

$$|4| + 3 = 7$$

답 ②

다른 풀이

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \text{ 이므로 } -4 \leq 4 \cos x \leq 4$$

$$\therefore -1 \leq 4 \cos x + 3 \leq 7$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 7이다.

016

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 0이고 $a > 0$ 이므로

$$-a + 2 = 0 \quad \therefore a = 2$$

또, 주기가 4π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + b = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

답 ①

017

함수 $f(x)$ 의 최댓값이 4, 최솟값이 -3이고 $a < 0$ 이므로

$$-a + c = 4, a + c = -3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = -\frac{7}{2}, c = \frac{1}{2} \quad \text{..... ①}$$

또, 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore b = 4 \quad \text{..... ②}$$

$$\therefore abc = -\frac{7}{2} \times 4 \times \frac{1}{2} = -7 \quad \text{..... ③}$$

답 -7

채점 기준	비율
① a, c 의 값을 구할 수 있다.	60 %
② b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ abc 의 값을 구할 수 있다.	10 %

018

함수 $f(x) = a \sin b \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + c$ 의 그래프에서 최댓값이 4, 최솟값이 -2이므로

$$|a| + c = 4, -|a| + c = -2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$|a| = 3, c = 1$$

또, 주기가 π 이므로

$$\frac{2\pi}{|b|} = \pi \quad \therefore |b| = 2$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = |a|^2 + |b|^2 + c^2 = 3^2 + 2^2 + 1^2 = 14$$

답 14

019

함수 $y = a \cos(bx + c)$ 의 그래프에서 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고 $a > 0$ 이므로

$$a = 2$$

또, 주기가 2π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 2\pi \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore f(x) = 2 \cos(x + c)$$

이때 주어진 그래프는 $y = 2 \cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$

만큼 평행이동한 것이므로

$$f(x) = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore c = -\frac{\pi}{2} \quad (\because -\pi < c < 0)$$

$$\therefore abc = 2 \times 1 \times \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -\pi$$

답 ③

020

함수 $y = \tan ax + b$ 의 그래프가 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$b = 2$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하므로

$$a > 0$$

주기가 4π 이므로 $\frac{\pi}{a}=4\pi \quad \therefore a=\frac{1}{4}$
 $\therefore ab=\frac{1}{4} \times 2=\frac{1}{2}$

답 ②

021

(1) $\sin \frac{13}{6}\pi = \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

(2) $\cos \left(-\frac{5}{4}\pi\right) = \cos \frac{5}{4}\pi = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$
 $= -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\tan \frac{2}{3}\pi = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

(4) $\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $-\sqrt{3}$ (4) $\frac{1}{2}$

[다른 풀이]

(4) $\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{5}{6}\pi = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

022

$$\begin{aligned} & \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos \frac{19}{6}\pi - \tan \frac{5}{6}\pi \\ &= -\sin \frac{\pi}{3} + \cos \left(2\pi + \frac{7}{6}\pi\right) - \tan \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{3} + \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \tan \frac{\pi}{6} \quad \rightarrow \cos \frac{7}{6}\pi \\ &= -\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{6} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

[참고]

$$\begin{aligned} \cos \frac{19}{6}\pi &= \cos \left(4\pi - \frac{5}{6}\pi\right) = \cos \frac{5}{6}\pi \\ &= \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

와 같이 계산할 수도 있다.

답 ①

023

① $\sin \frac{8}{3}\pi = \sin \left(2\pi + \frac{2}{3}\pi\right) = \sin \frac{2}{3}\pi$
 $= \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

② $\sin (-135^\circ) = -\sin 135^\circ = -\sin (90^\circ + 45^\circ)$
 $= -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

③ $\cos \frac{3}{4}\pi = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

④ $\cos 390^\circ = \cos (360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

⑤ $\tan 660^\circ = \tan (720^\circ - 60^\circ) = \tan (-60^\circ)$
 $= -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

024

① $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

② $\cos \left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$
 $= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

③ $\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

④ $-\sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

⑤ $\sin \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

따라서 값이 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

답 ⑤

[참고]

여러 가지 각의 삼각함수의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.

① 주어진 각을 $90^\circ \times n \pm \theta$ 또는 $\frac{\pi}{2} \times n \pm \theta$ (n 은 정수)의 꼴로 나타낸다.

② 삼각함수를 결정한다.

(i) n 이 짝수이면 그대로

$$\Rightarrow \sin \theta \rightarrow \sin \theta, \cos \theta \rightarrow \cos \theta, \tan \theta \rightarrow \tan \theta$$

(ii) n 이 홀수이면 바뀐다.

$$\Rightarrow \sin \theta \rightarrow \cos \theta, \cos \theta \rightarrow \sin \theta, \tan \theta \rightarrow \frac{1}{\tan \theta}$$

③ 부호를 결정한다.

θ 를 예각으로 생각하여 $90^\circ \times n \pm \theta$ 또는 $\frac{\pi}{2} \times n \pm \theta$ 를 나타내는 동경이 존

재하는 사분면에서 처음 주어진 삼각함수의 부호가 양이면 +, 음이면 -를 붙인다.

025

$$\sin (-\theta) + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta - \sin \theta = -2 \sin \theta$$

즉, $-2 \sin \theta = \frac{8}{5}$ 이므로 $\sin \theta = -\frac{4}{5}$

이때 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

답 ④

026

$$\sin (-\theta) \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \cos (-\theta) \tan (\pi + \theta)$$

$$= -\sin \theta \times (-\sin \theta) + \cos \theta \tan \theta$$

$$= \sin^2 \theta + \cos \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \sin^2 \theta + \sin \theta$$

이때 삼각함수 사이의 관계에 의하여

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{2}{3} \rightarrow \theta \text{는 제1사분면의 각이므로 } \sin \theta > 0$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \sqrt{\sin^2 \theta + \sin \theta} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

답 ⑤

027

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(-\theta)}{\cos^2(2\pi-\theta)\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)} + \frac{\sin(-\theta)\tan(\pi-\theta)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)} \\ &= \frac{-\sin\theta}{\cos^2\theta \times (-\sin\theta)} + \frac{-\sin\theta \times (-\tan\theta)}{-\cos\theta} \\ &= \frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \tan\theta \quad \text{①} \\ &= \frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \quad \text{②} \\ &= \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = 1 \quad \text{③} \end{aligned}$$

답 1

채점 기준	비율
① 여러 가지 각의 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 나타낼 수 있다.	50 %
② $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 를 이용하여 주어진 식을 간단히 나타낼 수 있다.	25 %
③ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 을 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	25 %

028

$$\begin{aligned} \sin 10^\circ &= \sin(90^\circ - 80^\circ) = \cos 80^\circ \\ \sin 30^\circ &= \sin(90^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ \\ \text{이므로} \\ \sin^2 10^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ \\ &= \cos^2 80^\circ + \cos^2 60^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ \\ &= (\sin^2 80^\circ + \cos^2 80^\circ) + (\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

답 2

029

$$\begin{aligned} y &= \cos(x-\pi) - 3\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - 1 \\ &= \cos(\pi-x) - 3\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - 1 \\ &= -\cos x - 3\cos x - 1 \\ &= -4\cos x - 1 \\ \text{이때 } -1 &\leq \cos x \leq 1 \text{이므로} \\ -4 &\leq -4\cos x \leq 4 \\ \therefore -5 &\leq -4\cos x - 1 \leq 3 \\ \text{따라서 } M &= 3, m = -5 \text{이므로} \\ M - m &= 3 - (-5) = 8 \end{aligned}$$

답 ②

030

$$\begin{aligned} y &= \cos\left(\frac{3}{2}\pi + 2x\right) - \sin(\pi + 2x) + 2 \\ &= \sin 2x - (-\sin 2x) + 2 \\ &= 2\sin 2x + 2 \\ \text{이때 } -1 &\leq \sin 2x \leq 1 \text{이므로} \\ -2 &\leq 2\sin 2x \leq 2 \\ \therefore 0 &\leq 2\sin 2x + 2 \leq 4 \end{aligned}$$

따라서 $M=4, m=0$ 이므로
 $Mm=4 \times 0=0$

답 ③

031

$$\begin{aligned} y &= a\sin x + \cos\left(\frac{5}{2}\pi - x\right) + b \\ &= a\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + b \quad \xrightarrow{2\pi + \frac{\pi}{2} - x} \\ &= a\sin x + \sin x + b \\ &= (a+1)\sin x + b \quad \text{①} \\ \text{이때 } -1 &\leq \sin x \leq 1 \text{이므로} \\ -(a+1) &\leq (a+1)\sin x \leq a+1 \quad (\because a+1 > 0) \\ \therefore -(a+1) + b &\leq (a+1)\sin x + b \leq a+1+b \\ \text{주어진 함수의 최댓값이 } 6, \text{ 최솟값이 } -2 \text{이므로} \\ a+1+b &= 6, -(a+1)+b = -2 \\ \therefore a+b &= 5, -a+b = -1 \quad \text{②} \\ \text{위의 두 식을 연립하여 풀면 } a &= 3, b = 2 \\ \therefore 2a+b &= 2 \times 3 + 2 = 8 \quad \text{③} \end{aligned}$$

답 8

채점 기준	비율
① 주어진 식을 $\sin x$ 를 포함한 식으로 정리할 수 있다.	40 %
② 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 a, b 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
③ $2a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

032

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\cos x| \leq 1 \text{이므로} \\ -2 &\leq -2|\cos x| \leq 0 \\ \therefore -1 &\leq -2|\cos x| + 1 \leq 1 \\ \text{따라서 최댓값은 } 1, \text{ 최솟값은 } -1 \text{이므로 그 합은} \\ 1 + (-1) &= 0 \end{aligned}$$

답 ③

033

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin 3x \leq 1 \text{이므로} \\ -3 &\leq \sin 3x - 2 \leq -1 \\ \text{즉, } 1 &\leq |\sin 3x - 2| \leq 3 \text{이므로} \\ a &\leq a|\sin 3x - 2| \leq 3a \quad (\because a > 0) \\ \therefore a+b &\leq a|\sin 3x - 2| + b \leq 3a+b \\ \text{따라서 주어진 함수의 최댓값은 } 3a+b, \text{ 최솟값은 } a+b \text{이므로} \\ 3a+b &= 4, a+b = 2 \\ \text{위의 두 식을 연립하여 풀면 } a &= 1, b = 1 \\ \therefore ab &= 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

답 ①

034

$$\begin{aligned} y &= -\sin^2 x + 2\cos x \\ &= -(1-\cos^2 x) + 2\cos x \\ &= \cos^2 x + 2\cos x - 1 \end{aligned}$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$0 \leq t \leq 1$$

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 + 2t - 1 = (t+1)^2 - 2$$

$0 \leq t \leq 1$ 에서 주어진 함수는 $t=1$ 일 때 최댓값 2, $t=0$ 일 때 최솟값 -1을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값을 차례대로 나열한 것은 ②이다.

답 ②

035

$$y = \tan^2 x - 2 \tan(\pi + x) + 2$$

$$= \tan^2 x - 2 \tan x + 2$$

$\tan x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $0 \leq \tan x \leq 1$ 이므로

$$0 \leq t \leq 1$$

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1$$

$0 \leq t \leq 1$ 에서 주어진 함수는 $t=0$ 일 때 최댓값 2, $t=1$ 일 때 최솟값 1을 갖는다.

따라서 $M=2$, $m=1$ 이므로

$$M - m = 2 - 1 = 1$$

답 ④

036

$\sin x = t$ 로 놓으면 $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 < \sin x \leq 1$ 이므로

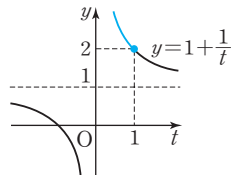
$$0 < t \leq 1$$

이때 주어진 함수는

$$y = \frac{t+1}{t} = 1 + \frac{1}{t}$$

$0 < t \leq 1$ 에서 함수 $y = 1 + \frac{1}{t}$ 의 그래프는

오른쪽 그림의 색선과 같으므로 $t=1$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.



답 2

037

$\cos x = t$ 로 놓으면 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ 에서 $-1 \leq \cos x \leq 0$ 이므로

$$-1 \leq t \leq 0$$

이때 주어진 함수는

$$y = \frac{2t+2}{t-1} = \frac{2(t-1)+4}{t-1}$$

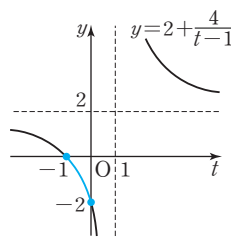
$$= 2 + \frac{4}{t-1}$$

$-1 \leq t \leq 0$ 에서 함수 $y = 2 + \frac{4}{t-1}$ 의 그래프는

오른쪽 그림의 색선과 같으므로 주어진 함수는 $t=-1$ 일 때 최댓값 0, $t=0$ 일 때 최솟값 -2를 갖는다.

따라서 $M=0$, $m=-2$ 이므로

$$M + m = 0 + (-2) = -2$$



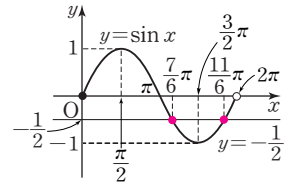
답 ②

038

(1) 구하는 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

따라서 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 구하는 해

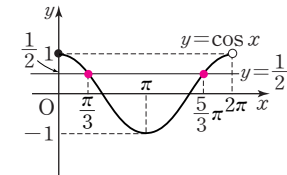
$$\text{는 } x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi$$



(2) 구하는 해는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

따라서 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 구하는 해

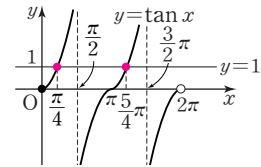
$$\text{는 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$



(3) 구하는 해는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

따라서 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 구하는 해는

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{5}{4}\pi$$



$$\text{답 (1) } x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi \quad (2) x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$

$$(3) x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{5}{4}\pi$$

039

$$\sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x - \sin x = -2 \sin x$$

즉, 주어진 방정식은 $-2 \sin x = \sqrt{3}$ 이므로

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots ①$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 방정식 $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로

$$x = \frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi \dots\dots\dots ②$$

따라서 $\alpha = \frac{4}{3}\pi$, $\beta = \frac{5}{3}\pi$ 이므로

$$\beta - \alpha = \frac{5}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi = \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots ③$$

$$\text{답 } \frac{\pi}{3}$$

채점 기준	비율
① 주어진 방정식을 간단히 할 수 있다.	40 %
② 방정식의 해를 구할 수 있다.	50 %
③ $\beta - \alpha$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

040

$\frac{1}{2}x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $0 \leq \frac{1}{2}x < \pi$ 이므로

$$0 \leq t < \pi$$

이때 주어진 방정식은 $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0 \leq t < \pi$ 에서 방정식 $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는 $t = \frac{3}{4}\pi$

$$\text{즉, } \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}\pi \text{이므로}$$

$$x = \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{답 } x = \frac{3}{2}\pi$$

041

$3x=t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $0 \leq 3x < 6\pi$ 이므로

$$0 \leq t < 6\pi$$

이때 주어진 방정식은

$$3 \tan t = \sqrt{3} \quad \therefore \tan t = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$0 \leq t < 6\pi$ 에서 방정식 $\tan t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 해는

$$t = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } t = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } t = \frac{13}{6}\pi \text{ 또는 } t = \frac{19}{6}\pi \text{ 또는 } t = \frac{25}{6}\pi$$

$$\text{또는 } t = \frac{31}{6}\pi$$

$$\text{즉, } 3x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } 3x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } 3x = \frac{13}{6}\pi \text{ 또는 } 3x = \frac{19}{6}\pi \text{ 또는}$$

$$3x = \frac{25}{6}\pi \text{ 또는 } 3x = \frac{31}{6}\pi \text{이므로}$$

$$x = \frac{\pi}{18} \text{ 또는 } x = \frac{7}{18}\pi \text{ 또는 } x = \frac{13}{18}\pi \text{ 또는 } x = \frac{19}{18}\pi \text{ 또는}$$

$$x = \frac{25}{18}\pi \text{ 또는 } x = \frac{31}{18}\pi$$

따라서 주어진 방정식의 해가 아닌 것은 ③이다.

답 ③

042

$x + \frac{\pi}{2} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $\frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} < \frac{5}{2}\pi$ 이므로

$$\frac{\pi}{2} \leq t < \frac{5}{2}\pi$$

이때 주어진 방정식은

$$2 \sin t = \sqrt{2} \quad \therefore \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\frac{\pi}{2} \leq t < \frac{5}{2}\pi$ 에서 $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는

$$t = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } t = \frac{9}{4}\pi$$

$$\text{즉, } x + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } x + \frac{\pi}{2} = \frac{9}{4}\pi \text{이므로}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{7}{4}\pi$$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$$\frac{\pi}{4} + \frac{7}{4}\pi = 2\pi$$

답 ④

| 다른 풀이 |

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ 이므로 주어진 방정식을 정리하면

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는 $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{7}{4}\pi$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$$\frac{\pi}{4} + \frac{7}{4}\pi = 2\pi$$

043

$\tan^2 \theta + \sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1) \tan \theta$ 에서

$$\tan^2 \theta - (\sqrt{3} + 1) \tan \theta + \sqrt{3} = 0$$

$$(\tan \theta - \sqrt{3})(\tan \theta - 1) = 0$$

$$\therefore \tan \theta = \sqrt{3} \text{ 또는 } \tan \theta = 1$$

$0 \leq \theta < \pi$ 에서

$$\tan \theta = \sqrt{3} \text{의 해는 } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\tan \theta = 1 \text{의 해는 } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{3} \text{이므로}$$

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

답 ⑤

044

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ 이므로 주어진 방정식은

$$4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3 = 0$$

$$(2 \sin x - 1)(2 \sin x + 3) = 0$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{2} \quad (\because -1 \leq \sin x \leq 1)$$

$0 \leq x < 4\pi$ 에서 $\sin x = \frac{1}{2}$ 의 해는

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{13}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{17}{6}\pi$$

따라서 모든 해의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi + \frac{13}{6}\pi + \frac{17}{6}\pi = 6\pi$$

답 ②

045

$3 \sin^2 x - 4 \cos x - 4 = 0$ 에서

$$3(1 - \cos^2 x) - 4 \cos x - 4 = 0$$

$$3 \cos^2 x + 4 \cos x + 1 = 0$$

$$(\cos x + 1)(3 \cos x + 1) = 0$$

$$\therefore \cos x = -1 \text{ 또는 } \cos x = -\frac{1}{3} \quad \text{①}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 } \cos x = -1 \text{의 해는 } x = \pi \quad \text{②}$$

또, $\cos x = -\frac{1}{3}$ 의 해를 $x = \alpha$ 또는 $x = \beta$ 라고 하면 코사인함수의 그래프의 대칭성에 의하여

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \pi \quad \therefore \alpha + \beta = 2\pi \quad \text{③}$$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$$\pi + \alpha + \beta = \pi + 2\pi = 3\pi$$

$$\therefore k = 3 \quad \text{④}$$

답 3

채점 기준	비율
① 주어진 방정식을 인수분해하여 $\cos x$ 의 값을 구할 수 있다.	25 %
② $\cos x = -1$ 의 근을 구할 수 있다.	25 %
③ $\cos x = -\frac{1}{3}$ 의 근의 합을 구할 수 있다.	40 %
④ k 의 값을 구할 수 있다.	10 %

046

$$2 \cos \theta + \tan \theta = -\frac{2}{\cos \theta} \text{에서}$$

$$2 \cos \theta + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{2}{\cos \theta}$$

위의 식의 양변에 $\cos \theta$ 를 곱하면

$$2 \cos^2 \theta + \sin \theta = 2$$

$$2(1 - \sin^2 \theta) + \sin \theta - 2 = 0$$

$$2 \sin^2 \theta - \sin \theta = 0, \sin \theta(2 \sin \theta - 1) = 0$$

$$\therefore \sin \theta = 0 \text{ 또는 } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서

$\sin \theta = 0$ 의 해는 $\theta = 0$ 또는 $\theta = \pi$

$\sin \theta = \frac{1}{2}$ 의 해는 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta = \frac{5\pi}{6}$

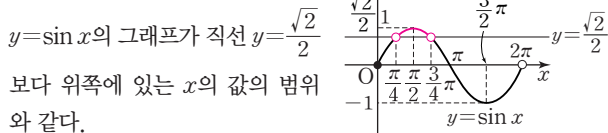
따라서 주어진 방정식의 해는

$$\theta = 0 \text{ 또는 } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \theta = \frac{5\pi}{6} \text{ 또는 } \theta = \pi$$

$$\boxed{\text{답}} \theta = 0 \text{ 또는 } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \theta = \frac{5\pi}{6} \text{ 또는 } \theta = \pi$$

047

(1) 부등식 $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는 함수



따라서 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 구하는 해는

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

(2) 부등식 $\cos x \leq -\frac{1}{2}$ 의 해는

함수 $y = \cos x$ 의 그래프가

직선 $y = -\frac{1}{2}$ 과 만나거나

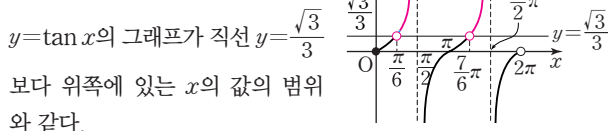
그 아래쪽에 있는 x 의 값의

범위와 같다.

따라서 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 구하는 해는

$$\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{4\pi}{3}$$

(3) 부등식 $\tan x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 해는 함수



따라서 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 구하는 해는

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{7\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$\boxed{\text{답}} (1) \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \quad (2) \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{4\pi}{3}$$

$$(3) \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{7\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}$$

048

$$2 \sin x + 1 < 0 \text{에서 } \sin x < -\frac{1}{2}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 $\sin x < -\frac{1}{2}$ 의 해는

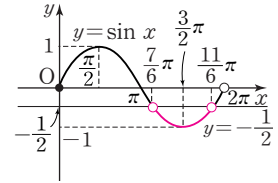
$$\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$$

$$\therefore \alpha = \frac{7\pi}{6}, \beta = \frac{11\pi}{6}$$

$$\text{따라서 } \beta - \alpha = \frac{11\pi}{6} - \frac{7\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

이므로

$$\begin{aligned} \cos(\beta - \alpha) &= \cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



$\boxed{\text{답}} \text{ ②}$

049

주어진 부등식의 해는 함수 $y = \cos x$

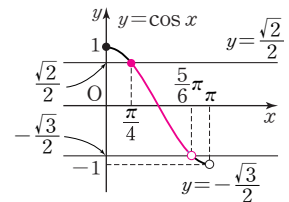
의 그래프가 직선 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 보다 위

쪽에 있고, 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 와 만나거나

그 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같다.

따라서 부등식 $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{5\pi}{6}$$



$\boxed{\text{답}} \text{ ④}$

050

$\theta + \frac{\pi}{4} = t$ 로 놓으면 $0 \leq \theta \leq \pi$ 에서 $\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$ 이므로

$$\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4}$$

이때 주어진 부등식은 $\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4}$ 에서 부등식

$\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는 $\frac{\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3}$

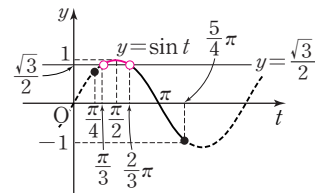
이므로

$$\frac{\pi}{3} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \frac{\pi}{12} < \theta < \frac{5\pi}{12}$$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{12}, \beta = \frac{5\pi}{12}$ 이므로

$$\beta - \alpha = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$



$\boxed{\text{답}} \frac{\pi}{3}$

051

$2x + \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < \pi$ 에서 $\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3}$ 이므로

$$\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{7\pi}{3}$$

이때 주어진 부등식은

$$2 \cos t > 1 \quad \therefore \cos t > \frac{1}{2}$$

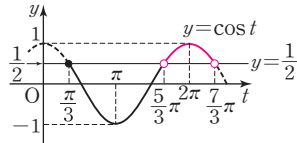
$\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{7}{3}\pi$ 에서 부등식

$\cos t > \frac{1}{2}$ 의 해는 $\frac{5}{3}\pi < t < \frac{7}{3}\pi$

이므로

$$\frac{5}{3}\pi < 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi < 2x < 2\pi$$

$$\therefore \frac{2}{3}\pi < x < \pi$$



답 $\frac{2}{3}\pi < x < \pi$

052

$2\sin^2 x + \sqrt{3}(\cos x + 1) < 2(\cos x + 1)$ 에서

$$2(1 - \cos^2 x) + \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3} < 2\cos x + 2$$

$$2\cos^2 x + (2 - \sqrt{3})\cos x - \sqrt{3} > 0$$

$$(2\cos x - \sqrt{3})(\cos x + 1) > 0$$

이때 $\cos x + 1 \geq 0$ 이므로

$$2\cos x - \sqrt{3} > 0 \rightarrow 0 \leq x < 2\pi \text{에서 } -1 \leq \cos x \leq 1 \text{이므로}$$

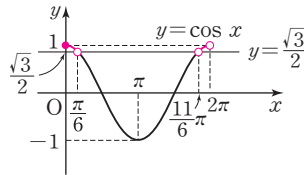
$$0 \leq \cos x + 1 \leq 2$$

$$\therefore \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 부등식

$\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는

$$0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$$



답 $0 \leq x < \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$

참고

주어진 조건에서 $0 \leq x < 2\pi$ 이므로 $x=0$ 은 포함되고, $x=2\pi$ 는 포함되지 않는다. 이와 같이 부등식을 풀 때에는 등호가 포함되는지 포함되지 않는지에 주의한다.

053

$2\cos x < 3\tan x$ 에서

$$2\cos x < 3 \times \frac{\sin x}{\cos x}$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos x > 0$ 이므로 부등식의 양변에 $\cos x$ 를 곱하면

$$2\cos^2 x < 3\sin x, 2(1 - \sin^2 x) < 3\sin x$$

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 > 0$$

$$(2\sin x - 1)(\sin x + 2) > 0$$

이때 $\sin x + 2 > 0$ 이므로

$$2\sin x - 1 > 0 \rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{에서 } 0 < \sin x < 1 \text{이므로}$$

$$2 < \sin x + 2 < 3$$

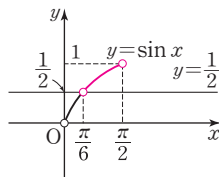
$$\therefore \sin x > \frac{1}{2}$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 부등식 $\sin x > \frac{1}{2}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$$

따라서 $a = \frac{\pi}{6}$, $b = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$a + b = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\pi$$



답 ④

054

$$\cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - \cos(\pi + \theta) - 1 < 0 \text{에서}$$

$$\sin^2 \theta + \cos \theta - 1 < 0$$

$$(1 - \cos^2 \theta) + \cos \theta - 1 < 0$$

$$\cos^2 \theta - \cos \theta > 0$$

$$\cos \theta (\cos \theta - 1) > 0$$

이때 $\cos \theta - 1 \leq 0$ 이므로

$$\cos \theta < 0 \rightarrow 0 \leq \theta < 2\pi \text{에서 } -1 \leq \cos \theta \leq 1 \text{이므로}$$

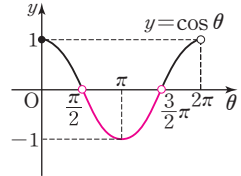
$$-2 \leq \cos \theta - 1 \leq 0$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 부등식 $\cos \theta < 0$ 의 해는

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$$

따라서 $a = \frac{\pi}{2}$, $b = \frac{3}{2}\pi$ 이므로

$$a + b = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi = 2\pi$$



답 2π

055

주어진 부등식의 양변을 $\cos^2 x$ 로 나누어 정리하면

$$(\tan x - 1)(\tan x - \sqrt{3}) < 0 \rightarrow \cos^2 x > 0 \text{이므로}$$

부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

$$\therefore 1 < \tan x < \sqrt{3}$$

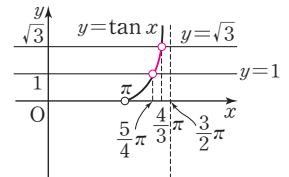
$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ 에서 부등식

$1 < \tan x < \sqrt{3}$ 의 해는

$$\frac{5}{4}\pi < x < \frac{4}{3}\pi$$

따라서 $a = \frac{5}{4}\pi$, $b = \frac{4}{3}\pi$ 이므로

$$b - a = \frac{4}{3}\pi - \frac{5}{4}\pi = \frac{\pi}{12}$$



답 $\frac{\pi}{12}$

056

$$2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 3\sin\left(x + \frac{5}{6}\pi\right) \geq 0 \text{에서}$$

$$x - \frac{\pi}{6} = t \text{로 놓으면 } 0 \leq x < 2\pi \text{에서 } -\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi \text{이므로}$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11}{6}\pi$$

이때 $x = t + \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$x + \frac{5}{6}\pi = t + \frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi = t + \pi$$

즉, 주어진 부등식은 $2\cos^2 t - 3\sin(t + \pi) \geq 0$ 이므로

$$2\cos^2 t + 3\sin t \geq 0 \dots\dots\dots ①$$

$$2(1 - \sin^2 t) + 3\sin t \geq 0$$

$$2\sin^2 t - 3\sin t - 2 \leq 0$$

$$(2\sin t + 1)(\sin t - 2) \leq 0$$

이때 $\sin t - 2 < 0$ 이므로 $2\sin t + 1 \geq 0$

$$\therefore \sin t \geq -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11}{6}\pi \text{에서 } -1 \leq \sin t \leq 1 \text{이므로}$$

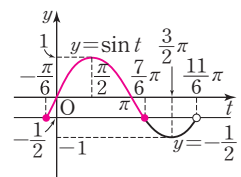
$$-3 \leq \sin t - 2 \leq -1$$

$-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11}{6}\pi$ 에서 부등식

$\sin t \geq -\frac{1}{2}$ 의 해는

$$-\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{7}{6}\pi \text{이므로} \dots\dots\dots ②$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{7}{6}\pi$$



$$\therefore 0 \leq x \leq \frac{4}{3}\pi \dots\dots\dots ③$$

$$\text{답 } 0 \leq x \leq \frac{4}{3}\pi$$

채점 기준	비율
① $x - \frac{\pi}{6} = t$ 로 놓고 주어진 부등식을 각 t 에 대한 삼각함수가 포함된 부등식으로 나타낼 수 있다.	30 %
② ①의 부등식을 풀 수 있다.	50 %
③ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %

실력을 높이는 연습 문제

본문 104쪽

01

주어진 함수의 주기를 구하면

$$\textcircled{1} \frac{2\pi}{\pi} = 2 \quad \textcircled{2} \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \textcircled{3} \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$\textcircled{4} \frac{2\pi}{\sqrt{2}\pi} = \sqrt{2} \quad \textcircled{5} \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

따라서 주기가 $\frac{1}{2}$ 인 것은 ⑤이다.

답 ⑤

02

$a > 0$ 이므로 $f(x) = \cos ax + 1$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$

$y = \sin 3x$ 의 주기가 $\frac{2\pi}{3}$ 이므로 $g(x) = |\sin 3x|$ 의 주기는 $\frac{\pi}{3}$

이때 두 함수의 주기가 서로 같으므로

$$\frac{2\pi}{a} = \frac{\pi}{3} \quad \therefore a = 6$$

답 ②

03

함수 $y = \sin 2x - 1$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \sin 2x - 1$$

$$\therefore y = -\sin 2x + 1$$

이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 3만큼

평행이동한 그래프의 식은

$$y - 3 = -\sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$\therefore y = -\sin (2x - \pi) + 4$$

따라서 $a = -1$, $b = 1$, $c = 4$ 이므로

$$a + b + c = -1 + 1 + 4 = 4$$

답 ④

04

① 정의역은 실수 전체의 집합이다.

$$\textcircled{2} -1 \leq \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \text{이므로}$$

$$-1 \leq -\cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$\therefore 4 \leq -\cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 5 \leq 6$$

즉, 치역은 $\{y \mid 4 \leq y \leq 6\}$ 이다.

③ 주기는 2π 이다.

④ 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 $y = -\cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것과 같다.

이때 함수 $y = -\cos x$ 의 그래프는 y 축(직선 $x = 0$)에 대하여 대칭이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = 0$ 을 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행이동한 직선, 즉 $x = \frac{\pi}{4}$ 에 대하여 대칭이다.

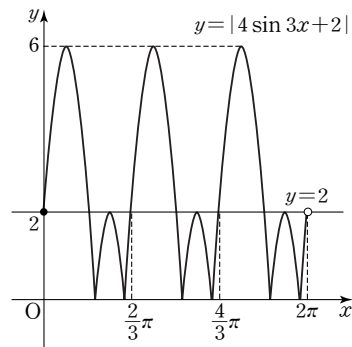
⑤ 함수 $y = -\cos x$ 의 그래프와 함수 $y = -\cos \frac{x}{2}$ 의 그래프는 겹치지 않으므로 함수 $y = -\cos \frac{x}{2}$ 의 그래프를 평행이동해도 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 겹치지 않는다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

05

함수 $y = 4 \sin 3x + 2$ 는 주기가 $\frac{2\pi}{3}$, 최댓값이 6, 최솟값이 -2 이므로 $0 \leq x < 2\pi$ 일 때 곡선 $y = |4 \sin 3x + 2|$ 는 다음 그림과 같다.



따라서 $0 \leq x < 2\pi$ 일 때 곡선 $y = |4 \sin 3x + 2|$ 와 직선 $y = 2$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수는 9이다.

답 ③

06

함수 $f(x)$ 의 주기를 p ($p > 0$)라고 하면 조건 ㉞에 의하여 $pn = \pi$ (n 은 자연수)이므로

$$p = \frac{\pi}{n}$$

즉, 함수 $f(x)$ 의 주기는 $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \dots$ 중 하나이다.

조건 ㉝에 의하여 함수 $f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

이때 주어진 함수 중에서 그래프가 y 축에 대하여 대칭인 것은 ③, ④이고 → ①, ②, ⑤는 원점에 대하여 대칭이다.

③ 주기: $\frac{2\pi}{2} = \pi$, 최댓값: 2, 최솟값: -2

→ 최댓값과 최솟값의 차의 절댓값은 4이다.

④ 주기: $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$, 최댓값: 4, 최솟값: -4

→ 최댓값과 최솟값의 차의 절댓값은 8이다.

이므로 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수는 ③이다.

답 ③

07

$\frac{\pi}{2} < 2 < \frac{3}{2}\pi$ 이므로 $\frac{\pi}{2} = 1.57\cdots, \frac{3}{2}\pi = 4.7\cdots$

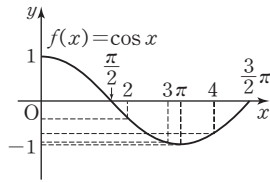
$0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ 일 때 함수 $f(x) = \cos x$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 함수 $f(x)$ 는 직선 $x = \pi$ 에 대하여 대칭이므로 x 의 값이 π 에서 멀어질수록 함수값이 커진다.

즉, $|3 - \pi| < |4 - \pi| < |2 - \pi|$ 이므로

$f(3) < f(4) < f(2)$



답 ④

08

함수 $y = 4 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$ 에서 최댓값은 $4 - 1 = 3$, 최솟값은

$-4 - 1 = -5$ 이고 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이므로

$a = 3, b = -5, c = \pi$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \frac{bc}{a} &= \cos \frac{-5\pi}{3} = \cos \frac{5}{3}\pi \\ &= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ③

09

문제 접근하기

$y = (f \circ g)(x)$ 를 식으로 나타내면 $y = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin 2\pi x\right) + 3$ 과 같이 복잡한 형태가 된다.

따라서 $g(x) = t$ 로 치환하여 t 의 값의 범위에서 함수 $f(t)$ 의 최댓값과 최솟값을 구해 본다.

$g(x) = t$, 즉 $\frac{\pi}{2} \sin 2\pi x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq \sin 2\pi x \leq 1$ 이므로

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \sin 2\pi x \leq \frac{\pi}{2} \quad \therefore -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore y &= (f \circ g)(x) = f(g(x)) \\ &= f(t) = 2 \cos t + 3 \end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 \leq \cos t \leq 1$ 이므로

$$0 \leq 2 \cos t \leq 2 \quad \therefore 3 \leq 2 \cos t + 3 \leq 5$$

따라서 함수 $y = (f \circ g)(x)$ 의 최댓값은 5, 최솟값은 3이므로 그 합은

$$5 + 3 = 8$$

답 8

10

함수 $f(x) = a|\sin bx| + c$ 의 주기가 4π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{b} = 4\pi \quad \therefore b = \frac{1}{4}$$

$$\therefore f(x) = a\left|\sin \frac{1}{4}x\right| + c$$

함수 $f(x)$ 의 최댓값이 4이고 $a > 0$ 이므로

$$a + c = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

또, $f(-4\pi) = -2$ 이므로

$$a|\sin(-\pi)| + c = c = -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦을 ⑧에 대입하면 $\sin(-\pi) = 0$

$$a - 2 = 4 \quad \therefore a = 6$$

$$\therefore a + \frac{c}{b} = 6 + \frac{-2}{\frac{1}{4}} = 6 - 8 = -2$$

답 ①

11

함수 $y = a \sin(bx + c) + d$ 의 그래프에서 최댓값이 1, 최솟값이 -3 이고 $a > 0$ 이므로

$$a + d = 1, -a + d = -3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, d = -1$

또, 주기는

$$\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$$

이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2}{3}\pi \quad \therefore b = 3$$

따라서 주어진 함수의 식은

$$y = 2 \sin(3x + c) - 1$$

이고, 그래프가 점 $(0, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = 2 \sin(0 + c) - 1, \sin c = 0$$

$$\therefore c = \pi \quad (\because 0 < c \leq \pi)$$

이때

$$abcd = 2 \times 3 \times \pi \times (-1) = -6\pi$$

이므로

$$\cos(abcd) = \cos(-6\pi) = \cos 6\pi = 1$$

답 ⑤

12

$$\begin{aligned} & \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{1 - \sin(\pi + \theta)} - \frac{\cos(\pi - \theta)}{1 + \sin(2\pi - \theta)} \\ &= \frac{\cos \theta}{1 - (-\sin \theta)} - \frac{-\cos \theta}{1 - \sin \theta} \\ &= \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \\ &= \frac{\cos \theta(1 - \sin \theta) + \cos \theta(1 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} \\ &= \frac{2 \cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2 \cos \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2}{\cos \theta} \end{aligned}$$

답 ⑤

13

A, B, C 가 삼각형의 세 내각이므로

$$A + B + C = \pi \quad \therefore B + C = \pi - A$$

$$\neg. \sin(B + C) = \sin(\pi - A) = \sin A \quad (\text{참})$$

$$\neg. \cos(B + C) = \cos(\pi - A) = -\cos A \quad (\text{거짓})$$

$$\begin{aligned} \neg. \cos\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) &= \cos \frac{B+C}{2} = \cos \frac{\pi-A}{2} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \sin \frac{A}{2} \quad (\text{거짓}) \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

14

문제 접근하기

특수각이 아닌 각의 크기에 대한 탄젠트함수의 값의 곱이므로 삼각함수의 성질을 이용하여 식을 정리해야 한다.

즉, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$ 을 이용하여 식을 정리한다.

$$\begin{aligned} & \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \times \tan 4^\circ \times \cdots \times \tan 87^\circ \times \tan 88^\circ \\ &= \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \times \tan 4^\circ \times \cdots \times \tan 44^\circ \times \tan 45^\circ \\ & \quad \times \tan 46^\circ \times \tan 47^\circ \times \cdots \times \tan 87^\circ \times \tan 88^\circ \end{aligned}$$

이때 삼각함수의 성질에 의하여

$$\tan 46^\circ = \tan(90^\circ - 44^\circ) = \frac{1}{\tan 44^\circ}$$

$$\tan 47^\circ = \tan(90^\circ - 43^\circ) = \frac{1}{\tan 43^\circ}$$

⋮

$$\tan 87^\circ = \tan(90^\circ - 3^\circ) = \frac{1}{\tan 3^\circ}$$

$$\tan 88^\circ = \tan(90^\circ - 2^\circ) = \frac{1}{\tan 2^\circ}$$

이므로

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \times \tan 4^\circ \times \cdots \times \tan 44^\circ \times \tan 45^\circ \\ & \quad \times \frac{1}{\tan 44^\circ} \times \frac{1}{\tan 43^\circ} \times \cdots \times \frac{1}{\tan 3^\circ} \times \frac{1}{\tan 2^\circ} \\ &= \tan 45^\circ = 1 \end{aligned}$$

답 ③

15

$f(x)+f(-x)=0$ 이면 $f(-x)=-f(x)$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

또, $f(x+\pi)=f(x)$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 주기를 p ($p>0$)라고 하면

$$pn=\pi \quad (\text{단, } n \text{은 자연수이다.}) \quad \therefore p=\frac{\pi}{n}$$

즉, 함수 $f(x)$ 의 주기는 $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \dots$ 중 하나이다.

ㄱ. $f(x)=2\pi \sin x$ 는 주기가 2π 이고, 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

ㄴ. $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cos 2x$ 이므로 주기가 $\frac{2\pi}{2}=\pi$ 이고, 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다. $\rightarrow f(-x)=f(x)$

ㄷ. $f(x)=\cos 2x$ 는 ㄴ과 같은 함수이므로 주기가 π 이고, 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

ㄹ. $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2x$ 이므로 주기가 $\frac{2\pi}{2}=\pi$ 이고, 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

ㅁ. $f(x)=\tan(x+\pi)=\tan x$ 이므로 주기가 π 이고, 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

ㅂ. $f(x)=\tan \frac{\pi}{2}x$ 는 주기가 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$ 이고, 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수는 ㄹ, ㅁ의 2개이다.

답 2

16

$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면 주어진 함수는

$$y=-3\left|t-\frac{1}{2}\right|+1$$

이때 이 함수의 그래프는 점 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

에서 꺾이는 ㄷ자 모양이므로

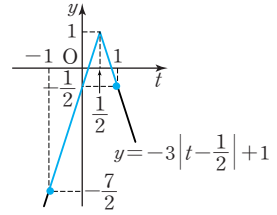
$-1 \leq t \leq 1$ 에서 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주어진 함수는 $t=\frac{1}{2}$ 일 때 최

댓값 1, $t=-1$ 일 때 최솟값 $-\frac{7}{2}$ 을 가

지므로 그 합은

$$1+\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{5}{2}$$



답 ②

다른 풀이

$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}=t$ 로 놓으면 $-1 \leq \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \leq 1$ 이므로

$$-\frac{3}{2} \leq \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \quad \therefore -\frac{3}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$$

이때 주어진 함수는 $y=-3|t|+1$

이 함수의 그래프는 점 $(0, 1)$ 에서 꺾이는 ㄷ자 모양의 그래프이므로

$-\frac{3}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$ 에서 $t=0$ 일 때 최댓값 1, $t=-\frac{3}{2}$ 일 때 최솟값 $-\frac{7}{2}$ 을 갖는다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$$1+\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{5}{2}$$

17

$$y=\sin^2(x-\pi)-2\cos^2(\pi-x)-\cos\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$=\sin^2 x - 2\cos^2 x + \sin x$$

$$=\sin^2 x - 2(1-\sin^2 x) + \sin x$$

$$=3\sin^2 x + \sin x - 2 \quad \rightarrow 0 \leq x < \pi \text{이므로 } 0 \leq \sin x \leq 1$$

이때 $\sin x=t$ ($0 \leq t \leq 1$)로 놓으면

$$y=3t^2+t-2=3\left(t+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{25}{12}$$

$0 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $y=3\left(t+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{25}{12}$

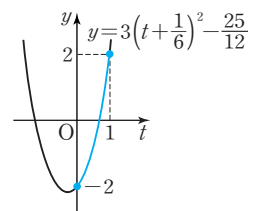
의 그래프는 오른쪽 그림의 색선과 같

으므로 주어진 함수는 $t=1$ 일 때 최댓

값 2, $t=0$ 일 때 최솟값 -2를 갖는다.

따라서 $M=2$, $m=-2$ 이므로

$$M+m=2+(-2)=0$$



답 ①

18

$2x=t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq \pi$ 에서 $0 \leq 2x \leq 2\pi$ 이므로

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

이때 주어진 방정식은

$$1+\sqrt{2}\sin t=0 \quad \therefore \sin t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ 에서 $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는

$$t = \frac{5}{4}\pi \text{ 또는 } t = \frac{7}{4}\pi$$

즉, $2x = \frac{5}{4}\pi$ 또는 $2x = \frac{7}{4}\pi$ 이므로

$$x = \frac{5}{8}\pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{8}\pi$$

따라서 주어진 방정식의 모든 해의 합은

$$\frac{5}{8}\pi + \frac{7}{8}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

답 ③

19

$\cos^2 x - 1 = -\sin x \cos x$ 에서

$$(1 - \sin^2 x) - 1 = -\sin x \cos x$$

$$\sin^2 x - \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x (\sin x - \cos x) = 0$$

$$\therefore \sin x = 0 \text{ 또는 } \sin x = \cos x$$

$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 에서

$\sin x = 0$ 의 해는 $x = 0$

$\sin x = \cos x$ 의 해는 $\tan x = 1$ 의 해와 같으므로 $x = \frac{\pi}{4}$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$$0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

답 ③

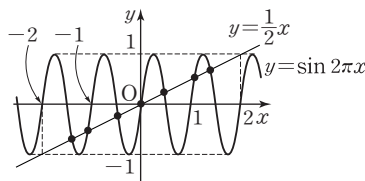
20

방정식 $\sin 2\pi x = \frac{1}{2}x$ 의 실근의 개수는 함수 $y = \sin 2\pi x$ 의 그래프

와 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 의 교점의 개수와 같다.

이때 $y = \sin 2\pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$ 이고, $y = \frac{1}{2}x$ 에서 $y = 1$ 일 때

$x = 2$, $y = -1$ 일 때 $x = -2$ 이므로 두 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 두 함수의 그래프의 교점은 7개이므로 방정식 $\sin 2\pi x = \frac{x}{2}$ 의 실근도 7개이다.

답 ②

21

이차방정식 $x^2 - 4x \cos \theta + 1 = 0$ 이 중근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 할 때 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-2 \cos \theta)^2 - 1 = 0$$

$$4 \cos^2 \theta - 1 = 0, (2 \cos \theta + 1)(2 \cos \theta - 1) = 0$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$0 \leq \theta < \pi$ 에서

$\cos \theta = -\frac{1}{2}$ 의 해는 $\theta = \frac{2}{3}\pi$

$\cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 해는 $\theta = \frac{\pi}{3}$

따라서 구하는 모든 θ 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi = \pi$$

답 π

문제 개념 CHECK

이차방정식의 근의 판별 高 公通 수학 1

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 D 라고 할 때

(1) $D > 0 \iff$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $D = 0 \iff$ 중근을 갖는다. $\rightarrow$ 실근을 갖지 않는다.

(3) $D < 0 \iff$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

22

$x + \frac{\pi}{6} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < \pi$ 에서 $\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} < \frac{7}{6}\pi$ 이므로

$$\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{7}{6}\pi$$

이때 주어진 부등식은 $\tan t < \sqrt{3}$

$\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{7}{6}\pi$ 에서 부등식

$\tan t < \sqrt{3}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2} < t < \frac{7}{6}\pi$$

이므로

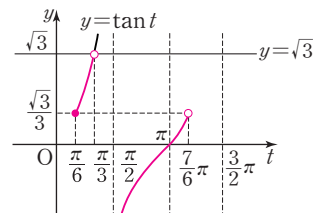
$$\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} \text{ 또는}$$

$$\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{7}{6}\pi$$

$$\therefore 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{\pi}{3} < x < \pi$$

따라서 $a = \frac{\pi}{6}$, $b = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$b - a = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$



답 ②

23

문제 접근하기

부등식 $\sin x \geq \cos x$ 와 부등식 $2 \cos^2 x + 7 \cos x + 3 \leq 0$ 의 해를 각각 구한 후 그 공통부분을 구한다.

(i) $\sin x \geq \cos x$

부등식 $\sin x \geq \cos x$ 의

해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 함수 $y = \cos x$ 의

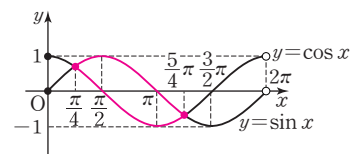
그래프와 만나거나 그 위

쪽에 있는 x 의 값의 범위

와 같다.

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 부등식 $\sin x \geq \cos x$ 의 해는

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$$



(ii) $2 \cos^2 x + 7 \cos x + 3 \leq 0$ 에서

$$(2 \cos x + 1)(\cos x + 3) \leq 0$$

이때 $\cos x + 3 > 0$ 이므로

$$2 \cos x + 1 \leq 0 \rightarrow 0 \leq x < 2\pi \text{에서 } -1 \leq \cos x \leq 1 \text{이므로}$$

$$\therefore \cos x \leq -\frac{1}{2}$$

 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 부등식

$$\cos x \leq -\frac{1}{2} \text{의 해는}$$

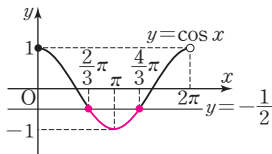
$$\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{4}{3}\pi$$

(i), (ii)에서 주어진 연립부등식의 해는

$$\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, $\beta = \frac{5}{4}\pi$ 이므로

$$\alpha + \beta = \frac{2}{3}\pi + \frac{5}{4}\pi = \frac{23}{12}\pi$$



답 ④

24

이차방정식 $6x^2 + (4 \cos \theta)x + \sin \theta = 0$ 이 실근을 갖지 않으려면
이 이차방정식의 판별식을 D 라고 할 때 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (2 \cos \theta)^2 - 6 \sin \theta < 0$$

$$4 \cos^2 \theta - 6 \sin \theta < 0$$

$$4(1 - \sin^2 \theta) - 6 \sin \theta < 0$$

$$-4 \sin^2 \theta - 6 \sin \theta + 4 < 0$$

$$2 \sin^2 \theta + 3 \sin \theta - 2 > 0$$

$$(2 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 2) > 0 \rightarrow 0 \leq \theta < 2\pi \text{에서 } -1 \leq \sin \theta \leq 1 \text{이므로}$$

$$\text{이때 } \sin \theta + 2 > 0 \text{이므로 } 1 \leq \sin \theta + 2 \leq 3$$

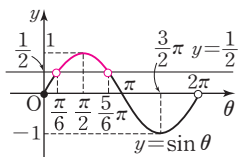
$$2 \sin \theta - 1 > 0 \quad \therefore \sin \theta > \frac{1}{2}$$

 $0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 부등식 $\sin \theta > \frac{1}{2}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{5}{6}\pi$ 이므로

$$3\alpha + \beta = 3 \times \frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{6}\pi = \frac{4}{3}\pi$$



답 ④

07

삼각함수의 활용

기본을 다지는 유형

본문 109쪽

001

(1) 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 이므로

$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{6}{\sin 60^\circ}$$

$$a \sin 60^\circ = 6 \sin 45^\circ$$

$$a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore a = 2\sqrt{6}$$

(2) 사인법칙에 의하여 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 이므로

$$\frac{8}{\sin B} = \frac{4\sqrt{6}}{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$$8 \sin \frac{\pi}{3} = 4\sqrt{6} \sin B$$

$$8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{6} \sin B \quad \therefore \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 < B < \pi \text{이므로 } B = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } B = \frac{3}{4}\pi$$

그런데 $B + C < \pi$ 이어야 하므로 $B = \frac{\pi}{4}$ 답 (1) $2\sqrt{6}$ (2) $\frac{\pi}{4}$

002

(1) 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ 이므로

$$\frac{2}{\sin 45^\circ} = 2R, 2R = 2\sqrt{2} \quad \therefore R = \sqrt{2}$$

(2) 사인법칙에 의하여 $\frac{b}{\sin B} = 2R$ 이므로

$$\frac{3}{\sin B} = 2 \times 3 \quad \therefore \sin B = \frac{1}{2}$$

$$0^\circ < B < 180^\circ \text{이므로 } B = 30^\circ \text{ 또는 } B = 150^\circ$$

(3) 사인법칙에 의하여 $\frac{c}{\sin C} = 2R$ 이므로

$$\frac{c}{\sin \frac{\pi}{2}} = 2 \times 4 \quad \therefore c = 8$$

답 (1) $\sqrt{2}$ (2) 30° 또는 150° (3) 8

003

삼각형 ABC에서 $c = \overline{AB} = 8$, $a = \overline{BC}$ 또, $A = 45^\circ$, $B = 15^\circ$ 이므로

$$C = 180^\circ - (45^\circ + 15^\circ) = 120^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 이므로

$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{8}{\sin 120^\circ}$$

$$a \sin 120^\circ = 8 \sin 45^\circ$$

$$a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore a = \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

따라서 선분 BC의 길이는 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ 이다.

답 ③

004

외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이므로

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C &= \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \\ &= \frac{a+b+c}{2R} \\ &= \frac{a+b+c}{2 \times 6} = \frac{a+b+c}{12} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{a+b+c}{12} = 2 \text{ 이므로}$$

$$a+b+c=24$$

답 ④

005

외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이므로

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C &= \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \\ &= \frac{a+b+c}{2R} \\ &= \frac{10}{2R} \quad (\because a+b+c=10) \\ &= \frac{5}{R} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{5}{R} = \frac{5}{2} \text{ 이므로 } R=2$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 2이다.

답 ②

|다른 풀이|

사인법칙의 변형에 의하여

$$\begin{aligned} a &= 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C \\ \therefore a+b+c &= 2R \sin A + 2R \sin B + 2R \sin C \\ &= 2R(\sin A + \sin B + \sin C) \\ &= 2R \times \frac{5}{2} = 5R \end{aligned}$$

이때 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 10이므로

$$5R=10 \quad \therefore R=2$$

006

$\overline{AC}$ 가 원 O의 지름이므로 $\angle ABC=90^\circ$

즉, 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}=4$ 인 직각이등변삼각형이므로

$$\angle BAC = \angle BCA = 45^\circ$$

또, 호 BC에 대한 원주각의 크기는 같으므로

$$\angle BDC = \angle BAC = 45^\circ$$

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{CD}}{\sin 30^\circ} = \frac{4}{\sin 45^\circ}$ 이므로

$$\overline{CD} \sin 45^\circ = 4 \sin 30^\circ$$

$$\overline{CD} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \times \frac{1}{2} \quad \therefore \overline{CD} = 2\sqrt{2}$$

답 ④

007

사인법칙의 변형에 의하여 $\sin C = \frac{c}{2R}$ 이므로

$$\frac{4}{5} = \frac{2\sqrt{2}}{2R} \quad \therefore R = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

또, 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 이므로

$$\frac{2}{\sin A} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{4}{5}}, 2\sqrt{2} \sin A = \frac{8}{5}$$

$$\therefore \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{ 이므로}$$

$$\cos A = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{5} \quad (\because A \text{는 예각})$$

$$\therefore 4R \cos A = 4 \times \frac{5\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{17}}{5} = \sqrt{34}$$

답 ①

008

삼각형 ABC에서 $\angle ABC=30^\circ$, $\angle ACB=90^\circ$ 이므로

$$\angle BAC = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ \quad \text{..... ①}$$

또, 삼각형 ADC는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{CD}=\overline{AC}=k$ 로 놓으면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\sin 30^\circ}, \frac{10+k}{\sin 60^\circ} = \frac{k}{\sin 30^\circ} \quad \text{..... ②}$$

$$(10+k) \sin 30^\circ = k \sin 60^\circ$$

$$(10+k) \times \frac{1}{2} = k \times \frac{\sqrt{3}}{2}, 10+k = k\sqrt{3}$$

$$k(\sqrt{3}-1) = 10$$

$$\therefore k = \frac{10}{\sqrt{3}-1} = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{2} = 5(\sqrt{3}+1)$$

따라서 선분 AC의 길이는 $5(\sqrt{3}+1)$ 이다. ③

답 $5(\sqrt{3}+1)$

채점 기준	비율
① $\angle BAC$ 의 크기를 구할 수 있다.	20 %
② 삼각형 ABC에서 사인법칙을 이용하여 식을 세울 수 있다.	50 %
③ 선분 AC의 길이를 구할 수 있다.	30 %

009

삼각형 ABC에서 $A+B+C=180^\circ$ 이고 $A:B:C=4:1:1$ 이므로

$$A = 180^\circ \times \frac{4}{4+1+1} = 120^\circ$$

$$B = 180^\circ \times \frac{1}{4+1+1} = 30^\circ$$

$$C = 180^\circ \times \frac{1}{4+1+1} = 30^\circ$$

사인법칙의 변형에 의하여

$$\begin{aligned} a:b:c &= \sin 120^\circ : \sin 30^\circ : \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3} : 1 : 1 \end{aligned}$$

따라서 $a=\sqrt{3}k, b=k, c=k (k>0)$ 로 놓으면

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}=\frac{(\sqrt{3}k)^2}{k^2+k^2}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

010

$(a+b):(b+c):(c+a)=8:7:9$ 이므로

$$a+b=8t \quad \text{..... ㉠}$$

$$b+c=7t \quad \text{..... ㉡}$$

$$c+a=9t \quad \text{..... ㉢}$$

로 놓자. (단, $t>0$) ①

㉠+㉡+㉢을 하면

$$2(a+b+c)=24t \quad \therefore a+b+c=12t \quad \text{..... ㉣}$$

㉣-㉡, ㉣-㉢, ㉣-㉠을 하면

$$a=5t, b=3t, c=4t \quad \text{..... ②}$$

따라서 사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$$

$$=5t:3t:4t$$

$$=5:3:4 \quad \text{..... ③}$$

즉, $k=5, l=3, m=4$ 이므로

$$k+l+m=5+3+4=12 \quad \text{..... ④}$$

답 12

채점 기준	비율
① 주어진 조건을 비례상수를 이용하여 식으로 나타낼 수 있다.	25 %
② a, b, c 를 비례상수를 이용한 식으로 나타낼 수 있다.	25 %
③ $\sin A:\sin B:\sin C$ 를 구할 수 있다.	30 %
④ $k+l+m$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

011

(1) 코사인법칙에 의하여

$$a^2=b^2+c^2-2bc \cos A$$

$$=1^2+(\sqrt{2})^2-2 \times 1 \times \sqrt{2} \times \cos 45^\circ$$

$$=1+2-2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}=1$$

이때 $a>0$ 이므로 $a=1$

(2) 코사인법칙에 의하여

$$c^2=a^2+b^2-2ab \cos C$$

$$=(2\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2-2 \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \cos 60^\circ$$

$$=8+18-24 \times \frac{1}{2}=14$$

이때 $c>0$ 이므로 $c=\sqrt{14}$

답 (1) 1 (2) $\sqrt{14}$

012

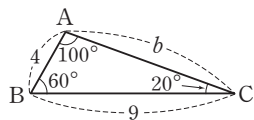
$$B=180^\circ-(A+C)=180^\circ-(100^\circ+20^\circ)=60^\circ$$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$b^2=c^2+a^2-2ca \cos B$$

$$=4^2+9^2-2 \times 4 \times 9 \times \cos 60^\circ$$

$$=16+81-72 \times \frac{1}{2}=61$$



이때 $b>0$ 이므로 $b=\sqrt{61}$

답 ②

013

평행사변형에서 이웃하는 두 각의 크기의 합은 180° 이므로

$$C=180^\circ-B=180^\circ-45^\circ=135^\circ \quad \text{..... ①}$$

따라서 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \cos C \\ &= (3\sqrt{2})^2 + 6^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 6 \times \cos 135^\circ \end{aligned}$$

$$=18+36-36\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=90 \quad \text{..... ②}$$

$$\therefore \overline{BD}=\sqrt{90}=3\sqrt{10} \quad (\because \overline{BD}>0) \quad \text{..... ③}$$

답 $3\sqrt{10}$

채점 기준	비율
① C의 크기를 구할 수 있다.	30 %
② $\overline{BD}^2$ 의 값을 구할 수 있다.	60 %
③ 대각선 BD의 길이를 구할 수 있다.	10 %

풍샘 개념 CHECK

평행사변형의 성질_중 수학 2

① 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.

② 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.

③ 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

014

원에 내접하는 사각형의 대각의 크기의 합은 180° 이므로

$$D=180^\circ-B=180^\circ-60^\circ=120^\circ$$

따라서 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{CD} \times \cos D \\ &= 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos 120^\circ \end{aligned}$$

$$=4+9-12 \times \left(-\frac{1}{2}\right)=19$$

$$\therefore \overline{AC}=\sqrt{19} \quad (\because \overline{AC}>0)$$

답 ④

015

선분 BD를 그으면 삼각형 ABD에서 코사

인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AD} \times \cos A \\ &= (\sqrt{3})^2 + 3^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 3 \times \cos 150^\circ \end{aligned}$$

$$=3+9-6\sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=21$$

한편, 원에 내접하는 사각형의 대각의 크기의 합은 180° 이므로

$$C=180^\circ-A=180^\circ-150^\circ=30^\circ$$

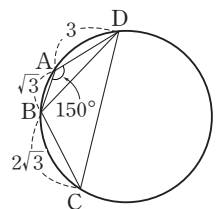
$\overline{CD}=x$ 라고 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \cos C$$

$$21 = (2\sqrt{3})^2 + x^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times x \times \cos 30^\circ$$

$$21 = 12 + x^2 - 4\sqrt{3}x \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 - 6x - 9 = 0 \quad \therefore x = 3 + 3\sqrt{2} \quad (\because x>0)$$



따라서 선분 CD의 길이는 $3+3\sqrt{2}$ 이다.

답 ⑤

016

삼각형 ABC에서 $a=3$, $b=5$, $c=7$ 이므로 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{3^2+5^2-7^2}{2 \times 3 \times 5} \\ &= \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

이때 $0 < C < \pi$ 이므로 $C = \frac{2}{3}\pi$

답 ③

017

$$a+3b-2c=0 \quad \text{..... ㉠}$$

$$5a-5b-2c=0 \quad \text{..... ㉡}$$

㉡-㉠을 하면

$$4a-8b=0 \quad \therefore a=2b \quad \text{..... ㉢}$$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$2b+3b-2c=0 \quad \therefore c=\frac{5}{2}b$$

따라서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{\left(\frac{5}{2}b\right)^2+(2b)^2-b^2}{2 \times \frac{5}{2}b \times 2b} \\ &= \frac{\frac{37}{4}b^2}{10b^2} = \frac{37}{40}\end{aligned}$$

답 ④

018

삼각형 ABD에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos B = \frac{4^2+2^2-3^2}{2 \times 4 \times 2} = \frac{11}{16} \quad \text{..... ①}$$

삼각형 ABC에서 $\cos B = \frac{11}{16}$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos B \\ &= 4^2 + (2+3)^2 - 2 \times 4 \times (2+3) \times \frac{11}{16}\end{aligned}$$

$$= 16 + 25 - \frac{55}{2} = \frac{27}{2} \quad \text{..... ②}$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2} \quad (\because \overline{AC} > 0) \quad \text{..... ③}$$

답 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

채점 기준	비율
① 삼각형 ABD에서 $\cos B$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② 삼각형 ABC에서 $\overline{AC}^2$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ 선분 AC의 길이를 구할 수 있다.	10 %

019

코사인법칙의 변형에 의하여

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+c^2-(b^2+bc+c^2)}{2bc} \\ &= -\frac{bc}{2bc} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로

$$A = 120^\circ$$

답 ⑤

020

삼각형 ABD에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=6$, $\overline{BD}=\sqrt{15}$ 이므로 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos A = \frac{6^2+6^2-(\sqrt{15})^2}{2 \times 6 \times 6} = \frac{57}{72} = \frac{19}{24}$$

삼각형 ABC에서 $\cos A = \frac{19}{24}$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}k^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos A \\ &= 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \frac{19}{24} \\ &= 36 + 100 - 95 = 41\end{aligned}$$

답 41

021

코사인법칙의 변형에 의하여

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{3^2+2^2-4^2}{2 \times 3 \times 2} \\ &= \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$0^\circ < C < 180^\circ$ 에서 $\sin C > 0$ 이므로 삼각함수 사이의 관계에 의하여

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{c}{\sin C} = 2R, \quad \frac{4}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{8\sqrt{15}}{15}$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{8\sqrt{15}}{15}$ 이다.

답 ②

022

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos B \\ &= 4^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 4 \times 2\sqrt{2} \times \cos 135^\circ \\ &= 16 + 8 - 16\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 40\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{10}}{\sin 135^\circ} = 2R, \quad \frac{2\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R$$

$$\therefore R = 2\sqrt{5}$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 둘레의 길이는

$$2\pi R = 2\pi \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}\pi$$

답 ①

023

$\frac{3}{\sin A} = \frac{4}{\sin B} = \frac{6}{\sin C} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$\sin A = \frac{3}{t}, \sin B = \frac{4}{t}, \sin C = \frac{6}{t}$$

$$\therefore \sin A : \sin B : \sin C = \frac{3}{t} : \frac{4}{t} : \frac{6}{t} = 3 : 4 : 6$$

사인법칙의 변형에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 3 : 4 : 6$$

이므로 $a = 3k, b = 4k, c = 6k$ ($k > 0$)로 놓으면 가장 작은 각의 크기는 변의 길이가 가장 짧은 a 의 대각인 A 이다.

따라서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{(4k)^2 + (6k)^2 - (3k)^2}{2 \times 4k \times 6k} \\ &= \frac{43k^2}{48k^2} = \frac{43}{48} \end{aligned}$$

답 ⑤

024

$\sqrt{2} \sin A = \sqrt{2} \sin B = \sin C = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$\sin A = \frac{t}{\sqrt{2}}, \sin B = \frac{t}{\sqrt{2}}, \sin C = t$$

$$\therefore \sin A : \sin B : \sin C = \frac{t}{\sqrt{2}} : \frac{t}{\sqrt{2}} : t = 1 : 1 : \sqrt{2}$$

사인법칙의 변형에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 1 : 1 : \sqrt{2}$$

이므로 $a = k, b = k, c = \sqrt{2}k$ ($k > 0$)로 놓으면 가장 큰 각의 크기는 변의 길이가 가장 긴 c 의 대각인 C 이다.

따라서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{k^2 + k^2 - (\sqrt{2}k)^2}{2 \times k \times k} = 0$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 90^\circ$

따라서 가장 큰 각의 크기는 90° 이다.

답 ④

참고

$a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2}$ 이므로 코사인법칙의 변형을 이용하지 않고도 C 의 크기를 구할 수 있다.

즉, 세 변의 길이의 비가 $1 : 1 : \sqrt{2}$ 인 삼각형은 직각이등변삼각형이고, 이때 C 는 길이가 가장 긴 c 의 대각의 크기이므로 $C = 90^\circ$ 임을 알 수 있다.

025

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이므로

$$(\sin A + \sin B) : (\sin B + \sin C) : (\sin C + \sin A)$$

$$= \left(\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} \right) : \left(\frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \right) : \left(\frac{c}{2R} + \frac{a}{2R} \right)$$

$$= \frac{a+b}{2R} : \frac{b+c}{2R} : \frac{c+a}{2R}$$

$$= (a+b) : (b+c) : (c+a)$$

즉, $(a+b) : (b+c) : (c+a) = 5 : 8 : 5$ 이므로

$a+b=5k, b+c=8k, c+a=5k$ ($k > 0$)로 놓고 변끼리 더하면

$$2(a+b+c) = 18k \quad \therefore a+b+c = 9k$$

$$\therefore a=k, b=4k, c=4k \quad \begin{array}{l} \rightarrow a+b+c=9k \text{에서 } b+c=8k, c+a=5k, \\ a+b=5k \text{를 각각 빼서 구한다.} \end{array}$$

따라서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(4k)^2 + k^2 - (4k)^2}{2 \times 4k \times k} \\ &= \frac{k^2}{8k^2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

답 ③

026

사인법칙의 변형에 의하여 $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$ 이므로

$$a : b : c = 5 : 12 : 13$$

$a = 5k, b = 12k, c = 13k$ ($k > 0$)로 놓으면

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (5k)^2 + (12k)^2 \\ &= 25k^2 + 144k^2 \\ &= 169k^2 = (13k)^2 = c^2 \end{aligned}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

답 ④

027

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이것을 $\frac{a}{\sin C} = \frac{c}{\sin A}$, 즉 $a \sin A = c \sin C$ 에 대입하면

$$a \times \frac{a}{2R} = c \times \frac{c}{2R} \quad \therefore a^2 = c^2$$

이때 $a > 0, c > 0$ 이므로 $a = c$

따라서 삼각형 ABC는 $a = c$ 인 이등변삼각형이다.

답 ①

028

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙의 변형과 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이것을 $\sin C = 2 \sin A \cos B$ 에 대입하면

$$\frac{c}{2R} = 2 \times \frac{a}{2R} \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\frac{c}{2R} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2Rc}$$

$$c^2 = c^2 + a^2 - b^2 \quad \therefore a^2 = b^2$$

이때 $a > 0, b > 0$ 이므로 $a = b$

따라서 삼각형 ABC는 $a = b$ 인 이등변삼각형이다.

답 ②

029

$\sin(\pi - C) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \sin(\pi - B)$ 에서 삼각함수의 성질에 의하여

$$\sin C = \cos A \sin B \quad \dots\dots\dots ①$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙의 변형과 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이것을 $\sin C = \cos A \sin B$ 에 대입하면

$$\frac{c}{2R} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \times \frac{b}{2R} \dots\dots\dots ②$$

$$\frac{c}{2R} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4Rc}$$

$$2c^2 = b^2 + c^2 - a^2 \quad \therefore b^2 = a^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다. ③

답 $B = 90^\circ$ 인 직각삼각형

채점 기준	비율
① 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 식을 정리할 수 있다.	30 %
② 사인법칙과 코사인법칙의 변형을 이용하여 주어진 식을 변의 길이에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
③ 삼각형 ABC가 어떤 삼각형인지 말할 수 있다.	30 %

030

$$(1) \triangle ABC = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 6 \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9$$

$$(2) \triangle ABC = \frac{1}{2}bc \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10\sqrt{3} \times \sin 135^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 25\sqrt{6}$$

답 (1) 9 (2) $25\sqrt{6}$

031

$\overline{BC} = a$ 로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \text{ 이므로}$$

$$(2\sqrt{3})^2 = 2^2 + a^2 - 2 \times 2 \times a \times \cos 60^\circ$$

$$12 = 4 + a^2 - 4a \times \frac{1}{2}, a^2 - 2a - 8 = 0$$

$$(a+2)(a-4) = 0 \quad \therefore a = 4 (\because a > 0)$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \sin 60^\circ$$

$$= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

답 ①

032

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{7} \times \sin \theta = \sqrt{7} \sin \theta$$

즉, $\sqrt{7} \sin \theta = \sqrt{6}$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

이때 A 는 예각이므로 $\cos \theta > 0$

$$\therefore \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{42}}{7} \right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

답 ⑤

033

$a=5, b=6, c=7$ 이라고 하면 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \times 6 \times 7}$$

$$= \frac{60}{84} = \frac{5}{7}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $\sin A > 0$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7} \right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2}bc \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 7 \times \frac{2\sqrt{6}}{7} = 6\sqrt{6}$$

답 ③

|다른 풀이|

$a=5, b=6, c=7, s = \frac{a+b+c}{2} = 9$ 라고 하면

$$\triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{9 \times (9-5) \times (9-6) \times (9-7)}$$

$$= \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} = 6\sqrt{6}$$

034

$\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} = 5 : 4 : 3$ 이므로

$$\angle AOB : \angle BOC : \angle COA = 5 : 4 : 3$$

즉,

$$\angle AOB = 360^\circ \times \frac{5}{5+4+3} = 150^\circ$$

$$\angle BOC = 360^\circ \times \frac{4}{5+4+3} = 120^\circ$$

$$\angle COA = 360^\circ \times \frac{3}{5+4+3} = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA$$

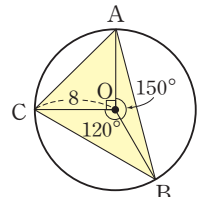
$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \sin 150^\circ + \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \sin 120^\circ$$

$$+ \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \sin 90^\circ$$

$$= 32 \times \frac{1}{2} + 32 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 32 \times 1$$

$$= 16 + 16\sqrt{3} + 32$$

$$= 48 + 16\sqrt{3}$$



답 ⑤

035

$a=3, b=5, c=5$ 라 하고, 삼각형 ABC의 넓이를 S , 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{3 \times 5 \times 5}{4 \times 3} = \frac{25}{4}$$

또, 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라고 하면

$$S = \frac{a+b+c}{2} \times r \text{에서}$$

$$\frac{25}{4} = \frac{3+5+5}{2} \times r, 25=26r \quad \therefore r = \frac{25}{26}$$

따라서 내접원의 반지름의 길이는 $\frac{25}{26}$ 이다.

답 $\frac{25}{26}$

036

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이것을 $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3}{4}$ 에 대입하면

$$\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{3}{4}, \frac{a+b+c}{2R} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore a+b+c = \frac{3}{2}R \quad \text{..... ①}$$

이때 삼각형 ABC가 반지름의 길이가 6인 원에 내접하므로 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 6이다.

$$\text{즉, } R=6 \text{이므로 } a+b+c=9 \quad \text{..... ②}$$

따라서 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라고 하면

$$\triangle ABC = \frac{a+b+c}{2} \times r = \frac{9}{2} \times 2 = 9 \quad \text{..... ③}$$

답 9

채점 기준	비율
① 사인법칙을 이용하여 주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
② 세 변의 길이의 합을 구할 수 있다.	30 %
③ 삼각형 ABC의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

037

등변사다리꼴의 두 대각선의 길이는 서로 같으므로 한 대각선의 길이를 x 라고 하면

$$\frac{1}{2} \times x \times x \times \sin 120^\circ = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} \times x \times x \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = 4\sqrt{3}, x^2 = 16 \quad \therefore x = 4 (\because x > 0)$$

즉, 등변사다리꼴의 한 대각선의 길이는 4이다.

답 ②

038

오른쪽 그림과 같이 대각선 BD를 그으면

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 4 \times \cos 120^\circ$$

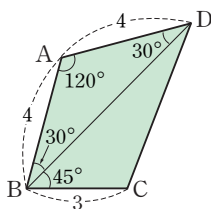
$$= 16 + 16 - 32 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 48$$

$$\therefore \overline{BD} = 4\sqrt{3} (\because \overline{BD} > 0)$$

이때 삼각형 ABD는 이등변삼각형이므로

$$\angle ABD = \angle ADB = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$$

$$\therefore \angle DBC = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$$



따라서

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BD} \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$\triangle BCD = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{BC} \times \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{6}$$

이므로 사각형 ABCD의 넓이는

$$\triangle ABD + \triangle BCD = 4\sqrt{3} + 3\sqrt{6}$$

답 $4\sqrt{3} + 3\sqrt{6}$

실력을 높이는 연습 문제

본문 117쪽

01

삼각형 ABC에서

$$C = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 이므로

$$\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ}, 2 \sin 60^\circ = c \sin 45^\circ$$

$$2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = c \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore c = \sqrt{6}$$

$$\therefore \frac{c}{\cos C} = \frac{\sqrt{6}}{\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{6}$$

답 ⑤

02

외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$A+B+C=\pi \text{이므로}$$

$$\sin(A+B) = \sin(\pi-C) = \sin C$$

$$\therefore \sin A + \sin B + \sin(A+B) = \sin A + \sin B + \sin C$$

$$= \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}$$

$$= \frac{a+b+c}{2R}$$

$$= \frac{12}{2 \times 4} = \frac{3}{2} (\because R=4)$$

답 ①

03

$$A+B+C=\pi \text{이므로}$$

$$\sin(A+B) : \sin(B+C) : \sin(C+A)$$

$$= \sin(\pi-C) : \sin(\pi-A) : \sin(\pi-B)$$

$$= \sin C : \sin A : \sin B$$

$$= c : a : b = 4 : 3 : 6$$

즉, $a:b:c=3:6:4$ 이므로 가장 긴 변의 길이는 b 이다.

이때 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 39이므로

$$b = 39 \times \frac{6}{3+6+4} = 18$$

따라서 가장 긴 변의 길이는 18이다.

답 18

04

$a=\sqrt{3}$, $b=1$, $c=\sqrt{7}$ 로 놓으면 세 내각 중에서 크기가 가장 큰 각은 가장 긴 변의 대각이므로 가장 큰 각의 크기는 c 의 대각의 크기인 C 이다.

코사인법칙의 변형에 의하여

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{(\sqrt{3})^2+1^2-(\sqrt{7})^2}{2 \times \sqrt{3} \times 1} \\ &= \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C=150^\circ$

따라서 크기가 가장 큰 각의 크기는 150° 이다.

답 ⑤

05

정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 3이라고 하면

$$\overline{AP}=1, \overline{DP}=2, \overline{CQ}=1, \overline{DQ}=2$$

이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BP}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

$$\overline{BQ}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

$$\overline{PQ}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

삼각형 PBQ에서 코사인법칙의 변형에 의하여

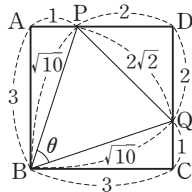
$$\cos \theta = \frac{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \times \sqrt{10} \times \sqrt{10}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

이때 θ 는 예각이므로 $\sin \theta > 0$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$



참고

삼각비는 변의 길이의 비이므로 주어진 정사각형의 길이를 어떻게 정해도 결과는 같다.

06

문제 접근하기

변 BC의 대각인 $\angle A$ 가 특수각이 아니므로 코사인법칙이나 사인법칙을 적용하기 어렵다. 이와 같은 경우에는 특수각이 되는 다른 각의 크기를 찾아 코사인법칙을 적용한다.

$$A=75^\circ, B=60^\circ \text{이므로}$$

$$C=180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$$

$$\text{이때 사인법칙에 의하여 } \frac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ} = 2 \text{이므로}$$

$$\overline{AC} = 2 \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\overline{AB} = 2 \sin 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

이때 $\overline{BC}=x$ 로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \times \overline{BC} \times \overline{AB} \times \cos B$$

$$(\sqrt{3})^2 = x^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \times x \times \sqrt{2} \times \cos 60^\circ$$

$$3 = x^2 + 2 - 2\sqrt{2}x \times \frac{1}{2}, x^2 - \sqrt{2}x - 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2}$$

$$\text{이때 } x > 0 \text{이므로 } x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

따라서 변 BC의 길이는 $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ 이다.

답 ③

07

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$D = \{-(\sin A + \sin B)\}^2 - 4 \times \sin A \times \sin B = 0$$

$$\sin^2 A - 2 \sin A \sin B + \sin^2 B = 0$$

$$(\sin A - \sin B)^2 = 0 \quad \therefore \sin A = \sin B$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}$$

이것을 $\sin A = \sin B$ 에 대입하면

$$\frac{a}{2R} = \frac{b}{2R} \quad \therefore a = b$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

답 ④

08

$\overline{CD}=x$ 로 놓으면 $\triangle ABC = \triangle ADC + \triangle BCD$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times x \times \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times x \times \sin 45^\circ$$

$$2 = \sqrt{2}x \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 = x + \frac{1}{2}x \quad \therefore x = \frac{4}{3}$$

따라서 선분 CD의 길이는 $\frac{4}{3}$ 이다.

답 ②

09

문제 접근하기

변의 길이가 모두 문자로 주어져 당황하기 쉽지만, $\cos A$ 의 값이 주어졌으므로 코사인법칙의 변형을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

코사인법칙의 변형에 의하여

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{(x+2)^2 + (x+4)^2 - x^2}{2(x+2)(x+4)} \\ &= \frac{x^2 + 12x + 20}{2(x+2)(x+4)} \\ &= \frac{(x+2)(x+10)}{2(x+2)(x+4)} = \frac{x+10}{2(x+4)}\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{x+10}{2(x+4)} = \frac{13}{14} \text{ 이므로}$$

$$14(x+10) = 26(x+4)$$

$$12x = 36 \quad \therefore x = 3$$

따라서 세 변의 길이는 $a=3$, $b=5$, $c=7$ 이고 $0^\circ < A < 180^\circ$ 에서 $\sin A > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{13}{14}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{27}{196}} = \frac{3\sqrt{3}}{14} \end{aligned}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{답 } \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

|다른 풀이|

$a=3$, $b=5$, $c=7$ 이므로 $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{15}{2}$ 라고 하면

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{\frac{15}{2} \times \left(\frac{15}{2} - 3\right) \times \left(\frac{15}{2} - 5\right) \times \left(\frac{15}{2} - 7\right)} \\ &= \sqrt{\frac{15}{2} \times \frac{9}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

10

삼각형 ABC의 넓이를 S, 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$$S = \frac{abc}{4R}$$

외접원의 반지름의 길이가 10이므로

$$S = \frac{abc}{4 \times 10} = \frac{abc}{40} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

또, 내접원의 반지름의 길이가 4이므로

$$S = \frac{a+b+c}{2} \times 4 = 2(a+b+c) \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

이때 ①과 ②은 서로 같으므로

$$\frac{abc}{40} = 2(a+b+c) \quad \therefore a+b+c = \frac{abc}{80}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} &= \frac{c}{abc} + \frac{a}{abc} + \frac{b}{abc} \\ &= \frac{a+b+c}{abc} \\ &= \frac{\frac{abc}{80}}{abc} = \frac{1}{80} \end{aligned}$$

$$\text{답 } \textcircled{1}$$

11

삼각형 CDP에서 $\angle CPD = \theta$ 라고 하면 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos \theta = \frac{3^2 + 5^2 - 4^2}{2 \times 3 \times 5} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ 에서 $\sin \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \quad \rightarrow \overline{AC} = 3+5=8, \overline{BD} = 7+3=10$$

사각형 ABCD의 두 대각선의 길이는 8, 10이고 그 끼인각의 크기는 θ 이므로 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 8 \times 10 \times \frac{4}{5} = 32$$

$$\text{답 } 32$$

12

$\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CD} : \widehat{DA} = 2 : 2 : 3 : 5$ 이므로

$\angle AOB : \angle BOC : \angle COD : \angle DOA = 2 : 2 : 3 : 5$

즉,

$$\angle AOB = 360^\circ \times \frac{2}{2+2+3+5} = 60^\circ$$

$$\angle BOC = 360^\circ \times \frac{2}{2+2+3+5} = 60^\circ$$

$$\angle COD = 360^\circ \times \frac{3}{2+2+3+5} = 90^\circ$$

$$\angle DOA = 360^\circ \times \frac{5}{2+2+3+5} = 150^\circ$$

이므로 사각형 ABCD의 넓이는

$$\triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCD + \triangle ODA$$

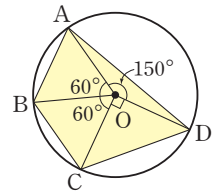
$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ$$

$$+ \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 90^\circ + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 150^\circ$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times 1 + 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 2\sqrt{3} + 3$$

$$\text{답 } \textcircled{4}$$



08 등차수열과 등비수열

기본을 다지는 유형 본문 121쪽

001

첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$(1) a=1, d=4-1=3 \text{이므로}$$

$$a_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n-2$$

$$(2) a=6, d=1-6=-5 \text{이므로}$$

$$a_n = 6 + (n-1) \times (-5) = -5n+11$$

$$\text{답 (1) } a_n = 3n-2 \quad (2) a_n = -5n+11$$

002

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_2 = a + d = 5, a_4 = a + 3d = 13 \text{이므로}$$

$$a_4 - a_2 = (a + 3d) - (a + d) = 2d = 8$$

$$\therefore d = 4$$

따라서 공차는 4이다.

답 ④

003

주어진 등차수열의 공차를 d 라고 하면

$$d = 10 - 6 = 4$$

$$\therefore a = 6 - 4 = 2, b = 10 + 4 = 14$$

$$\therefore b - a = 14 - 2 = 12$$

답 ③

|다른 풀이|

주어진 수열을 $\{a_n\}$, 공차를 d 라고 하면

$$d = 10 - 6 = 4$$

$$\text{이때 } a = a_1, b = a_4 = a + 3d \text{이므로}$$

$$b - a = a_4 - a_1 = 3d = 3 \times 4 = 12$$

004

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항을 각각 a_1 , b_1 이라고 하면

$$a_n = a_1 + (n-1) \times (-3), b_n = b_1 + (n-1) \times 9$$

이때 수열 $\{a_n + b_n\}$ 의 일반항은 $a_n + b_n$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= \{a_1 + (n-1) \times (-3)\} + \{b_1 + (n-1) \times 9\} \\ &= (a_1 + b_1) + (n-1) \times 6 \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n + b_n\}$ 의 공차는 6이다.

답 6

005

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라고 하면

$$a_n = a + (n-1) \times 2 = 2n + a - 2$$

$$\therefore 2a_n = 2(2n + a - 2) = 4n + 2a - 4$$

이므로 수열 $\{2a_n\}$ 은 공차가 4인 등차수열이다. (참)

$$\therefore a_{2n-1} = 2(2n-1) + a - 2 = 4n + a - 4$$

이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 공차가 4인 등차수열이다. (참)

$$\therefore 2a_{2n} = 2(2 \times 2n + a - 2) = 8n + 2a - 4$$

이므로 수열 $\{2a_{2n}\}$ 은 공차가 8인 등차수열이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

006

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_5 - a_3 = (1 + 4d) - (1 + 2d) = 2d = 8$$

$$\therefore d = 4$$

$$\therefore a_2 = 1 + 1 \times 4 = 5$$

답 ③

007

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_2 = a + d = 18$$

..... ㉠

$$a_7 = a + 6d = -12$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 24, d = -6$$

$$\therefore a_6 = 24 + 5 \times (-6) = -6$$

답 ②

008

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_4 = a + 3d = 1$$

..... ㉠

$$a_8 = a + 7d = -3$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 4, d = -1$$

$$\therefore a_n = 4 + (n-1) \times (-1) = -n + 5$$

따라서 $-n + 5 = -12$ 에서 $n = 17$

즉, -12는 제17항이다.

답 ④

009

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_2 = 34 + d, a_{10} = 34 + 9d \text{ ①}$$

이때 $a_2 : a_{10} = 2 : 1$ 이므로

$$2a_{10} = a_2, 2(34 + 9d) = 34 + d$$

$$68 + 18d = 34 + d, 17d = -34$$

$$\therefore d = -2 \text{ ②}$$

$$\therefore a_5 = 34 + 4 \times (-2) = 26 \text{ ③}$$

답 26

채점 기준	비율
① 첫째항과 공차를 이용하여 a_2, a_{10} 을 나타낼 수 있다.	40 %
② 주어진 비를 이용하여 공차를 구할 수 있다.	30 %
③ a_5 를 구할 수 있다.	30 %

010

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_3 = a + 2d = \log_2 25$$

..... ㉠

$$a_5 = a + 4d = \log_2 100 \quad \cdots \cdots \textcircled{L}$$

①-⑦을 하면

$$2d = \log_2 100 - \log_2 25 = \log_2 \frac{100}{25} = \log_2 4 = 2$$

$$\therefore d = 1$$

$d = 1$ 을 ⑦에 대입하면

$$a + 2 = \log_2 25$$

$$\therefore a = \log_2 25 - 2 = \log_2 25 - \log_2 4 = \log_2 \frac{25}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_7 &= \log_2 \frac{25}{4} + 6 \times 1 = \log_2 \frac{25}{4} + \log_2 2^6 \\ &= \log_2 \left(\frac{25}{4} \times 2^6 \right) = \log_2 400 \end{aligned}$$

답 ③

[다른 풀이]

$$\begin{aligned} a_7 &= a_5 + 2d = \log_2 100 + 2 \times 1 = \log_2 100 + \log_2 2^2 \\ &= \log_2 (100 \times 4) = \log_2 400 \end{aligned}$$

011

3, a_1 , a_2 , a_3 , 11은 첫째항이 3, 제5항이 11인 등차수열이다.

이 등차수열의 공차를 d 라고 하면

$$3 + 4d = 11, 4d = 8 \quad \therefore d = 2$$

a_3 은 이 등차수열의 제4항이므로

$$a_3 = 3 + 3d = 3 + 3 \times 2 = 9$$

답 ④

참고

$a_3 = 3 + 2d$ 로 착각하지 않도록 주의한다.

012

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$\text{제3항이 } 36 \text{이므로 } a + 2d = 36 \quad \cdots \cdots \textcircled{L}$$

$$\text{제6항이 } 21 \text{이므로 } a + 5d = 21 \quad \cdots \cdots \textcircled{L}$$

$$\textcircled{L}, \textcircled{L} \text{을 연립하여 풀면 } a = 46, d = -5$$

$$\therefore a_n = 46 + (n-1) \times (-5) = -5n + 51$$

$a_n < 0$ 에서

$$-5n + 51 < 0 \quad \therefore n > 10.2 \quad \rightarrow n \text{은 자연수이므로 } a_n < 0 \text{을 만족시키는 } n \text{의 최솟값은 } 11 \text{이다.}$$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제11항이다.

답 ②

013

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_1 = a_3 + 8 \text{에서}$$

$$a_1 = (a_1 + 2d) + 8, 2d + 8 = 0 \quad \therefore d = -4$$

또, $2a_4 - 3a_6 = 3$ 에서

$$2(a_1 + 3d) - 3(a_1 + 5d) = 3, 2a_1 + 6d - 3a_1 - 15d = 3$$

$$\therefore -a_1 - 9d = 3$$

위의 식에 $d = -4$ 를 대입하면

$$-a_1 - 9 \times (-4) = 3, -a_1 = -33 \quad \therefore a_1 = 33$$

$$\therefore a_n = 33 + (n-1) \times (-4) = -4n + 37$$

$a_k < 0$ 에서

$$-4k + 37 < 0 \quad \therefore k > 9.25$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은 10이다.

답 ②

014

a_2 는 a_1 과 a_3 의 등차중항이므로

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

답 ③

[다른 풀이]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_1 + a_3 = a + (a + 2d) = 2a + 2d = 16$$

$$\therefore a + d = 8$$

$$\therefore a_2 = a + d = 8$$

015

세 수 4, a , 12가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2a = 4 + 12, 2a = 16 \quad \therefore a = 8$$

세 수 a , 13, b , 즉 8, 13, b 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2 \times 13 = 8 + b, 26 = 8 + b \quad \therefore b = 18$$

세 수 a , b , c , 즉 8, 18, c 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2 \times 18 = 8 + c, 36 = 8 + c \quad \therefore c = 28$$

$$\therefore a + b + c = 8 + 18 + 28 = 54$$

답 54

016

k 가 $\log_3 5$ 와 $\log_9 16$ 의 등차중항이므로

$$2k = \log_3 5 + \log_9 16 = \log_3 5 + \log_3 4^2$$

$$= \log_3 5 + \log_3 4 = \log_3 20$$

$$\therefore k = \frac{1}{2} \log_3 20 = \log_3 \sqrt{20}$$

$$\therefore 3^k = 3^{\log_3 \sqrt{20}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

답 ③

017

수열 -3, a , b , c , 7의 공차가 d 이면
-3, b , 7은 공차가 $2d$ 인 등차수열이다.

세 수 -3, b , 7이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$b = \frac{-3 + 7}{2} = 2$$

세 수 -3, a , b , 즉 -3, a , 2가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2}$$

세 수 b , c , 7, 즉 2, c , 7이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$c = \frac{2 + 7}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\therefore a + b + c = -\frac{1}{2} + 2 + \frac{9}{2} = 6$$

답 ①

[다른 풀이]

세 수 -3, b , 7이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$b = \frac{-3 + 7}{2} = 2$$

b 가 a 와 c 의 등차중항이므로

$$2b = a + c \quad \therefore a + c = 4$$

$$\therefore a + b + c = (a + c) + b = 4 + 2 = 6$$

018

세 수 a , 3, b 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2 \times 3 = a + b \quad \therefore a + b = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

세 수 $a^2, 13, b^2$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2 \times 13 = a^2 + b^2 \quad \therefore a^2 + b^2 = 26 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦의 양변을 제곱하면

$$(a+b)^2 = 36, a^2 + 2ab + b^2 = 36$$

$$26 + 2ab = 36 \quad (\because \textcircled{8}), 2ab = 10$$

$$\therefore ab = 5$$

답 ④

019

삼차방정식 $x^3 - 6x^2 + kx - 4 = 0$ 의 세 근을 $a-d, a, a+d$ 로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a-d) + a + (a+d) = 6, 3a = 6$$

$$\therefore a = 2$$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 2이므로 주어진 방정식에 $x=2$ 를 대입하면

$$2^3 - 6 \times 2^2 + 2k - 4 = 0$$

$$8 - 24 + 2k - 4 = 0$$

$$2k = 20 \quad \therefore k = 10$$

답 ①

문제 개념 CHECK

삼차방정식의 근과 계수의 관계_高 公通 수학 1

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

020

직각삼각형의 세 변의 길이를 $a-d, a, a+d$ ($a > d > 0$)로 놓으면 이 직각삼각형의 넓이가 24이므로

$$\frac{1}{2} \times (a-d) \times a = 24, \frac{1}{2}(a^2 - ad) = 24$$

$$\therefore a^2 - ad = 48 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

피타고라스 정리에 의하여

$$(a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2$$

$$a^2 = 4ad$$

$$\therefore a = 4d \quad (\because a \neq 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$(4d)^2 - 4d \times d = 48, 12d^2 = 48$$

$$d^2 = 4 \quad \therefore d = 2 \quad (\because d > 0)$$

②에 $d=2$ 를 대입하면

$$a = 8$$

따라서 세 변의 길이는 6, 8, 10이므로 직각삼각형의 빗변의 길이는 10이다.

답 ①

021

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하자.

$$(1) S_{10} = \frac{10(2+24)}{2} = 130$$

$$(2) S_8 = \frac{8\{2 \times (-30) + (8-1) \times 3\}}{2} = -156$$

답 (1) 130 (2) -156

022

(1) 첫째항이 -6, 공차가 $-4 - (-6) = 2$ 이므로 끝항 12를 제 n 항이라고 하면

$$-6 + (n-1) \times 2 = 12, 2n - 8 = 12 \quad \therefore n = 10$$

따라서 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{10(-6+12)}{2} = 30$$

(2) 첫째항이 21, 공차가 $17 - 21 = -4$ 이므로 끝항 -19를 제 n 항이라고 하면

$$21 + (n-1) \times (-4) = -19, -4n + 25 = -19$$

$$\therefore n = 11$$

따라서 첫째항부터 제11항까지의 합은

$$\frac{11\{21 + (-19)\}}{2} = 11$$

답 (1) 30 (2) 11

023

첫째항이 -8, 공차가 $-5 - (-8) = 3$ 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 36이므로

$$\frac{n\{2 \times (-8) + (n-1) \times 3\}}{2} = 36 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$n(3n-19) = 72, 3n^2 - 19n - 72 = 0$$

$$(3n+8)(n-9) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{이때 } n \text{은 자연수이므로 } n = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

답 9

채점 기준	비율
① 주어진 조건을 이용하여 등차수열의 합을 n 에 대하여 나타낼 수 있다.	60 %
② n 에 대한 식을 정리하여 인수분해할 수 있다.	30 %
③ n 의 값을 구할 수 있다.	10 %

024

등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 공차를 각각 d, d' 이라고 하면

$$a_1 + b_1 = 12, d + d' = 2 + (-5) = -3 \text{이므로}$$

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{10})$$

$$= \frac{10(2a_1 + 9d)}{2} + \frac{10(2b_1 + 9d')}{2}$$

$$= \frac{10\{2(a_1 + b_1) + 9(d + d')\}}{2}$$

$$= \frac{10\{2 \times 12 + 9 \times (-3)\}}{2} = -15$$

답 ②

025

$$S_7 - S_4 = 0 \text{이므로}$$

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_7) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 0$$

$$\therefore a_5 + a_6 + a_7 = 0$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_5 = a_6 - d, a_7 = a_6 + d \text{이므로}$$

$$(a_6 - d) + a_6 + (a_6 + d) = 0, 3a_6 = 0$$

$$\therefore a_6 = 0$$

$$S_6 = 30 \text{이므로}$$

$$\frac{6(a_1+a_6)}{2}=30, 3a_1=30$$

$$\therefore a_1=10$$

$$a_6=10+5d=0 \text{이므로 } d=-2$$

$$\therefore a_2=a_1+d=10-2=8$$

답 ②

026

두 자리 자연수 중에서 4로 나누었을 때 나머지가 2인 자연수를 작은 수부터 차례대로 나열하면

$$10, 14, 18, 22, \dots, 98$$

이것은 첫째항이 10, 공차가 4인 등차수열이므로 끝항 98을 제 n 항이라고 하면

$$10+(n-1) \times 4=98, 4n+6=98$$

$$\therefore n=23$$

따라서 구하는 자연수의 합은 첫째항이 10, 제23항이 98인 등차수열의 첫째항부터 제23항까지의 합이므로

$$\frac{23(10+98)}{2}=1242$$

답 ③

027

27, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$, 3은 첫째항이 27, 끝항이 3, 항수가 12인 등차수열이므로 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{12}=\frac{12(27+3)}{2}=180$$

$$\text{이때 } S_{12}=27+a_1+a_2+a_3+\dots+a_{10}+3 \text{이므로}$$

$$a_1+a_2+a_3+\dots+a_{10}=S_{12}-(27+3) \\ =180-30=150$$

답 ⑤

028

-10과 38 사이에 넣은 n 개의 수를 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 이라고 하면 -10, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, 38은 첫째항이 -10, 끝항이 38, 항수가 $n+2$ 인 등차수열이다. ①

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{n+2}=-10+a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+38 \\ =-10+448+38=476$$

$$\text{즉, } \frac{(n+2)(-10+38)}{2}=476 \text{이므로} \dots\dots\dots ②$$

$$14(n+2)=476, n+2=34$$

$$\therefore n=32 \dots\dots\dots ③$$

답 32

채점 기준	비율
① $(n+2)$ 개의 수로 만든 등차수열의 첫째항, 끝항, 항수를 파악할 수 있다.	30 %
② $(n+2)$ 개의 수로 만든 등차수열의 합을 구할 수 있다.	40 %
③ n 의 값을 구할 수 있다.	30 %

029

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$S_5=35 \text{에서 } \frac{5(2a+4d)}{2}=35$$

$$\therefore a+2d=7 \dots\dots\dots ㉠$$

$$S_{10}=145 \text{에서 } \frac{10(2a+9d)}{2}=145$$

$$\therefore 2a+9d=29 \dots\dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=1, d=3$$

$$\therefore a_8=1+7 \times 3=22$$

답 22

030

등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하자.

첫째항부터 제10항까지의 합이 510이므로

$$S_{10}=\frac{10(2a+9d)}{2}=510$$

$$\therefore 2a+9d=102 \dots\dots\dots ㉠$$

제11항부터 제20항까지의 합이 310이므로

$$S_{20}-S_{10}=\frac{20(2a+19d)}{2}-510=310$$

$$10(2a+19d)-510=310$$

$$\therefore 2a+19d=82 \dots\dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=60, d=-2$$

따라서 제21항부터 제30항까지의 합은

$$S_{30}-S_{20}=\frac{30\{2 \times 60+29 \times (-2)\}}{2}-(510+310) \\ =930-820=110$$

답 ②

031

주어진 등차수열을 $\{a_n\}$ 이라고 하면

$$a_n=-14+(n-1) \times 3=3n-17$$

$$\text{이때 } a_n>0 \text{에서 } 3n-17>0$$

$$\therefore n>5. \dots$$

따라서 제6항부터 양수이므로 첫째항부터 제5항까지의 합이 최소가 된다.

즉, 구하는 S_n 의 최솟값은

$$S_5=\frac{5\{2 \times (-14)+4 \times 3\}}{2}=-40$$

답 ④

032

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_3=26 \text{에서 } a+2d=26 \dots\dots\dots ㉠$$

$$a_9=8 \text{에서 } a+8d=8 \dots\dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=32, d=-3$$

$$\therefore a_n=32+(n-1) \times (-3)=-3n+35$$

$$\text{이때 } a_n<0 \text{에서 } -3n+35<0$$

$$\therefore n>11. \dots$$

따라서 제12항부터는 음수이므로 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 최

대가 되도록 하는 자연수 n 의 값은 11이다.

답 ①

033

주어진 등차수열을 $\{a_n\}$ 이라고 하면 첫째항이 -42 , 공차가 $-38 - (-42) = 4$ 이므로

$$a_n = -42 + (n-1) \times 4 = 4n - 46 \quad \text{..... ①}$$

이때 $a_n > 0$ 에서 $4n - 46 > 0$

$$\therefore n > 11.5$$

따라서 제12항부터는 양수이므로 첫째항부터 제11항까지의 합이 최소가 된다.

$$\therefore a = 11 \quad \text{..... ②}$$

S_n 의 최솟값은

$$b = S_{11} = \frac{11\{2 \times (-42) + 10 \times 4\}}{2} = -242 \quad \text{..... ③}$$

$$\therefore a - b = 11 - (-242) = 253 \quad \text{..... ④}$$

답 253

채점 기준	비율
① 주어진 등차수열의 일반항을 구할 수 있다.	30 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $a - b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

| 다른 풀이 |

공차가 $-38 - (-42) = 4$ 이므로

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n\{2 \times (-42) + (n-1) \times 4\}}{2} \\ &= 2n^2 - 44n = 2(n^2 - 22n) \\ &= 2(n-11)^2 - 242 \end{aligned}$$

따라서 $n=11$ 일 때 최솟값 -242 를 가지므로

$$a=11, b=-242$$

$$\therefore a - b = 11 - (-242) = 253$$

034

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_n = 120 + (n-1)d$$

S_n 이 $n=14$ 일 때 최댓값을 가지므로 제15항부터 음수가 된다.

$$\text{즉, } a_{14} \geq 0, a_{15} \leq 0 \text{에서}$$

$$120 + 13d \geq 0, 120 + 14d \leq 0$$

$$\therefore -\frac{120}{13} \leq d \leq -\frac{60}{7}$$

즉, $-9. \dots \leq d \leq -8. \dots$ 이고 d 는 정수이므로

$$d = -9$$

$$\therefore a_{10} = 120 + 9 \times (-9) = 39$$

답 ①

035

(1) 첫째항이 2, 공비가 $\frac{4}{2} = 2$ 이므로

$$a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

(2) 첫째항이 216, 공비가 $\frac{72}{216} = \frac{1}{3}$ 이므로

$$a_n = 216 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{답 (1) } a_n = 2^n \quad (2) a_n = 216 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

036

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라고 하면

$$a_2 a_4 = 36 \text{에서 } 2r \times 2r^3 = 36 \quad \therefore r^4 = 9$$

$$\therefore \frac{a_7}{a_3} = \frac{2r^6}{2r^2} = r^4 = 9$$

답 ⑤

037

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_3 = 6 \text{에서 } ar^2 = 6 \quad \text{..... ㉠}$$

$$a_9 = 162 \text{에서 } ar^8 = 162 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠ $\div$ ㉡을 하면

$$\frac{ar^8}{ar^2} = \frac{162}{6}, r^6 = 27$$

$$(r^2)^3 = 3^3 \quad \therefore r^2 = 3$$

이때 수열의 각 항이 양수이므로 공비도 양수이다.

$$\therefore r = \sqrt{3}$$

답 ②

038

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a = a_1 = 12 \times 3^{1-2} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\text{또, } a_2 = 12 \times 3^{1-4} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9} \text{이므로}$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{4}{9}}{4} = \frac{1}{9}$$

따라서 첫째항은 4, 공비는 $\frac{1}{9}$ 이다.

답 ④

| 다른 풀이 |

$$\begin{aligned} a_n &= 12 \times 3^{1-2n} = 12 \times 3 \times 3^{-2n} \\ &= 36 \times \left(\frac{1}{9}\right)^n = 4 \times \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

이므로 첫째항은 4, 공비는 $\frac{1}{9}$ 이다.

039

주어진 등비수열의 공비를 r 라고 하면

$$r = \frac{\log 4}{\log 2} = \frac{\log 2^2}{\log 2} = \frac{2 \log 2}{\log 2} = 2$$

따라서 주어진 등비수열의 공비는 2이다.

답 2

040

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r > 0$)라고 하면

$$a_3 = a_2 + 12 \text{에서 } r^2 = r + 12$$

$$r^2 - r - 12 = 0, (r+3)(r-4) = 0$$

$$\therefore r = 4 (\because r > 0)$$

$$\therefore a_5 = r^4 = 4^4 = 256$$

답 ⑤

041

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_1 + a_3 = 6 \text{에서 } a + ar^2 = 6 \quad \text{..... ㉠}$$

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 = 12\sqrt{2} \text{에서 } a \times ar + ar \times ar^2 = 12\sqrt{2}$$

$$a^2 r + a^2 r^3 = 12\sqrt{2} \quad \therefore ar(a + ar^2) = 12\sqrt{2} \quad \text{..... ㉡}$$

㉡ $\div$ ㉠을 하면

$$\frac{ar(a + ar^2)}{a + ar^2} = \frac{12\sqrt{2}}{6} \quad \therefore ar = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore a_2 = ar = 2\sqrt{2}$$

답 ④

042

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_8 = 16a_6 \text{에서 } ar^7 = 16ar^5$$

$$\therefore r^2 = 16 \quad \text{..... ①}$$

$$a_3 + a_5 = 544 \text{에서}$$

$$ar^2 + ar^4 = 544, ar^2(1 + r^2) = 544$$

이때 $r^2 = 16$ 이므로

$$a \times 16 \times 17 = 544$$

$$\therefore a = 2 \quad \text{..... ②}$$

따라서

$$a_9 = ar^8 = a \times (r^2)^4 = 2 \times 16^4 = 2 \times 2^{16} = 2^{17}$$

$$\text{이므로 } k = 17 \quad \text{..... ③}$$

답 17

채점 기준	비율
① $a_8 = 16a_6$ 에서 공비의 제곱의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $a_3 + a_5 = 544$ 에서 첫째항을 구할 수 있다.	40 %
③ k 의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고

공비의 부호에 대한 조건이 주어지지 않았으므로 $r=4$ 인지 $r=-4$ 인지는 알 수 없다.

043

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라고 하면

$$a_3 = 10r^2, a_6 = 10r^5$$

$$a_3 : a_6 = 1 : 5 \text{에서}$$

$$10r^2 : 10r^5 = 1 : 5, 1 : r^3 = 1 : 5$$

$$\therefore r^3 = 5$$

$$\therefore a_7 = 10r^6 = 10 \times (r^3)^2 = 10 \times 5^2 = 250$$

답 ③

044

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라고 하면

$$\frac{a_3}{a_2} - \frac{a_6}{a_4} = \frac{1}{4} \text{에서 } \frac{3r^2}{3r} - \frac{3r^5}{3r^3} = \frac{1}{4}, r - r^3 = \frac{1}{4}$$

$$4r - 4r^3 = 1, 4r^2 - 4r + 1 = 0$$

$$(2r - 1)^2 = 0 \quad \therefore r = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{즉, } a_5 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{16} \text{이므로 } p=16, q=3$$

$$\therefore p+q=16+3=19$$

답 19

045

96, a_1 , a_2 , a_3 , 6은 첫째항이 96, 제5항이 6인 등비수열이다.

이 등비수열의 공비를 r ($r > 0$)라고 하면

$$96r^4 = 6, r^4 = \frac{1}{16} \quad \therefore r = \frac{1}{2} (\because r > 0)$$

$$\text{따라서 } a_1 = 96 \times \frac{1}{2} = 48, a_2 = 48 \times \frac{1}{2} = 24, a_3 = 24 \times \frac{1}{2} = 12 \text{이므로}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 48 + 24 + 12 = 84$$

답 ④

046

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 2, 공비가 3이므로

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

$$2 \times 3^{n-1} > 2000 \text{에서 } 3^{n-1} > 1000$$

$$\text{이때 } 3^6 = 729, 3^7 = 2187 \text{이므로}$$

$$n-1 \geq 7 \quad \therefore n \geq 8$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 8이다.

답 ①

047

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_2 + a_4 = 10 \text{에서 } ar + ar^3 = 10$$

$$\therefore ar(1 + r^2) = 10 \quad \text{..... ㉠}$$

$$a_5 + a_7 = 80 \text{에서 } ar^4 + ar^6 = 80$$

$$\therefore ar^4(1 + r^2) = 80 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉡} \div \text{㉠을 하면 } \frac{ar^4(1+r^2)}{ar(1+r^2)} = \frac{80}{10}$$

$$r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$$

$r=2$ 를 ㉠에 대입하면 $\rightarrow$ 모든 항이 실수이므로 공비도 실수이다.

$$a \times 2 \times 5 = 10 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore a_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

제 n 항이 처음으로 1000보다 크다고 하면

$$2^{n-1} > 1000$$

$$\text{이때 } 2^9 = 512, 2^{10} = 1024 \text{이므로}$$

$$n-1 \geq 10 \quad \therefore n \geq 11$$

따라서 처음으로 1000보다 큰 항은 제11항이다.

답 ⑤

048

a 는 $\sqrt{2}$ 와 $8\sqrt{2}$ 의 등비중항이므로

$$a^2 = \sqrt{2} \times 8\sqrt{2} = 16$$

$$\therefore a = 4 (\because a > 0)$$

답 ③

049

3은 a^2 과 b^2 의 등비중항이므로

$$3^2 = a^2 \times b^2 = (ab)^2$$

이때 a, b 는 양수이므로 $ab > 0$

$$\therefore ab = 3$$

답 ①

050

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 a , 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$a_n = a \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

이때 2는 a_3 과 a_7 의 등비중항이므로

$$2^2 = a_3 \times a_7, 2^2 = \left\{a \times \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} \times \left\{a \times \left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}$$

$$2^2 = \frac{a^2}{2^8}, a^2 = 2^{10}$$

$$\therefore a = 2^5 = 32 \quad (\because a > 0)$$

답 ⑤

051

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ 는 $\sin \theta$ 와 $\cos \theta$ 의 등비중항이므로

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \sin \theta \times \cos \theta$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{8} \quad \text{..... ①}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 - 2 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{..... ②} \end{aligned}$$

이때 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$ 이면 $\sin \theta < \cos \theta$ 이므로 $\sin \theta - \cos \theta < 0$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{..... ③}$$

답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

채점 기준	비율
① $\sin \theta \cos \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $(\sin \theta - \cos \theta)^2$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $\sin \theta - \cos \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

052

세 수 $-1, a, b$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2a = -1 + b \quad \therefore b = 2a + 1 \quad \text{..... ①}$$

세 수 $a-1, \sqrt{5}, b$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(\sqrt{5})^2 = (a-1)b \quad \text{..... ②}$$

②에 ①을 대입하면

$$5 = (a-1)(2a+1), 5 = 2a^2 - a - 1$$

$$2a^2 - a - 6 = 0, (2a+3)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } a = 2$$

이때 a 는 정수이므로 $a = 2$

$a = 2$ 를 ①에 대입하면 $b = 5$

$$\therefore a + b = 2 + 5 = 7$$

답 ②

053

삼차방정식 $x^3 - kx^2 - 2x - 1 = 0$ 의 세 근을 a, ar, ar^2 으로 놓으면

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + ar + ar^2 = k \text{이므로}$$

$$a(1 + r + r^2) = k \quad \text{..... ①}$$

$$a \times ar + ar \times ar^2 + ar^2 \times a = -2 \text{이므로}$$

$$a^2 r(1 + r + r^2) = -2 \quad \text{..... ②}$$

$$a \times ar \times ar^2 = 1 \text{이므로 } (ar)^3 = 1$$

$$\therefore ar = 1 \quad \text{..... ③}$$

① ÷ ③을 하면

$$\frac{a^2 r(1 + r + r^2)}{a(1 + r + r^2)} = \frac{-2}{k}, ar = \frac{-2}{k} \quad \text{..... ④}$$

이때 ③ = ④이므로

$$1 = \frac{-2}{k} \quad \therefore k = -2$$

답 -2

054

함수 $y = x^3 - 2x^2 - k$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 서로 다른 세 점에서 만나므로 $x^3 - 2x^2 - k = x$, 즉 $x^3 - 2x^2 - x - k = 0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

삼차방정식 $x^3 - 2x^2 - x - k = 0$ 의 세 근을 a, ar, ar^2 으로 놓으면

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + ar + ar^2 = 2 \text{이므로}$$

$$a(1 + r + r^2) = 2 \quad \text{..... ①}$$

$$a \times ar + ar \times ar^2 + ar^2 \times a = -1 \text{이므로}$$

$$a^2 r(1 + r + r^2) = -1 \quad \text{..... ②}$$

$$a \times ar \times ar^2 = k \text{이므로}$$

$$(ar)^3 = k \quad \text{..... ③}$$

① ÷ ③을 하면

$$\frac{a^2 r(1 + r + r^2)}{a(1 + r + r^2)} = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore ar = -\frac{1}{2} \quad \text{..... ④}$$

③을 ④에 대입하면

$$k = (ar)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

답 $-\frac{1}{8}$

055

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하자.

$$(1) S_{10} = \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1023$$

$$(2) S_4 = \frac{27 \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^4 \right\}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{81}{4} \left(1 - \frac{1}{81}\right) = 20$$

$$(3) S_7 = 3 \times 7 = 21$$

$$\rightarrow 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

답 (1) 1023 (2) 20 (3) 21

056

(1) 첫째항이 2, 공비가 $\frac{6}{2} = 3$ 이므로 486을 제 n 항이라고 하면

$$2 \times 3^{n-1} = 486 \text{에서 } 3^{n-1} = 243 = 3^5$$

$$n - 1 = 5 \quad \therefore n = 6$$

따라서 항수가 6이므로 첫째항부터 제6항까지의 합은

$$\frac{2(3^6-1)}{3-1}=3^6-1=728$$

(2) 첫째항이 8, 공비가 $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{1}{16}$ 을 제 n 항이라고 하면

$$8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16} \text{에서 } \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$n-4=4 \quad \therefore n=8$$

따라서 항수가 8이므로 첫째항부터 제8항까지의 합은

$$\frac{8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{2}}=16\left(1-\frac{1}{256}\right)=\frac{255}{16}$$

답 (1) 728 (2) $\frac{255}{16}$

057

$S_4 - S_2 = 3a_4$ 이므로

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2) = 3a_4$$

$$a_4 + a_3 = 3a_4, \quad a_3 = 2a_4 \quad \therefore \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{2}$$

즉, 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로 $a_3 = \frac{3}{4}$ 에서

$$a_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore a_1 = \frac{3}{4} \times 2^4 = 12$$

이때 $a_2 = a_1 \times \frac{1}{2} = 12 \times \frac{1}{2} = 6$ 이므로

$$a_1 + a_2 = 12 + 6 = 18$$

답 ④

058

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_5 = 3 \text{에서 } ar^4 = 3 \quad \dots\dots\dots ㉠$$

$$a_7 = 9 \text{에서 } ar^6 = 9 \quad \dots\dots\dots ㉡$$

㉠ $\div$ ㉡을 하면

$$\frac{ar^6}{ar^4} = \frac{9}{3} \quad \therefore r^2 = 3$$

㉠에서 $a \times (r^2)^2 = 3$ 이므로

$$a \times 3^2 = 3, \quad 9a = 3$$

$$\therefore a = \frac{1}{3}$$

따라서 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{10}^2$ 은 첫째항이 $a^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$, 공비가

$r^2 = 3$ 인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합과 같으므로

$$\frac{\frac{1}{9}(3^{10}-1)}{3-1} = \frac{1}{18}(3^{10}-1)$$

답 ④

059

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 2, 공비가 4이므로

$$a_n = 2 \times 4^{n-1}$$

등비수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항이 3, 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$b_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

따라서 수열 $\{a_nb_n\}$ 의 일반항은

$$\begin{aligned} a_nb_n &= (2 \times 4^{n-1}) \times \left\{3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \\ &= 6 \times \left(4 \times \frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= 6 \times 2^{n-1} \end{aligned}$$

즉, 수열 $\{a_nb_n\}$ 은 첫째항이 6, 공비가 2인 등비수열이므로 첫째항부터 제7항까지의 합은

$$\frac{6(2^7-1)}{2-1} = 6(128-1) = 762$$

답 ③

060

등비수열 1, a_1 , a_2 , a_3 , $\dots$, a_n , 256의 공비를 r 라고 하면 첫째항이 1이고 제 $(n+2)$ 항이 256이므로

$$1 \times r^{n+1} = 256 \quad \therefore r^{n+1} = 256 \quad \dots\dots\dots ㉠$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = -86 \text{이므로}$$

$$1 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + 256 = 1 - 86 + 256 = 171$$

주어진 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{n+2} = 1 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + 256$$

$$= \frac{r^{n+2}-1}{r-1} = \frac{256r-1}{r-1} \quad (\because ㉠)$$

이때 $S_{n+2} = 171$ 이므로

$$\frac{256r-1}{r-1} = 171, \quad 256r-1 = 171(r-1)$$

$$85r = -170 \quad \therefore r = -2$$

$r = -2$ 를 ㉠에 대입하면

$$(-2)^{n+1} = 256, \quad (-2)^{n+1} = (-2)^8$$

$$n+1=8 \quad \therefore n=7$$

답 ③

061

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_3 = 10 \text{에서 } ar^2 = 10 \quad \dots\dots\dots ㉠$$

$$a_6 = 80 \text{에서 } ar^5 = 80 \quad \dots\dots\dots ㉡$$

㉠ $\div$ ㉡을 하면

$$\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{80}{10}, \quad r^3 = 8$$

$$\therefore r = 2 \quad (\because r \text{는 실수}) \quad \dots\dots\dots ㉢$$

$r = 2$ 를 ㉠에 대입하면

$$4a = 10 \quad \therefore a = \frac{5}{2}$$

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_n = \frac{\frac{5}{2}(2^n-1)}{2-1} = \frac{5}{2}(2^n-1) \quad \dots\dots\dots ㉣$$

$S_k > 900$ 에서

$$\frac{5}{2}(2^k-1) > 900$$

$$2^k-1 > 360 \quad \therefore 2^k > 361$$

이때 $2^8 = 256$, $2^9 = 512$ 이므로

$$k \geq 9$$

따라서 수열의 합이 처음으로 900보다 커지는 자연수 k 의 값은 9이다. $\dots\dots\dots$ ③

답 9

채점 기준	비율
① 등비수열의 공비를 구할 수 있다.	30 %
② 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 n 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
③ k 의 값을 구할 수 있다.	40 %

062

주어진 등비수열의 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$S_n > 0.98$ 에서

$$1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n > 0.98, \left(\frac{1}{2} \right)^n < 0.02$$

$$\therefore 2^n > 50$$

$$\text{이때 } 2^5 = 32, 2^6 = 64 \text{이므로}$$

$$n \geq 6$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 6이다.

답 ②

063

주어진 등비수열의 첫째항은 x , 공비는 x 이다.

이때 $x > 1$ 에서 $x \neq 1$ 이므로 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\frac{x(x^n - 1)}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}$$

답 ④

064

주어진 식은 첫째항이 x , 공비가 $x+1$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 $(n+1)$ 항까지의 합이다.

이때 $x > 0$ 에서 $x \neq 0$ 이므로 $\rightarrow x+1 \neq 1$

$$x + x(x+1) + x(x+1)^2 + \cdots + x(x+1)^n$$

$$= \frac{x\{(x+1)^{n+1} - 1\}}{(x+1) - 1}$$

$$= (x+1)^{n+1} - 1$$

답 ②

065

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라고 하면

$$a_n = a \times (-2)^{n-1}$$

$$a_1 + a_3 + a_5 = 84 \text{에서}$$

$$a + a \times (-2)^2 + a \times (-2)^4 = 84$$

$$a + 4a + 16a = 84, 21a = 84$$

$$\therefore a = 4$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 4, 공비가 -2 이므로 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{4\{1 - (-2)^{10}\}}{1 - (-2)} = \frac{4}{3} \times (1 - 1024) = -1364$$

답 ①

066

주어진 등비수열의 첫째항을 a 라고 하면 첫째항부터 제5항까지의 합이 62이므로

$$\frac{a\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 62, \frac{\frac{31}{32}a}{\frac{1}{2}} = 62$$

$$\frac{31}{16}a = 62 \quad \therefore a = 32$$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{32\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 64\left(1 - \frac{1}{1024}\right) = \frac{1023}{16}$$

답 ①

067

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r ($r > 0$)라고 하면

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_8 = 5 \text{에서 } \frac{a(r^8 - 1)}{r - 1} = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

한편, $a_9 + a_{10} + \cdots + a_{16} = 80$ 이므로

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{16} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_8) + (a_9 + a_{10} + \cdots + a_{16}) \\ = 5 + 80 = 85$$

또,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{16} = \frac{a(r^{16} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^8 + 1)(r^8 - 1)}{r - 1}$$

이므로

$$\frac{a(r^8 + 1)(r^8 - 1)}{r - 1} = 85 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8} \div \textcircled{7}$ 을 하면

$$r^8 + 1 = 17, r^8 = 16 \quad \therefore r = \sqrt[4]{2} \quad (\because r > 0)$$

답 ②

068

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$S_{12} = 8S_6 \text{에서 } \frac{a(r^{12} - 1)}{r - 1} = 8 \times \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1}$$

$$\frac{a(r^6 + 1)(r^6 - 1)}{r - 1} = 8 \times \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1}$$

$$r^6 + 1 = 8 \quad \therefore r^6 = 7$$

$$\therefore S_{24} = \frac{a(r^{24} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^{12} + 1)(r^{12} - 1)}{r - 1}$$

$$= \frac{a(r^{12} + 1)(r^6 + 1)(r^6 - 1)}{r - 1}$$

$$= \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} \times (r^{12} + 1)(r^6 + 1) \rightarrow (r^6)^2$$

$$= S_6 \times (7^2 + 1) \times (7 + 1) = 400S_6$$

따라서 구하는 k 의 값은 400이다.

답 ③

069

$S_n = n^2 - n$ 에서 수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여

$$a_7 + a_8 + a_9 = S_9 - S_6 = (9^2 - 9) - (6^2 - 6) \\ = 72 - 30 = 42$$

답 ⑤

|다른 풀이|

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 - n) - \{(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= (n^2 - n) - (n^2 - 3n + 2) \\ &= 2n - 2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 0$$

이때 $a_1 = 0$ 은 ①에 $n = 1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$\begin{aligned} a_n &= 2n - 2 \\ \therefore a_7 + a_8 + a_9 &\rightarrow \text{첫째항이 0, 공차가 2인 등차수열} \\ &= (2 \times 7 - 2) + (2 \times 8 - 2) + (2 \times 9 - 2) \\ &= 12 + 14 + 16 = 42 \end{aligned}$$

070

$S_n = 2^{n+1} - 2$ 에서

$$\begin{aligned} a_3 + a_4 &= S_4 - S_2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ &= (2^5 - 2) - (2^3 - 2) \\ &= 30 - 6 = 24 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

답 24

채점 기준	비율
① $a_3 + a_4$ 를 S_n 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	70 %
② $a_3 + a_4$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

|다른 풀이|

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2^{n+1} - 2) - (2^n - 2) \\ &= 2^{n+1} - 2^n \\ &= 2^n(2 - 1) = 2^n \end{aligned} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2^{1+1} - 2 = 2$$

이때 $a_1 = 2$ 는 ①에 $n = 1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$\begin{aligned} a_n &= 2^n \\ \therefore a_3 + a_4 &= 2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24 \end{aligned}$$

071

$S_n = 3n^2 - 5n + k - 1$ 에서

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (3n^2 - 5n + k - 1) - \{3(n-1)^2 - 5(n-1) + k - 1\} \\ &= (3n^2 - 5n + k - 1) - (3n^2 - 11n + k + 7) \\ &= 6n - 8 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 3 - 5 + k - 1 = k - 3 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등차수열을 이루려면 ①에 $n = 1$ 을 대입하여 얻은 값과 ②이 같아야 하므로

$$-2 = k - 3 \quad \therefore k = 1$$

답 ①

|다른 풀이|

수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등차수열을 이루려면

$S_n = An^2 + Bn + C$ 의 꼴일 때, $C = 0$ 이어야 한다.

즉, $k - 1 = 0$ 이어야 하므로

$$k = 1$$

072

$S_n = 4^n + k$ 에서

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (4^n + k) - (4^{n-1} + k) \\ &= 4 \times 4^{n-1} - 4^{n-1} \\ &= 3 \times 4^{n-1} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 4 + k \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ①에 $n = 1$ 을 대입하여 얻은 값과 ②이 같아야 하므로

$$3 = 4 + k \quad \therefore k = -1$$

답 -1

|다른 풀이|

수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루려면

$S_n = Ar^n + B$ 의 꼴일 때, $A + B = 0$ 이어야 한다.

즉, $S_n = 1 \times 4^n + k$ 에서 $1 + k = 0$ 이어야 하므로

$$k = -1$$

073

$S_n = 2n^2 - 3n$ 에서

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 - 3n) - \{2(n-1)^2 - 3(n-1)\} \\ &= (2n^2 - 3n) - (2n^2 - 7n + 5) \\ &= 4n - 5 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2 - 3 = -1$$

이때 $a_1 = -1$ 은 ①에 $n = 1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n = 4n - 5$$

$$a_n > 100 \text{에서 } 4n - 5 > 100$$

$$4n > 105 \quad \therefore n > 26.25$$

따라서 $a_n > 100$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 27이다.

답 ②

실력을 높이는 연습 문제

본문 136쪽

01

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 -5 이므로

$$a_2 - a_1 = -5$$

$$a_4 - a_3 = -5$$

$$a_6 - a_5 = -5$$

$\vdots$

$$a_{100} - a_{99} = -5$$

$$\begin{aligned}
&\therefore a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots + a_{99} - a_{100} \\
&= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots + (a_{99} - a_{100}) \\
&= -(a_2 - a_1) - (a_4 - a_3) - (a_6 - a_5) - \cdots - (a_{100} - a_{99}) \\
&= -(-5) - (-5) - (-5) - \cdots - (-5) \\
&= \underbrace{5 + 5 + 5 + \cdots + 5}_{50\text{개}} \\
&= 5 \times 50 = 250
\end{aligned}$$

답 ⑤

02

$$\begin{aligned}
a_7 - a_3 &= 4 \times (-3) = -12 \text{ 이므로} \\
a_7 &= a_3 - 12 \quad \rightarrow \text{공차를 } d \text{ 라고 하면 } a_7 - a_3 = 4d
\end{aligned}$$

위의 식을 $a_3 a_7 = 64$ 에 대입하면

$$\begin{aligned}
a_3(a_3 - 12) &= 64 \\
a_3^2 - 12a_3 - 64 &= 0 \\
(a_3 + 4)(a_3 - 16) &= 0 \\
\therefore a_3 &= -4 \text{ 또는 } a_3 = 16
\end{aligned}$$

(i) $a_3 = -4$ 일 때

$$\begin{aligned}
a_8 - a_3 &= 5 \times (-3) = -15 \text{에서} \\
a_8 &= a_3 - 15 = -4 - 15 = -19 \\
\text{이것은 } a_8 > 0 \text{ 이라는 조건을 만족시키지 않는다.}
\end{aligned}$$

(ii) $a_3 = 16$ 일 때

$$\begin{aligned}
a_8 - a_3 &= 5 \times (-3) = -15 \text{에서} \\
a_8 &= a_3 - 15 = 16 - 15 = 1
\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $a_3 = 16$

이때 $a_3 - a_2 = -3$ 이므로

$$a_2 = a_3 + 3 = 16 + 3 = 19$$

답 ③

03

-11과 2 사이에 n 개의 수를 넣어서 만든 등차수열은 첫째항이 -11, 제 $(n+2)$ 항이 2이므로

$$-11 + \{(n+2) - 1\} \times \frac{1}{3} = 2$$

$$\frac{1}{3}(n+1) = 13, n+1 = 39$$

$$\therefore n = 38$$

답 38

04

다항식 $p(x)$ 를 $x-1$, x , $x+2$ 로 각각 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여 $p(1)$, $p(0)$, $p(-2)$ 이다.

이때 세 수가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\begin{aligned}
2p(0) &= p(1) + p(-2) \\
2b &= (1+a+b) + (4-2a+b) \\
2b &= -a + 2b + 5 \\
\therefore a &= 5
\end{aligned}$$

또, $p(x)$ 가 $x-2$ 로 나누어떨어지므로 인수 정리에 의하여

$$\begin{aligned}
p(2) &= 4 + 2a + b = 0 \\
\therefore b &= -2a - 4 = -2 \times 5 - 4 = -14 \\
\therefore a + b &= 5 + (-14) = -9
\end{aligned}$$

답 ①

풍뎡 개념 CHECK

나머지 정리와 인수 정리_高 公通 수학 1

(1) 나머지 정리

다항식 $P(x)$ 를 일차식 $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지는 $P(a)$ 이다.

(2) 인수 정리

① $P(a) = 0$ 이면 다항식 $P(x)$ 는 일차식 $x-a$ 로 나누어떨어진다.

② 다항식 $P(x)$ 가 일차식 $x-a$ 로 나누어떨어지면 $P(a) = 0$ 이다.

05

문제 접근하기

등차중항과 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식을 세운다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 2$$

이때 $\frac{1}{\alpha^3}, k, \frac{1}{\beta^3}$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\begin{aligned}
2k &= \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^3 \beta^3} \\
&= \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha\beta)^3} \\
&= \frac{4^3 - 3 \times 2 \times 4}{2^3} \\
&= \frac{40}{8} = 5
\end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{5}{2}$$

답 ①

풍뎡 개념 CHECK

곱셈 공식의 변형_高 公通 수학 1

$$(1) a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$(2) a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

06

네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$ 로 놓자.

네 수의 합이 8이므로 $\rightarrow$ 공차는 $2d$

$$(a-3d) + (a-d) + (a+d) + (a+3d) = 8$$

$$4a = 8 \quad \therefore a = 2$$

또, 가장 작은 수와 가장 큰 수의 곱이 -221이므로

$$(a-3d)(a+3d) = -221, a^2 - 9d^2 = -221$$

이때 $a=2$ 이므로

$$4 - 9d^2 = -221, 9d^2 = 225$$

$$d^2 = 25 \quad \therefore d = -5 \text{ 또는 } d = 5$$

따라서 네 수를 작은 수부터 차례대로 나열하면 -13, -3, 7, 17
이므로 가장 큰 수는 17이다.

답 17

07

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_n = \frac{n\{2 \times 36 + (n-1) \times (-4)\}}{2} = -2n^2 + 38n$$

$$S_n < 0 \text{에서 } -2n^2 + 38n < 0, 2n(n-19) > 0$$

이때 n 은 자연수이므로 $n > 0$
 즉, $n - 19 > 0$ 이므로 $n > 19$
 따라서 S_n 이 처음으로 음수가 되는 자연수 n 의 값은 20이다.

답 ②

08

주어진 수열은 첫째항이 -7 , 끝항이 31 , 항수가 $n+2$ 인 등차수열
 이므로 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{n+2} = \frac{(n+2)(-7+31)}{2} = 264$$

$$12(n+2) = 264, n+2=22 \quad \therefore n=20$$

답 ③

09

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의
 합을 S_n 이라고 하자.

첫째항부터 제5항까지의 합이 60이므로

$$S_5 = \frac{5(2a+4d)}{2} = 60 \quad \therefore a+2d=12 \quad \text{..... ㉠}$$

제6항부터 제10항까지의 합이 185이므로

$$S_{10} - S_5 = \frac{10(2a+9d)}{2} - 60 = 185$$

$$\therefore 2a+9d=49 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2, d=5$

따라서 제11항부터 제15항까지의 합은

$$S_{15} - S_{10} = \frac{15(2 \times 2 + 14 \times 5)}{2} - (60 + 185) \\ = 555 - 245 = 310$$

답 ⑤

10

모든 자연수 n 에 대하여 $S_n \leq k$ 이어야 하므로 이를 만족시키는 k
 의 최솟값은 S_n 의 최댓값이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 45, 공차가 -4 이므로

$$a_n = 45 + (n-1) \times (-4) = -4n + 49$$

이때 $a_n < 0$ 에서 $-4n + 49 < 0$

$$\therefore n > 12.25$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 제13항부터 음수이므로 첫째항부터 제12항까지의
 합이 최대가 된다.

따라서 S_n 의 최댓값은

$$S_{12} = \frac{12\{2 \times 45 + 11 \times (-4)\}}{2} = 276$$

따라서 k 의 최솟값은 276이다.

답 ①

11

문제 접근하기

9로 나누어떨어지는 수는 9의 배수이므로 나열하면 공차가 9인 등차수
 열이다. 또, 15로 나누어떨어지는 수는 15의 배수이므로 나열하면 공차
 가 15인 등차수열이다. 이때 20과 200 사이의 자연수로 만들어지는 등
 차수열의 항수가 몇인지 파악하는 데에 주의해야 한다.

20과 200 사이의 자연수 중에서 9로 나누어떨어지는 수를 작은 수
 부터 차례대로 나열하면

27, 36, 45, ..., 198

이때 $27=9 \times 3, 198=9 \times 22$ 이므로 항수는 $22-3+1=20$ 이다.

따라서 그 합은 첫째항이 27, 끝항이 198, 항수가 20인 등차수열의
 합과 같으므로

$$\frac{20(27+198)}{2} = 2250 \quad \text{..... ㉠}$$

또, 20과 200 사이의 자연수 중에서 15로 나누어떨어지는 수를 작
 은 수부터 차례대로 나열하면

30, 45, 60, ..., 195

이때 $30=15 \times 2, 195=15 \times 13$ 이므로 항수는 $13-2+1=12$ 이다.

따라서 그 합은 첫째항이 30, 끝항이 195, 항수가 12인 등차수열의
 합과 같으므로

$$\frac{12(30+195)}{2} = 1350 \quad \text{..... ㉡}$$

한편, 20과 200 사이의 자연수 중에서 45로 나누어떨어지는 수를
 작은 수부터 차례대로 나열하면

45, 90, 135, 180

이므로 그 합은

$$45+90+135+180=450 \quad \text{..... ㉢}$$

따라서 구하는 수의 총합은

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} - \textcircled{3} = 2250 + 1350 - 450 = 3150$$

답 3150

12

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라고 하면 $a_4=6$ 이므로

$$\sqrt[4]{6} \times r^3 = 6, r^3 = \sqrt[4]{6^3} \quad \therefore r = \sqrt[4]{6} \quad (\because r \text{는 실수})$$

$$\therefore a_n = \sqrt[4]{6} \times (\sqrt[4]{6})^{n-1} = (\sqrt[4]{6})^n$$

즉, 등비수열 $\{a_n\}$ 의 항은 n 이 4의 배수일 때 정수가 된다.

따라서 제4항 이후 처음으로 정수가 되는 항은 제8항이다.

답 ③

13

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a \neq 0$)라고 하면 공비가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{a_9 + a_{11} + a_{13} + a_{15} + a_{17}}{a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9} \\ = \frac{a \times (\sqrt{2})^8 + a \times (\sqrt{2})^{10} + a \times (\sqrt{2})^{12} + a \times (\sqrt{2})^{14} + a \times (\sqrt{2})^{16}}{a + a \times (\sqrt{2})^2 + a \times (\sqrt{2})^4 + a \times (\sqrt{2})^6 + a \times (\sqrt{2})^8} \\ = \frac{(\sqrt{2})^8 \{a + a \times (\sqrt{2})^2 + a \times (\sqrt{2})^4 + a \times (\sqrt{2})^6 + a \times (\sqrt{2})^8\}}{a + a \times (\sqrt{2})^2 + a \times (\sqrt{2})^4 + a \times (\sqrt{2})^6 + a \times (\sqrt{2})^8} \\ = (\sqrt{2})^8 = 2^4 = 16$$

답 ④

14

$$a_2 = b_2 \text{에서 } a_1 + 3 = b_1 \times 2$$

$$\therefore a_1 - 2b_1 = -3 \quad \text{..... ㉠}$$

$$a_4 = b_4 \text{에서 } a_1 + 3 \times 3 = b_1 \times 2^3$$

$$\therefore a_1 - 8b_1 = -9 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_1 = -1, b_1 = 1$

$$\therefore a_1 + b_1 = -1 + 1 = 0$$

답 ③

15

7, a , b , c , d , 224는 첫째항이 7, 제6항이 224인 등비수열이다.

이 등비수열의 공비를 r 라고 하면

$$7r^5=224, r^5=32 \quad \therefore r=2 \quad (\because r \text{는 실수})$$

따라서 $a=7 \times 2$, $d=7 \times 2^4$ 이므로

$$d-a=7 \times 2^4-7 \times 2=112-14=98$$

답 ②

16

세 수 5, a , b 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a^2=5b$$

$$\text{또, } \log_a 5b+5^{\log_5 b}=47 \text{이므로}$$

$$\log_a a^2+b^{\log_5 5}=47, 2+b=47$$

$$\therefore b=45$$

$b=45$ 를 ①에 대입하면

$$a^2=5b=5 \times 45=225$$

$$\therefore a=-15 \text{ 또는 } a=15$$

이때 a 는 로그의 밑이므로 $a>0$, $a \neq 1$

$$\therefore a=15$$

$$\therefore a+b=15+45=60$$

..... ①

답 ④

17

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=k, \alpha\beta=20$$

$\beta-\alpha$ 가 α 와 β 의 등비중항이므로

$$(\beta-\alpha)^2=\alpha\beta$$

이때 $(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta$ 이므로

$$\alpha\beta=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta, (\beta+\alpha)^2=5\alpha\beta$$

$$\therefore k^2=5 \times 20=100$$

$$\therefore k=10 \quad (\because k>0)$$

답 10

18

세 수 a , b , c 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 공비를 r 라고 하면
 $a+b+c=14$ 에서

$$a+ar+ar^2=14 \quad \therefore a(1+r+r^2)=14 \quad \text{..... ①}$$

$ab+bc+ca=-84$ 에서

$$a \times ar+ar \times ar^2+ar^2 \times a=-84$$

$$a^2r+a^2r^3+a^2r^2=-84 \quad \therefore a^2r(1+r+r^2)=-84 \quad \text{..... ②}$$

$$\text{②} \div \text{①} \text{을 하면 } \frac{a^2r(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)}=\frac{-84}{14}$$

$$\therefore ar=-6$$

$$\therefore abc=a \times ar \times ar^2=(ar)^3$$

$$=(-6)^3=-216$$

답 ①

19

수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이므로

$$a_n=2+(n-1) \times 2=2n$$

$$\therefore 2^{a_n}=2^{2n}=4^n$$

즉, 수열 $\{2^{a_n}\}$ 은 첫째항이 4, 공비가 4인 등비수열이다.

따라서 수열 $\{2^{a_n}\}$ 의 첫째항부터 제5항까지의 합은

$$\frac{4(4^5-1)}{4-1}=\frac{4 \times 1023}{3}=1364$$

답 ⑤

20

주어진 등비수열의 첫째항은 $x+3$, 공비는 $(x+2)^2$ 이다.

이때 $x>-1$ 에서 $x \neq -1$ 이므로 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\begin{aligned} \frac{(x+3)[\{(x+2)^2\}^n-1]}{(x+2)^2-1} &= \frac{(x+3)\{(x+2)^{2n}-1\}}{x^2+4x+3} \\ &= \frac{(x+3)\{(x+2)^{2n}-1\}}{(x+1)(x+3)} \\ &= \frac{(x+2)^{2n}-1}{x+1} \end{aligned}$$

답 ①

21

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{a(r^3-1)}{r-1} = \frac{a(r-1)(r^2+r+1)}{r-1} \\ &= a(r^2+r+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_6 &= \frac{a(r^6-1)}{r-1} = \frac{a(r^3+1)(r^3-1)}{r-1} \\ &= \frac{a(r^3+1)(r-1)(r^2+r+1)}{r-1} \\ &= a(r^3+1)(r^2+r+1) \end{aligned}$$

$$\frac{S_6}{S_3}=8 \text{이므로}$$

$$\frac{a(r^3+1)(r^2+r+1)}{a(r^2+r+1)}=8$$

$$r^3+1=8 \quad \therefore r^3=7$$

$$\therefore \frac{a_6}{a_3}=\frac{ar^5}{ar^2}=r^3=7$$

답 ③

22

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$S_{10}=2 \text{에서 } \frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=2 \quad \text{..... ①}$$

$$S_{30}=86 \text{에서 } \frac{a(r^{30}-1)}{r-1}=86$$

$$\frac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1}=86$$

$$\therefore \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} \times (r^{20}+r^{10}+1)=86 \quad \text{..... ②}$$

$$\text{②} \div \text{①} \text{을 하면 } r^{20}+r^{10}+1=43$$

$$r^{20}+r^{10}-42=0, (r^{10}-6)(r^{10}+7)=0$$

$$\therefore r^{10}=6 \quad (\because r^{10}>0) \quad \rightarrow \text{모든 항이 실수이므로 } r \text{도 실수이다.}$$

$$r \text{가 실수이므로 } r^{10}>0$$

$$\therefore S_{20}=\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{10}+1)(r^{10}-1)}{r-1}$$

$$=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1} \times (r^{10}+1)$$

$$=S_{10} \times (r^{10}+1)$$

$$=2 \times (6+1)=14$$

답 ④

문제 접근하기

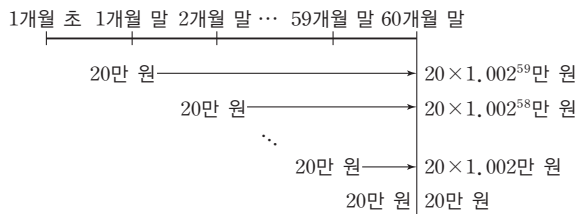
매월 말 a 원씩 월이율 r 인 복리로 n 개월 동안 적립했을 때, n 개월 말의 원리합계는

$$a + a(1+r) + a(1+r)^2 + \cdots + a(1+r)^{n-1}$$

$$= \frac{a\{(1+r)^n - 1\}}{(1+r) - 1} = \frac{a\{(1+r)^n - 1\}}{r} \text{ (원)}$$

이다. 이때 월초에 적립했는지, 월말에 적립했는지에 따라 이자가 붙는 기간이 다르므로 이 점에 유의한다.

5년은 60개월이므로 60개월 후의 적립금의 원리합계를 S 라고 하면



$$S = 20 \times 1,002^{59} + 20 \times 1,002^{58} + 20 \times 1,002^{57} + \cdots + 20 \times 1,002 + 20$$

→ 첫째항이 20, 공비가 1.002, 항수가 60인 등비수열의 합

$$= \frac{20(1,002^{60} - 1)}{1,002 - 1} = 10000(1,002^{60} - 1)$$

$$= 10000(1,13 - 1) = 10000 \times 0,13$$

$$= 1300 \text{ (만 원)}$$

답 ④

참고

매월 초 a 원씩 월이율 r 인 복리로 n 개월 동안 적립했을 때, n 개월 말의 원리합계는

$$a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3 + \cdots + a(1+r)^n$$

$$= \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{(1+r) - 1} = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r} \text{ (원)}$$

24

$$S_{10} = 990 \text{ 이므로}$$

$$100k - 10 = 990, 100k = 1000$$

$$\therefore k = 10$$

따라서 $S_n = 10n^2 - n$ 에서

$n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (10n^2 - n) - \{10(n-1)^2 - (n-1)\}$$

$$= (10n^2 - n) - (10n^2 - 21n + 11)$$

$$= 20n - 11 \quad \cdots \cdots ㉠$$

$n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 10 \times 1^2 - 1 = 9$$

이때 $a_1 = 9$ 는 ㉠에 $n = 1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n = 20n - 11$$

$$\therefore a_4 = 20 \times 4 - 11 = 80 - 11 = 69$$

답 69

|다른 풀이|

$$S_n = 10n^2 - n \text{ 이므로}$$

$$a_4 = S_4 - S_3 = (10 \times 4^2 - 4) - (10 \times 3^2 - 3)$$

$$= 156 - 87 = 69$$



여러 가지 수열의 합

기본을 다지는 유형

본문 141쪽

001

(1) $k-1$ 의 k 에 1부터 5까지의 수를 대입하여 더한 것이므로

$$\sum_{k=1}^5 (k-1) = 0 + 1 + 2 + 3 + 4$$

(2) i^2 의 i 에 1부터 8까지의 수를 대입하여 더한 것이므로

$$\sum_{i=1}^8 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 8^2$$

(3) 6을 3개 더한 것이므로

$$\sum_{j=1}^3 6 = 6 + 6 + 6$$

답 (1) $0 + 1 + 2 + 3 + 4$ (2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 8^2$ (3) $6 + 6 + 6$

002

$$\sum_{k=1}^5 2^{k+1} = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 4 + 8 + 16 + 32 + 64 \text{ 이므로}$$

$$a = 8, b = 32 (\because b > a)$$

$$\therefore a + b = 8 + 32 = 40$$

답 40

003

$$\textcircled{3} 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n = \sum_{k=1}^{n+1} 3^{k-1}$$

따라서 옳지 않은 것은 ㉢이다.

답 ㉢

004

$$\sum_{k=1}^{15} (2^{k+1} \times 3^k) = 2^2 \times 3 + 2^3 \times 3^2 + 2^4 \times 3^3 + \cdots + 2^{16} \times 3^{15}$$

따라서 주어진 식은 첫째항이 $2^2 \times 3 = 12$, 공비가 $2 \times 3 = 6$ 인 등비수열의 첫째항부터 제15항까지의 합이다.

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \frac{12(6^{15} - 1)}{6 - 1} = \frac{12}{5}(6^{15} - 1)$$

답 ②

005

$$(1) \sum_{k=1}^5 (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k = -2 + 4 = 2$$

$$(2) \sum_{k=1}^5 (a_k - 2b_k) = \sum_{k=1}^5 a_k - 2 \sum_{k=1}^5 b_k = -2 - 2 \times 4 = -10$$

답 (1) 2 (2) -10

006

$$\sum_{k=1}^9 (a_k + 1) = (a_1 + 1) + (a_2 + 1) + \cdots + (a_9 + 1)$$

$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_9 + 9$$

이므로 $\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^9 (a_k + 1)$ 에서

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = a_1 + a_2 + \cdots + a_9 + 9$$

$$\therefore a_{10} = 9$$

답 ④

007

$$\sum_{k=1}^5 (3a_k + 5) = 55 \text{에서 } 3 \sum_{k=1}^5 a_k + 5 \times 5 = 55$$

$$3 \sum_{k=1}^5 a_k = 30 \quad \therefore \sum_{k=1}^5 a_k = 10$$

$$\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k) = 32 \text{에서 } \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k = 32$$

$$\therefore \sum_{k=1}^5 b_k = 32 - \sum_{k=1}^5 a_k = 32 - 10 = 22$$

답 22

008

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 + b_k^2) + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k b_k$$

$$= 10 + 2 \times 2 = 14$$

답 14

009

$$\sum_{k=1}^5 (a_k - p)^2 = \sum_{k=1}^5 (a_k^2 - 2pa_k + p^2)$$

$$= \sum_{k=1}^5 a_k^2 - 2p \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 p^2$$

$$= 15 - 2p \times 5 + 5p^2$$

$$= 5p^2 - 10p + 15$$

즉, $5p^2 - 10p + 15 = 90$ 이므로

$$5p^2 - 10p - 75 = 0, \quad p^2 - 2p - 15 = 0$$

$$(p+3)(p-5) = 0$$

$$\therefore p = -3 \text{ 또는 } p = 5$$

따라서 구하는 모든 실수 p 의 값의 합은

$$-3 + 5 = 2$$

답 ②

010

$$\sum_{k=1}^n (a_k + 3)^2 = \sum_{k=1}^n (a_k^2 + 6a_k + 9)$$

$$= \sum_{k=1}^n a_k^2 + 6 \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n 9 \quad \text{①}$$

$$= 5 + 6 \times 3 + 9n$$

$$= 9n + 23$$

즉, $9n + 23 = 59$ 이므로

$$9n = 36 \quad \therefore n = 4 \quad \text{②}$$

답 4

채점 기준	비율
① Σ 의 성질을 이용하여 $\sum_{k=1}^n (a_k + 3)^2$ 을 전개하여 나타낼 수 있다.	50 %
② n 의 값을 구할 수 있다.	50 %

011

$$\sum_{k=1}^n (k^2 + 1) - \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - 2) = \left(\sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n 1 \right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} 2 \right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \right) + \sum_{k=1}^n 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2$$

$$= n^2 + n + 2(n-1)$$

$$= n^2 + 3n - 2$$

즉, $n^2 + 3n - 2 = 26$ 이므로

$$n^2 + 3n - 28 = 0, \quad (n+7)(n-4) = 0$$

$$\therefore n = -7 \text{ 또는 } n = 4$$

이때 n 은 자연수이므로

$$n = 4$$

답 ②

012

$$\sum_{k=1}^{50} \frac{5^k - 2^k}{4^k} = \sum_{k=1}^{50} \left(\frac{5}{4} \right)^k - \sum_{k=1}^{50} \left(\frac{2}{4} \right)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{50} \left(\frac{5}{4} \right)^k - \sum_{k=1}^{50} \left(\frac{1}{2} \right)^k$$

$$= \frac{\frac{5}{4} \left[\left(\frac{5}{4} \right)^{50} - 1 \right]}{\frac{5}{4} - 1} - \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{50} \right]}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 5 \left[\left(\frac{5}{4} \right)^{50} - 1 \right] - \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{50} \right]$$

$$= 5 \times \left(\frac{5}{4} \right)^{50} + \left(\frac{1}{2} \right)^{50} - 6$$

따라서 $a = 5, b = 1, c = -6$ 이므로

$$a + b + c = 5 + 1 + (-6) = 0$$

답 ③

013

$$(1) \sum_{k=1}^{10} k(k-1) = \sum_{k=1}^{10} (k^2 - k)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k$$

$$= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - \frac{10 \times 11}{2}$$

$$= 385 - 55 = 330$$

$$(2) \sum_{k=1}^{10} (k-1)(k+3) = \sum_{k=1}^{10} (k^2 + 2k - 3)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 3$$

$$= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 2 \times \frac{10 \times 11}{2} - 3 \times 10$$

$$= 385 + 110 - 30 = 465$$

답 (1) 330 (2) 465

014

$$\sum_{k=1}^8 (4k + a) = 4 \sum_{k=1}^8 k + \sum_{k=1}^8 a$$

$$= 4 \times \frac{8 \times 9}{2} + 8a$$

$$= 144 + 8a$$

즉, $144 + 8a = 168$ 이므로

$$8a = 24 \quad \therefore a = 3$$

답 ①

015

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{10} (k^2 - k + 1) + \sum_{i=1}^{10} (i^2 + i - 1) \\
 &= \sum_{k=1}^{10} (k^2 - k + 1) + \sum_{k=1}^{10} (k^2 + k - 1) \\
 &= \sum_{k=1}^{10} \{ (k^2 - k + 1) + (k^2 + k - 1) \} \\
 &= \sum_{k=1}^{10} 2k^2 \\
 &= 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} \\
 &= 770
 \end{aligned}$$

답 ①

016

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^4 \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{1 + 2 + 3 + \dots + n} &= \sum_{n=1}^4 \frac{\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \sum_{n=1}^4 \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^4 (n^2 + n) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^4 n^2 + \sum_{n=1}^4 n \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{4 \times 5 \times 9}{6} + \frac{4 \times 5}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (30 + 10) = 20
 \end{aligned}$$

답 ②

017

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{3}x + 2 \text{ 이므로} \\
 f(3k) &= \frac{1}{3} \times 3k + 2 = k + 2 \\
 f(6k) &= \frac{1}{3} \times 6k + 2 = 2k + 2 \quad \dots\dots\dots ① \\
 \therefore \sum_{k=1}^9 \{ f(3k)f(6k) \} &= \sum_{k=1}^9 (k+2)(2k+2) \\
 &= \sum_{k=1}^9 (2k^2 + 6k + 4) \\
 &= 2 \sum_{k=1}^9 k^2 + 6 \sum_{k=1}^9 k + \sum_{k=1}^9 4 \quad \dots\dots\dots ② \\
 &= 2 \times \frac{9 \times 10 \times 19}{6} + 6 \times \frac{9 \times 10}{2} + 4 \times 9 \\
 &= 570 + 270 + 36 \\
 &= 876 \quad \dots\dots\dots ③
 \end{aligned}$$

답 876

채점 기준	비율
① $f(3k), f(6k)$ 를 k 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
② ②의 성질을 이용하여 주어진 식을 정리할 수 있다.	40 %
③ 자연수의 거듭제곱의 합을 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

018

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=5}^{10} k^2 &= \sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^4 k^2 \\
 &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - \frac{4 \times 5 \times 9}{6} \\
 &= 385 - 30 = 355
 \end{aligned}$$

답 ③

019

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^6 (k+1)^2 - \sum_{k=1}^5 (k-1)^2 \\
 &= \left\{ \sum_{k=1}^5 (k+1)^2 + \underbrace{(6+1)^2}_{\rightarrow k=6일 때의 (k+1)^2의 값} \right\} - \sum_{k=1}^5 (k-1)^2 \\
 &= \sum_{k=1}^5 \{ (k+1)^2 - (k-1)^2 \} + (6+1)^2 \\
 &= \sum_{k=1}^5 4k + 7^2 \\
 &= 4 \sum_{k=1}^5 k + 49 \\
 &= 4 \times \frac{5 \times 6}{2} + 49 \\
 &= 60 + 49 = 109
 \end{aligned}$$

답 109

[다른 풀이]

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^6 (k+1)^2 - \sum_{k=1}^5 (k-1)^2 \\
 &= (2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2) - (0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) \\
 &= 5^2 + 6^2 + 7^2 - 1^2 \\
 &= 25 + 36 + 49 - 1 = 109
 \end{aligned}$$

020

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^m a_{k+1} &= \sum_{k=2}^m \{ (k+1) - 1 \} \\
 &= \sum_{k=2}^m k = \sum_{k=1}^m k - 1 \\
 &= \frac{m(m+1)}{2} - 1 \quad \rightarrow k=1일 때의 k의 값 \\
 \text{즉, } \frac{m(m+1)}{2} - 1 &= 20 \text{ 이므로} \\
 \frac{m(m+1)}{2} &= 21, \quad m(m+1) = 42 \\
 \text{이때 } m &\text{은 자연수이고 } 6 \times 7 = 42 \text{ 이므로} \\
 m &= 6
 \end{aligned}$$

답 ①

021

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^6 \left(\sum_{k=1}^6 ki \right) &= \sum_{i=1}^6 \left(i \sum_{k=1}^6 k \right) \\
 &= \sum_{i=1}^6 \left(i \times \frac{6 \times 7}{2} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^6 21i = 21 \sum_{i=1}^6 i \\
 &= 21 \times \frac{6 \times 7}{2} = 21^2
 \end{aligned}$$

답 ②

022

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^4 \left\{ \sum_{j=1}^i \left(\sum_{k=1}^j 3 \right) \right\} &= \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^i 3j \right) = \sum_{i=1}^4 \left\{ 3 \times \frac{i(i+1)}{2} \right\} \\
 &= \frac{3}{2} \sum_{i=1}^4 (i^2 + i) = \frac{3}{2} \left(\sum_{i=1}^4 i^2 + \sum_{i=1}^4 i \right) \\
 &= \frac{3}{2} \left(\frac{4 \times 5 \times 9}{6} + \frac{4 \times 5}{2} \right) \\
 &= \frac{3}{2} (30 + 10) = \frac{3}{2} \times 40 = 60
 \end{aligned}$$

답 ③

023

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^l (k-l) \right\} &= \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^l k - \sum_{k=1}^l l \right) = \sum_{l=1}^n \left\{ \frac{l(l+1)}{2} - l^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n (-l^2 + l) = \frac{1}{2} \left(-\sum_{l=1}^n l^2 + \sum_{l=1}^n l \right) \cdots \cdots ① \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(n-1)}{3} \\ &= -\frac{n(n+1)(n-1)}{6} \cdots \cdots ②\end{aligned}$$

$$\text{즉, } -\frac{n(n+1)(n-1)}{6} = -20 \text{ 이므로}$$

$$(n-1)n(n+1) = 120$$

이때 n 은 자연수이고 $120 = 4 \times 5 \times 6$ 이므로

$$n = 5 \cdots \cdots ③$$

답 5

채점 기준	비율
① 주어진 식에서 변수와 상수를 구분하여 정리할 수 있다.	30 %
② 주어진 식을 n 에 대한 식으로 정리할 수 있다.	50 %
③ n 의 값을 구할 수 있다.	20 %

024

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^5 \left\{ \sum_{j=1}^i (i+j+1) \right\} &= \sum_{i=1}^5 \left(\sum_{j=1}^i i + \sum_{j=1}^i j + \sum_{j=1}^i 1 \right) \\ &= \sum_{i=1}^5 \left\{ i^2 + \frac{i(i+1)}{2} + i \right\} \\ &= \frac{3}{2} \sum_{i=1}^5 (i^2 + i) \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{5 \times 6 \times 11}{6} + \frac{5 \times 6}{2} \right) \\ &= \frac{3}{2} (55 + 15) = \frac{3}{2} \times 70 = 105\end{aligned}$$

답 ④

025

(1) 수열 $1 \times 3, 3 \times 5, 5 \times 7, \dots, 15 \times 17$ 의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$a_k = (2k-1)(2k+1) = 4k^2 - 1$$

구하는 합은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제8항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + \dots + 15 \times 17 &\quad \downarrow \\ &\quad a_n = (2n-1)(2n+1) = 15 \times 17 \\ &\quad \text{에서 } 2n-1 = 15 \quad \therefore n = 8 \\ &= \sum_{k=1}^8 (4k^2 - 1) = 4 \sum_{k=1}^8 k^2 - \sum_{k=1}^8 1 \\ &= 4 \times \frac{8 \times 9 \times 17}{6} - 1 \times 8 \\ &= 816 - 8 = 808\end{aligned}$$

(2) 수열 $1+2, 2+2^2, 3+2^3, \dots, 6+2^6$ 의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$a_k = k + 2^k$$

구하는 합은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제6항까지의 합이므로

$$(1+2) + (2+2^2) + (3+2^3) + \dots + (6+2^6)$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=1}^6 (k + 2^k) = \sum_{k=1}^6 k + \sum_{k=1}^6 2^k \\ &= \frac{6 \times 7}{2} + \frac{2(2^6 - 1)}{2 - 1} \\ &= 21 + 126 = 147\end{aligned}$$

답 (1) 808 (2) 147

026

$$11 = 10 + 1$$

$$101 = 100 + 1 = 10^2 + 1$$

$$1001 = 1000 + 1 = 10^3 + 1$$

$\vdots$

이므로 주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$a_k = 10^k + 1$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} (10^k + 1) = \sum_{k=1}^{10} 10^k + \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= \frac{10(10^{10} - 1)}{10 - 1} + 1 \times 10 \\ &= \frac{1}{9} (10^{11} - 10) + 10 \\ &= \frac{1}{9} (10^{11} - 10) + 90 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9} (10^{11} + 80)\end{aligned}$$

답 ④

027

수열 $\frac{1^2}{2}, \frac{1^2+2^2}{3}, \frac{1^2+2^2+3^2}{4}, \dots$ 의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2}{k+1} \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6(k+1)} \\ &= \frac{k(2k+1)}{6}\end{aligned}$$

구하는 합은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제5항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= \sum_{k=1}^5 \frac{k(2k+1)}{6} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^5 (2k^2 + k) \\ &= \frac{1}{6} \left(2 \sum_{k=1}^5 k^2 + \sum_{k=1}^5 k \right) = \frac{1}{6} \left(2 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + \frac{5 \times 6}{2} \right) \\ &= \frac{1}{6} (110 + 15) = \frac{125}{6}\end{aligned}$$

답 ④

028

주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$\begin{aligned}a_k &= 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + 2k \\ &= \sum_{i=1}^k 2i = 2 \sum_{i=1}^k i = 2 \times \frac{k(k+1)}{2} = k^2 + k\end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} (k^2 + k) = \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k \\ &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{10 \times 11}{2} \\ &= 385 + 55 = 440\end{aligned}$$

답 ①

029

수열 $1, \frac{1}{2}(1+2), \frac{1}{3}(1+2+3), \dots$ 의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{k} (1 + 2 + 3 + \dots + k) \\ &= \frac{1}{k} \times \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k+1}{2}\end{aligned}$$

주어진 수열의 합은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제100항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100} a_k &= \sum_{k=1}^{100} \frac{k+1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{100} (k+1) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{100} k + \sum_{k=1}^{100} 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{100 \times 101}{2} + 100 \right) \\ &= \frac{1}{2} \times 5150 = 515 \times 5\end{aligned}$$

$$\therefore A=5$$

답 5

030

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2n^2 - n \text{로 놓으면}$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= (2n^2 - n) - (2n^2 - 5n + 3) \\ &= 4n - 3\end{aligned}$$

..... ①

$n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 1 = 1$$

이때 $a_1=1$ 은 ①에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n = 4n - 3$$

$$\therefore a_7 = 4 \times 7 - 3 = 28 - 3 = 25$$

답 ③

|다른 풀이|

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2n^2 - n \text{로 놓으면}$$

$$\begin{aligned}a_7 &= S_7 - S_6 = (2 \times 7^2 - 7) - (2 \times 6^2 - 6) \\ &= 91 - 66 = 25\end{aligned}$$

031

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n(n+2) \text{로 놓으면}$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n(n+2) - (n-1)(n+1) \\ &= n^2 + 2n - (n^2 - 1) \\ &= 2n + 1\end{aligned}$$

..... ①

$n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1 \times 3 = 3$$

이때 $a_1=3$ 은 ①에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n = 2n + 1$$

따라서 $a_n^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 a_k^2 &= \sum_{k=1}^5 (4k^2 + 4k + 1) = 4 \sum_{k=1}^5 k^2 + 4 \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 1 \\ &= 4 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + 4 \times \frac{5 \times 6}{2} + 1 \times 5 \\ &= 220 + 60 + 5 = 285\end{aligned}$$

답 ②

032

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 3n \text{로 놓으면}$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + 3n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\ &= (n^2 + 3n) - (n^2 + n - 2) \\ &= 2n + 2\end{aligned}$$

..... ①

$n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \times 1 = 4$$

이때 $a_1=4$ 는 ①에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n = 2n + 2 \text{ ①}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^6 ka_{3k+1} = \sum_{k=1}^6 k \{2(3k+1) + 2\}$$

$$= \sum_{k=1}^6 (6k^2 + 4k) \text{ ②}$$

$$= 6 \sum_{k=1}^6 k^2 + 4 \sum_{k=1}^6 k$$

$$= 6 \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} + 4 \times \frac{6 \times 7}{2}$$

$$= 546 + 84 = 630 \text{ ③}$$

답 630

채점 기준	비율
① 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구할 수 있다.	40 %
② $\sum_{k=1}^6 ka_{3k+1}$ 을 k 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
③ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	30 %

033

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2^n - 1 \text{로 놓으면}$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) \\ &= 2^n - 2^{n-1} \\ &= (2 - 1) \times 2^{n-1} \\ &= 2^{n-1}\end{aligned}$$

..... ①

$n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2^1 - 1 = 1$$

이때 $a_1=1$ 은 ①에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n = 2^{n-1}$$

따라서 $a_{2k}^2 = (2^{2k-1})^2 = 2^{4k-2} = \frac{1}{4} \times 16^k$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 a_{2k}^2 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 16^k = \frac{1}{4} \times \frac{16(16^4 - 1)}{16 - 1} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{16^5 - 16}{15} = \frac{1}{60} (2^{20} - 16)\end{aligned}$$

답 ③

034

$$S_n = \sum_{k=1}^n ka_k = n(n+1) \text{로 놓으면}$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}na_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n(n+1) - (n-1)n \\ &= n^2 + n - (n^2 - n) \\ &= 2n\end{aligned}$$

..... ①

$n=1$ 일 때

$$a_1 = 1 \times 2 = 2$$

이때 $a_1=2$ 는 ㉠에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$na_n = 2n \quad \therefore a_n = 2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^8 a_k = \sum_{k=1}^8 2 = 2 \times 8 = 16$$

답 16

035

주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제50항까지의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{50} a_k &= \sum_{k=1}^{50} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{50} - \frac{1}{51} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{51} = \frac{50}{51} \end{aligned}$$

답 $\frac{50}{51}$

036

주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$a_k = \frac{4}{(2k)^2 - 1} = \frac{4}{(2k-1)(2k+1)} = 2 \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제15항까지의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{15} a_k &= 2 \sum_{k=1}^{15} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{29} - \frac{1}{31} \right) \right\} \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{31} \right) \\ &= 2 \times \frac{30}{31} = \frac{60}{31} \end{aligned}$$

답 ㉠

037

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = \frac{58}{45} \text{ 이므로}$$

$$\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = \frac{19}{90}$$

$$90(2n+3) = 19(n+1)(n+2)$$

$$180n + 270 = 19n^2 + 57n + 38$$

$$19n^2 - 123n - 232 = 0, (19n+29)(n-8) = 0$$

이때 n 은 자연수이므로

$$n=8$$

답 8

038

$$S_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} S_k &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = S_{10} = \frac{1}{10 \times 11} = \frac{1}{110} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (S_k - a_k) &= \sum_{k=1}^{10} S_k - \sum_{k=1}^{10} a_k \\ &= \frac{10}{11} - \frac{1}{110} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

답 ㉠

| 다른 풀이 |

$k=1$ 이면

$$S_k - a_k = S_1 - a_1 = 0$$

$k \geq 2$ 이면 $\rightarrow S_1 = a_1$

$$S_k - a_k = S_{k-1} = \frac{1}{(k-1)k}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} (S_k - a_k) &= (S_1 - a_1) + \sum_{k=2}^{10} (S_k - a_k) \\ &= 0 + \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{(k-1)k} \\ &= \sum_{k=2}^{10} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

039

수열 $1, \frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+2+3}, \cdots$ 의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$a_k = \frac{1}{1+2+\cdots+k}$$

$$= \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}$$

$$= \frac{2}{k(k+1)}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \cdots \cdots \text{①}$$

주어진 식은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제99항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= 2 \sum_{k=1}^{99} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) \right\} \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{100} \right) = \frac{99}{50} \cdots \cdots \text{②} \end{aligned}$$

답 $\frac{99}{50}$

채점 기준	비율
① 주어진 수열의 제 k 항을 k 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
② 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

040

주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}$$

$$= \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제99항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{99} a_k = \sum_{k=1}^{99} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

$$= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99})$$

$$= \sqrt{100} - 1$$

$$= 10 - 1 = 9$$

답 ④

041

$a_k = \sqrt{k}$ 에서

$$a_{2k+1} = \sqrt{2k+1}, a_{2k-1} = \sqrt{2k-1}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{40} \frac{1}{a_{2k-1} + a_{2k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{40} \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{40} \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{40} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})$$

$$= \frac{1}{2} \{(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + \cdots + (\sqrt{81} - \sqrt{79})\}$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{81} - 1)$$

$$= \frac{1}{2} (9 - 1) = 4$$

답 4

042

$$\sum_{k=1}^n \frac{3}{\sqrt{3k-1} + \sqrt{3k+2}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{3(\sqrt{3k+2} - \sqrt{3k-1})}{(\sqrt{3k+2} + \sqrt{3k-1})(\sqrt{3k+2} - \sqrt{3k-1})}$$

$$= \sum_{k=1}^n (\sqrt{3k+2} - \sqrt{3k-1})$$

$$= (\sqrt{5} - \sqrt{2}) + (\sqrt{8} - \sqrt{5}) + (\sqrt{11} - \sqrt{8})$$

$$+ \cdots + (\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n-1})$$

$$= \sqrt{3n+2} - \sqrt{2}$$

즉, $\sqrt{3n+2} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{3n+2} = 5\sqrt{2}, 3n+2 = 50$$

$$\therefore n = 16$$

답 16

043

주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$a_k = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+2}}$$

$$= \frac{2(\sqrt{k+2} - \sqrt{k})}{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k})(\sqrt{k+2} - \sqrt{k})}$$

$$= \sqrt{k+2} - \sqrt{k}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제47항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{47} a_k = \sum_{k=1}^{47} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k})$$

$$= (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{6} - \sqrt{4})$$

$$+ \cdots + (\sqrt{48} - \sqrt{46}) + (\sqrt{49} - \sqrt{47})$$

$$= -1 - \sqrt{2} + \sqrt{48} + \sqrt{49}$$

$$= 4\sqrt{3} - \sqrt{2} + 6$$

즉, $p=4, q=-1, r=6$ 이므로

$$p+q+r = 4 + (-1) + 6 = 9$$

답 ②

044

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차가 같으므로 첫째항과 공차를 a 라고 하면

$$a_n = a + (n-1) \times a = an$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}}$$

$$= \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{ak} + \sqrt{a(k+1)}}$$

$$= \sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{a(k+1)} - \sqrt{ak}}{\{\sqrt{a(k+1)} + \sqrt{ak}\} \{\sqrt{a(k+1)} - \sqrt{ak}\}}$$

$$= \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{15} \{\sqrt{a(k+1)} - \sqrt{ak}\}$$

$$= \frac{1}{a} \{(\sqrt{2a} - \sqrt{a}) + (\sqrt{3a} - \sqrt{2a}) + (\sqrt{4a} - \sqrt{3a})$$

$$+ \cdots + (\sqrt{16a} - \sqrt{15a})\}$$

$$= \frac{1}{a} (4\sqrt{a} - \sqrt{a}) = \frac{3\sqrt{a}}{a} = \frac{3}{\sqrt{a}}$$

$$\text{즉, } \frac{3}{\sqrt{a}} = 2 \text{이므로}$$

$$\sqrt{a} = \frac{3}{2} \quad \therefore a = \frac{9}{4}$$

$$\therefore a_4 = 4a = 4 \times \frac{9}{4} = 9$$

답 ④

045

$$\sum_{n=2}^{25} (\log_{n+1} 3 - \log_{n+2} 3)$$

$$= \sum_{n=2}^{25} \left\{ \frac{1}{\log_3(n+1)} - \frac{1}{\log_3(n+2)} \right\}$$

$$= \left(\frac{1}{\log_3 3} - \frac{1}{\log_3 4} \right) + \left(\frac{1}{\log_3 4} - \frac{1}{\log_3 5} \right)$$

$$+ \cdots + \left(\frac{1}{\log_3 26} - \frac{1}{\log_3 27} \right)$$

$$= \frac{1}{\log_3 3} - \frac{1}{\log_3 27}$$

$$= 1 - \frac{1}{\log_3 3^3}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

답 ②

046

$$a_n = \log_4 \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \log_4 \frac{n+1}{n}$$

$$= \log_4(n+1) - \log_4 n$$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \{\log_4 (k+1) - \log_4 k\} \\ &= (\log_4 2 - \log_4 1) + (\log_4 3 - \log_4 2) \\ &\quad + \cdots + \{\log_4 (n+1) - \log_4 n\} \\ &= \log_4 (n+1) - \log_4 1 = \log_4 (n+1)\end{aligned}$$

즉, $\log_4 (n+1) = 4$ 이므로

$$n+1 = 4^4 = 256 \quad \therefore n = 255$$

답 255

|다른 풀이|

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \log_4 \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \log_4 \frac{k+1}{k} \\ &= \log_4 \frac{2}{1} + \log_4 \frac{3}{2} + \cdots + \log_4 \frac{n+1}{n} \\ &= \log_4 \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}\right) = \log_4 (n+1)\end{aligned}$$

즉, $\log_4 (n+1) = 4$ 이므로

$$n+1 = 4^4 = 256 \quad \therefore n = 255$$

047

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \log_3 \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^n (\log_3 \sqrt{k+1} - \log_3 \sqrt{k}) \\ &= (\log_3 \sqrt{2} - \log_3 1) + (\log_3 \sqrt{3} - \log_3 \sqrt{2}) \\ &\quad + \cdots + (\log_3 \sqrt{n+1} - \log_3 \sqrt{n}) \\ &= \log_3 \sqrt{n+1} - \log_3 1 = \log_3 \sqrt{n+1}\end{aligned}$$

즉, $\log_3 \sqrt{n+1} = 2$ 이므로 $\sqrt{n+1} = 3^2$

$$n+1 = 3^4 \quad \therefore n = 80$$

답 ④

048

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n = 2^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^n \log_{16} a_k &= \sum_{k=1}^n \log_{16} 2^{k-1} = \sum_{k=1}^n \log_{2^4} 2^{k-1} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (k-1) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} - n \right\} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{8}\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{n(n-1)}{8} = 7 \text{이므로}$$

$$n(n-1) = 7 \times 8 \quad \therefore n = 8$$

답 ③

049

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \log_2 (n^2 + n) \text{으로 놓으면}$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \log_2 (n^2 + n) - \log_2 \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= \log_2 (n^2 + n) - \log_2 (n^2 - n) \\ &= \log_2 \frac{n^2 + n}{n^2 - n} = \log_2 \frac{n+1}{n-1}\end{aligned}$$

$$\text{즉, } a_{2n+1} = \log_2 \frac{(2n+1)+1}{(2n+1)-1} = \log_2 \frac{n+1}{n} \quad (n \geq 1) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{15} a_{2n+1} &= \sum_{n=1}^{15} \log_2 \frac{n+1}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{15} \{\log_2 (n+1) - \log_2 n\} \\ &= (\log_2 2 - \log_2 1) + (\log_2 3 - \log_2 2) \\ &\quad + \cdots + (\log_2 16 - \log_2 15) \\ &= \log_2 16 - \log_2 1 \\ &= \log_2 2^4 = 4\end{aligned}$$

답 4

참고

$$a_n = \log_2 \frac{n+1}{n-1} \quad (n \geq 2) \text{은 } n=1 \text{일 때 정의되지 않는다.}$$

하지만 문제에서 a_{2n+1} 에 관련된 값을 묻고 있으므로 a_1 의 값을 고려하지 않아도 된다.

 실력을 높이는 연습 문제

본문 151쪽

01

ㄱ. [반례] 일반항이 $a_n = n$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $n=3$ 이라고 하면

$$\sum_{k=1}^3 a_k^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

$$\sum_{k=1}^3 a_3^2 = a_3^2 \times 3 = 3^2 \times 3 = 27$$

$$\therefore \sum_{k=1}^3 a_k^2 \neq \sum_{k=1}^3 a_3^2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n a_k^2 \neq \sum_{k=1}^n a_n^2 \text{ (거짓)}$$

ㄴ. [반례] 일반항이 $a_n = n$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $n=3$ 이라고 하면

$$\sum_{k=1}^3 a_k^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

$$\left(\sum_{k=1}^3 a_k\right)^2 = (1+2+3)^2 = 6^2 = 36$$

$$\therefore \sum_{k=1}^3 a_k^2 \neq \left(\sum_{k=1}^3 a_k\right)^2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n a_k^2 \neq \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 \text{ (거짓)}$$

ㄷ. Σ 의 정의에 의하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{i=1}^n a_i \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ②

02

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^7 a_k - \sum_{k=1}^6 a_k &= (a_2 + a_3 + \cdots + a_7) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_6) \\ &= a_7 - a_1\end{aligned}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로 공차를 d 라고 하면

$$a_7 - a_1 = (a_1 + 6d) - a_1 = 6d$$

$$\text{즉, } 6d = 24 \text{이므로 } d = 4$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 공차는 4이다.

답 ③

03

$$\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = \sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) \quad \text{..... ㉠}$$

이때 수열 $\{a_n + b_n\}$ 은 첫째항이 3, 제10항이 18인 등차수열이고,
 ㉠은 등차수열 $\{a_n + b_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합이다.

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k &= \frac{10\{(a_1 + b_1) + (a_{10} + b_{10})\}}{2} \\ &= \frac{10(3 + 18)}{2} \\ &= 105 \end{aligned}$$

답 105

| 다른 풀이 |

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k &\rightarrow \text{첫째항이 } a_1, \text{ 끝항이 } a_{10}, \text{ 항수가 10인 등차수열의 합} \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}) + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{10}) \\ &= \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} + \frac{10(b_1 + b_{10})}{2} \rightarrow \text{첫째항이 } b_1, \text{ 끝항이 } b_{10}, \text{ 항수가 10인 등차수열의 합} \\ &= 5(a_1 + a_{10}) + 5(b_1 + b_{10}) \\ &= 5\{(a_1 + b_1) + (a_{10} + b_{10})\} \\ &= 5(3 + 18) \\ &= 5 \times 21 = 105 \end{aligned}$$

04

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} (2b_k - 1) \text{에서} \\ \sum_{k=1}^{10} a_k &= 2 \sum_{k=1}^{10} b_k - 10 \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k - 2 \sum_{k=1}^{10} b_k &= -10 \quad \text{..... ㉠} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (3a_k + b_k) &= 33 \text{에서} \\ 3 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k &= 33 \quad \text{..... ㉡} \\ 3 \times \text{㉠} - \text{㉡} \text{을 하면} \\ -7 \sum_{k=1}^{10} b_k &= -63 \quad \therefore \sum_{k=1}^{10} b_k = 9 \end{aligned}$$

답 9

참고

㉠ + 2 × ㉡을 하면

$$7 \sum_{k=1}^{10} a_k = 56 \quad \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = 8$$

05

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (2k-4) &= 2 \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 4 \\ &= 2 \times \frac{n(n-1)}{2} - 4(n-1) \\ &= n(n-1) - 4(n-1) \\ &= n^2 - n - 4n + 4 \\ &= n^2 - 5n + 4 \end{aligned}$$

즉, $n^2 - 5n + 4 = -2$ 이므로

$$n^2 - 5n + 6 = 0, (n-2)(n-3) = 0$$

$\therefore n=2$ 또는 $n=3$

따라서 구하는 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$2 + 3 = 5$$

답 4

06

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 \frac{(k+1)^3}{2k} + \sum_{n=2}^5 \frac{(n-1)^3}{2n} \\ &= \sum_{k=1}^5 \frac{(k+1)^3}{2k} + \sum_{k=2}^5 \frac{(k-1)^3}{2k} \\ &= \sum_{k=1}^5 \frac{(k+1)^3}{2k} + \sum_{k=1}^5 \frac{(k-1)^3}{2k} \rightarrow k=1 \text{일 때 } \frac{(k-1)^3}{2k} \text{의 값은 0이므로} \\ &= \sum_{k=1}^5 \frac{(k+1)^3 + (k-1)^3}{2k} \rightarrow \sum_{k=1}^5 \frac{(k-1)^3}{2k} = \sum_{k=2}^5 \frac{(k-1)^3}{2k} \\ &= \sum_{k=1}^5 \frac{2k^3 + 6k}{2k} \\ &= \sum_{k=1}^5 (k^2 + 3) \\ &= \sum_{k=1}^5 k^2 + \sum_{k=1}^5 3 \\ &= \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + 3 \times 5 \\ &= 55 + 15 = 70 \end{aligned}$$

답 5

07

수열 $5 \times 3, 7 \times 6, 9 \times 9, \dots$ 의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$a_k = (2k+3) \times 3k = 6k^2 + 9k$$

구하는 합은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제7항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^7 a_k &= \sum_{k=1}^7 (6k^2 + 9k) = 6 \sum_{k=1}^7 k^2 + 9 \sum_{k=1}^7 k \rightarrow a_n = (2n+3) \times 3n = 17 \times 21 \text{에서 } 3n=21 \quad \therefore n=7 \\ &= 6 \times \frac{7 \times 8 \times 15}{6} + 9 \times \frac{7 \times 8}{2} \\ &= 840 + 252 = 1092 \end{aligned}$$

답 1092

08

주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$\begin{aligned} a_k &= k + 2k + 3k + \dots + k^2 = \sum_{i=1}^k ki \\ &= k \times \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k^2(k+1)}{2} \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제6항까지의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 \frac{k^2(k+1)}{2} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^6 k^3 + \sum_{k=1}^6 k^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{6 \times 7}{2} \right)^2 + \frac{6 \times 7 \times 13}{6} \right] \\ &= \frac{1}{2} (441 + 91) = 266 \end{aligned}$$

답 266

09

문제 접근하기

$4^n = 2^{2n}$ 이므로 4^n 의 양의 약수는 $1, 2, 2^2, \dots, 2^{2n}$ 이고, 4^n 의 모든 양의 약수의 합은

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2n}$$

이다.

4^n , 즉 2^{2n} 의 모든 양의 약수의 합이 a_n 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2n} \\ &= \frac{2^{2n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{2n+1} - 1 \rightarrow \text{첫째항이 1, 공비가 2, 항수가 } 2n+1 \text{인 등비수열의 합} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^3 a_n &= \sum_{n=1}^3 (2^{2n+1} - 1) \\ &= 2 \sum_{n=1}^3 4^n - \sum_{n=1}^3 1 \\ &= 2 \times \frac{4(4^3 - 1)}{4 - 1} - 3 \\ &= 168 - 3 = 165\end{aligned}$$

답 ②

참고

$a_n = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^n$ 과 같이 생각하지 않도록 주의한다.

10

문제 접근하기

$\sum_{k=1}^n a_k = 3n^2 + 5n + 1$ 에서 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하면 $a_1 = 9$, $a_n = 6n + 2$ ($n \geq 2$)이다. 따라서 주어진 수열의 합을 구할 때, $n = 1$ 인 경우는 따로 떼어서 생각해야 한다.

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 3n^2 + 5n + 1 \text{로 놓으면}$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (3n^2 + 5n + 1) - \{3(n-1)^2 + 5(n-1) + 1\} \\ &= 3n^2 + 5n + 1 - (3n^2 - 6n + 3 + 5n - 5 + 1) \\ &= 6n + 2\end{aligned}$$

..... ①

$n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 3 + 5 + 1 = 9$$

이때 $a_1 = 9$ 는 ①에 $n = 1$ 을 대입하여 얻은 값과 같지 않으므로

$$a_1 = 9, a_n = 6n + 2 \quad (n \geq 2)$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^4 ka_{2k-1} &= 9 + \sum_{k=2}^4 k\{6(2k-1) + 2\} \\ &= 9 + \sum_{k=2}^4 (12k^2 - 4k) \\ &= 9 + 12 \left(\sum_{k=1}^4 k^2 - 1 \right) - 4 \left(\sum_{k=1}^4 k - 1 \right) \\ &= 9 + 12 \times \frac{4 \times 5 \times 9}{6} - 12 - 4 \times \frac{4 \times 5}{2} + 4 \\ &= 9 + 360 - 12 - 40 + 4 = 321\end{aligned}$$

답 ①

11

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^5 \left\{ \sum_{j=1}^5 (a_i + b_j) \right\} &= \sum_{i=1}^5 \left(\sum_{j=1}^5 a_i + \sum_{j=1}^5 b_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^5 \left\{ 5a_i + \sum_{j=1}^5 (-2j) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^5 \left(5a_i - 2 \sum_{j=1}^5 j \right) \\ &= \sum_{i=1}^5 \left(5a_i - 2 \times \frac{5 \times 6}{2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^5 (5a_i - 30) = 5 \sum_{i=1}^5 2^i - \sum_{i=1}^5 30 \\ &= 5 \times \frac{2(2^5 - 1)}{2 - 1} - 30 \times 5 \\ &= 5 \times 62 - 150 \\ &= 310 - 150 = 160\end{aligned}$$

답 ④

12

문제 접근하기

주어진 수열의 제 k 항을 k 에 대한 식으로 나타내어 본다. 제 k 항은 두 수의 곱으로 나타내어지므로, 각 수를 k 를 이용하여 어떻게 나타낼 수 있는지 확인한다.

수열 $1 \times (n+1), 2 \times n, 3 \times (n-1), \dots$ 의 제 k 항을 a_k 라고 하면

$$a_k = k\{(n+2) - k\} = -k^2 + (n+2)k$$

주어진 식은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \{-k^2 + (n+2)k\} \\ &= -\sum_{k=1}^n k^2 + (n+2) \sum_{k=1}^n k \\ &= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+2) \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)\{- (2n+1) + 3(n+2)\}}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n+5)}{6}\end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{n(n+1)(n+5)}{6}$$

13

$P(x) = x^3 + (1-n)x^2 + n$ 이라고 하면 다항식 $P(x)$ 를 $x-n$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$P(n) = n^3 + (1-n)n^2 + n = n^2 + n = n(n+1)$$

즉, $a_n = n(n+1)$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}\end{aligned}$$

답 ④

14

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_n + \beta_n = 2, \alpha_n \beta_n = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=2}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right) &= \sum_{n=2}^{10} \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} \\ &= \sum_{n=2}^{10} \frac{2}{(n-1)(n+1)} \\ &= \sum_{n=2}^{10} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{72}{55}\end{aligned}$$

답 ③

15

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = (n+1)^2 \text{으로 놓으면}$$

$n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n+1)^2 - n^2$$

$$= 2n+1$$

..... ㉠

$n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2^2 = 4$$

이때 $a_1=4$ 는 ㉠에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 같지 않으므로

$$a_1=4, a_n=2n+1 \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{11} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$$

$$= \frac{1}{a_1 a_2} + \sum_{k=2}^{11} \frac{1}{(2k+1)\{2(k+1)+1\}}$$

$$= \frac{1}{a_1 a_2} + \sum_{k=2}^{11} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{11} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right)$$

$$= \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{23} - \frac{1}{25} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{20} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} \right)$$

$$= \frac{1}{20} + \frac{2}{25} = \frac{13}{100}$$

답 13/100

16

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항과 공차가 모두 1인 등차수열이므로

$$a_n = 1 + (n-1) \times 1 = n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{24} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}$$

$$= \sum_{k=1}^{24} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

$$= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{25}-\sqrt{24})$$

$$= \sqrt{25} - 1$$

$$= 5 - 1 = 4$$

답 ③

17

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \frac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{\{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}\} \{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}\}}$$

$$= \frac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2 k - k^2(k+1)}$$

$$= \frac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{k(k+1)} \xrightarrow{(k+1)^2 k - k^2(k+1) = k^3 + 2k^2 + k - (k^3 + k^2) = k^2 + k} \frac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{k}}{k} - \frac{\sqrt{k+1}}{k+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{63} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{63} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{63}} - \frac{1}{\sqrt{64}} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{64}}$$

$$= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

답 ⑤

18

$$\sum_{k=2}^{99} \log \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$$

$$= \sum_{k=2}^{99} \log \frac{k^2 - 1}{k^2}$$

$$= \sum_{k=2}^{99} \log \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

$$= \sum_{k=2}^{99} \left(\log \frac{k-1}{k} + \log \frac{k+1}{k} \right)$$

$$= \sum_{k=2}^{99} \left(\log \frac{k-1}{k} - \log \frac{k}{k+1} \right)$$

$$= \left(\log \frac{1}{2} - \log \frac{2}{3} \right) + \left(\log \frac{2}{3} - \log \frac{3}{4} \right)$$

$$+ \cdots + \left(\log \frac{98}{99} - \log \frac{99}{100} \right)$$

$$= \log \frac{1}{2} - \log \frac{99}{100}$$

$$= \log \frac{1}{2} + \log \frac{100}{99}$$

$$= \log \left(\frac{1}{2} \times \frac{100}{99} \right) = \log \frac{50}{99}$$

답 ②



수학적 귀납법

기본을 다지는 유형

본문 155쪽

001

$$a_{n+1} - 2 = \frac{n}{a_n + 2} \text{에서}$$

 $n=1$ 일 때

$$a_2 - 2 = \frac{1}{a_1 + 2} = \frac{1}{3} \quad \therefore a_2 = \frac{7}{3}$$

 $n=2$ 일 때

$$a_3 - 2 = \frac{2}{a_2 + 2} = \frac{2}{\frac{7}{3} + 2} = \frac{6}{13} \quad \therefore a_3 = \frac{32}{13}$$

답 $\frac{32}{13}$

002

$$a_n a_{n+1} = \frac{n}{2} \text{에서}$$

 $n=2$ 일 때

$$a_2 a_3 = \frac{2}{2}, 2a_2 = 1 \quad \therefore a_2 = \frac{1}{2}$$

 $n=1$ 일 때

$$a_1 a_2 = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2} \quad \therefore a_1 = 1$$

 $n=3$ 일 때

$$a_3 a_4 = \frac{3}{2}, 2a_4 = \frac{3}{2} \quad \therefore a_4 = \frac{3}{4}$$

 $n=4$ 일 때

$$a_4 a_5 = \frac{4}{2}, \frac{3}{4} a_5 = 2 \quad \therefore a_5 = \frac{8}{3}$$

$$\therefore a_1 + a_4 + a_5 = 1 + \frac{3}{4} + \frac{8}{3} = \frac{53}{12}$$

답 ④

003

 $n=1$ 일 때, $a_1=4$ 는 짝수이므로

$$a_2 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

 $n=2$ 일 때, $a_2=2$ 는 짝수이므로

$$a_3 = \frac{1}{2} a_2 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

 $n=3$ 일 때, $a_3=1$ 은 홀수이므로

$$a_4 = a_3 + 1 = 1 + 1 = 2$$

 $n=4$ 일 때, $a_4=2$ 는 짝수이므로

$$a_5 = \frac{1}{2} a_4 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

 $\vdots$

따라서 주어진 수열은 제2항부터 2, 1이 이 순서대로 반복되므로

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n \text{이 짝수}) \\ 1 & (n \text{이 홀수}) \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

이 성립한다.

50은 짝수이므로 $a_{50}=2$

답 ②

004

 $n=1$ 일 때, $a_1=6>5$ 이므로

$$a_2 = a_1 - 2 = 6 - 2 = 4$$

 $n=2$ 일 때, $a_2=4<5$ 이므로

$$a_3 = 2a_2 = 2 \times 4 = 8$$

 $n=3$ 일 때, $a_3=8>5$ 이므로

$$a_4 = a_3 - 2 = 8 - 2 = 6$$

 $n=4$ 일 때, $a_4=6>5$ 이므로

$$a_5 = a_4 - 2 = 6 - 2 = 4$$

 $\vdots$ ①

따라서 주어진 수열은 6, 4, 8이 이 순서대로 반복되므로

$$a_n = a_{n+3} \quad (n \text{은 자연수})$$

이 성립한다. ②

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8 + a_9) + a_{10}$$

$$= (6 + 4 + 8) + (6 + 4 + 8) + (6 + 4 + 8) + 6$$

$$= 3 \times 18 + 6 = 60 \quad \text{..... ③}$$

답 60

채점 기준	비율
① 주어진 식에 n 대신 1, 2, 3, ...을 대입하여 수열의 항을 구할 수 있다.	30 %
② 주어진 수열의 규칙성을 찾을 수 있다.	40 %
③ 규칙성을 이용하여 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

005

$$a_1 = 20$$

$$a_2 = |a_1| - 2 = 20 - 2 = 18 \quad \leftarrow -2$$

$$a_3 = |a_2| - 2 = 18 - 2 = 16 \quad \leftarrow -2$$

 $\vdots$

$$a_{10} = 2$$

$$a_{11} = |a_{10}| - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$a_{12} = |a_{11}| - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$a_{13} = |a_{12}| - 2 = |-2| - 2 = 0$$

$$a_{14} = |a_{13}| - 2 = 0 - 2 = -2$$

 $\vdots$

이므로

$$1 \leq n \leq 10 \text{일 때}$$

$$a_n = 20 + (n-1) \times (-2) = -2n + 22$$

$$n \geq 11 \text{일 때} \quad \rightarrow \text{첫째항이 20, 공차가 } -2 \text{인 등차수열}$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n \text{이 홀수}) \\ -2 & (n \text{이 짝수}) \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{30} a_n = \sum_{n=1}^{10} a_n + \sum_{n=11}^{30} a_n$$

$$= \sum_{n=1}^{10} (-2n + 22) + (-2) \times 10$$

$$= -2 \times \frac{10 \times 11}{2} + 220 - 20 = 90$$

답 ②

006

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 30, 공차가 -3 인 등차수열이므로
 $a_n = 30 + (n-1) \times (-3)$
 $= -3n + 33$
 $\therefore a_{10} = -3 \times 10 + 33 = 3$

답 ③

007

$a_1 = 2$ 이고 $a_n = a_{n+1} - 4$ 에서
 $a_{n+1} = a_n + 4$
 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 4인 등차수열이다. ①
 $\therefore a_n = 2 + (n-1) \times 4 = 4n - 2$ ②
 $a_k = 82$ 에서
 $4k - 2 = 82, 4k = 84$
 $\therefore k = 21$ ③

답 21

채점 기준	비율
① 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항이 2, 공차가 4인 등차수열임을 알 수 있다.	40 %
② 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구할 수 있다.	30 %
③ k 의 값을 구할 수 있다.	30 %

008

$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$ 에서
 $2a_{n+1} = a_{n+2} + a_n$
 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.
 이때 첫째항이 -4 , 공차가 $a_2 - a_1 = 4 - (-4) = 8$ 이므로
 $a_n = -4 + (n-1) \times 8 = 8n - 12$
 $\therefore a_{12} = 8 \times 12 - 12 = 84$

답 ②

009

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이므로
 $a_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n$
 $\therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2k \times 2(k+1)}$
 $= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)}$
 $= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$
 $= \frac{1}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \right\}$
 $= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{11} \right)$
 $= \frac{1}{4} \times \frac{10}{11} = \frac{5}{22}$

답 ④

010

$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.
 이때 첫째항이 -1 , 공차가 $a_2 - a_1 = 2 - (-1) = 3$ 이므로

$$a_n = -1 + (n-1) \times 3 = 3n - 4$$

$$\begin{aligned} \therefore a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} &= (3 \times 4 - 4) + (3 \times 6 - 4) + (3 \times 8 - 4) + (3 \times 10 - 4) \\ &= 8 + 14 + 20 + 26 = 68 \end{aligned}$$

답 ⑤

|다른 풀이|

$a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$ 은 첫째항이 $a_4 = 8$, 끝항이 $a_{10} = 26$, 항수가 4인 등차수열의 합과 같으므로
 $\frac{4(8+26)}{2} = 68$

011

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ 에서
 $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$
 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다.
 $\therefore a_n = 8 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{-3} \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-4}$

답 ①

012

$3a_{n+1} = a_n$ 에서
 $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$
 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이다.
 $\therefore a_n = \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$
 $\therefore \frac{a_{12}}{a_6 a_8} = \frac{\frac{1}{3^{11}}}{\frac{1}{3^5} \times \frac{1}{3^7}} = \frac{\frac{1}{3^{11}}}{\frac{1}{3^{12}}} = 3$

답 3

013

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다. ①
 이때 첫째항은 16, 공비는 $\frac{64}{16} = 4$ 이므로
 $a_n = 16 \times 4^{n-1} = 4^{n+1}$ ②
 $a_k = 256$ 이므로
 $4^{k+1} = 256, 2^{2(k+1)} = 2^8$
 $2(k+1) = 8 \quad \therefore k = 3$ ③

답 3

채점 기준	비율
① 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열임을 알 수 있다.	20 %
② 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구할 수 있다.	40 %
③ 자연수 k 의 값을 구할 수 있다.	40 %

014

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.
 이때 공비를 r 라고 하면
 $\frac{a_{11}}{a_1} = \frac{a_{12}}{a_2} = \frac{a_{13}}{a_3} = r^{10}$

$$\begin{aligned} \text{즉, } \frac{a_{11}}{a_1} + \frac{a_{12}}{a_2} + \frac{a_{13}}{a_3} &= 15 \text{에서} \\ r^{10} + r^{10} + r^{10} &= 15, \quad 3r^{10} = 15 \\ \therefore r^{10} &= 5 \\ \therefore \frac{a_{20}}{a_{10}} &= r^{10} = 5 \end{aligned}$$

답 ③

015

$$\begin{aligned} 2 \log a_{n+1} &= \log a_n + \log a_{n+2} \text{에서} \\ \log a_{n+1}^2 &= \log a_n a_{n+2} \\ \therefore a_{n+1}^2 &= a_n a_{n+2} \\ \text{즉, 수열 } \{a_n\} &\text{은 등비수열이다.} \\ \text{이때 첫째항이 } \frac{1}{4}, \text{ 공비가 } \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} &= 2 \text{이므로} \\ a_n &= \frac{1}{4} \times 2^{n-1} = 2^{-2} \times 2^{n-1} = 2^{n-3} \\ \therefore a_{10} &= 2^{10-3} = 2^7 = 128 \end{aligned}$$

답 ④

016

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2n \text{에서 } a_{n+1} - a_n = 2n \text{이므로 양변에 } n \text{ 대신 } 1, 2, 3, \\ \dots, n-1 &\text{을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면} \\ a_2 - a_1 &= 2 \times 1 \\ a_3 - a_2 &= 2 \times 2 \\ a_4 - a_3 &= 2 \times 3 \\ &\vdots \\ +) a_n - a_{n-1} &= 2(n-1) \\ \hline a_n - a_1 &= \sum_{k=1}^{n-1} 2k \\ \therefore a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k \\ \text{이때 } a_1 &= 1 \text{이므로} \\ a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} \\ &= n^2 - n + 1 \\ \therefore a_8 &= 8^2 - 8 + 1 = 57 \end{aligned}$$

답 ⑤

|다른 풀이|

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2n \text{에서 } a_{n+1} - a_n = 2n \text{이므로 양변에 } n \text{ 대신 } 1, 2, 3, \\ \dots, 7 &\text{을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면} \\ a_2 - a_1 &= 2 \times 1 \\ a_3 - a_2 &= 2 \times 2 \\ a_4 - a_3 &= 2 \times 3 \\ &\vdots \\ +) a_8 - a_7 &= 2 \times 7 \\ \hline a_8 - a_1 &= 2 + 4 + 6 + \dots + 14 \\ \therefore a_8 &= a_1 + (2 + 4 + 6 + \dots + 14) \\ \text{이때 } a_1 &= 1 \text{이므로} \\ a_8 &= 1 + (2 + 4 + 6 + \dots + 14) \\ &= 1 + \frac{7(2+14)}{2} \rightarrow \text{첫째항이 2, 끝항이 14, 항수가 7인 등차수열의 합} \\ &= 1 + 56 = 57 \end{aligned}$$

017

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2^{n-1} \text{에서 } a_{n+1} - a_n = 2^{n-1} \text{이므로 양변에 } n \text{ 대신 } 1, 2, \\ 3, \dots, n-1 &\text{을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면} \\ a_2 - a_1 &= 2^0 \\ a_3 - a_2 &= 2^1 \\ a_4 - a_3 &= 2^2 \\ &\vdots \\ +) a_n - a_{n-1} &= 2^{n-2} \\ \hline a_n - a_1 &= \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \\ \therefore a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \\ \text{이때 } a_1 &= 1 \text{이므로} \\ a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 1 + \frac{2^{n-1} - 1}{2-1} = 2^{n-1} \\ a_k &= 1024 \text{이므로} \rightarrow \text{첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열의} \\ 2^{k-1} &= 1024 = 2^{10}, \quad k-1 = 10 \quad \text{첫째항부터 제 } (n-1) \text{항까지의 합} \\ \therefore k &= 11 \end{aligned}$$

답 ④

018

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \quad (n=2, 3, 4, \dots) \text{이므로 양변에 } n \text{ 대신} \\ n+1 &\text{을 대입하면} \\ a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})} \\ &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ \text{위의 식의 양변에 } n &\text{ 대신 } 1, 2, 3, \dots, n-1 \text{을 차례대로 대입하여} \\ \text{변끼리 더하면} \\ a_2 - a_1 &= \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ a_3 - a_2 &= \sqrt{4} - \sqrt{3} \\ a_4 - a_3 &= \sqrt{5} - \sqrt{4} \\ &\vdots \\ +) a_n - a_{n-1} &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ \hline a_n - a_1 &= \sqrt{n+1} - \sqrt{2} \\ \therefore a_n &= a_1 + \sqrt{n+1} - \sqrt{2} \\ \text{이때 } a_1 &= \sqrt{2} \text{이므로} \\ a_n &= \sqrt{n+1} \\ \therefore a_{15} &= \sqrt{15+1} = \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

답 ④

019

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (-1)^n \times n \text{의 양변에 } n \text{ 대신 } 1, 2, 3, \dots, n-1 \text{을 차} \\ \text{례대로 대입하여 변끼리 더하면} \\ a_2 - a_1 &= -1 \\ a_3 - a_2 &= 2 \\ a_4 - a_3 &= -3 \\ &\vdots \\ +) a_n - a_{n-1} &= (-1)^{n-1} \times (n-1) \\ \hline a_n - a_1 &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \times k \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \times k$$

이때 $a_1 = 10$ 이므로

$$a_n = 10 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \times k$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{101} &= 10 + \sum_{k=1}^{100} (-1)^k \times k \\ &= 10 + (\underbrace{-1+2}_{=1} - \underbrace{3+4}_{=1} - \cdots - \underbrace{99+100}_{=1}) \\ &= 10 + 1 \times 50 = 60 \end{aligned}$$

답 ⑤

020

$a_n = \frac{n+1}{n-1} a_{n-1}$ ($n=2, 3, 4, \dots$)의 양변에 n 대신 $n+1$ 을 대입하면

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

위의 식의 양변에 n 대신 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2 = \frac{3}{1} a_1$$

$$a_3 = \frac{4}{2} a_2$$

$$a_4 = \frac{5}{3} a_3$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} \times \left) a_n &= \frac{n+1}{n-1} a_{n-1} \\ a_n &= \frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n-2} \times \frac{n+1}{n-1} \times a_1 \\ &= \frac{n(n+1)}{1 \times 2} a_1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} a_1 \end{aligned}$$

이때 $a_1 = 1$ 이므로 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\therefore a_{10} = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

답 ①

021

$a_{n+1} = 4^n a_n$ 의 양변에 n 대신 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2 = 4^1 a_1$$

$$a_3 = 4^2 a_2$$

$$a_4 = 4^3 a_3$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} \times \left) a_n &= 4^{n-1} a_{n-1} \\ a_n &= 4^1 \times 4^2 \times 4^3 \times \cdots \times 4^{n-1} \times a_1 \\ &= 4^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \times 1 \quad (\because a_1 = 1) \\ &= 4^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= 2^{n(n-1)} \end{aligned}$$

$a_k = 2^{12}$ 이므로 $2^{k(k-1)} = 2^{12}$

$$k(k-1) = 12, \quad k^2 - k - 12 = 0$$

$$(k+3)(k-4) = 0$$

$\therefore k = 4$ ($\because k$ 는 자연수)

답 ②

022

$a_{n+1} = a_n \log_{n+1} (n+2)$ 에서

$$a_{n+1} = a_n \times \frac{\log (n+2)}{\log (n+1)} \quad \text{..... ①}$$

위의 식의 양변에 n 대신 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2 = \frac{\log 3}{\log 2} a_1$$

$$a_3 = \frac{\log 4}{\log 3} a_2$$

$$a_4 = \frac{\log 5}{\log 4} a_3$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} \times \left) a_n &= \frac{\log (n+1)}{\log n} a_{n-1} \\ a_n &= \frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 4}{\log 3} \times \frac{\log 5}{\log 4} \times \cdots \times \frac{\log (n+1)}{\log n} \times a_1 \\ &= \frac{\log (n+1)}{\log 2} a_1 \end{aligned}$$

이때 $a_1 = 1$ 이므로 $a_n = \frac{\log (n+1)}{\log 2} \quad \text{..... ②}$

$$\therefore a_{63} = \frac{\log 64}{\log 2} = \log_2 64$$

$$= \log_2 2^6 = 6 \quad \text{..... ③}$$

답 6

채점 기준	비율
① 주어진 식을 정리할 수 있다.	30 %
② 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구할 수 있다.	50 %
③ a_{63} 을 구할 수 있다.	20 %

023

$a_n = \frac{n^2-1}{n^2} a_{n-1}$ ($n=2, 3, 4, \dots$)의 양변에 n 대신 $n+1$ 을 대입하면

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} a_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

위의 식의 양변에 n 대신 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2 = \frac{1 \times 3}{2^2} a_1$$

$$a_3 = \frac{2 \times 4}{3^2} a_2$$

$$a_4 = \frac{3 \times 5}{4^2} a_3$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} \times \left) a_n &= \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} a_{n-1} \\ a_n &= \frac{1 \times 3}{2^2} \times \frac{2 \times 4}{3^2} \times \frac{3 \times 5}{4^2} \\ &\quad \times \cdots \times \frac{(n-2)n}{(n-1)^2} \times \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \times a_1 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n} \times a_1 \end{aligned}$$

이때 $a_1 = 1$ 이므로 $a_n = \frac{n+1}{2n}$

$$\therefore a_9 = \frac{10}{2 \times 9} = \frac{5}{9}$$

답 ②

024

$S_n = 4a_n - 81$ ($n=1, 2, 3, \dots$)의 양변에 n 대신 $n+1$ 을 대입하면
 $S_{n+1} = 4a_{n+1} - 81$

또, 수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \text{이므로}$$

$$a_{n+1} = (4a_{n+1} - 81) - (4a_n - 81)$$

$$a_{n+1} = 4a_{n+1} - 4a_n$$

$$3a_{n+1} = 4a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{4}{3}a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{4}{3}$ 인 등비수열이다.

이때 $a_1 = 27$ 이므로 $a_n = 27 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

$$\therefore a_4 = 27 \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 64$$

답 ④

025

수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \text{이므로 } S_n = 2a_{n+1} \text{에서}$$

$$S_n = 2(S_{n+1} - S_n)$$

$$\therefore S_{n+1} = \frac{3}{2}S_n \text{ ①}$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열이다.

이때 $S_1 = a_1 = 2$ 이므로

$$S_n = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \text{ ②}$$

$$S_k = \frac{81}{8} = 2 \times \frac{81}{16} = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^4 \text{이므로}$$

$$2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^4, k-1=4$$

$$\therefore k=5 \text{ ③}$$

답 5

채점 기준	비율
① 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 주어진 식을 S_{n+1} 과 S_n 사이의 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
② 수열 $\{S_n\}$ 의 일반항을 구할 수 있다.	40 %
③ 자연수 k 의 값을 구할 수 있다.	20 %

026

ㄱ. $p(1)$ 이 참이면 주어진 조건에 의하여

$$p(1+2), p(1+2 \times 2), \dots, p(1+2l)$$

이 참이다. (단, l 은 자연수이다.)

따라서 $p(1)$ 이 참이면 홀수 k 에 대하여 $p(k)$ 가 참이다. (참)

ㄴ. $p(2)$ 가 참이면 주어진 조건에 의하여

$$p(2+2), p(2+2 \times 2), \dots, p(2+2m)$$

이 참이다. (단, m 은 자연수이다.)

따라서 $p(2)$ 가 참이면 짝수 k 에 대하여 $p(k)$ 가 참이다. (참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에 의하여 $p(1)$ 이 참이면 모든 홀수에 대하여 주어진 명제가 참이고, $p(2)$ 가 참이면 모든 짝수에 대하여 주어진 명제가 참이다.

따라서 $p(1), p(2)$ 가 모두 참이면 모든 자연수 k 에 대하여 $p(k)$ 가 참이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

027

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 2 \times 1 - 1 = 1, (\text{우변}) = 1^2 = 1$$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$$

위의 식의 양변에 $2(k+1)-1$, 즉 $\boxed{2k+1}$ 을 더하면

$$1+3+5+\dots+(2k-1)+\boxed{2k+1}=k^2+(2k+1) \\ = \boxed{(k+1)^2}$$

즉, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

$$\therefore \textcircled{㉠}: 2k+1, \textcircled{㉡}: (k+1)^2$$

따라서 $f(k)=2k+1, g(k)=(k+1)^2$ 이므로

$$f(2)g(1)=(2 \times 2+1) \times (1+1)^2$$

$$=5 \times 4=20$$

답 20

028

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 2^0 = 1, (\text{우변}) = 2^1 - 1 = 1$$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1+2+2^2+\dots+2^{k-1}=2^k-1$$

위의 식의 양변에 $\boxed{2^k}$ 을 더하면

$$1+2+2^2+\dots+2^{k-1}+\boxed{2^k}=2^k-1+2^k \\ = 2 \times 2^k - 1 \\ = \boxed{(2^k)2^{k+1}-1}$$

즉, 주어진 등식은 $n=k+1$ 일 때에도 성립한다.

(i), (ii)에서 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

$$\therefore \textcircled{㉠}: 2^k, \textcircled{㉡}: 2^{k+1}-1$$

따라서 $f(k)=2^k, g(k)=2^{k+1}-1$ 이므로

$$f(1)+g(1)=2+(2^2-1)=5$$

답 5

029

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}, (\text{우변}) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

위의 식의 양변에 $\boxed{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}$ 을 더하면

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \boxed{\textcircled{7b}} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k}{k+1} + \boxed{\textcircled{7b}} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \boxed{\textcircled{7b}} \frac{k+1}{k+2}
\end{aligned}$$

즉, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

$$\therefore \textcircled{7b}: \frac{1}{(k+1)(k+2)}, \textcircled{7b}: \frac{k+1}{k+2}$$

따라서 $\textcircled{7b}$, $\textcircled{7b}$ 에 알맞은 식을 차례대로 나열한 것은 ④이다.

답 ④

030

(i) $n=4$ 일 때

$$(\text{좌변})=2^4=16, (\text{우변})=4^2=16$$

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 4$)일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 하면

$$2^k \geq k^2$$

위의 식의 양변에 $\boxed{\textcircled{7b}} 2$ 를 곱하면

$$\boxed{\textcircled{7b}} 2 \times 2^k \geq \boxed{\textcircled{7b}} 2 \times k^2$$

이때

$$\boxed{\textcircled{7b}} 2 \times k^2 - (k+1)^2 = 2k^2 - (k^2 + 2k + 1) = \boxed{\textcircled{7b}} k^2 - 2k - 1$$

이고, $k^2 - 2k - 1 = (k-1)^2 - 2$ 는 $k \geq 4$ 일 때 $k=4$ 에서 최솟값 7을 갖는다.

$$\therefore \boxed{\textcircled{7b}} k^2 - 2k - 1 \geq 0$$

따라서 $\boxed{\textcircled{7b}} 2 \times 2^k \geq (k+1)^2$ 이므로

$$2^{k+1} \geq (k+1)^2$$

즉, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 주어진 부등식은 $n \geq 4$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

$$\therefore \textcircled{7b}: 2, \textcircled{7b}: k^2 - 2k - 1$$

따라서 $a=2, f(k)=k^2-2k-1$ 이므로

$$f(a)=f(2)=2^2-2 \times 2-1=-1$$

답 ③

$$a_{3n-1}=2a_n+1 \text{에서 } n=4 \text{일 때}$$

$$a_{11}=2a_4+1=2 \times 2+1=5$$

$$a_{3n}=-a_n+2 \text{에서 } n=4 \text{일 때}$$

$$a_{12}=-a_4+2=-2+2=0$$

$$a_{3n+1}=a_n+1 \text{에서 } n=4 \text{일 때}$$

$$a_{13}=a_4+1=2+1=3$$

$$\therefore a_{11}+a_{12}+a_{13}=5+0+3=8$$

답 ③

02

$a_{n+1}-3=a_n$ 에서 $a_{n+1}=a_n+3$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 -32 , 공차가 3인 등차수열이다.

$$\therefore a_n = -32 + (n-1) \times 3 = 3n - 35$$

$a_n > 0$ 에서

$$3n - 35 > 0, 3n > 35$$

$$\therefore n > 11, \dots$$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제12항이다.

답 ⑤

03

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

이때 첫째항이 -4 , 공차가 $-2 - (-4) = 2$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{10\{2 \times (-4) + 9 \times 2\}}{2} = \frac{10 \times 10}{2} = 50$$

답 50

다른 풀이

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 -4 , 공차가 2인 등차수열이므로

$$a_n = -4 + (n-1) \times 2 = 2n - 6$$

$$\therefore a_{10} = 14$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{10(-4+14)}{2} = 50$$

04

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\sqrt{3}$ 인 등비수열이므로

$$a_n = (\sqrt{3})^{n-1}$$

$$a_n \geq 250 \text{에서 } (\sqrt{3})^{n-1} \geq 250$$

$$\text{이때 } (\sqrt{3})^{10} = 3^5 = 243, (\sqrt{3})^{11} = 243\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$n-1 \geq 11 \quad \therefore n \geq 12$$

따라서 처음으로 250 이상이 되는 항은 제12항이다.

답 ②

참고

$(\sqrt{3})^{10} = 243, (\sqrt{3})^{12} = 729$ 로 생각해 $n-1 \geq 12$ 라고 생각하지 않도록 주의한다.

05

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

공비를 r ($r > 0$)라고 하면 $\rightarrow$ 이항하는 두 항의 비가 일정하므로 등비수열이다.

 실력을 높이는 연습 문제

본문 163쪽

01

$a_{3n+1}=a_n+1$ 에서 $n=1$ 일 때

$$a_4=a_1+1=1+1=2$$

$$a_3 = a_1 r^2 = 4r^2 = 100$$

$$r^2 = 25 \quad \therefore r = 5 \quad (\because r > 0)$$

$$\therefore a_n = 4 \times 5^{n-1}$$

이때

$$\frac{a_{17}}{a_{12}} = \frac{4 \times 5^{16}}{4 \times 5^{11}} = 5^5 = k^k$$

이므로

$$k = 5$$

답 ④

06

$a_{n+1} = a_n + 1 - n$ 에서 $a_{n+1} - a_n = -n + 1$ 이므로 양변에 n 대신 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= -1 + 1 \\ a_3 - a_2 &= -2 + 1 \\ a_4 - a_3 &= -3 + 1 \\ &\vdots \\ +) a_n - a_{n-1} &= -(n-1) + 1 \\ \hline a_n - a_1 &= \sum_{k=1}^{n-1} (-k + 1) \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-k + 1)$$

이때 $a_1 = 5$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-k + 1) \\ &= 5 - \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) \\ &= \frac{-n^2 + 3n + 8}{2} \\ \therefore a_{10} &= \frac{-10^2 + 3 \times 10 + 8}{2} = -31 \end{aligned}$$

답 ①

07

$a_{n+1} = a_n + f(n)$ 에서 $f(n) = a_{n+1} - a_n$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(k) &= \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) \\ &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) \\ &= a_{n+1} - a_1 \end{aligned}$$

즉, $a_{n+1} - a_1 = 2^n - 1$ 이고 $a_1 = 1$ 이므로

$$a_{n+1} - 1 = 2^n - 1$$

$$\therefore a_{n+1} = 2^n$$

따라서 $n=5$ 일 때

$$a_6 = 2^5 = 32$$

답 ④

참고

$a_{n+1} = 2^n$ 의 양변에 n 대신 $n-1$ 을 대입하면

$$a_n = 2^{n-1}$$

08

$(2n-1)a_{n+1} = (2n+1)a_n$ 에서 $a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n-1}a_n$ 이므로 양변에 n

대신 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2 = \frac{3}{1}a_1$$

$$a_3 = \frac{5}{3}a_2$$

$$a_4 = \frac{7}{5}a_3$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} \times) a_n &= \frac{2n-1}{2n-3}a_{n-1} \\ \hline a_n &= \frac{3}{1} \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{5} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n-3}a_1 \\ &= (2n-1)a_1 \end{aligned}$$

이때 $a_1 = 1$ 이므로 $a_n = 2n-1$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^5 a_k &= \sum_{k=1}^5 (2k-1) = 2 \sum_{k=1}^5 k - 1 \times 5 \\ &= 2 \times \frac{5 \times 6}{2} - 5 = 25 \end{aligned}$$

답 ③

09

$a_{n+1} = 3^n a_n$ 의 양변에 n 대신 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned} a_2 &= 3^1 a_1 \\ a_3 &= 3^2 a_2 \\ a_4 &= 3^3 a_3 \\ &\vdots \\ \times) a_n &= 3^{n-1} a_{n-1} \\ \hline a_n &= 3^1 \times 3^2 \times 3^3 \times \cdots \times 3^{n-1} \times a_1 \\ &= 3^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \times 3 \\ &= 3^{\frac{n(n-1)}{2}} \times 3 \\ &= 3^{\frac{n(n-1)}{2} + 1} \\ &= 3^{\frac{n^2 - n + 2}{2}} \end{aligned}$$

$a_k = 3^7$ 이므로

$$3^{\frac{k^2 - k + 2}{2}} = 3^7, \quad \frac{k^2 - k + 2}{2} = 7$$

$$k^2 - k + 2 = 14, \quad k^2 - k - 12 = 0$$

$$(k+3)(k-4) = 0 \quad \therefore k = 4 \quad (\because k \text{는 자연수})$$

답 ①

10

문제 접근하기

관계식으로부터 수열 $\{a_n\}$ 의 특징을 파악하기 어려운 경우에는 주어진 식의 양변에 n 대신 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하여 항을 구한다.

$a_{n+1} = 2a_n - 2$ 의 양변에 n 대신 1, 2, 3, 4, 5, 6을 차례대로 대입하면

$$a_2 = 2a_1 - 2 = 2 \times 3 - 2 = 4$$

$$a_3 = 2a_2 - 2 = 2 \times 4 - 2 = 6$$

$$a_4 = 2a_3 - 2 = 2 \times 6 - 2 = 10$$

$$a_5 = 2a_4 - 2 = 2 \times 10 - 2 = 18$$

$$a_6 = 2a_5 - 2 = 2 \times 18 - 2 = 34$$

$$a_7 = 2a_6 - 2 = 2 \times 34 - 2 = 66$$

따라서 $a_7 = 66$ 이다.

답 66

11

수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \text{이므로 } S_n = a_{n+1} + 1 \text{에서}$$

$$S_n = S_{n+1} - S_n + 1 \quad \therefore S_{n+1} = 2S_n - 1$$

$S_{n+1} = 2S_n - 1$ 의 양변에 n 대신 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$S_2 = 2S_1 - 1 = 2 \times 2 - 1 = 3 \quad (\because S_1 = a_1 = 2)$$

$$S_3 = 2S_2 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$$

$$S_4 = 2S_3 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$$

$$S_5 = 2S_4 - 1 = 2 \times 9 - 1 = 17$$

따라서 $S_5 = 17$ 이다.

답 ②

12

$(n+1)$ 일 후에는 n 일 후 살아 있는 미생물의 $\frac{40}{100}$, 즉 $\frac{2}{5}$ 가 죽고

나머지 $\frac{3}{5}$ 이 각각 2마리로 분열하므로

$$a_{n+1} = \frac{3}{5}a_n \times 2 = \frac{6}{5}a_n$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{6}{5}$ 인 등비수열이다.

이때 $a_1 = 12500 \times \frac{6}{5} = 15000$ 이므로

$$a_n = 15000 \times \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1}$$

따라서 5일 후 살아 있는 미생물의 수는

$$a_5 = 15000 \times \left(\frac{6}{5}\right)^4 = 31104$$

답 ⑤

13

조건 (가)에 의하여 $p(1)$ 이 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(3)$ 과 $p(6)$ 이 참이다.

$p(3)$ 이 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(5)$ 와 $p(8)$ 이 참이다.

$p(5)$ 가 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(7)$ 과 $p(10)$ 이 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ①이다.

답 ①

14

(i) $n=1$ 일 때, $3^2-1=8$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 명제가 참이라고 가정하면

$$3^{2k}-1=8m \quad (\text{단, } m \text{은 자연수이다.})$$

$$\therefore 3^{2k} = \boxed{(가) 8m+1}$$

$n=k+1$ 일 때

$$3^{2(k+1)}-1=9 \times 3^{2k}-1$$

$$=9 \times \boxed{(가) 8m+1} - 1$$

$$=72m+8$$

$$=8 \times \boxed{(나) 9m+1}$$

즉, 주어진 명제는 $n=k+1$ 일 때에도 참이다.

(i), (ii)에서 주어진 명제는 모든 자연수 n 에 대하여 참이다.

$$\therefore (가): 8m+1, (나): 9m+1$$

따라서 (가), (나)에 알맞은 식을 차례대로 나열한 것은 ①이다.

답 ①

15

문제 접근하기

2^m 과 2^{-m} 에 관련된 항을 분류하여 묶어 $n=m+1$ 일 때 (*)인 형태가 나오도록 정리한다.

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = a_1 = 3, (\text{우변}) = 3$$

이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m}$$

이다.

$n=m+1$ 일 때

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} a_k &= \sum_{k=1}^m a_k + a_{m+1} \\ &= 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m} \\ &\quad + \{2^{2(m+1)} - 1\} \times 2^{(m+1)m} + m \times 2^{-(m+1)} \\ &= 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m} \\ &\quad + (2^{2m+2} - 1) \times \boxed{(가) 2^{m(m+1)}} + m \times 2^{-m-1} \\ &= \{2^{m(m+1)} + (2^{2m+2} - 1) \times 2^{m(m+1)}\} \\ &\quad + \{-(m+1) \times 2^{-m} + m \times 2^{-m-1}\} \\ &= 2^{m(m+1)} \{1 + (2^{2m+2} - 1)\} + 2^{-m} \left\{ -(m+1) + \frac{m}{2} \right\} \\ &= \boxed{(가) 2^{m(m+1)}} \times \boxed{(나) 2^{2m+2}} - \frac{m+2}{2} \times 2^{-m} \\ &= 2^{m(m+1)+2(m+1)} - (m+2) \times 2^{-1} \times 2^{-m} \\ &= 2^{(m+1)(m+2)} - (m+2) \times 2^{-(m+1)} \end{aligned}$$

이다.

따라서 $n=m+1$ 일 때에도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1) \times 2^{-n}$$

이다.

$$\therefore (가): 2^{m(m+1)}, (나): 2^{2m+2}$$

따라서 $f(m) = 2^{m(m+1)}, g(m) = 2^{2m+2}$ 이므로

$$\frac{g(7)}{f(3)} = \frac{2^{2 \times 7 + 2}}{2^{3 \times 4}} = \frac{2^{16}}{2^{12}} = 2^4 = 16$$

답 ④