

풍산짜

공통수학 1

정답과 풀이

$$\begin{array}{r}
 (2) \quad x^2+0 \times x+2 \overline{) x^3+2x^2+2x+2} \\
 \underline{x^3+0 \times x^2+2x} \\
 2x^2+0 \times x+2 \\
 \underline{2x^2+0 \times x+4} \\
 -2
 \end{array}$$

∴ 몫: $x+2$, 나머지: -2

답 (1) 몫: $3x+1$, 나머지: $-13x$

(2) 몫: $x+2$, 나머지: -2

● 필수 확인 문제

20쪽

015

$3A-X=2(A+B)$ 를 정리하여 X 를 A, B 로 나타내면

$$3A-X=2(A+B)$$

$$3A-X=2A+2B$$

$$\therefore X=A-2B$$

A, B 를 대입하면

(주어진 식)

$$=(3x^2+5xy-y^2)-2(-x^2+2xy+4y^2)$$

$$=3x^2+5xy-y^2+2x^2-4xy-8y^2$$

$$=5x^2+xy-9y^2 \quad \text{답 } 5x^2+xy-9y^2$$

016

x^3 의 계수는 다음과 같이 4가지 곱셈에 의하여 구할 수 있다.

$$\begin{array}{r}
 (2+x-4x^2+6x^3+x^4)(2+x-4x^2+6x^3+x^4) \\
 \begin{array}{l}
 \boxed{12x^3} \\
 \boxed{-4x^3} \\
 \boxed{-4x^3} \\
 \boxed{12x^3}
 \end{array}
 \end{array}$$

따라서 x^3 의 계수는

$$12+(-4)+(-4)+12=16$$

답 16

017

$(x^3+ax-3)(x^2+bx+3)$ 을 전개하였을 때 x^2 항과 x^3 항이 나오는 부분만 계산하면

$$ax \times bx + (-3) \times x^2 = (ab-3)x^2$$

$$x^3 \times 3 + ax \times x^2 = (3+a)x^3$$

x^2 과 x^3 의 계수가 모두 0이어야 하므로

$$ab-3=0, 3+a=0$$

$$\therefore a=-3, b=-1$$

$$\therefore a-b=-3-(-1)=-2$$

답 -2

018

(주어진 식)

$$=(12x^2-9xy) \times \left(-\frac{1}{3x}\right) - (8y^2-8xy) \times \frac{1}{2y}$$

$$=-\frac{12x^2}{3x} + \frac{9xy}{3x} - \frac{8y^2}{2y} + \frac{8xy}{2y}$$

$$=-4x+3y-4y+4x$$

$$=-y$$

답 $-y$

다른 풀이

$$(주어진 식) = \frac{12x^2-9xy}{-3x} - \frac{8y^2-8xy}{2y}$$

$$=-4x+3y-(4y-4x)$$

$$=-4x+3y-4y+4x$$

$$=-y$$

019

$$(x^2-a)bx=3x^3-3x \text{ 이므로}$$

$$bx^3-abx=3x^3-3x$$

$$\therefore a=1, b=3$$

따라서 $3x^3+5x^2+2$ 를 x^2-1 로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r}
 3x+5 \\
 x^2+0 \times x-1 \overline{) 3x^3+5x^2+0 \times x+2} \\
 \underline{3x^3+0 \times x^2-3x} \\
 5x^2+3x+2 \\
 \underline{5x^2+0 \times x-5} \\
 3x+7
 \end{array}$$

$$\therefore c=5, d=3, e=7$$

$$\therefore a+b+c+d+e=1+3+5+3+7=19$$

답 19

020

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)$ 에서 임의의 5개의 일차식에서는 x 항을, 나머지 1개의 일차식에서는 상수항을 선택하여 곱하면 x^5 항이 되므로 이 식의 전개식에서 x^5 항은

$$x^5 \times 6 + x^5 \times 5 + x^5 \times 4 + x^5 \times 3 + x^5 \times 2 + x^5 \times 1$$

$$=(1+2+3+4+5+6)x^5$$

$$=21x^5$$

따라서 x^5 의 계수는 21이다.

답 21

022

(1) (주어진 식)

$$= x^3 + (2+3+4)x^2 + (2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 2)x + 2 \times 3 \times 4$$

$$= x^3 + 9x^2 + 26x + 24$$

(2) (주어진 식) $= a^2 + (-b)^2 + (-c)^2 + 2 \times a \times (-b) + 2 \times (-b) \times (-c) + 2 \times (-c) \times a$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$$

(3) (주어진 식) $= x^3 + 3 \times x^2 \times 1 + 3 \times x \times 1^2 + 1^3$

$$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

(4) (주어진 식) $= (x-3)(x^2+3x+3^2)$

$$= x^3 - 3^3$$

$$= x^3 - 27$$

(5) (주어진 식)

$$= (a+b+2)(a^2+b^2+2^2-ab-2b-2a)$$

$$= a^3+b^3+2^3-3 \times a \times b \times 2$$

$$= a^3+b^3-6ab+8$$

(6) (주어진 식) $= (x^2+x+1^2)(x^2-x+1^2)$

$$= x^4+x^2 \times 1^2+1^4$$

$$= x^4+x^2+1$$

답 (1) $x^3+9x^2+26x+24$

(2) $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

(3) x^3+3x^2+3x+1

(4) x^3-27

(5) $a^3+b^3-6ab+8$

(6) x^4+x^2+1

다른 풀이

(6) (주어진 식) $= \{(x^2+1)+x\}\{(x^2+1)-x\}$

$$= (x^2+1)^2 - x^2$$

$$= (x^2)^2 + 2x^2 + 1 - x^2$$

$$= x^4 + x^2 + 1$$

024

(1) $x^2+3x=t$ 로 놓으면

(주어진 식) $= (t+1)(t-2)$

$$= t^2 - t - 2$$

$$= (x^2+3x)^2 - (x^2+3x) - 2$$

$$= x^4 + 6x^3 + 9x^2 - x^2 - 3x - 2$$

$$= x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 3x - 2$$

(2) [1단계] 공통부분이 생기도록 둘씩 조를 짜 전개하면 (주어진 식)

$$= \{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}$$

$$= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$$

[2단계] $x^2+5x=t$ 로 놓으면

(주어진 식)

$$= (t+4)(t+6)$$

$$= t^2 + 10t + 24$$

$$= (x^2+5x)^2 + 10(x^2+5x) + 24$$

$$= x^4 + 10x^3 + 25x^2 + 10x^2 + 50x + 24$$

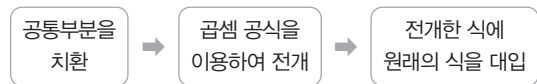
$$= x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$$

답 (1) $x^4+6x^3+8x^2-3x-2$

(2) $x^4+10x^3+35x^2+50x+24$

참고

주어진 식에 공통부분이 있는 식은 다음과 같은 순서로 전개한다.



026

10의 거듭제곱을 기준으로 좌변을 변형하여 전개하면

(좌변) $= (10-1)(10+1)(100+1)(10000+1)$

$$= (10-1)(10+1)(10^2+1)(10^4+1)$$

$$= (10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)$$

$$= (10^4-1)(10^4+1)$$

$$= 10^8-1$$

즉, $10^8-1=10^a-1$ 이므로

$$a=8$$

답 8

028

(1) (주어진 식) $= (a+b)^2 - 2ab$

$$= 2^2 - 2 \times (-1)$$

$$= 6$$

(2) (주어진 식) $= (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

$$= 2^3 - 3 \times (-1) \times 2$$

$$= 14$$

(3) (1)에서 $a^2+b^2=6$ 이므로

(주어진 식) $= (a^2)^2 + (b^2)^2$

$$= (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2$$

$$= 6^2 - 2 \times (-1)^2$$

$$= 34$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad (a-b)^2 &= (a+b)^2 - 4ab \\
 &= 2^2 - 4 \times (-1) \\
 &= 8 \\
 \therefore a-b &= \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad (\because a > b)
 \end{aligned}$$

답 (1) 6 (2) 14 (3) 34 (4) $2\sqrt{2}$

030

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= (a+b)^2 - 2ab \text{에서} \\
 8 &= 2^2 - 2ab, \quad 2ab = -4 \\
 \therefore ab &= -2 \\
 \therefore a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\
 &= 2^3 - 3 \times (-2) \times 2 \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

답 20

032

$$\begin{aligned}
 (1) \quad a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\
 &= 3^2 - 2 \times (-1) \\
 &= 11
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (1) \text{에서 } a^2 + b^2 + c^2 &= 11 \text{이므로} \\
 a^3 + b^3 + c^3 &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\
 &= 3 \times \{11 - (-1)\} + 3 \times (-3) \\
 &= 27
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &= (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \\
 &= (ab+bc+ca)^2 - 2(ab^2c + bc^2a + ca^2b) \\
 &= (ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c) \\
 &= (-1)^2 - 2 \times (-3) \times 3 \\
 &= 19
 \end{aligned}$$

답 (1) 11 (2) 27 (3) 19

034

$$\begin{aligned}
 (1) \quad a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \text{에서} \\
 6 &= 4^2 - 2(ab+bc+ca) \\
 2(ab+bc+ca) &= 10 \\
 \therefore ab+bc+ca &= 5
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (1) \text{에서 } ab+bc+ca &= 5 \text{이므로} \\
 a^3 + b^3 + c^3 &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\
 &= 4 \times (6 - 5) + 3 \times 2 \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{5}{2}$ (2) 10

036

$$\begin{aligned}
 x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \text{에서} \\
 3 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2, \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 5
 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } x > 0 \text{이므로 } x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\
 &= (\sqrt{5})^3 - 3\sqrt{5} \\
 &= 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} \\
 &= 2\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

답 $2\sqrt{5}$

+ 풍산자 방법

분수의 꼴의 곱셈 공식의 변형

$$(1) \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4, \\
 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right), \\
 x^3 - \frac{1}{x^3} &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right)
 \end{aligned}$$

038

상자의 가로 길이, 세로 길이, 높이를 각각 a, b, c 라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 24이므로

$$4(a+b+c) = 24$$

$$\therefore a+b+c = 6$$

또, 상자의 겉넓이가 22이므로

$$2(ab+bc+ca) = 22$$

$$\therefore ab+bc+ca = 11$$

따라서 상자의 대각선의 길이는

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} &= \sqrt{(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)} \\
 &= \sqrt{6^2 - 2 \times 11} = \sqrt{14}
 \end{aligned}$$

답 $\sqrt{14}$

필수 확인 문제

28쪽

039

$$\begin{aligned}
 ① \quad (2x-3)^3 &= (2x)^3 - 3 \times (2x)^2 \times 3 + 3 \times 2x \times 3^2 - 3^3 \\
 &= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ② \quad (5x-y)(25x^2+5xy+y^2) &= (5x)^3 - y^3 \\
 &= 125x^3 - y^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad & (x+y-3z)(x^2+y^2+9z^2-xy+3yz+3zx) \\ &= x^3+y^3+(-3z)^3-3 \times x \times y \times (-3z) \\ &= x^3+y^3-27z^3+9xyz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad & (4x-y+2z)^2 \\ &= (4x)^2+(-y)^2+(2z)^2+2 \times 4x \times (-y) \\ &\quad +2 \times (-y) \times 2z+2 \times 2z \times 4x \\ &= 16x^2+y^2+4z^2-8xy-4yz+16xz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad & (x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2) \\ &= \{x^2+x \times 3y+(3y)^2\} \{x^2-x \times 3y+(3y)^2\} \\ &= x^4+x^2 \times (3y)^2+(3y)^4 \\ &= x^4+9x^2y^2+81y^4 \end{aligned}$$

답 ⑤

040

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} \text{에서}$$

$$3 = \frac{6}{ab} \quad \therefore ab = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} &= \frac{a^2+b^2}{ab} \\ &= \frac{(a+b)^2-2ab}{ab} \\ &= \frac{6^2-2 \times 2}{2} \\ &= \frac{32}{2} = 16 \end{aligned}$$

답 16

041

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \text{에서} \\ 10 &= 4^2-2(ab+bc+ca), \quad 2(ab+bc+ca) = 6 \\ \therefore ab+bc+ca &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{ab+bc+ca}{abc} \\ &= \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 $-\frac{1}{3}$

042

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \text{에서} \\ 2^2 &= 6+2(ab+bc+ca), \quad 2(ab+bc+ca) = -2 \\ \therefore ab+bc+ca &= -1 \\ a^3+b^3+c^3 &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc \\ &\text{에서} \\ 8 &= 2 \times \{6-(-1)\}+3abc, \quad 3abc = -6 \\ \therefore abc &= -2 \end{aligned}$$

답 -2

043

오른쪽 그림과 같이 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 a cm, b cm라 하면 둘레의 길이가 32 cm이므로

$$2(a+b) = 32$$

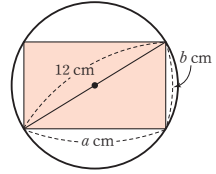
$$\therefore a+b = 16$$

또, 외접하는 원의 지름의 길이가 $2 \times 6 = 12$ (cm)이므로 $a^2+b^2 = 144$

따라서 직사각형의 넓이는

$$\begin{aligned} ab &= \frac{1}{2} \{ (a+b)^2 - (a^2+b^2) \} \\ &= \frac{1}{2} (16^2 - 144) \\ &= 56 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

답 56 cm^2



044

$x^2-4x-1=0$ 에서 $x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면

$$x-4-\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x-\frac{1}{x}=4$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3-3x^2+5x-\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3} &= \left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x-\frac{1}{x}\right) \\ &= \left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\} \\ &\quad -3\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right]+5\left(x-\frac{1}{x}\right) \\ &= (4^3+3 \times 4)-3(4^2+2)+5 \times 4 \\ &= 76-54+20=42 \end{aligned}$$

답 42

● 실전 연습문제

30~32쪽

045

$$2A+B=3x^2+5xy-2y^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$A-B=7xy-4y^2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦+⑧을 하면

$$3A=3x^2+12xy-6y^2$$

$$\therefore A=x^2+4xy-2y^2$$

이것을 ⑧에 대입하면

$$(x^2+4xy-2y^2)-B=7xy-4y^2$$

$$\begin{aligned}
\therefore B &= (x^2 + 4xy - 2y^2) - (7xy - 4y^2) \\
&= x^2 - 3xy + 2y^2 \\
A - 2(X - B) &= 9A \text{에서 } A - 2X + 2B = 9A \text{이므로} \\
-2X &= 8A - 2B \\
\therefore X &= -4A + B \\
&= -4(x^2 + 4xy - 2y^2) + (x^2 - 3xy + 2y^2) \\
&= -4x^2 - 16xy + 8y^2 + x^2 - 3xy + 2y^2 \\
&= -3x^2 - 19xy + 10y^2
\end{aligned}$$

답 $-3x^2 - 19xy + 10y^2$

046

$$\begin{aligned}
&(x-3)^3(2x+1)^2 \\
&= (x^3 - 9x^2 + 27x - 27)(4x^2 + 4x + 1)
\end{aligned}$$

이 식을 전개하였을 때 x^3 항이 나오는 부분만 계산하면
 $x^3 \times 1 + (-9x^2) \times 4x + 27x \times 4x^2$
 $= x^3 - 36x^3 + 108x^3$
 $= 73x^3$
따라서 x^3 의 계수는 73이다.

답 73

047

$$\begin{aligned}
&(x^2 - x + 2)^3 \\
&= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 \dots\dots \textcircled{7} \\
&\quad (a_0, a_1, \dots, a_6 \text{은 상수})
\end{aligned}$$

이라 하면 우변의 다항식에서 모든 항의 계수의 합은

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

이므로 ⑦의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$(1^2 - 1 + 2)^3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

따라서 구하는 모든 항의 계수의 합은

$$2^3 = 8$$

답 8

✚ 풍산자 방법

$$\begin{aligned}
\text{다항식 } f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \\
&\quad (n \text{은 자연수, } a_0, a_1, \dots, a_n \text{은 상수})
\end{aligned}$$

의 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

이때 $f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 이므로 다항식 $f(x)$ 의 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은 $f(1)$ 이다.

048

$$\begin{aligned}
x^4 - 3x^2 - 2x + 6 &= (x^2 + x - 2)f(x) - 4x + 6 \text{이므로} \\
(x^2 + x - 2)f(x) &= x^4 - 3x^2 + 2x
\end{aligned}$$

따라서 $f(x)$ 는 $x^4 - 3x^2 + 2x$ 를 $x^2 + x - 2$ 로 나눈 몫이다.

$$\begin{array}{r}
x^2 - x \\
x^2 + x - 2 \overline{) x^4 + 0 \times x^3 - 3x^2 + 2x} \\
\underline{x^4 + \quad x^3 - 2x^2} \\
- \quad x^3 - \quad x^2 + 2x \\
\underline{- \quad x^3 - \quad x^2 + 2x} \\
0
\end{array}$$

$$\therefore f(x) = x^2 - x$$

답 ④

049

공통부분이 생기도록 둘씩 조를 짜 전개하면

$$\begin{aligned}
&(x-7)(x-4)(x-2)(x+1) \\
&= \{(x-7)(x+1)\} \{(x-4)(x-2)\} \\
&= (x^2 - 6x - 7)(x^2 - 6x + 8)
\end{aligned}$$

$$x^2 - 6x = t \text{로 놓으면}$$

(주어진 식)

$$= (t-7)(t+8)$$

$$= t^2 + t - 56$$

$$= (x^2 - 6x)^2 + (x^2 - 6x) - 56$$

$$= x^4 - 12x^3 + 36x^2 + x^2 - 6x - 56$$

$$= x^4 - 12x^3 + 37x^2 - 6x - 56$$

따라서 $a = -12$, $b = 37$, $c = -6$ 이므로

$$a + b - c = -12 + 37 - (-6) = 31$$

답 31

050

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^4}\right)\left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \\
&= 2\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^4}\right)\left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \\
&= 2\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^4}\right)\left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \\
&= 2\left(1 - \frac{1}{2^4}\right)\left(1 + \frac{1}{2^4}\right)\left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \\
&= 2\left(1 - \frac{1}{2^8}\right)\left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \\
&= 2\left(1 - \frac{1}{2^{16}}\right) \\
&= 2 - \frac{1}{2^{15}}
\end{aligned}$$

$$\text{즉, } m - \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{15}} \text{이므로}$$

$$m = 2, n = 15$$

$$\therefore m + n = 17$$

답 17

051

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} &= \frac{x^3+y^3}{xy} = \frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{xy} \\ &= \frac{(\sqrt{2})^3 - 3 \times (-2) \times \sqrt{2}}{-2} \\ &= \frac{2\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}{-2} = -4\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 ②

052

$$a^2b^2 = (9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5}) = 81-80 = 1$$

$$a > 0, b > 0 \text{ 이므로 } ab = 1$$

$$a^2 + b^2 = (9-4\sqrt{5}) + (9+4\sqrt{5}) = 18$$

$$\text{따라서 } a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \text{ 에서}$$

$$18 = (a+b)^2 - 2 \times 1$$

$$\therefore (a+b)^2 = 20$$

$$\text{이때 } a+b > 0 \text{ 이므로}$$

$$a+b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

답 $2\sqrt{5}$

053

오른쪽 그림에서 $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{BF} = c$ 라 하면 직육

면체의 겉넓이가 146 이므로

$$2(ab+bc+ca) = 146$$

$$\therefore ab+bc+ca = 73$$

$$\begin{aligned}\overline{BG}^2 + \overline{GD}^2 + \overline{DB}^2 &= (b^2+c^2) + (a^2+c^2) + (a^2+b^2) \\ &= 2(a^2+b^2+c^2) = 158\end{aligned}$$

$$\text{이므로 } a^2+b^2+c^2 = 79$$

$$\begin{aligned}\therefore (a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2 + 2(ab+bc+ca) \\ &= 79 + 2 \times 73 = 225\end{aligned}$$

$$\text{이때 } a+b+c > 0 \text{ 이므로 } a+b+c = 15$$

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$$4(a+b+c) = 4 \times 15 = 60$$

답 60

054

$$(7+4a)^3 = A, (7-4a)^3 = B \text{ 로 놓으면}$$

$$\begin{aligned}\{(7+4a)^3 - (7-4a)^3\}^2 - \{(7+4a)^3 + (7-4a)^3\}^2 \\ = (A-B)^2 - (A+B)^2\end{aligned}$$

$$= -4AB$$

$$= -4(7+4a)^3(7-4a)^3$$

$$= -4\{(7+4a)(7-4a)\}^3$$

$$= -4(49-16a^2)^3$$

$$= -4(49-16 \times 3)^3$$

$$= -4 \times 1 = -4$$

답 -4

055

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$$= \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$

$$= \frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2) + (b^2-2bc+c^2) + (c^2-2ca+a^2)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$$

$$a-b=5$$

..... ㉠

$$b-c=4$$

..... ㉡

$$\text{㉠} + \text{㉡} \text{ 을 하면 } a-c=9 \quad \therefore c-a=-9$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \frac{1}{2}\{5^2+4^2+(-9)^2\}$$

$$= \frac{122}{2} = 61$$

답 61

056

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \text{ 에서}$$

$$20 = 6^2 - 2(ab+bc+ca) \quad \therefore ab+bc+ca = 8$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 4 \text{ 에서 } \frac{ab+bc+ca}{abc} = 4$$

$$\frac{8}{abc} = 4 \quad \therefore abc = 2$$

$$\therefore a^3+b^3+c^3$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) + 3abc$$

$$= 6 \times (20-8) + 3 \times 2$$

$$= 72 + 6 = 78$$

답 78

057

$$(1) x^5+y^5$$

$$= (x^2+y^2)(x^3+y^3) - x^2y^2(x+y)$$

$$= \{(x+y)^2-2xy\}\{(x+y)^3-3xy(x+y)\}$$

$$- (xy)^2(x+y)$$

$$= \{3^2-2 \times (-1)\} \times \{3^3-3 \times (-1) \times 3\}$$

$$- (-1)^2 \times 3$$

$$= 11 \times 36 - 3 = 393$$

$$(2) x^7+y^7$$

$$= (x^3+y^3)(x^4+y^4) - x^3y^3(x+y)$$

$$= \{(x+y)^3-3xy(x+y)\}\{(x^2+y^2)^2-2x^2y^2\}$$

$$- (xy)^3(x+y)$$

$$= \{(x+y)^3-3xy(x+y)\}$$

$$\times [\{(x+y)^2-2xy\}^2 - 2(xy)^2] - (xy)^3(x+y)$$

$$= \{3^3-3 \times (-1) \times 3\}$$

$$\times [\{3^2-2 \times (-1)\}^2 - 2 \times (-1)^2] - (-1)^3 \times 3$$

$$= 36 \times (11^2-2) + 3 = 4287$$

답 (1) 393 (2) 4287

058

조건 ㉓에서 $x^2 + y^2 = p$ 이므로

$$p = (x+y)^2 - 2xy \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

조건 ㉔에서 $x^3 + y^3 = q(x+y)$ 이므로

$$q(x+y) = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$

 $x+y \neq 0$ 이므로 위 식의 양변을 $x+y$ 로 나누면

$$q = (x+y)^2 - 3xy \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

 $\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 조건 ㉔의 식 $3p - 2q = 36$ 에 대입하면

$$3\{(x+y)^2 - 2xy\} - 2\{(x+y)^2 - 3xy\} = 36$$

$$(x+y)^2 = 36$$

이때 $x+y > 0$ 이므로 $x+y=6$ 따라서 두 자연수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)이므로 그 개수는 5이다. 답 5

059

주어진 그림과 같이 직육면체를 8등분했을 때, 하나의 직육면체의 가로 길이, 세로 길이, 높이는 각각

$$x+3, \frac{1}{4}(x+3), \frac{1}{2}(x+3)$$

이때 하나의 직육면체를 포장하는 데 필요한 포장지의 넓이는

$$2\left\{\frac{1}{2}(x+3)^2 + \frac{1}{4}(x+3)^2 + \frac{1}{8}(x+3)^2\right\}$$

$$= \frac{7}{4}(x+3)^2$$

따라서 8개의 직육면체를 포장하는 데 필요한 포장지의 넓이는

$$\begin{aligned} 8 \times \frac{7}{4}(x+3)^2 &= 14(x+3)^2 \\ &= 14(x^2 + 6x + 9) \\ &= 14x^2 + 84x + 126 \end{aligned}$$

즉, $a=14, b=84, c=126$ 이므로

$$a+b+c=14+84+126=224 \quad \text{답 224}$$

060

 $\overline{CH}=1$ 이고 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{4}{3}$ 이므로

$$(\text{삼각형 ABC의 넓이}) = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times 1 = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \overline{AB} = \frac{8}{3}$$

$$\overline{BH}=x \text{에서 } \overline{AH} = \overline{AB} - \overline{BH} = \frac{8}{3} - x$$

 $\triangle AHC \sim \triangle CHB$ 이므로

$$\overline{AH} : \overline{CH} = \overline{CH} : \overline{BH}, \overline{CH}^2 = \overline{AH} \times \overline{BH}$$

$$1^2 = \left(\frac{8}{3} - x\right)x, 3x^2 - 8x + 3 = 0$$

$$\therefore x = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$$0 < x < 1 \text{이므로 } x = \frac{4 - \sqrt{7}}{3}$$

 $3x^3 - 5x^2 + 4x + 7$ 을 다항식 $3x^2 - 8x + 3$ 으로 나누면

$$\begin{array}{r} x+1 \\ 3x^2-8x+3 \overline{) 3x^3-5x^2+4x+7} \\ \underline{3x^3-8x^2+3x} \\ 3x^2+x+7 \\ \underline{3x^2-8x+3} \\ 9x+4 \end{array}$$

이므로

$$\begin{aligned} 3x^3 - 5x^2 + 4x + 7 &= (3x^2 - 8x + 3)(x+1) + 9x+4 \\ &= 0 \times (x+1) + 9x+4 \\ &= 9 \times \frac{4 - \sqrt{7}}{3} + 4 \\ &= 16 - 3\sqrt{7} \end{aligned}$$

답 ④

2 항등식과 나머지 정리

1 항등식

34~41쪽

062

(1) 계수가 모두 0이 되어야 하므로

$$a+3=0, b-1=0, c+2=0$$

$$\therefore a=-3, b=1, c=-2$$

(2) 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$a=3, b=-2, c=-4$$

답 (1) $a=-3, b=1, c=-2$ (2) $a=3, b=-2, c=-4$

064

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$a(-1+1) - b(-1-1) = 2 \times (-1) - 4$$

$$2b = -6 \quad \therefore b = -3$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$a(1+1) - b(1-1) = 2 \times 1 - 4$$

$$2a = -2 \quad \therefore a = -1$$

답 $a=-1, b=-3$

다른 풀이

제수비교법을 이용하기 위해 좌변을 전개하여 정리하면

$$(a-b)x + (a+b) = 2x-4$$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$a-b=2, a+b=-4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=-1, b=-3$$

+ 풍산자 비법

수치대입법을 이용하여 미정계수를 구할 때, 미정계수의 개수만큼 항등식의 문자에 적당한 수를 대입한다.

066

(1) 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0=b \times (-1) \times (-2) \quad \therefore b=0$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$2=c \times 1 \times (-1) \quad \therefore c=-2$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$6=a \times 2 \times 1 \quad \therefore a=3$$

(2) 좌변을 전개하여 정리하면

$$ax^2 + (2-a)x - 2 = 3x^2 + bx + c$$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$a=3, 2-a=b, -2=c$$

$$\therefore a=3, b=-1, c=-2$$

(3) 양변의 최고차항의 계수를 비교하면 $a=1$

$$\text{즉, } x^2 + x + 1 = (x-1)^2 + b(x-1) + c \text{ 이므로}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면 $c=3$

양변에 $x=0$ 을 대입하면 $1=1-b+c$

$$1=1-b+3 \quad \therefore b=3$$

$$\text{답 (1) } a=3, b=0, c=-2$$

$$(2) a=3, b=-1, c=-2$$

$$(3) a=1, b=3, c=3$$

068

주어진 등식의 좌변을 k 에 대하여 정리하면

$$(a-4)k + (3a-b-3) = 0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$a-4=0, 3a-b-3=0$$

$$\therefore a=4, b=9$$

$$\text{답 } a=4, b=9$$

070

다항식의 전개식은 항등식이므로 x 에 어떤 값을 대입하여도 성립한다.

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$(2-5+3)^3 = a_{30} + a_{29} + a_{28} + \cdots + a_1 + a_0$$

$$\therefore a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{29} + a_{30} = 0$$

$$\text{답 } 0$$

072

주어진 나눗셈의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $4x-2$ 이므로

$$x^3 - ax^2 + b = (x^2 + x - 2)Q(x) + 4x - 2$$

$$\therefore x^3 - ax^2 + b = (x-1)(x+2)Q(x) + 4x - 2$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1 - a + b = 2$$

$$\therefore a - b = -1$$

$$\cdots \cdots \textcircled{7}$$

양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$-8 - 4a + b = -10$$

$$\therefore 4a - b = 2$$

$$\cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a=1, b=2$$

$$\text{답 } a=1, b=2$$

074

주어진 나눗셈의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나누어떨어지므로

$$2x^3 + x^2 + ax + b = (x^2 + x)Q(x)$$

$$\therefore 2x^3 + x^2 + ax + b = x(x+1)Q(x)$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$b=0$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $-2+1-a+b=0$

$$-1-a+0=0 \quad \therefore a=-1$$

$$\text{답 } a=-1, b=0$$

076

$x^3 - x^2 + ax + b = (x^2 - 2)Q(x) + x + 1$ 로 놓으면 좌변이 삼차식이므로 $Q(x)$ 는 일차식이어야 한다. x^3 의 계수가 1이므로 $x^3 - x^2 + ax + b$ 를 $x^2 - 2$ 로 나눈 몫을 $x+n$ (n 은 상수)이라 하면 나머지가 $x+1$ 이므로

$$x^3 - x^2 + ax + b = (x^2 - 2)(x+n) + x + 1$$

$$x^3 - x^2 + ax + b = x^3 + nx^2 - x - 2n + 1$$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$-1=n, a=-1, b=-2n+1$$

$$\therefore a=-1, b=3$$

$$\text{답 } a=-1, b=3$$

078

$2x^3 + ax^2 + 6x + b = (x^2 - x + 1)Q(x)$ 로 놓으면 좌변이 삼차식이므로 $Q(x)$ 는 일차식이어야 한다. x^3 의 계수가 2이므로 $2x^3 + ax^2 + 6x + b$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈

몫을 $2x+n$ (n 은 상수)이라 하면 나누어떨어지므로

$$2x^3+ax^2+6x+b=(x^2-x+1)(2x+n)$$

$$\therefore 2x^3+ax^2+6x+b$$

$$=2x^3+(n-2)x^2+(2-n)x+n$$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$a=n-2, 6=2-n, b=n$$

$$\therefore a=-6, b=-4 \quad \text{답 } a=-6, b=-4$$

필수 확인 문제

42쪽

079

(1) 우변을 전개하여 정리하면

$$x^3+ax^2-28=x^3+(b+c)x^2+(14+bc)x+14b$$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$a=b+c, 0=14+bc, -28=14b$$

$$\therefore a=5, b=-2, c=7$$

(2) 양변의 최고차항의 계수를 비교하면 $a=2$

$$\text{즉, } 2(x+3)^2(x-2)+b(x+3)=2x^3-cx^2 \text{이므로}$$

$$\text{양변에 } x=-3 \text{을 대입하면 } 0=-54-9c$$

$$\therefore c=-6$$

$$\text{양변에 } x=2 \text{를 대입하면 } 5b=16-4c$$

$$5b=16+24 \quad \therefore b=8$$

$$\text{답 (1) } a=5, b=-2, c=7$$

$$(2) a=2, b=8, c=-6$$

080

(1) 좌변을 x, y 에 대하여 정리하면

$$(a+b)x+(a-b)y+2=3x-5y+c$$

이 식이 x, y 에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$a+b=3, a-b=-5, c=2$$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$$a=-1, b=4, c=2$$

$$\therefore abc=-8$$

(2) 좌변을 k 에 대하여 정리하면

$$(2x+3y+5)k+(3x-y-9)=0$$

이 식이 k 에 대한 항등식이므로

$$2x+3y+5=0, 3x-y-9=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=2, y=-3$$

$$\therefore x+y=-1$$

$$\text{답 (1) } -8 \quad (2) -1$$

081

모든 실수 x 에 대하여

$$(x+2)(x-2)f(x)=x^4+ax^3+bx^2+8x \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

가 성립하므로 x 에 대한 항등식이다.

$\textcircled{A}$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $0=8a+4b+32$

$$\therefore 2a+b=-8 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$ 의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면 $0=-8a+4b$

$$\therefore -2a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{B}, \textcircled{C}$ 을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=-4 \quad \therefore ab=8$$

$$\text{답 } 8$$

082

$x-y=1$ 에서 $y=x-1$

이것을 주어진 등식에 대입하면

$$px^2+2qx+(x-1)^2-3x(x-1)-r(x-1)+6=0$$

$$\therefore (p-2)x^2+(2q+1-r)x+r+7=0$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$p-2=0, 2q+1-r=0, r+7=0$$

$$\therefore p=2, q=-4, r=-7$$

$$\therefore p+q-r=2+(-4)-(-7)=5$$

$$\text{답 } 5$$

083

$x^4+ax^2+9x+b=(x^2-2x+3)Q(x)+x-7$ 로 놓으

면 좌변이 사차식이므로 $Q(x)$ 는 이차식이어야 한다.

x^4 의 계수가 1이므로 x^4+ax^2+9x+b 를 x^2-2x+3 으

로 나눈 몫을 x^2+nx+m (n, m 은 상수)이라 하면 나

머지가 $x-7$ 이므로

$$x^4+ax^2+9x+b$$

$$=(x^2-2x+3)(x^2+nx+m)+x-7$$

$$\therefore x^4+ax^2+9x+b$$

$$=x^4+(n-2)x^3+(m-2n+3)x^2$$

$$+(-2m+3n+1)x+3m-7$$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$0=n-2, a=m-2n+3,$$

$$9=-2m+3n+1, b=3m-7$$

$$\therefore a=-2, n=2, m=-1, b=-10$$

$$\therefore ab=(-2) \times (-10)=20$$

$$\text{답 } 20$$

084

(1) 주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$4^3=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\therefore a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=64$$

(2) 주어진 등식의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$0 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 \quad \cdots \textcircled{L}$$

$\textcircled{M} + \textcircled{L}$ 을 하면

$$64 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + a_6)$$

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + a_6 = 32$$

답 (1) 64 (2) 32

2 나머지 정리

43~50쪽

086

$f(x) = x^2 - 3x + 1$ 로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$$(1) f(-1) = 1 + 3 + 1 = 5$$

$$(2) f(2) = 4 - 6 + 1 = -1$$

$$(3) f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{11}{4}$$

답 (1) 5 (2) -1 (3) $\frac{11}{4}$

088

$f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ 로 놓으면

(i) $x+1$ 로 나누어떨어지므로 $f(-1) = 0$ 에서

$$-1 - 3 - a + b = 0$$

$$\therefore a - b = -4 \quad \cdots \textcircled{A}$$

(ii) $x-1$ 로 나누면 나머지가 -4 이므로 $f(1) = -4$ 에서

$$1 - 3 + a + b = -4$$

$$\therefore a + b = -2 \quad \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -3, b = 1$$

답 $a = -3, b = 1$

090

$f(x)$ 를 $x^2 - 1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $2x + 3$ 이므로

$$f(x) = (x^2 - 1)Q(x) + 2x + 3$$

$$= (x+1)(x-1)Q(x) + 2x + 3$$

따라서 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지는

$$f(-1) = 0 - 2 + 3 = 1$$

답 1

다른 풀이

$f(x)$ 를 $x^2 - 1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $2x + 3$ 이므로

$$f(x) = (x^2 - 1)Q(x) + 2x + 3$$

$$= (x+1)(x-1)Q(x) + 2(x+1) + 1$$

$$= (x+1)\{(x-1)Q(x) + 2\} + 1$$

따라서 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지는 1이다.

092

[1단계] $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지가 5이므로

$$f(2) = 5$$

$f(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 나머지가 -5 이므로

$$f(-3) = -5$$

[2단계] $f(x)$ 를 $(x-2)(x+3)$ 으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x-2)(x+3)Q(x) + ax + b \quad \cdots \textcircled{A}$$

[3단계] $f(2) = 5, f(-3) = -5$ 이므로 $\textcircled{A}$ 의 양변에

$x=2$ 와 $x=-3$ 을 각각 대입하면

$$f(2) = 2a + b, f(-3) = -3a + b$$

$$\therefore 2a + b = 5, -3a + b = -5$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 2, b = 1$$

따라서 구하는 나머지는 $2x + 1$ 이다.

답 $2x + 1$

094

[1단계] $f(x)$ 를 $x^2 - 2x - 3$ 으로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $x - 1$ 이므로

$$f(x) = (x^2 - 2x - 3)Q(x) + x - 1$$

$$= (x+1)(x-3)Q(x) + x - 1$$

$$\therefore f(3) = 0 + 3 - 1 = 2$$

[2단계] $(x^2 + 1)f(x)$ 를 $x - 3$ 으로 나눈 나머지는

$(x^2 + 1)f(x)$ 에 $x=3$ 을 대입한 값이므로

$$(9 + 1)f(3) = 10 \times 2 = 20$$

답 20

096

[1단계] $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 몫이 $Q(x)$, 나머지가 1이므로

$$f(x) = (x+1)Q(x) + 1$$

$Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 2이므로

$$Q(1) = 2$$

[2단계] $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는

$$f(1) = (1+1)Q(1) + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$$

답 5

098

[1단계] $f(x)$ 를 $(x^2+2)(x-1)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(x) = \underbrace{(x^2+2)(x-1)Q(x)}_{\text{㉠}} + \underbrace{ax^2+bx+c}_{\text{㉡}}$$

[2단계] $f(x)$ 를 x^2+2 로 나눈 나머지가 $2x+1$ 이라면 ㉠은 x^2+2 로 나누어떨어지므로 ㉡을 x^2+2 로 나눈 나머지가 $2x+1$ 이어야 한다.
 $\therefore f(x) = (x^2+2)(x-1)Q(x) + a(x^2+2) + 2x+1$

[3단계] $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 6이므로

$$\begin{aligned} f(1) &= 6 \text{에서} \\ 3a+2+1 &= 6 \quad \therefore a=1 \\ \text{따라서 구하는 나머지는} \\ (x^2+2)+2x+1 &= x^2+2x+3 \end{aligned}$$

답 x^2+2x+3

100

$f(x)=x^3-2x+a$ 가 $x-1$ 로 나누어떨어져야 하므로
 $f(1)=0$ 에서
 $1-2+a=0 \quad \therefore a=1$

답 1

102

(1) $2x^3-x-1=2x^3+0 \times x^2-x-1$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ & & -2 & 2 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & 1 & -2 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $2x^2-2x+1$, 나머지: -2

(2) $x^4-2x+1=x^4+0 \times x^3+0 \times x^2-2x+1$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ & & 2 & 4 & 8 & 12 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 6 & 13 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^3+2x^2+4x+6 , 나머지: 13

답 (1) 몫: $2x^2-2x+1$, 나머지: -2

(2) 몫: x^3+2x^2+4x+6 , 나머지: 13

104

$2x-1=0$ 에서 $x=\frac{1}{2}$ 이므로 조립제법을 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & 3 & 6 & 5 \\ & & 1 & 2 & 4 \\ \hline & 2 & 4 & 8 & 9 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2x^3+3x^2+6x+5 &= \left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+4x+8)+9 \\ &= 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+2x+4)+9 \\ &= (2x-1)(x^2+2x+4)+9 \end{aligned}$$

$\therefore$ 몫: x^2+2x+4 , 나머지: 9

답 몫: x^2+2x+4 , 나머지: 9

106

우변을 $x-2$ 로 반복하여 묶으면

$$\begin{aligned} (x-2)\{a(x-2)^2+b(x-2)+c\}+d \\ \parallel \\ (x-2)\{a(x-2)+b\}+c \\ \parallel \\ (x-2)a+b \end{aligned}$$

따라서 $x-2$ 로 반복하여 나누면 나머지가 차례대로 d, c, b 의 값이 되고, 마지막의 몫이 a 의 값이 된다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ & & 2 & 4 & 12 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 6 & 15=d \\ & & 2 & 8 & \\ \hline 2 & 1 & 4 & 14=c \\ & & 2 & & \\ \hline & 1 & 6=b \\ & \parallel & & & \\ & a & & & \end{array}$$

$\therefore a=1, b=6, c=14, d=15$

답 $a=1, b=6, c=14, d=15$

다른 풀이

$x-2=y$ 로 놓으면 $x=y+2$ 이므로 주어진 항등식에서

$$(y+2)^3+2(y+2)+3=ay^3+by^2+cy+d$$

좌변을 전개하여 정리하면

$$y^3+6y^2+14y+15=ay^3+by^2+cy+d$$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$a=1, b=6, c=14, d=15$$

다른 풀이

양변의 최고차항의 계수를 비교하면 $1=a$ ㉠

양변에 $x=2$ 를 대입하면 $15=d$ ㉡

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$6=-a+b-c+d \quad \text{..... ㉢}$$

양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$36=a+b+c+d \quad \text{..... ㉣}$$

㉠, ㉡을 ㉢, ㉣에 대입하여 풀면

$$a=1, b=6, c=14, d=15$$

107

$f(x) = x^3 + ax^2 - 5x + 6$ 으로 놓으면

$$f(-1) = -1 + a + 5 + 6 = a + 10$$

$$f(2) = 8 + 4a - 10 + 6 = 4a + 4$$

$$f(-1) = f(2) \text{이므로 } a + 10 = 4a + 4$$

$$-3a = -6 \quad \therefore a = 2$$

따라서 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 6$ 이므로 $f(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 나머지는

$$f(-3) = -27 + 18 + 15 + 6 = 12 \quad \text{답 12}$$

108

$f(x)$ 를 $x+5$ 로 나눈 나머지가 -6 이므로

$$f(-5) = -6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$f(x)$ 를 x^2-4 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $3x+2$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-4)Q(x) + 3x+2 \\ &= (x+2)(x-2)Q(x) + 3x+2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

$f(x)$ 를 $x^2+3x-10$ 으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+3x-10)Q_1(x) + ax+b \\ &= (x+5)(x-2)Q_1(x) + ax+b \quad \dots\dots \textcircled{㉢} \end{aligned}$$

㉠에서 $f(-5) = -6$, ㉡에서 $f(2) = 8$ 이므로

㉢의 양변에 $x = -5, x = 2$ 를 각각 대입하면

$$f(-5) = -5a+b, f(2) = 2a+b$$

$$\therefore -5a+b = -6, 2a+b = 8$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=4$

따라서 구하는 나머지는 $2x+4$ 이다.

답 $2x+4$

109

다항식 $f(x)$ 를 $(x^2+1)(x-1)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 ax^2+bx+c 이므로

$$f(x) = \underbrace{(x^2+1)(x-1)Q(x)}_{\textcircled{㉠}} + \underbrace{ax^2+bx+c}_{\textcircled{㉡}}$$

$f(x)$ 를 x^2+1 로 나눈 나머지가 $x+1$ 이라면 ㉠은 x^2+1 로 나누어떨어지므로 ㉡을 x^2+1 로 나눈 나머지가 $x+1$ 이어야 한다.

$$\therefore f(x) = (x^2+1)(x-1)Q(x) + a(x^2+1) + x+1$$

$f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 4이므로

$$f(1) = 4 \text{에서}$$

$$a(1^2+1) + 1 + 1 = 4, 2a = 2 \quad \therefore a = 1$$

따라서 $ax^2+bx+c = x^2+x+2$ 이므로

$$a=1, b=1, c=2 \quad \therefore abc=2 \quad \text{답 2}$$

110

$f(x) = x^3 - x^2 + 3x + a, g(x) = x^2 + 2x + b$ 로 놓으면 두 다항식 $f(x), g(x)$ 는 $x-2$ 로 나누어떨어져야 하므로 $f(2)=0, g(2)=0$

$$\text{즉, } f(2) = 8 - 4 + 6 + a = 0, g(2) = 4 + 4 + b = 0$$

$$\therefore a = -10, b = -8$$

$$\therefore ab = 80 \quad \text{답 80}$$

111

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 1 & 2 \\ & & 2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & -4 = d \\ & & 2 & 0 & \\ \hline & 1 & 0 & -3 & = c \\ & & 2 & & \\ \hline & 1 & & 2 & = b \\ & \parallel & & & \\ & a & & & \end{array} \end{aligned}$$

$$\therefore a=1, b=2, c=-3, d=-4$$

$$(2) f(x) = (x-2)^3 + 2(x-2)^2 - 3(x-2) - 4 \text{이므로}$$

$$f(12) = 10^3 + 2 \times 10^2 - 3 \times 10 - 4$$

$$= 1166$$

$$\text{답 (1) } a=1, b=2, c=-3, d=-4$$

$$(2) 1166$$

112

$f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나눈 몫이 $Q(x)$, 나머지가 7이므로

$$f(x) = (x-3)Q(x) + 7$$

$Q(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면 나머지가 3이므로

$$Q(x) = (x+1)Q_1(x) + 3$$

$$f(x) = (x-3)\{(x+1)Q_1(x) + 3\} + 7$$

$$= (x-3)(x+1)Q_1(x) + 3x-2$$

따라서 $R(x) = 3x-2$ 이므로

$$R(2) = 3 \times 2 - 2 = 4 \quad \text{답 4}$$

113

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$8=4b \quad \therefore b=2$$

양변에 $x=-3$ 을 대입하면

$$-16=16c \quad \therefore c=-1$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$-7=-3a+3b+c$$

$$-7=-3a+6-1 \quad \therefore a=4$$

$$\therefore a-b+c=4-2+(-1)=1$$

답 1

참고

미정계수가 a, b, c 의 3개이므로 x 에 3개의 수를 대입해야 한다. 이때 괄호 안을 0으로 하는 수는 $x=1, x=-3$ 의 2개이므로 나머지 하나는 계산하기 편리한 수를 택하여 대입한다.

114

$$\frac{x+ay-2b}{2x-y+1}=k \quad (k \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$x+ay-2b=k(2x-y+1)$$

$$x+ay-2b=2kx-ky+k$$

$$(1-2k)x+(a+k)y-2b-k=0$$

이 등식이 x, y 에 대한 항등식이므로

$$1-2k=0, a+k=0, -2b-k=0$$

$$\therefore k=\frac{1}{2}, a=-\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore a+b=-\frac{3}{4}$$

답 $-\frac{3}{4}$

115

$f(x)$ 를 $x+4$ 로 나눈 나머지가 13이므로

$$f(-4)=13$$

$f(x)$ 를 $x-4$ 로 나눈 나머지가 -3 이므로

$$f(4)=-3$$

$f(x)$ 를 x^2-16 으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$R(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x)=(x^2-16)Q(x)+ax+b$$

$$=(x+4)(x-4)Q(x)+ax+b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(-4)=13, f(4)=-3$ 이므로 $\textcircled{1}$ 의 양변에

$x=-4$ 와 $x=4$ 를 각각 대입하면

$$-4a+b=13, 4a+b=-3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=5$$

따라서 $R(x)=-2x+5$ 이므로

$$R(8)=-2 \times 8+5=-11$$

답 -11

116

$f(x)$ 를 $x(x+1), (x+1)(x+2)$ 로 나눈 몫을 각각 $Q_1(x), Q_2(x)$ 라 하면

$$f(x)=x(x+1)Q_1(x)+x+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(x)=(x+1)(x+2)Q_2(x)+5x+5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$f(0)=1, f(-1)=0, f(-2)=-5$$

다항식을 삼차식으로 나눈 나머지는 이차 이하의 식이므로 $f(x)$ 를 $x(x+1)(x+2)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(x)=x(x+1)(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$f(0)=1, f(-1)=0, f(-2)=-5$ 이므로 $\textcircled{3}$ 의 양변에 $x=0, x=-1, x=-2$ 를 각각 대입하면

$$c=1, a-b+c=0, 4a-2b+c=-5$$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=-1, c=1$$

따라서 $f(x)$ 를 $x(x+1)(x+2)$ 로 나눈 나머지는 $-2x^2-x+1$ 이다.

답 $-2x^2-x+1$

117

$f(x)+g(x), f(x)-g(x)$ 를 x^2+3x+2 로 나눈 몫을 각각 $Q_1(x), Q_2(x)$ 라 하면

$$f(x)+g(x)=(x^2+3x+2)Q_1(x)+14 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(x)-g(x)=(x^2+3x+2)Q_2(x)-2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}+\textcircled{2}$ 을 하면

$$2f(x)=(x^2+3x+2)\{Q_1(x)+Q_2(x)\}+12$$

$$\therefore f(x)=(x^2+3x+2)\left\{\frac{Q_1(x)+Q_2(x)}{2}\right\}+6$$

따라서 다항식 $f(x)$ 를 x^2+3x+2 로 나누었을 때의 나머지는 6이다.

답 ⑤

118

$f(x)=x^3-ax^2+3x+10$ 으로 놓으면 $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나눈 나머지는 8이므로 $f(-2)=8$ 에서

$$-8-4a-6+10=8$$

$$\therefore a=-3$$

$x^3+3x^2+3x+10$ 을 $x+2$ 로 나눈 몫은 $Q(x)$, 나머지는 8이므로

$$x^3+3x^2+3x+10=(x+2)Q(x)+8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$Q(x)$ 를 $x-a$, 즉 $x+3$ 으로 나눈 나머지는 $Q(-3)$ 이므로 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=-3$ 을 대입하면

$$-27+27-9+10=-Q(-3)+8$$

$$\therefore Q(-3)=7$$

답 7

119

$f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 2이므로 $f(1)=2$ 에서

$$1+a+b+3=2$$

$$\therefore a+b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(x+2)$ 가 $x-1$ 로 나누어떨어지므로 $f(3)=0$ 에서

$$27+9a+3b+3=0, 9a+3b=-30$$

$$\therefore 3a+b=-10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=-4, b=2$$

$$\therefore b-a=2-(-4)=6$$

답 6

참고

$f(x+2)$ 가 $x-1$ 로 나누어떨어지므로 $f(x+2)$ 에

$x=1$ 을 대입하면 $f(3)=0$ 이어야 한다.

$f(1)=0$ 으로 착각하지 않도록 한다.

120

$Q(x)=xP(x)-2a^3$ 으로 놓으면

$$Q(x)=x(2x^2+3x-9)-2a^3$$

다항식 $Q(x)$ 가 $x-a$ 를 인수로 가지므로 인수 정리에 의하여 $Q(a)=0$ 이어야 한다.

즉, $Q(a)=a(2a^2+3a-9)-2a^3=0$ 에서

$$a(3a-9)=0, 3a(a-3)=0$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=3$$

따라서 구하는 자연수 a 의 값은 3이다.

답 3

121

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & -12 & -1 \\ & 4 & 4 & -4 \end{array} \right. \\ \frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccc|c} 8 & 8 & -8 & -5 \\ & 4 & 6 & \end{array} \right. \\ \frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccc|c} 8 & 12 & -2 & \\ & 4 & & \end{array} \right. \\ 8 \left| \begin{array}{c|c} & 16 \end{array} \right. \end{array}$$

$$8x^3+4x^2-12x-1$$

$$=8\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+16\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{2}\right)-5$$

$$=(2x-1)^3+4(2x-1)^2-(2x-1)-5$$

따라서 $a=1, b=4, c=-1, d=-5$ 이므로

$$ad-bc=1 \times (-5)-4 \times (-1)$$

$$=-1$$

답 -1

122

$$x^{10}+1=a_{10}(x+2)^{10}+a_9(x+2)^9+\dots$$

$$+a_1(x+2)+a_0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=-3$ 을 대입하면

$$(-3)^{10}+1=a_{10}-a_9+\dots-a_1+a_0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$(-1)^{10}+1=a_{10}+a_9+\dots+a_1+a_0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}-\textcircled{3}$ 을 하면

$$1-3^{10}=2(a_9+a_7+a_5+a_3+a_1)$$

$$\therefore a_9+a_7+a_5+a_3+a_1=\frac{1-3^{10}}{2}$$

답 ④

123

다항식 $x^n(x^2-ax+b)$ 를 $(x-3)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^n(x^2-ax+b)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$3^n(9-3a+b)=0$$

$$3^n \neq 0 \text{이므로 } 9-3a+b=0$$

$$\therefore b=3a-9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$x^2-ax+b=x^2-ax+3a-9=(x-3)(x+3-a)$$

이므로 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$x^n(x-3)(x+3-a)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$$

$$x^n(x+3-a)=(x-3)Q(x)+3^n$$

위의 등식에 $x=3$ 을 대입하면

$$3^n(6-a)=3^n$$

$$3^n \neq 0 \text{이므로}$$

$$6-a=1 \quad \therefore a=5$$

$\textcircled{2}$ 에 $a=5$ 를 대입하면

$$b=3 \times 5-9=6$$

$$\therefore ab=5 \times 6=30$$

답 30

124

$f(x)$ 를 $x^2-8x+12$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x^2-8x+12)Q(x) + ax+b \\ = (x-2)(x-6)Q(x) + ax+b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 ㄴ의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(2) + f(2) = 8$$

$$\therefore f(2) = 4$$

조건 ㄴ의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$f(-2) + f(6) = 8$$

이때 조건 ㄱ에서 $f(-2) = -8$ 이므로

$$f(6) = 16$$

㉑의 양변에 $x=2, x=6$ 을 각각 대입하면

$$f(2) = 2a+b, f(6) = 6a+b$$

$$\therefore 2a+b=4, 6a+b=16$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=3, b=-2$$

따라서 $f(x)$ 를 $x^2-8x+12$ 로 나눈 나머지는 $3x-2$ 이다.

답 $3x-2$

125

$x=10$ 으로 놓으면

$$10^{100} + 10^{98} + 10^{96} + \dots + 10^2 + 1$$

$$= x^{100} + x^{98} + x^{96} + \dots + x^2 + 1$$

이고

$$11 = x+1$$

$f(x) = x^{100} + x^{98} + x^{96} + \dots + x^2 + 1$ 이라 하자. 또,

$f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$f(x) = (x+1)Q(x) + R$$

위 식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$f(-1) = 51 = R$$

$$\therefore f(x) = (x+1)Q(x) + 51 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉑의 양변에 $x=10$ 을 대입하면

$$f(10) = 11Q(10) + 51 = 11\{Q(10) + 4\} + 7$$

따라서 $10^{100} + 10^{98} + 10^{96} + \dots + 10^2 + 1$ 을 11로 나눈 나머지는 7이다.

답 7

+ 풍산자 비법

자연수 A, B 에 대하여 A 를 B 로 나누었을 때의 나머지
 $\Rightarrow A$ 를 x 에 대한 다항식으로, B 를 x 에 대한 일차식으로 나타낸 후, 나머지 정리를 이용한다.

126

다항식 $f(x)$ 를 $(x-a)(x-b)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x) = (x-a)(x-b)Q(x) + R(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ㄱ은 옳다.

㉑은 x 에 대한 항등식이므로 양변에 $x=a$ 를 대입하면

$$f(a) = R(a) \text{이므로}$$

$$f(a) - R(a) = 0$$

ㄴ은 옳지 않다.

$f(x) = (x-a)(x-b) + x$ 라 하면 $R(x) = x$ 이므로

$$f(a) - R(b) = a - b$$

$$f(b) - R(a) = b - a$$

이때 $a \neq b$ 이므로

$$f(a) - R(b) \neq f(b) - R(a)$$

ㄷ은 옳다.

$R(x) = px + q$ (p, q 는 상수)라 하자.

㉑에 $x=a, x=b$ 를 각각 대입하면

$$f(a) = pa + q$$

$$f(b) = pb + q$$

$$af(b) - bf(a) = abp + aq - abp - bq \\ = (a-b)q$$

$$R(0) = q \text{이므로}$$

$$af(b) - bf(a) = (a-b)R(0)$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

127

$f(x)$ 를 $x-a$ 로 나눌 때의 나머지를 $R_1(x)$,

$Q_n(x)$ 를 $x-a$ 로 나눌 때의 나머지를

$R_{n+1}(x)$ ($n=1, 2, 3, \dots, 9$)라 하면

$$f(x) = (x-a)Q_1(x) + R_1(x)$$

$$= (x-a)^2Q_2(x) + (x-a)R_2(x) + R_1(x)$$

$$= (x-a)^3Q_3(x)$$

$$+ (x-a)^2R_3(x) + (x-a)R_2(x) + R_1(x)$$

$\vdots$

$$= (x-a)^{10}Q_{10}(x) + (x-a)^9R_{10}(x)$$

$$+ (x-a)^8R_9(x) + \dots + (x-a)R_2(x) + R_1(x)$$

이므로

$$R(x) = (x-a)^9R_{10}(x) + (x-a)^8R_9(x) + \dots$$

$$+ (x-a)R_2(x) + R_1(x)$$

$$\therefore R(a) = R_1(a) = f(a)$$

답 ②

128

조건 (가)에서 $f(x)$ 를 $x+1$, x^2-3 으로 나눈 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ 라 하고 나머지를 R 라 하면

$$f(x) = (x+1)Q_1(x) + R$$

$$f(x) = (x^2-3)Q_2(x) + R$$

$$\therefore f(x) - R = (x+1)Q_1(x),$$

$$f(x) - R = (x^2-3)Q_2(x)$$

따라서 $f(x) - R$ 는 $x+1$, x^2-3 을 인수로 갖고, 최고차항의 계수가 1인 사차다항식이므로

$$f(x) - R = (x+1)(x^2-3)(x+k) \quad (k \text{는 상수})$$

..... ㉠

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 $f(x+1) - 5$ 는 x^2+x , 즉 $x(x+1)$ 로 나누어떨어지므로

$$f(0+1) - 5 = 0, f(-1+1) - 5 = 0$$

$$\therefore f(1) = 5, f(0) = 5$$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) - R = 2 \times (-2) \times (1+k)$$

$$\therefore 4k - R = -9$$

..... ㉡

㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0) - R = 1 \times (-3) \times k$$

$$\therefore 3k - R = -5$$

..... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $k = -4$, $R = -7$

$k = -4$, $R = -7$ 을 ㉠에 대입하면

$$f(x) + 7 = (x+1)(x^2-3)(x-4)$$

따라서 $f(x) = (x+1)(x^2-3)(x-4) - 7$ 이므로

$$f(4) = -7$$

답 ③

$$\begin{aligned} (3) \text{ (주어진 식)} &= (a+b)(a+b+a-b) \\ &= 2a(a+b) \end{aligned}$$

$$\text{답 (1) } 3ab^2(3a-6b+2c)$$

$$(2) (x+2)(x-4)$$

$$(3) 2a(a+b)$$

132

$$(1) \text{ (주어진 식)} = 2(x^2+6x+9) = 2(x+3)^2$$

$$(2) \text{ (주어진 식)} = a(x^2-3x-10) = a(x+2)(x-5)$$

$$(3) \text{ (주어진 식)} = x(3x^2-8x+4) = x(x-2)(3x-2)$$

$$\text{답 (1) } 2(x+3)^2$$

$$(2) a(x+2)(x-5)$$

$$(3) x(x-2)(3x-2)$$

134

$$(1) \text{ (주어진 식)} = a(a^2-1)$$

$$= a(a+1)(a-1)$$

$$(2) \text{ (주어진 식)} = (a^2)^2 - (b^2)^2$$

$$= (a^2+b^2)(a^2-b^2)$$

$$= (a^2+b^2)(a+b)(a-b)$$

$$(3) \text{ (주어진 식)} = (a-b)^2 - (3b)^2$$

$$= (a-b+3b)(a-b-3b)$$

$$= (a+2b)(a-4b)$$

$$(4) \text{ (주어진 식)}$$

$$= \{(a+b) + (a-b)\} \{(a+b) - (a-b)\}$$

$$= 2a \times 2b = 4ab$$

$$\text{답 (1) } a(a+1)(a-1)$$

$$(2) (a^2+b^2)(a+b)(a-b)$$

$$(3) (a+2b)(a-4b)$$

$$(4) 4ab$$

136

$$(1) \text{ (주어진 식)} = a^3 + 3^3$$

$$= (a+3)(a^2-3a+3^2)$$

$$= (a+3)(a^2-3a+9)$$

$$(2) \text{ (주어진 식)} = a^3 + (4b)^3$$

$$= (a+4b)\{a^2-a \times 4b + (4b)^2\}$$

$$= (a+4b)(a^2-4ab+16b^2)$$

$$(3) \text{ (주어진 식)} = a(a^3-8)$$

$$= a(a-2)(a^2+2a+4)$$

3 인수분해

1 인수분해

57~67쪽

130

$$(1) \text{ (주어진 식)} = 3ab^2(3a-6b+2c)$$

$$(2) \text{ (주어진 식)} = (x+2)(x-1-3)$$

$$= (x+2)(x-4)$$

$$\begin{aligned}
 (4) \text{ (주어진 식)} &= (a+2)^3 - 1^3 \\
 &= (a+2-1)\{(a+2)^2 + (a+2) \times 1 + 1^2\} \\
 &= (a+1)(a^2+5a+7) \\
 \text{답} \quad (1) &(a+3)(a^2-3a+9) \\
 (2) &(a+4b)(a^2-4ab+16b^2) \\
 (3) &a(a-2)(a^2+2a+4) \\
 (4) &(a+1)(a^2+5a+7)
 \end{aligned}$$

참고

계수가 유리수인 다항식을 인수분해할 때, 특별한 언급이 없으면 계수가 유리수인 범위로 한정한다.

138

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ (주어진 식)} &= x^3 + 3 \times x^2 \times 1 + 3 \times x \times 1^2 + 1^3 \\
 &= (x+1)^3 \\
 (2) \text{ (주어진 식)} &= a^2 + (-b)^2 + (-c)^2 + 2 \times a \times (-b) \\
 &\quad + 2 \times (-b) \times (-c) + 2 \times (-c) \times a \\
 &= (a-b-c)^2 \\
 (3) \text{ (주어진 식)} &= x^4 + x^2 \times 1^2 + 1^4 \\
 &= (x^2+x+1)(x^2-x+1) \\
 (4) \text{ (주어진 식)} &= a^3 + b^3 + 2^3 - 3 \times a \times b \times 2 \\
 &= (a+b+2)(a^2+b^2+2^2-ab-2b-2a) \\
 &= (a+b+2)(a^2+b^2-ab-2a-2b+4) \\
 \text{답} \quad (1) &(x+1)^3 \quad (2) (a-b-c)^2 \\
 (3) &(x^2+x+1)(x^2-x+1) \\
 (4) &(a+b+2)(a^2+b^2-ab-2a-2b+4)
 \end{aligned}$$

140

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ (주어진 식)} &= a^2(b-c) - b^2(b-c) \\
 &= (a^2-b^2)(b-c) \\
 &= (a+b)(a-b)(b-c) \\
 (2) \text{ (주어진 식)} &= (a^2-3ab) - (3a-9b) \\
 &= a(a-3b) - 3(a-3b) \\
 &= (a-3)(a-3b) \\
 (3) \text{ (주어진 식)} &= (x^2-y^2) + (4x+4y) \\
 &= (x+y)(x-y) + 4(x+y) \\
 &= (x+y)(x-y+4) \\
 (4) \text{ (주어진 식)} &= x^2(x-1) - (x-1) \\
 &= (x-1)(x^2-1) \\
 &= (x-1)(x+1)(x-1) \\
 &= (x-1)^2(x+1) \\
 \text{답} \quad (1) &(a+b)(a-b)(b-c) \quad (2) (a-3)(a-3b) \\
 (3) &(x+y)(x-y+4) \quad (4) (x-1)^2(x+1)
 \end{aligned}$$

142

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ } x^2+x=t \text{로 놓으면} \\
 \text{ (주어진 식)} &= (t-6)(t-4) - 8 \\
 &= t^2 - 10t + 24 - 8 \\
 &= t^2 - 10t + 16 \\
 &= (t-2)(t-8) \\
 &= (x^2+x-2)(x^2+x-8) \\
 &= (x-1)(x+2)(x^2+x-8) \\
 (2) \text{ (주어진 식)} &= (x^2-3x)^2 - 2(x^2-3x) - 8 \\
 \text{ } x^2-3x=t \text{로 놓으면} \\
 \text{ (주어진 식)} &= t^2 - 2t - 8 \\
 &= (t+2)(t-4) \\
 &= (x^2-3x+2)(x^2-3x-4) \\
 &= (x-1)(x-2)(x+1)(x-4) \\
 \text{답} \quad (1) &(x-1)(x+2)(x^2+x-8) \\
 (2) &(x-1)(x-2)(x+1)(x-4)
 \end{aligned}$$

+ 풍산자 비법

치환을 이용한 인수분해

공통부분이 있는 복잡한 식은 치환을 이용하여 인수분해한 후, 치환한 문자에 원래의 식을 되돌려 놓는다.

144

$$\begin{aligned}
 \text{ (주어진 식)} &= \{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\} - 24 \\
 &= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) - 24 \\
 \text{ } x^2+5x=t \text{로 놓으면} \\
 \text{ (주어진 식)} &= (t+4)(t+6) - 24 \\
 &= t^2 + 10t + 24 - 24 \\
 &= t^2 + 10t \\
 &= t(t+10) \\
 &= (x^2+5x)(x^2+5x+10) \\
 &= x(x+5)(x^2+5x+10) \\
 \text{답} \quad &x(x+5)(x^2+5x+10)
 \end{aligned}$$

146

$$\begin{aligned}
 \text{ } x^2=t \text{로 놓으면} \\
 (1) \text{ (주어진 식)} &= t^2 - 4t + 3 \\
 &= (t-1)(t-3) \\
 &= (x^2-1)(x^2-3) \\
 &= (x+1)(x-1)(x^2-3)
 \end{aligned}$$

$$(2) (\text{주어진 식}) = t^2 - 3t - 4$$

$$= (t+1)(t-4)$$

$$= (x^2+1)(x^2-4)$$

$$= (x^2+1)(x+2)(x-2)$$

$$\text{답 (1)} (x+1)(x-1)(x^2-3)$$

$$(2) (x^2+1)(x+2)(x-2)$$

148

$$(\text{주어진 식}) = x^2 \left(x^2 - x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$= x^2 \left\{ x^2 + \frac{1}{x^2} - \left(x - \frac{1}{x} \right) - 4 \right\}$$

$$= x^2 \left[\left\{ \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 + 2 \right\} - \left(x - \frac{1}{x} \right) - 4 \right]$$

$$= x^2 \left\{ \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 - \left(x - \frac{1}{x} \right) - 2 \right\}$$

$$= x^2 \left(x - \frac{1}{x} + 1 \right) \left(x - \frac{1}{x} - 2 \right)$$

$$= x \left(x - \frac{1}{x} + 1 \right) \times x \left(x - \frac{1}{x} - 2 \right)$$

$$= (x^2+x-1)(x^2-2x-1)$$

$$\text{답 } (x^2+x-1)(x^2-2x-1)$$

150

$$(1) (\text{주어진 식}) = (x^2 - 6x + 9) - y^2$$

$$= (x-3)^2 - y^2$$

$$= (x-3+y)(x-3-y)$$

$$= (x+y-3)(x-y-3)$$

$$(2) (\text{주어진 식}) = 3^2 - (x^2 - 2xy + y^2)$$

$$= 3^2 - (x-y)^2$$

$$= (3+x-y)(3-x+y)$$

$$= -(x-y+3)(x-y-3)$$

$$\text{답 (1)} (x+y-3)(x-y-3)$$

$$(2) -(x-y+3)(x-y-3)$$

152

$$(1) (\text{주어진 식}) = (x^4 - 2x^2 + 1) - x^2$$

$$= (x^2-1)^2 - x^2$$

$$= (x^2-1+x)(x^2-1-x)$$

$$= (x^2+x-1)(x^2-x-1)$$

$$(2) (\text{주어진 식}) = (x^4 + 4x^2 + 4) - x^2$$

$$= (x^2+2)^2 - x^2$$

$$= (x^2+2+x)(x^2+2-x)$$

$$= (x^2+x+2)(x^2-x+2)$$

$$(3) (\text{주어진 식}) = (x^4 - 4x^2 + 4) - 4x^2$$

$$= (x^2-2)^2 - (2x)^2$$

$$= (x^2-2+2x)(x^2-2-2x)$$

$$= (x^2+2x-2)(x^2-2x-2)$$

$$(4) (\text{주어진 식}) = (x^4 + 6x^2 + 9) - 4x^2$$

$$= (x^2+3)^2 - (2x)^2$$

$$= (x^2+3+2x)(x^2+3-2x)$$

$$= (x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$$

$$\text{답 (1)} (x^2+x-1)(x^2-x-1)$$

$$(2) (x^2+x+2)(x^2-x+2)$$

$$(3) (x^2+2x-2)(x^2-2x-2)$$

$$(4) (x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$$

154

(1) 가장 낮은 차수의 문자가 c 이므로 c 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(\text{주어진 식}) = (a-b)c^2 + a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$$

$$= (a-b)c^2 + (a-b)a^2 + (a-b)b^2$$

$$= (a-b)(a^2+b^2+c^2)$$

(2) 차수가 모두 같으므로 a 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(\text{주어진 식}) = a^2b + ab^2 + b^2c - bc^2 - c^2a - ca^2$$

$$= (b-c)a^2 + (b^2-c^2)a + b^2c - bc^2$$

$$= (b-c)a^2 + (b+c)(b-c)a + bc(b-c)$$

$$= (b-c)\{a^2 + (b+c)a + bc\}$$

$$= (b-c)(a+b)(a+c)$$

$$= (a+b)(b-c)(c+a)$$

$$\text{답 (1)} (a-b)(a^2+b^2+c^2)$$

$$(2) (a+b)(b-c)(c+a)$$

156

$$(\text{주어진 식}) = x^2 - (3y+1)x + 2y^2 + 3y - 2$$

$$= x^2 - (3y+1)x + (2y-1)(y+2)$$

$$\begin{array}{lcl} 1 & \nearrow & -(2y-1) \Rightarrow -(2y-1) \\ 1 & \searrow & -(y+2) \Rightarrow \frac{-(y+2)}{-(3y+1)} (+) \end{array}$$

$$= \{x - (2y-1)\} \{x - (y+2)\}$$

$$= (x-2y+1)(x-y-2)$$

$$\text{답 } (x-2y+1)(x-y-2)$$

158

$$a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)a + (b+c)(b^2+c^2) = 0$$

$$a^2(a-b-c) - (b^2+c^2)(a-b-c) = 0$$

$$(a^2-b^2-c^2)(a-b-c) = 0$$

a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$$a-b-c \neq 0, a^2-b^2-c^2 = 0$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다. **답** 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형

160

$2024 = a$ 로 놓으면

$$(\text{주어진 식}) = \frac{(a-1) \times a + 1}{a^3 + 1}$$

$$= \frac{a^2 - a + 1}{(a+1)(a^2 - a + 1)}$$

$$= \frac{1}{a+1} = \frac{1}{2024+1}$$

$$= \frac{1}{2025}$$

$$\text{답 } \frac{1}{2025}$$

162

(1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ 로 놓으면

$$f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$$

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ & & 1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x-1)(x^2 - x - 1)$$

(2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ 로 놓으면

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} - 1 = 0$$

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & -3 & 3 & -1 \\ & & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 2x + 2)$$

$$= (2x-1)(x^2 - x + 1)$$

$$\text{답 } (1) (x-1)(x^2 - x - 1)$$

$$(2) (2x-1)(x^2 - x + 1)$$

+ 풍산자 비법

다항식 $f(x)$ 에서 $f(a)=0$ 인 a 의 값을 계산하기 쉬운 1, -1부터 대입하여 찾으면 편리하다.

164

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 \text{로 놓으면}$$

$$f(-1) = 1 + 4 - 2 - 12 + 9 = 0 \text{이므로}$$

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -4 & -2 & 12 & 9 \\ & & -1 & 5 & -3 & -9 \\ \hline & 1 & -5 & 3 & 9 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x+1)(x^3 - 5x^2 + 3x + 9) \quad \text{㉠}$$

㉠에 $x = -1$ 을 대입하면 0이 되므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -5 & 3 & 9 \\ & & -1 & 6 & -9 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= (x+1)(x+1)(x^2 - 6x + 9) \\ &= (x+1)^2(x-3)^2 \end{aligned}$$

$$\text{답 } (x+1)^2(x-3)^2$$

필수 확인 문제

68쪽

165

$$\textcircled{1} x^3 - 7x^2 + 10x = x(x^2 - 7x + 10)$$

$$= x(x-2)(x-5)$$

$$\textcircled{2} a^3 + 125b^3 = a^3 + (5b)^3$$

$$= (a+5b)\{a^2 - a \times 5b + (5b)^2\}$$

$$= (a+5b)(a^2 - 5ab + 25b^2)$$

$$\textcircled{3} 8x^2 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$$

$$= (2x)^3 - 3 \times (2x)^2 \times y + 3 \times 2x \times y^2 - y^3$$

$$= (2x-y)^3$$

$$\begin{aligned}
 ④ \quad & 9a^2 + b^2 + 4 - 6ab - 4b + 12a \\
 &= (3a)^2 + (-b)^2 + 2^2 + 2 \times 3a \times (-b) \\
 &\quad + 2 \times (-b) \times 2 + 2 \times 2 \times 3a \\
 &= (3a - b + 2)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ⑤ \quad & x^4 + 4x^2y^2 + 16y^4 \\
 &= x^4 + x^2 \times (2y)^2 + (2y)^4 \\
 &= \{x^2 + x \times 2y + (2y)^2\} \{x^2 - x \times 2y + (2y)^2\} \\
 &= (x^2 + 2xy + 4y^2)(x^2 - 2xy + 4y^2)
 \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 ⑤ \quad & x^4 + 4x^2y^2 + 16y^4 \\
 &= (x^4 + 8x^2y^2 + 16y^4) - 4x^2y^2 \\
 &= (x^2 + 4y^2)^2 - (2xy)^2 \\
 &= (x^2 + 4y^2 + 2xy)(x^2 + 4y^2 - 2xy) \\
 &= (x^2 + 2xy + 4y^2)(x^2 - 2xy + 4y^2)
 \end{aligned}$$

166

$$\begin{aligned}
 (\text{주어진 식}) &= \{(x-1)(x+5)\} \{(x+1)(x+3)\} + 15 \\
 &= (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) + 15
 \end{aligned}$$

$x^2 + 4x = t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}
 (\text{주어진 식}) &= (t-5)(t+3) + 15 \\
 &= t^2 - 2t - 15 + 15 \\
 &= t^2 - 2t \\
 &= t(t-2) \\
 &= (x^2 + 4x)(x^2 + 4x - 2) \\
 &= x(x+4)(x^2 + 4x - 2)
 \end{aligned}$$

따라서 인수인 것은 ⑤ $x^2 + 4x - 2$ 이다.

답 ⑤

167

$$\begin{aligned}
 x^4 - 13x^2 + 4 &= (x^4 - 4x^2 + 4) - 9x^2 \\
 &= (x^2 - 2)^2 - (3x)^2 \\
 &= (x^2 - 2 + 3x)(x^2 - 2 - 3x) \\
 &= (x^2 + 3x - 2)(x^2 - 3x - 2)
 \end{aligned}$$

따라서 $a=3, b=-2, c=-3, d=-2$ 또는

$$\begin{aligned}
 a &= -3, b = -2, c = 3, d = -2 \text{ 이므로} \\
 |ab - cd| &= |(-3) \times (-2) - 3 \times (-2)| \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

답 12

168

x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}
 (\text{주어진 식}) &= x^2 - (4y+1)x - (5y^2 - 17y + 6) \\
 &= x^2 - (4y+1)x - (5y-2)(y-3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} -(5y-2) \\ y-3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} -(5y-2) \\ \frac{y-3}{-(4y+1)} + \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= \{x - (5y-2)\} \{x + (y-3)\} \\
 &= (x-5y+2)(x+y-3)
 \end{aligned}$$

따라서 $a=-5, b=2, c=1, d=-3$ 또는

$a=1, b=-3, c=-5, d=2$ 이므로

$$abcd = 30$$

답 30

169

$ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c-a) = 0$ 에서

$$a^2b + ab^2 - b^2c - bc^2 - ac^2 + a^2c = 0$$

차수가 모두 같으므로 a 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(b+c)a^2 + (b^2 - c^2)a - bc(b+c) = 0$$

$$(b+c)a^2 + (b+c)(b-c)a - bc(b+c) = 0$$

$$(b+c)\{a^2 + (b-c)a - bc\} = 0$$

$$(b+c)(a+b)(a-c) = 0$$

이때 a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$$b+c > 0, a+b > 0, a-c = 0 \quad \therefore a = c$$

따라서 주어진 삼각형은 $a=c$ 인 이등변삼각형이다.

답 $a=c$ 인 이등변삼각형

170

$100 = x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{100 \times 102 \times 104 \times 106 + 16} \\
 &= \sqrt{x(x+2)(x+4)(x+6) + 16} \\
 &= \sqrt{\{x(x+6)\} \{(x+2)(x+4)\} + 16} \\
 &= \sqrt{(x^2 + 6x)(x^2 + 6x + 8) + 16}
 \end{aligned}$$

$x^2 + 6x = t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{(x^2 + 6x)(x^2 + 6x + 8) + 16} = \sqrt{t(t+8) + 16} \\
 &= \sqrt{t^2 + 8t + 16} \\
 &= \sqrt{(t+4)^2} = |t+4|
 \end{aligned}$$

이때 x 가 양수이므로 t 도 양수이다.

따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned}
 |t+4| &= t+4 = x^2 + 6x + 4 \\
 &= 100^2 + 6 \times 100 + 4 = 10000 + 600 + 4 \\
 &= 10604
 \end{aligned}$$

답 10604

171

$$f(x)g(x)=x^4+4x^3-3x^2-18x$$

$$=x(x^3+4x^2-3x-18)$$

 $h(x)=x^3+4x^2-3x-18$ 로 놓으면

 $h(2)=8+16-6-18=0$ 이므로 조립제법을 이용하여

 $h(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 4 & -3 & -18 \\ & & 2 & 12 & 18 \\ \hline & 1 & 6 & 9 & 0 \end{array}$$

$$h(x)=(x-2)(x^2+6x+9)=(x-2)(x+3)^2$$

$$\therefore x^4+4x^3-3x^2-18x=x(x-2)(x+3)^2$$

 $f(x), g(x)$ 는 모두 x^2 의 계수가 1인 이차식이고

 $f(2) \neq 0, g(0) \neq 0$ 이므로

$$f(x)=x(x+3), g(x)=(x+3)(x-2)$$

$$\therefore f(-1)+g(4)=(-1) \times 2+7 \times 2=12$$

답 12

● 실전 연습문제

70~72쪽

172

$$a^4-a^3b+ab^3-b^4$$

$$=a^3(a-b)+b^3(a-b)$$

$$=(a-b)(a^3+b^3)$$

$$=(a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$=(a^2-b^2)(a^2-ab+b^2)$$

 따라서 인수가 아닌 것은 ⑤ a^2+ab+b^2 이다.

답 ⑤

173

$$x(x-3)=t$$
로 놓으면

(주어진 식)

$$=t^2-14t+40$$

$$=(t-4)(t-10)$$

$$=(x^2-3x-4)(x^2-3x-10) \quad \leftarrow t=x(x-3)=x^2-3x$$

$$=(x+1)(x-4)(x+2)(x-5)$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2=1^2+(-4)^2+2^2+(-5)^2$$

$$=46$$

답 46

174

$$(주어진 식)=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}+a$$

$$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+a$$

$$x^2+5x=t$$
로 놓으면

$$(주어진 식)=(t+4)(t+6)+a$$

$$=t^2+10t+24+a$$

 따라서 $t^2+10t+24+a$ 가 완전제곱식이 되려면

 $a=1$ 이어야 한다.

답 1

참고

 이차식 x^2+ax+b 가 완전제곱식이 되려면

$$b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$
이어야 한다.

175

$$x^2=t$$
로 놓으면

$$(주어진 식)=t^2-18t+81$$

$$=(t-9)^2$$

$$=(x^2-9)^2$$

$$=\{(x+3)(x-3)\}^2$$

$$=(x+3)^2(x-3)^2$$

 이때 $a > b$ 이므로 $a=3, b=-3$

$$\therefore a-b=6$$

답 6

176

$$f(x)g(x)=4x^4-13x^2+1$$

$$=(4x^4-4x^2+1)-9x^2$$

$$=(2x^2-1)^2-(3x)^2$$

$$=(2x^2-1+3x)(2x^2-1-3x)$$

$$=(2x^2+3x-1)(2x^2-3x-1)$$

 이때 두 이차식 $f(x), g(x)$ 의 x^2 의 계수가 모두 2이므로

$$f(x)+g(x)=(2x^2+3x-1)+(2x^2-3x-1)$$

$$=4x^2-2$$

 따라서 $f(x)+g(x)$ 를 $x-3$ 으로 나눈 나머지는

$$f(3)+g(3)=4 \times 3^2-2=34$$

답 34

177

 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2+xy-2y^2+kx+9y-10$$

$$=x^2+(y+k)x-(2y^2-9y+10)$$

$$=x^2+(y+k)x-(2y-5)(y-2)$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \nearrow & 2y-5 \\ & & \Rightarrow 2y-5 \\ 1 & \searrow & -(y-2) \\ & & \Rightarrow \frac{-(y-2)}{y+k} \end{array}$$

 이 식이 x, y 에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면

$$2y-5+\{-(y-2)\}=y+k$$

$$y-3=y+k \quad \therefore k=-3$$

답 -3

178

$20=10.5+9.5$ 이므로 $10.5=a$, $9.5=b$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 (\text{주어진 식}) &= \frac{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3}{a+b} \\
 &= \frac{a^2(a-b) - b^2(a-b)}{a+b} \\
 &= \frac{(a^2 - b^2)(a-b)}{a+b} \\
 &= \frac{(a+b)(a-b)^2}{a+b} \\
 &= (a-b)^2 \\
 &= (10.5 - 9.5)^2 = 1
 \end{aligned}$$

답 1

179

$f(x) = 2x^4 + 7x^3 + ax^2 + bx + 3$ 으로 놓으면 $f(x)$ 가 $(x+1)^2$ 을 인수로 가지므로

$$f(-1) = 2 - 7 + a - b + 3 = 0$$

$$\therefore b = a - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + ax^2 + (a-2)x + 3$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 -1 & 2 & 7 & a & a-2 & 3 \\
 & & -2 & -5 & -a+5 & -3 \\
 \hline
 -1 & 2 & 5 & a-5 & 3 & 0 \\
 & & -2 & -3 & -a+8 & \\
 \hline
 & 2 & 3 & a-8 & -a+11 &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x+1)\{2x^3 + 5x^2 + (a-5)x + 3\} \\
 &= (x+1)^2(2x^2 + 3x + a-8) - a + 11
 \end{aligned}$$

이때 $f(x)$ 가 $(x+1)^2$ 을 인수로 가지므로

$$-a + 11 = 0 \quad \therefore a = 11$$

$a = 11$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b = 9$

$$\therefore a + b = 11 + 9 = 20$$

답 20

다른 풀이

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 -1 & 2 & 7 & a & b & 3 \\
 & & -2 & -5 & -a+5 & a-b-5 \\
 \hline
 -1 & 2 & 5 & a-5 & -a+b+5 & a-b-2 \\
 & & -2 & -3 & -a+8 & \\
 \hline
 & 2 & 3 & a-8 & -2a+b+13 &
 \end{array}$$

이때 $2x^4 + 7x^3 + ax^2 + bx + 3$ 이 $(x+1)^2$ 을 인수로 가지므로

$$a - b - 2 = 0, \quad -2a + b + 13 = 0$$

$$\therefore a - b = 2, \quad -2a + b = -13$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 11, \quad b = 9$$

$$\therefore a + b = 20$$

180

나무 블록의 부피는

$$x^2(x+3) - 2 \times 1^3 = x^3 + 3x^2 - 2$$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ 로 놓으면

$f(-1) = -1 + 3 - 2 = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여

$f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -1 & 1 & 3 & 0 & -2 \\
 & & -1 & -2 & 2 \\
 \hline
 & 1 & 2 & -2 & 0
 \end{array}$$

$$f(x) = (x+1)(x^2 + 2x - 2)$$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=-2$ 이므로

$$abc = 1 \times 2 \times (-2) = -4$$

답 ②

181

$$\begin{aligned}
 \frac{a^3 - b^3}{a^3 - c^3} &= \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{(a-c)(a^2 + ac + c^2)} \text{이므로} \\
 \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{(a-c)(a^2 + ac + c^2)} &= \frac{a-b}{a-c} \text{에서}
 \end{aligned}$$

$$(i) \frac{a-b}{a-c} = 0 \text{일 때, } a = b$$

$$(ii) \frac{a-b}{a-c} \neq 0 \text{일 때, } \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 + ac + c^2} = 1$$

$$\text{즉, } a^2 + ab + b^2 = a^2 + ac + c^2 \text{이므로}$$

$$b^2 - c^2 + ab - ac = 0$$

$$(b+c)(b-c) + a(b-c) = 0$$

$$(b-c)(a+b+c) = 0$$

$$a, b, c \text{는 자연수이므로 } a+b+c > 0$$

$$\therefore b = c$$

$$(i), (ii) \text{에서 } a=b \text{ 또는 } b=c$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 것은 $\neg$, $\square$ 이다.

답 ①

182

$$\begin{aligned}
 n^4 - 6n^2 + 25 &= (n^4 + 10n^2 + 25) - 16n^2 \\
 &= (n^2 + 5)^2 - (4n)^2 \\
 &= (n^2 + 5 + 4n)(n^2 + 5 - 4n) \\
 &= (n^2 + 4n + 5)(n^2 - 4n + 5) \quad \dots\dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

이 자연수가 소수가 되려면 1과 자기 자신만을 약수로 가져야 하므로

$$n^2 + 4n + 5 = 1 \text{ 또는 } n^2 - 4n + 5 = 1$$

$$(i) n^2 + 4n + 5 = 1 \text{일 때}$$

$$n^2 + 4n + 4 = 0$$

$$(n+2)^2 = 0 \quad \therefore n = -2$$

$n = -2$ 일 때, $n^2 - 4n + 5 = 17$ 이므로 ㉠이 소수인 것을 만족시킨다.

(ii) $n^2 - 4n + 5 = 1$ 일 때

$$n^2 - 4n + 4 = 0$$

$$(n-2)^2 = 0 \quad \therefore n = 2$$

$n = 2$ 일 때, $n^2 + 4n + 5 = 17$ 이므로 ㉠이 소수인 것을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 n 은 자연수이므로

$$n = 2$$

답 2

183

$f(x)$

$$= x^3 - (a+c)x^2 - (a^2+c^2)x + a^3 + a^2c + ac^2 + c^3$$

으로 놓으면 다항식 $f(x)$ 는 $x-b$ 로 나누어떨어지므로 $f(b) = 0$

$$\therefore b^3 - (a+c)b^2 - (a^2+c^2)b + a^3 + a^2c + ac^2 + c^3 = 0$$

이 식의 좌변을 인수분해하면

$$\begin{aligned} & b^3 - (a+c)b^2 - (a^2+c^2)b + a^3 + a^2c + ac^2 + c^3 \\ &= b^3 - (a+c)b^2 - (a^2+c^2)b + a^2(a+c) + c^2(a+c) \\ &= b^3 - (a+c)b^2 - (a^2+c^2)b + (a+c)(a^2+c^2) \\ &= -b^2(a-b+c) + (a^2+c^2)(a-b+c) \\ &= (a-b+c)(a^2-b^2+c^2) \end{aligned}$$

$$\therefore (a-b+c)(a^2-b^2+c^2) = 0$$

a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$$a-b+c \neq 0, a^2-b^2+c^2 = 0$$

$$\therefore b^2 = a^2 + c^2$$

따라서 주어진 삼각형은 b 를 빗변의 길이로 하는 직각 삼각형이므로 그 넓이는 $\frac{1}{2}ac$ 이다.

답 $\frac{1}{2}ac$

184

$x = 14$ 로 놓으면

$$(14^2 + 2 \times 14)^2 - 18 \times (14^2 + 2 \times 14) + 45$$

$$= (x^2 + 2x)^2 - 18(x^2 + 2x) + 45$$

$x^2 + 2x = t$ 로 놓으면

$$(x^2 + 2x)^2 - 18(x^2 + 2x) + 45$$

$$= t^2 - 18t + 45$$

$$= (t-3)(t-15)$$

$$= (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x - 15)$$

$$= (x+3)(x-1)(x+5)(x-3)$$

$$= 17 \times 13 \times 19 \times 11$$

$$\therefore a+b+c+d = 17+13+19+11 = 60$$

답 ③

185

$f(x) = x^3 + ax - 6$ 으로 놓으면 $f(x)$ 는 $x+2$ 를 인수로 갖는다.

이때 인수 정리에 의하여 $f(-2) = 0$ 이므로

$$-8 - 2a - 6 = 0 \text{에서 } a = -7$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 7x - 6$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & -7 & -6 \\ & & -2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x+2)(x^2 - 2x - 3)$$

$$= (x+2)(x+1)(x-3)$$

따라서 직육면체의 세 모서리의 길이는 각각 $x+2$,

$x+1, x-3$ 이므로 모든 모서리의 길이의 합은

$$4(x+2+x+1+x-3) = 12x$$

답 ②

186

원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하면

$$(\text{부피}) = \pi r^2 h = (x^3 + x^2 - 5x + 3)\pi$$

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 \text{으로 놓으면}$$

$f(1) = 1 + 1 - 5 + 3 = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여

$f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & -5 & 3 \\ & & 1 & 2 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x-1)(x^2 + 2x - 3)$$

$$= (x-1)(x-1)(x+3)$$

$$= (x-1)^2(x+3)$$

따라서 원기둥의 부피가 $(x-1)^2(x+3)\pi$ 이므로

$$r = x-1, h = x+3$$

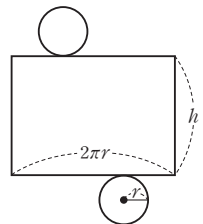
$\therefore$ (겉넓이)

$$= 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$= 2r(r+h)\pi$$

$$= 2(x-1)(2x+2)\pi$$

$$= 4(x^2 - 1)\pi$$



답 ②



방정식과 부등식

1

복소수와 이차방정식

1 복소수

76~85쪽

002

$$(1) \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}i$$

$$(2) \pm\sqrt{-25} = \pm\sqrt{25}i = \pm 5i$$

$$(3) \pm\sqrt{-28} = \pm\sqrt{28}i = \pm 2\sqrt{7}i$$

답 (1) $\pm\sqrt{2}i$ (2) $\pm 5i$ (3) $\pm 2\sqrt{7}i$

004

$$(i) \text{ 실수: } \sqrt{2}, 5 + \sqrt{2}$$

$$(ii) \text{ 허수: } -i, -3i, 7i, -1-4i, 11i$$

$$(iii) \text{ 순허수: } -i, -3i, 7i, 11i$$

따라서 실수의 개수는 2, 허수의 개수는 5, 순허수의 개수는 4이다.

답 실수의 개수: 2, 허수의 개수: 5, 순허수의 개수: 4

006

주어진 등식의 좌변을 전개하여 $a+bi$ 의 꼴로 정리하면

$$2x + xi + y - yi - 5 - i = 0$$

$$\therefore (2x + y - 5) + (x - y - 1)i = 0$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2x + y - 5 = 0, x - y - 1 = 0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x = 2, y = 1$$

답 $x = 2, y = 1$

008

주어진 등식의 좌변을 통분하여 $a+bi$ 의 꼴로 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+i} + \frac{y}{1-i} &= \frac{x(1-i) + y(1+i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{x+y}{2} + \frac{-x+y}{2}i \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{x+y}{2} + \frac{-x+y}{2}i = 2-i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\frac{x+y}{2} = 2, \frac{-x+y}{2} = -1$$

$$\therefore x+y=4, -x+y=-2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x = 3, y = 1$$

답 $x = 3, y = 1$

010

$$(1) (\text{주어진 식}) = (4+3) + (-\sqrt{2} + \sqrt{2})i = 7$$

$$(2) (\text{주어진 식}) = (9-5) + (6+2)i = 4+8i$$

$$\begin{aligned} (3) (\text{주어진 식}) &= 2 + \sqrt{2}i - 2\sqrt{2}i - 2i^2 \\ &= 2 + \sqrt{2}i - 2\sqrt{2}i + 2 \\ &= 4 - \sqrt{2}i \end{aligned}$$

(4) (주어진 식)

$$= \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} + \frac{(2-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$$

$$= \frac{2+3i}{2^2-(3i)^2} + \frac{6-4i-3i+2i^2}{3^2-(2i)^2}$$

$$= \frac{2+3i}{13} + \frac{4-7i}{13} = \frac{6}{13} - \frac{4}{13}i$$

답 (1) 7 (2) $4+8i$ (3) $4-\sqrt{2}i$ (4) $\frac{6}{13} - \frac{4}{13}i$

012

$z = 2-4i$ 일 때, $\bar{z} = 2+4i$ 이므로

$$z\bar{z} = (2-4i)(2+4i)$$

$$= 2^2 - (4i)^2 = 20$$

$$z + \bar{z} = (2-4i) + (2+4i) = 4$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = 20 + 4 = 24$$

답 24

014

주어진 식을 전개하면

$$(\bar{\alpha}-4)(\bar{\beta}+4) = \bar{\alpha}\bar{\beta} + 4\bar{\alpha} - 4\bar{\beta} - 16$$

$$= \bar{\alpha}\bar{\beta} + 4(\bar{\alpha}-\bar{\beta}) - 16$$

$$= \bar{\alpha}\bar{\beta} + 4(\overline{\alpha-\beta}) - 16$$

이때 $\alpha-\beta = 3+3i$, $\alpha\beta = 5-4i$ 이므로

$$\overline{\alpha-\beta} = 3-3i, \overline{\alpha\beta} = 5+4i$$

따라서 구하는 값은

$$(5+4i) + 4(3-3i) - 16 = 1-8i$$

답 $1-8i$

016

주어진 식을 순서대로 두 항씩 짝지어 각각의 공통인수로 묶어 내면

$$\alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta} = \alpha(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) + \beta(\bar{\alpha} + \bar{\beta})$$

$$= (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta})$$

$$= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때

$$\alpha + \beta = (-5+7i) + (3-8i) = -2-i$$

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{-2-i} = -2+i$$

이므로 각 값을 ①에 대입하면

$$(-2-i)(-2+i) = (-2)^2 - i^2 = 5$$

답 5

018

(1) (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2i} \times \sqrt{18i} + \sqrt{2i} \times \sqrt{2} + \frac{\sqrt{36i}}{\sqrt{9i}} + \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9i}} \\ &= \sqrt{36i^2} + \sqrt{4i} + \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} + \frac{\sqrt{36i}}{\sqrt{9i^2}} \\ &= -6 + 2i + 2 - 2i = -4 \end{aligned}$$

(2) (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= (3 - \sqrt{2i})(3 + \sqrt{2i}) + \frac{1+i}{1-i} \\ &= 9 - (\sqrt{2i})^2 + \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} \\ &= 9 + 2 + \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = 11+i \end{aligned}$$

답 (1) -4 (2) 11+i

020

$$(1) \frac{(1+i)^2}{i} = \frac{1+2i-1}{i} = 2$$

$$(2) \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{-2i}{2} = -i, \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2i}{2} = i$$

이므로

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= \left\{ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 \right\}^{4n} + \left\{ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 \right\}^{4n} \\ &= (-i)^{4n} + i^{4n} = 1+1=2 \end{aligned}$$

답 (1) 2 (2) 2

022

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= (i+i^2+i^3+i^4) + (i^5+i^6+i^7+i^8) + \dots \\ &\quad + (i^{97}+i^{98}+i^{99}+i^{100}) + i^{101} \\ &= (i-1-i+1) + (i-1-i+1) + \dots \\ &\quad + (i-1-i+1) + i \\ &= 0+0+\dots+0+i=i \end{aligned}$$

답 i

024

$$\begin{aligned} &-i+2i^2-3i^3+4i^4+\dots+40i^{40} \\ &= (-i-2+3i+4) + (-5i-6+7i+8) + \dots \\ &\quad + (-37i-38+39i+40) \\ &= (2+2i) + (2+2i) + \dots + (2+2i) \\ &= (2+2i) \times 10 = 20+20i \\ &\text{따라서 } 20+20i=a+bi \text{ 이므로} \\ &a=20, b=20 \quad \therefore b-a=0 \end{aligned}$$

답 0

026

$$\begin{aligned} x+y &= (2+i) + (2-i) = 4 \\ xy &= (2+i)(2-i) = 2^2 - i^2 = 4+1=5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &= \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{(x+y)^2-2xy}{xy} \\ &= \frac{4^2-2 \times 5}{5} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

답 $\frac{6}{5}$

028

$x=1-i$ 에서 $x-1=-i$ 의 양변을 제곱하면

$$x^2-2x+1=-1$$

$$\therefore x^2=2x-2$$

..... ㉠

㉠의 양변에 x 를 곱하면

$$x^3=2x^2-2x$$

이 식에 ㉠을 대입하면

$$x^3=2(2x-2)-2x=2x-4$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} x^3-x^2+3x-1 &= (2x-4) - (2x-2) + 3x-1 \\ &= 3x-3=3(1-i)-3=-3i \end{aligned}$$

답 -3i

필수 확인 문제

86쪽

029

④ $-5i$ 의 실수부분은 0, 허수부분은 -5 이다.

답 ④

030

$$(x+i)^2 + (2+3i)^2 = y+26i \text{에서}$$

$$(x^2+2xi-1) + (4+12i-9) = y+26i$$

$$\therefore (x^2-6) + (2x+12)i = y+26i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x^2-6=y, 2x+12=26$$

$$\therefore x=7, y=43 \quad \therefore x+y=50$$

답 50

031

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$ 이므로

$$z+\bar{z}=-10 \text{에서 } (a+bi) + (a-bi) = -10$$

$$2a=-10 \quad \therefore a=-5$$

$$z\bar{z}=34 \text{에서 } (a+bi)(a-bi)=34$$

$$a^2+b^2=34$$

위의 식에 $a=-5$ 를 대입하면

$$(-5)^2+b^2=34, b^2=9 \quad \therefore b=\pm 3$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 복소수 z 는

$$-5+3i, -5-3i$$

답 $-5+3i, -5-3i$

+ 풍산자 비법

복소수 z 에 대한 등식이 주어지면 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)로 놓고 주어진 등식에 대입한다.

032

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} = 1 + i \text{에서}$$

$$\alpha + \beta = 1 + i, \alpha + \beta = 1 - i$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\beta} &= \alpha(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) + \beta(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \\ &= (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \\ &= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) \\ &= (1 - i)(1 + i) = 2 \end{aligned}$$

답 2

033

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{-6}} + \sqrt{-4}\sqrt{-9} - \sqrt{2}\sqrt{-8} + \frac{\sqrt{-32}}{\sqrt{8}} \\ &= \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}i} + \sqrt{4}i \times \sqrt{9}i - \sqrt{2} \times \sqrt{8}i + \frac{\sqrt{32}i}{\sqrt{8}} \\ &= \frac{\sqrt{9}i}{i^2} + \sqrt{36}i^2 - \sqrt{16}i + \sqrt{4}i \\ &= -3i - 6 - 4i + 2i = -6 - 5i \\ \therefore \bar{z} &= -6 + 5i \end{aligned}$$

답 -6+5i

034

$$n=2 \text{일 때, } z = (1+i)^2 = 1+2i+(-1) = 2i$$

$$n=4 \text{일 때, } z = (1+i)^4 = (2i)^2 = -4$$

$$n=8 \text{일 때, } z = (1+i)^8 = (-4)^2 = 16$$

따라서 $n=8$ 일 때 처음으로 z 가 양의 실수 16이 된다.

$$\therefore n+z=8+16=24$$

답 24

2 이차방정식

87~95쪽

036

(1) 주어진 식을 정리하면 $(a-1)x = -(a+2)$

$$(i) a \neq 1 \text{일 때, } x = -\frac{a+2}{a-1}$$

(ii) $a=1$ 일 때, $0 \times x = -3$ 이므로 해는 없다.

(2) 주어진 식을 정리하면 $(a^2-5a+6)x = a-2$

$$\therefore (a-2)(a-3)x = a-2$$

(i) $a \neq 2, a \neq 3$ 일 때,

$$x = \frac{a-2}{(a-2)(a-3)} = \frac{1}{a-3}$$

(ii) $a=2$ 일 때, $0 \times x = 0$ 이므로 해는 모든 수이다.

(iii) $a=3$ 일 때, $0 \times x = 1$ 이므로 해는 없다.

$$\text{답 (1) } a \neq 1 \text{일 때, } x = -\frac{a+2}{a-1}$$

$a=1$ 일 때, 해는 없다.

$$(2) a \neq 2, a \neq 3 \text{일 때, } x = \frac{1}{a-3}$$

$a=2$ 일 때, 해는 모든 수이다.

$a=3$ 일 때, 해는 없다.

038

주어진 식을 정리하면

$$(a^2-a)x = a-1 \quad \therefore a(a-1)x = a-1$$

해가 모든 수이거나 없는 경우는 x 의 계수가 0일 때 발생한다.

$$a(a-1)=0 \text{에서 } a=0 \text{ 또는 } a=1$$

(i) $a=0$ 일 때, $0 \times x = -1$ 이므로 해는 없다.

(ii) $a=1$ 일 때, $0 \times x = 0$ 이므로 해는 모든 수이다.

(i), (ii)에서 방정식의 해가 없을 때, $a=0$ 이다.

답 0

040

(1) 절댓값 기호 안을 0으로 하는 $x=3$ 을 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

$$(i) x < 3 \text{일 때, } -(x-3) = 3x-5 \quad \therefore x=2$$

$$(ii) x \geq 3 \text{일 때, } x-3 = 3x-5 \quad \therefore x=1$$

그런데 이 값은 $x \geq 3$ 에 속하지 않으므로 버린다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=2$

(2) 절댓값 기호 안을 0으로 하는 $x=-2$ 와 $x=2$ 를 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

(i) $x < -2$ 일 때,

$$-(x+2) - (x-2) = 2x+2$$

$$-4x=2 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}$$

그런데 이 값은 $x < -2$ 에 속하지 않으므로 버린다.

(ii) $-2 \leq x < 2$ 일 때,

$$(x+2) - (x-2) = 2x+2$$

$$-2x=-2 \quad \therefore x=1$$

(iii) $x \geq 2$ 일 때,

$$(x+2) + (x-2) = 2x+2$$

$$0 \times x = 2 \text{이므로 해가 없다.}$$

(i)~(iii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=1$

답 (1) $x=2$ (2) $x=1$

042

(1) 좌변을 인수분해하면 $(x-1)(2x-5)=0$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=\frac{5}{2}$$

(2) 우변을 좌변으로 이항한 후 양변을 -8 로 나누면

$$x^2-2x-3=0, (x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

(3) 근의 공식에 의하여

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 3 \times 2}}{3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

(4) $(x+2)^2 = x-1$ 에서 $x^2 + 3x + 5 = 0$

근의 공식에 의하여

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}i}{2}$$

답 (1) $x=1$ 또는 $x=\frac{5}{2}$ (2) $x=-1$ 또는 $x=3$

$$(3) x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} \quad (4) x = \frac{-3 \pm \sqrt{11}i}{2}$$

044

양변에 $\sqrt{2}-1$ 을 곱하면

$$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2 + (3+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)x + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 0$$

$$x^2 + (2\sqrt{2}-1)x + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 0$$

$$(x+\sqrt{2})(x+(\sqrt{2}-1)) = 0$$

$$\therefore x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x = 1 - \sqrt{2}$$

답 $x = -\sqrt{2}$ 또는 $x = 1 - \sqrt{2}$

046

절댓값 기호 안을 0으로 하는 $x = \frac{2}{3}$ 를 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

(i) $3x-2 < 0$, 즉 $x < \frac{2}{3}$ 일 때,

$$x^2 - (3x-2) = 2, x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=3$$

그런데 $x < \frac{2}{3}$ 이므로 $x=0$

(ii) $3x-2 \geq 0$, 즉 $x \geq \frac{2}{3}$ 일 때,

$$x^2 + 3x - 2 = 2, x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x+4)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 1$$

그런데 $x \geq \frac{2}{3}$ 이므로 $x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=0$ 또는 $x=1$ 답 $x=0$ 또는 $x=1$

048

(1) $|x^2 - 2x - 1| = 2$ 에서 $x^2 - 2x - 1 = \pm 2$

(i) $x^2 - 2x - 1 = 2$ 일 때, $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$(x+1)(x-3) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

(ii) $x^2 - 2x - 1 = -2$ 일 때, $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$(x-1)^2 = 0 \quad \therefore x = 1$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x = -1$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 3$

(2) $x^2 = |x|^2$ 이므로 $|x|^2 - 3|x| - 4 = 0$

$$(|x|-4)(|x|+1) = 0$$

그런데 $|x|+1 > 0$ 이므로

$$|x| = 4 \quad \therefore x = \pm 4$$

답 (1) $x = -1$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 3$

(2) $x = \pm 4$

050

$2x^2 - 10x + a - 10 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-5)^2 - 2(a-10) = -2a + 45$$

$$(1) \frac{D}{4} = -2a + 45 > 0 \quad \therefore a < \frac{45}{2}$$

$$(2) \frac{D}{4} = -2a + 45 = 0 \quad \therefore a = \frac{45}{2}$$

$$(3) \frac{D}{4} = -2a + 45 < 0 \quad \therefore a > \frac{45}{2}$$

$$(4) \frac{D}{4} = -2a + 45 \geq 0 \quad \therefore a \leq \frac{45}{2}$$

답 (1) $a < \frac{45}{2}$ (2) $a = \frac{45}{2}$ (3) $a > \frac{45}{2}$ (4) $a \leq \frac{45}{2}$

052

(i) $x^2 + 2x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 실근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = 1^2 - 1 \times a \geq 0$$

$$\therefore a \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

(ii) $x^2 + 6x + a + 13 = 0$ 의 판별식을 D' 이라 하면 허근을 가지므로

$$\frac{D'}{4} = 3^2 - 1 \times (a+13) = -a-4 < 0$$

$$\therefore a > -4 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 의 공통부분은

$-4 < a \leq 1$ 답 $-4 < a \leq 1$

054

주어진 이차식이 완전제곱식이 되어야 하므로 이차방정식 $x^2 + (2a+6)x + 3a+7 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - 1 \times (3a+7) = 0$$

$$a^2 + 3a + 2 = 0, (a+2)(a+1) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = -1$$

답 $a = -2$ 또는 $a = -1$

056

$x^2 - 2(k-a)x + k^2 + a^2 - 4k + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 증근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = \{-(k-a)\}^2 - 1 \times (k^2 + a^2 - 4k + b) = 0$$

$$(-2a+4)k - b = 0$$

이 등식은 k 에 대한 항등식이므로

$$-2a+4=0, b=0 \quad \therefore a=2, b=0$$

답 $a=2, b=0$

058

주어진 이차방정식의 실근을 α 라 하면

$$(1+i)\alpha^2 - (k+4i)\alpha + k+4i = 0$$

좌변을 전개하여 $a+bi$ 의 꼴로 정리하면

$$(\alpha^2 - k\alpha + k) + (\alpha^2 - 4\alpha + 4)i = 0$$

이때 k, α 가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\alpha^2 - k\alpha + k = 0, \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \text{에서 } (\alpha - 2)^2 = 0$$

$$\therefore \alpha = 2$$

이를 $\alpha^2 - k\alpha + k = 0$ 에 대입하여 풀면

$$k = 4$$

답 4

필수 확인 문제

96쪽

059

한 근이 2이므로 $|2x-5|=a$ 에 $x=2$ 를 대입하면

$$|2 \times 2 - 5| = a \quad \therefore a = 1$$

$a=1$ 을 주어진 방정식에 대입하면

$$|2x-5|=1, 2x-5=\pm 1$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 다른 한 근은 3이다.

답 3

060

$$2(x+2)(x-6) = x^2 - 13x - 32 \text{에서}$$

$$2(x^2 - 4x - 12) = x^2 - 13x - 32$$

$$2x^2 - 8x - 24 = x^2 - 13x - 32$$

$$\therefore x^2 + 5x + 8 = 0$$

따라서 근의 공식에 의하여

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times 8}}{2 \times 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

답 $x = \frac{-5 \pm \sqrt{7}i}{2}$

061

$$|x \diamond 2| = x \diamond x \text{에서 } |3x-2| = x^2$$

$$(i) x < \frac{2}{3} \text{일 때, } -3x+2 = x^2$$

$x^2 + 3x - 2 = 0$ 에서 근의 공식에 의하여

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x < \frac{2}{3} \text{이므로 } x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$$

$$(ii) x \geq \frac{2}{3} \text{일 때, } 3x-2 = x^2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0, (x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

$$x \geq \frac{2}{3} \text{이므로 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

(i), (ii)에서 주어진 식을 만족시키는 x 의 값은 $x=1$ 또는

$$x=2 \text{ 또는 } x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \text{이므로 구하는 곱은}$$

$$1 \times 2 \times \left(\frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \right) \times \left(\frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \right) = -4$$

답 -4

062

이차방정식이므로 $a \neq 1$

..... ㉠

$(a-1)x^2 + 2(a+1)x + (a+2) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a+1)^2 - (a-1)(a+2)$$

$$= a+3 > 0$$

$$\therefore a > -3$$

따라서 ㉠에 의하여 a 의 값의 범위는

$$-3 < a < 1 \text{ 또는 } a > 1$$

답 $-3 < a < 1 \text{ 또는 } a > 1$

063

$x^2 - 2ax + a^2 - 3a + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - 1 \times (a^2 - 3a + 4)$$

$$= 3a - 4$$

이때 $a < 1$ 이면 $3a - 4 < 0$ 이므로

$$\frac{D}{4} < 0$$

따라서 이차방정식 $x^2 - 2ax + a^2 - 3a + 4 = 0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

답 서로 다른 두 허근

064

$x^2 - 2(a+i)x + b + 2i = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = \{-(a+i)\}^2 - 1 \times (b+2i) = 0$$

$$\therefore (a^2 - b - 1) + (2a - 2)i = 0$$

이때 a, b 가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2 - b - 1 = 0, 2a - 2 = 0 \quad \therefore a = 1, b = 0$$

$$\therefore a + b = 1$$

답 1

+ 풍산자 비법

일반적으로 판별식은 계수가 실수인 이차방정식의 근의 판별에서만 쓸 수 있으나 이차방정식이 중근을 가질 때에는 계수가 허수일 때도 쓸 수 있다.

3 이차방정식의 활용

97~100쪽

066

이차방정식 $2x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = \frac{1}{2}$$

$$(1) \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$(2) \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta = 2^2 - 3 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$(3) \frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} \\ = \frac{2^3 - 3 \times \frac{1}{2} \times 2}{\frac{1}{2}} = 10$$

답 (1) 1 (2) $\frac{5}{2}$ (3) 10

068

주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha, \alpha + 3$ 이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\text{두 근의 합: } \alpha + (\alpha + 3) = \frac{m}{3}$$

$$\therefore 6\alpha + 9 = m \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\text{두 근의 곱: } \alpha \times (\alpha + 3) = 4, \alpha^2 + 3\alpha - 4 = 0$$

$$(\alpha + 4)(\alpha - 1) = 0$$

$$\therefore \alpha = -4 \text{ 또는 } \alpha = 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑧을 ⑦에 대입하면 $m = \pm 15$

답 ± 15

070

$$(1) x^2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)x + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 0$$

$$\therefore x^2 - x + \frac{2}{9} = 0$$

$$(2) x^2 - (-1 + 2\sqrt{5} - 1 - 2\sqrt{5})x + (-1 + 2\sqrt{5})(-1 - 2\sqrt{5}) \\ = 0$$

$$\therefore x^2 + 2x - 19 = 0$$

$$(3) x^2 - (3 + i + 3 - i)x + (3 + i)(3 - i) = 0$$

$$\therefore x^2 - 6x + 10 = 0$$

$$\text{답 (1) } x^2 - x + \frac{2}{9} = 0 \quad (2) x^2 + 2x - 19 = 0$$

$$(3) x^2 - 6x + 10 = 0$$

072

이차방정식 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 1$$

$$(1) \text{두 근의 합: } (\alpha + \beta) + \alpha\beta = 4 + 1 = 5$$

$$\text{두 근의 곱: } (\alpha + \beta)\alpha\beta = 4 \times 1 = 4$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2 - 5x + 4 = 0$

$$(2) \text{두 근의 합: } \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \\ = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ = \frac{4^2 - 2 \times 1}{1} = 14$$

$$\text{두 근의 곱: } \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\alpha} = 1$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$x^2 - 14x + 1 = 0$$

$$\text{답 (1) } x^2 - 5x + 4 = 0 \quad (2) x^2 - 14x + 1 = 0$$

074

계수가 유리수이고 한 근이 $3 + 2\sqrt{2}$ 이므로 $3 - 2\sqrt{2}$ 도 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\text{두 근의 합: } (3 + 2\sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2}) = -m$$

$$\therefore m = -6$$

$$\text{두 근의 곱: } (3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = n$$

$$\therefore n = 1$$

$$\text{답 } m = -6, n = 1$$

다른 풀이

한 근 $x = 3 + 2\sqrt{2}$ 를 주어진 방정식에 대입하면

$$(3 + 2\sqrt{2})^2 + m(3 + 2\sqrt{2}) + n = 0$$

$$\therefore (3m + n + 17) + (2m + 12)\sqrt{2} = 0$$

이때 m, n 은 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$3m+n+17=0, 2m+12=0$$

$$\therefore m=-6, n=1$$

필수 확인 문제

101쪽

075

이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=3$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{2\alpha}{\alpha+1} + \frac{2\beta}{\beta+1} &= \frac{2\alpha(\beta+1)+2\beta(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)} \\ &= \frac{4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1} \\ &= \frac{4 \times 3 + 2 \times (-2)}{3 + (-2) + 1} = 4\end{aligned}$$

답 4

076

$x^2-4x-7=0$ 의 한 근이 α 이므로 이차방정식에 $x=\alpha$ 를 대입하면

$$\alpha^2-4\alpha-7=0 \quad \therefore \alpha^2=4\alpha+7$$

이때 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$ 이므로

$$\begin{aligned}\alpha^2+4\beta &= (4\alpha+7)+4\beta \\ &= 4(\alpha+\beta)+7 \\ &= 4 \times 4 + 7 = 23\end{aligned}$$

답 23

077

이차방정식 $x^2-7x+a=0$ 의 두 근을 $2k, 5k$ ($k \neq 0$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\text{두 근의 합: } 2k+5k=7 \quad \therefore k=1$$

$$\text{두 근의 곱: } 2k \times 5k=a \quad \therefore a=10$$

따라서 이차방정식 $x^2+ax-2a+3=0$ 의 두 근의 곱은 $-2a+3=-2 \times 10+3=-17$

답 -17

+ 풍산자 방법

두 근의 비가 주어진 경우에는 하나의 문자를 이용하여 두 근을 표현한다. 즉, 두 근의 비가 $\alpha:\beta$ 이면 두 근을 $\alpha k, \beta k$ ($k \neq 0$)로 놓고 k 의 값을 구한다.

078

이차방정식 $x^2+3x+1=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-3, \alpha\beta=1$$

$$\begin{aligned}\text{두 근의 합: } \left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right) &= (\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \\ &= -3+\frac{-3}{1}=-6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{두 근의 곱: } \left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right) &= \alpha\beta+2+\frac{1}{\alpha\beta} \\ &= 1+2+1=4\end{aligned}$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$x^2+6x+4=0 \quad \text{답 } x^2+6x+4=0$$

079

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-a, \alpha\beta=b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또, 이차방정식 $x^2+(b-2)x+a=0$ 의 두 근이

$\alpha+1, \beta+1$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha+1)+(\beta+1)=-b+2, (\alpha+1)(\beta+1)=a$$

$$\therefore \alpha+\beta=-b, \alpha\beta+\alpha+\beta+1=a \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7} \text{을 } \textcircled{8} \text{에 대입하면 } -a=-b, b+(-a)+1=a$$

$$\therefore a=b, 2a-b=1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, b=1 \quad \therefore ab=1$$

답 1

080

$$\frac{b-3i}{1-i} = \frac{(b-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(b+3)+(b-3)i}{2}$$

이때 $x^2-8x+a=0$ 의 한 근이 $\frac{(b+3)+(b-3)i}{2}$ 이면

$$\frac{(b+3)-(b-3)i}{2} \text{도 근이다.}$$

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$\frac{(b+3)+(b-3)i}{2} + \frac{(b+3)-(b-3)i}{2} = 8$$

$$\therefore b+3=8 \quad \therefore b=5$$

따라서 주어진 이차방정식의 두 근은 $4+i, 4-i$ 이므로

두 근의 곱은

$$(4+i)(4-i)=4^2-i^2=17$$

$$\therefore a=17$$

$$\therefore a+b=17+5=22$$

답 22

081

$$\frac{a-2i}{3+i} = \frac{(a-2i)(3-i)}{3^2-i^2} = \frac{(3a-2)-(a+6)i}{10}$$

$$= \frac{3a-2}{10} - \frac{a+6}{10}i$$

즉, 실수부분은 $\frac{3a-2}{10}$, 허수부분은 $-\frac{a+6}{10}$ 이고 그

합이 1이므로

$$\frac{3a-2}{10} + \left(-\frac{a+6}{10}\right) = 1$$

$$\frac{2a-8}{10} = 1, 2a=18$$

$$\therefore a=9$$

답 9

082

$$x=2+i, y=2-i \text{에서}$$

$$x+y=(2+i)+(2-i)=4$$

$$xy=(2+i)(2-i)=2^2-i^2=5$$

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4^2-2 \times 5=6$$

$$\therefore x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$$

$$=(x^2)^2+2x^2y^2+(y^2)^2-x^2y^2$$

$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$

$$=6^2-5^2=36-25=11$$

답 ③

083

주어진 등식의 우변을 전개하여 $a+bi$ 의 꼴로 정리하면

$$z=(k-3)+(k+1)i$$

이때 z^2 이 실수가 되는 것은 z 가 실수이거나 순허수인 경우이다.

$$z \text{가 실수일 때, } k=-1$$

$$z \text{가 순허수일 때, } k=3$$

$$\therefore k=-1 \text{ 또는 } k=3$$

답 -1, 3

084

$$z=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{1^2-i^2}=\frac{-2i}{2}=-i \text{이므로}$$

$$z^2=(-i)^2=-1$$

$$z^4=(-i)^4=1$$

$$\therefore z+z^3+z^5+z^7+z^9=z+z^2z+z^4z+z^4z^2z+z(z^4)^2$$

$$=z-z+z-z+z$$

$$=z=-i$$

답 ②

085

$$\frac{1}{i} + \frac{2}{i^2} + \frac{3}{i^3} + \dots + \frac{100}{i^{100}}$$

$$= \left(\frac{1}{i} + \frac{2}{i^2} + \frac{3}{i^3} + \frac{4}{i^4}\right) + \left(\frac{5}{i^5} + \frac{6}{i^6} + \frac{7}{i^7} + \frac{8}{i^8}\right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{97}{i^{97}} + \frac{98}{i^{98}} + \frac{99}{i^{99}} + \frac{100}{i^{100}}\right)$$

$$= (-i-2+3i+4) + (-5i-6+7i+8) + \dots$$

$$+ (-97i-98+99i+100)$$

$$= (2+2i) + (2+2i) + \dots + (2+2i)$$

$$= 50+50i$$

따라서 $a=50, b=50$ 이므로

$$a+b=100$$

답 100

086

$$||x-1|-3|=2 \text{에서 } |x-1|-3=\pm 2$$

$$\therefore |x-1|=5 \text{ 또는 } |x-1|=1$$

$$(i) |x-1|=5 \text{일 때, } x-1=\pm 5$$

$$\therefore x=6 \text{ 또는 } x=-4$$

$$(ii) |x-1|=1 \text{일 때, } x-1=\pm 1$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=0$$

$$(i), (ii) \text{에서 모든 실수 } x \text{의 값의 합은}$$

$$6+(-4)+2+0=4$$

답 4

087

주어진 이차방정식이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 1을 근으로 가지므로 $x=1$ 을 대입하면

$$(k-2)+(k+3)+ak+b+1=0$$

$$\text{이 식을 } k \text{에 대하여 정리하면 } (a+2)k+(b+2)=0$$

$$\text{이 등식이 실수 } k \text{의 값에 관계없이 성립하므로}$$

$$a+2=0, b+2=0 \quad \therefore a=-2, b=-2$$

$$\therefore a+b=-4$$

답 -4

088

$a(1+x^2)+2bx+c(1-x^2)$ 을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(a-c)x^2+2bx+a+c$$

이 식은 x 에 대한 이차식이므로 $a-c \neq 0$

이차방정식 $(a-c)x^2+2bx+a+c=0$ 의 판별식을

D 라 하면 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=b^2-(a-c)(a+c)=0$$

$$b^2-(a^2-c^2)=0 \quad \therefore a^2=b^2+c^2$$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

답 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형

089

 α, β 는 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 의 근이므로

$$\alpha^2 - 6\alpha + 4 = 0, \beta^2 - 6\beta + 4 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 = 6\alpha - 4, \beta^2 = 6\beta - 4$$

이를 주어진 식에 대입하면

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{\beta}{(6\alpha - 4) - 5\alpha + 4} + \frac{\alpha}{(6\beta - 4) - 5\beta + 4} \\ &= \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 4$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{6^2 - 2 \times 4}{4} = 7 \end{aligned}$$

답 7

090

$$\alpha\bar{\beta} = 2 \text{에서 } \alpha = \frac{2}{\beta}$$

$$\overline{\alpha\bar{\beta}} = \bar{\alpha}\beta = 2 \text{이므로 } \beta = \frac{2}{\alpha} \quad \therefore \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\therefore \frac{\beta}{2} + \frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \alpha = 3i$$

답 3i

091

$$\frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} = \frac{z_1}{z_1 z_2} + \frac{z_2}{z_1 z_2} = \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1}$$

이때 $z_1 \bar{z}_1 = z_2 \bar{z}_2 = 3$ 에서

$$\bar{z}_1 = \frac{3}{z_1}, \bar{z}_2 = \frac{3}{z_2}$$

$$\therefore \frac{1}{z_1} = \frac{\bar{z}_1}{3}, \frac{1}{z_2} = \frac{\bar{z}_2}{3}$$

따라서 ㉠에서

$$\begin{aligned} \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} &= \frac{\bar{z}_1}{3} + \frac{\bar{z}_2}{3} = \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{3} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{3} \\ &= \frac{-6 - 9i}{3} = -2 - 3i \end{aligned}$$

..... ㉠

답 $-2 - 3i$

092

주어진 식을 정리하면

$$(y^2 - y - 10) + (x^2 + 3x - 13)i = 2 - 3i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$y^2 - y - 10 = 2, x^2 + 3x - 13 = -3$$

$$y^2 - y - 10 = 2 \text{에서 } y^2 - y - 12 = 0$$

$$(y + 3)(y - 4) = 0 \quad \therefore y = -3 \text{ 또는 } y = 4$$

$$x^2 + 3x - 13 = -3 \text{에서 } x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$(x + 5)(x - 2) = 0 \quad \therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 $x + y$ 의 값은 $x = 2, y = 4$ 일 때 최대이므로 구하는 최댓값은

$$x + y = 6$$

답 6

093

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{a}\sqrt{b} \text{에서}$$

$$a < 0, b < 0$$

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{c}{a}} \text{에서}$$

$$a < 0, c > 0$$

$$b - c < 0, c - b > 0 \text{이므로}$$

$$\sqrt{a^2} + \sqrt{(b - c)^2} - \sqrt{c^2} + |c - b|$$

$$= -a - (b - c) - c + c - b$$

$$= -a - 2b + c$$

답 ⑤

094

 i 의 거듭제곱은 $i, -1, -i, 1$ 이 이 순서로 반복되므로 n 이 1, 2, 3, 4인 경우만 따지면 된다.(i) $n = 1$ 일 때,

$$z = i + \frac{1}{i} = i + \frac{i}{i^2} = i - i = 0$$

(ii) $n = 2$ 일 때,

$$z = i^2 + \frac{1}{i^2} = -1 + (-1) = -2$$

(iii) $n = 3$ 일 때,

$$z = i^3 + \frac{1}{i^3} = -i + \frac{1}{-i} = -i + \frac{i}{-i^2} = -i + i = 0$$

(iv) $n = 4$ 일 때,

$$z = i^4 + \frac{1}{i^4} = 1 + 1 = 2$$

(i)~(iv)에서 $z = 0$ 또는 $z = -2$ 또는 $z = 2$

답 0, -2, 2

다른 풀이

 n 은 자연수이므로 음이 아닌 정수 k 에 대하여 다음 네 가지 경우로 구분하여 z 의 값을 구할 수 있다.(i) $n = 4k$ ($k \neq 0$)일 때,

$$z = i^{4k} + \frac{1}{i^{4k}} = (i^4)^k + \frac{1}{(i^4)^k} = 1 + 1 = 2$$

(ii) $n = 4k + 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} z &= i^{4k+1} + \frac{1}{i^{4k+1}} = (i^4)^k \times i + \frac{1}{(i^4)^k \times i} \\ &= i + \frac{1}{i} = i + \frac{i}{i^2} = i - i = 0 \end{aligned}$$

(iii) $n=4k+2$ 일 때,

$$\begin{aligned} z &= i^{4k+2} + \frac{1}{i^{4k+2}} = (i^4)^k \times i^2 + \frac{1}{(i^4)^k \times i^2} \\ &= i^2 + \frac{1}{i^2} \\ &= -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

(iv) $n=4k+3$ 일 때,

$$\begin{aligned} z &= i^{4k+3} + \frac{1}{i^{4k+3}} = (i^4)^k \times i^3 + \frac{1}{(i^4)^k \times i^3} \\ &= i^3 + \frac{1}{i^3} = -i + \frac{1}{-i} \\ &= -i + i = 0 \end{aligned}$$

(i)~(iv)에서 구하는 z 의 값은 0, -2, 2

095

$f(\alpha)=0, f(\beta)=0$ 이므로 $f(3x-4)=0$ 의 두 근은
 $3x-4=\alpha, 3x-4=\beta$ 에서 $x=\frac{\alpha+4}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+4}{3}$
 따라서 $f(3x-4)=0$ 의 두 근의 곱은
 $\frac{\alpha+4}{3} \times \frac{\beta+4}{3} = \frac{4(\alpha+\beta)+\alpha\beta+16}{9}$
 $= \frac{4 \times 2 - 6 + 16}{9} = 2$ 답 2

+ 풍산자 비법

이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
 $f(\alpha)=0, f(\beta)=0$ 이므로 이차방정식 $f(ax+b)=0$ 의
 두 근은 $x=\frac{\alpha-b}{a}$ 또는 $x=\frac{\beta-b}{a}$

096

정사각형 ABCD의 한 변의
 길이가 2이므로 $\overline{BP}=x$ 라 하면
 $\overline{CP}=\overline{CQ}=2-x$

삼각형 APQ가 정삼각형이므로
 $\overline{AP}=\overline{PQ}$

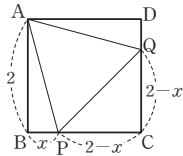
즉, $\overline{AP}^2=\overline{PQ}^2$ 이므로 두 직각삼각형 ABP, PCQ에서
 각각 피타고라스 정리에 의하여
 $2^2+x^2=(2-x)^2+(2-x)^2$
 $\therefore x^2-8x+4=0$

근의 공식에 의하여

$$x=4 \pm 2\sqrt{3}$$

이때 $0 < x < 2$ 이므로 선분 BP의 길이는 $4-2\sqrt{3}$ 이다.

답 $4-2\sqrt{3}$



097

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의

(두 근의 합) $= -a$, (두 근의 곱) $= b$

승연이는 b 는 바르게 보고 풀었으므로

$$b = -2 \times 8 = -16$$

정우는 a 는 바르게 보고 풀었으므로

$$-a = (-3 - \sqrt{3}i) + (-3 + \sqrt{3}i) = -6$$

$$\therefore a = 6$$

따라서 원래의 이차방정식은 $x^2+6x-16=0$ 이므로

$$(x+8)(x-2)=0$$

$$\therefore x = -8 \text{ 또는 } x = 2$$

답 $x = -8$ 또는 $x = 2$

098

이차방정식 $x^2-3x+k=0$ 의 두 실근이 α, β 이므로
 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = k$$

$|\alpha| + |\beta| = 5$ 의 양변을 제곱하면

$$\begin{aligned} (|\alpha| + |\beta|)^2 &= \alpha^2 + 2|\alpha||\beta| + \beta^2 \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 2|\alpha\beta| \\ &= 3^2 - 2k + 2|k| = 25 \end{aligned}$$

$$9 - 2k + 2|k| = 25 \text{에서}$$

$$-2k + 2|k| = 16$$

$$\therefore -k + |k| = 8$$

..... ㉠

(i) $k \geq 0$ 일 때, ㉠이 성립하지 않는다.

(ii) $k < 0$ 일 때, ㉠에서

$$-k - k = 8 \quad \therefore k = -4$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2 + \beta^2 + k &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + k \\ &= 3^2 - 2k + k = 9 - k \\ &= 9 - (-4) = 13 \end{aligned}$$

답 13

099

p 가 실수이므로 이차방정식 $x^2 - px + p + 19 = 0$ 의 모
 든 항의 계수가 실수이다.

즉, 이 이차방정식의 서로 다른 두 허근은 서로 켄레복
 소수이다.

한 허근의 허수부분이 2이므로 실수부분을 a 라 하면 두
 근은 $a+2i, a-2i$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a+2i) + (a-2i) = 2a = p$$

$$\therefore a = \frac{p}{2}$$

..... ㉠

또, $(a+2i)(a-2i)=p+19$ 이므로

$$a^2-(2i)^2=p+19, a^2+4=p+19$$

$$\therefore a^2=p+15$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2=p+15$$

$$p^2-4p-60=0, (p+6)(p-10)=0$$

따라서 p 는 양수이므로 $p=10$

답 10

2 이차방정식과 이차함수

1 이차함수의 그래프

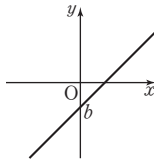
107~115쪽

101

기울기 a 가 양수 $\rightarrow$ 오른쪽 위로 올라가는 직선

y 절편 b 가 음수 $\rightarrow y$ 축과의 교점은 원점보다 아래쪽

따라서 $y=ax+b$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 이 그래프가 지나지 않는 사분면은 제2사분면이다.



답 제2사분면

103

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$(기울기)=a+2=\tan 60^\circ, a+2=\sqrt{3}$$

$$\therefore a=\sqrt{3}-2$$

또, y 절편이 3이므로 $-2b+7=3$

$$\therefore b=2$$

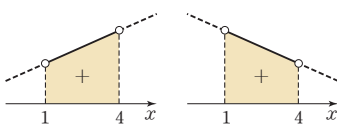
답 $a=\sqrt{3}-2, b=2$

105

$f(x)$ 가 $1 < x < 4$ 에서 항상 양의 값을 가지려면

$y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 x 축보다 위쪽에 있거나 경계에서 x 축과 만나야 하므로

$$f(1) \geq 0, f(4) \geq 0$$



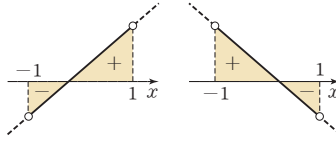
따라서 $m-2m+2 \geq 0, 4m-2m+2 \geq 0$ 이므로

$$-1 \leq m \leq 2$$

답 $-1 \leq m \leq 2$

107

$f(x)$ 가 $-1 < x < 1$ 에서 양, 음의 값을 모두 가지려면 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $f(-1)$ 과 $f(1)$ 의 값의 부호가 달라야 하므로

$$f(-1)f(1) < 0$$

$$(m+1)(3m+1) < 0$$

$$\therefore -1 < m < -\frac{1}{3}$$

답 $-1 < m < -\frac{1}{3}$

109

$$(1) y=x^2+6x+5$$

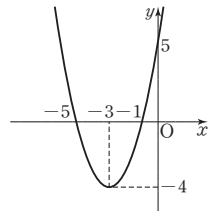
$$=(x^2+6x+9-9)+5$$

$$=(x+3)^2-4$$

꼭짓점의 좌표: $(-3, -4)$

축의 방정식: $x=-3$

그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$$(2) y=-x^2+2x+8$$

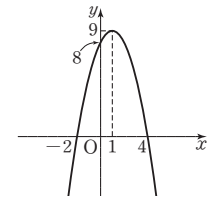
$$=-(x^2-2x+1-1)+8$$

$$=-(x-1)^2+9$$

꼭짓점의 좌표: $(1, 9)$

축의 방정식: $x=1$

그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

111

$$y=2x^2-8x+3$$

$$=2(x^2-4x+4-4)+3$$

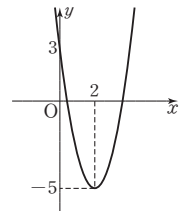
$$=2(x-2)^2-5$$

꼭짓점의 좌표: $(2, -5)$

축의 방정식: $x=2$

따라서 오른쪽 그림에서 지나지

않는 사분면은 제3사분면이다.



답 제3사분면

113

(1) 주어진 그래프의 모양이 U 꼴이므로 $a > 0$

(2) 축이 y 축의 왼쪽에 있으므로 a, b 의 부호는 같다.

$$\therefore b > 0$$

- (3) y 축과 만나는 점의 y 좌표가 0이므로 $c=0$
 (4) $x=-1$ 일 때, $y=0$ 이므로 $a-b+c=0$
 (5) $x=-2$ 일 때, $y>0$ 이므로 $4a-2b+c>0$
 (6) $x=-\frac{1}{2}$ 일 때, $y<0$ 이므로 $\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+c<0$

$$\therefore a-2b+4c=4\left(\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+c\right)<0$$

- 답** (1) $a>0$ (2) $b>0$ (3) $c=0$
 (4) $a-b+c=0$
 (5) $4a-2b+c>0$
 (6) $a-2b+4c<0$

115

$y=cx^2+bx+a$ 에서

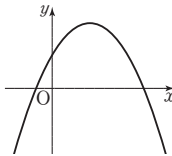
$c<0$ 이므로 $\cap$ 풀이다.

c, b 의 부호가 다르므로 축은 y 축의 오른쪽에 있다.

$a>0$ 이므로 y 축과 만나는 점의

y 좌표는 양수이다.

따라서 그래프의 개형은 오른쪽
 그림과 같다.



답 풀이 참조

117

- (1) 꼭짓점의 좌표가 $(-2, 3)$ 이므로

$y=a(x+2)^2+3$ (a 는 상수)으로 놓을 수 있다.

이 이차함수의 그래프가 점 $(-1, -1)$ 을 지나므로

$$a+3=-1 \quad \therefore a=-4$$

$$\therefore y=-4(x+2)^2+3$$

- (2) x 축과의 교점의 좌표가 $(-1, 0), (2, 0)$ 이므로

$y=a(x+1)(x-2)$ (a 는 상수)로 놓을 수 있다.

y 축과의 교점의 좌표가 $(0, -6)$ 이므로

$$-2a=-6 \quad \therefore a=3$$

$$\therefore y=3(x+1)(x-2)$$

- (3) $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)로 놓으면 이 이차
 함수의 그래프가 세 점 $(0, 0), (1, 1), (2, 8)$ 을 지
 나므로

$$c=0, a+b+c=1, 4a+2b+c=8$$

$$\therefore a=3, b=-2, c=0$$

$$\therefore y=3x^2-2x$$

- 답** (1) $y=-4(x+2)^2+3$
 (2) $y=3(x+1)(x-2)$
 (3) $y=3x^2-2x$

119

$$y=x^2-2mx+m+2$$

$$=(x^2-2mx+m^2-m^2)+m+2$$

$$=(x-m)^2-m^2+m+2$$

꼭짓점의 좌표는 $(m, -m^2+m+2)$ 이므로

꼭짓점이 제3사분면에 있으려면

$$m<0 \quad (\cdots \cdots \textcircled{7}), \quad -m^2+m+2<0$$

$$-m^2+m+2<0 \text{에서}$$

$$m^2-m-2>0, (m+1)(m-2)>0$$

$$\therefore m<-1 \text{ 또는 } m>2$$

$\cdots \cdots \textcircled{8}$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 의 공통부분을 구하면

$$m<-1$$

답 $m<-1$

121

주어진 식을 m 에 대하여 정리하면

$$m(x-2)+(x^2-y)=0$$

이 식이 m 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x-2=0, x^2-y=0$$

$$\therefore x=2, y=4$$

따라서 점 P의 좌표는 $(2, 4)$ 이고, 이 점이 그래프의
 꼭짓점이므로

$$y=x^2+mx-2m=(x-2)^2+4$$

$$=x^2-4x+8$$

$$\therefore m=-4$$

답 -4

123

주어진 이차함수의 그래프가 두 점 $(1, 0), (5, 0)$ 을 지
 나므로

$$y=-\frac{1}{2}x^2+ax+b$$

$$=-\frac{1}{2}(x-1)(x-5)$$

$$=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}$$

$$\therefore a=3, b=-\frac{5}{2}$$

답 $a=3, b=-\frac{5}{2}$

125

주어진 이차함수의 그래프가 두 점 $(-4, 0), (2, 0)$ 을
 지나므로

$$y=ax^2+bx+c=a(x+4)(x-2)$$

$$=a(x^2+2x-8)$$

$\cdots \cdots \textcircled{9}$

$$=a(x+1)^2-9a$$

꼭짓점의 좌표는 $(-1, -9a)$ 이고, 이 점이 직선

$y = -2x + 7$ 위에 있으므로

$$-9a = 2 + 7 \quad \therefore a = -1$$

즉, ㉠에서

$$y = -(x^2 + 2x - 8)$$

$$= -x^2 - 2x + 8$$

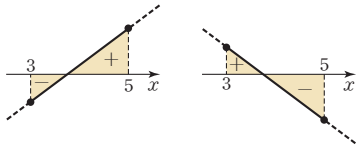
$$\therefore b = -2, c = 8 \quad \text{답 } a = -1, b = -2, c = 8$$

필수 확인 문제

116쪽

126

$f(x)$ 가 $3 \leq x \leq 5$ 에서 양, 음의 값을 모두 가지려면 다음 그림과 같이 $f(3)$ 과 $f(5)$ 의 값의 부호가 달라야 한다.



즉, $f(3)f(5) < 0$ 에서 $(3m-15)(5m-15) < 0$ 이므로
 $(m-5)(m-3) < 0$

$$\therefore 3 < m < 5$$

따라서 정수 m 은 4이므로 그 개수는 1이다.

답 1

127

주어진 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 두 점 $(-5, 0)$, $(1, 0)$ 을 지나므로

$$f(x) = a(x+5)(x-1) \quad (a \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

또, 주어진 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(0, -1)$ 을 지나므로

$$f(0) = a \times (0+5) \times (0-1) = -1$$

$$\therefore a = \frac{1}{5}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{5}(x+5)(x-1)$ 이므로

$$f(5) = \frac{1}{5} \times (5+5) \times (5-1) = 8$$

답 ④

128

① 주어진 그래프의 모양이 $\cap$ 꼴이므로 $a < 0$

축이 y 축의 왼쪽에 있으므로 a, b 의 부호는 같다.

$$\therefore b < 0 \quad \therefore ab > 0$$

② y 축과 만나는 점의 y 좌표가 양수이므로 $c > 0$

$$\therefore bc < 0$$

③ $x = 1$ 일 때, $y = 0$ 이므로 $a + b + c = 0$

④ $x = -2$ 일 때, $y > 0$ 이므로 $4a - 2b + c > 0$

⑤ $x = \frac{1}{2}$ 일 때, $y > 0$ 이므로 $\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c > 0$

$$\therefore a + 2b + 4c = 4\left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c\right) > 0$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

+ 풍산자 비법

이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프의 개형이 주어지고 a, b, c 에 대한 식의 부호를 구할 때에는 x 에 어떤 값을 대입하면 주어진 식과 같은 꼴이 나올지 생각해 본다.

129

$$y = x^2 - 2mx + 2m + 24$$

$$= (x-m)^2 - m^2 + 2m + 24$$

꼭짓점의 좌표는 $(m, -m^2 + 2m + 24)$ 이므로

꼭짓점이 제2사분면에 있으려면

$$m < 0 \quad (\cdots \cdots \text{㉠}), \quad -m^2 + 2m + 24 > 0$$

$$-m^2 + 2m + 24 > 0 \text{에서 } m^2 - 2m - 24 < 0$$

$$(m+4)(m-6) < 0$$

$$\therefore -4 < m < 6$$

$\cdots \cdots \text{㉡}$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-4 < m < 0$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 m 은 $-3, -2, -1$ 이므로 그 합은

$$-3 + (-2) + (-1) = -6$$

답 -6

130

$$y = x^2 + 2ax + a + 1$$

$$= (x^2 + 2ax + a^2 - a^2) + a + 1$$

$$= (x+a)^2 - a^2 + a + 1$$

꼭짓점의 좌표는 $(-a, -a^2 + a + 1)$ 이므로

꼭짓점이 직선 $y = x + 1$ 위에 있으려면

$$-a^2 + a + 1 = -a + 1$$

$$a^2 - 2a = 0, \quad a(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = 2$$

따라서 모든 a 의 값의 합은 2이다.

답 2

131

꼭짓점의 좌표가 $(1, -4)$ 이므로

$$y = a(x-1)^2 - 4 \quad (a \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

이 이차함수의 그래프가 점 $(2, -3)$ 을 지나므로

$$a - 4 = -3 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore y = (x-1)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \text{에서 } (x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

즉, 이차함수의 그래프와 x 축의 두 교점의 좌표는

$$(-1, 0), (3, 0)$$

이차함수의 그래프와 y 축의 교

점은

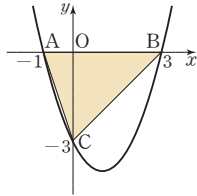
$$C(0, -3)$$

따라서 $A(-1, 0), B(3, 0)$ 이

라 하면 오른쪽 그림에서 삼각형

ABC 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times |3 - (-1)| \times |0 - (-3)| = 6$$



답 6

2 이차함수와 이차방정식

117~124쪽

133

(1) $y = x^2 - 4x - 12$ 에서 $y = 0$ 을 대입하면

$$x^2 - 4x - 12 = 0, (x+2)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 6$$

따라서 교점의 좌표는 $(-2, 0), (6, 0)$ 이다.

(2) $y = x^2 + 6x + 9$ 에서 $y = 0$ 을 대입하면

$$x^2 + 6x + 9 = 0, (x+3)^2 = 0 \quad \therefore x = -3$$

따라서 교점의 좌표는 $(-3, 0)$ 이다.

(3) $y = x^2 - 4x + 6$ 에서 $y = 0$ 을 대입하면

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

근의 공식에 의하여 $x = 2 \pm \sqrt{2}i \Rightarrow$ 허근!

따라서 교점은 없다.

답 (1) $(-2, 0), (6, 0)$

(2) $(-3, 0)$

(3) 없다.

135

(1) 이차방정식 $-8x^2 + 6x - 3 = 0$, 즉

$$8x^2 - 6x + 3 = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 8 \times 3 = -15 < 0 \text{이므로 교점의 개수는 } 0 \text{이다.}$$

(2) 이차방정식 $3x^2 + 8x - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4^2 - 3 \times (-2) = 22 > 0 \text{이므로 교점의 개수는 } 2 \text{이다.}$$

(3) 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} = 0$, 즉 $x^2 + 2x + 1 = 0$ 의

$$\text{판별식을 } D \text{라 하면 } \frac{D}{4} = 1^2 - 1 \times 1 = 0 \text{이므로 교점의 개수는 } 1 \text{이다.}$$

답 (1) 0 (2) 2 (3) 1

137

이차방정식 $x^2 - ax + 4a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-a)^2 - 16a = a(a - 16)$$

$$(1) D = a(a - 16) > 0 \quad \therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 16$$

$$(2) D = a(a - 16) = 0 \quad \therefore a = 0 \text{ 또는 } a = 16$$

$$(3) D = a(a - 16) < 0 \quad \therefore 0 < a < 16$$

답 (1) $a < 0$ 또는 $a > 16$

(2) $a = 0$ 또는 $a = 16$

(3) $0 < a < 16$

139

이차방정식 $x^2 + 4x - 2a = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = 2^2 + 2a \geq 0 \quad \therefore a \geq -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $8x^2 - 2ax + 2 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (-a)^2 - 16 < 0, (a+4)(a-4) < 0$$

$$\therefore -4 < a < 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면

$$-2 \leq a < 4$$

답 $-2 \leq a < 4$

141

[1단계] 주어진 이차함수의 그래프가 x 축에 접하므로 이

차방정식 $x^2 - 2ax + ak + 6k + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - (ak + 6k + b) = 0$$

$$a^2 - ak - 6k - b = 0$$

$$\therefore (-a-6)k + (a^2-b) = 0$$

[2단계] 이 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 $-a-6=0, a^2-b=0$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a=-6, b=36$ **답** $a=-6, b=36$

143

[1단계] $y=5x^2+ax+b$ 의 그래프와 x 축의 두 교점의 x 좌표가 $-1, 2$ 이므로 이차방정식 $5x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 $-1, 2$ 이다.
 [2단계] 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $-1+2=-\frac{a}{5}, -1 \times 2=\frac{b}{5}$
 $\therefore a=-5, b=-10$ **답** $a=-5, b=-10$

다른 풀이

122번 방법으로 다음과 같이 풀 수도 있다.
 주어진 이차함수의 그래프가 두 점 $(-1, 0), (2, 0)$ 을 지나므로
 $y=5x^2+ax+b$
 $=5(x+1)(x-2)$
 $=5x^2-5x-10$
 $\therefore a=-5, b=-10$

145

두 식을 연립하면 $x^2+x+1=2x+3$ 에서
 $x^2-x-2=0, (x+1)(x-2)=0$
 $\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
 이 값을 $y=2x+3$ 에 각각 대입하면
 $x=-1, y=1$ 또는 $x=2, y=7$
 따라서 교점의 좌표는 $(-1, 1), (2, 7)$ 이다. **답** $(-1, 1), (2, 7)$

147

(1) $x^2+1=4x$ 에서 $x^2-4x+1=0$ 이므로 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=(-2)^2-1 \times 1=3>0$
 따라서 교점의 개수는 2이다.
 (2) $x^2-1=6x-10$ 에서 $x^2-6x+9=0$ 이므로 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=(-3)^2-1 \times 9=0$
 따라서 교점의 개수는 1이다.

(3) $x^2-2x=x-3$ 에서 $x^2-3x+3=0$ 이므로 판별식을 D 라 하면
 $D=(-3)^2-4 \times 1 \times 3=-3<0$
 따라서 교점의 개수는 0이다.

답 (1) 2 (2) 1 (3) 0

149

두 식을 연립하면 $x^2=x+a$ 에서 $x^2-x-a=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D=(-1)^2-4 \times 1 \times (-a)=4a+1$
 (1) $D=4a+1>0 \therefore a>-\frac{1}{4}$
 (2) $D=4a+1=0 \therefore a=-\frac{1}{4}$
 (3) $D=4a+1<0 \therefore a<-\frac{1}{4}$
답 (1) $a>-\frac{1}{4}$ (2) $a=-\frac{1}{4}$ (3) $a<-\frac{1}{4}$

151

두 식을 연립하면 $-x^2+x-1=mx$ 에서
 $x^2+(m-1)x+1=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D=(m-1)^2-4=m^2-2m-3$
 $=(m+1)(m-3)$
 이차함수의 그래프와 직선이 만나려면
 $D=(m+1)(m-3) \geq 0$
 $\therefore m \leq -1$ 또는 $m \geq 3$ **답** $m \leq -1$ 또는 $m \geq 3$

153

기울기가 -1 인 접선의 방정식은
 $y=-x+a$ (a 는 상수)로 놓을 수 있다.
 이차함수의 식과 연립하면
 $-x^2+2x=-x+a$
 $\therefore x^2-3x+a=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D=(-3)^2-4a=0 \therefore a=\frac{9}{4}$
 따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-x+\frac{9}{4}$ 이다. **답** $y=-x+\frac{9}{4}$

155

두 식을 연립하면
 $x^2+ax=x+b$

$$\therefore x^2 + (a-1)x - b = 0$$

이 이차방정식의 계수가 모두 유리수이고 한 근이

$$3 + \sqrt{2} \text{이므로 } 3 - \sqrt{2} \text{도 근이다.}$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(3 - \sqrt{2}) + (3 + \sqrt{2}) = -(a-1)$$

$$a-1 = -6 \quad \therefore a = -5$$

$$(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = -b$$

$$-b = 7 \quad \therefore b = -7 \quad \text{답 } a = -5, b = -7$$

필수 확인 문제

125쪽

156

이차방정식 $3x^2 - 12x - 9 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = -3$$

$$\therefore \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= 4^3 - 3 \times (-3) \times 4$$

$$= 100$$

답 100

157

$y = x^2 + ax + b$ 의 그래프가 점 $(-1, 9)$ 를 지나므로

$$9 = 1 - a + b$$

$$\therefore b = a + 8 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 4b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$ 을 $\textcircled{8}$ 에 대입하면

$$a^2 - 4(a+8) = 0, a^2 - 4a - 32 = 0$$

$$(a+4)(a-8) = 0$$

$$\therefore a = -4 \quad (\because a < 0)$$

이 값을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $b = 4$ 이므로

$$a + b = 0 \quad \text{답 } 0$$

158

두 식을 연립하면 $x^2 - 6x + 12 = 2x + k$ 에서

$$x^2 - 8x + 12 - k = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-4)^2 - (12 - k) = k + 4$$

이차함수의 그래프와 직선이 만나려면

$$\frac{D}{4} = k + 4 \geq 0 \quad \therefore k \geq -4$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 -4 이다.

답 -4

159

이차함수 $y = 3x^2 - 8x - k$ 의 그래프와 직선 $y = 2x - 3$ 의 두 교점의 x 좌표를 각각 α, β 라 하면 α, β 는 이차방정식 $3x^2 - 8x - k = 2x - 3$, 즉 $3x^2 - 10x - k + 3 = 0$ 의 서로 다른 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta = \frac{-k+3}{3}$$

이때 두 교점의 x 좌표의 곱이 2이므로

$$\frac{-k+3}{3} = 2 \quad \therefore k = -3 \quad \text{답 } -3$$

160

두 식을 연립하면 $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = mx + n$

$$\therefore x^2 - (2a+m)x + a^2 - 1 - n = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 두 그래프가 서로 접하므로

$$D = \{-(2a+m)\}^2 - 4(a^2 - 1 - n) = 0$$

$$\therefore 4ma + (m^2 + 4 + 4n) = 0$$

이 등식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$4m = 0, m^2 + 4 + 4n = 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$m = 0, n = -1$$

$$\therefore m + n = -1 \quad \text{답 } -1$$

161

이차방정식 $x^2 + ax + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $|\alpha - \beta| = 4$ 이므로

$$|\alpha - \beta|^2 = (\alpha - \beta)^2$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= 16$$

위의 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$(-a)^2 - 4 \times 5 = 16, a^2 = 36$$

$$\therefore a = \pm 6 \quad \text{답 } -6, 6$$

163

$$(1) y = x^2 - 6x - 2 = (x^2 - 6x + 9 - 9) - 2 \\ = (x-3)^2 - 11$$

따라서 $x=3$ 일 때 최솟값 -11 을 갖고, 최댓값은 없다.

$$(2) y = -2x^2 - 4x - 2 = -2(x^2 + 2x + 1 - 1) - 2 \\ = -2(x+1)^2$$

따라서 $x=-1$ 일 때 최댓값 0 을 갖고, 최솟값은 없다.

답 (1) 최댓값: 없다., 최솟값: -11
(2) 최댓값: 0 , 최솟값: 없다.

165

주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1, 8)$ 이므로

$$y = x^2 - ax + b = (x-1)^2 + 8$$

$$\therefore x^2 - ax + b = x^2 - 2x + 9$$

양변의 계수를 비교하면 $a=2, b=9$

$$\therefore ab=18$$

답 18

167

$$(1) y = x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 3$$

이 이차함수의 그래프를 그린 후 $0 \leq x \leq 4$ 인 부분만 살려 놓으면 오른쪽 그림과 같다.

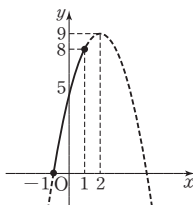
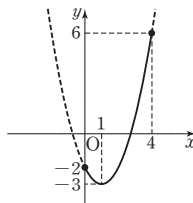
따라서 $x=4$ 일 때 최댓값 6 , $x=1$ 일 때 최솟값 -3 을 갖는다.

$$(2) y = -x^2 + 4x + 5 = -(x-2)^2 + 9$$

이 이차함수의 그래프를 그린 후 $-1 \leq x \leq 1$ 인 부분만 살려 놓으면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=1$ 일 때 최댓값 8 , $x=-1$ 일 때 최솟값 0 을 갖는다.

답 (1) 최댓값: 6 , 최솟값: -3
(2) 최댓값: 8 , 최솟값: 0



169

$$y = x^2 - 2x + a \\ = (x-1)^2 - 1 + a$$

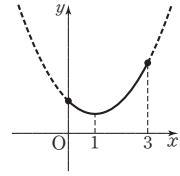
이 이차함수의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같고 꼭짓점이

$0 \leq x \leq 3$ 안에 있으므로 $x=1$ 일 때 최솟값이 발생한다.

주어진 조건에서 최솟값이 2 이므로

$$-1 + a = 2 \quad \therefore a = 3$$

답 3



171

$$3x^2 + y^2 + 6x - 2y - 3 = 3(x^2 + 2x) + (y^2 - 2y) - 3 \\ = 3(x+1)^2 + (y-1)^2 - 7$$

x, y 는 실수이므로

$$(x+1)^2 \geq 0, (y-1)^2 \geq 0$$

따라서 $x=-1, y=1$ 일 때 최솟값 -7 을 갖는다.

답 -7

173

(1) 주어진 식을 y 에 대하여 정리하면

$$2y^2 - 2xy + (x^2 - 2) = 0$$

y 가 실수이므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-x)^2 - 2(x^2 - 2) \geq 0$$

$$x^2 - 4 \leq 0, (x+2)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 2$$

따라서 x 의 최댓값은 2 , 최솟값은 -2 이다.

(2) 주어진 식을 x 에 대하여 정리하면

$$x^2 - 2yx + (2y^2 - 2) = 0$$

x 가 실수이므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-y)^2 - (2y^2 - 2) \geq 0$$

$$y^2 - 2 \leq 0, (y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2}) \leq 0$$

$$\therefore -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$$

따라서 y 의 최댓값은 $\sqrt{2}$, 최솟값은 $-\sqrt{2}$ 이다.

답 (1) 최댓값: 2 , 최솟값: -2

(2) 최댓값: $\sqrt{2}$, 최솟값: $-\sqrt{2}$

175

$$x^2 + y^2 = 4 \text{에서 } y^2 = -x^2 + 4$$

..... ㉠

(i) ㉠을 $y^2 - 2x$ 에 대입하면

$$y^2 - 2x = (-x^2 + 4) - 2x = -x^2 - 2x + 4$$

$$= -(x+1)^2 + 5$$

..... ㉡

(ii) y 는 실수이므로 $y^2 \geq 0$

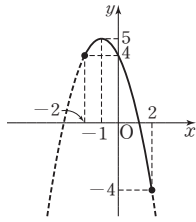
$$\textcircled{1} \text{에서 } -x^2 + 4 \geq 0$$

$$x^2 - 4 \leq 0$$

$$(x+2)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 그래프를 그린 후 $\textcircled{2}$ 인 부분만 살려 놓으면 오른쪽 그림과 같으므로 $x = -1$ 일 때 최댓값 5, $x = 2$ 일 때 최솟값 -4 를 갖는다.



답 최댓값: 5, 최솟값: -4

177

$y - x = k$ (k 는 실수)로 놓으면

$$y = x + k$$

이것을 $2x^2 + y^2 = 2$ 에 대입하면

$$2x^2 + (x+k)^2 = 2$$

$$\therefore 3x^2 + 2kx + k^2 - 2 = 0$$

x 가 실수이므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 3(k^2 - 2) \geq 0$$

$$-2k^2 + 6 \geq 0, k^2 - 3 \leq 0$$

$$(k + \sqrt{3})(k - \sqrt{3}) \leq 0 \quad \therefore -\sqrt{3} \leq k \leq \sqrt{3}$$

$$\therefore -\sqrt{3} \leq y - x \leq \sqrt{3}$$

따라서 $y - x$ 의 최댓값은 $\sqrt{3}$, 최솟값은 $-\sqrt{3}$ 이다.

답 최댓값: $\sqrt{3}$, 최솟값: $-\sqrt{3}$

필수 확인 문제

132쪽

178

$$y = x^2 + 4x + k = (x+2)^2 + k - 4$$

이므로 $x = -2$ 일 때 최솟값 $k - 4$ 를 갖는다.

$$y = -4x^2 + 8x - k = -4(x-1)^2 - k + 4$$

이므로 $x = 1$ 일 때 최댓값 $-k + 4$ 를 갖는다.

따라서 주어진 조건에 의하여

$$k - 4 = -k + 4$$

$$\therefore k = 4$$

답 4

179

$$f(x) = 2x^2 - 12x + k = 2(x^2 - 6x + 9 - 9) + k$$

$$= 2(x-3)^2 - 18 + k$$

$\dots \textcircled{1}$

$y = f(x)$ 의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같고 꼭짓점이

$1 \leq x \leq 4$ 안에 있으므로 $x = 3$ 일

때 최솟값이 발생한다.

주어진 조건에서 최솟값이 -11 이므로

$$-18 + k = -11 \quad \therefore k = 7$$

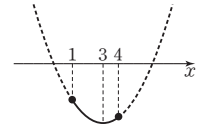
이 값을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $f(x) = 2(x-3)^2 - 11$

$x = 1$ 일 때 최댓값이 발생하므로

$$M = f(1) = 2 \times (-2)^2 - 11 = -3$$

$$\therefore kM = 7 \times (-3) = -21$$

답 -21



180

$$f(x) = x^2 - 2kx - 6k + 5 = (x-k)^2 - k^2 - 6k + 5$$

이므로 $f(x)$ 는 $x = k$ 일 때 최솟값 $-k^2 - 6k + 5$ 를 갖는다.

$$\therefore g(k) = -k^2 - 6k + 5 = -(k+3)^2 + 14$$

이때 $g(k)$ 의 꼭짓점이 $-1 \leq k \leq 6$ 안에 없으므로 $g(k)$

의 최댓값은 $k = -1$ 일 때 발생하고 최솟값은

$$g(-1) = -(-1+3)^2 + 14 = 10$$

따라서 $a = -1$, $b = 10$ 이므로 $a + b = 9$

답 9

181

$$3x^2 + 2y^2 - 12x + 12y + 20$$

$$= (3x^2 - 12x) + (2y^2 + 12y) + 20$$

$$= 3(x^2 - 4x + 4 - 4) + 2(y^2 + 6y + 9 - 9) + 20$$

$$= 3(x-2)^2 + 2(y+3)^2 - 10$$

x, y 는 실수이므로 $(x-2)^2 \geq 0$, $(y+3)^2 \geq 0$

따라서 주어진 식은 $x = 2$, $y = -3$ 일 때 최솟값 -10 을

가지므로 $a = 2$, $b = -3$, $c = -10$

$$\therefore a + b + c = -11$$

답 -11

182

$$x + y = 4 \text{에서 } y = 4 - x$$

이것을 $2x - y^2$ 에 대입하면

$$2x - y^2 = 2x - (4-x)^2$$

$$= 2x - (x^2 - 8x + 16)$$

$$= -x^2 + 10x - 16$$

$$= -(x-5)^2 + 9$$

따라서 $x = 5$, $y = 9$ 일 때 주어진 식의 최댓값은 9이다.

답 9

183

 $x^2 - 2x - 1 = t$ 로 놓으면

$$y = -t^2 + 6t - 3$$

 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때,

 $t = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$ 의 그래프를 그린 후

 $-1 \leq x \leq 2$ 인 부분만 살려 놓으

면 오른쪽 그림과 같으므로 최댓

값은 2, 최솟값은 -2 이다.

$$\therefore -2 \leq t \leq 2$$

 $-2 \leq t \leq 2$ 일 때,

 $y = -t^2 + 6t - 3 = -(t-3)^2 + 6$ 의 그래프를 그린
후 $-2 \leq t \leq 2$ 인 부분만 살려 놓

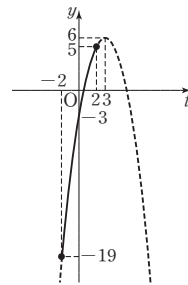
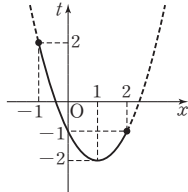
으면 오른쪽 그림과 같으므로 최

댓값은 5, 최솟값은 -19 이다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값

의 합은

$$5 + (-19) = -14$$



답 -14

+ 풍산자 방법

공통부분이 있는 함수의 최대, 최소는 공통부분을 t 로 치환한 후 t 에 대한 함수의 최대, 최소로 구한다. 이때 t 의 값의 범위에 주의한다.

● 실전 연습문제

134~136쪽

184

 $y = x^2 + mx - 3m$ 을 m 에 대하여 정리하면

$$(x-3)m + (x^2 - y) = 0$$

이 등식이 m 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x-3=0, x^2-y=0 \quad \therefore x=3, y=9$$

따라서 점 P의 좌표는 (3, 9)이고, 이 점이 주어진 이

차함수의 그래프의 꼭짓점이므로

$$y = x^2 + mx - 3m = (x-3)^2 + 9$$

$$= x^2 - 6x + 18$$

$$\therefore m = -6$$

답 -6

185

이차함수 $y = x^2 - ax - 3a$ 의 그래프와 x 축의 두 교점의 x 좌표의 합은 이차방정식 $x^2 - ax - 3a = 0$ 의 두 실근의 합과 같으므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a = 5$$

$$\therefore y = -x^2 + (a-2)x + a^2 - 3a$$

$$= -x^2 + 3x + 10$$

이차함수 $y = -x^2 + 3x + 10$ 의 그래프와 x 축의 두 교점의 x 좌표는 이차방정식 $-x^2 + 3x + 10 = 0$, 즉

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$
의 실근과 같으므로

$$x^2 - 3x - 10 = 0, (x+2)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 5$$

따라서 두 교점 사이의 거리는

$$5 - (-2) = 7$$

답 7

참고

이차방정식 $x^2 - ax - 3a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-a)^2 - 4 \times 1 \times (-3a) = a^2 + 12a$$

$$= a(a+12) \geq 0$$

일 때, 실근이 존재한다.

즉, 두 근의 합 $a=5$ 에 대하여 $D \geq 0$ 을 만족시키므로이차함수 $y = x^2 - ax - 3a$ 의 그래프는 x 축과 만난다.

186

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 0 \text{에서 } \frac{x+1}{2} = t \text{로 놓으면 주어진}$$

그래프에서 $f(t) = 0$ 을 만족시키는 t 의 값은

$$t = \alpha \text{ 또는 } t = \beta, \text{ 즉 } \frac{x+1}{2} = \alpha \text{ 또는 } \frac{x+1}{2} = \beta$$

$$\therefore x = 2\alpha - 1 \text{ 또는 } x = 2\beta - 1$$

 $\alpha + \beta = 3$ 이므로 주어진 방정식의 두 실근의 합은

$$(2\alpha - 1) + (2\beta - 1) = 2(\alpha + \beta) - 2$$

$$= 2 \times 3 - 2 = 4$$

답 4

187

이차함수 $y = x^2 + (2k+2)x + 4k+1$ 의 그래프가 x 축에 접해야 하므로 이차방정식

 $x^2 + (2k+2)x + 4k+1 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (k+1)^2 - (4k+1) = 0$$

$$k^2 - 2k = 0, k(k-2) = 0$$

$$\therefore k = 0 \text{ 또는 } k = 2$$

..... ㉠

이차함수 $y=x^2+(2k+2)x+4k+1$ 의 그래프가 직선 $y=2x+4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 이차 방정식 $x^2+(2k+2)x+4k+1=2x+4$, 즉 $x^2+2kx+4k-3=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=k^2-(4k-3)>0$$

$$k^2-4k+3>0, (k-1)(k-3)>0$$

$$\therefore k<1 \text{ 또는 } k>3$$

..... ㉠

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $k=0$

답 0

188

접선의 방정식을 $y=mx+n$ (m, n 은 상수)으로 놓으면 접선이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$2=m+n \quad \therefore n=-m+2$$

$$\therefore y=mx-m+2$$

위의 직선이 이차함수 $y=2x^2-3x+3$ 의 그래프에 접하므로 이차방정식 $2x^2-3x+3=mx-m+2$, 즉 $2x^2-(m+3)x+m+1=0$ 이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(m+3)^2-4 \times 2 \times (m+1)=0$$

$$m^2-2m+1=0, (m-1)^2=0$$

$$\therefore m=1$$

따라서 구하는 직선의 기울기는 1이다.

답 1

189

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 점 $(0, 8)$ 을 지나므로

$$c=8 \quad \therefore y=ax^2+bx+8$$

이 이차함수의 그래프가 점 $(3+\sqrt{5}, 0)$ 을 지난다.

이때 이차방정식 $ax^2+bx+8=0$ 의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $3+\sqrt{5}$ 이므로 $3-\sqrt{5}$ 도 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})=-\frac{b}{a} \quad \text{..... ㉠}$$

$$(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=\frac{8}{a} \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉡에서 } 4=\frac{8}{a} \quad \therefore a=2$$

$a=2$ 를 ㉠에 대입하면

$$6=-\frac{b}{2} \quad \therefore b=-12$$

$$\therefore a+b+c=2-12+8=-2$$

답 -2

190

$$f(x)=2x^2-4x+k=2(x-1)^2+k-2$$

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 꼭짓점이 $-2 \leq x \leq 3$ 안에 있으므로 $x=1$ 일 때 최솟값이 발생한다.

최솟값이 1이므로

$$f(1)=k-2=1$$

$$\therefore k=3$$

이때

$$f(-2)=k+16, f(3)=k+6$$

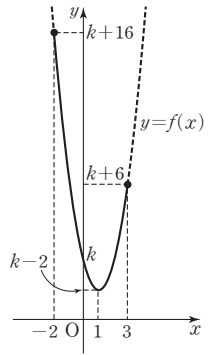
이고 $k+6 < k+16$ 이므로 이차

함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 일 때 최댓값이 발생한다.

$$\therefore M=f(-2)=k+16=19$$

$$\therefore k+M=3+19=22$$

답 22



191

$$y=x^2-2ax-1=(x-a)^2-a^2-1$$

(i) $a=1$ 일 때,

$$y=(x-1)^2-2$$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 이 함수의 그

래프는 오른쪽 그림과 같고

$x=1$ 일 때 최솟값 -2 를 가지므로

$$f(1)=-2$$

(ii) $a=-1$ 일 때,

$$y=(x+1)^2-2$$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 이 함수의 그

래프는 오른쪽 그림과 같고

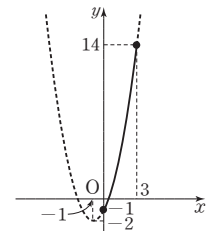
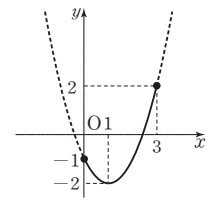
$x=0$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로

$$f(-1)=-1$$

(i), (ii)에서

$$f(1)+f(-1)=-2+(-1)=-3$$

답 -3



192

$$x^2+\frac{1}{2}y^2+4z^2+4x+y-4z+\frac{15}{2}$$

$$=(x^2+4x+4-4)+\frac{1}{2}(y^2+2y+1-1)$$

$$+4\left(z^2-z+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\frac{15}{2}$$

$$=(x+2)^2+\frac{1}{2}(y+1)^2+4\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+2$$

이때 x, y, z 가 실수이므로

$$(x+2)^2 \geq 0, (y+1)^2 \geq 0, \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 4z^2 + 4x + y - 4z + \frac{15}{2} \geq 2$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 2이다.

답 2

+ 풍산자 비법

x, y 에 대한 이차식의 최대, 최소는 완전제곱의 꼴로 변형한 후 $(\text{실수})^2 \geq 0$ 임을 이용한다. 문자의 개수가 늘어나도 방법은 동일하다. x, y, z 에 대한 이차식이므로 각각 완전제곱의 꼴을 만들어 본다.

193

$\triangle ABC$ 의 넓이가 9이므로

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times 3 = 9 \quad \therefore \overline{AB} = 6$$

그런데 두 점 A, B는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로

$$A(-1, 0), B(5, 0)$$

포물선 $y=f(x)$ 가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표가 $-1, 5$ 이므로

$$f(x) = a(x+1)(x-5)$$

이때 포물선이 점 C(0, 3)을 지나므로

$$f(0) = -5a = 3 \quad \therefore a = -\frac{3}{5}$$

따라서 $f(x) = -\frac{3}{5}(x+1)(x-5)$ 이므로

$$f(10) = -\frac{3}{5} \times (10+1) \times (10-5) = -33$$

답 -33

194

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표를 α, β 라 하면

$y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점은

두 점 $(\alpha, 0), (\beta, 0)$ 의 중점이

므로

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 1$$

$$\therefore \alpha+\beta=2$$

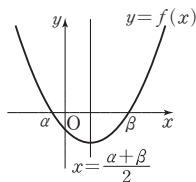
즉, $f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$ 이므로

$$f(x-2) = a(x-2-\alpha)(x-2-\beta)$$

이때 $f(x-2)=0$ 에서

$$a(x-2-\alpha)(x-2-\beta)=0$$

$$\therefore x=2+\alpha \text{ 또는 } x=2+\beta$$



따라서 구하는 두 근의 합은

$$\begin{aligned} (2+\alpha) + (2+\beta) &= 4 + (\alpha+\beta) \\ &= 4+2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

답 6

195

점 C의 x 좌표가 점 D의 x 좌표보다 작다고 가정하자.

점 C의 좌표를 $(\alpha, 0)$ 이라 하면 선분 CD의 길이가 6이므로 점 D의 좌표는

$$(\alpha+6, 0)$$

이때 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 위의 점이고, 점 A의 x 좌표와 점 C의 x 좌표는 같으므로

$$A(\alpha, \alpha)$$

또, 점 B의 x 좌표와 점 D의 x 좌표가 같으므로

$$B(\alpha+6, \alpha+6)$$

이차함수 $y = \frac{1}{2}(x-k)^2$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교

점이 두 점 A, B이므로 이차방정식 $\frac{1}{2}(x-k)^2 = x$ 의 서로 다른 두 실근이 $\alpha, \alpha+6$ 이다.

$$\frac{1}{2}(x-k)^2 = x \text{에서 } \frac{1}{2}x^2 - kx + \frac{1}{2}k^2 = x$$

$$\frac{1}{2}x^2 - (k+1)x + \frac{1}{2}k^2 = 0$$

$$\therefore x^2 - 2(k+1)x + k^2 = 0$$

위의 이차방정식에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (\alpha+6) = 2(k+1) \quad \therefore \alpha = k-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha(\alpha+6) = k^2 \quad \therefore \alpha^2 + 6\alpha - k^2 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$(k-2)^2 + 6(k-2) - k^2 = 0, 2k-8=0$$

$$\therefore k=4$$

답 ②

196

주어진 이차함수의 그래프가 직선보다 항상 아래쪽에 있으려면 이차함수의 그래프와 직선이 만나지 않아야 한다.

이차방정식 $-x^2 - 4kx + 5 = 2x + 4k^2$, 즉

$x^2 + 2(2k+1)x + 4k^2 - 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2k+1)^2 - (4k^2 - 5) < 0, 4k+6 < 0$$

$$\therefore k < -\frac{3}{2}$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -2 이다.

답 -2

197

접선의 방정식을 $y=mx+n$ (m, n 은 상수)으로 놓으면 점 $(-2, 1)$ 을 지나므로

$$1 = -2m + n \quad \therefore n = 2m + 1$$

$$\therefore y = mx + 2m + 1$$

위의 직선이 이차함수 $y=x^2-2x+1$ 의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-2x+1=mx+2m+1$, 즉 $x^2-(m+2)x-2m=0$ 이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (m+2)^2 - 4 \times (-2m) = 0$$

$$\therefore m^2 + 12m + 4 = 0$$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 두 직선의 기울기의 곱은 4이다. 답 ④

참고

이차방정식 $m^2 + 12m + 4 = 0$ 의 판별식을 D' 이라 하면

$$\frac{D'}{4} = 6^2 - 1 \times 4 = 32 > 0$$

즉, 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

198

$$y = -x^2 + 2ax$$

$$= -(x^2 - 2ax + a^2 - a^2)$$

$$= -(x-a)^2 + a^2$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 (a, a^2) 이고 $\cap$ 꼴의 포물선이다.

꼭짓점의 위치에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $a < -1$

$$x = -1 \text{ 일 때,}$$

$$\text{최댓값은 } -1 - 2a$$

주어진 조건에서 최댓값이 9이

므로

$$-1 - 2a = 9$$

$$\therefore a = -5$$

(ii) $-1 \leq a \leq 1$

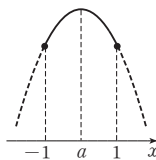
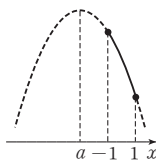
$$x = a \text{ 일 때, 최댓값은 } a^2$$

주어진 조건에서 최댓값이 9이

$$\text{므로 } a^2 = 9$$

$$\therefore a = \pm 3$$

그런데 이 값은 $-1 \leq a \leq 1$ 에 속하지 않으므로 버린다.



(iii) $a > 1$

$$x = 1 \text{ 일 때, 최댓값은 } 2a - 1$$

주어진 조건에서 최댓값이 9이

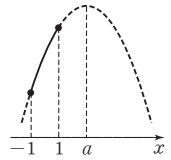
므로

$$2a - 1 = 9$$

$$\therefore a = 5$$

(i)~(iii)에서 $a = -5$ 또는 $a = 5$

답 -5, 5



+ 풍산자 비법

꼭짓점의 x 좌표가 문자일 때, 이차함수의 최대, 최소는 꼭짓점이 제한 범위 안에 있을 때와 제한 범위 밖에 있을 때로 나누어 생각해야 한다.

199

점 $P(a, b)$ 가 직선 $x + 2y - 5 = 0$ 위의 점이므로

$$a + 2b - 5 = 0$$

$$\therefore a = -2b + 5$$

이를 $a^2 + b^2$ 에 대입하면

$$a^2 + b^2 = (-2b + 5)^2 + b^2$$

$$= 5b^2 - 20b + 25$$

$$= 5(b - 2)^2 + 5$$

이때 $(b - 2)^2 \geq 0$ 이므로 $a^2 + b^2$ 의 최솟값은 5이다.

답 5

200

점 P에서 변 AB에

이르는 길이를

x cm라 하면 두 변

AB, AD에 이르는

길이의 합이 8 cm

이므로 점 P에서 변

AD에 이르는 길이는 $(8 - x)$ cm이다.

$\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{BC} = 10$ cm이므로 점 P에서 두 변 BC,

CD에 이르는 길이는 각각 x cm, $(10 - x)$ cm이다.

꼭짓점 C에서 점 P까지의 길이는 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{CP} = \sqrt{x^2 + (10 - x)^2}$$

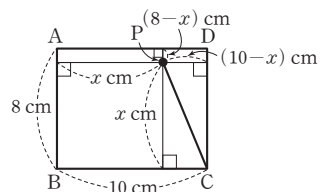
$$= \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$$

$$= \sqrt{2(x - 5)^2 + 50}$$

이때 $0 \leq x \leq 8$ 이므로 $x = 5$ 일 때 구하는 최솟값은

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

답 $5\sqrt{2}$ cm



3 여러 가지 방정식

1 삼차방정식과 사차방정식

138~151쪽

202

(1) 좌변에 $x = -1$ 을 대입하면 0이 되므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 6 & 11 & 6 \\ & & -1 & -5 & -6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$(x+1)(x^2+5x+6)=0$$

$$(x+1)(x+2)(x+3)=0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = -2 \text{ 또는 } x = -3$$

(2) 좌변에 $x = 1$ 을 대입하면 0이 되므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ & & 1 & 0 & -7 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -7 & -6 & 0 \end{array}$$

$$(x-1)(x^3-7x-6)=0$$

㉠

㉠에 $x = -1$ 을 대입하면 0이 되므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -7 & -6 \\ & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$(x-1)(x+1)(x^2-x-6)=0$$

$$(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)=0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

답 (1) $x = -1$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = -3$

(2) $x = 1$ 또는 $x = -1$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 3$

204

$x^2 = t$ 로 놓으면 주어진 방정식은 $t^2 + 2t - 8 = 0$

$$(t+4)(t-2)=0 \quad \therefore t = -4 \text{ 또는 } t = 2$$

따라서 $x^2 = -4$ 또는 $x^2 = 2$ 이므로

$$x = \pm 2i \text{ 또는 } x = \pm \sqrt{2}$$

답 $x = \pm 2i$ 또는 $x = \pm \sqrt{2}$

다른 풀이

치환하지 않고 다음과 같이 단숨에 인수분해할 수도 있다.

$$(x^2)^2 + 2x^2 - 8 = 0 \text{에서 } (x^2+4)(x^2-2)=0$$

따라서 $x^2 = -4$ 또는 $x^2 = 2$ 이므로

$$x = \pm 2i \text{ 또는 } x = \pm \sqrt{2}$$

206

상수항이 4이다. $x^4 + 4x^2 + 4$ 라면 완전제곱식으로 만들 수 있다. 따라서 $3x^2$ 을 $4x^2 - x^2$ 으로 변형한다.

$$x^4 + 3x^2 + 4 = 0 \text{에서}$$

$$x^4 + 4x^2 + 4 - x^2 = 0 \quad \leftarrow \quad 3x^2 = 4x^2 - x^2$$

$$(x^2+2)^2 - x^2 = 0$$

$$\text{좌변을 인수분해하면 } (x^2+2+x)(x^2+2-x)=0$$

$$x^2+x+2=0 \text{ 또는 } x^2-x+2=0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

답 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

참고

상수항이 4일 경우 $x^4 - 4x^2 + 4$ 도 완전제곱식으로 만들 수 있지만 $3x^2$ 을 $-4x^2 + 7x^2$ 으로 변형할 경우 합차 공식을 이용하여 좌변을 인수분해할 수 없다.

즉, $x^4 + 3x^2 + 4 = 0$ 에서

$$x^4 - 4x^2 + 4 + 7x^2 = 0, (x^2-2)^2 + 7x^2 = 0$$

그러므로 복이차방정식을 풀 때에는 합차 공식을 이용하여 인수분해할 수 있도록 변형하는 것이 중요하다.

208

$x^2 + 1 = t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2 - t - 2 = 0, (t+1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 2$$

(i) $t = -1$ 일 때, $x^2 + 1 = -1, x^2 = -2$

$$\therefore x = \pm \sqrt{2}i$$

(ii) $t = 2$ 일 때, $x^2 + 1 = 2, x^2 = 1$

$$\therefore x = \pm 1$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = \pm \sqrt{2}i \text{ 또는 } x = \pm 1$$

답 $x = \pm \sqrt{2}i$ 또는 $x = \pm 1$

210

둘씩 조를 짜서 전개하면

$$\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\} + 1 = 0 \quad \leftarrow \quad 0 + 3 = 1 + 2$$

$$(x^2+3x)(x^2+3x+2) + 1 = 0$$

$x^2 + 3x = t$ 로 놓으면

$$t(t+2) + 1 = 0, t^2 + 2t + 1 = 0$$

$$(t+1)^2 = 0 \quad \therefore t = -1$$

$$t = -1 \text{이므로 } x^2 + 3x = -1, x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

답 $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

212

양변을 x^2 으로 나누면 $x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

$$\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right\} + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = t \text{로 놓으면 } t^2 + t = 0, t(t+1) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) t = 0 \text{일 때, } x + \frac{1}{x} = 0$$

$$x^2 + 1 = 0 \quad \therefore x = \pm i$$

$$(ii) t = -1 \text{일 때, } x + \frac{1}{x} = -1$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = \pm i \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\text{답 } x = \pm i \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

214

주어진 방정식에 $x=1$ 을 대입하면

$$1 + a + (a+1) - 3a = 0, -a + 2 = 0 \quad \therefore a = 2$$

이 값을 주어진 방정식에 대입하면

$$x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = 0$$

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & 3 & -6 \\ & & 1 & 3 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 0 \end{array}$$

$$(x-1)(x^2+3x+6)=0$$

따라서 다른 두 근은 이차방정식 $x^2+3x+6=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 -3 이다. 답 -3

216

주어진 방정식에 $x=1$ 과 $x=-1$ 을 각각 대입하면

$$a+b=-5, -a+b=-1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2, b=-3$

이 값을 주어진 방정식에 대입하면

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3 = 0$$

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -2 & 2 & 2 & -3 \\ & & 1 & -1 & 1 & 3 \\ \hline -1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ & & -1 & 2 & -3 & \\ \hline & 1 & -2 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$(x-1)(x+1)(x^2-2x+3)=0$$

따라서 다른 두 근은 이차방정식 $x^2-2x+3=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 3 이다. 답 3

다른 풀이

주어진 방정식의 좌변은 $(x+1)(x-1)$, 즉 x^2-1 로 나누어떨어진다.

$$\begin{array}{r} x^2+ax+3 \\ x^2-1 \overline{) x^4+ax^3+2x^2+2x+b} \\ \underline{x^4 - x^2} \\ ax^3+3x^2+2x \\ \underline{ax^3 - ax} \\ 3x^2+(2+a)x+b \\ \underline{3x^2 - 3} \\ (2+a)x+b+3 \end{array}$$

나머지 $(2+a)x+b+3=0$ 에서 $a=-2, b=-3$

$$\therefore x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3 = (x^2-1)(x^2-2x+3)$$

따라서 다른 두 근은 이차방정식 $x^2-2x+3=0$ 의 두 근이므로 두 근의 곱은 3 이다.

218

주어진 방정식의 좌변에 $x=-1$ 을 대입하면 0 이 되므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 5 & a+4 & a \\ & & -1 & -4 & -a \\ \hline & 1 & 4 & a & 0 \end{array}$$

$$(x+1)(x^2+4x+a)=0$$

주어진 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+4x+a=0$ 이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 2^2 - a < 0 \quad \therefore a > 4$$

답 $a > 4$

220

주어진 방정식의 좌변에 $x=1$ 을 대입하면 0 이 되므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & -a & a-2 \\ & & 1 & 2 & -a+2 \\ \hline & 1 & 2 & -a+2 & 0 \end{array}$$

$$(x-1)(x^2+2x-a+2)=0$$

주어진 방정식이 중근을 가지려면

- (i) $x^2+2x-a+2=0$ 이 중근을 가질 때,
 $x^2+2x-a+2=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=1^2-(-a+2)=0 \quad \therefore a=1$$

- (ii) $x^2+2x-a+2=0$ 이 $x=1$ 을 근으로 가질 때,
 $x^2+2x-a+2=0$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$1+2-a+2=0 \quad \therefore a=5$$

- (i), (ii)에서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$1 \times 5 = 5$$

답 5

222

[1단계] 정육면체 모양의 그릇의 한 모서리의 길이를 x 라 하자.

[2단계] 직육면체 모양의 그릇에 담겨 있던 물의 부피는

$$3^2 \times 12 = 108$$

정육면체 모양의 그릇에 옮겨 담은 물의 부피는

$$x^2(x-3) \text{이므로}$$

$$x^2(x-3) = 108$$

$$\therefore x^3 - 3x^2 - 108 = 0$$

..... ㉠

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 108 \text{이라 하면}$$

$$f(6) = 216 - 108 - 108 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 6 & 1 & -3 & 0 & -108 \\ & & 6 & 18 & 108 \\ \hline & 1 & 3 & 18 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x-6)(x^2+3x+18)$$

$$\text{㉠에서 } (x-6)(x^2+3x+18) = 0$$

$$\therefore x=6 \text{ 또는 } x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{7}i}{2}$$

$$\text{이때 } x > 3 \text{이므로 } x=6$$

[3단계] 따라서 정육면체 모양의 그릇의 한 모서리의 길이는 6이다.

답 6

224

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -2, \alpha\beta\gamma = 5$$

$$(1) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = -\frac{2}{5}$$

$$(2) \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ = 0^2 - 2 \times (-2) = 4$$

$$(3) \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \\ = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma \\ = 0 \times \{4 - (-2)\} + 3 \times 5 = 15$$

$$\text{답 } (1) -\frac{2}{5} \quad (2) 4 \quad (3) 15$$

226

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2, \alpha\beta\gamma = -3$$

이때 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ 에서

$$\alpha + \beta = 1 - \gamma, \beta + \gamma = 1 - \alpha, \gamma + \alpha = 1 - \beta$$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$$

$$= (1 - \gamma)(1 - \alpha)(1 - \beta)$$

$$= 1 - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma$$

$$= 1 - 1 + 2 - (-3) = 5$$

답 5

228

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = -5, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \alpha\beta\gamma = 5 \text{이므로}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$= (-5)^2 - 2 \times 0 = 25$$

$$\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2$$

$$= (\alpha\beta)^2 + (\beta\gamma)^2 + (\gamma\alpha)^2$$

$$= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$= 0^2 - 2 \times 5 \times (-5) = 50$$

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = (\alpha\beta\gamma)^2 = 5^2 = 25$$

따라서 구하는 삼차방정식은

$$x^3 - 25x^2 + 50x - 25 = 0$$

$$\text{답 } x^3 - 25x^2 + 50x - 25 = 0$$

230

계수가 실수이고 한 근이 $2+i$ 이므로 $2-i$ 도 근이다.

세 근이 $3, 2+i, 2-i$ 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$3 + (2+i) + (2-i) = -a$$

$$3 \times (2+i) + (2+i) \times (2-i) + (2-i) \times 3 = b$$

$$3 \times (2+i) \times (2-i) = -c$$

$$\therefore a = -7, b = 17, c = -15$$

$$\text{답 } a = -7, b = 17, c = -15$$

232

계수가 유리수이고 한 근이 $1-\sqrt{2}$ 이므로 $1+\sqrt{2}$ 도 근이다.

세 근을 $1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, \alpha$ 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1-\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2}) + \alpha = 4$$

..... ㉠

$$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2})\alpha + (1+\sqrt{2})\alpha = m$$

..... ㉡

$$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})\alpha = -n$$

..... ㉢

㉠에서 $\alpha=2$

이 값을 ㉡, ㉢에 각각 대입하면 $m=3, n=2$

답 $m=3, n=2$

다른 풀이

$x=1-\sqrt{2}$ 를 주어진 방정식에 대입하면

$$(1-\sqrt{2})^3-4(1-\sqrt{2})^2+m(1-\sqrt{2})+n=0$$

$$\therefore (m+n-5)+(3-m)\sqrt{2}=0$$

무리수가 서로 같을 조건에서

$$m+n-5=0, 3-m=0 \quad \therefore m=3, n=2$$

234

방정식 $x^3=1$ 의 한 허근이 ω 이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

$$(1) \text{ (주어진 식)} = (\omega^3)^6 \omega^2 + (\omega^3)^3 \omega + 1 = 1^6 \times \omega^2 + 1^3 \times \omega + 1 = 0 \quad \leftarrow \omega^3=1$$

$$(2) \text{ (주어진 식)} = \frac{(\omega^3)^6 \omega^2}{(\omega^3)^3 \omega + 1} = \frac{\omega^2}{\omega + 1} \quad \leftarrow \omega^3=1$$

$$= \frac{-(\omega+1)}{\omega+1} = -1 \quad \leftarrow \omega^2 = -(\omega+1)$$

답 (1) 0 (2) -1

236

방정식 $x^3=-1$ 의 한 허근이 ω 이므로

$$\omega^3=-1, \omega^2-\omega+1=0$$

$$\therefore \text{ (주어진 식)} = \omega^3 \omega + \omega^3 + \omega^2$$

$$= -\omega - 1 + \omega^2 \quad \leftarrow \omega^3 = -1$$

$$= -\omega - 1 + (\omega - 1) = -2 \quad \leftarrow \omega^2 = \omega - 1$$

답 -2

238

$x^3=1$ 에서 $x^3-1=0, (x-1)(x^2+x+1)=0$ 이므로 ω 는 $x^2+x+1=0$ 의 한 근이고 나머지 한 근은 $\bar{\omega}$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega + \bar{\omega} = -1, \omega \bar{\omega} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{\omega-1} + \frac{1}{\bar{\omega}-1} = \frac{\bar{\omega}-1+\omega-1}{(\omega-1)(\bar{\omega}-1)}$$

$$= \frac{(\omega+\bar{\omega})-2}{\omega\bar{\omega}-(\omega+\bar{\omega})+1}$$

$$= \frac{-1-2}{1-(-1)+1} = -1 \quad \text{답} -1$$

+ 풍산자 방법

방정식 $x^3=1$ 의 한 허근이 ω 이면 다른 한 근은 $\bar{\omega}$ 이다.

① $\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$

② $\omega+\bar{\omega}=-1, \omega\bar{\omega}=1$

240

방정식 $x^2-x+1=0$ 의 한 근이 ω 이므로

$$\omega^2-\omega+1=0, \omega^3=-1$$

$$\text{(주어진 식)} = 6+5\omega+4\omega^2+3\omega^3+2\omega^3\omega+\omega^3\omega^2$$

$$= 6+5\omega+4\omega^2-3-2\omega-\omega^2 \quad \leftarrow \omega^3=-1$$

$$= 3\omega^2+3\omega+3$$

$$= 3(\omega-1)+3\omega+3 \quad \leftarrow \omega^2=\omega-1$$

$$= 6\omega$$

$$\therefore a=6, b=0$$

답 $a=6, b=0$

필수 확인 문제

152쪽

241

주어진 방정식의 좌변에 $x=-2$ 를 대입하면 0이 되므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 3 & 5 & 6 & \\ & & -2 & -2 & -6 & \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$(x+2)(x^2+x+3)=0$$

이때 α, β 는 이차방정식 $x^2+x+3=0$ 의 두 근이므로

$$\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=3$$

$$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$= (-1)^3-3 \times 3 \times (-1) = 8$$

답 8

242

주어진 방정식의 좌변에 $x=1$ 을 대입하면 0이 되므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & -3 & -12 & 7 & 6 \\ & & 2 & -1 & -13 & -6 \\ \hline & 2 & -1 & -13 & -6 & 0 \end{array}$$

$$(x-1)(2x^3-x^2-13x-6)=0$$

$$\text{㉠}$$

㉠에 $x=-2$ 를 대입하면 0이 되므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & -1 & -13 & -6 \\ & & -4 & 10 & 6 \\ \hline & 2 & -5 & -3 & 0 \end{array}$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2-5x-3)=0$$

$$(x-1)(x+2)(2x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 가장 큰 근은 3, 가장 작은 근은 -2이므로

$$3 \times (-2) = -6$$

답 -6

243

$x^2+2x=t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$(t+3)(t-5)+7=0, t^2-2t-8=0,$$

$$(t+2)(t-4)=0 \quad \therefore t=-2 \text{ 또는 } t=4$$

(i) $t=-2$ 일 때,

$x^2+2x+2=0$ 이므로 이 방정식의 판별식을 D_1 이라

$$\text{하면 } \frac{D_1}{4}=1^2-1 \times 2=-1 < 0$$

따라서 이 방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $t=4$ 일 때,

$x^2+2x-4=0$ 이므로 이 방정식의 판별식을 D_2 라

$$\text{하면 } \frac{D_2}{4}=1^2-1 \times (-4)=5 > 0$$

따라서 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 α, β 는 이차방정식 $x^2+2x+2=0$ 의 두 근
이므로 $\alpha\beta=2$

또, 계수가 실수이므로 $\bar{\alpha}=\beta, \bar{\beta}=\alpha$

$$\therefore \alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}=2\alpha\beta=4$$

답 4

244

주어진 방정식의 좌변에 $x=1$ 을 대입하면 0이 되므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2k+1 & -2k & \\ & 1 & -1 & -1 & 2k & \\ \hline & 1 & -1 & 2k & 0 & \end{array}$$

$$(x-1)(x^2-x+2k)=0$$

주어진 방정식의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식
 $x^2-x+2k=0$ 이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라
하면

$$D=(-1)^2-4 \times 1 \times 2k \geq 0 \quad \therefore k \leq \frac{1}{8}$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 0이다.

답 0

245

$x^3-3x^2+ax+b=0$ 의 세 근을 각각 $k, 2k, 3k$ ($k \neq 0$)
로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$k+2k+3k=6k=3 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$k \times 2k + 2k \times 3k + 3k \times k = 11k^2 = a \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$k \times 2k \times 3k = 6k^3 = -b \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{A} \text{에서 } k = \frac{1}{2}$$

이 값을 $\textcircled{B}, \textcircled{C}$ 에 각각 대입하면

$$a = 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}, b = -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore a+b = \frac{11}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right) = 2$$

답 2

246

$x^3=1$ 에서 $x^3-1=0, (x-1)(x^2+x+1)=0$ 이므로
 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이다.

이때 ω 의 켤레복소수인 $\bar{\omega}$ 도 $x^2+x+1=0$ 의 근이므로
 $\omega+\bar{\omega}=-1, \omega\bar{\omega}=1$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{(\omega-2)(\bar{\omega}-2)}{(\omega+1)(\bar{\omega}+1)} &= \frac{(\omega-2)(\bar{\omega}-2)}{(\omega+1)(\bar{\omega}+1)} \\ &= \frac{\omega\bar{\omega}-2(\omega+\bar{\omega})+4}{\omega\bar{\omega}+(\omega+\bar{\omega})+1} \\ &= \frac{1-2 \times (-1)+4}{1+(-1)+1} = 7 \end{aligned}$$

답 7

247

$x^2-x+1=0$ 의 양변에 $x+1$ 을 곱하면

$$(x+1)(x^2-x+1)=0, \text{ 즉 } x^3+1=0 \text{이므로}$$

$$\omega^3=-1, \omega^2-\omega+1=0$$

$\therefore$ (주어진 식)

$$= \{(\omega^3)^6 \omega^2 - (\omega^3)^3 \omega + 1\}^9$$

$$= \{(-1)^6 \times \omega^2 - (-1)^3 \times \omega + 1\}^9 \quad \leftarrow \omega^3 = -1$$

$$= (\omega^2 + \omega + 1)^9$$

$$= \{(\omega-1) + \omega + 1\}^9 \quad \leftarrow \omega^2 = \omega - 1$$

$$= (2\omega)^9 = 2^9 \times (\omega^3)^3 = -512 \quad \text{답 } -512$$

2 연립방정식과 부정방정식

153~166쪽

249

해가 무수히 많으려면 $\frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{1}{1}$ 이 성립해야 한다.

해가 존재하지 않으려면 $\frac{a}{1} = \frac{1}{a} \neq \frac{1}{1}$ 이 성립해야 한다.

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{a} \text{에서 } a^2=1 \quad \therefore a=\pm 1$$

(i) $a=-1$ 일 때, $-\frac{1}{1} = \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}$ 이므로 해가

존재하지 않는다.

(ii) $a=1$ 일 때, $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ 이므로 해가 무수히 많다.

따라서 $m=1, n=-1$ 이므로 $m-n=2$

답 2

251

$y+2x=3$ 에서 $y=-2x+3$ 이고, 이것을

$x^2-xy=18$ 에 대입하면

$$x^2-x(-2x+3)=18, x^2-x-6=0$$

$$(x+2)(x-3)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=3$$

이 값을 $y=-2x+3$ 에 대입하면 $y=7$ 또는 $y=-3$

$$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=7 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$$

$$\text{답} \begin{cases} x=-2 \\ y=7 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$$

253

$y^2-3xy=0$ 의 좌변을 인수분해하면 $y(y-3x)=0$

$$\therefore y=0 \text{ 또는 } y=3x$$

(i) $y=0$ 일 때, 이 식을 $3x^2+5y^2=48$ 에 대입하면

$$3x^2=48, x^2=16 \quad \therefore x=\pm 4$$

(ii) $y=3x$ 일 때, 이 식을 $3x^2+5y^2=48$ 에 대입하면

$$3x^2+5(3x)^2=48, 48x^2=48 \quad \therefore x=\pm 1$$

이 값을 $y=3x$ 에 대입하면 $y=\pm 3$ (복호동순)

$$\therefore \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$$

$$\text{답} \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$$

255

(1) $x+y=-2$, $xy=-8$ 이므로 x , y 의 값은 이차방정식 $t^2+2t-8=0$ 의 두 근이다.

이 이차방정식의 좌변을 인수분해하면

$$(t-2)(t+4)=0 \quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=-4$$

$$\text{따라서 구하는 근은 } \begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$$

(2) $x+y=a$, $xy=b$ 로 놓으면

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy \text{ 이므로 } \begin{cases} a^2-2b=5 \\ b=2 \end{cases}$$

위의 연립방정식을 풀면 $a=\pm 3$, $b=2$

(i) $a=3$, $b=2$ 일 때, $x+y=3$, $xy=2$ 이므로 x , y 의 값은 이차방정식 $t^2-3t+2=0$ 의 두 근이다.

$$(t-1)(t-2)=0 \quad \therefore t=1 \text{ 또는 } t=2$$

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

(ii) $a=-3$, $b=2$ 일 때, $x+y=-3$, $xy=2$ 이므로 x , y 의 값은 이차방정식 $t^2+3t+2=0$ 의 두 근이다.

$$(t+2)(t+1)=0 \quad \therefore t=-2 \text{ 또는 } t=-1$$

$$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\text{답 (1)} \begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\text{또는 } \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$$

참고

(1) 더해서 -2 , 곱해서 -8 인 두 수는 -4 , 2 이므로

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$$

257

$y=-x+2$ 를 $x^2+y^2=a+1$ 에 대입하면

$$x^2+(-x+2)^2=a+1, 2x^2-4x+3-a=0$$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라

$$\text{하면 } \frac{D}{4}=(-2)^2-2(3-a)=0$$

$$2a-2=0 \quad \therefore a=1$$

답 1

259

주어진 연립방정식을 만족시키는 x , y 의 값은 이차방정식 $t^2-(2a-6)t+a^2+4=0$ 의 두 근이다.

이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라

$$\text{하면 } \frac{D}{4}=\{-(a-3)\}^2-(a^2+4)\geq 0$$

$$-6a+5\geq 0 \quad \therefore a\leq \frac{5}{6} \quad \text{답 } a\leq \frac{5}{6}$$

261

[1단계] 큰 원의 반지름의 길이를 x , 작은 원의 반지름의 길이를 y 라 하자.

$$\text{[2단계]} \begin{cases} 2\pi x+2\pi y=24\pi \\ \pi x^2+\pi y^2=80\pi \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x+y=12 \\ x^2+y^2=80 \end{cases} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\text{㉠에서 } y=-x+12 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하여 풀면

$$x^2-12x+32=0, (x-4)(x-8)=0$$

$$\therefore x=4 \text{ 또는 } x=8$$

$$\text{㉡에 } x=4 \text{를 대입하면 } y=8$$

$$\text{㉡에 } x=8 \text{를 대입하면 } y=4$$

[3단계] 따라서 두 원 중 큰 원의 반지름의 길이는 8이다.

답 8

263

$$\begin{aligned} \textcircled{1}-\textcircled{2} \times 3 \text{을 하면 } 2x-2y &= -2 \quad \therefore y=x+1 \\ \text{이 식을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } x(x+1)+2x+(x+1) &= 1 \\ x(x+4) &= 0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=-4 \\ \text{이 값을 } y=x+1 \text{에 대입하면 } y &= 1 \text{ 또는 } y=-3 \\ \therefore \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases} \end{aligned}$$

답 $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$

265

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \times 2 - \textcircled{1} \text{을 하면 } x^2-xy &= 0, x(x-y) = 0 \\ \therefore x=0 \text{ 또는 } y &= x \\ \text{(i) } x=0 \text{일 때, 이 값을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면} \\ -y^2 &= 1, y^2 = -1 \quad \therefore y = \pm i \\ \text{(ii) } y=x \text{일 때, 이 식을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면} \\ x^2+x^2-x^2 &= 1, x^2 = 1 \quad \therefore x = \pm 1 \\ \text{이 값을 } y=x \text{에 대입하면 } y &= \pm 1 \text{ (복호동순)} \\ \therefore \begin{cases} x=0 \\ y=i \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=0 \\ y=-i \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \\ \text{답 } \begin{cases} x=0 \\ y=i \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=0 \\ y=-i \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

267

$$\begin{aligned} \text{(i) } 100x^2-99x-1 &= 0 \text{에서 } (100x+1)(x-1) = 0 \\ \therefore x &= -\frac{1}{100} \text{ 또는 } x=1 \\ \text{(ii) } x^2+99x-100 &= 0 \text{에서 } (x+100)(x-1) = 0 \\ \therefore x &= -100 \text{ 또는 } x=1 \\ \text{따라서 공통근은 } x &= 1 \end{aligned}$$

답 1

269

$$\begin{aligned} a=-x^2 \text{을 } 99x^3-ax+100 &= 0 \text{에 대입하면} \\ 100x^3+100 &= 0, x^3+1=0 \\ \therefore (x+1)(x^2-x+1) &= 0 \\ \text{주어진 조건에서 공통근이 실수이므로 공통근은} \\ x &= -1 \\ \therefore a &= -(-1)^2 = -1 \end{aligned}$$

답 -1

271

$$\begin{aligned} \text{두 방정식의 양변을 각각 더하면} \\ 2x^2+6x &= 0, 2x(x+3) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=-3$$

$$\text{이 값을 } x^2-(a-1)x+3a=0 \text{에 대입하면}$$

$$x=0 \text{일 때, } a=0$$

$$x=-3 \text{일 때, } 6a+6=0 \quad \therefore a=-1$$

$$\therefore a=0, a=1$$

답 0, -1

273

두 방정식의 양변을 각각 빼면

$$3ax-3a=0, 3a(x-1)=0 \quad \therefore a=0 \text{ 또는 } x=1$$

(i) $a=0$ 일 때, 이 값을 주어진 두 방정식에 각각 대입하면 두 식이 모두 $x^2+1=0$ 이 되어 같아진다.

즉, 공통근이 두 개가 되므로 이 값은 버린다.

$$\begin{aligned} \text{(ii) } x=1 \text{일 때, 이 값을 } x^2+4ax-2a+1 &= 0 \text{에 대입하면} \\ 1+4a-2a+1 &= 0, 2a+2=0 \quad \therefore a=-1 \end{aligned}$$

$$\text{(i), (ii)에서 } a=-1$$

답 -1

275

$$xy-3x-3y+7=0 \text{에서 } x(y-3)-3y+7=0$$

$$x(y-3)-3(y-3)-9+7=0$$

$$\therefore (x-3)(y-3)=2$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \Rightarrow x=4, y=5$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 \end{matrix} \Rightarrow x=5, y=4$$

$$\begin{matrix} -1 & -2 \end{matrix} \Rightarrow x=2, y=1$$

$$\begin{matrix} -2 & -1 \end{matrix} \Rightarrow x=1, y=2$$

따라서 구하는 정수 x, y 의 값은

$$\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

답 $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

277

두 정수근을 α, β ($\alpha \geq \beta$)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=1-m \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta=m+1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2} \text{을 하면 } \alpha+\beta+\alpha\beta=2, (\alpha+1)(\beta+1)-1=2$$

$$\therefore (\alpha+1)(\beta+1)=3$$

$$\begin{matrix} 3 & 1 \end{matrix} \Rightarrow \alpha=2, \beta=0$$

$$\begin{matrix} -1 & -3 \end{matrix} \Rightarrow \alpha=-2, \beta=-4$$

이 값을 각각 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$0=m+1, 8=m+1$$

$$\therefore m=-1, m=7$$

답 -1, 7

279

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0 \text{에서}$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$$

x, y 는 실수이므로 $x-1=0, y-2=0$

$$\therefore x=1, y=2 \quad \text{답 } x=1, y=2$$

281

$2x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ 을 x 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$2x^2 + 2(y+1)x + y^2 + 2y + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

x 가 실수이므로 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (y+1)^2 - 2(y^2 + 2y + 1) \geq 0$$

$$-y^2 - 2y - 1 \geq 0, y^2 + 2y + 1 \leq 0, (y+1)^2 \leq 0$$

$$\text{이때 } y \text{는 실수이므로 } y+1=0 \quad \therefore y=-1$$

$$\text{이 값을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 2x^2=0 \quad \therefore x=0$$

$$\text{답 } x=0, y=-1$$

필수 확인 문제

167쪽

282

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x^2+xy=3 \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $x=-2y+1$ 이고, 이 식을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$(-2y+1)^2 + (-2y+1)y = 3, 2y^2 - 3y - 2 = 0$$

$$(2y+1)(y-2)=0 \quad \therefore y=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } y=2$$

이 값을 $x=-2y+1$ 에 대입하면 $x=2$ 또는 $x=-3$

$$\therefore x+y=\frac{3}{2} \text{ 또는 } x+y=-1$$

따라서 $x+y$ 의 최댓값은 $\frac{3}{2}$ 이다. $\text{답 } \frac{3}{2}$

283

$$\begin{cases} 2x+y=k \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $y=k-2x$ 이고, 이 식을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$x^2 + (k-2x)^2 = 5$$

$$\therefore 5x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0$$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2k)^2 - 5(k^2 - 5) = 0$$

$$-k^2 + 25 = 0, k^2 = 25 \quad \therefore k = \pm 5 \quad \text{답 } -5, 5$$

284

$x+y=a, xy=b$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} a-b=1 \\ ab=12 \end{cases}$$

위의 연립방정식을 풀면

$$a=4, b=3 \text{ 또는 } a=-3, b=-4$$

$$(i) a=4, b=3 \text{일 때, } x+y=4, xy=3$$

x, y 의 값은 이차방정식 $t^2 - 4t + 3 = 0$ 의 두 근이므로

$$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

$$(ii) a=-3, b=-4 \text{일 때, } x+y=-3, xy=-4$$

x, y 의 값은 이차방정식 $t^2 + 3t - 4 = 0$ 의 두 근이므로

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$$

이때 x, y 는 자연수이므로 (i), (ii)에서

$$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\therefore xy=3$$

$$\text{답 } 3$$

285

$$(i) 20x^2 + 19x - 1 = 0 \text{에서}$$

$$(20x-1)(x+1)=0$$

$$\therefore x=\frac{1}{20} \text{ 또는 } x=-1$$

$$(ii) 20x^2 + 21x + 1 = 0 \text{에서}$$

$$(20x+1)(x+1)=0$$

$$\therefore x=-\frac{1}{20} \text{ 또는 } x=-1$$

(i), (ii)에서 공통근이 아닌 것은 각각 $\frac{1}{20}, -\frac{1}{20}$ 이므로

$$\alpha + \beta = \frac{1}{20} + \left(-\frac{1}{20}\right) = 0 \quad \text{답 } 0$$

286

두 방정식의 양변을 각각 빼면

$$3x - 15 = 0 \quad \therefore x = 5$$

즉, 공통근은 $x=5$ 이므로 이 값을

$$x^2 + (k-1)x + 5 = 0 \text{에 대입하면}$$

$$5^2 + 5(k-1) + 5 = 0, 5k + 25 = 0$$

$$\therefore k = -5$$

$$\text{답 } -5$$

287

$$xy + 2x - 3y = 0 \text{에서}$$

$$x(y+2) - 3(y+2) + 6 = 0$$

$$\therefore (x-3)(y+2)=-6$$

$$\begin{array}{ll} 1 & -6 \Rightarrow x=4, y=-8 (\times) \\ 2 & -3 \Rightarrow x=5, y=-5 (\times) \\ 3 & -2 \Rightarrow x=6, y=-4 (\times) \\ 6 & -1 \Rightarrow x=9, y=-3 (\times) \\ -1 & 6 \Rightarrow x=2, y=4 (\circ) \\ -2 & 3 \Rightarrow x=1, y=1 (\circ) \\ -3 & 2 \Rightarrow x=0, y=0 (\times) \\ -6 & 1 \Rightarrow x=-3, y=-1 (\times) \end{array}$$

따라서 구하는 자연수 x, y 는

$$x=2, y=4 \text{ 또는 } x=1, y=1$$

이므로 $x+y$ 의 최솟값은 2이다.

답 2

288

$$9x^2+6xy+2y^2-4y+4=0 \text{에서}$$

$$(9x^2+6xy+y^2)+(y^2-4y+4)=0$$

$$\therefore (3x+y)^2+(y-2)^2=0$$

$$x, y \text{는 실수이므로 } 3x+y=0, y-2=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=-\frac{2}{3}, y=2$$

$$\therefore x+y=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

289

$$\begin{cases} x+y=4 & \cdots \textcircled{㉠} \\ ax+2y=9 & \cdots \textcircled{㉡} \end{cases} \text{의 해와}$$

$$\begin{cases} x-2y=b & \cdots \textcircled{㉢} \\ x^2+y^2=10 & \cdots \textcircled{㉣} \end{cases} \text{의 해가 같다.}$$

㉠에서 $y=4-x$ 이고, 이것을 ㉡에 대입하면

$$x^2+(4-x)^2=10, x^2-4x+3=0$$

$$(x-1)(x-3)=0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

이 값을 $y=4-x$ 에 대입하면 $y=3$ 또는 $y=1$

(i) $x=1, y=3$ 일 때,

$$\textcircled{㉢} \text{에서 } a+6=9 \quad \therefore a=3$$

$$\textcircled{㉣} \text{에서 } 1-6=b \quad \therefore b=-5$$

(ii) $x=3, y=1$ 일 때,

$$\textcircled{㉢} \text{에서 } 3a+2=9 \quad \therefore a=\frac{7}{3}$$

$$\textcircled{㉣} \text{에서 } 3-2=b \quad \therefore b=1$$

구하는 a, b 의 값은 정수이므로 (i), (ii)에서

$$a=3, b=-5$$

$$\therefore ab=-15$$

답 -15

실전 연습문제

169~171쪽

290

주어진 방정식의 좌변에 $x=1$ 을 대입하면 0이 되므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -(2a+1) & (a+1)^2 & -(a^2+1) \\ & & 1 & -2a & a^2+1 \\ \hline & 1 & -2a & a^2+1 & 0 \end{array}$$

$$(x-1)(x^2-2ax+a^2+1)=0$$

이때 a, β 는 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+1=0$ 의 두 근
이므로

$$a+\beta=2a=8 \quad \therefore a=4$$

$$\therefore a\beta=a^2+1=4^2+1=17$$

답 ②

291

$x^2=t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2-7t-18=0, (t+2)(t-9)=0$$

$$\therefore t=-2 \text{ 또는 } t=9$$

즉, $x^2=-2$ 또는 $x^2=9$ 이므로

$$x=\pm\sqrt{2}i \text{ 또는 } x=\pm 3$$

따라서 주어진 방정식의 두 실근의 곱은

$$3 \times (-3) = -9$$

답 -9

292

$x^2-5x=t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2+10t-96=0, (t-6)(t+16)=0$$

$$\therefore t=6 \text{ 또는 } t=-16$$

따라서 $x^2-5x=6$ 또는 $x^2-5x=-16$ 이므로

$$(i) x^2-5x=6 \text{에서 } x^2-5x-6=0$$

$$(x+1)(x-6)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=6$$

$$(ii) x^2-5x=-16 \text{에서 } x^2-5x+16=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(-5)^2-4 \times 1 \times 16 = -39 < 0$$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 허근 α 는 $x^2-5x+16=0$ 의 근이므로

$$\alpha^2-5\alpha+16=0$$

$$\therefore \alpha^2-5\alpha=-16$$

답 -16

293

좌변에 $x=-a$ 를 대입하면 0이 되므로 조립제법을 이
용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -a & 1 & a+2 & 3a & a^2 \\ & & -a & -2a & -a^2 \\ \hline & 1 & 2 & a & 0 \end{array}$$

$$(x+a)(x^2+2x+a)=0$$

$$\therefore x=-a \text{ 또는 } x^2+2x+a=0$$

따라서 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2x+a=0$ 이 $-a$ 가 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D>0$ 이고,

$-a$ 는 근이 아니어야 하므로

$$(i) \frac{D}{4}=1^2-a>0 \quad \therefore a<1$$

$$(ii) (-a)^2+2(-a)+a \neq 0, a^2-a \neq 0$$

$$a(a-1) \neq 0 \quad \therefore a \neq 0, a \neq 1$$

따라서 구하는 a 의 값의 범위는 $a<0$ 또는 $0<a<1$

답 $a<0$ 또는 $0<a<1$

294

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3, \alpha\beta\gamma=4$$

$$\alpha+\beta+\gamma=2 \text{에서}$$

$$\alpha+\beta=2-\gamma, \beta+\gamma=2-\alpha, \gamma+\alpha=2-\beta$$

$$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$

$$=(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$$

$$=2^3-2^2(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$$

$$=2^3-2^2 \times 2+2 \times 3-4=2$$

답 2

295

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4, \alpha\beta\gamma=2$$

이때 $\alpha+\beta+\gamma=0$ 에서

$$\alpha+\beta=-\gamma, \beta+\gamma=-\alpha, \gamma+\alpha=-\beta \text{이므로}$$

$$(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=-\gamma+(-\alpha)+(-\beta)$$

$$=-(\alpha+\beta+\gamma)=0$$

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$$

$$=-\gamma \times (-\alpha)+(-\alpha) \times (-\beta)+(-\beta) \times (-\gamma)$$

$$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$$

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=-\gamma \times (-\alpha) \times (-\beta)$$

$$=-\alpha\beta\gamma=-2$$

따라서 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 를 세 근으로 하고 x^3 의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3+4x+2=0$

$$\text{답 } x^3+4x+2=0$$

296

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{에서 } 2\omega+1=\sqrt{3}i$$

양변을 제곱하면 $4\omega^2+4\omega+1=-3$

$$\therefore \omega^2+\omega+1=0$$

양변에 $\omega-1$ 을 곱하면

$$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0, \omega^3-1=0$$

$$\therefore \omega^3=1, \frac{1}{\omega^2}=\omega$$

$$\therefore \omega^{200}+\frac{1}{\omega^{200}}=(\omega^3)^{66}\omega^2+\frac{1}{(\omega^3)^{66}\omega^2}$$

$$=\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\omega^2+\omega=-1$$

답 -1

297

$x+y=a, xy=b$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a^2-3b=31 \end{cases}$$

위의 연립방정식을 풀면

$$a=-4, b=-5 \text{ 또는 } a=7, b=6$$

$$(i) a=-4, b=-5 \text{일 때, } x+y=-4, xy=-5$$

x, y 의 값은 이차방정식 $t^2+4t-5=0$ 의 두 근이므로

$$\begin{cases} x=-5 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1 \\ y=-5 \end{cases}$$

$$(ii) a=7, b=6 \text{일 때, } x+y=7, xy=6$$

x, y 의 값은 이차방정식 $t^2-7t+6=0$ 의 두 근이므로

$$\begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$$

(i), (ii)에서 $a-b$ 의 최댓값은 $x=1, y=-5$ 일 때 6이다.

답 6

298

$y=-2x-2$ 를 $x^2+y^2=a$ 에 대입하면

$$x^2+(-2x-2)^2=a, 5x^2+8x+4-a=0$$

이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4^2-5(4-a) \geq 0 \quad \therefore a \geq \frac{4}{5} \quad \text{답 } a \geq \frac{4}{5}$$

299

$$xy=6(y-x) \text{에서 } xy+6x-6y=0$$

$$\therefore (x-6)(y+6)=-36$$

x, y 가 양의 정수이므로 $x-6 \geq -5, y+6 \geq 7$

이때 $(x-6)(y+6)=-36$ 이 성립하는 경우는 다음과 같다.

$x-6$	-4	-3	-2	-1
$y+6$	9	12	18	36

$$\therefore x=2, y=3 \text{ 또는 } x=3, y=6$$

$$\text{또는 } x=4, y=12 \text{ 또는 } x=5, y=30$$

따라서 $x+y$ 의 최댓값은 35이다.

답 35

300

$f(x)=0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로
 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ ($a \neq 0$)로 놓으면
 $f(3x-2)=a(3x-2-\alpha)(3x-2-\beta)(3x-2-\gamma)$
 $f(3x-2)=0$ 에서
 $3x-2-\alpha=0$ 또는 $3x-2-\beta=0$ 또는 $3x-2-\gamma=0$
 $\therefore x=\frac{\alpha+2}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+2}{3}$ 또는 $x=\frac{\gamma+2}{3}$
따라서 구하는 세 근의 합은

$$\frac{\alpha+2}{3} + \frac{\beta+2}{3} + \frac{\gamma+2}{3} = \frac{\alpha+\beta+\gamma+6}{3}$$

$$= \frac{9+6}{3} = 5$$

답 5

다른 풀이

α, β, γ 는 $f(x)=0$ 의 세 근이므로
 $f(\alpha)=0, f(\beta)=0, f(\gamma)=0$
따라서 $f(3x-2)=0$ 의 근은
 $3x-2=\alpha, 3x-2=\beta, 3x-2=\gamma$ 인 x 의 값이다.
 $\therefore x=\frac{\alpha+2}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+2}{3}$ 또는 $x=\frac{\gamma+2}{3}$
따라서 구하는 세 근의 합은

$$\frac{\alpha+2}{3} + \frac{\beta+2}{3} + \frac{\gamma+2}{3} = \frac{\alpha+\beta+\gamma+6}{3} = \frac{9+6}{3} = 5$$

301

둘씩 조를 짜서 전개하면
 $\{(x-4)(x+5)\}\{(x-2)(x+3)\}=240$
 $(x^2+x-20)(x^2+x-6)=240$
 $x^2+x=t$ 로 놓으면
 $(t-20)(t-6)=240, t^2-26t-120=0$
 $(t+4)(t-30)=0 \quad \therefore t=-4$ 또는 $t=30$
(i) $t=-4$ 일 때, $x^2+x+4=0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
(ii) $t=30$ 일 때, $x^2+x-30=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖고, 근과 계수의 관계에 의하여 서로 다른 두 실근의 곱은 -30 이다.
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 실근의 곱은 -30 이다.

답 -30

302

주어진 방정식의 좌변에 $x=-1$ 을 대입하면 0이 되므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & k & 5k-6 & 8k-16 & 4k-10 \\ & & -k & -4k+6 & -4k+10 \\ \hline & k & 4k-6 & 4k-10 & 0 \end{array}$$

$(x+1)\{kx^2+(4k-6)x+4k-10\}=0$
주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $kx^2+(4k-6)x+4k-10=0$ 이 -1 이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D>0$ 이고, -1 은 근이 아니어야 하므로

$$(i) \frac{D}{4} = (2k-3)^2 - k(4k-10) > 0, -2k+9 > 0$$

$$\therefore k < \frac{9}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$(ii) k-4k+6+4k-10 \neq 0 \quad \therefore k \neq 4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } k < 4 \text{ 또는 } 4 < k < \frac{9}{2}$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k 는 1, 2, 3이므로 그 개수는 3이다.

답 3

303

몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면
 $x^{100}+3x+1=(x^2-x+1)Q(x)+ax+b$
양변에 $x^2-x+1=0$ 의 근 $x=\omega$ 를 대입하면
 $\omega^{100}+3\omega+1=a\omega+b \quad \dots\dots \textcircled{7}$
한편, $\omega^2-\omega+1=0$ 에서
 $(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0 \quad \therefore \omega^3=-1$
 $\omega^3=-1$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $2\omega+1=a\omega+b$
 $\therefore a=2, b=1$
따라서 구하는 나머지는 $2x+1$ 이다.

답 $2x+1$

304

$x^2-4k=0$ 에서 $x^2=4k$ 이므로
 $4k=x^2$ 을 $100x^3+16kx-832=0$ 에 대입하면
 $104x^3-832=0, x^3-8=0$
 $\therefore (x-2)(x^2+2x+4)=0$
주어진 조건에서 공통근은 실수이므로 $x=2$
이 값을 $4k=x^2$ 에 대입하면
 $k=\frac{x^2}{4}=\frac{2^2}{4}=1$

답 1

305

$x+y=u, xy=v$ 로 놓으면 $x^2+y^2=5$ 에서
 $u^2-2v=5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
또, $xy=2(x+y)$ 에서
 $v=2u \quad \dots\dots \textcircled{8}$
 $\textcircled{8}$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $u^2-4u=5$
 $u^2-4u-5=0, (u-5)(u+1)=0$
 $\therefore u=5$ 또는 $u=-1$

(i) $u=5$ 일 때, $v=10$ 이므로

x, y 의 값은 이차방정식 $t^2-5t+10=0$ 의 두 근이다.

이때 이 방정식은 정수인 해를 갖지 않는다.

(ii) $u=-1$ 일 때, $v=-2$ 이므로

x, y 의 값은 이차방정식 $t^2+t-2=0$ 의 두 근이다.

$$(t+2)(t-1)=0 \quad \therefore t=-2 \text{ 또는 } t=1$$

따라서 이를 만족시키는 정수 x, y 의 값은

$$x=-2, y=1 \text{ 또는 } x=1, y=-2$$

(i), (ii)에서 구하는 두 정수 x, y 의 값은

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

답 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

306

처음 두 자리 자연수의 십의 자리 숫자를 x , 일의 자리의 숫자를 y 라 하면

$$\begin{cases} x^2+y^2=45 & \text{..... ㉠} \\ 10y+x=10x+y+27 & \text{..... ㉡} \end{cases}$$

㉡을 정리하면 $x=y-3$ 이므로 이 식을 ㉠에 대입하면

$$(y-3)^2+y^2=45, y^2-3y-18=0$$

$$(y+3)(y-6)=0 \quad \therefore y=6 \quad (\because y \text{는 자연수})$$

이 값을 $x=y-3$ 에 대입하면 $x=3$

따라서 처음 수는 36이다.

답 36

307

좌변에 $x=1$ 을 대입하면 0이 되므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & -k-1 & 7k & -6k \\ & & 1 & -k & 6k \\ \hline & 1 & -k & 6k & 0 \end{array}$$

$$(x-1)(x^2-kx+6k)=0$$

m, n 이 자연수이므로 $2m \neq 1, 3n \neq 1$

즉, $2m, 3n$ 은 이차방정식 $x^2-kx+6k=0$ 의 두 근이다.

$$2m+3n=k \quad \text{..... ㉠}$$

$$6mn=6k \quad \therefore mn=k \quad \text{..... ㉡}$$

㉡-㉠을 하면 $mn-2m-3n=0$

$$m(n-2)-3(n-2)-6=0$$

$$\therefore (m-3)(n-2)=6$$

$$1 \quad 6 \Rightarrow m=4, n=8$$

$$2 \quad 3 \Rightarrow m=5, n=5$$

$$3 \quad 2 \Rightarrow m=6, n=4$$

$$6 \quad 1 \Rightarrow m=9, n=3$$

따라서 $m+n$ 의 최댓값은 12이다.

답 12

4 여러 가지 부등식

1 부등식의 성질과 사칙연산

173~176쪽

309

(1) $1 \leq x \leq 3$ 의 각 변에 3을 곱하면 $3 \leq 3x \leq 9$

이 부등식의 각 변에서 1을 빼면

$$2 \leq 3x-1 \leq 8$$

(2) $1 \leq x \leq 3$ 의 각 변에 3을 더하면 $4 \leq x+3 \leq 6$

이 부등식의 각 변의 역수를 취하면

$$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{x+3} \leq \frac{1}{4}$$

답 (1) $2 \leq 3x-1 \leq 8$ (2) $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{x+3} \leq \frac{1}{4}$

311

$2x+y=1$ 에서 $y=1-2x$

$-1 \leq x \leq 1$ 의 각 변에 -2 를 곱하면

$$-2 \leq -2x \leq 2$$

이 부등식의 각 변에 1을 더하면

$$-1 \leq -2x+1 \leq 3$$

$$\therefore -1 \leq y \leq 3$$

답 $-1 \leq y \leq 3$

313

$$\begin{array}{rclcl} (1) & -6 & \leq & 2x & \leq & 2 \\ & +) & 3 & \leq & 3y & \leq & 6 \\ \hline & -6+3 & \leq & 2x+3y & \leq & 2+6 \end{array}$$

$$\therefore -3 \leq 2x+3y \leq 8$$

$$\begin{array}{rclcl} (2) & -6 & \leq & 2x & \leq & 2 \\ & -) & 3 & \leq & 3y & \leq & 6 \\ \hline & -6-6 & \leq & 2x-3y & \leq & 2-3 \end{array}$$

$$\therefore -12 \leq 2x-3y \leq -1$$

답 (1) $-3 \leq 2x+3y \leq 8$

(2) $-12 \leq 2x-3y \leq -1$

315

(1) xy 의 값 $-3, -6, 1, 2$ 중 최솟값이 -6 , 최댓값이 2 이므로 $-6 \leq xy \leq 2$

(2) $\frac{x}{y}$ 의 값 $-3, -\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}$ 중 최솟값이 -3 , 최댓값이

$$1 \text{이므로 } -3 \leq \frac{x}{y} \leq 1$$

답 (1) $-6 \leq xy \leq 2$ (2) $-3 \leq \frac{x}{y} \leq 1$

317

$2 \leq x \leq 5$ 의 각 변에 2를 곱하면

$$4 \leq 2x \leq 10$$

$4 < y \leq a$ 의 각 변에 $\frac{1}{2}$ 을 곱하면

$$2 < \frac{1}{2}y \leq \frac{1}{2}a$$

$$\begin{array}{rcl} 4 & \leq & 2x \leq 10 \\ +) & 2 < & \frac{1}{2}y \leq \frac{1}{2}a \\ \hline 6 & < & 2x + \frac{1}{2}y \leq 10 + \frac{1}{2}a \end{array}$$

$$\therefore 6 < 2x + \frac{1}{2}y \leq 10 + \frac{1}{2}a$$

$2x + \frac{1}{2}y$ 의 최댓값이 12이므로 $10 + \frac{1}{2}a = 12$

$$20 + a = 24 \quad \therefore a = 4$$

답 4

필수 확인 문제

177쪽

318

ㄱ은 옳다.

$a > b, b > c$ 이면 $a > c$ 이다.

ㄴ도 옳다.

부등식의 양변에서 같은 수를 빼면 부등호의 방향은 바뀌지 않으므로 $a > b$ 이면 $a - c > b - c$ 이다.

ㄷ은 옳지 않다.

$a = 1, b = -2$ 일 때,

$a > b$ 이지만 $a^2 = 1, b^2 = 4$ 이므로 $a^2 < b^2$ 이다.

ㄹ은 옳다.

부등식의 양변에 양수를 곱하면 부등호의 방향은 바뀌지 않으므로 $a > b, c > 0$ 이면 $ac > bc$ 이다.

ㅁ은 옳지 않다.

$a = 1, b = 2, c = -1$ 일 때,

$ac > bc$ 이지만 $a < b$ 이다.

따라서 옳지 않은 것은 ㄷ, ㅁ이다.

답 ④

319

부등식의 양변에 음수를 곱하거나 음수로 나누면 부등호의 방향이 바뀐다. 즉, 항상 성립하는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

참고

④ $a = -2, b = -1$ 이면 $a < b$ 이지만 $a^2 > b^2$ 이다.

320

ㄱ은 옳다.

$a < b$ 이고 a, b 는 음수이므로 $|a| > |b|$

ㄴ은 옳지 않다.

$$c = 2, d = 1 \text{ 이면 } \frac{1}{2} < 1$$

ㄷ은 옳지 않다.

$a < b$ 에서 $a - b < 0$ 이고, $c > d$ 에서 $d - c < 0$ 이므로

$$(a - b) + (d - c) < 0 \quad \therefore a + d < b + c$$

ㄹ은 옳다.

$$a < 0, c > 0 \text{ 이므로 } a^3 < 0, c^3 > 0 \quad \therefore a^3 < c^3$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

321

$$-3 \leq x \leq 2 \text{ 에서 } -2 \leq -x \leq 3$$

$-xy$ 는 $-x$ 와 y 의 곱이고, $-xy$ 의 값 $-4, -12, 6$,

18 중 최솟값이 -12 , 최댓값이 18 이므로

$$-12 \leq -xy \leq 18$$

답 $-12 \leq -xy \leq 18$

322

$$\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \text{ 이므로 } 2 \leq x \leq a \text{ 에서}$$

$$\text{각 변의 역수를 취하면 } \frac{1}{a} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{각 변에 1을 더하면 } 1 + \frac{1}{a} \leq 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{a+1}{a} \leq \frac{x+1}{x} \leq \frac{3}{2}$$

최댓값 $\frac{3}{2}$ 과 최솟값 $\frac{a+1}{a}$ 의 곱이 2이므로

$$\frac{3}{2} \times \frac{a+1}{a} = 2$$

$$3a + 3 = 2a \quad \therefore a = 3$$

답 3

323

$-1 \leq x \leq 2$ 의 각 변에 2를 곱하면

$$-2 \leq 2x \leq 4$$

이고, $2 \leq y \leq 3$ 이므로

$$\begin{array}{rcl} -2 & \leq & 2x \leq 4 \\ -) & 2 & \leq y \leq 3 \\ \hline -5 & \leq & 2x - y \leq 2 \end{array}$$

$$\therefore -5 \leq 2x - y \leq 2$$

$\alpha \leq 2x - y \leq \beta$ 를 만족시키려면 $\alpha \leq -5, \beta \geq 2$ 이어야 하므로 α 의 최댓값과 β 의 최솟값의 합은

$$-5 + 2 = -3$$

답 -3

325

주어진 식을 전개하여 정리하면

$$ax + a + 2 \geq 2a + 2 \quad \therefore ax \geq a$$

$$(i) a > 0 \text{ 일 때, } x \geq \frac{a}{a} \quad \therefore x \geq 1$$

$$(ii) a < 0 \text{ 일 때, } x \leq \frac{a}{a} \quad \therefore x \leq 1$$

(iii) $a = 0$ 일 때, $0 \times x \geq 0$ 이므로 해는 모든 실수이다.답 $a > 0$ 일 때, $x \geq 1$ $a < 0$ 일 때, $x \leq 1$ $a = 0$ 일 때, 해는 모든 실수이다.

327

주어진 식을 전개하여 정리하면

$$a^2x + 1 > ax + a, (a^2 - a)x > a - 1$$

$$\therefore a(a-1)x > a-1$$

해가 존재하지 않거나 모든 실수인 경우는 x 의 계수가 0일 때 발생한다.

$$a(a-1)=0 \text{ 에서 } a=0 \text{ 또는 } a=1$$

(i) $a=0$ 일 때, $0 \times x > -1$ 이므로 해는 모든 실수이다.(ii) $a=1$ 일 때, $0 \times x > 0$ 이므로 해는 없다.따라서 구하는 상수 a 의 값은 0이다.

답 0

329

[1단계] $(2a+b)x < a-b$ 의 해가 $x < \frac{1}{3}$ 이므로

$$2a+b > 0, \frac{a-b}{2a+b} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a-b}{2a+b} = \frac{1}{3} \text{ 에서 } 3(a-b) = 2a+b \quad \therefore a=4b$$

 $a=4b$ 를 $2a+b > 0$ 에 대입하면

$$8b+b > 0, 9b > 0 \quad \therefore b > 0$$

[2단계] $a=4b$ 를 $(a+b)x > b$ 에 대입하면 $5bx > b$

$$\text{이때 } b > 0 \text{ 이므로 } x > \frac{b}{5b} \quad \therefore x > \frac{1}{5}$$

답 $x > \frac{1}{5}$

331

[1단계] $(a+b)x < a$ 의 해가 $x > \frac{1}{2}$ 이므로

$$a+b < 0, \frac{a}{a+b} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{1}{2} \text{ 에서 } 2a = a+b \quad \therefore a=b$$

 $a=b$ 를 $a+b < 0$ 에 대입하면

$$b+b < 0, 2b < 0 \quad \therefore b < 0$$

[2단계] $a=b$ 를 $ax > b$ 에 대입하면 $bx > b$

$$\text{이때 } b < 0 \text{ 이므로 } x < \frac{b}{b} \quad \therefore x < 1$$

답 $x < 1$

333

(1) 절댓값 기호 안을 0으로 하는 $x = -3$ 을 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

$$(i) x \geq -3 \text{ 일 때, } x+3 \geq 3x-1$$

$$-2x \geq -4 \quad \therefore x \leq 2$$

 $x \geq -3, x \leq 2$ 의 공통부분은

$$-3 \leq x \leq 2$$

..... ㉠

$$(ii) x < -3 \text{ 일 때, } -(x+3) \geq 3x-1$$

$$-4x \geq 2 \quad \therefore x \leq -\frac{1}{2}$$

 $x < -3, x \leq -\frac{1}{2}$ 의 공통부분은

$$x < -3$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 합한 범위는 $x \leq 2$ (2) 절댓값 기호 안을 0으로 하는 $x = -1$ 과 $x = 2$ 를 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

$$(i) x < -1 \text{ 일 때,}$$

$$-(x+1) - (x-2) \leq 5$$

$$-2x \leq 4 \quad \therefore x \geq -2$$

 $x < -1, x \geq -2$ 의 공통부분은

$$-2 \leq x < -1$$

..... ㉢

$$(ii) -1 \leq x < 2 \text{ 일 때,}$$

$$x+1 - (x-2) \leq 5$$

$$\therefore 0 \times x \leq 2$$

 $-1 \leq x < 2$ 의 모든 x 는 위의 부등식을만족시킨다. $\therefore -1 \leq x < 2$

..... ㉣

$$(iii) x \geq 2 \text{ 일 때,}$$

$$(x+1) + (x-2) \leq 5$$

$$2x \leq 6 \quad \therefore x \leq 3$$

 $x \geq 2, x \leq 3$ 의 공통부분은

$$2 \leq x \leq 3$$

..... ㉤

㉢, ㉣, ㉤을 합한 범위는 $-2 \leq x \leq 3$ 답 (1) $x \leq 2$ (2) $-2 \leq x \leq 3$

+ 풍산자 비법

절댓값 기호가 2개 있는 부등식

$$|x-a| + |x-b| < c \quad (a < b, c > 0)$$

의 끝은 $x=a, x=b$ 를 기준으로 하여 다음과 같이 x 의 값의 범위를 나누어 본다.

$$(i) x < a \quad (ii) a \leq x < b \quad (iii) x \geq b$$

335

(1) $|x-2| \leq 6$ 에서 $-6 \leq x-2 \leq 6$

$\therefore -4 \leq x \leq 8$

(2) $|x+1| > 3$ 에서 $x+1 < -3$ 또는 $x+1 > 3$

$\therefore x < -4$ 또는 $x > 2$

(3) $4 < |x+1| < 5$ 에서

$-5 < x+1 < -4$ 또는 $4 < x+1 < 5$

$\therefore -6 < x < -5$ 또는 $3 < x < 4$

답 (1) $-4 \leq x \leq 8$

(2) $x < -4$ 또는 $x > 2$

(3) $-6 < x < -5$ 또는 $3 < x < 4$

337

(1) $3x+1 \leq 7$ 에서 $x \leq 2$

..... ㉠

$x < 5$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면 $x \leq 2$

(2) $-x < 6-3x$ 에서 $x < 3$

..... ㉢

$x+1 > -7$ 에서 $x > -8$

..... ㉣

㉢, ㉣에서 공통부분을 구하면 $-8 < x < 3$

답 (1) $x \leq 2$ (2) $-8 < x < 3$

339

(1) [1단계] $\begin{cases} -2 \leq 3x-5 \\ 3x-5 \leq 7 \end{cases}$ 로 고친다.

[2단계] $-2 \leq 3x-5$ 에서 $x \geq 1$

..... ㉠

$3x-5 \leq 7$ 에서 $x \leq 4$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$1 \leq x \leq 4$

(2) [1단계] $\begin{cases} x-5 \leq 2x-3 \\ 2x-3 < x+8 \end{cases}$ 로 고친다.

[2단계] $x-5 \leq 2x-3$ 에서 $-x \leq 2$

$\therefore x \geq -2$

..... ㉢

$2x-3 < x+8$ 에서 $x < 11$

..... ㉣

㉢, ㉣에서 공통부분을 구하면

$-2 \leq x < 11$

답 (1) $1 \leq x \leq 4$ (2) $-2 \leq x < 11$

참고

$A < B < C$ 의 꼴을 $\begin{cases} A < B \\ A < C \end{cases}$ 의 꼴 또는

$\begin{cases} A < C \\ B < C \end{cases}$ 의 꼴로 바꾸어 풀지 않도록 주의한다.

$\begin{cases} A < B \\ A < C \end{cases}$ 의 꼴로 풀면 B 와 C 의 대소 관계를 알 수 없고,

$\begin{cases} A < C \\ B < C \end{cases}$ 의 꼴로 풀면 A 와 B 의 대소 관계를 알 수 없다.

341

$3-4x > -5(x-a)$ 에서 $-4x+5x > 5a-3$

$\therefore x > 5a-3$

..... ㉠

$-2x \leq 16-6x$ 에서 $-2x+6x \leq 16$, $4x \leq 16$

$\therefore x \leq 4$

주어진 연립부등식의 해가 $2 < x \leq 4$ 이므로 ㉠에서 부등식의 해는 $x > 2$ 이다.

따라서 $5a-3=2$ 이므로 $a=1$

답 1

343

$-2x+1 \leq x-8$ 에서 $-2x-x \leq -8-1$

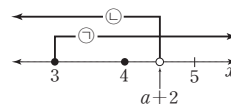
$-3x \leq -9 \therefore x \geq 3$

..... ㉠

$2+x > 2x-a$ 에서 $x-2x > -a-2$

$-x > -a-2 \therefore x < a+2$

..... ㉡



주어진 연립부등식을 만족시키는 자연수 x 의 개수가 2이려면 연립부등식의 해는 ㉠, ㉡에서 $3 \leq x < a+2$ 이고 $4 < a+2 \leq 5$ $\leftarrow a+2$ 의 값이 5가 되어도 부등식의 해는 5를 포함하지 않는다.

$\therefore 2 < a \leq 3$

답 $2 < a \leq 3$

345

(1) $2x-2 \geq -4$ 에서 $2x \geq -2$

$\therefore x \geq -1$

..... ㉠

$4x-5 \leq -9$ 에서 $4x \leq -4$

$\therefore x \leq -1$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 연립부등식의 해는 $x = -1$

(2) [1단계] $\begin{cases} 15-3x < 2x \\ 2x \leq -x+9 \end{cases}$ 로 고친다.

[2단계] $15-3x < 2x$ 에서 $-5x < -15$

$\therefore x > 3$

..... ㉢

$2x \leq -x+9$ 에서 $3x \leq 9$

$\therefore x \leq 3$

..... ㉣

㉢, ㉣에서 연립부등식의 해는 없다.

답 (1) $x = -1$ (2) 해는 없다.

347

$$4x-1 \geq 3x+a \text{에서 } 4x-3x \geq a+1$$

$$\therefore x \geq a+1$$

$$5x-4 \leq 2x+2 \text{에서 } 5x-2x \leq 2+4$$

$$\therefore x \leq 2$$

연립부등식의 해가 존재하지 않으려면

$$a+1 > 2 \quad \leftarrow 2 \text{를 포함하면 } x=2 \text{가 해가 된다.}$$

$$\therefore a > 1$$

답 $a > 1$

349

$$x-5 \geq a \text{에서 } x \geq a+5$$

$$x-2b \leq 3 \text{에서 } x \leq 3+2b$$

$$\text{해가 오직 하나이므로 } a+5=3+2b=2$$

$$\therefore a=-3, b=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore a+2b=-4$$

답 -4

필수 확인 문제

188쪽

350

주어진 식을 전개하여 정리하면

$$(a^2-a)x > 2a^2-a-1$$

$$\therefore a(a-1)x > (2a+1)(a-1)$$

해가 존재하지 않거나 모든 실수인 경우는 x 의 계수가 0일 때 발생한다.

$$a(a-1)=0 \text{에서 } a=0 \text{ 또는 } a=1$$

(i) $a=0$ 일 때, $0 \times x > -1$ 이므로 해는 모든 실수이다.

(ii) $a=1$ 일 때, $0 \times x > 0$ 이므로 해는 없다.

$$\text{따라서 } a=0, \beta=1 \text{이므로 } \alpha+\beta=1$$

답 1

351

$$(a-b)x \geq a+2b \text{의 해가 존재하지 않으므로}$$

$$a-b=0, a+2b > 0$$

$$a=b \text{를 } a+2b > 0 \text{에 대입하면 } b+2b > 0, 3b > 0$$

$$\therefore b > 0$$

$$a=b \text{를 } (2a+b)x > a-b \text{에 대입하면}$$

$$(2b+b)x > b-b, 3bx > 0$$

$$\therefore x > 0 \quad (\because b > 0)$$

답 $x > 0$

352

$$|4x-10| \leq 6 \text{에서}$$

$$-6 \leq 4x-10 \leq 6, 4 \leq 4x \leq 16$$

$$\therefore 1 \leq x \leq 4$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x 는 1, 2, 3, 4이므로 그 개수는 4이다.

답 4

353

(i) $x \geq \frac{3}{2}$ 일 때,

$$2x-3 < 3x+5, -x < 8$$

$$\therefore x > -8$$

$$x \geq \frac{3}{2}, x > -8 \text{의 공통부분은 } x \geq \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x < \frac{3}{2}$ 일 때,

$$-(2x-3) < 3x+5, -5x < 2$$

$$\therefore x > -\frac{2}{5}$$

$$x < \frac{3}{2}, x > -\frac{2}{5} \text{의 공통부분은}$$

$$-\frac{2}{5} < x < \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 합한 범위는 $x > -\frac{2}{5}$

$$\text{따라서 } k = -\frac{2}{5} \text{이다.}$$

답 $-\frac{2}{5}$

354

$$-\frac{x+2}{4} + \frac{5}{3} \geq \frac{x}{3} \text{에서}$$

$$-3(x+2)+20 \geq 4x, -7x \geq -14$$

$$\therefore x \leq 2$$

$\dots\dots \textcircled{1}$

$$0.6(x+1) \leq x - \frac{1}{5} \text{에서}$$

$$6(x+1) \leq 10x-2, -4x \leq -8$$

$$\therefore x \geq 2$$

$\dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 연립부등식의 해는 $x=2$ 이다.

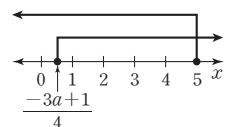
답 $x=2$

355

$$3x-4 \leq 2x+1 \text{에서 } x \leq 5$$

$$6x-1 \geq 2x-3a \text{에서}$$

$$x \geq \frac{-3a+1}{4}$$



연립부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수가 5이므로

$$0 < \frac{-3a+1}{4} \leq 1, 0 < -3a+1 \leq 4, -1 < -3a \leq 3$$

$$\therefore -1 \leq a < \frac{1}{3} \quad \text{답 } -1 \leq a < \frac{1}{3}$$

356

$$a-b=1 \text{에서 } a=b+1$$

이를 주어진 부등식에 대입하면

$$(b+1-2b)x \leq 2(b+1)-5b+3$$

$$\therefore (-b+1)x \leq -3b+5$$

이 부등식의 해가 $x \geq 1$ 이므로

$$-b+1 < 0, \frac{-3b+5}{-b+1} = 1 \quad \therefore b=2$$

따라서 $a-b=1$ 에서 $a=3$ 이므로

$$a+b=5$$

답 5

3 이차부등식

189~211쪽

358

(1) $f(x) > 0$ 의 해는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=0$, 즉 x 축보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로 $x > c$

(2) $g(x) > 0$ 의 해는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 직선 $y=0$, 즉 x 축보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로 $b < x < e$

(3) $f(x) < g(x)$ 의 해는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 함수 $y=f(x)$ 의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로 $a < x < d$

(4) $f(x)g(x) < 0$ 의 해는 $f(x) > 0, g(x) < 0$ 또는 $f(x) < 0, g(x) > 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위이므로

(i) $f(x) > 0, g(x) < 0$ 일 때,

$$f(x) > 0 \text{에서 } x > c \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$g(x) < 0 \text{에서 } x < b \text{ 또는 } x > e \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 } x > e \quad \dots\dots \text{㉢}$$

(ii) $f(x) < 0, g(x) > 0$ 일 때,

$$f(x) < 0 \text{에서 } x < c \quad \dots\dots \text{㉣}$$

$$g(x) > 0 \text{에서 } b < x < e \quad \dots\dots \text{㉤}$$

$$\text{㉣, ㉤의 공통부분을 구하면 } b < x < c \quad \dots\dots \text{㉥}$$

㉢, ㉥을 합한 범위는 $b < x < c$ 또는 $x > e$

$$\text{답 (1) } x > c \text{ (2) } b < x < e \text{ (3) } a < x < d$$

$$(4) b < x < c \text{ 또는 } x > e$$

360

(1) 모든 항을 좌변으로 이항하면 $x^2-1 \geq 0$

$$(x+1)(x-1) \geq 0 \quad \therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1$$

(2) 양변에 -1 을 곱하면 $x^2+2x-24 < 0$

$$(x+6)(x-4) < 0 \quad \therefore -6 < x < 4$$

$$\text{답 (1) } x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1 \text{ (2) } -6 < x < 4$$

362

(1) 근의 공식에 의하여 $x^2-4x+2=0$ 의 두 근은

$$x=2 \pm \sqrt{2}$$

따라서 $x^2-4x+2 < 0$ 의 해는

$$2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$$

(2) 근의 공식에 의하여 $x^2+6x-3=0$ 의 두 근은

$$x=-3 \pm 2\sqrt{3}$$

따라서 $x^2+6x-3 \geq 0$ 의 해는

$$x \leq -3-2\sqrt{3} \text{ 또는 } x \geq -3+2\sqrt{3}$$

$$\text{답 (1) } 2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$$

$$(2) x \leq -3-2\sqrt{3} \text{ 또는 } x \geq -3+2\sqrt{3}$$

364

(1) $(x+1)^2 \leq 0$ 이므로 해는 $x=-1$

(2) $(5x-1)^2 < 0$ 이므로 해는 없다.

(3) $(x+2)^2 \geq 0$ 이므로 해는 모든 실수이다.

(4) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 > 0$ 이므로 해는 $x \neq \frac{1}{2}$ 인 모든 실수이다.

$$\text{답 (1) } x=-1 \quad (2) \text{ 해는 없다.}$$

(3) 해는 모든 실수 (4) 해는 $x \neq \frac{1}{2}$ 인 모든 실수

366

(1) $(x-1)^2+2 \leq 0$ 이므로 해는 없다.

(2) $(x+2)^2+1 > 0$ 이므로 해는 모든 실수이다.

(3) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4} < 0$ 이므로 해는 없다.

$$\text{답 (1) 해는 없다. (2) 해는 모든 실수 (3) 해는 없다.}$$

368

직사각형의 가로 길이 x , 세로 길이 y 라 하면
둘레의 길이가 40이므로

$$2x + 2y = 40, y = 20 - x$$

이 직사각형의 넓이가 96 이상이므로

$$x(20 - x) \geq 96, -x^2 + 20x - 96 \geq 0$$

$$x^2 - 20x + 96 \leq 0, (x - 8)(x - 12) \leq 0$$

$$\therefore 8 \leq x \leq 12$$

따라서 직사각형의 가로 길이의 범위는 8 이상 12 이하이다. **답** 8 이상 12 이하

370

(i) $x \geq 1$ 일 때, $2x^2 - 2x > x - 1$

$$2x^2 - 3x + 1 > 0, (2x - 1)(x - 1) > 0$$

$$\therefore x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } x > 1$$

$$x \geq 1 \text{ 과의 공통부분은 } x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $x < 1$ 일 때, $2x^2 - 2x > -(x - 1)$

$$2x^2 - x - 1 > 0, (2x + 1)(x - 1) > 0$$

$$\therefore x < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x > 1$$

$$x < 1 \text{ 과의 공통부분은 } x < -\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{ 을 합한 범위는 } x < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x > 1$$

$$\text{답 } x < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x > 1$$

372

(1) $|x^2 - 5| \leq 4$ 에서 $-4 \leq x^2 - 5 \leq 4$

(i) $-4 \leq x^2 - 5$ 에서 $x^2 - 1 \geq 0$

$$(x + 1)(x - 1) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

(ii) $x^2 - 5 \leq 4$ 에서 $x^2 - 9 \leq 0$

$$(x + 3)(x - 3) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$\textcircled{9}, \textcircled{10}$ 의 공통부분은

$$-3 \leq x \leq -1 \text{ 또는 } 1 \leq x \leq 3$$

(2) $x^2 + |x| - 2 \geq 0$ 에서 $|x|^2 + |x| - 2 \geq 0$

$$(|x| + 2)(|x| - 1) \geq 0$$

이때 $|x| + 2 > 0$ 이므로

$$|x| - 1 \geq 0, |x| \geq 1$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1$$

$$\text{답 (1) } -3 \leq x \leq -1 \text{ 또는 } 1 \leq x \leq 3$$

$$(2) x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1$$

374

이차방정식 $2x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $x = 1$ 또는

$x = 3$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$1 + 3 = -\frac{a}{2}, 1 \times 3 = \frac{b}{2} \quad \therefore a = -8, b = 6$$

$$\text{답 } a = -8, b = 6$$

다른 풀이

이차항의 계수가 1이고, 해가 $1 < x < 3$ 인 이차부등식은

$$(x - 1)(x - 3) < 0 \quad \therefore x^2 - 4x + 3 < 0$$

각 변에 2를 곱하면 $2x^2 - 8x + 6 < 0$

주어진 부등식과 비교하면 $a = -8, b = 6$

376

[1단계] $\star > 0$ 의 꼴의 이차부등식의 해가 ‘가장자리’가

아닌 ‘사이’이므로 $a < 0$

[2단계] 이차방정식 $ax^2 + 7x + b = 0$ 의 두 근이

$$x = \frac{1}{5} \text{ 또는 } x = \frac{1}{2} \text{ 이므로 근과 계수의 관계에}$$

의하여 주어진 범위에 맞는 이차부등식을 세우면

$$a\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) > 0, a\left(x^2 - \frac{7}{10}x + \frac{1}{10}\right) > 0$$

$$\therefore ax^2 - \frac{7}{10}ax + \frac{1}{10}a > 0$$

[3단계] 주어진 부등식과 비교하면

$$-\frac{7}{10}a = 7, \frac{1}{10}a = b$$

$$\therefore a = -10, b = -1$$

$$\text{답 } a = -10, b = -1$$

378

$$x^2 + mx + m > -3 \text{ 에서 } x^2 + mx + m + 3 > 0$$

이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이

차방정식 $x^2 + mx + m + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = m^2 - 4(m + 3) < 0, m^2 - 4m - 12 < 0$$

$$(m + 2)(m - 6) < 0 \quad \therefore -2 < m < 6$$

$$\text{답 } -2 < m < 6$$

380

(i) $m \neq 0$ 일 때, 주어진 부등식이 항상 성립하려면

$$m > 0 \quad \dots\dots \textcircled{11}$$

이차방정식 $mx^2 + mx + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = m^2 - 4m < 0, m(m - 4) < 0$$

$$0 < m < 4 \quad \dots\dots \textcircled{12}$$

$$\textcircled{11}, \textcircled{12} \text{ 의 공통부분을 구하면 } 0 < m < 4$$

(ii) $m = 0$ 일 때, $1 > 0$ 이므로 주어진 부등식이 항상 성립한다.

$$(i), (ii) \text{ 에서 } 0 \leq m < 4$$

$$\text{답 } 0 \leq m < 4$$

382

주어진 이차부등식의 해가 존재하지 않으려면
모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 - 6x + a \leq 0$ 이 성립해야 하므로

$$a < 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $ax^2 - 6x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - a \times a \leq 0, a^2 - 9 \geq 0$$

$$(a+3)(a-3) \geq 0$$

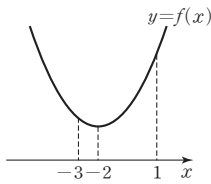
$$\therefore a \leq -3 \text{ 또는 } a \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{의 공통부분은 } a \leq -3 \quad \text{답 } a \leq -3$$

384

$f(x) = x^2 + 4x - a^2 + a + 10$ 이라 하자.

$-3 \leq x \leq 1$ 에서 주어진 이차부등식이 항상 성립하려면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$$f(x) = x^2 + 4x - a^2 + a + 10 \\ = (x+2)^2 - a^2 + a + 6$$

이므로

$$f(-2) = -a^2 + a + 6 > 0, a^2 - a - 6 < 0$$

$$(a+2)(a-3) < 0$$

$$\therefore -2 < a < 3 \quad \text{답 } -2 < a < 3$$

386

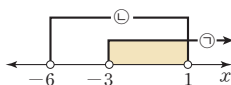
$$(1) x < 3x + 6 \text{에서 } -2x < 6 \quad \therefore x > -3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x^2 + 5x - 6 < 0 \text{에서 } (x+6)(x-1) < 0$$

$$\therefore -6 < x < 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면

$$-3 < x < 1$$



$$(2) 2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \text{에서}$$

$$(2x-1)(x-2) \geq 0$$

$$\therefore x \leq \frac{1}{2} \text{ 또는 } x \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

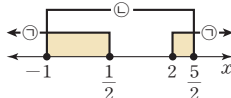
$$2x^2 - 3x - 5 \leq 0 \text{에서 } (x+1)(2x-5) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq \frac{5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면

$$-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{또는 } 2 \leq x \leq \frac{5}{2}$$



$$\text{답 } (1) -3 < x < 1$$

$$(2) -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ 또는 } 2 \leq x \leq \frac{5}{2}$$

388

$$-x < x^2 \text{에서 } x^2 + x > 0, x(x+1) > 0$$

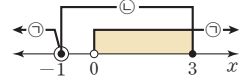
$$\therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x^2 \leq 2x + 3 \text{에서 } x^2 - 2x - 3 \leq 0, (x+1)(x-3) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면

$$0 < x \leq 3$$



$$\text{답 } 0 < x \leq 3$$

390

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \text{에서 } (x-2)(x-3) > 0$$

$$\therefore x < 2 \text{ 또는 } x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x^2 - (a+6)x + 6a \leq 0 \text{에서}$$

$$(x-a)(x-6) \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$(i) a > 6 \text{일 때, } \textcircled{2} \text{의 해는 } 6 \leq x \leq a$$

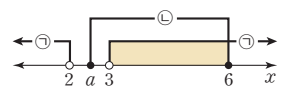
$$(ii) a = 6 \text{일 때, } \textcircled{2} \text{의 해는 } x = 6$$

$$(iii) a < 6 \text{일 때, } \textcircled{2} \text{의 해는 } a \leq x \leq 6$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 해의 공통부분이 $3 < x \leq 6$ 이기 위한 부등식의 해는 $a \leq x \leq 6$

두 부등식 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 해를

수직선 위에 나타내면



오른쪽 그림과 같으므로

실수 a 의 값의 범위는

$$2 \leq a \leq 3 \quad \text{답 } 2 \leq a \leq 3$$

392

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β 라 하고 판별식을 D 라 하면

(1) 두 근이 모두 양수일 조건

$$\Rightarrow D \geq 0, \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$$

$$(i) \frac{D}{4} = (-m)^2 - (m+2) \geq 0 \text{에서}$$

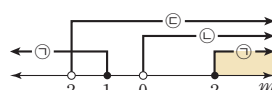
$$m^2 - m - 2 \geq 0, (m+1)(m-2) \geq 0$$

$$\therefore m \leq -1 \text{ 또는 } m \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(ii) \alpha + \beta = 2m > 0 \text{에서 } m > 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$(iii) \alpha\beta = m + 2 > 0 \text{에서 } m > -2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

수직선을 이용하여 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 의 공통부분을 구하면



$$m \geq 2$$

(2) 두 근이 모두 음수일 조건

$$\Rightarrow D \geq 0, \alpha + \beta < 0, \alpha\beta > 0$$

$$(i) \frac{D}{4} = (-m)^2 - (m+2) \geq 0 \text{에서}$$

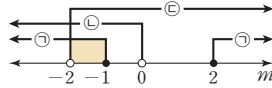
$$m^2 - m - 2 \geq 0, (m+1)(m-2) \geq 0$$

$$\therefore m \leq -1 \text{ 또는 } m \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$(ii) \alpha + \beta = 2m < 0 \text{에서 } m < 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$(iii) \alpha\beta = m+2 > 0 \text{에서 } m > -2 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

수직선을 이용하여 ㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면



$$-2 < m \leq -1$$

(3) 두 근이 서로 다른 부호일 조건 $\Rightarrow \alpha\beta < 0$

$$\alpha\beta = m+2 < 0 \text{에서 } m < -2$$

답 (1) $m \geq 2$ (2) $-2 < m \leq -1$ (3) $m < -2$

394

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β 라 하면

(i) 두 실근이 서로 다른 부호이므로

$$\alpha\beta = m^2 - m - 12 < 0, (m+3)(m-4) < 0$$

$$\therefore -3 < m < 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 작으므로

$$\alpha + \beta = -(m+2) > 0 \quad \therefore m < -2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-3 < m < -2 \quad \textbf{답} \quad -3 < m < -2$$

396

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β 라 하면

(i) 두 실근의 절댓값이 같으므로

$$\alpha + \beta = -(m^2 + 3m - 10) = 0$$

$$(m+5)(m-2) = 0$$

$$\therefore m = -5 \text{ 또는 } m = 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) 두 실근의 부호가 서로 다르므로

$$\alpha\beta = m+1 < 0 \quad \therefore m < -1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 m 의 값은 -5 이다.

답 -5

398

$f(x) = x^2 - 2mx + 2m + 8$ 로 놓고

$f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

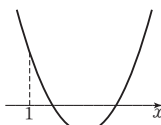
(1) $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그

림과 같아야 하므로

$$(i) \frac{D}{4} = (-m)^2 - (2m+8) \geq 0$$

$$m^2 - 2m - 8 \geq 0, (m+2)(m-4) \geq 0$$

$$\therefore m \leq -2 \text{ 또는 } m \geq 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$



(ii) $f(1) = 9$ 이므로 이 그래프는 m 의 값에 관계없이 점 $(1, 9)$ 를 지난다.

$$\therefore f(1) > 0$$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 축이 $x = m$ 이므로

$$m > 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$m \geq 4$$

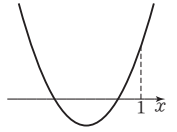
(2) $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그 림과 같아야 하므로

$$(i) \frac{D}{4} = (-m)^2 - (2m+8) \geq 0$$

$$m^2 - 2m - 8 \geq 0$$

$$(m+2)(m-4) \geq 0$$

$$\therefore m \leq -2 \text{ 또는 } m \geq 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$



(ii) $f(1) = 9$ 이므로 이 그래프는 m 의 값에 관계없이 점 $(1, 9)$ 를 지난다.

$$\therefore f(1) > 0$$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 축이 $x = m$ 이므로

$$m < 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$m \leq -2$$

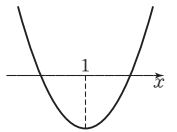
(3) $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그 림과 같아야 한다.

그런데 이 그래프는 m 의 값에

관계없이 점 $(1, 9)$ 를 지나므로

$f(1) < 0$ 을 만족시키는 m 의 값은 없다.

답 (1) $m \geq 4$ (2) $m \leq -2$ (3) 없다.



400

$f(x) = x^2 + 2x + m - 5$ 로 놓고

$f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림

과 같아야 하므로

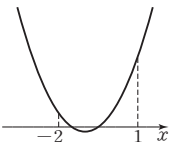
$$(i) \frac{D}{4} = 1^2 - (m-5) \geq 0$$

$$\therefore m \leq 6 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$(ii) f(-2) = 4 - 4 + m - 5 > 0 \quad \therefore m > 5$$

$$f(1) = 1 + 2 + m - 5 > 0 \quad \therefore m > 2$$

$$\therefore m > 5 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$



(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 축이 $x = -1$ 이므로 m 의 값에 관계없이 조건을 만족시킨다.

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $5 < m \leq 6$

답 $5 < m \leq 6$

402

$f(x)=x^2+(m^2-1)x+m-2$ 로
놓으면 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽
그림과 같아야 하므로

$$f(-1)=1-m^2+1+m-2<0$$

에서

$$m^2-m>0, m(m-1)>0$$

$$\therefore m<0 \text{ 또는 } m>1$$

..... ㉠

$$f(1)=1+m^2-1+m-2<0 \text{에서}$$

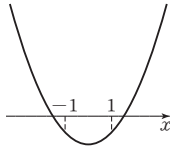
$$m^2+m-2<0, (m+2)(m-1)<0$$

$$\therefore -2<m<1$$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-2<m<0$

$$\text{답 } -2<m<0$$



404

(1) 좌변을 인수분해하면 $([x]-2)([x]-3)=0$

$$\therefore [x]=2 \text{ 또는 } [x]=3$$

즉, $2 \leq x < 3$ 또는 $3 \leq x < 4$ 이므로

$$2 \leq x < 4$$

(2) 좌변을 인수분해하면 $([x]+2)(2[x]-1)=0$

$$\therefore [x]=-2 \text{ 또는 } [x]=\frac{1}{2}$$

그런데 $[x]$ 는 정수이므로 $[x]=-2$

$$\therefore -2 \leq x < -1$$

$$\text{답 } (1) 2 \leq x < 4 \quad (2) -2 \leq x < -1$$

406

(1) 좌변을 인수분해하면 $([x]-1)([x]-3)<0$

$$\therefore 1 < [x] < 3$$

그런데 $[x]$ 는 정수이므로 $[x]=2$

$$\therefore 2 \leq x < 3$$

(2) 좌변을 인수분해하면 $(2[x]-1)([x]-3) \leq 0$

$$\frac{1}{2} \leq [x] \leq 3$$

그런데 $[x]$ 는 정수이므로 $[x]$ 는 1, 2, 3

$$[x]=1 \text{ 일 때, } 1 \leq x < 2$$

$$[x]=2 \text{ 일 때, } 2 \leq x < 3$$

$$[x]=3 \text{ 일 때, } 3 \leq x < 4$$

$$\therefore 1 \leq x < 4$$

$$\text{답 } (1) 2 \leq x < 3 \quad (2) 1 \leq x < 4$$

필수 확인 문제

212쪽

407

부등식 $f(x)-g(x) \leq 0$, 즉 $f(x) \leq g(x)$ 의 해는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 함수 $y=g(x)$ 의 그래프보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로

$$-1 \leq x \leq 3$$

주어진 수 중에서 이 범위 안에 있지 않은 것은 4이다.

답 ⑤

408

이차부등식 $x^2-3x-5 \leq 0$ 의 해가 $a \leq x \leq b$ 이므로 이
차방정식 $x^2-3x-5=0$ 은 $(x-a)(x-b)=0$ 으로 인
수분해된다. 즉, 이차방정식 $x^2-3x-5=0$ 의 서로 다
른 두 근이 a, b 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+b=3, ab=-5$$

$$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2 \times (-5)=19$$

답 19

409

모든 실수 x 에 대하여 $x^2-2kx+k+2 \geq 0$ 이 성립해야
한다.

이차방정식 $x^2-2kx+k+2=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k+2) \leq 0, k^2-k-2 \leq 0$$

$$(k+1)(k-2) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq k \leq 2$$

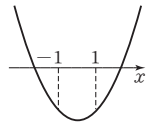
답 $-1 \leq k \leq 2$

410

$-1 < x < 1$ 에서 이차부등식 $x^2-(a^2-1)x-a-2 < 0$
이 항상 성립하려면 이차함수

$$f(x)=x^2-(a^2-1)x-a-2 \text{의}$$

그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$$(i) f(-1)=1+(a^2-1)-a-2 \leq 0$$

$$a^2-a-2 \leq 0, (a+1)(a-2) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 2$$

..... ㉠

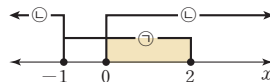
$$(ii) f(1)=1-(a^2-1)-a-2 \leq 0$$

$$-a^2-a \leq 0, a^2+a \geq 0, a(a+1) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -1 \text{ 또는 } a \geq 0$$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $a=-1$ 또는 $0 \leq a \leq 2$



따라서 정수 a 는 $-1, 0, 1, 2$ 이므로 그 개수는 4이다.

답 4

411

이차부등식 $ax^2-8x+a-6 \leq 0$ 이 단 한 개의 해를 가지므로 이차함수 $y=ax^2-8x+a-6$ 의 그래프는 x 축에 접하고 아래로 볼록해야 한다.

$$\therefore a > 0$$

또, 이차방정식 $ax^2-8x+a-6=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-4)^2 - a(a-6) = 0, \quad a^2 - 6a - 16 = 0$$

$$(a+2)(a-8) = 0 \quad \therefore a = 8 \quad (\because a > 0)$$

답 8

412

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β 라 하고 판별식을 D 라 하면 두 근이 모두 음수일 조건은

$$D \geq 0, \alpha + \beta < 0, \alpha\beta > 0$$

$$(i) D = (k-4)^2 - 4(k-1) \geq 0$$

$$k^2 - 8k + 16 - 4k + 4 \geq 0$$

$$k^2 - 12k + 20 \geq 0$$

$$(k-2)(k-10) \geq 0$$

$$\therefore k \leq 2 \text{ 또는 } k \geq 10$$

..... ㉠

$$(ii) \alpha + \beta = -(k-4) < 0 \text{에서}$$

$$k > 4$$

..... ㉡

$$(iii) \alpha\beta = k-1 > 0 \text{에서}$$

$$k > 1$$

..... ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $k \geq 10$

따라서 실수 k 의 최솟값은 10이다.

답 10

413

$$(i) x^2 + x - 6 > 0 \text{에서 } (x+3)(x-2) > 0$$

$$\therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 2$$

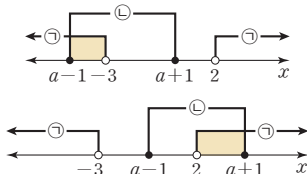
..... ㉠

$$(ii) |x-a| \leq 1 \text{에서 } -1 \leq x-a \leq 1$$

$$\therefore a-1 \leq x \leq a+1$$

..... ㉡

㉠을 수직선에 그려 놓고 ㉡과의 공통부분이 있는 상황을 생각하면 다음 그림과 같은 두 가지 경우이므로



$$a-1 < -3 \text{ 또는 } a+1 > 2$$

$$\therefore a < -2 \text{ 또는 } a > 1$$

답 $a < -2$ 또는 $a > 1$

● 실전 연습문제

214~216쪽

414

$(a-b)x + a + b > 0$ 의 해가 $x < 3$ 이므로

$$a-b < 0, \quad \frac{-a-b}{a-b} = 3$$

$$\frac{-a-b}{a-b} = 3 \text{에서 } -a-b = 3a-3b \quad \therefore b = 2a$$

$b = 2a$ 를 $a-b < 0$ 에 대입하면

$$a-2a < 0, \quad -a < 0 \quad \therefore a > 0$$

$b = 2a$ 를 $ax+2b+3a > 0$ 에 대입하면

$$ax+4a+3a > 0, \quad ax > -7a$$

이때 $a > 0$ 이므로 $x > -7$

답 ①

415

$|5x-12| \geq 0$ 이므로 $|5x-12| \leq k-5$ 의 해가 존재하려면 $k-5 \geq 0$ 이어야 한다.

$$\therefore k \geq 5$$

답 $k \geq 5$

416

$$\begin{cases} x-5 \leq 2(x-4) & \dots\dots ㉠ \\ 2(x-4) < 3x+k & \dots\dots ㉡ \end{cases}$$

..... ㉠

..... ㉡

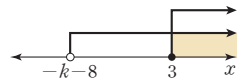
$$㉠\text{에서 } x-5 \leq 2x-8 \quad \therefore x \geq 3$$

$$㉡\text{에서 } 2x-8 < 3x+k \quad \therefore x > -k-8$$

따라서 연립부등식의 해가

$$x \geq 3 \text{이 되려면 } -k-8 < 3$$

이어야 하므로 $k > -11$

답 $k > -11$

참고

$-k-8=3$ 이면 $x > -k-8$ 에서 $x > 3$ 이 되어

연립부등식의 해는 $x > 3$ 이 된다.

따라서 $-k-8 \leq 3$ 이 아니라 $-k-8 < 3$ 이어야 한다.

417

10%의 설탕물 100g에 들어있는 설탕의 양은

$$\frac{10}{100} \times 100 = 10(g)$$

더 넣어야 하는 물의 양을 x g이라 하면

$$\frac{5}{100} \times 100 \leq \frac{10}{100+x} \times 100 \leq \frac{8}{100} \times 100$$

$$\frac{1}{20} \leq \frac{10}{100+x} \leq \frac{2}{25}, \quad \frac{25}{2} \leq \frac{100+x}{10} \leq 20$$

$$125 \leq 100+x \leq 200$$

$$\therefore 25 \leq x \leq 100$$

따라서 더 넣어야 하는 물의 양의 최댓값은 100g이다.

답 100g

참고

$$\textcircled{1} (\text{소금물의 농도}) = \frac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})} \times 100$$

$$\textcircled{2} (\text{소금의 양}) = \frac{(\text{소금물의 농도})}{100} \times (\text{소금물의 양})$$

418

[1단계] $\star > 0$ 의 꼴의 이차부등식의 해가 가장자리가 아닌 사이이므로 $a < 0$

[2단계] 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이

$x = -1$ 또는 $x = 2$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1 + 2 = -\frac{b}{a}, (-1) \times 2 = \frac{c}{a}$$

$$\therefore b = -a, c = -2a$$

[3단계] $b = -a, c = -2a$ 를 $cx^2 - ax - b < 0$ 에 대입하면

$$-2ax^2 - ax + a < 0$$

$a < 0$ 이므로 양변을 $-a$ 로 나누면

$$2x^2 + x - 1 < 0, (x+1)(2x-1) < 0$$

$$\therefore -1 < x < \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } \alpha = -1, \beta = \frac{1}{2} \text{이므로 } \alpha\beta = -\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

419

이차부등식 $f(x) < 0$ 의 해가 $1 < x < 4$ 이면 $f(x) \geq 0$ 의 해는 $x \leq 1$ 또는 $x \geq 4$ 이다.

따라서 $f(x-3) \geq 0$ 의 해는 $x-3 \leq 1$ 또는 $x-3 \geq 4$

$$\therefore x \leq 4 \text{ 또는 } x \geq 7$$

주어진 수 중에서 이 범위 안에 있지 않은 것은 5이다.

답 ③

420

$$\textcircled{1} x^2 - 2x + 1 > 0 \text{에서 } (x-1)^2 > 0$$

따라서 해는 $x \neq 1$ 인 모든 실수이다.

$$\textcircled{2} x^2 + 6x + 9 \leq 0 \text{에서 } (x+3)^2 \leq 0$$

$$\therefore x = -3$$

$$\textcircled{3} 4x^2 \geq 4x - 1 \text{에서 } 4x^2 - 4x + 1 \geq 0$$

$$\therefore (2x-1)^2 \geq 0$$

따라서 해는 모든 실수이다.

$$\textcircled{4} 48x - 9 > 64x^2 \text{에서 } 64x^2 - 48x + 9 < 0$$

$$\therefore (8x-3)^2 < 0$$

따라서 해는 없다.

$$\textcircled{5} x^2 - x - 2 \leq 0 \text{에서 } (x+1)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 2$$

그러므로 해가 단 하나뿐인 것은 ②이다.

답 ②

421

이차방정식 $x^2 + (m+2)x + 2m+1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (m+2)^2 - 4(2m+1) < 0, m^2 - 4m < 0$$

$$m(m-4) < 0 \quad \therefore 0 < m < 4$$

따라서 정수 m 은 1, 2, 3이므로 모든 정수 m 의 값의 합은 $1+2+3=6$ 이다.

답 ④

422

$$x^2 - (a+5)x + 5a < 0 \text{에서}$$

$$(x-a)(x-5) < 0$$

..... ㉠

(i) $a > 5$ 일 때, ㉠의 해는 $5 < x < a$

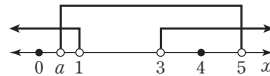
(ii) $a = 5$ 일 때, ㉠의 해는 없다.

(iii) $a < 5$ 일 때, ㉠의 해는 $a < x < 5$

$$x^2 - 4x + 3 > 0 \text{에서 } (x-1)(x-3) > 0$$

$$\therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 3$$

..... ㉡



㉠, ㉡의 해의 공통부분의 정수가 4뿐이기 위한 부등식

㉠의 해는 $a < x < 5$

두 부등식 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 위의 그림과 같으므로 a 는 0 또는 0의 오른쪽, 4의 왼쪽에 있어야 한다.

$$\therefore 0 \leq a < 4$$

답 $0 \leq a < 4$

참고

$a = 0$ 이어도 공통부분의 정수는 4뿐이지만

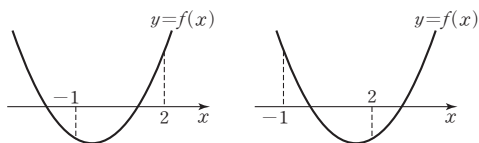
$a = 4$ 이면 공통부분의 정수가 없다.

423

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{에서 } (x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 $f(x) = x^2 - kx + 2$ 라 하면 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $f(-1)f(2) < 0$ 이어야 하므로
 $f(-1) = (-1)^2 + k + 2 = k + 3$,
 $f(2) = 4 - 2k + 2 = 6 - 2k$ 에서
 $(k+3)(6-2k) < 0$, $(k+3)(k-3) > 0$
 $\therefore k < -3$ 또는 $k > 3$

답 $k < -3$ 또는 $k > 3$

424

$2m - mx > 1 - 2x$ 에서
 $(2-m)x + 2m - 1 > 0$
 $f(x) = (2-m)x + 2m - 1$ 이라 하면 $0 < x < 3$ 에서
 $f(x) > 0$ 이 성립하므로
 $f(0) \geq 0$, $f(3) \geq 0$
 $f(0) = 2m - 1 \geq 0$ 이므로 $m \geq \frac{1}{2}$ ㉠
 $f(3) = 6 - 3m + 2m - 1 \geq 0$ 이므로 $m \leq 5$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
 $\frac{1}{2} \leq m \leq 5$ **답** $\frac{1}{2} \leq m \leq 5$

425

$||2x-1|-3| \leq 4$ 에서 $-4 \leq |2x-1|-3 \leq 4$
 $-1 \leq |2x-1| \leq 7$
 그런데 $|2x-1| \geq 0$ 이므로 $0 \leq |2x-1| \leq 7$
 $-7 \leq 2x-1 \leq 7$, $-6 \leq 2x \leq 8$
 $\therefore -3 \leq x \leq 4$
 따라서 최댓값 M 은 4, 최솟값 m 은 -3이므로
 $M - m = 4 - (-3) = 7$ **답** 7

426

주어진 부등식을 절댓값 기호로 나타내면
 $|x-1| + |x+3| \geq x+4$
 절댓값 기호 안을 0으로 하는 $x = -3$ 과 $x = 1$ 을 기준으로 구간을 나누어 생각한다.
 (i) $x < -3$ 일 때, $-(x-1) - (x+3) \geq x+4$
 $-3x \geq 6 \quad \therefore x \leq -2$
 $x < -3$, $x \leq -2$ 의 공통부분은
 $x < -3$ ㉠
 (ii) $-3 \leq x < 1$ 일 때, $-(x-1) + (x+3) \geq x+4$
 $-x \geq 0 \quad \therefore x \leq 0$
 $-3 \leq x < 1$, $x \leq 0$ 의 공통부분은
 $-3 \leq x \leq 0$ ㉡

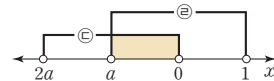
(iii) $x \geq 1$ 일 때, $(x-1) + (x+3) \geq x+4$
 $\therefore x \geq 2$
 $x \geq 1$, $x \geq 2$ 의 공통부분은 $x \geq 2$ ㉢
 ㉠, ㉡, ㉢을 합한 범위는 $x \leq 0$ 또는 $x \geq 2$
답 $x \leq 0$ 또는 $x \geq 2$

427

주어진 이차부등식의 해가 단 한 개라는 것은 좌변이 완전제곱식이 된다는 의미이다.
 $3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = \{-(a+b+c)\}^2 - 3(ab+bc+ca) = 0$
 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$
 $\frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0$
 따라서 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$ 이므로
 $a=b=c$
 $\therefore \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = 1 + 1 + 1 = 3$ **답** 3

428

$\begin{cases} (x-a)^2 < a^2 & \dots\dots ㉠ \\ x^2 + a < (a+1)x & \dots\dots ㉡ \end{cases}$
 ㉠에서 $x^2 - 2ax + a^2 < a^2$, $x^2 - 2ax < 0$
 $x(x-2a) < 0 \quad \therefore 2a < x < 0 \quad (\because a < 0) \quad \dots\dots ㉢$
 ㉡에서 $x^2 - (a+1)x + a < 0$
 $(x-1)(x-a) < 0 \quad \therefore a < x < 1 \quad (\because a < 0) \quad \dots\dots ㉣$



㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $a < x < 0$
 이때 주어진 연립부등식의 해가 $b < x < b+1$ 이므로
 $b=a$, $b+1=0$
 따라서 $a=-1$, $b=-1$ 이므로
 $a+b=-2$ **답** -2

429

$f(x) = x^2 - 2mx + 2m + 3$
 $= (x-m)^2 - m^2 + 2m + 3$
 이라 하면 꼭짓점의 좌표가 $(m, -m^2 + 2m + 3)$ 이고,
 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록한 포물선이다.
 이와 같이 꼭짓점의 x 좌표가 문자일 때는 꼭짓점이 제한 범위 안에 있을 때와 제한 범위 밖에 있을 때로 나누어 생각해야 한다.

(i) $m < 0$ 일 때

최솟값은 $f(0) = 2m + 3$

최솟값이 0보다 커야 하므로

$2m + 3 > 0$ 에서

$$m > -\frac{3}{2}$$

$m < 0$ 과의 공통부분을 구하면

$$-\frac{3}{2} < m < 0$$

(ii) $0 \leq m \leq 4$ 일 때

최솟값은 $f(m) = -m^2 + 2m + 3$

$-m^2 + 2m + 3 > 0$ 에서

$$m^2 - 2m - 3 < 0$$

$$(m+1)(m-3) < 0$$

$$\therefore -1 < m < 3$$

$0 \leq m \leq 4$ 와의 공통부분을 구하면

$$0 \leq m < 3$$

(iii) $m > 4$ 일 때

최솟값은 $f(4) = 19 - 6m$

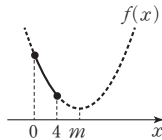
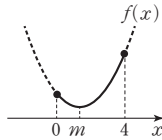
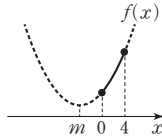
$19 - 6m > 0$ 에서

$$m < \frac{19}{6}$$

$m > 4$ 와의 공통부분은 없다.

(i)~(iii)에서 구하는 m 의 값의 범위는

$$-\frac{3}{2} < m < 3 \quad \text{답} \quad -\frac{3}{2} < m < 3$$



431

n 이 정수일 때, $[x+n] = [x] + n$ 이므로 주어진 부등식은

$$2([x]+2)^2 - 9[x] - 14 \leq 0, \quad 2[x]^2 - [x] - 6 \leq 0$$

$$(2[x]+3)([x]-2) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{3}{2} \leq [x] \leq 2$$

그런데 $[x]$ 는 정수이므로 $[x]$ 는 $-1, 0, 1, 2$

$[x] = -1$ 일 때, $-1 \leq x < 0$

$[x] = 0$ 일 때, $0 \leq x < 1$

$[x] = 1$ 일 때, $1 \leq x < 2$

$[x] = 2$ 일 때, $2 \leq x < 3$

$$\therefore -1 \leq x < 3$$

$$\text{답} \quad -1 \leq x < 3$$

430

$x-4$, x , $x+4$ 는 삼각형의 변의 길이이므로

$x-4 > 0$, $x > 0$, $x+4 > 0$ 에서

$$x > 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로

$$x+4 < (x-4) + x$$

$$\therefore x > 8 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

또, 둔각삼각형이 되려면 가장 긴 변의 길이의 제곱은 나머지 두 변의 제곱의 합보다 커야 하므로

$$(x+4)^2 > (x-4)^2 + x^2$$

$$x^2 + 8x + 16 > 2x^2 - 8x + 16, \quad x^2 - 16x < 0$$

$$x(x-16) < 0$$

$$\therefore 0 < x < 16 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$, $\textcircled{9}$ 의 공통부분을 구하면 $8 < x < 16$

따라서 자연수 x 의 최댓값은 15이다.

$$\text{답} \quad 15$$

경우의 수

1 경우의 수

1 경우의 수

220~227쪽

002

$a_1 \neq 1$ 이고 $a_3 = 4$ 를 만족시키는 경우를 나열하면 다음과 같다.

(i) 2로 시작하는 정수

$$2 \begin{cases} 1 & - & 4 & - & 3 \\ 3 & - & 4 & - & 1 \end{cases}$$

(ii) 3으로 시작하는 정수

$$3 \begin{cases} 1 & - & 4 & - & 2 \\ 2 & - & 4 & - & 1 \end{cases}$$

(i), (ii)에서 구하는 정수의 개수는 $2+2=4$

답 4

004

학생 3명을 각각 A, B, C라 하면 A가 B의 모자를 쓸 경우에는 B는 C의 모자를, C는 A의 모자를 써야 한다. A가 C의 모자를 쓸 경우에는 B는 A의 모자를, C는 B의 모자를 써야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는 2이다.

답 2

참고

수형도로 그리면 다음과 같다.

A B C
B — C — A
C — A — B

006

(1) 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $5+3=8$

(2) 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $5 \times 3=15$

답 (1) 8 (2) 15

+ 풍산자 비법

두 사건 A, B에 대하여

① A 또는 B, A이거나 B $\Rightarrow$ 합의 법칙

② A 그리고 B, A이고 B, A와 B가 동시에

$\Rightarrow$ 곱의 법칙

008

곱의 법칙에 의하여 A도에서 C도시로 가는 방법의 수는

$$(A \rightarrow B \rightarrow C) \Rightarrow 3 \times 2=6$$

$$(A \rightarrow D \rightarrow C) \Rightarrow 2 \times 4=8$$

따라서 합의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는

$$6+8=14$$

답 14

010

주사위의 눈의 수는 1, 2, 3, ..., 6이므로 눈의 수의 합은 2, 3, 4, ..., 12이다.

여기서 4의 배수는 4 또는 8 또는 12이다.

서로 다른 두 개의 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 4가 되는 경우

(1, 3), (2, 2), (3, 1)로 3가지

(ii) 눈의 수의 합이 8이 되는 경우

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)로 5가지

(iii) 눈의 수의 합이 12가 되는 경우

(6, 6)으로 1가지

(i)~(iii)에서 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$$3+5+1=9$$

답 9

012

사야 하는 100원, 500원, 1000원짜리 사탕을 각각

x 개, y 개, z 개라 하면

$$100x+500y+1000z=4000$$

$$\therefore x+5y+10z=40$$

그런데 각 사탕을 적어도 1개씩은 사야 하므로

$$x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1 \text{이다.}$$

이 문제는 이제 자연수 조건의 부정방정식 문제로 변신했다.

(i) $z=1$ 일 때, $x+5y=30$

따라서 이를 만족시키는 (x, y) 는 (5, 5), (10, 4),

(15, 3), (20, 2), (25, 1)이다.

(ii) $z=2$ 일 때, $x+5y=20$

따라서 이를 만족시키는 (x, y) 는 (5, 3), (10, 2),

(15, 1)이다.

(iii) $z=3$ 일 때, $x+5y=10$

따라서 이를 만족시키는 (x, y) 는 (5, 1)이다.

(i)~(iii)에서 합의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는

$$5+3+1=9$$

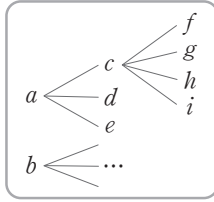
답 9

014

a, b 각각에 대하여 c, d, e 를 곱하고, 또 그 각각에 대하여 f, g, h, i 를 곱한다.

따라서 구하는 항의 개수는

$$2 \times 3 \times 4 = 24 \quad \text{답 } 24$$



016

72를 소인수분해하면 $72 = 2^3 \times 3^2$ 이므로 72의 양의 약수는 2^3 의 양의 약수인 1, 2, 2^2 , 2^3 중에서 하나의 수, 3^2 의 양의 약수인 1, 3, 3^2 중에서 하나의 수를 각각 택하여 곱한 수이다.

$\times$	1	2	2^2	2^3
1	1×1	1×2	1×2^2	1×2^3
3	3×1	3×2	3×2^2	3×2^3
3^2	$3^2 \times 1$	$3^2 \times 2$	$3^2 \times 2^2$	$3^2 \times 2^3$

따라서 곱의 법칙에 의하여 72의 양의 약수의 개수는

$$4 \times 3 = 12 \quad \text{답 } 12$$

다른 풀이

공식을 이용하면 $72 = 2^3 \times 3^2$ 의 양의 약수의 개수는

$$(3+1) \times (2+1) = 12$$

018

이웃하고 있는 나라는 서로 다른 색으로 칠해야 함에 유의하면서 백제부터 칠해 보면 다음과 같다.

백제에 칠할 수 있는 색은 5가지

고구려에 칠할 수 있는 색은 백제에 칠한 색을 제외한 4가지

신라에 칠할 수 있는 색은 백제, 고구려에 칠한 색을 제외한 3가지

가야에 칠할 수 있는 색은 백제, 신라에 칠한 색을 제외한 3가지

따라서 구하는 방법의 수는

$$5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180 \quad \text{답 } 180$$

020

(1) 100원짜리 2개로 지불할 수 있는 방법

→ 0개, 1개, 2개로 3가지

50원짜리 2개로 지불할 수 있는 방법

→ 0개, 1개, 2개로 3가지

10원짜리 3개로 지불할 수 있는 방법

→ 0개, 1개, 2개, 3개로 4가지

따라서 구하는 방법의 수는

$$3 \times 3 \times 4 - 1 = 35 \quad \leftarrow 0\text{원을 지불하는 것 제외}$$

(2) 100원짜리 2개로 만들 수 있는 금액

→ 0원, 100원, 200원 ㉠

50원짜리 2개로 만들 수 있는 금액

→ 0원, 50원, 100원 ㉡

10원짜리 3개로 만들 수 있는 금액

→ 0원, 10원, 20원, 30원

그런데 ㉠, ㉡에서 100원이 중복되므로 100원짜리 1개를 50원짜리 2개로 교환하여 생각하면 구하는 금액의 수는 50원짜리 6개, 10원짜리 3개로 지불할 수 있는 방법의 수와 같다.

50원짜리 6개로 지불할 수 있는 방법

→ 0개, 1개, 2개, 3개, 4개, 5개, 6개로 7가지

10원짜리 3개로 지불할 수 있는 방법

→ 0개, 1개, 2개, 3개로 4가지

따라서 구하는 금액의 수는

$$7 \times 4 - 1 = 27 \quad \leftarrow 0\text{원을 지불하는 것 제외}$$

답 (1) 35 (2) 27

필수 확인 문제

228쪽

021

치즈 3가지, 야채 6가지, 소스 4가지를 각각 하나씩 추가로 선택하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$$3 \times 6 \times 4 = 72 \quad \text{답 } 72$$

022

곱의 법칙에 의하여 모두 한 번씩만 들르고 집으로 돌아오는 방법의 수는

(집 → 편의점 → 도서관 → 서점 → 집)

$$\rightarrow 1 \times 3 \times 2 \times 2 = 12$$

(집 → 서점 → 도서관 → 편의점 → 집)

$$\rightarrow 2 \times 2 \times 3 \times 1 = 12$$

따라서 합의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는

$$12 + 12 = 24 \quad \text{답 } 24$$

023

(i) 4로 나누어떨어지는 수, 즉 4의 배수는

4, 8, 12, ..., 100의 25개

(ii) 9로 나누어떨어지는 수, 즉 9의 배수는

9, 18, 27, ..., 99의 11개

(iii) 4와 9로 나누어떨어지는 수, 즉 36의 배수는

36, 72의 2개

(i)~(iii)에서 구하는 수의 개수는

$$25 + 11 - 2 = 34 \quad \text{답 } 34$$

024

$$2x + y \leq 8 \text{이고 } x \geq 1, y \geq 1$$

- (i) $x=1$ 일 때, $1 \leq y \leq 6$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)$ 으로 6개
- (ii) $x=2$ 일 때, $1 \leq y \leq 4$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)$ 로 4개
- (iii) $x=3$ 일 때, $1 \leq y \leq 2$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(3, 1), (3, 2)$ 로 2개
- (i)~(iii)에서 합의 법칙에 의하여 구하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는
 $6 + 4 + 2 = 12$

답 12

025

- (1) 360과 540의 공약수는 $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ 와
 $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$ 의 최대공약수인 $2^2 \times 3^2 \times 5$ 의 양의 약수이므로 2^2 의 양의 약수인 1, 2, 2^2 중에서 하나의 수, 3^2 의 양의 약수인 1, 3, 3^2 중에서 하나의 수, 5의 양의 약수인 1, 5 중에서 하나의 수를 각각 택하여 곱한 수이다.
 따라서 곱의 법칙에 의하여 360과 540의 공약수의 개수는
 $3 \times 3 \times 2 = 18$
- (2) $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$ 의 양의 약수 중 짝수는 2를 소인수로 가지므로 540의 양의 약수 중 짝수의 개수는 $2 \times 3^3 \times 5$ 의 양의 약수의 개수와 같다.
 $2 \times 3^3 \times 5$ 의 양의 약수는 2의 양의 약수인 1, 2 중에서 하나의 수, 3^3 의 양의 약수인 1, 3, 3^2 , 3^3 중에서 하나의 수, 5의 양의 약수인 1, 5 중에서 하나의 수를 각각 택하여 곱한 수이다.
 따라서 곱의 법칙에 의하여 540의 양의 약수 중 짝수의 개수는
 $2 \times 4 \times 2 = 16$

답 (1) 18 (2) 16

다른 풀이

- (2) $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$ 의 양의 약수는 2^2 의 양의 약수인 1, 2, 2^2 중에서 하나의 수, 3^3 의 양의 약수인 1, 3, 3^2 , 3^3 중에서 하나의 수, 5의 양의 약수인 1, 5 중에서 하나의 수를 각각 택하여 곱한 수이므로 540의 양의 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여
 $3 \times 4 \times 2 = 24$
 한편, $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$ 의 양의 약수 중 홀수의 개수는 $3^3 \times 5$ 의 양의 약수의 개수와 같다. $3^3 \times 5$ 의 양의

약수는 3^3 의 양의 약수인 1, 3, 3^2 , 3^3 중에서 하나의 수, 5의 양의 약수인 1, 5 중에서 하나의 수를 각각 택하여 곱한 수이므로 $3^3 \times 5$ 의 양의 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여
 $4 \times 2 = 8$
 따라서 540의 양의 약수 중 짝수의 개수는
 (540의 양의 약수의 개수)
 $-$ (540의 양의 약수 중 홀수의 개수)
 $= 24 - 8 = 16$

026

- (i) 100원짜리 1개로 지불할 수 있는 방법
 $\Rightarrow$ 0개, 1개로 2가지
 50원짜리 3개로 지불할 수 있는 방법
 $\Rightarrow$ 0개, 1개, 2개, 3개로 4가지
 10원짜리 2개로 지불할 수 있는 방법
 $\Rightarrow$ 0개, 1개, 2개로 3가지
 $\therefore a = 2 \times 4 \times 3 - 1 = 23$ $\leftarrow$ 0원을 지불하는 것 제외
- (ii) 100원짜리 1개로 만들 수 있는 금액
 $\Rightarrow$ 0원, 100원 ㉠
 50원짜리 3개로 만들 수 있는 금액
 $\Rightarrow$ 0원, 50원, 100원, 150원 ㉡
 10원짜리 2개로 만들 수 있는 금액
 $\Rightarrow$ 0원, 10원, 20원
 그런데 ㉠, ㉡에서 100원이 중복되므로 100원짜리 1개를 50원짜리 2개로 교환하여 생각하면 구하는 금액의 수는 50원짜리 5개, 10원짜리 2개로 지불할 수 있는 방법의 수와 같다.
 50원짜리 5개로 지불할 수 있는 방법
 $\Rightarrow$ 0개, 1개, 2개, 3개, 4개, 5개로 6가지
 10원짜리 2개로 지불할 수 있는 방법
 $\Rightarrow$ 0개, 1개, 2개로 3가지
 $\therefore b = 6 \times 3 - 1 = 17$ $\leftarrow$ 0원을 지불하는 것 제외
- (i), (ii)에서 $a + b = 23 + 17 = 40$

답 40

027

- O에 칠할 수 있는 색은 5가지
 A에 칠할 수 있는 색은 O에 칠한 색을 제외한 4가지
 B에 칠할 수 있는 색은 O, A에 칠한 색을 제외한 3가지
- (i) A, C를 같은 색으로 칠할 때
 C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 O, A(C)에 칠한

색을 제외한 3가지

$$\therefore 5 \times 4 \times 3 \times 1 \times 3 = 180$$

(ii) A, C를 다른 색으로 칠할 때

C에 칠할 수 있는 색은 O, A, B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 O, A, C에 칠한 색을 제외한 2가지

$$\therefore 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 240$$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$$180 + 240 = 420$$

답 420

2 순열

229~238쪽

029

(1) ${}_5P_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

(2) ${}_2P_2 = 2! = 2 \times 1 = 2$

(3) ${}_8P_1 = 8$

(4) $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

(5) $1! = 1$

답 (1) 120 (2) 2 (3) 8 (4) 6 (5) 1

031

(1) ${}_5P_r$ 는 5부터 1씩 줄여가며 r 개를 곱한 것이다.

그런데 ${}_5P_r = 60 = 5 \times 4 \times 3$ 이므로 $r = 3$

(2) ${}_nP_2$ 는 n 부터 1씩 줄여가며 2개를 곱한 것이다.

그런데 ${}_nP_2 = 30 = 6 \times 5$ 이므로 $n = 6$

(3) 주어진 식의 양변을 풀어 쓰면

$$\begin{aligned} n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \\ = 30n(n-1)(n-2) \end{aligned}$$

그런데 ${}_nP_5$ 에서 $n \geq 5$ 이므로

$$n(n-1)(n-2) \neq 0$$

양변을 $n(n-1)(n-2)$ 로 나누면

$$(n-3)(n-4) = 30, \quad n^2 - 7n - 18 = 0$$

$$(n+2)(n-9) = 0$$

$$n \geq 5 \text{이므로 } n+2 \neq 0$$

$$\therefore n = 9$$

답 (1) $r = 3$ (2) $n = 6$ (3) $n = 9$

033

$$n \times {}_{n-1}P_{r-1} = n \times \frac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!}$$

$$= n \times \frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} = {}_nP_r$$

답 풀이 참조

035

(1) 6명에서 6명을 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_6P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

(2) 10명에서 2명을 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_{10}P_2 = 10 \times 9 = 90$$

답 (1) 720 (2) 90

037

서로 다른 n 권에서 2권을 택하는 순열의 수가 56이므로

$${}_nP_2 = 56 = 8 \times 7 = 56$$

$$\therefore n = 8$$

답 8

039

[1단계] 국어책 2권, 영어책 3권을 각각 한 묶음으로 보면 총 4묶음

국어1 국어2

영어1 영어2 영어3

수학1

수학2

4묶음을 일렬로 꽂는 경우의 수는 $4! = 24$

[2단계] 묶음 안의 국어책 2권, 영어책 3권을 일렬로 꽂는 경우의 수는 각각 $2! = 2$, $3! = 6$

[3단계] 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$$24 \times 2 \times 6 = 288$$

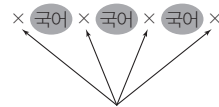
답 288

041

(1) [1단계] 먼저 국어책을 일렬로 꽂는 경우의 수는

$$3! = 6$$

[2단계] 이들의 양 끝이나 사이사이에 수학책을 꽂으면 되므로



수학책 3권이 끼어 들어갈 자리

4개의 자리 중 3개의 자리를 택하여 수학책을 꽂는 경우의 수는 ${}_4P_3 = 24$

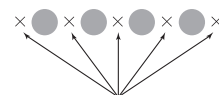
[3단계] 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$$6 \times 24 = 144$$

(2) [1단계] 특정한 국어책 2권을 제외한 국어책 1권과 수학책 3권을 먼저 일렬로 꽂는 경우의 수는

$$4! = 24$$

[2단계] 이들의 양 끝이나 사이사이에 특정한 국어책 2권을 각각 끼워 꽂으면 되므로



특정한 국어책 2권이 끼어 들어갈 자리

5개의 자리 중 2개의 자리를 택하여 특정한 국어책 2권을 끼워 꽂는 경우의 수는

$${}_5P_2=20$$

[3단계] 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$$24 \times 20 = 480 \quad \text{답 (1) 144 (2) 480}$$

다른 풀이

[1단계] 책 6권을 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는

$$6! = 720$$

[2단계] 특정한 국어책 2권이 이웃하는 경우의 수는

$$2 \times 5! = 240$$

[3단계] 전체 경우의 수에서 특정한 국어책 2권이 이웃하는 경우의 수를 빼면

$$6! - 2 \times 5! = 720 - 240 = 480$$

043

‘적어도 한쪽 끝이 자음’의 반대는 ‘양 끝이 모두 모음’이다. 따라서 전체 경우의 수에서 양 끝이 모두 모음인 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$6! = 720$$

(ii) 양 끝이 모두 모음인 경우의 수는

(e, i, o 중 2개를 양 끝에 나열하는 경우의 수)

× (나머지 4개를 나열하는 경우의 수)

$$= {}_3P_2 \times 4! = 144$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$720 - 144 = 576$$

답 576

+ 풍산자 방법

(사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)

= (전체 경우의 수) - (사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

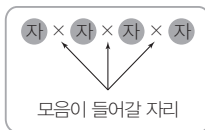
045

자음은 P, R, M, S의 4개이고, 모음은 O, I, E의 3개이므로 오른쪽 그림과 같이 자음 4개를 한 줄로 나열하고 그 사이사이에 모음 3개를 넣으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$4! \times 3! = 144$$

답 144



047

(1) o와 c를 제외한 나머지 5개의 문자를 가운데에 끼우면 되므로 구하는 경우의 수는

$$5! = 120$$

(2) [1단계] o와 m을 제외한 나머지 5개의 문자 중 3개를 o와 m 사이에 끼우는 경우의 수는

$${}_5P_3=60$$

[2단계] o□□□m을 한

묶음으로 생각하

여 3묶음을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

[3단계] o와 m이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

[4단계] 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$$60 \times 6 \times 2 = 720$$

답 (1) 120 (2) 720

049

p, e, n, c, i, l을 사전에 배열된 순서로 나열하면

c, e, i, l, n, p

c로 시작하는 단어의 개수는 $5! = 120$

e로 시작하는 단어의 개수는 $5! = 120$

i로 시작하는 단어의 개수는 $5! = 120$

lc로 시작하는 단어의 개수는 $4! = 24$

이때 $120 + 120 + 120 + 24 = 384$ 이므로 385번째 단어는 lecinp, 386번째 단어는 lecinp이다.

답 386번째

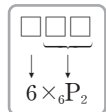
051

(1) □□□의 꼴 ➡ 맨 앞자리에 0이 올 수 없음에 유의 한다.

[1단계] 맨 앞자리에 올 수 있는 숫자는

0을 제외한 1, 2, 3, 4, 5, 6으로

6가지이다.



[2단계] 나머지 6개의 숫자에서 2개를

택하여 뒷부분에 나열하는 경우의 수는

$${}_6P_2=30$$

[3단계] 곱의 법칙에 의하여 구하는 세 자리의 자연수의 개수는 $6 \times 30 = 180$

(2) □□홀수의 꼴 ➡ 홀수가 되려면 맨 끝자리의 수가 홀수이어야 한다.

즉, $\square\square 1$, $\square\square 3$, $\square\square 5$ 의 꼴이어야 한다.

맨 앞자리에는 0이 올 수 없으므로 구하는 홀수의 개수는 $3 \times (5 \times 5) = 75$

- (3) 5의 배수가 되려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) $\square\square 0$ 의 꼴: ${}_6P_2 = 30(\text{개})$

(ii) $\square\square 5$ 의 꼴: 맨 앞자리에는 0이 올 수 없으므로 $5 \times 5 = 25(\text{개})$

(i), (ii)에서 합의 법칙에 의하여 구하는 5의 배수의 개수는 $30 + 25 = 55$

답 (1) 180 (2) 75 (3) 55

053

(i) $1\square\square\square$ 의 꼴: 1을 제외한 나머지 3개를 뒷부분에 나열하면 되므로 $3! = 6(\text{개})$

(ii) $21\square\square$ 의 꼴: 2, 1을 제외한 나머지 2개를 뒷부분에 나열하면 되므로 $2! = 2(\text{개})$

(i), (ii)에서 합의 법칙에 의하여 구하는 자연수의 개수는 $6 + 2 = 8$

답 8

필수 확인 문제

239쪽

054

(1) ${}_nP_3 + 3{}_nP_2 = 7{}_{n+1}P_2$ 에서

$$n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) = 7(n+1)n$$

그런데 $n \geq 3$, $n \geq 2$, $n+1 \geq 2$ 에서 $n \geq 3$ 이므로 양변을 n 으로 나누면

$$(n-1)(n-2) + 3(n-1) = 7(n+1)$$

$$n^2 - 3n + 2 + 3n - 3 = 7n + 7$$

$$n^2 - 7n - 8 = 0, (n+1)(n-8) = 0$$

$$\therefore n = 8 (\because n \geq 3)$$

(2) ${}_nP_4 : {}_{n+1}P_3 = 5 : 2$ 에서 $2{}_nP_4 = 5{}_{n+1}P_3$ 이므로

$$2n(n-1)(n-2)(n-3) = 5(n+1)n(n-1)$$

그런데 $n \geq 4$, $n+1 \geq 3$ 에서 $n \geq 4$ 이므로 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면

$$2(n-2)(n-3) = 5(n+1)$$

$$2n^2 - 10n + 12 = 5n + 5$$

$$2n^2 - 15n + 7 = 0, (2n-1)(n-7) = 0$$

$$\therefore n = 7 (\because n \geq 4)$$

답 (1) 8 (2) 7

055

배구 선수 3명을 한 묶음으로 보면, 총 $(n+1)$ 묶음을 일렬로 세우는 경우의 수는 $(n+1)!$

묶음 안의 배구 선수 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3! = 6$

곱의 법칙에 의하여 $(n+1)! \times 6 = 144$ 이므로

$$(n+1)! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$$

$$n+1 = 4 \quad \therefore n = 3$$

답 3

056

‘적어도 한쪽 끝에 모음’의 반대는 ‘양 끝이 모두 자음’이다. 따라서 전체 경우의 수에서 양 끝이 모두 자음인 경우의 수를 뺀다.

(i) 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$7! = 5040$$

(ii) 자음은 s, p, c, l로 4가지가 있으므로 양 끝에 모두 자음이 오는 경우의 수는

$${}_4P_2 \times 5! = 1440$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$5040 - 1440 = 3600$$

답 3600

057

(i) $\textcircled{\text{여}}\textcircled{\text{남}}\textcircled{\text{여}}\textcircled{\text{남}}\textcircled{\text{여}}\textcircled{\text{남}}\textcircled{\text{여}}\textcircled{\text{남}}$ 으로 세울 때

여자 자리에 여자 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$5! = 120$ 이고, 남자 자리에 남자 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5! = 120$ 이므로

$$120 \times 120 = 14400$$

(ii) $\textcircled{\text{남}}\textcircled{\text{여}}\textcircled{\text{남}}\textcircled{\text{여}}\textcircled{\text{남}}\textcircled{\text{여}}\textcircled{\text{남}}\textcircled{\text{여}}$ 로 세울 때

남자 자리에 남자 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$5! = 120$ 이고, 여자 자리에 여자 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5! = 120$ 이므로

$$120 \times 120 = 14400$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$14400 + 14400 = 28800$$

답 28800

058

t와 a를 제외한 나머지 6개의 문자 중 2개를 t와 a 사이에 끼우는 경우의 수는

$${}_6P_2 = 30$$

t□□a를 한 묶음으로

생각하여 5묶음을 일렬

로 나열하는 경우의 수는 $5! = 120$

t□□a, □, □, □, □

t와 a가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$$30 \times 120 \times 2 = 7200 \quad \text{답 } 7200$$

059

[홀수] □ □ [홀수]의 꼴 $\Rightarrow$ 천의 자리 숫자와 일의 자리 숫자의 곱이 홀수가 되려면 천의 자리 숫자와 일의 자리 숫자는 모두 홀수이어야 한다.

천의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 홀수인 1, 3, 5, 7 중 2개를 택하여 나열하면 되므로

$${}_4P_2 = 12$$

백의 자리와 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 나머지 5개의 숫자에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

$${}_5P_2 = 20$$

곱의 법칙에 의하여 구하는 자연수의 개수는

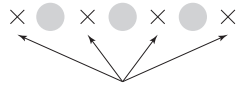
$$12 \times 20 = 240 \quad \text{답 } 240$$

060

D, E, F를 제외한 4명을 일렬로 세울때, A, B가 이웃하는 경우의 수는 A, B를 묶어서 생각하면 되므로

$$3! \times 2 = 12$$

이들의 양 끝이나 사이사이에 D, E, F를 각각 끼워 세우면 되므로



D, E, F 3명이 끼어 들어갈 자리

4개의 자리 중 3개의 자리를 택하여 D, E, F를 끼워 세우는 경우의 수는

$${}_4P_3 = 24$$

곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$$12 \times 24 = 288 \quad \text{답 } 288$$

3 조합

240~251쪽

062

$$(1) {}_{10}C_1 = 10$$

$$(2) {}_6C_2 = \frac{{}_6P_2}{2!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

$$(3) {}_{50}C_{49} = {}_{50}C_1 = 50$$

$$(4) {}_{15}C_{12} = {}_{15}C_3 = \frac{{}_{15}P_3}{3!} = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2 \times 1} = 455$$

$$\text{답 } (1) 10 \quad (2) 15 \quad (3) 50 \quad (4) 455$$

064

$$(1) {}_7C_r = {}_7C_{7-r} \text{이므로}$$

$$7-r=r-3 \quad \therefore r=5$$

$$(2) {}_nC_4 = {}_nC_{n-4} \text{이므로}$$

$$n-4=6 \quad \therefore n=10$$

$$(3) {}_nC_2 = 10 \text{에서 } \frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 10$$

$$n(n-1) = 5 \times 4 \quad \therefore n=5$$

$$(4) n(n-1)(n-2) = 2 \times \frac{n(n-1)}{2 \times 1} + n(n-1)$$

그런데 $n \geq 3$ 이므로 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면

$$n-2=1+1 \quad \therefore n=4$$

$$\text{답 } (1) r=5 \quad (2) n=10 \quad (3) n=5 \quad (4) n=4$$

066

(1) 구하는 경우의 수는 5명에서 2명을 택하는 순열의 수이므로 ${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$

(2) 구하는 경우의 수는 5명에서 2명을 택하는 조합의 수이므로 ${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

$$\text{답 } (1) 20 \quad (2) 10$$

068

(1) 검은 공 7개 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

$${}_7C_2 = 21$$

흰 공 5개 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_2 = 10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$21 \times 10 = 210$$

(2) 검은 공 7개 중에서 4개를 뽑는 경우의 수는

$${}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$$

흰 공 5개 중에서 4개를 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$35 + 5 = 40$$

$$\text{답 } (1) 210 \quad (2) 40$$

070

(1) 빨강과 노랑 2가지 색을 미리 뽑아 놓고 나머지 5가지 색에서 2가지 색을 뽑으면 되므로

$${}_5C_2 = 10$$

(2) 빨강과 노랑 2가지 색을 제외한 나머지 5가지 색에서 4가지 색을 뽑으면 되므로

$${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

$$\text{답 } (1) 10 \quad (2) 5$$

072

- (1) 전체 9권 중에서 3권을 뽑는 경우의 수는

$${}_9C_3=84$$

소설책 4권 중에서 3권을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_3={}_4C_1=4$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$84-4=80$$

- (2) 전체 9권 중에서 3권을 뽑는 경우의 수는

$${}_9C_3=84$$

시집 5권 중에서 3권을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=10$$

소설책 4권 중에서 3권을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_3={}_4C_1=4$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$84-(10+4)=70$$

답 (1) 80 (2) 70

074

- (i) 뽑는 단계 → 국어책 5권 중에서 2권, 수학책 5권 중에서 3권을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_5C_3 = {}_5C_2 \times {}_5C_2 = 10 \times 10 = 100$$

- (ii) 나열 단계 → 뽑은 5권을 일렬로 꽂는 경우의 수는

$$5! = 120$$

- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$100 \times 120 = 12000$$

답 12000

076

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 큰 수부터 차례로 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 수로 정한다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

답 10

078

- (1) 9개의 점 중에서 2개를 택하는 조합의 수는

$${}_9C_2=36$$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 조합의 수는

$${}_4C_2=6$$

따라서 구하는 직선의 개수는

$$36-3 \times 6+3=21$$

- (2) 9개의 점 중에서 3개를 택하는 조합의 수는

$${}_9C_3=84$$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 조합의 수는

$${}_4C_3={}_4C_1=4$$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$$84-3 \times 4=72$$

답 (1) 21 (2) 72

080

n 개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 조합의 수에서 변의 개수인 n 을 뺀 값이 27이므로

$${}_nC_2-n=27, \frac{n(n-1)}{2 \times 1}-n=27$$

$$n^2-3n-54=0, (n+6)(n-9)=0$$

이때 $n \geq 3$ 이므로

$$n+6 \neq 0 \quad \therefore n=9$$

따라서 볼록 n 각형의 꼭짓점의 개수는 9이다.

답 9

다른 풀이

대각선의 개수를 구하는 공식을 이용하면

$$\frac{n(n-3)}{2}=27 \text{에서 } n(n-3)=54=9 \times 6$$

$$\therefore n=9$$

082

4개의 가로선 중에서 2개, 4개의 세로선 중에서 2개를 택하면 하나의 직사각형이 결정되므로 구하는 직사각형의 개수는

$${}_4C_2 \times {}_4C_2=6 \times 6=36$$

답 36

084

5송이에서 1송이를 뽑고, 나머지 4송이에서 2송이를 뽑고, 나머지 2송이에서 2송이를 뽑는다.

이때 2개의 꽃다발의 꽃의 수가 같으므로 2!로 나누어 준다.

$$\therefore {}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}=5 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{2}=15$$

답 15

086

- (i) 부모를 3명인 조에 배정하는 경우

나머지 8명을 1명, 3명, 4명으로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_1 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4=8 \times 35 \times 1=280$$

(ii) 부모를 4명인 조에 배치하는 경우

나머지 8명을 3명, 3명, 2명으로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_3 \times {}_5C_3 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 56 \times 10 \times 1 \times \frac{1}{2} = 280$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$280 + 280 = 560 \quad \text{답 560}$$

088

7명을 4명, 3명으로 분할하는 방법의 수는

$${}_7C_4 \times {}_3C_3 = 35 \times 1 = 35$$

4명을 2명, 2명으로 분할하는 방법의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

3명을 2명, 1명으로 분할하는 방법의 수는

$${}_3C_2 \times {}_1C_1 = 3 \times 1 = 3$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$35 \times 3 \times 3 = 315 \quad \text{답 315}$$

참고

부전승으로 올라가는 한 명과 경기하는 사람이 있으므로 경기하는 횟수로 분할하지 않음에 주의한다.

090

관광객을 2명씩 4개의 조로 분할하여 4곳의 호텔에 투숙시키면 4개의 조의 사람 수가 모두 같으므로

$$\left({}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{4!} \right) \times 4!$$

$$= \left(28 \times 15 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{24} \right) \times 24$$

$$= 2520 \quad \text{답 2520}$$

필수 확인 문제

252쪽

091

${}_nP_2 + 4{}_nC_3 = {}_nP_3$ 에서

$$n(n-1) + 4 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = n(n-1)(n-2)$$

그런데 $n \geq 3$ 이므로 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면

$$1 + \frac{2(n-2)}{3} = n-2, \quad \frac{2(n-2)}{3} = n-3$$

$$2n-4 = 3n-9 \quad \therefore n=5 \quad \text{답 5}$$

092

모임에 참석한 회원 수를 n 이라 하면 악수한 총 횟수는 n 명 중에서 2명을 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_nC_2 = 120, \quad \frac{n(n-1)}{2} = 120$$

$$n(n-1) = 240 = 16 \times 15$$

$$\therefore n=16$$

따라서 구하는 회원 수는 16이다.

답 16

093

전체 12자루 중에서 2자루를 꺼내는 경우의 수는

$${}_{12}C_2 = 66$$

빨간색 볼펜 5자루와 노란색 볼펜 3자루 중에서 2자루를 꺼내는 경우의 수는 ${}_8C_2 = 28$

따라서 구하는 경우의 수는 $66 - 28 = 38$

답 38

094

태희와 은우를 미리 뽑아 놓고 나머지 7명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_7C_3 = 35$$

뽑은 5명을 태희와 은우가 이웃하도록 일렬로 세우는 경우의 수는

$$4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$$

← 태희와 은우를 한 묶음으로 생각하여 일렬로 세운 후,

두 사람이 서로 자리를 바꾸는 경우도 생각한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$35 \times 48 = 1680 \quad \text{답 1680}$$

095

7개의 점 중에서 4개를 택하는 조합의 수는 ${}_7C_4 = 35$

4개의 점을 택하여 사각형을 만들 수 없는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) 일직선 위에 있는 4개의 점을 택하는 경우

$${}_4C_4 = 1$$

(ii) 일직선 위에 있는 3개의 점과 일직선 위에 있지 않은 한 개의 점을 택하는 경우

$${}_4C_3 \times 3 = {}_4C_1 \times 3 = 4 \times 3 = 12$$

(i), (ii)에서 구하는 사각형의 개수는

$$35 - (1 + 12) = 22 \quad \text{답 22}$$

096

6명을 3명, 3명으로 분할하는 방법의 수는

$${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 20 \times 1 \times \frac{1}{2} = 10$$

각 조에서 부전승으로 올라가는 1명을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_3C_1 = 3 \times 3 = 9$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 9 = 90$$

답 90

다른 풀이

6명을 두 번 경기하는 2명과 세 번 경기하는 4명으로 나누는 방법의 수는 ${}_6C_2 \times {}_4C_4 = 15 \times 1 = 15$

세 번 경기하는 4명을 2명, 2명으로 나누는 방법의 수는 ${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$

이때 부전승으로 올라와서 경기하는 상대는 2가지 경우가 있으므로 구하는 방법의 수는 $15 \times 3 \times 2 = 90$

097

2층부터 7층까지 6개의 층 중에서 사람들이 내리는 3개의 층을 택하는 경우의 수는

$${}_6C_3 = 20$$

8명을 2명, 3명, 3명의 3개의 조로 나누어 3개의 층에 배정하는 경우의 수는

$$\left({}_8C_2 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \right) \times 3! = \left(28 \times 20 \times 1 \times \frac{1}{2} \right) \times 6 = 1680$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 \times 1680 = 33600$$

답 33600

● 실전 연습문제

254~256쪽

098

눈의 수의 합이 소수가 되는 경우는 2, 3, 5, 7, 11이다. 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 2인 경우

(1, 1)로 1가지

(ii) 눈의 수의 합이 3인 경우

(1, 2), (2, 1)로 2가지

(iii) 눈의 수의 합이 5인 경우

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)로 4가지

(iv) 눈의 수의 합이 7인 경우

(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)로 6가지

(v) 눈의 수의 합이 11인 경우

(5, 6), (6, 5)로 2가지

(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

$$1 + 2 + 4 + 6 + 2 = 15$$

답 15

099

$(a+b+c)(p+q+r)$ 의 전개식에서 항의 개수는

$$3 \times 3 = 9$$

$(a+b)(s+t)$ 의 전개식에서 항의 개수는

$$2 \times 2 = 4$$

따라서 구하는 항의 개수는

$$9 + 4 = 13$$

답 ⑤

100

(i) $A \rightarrow B$ 로 가는 방법의 수는 3

(ii) $B \rightarrow C$ 로 가는 방법의 수는 4

(iii) $C \rightarrow B$ 로 가는 방법의 수는 4

(iv) $B \rightarrow A$ 로 가는 방법의 수는 2

(i)~(iv)에서 구하는 방법의 수는

$$3 \times 4 \times 4 \times 2 = 96$$

답 96

101

세 자리의 자연수가 3의 배수가 되려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 3개를 택했을 때, 그 합이 3의 배수가 되는 경우는 0, 1, 2 또는 0, 2, 4 또는 1, 2, 3 또는 2, 3, 4이므로 각 경우의 수는 다음과 같다.

(i) 0, 1, 2 또는 0, 2, 4의 경우

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 3의 배수의 개수는

$$2 \times (2 \times 2!) = 8$$

(ii) 1, 2, 3 또는 2, 3, 4의 경우

3의 배수의 개수는

$$2 \times 3! = 12$$

(i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는

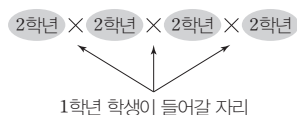
$$8 + 12 = 20$$

답 20

102

2학년 학생 4명이 일렬로 앉는 경우의 수는 $4! = 24$

이때 조건 (가), (나)를 모두 만족시키려면 2학년 학생이 앉은 의자의 사이사이에 1학년 학생이 앉으면 되므로



3개의 자리 중 2개의 자리에 1학년 학생이 앉는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 6 = 144$$

답 ③

다른 풀이

조건 (4)에서 2학년 학생 4명 중에서 2명이 양 끝에 있는 의자에 앉는 경우의 수는

$${}_4P_2=12$$

이때 조건 (7)을 만족시키려면 1학년 학생 2명과 2학년 학생 2명이 양 끝을 제외한 4개의 자리에 앉는 경우의 수에서 1학년 학생 2명이 이웃하여 앉는 경우의 수

$3! \times 2!$ 을 빼면 된다.

따라서 1학년 학생끼리 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는

$$4! - 3! \times 2! = 24 - 12 = 12$$

이므로 구하는 경우의 수는

$$12 \times 12 = 144$$

103

a, b, c로 시작하는 단어의 개수는 각각 $4!$ 이므로 모두 $4! \times 3 = 72$

따라서 75번째에 위치한 단어는 d로 시작하는 단어 중 3번째에 있다.

dabce, dabec, dacbe, ...

따라서 구하는 단어는 dacbe이다.

답 ③

104

지원자 11명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수에서 여자 지원자를 1명 이하로 뽑는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 지원자 11명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{11}C_4=330$$

(ii) 남자 지원자 5명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_4={}_5C_1=5$$

남자 지원자 5명 중에서 3명, 여자 지원자 6명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_3 \times {}_6C_1 = {}_5C_2 \times {}_6C_1 = 10 \times 6 = 60$$

따라서 여자 지원자를 1명 이하로 뽑는 경우의 수는

$$5 + 60 = 65$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$330 - 65 = 265$$

답 265

105

여섯 명의 회원 중에서 자신의 가방을 돌려받을 세 사람을 선택하는 경우의 수는

$${}_6C_3=20$$

나머지 세 사람 A, B, C가 자신의 가방 a, b, c를 받지 못하는 경우는 오른쪽 그림과 같다.

A	B	C
b	c	a
c	a	b

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 \times 2 = 40$$

답 40

106

8개의 점 중에서 2개를 택하는 조합의 수는

$${}_8C_2=28$$

위쪽 직선 위의 3개의 점 중에서 2개를 택하는 조합의 수는

$${}_3C_2=3$$

아래쪽 직선 위의 5개의 점 중에서 2개를 택하는 조합의 수는

$${}_5C_2=10$$

따라서 구하는 직선의 개수는

$$28 - 3 + 1 - 10 + 1 = 17$$

답 17

다른 풀이

두 평행선에서 각각 점을 하나씩 택하여 연결하면 한 개의 직선을 만들 수 있으므로

$${}_3C_1 \times {}_5C_1 = 3 \times 5 = 15$$

주어진 평행선 2개를 포함하면 구하는 직선의 개수는

$$15 + 2 = 17$$

107

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 이 이차방정식이 실근을 가지므로

$$D = a^2 - 4b \geq 0 \quad \therefore a^2 \geq 4b$$

(i) $b=1$ 일 때, $a^2 \geq 4$ 이므로 a 는 2, 3, 4, 5, 6으로 5가지

(ii) $b=2$ 일 때, $a^2 \geq 8$ 이므로 a 는 3, 4, 5, 6으로 4가지

(iii) $b=3$ 일 때, $a^2 \geq 12$ 이므로 a 는 4, 5, 6으로 3가지

(iv) $b=4$ 일 때, $a^2 \geq 16$ 이므로 a 는 4, 5, 6으로 3가지

(v) $b=5$ 일 때, $a^2 \geq 20$ 이므로 a 는 5, 6으로 2가지

(vi) $b=6$ 일 때, $a^2 \geq 24$ 이므로 a 는 5, 6으로 2가지

(i)~(vi)에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$5 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 = 19$$

답 19

108

1부터 999까지의 자연수는 다음과 같이 0을 사용하여 모두 세 자리로 나타낼 수 있다.

$$1 \rightarrow 001, 98 \rightarrow 098, 327 \rightarrow 327$$

이때 말할 수 있는 수는 3, 6, 9를 제외한 7가지 수로 이루어져 있고, 그중 000은 제외되므로 그 개수는

$$7 \times 7 \times 7 - 1 = 342$$

따라서 말하지 않아야 하는 수의 개수는

$$999 - 342 = 657$$

답 657

109

(i) e와 i가 서로 이웃하는 경우

e와 i를 한 묶음으로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열한 후 e와 i의 자리를 서로 바꾸면 되므로

$$4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$$

(ii) i와 u가 서로 이웃하는 경우

i와 u를 한 묶음으로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열한 후 i와 u의 자리를 서로 바꾸면 되므로

$$4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$$

(iii) e와 i, i와 u가 모두 서로 이웃하는 경우

e, i, u를 한 묶음으로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

이때 e와 i, i와 u가 모두 이웃하는 경우는 eiu, uie의 2가지이므로 e와 i, i와 u가 모두 서로 이웃하는 경우의 수는

$$6 \times 2 = 12$$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$48 + 48 - 12 = 84$$

답 84

110

서로 다른 네 종류의 인형이 각각 2개씩 있으므로 5개의 인형을 선택하려면 세 종류 이상의 인형을 선택해야 한다.

(i) 서로 다른 세 종류의 인형을 각각 1개, 2개, 2개씩 선택하는 경우

먼저 서로 다른 네 종류의 인형 중에서 세 종류의 인형을 선택한다. 이 세 종류의 인형 중 1개를 선택하는 인형의 종류를 정하면 남은 두 종류의 인형은 각각 2개씩 선택하면 되므로

$${}_4C_3 \times {}_3C_1 = {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 4 \times 3 = 12$$

(ii) 서로 다른 네 종류의 인형을 각각 1개, 1개, 1개, 2개씩 선택하는 경우

서로 다른 네 종류의 인형 중에서 2개를 선택하는 인형을 정하면 남은 세 종류의 인형은 각각 1개씩 선택하면 되므로

$${}_4C_1 = 4$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$12 + 4 = 16$$

답 16

111

(i) 가로 방향의 선분 4개 중에서 2개, 세로 방향의 선분 6개 중에서 2개를 선택하면 하나의 직사각형이 결정되므로 직사각형의 개수는

$${}_4C_2 \times {}_6C_2 = 6 \times 15 = 90$$

(ii) 가장 가까운 두 평행선의 간격의 길이를 1이라 할 때, 한 변의 길이가 1, 2, 3인 정사각형의 개수는 각각 15, 8, 3이므로 정사각형의 총 개수는

$$15 + 8 + 3 = 26$$

(i), (ii)에서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$$90 - 26 = 64$$

답 64

112

(i) 4개국이 있는 두 대륙을 여행하는 경우의 수는

$$2 \times {}_4C_3 \times {}_4C_2 = 48$$

(ii) 4개국이 있는 대륙과 3개국이 있는 대륙을 여행하는 경우의 수는 4개국이 있는 대륙을 먼저 여행하는 경우와 3개국이 있는 대륙을 먼저 여행하는 경우로 나누어 생각하면

$$(2 \times 2) \times ({}_4C_3 \times {}_3C_2 + {}_3C_3 \times {}_4C_2) = 72$$

(iii) 3개국이 있는 두 대륙을 여행하는 경우

$$2 \times {}_3C_3 \times {}_3C_2 = 6$$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$48 + 72 + 6 = 126$$

답 126

113

사원 6명을 3개의 조로 나누는 경우는 (1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 2, 2)이다.

(i) 1명, 1명, 4명으로 나누는 경우의 수는

$$\begin{aligned} & \left({}_6C_1 \times {}_5C_1 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} \right) \times 3! \\ &= \left(6 \times 5 \times 1 \times \frac{1}{2} \right) \times 6 = 90 \end{aligned}$$

(ii) 1명, 2명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$$({}_6C_1 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3) \times 3! = (6 \times 10 \times 1) \times 6 = 360$$

(iii) 2명, 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는

$$\begin{aligned} & \left({}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} \right) \times 3! \\ &= \left(15 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{6} \right) \times 6 = 90 \end{aligned}$$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$90 + 360 + 90 = 540$$

답 540

IV 행렬

1 행렬과 그 연산

1 행렬의 뜻

260~263쪽

002

답 (1) 1×2 행렬

(2) 3×1 행렬

(3) 2×2 행렬, 이차정사각행렬

(4) 3×4 행렬

004

(1) 제2행의 성분은 $-2, 0, -6$ 이다.

(2) $(1, 2)$ 성분은 $-3, (2, 1)$ 성분은 -2 이다.

(3) a_{13} 은 제1행 제3열의 성분이므로 1

a_{22} 는 제2행 제2열의 성분이므로 0

$\therefore a_{13} + a_{22} = 1 + 0 = 1$

답 (1) $-2, 0, -6$

(2) $(1, 2)$ 성분: $-3, (2, 1)$ 성분: -2

(3) 1

006

(1) 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x + z = 4 \quad \dots \textcircled{A}$$

$$4x = -y \quad \dots \textcircled{B}$$

$$-3 = x + y \quad \dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{B}, \textcircled{C}$ 을 연립하여 풀면 $x = 1, y = -4$

$x = 1$ 을 $\textcircled{A}$ 에 대입하여 풀면 $z = 3$

(2) 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$y - x = 5 \quad \dots \textcircled{D}$$

$$z^2 = 4 \quad \dots \textcircled{E}$$

$$x + y = -1 \quad \dots \textcircled{F}$$

$$z^2 + z - 3 = 3 \quad \dots \textcircled{G}$$

$\textcircled{D}, \textcircled{F}$ 을 연립하여 풀면

$$x = -3, y = 2$$

$\textcircled{E}$ 을 $\textcircled{G}$ 에 대입하여 풀면 $z = 2$

답 (1) $x = 1, y = -4, z = 3$

(2) $x = -3, y = 2, z = 2$

필수 확인 문제

264쪽

007

3×2 행렬은 행의 개수가 3, 열의 개수가 2인 행렬이므로 3×2 행렬은 $\begin{pmatrix} \text{ㄹ} & \text{ㅁ} \end{pmatrix}$ 이다.

답 $\begin{pmatrix} \text{ㄹ} & \text{ㅁ} \end{pmatrix}$

008

(1) 주어진 조건에 의하여

$$a_{11} = 1 + 1 = 2, a_{12} = 1 + 2 = 3,$$

$$a_{13} = 1 + 3 = 4, a_{14} = 1 + 4 = 5,$$

$$a_{21} = 2 + 1 = 3, a_{22} = 2 + 2 = 4,$$

$$a_{23} = 2 + 3 = 5, a_{24} = 2 + 4 = 6$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(2) 주어진 조건에 의하여

$$a_{11} = a_{22} = 2, a_{12} = a_{21} = 1$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{답 (1)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

009

$$\text{행렬 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$a_{11} = 2 \times 1 = 2, a_{12} = 2 \times 2 = 4, a_{13} = 2 \times 3 = 6$$

$$a_{21} = 2 \times 2 - 1 = 3, a_{22} = 2 \times 2 = 4, a_{23} = 2 \times 3 = 6$$

$$a_{31} = 2 \times 3 - 1 = 5, a_{32} = 2 \times 3 - 2 = 4,$$

$$a_{33} = 2 \times 3 = 6$$

$$\text{따라서 } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{이므로 모든 성분의 합은}$$

$$2 + 4 + 6 + 3 + 4 + 6 + 5 + 4 + 6 = 40$$

답 40

010

$$\text{행렬 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$a_{11} = 1, a_{12} = 3, a_{13} = 6,$$

$$a_{21} = 3, a_{22} = 1, a_{23} = 3,$$

$$a_{31} = 6, a_{32} = 3, a_{33} = 1$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{답} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

011

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$3a = -b \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$1 = 3x + y \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$-11 = 2x - y \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$7a = y \quad \dots\dots \text{㉣}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x = -2, y = 7$

$y = 7$ 을 ㉣에 대입하여 풀면 $a = 1$

$a = 1$ 을 ㉠에 대입하여 풀면 $b = -3$

$$\therefore a + b + x + y = 1 + (-3) + (-2) + 7 = 3$$

답 3

012

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$1 = ab \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a^2 + b^2 = 4 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$c - d = -2 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$2 = cd \quad \dots\dots \text{㉣}$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = 4$$

㉢, ㉣에 의하여

$$c^2 + d^2 = (c - d)^2 + 2cd = (-2)^2 + 2 \times 2 = 8$$

$$\therefore \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + c^2 + d^2 = 4 + 8 = 12$$

답 12

2 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배

265~271쪽

014

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A-B &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & -6 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{답} A+B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, A-B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

016

(1) $A-B-C$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) $A+(C-B)$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -3 & -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{답} (1) \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} (2) \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$

018

(1) $X+A=B$ 의 양변에서 A 를 빼면

$$\begin{aligned} X &= B-A \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) $X+B=-A$ 의 양변에서 B 를 빼면

$$\begin{aligned} X &= -A-B \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -10 & -6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3) $X+B=O$ 의 양변에서 B 를 빼면

$$X = O - B = -B = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(4) $X - B = A$ 의 양변에 B 를 더하면

$$X = A + B$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

답 (1) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -10 & -6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$

020

$$(1) 3A - B = 3 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 12 & -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 5 & -22 \end{pmatrix}$$

(2) $A + 3C - 2B$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 14 & 8 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ -19 & -11 \end{pmatrix}$$

(3) $2(A + 2C) = 2A + 4C$

$$= 2 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ -12 & 4 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$$

(4) $3(2A + B) - 2(B - C)$

$$= 6A + 3B - 2B + 2C = 6A + B + 2C \\ = 6 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 12 & -18 \\ 24 & -36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 19 & -14 \\ 25 & -30 \end{pmatrix}$$

답 (1) $\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 5 & -22 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ -19 & -11 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 16 & 6 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 19 & -14 \\ 25 & -30 \end{pmatrix}$

022

$$A - 2(B + X) = O \text{에서}$$

$$A - 2B - 2X = O$$

$$2X = A - 2B$$

$$\therefore X = \frac{1}{2}A - B$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

답 $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

024

$$2X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$X - Y = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} + \textcircled{B}$ 을 하면

$$3X = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\textcircled{B}$ 에서

$$Y = X - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

답 $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

026

$$xA + yB = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$x \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x & 2x \\ 3x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & y \\ -2y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x + y & 2x + y \\ 3x - 2y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-x + y = 4, x = -1 \quad \therefore x = -1, y = 3$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix} = -A + 3B$$

답 $-A + 3B$

027

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -3 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -2 & 0 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(2) (3 \ 3 \ -8) + (-1 \ 2 \ 2) - (6 \ 7 \ -4) = (-4 \ -2 \ -2)$$

$$(3) 3 \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -14 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(4) 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 7 \end{pmatrix}$$

답 (1) $\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -2 & 0 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$ (2) $(-4 \ -2 \ -2)$
(3) $\begin{pmatrix} 7 & -14 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 22 \\ 7 \end{pmatrix}$

028

 $X - 4A + B = 3(B - A - X)$ 에서 $X - 4A + B = 3B - 3A - 3X$, $4X = A + 2B$

$$\therefore X = \frac{1}{4}A + \frac{1}{2}B$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

답 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

029

$$\begin{pmatrix} 2 & x \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & y \\ y & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 14 \\ 11 & -5 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & x \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3y \\ 3y & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 14 \\ 11 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & x-3y \\ -1-3y & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 14 \\ 11 & -5 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x-3y=14, \quad -1-3y=11$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=2, y=-4$

$$\therefore x-y=2-(-4)=6$$

답 6

030

$$A - 3B = \begin{pmatrix} -7 & 14 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -10 & 13 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

 $2 \times \textcircled{7} + 3 \times \textcircled{8}$ 을 하면

$$11A = 2 \begin{pmatrix} -7 & 14 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -10 & 13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & 28 \\ -14 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36 & 27 \\ -30 & 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 55 \\ -44 & 33 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{7} \text{에 } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \text{을 대입하면}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -7 & 14 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 14 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A+B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A+B$ 의 $(2, 1)$ 성분은 -3 이다.**답** -3

031

 $xA - yB = -2C$ 에서

$$x \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 6 \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x & x \\ 0 & -x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & 3y \\ y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x-y & x-3y \\ -y & -x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2x - y = 1, -y = -5$$

$$\therefore x = 3, y = 5$$

답 $x = 3, y = 5$

032

$$\begin{pmatrix} a^3 & ab \\ a & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b^3 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} a^3 - b^3 & ab \\ a - b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a^3 - b^3 = x, ab = 2, a - b = 3$$

$$\therefore x = a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$

$$= 3^3 + 3 \times 2 \times 3 = 45$$

답 45

3 행렬의 곱셈

273~283쪽

034

행렬 A 는 1×3 행렬, 행렬 B 는 3×1 행렬, 행렬 C 는 2×3 행렬이다.

따라서 행렬의 곱이 정의되는 것은 AB, BA, CB 이므로 $\neg, \text{ㄹ}, \text{ㅂ}$ 이다.

답 $\neg, \text{ㄹ}, \text{ㅂ}$

036

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \times 3 + 1 \times 2 \quad 1 \times 5 + 1 \times 4) = (5 \quad 9)$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times (-1) + (-1) \times 2 \\ 1 \times (-1) + 2 \times 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \times (-1) + 1 \times 4 & 2 \times (-3) + 1 \times (-1) \\ 0 \times (-1) + 6 \times 4 & 0 \times (-3) + 6 \times (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 24 & -6 \end{pmatrix}$$

답 (1) $\begin{pmatrix} 5 & 9 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 24 & -6 \end{pmatrix}$

038

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -1 \\ y & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & -x + 2y \\ xy & 2x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 4x \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ -4 & 2x \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x^2 + y^2 = 17, -x + 2y = 9, xy = -4$$

$-x + 2y = 9$ 에서 $x = 2y - 9$ 이므로 $xy = -4$ 에 대입하면

$$(2y - 9)y = -4, 2y^2 - 9y + 4 = 0$$

$$(2y - 1)(y - 4) = 0$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \text{ 또는 } y = 4$$

$$y = \frac{1}{2} \text{ 일 때, } x = -8 \text{ 이므로 } x^2 + y^2 \neq 17$$

$$y = 4 \text{ 일 때, } x = -1 \text{ 이므로 } x^2 + y^2 = 17$$

$$\therefore x = -1, y = 4$$

답 $x = -1, y = 4$

040

$$[1\text{단계}] \begin{pmatrix} 3x - a \\ 3y - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$$

$$= 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$[2\text{단계}] \therefore A \begin{pmatrix} 3x - a \\ 3y - b \end{pmatrix} = A \left\{ 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\}$$

$$= 3A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= 3 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

답 $\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$

042

$$(1) A^2 = AA$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{즉, } A^n = \begin{pmatrix} 1 & -2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -24 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 에서}$$

$$-2n = -24 \quad \therefore n = 12$$

$$(2) A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{즉, } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 729 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$3^n = 729 = 3^6 \quad \therefore n = 6$$

답 (1) 12 (2) 6

+ 풍산자 비법

행렬의 거듭제곱의 규칙성

(1) 대각선 행렬

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

(2) 위삼각형 행렬

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 아랫삼각형 행렬

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$$

044

$$(1) E + 2E^2 + 3E^3 + 4E^4 + 5E^5$$

$$= E + 2E + 3E + 4E + 5E$$

$$= 15E = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

$$(2) E^{49} + E^{50} + (-E)^{51} + (-E)^{52}$$

$$= E + E + (-E) + E$$

$$= 2E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

답 (1) $\begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

046

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bf \\ ce+df \end{pmatrix} \text{이므로 행렬 } AB \text{의}$$

(2, 1) 성분이 의미하는 것은 가구 Q를 만들 때 필요한 나사와 못을 구입하는 금액이다.

답 ②

048

$$\begin{pmatrix} x & -4 \\ -2 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & x \\ y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-4y & x^2-16 \\ -4+y^2 & -2x+4y \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2x-4y=0, x^2-16=0, -4+y^2=0, -2x+4y=0$$

$$\therefore x=2y, x=\pm 4, y=\pm 2$$

이때 $x>0$ 이므로 $x=4, y=2$

답 $x=4, y=2$

050

$$2A = (A+B) + (A-B)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{이므로 } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2B = (A+B) - (A-B)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{이므로 } B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^2 + 2AB + B^2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$$

답 $\begin{pmatrix} 6 & -10 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$

052

$$A^2 - AB + BA - B^2$$

$$= A(A-B) + B(A-B)$$

$$= (A+B)(A-B)$$

$$A+B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A-B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

이므로

$$\begin{aligned} A^2 - AB + BA - B^2 &= (A+B)(A-B) \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 $A^2 - AB + BA - B^2$ 의 (1, 2) 성분은 -1이다. 답 -1

참고

곱해진 행렬의 순서가 바뀌지 않도록 한다.

$$\begin{aligned} A^2 - AB + BA - B^2 &= A(A-B) + B(A-B) \\ &\neq (A-B)(A+B) \end{aligned}$$

054

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 이면 $AB = BA$ 이므로

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ x & y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2+2x & -3+2y \\ 6-4x & 9-4y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -x+3y & 2x-4y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-2+2x=7, -3+2y=-8$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=\frac{9}{2}, y=-\frac{5}{2}$$

$$\therefore x-y=\frac{9}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)=7$$

답 7

056

단위행렬 E 에 대하여 $AE = EA$ 이므로

$$(A+E)(A^2-A+E) = A^3+E^3 = A^3+E$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 14 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (A+E)(A^2-A+E) = A^3+E$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 14 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\text{답} \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}$$

058

$A+B = -3E$ 의 양변의 왼쪽에 A 를 곱하면

$$A^2 + AB = -3A, A^2 + O = -3A$$

$$\therefore A^2 = -3A$$

또, $A+B = -3E$ 의 양변의 오른쪽에 B 를 곱하면

$$AB + B^2 = -3B, O + B^2 = -3B$$

$$\therefore B^2 = -3B$$

따라서

$$A^3 = A^2A = -3AA = -3A^2 = 9A$$

$$B^3 = B^2B = -3BB = -3B^2 = 9B$$

이므로

$$A^3 + B^3 = 9A + 9B$$

$$= 9(A+B)$$

$$= -27E = \begin{pmatrix} -27 & 0 \\ 0 & -27 \end{pmatrix}$$

$$\text{답} \begin{pmatrix} -27 & 0 \\ 0 & -27 \end{pmatrix}$$

060

케일리-해밀턴 정리에 의하여 $A^2 + A + E = O$ 이므로

$$A^2 = -A - E$$

$$A^3 = A^2A$$

$$= (-A - E)A$$

$$= -A^2 - A$$

$$= E$$

$$\therefore A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A = A^2 + A + E + A^2 + A$$

$$= 2A^2 + 2A + E$$

$$= 2(-A - E) + 2A + E$$

$$= -E$$

$$\therefore x=0, y=-1$$

$$\text{답} x=0, y=-1$$

다른 풀이

케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$A^2 + A + E = O$$

..... ㉠

양변에 $A-E$ 를 곱하면

$$(A-E)(A^2 + A + E) = O$$

$$A^3 - E = O \quad \therefore A^3 = E$$

$$\therefore A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A = A^2 + A + E + A^2 + A$$

$$= O + (-E) (\because \text{㉠})$$

$$= -E$$

$$\therefore x=0, y=-1$$

061

- ㄱ. 1×2 행렬과 1×2 행렬이므로 곱셈이 불가능하다.
 ㄴ. 1×2 행렬과 2×1 행렬이므로 곱셈이 가능하다.
 ㄷ. 2×1 행렬과 1×2 행렬이므로 곱셈이 가능하다.
 ㄹ. 2×2 행렬과 2×1 행렬이므로 곱셈이 가능하다.
 ㅁ. 2×3 행렬과 2×2 행렬이므로 곱셈이 불가능하다.
 따라서 행렬의 곱셈이 가능한 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

062

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ c & d \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b+a \\ -2 & 4b-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ c & d \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2a=4, 2b+a=6, -2=c, 4b-1=d$$

$$\therefore a=2, b=2, c=-2, d=7$$

$$\therefore a+b+c+d=9$$

답 9

063

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$\therefore A^{33} = (A^3)^{11} = E^{11} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 A^{33} 의 모든 성분의 합은

$$1+0+0+1=2$$

답 2

064

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 이면 $AB=BA$ 이므로

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -a+2 \\ 0 & a-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+a & 6-3a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-1 = -3 + a \quad \therefore a = 2$$

$$\text{이때 } AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} A^5 B^5 &= A^4 A B B^4 = A^4 (-E) B^4 = -A^4 B^4 \\ &= -A^3 A B B^3 = -A^3 (-E) B^3 = A^3 B^3 = \dots \\ &= AB = -E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{답 } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

065

$A+B=O$ 의 양변의 왼쪽에 A 를 곱하면

$$A^2 + AB = O, A^2 + E = O$$

$$\therefore A^2 = -E$$

또, $A+B=O$ 의 양변의 오른쪽에 B 를 곱하면

$$AB + B^2 = O, E + B^2 = O$$

$$\therefore B^2 = -E$$

따라서

$$A^{99} = A(A^2)^{49} = A(-E)^{49} = -AE = -A$$

$$B^{100} = (B^2)^{50} = (-E)^{50} = E$$

이므로

$$A^{99} + B^{100} = -A + E$$

답 ④

066

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 2$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & 2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta & \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a = \alpha^2 + \beta^2, b = 2\alpha\beta$$

$$\begin{aligned} \therefore a - b &= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= 4^2 - 4 \times 2 = 8 \end{aligned}$$

답 8

● 실전 연습문제

286~288쪽

067

$$a_{11} = 3 \times 1 - 1 + a = 4 \text{이므로 } a = 2$$

따라서

$$x = a_{12} = 3 \times 1 - 2 + 2 = 3$$

$$y = a_{21} = 3 \times 2 - 1 + 2 = 7$$

$$z = a_{32} = 3 \times 3 - 2 + 2 = 9$$

이므로

$$x + y + z = 3 + 7 + 9 = 19$$

답 19

068

$$A+X=3B+2X \text{에서}$$

$$X-2X=3B-A, -X=3B-A$$

$$\therefore X=A-3B$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$$

답 ②

069

$$X-Y=2A-5B \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$X+2Y=5A+4B \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑧-⑦을 하면

$$3Y=3A+9B \quad \therefore Y=A+3B$$

이를 ⑦에 대입하면

$$X-(A+3B)=2A-5B \quad \therefore X=3A-2B$$

$$\therefore X+Y=(3A-2B)+(A+3B)$$

$$=4A+B$$

$$=4 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $X+Y$ 의 $(1, 2)$ 성분은 7이다.

답 7

070

$$xA+yB=C \text{에서}$$

$$x \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x & -x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y & 4y \\ 2y & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x-y & -x+4y \\ x+2y & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$3x-y=5, 2y=2 \quad \therefore x=2, y=1$$

$$-x+4y=a \text{에서 } a=2$$

$$x+2y=b \text{에서 } b=4$$

$$\therefore a+b+x+y=2+4+2+1=9$$

답 9

071

$$\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} x-2 & xy+1 \\ 7 & y-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x-2=0, xy+1=a, y-3=-5$$

따라서 $x=2, y=-2$ 이므로

$$a=xy+1=2 \times (-2)+1=-3$$

답 -3

072

$$(A+E)(A-E)=A^2-E \text{이므로}$$

$$A^2-E=E \text{에서 } A^2=2E$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+b & a-1 \\ ab-b & b+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a-1=0, b+1=2$$

$$\therefore a=1, b=1$$

$$\therefore a+b=1+1=2$$

답 2

+ 풍산자 비법

단위행렬의 성질

n 차 정사각행렬 A 와 n 차 단위행렬 E 에 대하여

① $E^2=E, E^3=E, \dots, E^n=E$ (단, n 은 자연수이다.)

$$\textcircled{2} (A+E)^2=A^2+2A+E$$

$$(A-E)^2=A^2-2A+E$$

$$(A+E)(A-E)=A^2-E$$

073

$$A^2=AA$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=-E$$

$$\text{이므로 } A^{50}=(A^2)^{25}=(-E)^{25}=-E$$

$$A^{50} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} \text{에서 } -E \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
 $-x=3, -y=-6 \quad \therefore x=-3, y=6$
 $\therefore xy=-3 \times 6=-18$

답 -18

074

$$A \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} -3a \\ -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \left\{ \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a \\ -2b \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -1+3 \\ 5+2 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, -A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

답 ③

075

$$AB = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.35 \\ 0.4 & 0.65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 350 & 300 \\ 300 & 280 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.6 \times 350 + 0.35 \times 300 & 0.6 \times 300 + 0.35 \times 280 \\ 0.4 \times 350 + 0.65 \times 300 & 0.4 \times 300 + 0.65 \times 280 \end{pmatrix}$$

이때 2학년에서 음료수를 선호하는 학생 수는

$$0.4 \times 300 + 0.65 \times 280$$

이고, 이는 행렬 AB 의 $(2, 2)$ 성분과 같으므로 d 이다.

답 ④

076

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$3x^2+1=4x^2, 2=x^2+1,$$

$$7x+3=-x^2+3x, x^2-2x=x+4$$

$$3x^2+1=4x^2, 2=x^2+1 \text{에서 } x^2=1$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

..... ㉠

$$7x+3=-x^2+3x \text{에서}$$

$$x^2+4x+3=0, (x+3)(x+1)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=-1$$

..... ㉡

$$x^2-2x=x+4 \text{에서 } x^2-3x-4=0$$

$$(x+1)(x-4)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=4$$

..... ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 구하는 상수 x 의 값은 -1 이다.

답 -1

077

$$(x \ 1) \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = (x+a \quad ax+4) \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (x^2+2ax+4)$$

임의의 실수 x 에 대하여 $x^2+2ax+4 \geq 0$ 이 성립해야
 하므로 이차방정식 $x^2+2ax+4=0$ 의 판별식을 D 라
 하면 $D \leq 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\frac{D}{4} = a^2 - 4 \leq 0, (a+2)(a-2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq a \leq 2$$

따라서 $M=2, m=-2$ 이므로

$$M-m=4$$

답 4

078

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{라 하면 } A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -b \\ -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore b=2, d=3$$

..... ㉠

$$A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -13 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = A \left\{ A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = A \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$A \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2a-3b \\ -2c-3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\therefore -2a-3b=-4, -2c-3d=-13$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$-2a-3 \times 2=-4, -2c-3 \times 3=-13$$

$$\therefore a=-1, c=2$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{한편, } A^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = A \left\{ A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = A \begin{pmatrix} -4 \\ -13 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$A^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -22 \\ -47 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$-22 + (-47) = -69$$

답 -69

079

$$A^2 = AA$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

$$\therefore A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6$$

$$= A + A^2 + (-E) + (-A) + (-A^2) + E = O$$

$$2011 = 6 \times 335 + 1 \text{ 이므로}$$

$$A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{2011}$$

$$= (A + A^2 + A^3 + \cdots + A^6)$$

$$+ A^6(A + A^2 + A^3 + \cdots + A^6)$$

$$+ A^{12}(A + A^2 + A^3 + \cdots + A^6) + \cdots$$

$$+ A^{2004}(A + A^2 + A^3 + \cdots + A^6)$$

$$+ A^{2011}$$

$$= A^{2011} = (A^6)^{335} A = A$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$3 + 7 + (-1) + (-2) = 7$$

답 ②

080

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & i^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & i^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{즉, } A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & i^n \end{pmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & i^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 에서}$$

$$2^n = 256, i^n = 1$$

$$\therefore n = 8$$

답 8

081

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ -1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 6 \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6-xy \\ 0 & -6+xy \end{pmatrix}$$

$$\text{즉, } \begin{pmatrix} 0 & 6-xy \\ 0 & -6+xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 이므로}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$6-xy=0 \quad \therefore xy=6$$

따라서 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는

$$(-1, -6), (-2, -3), (-3, -2), (-6, -1),$$

$$(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$$

이므로 그 개수는 8이다.

답 8

082

$$A^2 - 3A + 9E = O \text{ 에서}$$

$$A^2 = 3A - 9E, A^2 - 3A = -9E \text{ 이므로}$$

$$A^3 = A^2 A = (3A - 9E)A$$

$$= 3A^2 - 9A$$

$$= 3(A^2 - 3A) = 3(-9E) = -3^3 E$$

$$\therefore A^9 = A^3 A^3 A^3 = (-3^3 E)(-3^3 E)(-3^3 E)$$

$$= -3^9 E$$

답 ①

다른 풀이

$A^2 - 3A + 9E = O$ 의 양변의 왼쪽에 $A + 3E$ 를 곱하면

$$(A + 3E)(A^2 - 3A + 9E) = O$$

$$A^3 + 27E = O$$

$$\therefore A^3 = -27E$$

$$\therefore A^9 = (A^3)^3 = (-27E)^3 = -27^3 E$$

따라서 $-27^3 E = kE$ 이므로

$$k = -27^3 = -3^9$$

083

ㄱ은 옳다.

$$A^5 = E \text{ 에서 } A^3 A^2 = E \text{ 이고 } A^3 = E \text{ 이므로 } A^2 = E$$

$$\text{또, } A^3 = E \text{ 에서 } A^2 A = E$$

$$\therefore A = E$$

ㄴ도 옳다.

$$ABA = B \text{의 양변의 오른쪽에 } A \text{를 곱하면}$$

$$ABA^2 = BA$$

$$\text{이때 } A^2 = E \text{ 이므로}$$

$$AB = BA$$

ㄷ도 옳다.

$$AB = E \text{의 양변의 오른쪽에 } C \text{를 곱하면}$$

$$ABC = C$$

$$\text{이때 } BC = E \text{ 이므로}$$

$$A = C$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

084

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1-a \\ 3+3a & -3+a^2 \end{pmatrix}$$

이므로

$$\begin{aligned} A^2 + A + E &= \begin{pmatrix} -2 & -1-a \\ 3+3a & -3+a^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -a-2 \\ 3a+6 & a^2+a-2 \end{pmatrix} \\ &\equiv, \begin{pmatrix} 0 & -a-2 \\ 3a+6 & a^2+a-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-a-2=0, 3a+6=0, a^2+a-2=0$$

이므로

$$a = -2$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{이때 } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

이므로

$$\begin{aligned} A^{101} &= (A^3)^{33} A^2 = E^{33} A^2 = E A^2 = A^2 \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 A^{101} 의 모든 성분의 합은

$$-2+1+(-3)+1=-3$$

답 -3

다른 풀이

케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$A^2 - (1+a)A + (a+3)E = O$$

이때 $A^2 + A + E = O$ 이고, $A \neq kE$ (k 는 실수)이므로

$$1+a=-1, a+3=1 \quad \therefore a=-2$$

한편, $A^2 + A + E = O$ 의 양변의 왼쪽에 $A-E$ 를 곱하면

$$(A-E)(A^2 + A + E) = O$$

$$A^3 - E = O \quad \therefore A^3 = E$$

$$\therefore A^{101} = (A^3)^{33} A^2 = E^{33} A^2 = E A^2 = A^2$$

$$= -A - E$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 A^{101} 의 모든 성분의 합은

$$-2+1+(-3)+1=-3$$

참고

 $A^2 - pA + qE = O$ (p, q 는 실수)를 만족시키는 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대하여 $A = kE$ (k 는 실수)의 꼴이면 $a+d=p, ad-bc=q$ 가 항상 성립하는 것은 아니다.

따라서 케일리-해밀턴 정리를 거꾸로 이용할 때에는

 $A = kE$ 인 경우와 $A \neq kE$ 인 경우로 나누어 생각해야 한다.