풍산자

공통수학 1

머리말

수학 공부는 어떻게 해야 할까요?

먼저 개념을 익혀야 합니다.

개념 학습은 문제와 융합된 형태로 이루어져야 합니다.

풍산자는 개념과 문제를 유기적으로 결합하여

개념 공부가 문제 공부이고 문제 공부가 개념 공부인

시스템을 지향하며 만들었습니다.

개념과 문제를 하나의 흐름으로 공부하되

직관적인 그림과 비유를 통한 구어체 설명으로

개념은 좀 더 쉽고 빠르게 익히고,

문제 풀이는 단계별로 짧게 구성하여

어려운 문제도 명쾌하게 이해할 수 있도록 하였습니다.

골치 아픈 수학이지만 풍산자로 공부하면서

때로는 최고의 강의를 듣는 재미와 통쾌함도 느끼고

친절하고 세심한 설명으로 수학의 기초를 튼튼하게

닦을 수 있기를 바랍니다.

풍산자수학연구소

구성과 특징

풍산자 특장점

1 학습자의 눈높이에 맞는 개념서

풍산자는 개념을 바로 옆에서 콕콕 짚어 설명하며
궁금한 것을 해결해 주는 선생님 같은 개념서입니다.

2 유쾌한 설명으로 재미있는 개념서

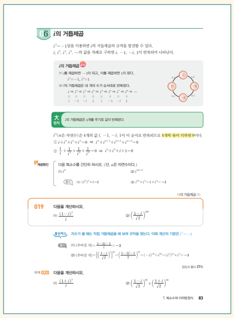
풍산자는 유쾌하고 명쾌한 설명으로 지루할 틈 없이
수학을 쉽고 재미있게 익힐 수 있는 개념서입니다.

3 짧은 호흡으로 간결하게 읽는 개념서

풍산자는 개념 설명을 읽고 그 개념을 바로 문제에 적용하도록
구성하여 짧은 호흡으로 공부할 수 있는 개념서입니다.

주제별 단원

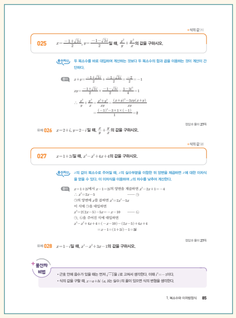
개념을 주제별로 나누어 짧은 호흡으로 익힐 수 있도록 구성



개념 설명
군더더기를 쏙 빼 명료하고 간결한 설명

설명, 증명, 참고, 개념확인
개념의 이해를 돕는 내용

大원칙
개념의 핵심이 되는 한마디



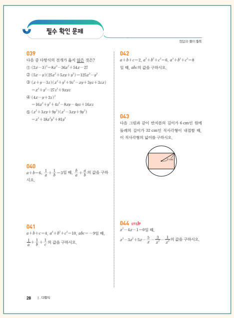
예제와 유제
개념 이해와 적용에 꼭 필요한 엄선된 문제

풍산자
문제를 풀기 위해 알아야 할 핵심 개념 및 풀이 전략

풍산자 비법
학습의 흐름에 따라 정리한 핵심 전략

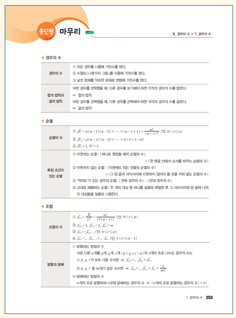
필수 확인 문제

소단원별로 개념의 확인과 응용을 위해
스스로 꼭 풀어 봐야 할 확인 문제



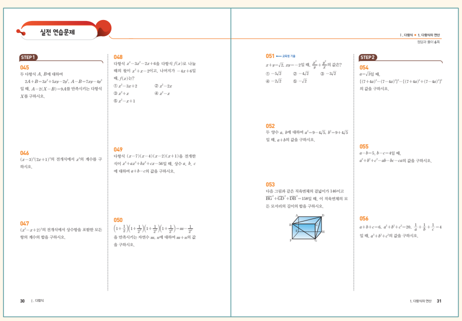
중단원 마무리

중단원별 핵심 내용을 한눈에 확인할 수
있는 중단원 개념 정리



실전 연습문제

실전에 꼭 필요한 문제들을 2단계로 나누어 수록



실력UP　문제 해결력 향상을 위한 실력 문제

평가원 기출
교육청 기출　출제 유형 중 엄선한 기출 문제

차례

I 다항식

1 다항식의 연산

1 다항식의 사칙연산 12

2 곱셈 공식 21

2 항등식과 나머지 정리

1 항등식 34

2 나머지 정리 43

3 인수분해

1 인수분해 57

II

방정식과 부등식

1 복소수와 이차방정식

1 복소수 76
2 이차방정식 87
3 이차방정식의 활용 97

2 이차방정식과 이차함수

1 이차함수의 그래프 107
2 이차함수와 이차방정식 117
3 이차함수의 최대, 최소 126

3 여러 가지 방정식

1 삼차방정식과 사차방정식 138
2 연립방정식과 부정방정식 153

4 여러 가지 부등식

1 부등식의 성질과 사칙연산 173
2 일차부등식 178
3 이차부등식 189

III

경우의 수

1 경우의 수

1 경우의 수 220

2 순열 229

3 조합 240

IV

행렬

1 행렬과 그 연산

1 행렬의 뜻 260

2 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배 265

3 행렬의 곱셈 273

I

다항식

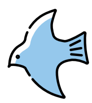
1 다항식의 연산

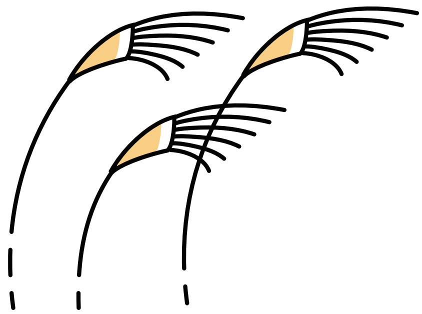
2 항등식과 나머지 정리

3 인수분해

식의 연산을 완성하라.

초등학교 때는 분수의 계산이
세상에서 가장 복잡한 줄 알았는데
중학교에 올라오니 미지수 x가
식 속에서 마음대로 돌아다닌다.
고등학교에서는 여러 개의 미지수가 있는
다항식의 사칙연산을 배운다.
식을 간단히 하고 자유롭게 다룰 수 있어야
앞으로의 수학 여정이 순탄하다.
특히 방정식과 부등식 단원은
인수분해라는 무기를 단단히 장착하고 출전해야 한다.





1

다항식의 연산

다항식의 사칙연산에서 어려운 것은 곱셈과 나눗셈.
곱셈 공식은 식 세계의 구구단.
초등학교에서는 구구단을 외우듯 고등학교에서는 곱셈 공식을 외운다.

1 다항식의 사칙연산

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x \quad + 5 \\
\cline{2-2}
x-1 & 2x^2 + 3x + 4 \\
 & 2x^2 - 2x \\
\cline{2-2}
 & \qquad 5x + 4 \\
 & \qquad 5x - 5 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 9
\end{array}
$$

2 곱셈 공식

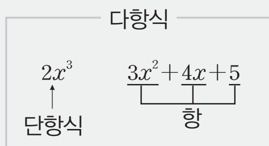
$$(a+b)^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

1 다항식의 사칙연산

01 다항식의 여러 가지 용어

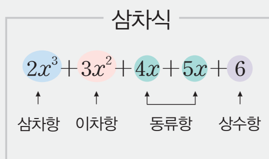
수의 세계에 정수, 유리수, 무리수가 있다면 식의 세계에는 다항식, 유리식, 무리식이 있다.
수학에서 사용하는 식 중에서 가장 기본적이고 중요한 것이 다항식이다.
x에 대한 유리식은 분모에 x가 있는 식이고, x에 대한 무리식은 근호 안에 x가 있는 식이다.
다항식의 여러 가지 용어는 중학교 때 배워 익숙하지만 가볍게 읽어 보자.

(1) **다항식**
① 단항식: 수 또는 문자의 곱셈으로만 이루어진 식
② 다항식: 하나 이상의 단항식의 합으로 이루어진 식
③ 항: 다항식을 이루는 각각의 단항식
④ 상수항: 특정한 문자를 포함하지 않는 항



(2) **계수**
다항식의 각각의 항에서 특정한 문자를 제외한 나머지 부분

(3) **차수**
① 항의 차수: 항에 곱해진 문자의 개수
② 다항식의 차수: 다항식에서 차수가 가장 큰 항의 차수



(4) **동류항**
다항식에서 문자와 차수가 각각 같은 항 중요

설명
- 다항식은 하나 이상의 단항식의 합으로 이루어진 식이므로 단항식도 다항식에 포함된다.
- 계수는 어떤 문자를 기준으로 하는지에 따라 달라진다.
  예를 들어 $3x^2y$에서 x^2y의 계수는 3이고, y의 계수는 $3x^2$이다.
- 동류항이 중요하다. 동류항끼리는 덧셈과 뺄셈이 가능하다.
  $2a^2+3a^2=5a^2$, $6xy-4xy=2xy$

개념확인

다항식 $5x^3+3x^2y^2+2xy^2-3y^4+2x-1$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) x에 대한 이 다항식의 차수
(2) y에 대한 이 다항식의 차수
(3) x^2의 계수
(4) y에 대한 상수항

풀이
(1) x에 대한 최고차항은 $5x^3$이므로 **삼차식**이다.
(2) y에 대한 최고차항은 $-3y^4$이므로 **사차식**이다.
(3) x에 대한 이차항은 $3x^2y^2$이므로 x^2의 계수는 $\mathbf{3y^2}$이다.
(4) y에 대한 상수항은 $\mathbf{5x^3+2x-1}$이다.

02 다항식의 정리

다항식을 정리하는 방법은 크게 2가지가 있다.
내림차순과 오름차순.

다항식의 정리

① 내림차순: 차수가 내려가는 순서로 정리하는 방법 중요

② 오름차순: 차수가 올라가는 순서로 정리하는 방법

설명

- 예를 들어 $4x^3+3x^2+2x+1$은 x에 대한 내림차순이고, $1+2x+3x^2+4x^3$은 x에 대한 오름차순이다.
- 다항식은 대부분 내림차순으로 정리한다.

• 다항식의 정리

001 다항식 $x^2y^2+2x^2+3xy+4y^2-5x-6y+7$을 다음의 방법으로 정리하시오.

(1) x에 대한 내림차순

(2) x에 대한 오름차순

(3) y에 대한 내림차순

(4) y에 대한 오름차순

풍산자 비법 x의 차수가 내려가는 순서 ➡ $(\ \ )x^2+(\ \ )x+(\ \ )$

x의 차수가 올라가는 순서 ➡ $(\ \ )+(\ \ )x+(\ \ )x^2$

풀이

(1) (주어진 식) $=(x^2y^2+2x^2)+(3xy-5x)+(4y^2-6y+7)$

$=\mathbf{(y^2+2)x^2+(3y-5)x+(4y^2-6y+7)}$

(2) (주어진 식) $=(4y^2-6y+7)+(3xy-5x)+(x^2y^2+2x^2)$

$=\mathbf{(4y^2-6y+7)+(3y-5)x+(y^2+2)x^2}$

(3) (주어진 식) $=(x^2y^2+4y^2)+(3xy-6y)+(2x^2-5x+7)$

$=\mathbf{(x^2+4)y^2+(3x-6)y+(2x^2-5x+7)}$

(4) (주어진 식) $=(2x^2-5x+7)+(3xy-6y)+(x^2y^2+4y^2)$

$=\mathbf{(2x^2-5x+7)+(3x-6)y+(x^2+4)y^2}$

정답과 풀이 2쪽

유제 **002** 다항식 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$를 다음의 방법으로 정리하시오.

(1) x에 대한 내림차순 $ax^2+(by+d)x+(cy^2+ey+f)$

(2) y에 대한 오름차순 $(ax^2+dx+f)+(bx+e)y+cy^2$

03 다항식의 덧셈과 뺄셈

다항식의 덧셈과 뺄셈은 동류항끼리의 계산.
괄호가 있는 경우 괄호를 먼저 풀고 동류항끼리 모아서 계산한다.
이때 괄호 앞의 부호가 $-$인 경우 부호가 반대로 바뀌는 것에 유의한다.

다항식의 덧셈과 뺄셈

[1단계] 다음 성질을 이용하여 괄호를 없앤다.

① 괄호 앞의 부호가 $+$이면 괄호 안의 부호를 그대로 ➡ $A+(B-C)=A+B-C$

② 괄호 앞의 부호가 $-$이면 괄호 안의 부호를 반대로 ➡ $A-(B-C)=A-B+C$

[2단계] 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.

다항식의 덧셈에 대하여 다음과 같은 성질이 성립한다.

다항식의 덧셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

(1) 교환법칙: $A+B=B+A$

(2) 결합법칙: $(A+B)+C=A+(B+C)$

참고 다항식의 덧셈에 대한 결합법칙이 성립하므로 $(A+B)+C$와 $A+(B+C)$를 간단히 $A+B+C$로 나타낼 수 있다.

설명 덧셈의 교환법칙과 결합법칙은 초등학교 때 배웠던 자연수의 덧셈과 같은 원리로 이해하면 된다.

	자연수	다항식
덧셈에 대한 교환법칙	$5+9=9+5$	$(5x+4)+(9x-2)=(9x-2)+(5x+4)$
덧셈에 대한 결합법칙	$(2+3)+4=2+(3+4)$	$\{(x+1)+3x\}+(x+2)=(x+1)+\{3x+(x+2)\}$

개념확인

세 다항식 $A=x^2+2y^2$, $B=2x^2+xy$, $C=x^2+3xy+y^2$에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $A+(B+C)$ (2) $A-(B+C)$

풀이 (1) $A+(B+C)$

$=x^2+2y^2+(2x^2+xy+x^2+3xy+y^2)$

$=x^2+2y^2+2x^2+xy+x^2+3xy+y^2$ ⬅ 괄호 안의 부호 그대로

$=x^2+2x^2+x^2+xy+3xy+2y^2+y^2$ ⬅ 동류항끼리 모으기

$=\mathbf{4x^2+4xy+3y^2}$

(2) $A-(B+C)$

$=x^2+2y^2-(2x^2+xy+x^2+3xy+y^2)$

$=x^2+2y^2-2x^2-xy-x^2-3xy-y^2$ ⬅ 괄호 안의 부호 반대로

$=x^2-2x^2-x^2-xy-3xy+2y^2-y^2$ ⬅ 동류항끼리 모으기

$=\mathbf{-2x^2-4xy+y^2}$

003 세 다항식 $A=x^2-xy-2y^2$, $B=x^2-xy$, $C=-4x^2+2xy+7y^2$에 대하여 $A-\{B+C-2(A+C)\}$를 계산하시오.

풍산자Ⓣ 일단 주어진 식의 괄호를 풀어 간단히 한 후, A, B를 대입하여 동류항끼리 계산한다.
괄호 안에 괄호가 있을 때 ➡ 안쪽의 괄호부터 처리!

풀이 [1단계] 주어진 식의 괄호를 풀어 간단히 하면

$$\begin{aligned}A-\{B+C-2(A+C)\}&=A-(B+C-2A-2C)\\&=A-(-2A+B-C)\\&=A+2A-B+C\\&=3A-B+C\end{aligned}$$

[2단계] A, B, C를 대입하면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=3(x^2-xy-2y^2)-(x^2-xy)+(-4x^2+2xy+7y^2)\\&=3x^2-3xy-6y^2-x^2+xy-4x^2+2xy+7y^2\\&=\boldsymbol{-2x^2+y^2}\end{aligned}$$

정답과 풀이 2쪽

유제 **004** 세 다항식 $A=x^3-2x^2+2x+1$, $B=2x^3-3x^2-4x$, $C=x^3+2x^2-3$에 대하여 $2A-\{B-(A-C)\}$를 계산하시오. $-5x^2+10x+6$

005 두 다항식 $A=x^2-3xy+2y^2$, $B=3x^2-4xy+6y^2$에 대하여 $4A+3X=X+2B$를 만족시키는 다항식 X를 구하시오.

풍산자Ⓣ 다항식 X를 A, B로 나타낸 후, A, B를 대입하여 동류항끼리 계산한다.

풀이 [1단계] $4A+3X=X+2B$를 정리하여 X를 A, B로 나타내면

$$3X-X=-4A+2B,\ 2X=-4A+2B \qquad \therefore X=-2A+B$$

[2단계] A, B를 대입하면

$$\begin{aligned}X&=-2(x^2-3xy+2y^2)+(3x^2-4xy+6y^2)\\&=-2x^2+6xy-4y^2+3x^2-4xy+6y^2\\&=\boldsymbol{x^2+2xy+2y^2}\end{aligned}$$

정답과 풀이 2쪽

유제 **006** 두 다항식 $A=3x^2-xy+1$, $B=x^2+2xy+1$에 대하여 $2A-X=X-2B$를 만족시키는 다항식 X를 구하시오. $4x^2+xy+2$

+ 풍산자 비법

다항식을 정리할 때 괄호 앞의 부호가 $-$이면 괄호 안의 부호를 반대로 바꿔야 한다.

04 다항식의 곱셈

단항식과 단항식의 곱셈은 지수법칙을 이용하여 간단히 하고, 단항식과 다항식 또는 다항식끼리의 곱셈은 지수법칙과 분배법칙을 이용하여 식을 전개한 다음 동류항끼리 모아서 정리한다.

(1) 지수법칙

a, b가 실수, m, n이 자연수일 때, 다음 법칙이 성립한다.

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ② $(a^m)^n = a^{mn}$ ③ $(ab)^n = a^n b^n$

④ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (단, $b \neq 0$) ⑤ $a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & (m>n\text{일 때}) \\ 1 & (m=n\text{일 때}) \\ \frac{1}{a^{n-m}} & (m<n\text{일 때}) \end{cases}$ (단, $a \neq 0$)

(2) 분배법칙

① $m(a+b) = ma+mb$

② $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$

설명

- 몇 개의 다항식의 곱을 하나의 다항식으로 나타내는 것을 전개한다고 한다.
- $(2a)^3 = 2^3 \times a^3 = 8a^3$ ➡ $(2a)^3 = 6a^3$으로 착각하지 않도록 한다.
- $a^4 \div a^2 = a^4 \times \frac{1}{a^2} = a^2$ ➡ $A \div B$는 $A \times \frac{1}{B}$로 고쳐서 계산한다.
- $(-a)^3 \times (-a)^2 = (-a^3) \times a^2 = -a^5$ ➡ $(\text{음수})^{\text{홀수}} = (\text{음수})$, $(\text{음수})^{\text{짝수}} = (\text{양수})$

다항식의 곱셈에 대하여 다음과 같은 성질이 성립한다.

다항식의 곱셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

(1) 교환법칙: $AB = BA$

(2) 결합법칙: $(AB)C = A(BC)$

(3) 분배법칙: $A(B+C) = AB+AC$, $(A+B)C = AC+BC$

참고 다항식의 곱셈에 대한 결합법칙이 성립하므로 $(AB)C$와 $A(BC)$를 간단히 ABC로 나타낼 수 있다.

개념확인

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^3 \times \left(-\frac{1}{3}x^4\right)^2 \div \left(-\frac{x}{6}\right)^2$ (2) $(-2ab^2)^3 \div (2ab)^3 \times \left(-\frac{a^2b}{4}\right)^2$

풀이 (1) $(\text{주어진 식}) = \left(-\frac{1}{8}x^6\right) \times \frac{1}{9}x^8 \div \frac{x^2}{36}$

$= \left(-\frac{1}{8}x^6\right) \times \frac{1}{9}x^8 \times \frac{36}{x^2} = \boldsymbol{-\frac{1}{2}x^{12}}$

(2) $(\text{주어진 식}) = (-8a^3b^6) \div 8a^3b^3 \times \frac{a^4b^2}{16}$

$= (-8a^3b^6) \times \frac{1}{8a^3b^3} \times \frac{a^4b^2}{16} = \boldsymbol{-\frac{1}{16}a^4b^5}$

007 다음 식을 전개하시오.

(1) $3ab(a^3-2a^2b^2-3b^3)$ (2) $(x-3)(2x^2-3x+4)$

풍산자답 다항식의 곱셈은 분배법칙을 이용하여 일일이 전개한 후 동류항끼리 모아서 정리한다.

$m(a+b)=ma+mb$, $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

풀이 (1) (주어진 식)$=3ab\times a^3-3ab\times 2a^2b^2-3ab\times 3b^3$

$=\mathbf{3a^4b-6a^3b^3-9ab^4}$

(2) (주어진 식)$=x(2x^2-3x+4)-3(2x^2-3x+4)$

$=2x^3-3x^2+4x-6x^2+9x-12$

$=\mathbf{2x^3-9x^2+13x-12}$

정답과 풀이 2쪽

유제 **008** 다음 식을 전개하시오.

(1) $a^2b(a^2+3ab-b^2)$ $a^4b+3a^3b^2-a^2b^3$ (2) $(2x+4)(3x^2-2x-1)$ $6x^3+8x^2-10x-4$

009 $(x^3+4x^2+2x-1)(5x^3-3x^2+8x+7)$의 전개식에서 x^4의 계수를 구하시오.

풍산자답 특정 항의 계수는 특정 항이 나오는 경우만 생각해 주면 된다.

풀이 x^4의 계수는 다음과 같이 3가지 곱셈에 의하여 구할 수 있다.

$(x^3+4x^2+2x-1)(5x^3-3x^2+8x+7)$

$10x^4$

$-12x^4$

$8x^4$

따라서 x^4의 계수는 $10+(-12)+8=\mathbf{6}$

정답과 풀이 2쪽

유제 **010** $(2x^4-5x^2-x+6)(x^3+3x^2+4x-2)$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하시오. -17

풍산자 비법

다항식의 곱셈은 분배법칙으로 전개한다.

05 다항식의 나눗셈

다항식의 나눗셈은 초등학교 때 배웠던 자연수의 나눗셈과 같은 원리로 이해하면 된다.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 5\,\overline{)\,2\,3} \\ \underline{2\,0} \\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} Q \\ B\,\overline{)\,A} \\ \underline{BQ} \\ R \end{array}$$

➡ $23=5\times4+3$ ➡ $A=BQ+R$

다항식의 나눗셈

다항식 A를 다항식 B $(B\neq0)$로 나눌 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$A=BQ+R$ (단, (R의 차수)$<$(B의 차수))

특히, $R=0$일 때 A는 B로 나누어떨어진다고 한다.

설명 나누는 다항식이 n차이면 나머지 R는 $(n-1)$차 이하의 다항식이 된다.
예를 들어 다항식을 이차식으로 나누면 나머지는 $ax+b$ (a, b는 상수)가 되고,
삼차식으로 나누면 나머지는 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)가 된다.

[1] (다항식)÷(단항식)의 계산

$A\div B$에서 B가 단항식일 때는 나눗셈을 역수의 곱셈으로 바꾸어 계산한다.

(다항식)÷(단항식)의 계산

$$(6x^2+3x)\div3x=(6x^2+3x)\times\frac{1}{3x}=6x^2\times\frac{1}{3x}+3x\times\frac{1}{3x}=2x+1$$

[2] (다항식)÷(다항식)의 계산

$A\div B$에서 B가 다항식일 때는 역수의 곱셈으로 바꾸어서 계산할 수 없다. 이때는 귀찮지만 세로셈으로 계산한다.

예를 들어 $(2x^2+3x-6)\div(x-1)$을 계산해 보자.

$$\begin{array}{rl} 2x+5 & \Leftarrow \text{몫} \\ x-1\,\overline{)\,2x^2+3x-6} & \\ \underline{2x^2-2x} & \Leftarrow (x-1)\times2x \\ 5x-6 & \\ \underline{5x-5} & \Leftarrow (x-1)\times5 \\ -1 & \Leftarrow \text{나머지} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $2x+5$, 나머지: -1

참고 다항식의 나눗셈은 자연수의 나눗셈과 다르게 나머지가 음수인 경우도 있다.

011 다음을 계산하시오.

(1) $(2x^3-4x^2+6x)\div 2x$ (2) $(4a^2b^2-3ab-3ab^2)\div\left(\frac{1}{2}ab\right)$

풍산자답 다항식을 단항식으로 나눌 때는 나눗셈을 역수의 곱셈으로 바꾼 후, 전개한다.

➡ $(a+b+c)\div m=(a+b+c)\times\frac{1}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}$

풀이 (1) (주어진 식) $=(2x^3-4x^2+6x)\times\frac{1}{2x}=\frac{2x^3}{2x}-\frac{4x^2}{2x}+\frac{6x}{2x}=\boldsymbol{x^2-2x+3}$

(2) (주어진 식) $=(4a^2b^2-3ab-3ab^2)\times\frac{2}{ab}=\frac{8a^2b^2}{ab}-\frac{6ab}{ab}-\frac{6ab^2}{ab}=\boldsymbol{8ab-6-6b}$

정답과 풀이 2쪽

유제 **012** 다음을 계산하시오.

(1) $(10a^2b-15ab^2)\div 5ab$ $2a-3b$

(2) $\left(x^2-2xy-\frac{x}{6}\right)\div\left(-\frac{x}{3}\right)$ $-3x+6y+\frac{1}{2}$

013 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(2x^3+6x+4)\div(x^2+x+1)$ (2) $(2x^3-2x^2+3x-1)\div(x^2+1)$

풍산자답 다항식을 다항식으로 나눌 때는 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 한다.
이때 계수가 0인 항도 반드시 채워 주어야 한다.

풀이 (1)

$$\begin{array}{r|l} & 2x\ -\ 2 \\ \hline x^2+x+1 & 2x^3+0\times x^2+6x+4 \\ & 2x^3+\ \ 2x^2+2x \\ \hline & -\ 2x^2+4x+4 \\ & -\ 2x^2-2x-2 \\ \hline & 6x+6 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $\boldsymbol{2x-2}$, 나머지: $\boldsymbol{6x+6}$

(2)

$$\begin{array}{r|l} & 2x\ -\ 2 \\ \hline x^2+0\times x+1 & 2x^3-\ 2x^2+\ 3x-1 \\ & 2x^3+0\times x^2+\ 2x \\ \hline & -\ 2x^2+\ x-1 \\ & -\ 2x^2-0\times x-2 \\ \hline & x+1 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $\boldsymbol{2x-2}$, 나머지: $\boldsymbol{x+1}$

정답과 풀이 2쪽

유제 **014** 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(3x^3-5x^2+5)\div(x^2-2x+5)$
몫: $3x+1$, 나머지: $-13x$

(2) $(x^3+2x^2+2x+2)\div(x^2+2)$
몫: $x+2$, 나머지: -2

+ 풍산자 비법

다항식을 다항식으로 나눌 때는 자연수의 나눗셈과 같은 세로셈을 해야 한다.

필수 확인 문제

정답과 풀이 3쪽

015

두 다항식

$$A=3x^2+5xy-y^2,\ B=-x^2+2xy+4y^2$$

에 대하여 $3A-X=2(A+B)$를 만족시키는 다항식 X를 구하시오. $5x^2+xy-9y^2$

$3A-X=2A+2B$이므로 $X=A-2B$

A, B를 대입하면

$X=(3x^2+5xy-y^2)-2(-x^2+2xy+4y^2)$

$=3x^2+5xy-y^2+2x^2-4xy-8y^2$

$=5x^2+xy-9y^2$

016

$(2+x-4x^2+6x^3+x^4)^2$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하시오. 16

x^3의 계수는 다음과 같이 4가지 곱셈에 의하여 구할 수 있다.

$(2+\underline{x}-\underline{4x^2}+\underline{6x^3}+x^4)(\underline{2}+\underline{x}-\underline{4x^2}+6x^3+x^4)$

$12x^3$

$-4x^3$

$-4x^3$

$12x^3$

따라서 x^3의 계수는

$12+(-4)+(-4)+12=16$

017

$(x^3+ax-3)(x^2+bx+3)$을 전개하였을 때, x^2의 계수와 x^3의 계수가 모두 0이 되도록 하는 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오. -2

$(x^3+ax-3)(x^2+bx+3)$을 전개하였을 때 x^2항과 x^3항이 나오는 부분만 계산하면

$ax\times bx+(-3)\times x^2=(ab-3)x^2$

$x^3\times 3+ax\times x^2=(3+a)x^3$

x^2과 x^3의 계수가 모두 0이어야 하므로

$ab-3=0,\ 3+a=0\quad \therefore a=-3,\ b=-1$

$\therefore a-b=-3-(-1)=-2$

018

$(12x^2-9xy)\div(-3x)-(8y^2-8xy)\div 2y$를 간단히 하시오. $-y$

(주어진 식) $=(12x^2-9xy)\times\left(-\dfrac{1}{3x}\right)-(8y^2-8xy)\times\dfrac{1}{2y}$

$=-\dfrac{12x^2}{3x}+\dfrac{9xy}{3x}-\dfrac{8y^2}{2y}+\dfrac{8xy}{2y}$

$=-4x+3y-4y+4x$

$=-y$

019

다음은 다항식 $3x^3+5x^2+2$를 x^2-a로 나누는 과정을 나타낸 것이다. 상수 a, b, c, d, e에 대하여 $a+b+c+d+e$의 값을 구하시오. 19

$$\begin{array}{rll}
 & x^2-1 \quad bx+c & \Leftarrow\ 3x+5 \\
x^2-a\,\big) & 3x^3+5x^2\qquad\quad +2 & \\
 & 3x^3\qquad\quad -3x & \\ \hline
 & \qquad\quad 5x^2+3x+2 & \\
 & \qquad\quad cx^2\qquad -ac & \Leftarrow\ 5x^2-5 \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad dx+e & \Leftarrow\ 3x+7
\end{array}$$

$(x^2-a)bx=3x^3-3x$이므로 $bx^3-abx=3x^3-3x$

$\therefore a=1,\ b=3$

$\therefore a+b+c+d+e=1+3+5+3+7=19$

020 실력UP

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)$의 전개식에서 x^5의 계수를 구하시오. 21

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)$에서 임의의 5개의 일차식에서는 x항을, 나머지 1개의 일차식에서는 상수항을 선택하여 곱하면 x^5항이 되므로 이 식의 전개식에서 x^5항은

$x^5\times 6+x^5\times 5+x^5\times 4+x^5\times 3+x^5\times 2+x^5\times 1$

$=(1+2+3+4+5+6)x^5=21x^5$

따라서 x^5의 계수는 21이다.

2 곱셈 공식

01 곱셈 공식

분배법칙의 번거로움을 없애 줄 소중한 곱셈 공식들!
수의 세계에 구구단이 있다면 식의 세계에는 곱셈 공식이 있다. 반드시 암기해야 한다.

곱셈 공식 중요

(1) 이미 배운 공식

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

② $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

③ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

④ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

(2) 새로 배울 공식

⑤ $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

⑥ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

⑦ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

⑧ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

⑨ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

⑩ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

설명 곱셈 공식은 모두 분배법칙을 이용하여 유도할 수 있다. 좌변을 전개해 우변이 되는지 알아보면 된다.

⑤ $(x+a)(x+b)(x+c)=\{(x+a)(x+b)\}(x+c)=\{x^2+(a+b)x+ab\}(x+c)$
$=x^3+(a+b)x^2+abx+cx^2+(a+b)cx+abc$
$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

⑥ $(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$
$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$
$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

⑦ $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$
$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

⑧ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$
$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$
$=a^3+b^3$

다른 공식도 같은 방법으로 유도할 수 있다.

참고 $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x^2+x+1)=x^n-1$ (단, n은 자연수이다.)

021 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x-1)(x-2)(x-3)$
(2) $(x-y+z)^2$
(3) $(x-2)^3$
(4) $(x+2)(x^2-2x+4)$
(5) $(x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y+1)$
(6) $(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

풍산자Ⓣ 곱셈 공식은 암기로 끝이 아니라 특정 문제에 적절한 공식을 떠올릴 수 있어야 한다. 문제를 보고 '아하! 이 문제는 그 공식을 쓰면 되겠군.' 하고 떠올릴 수 있는가?

풀이

(1) (주어진 식) $=x^3-(1+2+3)x^2+(1\times2+2\times3+3\times1)x-1\times2\times3$ [곱셈 공식 ⑤]
$=\boldsymbol{x^3-6x^2+11x-6}$

(2) (주어진 식) $=x^2+(-y)^2+z^2+2\times x\times(-y)+2\times(-y)\times z+2\times z\times x$ [곱셈 공식 ⑥]
$=\boldsymbol{x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx}$

(3) (주어진 식) $=x^3-3\times x^2\times2+3\times x\times2^2-2^3$ [곱셈 공식 ⑦]
$=\boldsymbol{x^3-6x^2+12x-8}$

(4) (주어진 식) $=(x+2)(x^2-2x+2^2)$ [곱셈 공식 ⑧]
$=x^3+2^3$
$=\boldsymbol{x^3+8}$

(5) (주어진 식) $=(x+y+1)(x^2+y^2+1^2-x\times y-y\times1-1\times x)$ [곱셈 공식 ⑨]
$=x^3+y^3+1^3-3\times x\times y\times1$
$=\boldsymbol{x^3+y^3-3xy+1}$

(6) (주어진 식) $=(x^2+3x+3^2)(x^2-3x+3^2)$ [곱셈 공식 ⑩]
$=x^4+3^2\times x^2+3^4$
$=\boldsymbol{x^4+9x^2+81}$

다른 풀이

(6) (주어진 식) $=\{(x^2+9)+3x\}\{(x^2+9)-3x\}$
$=(x^2+9)^2-(3x)^2$
$=(x^2)^2+18x^2+81-9x^2$
$=x^4+9x^2+81$

정답과 풀이 4쪽

유제 **022** 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+2)(x+3)(x+4)$ $x^3+9x^2+26x+24$
(2) $(a-b-c)^2$ $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$
(3) $(x+1)^3$ x^3+3x^2+3x+1
(4) $(x-3)(x^2+3x+9)$ x^3-27
(5) $(a+b+2)(a^2+b^2-ab-2a-2b+4)$ $a^3+b^3-6ab+8$
(6) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ x^4+x^2+1

● 공통부분이 있는 다항식의 전개

023 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x^2+5x-2)(x^2+5x+4)$ (2) $(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)$

풍산자日 그냥 전개하려면 너무 복잡하지만 다행히 공통부분을 찾을 수 있는 문제.

(1) 공통부분이 있을 때는 일단 한 문자로 치환하고 본다.

(2) ( )( )( )( )의 꼴 ➡ 둘씩 조를 짜 전개하면 공통부분이 나타난다.

풀이 (1) $x^2+5x=t$로 놓으면

(주어진 식) $=(t-2)(t+4)=t^2+2t-8=(x^2+5x)^2+2(x^2+5x)-8$

$=x^4+10x^3+25x^2+2x^2+10x-8=\boldsymbol{x^4+10x^3+27x^2+10x-8}$

(2) [1단계] 공통부분이 생기도록 둘씩 조를 짜 전개하면

(주어진 식) $=\{(x+1)(x-3)\}\{(x+2)(x-4)\}$

$=(x^2-2x-3)(x^2-2x-8)$

[2단계] $x^2-2x=t$로 놓으면

(주어진 식) $=(t-3)(t-8)=t^2-11t+24$

$=(x^2-2x)^2-11(x^2-2x)+24$

$=x^4-4x^3+4x^2-11x^2+22x+24$

$=\boldsymbol{x^4-4x^3-7x^2+22x+24}$

-4 -3 1 2

가장 작은 수와 가장 큰 수를 한 조로, 중간의 두 수를 한 조로 짠다.
➡ 각 조의 두 수의 합이 같다.

정답과 풀이 4쪽

유제 **024** 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x^2+3x+1)(x^2+3x-2)$ $x^4+6x^3+8x^2-3x-2$

(2) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ $x^4+10x^3+35x^2+50x+24$

● 연쇄적인 공식의 적용

025 $(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)$을 간단히 하시오.

풍산자日 곱셈 공식 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$을 연쇄적으로 적용하면 명쾌하게 풀린다.

풀이 (주어진 식) $=(a^2-1)(a^2+1)(a^4+1)=(a^4-1)(a^4+1)=\boldsymbol{a^8-1}$

정답과 풀이 4쪽

유제 **026** $9\times11\times101\times10001=10^a-1$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오. 8

+ 풍산자 비법

- 곱셈 공식은 암기하여 문제에 따라 어떤 공식을 적용해야 하는지 파악할 수 있어야 한다.
- 치환은 어려운 문제를 쉬운 문제로 바꾸는 도깨비 방망이!
  식에 공통부분이 있을 때는 일단 한 문자로 치환한다.

02 곱셈 공식의 변형

지금부터 배울 식은 모두 곱셈 공식의 단순한 변형이지만 곱셈 공식 못지않게 자주 이용된다. 고등학교 수학의 전 단원에서 식의 값을 구할 때 자주 이용된다.

곱셈 공식의 변형

(1) 문자가 2개인 곱셈 공식의 변형 중요

① $\boldsymbol{a^2+b^2=(a+b)^2-2ab}$

② $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

③ $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

④ $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

⑤ $\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)}$

⑥ $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

(2) 문자가 3개인 곱셈 공식의 변형

⑦ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

⑧ $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

설명

• ①, ⑤가 특히 중요하다. 이 두 식은 두 수의 합과 곱이 주어지고, 두 문자에 대하여 대칭인 식의 값을 구할 때 흔히 이용된다. 두 문자에 대하여 대칭인 식은 a^2+b^2, $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$와 같이 두 문자를 서로 바꾸어도 원래의 식과 같아지는 식을 말한다.

• 곱셈 공식의 변형은 모두 곱셈 공식에서 일부 항을 적당히 이항하여 얻어낸 것이다.

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$에서 $2ab$를 이항하면
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

② $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$에서 $-2ab$를 이항하면
$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

⑤ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$에서 $3a^2b$, $3ab^2$을 이항하면
$a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2=(a+b)^3-3ab(a+b)$

⑥ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$에서 $-3a^2b$, $3ab^2$을 이항하면
$a^3-b^3=(a-b)^3+3a^2b-3ab^2=(a-b)^3+3ab(a-b)$

⑦ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$에서 $2ab$, $2bc$, $2ca$를 이항하면
$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2ab-2ba-2ca=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

• ④ $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$에서 $|a-b|=\sqrt{(a+b)^2-4ab}$이다.
고급 문제에서 종종 나오니 알아 두면 좋다.

참고 다음과 같은 변형도 기억해 두면 문제 해결에 빠르게 적용할 수 있다.

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca&=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)\\&=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}\\&=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\end{aligned}$$

같은 방법으로

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$$

027 $a+b=3$, $ab=-2$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) a^2+ab+b^2

(2) $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}$

(3) a^4+b^4

(4) $a-b$ (단, $a>b$)

풍산자日 두 수의 합과 곱이 주어져 있고 제곱의 합, 두 수의 차 등을 구하라는 문제. 이것은 문자가 2개인 곱셈 공식의 변형을 이용하는 전형적인 문제!

풀이

(1) (주어진 식)$=(a^2+b^2)+ab=\{(a+b)^2-2ab\}+ab$
$=(a+b)^2-ab=3^2-(-2)=\mathbf{11}$

(2) (주어진 식)$=\dfrac{a^3+b^3}{ab}=\dfrac{(a+b)^3-3ab(a+b)}{ab}$
$=\dfrac{3^3-3\times(-2)\times3}{-2}=-\mathbf{\dfrac{45}{2}}$

(3) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\times(-2)=13$이므로
(주어진 식)$=(a^2)^2+(b^2)^2=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$
$=13^2-2\times(-2)^2=\mathbf{161}$

(4) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=3^2-4\times(-2)=17$
$\therefore a-b=\mathbf{\sqrt{17}}$ ($\because a>b$)

정답과 풀이 4쪽

유제 **028** $a+b=2$, $ab=-1$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) a^2+b^2 6

(2) a^3+b^3 14

(3) a^4+b^4 34

(4) $a-b$ (단, $a>b$) $2\sqrt{2}$

029 $a+b=1$, $a^3+b^3=10$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

풍산자日 $a+b$와 a^3+b^3이 들어간 곱셈 공식의 변형을 떠올려 본다.

풀이

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$에서
$10=1^3-3ab$
$3ab=-9$ $\therefore ab=-3$
$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1^2-2\times(-3)=\mathbf{7}$

정답과 풀이 5쪽

유제 **030** $a+b=2$, $a^2+b^2=8$일 때, a^3+b^3의 값을 구하시오. 20

031 $a+b+c=4,\ ab+bc+ca=2,\ abc=-1$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $a^2+b^2+c^2$ (2) $a^3+b^3+c^3$ (3) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

풍산자日 세 수의 합과 곱이 주어져 있고, 세 수의 제곱의 합과 세제곱의 합을 구하라고 한다. 그렇다면 이것은 문자가 3개인 곱셈 공식의 변형을 이용하는 전형적인 문제!

풀이 (1) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=4^2-2\times2=\mathbf{12}$

(2) (1)에서 $a^2+b^2+c^2=12$이므로

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$$
$$=4\times(12-2)+3\times(-1)=\mathbf{37}$$

(3) $$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$$
$$=(ab+bc+ca)^2-2(ab^2c+bc^2a+ca^2b)$$
$$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$$
$$=2^2-2\times(-1)\times4=\mathbf{12}$$

정답과 풀이 5쪽

유제 **032** $a+b+c=3,\ ab+bc+ca=-1,\ abc=-3$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $a^2+b^2+c^2$ 11 (2) $a^3+b^3+c^3$ 27 (3) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ 19

033 $a+b+c=1,\ a^2+b^2+c^2=9,\ abc=-4$일 때, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하시오.

풍산자日 $a+b+c,\ a^2+b^2+c^2$이 나오면 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$를 생각한다. abc가 같이 나오면 $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$로 푼다.

풀이 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$9=1^2-2(ab+bc+ca)$

$2(ab+bc+ca)=-8$ $\therefore\ ab+bc+ca=-4$

$$\therefore\ a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$$
$$=1\times\{9-(-4)\}+3\times(-4)=\mathbf{1}$$

정답과 풀이 5쪽

유제 **034** $a+b+c=4,\ a^2+b^2+c^2=6,\ abc=2$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ $\frac{5}{2}$ (2) $a^3+b^3+c^3$ 10

035 $x+\dfrac{1}{x}=3$일 때, 다음 식의 값을 구하시오. (단, $0<x<1$)

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ (2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ (3) $x-\dfrac{1}{x}$

풍산자⊟ 서로 역수 관계이면 곱이 1이다. 문자가 2개인 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

풀이 (1) (주어진 식)$=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\times x\times\dfrac{1}{x}=3^2-2=\mathbf{7}$

(2) (주어진 식)$=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\times x\times\dfrac{1}{x}\times\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=3^3-3\times3=\mathbf{18}$

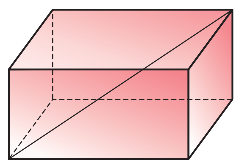
(3) (1)에서 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$이므로 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2\times x\times\dfrac{1}{x}=7-2=5$

이때 $0<x<1$이므로 $x-\dfrac{1}{x}<0$ $\therefore x-\dfrac{1}{x}=-\sqrt{5}$

정답과 풀이 **5**쪽

유제 **036** $x^2+\dfrac{1}{x^2}=3$일 때, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값을 구하시오. (단, $x>0$) $2\sqrt{5}$

037 오른쪽 그림과 같은 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 겉넓이가 64이고 모든 모서리의 길이의 합은 40일 때, 이 상자의 대각선의 길이를 구하시오.



풍산자⊟ 문장제 문제는 문자나 식으로 나타내어 생각한다.

풀이 상자의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 40이므로

$4(a+b+c)=40$ $\therefore a+b+c=10$

또, 상자의 겉넓이가 64이므로 $2(ab+bc+ca)=64$ $\therefore ab+bc+ca=32$

따라서 상자의 대각선의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}=\sqrt{10^2-2\times32}=\sqrt{36}=\mathbf{6}$

정답과 풀이 **5**쪽

유제 **038** 직육면체 모양의 상자의 겉넓이가 22이고 모든 모서리의 길이의 합이 24일 때, 이 상자의 대각선의 길이를 구하시오. $\sqrt{14}$

+ 풍산자 비법

두 수 또는 세 수의 합, 곱, 제곱 등이 주어지면 곱셈 공식의 변형을 떠올린다.

필수 확인 문제

정답과 풀이 5쪽

039

다음 중 다항식의 전개가 옳지 않은 것은?

① $(2x-3)^3=8x^3-36x^2+54x-27$

② $(5x-y)(25x^2+5xy+y^2)=125x^3-y^3$

③ $(x+y-3z)(x^2+y^2+9z^2-xy+3yz+3zx)$

$=x^3+y^3-27z^3+9xyz$

④ $(4x-y+2z)^2$

$=16x^2+y^2+4z^2-8xy-4yz+16xz$

● ⑤ $(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2)$

$=x^4+18x^2y^2+81y^4$

⑤ $(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2)$

$=\{x^2+x\times 3y+(3y)^2\}\{x^2-x\times 3y+(3y)^2\}$

$=x^4+x^2\times(3y)^2+(3y)^4$

$=x^4+9x^2y^2+81y^4$

040

$a+b=6$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=3$일 때, $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$의 값을 구하시오. 16

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$에서 $3=\frac{6}{ab}$ $\quad\therefore ab=2$

$\therefore \frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}$

$=\frac{6^2-2\times 2}{2}=\frac{32}{2}=16$

041

$a+b+c=4$, $a^2+b^2+c^2=10$, $abc=-9$일 때, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$의 값을 구하시오. $-\frac{1}{3}$

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$10=4^2-2(ab+bc+ca)$, $2(ab+bc+ca)=6$

$\therefore ab+bc+ca=3$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{3}{-9}=-\frac{1}{3}$

042

$a+b+c=2$, $a^2+b^2+c^2=6$, $a^3+b^3+c^3=8$

일 때, abc의 값을 구하시오. -2

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$2^2=6+2(ab+bc+ca)$, $2(ab+bc+ca)=-2$

$\therefore ab+bc+ca=-1$

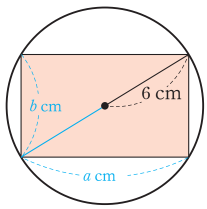
$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$에서

$8=2\times\{6-(-1)\}+3abc$, $3abc=-6$

$\therefore abc=-2$

043

다음 그림과 같이 반지름의 길이가 6 cm인 원에 둘레의 길이가 32 cm인 직사각형이 내접할 때, 이 직사각형의 넓이를 구하시오. 56 cm^2



직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 a cm, b cm라 하면

$2(a+b)=32 \qquad \therefore a+b=16$

또, 외접하는 원의 지름의 길이가 $2\times 6=12$ (cm)이므로

$a^2+b^2=144$

따라서 직사각형의 넓이는

$ab=\frac{1}{2}\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\}=\frac{1}{2}(16^2-144)=56\ (\text{cm}^2)$

044 실력UP

$x^2-4x-1=0$일 때,

$x^3-3x^2+5x-\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$의 값을 구하시오. 42

$x^2-4x-1=0$에서 $x\neq 0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-4-\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\frac{1}{x}=4$

$x^3-3x^2+5x-\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$

$=\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\}-3\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right\}+5\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=(4^3+3\times 4)-3(4^2+2)+5\times 4$

$=76-54+20=42$

◆ 다항식

다항식의 여러 가지 용어	① 다항식: 하나 이상의 단항식의 합으로 이루어진 식 ② 계수: 다항식의 각각의 항에서 특정한 문자를 제외한 나머지 부분 ③ 항의 차수: 항에 곱해진 문자의 개수 ④ 다항식의 차수: 다항식에서 차수가 가장 큰 항의 차수 ⑤ 동류항: 다항식에서 문자와 차수가 각각 같은 항
다항식의 정리	① 내림차순: 차수가 내려가는 순서로 정리하는 방법 ② 오름차순: 차수가 올라가는 순서로 정리하는 방법
다항식의 사칙연산	① 다항식의 덧셈과 뺄셈: 괄호 앞의 부호에 따라 괄호를 없앤 후 동류항끼리 모아서 정리한다. ② 다항식의 곱셈: 지수법칙과 분배법칙을 이용한다. ③ 다항식의 나눗셈: 단항식으로 나누면 나눗셈을 역수의 곱셈으로 바꾸어 계산하고, 다항식으로 나누면 자연수의 나눗셈과 같은 세로셈을 한다.

◆ 곱셈 공식

곱셈 공식	① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ② $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ③ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ ④ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$ ⑤ $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$ $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$ ⑥ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ ⑦ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ ⑧ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ ⑨ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$ ⑩ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

◆ 곱셈 공식의 변형

곱셈 공식의 변형	① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$, $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$ ② $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$, $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$ ③ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$ ④ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$ ⑤ $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

실전 연습문제

STEP 1

045

두 다항식 A, B에 대하여

$$2A+B=3x^2+5xy-2y^2,\ A-B=7xy-4y^2$$

일 때, $A-2(X-B)=9A$를 만족시키는 다항식 X를 구하시오. $-3x^2-19xy+10y^2$

㉠+㉡을 하면

$3A=3x^2+12xy-6y^2$ $\quad\therefore A=x^2+4xy-2y^2$

이것을 ㉡에 대입하면

$(x^2+4xy-2y^2)-B=7xy-4y^2$

$\therefore B=(x^2+4xy-2y^2)-(7xy-4y^2)=x^2-3xy+2y^2$

$A-2(X-B)=9A$에서 $-2X=8A-2B$

$\therefore X=-4A+B=-4(x^2+4xy-2y^2)+(x^2-3xy+2y^2)$

$\quad=-3x^2-19xy+10y^2$

046

$(x-3)^3(2x+1)^2$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하시오. 73

$(x-3)^3(2x+1)^2$

$=(x^3-9x^2+27x-27)(4x^2+4x+1)$

이 식을 전개하였을 때 x^3항이 나오는 부분만 계산하면

$x^3\times1+(-9x^2)\times4x+27x\times4x^2=73x^3$

따라서 x^3의 계수는 73이다.

047

$(x^2-x+2)^3$의 전개식에서 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합을 구하시오. 8

$(x^2-x+2)^3$

$=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(a_0, a_1, $\cdots$, a_6은 상수)

이라 하면 우변의 다항식에서 모든 항의 계수의 합은

$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$

이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$(1^2-1+2)^3=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$

따라서 구하는 모든 항의 계수의 합은

$2^3=8$

048

다항식 x^4-3x^2-2x+6을 다항식 $f(x)$로 나눌 때의 몫이 x^2+x-2이고, 나머지가 $-4x+6$일 때, $f(x)$는?

① x^2-3x+2 ② x^2-2x

③ x^2+x ● ④ x^2-x

⑤ x^2-x+1

$x^4-3x^2-2x+6=(x^2+x-2)f(x)-4x+6$이므로

$(x^2+x-2)f(x)=x^4-3x^2+2x$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-\quad x \\
\hline
x^2+x-2 & x^4+0\times x^3-3x^2+2x \\
 & x^4+\quad x^3-2x^2 \\
\cline{2-2}
 & -\quad x^3-\ x^2+2x \\
 & -\quad x^3-\ x^2+2x \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

$\therefore f(x)=x^2-x$

049

다항식 $(x-7)(x-4)(x-2)(x+1)$을 전개한 식이 $x^4+ax^3+bx^2+cx-56$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b-c$의 값을 구하시오. 31

$(x-7)(x-4)(x-2)(x+1)=\{(x-7)(x+1)\}\{(x-4)(x-2)\}$

$\quad=(x^2-6x-7)(x^2-6x+8)$

$x^2-6x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-7)(t+8)=t^2+t-56$

$\quad=(x^2-6x)^2+(x^2-6x)-56$

$\quad=x^4-12x^3+36x^2+x^2-6x-56$

$\quad=x^4-12x^3+37x^2-6x-56$

따라서 $a=-12$, $b=37$, $c=-6$이므로

$a+b-c=-12+37-(-6)=31$

050

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)=m-\frac{1}{2^n}$$

을 만족시키는 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오. 17

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{2^8}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{2^{16}}\right)=2-\frac{1}{2^{15}}$

즉, $m-\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^{15}}$이므로 $m=2$, $n=15$

$\therefore m+n=2+15=17$

051 교육청 기출

$x+y=\sqrt{2}$, $xy=-2$일 때, $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}$의 값은?

① $-5\sqrt{2}$ ● ② $-4\sqrt{2}$ ③ $-3\sqrt{2}$
④ $-2\sqrt{2}$ ⑤ $-\sqrt{2}$

$\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{x^3+y^3}{xy}=\dfrac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$

$=\dfrac{(\sqrt{2})^3-3\times(-2)\times\sqrt{2}}{-2}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{-2}=-4\sqrt{2}$

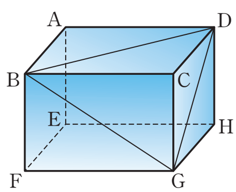
052

두 양수 a, b에 대하여 $a^2=9-4\sqrt{5}$, $b^2=9+4\sqrt{5}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. $2\sqrt{5}$

$a^2+b^2=18$, $a^2b^2=1$에서
$ab=1$ ($\because a>0, b>0$)
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서
$18=(a+b)^2-2\times1$이므로
$(a+b)^2=20$ $\therefore a+b=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

053

다음 그림과 같은 직육면체의 겉넓이가 146이고 $\overline{BG}^2+\overline{GD}^2+\overline{DB}^2=158$일 때, 이 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합을 구하시오. 60



$\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{BF}=c$라 하면
$2(ab+bc+ca)=146$ $\therefore ab+bc+ca=73$
$\overline{BG}^2+\overline{GD}^2+\overline{DB}^2=(b^2+c^2)+(a^2+c^2)+(a^2+b^2)$
$=2(a^2+b^2+c^2)=158$
이므로 $a^2+b^2+c^2=79$
$\therefore (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
$=79+2\times73=225$
이때 $a+b+c>0$이므로 $a+b+c=15$
따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은
$4(a+b+c)=4\times15=60$

STEP 2

054

$a=\sqrt{3}$일 때,
$\{(7+4a)^3-(7-4a)^3\}^2-\{(7+4a)^3+(7-4a)^3\}^2$
의 값을 구하시오. -4

$(7+4a)^3=A$, $(7-4a)^3=B$로 놓으면
$\{(7+4a)^3-(7-4a)^3\}^2-\{(7+4a)^3+(7-4a)^3\}^2$
$=(A-B)^2-(A+B)^2$
$=-4AB$
$=-4(7+4a)^3(7-4a)^3$
$=-4\{(7+4a)(7-4a)\}^3$
$=-4(49-16a^2)^3$
$=-4(49-16\times3)^3$
$=-4\times1=-4$

055

$a-b=5$, $b-c=4$일 때,
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$의 값을 구하시오. 61

$$\begin{array}{rl} & a-b=5 \\ +) & b-c=4 \\ \hline & a-c=9 \end{array}$$

$\therefore c-a=-9$
$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
$=\dfrac{1}{2}\{5^2+4^2+(-9)^2\}$
$=\dfrac{122}{2}=61$

056

$a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=20$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=4$일 때, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하시오. 78

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서
$20=6^2-2(ab+bc+ca)$ $\therefore ab+bc+ca=8$
$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=4$에서 $\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=4$
$\dfrac{8}{abc}=4$ $\therefore abc=2$
$\therefore a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=6\times(20-8)+3\times2$
$=72+6=78$

057

$x+y=3$, $xy=-1$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) x^5+y^5 　393

(2) x^7+y^7 　4287

(1) x^5+y^5
$=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$
$=\{3^2-2\times(-1)\}\times\{3^3-3\times(-1)\times3\}-(-1)^2\times3=393$

(2) x^7+y^7
$=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^3(x+y)$
$=\{(x+y)^3-3xy(x+y)\}\times[\{(x+y)^2-2xy\}^2-2(xy)^2]-(xy)^3(x+y)$
$=\{3^3-3\times(-1)\times3\}\times[\{3^2-2\times(-1)\}^2-2\times(-1)^2]-(-1)^3\times3$
$=4287$

058

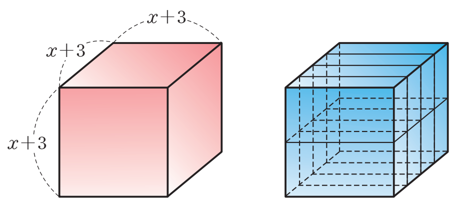
다음 조건을 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하시오. 　5

(가) x의 제곱과 y의 제곱의 합은 p이다.
(나) x의 세제곱과 y의 세제곱의 합은 $x+y$의 q배이다.
(다) $3p-2q=36$

$p=(x+y)^2-2xy$ 　…… ㉠
$x^3+y^3=q(x+y)$이므로
$q(x+y)=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$q=(x+y)^2-3xy$ 　…… ㉡
㉠, ㉡을 조건 (다)의 식 $3p-2q=36$에 대입하면
$3\{(x+y)^2-2xy\}-2\{(x+y)^2-3xy\}=36$
$(x+y)^2=36$
이때 $x+y>0$이므로 $x+y=6$
따라서 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는
$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$
이므로 그 개수는 5이다.

059

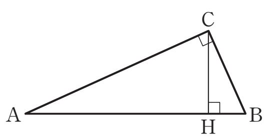
한 모서리의 길이가 $x+3$인 정육면체 모양의 물체를 다음 그림과 같이 8등분하여 각각을 낱개로 포장하려고 한다. 이때 필요한 최소한의 포장지의 넓이를 ax^2+bx+c의 꼴로 나타낼 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) 　224



주어진 그림과 같이 정육면체를 8등분했을 때, 하나의 직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이는 각각 $x+3$, $\frac{1}{4}(x+3)$, $\frac{1}{2}(x+3)$이므로 8개의 직육면체를 포장하는 데 필요한 포장지의 넓이는
$8\times2\left\{\frac{1}{2}(x+3)^2+\frac{1}{4}(x+3)^2+\frac{1}{8}(x+3)^2\right\}$
$=8\times\frac{7}{4}(x+3)^2=14x^2+84x+126$
$\therefore a+b+c=14+84+126=224$

060 ● 교육청 기출

다음 그림과 같이 선분 AB를 빗변으로 하는 직각삼각형 ABC가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{CH}=1$이고 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{4}{3}$이다. $\overline{BH}=x$라 할 때, $3x^3-5x^2+4x+7$의 값은? (단, $x<1$)



① $13-3\sqrt{7}$ 　② $14-3\sqrt{7}$
③ $15-3\sqrt{7}$ 　● ④ $16-3\sqrt{7}$
⑤ $17-3\sqrt{7}$

(삼각형 ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times1=\frac{4}{3}$ 　$\therefore \overline{AB}=\frac{8}{3}$
$\triangle AHC \backsim \triangle CHB$이므로 $\overline{AH}:\overline{CH}=\overline{CH}:\overline{BH}$, $\overline{CH}^2=\overline{AH}\times\overline{BH}$
$1^2=\left(\frac{8}{3}-x\right)x$, $3x^2-8x+3=0$ 　$\therefore x=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$ ($\because 0<x<1$)
$3x^3-5x^2+4x+7=(3x^2-8x+3)(x+1)+9x+4$
$=0\times(x+1)+9x+4$
$=9\times\frac{4-\sqrt{7}}{3}+4=16-3\sqrt{7}$

2 항등식과 나머지 정리

다항식의 나눗셈은 실수의 나눗셈보다 복잡하다.
세로셈을 하지 않고도 일차식으로 나눈 나머지를 구하는 것이 나머지 정리.
나누는 식이 일차식일 때 간편하게 몫을 구하는 것이 조립제법.

1 항등식

$$A \div B = Q \cdots R$$
$$A = BQ + R$$

---

2 나머지 정리

$$3x^2+2x+1$$
$$=(x-2)(3x+8)+17$$

$$\begin{array}{c|ccc}
2 & 3 & 2 & 1 \\
 & & 6 & 16 \\
\hline
 & 3 & 8 & \boxed{17}
\end{array}$$

1 항등식

01 항등식

등식이란 등호(=)가 있는 식.
두 종류가 있다. 방정식과 항등식.
방정식이란 특정한 수일 때만 등호가 성립하는 식.
특정한 수를 **근** 또는 해라 한다.
항등식이란 항상 등호가 성립하는 식. 문자에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하는 등식을 그 문자에 대한 항등식이라 한다.
예를 들어 $2x-2=2(x-1)$은 항상 등호가 성립하므로 항등식이고, $2x-2=0$은 $x=1$일 때만 등호가 성립하므로 방정식이다.

등식 $\begin{cases} \text{방정식} \\ \text{항등식} \end{cases}$

항등식
① 문자에 어떤 값을 대입해도 항상 등호가 성립하는 식
② 좌변과 우변이 같은 식

항등식은 좌변과 우변이 같으므로 양변의 동류항의 계수가 각각 같다.
이 성질이 항등식 문제를 해결할 때 중요하게 쓰인다.

항등식의 성질
(1) $ax+b=0$이 x에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow$ $a=0,\ b=0$
$ax+b=a'x+b'$이 x에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow$ $a=a',\ b=b'$
(2) $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow$ $a=0,\ b=0,\ c=0$
$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow$ $a=a',\ b=b',\ c=c'$
(3) $ax+by+c=0$이 $x,\ y$에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow$ $a=0,\ b=0,\ c=0$
$ax+by+c=dx+ey+f$가 $x,\ y$에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow$ $a=d,\ b=e,\ c=f$

참고 기호 '$\Longleftrightarrow$'는 두 식이나 문장이 서로 같은 의미임을 나타낸다.

증명 **$ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow$ $a=0,\ b=0,\ c=0$**
$ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립한다.
$x=0,\ x=1,\ x=-1$을 $ax^2+bx+c=0$에 각각 대입하면 $c=0,\ a+b+c=0,\ a-b+c=0$
위의 세 식을 연립하여 풀면 $a=0,\ b=0,\ c=0$
또, $a=0,\ b=0,\ c=0$이면 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c=0$이므로 이 등식은 x에 대한 항등식이다.

02 미정계수법

방정식 문제는 등식을 만족시키는 해 구하기 문제로 제시된다.
하지만 항등식에서 해 구하기 문제는 의미가 없다. 항등식의 해는 항상 모든 수이기 때문.
항등식 문제는 다른 형태로 제시된다.
이른바 미정계수 문제. 미정계수 문제란 정해지지 않은 계수를 구하라는 것.
항등식의 뜻과 성질을 이용하면 정해지지 않은 계수를 구할 수 있다.
이를 **미정계수법**이라 한다.

미정계수법 중요

(1) 수치대입법: 항등식의 문자에 적당한 수를 대입하여 미정계수를 구하는 방법
➡ 항등식은 양변에 어떤 수를 대입하여도 등호가 성립한다.

(2) 계수비교법: 항등식의 양변의 동류항의 계수끼리 비교하여 미정계수를 구하는 방법
➡ 항등식은 좌변과 우변이 같은 식이다.

수치대입법, 계수비교법 모두 유용한 미정계수법이다.
허나, 계수비교법을 쓰기 위해서는 식을 전개해야 하는 번거로움이 있다.
그러므로 전개가 복잡한 식이라면 일단 수치대입법을 시도한다.

참고 항등식임을 나타내는 여러 가지 표현은 **어관모임**으로 암기하자.
x에 대한 항등식이다. $\Longleftrightarrow$ x가 $\boxed{\text{어}}$떤 값을 갖더라도 성립한다.
$\Longleftrightarrow$ x의 값에 $\boxed{\text{관}}$계없이 항상 성립한다.
$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\text{모}}$든 x에 대하여 성립한다.
$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\text{임}}$의의 x에 대하여 성립한다.

개념확인

다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

(1) $ax^2+bx+c=3x^2+2x-1$

(2) $a(x-1)+b(x+1)=x$

풀이

(1) 양변이 내림차순으로 정리되어 있으므로 양변의 동류항의 계수를 비교한다.
$\therefore$ $\boldsymbol{a=3,\ b=2,\ c=-1}$

(2) 괄호 안을 0으로 만드는 x의 값을 대입한다.
주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$b(1+1)=1$ $\qquad\therefore$ $\boldsymbol{b=\frac{1}{2}}$
주어진 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$a(-1-1)=-1$ $\qquad\therefore$ $\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$

大 원칙
항등식 문제 풀이의 핵심은 언제 수치대입법을 이용하고 언제 계수비교법을 이용할 것인지의 판단.
판단이 어려울 땐 **수치대입법**을 먼저 시도해 본다.

061 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

(1) $(a-1)x^2+(b+2)x+3-c=0$

(2) $x^2+ax+6=bx^2+c$

풍산자日 항등식은 좌변과 우변이 같은 식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면 된다.

풀이 (1) 계수가 모두 0이 되어야 하므로 $a-1=0$, $b+2=0$, $3-c=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=1,\ b=-2,\ c=3}$

(2) $x^2+ax+6=bx^2+0\times x+c$이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$\boldsymbol{a=0,\ b=1,\ c=6}$

정답과 풀이 9쪽

유제 **062** 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

(1) $(a+3)x^2-(b-1)x+c+2=0$ $a=-3,\ b=1,\ c=-2$

(2) $ax^2+2x-4=3x^2-bx+c$ $a=3,\ b=-2,\ c=-4$

●수치대입법

063 등식 $a(x-1)+b(x-2)=2x-3$이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

풍산자日 항등식은 양변에 어떤 값을 대입해도 등호가 성립한다.
이 문제는 양변에 $x=1$과 $x=2$를 각각 대입하면 된다.
왜 이 수를 대입할까? 좌변의 괄호 안을 0으로 만들기 때문이다.
물론 다른 수를 대입하여도 풀리기는 하지만 빠른 방법으로 풀어 보자.

풀이 양변에 $x=1$을 대입하면

$a(1-1)+b(1-2)=2\times1-3$ $\therefore$ $\boldsymbol{b=1}$

양변에 $x=2$를 대입하면

$a(2-1)+b(2-2)=2\times2-3$ $\therefore$ $\boldsymbol{a=1}$

다른 풀이 계수비교법을 이용하기 위해 좌변을 전개하여 정리하면

$(a+b)x-(a+2b)=2x-3$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a+b=2$, $a+2b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

정답과 풀이 9쪽

유제 **064** 등식 $a(x+1)-b(x-1)=2x-4$가 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

$a=-1,\ b=-3$

065 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

(1) $3x^2-6x+7=a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x+1)+c(x-1)(x+1)$

(2) $x^3+ax^2-3x+b=(x+2)(x^2+cx-3)$

(3) $2x^2+1=a(x+1)(x+2)+b(x+1)+c$

풍산자팁 수치대입법을 쓸 것인가? 계수비교법을 쓸 것인가?

(1) 수치대입법이 좋다. ➡ 괄호 안을 0으로 하는 수 대입

(2) 계수비교법이 좋다. ➡ 우변을 전개하여 동류항의 계수 비교

(3) 혼합계산법이 좋다. ➡ 최고차항의 계수만 비교하고 나머지는 수치대입법으로

풀이 (1) 양변에 $x=1$을 대입하면

$4=b\times(-1)\times2$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{b=-2}$

양변에 $x=2$를 대입하면

$7=c\times1\times3$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{c=\frac{7}{3}}$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$16=a\times(-2)\times(-3)$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{a=\frac{8}{3}}$

(2) 우변을 전개하여 정리하면

$x^3+ax^2-3x+b=x^3+(c+2)x^2+(2c-3)x-6$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a=c+2,\ -3=2c-3,\ b=-6$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=2,\ b=-6,\ c=0}$

(3) 양변의 최고차항의 계수를 비교하면

$\boldsymbol{a=2}$

즉, $2x^2+1=2(x+1)(x+2)+b(x+1)+c$이므로

양변에 $x=-1$을 대입하면

$\boldsymbol{c=3}$

양변에 $x=-2$를 대입하면 $9=-b+c$

$9=-b+3$

$\therefore$ $\boldsymbol{b=-6}$

정답과 풀이 10쪽

유제 **066** 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

(1) $x^2+x=ax(x-1)+b(x-1)(x-2)+cx(x-2)$ $\quad a=3,\ b=0,\ c=-2$

(2) $(x-1)(ax+2)=3x^2+bx+c$ $\quad a=3,\ b=-1,\ c=-2$

(3) $x^2+x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ $\quad a=1,\ b=3,\ c=3$

067 **등식 $(k-2)x+(3-k)y-5=0$에 대하여 다음 물음에 답하시오.**

(1) 주어진 등식이 임의의 실수 x에 대하여 성립할 때, 상수 k, y의 값을 구하시오.

(2) 주어진 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 x, y의 값을 구하시오.

풍산자 어떤 문자에 대한 항등식인지가 중요하다.
x에 대한 항등식 ➡ $(\ )x+(\ )=0$의 꼴로 정리
k에 대한 항등식 ➡ $(\ )k+(\ )=0$의 꼴로 정리

풀이 (1) 주어진 등식의 좌변을 x에 대하여 정리하면 $(k-2)x+(3y-ky-5)=0$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로 $k-2=0$, $3y-ky-5=0$
$\therefore$ $\boldsymbol{k=2,\ y=5}$

(2) 주어진 등식의 좌변을 k에 대하여 정리하면 $(x-y)k+(-2x+3y-5)=0$
이 등식이 k에 대한 항등식이므로 $x-y=0$, $-2x+3y-5=0$
$\therefore$ $\boldsymbol{x=5,\ y=5}$

정답과 풀이 10쪽

유제 **068** **등식 $a(k+3)-(4k+b+3)=0$이 k가 어떤 값을 갖더라도 항상 성립할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.** $a=4$, $b=9$

069 **모든 실수 x에 대하여 등식 $(2x-1)^{10}=a_{10}x^{10}+a_9x^9+a_8x^8+\cdots+a_1x+a_0$이 성립할 때, $a_{10}+a_9+a_8+\cdots+a_1+a_0$의 값을 구하시오. (단, a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_{10}은 상수이다.)**

풍산자 1이라는 수는 $1^n=1$, $a\times1=a$라는 유용한 성질이 있어 다양한 문제 속에서 매직 넘버(Magic Number)의 역할을 한다.

풀이 다항식의 전개식은 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입하여도 성립한다.
주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $(2-1)^{10}=a_{10}+a_9+a_8+\cdots+a_1+a_0$
$\therefore$ $a_{10}+a_9+a_8+\cdots+a_1+a_0=\mathbf{1}$

정답과 풀이 10쪽

유제 **070** **모든 실수 x에 대하여 등식 $(2x^{10}-5x+3)^3=a_{30}x^{30}+a_{29}x^{29}+a_{28}x^{28}+\cdots+a_1x+a_0$이 성립할 때, $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{29}+a_{30}$의 값을 구하시오. (단, a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_{30}은 상수이다.)** 0

+ 풍산자 비법

- 항등식을 나타내는 여러 가지 표현은 어관모임!
- 항등식 문제는 수치대입법과 계수비교법으로 푼다. 전개가 복잡한 식은 수치대입법을 먼저 시도한다.

03 다항식의 나눗셈과 항등식

다항식의 나눗셈과 항등식은 무슨 관계가 있을까?
다항식의 나눗셈의 관계를 나타낸 식이 바로 항등식이다.

다항식의 나눗셈과 항등식

두 다항식 $A, B\ (B\neq0)$에 대하여 A를 B로 나눈 몫이 Q이고 나머지가 R이면 다음의 관계가 성립한다.

➡ $A\div B=Q\cdots R$

➡ $\boldsymbol{A=BQ+R}$ (단, (R의 차수)<(B의 차수)) 중요

$$\begin{array}{r} Q \\ B\overline{)\,A} \\ \underline{BQ} \\ R \end{array}$$

이때

(1) A가 B로 나누어떨어지면 $R=0$이다.

(2) $A=BQ+R$는 x에 대한 항등식이다.

$A=BQ+R$의 꼴은 항등식의 기본 모양, 즉 가장 중요한 항등식이다.
따라서 다항식의 나눗셈에 관련된 문제를 만나면 이 식을 떠올린다.

大 원칙

문제에서 '다항식 뭐를 뭐로 나누었을 때'라는 표현이 있으면
일단 $A=BQ+R$의 꼴로 정리하고 본다. (단, (R의 차수)<(B의 차수))

항등식 $A=BQ+R$ 문제의 해법은 역시 수치대입법과 계수비교법.
전개할 필요가 없는 수치대입법이 항상 좋다.
그럼, 수치대입법이 가능한 경우는?

$\boldsymbol{A=BQ+R}$에서 수치대입법과 계수비교법의 판단

(1) B가 $(x-\alpha)(x-\beta)$와 같이 인수분해되면 수치대입법을 이용한다.

(2) A의 차수가 4차 이상이면 수치대입법을 이용한다.

개념확인

다항식 x^3-2x^2+4x-3을 $(x-1)(x+3)$으로 나누었을 때, 나머지를 구하시오.

풀이 주어진 나눗셈의 몫을 $Q(x)$라 하면 나누는 식이 이차식이므로 나머지는 일차 이하의 다항식이다. 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓고, 주어진 나눗셈을 $A=BQ+R$의 꼴로 정리하면

$x^3-2x^2+4x-3=(x-1)(x+3)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=1$을 대입하면 $a+b=0$ ······ ㉠

양변에 $x=-3$을 대입하면 $3a-b=60$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=15$, $b=-15$

따라서 구하는 나머지는 $\boldsymbol{15x-15}$

071 다항식 x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눈 나머지가 $2x+1$일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

풍산자티 '다항식 뭐를 뭐로 나누었을 때' 하면 일단 주어진 조건을 $A=BQ+R$의 꼴로 정리한다.
$A=BQ+R$는 항등식이므로 가능하다면 수치대입법을 이용하여 구한다.
$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$이므로 양변에 $x=1$과 $x=2$를 대입한다.

풀이 주어진 나눗셈의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $2x+1$이므로
$x^3+ax+b=(x^2-3x+2)Q(x)+2x+1$
$\therefore x^3+ax+b=(x-1)(x-2)Q(x)+2x+1$
양변에 $x=1$을 대입하면 $1+a+b=3$
$\therefore a+b=2$ …… ㉠
양변에 $x=2$를 대입하면 $8+2a+b=5$
$\therefore 2a+b=-3$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\boldsymbol{a=-5}$, $\boldsymbol{b=7}$

정답과 풀이 10쪽

유제 **072** 다항식 x^3-ax^2+b를 x^2+x-2로 나눈 나머지가 $4x-2$일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.
$a=1$, $b=2$

073 다항식 $x^{10}+ax^5+b$가 x^2-1로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

풍산자티 나누어떨어진다는 것은 나머지가 0이라는 소리.
$x^2-1=(x-1)(x+1)$이므로 주어진 조건을 $A=BQ$의 꼴로 정리한 후,
양변에 $x=1$과 $x=-1$을 대입한다.

풀이 주어진 나눗셈의 몫을 $Q(x)$라 하면 나누어떨어지므로
$x^{10}+ax^5+b=(x^2-1)Q(x)$
$\therefore x^{10}+ax^5+b=(x-1)(x+1)Q(x)$
양변에 $x=1$을 대입하면 $1+a+b=0$
$\therefore a+b=-1$ …… ㉠
양변에 $x=-1$을 대입하면 $1-a+b=0$
$\therefore a-b=1$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\boldsymbol{a=0}$, $\boldsymbol{b=-1}$

정답과 풀이 10쪽

유제 **074** 다항식 $2x^3+x^2+ax+b$가 x^2+x로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 구하시오. $a=-1$, $b=0$

075 다항식 $3x^3+ax+b$를 x^2+1로 나눈 나머지가 $x+1$일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

풍산자Tip 몫을 $Q(x)$라 하면 $3x^3+ax+b=(x^2+1)Q(x)+x+1$
이 식에 수치대입법을 쓰려고 하니 대입할 수가 마땅히 없다.
눈물을 머금고 우변을 전개하여 계수를 비교해야 한다.

풀이 $3x^3+ax+b=(x^2+1)Q(x)+x+1$로 놓으면 좌변이 삼차식이므로 $Q(x)$는 일차식이어야 한다. x^3의 계수가 3이므로 $3x^3+ax+b$를 x^2+1로 나눈 몫을 $3x+n$ (n은 상수)이라 하면 나머지가 $x+1$이므로

$3x^3+ax+b=(x^2+1)(3x+n)+x+1$

$\therefore 3x^3+ax+b=3x^3+nx^2+4x+n+1$

양변의 동류항의 계수를 비교하면 $0=n$, $a=4$, $b=n+1$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{a=4,\ b=1}$

정답과 풀이 10쪽

유제 **076** 다항식 x^3-x^2+ax+b를 x^2-2로 나눈 나머지가 $x+1$일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

$a=-1$, $b=3$

077 다항식 $2x^3+x^2+ax+1$이 x^2+b로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

풍산자Tip 나누어떨어진다고 하면 (나머지)$=0$부터 생각한다.
즉, 몫을 $Q(x)$라 하면 $2x^3+x^2+ax+1=(x^2+b)Q(x)$

풀이 $2x^3+x^2+ax+1=(x^2+b)Q(x)$로 놓으면 좌변이 삼차식이므로 $Q(x)$는 일차식이어야 한다. x^3의 계수가 2이므로 $2x^3+x^2+ax+1$을 x^2+b로 나눈 몫을 $2x+n$ (n은 상수)이라 하면 나누어떨어지므로

$2x^3+x^2+ax+1=(x^2+b)(2x+n)$

$\therefore 2x^3+x^2+ax+1=2x^3+nx^2+2bx+bn$

양변의 동류항의 계수를 비교하면 $1=n$, $a=2b$, $1=bn$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{a=2,\ b=1}$

정답과 풀이 10쪽

유제 **078** 다항식 $2x^3+ax^2+6x+b$가 x^2-x+1로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

$a=-6$, $b=-4$

+ 풍산자 비법

'다항식 뭐를 뭐로 나누었을 때' 하면 일단 $A=BQ+R$의 꼴로 정리하고 본다.
이때 (R의 차수)$<$(B의 차수)이다.
A가 B로 나누어떨어지면 $R=0$이므로 $A=BQ$의 꼴로 놓을 수 있다.

필수 확인 문제

정답과 풀이 11쪽

079

다음 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

(1) $x^3+ax^2-28=(x+b)(x^2+cx+14)$ $a=5$, $b=-2$, $c=7$

(2) $a(x+3)^2(x-2)+b(x+3)=2x^3-cx^2$ $a=2$, $b=8$, $c=-6$

(1) $x^3+ax^2-28=x^3+(b+c)x^2+(14+bc)x+14b$
$a=b+c$, $0=14+bc$, $-28=14b$
$\therefore a=5$, $b=-2$, $c=7$

(2) 양변의 최고차항의 계수를 비교하면 $a=2$
양변에 $x=-3$을 대입하면 $0=-54-9c$ $\therefore c=-6$
양변에 $x=2$를 대입하면 $5b=16-4c$ $\therefore b=8$

080

다음 물음에 답하시오.

(1) 모든 실수 x, y에 대하여 등식

$$a(x+y)+b(x-y)+2=3x-5y+c$$

가 성립할 때, 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하시오. -8

(2) 등식 $(2k+3)x+(3k-1)y+5k-9=0$이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하시오. -1

(1) 좌변을 x, y에 대하여 정리하면
$(a+b)x+(a-b)y+2=3x-5y+c$
이 식이 x, y에 대한 항등식이므로 $a+b=3$, $a-b=-5$, $c=2$
위의 세 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=4$, $c=2$ $\therefore abc=-8$

(2) 좌변을 k에 대하여 정리하면 $(2x+3y+5)k+(3x-y-9)=0$
이 식이 k에 대한 항등식이므로 $2x+3y+5=0$, $3x-y-9=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-3$ $\therefore x+y=-1$

081

다항식 $f(x)$에 대하여 등식

$$(x^2-4)f(x)=x^4+ax^3+bx^2+8x$$

가 모든 실수 x에 대하여 항상 성립할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. 8

$(x+2)(x-2)f(x)=x^4+ax^3+bx^2+8x$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $0=8a+4b+32$
$\therefore 2a+b=-8$ …… ㉡
㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면 $0=-8a+4b$
$\therefore -2a+b=0$ …… ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$a=-2$, $b=-4$ $\therefore ab=8$

082

등식 $x-y=1$을 만족시키는 모든 실수 x, y에 대하여 등식

$$px^2+2qx+y^2-3xy-ry+6=0$$

이 성립할 때, $p+q-r$의 값을 구하시오. 5

(단, p, q, r는 상수이다.)

$x-y=1$에서 $y=x-1$
이것을 주어진 등식에 대입하면
$px^2+2qx+(x-1)^2-3x(x-1)-r(x-1)+6=0$
$\therefore (p-2)x^2+(2q+1-r)x+r+7=0$
이 식이 x에 대한 항등식이므로 $p-2=0$, $2q+1-r=0$, $r+7=0$
$\therefore p=2$, $q=-4$, $r=-7$
$\therefore p+q-r=2+(-4)-(-7)=5$

083

다항식 x^4+ax^2+9x+b를 x^2-2x+3으로 나눈 나머지가 $x-7$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. 20

x^4+ax^2+9x+b를 x^2-2x+3으로 나눈 몫을
x^2+nx+m (n, m은 상수)이라 하면
x^4+ax^2+9x+b
$=(x^2-2x+3)(x^2+nx+m)+x-7$
$=x^4+(n-2)x^3+(m-2n+3)x^2+(-2m+3n+1)x+3m-7$
이므로 $0=n-2$, $a=m-2n+3$, $9=-2m+3n+1$, $b=3m-7$
$\therefore a=-2$, $n=2$, $m=-1$, $b=-10$ $\therefore ab=20$

084 실력UP

등식

$$(3+2x-x^2)^3=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_6x^6$$

이 x의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 다음 값을 구하시오.

(1) $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$ 64

(2) $a_0+a_2+a_4+a_6$ 32

(1) 주어진 등식에 $x=1$을 대입하면
$4^3=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$ …… ㉠
$\therefore a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=64$

(2) 주어진 등식에 $x=-1$을 대입하면
$0=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면 $64=2(a_0+a_2+a_4+a_6)$
$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6=32$

2 나머지 정리

01 나머지 정리

나머지 정리는 번거로운 나눗셈의 계산 없이 나머지를 구하는 정리.
단, 다항식을 일차식으로 나눌 때의 나머지만 구할 수 있다. 다항식을 일차식으로 나눌 때의 나머지를 구하려면 다항식에 (일차식)$=0$을 만족시키는 x의 값을 대입하면 된다.

나머지 정리

(1) 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나눈 나머지는 $f(\alpha)$이다. 중요

(2) 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나눈 나머지는 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$이다.

증명 (1) 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=\alpha$를 대입하면 $f(\alpha)=R$

설명 나머지 정리는 '일차식'으로 나누었을 때의 '나머지'를 구하는 정리. 두 가지 한계가 있다.
첫째, 일차식으로 나눌 때만 이용할 수 있다.
둘째, 몫은 구할 수 없다.
일차식으로 나누지 않거나 몫까지 구하려면 실제로 나눗셈을 해야 한다.

●나머지 정리 (1)

085 다항식 x^2+2x+3을 다음 일차식으로 나눈 나머지를 구하시오.

(1) $x-1$　　(2) $x-2$　　(3) $2x-1$

풍산자비 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나눈 나머지는 $f(\alpha)$이다.

풀이 $f(x)=x^2+2x+3$으로 놓으면 나머지 정리에 의하여

(1) $f(1)=1+2+3=\mathbf{6}$

(2) $f(2)=2^2+2\times2+3=\mathbf{11}$

(3) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}+3=\mathbf{\frac{17}{4}}$

정답과 풀이 12쪽

유제 **086** 다항식 x^2-3x+1을 다음 일차식으로 나눈 나머지를 구하시오.

(1) $x+1$ 　5　　(2) $x-2$ 　-1　　(3) $2x+1$ 　$\frac{11}{4}$

087 다항식 $2x^3+ax^2+bx-12$는 $x-2$로 나누어떨어지고, $x-3$으로 나누면 나머지가 12일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

풍산자Ⓣ 나누어떨어진다는 것은 나머지가 0이라는 소리.
$x-2$로 나누어떨어지므로 다항식에 $x=2$를 대입하면 식의 값은 0
$x-3$으로 나누면 나머지가 12이므로 다항식에 $x=3$을 대입하면 식의 값은 12

풀이 $f(x)=2x^3+ax^2+bx-12$로 놓으면
(i) $x-2$로 나누어떨어지므로 $f(2)=0$에서
$16+4a+2b-12=0$
$\therefore 2a+b=-2$ …… ㉠
(ii) $x-3$으로 나누면 나머지가 12이므로 $f(3)=12$에서
$54+9a+3b-12=12$
$\therefore 3a+b=-10$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\boldsymbol{a=-8}$, $\boldsymbol{b=14}$

정답과 풀이 **12**쪽

유제 **088** 다항식 x^3-3x^2+ax+b는 $x+1$로 나누어떨어지고, $x-1$로 나누면 나머지가 -4일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오. $a=-3$, $b=1$

089 다항식 $f(x)$를 x^2-5x-6으로 나눈 나머지가 $2x+6$일 때, $f(x)$를 $x-6$으로 나눈 나머지를 구하시오.

풍산자Ⓣ 나머지 정리에 의하여 일차식 $x-6$으로 나눈 나머지는 $f(6)$이다.

풀이 $f(x)$를 x^2-5x-6으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $2x+6$이므로
$f(x)=(x^2-5x-6)Q(x)+2x+6$
$=(x+1)(x-6)Q(x)+2x+6$
따라서 $f(x)$를 $x-6$으로 나눈 나머지는
$f(6)=0+12+6=\mathbf{18}$

정답과 풀이 **12**쪽

유제 **090** 다항식 $f(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지가 $2x+3$일 때, $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지를 구하시오. 1

091 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -3이고, $x-3$으로 나눈 나머지가 13일 때, $f(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나눈 나머지를 구하시오.

풍산자日 다항식을 이차식으로 나눈 나머지는 일차 이하의 식이므로 $ax+b$로 놓을 수 있다.

풀이 [1단계] $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -3이므로 $f(-1)=-3$
$f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지가 13이므로 $f(3)=13$
[2단계] $f(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$ ······ ㉠
[3단계] $f(-1)=-3$, $f(3)=13$이므로 ㉠의 양변에 $x=-1$과 $x=3$을 각각 대입하면
$f(-1)=-a+b$, $f(3)=3a+b$
$\therefore\ -a+b=-3,\ 3a+b=13$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=1$
따라서 구하는 나머지는 $\mathbf{4x+1}$이다.

정답과 풀이 12쪽

유제 **092** 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 5이고, $x+3$으로 나눈 나머지가 -5일 때, $f(x)$를 $(x-2)(x+3)$으로 나눈 나머지를 구하시오. $2x+1$

093 다항식 $f(x)$를 x^2+3x+2로 나눈 나머지가 $4x+1$일 때, $(x^2+x+1)f(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지를 구하시오.

풍산자日 $(x^2+x+1)f(x)$를 일차식 $x+2$로 나눈 나머지는 $(x^2+x+1)f(x)$에 $x=-2$를 대입한 값이다.

풀이 [1단계] $f(x)$를 x^2+3x+2로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $4x+1$이므로
$f(x)=(x^2+3x+2)Q(x)+4x+1$
$\quad=(x+1)(x+2)Q(x)+4x+1$
$\therefore f(-2)=0-8+1=-7$
[2단계] $(x^2+x+1)f(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지는 $(x^2+x+1)f(x)$에 $x=-2$를 대입한 값이므로
$(4-2+1)f(-2)=3\times(-7)=\mathbf{-21}$

정답과 풀이 12쪽

유제 **094** 다항식 $f(x)$를 x^2-2x-3으로 나눈 나머지가 $x-1$일 때, $(x^2+1)f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지를 구하시오. 20

095 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나눈 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이고, $Q(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는 7이다. 다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지를 구하시오.

풍산자tip 나머지 정리에 의하여 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-3$으로 나눈 나머지는 $f(3)$이다. 주어진 조건을 이용하여 $f(3)$의 값을 구하면 된다.

풀이 [1단계] $f(x)$를 $x-2$로 나눈 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이므로

$f(x)=(x-2)Q(x)+3$

$Q(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지가 7이므로 $Q(3)=7$

[2단계] $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는

$f(3)=(3-2)Q(3)+3=7+3=\mathbf{10}$

정답과 풀이 12쪽

유제 **096** 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 몫이 $Q(x)$, 나머지가 1이고, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 2이다. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하시오. 5

097 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 나머지는 $x+1$이고, $x-2$로 나눈 나머지는 4이다. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2(x-2)$로 나눈 나머지를 구하시오.

풍산자tip 다항식을 삼차식으로 나눈 나머지는 이차 이하의 식이므로 ax^2+bx+c로 놓을 수 있다.

풀이 [1단계] $f(x)$를 $(x-1)^2(x-2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=\underbrace{(x-1)^2(x-2)Q(x)}_{㉠}+\underbrace{ax^2+bx+c}_{㉡}$

[2단계] $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 나머지가 $x+1$이려면 ㉠과 ㉡의 식을 모두 살펴보아야 한다. ㉠은 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 나머지가 0이다. 따라서 ㉡을 $(x-1)^2$으로 나눈 나머지가 $x+1$이어야 한다. ㉡은 이차식이므로

$ax^2+bx+c=(x-1)^2\times a+(x+1)$로 놓을 수 있다.

$\therefore f(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+a(x-1)^2+x+1$

[3단계] $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 4이므로 $f(2)=4$에서

$a+2+1=4 \qquad \therefore a=1$

따라서 구하는 나머지는

$(x-1)^2+x+1=\boldsymbol{x^2-x+2}$

정답과 풀이 13쪽

유제 **098** 다항식 $f(x)$를 x^2+2로 나눈 나머지는 $2x+1$이고, $x-1$로 나눈 나머지는 6이다. 다항식 $f(x)$를 $(x^2+2)(x-1)$로 나눈 나머지를 구하시오. x^2+2x+3

02 인수 정리

인수란 인수분해된 식에서 곱을 이루는 각각의 다항식.
인수 정리란 인수를 찾아내는 정리.
어려울 것 없다. 인수 정리는 나머지 정리 중에서 나누어떨어지는 특별한 경우이다.

인수 정리

(1) 다항식 $f(x)$가 일차식 $x-a$로 나누어떨어진다.

$\Longleftrightarrow$ 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지가 0이다.

$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{f(a)=0}$ 중요

$\Longleftrightarrow$ **$f(x)$는 $x-a$를 인수로 갖는다.**

$\Longleftrightarrow$ $f(x)=(x-a)Q(x)$로 인수분해할 수 있다.

(2) 다항식 $f(x)$가 일차식 $ax+b$로 나누어떨어진다.

$\Longleftrightarrow$ 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지가 0이다.

$\Longleftrightarrow$ $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)=0$

$\Longleftrightarrow$ $f(x)$는 $ax+b$를 인수로 갖는다.

$\Longleftrightarrow$ $f(x)=(ax+b)Q(x)$로 인수분해할 수 있다.

● 인수 정리

099 다항식 $f(x)=6x^3+ax^2+2x+a$가 $x+1$을 인수로 가질 때, 상수 a의 값을 구하시오.

풍산자 $x+1$을 인수로 갖는다는 것은 다항식 $f(x)$가 $x+1$로 나누어떨어진다는 것이고, 나누어 떨어진다는 것은 나머지가 0이라는 것이다.

풀이 $f(x)=6x^3+ax^2+2x+a$가 $x+1$로 나누어떨어져야 하므로 $f(-1)=0$에서
$-6+a-2+a=0 \quad \therefore a=4$

정답과 풀이 13쪽

유제 **100** 다항식 $f(x)=x^3-2x+a$가 $x-1$을 인수로 가질 때, 상수 a의 값을 구하시오. 1

풍산자 비법

- 다항식을 일차식으로 나눈 나머지는 직접 나누지 않아도 구할 수 있다. ➡ 나머지 정리
- 다항식이 일차식으로 나누어떨어지면 그 일차식을 인수로 갖는다. ➡ 인수 정리

03 조립제법

다항식을 x의 계수가 1인 일차식 $x-\alpha$로 나눈 나머지를 구하는 가장 쉬운 방법은 나머지 정리. 이때 나머지뿐 아니라 몫을 구하는 기막힌 방법이 있다. 이른바 조립제법.

조립제법

다항식의 계수만을 이용하여 다항식을 $x-\alpha$로 나눈 몫과 나머지를 구하는 방법을 조립제법이라 한다.

조립제법을 이용하여 다항식 $3x^2+2x+1$을 $x-2$로 나눈 몫과 나머지를 구해 보자.

[1단계] $(3x^2+2x+1)\div(x-2)$ ➡ $(3,\ 2,\ 1)\div(2)$로 계수를 설정한다.
이때 어떤 차수의 항이 없으면 그 항의 계수를 반드시 0으로 놓는다. 왼쪽에는 $x-2=0$을 만족시키는 x의 값인 2를 적는다.

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 3 & 2 & 1 \\ & & & \\ \hline \end{array}$$

[2단계] 내리고, 2를 곱해서 올리고, 더해서 내리고,
2를 곱해서 올리고, 더해서 내리고.

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 3 & 2 & 1 \\ & & + & + \\ & & 6 & 16 \\ \hline & 3 & 8 & 17 \end{array}$$

내린다. 곱해서 올린다.
더해서 내린다.

[3단계] 맨 뒤의 수가 나머지, 그 앞의 수들은 몫의 계수이다.

$$\begin{array}{rc|ccc|cl} & 2 & 3 & 2 & & 1 & \\ & & & 6 & & 16 & \\ \hline \text{몫} \Rightarrow & & 3 & 8 & & 17 & \Leftarrow \text{나머지} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $3x+8$, 나머지: 17

설명 일반적인 나눗셈과 조립제법의 계산 비교

일반적인 나눗셈

$$\begin{array}{r} 2x+23 \\ x-10\,\overline{)\,2x^2+3x+5} \\ 2x^2-20x \\ \hline 23x+5 \\ 23x-230 \\ \hline 235 \end{array}$$

➡ 분석

$2 \rightarrow 2$

$3+10\times2=23$

$5+10\times23=235$

➡ 조립제법

$$\begin{array}{c|ccc} 10 & 2 & 3 & 5 \\ & & + & + \\ & & 20 & 230 \\ \hline & 2 & 23 & 235 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $2x+23$, 나머지: 235

참고 다항식을 $ax+b$로 나눈 몫과 나머지

조립제법은 다항식을 x의 계수가 1인 일차식으로 나눌 때만 이용할 수 있지만, 약간 응용하면 모든 일차식에 적용할 수 있다.

$f(x)=\left(x+\dfrac{b}{a}\right)\times \underline{Q(x)}+R$ ➡ $x+\dfrac{b}{a}$로 나눈 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R

$\quad=(ax+b)\times\underline{\dfrac{1}{a}Q(x)}+R$ ➡ $ax+b$로 나눈 몫이 $\dfrac{1}{a}Q(x)$, 나머지가 R

즉, $ax+b$로 나눈 몫과 나머지를 구하려면 $x+\dfrac{b}{a}$로 나눈 몫과 나머지를 구한 후, 몫을 a로 나눈다.

101 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(x^3-2x+3)\div(x-2)$ (2) $(2x^4+3x^2-4)\div(x+1)$

풍산자日 조립제법을 쓸 때 계수가 0인 항도 반드시 0으로 채워 주어야 한다.

풀이 (1) $x^3-2x+3=x^3+0\times x^2-2x+3$이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ & & 2 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & \boxed{7} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^2+2x+2, 나머지: 7

(2) $2x^4+3x^2-4=2x^4+0\times x^3+3x^2+0\times x-4$이므로

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ & & -2 & 2 & -5 & 5 \\ \hline & 2 & -2 & 5 & -5 & \boxed{1} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $2x^3-2x^2+5x-5$, 나머지: 1

정답과 풀이 13쪽

유제 **102** 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(2x^3-x-1)\div(x+1)$ 몫: $2x^2-2x+1$, 나머지: -2

(2) $(x^4-2x+1)\div(x-2)$ 몫: x^3+2x^2+4x+6, 나머지: 13

103 조립제법을 이용하여 다항식 $3x^3+5x^2+7x+1$을 $3x-1$로 나눈 몫과 나머지를 구하시오.

풍산자日 조립제법을 이용하여 $3x-1$로 나눈 몫과 나머지를 구하려면 $x-\frac{1}{3}$로 나눈 몫과 나머지를 구한 후, 몫만 3으로 나누어 주면 된다.

풀이 $3x-1=0$에서 $x=\frac{1}{3}$이므로 조립제법을 이용하면 오른쪽과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{3} & 3 & 5 & 7 & 1 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 3 & 6 & 9 & \boxed{4} \end{array}$$

$\therefore 3x^3+5x^2+7x+1=\left(x-\frac{1}{3}\right)(3x^2+6x+9)+4$

$=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x^2+2x+3)+4$

$=(3x-1)(x^2+2x+3)+4$

$\therefore$ 몫: x^2+2x+3, 나머지: 4

정답과 풀이 13쪽

유제 **104** 조립제법을 이용하여 다항식 $2x^3+3x^2+6x+5$를 $2x-1$로 나눈 몫과 나머지를 구하시오.

몫: x^2+2x+4, 나머지: 9

105 $3x^3+2x^2+2x+1=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$가 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c, d의 값을 구하시오.

풍산자TIP $a(x-k)^3+b(x-k)^2+c(x-k)+d$와 같이 변형하는 것을 $x-k$에 대하여 내림차순으로 정리한다고 한다.
조립제법을 반복하여 적용하면 미정계수 d, c, b, a의 값을 구할 수 있다.

풀이 우변을 $x-1$로 반복하여 묶으면

$$(x-1)\{\underline{a(x-1)^2+b(x-1)+c}\}+d$$
$$\|$$
$$(x-1)\{\underline{a(x-1)+b}\}+c$$
$$\|$$
$$(x-1)a+b$$

따라서 $x-1$로 반복하여 나누면 나머지가 차례대로 d, c, b의 값이 되고, 마지막의 몫이 a의 값이 된다.

$\therefore$ $\boldsymbol{a=3}$, $\boldsymbol{b=11}$, $\boldsymbol{c=15}$, $\boldsymbol{d=8}$

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\
 & & 3 & 5 & 7 \\ \hline
1 & 3 & 5 & 7 & \boxed{8}=d \\
 & & 3 & 8 & \\ \hline
1 & 3 & 8 & \boxed{15}=c & \\
 & & 3 & & \\ \hline
 & 3 & \boxed{11}=b & & \\
 & \| & & & \\
 & a & & &
\end{array}$$

다른 풀이 $x-1=y$로 놓으면 $x=y+1$이므로 주어진 항등식에서
$3(y+1)^3+2(y+1)^2+2(y+1)+1=ay^3+by^2+cy+d$
좌변을 전개하여 정리하면
$3y^3+11y^2+15y+8=ay^3+by^2+cy+d$
양변의 동류항의 계수를 비교하면 $a=3$, $b=11$, $c=15$, $d=8$

다른 풀이 양변의 최고차항의 계수를 비교하면 $3=a$ …… ㉠
양변에 $x=1$을 대입하면 $8=d$ …… ㉡
양변에 $x=0$을 대입하면 $1=-a+b-c+d$ …… ㉢
양변에 $x=2$를 대입하면 $37=a+b+c+d$ …… ㉣
㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=11$, $c=15$, $d=8$

정답과 풀이 13쪽

유제 **106** $x^3+2x+3=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$가 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c, d의 값을 구하시오. $a=1$, $b=6$, $c=14$, $d=15$

풍산자 비법

- 조립제법을 이용하면 $x-\alpha$로 나눈 몫과 나머지를 구할 수 있다.
- 조립제법을 이용하여 $ax+b$로 나눌 때는 조립제법으로 구한 몫을 a로 나누어 주어야 한다.

필수 확인 문제

정답과 풀이 14쪽

107

다항식 x^3+ax^2-5x+6을 $x+1$로 나눈 나머지와 $x-2$로 나눈 나머지가 서로 같을 때, 이 다항식을 $x+3$으로 나눈 나머지를 구하시오. 12

(단, a는 상수이다.)

$f(x)=x^3+ax^2-5x+6$으로 놓으면
$f(-1)=-1+a+5+6=a+10$
$f(2)=8+4a-10+6=4a+4$
$f(-1)=f(2)$이므로 $a+10=4a+4$
$-3a=-6 \quad \therefore a=2$
따라서 $f(x)=x^3+2x^2-5x+6$이므로 $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는
$f(-3)=-27+18+15+6=12$

108

다항식 $f(x)$를 $x+5$로 나눈 나머지가 -6이고, x^2-4로 나눈 나머지가 $3x+2$이다. $f(x)$를 $x^2+3x-10$으로 나눈 나머지를 구하시오. $2x+4$

$f(x)$를 x^2-4로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $3x+2$이므로
$f(x)=(x^2-4)Q(x)+3x+2=(x+2)(x-2)Q(x)+3x+2$
$f(x)$를 $x^2+3x-10$으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x^2+3x-10)Q_1(x)+ax+b$
$\quad =(x+5)(x-2)Q_1(x)+ax+b$
$f(-5)=-6$, $f(2)=8$이므로 $-5a+b=-6$, $2a+b=8$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=4$
따라서 구하는 나머지는 $2x+4$이다.

109

다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나눈 나머지는 $x+1$이고, $x-1$로 나눈 나머지는 4이다. 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눈 나머지가 ax^2+bx+c일 때, 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하시오. 2

다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 ax^2+bx+c이므로
$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$
$f(x)$를 x^2+1로 나눈 나머지가 $x+1$이려면
$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+x+1$
$f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 4이므로 $f(1)=4$에서
$a(1^2+1)+1+1=4$, $2a=2 \quad \therefore a=1$
$ax^2+bx+c=x^2+x+2$이므로 $a=1$, $b=1$, $c=2 \quad \therefore abc=2$

110

두 다항식 x^3-x^2+3x+a, x^2+2x+b가 $x-2$를 인수로 가질 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. 80

$f(x)=x^3-x^2+3x+a$, $g(x)=x^2+2x+b$로 놓으면
두 다항식 $f(x)$, $g(x)$는 $x-2$로 나누어떨어져야 하므로
$f(2)=0$, $g(2)=0$에서
$8-4+6+a=0$, $4+4+b=0$
$\therefore a=-10$, $b=-8 \quad \therefore ab=80$

111

다항식 $f(x)=x^3-4x^2+x+2$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $f(x)=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$가 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c, d의 값을 구하시오. $a=1$, $b=2$, $c=-3$, $d=-4$

(2) (1)의 결과를 이용하여 $f(12)$의 값을 구하시오. 1166

(1)
$$\begin{array}{r|rrrrl}
2 & 1 & -4 & 1 & 2 & \\
 & & 2 & -4 & -6 & \\ \hline
2 & 1 & -2 & -3 & -4 & =d \\
 & & 2 & 0 & & \\ \hline
2 & 1 & 0 & -3 & & =c \\
 & & 2 & & & \\ \hline
a= & 1 & 2 & & & =b
\end{array}$$
$\therefore a=1$, $b=2$, $c=-3$, $d=-4$

(2) $f(x)$
$=(x-2)^3+2(x-2)^2-3(x-2)-4$
이므로
$f(12)$
$=10^3+2\times10^2-3\times10-4$
$=1166$

112 실력UP

다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 몫이 $Q(x)$, 나머지가 7이고, $Q(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는 3이다. 다항식 $f(x)$를 $(x-3)(x+1)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2)$의 값을 구하시오. 4

$f(x)=(x-3)Q(x)+7$
$Q(x)$를 $x+1$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 3이므로
$Q(x)=(x+1)Q_1(x)+3$
$f(x)=(x-3)\{(x+1)Q_1(x)+3\}+7$
$\quad =(x-3)(x+1)Q_1(x)+3x-2$
따라서 $R(x)=3x-2$이므로
$R(2)=3\times2-2=4$

중단원 마무리

◆ 항등식

항등식의 성질	① 항등식은 문자에 어떤 수를 대입하여도 등호가 성립한다. ② 항등식은 좌변과 우변이 같은 식이다.
항등식의 표현	x에 대한 항등식이다. ➡ x가 어떤 값을 갖더라도 성립한다. ➡ x의 값에 관계없이 항상 성립한다. ➡ 모든 x에 대하여 성립한다. ➡ 임의의 x에 대하여 성립한다.
미정계수법	① 수치대입법: 항등식의 문자에 적당한 수를 대입하여 미정계수를 구하는 방법 ② 계수비교법: 항등식의 양변의 동류항의 계수끼리 비교하여 미정계수를 구하는 방법
다항식의 나눗셈과 항등식	$A\div B=Q\cdots R$이면 $A=BQ+R$ (단, $(R$의 차수$)<(B$의 차수$)$)

◆ 나머지 정리와 인수 정리

나머지 정리	① 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나눈 나머지는 $f(\alpha)$이다. ② 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나눈 나머지는 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$이다.
인수 정리	① 다항식 $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다. ➡ $f(\alpha)=0$ ➡ $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 갖는다. ② 다항식 $f(x)$가 일차식 $ax+b$로 나누어떨어진다. ➡ $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$ ➡ $f(x)$는 $ax+b$를 인수로 갖는다.

◆ 조립제법

조립제법	다항식의 계수만을 이용하여 다항식을 $x-\alpha$로 나눈 몫과 나머지를 구하는 방법 $\begin{array}{r\|rrr} 2 & 3 & 2 & 1 \\ & & 6 & 16 \\ \hline \text{몫} \Rightarrow & 3 & 8 & \boxed{17} \Leftarrow \text{나머지} \end{array}$ $3x^2+2x+1$을 $x-2$로 나눈 몫: $3x+8$, 나머지: 17

STEP 1

113

모든 실수 x에 대하여 등식

$$3x^2+12x-7$$
$$=a(x-1)(x+3)+b(x+3)+c(x-1)^2$$

이 성립할 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a-b+c$의 값을 구하시오. 1

양변에 $x=1$을 대입하면 $8=4b$ $\quad\therefore b=2$
양변에 $x=-3$을 대입하면 $-16=16c$ $\quad\therefore c=-1$
양변에 $x=0$을 대입하면
$-7=-3a+3b+c$ $\quad\therefore a=4$
$\therefore a-b+c=4-2+(-1)=1$

114

x, y의 값에 관계없이 $\dfrac{x+ay-2b}{2x-y+1}$의 값이 항상 일정할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $2x-y+1\neq0$) $-\frac{3}{4}$

$\dfrac{x+ay-2b}{2x-y+1}=k$ (k는 상수)라 하면
$x+ay-2b=k(2x-y+1)$, $(1-2k)x+(a+k)y-2b-k=0$
이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로
$1-2k=0$, $a+k=0$, $-2b-k=0$
$\therefore k=\frac{1}{2}$, $a=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{4}$ $\quad\therefore a+b=-\frac{3}{4}$

115

다항식 $f(x)$를 $x+4$로 나눈 나머지는 13이고, $x-4$로 나눈 나머지는 -3이다. $f(x)$를 x^2-16으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(8)$의 값을 구하시오. -11

$f(x)$를 x^2-16으로 나눈 몫을 $Q(x)$,
나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x^2-16)Q(x)+ax+b$
$\quad=(x+4)(x-4)Q(x)+ax+b$
$f(-4)=13$, $f(4)=-3$이므로
$-4a+b=13$, $4a+b=-3$ $\quad\therefore a=-2$, $b=5$
따라서 $R(x)=-2x+5$이므로
$R(8)=-2\times8+5=-11$

116

다항식 $f(x)$를 $x(x+1)$로 나눈 나머지는 $x+1$, $(x+1)(x+2)$로 나눈 나머지는 $5x+5$이다. $f(x)$를 $x(x+1)(x+2)$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. $-2x^2-x+1$

$f(x)=x(x+1)Q_1(x)+x+1$ ...... ㉠
$f(x)=(x+1)(x+2)Q_2(x)+5x+5$ ...... ㉡
㉠, ㉡에서 $f(0)=1$, $f(-1)=0$, $f(-2)=-5$
$f(x)=x(x+1)(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$라 하고
양변에 $x=0$, $x=-1$, $x=-2$를 각각 대입하면
$a=-2$, $b=-1$, $c=1$
따라서 구하는 나머지는 $-2x^2-x+1$이다.

117

이차 이상의 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 x^2+3x+2로 나눈 나머지는 14이고, $f(x)-g(x)$를 x^2+3x+2로 나눈 나머지는 -2이다. 다항식 $f(x)$를 x^2+3x+2로 나누었을 때의 나머지는?

① -2 ② 0 ③ 2
④ 4 ● ⑤ 6

$f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$를 x^2+3x+2로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하면
$f(x)+g(x)=(x^2+3x+2)Q_1(x)+14$ ...... ㉠
$f(x)-g(x)=(x^2+3x+2)Q_2(x)-2$ ...... ㉡
㉠, ㉡의 양변을 각각 더하여 2로 나누면
$f(x)=(x^2+3x+2)\left\{\dfrac{Q_1(x)+Q_2(x)}{2}\right\}+6$
따라서 다항식 $f(x)$를 x^2+3x+2로 나누었을 때의 나머지는 6이다.

118

다항식 $x^3-ax^2+3x+10$을 $x+2$로 나눈 몫은 $Q(x)$, 나머지는 8이다. $Q(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. (단, a는 상수이다.) 7

$f(x)=x^3-ax^2+3x+10$으로 놓으면 $f(-2)=8$에서
$-8-4a-6+10=8$
$\therefore a=-3$
$\therefore x^3+3x^2+3x+10=(x+2)Q(x)+8$
$Q(x)$를 $x-a$, 즉 $x+3$으로 나눈 나머지는 $Q(-3)$이므로
$-27+27-9+10=-Q(-3)+8$
$\therefore Q(-3)=7$

119

다항식 $f(x)=x^3+ax^2+bx+3$을 $x-1$로 나눈 나머지는 2이다. $f(x+2)$가 $x-1$로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하시오. 6

$f(1)=2$에서 $1+a+b+3=2$

$\therefore a+b=-2$ …… ㉠

$f(x+2)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로 $f(3)=0$에서

$27+9a+3b+3=0$

$\therefore 3a+b=-10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=2$

$\therefore b-a=2-(-4)=6$

120

이차식 $P(x)=2x^2+3x-9$에 대하여 다항식 $xP(x)-2a^3$이 $x-a$를 인수로 갖도록 하는 자연수 a의 값을 구하시오. 3

$Q(x)=xP(x)-2a^3$으로 놓으면

$Q(x)=x(2x^2+3x-9)-2a^3$

인수 정리에 의하여

$Q(a)=a(2a^2+3a-9)-2a^3=0$에서

$a(3a-9)=0$, $3a(a-3)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=3$

따라서 구하는 자연수 a의 값은 3이다.

121

모든 실수 x에 대하여 등식

$$8x^3+4x^2-12x-1$$
$$=a(2x-1)^3+b(2x-1)^2+c(2x-1)+d$$

가 항상 성립할 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $ad-bc$의 값을 구하시오. -1

조립제법을 이용하면

$$8x^3+4x^2-12x-1=8\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+16\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{2}\right)-5$$
$$=(2x-1)^3+4(2x-1)^2-(2x-1)-5$$

따라서 $a=1$, $b=4$, $c=-1$, $d=-5$이므로

$ad-bc=1\times(-5)-4\times(-1)=-5+4=-1$

STEP 2

122

모든 실수 x에 대하여

$$x^{10}+1=a_{10}(x+2)^{10}+a_9(x+2)^9+\cdots$$
$$+a_1(x+2)+a_0 \ \cdots \ ㉠$$

이 성립할 때, $a_9+a_7+a_5+a_3+a_1$의 값은?

(단, a_0, a_1, $\cdots$, a_{10}은 상수이다.)

① 0 ② $2^{10}+1$ ③ $2^{10}-1$

④ $\dfrac{1-3^{10}}{2}$ ⑤ $\dfrac{3+3^{10}}{2}$

㉠의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$(-3)^{10}+1=a_{10}-a_9+\cdots-a_1+a_0$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^{10}+1=a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$ …… ㉢

㉢$-$㉡을 하면 $1-3^{10}=2(a_9+a_7+a_5+a_3+a_1)$

$\therefore a_9+a_7+a_5+a_3+a_1=\dfrac{1-3^{10}}{2}$

123

자연수 n에 대하여 다항식 $x^n(x^2-ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나눈 나머지가 $3^n(x-3)$이다. 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. 30

다항식 $x^n(x^2-ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 $x^n(x^2-ax+b)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$

양변에 $x=3$을 대입하면 $b=3a-9$이므로

$x^n(x-3)(x+3-a)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$

$\therefore x^n(x+3-a)=(x-3)Q(x)+3^n$

위의 등식에 $x=3$을 대입하면 $3^n(6-a)=3^n$

$\therefore a=5$, $b=6$ $\therefore ab=30$

124

삼차식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-2)=-8$
(나) $f(x)+f(4-x)=8$

$f(x)$를 $x^2-8x+12$로 나눈 나머지를 구하시오. $3x-2$

$f(x)$를 $x^2-8x+12$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 $f(x)=(x-2)(x-6)Q(x)+ax+b$ …… ㉠

조건 (나)의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=4$

조건 (나)의 양변에 $x=-2$를 대입하면 $f(-2)+f(6)=8$

$f(-2)=-8$이므로 $f(6)=16$

$f(2)=2a+b$, $f(6)=6a+b$ $\therefore 2a+b=4$, $6a+b=16$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$

따라서 $f(x)$를 $x^2-8x+12$로 나눈 나머지는 $3x-2$이다.

125

$10^{100}+10^{98}+10^{96}+\cdots+10^2+1$을 11로 나눈 나머지를 구하시오. 7

$x=10$으로 놓으면
$10^{100}+10^{98}+10^{96}+\cdots+10^2+1=x^{100}+x^{98}+x^{96}+\cdots+x^2+1$
이고 $f(x)=x^{100}+x^{98}+x^{96}+\cdots+x^2+1$이라 하자.
또, $f(x)$를 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면
$f(x)=(x+1)Q(x)+R$
$f(-1)=51=R$
$\therefore f(x)=(x+1)Q(x)+51$ ⋯⋯ ㉠
㉠의 양변에 $x=10$을 대입하면
$f(10)=11Q(10)+51=11\{Q(10)+4\}+7$
따라서 $10^{100}+10^{98}+10^{96}+\cdots+10^2+1$을 11로 나눈 나머지는 7이다.

126 교육청 기출

서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 이차 이상의 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. $f(a)-R(a)=0$
ㄴ. $f(a)-R(b)=f(b)-R(a)$
ㄷ. $af(b)-bf(a)=(a-b)R(0)$

① ㄱ ② ㄴ ● ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면
$f(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+R(x)$
ㄴ. $f(x)=(x-a)(x-b)+x$라 하면 $R(x)=x$이므로
$f(a)-R(b)=a-b$, $f(b)-R(a)=b-a$
이때 $a\neq b$이므로
$f(a)-R(b)\neq f(b)-R(a)$

127

다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나누 었을 때의 몫을 $Q_1(x)$, $Q_1(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$, $\cdots$, $Q_9(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 몫을 $Q_{10}(x)$라 하자. 다항식 $f(x)$를 $(x-a)^{10}$으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, 다음 중 $R(a)$의 값과 같은 것은?

① a ● ② $f(a)$ ③ $af(a)$
④ $a+f(a)$ ⑤ $a-f(a)$

$f(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지를 $R_1(x)$, $Q_n(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지를 $R_{n+1}(x)$ $(n=1, 2, 3, \cdots, 9)$라 하면
$$f(x)=(x-a)^{10}Q_{10}(x)+(x-a)^9R_{10}(x)+(x-a)^8R_9(x)+\cdots+(x-a)R_2(x)+R_1(x)$$
이므로
$$R(x)=(x-a)^9R_{10}(x)+(x-a)^8R_9(x)+\cdots+(x-a)R_2(x)+R_1(x)$$
$\therefore R(a)=R_1(a)=f(a)$

128 교육청 기출

최고차항의 계수가 1인 사차다항식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값은?

(가) $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지와 $f(x)$를 x^2-3으로 나눈 나머지는 서로 같다.
(나) $f(x+1)-5$는 x^2+x로 나누어떨어진다.

① -9 ② -8 ● ③ -7
④ -6 ⑤ -5

$f(x)$를 $x+1$, x^2-3으로 나눈 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하고 나머지를 R라 하면
$f(x)-R=(x+1)Q_1(x)$, $f(x)-R=(x^2-3)Q_2(x)$
따라서 $f(x)-R=(x+1)(x^2-3)(x+k)$ (k는 상수)로 놓을 수 있다.
조건 (나)에서 $f(x+1)-5$는 x^2+x, 즉 $x(x+1)$로 나누어떨어지므로 $f(1)=5$, $f(0)=5$
$f(1)-R=2\times(-2)\times(1+k)$이므로 $4k-R=-9$
$f(0)-R=1\times(-3)\times k$이므로 $3k-R=-5$
$\therefore k=-4$, $R=-7$
따라서 $f(x)+7=(x+1)(x^2-3)(x-4)$이므로 $f(4)=-7$

3 인수분해

치킨을 모르고 야식을 논하지 말라.
인수분해를 모르고 고교 수학을 논하지 말라.
인수분해는 고교 수학의 구구단.

1 인수분해

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$$

1 인수분해

01 인수분해의 기본 공식

수의 세계에 구구단과 소인수분해가 있다면 식의 세계에는 곱셈 공식과 인수분해 공식이 있다.

$$2\times 3 \underset{\text{소인수분해}}{\overset{\text{구구단}}{\rightleftarrows}} 6 \qquad (a-b)(a+b) \underset{\text{인수분해 공식}}{\overset{\text{곱셈 공식}}{\rightleftarrows}} a^2-b^2$$

하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱의 꼴로 나타내는 것을 **인수분해**라 한다. 이때 인수분해에서 곱을 이루는 각각의 다항식을 **인수**라 한다.

인수분해 공식은 곱셈 공식의 좌변과 우변을 바꾸면 얻을 수 있다.

다항식의 곱셈은 곱셈 공식을 몰라도 분배법칙을 이용하여 전개하면 된다. 하지만 인수분해는 공식을 모르면 시간 낭비가 심하다. 인수분해 공식은 반드시 기억해 두어야 한다.

인수분해의 기본 공식 중요

공통인수	• $ma-mb+mc=m(a-b+c)$
제곱 공식과 친구들	• $\boldsymbol{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2}$ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ • $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$ • $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$
합차 공식과 친구들	• $\boldsymbol{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$ • $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
이차 공식	• $\boldsymbol{x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)}$ • $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$
기타 공식	• $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ • $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$ • $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$ (단, n은 자연수이다.)

설명 인수분해는 특별한 언급이 없으면 계수가 유리수인 범위까지 하고, 더 이상 인수분해할 수 없을 때까지 인수분해한다.

예를 들어 $(x^2-4)(x+1)$은 $(x+2)(x-2)(x+1)$로 인수분해하고, $(x^2-3)(x+1)$은 더 이상 인수분해하지 않는다.

大 원칙 다른 모든 방법을 쓰기 전에 **공통인수**가 있는지 먼저 살핀다.

129 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $6xy^2z+12xy^2-8xyz^2$

(2) $ab(a-b)+a(b-a)$

(3) $(x-3)^2-5(x-3)$

풍산자팁 인수분해 ➡ 다른 모든 방법을 쓰기 전에 먼저 공통인수로 묶어 낸다.

풀이 (1) (주어진 식)$=\mathbf{2xy(3yz+6y-4z^2)}$

(2) (주어진 식)$=ab(a-b)-a(a-b)=(ab-a)(a-b)=\mathbf{a(a-b)(b-1)}$

(3) (주어진 식)$=(x-3)(x-3-5)=\mathbf{(x-3)(x-8)}$

참고 (2) 인수분해는 더 이상 인수분해할 수 없을 때까지 한다.

$ab(a-b)+a(b-a)=(ab-a)(a-b)$ (×)

$ab(a-b)+a(b-a)=a(a-b)(b-1)$ (○)

정답과 풀이 **18**쪽

유제 **130** 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $9a^2b^2-18ab^3+6ab^2c$ $3ab^2(3a-6b+2c)$

(2) $(x-1)(x+2)-3(x+2)$ $(x+2)(x-4)$

(3) $(a+b)^2+(a-b)(a+b)$ $2a(a+b)$

131 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $3x^2-24x+48$

(2) $ax^2-4ax-12a$

(3) $2x^3+5x^2+2x$

풍산자팁 공통인수로 묶어 내고 나면 익숙한 이차식의 인수분해 문제가 된다.

풀이 (1) (주어진 식)$=3(x^2-8x+16)=\mathbf{3(x-4)^2}$

(2) (주어진 식)$=a(x^2-4x-12)=\mathbf{a(x+2)(x-6)}$

(3) (주어진 식)$=x(2x^2+5x+2)=\mathbf{x(x+2)(2x+1)}$

정답과 풀이 **18**쪽

유제 **132** 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $2x^2+12x+18$ $2(x+3)^2$

(2) $ax^2-3ax-10a$ $a(x+2)(x-5)$

(3) $3x^3-8x^2+4x$ $x(x-2)(3x-2)$

133 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^3y-xy^3 (2) x^4-1

(3) $(x+y)^2-4y^2$ (4) $(3x-4)^2-(x+3)^2$

풍산자[팁] 항이 2개인 식을 만나면 일단 합차 공식을 떠올리고 본다.

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ ➡ 제곱의 차는 합과 차의 곱

풀이 (1) (주어진 식)$=xy(x^2-y^2)=\boldsymbol{xy(x+y)(x-y)}$

(2) (주어진 식)$=(x^2)^2-1=(x^2+1)(x^2-1)=\boldsymbol{(x^2+1)(x+1)(x-1)}$

(3) (주어진 식)$=(x+y)^2-(2y)^2=(x+y+2y)(x+y-2y)=\boldsymbol{(x+3y)(x-y)}$

(4) (주어진 식)$=\{(3x-4)+(x+3)\}\{(3x-4)-(x+3)\}=\boldsymbol{(4x-1)(2x-7)}$

정답과 풀이 18쪽

유제 **134** 다음 식을 인수분해하시오.

(1) a^3-a $a(a+1)(a-1)$ (2) a^4-b^4 $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

(3) $(a-b)^2-9b^2$ $(a+2b)(a-4b)$ (4) $(a+b)^2-(a-b)^2$ $4ab$

135 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^3+8 (2) $8x^3-27y^3$

(3) x^4+x (4) x^6-y^6

풍산자[팁] 항이 2개이면서 세제곱인 식은 합차 공식의 친구들을 떠올리면 된다.

$\begin{cases} a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \end{cases}$ ➡ 세제곱의 합 또는 차

풀이 (1) (주어진 식)$=x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+2^2)$

$=\boldsymbol{(x+2)(x^2-2x+4)}$

(2) (주어진 식)$=(2x)^3-(3y)^3$

$=(2x-3y)\{(2x)^2+2x\times 3y+(3y)^2\}$

$=\boldsymbol{(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)}$

(3) (주어진 식)$=x(x^3+1)=\boldsymbol{x(x+1)(x^2-x+1)}$

(4) (주어진 식)$=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=\boldsymbol{(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)}$

정답과 풀이 18쪽

유제 **136** 다음 식을 인수분해하시오.

(1) a^3+27 $(a+3)(a^2-3a+9)$ (2) a^3+64b^3 $(a+4b)(a^2-4ab+16b^2)$

(3) a^4-8a $a(a-2)(a^2+2a+4)$ (4) $(a+2)^3-1$ $(a+1)(a^2+5a+7)$

137 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^3-6x^2+12x-8$ (2) $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx$

(3) x^4+9x^2+81 (4) $x^3+y^3-3xy+1$

풍산자Ⓑ 공식을 완전히 외우고, 비슷한 꼴이 보이면 적용해 본다.

풀이 (1) (주어진 식)$=x^3-3\times x^2\times 2+3\times x\times 2^2-2^3=\boldsymbol{(x-2)^3}$

(2) (주어진 식)$=x^2+(-y)^2+z^2+2\times x\times(-y)+2\times(-y)\times z+2\times z\times x$

$=\boldsymbol{(x-y+z)^2}$

(3) (주어진 식)$=x^4+3^2\times x^2+3^4=(x^2+3x+3^2)(x^2-3x+3^2)$

$=\boldsymbol{(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)}$

(4) (주어진 식)$=x^3+y^3+1^3-3\times x\times y\times 1$

$=(x+y+1)(x^2+y^2+1^2-x\times y-y\times 1-1\times x)$

$=\boldsymbol{(x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y+1)}$

정답과 풀이 19쪽

유제 **138** 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^3+3x^2+3x+1 $(x+1)^3$ (2) $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$ $(a-b-c)^2$

(3) x^4+x^2+1 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ (4) $a^3+b^3+8-6ab$ $(a+b+2)(a^2+b^2-ab-2a-2b+4)$

139 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^2y^2-x^2-y^2+1$ (2) $x^2-2xy+4y-2x$

(3) $a^2-2a^2b+2ab^2-b^2$ (4) $a^3+3a^2-4a-12$

풍산자Ⓑ 항이 4개인 식은 대부분 둘, 둘로 묶으면 공통인수가 생긴다.

풀이 (1) (주어진 식)$=x^2(y^2-1)-(y^2-1)=(x^2-1)(y^2-1)$

$=\boldsymbol{(x+1)(x-1)(y+1)(y-1)}$

(2) (주어진 식)$=(x^2-2xy)-(2x-4y)=x(x-2y)-2(x-2y)=\boldsymbol{(x-2)(x-2y)}$

(3) (주어진 식)$=(a^2-b^2)-(2a^2b-2ab^2)=(a+b)(a-b)-2ab(a-b)$

$=\boldsymbol{(a-b)(a+b-2ab)}$

(4) (주어진 식)$=a^2(a+3)-4(a+3)=(a+3)(a^2-4)=\boldsymbol{(a+3)(a+2)(a-2)}$

정답과 풀이 19쪽

유제 **140** 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $a^2b-a^2c-b^3+b^2c$ $(a+b)(a-b)(b-c)$ (2) $a^2-3ab+9b-3a$ $(a-3)(a-3b)$

(3) $x^2+4x+4y-y^2$ $(x+y)(x-y+4)$ (4) x^3-x^2-x+1 $(x-1)^2(x+1)$

02 치환을 이용한 인수분해

인수분해를 할 때에는 공통인수로 묶어 내는 것을 최우선으로 하고, 그다음은 공식을 바로 적용할 수 있는지 알아본다. 마땅치 않으면 다른 방법을 생각해 보아야 하는데 일단 공통부분이 있다면 치환을 해 본다.

● 치환을 이용한 인수분해 (1)

141 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $(x^2+3x-3)(x^2+3x+1)-5$ (2) $(x^2+4x)^2-2x^2-8x-15$

풍산자日 공통부분이 있을 때 ➡ 공통부분을 한 문자로 치환한다.

풀이 (1) $x^2+3x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-3)(t+1)-5=t^2-2t-3-5=t^2-2t-8$

$=(t+2)(t-4)=(x^2+3x+2)(x^2+3x-4)$

$=\mathbf{(x+1)(x+2)(x-1)(x+4)}$

(2) (주어진 식)$=(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-15$

$x^2+4x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=t^2-2t-15=(t+3)(t-5)=(x^2+4x+3)(x^2+4x-5)$

$=\mathbf{(x+1)(x+3)(x-1)(x+5)}$

정답과 풀이 19쪽

유제 **142** 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $(x^2+x-6)(x^2+x-4)-8$ $(x-1)(x+2)(x^2+x-8)$

(2) $(x^2-3x)^2-2x^2+6x-8$ $(x-1)(x-2)(x+1)(x-4)$

● 치환을 이용한 인수분해 (2)

143 $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$를 인수분해하시오.

풍산자日 $(\ )(\ )(\ )(\ )+k$의 꼴의 인수분해 ➡ 둘씩 조를 짜 전개하면 공통부분이 나타난다.
가장 작은 수와 가장 큰 수를 한 조로, 중간의 두 수를 다른 한 조로 짠다.

풀이 (주어진 식)$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$x^2+x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-2)(t-12)+24=t^2-14t+24+24$

$=t^2-14t+48=(t-6)(t-8)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)=\mathbf{(x-2)(x+3)(x^2+x-8)}$

정답과 풀이 19쪽

유제 **144** $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$를 인수분해하시오. $x(x+5)(x^2+5x+10)$

145 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^4-3x^2+2 (2) x^4-2x^2-8

풍산자曰 $x^2=t$로 치환하여 t에 대한 이차식이 되는 x에 대한 사차식 ax^4+bx^2+c를 복이차식이라 한다. 복이차식은 두 가지 종류가 있다. 쉬운 문제와 어려운 문제. 이것은 쉬운 문제. 왜냐? $x^2=t$로 치환하면 쉽게 인수분해되니까. 어려운 문제는 151에서 다룰 것이다.

풀이 $x^2=t$로 놓으면

(1) (주어진 식)$=t^2-3t+2=(t-1)(t-2)=(x^2-1)(x^2-2)$
$=\mathbf{(x+1)(x-1)(x^2-2)}$

(2) (주어진 식)$=t^2-2t-8=(t+2)(t-4)=(x^2+2)(x^2-4)$
$=\mathbf{(x^2+2)(x+2)(x-2)}$

정답과 풀이 19쪽

유제 **146** 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^4-4x^2+3 $(x+1)(x-1)(x^2-3)$ (2) x^4-3x^2-4 $(x^2+1)(x+2)(x-2)$

147 $x^4-3x^3-2x^2+3x+1$을 인수분해하시오.

풍산자曰 가운데 항이 상수가 되도록 x^2으로 묶어 낸 후, 곱셈 공식의 변형을 이용하면 된다.

풀이
$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=x^2\left(x^2-3x-2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\\&=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x-\frac{1}{x}\right)-2\right\}\\&=x^2\left[\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right\}-3\left(x-\frac{1}{x}\right)-2\right]\\&=x^2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\}\\&=x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}-3\right)\\&=x\left(x-\frac{1}{x}\right)\times x\left(x-\frac{1}{x}-3\right)\\&=(x^2-1)(x^2-3x-1)\\&=\mathbf{(x+1)(x-1)(x^2-3x-1)}\end{aligned}$$

정답과 풀이 20쪽

유제 **148** $x^4-x^3-4x^2+x+1$을 인수분해하시오. $(x^2+x-1)(x^2-2x-1)$

03 합차 공식을 이용한 인수분해

공식이나 치환 등으로 인수분해가 되지 않으면 $(\quad)^2-(\quad)^2$의 꼴을 만들어서 합차 공식을 이용해 본다. 적당한 식을 더하거나 빼서 완전제곱식이 되도록 변형한다.

● 항이 4개인 식의 인수분해 (2)

149 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^2-y^2+10x+25$　　(2) $x^2-16-8y-y^2$

풍산자 항이 4개인 경우 둘, 둘로 묶어서 공통인수가 생기지 않으면 하나, 셋으로 묶어 3개의 항을 완전제곱식으로 변형한 후 합차 공식을 이용한다.

풀이 (1) (주어진 식) $=(x^2+10x+25)-y^2=(x+5)^2-y^2=\mathbf{(x+y+5)(x-y+5)}$

(2) (주어진 식) $=x^2-(y^2+8y+16)=x^2-(y+4)^2=\mathbf{(x+y+4)(x-y-4)}$

정답과 풀이 **20**쪽

유제 **150** 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^2-y^2-6x+9 $(x+y-3)(x-y-3)$　　(2) $9-x^2-y^2+2xy$ $-(x-y+3)(x-y-3)$

● 복이차식의 인수분해 (2)

151 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^4-7x^2+9　　(2) x^4+4x^2+16

(3) x^4-6x^2+1　　(4) x^4+4

풍산자 단숨에 인수분해되지 않는 복이차식의 어려운 문제. 적당한 식을 더하거나 빼서 A^2-B^2의 꼴로 만든 후 인수분해한다.

풀이 (1) (주어진 식) $=(x^4-6x^2+9)-x^2=(x^2-3)^2-x^2=\mathbf{(x^2+x-3)(x^2-x-3)}$

(2) (주어진 식) $=(x^4+8x^2+16)-4x^2=(x^2+4)^2-(2x)^2=\mathbf{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)}$

(3) (주어진 식) $=(x^4-2x^2+1)-4x^2=(x^2-1)^2-(2x)^2=\mathbf{(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)}$

(4) (주어진 식) $=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=\mathbf{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$

정답과 풀이 **20**쪽

유제 **152** 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^4-3x^2+1 $(x^2+x-1)(x^2-x-1)$　　(2) x^4+3x^2+4 $(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

(3) x^4-8x^2+4 $(x^2+2x-2)(x^2-2x-2)$　　(4) x^4+2x^2+9 $(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

04 복잡한 식의 인수분해

항이 5개 이상인 복잡한 식을 인수분해하려면 차수가 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하고 본다.

●항이 5개 이상인 식의 인수분해

153 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $a^3+a^2c+ac^2-b^3-b^2c-bc^2$ (2) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

풍산자日 가장 차수가 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 공통인수로 묶어 낸다.
차수가 모두 같을 때는 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

풀이 (1) 가장 낮은 차수의 문자가 c이므로 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(a-b)c^2+(a^2-b^2)c+a^3-b^3\\&=(a-b)c^2+(a+b)(a-b)c+(a-b)(a^2+ab+b^2)\\&=(a-b)\{c^2+(a+b)c+(a^2+ab+b^2)\}\\&=\boldsymbol{(a-b)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}\end{aligned}$$

(2) 차수가 모두 같으므로 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b\\&=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2\\&=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)\\&=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\&=(b-c)(a-b)(a-c)=\boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)}\end{aligned}$$

정답과 풀이 20쪽

유제 **154** 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $a^3-a^2b+ab^2+ac^2-b^3-bc^2$ $(a-b)(a^2+b^2+c^2)$

(2) $ab(a+b)+bc(b-c)-ca(c+a)$ $(a+b)(b-c)(c+a)$

●x, y에 대한 이차식의 인수분해

155 $2x^2+3xy+y^2-5x-4y+3$을 두 일차식의 곱으로 인수분해하시오.

풍산자日 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후, 상수항 부분을 먼저 인수분해한다.

풀이

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=2x^2+(3y-5)x+y^2-4y+3\\&=2x^2+(3y-5)x+(y-1)(y-3)\\&=\boldsymbol{(x+y-1)(2x+y-3)}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccl}1 & \searrow\!\!\!\nearrow & (y-1) & \Rightarrow & 2(y-1)\\2 & & (y-3) & \Rightarrow & \underline{\quad y-3\quad}(+\\ & & & & \quad 3y-5\end{array}$$

정답과 풀이 20쪽

유제 **156** $x^2-3xy+2y^2-x+3y-2$를 두 일차식의 곱으로 인수분해하시오. $(x-2y+1)(x-y-2)$

05 인수분해의 활용

인수분해를 이용하여 복잡한 계산을 쉽게 바꿀 수 있다.

● 인수분해의 활용 (1)

157 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $a^3+b^3+c^3=3abc$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하시오.

풍산자티 일단 우변을 좌변으로 이항하여 인수분해한 후, a, b, c가 양수임을 이용하면 된다.

풀이 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$이므로 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

$\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$

$\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}=0$

$\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a+b+c>0$

$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

즉, $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$이므로 $a=b=c$

따라서 세 변의 길이가 모두 같으므로 주어진 삼각형은 **정삼각형**이다.

정답과 풀이 21쪽

유제 **158** 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+(b+c)(b^2+c^2)=0$이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하시오. 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

● 인수분해의 활용 (2)

159 $\dfrac{208^3+8}{208\times206+4}$의 값을 구하시오.

풍산자티 복잡한 수를 계산할 때, 그냥 계산하는 것보다 인수분해한 후 계산하면 쉽다.

풀이 $208=a$로 놓으면

(주어진 식)$=\dfrac{a^3+8}{a(a-2)+4}=\dfrac{(a+2)(a^2-2a+4)}{a^2-2a+4}=a+2=208+2=\mathbf{210}$

정답과 풀이 21쪽

유제 **160** $\dfrac{2023\times2024+1}{2024^3+1}$의 값을 구하시오. $\frac{1}{2025}$

06 인수 정리를 이용한 삼차식과 사차식의 인수분해

인수 정리를 이용한 삼차식과 사차식의 인수분해는 삼차방정식과 사차방정식의 풀이에서 핵심적인 역할을 한다.
삼차식과 사차식의 인수분해만 확실히 해 두면 삼차방정식과 사차방정식의 풀이는 쉬운 문제가 된다.

삼차식과 사차식의 인수분해

(1) 문자가 한 개이면서 삼차 이상인 다항식은 인수 정리를 이용하여 인수를 찾은 후, 조립제법을 이용하여 인수분해하면 된다.

[1단계] 대입하면 0이 되는 수를 찾는다.

$f(\alpha)=0$이면 인수 정리에 의하여 $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 갖는다.

[2단계] 조립제법을 이용하여 인수분해한다.

$f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$\boldsymbol{f(x)=(x-\alpha)Q(x)}$로 놓을 수 있다.

(2) 대입하면 0이 되는 수를 찾는 순서

±1 ➡ $\pm$(상수항의 약수) ➡ $\pm\dfrac{(\text{상수항의 약수})}{(\text{최고차항의 계수의 약수})}$

참고 인수분해는 앞에서 배운 조립제법을 이용할 수도 있지만 분배법칙을 응용한 방법도 있다.
분배법칙을 응용하면 좀 더 간단하게 인수분해할 수 있다.
예를 들어 x^3-2x^2+2x-1을 인수분해해 보자.

① 인수를 하나 찾는다.	x^3-2x^2+2x-1에 1을 대입하면 0이므로 $x-1$을 인수로 갖는다. ➡ $x^3-2x^2+2x-1=(x-1)(\bigstar x^2+\triangle x+\bigcirc)$
② ★을 구한다.	$x^3-2x^2+2x-1=(x-1)(\bigstar x^2+\triangle x+\bigcirc)$ (좌변의 x^3의 계수)$=$(우변의 x^3의 계수)이므로 $1=\bigstar \qquad \therefore \bigstar=1$
③ ○를 구한다.	$x^3-2x^2+2x-1=(x-1)(x^2+\triangle x+\bigcirc)$ (좌변의 상수항)$=$(우변의 상수항)이므로 $-1=-\bigcirc \qquad \therefore \bigcirc=1$
④ △를 구한다.	$x^3-2x^2+2x-1=(x-1)(x^2+\triangle x+1)$ (좌변의 x^2의 계수)$=$(우변의 x^2의 계수)이므로 $-2=\triangle-1 \qquad \therefore \triangle=-1$
⑤ 식을 완성한다.	구한 계수들을 대입하면 $x^3-2x^2+2x-1=(x-1)(x^2-x+1)$

161 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^3-3x-2　　　　(2) $3x^3+2x^2+2x-1$

풍산자T!P 일단 대입하면 0이 되는 예쁜 수를 하나 찾는다. 이 수를 찾는 순서는 다음과 같다.

(1) 1 ➡ -1 ➡ 2 ➡ -2　　　　(2) 1 ➡ -1 ➡ $\frac{1}{3}$ ➡ $-\frac{1}{3}$

풀이 (1) $f(x)=x^3-3x-2$로 놓으면 $f(-1)=-1+3-2=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$f(x)=(x+1)(x^2-x-2)=(x+1)(x+1)(x-2)$

$=\boldsymbol{(x+1)^2(x-2)}$

-1	1	0	-3	-2
		-1	1	2
	1	-1	-2	0

(2) $f(x)=3x^3+2x^2+2x-1$로 놓으면

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{3}-1=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$f(x)=\left(x-\frac{1}{3}\right)(3x^2+3x+3)=\boldsymbol{(3x-1)(x^2+x+1)}$

$\frac{1}{3}$	3	2	2	-1
		1	1	1
	3	3	3	0

정답과 풀이 21쪽

유제 **162** 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^3-2x^2+1　$(x-1)(x^2-x-1)$　　　　(2) $2x^3-3x^2+3x-1$　$(2x-1)(x^2-x+1)$

163 $x^4+x^3-3x^2-x+2$를 인수분해하시오.

풍산자T!P 사차식을 한 번 인수분해하면 삼차식이 나온다. 이 삼차식을 다시 한 번 인수분해하면 익숙한 이차식이 나온다. 조립제법을 두 번 쓰는 신나는 문제.

풀이 $f(x)=x^4+x^3-3x^2-x+2$로 놓으면 $f(1)=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$f(x)=(x-1)\underbrace{(x^3+2x^2-x-2)}_{㉠}$

㉠에 $x=1$을 대입하면 0이 되므로 조립제법을 이용하여

$f(x)$를 인수분해하면

$f(x)=(x-1)(x-1)(x^2+3x+2)=\boldsymbol{(x-1)^2(x+1)(x+2)}$

1	1	1	-3	-1	2
		1	2	-1	-2
1	1	2	-1	-2	0
		1	3	2	
	1	3	2	0	

정답과 풀이 21쪽

유제 **164** $x^4-4x^3-2x^2+12x+9$를 인수분해하시오.　$(x+1)^2(x-3)^2$

+ 풍산자 비법

문자가 한 개인 삼차 이상의 다항식은 조립제법 또는 분배법칙을 이용하여 인수분해한다.

165

다음 중 옳지 않은 것은?

① $x^3-7x^2+10x=x(x-2)(x-5)$

② $a^3+125b^3=(a+5b)(a^2-5ab+25b^2)$

③ $8x^2-12x^2y+6xy^2-y^3=(2x-y)^3$

● ④ $9a^2+b^2+4-6ab-4b+12a=(3a+b-2)^2$

⑤ $x^4+4x^2y^2+16y^4$
$=(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

④ $9a^2+b^2+4-6ab-4b+12a$
$=(3a)^2+(-b)^2+2^2+2\times3a\times(-b)$
$+2\times(-b)\times2+2\times2\times3a$
$=(3a-b+2)^2$

166

다음 중 다항식

$(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)+15$의 인수인 것은?

① $x-4$ ② $x-2$

③ x^2 ④ x^2-4x-2

● ⑤ x^2+4x-2

(주어진 식)$=\{(x-1)(x+5)\}\{(x+1)(x+3)\}+15$
$=(x^2+4x-5)(x^2+4x+3)+15$
$x^2+4x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=(t-5)(t+3)+15=t^2-2t-15+15$
$=t^2-2t=t(t-2)$
$=(x^2+4x)(x^2+4x-2)$
$=x(x+4)(x^2+4x-2)$

167

$x^4-13x^2+4=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$일 때, $|ab-cd|$의 값을 구하시오. 12

(단, a, b, c, d는 상수이다.)

$x^4-13x^2+4=(x^4-4x^2+4)-9x^2$
$=(x^2-2)^2-(3x)^2$
$=(x^2+3x-2)(x^2-3x-2)$
따라서 $a=3$, $b=-2$, $c=-3$, $d=-2$ 또는
$a=-3$, $b=-2$, $c=3$, $d=-2$이므로
$|ab-cd|=12$

168

다항식 $x^2-4xy-5y^2-x+17y-6$을 인수분해하면 $(x+ay+b)(x+cy+d)$일 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $abcd$의 값을 구하시오. 30

(주어진 식)$=x^2-(4y+1)x-(5y^2-17y+6)$
$=x^2-(4y+1)x-(5y-2)(y-3)$
$=\{x-(5y-2)\}\{x+(y-3)\}$
$=(x-5y+2)(x+y-3)$
따라서 $a=-5$, $b=2$, $c=1$, $d=-3$ 또는 $a=1$, $b=-3$, $c=-5$, $d=2$이므로 $abcd=30$

169

삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c-a)=0$이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하시오.
$a=c$인 이등변삼각형

$ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c-a)=0$에서
$(b+c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b+c)=0$
$(b+c)\{a^2+(b-c)a-bc\}=0$
$(b+c)(a+b)(a-c)=0$
$\therefore a=c$
따라서 주어진 삼각형은 $a=c$인 이등변삼각형이다.

170

$\sqrt{100\times102\times104\times106+16}$의 값을 구하시오.
10604

$100=x$로 놓으면
$\sqrt{100\times102\times104\times106+16}=\sqrt{x(x+2)(x+4)(x+6)+16}$
$=\sqrt{(x^2+6x)(x^2+6x+8)+16}$
$=\sqrt{(t+4)^2}$ ⬅ $x^2+6x=t$
$=|t+4|=t+4=x^2+6x+4$
$=10000+600+4=10604$

171 실력UP

x^2의 계수가 1인 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$의 곱이 $x^4+4x^3-3x^2-18x$이다. $f(2)\neq0$, $g(0)\neq0$일 때, $f(-1)+g(4)$의 값을 구하시오. 12

$f(x)g(x)=x^4+4x^3-3x^2-18x=x(x^3+4x^2-3x-18)$
$h(x)=x^3+4x^2-3x-18$로 놓으면
$h(2)=8+16-6-18=0$이므로
$h(x)=(x-2)(x^2+6x+9)=(x-2)(x+3)^2$
$\therefore x^4+4x^3-3x^2-18x=x(x-2)(x+3)^2$
$f(x)$, $g(x)$는 모두 x^2의 계수가 1인 이차식이고 $f(2)\neq0$,
$g(0)\neq0$이므로 $f(x)=x(x+3)$, $g(x)=(x+3)(x-2)$
$\therefore f(-1)+g(4)=(-1)\times2+7\times2=12$

중단원 마무리

◆ 인수분해 공식

공통인수	$ma-mb+mc=m(a-b+c)$
제곱 공식과 친구들	① $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ ② $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$ ③ $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$
합차 공식과 친구들	① $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ ② $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
이차 공식	① $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ ② $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$
기타 공식	① $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ ② $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$ ③ $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$ (단, n은 자연수이다.)

◆ 인수분해의 여러 가지 해법

치환 이용	공통부분이 있으면 치환한다.
합차 공식 이용	$(\quad)^2-(\quad)^2$의 꼴을 만들어 합차 공식으로 인수분해한다.
내림차순 정리	항이 5개 이상인 복잡한 식은 차수가 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

◆ 인수 정리를 이용한 삼차식과 사차식의 인수분해

삼차식과 사차식의 인수분해	① 삼차식 또는 사차식은 인수 정리를 이용하여 인수를 찾은 후, 조립제법을 이용하여 인수분해하면 된다. [1단계] 대입하면 0이 되는 수를 찾는다. [2단계] 조립제법 또는 분배법칙을 이용하여 인수분해한다. ② 대입하면 0이 되는 수를 찾는 순서 $\pm1 \Rightarrow \pm(\text{상수항의 약수}) \Rightarrow \pm\dfrac{(\text{상수항의 약수})}{(\text{최고차항의 계수의 약수})}$

실전 연습문제

STEP 1

172

다음 중 다항식 $a^4-a^3b+ab^3-b^4$의 인수가 아닌 것은?

① $a-b$ ② $a+b$

③ a^2-b^2 ④ a^2-ab+b^2

● ⑤ a^2+ab+b^2

$a^4-a^3b+ab^3-b^4$
$=a^3(a-b)+b^3(a-b)$
$=(a-b)(a^3+b^3)$
$=(a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$=(a^2-b^2)(a^2-ab+b^2)$

173

다항식 $x^2(x-3)^2-14x(x-3)+40$을 인수분해하였더니 $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$가 되었다. 상수 a, b, c, d에 대하여 $a^2+b^2+c^2+d^2$의 값을 구하시오. 46

$x(x-3)=t$로 놓으면
(주어진 식)$=t^2-14t+40=(t-4)(t-10)$
$=(x^2-3x-4)(x^2-3x-10)$
$=(x+1)(x-4)(x+2)(x-5)$
$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2=1^2+(-4)^2+2^2+(-5)^2=46$

174

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+a$가 이차식의 완전제곱의 꼴로 인수분해될 때, 상수 a의 값을 구하시오. 1

(주어진 식)$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}+a$
$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+a$
$x^2+5x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=(t+4)(t+6)+a$
$=t^2+10t+24+a$
따라서 $t^2+10t+24+a$가 완전제곱식이 되려면
$a=1$이어야 한다.

175

다항식 x^4-18x^2+81을 인수분해하면 $(x+a)^2(x+b)^2$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오. (단, $a>b$) 6

$x^2=t$로 놓으면
(주어진 식)$=t^2-18t+81$
$=(t-9)^2$
$=(x^2-9)^2$
$=\{(x+3)(x-3)\}^2$
$=(x+3)^2(x-3)^2$
따라서 $a=3$, $b=-3$이므로
$a-b=6$

176

계수가 모두 실수이고 x^2의 계수가 2인 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$f(x)g(x)=4x^4-13x^2+1$$

일 때, $f(x)+g(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지를 구하시오. 34

$f(x)g(x)=4x^4-13x^2+1$
$=(4x^4-4x^2+1)-9x^2$
$=(2x^2-1)^2-(3x)^2$
$=(2x^2-1+3x)(2x^2-1-3x)$
$=(2x^2+3x-1)(2x^2-3x-1)$
$\therefore f(x)+g(x)=(2x^2+3x-1)+(2x^2-3x-1)=4x^2-2$
따라서 $f(x)+g(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는
$f(3)+g(3)=4\times3^2-2=34$

177

다항식 $x^2+xy-2y^2+kx+9y-10$이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 상수 k의 값을 구하시오. -3

$x^2+xy-2y^2+kx+9y-10$
$=x^2+(y+k)x-(2y^2-9y+10)$
$=x^2+(y+k)x-(2y-5)(y-2)$
이 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면
$2y-5+\{-(y-2)\}=y+k$
$y-3=y+k$ $\therefore k=-3$

178

$\dfrac{10.5^3-10.5^2\times9.5-10.5\times9.5^2+9.5^3}{20}$의 값을 구하시오. 1

$20=10.5+9.5$이므로 $10.5=a$, $9.5=b$라 하면

(주어진 식)$=\dfrac{a^3-a^2b-ab^2+b^3}{a+b}=\dfrac{a^2(a-b)-b^2(a-b)}{a+b}$
$=\dfrac{(a^2-b^2)(a-b)}{a+b}=\dfrac{(a+b)(a-b)^2}{a+b}$
$=(a-b)^2=(10.5-9.5)^2=1$

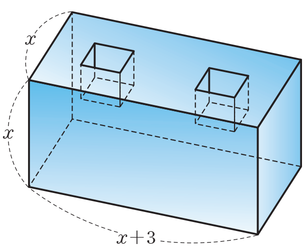
179

다항식 $2x^4+7x^3+ax^2+bx+3$이 $(x+1)^2$을 인수로 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 20

$f(x)=2x^4+7x^3+ax^2+bx+3$으로 놓으면
$f(-1)=2-7+a-b+3=0 \quad \therefore b=a-2$
따라서 $f(x)=2x^4+7x^3+ax^2+(a-2)x+3$이므로
$f(x)=(x+1)^2(2x^2+3x+a-8)-a+11$
$-a+11=0 \quad \therefore a=11, b=9 \quad \therefore a+b=20$

180 교육청 기출

다음 그림과 같이 세 모서리의 길이가 각각 x, x, $x+3$인 직육면체 모양에 한 모서리의 길이가 1인 정육면체 모양의 구멍이 두 개 있는 나무 블록이 있다. 세 정수 a, b, c에 대하여 이 나무 블록의 부피를 $(x+a)(x^2+bx+c)$로 나타낼 때, abc의 값은? (단, $x>1$)



① -5 ● ② -4
③ -3 ④ -2
⑤ -1

나무 블록의 부피는 $x^2(x+3)-2\times1^3=x^3+3x^2-2$
$f(x)=x^3+3x^2-2$로 놓으면 $f(-1)=-1+3-2=0$
$f(x)=(x+1)(x^2+2x-2)$
따라서 $a=1$, $b=2$, $c=-2$이므로 $abc=1\times2\times(-2)=-4$

STEP 2

181

자연수 a, b, c에 대하여 보기에서 $\dfrac{a^3-b^3}{a^3-c^3}=\dfrac{a-b}{a-c}$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $(4, 7, 7)$	ㄴ. $(9, 6, 3)$
ㄷ. $(5, 12, 13)$	ㄹ. $(17, 8, 4)$
ㅁ. $(9, 9, 7)$	ㅂ. $(8, 5, 6)$

● ① ㄱ, ㅁ ② ㄱ, ㅂ
③ ㄱ, ㄴ, ㅁ ④ ㄴ, ㄹ, ㅂ
⑤ ㄷ, ㄹ, ㅂ

$\dfrac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-c)(a^2+ac+c^2)}=\dfrac{a-b}{a-c}$에서
(i) $\dfrac{a-b}{a-c}=0$일 때, $a=b$
(ii) $\dfrac{a-b}{a-c}\neq0$일 때, $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2+ac+c^2}=1$
$a^2+ab+b^2=a^2+ac+c^2$이므로 $b^2-c^2+ab-ac=0$
$(b-c)(a+b+c)=0 \quad \therefore b=c$
(i), (ii)에서 $a=b$ 또는 $b=c$

182

자연수 n^4-6n^2+25가 소수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구하시오. 2

$n^4-6n^2+25=(n^4+10n^2+25)-16n^2$
$=(n^2+5)^2-(4n)^2$
$=(n^2+5+4n)(n^2+5-4n)$
$=(n^2+4n+5)(n^2-4n+5)$
이 자연수가 소수가 되려면
$n^2+4n+5=1$ 또는 $n^2-4n+5=1$
(i) $n^2+4n+5=1$일 때
$n^2+4n+4=0 \quad \therefore n=-2$
(ii) $n^2-4n+5=1$일 때
$n^2-4n+4=0 \quad \therefore n=2$
(i), (ii)에서 n은 자연수이므로
$n=2$

183

x에 대한 다항식

$x^3-(a+c)x^2-(a^2+c^2)x+a^3+a^2c+ac^2+c^3$

이 $x-b$로 나누어떨어질 때, 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형의 넓이를 구하시오. $\frac{1}{2}ac$

$f(x)=x^3-(a+c)x^2-(a^2+c^2)x+a^3+a^2c+ac^2+c^3$

으로 놓으면 $f(b)=0$이므로

$b^3-(a+c)b^2-(a^2+c^2)b+a^3+a^2c+ac^2+c^3=0$

$b^3-(a+c)b^2-(a^2+c^2)b+a^3+a^2c+ac^2+c^3$

$=b^3-(a+c)b^2-(a^2+c^2)b+(a+c)(a^2+c^2)$

$=-b^2(a-b+c)+(a^2+c^2)(a-b+c)$

$=(a-b+c)(a^2-b^2+c^2)$

$\therefore\ (a-b+c)(a^2-b^2+c^2)=0$

$a-b+c\neq0$이므로 $a^2-b^2+c^2=0$ $\quad\therefore\ b^2=a^2+c^2$

따라서 주어진 삼각형은 b를 빗변의 길이로 하는 직각삼각형이므로

그 넓이는 $\frac{1}{2}ac$이다.

184 ●— 교육청 기출

2 이상의 네 자연수 a, b, c, d에 대하여

$$(14^2+2\times14)^2-18\times(14^2+2\times14)+45$$
$$=a\times b\times c\times d$$

일 때, $a+b+c+d$의 값은?

① 56 ② 58 ● ③ 60

④ 62 ⑤ 64

$x=14$로 놓으면

$(14^2+2\times14)^2-18\times(14^2+2\times14)+45$

$=(x^2+2x)^2-18(x^2+2x)+45$

$x^2+2x=t$로 놓으면

$(x^2+2x)^2-18(x^2+2x)+45$

$=t^2-18t+45$

$=(t-3)(t-15)$

$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-15)$

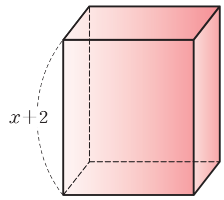
$=(x+3)(x-1)(x+5)(x-3)$

$=17\times13\times19\times11$

$\therefore\ a+b+c+d=17+13+19+11=60$

185

오른쪽 그림과 같이 높이가 $x+2$이고 부피가 x^3+ax-6인 직육면체가 있다. 모든 모서리의 길이가 x의 계수가 1인 x에 대한 일차식으로 나타내어질 때, 모든 모서리의 길이의 합은? (단, $x>3$)



① $12x-4$ ● ② $12x$ ③ $12x+4$

④ $12x+8$ ⑤ $12x+12$

$f(x)=x^3+ax-6$으로 놓으면 $f(x)$는 $x+2$를 인수로 갖는다.

이때 인수 정리에 의하여 $f(-2)=0$이므로

$-8-2a-6=0$에서 $a=-7$

$f(x)=x^3-7x-6$을 인수분해하면

$f(x)=(x+2)(x^2-2x-3)$

$\quad=(x+2)(x+1)(x-3)$

따라서 직육면체의 세 모서리의 길이는 각각 $x+2$, $x+1$, $x-3$이므로 모든 모서리의 길이의 합은

$4(x+2+x+1+x-3)=12x$

186

부피가 $(x^3+x^2-5x+3)\pi$인 원기둥이 있다. 이 원기둥의 높이와 밑면의 반지름의 길이가 각각 x의 계수가 1인 x에 대한 일차식으로 나타내어질 때, 이 원기둥의 겉넓이는? (단, $x>1$)

① $4(x^2-x)\pi$ ● ② $4(x^2-1)\pi$

③ $4x^2\pi$ ④ $4(x^2+1)\pi$

⑤ $4(x^2+x)\pi$

원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하면

(부피)$=\pi r^2h=(x^3+x^2-5x+3)\pi$

$\quad=(x-1)^2(x+3)\pi$

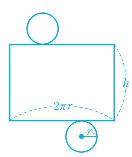
$\therefore\ r=x-1,\ h=x+3$

$\therefore$ (겉넓이)$=2\pi r^2+2\pi rh$

$\quad=2r(r+h)\pi$

$\quad=2(x-1)(2x+2)\pi$

$\quad=4(x^2-1)\pi$



Ⅱ

방정식과 부등식

1 복소수와 이차방정식

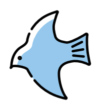
2 이차방정식과 이차함수

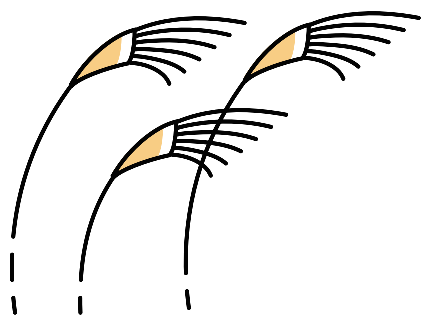
3 여러 가지 방정식

4 여러 가지 부등식

방정식과 부등식은 좋은 친구

중학교까지 배운 내용으로는
이차방정식 $x^2=-1$을 풀 수 없다.
하지만 제곱하여 -1이 되는 수를 정의하여
수의 체계를 확장하면 근을 구할 수 있다.
방정식으로부터 시작된 수 체계의 확장은
'n차 방정식은 n개의 근을 갖는다.'라는
대수학의 기본 정리를 완성시켰다.
대수학이란 수 대신에 문자를 이용하여
수의 관계나 성질 등을 연구하는 수학의 한 분야를 말한다.
지금부터 배울 방정식과 부등식이
바로 대수학의 대표 선수이다.
방정식과 부등식은
등호가 있는지 부등호가 있는지에 따라 구분한다.
각각의 식에 따라 대수적인 풀이가 있지만
함수의 그래프를 그려서 접근하면 그 이해가 쉽다.





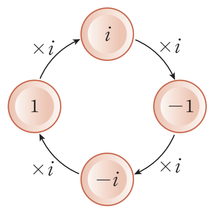
1

복소수와 이차방정식

학년이 올라갈수록 우리는 낯선 수를 자꾸 배워 왔다.
그 연장선에서 허수, 복소수를 이해하고
복소수의 범위에서 이차방정식을 푼다.

1 복소수

$$i=\sqrt{-1},\ i^2=-1$$



2 이차방정식

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

3 이차방정식의 활용

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$$

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

1 복소수

01 허수단위 i

자연수를 확장한 정수, 정수를 확장한 유리수, 유리수를 확장한 실수를 배웠다.
이제는 실수를 확장한 복소수를 배운다. 더 이상의 확장은 없다.
$x^2=-1$을 만족시키는 실수는 없다. 모든 실수의 제곱은 0보다 크거나 같다.
$x^2=-1$을 만족시키는 새로운 수를 정의한다. 그 수를 $\boldsymbol{i}$로 나타내고, i를 허수단위라 한다.

허수단위 i

(1) 제곱하여 -1이 되는 새로운 수를 $\boldsymbol{i}$로 나타내고, i를 **허수단위**라 한다.

$$i=\sqrt{-1},\ i^2=-1$$

(2) $a>0$일 때,

① $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$ ② $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}i$

설명 허수를 나타내는 기호 i는 imaginary number의 첫 글자를 딴 것이다. 가상의 수라는 뜻이다. 허수의 탄생 초기, 사람들은 허수를 현실의 수가 아니라 가상의 수라고 생각했다. 그 흔적이 지금까지도 남아 있는 것. 하지만 오늘날 허수는 수학은 물론, 과학이나 공학에서 없어서는 안 될 중요한 수가 되었다.

개념확인 다음 수를 허수단위 i를 사용하여 나타내시오.

(1) $\sqrt{-5}$ (2) $\sqrt{-9}$ (3) $\sqrt{-18}$

풀이 (1) $\sqrt{5}\boldsymbol{i}$ (2) $3\boldsymbol{i}$ (3) $3\sqrt{2}\boldsymbol{i}$

●허수단위

001 다음 수의 제곱근을 구하시오.

(1) -3 (2) -4 (3) -8

풍산자目 x의 제곱근은 $\pm\sqrt{x}$이다.

풀이 (1) $\pm\sqrt{-3}=\pm\sqrt{3}\boldsymbol{i}$ (2) $\pm\sqrt{-4}=\pm 2\boldsymbol{i}$ (3) $\pm\sqrt{-8}=\pm 2\sqrt{2}\boldsymbol{i}$

정답과 풀이 26쪽

유제 **002** 다음 수의 제곱근을 구하시오.

(1) -2 $\pm\sqrt{2}i$ (2) -25 $\pm 5i$ (3) -28 $\pm 2\sqrt{7}i$

02 복소수와 허수단위 i

유리수와 무리수를 묶어 실수라 하듯, 실수와 허수를 묶어 **복소수**라 한다.
실수는 대소 비교를 할 수 있어 수직선 위에 나타낼 수 있지만 허수는 크고 작음을 판별할 수 없어 수직선 위에 나타낼 수 없다.

복소수 중요

(1) 실수 a, b에 대하여 $a+bi$의 꼴로 나타내어지는 수를 **복소수**라 하고, a를 **실수부분**, b를 **허수부분**이라 한다.

$\underset{\text{실수부분}}{a}+\underset{\text{허수부분}}{b}i$

(2) 실수가 아닌 복소수 $a+bi$ $(b\neq0)$를 **허수**라 하고, 실수부분이 0인 허수, 즉 bi $(b\neq0)$를 **순허수**라 한다.

(3) 복소수의 분류

실수 a, b에 대하여 복소수 $a+bi$를 분류하면 다음과 같다.

$$\text{복소수 } a+bi \begin{cases} \text{실수} \quad a & \leftarrow b=0 \\ \text{허수} \begin{cases} \text{순허수} \quad bi & \leftarrow a=0,\ b\neq0 \\ \text{순허수가 아닌 허수} \quad a+bi & \leftarrow a\neq0,\ b\neq0 \end{cases} \end{cases}$$

설명

- 허수는 수직선 위에 나타낼 수 없고, 크기를 비교할 수도 없다.
- $0i=0$으로 정하면 실수 a는 $a=a+0i$로 나타낼 수 있으므로 실수도 복소수이다.
- 실수의 제곱은 항상 0 이상이고, 순허수의 제곱은 항상 음수이다. ➡ $(\text{실수})^2\geq0$, $(\text{순허수})^2<0$

● 복소수의 정의

003 다음 복소수 중 실수의 개수와 허수의 개수를 구하시오.

$$0,\quad \sqrt{2}-i,\quad \sqrt{5}i,\quad 1+\sqrt{2},\quad \frac{i}{\sqrt{3}},\quad i+\sqrt{3}$$

풍산자日 실수와 허수를 구분하는 가장 큰 차이는 바로 허수단위 i의 유무이다.
무리수와 헷갈리지 않도록 주의한다.

풀이 (i) 실수: 0, $1+\sqrt{2}$

(ii) 허수: $\sqrt{2}-i$, $\sqrt{5}i$, $\frac{i}{\sqrt{3}}$, $i+\sqrt{3}$

따라서 **실수의 개수는 2, 허수의 개수는 4**이다.

정답과 풀이 26쪽

유제 **004** 다음 복소수 중 실수의 개수, 허수의 개수, 순허수의 개수를 구하시오.

$$-i,\quad \sqrt{2},\quad 5+\sqrt{2},\quad -3i,\quad 7i,\quad -1-4i,\quad 11i$$

실수의 개수: 2, 허수의 개수: 5, 순허수의 개수: 4

03 복소수가 서로 같을 조건

유리수이면서 무리수인 수는 없듯이 실수이면서 허수인 수는 없다.
물과 기름처럼 허수와 실수는 완벽히 구분된다.

복소수가 서로 같을 조건

a, b, c, d가 실수일 때,

(1) $a+bi=0 \Longleftrightarrow a=0,\ b=0$　　(2) $a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=c,\ b=d$

●복소수가 서로 같을 조건 (1)

005 $(1+i)x+(1-i)y=4+2i$가 성립할 때, 실수 x, y의 값을 구하시오.

풍산자🅑 실수와 허수는 물과 기름.
실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 모아서 계산한다.

풀이 주어진 등식의 좌변을 전개하여 $a+bi$의 꼴로 정리하면

$(1+i)x+(1-i)y=x+xi+y-yi=(x+y)+(x-y)i$

$\therefore (x+y)+(x-y)i=4+2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $x+y=4,\ x-y=2$

두 식을 연립하여 풀면 $\boldsymbol{x=3,\ y=1}$

정답과 풀이 26쪽

유제 **006** $(2+i)x+(1-i)y-5-i=0$이 성립할 때, 실수 x, y의 값을 구하시오. $x=2,\ y=1$

●복소수가 서로 같을 조건 (2)

007 $\dfrac{x}{1-i}+\dfrac{y}{1+i}=1-3i$가 성립할 때, 실수 x, y의 값을 구하시오.

풍산자🅑 두 식을 통분하여 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 모아서 계산한다.

풀이 주어진 등식의 좌변을 통분하여 $a+bi$의 꼴로 정리하면

$$\frac{x}{1-i}+\frac{y}{1+i}=\frac{x(1+i)+y(1-i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{x+xi+y-yi}{1^2-i^2}=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}i$$

$\therefore \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{2}i=1-3i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $\dfrac{x+y}{2}=1,\ \dfrac{x-y}{2}=-3$　　$\therefore x+y=2,\ x-y=-6$

두 식을 연립하여 풀면 $\boldsymbol{x=-2,\ y=4}$

정답과 풀이 26쪽

유제 **008** $\dfrac{x}{1+i}+\dfrac{y}{1-i}=2-i$가 성립할 때, 실수 x, y의 값을 구하시오. $x=3,\ y=1$

04 복소수의 연산

복소수는 실수부분과 허수부분으로 이루어져 있다.
두 복소수의 허수부분의 부호만 서로 반대일 때, 이 두 복소수를 **켤레복소수**라 한다.
켤레복소수는 복소수의 연산에서 다양하게 활용된다.

켤레복소수의 뜻과 성질

(1) 복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 허수부분의 부호를 바꾸어 놓은 복소수 $a-bi$를 $a+bi$의 **켤레복소수**라 하고, 기호 $\overline{a+bi}$로 나타낸다.

$$\overline{\boldsymbol{a+bi}}=\boldsymbol{a-bi},\ \overline{\boldsymbol{a-bi}}=\boldsymbol{a+bi}$$

(2) 복소수와 그 켤레복소수의 합과 곱은 항상 실수이다.

(3) 두 복소수 z_1, z_2에 대하여

① $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$　　② $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

③ $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$　　④ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq0$)

설명

- 복소수 z의 켤레복소수를 $\overline{z}$로 나타내고, 'z바(bar)'라 읽는다.
- 복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 $z+\overline{z}$, $z\overline{z}$는 실수이다.

복소수의 연산 방법은 실수의 연산과 동일하다.
i를 문자로 보고 계산하다가, i^2을 만나면 $i^2=-1$로 바꿔치기하면 된다.
또, 복소수의 연산에서도 실수와 마찬가지로 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립한다.

복소수의 사칙연산

a, b, c, d가 실수일 때,

(1) 덧셈: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

(2) 뺄셈: $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

(3) 곱셈: $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(4) 나눗셈: $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ (단, $c+di\neq0$)

분모에 i가 있으면 분모의 켤레복소수를 분자, 분모에 각각 곱한다.
그러면 분모가 깔끔한 실수로 변한다. 이 과정을 분모의 실수화라 한다.

개념확인

1 다음 복소수의 켤레복소수를 구하시오.

(1) $1+i$　　(2) $2+\sqrt{3}i$　　(3) $8i$　　(4) $2+\sqrt{5}i$

2 복소수 z가 $z=3-5i$일 때, 다음을 계산하시오.

(1) $z+\overline{z}$　　(2) $z\overline{z}$

풀이

1 (1) $\boldsymbol{1-i}$　　(2) $\boldsymbol{2-\sqrt{3}i}$　　(3) $\boldsymbol{-8i}$　　(4) $\boldsymbol{2-\sqrt{5}i}$

2 (1) $z+\overline{z}=(3-5i)+(3+5i)=\boldsymbol{6}$

(2) $z\overline{z}=(3-5i)(3+5i)=9-25i^2=9+25=\boldsymbol{34}$

009 다음을 계산하시오.

(1) $(2-3i)+(-4+5i)$

(2) $\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}i\right)-\left(i-\frac{1}{4}\right)$

(3) $(1+2i)(2-3i)$

(4) $\frac{3+2i}{3-2i}$

풍산자 ⊟ [1단계] 분모는 간단하게! 켤레복소수를 곱해 분모를 실수로 만든다.
[2단계] 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 모아 계산한다.
[3단계] i^2이 보이면 $i^2=-1$로 바꾼다.

풀이 (1) (주어진 식)$=(2-4)+(-3+5)i=\mathbf{-2+2i}$

(2) (주어진 식)$=\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{2}{3}-1\right)i=\mathbf{\frac{7}{4}-\frac{1}{3}i}$

(3) (주어진 식)$=2-3i+4i-6i^2=2-3i+4i+6=\mathbf{8+i}$

(4) (주어진 식)$=\frac{(3+2i)^2}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{3^2+12i+(2i)^2}{3^2-(2i)^2}=\frac{9+12i-4}{9+4}=\mathbf{\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i}$

정답과 풀이 26쪽

유제 010 다음을 계산하시오.

(1) $(4-\sqrt{2}i)+(3+\sqrt{2}i)$ 7

(2) $(9+6i)-(5-2i)$ $4+8i$

(3) $(1-\sqrt{2}i)(2+\sqrt{2}i)$ $4-\sqrt{2}i$

(4) $\frac{1}{2-3i}+\frac{2-i}{3+2i}$ $\frac{6}{13}-\frac{4}{13}i$

011 $z=1+i$일 때, $\frac{\bar{z}z}{z-\bar{z}}$의 값을 구하시오. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

풍산자 ⊟ $z=a+bi$일 때, $\bar{z}=a-bi$이다.

풀이 $z=1+i$일 때, $\bar{z}=1-i$이므로

$$\frac{\bar{z}z}{z-\bar{z}}=\frac{(1-i)(1+i)}{(1+i)-(1-i)}$$

$$=\frac{1+1}{2i}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=\mathbf{-i}$$

정답과 풀이 26쪽

유제 012 $z=2-4i$일 때, $z\bar{z}+(z+\bar{z})$의 값을 구하시오. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) 24

013 두 복소수 x, y에 대하여 두 복소수의 합이 $3-2i$, 곱이 $5+5i$일 때, $(\overline{x}+3)(\overline{y}+3)$의 값을 구하시오. (단, $\overline{x}$, $\overline{y}$는 각각 x, y의 켤레복소수이다.)

풍산자ⓑ $(\overline{x}+3)(\overline{y}+3)$을 전개한 후 $\overline{x}\,\overline{y}=\overline{xy}$, $\overline{x}+\overline{y}=\overline{x+y}$를 이용한다.

풀이 주어진 식을 전개하면

$(\overline{x}+3)(\overline{y}+3)=\overline{x}\,\overline{y}+3\overline{x}+3\overline{y}+9=\overline{x}\,\overline{y}+3(\overline{x}+\overline{y})+9=\overline{xy}+3(\overline{x+y})+9$

이때 $x+y=3-2i$, $xy=5+5i$이므로

$\overline{x+y}=3+2i$, $\overline{xy}=5-5i$

따라서 구하는 값은

$(5-5i)+3(3+2i)+9=\mathbf{23+i}$

정답과 풀이 **26**쪽

유제 **014** 두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha-\beta=3+3i$, $\alpha\beta=5-4i$일 때, $(\overline{\alpha}-4)(\overline{\beta}+4)$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

$1-8i$

● 인수분해를 이용한 켤레복소수의 연산

015 두 복소수 $\alpha=1+2i$, $\beta=2-3i$에 대하여 $\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

풍산자ⓑ 인수분해하듯이 공통인수로 묶어 본다. 식이 놀랍도록 간단해진다.

풀이 주어진 식을 순서대로 두 항씩 짝 지어 각각의 공통인수로 묶어 내면

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}&=\alpha(\overline{\alpha}+\overline{\beta})+\beta(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\\&=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\\&=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta}) \quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때

$\alpha+\beta=(1+2i)+(2-3i)=(1+2)+(2-3)i=3-i$

$\overline{\alpha+\beta}=\overline{3-i}=3+i$

이므로 각 값을 ㉠에 대입하면

$(3-i)(3+i)=9-i^2=\mathbf{10}$

정답과 풀이 **26**쪽

유제 **016** 두 복소수 $\alpha=-5+7i$, $\beta=3-8i$에 대하여 $\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

5

05 음수의 제곱근

$\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}$과 같은 간단한 복소수의 계산을 생각해 보자.
근호 안의 수끼리 먼저 곱해야 할까? 아니면 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$를 이용하여 i를 이용한 꼴로 바꾼 후에 곱해야 할까?

음수의 제곱근의 연산

a, b가 실수일 때, 다음이 성립한다.

(1) $a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ ⇦ 모두 음수일 때

$a<0$, $b<0$일 때를 제외하면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

(2) $a>0$, $b<0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 중요 ⇦ 분모만 음수일 때

$a>0$, $b<0$일 때를 제외하면 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (단, $b\neq0$)

이 말은 곧, i를 이용한 꼴로 바꾸는 게 먼저라는 것이다.

틀린 계산 ➡ $\sqrt{-2}\times\sqrt{-5}=\sqrt{(-2)\times(-5)}=\sqrt{10}$

옳은 계산 ➡ $\sqrt{-2}\times\sqrt{-5}=\sqrt{2}i\times\sqrt{5}i=\sqrt{10}i^2=-\sqrt{10}$

● 음수의 제곱근의 연산

017 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① $\sqrt{2}\sqrt{-3}=\sqrt{-6}$ ② $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{6}$ ③ $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{-\dfrac{2}{3}}$

④ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}=\sqrt{-\dfrac{2}{3}}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

풍산자 근호 안에 음수가 있을 때는 $\sqrt{-1}$을 i로 고치고 보면 익숙한 복소수의 사칙연산 문제가 된다.

풀이 ① $\sqrt{2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}\sqrt{3}i=\sqrt{6}i=\sqrt{-6}$

② $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i=\sqrt{6}i^2=-\sqrt{6}$

③ $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}i=\sqrt{-\dfrac{2}{3}}$

④ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}i}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{3}i^2}=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}i=-\sqrt{-\dfrac{2}{3}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{3}i}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

따라서 옳지 않은 것은 ②, ④이다.

정답과 풀이 27쪽

유제 **018** 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt{-2}\sqrt{-18}+\sqrt{-2}\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{-36}}{\sqrt{-9}}+\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{-9}}$ -4

(2) $(3-\sqrt{-2})(3+\sqrt{-2})+\dfrac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$ $11+i$

06 i의 거듭제곱

$i^2=-1$임을 이용하면 i의 거듭제곱의 규칙을 발견할 수 있다.
$i,\ i^2,\ i^3,\ i^4,\ \cdots$의 값을 차례로 구하면 $i,\ -1,\ -i,\ 1$이 반복되어 나타난다.

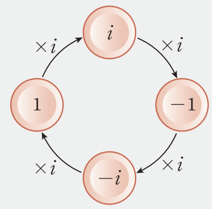
i의 거듭제곱 중요

(1) i를 제곱하면 -1이 되고, 이를 제곱하면 1이 된다.

$i^2=-1,\ i^4=1$

(2) i의 거듭제곱은 네 개의 수가 순서대로 반복된다.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} i & \Rightarrow & i^2 & \Rightarrow & i^3 & \Rightarrow & i^4 & \Rightarrow & i^5 & \Rightarrow & i^6 & \Rightarrow & i^7 & \Rightarrow & i^8 & \Rightarrow & \cdots \\ \| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \\ i & & -1 & & -i & & 1 & & i & & -1 & & -i & & 1 & & \end{array}$$



大 원칙 i의 거듭제곱은 4개를 주기로 값이 반복된다.

i^n(n은 자연수)은 4개의 값 $i,\ -1,\ -i,\ 1$이 이 순서로 반복되므로 4개씩 묶어 더하면 0이다.

① $i+i^2+i^3+i^4=0 \Rightarrow i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0$

② $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}=0 \Rightarrow i^3+i^2+i+1=0$

개념확인 다음 복소수를 간단히 하시오. (단, n은 자연수이다.)

(1) i^9 (2) i^{4n+3}

풀이 (1) $(i^4)^2\times i=\boldsymbol{i}$ (2) $i^{4n}\times i^3=1\times i^3=\boldsymbol{-i}$

● i의 거듭제곱 (1)

019 다음을 계산하시오.

(1) $\dfrac{(1-i)^2}{i}$ (2) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$

풍산자日 지수가 클 때는 직접 거듭제곱을 해 보며 규칙을 찾는다. 이때 계산의 기본은 $i^2=-1$

풀이 (1) (주어진 식)$=\dfrac{1-2i-1}{i}=\boldsymbol{-2}$

(2) (주어진 식)$=\left\{\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{50}=\left(\dfrac{1-2i-1}{2}\right)^{50}=(-i)^{50}=i^{50}=(i^4)^{12}\times i^2=\boldsymbol{-1}$

정답과 풀이 27쪽

유제 **020** 다음을 계산하시오.

(1) $\dfrac{(1+i)^2}{i}$ 2 (2) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{8n}+\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{8n}$ 2

021 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{30}$ (2) $1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{50}}$

풍산자**Tip** n을 4로 나누었을 때의 나머지를 k라 할 때, i^n의 값은 i^k의 값과 같다. 즉,
$i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i$

풀이 (1) (주어진 식)$=(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)+\cdots$
$+(i^{25}+i^{26}+i^{27}+i^{28})+(i^{29}+i^{30})$
$=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)+(i-1)$
$=0+0+\cdots+0+(i-1)$
$=\boldsymbol{-1+i}$

(2) $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=0$이므로 주어진 식을 정리하면

(주어진 식)$=1+\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\left(\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}\right)+\cdots$
$+\left(\frac{1}{i^{45}}+\frac{1}{i^{46}}+\frac{1}{i^{47}}+\frac{1}{i^{48}}\right)+\frac{1}{i^{49}}+\frac{1}{i^{50}}$
$=1+0+0+\cdots+0+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}=\frac{1}{i}=\boldsymbol{-i}$

정답과 풀이 **27**쪽

유제 **022** $i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{101}$의 값을 구하시오. i

023 실수 a, b에 대하여 $i-2i^2+3i^3-4i^4+\cdots-10i^{10}=a+bi$일 때, a, b의 값을 구하시오.

풍산자**Tip** i^n에 곱해진 계수가 달라져도 순서대로 4개씩 묶으면 규칙이 보인다.

풀이 주어진 식을 4개씩 묶어서 다시 정리하면
$i-2i^2+3i^3-4i^4+\cdots-10i^{10}=(i+2-3i-4)+(5i+6-7i-8)+(9i+10)$
$=(-2-2i)+(-2-2i)+(9i+10)=6+5i$
따라서 $6+5i=a+bi$이므로
$\boldsymbol{a=6,\ b=5}$

정답과 풀이 **27**쪽

유제 **024** 실수 a, b에 대하여 $-i+2i^2-3i^3+4i^4+\cdots+40i^{40}=a+bi$일 때, $b-a$의 값을 구하시오. 0

025 $x=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $y=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$일 때, $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$의 값을 구하시오.

풍산자답 두 복소수를 바로 대입하여 계산하는 것보다 두 복소수의 합과 곱을 이용하는 것이 계산이 간단하다.

풀이 $x+y=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

$xy=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{1-3i^2}{4}=1$

$\therefore \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{x^3+y^3}{xy}=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$

$=\frac{(-1)^3-3\times1\times(-1)}{1}=\mathbf{2}$

정답과 풀이 27쪽

유제 **026** $x=2+i$, $y=2-i$일 때, $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$의 값을 구하시오. $\frac{6}{5}$

027 $x=1+2i$일 때, x^3-x^2+4x+4의 값을 구하시오.

풍산자답 x의 값이 복소수로 주어질 때, x의 실수부분을 이항한 뒤 양변을 제곱하면 x에 대한 이차식을 얻을 수 있다. 이 이차식을 이용하여 x의 차수를 낮추어 계산한다.

풀이 $x=1+2i$에서 $x-1=2i$의 양변을 제곱하면 $x^2-2x+1=-4$

$\therefore x^2=2x-5$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 x를 곱하면 $x^3=2x^2-5x$

이 식에 ㉠을 대입하면

$x^3=2(2x-5)-5x=-x-10$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 주어진 식에 대입하면

$x^3-x^2+4x+4=(-x-10)-(2x-5)+4x+4$

$=x-1=(1+2i)-1=\mathbf{2i}$

정답과 풀이 27쪽

유제 **028** $x=1-i$일 때, x^3-x^2+3x-1의 값을 구하시오. $-3i$

+ 풍산자 비법

- 근호 안에 음수가 있을 때는 먼저 $\sqrt{-1}$을 i로 고쳐서 생각한다. 이때 $i^2=-1$이다.
- 식의 값을 구할 때, $x=a+bi$ (a, b는 실수)의 꼴이 있으면 식의 변형을 생각한다.

필수 확인 문제

정답과 풀이 27쪽

029

다음 중 옳지 않은 것은?

① $3i$의 허수부분은 3이다.

② $i-2$의 실수부분은 -2, 허수부분은 1이다.

③ 0은 복소수이다.

④ $-5i$의 실수부분은 -5이다.

⑤ $a=0$, $b\neq0$이면 $a+bi$는 순허수이다.

④ $-5i$의 실수부분은 0, 허수부분은 -5이다.

030

두 실수 x, y가 $(x+i)^2+(2+3i)^2=y+26i$를 만족시킬 때, $x+y$의 값을 구하시오. 50

$(x^2+2xi-1)+(4+12i-9)=y+26i$

$\therefore (x^2-6)+(2x+12)i=y+26i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2-6=y$, $2x+12=26$

$\therefore x=7$, $y=43$ $\therefore x+y=50$

031

복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여

$$z+\overline{z}=-10,\ z\overline{z}=34$$

를 만족시키는 복소수 z를 모두 구하시오.

$-5+3i$, $-5-3i$

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$z+\overline{z}=-10$에서 $(a+bi)+(a-bi)=-10$

$2a=-10$ $\therefore a=-5$

$z\overline{z}=34$에서 $(a+bi)(a-bi)=34$

$a^2+b^2=34$

위의 식에 $a=-5$를 대입하면

$(-5)^2+b^2=34$, $b^2=9$ $\therefore b=\pm3$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 복소수 z는

$-5+3i$, $-5-3i$

032

두 복소수 α, β에 대하여 $\overline{\alpha}+\overline{\beta}=1+i$일 때, $\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}$의 값을 구하시오. 2

(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=1+i$에서

$\overline{\alpha+\beta}=1+i$, $\alpha+\beta=1-i$

$\therefore \alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$

$=(1-i)(1+i)=2$

033

복소수

$$z=\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{-6}}+\sqrt{-4}\sqrt{-9}-\sqrt{2}\sqrt{-8}+\frac{\sqrt{-32}}{\sqrt{8}}$$

에 대하여 $\overline{z}$를 구하시오. $-6+5i$

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

$z=\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}i}+\sqrt{4}i\times\sqrt{9}i-\sqrt{2}\times\sqrt{8}i+\frac{\sqrt{32}i}{\sqrt{8}}$

$=\frac{\sqrt{9}i}{i^2}+\sqrt{36}i^2-\sqrt{16}i+\sqrt{4}i$

$=-3i-6-4i+2i=-6-5i$

$\therefore \overline{z}=-6+5i$

034 실력UP

$z=(1+i)^n$이 양의 실수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 n의 값과 그때의 z의 값의 합을 구하시오.

24

$n=2$일 때, $z=(1+i)^2=1+2i+(-1)=2i$

$n=4$일 때, $z=(1+i)^4=(2i)^2=-4$

$n=8$일 때, $z=(1+i)^8=(-4)^2=16$

따라서 $n=8$일 때 처음으로 z가 양의 실수 16이 된다.

$\therefore n+z=8+16=24$

2 이차방정식

01 방정식 $ax=b$

미지수 x의 값에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하는 등식을 x에 대한 **방정식**이라 하고, 방정식이 참이 되는 특정한 값을 해 또는 **근**이라 한다.
방정식을 푼다는 것은 해를 구한다는 것이다.

방정식 $ax=b$의 풀이

$ax=b$의 꼴로 정리한 후 $a\neq0$일 때와 $a=0$일 때로 나누어 생각하면 된다.

(i) $a\neq0$일 때, $x=\dfrac{b}{a}$ ➡ 오직 하나의 해를 갖는다.

(ii) $a=0$일 때, $\begin{cases} b\neq0\text{이면} & \Rightarrow \text{해는 없다. (불능)} \\ b=0\text{이면} & \Rightarrow \text{해는 모든 수이다. (부정)} \end{cases}$

설명 x에 대한 방정식을 풀려면 일단 x가 있는 항은 좌변으로, 상수항은 우변으로 이항하여 $ax=b$의 꼴로 정리한 후 경우를 나눈다.

(i) $a\neq0$일 때, 양변을 a로 나누면 $x=\dfrac{b}{a}$

(ii) $a=0$일 때, 양변을 a로 나눌 수 없으므로 $b\neq0$인 경우와 $b=0$인 경우로 나누어 생각한다.

㉠ $a=0$, $b\neq0$인 경우
$0\times x=b$가 되어 x에 어떤 수를 대입하여도 등식이 성립하지 않는다.
따라서 해는 없다.

㉡ $a=0$, $b=0$인 경우
$0\times x=0$이 되어 x에 어떤 수를 대입하여도 항상 등식이 성립한다.
따라서 해는 모든 수이다.

방정식 $ax=b$에서 $a\neq0$일 때를 일차방정식이라 한다.
즉, 문제에서 방정식 $ax=b$라고 하면 $a=0$인 경우와 $a\neq0$인 경우를 나누어 생각하고, 일차방정식 $ax=b$라고 하면 $a\neq0$인 경우만 생각한다.

개념확인

다음 방정식을 푸시오.

(1) $9x+2=7x+8$

(2) $5x+5=5x-5$

(3) $2x-(6-6x)=8x-6$

풀이 주어진 식을 $ax=b$의 꼴로 정리하면

(1) $2x=6$이므로 $\boldsymbol{x=3}$

(2) $0\times x=-10$이므로 **해는 없다.**

(3) $0\times x=0$이므로 해는 **모든 수이다.**

035 x에 대한 방정식 $a(x-1)=3x+5$를 푸시오.

풍산자日 $ax=b$의 꼴로 정리한 후, $a=0$일 때와 $a\neq0$일 때로 나누어 생각한다.
$a=0$일 때는 종종 헷갈리므로 다음과 같이 정리하면 된다.
$0\times x=1$의 꼴은 항상 거짓이므로 해는 없고, $0\times x=0$의 꼴은 맞는 소리이므로 해는 모든 수이다.

풀이 주어진 식을 정리하면
$ax-a=3x+5$ $\quad\therefore (a-3)x=a+5$
(i) $\boldsymbol{a\neq3}$일 때, $x=\dfrac{\boldsymbol{a+5}}{\boldsymbol{a-3}}$
(ii) $\boldsymbol{a=3}$일 때, $0\times x=8$이므로 **해는 없다.**

정답과 풀이 28쪽

유제 **036** 다음 x에 대한 방정식을 푸시오.

(1) $a(x+1)=x-2$

$a\neq1$일 때, $x=-\dfrac{a+2}{a-1}$
$a=1$일 때, 해는 없다.

(2) $a^2x+6x+2=a(5x+1)$

$a\neq2$, $a\neq3$일 때, $x=\dfrac{1}{a-3}$
$a=2$일 때, 해는 모든 수이다.
$a=3$일 때, 해는 없다.

● 방정식 $ax=b$의 특수해

037 x에 대한 방정식 $(a^2-3)x+a(2x-1)+1=0$의 해가 무수히 많을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

풍산자日 해가 모든 수이거나 없는 경우 식을 $ax=b$의 꼴로 정리했을 때, $a=0$이어야 한다.
이때 $b=0$이면 해는 모든 수이고, $b\neq0$이면 해는 없다.

풀이 주어진 식을 정리하면
$(a^2-3)x+2ax-a+1=0$, $(a^2+2a-3)x=a-1$
$\therefore (a-1)(a+3)x=a-1$
해가 모든 수이거나 없는 경우는 x의 계수가 0일 때 발생한다.
$(a-1)(a+3)=0$에서 $a=1$ 또는 $a=-3$
(i) $a=1$일 때, $0\times x=0$이므로 해는 모든 수이다.
(ii) $a=-3$일 때, $0\times x=-4$이므로 해는 없다.
(i), (ii)에서 방정식의 해가 무수히 많을 때, $a=\mathbf{1}$이다.

정답과 풀이 28쪽

유제 **038** x에 대한 방정식 $a^2x-a-ax+1=0$의 해가 없을 때, 상수 a의 값을 구하시오. 0

02 절댓값 기호가 있는 일차방정식

절댓값 기호가 있는 일차방정식은 절댓값의 성질을 이용하여 다음과 같이 푼다.

절댓값 기호가 있는 일차방정식

(1) 구간을 나누어 푼다. 중요

① 절댓값 기호 안을 0으로 하는 수를 기준으로 구간을 나누어 절댓값 기호를 없앤다.

(i) $A \geq 0$일 때, $|A| = A$

(ii) $A < 0$일 때, $|A| = -A$

② 해를 구한 후 반드시 구한 해가 해당 구간에 속하는지 검토해야 한다.

(2) 구간을 나누지 않고도 풀리는 유형이 있다.

① $|x| = a \Longleftrightarrow x = \pm a$ (단, $a > 0$)　　② $|x| = |y| \Longleftrightarrow x = \pm y$

● 절댓값 기호가 있는 일차방정식

039 다음 방정식을 푸시오.

(1) $|x-1| = 3$　　(2) $|x-1| + |x-3| = x+4$

풍산자 절댓값 기호가 있는 문제를 대하는 기본! 구간을 나눈다.

[1단계] 절댓값 기호 안을 0으로 하는 수를 기준으로 구간을 나눈다.

[2단계] 나누어진 구간별로 방정식의 해를 구한다.

[3단계] 구한 해가 해당 구간에 속하는지 확인한다. 잊지 마!

풀이 (1) 절댓값 기호 안을 0으로 하는 $x=1$을 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

(i) $x < 1$일 때, $-(x-1) = 3$　　$\therefore x = -2$

(ii) $x \geq 1$일 때, $x - 1 = 3$　　$\therefore x = 4$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $\boldsymbol{x = -2}$ **또는** $\boldsymbol{x = 4}$

(2) 절댓값 기호 안을 0으로 하는 $x=1$과 $x=3$을 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

(i) $x < 1$일 때, $-(x-1) - (x-3) = x+4$　　$\therefore x = 0$

(ii) $1 \leq x < 3$일 때, $(x-1) - (x-3) = x+4$　　$\therefore x = -2$

그런데 이 값은 $1 \leq x < 3$에 속하지 않으므로 버린다.

(iii) $x \geq 3$일 때, $(x-1) + (x-3) = x+4$　　$\therefore x = 8$

(i)~(iii)에서 주어진 방정식의 해는 $\boldsymbol{x = 0}$ **또는** $\boldsymbol{x = 8}$

다른 풀이 (1) $|x-1| = 3$에서 $x - 1 = \pm 3$　　$\therefore x = -2$ 또는 $x = 4$

정답과 풀이 28쪽

유제 **040** 다음 방정식을 푸시오.

(1) $|x-3| = 3x-5$　$x=2$　　(2) $|x+2| + |x-2| = 2x+2$　$x=1$

03 이차방정식의 해

$ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)의 꼴로 표현할 수 있는 방정식을 **이차방정식**이라 한다. 이차방정식을 푸는 방법은 두 가지. 인수분해를 이용하거나 근의 공식을 이용한다.

이차방정식의 풀이

(1) 인수분해에 의한 풀이

x에 대한 이차방정식이 $(ax-b)(cx-d)=0$의 꼴로 인수분해되면

$(ax-b)(cx-d)=0$에서 $ax-b=0$ 또는 $cx-d=0$ $\quad\therefore x=\dfrac{b}{a}$ 또는 $x=\dfrac{d}{c}$

(2) 공식에 의한 풀이

① 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ ← 근의 공식

② 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 근은

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$ ← 일차항의 계수가 짝수일 때 (짝수 공식)

중학교에서는 이차방정식의 근이 실수인 경우만을 다루었으나, 이제부터는 특별한 조건이 없으면 이차방정식의 근을 복소수 범위까지 확장하여 생각한다. 근의 공식을 이용하여 근 x를 구했을 때 $b^2-4ac\geq0$이면 x는 실수이고, $b^2-4ac<0$이면 x는 허수이다.
이때 실수인 근을 **실근**, 허수인 근을 **허근**이라 한다.

참고 계수가 실수인 이차방정식은 복소수의 범위에서 항상 두 개의 근을 갖는다. 특히, 두 개의 실근이 서로 같을 때 이 근을 중근이라 한다.

설명 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 근의 공식을 유도하면 다음과 같다.

$ax^2+bx+c=0$에서

$x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$ ← 양변을 a로 나눈다.

$\left\{x^2+\dfrac{b}{a}x+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2\right\}+\dfrac{c}{a}=\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ ← 양변에 $\left(\dfrac{x\text{의 계수}}{2}\right)^2$을 더해 완전제곱식으로 변형한다.

$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{c}{a}=\dfrac{b^2}{4a^2}$ ← 좌변을 완전제곱식으로 변형한다.

$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$ ← $\dfrac{c}{a}$를 우변으로 이항하고 식을 정리한다.

$x+\dfrac{b}{2a}=\pm\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}$ ← $x^2=k$이면 $x=\pm\sqrt{k}$이다.

$x=-\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\therefore x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

근의 공식을 이용하면 계수가 실수인 이차방정식을 풀 수 있지만 인수분해를 먼저 시도하는 것이 좋다.

大 원칙 이차방정식의 해법 ➡ 인수분해를 먼저 시도한다. 인수분해가 안 되면 근의 공식을 쓴다.

041 다음 방정식을 푸시오.

(1) $30=25x-5x^2$ (2) $2x^2-4x+3=0$ (3) $(x+1)^2=2-x$

풍산자비 항상 인수분해를 먼저 시도한다. 인수분해가 안 되면 근의 공식을 쓴다.
특별한 조건이 없으면 복소수 범위에서 근을 구한다.

풀이 (1) 우변을 좌변으로 이항한 후 양변을 5로 나누면

$x^2-5x+6=0$, $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore$ **$x=2$ 또는 $x=3$**

(2) 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\times3}}{2}=\mathbf{\frac{2\pm\sqrt{2}i}{2}}$$

← 일차항의 계수가 짝수일 때 (짝수 공식)

(3) $x^2+2x+1=2-x$에서 $x^2+3x-1=0$

근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\mathbf{\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}}$$

정답과 풀이 28쪽

유제 **042** 다음 방정식을 푸시오.

(1) $2x^2-7x+5=0$ $x=1$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

(2) $24=8x^2-16x$ $x=-1$ 또는 $x=3$

(3) $3x^2-6x+2=0$ $x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$

(4) $(x+2)^2=x-1$ $x=\frac{-3\pm\sqrt{11}i}{2}$

043 방정식 $(\sqrt{2}-1)x^2-(\sqrt{2}+1)x+2=0$을 푸시오.

풍산자비 이차항의 계수가 1이 되게 고치면 가장 좋다. 이차항의 계수가 음수일 때는 양변에 -1을 곱하고, 근호가 있으면 유리화, i가 있으면 실수화한다.

풀이 양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면

$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)x^2-(\sqrt{2}+1)^2x+2(\sqrt{2}+1)=0$

$x^2-(3+2\sqrt{2})x+2\sqrt{2}+2=0$, $(x-1)\{x-(2\sqrt{2}+2)\}=0$

$\therefore$ **$x=1$ 또는 $x=2\sqrt{2}+2$**

정답과 풀이 29쪽

유제 **044** 방정식 $(\sqrt{2}+1)x^2+(3+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$을 푸시오. $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=1-\sqrt{2}$

045 방정식 $x^2+|x-1|=1$을 푸시오.

풍산자TIP 절댓값 기호가 있는 방정식은 절댓값 기호 안을 0으로 하는 수를 기준으로 구간을 나눈다. 이때 나누어진 구간 별로 해를 구한 후 반드시 구한 해가 해당 구간에 속하는지 검토한다.

풀이 (i) $x<1$일 때, $x^2-(x-1)=1$, $x^2-x=0$
$x(x-1)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=1$
그런데 $x<1$이므로 $x=0$
(ii) $x\geq1$일 때, $x^2+(x-1)=1$, $x^2+x-2=0$
$(x+2)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=1$
그런데 $x\geq1$이므로 $x=1$
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $\boldsymbol{x=0}$ **또는** $\boldsymbol{x=1}$

정답과 풀이 29쪽

유제 **046** 방정식 $x^2+|3x-2|=2$를 푸시오. $x=0$ 또는 $x=1$

047 다음 방정식을 푸시오.

(1) $|x^2-5x|=6$ (2) $x^2-|x|-6=0$

풍산자TIP 다음과 같이 변형하여 생각하면 구간을 나누지 않고도 풀린다.
(1) $|x|=a \Longleftrightarrow x=\pm a$ (단, $a>0$)
(2) $ax^2+b|x|+c=0 \Longleftrightarrow a|x|^2+b|x|+c=0$

풀이 (1) $|x^2-5x|=6$에서 $x^2-5x=\pm6$
(i) $x^2-5x=6$일 때, $x^2-5x-6=0$
$(x+1)(x-6)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=6$
(ii) $x^2-5x=-6$일 때, $x^2-5x+6=0$
$(x-2)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=3$
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는
$\boldsymbol{x=-1}$ **또는** $\boldsymbol{x=2}$ **또는** $\boldsymbol{x=3}$ **또는** $\boldsymbol{x=6}$
(2) $x^2=|x|^2$이므로 $|x|^2-|x|-6=0$
$(|x|+2)(|x|-3)=0$
그런데 $|x|+2>0$이므로 $|x|=3$ $\quad\therefore \boldsymbol{x=\pm3}$

정답과 풀이 29쪽

유제 **048** 다음 방정식을 푸시오.

(1) $|x^2-2x-1|=2$ $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$ (2) $x^2-3|x|-4=0$ $x=\pm4$

04 이차방정식의 판별식

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 공식에서 근호 안의 식을 판별식이라 하고, D로 나타낸다.

$$D=b^2-4ac,\ \frac{D}{4}=b'^2-ac\ \left(\text{단, } b'=\frac{b}{2}\right)$$

이차방정식의 판별식 중요

a, b, c가 실수일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서

① $D=b^2-4ac>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.
② $D=b^2-4ac=0 \Longleftrightarrow$ 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.
③ $D=b^2-4ac<0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

①, ②: $D\geq 0 \Longleftrightarrow$ 실근을 갖는다.

설명 D는 Discriminant의 첫 글자를 딴 것으로 판별하는 식이라는 뜻이다. 무엇을 판별하는 걸까? 판별식을 이용하면 근을 구하지 않고도 실근인지 허근인지 판별할 수 있다.
이차방정식의 판별식은 계수가 실수일 때에만 쓸 수 있다.
계수가 허수일 때를 예를 들어 살펴보자.
$x^2+ix-1=0$의 판별식은 $i^2-4\times1\times(-1)=-1+4=3$으로 $D\geq0$이지만 근은 $x=\frac{-i\pm\sqrt{3}}{2}$, 즉 두 허근을 갖는다. 이처럼 계수가 허수일 때는 판별식으로 근을 판별할 수 없다.
따라서 계수가 허수인 이차방정식이 실근 조건이 있으면 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 문제를 푼다. 하지만 이차방정식의 두 근이 서로 같은 실근일 때, 즉 중근을 가질 때에는 계수가 허수인 경우에도 판별식을 쓸 수 있다. 이차방정식이 중근을 가지면 계수가 허수일 때도 실수일 때와 마찬가지로 근의 공식에서 근호 안의 식, 즉 판별식이 0이 되기 때문이다.

● 이차방정식의 근의 판별 (1)

049 이차방정식 $\frac{1}{4}x^2+(a-1)x+a^2-1=0$이 다음과 같은 해를 가질 때, 실수 a의 값 또는 그 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 실근 (2) 중근 (3) 서로 다른 두 허근 (4) 실근

풍산자비 판별식 $D=b^2-4ac$의 범위를 따진다.

풀이 이차방정식 $\frac{1}{4}x^2+(a-1)x+a^2-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-1)^2-4\times\frac{1}{4}\times(a^2-1)=-2a+2$

(1) $D=-2a+2>0$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{a<1}$
(2) $D=-2a+2=0$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{a=1}$
(3) $D=-2a+2<0$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{a>1}$
(4) $D=-2a+2\geq0$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{a\leq1}$

정답과 풀이 29쪽

유제 050 이차방정식 $2x^2-10x+a-10=0$이 다음과 같은 해를 가질 때, 실수 a의 값 또는 그 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 실근 $a<\frac{45}{2}$ (2) 중근 $a=\frac{45}{2}$ (3) 서로 다른 두 허근 $a>\frac{45}{2}$ (4) 실근 $a\leq\frac{45}{2}$

051 이차방정식 $x^2-4ax+4a^2-a-3=0$이 실근을 갖고, 이차방정식 $x^2+4x-a+6=0$이 허근을 가질 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

풍산자답 주어진 이차방정식이 실근을 가질 조건($D\geq 0$)과 허근을 가질 조건($D<0$)을 각각 적용한 후, 공통부분을 구해 보자.

풀이 (i) $x^2-4ax+4a^2-a-3=0$의 판별식을 D라 하면 실근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=(-2a)^2-1\times(4a^2-a-3)=a+3\geq 0 \qquad \therefore a\geq -3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $x^2+4x-a+6=0$의 판별식을 D'이라 하면 허근을 가지므로

$$\frac{D'}{4}=2^2-1\times(-a+6)=a-2<0 \qquad \therefore a<2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분은 $\mathbf{-3\leq a<2}$

정답과 풀이 29쪽

유제 **052** 이차방정식 $x^2+2x+a=0$이 실근을 갖고, 이차방정식 $x^2+6x+a+13=0$이 허근을 가질 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오. $-4<a\leq 1$

053 x에 대한 이차식 $(a-1)x^2+(4a-4)x+3a+1$이 완전제곱식이 되도록 하는 실수 a의 값을 구하시오.

풍산자답 다음 세 가지는 같은 말! 다른 표현이 나와도 같은 뜻임을 파악한다.

① 완전제곱식 ② 중근(실근 1개) ③ 판별식 $D=0$

단, 가장 먼저 할 일은 이차식임을 확인하는 것! ➡ '이차항의 계수$\neq 0$'

풀이 주어진 식이 이차식이므로 $a-1\neq 0$ $\therefore a\neq 1$ $\cdots\cdots$ ㉠

또, 완전제곱식이 되어야 하므로 이차방정식 $(a-1)x^2+(4a-4)x+3a+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(2a-2)^2-(a-1)(3a+1)=0,\ a^2-6a+5=0$$

$(a-1)(a-5)=0$ $\therefore a=1$ 또는 $a=5$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 실수 a의 값은 **5**이다.

정답과 풀이 29쪽

유제 **054** x에 대한 이차식 $x^2+(2a+6)x+3a+7$이 완전제곱식이 되도록 하는 실수 a의 값을 구하시오. $a=-2$ 또는 $a=-1$

055 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k+a)x+k^2+a^2+2k-2b+4=0$이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 실수 a, b의 값을 구하시오.

풍산자Ⓣ k의 값에 관계없이 중근 ➡ k의 값에 관계없이 $D=0$ ➡ $D=0$이 k에 대한 항등식

풀이 $x^2+2(k+a)x+k^2+a^2+2k-2b+4=0$의 판별식을 D라 하면 중근을 가지므로

$\frac{D}{4}=(k+a)^2-1\times(k^2+a^2+2k-2b+4)=0$

$\therefore (2a-2)k+(2b-4)=0$

이 등식은 k에 대한 항등식이므로 $2a-2=0$, $2b-4=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=1}$, $\boldsymbol{b=2}$

정답과 풀이 30쪽

유제 **056** x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k-a)x+k^2+a^2-4k+b=0$이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 실수 a, b의 값을 구하시오. $a=2$, $b=0$

057 이차방정식 $x^2+(2+i)x+k+3i=0$이 실근을 가질 때, 실수 k의 값을 구하시오.

풍산자Ⓣ 명심하자. 계수가 허수일 때는 판별식 대신 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다. 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리!

풀이 주어진 이차방정식의 실근을 α라 하면 $\alpha^2+(2+i)\alpha+k+3i=0$

좌변을 전개하여 $a+bi$의 꼴로 정리하면 $(\alpha^2+2\alpha+k)+(\alpha+3)i=0$

이때 k, α가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\alpha^2+2\alpha+k=0$, $\alpha+3=0$ $\quad\therefore$ $\alpha=-3$, $\boldsymbol{k=-3}$

참고 허수끼리는 대소를 비교할 수 없으므로 주어진 이차방정식의 판별식 D에 대하여 $D=(2+i)^2-4(k+3i)=(3-4k)-8i\geq 0$은 성립하지 않는다.

정답과 풀이 30쪽

유제 **058** 이차방정식 $(1+i)x^2-(k+4i)x+k+4i=0$이 실근을 가질 때, 실수 k의 값을 구하시오. 4

+ 풍산자 비법

- 절댓값 기호가 있는 방정식을 대하는 기본 자세
  ➡ 절댓값 기호 안을 0으로 하는 수를 기준으로 구간을 나눈다.
- 판별식을 통해 할 수 있는 것은 두 가지
  ① 실근, 허근의 판단 ② 근의 개수 구하기

필수 확인 문제

정답과 풀이 30쪽

059

방정식 $|2x-5|=a$의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 구하시오. (단, a는 상수이다.) 3

한 근이 2이므로 $|2x-5|=a$에 $x=2$를 대입하면

$|2\times2-5|=a \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 주어진 방정식에 대입하면

$|2x-5|=1,\ 2x-5=\pm1$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

따라서 다른 한 근은 3이다.

060

이차방정식 $2(x+2)(x-6)=x^2-13x-32$를 푸시오. $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{7}i}{2}$

$2(x+2)(x-6)=x^2-13x-32$에서

$2(x^2-4x-12)=x^2-13x-32$

$2x^2-8x-24=x^2-13x-32$

$\therefore x^2+5x+8=0$

따라서 근의 공식에 의하여

$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times8}}{2\times1}=\dfrac{-5\pm\sqrt{7}i}{2}$

061

두 실수 a, b에 대하여 $a\diamond b=ab+a-b$라 할 때, $|x\diamond 2|=x\diamond x$를 만족시키는 모든 x의 값의 곱을 구하시오. -4

$|x\diamond2|=x\diamond x$에서 $|3x-2|=x^2$

(i) $x<\dfrac{2}{3}$일 때, $-3x+2=x^2$

$x^2+3x-2=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$

$x<\dfrac{2}{3}$이므로 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$

(ii) $x\ge\dfrac{2}{3}$일 때, $3x-2=x^2$

$x^2-3x+2=0,\ (x-1)(x-2)=0$

$x\ge\dfrac{2}{3}$이므로 $x=1$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 구하는 곱은 $1\times2\times\left(\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)\times\left(\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)=-4$

062

이차방정식 $(a-1)x^2+2(a+1)x+(a+2)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 실수 a의 값의 범위를 정하시오. $-3<a<1$ 또는 $a>1$

이차방정식이므로 $a\ne1$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a+1)^2-(a-1)(a+2)=a+3>0$

$\therefore a>-3$

$a\ne1$이므로 $-3<a<1$ 또는 $a>1$

063

$a<1$일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-2ax+a^2-3a+4=0$$

의 근을 판별하시오. 서로 다른 두 허근

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-(a^2-3a+4)=3a-4$

이때 $a<1$이면 $3a-4<0$이므로 $\dfrac{D}{4}<0$

따라서 이차방정식 $x^2-2ax+a^2-3a+4=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

064 실력UP

이차방정식 $x^2-2(a+i)x+b+2i=0$의 두 근이 서로 같을 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$) 1

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면 중근을 가지므로

$\dfrac{D}{4}=\{-(a+i)\}^2-1\times(b+2i)=0$

$(a^2-b-1)+(2a-2)i=0$

이때 a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b-1=0,\ 2a-2=0 \qquad \therefore a=1,\ b=0$

$\therefore a+b=1$

3 이차방정식의 활용

01 이차방정식의 근과 계수의 관계

[1] 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식의 두 근을 구하려면 인수분해하거나 근의 공식을 써야 한다.
하지만 두 근의 합과 곱은 이차방정식의 계수만 보고도 간단히 구할 수 있다.

이차방정식의 근과 계수의 관계 중요

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

(1) 두 근의 합: $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$

(2) 두 근의 곱: $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

설명 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근 α, β를 $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$라 하면 두 근의 합과 곱은

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계는 그 내용이 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$로 무척 단순하지만 고교 수학의 전 단원에 걸쳐 등장하는 중요한 내용이다.

[2] 이차방정식의 작성

거꾸로 두 근이 주어지면 이차방정식을 만들 수 있다.
이차항의 계수가 1일 때는 x^2-(두 근의 합)$x+$(두 근의 곱)$=0$으로 생각한다.

이차방정식의 작성

(1) 두 수 α, β를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

(2) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$

설명 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$이므로 이차식 ax^2+bx+c는 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

065 이차방정식 $x^2-3x-3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $(\alpha+1)(\beta+1)$ (2) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ (3) $\alpha^3+\beta^3$

풍산자팁 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 합과 곱을 구해 놓고 본다.
식의 값을 구할 때에는 곱셈 공식의 변형식이 자주 이용된다.

풀이 이차방정식 $x^2-3x-3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-3$

(1) $(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=-3+3+1=\mathbf{1}$

(2) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{3^2-2\times(-3)}{-3}=\mathbf{-5}$

(3) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=3^3-3\times(-3)\times3=\mathbf{54}$

정답과 풀이 31쪽

유제 **066** 이차방정식 $2x^2-4x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ 1 (2) $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$ $\frac{5}{2}$ (3) $\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{\beta}$ 10

067 다음 물음에 답하시오.

(1) 이차방정식 $2x^2-mx+12=0$의 두 근의 비가 $3:2$일 때, 양수 m의 값을 구하시오.

(2) 이차방정식 $5x^2-mx-20=0$의 두 근의 차가 4일 때, 실수 m의 값을 구하시오.

풍산자팁 (1) 두 근의 비가 $m:n$일 때 ➡ 두 근을 $m\alpha$, $n\alpha$로 놓는다.
(2) 두 근의 차가 k일 때 ➡ 두 근을 α, $\alpha+k$로 놓는다.

풀이 (1) 주어진 이차방정식의 두 근을 3α, 2α $(\alpha>0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 합: $3\alpha+2\alpha=\frac{m}{2}$ $\therefore 10\alpha=m$ ...... ㉠

두 근의 곱: $3\alpha\times2\alpha=6$, $\alpha^2=1$ $\therefore \alpha=1$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $m=\mathbf{10}$

(2) 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+4$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 합: $\alpha+(\alpha+4)=\frac{m}{5}$ $\therefore 10\alpha+20=m$ ...... ㉠

두 근의 곱: $\alpha\times(\alpha+4)=-4$, $\alpha^2+4\alpha+4=0$, $(\alpha+2)^2=0$ $\therefore \alpha=-2$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $m=\mathbf{0}$

정답과 풀이 31쪽

유제 **068** 이차방정식 $3x^2-mx+12=0$의 두 근의 차가 3일 때, 실수 m의 값을 구하시오. ±15

069 다음 두 수를 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

(1) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ (2) $2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$ (3) $-1+2i$, $-1-2i$

풍산자법 두 수를 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식
➡ $x^2-(\text{두 근의 합})x+(\text{두 근의 곱})=0$

풀이 (1) $x^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)x+\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=0$ $\therefore$ $\boldsymbol{x^2-2x+\frac{3}{4}=0}$

(2) $x^2-(2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2})x+(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=0$
$\therefore$ $\boldsymbol{x^2-4x+2=0}$

(3) $x^2-(-1+2i-1-2i)x+(-1+2i)(-1-2i)=0$
$\therefore$ $\boldsymbol{x^2+2x+5=0}$

정답과 풀이 31쪽

유제 **070** 다음 두 수를 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

(1) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ $x^2-x+\frac{2}{9}=0$
(2) $-1+2\sqrt{5}$, $-1-2\sqrt{5}$ $x^2+2x-19=0$
(3) $3+i$, $3-i$ $x^2-6x+10=0$

071 이차방정식 $x^2-5x+7=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

(1) $\alpha+1$, $\beta+1$ (2) α^2, β^2

풍산자법 두 수 α, β를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식 ➡ $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

풀이 이차방정식 $x^2-5x+7=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=7$

(1) 두 근의 합: $(\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=5+2=7$
두 근의 곱: $(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=7+5+1=13$
따라서 구하는 이차방정식은 $\boldsymbol{x^2-7x+13=0}$

(2) 두 근의 합: $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=5^2-2\times7=11$
두 근의 곱: $\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=7^2=49$
따라서 구하는 이차방정식은 $\boldsymbol{x^2-11x+49=0}$

정답과 풀이 31쪽

유제 **072** 이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

(1) $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ $x^2-5x+4=0$
(2) $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$ $x^2-14x+1=0$

02 이차방정식의 켤레근

이차방정식의 근이 무리수이거나 허수인 경우, 계수의 조건에 따라 한 근만 주어져도 켤레근을 이용하여 다른 한 근을 알 수 있다.
단, 이때는 계수의 조건이 유리수 또는 실수로 한정되므로 조건을 반드시 확인하도록 한다.

이차방정식의 켤레근

(1) 계수 a, b, c가 유리수일 때,
이차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다.
(단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

(2) 계수 a, b, c가 실수일 때,
이차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 다른 한 근은 $p-qi$이다.
(단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$이다.)

설명

- $q\neq0$일 때, $p+q\sqrt{m}$과 $p-q\sqrt{m}$, $p+qi$와 $p-qi$를 각각 켤레근이라 한다.
- 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근 α, β를

$\alpha=-\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\beta=-\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$라 하면

(1) a, b, c가 유리수이고, $\sqrt{b^2-4ac}$가 무리수이면
➡ $\alpha=p+q\sqrt{m}$, $\beta=p-q\sqrt{m}$의 꼴이다. (단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

(2) a, b, c가 실수이고, $\sqrt{b^2-4ac}$가 허수이면
➡ $\alpha=p+qi$, $\beta=p-qi$의 꼴이다. (단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$이다.)

● 이차방정식의 켤레근

073 이차방정식 $x^2-2mx+n=0$의 한 근이 $2+3i$일 때, 실수 m, n의 값을 구하시오.

풍산자팁 (1) 계수가 유리수일 때, $p+q\sqrt{m}$이 근이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다. (단, p, q는 유리수이고, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)
(2) 계수가 실수일 때, $p+qi$가 근이면 $p-qi$도 근이다. (단, p, q는 실수이고, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$이다.)

풀이 계수가 실수이고 한 근이 $2+3i$이므로 $2-3i$도 근이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
두 근의 합: $(2+3i)+(2-3i)=2m$
$\therefore$ $\boldsymbol{m=2}$
두 근의 곱: $(2+3i)(2-3i)=n$
$\therefore$ $\boldsymbol{n=13}$

정답과 풀이 31쪽

유제 **074** 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 한 근이 $3+2\sqrt{2}$일 때, 유리수 m, n의 값을 구하시오.
$m=-6$, $n=1$

필수 확인 문제

정답과 풀이 32쪽

075

이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\dfrac{2\alpha}{\alpha+1}+\dfrac{2\beta}{\beta+1}$의 값을 구하시오. 4

이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$

$$\therefore \frac{2\alpha}{\alpha+1}+\frac{2\beta}{\beta+1}=\frac{2\alpha(\beta+1)+2\beta(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}=\frac{4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}=\frac{4\times3+2\times(-2)}{3+(-2)+1}=4$$

076

이차방정식 $x^2-4x-7=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+4\beta$의 값을 구하시오. 23

$x^2-4x-7=0$의 한 근이 α이므로 이차방정식에 $x=\alpha$를 대입하면

$\alpha^2-4\alpha-7=0$ $\quad\therefore \alpha^2=4\alpha+7$

이때 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$이므로

$$\alpha^2+4\beta=(4\alpha+7)+4\beta=4(\alpha+\beta)+7=4\times4+7=23$$

077

이차방정식 $x^2-7x+a=0$의 두 근의 비가 2 : 5일 때, 이차방정식 $x^2+ax-2a+3=0$의 두 근의 곱을 구하시오. (단, a는 상수이다.) -17

이차방정식 $x^2-7x+a=0$의 두 근을 $2k$, $5k$ $(k\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 합: $2k+5k=7$ $\quad\therefore k=1$

두 근의 곱: $2k\times5k=a$ $\quad\therefore a=10$

따라서 이차방정식 $x^2+ax-2a+3=0$의 두 근의 곱은

$-2a+3=-2\times10+3=-17$

078

이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\dfrac{1}{\beta}$, $\beta+\dfrac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오. $x^2+6x+4=0$

이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=1$

두 근의 합: $\left(\alpha+\dfrac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\dfrac{1}{\alpha}\right)=(\alpha+\beta)+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-6$

두 근의 곱: $\left(\alpha+\dfrac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\dfrac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+2+\dfrac{1}{\alpha\beta}=4$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2+6x+4=0$

079

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이고, 이차방정식 $x^2+(b-2)x+a=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. 1

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$ ······ ㉠

또, 이차방정식 $x^2+(b-2)x+a=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+1)+(\beta+1)=-b+2$, $(\alpha+1)(\beta+1)=a$

$\therefore \alpha+\beta=-b$, $\alpha\beta+\alpha+\beta+1=a$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $-a=-b$, $b+(-a)+1=a$

$\therefore a=b$, $2a-b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$ $\quad\therefore ab=1$

080 실력UP

이차방정식 $x^2-8x+a=0$의 한 근이 $\dfrac{b-3i}{1-i}$일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 22

(단, $b\neq3$)

$\dfrac{b-3i}{1-i}=\dfrac{(b-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{(b+3)+(b-3)i}{2}$

이므로 $\dfrac{(b+3)-(b-3)i}{2}$도 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$\dfrac{(b+3)+(b-3)i}{2}+\dfrac{(b+3)-(b-3)i}{2}=8$, $b+3=8$ $\quad\therefore b=5$

따라서 주어진 이차방정식의 두 근은 $4+i$, $4-i$이므로 두 근의 곱은 $(4+i)(4-i)=4^2-i^2=17$ $\quad\therefore a=17$

$\therefore a+b=17+5=22$

중단원 마무리

◆ 복소수

허수단위 i	① $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$　② $a>0$일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$
복소수가 서로 같을 조건	a, b, c, d가 실수일 때, ① $a+bi=0 \iff a=0, b=0$　② $a+bi=c+di \iff a=c, b=d$
켤레복소수	$z=a+bi$ (a, b는 실수)일 때, $\overline{z}=\overline{a+bi}=a-bi$

◆ 이차방정식

$ax=b$의 해	① $a\neq0$일 때, $x=\frac{b}{a}$ ➡ (오직 하나의 해) ② $a=0$일 때, $\begin{cases} b\neq0\text{이면} \Rightarrow \text{해는 없다.} \\ b=0\text{이면} \Rightarrow \text{해는 모든 수이다.} \end{cases}$
절댓값 기호가 있는 방정식	절댓값 기호 안을 0으로 하는 수를 기준으로 구간을 나누어 푼다. ① $a\geq0$일 때, $\|a\|=a$ ② $a<0$일 때, $\|a\|=-a$
근의 공식	① $ax^2+bx+c=0$의 근은 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ② $ax^2+2b'x+c=0$의 근은 $x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ ⬅ 짝수 공식
이차방정식의 판별식	a, b, c가 실수일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면 ① $D=b^2-4ac>0$ ➡ 서로 다른 두 실근을 갖는다. ② $D=b^2-4ac=0$ ➡ 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다. ③ $D=b^2-4ac<0$ ➡ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

◆ 이차방정식의 활용

이차방정식의 근과 계수의 관계	이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 ① 두 근의 합: $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ② 두 근의 곱: $\alpha\beta=\frac{c}{a}$
이차방정식의 작성	① 두 수 α, β를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ ② 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$

STEP 1

081

복소수 $\frac{a-2i}{3+i}$의 실수부분과 허수부분의 합이 1일 때, 실수 a의 값을 구하시오. 9

$\frac{a-2i}{3+i}=\frac{(a-2i)(3-i)}{3^2-i^2}=\frac{3a-2}{10}-\frac{a+6}{10}i$

실수부분과 허수부분의 합이 1이므로

$\frac{3a-2}{10}+\left(-\frac{a+6}{10}\right)=1 \quad \therefore a=9$

082 교육청 기출

$x=2+i$, $y=2-i$일 때, $x^4+x^2y^2+y^4$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 9 ② 10 ● ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

$x+y=(2+i)+(2-i)=4$

$xy=(2+i)(2-i)=2^2-i^2=5$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4^2-2\times5=6$

$\therefore x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$

$=(x^2)^2+2x^2y^2+(y^2)^2-x^2y^2$

$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$

$=6^2-5^2=36-25=11$

083

복소수 $z=k(1+i)-3+i$에 대하여 z^2이 실수가 되도록 하는 실수 k의 값을 모두 구하시오. -1, 3

주어진 등식의 우변을 전개하여 $a+bi$의 꼴로 정리하면

$z=(k-3)+(k+1)i$

이때 z^2이 실수가 되는 것은 z가 실수이거나 순허수인 경우이다.

z가 실수일 때, $k=-1$

z가 순허수일 때, $k=3$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=3$

084

복소수 $z=\frac{1-i}{1+i}$에 대하여 $z+z^3+z^5+z^7+z^9$을 간단히 하면?

① i ● ② $-i$ ③ 0 ④ 1 ⑤ -1

$z=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{1^2-i^2}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$z^2=(-i)^2=-1$, $z^4=(-i)^4=1$

$\therefore z+z^3+z^5+z^7+z^9=z+z^2z+z^4z+z^4z^2z+z(z^4)^2$

$=z-z+z-z+z$

$=z=-i$

085

등식 $\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\cdots+\frac{100}{i^{100}}=a+bi$가 성립할 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 100

$\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\cdots+\frac{100}{i^{100}}$

$=\left(\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\frac{4}{i^4}\right)+\left(\frac{5}{i^5}+\frac{6}{i^6}+\frac{7}{i^7}+\frac{8}{i^8}\right)+\cdots$

$+\left(\frac{97}{i^{97}}+\frac{98}{i^{98}}+\frac{99}{i^{99}}+\frac{100}{i^{100}}\right)$

$=(-i-2+3i+4)+(-5i-6+7i+8)+\cdots$

$+(-97i-98+99i+100)$

$=(2+2i)+(2+2i)+\cdots+(2+2i)=50+50i$

따라서 $a=50$, $b=50$이므로 $a+b=100$

086

등식 $||x-1|-3|=2$를 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합을 구하시오. 4

$||x-1|-3|=2$에서 $|x-1|-3=\pm2$이므로

$|x-1|=5$ 또는 $|x-1|=1$

(i) $|x-1|=5$일 때, $x-1=\pm5$

$\therefore x=6$ 또는 $x=-4$

(ii) $|x-1|=1$일 때, $x-1=\pm1$

$\therefore x=2$ 또는 $x=0$

(i), (ii)에서 모든 실수 x의 값의 합은

$6+(-4)+2+0=4$

087

이차방정식

$$(k-2)x^2+(k+3)x+ak+b+1=0$$

이 실수 k의 값에 관계없이 항상 1을 근으로 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. -4

주어진 이차방정식에 $x=1$을 대입하면

$(k-2)+(k+3)+ak+b+1=0$

이 식을 k에 대하여 정리하면 $(a+2)k+(b+2)=0$

이 등식이 실수 k의 값에 관계없이 성립하므로

$a+2=0,\ b+2=0$ $\therefore a=-2,\ b=-2$

$\therefore a+b=-4$

088

x에 대한 이차식 $a(1+x^2)+2bx+c(1-x^2)$이 완전제곱식일 때, 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하시오. 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

$a(1+x^2)+2bx+c(1-x^2)$을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(a-c)x^2+2bx+a+c$

이 식은 x에 대한 이차식이므로 $a-c\neq 0$

이차방정식 $(a-c)x^2+2bx+a+c=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=b^2-(a-c)(a+c)=0$

$b^2-(a^2-c^2)=0$ $\therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

089

이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\frac{\beta}{\alpha^2-5\alpha+4}+\frac{\alpha}{\beta^2-5\beta+4}$의 값을 구하시오. 7

α, β는 $x^2-6x+4=0$의 근이므로 $\alpha^2=6\alpha-4$, $\beta^2=6\beta-4$

이를 주어진 식에 대입하면

(주어진 식)$=\frac{\beta}{(6\alpha-4)-5\alpha+4}+\frac{\alpha}{(6\beta-4)-5\beta+4}=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=4$이므로

$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=7$

STEP 2

090

두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha\overline{\beta}=2$, $\alpha+\frac{1}{\overline{\alpha}}=3i$일 때, $\frac{\beta}{2}+\frac{2}{\overline{\beta}}$의 값을 구하시오. $3i$

(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

$\alpha\overline{\beta}=2$에서 $\alpha=\frac{2}{\overline{\beta}}$, $\overline{\alpha\overline{\beta}}=\overline{\alpha}\beta=2$이므로 $\beta=\frac{2}{\overline{\alpha}}$, 즉 $\frac{\beta}{2}=\frac{1}{\overline{\alpha}}$

$\therefore \frac{\beta}{2}+\frac{2}{\overline{\beta}}=\frac{1}{\overline{\alpha}}+\alpha=3i$

091

두 복소수 z_1, z_2에 대하여 $z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}=3$이고, $z_1+z_2=-6+9i$일 때, $\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}$의 값을 구하시오.

(단, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$는 각각 z_1, z_2의 켤레복소수이다.) $-2-3i$

$\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}=\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_1}$

$=\frac{\overline{z_1}}{3}+\frac{\overline{z_2}}{3}=\frac{\overline{z_1+z_2}}{3}=\frac{-6-9i}{3}=-2-3i$

092

$x^2i+y^2-10+3ix-y-13i=\overline{2+3i}$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 최댓값을 구하시오. 6

주어진 식을 정리하면 $(y^2-y-10)+(x^2+3x-13)i=2-3i$

$y^2-y-10=2$에서 $y^2-y-12=0$ $\therefore y=-3$ 또는 $y=4$

$x^2+3x-13=-3$에서 $x^2+3x-10=0$ $\therefore x=-5$ 또는 $x=2$

따라서 $x+y$의 값은 $x=2$, $y=4$일 때 최대이므로 구하는 최댓값은 $x+y=6$

093

0이 아닌 세 실수 a, b, c에 대하여

$$\underbrace{\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}}_{a<0,\ b<0},\quad \underbrace{\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{c}{a}}}_{a<0,\ c>0}$$

가 성립할 때, $\sqrt{a^2}+\sqrt{(b-c)^2}-\sqrt{c^2}+|c-b|$를 간단히 하면?

① $a-c$ ② $a+2b-c$

③ $-a+c$ ④ $-a-2b-c$

⑤ $-a-2b+c$

$\sqrt{a^2}+\sqrt{(b-c)^2}-\sqrt{c^2}+|c-b|=-a-(b-c)-c+c-b$

$=-a-2b+c$

094

어떤 자연수 n에 대하여 $z=i^n+\dfrac{1}{i^n}$을 만족시키는 z의 값을 모두 구하시오. $0,\ -2,\ 2$

i^n의 값은 n을 4로 나누었을 때 나머지의 i의 거듭제곱과 같으므로 n이 1, 2, 3, 4인 경우만 따지면 된다.

(ⅰ) $n=1$일 때, $z=i-i=0$

(ⅱ) $n=2$일 때, $z=-1+(-1)=-2$

(ⅲ) $n=3$일 때, $z=-i+i=0$

(ⅳ) $n=4$일 때, $z=1+1=2$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $z=0$ 또는 $z=-2$ 또는 $z=2$

095

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 α, β에 대하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-6$일 때, 이차방정식 $f(3x-4)=0$의 두 근의 곱을 구하시오. 2

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(3x-4)=0$의 두 근은

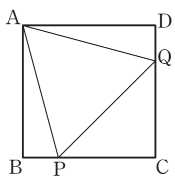
$3x-4=\alpha$, $3x-4=\beta$에서 $x=\dfrac{\alpha+4}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+4}{3}$

따라서 $f(3x-4)=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha+4}{3}\times\frac{\beta+4}{3}=\frac{4(\alpha+\beta)+\alpha\beta+16}{9}$$
$$=\frac{4\times2-6+16}{9}=2$$

096

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD가 있다. 두 변 BC, CD 위에 각각 점 P, Q를 잡아 삼각형 APQ가 정삼각형이 되도록 하였다. 이때 선분 BP의 길이를 구하시오. $4-2\sqrt{3}$



$\overline{BP}=x$라 하면 $\overline{CP}=\overline{CQ}=2-x$

삼각형 APQ가 정삼각형이므로 $\overline{AP}=\overline{PQ}$

$\overline{AP}^2=\overline{PQ}^2$이므로 두 직각삼각형 ABP, PCQ에서 각각 피타고라스 정리에 의하여

$2^2+x^2=(2-x)^2+(2-x)^2$ $\quad\therefore x^2-8x+4=0$

근의 공식에 의하여 $x=4\pm2\sqrt{3}$

$0<x<2$이므로 선분 BP의 길이는 $4-2\sqrt{3}$

097

승연이와 정우가 이차방정식 $x^2+ax+b=0$을 푸는데 승연이는 a를 잘못 보고 풀어서 두 근 -2, 8을 얻었고, 정우는 b를 잘못 보고 풀어서 두 근 $-3-\sqrt{3}i$, $-3+\sqrt{3}i$를 얻었을 때, 원래의 이차방정식을 푸시오. $x=-8$ 또는 $x=2$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의

(두 근의 합)$=-a$, (두 근의 곱)$=b$

승연이는 b는 바르게 보고 풀었으므로 $b=-2\times8=-16$

정우는 a는 바르게 보고 풀었으므로

$-a=(-3-\sqrt{3}i)+(-3+\sqrt{3}i)=-6$ $\quad\therefore a=6$

따라서 원래의 이차방정식은 $x^2+6x-16=0$이므로

$(x+8)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-8$ 또는 $x=2$

098

이차방정식 $x^2-3x+k=0$의 두 실근을 α, β라 할 때, $|\alpha|+|\beta|=5$를 만족시키는 상수 k에 대하여 $\alpha^2+\beta^2+k$의 값을 구하시오. 13

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=k$이므로

$(|\alpha|+|\beta|)^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|$

$\qquad\qquad\quad=3^2-2k+2|k|=25$

$-2k+2|k|=16$ $\quad\therefore -k+|k|=8$

(ⅰ) $k\geq0$일 때, $0=8$이므로 성립하지 않는다.

(ⅱ) $k<0$일 때, $-k-k=8$ $\quad\therefore k=-4$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+k=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+k=9-(-4)=13$

099 ●— 교육청 기출

x에 대한 이차방정식 $x^2-px+p+19=0$이 서로 다른 두 허근을 갖는다. 한 허근의 허수부분이 2일 때, 양의 실수 p의 값을 구하시오. 10

p가 실수이므로 주어진 이차방정식의 서로 다른 두 허근은 서로 켤레복소수이다. 한 허근의 실수부분을 a라 하면 두 근은 $a+2i$, $a-2i$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(a+2i)+(a-2i)=2a=p$ $\quad\therefore a=\dfrac{p}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, $(a+2i)(a-2i)=p+19$이므로

$a^2-(2i)^2=p+19$ $\quad\therefore a^2=p+15$

위의 식에 ㉠을 대입하면 $\left(\dfrac{p}{2}\right)^2=p+15$

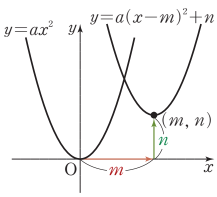
$p^2-4p-60=0$, $(p+6)(p-10)=0$

따라서 p는 양수이므로 $p=10$

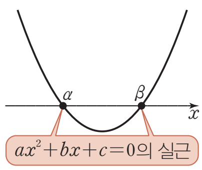
2 이차방정식과 이차함수

이차함수의 그래프는 포물선이다.
다시 말하면 물건을 던질 때 나타나는 곡선.
이차함수의 그래프를 그리면 이차방정식의 근이 보인다.

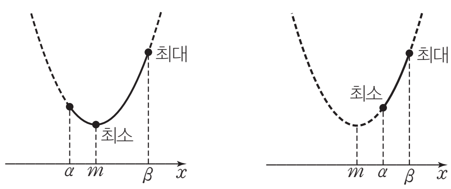
1 이차함수의 그래프



2 이차함수와 이차방정식



3 이차함수의 최대, 최소



1 이차함수의 그래프

01 일차함수의 그래프

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 다항식일 때, 그 함수를 **다항함수**라 하고, 특히 $f(x)$가 일차식일 때 그 함수를 **일차함수**라 한다.

$$y=f(x)=\left\{\begin{array}{ll} ax+b\ (\text{단, } a\neq 0) & \Rightarrow \text{ 일차함수} \\ ax^2+bx+c\ (\text{단, } a\neq 0) & \Rightarrow \text{ 이차함수} \\ ax^3+bx^2+cx+d\ (\text{단, } a\neq 0) & \Rightarrow \text{ 삼차함수} \\ \quad\vdots & \quad\ \vdots \end{array}\right\}\text{다항함수}$$

좌표평면 위에서 일차함수의 그래프는 직선을 나타내고, 다음과 같이 정리할 수 있다.

함수 $y=ax+b$의 그래프 ➡ 기울기가 a이고, y절편이 b인 직선

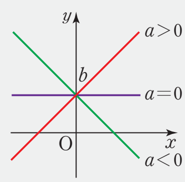
(1) 기울기: a

① $a>0$이면 오른쪽 위로 올라가는 직선

② $a=0$이면 x축에 평행한 직선

③ $a<0$이면 오른쪽 아래로 내려가는 직선

④ $|a|$가 클수록 y축에 가까워진다.

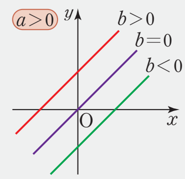


(2) y절편: b

① $b>0$이면 y축과의 교점이 원점보다 위쪽에 위치

② $b=0$이면 y축과의 교점이 원점과 일치

③ $b<0$이면 y축과의 교점이 원점보다 아래쪽에 위치



설명 (1) **기울기에 대한 다양한 이해**

① 기울기는 x의 값의 증가량에 대한 y의 값의 증가량의 비율이다.

➡ 기울기가 양수이면 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하고,
기울기가 음수이면 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다.

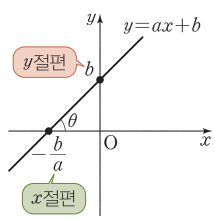
② 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

➡ (기울기)$=\tan\theta$

(2) **x절편과 y절편**

① x절편: 직선이 x축과 만나는 점의 x좌표 ➡ $y=0$일 때의 x의 값

② y절편: 직선이 y축과 만나는 점의 y좌표 ➡ $x=0$일 때의 y의 값



大 원칙

일차함수의 식은 그래프의 기울기 m과 그래프가 지나는 한 점 (x_1, y_1)만 알면

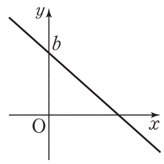
$$y-y_1=m(x-x_1)$$

로 구할 수 있다. 따라서 문제에서 이외의 조건이 주어지면 주어진 조건을 이용하여 그래프의 **기울기**와 그래프가 **지나는 한 점**을 알아내는 것이 중요하다.

100 $a<0$, $b>0$일 때, 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 지나지 않는 사분면을 구하시오.

풍산자팁 일차함수의 그래프의 개형을 그리려면 기울기와 y절편의 부호를 관찰하면 된다.

풀이 기울기 a가 음수 ➡ 오른쪽 아래로 내려가는 직선
y절편 b가 양수 ➡ y축과의 교점은 원점보다 위쪽
따라서 $y=ax+b$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 이 그래프가 지나지 않는 사분면은 **제3사분면**이다.



정답과 풀이 36쪽

유제 **101** $a>0$, $b<0$일 때, 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 지나지 않는 사분면을 구하시오. 제2사분면

102 일차함수 $y=(a-1)x+b-2$의 그래프가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$이고 y절편이 -1일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

풍산자팁 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기 θ가 주어지면 기울기를 구할 수 있다.
➡ (기울기)$=\tan\theta$

풀이 주어진 일차함수의 그래프가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$이므로
(기울기)$=a-1=\tan 45°$
$a-1=1$ $\quad\therefore \boldsymbol{a=2}$
또, y절편이 -1이므로 $b-2=-1$ $\quad\therefore \boldsymbol{b=1}$

참고 $\tan 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan 45°=1$, $\tan 60°=\sqrt{3}$

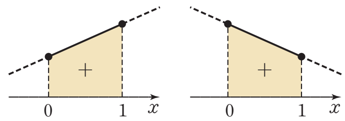
정답과 풀이 36쪽

유제 **103** 일차함수 $y=(a+2)x-2b+7$의 그래프가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$이고 y절편이 3일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오. $a=\sqrt{3}-2$, $b=2$

104 함수 $f(x)=2mx-m+3$이 $0\le x\le 1$에서 항상 양의 값을 가질 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

풍산자티 항상 양의 값을 가진다. ➡ 그래프가 x축 위로 붕 뜬다. ➡ 양 끝값이 양수이다.

풀이 $f(x)$가 $0\le x\le 1$에서 항상 양의 값을 가지려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 x축보다 위쪽에 있어야 하므로



$f(0)>0$, $f(1)>0$

따라서 $-m+3>0$, $2m-m+3>0$이므로

$\boldsymbol{-3<m<3}$

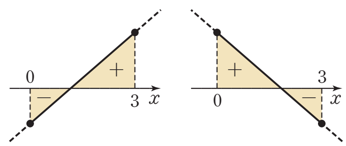
정답과 풀이 36쪽

유제 **105** 함수 $f(x)=mx-2m+2$가 $1<x<4$에서 항상 양의 값을 가질 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오. $-1\le m\le 2$

106 함수 $f(x)=mx-2m+4$가 $0\le x\le 3$에서 양, 음의 값을 모두 가질 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

풍산자티 양, 음의 값을 모두 가진다. ➡ 양 끝값의 부호가 다르다.

풀이 $f(x)$가 $0\le x\le 3$에서 양, 음의 값을 모두 가지려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $f(0)$과 $f(3)$의 값의 부호가 달라야 하므로

$f(0)f(3)<0$

$(-2m+4)(m+4)<0$, $(m-2)(m+4)>0$

$\therefore$ $\boldsymbol{m<-4}$ **또는** $\boldsymbol{m>2}$

정답과 풀이 36쪽

유제 **107** 함수 $f(x)=mx+2m+1$이 $-1<x<1$에서 양, 음의 값을 모두 가질 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오. $-1<m<-\frac{1}{3}$

+ 풍산자 비법

- 일차함수의 식은 그래프의 기울기와 y절편만 알면 구할 수 있다.
- 기울기의 의미를 그래프와 연결하여 정확히 이해한다.

➡ $\begin{cases} (\text{기울기})>0\text{이면 그래프는 오른쪽 위로} \\ (\text{기울기})<0\text{이면 그래프는 오른쪽 아래로} \end{cases}$

02 이차함수의 그래프

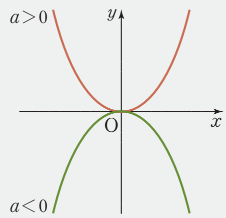
모든 이차함수의 그래프는 ∪ 또는 ∩ 꼴의 포물선이다.
이차함수의 그래프에서는 꼭짓점과 축이 특히 중요하다. 일반형을 표준형으로 고치면 꼭짓점과 축을 한눈에 알아볼 수 있다.

(1) 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

① 원점을 꼭짓점으로 하고, y축을 축으로 하는 포물선이다.

② $a>0$일 때, 아래로 볼록, 즉 ∪ 꼴의 포물선
$a<0$일 때, 위로 볼록, 즉 ∩ 꼴의 포물선

③ $|a|$의 값이 클수록 그래프는 y축에 가까워진다.

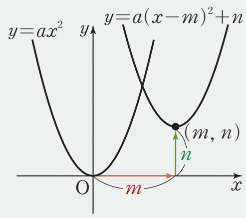


(2) 이차함수 $y=a(x-m)^2+n$의 그래프 ⇐ 표준형

이차함수 $y=a(x-m)^2+n$의 그래프는
$y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼,
y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프이다.

① 꼭짓점의 좌표: $(m,\ n)$

② 축의 방정식: $x=m$



(3) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프 ⇐ 일반형

$$y=ax^2+bx+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

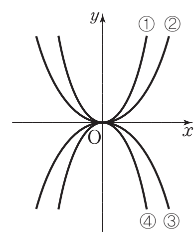
① 꼭짓점의 좌표: $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

② 축의 방정식: $x=-\frac{b}{2a}$

③ y축과 만나는 점의 y좌표: c

개념확인

이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 그림과 같을 때,
a의 값이 가장 큰 것을 구하시오.



풀이 $a>0$이면 그래프는 ∪ 꼴, $a<0$이면 그래프는 ∩ 꼴이다.
또, $|a|$의 값이 클수록 그래프는 y축에 가까워진다. 이때 $a<0$이면 $|a|$의 값이 클수록 a의 값은 작아진다.
따라서 a의 값을 비교하면 ①>②>0>③>④이므로 가장 큰 것은 ①이다.

이차함수의 식의 여러 가지 꼴을 활용하는 방법은 다음과 같다.

(1) 꼭짓점 $(m,\ n)$이 주어질 때 ➡ $y=a(x-m)^2+n$

(2) x축과의 교점의 x좌표 $\alpha,\ \beta$가 주어질 때 ➡ $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

(3) 그래프 위의 세 점이 주어질 때 ➡ $y=ax^2+bx+c$

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 보면 계수 a, b, c의 부호를 알 수 있다.

(1) **a의 부호: 그래프의 모양으로 결정**

① ∪ 꼴이면 $a>0$

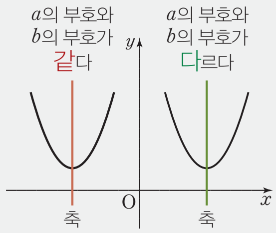
② ∩ 꼴이면 $a<0$

(2) **b의 부호: 축의 위치로 결정**

오른쪽 그림과 같은 「같−다」의 규칙을 따른다.

① 축이 y축의 왼쪽 ➡ a, b의 부호는 같다.

② 축이 y축의 오른쪽 ➡ a, b의 부호는 다르다.



(3) **c의 부호: y축과 만나는 점의 y좌표로 결정**

① y축과 만나는 점의 y좌표가 양수이면 $c>0$

② y축과 만나는 점의 y좌표가 음수이면 $c<0$

설명 축이 y축의 왼쪽 ➡ $-\dfrac{b}{2a}<0$에서 $\dfrac{b}{2a}>0$ ➡ a, b의 부호는 같다.

축이 y축의 오른쪽 ➡ $-\dfrac{b}{2a}>0$에서 $\dfrac{b}{2a}<0$ ➡ a, b의 부호는 다르다.

108 다음 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표, 축의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그리시오.

(1) $y=x^2-4x+3$ (2) $y=-2x^2-4x+6$

풍산자비 이차함수의 그래프를 그리려면 일단 식을 완전제곱식으로 변형하여 표준형으로 고치고 본다.

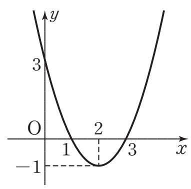
풀이 (1) $y=x^2-4x+3$

$=(x^2-4x+4-4)+3$

$=(x-2)^2-1$

꼭짓점의 좌표: $(2,\ -1)$, 축의 방정식: $x=2$

그래프는 오른쪽 그림과 같다.



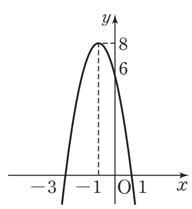
(2) $y=-2x^2-4x+6$

$=-2(x^2+2x+1-1)+6$

$=-2(x+1)^2+8$

꼭짓점의 좌표: $(-1,\ 8)$, 축의 방정식: $x=-1$

그래프는 오른쪽 그림과 같다.



정답과 풀이 36쪽

유제 **109** 다음 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표, 축의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그리시오.

풀이 참조

(1) $y=x^2+6x+5$ (2) $y=-x^2+2x+8$

● 이차함수의 그래프가 지나는 사분면

110 이차함수 $y=3x^2+6x+2$의 그래프가 지나지 않는 사분면을 구하시오.

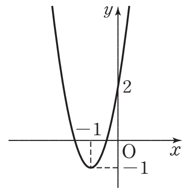
풍산자日 지나지 않는 사분면을 구하라? 결국 그래프를 그리라는 소리.

풀이 $y=3x^2+6x+2=3(x^2+2x+1-1)+2=3(x+1)^2-1$

꼭짓점의 좌표: $(-1,\ -1)$

축의 방정식: $x=-1$

따라서 오른쪽 그림에서 지나지 않는 사분면은 **제4사분면**이다.



정답과 풀이 36쪽

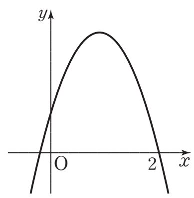
유제 **111** 이차함수 $y=2x^2-8x+3$의 그래프가 지나지 않는 사분면을 구하시오. 제3사분면

● 이차함수의 그래프와 계수의 부호

112 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 식의 부호를 정하시오.

(1) a (2) b (3) c

(4) $a+b+c$ (5) $4a+2b+c$ (6) $a+2b+4c$



풍산자日 그래프를 보고 계수의 부호를 결정하는 문제. 계수 a, b, c의 부호는 그래프를 보고 즉시 판정할 수 있고, 나머지 식의 부호는 적당한 수를 대입하여 얻을 수 있다.

풀이 (1) 주어진 그래프의 모양이 ∩ 꼴이므로 $\boldsymbol{a<0}$

(2) 축이 y축의 오른쪽에 있으므로 a, b의 부호는 다르다. 즉, $\boldsymbol{b>0}$

(3) y축과 만나는 점의 y좌표가 양수이므로 $\boldsymbol{c>0}$

(4) $x=1$일 때, $y>0$이므로 $\boldsymbol{a+b+c>0}$

(5) $x=2$일 때, $y=0$이므로 $\boldsymbol{4a+2b+c=0}$

(6) $x=\frac{1}{2}$일 때, $y>0$이므로 $\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c>0$

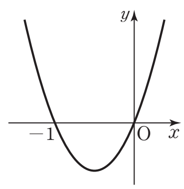
$\therefore\ \boldsymbol{a+2b+4c}=4\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c\right)\boldsymbol{>0}$

정답과 풀이 36쪽

유제 **113** 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 원점을 지날 때, 다음 식의 부호를 정하시오.

(1) a $a>0$ (2) b $b>0$ (3) c $c=0$

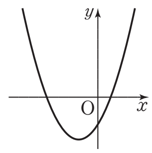
(4) $a-b+c$ $a-b+c=0$ (5) $4a-2b+c$ $4a-2b+c>0$ (6) $a-2b+4c$ $a-2b+4c<0$



114 $a<0$, $b>0$, $c>0$일 때, 이차함수 $y=cx^2+bx+a$의 그래프의 개형을 그리시오.

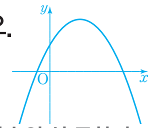
풍산자 계수의 부호를 알고 그래프를 결정하는 문제. 이차항의 계수가 c임에 유의한다.

풀이 $y=cx^2+bx+a$에서 $c>0$이므로 ∪ 꼴이다.
c, b의 부호가 같으므로 축은 y축의 왼쪽에 있다.
$a<0$이므로 y축과 만나는 점의 y좌표는 음수이다.
따라서 **그래프의 개형은 오른쪽 그림**과 같다.



정답과 풀이 37쪽

유제 **115** $a>0$, $b>0$, $c<0$일 때, 이차함수 $y=cx^2+bx+a$의 그래프의 개형을 그리시오.



● 이차함수의 식 구하기

116 다음 조건을 만족시키는 이차함수의 식을 구하시오.

(1) 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -2)$이고, 점 $(3,\ -6)$을 지난다.

(2) 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 1, 2이고, 점 $(3,\ 4)$를 지난다.

(3) 그래프가 세 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(-1,\ -2)$를 지난다.

풍산자 조건에 맞도록 적절하게 식을 설정한 후 그래프가 지나는 점의 좌표를 대입하여 계수를 구하면 된다.

풀이 (1) 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -2)$이므로 $y=a(x-1)^2-2$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.
이 이차함수의 그래프가 점 $(3,\ -6)$을 지나므로
$4a-2=-6$, $a=-1$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{y=-(x-1)^2-2}$

(2) x축과 만나는 점의 x좌표가 1, 2이므로 $y=a(x-1)(x-2)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.
이 이차함수의 그래프가 점 $(3,\ 4)$를 지나므로 $2a=4$ $\quad\therefore$ $a=2$
$\therefore$ $\boldsymbol{y=2(x-1)(x-2)}$

(3) $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면 이 이차함수의 그래프가 세 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(-1,\ -2)$를 지나므로
$c=1$, $a+b+c=2$, $a-b+c=-2$ $\quad\therefore$ $a=-1$, $b=2$, $c=1$
$\therefore$ $\boldsymbol{y=-x^2+2x+1}$

정답과 풀이 37쪽

유제 **117** 다음 조건을 만족시키는 이차함수의 식을 구하시오.

(1) 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ 3)$이고, 점 $(-1,\ -1)$을 지난다. $y=-4(x+2)^2+3$

(2) 그래프와 x축과의 교점의 좌표가 $(-1,\ 0)$, $(2,\ 0)$, y축과의 교점의 좌표가 $(0,\ -6)$이다. $y=3(x+1)(x-2)$

(3) 그래프가 세 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 8)$을 지난다. $y=3x^2-2x$

118 이차함수 $y=x^2-2ax+2a+3$의 그래프의 꼭짓점이 제1사분면에 있도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

풍산자Ⓑ 꼭짓점 (m, n)이 제1사분면에 있으려면 $m>0$, $n>0$이어야 한다.

풀이 $y=x^2-2ax+2a+3=(x^2-2ax+a^2-a^2)+2a+3$
$=(x-a)^2-a^2+2a+3$
꼭짓점의 좌표는 $(a, -a^2+2a+3)$이므로 꼭짓점이 제1사분면에 있으려면
$a>0$ (…… ㉠), $-a^2+2a+3>0$
$-a^2+2a+3>0$에서 $a^2-2a-3<0$
$(a+1)(a-3)<0$ $\therefore -1<a<3$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\mathbf{0<a<3}$

정답과 풀이 37쪽

유제 **119** 이차함수 $y=x^2-2mx+m+2$의 그래프의 꼭짓점이 제3사분면에 있도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하시오. $m<-1$

120 이차함수 $y=x^2+ax-a$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 일정한 점 P를 지난다. 점 P가 이 그래프의 꼭짓점일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

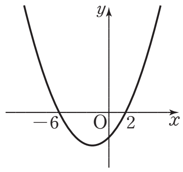
풍산자Ⓑ a의 값에 관계없이 항상 성립 ➡ a에 대한 항등식 ➡ $(\ )a+(\ )=0$의 꼴로 정리

풀이 주어진 식을 a에 대하여 정리하면
$a(x-1)+(x^2-y)=0$
이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$x-1=0$, $x^2-y=0$ $\therefore x=1, y=1$
따라서 점 P의 좌표는 $(1, 1)$이고, 이 점이 그래프의 꼭짓점이므로
$y=x^2+ax-a=(x-1)^2+1=x^2-2x+2$ $\therefore a=\mathbf{-2}$

정답과 풀이 37쪽

유제 **121** 이차함수 $y=x^2+mx-2m$의 그래프는 m의 값에 관계없이 항상 일정한 점 P를 지난다. 점 P가 이 그래프의 꼭짓점일 때, 상수 m의 값을 구하시오. -4

122 이차함수 $y=\frac{1}{4}x^2-ax+b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.



풍산자Ⓘ 그래프가 나왔다고 당황할 것 없다. 그래프가 지나는 점을 찾으면 된다.

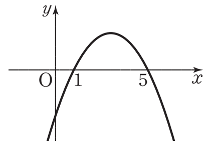
풀이 주어진 이차함수의 그래프가 두 점 $(-6, 0)$, $(2, 0)$을 지나므로

$y=\frac{1}{4}x^2-ax+b=\frac{1}{4}(x+6)(x-2)=\frac{1}{4}x^2+x-3$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=-1}$, $\boldsymbol{b=-3}$

정답과 풀이 37쪽

유제 **123** 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2+ax+b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, b의 값을 구하시오. $a=3$, $b=-\frac{5}{2}$



124 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 두 점 $(1, 0)$, $(-3, 0)$에서 만나고, 꼭짓점이 직선 $y=x-1$ 위에 있을 때, 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

풍산자Ⓘ x축과 두 점 $(1, 0)$, $(-3, 0)$에서 만난다? 두 점 $(1, 0)$, $(-3, 0)$을 지난다는 소리.

풀이 주어진 이차함수의 그래프가 두 점 $(1, 0)$, $(-3, 0)$을 지나므로

$y=ax^2+bx+c=a(x-1)(x+3)=a(x^2+2x-3)$ ······ ㉠

$=a(x+1)^2-4a$

꼭짓점의 좌표는 $(-1, -4a)$이고, 이 점이 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로

$-4a=-1-1$ $\therefore$ $\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$

즉, ㉠에서 $y=\frac{1}{2}(x^2+2x-3)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$이므로 $\boldsymbol{b=1}$, $\boldsymbol{c=-\frac{3}{2}}$

정답과 풀이 37쪽

유제 **125** 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 두 점 $(-4, 0)$, $(2, 0)$에서 만나고, 꼭짓점이 직선 $y=-2x+7$ 위에 있을 때, 상수 a, b, c의 값을 구하시오. $a=-1$, $b=-2$, $c=8$

+ 풍산자 비법

이차함수에서 가장 중요한 것은 그래프 그리기이다. 그래프의 꼭짓점의 좌표와 x축, y축과의 교점의 좌표를 구하면 쉽게 그릴 수 있다.

필수 확인 문제

정답과 풀이 38쪽

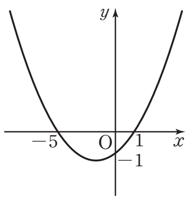
126

함수 $f(x)=mx-15$가 $3\le x\le 5$에서 양, 음의 값을 모두 갖도록 하는 정수 m의 개수를 구하시오. 1

$f(3)$과 $f(5)$의 값의 부호가 달라야 한다.
즉, $f(3)f(5)<0$에서 $(3m-15)(5m-15)<0$이므로
$(m-5)(m-3)<0 \quad \therefore 3<m<5$
따라서 정수 m은 4이므로 그 개수는 1이다.

127

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $f(5)$의 값은?

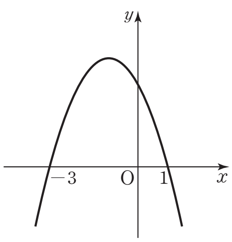


① 2 ② 4
③ 6 ● ④ 8
⑤ 10

주어진 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(-5, 0)$, $(1, 0)$을 지나므로 $f(x)=a(x+5)(x-1)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.
또, 주어진 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, -1)$을 지나므로
$f(0)=a\times(0+5)\times(0-1)=-1 \quad \therefore a=\frac{1}{5}$
따라서 $f(x)=\frac{1}{5}(x+5)(x-1)$이므로 $f(5)=8$

128

이차함수
$y=ax^2+bx+c$
의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 옳지 않은 것은?



① $ab>0$ ② $bc<0$
③ $a+b+c=0$ ④ $4a-2b+c>0$
● ⑤ $a+2b+4c<0$

① 주어진 그래프의 모양이 ∩ 꼴이므로 $a<0$
축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $b<0 \quad \therefore ab>0$
② y축과 만나는 점의 y좌표가 양수이므로 $c>0 \quad \therefore bc<0$
③ $x=1$일 때, $y=0$이므로 $a+b+c=0$
④ $x=-2$일 때, $y>0$이므로 $4a-2b+c>0$
⑤ $x=\frac{1}{2}$일 때, $y>0$이므로 $\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c>0$
$\therefore a+2b+4c=4\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c\right)>0$

129

이차함수 $y=x^2-2mx+2m+24$의 그래프의 꼭짓점이 제2사분면에 있을 때, 모든 정수 m의 값의 합을 구하시오. -6

$y=(x-m)^2-m^2+2m+24$
꼭짓점의 좌표는 $(m, -m^2+2m+24)$이므로
꼭짓점이 제2사분면에 있으려면
$m<0$ (⋯⋯ ㉠), $-m^2+2m+24>0$
$-m^2+2m+24>0$에서 $-4<m<6$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-4<m<0$
따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 m은 $-3, -2, -1$이므로
그 합은 $-3+(-2)+(-1)=-6$

130

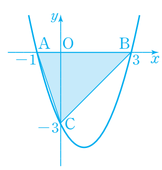
이차함수 $y=x^2+2ax+a+1$의 그래프의 꼭짓점이 직선 $y=x+1$ 위에 있을 때, 모든 상수 a의 값의 합을 구하시오. 2

$y=x^2+2ax+a+1=(x^2+2ax+a^2-a^2)+a+1$
$=(x+a)^2-a^2+a+1$
꼭짓점의 좌표는 $(-a, -a^2+a+1)$이므로
꼭짓점이 직선 $y=x+1$ 위에 있으려면
$-a^2+a+1=-a+1$, $a^2-2a=0$, $a(a-2)=0$
$\therefore a=0$ 또는 $a=2$
따라서 모든 a의 값의 합은 2이다.

131 실력UP

꼭짓점의 좌표가 $(1, -4)$이고, 점 $(2, -3)$을 지나는 이차함수의 그래프와 x축의 두 교점을 각각 A, B라 하고 y축의 교점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. 6

$y=a(x-1)^2-4$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.
이 이차함수의 그래프가 점 $(2, -3)$을 지나므로
$a-4=-3 \quad \therefore a=1$
$\therefore y=(x-1)^2-4=x^2-2x-3$
$x^2-2x-3=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$
이차함수의 그래프와 x축의 두 교점의 좌표는
$(-1, 0)$, $(3, 0)$
이차함수의 그래프와 y축의 교점은 C$(0, -3)$
따라서 A$(-1, 0)$, B$(3, 0)$이라 하면 오른쪽 그림에서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times3=6$



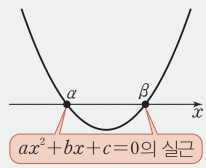
2 이차함수와 이차방정식

01 이차함수의 그래프와 x축의 교점

교점의 좌표를 구하라는 것은 연립방정식을 풀라는 말씀.
교점의 좌표는 두 함수의 식을 동시에 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y)$를 뜻하기 때문이다.

이차함수의 그래프와 x축의 교점

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근이다.

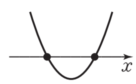
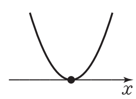
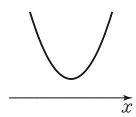
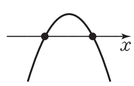
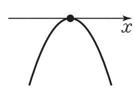
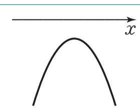


설명 x축의 방정식은 $y=0$이므로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는

➡ 연립방정식 $\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=0 \end{cases}$을 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y)$에서 x의 값

➡ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 D의 부호에 따라 다음과 같이 결정된다. 이때 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근과 같으므로 교점의 개수는 실근의 개수와 같다.

판별식의 부호		$D>0$	$D=0$	$D<0$
위치 관계		서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	만나지 않는다.
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프	$a>0$			
	$a<0$			
교점의 개수		2	1	0
이차방정식의 실근의 개수		2	1	0

참고 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 만나면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, $D\geq 0$이다.

132 다음 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 좌표를 구하시오.

(1) $y=x^2+4x-5$ (2) $y=16x^2-8x+1$ (3) $y=x^2-2x+2$

풍산자 tip 이차함수의 그래프와 x축의 교점을 구하려면 $y=0$을 대입한다.

풀이 (1) $y=x^2+4x-5$에서 $y=0$을 대입하면 $x^2+4x-5=0$

$(x+5)(x-1)=0 \quad \therefore x=-5$ 또는 $x=1$

따라서 교점의 좌표는 $(-5, 0)$, $(1, 0)$이다.

(2) $y=16x^2-8x+1$에서 $y=0$을 대입하면

$16x^2-8x+1=0$, $(4x-1)^2=0 \quad \therefore x=\frac{1}{4}$

따라서 교점의 좌표는 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$이다.

(3) $y=x^2-2x+2$에서 $y=0$을 대입하면 $x^2-2x+2=0$

근의 공식에 의하여 $x=1\pm i$ ➡ 허근!

따라서 **교점은 없다.**

정답과 풀이 **39**쪽

유제 **133** 다음 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 좌표를 구하시오.

(1) $y=x^2-4x-12$ $(-2, 0)$, $(6, 0)$ (2) $y=x^2+6x+9$ $(-3, 0)$ (3) $y=x^2-4x+6$ 없다.

134 다음 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구하시오.

(1) $y=x^2-4x+2$ (2) $y=-9x^2+12x-4$ (3) $y=x^2-3x+4$

풍산자 tip 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구하려면 이차방정식의 판별식을 이용한다.

풀이 (1) 이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times2=2>0$이므로 교점의 개수는 **2**이다.

(2) 이차방정식 $-9x^2+12x-4=0$, 즉 $9x^2-12x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-9\times4=0$이므로 교점의 개수는 **1**이다.

(3) 이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times1\times4=-7<0$이므로 교점의 개수는 **0**이다.

정답과 풀이 **39**쪽

유제 **135** 다음 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구하시오.

(1) $y=-8x^2+6x-3$ 0 (2) $y=3x^2+8x-2$ 2 (3) $y=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$ 1

136 이차함수 $y=x^2+ax+a$의 그래프와 x축의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 a의 값 또는 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 접한다. (3) 만나지 않는다.

풍산자답 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 판정하려면 이차방정식의 판별식을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+ax+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4a=a(a-4)$

(1) $D=a(a-4)>0$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{a<0}$ **또는** $\boldsymbol{a>4}$

(2) $D=a(a-4)=0$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{a=0}$ **또는** $\boldsymbol{a=4}$

(3) $D=a(a-4)<0$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{0<a<4}$

정답과 풀이 39쪽

유제 **137** 이차함수 $y=x^2-ax+4a$의 그래프와 x축의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 a의 값 또는 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다. $a<0$ 또는 $a>16$

(2) 접한다. $a=0$ 또는 $a=16$

(3) 만나지 않는다. $0<a<16$

138 이차함수 $y=x^2-2x+3a$의 그래프는 x축과 만나고, 이차함수 $y=x^2+2ax+1$의 그래프는 x축과 만나지 않을 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

풍산자답 만나는 경우는 서로 다른 두 점에서 만나는 경우와 접하는 경우를 모두 포함한다.

(i) 만날 조건: $D\ge0$ (ii) 만나지 않을 조건: $D<0$

풀이 이차방정식 $x^2-2x+3a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-3a\ge0$ $\quad\therefore$ $a\le\frac{1}{3}$ ……㉠

이차방정식 $x^2+2ax+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=a^2-1<0$, $(a+1)(a-1)<0$

$\therefore$ $-1<a<1$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\boldsymbol{-1<a\le\frac{1}{3}}$

정답과 풀이 39쪽

유제 **139** 이차함수 $y=x^2+4x-2a$의 그래프는 x축과 만나고, 이차함수 $y=8x^2-2ax+2$의 그래프는 x축과 만나지 않을 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오. $-2\le a<4$

140 이차함수 $y=x^2-2(a+k)x+k^2-2k+b$의 그래프가 k의 값에 관계없이 항상 x축에 접할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

풍산자답 k의 값에 관계없이 항상 x축에 접한다.
➡ k의 값에 관계없이 항상 (판별식)$=D=0$이 성립한다.
➡ $D=0$이 k에 대한 항등식이다.
한마디로 $D=0$을 ( )k+( )$=0$의 꼴로 정리하여 항등식의 성질을 이용한다.

풀이 [1단계] 주어진 이차함수의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식
$x^2-2(a+k)x+k^2-2k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(a+k)\}^2-(k^2-2k+b)=0$$

$a^2+2ak+k^2-k^2+2k-b=0$ $\qquad\therefore (2a+2)k+a^2-b=0$

[2단계] 이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
$2a+2=0$, $a^2-b=0$
두 식을 연립하여 풀면 $\boldsymbol{a=-1}$, $\boldsymbol{b=1}$

정답과 풀이 39쪽

유제 **141** 이차함수 $y=x^2-2ax+ak+6k+b$의 그래프가 k의 값에 관계없이 항상 x축에 접할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오. $a=-6$, $b=36$

142 이차함수 $y=2x^2-(a+3)x+b$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 -2, 3일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

풍산자답 이차방정식의 두 근이 주어진 셈이므로 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 합과 곱을 계산한다.

풀이 [1단계] $y=2x^2-(a+3)x+b$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 -2, 3이므로
이차방정식 $2x^2-(a+3)x+b=0$의 두 근이 -2, 3이다.

[2단계] 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2+3=\frac{a+3}{2},\quad -2\times3=\frac{b}{2}$$

$\therefore \boldsymbol{a=-1}$, $\boldsymbol{b=-12}$

정답과 풀이 40쪽

유제 **143** 이차함수 $y=5x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 -1, 2일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오. $a=-5$, $b=-10$

02 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

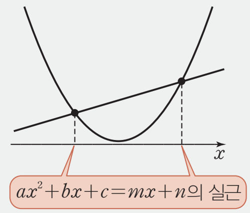
앞에서 교점의 좌표를 구하는 것은 연립방정식을 푸는 것과 같다고 했다.
이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 또한 같은 방법으로 생각한다.

이차함수의 그래프와 직선의 교점

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는 두 식을 연립한 이차방정식

$$ax^2+bx+c=mx+n$$

의 실근과 같다.



설명 이차함수의 그래프와 x축의 교점에서 공부한 것과 같은 논리로 생각한다.
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는

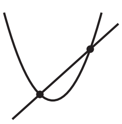
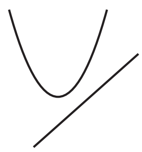
➡ 연립방정식 $\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=mx+n \end{cases}$을 만족시키는 순서쌍 (x, y)에서 x의 값

➡ 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$의 실근

개념확인 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=2x-1$의 교점의 x좌표를 구하시오.

풀이 두 식 $y=x^2$과 $y=2x-1$을 연립하면
$x^2=2x-1$, $x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$ $\quad\therefore x=1$
따라서 교점의 x좌표는 1이다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$, 즉 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 판별식 D의 부호에 따라 결정된다.

판별식의 부호 중요	$D>0$	$D=0$	$D<0$
위치 관계	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	만나지 않는다.
이차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$의 그래프와 직선 $y=mx+n$ $(m>0)$			
교점의 개수	2	1	0
이차방정식의 실근의 개수	2	1	0

144 이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프와 직선 $y=x-5$의 교점의 좌표를 구하시오.

풍산자Tip 이차함수의 그래프와 직선의 교점을 구하려면 두 식을 연립한 방정식을 푼다.

풀이 두 식을 연립하면 $x^2-2x-3=x-5$
$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=2$
이 값을 $y=x-5$에 각각 대입하면
$x=1$, $y=-4$ 또는 $x=2$, $y=-3$
따라서 교점의 좌표는 $(1, -4)$, $(2, -3)$이다.

정답과 풀이 40쪽

유제 **145** 이차함수 $y=x^2+x+1$의 그래프와 직선 $y=2x+3$의 교점의 좌표를 구하시오. $(-1, 1)$, $(2, 7)$

146 다음 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수를 구하시오.
(1) $y=x^2-x+2$, $y=2x+1$
(2) $y=4x^2-x-1$, $y=3x-2$
(3) $y=x^2+2x+1$, $y=4x-1$

풍산자Tip 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수를 구하려면 두 식을 연립한 이차방정식의 판별식을 이용한다.

풀이 (1) $x^2-x+2=2x+1$에서 $x^2-3x+1=0$이므로 판별식을 D라 하면
$D=(-3)^2-4\times1\times1=5>0$
따라서 교점의 개수는 2이다.
(2) $4x^2-x-1=3x-2$에서 $4x^2-4x+1=0$이므로 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-4\times1=0$
따라서 교점의 개수는 1이다.
(3) $x^2+2x+1=4x-1$에서 $x^2-2x+2=0$이므로 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times2=-1<0$
따라서 교점의 개수는 0이다.

정답과 풀이 40쪽

유제 **147** 다음 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수를 구하시오.
(1) $y=x^2+1$, $y=4x$ 2
(2) $y=x^2-1$, $y=6x-10$ 1
(3) $y=x^2-2x$, $y=x-3$ 0

148 이차함수 $y=x^2-4x+5$의 그래프와 직선 $y=ax-4$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 a의 값 또는 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 접한다. (3) 만나지 않는다.

풍산자目 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 판정하려면 두 식을 연립하여 판별식을 이용한다.

풀이 두 식을 연립하면 $x^2-4x+5=ax-4$에서

$x^2-(a+4)x+9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a+4)\}^2-4\times1\times9=a^2+8a-20=(a+10)(a-2)$

(1) $D=(a+10)(a-2)>0$ $\therefore$ $\boldsymbol{a<-10}$ **또는** $\boldsymbol{a>2}$

(2) $D=(a+10)(a-2)=0$ $\therefore$ $\boldsymbol{a=-10}$ **또는** $\boldsymbol{a=2}$

(3) $D=(a+10)(a-2)<0$ $\therefore$ $\boldsymbol{-10<a<2}$

정답과 풀이 40쪽

유제 **149** 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=x+a$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 a의 값 또는 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다. $a>-\frac{1}{4}$ (2) 접한다. $a=-\frac{1}{4}$ (3) 만나지 않는다. $a<-\frac{1}{4}$

150 이차함수 $y=-x^2+2x-2$의 그래프와 직선 $y=mx-1$이 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

풍산자目 만나는 경우는 서로 다른 두 점에서 만나는 경우와 접하는 경우를 모두 포함한다.

(i) 만날 조건: $D\geq0$ (ii) 만나지 않을 조건: $D<0$

풀이 두 식을 연립하면 $-x^2+2x-2=mx-1$에서

$x^2+(m-2)x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(m-2)^2-4=m^2-4m=m(m-4)$

이차함수의 그래프와 직선이 만나려면

$D=m(m-4)\geq0$ $\therefore$ $\boldsymbol{m\leq0}$ **또는** $\boldsymbol{m\geq4}$

정답과 풀이 40쪽

유제 **151** 이차함수 $y=-x^2+x-1$의 그래프와 직선 $y=mx$가 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하시오. $m\leq-1$ 또는 $m\geq3$

152 이차함수 $y=x^2-2x+3$의 그래프에 접하고, 기울기가 2인 직선의 방정식을 구하시오.

풍산자비 접선의 방정식을 $y=2x+a$로 놓고, 이차함수의 식과 연립하여 $D=0$을 이용한다.

풀이 기울기가 2인 접선의 방정식은 $y=2x+a$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.
이차함수의 식과 연립하면 $x^2-2x+3=2x+a$ $\quad\therefore x^2-4x+3-a=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-(3-a)=0,\ 1+a=0 \quad\therefore a=-1$
따라서 구하는 직선의 방정식은 $\boldsymbol{y=2x-1}$이다.

정답과 풀이 40쪽

유제 **153** 이차함수 $y=-x^2+2x$의 그래프에 접하고, 기울기가 -1인 직선의 방정식을 구하시오.
$y=-x+\frac{9}{4}$

154 이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프와 직선 $y=2x-3$의 두 교점 중 한 교점의 x좌표가 $2-\sqrt{5}$일 때, 유리수 a, b의 값을 구하시오.

풍산자비 교점이 주어지면 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다. 이차방정식의 계수가 유리수일 때, 한 근이 무리수이면 그 켤레인 수도 근이므로 다른 한 근을 구할 수 있다.

풀이 두 식을 연립하면 $x^2-ax+b=2x-3$ $\quad\therefore x^2-(a+2)x+b+3=0$
이 이차방정식의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $2-\sqrt{5}$이므로 $2+\sqrt{5}$도 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(2-\sqrt{5})+(2+\sqrt{5})=a+2,\ a+2=4 \quad\therefore \boldsymbol{a=2}$
$(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})=b+3,\ b+3=-1 \quad\therefore \boldsymbol{b=-4}$

정답과 풀이 40쪽

유제 **155** 이차함수 $y=x^2+ax$의 그래프와 직선 $y=x+b$의 두 교점 중 한 교점의 x좌표가 $3+\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 값을 구하시오. $a=-5,\ b=-7$

+ 풍산자 비법
두 함수의 그래프의 교점을 구하는 문제는 결국 방정식 문제로 변신한다.

필수 확인 문제

정답과 풀이 41쪽

156

이차함수 $y=3x^2-12x-9$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 α, β라 할 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값을 구하시오. 100

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-3$

$\therefore\ \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=4^3-3\times(-3)\times4$

$=100$

157

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 점 $(-1,\ 9)$를 지나고 x축에 접할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $a<0$) 0

$y=x^2+ax+b$의 그래프가 점 $(-1,\ 9)$를 지나므로

$9=1-a+b \qquad \therefore\ b=a+8 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4b=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a^2-4(a+8)=0$, $a^2-4a-32=0$

$(a+4)(a-8)=0 \qquad \therefore\ a=-4\ (\because\ a<0)$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=4$이므로

$a+b=0$

158

이차함수 $y=x^2-6x+12$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 만나도록 하는 실수 k의 최솟값을 구하시오. -4

두 식을 연립하면 $x^2-6x+12=2x+k$에서

$x^2-8x+12-k=0$이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-(12-k)=k+4$

이차함수의 그래프와 직선이 만나려면

$\frac{D}{4}=k+4\geq0 \qquad \therefore\ k\geq-4$

따라서 실수 k의 최솟값은 -4이다.

159

이차함수 $y=3x^2-8x-k$의 그래프와 직선 $y=2x-3$이 서로 다른 두 점에서 만나고 두 교점의 x좌표의 곱이 2일 때, 상수 k의 값을 구하시오. -3

두 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $3x^2-8x-k=2x-3$, 즉 $3x^2-10x-k+3=0$의 서로 다른 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=\frac{-k+3}{3}$

이때 두 교점의 x좌표의 곱이 2이므로

$\frac{-k+3}{3}=2 \qquad \therefore\ k=-3$

160

이차함수 $y=x^2-2ax+a^2-1$의 그래프가 a의 값에 관계없이 항상 직선 $y=mx+n$과 접할 때, 상수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오. -1

두 식을 연립하면 $x^2-2ax+a^2-1=mx+n$

$\therefore\ x^2-(2a+m)x+a^2-1-n=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 두 그래프가 서로 접하므로

$D=\{-(2a+m)\}^2-4(a^2-1-n)=0$

$\therefore\ 4ma+(m^2+4+4n)=0$

이 등식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4m=0$, $m^2+4+4n=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $m=0$, $n=-1$

$\therefore\ m+n=-1$

161 실력UP

이차함수 $y=x^2+ax+5$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 4가 되도록 하는 상수 a의 값을 모두 구하시오. -6, 6

이차방정식 $x^2+ax+5=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $|\alpha-\beta|=4$이므로

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$(-a)^2-4\times5=16$, $a^2=36$

$\therefore\ a=\pm6$

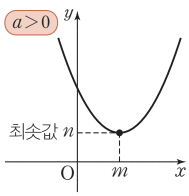
3 이차함수의 최대, 최소

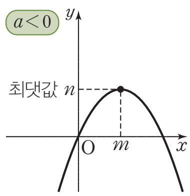
01 이차함수의 최대, 최소

이차함수 $f(x)=a(x-m)^2+n$은 a의 부호에 따라 최댓값 또는 최솟값을 갖는다. a의 부호가 양수이면 아래로 볼록하므로 꼭짓점에서 최솟값을, 음수이면 위로 볼록하므로 꼭짓점에서 최댓값을 갖는다.

[1] x의 값의 범위에 제한이 없을 때

x의 값의 범위에 제한이 없는 이차함수의 최대, 최소는 항상 꼭짓점에서 발생한다.
$a>0$이면 꼭짓점에서 최소, $a<0$이면 꼭짓점에서 최대이다.





x의 값의 범위에 제한이 없을 때의 최댓값, 최솟값 ➡ 꼭짓점만 구하면 된다.

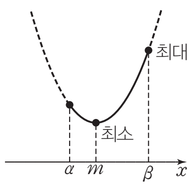
이차함수 $y=a(x-m)^2+n$에 대하여

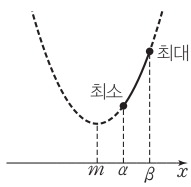
(1) $a>0$이면 ∪ 꼴의 그래프 ➡ $x=m$일 때 최솟값 n (최댓값은 없다.)

(2) $a<0$이면 ∩ 꼴의 그래프 ➡ $x=m$일 때 최댓값 n (최솟값은 없다.)

[2] x의 값의 범위에 제한이 있을 때

x의 값의 범위에 제한이 있는 이차함수의 최대, 최소를 구할 때에는 꼭짓점의 위치에 주의해야 한다.





x의 값의 범위에 제한이 있을 때의 최댓값, 최솟값 ➡ 그래프를 그려서 생각한다.

이차함수 $y=a(x-m)^2+n$ $(\alpha \leq x \leq \beta)$에 대하여

(1) 꼭짓점이 범위 안에 있으면 ➡ 꼭짓점과 끝점에서 최대, 최소

(2) 꼭짓점이 범위 안에 없으면 ➡ 끝점에서 최대, 최소

162 다음 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하시오.

(1) $y=3x^2+6x+8$ (2) $y=-x^2+4x+3$

풍산자Ξ 제한 범위가 없을 때의 이차함수의 최대, 최소는 항상 꼭짓점에서 발생한다.
이차함수를 표준형으로 고쳐 꼭짓점만 구하면 된다.

풀이 (1) $y=3x^2+6x+8=3(x^2+2x+1-1)+8$
$=3(x+1)^2+5$
따라서 $x=-1$일 때 **최솟값 5**를 갖고, **최댓값은 없다.**
(2) $y=-x^2+4x+3=-(x^2-4x+4-4)+3$
$=-(x-2)^2+7$
따라서 $x=2$일 때 **최댓값 7**을 갖고, **최솟값은 없다.**

정답과 풀이 42쪽

유제 **163** 다음 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하시오.

(1) $y=x^2-6x-2$ 최댓값: 없다. 최솟값: -11
(2) $y=-2x^2-4x-2$ 최댓값: 0 최솟값: 없다.

164 이차함수 $y=-x^2+2ax+b$는 $x=4$일 때 최댓값 9를 갖는다. 이때 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

풍산자Ξ $x=m$일 때 최댓값 n을 갖는다는 것은 꼭짓점의 좌표가 (m, n)이라는 것이다.
꼭짓점 (m, n) ➡ $y=ax^2+bx+c=a(x-m)^2+n$

풀이 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(4, 9)$이므로
$y=-x^2+2ax+b=-(x-4)^2+9$
$\therefore -x^2+2ax+b=-x^2+8x-7$
양변의 계수를 비교하면 $2a=8$, $b=-7$ $\therefore a=4$, $b=-7$
$\therefore$ **$a+b=-3$**

정답과 풀이 42쪽

유제 **165** 이차함수 $y=x^2-ax+b$는 $x=1$일 때 최솟값 8을 갖는다. 이때 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. 18

●제한 범위가 있을 때의 최대, 최소 (1)

166 주어진 x의 값의 범위에서 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $y=x^2-4x+9\ (0\le x\le 3)$

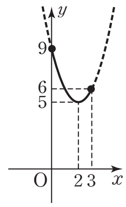
(2) $y=-x^2+2x+6\ (2\le x\le 4)$

풍산자目 이차함수의 그래프를 그려 해당하는 부분만 살려 놓은 후 가장 높은 위치에 있는 점과 가장 낮은 위치에 있는 점을 찾는다.

풀이 (1) $y=x^2-4x+9=(x-2)^2+5$

이 이차함수의 그래프를 그린 후 $0\le x\le 3$의 부분만 살려 놓으면 오른쪽 그림과 같다.

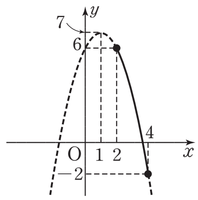
따라서 $x=0$일 때 **최댓값 9**, $x=2$일 때 **최솟값 5**를 갖는다.



(2) $y=-x^2+2x+6=-(x-1)^2+7$

이 이차함수의 그래프를 그린 후 $2\le x\le 4$인 부분만 살려 놓으면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=2$일 때 **최댓값 6**, $x=4$일 때 **최솟값 -2**를 갖는다.



정답과 풀이 **42**쪽

유제 **167** 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $y=x^2-2x-2\ (0\le x\le 4)$ 최댓값: 6, 최솟값: -3

(2) $y=-x^2+4x+5\ (-1\le x\le 1)$ 최댓값: 8, 최솟값: 0

●제한 범위가 있을 때의 최대, 최소 (2)

168 $1\le x\le 2$에서 이차함수 $y=x^2-6x+a$의 최솟값이 3일 때, 실수 a의 값을 구하시오.

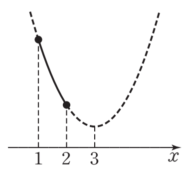
풍산자目 제한 범위가 있는 최대, 최소 문제에서는 꼭짓점의 위치에 주의해야 한다.

풀이 $y=x^2-6x+a=(x-3)^2-9+a$

이 이차함수의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같고 꼭짓점이 $1\le x\le 2$ 안에 없으므로 $x=2$일 때 최솟값이 발생한다.

주어진 조건에서 최솟값이 3이므로

$2^2-6\times 2+a=3,\ a-8=3 \qquad \therefore\ a=\mathbf{11}$



정답과 풀이 **42**쪽

유제 **169** $0\le x\le 3$에서 이차함수 $y=x^2-2x+a$의 최솟값이 2일 때, 실수 a의 값을 구하시오. 3

02 이차식의 최대, 최소

[1] 실수 x, y에 대한 이차식의 최댓값과 최솟값

실수 조건이 주어진 이차식의 최댓값과 최솟값 문제의 해법은 크게 2가지.
(실수)$^2 \ge 0$ 또는 (판별식)≥ 0을 이용한다.

(1) x, y에 대한 이차식의 최대, 최소 ➡ 완전제곱의 꼴
( )^2+( )^2+k와 같이 완전제곱의 꼴로 변형한 후 (실수)$^2 \ge 0$임을 이용한다.

(2) x, y에 대한 이차식이 조건식으로 주어진 경우의 최대, 최소 ➡ 판별식
조건식을 한 문자에 대한 이차방정식으로 생각하고 판별식을 이용한다.
① x의 최대, 최소: y에 대하여 정리한 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D \ge 0$임을 이용한다.
② y의 최대, 최소: x에 대하여 정리한 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D \ge 0$임을 이용한다.

참고 이차함수의 최대, 최소

(1) 완전제곱식을 이용한 최대, 최소
$y=x^2-2x+4=(x^2-2x+1-1)+4=(x-1)^2+3$에서
$(x-1)^2 \ge 0$이므로 y는 최솟값 3을 갖는다.

(2) 판별식을 이용한 최대, 최소
$y=x^2-2x+4$를 x에 대하여 내림차순으로 정리하면 $x^2-2x+4-y=0$
이 방정식을 x에 대한 이차방정식으로 보면 x는 실수이므로 $x^2-2x+4-y=0$은 실근을 가져야 한다.
즉, $x^2-2x+4-y=0$의 판별식을 D라 할 때,
$\frac{D}{4}=(-1)^2-(4-y) \ge 0$
$1-4+y \ge 0$ $\quad \therefore y \ge 3$ ➡ y의 최솟값은 3이다.

[2] 조건식이 주어졌을 때의 최댓값과 최솟값

x, y의 조건식이 주어지고, 그 조건을 만족시키는 x, y에 대하여 특정한 식의 최대, 최소를 구할 때에는 그래프 또는 판별식을 이용한다.
최대, 최소를 구해야 하는 식이 이차식이면 그래프를 그린다.
최대, 최소를 구해야 하는 식이 일차식이면 판별식을 이용한다.

(1) 조건식이 주어졌을 때 이차식의 최대, 최소
① 조건식을 이차식에 대입하여 이차식을 한 문자에 대하여 정리한다.
② 조건식에서 정리한 문자의 값의 범위를 구한다.
③ 이차함수의 그래프를 이용하여 마무리한다.

(2) 조건식이 주어졌을 때 일차식의 최대, 최소
① (일차식)$=k$로 놓고 조건식에 대입하여 x에 대한 이차방정식으로 만든다.
② 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D \ge 0$임을 이용하여 k의 값의 범위를 구한다.

170 x, y가 실수일 때, $x^2+2y^2-2x+4y+5$의 최솟값을 구하시오.

풍산자답 x는 x끼리, y는 y끼리 계산하여 완전제곱의 꼴로 변형한다. 맨 뒤에 남는 찌꺼기가 최솟값!

풀이 $x^2+2y^2-2x+4y+5=(x^2-2x)+2(y^2+2y)+5$
$=(x^2-2x+1-1)+2(y^2+2y+1-1)+5$
$=(x-1)^2+2(y+1)^2+2$
x, y는 실수이므로 $(x-1)^2\geq 0$, $(y+1)^2\geq 0$
따라서 $x=1$, $y=-1$일 때 **최솟값 2**를 갖는다.

정답과 풀이 42쪽

유제 **171** x, y가 실수일 때, $3x^2+y^2+6x-2y-3$의 최솟값을 구하시오. -7

172 실수 x, y가 $x^2+4y^2-2x+16y+13=0$을 만족시킬 때, 다음을 구하시오.
(1) x의 최댓값, 최솟값 (2) y의 최댓값, 최솟값

풍산자답 조건식을 한 문자에 대한 이차방정식으로 생각하고 판별식을 이용하면 된다.
(1) x의 최대, 최소: y에 대하여 정리한 후 판별식을 D라 하면 $D\geq 0$임을 이용한다.
(2) y의 최대, 최소: x에 대하여 정리한 후 판별식을 D라 하면 $D\geq 0$임을 이용한다.

풀이 (1) 주어진 식을 y에 대하여 정리하면 $4y^2+16y+(x^2-2x+13)=0$
y가 실수이므로 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=8^2-4(x^2-2x+13)\geq 0$
$x^2-2x-3\leq 0$, $(x+1)(x-3)\leq 0$ $\therefore -1\leq x\leq 3$
따라서 x의 **최댓값은 3**, **최솟값은 -1**이다.
(2) 주어진 식을 x에 대하여 정리하면 $x^2-2x+(4y^2+16y+13)=0$
x가 실수이므로 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=(-1)^2-(4y^2+16y+13)\geq 0$
$y^2+4y+3\leq 0$, $(y+3)(y+1)\leq 0$ $\therefore -3\leq y\leq -1$
따라서 y의 **최댓값은 -1**, **최솟값은 -3**이다.

정답과 풀이 42쪽

유제 **173** 실수 x, y가 $x^2-2xy+2y^2=2$를 만족시킬 때, 다음을 구하시오.
(1) x의 최댓값, 최솟값 최댓값: 2 최솟값: -2
(2) y의 최댓값, 최솟값 최댓값: $\sqrt{2}$ 최솟값: $-\sqrt{2}$

174 실수 x, y가 $2x^2+y^2=6x$를 만족시킬 때, x^2+y^2의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

풍산자日 (i) 이차식의 최대, 최소 ➡ 조건식을 대입하여 이차식을 한 문자에 대한 식으로 만든다.
(ii) y^2을 대입할 때 ➡ $y^2\ge0$이라는 범위를 x에게 넘겨 준다.

풀이 $2x^2+y^2=6x$에서 $y^2=-2x^2+6x$ …… ㉠

(i) ㉠을 x^2+y^2에 대입하면

$x^2+y^2=x^2+(-2x^2+6x)=-x^2+6x$

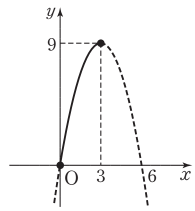
$=-(x-3)^2+9$ …… ㉡

(ii) y는 실수이므로 $y^2\ge0$

㉠에서 $-2x^2+6x\ge0$, $x^2-3x\le0$, $x(x-3)\le0$

$\therefore\ 0\le x\le3$ …… ㉢

㉡의 그래프를 그린 후 ㉢인 부분만 살려 놓으면 오른쪽 그림과 같으므로 $x=3$일 때 **최댓값 9**, $x=0$일 때 **최솟값 0**을 갖는다.



정답과 풀이 42쪽

유제 **175** 실수 x, y가 $x^2+y^2=4$를 만족시킬 때, y^2-2x의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

최댓값: 5
최솟값: -4

176 실수 x, y가 $x^2+y^2=5$를 만족시킬 때, $2x+y$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

풍산자日 일차식의 최대, 최소 ➡ (일차식)$=k$로 놓고 조건식에 대입한 후 판별식을 이용!

풀이 $2x+y=k$ (k는 실수)로 놓으면 $y=-2x+k$

이것을 $x^2+y^2=5$에 대입하면 $x^2+(-2x+k)^2=5$ $\therefore\ 5x^2-4kx+k^2-5=0$

x가 실수이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-5)\ge0$

$k^2-25\le0$, $(k+5)(k-5)\le0$ $\therefore\ -5\le k\le5$ $\therefore\ -5\le2x+y\le5$

따라서 $2x+y$의 **최댓값은 5**, **최솟값은 -5**이다.

정답과 풀이 43쪽

유제 **177** 실수 x, y가 $2x^2+y^2=2$를 만족시킬 때, $y-x$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

최댓값: $\sqrt{3}$, 최솟값: $-\sqrt{3}$

+ 풍산자 비법

- 이차식의 최댓값, 최솟값을 구할 때는 그래프를 그려서 생각한다.
- 조건이 주어진 최댓값, 최솟값 문제는 식을 변형해 본다.

필수 확인 문제

정답과 풀이 43쪽

178

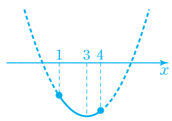
이차함수 $y=x^2+4x+k$의 최솟값과 이차함수 $y=-4x^2+8x-k$의 최댓값이 같을 때, 상수 k의 값을 구하시오. 4

$y=x^2+4x+k=(x+2)^2+k-4$
이므로 $x=-2$일 때 최솟값 $k-4$를 갖는다.
$y=-4x^2+8x-k=-4(x-1)^2-k+4$
이므로 $x=1$일 때 최댓값 $-k+4$를 갖는다.
따라서 주어진 조건에 의하여
$k-4=-k+4 \qquad \therefore k=4$

179

$1\le x\le 4$에서 이차함수 $f(x)=2x^2-12x+k$의 최솟값이 -11일 때, 실수 k의 값과 이 이차함수의 최댓값 M에 대하여 kM의 값을 구하시오. -21

$f(x)=2x^2-12x+k=2(x^2-6x+9-9)+k$
$\quad=2(x-3)^2-18+k \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점이 $1\le x\le 4$ 안에 있으므로 $x=3$일 때 최솟값이 발생한다.



최솟값이 -11이므로
$-18+k=-11 \qquad \therefore k=7$
즉, $f(x)=2(x-3)^2-11$이고
$M=f(1)=2\times(-2)^2-11=-3$
$\therefore kM=7\times(-3)=-21$

180

이차함수 $f(x)=x^2-2kx-6k+5$의 최솟값을 $g(k)$라 하자. $-1\le k\le 6$에서 함수 $g(k)$는 $k=a$일 때 최댓값 b를 갖는다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 9

$f(x)=x^2-2kx-6k+5=(x-k)^2-k^2-6k+5$
이므로 $f(x)$는 $x=k$일 때 최솟값 $-k^2-6k+5$를 갖는다.
$\therefore g(k)=-k^2-6k+5=-(k+3)^2+14$
이때 $g(k)$의 꼭짓점이 $-1\le k\le 6$ 안에 없으므로 $g(k)$의 최댓값은 $k=-1$일 때 발생하고 최댓값은
$g(-1)=-(-1+3)^2+14=10$
따라서 $a=-1$, $b=10$이므로 $a+b=9$

181

두 실수 x, y에 대하여

$$3x^2+2y^2-12x+12y+20$$

은 $x=a$, $y=b$일 때 최솟값 c를 갖는다.
이때 $a+b+c$의 값을 구하시오. -11

$3x^2+2y^2-12x+12y+20$
$=(3x^2-12x)+(2y^2+12y)+20$
$=3(x^2-4x+4-4)+2(y^2+6y+9-9)+20$
$=3(x-2)^2+2(y+3)^2-10$
x, y는 실수이므로 $(x-2)^2\ge0$, $(y+3)^2\ge0$
따라서 $x=2$, $y=-3$일 때 최솟값 -10을 가지므로
$a=2$, $b=-3$, $c=-10 \qquad \therefore a+b+c=-11$

182

실수 x, y가 $x+y=4$를 만족시킬 때, $2x-y^2$의 최댓값을 구하시오. 9

$x+y=4$에서 $y=4-x$
이것을 $2x-y^2$에 대입하면
$2x-y^2=2x-(4-x)^2$
$\quad=2x-(x^2-8x+16)$
$\quad=-x^2+10x-16$
$\quad=-(x-5)^2+9$
따라서 $x=5$, $y=9$일 때 주어진 식의 최댓값은 9이다.

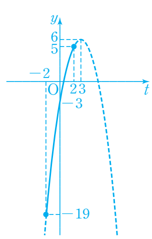
183 실력UP

$-1\le x\le 2$일 때, 함수

$$y=-(x^2-2x-1)^2+6(x^2-2x-1)-3$$

의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. -14

$x^2-2x-1=t$로 놓으면 $y=-t^2+6t-3$
$-1\le x\le 2$일 때, $t=(x-1)^2-2$
$\therefore -2\le t\le 2$
$-2\le t\le 2$일 때, 함수 $y=-(t-3)^2+6$의 최댓값은 5, 최솟값은 -19이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 -14이다.



중단원 마무리

◆ 이차함수의 그래프

이차함수의 그래프	① 표준형 ➡ $y=a(x-m)^2+n$ ➡ 꼭짓점의 좌표: $(m,\ n)$, 축의 방정식: $x=m$ ② 일반형 ➡ $y=ax^2+bx+c$ ➡ 꼭짓점의 좌표: $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$ 축의 방정식: $x=-\dfrac{b}{2a}$

◆ 이차함수와 이차방정식

이차함수의 그래프와 x축의 교점	이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표 ➡ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근
이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계	이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면 ① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다. ② $D=0$ ➡ 한 점에서 만난다. (접한다.) ③ $D<0$ ➡ 만나지 않는다.
이차함수의 그래프와 직선의 교점	이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표 ➡ 두 식을 연립한 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$의 실근
이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계	$y=ax^2+bx+c$와 $y=mx+n$을 연립한 이차방정식의 판별식을 D라 하면 ① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다. ② $D=0$ ➡ 한 점에서 만난다. (접한다.) ③ $D<0$ ➡ 만나지 않는다.

◆ 이차함수의 최대, 최소

$y=a(x-m)^2+n$ (x는 모든 실수)	① $a>0$이면 ∪ 꼴의 그래프 ➡ $x=m$일 때 최솟값 n (최댓값은 없다.) ② $a<0$이면 ∩ 꼴의 그래프 ➡ $x=m$일 때 최댓값 n (최솟값은 없다.)
$y=a(x-m)^2+n$ $(\alpha\le x\le\beta)$	① 꼭짓점이 범위 안에 있으면 ➡ 꼭짓점과 끝점에서 최대, 최소 ② 꼭짓점이 범위 안에 없으면 ➡ 끝점에서 최대, 최소
실수 x, y에 대한 이차식의 최대, 최소	① x, y에 대한 이차식의 최대, 최소 ➡ 완전제곱의 꼴 ② x, y에 대한 이차식이 조건식으로 주어진 경우의 최대, 최소 ➡ 판별식

실전 연습문제

STEP 1

184

이차함수 $y=x^2+mx-3m$의 그래프는 m의 값에 관계없이 항상 일정한 점 P를 지난다. 점 P가 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점일 때, 상수 m의 값을 구하시오. -6

주어진 식을 m에 대하여 정리하면 $(x-3)m+(x^2-y)=0$
이 등식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$x-3=0,\ x^2-y=0 \qquad \therefore x=3,\ y=9$
따라서 점 P의 좌표는 $(3, 9)$이고, 이 점이 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점이므로
$y=x^2+mx-3m=(x-3)^2+9=x^2-6x+18$에서 $m=-6$

185

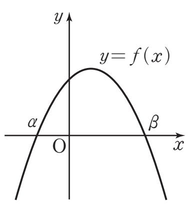
이차함수 $y=x^2-ax-3a$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표의 합이 5일 때, 이차함수 $y=-x^2+(a-2)x+a^2-3a$의 그래프와 x축의 두 교점 사이의 거리를 구하시오. 7

(단, a는 상수이다.)

이차방정식 $x^2-ax-3a=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 $a=5$
$\therefore y=-x^2+(a-2)x+a^2-3a=-x^2+3x+10$
이차함수 $y=-x^2+3x+10$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표는 $x=-2$ 또는 $x=5$
따라서 두 교점 사이의 거리는 $5-(-2)=7$

186

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. $\alpha+\beta=3$일 때, 방정식 $f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=0$의 두 실근의 합을 구하시오. 4



$f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=0$에서 $\dfrac{x+1}{2}=t$로 놓으면
주어진 그래프에서 $f(t)=0$을 만족시키는 t의 값은
$t=\alpha$ 또는 $t=\beta$, 즉 $\dfrac{x+1}{2}=\alpha$ 또는 $\dfrac{x+1}{2}=\beta$
$\therefore x=2\alpha-1$ 또는 $x=2\beta-1$
$\alpha+\beta=3$이므로 주어진 방정식의 두 실근의 합은
$(2\alpha-1)+(2\beta-1)=2(\alpha+\beta)-2=2\times3-2=4$

187

이차함수 $y=x^2+(2k+2)x+4k+1$의 그래프가 x축과 접하고, 직선 $y=2x+4$와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값을 구하시오. 0

이차방정식 $x^2+(2k+2)x+4k+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$\dfrac{D_1}{4}=(k+1)^2-(4k+1)=0 \qquad \therefore k=0$ 또는 $k=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
이차방정식 $x^2+(2k+2)x+4k+1=2x+4$, 즉
$x^2+2kx+4k-3=0$의 판별식을 D_2라 하면
$\dfrac{D_2}{4}=k^2-(4k-3)>0 \qquad \therefore k<1$ 또는 $k>3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $k=0$

188

이차함수 $y=2x^2-3x+3$의 그래프 위의 점 $(1, 2)$에서 이 그래프에 접하는 직선의 기울기를 구하시오. 1

접선의 방정식을 $y=mx+n$ (m, n은 상수)으로 놓으면 접선이 점 $(1, 2)$를 지나므로
$y=mx-m+2$
위의 직선이 이차함수 $y=2x^2-3x+3$의 그래프에 접하므로
이차방정식 $2x^2-3x+3=mx-m+2$가 중근을 가져야 한다.
이차방정식 $2x^2-(m+3)x+m+1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(m+3)^2-4\times2\times(m+1)=0 \qquad \therefore m=1$
따라서 구하는 직선의 기울기는 1이다.

189

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 두 점 $(0, 8)$, $(3+\sqrt{5}, 0)$을 지날 때, 유리수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오. -2

그래프가 점 $(0, 8)$을 지나므로 $c=8 \qquad \therefore y=ax^2+bx+8$
이차방정식 $ax^2+bx+8=0$의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $3+\sqrt{5}$이므로 $3-\sqrt{5}$도 근이다.
$(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})=-\dfrac{b}{a} \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=\dfrac{8}{a} \qquad \cdots\cdots$ ㉡
$\therefore a=2 \qquad \therefore b=-12$
$\therefore a+b+c=2-12+8=-2$

190 ●— 교육청 기출

$-2\le x\le 3$일 때, 이차함수 $f(x)=2x^2-4x+k$의 최솟값은 1이고 최댓값은 M이다. $k+M$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) 22

$f(x)=2x^2-4x+k=2(x-1)^2+k-2$
꼭짓점이 $-2\le x\le 3$ 안에 있으므로
$f(1)=k-2=1 \quad \therefore k=3$
이때 $f(-2)=k+16$, $f(3)=k+6$이고 $k+6<k+16$이므로
이차함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값이 발생한다.
$\therefore M=f(-2)=k+16=19$
$\therefore k+M=3+19=22$

191

$0\le x\le 3$에서 이차함수 $y=x^2-2ax-1$의 최솟값을 $f(a)$라 할 때, $f(1)+f(-1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) -3

$y=x^2-2ax-1=(x-a)^2-a^2-1$
(i) $a=1$일 때, $y=(x-1)^2-2$
$0\le x\le 3$에서 이 이차함수는 $x=1$일 때 최솟값 -2를 가지므로
$f(1)=-2$
(ii) $a=-1$일 때, $y=(x+1)^2-2$
$0\le x\le 3$에서 이 이차함수는 $x=0$일 때 최솟값 -1을 가지므로
$f(-1)=-1$
(i), (ii)에서 $f(1)+f(-1)=-2+(-1)=-3$

192

x, y, z가 실수일 때,

$$x^2+\frac{1}{2}y^2+4z^2+4x+y-4z+\frac{15}{2}$$

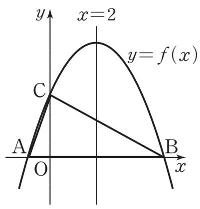
의 최솟값을 구하시오. 2

$x^2+\frac{1}{2}y^2+4z^2+4x+y-4z+\frac{15}{2}$
$=(x^2+4x+4-4)+\frac{1}{2}(y^2+2y+1-1)+4\left(z^2-z+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\frac{15}{2}$
$=(x+2)^2+\frac{1}{2}(y+1)^2+4\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+2$
이때 x, y, z가 실수이므로
$(x+2)^2\ge 0$, $(y+1)^2\ge 0$, $\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$
$\therefore x^2+\frac{1}{2}y^2+4z^2+4x+y-4z+\frac{15}{2}\ge 2$
따라서 주어진 식의 최솟값은 2이다.

STEP 2

193

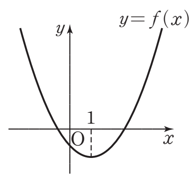
오른쪽 그림과 같이 축의 방정식이 $x=2$인 포물선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B, y축과 만나는 점을 C(0, 3)이라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 9일 때, $f(10)$의 값을 구하시오. -33



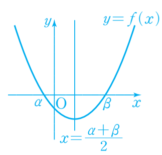
$\triangle$ABC의 넓이가 9이므로
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times 3=9 \quad \therefore \overline{AB}=6$
그런데 두 점 A, B는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로
A$(-1, 0)$, B$(5, 0)$
포물선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 두 점의 x좌표가 -1, 5이므로
$f(x)=a(x+1)(x-5)$
이때 포물선이 점 C(0, 3)을 지나므로
$f(0)=-5a=3 \quad \therefore a=-\frac{3}{5}$
$\therefore f(x)=-\frac{3}{5}(x+1)(x-5)$
$\therefore f(10)=-\frac{3}{5}\times(10+1)\times(10-5)=-33$

194

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 이차방정식 $f(x-2)=0$의 두 근의 합을 구하시오. 6



이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 α, β라 하면 꼭짓점은 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$의 중점이므로



$\frac{\alpha+\beta}{2}=1 \quad \therefore \alpha+\beta=2$
$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$이므로
$f(x-2)=a(x-2-\alpha)(x-2-\beta)$
$f(x-2)=0$에서
$a(x-2-\alpha)(x-2-\beta)=0$
$\therefore x=2+\alpha$ 또는 $x=2+\beta$
따라서 구하는 두 근의 합은
$(2+\alpha)+(2+\beta)=4+(\alpha+\beta)=4+2=6$

195 교육청 기출

이차함수 $y=\frac{1}{2}(x-k)^2$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. 선분 CD의 길이가 6일 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{7}{2}$ ● ② 4 ③ $\frac{9}{2}$

④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

$C(\alpha,\ 0)$, $D(\alpha+6,\ 0)$이라 하면 $A(\alpha,\ \alpha)$, $B(\alpha+6,\ \alpha+6)$

이차방정식 $\frac{1}{2}(x-k)^2=x$, 즉 $x^2-2(k+1)x+k^2=0$의 서로 다른 두 실근이 α, $\alpha+6$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+6)=2(k+1)$ $\quad\therefore \alpha=k-2$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+6)=k^2$ $\quad\therefore \alpha^2+6\alpha-k^2=0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(k-2)^2+6(k-2)-k^2=0$, $2k-8=0$

$\therefore k=4$

196

이차함수 $y=-x^2-4kx+5$의 그래프가 직선 $y=2x+4k^2$보다 항상 아래쪽에 있도록 하는 정수 k의 최댓값을 구하시오. -2

이차함수의 그래프와 직선이 만나지 않아야 한다.

이차방정식 $-x^2-4kx+5=2x+4k^2$, 즉

$x^2+2(2k+1)x+4k^2-5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k+1)^2-(4k^2-5)<0$, $4k+6<0$

$\therefore k<-\frac{3}{2}$

따라서 정수 k의 최댓값은 -2이다.

197

점 $(-2,\ 1)$을 지나고, 이차함수 $y=x^2-2x+1$의 그래프에 접하는 두 직선의 기울기의 곱은?

① 1 ② 2 ③ 3

● ④ 4 ⑤ 5

접선의 방정식을 $y=mx+n$ (m, n은 상수)으로 놓으면

$1=-2m+n$ $\quad\therefore n=2m+1$ $\quad\therefore y=mx+2m+1$

이차방정식 $x^2-2x+1=mx+2m+1$, 즉

$x^2-(m+2)x-2m=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(m+2)^2-4\times(-2m)=0$ $\quad\therefore m^2+12m+4=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 두 직선의 기울기의 곱은 4이다.

198

$-1\le x\le 1$에서 이차함수 $y=-x^2+2ax$의 최댓값이 9일 때, 상수 a의 값을 모두 구하시오. $-5,\ 5$

$y=-x^2+2ax=-(x^2-2ax+a^2-a^2)=-(x-a)^2+a^2$

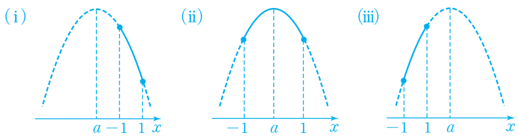
(ⅰ) $a<-1$인 경우 $x=-1$일 때, 최댓값은 $-1-2a=9$, $a=-5$

(ⅱ) $-1\le a\le 1$인 경우 $x=a$일 때, 최댓값은 $a^2=9$, $a=\pm 3$

그런데 이 값은 $-1\le a\le 1$에 속하지 않으므로 버린다.

(ⅲ) $a>1$인 경우 $x=1$일 때, 최댓값은 $2a-1=9$, $a=5$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 $a=-5$ 또는 $a=5$



199

직선 $x+2y-5=0$ 위를 움직이는 점 $P(a,\ b)$에 대하여 a^2+b^2의 최솟값을 구하시오. 5

점 $P(a,\ b)$가 직선 $x+2y-5=0$ 위의 점이므로

$a+2b-5=0$ $\quad\therefore a=-2b+5$

이를 a^2+b^2에 대입하면

$a^2+b^2=(-2b+5)^2+b^2$

$=5b^2-20b+25$

$=5(b-2)^2+5$

이때 $(b-2)^2\ge 0$이므로 a^2+b^2의 최솟값은 5이다.

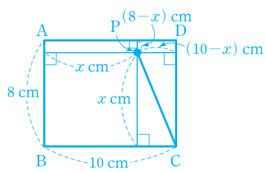
200

$\overline{AB}=8$ cm, $\overline{BC}=10$ cm인 직사각형 ABCD 안에 점 P가 있다. 점 P에서 두 변 AB, AD에 이르는 길이의 합이 8 cm일 때, 꼭짓점 C에서 점 P까지의 길이의 최솟값을 구하시오. $5\sqrt{2}$ cm

점 P에서 변 AB에 이르는 길이를 x cm라 하면 두 변 AB, AD에 이르는 길이의 합이 8 cm이므로 점 P에서 변 AD에 이르는 길이는 $(8-x)$ cm이다.

$\overline{AB}=8$ cm, $\overline{BC}=10$ cm이므로 점 P에서 두 변 BC, CD에 이르는 길이는 각각 x cm, $(10-x)$ cm이다.

꼭짓점 C에서 점 P까지의 길이는 피타고라스 정리에 의하여



$\overline{CP}=\sqrt{x^2+(10-x)^2}$

$=\sqrt{2x^2-20x+100}$

$=\sqrt{2(x-5)^2+50}$

$0\le x\le 8$이므로 $x=5$일 때 구하는 최솟값은 $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ (cm)

3 여러 가지 방정식

삼차 이상의 방정식은 고차방정식.
두 개 이상의 미지수를 포함하는 두 개 이상의 방정식은 연립방정식.
해가 무수히 많은 방정식은 부정방정식.

1 삼차방정식과 사차방정식

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

2 연립방정식과 부정방정식

$$\begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ a'x^2+b'x+c'=0 \end{cases}$$

1 삼차방정식과 사차방정식

01 삼차방정식과 사차방정식의 풀이

방정식 $f(x)=0$에서 $f(x)$가 삼차식일 때는 **삼차방정식**, 사차식일 때는 **사차방정식**이라 한다. 이렇게 삼차 이상의 방정식을 **고차방정식**이라 한다. 삼차방정식과 사차방정식에도 근의 공식이 있지만 너무 복잡하여 실제 계산에는 쓰이지 않는다.
따라서 고차방정식을 푸는 방법은 오직 하나. 인수분해!

삼차방정식과 사차방정식의 풀이

(1) 인수정리를 이용한 인수분해
① 인수정리: $f(\alpha)=0$이면 다항식 $f(x)$는 $(x-\alpha)$를 인수로 갖는다.
② 조립제법을 이용하거나, 인수분해 공식을 이용해 인수분해한다.

(2) 복이차방정식 ➡ $ax^4+bx^2+c=0$
① $x^2=t$로 치환하여 인수분해한다.
② 인수분해가 안 되면 이차항을 더하거나 빼서 $A^2-B^2=0$의 꼴로 변형한다.
③ $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$로 인수분해한다.

(3) 공통부분이 있을 때
① 공통부분을 하나의 문자로 치환한다.
② 치환한 문자에 대하여 방정식을 푼다.
③ ②의 해를 원래의 방정식에 대입하여 주어진 방정식의 해를 구한다.

(4) 대칭형 방정식 ➡ $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$
① 양변을 x^2으로 나눈다. ➡ $ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$
② 식을 정리한다. ➡ $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$
③ $x+\frac{1}{x}=t$로 치환하여 t에 대한 방정식을 푼다. ➡ $a(t^2-2)+bt+c=0$
④ ③에서 구한 t의 값을 이용하여 $x+\frac{1}{x}=t$에서의 x의 값을 구한다.

고차방정식이 인수분해되지 않으면 적어도 고등학교 수준에서는 해를 구할 수 없다고 보면 된다. 그러나 계수가 좌우대칭인 대칭형 방정식은 신기한 방법으로 풀이가 가능하다.
이처럼 고차방정식의 형태에 따라 조금씩 요령이 필요하지만 그 해법의 중심에는 고차식의 인수분해가 있다.
인수분해의 기본은 인수정리. 인수정리는 식의 값이 0이 되는 미지수의 값을 찾아내는 것이 핵심이다.
즉, x에 1을 대입해서 식의 값이 0이 된다면 $(x-1)$을 인수로 가진다는 뜻!

201 다음 방정식을 푸시오.

(1) $2x^3+x^2-5x+2=0$

(2) $x^4-3x^3+3x^2+x-6=0$

풍산자님, $f(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 다음 순서로 찾는다.

$\pm1 \Rightarrow \pm(\text{상수항의 약수}) \Rightarrow \pm\dfrac{(\text{상수항의 약수})}{(\text{최고차항의 계수의 약수})}$

풀이 (1) 좌변에 $x=1$을 대입하면 0이 되므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	2	1	-5	2
		2	3	-2
	2	3	-2	0

$(x-1)(2x^2+3x-2)=0$

$(x-1)(x+2)(2x-1)=0$

$\therefore$ **$x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$**

(2) 좌변에 $x=-1$을 대입하면 0이 되므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	-3	3	1	-6
		-1	4	-7	6
2	1	-4	7	-6	0
		2	-4	6	
	1	-2	3	0	

$(x+1)\underbrace{(x^3-4x^2+7x-6)}_{㉠}=0$

㉠에 $x=2$를 대입하면 0이 되므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3)=0$

$\therefore$ **$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}i$**

정답과 풀이 48쪽

유제 **202** 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^3+6x^2+11x+6=0$
$x=-1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-3$

(2) $x^4-x^3-7x^2+x+6=0$
$x=1$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=3$

203 방정식 $x^4-3x^2-4=0$을 푸시오.

풍산자님, 복이차방정식은 두 가지 종류가 있다. 쉬운 문제와 어려운 문제. 이 문제는 쉬운 문제. 왜냐? $x^2=t$로 치환하면 쉽게 인수분해가 되니까.

풀이 $x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은 $t^2-3t-4=0$

$(t+1)(t-4)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=4$

따라서 $x^2=-1$ 또는 $x^2=4$이므로 **$x=\pm i$ 또는 $x=\pm2$**

참고 치환하지 않고 다음과 같이 단순에 인수분해할 수도 있다.

$(x^2)^2-3x^2-4=0$에서 $(x^2+1)(x^2-4)=0 \qquad \therefore x^2=-1$ 또는 $x^2=4$

정답과 풀이 48쪽

유제 **204** 방정식 $x^4+2x^2-8=0$을 푸시오. $x=\pm2i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

205 방정식 $x^4-6x^2+1=0$을 푸시오.

풍산자법 복이차방정식이 단숨에 인수분해가 되지 않는다면 어려운 문제.
이 문제는 이차항을 더하거나 빼서 $A^2-B^2=0$의 꼴로 변형해야 한다.

풀이 상수항이 1이다. x^4-2x^2+1이라면 완전제곱식으로 만들 수 있다.
따라서 $-6x^2$을 $-2x^2-4x^2$으로 변형한다.
$x^4-6x^2+1=0$에서 $x^4-2x^2+1-4x^2=0$ ⇐ $-6x^2=-2x^2-4x^2$
$(x^2-1)^2-(2x)^2=0$
합차 공식을 이용하여 좌변을 인수분해하면
$(x^2-1+2x)(x^2-1-2x)=0$
$x^2+2x-1=0$ 또는 $x^2-2x-1=0$
$\therefore$ $\boldsymbol{x=-1\pm\sqrt{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x=1\pm\sqrt{2}}$

정답과 풀이 48쪽

유제 **206** 방정식 $x^4+3x^2+4=0$을 푸시오. $x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

207 방정식 $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=0$을 푸시오.

풍산자법 공통부분이 있을 때 ➡ 공통부분을 한 문자로 치환한다.

풀이 $x^2+x=t$로 놓으면 $t^2-8t+12=0$, $(t-2)(t-6)=0$
$\therefore$ $t=2$ 또는 $t=6$
(i) $t=2$일 때,
$x^2+x=2$, $x^2+x-2=0$
$(x+2)(x-1)=0$ $\quad\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=1$
(ii) $t=6$일 때,
$x^2+x=6$, $x^2+x-6=0$
$(x+3)(x-2)=0$ $\quad\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=2$
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $\boldsymbol{x=-3}$ **또는** $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=1}$ **또는** $\boldsymbol{x=2}$

정답과 풀이 48쪽

유제 **208** 방정식 $(x^2+1)^2-(x^2+1)-2=0$을 푸시오. $x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm1$

209 방정식 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$를 푸시오.

풍산자팁 $(\ \ )(\ \ )(\ \ )(\ \ )+k$의 꼴 ➡ 공통부분이 나타나도록 둘씩 조를 짜서 전개한다.

풀이 둘씩 조를 짜서 전개하면 $\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}=24$ ⬅ $1+4=2+3$

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24$

$x^2+5x=t$로 놓으면 $(t+4)(t+6)=24$, $t^2+10t=0$, $t(t+10)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=-10$

(i) $t=0$일 때, $x^2+5x=0$, $x(x+5)=0$ $\quad\therefore\ x=0$ 또는 $x=-5$

(ii) $t=-10$일 때, $x^2+5x=-10$, $x^2+5x+10=0$ $\quad\therefore\ x=\dfrac{-5\pm\sqrt{15}i}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=0$ 또는 $x=-5$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{15}i}{2}$

정답과 풀이 48쪽

유제 **210** 방정식 $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=0$을 푸시오. $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

211 방정식 $x^4+2x^3-6x^2+2x+1=0$을 푸시오.

풍산자팁 이 문제의 특징은 방정식의 계수가 좌우대칭이라는 것!
양변을 x^2으로 나누어 $x+\dfrac{1}{x}=t$로 치환한다.

풀이 양변을 x^2으로 나누면 $x^2+2x-6+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-6=0$

$\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\right\}+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-6=0$ ⬅ $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-8=0$

$x+\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $t^2+2t-8=0$, $(t-2)(t+4)=0$ $\quad\therefore\ t=2$ 또는 $t=-4$

(i) $t=2$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=2$에서 $x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$ $\quad\therefore\ x=1$

(ii) $t=-4$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=-4$에서 $x^2+4x+1=0$ $\quad\therefore\ x=-2\pm\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 **$x=1$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{3}$**

정답과 풀이 49쪽

유제 **212** 방정식 $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$을 푸시오. $x=\pm i$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

●방정식의 근의 의미 (1)

213 방정식 $x^3-(a+4)x^2+(4a+1)x-2a=0$의 한 근이 2일 때, 다른 두 근의 합을 구하시오.

풍산자目 근이 주어지면 주어진 근을 대입하여 a의 값을 구한다.

풀이 주어진 방정식에 $x=2$를 대입하면
$8-4(a+4)+2(4a+1)-2a=0$
$2a-6=0 \qquad \therefore a=3$
이 값을 주어진 방정식에 대입하면
$x^3-7x^2+13x-6=0$
조립제법을 이용하여 인수분해하면
$(x-2)(x^2-5x+3)=0$
따라서 다른 두 근은 이차방정식 $x^2-5x+3=0$의 두 근이므로
근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 **5**이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -7 & 13 & -6 \\ & & 2 & -10 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

정답과 풀이 **49**쪽

유제 **214** 방정식 $x^3+ax^2+(a+1)x-3a=0$의 한 근이 1일 때, 다른 두 근의 합을 구하시오. -3

●방정식의 근의 의미 (2)

215 방정식 $x^4+2x^3+ax+b=0$의 두 근이 1, -2일 때, 다른 두 근의 곱을 구하시오.

풍산자目 주어진 방정식에 $x=1$과 $x=-2$를 대입하여 a, b의 값을 구한 후 인수분해한다.

풀이 주어진 방정식에 $x=1$과 $x=-2$를 각각 대입하면
$a+b=-3,\ -2a+b=0$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$
이 값을 주어진 방정식에 대입하면
$x^4+2x^3-x-2=0$
$x=1$, $x=-2$가 방정식의 두 근이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면
$(x-1)(x+2)(x^2+x+1)=0$
따라서 다른 두 근은 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 **1**이다.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ & & 1 & 3 & 3 & 2 \\ \hline -2 & 1 & 3 & 3 & 2 & \boxed{0} \\ & & -2 & -2 & -2 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

정답과 풀이 **49**쪽

유제 **216** 방정식 $x^4+ax^3+2x^2+2x+b=0$의 두 근이 1, -1일 때, 다른 두 근의 곱을 구하시오. 3

217 방정식 $x^3+3x^2+(a+2)x+a=0$이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

풍산자曰 좌변의 식의 값이 0이 되는 α를 찾아 $(x-\alpha)(x^2+px+q)=0$의 꼴로 인수분해한다.
삼차방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가질 때 ➡ $x^2+px+q=0$의 근이 허근!

풀이 주어진 방정식의 좌변에 $x=-1$을 대입하면 0이 되므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & a+2 & a \\ & & -1 & -2 & -a \\ \hline & 1 & 2 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$(x+1)(x^2+2x+a)=0$
주어진 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면
이차방정식 $x^2+2x+a=0$이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=1^2-1\times a<0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a>1}$

정답과 풀이 49쪽

유제 **218** 방정식 $x^3+5x^2+(a+4)x+a=0$이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오. $a>4$

219 방정식 $x^3-(a+1)x+a=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오.

풍산자曰 삼차방정식이 중근을 가질 때 ➡ $(x-\alpha)(x-\beta)^2=0$의 꼴

풀이 주어진 방정식의 좌변에 $x=1$을 대입하면 0이 되므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -a-1 & a \\ & & 1 & 1 & -a \\ \hline & 1 & 1 & -a & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-1)(x^2+x-a)=0$
주어진 방정식이 중근을 가지려면
(i) $x^2+x-a=0$이 중근을 가질 때,
$x^2+x-a=0$의 판별식을 D라 하면
$D=1^2-4\times1\times(-a)=0,\ 1+4a=0 \qquad \therefore\ a=-\dfrac{1}{4}$
(ii) $x^2+x-a=0$이 $x=1$을 근으로 가질 때,
$x^2+x-a=0$에 $x=1$을 대입하면 $1+1-a=0 \qquad \therefore\ a=2$
(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 곱은 $\left(-\dfrac{1}{4}\right)\times 2=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

정답과 풀이 49쪽

유제 **220** 방정식 $x^3+x^2-ax+a-2=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오. 5

221 정육면체의 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 1 cm씩 줄이고, 높이를 2 cm 늘려서 만든 직육면체의 부피가 112 cm^3이었다. 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 구하시오.

풍산자탑 고차방정식의 활용 문제는 다음 순서로 해결한다.
구하는 것을 x로 놓는다.
➡ 주어진 조건에 맞추어 방정식을 세운다.
➡ 해를 구하고 그 해가 조건에 맞는지 확인한다.

풀이 [1단계] 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 $x\text{ cm}$라 하자.
[2단계] 새로 만든 직육면체의 가로의 길이와 세로의 길이는 모두 $(x-1)\text{ cm}$이고,
높이는 $(x+2)\text{ cm}$이고 부피는 112 cm^3이므로
$(x-1)(x-1)(x+2)=112$
$\therefore x^3-3x-110=0$ …… ㉠
$f(x)=x^3-3x-110$이라 하면
$f(5)=125-15-110=0$
이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & 0 & -3 & -110 \\ & & 5 & 25 & 110 \\ \hline & 1 & 5 & 22 & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x-5)(x^2+5x+22)$
㉠에서 $(x-5)(x^2+5x+22)=0$
$\therefore x=5$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm3\sqrt{7}i}{2}$
이때 $x>1$이므로 $x=5$
[3단계] 따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 **5 cm**이다.

정답과 풀이 50쪽

유제 **222** 밑면은 한 변의 길이가 3인 정사각형이고 높이가 12인 직육면체 모양의 그릇에 물이 가득 담겨 있다. 이 그릇의 물을 정육면체 모양의 그릇에 부었더니 정육면체 모양의 그릇의 위에서부터 3만큼 남긴 곳까지 물이 차올랐다. 정육면체 모양의 그릇의 한 모서리의 길이를 구하시오. 6

풍산자 비법
고차방정식의 풀이의 핵심은 고차식의 인수분해. 고차식의 값이 0이 되는 수를 찾아 인수분해한다.

02 삼차방정식의 근과 계수의 관계

[1] 삼차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식과 마찬가지로 삼차방정식에서도 근과 계수의 관계가 있다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계 중요

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

증명 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근이 α, β, γ일 때, $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$를 인수로 가진다.

$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

양변을 a로 나눈 다음 우변을 전개하면

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$$

양변의 계수를 비교하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

참고 삼차방정식의 근과 계수의 관계 문제는 이차방정식에서의 근과 계수의 관계 문제만큼 다양하지는 않고, 대부분 아래의 인수분해 공식을 이용하면 어렵지 않게 해결된다.

① $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$

② $(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)=x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma$

③ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

④ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

[2] 삼차방정식의 작성

삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 삼차방정식을 세울 수 있다.

삼차방정식의 작성

세 수 α, β, γ를 세 근으로 하고 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식은

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0 \Rightarrow x^3-(\underbrace{\alpha+\beta+\gamma}_{\text{세 근의 합}})x^2+(\underbrace{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}_{\text{두 근끼리의 곱의 합}})x-\underbrace{\alpha\beta\gamma}_{\text{세 근의 곱}}=0$$

[3] 삼차방정식의 켤레근

삼차방정식의 계수의 조건에 따라 무리수 또는 허수가 근이면 그 켤레수도 근이다.
이것은 이미 이차방정식에서 배웠지만 삼차방정식에서도 동일하게 성립한다.

삼차방정식의 켤레근

삼차방정식의 계수가 유리수일 때,

$a+b\sqrt{m}$ 이 근이면 $a-b\sqrt{m}$ 도 근이다. (단, a, b는 유리수, $b\neq0$, $\sqrt{m}$ 은 무리수)

삼차방정식의 계수가 실수일 때,

$a+bi$가 근이면 $a-bi$도 근이다. (단, a, b는 실수, $b\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

223 삼차방정식 $x^3+10x^2+3=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$ (2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ (3) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

풍산자日 세 근에 관한 식의 값을 구할 때는 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-10$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, $\alpha\beta\gamma=-3$

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{0}{-3}=\mathbf{0}$

(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(-10)^2-2\times0=\mathbf{100}$

(3) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$=-10\times(100-0)+3\times(-3)=\mathbf{-1009}$

정답과 풀이 50쪽

유제 **224** 삼차방정식 $x^3-2x-5=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$ $-\frac{2}{5}$ (2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ 4 (3) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ 15

225 삼차방정식 $x^3-x^2+5x-4=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$의 값을 구하시오.

풍산자日 $\alpha+\beta+\gamma=1$을 변형하여 식을 정리한다.

풀이 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5$, $\alpha\beta\gamma=4$

이때 $\alpha+\beta+\gamma=1$에서

$\alpha+\beta=1-\gamma$, $\beta+\gamma=1-\alpha$, $\gamma+\alpha=1-\beta$

이것을 주어진 식에 대입하면

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(1-\gamma)(1-\alpha)(1-\beta)$ ...... ㉠

$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=1-1+5-4=\mathbf{1}$

참고 ㉠을 전개할 때, 다음 곱셈 공식이 사용되었다.

$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

정답과 풀이 50쪽

유제 **226** 삼차방정식 $x^3-x^2+2x+3=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$의 값을 구하시오. 5

227 삼차방정식 $x^3-2x^2+x-7=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식을 구하시오.

풍산자目 주어진 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 다음 식을 계산한다.
$x^3-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)x^2+\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\right)x-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=0$

풀이 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, $\alpha\beta\gamma=7$이므로

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\times\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2}{7}$$

$$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{7}$$

따라서 구하는 삼차방정식은 $\boldsymbol{x^3-\frac{1}{7}x^2+\frac{2}{7}x-\frac{1}{7}=0}$

정답과 풀이 50쪽

유제 **228** 삼차방정식 $x^3+5x^2-5=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, α^2, β^2, γ^2을 세 근으로 하고 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식을 구하시오. $x^3-25x^2+50x-25=0$

229 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 두 근이 1, $2-\sqrt{3}$일 때, 유리수 a, b, c의 값을 구하시오.

풍산자目 두 근만 주어졌다. 하지만 켤레근의 성질을 떠올리면 세 근이 모두 주어진 셈.
이것을 간파한 후 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면 끝.

풀이 계수가 유리수이고 한 근이 $2-\sqrt{3}$이므로 $2+\sqrt{3}$도 근이다.
세 근이 1, $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1+(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=-a$$

$$1\times(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\times(2+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})\times1=b$$

$$1\times(2-\sqrt{3})\times(2+\sqrt{3})=-c$$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=-5,\ b=5,\ c=-1}$

정답과 풀이 50쪽

유제 **230** 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 두 근이 3, $2+i$일 때, 실수 a, b, c의 값을 구하시오.
$a=-7$, $b=17$, $c=-15$

231 삼차방정식 $x^3+mx^2+nx-6=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 실수 m, n의 값을 구하시오.

풍산자비법 [방법1] 켤레근의 성질을 이용하여 다른 한 근을 α로 놓고 근과 계수의 관계를 이용한다.
[방법2] 한 근만 주어지는 경우에는 그냥 대입하는 것도 좋은 방법.

풀이 계수가 실수이고 한 근이 $1+i$이므로 $1-i$도 근이다.
세 근을 $1+i$, $1-i$, α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+i)+(1-i)+\alpha=-m$ …… ㉠
$(1+i)(1-i)+(1-i)\alpha+\alpha(1+i)=n$ …… ㉡
$(1+i)(1-i)\alpha=6$ …… ㉢

㉢에서 $2\alpha=6$
$\therefore\ \alpha=3$
이 값을 ㉠, ㉡에 대입하면
$\boldsymbol{m=-5,\ n=8}$

다른 풀이 $x=1+i$를 주어진 방정식에 대입하면
$(1+i)^3+m(1+i)^2+n(1+i)-6=0$
$\therefore\ (n-8)+(2m+n+2)i=0$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$n-8=0$, $2m+n+2=0$
$\therefore\ m=-5$, $n=8$

정답과 풀이 50쪽

유제 **232** 삼차방정식 $x^3-4x^2+mx+n=0$의 한 근이 $1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 m, n의 값을 구하시오.
$m=3$, $n=2$

+ 풍산자 비법

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

03 방정식 $x^3=1$의 허근

방정식 $x^3=1$을 인수분해하면 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이다.

이때 $x-1=0$에서 실근 하나, $x^2+x+1=0$에서 두 개의 허근 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$를 구할 수 있다. 이 허근, 즉 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근을 오메가(ω)라 하고, 이를 흔히 오메가 문제라 한다.

이 오메가의 성질을 모두 이해하고, 유도할 수 있어야 문제를 쉽게 풀 수 있다.

오메가의 성질은 근을 방정식에 대입하면 참이 되는 것과 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면 확인할 수 있다.

방정식 $x^3=1$의 허근의 성질 (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

방정식 $x^3=1$의 한 허근, 즉 $x^2+x+1=0$의 한 근을 ω라 하면

① $\omega^3=1$, $\overline{\omega}^3=1$ ⬅ ω, $\overline{\omega}$는 삼차방정식 $x^3=1$의 근

② $\omega^3=\omega^6=\omega^9=1$ ⬅ $\omega^3=1$

③ $\omega^2+\omega+1=0$ ⬅ ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근

④ $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$ ⬅ 방정식 $x^2+x+1=0$의 계수가 실수이고 ω가 근이므로 $\overline{\omega}$도 근

⑤ $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$ ⬅ 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근과 계수의 관계

⑥ $\overline{\omega}=\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^3}{\omega}=\omega^2$ ⬅ $\omega\overline{\omega}=1$의 변형

$x^3=-1$일 때도 같은 방법으로 오메가의 성질을 유도할 수 있다.

같은 ω로 쓰지만 부호가 조금씩 다르다.

방정식 $x^3=-1$의 허근의 성질 (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

방정식 $x^3=-1$의 한 허근, 즉 $x^2-x+1=0$의 한 근을 ω라 하면

① $\omega^3=-1$, $\overline{\omega}^3=-1$ ⬅ ω, $\overline{\omega}$는 삼차방정식 $x^3=-1$의 근

② $\omega^3=-1$, $\omega^6=1$ ⬅ $\omega^3=-1$

③ $\omega^2-\omega+1=0$ ⬅ ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 근

④ $\overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=0$ ⬅ 방정식 $x^2-x+1=0$의 계수가 실수이고 ω가 근이므로 $\overline{\omega}$도 근

⑤ $\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$ ⬅ 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 근과 계수의 관계

⑥ $\overline{\omega}=\frac{1}{\omega}=\frac{-\omega^3}{\omega}=-\omega^2$ ⬅ $\omega\overline{\omega}=1$의 변형

오메가 문제는 방정식에서 참 쉬워 보이는 문제이다.

왜냐? 풀이가 무척 간단하니까.

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$ 또는 $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

위 두 식만으로 온갖 복잡한 식을 간단히 할 수 있다.

233 방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6$　　(2) $\dfrac{\omega^{100}+1}{\omega^{101}}$

풍산자 $\omega^3=1$을 이용하여 식을 정리한 후, $\omega^2+\omega+1=0$을 이용하여 간단히 계산한다.

풀이 (1) (주어진 식)$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+(\omega^3)^2$
$=0+1\times0+1^2=\mathbf{1}$

(2) (주어진 식)$=\dfrac{(\omega^3)^{33}\omega+1}{(\omega^3)^{33}\omega^2}=\dfrac{1^{33}\times\omega+1}{1^{33}\times\omega^2}$ ← $\omega^3=1$

$=\dfrac{\omega+1}{\omega^2}=\dfrac{\omega+1}{-(\omega+1)}=\mathbf{-1}$ ← $\omega^2=-(\omega+1)$

정답과 풀이 51쪽

유제 **234** 방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\omega^{20}+\omega^{10}+1$　0　　(2) $\dfrac{\omega^{20}}{\omega^{10}+1}$　-1

235 방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^4+\omega^2-2$의 값을 구하시오.

풍산자 $\omega^3=-1$을 이용하여 식을 정리한 후, $\omega^2-\omega+1=0$을 이용하여 간단히 계산한다.

풀이 (주어진 식)$=\omega^3\omega+\omega^2-2=-\omega+\omega^2-2$ ← $\omega^3=-1$
$=-\omega+(\omega-1)-2$ ← $\omega^2=\omega-1$
$=\mathbf{-3}$

정답과 풀이 51쪽

유제 **236** 방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^4+\omega^3+\omega^2$의 값을 구하시오.　-2

● 오메가의 성질

237 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근을 ω라 할 때, $\dfrac{\overline{\omega}+1}{2\omega+1}\times\dfrac{\omega+1}{2\overline{\omega}+1}$의 값을 구하시오.

(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

풍산자 Tip 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 곱한 후 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$을 대입하면 된다.

풀이 $(\text{주어진 식})=\dfrac{(\overline{\omega}+1)(\omega+1)}{(2\omega+1)(2\overline{\omega}+1)}=\dfrac{\omega\overline{\omega}+(\omega+\overline{\omega})+1}{4\omega\overline{\omega}+2(\omega+\overline{\omega})+1}=\dfrac{1-1+1}{4-2+1}=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$

정답과 풀이 51쪽

유제 **238** 방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\dfrac{1}{\omega-1}+\dfrac{1}{\overline{\omega}-1}$의 값을 구하시오. -1

(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

● 오메가의 활용

239 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근을 ω라 할 때,

$$1+2\omega+3\omega^2+4\omega^3+5\omega^4+6\omega^5+7\omega^6=a\omega+b$$

를 만족시키는 실수 a, b의 값을 구하시오.

풍산자 Tip $\omega^3=1$과 $\omega^2=-(\omega+1)$을 이용하여 좌변의 식의 차수를 낮추어 계산한다.

풀이 $1+2\omega+3\omega^2+4\omega^3+5\omega^4+6\omega^5+7\omega^6$

$=1+2\omega+3\omega^2+4\omega^3+5\omega^3\omega+6\omega^3\omega^2+7(\omega^3)^2$

$=1+2\omega+3\omega^2+4+5\omega+6\omega^2+7$ ⇦ $\omega^3=1$

$=9\omega^2+7\omega+12$

$=9(-\omega-1)+7\omega+12$ ⇦ $\omega^2=-(\omega+1)$

$=-2\omega+3$

$\therefore\ \boldsymbol{a=-2,\ b=3}$

정답과 풀이 51쪽

유제 **240** 방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근을 ω라 할 때,

$$6+5\omega+4\omega^2+3\omega^3+2\omega^4+\omega^5=a\omega+b$$

를 만족시키는 실수 a, b의 값을 구하시오. $a=6$, $b=0$

+ 풍산자 비법

어려운 척하는 오메가 문제는 사실 풀이가 무척 간단하다.

ω는 $x^3=1$ (또는 $x^3=-1$)의 한 허근, 즉 $x^2+x+1=0$ (또는 $x^2-x+1=0$)의 근이다.

필수 확인 문제

정답과 풀이 51쪽

241

삼차방정식 $x^3+3x^2+5x+6=0$의 서로 다른 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값을 구하시오. 8

주어진 방정식의 좌변에 $x=-2$를 대입하면 0이 되므로

$(x+2)(x^2+x+3)=0$

이때 α, β는 이차방정식 $x^2+x+3=0$의 두 근이므로

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=3$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(-1)^3-3\times3\times(-1)=8$

242

사차방정식 $2x^4-3x^3-12x^2+7x+6=0$의 네 근 중에서 가장 큰 근과 가장 작은 근의 곱을 구하시오. -6

주어진 방정식의 좌변에 $x=1$을 대입하면 0이 되므로

$(x-1)\underbrace{(2x^3-x^2-13x-6)}_{㉠}=0$

㉠에 $x=-2$를 대입하면 0이 되므로

$(x-1)(x+2)(2x^2-5x-3)=0$

$(x-1)(x+2)(2x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 가장 큰 근은 3, 가장 작은 근은 -2이므로

$3\times(-2)=-6$

243

방정식 $(x^2+2x+3)(x^2+2x-5)+7=0$의 서로 다른 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}$의 값을 구하시오. 4

(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

$x^2+2x=t$로 놓으면 $(t+3)(t-5)+7=0$

$t^2-2t-8=0$, $(t+2)(t-4)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=4$

(i) $t=-2$일 때,
$x^2+2x+2=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $t=4$일 때,
$x^2+2x-4=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 α, β는 이차방정식 $x^2+2x+2=0$의 두 근이므로

$\alpha\beta=2$

또, 계수가 실수이므로 $\overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$

$\therefore \alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=2\alpha\beta=4$

244

삼차방정식 $x^3-2x^2+(2k+1)x-2k=0$의 근이 모두 실수가 되도록 하는 정수 k의 최댓값을 구하시오. 0

주어진 방정식의 좌변에 $x=1$을 대입하면 0이 되므로

$(x-1)(x^2-x+2k)=0$

주어진 방정식의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-x+2k=0$이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times2k\ge0 \quad \therefore k\le\frac{1}{8}$

따라서 정수 k의 최댓값은 0이다.

245

삼차방정식 $x^3-3x^2+ax+b=0$의 세 근의 비가 1 : 2 : 3일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 2

$x^3-3x^2+ax+b=0$의 세 근을 각각 k, $2k$, $3k$ $(k\neq0)$로 놓으면

$k+2k+3k=6k=3$, $k\times2k+2k\times3k+3k\times k=11k^2=a$

$k\times2k\times3k=6k^3=-b$

$\therefore k=\frac{1}{2}, a=\frac{11}{4}, b=-\frac{3}{4} \qquad \therefore a+b=\frac{11}{4}+\left(-\frac{3}{4}\right)=2$

246

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\frac{(\omega-2)(\overline{\omega}-2)}{(\omega+1)(\overline{\omega}+1)}$의 값을 구하시오. 7

$(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이다.

$\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \frac{(\omega-2)(\overline{\omega}-2)}{(\omega+1)(\overline{\omega}+1)}=\frac{(\omega-2)(\overline{\omega}-2)}{(\omega+1)(\overline{\omega}+1)}=\frac{\omega\overline{\omega}-2(\omega+\overline{\omega})+4}{\omega\overline{\omega}+(\omega+\overline{\omega})+1}$
$=7$

247 실력UP

방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $(\omega^{20}-\omega^{10}+1)^9$의 값을 구하시오. -512

$x^2-x+1=0$의 양변에 $x+1$을 곱하면

$(x+1)(x^2-x+1)=0$, 즉 $x^3+1=0$이므로

$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$\therefore$ (주어진 식)$=\{(\omega^3)^6\omega^2-(\omega^3)^3\omega+1\}^9$
$=(\omega^2+\omega+1)^9$ ⬅ $\omega^3=-1$
$=\{(\omega-1)+\omega+1\}^9$ ⬅ $\omega^2=\omega-1$
$=(2\omega)^9=2^9\times(\omega^3)^3=-512$

2 연립방정식과 부정방정식

01 미지수가 2개인 연립일차방정식

2개 이상의 미지수를 포함하는 2개 이상의 방정식을 **연립방정식**이라 한다.
각각의 방정식을 동시에 만족시키는 미지수의 값의 쌍을 주어진 **연립방정식의 해** 또는 **근**이라 하고, 이 연립방정식의 근을 구하는 것을 **연립방정식을 푼다**고 한다.
모든 연립방정식을 대하는 기본자세는 문자의 수를 줄여나가는 것.
문자의 수를 줄이는 기법의 양대 산맥은 중학교에서 수없이 연습한 가감법과 대입법!
연립일차방정식에서는 주로 가감법을 쓴다.

미지수가 2개인 연립일차방정식의 해법
① 가감법: 두 식을 더하거나 빼서 미지수를 소거한다.
② 대입법: 하나의 미지수에 대하여 정리한 후 다른 방정식에 대입한다.

한 쌍의 근이 아니라 특수한 근을 가질 때의 해법은 다음과 같다.

미지수가 2개인 연립일차방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ 의 근의 판별

(1) $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$ 일 때, 해는 한 쌍. ⬅ 두 직선이 한 점에서 만난다.

(2) $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$ 일 때, 해가 없다. (불능) ⬅ 두 직선이 평행하다.

(3) $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ 일 때, 해가 무수히 많다. (부정) ⬅ 두 직선이 일치한다.

설명 미지수가 2개인 연립일차방정식의 해의 판별은 일차함수의 그래프를 생각하면 쉽게 이해할 수 있다.
방정식 $ax+by+c=0$의 근은 함수 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$의 그래프 위의 점들이고,
방정식 $a'x+b'y+c'=0$의 근은 함수 $y=-\dfrac{a'}{b'}x-\dfrac{c'}{b'}$의 그래프 위의 점들이다.
따라서 연립방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ 의 근은 두 함수 $\begin{cases} y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b} \\ y=-\dfrac{a'}{b'}x-\dfrac{c'}{b'} \end{cases}$ 의 그래프의 교점이다.

(1) $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$ ➡ 기울기가 다르다. 두 함수의 그래프가 한 점에서 만난다.

(2) $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$ ➡ 기울기는 같고, y절편은 다르다. 두 함수의 그래프가 평행하다.

(3) $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ ➡ 기울기가 같고, y절편도 같다. 두 함수의 그래프가 일치한다.

248 x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax+2y=a \\ x+(a+1)y=a+3 \end{cases}$의 해가 무수히 많도록 하는 a의 값을 m, 존재하지 않도록 하는 a의 값을 n이라 할 때, $m-n$의 값을 구하시오.

풍산자日 해가 무수히 많은 경우는 두 식이 같을 때 발생하고, 해가 없는 경우는 두 식이 상수항 부분만 다를 때 발생한다.

연립방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$에서

(i) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ ➡ 해가 없다.

(ii) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ ➡ 해가 무수히 많다.

풀이 해가 무수히 많으려면 $\frac{a}{1}=\frac{2}{a+1}=\frac{a}{a+3}$가 성립해야 한다.

해가 존재하지 않으려면 $\frac{a}{1}=\frac{2}{a+1}\neq\frac{a}{a+3}$가 성립해야 한다.

$\frac{a}{1}=\frac{2}{a+1}$에서 $a^2+a-2=0$, $(a+2)(a-1)=0$ $\quad\therefore a=-2$ 또는 $a=1$

(i) $a=-2$일 때, $-\frac{2}{1}=\frac{2}{-2+1}=\frac{-2}{-2+3}$이므로 해가 무수히 많다.

(ii) $a=1$일 때, $\frac{1}{1}=\frac{2}{1+1}\neq\frac{1}{1+3}$이므로 해가 존재하지 않는다.

따라서 $m=-2$, $n=1$이므로 $m-n=\mathbf{-3}$

참고 (i)에서 $a=-2$를 주어진 식에 대입하면

$\begin{cases} -2x+2y=-2 \\ x+(-2+1)y=-2+3 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x-y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$ ➡ 두 식이 같다.

(ii)에서 $a=1$을 주어진 식에 대입하면

$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+(1+1)y=1+3 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x+2y=1 \\ x+2y=4 \end{cases}$ ➡ 두 식이 상수항 부분만 다르다.

정답과 풀이 52쪽

유제 **249** x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax+y=1 \\ x+ay=1 \end{cases}$의 해가 무수히 많도록 하는 a의 값을 m, 존재하지 않도록 하는 a의 값을 n이라 할 때, $m-n$의 값을 구하시오. 2

02 연립이차방정식

연립방정식에서 차수가 가장 높은 것이 이차방정식일 때, 이것을 **연립이차방정식**이라 한다. 즉, 최고차항이 이차 $(x^2,\ y^2,\ xy)$인 연립방정식. 연립이차방정식은 크게 다음 두 종류로 구분할 수 있다.

(1) $\begin{cases} \text{일차방정식} \\ \text{이차방정식} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \text{이차방정식} \\ \text{이차방정식} \end{cases}$

연립일차방정식에서는 주로 가감법을 썼지만 연립이차방정식에서는 주로 대입법을 쓴다.

연립이차방정식의 풀이

(1) 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식

➡ 일차방정식을 x 또는 y에 대하여 정리하여 이차방정식에 대입한다.

(2) 이차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식

➡ 두 이차방정식 중 인수분해가 가능한 식을 인수분해한 후, 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식으로 만들어 푼다.

설명 상수항이 없는 ☆$=0$의 꼴의 식이 있으면 ☆을 인수분해하여 (일차식)$=0$의 꼴을 만든다.

x^2+y^2에서 x와 y를 서로 바꾸면 y^2+x^2이 되어 원래의 식과 같아진다.
이와 같이 x, y를 바꾸어도 원래의 식과 같아지는 식을 x, y에 대한 **대칭식**이라 한다.
마찬가지로 x, y를 서로 바꾸어도 원래의 식과 같아지는 연립이차방정식을 대칭형 연립이차방정식이라 한다.

예를 들어 $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=6 \end{cases}$, $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$은 대칭형 연립이차방정식이다.

대칭형 연립이차방정식의 풀이

➡ x, y를 두 근으로 갖는 이차방정식을 세워 x, y의 값을 구한다.

설명 대칭형 연립방정식의 대표적인 두 유형의 해법은 다음과 같다.

(i) $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=6 \end{cases}$과 같이 합에 대한 식이 일차식으로 주어졌을 때에는 x, y를 두 근으로 갖는 이차방정식을 세워서 푼다.

(ii) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$과 같이 합에 대한 식이 이차식으로 주어졌을 때에는 일차식으로 변형한다.

[1단계] $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$를 이용하여 $x+y$, xy로 이루어진 식으로 변형한다.
[2단계] $x+y=a$, $xy=b$로 치환하여 a, b의 값을 구한다.
[3단계] $x+y=a$, $xy=b$를 이용하여 x, y의 값을 구한다.

250 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 를 푸시오.

풍산자日 일차식을 포함한 연립이차방정식 ➡ 일차식을 이차식에 대입한다.

풀이 $x-y=1$에서 $y=x-1$이고, 이것을 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+(x-1)^2=5$

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

이 값을 $y=x-1$에 대입하면 $y=-2$ 또는 $y=1$

$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{y=-2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \boldsymbol{x=2} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases}$

정답과 풀이 53쪽

유제 **251** 연립방정식 $\begin{cases} y+2x=3 \\ x^2-xy=18 \end{cases}$ 을 푸시오. $\begin{cases} x=-2 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$

252 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0 \\ 5x^2-y^2=16 \end{cases}$ 을 푸시오.

풍산자日 ☆$=0$의 꼴의 식이 있을 때 ➡ ☆을 인수분해하여 일차식을 구해 연립방정식을 푼다.

풀이 $2x^2-3xy+y^2=0$의 좌변을 인수분해하면 $(2x-y)(x-y)=0$

$\therefore y=2x$ 또는 $y=x$

(i) $y=2x$일 때, 이 식을 $5x^2-y^2=16$에 대입하면

$5x^2-(2x)^2=16$, $x^2=16$ $\quad\therefore x=\pm 4$

이 값을 $y=2x$에 대입하면 $y=\pm 8$ (복호동순)

(ii) $y=x$일 때, 이 식을 $5x^2-y^2=16$에 대입하면

$5x^2-x^2=16$, $x^2=4$ $\quad\therefore x=\pm 2$

이 값을 $y=x$에 대입하면 $y=\pm 2$ (복호동순)

$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{x=4} \\ \boldsymbol{y=8} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \boldsymbol{x=-4} \\ \boldsymbol{y=-8} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \boldsymbol{x=2} \\ \boldsymbol{y=2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \boldsymbol{x=-2} \\ \boldsymbol{y=-2} \end{cases}$

정답과 풀이 53쪽

유제 **253** 연립방정식 $\begin{cases} y^2-3xy=0 \\ 3x^2+5y^2=48 \end{cases}$ 을 푸시오. $\begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$

254 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=6 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$

풍산자티 x, y에 대하여 대칭일 때 ➡ $x+y=a$, $xy=b$로 치환하여 먼저 a, b의 값을 구한다.

풀이 (1) $x+y=7$, $xy=6$이므로 x, y의 값은 이차방정식 $t^2-7t+6=0$의 두 근이다.
이 이차방정식의 좌변을 인수분해하면 $(t-1)(t-6)=0$ $\therefore t=1$ 또는 $t=6$
따라서 구하는 근은
$\begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$

(2) $x+y=a$, $xy=b$로 놓으면 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로
$\begin{cases} a^2-2b=13 \\ b=6 \end{cases}$
위의 연립방정식을 풀면 $a=\pm5$, $b=6$
(i) $a=5$, $b=6$일 때,
$x+y=5$, $xy=6$이므로 x, y의 값은 이차방정식 $t^2-5t+6=0$의 두 근이다.
이 이차방정식의 좌변을 인수분해하면
$(t-2)(t-3)=0$ $\therefore t=2$ 또는 $t=3$
$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$
(ii) $a=-5$, $b=6$일 때,
$x+y=-5$, $xy=6$이므로 x, y의 값은 이차방정식 $t^2+5t+6=0$의 두 근이다.
이 이차방정식의 좌변을 인수분해하면
$(t+2)(t+3)=0$ $\therefore t=-2$ 또는 $t=-3$
$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$
$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$

참고 (1) 더해서 7, 곱해서 6인 두 수는 1, 6이므로
$\begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$

정답과 풀이 53쪽

유제 **255** 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-8 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases}$

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

256 연립방정식 $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=18 \end{cases}$이 오직 한 쌍의 해를 가지도록 하는 실수 a의 값을 모두 구하시오.

풍산자팁 일차식을 이차식에 대입하여 이차방정식을 만든 후, 중근 조건 판별식 $D=0$을 이용한다.

풀이 $y=-x+a$를 $x^2+y^2=18$에 대입하면

$x^2+(-x+a)^2=18$, $2x^2-2ax+a^2-18=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-2(a^2-18)=0$, $a^2=36$ $\therefore$ $\boldsymbol{a=\pm 6}$

정답과 풀이 53쪽

유제 **257** 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=a+1 \end{cases}$이 오직 한 쌍의 해를 가지도록 하는 실수 a의 값을 구하시오. 1

258 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a+4 \\ xy=3a^2+4 \end{cases}$가 실근을 가질 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

풍산자팁 x, y는 이차방정식 $t^2-(x+y)t+xy=0$의 두 근임을 떠올린 후, 실수 조건 판별식 $D\geq 0$을 이용한다.

풀이 주어진 연립방정식을 만족시키는 x, y의 값은 이차방정식 $t^2-(2a+4)t+3a^2+4=0$의 두 근이다. 이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+2)\}^2-(3a^2+4)\geq 0$

$-2a^2+4a\geq 0$, $a(a-2)\leq 0$ $\therefore$ $\boldsymbol{0\leq a\leq 2}$

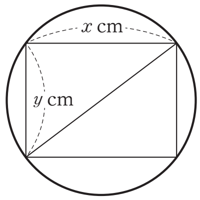
정답과 풀이 53쪽

유제 **259** 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a-6 \\ xy=a^2+4 \end{cases}$가 실근을 가질 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오. $a\leq \frac{5}{6}$

260 반지름의 길이가 10 cm인 원에 둘레의 길이가 56 cm인 직사각형이 내접하고 있을 때, 이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 구하시오.
(단, 직사각형의 가로의 길이가 세로의 길이보다 길다.)

풍산자비 연립방정식의 활용 문제는 다음 순서로 해결한다.
구하는 것을 x로 놓는다.
➡ 주어진 조건에 맞추어 연립방정식을 세운다.
➡ 해를 구하고 그 해가 조건에 맞는지 확인한다.

풀이 [1단계] 직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하자.
[2단계] 직사각형의 둘레의 길이가 56 cm이므로
$2(x+y)=56$, $x+y=28$
직사각형의 대각선의 길이가 원의 지름의 길이인 20 cm이므로
$x^2+y^2=400$



$\therefore \begin{cases} x+y=28 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=400 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $y=-x+28$ $\cdots\cdots$ ㉢
㉢을 ㉡에 대입하여 풀면
$x^2-28x+192=0$, $(x-12)(x-16)=0$
$\therefore x=12$ 또는 $x=16$
㉢에 $x=12$를 대입하면 $y=16$
㉢에 $x=16$을 대입하면 $y=12$
[3단계] 이때 직사각형의 가로의 길이가 세로의 길이보다 길어야 하므로
가로의 길이: 16 cm, 세로의 길이: 12 cm

정답과 풀이 53쪽

유제 **261** 반지름의 길이가 서로 다른 두 원의 둘레의 길이의 합은 24π이고, 넓이의 합은 80π일 때, 두 원 중 큰 원의 반지름의 길이를 구하시오. 8

+ 풍산자 비법

연립이차방정식도 연립일차방정식처럼 미지수를 줄이는 것이 관건!
인수분해가 되는 이차식을 인수분해하여 대입하면 된다.

03 연립이차방정식: 인수분해가 되지 않는 경우

한걸음 더

● 이차항 소거형의 연립이차방정식

262 다음 연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} 2x^2-2xy+y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+x=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

풍산자目 이차항의 계수를 같게 할 수 있을 때 ➡ 이차항을 소거하여 일차식을 만든다.

풀이 ㉠$-$㉡$\times 2$를 하면 $y-2x=3$ $\quad\therefore y=2x+3$

이 식을 ㉡에 대입하면 $x^2-x(2x+3)+x=0$, $x^2+2x=0$

$x(x+2)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=-2$

이 값을 $y=2x+3$에 대입하면 $y=3$ 또는 $y=-1$ $\quad\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

정답과 풀이 54쪽

유제 **263** 다음 연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} 3xy+8x+y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy+2x+y=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$

● 상수항 소거형의 연립이차방정식

264 다음 연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} 2x^2-2xy+y^2=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x^2-3xy+5y^2=15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

풍산자目 이차항의 계수를 같게 할 수 없을 때 ➡ 상수항을 소거하여 ☆$=0$의 꼴로 만든다.

풀이 ㉠$\times 3-$㉡을 하면 $2x^2-3xy-2y^2=0$, $(x-2y)(2x+y)=0$ $\quad\therefore x=2y$ 또는 $y=-2x$

(i) $x=2y$일 때, 이 식을 ㉠에 대입하면

$2(2y)^2-2\times 2y\times y+y^2=5$, $5y^2=5$, $y^2=1$ $\quad\therefore y=\pm 1$

이 값을 $x=2y$에 대입하면 $x=\pm 2$ (복호동순)

(ii) $y=-2x$일 때, 이 식을 ㉠에 대입하면

$2x^2-2x\times(-2x)+(-2x)^2=5$, $10x^2=5$, $x^2=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

이 값을 $y=-2x$에 대입하면 $y=\mp\sqrt{2}$ (복호동순)

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$

정답과 풀이 54쪽

유제 **265** 다음 연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} x^2+3xy-2y^2=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy-y^2=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

$\begin{cases} x=0 \\ y=i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=-i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

04 공통근

두 개 이상의 방정식을 동시에 만족시키는 미지수의 값을 **공통근**이라 한다.
공통근을 구하는 방법은 다음 두 가지가 있다.

공통근을 구하는 방법

(1) 각각의 방정식을 풀어 공통인 근을 찾는다.

① 두 개 이상의 방정식을 각각 인수분해한다.

② 각각의 근을 구하여 공통인 근을 찾는다.

(2) 각각의 방정식을 연립하여 푼다.

① 공통근을 α라 하고 $x=\alpha$를 주어진 방정식에 대입한다.

② α에 대한 방정식을 연립해서 최고차항 또는 상수항을 소거한다.

③ 공통근의 값을 구한다.

쉽게 생각해서 공통근이란 공통의 근. 각각의 방정식을 풀어 공통인 해를 찾으면 된다.
한편, 공통근은 각각의 방정식을 모두 만족시키는 근. 따라서 두 방정식을 연립해도 된다.

설명 두 이차방정식의 공통근은 다음과 같이 세 가지 경우로 구분할 수 있다.

① $x^2-3x+2=0$과 $x^2+3x+2=0$의 공통근은 0개 (공통근이 없다.)

② $x^2-3x+2=0$과 $x^2-4x+3=0$의 공통근은 1개

③ $x^2-3x+2=0$과 $2x^2-6x+4=0$의 공통근은 2개

이차방정식의 근이 2개이므로 두 이차방정식의 공통근은 최대 2개이다.
두 이차방정식의 공통근이 2개인 경우는 두 식이 사실상 같을 때!
한편, 두 이차함수의 그래프와 x축의 교점이 같다고 하더라도 두 함수를 나타내는 식은 다를 수 있다.
예를 들어 함수 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표는 항상 α, β이지만 a의 값에 따라 무수히 많은 함수가 존재한다.

개념확인

다음 두 방정식의 공통근을 구하시오.

$x^2+3x+2=0$, $x^2-x-2=0$

풀이 $x^2+3x+2=0$에서 $(x+1)(x+2)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=-2$

$x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 공통근은 $\boldsymbol{x=-1}$이다.

다른 풀이 두 방정식의 양변을 각각 빼면

$4x+4=0$ $\qquad\therefore$ $x=-1$

●공통근을 구하는 문제

266 다음 두 방정식의 공통근을 구하시오.

$x^3+3x^2-x-3=0,\ x^2+2x-3=0$

풍산자법 공통근을 구하려면 각각의 방정식의 근을 구하여 공통인 근을 찾는다.

풀이 (i) $x^3+3x^2-x-3=0$에서

$x^2(x+3)-(x+3)=0$

$(x^2-1)(x+3)=0$

$(x-1)(x+1)(x+3)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-3$

(ii) $x^2+2x-3=0$에서

$(x-1)(x+3)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-3$

따라서 공통근은 $\boldsymbol{x=1}$ **또는** $\boldsymbol{x=-3}$

정답과 풀이 **54**쪽

유제 **267** 다음 두 방정식의 공통근을 구하시오. 1

$100x^2-99x-1=0,\ x^2+99x-100=0$

●공통근의 미정계수 문제

268 다음 두 방정식의 공통근이 실수일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

$x^3-ax+8=0,\ 2x^2-a=0$

풍산자법 공통근은 두 방정식을 모두 만족시키는 근이므로 두 식을 연립하여 풀면 된다.

풀이 $a=2x^2$을 $x^3-ax+8=0$에 대입하면

$x^3-2x^3+8=0$

$x^3-8=0$

$\therefore\ (x-2)(x^2+2x+4)=0$

주어진 조건에서 공통근이 실수이므로 공통근은

$x=2$

$\therefore\ a=2\times2^2=8$

정답과 풀이 **54**쪽

유제 **269** 다음 두 방정식의 공통근이 실수일 때, 상수 a의 값을 구하시오. -1

$99x^3-ax+100=0,\ x^2+a=0$

270 다음 두 이차방정식이 공통근을 가지도록 하는 상수 a의 값을 모두 구하시오.

$$x^2+(a+1)x-2a=0,\ x^2-(a+3)x+2a=0$$

풍산자ㅂ 상수항이 부호만 다르다. ➡ 양변을 더해 상수항을 소거한다.

풀이 두 방정식의 양변을 각각 더하면 $2x^2-2x=0$, $2x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

이 값을 $x^2+(a+1)x-2a=0$에 대입하면

$x=0$일 때, $a=0$

$x=1$일 때, $2-a=0$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=0}$, $\boldsymbol{a=2}$

정답과 풀이 **54**쪽

유제 **271** 다음 두 이차방정식이 공통근을 가지도록 하는 상수 a의 값을 모두 구하시오. 0, -1

$$x^2-(a-1)x+3a=0,\ x^2+(a+5)x-3a=0$$

272 다음 두 이차방정식이 오직 하나의 공통근을 가지도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

$$x^2+(2a+1)x-a-3=0,\ x^2+(a+1)x+a-3=0$$

풍산자ㅂ 상수항을 소거하기 어렵다. ➡ 양변을 빼 이차항을 소거한다.

풀이 두 방정식의 양변을 각각 빼면 $ax-2a=0$, $a(x-2)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $x=2$

(i) $a=0$일 때, 이 값을 주어진 두 방정식에 각각 대입하면 두 식이 모두 $x^2+x-3=0$이 되어 같아진다. 즉, 공통근이 두 개가 되므로 이 값은 버린다.

(ii) $x=2$일 때, 이 값을 $x^2+(2a+1)x-a-3=0$에 대입하면

$4+4a+2-a-3=0$, $3a+3=0$ $\quad\therefore a=-1$

(i), (ii)에서 $\boldsymbol{a=-1}$

정답과 풀이 **54**쪽

유제 **273** 다음 두 이차방정식이 오직 하나의 공통근을 가지도록 하는 상수 a의 값을 구하시오. -1

$$x^2+4ax-2a+1=0,\ x^2+ax+a+1=0$$

+ 풍산자 비법

공통근을 구하는 문제는 결국 연립방정식 문제. 공통인 근이 존재한다고 하면 두 식을 연립하여 항을 적절히 소거하여 푼다.

05 부정방정식

일반적으로 방정식의 개수와 미지수의 개수는 같다. 그런데 방정식의 개수가 미지수의 개수보다 적어서 해가 무수히 많은 방정식을 **부정방정식**이라 한다. 부정방정식의 해에 대한 정수 조건이나 실수 조건 등이 추가로 주어지면 해가 몇 개로 확정된다. 따라서 반드시 그 조건을 확인해야 한다.

예를 들어 방정식 $xy=4$는 미지수가 2개이고 방정식이 1개이므로 다음과 같이 해가 무수히 많다.

$$\begin{cases} x=-6 \\ y=-\dfrac{2}{3} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-2\sqrt{2} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=\dfrac{4}{3} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=i \\ y=-4i \end{cases} \text{ 또는 } \cdots$$

그런데 x, y가 정수라는 조건이 주어지면 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(-4, -1)$, $(-2, -2)$, $(-1, -4)$, $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$이므로 해가 유한 개로 정해진다.

[1] 정수 조건의 부정방정식

정수 조건의 부정방정식은 (정수)$\times$(정수)$=$(정수)임을 이용한다.
인수분해하여 (일차식)$\times$(일차식)$=$(정수)의 꼴로 변형한 후, 약수와 배수의 성질을 이용한다.

정수 조건의 부정방정식
(일차식)$\times$(일차식)$=$(정수)의 꼴로 변형한 후, 우변의 약수를 이용하여 해를 구한다.

[2] 실수 조건의 부정방정식

실수 조건의 부정방정식은 실수의 제곱이 항상 0보다 크거나 같음을 이용한다.

실수 조건의 부정방정식의 해법
(1) 제곱식으로 변형할 수 있을 때
➡ 실수 A, B에 대하여 $A^2+B^2=0$이면 $A=0$, $B=0$임을 이용한다.
(2) 제곱식으로 변형하기 힘들 때
➡ 이차방정식이 실근을 가질 조건은 판별식 $D\geq 0$임을 이용한다.

大 원칙
부정방정식은 정수 조건인지 실수 조건인지를 먼저 확인한다.
① 정수 조건의 부정방정식 ➡ (일차식)$\times$(일차식)$=$(정수)
② 실수 조건의 부정방정식 ➡ $A^2+B^2=0$ 또는 $D\geq 0$

274 방정식 $xy+4x-2y-9=0$을 만족시키는 정수 x, y의 값을 구하시오.

풍산자비 (일차식)×(일차식)=(정수)의 꼴로 정리하여 우변의 약수를 이용한다.

풀이 $xy+4x-2y-9=0$에서 $x(y+4)-2y-9=0$

$x(y+4)-2(y+4)+8-9=0$

$\therefore\ \underline{(x-2)}\,\underline{(y+4)}=1$

$\quad 1 \quad\ 1 \ \Rightarrow\ x-2=1,\ y+4=1 \ \Rightarrow\ x=3,\ y=-3$

$\quad -1 \quad -1 \ \Rightarrow\ x-2=-1,\ y+4=-1 \ \Rightarrow\ x=1,\ y=-5$

따라서 구하는 정수 x, y의 값은

$\begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-5 \end{cases}$

정답과 풀이 54쪽

유제 **275** 방정식 $xy-3x-3y+7=0$을 만족시키는 정수 x, y의 값을 구하시오.

$\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

276 이차방정식 $x^2-2mx+2m-3=0$의 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 상수 m의 값을 모두 구하시오.

풍산자비 상수항이 m에 대한 일차식의 꼴 ➡ 근과 계수의 관계를 이용하여 부정방정식을 세운다.

풀이 두 정수근을 α, β $(\alpha \geq \beta)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2m$ ...... ㉠

$\alpha\beta=2m-3$ ...... ㉡

㉡−㉠을 하면 $\alpha\beta-\alpha-\beta=-3$, $(\alpha-1)(\beta-1)-1=-3$

$\therefore\ \underline{(\alpha-1)}\,\underline{(\beta-1)}=-2$

$\quad 1 \quad -2 \ \Rightarrow\ \alpha-1=1,\ \beta-1=-2 \ \Rightarrow\ \alpha=2,\ \beta=-1$

$\quad 2 \quad -1 \ \Rightarrow\ \alpha-1=2,\ \beta-1=-1 \ \Rightarrow\ \alpha=3,\ \beta=0$

이 값을 각각 ㉠에 대입하면 $2+(-1)=2m$, $3+0=2m$

$\therefore\ m=\frac{1}{2},\ m=\frac{3}{2}$

정답과 풀이 54쪽

유제 **277** 이차방정식 $x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 상수 m의 값을 모두 구하시오. -1, 7

278 방정식 $x^2+2xy+2y^2-6y+9=0$을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오.

풍산자日 $A^2+B^2=0$의 꼴로 변형한 후 $A=0$, $B=0$임을 이용한다.

풀이 $x^2+2xy+2y^2-6y+9=0$에서 $(x^2+2xy+y^2)+(y^2-6y+9)=0$

$\therefore (x+y)^2+(y-3)^2=0$

x, y는 실수이므로 $x+y=0$, $y-3=0$

두 식을 연립하여 풀면 $\boldsymbol{x=-3}$, $\boldsymbol{y=3}$

정답과 풀이 55쪽

유제 **279** 방정식 $x^2+y^2-2x-4y+5=0$을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오. $x=1$, $y=2$

280 방정식 $2x^2-2xy+y^2-2x-2y+5=0$을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오.

풍산자日 $A^2+B^2=0$의 꼴로 변형하기 힘들 때 ➡ x에 대하여 정리한 후 판별식 $D\geq0$임을 이용한다.

풀이 주어진 방정식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2-2(y+1)x+y^2-2y+5=0$ …… ㉠

x가 실수이므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(y+1)\}^2-2(y^2-2y+5)\geq0$

$-y^2+6y-9\geq0$, $y^2-6y+9\leq0$, $(y-3)^2\leq0$ ⬅ $(실수)^2\geq0$

이때 y는 실수이므로 $y-3=0$ $\therefore$ $\boldsymbol{y=3}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $2x^2-8x+8=0$

$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$ $\therefore$ $\boldsymbol{x=2}$

정답과 풀이 55쪽

유제 **281** 방정식 $2x^2+2xy+y^2+2x+2y+1=0$을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오. $x=0$, $y=-1$

+ 풍산자 비법

- 정수 조건의 부정방정식 ➡ (일차식)×(일차식)=(정수)의 꼴로 변형한 후, 약수와 배수의 성질을 이용한다.
- 실수 조건의 부정방정식 ➡ $A^2+B^2=0$으로 변형하거나, 한 문자에 대하여 정리한 후 판별식을 이용한다.

필수 확인 문제

정답과 풀이 55쪽

282

연립방정식 $\begin{cases} x+2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 최댓값을 구하시오. $\frac{3}{2}$

㉠에서 $x=-2y+1$이고, 이 식을 ㉡에 대입하여 정리하면

$2y^2-3y-2=0$, $(2y+1)(y-2)=0$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{2}$ 또는 $y=2$

이 값을 $x=-2y+1$에 대입하면 $x=2$ 또는 $x=-3$

$\therefore x+y=\frac{3}{2}$ 또는 $x+y=-1$

따라서 $x+y$의 최댓값은 $\frac{3}{2}$이다.

283

연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=k & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 가 오직 한 쌍의 해를 가질 때, 상수 k의 값을 모두 구하시오. -5, 5

㉠에서 $y=k-2x$이고, 이 식을 ㉡에 대입하면

$x^2+(k-2x)^2=5$ $\quad\therefore 5x^2-4kx+k^2-5=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-5)=0$, $-k^2+25=0$

$\therefore k=\pm 5$

284

$x+y=a$, $xy=b$로 놓으면 $\begin{cases} a-b=1 \\ ab=12 \end{cases}$

$\therefore a=4, b=3$ 또는 $a=-3, b=-4$

연립방정식 $\begin{cases} x+y-xy=1 \\ x^2y+xy^2=12 \end{cases}$ 를 만족시키는 자연수 x, y에 대하여 xy의 값을 구하시오. 3

(i) $a=4, b=3$일 때, $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

(ii) $a=-3, b=-4$일 때, $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$

이때 x, y는 자연수이므로 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ $\quad\therefore xy=3$

285

두 이차방정식 $20x^2+19x-1=0$, $20x^2+21x+1=0$에서 각각의 근 중 공통근이 아닌 것을 각각 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오. 0

(i) $20x^2+19x-1=0$에서 $(20x-1)(x+1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{20}$ 또는 $x=-1$

(ii) $20x^2+21x+1=0$에서 $(20x+1)(x+1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{20}$ 또는 $x=-1$

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta=\frac{1}{20}+\left(-\frac{1}{20}\right)=0$

286

x에 대한 두 이차방정식 $x^2+(k+2)x-10=0$, $x^2+(k-1)x+5=0$이 공통근을 가질 때, 실수 k의 값을 구하시오. -5

두 방정식의 양변을 각각 빼면 $3x-15=0$ $\quad\therefore x=5$

따라서 공통근은 $x=5$이므로

이 값을 $x^2+(k-1)x+5=0$에 대입하면

$5^2+5(k-1)+5=0$, $5k+25=0$

$\therefore k=-5$

287

방정식 $xy+2x-3y=0$을 만족시키는 자연수 x, y에 대하여 $x+y$의 최솟값을 구하시오. 2

$(x-3)(y+2)=-6$

x, y는 자연수이므로

$x-3=-1$, $y+2=6$ 또는 $x-3=-2$, $y+2=3$

$\therefore x=2$, $y=4$ 또는 $x=1$, $y=1$

따라서 $x+y$의 최솟값은 2이다.

288

두 실수 x, y에 대하여

$$9x^2+6xy+2y^2-4y+4=0$$

이 성립할 때, $x+y$의 값을 구하시오. $\frac{4}{3}$

$9x^2+6xy+2y^2-4y+4=0$에서

$(9x^2+6xy+y^2)+(y^2-4y+4)=0$

$\therefore (3x+y)^2+(y-2)^2=0$

x, y는 실수이므로 $3x+y=0$, $y-2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-\frac{2}{3}$, $y=2$ $\quad\therefore x+y=\frac{4}{3}$

289 실력UP

연립방정식 $\begin{cases} x+y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ ax+2y=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 근이 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=b & \cdots\cdots ㉢ \\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$ 을 만족시킬 때, 정수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. -15

㉠에서 $y=4-x$이고, 이것을 ㉣에 대입하면 $x=1$ 또는 $x=3$

이 값을 $y=4-x$에 대입하면 $y=3$ 또는 $y=1$

(i) $x=1$, $y=3$일 때, ㉡, ㉢에서 $a=3$, $b=-5$

(ii) $x=3$, $y=1$일 때, ㉡, ㉢에서 $a=\frac{7}{3}$, $b=1$

(i), (ii)에서 $a=3$, $b=-5$ $\quad\therefore ab=-15$

♦ 삼차방정식과 사차방정식

삼차방정식과 사차방정식의 풀이	① 인수정리를 이용한 인수분해 ➡ $f(\alpha)=0$이면 $(x-\alpha)$를 인수로 가진다. ② 공통부분이 있을 때 ➡ 공통부분을 치환해서 인수분해한다.
삼차방정식의 근과 계수의 관계	$ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면 $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$
$x^3=1$의 허근 ω의 성질	① $\omega^3=1$, $\overline{\omega}^3=1$ ⬅ 삼차방정식 $x^3=1$의 근 ② $\omega^3=\omega^6=\omega^9=1$ ⬅ $\omega^3=1$ ③ $\omega^2+\omega+1=0$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$ ⬅ 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근 ④ $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$ ⬅ 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근과 계수의 관계 ⑤ $\overline{\omega}=\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^3}{\omega}=\omega^2$ ⬅ $\omega\overline{\omega}=1$의 변형

♦ 연립방정식

$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$	① $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$일 때, 해는 한 쌍. ② $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ 일 때, 해가 없다. (불능) ③ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$일 때, 해가 무수히 많다. (부정)
{ 일차방정식 이차방정식	일차방정식을 x 또는 y에 대하여 정리하여 이차방정식에 대입
{ 이차방정식 이차방정식	두 이차방정식 중 인수분해가 가능한 식을 인수분해 ➡ 인수분해하여 얻은 일차방정식을 다른 이차방정식에 각각 대입

♦ 부정방정식

정수 조건의 부정방정식	(일차식)$\times$(일차식)$=$(정수)의 꼴로 변형한 후 우변의 약수를 이용하여 해를 구한다.
실수 조건의 부정방정식	① 완전제곱식으로 변형할 수 있을 때 ➡ 실수 A, B에 대하여 $A^2+B^2=0$이면 $A=0$, $B=0$임을 이용한다. ② 완전제곱식으로 변형하기 힘들 때 ➡ 이차방정식이 실근을 가질 조건은 판별식 $D\geq0$임을 이용한다.

실전 연습문제

정답과 풀이 56쪽

STEP 1

290 교육청 기출

x에 대한 삼차방정식

$$x^3-(2a+1)x^2+(a+1)^2x-(a^2+1)=0$$

의 서로 다른 두 허근을 α, β라 하자. $\alpha+\beta=8$일 때, $\alpha\beta$의 값은? (단, a는 실수이다.)

① 16 ● ② 17 ③ 18

④ 19 ⑤ 20

주어진 방정식의 좌변에 $x=1$을 대입하면 0이 되므로

$(x-1)(x^2-2ax+a^2+1)=0$

이때 α, β는 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+1=0$의 두 근이므로

$\alpha+\beta=2a=8$ $\therefore a=4$

$\therefore \alpha\beta=a^2+1=4^2+1=17$

291

사차방정식 $x^4-7x^2-18=0$의 두 실근의 곱을 구하시오. -9

$x^2=t$로 놓으면 $t^2-7t-18=0$, $(t+2)(t-9)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=9$

즉, $x^2=-2$ 또는 $x^2=9$이므로 $x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm3$

따라서 주어진 방정식의 두 실근의 곱은

$3\times(-3)=-9$

292

사차방정식 $(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)-96=0$의 한 허근을 α라 할 때, $\alpha^2-5\alpha$의 값을 구하시오. -16

$x^2-5x=t$로 놓으면 $t^2+10t-96=0$ $\therefore t=6$ 또는 $t=-16$

(i) $x^2-5x=6$에서 $x^2-5x-6=0$

$(x+1)(x-6)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=6$

(ii) $x^2-5x=-16$에서 $x^2-5x+16=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 허근 α는 $x^2-5x+16=0$의 근이므로 $\alpha^2-5\alpha=-16$

293

삼차방정식 $x^3+(a+2)x^2+3ax+a^2=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 실수 a의 값의 범위를 정하시오. $a<0$ 또는 $0<a<1$

좌변에 $x=-a$를 대입하면 0이 되므로 $(x+a)(x^2+2x+a)=0$

$\therefore x=-a$ 또는 $x^2+2x+a=0$

$x^2+2x+a=0$이 $-a$가 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

(i) $\frac{D}{4}=1-a>0$ $\therefore a<1$

(ii) $(-a)^2+2(-a)+a\neq0$ $\therefore a\neq0$, $a\neq1$

$\therefore a<0$ 또는 $0<a<1$

294

삼차방정식 $x^3-2x^2+3x-4=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$의 값을 구하시오. 2

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=4$

$\alpha+\beta+\gamma=2$에서 $\alpha+\beta=2-\gamma$, $\beta+\gamma=2-\alpha$, $\gamma+\alpha=2-\beta$이므로

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$

$=2^3-2^2(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=2^3-2^2\times2+2\times3-4=2$

295

삼차방정식 $x^3+4x-2=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하시오. $x^3+4x+2=0$

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=2$

$\alpha+\beta+\gamma=0$에서 $\alpha+\beta=-\gamma$, $\beta+\gamma=-\alpha$, $\alpha+\gamma=-\beta$이므로

$(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=-\gamma+(-\alpha)+(-\beta)$

$=-(\alpha+\beta+\gamma)=0$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$

$=-\gamma\times(-\alpha)+(-\alpha)\times(-\beta)+(-\beta)\times(-\gamma)$

$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=-\gamma\times(-\alpha)\times(-\beta)$

$=-\alpha\beta\gamma=-2$

따라서 $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3+4x+2=0$

296

$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$일 때, $\omega^{200}+\frac{1}{\omega^{200}}$의 값을 구하시오. -1

$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2\omega+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $4\omega^2+4\omega+1=-3$

$\therefore \omega^2+\omega+1=0$

양변에 $\omega-1$을 곱하면

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$, $\omega^3-1=0$

$\therefore \omega^3=1$, $\frac{1}{\omega^2}=\omega$

$\therefore \omega^{200}+\frac{1}{\omega^{200}}=(\omega^3)^{66}\omega^2+\frac{1}{(\omega^3)^{66}\omega^2}$

$=\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\omega^2+\omega=-1$

실전 연습문제

297

연립방정식 $\begin{cases} x-xy+y=1 \\ x^2-xy+y^2=31 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha-\beta$의 최댓값을 구하시오. 6

$x+y=a$, $xy=b$로 놓으면 $\begin{cases} a-b=1 \\ a^2-3b=31 \end{cases}$

위의 연립방정식을 풀면

$a=-4$, $b=-5$ 또는 $a=7$, $b=6$

(i) $a=-4$, $b=-5$일 때, x, y는 $t^2+4t-5=0$의 두 근이다.

$\therefore \begin{cases} x=-5 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-5 \end{cases}$

(ii) $a=7$, $b=6$일 때, x, y는 $t^2-7t+6=0$의 두 근이다.

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$

(i), (ii)에서 $\alpha-\beta$의 최댓값은 $x=1$, $y=-5$일 때 6이다.

298

연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=-2 \\ x^2+y^2=a \end{cases}$ 가 실근을 가질 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오. $a \ge \frac{4}{5}$

$y=-2x-2$를 $x^2+y^2=a$에 대입하면

$x^2+(-2x-2)^2=a$, $5x^2+8x+4-a=0$

이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-5(4-a)\ge 0 \qquad \therefore a \ge \frac{4}{5}$

299

방정식 $xy=6(y-x)$를 만족시키는 양의 정수 x, y에 대하여 $x+y$의 최댓값을 구하시오. 35

$xy+6x-6y=0 \qquad \therefore (x-6)(y+6)=-36$

x, y가 양의 정수이므로

$x=2$, $y=3$ 또는 $x=3$, $y=6$ 또는 $x=4$, $y=12$ 또는 $x=5$, $y=30$

따라서 $x+y$의 최댓값은 35이다.

STEP 2

300

삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha+\beta+\gamma=9$가 성립한다. 이때 $f(3x-2)=0$의 세 근의 합을 구하시오. 5

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ $(a\ne 0)$로 놓으면

$f(3x-2)=a(3x-2-\alpha)(3x-2-\beta)(3x-2-\gamma)$

$f(3x-2)=0$에서

$3x-2-\alpha=0$ 또는 $3x-2-\beta=0$ 또는 $3x-2-\gamma=0$

$\therefore x=\frac{\alpha+2}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+2}{3}$ 또는 $x=\frac{\gamma+2}{3}$

$\therefore \frac{\alpha+2}{3}+\frac{\beta+2}{3}+\frac{\gamma+2}{3}=\frac{\alpha+\beta+\gamma+6}{3}=\frac{9+6}{3}=5$

301

방정식 $(x-4)(x-2)(x+3)(x+5)=240$의 모든 실근의 곱을 구하시오. -30

$(x^2+x-20)(x^2+x-6)=240$

$x^2+x=t$로 놓으면 $(t-20)(t-6)=240$, $t^2-26t-120=0$

$\therefore t=-4$ 또는 $t=30$

(i) $t=-4$일 때, $x^2+x+4=0$

이차방정식 $x^2+x+4=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $t=30$일 때, $x^2+x-30=0$

근과 계수의 관계에 의하여 서로 다른 두 실근의 곱은 -30이다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 실근의 곱은 -30이다.

302

삼차방정식

$$kx^3+(5k-6)x^2+(8k-16)x+4k-10=0$$

이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. 3

방정식의 좌변에 $x=-1$을 대입하면 0이 되므로

$(x+1)\{kx^2+(4k-6)x+4k-10\}=0$

주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $kx^2+(4k-6)x+4k-10=0$이 -1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $\frac{D}{4}=(2k-3)^2-k(4k-10)>0$, $-2k+9>0$

$\therefore k<\frac{9}{2}$ ······ ㉠

또, -1이 근이 아니어야 하므로

$k-4k+6+4k-10\ne 0 \qquad \therefore k\ne 4$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $k<4$ 또는 $4<k<\frac{9}{2}$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k는 1, 2, 3이므로 그 개수는 3이다.

303

$x^{100}+3x+1$을 x^2-x+1로 나눈 나머지를 구하시오. $2x+1$

몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^{100}+3x+1=(x^2-x+1)Q(x)+ax+b$

양변에 $x^2-x+1=0$의 근 $x=\omega$를 대입하면

$\omega^{100}+3\omega+1=a\omega+b$ ⋯⋯ ㉠

한편, $\omega^2-\omega+1=0$에서 $(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$ $\therefore \omega^3=-1$

$\omega^3=-1$을 ㉠에 대입하면 $2\omega+1=a\omega+b$

$\therefore a=2, b=1$

따라서 구하는 나머지는 $2x+1$

304

x에 대한 두 방정식 $100x^3+16kx-832=0$, $x^2-4k=0$의 공통근이 실수일 때, 상수 k의 값을 구하시오. 1

$x^2-4k=0$에서 $x^2=4k$이므로

$4k=x^2$을 $100x^3+16kx-832=0$에 대입하면

$104x^3-832=0$, $x^3-8=0$

$\therefore (x-2)(x^2+2x+4)=0$

주어진 조건에서 공통근은 실수이므로 $x=2$

이 값을 $4k=x^2$에 대입하면

$k=\frac{x^2}{4}=\frac{2^2}{4}=1$

305

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2(x+y) \end{cases}$를 만족시키는 두 정수 x, y의 값을 모두 구하시오. $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$u^2-2v=5$ ⋯⋯ ㉠, $v=2u$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $u^2-4u=5$ $\therefore u=5$ 또는 $u=-1$

(i) $u=5$일 때, $v=10$이므로

x, y는 이차방정식 $t^2-5t+10=0$의 두 근이다. (정수해 없음)

(ii) $u=-1$일 때, $v=-2$이므로

x, y는 이차방정식 $t^2+t-2=0$의 두 근이다.

$(t+2)(t-1)=0$ $\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

$\therefore x=-2, y=1$ 또는 $x=1, y=-2$

(i), (ii)에서 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

306

각 자리의 숫자의 제곱의 합이 45인 두 자리의 자연수에서 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수는 처음 수보다 27만큼 크다고 할 때, 처음 수를 구하시오. 36

처음 두 자리 자연수의 십의 자리 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=45 & \cdots\cdots ㉠ \\ 10y+x=10x+y+27 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 정리하면 $x=y-3$이므로 이 식을 ㉠에 대입하면

$(y-3)^2+y^2=45$, $y^2-3y-18=0$

$(y+3)(y-6)=0$ $\therefore y=6$ ($\because y$는 자연수)

이 값을 $x=y-3$에 대입하면 $x=3$

따라서 처음 수는 36이다.

307

서로 다른 두 자연수 m, n에 대하여 삼차방정식 $x^3-(k+1)x^2+7kx-6k=0$의 세 근 중 두 근이 $2m$, $3n$일 때, $m+n$의 최댓값을 구하시오. 12

(단, k는 상수이다.)

주어진 방정식은 $(x-1)(x^2-kx+6k)=0$이므로 $2m$, $3n$은 $x^2-kx+6k=0$의 두 근이다.

$2m+3n=k$ ⋯⋯ ㉠

$6mn=6k$ $\therefore mn=k$ ⋯⋯ ㉡

㉡−㉠을 하면 $mn-2m-3n=0$ $\therefore (m-3)(n-2)=6$

$m-3=1$, $n-2=6$에서 $m=4$, $n=8$

$m-3=2$, $n-2=3$에서 $m=5$, $n=5$

$m-3=3$, $n-2=2$에서 $m=6$, $n=4$

$m-3=6$, $n-2=1$에서 $m=9$, $n=3$

따라서 $m+n$의 최댓값은 12이다.

4

여러 가지 부등식

n차식에 부등호를 붙인 것을 n차부등식이라 한다.
부등식은 부등호의 방향과 등호의 포함 여부에 따라
그 의미가 달라진다. 헷갈리는 부등식 문제의 강력한 도구는 수직선.

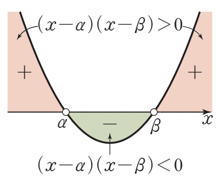
1 부등식의 성질과 사칙연산

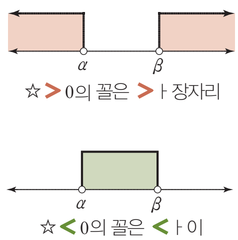
$$3>2 \Rightarrow -\frac{3}{10}<-\frac{2}{10}$$

2 일차부등식

$$ax+b>0$$

3 이차부등식





1 부등식의 성질과 사칙연산

01 부등식의 성질

부등호 $>$, $<$, $\geq$, $\leq$를 사용하여 수나 식의 대소 관계를 나타낸 식을 **부등식**이라 한다.
허수는 대소 관계를 생각할 수 없으므로 부등식에 포함된 모든 문자는 실수를 나타낸다.

부등식의 기본 성질

세 실수 a, b, c에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $a>b$, $b>c$이면 $a>c$

(2) $a>b$이면 $a+c>b+c$, $a-c>b-c$

(3) $a>b$, $c>0$이면 $ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ (부등호의 방향이 그대로)

(4) $a>b$, $c<0$이면 $ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ (부등호의 방향이 반대로)

설명 부등식의 양변에 음수를 곱하거나 음수로 나누면 부등호의 방향이 바뀐다.

① $3>2$ ➡ $-30<-20$

② $3>2$ ➡ $-\frac{3}{10}<-\frac{2}{10}$

부등식의 양변의 역수를 취할 때 양변의 부호가 같으면 부등호의 방향이 바뀌고, 양변의 부호가 다르면 부등호의 방향은 그대로이다.

① $3>2$ ➡ $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$, $-3<-2$ ➡ $-\frac{1}{3}>-\frac{1}{2}$

② $3>-2$ ➡ $\frac{1}{3}>-\frac{1}{2}$, $-2<3$ ➡ $-\frac{1}{2}<\frac{1}{3}$

개념확인 $a>b$, $d<0<c$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $a+c>b+c$　　ㄴ. $ad^2>bd^2$　　ㄷ. $ad>bd$　　ㄹ. $\frac{a}{c}-d<\frac{b}{c}-d$

풀이 ㄱ. 양변에 같은 수를 더하면 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

ㄴ. 음수의 제곱은 양수이다. 양변에 양수를 곱하면 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

ㄷ. 양변에 음수를 곱하면 부등호의 방향은 바뀐다.

$\therefore ad<bd$

ㄹ. 양변을 양수로 나누거나 양변에서 같은 수를 빼도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$\therefore \frac{a}{c}-d>\frac{b}{c}-d$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

308 $3 \le x \le 5$일 때, 다음 식의 값의 범위를 구하시오.

(1) $-2x+3$

(2) $\dfrac{1}{x-2}$

풍산자日 x에 a를 곱해 b를 더하면 $ax+b$가 되고, 역수를 취하면 $\dfrac{1}{ax+b}$이 된다.

풀이 (1) $3 \le x \le 5$의 각 변에 -2를 곱하면

$-10 \le -2x \le -6$

이 부등식의 각 변에 3을 더하면

$\mathbf{-7 \le -2x+3 \le -3}$

(2) $3 \le x \le 5$의 각 변에서 2를 빼면

$1 \le x-2 \le 3$

이 부등식의 각 변의 역수를 취하면

$\mathbf{\dfrac{1}{3} \le \dfrac{1}{x-2} \le 1}$

정답과 풀이 59쪽

유제 **309** $1 \le x \le 3$일 때, 다음 식의 값의 범위를 구하시오.

(1) $3x-1$ $2 \le 3x-1 \le 8$

(2) $\dfrac{1}{x+3}$ $\dfrac{1}{6} \le \dfrac{1}{x+3} \le \dfrac{1}{4}$

●조건을 이용한 식의 값의 범위 구하기

310 $2x-y=2$이고 $-2<x<3$일 때, 실수 y의 값의 범위를 구하시오.

풍산자日 조건을 y에 대하여 정리한 후 범위를 구한다.

풀이 $2x-y=2$에서 $y=2x-2$

$-2<x<3$의 각 변에 2를 곱하면

$-4<2x<6$

이 부등식의 각 변에서 2를 빼면

$-6<2x-2<4$

$\therefore$ $\mathbf{-6<y<4}$

정답과 풀이 59쪽

유제 **311** $2x+y=1$이고 $-1 \le x \le 1$일 때, 실수 y의 값의 범위를 구하시오. $-1 \le y \le 3$

02 부등식의 사칙연산

x, y의 값의 범위가 주어지면 $x+y$, $x-y$, xy, $\dfrac{x}{y}$의 값의 범위도 구할 수 있다.

덧셈	덧셈의 최댓값: x의 최댓값에 y의 최댓값을 더한 값 ➡ (큰 수)+(큰 수) 덧셈의 최솟값: x의 최솟값에 y의 최솟값을 더한 값 ➡ (작은 수)+(작은 수)	$a \le x \le b$ $+)\ c \le y \le d$ $a+c \le x+y \le b+d$
뺄셈	뺄셈의 최댓값: x의 최댓값에서 y의 최솟값을 뺀 값 ➡ (큰 수)−(작은 수) 뺄셈의 최솟값: x의 최솟값에서 y의 최댓값을 뺀 값 ➡ (작은 수)−(큰 수)	$a \le x \le b$ $-)\ c \le y \le d$ $a-d \le x-y \le b-c$
곱셈	곱셈은 부호에 따라 달라진다. [1단계] 끝수끼리 계산한 네 값을 구한다. [2단계] 최댓값과 최솟값을 찾는다.	$a \le x \le b$ $\times)\ c \le y \le d$ (최솟값)$<xy<$(최댓값) ac, ad, bc, bd 중
나눗셈	나눗셈도 부호에 따라 달라진다. [1단계] 끝수끼리 계산한 네 값을 구한다. [2단계] 최댓값과 최솟값을 찾는다.	$a \le x \le b$ $\div)\ c \le y \le d$ (최솟값)$\le \dfrac{x}{y} \le$(최댓값) $\dfrac{a}{c}$, $\dfrac{a}{d}$, $\dfrac{b}{c}$, $\dfrac{b}{d}$ 중

●부등식의 덧셈과 뺄셈

312 $-1 \le x \le 2$, $1 \le y \le 5$일 때, 다음 식의 값의 범위를 구하시오.

(1) $3x+2y$ (2) $3x-2y$

풍산자답 덧셈은 큰 수에 큰 수를 더하면 최댓값, 작은 수에 작은 수를 더하면 최솟값.
뺄셈은 큰 수에서 작은 수를 빼면 최댓값, 작은 수에서 큰 수를 빼면 최솟값.

풀이 (1)

$$\begin{array}{rcccc} & -3 & \le & 3x & \le & 6 \\ +) & 2 & \le & 2y & \le & 10 \\ \hline & -3+2 & \le & 3x+2y & \le & 6+10 \end{array}$$

$\therefore\ \mathbf{-1 \le 3x+2y \le 16}$

(2)

$$\begin{array}{rcccc} & -3 & \le & 3x & \le & 6 \\ -) & 2 & \le & 2y & \le & 10 \\ \hline & -3-10 & \le & 3x-2y & \le & 6-2 \end{array}$$

$\therefore\ \mathbf{-13 \le 3x-2y \le 4}$

정답과 풀이 59쪽

유제 **313** $-3 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$일 때, 다음 식의 값의 범위를 구하시오.

(1) $2x+3y$ $-3 \le 2x+3y \le 8$

(2) $2x-3y$ $-12 \le 2x-3y \le -1$

314 $-1 \le x \le 2$, $1 \le y \le 5$일 때, 다음 식의 값의 범위를 구하시오.

(1) xy

(2) $\dfrac{x}{y}$

풍산자티 곱셈과 나눗셈은 끝수끼리 계산한 네 값 중 최솟값과 최댓값을 찾아야 한다.

풀이 (1) xy의 값 -1, -5, 2, 10 중 최솟값이 -5, 최댓값이 10이므로 $\boldsymbol{-5 \le xy \le 10}$

(2) $\dfrac{x}{y}$의 값 $\dfrac{-1}{1}$, $\dfrac{-1}{5}$, $\dfrac{2}{1}$, $\dfrac{2}{5}$ 중 최솟값이 $\dfrac{-1}{1}=-1$, 최댓값이 $\dfrac{2}{1}=2$이므로

$\boldsymbol{-1 \le \dfrac{x}{y} \le 2}$

정답과 풀이 59쪽

유제 **315** $-3 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$일 때, 다음 식의 값의 범위를 구하시오.

(1) xy $-6 \le xy \le 2$

(2) $\dfrac{x}{y}$ $-3 \le \dfrac{x}{y} \le 1$

316 $10 \le x < 100$, $-100 < y \le a$에서 $3x-\dfrac{1}{3}y$의 최솟값이 10일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

풍산자티 $3x$와 $\dfrac{1}{3}y$의 범위를 구한 후 부등식의 뺄셈을 이용한다.

x와 y의 범위에 모두 등호가 있어야만 결과에도 등호가 붙는다.

풀이 $10 \le x < 100$의 각 변에 3을 곱하면 $30 \le 3x < 300$

$-100 < y \le a$의 각 변에 $\dfrac{1}{3}$을 곱하면 $-\dfrac{100}{3} < \dfrac{1}{3}y \le \dfrac{1}{3}a$

$$\begin{array}{rccccc} & 30 & \le & 3x & < & 300 \\ -) & -\dfrac{100}{3} & < & \dfrac{1}{3}y & \le & \dfrac{1}{3}a \\ \hline & 30-\dfrac{1}{3}a & \le & 3x-\dfrac{1}{3}y & < & \dfrac{1000}{3} \end{array}$$

$30-\dfrac{1}{3}a \le 3x-\dfrac{1}{3}y < \dfrac{1000}{3}$

$3x-\dfrac{1}{3}y$의 최솟값이 10이므로 $30-\dfrac{1}{3}a=10$, $90-a=30$ $\therefore$ $\boldsymbol{a=60}$

정답과 풀이 60쪽

유제 **317** $2 \le x \le 5$, $4 < y \le a$에서 $2x+\dfrac{1}{2}y$의 최댓값이 12일 때, 상수 a의 값을 구하시오. 4

+ 풍산자 비법

- 부등식의 양변에 음수를 곱하거나 역수를 취할 때에는 부등호의 방향에 주의해야 한다.
- 등호가 언제 붙는지도 확인해야 한다. 사칙연산을 하는 두 식에 모두 등호가 붙어 있어야 등호를 붙일 수 있다.

필수 확인 문제

정답과 풀이 60쪽

318

세 실수 a, b, c에 대하여 보기에서 옳지 않은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $a>b$, $b>c$이면 $a>c$이다.

ㄴ. $a>b$이면 $a-c>b-c$이다.

ㄷ. $a>b$이면 $a^2>b^2$이다.

ㄹ. $a>b$, $c>0$이면 $ac>bc$이다.

ㅁ. $ac>bc$이면 $a>b$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄷ　③ ㄴ, ㄹ
● ④ ㄷ, ㅁ　⑤ ㄹ, ㅁ

ㄷ. $a=1$, $b=-2$일 때, $a>b$이지만
$a^2=1$, $b^2=4$이므로 $a^2<b^2$이다.
ㅁ. $a=1$, $b=2$, $c=-1$일 때, $ac>bc$이지만 $a<b$이다.

319

$a<b$일 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?

① $a+4>b+4$　② $-3+a>-3+b$
③ $\frac{a}{10}-5>\frac{b}{10}-5$　④ $a^2<b^2$
● ⑤ $-\frac{a}{4}-7>-\frac{b}{4}-7$

부등식의 양변에 음수를 곱하거나 음수로 나누면 부등호의 방향이 바뀐다. 즉, 항상 성립하는 것은 ⑤이다.

320

$a<b<0$, $c>d>0$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $|a|>|b|$　ㄴ. $\frac{1}{c}>\frac{1}{d}$

ㄷ. $a+d>b+c$　ㄹ. $a^3<c^3$

① ㄱ, ㄴ　② ㄱ, ㄷ　● ③ ㄱ, ㄹ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄹ

ㄱ. $a<b$이고 a, b는 음수이므로 $|a|>|b|$
ㄴ. $c=2$, $d=1$이면 $\frac{1}{2}<1$
ㄷ. $a<b$에서 $a-b<0$이고, $c>d$에서 $d-c<0$이므로
$(a-b)+(d-c)<0$　$\therefore a+d<b+c$
ㄹ. $a<0$, $c>0$이므로 $a^3<0$, $c^3>0$　$\therefore a^3<c^3$

321

$-3\le x\le 2$, $2\le y\le 6$일 때, 식 $-xy$의 값의 범위를 구하시오.　$-12\le -xy\le 18$

$-3\le x\le 2$에서 $-2\le -x\le 3$
$-xy$는 $-x$와 y의 곱이고, $-xy$의 값 -4, -12, 6, 18 중
최솟값이 -12, 최댓값이 18이므로
$-12\le -xy\le 18$

322

$2\le x\le a$에서 $\frac{x+1}{x}$의 최댓값과 최솟값의 곱이 2일 때, 상수 a의 값을 구하시오.　3

$\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$이므로 $2\le x\le a$에서
각 변의 역수를 취하면 $\frac{1}{a}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{2}$
각 변에 1을 더하면 $1+\frac{1}{a}\le 1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{2}$
$\therefore \frac{a+1}{a}\le\frac{x+1}{x}\le\frac{3}{2}$
최댓값 $\frac{3}{2}$과 최솟값 $\frac{a+1}{a}$의 곱이 2이므로
$\frac{3}{2}\times\frac{a+1}{a}=2$, $3a+3=4a$　$\therefore a=3$

323 실력UP

$-1\le x\le 2$, $2\le y\le 3$일 때, $\alpha\le 2x-y\le\beta$를 만족시키는 상수 α, β에 대하여 α의 최댓값과 β의 최솟값의 합을 구하시오.　-3

$-1\le x\le 2$의 각 변에 2를 곱하면 $-2\le 2x\le 4$이고 $2\le y\le 3$이므로

$$\begin{array}{rcccccl} & -2 & \le & 2x & \le & 4 \\ -) & 2 & \le & y & \le & 3 \\ \hline & -5 & \le & 2x-y & \le & 2 \end{array}$$

$\therefore -5\le 2x-y\le 2$
$\alpha\le 2x-y\le\beta$를 만족시키려면 $\alpha\le -5$, $\beta\ge 2$이어야 하므로 α의 최댓값과 β의 최솟값의 합은 $-5+2=-3$

2 일차부등식

01 일차부등식

모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하였을 때, 좌변이 x에 대한 일차식인 부등식

$$ax+b>0,\ ax+b\geq 0,\ ax+b<0,\ ax+b\leq 0$$

의 꼴을 x에 대한 **일차부등식**이라 한다. (단, $a\neq 0$, a, b는 상수)

부등식 $ax>b$의 풀이

$ax>b$의 꼴로 정리한 후 $a>0$, $a<0$, $a=0$일 때로 나누어서 생각한다.

(i) $a>0$일 때, $x>\dfrac{b}{a}$

(ii) $a<0$일 때, $x<\dfrac{b}{a}$

(iii) $a=0$일 때, $\begin{cases} b\geq 0\text{이면} \Rightarrow \text{해는 없다. (불능)} \\ b<0\text{이면} \Rightarrow \text{해는 모든 실수이다. (부정)} \end{cases}$

설명 일차부등식을 풀려면 일단 x가 있는 항은 좌변으로, x가 없는 항은 우변으로 이항하여 $ax>b$의 꼴로 정리하고 본다.

부등식 $ax>b$의 각 변을 무턱대고 a로 나누어서 $x>\dfrac{b}{a}$라고 생각하면 큰일 난다.

(i) $a>0$일 때는 그냥 나누면 끝.

(ii) $a<0$일 때는 부등호의 방향이 바뀜에 유의한다.

(iii) $a=0$일 때는 특이한 해가 발생한다.

특이한 해는 다음과 같이 생각하면 헷갈리지 않는다.

(1) $0\times x>1$의 꼴은 항상 틀린 소리이므로 해는 없다. (불능)

(2) $0\times x>-1$의 꼴은 항상 맞는 소리이므로 해는 모든 실수이다. (부정)

개념확인 다음 부등식을 푸시오.

(1) $3x+2>x+6$

(2) $3x+2>5x+6$

(3) $3x+2>3x+3$

(4) $3x+2>3x+1$

풀이 주어진 식을 $ax>b$의 꼴로 정리하여 풀면

(1) $2x>4$이므로 $\boldsymbol{x>2}$

(2) $-2x>4$이므로 $\boldsymbol{x<-2}$

(3) $0\times x>1$이므로 **해는 없다.**

(4) $0\times x>-1$이므로 **해는 모든 실수이다.**

324 x에 대한 부등식 $a(x-a)+1>x$를 푸시오.

풍산자답 $ax>b$의 꼴로 정리한 후 $a>0$, $a<0$, $a=0$일 때로 나누어서 생각한다.

풀이 주어진 식을 전개하여 정리하면

$ax-a^2+1>x$, $(a-1)x>a^2-1$

$\therefore (a-1)x>(a+1)(a-1)$

(i) $\boldsymbol{a>1}$**일 때**, $x>\dfrac{(a+1)(a-1)}{a-1}$ $\quad\therefore \boldsymbol{x>a+1}$

(ii) $\boldsymbol{a<1}$**일 때**, $x<\dfrac{(a+1)(a-1)}{a-1}$ $\quad\therefore \boldsymbol{x<a+1}$

(iii) $\boldsymbol{a=1}$**일 때**, $0\times x>0$이므로 **해는 없다.**

정답과 풀이 61쪽

유제 **325** x에 대한 부등식 $a(x+1)+2\geq 2(a+1)$을 푸시오.

$a>0$일 때, $x\geq 1$
$a<0$일 때, $x\leq 1$
$a=0$일 때, 해는 모든 실수이다.

326 x에 대한 부등식 $a^2x+6x+2<a(5x+1)$의 해가 존재하지 않을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

풍산자답 일차부등식 $ax>b$에서 해가 존재하지 않으려면 $a=0$이고, $b\geq 0$이어야 한다.

풀이 주어진 식을 전개하여 정리하면

$a^2x+6x+2<5ax+a$, $(a^2-5a+6)x<a-2$

$\therefore (a-2)(a-3)x<a-2$

해가 존재하지 않거나 모든 실수인 경우는 x의 계수가 0일 때 발생한다.

$(a-2)(a-3)=0$에서 $a=2$ 또는 $a=3$

(i) $a=2$일 때, $0\times x<0$이므로 해는 없다.

(ii) $a=3$일 때, $0\times x<1$이므로 해는 모든 실수이다.

(i), (ii)에서 구하는 상수 a의 값은 **2**이다.

정답과 풀이 61쪽

유제 **327** 모든 실수 x에 대하여 부등식 $a^2x+1>a(x+1)$이 성립할 때, 상수 a의 값을 구하시오. 0

328 x에 대한 부등식 $(a-b)x>a+b$의 해가 $x>2$일 때, 부등식 $(a+b)x<a-b$의 해를 구하시오.

풍산자日 부등식과 그 해의 부등호의 방향이 같다. ➡ x의 계수, 즉 $a-b$가 양수!

풀이 [1단계] $(a-b)x>a+b$의 해가 $x>2$이므로 $a-b>0$, $\frac{a+b}{a-b}=2$

$\frac{a+b}{a-b}=2$에서 $a+b=2(a-b)$ $\quad \therefore a=3b$

$a=3b$를 $a-b>0$에 대입하면 $3b-b>0$, $2b>0$ $\quad \therefore b>0$

[2단계] $a=3b$를 $(a+b)x<a-b$에 대입하면 $4bx<2b$

이때 $b>0$이므로 $x<\frac{2b}{4b}$ $\quad \therefore \boldsymbol{x<\frac{1}{2}}$

정답과 풀이 61쪽

유제 **329** x에 대한 부등식 $(2a+b)x<a-b$의 해가 $x<\frac{1}{3}$일 때, 부등식 $(a+b)x>b$의 해를 구하시오.

$x>\frac{1}{5}$

330 x에 대한 부등식 $(a+2b)x>2a+b$의 해가 $x<1$일 때, 부등식 $(2a-b)x>a-2b$의 해를 구하시오.

풍산자日 부등식과 그 해의 부등호의 방향이 반대이다. ➡ x의 계수, 즉 $a+2b$가 음수!

풀이 [1단계] $(a+2b)x>2a+b$의 해가 $x<1$이므로 $a+2b<0$, $\frac{2a+b}{a+2b}=1$

$\frac{2a+b}{a+2b}=1$에서 $2a+b=a+2b$ $\quad \therefore a=b$

$a=b$를 $a+2b<0$에 대입하면 $b+2b<0$, $3b<0$ $\quad \therefore b<0$

[2단계] $a=b$를 $(2a-b)x>a-2b$에 대입하면 $bx>-b$

이때 $b<0$이므로 $x<-\frac{b}{b}$ $\quad \therefore \boldsymbol{x<-1}$

정답과 풀이 61쪽

유제 **331** x에 대한 부등식 $(a+b)x<a$의 해가 $x>\frac{1}{2}$일 때, 부등식 $ax>b$의 해를 구하시오. $x<1$

+ 풍산자 비법

일차부등식에서 x의 계수에 문자가 있을 때는 나누는 수를 0으로 하는 값을 기준으로 분류하여 생각한다.

02 절댓값 기호를 포함한 일차부등식

절댓값 기호를 대하는 기본자세는 구간 나누기.

절댓값 기호를 포함한 일차부등식의 풀이

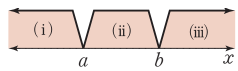
[1단계] 절댓값 기호가 있는 부등식을 풀려면 절댓값 기호 안을 0으로 하는 수를 기준으로 구간을 나누어 절댓값 기호를 없앤다.

① $|a|=\begin{cases} a & (a\geq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

② $|x-a|=\begin{cases} x-a & (x\geq a) \\ -(x-a) & (x<a) \end{cases}$

[2단계] 해를 구한 후 반드시 해당 구간과의 공통부분을 구해야 한다.

설명 절댓값 기호가 두 개 있으면 절댓값 기호 안을 0으로 하는 두 수 a, b $(a<b)$에 대하여 $x=a$와 $x=b$를 기준으로 세 개의 구간으로 나누어서 생각한다.



(i) $x<a$일 때

(ii) $a\leq x<b$일 때

(iii) $x\geq b$일 때

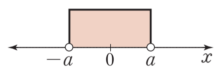
(i)~(iii)에서 각각 해당 구간과의 공통부분을 구한 후 세 범위를 합한다.

절댓값의 정의를 생각하면 구간을 나누지 않고도 손쉽게 해를 구할 수 있다.

수직선 위에서 실수 x의 절댓값 $|x|$는 원점과 점 x 사이의 거리를 나타내므로

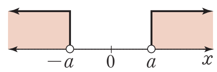
(1) $|x|<a$의 해는 원점에서의 거리가 a보다 작은 x의 값이다.

$\therefore -a<x<a$



(2) $|x|>a$의 해는 원점에서의 거리가 a보다 큰 x의 값이다.

$\therefore x<-a$ 또는 $x>a$



구간을 나누지 않고도 풀리는 유형

a, b가 양수일 때

(1) $|x|<a$ ➡ $-a<x<a$

(2) $|x|>a$ ➡ $x<-a$ 또는 $x>a$

(3) $a<|x|<b$ ➡ $-b<x<-a$ 또는 $a<x<b$

개념확인

다음 부등식을 푸시오.

(1) $|x|<2$ (2) $|x|>2$ (3) $2<|x|<3$

풀이 (1) $\boldsymbol{-2<x<2}$

(2) $\boldsymbol{x<-2}$ **또는** $\boldsymbol{x>2}$

(3) (i) $2<|x|$에서 $x<-2$ 또는 $x>2$

(ii) $|x|<3$에서 $-3<x<3$

(i), (ii)에서 공통부분을 구하면 $\boldsymbol{-3<x<-2}$ **또는** $\boldsymbol{2<x<3}$

332 다음 부등식을 푸시오.

(1) $|x+1|\ge 2x+5$ (2) $|x|+|x-2|<x+5$

풍산자답 절댓값 기호 안을 0으로 하는 수를 기준으로 구간을 나누어 생각한다.
이때 각 구간에서의 해를 구한 후에는 반드시 해당 구간과의 공통부분을 구해야 한다.

풀이 (1) 절댓값 기호 안을 0으로 하는 $x=-1$을 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

(i) $x\ge -1$일 때, $x+1\ge 2x+5$, $-x\ge 4$ $\therefore x\le -4$

$x\ge -1$, $x\le -4$의 공통부분은 없다. …… ㉠

(ii) $x<-1$일 때, $-(x+1)\ge 2x+5$, $-3x\ge 6$ $\therefore x\le -2$

$x<-1$, $x\le -2$의 공통부분은 $x\le -2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 합한 범위는 $\boldsymbol{x\le -2}$

(2) 절댓값 기호 안을 0으로 하는 $x=0$과 $x=2$를 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

(i) $x<0$일 때, $-x-(x-2)<x+5$, $-3x<3$ $\therefore x>-1$

$x<0$, $x>-1$의 공통부분은 $-1<x<0$ …… ㉠

(ii) $0\le x<2$일 때, $x-(x-2)<x+5$, $-x<3$ $\therefore x>-3$

$0\le x<2$, $x>-3$의 공통부분은 $0\le x<2$ …… ㉡

(iii) $x\ge 2$일 때, $x+(x-2)<x+5$ $\therefore x<7$

$x\ge 2$, $x<7$의 공통부분은 $2\le x<7$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 합한 범위는 $\boldsymbol{-1<x<7}$

정답과 풀이 61쪽

유제 **333** 다음 부등식을 푸시오.

(1) $|x+3|\ge 3x-1$ $x\le 2$ (2) $|x+1|+|x-2|\le 5$ $-2\le x\le 3$

334 다음 부등식을 푸시오.

(1) $|2x+3|<7$ (2) $|x-2|\ge 5$ (3) $1<|x-3|<2$

풍산자답 고맙게도 $|x|<a$의 꼴, $|x|>a$의 꼴, $a<|x|<b$의 꼴은 구간을 나누지 않고도 풀린다.

풀이 (1) $|2x+3|<7$에서 $-7<2x+3<7$, $-10<2x<4$ $\therefore$ $\boldsymbol{-5<x<2}$

(2) $|x-2|\ge 5$에서 $x-2\le -5$ 또는 $x-2\ge 5$ $\therefore$ $\boldsymbol{x\le -3}$ **또는** $\boldsymbol{x\ge 7}$

(3) $1<|x-3|<2$에서 $-2<x-3<-1$ 또는 $1<x-3<2$

$\therefore$ $\boldsymbol{1<x<2}$ **또는** $\boldsymbol{4<x<5}$

정답과 풀이 62쪽

유제 **335** 다음 부등식을 푸시오.

(1) $|x-2|\le 6$ $-4\le x\le 8$ (2) $|x+1|>3$ $x<-4$ 또는 $x>2$ (3) $4<|x+1|<5$ $-6<x<-5$ 또는 $3<x<4$

03 연립일차부등식

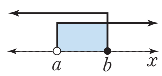
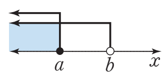
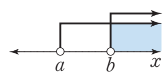
두 개 이상의 부등식을 묶어 한 쌍으로 나타낸 것을 **연립부등식**이라 하고, 각 부등식이 일차부등식일 때 **연립일차부등식**이라 한다.
연립부등식의 해는 연립부등식을 이루는 각 부등식을 동시에 만족시키는 미지수의 값 또는 범위이고, 연립부등식의 해를 구하는 것을 **연립부등식을 푼다**고 한다.
세 개의 식이 부등호로 연결되어 있는 것도 연립부등식이다.

$A<B<C$의 꼴인 연립부등식은 반드시 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$의 꼴로 고쳐서 푼다.

연립부등식의 풀이
[1단계] 각각의 부등식의 해를 구한다.
[2단계] 각 부등식의 해를 수직선 위에 함께 나타낸다.
[3단계] 공통부분을 찾아 연립부등식의 해를 구한다.

수직선은 연립부등식 문제의 강력한 도구이다.
각 부등식의 해를 수직선 위에 그리고 공통부분을 구하여 식으로 나타낸다.
부등식의 해를 수직선 위에 나타낼 때는 경계의 수를 포함하는지 잘 살펴보아야 한다.

$a<b$일 때, 연립부등식의 해를 수직선에 나타내어 공통부분을 구하면 다음과 같다.

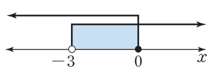
구분	(1) $\begin{cases} x>a \\ x\le b \end{cases}$의 해	(2) $\begin{cases} x\le a \\ x<b \end{cases}$의 해	(3) $\begin{cases} x>a \\ x>b \end{cases}$의 해
수직선			
해	$a<x\le b$	$x\le a$	$x>b$

개념확인

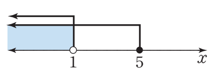
다음 부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x>-3 \\ x\le 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x\le 5 \\ x<1 \end{cases}$

풀이 수직선에 각각의 해를 그려 공통부분을 부등식으로 나타낸다.

(1)


$\therefore -3<x\le 0$

(2)


$\therefore x<1$

336 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 2x+3<5 \\ x<3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} -x\le 1-2x \\ 2x+1\ge -5 \end{cases}$

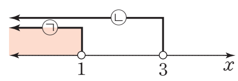
풍산자日 수직선 위에 각 부등식의 해의 범위를 그려 공통부분을 찾는다.

풀이 (1) $2x+3<5$에서 $x<1$ …… ㉠

$x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 수직선에 나타내어 공통부분을 구하면

연립부등식의 해는 $\boldsymbol{x<1}$

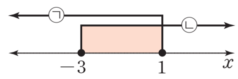


(2) $-x\le 1-2x$에서 $x\le 1$ …… ㉠

$2x+1\ge -5$에서 $x\ge -3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 수직선에 나타내어 공통부분을 구하면

연립부등식의 해는 $\boldsymbol{-3\le x\le 1}$



정답과 풀이 62쪽

유제 **337** 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 3x+1\le 7 \\ x<5 \end{cases}$ $x\le 2$ (2) $\begin{cases} -x<6-3x \\ x+1>-7 \end{cases}$ $-8<x<3$

● $A<B<C$의 꼴의 연립일차부등식

338 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $-4\le 2x-6\le 6$ (2) $x-4\le 2x+3<x+5$

풍산자日 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$의 꼴로 고쳐서 연립부등식을 푼다.

풀이 (1) [1단계] $\begin{cases} -4\le 2x-6 \\ 2x-6\le 6 \end{cases}$으로 고친다.

[2단계] $-4\le 2x-6$에서 $x\ge 1$ …… ㉠

$2x-6\le 6$에서 $x\le 6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면 $\boldsymbol{1\le x\le 6}$

(2) [1단계] $\begin{cases} x-4\le 2x+3 \\ 2x+3<x+5 \end{cases}$로 고친다.

[2단계] $x-4\le 2x+3$에서 $x-2x\le 3+4$ $\therefore x\ge -7$ …… ㉠

$2x+3<x+5$에서 $2x-x<5-3$ $\therefore x<2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면 $\boldsymbol{-7\le x<2}$

정답과 풀이 62쪽

유제 **339** 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $-2\le 3x-5\le 7$ $1\le x\le 4$ (2) $x-5\le 2x-3<x+8$ $-2\le x<11$

340 연립부등식 $\begin{cases} 5+4x>3(x-a) \\ -x\leq 25-6x \end{cases}$ 의 해가 $1<x\leq 5$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

풍산자日 연립부등식에서 각 부등식을 푼 다음 주어진 해와 비교하여 본다.

풀이 $5+4x>3(x-a)$에서 $5+4x>3x-3a$ $\quad\therefore x>-3a-5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$-x\leq 25-6x$에서 $5x\leq 25$ $\quad\therefore x\leq 5$

주어진 연립부등식의 해가 $1<x\leq 5$이므로 ㉠에서 부등식의 해는 $x>1$이다.

따라서 $-3a-5=1$, $-3a=6$ $\quad\therefore a=-2$

정답과 풀이 62쪽

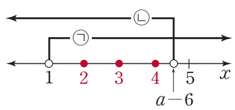
유제 **341** 연립부등식 $\begin{cases} 3-4x>-5(x-a) \\ -2x\leq 16-6x \end{cases}$ 의 해가 $2<x\leq 4$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. 1

342 연립부등식 $\begin{cases} -3x+1<2x-4 \\ -6+x>2x-a \end{cases}$ 를 만족시키는 자연수 x의 개수가 3일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

풍산자日 연립부등식의 해를 수직선에 나타내 본다. 이때 경계인 점을 주의한다.

풀이 $-3x+1<2x-4$에서 $-3x-2x<-4-1$, $-5x<-5$

$\therefore x>1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠



$-6+x>2x-a$에서 $x-2x>-a+6$, $-x>-a+6$

$\therefore x<a-6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

주어진 연립부등식을 만족시키는 자연수 x의 개수가 3이려면 연립부등식의 해는 ㉠, ㉡에서 $1<x<a-6$이고

$4<a-6\leq 5$ ⇐ $a-6$의 값이 5가 되어도 부등식의 해는 5를 포함하지 않는다.

$\therefore \mathbf{10<a\leq 11}$

정답과 풀이 62쪽

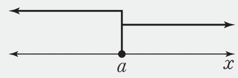
유제 **343** 연립부등식 $\begin{cases} -2x+1\leq x-8 \\ 2+x>2x-a \end{cases}$ 를 만족시키는 자연수 x의 개수가 2일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오. $2<a\leq 3$

04 특수한 해를 갖는 연립일차부등식

연립부등식의 해는 하나의 값인 경우도 있고, 없는 경우도 있다.
각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내었을 때 하나의 점 위에서만 겹치면 연립부등식의 해는 하나이고, 공통부분이 없으면 연립부등식의 해가 없다.

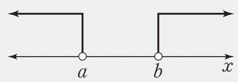
(1) 해가 한 개인 경우

$\begin{cases} x\le a \\ x\ge a \end{cases}$ ➡ $x=a$

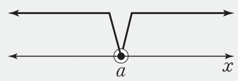


(2) 해가 없는 경우

(ⅰ) $a<b$일 때, $\begin{cases} x<a \\ x>b \end{cases}$ ➡ 해는 없다.



(ⅱ) $\begin{cases} x\le a \\ x>a \end{cases}$ ➡ 해는 없다.



설명 (2) (ⅰ)에서 등호가 있는 경우, 즉 $\begin{cases} x\le a \\ x>b \end{cases}$, $\begin{cases} x<a \\ x\ge b \end{cases}$, $\begin{cases} x\le a \\ x\ge b \end{cases}$도 해는 없다.

(ⅱ)에서 $\begin{cases} x<a \\ x\ge a \end{cases}$, $\begin{cases} x>a \\ x<a \end{cases}$도 해는 없다.

● 특수한 해를 갖는 연립일차부등식

344 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x-1\ge -4 \\ 4x+3\le -9 \end{cases}$ (2) $8-3x<x\le -x+4$

풍산자비법 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾는다.

풀이 (1) $x-1\ge -4$에서 $x\ge -3$ …… ㉠

$4x+3\le -9$에서 $4x\le -12$ $\therefore x\le -3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 연립부등식의 해는 $\boldsymbol{x=-3}$

(2) [1단계] $\begin{cases} 8-3x<x \\ x\le -x+4 \end{cases}$로 고친다.

[2단계] $8-3x<x$에서 $-4x<-8$ $\therefore x>2$ …… ㉠

$x\le -x+4$에서 $2x\le 4$ $\therefore x\le 2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 연립부등식의 **해는 없다.**

정답과 풀이 62쪽

유제 **345** 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 2x-2\ge -4 \\ 4x-5\le -9 \end{cases}$ $x=-1$ (2) $15-3x<2x\le -x+9$ 해는 없다.

346 연립부등식 $\begin{cases} 6x-1\geq 2x+a \\ 3x-4\leq 2x+1 \end{cases}$의 해가 없을 때, 상수 a의 값의 범위를 구하시오.

풍산자답 수직선에서 겹치는 부분이 있으면 해가 있고, 겹치는 부분이 없으면 해가 없다.
이때 경계인 점을 주의한다.

풀이 $6x-1\geq 2x+a$에서 $6x-2x\geq a+1$, $4x\geq a+1$ $\quad\therefore x\geq \frac{a+1}{4}$

$3x-4\leq 2x+1$에서 $3x-2x\leq 1+4$ $\quad\therefore x\leq 5$

연립부등식의 해가 존재하지 않으려면 $\frac{a+1}{4}>5$ ◀ 5를 포함하면 $x=5$가 해가 된다.

$\therefore$ $\boldsymbol{a>19}$

정답과 풀이 63쪽

유제 **347** 연립부등식 $\begin{cases} 4x-1\geq 3x+a \\ 5x-4\leq 2x+2 \end{cases}$의 해가 없을 때, 상수 a의 값의 범위를 구하시오. $a>1$

348 연립부등식 $\begin{cases} x-\frac{1}{2}\geq a \\ x+2b\leq 1 \end{cases}$의 해가 $x=4$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

풍산자답 해가 오직 하나라는 것은 $\begin{cases} x\leq 4 \\ x\geq 4 \end{cases}$라는 것.

풀이 $x-\frac{1}{2}\geq a$에서 $x\geq a+\frac{1}{2}$

$x+2b\leq 1$에서 $x\leq 1-2b$

해가 오직 하나이므로 $a+\frac{1}{2}=1-2b=4$ $\quad\therefore a=\frac{7}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$

$\therefore$ $\boldsymbol{a+b=2}$

정답과 풀이 63쪽

유제 **349** 연립부등식 $\begin{cases} x-5\geq a \\ x-2b\leq 3 \end{cases}$의 해가 $x=2$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+2b$의 값을 구하시오. -4

+ 풍산자 비법

부등식 문제의 강력한 도구는 수직선! 수직선 위에 나타냈을 때 공통부분이 바로 연립부등식의 해이다.

필수 확인 문제

정답과 풀이 63쪽

350

x에 대한 부등식 $a^2x+1>a(x-1)+2a^2$의 해가 모든 실수이기 위한 상수 a의 값을 α, 해가 존재하지 않기 위한 상수 a의 값을 β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오. 1

주어진 식을 전개하여 정리하면 $(a^2-a)x>2a^2-a-1$

$\therefore a(a-1)x>(2a+1)(a-1)$

해가 존재하지 않거나 모든 실수인 경우는 x의 계수가 0일 때 발생한다.

$a(a-1)=0$에서 $a=0$ 또는 $a=1$

(i) $a=0$일 때, $0\times x>-1$이므로 해는 모든 실수이다.

(ii) $a=1$일 때, $0\times x>0$이므로 해는 없다.

따라서 $\alpha=0$, $\beta=1$이므로 $\alpha+\beta=1$

351

x에 대한 부등식 $(a-b)x\geq a+2b$의 해가 존재하지 않을 때, 부등식 $(2a+b)x>a-b$의 해를 구하시오. $x>0$

$(a-b)x\geq a+2b$의 해가 존재하지 않으므로

$a-b=0$, $a+2b>0$

$a=b$를 $a+2b>0$에 대입하면 $b+2b>0$, $3b>0$ $\quad\therefore b>0$

$a=b$를 $(2a+b)x>a-b$에 대입하면

$(2b+b)x>b-b$, $3bx>0$

$\therefore x>0$ ($\because b>0$)

352

부등식 $|4x-10|\leq 6$을 만족시키는 자연수 x의 개수를 구하시오. 4

$|4x-10|\leq 6$에서

$-6\leq 4x-10\leq 6$, $4\leq 4x\leq 16$

$\therefore 1\leq x\leq 4$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3, 4이므로 그 개수는 4이다.

353

부등식 $|2x-3|<3x+5$의 해가 $x>k$일 때, k의 값을 구하시오. $-\frac{2}{5}$

(i) $x\geq\frac{3}{2}$일 때, $2x-3<3x+5$ $\quad\therefore x>-8$

$x\geq\frac{3}{2}$, $x>-8$의 공통부분은 $x\geq\frac{3}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(ii) $x<\frac{3}{2}$일 때, $-(2x-3)<3x+5$ $\quad\therefore x>-\frac{2}{5}$

$x<\frac{3}{2}$, $x>-\frac{2}{5}$의 공통부분은 $-\frac{2}{5}<x<\frac{3}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 합한 범위는 $x>-\frac{2}{5}$ $\quad\therefore k=-\frac{2}{5}$

354

연립부등식 $\begin{cases} -\frac{x+2}{4}+\frac{5}{3}\geq\frac{x}{3} \\ 0.6(x+1)\leq x-\frac{1}{5}\end{cases}$ 을 푸시오. $x=2$

$-\frac{x+2}{4}+\frac{5}{3}\geq\frac{x}{3}$에서 $-3(x+2)+20\geq 4x$

$\therefore x\leq 2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$0.6(x+1)\leq x-\frac{1}{5}$에서 $6(x+1)\leq 10x-2$, $-4x\leq -8$

$\therefore x\geq 2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 연립부등식의 해는 $x=2$이다.

355

연립부등식 $\begin{cases} 3x-4\leq 2x+1 \\ 6x-1\geq 2x-3a\end{cases}$ 를 만족시키는 정수 x의 개수가 5일 때, 상수 a의 값의 범위를 구하시오. $-1\leq a<\frac{1}{3}$

$3x-4\leq 2x+1$에서 $x\leq 5$

$6x-1\geq 2x-3a$에서 $x\geq\frac{-3a+1}{4}$

연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 5이므로

$0<\frac{-3a+1}{4}\leq 1$, $0<-3a+1\leq 4$, $-1<-3a\leq 3$

$\therefore -1\leq a<\frac{1}{3}$

356 실력UP

실수 a, b에 대하여 $a-b=1$일 때, x에 대한 부등식 $(a-2b)x\leq 2a-5b+3$의 해가 $x\geq 1$이다. $a+b$의 값을 구하시오. 5

$a=b+1$을 주어진 부등식에 대입하면

$(b+1-2b)x\leq 2(b+1)-5b+3$

$\therefore (-b+1)x\leq -3b+5$

이 부등식의 해가 $x\geq 1$이므로

$-b+1<0$, $\frac{-3b+5}{-b+1}=1$ $\quad\therefore b=2$

따라서 $a-b=1$에서 $a=3$이므로

$a+b=5$

3 이차부등식

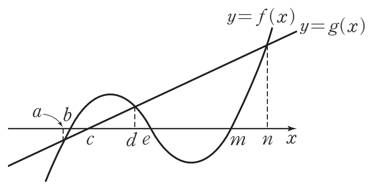
01 부등식과 함수의 그래프

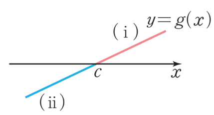
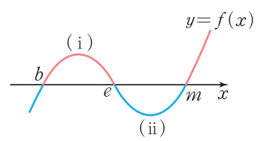
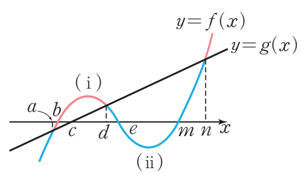
부등식을 이해하기에 가장 좋은 도구는 함수의 그래프이다.

부등식 $f(x)>0$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위를 뜻한다.

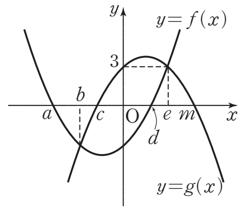
부등식 $f(x)>g(x)$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위를 뜻한다.

예를 들어 두 함수의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 주어졌을 때, 다음 부등식의 해를 구해 보자.



(i) $g(x)>0$ ➡ 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽 ➡ $x>c$ (ii) $g(x)<0$ ➡ 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽 ➡ $x<c$	
(i) $f(x)>0$ ➡ 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽 ➡ $b<x<e$ 또는 $x>m$ (ii) $f(x)<0$ ➡ 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽 ➡ $x<b$ 또는 $e<x<m$	
(i) $f(x)>g(x)$ ➡ 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽 ➡ $a<x<d$ 또는 $x>n$ (ii) $f(x)<g(x)$ ➡ 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽 ➡ $x<a$ 또는 $d<x<n$	

357 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 부등식의 해를 구하시오.



(1) $f(x)>0$

(2) $g(x)>3$

(3) $f(x)>g(x)$

(4) $f(x)g(x)>0$

풍산자Tip ① 우변이 상수 c로 주어지면 직선 $y=c$를 그어 그래프와 만나는 점을 기준으로 생각한다.

② $f(x)g(x)>0$ ➡ $f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$

③ $f(x)g(x)<0$ ➡ $f(x)>0$, $g(x)<0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)>0$

풀이 (1) $f(x)>0$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=0$, 즉 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x<a$ 또는 $x>d$

(2) $g(x)>3$의 해는 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=3$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 **$0<x<e$**

(3) $f(x)>g(x)$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x<b$ 또는 $x>e$

(4) $f(x)g(x)>0$의 해는 $f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위이므로

(i) $f(x)>0$, $g(x)>0$일 때,

$f(x)>0$에서 $x<a$ 또는 $x>d$ …… ㉠

$g(x)>0$에서 $c<x<m$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $d<x<m$ …… ㉢

(ii) $f(x)<0$, $g(x)<0$일 때,

$f(x)<0$에서 $a<x<d$ …… ㉣

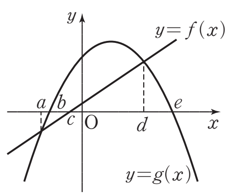
$g(x)<0$에서 $x<c$ 또는 $x>m$ …… ㉤

㉣, ㉤의 공통부분을 구하면 $a<x<c$ …… ㉥

㉢, ㉥을 합한 범위는 **$a<x<c$ 또는 $d<x<m$**

정답과 풀이 64쪽

유제 **358** 일차함수 $y=f(x)$의 그래프와 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 부등식의 해를 구하시오.



(1) $f(x)>0$ $x>c$

(2) $g(x)>0$ $b<x<e$

(3) $f(x)<g(x)$ $a<x<d$

(4) $f(x)g(x)<0$ $b<x<c$ 또는 $x>e$

02 이차부등식

모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하였을 때, 좌변이 x에 대한 이차식인 부등식

$$ax^2+bx+c>0,\ ax^2+bx+c\geq 0,\ ax^2+bx+c<0,\ ax^2+bx+c\leq 0$$

의 꼴을 x에 대한 **이차부등식**이라 한다. (단, $a\neq 0$, a, b, c는 상수)

이차부등식의 풀이 중요

(1) $(x-\alpha)(x-\beta)>0$의 해

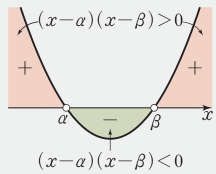
➡ 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위

➡ $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$

(2) $(x-\alpha)(x-\beta)<0$의 해

➡ 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위

➡ $\alpha<x<\beta$

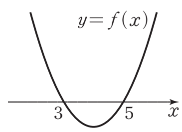


이차부등식의 풀이의 원리는 이차함수의 그래프를 이용하면 명쾌하게 이해할 수 있다.
복잡한 형태의 부등식 문제는 반드시 그래프를 그려서 생각하자.

개념확인

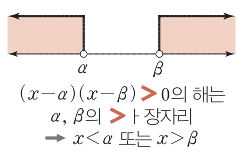
오른쪽 그림을 이용하여 다음 부등식을 푸시오.

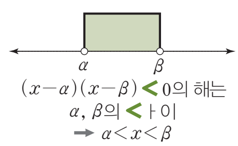
(1) $f(x)\leq 0$　　　(2) $f(x)>0$



풀이　(1) $3\leq x\leq 5$　　　(2) $x<3$ 또는 $x>5$

이차부등식의 풀이가 익숙해지면 그래프를 그리지 않고도 이차부등식을 풀 수 있다.
이차부등식을 풀려면 두 근을 구한 후 두 근의 가장자리인지 사이인지만 판단하면 된다.
우연히도 부등호 $>$는 가장자리의 ㄱ과 비슷하고, 부등호 $<$는 사이의 ㅅ과 비슷하다.





개념확인

다음 부등식을 푸시오.

(1) $(x-2)(x-3)\geq 0$　　　(2) $(x-1)(x-2)<0$

(3) $x(x+2)\leq 0$　　　(4) $(x+1)(x+3)>0$

풀이　(1) 두 근의 가장자리이고 등호가 있으므로 $x\leq 2$ 또는 $x\geq 3$

(2) 두 근의 사이이고 등호가 없으므로 $1<x<2$

(3) 두 근의 사이이고 등호가 있으므로 $-2\leq x\leq 0$

(4) 두 근의 가장자리이고 등호가 없으므로 $x<-3$ 또는 $x>-1$

359 다음 이차부등식을 푸시오.

(1) $3x^2 < 2x+1$ (2) $-x^2+2x+3 \le 0$

풍산자 TIP 이차부등식을 풀려면 일단 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하고 본다.
이때 이차항의 계수는 반드시 양수로 만든 후 생각을 한다.

풀이 (1) 모든 항을 좌변으로 이항하면
$3x^2-2x-1<0$, $(3x+1)(x-1)<0$
$\therefore\ -\frac{1}{3}<x<1$

(2) 양변에 -1을 곱하면
$x^2-2x-3 \ge 0$, $(x+1)(x-3) \ge 0$
$\therefore\ x \le -1$ 또는 $x \ge 3$

정답과 풀이 64쪽

유제 **360** 다음 부등식을 푸시오.

(1) $2x^2-1 \ge x^2$ $x \le -1$ 또는 $x \ge 1$ (2) $-x^2-2x+24>0$ $-6<x<4$

361 다음 이차부등식을 푸시오.

(1) $x^2-2x-2 \le 0$ (2) $x^2+4x+1>0$

풍산자 TIP 인수분해가 안 된다? 당황할 것 없다.
곧바로 근의 공식을 쓴다. 어찌 됐건 두 근만 구하면 된다.

풀이 (1) 근의 공식에 의하여 $x^2-2x-2=0$의 두 근은 $x=1\pm\sqrt{3}$
따라서 주어진 부등식의 해는
$1-\sqrt{3} \le x \le 1+\sqrt{3}$

(2) 근의 공식에 의하여 $x^2+4x+1=0$의 두 근은 $x=-2\pm\sqrt{3}$
따라서 주어진 부등식의 해는
$x<-2-\sqrt{3}$ 또는 $x>-2+\sqrt{3}$

정답과 풀이 64쪽

유제 **362** 다음 부등식을 푸시오.

(1) $x^2-4x+2<0$ $2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$ (2) $x^2+6x-3 \ge 0$ $x \le -3-2\sqrt{3}$ 또는 $x \ge -3+2\sqrt{3}$

03 이차함수와 이차부등식

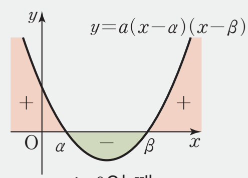
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 판별식을 D라 할 때, $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 근을 구하여 이차부등식을 푼다.
이차방정식은 인수분해가 되면 인수분해하여 풀고 인수분해가 안 되면 근의 공식을 써서 푼다.
하지만 $D\le 0$이면 중근 또는 허근을 가지므로 이차부등식은 특수한 해를 갖는다.
이럴 때는 완전제곱의 꼴로 변형하거나 이차함수의 그래프를 떠올려서 문제를 푼다.
이차부등식의 해를 구하는 방법은 이차방정식의 판별식 D의 값의 부호에 따라 다음 세 가지로 나누어 생각할 수 있다.

[1] $D>0$일 때

판별식 D에 대하여 $D>0$이면 이차방정식이 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.
서로 다른 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$로 인수분해된다.
이때 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0)$의 그래프를 그리면 x축과 서로 다른 두 점에서 만나고, 이차부등식의 해는 다음과 같다.

$D>0$일 때, 이차부등식의 풀이

① $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)>0$ ➡ $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$
② $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)\ge 0$ ➡ $x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta$
③ $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)<0$ ➡ $\alpha<x<\beta$
④ $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)\le 0$ ➡ $\alpha\le x\le\beta$



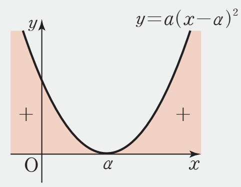
$a>0$일 때

[2] $D=0$일 때

판별식 D에 대하여 $D=0$이면 이차방정식이 중근을 갖는다.
중근을 α라 하면 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$으로 인수분해된다.
이때 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0)$의 그래프를 그리면 x축에 접하고, 이차부등식의 해는 다음과 같다.

$D=0$일 때, 이차부등식의 풀이

① $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2>0$ ➡ 해는 $x\ne\alpha$인 모든 실수
② $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2\ge 0$ ➡ 해는 모든 실수
③ $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2<0$ ➡ 해는 없다.
④ $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2\le 0$ ➡ 해는 $x=\alpha$



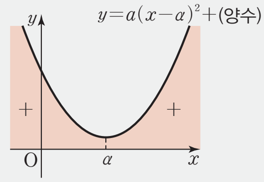
$a>0$일 때

[3] $D<0$일 때

판별식 D에 대하여 $D<0$이면 이차방정식이 허근을 갖는다.
이때 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+$(양수)의 꼴로 변형할 수 있다.
이때 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0)$의 그래프를 그리면 x축과 만나지 않고, 이차부등식의 해는 다음과 같다.

$D<0$일 때, 이차부등식의 풀이

① $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+$(양수)>0 ➡ **해는 모든 실수**
② $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+$(양수)≥0 ➡ **해는 모든 실수**
③ $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+$(양수)<0 ➡ **해는 없다.**
④ $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+$(양수)≤0 ➡ **해는 없다.**

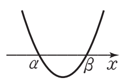
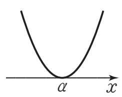
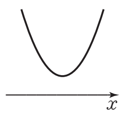


$a>0$일 때

설명 $x^2-2x+2<0$을 풀 때 근의 공식을 이용하여 인수분해하면 $(x-1+i)(x-1-i)<0$
따라서 $1-i<x<1+i$라 하면 큰일 난다.
허수에는 대소 관계가 없기 때문이다.
바른 풀이는 다음과 같다.
$x^2-2x+2<0$에서 $(x-1)^2+1<0$
따라서 해는 없다.

앞서 배운 내용을 하나의 표로 정리할 수 있다.
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 판별식을 D, 두 근을 α, β $(\alpha\leq\beta)$라 하면 이차함수의 그래프와 이차부등식의 해 사이의 관계는 다음과 같다.

중요

판별식	그래프	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geq0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leq0$
$D>0$		$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$	$\alpha<x<\beta$	$\alpha\leq x\leq\beta$
$D=0$		$x\neq\alpha$인 모든 실수	모든 실수	해는 없다.	$x=\alpha$
$D<0$		모든 실수	모든 실수	해는 없다.	해는 없다.

지금까지 알아본 이차함수를 이용한 이차부등식의 해법을 모두 이해했다면 이차항의 계수인 a의 값이 음수일 때에도 그래프를 이용하여 이차부등식의 해를 쉽게 구할 수 있다.

363 다음 이차부등식을 푸시오.

(1) $x^2-6x+9>0$

(2) $4x^2+4x+1\geq 0$

(3) $x^2-8x+16<0$

(4) $x^2+3x+\frac{9}{4}\leq 0$

풍산자 $D=0$일 때 ➡ 이차방정식의 해가 중근 ➡ $(ax+b)^2$의 꼴로 변형하여 생각!

풀이 (1) $(x-3)^2>0$이므로 **해는 $x\neq 3$인 모든 실수**이다.
(2) $(2x+1)^2\geq 0$이므로 **해는 모든 실수**이다.
(3) $(x-4)^2<0$이므로 **해는 없다.**
(4) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2\leq 0$이므로 해는 $x=-\frac{3}{2}$

정답과 풀이 64쪽

유제 **364** 다음 이차부등식을 푸시오.

(1) $x^2+2x+1\leq 0$ $x=-1$

(2) $25x^2-10x+1<0$ 해는 없다.

(3) $x^2+4x+4\geq 0$ 해는 모든 실수

(4) $x^2-x+\frac{1}{4}>0$ 해는 $x\neq\frac{1}{2}$인 모든 실수

365 다음 이차부등식을 푸시오.

(1) $x^2+6x+10>0$

(2) $x^2+8x+18<0$

(3) $x^2-x+1\geq 0$

풍산자 $D<0$일 때 ➡ 이차방정식의 해가 허근 ➡ $a(x-\alpha)^2+(\text{양수})$의 꼴로 변형하여 생각!

풀이 (1) $(x+3)^2+1>0$이므로 **해는 모든 실수**이다.
(2) $(x+4)^2+2<0$이므로 **해는 없다.**
(3) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq 0$이므로 **해는 모든 실수**이다.

정답과 풀이 64쪽

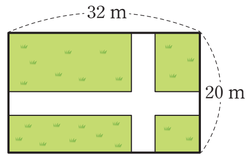
유제 **366** 다음 이차부등식을 푸시오.

(1) $x^2-2x+3\leq 0$ 해는 없다.

(2) $x^2+4x+5>0$ 해는 모든 실수

(3) $x^2-3x+3<0$ 해는 없다.

367 오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 32 m, 20 m인 직사각형 모양의 밭에 폭이 일정한 길을 만들려고 한다. 길을 제외한 땅의 넓이가 160 m^2 이상이 되도록 할 때, 길의 최대 폭을 구하시오.



풍산자 TIP 이차부등식의 활용 문제는 다음 순서로 해결한다.
구하는 것을 x로 놓는다.
➡ 주어진 조건에 맞추어 이차부등식을 세운다.
➡ 이차부등식의 해를 구한다.

풀이 길의 폭을 $x\text{ m}$라 하면 길을 제외한 밭의 넓이는 가로의 길이가 $(32-x)\text{ m}$, 세로의 길이가 $(20-x)\text{ m}$인 직사각형의 넓이와 같다.
이 넓이가 160 m^2 이상이 되어야 하므로
$(32-x)(20-x)\geq 160$, $x^2-52x+640\geq 160$
$x^2-52x+480\geq 0$, $(x-12)(x-40)\geq 0$
$\therefore x\leq 12$ 또는 $x\geq 40$
그런데 $0<x<20$이므로
$0<x\leq 12$
따라서 조건을 만족시키는 길의 최대 폭은 **12 m**이다.

정답과 풀이 65쪽

유제 **368** 둘레의 길이가 40인 직사각형의 넓이가 96 이상일 때, 이 직사각형의 가로의 길이의 범위를 구하시오. 8 이상 12 이하

풍산자 비법

이차부등식의 풀이 세 가지를 문제에 따라 적절히 사용한다.
① 그래프를 이용하여 푼다.
② $D>0$일 때, 인수분해하거나 근의 공식으로 두 근을 구한 다음 두 근의 가장자리 또는 사이를 이용한다.
③ $D\leq 0$일 때, 완전제곱의 꼴로 변형하여 푼다.

04 절댓값 기호를 포함한 이차부등식

절댓값 기호를 포함한 이차부등식의 풀이는 앞에서 배운 일차부등식의 풀이와 같다.
절댓값 기호 안을 0으로 하는 x의 값을 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

● 절댓값 기호를 포함한 이차부등식 (1)

369 부등식 $x^2+|x-2|\geq 2x$를 푸시오.

풍산자ⓑ 절댓값 기호 안을 0으로 하는 $x=2$를 기준으로 구간을 나누어 생각한다.
이때 각 구간에서의 해를 구한 후에는 반드시 해당 구간과의 공통부분을 구해야 한다.

풀이 (i) $x\geq 2$일 때, $x^2+(x-2)\geq 2x$, $x^2-x-2\geq 0$, $(x+1)(x-2)\geq 0$
$\therefore x\leq -1$ 또는 $x\geq 2$
$x\geq 2$와의 공통부분은 $x\geq 2$ …… ㉠
(ii) $x<2$일 때, $x^2-(x-2)\geq 2x$, $x^2-3x+2\geq 0$, $(x-1)(x-2)\geq 0$
$\therefore x\leq 1$ 또는 $x\geq 2$
$x<2$와의 공통부분은 $x\leq 1$ …… ㉡
㉠, ㉡을 합한 범위는 $\boldsymbol{x\leq 1}$ **또는** $\boldsymbol{x\geq 2}$

정답과 풀이 65쪽

유제 **370** 부등식 $2x^2-2x>|x-1|$을 푸시오. $x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>1$

● 절댓값 기호를 포함한 이차부등식 (2)

371 다음 부등식을 푸시오.
(1) $|x^2-10|>15$ (2) $x^2-2|x|-3<0$

풍산자ⓑ 고맙게도 $|x|<a$의 꼴, $|x|>a$의 꼴, $ax^2+b|x|+c<0$의 꼴은 구간을 나누지 않고도 풀린다.

풀이 (1) $|x^2-10|>15$에서 $x^2-10<-15$ 또는 $x^2-10>15$
(i) $x^2-10<-15$에서 $x^2+5<0$이므로 해는 없다. …… ㉠
(ii) $x^2-10>15$에서 $x^2-25>0$, $(x+5)(x-5)>0$
$\therefore x<-5$ 또는 $x>5$ …… ㉡
㉠, ㉡을 합한 범위는 $\boldsymbol{x<-5}$ **또는** $\boldsymbol{x>5}$
(2) $x^2-2|x|-3<0$에서 $|x|^2-2|x|-3<0$, $(|x|-3)(|x|+1)<0$
이때 $|x|+1>0$이므로 $|x|-3<0$, $|x|<3$ $\therefore \boldsymbol{-3<x<3}$

정답과 풀이 65쪽

유제 **372** 다음 부등식을 푸시오.
(1) $|x^2-5|\leq 4$ $-3\leq x\leq -1$ 또는 $1\leq x\leq 3$ (2) $x^2+|x|-2\geq 0$ $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$

05 이차부등식의 해의 조건

문제에서 이차부등식의 해가 주어지면 해를 구하는 방법을 역으로 생각하여 이차부등식을 구할 수 있다.

이차부등식의 작성

(1) 해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식

➡ $(x-\alpha)(x-\beta)<0$, 즉 $\boldsymbol{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta<0}$

(2) 해가 $x<\alpha$, $x>\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식

➡ $(x-\alpha)(x-\beta)>0$, 즉 $\boldsymbol{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta>0}$

해가 없거나 모든 실수로 주어질 때의 미정계수 문제가 중요하다. 문제 상황에 맞는 그래프를 생각해 조건을 세우면 된다.

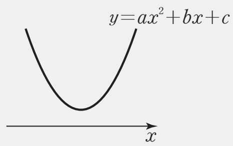
부등식이 항상 성립할 조건

(1) 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립할 조건

➡ 그래프가 항상 x축 위쪽에 있다.

① $a>0$, $D<0$

② $a=0$, $b=0$, $c>0$

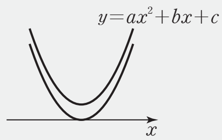


(2) 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\geq 0$이 항상 성립할 조건

➡ 그래프가 x축에 접하거나 위쪽에 있다.

① $a>0$, $D\leq 0$

② $a=0$, $b=0$, $c\geq 0$

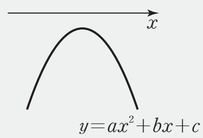


(3) 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c<0$이 항상 성립할 조건

➡ 그래프가 항상 x축 아래쪽에 있다.

① $a<0$, $D<0$

② $a=0$, $b=0$, $c<0$

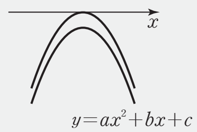


(4) 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\leq 0$이 항상 성립할 조건

➡ 그래프가 x축에 접하거나 아래쪽에 있다.

① $a<0$, $D\leq 0$

② $a=0$, $b=0$, $c\leq 0$



'이차'부등식이라는 조건 대신 부등식이라는 조건만 주어지면 a가 0인 경우도 고려해야 한다.
모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립할 조건을 생각해 보자.

(ⅰ) $a\neq 0$일 때,

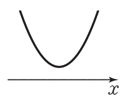
$y=ax^2+bx+c$의 그래프가 [그림1]과 같아야 하므로

$a>0$, $D=b^2-4ac<0$

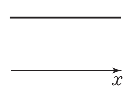
(ⅱ) $a=0$일 때,

$y=bx+c$의 그래프가 [그림2]와 같아야 하므로

$a=0$, $b=0$, $c>0$



[그림 1]



[그림 2]

373 이차부등식 $3x^2-ax+b>0$의 해가 $x<1$ 또는 $x>2$일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

풍산자팁 이차부등식의 해가 주어진 문제는 근과 계수의 관계 또는 인수분해를 이용한다.
근과 계수의 관계가 좀 더 간단하다.

풀이 이차방정식 $3x^2-ax+b=0$의 두 근이 $x=1$ 또는 $x=2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1+2=\frac{a}{3}$, $1\times2=\frac{b}{3}$ $\therefore$ $\boldsymbol{a=9,\ b=6}$

다른 풀이 이차항의 계수가 1이고, 해가 $x<1$ 또는 $x>2$인 이차부등식은

$(x-1)(x-2)>0$ $\therefore$ $x^2-3x+2>0$

양변에 3을 곱하면 $3x^2-9x+6>0$

주어진 부등식과 비교하면 $a=9$, $b=6$

정답과 풀이 65쪽

유제 **374** 이차부등식 $2x^2+ax+b<0$의 해가 $1<x<3$일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오. $a=-8$, $b=6$

375 이차부등식 $ax^2+5x+b>0$의 해가 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

풍산자팁 이차항의 계수가 문자일 때는 그것의 부호에 주의한다.
이차항의 계수가 음수일 때는 부등호의 방향이 바뀌니까.

풀이 [1단계] ☆>0의 꼴의 이차부등식의 해가 '가장자리'가 아닌 '사이'이므로 $a<0$

[2단계] 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 범위에 맞는 이차부등식을 세우면

$a\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)>0$, $a\left(x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)>0$ $\therefore$ $ax^2-\frac{5}{6}ax+\frac{1}{6}a>0$

[3단계] 주어진 부등식과 비교하면

$-\frac{5}{6}a=5$, $\frac{1}{6}a=b$ $\therefore$ $\boldsymbol{a=-6,\ b=-1}$

정답과 풀이 65쪽

유제 **376** 이차부등식 $ax^2+7x+b>0$의 해가 $\frac{1}{5}<x<\frac{1}{2}$일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오. $a=-10$, $b=-1$

377 모든 실수 x에 대하여 $x^2-(m+2)x+2m$이 -1보다 항상 크기 위한 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

풍산자Tip 이차부등식을 세워 항상 성립할 조건을 떠올린다.
이차항의 계수가 숫자일 때는 판별식만 생각하면 된다.

풀이 $x^2-(m+2)x+2m>-1$에서 $x^2-(m+2)x+2m+1>0$
이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로
이차방정식 $x^2-(m+2)x+2m+1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=\{-(m+2)\}^2-4(2m+1)<0$, $m^2-4m<0$, $m(m-4)<0$
$\therefore$ $\mathbf{0<m<4}$

정답과 풀이 65쪽

유제 **378** 모든 실수 x에 대하여 x^2+mx+m이 -3보다 항상 크기 위한 실수 m의 값의 범위를 구하시오.
$-2<m<6$

379 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(m-1)x^2-2(m-1)x+3>0$이 항상 성립하도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

풍산자Tip 이차항의 계수에 문자가 있는 부등식이다. '이차'라는 조건이 없으므로 이차항의 계수가 0인 상황도 생각해야 한다.

풀이 (i) $m\neq1$일 때, 주어진 부등식이 항상 성립하려면 $m-1>0$ $\quad\therefore m>1$ …… ㉠
이차방정식 $(m-1)x^2-2(m-1)x+3=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=\{-(m-1)\}^2-3(m-1)<0$, $m^2-5m+4<0$, $(m-1)(m-4)<0$
$\therefore 1<m<4$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1<m<4$
(ii) $m=1$일 때, $3>0$이므로 주어진 부등식이 항상 성립한다.
(i), (ii)에서 $\mathbf{1\le m<4}$

참고 이 문제에서 '부등식'이라는 단어를 '이차부등식'으로 바꾸면 정답은 $1<m<4$가 된다.
'이차'라는 조건이 주어지면 이차항의 계수가 0이 아니라는 조건이 주어진 셈이기 때문이다.

정답과 풀이 65쪽

유제 **380** 모든 실수 x에 대하여 부등식 $mx^2+mx+1>0$이 항상 성립하도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하시오. $0\le m<4$

381 이차부등식 $ax^2+2ax-1>0$의 해가 존재하지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

풍산자티 이차항의 계수 a의 부호에 따라 그래프가 달라지므로 이에 주의한다.
판별식을 이용해서 a의 값의 범위를 구할 수 있다.

풀이 주어진 이차부등식의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여
$ax^2+2ax-1\le 0$이 성립해야 하므로 $a<0$ ······ ㉠
이차방정식 $ax^2+2ax-1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2+a\le 0,\ a(a+1)\le 0$ $\therefore\ -1\le a\le 0$ ······ ㉡
㉠, ㉡의 공통부분은 $\boldsymbol{-1\le a<0}$

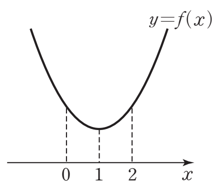
정답과 풀이 66쪽

유제 **382** 이차부등식 $ax^2-6x+a>0$의 해가 존재하지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.
$a\le -3$

383 $0\le x\le 2$에서 이차부등식 $x^2-2x+a^2-3>0$이 항상 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

풍산자티 제한된 범위에서 항상 성립하는 이차부등식은 그래프를 그려 본다.
① 주어진 범위에서 최솟값이나 최댓값을 확인한다.
② 경계에서의 함숫값의 부호를 확인한다.

풀이 $f(x)=x^2-2x+a^2-3$이라 하자.
$0\le x\le 2$에서 주어진 이차부등식이 항상 성립하려면 함수
$y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.
$f(x)=x^2-2x+a^2-3=(x-1)^2+a^2-4$이므로
$f(1)=a^2-4>0,\ (a+2)(a-2)>0$
$\therefore$ $\boldsymbol{a<-2}$ **또는** $\boldsymbol{a>2}$



정답과 풀이 66쪽

유제 **384** $-3\le x\le 1$에서 이차부등식 $x^2+4x-a^2+a+10>0$이 항상 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오. $-2<a<3$

+ 풍산자 비법

그래프를 통해 생각하면 이차부등식의 해의 조건을 모두 외우지 않아도 된다.
특수한 해가 주어지면 그래프를 생각한다.

06 연립이차부등식

연립이차부등식의 풀이는 연립일차부등식과 마찬가지로 수직선을 이용하여 공통부분을 찾는다.

(1) 연립부등식 $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$의 해는 두 부등식 $f(x)>0$, $g(x)>0$의 해의 공통부분이다.

(2) 부등식 $f(x)<g(x)<h(x)$의 해는 두 부등식 $f(x)<g(x)$, $g(x)<h(x)$의 해의 공통부분이다.

● 연립이차부등식

385 연립부등식 $\begin{cases} x^2-4x>0 \\ x^2-x-2\le 0 \end{cases}$을 푸시오.

풍산자법 연립부등식 $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$의 해는 두 부등식 $f(x)>0$, $g(x)>0$의 해의 공통부분이다.

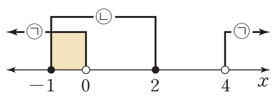
풀이 $x^2-4x>0$에서 $x(x-4)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>4$ …… ㉠

$x^2-x-2\le 0$에서 $(x+1)(x-2)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\mathbf{-1\le x<0}$



정답과 풀이 66쪽

유제 **386** 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x<3x+6 \\ x^2+5x-6<0 \end{cases}$ $-3<x<1$

(2) $\begin{cases} 2x^2-5x+2\ge 0 \\ 2x^2-3x-5\le 0 \end{cases}$ $-1\le x\le \frac{1}{2}$ 또는 $2\le x\le \frac{5}{2}$

● $A<B<C$의 꼴의 연립이차부등식

387 부등식 $x^2+2x-15\le 8x+1<x^2+8$을 푸시오.

풍산자법 부등식 $f(x)<g(x)<h(x)$는 $f(x)<g(x)$, $g(x)<h(x)$로 바꾸어 푼다.

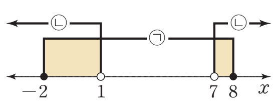
풀이 $x^2+2x-15\le 8x+1$에서 $x^2-6x-16\le 0$

$(x+2)(x-8)\le 0$ $\therefore -2\le x\le 8$ …… ㉠

$8x+1<x^2+8$에서 $x^2-8x+7>0$

$(x-1)(x-7)>0$ $\therefore x<1$ 또는 $x>7$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\mathbf{-2\le x<1}$ **또는** $\mathbf{7<x\le 8}$



정답과 풀이 66쪽

유제 **388** 부등식 $-x<x^2\le 2x+3$을 푸시오. $0<x\le 3$

389 연립부등식 $\begin{cases} x^2-2x-8<0 \\ x^2+(a-1)x-a\geq 0 \end{cases}$ 의 해가 $1\leq x<4$가 되도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

풍산자답 연립부등식의 해는 각 부등식의 해의 공통부분이다.
각 부등식을 풀어 공통부분이 주어진 해가 되도록 수직선 위에 나타낸다.

풀이 $x^2-2x-8<0$에서 $(x+2)(x-4)<0$

$\therefore\ -2<x<4$ …… ㉠

$x^2+(a-1)x-a\geq 0$에서 $(x+a)(x-1)\geq 0$ …… ㉡

(i) $-a>1$, 즉 $a<-1$일 때, ㉡의 해는 $x\leq 1$ 또는 $x\geq -a$

(ii) $-a=1$, 즉 $a=-1$일 때, ㉡의 해는 모든 실수이다.

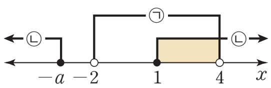
(iii) $-a<1$, 즉 $a>-1$일 때, ㉡의 해는 $x\leq -a$ 또는 $x\geq 1$

㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $1\leq x<4$이기 위한 부등식 ㉡의 해는

$x\leq -a$ 또는 $x\geq 1$

두 부등식 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 실수 a의 값의 범위는

$-a\leq -2$ $\qquad\therefore\ \boldsymbol{a\geq 2}$



참고 부등식 문제에서 경계가 되는 값이 포함되는지 포함되지 않는지 헷갈리는 경우, 경계가 되는 값을 부등식에 대입하여 주어진 조건을 만족시키는지 확인한다.
$a=2$이면 ㉡의 해가 $x\leq -2$ 또는 $x\geq 1$이고 ㉠, ㉡의 공통부분이 $1\leq x<4$가 되므로 주어진 조건을 만족시킨다.

정답과 풀이 66쪽

유제 **390** 연립부등식 $\begin{cases} x^2-5x+6>0 \\ x^2-(a+6)x+6a\leq 0 \end{cases}$ 의 해가 $3<x\leq 6$이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오. $2\leq a\leq 3$

+ 풍산자 비법

- 연립부등식의 해는 각 부등식의 해의 공통부분이다.
- 연립이차부등식의 해가 주어진 경우에는 각 부등식의 해의 공통부분이 주어진 해와 일치하도록 수직선 위에 나타낸다. 경계가 되는 값은 한 번 더 확인!

07 이차방정식의 실근의 부호

이차방정식의 두 근이 실근이면 두 근을 직접 구하지 않고도 판별식과 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 부호를 쉽게 알 수 있다.

이차방정식의 실근의 부호

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 실수)의 두 실근을 α, β라 하고, 판별식을 D라 하면

(1) 두 근이 모두 양수일 조건

➡ $D\ge0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

(2) 두 근이 모두 음수일 조건

➡ $D\ge0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

(3) 두 근이 서로 다른 부호일 조건

➡ $\alpha\beta<0$

설명 (1) 양수의 합은 양수, 양수의 곱도 양수이므로 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

여기까지는 이해가 된다. 그런데 $D\ge0$이라는 조건은 왜 필요할까?

양수와 음수는 모두 실수이다. 허수에서는 양, 음의 구별이 없다.

따라서 두 근이 실근임을 보장하기 위해 $D\ge0$이라는 조건이 필요하다.

예를 들어 두 복소수 α, β가 $\alpha=3+i$, $\beta=3-i$일 때,

$\alpha+\beta=6>0$, $\alpha\beta=10>0$이지만 $\alpha>0$, $\beta>0$인 것은 아니라는 것이다.

(2) 음수의 합은 음수, 음수의 곱은 양수이므로 $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

이 경우도 역시 실근임을 보장하기 위해 $D\ge0$이라는 조건이 필요하다.

(3) 두 근의 부호가 다르면 두 근의 곱은 음수이므로 $\alpha\beta<0$

놀랍게도 이것으로 끝이다.

판별식은 검토할 필요가 없다. $\alpha\beta<0$이면 이미 $D>0$이다.

$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}<0$이면 a, c는 서로 다른 부호이므로 $ac<0$

$\therefore D=b^2-4ac>0$

즉, $\alpha\beta<0$이면 항상 $D>0$이므로 판별식을 검토하지 않아도 된다.

참고 (3) 두 근이 서로 다른 부호일 때

① 두 근의 절댓값이 같을 조건 ➡ $\alpha+\beta=0$, $\alpha\beta<0$

② 양수인 근의 절댓값이 더 클 조건 ➡ $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta<0$

③ 음수인 근의 절댓값이 더 클 조건 ➡ $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta<0$

大 원칙 이차방정식의 실근의 부호를 판정하기 위해 따져야 할 것은 세 가지.

① 판별식 ② 두 근의 합 ③ 두 근의 곱

391 이차방정식 $x^2-(m+2)x+m+5=0$이 다음 조건을 만족시킬 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

(1) 두 근이 모두 양수

(2) 두 근이 모두 음수

(3) 두 근이 서로 다른 부호

풍산자日 실근의 부호를 판정하려면 판별식, 두 근의 합, 두 근의 곱을 모두 검토하여야 한다. 다행히 두 실근이 서로 다른 부호일 경우에는 두 근의 곱만 검토하면 된다.

풀이 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 하면

(1) 두 근이 모두 양수일 조건

➡ $D\geq 0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

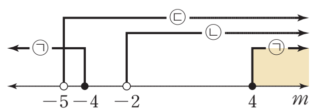
(i) $D=\{-(m+2)\}^2-4(m+5)\geq 0$에서

$m^2-16\geq 0$, $(m+4)(m-4)\geq 0$

$\therefore m\leq -4$ 또는 $m\geq 4$ …… ㉠

(ii) $\alpha+\beta=m+2>0$에서 $m>-2$ …… ㉡

(iii) $\alpha\beta=m+5>0$에서 $m>-5$ …… ㉢



수직선을 이용하여 ㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$\boldsymbol{m\geq 4}$

(2) 두 근이 모두 음수일 조건

➡ $D\geq 0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

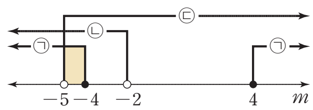
(i) $D=\{-(m+2)\}^2-4(m+5)\geq 0$에서

$m^2-16\geq 0$, $(m+4)(m-4)\geq 0$

$\therefore m\leq -4$ 또는 $m\geq 4$ …… ㉠

(ii) $\alpha+\beta=m+2<0$에서 $m<-2$ …… ㉡

(iii) $\alpha\beta=m+5>0$에서 $m>-5$ …… ㉢



수직선을 이용하여 ㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$\boldsymbol{-5<m\leq -4}$

(3) 두 근의 부호가 서로 다를 조건

➡ $\alpha\beta<0$

$\alpha\beta=m+5<0$에서 $\boldsymbol{m<-5}$

정답과 풀이 66쪽

유제 **392** 이차방정식 $x^2-2mx+m+2=0$이 다음 조건을 만족시킬 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

(1) 두 근이 모두 양수 $m\geq 2$

(2) 두 근이 모두 음수 $-2<m\leq -1$

(3) 두 근이 서로 다른 부호 $m<-2$

393 이차방정식 $x^2+2(m-1)x+m-3=0$의 두 실근이 서로 다른 부호이고, 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 클 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

풍산자티 서로 다른 부호라면? $\alpha\beta<0$이라는 소리.
음수인 근의 절댓값이 양수인 근의 절댓값보다 크다면? $\alpha+\beta<0$이라는 소리.

풀이 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면
(i) 두 실근이 서로 다른 부호이므로
$\alpha\beta=m-3<0$ $\quad\therefore m<3$ ...... ㉠
(ii) 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크므로
$\alpha+\beta=-2(m-1)<0$ $\quad\therefore m>1$ ...... ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\mathbf{1<m<3}$

정답과 풀이 67쪽

유제 **394** x에 대한 이차방정식 $x^2+(m+2)x+m^2-m-12=0$의 두 실근이 서로 다른 부호이고, 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 작을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오. $-3<m<-2$

395 x에 대한 이차방정식 $x^2-(m^2-2m-8)x-m+2=0$의 두 실근의 절댓값이 같고, 부호가 서로 다를 때, 실수 m의 값을 구하시오.

풍산자티 절댓값이 같다면? $\alpha+\beta=0$이라는 소리. 부호가 서로 다르다면? $\alpha\beta<0$이라는 소리.

풀이 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면
(i) 두 실근의 절댓값이 같으므로 $\alpha+\beta=m^2-2m-8=0$
$(m+2)(m-4)=0$ $\quad\therefore m=-2$ 또는 $m=4$ ...... ㉠
(ii) 두 실근의 부호가 서로 다르므로
$\alpha\beta=-m+2<0$ $\quad\therefore m>2$ ...... ㉡
㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 m의 값은 **4**이다.

정답과 풀이 67쪽

유제 **396** x에 대한 이차방정식 $x^2+(m^2+3m-10)x+m+1=0$의 두 실근의 절댓값이 같고, 부호가 서로 다를 때, 실수 m의 값을 구하시오. -5

풍산자 비법
이차방정식의 실근의 부호는 근과 계수의 관계와 판별식을 이용한다.

08 이차방정식의 실근의 크기

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근의 크기는 실수 p, q를 기준으로 다음과 같이 네 가지 경우로 구분할 수 있다.

(1) 두 근이 모두 p보다 크다.

(2) 두 근이 모두 p보다 작다.

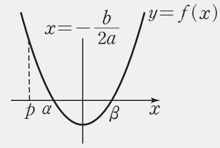
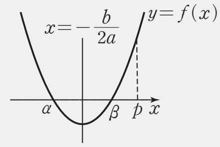
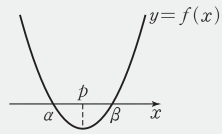
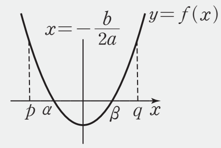
(3) 두 근 사이에 p가 있다.

(4) 두 근이 모두 p, q 사이에 있다.

p를 0으로 놓고 생각하면 앞에서 배운 실근의 부호 문제가 된다.

즉, 실근의 크기 문제는 실근의 부호 문제의 확장!

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 실근의 크기

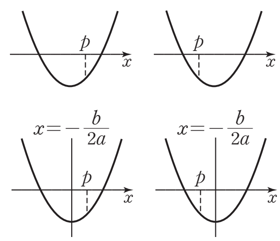
근의 위치	그래프	조건
두 근이 모두 p보다 크다.		판별식: $D\ge0$ 함숫값: $f(p)>0$ 축: $x=-\frac{b}{2a}>p$
두 근이 모두 p보다 작다.		판별식: $D\ge0$ 함숫값: $f(p)>0$ 축: $x=-\frac{b}{2a}<p$
두 근 사이에 p가 있다.		함숫값: $f(p)<0$
두 근이 모두 p, q 사이에 있다. (단, $p<q$)		판별식: $D\ge0$ 함숫값: $f(p)>0$, $f(q)>0$ 축: $p<-\frac{b}{2a}<q$

위 조건을 무작정 외우면 너무 힘들다. 실근의 크기 문제는 반드시 주어진 실근의 크기에 맞는 그래프를 그린 후에 **판/함/축**(판별식/경계에서의 함숫값/축)의 순서로 그래프에 맞는 조건을 따진다.

설명 두 근 사이에 p가 있을 때, $f(p)<0$만 조사하면 되는 이유는 무엇일까?

(i) 두 근 사이에 p가 있는 경우 $y=f(x)$의 그래프는 $x=p$의 좌우에서 x축과 항상 만난다. 즉, 판별식 D의 부호를 따질 필요가 없다.

(ii) 축을 기준으로 p의 위치가 왼쪽이든 오른쪽이든 상관없이 두 근 사이에 p가 있다. 즉, 축의 위치를 따질 필요가 없다.



397 **이차방정식 $x^2-2mx+3m=0$의 두 근이 다음 조건을 만족시킬 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오.**

(1) 두 근이 모두 1보다 크다.

(2) 두 근이 모두 1보다 작다.

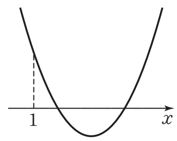
(3) 두 근 사이에 1이 있다.

풍산자 **조건에 맞는 그래프를 그린 후 판별식, 함숫값, 축이라는 세 가지 조건을 따진다.**

(i) **판별식:** $D=b^2-4ac$　　(ii) **함숫값:** $f(1)$　　(iii) **축:** $x=-\dfrac{b}{2a}$

풀이 $f(x)=x^2-2mx+3m$으로 놓고 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

(1) $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



(i) $\dfrac{D}{4}=(-m)^2-3m\geq0,\ m(m-3)\geq0$

$\therefore m\leq0$ 또는 $m\geq3$ ······ ㉠

(ii) $f(1)=1-2m+3m>0$

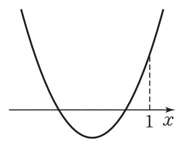
$\therefore m>-1$ ······ ㉡

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=m$이므로

$m>1$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $\boldsymbol{m\geq3}$

(2) $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



(i) $\dfrac{D}{4}=(-m)^2-3m\geq0,\ m(m-3)\geq0$

$\therefore m\leq0$ 또는 $m\geq3$ ······ ㉠

(ii) $f(1)=1-2m+3m>0$

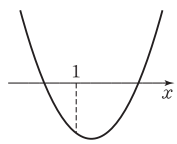
$\therefore m>-1$ ······ ㉡

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=m$이므로

$m<1$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $\boldsymbol{-1<m\leq0}$

(3) $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(1)=1-2m+3m<0$

$\therefore \boldsymbol{m<-1}$

정답과 풀이 **67**쪽

유제 **398** **이차방정식 $x^2-2mx+2m+8=0$의 두 근이 다음 조건을 만족시킬 때, 실수 m의 값 또는 범위를 구하시오.**

(1) 두 근이 모두 1보다 크다. $m\geq4$

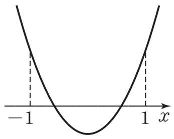
(2) 두 근이 모두 1보다 작다. $m\leq-2$

(3) 두 근 사이에 1이 있다. 없다.

399 이차방정식 $x^2+2mx+m=0$의 두 근이 모두 -1과 1 사이에 있을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

풍산자답 그래프를 그리고 판별식, 함숫값, 축이라는 세 가지 조건을 빠짐없이 따져 봐야 한다.

풀이 $f(x)=x^2+2mx+m$으로 놓고 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



(i) $\frac{D}{4}=m^2-m\geq 0$, $m(m-1)\geq 0$

$\therefore m\leq 0$ 또는 $m\geq 1$ …… ㉠

(ii) $f(-1)=1-2m+m>0$ $\therefore m<1$

$f(1)=1+2m+m>0$ $\therefore m>-\frac{1}{3}$

$\therefore -\frac{1}{3}<m<1$ …… ㉡

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-m$이므로

$-1<-m<1$ $\therefore -1<m<1$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $\boldsymbol{-\frac{1}{3}<m\leq 0}$

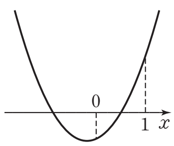
정답과 풀이 67쪽

유제 **400** 이차방정식 $x^2+2x+m-5=0$의 두 근이 모두 -2와 1 사이에 있을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오. $5<m\leq 6$

401 이차방정식 $x^2+(m-1)x+m-2=0$의 한 근은 0보다 작고, 다른 한 근은 0과 1 사이에 있을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

풍산자답 그래프와 x축의 교점 사이에 숫자가 하나라도 있으면 함숫값만 따져 보면 된다.

풀이 $f(x)=x^2+(m-1)x+m-2$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(0)=m-2<0$ $\therefore m<2$ …… ㉠

$f(1)=1+(m-1)+m-2>0$ $\therefore m>1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\boldsymbol{1<m<2}$

정답과 풀이 68쪽

유제 **402** x에 대한 이차방정식 $x^2+(m^2-1)x+m-2=0$의 한 근은 -1보다 작고, 다른 한 근은 1보다 클 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오. $-2<m<0$

+ 풍산자 비법

이차방정식의 근의 위치가 조건으로 나오면 판별식, 함숫값, 축이라는 세 가지 조건을 빠짐없이 고려하자.

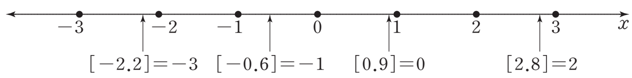
09 가우스 기호

한걸음 더

가우스는 역사상 최고의 수학자로 평가받고 있으며 많은 정리나 공식, 기호 등에 그의 이름을 붙여 업적을 기리고 있다. 지금 배울 가우스 기호도 그중 하나이다.

x보다 크지 않은 최대 정수를 $[x]$로 나타내고, $[\ \ ]$를 가우스 기호라 한다.

$[x]$를 계산할 때는 수직선에서 x의 바로 왼쪽의 정수를 떠올리면 된다.



가우스 기호의 의미

(1) $[x]=$(x보다 크지 않은 최대 정수)$=$(x 이하의 최대 정수)

(2) x가 양수일 때, $[x]=$(x의 정수 부분)

x가 정수일 때, $[x]=x$

(3) $[x]=n$이면 $n\le x<n+1$ (단, n은 정수이다.)

$[x]$는 x가 양수일 때는 x의 정수 부분과 같다. 하지만 수직선에서 보듯 x가 음수일 때는 미묘한 차이가 있으므로 주의해야 한다. 또, $[x]$의 값은 항상 정수라는 것을 꼭 기억하자.

$[x]$는 $n\le x<n+1$을 만족시키는 정수 n으로 정의하기도 한다. 다른 척하지만 같은 얘기다.

반대로 $[x]=2$를 만족시키는 x의 값의 범위는 뭘까?

$2\le x<3$이다.

개념확인

1 다음 식의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

(1) $[2]$ (2) $[-2]$ (3) $\left[\frac{5}{2}\right]$ (4) $\left[-\frac{5}{2}\right]$

2 다음 식을 만족시키는 실수 x의 값의 범위를 구하시오.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

(1) $[x]=5$ (2) $[x]=0$ (3) $[x]=-5$

풀이

1 (1) $[2]=\mathbf{2}$ (2) $[-2]=\mathbf{-2}$

(3) $\left[\frac{5}{2}\right]=[2.5]=\mathbf{2}$ (4) $\left[-\frac{5}{2}\right]=[-2.5]=\mathbf{-3}$

2 (1) $\mathbf{5\le x<6}$ (2) $\mathbf{0\le x<1}$ (3) $\mathbf{-5\le x<-4}$

설명

가우스 함수 $y=[x]$에서 가우스 기호의 정의를 이용해 정수가 되는 x의 값을 경계로 구간을 나누어 $[x]$의 값을 구하면 함수의 그래프를 그릴 수 있다.

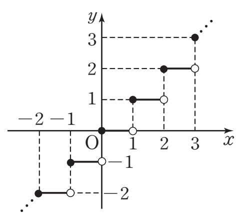
$-1\le x<0$일 때, $[x]=-1$이므로 $y=-1$

$0\le x<1$일 때, $[x]=0$이므로 $y=0$

$1\le x<2$일 때, $[x]=1$이므로 $y=1$

$2\le x<3$일 때, $[x]=2$이므로 $y=2$

따라서 함수 $y=[x]$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



403 다음 방정식을 푸시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

(1) $[x]^2-3[x]+2=0$ (2) $2[x]^2-[x]-3=0$

풍산자由 먼저 좌변을 인수분해하여 $[x]$의 값을 구한 후, $[x]=n$이면 $n\le x<n+1$임을 이용한다.

풀이 (1) 좌변을 인수분해하면 $([x]-1)([x]-2)=0$ $\therefore [x]=1$ 또는 $[x]=2$

즉, $1\le x<2$ 또는 $2\le x<3$이므로 $\mathbf{1\le x<3}$

(2) 좌변을 인수분해하면 $([x]+1)(2[x]-3)=0$ $\therefore [x]=-1$ 또는 $[x]=\frac{3}{2}$

그런데 $[x]$는 정수이므로 $[x]=-1$ $\therefore \mathbf{-1\le x<0}$

정답과 풀이 68쪽

유제 **404** 다음 방정식을 푸시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

(1) $[x]^2-5[x]+6=0$ $2\le x<4$ (2) $2[x]^2+3[x]-2=0$ $-2\le x<-1$

405 다음 부등식을 푸시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

(1) $[x]^2+5[x]+4<0$ (2) $3[x]^2-7[x]+2\le 0$

풍산자由 먼저 좌변을 인수분해하여 $[x]$의 값의 범위를 구한 후, $[x]$의 값이 정수임을 이용한다.

풀이 (1) 좌변을 인수분해하면 $([x]+4)([x]+1)<0$ $\therefore -4<[x]<-1$

그런데 $[x]$는 정수이므로 $[x]$는 -3, -2

$[x]=-3$일 때 $-3\le x<-2$, $[x]=-2$일 때 $-2\le x<-1$

$\therefore \mathbf{-3\le x<-1}$

(2) 좌변을 인수분해하면 $(3[x]-1)([x]-2)\le 0$ $\therefore \frac{1}{3}\le [x]\le 2$

그런데 $[x]$는 정수이므로 $[x]$는 1, 2

$[x]=1$일 때 $1\le x<2$, $[x]=2$일 때 $2\le x<3$

$\therefore \mathbf{1\le x<3}$

정답과 풀이 68쪽

유제 **406** 다음 부등식을 푸시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

(1) $[x]^2-4[x]+3<0$ $2\le x<3$ (2) $2[x]^2-7[x]+3\le 0$ $1\le x<4$

+ 풍산자 비법

절댓값 기호와 가우스 기호를 대하는 기본자세는 구간 나누기.

① 절댓값 기호 ➡ 기호 안을 0으로 만드는 값을 기준으로 구간을 나눈다.

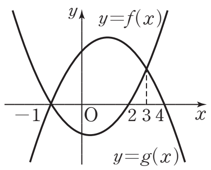
② 가우스 기호 ➡ $[x]=n$이면 $n\le x<n+1$ (단, n은 정수이다.)

필수 확인 문제

정답과 풀이 68쪽

407

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 부등식 $f(x)-g(x)\le 0$의 해가 아닌 것은?



① -1　② 1　③ 2　④ 3　● ⑤ 4

부등식 $f(x)-g(x)\le 0$, 즉 $f(x)\le g(x)$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로 $-1\le x\le 3$
주어진 수 중에서 이 범위 안에 있지 않은 것은 4이다.

408

이차부등식 $x^2-3x-5\le 0$의 해가 $a\le x\le b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. 19

이차방정식 $x^2-3x-5=0$의 서로 다른 두 근이 a, b이므로
근과 계수의 관계에 의하여
$a+b=3$, $ab=-5$
$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\times(-5)=19$

409

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{x^2-2kx+k+2}$가 실수가 되도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오. $-1\le k\le 2$

모든 실수 x에 대하여 $x^2-2kx+k+2\ge 0$이 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2-2kx+k+2=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k+2)\le 0$, $k^2-k-2\le 0$
$(k+1)(k-2)\le 0$　$\therefore -1\le k\le 2$

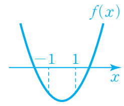
410

$-1<x<1$에서 이차부등식

$$x^2-(a^2-1)x-a-2<0$$

이 항상 성립하도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오. 4

$f(x)=x^2-(a^2-1)x-a-2$의 그래프가
오른쪽 그림과 같아야 하므로



(i) $f(-1)=1+(a^2-1)-a-2\le 0$
　$\therefore -1\le a\le 2$　…… ㉠
(ii) $f(1)=1-(a^2-1)-a-2\le 0$　$\therefore a\le -1$ 또는 $a\ge 0$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $a=-1$ 또는 $0\le a\le 2$
따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2이므로 그 개수는 4이다.

411

이차부등식 $ax^2-8x+a-6\le 0$의 해가 오직 한 개 존재할 때, 실수 a의 값을 구하시오. 8

이차부등식 $ax^2-8x+a-6\le 0$이 단 한 개의 해를 가지므로
이차함수 $y=ax^2-8x+a-6$의 그래프는 x축에 접하고
아래로 볼록해야 한다.　$\therefore a>0$
또, 이차방정식 $ax^2-8x+a-6=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-4)^2-a(a-6)=0$, $a^2-6a-16=0$
$(a+2)(a-8)=0$　$\therefore a=8$ ($\because a>0$)

412

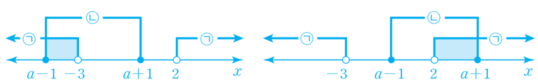
이차방정식 $x^2+(k-4)x+k-1=0$의 두 근이 모두 음수일 때, 실수 k의 최솟값을 구하시오. 10

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 하면
(i) $D=(k-4)^2-4(k-1)\ge 0$, $k^2-12k+20\ge 0$
　$(k-2)(k-10)\ge 0$　$\therefore k\le 2$ 또는 $k\ge 10$　…… ㉠
(ii) $\alpha+\beta=-(k-4)<0$에서 $k>4$　…… ㉡
(iii) $\alpha\beta=k-1>0$에서 $k>1$　…… ㉢
㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $k\ge 10$
따라서 실수 k의 최솟값은 10이다.

413 실력UP

연립부등식 $\begin{cases} x^2+x-6>0 \\ |x-a|\le 1 \end{cases}$이 해를 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하시오. $a<-2$ 또는 $a>1$

(i) $x^2+x-6>0$에서 $x<-3$ 또는 $x>2$　…… ㉠
(ii) $|x-a|\le 1$에서 $a-1\le x\le a+1$　…… ㉡



$a-1<-3$ 또는 $a+1>2$　$\therefore a<-2$ 또는 $a>1$

중단원 마무리

◆ 부등식의 성질

부등식의 성질	① $a>b$, $b>c$이면 $a>c$ ② $a>b$이면 $a+c>b+c$, $a-c>b-c$ ③ $a>b$, $c>0$이면 $ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ (부등호의 방향이 그대로) ④ $a>b$, $c<0$이면 $ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ (부등호의 방향이 반대로)

◆ 일차부등식

절댓값 기호를 포함한 일차부등식	① [1단계] 절댓값 기호 안을 0으로 하는 수를 기준으로 구간을 나누어 푼다. ➡ $\lvert a\rvert=a$ $(a\geq 0)$, $\lvert a\rvert=-a$ $(a<0)$ [2단계] 해를 구한 후 반드시 해당 구간과의 공통부분을 구한다. ② $\lvert x\rvert<a$ ➡ $-a<x<a$ ③ $\lvert x\rvert>a$ ➡ $x<-a$ 또는 $x>a$ ④ $a<\lvert x\rvert<b$ ➡ $-b<x<-a$ 또는 $a<x<b$
연립일차부등식	각각의 일차부등식의 해를 구해 공통부분을 찾는다.

◆ 이차부등식

이차부등식의 해법	이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 판별식을 D, 두 근을 α, β $(\alpha\leq\beta)$라 하면 (1) $D>0$일 때 ① $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)\geq 0$, $\alpha<\beta$ ➡ $x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$ ② $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)\leq 0$, $\alpha<\beta$ ➡ $\alpha\leq x\leq\beta$ (2) $D=0$일 때 ① $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2\geq 0$ ➡ 해는 모든 실수 ② $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2\leq 0$ ➡ $x=\alpha$ (3) $D<0$일 때 ① $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+$(양수)≥ 0 ➡ 해는 모든 실수 ② $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+$(양수)≤ 0 ➡ 해는 없다.
이차부등식이 항상 성립할 조건	① 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c>0$ ➡ $a>0$, $D<0$ ② 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\geq 0$ ➡ $a>0$, $D\leq 0$ ③ 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c<0$ ➡ $a<0$, $D<0$ ④ 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\leq 0$ ➡ $a<0$, $D\leq 0$
연립이차부등식	각각의 이차부등식의 해를 구해 공통부분을 찾는다.

실전 연습문제

STEP 1

414

부등식 $(a-b)x+a+b>0$의 해가 $x<3$일 때, 부등식 $ax+2b+3a>0$을 풀면? (단, a, b는 상수이다.)

● ① $x>-7$ ② $x>-4$ ③ $x>-2$
④ $x<-7$ ⑤ $x<-4$

$(a-b)x+a+b>0$의 해가 $x<3$이므로

$a-b<0$, $\frac{-a-b}{a-b}=3$

$\frac{-a-b}{a-b}=3$에서 $b=2a$

$b=2a$를 $a-b<0$에 대입하면 $a>0$

$b=2a$를 $ax+2b+3a>0$에 대입하면 $ax>-7a$

이때 $a>0$이므로 $x>-7$

415

부등식 $|5x-12|\le k-5$의 해가 존재하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오. $k\ge5$

$|5x-12|\ge0$이므로 $|5x-12|\le k-5$의 해가 존재하려면

$k-5\ge0$이어야 한다.

$\therefore k\ge5$

416

연립부등식 $x-5\le2(x-4)<3x+k$의 해가 $x\ge3$일 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오. $k>-11$

$\begin{cases} x-5\le2(x-4) & \cdots\cdots ㉠ \\ 2(x-4)<3x+k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x-5\le2x-8$ $\therefore x\ge3$

㉡에서 $2x-8<3x+k$ $\therefore x>-k-8$

따라서 연립부등식의 해가 $x\ge3$이 되려면 $-k-8<3$이어야 하므로

$k>-11$

417

10 %의 설탕물 100 g이 있다. 이 설탕물에 물을 더 넣어 5 % 이상 8 % 이하의 설탕물을 만들려고 할 때, 더 넣어야 하는 물의 양의 최댓값을 구하시오. 100 g

더 넣어야 하는 물의 양을 x g이라 하면

$\frac{5}{100}\times100\le\frac{10}{100+x}\times100\le\frac{8}{100}\times100$

$\frac{1}{20}\le\frac{10}{100+x}\le\frac{2}{25}$

$125\le100+x\le200$

$\therefore 25\le x\le100$

따라서 더 넣어야 하는 물의 양의 최댓값은 100 g이다.

418

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-1<x<2$일 때, 이차부등식 $cx^2-ax-b<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$이다. $\alpha\beta$의 값을 구하시오. $-\frac{1}{2}$

(단, a, b, c는 상수이다.)

☆>0의 꼴의 이차부등식의 해가 가장자리가 아닌 사이이므로 $a<0$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $x=-1$ 또는 $x=2$이므로

$-1+2=-\frac{b}{a}$, $(-1)\times2=\frac{c}{a}$ $\therefore b=-a$, $c=-2a$

$b=-a$, $c=-2a$를 $cx^2-ax-b<0$에 대입하면

$-2ax^2-ax+a<0$

$a<0$이므로 양변을 $-a$로 나누면

$2x^2+x-1<0$, $(x+1)(2x-1)<0$ $\therefore -1<x<\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로 $\alpha\beta=-\frac{1}{2}$

419

이차부등식 $f(x)<0$의 해가 $1<x<4$일 때, 다음 중 부등식 $f(x-3)\ge0$을 만족시키는 x의 값이 아닌 것은?

① 1 ② 3 ● ③ 5
④ 7 ⑤ 9

$f(x)\ge0$의 해는 $x\le1$ 또는 $x\ge4$

$f(x-3)\ge0$의 해는 $x-3\le1$ 또는 $x-3\ge4$

$\therefore x\le4$ 또는 $x\ge7$

주어진 수 중에서 이 범위 안에 있지 않은 것은 5이다.

420

다음 이차부등식 중 해가 단 하나뿐인 것은?

① $x^2-2x+1>0$ ● ② $x^2+6x+9\le0$

③ $4x^2\ge4x-1$ ④ $48x-9>64x^2$

⑤ $x^2-x-2\le0$

① $(x-1)^2>0$에서 해는 $x\ne1$인 모든 실수이다.
② $(x+3)^2\le0$에서 $x=-3$
③ $4x^2-4x+1\ge0$에서 $(2x-1)^2\ge0$이므로 해는 모든 실수이다.
④ $64x^2-48x+9<0$에서 $(8x-3)^2<0$이므로 해는 없다.
⑤ $(x+1)(x-2)\le0$에서 $-1\le x\le2$

421 교육청 기출

모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$$x^2+(m+2)x+2m+1>0$$

이 성립하도록 하는 모든 정수 m의 값의 합은?

① 3 ② 4 ③ 5

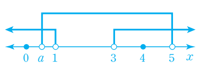
● ④ 6 ⑤ 7

이차방정식 $x^2+(m+2)x+2m+1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(m+2)^2-4(2m+1)<0$, $m^2-4m<0$
$\therefore 0<m<4$
따라서 모든 정수 m의 값의 합은 $1+2+3=6$이다.

422

두 이차부등식 $x^2-(a+5)x+5a<0$과 $x^2-4x+3>0$을 동시에 만족시키는 정수가 4뿐일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오. $0\le a<4$

$x^2-(a+5)x+5a<0$에서 $(x-a)(x-5)<0$
$x^2-4x+3>0$에서 $x<1$ 또는 $x>3$
공통부분의 정수가 4뿐이려면
a는 0 또는 0의 오른쪽, 4의 왼쪽에 있어야 한다.

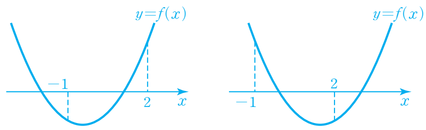


$\therefore 0\le a<4$

423

이차방정식 $x^2-kx+2=0$의 두 근 중에서 한 근만이 이차방정식 $x^2-x-2=0$의 두 근 사이에 있도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

$x^2-x-2=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$ $k<-3$ 또는 $k>3$
따라서 $f(x)=x^2-kx+2$라 하면
$y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $f(-1)f(2)<0$이어야 하므로
$(k+3)(6-2k)<0$, $(k+3)(k-3)>0$ $\therefore k<-3$ 또는 $k>3$

STEP 2

424

$0<x<3$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $2m-mx>1-2x$가 성립할 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오. $\frac{1}{2}\le m\le5$

$2m-mx>1-2x$에서 $(2-m)x+2m-1>0$
$f(x)=(2-m)x+2m-1$이라 하면 $0<x<3$에서
$f(x)>0$이 성립하므로 $f(0)\ge0$, $f(3)\ge0$
$f(0)=2m-1\ge0$이므로 $m\ge\frac{1}{2}$ …… ㉠
$f(3)=6-3m+2m-1\ge0$이므로 $m\le5$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{1}{2}\le m\le5$

425

부등식 $||2x-1|-3|\le4$를 만족시키는 x의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하시오. 7

$||2x-1|-3|\le4$에서 $-4\le|2x-1|-3\le4$
$-1\le|2x-1|\le7$
그런데 $|2x-1|\ge0$이므로 $0\le|2x-1|\le7$
$-7\le2x-1\le7$ $\therefore -3\le x\le4$
$\therefore M-m=4-(-3)=7$

426

부등식 $|x-1|+\sqrt{x^2+6x+9}\ge x+4$를 푸시오.

$|x-1|+|x+3|\ge x+4$ $\quad x\le 0$ 또는 $x\ge 2$

(i) $x<-3$일 때, $-(x-1)-(x+3)\ge x+4$

$\therefore x\le -2$

$x<-3$, $x\le -2$의 공통부분은 $x<-3$ …… ㉠

(ii) $-3\le x<1$일 때, $-(x-1)+(x+3)\ge x+4$

$\therefore x\le 0$

$-3\le x<1$, $x\le 0$의 공통부분은 $-3\le x\le 0$ …… ㉡

(iii) $x\ge 1$일 때, $(x-1)+(x+3)\ge x+4$, $x\ge 2$

$x\ge 1$, $x\ge 2$의 공통부분은 $x\ge 2$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 합한 범위는 $x\le 0$ 또는 $x\ge 2$

427

이차부등식

$$3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca\le 0$$

의 해가 단 한 개 존재할 때, $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$의 값을 구하시오. 3

$3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+b+c)\}^2-3(ab+bc+ca)=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

따라서 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$이므로 $a=b=c$

$\therefore \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}=1+1+1=3$

428 교육청 기출

$a<0$일 때, x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases}(x-a)^2<a^2 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+a<(a+1)x & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

의 해가 $b<x<b+1$이다.

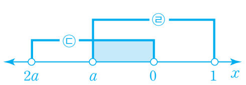
$a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) -2

㉠에서 $x^2-2ax<0$

$x(x-2a)<0$ $\quad\therefore 2a<x<0$ ($\because a<0$) …… ㉢

㉡에서 $x^2-(a+1)x+a<0$

$(x-1)(x-a)<0$ $\quad\therefore a<x<1$ ($\because a<0$) …… ㉣



㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $a<x<0$

이때 주어진 연립부등식의 해가 $b<x<b+1$이므로

$b=a$, $b+1=0$

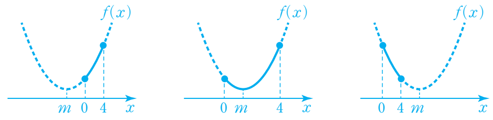
따라서 $a=-1$, $b=-1$이므로 $a+b=-2$

429

$0\le x\le 4$에서 부등식 $x^2-2mx+2m+3>0$이 항상 성립할 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오. $-\frac{3}{2}<m<3$

$f(x)=(x-m)^2-m^2+2m+3$이라 하면

(i) $m<0$일 때 $\quad$ (ii) $0\le m\le 4$일 때 $\quad$ (iii) $m>4$일 때



$-\frac{3}{2}<m<0$ $\quad$ $0\le m<3$ $\quad$ 해가 없다.

(i)~(iii)에서 구하는 m의 값의 범위는 $-\frac{3}{2}<m<3$

430

세 변의 길이가 각각 $x-4$, x, $x+4$인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 자연수 x의 최댓값을 구하시오. 15

$x-4$, x, $x+4$는 삼각형의 변의 길이이므로 $x>4$ …… ㉠

가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로

$x+4<(x-4)+x$ $\quad\therefore x>8$ …… ㉡

또, 가장 긴 변의 길이의 제곱은 나머지 두 변의 제곱의 합보다 커야 하므로

$(x+4)^2>(x-4)^2+x^2$, $x^2-16x<0$

$\therefore 0<x<16$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $8<x<16$

따라서 자연수 x의 최댓값은 15이다.

431

부등식 $2[x+2]^2-9[x]-14\le 0$을 푸시오.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.) $-1\le x<3$

n이 정수일 때, $[x+n]=[x]+n$이므로

$2([x]+2)^2-9[x]-14\le 0$

$(2[x]+3)([x]-2)\le 0$ $\quad\therefore -\frac{3}{2}\le [x]\le 2$

그런데 $[x]$는 정수이므로 $[x]$는 -1, 0, 1, 2

$[x]=-1$일 때, $-1\le x<0$

$[x]=0$일 때, $0\le x<1$

$[x]=1$일 때, $1\le x<2$

$[x]=2$일 때, $2\le x<3$

$\therefore -1\le x<3$

Ⅱ

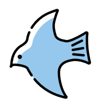
경우의 수

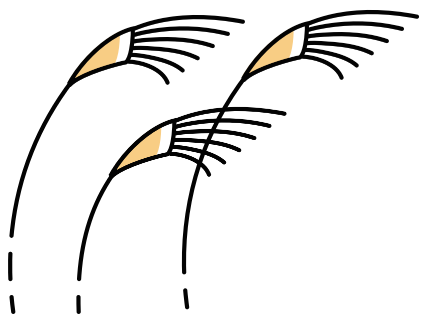
1 경우의 수

선택해야 할 때, 모든 상황을 다 따졌을까?

다항식에서 시작해 방정식과 부등식을 지나
경우의 수를 배운다.
경우의 수는 쉽다. ㅡ 다른 단원과 연관성이 없으니까.
경우의 수는 어렵다. ㅡ 문장제 문제니까.

경우의 수는 일어날 수 있는 사건이
몇 개나 되는지 세어 보는 단원이다.
살아가면서 수많은 선택의 기회가 주어진다.
바른 선택을 위해서는 먼저
어떤 선택지가 있는지 잘 따져 보아야 한다.
지금부터 배울 경우의 수가 그 선택에 도움이 될 것이다.

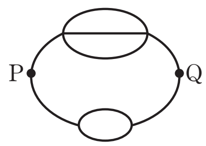




1 경우의 수

경우의 수에서 가장 중요한 것은
빠짐없이,
그리고 중복되지 않게.

1 경우의 수



2 순열

$_{n}\mathrm{P}_{r}$

3 조합

$_{n}\mathrm{C}_{r}$

1 경우의 수

01 경우의 수

중학교 수학에서 경우의 수를 배웠다.
주사위를 한 번 던질 때 '2의 배수의 눈이 나온다.'와 같이 동일한 조건에서 여러 번 반복할 수 있는 실험이나 관찰에 의하여 나타나는 결과를 **사건**이라 한다.
그리고 사건이 일어나는 가짓수를 그 사건의 **경우의 수**라 한다.
이 단원에서는 확률과 통계의 기본이면서 순열과 조합의 기초인 경우의 수를 구하는 방법에 대하여 배운다.
경우의 수의 특징은 다른 단원과 연관성이 없는 문장제 문제라는 것.
문장제 문제란 수학적 언어, 즉 식이나 기호가 아닌 일반적인 문장으로 서술된 문제를 말한다.
이러한 문장제 문제를 풀 때 많은 친구들이 문장의 분석이나 공식에 너무 집착한다.
그러나 경우의 수에서 정말 중요한 것은 빠짐없이 중복되지 않게 나열하는 것이다.

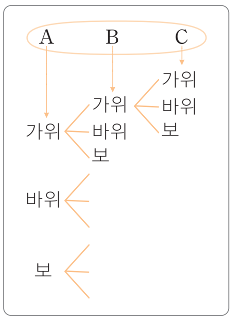
大 원칙 경우의 수 문제 ➡ 추상적으로만 생각하지 말고 구체적인 경우를 나열해 본다.

경우의 수를 구하는 방법
(1) 모든 경우를 나열해 가짓수를 센다.
(2) 수형도(나뭇가지 그림)를 이용해 가짓수를 센다.
(3) 낯선 문제를 익숙한 문제로 변형해 가짓수를 센다.

수형도란 나뭇가지 모양의 그림을 말한다.
모든 경우를 나열하기가 불가능하거나 헷갈릴 때 강력한 도구가 된다.
아래 문제를 통해 수형도에 대하여 간단히 배우고 넘어가도록 하자.

개념확인 A, B, C 세 사람이 가위바위보를 할 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오.

풀이 그냥 생각해도 되지만 수형도를 그려 보면 더욱 명쾌하다.
A가 가위일 때, B는 가위, 바위, 보가 가능하다.
B가 가위일 때, C는 가위, 바위, 보가 가능하다.
이때 수형도의 가로선들이 실제의 경우가 된다.
즉, (A, B, C)로 나타내면
(가위, 가위, 가위), (가위, 가위, 바위), ⋯
따라서 구하는 경우의 수는
$3\times3\times3=\mathbf{27}$

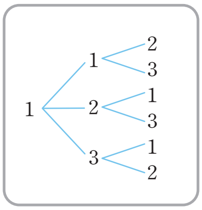


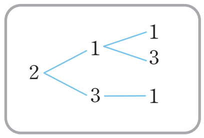
001 4장의 카드 $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$에서 3장을 골라 일렬로 배열할 때, 만들 수 있는 세 자리 정수의 개수를 구하시오.

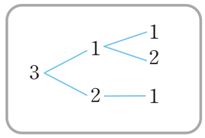
풍산자 日, 여러 개 중에서 선택하는 경우는 수형도를 그려 보면 쉽게 알 수 있다.

풀이 $\boxed{1}$이 두 장임을 명심하며 수형도를 그려 보면 다음과 같다.

(i) 1로 시작하는 정수 (ii) 2로 시작하는 정수 (iii) 3으로 시작하는 정수







(i)~(iii)에서 구하는 정수의 개수는 $6+3+3=$**12**

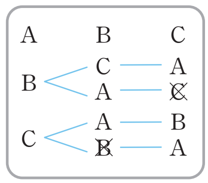
정답과 풀이 **73**쪽

유제 **002** 4장의 카드 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$를 일렬로 배열하여 네 자리의 정수 $a_1a_2a_3a_4$를 만들 때, $a_1 \neq 1$, $a_3=4$를 만족시키는 정수의 개수를 구하시오. 4

003 학생 A, B, C가 시험지를 채점할 때 자신의 것을 채점하지 않는 경우의 수를 구하시오.

풍산자 日, 조건에 맞게 일일이 나열해 본다.

풀이 가능한 경우를 오른쪽 그림과 같이 수형도로 그려 살펴본다.
A가 B의 시험지를 채점하면 B는 C의 시험지를, C는 A의 시험지를 채점해야 한다.
A가 C의 시험지를 채점하면 B는 A의 시험지를, C는 B의 시험지를 채점해야 한다.
따라서 구하는 경우의 수는 2이다.



정답과 풀이 **73**쪽

유제 **004** 3명의 학생이 각자 자신의 모자를 가져와 한 개씩 쓰려고 할 때, 모두가 다른 학생의 모자를 쓰는 경우의 수를 구하시오. 2

풍산자 비법

경우의 수 문제 풀이의 시작은 구체적인 경우를 나열해 보거나 수형도를 그려 보는 것이다.

02 합의 법칙과 곱의 법칙

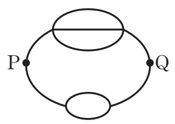
경우의 수 문제를 풀다 보면 두 경우의 수를 더해야 할지 곱해야 할지 헷갈릴 때가 무척 많다. 다음은 언제 더하고 언제 곱하는지 **합의 법칙과 곱의 법칙**에 대하여 정리한 것이다.

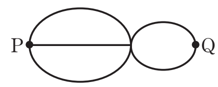
(1) **합의 법칙**
두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면
사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

(2) **곱의 법칙**
사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면
두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m\times n$이다.

참고 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m, 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수가 l일 때, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n-l$이다.

개념확인 다음 그림에서 P에서 Q로 가는 방법의 수를 구하시오.

(1)


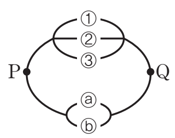
(2)


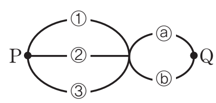
풀이 각각의 경우에서 P에서 Q로 가는 방법의 수를 구하려면 3과 2를 더해야 할까? 곱해야 할까?

(1) 더해야 한다. 왜냐? 위쪽 또는 아래쪽 길이 있고 두 길을 동시에 통과하지는 않으니까.
P → 위쪽 길 3가지 → Q
P → 아래쪽 길 2가지 → Q
따라서 P에서 Q로 가는 방법의 수는 $3+2=\mathbf{5}$

(2) 곱해야 한다. 왜냐? 앞쪽의 3가지 길 각각에 대하여 뒤쪽의 2가지 갈림길이 있으니까.
P → 앞쪽 길 3가지 → 뒤쪽 길 2가지 → Q
따라서 P에서 Q로 가는 방법의 수는 $3\times2=\mathbf{6}$

설명 **개념확인**을 살펴보자.

(1)


(2)


(1)의 상황에서는 P에서 Q로 가기 위하여 ①, ②, ③ 중의 하나를 선택하면 ⓐ, ⓑ는 선택할 수 없으므로 경우의 수를 더한다.
(2)의 상황에서는 P에서 Q로 가기 위하여 ①, ②, ③ 중의 하나를 선택하면 ⓐ, ⓑ 중에 하나를 선택해야 하므로 경우의 수를 곱한다.

005 반려동물을 좋아하는 유나가 개 3마리와 고양이 4마리를 기르고 있다. 어느 날 유나가 여행을 가려고 할 때, 다음과 같이 데려갈 동물을 선택하는 경우의 수를 구하시오.

(1) 개 또는 고양이 중에서 한 마리를 선택하는 경우

(2) 개와 고양이를 각각 한 마리씩 선택하는 경우

풍산자Tip 언제 더하고 언제 곱하는가? 어떤 경우를 선택했을 때 다른 경우를 포기해야 하면 합하고, 다른 경우를 선택해야 하면 곱한다.

풀이 (1) 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $3+4=\mathbf{7}$

(2) 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $3\times4=\mathbf{12}$

정답과 풀이 73쪽

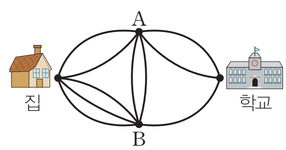
유제 **006** 커피 5종류와 전통차 3종류가 있는 자동판매기가 있다. 이 자동판매기에서 다음과 같이 선택하는 경우의 수를 구하시오.

(1) 커피 또는 전통차 중에서 한 잔을 선택하는 경우 8

(2) 커피와 전통차를 각각 한 잔씩 선택하는 경우 15

007 집과 학교 사이에 오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. 집에서 학교로 가는 방법의 수를 구하시오.

(단, 같은 지점을 두 번 지나지 않는다.)



풍산자Tip 동시에 갈 수 있으면 곱의 법칙을, 동시에 갈 수 없으면 합의 법칙을 이용한다.

풀이 곱의 법칙에 의하여 집에서 학교로 가는 방법의 수는

(집 → A → 학교) ➡ $2\times2=4$

(집 → B → 학교) ➡ $3\times1=3$

(집 → A → B → 학교) ➡ $2\times2\times1=4$

(집 → B → A → 학교) ➡ $3\times2\times2=12$

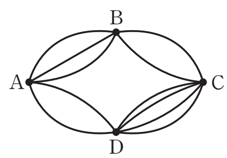
따라서 합의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는

$4+3+4+12=\mathbf{23}$

정답과 풀이 73쪽

유제 **008** 네 개의 도시 A, B, C, D 사이에 오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A도시에서 C도시로 가는 방법의 수를 구하시오. 14

(단, 같은 지점을 두 번 지나지 않는다.)



009 두 종류의 주사위 A, B를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 5의 배수가 되는 경우의 수를 구하시오.

풍산자日 구체적인 경우를 나열해 본다.

풀이 주사위의 눈의 수는 1, 2, 3, ⋯, 6이므로 눈의 수의 합은 2, 3, 4, ⋯, 12이다.
여기서 5의 배수는 5 또는 10이다.
두 종류의 주사위 A, B에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(i) 눈의 수의 합이 5인 경우
(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)로 4가지
(ii) 눈의 수의 합이 10인 경우
(4, 6), (5, 5), (6, 4)로 3가지
(i), (ii)에서 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $4+3=$**7**

정답과 풀이 73쪽

유제 **010** 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 4의 배수가 되는 경우의 수를 구하시오. 9

011 100원, 200원, 500원짜리 3종류의 사탕이 있다. 각 사탕을 적어도 1개씩은 살 때, 3종류의 사탕을 합하여 1500원어치를 사는 방법의 수를 구하시오. (단, 각 사탕은 충분히 많다.)

풍산자日 주어진 조건을 이용하여 부정방정식 $ax+by+cz=d$를 세운 후, 계수가 가장 큰 문자에 1, 2, 3, ⋯을 대입한다.

풀이 사야 하는 100원, 200원, 500원짜리 사탕을 각각 x개, y개, z개라 하면
$100x+200y+500z=1500$
$\therefore x+2y+5z=15$
그런데 각 사탕을 적어도 1개씩은 사야 하므로 $x\geq1$, $y\geq1$, $z\geq1$이다.
이 문제는 이제 자연수 조건의 부정방정식 문제로 변신했다.
(i) $z=1$일 때, $x+2y=10$
따라서 이를 만족시키는 (x, y)는 (2, 4), (4, 3), (6, 2), (8, 1)이다.
(ii) $z=2$일 때, $x+2y=5$
따라서 이를 만족시키는 (x, y)는 (1, 2), (3, 1)이다.
(i), (ii)에서 합의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는 $4+2=$**6**

정답과 풀이 73쪽

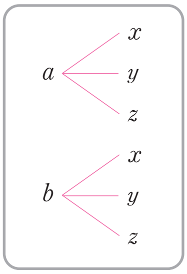
유제 **012** 100원, 500원, 1000원짜리 3종류의 사탕이 있다. 각 사탕을 적어도 1개씩은 살 때, 3종류의 사탕을 합하여 4000원어치를 사는 방법의 수를 구하시오. (단, 각 사탕은 충분히 많다.) 9

●전개식의 항의 개수

013 다항식 $(a+b)(x+y+z)$를 전개할 때 생기는 항의 개수를 구하시오.

풍산자팁 경우를 분석하여 '각각에 대하여'일 때에는 곱한다.
수형도를 이용하면 곱하는 상황을 명쾌하게 포착할 수 있다.

풀이 a, b 각각에 대하여 x, y, z를 곱한다.
따라서 구하는 항의 개수는
$2\times3=$**6**



정답과 풀이 **74**쪽

유제 **014** 다항식 $(a+b)(c+d+e)(f+g+h+i)$를 전개할 때 생기는 항의 개수를 구하시오. 24

●약수의 개수

015 24의 양의 약수의 개수를 구하시오.

풍산자팁 자연수의 양의 약수의 개수는 소인수분해를 이용하면 손쉽게 구할 수 있다.

풀이 24를 소인수분해하면 $24=2^3\times3$이므로 24의 양의 약수는 2^3의 양의 약수인 1, 2, 2^2, 2^3 중에서 하나의 수, 3의 양의 약수인 1, 3 중에서 하나의 수를 각각 택하여 곱한 수이다.
따라서 곱의 법칙에 의하여 24의 양의 약수의 개수는
$4\times2=$**8**

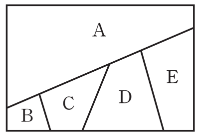
$\times$	1	2	2^2	2^3
1	1×1	1×2	1×2^2	1×2^3
3	3×1	3×2	3×2^2	3×2^3

참고 $p^m\times q^n$ (p, q는 서로 다른 소수, m, n은 자연수)의 양의 약수의 개수는 $(m+1)(n+1)$이다.

정답과 풀이 **74**쪽

유제 **016** 72의 양의 약수의 개수를 구하시오. 12

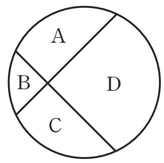
017 오른쪽 그림에서 A, B, C, D, E의 영역을 5가지 색으로 칠하려고 한다. 각 영역을 구분하기 위하여 인접한 영역을 서로 다른 색으로 칠할 때, 칠하는 방법의 수를 구하시오. (단, 같은 색을 두 번 사용해도 된다.)



풍산자팁 한 곳을 먼저 정해서 칠한다고 생각한 후 나머지도 칠하는 방법을 생각하면 된다.
인접 영역이 많은 부분을 먼저 칠하면 경우의 수를 구하기 쉽다.

풀이 인접한 영역은 서로 다른 색으로 칠해야 함에 유의하며 A부터 칠해 보면 다음과 같다.
A에 칠할 수 있는 색은 5가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지
C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지
D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지
E에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한 3가지
따라서 구하는 방법의 수는 $5\times4\times3\times3\times3=\mathbf{540}$

참고 위 문제는 D에 B와 같은 색을 칠하는 경우와 다른 색을 칠하는 경우의 E에 칠할 수 있는 색의 수가 같다. 하지만 인접하지 않은 부분을 같은 색으로 칠하는지 다른 색으로 칠하는지에 따라 경우의 수가 달라지면 상황을 나누어 생각해야 한다.
오른쪽 그림에서 A, B, C, D의 영역을 네 가지 색으로 칠하는 방법의 수를 구해 보자. (단, 인접한 영역은 다른 색으로 칠하고, 같은 색을 두 번 사용해도 된다.)



A에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지
D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외하고 고를 수 있는데, 이때 A와 C가 같은 색인지 다른 색인지에 따라 고를 수 있는 색의 경우의 수가 달라진다. 따라서 상황을 나누어서 문제를 해결한다. A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 3가지로 같다.
(i) A, C를 같은 색으로 칠할 때
C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지
D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지
$\therefore\ 4\times3\times1\times3=36$
(ii) A, C를 다른 색으로 칠할 때
C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지
D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지
$\therefore\ 4\times3\times2\times2=48$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $36+48=84$

정답과 풀이 74쪽

유제 **018** 오른쪽 그림과 같은 지도에서 고구려, 백제, 신라, 가야를 5가지 색으로 칠하려고 한다. 각 나라끼리 구분하기 위하여 이웃하고 있는 나라를 서로 다른 색으로 칠할 때, 칠하는 방법의 수를 구하시오. 180
(단, 같은 색을 두 번 사용해도 된다.)

019 **100원짜리 동전 1개, 50원짜리 동전 2개, 10원짜리 동전 3개가 있다. 다음 물음에 답하시오.**
(단, 0원을 지불하는 것은 제외한다.)

(1) 이들의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 방법의 수를 구하시오.

(2) 이들의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 금액의 수를 구하시오.

풍산자目 단어 하나가 문제를 좌우한다.
두 문제의 차이점은 오직 한 단어 ➡ '방법'과 '금액' ➡ 방법은 쉽고 금액은 어렵다.

풀이 (1) 100원짜리 1개로 지불할 수 있는 방법 ➡ 0개, 1개로 2가지
50원짜리 2개로 지불할 수 있는 방법 ➡ 0개, 1개, 2개로 3가지
10원짜리 3개로 지불할 수 있는 방법 ➡ 0개, 1개, 2개, 3개로 4가지
따라서 구하는 방법의 수는 $2\times3\times4-1=$**23**
(0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 1가지 경우를 빼 주어야 한다.)

(2) 100원짜리 1개로 만들 수 있는 금액 ➡ 0원, 100원 …… ㉠
50원짜리 2개로 만들 수 있는 금액 ➡ 0원, 50원, 100원 …… ㉡
10원짜리 3개로 만들 수 있는 금액 ➡ 0원, 10원, 20원, 30원
그런데 ㉠, ㉡에서 100원이 중복되므로 100원짜리 1개를 50원짜리 2개로 교환하여 생각하면 구하는 금액의 수는 50원짜리 4개, 10원짜리 3개로 지불할 수 있는 방법의 수와 같다.
50원짜리 4개로 지불할 수 있는 방법 ➡ 0개, 1개, 2개, 3개, 4개로 5가지
10원짜리 3개로 지불할 수 있는 방법 ➡ 0개, 1개, 2개, 3개로 4가지
따라서 구하는 금액의 수는 $5\times4-1=$**19**
(0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 1가지 경우를 빼 주어야 한다.)

참고 (1) 단위가 다른 화폐가 각각 p개, q개, r개일 때, 지불할 수 있는 방법의 수는
$(p+1)(q+1)(r+1)-1$

(2) 지불할 수 있는 금액의 수를 구할 때, 다른 종류의 화폐 각각으로 만들 수 있는 금액이 중복되면 중복되는 것 중 큰 단위의 화폐를 작은 단위의 화폐로 바꾸어 생각한다.

정답과 풀이 74쪽

유제 **020** **100원짜리 동전 2개, 50원짜리 동전 2개, 10원짜리 동전 3개가 있다. 다음 물음에 답하시오.**
(단, 0원을 지불하는 것은 제외한다.)

(1) 이들의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 방법의 수를 구하시오. 35

(2) 이들의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 금액의 수를 구하시오. 27

+ 풍산자 비법

• 합의 법칙: 어떤 경우를 선택했을 때 다른 경우를 포기해야 하면 합한다.
• 곱의 법칙: 어떤 경우를 선택했을 때 다른 경우를 선택해야 하면 곱한다.
또, 경우를 분석했을 때 '잇달아, 동시에, 그리고, 연이어, 각각에 대하여'일 경우에는 곱한다.

필수 확인 문제

정답과 풀이 74쪽

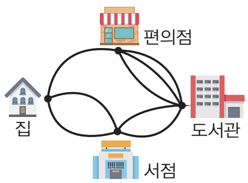
021

어느 샌드위치 가게에는 샌드위치를 주문할 때 추가로 택할 수 있는 치즈 3가지, 야채 6가지, 소스 4가지가 준비되어 있다. 이 가게에서 샌드위치를 주문할 때, 치즈, 야채, 소스를 각각 하나씩 추가로 선택하는 경우의 수를 구하시오. 72

$3\times6\times4=72$

022

다음 그림과 같이 집, 편의점, 도서관, 서점을 연결하는 도로망이 있다. 건우가 집에서 출발하여 편의점, 도서관, 서점을 한 번씩만 들르고 다시 집으로 돌아오는 방법의 수를 구하시오. 24



모두 한 번씩만 들르고 집으로 돌아오는 방법의 수는

(집 → 편의점 → 도서관 → 서점 → 집) ➡ $1\times3\times2\times2=12$

(집 → 서점 → 도서관 → 편의점 → 집) ➡ $2\times2\times3\times1=12$

$\therefore\ 12+12=24$

023

1부터 100까지의 자연수 중에서 4 또는 9로 나누어떨어지는 수의 개수를 구하시오. 34

(i) 4로 나누어떨어지는 수, 즉 4의 배수는 4, 8, 12, ⋯, 100의 25개

(ii) 9로 나누어떨어지는 수, 즉 9의 배수는 9, 18, 27, ⋯, 99의 11개

(iii) 4와 9로 나누어떨어지는 수, 즉 36의 배수는 36, 72의 2개

(i)~(iii)에서 구하는 수의 개수는 $25+11-2=34$

024

부등식 $2x+y\le8$을 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하시오. 12

(i) $x=1$일 때, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$으로 6개

(ii) $x=2$일 때, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$로 4개

(iii) $x=3$일 때, $(3, 1)$, $(3, 2)$로 2개

$\therefore\ 6+4+2=12$

025

다음을 구하시오.

(1) 360과 540의 공약수의 개수 18

(2) 540의 양의 약수 중 짝수의 개수 16

(1) 360과 540의 공약수는 $360=2^3\times3^2\times5$와 $540=2^2\times3^3\times5$의 최대공약수인 $2^2\times3^2\times5$의 양의 약수이다. 따라서 곱의 법칙에 의하여 360과 540의 공약수의 개수는 $3\times3\times2=18$

(2) $540=2^2\times3^3\times5$의 양의 약수 중 짝수는 2를 소인수로 가지므로 540의 양의 약수 중 짝수의 개수는 $2\times3^3\times5$의 양의 약수의 개수와 같다. 따라서 곱의 법칙에 의하여 540의 양의 약수 중 짝수의 개수는 $2\times4\times2=16$

026

100원짜리 동전 1개, 50원짜리 동전 3개, 10원짜리 동전 2개의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 방법의 수를 a, 지불할 수 있는 금액의 수를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. 40

(단, 0원을 지불하는 것은 제외한다.)

(i) $a=2\times4\times3-1=23$ (0원을 지불하는 것 제외)

(ii) 100원짜리 1개를 50원짜리 2개로 교환하여 생각하면 구하는 금액의 수는 50원짜리 5개, 10원짜리 2개로 지불할 수 있는 방법의 수와 같다.

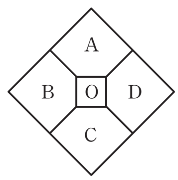
50원짜리 5개 ➡ 6가지, 10원짜리 2개 ➡ 3가지

$\therefore\ b=6\times3-1=17$ (0원을 지불하는 것 제외)

(i), (ii)에서 $a+b=23+17=40$

027 실력UP

오른쪽 그림과 같이 O, A, B, C, D 5개의 영역을 5가지 색으로 칠하려고 한다. 각 영역을 구분하기 위하여 인접한 영역을 서로 다른 색으로 칠하는 방법의 수를 구하시오. (단, 같은 색을 두 번 사용해도 된다.) 420



O에 칠할 수 있는 색은 5가지, A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 3가지

(i) A, C를 같은 색으로 칠할 때 ➡ C에 1가지, D에 3가지

$\therefore\ 5\times4\times3\times1\times3=180$

(ii) A, C를 다른 색으로 칠할 때 ➡ C에 2가지, D에 2가지

$\therefore\ 5\times4\times3\times2\times2=240$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $180+240=420$

2 순열

01 순열의 뜻

3개의 문자 a, b, c에서 2개를 뽑는 방법과 나열하는 방법은 다음과 같다.

뽑는 방법 ➡ 순서를 무시하는 것	나열하는 방법 ➡ 순서를 고려하는 것
ab, ac, bc	ab, ac, ba, bc, ca, cb

뽑아서 나열하는 것을 순열이라 한다.
한 마디로 순열이란 순서가 있는 배열.

순열

서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 **n개에서 r개를 택하는 순열**이라 한다. 이 순열의 수를 기호 ${}_n\mathrm{P}_r$로 나타내고, 다음과 같이 계산한다.

$${}_n\mathrm{P}_r=\underbrace{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)}_{r\text{개}}\ (\text{단, } 0<r\le n)$$ 중요

➡ n부터 시작하여 1씩 줄여가며 r개를 곱한다.

증명 서로 다른 n개 중에서 r개를 택하여 일렬로 나열할 때,
첫 번째 자리에 올 수 있는 것은 n가지이다.
두 번째 자리에 올 수 있는 것은 첫 번째 자리에 놓인 것을 제외한 $(n-1)$가지이다.
⋮
r번째 자리에 올 수 있는 것은 이미 선택된 $(r-1)$개를 제외한 $n-(r-1)$가지, 즉 $(n-r+1)$가지이다.

첫 번째 자리	두 번째 자리	세 번째 자리	⋯	r번째 자리
↑	↑	↑		↑
n가지	$(n-1)$가지	$(n-2)$가지	⋯	$(n-r+1)$가지

따라서 순열의 수 ${}_n\mathrm{P}_r$는 곱의 법칙에 의하여 다음과 같다.
${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$ (단, $0<r\le n$)

설명 P는 순열을 뜻하는 permutation의 첫 글자이며, ${}_n\mathrm{P}_r$는 'n p r'로 읽는다.

개념확인

다음을 구하시오.
(1) 서로 다른 3개에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수
(2) 서로 다른 5개에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수

풀이 (1) ${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=\mathbf{6}$ (2) ${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=\mathbf{60}$

${}_n\mathrm{P}_r$의 계산을 확장한 공식이 있다. 문제 풀이뿐만 아니라 이론 전개나 증명에 활용된다.

(1) **n의 계승**

1부터 n까지의 자연수를 차례대로 곱한 것을 n의 **계승**이라 하고, 기호 $n!$로 나타낸다.

➡ $n!=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$

(2) **${}_n\mathrm{P}_r$의 변형식과 ${}_n\mathrm{P}_0$, $0!$의 정의**

① ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

② ${}_n\mathrm{P}_n=n!=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$

③ ${}_n\mathrm{P}_0=1$, $0!=1$

설명 $n!$은 'n 팩토리얼(factorial)' 또는 'n의 계승'이라고 읽으며, 이것은 1부터 n까지의 모든 자연수의 곱을 의미한다.

증명 ① 순열의 수 ${}_n\mathrm{P}_r$를 계승을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}_n\mathrm{P}_r=\underbrace{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)}_{r\text{개}}$$

우변에 $\dfrac{(n-r)(n-r-1)\times\cdots\times3\times2\times1}{(n-r)(n-r-1)\times\cdots\times3\times2\times1}$을 곱하면

$${}_n\mathrm{P}_r=\frac{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\times\cdots\times3\times2\times1}{(n-r)(n-r-1)\times\cdots\times3\times2\times1}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

② 서로 다른 n개 중에서 n개를 택하는 순열의 수는 $r=n$인 경우이므로

${}_n\mathrm{P}_n=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$

즉, ${}_n\mathrm{P}_n=n!$

③ ${}_n\mathrm{P}_r$에서 $r=n$이면 ${}_n\mathrm{P}_n=n!=\dfrac{n!}{0!}$이므로 $0!=1$로 정의한다.

또, $r=0$이면 ${}_n\mathrm{P}_0=\dfrac{n!}{n!}$이므로 ${}_n\mathrm{P}_0=1$로 정의한다.

● ${}_n\mathrm{P}_r$와 $n!$의 계산

028 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_6\mathrm{P}_3$ (2) $5!$ (3) ${}_4\mathrm{P}_4$ (4) ${}_7\mathrm{P}_0$ (5) $0!$

풍산자 TIP ${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$ (단, $0<r\le n$)

${}_n\mathrm{P}_n=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1=n!$

풀이 (1) ${}_6\mathrm{P}_3=6\times5\times4=\mathbf{120}$ (2) $5!=5\times4\times3\times2\times1=\mathbf{120}$

(3) ${}_4\mathrm{P}_4=4!=4\times3\times2\times1=\mathbf{24}$ (4) ${}_7\mathrm{P}_0=\mathbf{1}$

(5) $0!=\mathbf{1}$

정답과 풀이 76쪽

유제 **029** 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_5\mathrm{P}_4$ 120 (2) ${}_2\mathrm{P}_2$ 2 (3) ${}_8\mathrm{P}_1$ 8 (4) $3!$ 6 (5) $1!$ 1

030 다음 등식을 만족시키는 n 또는 r의 값을 구하시오. (단, n, r는 자연수이다.)

(1) ${}_7P_r=210$　　(2) ${}_nP_2=90$　　(3) ${}_nP_4=20{}_nP_2$

풍산자티 ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$ (단, $0<r\le n$)

풀이 (1) ${}_7P_r$는 7부터 1씩 줄여가며 r개를 곱한 것이다.
그런데 ${}_7P_r=210=7\times6\times5$이므로 $\boldsymbol{r=3}$

(2) ${}_nP_2$는 n부터 1씩 줄여가며 2개를 곱한 것이다.
그런데 ${}_nP_2=90=10\times9$이므로 $\boldsymbol{n=10}$

(3) 주어진 식의 양변을 풀어 쓰면
$n(n-1)(n-2)(n-3)=20n(n-1)$
그런데 ${}_nP_4$에서 $n\ge4$이므로 $n(n-1)\ne0$이다.
양변을 $n(n-1)$로 나누면 $(n-2)(n-3)=20$, $n^2-5n-14=0$
$(n+2)(n-7)=0$
$n\ge4$이므로 $n+2\ne0$　　$\therefore\ \boldsymbol{n=7}$

정답과 풀이 76쪽

유제 **031** 다음 등식을 만족시키는 n 또는 r의 값을 구하시오. (단, n, r는 자연수이다.)

(1) ${}_5P_r=60$　$r=3$　　(2) ${}_nP_2=30$　$n=6$　　(3) ${}_nP_5=30{}_nP_3$　$n=9$

032 $1<r\le n$일 때, 등식 ${}_nP_r=(n-r+1)\times{}_nP_{r-1}$이 성립함을 증명하시오.

풍산자티 순열에 대한 등식을 증명할 때 ➡ 공식 ${}_nP_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$을 이용!

증명 $(n-r+1)\times{}_nP_{r-1}$

$=(n-r+1)\times\dfrac{n!}{(n-r+1)!}$

$=(n-r+1)\times\dfrac{n!}{(n-r+1)(n-r)!}$　⬅ $(m+1)!=(m+1)m(m-1)\times\cdots\times3\times2\times1$
$=(m+1)m!$

$=\dfrac{n!}{(n-r)!}={}_nP_r$

정답과 풀이 76쪽

유제 **033** $1<r\le n$일 때, 등식 ${}_nP_r=n\times{}_{n-1}P_{r-1}$이 성립함을 증명하시오.　풀이 참조

034 **다음 물음에 답하시오.**

(1) 5명의 학생을 일렬로 세우는 방법의 수를 구하시오.

(2) 5명의 학생 중 3명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수를 구하시오.

풍산자曰 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$

풀이 (1) 5명에서 5명을 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_{5}\mathrm{P}_{5}=5!=5\times4\times3\times2\times1=\mathbf{120}$

(2) 5명에서 3명을 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_{5}\mathrm{P}_{3}=5\times4\times3=\mathbf{60}$

정답과 풀이 76쪽

유제 **035** **다음 물음에 답하시오.**

(1) 6명의 학생을 일렬로 앉히는 방법의 수를 구하시오. 720

(2) 10명의 학생 중에서 대표, 부대표를 각각 1명씩 뽑는 경우의 수를 구하시오. 90

036 **서로 다른 9권의 책 중 r권을 뽑아 책꽂이에 일렬로 꽂는 방법의 수가 72일 때, r의 값을 구하시오.**

풍산자曰 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$를 이용하여 식을 세워 푼다.

풀이 서로 다른 9권에서 r권을 택하는 순열의 수가 72이므로

${}_{9}\mathrm{P}_{r}=72=9\times8 \qquad \therefore r=\mathbf{2}$

정답과 풀이 76쪽

유제 **037** **서로 다른 n권의 책 중 2권을 뽑아 책꽂이에 일렬로 꽂는 방법의 수가 56일 때, n의 값을 구하시오.** 8

02 특정 조건이 있는 순열

앞에서 간단한 순열의 계산을 배웠다.
이제 다양한 조건이 있는 순열에 대하여 알아보자.
해법은 다음과 같다.

(1) **이웃하는 순열**
[1단계] 이웃하는 것을 하나로 묶는다.
[2단계] (하나로 묶었을 때의 순열의 수)×(한 묶음 안에서 순서를 바꾸는 순열의 수)

(2) **이웃하지 않는 순열**
[1단계] 이웃해도 되는 것만 먼저 배열한다.
[2단계] (이웃해도 되는 것들의 순열의 수)
×(그 양 끝과 사이사이에 이웃하지 않아야 할 것을 끼워 넣는 순열의 수)

(3) **'적어도'가 있는 경우의 순열**
[1단계] 반대인 경우의 수를 생각한다.
[2단계] (전체 경우의 수)−(반대 경우의 수)

(4) **교대로 배열하는 순열**
[1단계] 두 개의 대상 중 하나를 일렬로 배열한다.
[2단계] 그 사이사이와 양 끝에 나머지 대상들을 일렬로 나열하여 구한다.

● 이웃하는 경우

038 **남자 4명, 여자 3명을 일렬로 세울 때, 여자 3명이 이웃하여 서는 경우의 수를 구하시오.**

풍산자티 '이웃한다.' 하면 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 세운 후, 묶음 안에서 일렬로 세우는 경우를 생각하면 된다.

풀이 [1단계] 여자 3명을 한 묶음으로 보면 총 5묶음

남1 남2 남3 남4 (여1 여2 여3)

5묶음을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!=120$

[2단계] 묶음 안의 여자 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!=6$

[3단계] 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$120\times6=\mathbf{720}$

정답과 풀이 **76**쪽

유제 **039** **서로 다른 국어책 2권, 영어책 3권, 수학책 2권을 책꽂이에 일렬로 꽂을 때, 국어책은 국어책끼리, 영어책은 영어책끼리 이웃하게 꽂는 경우의 수를 구하시오.** 288

040 **남자 4명과 여자 3명을 일렬로 세울 때, 다음을 구하시오.**

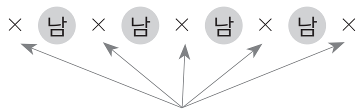
(1) 여자끼리 이웃하지 않도록 서는 경우의 수

(2) 남자 A, B 2명이 이웃하지 않도록 서는 경우의 수

풍산자티 **'이웃하지 않는다.' 하면 나머지를 먼저 나열하면 된다.**

풀이 (1) [1단계] 먼저 남자 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$

[2단계] 이들의 양 끝이나 사이사이에 여자를 끼워 세우면 되므로



여자 3명이 끼어 들어갈 자리

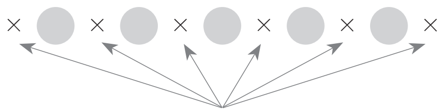
5개의 자리 중 3개의 자리를 택하여 여자를 끼워 세우는 경우의 수는

${}_5P_3=60$

[3단계] 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $24\times60=\mathbf{1440}$

(2) [1단계] 먼저 이웃해도 되는 남자 2명과 여자 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!=120$

[2단계] 이들의 양 끝이나 사이사이에 남자 A, B를 각각 끼워 세우면 되므로



남자 A, B가 끼어 들어갈 자리

6개의 자리 중 2개의 자리를 택하여 A, B를 끼워 세우는 경우의 수는

${}_6P_2=30$

[3단계] 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$120\times30=\mathbf{3600}$

다른 풀이 (2) A, B가 이웃하지 않는 경우의 수는 전체에서 A, B가 이웃하는 경우의 수를 빼는 방법으로도 구할 수 있다.

[1단계] 7명을 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 $7!=5040$

[2단계] A, B가 이웃하는 경우의 수는 A, B를 묶어서 생각하면 되므로 $6!\times2=1440$

[3단계] 전체 경우의 수에서 A, B가 이웃하는 경우의 수를 빼면

$7!-2\times6!=5040-1440=3600$

3명 이상이 이웃하지 않는 경우는 다른 풀이가 더 복잡할 수 있으므로 이 방식으로 풀지 않도록 한다.

정답과 풀이 **76**쪽

유제 **041** **서로 다른 국어책 3권, 수학책 3권을 책꽂이에 일렬로 꽂을 때, 다음을 구하시오.**

(1) 수학책끼리 이웃하지 않도록 꽂는 경우의 수 144

(2) 특정한 국어책 2권이 이웃하지 않도록 꽂는 경우의 수 480

042 korea의 5개의 문자를 모두 사용하여 만든 순열 중에서 적어도 한쪽 끝이 자음인 경우의 수를 구하시오.

풍산자비 '적어도 하나가 …이다.'의 반대는 ➡ '모두 …이 아니다.'

풀이 '적어도 한쪽 끝이 자음'의 반대는 '양 끝이 모두 모음'이다.
따라서 전체 경우의 수에서 양 끝이 모두 모음인 경우의 수를 빼면 된다.

전체 경우
자□□□자
자□□□모 구하는 경우
모□□□자
모□□□모 ← 이걸 뺀다.

(i) 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!=120$
(ii) 양 끝이 모두 모음인 경우의 수는
(o, e, a 중 2개를 양 끝에 나열하는 경우의 수)×(나머지 3개를 나열하는 경우의 수)
$={}_3P_2\times3!=36$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $120-36=$ **84**

정답과 풀이 77쪽

유제 **043** region의 6개의 문자를 모두 사용하여 만든 순열 중에서 적어도 한쪽 끝이 자음인 경우의 수를 구하시오. 576

044 선생님 3명과 학생 3명이 교대로 서서 사진을 찍으려고 한다. 선생님과 학생이 교대로 서는 경우의 수를 구하시오.

풍산자비 일단 두 개의 대상 중 하나를 일렬로 배열한다.

풀이 (i) 선학선학선학으로 서는 경우
선생님 자리에 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!$이고,
학생 자리에 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!$이므로 $3!\times3!=36$
(ii) 학선학선학선으로 서는 경우
학생 자리에 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!$이고,
선생님 자리에 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!$이므로 $3!\times3!=36$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $36+36=$ **72**

정답과 풀이 77쪽

유제 **045** PROMISE의 7개의 문자를 한 줄로 나열할 때, 자음과 모음이 교대로 오는 경우의 수를 구하시오. 144

046 worldcup의 8개의 문자를 모두 사용하여 만든 순열 중에서 다음을 구하시오.

(1) w로 시작하여 p로 끝나는 경우의 수

(2) w와 d 사이에 3개의 문자가 들어 있는 경우의 수

풍산자日 경우의 수 문제는 항상 완전한 형태를 먼저 파악한다.

(1) w□□□□□□p의 꼴 ➡ 처음과 끝이 확정된 경우 가운데만 확정하면 된다.

(2) w□□□d □□□의 꼴 ➡ w와 d 사이에 3개의 문자를 끼운 후 한 묶음으로 본다.

풀이 (1) w와 p를 제외한 나머지 6개의 문자를 가운데에 끼우면 되므로 구하는 경우의 수는 $6!=$**720**

(2) [1단계] w와 d를 제외한 나머지 6개의 문자 중 3개를 w와 d 사이에 끼우는 경우의 수는 ${}_6P_3=120$

[2단계] w□□□d를 한 묶음으로 생각하여 4묶음을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$

w□□□d, □, □, □

[3단계] w와 d가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

[4단계] 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $120\times24\times2=$**5760**

정답과 풀이 77쪽

유제 **047** olympic의 7개의 문자를 모두 사용하여 만든 순열 중에서 다음을 구하시오.

(1) o로 시작하여 c로 끝나는 경우의 수 120

(2) o와 m 사이에 3개의 문자가 들어 있는 경우의 수 720

048 a, b, c, d, e 5개의 문자를 사전식으로 배열할 때, 52번째에 있는 단어를 구하시오.

풍산자日 사전식으로 배열 ➡ 계승을 이용한다.

풀이 a, b로 시작하는 단어의 개수는 각각 $4!=24$

이때 $24\times2=48$이므로 52번째에 있는 단어는 c로 시작하는 단어 중 4번째에 있다.

cabde, cabed, cadbe, cadeb, ⋯

따라서 52번째 단어는 **cadeb**이다.

정답과 풀이 77쪽

유제 **049** pencil의 6개의 문자를 사전식으로 배열할 때, lecipn은 몇 번째 단어인지 구하시오. 386번째

050 **6개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 4개의 숫자를 택하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 다음을 구하시오.**

(1) 자연수의 개수 (2) 짝수의 개수 (3) 4의 배수의 개수

풍산자

(1) 0이 포함된 숫자 문제에서는 맨 앞자리에 0이 올 수 없음에 유의한다.

(2) 짝수가 되려면 맨 끝자리의 수가 짝수이어야 한다.

(3) 4의 배수가 되려면 끝의 두 자리의 수가 4의 배수이어야 한다.

풀이 (1) □□□□의 꼴 ➡ 맨 앞자리에 0이 올 수 없음에 유의한다.

[1단계] 맨 앞자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 2, 3, 4, 5로 5가지이다.

[2단계] 나머지 5개의 숫자에서 3개를 택하여 뒷부분에 나열하는 경우의 수는 ${}_5P_3=60$

[3단계] 곱의 법칙에 의하여 구하는 네 자리의 자연수의 개수는

$5\times60=$**300**

$$\underset{5}{\square}\times\underset{{}_5P_3}{\underbrace{\square\square\square}}$$

(2) □□□$\boxed{짝수}$의 꼴 ➡ 짝수가 되려면 맨 끝자리의 수가 짝수이어야 한다.

즉, □□□0, □□□2, □□□4의 꼴이어야 한다.

(i) □□□0의 꼴: ${}_5P_3=60$(개)

(ii) □□□2, □□□4의 꼴: 맨 앞자리에는 0이 올 수 없으므로 $2\times(4\times{}_4P_2)=96$(개)

(i), (ii)에서 합의 법칙에 의하여 구하는 짝수의 개수는 $60+96=$**156**

(3) $\square\square\underbrace{\square\square}_{4의\ 배수}$의 꼴 ➡ 4의 배수가 되려면 끝의 두 자리의 수가 4의 배수이어야 한다.

즉, □□04, □□12, □□20, □□24, □□32, □□40, □□52의 꼴이어야 한다.

(i) □□04, □□20, □□40의 꼴: $3\times{}_4P_2=36$(개)

(ii) □□12, □□24, □□32, □□52의 꼴: 맨 앞자리에는 0이 올 수 없으므로

$4\times(3\times3)=36$(개)

(i), (ii)에서 합의 법칙에 의하여 구하는 4의 배수의 개수는

$36+36=$**72**

참고 배수의 판정

(1) 2의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 2의 배수인 수

(2) 3의 배수: 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수인 수

(3) 4의 배수: 끝의 두 자리의 숫자가 00이거나 4의 배수인 수

(4) 5의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 5인 수

(5) 9의 배수: 각 자리의 숫자의 합이 9의 배수인 수

정답과 풀이 **77**쪽

유제 **051** **7개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 다음을 구하시오.**

(1) 자연수의 개수 180 (2) 홀수의 개수 75 (3) 5의 배수의 개수 55

052 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 모두 사용하여 다섯 자리의 자연수를 만들 때, 32000보다 작은 자연수의 개수를 구하시오.

풍산자Ⓑ 자연수의 크기는 앞자리의 숫자가 결정한다. ➡ 앞의 두 자릿수가 32보다 작아야 한다.

풀이 (ⅰ) 1□□□□의 꼴
1을 제외한 나머지 4개의 숫자를 뒷부분에 나열하면 되므로
$4!=24$(개)
(ⅱ) 2□□□□의 꼴
2를 제외한 나머지 4개의 숫자를 뒷부분에 나열하면 되므로
$4!=24$(개)
(ⅲ) 31□□□의 꼴
3, 1을 제외한 나머지 3개의 숫자를 뒷부분에 나열하면 되므로
$3!=6$(개)
(ⅰ)~(ⅲ)에서 합의 법칙에 의하여 구하는 자연수의 개수는 $24+24+6=$**54**

다른 풀이 전체에서 32000보다 큰 자연수의 개수를 빼는 방법으로도 구할수 있다.
(ⅰ) 32□□□, 34□□□, 35□□□의 꼴: 나머지 3개의 숫자를 뒷부분에 나열하면 되므로
$3\times3!=18$(개)
(ⅱ) 4□□□□, 5□□□□의 꼴: 나머지 4개의 숫자를 뒷부분에 나열하면 되므로
$2\times4!=48$(개)
(ⅰ), (ⅱ)에서 합의 법칙에 의하여 32000보다 큰 자연수의 개수는
$18+48=66$
5개의 숫자를 모두 사용하여 만든 다섯 자리의 자연수의 개수는
$5!=120$(개)
따라서 32000보다 작은 자연수의 개수는
$120-66=54$

정답과 풀이 78쪽

유제 **053** 4개의 숫자 1, 2, 3, 4를 모두 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 2300보다 작은 자연수의 개수를 구하시오. 8

풍산자 비법

- 순서가 있는 것이 순열 ➡ 서로 다른 n개 중에서 r개를 뽑는 순열의 수는 ${}_nP_r$
- 이웃하는 순열은 이웃하는 것을 한 묶음으로 계산한다. 이때 묶음의 경우의 수도 잊지 않는다.
- 이웃하지 않는 순열은 이웃해도 되는 것을 먼저 배열한 후 그 양 끝과 사이사이에 이웃하지 않아야 하는 것을 나열한다.

필수 확인 문제

정답과 풀이 78쪽

054

다음 등식을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오.

(1) ${}_{n}P_{3}+3{}_{n}P_{2}=7{}_{n+1}P_{2}$ 8

(2) ${}_{n}P_{4} : {}_{n+1}P_{3}=5 : 2$ 7

(1) $n(n-1)(n-2)+3n(n-1)=7(n+1)n$
그런데 $n\geq3$이므로 $(n-1)(n-2)+3(n-1)=7(n+1)$
$n^2-7n-8=0$, $(n+1)(n-8)=0$ $\therefore n=8$ ($\because n\geq3$)

(2) $2{}_{n}P_{4}=5{}_{n+1}P_{3}$이므로
$2n(n-1)(n-2)(n-3)=5(n+1)n(n-1)$
그런데 $n\geq4$이므로 $2(n-2)(n-3)=5(n+1)$
$2n^2-15n+7=0$, $(2n-1)(n-7)=0$ $\therefore n=7$ ($\because n\geq4$)

055

배구 선수 3명과 농구 선수 n명이 일렬로 서서 사진을 찍으려고 할 때, 배구 선수끼리 이웃하게 서는 경우의 수는 144이다. n의 값을 구하시오. 3

배구 선수 3명을 한 묶음으로 보면, 총 $(n+1)$묶음을 일렬로 세우는 경우의 수는 $(n+1)!$
묶음 안의 배구 선수 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!=6$
곱의 법칙에 의하여 $(n+1)!\times6=144$이므로
$(n+1)!=24=4!$ $\therefore n=3$

056

special의 7개의 문자를 일렬로 나열할 때, 적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 경우의 수를 구하시오. 3600

(i) 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$7!=5040$

(ii) 자음은 s, p, c, l로 4가지가 있으므로 양 끝에 모두 자음이 오는 경우의 수는
${}_{4}P_{2}\times5!=1440$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $5040-1440=3600$

057

남자 5명, 여자 5명을 일렬로 세울 때, 남자와 여자가 교대로 서는 경우의 수를 구하시오. 28800

(i) 여남여남여남여남여남으로 세울 때
$5!\times5!=120\times120=14400$

(ii) 남여남여남여남여남여로 세울 때
$5!\times5!=120\times120=14400$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$14400+14400=28800$

058

triangle의 8개의 문자를 모두 사용하여 만든 순열 중에서 t와 a 사이에 2개의 문자가 들어 있는 경우의 수를 구하시오. 7200

t와 a를 제외한 나머지 6개의 문자 중 2개를 t와 a 사이에 끼우는 경우의 수는
${}_{6}P_{2}=30$
t□□a를 한 묶음으로 생각하여 5묶음을 일렬로 나열하는 경우의 수는
t□□a, □, □, □, □
$5!=120$
t와 a가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $30\times120\times2=7200$

059

7개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7에서 서로 다른 4개의 숫자를 택하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 천의 자리 숫자와 일의 자리 숫자의 곱이 홀수인 자연수의 개수를 구하시오. 240

홀수□□홀수의 꼴 ➡ 천의 자리 숫자와 일의 자리 숫자는 모두 홀수이어야 한다.
천의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 홀수인 1, 3, 5, 7 중 2개를 택하여 나열하면 되므로 ${}_{4}P_{2}=12$
백의 자리와 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 나머지 5개의 숫자에서 2개를 택하여 나열하면 되므로 ${}_{5}P_{2}=20$
곱의 법칙에 의하여 구하는 자연수의 개수는 $12\times20=240$

060 실력UP

A, B, C, D, E, F, G 7명을 일렬로 세울 때, A, B는 이웃하고 D, E, F는 이웃하지 않게 세우는 경우의 수를 구하시오. 288

F를 제외한 4명을 일렬로 세울 때, A, B가 이웃하는 경우의 수는 A, B를 묶어서 생각하면 되므로 $3!\times2=12$
이들의 양 끝이나 사이사이에 D, E, F를 각각 끼워 세우면 되므로 4개의 자리 중 3개의 자리를 택하여 D, E, F를 끼워 세우는 경우의 수는 ${}_{4}P_{3}=24$
곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$12\times24=288$

3 조합

01 조합의 뜻

뽑는 것을 조합이라 하고, 뽑아서 나열하는 것을 순열이라 한다.
순열과 조합의 차이점은 순서의 고려 여부뿐. 즉, 조합에 순서를 주면 순열이 된다.

조합

서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 뽑는 것을 **n개에서 r개를 택하는 조합**이라 한다.
이 조합의 수를 기호 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$로 나타내고, 다음과 같이 계산한다.

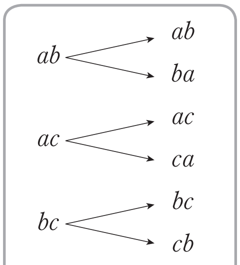
$${}_{n}\mathrm{C}_{r}=\frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!}=\frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)}^{r\text{개}}}{r!}\quad (\text{단, } 0\le r\le n)$$ 중요

증명 일반적으로 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$와 택한 r개를 일렬로 나열하는 경우의 수 $r!$을 곱한 것은 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$와 같으므로

${}_{n}\mathrm{C}_{r}\times r!={}_{n}\mathrm{P}_{r}\qquad \therefore\ {}_{n}\mathrm{C}_{r}=\frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!}$

설명 n개에서 r개를 뽑아서 일렬로 나열한 경우의 수, 즉 순열의 수를 모두 구한 후, 같은 것을 뽑아 나열한 경우들은 모두 1가지로 보면 된다. ➡ ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$를 $r!$로 나눈다.
예를 들어 3개의 문자 a, b, c에서 2개를 택하는 조합의 수는 ${}_{3}\mathrm{C}_{2}$이다.
이때 택한 2개를 일렬로 나열하는 순열의 수를 생각하면 각각 $2!$가지씩의 경우가 생기므로 전체 순열의 수는 ${}_{3}\mathrm{C}_{2}\times 2!$이다.
이것은 서로 다른 3개의 문자에서 2개를 택하는 순열의 수 ${}_{3}\mathrm{P}_{2}$와 같으므로

${}_{3}\mathrm{C}_{2}\times 2!={}_{3}\mathrm{P}_{2}\qquad \therefore\ {}_{3}\mathrm{C}_{2}=\frac{{}_{3}\mathrm{P}_{2}}{2!}$



(조합)$\times 2!=$(순열)

${}_{3}\mathrm{C}_{2}$		$2!$		${}_{3}\mathrm{P}_{2}$
a, b, c 중에서 2개를 뽑는 경우의 수	$\times$	뽑힌 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수	$=$	a, b, c 중에서 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수

곱의 법칙

개념확인 다음을 구하시오.
(1) 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 조합의 수
(2) 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 조합의 수

풀이 (1) ${}_{3}\mathrm{C}_{2}=\frac{{}_{3}\mathrm{P}_{2}}{2!}=\frac{3\times 2}{2\times 1}=\mathbf{3}$ (2) ${}_{5}\mathrm{C}_{3}=\frac{{}_{5}\mathrm{P}_{3}}{3!}=\frac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1}=\mathbf{10}$

조합도 순열과 마찬가지로 이론 전개나 등식의 증명에 이용되는 변형식이 있다.
지금 배울 여러 가지 조합 공식은 이론 전개나 증명뿐만 아니라 계산에서도 유용하게 이용되니 기억해야 한다.

여러 가지 조합 공식

(1) ${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$) 중요

(2) ${}_n\mathrm{C}_0=1,\ {}_n\mathrm{C}_n=1,\ {}_n\mathrm{C}_1=n$

(3) ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$)

(4) ${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r$ (단, $1\le r\le n-1$)

증명

(1) ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$이므로 ${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

(2) ${}_n\mathrm{C}_0=\dfrac{{}_n\mathrm{P}_0}{0!}=\dfrac{1}{1}=1$ ⬅ ${}_n\mathrm{P}_0=1,\ 0!=1$

${}_n\mathrm{C}_n=\dfrac{{}_n\mathrm{P}_n}{n!}=\dfrac{n!}{n!}=1$ ⬅ ${}_n\mathrm{P}_n=n!$

${}_n\mathrm{C}_1=\dfrac{{}_n\mathrm{P}_1}{1!}=\dfrac{n}{1}=n$ ⬅ ${}_n\mathrm{P}_1=n$

(3)
$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{C}_{n-r}&=\frac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!}\\&=\frac{n!}{(n-r)!r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\\&={}_n\mathrm{C}_r\end{aligned}$$

$\therefore\ {}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$

(4) ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}=\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}=\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$

${}_{n-1}\mathrm{C}_r=\dfrac{(n-1)!}{r!\{(n-1)-r\}!}=\dfrac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}$

$$\begin{aligned}\therefore\ {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r&=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}+\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}\\&=\frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!}+\frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!}\\&=\frac{(n-1)!(r+n-r)}{r!(n-r)!}\\&=\frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!}\\&=\frac{n!}{r!(n-r)!}\\&={}_n\mathrm{C}_r\end{aligned}$$

설명

(3) ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$에 대한 설명

n개 중에서 r개를 뽑으면 $(n-r)$개가 남는다. 이 상황은 $(n-r)$개를 뽑고 r개가 남은 것으로 생각할 수도 있다. 따라서 n개 중에서 r개를 뽑는 경우의 수는 n개 중에서 $(n-r)$개를 뽑는 경우의 수와 같다.

이 성질은 ${}_n\mathrm{C}_r$의 계산에서 r가 큰 수일 때 무척 유용하다.

예를 들면 ${}_{100}\mathrm{C}_{99}={}_{100}\mathrm{C}_{100-99}={}_{100}\mathrm{C}_1=100$

061 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_{30}C_0$ (2) ${}_8C_3$ (3) ${}_{10}C_{10}$ (4) ${}_{20}C_{18}$

풍산자Tip ${}_nC_r$에서 r가 n의 절반보다 큰 수일 때에는
➡ 공식 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$를 이용하면 간단히 계산할 수 있다.

풀이 (1) ${}_{30}C_0=\mathbf{1}$

(2) ${}_8C_3=\frac{{}_8P_3}{3!}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=\mathbf{56}$

(3) ${}_{10}C_{10}=\mathbf{1}$

(4) ${}_{20}C_{18}={}_{20}C_2=\frac{{}_{20}P_2}{2!}=\frac{20\times19}{2\times1}=\mathbf{190}$

정답과 풀이 79쪽

유제 **062** 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_{10}C_1$ 10 (2) ${}_6C_2$ 15 (3) ${}_{50}C_{49}$ 50 (4) ${}_{15}C_{12}$ 455

063 다음 등식을 만족시키는 n 또는 r의 값을 구하시오. (단, n, r는 자연수이다.)

(1) ${}_{10}C_r={}_{10}C_4$ (2) ${}_nC_6={}_nC_8$

(3) ${}_nC_3=20$ (4) $12{}_nC_3=6{}_nP_2+{}_nP_3$

풍산자Tip ${}_nC_x={}_nC_r$이면 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로 $x=r$ 또는 $x=n-r$이다.

풀이 (1) ${}_{10}C_4={}_{10}C_6$이므로 $\boldsymbol{r=4}$ 또는 $\boldsymbol{r=6}$

(2) ${}_nC_6={}_nC_{n-6}$이므로 $n-6=8$ $\quad\therefore \boldsymbol{n=14}$

(3) ${}_nC_3=20$에서 $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=20$

$n(n-1)(n-2)=6\times5\times4$ $\quad\therefore \boldsymbol{n=6}$

(4) $12\times\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=6n(n-1)+n(n-1)(n-2)$

그런데 $n\geq3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$2(n-2)=6+n-2$ $\quad\therefore \boldsymbol{n=8}$

정답과 풀이 79쪽

유제 **064** 다음 등식을 만족시키는 n 또는 r의 값을 구하시오. (단, n, r는 자연수이다.)

(1) ${}_7C_r={}_7C_{r-3}$ $r=5$ (2) ${}_nC_4={}_nC_6$ $n=10$

(3) ${}_nC_2=10$ $n=5$ (4) ${}_nP_3=2{}_nC_2+{}_nP_2$ $n=4$

065 다음을 구하시오.

(1) 회원이 10명인 모임에서 회장, 부회장, 총무를 각각 1명씩 정하는 경우의 수

(2) 회원이 10명인 모임에서 대표 3명을 정하는 경우의 수

풍산자日 (1) 택한 3명의 순서를 바꾸면 다른 경우가 되므로 순열이다.

(2) 택한 3명의 순서를 바꿔도 같은 경우가 되므로 조합이다.

풀이 (1) 구하는 경우의 수는 10명에서 3명을 택하는 순열의 수이므로

$_{10}P_3=10\times9\times8=\mathbf{720}$

(2) 구하는 경우의 수는 10명에서 3명을 택하는 조합의 수이므로

$_{10}C_3=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=\mathbf{120}$

정답과 풀이 79쪽

유제 **066** 다음을 구하시오.

(1) 5명의 학생 중에서 반장, 부반장을 각각 1명씩 선출하는 경우의 수 20

(2) 5명의 학생 중에서 대표 2명을 선출하는 경우의 수 10

067 다음을 구하시오.

(1) 경찰관 6명과 소방관 4명 중에서 경찰관 4명과 소방관 2명을 뽑는 경우의 수

(2) 경찰관 6명과 소방관 4명 중에서 3명을 뽑을 때, 뽑힌 3명의 직업이 모두 같은 경우의 수

풍산자日 (1) 경찰관을 뽑고 소방관을 뽑아야 하므로 ➡ 곱한다.

(2) 모두 경찰관 또는 모두 소방관이어야 하므로 ➡ 더한다.

풀이 (1) 경찰관 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는 $_6C_4={}_6C_2=15$

소방관 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 $_4C_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $15\times6=\mathbf{90}$

(2) 경찰관 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 $_6C_3=20$

소방관 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 $_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 경우의 수는 $20+4=\mathbf{24}$

정답과 풀이 79쪽

유제 **068** 다음을 구하시오.

(1) 서로 다른 검은 공 7개와 흰 공 5개 중에서 검은 공 2개와 흰 공 2개를 뽑는 경우의 수 210

(2) 서로 다른 검은 공 7개와 흰 공 5개 중에서 4개의 공을 뽑을 때, 뽑힌 공이 모두 같은 색인 경우의 수 40

●특정한 것이 포함되는 경우

069 9명의 학생 중에서 4명을 뽑을 때, 다음을 구하시오.

(1) 특정한 학생 2명이 모두 포함되는 경우의 수

(2) 특정한 학생 2명이 모두 포함되지 않는 경우의 수

풍산자B (1) 특정한 인원을 포함시키는 경우는 해당 인원을 미리 뽑아 놓고 나머지 인원을 구한다.

(2) 특정한 인원을 포함시키지 않는 경우는 전체에서 해당 인원을 제외하고 구한다.

풀이 (1) 특정한 2명을 미리 뽑아 놓고 나머지 7명에서 2명을 뽑으면 되므로 ${}_7C_2=\mathbf{21}$

(2) 특정한 2명을 제외한 나머지 7명에서 4명을 뽑으면 되므로 ${}_7C_4={}_7C_3=\mathbf{35}$

정답과 풀이 79쪽

유제 **070** 7가지 무지개 색 중에서 4가지 색을 뽑을 때, 다음을 구하시오.

(1) 빨강과 노랑이 모두 포함되는 경우의 수 10

(2) 빨강과 노랑이 모두 포함되지 않는 경우의 수 5

●'적어도 ~'의 조건이 있는 경우

071 남자 9명과 여자 5명 중에서 3명을 뽑을 때, 다음을 구하시오.

(1) 남자가 적어도 1명 포함되는 경우의 수

(2) 남자와 여자가 적어도 1명씩 포함되는 경우의 수

풍산자B '적어도 ~'의 조건이 있으면 ➡ 반대를 생각한다.

(1) 전체 경우에서 '모두 여자'인 경우를 뺀다.

(2) 전체 경우에서 '모두 남자 또는 모두 여자'인 경우를 뺀다.

풀이 (1) 전체 14명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{14}C_3=364$

여자 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는 $364-10=\mathbf{354}$

(2) 전체 14명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{14}C_3=364$

남자 9명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_9C_3=84$

여자 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는 $364-(84+10)=\mathbf{270}$

정답과 풀이 80쪽

유제 **072** 서로 다른 시집 5권과 소설책 4권 중에서 3권을 뽑을 때, 다음을 구하시오.

(1) 시집이 적어도 1권 포함되는 경우의 수 80

(2) 시집과 소설책이 적어도 1권씩 포함되는 경우의 수 70

073 남자 5명, 여자 4명 중에서 남자 3명, 여자 2명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수를 구하시오.

풍산자비 '뽑아서 나열한다.' ➡ 뽑는 단계와 나열 단계를 구분하여 생각한다.

풀이 (i) 뽑는 단계 ➡ 남자 5명 중에서 3명, 여자 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$_5C_3 \times {_4C_2} = {_5C_2} \times {_4C_2} = 10 \times 6 = 60$

(ii) 나열 단계 ➡ 뽑은 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5! = 120$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$60 \times 120 = \mathbf{7200}$

정답과 풀이 80쪽

유제 **074** 서로 다른 국어책 5권, 수학책 5권 중에서 국어책 2권, 수학책 3권을 뽑아 책꽂이에 일렬로 꽂는 경우의 수를 구하시오. 12000

075 1부터 6까지의 자연수를 일렬로 배열하여 첫 번째 수부터 차례로 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_6$이라 할 때, 조건 $a_1 > a_3 > a_4$, $a_2 > a_5$를 만족시키는 경우의 수를 구하시오.

풍산자비 순서가 정해진 경우는 뽑기만 하면 끝. 뽑은 것을 정해진 순서대로 나열하는 방법은 1가지뿐.

풀이 6개 중 3개를 뽑아 큰 수부터 차례로 a_1, a_3, a_4를 정한다.

이 각각에 대하여 나머지 3개 중에서 2개를 뽑아 큰 수부터 차례로 a_2, a_5를 정한다.

따라서 구하는 경우의 수는 $_6C_3 \times {_3C_2} = {_6C_3} \times {_3C_1} = 20 \times 3 = \mathbf{60}$

정답과 풀이 80쪽

유제 **076** 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 만들 수 있는 세 자리 자연수 중 321과 같이 일의 자리의 수보다 십의 자리의 수가 더 크고 십의 자리의 수보다 백의 자리의 수가 더 큰 자연수의 개수를 구하시오. 10

+ 풍산자 비법

뽑는 단계는 조합으로, 나열 단계는 순열로 계산한다.

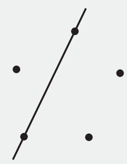
02 조합과 도형의 개수

도형의 개수를 세는 문제는 조합을 이용하여 풀 수 있다.
자주 나오는 경우에 대하여 정리해 보자.

직선의 개수

일직선 위에 있지 않은 n개의 점 중에서 2개의 점을 이어 만들 수 있는 직선의 개수

➡ ${}_{n}\mathrm{C}_{2}$ (단, $n \geq 2$)

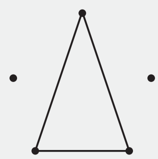


일직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선은 1개뿐이다.

삼각형의 개수

일직선 위에 있지 않은 n개의 점 중에서 3개의 점을 이어 만들 수 있는 삼각형의 개수

➡ ${}_{n}\mathrm{C}_{3}$ (단, $n \geq 3$)

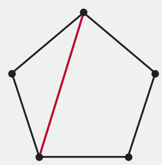


일직선 위에 있는 3개의 점을 이으면 삼각형이 생기지 않는다.

대각선의 개수

볼록 n각형의 대각선의 개수

➡ ${}_{n}\mathrm{C}_{2} - n$ (단, $n \geq 3$)

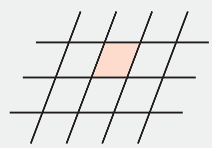


두 꼭짓점을 연결하면 대각선 또는 변이 된다. 따라서 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 조합의 수에서 변의 개수인 n을 뺀 값과 같다.

평행사변형의 개수

m개의 평행선과 n개의 평행선이 서로 만날 때 생기는 평행사변형의 개수

➡ ${}_{m}\mathrm{C}_{2} \times {}_{n}\mathrm{C}_{2}$ (단, $m \geq 2$, $n \geq 2$)

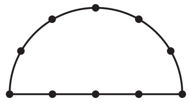


가로선 중에서 2개, 세로선 중에서 2개를 선택하면 하나의 평행사변형이 결정된다.

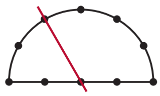
077 **오른쪽 그림과 같이 반원 위에 10개의 점이 있다. 다음을 구하시오.**

(1) 2개의 점을 연결하여 만들 수 있는 직선의 개수

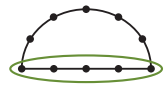
(2) 3개의 점을 연결하여 만들 수 있는 삼각형의 개수



풍산자팁 (1) 두 점을 연결하면 하나의 직선이 된다. 단, 일직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선은 1개뿐이다. 일직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선의 개수는 빼고 나중에 1만 더해 준다.

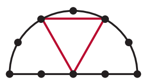


두 점을 연결하면 직선이 된다.

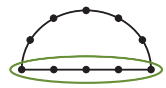


여기서 두 점을 뽑는 경우는 빼고 1만 더해 준다.

(2) 세 점을 연결하면 삼각형이 된다. 단, 일직선에서 세 점을 뽑으면 삼각형이 안 된다.



세 점을 연결하면 삼각형이 된다.



여기서 세 점을 뽑는 경우는 뺀다.

풀이 (1) 10개의 점 중에서 2개를 택하는 조합의 수는

$_{10}C_2=45$

일직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 조합의 수는

$_5C_2=10$

따라서 구하는 직선의 개수는

$45-10+1=\mathbf{36}$

(2) 10개의 점 중에서 3개를 택하는 조합의 수는

$_{10}C_3=120$

일직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 조합의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

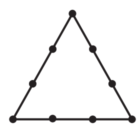
$120-10=\mathbf{110}$

정답과 풀이 80쪽

유제 **078** **오른쪽 그림과 같이 정삼각형의 변 위에 같은 간격으로 놓인 9개의 점이 있다. 다음을 구하시오.**

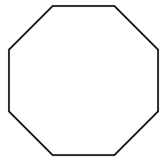
(1) 2개의 점을 연결하여 만들 수 있는 직선의 개수 21

(2) 3개의 점을 연결하여 만들 수 있는 삼각형의 개수 72



● 대각선의 개수

079 오른쪽 그림과 같은 팔각형의 대각선의 개수를 구하시오.



풍산자 비법 두 꼭짓점을 연결하면 대각선 또는 변이 된다.

풀이 8개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 조합의 수에서 변의 개수인 8을 뺀 값과 같으므로
${}_8C_2-8=28-8=\mathbf{20}$

다른 풀이 대각선의 개수를 구하는 공식을 이용하면
$\dfrac{n(n-3)}{2}$에서 $n=8$이므로 $\dfrac{8\times5}{2}=20$

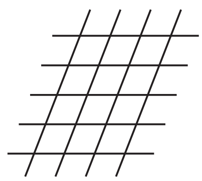
참고 n각형의 한 꼭짓점에서 그을 수 있는 대각선은 $(n-3)$개이고, 그어 보면 같은 선이 두 번씩 그어지므로 대각선의 개수는 $\dfrac{n(n-3)}{2}$이 된다.
위의 풀이를 참고하면 $\dfrac{n(n-3)}{2}={}_nC_2-n$임을 알 수 있다.

정답과 풀이 80쪽

유제 **080** 대각선이 27개인 볼록 n각형의 꼭짓점의 개수를 구하시오. 9

● 사각형의 개수

081 오른쪽 그림과 같이 5개의 평행선과 4개의 평행선이 서로 만나고 있다. 이 평행선으로 이루어지는 평행사변형의 개수를 구하시오.

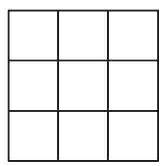


풍산자 비법 가로선 중에서 2개, 세로선 중에서 2개를 택하면 하나의 평행사변형이 결정된다.

풀이 5개의 평행선 중에서 2개, 4개의 평행선 중에서 2개를 택하면 하나의 평행사변형이 결정되므로 구하는 평행사변형의 개수는 ${}_5C_2\times{}_4C_2=10\times6=\mathbf{60}$

정답과 풀이 80쪽

유제 **082** 오른쪽 그림과 같이 가로 방향의 평행한 선분 4개와 세로 방향의 평행한 선분 4개가 각각 같은 간격을 이루며 수직으로 만난다. 이들로 이루어지는 직사각형의 개수를 구하시오. 36



03 분할과 분배

분할은 조를 나누는 것. 나누기만 하므로 순서가 중요하지 않다.
분배는 분할로 나뉜 조를 나열하는 것. 순서가 중요하다.

분할하는 방법의 수

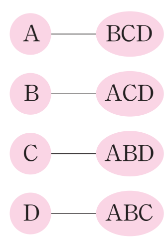
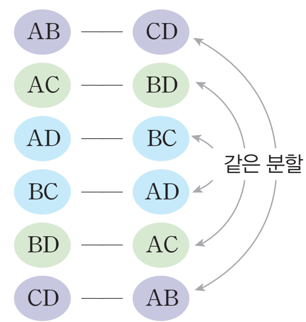
서로 다른 n개를 p개, q개, r개 $(p+q+r=n)$의 3개의 조로 나누는 경우의 수는

(1) p, q, r가 모두 다른 수이면 ➡ ${}_{n}\mathrm{C}_{p}\times{}_{n-p}\mathrm{C}_{q}\times{}_{r}\mathrm{C}_{r}$

(2) p, q, r 중 어느 두 수가 같으면 ➡ ${}_{n}\mathrm{C}_{p}\times{}_{n-p}\mathrm{C}_{q}\times{}_{r}\mathrm{C}_{r}\times\frac{1}{2!}$

(3) p, q, r가 모두 같으면 ➡ ${}_{n}\mathrm{C}_{p}\times{}_{n-p}\mathrm{C}_{q}\times{}_{r}\mathrm{C}_{r}\times\frac{1}{3!}$

설명 분할하는 방법의 수를 구할 때에는 크기가 같은 조가 k개 있으면 $k!$로 나누어 주어야 한다. 분할에서는 조끼리의 순서는 무시하기 때문이다.
4명의 학생 A, B, C, D를 다음과 같이 2개의 조로 나누는 경우의 수를 각각 구해 보자.

<table>
<tr><th>1명, 3명으로 나누는 경우의 수</th><th>2명, 2명으로 나누는 경우의 수</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4명에서 1명을 뽑아 한 조로 하고, 나머지 3명에서 3명을 뽑아 한 조로 한다.
${}_{4}\mathrm{C}_{1}\times{}_{3}\mathrm{C}_{3}=4$</td><td>4명에서 2명을 뽑아 한 조로 하고, 나머지 2명에서 2명을 뽑아 한 조로 한다.
${}_{4}\mathrm{C}_{2}\times{}_{2}\mathrm{C}_{2}=6$
같은 분할이 $2!$개 생기므로
${}_{4}\mathrm{C}_{2}\times{}_{2}\mathrm{C}_{2}\times\frac{1}{2!}=3$</td></tr>
</table>

분할한 n개의 조를 나열하는 것이 분배.

분배하는 방법의 수

n개의 조로 분할하여 n곳에 분배하는 경우의 수 ➡ (n개의 조로 분할하는 경우의 수)$\times n!$

쪼개고 끝나면 분할이고, 쪼갠 후 다른 곳에 나누어 주면 분배이다.
n개의 조를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $n!$이므로 분배의 수는 분할의 수에 $n!$을 곱한다.

083 9명의 학생을 다음과 같이 3조로 나누는 방법의 수를 구하시오.

(1) 2명, 3명, 4명 (2) 2명, 2명, 5명 (3) 3명, 3명, 3명

풍산자Ⓑ n개의 조로 분할할 때, 크기가 같은 조가 k개이면 $k!$로 나누어 주어야 한다.

풀이 (1) 9명에서 2명을 뽑고, 나머지 7명에서 3명을 뽑고, 나머지 4명에서 4명을 뽑는다.

$\therefore {}_9C_2 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4 = 36 \times 35 \times 1 = \mathbf{1260}$

(2) (1)과 같은 방식으로 한 후 2개의 조의 사람 수가 같으므로 $2!$로 나누어 준다.

$\therefore {}_9C_2 \times {}_7C_2 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{2!} = 36 \times 21 \times 1 \times \frac{1}{2} = \mathbf{378}$

(3) (1)과 같은 방식으로 한 후 3개의 조의 사람 수가 모두 같으므로 $3!$로 나누어 준다.

$\therefore {}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{3!} = 84 \times 20 \times 1 \times \frac{1}{6} = \mathbf{280}$

정답과 풀이 80쪽

유제 **084** 서로 다른 종류의 꽃 5송이를 1송이, 2송이, 2송이로 나누어 3개의 꽃다발을 만드는 방법의 수를 구하시오. 15

085 10명을 3명, 3명, 4명의 3개의 조로 나눌 때, 특정한 3명이 같은 조에 편성되는 경우의 수를 구하시오.

풍산자Ⓑ 특정한 인원을 몇 명인 조에 배정할 것인지 정한다.

풀이 (ⅰ) 특정한 3명을 3명인 조에 배정하는 경우

나머지 7명을 3명, 4명으로 나누는 방법의 수는

${}_7C_3 \times {}_4C_4 = 35 \times 1 = 35$

(ⅱ) 특정한 3명을 4명인 조에 배정하는 경우

나머지 7명을 3명, 3명, 1명으로 나누는 방법의 수는

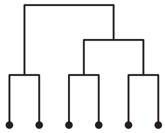
${}_7C_3 \times {}_4C_3 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 35 \times 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = 70$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $35 + 70 = \mathbf{105}$

정답과 풀이 80쪽

유제 **086** 부모를 포함한 10명의 가족을 3명, 3명, 4명의 3개의 조로 나눌 때, 부모가 같은 조에 속하는 경우의 수를 구하시오. 560

087 6개의 팀이 오른쪽 그림과 같은 토너먼트 방식으로 시합을 할 때, 대진표를 작성하는 방법의 수를 구하시오.



풍산자日 두 번 경기할 팀과 세 번 경기할 팀을 나누어 생각해 본다.

풀이 먼저 6개의 팀을 두 번 경기하는 2개의 팀과 세 번 경기하는 4개의 팀으로 나누는 방법의 수는 ${}_6C_2\times{}_4C_4=15\times1=15$

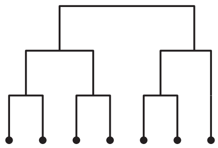
4개의 팀을 다시 2개의 팀, 2개의 팀으로 나누는 방법의 수는

${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=6\times1\times\frac{1}{2}=3$

따라서 구하는 방법의 수는 $15\times3=\mathbf{45}$

정답과 풀이 **81**쪽

유제 **088** 어느 회사의 배드민턴 동호회의 회원 7명은 오른쪽 그림과 같이 토너먼트 방식으로 단식 시합을 하려고 한다. 대진표를 작성하는 방법의 수를 구하시오. 315



089 서로 다른 6송이의 꽃을 다음과 같이 3다발로 나누어 3명에게 선물하는 방법의 수를 구하시오.

(1) 1송이, 2송이, 3송이 (2) 1송이, 1송이, 4송이 (3) 2송이, 2송이, 2송이

풍산자日 꽃을 3다발로 나누는 것까지는 분할 문제.
3명에게 선물을 한다는 것은 $3!$을 곱해서 분배의 수를 구하라는 말.

풀이 (1) $({}_6C_1\times{}_5C_2\times{}_3C_3)\times3!=(6\times10\times1)\times6=\mathbf{360}$

(2) $\left({}_6C_1\times{}_5C_1\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}\right)\times3!=\left(6\times5\times1\times\frac{1}{2}\right)\times6=\mathbf{90}$

(3) $\left({}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}\right)\times3!=\left(15\times6\times1\times\frac{1}{6}\right)\times6=\mathbf{90}$

정답과 풀이 **81**쪽

유제 **090** 8명의 관광객을 2명씩 4개의 조로 나누어 4곳의 호텔에 투숙시키는 방법의 수를 구하시오. 2520

+ 풍산자 비법

- 도형의 개수를 구하는 문제는 선택할 수 있는 점 또는 선의 개수를 따진다.
- 쪼개고 끝나면 분할, 쪼갠 후에 다른 곳에 나누어 주면 분배이다.

필수 확인 문제

정답과 풀이 **81**쪽

091

등식 ${}_{n}P_2+4{}_{n}C_3={}_{n}P_3$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오. 5

$n(n-1)+4\times\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=n(n-1)(n-2)$

그런데 $n\geq3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$1+\dfrac{2(n-2)}{3}=n-2,\ \dfrac{2(n-2)}{3}=n-3$

$2n-4=3n-9\qquad\therefore n=5$

092

어떤 모임에 참석한 회원들끼리 모두 한 번씩 악수를 하였을 때, 악수한 총 횟수가 120회였다. 이 모임에 참석한 회원 수를 구하시오. 16

모임에 참석한 회원 수를 n이라 하면 악수한 총 횟수는 n명 중에서 2명을 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_{n}C_2=120,\ \dfrac{n(n-1)}{2}=120$

$n(n-1)=240=16\times15\qquad\therefore n=16$

따라서 구하는 회원 수는 16이다.

093

서로 다른 종류의 빨간색 볼펜 5자루, 노란색 볼펜 3자루, 보라색 볼펜 4자루가 들어 있는 상자에서 2자루의 볼펜을 꺼낼 때, 보라색 볼펜이 적어도 1자루 포함되는 경우의 수를 구하시오. 38

전체 12자루 중에서 2자루를 꺼내는 경우의 수는

${}_{12}C_2=66$

빨간색 볼펜 5자루와 노란색 볼펜 3자루 중에서 2자루를 꺼내는 경우의 수는 ${}_{8}C_2=28$

따라서 구하는 경우의 수는 $66-28=38$

094

태희와 은우를 포함한 9명의 학생 중 5명을 뽑아 일렬로 세울 때, 태희와 은우가 모두 포함되고, 이 두 명이 서로 이웃하여 서는 경우의 수를 구하시오. 1680

태희와 은우를 미리 뽑아 놓고 나머지 7명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{7}C_3=35$

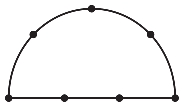
뽑은 5명을 태희와 은우가 이웃하도록 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!\times2!=24\times2=48$

따라서 구하는 경우의 수는

$35\times48=1680$

095



오른쪽 그림과 같이 반원 위에 7개의 점이 있다. 이 중 4개의 점을 연결하여 만들 수 있는 사각형의 개수를 구하시오. 22

7개의 점 중에서 4개를 택하는 조합의 수는 ${}_{7}C_4=35$

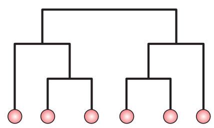
4개의 점을 택하여 사각형을 만들 수 없는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) 일직선 위에 있는 4개의 점을 택하는 경우 ${}_{4}C_4=1$

(ii) 일직선 위에 있는 3개의 점과 일직선 위에 있지 않은 한 개의 점을 택하는 경우 ${}_{4}C_3\times3=12$

(i), (ii)에서 구하는 사각형의 개수는 $35-(1+12)=22$

096



6명의 프로게이머가 오른쪽 그림과 같이 대진표로 시합을 할 때, 대진표를 작성하는 방법의 수를 구하시오. 90

6명을 3명, 3명으로 분할하는 방법의 수는

${}_{6}C_3\times{}_{3}C_3\times\dfrac{1}{2!}=20\times1\times\dfrac{1}{2}=10$

각 조에서 부전승으로 올라가는 1명을 택하는 경우의 수는

${}_{3}C_1\times{}_{3}C_1=3\times3=9$

따라서 구하는 경우의 수는 $10\times9=90$

097 실력UP

7층짜리 건물의 1층에서 8명이 엘리베이터를 함께 탄 후 7층까지 올라가는 동안 3개의 층에서 각각 2명, 3명, 3명이 내리는 경우의 수를 구하시오.

(단, 엘리베이터에 새로 타는 사람은 없다.)

33600

2층부터 7층까지 6개의 층 중에서 사람들이 내리는 3개의 층을 택하는 경우의 수는 ${}_{6}C_3=20$

8명을 2명, 3명, 3명의 3개의 조로 나누어 3개의 층에 배정하는 경우의 수는 $\left({}_{8}C_2\times{}_{6}C_3\times{}_{3}C_3\times\dfrac{1}{2!}\right)\times3!=1680$

따라서 구하는 경우의 수는 $20\times1680=33600$

중단원 마무리

◆ 경우의 수

경우의 수	① 모든 경우를 나열해 가짓수를 센다. ② 수형도(나뭇가지 그림)를 이용해 가짓수를 센다. ③ 낯선 문제를 익숙한 문제로 변형해 가짓수를 센다.
합의 법칙과 곱의 법칙	어떤 경우를 선택했을 때, 다른 경우를 포기해야 하면 각각의 경우의 수를 합한다. ➡ 합의 법칙 어떤 경우를 선택했을 때, 다른 경우를 선택해야 하면 각각의 경우의 수를 곱한다. ➡ 곱의 법칙

◆ 순열

순열의 식	① ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0<r\le n$) ② ${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1=n!$ ③ ${}_nP_0=1$, $0!=1$
특정 조건이 있는 순열	① 이웃하는 순열: (하나로 묶었을 때의 순열의 수) ×(한 묶음 안에서 순서를 바꾸는 순열의 수) ② 이웃하지 않는 순열: (이웃해도 되는 것들의 순열의 수) ×(그 양 끝과 사이사이에 이웃하지 않아야 할 것을 끼워 넣는 순열의 수) ③ '적어도'가 있는 경우의 순열: (전체 경우의 수)−(반대 경우의 수) ④ 교대로 배열하는 순열: 두 개의 대상 중 하나를 일렬로 배열한 후 그 사이사이와 양 끝에 나머지 대상들을 일렬로 나열한다.

◆ 조합

조합의 식	① ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$) ② ${}_nC_0=1$, ${}_nC_n=1$, ${}_nC_1=n$ ③ ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$) ④ ${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$ (단, $1\le r\le n-1$)
분할과 분배	(1) 분할하는 방법의 수 서로 다른 n개를 p개, q개, r개 $(p+q+r=n)$의 3개의 조로 나누는 경우의 수는 ① p, q, r가 모두 다른 수이면 ➡ ${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_rC_r$ ② p, q, r 중 m개가 같은 수이면 ➡ ${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_rC_r\times\frac{1}{m!}$ (2) 분배하는 방법의 수 n개의 조로 분할하여 n곳에 분배하는 경우의 수 ➡ (n개의 조로 분할하는 경우의 수)$\times n!$

실전 연습문제

STEP 1

098

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 소수가 되는 경우의 수를 구하시오. 15

(ⅰ) 눈의 수의 합이 2인 경우: (1, 1)로 1가지

(ⅱ) 눈의 수의 합이 3인 경우: (1, 2), (2, 1)로 2가지

(ⅲ) 눈의 수의 합이 5인 경우: (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)로 4가지

(ⅳ) 눈의 수의 합이 7인 경우: (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)로 6가지

(ⅴ) 눈의 수의 합이 11인 경우: (5, 6), (6, 5)로 2가지

(ⅰ)~(ⅴ)에서 구하는 경우의 수는 $1+2+4+6+2=15$

099

다항식 $(a+b+c)(p+q+r)-(a+b)(s+t)$를 전개하였을 때 항의 개수는?

① 5 ② 7 ③ 9

④ 11 ● ⑤ 13

$(a+b+c)(p+q+r)$의 전개식에서 항의 개수는

$3\times3=9$

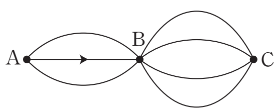
$(a+b)(s+t)$의 전개식에서 항의 개수는

$2\times2=4$

따라서 구하는 항의 개수는 $9+4=13$

100

오른쪽 그림과 같이 세 개의 도시 A, B, C를 잇는 도로망이 있다. 화살표가 있는 도로는 화살표 방향으로만 일방통행이 가능하고, 화살표가 없는 도로는 양쪽 방향으로 통행이 가능하다고 할 때, A 도시에서 출발하여 B 도시를 거쳐 C 도시까지 갔다가 다시 B 도시를 거쳐 A 도시까지 되돌아오는 방법의 수를 구하시오. 96



(ⅰ) A → B로 가는 방법의 수는 3

(ⅱ) B → C로 가는 방법의 수는 4

(ⅲ) C → B로 가는 방법의 수는 4

(ⅳ) B → A로 가는 방법의 수는 2

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 방법의 수는 $3\times4\times4\times2=96$

101

5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수 중 3의 배수의 개수를 구하시오. 20

각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

(ⅰ) 0, 1, 2 또는 0, 2, 4의 경우: 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 $2\times(2\times2!)=8$

(ⅱ) 1, 2, 3 또는 2, 3, 4의 경우: $2\times3!=12$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 3의 배수의 개수는 $8+12=20$

102 ← 교육청 기출

1학년 학생 2명과 2학년 학생 4명이 있다. 이 6명의 학생이 일렬로 나열된 6개의 의자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 앉는 경우의 수는?

> (가) 1학년 학생끼리는 이웃하지 않는다.
> (나) 양 끝에 있는 의자에는 모두 2학년 학생이 앉는다.

① 96 ② 120 ● ③ 144

④ 168 ⑤ 192

2학년 학생 4명이 일렬로 앉는 경우의 수는 $4!=24$

이때 조건 (가), (나)를 모두 만족시키려면 2학년 학생이 앉은 의자의 사이사이에 1학년 학생이 앉으면 되므로 ${}_3P_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $24\times6=144$

103

5개의 문자 a, b, c, d, e를 사전식으로 배열할 때, 75번째에 위치하는 단어는?

① dabce ② dabec ● ③ dacbe

④ daceb ⑤ daebc

a, b, c로 시작하는 단어의 개수는 각각 $4!$이므로 모두 $4!\times3=72$

따라서 75번째에 위치한 단어는 d로 시작하는 단어 중 3번째에 있다.

dabce, dabec, dacbe, ⋯

따라서 구하는 단어는 dacbe이다.

104

어느 도서관에서 사서를 모집하는데 남자 지원자 5명, 여자 지원자 6명이 지원하였다. 이 지원자 중에서 4명을 뽑을 때, 여자 지원자가 적어도 2명 포함되는 경우의 수를 구하시오. 265

(ⅰ) 지원자 11명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{11}C_4=330$
(ⅱ) 남자 지원자 5명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는
${}_5C_4={}_5C_1=5$
남자 지원자 5명 중에서 3명, 여자 지원자 6명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는
${}_5C_3\times{}_6C_1={}_5C_2\times{}_6C_1=10\times6=60$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$330-(5+60)=265$

105

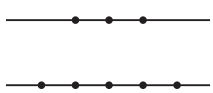
어떤 행사에 참여한 6명의 회원이 각자의 가방을 접수처에 맡겨 두었다가 행사를 마친 후 돌려받았다. 이때 3명은 자신의 가방을 받고, 나머지 3명은 다른 사람의 가방을 받을 경우의 수를 구하시오. 40

여섯 명의 회원 중에서 자신의 가방을 돌려받을 세 사람을 선택하는 경우의 수는 ${}_6C_3=20$
나머지 세 사람 A, B, C가 자신의 가방 a, b, c를 받지 못하는 경우는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
$20\times2=40$

A	B	C
b —	c —	a
c —	a —	b

106

오른쪽 그림과 같이 평행한 두 직선 위에 8개의 점이 있다. 이때 주어진 점을 연결하여 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수를 구하시오. 17



8개의 점 중에서 2개를 택하는 조합의 수는 ${}_8C_2=28$
위쪽 직선 위의 3개의 점 중에서 2개를 택하는 조합의 수는 ${}_3C_2=3$
아래쪽 직선 위의 5개의 점 중에서 2개를 택하는 조합의 수는
${}_5C_2=10$
따라서 구하는 직선의 개수는 $28-3+1-10+1=17$

STEP 2

107

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라 할 때, x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 실근을 갖도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. 19

$x^2+ax+b=0$의 판별식 D에서 $D=a^2-4b\geq0$ $\therefore a^2\geq4b$
(ⅰ) $b=1$일 때, $a^2\geq4$이므로 a는 2, 3, 4, 5, 6으로 5가지
(ⅱ) $b=2$일 때, $a^2\geq8$이므로 a는 3, 4, 5, 6으로 4가지
(ⅲ) $b=3$일 때, $a^2\geq12$이므로 a는 4, 5, 6으로 3가지
(ⅳ) $b=4$일 때, $a^2\geq16$이므로 a는 4, 5, 6으로 3가지
(ⅴ) $b=5$일 때, $a^2\geq20$이므로 a는 5, 6으로 2가지
(ⅵ) $b=6$일 때, $a^2\geq24$이므로 a는 5, 6으로 2가지
(ⅰ)~(ⅵ)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는 $5+4+3+3+2+2=19$

108

'3 6 9 게임'은 참가자들이 돌아가며 자연수를 1부터 차례로 말하되 3, 6, 9가 들어 있는 수는 말하지 않는 게임이다. 예를 들어 3, 13, 60, 396, 462, 900 등은 말하지 않아야 한다. '3 6 9 게임'을 할 때, 1부터 999까지의 자연수 중 말하지 않아야 하는 수의 개수를 구하시오. 657

1부터 999까지의 자연수는 다음과 같이 0을 사용하여 모두 세 자리로 나타낼 수 있다.
1 → 001, 98 → 098, 327 → 327
이때 말할 수 있는 수는 3, 6, 9를 제외한 7가지 수로 이루어져 있고, 그중 000은 제외되므로 그 개수는 $7\times7\times7-1=342$
따라서 말하지 않아야 하는 수의 개수는 $999-342=657$

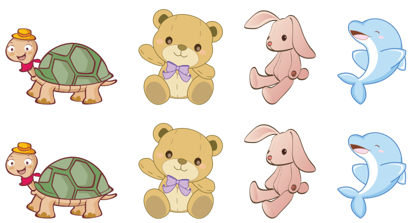
109

a, e, i, o, u의 5개의 모음을 일렬로 나열할 때, e와 i 또는 i와 u가 서로 이웃하는 경우의 수를 구하시오. 84

(ⅰ) e와 i가 서로 이웃하는 경우 $4!\times2!=24\times2=48$
(ⅱ) i와 u가 서로 이웃하는 경우 $4!\times2!=24\times2=48$
(ⅲ) e와 i, i와 u가 모두 서로 이웃하는 경우
e, i, u를 한 묶음으로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$
이때 e와 i, i와 u가 모두 이웃하는 경우는 eiu, uie의 2가지이므로 $6\times2=12$
(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 경우의 수는 $48+48-12=84$

110 교육청 기출

서로 다른 네 종류의 인형이 각각 2개씩 있다. 이 8개의 인형 중에서 5개를 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 종류의 인형끼리는 서로 구별하지 않는다.) 16



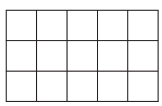
(ⅰ) 서로 다른 세 종류의 인형을 각각 1개, 2개, 2개씩 선택하는 경우
먼저 서로 다른 네 종류의 인형 중에서 세 종류의 인형을 선택한다. 이 세 종류의 인형 중 1개를 선택하는 인형의 종류를 정하면 남은 두 종류의 인형은 각각 2개씩 선택하면 되므로
${}_4C_3\times{}_3C_1={}_4C_1\times{}_3C_1=4\times3=12$

(ⅱ) 서로 다른 네 종류의 인형을 각각 1개, 1개, 1개, 2개씩 선택하는 경우
서로 다른 네 종류의 인형 중에서 2개를 선택하는 인형을 정하면 남은 세 종류의 인형은 각각 1개씩 선택하면 되므로
${}_4C_1=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $12+4=16$

111

오른쪽 그림과 같이 가로 방향의 평행한 선분 4개와 세로 방향의 평행한 선분 6개가 각각 수직으로 만나고 있다. 선분 사이의 간격이 같을 때, 이 선분으로 만들 수 있는 정사각형이 아닌 직사각형의 개수를 구하시오. 64



(ⅰ) 가로 방향의 선분 4개 중에서 2개, 세로 방향의 선분 6개 중에서 2개를 선택하면 하나의 직사각형이 결정되므로 직사각형의 개수는
${}_4C_2\times{}_6C_2=6\times15=90$

(ⅱ) 가장 가까운 두 평행선의 간격의 길이를 1이라 할 때, 한 변의 길이가 1, 2, 3인 정사각형의 개수는 각각 15, 8, 3이므로 정사각형의 총 개수는
$15+8+3=26$

(ⅰ), (ⅱ)에서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는 $90-26=64$

112

다음은 준우가 배낭여행을 가고 싶은 나라를 대륙별로 정리한 것이다. 준우가 두 대륙을 여행하려고 할 때 먼저 방문하는 대륙에서는 3개국을 여행하고, 두 번째 방문하는 대륙에서는 2개국을 여행하려고 한다. 계획할 수 있는 배낭여행의 경우의 수를 구하시오. (단, 방문국의 순서는 고려하지 않는다.) 126

대륙	가고 싶은 나라
아시아	일본, 중국, 인도, 태국
유럽	프랑스, 이탈리아, 스페인, 그리스
아메리카	미국, 멕시코, 브라질
아프리카	이집트, 리비아, 튀니지

(ⅰ) 4개국이 있는 두 대륙을 여행하는 경우의 수는
$2\times{}_4C_3\times{}_4C_2=48$

(ⅱ) 4개국이 있는 대륙과 3개국이 있는 대륙을 여행하는 경우의 수는 4개국이 있는 대륙을 먼저 여행하는 경우와 3개국이 있는 대륙을 먼저 여행하는 경우로 나누어 생각하면
$2\times2\times({}_4C_3\times{}_3C_2+{}_3C_3\times{}_4C_2)=72$

(ⅲ) 3개국이 있는 두 대륙을 여행하는 경우
$2\times{}_3C_3\times{}_3C_2=6$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 경우의 수는 $48+72+6=126$

113

어느 회사에서 사원 6명을 뽑아 캐나다, 인도, 독일 3개국에 해외 연수를 보내려고 한다. 각각의 국가에 적어도 한 명의 사원을 보낼 수 있도록 국가를 배정하는 경우의 수를 구하시오. 540

(ⅰ) 1명, 1명, 4명으로 나누는 경우의 수는
$\left({}_6C_1\times{}_5C_1\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}\right)\times3!=\left(6\times5\times1\times\frac{1}{2}\right)\times6=90$

(ⅱ) 1명, 2명, 3명으로 나누는 경우의 수는
$({}_6C_1\times{}_5C_2\times{}_3C_3)\times3!=(6\times10\times1)\times6=360$

(ⅲ) 2명, 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는
$\left({}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}\right)\times3!=\left(15\times6\times1\times\frac{1}{6}\right)\times6=90$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 경우의 수는
$90+360+90=540$

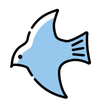
Ⅳ

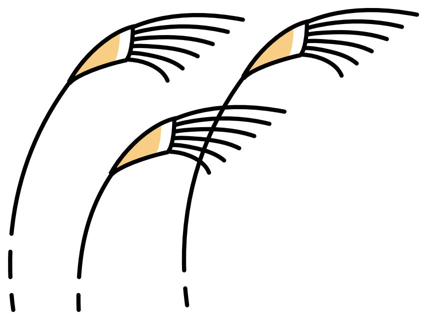
행렬

1 행렬과 그 연산

발상은 단순하게, 활용은 방대하게

수학에는 다양한 얼굴이 있다.
행렬은 연립방정식의 또 다른 얼굴이다.
연립방정식이 있는 곳에 행렬이 있기에
행렬은 연립방정식이 필요한 모든 분야에서
막강한 영향력을 발휘한다.
직사각형 모양으로 수나 문자를 배열하는 행렬의 기본 발상은
컴퓨터 프로그래밍에서 다루는 방대한 데이터를
가지런히 정렬하여 연산이 필요한 연립방정식을
하나의 방정식으로 변환할 수 있게 해준다.
겉으로 보이는 모습은 단순하지만 양자역학을 비롯한
현대물리학, 컴퓨터 공학, 금융경제학, 경영학에 이르기까지
행렬의 무대는 넓고 광대하다.





1

행렬과 그 연산

수나 문자를 직사각형 모양으로 나타낸 것이 행렬.
'행'은 가로, '렬'은 세로.
이 간단한 규칙만 있으면 여러 가지 수나 문자를 묶어서 한 번에 계산할 수 있다.

1 행렬의 뜻

$$\begin{array}{cc} & \text{제 } j \text{ 열} \\ \text{제 } i \text{ 행} & \begin{pmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

2 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배

$$p\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pm q\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} pa \pm qe & pb \pm qf \\ pc \pm qg & pd \pm qh \end{pmatrix}$$

3 행렬의 곱셈

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by & au+bv \\ cx+dy & cu+dv \end{pmatrix}$$

1 행렬의 뜻

01 행렬의 탄생

행렬을 시작하는 첫걸음은 처음 보는 모양새라서 어렵다는 편견을 버리는 것이다.

일단 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$를 보며 어디가 '행'이고 어디가 '렬'인지 헷갈리지 않는 데부터 시작한다.

'행'은 가로, '렬'은 세로 ➡ 플러스 $+$를 쓰면서 '행, 렬' 하고 읽는다.
➡ 기억 ㄱ을 쓰면서 '행, 렬' 하고 읽는다.

그런데 이 행렬은 어디서 왜 탄생한 것일까?

연립방정식 $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$을 푸시오.

위 문제는 가감법 또는 대입법으로 풀 수 있다.

위 식에 2를 곱하여 $\begin{cases} 2x+4y=10 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$로 고쳐서 가감법으로 풀면 된다.

그런데 지금처럼 수학이 체계적으로 정리되지 않았던 옛날엔 쉬운 문제가 아니었다.
더구나 미지수가 2개가 아니라 n개라면?
미지수가 n개인 연립일차방정식을 풀기 위하여 수학자들은 피나는 노력을 했다. 이 과정에서 탄생한 수학이 행렬론이다.
아이디어는 간단하다. 계수 부분과 미지수 부분을 분리하는 발상이다.

연립방정식 $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$을 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$로 나타낸다.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$로 나타내는 이론적 근거를 제시한 것이 행렬론이다.

행렬론의 처음은 연립방정식이다.
이 행렬론은 이제 현대 수학의 모든 분야에서 덧셈, 뺄셈보다 더 중시된다.

02 행렬의 뜻

행렬이란 여러 가지 수나 문자를 직사각형 모양으로 배열하여 괄호로 묶은 것.
즉, 행렬은 직사각형 모양의 숫자(문자) 모음이다.
행렬을 분해해 보자.
행렬의 가로줄을 **행**, 행렬의 세로줄을 **열**이라 한다.
오른쪽 그림의 행렬은 행이 2개이고, 열이 3개이므로 2×3행렬이다.
가끔 가로줄? 세로줄? 헷갈릴 때도 있지만 $+$, ㄱ을 연상하면 끝.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{제1열} & \text{제2열} & \text{제3열}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{제1행} \\ \\ \text{제2행}\end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

위에서 잠깐 봤듯이 m개의 행과 n개의 열로 이루어진 행렬은 m행 n열로 이루어진 행렬이라 하고, $m \times n$ **행렬**이라 한다.
특히, 행의 개수와 열의 개수가 서로 같은 $n \times n$ 행렬을 n**차 정사각행렬**이라 한다.
행렬에서 행이나 열에 있는 수나 문자를 **성분**이라 한다.
다시 말하면, 행렬 A의 i행 j열의 성분을 행렬 A의 (i, j) 성분이라 하고, a_{ij}로 나타낸다.

(1) 행렬: 여러 개의 수 또는 문자를 직사각형 모양으로 배열하여 괄호로 묶어 나타낸 것
(2) 성분: 행렬을 구성하고 있는 각각의 수 또는 문자
(3) 행: 행렬에서 성분을 가로로 배열한 줄
(4) 열: 행렬에서 성분을 세로로 배열한 줄
(5) $m \times n$ 행렬: m개의 행과 n개의 열로 이루어진 행렬
(6) 정사각행렬: 행의 개수와 열의 개수가 서로 같은 행렬
(7) (i, j) 성분: 행렬에서 제i행과 제j열이 만나는 위치에 있는 성분

참고 행렬 A의 (i, j) 성분이 a_{ij} $(i=1, 2, j=1, 2)$이면 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$이다. 예를 들어
행렬 A의 (i, j) 성분이 $a_{ij}=2i+j$ $(i=1, 2, j=1, 2, 3)$이면 행렬 A는 다음과 같다.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times1+1 & 2\times1+2 & 2\times1+3 \\ 2\times2+1 & 2\times2+2 & 2\times2+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

개념확인 다음 중 행렬을 찾고, 행렬인 것은 몇 행 몇 열의 행렬인지 말하시오.

(1) $\begin{pmatrix} \ \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $(1 \quad\ )$ (3) $\begin{pmatrix} & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

풀이 (1)~(3) **행렬이 아니다.**
(4) 행의 개수는 2, 열의 개수는 3이므로 **2×3 행렬**이다.

001 다음 행렬의 꼴을 말하시오. 또, 정사각행렬인 경우에는 몇 차 정사각행렬인지 말하시오.

(1) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (3) $(2 \quad 4)$ (4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

풍산자답 행이 m개, 열이 n개 ➡ $m \times n$ 행렬
행과 열의 개수가 같으면 정사각행렬이다.

풀이 (1) 2×1 행렬이다.
(2) 2×2 행렬이고, 이차정사각행렬이다.
(3) 1×2 행렬이다.
(4) 3×3 행렬이고, 삼차정사각행렬이다.

정답과 풀이 85쪽

유제 **002** 다음 행렬의 꼴을 말하시오. 또, 정사각행렬인 경우에는 몇 차 정사각행렬인지 말하시오.

(1) $(5 \quad 3)$ 1×2 행렬 (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 3×1 행렬 (3) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 2×2 행렬, 이차정사각행렬 (4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3×4 행렬

003 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 말하시오.

(1) $(2, 3)$ 성분 (2) $(3, 1)$ 성분
(3) a_{21} (4) a_{34}

풍산자답 행렬 A에서 제i행과 제j열이 만나는 곳 ➡ 행렬 A의 (i, j) 성분 ➡ a_{ij}

풀이 (1) 제2행 제3열의 성분이므로 **6**이다.
(2) 제3행 제1열의 성분이므로 **7**이다.
(3) 제2행 제1열의 성분이므로 **4**이다.
(4) 제3행 제4열의 성분은 **없다.**

정답과 풀이 85쪽

유제 **004** 행렬 $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 제2행의 성분을 모두 구하시오. $-2, 0, -6$
(2) $(1, 2)$ 성분과 $(2, 1)$ 성분을 구하시오. $(1, 2)$ 성분: -3, $(2, 1)$ 성분: -2
(3) $a_{13}+a_{22}$의 값을 구하시오. 1

03 행렬이 서로 같을 조건

두 행렬이 같다는 것은 모양이 같고 같은 위치의 성분이 같다는 것.
행렬의 모양이 같다는 것은 두 행렬의 행의 개수와 열의 개수가 같아야 한다는 뜻.
즉, 두 행렬의 행의 개수와 열의 개수가 같고 같은 위치의 성분이 각각 같으면 두 행렬이 같다.
두 행렬 A, B가 서로 같을 때는 $A=B$로 나타낸다.

서로 같은 행렬

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여

(1) $A=B$이면 $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$

(2) $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$이면 $A=B$

참고
- 두 행렬 A, B가 서로 같지 않을 때는 $A\neq B$로 나타낸다.
- 세 행렬 A, B, C에 대하여 $A=B$, $B=C$이면 $A=C$이다.

● 서로 같은 행렬

005 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y, z의 값을 구하시오.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} x-1 & 2x-y \\ y-z & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

풍산자티 두 행렬이 서로 같으므로 같은 위치의 성분을 각각 비교한다.

풀이 (1) $1=x+y$, $x=-2$이므로 $1=-2+y$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{x=-2,\ y=3}$

(2) $x-1=2$ ...... ㉠, $2x-y=1$ ...... ㉡, $y-z=5$ ...... ㉢

㉠에서 $\boldsymbol{x=3}$이고, 이를 ㉡에 대입하면 $6-y=1$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{y=5}$

$y=5$를 ㉢에 대입하면 $5-z=5$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{z=0}$

정답과 풀이 85쪽

유제 **006** 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y, z의 값을 구하시오.

(1) $\begin{pmatrix} x+z & 4x \\ -7 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -y \\ -7 & x+y \end{pmatrix}$

$x=1$, $y=-4$, $z=3$

(2) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y-x & z^2 \\ x+y & z^2+z-3 \end{pmatrix}$

$x=-3$, $y=2$, $z=2$

+ 풍산자 비법

- 행렬의 가로줄이 행, 세로줄이 열이다. 헷갈릴 때에는 $+$, ㄱ을 연상한다.
- 3×3 행렬을 $(i,\ j)$ 성분인 a_{ij}를 이용하여 나타내면 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$이다.
- 서로 같은 행렬은 모양이 같고, 같은 위치의 성분이 각각 같다.

정답과 풀이 **85**쪽

007

보기에서 3×2 행렬을 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　　ㄴ. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -6 \end{pmatrix}$

ㄷ. $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$　　ㄹ. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

ㅁ. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　　ㅂ. $\begin{pmatrix} 9 & 10 & 8 \\ 8 & 4 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

ㄹ, ㅁ

008

행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij}가 다음과 같을 때, 행렬 A를 구하시오. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(1) $a_{ij}=i+j$ (단, $i=1,\ 2,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4$)

(2) $i=j$일 때 $a_{ij}=2$, $i\neq j$일 때 $a_{ij}=1$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(단, $i=1,\ 2,\ j=1,\ 2$)

(1) $a_{11}=1+1=2,\ a_{12}=1+2=3,\ a_{13}=1+3=4,\ a_{14}=1+4=5,$

$a_{21}=2+1=3,\ a_{22}=2+2=4,\ a_{23}=2+3=5,\ a_{24}=2+4=6$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(2) $a_{11}=a_{22}=2,\ a_{12}=a_{21}=1$　　$\therefore\ A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

009

3×3 행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij}가

$$a_{ij}=\begin{cases} 2j & (i\leq j) \\ 2i-j & (i>j) \end{cases}$$

일 때, 행렬 A의 모든 성분의 합을 구하시오. 40

$a_{11}=2\times1=2,\ a_{12}=2\times2=4,\ a_{13}=2\times3=6$

$a_{21}=2\times2-1=3,\ a_{22}=2\times2=4,\ a_{23}=2\times3=6$

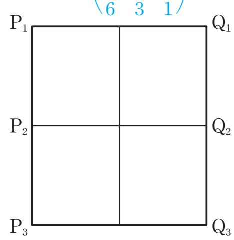
$a_{31}=2\times3-1=5,\ a_{32}=2\times3-2=4,\ a_{33}=2\times3=6$

따라서 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은

$2+4+6+3+4+6+5+4+6=40$

010

다음 그림은 각 지점을 연결한 도로망을 나타낸 것이다. 삼차정사각행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij}가 P_i 지점에서 Q_j 지점으로 가는 최단 경로의 수일 때, 행렬 A를 구하시오. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$



$a_{11}=1,\ a_{12}=3,\ a_{13}=6,\ a_{21}=3,\ a_{22}=1,$

$a_{23}=3,\ a_{31}=6,\ a_{32}=3,\ a_{33}=1$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

011

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3a & 1 \\ -11 & 7a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -b & 3x+y \\ 2x-y & y \end{pmatrix}$에 대하여 $A=B$가 성립할 때, $a+b+x+y$의 값을 구하시오. (단, $a,\ b,\ x,\ y$는 상수이다.) 3

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$3a=-b$ …… ㉠, $1=3x+y$ …… ㉡

$-11=2x-y$ …… ㉢, $7a=y$ …… ㉣

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-2,\ y=7$

$y=7$을 ㉣에 대입하여 풀면 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=-3$

$\therefore\ a+b+x+y=1+(-3)+(-2)+7=3$

012 실력UP

등식 $\begin{pmatrix} 1 & a^2+b^2 \\ c-d & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ab & 4 \\ -2 & cd \end{pmatrix}$가 성립할 때, $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+c^2+d^2$의 값을 구하시오. 12

(단, $a,\ b,\ c,\ d$는 실수이다.)

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$1=ab$ …… ㉠, $a^2+b^2=4$ …… ㉡

$c-d=-2$ …… ㉢, $2=cd$ …… ㉣

㉠, ㉡에 의하여 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}=4$

㉢, ㉣에 의하여 $c^2+d^2=(c-d)^2+2cd=(-2)^2+2\times2=8$

$\therefore\ \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+c^2+d^2=4+8=12$

2 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배

01 행렬의 덧셈과 뺄셈

행렬끼리 계산할 수도 있다.
그런데 행렬의 덧셈과 뺄셈은 같은 꼴의 행렬끼리만 할 수 있다.

같은 꼴의 두 행렬은 행의 개수와 열의 개수가 각각 같다.

행렬의 덧셈은 같은 위치의 성분끼리 더한다.
행렬의 뺄셈은 같은 위치의 성분끼리 뺀다.

행렬의 덧셈과 뺄셈은 우리가 잘 아는 기호 $+$, $-$를 이용하여 간단하게 나타낼 수 있다.

행렬의 덧셈과 뺄셈

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여

(1) 덧셈: $A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$

(2) 뺄셈: $A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix}$

설명 $(1 \quad 1)+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=?$ ➡ 모양이 다르므로 계산할 수 없다.

●행렬의 덧셈과 뺄셈

013 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$에 대하여 $A+B$, $A-B$를 구하시오.

풍산자日 같은 위치의 성분끼리 계산한다.

풀이
$$A+B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5+4 & 3+7 \\ 4+1 & 2+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{10} \\ \mathbf{5} & \mathbf{10} \end{pmatrix}$$
$$A-B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5-4 & 3-7 \\ 4-1 & 2-8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-6} \end{pmatrix}$$

정답과 풀이 86쪽

유제 **014** 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 $A+B$, $A-B$를 구하시오.

$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

02 행렬의 덧셈에 대한 성질

행렬의 덧셈은 모양이 같은 행렬에서 같은 위치의 성분끼리 더하는 것.
수의 덧셈에서는 교환법칙과 결합법칙이 성립한다.
그렇다면 행렬의 덧셈에서도 교환법칙과 결합법칙이 성립할까? 성립한다.

행렬의 덧셈에 대한 성질 (1)
같은 꼴의 세 행렬 A, B, C에 대하여
(1) 교환법칙: $A+B=B+A$
(2) 결합법칙: $(A+B)+C=A+(B+C)$

개념확인

세 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.

(1) $A+B=B+A$

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

풀이 (1) $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$,

$B+A=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

$\therefore\ \boldsymbol{A+B=B+A}$

(2) $(A+B)+C=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\right\}+\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$

$A+(B+C)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\left\{\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$

$\therefore\ \boldsymbol{(A+B)+C=A+(B+C)}$

수의 연산에서는 아무리 더해도 원래 수가 그대로 나오는 수, 0이 있다.
행렬에도 이런 것이 존재한다. 영행렬이다.
영행렬이란 모든 성분이 0인 행렬.

영행렬
모든 성분이 0인 행렬을 영행렬이라 하고, O로 나타낸다.

설명 영행렬은 여러 가지 모양을 갖는다. $(0\quad 0)$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 등은 모두 영행렬이다.

어떤 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$의 모든 성분의 부호를 바꾼 행렬은 $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$이다.
모든 성분의 부호를 바꾸었으므로 모든 성분에 기호 $-$를 붙인 셈이다.
그래서 이 행렬은 $-A$로 나타낸다.

행렬 $-A$

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $-A=\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

행렬의 덧셈의 성질과 영행렬 O, 행렬 $-A$를 알고 있으니 자연스럽게 다음 내용도 이해할 수 있다.

행렬의 덧셈에 대한 성질(2)

행렬 A와 같은 꼴인 영행렬 O에 대하여

(1) $A+O=O+A=A$

(2) $A+(-A)=(-A)+A=O$

(3) $A+(-B)=A-B$

개념확인

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.

(단, O는 영행렬이다.)

(1) $A+O=O+A$ (2) $A+(-A)=(-A)+A=O$ (3) $A+(-B)=A-B$

풀이

(1) $A+O=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$O+A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $\boldsymbol{A+O=O+A}$

(2) $-A=\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}$이므로

$A+(-A)=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(-A)+A=\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $\boldsymbol{A+(-A)=(-A)+A=O}$

(3) $-B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$이므로

$A+(-B)=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $\boldsymbol{A+(-B)=A-B}$

●행렬의 덧셈과 뺄셈의 혼합 계산

015 세 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $A+B-C$ (2) $A-B+C$

풍산자日 덧셈과 뺄셈이 섞여 있는 식은 앞에서부터 차례대로 계산한다.

풀이 (1) $A+B-C=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{11} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

(2) $A-B+C=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{-13} \end{pmatrix}$

정답과 풀이 **86**쪽

유제 **016** 세 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $A-B-C$ $\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$ (2) $A+(C-B)$ $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$

●행렬의 덧셈에 대한 성질

017 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 만족시키는 행렬 X를 구하시오. (단, O는 영행렬이다.)

(1) $A+X=B$ (2) $X+A=O$

풍산자日 주어진 등식을 X에 대한 식으로 정리한 후, A, B를 대입한다.

풀이 (1) $A+X=B$의 양변에서 A를 빼면

$X=B-A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{-7} \end{pmatrix}$

(2) $X+A=O$의 양변에서 A를 빼면

$X=O-A=-A=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$

정답과 풀이 **86**쪽

유제 **018** 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 만족시키는 행렬 X를 구하시오.

(단, O는 영행렬이다.)

(1) $X+A=B$ $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $X+B=-A$ $\begin{pmatrix} -10 & -6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

(3) $X+B=O$ $\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (4) $X-B=A$ $\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$

03 행렬의 실수배

행렬의 계산에는 덧셈과 뺄셈 이외에도 실수배, 곱셈이 있다.
행렬의 실수배는 실수를 행렬의 각 성분에 곱하는 싱거운 곱셈.

행렬의 실수배

실수 k에 대하여 행렬 A의 각 성분에 k를 곱한 수를 성분으로 하는 행렬을 행렬 A의 실수배라 하고, kA로 나타낸다. 즉, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$와 실수 k에 대하여

$$kA=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

개념확인

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 $2A$, $-3A$를 구하시오.

풀이 $2A=2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$, $-3A=-3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-12} \end{pmatrix}$

행렬의 덧셈과 마찬가지로 실수배에도 성질이 있다.

행렬의 실수배에 대한 성질

같은 꼴의 두 행렬 A, B와 실수 k, l에 대하여

(1) $1A=A$, $(-1)A=-A$

(2) $0A=O$, $kO=O$ (단, O는 영행렬이다.)

(3) 결합법칙: $(kl)A=k(lA)$

(4) 분배법칙: $(k+l)A=kA+lA$, $k(A+B)=kA+kB$

개념확인

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.

(1) $6A=3(2A)$

(2) $3(A+B)=3A+3B$

풀이 (1) $6A=6\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 30 & 18 \\ 60 & 42 \end{pmatrix}$, $3(2A)=3\left\{2\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}\right\}=3\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 20 & 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 30 & 18 \\ 60 & 42 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $\mathbf{6A=3(2A)}$

(2) $3(A+B)=3\left\{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}=3\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 33 & 27 \end{pmatrix}$

$3A+3B=3\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 30 & 21 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 33 & 27 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $\mathbf{3(A+B)=3A+3B}$

大 원칙 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배는 수와 식처럼 계산한다.

019 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $2A+B$ (2) $2(2A-3B)$

풍산자비 주어진 식을 간단히 한 후, 행렬 A, B를 대입하여 계산한다.

풀이 (1) $2A+B=2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-9} \end{pmatrix}$

(2) $2(2A-3B)=4A-6B=4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}-6\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -12 & -8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 12 & -30 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{-14} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-24} & \mathbf{22} \end{pmatrix}$

정답과 풀이 87쪽

유제 **020** 세 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $3A-B$ (2) $A+3C-2B$

(3) $2(A+2C)$ (4) $3(2A+B)-2(B-C)$

(1) $\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 5 & -22 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ -19 & -11 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 16 & 6 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 19 & -14 \\ 25 & -30 \end{pmatrix}$

021 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 $X-B=2(A-B)+A+3B$를 만족시키는 행렬 X를 구하시오.

풍산자비 주어진 식을 정리하여 X를 행렬 A, B로 나타낸 후, 행렬 X를 구한다.

풀이 $X-B=2(A-B)+A+3B$에서

$X=2A-2B+A+4B=3A+2B$

$=3\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & -10 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{-10} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-10} \end{pmatrix}$

정답과 풀이 87쪽

유제 **022** 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 $A-2(B+X)=O$를 만족시키는 행렬 X를 구하시오. (단, O는 영행렬이다.) $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

023 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$에 대하여 $X+Y=3A$, $X-Y=2B$를 만족시킬 때, 행렬 X, Y를 구하시오.

풍산자Ⓣ 주어진 식을 연립하여 행렬 X, Y를 각각 행렬 A, B로 나타낸 후 연산한다.

풀이 $X+Y=3\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & -6 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$ …… ㉠, $X-Y=2\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $2X=\begin{pmatrix} 18 & -6 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 24 & 4 \\ 14 & -14 \end{pmatrix}$ $\therefore$ $\boldsymbol{X=\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}}$

㉠−㉡을 하면 $2Y=\begin{pmatrix} 18 & -6 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & -16 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$ $\therefore$ $\boldsymbol{Y=\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}$

정답과 풀이 **87**쪽

유제 **024** 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 $2X+Y=A$, $X-Y=3B$를 만족시킬 때, 행렬 X, Y를 구하시오. $X=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

025 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$을 $xA+yB$의 꼴로 나타내시오.

(단, x, y는 실수이다.)

풍산자Ⓣ 두 행렬 A, B의 성분과 x, y를 이용하여 행렬 $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$의 성분을 나타낸다.

풀이 $xA+yB=\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$에서 $x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2y \\ 3y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x-2y \\ 2x+3y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여 $x-2y=7$, $2x+3y=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=-2$

$\therefore$ $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}=\boldsymbol{3A-2B}$

정답과 풀이 **87**쪽

유제 **026** 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$을 $xA+yB$의 꼴로 나타내시오. (단, x, y는 실수이다.) $-A+3B$

+ 풍산자 비법

행렬의 덧셈에서는 교환법칙과 결합법칙이 성립하고, 행렬의 실수배에서는 결합법칙과 분배법칙이 성립한다.

필수 확인 문제

정답과 풀이 88쪽

027

다음을 계산하시오.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -3 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -2 & 0 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$

(2) $(3 \quad 3 \quad -8)+(-1 \quad 2 \quad 2)-(6 \quad 7 \quad -4)$ $(-4 \quad -2 \quad -2)$

(3) $3\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 7 & -14 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$

(4) $4\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 22 \\ 7 \end{pmatrix}$

(3) $3\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & -12 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -14 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$

(4) $4\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 22 \\ 7 \end{pmatrix}$

028

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 $X-4A+B=3(B-A-X)$를 만족시키는 행렬 X를 구하시오. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$X-4A+B$

$=3(B-A-X)$에서 $4X=A+2B$

$\therefore X=\frac{1}{4}A+\frac{1}{2}B=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

029

등식 $\begin{pmatrix} 2 & x \\ -1 & 4 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & y \\ y & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 14 \\ 11 & -5 \end{pmatrix}$를 만족시키는 상수 x, y에 대하여 $x-y$의 값을 구하시오. 6

$\begin{pmatrix} -1 & x-3y \\ -1-3y & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 14 \\ 11 & -5 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x-3y=14$, $-1-3y=11$

두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-4$

$\therefore x-y=2-(-4)=6$

030

두 이차정사각행렬 A, B에 대하여

$$A-3B=\begin{pmatrix} -7 & 14 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}, \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$$3A+2B=\begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -10 & 13 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

일 때, 행렬 $A+B$의 $(2,\ 1)$ 성분을 구하시오. -3

$2\times$㉠$+3\times$㉡을 하면 $11A=\begin{pmatrix} 22 & 55 \\ -44 & 33 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

㉠에서 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}-3B=\begin{pmatrix} -7 & 14 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore B=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore A+B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A+B$의 $(2,\ 1)$ 성분은 -3이다.

031

세 행렬

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 6 \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

에 대하여 $xA-yB=-2C$를 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오. $x=3$, $y=5$

$x\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}-y\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 6 \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2x-y & x-3y \\ -y & -x-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -12 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여 $2x-y=1$, $-y=-5$

$\therefore x=3$, $y=5$

032 실력UP

등식

$$\begin{pmatrix} a^3 & ab \\ a & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b^3 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

이 성립할 때, x의 값을 구하시오. 45

(단, a, b, x는 실수이다.)

$\begin{pmatrix} a^3-b^3 & ab \\ a-b & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a^3-b^3=x$, $ab=2$, $a-b=3$

$\therefore x=a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=3^3+3\times2\times3=45$

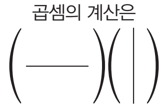
3 행렬의 곱셈

01 행렬의 곱셈

행렬의 계산은 네 가지. 덧셈, 뺄셈, 실수배, 그리고 곱셈이다.
행렬의 곱셈도 같은 위치의 성분끼리 곱하면 될까? 절대 안 된다.
행렬의 곱셈의 규칙은 행과 열을 곱하는 것.

$$\begin{array}{c} \text{1행} \\ \text{2행} \end{array}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{1열} & \text{2열} \end{array} \\ \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} \end{array} = \left(\begin{array}{c|c} \text{1행}\times\text{1열} & \text{1행}\times\text{2열} \\ \hline \text{2행}\times\text{1열} & \text{2행}\times\text{2열} \end{array}\right)$$

곱셈의 계산은

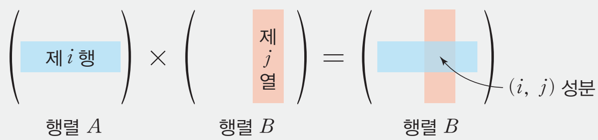


와 같이 선을 그어 행과 열을 곱하자.

이때 행렬 A와 B의 곱은 기호 AB로 나타낸다.
행렬과 행렬이라면 무조건 곱셈을 할 수 있을까? 그렇지는 않다.
행렬의 곱셈은 행과 열을 곱하는 것이므로 두 행렬 A, B의 곱 AB는 행렬 A의 열의 개수와 행렬 B의 행의 개수가 같을 때에만 정의된다.

(1) 행렬의 곱셈

두 행렬 A, B에 대하여 행렬 A의 열의 개수와 행렬 B의 행의 개수가 같을 때, 행렬 A의 제i행의 성분과 행렬 B의 제j열의 성분을 각각 차례대로 곱하여 더한 값을 $(i,\ j)$ 성분으로 하는 행렬을 두 행렬 A, B의 곱이라 하고, 기호 AB로 나타낸다.



(2) 행렬 A가 $m\times n$ 행렬, 행렬 B가 $n\times l$ 행렬이면 행렬 AB는 $m\times l$ 행렬이다. 중요

$(m\times \underbrace{n \text{ 행렬})\times(n}_{\text{같다}}\times l \text{ 행렬}) \Rightarrow m\times l \text{ 행렬}$

설명 행렬의 곱셈은 수나 문자의 곱셈과 방법이 다르다.

참고 **행렬의 곱의 계산**

(1) $(a \quad b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(ax+by)$

(2) $(a \quad b)\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}=(ax+by \quad au+bv)$

(3) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(x \quad y)=\begin{pmatrix} ax & ay \\ bx & by \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by & au+bv \\ cx+dy & cu+dv \end{pmatrix}$

033 세 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C=(3 \quad 3)$에 대하여 행렬의 곱을 구할 수 없는 것만을 보기에서 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. AB ㄴ. AC ㄷ. BC ㄹ. BA ㅁ. CA ㅂ. CB

풍산자답 두 행렬 A, B의 곱은 행렬 A의 열의 개수와 행렬 B의 행의 개수가 같을 때에만 정의된다.

풀이 행렬 A는 2×2 행렬, 행렬 B는 2×1 행렬, 행렬 C는 1×2 행렬이다. 따라서 행렬의 곱이 정의되는 것은 AB, BC, CA, CB이므로 행렬의 곱을 구할 수 없는 것은 ㄴ, ㄹ이다.

정답과 풀이 89쪽

유제 **034** 세 행렬 $A=(4 \quad 0 \quad 0)$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬의 곱을 구할 수 있는 것만을 보기에서 있는 대로 고르시오. ㄱ, ㄹ, ㅂ

보기

ㄱ. AB ㄴ. AC ㄷ. BC ㄹ. BA ㅁ. CA ㅂ. CB

035 다음을 계산하시오.

(1) $(1 \quad 4)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}(1 \quad 2)$ (3) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

풍산자답 행렬 A의 제i행의 성분과 행렬 B의 제j열의 성분을 각각 차례대로 곱하여 더한다.

풀이 (1) $(1 \quad 4)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}=(1\times2+4\times2)=\mathbf{(10)}$

(2) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}(1 \quad 2)=\begin{pmatrix} 4\times1 & 4\times2 \\ -2\times1 & -2\times2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\times2+(-1)\times(-2) & 4\times2+(-1)\times3 \\ 1\times2+3\times(-2) & 1\times2+3\times3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{11} \end{pmatrix}$

정답과 풀이 89쪽

유제 **036** 다음을 계산하시오.

(1) $(1 \quad 1)\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$(5 \quad 9)$ $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 24 & -6 \end{pmatrix}$

037 등식 $\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 19 \\ x & y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 0 & -x \end{pmatrix}$가 성립하도록 하는 양의 실수 x, y의 값을 구하시오. (단, $x<y$)

풍산자비 양변을 각각 계산하여 행렬이 서로 같을 조건을 이용한다.

풀이 $\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xy & x^2+y^2 \\ x & x+y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 19 \\ x & y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 0 & -x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 29 \\ x & x+y \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여 $xy=10$, $x^2+y^2=29$이므로

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=29+20=49$

$\therefore x+y=7$ ($\because x>0, y>0$)

$x+y=7$에서 $y=-x+7$이므로 $xy=10$에 대입하면

$x(-x+7)=10$, $x^2-7x+10=0$, $(x-2)(x-5)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=5$

따라서 $x<y$이므로 $\boldsymbol{x=2}$, $\boldsymbol{y=5}$이다.

정답과 풀이 **89**쪽

유제 **038** 등식 $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -1 \\ y & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 4x \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -x \end{pmatrix}$가 성립하도록 하는 실수 x, y의 값을 구하시오. $x=-1$, $y=4$

039 이차정사각행렬 A에 대하여 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$일 때, $A\begin{pmatrix} -3x+2a \\ -3y+2b \end{pmatrix}$를 구하시오.

풍산자비 주어진 행렬에 대한 두 등식을 변형한다.

풀이 [1단계] $\begin{pmatrix} -3x+2a \\ -3y+2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3x \\ -3y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

[2단계] $\therefore A\begin{pmatrix} -3x+2a \\ -3y+2b \end{pmatrix}=A\left\{-3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\}=-3A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+2A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$=-3\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{-7} \end{pmatrix}$

정답과 풀이 **89**쪽

유제 **040** 이차정사각행렬 A에 대하여 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$일 때, $A\begin{pmatrix} 3x-a \\ 3y-b \end{pmatrix}$를 구하시오. $\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$

02 행렬의 거듭제곱

실수 x에 대하여 $x\times x$는 거듭제곱을 이용하여 x^2으로 표현할 수 있다.
행렬도 마찬가지로 행렬 A가 정사각행렬이면

$AA=A^2,\ AAA=A^3,\ \cdots$

과 같이 쓴다.

행렬의 거듭제곱

정사각행렬 A와 두 자연수 m, n에 대하여

(1) $A^2=AA,\ A^3=A^2A,\ \cdots,\ A^{n+1}=A^nA$

(2) $A^mA^n=A^{m+n},\ (A^m)^n=A^{mn}$

참고 행렬의 거듭제곱은 행렬 중에서 정사각행렬에만 쓸 수 있는 표현이다.

●행렬의 거듭제곱

041 다음과 같은 행렬 A에 대하여 A^{10}을 구하시오.

(1) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

풍산자팁 $A^2=AA,\ A^3=A^2A,\ \cdots$를 차례대로 구하여 A^{10}을 추정한다.

풀이 (1) $A^2=AA=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=-A$

$\therefore\ A^{10}=A^4A^4A^2=(-A)(-A)A^2=A^4=-A=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

(2) $A^2=AA=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

즉, $A^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (n은 자연수)이므로 $A^{10}=\begin{pmatrix} \mathbf{1024} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

정답과 풀이 89쪽

유제 **042** 다음 물음에 답하시오.

(1) 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^n=\begin{pmatrix} 1 & -24 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오. 12

(2) 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 729 \end{pmatrix}$를 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오. 6

03 단위행렬

수의 연산에서는 아무리 곱해도 원래 수가 그대로 나오는 수, 1이 있다.
수에 1이 있다면 행렬에는 단위행렬이 있다.

기호 E로 나타내는 단위행렬은 오른쪽 아래로 향하는 대각선의 숫자가 모두 1이고, 대각선 밖의 숫자가 모두 0인 n차 정사각행렬이다.

일차단위행렬	이차단위행렬	삼차단위행렬
(1)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

단위행렬은 수의 곱셈에서의 1과 같다.
n차 정사각행렬 A와 n차 단위행렬 E에 대하여 $AE=EA=A$가 성립한다.

단위행렬

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$과 같이 왼쪽 위에서 오른쪽 아래로 내려가는 대각선 위의 성분이 모두 1이고, 그 외의 성분은 모두 0인 n차 정사각행렬을 n차 단위행렬이라 한다.

참고

- 단위행렬은 정사각행렬에 대해서만 정의된다.
- $AE=EA=A$가 성립하므로 $A=E$일 때, $E^2=E$, $E^3=E^2E=EE=E$, $E^4=E^3E=EE=E$, $\cdots$, $E^n=E$

●단위행렬의 계산

043 단위행렬 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $E+E^2+E^3$

(2) $E^{100}+(-E)^{100}$

풍산자비 $E^2=E$, $E^3=E$, $E^4=E$, $\cdots$임을 이용한다.

풀이 (1) $E^2=E$, $E^3=E$이므로

$$E+E^2+E^3=E+E+E=3E=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) $E^{100}=E$이므로

$$E^{100}+(-E)^{100}=E^{100}+E^{100}=E+E=2E=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

정답과 풀이 90쪽

유제 **044** 단위행렬 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $E+2E^2+3E^3+4E^4+5E^5$ $\begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$

(2) $E^{49}+E^{50}+(-E)^{51}+(-E)^{52}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

04 행렬의 곱셈의 실생활

단골 질문. 행렬은 어디서 왔다? 연립방정식에서.
행렬은 연립방정식을 간단하게 나타낼 수 있게 해 준다.
즉, 실생활 속의 자료를 행렬로 나타내면 상황을 더욱 쉽게 파악할 수 있다.

●행렬의 곱셈의 실생활에의 활용

045 오른쪽 표는 과자 세트 P, Q에 들어 있는 쿠키와 사탕의 개수를 나타낸 것이다. 쿠키는 한 개에 1500원, 사탕은 한 개에 500원일 때, 행렬 $A=\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $C=(1500\quad 500)$, $D=\begin{pmatrix} 1500 \\ 500 \end{pmatrix}$ 에 대하여 과자 세트 P의 가격을 나타내는 것은?

(단위: 개)

	쿠키	사탕
과자 세트 P	5	5
과자 세트 Q	8	2

① 행렬 AD의 $(1,\ 1)$ 성분 ② 행렬 AD의 $(2,\ 1)$ 성분
③ 행렬 BD의 $(1,\ 1)$ 성분 ④ 행렬 BD의 $(2,\ 1)$ 성분
⑤ 행렬 CA의 $(1,\ 1)$ 성분

풍산자티 계산해야 하는 것을 식으로 나타낸 후, 행렬의 곱셈에서 각 성분이 의미하는 것을 파악한다.

풀이 과자 세트 P의 가격은 $5\times1500+5\times500$이다.

이때 $AD=\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1500 \\ 500 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\times1500+5\times500 \\ 8\times1500+2\times500 \end{pmatrix}$이므로

과자 세트 P의 가격은 ① 행렬 AD의 $(1,\ 1)$ 성분과 같다.

정답과 풀이 90쪽

유제 **046** [표 1]은 두 가구 P, Q를 만드는 데 필요한 나사와 못의 개수를 나타낸 것이고, [표 2]는 나사와 못의 한 개당 가격을 나타낸 것이다.

(단위: 개)

	나사	못
가구 P	a	b
가구 Q	c	d

[표 1]

(단위: 원)

	가격
나사	e
못	f

[표 2]

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 AB의 $(2,\ 1)$ 성분이 의미하는 것은?

① 가구 P를 만들 때 필요한 나사와 못을 구입하는 금액
② 가구 Q를 만들 때 필요한 나사와 못을 구입하는 금액
③ 두 가구 P, Q를 만들 때 필요한 나사를 구입하는 금액
④ 두 가구 P, Q를 만들 때 필요한 못을 구입하는 금액
⑤ 두 가구 P, Q를 만들 때 필요한 나사와 못을 구입하는 금액

05 행렬의 곱셈에 대한 성질

행렬의 곱셈의 정의는 우리가 지금까지 배웠던 곱셈과는 다르다.
그 성질 또한 남다르다.

행렬의 곱셈에 대한 성질

합과 곱이 가능한 세 행렬 A, B, C에 대하여

(1) $\boldsymbol{AB \neq BA}$ 중요

(2) 결합법칙: $(AB)C=A(BC)$

(3) 분배법칙: $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

(4) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$ (단, k는 실수이다.)

가장 충격적인 것은 교환법칙이 성립하지 않는다는 것.
교환법칙은 성립하지 않지만 결합법칙, 분배법칙은 성립한다.
이로 인해 우리가 알고 있었던 당연한 공식들이 무너지고 기묘한 현상들이 나타난다.
이것을 파악하는 것이 행렬의 곱셈에서의 핵심.

설명

- 영행렬이 아닌 두 행렬을 곱해도 영행렬이 될 수 있다.
  즉, '$AB=O$이면 $A=O$ 또는 $B=O$'는 틀린 말이다.
- $AB \neq BA$ 때문에 곱셈 공식과 지수법칙이 통하지 않는다.
  $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2 \neq A^2+2AB+B^2$
  $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2 \neq A^2-B^2$
  $(AB)^2=(AB)(AB)=A(BA)B \neq A^2B^2=(AA)(BB)=A(AB)B$

참고

- $(AB)C$와 $A(BC)$를 간단히 ABC로 나타낼 수 있다.
- $AB=BA$가 성립하면 곱셈 공식과 지수법칙이 모두 성립한다.
- $AO=OA$, $AE=EA$이므로 영행렬 O와 단위행렬 E는 그 어떤 행렬과 곱하더라도 곱셈 공식과 지수법칙을 이용할 수 있다.

개념확인

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 보이시오.

(1) $AB \neq BA$ (2) $(AB)C=A(BC)$

풀이 (1) $AB=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore\ \boldsymbol{AB \neq BA}$

(2) $(AB)C=\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A(BC)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore\ \boldsymbol{(AB)C=A(BC)}$

047 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ x & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} y & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 $AB=O$가 성립하도록 하는 실수 x, y의 값을 구하시오. (단, O는 영행렬이다.)

풍산자a 행렬에서는 영행렬이 아닌 두 행렬을 곱해도 영행렬이 될 수 있으므로 반드시 곱셈을 직접 한다.

풀이 $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2y-6 & 0 \\ xy-3 & x-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여 $2y-6=0$, $xy-3=0$, $x-1=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=1}$, $\boldsymbol{y=3}$

정답과 풀이 90쪽

유제 **048** 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} x & -4 \\ -2 & y \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & x \\ y & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 $AB=O$가 성립하도록 하는 양수 x, y의 값을 구하시오. (단, O는 영행렬이다.) $x=4$, $y=2$

● $AB\neq BA$인 행렬의 계산 (1)

049 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A+B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$일 때, 행렬 A^2-B^2을 구하시오.

풍산자a 일반적으로 $AB\neq BA$이고 $(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$임에 유의한다.

풀이 $2A=(A+B)+(A-B)=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore A=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

$2B=(A+B)-(A-B)=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$\therefore A^2-B^2=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 28 & -6 \\ -18 & 13 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 26 \end{pmatrix}=\boldsymbol{\begin{pmatrix} 18 & -14 \\ -26 & -13 \end{pmatrix}}$

정답과 풀이 90쪽

유제 **050** 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A+B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$일 때, 행렬 $A^2+2AB+B^2$을 구하시오. $\begin{pmatrix} 6 & -10 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$

051 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A^2+AB+BA+B^2$을 구하시오.

풍산자단 분배법칙을 이용하여 식을 공통인수로 묶으면 계산이 쉬워진다.
이때 곱해진 행렬의 순서는 바꾸지 않도록 주의한다.

풀이 $A^2+AB+BA+B^2=A(A+B)+B(A+B)$
$=(A+B)(A+B)=(A+B)^2$

$A+B=\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$이므로

$A^2+AB+BA+B^2=(A+B)^2$
$=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{9} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{13} \end{pmatrix}$

정답과 풀이 **90**쪽

유제 **052** 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A^2-AB+BA-B^2$의 $(1, 2)$ 성분을 구하시오. -1

053 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$이 성립할 때, 실수 k의 값을 구하시오.

풍산자단 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$이 성립한다. ➡ $AB=BA$가 성립한다!

풀이 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$이면 $AB=BA$이므로

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & k+2 \\ 3 & 2k-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2k & 1-k \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$1+2k=0 \qquad \therefore k=-\dfrac{1}{2}$

정답과 풀이 **91**쪽

유제 **054** 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ x & y \end{pmatrix}$에 대하여 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$이 성립할 때, 실수 x, y에 대하여 $x-y$의 값을 구하시오. 7

055 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$과 이차단위행렬 E에 대하여 행렬 $A^2+AE+EA+E^2$을 구하시오.

풍산자⊟ 행렬 A와 단위행렬 E에 대하여 $AE=EA$가 성립한다.

풀이 단위행렬 E에 대하여 $AE=EA$이므로

$$\begin{aligned} A^2+AE+EA+E^2 &= A(A+E)+E(A+E) \\ &= (A+E)^2 \\ &= \left\{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\left\{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{14} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

정답과 풀이 **91**쪽

유제 **056** 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$과 이차단위행렬 E에 대하여 행렬 $(A+E)(A^2-A+E)$를 구하시오.

$\begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}$

057 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A+B=E$, $AB=O$일 때, A^2+B^2을 구하시오.
(단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

풍산자⊟ 주어진 식에 행렬 A, B를 각각 곱하면 원하는 조건이 나온다.

풀이 $A+B=E$의 양변의 왼쪽에 A를 곱하면

$AA+AB=AE$, $A^2+AB=A$, $A^2+O=A$

$\therefore A^2=A$

또, $A+B=E$의 양변의 오른쪽에 B를 곱하면

$AB+BB=EB$, $AB+B^2=B$, $O+B^2=B$

$\therefore B^2=B$

$\therefore A^2+B^2=A+B=E=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

정답과 풀이 **91**쪽

유제 **058** 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A+B=-3E$, $AB=O$일 때, A^3+B^3을 구하시오.
(단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

$\begin{pmatrix} -27 & 0 \\ 0 & -27 \end{pmatrix}$

06 케일리－해밀턴 정리

한걸음 더

행렬의 거듭제곱에 대한 문제를 풀 때, 과정을 깔끔하게 만들어 주는 도구를 알아보자.

케일리－해밀턴 정리

세 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

증명 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

참고 $A^2-pA+qE=O$ (p, q는 실수)를 만족시키는 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $a+d=p$, $ad-bc=q$가 항상 성립하는 것은 아니다. (단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

예를 들어 $A^2-A-2E=O$은 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$일 때 성립하지만, $a+d=4\neq1$, $ad-bc=4\neq-2$이다.

● 케일리－해밀턴 정리

059 **행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^3-A^2-6A+3E=xA+yE$를 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.)**

풍산자티 케일리－해밀턴 정리를 이용하여 고차식의 행렬을 낮은 차수로 변형할 수 있다.

풀이 케일리－해밀턴 정리에 의하여 $A^2-3A+E=O$이므로

$A^2=3A-E$, $A^3=A^2A=3A^2-A=3(3A-E)-A=8A-3E$

$\therefore$ $A^3-A^2-6A+3E=8A-3E-3A+E-6A+3E=-A+E$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=-1}$, $\boldsymbol{y=1}$

정답과 풀이 91쪽

유제 **060** **행렬 $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^5+A^4+A^3+A^2+A=xA+yE$를 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.)** $x=0$, $y=-1$

+ 풍산자 비법

- 곱셈의 계산은 $(\text{—})(|)$을 생각하여 행과 열을 곱한다.
- 행렬의 곱셈은 교환법칙이 통하지 않으므로 곱셈 공식과 지수법칙을 적용할 때 주의한다.

필수 확인 문제

정답과 풀이 92쪽

061

보기에서 행렬의 곱셈이 가능한 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $(1\ \ 2)(-1\ \ -2)$ ㄴ. $(1\ \ 2)\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

ㄷ. $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ \ 1)$ ㄹ. $\begin{pmatrix}-5&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\-9\end{pmatrix}$

ㅁ. $\begin{pmatrix}3&3&-1\\1&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\-4&1\end{pmatrix}$

① ㄱ, ㄷ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄹ
● ④ ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㅁ

ㄴ. 1×2 행렬과 2×1 행렬이므로 곱셈이 가능하다.
ㄷ. 2×1 행렬과 1×2 행렬이므로 곱셈이 가능하다.
ㄹ. 2×2 행렬과 2×1 행렬이므로 곱셈이 가능하다.

062

등식 $\begin{pmatrix}2&a\\4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&b\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6\\c&d\end{pmatrix}$를 만족시키는 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하시오. 9

$\begin{pmatrix}2&a\\4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&b\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6\\c&d\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}2a&2b+a\\-2&4b-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6\\c&d\end{pmatrix}$이므로

$2a=4,\ 2b+a=6,\ -2=c,\ 4b-1=d$

$\therefore\ a=2,\ b=2,\ c=-2,\ d=7$ $\quad\therefore\ a+b+c+d=9$

063

행렬 $A=\begin{pmatrix}-2&3\\-1&1\end{pmatrix}$에 대하여 A^{33}의 모든 성분의 합을 구하시오. 2

$A^2=\begin{pmatrix}-2&3\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3\\1&-2\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&-3\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$

$\therefore\ A^{33}=(A^3)^{11}=E^{11}=E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

따라서 A^{33}의 모든 성분의 합은 $1+0+0+1=2$

064

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&a\\1&1\end{pmatrix}$에 대하여 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$이 성립할 때, 행렬 A^5B^5을 구하시오. $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$이면 $AB=BA$이므로

$\begin{pmatrix}-1&-a+2\\0&a-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+a&6-3a\\0&-1\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여 $-1=-3+a$ $\quad\therefore\ a=2$

이때 $AB=-E$이므로

$A^5B^5=-E=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

065

두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A+B=O$, $AB=E$가 성립할 때, 다음 중 행렬 $A^{99}+B^{100}$과 같은 것은? (단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

① E ② $-E$ ③ $A+E$
● ④ $-A+E$ ⑤ $-A-E$

$A+B=O$에서 $A^2+AB=O,\ A^2+E=O$ $\quad\therefore\ A^2=-E$

또, $A+B=O$에서 $AB+B^2=O,\ E+B^2=O$ $\quad\therefore\ B^2=-E$

따라서

$A^{99}=A(A^2)^{49}=A(-E)^{49}=-AE=-A$

$B^{100}=(B^2)^{50}=(-E)^{50}=E$

이므로

$A^{99}+B^{100}=-A+E$

066 실력UP

이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 근을 α, β라 하자. 행렬 $A=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\beta&\alpha\end{pmatrix}$에 대하여 $A^2=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$일 때, $a-b$의 값을 구하시오. 8

(단, a, b, c, d는 상수이다.)

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=2$

$\therefore\ A^2=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\beta&\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\beta&\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta^2&2\alpha\beta\\2\alpha\beta&\alpha^2+\beta^2\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여 $a=\alpha^2+\beta^2,\ b=2\alpha\beta$

$\therefore\ a-b=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=4^2-4\times2=8$

중단원 마무리

◆ 행렬

행렬	① 행렬: 여러 개의 수 또는 문자를 직사각형 모양으로 배열하여 괄호로 묶어 나타낸 것 ② 성분: 행렬을 구성하고 있는 각각의 수 또는 문자 ③ (i, j) 성분: 행렬 A에서 제i행과 제j열이 만나는 위치에 있는 성분 a_{ij}
서로 같은 행렬	두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여 ① $A=B$이면 $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$ ② $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$이면 $A=B$

◆ 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배

행렬의 덧셈과 뺄셈	두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여 $A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$ $A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix}$
행렬의 실수배	행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$와 실수 k에 대하여 $kA=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$

◆ 행렬의 곱셈

행렬의 곱셈	두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여 $AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$
행렬의 거듭제곱	A가 정사각행렬이고, m, n이 자연수이면 ① $A^2=AA$, $A^3=A^2A$, $\cdots$, $A^{n+1}=A^nA$ ② $A^mA^n=A^{m+n}$, $(A^m)^n=A^{mn}$
단위행렬	행렬 A와 단위행렬 E에 대하여 ① $AE=EA=A$ ② $E^2=E$, $E^3=E$, $E^4=E$, $\cdots$, $E^n=E$ (단, n은 자연수이다.)

실전 연습문제

STEP 1

067

행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij}가

$$a_{ij}=3i-j+a\ (i=1,\ 2,\ 3,\ j=1,\ 2)$$

일 때, $A=\begin{pmatrix}4 & x\\ y & 6\\ 10 & z\end{pmatrix}$이다. $x+y+z$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) 19

$a_{11}=3\times1-1+a=4$이므로 $a=2$

따라서 $x=a_{12}=3\times1-2+2=3$

$y=a_{21}=3\times2-1+2=7,\ z=a_{32}=3\times3-2+2=9$

이므로 $x+y+z=3+7+9=19$

068 ● 교육청 기출

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$에 대하여

$A+X=3B+2X$를 만족시키는 행렬 X는?

① $\begin{pmatrix}5 & -3\\ 9 & 11\end{pmatrix}$ ● ② $\begin{pmatrix}-5 & 3\\ -9 & -11\end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix}5 & 3\\ -9 & -11\end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix}-5 & 3\\ -9 & 11\end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix}-5 & -3\\ 9 & -11\end{pmatrix}$

$A+X=3B+2X$에서 $-X=3B-A$

$\therefore\ X=A-3B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & -3\\ 12 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ -9 & -11\end{pmatrix}$

069

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$에 대하여

$\underset{㉠}{\underline{X-Y=2A-5B}},\ \underset{㉡}{\underline{X+2Y=5A+4B}}$일 때,

행렬 $X+Y$의 $(1,\ 2)$ 성분을 구하시오. 7

㉡$-$㉠을 하면 $3Y=3A+9B$ $\quad\therefore\ Y=A+3B$

이를 ㉠에 대입하면 $X=3A-2B$

$\therefore\ X+Y=(3A-2B)+(A+3B)=4A+B$

$=4\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 12 & 14\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $X+Y$의 $(1,\ 2)$ 성분은 7이다.

070

세 행렬

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5 & a\\ b & 2\end{pmatrix}$$

에 대하여 실수 $x,\ y$가 $xA+yB=C$를 만족시킬 때, $a+b+x+y$의 값을 구하시오. 9

(단, $a,\ b$는 상수이다.)

$xA+yB=C$에서

$\begin{pmatrix}3x-y & -x+4y\\ x+2y & 2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & a\\ b & 2\end{pmatrix}$

$3x-y=5,\ 2y=2$ $\quad\therefore\ x=2,\ y=1$

$-x+4y=a$에서 $a=2,\ x+2y=b$에서 $b=4$

$\therefore\ a+b+x+y=2+4+2+1=9$

071

등식 $\begin{pmatrix}x & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a\\ 7 & -5\end{pmatrix}$가 성립하도록 하는 상수 a의 값을 구하시오. -3

주어진 등식에서 $\begin{pmatrix}x-2 & xy+1\\ 7 & y-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a\\ 7 & -5\end{pmatrix}$

$x-2=0,\ xy+1=a,\ y-3=-5$

따라서 $x=2,\ y=-2$이므로 $a=xy+1=2\times(-2)+1=-3$

072

행렬 $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ b & -1\end{pmatrix}$이 $\underset{=A^2-E}{\underline{(A+E)(A-E)}}=E$를 만족시킬 때, 상수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.) 2

$A^2-E=E$에서 $A^2=2E$

$\begin{pmatrix}a & 1\\ b & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 1\\ b & -1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a^2+b & a-1\\ ab-b & b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

$a-1=0,\ b+1=2$ $\quad\therefore\ a=1,\ b=1$

$\therefore\ a+b=1+1=2$

073

행렬 $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -5 & -3\end{pmatrix}$에 대하여 $A^{50}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -6\end{pmatrix}$일 때, xy의 값을 구하시오. (단, $x,\ y$는 상수이다.) -18

$A^2=AA=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E$이므로 $A^{50}=(-E)^{25}=-E$

$A^{50}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -6\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}-x\\ -y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -6\end{pmatrix}$

$-x=3,\ -y=-6$ $\quad\therefore\ x=-3,\ y=6$

$\therefore\ xy=-3\times6=-18$

074

이차정사각행렬 A에 대하여

$A\begin{pmatrix}2a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}-3a\\-2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$가 성립할 때,

다음 중 행렬 $A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$와 같은 행렬은?

① $\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}$ ● ③ $\begin{pmatrix}-2\\-7\end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}2a\\b\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}-3a\\-2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}-a\\-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$, $-A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$ $\therefore A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-7\end{pmatrix}$

075

어느 고등학교에서 1학년과 2학년 학생을 대상으로 선호하는 간식을 조사하였다. 두 학년 모두 [표 1]과 같이 남학생의 60 %는 빵을, 40 %는 음료수를 선호하였고, 여학생의 35 %는 빵을, 65 %는 음료수를 선호하였다. [표 2]는 1학년과 2학년의 남학생과 여학생 수를 나타낸 것이다.

(단위: %)

	남학생	여학생
빵	60	35
음료수	40	65

[표 1]

(단위: 명)

	1학년	2학년
남학생	350	300
여학생	300	280

[표 2]

[표 1]과 [표 2]를 각각 행렬

$A=\begin{pmatrix}0.6 & 0.35\\0.4 & 0.65\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}350 & 300\\300 & 280\end{pmatrix}$으로 나타낼 때, $AB=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$라 하자. 2학년에서 음료수를 선호하는 학생 수를 나타낸 것은?

① a ② b ③ c

● ④ d ⑤ $c+d$

2학년에서 음료수를 선호하는 학생 수는 $0.4\times300+0.65\times280$이고, 이는 행렬 AB의 $(2, 2)$ 성분과 같으므로 d이다.

STEP 2

076

두 행렬

$A=\begin{pmatrix}3x^2+1 & 2\\7x+3 & x^2-2x\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4x^2 & x^2+1\\-x^2+3x & x+4\end{pmatrix}$

에 대하여 $A=B$가 성립하도록 하는 상수 x의 값을 구하시오. -1

$3x^2+1=4x^2$, $2=x^2+1$에서 $x^2=1$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ …… ㉠

$7x+3=-x^2+3x$에서 $(x+3)(x+1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$ …… ㉡

$x^2-2x=x+4$에서 $(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 구하는 상수 x의 값은 -1이다.

077

임의의 실수 x에 대하여 행렬의 곱

$(x\ \ 1)\begin{pmatrix}1 & a\\a & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$의 성분이 음수가 아니기 위한 실수 a의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하시오. 4

$(x\ \ 1)\begin{pmatrix}1 & a\\a & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}=(x+a\ \ \ ax+4)\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}=(x^2+2ax+4)$

임의의 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+4\ge0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+2ax+4=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le0$이어야 한다.

즉, $\frac{D}{4}=a^2-4\le0$, $(a+2)(a-2)\le0$ $\therefore -2\le a\le2$

따라서 $M=2$, $m=-2$이므로 $M-m=4$

078

이차정사각행렬 A에 대하여

$\underbrace{A\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}}_{㉠}$, $\underbrace{A^2\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-13\end{pmatrix}}_{㉡}$일 때,

$A^3\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합을 구하시오. -69

$A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$라 하면 ㉠에서 $\begin{pmatrix}-b\\-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ $\therefore b=2, d=3$

㉡에서 $A\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-13\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2a-3b\\-2c-3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-13\end{pmatrix}$

$\therefore a=-1, c=2$ $\therefore A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\2 & 3\end{pmatrix}$

$A^3\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=A\left\{A^2\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right\}=A\begin{pmatrix}-4\\-13\end{pmatrix}$이므로 $A^3\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-22\\-47\end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 $-22+(-47)=-69$

079 교육청 기출

행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여

$A+A^2+A^3+\cdots+A^{2011}$의 모든 성분의 합은?

① 2 ● ② 7 ③ 12

④ 17 ⑤ 22

$A^2=AA=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

$\therefore A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6$
$=A+A^2+(-E)+(-A)+(-A^2)+E=O$

$2011=6\times335+1$이므로

$A+A^2+A^3+\cdots+A^{2011}$
$=(A+A^2+A^3+\cdots+A^6)+\cdots$
$+A^{2004}(A+A^2+A^3+\cdots+A^6)+A^{2011}=A^{2011}=(A^6)^{335}A=A$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 $3+7+(-1)+(-2)=7$

080

행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$에 대하여 $A^n=\begin{pmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오. 8

(단, $i=\sqrt{-1}$)

$A^2=AA=\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & i^2 \end{pmatrix}$, $A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & i^3 \end{pmatrix}$

즉, $A^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & i^n \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & i^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에서 $2^n=256$, $i^n=1$

$\therefore n=8$

081

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -x \\ -1 & x \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & 6 \\ 1 & y \end{pmatrix}$에 대하여 $AB=O$가 성립하도록 하는 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하시오. (단, O는 영행렬이다.) 8

$AB=\begin{pmatrix} 0 & 6-xy \\ 0 & -6+xy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$6-xy=0$ $\therefore xy=6$

따라서 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(-1, -6)$, $(-2, -3)$, $(-3, -2)$, $(-6, -1)$,
$(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$

이므로 그 개수는 8이다.

082

이차정사각행렬 A가 $A^2-3A+9E=O$를 만족시킬 때, $A^9=kE$에서 실수 k의 값은?

(단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

● ① -3^9 ② -3^{10} ③ -3^{11}

④ 3^9 ⑤ 3^{10}

$A^2-3A+9E=O$에서 $A^2=3A-9E$, $A^2-3A=-9E$이므로

$A^3=A^2A=(3A-9E)A=3A^2-9A$
$=3(A^2-3A)=3(-9E)=-3^3E$

$\therefore A^9=A^3A^3A^3=(-3^3E)(-3^3E)(-3^3E)$
$=-3^9E$

083

세 이차정사각행렬 A, B, C에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, E는 단위행렬이다.)

보기

ㄱ. $A^3=E$, $A^5=E$이면 $A=E$이다.

ㄴ. $A^2=E$, $ABA=B$이면 $AB=BA$이다.

ㄷ. $AB=E$, $BC=E$이면 $A=C$이다.

① ㄷ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ● ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $A^5=E$에서 $A^3A^2=E$이고 $A^3=E$이므로 $A^2=E$
또, $A^3=E$에서 $A^2A=E$ $\therefore A=E$

ㄴ. $ABA=B$의 양변의 오른쪽에 A를 곱하면 $ABA^2=BA$
이때 $A^2=E$이므로 $AB=BA$

ㄷ. $AB=E$의 양변의 오른쪽에 C를 곱하면 $ABC=C$
이때 $BC=E$이므로 $A=C$

084

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$가 $A^2+A+E=O$를 만족시킬 때, A^{101}의 모든 성분의 합을 구하시오. -3

(단, a는 상수, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

$A^2+A+E=\begin{pmatrix} 0 & -a-2 \\ 3a+6 & a^2+a-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$-a-2=0$, $3a+6=0$, $a^2+a-2=0$이므로 $a=-2$

$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$

이므로 $A^{101}=(A^3)^{33}A^2=E^{33}A^2=EA^2=A^2$

따라서 A^{101}의 모든 성분의 합은 $-2+1+(-3)+1=-3$