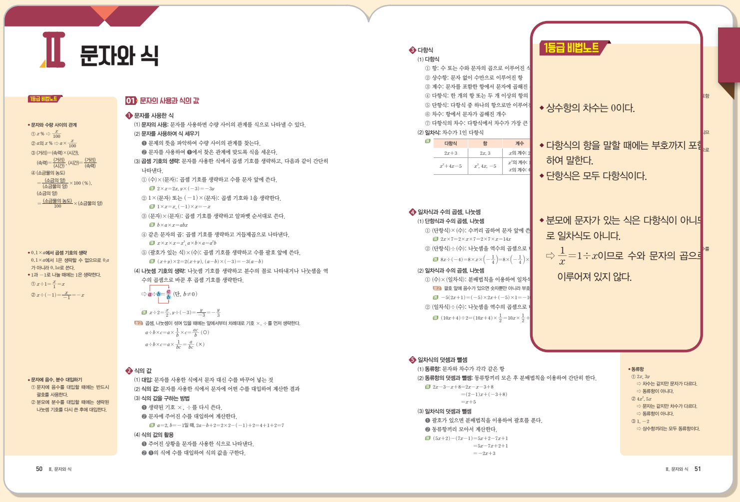
최고난도

중학수학 1-1

이 책의
구성과 특징



대단원 개념 정리

단원 핵심 내용 정리와 1등급 비법노트

대단원별 알아야 할 핵심 개념을 담았습니다.
또, 개념을 더 쉽게 이해할 수 있도록 **예**, **참고** 등을 수록하여 정리하였습니다.

1등급 비법노트

새로 학습하는 개념과 연결되는 반드시 기억해야 할 내용과 문제를 풀 때 도움이 되는 실전 tip을 구조화하여 제공하였습니다.

핵심 문제와 실전 문제

Lv. 1

중단원별 개념을 적용하여 내신 유형 학습에 적합한 핵심 문제를 담았습니다.

Lv. 2

중단원별 변별력과 사고력을 길러 주는 엄선된 문제를 담았습니다.

출제 주의

내신 출제율이 높아 한 번 더 풀어보면 좋은 문항을 나타냅니다.

서술형

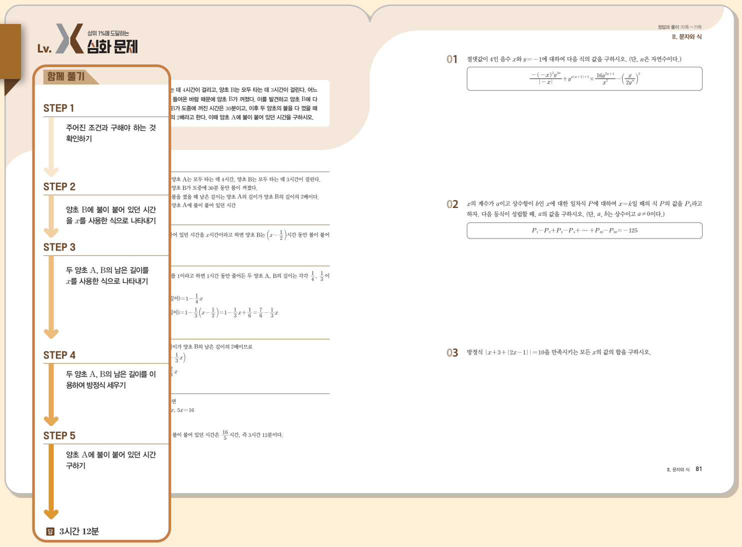
서술형 문제로 문제해결력을 기를 수 있게 하였습니다.

최상위권을 위한 심화 문제

대단원별 문제해결력과 응용력을 기를 수 있는 고난도 문제를 담았습니다.
또, 이전에 배운 개념과 여러 가지 수학적 개념이 포함된 복합 유형 문제로 구성하여 종합적 사고력을 기를 수 있습니다.

함께 풀기

이 단원의 대표적인 고난도 문제를 함께 차근차근 풀어보며 문제 해결을 위한 접근 방법을 익힐 수 있습니다.



Lv. X 상위 1%를 도전하는 심화 문제

함께 풀기

STEP 1 주어진 조건과 구해야 하는 것 확인하기

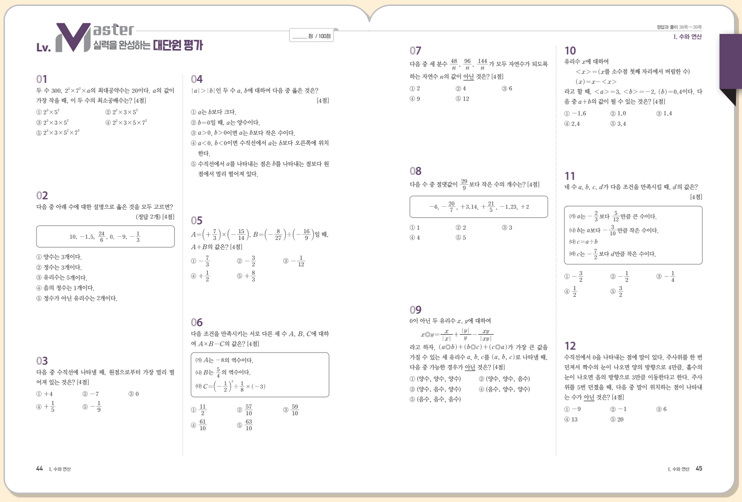
STEP 2 양초 B에 불이 붙어 있던 시간을 x를 사용한 식으로 나타내기

STEP 3 두 양초 A, B의 남은 길이를 x를 사용한 식으로 나타내기

STEP 4 두 양초 A, B의 남은 길이를 이용하여 방정식 세우기

STEP 5 양초 A에 불이 붙어 있던 시간 구하기

답 3시간 12분



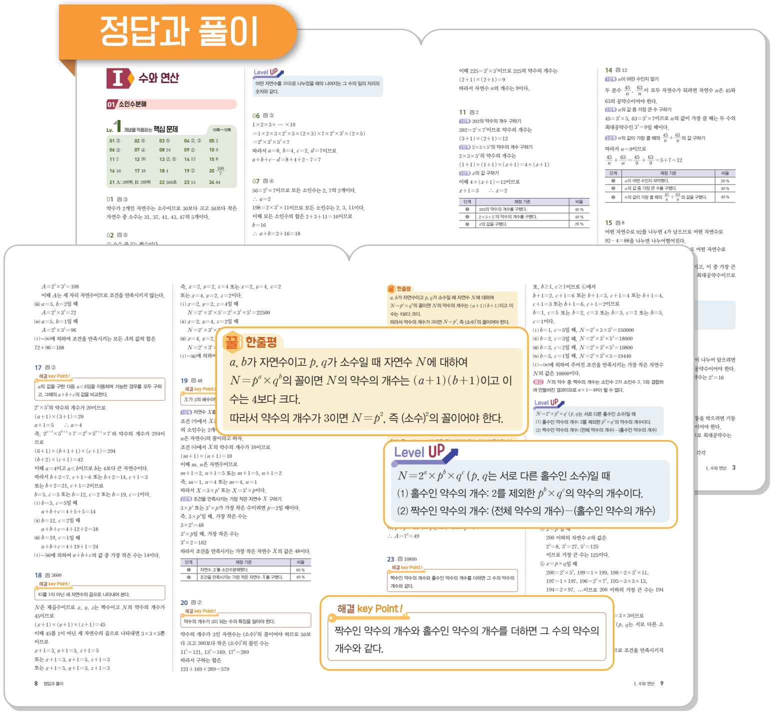
Lv. Master 실력을 완성하는 대단원 평가

시험 대비 평가 문제

최종 점검을 위한 마무리 평가 문제

실력을 확인하고 완성할 수 있도록 수준 높은 문제로 대단원별 마무리 평가 문제를 담았습니다. 학교 시험과 유사하게 객관식, 주관식, 서술형 문제와 더불어 배점이 높은 변별력 있는 문제까지 담았습니다.

정답과 풀이



꿀 한줄평

a, b가 자연수이고 p, q가 소수일 때 자연수 N에 대하여 $N=p^a\times q^b$의 꼴이면 N의 약수의 개수는 $(a+1)(b+1)$이고 이는 4보다 크다.
따라서 약수의 개수가 3이면 $N=p^2$, 즉 $(소수)^2$의 꼴이어야 한다.

Level UP

$N=2^a\times p^b\times q^c$ (p, q는 서로 다른 홀수인 소수)일 때
(1) 홀수인 약수의 개수: 2를 제외한 $p^b\times q^c$의 약수의 개수이다.
(2) 짝수인 약수의 개수: (전체 약수의 개수)−(홀수인 약수의 개수)

해결 key Point!

짝수인 약수의 개수와 홀수인 약수의 개수를 더하면 그 수의 약수의 개수와 같다.

읽기만 해도 이해할 수 있는 쉽고 자세한 풀이를 제시하였습니다. 또, 참고 와 다른 풀이 를 담아 풀이 방법을 점검하고 사고력을 기를 수 있도록 하였으며, 서술형 문제에 대한 단계별 풀이와 채점표를 담았습니다.

해결 key Point!

문제 풀이의 접근법을 제시하여 스스로 해결할 수 있도록 실마리를 제공하였습니다.

Level UP

풀이 과정 중 필요한 첨삭이나 사고력 향상에 도움이 되는 개념을 담았습니다.

꿀 한줄평

문제를 풀 때 유의해야 할 핵심 내용을 수록하여 문제의 중요한 부분을 짚어주었습니다.

이 책의

차례

I

수와 연산

I 수와 연산

01 소인수분해

1 소수와 합성수

(1) **소수:** 1보다 큰 자연수 중 1과 자기 자신만을 약수로 가지는 수

① 모든 소수의 약수는 2개이다.

② 2는 소수 중 가장 작은 수이고, 유일한 짝수이다.

(2) **합성수:** 1보다 큰 자연수 중 소수가 아닌 수

참고 1은 소수도 아니고 합성수도 아니다.

$$\text{자연수}\begin{cases}1\\ \text{소수: } 2,\ 3,\ 5,\ \cdots\\ \text{합성수: } 4,\ 6,\ 8,\ \cdots\end{cases}$$

2 소인수분해

(1) **거듭제곱:** 같은 수나 문자를 거듭하여 곱한 것을 간단히 나타낸 것

① 밑: 거듭제곱에서 곱하는 수나 문자

② 지수: 거듭제곱에서 밑이 곱해진 개수

$$2\times2\times2=\underset{\text{밑}}{2}^{\overset{\text{지수}}{3}}$$

(2) **소인수분해**

① 인수: 세 자연수 a, b, c에 대하여 $a=b\times c$일 때, b, c를 a의 인수라고 한다.

② 소인수: 인수 중 소수인 것

③ 소인수분해: 1보다 큰 자연수를 그 수의 소인수들만의 곱으로 나타내는 것

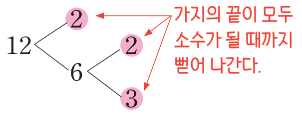
(3) **소인수분해하는 방법**

❶ 나누어떨어지는 소수로 나눈다.

❷ 몫이 소수가 될 때까지 나눈다.

❸ 나눈 소수들과 마지막 몫을 곱셈 기호 ×로 연결한다.

[방법 1]



[방법 2]

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

[소인수분해한 결과] $12=2\times2\times3=2^2\times3$

같은 소인수의 곱은 거듭제곱으로 나타낸다.

참고 소인수분해하는 방법은 여러 가지이지만 소인수분해한 결과는 오직 한 가지뿐이다.

3 소인수분해를 이용하여 약수 구하기

자연수 A가 $A=a^m\times b^n$ (a, b는 서로 다른 소수, m, n은 자연수)으로 소인수분해될 때

(1) **A의 약수:** (a^m의 약수)×(b^n의 약수)

(2) **A의 약수의 개수:** $(m+1)\times(n+1)$

예 18을 소인수분해하면

$18=2\times3^2$

오른쪽 표에서 18의 약수는

1, 2, 3, 6, 9, 18

이때 약수의 개수는

$(1+1)\times(2+1)=6$

3^2의 약수

×	1	3	$3^2=9$
1	1	3	9
2	2	6	18

2의 약수

18의 약수

1등급 비법노트

- **소수와 합성수 판별하기**
  ① 약수가 2개이다. ⇨ 소수
  ② 약수가 3개 이상이다. ⇨ 합성수

- $\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{개}}=a^n$에서
  ① (밑)$=a$
  ② (지수)$=n$
  ③ 'a의 n제곱'이라고 읽는다.

- **소인수 찾기**
  ❶ 주어진 수를 소인수분해한다.
  ❷ 인수 중 소수인 것을 모두 찾는다.

- **제곱인 수의 성질**
  ① 자연수의 제곱인 수를 소인수분해하면 소인수의 지수는 모두 짝수이다.
  ② 자연수의 제곱인 수의 약수의 개수는 홀수이다.

- **자연수 A가 $A=a^m\times b^n$ (a, b는 서로 다른 소수, m, n은 자연수)으로 소인수분해될 때, A의 약수의 총합은**
  $(1+a+a^2+\cdots+a^m)\times(1+b+b^2+\cdots+b^n)$

④ 공약수와 최대공약수

(1) **공약수:** 두 개 이상의 자연수의 공통인 약수

(2) **최대공약수:** 공약수 중 가장 큰 수

(3) **최대공약수의 성질:** 두 개 이상의 자연수의 공약수는 그 수들의 최대공약수의 약수이다.

(4) **서로소:** 최대공약수가 1인 두 자연수 → 공약수가 1 하나뿐인 두 자연수

① 1은 모든 자연수와 서로소이다.

② 서로 다른 두 소수는 항상 서로소이다.

예 5와 13의 최대공약수는 1이므로 5와 13은 서로소이다.

(5) **최대공약수 구하기**

소인수분해를 이용하는 방법	나눗셈을 이용하는 방법
❶ 각 수를 소인수분해한다. ❷ 공통인 소인수 중 지수가 같거나 작은 것을 택하여 곱한다. $24=2^3\times3$ $30=2\times3\times5$ (최대공약수)$=2\times3=6$	❶ 1이 아닌 공약수로 각 수를 나눈다. ❷ 몫이 서로소가 될 때까지 공약수로 각 수를 나눈다. ❸ 나눈 공약수를 모두 곱한다. 2) 24 30 3) 12 15 4 5 (최대공약수)$=2\times3=6$

⑤ 공배수와 최소공배수

(1) **공배수:** 두 개 이상의 자연수의 공통인 배수

(2) **최소공배수:** 공배수 중 가장 작은 수

(3) **최소공배수의 성질:** 두 개 이상의 자연수의 공배수는 그 수들의 최소공배수의 배수이다.

(4) **최소공배수 구하기**

소인수분해를 이용하는 방법	나눗셈을 이용하는 방법
❶ 각 수를 소인수분해한다. ❷ 공통인 소인수 중 지수가 같거나 큰 것을 택하고, 공통이 아닌 소인수도 모두 택하여 곱한다. $24=2^3\times3$ $30=2\times3\times5$ (최소공배수)$=2^3\times3\times5=120$	❶ 1이 아닌 공약수로 각 수를 나눈다. ❷ 몫이 서로소가 될 때까지 두 수의 공약수로 각 수를 나눈다. ❸ 나눈 공약수와 몫을 모두 곱한다. 2) 24 30 3) 12 15 4 5 (최소공배수)$=2\times3\times4\times5=120$

⑥ 최대공약수와 최소공배수의 관계

두 자연수 A, B의 최대공약수가 G이고 최소공배수가 L일 때

(1) $A=a\times G$, $B=b\times G$ (a, b는 서로소)

(2) $L=a\times b\times G$

(3) $A\times B=G\times L$ → (두 자연수의 곱)=(최대공약수)×(최소공배수)

G) A B

a b

서로소

⇨ $L=a\times b\times G$

1등급 비법노트

- **최대공약수의 활용**
  주어진 문장에 '가장 큰', '최대의', '가능한 한 많은' 등의 표현이 있을 때에는 최대공약수를 이용한다.

- **서로소인 두 수의 최대공약수, 최소공배수**
  두 자연수 a, b가 서로소일 때,
  ① (최대공약수)$=1$
  ② (최소공배수)$=a\times b$

- **최소공배수의 활용**
  주어진 문장에 '가장 작은', '최소의', '가능한 한 작은' 등의 표현이 있을 때에는 최소공배수를 이용한다.

- 공배수는 무수히 많이 존재하므로 최대공배수는 알 수 없다.

- **두 분수를 자연수로 만들기**
  두 분수 $\frac{\blacktriangle}{\bullet}$, $\frac{\bigstar}{\blacksquare}$ 중 어느 것에 곱해도 모두 자연수가 되게 하는 가장 작은 기약분수는 $\frac{(\bullet,\ \blacksquare\text{의 최소공배수})}{(\blacktriangle,\ \bigstar\text{의 최대공약수})}$이다.

1등급 비법노트

- **양의 부호와 음의 부호**

$+$	증가	수입	영상	해발	후
$-$	감소	지출	영하	해저	전

- 0은 양의 정수도 아니고 음의 정수도 아니다.
- 유리수는 $\frac{\text{(정수)}}{\text{(0이 아닌 정수)}}$의 꼴로 나타낼 수 있다.
- **유리수의 분류**

유리수
  - 정수
    - 양의 정수(자연수)
    - 0
    - 음의 정수
  - 정수가 아닌 유리수

- 절댓값이 같고 부호가 반대인 두 수를 나타내는 두 점 사이의 거리를 a라고 하면 두 수는 $\frac{a}{2}$, $-\frac{a}{2}$이다.
- 절댓값은 항상 0 또는 양수이므로 절댓값이 가장 작은 수는 0이다.
- 절댓값이 $a\,(a>0)$인 수는 $+a$, $-a$의 2개이다.

- **두 수 a, b에 대하여**
  ① $a>0$, $b<0$일 때, $b<0<a$
  ② $0<a<b$일 때, $|a|<|b|$
  ③ $a<b<0$일 때, $|a|>|b|$

02 정수와 유리수

❶ 정수와 유리수

(1) 어떤 기준을 중심으로 서로 반대되는 성질의 두 수량을 나타낼 때, 기준이 되는 수를 0으로 두고, 한쪽 수량에는 양의 부호 +를, 다른 쪽 수량에는 음의 부호 −를 붙여 나타낼 수 있다.

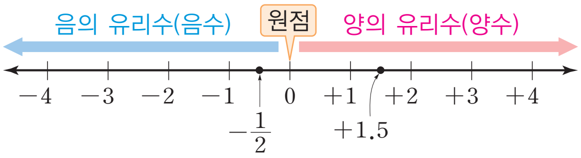
(2) **양수와 음수**
  ① 양수: 0보다 큰 수로 양의 부호 +를 붙인 수
  ② 음수: 0보다 작은 수로 음의 부호 −를 붙인 수

(3) **정수:** 양의 정수, 0, 음의 정수를 통틀어 정수라고 한다.
  ① 양의 정수: 자연수에 양의 부호 +를 붙인 수
  ② 음의 정수: 자연수에 음의 부호 −를 붙인 수

(4) **유리수:** 양의 유리수(양수), 0, 음의 유리수(음수)를 통틀어 유리수라고 한다.
  ① 양의 유리수(양수): 분모, 분자가 모두 자연수인 분수에 양의 부호 +를 붙인 수
  ② 음의 유리수(음수): 분모, 분자가 모두 자연수인 분수에 음의 부호 −를 붙인 수

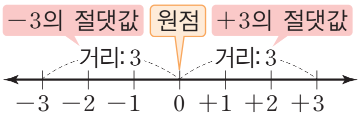
❷ 수직선

직선 위에 기준이 되는 점(원점)을 정하여 그 점에 0을 대응시키고, 그 점의 좌우에 일정한 간격을 잡아 양의 정수를 오른쪽, 음의 정수를 왼쪽에 대응시켜서 만든 직선이다. 유리수도 정수와 마찬가지로 수직선에 점으로 나타낼 수 있다.



❸ 절댓값

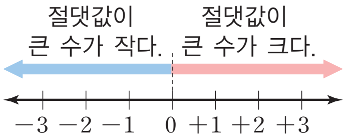
(1) **절댓값:** 수직선에서 어떤 수를 나타내는 점과 원점 사이의 거리를 그 수의 절댓값이라 하고, 기호 |　|를 사용하여 나타낸다.



(2) **절댓값의 성질**
  ① 양수와 음수의 절댓값은 그 수에서 부호 +, −를 떼어 낸 수와 같다.
  즉, 양수 a에 대하여 $|+a|=a$, $|-a|=a$이다.
  ② 0의 절댓값은 0이다. 즉, $|0|=0$이다.
  ③ 원점에서 멀리 떨어질수록 절댓값이 크다.

❹ 수의 대소 관계

(1) **수의 대소 관계**
  ① 양수는 0보다 크고, 음수는 0보다 작다.
  ⇨ (음수)$<0<$(양수)
  ② 양수끼리는 절댓값이 큰 수가 더 크다.
  ③ 음수끼리는 절댓값이 큰 수가 더 작다.



(2) **부등호의 사용**

$x>a$	$x<a$	$x\ge a$	$x\le a$
x는 a 초과이다. x는 a보다 크다.	x는 a 미만이다. x는 a보다 작다.	x는 a 이상이다. x는 a보다 크거나 같다. x는 a보다 작지 않다.	x는 a 이하이다. x는 a보다 작거나 같다. x는 a보다 크지 않다.

03 정수와 유리수의 계산

❶ 정수와 유리수의 덧셈과 뺄셈

(1) 정수와 유리수의 덧셈

① 부호가 같은 두 수의 덧셈: 두 수의 절댓값의 합에 공통인 부호를 붙인다.

② 부호가 다른 두 수의 덧셈: 두 수의 절댓값의 차에 절댓값이 큰 수의 부호를 붙인다.

참고 절댓값이 같고 부호가 반대인 두 수의 합은 0이다.

(2) 덧셈의 계산 법칙: 세 수 a, b, c에 대하여

① 덧셈의 교환법칙: $a+b=b+a$

② 덧셈의 결합법칙: $(a+b)+c=a+(b+c)$

(3) 정수와 유리수의 뺄셈: 빼는 수의 부호를 바꾸어 덧셈으로 고쳐서 계산한다.

(4) 부호가 생략된 수의 혼합 계산

① 양수에 생략된 양의 부호 +를 다시 쓴다.

② 뺄셈은 덧셈으로 바꾼다.

③ 덧셈의 계산 법칙을 이용하여 계산한다.

❷ 정수와 유리수의 곱셈과 나눗셈

(1) 정수와 유리수의 곱셈

① 부호가 같은 두 수의 곱셈: 두 수의 절댓값의 곱에 양의 부호 +를 붙인다.

② 부호가 다른 두 수의 곱셈: 두 수의 절댓값의 곱에 음의 부호 −를 붙인다.

참고 어떤 수와 0의 곱은 항상 0이다.

(2) 곱셈의 계산 법칙: 세 수 a, b, c에 대하여

① 곱셈의 교환법칙: $a\times b=b\times a$

② 곱셈의 결합법칙: $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$

(3) 분배법칙: 세 수 a, b, c에 대하여

$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$, $(a+b)\times c=a\times c+b\times c$

(4) 정수와 유리수의 나눗셈

① 부호가 같은 두 수의 나눗셈: 두 수의 절댓값의 나눗셈의 몫에 양의 부호 +를 붙인다.

② 부호가 다른 두 수의 나눗셈: 두 수의 절댓값의 나눗셈의 몫에 음의 부호 −를 붙인다.

(5) 역수: 두 수의 곱이 1이 될 때, 한 수를 다른 수의 역수라고 한다.

참고 0에 어떤 수를 곱해도 1이 될 수 없으므로 0은 역수를 갖지 않는다.

(6) 역수를 이용한 유리수의 나눗셈: 두 수를 나눌 때, 나누는 수의 역수를 곱하여 계산한다.

❸ 정수와 유리수의 혼합 계산

복잡한 식의 계산은 다음과 같은 순서대로 계산한다.

❶ 거듭제곱이 있으면 거듭제곱을 먼저 계산한다.

❷ 괄호가 있으면 괄호 안을 먼저 계산한다.
이때 괄호는 (소괄호) ⇨ {중괄호} ⇨ [대괄호]의 순서대로 괄호를 푼다.

❸ 곱셈, 나눗셈을 계산한다.

❹ 덧셈, 뺄셈을 계산한다.

1등급 비법노트

- **분수의 덧셈과 뺄셈**
  분모가 다르면 분모의 최소공배수로 통분하여 계산한다.
- 서로 다른 두 수의 차는 큰 수에서 작은 수를 빼야 한다.
- **덧셈과 뺄셈의 혼합 계산**
  ❶ 뺄셈을 덧셈으로 바꾼다.
  ❷ 덧셈의 계산 법칙을 이용하여 계산한다.
- **세 개 이상의 수의 곱의 부호**
  음수가 [짝수 개이면 + / 홀수 개이면 −
- **곱의 부호가 주어질 때, 두 수의 부호**
  ① $a\times b>0$ ⇨ a, b는 같은 부호
  ② $a\times b<0$ ⇨ a, b는 다른 부호
- 세 수의 곱셈에서는 $(a\times b)\times c$와 $a\times(b\times c)$의 결과가 같으므로 괄호 없이 $a\times b\times c$로 나타내기도 한다.
- **음수의 거듭제곱의 부호**
  지수가 [짝수이면 + / 홀수이면 −
- **곱셈과 나눗셈의 혼합 계산**
  ❶ 거듭제곱이 있으면 거듭제곱을 먼저 계산한다.
  ❷ 나눗셈은 역수를 이용하여 곱셈으로 고쳐서 계산한다.

개념을 적용하는

Lv. 1 핵심 문제

개념 1 소수와 합성수

01

다음 조건을 만족시키는 자연수의 개수는?

(가) 약수가 2개이다.
(나) 30보다 크고 50보다 작은 자연수이다.

① 3　② 4　[✓ ③ 5]
④ 6　⑤ 7

약수가 2개인 자연수는 소수이므로 30보다 크고 50보다 작은 자연수 중 소수는 31, 37, 41, 43, 47의 5개이다.

02 출제 주의

다음 중 옳은 것은?

① 소수 중 짝수인 수는 없다.
② 합성수는 약수가 3개이다.
③ 두 소수의 곱은 홀수이다.
④ 4의 배수 중 소수는 1개뿐이다.
[✓ ⑤ 1이 아닌 모든 자연수는 소수 또는 합성수이다.]

① 소수 중 2는 짝수이다.
② 합성수는 약수가 3개 이상이다.
③ 두 소수 2, 3의 곱은 6이므로 짝수이다.
④ 4의 배수 중 소수는 없다.

03

자연수 N보다 작거나 같은 소수가 6개일 때, 다음 중 N의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① 13　② 14　③ 15
④ 16　[✓ ⑤ 17]

소수를 작은 수부터 차례대로 나열하면 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, …
이때 자연수 N보다 작거나 같은 소수가 6개이어야 하므로 N의 값은 13보다 크거나 같고 17보다 작다.
즉, N의 값이 될 수 있는 수는 13, 14, 15, 16이다.

개념 2 소인수분해

04

다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $2^4=16$
[✓ ② $5+5+5=5^3$]
[✓ ③ $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3^4}$]
④ $2\times7\times2\times7\times2=2^3\times7^2$
⑤ $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{13}\times\frac{2}{13}\times\frac{2}{13}=\frac{2^5}{3^2\times13^3}$

② $5+5+5=5\times3$
③ $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3^4}$

05

2^{41}을 10으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. 2

2의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 2, 4, 8, 6이 이 순서대로 반복된다.
이때 $41=4\times10+1$이므로 2^{41}을 10으로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

06

$1\times2\times3\times\cdots\times10=2^a\times3^b\times5^c\times d$일 때, $a+b+c-d$의 값은?
(단, a, b, c, d는 자연수이고 d는 5보다 큰 소수이다.)

① 5　② 6　[✓ ③ 7]
④ 20　⑤ 21

$$\begin{aligned}1\times2\times3\times\cdots\times10&=1\times2\times3\times2^2\times5\times(2\times3)\times7\times2^3\times3^2\times(2\times5)\\&=2^8\times3^4\times5^2\times7\end{aligned}$$

따라서 $a=8$, $b=4$, $c=2$, $d=7$이므로
$a+b+c-d=8+4+2-7=7$

07

56의 모든 소인수의 개수를 a, 198의 모든 소인수의 합을 b라고 할 때, $a+b$의 값은?

① 5　② 7　③ 12

[✓ ④ 18]　⑤ 25

$56=2^3\times7$이므로 모든 소인수는 2, 7의 2개이다.　$\therefore a=2$
$198=2\times3^2\times11$이므로 모든 소인수는 2, 3, 11이다.
이때 모든 소인수의 합은 $2+3+11=16$이므로 $b=16$
$\therefore a+b=2+16=18$

08 **출제 주의**

294에 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되도록 할 때, 곱할 수 있는 자연수 중 두 번째로 작은 자연수를 구하시오. **24**

$294=2\times3\times7^2$이므로 곱할 수 있는 자연수는 $2\times3\times$(자연수)^2, 즉 $6\times$(자연수)^{2}의 꼴이다.
따라서 $6\times1^2=6$, $6\times2^2=24$, …이므로 두 번째로 작은 자연수는 24이다.

개념 3 소인수분해를 이용하여 약수 구하기

09

다음 중 약수의 개수가 나머지 넷과 다른 하나는?

① 352　[✓ ② 192]　③ 150

④ $2^3\times5^2$　⑤ $2^2\times3\times7$

① $352=2^5\times11$이므로 약수의 개수는 $(5+1)\times(1+1)=12$
② $192=2^6\times3$이므로 약수의 개수는 $(6+1)\times(1+1)=14$
③ $150=2\times3\times5^2$이므로 약수의 개수는 $(1+1)\times(1+1)\times(2+1)=12$
④ $2^3\times5^2$의 약수의 개수는 $(3+1)\times(2+1)=12$
⑤ $2^2\times3\times7$의 약수의 개수는 $(2+1)\times(1+1)\times(1+1)=12$

10

분수 $\frac{225}{n}$가 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오. **9**

분수 $\frac{225}{n}$가 자연수이려면 n은 225의 약수이어야 한다.
$225=3^2\times5^2$이므로 225의 약수의 개수는 $(2+1)\times(2+1)=9$
따라서 자연수 n의 개수는 9이다.

11 서술형

392의 약수의 개수와 $2\times3\times5^x$의 약수의 개수가 같을 때, 자연수 x의 값을 구하시오. **2**

$392=2^3\times7^2$이므로 약수의 개수는
$(3+1)\times(2+1)=12$ ………… 40 %
$2\times3\times5^x$의 약수의 개수는
$(1+1)\times(1+1)\times(x+1)=4\times(x+1)$ ………… 40 %
이때 $4\times(x+1)=12$이므로
$x+1=3$　$\therefore x=2$ ………… 20 %

개념 4 공약수와 최대공약수

12

30 이하의 자연수 중 35와 서로소인 수의 개수를 구하시오. **20**

$35=5\times7$이므로 35와 서로소인 수는 5의 배수도 아니고 7의 배수도 아닌 수이다.
이때 30 이하의 자연수 중 5의 배수는 6개이고 7의 배수는 4개이므로 구하는 수의 개수는
$30-(6+4)=20$

13 출제 주의

48과 x의 공약수가 24의 약수와 같을 때, 다음 중 x의 값이 될 수 있는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① 16 ✓② 24 ③ 60

④ 96 ✓⑤ 120

48과 x의 최대공약수가 24이고 $48=2^4\times3$이므로

① 48과 $16=2^4$의 최대공약수는 $2^4=16$

② 48과 $24=2^3\times3$의 최대공약수는 $2^3\times3=24$

③ 48과 $60=2^2\times3\times5$의 최대공약수는 $2^2\times3=12$

④ 48과 $96=2^5\times3$의 최대공약수는 $2^4\times3=48$

⑤ 48과 $120=2^3\times3\times5$의 최대공약수는 $2^3\times3=24$

14 서술형

두 분수 $\frac{45}{n}$, $\frac{63}{n}$이 모두 자연수가 되도록 하는 자연수 n에 대하여 n의 값이 가장 클 때의 $\frac{45}{n}+\frac{63}{n}$의 값을 구하시오. 12

두 분수 $\frac{45}{n}$, $\frac{63}{n}$이 모두 자연수가 되려면

자연수 n은 45와 63의 공약수이어야 한다. ········· 20 %

$45=3^2\times5$, $63=3^2\times7$이므로 n의 값이 가장 클 때는 두 수의 최대공약수인 $3^2=9$일 때이다. ········· 40 %

따라서 $n=9$이므로 $\frac{45}{n}+\frac{63}{n}=\frac{45}{9}+\frac{63}{9}=5+7=12$ ········· 40 %

15

어떤 자연수로 92를 나누면 4가 남고, 198을 나누면 6이 남는다. 이를 만족시키는 가장 큰 자연수를 구하시오. 8

어떤 자연수로 92를 나누면 4가 남으므로 어떤 자연수로 $92-4=88$을 나누면 나누어떨어진다.

어떤 자연수로 198을 나누면 6이 남으므로 어떤 자연수로 $198-6=192$를 나누면 나누어떨어진다.

이를 만족시키는 값은 88과 192의 공약수이고, 이 중 가장 큰 자연수는 $88=2^3\times11$과 $192=2^6\times3$의 최대공약수이므로 $2^3=8$이다.

16

사탕 128개와 젤리 112개를 가능한 한 많은 상자에 똑같이 나누어 담으려고 한다. 한 상자에 담는 사탕과 젤리의 개수를 각각 같게 할 때, 필요한 상자의 개수를 구하시오. 16

사탕과 젤리를 가능한 한 많은 상자에 똑같이 나누어 담으려면 상자의 개수는 사탕과 젤리의 개수의 최대공약수이어야 한다.

이때 $128=2^7$, $112=2^4\times7$이므로 최대공약수는 $2^4=16$

따라서 필요한 상자의 개수는 16이다.

17

가로 120 m, 세로 150 m인 직사각형 모양의 목장 둘레에 일정한 간격으로 기둥을 박으려고 한다. 네 모퉁이에는 반드시 기둥을 박아야 하고, 기둥을 가능한 한 적게 사용하려고 할 때, 필요한 기둥의 개수를 구하시오. 18

목장 둘레에 일정한 간격으로 가장 적게 기둥을 박으려면 기둥의 간격은 가로, 세로의 길이의 최대공약수이어야 한다.

이때 $120=2^3\times3\times5$, $150=2\times3\times5^2$이므로 최대공약수는

$2\times3\times5=30$

따라서 가로, 세로에 필요한 기둥의 개수는 각각 $120\div30=4$, $150\div30=5$이므로 필요한 기둥의 개수는 $4\times2+5\times2=18$

개념 5 공배수와 최소공배수

18

800 이하의 자연수 중 세 수 2×5, $2^2\times3$, 45의 공배수의 개수를 구하시오. 4

세 수 2×5, $2^2\times3$, $45=3^2\times5$의 최소공배수는 $2^2\times3^2\times5=180$

따라서 800 이하의 공배수는 180, 360, 540, 720의 4개이다.

19

세 자연수 $10\times x$, $12\times x$, $18\times x$의 최소공배수가 540일 때, 세 수의 최대공약수는?

① 4 [✓ ② 6] ③ 8
④ 10 ⑤ 12

$10\times x=2\times5\times x$, $12\times x=2^2\times3\times x$, $18\times x=2\times3^2\times x$이므로
세 수의 최대공약수는 $2\times x$
세 수의 최소공배수는 $2^2\times3^2\times5\times x$
이때 세 수의 최소공배수는 $540=2^2\times3^2\times5\times3$이므로 $x=3$
따라서 세 수의 최대공약수는 $2\times x=2\times3=6$

20 **출제 주의**

두 분수 $\frac{21}{25}$, $\frac{49}{20}$ 중 어느 것에 곱해도 자연수가 되게 하는 가장 작은 기약분수를 구하시오. $\mathbf{\frac{100}{7}}$

구하는 분수를 $\frac{a}{b}$라 하고 가장 작은 기약분수이려면 a는 $25=5^2$과 $20=2^2\times5$의 최소공배수이어야 하므로 $a=2^2\times5^2=100$
b는 $21=3\times7$과 $49=7^2$의 최대공약수이어야 하므로 $b=7$
따라서 구하는 가장 작은 기약분수는 $\frac{100}{7}$이다.

21

톱니의 수가 각각 36, 54인 두 톱니바퀴 A, B가 서로 맞물려 돌아가고 있다. 이 두 톱니바퀴가 회전하기 시작하여 처음으로 다시 같은 톱니에서 맞물리려면 A, B가 각각 몇 바퀴 회전해야 하는지 구하시오. **A: 3바퀴, B: 2바퀴**

두 톱니바퀴가 처음으로 다시 같은 톱니에서 맞물릴 때까지 돌아간 톱니의 수는 36과 54의 최소공배수이다.
이때 $36=2^2\times3^2$, $54=2\times3^3$이므로 최소공배수는
$2^2\times3^3=108$
따라서 두 톱니바퀴가 처음으로 다시 같은 톱니에서 맞물리려면 각각 A는 $108\div36=3$(바퀴), B는 $108\div54=2$(바퀴) 회전해야 한다.

22 **출제 주의**

크리스마스 트리에 깜빡이는 세 색깔의 전구를 달았다. 빨간색 전구는 7초 동안 켜졌다가 1초 동안 꺼지고, 노란색 전구는 8초 동안 켜졌다가 1초 동안 꺼지고, 파란색 전구는 9초 동안 켜졌다가 1초 동안 꺼진다. 세 색깔의 전구가 동시에 켜진 후 처음으로 다시 동시에 켜질 때까지 걸리는 시간을 구하시오. **360초**

빨간색, 노란색, 파란색 전구가 켜진 후 다시 켜질 때까지 걸리는 시간은 각각 $7+1=8$(초), $8+1=9$(초), $9+1=10$(초)이므로 세 색깔의 전구가 동시에 켜진 후 처음으로 다시 동시에 켜질 때까지 걸리는 시간은 8, 9, 10의 최소공배수이다.
이때 $8=2^3$, $9=3^2$, $10=2\times5$이므로 최소공배수는
$2^3\times3^2\times5=360$
따라서 세 색깔의 전구가 처음으로 다시 동시에 켜질 때까지 걸리는 시간은 360초이다.

개념 6 최대공약수와 최소공배수의 관계

23

두 자연수 A, 91의 최대공약수는 13, 최소공배수는 182일 때, 자연수 A의 모든 소인수의 합을 구하시오. **15**

두 자연수 A, 91의 최대공약수가 13이고 $91=13\times7$이므로
$A=13\times a$ (a는 7과 서로소)라고 하자.
두 자연수 A, 91의 최소공배수가 182이므로
$13\times a\times7=182$ $\therefore a=2$
따라서 $A=13\times2$이므로 A의 모든 소인수의 합은 $2+13=15$

24

두 자리 자연수 A, B의 최대공약수는 6, 최소공배수는 198일 때, $A+B$의 값을 구하시오. (단, $A<B$) **84**

두 자리 자연수 A, B의 최대공약수가 6이므로
$A=6\times a$, $B=6\times b$ (a와 b는 서로소, $a<b$)라고 하자.
두 수 A, B의 최소공배수가 198이므로
$6\times a\times b=198$ $\therefore a\times b=33$
(ⅰ) $a=1$, $b=33$일 때
  $A=6\times1=6$, $B=6\times33=198$
  이때 6은 한 자리 수, 198은 세 자리 수이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $a=3$, $b=11$일 때
  $A=6\times3=18$, $B=6\times11=66$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $A=18$, $B=66$
$\therefore A+B=18+66=84$

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

01

두 소수 p, q에 대하여 $p+q^2=41$일 때, $p-q$의 값은?

① 27 ② 29 ③ 31

④ 33 ✓⑤ 35

$p+q^2=41$에서 41이 홀수이므로 $41=$(짝수)$+$(홀수)의 꼴이어야 한다.
이때 소수 중 짝수인 수는 2뿐이므로 $p=2$ 또는 $q=2$이다.
(i) $p=2$일 때
$2+q^2=41$이므로 $q^2=39$
이때 $39=3\times13$이므로 조건을 만족시키는 q의 값은 없다.
(ii) $q=2$일 때
$p+2^2=41$이므로 $p=37$
이때 37은 홀수인 소수이므로 주어진 조건을 만족시킨다.
(i), (ii)에 의하여 $p=37$, $q=2$이므로
$p-q=37-2=35$

02

한 자리 자연수 a, b에 대하여 두 자리 자연수 $X=10\times a+b$, $Y=10\times b+a$가 모두 소수일 때, 이를 만족시키는 X, Y의 합 중 가장 큰 값을 구하시오. 176

두 자리 자연수 $10\times a+b$, $10\times b+a$가 모두 소수이므로 일의 자리의 숫자는 짝수도 아니고 5도 아니다.
따라서 a와 b가 될 수 있는 수는 1, 3, 7, 9이다.
이때 X, Y의 합이 가장 크려면
$a=7$, $b=9$ 또는 $a=9$, $b=7$
즉, 조건을 만족시키는 X, Y의 값은 79, 97이므로 구하는 합은 $79+97=176$

03

서로 다른 두 소수 a, b $(a<b)$에 대하여 $a+b=50$을 만족시키는 (a, b)의 개수가 A이고 $a\times b$의 값 중 가장 큰 수를 B라고 할 때, $A+B$의 값은?

① 592 ✓② 593 ③ 594

④ 595 ⑤ 596

50보다 작은 서로 다른 두 소수의 합이 50이 되는 경우는
$50=3+47=7+43=13+37=19+31$
따라서 조건을 만족시키는 (a, b)는
$(3, 47)$, $(7, 43)$, $(13, 37)$, $(19, 31)$의 4개이므로 $A=4$
이때 $3\times47=141$, $7\times43=301$, $13\times37=481$, $19\times31=589$이므로 두 소수의 곱 중 가장 큰 수는 589이다. $\therefore B=589$
$\therefore A+B=4+589=593$

04 출제 주의

$2^{2026}+3^{2027}+7^{2028}$의 일의 자리의 숫자는?

① 1 ✓② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

2의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 2, 4, 8, 6이 이 순서대로 반복되고,
$2026=4\times506+2$이므로 2^{2026}의 일의 자리의 숫자는 4이다.
3의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 이 순서대로 반복되고,
$2027=4\times506+3$이므로 3^{2027}의 일의 자리의 숫자는 7이다.
7의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1이 이 순서대로 반복되고,
$2028=4\times507$이므로 7^{2028}의 일의 자리의 숫자는 1이다.
따라서 $2^{2026}+3^{2027}+7^{2028}$의 일의 자리의 숫자는 $4+7+1=12$에서 2이다.

05

다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는?

> (가) n의 모든 약수의 합은 $n+1$이다.
> (나) n은 20보다 크고 40보다 작은 자연수이다.

✓① 4 ② 5 ③ 6

④ 7 ⑤ 8

조건 (가)를 만족시키는 자연수 n은 약수가 1, n뿐이어야 하므로 n은 소수이다.
또, 조건 (나)에 의하여 n은 20보다 크고 40보다 작은 소수이므로 자연수 n은 23, 29, 31, 37의 4개이다.

06

540에 자연수 x를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되도록 할 때, x의 값이 될 수 있는 세 자리 자연수의 개수를 구하시오. 6

$540=2^2\times3^3\times5$이므로 $x=3\times5\times k^2=15\times k^2$ (k는 자연수)의 꼴이어야 한다.
$k=1$일 때, $x=15\times1^2=15$　$k=2$일 때, $x=15\times2^2=60$
$k=3$일 때, $x=15\times3^2=135$　$k=4$일 때, $x=15\times4^2=240$
$k=5$일 때, $x=15\times5^2=375$　$k=6$일 때, $x=15\times6^2=540$
$k=7$일 때, $x=15\times7^2=735$　$k=8$일 때, $x=15\times8^2=960$
$k=9$일 때, $x=15\times9^2=1215$
따라서 x의 값이 될 수 있는 세 자리 자연수는 135, 240, 375, 540, 735, 960의 6개이다.

07

$480 \times x = y^3$을 만족시키는 가장 작은 두 자연수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하시오. **510**

$480 \times x = y^3$이므로 $480 \times x$를 소인수분해했을 때 모든 소인수의 지수가 3의 배수이어야 한다.
$480 = 2^5 \times 3 \times 5$이므로 조건을 만족시키는 가장 작은 x의 값은 $2 \times 3^2 \times 5^2 = 450$
이때 $480 \times x = 2^6 \times 3^3 \times 5^3 = 216000 = 60^3 = y^3$이므로 $y = 60$
$\therefore\ x+y = 450+60 = 510$

08 서술형

각 자리의 숫자가 서로 다른 다섯 자리 수 ABCDE가 있다. AB는 2의 배수, ABC는 3의 배수, ABCD는 4의 배수, ABCDE는 5의 배수이고 두 번째로 큰 수 ABCDE를 소인수분해하면 $2^3 \times 3 \times 5 \times k$일 때, 자연수 k의 값을 구하시오. **823**

두 번째로 큰 수 ABCDE를 찾아야 하므로 A=9라고 하자. ……………………20 %
2의 배수는 일의 자리의 숫자가 짝수이므로 가장 큰 9B의 값은 98이다. ∴ B=8
3의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이고, 9+8=17이므로 17+C가 3의 배수이어야 한다.
이를 만족시키는 가장 큰 C의 값은 7이다. ∴ C=7
4의 배수는 끝의 두 자리 수가 4의 배수이어야 하므로 7D가 4의 배수이어야 한다.
이를 만족시키는 가장 큰 7D의 값은 76이므로 D=6
5의 배수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이므로 조건을 만족시키는 가장 큰 수 ABCDE는 98765, 두 번째로 큰 수 ABCDE는 98760이다. ∴ E=0 ………………60 %
따라서 두 번째로 큰 수 ABCDE는 98760이므로 이 수를 소인수분해하면
$98760 = 2^3 \times 3 \times 5 \times k = 2^3 \times 3 \times 5 \times 823$ $\therefore\ k = 823$ ……………………20 %

09

$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 30$을 소인수분해하면 $2^a \times 3^b \times A$의 꼴로 나타낼 수 있다. 이때 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 36　② 37　③ 38
④ 39　✓⑤ 40

1부터 30까지의 자연수 중
2의 배수는 15개, $4 = 2^2$의 배수는 7개, $8 = 2^3$의 배수는 3개, $16 = 2^4$의 배수는 1개
$\therefore\ a = 15+7+3+1 = 26$
3의 배수는 10개, $9 = 3^2$의 배수는 3개, $27 = 3^3$의 배수는 1개
$\therefore\ b = 10+3+1 = 14$
$\therefore\ a+b = 26+14 = 40$

10

$2^5 \times 3^2 \times 5^7 \times 7$은 n자리 자연수이고, 각 자리의 숫자의 합은 k이다. 이때 $n+k$의 값을 구하시오. **27**

$2^5 \times 3^2 \times 5^7 \times 7 = (2^5 \times 5^5) \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 100000 \times 1575 = 157500000$
따라서 $2^5 \times 3^2 \times 5^7 \times 7$은 9자리 자연수이므로 $n = 9$
각 자리의 숫자의 합은 $k = 1+5+7+5 = 18$
$\therefore\ n+k = 9+18 = 27$

11

$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$의 만의 자리의 숫자는 0이 아니고 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자는 모두 0이 되도록 하는 자연수 n의 값 중 가장 큰 수와 작은 수의 합은?

① 42　② 43　✓③ 44
④ 45　⑤ 46

$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$은 $10000 = 2^4 \times 5^4$의 배수이어야 하므로 소인수분해하면 2와 5가 각각 적어도 4개 존재해야 한다.
$2 \times 4 \times 6 = 2^4 \times 3$이므로 2^4의 배수가 되려면 n의 값은 6 이상이어야 한다.
또, $5 \times 10 \times 15 \times 20 = 2^3 \times 3 \times 5^4$이므로 5^4의 배수가 되려면 n의 값은 20 이상이어야 한다.
한편, $5 \times 10 \times 15 \times 20 \times 25 = 2^3 \times 3 \times 5^6$이면 주어진 수는 $2^5 \times 5^5$의 배수가 되어 만의 자리의 숫자가 0이 되므로 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 자연수 n의 값은 20 이상 25 미만이고 이 값 중 가장 큰 수는 24, 가장 작은 수는 20이므로 구하는 합은
$24+20 = 44$

12

360의 약수 중 어떤 자연수의 제곱이 되는 모든 수의 합을 구하시오. **50**

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$이므로 360의 약수 중 어떤 자연수의 제곱이 되는 수는 1, 2^2, 3^2, $2^2 \times 3^2$이다.
따라서 제곱이 되는 모든 수의 합은
$1+2^2+3^2+(2^2 \times 3^2) = 1+4+9+36 = 50$

사고를 확장하는

Lv. 2 실전 문제

13

자연수 N을 소인수분해하면 $2^a\times3^2$ (a는 2보다 큰 자연수)이고 N의 약수 중 다섯 번째로 큰 수는 24일 때, a의 값을 구하시오. **4**

N의 약수를 작은 수부터 차례대로 나열하면
$1,\ 2,\ 3,\ 2^2,\ \dots,\ 2^{a-2}\times3^2,\ 2^{a-1}\times3,\ 2^{a-1}\times3^2,\ 2^a\times3^2$
즉, N의 약수는 $2^a\times3^2$을 2^m (m은 a보다 크지 않은 자연수) 또는 3^n (n은 2보다 크지 않은 자연수) 또는 $2^m\times3^n$으로 나눈 수이다.
따라서 N의 약수 중 가장 큰 수는 N
두 번째로 큰 수는 $N\div2$
세 번째로 큰 수는 $N\div3$
네 번째로 큰 수는 $N\div2^2$
다섯 번째로 큰 수는 $N\div(2\times3)$
⋮
이때 $N\div(2\times3)=24$이므로 $N=24\times6=144$
따라서 $N=144=2^4\times3^2$이므로 $a=4$

14 서술형

두 자연수 $A=2^m\times3^m\times5$, $B=2^n\times15^2$에 대하여 A의 약수의 개수가 18이고, B의 약수의 개수가 36일 때, $\dfrac{B}{A}$의 약수의 개수를 구하시오. (단, m, n은 자연수이다.) **4**

$A=2^m\times3^m\times5$이므로 약수의 개수는 $(m+1)\times(m+1)\times(1+1)=18$,
$(m+1)\times(m+1)=9=3^2$이므로 $m+1=3$ $\therefore\ m=2$ ······ 30 %
$B=2^n\times15^2=2^n\times3^2\times5^2$이므로 약수의 개수는
$(n+1)\times(2+1)\times(2+1)=36$
$n+1=4$ $\therefore\ n=3$ ······ 30 %
따라서 $A=2^2\times3^2\times5=180$, $B=2^3\times3^2\times5^2=1800$에서
$\dfrac{B}{A}=\dfrac{1800}{180}=10=2\times5$이므로 $\dfrac{B}{A}$의 약수의 개수는
$(1+1)\times(1+1)=4$ ······ 40 %

15

자연수 A를 소인수분해하면 $2^a\times5^b\times c$이다. A의 약수의 개수가 12이고, A가 100 이하의 자연수일 때, $a+b+c$의 값은?
(단, a, b는 자연수이고 c는 2와 5가 아닌 소수이다.)

[✓ ① 6] ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

A의 약수의 개수가 12이므로 $(a+1)\times(b+1)\times(1+1)=12$
$\therefore\ (a+1)\times(b+1)=6$
이때 a, b는 자연수이므로 $a=1$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=1$이다.
(i) $a=1$, $b=2$일 때
$A=2\times5^2\times c=50\times c$이므로 A가 100 이하의 자연수가 되는 c의 값은 1, 2
이때 c는 2와 5가 아닌 소수이므로 조건을 만족시키는 c의 값은 없다.
(ii) $a=2$, $b=1$일 때
$A=2^2\times5\times c=20\times c$이므로 A가 100 이하의 자연수가 되는 c의 값은 1, 2, 3, 4, 5
이때 c는 2와 5가 아닌 소수이므로 조건을 만족시키는 c의 값은 3이다.
(i), (ii)에 의하여 $a=2$, $b=1$, $c=3$이므로
$a+b+c=2+1+3=6$

16

두 자리 자연수 A에 대하여 A의 소인수는 2와 3뿐이고, 약수의 개수는 12이다. 이를 만족시키는 모든 A의 값의 합을 구하시오. **168**

$A=2^a\times3^b$ (a, b는 자연수)의 꼴이고 약수의 개수는 12이므로
$(a+1)\times(b+1)=12$
이때 a, b는 자연수이므로 $a=1$, $b=5$ 또는 $a=2$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=2$ 또는 $a=5$, $b=1$이다.
(i) $a=1$, $b=5$일 때, $A=2^1\times3^5=486$
이때 A는 세 자리 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $a=2$, $b=3$일 때, $A=2^2\times3^3=108$
이때 A는 세 자리 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(iii) $a=3$, $b=2$일 때, $A=2^3\times3^2=72$
(iv) $a=5$, $b=1$일 때, $A=2^5\times3^1=96$
(i)~(iv)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 A의 값의 합은
$72+96=168$

17

세 자연수 a, b, c $(a<b)$에 대하여 $2^a\times5^3$의 약수의 개수가 20, $2^{a+2}\times5^{b+1}\times7^c$의 약수의 개수가 294일 때, $a+b+c$의 값 중 가장 작은 수는?

① 10 [✓ ② 14] ③ 18
④ 22 ⑤ 26

$2^a\times5^3$의 약수의 개수가 20이므로 $(a+1)\times(3+1)=20$
$a+1=5$ $\therefore\ a=4$
즉, $2^{a+2}\times5^{b+1}\times7^c=2^6\times5^{b+1}\times7^c$의 약수의 개수가 294이므로
$(6+1)\times(b+1+1)\times(c+1)=294$
$(b+2)\times(c+1)=42$
이때 $a=4$이고 $a<b$이므로 b는 4보다 큰 자연수이다.
따라서 $b+2=7$, $c+1=6$ 또는 $b+2=14$, $c+1=3$
또는 $b+2=21$, $c+1=2$이므로
$b=5$, $c=5$ 또는 $b=12$, $c=2$ 또는 $b=19$, $c=1$이다.
(i) $b=5$, $c=5$일 때, $a+b+c=4+5+5=14$
(ii) $b=12$, $c=2$일 때, $a+b+c=4+12+2=18$
(iii) $b=19$, $c=1$일 때, $a+b+c=4+19+1=24$
(i)~(iii)에 의하여 $a+b+c$의 값 중 가장 작은 수는 14이다.

18

자연수 $N=2^x\times3^y\times5^z$은 제곱수이고 N의 약수의 개수가 45일 때, 가장 작은 N의 값을 구하시오. **3600**

N은 제곱수이므로 x, y, z는 짝수이고 N의 약수의 개수가 45이므로
$(x+1)\times(y+1)\times(z+1)=45$
이때 45를 1이 아닌 세 자연수의 곱으로 나타내면 $3\times3\times5$뿐이므로
$x=2$, $y=2$, $z=4$ 또는 $x=2$, $y=4$, $z=2$ 또는 $x=4$, $y=2$, $z=2$이다.
(i) $x=2$, $y=2$, $z=4$일 때, $N=2^x\times3^y\times5^z=2^2\times3^2\times5^4=22500$
(ii) $x=2$, $y=4$, $z=2$일 때, $N=2^x\times3^y\times5^z=2^2\times3^4\times5^2=8100$
(iii) $x=4$, $y=2$, $z=2$일 때, $N=2^x\times3^y\times5^z=2^4\times3^2\times5^2=3600$
(i)~(iii)에 의하여 가장 작은 N의 값은 3600이다.

19 서술형

다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 X의 값을 구하시오. **48**

(가) X는 3의 배수이다.
(나) X의 약수의 개수는 10이다.
(다) X의 소인수는 2개이다.

조건 (가)에서 X는 3을 소인수로 가져야 하고 조건 (다)에서 X의 소인수는 2개이므로
$X=3^m\times p^n$ (p는 3이 아닌 소수, m, n은 자연수)의 꼴이라고 하자.
조건 (나)에서 X의 약수의 개수가 10이므로
$(m+1)\times(n+1)=10$
이때 m, n은 자연수이므로 $m=1$, $n=4$ 또는 $m=4$, $n=1$
따라서 $X=3\times p^4$ 또는 $X=3^4\times p$이다. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 60 %
$3\times p^4$ 또는 $3^4\times p$가 가장 작은 수이려면 $p=2$일 때이다.
즉, $3\times p^4$일 때, 가장 작은 수는 $3\times 2^4=48$
$3^4\times p$일 때, 가장 작은 수는 $3^4\times 2=162$
따라서 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 X의 값은 48이다. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 40 %

20 출제 주의

약수의 개수가 3인 자연수 중 50보다 크고 300보다 작은 모든 수의 합은?

① 578 ✓② 579 ③ 580
④ 581 ⑤ 582

약수의 개수가 3인 자연수는 (소수)^{2}의 꼴이어야 하므로 50보다 크고 300보다 작은 (소수)^{2}의 꼴인 수는
$11^2=121$, $13^2=169$, $17^2=289$
따라서 구하는 합은
$121+169+289=579$

21

세 자리 자연수 중 약수의 개수가 홀수인 수는 모두 몇 개인가?

① 21개 ✓② 22개 ③ 23개
④ 24개 ⑤ 25개

약수의 개수가 홀수인 자연수는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
따라서 (자연수)^{2}의 꼴인 세 자리 자연수는
$10^2=100$, $11^2=121$, …, $31^2=961$의 22개이다.

22

자연수 A에 대하여 A의 약수의 합을 $S(A)$, 약수의 개수를 $N(A)$라고 하자. $S(A)=57$이고 $N(A)=3$일 때, A의 값을 구하시오. **49**

$N(A)=3$에서 자연수 A의 약수의 개수가 3이므로 $A=p^2$ (p는 소수)의 꼴이어야 한다.
이때 p^2의 약수는 1, p, p^2이므로
$S(A)=1+p+p^2=57$
즉, $p+p^2=56$이고 p는 소수이므로 $p=7$
$\therefore A=7^2=49$

23

소인수가 2, 3, 5뿐인 자연수 N에 대하여 N의 약수 중 짝수의 개수는 48이고, 홀수의 개수는 12이다. 이 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 N의 값을 구하시오. **10800**

$N=2^a\times 3^b\times 5^c$ (a, b, c는 자연수)이라고 하면 전체 약수의 개수는 $48+12=60$이므로
$(a+1)\times(b+1)\times(c+1)=60$ ⋯⋯ ㉠
한편, N의 홀수인 약수의 개수는 소인수 2를 포함하지 않는 $3^b\times 5^c$의 약수의 개수와 같으므로 $(b+1)\times(c+1)=12$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $(a+1)\times 12=60$
$a+1=5$ $\therefore a=4$
$\therefore N=2^4\times 3^b\times 5^c$
또, $b\geq 1$, $c\geq 1$이므로 ㉡에서
$b=1$, $c=5$ 또는 $b=2$, $c=3$ 또는 $b=3$, $c=2$ 또는 $b=5$, $c=1$이다.
(ⅰ) $b=1$, $c=5$일 때, $N=2^4\times 3\times 5^5=150000$
(ⅱ) $b=2$, $c=3$일 때, $N=2^4\times 3^2\times 5^3=18000$
(ⅲ) $b=3$, $c=2$일 때, $N=2^4\times 3^3\times 5^2=10800$
(ⅳ) $b=5$, $c=1$일 때, $N=2^4\times 3^5\times 5=19440$
(ⅰ)～(ⅳ)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 N의 값은 10800이다.

24

자연수 x에 대하여 $f(x)=$(x의 약수의 개수)라고 할 때, $f(f(x))=3$을 만족시키는 200 이하의 자연수 x 중 가장 큰 수를 구하시오. **196**

약수의 개수가 3인 수는 (소수)^{2}의 꼴이므로 $f(x)=$(소수)^{2}의 꼴이어야 한다.
즉, $f(x)=2^2$, 3^2, 5^2, …이다.
(ⅰ) $f(x)=2^2=4$일 때, x의 약수의 개수가 4이므로
  $x=p^3$ (p는 소수) 또는 $x=p\times q$ (p, q는 서로 다른 소수)의 꼴이어야 한다.
  ⓐ $x=p^3$일 때, 200 이하의 가장 큰 수는 125이다.
  ⓑ $x=p\times q$일 때, 200 이하의 가장 큰 수는 194이다.
(ⅱ) $f(x)=3^2=9$일 때, x의 약수의 개수가 9이므로
  $x=p^8$ (p는 소수) 또는 $x=p^2\times q^2$ (p, q는 서로 다른 소수)의 꼴이어야 한다.
  ⓐ $x=p^8$일 때, 가장 작은 p^8의 값은 $2^8=256$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
  ⓑ $x=p^2\times q^2$일 때, 200 이하의 가장 큰 수는 196이다.
(ⅲ) $f(x)=5^2=25$일 때, x의 약수의 개수가 25이므로
  $x=p^{24}$ (p는 소수) 또는 $x=p^4\times q^4$ (p, q는 서로 다른 소수)의 꼴이어야 한다.
  이때 주어진 꼴을 만족시키는 수는 모두 200보다 크므로 조건을 만족시키는 수는 없다.
(ⅰ)～(ⅲ)에 의하여 200 이하의 자연수 x 중 가장 큰 수는 196이다.

$6=1\times6=2\times3$이므로 약수의 개수가 6인 수는 p^5 (p는 소수) 또는 $p\times q^2$ (p, q는 서로 다른 소수)의 꼴이어야 한다.

25

1부터 100까지의 자연수 중 약수의 개수가 6인 수의 개수는?

① 12 ② 13 ③ 14

④ 15 ✓⑤ 16

(ⅰ) p^5의 꼴일 때, 조건을 만족시키는 p의 값은 2의 1개이다.

(ⅱ) $p\times q^2$의 꼴일 때

ⓐ $q=2$일 때, p는 2가 아닌 25 이하의 소수이므로 조건을 만족시키는 p의 값은 8개이다.

ⓑ $q=3$일 때, p는 3이 아닌 11 이하의 소수이므로 조건을 만족시키는 p의 값은 4개이다.

ⓒ $q=5$일 때, p는 4 이하의 소수이므로 조건을 만족시키는 p의 값은 2개이다.

ⓓ $q=7$일 때, p는 2 이하의 소수이므로 조건을 만족시키는 p의 값은 1개이다.

ⓔ $q=11$일 때, $11^2=121$은 100보다 크므로 조건을 만족시키는 p의 값은 없다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 자연수의 개수는 $1+8+4+2+1=16$

26 서술형

1번부터 100번까지 번호가 붙은 100개의 전구가 모두 꺼져 있다. 100명의 학생이 1번부터 100번까지 번호를 달고 다음과 같은 행동을 한다.

> 1번 학생은 100개의 전구 스위치를 모두 누른다.
> 2번 학생은 2의 배수 번호의 전구 스위치를 누른다.
> ⋮
> k번 학생은 k의 배수 번호의 전구 스위치를 누른다.

100번 학생까지 모두 행동을 마쳤을 때, 켜져 있는 전구의 개수를 구하시오. 10

(단, 전구는 스위치를 한 번 누를 때마다 켜지거나 꺼진다.)

전구가 켜져 있으려면 스위치를 누른 횟수가 홀수이어야 한다.

이때 전구는 해당 번호의 약수의 개수만큼 스위치가 눌리므로 모든 행동을 마쳤을 때 약수의 개수가 홀수인 번호의 전구만 켜져 있게 된다. ······ 50 %

약수의 개수가 홀수인 수는 제곱수이고, 100 이하의 제곱수는

$1^2=1$, $2^2=4$, $3^3=9$, …, $10^2=100$ ······ 40 %

따라서 100 이하의 제곱수는 10개이므로 켜져 있는 전구의 개수는 10이다. ······ 10 %

27

1296, 3240의 공약수 중 어떤 자연수의 제곱이 되는 수의 개수를 구하시오. 6

$1296=2^4\times3^4$, $3240=2^3\times3^4\times5$이므로 1296과 3240의 최대공약수는 $2^3\times3^4$이다.

1296과 3240의 공약수는 두 수의 최대공약수인 $2^3\times3^4$의 약수이므로 이 중 어떤 자연수의 제곱이 되는 수는 1, $2^2=4$, $3^2=9$, $2^2\times3^2=36$, $3^4=81$, $2^2\times3^4=324$의 6개이다.

28

$A<B$인 두 자연수 A, B의 곱이 2160이고 최대공약수가 12일 때, $A+B$의 값 중 가장 작은 수는?

✓① 96 ② 100 ③ 104

④ 108 ⑤ 112

A, B $(A<B)$의 최대공약수가 12이므로 $A=x\times12$, $B=y\times12$ (x, y는 서로소, $x<y$)라고 하자.

$A\times B=x\times y\times12^2=2160$이므로 $x\times y=15$

따라서 $x=1$, $y=15$ 또는 $x=3$, $y=5$이다.

(ⅰ) $x=1$, $y=15$일 때

$A=1\times12=12$, $B=15\times12=180$이므로

$A+B=12+180=192$

(ⅱ) $x=3$, $y=5$일 때

$A=3\times12=36$, $B=5\times12=60$이므로

$A+B=36+60=96$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $A+B$의 값 중 가장 작은 수는 96이다.

29

두 자연수 a, b의 최대공약수를 $<a, b>$라고 할 때, $<x, 18>=6$, $<x, 30>=6$을 만족시키는 200 이하의 자연수 x의 개수는?

① 14 ② 15 ③ 16

④ 17 ✓⑤ 18

$<x, 18>=6$, $<x, 30>=6$이므로 x는 6의 배수이다.

즉, $x=6\times k$ (k는 자연수)의 꼴이고 200 이하의 자연수이므로 k는 1 이상 33 이하의 자연수이다.

이때 $18=2\times3^2$이므로 k와 3은 서로소이다.

또, $30=2\times3\times5$이므로 k와 5는 서로소이다.

즉, k는 3의 배수도 아니고, 5의 배수도 아니다.

이때 1 이상 33 이하의 자연수 중

3의 배수는 11개, 5의 배수는 6개, 15의 배수는 2개

따라서 k의 개수는 $33-(11+6-2)=18$이므로 구하는 자연수 x의 개수는 18이다.

30 출제 주의

세 분수 $\frac{7}{12}$, $\frac{14}{45}$, $\frac{21}{10}$ 중 어느 것에 곱해도 그 결과가 자연수가 되도록 하는 분수 중 가장 작은 기약분수를 $\frac{m}{n}$이라고 할 때, $m+n$의 값은? (단, m, n은 자연수이다.)

① 186 ✓② 187 ③ 188

④ 189 ⑤ 190

세 분수 $\frac{7}{12}\times\frac{m}{n}$, $\frac{14}{45}\times\frac{m}{n}$, $\frac{21}{10}\times\frac{m}{n}$이 자연수이면서 $\frac{m}{n}$의 값이 가장 작으려면

m은 $12=2^2\times3$, $45=3^2\times5$, $10=2\times5$의 최소공배수이므로 $m=2^2\times3^2\times5=180$

n은 7, $14=2\times7$, $21=3\times7$의 최대공약수이므로 $n=7$

$\therefore m+n=180+7=187$

31

다음 조건을 만족시키는 가장 작은 세 자리 소수 p의 값을 구하시오. **103**

(가) $(p+1)$은 8의 배수이다.
(나) $(p+2)$는 5의 배수이다.

조건 (가)에서 $(p+1)$이 8의 배수이면 $(p+1)$은 8로 나누어떨어지므로 p를 8로 나눈 나머지가 7이다.
이 조건을 만족시키는 p는 7, 15, 23, …
조건 (나)에서 $(p+2)$가 5의 배수이면 $(p+2)$는 5로 나누어떨어지므로 p를 5로 나눈 나머지가 3이다.
이 조건을 만족시키는 p는 3, 8, 13, 18, 23, …
8과 5의 최소공배수는 40이므로 두 조건 (가), (나)를 만족시키는 p의 값은
23, $23+40\times1=63$, $23+40\times2=103$, …
따라서 조건을 만족시키는 가장 작은 세 자리 소수 p의 값은 103이다.

32

120이 아닌 서로 다른 세 자연수 a, b, c에 대하여 세 수의 최소공배수는 120이다. 이때 $a+b+c$의 값 중 가장 큰 수를 구하시오. **130**

최소공배수가 120이므로 세 자연수 a, b, c는 $120=2^3\times3\times5$의 약수이어야 한다.
따라서 120을 제외한 120의 약수를 큰 수부터 차례대로 나열하면
$2^2\times3\times5=60$, $2^3\times5=40$, $2\times3\times5=30$, …, 1이므로 $a+b+c$의 값 중 가장 큰 수는
$60+40+30=130$

33

두 자연수 a, 36에 대하여 두 수의 최소공배수가 180일 때, 가능한 모든 a의 개수를 M, 가능한 모든 a의 값의 합을 N이라고 하자. 이때 $M+N$의 값은?

① 463 [✓ ② 464] ③ 465
④ 466 ⑤ 467

$36=2^2\times3^2$이고 a와 36의 최소공배수가 $180=2^2\times3^2\times5$이므로 a는 5를 약수로 가지면서 $2^2\times3^2\times5$의 약수이어야 한다.
따라서 a가 될 수 있는 수는 5, 2×5, $2^2\times5$, 3×5, $3^2\times5$, $2\times3\times5$, $2^2\times3\times5$, $2\times3^2\times5$, $2^2\times3^2\times5$의 9개이므로 $M=9$
이때 a가 될 수 있는 모든 수의 합은

$$N=5+2\times5+2^2\times5+3\times5+3^2\times5+2\times3\times5+2^2\times3\times5+2\times3^2\times5+2^2\times3^2\times5$$
$$=5+10+20+15+45+30+60+90+180=455$$
$$\therefore\ M+N=9+455=464$$

34

자연수 N을 4로 나누면 2가 남고, 5로 나누면 3이 남고, 6으로 나누면 4가 남는다고 한다. 이러한 자연수 N의 값 중 가장 작은 세 자리 자연수를 구하시오. **118**

자연수 N을 4로 나누면 2가 남고, 5로 나누면 3이 남고, 6으로 나누면 4가 남으므로
$N+2$를 4, 5, 6으로 나누면 모두 나누어떨어진다.
즉, $N+2$는 4, 5, 6의 공배수이고, 4, 5, 6의 최소공배수는
$2^2\times3\times5=60$이므로 $N+2$는 60의 배수이어야 한다.
$N+2=60$, 120, 180, …이므로
$N=58$, 118, 178, …
따라서 조건을 만족시키는 가장 작은 세 자리 자연수는 118이다.

35

사과 43개, 배 50개, 귤 82개를 가능한 한 많은 학생에게 똑같이 나누어 주려고 했더니 사과는 3개가 남고, 배는 2개가 부족하고, 귤은 2개가 남았다. 이때 학생은 몇 명인지 구하시오. **4명**

사과는 3개가 남고, 배는 2개가 부족하고, 귤은 2개가 남았으므로 사과 $43-3=40$(개), 배 $50+2=52$(개), 귤 $82-2=80$(개)가 있으면 학생들에게 똑같이 나누어 줄 수 있다.
이때 $40=2^3\times5$, $52=2^2\times13$, $80=2^4\times5$이므로 세 수의 최대공약수는 $2^2=4$
따라서 구하는 학생은 4명이다.

36 서술형

같은 크기의 정육면체 모양의 벽돌을 일정한 방향으로 빈틈없이 쌓아서 밑면의 가로, 세로의 길이가 각각 216 cm, 144 cm이고 높이가 192 cm인 직육면체를 만들려고 한다. 벽돌의 크기를 최대로 할 때, 필요한 벽돌의 개수를 구하시오. **432**

정육면체 모양의 벽돌의 크기가 최대일 때 벽돌의 한 모서리의 길이는 $216=2^3\times3^3$, $144=2^4\times3^2$, $192=2^6\times3$의 최대공약수이므로 $2^3\times3=24$ (cm)이다. ············ 40 %
이때 가로, 세로, 높이에 필요한 벽돌의 개수는 각각
$216\div24=9$, $144\div24=6$, $192\div24=8$
이므로 필요한 벽돌의 개수는 $9\times6\times8=432$ ···································· 60 %

37

어느 학교 밴드부에서 공연을 하기 위해 밴드부 재학생과 선생님, 졸업생이 찬조금을 냈다. 재학생은 $\frac{1}{6}$, 선생님은 $\frac{1}{2}$, 졸업생은 $\frac{3}{10}$을 내서 50만 원 이상 70만 원 이하가 모였을 때, 재학생, 선생님, 졸업생이 낸 찬조금은 각각 얼마인지 구하시오. **재학생: 10만 원, 선생님: 30만 원, 졸업생: 18만 원**

밴드부에 모인 찬조금을 x만 원이라고 하면 $\frac{1}{6}\times x$, $\frac{1}{2}\times x$, $\frac{3}{10}\times x$가 모두 자연수가 되어야 하므로 x는 6, 2, 10의 공배수이다.
$6=2\times3$, 2, $10=2\times5$의 최소공배수는 $2\times3\times5=30$이고 30의 배수 중 50 이상 70 이하인 수는 60이므로 $x=60$
따라서 재학생, 선생님, 졸업생이 낸 찬조금은 각각
$\frac{1}{6}\times60=10$(만 원), $\frac{1}{2}\times60=30$(만 원), $\frac{3}{10}\times60=18$(만 원)이다.

38

세 자연수 24, 60, A의 최대공약수가 12이고 최소공배수가 360일 때, 이를 만족시키는 가장 작은 자연수 A를 구하시오. **36**

$24=2^3\times3$, $60=2^2\times3\times5$이고 세 자연수 24, 60, A의 최대공약수는 $12=2^2\times3$, 최소공배수는 $360=2^3\times3^2\times5$이므로 A는 $2^2\times3$의 배수이고 3^2을 약수로 가지면서
$2^3\times3^2\times5$의 약수이어야 한다.
따라서 가장 작은 자연수 A는 $2^2\times3^2=36$이다.

39

두 자연수 A, B에 대하여

$[A, B]=(A$와 B의 최대공약수$)\times(A$와 B의 최소공배수$)$

라고 할 때, $[24, x]=864$를 만족시키는 자연수 x의 값을 구하시오. **36**

두 자연수 A, B의 최대공약수가 G이고 최소공배수가 L일 때
$A\times B=G\times L$이므로
$[24, x]=(24$와 x의 최대공약수$)\times(24$와 x의 최소공배수$)=24\times x$
즉, $24\times x=864$이므로 $x=36$

40

세 자연수 a, b, c의 비가 $2:5:9$이고, 이 세 수의 최소공배수가 900이다. 최대공약수를 G라고 할 때, $a+b+c+G$의 값을 구하시오. **170**

세 자연수 a, b, c를 $a=2\times n$, $b=5\times n$, $c=9\times n$ (n은 자연수)이라고 하면 a, b, c의 최소공배수는 $2\times3^2\times5\times n$이다.
즉, $2\times3^2\times5\times n=900$이므로 $90n=900$ $\quad\therefore n=10$
따라서 $a=2\times10=20$, $b=5\times10=50$, $c=9\times10=90$이고
a, b, c의 최대공약수 $G=n=10$이므로
$a+b+c+G=20+50+90+10=170$

41

$a<b$인 두 자연수 a, b의 최대공약수는 6이고, 최소공배수는 180이다. $a+b$의 값 중 가장 큰 수를 M, 가장 작은 수를 m이라고 할 때, $M-m$의 값을 구하시오. **120**

a, b $(a<b)$의 최대공약수가 6이므로 $a=x\times6$, $b=y\times6$ (x, y는 서로소, $x<y$)이라고 하자.
a, b의 최소공배수가 180이므로 $180=x\times y\times6$ $\quad\therefore x\times y=30$
따라서 $x=1$, $y=30$ 또는 $x=2$, $y=15$ 또는 $x=3$, $y=10$ 또는 $x=5$, $y=6$이다.
(ⅰ) $x=1$, $y=30$일 때, $a=1\times6=6$, $b=30\times6=180$이므로 $a+b=186$
(ⅱ) $x=2$, $y=15$일 때, $a=2\times6=12$, $b=15\times6=90$이므로 $a+b=102$
(ⅲ) $x=3$, $y=10$일 때, $a=3\times6=18$, $b=10\times6=60$이므로 $a+b=78$
(ⅳ) $x=5$, $y=6$일 때, $a=5\times6=30$, $b=6\times6=36$이므로 $a+b=66$
(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $a+b$의 값 중 가장 큰 수는 186, 가장 작은 수는 66이므로
$M=186$, $m=66$
$\therefore M-m=186-66=120$

42 **출제 주의**

두 자연수 $M=72$와 $N=2^a\times3^b$ (a, b는 자연수)에 대하여 두 수 M과 N의 최대공약수를 G, 최소공배수를 L이라고 하자. G, L이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. **10**

㈎ G의 약수의 개수는 6이다.
㈏ L의 약수의 개수는 40이다.

$M=72=2^3\times3^2$, $N=2^a\times3^b$이고 조건 ㈎에서 최대공약수 G는 약수의 개수가 $6=3\times2=2\times3$이므로 $G=2^2\times3$ 또는 $G=2\times3^2$이다.
(ⅰ) $G=2^2\times3$일 때
$M=2^3\times3^2$이므로 $N=2^2\times3$이어야 한다.
즉, $a=2$, $b=1$, $L=2^3\times3^2$이고 L의 약수의 개수는
$(3+1)\times(2+1)=12$이므로 조건 ㈏를 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $G=2\times3^2$일 때
$M=2^3\times3^2$이므로 $N=2\times3^b$ $(b\geq2)$이어야 한다.
즉, $a=1$, $b\geq2$, $L=2^3\times3^b$이고 L의 약수의 개수는
$(3+1)\times(b+1)=4\times(b+1)$
조건 ㈏에서 $4\times(b+1)=40$이므로 $b+1=10$ $\quad\therefore b=9$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=1$, $b=9$이므로 $a+b=1+9=10$

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

개념 1 정수와 유리수

01

다음 중 밑줄 친 부분을 부호 + 또는 −를 사용하여 나타낸 것으로 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

✓① 영화 상영 5분 전이다. ⇨ +5분
② 주차장은 지하 2층에 있다. ⇨ −2층
③ 냉동실 온도는 영하 19 ℃이다. ⇨ −19 ℃
④ 지하철 요금이 100원 인상되었다. ⇨ +100원
✓⑤ 승민이의 체중은 작년보다 3 kg 증가했다. ⇨ −3 kg

① −5분
⑤ +3 kg

02 출제 주의

다음 수 중 양의 정수의 개수를 a, 음의 유리수의 개수를 b, 정수가 아닌 유리수의 개수를 c라고 할 때, $a+b-c$의 값을 구하시오. 2

$$-4,\ \frac{1}{5},\ -\frac{2}{4},\ 0,\ +\frac{9}{3},\ 10,\ -0.6$$

양의 정수는 $+\frac{9}{3}=+3$, 10의 2개이므로 $a=2$
음의 유리수는 -4, $-\frac{2}{4}$, -0.6의 3개이므로 $b=3$
정수가 아닌 유리수는 $\frac{1}{5}$, $-\frac{2}{4}$, -0.6의 3개이므로 $c=3$
$\therefore a+b-c=2+3-3=2$

03

다음 중 옳은 것은?

① 정수는 자연수이다.
② 0은 정수가 아닌 유리수이다.
③ 정수 중 유리수가 아닌 수가 있다.
④ 정수는 양의 정수와 음의 정수로 이루어져 있다.
✓⑤ 서로 다른 두 유리수 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.

① 0과 음의 정수는 자연수가 아니다.
② 0은 정수이다.
③ 정수는 유리수이다.
④ 정수는 양의 정수, 0, 음의 정수로 이루어져 있다.

04

유리수 x에 대하여

$$<x>=\begin{cases}0 & (x\text{는 정수})\\1 & (x\text{는 정수가 아닌 유리수})\end{cases}$$

이라고 할 때, $<-3>+<0>+<+1.9>+\left\langle -\frac{7}{4}\right\rangle$의 값을 구하시오. 2

$<-3>=0$, $<0>=0$, $<+1.9>=1$, $\left\langle -\frac{7}{4}\right\rangle=1$
$\therefore <-3>+<0>+<+1.9>+\left\langle -\frac{7}{4}\right\rangle=0+0+1+1=2$

개념 2 수직선

05

다음 수를 수직선에 나타낼 때, 왼쪽에서 두 번째에 있는 수와 오른쪽에서 세 번째에 있는 수를 차례대로 쓰면?

$$-0.1,\ -5,\ 3,\ -\frac{5}{3},\ 0,\ \frac{9}{2}$$

① -5, 0 ✓② $-\frac{5}{3}$, 0 ③ $-\frac{5}{3}$, 3
④ -0.1, 3 ⑤ -0.1, $\frac{9}{2}$

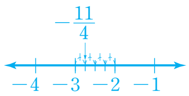
주어진 수를 수직선에 나타내면 왼쪽에서부터 차례대로
-5, $-\frac{5}{3}$, -0.1, 0, 3, $\frac{9}{2}$
따라서 왼쪽에서 두 번째에 있는 수는 $-\frac{5}{3}$, 오른쪽에서 세 번째에 있는 수는 0이다.

06

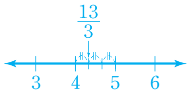
수직선에서 $-\frac{11}{4}$에 가장 가까운 정수를 a, $\frac{13}{3}$에 가장 가까운 정수를 b라고 할 때, a, b의 값은?

① $a=-4$, $b=4$ ② $a=-4$, $b=5$
✓③ $a=-3$, $b=4$ ④ $a=-3$, $b=5$
⑤ $a=-2$, $b=4$

수직선에서 $-\frac{11}{4}$에 가장 가까운 정수는 -3이다.
$\therefore a=-3$

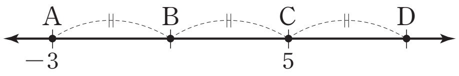


수직선에서 $\frac{13}{3}$에 가장 가까운 정수는 4이다.
$\therefore b=4$



07 서술형

다음 수직선에서 점 A가 나타내는 수는 -3이고 점 C가 나타내는 수는 5이다. 두 점 A와 B, 두 점 B와 C, 두 점 C와 D 사이의 거리가 모두 같을 때, 점 D가 나타내는 수를 구하시오. **9**



두 점 A, C가 나타내는 수는 각각 -3, 5이므로
두 점 A, C 사이의 거리는 8이다. ······ 30 %
이때 두 점 A, B 사이의 거리는 $\frac{1}{2}\times 8=4$ ······ 30 %
따라서 점 D는 점 C에서 오른쪽으로 4만큼 떨어져 있으므로
점 D가 나타내는 수는 9이다. ······ 40 %

개념 3 절댓값

08

다음 수를 절댓값이 작은 수부터 차례대로 나열할 때, 세 번째에 오는 수를 구하시오. **$+1.1$**

$$3,\ -0.9,\ +\frac{4}{7},\ -8,\ -\frac{5}{2},\ +1.1$$

주어진 수를 절댓값이 작은 수부터 차례대로 나열하면
$+\frac{4}{7}$, -0.9, $+1.1$, $-\frac{5}{2}$, 3, -8
따라서 세 번째에 오는 수는 $+1.1$이다.

09

다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

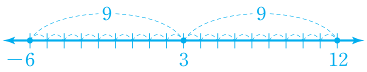
① 절댓값이 가장 작은 수는 1이다.
② 절댓값이 같은 두 수는 서로 같은 수이다.
✓③ 수직선에서 원점으로부터 멀리 떨어질수록 절댓값이 크다.
④ $|a|=a$이면 a는 양수이다.
✓⑤ $b<0$이면 $|b|=-b$이다.

① 절댓값이 가장 작은 수는 0이다.
② -1, 1은 절댓값이 1로 같지만 두 수는 서로 다른 수이다.
④ $|a|=a$이면 a는 0 또는 양수이다.

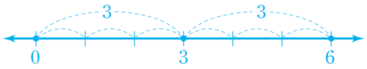
10

수직선에서 두 수 a, b를 나타내는 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점에 대응하는 수가 3이다. a의 절댓값이 6일 때, 양수 b의 값을 구하시오. **12**

a의 절댓값이 6이므로 $a=-6$ 또는 $a=6$
(i) $a=-6$일 때
a와 3을 나타내는 점 사이의 거리가 9이므로 $b=3+9=12$



(ii) $a=6$일 때
a와 3을 나타내는 점 사이의 거리가 3이므로 $b=3-3=0$



이때 b는 양수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.
(i), (ii)에 의하여 $b=12$

11 출제 주의

다음 조건을 만족시키는 a, b의 값을 구하시오. **$a=-7$, $b=7$**

(가) 두 수 a, b를 수직선에 점으로 나타내면 두 점 사이의 거리는 14이다.
(나) a와 b의 절댓값은 같다.
(다) $|a|=-a$

두 조건 (가), (나)에서 a, b를 나타내는 점은 원점으로부터 각각 $14\times\frac{1}{2}=7$만큼 떨어진 점이다.
조건 (다)에서 a는 0 또는 음수이므로 $a=-7$, $b=7$

개념 4 수의 대소 관계

12

다음 중 $-2\le x<1.7$을 나타내는 것을 모두 고르면?

✓① x는 -2 이상이고 1.7보다 작다.
② x는 -2보다 크고 1.7 이하이다.
③ x는 -2보다 작지 않고 1.7보다 크지 않다.
✓④ x는 -2 이상이고 1.7 미만이다.
⑤ x는 -2 초과이고 1.7보다 크지 않다.

주어진 문장을 부등식으로 나타내면 다음과 같다.
① $-2\le x<1.7$　② $-2<x\le 1.7$　③ $-2\le x\le 1.7$
④ $-2\le x<1.7$　⑤ $-2<x\le 1.7$

13 출제 주의

다음 중 □ 안에 알맞은 부등호가 나머지 넷과 다른 하나는?

① -5 □ 4
② -11 □ -9
③ 0.5 □ $\frac{3}{2}$
④ 0 □ $|-7|$
✓⑤ $\left|-\frac{3}{2}\right|$ □ $\frac{2}{3}$

①, ②, ③, ④ $<$ ⑤ $>$

14

두 유리수 $-\frac{7}{4}$과 $\frac{3}{8}$ 사이에 있는 정수가 아닌 유리수 중 기약분수로 나타낼 때 분모가 8인 수의 개수는?

① 5
② 6
③ 7
✓④ 8
⑤ 9

$-\frac{7}{4}=-\frac{14}{8}$와 $\frac{3}{8}$ 사이에 있는 정수가 아닌 유리수 중 기약분수로 나타낼 때 분모가 8인 것은

$-\frac{13}{8}, -\frac{11}{8}, -\frac{9}{8}, -\frac{7}{8}, -\frac{5}{8}, -\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{8}$의 8개이다.

15

두 정수 a, b에 대하여 $a \le x \le 5$를 만족시키는 정수 x가 7개, $1 \le y < b$를 만족시키는 정수 y가 3개일 때, $|b|-|a|$의 값은?

① 1
② 2
✓③ 3
④ 4
⑤ 5

$a \le x \le 5$를 만족시키는 정수 x가 7개이려면 x는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$이어야 하므로

$a=-1$

$1 \le y < b$를 만족시키는 정수 y가 3개이려면 y는 $1, 2, 3$이어야 하므로

$b=4$

$\therefore |b|-|a|=|4|-|-1|=4-1=3$

16 서술형

-2.6보다 크거나 같은 음의 정수의 개수를 a, $\frac{11}{12}$ 이상이고 3보다 작거나 같은 자연수의 개수를 b라고 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. 5

-2.6보다 크거나 같은 음의 정수는 -2, -1의 2개이므로 $a=2$ ······ 40 %

$\frac{11}{12}$ 이상이고 3보다 작거나 같은 자연수는 1, 2, 3의 3개이므로 $b=3$ ······ 40 %

$\therefore a+b=2+3=5$ ······ 20 %

17

다음 수를 작은 수부터 차례대로 나열할 때 세 번째에 오는 수를 a, 절댓값이 작은 수부터 차례대로 나열할 때 세 번째에 오는 수를 b라고 하자. 이때 $|a|+|b|$의 값을 구하시오. 5.5

$$-2.1,\ \frac{7}{4},\ -3.4,\ \frac{13}{2},\ -\frac{19}{4},\ 4.8$$

주어진 수를 작은 수부터 차례대로 나열하면

$-\frac{19}{4}, -3.4, -2.1, \frac{7}{4}, 4.8, \frac{13}{2}$

이므로 세 번째에 오는 수는 -2.1이다.

$\therefore a=-2.1$

주어진 수의 절댓값을 작은 수부터 차례대로 나열하면

$\left|\frac{7}{4}\right|, |-2.1|, |-3.4|, \left|-\frac{19}{4}\right|, |4.8|, \left|\frac{13}{2}\right|$

이므로 세 번째에 오는 수는 -3.4이다.

$\therefore b=-3.4$

$\therefore |a|+|b|=|-2.1|+|-3.4|=2.1+3.4=5.5$

18

다음 조건을 만족시키는 서로 다른 세 수 a, b, c의 대소 관계를 부등호를 사용하여 나타내시오. $b<a<c$

(가) a와 c는 모두 1보다 크다.
(나) a와 b는 절댓값이 같고 부호는 다르다.
(다) $|b|$는 c보다 작다.

조건 (가)에서 $a>1$, $c>1$

조건 (나)에서 a, b의 절댓값이 같고 부호는 다르므로

$b<1<a$

조건 (다)에서 $|b|<c$이고, 이때 a와 b의 절댓값이 같으므로

$a<c$

따라서 서로 다른 세 수 a, b, c의 대소 관계는

$b<a<c$

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

01

다음 보기의 설명 중 옳은 것을 있는 대로 모두 고른 것은?

〈 보기 〉

ㄱ. 유리수는 양의 유리수와 음의 유리수로 이루어져 있다.

ㄴ. a와 b가 정수일 때, $\frac{a}{b}$의 꼴로 나타낼 수 있는 수는 모두 유리수이다.

ㄷ. 서로 다른 두 유리수 사이에는 무수히 많은 유리수가 존재한다.

ㄹ. 절댓값이 1보다 작은 유리수와 정수는 각각 무수히 많다.

ㅁ. 정수가 아닌 유리수와 정수의 합은 항상 정수가 아닌 유리수이다.

① ㄱ, ㄷ　② ㄴ, ㄹ　✓③ ㄷ, ㅁ

④ ㄱ, ㄴ, ㅁ　⑤ ㄷ, ㄹ, ㅁ

ㄱ. 유리수는 양의 유리수, 0, 음의 유리수로 이루어져 있다.

ㄴ. $(\text{유리수})=\frac{(\text{정수})}{(0\text{이 아닌 정수})}$이므로 분모 b가 0이 아니라는 조건이 있어야 한다.

ㄹ. 절댓값이 1보다 작은 유리수는 -1과 1 사이의 모든 분수이므로 무수히 많지만 정수는 0의 1개이다.

02

0보다 크고 x보다 작거나 같은 정수가 아닌 유리수 중 분모가 7인 수의 개수가 120일 때, 자연수 x의 값을 구하시오. 20

(단, 기약분수로 나타내었을 때 분모가 7인 수만 센다.)

0보다 크고 x보다 작거나 같은 정수가 아닌 유리수 중 분모가 7인 수는

(ⅰ) $x=1$일 때, $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$의 6개

(ⅱ) $x=2$일 때, $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \cdots, \frac{6}{7}, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}, \cdots, \frac{13}{7}$의 12개

(ⅲ) $x=3$일 때, $\frac{1}{7}, \cdots, \frac{6}{7}, \frac{8}{7}, \cdots, \frac{13}{7}, \frac{15}{7}, \cdots, \frac{20}{7}$의 18개

따라서 x의 값이 1씩 커질 때마다 분모가 7인 정수가 아닌 유리수는 6개씩 증가한다. 이때 $120=6\times20$이므로 $x=20$

03

유리수 x에 대하여

$$<x>=\begin{cases}1 & (x\text{는 자연수}) \\ 2 & (x\text{는 자연수가 아닌 정수}) \\ 3 & (x\text{는 정수가 아닌 유리수})\end{cases}$$

이라고 할 때, $<3>=1$, $\left\langle -\frac{3}{2}\right\rangle=3$이다.

$<-5>+\left\langle a-\frac{3}{2}\right\rangle+<0>+\left\langle\frac{7}{4}\right\rangle=8$을 만족시키는 가장 작은 유리수 a의 값을 구하시오. $\frac{5}{2}$

$<-5>=2$, $<0>=2$, $\left\langle\frac{7}{4}\right\rangle=3$이므로 $<-5>+\left\langle a-\frac{3}{2}\right\rangle+<0>+\left\langle\frac{7}{4}\right\rangle=8$에서

$2+\left\langle a-\frac{3}{2}\right\rangle+2+3=8$, $7+\left\langle a-\frac{3}{2}\right\rangle=8$　$\therefore \left\langle a-\frac{3}{2}\right\rangle=1$

즉, $a-\frac{3}{2}$은 자연수이다.

따라서 $a-\frac{3}{2}\geq1$이어야 하므로 가장 작은 유리수 a의 값은 $\frac{5}{2}$이다.

4와 a를 나타내는 점 사이의 거리가 5이므로 a를 나타내는 점은 4를 나타내는 점으로부터 5만큼 떨어져 있다. 즉, $a=-1$ 또는 $a=9$이다.

(ⅰ) $a=-1$일 때, a를 나타내는 점은 1을 나타내는 점에서 왼쪽으로 2만큼 떨어져 있으므로 b를 나타내는 점은 1을 나타내는 점에서 오른쪽으로 2만큼 떨어져 있다.　$\therefore b=3$

(ⅱ) $a=9$일 때, a를 나타내는 점은 1을 나타내는 점에서 오른쪽으로 8만큼 떨어져 있으므로 b를 나타내는 점은 1을 나타내는 점으로부터 왼쪽으로 8만큼 떨어져 있다.

$\therefore b=-7$

이때 b는 음수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

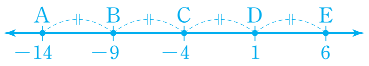
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $b=3$

04

수직선에서 서로 다른 두 수 a, b를 나타내는 점으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 수가 1이고, 4를 나타내는 점과 a를 나타내는 점 사이의 거리가 5이다. 이때 양수 b의 값을 구하시오. 3

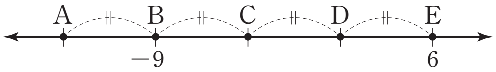
두 점 B, E 사이의 거리는 $|-9|+|6|=15$이고, 두 점 B, E 사이에 두 점 C, D가 같은 간격으로 놓여 있으므로 이웃하는 두 점 사이의 거리는 $\frac{15}{3}=5$이다.

즉, 세 점 A, C, D가 나타내는 수는 각각 -14, -4, 1이다.



05

다음 수직선에서 5개의 점 A, B, C, D, E에 대한 설명으로 옳은 것을 보기에서 있는 대로 모두 고른 것은?



〈 보기 〉

ㄱ. 점 A, B, C, D, E 중 음수를 나타내는 점은 3개이다.

ㄴ. 두 점 A, D 사이의 거리는 15이다.

ㄷ. 선분 CD를 6등분한 점 중 점 C에 가장 가까운 점은 -3의 오른쪽에 있다.

① ㄱ　② ㄷ　✓③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 음수를 나타내는 점은 점 A, B, C의 3개이다.

ㄴ. 점 A가 나타내는 수는 -14이고, 점 D가 나타내는 수는 1이므로 두 점 A, D 사이의 거리는 15이다.

ㄷ. 선분 CD를 6등분했을 때 각 점 사이의 간격은 $\frac{5}{6}$이므로 점 C에 가장 가까운 점은 -4에서 오른쪽으로 $\frac{5}{6}$만큼 이동한 점이고, $\frac{5}{6}<1$이므로 -3의 왼쪽에 있다.

06

수직선에서 서로 다른 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킬 때, 점 C와 점 D가 나타내는 수의 합을 구하시오. 14

㈎ 점 A가 나타내는 수는 -3이다.

㈏ 점 B는 점 A와 점 C로부터 같은 거리에 있는 점이다.

㈐ 점 C는 점 B와 점 D로부터 같은 거리에 있는 점이다.

㈑ 점 A와 점 D 사이의 거리는 12이다.

(단, 점 D는 점 A보다 오른쪽에 있다.)

세 조건 ㈏. ㈐, ㈑에서 네 점 A, B, C, D는 왼쪽부터 차례대로 위치하고 이웃하는 두 점 사이의 거리는 같다.

조건 ㈑에서 점 A와 점 D 사이의 거리는 12이므로 네 점 A, B, C, D 각 점 사이의 거리는 $\frac{1}{12}\times3=4$이다.

조건 ㈎에서 점 A가 나타내는 수는 -3이므로 세 점 B, C, D가 나타내는 수는 각각 1, 5, 9이다.

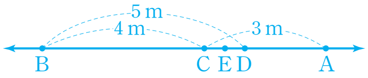
따라서 점 C와 점 D가 나타내는 수의 합은 $5+9=14$

07 출제 주의

5명의 학생 A, B, C, D, E가 한 줄로 서 있는데 그 위치가 다음과 같다. 이때 E는 앞에서부터 몇 번째에 서 있는가?

> ㈎ D는 B보다 5 m 앞에 있다.
> ㈏ E는 A보다 뒤에 있으며 E와 A 사이에 1명이 있다.
> ㈐ A는 C보다 3 m 앞에 있다.
> ㈑ C는 B보다 4 m 앞에 있다.

① 첫 번째 ② 두 번째 ✓③ 세 번째
④ 네 번째 ⑤ 다섯 번째



앞에 서 있는 학생부터 차례대로 나열하면 A, D, E, C, B이므로 E는 앞에서부터 세 번째에 서 있다.

08 출제 주의

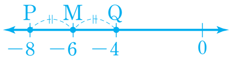
수직선에서 점 P는 -3을 나타내는 점으로부터 거리가 5만큼 떨어진 점이다. 점 Q는 점 P로부터 거리가 x만큼 떨어진 점이고, 점 M은 두 점 P와 Q의 가장 가운데에 있는 점이다. 점 M이 0을 나타내는 점으로부터 거리가 6만큼 떨어져 있을 때, 가능한 모든 자연수 x의 값의 합은?

✓① 56 ② 57 ③ 58
④ 59 ⑤ 60

점 P는 -3을 나타내는 점으로부터 거리가 5만큼 떨어진 점이므로 점 P가 나타내는 수는 -8 또는 2이고, 점 M은 0을 나타내는 점으로부터 거리가 6만큼 떨어진 점이므로 점 M이 나타내는 수는 -6 또는 6이다.

(i) 점 P가 나타내는 수가 -8일 때

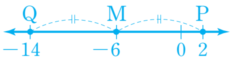
점 M이 나타내는 수가 -6이면 두 점 P, M 사이의 거리는 2이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는 4이다. $\therefore x=4$



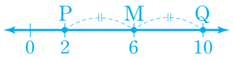
또, 점 M이 나타내는 수가 6이면 두 점 P, M 사이의 거리는 14이므로 두 점 P, Q의 거리는 28이다. $\therefore x=28$

(ii) 점 P가 나타내는 수가 2일 때

점 M이 나타내는 수가 -6이면 두 점 P, M 사이의 거리는 8이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는 16이다. $\therefore x=16$



또, 점 M이 나타내는 수가 6이면 두 점 P, M 사이의 거리는 4이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는 8이다. $\therefore x=8$



(i), (ii)에 의하여 가능한 모든 x의 값의 합은 $4+28+16+8=56$

09

절댓값이 n 이하인 정수가 33개일 때, 자연수 n의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15
✓④ 16 ⑤ 17

절댓값이 k인 수는
$k=0$일 때, 0의 1개, $k>0$일 때 k, $-k$의 2개이다.
따라서 절댓값이 n 이하인 정수의 개수는 $1+n\times2$이므로
$1+n\times2=33$, $n\times2=32$
$\therefore n=16$

10 서술형

유리수 x에 대하여 $[x]$를 x보다 크지 않은 수 중 가장 큰 정수라고 하자. $[-2.4]=a$, $[-8]=b$, $[3.7]=c$일 때, $|a|+|b|+|c|$의 값을 구하시오. **14**

-2.4보다 크지 않은 정수는 -3, -4, -5, …
이 중 가장 큰 수는 -3이므로 $a=[-2.4]=-3$ ……………… 25 %
-8보다 크지 않은 정수는 -8, -9, -10, …
이 중 가장 큰 수는 -8이므로 $b=[-8]=-8$ ……………… 25 %
3.7보다 크지 않은 정수는 3, 2, 1, …
이 중 가장 큰 수는 3이므로 $c=[3.7]=3$ ……………… 25 %
$\therefore |a|+|b|+|c|=|-3|+|-8|+|3|=3+8+3=14$ ……………… 25 %

11

서로 다른 두 수 a, b에 대하여

$$a\star b=\begin{cases}|a| & (a<b)\\|b| & (a>b)\end{cases}$$

라고 할 때,

$$\frac{3}{2}\star\left[\frac{5}{3}\star\left\{\left(-\frac{7}{4}\right)\star\left(-\frac{9}{5}\right)\right\}\right]$$

의 값을 구하시오. $\mathbf{\frac{3}{2}}$

$-\frac{7}{4}=-\frac{35}{20}$, $-\frac{9}{5}=-\frac{36}{20}$이므로 $\left(-\frac{7}{4}\right)\star\left(-\frac{9}{5}\right)=\left|-\frac{9}{5}\right|=\frac{9}{5}$
$\frac{5}{3}=\frac{25}{15}$, $\frac{9}{5}=\frac{27}{15}$이므로 $\frac{5}{3}\star\frac{9}{5}=\left|\frac{5}{3}\right|=\frac{5}{3}$
$\frac{3}{2}=\frac{9}{6}$, $\frac{5}{3}=\frac{10}{6}$이므로 $\frac{3}{2}\star\frac{5}{3}=\left|\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}$
$\therefore \frac{3}{2}\star\left[\frac{5}{3}\star\left\{\left(-\frac{7}{4}\right)\star\left(-\frac{9}{5}\right)\right\}\right]=\frac{3}{2}$

12

$|a|+|b|=100$을 만족시키는 두 정수 a, b를 (a, b)로 나타낼 때, (a, b)의 개수는?

① 200 ② 250 ③ 300
④ 350 ✓⑤ 400

$|a|=0$ 또는 $|b|=0$일 때, (a, b)는 2개, $|a|\neq0$이고 $|b|\neq0$일 때, (a, b)는 4개이다.
$|a|\neq0$인 수는 $|a|=1, 2, 3, \dots, 99$의 99개이므로 조건을 만족시키는 (a, b)의 개수는
$2\times2+4\times99=400$

13

다음 조건을 만족시키는 두 양의 정수 x, y에 대하여 $|x-y|$의 값을 구하시오. 9

(가) 절댓값이 x 이하인 정수 중 3으로 나누어떨어지는 수의 개수는 13이다.
(나) 절댓값이 x 이하인 정수 중 5로 나누어떨어지는 수의 개수는 9이다.
(다) 절댓값이 y 이하인 정수의 개수는 23이다.

조건 (가)에 의하여 절댓값이 x 이하인 정수 중 3으로 나누어떨어지는 수 13개는 음수 6개, 0, 양수 6개이므로

$-3\times6,\ \dots,\ -3\times1,\ 0,\ 3\times1,\ \dots,\ 3\times6 \qquad \therefore\ 18\le x<21$

조건 (나)에 의하여 절댓값이 x 이하인 정수 중 5로 나누어떨어지는 수 9개는 음수 4개, 0, 양수 4개이므로

$-5\times4,\ \dots,\ -5\times1,\ 0,\ 5\times1,\ \dots,\ 5\times4 \qquad \therefore\ 20\le x<25$

따라서 두 조건 (가), (나)를 만족시키는 정수 x의 값은 20이다.

또, 조건 (다)에서 절댓값이 y 이하인 정수의 개수가 23이면 음수 11개, 0, 양수 11개이므로 $y=11$

$\therefore\ |x-y|=|20-11|=9$

14 서술형

$a<b$인 두 수 a, b가 $|a|+|b|=8$, $3\times|a|=|b|$를 만족시킨다. a, b의 부호가 다를 때, a, b의 값을 구하시오.

$a=-2$, $b=6$

$|a|+|b|=8$, $3\times|a|=|b|$이므로 $|a|=2$, $|b|=6$ ······························ 40 %
또, $a<b$이고 a, b의 부호가 다르므로 $a<0$, $b>0$ ······························ 20 %
따라서 구하는 a, b의 값은 $a=-2$, $b=6$ ······························ 40 %

15

수직선에서 서로 다른 두 수 x, y를 나타내는 두 점이 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 y의 값의 합을 구하시오. 24

(가) x의 절댓값은 7이다.
(나) x, y를 나타내는 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 수는 6이다.

조건 (가)에서 $|x|=7$이므로 $x=-7$ 또는 $x=7$
조건 (나)에서 두 점 x, y는 6을 나타내는 점으로부터 같은 거리에 있으므로

(ⅰ) $x=-7$일 때
x를 나타내는 점은 6을 나타내는 점으로부터 왼쪽으로 13만큼 떨어져 있으므로 y를 나타내는 점은 6을 나타내는 점으로부터 오른쪽으로 13만큼 떨어져 있다.
$\therefore\ y=19$

(ⅱ) $x=7$일 때
x를 나타내는 점은 6을 나타내는 점으로부터 오른쪽으로 1만큼 떨어져 있으므로 y를 나타내는 점은 6을 나타내는 점으로부터 왼쪽으로 1만큼 떨어져 있다.
$\therefore\ y=5$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 조건을 만족시키는 y의 값은 5, 19이므로 구하는 합은 $5+19=24$

16

절댓값이 같은 두 수 a, b를 수직선에 점으로 나타내었다. 두 수 a, b를 나타내는 두 점 사이의 거리가 20일 때, 두 점 사이를 10등분하는 9개의 점 중 오른쪽에서 7번째에 있는 점이 나타내는 수는?

① -8　② -7　③ -6
④ -5　✓⑤ -4

절댓값이 같은 두 수 a, b를 나타내는 두 점은 원점으로부터 각각 $20\times\frac{1}{2}=10$만큼 떨어져 있으므로 두 수 a, b는 -10, 10이다.

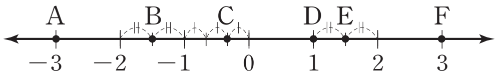
두 수 -10, 10을 나타내는 두 점 사이의 거리를 10등분하는 점 사이의 간격은 모두 $20\times\frac{1}{10}=2$이므로 9개의 점이 나타내는 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$-8,\ -6,\ -4,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$

따라서 오른쪽에서 7번째에 있는 점이 나타내는 수는 -4이다.

17

다음 수직선에서 6개의 점 A, B, C, D, E, F에 대한 설명으로 옳은 것은?



① 음의 정수를 나타내는 점은 2개이다.
② 점 A가 나타내는 수의 절댓값이 가장 작다.
✓③ 두 점 A와 D가 나타내는 두 수 사이에는 정수가 3개 있다.
④ 점 F가 나타내는 수의 절댓값은 점 C가 나타내는 수의 절댓값의 6배이다.
⑤ 점 B가 나타내는 수의 절댓값은 점 E가 나타내는 수의 절댓값보다 작다.

① 음의 정수를 나타내는 점은 A뿐이므로 1개이다.
② 점 C가 나타내는 수의 절댓값이 가장 작다.
③ 두 점 A와 D가 나타내는 두 수 사이에 있는 정수는 -2, -1, 0의 3개이다.
④ 점 F가 나타내는 수의 절댓값은 3, 점 C가 나타내는 수의 절댓값은 $\frac{1}{3}$이므로 점 F가 나타내는 수의 절댓값은 점 C가 나타내는 수의 절댓값의 9배이다.
⑤ 점 B와 점 E는 0을 나타내는 점으로부터 같은 거리만큼 떨어져 있으므로 점 B와 점 E가 나타내는 수의 절댓값은 같다.

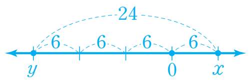
18

다음 조건을 만족시키는 부호가 다른 두 수 x, y를 $(x,\ y)$로 나타낼 때, $(x,\ y)$를 모두 구하시오. $(6,\ -18)$, $(-6,\ 18)$

(가) $3\times|x|=|y|$
(나) 수직선에서 x, y를 나타내는 두 점 사이의 거리는 24이다.

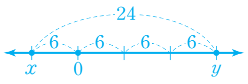
x, y는 부호가 다르고 조건 (가)에서 $3\times|x|=|y|$이므로 0은 x와 y를 4등분하는 점 중 x에 가장 가까운 점이다. 이때 $\frac{24}{4}=6$이므로

(ⅰ) $x>0$, $y<0$일 때



$\therefore\ x=6,\ y=-18$

(ⅱ) $x<0$, $y>0$일 때



$\therefore\ x=-6,\ y=18$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $(x,\ y)$는 $(6,\ -18)$, $(-6,\ 18)$이다.

19

두 정수 a, b에 대하여 a를 나타내는 점은 수직선에서 0을 나타내는 점으로부터의 거리가 4이고, b는 $|b|=|-6|$을 만족시킨다. $|a|+|b|+|c|=13$일 때, 양의 정수 c의 값은?

✓① 3 ② 4 ③ 5

④ 6 ⑤ 7

a를 나타내는 점이 수직선에서 0을 나타내는 점으로부터의 거리가 4이므로 $|a|=4$

$|b|=|-6|=6$이고 $|a|+|b|+|c|=13$이므로 $4+6+|c|=13$

$10+|c|=13 \quad \therefore |c|=3$

이때 c는 양의 정수이므로 $c=3$

20 출제 주의

다음 조건을 만족시키는 두 정수 A, B에 대하여 모든 $|A|$의 값의 합을 구하시오. 78

(가) $B\times|A-B|=108$

(나) B의 약수의 개수는 3이다.

조건 (나)에서 B의 약수의 개수는 3이므로 $B=p^2$ (p는 소수)의 꼴이어야 한다.

조건 (가)에서 $B\times|A-B|=108$이므로 B는 108의 약수이어야 하고, $108=2^2\times3^3$이므로 B는 2^2 또는 3^2이다.

(i) $B=2^2=4$일 때, $B\times|A-B|=4\times|A-4|=108$이므로 $|A-4|=27$

즉, $A-4=27$ 또는 $A-4=-27$이므로 $A=31$ 또는 $A=-23$

(ii) $B=3^2=9$일 때, $B\times|A-B|=9\times|A-9|=108$이므로 $|A-9|=12$

즉, $A-9=12$ 또는 $A-9=-12$이므로 $A=21$ 또는 $A=-3$

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 A의 값은 -23, -3, 21, 31이므로 모든 $|A|$의 값의 합은 $|-23|+|-3|+|21|+|31|=23+3+21+31=78$

21

절댓값이 20보다 작은 0이 아닌 세 정수 a, b, c를 (a, b, c)로 나타낼 때, (a, b, c)의 개수를 구하시오. 88

(가) $|b|$는 $|a|$의 약수이다.

(나) $|b|=|c|+2$

(다) $\dfrac{|a|}{|b|}$, $|c|$의 최대공약수는 1이다.

(라) $2<|c|<10$

조건 (라)에서 $|c|=3, 4, 5, \dots, 9$

조건 (가)에서 $|a|=|b|\times k$ (k는 자연수)의 꼴로 나타낼 수 있고, 조건 (다)에서

$\dfrac{|a|}{|b|}=\dfrac{|b|\times k}{|b|}=k$와 $|c|$의 최대공약수가 1이므로 k와 $|c|$는 서로소이다.

이때 $|a|<20$이므로 $|b|\times k<20$이고, 조건 (나)에서 $|b|=|c|+2$이므로

(i) $|c|=3$일 때, $|b|=5$이고, $5\times k<20$을 만족시키는 자연수 k의 값은 1, 2, 3이다.

그런데 k와 $|c|$는 서로소이어야 하므로 k의 값은 1, 2의 2개이다.

(ii) $|c|=4$일 때, $|b|=6$이고, $6\times k<20$을 만족시키는 자연수 k의 값은 1, 2, 3이다.

그런데 k와 $|c|$는 서로소이어야 하므로 k의 값은 1, 3의 2개이다.

(iii) $|c|=5$일 때, $|b|=7$이고, $7\times k<20$을 만족시키는 자연수 k의 값은 1, 2이다.

1과 2는 모두 $|c|$와 서로소이므로 k의 값은 2개이다.

(iv) $|c|=6$일 때, $|b|=8$이고, $8\times k<20$을 만족시키는 자연수 k의 값은 1, 2이다.

그런데 k와 $|c|$는 서로소이어야 하므로 k의 값은 1의 1개이다.

(v) $|c|=7$일 때, $|b|=9$이고, $9\times k<20$을 만족시키는 자연수 k의 값은 1, 2이다.

1과 2는 모두 $|c|$와 서로소이므로 k의 값은 2개이다.

(vi) $|c|=8$일 때, $|b|=10$이고, $10\times k<20$을 만족시키는 자연수 k의 값은 1이다.

1은 $|c|$와 서로소이므로 k의 값은 1개이다.

(vii) $|c|=9$일 때, $|b|=11$이고, $11\times k<20$을 만족시키는 자연수 k의 값은 1이다.

1은 $|c|$와 서로소이므로 k의 값은 1개이다.

(i)~(vii)에 의하여 조건을 만족시키는 $(|a|, |b|, |c|)$의 개수는

$2+2+2+1+2+1+1=11$이고, 이때 각각의 $(|a|, |b|, |c|)$에 대하여 (a, b, c)는 부호가 다른 8개가 존재하므로 조건을 만족시키는 (a, b, c)의 개수는 $8\times11=88$

22

수직선에 수 x를 나타내려고 한다.

$|x+3|+|x|+\left|x-\dfrac{5}{3}\right|+|x-6|$의 값이 가장 작을 때의 정수 x의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0

✓④ 1 ⑤ 2

$|x+3|+|x|+\left|x-\frac{5}{3}\right|+|x-6|$은 수직선에서 x를 나타내는 점으로부터 -3, 0, $\frac{5}{3}$, 6을 나타내는 각 점 사이의 거리를 모두 더한 값이다.

네 점으로부터의 거리의 합이 가장 작은 값이 나오려면 x는 두 번째와 세 번째 수인 0과 $\frac{5}{3}$ 사이의 수이어야 한다.

이때 0과 $\frac{5}{3}$ 사이에 정수는 1뿐이므로 $x=1$

23

$\dfrac{5}{8}<\dfrac{60}{n}<\dfrac{4}{3}$를 만족시키는 자연수 n의 개수를 구하시오. 50

세 분수의 분자를 60으로 같게 하면

$\dfrac{60}{96}<\dfrac{60}{n}<\dfrac{60}{45} \qquad \therefore 45<n<96$

따라서 자연수 n은 46, 47, …, 95의 50개이다.

24 서술형

$\dfrac{10}{a}$, $\dfrac{15}{a}$가 모두 정수이고 $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{|b|}{a}<\dfrac{5}{2}$를 만족시키는 두 정수 a, b를 (a, b)로 나타낼 때, (a, b)의 개수를 구하시오. 24

$\dfrac{10}{a}$, $\dfrac{15}{a}$가 모두 정수이므로 a는 10과 15의 공약수이다.

즉, a는 최대공약수 5의 약수인 1 또는 5이다. ······························ 40 %

(i) $a=1$일 때, $\frac{1}{2}\le|b|<\frac{5}{2}$이고 b는 정수이므로 $|b|=1, 2$

따라서 b의 값은 -2, -1, 1, 2의 4개이므로 (a, b)

즉, $(1, b)$의 개수는 4이다.

(ii) $a=5$일 때, $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{|b|}{5}<\dfrac{5}{2}$에서 $\dfrac{5}{10}\le\dfrac{2\times|b|}{10}<\dfrac{25}{10}$

즉, $5\le2\times|b|<25$이고 b는 정수이므로 $|b|=3, 4, 5, \dots, 12$

따라서 b의 값은 -12, -11, …, -3, 3, …, 11, 12의 20개이므로 (a, b)

즉, $(5, b)$의 개수는 20이다. ······························ 40 %

(i), (ii)에 의하여 (a, b)의 개수는 $4+20=24$ ······························ 20 %

25 출제 주의

두 정수 a, b에 대하여 a, b의 부호가 같고 $a>b$일 때 $|a|<|b|$가 성립한다. $3<|a|<8$이고 $|a|$의 약수의 개수가 2일 때, a의 값을 모두 고르면? (정답 2개)

✓① -7 ✓② -5 ③ 5

④ 6 ⑤ 7

a, b의 부호가 같고 $a>b$일 때 $|a|<|b|$가 성립하므로 a, b는 모두 음수이다.
또, $|a|$의 약수의 개수가 2이면 $|a|$는 소수이므로
$3<|a|<8$에서 $|a|=5, 7$
따라서 a의 값은 -7 또는 -5이다.

두 조건 ㈎, ㈏를 만족시키는 0이 아닌 a의 값은
$\pm7, \pm14, \pm21, \pm28, \pm35, \pm42, \pm49$이다.
조건 ㈐에서 $|a|$와 12는 서로소이고 $12=2^2\times3$이므로 a는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니어야 한다.
따라서 a의 값은 $\pm7, \pm35, \pm49$이므로 정수 a의 개수는 6이다.

26

다음 조건을 만족시키는 0이 아닌 정수 a의 개수는?

> ㈎ $-50<a<50$
> ㈏ a는 7로 나누어떨어진다.
> ㈐ $|a|$와 12는 서로소이다.

① 4 ✓② 6 ③ 8

④ 10 ⑤ 12

조건 ㈎에서 $1<\frac{b}{a}<2$

$a=1$일 때, $1<b<2$이므로 b의 값은 없다. $a=2$일 때, $1<\frac{b}{2}<2$이므로 $b=3$

$a=3$일 때, $1<\frac{b}{3}<2$이므로 $b=4, 5$ $a=4$일 때, $1<\frac{b}{4}<2$이므로 $b=5, 6, 7$

$a=5$일 때, $1<\frac{b}{5}<2$이므로 $b=6, 7, 8, 9$ $a=6$일 때, $1<\frac{b}{6}<2$이므로 $b=7, 8, 9$

27

다음 조건을 만족시키는 서로 다른 세 수 x, y, z의 대소 관계를 부등호를 사용하여 나타내시오. $z<y<x$

> ㈎ $1<|x|\leq2$이고 x는 정수이다.
> ㈏ 수직선에서 두 수 z와 1을 나타내는 점으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 수는 y이다.
> ㈐ z는 -1보다 작은 정수 중 절댓값이 가장 작다.

조건 ㈐에서 -1보다 작은 정수 중 절댓값이 가장 작은 수는 -2이다.
$\therefore z=-2$
조건 ㈏에서 두 수 z와 1을 나타내는 점으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 수는 -2와 1의 한가운데에 있는 수이므로 $-\frac{1}{2}$이다.
$\therefore y=-\frac{1}{2}$
이때 조건 ㈎를 만족시키는 x의 값은 -2, 2이고, x, y, z는 서로 다른 세 수이므로
$x=2$
$\therefore z<y<x$

조건 ㈏에서 $0<a\leq12$를 만족시키는 정수 a의 값은 1, 5, 7, 11이다.
조건 ㈎에서
(ⅰ) $a=1$일 때, $|10-1|\leq|1+2|$, 즉 $|9|\leq|3|$
(ⅱ) $a=5$일 때, $|10-5|\leq|5+2|$, 즉 $|5|\leq|7|$
(ⅲ) $a=7$일 때, $|10-7|\leq|7+2|$, 즉 $|3|\leq|9|$
(ⅳ) $a=11$일 때, $|10-11|\leq|11+2|$, 즉 $|-1|\leq|13|$
(ⅰ)～(ⅳ)에 의하여 조건을 만족시키는 a의 값은 5, 7, 11이므로 $M=11$, $m=5$
$\therefore M\times m=11\times5=55$

28

$0<a\leq12$인 정수 a가 다음 조건을 만족시킨다. a의 값 중 가장 큰 수를 M, 가장 작은 수를 m이라고 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오. 55

> ㈎ $|10-a|\leq|a+2|$
> ㈏ a는 3의 배수도 아니고 짝수도 아니다.

ㄱ. $|a|>|b+2|$이지만 a, b의 대소 관계는 알 수 없다.
ㄴ. $a=-3$일 때, $|b+2|<3$이므로 b가 정수이면 $|b+2|$의 값은 0, 1, 2이다.
따라서 정수 b의 값은 $-4, -3, -2, -1, 0$의 5개이다.

29

두 수 a, b가 $|a|>|b+2|$를 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것을 있는 대로 모두 고른 것은?

> 〈 보기 〉
> ㄱ. $a<b$
> ㄴ. $a=-3$일 때, 정수 b는 5개이다.
> ㄷ. b가 a보다 원점에 가깝다.
> ㄹ. $|a|+|b+2|>0$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ

✓④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

ㄷ. $a=3$, $b=-4$이면 $|a|=3$, $|b+2|=2$이므로 $|a|>|b+2|$이지만 a가 b보다 원점에 가깝다.
ㄹ. 절댓값의 성질에 의하여 절댓값은 항상 0 또는 양수이므로 $|a|>|b+2|\geq0$
$\therefore |a|+|b+2|>0$

30

1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 9장의 카드가 있다. 이 중 두 장을 뽑아 각 카드에 적힌 두 수 a, b를 이용하여 음의 유리수 $x=-\frac{b}{a}$를 만들려고 한다. 만들어진 수 x가 다음 조건을 만족시킬 때, 만들 수 있는 서로 다른 유리수 x의 개수는?

> ㈎ $-2<x<-1$
> ㈏ x는 기약분수이다.

① 9 ② 10 ③ 11

④ 12 ✓⑤ 13

$a=7$일 때, $1<\frac{b}{7}<2$이므로 $b=8, 9$ $a=8$일 때, $1<\frac{b}{8}<2$이므로 $b=9$

$a=9$일 때, $1<\frac{b}{9}<2$이므로 조건을 만족시키는 b의 값은 없다.

이때 조건 ㈏에서 $-\frac{b}{a}$는 기약분수이므로 만들 수 있는 서로 다른 유리수 x는

$-\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{4}, -\frac{7}{4}, -\frac{6}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{8}{5}, -\frac{9}{5}, -\frac{7}{6}, -\frac{8}{7}, -\frac{9}{7}, -\frac{9}{8}$

의 13개이다.

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

개념 1 정수와 유리수의 덧셈과 뺄셈

01

다음 중 옳은 것은?

① $(+9)+(-6)=-3$
② $(+5)-(+7)=+2$
③ $(-0.4)+(-2.1)=+2.5$
④ $\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)=+\frac{5}{6}$
✓⑤ $\left(+\frac{4}{5}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)=+\frac{21}{20}$

① $(+9)+(-6)=+3$
② $(+5)-(+7)=-2$
③ $(-0.4)+(-2.1)=-2.5$
④ $\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{9}{6}\right)+\left(+\frac{4}{6}\right)=-\frac{5}{6}$
⑤ $\left(+\frac{4}{5}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)=\left(+\frac{16}{20}\right)+\left(+\frac{5}{20}\right)=+\frac{21}{20}$

02

$A=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)$, $B=(-0.2)-\left(+\frac{3}{2}\right)$일 때, $A-B$의 값은?

① $-\frac{13}{5}$
② $-\frac{4}{5}$
③ $-\frac{2}{5}$
✓④ $+\frac{4}{5}$
⑤ $+\frac{13}{5}$

$A=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)=\left(-\frac{5}{10}\right)+\left(-\frac{4}{10}\right)=-\frac{9}{10}$
$B=(-0.2)-\left(+\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{2}{10}\right)+\left(-\frac{15}{10}\right)=-\frac{17}{10}$
$\therefore A-B=\left(-\frac{9}{10}\right)-\left(-\frac{17}{10}\right)=\left(-\frac{9}{10}\right)+\left(+\frac{17}{10}\right)=+\frac{8}{10}=+\frac{4}{5}$

03

다음 중 옳은 것은?

① $\frac{5}{6}-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$
✓② $-5+2-3=-6$
③ $-2+7-4+0.1=5.1$
④ $0.8+2-3=0.2$
⑤ $\frac{2}{5}+\frac{1}{9}-1=\frac{22}{45}$

① $\frac{5}{6}-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}-3=\frac{5}{6}-\frac{18}{6}=-\frac{13}{6}$
③ $-2+7-4+0.1=1.1$
④ $0.8+2-3=-0.2$
⑤ $\frac{2}{5}+\frac{1}{9}-1=\frac{18}{45}+\frac{5}{45}-\frac{45}{45}=-\frac{22}{45}$

04

다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 구하시오. $\frac{7}{15}$

$$\frac{2}{3}-\square+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$

$\frac{2}{3}-\square+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$에서
$\frac{2}{3}-\square=\frac{1}{5}$
$\therefore \square=\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=\frac{10}{15}-\frac{3}{15}$

05 출제 주의

-2보다 $-\frac{1}{3}$만큼 작은 수를 A, $\frac{3}{4}$보다 $\frac{1}{12}$만큼 큰 수를 B라고 할 때, $A<x<B$를 만족시키는 모든 정수 x의 개수를 구하시오. 2

$A=-2-\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{6}{3}+\left(+\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{3}$
$B=\frac{3}{4}+\frac{1}{12}=\frac{9}{12}+\frac{1}{12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$
따라서 $-\frac{5}{3}<x<\frac{5}{6}$를 만족시키는 정수 x는 -1, 0의 2개이다.

06

a의 절댓값이 7, b의 절댓값이 4일 때, $a-b$의 값 중 가장 큰 수를 M, 가장 작은 수를 m이라고 하자. 이때 $M-m$의 값을 구하시오. 22

a의 절댓값이 7이므로 $a=7$ 또는 $a=-7$
b의 절댓값이 4이므로 $b=4$ 또는 $b=-4$
이때 $a-b$의 값은
$a=7$, $b=4$일 때, $7-4=3$
$a=7$, $b=-4$일 때, $7-(-4)=7+4=11$
$a=-7$, $b=4$일 때, $-7-4=-11$
$a=-7$, $b=-4$일 때, $-7-(-4)=-7+4=-3$
따라서 $a-b$의 값 중 가장 큰 수는 11, 가장 작은 수는 -11이므로 $M=11$, $m=-11$
$\therefore M-m=11-(-11)=11+(+11)=22$

07

$\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(+\frac{7}{6}\right)-(+1)-\left(-\frac{1}{5}\right)$을 계산하면?

① $-\frac{23}{30}$ ✓② $-\frac{13}{30}$ ③ $-\frac{1}{10}$

④ $\frac{13}{30}$ ⑤ $\frac{23}{30}$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(+\frac{7}{6}\right)-(+1)-\left(-\frac{1}{5}\right)&=\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(+\frac{7}{6}\right)+(-1)+\left(+\frac{1}{5}\right)\\&=\left\{\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(+\frac{1}{5}\right)\right\}+\left\{\left(+\frac{7}{6}\right)+(-1)\right\}\\&=\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)\\&=\left(-\frac{18}{30}\right)+\left(+\frac{5}{30}\right)\\&=-\frac{13}{30}\end{aligned}$$

08 서술형

오른쪽 그림에서 가로, 세로, 대각선에 놓인 세 수의 합이 모두 같을 때, $A-B$의 값을 구하시오. -2

-5		A
2	-2	
-3		B

왼쪽 세로 줄에 놓인 세 수의 합은

$(-5)+2+(-3)=-6$ ······························ 30 %

왼쪽 아래에서 오른쪽 위로 놓인 대각선의 세 수의 합은

$(-3)+(-2)+A=-6$이므로

$(-5)+A=-6$ $\therefore A=-1$ ······························ 30 %

왼쪽 위에서 오른쪽 아래로 놓인 대각선의 세 수의 합은

$(-5)+(-2)+B=-6$이므로

$(-7)+B=-6$ $\therefore B=1$ ······························ 30 %

$\therefore A-B=-1-1=-2$ ······························ 10 %

09

다음은 키가 서로 다른 네 학생 A, B, C, D의 키를 비교한 것이다. 이때 A와 D의 키의 차를 구하시오. 2 cm

(가) A는 C보다 12 cm만큼 크다.
(나) B는 D보다 5 cm만큼 작다.
(다) C는 B보다 9 cm만큼 작다.

A의 키를 a cm라고 하면

조건 (가)에서 C의 키는 $(a-12)$ cm

조건 (다)에서 B의 키는 $(a-12)+9=a-3$ (cm)

조건 (나)에서 D의 키는 $(a-3)+5=a+2$ (cm)

따라서 A와 D의 키의 차는 $(a+2)-a=2$ (cm)

10

$(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^{100}$을 계산하면?

① -100 ② -10 ✓③ 0

④ 10 ⑤ 100

$$\begin{aligned}&(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^{100}\\&=\{(-1)+1\}+\{(-1)+1\}+\cdots+\{(-1)+1\}\\&=0+0+\cdots+0=0\end{aligned}$$

개념 2 정수와 유리수의 곱셈과 나눗셈

11

다음 중 계산 결과가 가장 큰 것은?

① $(+8)\times(+3)$ ② $(+5)\times(-7)$

③ $(+19)\times0$ ④ $(-2)\times(+6)$

✓⑤ $(-4)\times(-11)$

① $(+8)\times(+3)=+24$

② $(+5)\times(-7)=-35$

③ $(+19)\times0=0$

④ $(-2)\times(+6)=-12$

⑤ $(-4)\times(-11)=+44$

12

세 유리수 a, b, c에 대하여 $a\times b=6$, $a\times c=-9$일 때, $a\times(b+c)$의 값은?

① -15 ✓② -3 ③ 0

④ 3 ⑤ 15

$a\times(b+c)=a\times b+a\times c=6+(-9)=-3$

13 출제 주의

네 유리수 $-\frac{1}{6}$, 3, $-\frac{9}{4}$, 4 중 서로 다른 세 수를 뽑아 곱한 값 중 가장 큰 수를 구하시오. $\frac{3}{2}$

주어진 네 유리수 중 서로 다른 세 수를 뽑아 곱한 값이 가장 크려면 결과값이 양수이어야 하므로 곱해지는 세 수 중 음수가 2개이어야 한다.
즉, (양수)×(음수)×(음수)의 꼴이어야 한다.
이때 양수는 절댓값이 큰 수이어야 하므로 구하는 값은
$4\times\left(-\frac{1}{6}\right)\times\left(-\frac{9}{4}\right)=+\left(4\times\frac{1}{6}\times\frac{9}{4}\right)=\frac{3}{2}$

14

다음 수를 큰 것부터 차례대로 나열할 때, 두 번째에 오는 수를 구하시오. $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$

$$\frac{(-3)^2}{4},\ -\frac{3}{4^2},\ \left(-\frac{3}{4}\right)^2,\ -\left(-\frac{3}{4}\right)^2$$

$\frac{(-3)^2}{4}=\frac{9}{4}$, $-\frac{3}{4^2}=-\frac{3}{16}$, $\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$, $-\left(-\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{9}{16}$
따라서 $\frac{(-3)^2}{4}>\left(-\frac{3}{4}\right)^2>-\frac{3}{4^2}>-\left(-\frac{3}{4}\right)^2$이므로 큰 것부터 차례대로 나열할 때, 두 번째에 오는 수는 $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$이다.

15

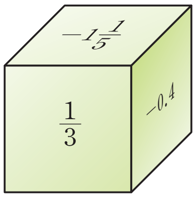
두 수 a, b에 대하여 $a>0$, $b<0$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $a+b>0$　② $a-b<0$　✓③ $b-a<0$
④ $a\times b>0$　✓⑤ $b\div a<0$

① $a+b$의 부호는 알 수 없다.
② $-b>0$이므로 $a-b>0$
③ $-a<0$이므로 $b-a<0$
④ $a\times b<0$

16 서술형

오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 마주 보는 두 면에 적힌 두 수가 서로 역수일 때, 보이지 않는 세 면에 적힌 수의 합을 구하시오. $-\frac{1}{3}$



$-1\frac{1}{5}=-\frac{6}{5}$의 역수는 $-\frac{5}{6}$, $\frac{1}{3}$의 역수는 3,
$-0.4=-\frac{2}{5}$의 역수는 $-\frac{5}{2}$이다. ……………………………… 50 %
따라서 보이지 않는 세 면에 적힌 수의 합은
$\left(-\frac{5}{6}\right)+3+\left(-\frac{5}{2}\right)=\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(+\frac{18}{6}\right)+\left(-\frac{15}{6}\right)=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$ ………… 50 %

17

$A=\left(+\frac{5}{24}\right)\div\left(-\frac{15}{16}\right)\times\left(-\frac{9}{8}\right)$일 때, A에 가장 가까운 정수는?

① -2　② -1　✓③ 0
④ 1　⑤ 2

$A=\left(+\frac{5}{24}\right)\div\left(-\frac{15}{16}\right)\times\left(-\frac{9}{8}\right)$
$=\left(+\frac{5}{24}\right)\times\left(-\frac{16}{15}\right)\times\left(-\frac{9}{8}\right)$
$=+\frac{1}{4}$
따라서 A에 가장 가까운 정수는 0이다.

18 출제 주의

어떤 수에 $-\frac{5}{6}$를 곱해야 할 것을 잘못하여 나누었더니 그 값이 $\frac{12}{5}$가 되었다. 이때 바르게 계산한 값을 구하시오. $\frac{5}{3}$

어떤 수를 A라고 하면 $A\div\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{12}{5}$
$\therefore A=\frac{12}{5}\times\left(-\frac{5}{6}\right)=-2$
따라서 바르게 계산한 값은
$-2\times\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{3}$

19

두 수 a, b에 대하여 $a\times(-3)=15$, $b\div\left(-\frac{4}{5}\right)=-3$일 때, $b\div a$의 값을 구하시오. $-\frac{12}{25}$

$a\times(-3)=15$에서 $a=15\div(-3)=-5$

$b\div\left(-\frac{4}{5}\right)=-3$에서 $b=-3\times\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{12}{5}$

$\therefore\ b\div a=\frac{12}{5}\div(-5)=\frac{12}{5}\times\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{12}{25}$

개념 3 정수와 유리수의 혼합 계산

20

다음 식의 계산 순서를 차례대로 나열하면?

$$\frac{4}{3}\underset{\underset{\text{㉠}}{\uparrow}}{-}\left[\frac{2}{5}\underset{\underset{\text{㉡}}{\uparrow}}{-}(-1)\underset{\underset{\text{㉢}}{\uparrow}}{\div}\left\{\underset{\underset{\text{㉣}}{\uparrow}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\underset{\underset{\text{㉤}}{\uparrow}}{\times}\frac{5}{2}\right\}\right]$$

① ㉡, ㉢, ㉣, ㉤, ㉠

② ㉣, ㉢, ㉤, ㉠, ㉡

✓③ ㉣, ㉤, ㉢, ㉡, ㉠

④ ㉤, ㉢, ㉣, ㉠, ㉡

⑤ ㉤, ㉣, ㉢, ㉡, ㉠

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}-\left[\frac{2}{5}-(-1)\div\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{5}{2}\right\}\right]&=\frac{4}{3}-\left\{\frac{2}{5}-(-1)\div\left(\frac{1}{4}\times\frac{5}{2}\right)\right\}\\&=\frac{4}{3}-\left\{\frac{2}{5}-(-1)\div\frac{5}{8}\right\}\\&=\frac{4}{3}-\left\{\frac{2}{5}-(-1)\times\frac{8}{5}\right\}\\&=\frac{4}{3}-\left(\frac{2}{5}+\frac{8}{5}\right)=\frac{4}{3}-2\\&=-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 계산 순서를 차례대로 나열하면 ㉣, ㉤, ㉢, ㉡, ㉠이다.

21 출제 주의

$\left(-\frac{4}{9}\right)\div\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2-(-2)\times\left\{\frac{5}{3}+(-1)\right\}\right]$을 계산하면?

① $-\frac{8}{13}$ ✓② $-\frac{4}{13}$ ③ $-\frac{2}{13}$

④ $\frac{4}{13}$ ⑤ $\frac{8}{13}$

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{4}{9}\right)\div\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2-(-2)\times\left\{\frac{5}{3}+(-1)\right\}\right]\\&=\left(-\frac{4}{9}\right)\div\left[\frac{1}{9}-(-2)\times\left\{\frac{5}{3}+(-1)\right\}\right]\\&=\left(-\frac{4}{9}\right)\div\left[\frac{1}{9}-(-2)\times\left\{\frac{5}{3}+\left(-\frac{3}{3}\right)\right\}\right]\\&=\left(-\frac{4}{9}\right)\div\left\{\frac{1}{9}-(-2)\times\frac{2}{3}\right\}=\left(-\frac{4}{9}\right)\div\left\{\frac{1}{9}-\left(-\frac{4}{3}\right)\right\}\\&=\left(-\frac{4}{9}\right)\div\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{3}\right)=\left(-\frac{4}{9}\right)\div\left(\frac{1}{9}+\frac{12}{9}\right)=\left(-\frac{4}{9}\right)\div\frac{13}{9}\\&=\left(-\frac{4}{9}\right)\times\frac{9}{13}=-\frac{4}{13}\end{aligned}$$

22

$-\frac{4}{3}-\left\{-2+\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2\div\left(-\frac{1}{12}\right)\right\}$을 계산한 결과에 가장 가까운 정수를 구하시오. 3

$$\begin{aligned}-\frac{4}{3}-\left\{-2+\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2\div\left(-\frac{1}{12}\right)\right\}&=-\frac{4}{3}-\left\{-2+\frac{3}{2}\times\frac{1}{9}\div\left(-\frac{1}{12}\right)\right\}\\&=-\frac{4}{3}-\left\{-2+\frac{3}{2}\times\frac{1}{9}\times(-12)\right\}\\&=-\frac{4}{3}-\{-2+(-2)\}=-\frac{4}{3}-(-4)\\&=-\frac{4}{3}+\frac{12}{3}=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

따라서 계산한 결과에 가장 가까운 정수는 3이다.

23

수민이와 서연이가 가위바위보를 하여 이기면 2칸 올라가고, 지면 1칸 내려가기로 하였다. 가위바위보를 10번 하여 수민이가 6번 이겼을 때, 수민이는 서연이보다 몇 계단 위에 있게 되는지 구하시오. 6계단

(단, 비기는 경우는 생각하지 않는다.)

가위바위보에서 수민이는 6번 이기고 4번 졌고, 서연이는 4번 이기고 6번 졌다.

수민이는 처음보다 $6\times2+4\times(-1)=12+(-4)=8$(계단)

서연이는 처음보다 $4\times2+6\times(-1)=8+(-6)=2$(계단)

위에 있게 되므로 수민이는 서연이보다 $8-2=6$(계단) 위에 있게 된다.

24

경훈이와 하은이가 동전을 던져서 앞면이 나오면 5점을 얻고, 뒷면이 나오면 2점을 잃는 게임을 하려고 한다. 처음 점수를 0점이라고 할 때, 다음 중 동전을 4번 던져서 얻을 수 있는 점수가 <u>아닌</u> 것은?

① -8점 ② -1점 ✓③ 3점

④ 6점 ⑤ 13점

(ⅰ) 앞면이 4번 나오는 경우

$4\times5=20$(점)

(ⅱ) 앞면이 3번, 뒷면이 1번 나오는 경우

$3\times5+1\times(-2)=15+(-2)=13$(점)

(ⅲ) 앞면이 2번, 뒷면이 2번 나오는 경우

$2\times5+2\times(-2)=10+(-4)=6$(점)

(ⅳ) 앞면이 1번, 뒷면이 3번 나오는 경우

$1\times5+3\times(-2)=5+(-6)=-1$(점)

(ⅴ) 뒷면이 4번 나오는 경우

$4\times(-2)=-8$(점)

(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여 동전을 4번 던져서 얻을 수 있는 점수가 아닌 것은 ③이다.

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

01

$|x|<4$인 정수 x에 대하여

$$y=x-|x|+1$$

이라고 할 때, 가능한 모든 y의 값의 합을 구하시오. -8

정수 x에 대하여 $|x|<4$이므로 $x=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

(ⅰ) $x=-3$일 때, $y=-3-|-3|+1=-3-3+1=-5$

(ⅱ) $x=-2$일 때, $y=-2-|-2|+1=-2-2+1=-3$

(ⅲ) $x=-1$일 때, $y=-1-|-1|+1=-1-1+1=-1$

(ⅳ) $x=0$일 때, $y=0-|0|+1=1$

(ⅴ) $x=1$일 때, $y=1-|1|+1=1-1+1=1$

(ⅵ) $x=2$일 때, $y=2-|2|+1=2-2+1=1$

(ⅶ) $x=3$일 때, $y=3-|3|+1=3-3+1=1$

(ⅰ)~(ⅶ)에 의하여 가능한 y의 값은 $-5,\ -3,\ -1,\ 1$이므로 구하는 합은

$(-5)+(-3)+(-1)+1=-8$

$|x|=8$이므로 $x=8$ 또는 $x=-8$

$|y|=11$이므로 $y=11$ 또는 $y=-11$

02

두 정수 x, y에 대하여 $|x|=8$, $|y|=11$이다. $x-y$의 값 중 가장 큰 수를 M, $x+y$의 값 중 가장 작은 수를 m이라고 할 때, $M+m$의 값은?

① -1 ✓② 0 ③ 1

④ 2 ⑤ 3

x가 양수이고 y가 음수일 때, 즉 $x=8,\ y=-11$일 때, $x-y$의 값이 가장 크므로

$M=8-(-11)=8+11=19$

x가 음수이고 y가 음수일 때, 즉 $x=-8,\ y=-11$일 때, $x+y$의 값이 가장 작으므로

$m=-8+(-11)=-8-11=-19$ $\quad\therefore M+m=19+(-19)=0$

$-\frac{4}{3}+a=-\frac{1}{2}$이므로 $a=-\frac{1}{2}-\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{3}{6}+\frac{8}{6}=\frac{5}{6}$

$a+b=\frac{1}{4}$이므로 $\frac{5}{6}+b=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore b=\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=\frac{3}{12}-\frac{10}{12}=-\frac{7}{12}$

$b+\frac{5}{6}=c$이므로 $c=-\frac{7}{12}+\frac{5}{6}=-\frac{7}{12}+\frac{10}{12}=\frac{1}{4}$

$d=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}+c=e$이므로 $e=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$d+e=f$이므로 $f=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$

03 서술형

1부터 600까지의 자연수 중 3의 배수의 합을 A, 3으로 나누었을 때 나머지가 1인 수의 합을 B라고 할 때, $A-B$의 값을 구하시오. 400

1부터 600까지의 자연수 중 3의 배수는 3, 6, 9, …, 600이므로

$A=3+6+9+\cdots+600$ ······ 20 %

1부터 600까지의 자연수 중 3으로 나누었을 때 나머지가 1인 수는 1, 4, 7, …, 598

이므로 $B=1+4+7+\cdots+598$ ······ 20 %

$\therefore A-B=(3+6+9+\cdots+600)-(1+4+7+\cdots+598)$

$=(3-1)+(6-4)+(9-7)+\cdots+(600-598)$

$=2+2+2+\cdots+2$

$=2\times200=400$ ······ 60 %

$|y|=3$이므로 $y=-3$ 또는 $y=3$

$|x|-|y|=1$에서 $|x|=4$이므로 $x=-4$ 또는 $x=4$

즉, $x=4,\ y=3$ 또는 $x=4,\ y=-3$ 또는 $x=-4,\ y=3$ 또는 $x=-4,\ y=-3$이다.

(ⅰ) $x=4,\ y=3$일 때, $|x-y|=|4-3|=1$

(ⅱ) $x=4,\ y=-3$일 때, $|x-y|=|4-(-3)|=7$

(ⅲ) $x=-4,\ y=3$일 때, $|x-y|=|-4-3|=|-7|=7$

(ⅳ) $x=-4,\ y=-3$일 때, $|x-y|=|-4-(-3)|=|-1|=1$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $M=7,\ m=1$ $\quad\therefore M+m=7+1=8$

04

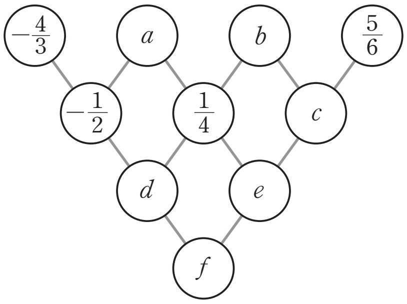
$|x|-|y|=1$, $|y|=3$을 만족시키는 두 수 x, y에 대하여 $|x-y|$의 값 중 가장 큰 수를 M, 가장 작은 수를 m이라고 할 때, $M+m$의 값은?

① 4 ② 6 ✓③ 8

④ 10 ⑤ 12

05 출제 주의

다음 그림에서 바로 위의 이웃한 두 칸의 수의 합이 바로 아래 칸의 수가 된다고 할 때, 가장 아래 칸의 수 f의 값을 구하시오.



① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0

✓④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

$3+A=1$이므로 $A=-2$

$1+B=A$이므로 $1+B=-2$ $\quad\therefore B=-3$

$A+C=B$이므로 $-2+C=-3$ $\quad\therefore C=-1$

$B+D=C$이므로 $-3+D=-1$ $\quad\therefore D=2$

06

다음 그림은 연속한 세 칸에서 왼쪽에 있는 수와 오른쪽에 있는 수의 합이 가운데에 있는 수가 되도록 수를 적은 것이다. 같은 방법으로 계속해서 수를 적어 나갈 때, 50번째 칸에 적히는 수는?

3	1	A	B	C	D	…

① -3 ② -2 ③ -1

✓④ 1 ⑤ 2

D의 오른쪽에 있는 수를 순서대로 $a,\ b,\ c$라고 하면

3	1	-2	-3	-1	2	a	b	c	…

$-1+a=2$이므로 $a=3$

$2+b=a$이므로 $2+b=3$ $\quad\therefore b=1$

$a+c=b$이므로 $3+c=1$ $\quad\therefore c=-2$

따라서 3, 1, -2, -3, -1, 2의 6개의 수가 이 순서대로 반복된다. 이때 $50=6\times8+2$이므로 50번째 칸에 적히는 수는 1이다.

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

세 번째 적히는 수는 $B-A$, 네 번째 적히는 수는 $(B-A)-B=-A$
다섯 번째 적히는 수는 $-A-(B-A)=-B$
여섯 번째 적히는 수는 $-B-(-A)=A-B$
일곱 번째 적히는 수는 $(A-B)-(-B)=A$

07

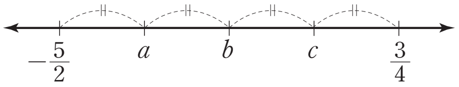
다음 그림은 연속한 세 칸에서 오른쪽의 수는 가운데의 수에서 왼쪽의 수를 뺀 것과 같다. 처음부터 700번째 칸까지 적힌 모든 수의 합이 14이고, 700번째 칸에 적힌 수가 -4일 때, 두 번째 칸에 적힌 수 B의 값을 구하시오. **9**

A	B	⋯	

여덟 번째 적히는 수는 $A-(A-B)=B$
즉, A, B, $B-A$, $-A$, $-B$, $A-B$의 6개의 수가 이 순서대로 반복된다.
또, 반복되는 6개의 수의 합은 $A+B+(B-A)+(-A)+(-B)+(A-B)=0$
이때 $700=6\times116+4$이므로 처음부터 700번째 칸까지 적힌 수의 합은 처음부터 네 번째 칸까지 적힌 수의 합과 같다.
700번째 칸에 적힌 수는 네 번째 칸에 적힌 수와 같고 그 수가 -4이므로
$-A=-4$ $\therefore A=4$
처음부터 700번째 칸까지 적힌 수의 합이 14이므로 $A+B+(B-A)+(-A)=14$에서
$-4+2B=14$, $2B=18$ $\therefore B=9$

08 서술형

수직선에서 5개의 수 $-\frac{5}{2}$, a, b, c, $\frac{3}{4}$이 순서대로 놓여 있다. 이웃한 두 수 사이의 거리가 모두 같을 때, $a+b-c$의 값을 구하시오. $-\frac{5}{2}$



수직선에서 $-\frac{5}{2}$와 $\frac{3}{4}$ 사이의 거리는 $\frac{3}{4}-\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{10}{4}=\frac{13}{4}$
이때 이웃한 두 수 사이의 거리가 모두 같으므로 그 거리는
$\frac{13}{4}\div4=\frac{13}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{13}{16}$ ······························ 30 %
$a=-\frac{5}{2}+\frac{13}{16}=-\frac{27}{16}$, $b=-\frac{27}{16}+\frac{13}{16}=-\frac{7}{8}$, $c=-\frac{7}{8}+\frac{13}{16}=-\frac{1}{16}$ ······ 50 %
$\therefore a+b-c=-\frac{27}{16}+\left(-\frac{7}{8}\right)-\left(-\frac{1}{16}\right)=-\frac{5}{2}$ ······························ 20 %

09

$<x>$는 x보다 작은 수 중 가장 큰 정수이고 $[y]$는 y보다 큰 수 중 가장 작은 정수라고 할 때,

$$3\times<-1.2>-<-4>+2\times<2.01>-[-2.3]+[0.5]-<0>$$

의 값을 구하시오. **7**

$<-1.2>=-2$, $<-4>=-5$, $<2.01>=2$,
$[-2.3]=-2$, $[0.5]=1$, $<0>=-1$이므로
$3\times<-1.2>-<-4>+2\times<2.01>-[-2.3]+[0.5]-<0>$
$=3\times(-2)-(-5)+2\times2-(-2)+1-(-1)$
$=-6+5+4+2+1+1=7$

10 출제 주의

자연수 n이 홀수일 때,
$(-1)^{n+1}-(-1)^{n+2}-(-1)^{n+3}+(-1)^{n+4}$을 계산하시오. **0**

n이 홀수이므로 $n+1$, $n+3$은 짝수이고, $n+2$, $n+4$는 홀수이다.
$\therefore (-1)^{n+1}-(-1)^{n+2}-(-1)^{n+3}+(-1)^{n+4}$
$=1-(-1)-1+(-1)$
$=1+1-1-1$
$=0$

11

네 유리수 -2, $-\frac{1}{2}$, 3, $\frac{1}{4}$ 중 서로 다른 세 수를 뽑아 a, b, c라고 할 때, $a\times b\div c$의 값 중 가장 큰 수를 구하시오. **12**

$a\times b\div c$의 값이 가장 크려면 양수이어야 하므로 뽑힌 세 수 중 음수가 2개이어야 한다.
이때 a와 b의 절댓값이 크고 c의 절댓값은 작을수록 $a\times b\div c$의 값이 커지고 네 수의 절댓값의 대소를 비교하면 $\left|\frac{1}{4}\right|<\left|-\frac{1}{2}\right|<|-2|<|3|$이다.
따라서 $a=3$, $b=-2$, $c=-\frac{1}{2}$일 때, $a\times b$와 c의 부호가 같으므로 가장 큰 값이 되고
$a\times b\div c=3\times(-2)\div\left(-\frac{1}{2}\right)=3\times(-2)\times(-2)=12$

12

두 양의 정수 A, B에 대하여

$$A\div\left(-\frac{7}{9}\right)\times4\div\left(-\frac{2}{3}\right)=B$$

를 만족시킬 때, $A+B$의 값 중 가장 작은 수를 구하시오. **61**

$A\div\left(-\frac{7}{9}\right)\times4\div\left(-\frac{2}{3}\right)=B$에서 $A\times\left(-\frac{9}{7}\right)\times4\times\left(-\frac{3}{2}\right)=B$, $A\times\frac{54}{7}=B$
이때 B가 양의 정수가 되려면 A는 7의 배수이어야 하고,
$A+B$의 값 중 가장 작은 수를 구해야 하므로 $A=7$
따라서 $B=7\times\frac{54}{7}=54$이므로 $A+B=7+54=61$

13 서술형

두 수 A, B에 대하여 다음과 같이 주어졌을 때, $A<x<B$를 만족시키는 정수 x의 값을 구하시오. 2

$$A=\frac{1}{3}-\left\{\frac{5}{6}\div\left(-\frac{5}{2}\right)+(-1)^{2027}\right\}$$
$$B=(-2)^2+\left[\frac{7}{2}\div\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{27}{8}\right)\right\}\right]$$

$A=\frac{1}{3}-\left\{\frac{5}{6}\div\left(-\frac{5}{2}\right)+(-1)^{2027}\right\}$

$=\frac{1}{3}-\left\{\frac{5}{6}\times\left(-\frac{2}{5}\right)+(-1)\right\}$

$=\frac{1}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{5}{3}$ ······ 40 %

$B=(-2)^2+\left[\frac{7}{2}\div\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{27}{8}\right)\right\}\right]$

$=4+\left[\frac{7}{2}\div\left\{\left(-\frac{1}{8}\right)+\left(-\frac{27}{8}\right)\right\}\right]$

$=4+\left\{\frac{7}{2}\times\left(-\frac{2}{7}\right)\right\}=4+(-1)=3$ ······ 40 %

따라서 $\frac{5}{3}<x<3$을 만족시키는 정수 x의 값은 2이다. ······ 20 %

14

두 유리수 a, b에 대하여

$$a\diamond b=\frac{a+b}{2}$$

라고 할 때, $\left\{1\frac{1}{2}\diamond\left(-\frac{5}{6}\right)\right\}\diamond\left\{(-2)\diamond\frac{7}{3}\right\}$의 값을 구하시오. $\frac{1}{4}$

$1\frac{1}{2}\diamond\left(-\frac{5}{6}\right)=\left\{\frac{3}{2}+\left(-\frac{5}{6}\right)\right\}\times\frac{1}{2}=\left\{\frac{9}{6}+\left(-\frac{5}{6}\right)\right\}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

$(-2)\diamond\frac{7}{3}=\left\{(-2)+\frac{7}{3}\right\}\times\frac{1}{2}=\left\{\left(-\frac{6}{3}\right)+\frac{7}{3}\right\}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$\therefore \left\{1\frac{1}{2}\diamond\left(-\frac{5}{6}\right)\right\}\diamond\left\{(-2)\diamond\frac{7}{3}\right\}=\frac{1}{3}\diamond\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{2}=\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

15

0이 아닌 두 유리수 a, b에 대하여

$$a\blacksquare b=a\times b-(a+b)$$
$$a\blacktriangledown b=\frac{a}{b}+2$$

라고 할 때, $\left(\frac{1}{3}\blacksquare\frac{1}{2}\right)\blacktriangledown\left(-\frac{1}{4}\right)$의 값을 구하시오. $\frac{14}{3}$

$\frac{1}{3}\blacksquare\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\right)=\frac{1}{6}-\frac{5}{6}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$

$a\blacktriangledown b=\frac{a}{b}+2=a\div b+2$이므로

$\left(\frac{1}{3}\blacksquare\frac{1}{2}\right)\blacktriangledown\left(-\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)\blacktriangledown\left(-\frac{1}{4}\right)$

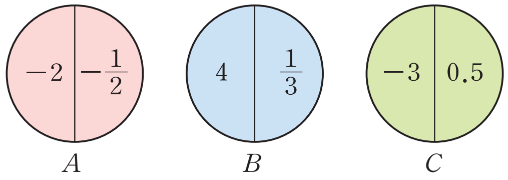
$=\left(-\frac{2}{3}\right)\div\left(-\frac{1}{4}\right)+2$

$=\left(-\frac{2}{3}\right)\times(-4)+2$

$=\frac{8}{3}+2=\frac{14}{3}$

16

다음 그림의 세 원 A, B, C에서 각각 1개의 수를 선택하여 차례대로 a, b, c라고 하자. $(a-b)\times c$의 값 중 가장 작은 수를 구하시오. -3



$(a-b)\times c$의 값이 가장 작으려면 $a-b$의 값과 c의 값의 부호가 달라야 하고 $|a-b|$, $|c|$의 값은 커야 한다.

즉, $a-b>0$, $c<0$ 또는 $a-b<0$, $c>0$이다.

이때 원 A에 있는 수는 모두 음수이고, 원 B에 있는 수는 모두 양수이므로 $a<0$, $b>0$에서 $a-b<0$이므로 $c>0$이어야 한다.

$\therefore c=0.5$

$|a-b|$의 값은 $a=-2$, $b=4$일 때 가장 크므로 구하는 값은

$(a-b)\times c=(-2-4)\times 0.5=-6\times 0.5=-3$

17

A는 $-\frac{5}{6}$보다 $\frac{2}{3}$만큼 작은 수이고, $|x+1|=\frac{3}{2}$이다. x의 값 중 가장 작은 수를 B라고 할 때, $A\div B$의 값을 구하시오. $\frac{3}{5}$

$A=-\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=-\frac{5}{6}-\frac{4}{6}=-\frac{9}{6}=-\frac{3}{2}$

$|x+1|=\frac{3}{2}$이므로 $x+1=\frac{3}{2}$ 또는 $x+1=-\frac{3}{2}$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=-\frac{5}{2}$

x의 값 중 가장 작은 수는 $-\frac{5}{2}$이므로 $B=-\frac{5}{2}$

$\therefore A\div B=\left(-\frac{3}{2}\right)\div\left(-\frac{5}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{5}$

18 서술형

세 유리수 a, b, m에 대하여 다음과 같이 주어졌을 때, $a+b=m+n$을 만족시키는 유리수 n보다 작지 않은 음의 정수의 개수를 구하시오. 14

$$a=-1\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\div\left(-\frac{6}{5}\right)$$
$$b=(-2)^3\times\frac{5}{6}\div\left(-\frac{2}{3}\right)^2$$
$$m=(-3)^2\div\frac{36}{5}-\left(-\frac{3}{4}\right)^2$$

$a=-1\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\div\left(-\frac{6}{5}\right)=-\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}\times\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{15}{16}$

$b=(-2)^3\times\frac{5}{6}\div\left(-\frac{2}{3}\right)^2=-8\times\frac{5}{6}\div\frac{4}{9}=-8\times\frac{5}{6}\times\frac{9}{4}=-15$

$m=(-3)^2\div\frac{36}{5}-\left(-\frac{3}{4}\right)^2=9\times\frac{5}{36}-\frac{9}{16}=\frac{5}{4}-\frac{9}{16}=\frac{11}{16}$ ······ 40 %

$a+b=m+n$이므로 $\frac{15}{16}+(-15)=\frac{11}{16}+n$

$\therefore n=\frac{1}{4}+(-15)=\frac{1}{4}+\left(-\frac{60}{4}\right)=-\frac{59}{4}$ ······ 40 %

따라서 $n=-\frac{59}{4}=-14.75$이므로 n보다 작지 않은 음의 정수는 -14, -13, -12, …, -1의 14개이다. ······ 20 %

19

자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

이 성립함을 이용하여 $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\cdots+\frac{1}{110}$을 계산하시오. $\frac{7}{44}$

$\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\cdots+\frac{1}{110}$
$=\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}+\cdots+\frac{1}{10\times11}$
$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$
$=\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{11}$
$=\frac{1}{4}-\frac{1}{11}=\frac{11}{44}-\frac{4}{44}=\frac{7}{44}$

20

두 정수 a, b에 대하여 $|3\times a|=9$, $|b-4|=3$일 때, $a-b$의 값 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합은?

① -10　② -9　✓③ -8
④ -7　⑤ -6

$|3\times a|=9$이므로 $3\times a=9$ 또는 $3\times a=-9$
$\therefore a=3$ 또는 $a=-3$
$|b-4|=3$이므로 $b-4=3$ 또는 $b-4=-3$
$\therefore b=7$ 또는 $b=1$
따라서 $a-b$의 값이 가장 크려면 a의 값이 가장 크고 b의 값이 가장 작아야 하므로
$a=3$, $b=1$
$\therefore a-b=3-1=2$
$a-b$의 값이 가장 작으려면 a의 값이 가장 작고 b의 값이 가장 커야 하므로
$a=-3$, $b=7$
$\therefore a-b=-3-7=-10$
따라서 구하는 합은 $2+(-10)=-8$

21

두 정수 x, y $(x<y)$에 대하여 y는 3의 배수이고 $x\times(y-4)=-24$, $|x|\le|y|$일 때, $x+y$의 값을 구하시오. 9

두 정수 x, y에 대하여 $x\times(y-4)=-24$이므로 x와 $y-4$의 부호가 다르다.
이때 $x<y$, $|x|\le|y|$이므로 $x<0$, $y>0$
따라서 $y-4>0$, 즉 $y>4$이어야 하고 $y-4$가 24의 약수이어야 하므로
$y-4=1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$
즉, $y=5, 6, 7, 8, 10, 12, 16, 28$이고 y는 3의 배수이므로 $y=6$, 12이다.
(i) $y=6$일 때, $x\times(6-4)=-24$, $2\times x=-24$　$\therefore x=-12$
　이때 $|-12|\ge|6|$이므로 $|x|\le|y|$를 만족시키지 않는다.
(ii) $y=12$일 때, $x\times(12-4)=-24$, $8\times x=-24$　$\therefore x=-3$
　이때 $|-3|\le|12|$이므로 $|x|<|y|$를 만족시킨다.
(i), (ii)에 의하여 $x=-3$, $y=12$
$\therefore x+y=-3+12=9$

22 출제 주의

다음 □ 안에 알맞은 수를 구하시오. $-\frac{1}{4}$

$$(-1)^2-\left[\frac{4}{3}+\square\div\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{9}{8}-2\right\}\right]=-\frac{1}{2}$$

$(-1)^2-\left[\frac{4}{3}+\square\div\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{9}{8}-2\right\}\right]=-\frac{1}{2}$에서
$1-\left\{\frac{4}{3}+\square\div\left(\frac{4}{9}\times\frac{9}{8}-2\right)\right\}=-\frac{1}{2}$, $1-\left\{\frac{4}{3}+\square\div\left(\frac{1}{2}-2\right)\right\}=-\frac{1}{2}$
$1-\left\{\frac{4}{3}+\square\div\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}=-\frac{1}{2}$, $-\left\{\frac{4}{3}+\square\times\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}=-\frac{3}{2}$
$\frac{4}{3}+\square\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}$, $\square\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}$　$\therefore \square=-\frac{1}{4}$

23

유진이는 어떤 유리수에서 $-\frac{3}{2}$을 빼고 $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$을 곱한 후 $\frac{1}{2}$을 더하려고 했는데, 실수로 이 유리수에 $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$을 곱하고 $-\frac{3}{2}$을 더했더니 $-\frac{11}{18}$이 되었다. 유진이가 바르게 계산했을 때의 값은?

① $-\frac{39}{18}$　② $-\frac{37}{18}$　③ -1
✓④ $\frac{37}{18}$　⑤ $\frac{39}{18}$

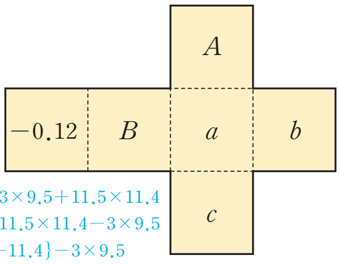
어떤 유리수를 □라고 하면 유진이가 잘못 계산한 값은
$\square\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{11}{18}$이므로 $\square\times\frac{4}{9}=\frac{16}{18}$
$\therefore \square=\frac{16}{18}\times\frac{9}{4}=2$
따라서 유진이가 바르게 계산하면
$\left\{2-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{2}=\left\{2-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{2}$
$=\frac{14}{9}+\frac{1}{2}=\frac{28}{18}+\frac{9}{18}=\frac{37}{18}$

24 서술형

두 수 A, B에 대하여

$$A=11.5\times(-8.4)-3\times9.5+11.5\times11.4$$
$$B=3-3\times\left\{\frac{5}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)\div\left(-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{2}\right\}$$

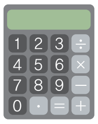
이고 다음 그림과 같은 전개도를 접어 만든 정육면체에서 서로 마주 보는 두 면에 적힌 수가 서로 역수이다. 이때 $a\div\frac{5}{b}\times c$의 값을 구하시오. $\frac{5}{9}$



$A=11.5\times(-8.4)-3\times9.5+11.5\times11.4$
$=11.5\times(-8.4)+11.5\times11.4-3\times9.5$
$=11.5\times\{(-8.4)+11.4\}-3\times9.5$
$=11.5\times3-3\times9.5=3\times(11.5-9.5)=3\times2=6$
$B=3-3\times\left\{\frac{5}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)\div\left(-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{2}\right\}=3-3\times\left\{\frac{5}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)\times\frac{1}{2}\right\}$
$=3-3\times\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\right)=3-3\times\frac{7}{6}=3-\frac{7}{2}=-\frac{1}{2}$ ……………… 30 %
a는 $-0.12=-\frac{3}{25}$의 역수이므로 $a=-\frac{25}{3}$, b는 B의 역수이므로 $b=-2$,
c는 A의 역수이므로 $c=\frac{1}{6}$ ……………… 40 %
$\therefore a\div\frac{5}{b}\times c=-\frac{25}{3}\div\left(-\frac{5}{2}\right)\times\frac{1}{6}=-\frac{25}{3}\times\left(-\frac{2}{5}\right)\times\frac{1}{6}=\frac{5}{9}$ ……………… 30 %

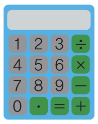
25

다음과 같은 규칙으로 계산하는 두 계산기 A, B가 있다. A에 $-\frac{3}{2}$을 입력하여 계산된 값을 다시 B에 입력하였을 때, 최종적으로 계산된 값을 구하시오. $-\frac{1}{4}$



계산기 A

입력된 수를 2로 나눈 후 3을 더한다.



계산기 B

입력된 수에서 $\frac{5}{2}$를 뺀다.

계산기 A에 $-\frac{3}{2}$을 입력했을 때 계산된 값은

$-\frac{3}{2}\div 2+3=-\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}+3=-\frac{3}{4}+3=-\frac{3}{4}+\frac{12}{4}=\frac{9}{4}$

이 값을 계산기 B에 입력했을 때 계산된 값은

$\frac{9}{4}-\frac{5}{2}=\frac{9}{4}-\frac{10}{4}=-\frac{1}{4}$

따라서 최종적으로 계산된 값은 $-\frac{1}{4}$이다.

26

다음 조건을 만족시키는 두 정수 a, b에 대하여 $-2a+\frac{b}{3}-\frac{a\times b}{6}$의 값을 구하시오. 56

(가) $a<0<b$

(나) $|a|=3\times|b|$

(다) 수직선에서 a를 나타내는 점과 b를 나타내는 점 사이의 거리가 24이다.

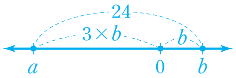
$b=24\div 4=6$이므로

$a=-(3\times b)=-(3\times 6)=-18$

$\therefore\ -2a+\frac{b}{3}-\frac{a\times b}{6}$

$=-2\times(-18)+\frac{6}{3}-\frac{-18\times 6}{6}$

$=36+2+18=56$



27 출제 주의

$-1<a<0$일 때, 다음 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱을 구하시오. $\frac{1}{a^3}$

a, a^2, a의 역수, a의 제곱의 역수

$-1<a<0$이므로 $-1<a<0<a^2<1$

또, a의 역수 $\frac{1}{a}$의 값의 범위는 $\frac{1}{a}<-1$

마찬가지로 a^2의 역수 $\frac{1}{a^2}$의 값의 범위는 $\frac{1}{a^2}>1$

$\therefore\ \frac{1}{a}<a<a^2<\frac{1}{a^2}$

따라서 가장 큰 수는 $\frac{1}{a^2}$, 가장 작은 수는 $\frac{1}{a}$이므로 구하는 곱은

$\frac{1}{a^2}\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a^3}$

28

0이 아닌 세 유리수 a, b, c가 아래 조건을 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

$a<b<c$, $b\times c<0$, $a+c<0$, $b+c>0$

① $a\times b>0$
② $b-a>0$
✓③ $|a|<|b|$
✓④ $|b|-|c|>0$
⑤ $|a|-|c|>0$

$a<b<c$, $b\times c<0$이므로 $a<b<0<c$

이때 $a+c<0$이므로 $|a|>|c|$이고, $b+c>0$이므로 $|c|>|b|$

$\therefore\ |a|>|c|>|b|$

① $a<0$, $b<0$이므로 $a\times b>0$
② $a<b$이므로 $b-a>0$
③ $|a|>|c|>|b|$이므로 $|a|>|b|$
④ $|c|>|b|$이므로 $|b|-|c|<0$
⑤ $|a|>|c|$이므로 $|a|-|c|>0$

29

0이 아닌 서로 다른 네 수 a, b, c, d가 아래 조건을 만족시킬 때, 다음 중 나머지 넷과 부호가 다른 하나는?

$a+b=0$, $a\times c<0$, $c\times d>1$, $|c|>|b|$

① $\frac{b}{c}$
② $b\times d$
③ $b\times(c+d)$
④ $d\times(c-b)$
✓⑤ $a\times(c+d)$

$a+b=0$에서 a와 b의 부호는 다르고 $|a|=|b|$이다.

$a\times c<0$에서 a와 c의 부호는 다르므로 b와 c의 부호는 같다.

또, $c\times d>1$에서 c와 d의 부호는 같으므로 a, b, c, d 중 a만 부호가 다르고 나머지 수의 부호는 같다.

① $\frac{b}{c}>0$
② $b\times d>0$
③ $b<0$, $c<0$, $d<0$일 때, $c+d<0$이므로 $b\times(c+d)>0$
  $b>0$, $c>0$, $d>0$일 때, $c+d>0$이므로 $b\times(c+d)>0$
④ $b<0$, $c<0$, $d<0$일 때, $|c|>|b|$에서 $c-b<0$이므로 $d\times(c-b)>0$
  $b>0$, $c>0$, $d>0$일 때, $|c|>|b|$에서 $c-b>0$이므로 $d\times(c-b)>0$
⑤ $a>0$, $c<0$, $d<0$일 때, $c+d<0$이므로 $a\times(c+d)<0$
  $a<0$, $c>0$, $d>0$일 때, $c+d>0$이므로 $a\times(c+d)<0$

30

서로 다른 두 수 a, b에 대하여 $a>0$, $b<0$, $a+b>0$, $a+2b<0$일 때, 다음 수 중 세 번째로 큰 수를 구하시오. $a-b$

$a+b$, $a-b$, $2a+b$, $a-2b$, $2a-b$

$a>0$, $b<0$, $a+b>0$이므로

$|a|>|b|$ ……㉠

$2a+b>a+b$ ……㉡

$a-b<a-2b$ ……㉢

$a-b<2a-b$

㉠에서 $a>-b$이고 $2a-b=a-b+a$, $a-2b=a-b-b$이므로

$2a-b>a-2b$ ……㉣

한편, $a+2b<0$이므로 $|a|<|2b|$이고 $2a+b=a+b+a$, $a-b=a+b-2b$이므로

$a-b>2a+b$ ……㉤

㉡, ㉢, ㉣, ㉤에서 $2a-b>a-2b>a-b>2a+b>a+b$이므로 세 번째로 큰 수는 $a-b$이다.

31

$a\times b\times c<0$을 만족시키는 서로 다른 세 수 a, b, c 중 적어도 하나는 양수이다. a가 b의 역수이고 $|a|<1$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a<b<c$　② $a<c<b$　③ $b<a<c$

✓④ $c<a<b$　⑤ $c<b<a$

$a\times b\times c<0$이면 세 수 a, b, c 중 음수는 1개 또는 3개이다.
이때 세 수 a, b, c 중 적어도 하나는 양수이므로 a, b, c 중 음수는 한 개이다.
또, a가 b의 역수이므로 두 수 a, b의 부호는 같다.
따라서 $a>0$, $b>0$이므로 $c<0$
$|a|<1$이고 $a>0$이므로 $0<a<1$
$b=\frac{1}{a}$이므로 $b>1$
따라서 $c<0<a<1<b$이므로 $c<a<b$

32

$a\times b\times c=-30$을 만족시키는 세 정수 a, b, c $(a<b<c)$에 대하여 $|a|+|b|+|c|$의 값이 가장 작을 때의 $a+b+c$의 값을 모두 구하시오. **6, 4, 0, −10**

세 정수 a, b, c $(a<b<c)$에 대하여 $a\times b\times c=-30$이므로 a, b, c 중 음수는 1개 또는 3개이다.
(i) $(-1, 1, 30)$일 때 $|a|+|b|+|c|=1+1+30=32$
(ii) $(-1, 2, 15)$ 또는 $(-2, 1, 15)$ 또는 $(-15, 1, 2)$ 또는 $(-15, -2, -1)$일 때
　$|a|+|b|+|c|=1+2+15=18$
(iii) $(-1, 3, 10)$ 또는 $(-3, 1, 10)$ 또는 $(-10, 1, 3)$ 또는 $(-10, -3, -1)$일 때
　$|a|+|b|+|c|=1+3+10=14$
(iv) $(-1, 5, 6)$ 또는 $(-5, 1, 6)$ 또는 $(-6, 1, 5)$ 또는 $(-6, -5, -1)$일 때
　$|a|+|b|+|c|=1+5+6=12$
(v) $(-2, 3, 5)$ 또는 $(-3, 2, 5)$ 또는 $(-5, 2, 3)$ 또는 $(-5, -3, -2)$일 때
　$|a|+|b|+|c|=2+3+5=10$
(i)~(v)에 의하여 가장 작은 $|a|+|b|+|c|$의 값은 10이므로 $a+b+c$의 값은 각각
$(-2)+3+5=6$, $(-3)+2+5=4$, $(-5)+2+3=0$,
$(-5)+(-3)+(-2)=-10$

33 서술형

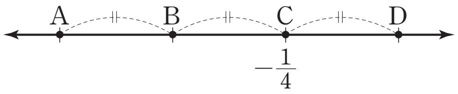
수직선에서 서로 다른 두 수 X, Y를 나타내는 점에 대하여 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 수를 $X◎Y$라고 하자. 이때 서로 다른 두 수 a, b에 대하여 $|a|=3\times|b|$, $a\times b<0$, $a-b=16$이 성립할 때, $(a◎b)◎a$의 값을 구하시오. 8

$|a|=3\times|b|$, $a-b=16$을 만족시키는 a, b의 값은 $a=24$, $b=8$ 또는 $a=12$, $b=-4$
이때 $a\times b<0$이므로 a, b의 부호가 서로 달라야 한다.
$\therefore$ $a=12$, $b=-4$ ·· 40 %
$a◎b=12◎(-4)$는 두 수 12, -4를 나타내는 점으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 수이므로 4이다.
$\therefore$ $a◎b=4$ ·· 30 %
$(a◎b)◎a=4◎12$는 두 수 4, 12를 나타내는 점으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 수이므로 8이다.
$\therefore$ $(a◎b)◎a=8$ ·· 30 %

점 C가 나타내는 수가 $-\frac{1}{4}$일 때 두 점 C, A 사이의 거리는 두 점 C, D 사이의 거리의 2배이어야 한다.
③ 점 D가 나타내는 수가 $\frac{3}{4}$이면 두 점 C, D 사이의 거리는 $\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$
따라서 점 A가 나타내는 수는 $\left(-\frac{1}{4}\right)-2\times1=-\frac{1}{4}-2=-\frac{9}{4}$

34

다음 수직선에서 네 점 A, B, C, D 사이의 간격이 모두 같고 점 C가 나타내는 수는 $-\frac{1}{4}$일 때, 두 점 A, D가 나타내는 수로 가능한 것은?



① $-2, \frac{1}{4}$　② $-\frac{5}{4}, \frac{3}{2}$　✓③ $-\frac{9}{4}, \frac{3}{4}$

④ $-3, 1$　⑤ $-\frac{11}{4}, \frac{4}{5}$

선분 AB의 길이는 $\frac{7}{6}-\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{7}{6}+\frac{15}{6}=\frac{22}{6}=\frac{11}{3}$ ·· 20 %
선분 AB를 3등분하는 점 사이의 간격은 $\frac{11}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{11}{9}$이므로
점 M이 나타내는 수는 $\frac{7}{6}-\frac{11}{9}=\frac{21}{18}-\frac{22}{18}=-\frac{1}{18}$ ·· 30 %
선분 AB를 4등분하는 점 사이의 간격은 $\frac{11}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$이므로
점 N이 나타내는 수는 $-\frac{5}{2}+\frac{11}{12}=-\frac{30}{12}+\frac{11}{12}=-\frac{19}{12}$ ·· 30 %
따라서 선분 MN의 길이는 $-\frac{1}{18}-\left(-\frac{19}{12}\right)=-\frac{2}{36}+\frac{57}{36}=\frac{55}{36}$ ·· 20 %

35 서술형

수직선에서 두 점 A, B가 나타내는 수는 각각 $-\frac{5}{2}$, $\frac{7}{6}$이다. 선분 AB를 2 : 1로 나누는 점을 M, 선분 AB를 1 : 3으로 나누는 점을 N이라고 할 때, 선분 MN의 길이를 구하시오. $\frac{55}{36}$

$|a-x|=|a-y|$에서 $x\neq y$이면 수직선에서 a는 두 수 x, y를 나타내는 점으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 수이다.
두 수 $\frac{2}{5}$, $-\frac{4}{15}$를 나타내는 두 점 사이의 거리는 $\frac{2}{5}-\left(-\frac{4}{15}\right)=\frac{6}{15}+\frac{4}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$
따라서 두 수를 나타내는 점으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 수는

36

$\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\div2=\frac{6}{15}-\frac{5}{15}=\frac{1}{15}$　　$\therefore$ $\frac{2}{5}◎\left(-\frac{4}{15}\right)=\frac{1}{15}$

서로 다른 두 유리수 x, y에 대하여

$$x◎y=(|a-x|=|a-y|\text{를 만족시키는 수 } a)$$

라고 할 때, $\left(-\frac{1}{2}\right)◎\left\{\frac{2}{5}◎\left(-\frac{4}{15}\right)\right\}$의 값은?

✓① $-\frac{13}{60}$　② $-\frac{11}{60}$　③ $-\frac{3}{20}$

④ $-\frac{7}{60}$　⑤ $-\frac{1}{12}$

또, 두 수 $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{15}$을 나타내는 두 점 사이의 거리는
$\frac{1}{15}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{30}+\frac{15}{30}=\frac{17}{30}$
따라서 두 수를 나타내는 점으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 수는
$\frac{1}{15}-\frac{17}{30}\div2=\frac{4}{60}-\frac{17}{60}=-\frac{13}{60}$　　$\therefore$ $\left(-\frac{1}{2}\right)◎\frac{1}{15}=-\frac{13}{60}$
$\therefore$ $\left(-\frac{1}{2}\right)◎\left\{\frac{2}{5}◎\left(-\frac{4}{15}\right)\right\}=\left(-\frac{1}{2}\right)◎\frac{1}{15}=-\frac{13}{60}$

37

두 수 x, y에 대하여

$$[x,\ y]=|x-y|$$

라고 할 때, $[[-8,\ a],\ [4,\ -2]]=8$을 만족시키는 유리수 a의 값 중 가장 큰 수를 M, 가장 작은 수를 m이라고 하자. 이때 $[M,\ m]$의 값을 구하시오. 28

$[4,\ -2]=|4-(-2)|=6$
$[-8,\ a]=X$라고 하면 $[[-8,\ a],\ [4,\ -2]]=8$에서 $[X,\ 6]=8$이므로 $|X-6|=8$
$\therefore\ X-6=8$ 또는 $X-6=-8$
따라서 $X=14$ 또는 $X=-2$이므로 $[-8,\ a]=14$ 또는 $[-8,\ a]=-2$
(i) $[-8,\ a]=14$일 때, $|-8-a|=14$이므로
$-8-a=14$ 또는 $-8-a=-14$
$\therefore\ a=-22$ 또는 $a=6$
(ii) $[-8,\ a]=-2$일 때, $|-8-a|=-2$이고 절댓값은 음수가 될 수 없으므로 만족시키는 a의 값은 없다.
(i), (ii)에 의하여 $M=6$, $m=-22$
$\therefore\ [M,\ m]=[6,\ -22]=|6-(-22)|=28$

38

수직선에서 개구리가 $-\frac{1}{7}$을 나타내는 점에서 출발하여 $1\frac{4}{7}$를 나타내는 점까지 점프해서 가려고 한다. 개구리가 총 3번을 점프하여 도착했는데, 매번 점프한 거리가 같다고 한다. 개구리가 첫 번째와 두 번째에 착지한 두 점이 나타내는 수의 합은?

① $\frac{8}{7}$
② $\frac{9}{7}$
✓③ $\frac{10}{7}$
④ $\frac{11}{7}$
⑤ $\frac{12}{7}$

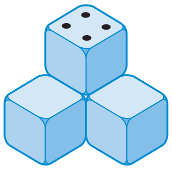
개구리가 가야 하는 전체 거리는 $1\frac{4}{7}-\left(-\frac{1}{7}\right)=\frac{11}{7}+\frac{1}{7}=\frac{12}{7}$
이때 첫 번째에 착지한 점을 A, 두 번째에 착지한 점을 B라고 하면 두 수 $-\frac{1}{7}$과 $1\frac{4}{7}$를 나타내는 두 점 사이에 두 점 A, B가 같은 간격으로 놓여 있으므로 이웃하는 두 점 사이의 거리는 $\frac{12}{7}\div 3=\frac{12}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{7}$
따라서 점 A가 나타내는 수는 $-\frac{1}{7}+\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$, 점 B가 나타내는 수는 $\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=1$이므로 구하는 합은 $\frac{3}{7}+1=\frac{10}{7}$

39

한 변의 길이가 20 cm인 정사각형에서 윗변의 길이를 10 % 줄이고, 아랫변의 길이를 20 % 늘여서 만든 사다리꼴의 넓이를 구하시오. 420 cm²

사다리꼴의 윗변의 길이는 $20-20\times\frac{10}{100}=20-2=18\ (\text{cm})$
아랫변의 길이는 $20+20\times\frac{20}{100}=20+4=24\ (\text{cm})$
또, 사다리꼴의 높이는 정사각형의 세로의 길이와 같은 20 cm이므로 구하는 넓이는
$\frac{1}{2}\times(18+24)\times 20=420\ (\text{cm}^2)$

40 출제 주의



주사위 4개가 오른쪽 그림과 같이 놓여 있고, 주사위끼리 맞닿아 가려지는 면을 제외한 모든 면의 눈의 수의 합을 S라고 하자. 가장 위에 있는 주사위의 윗면의 눈의 수가 4이고 S의 값 중 가장 큰 수를 a, 가장 작은 수를 b라고 할 때, $a-b$의 값을 구하시오. 19

(단, 주사위의 마주 보는 면의 눈의 수의 합은 7이다.)

가장 위에 있는 주사위의 윗면의 눈의 수가 4이므로 가려져 있는 눈의 수는 3이다.
가려진 눈의 수가 작을수록 S의 값이 커지므로
$a=(1+2+3+4+5+6)\times 4-(3+1\times 2+1+2+3)=73$
가려진 눈의 수가 클수록 S의 값이 작아지므로
$b=(1+2+3+4+5+6)\times 4-(3+6\times 2+4+5+6)=54$
$\therefore\ a-b=73-54=19$

41

어느 물탱크에 두 파이프 A, B가 연결되어 있다. 파이프 A는 1시간에 물탱크의 $\frac{3}{10}$의 물을 채우고, 파이프 B는 1시간에 물탱크의 $\frac{1}{5}$의 물을 뺀다. 전체의 $\frac{1}{9}$만큼 물이 차 있는 물탱크에서 파이프 A를 2시간 가동한 후 두 파이프 A, B를 동시에 2시간 가동했을 때, 물탱크에 있는 물의 양을 구하시오. $\frac{41}{45}$

전체의 $\frac{1}{9}$만큼 물이 차 있는 물탱크에서 파이프 A를 2시간 가동했을 때 물탱크에 있는 물의 양은 $\frac{1}{9}+2\times\frac{3}{10}=\frac{1}{9}+\frac{6}{10}=\frac{32}{45}$
두 파이프 A, B를 동시에 2시간 가동했을 때 물탱크에 있는 물의 양은
$\frac{32}{45}+2\times\left(\frac{3}{10}-\frac{1}{5}\right)=\frac{32}{45}+2\times\frac{1}{10}=\frac{32}{45}+\frac{1}{5}=\frac{41}{45}$
따라서 물탱크에 있는 물의 양은 $\frac{41}{45}$이다.

42

수직선에서 0을 나타내는 점에 두 로봇 A, B가 있다. 두 로봇이 가위바위보를 하여 결과에 따라 다음과 같은 규칙으로 움직이기로 했다.

> (가) 이겼을 때: 오른쪽으로 $\frac{2}{3}$만큼 이동
>
> (나) 졌을 때: 왼쪽으로 $\frac{1}{2}$만큼 이동
>
> (다) 비겼을 때: 왼쪽으로 $\frac{1}{6}$만큼 이동

가위바위보를 24번 했을 때, 비긴 횟수는 6이었다. 로봇 A가 이긴 횟수가 진 횟수의 2배라고 할 때, 최종적으로 두 로봇 A, B 사이의 거리는 얼마가 되는지 구하시오. 7

가위바위보를 24번 했을 때, 비긴 횟수인 6을 제외한 18번 중 로봇 A가 이긴 횟수가 진 횟수의 2배이므로 로봇 A는 12번 이기고 6번 졌고 로봇 B는 6번 이기고 12번 졌다.
가위바위보를 마친 후 두 로봇의 위치는
(로봇 A의 위치)$=12\times\frac{2}{3}+6\times\left(-\frac{1}{2}\right)+6\times\left(-\frac{1}{6}\right)=8+(-3)+(-1)=4$
(로봇 B의 위치)$=6\times\frac{2}{3}+12\times\left(-\frac{1}{2}\right)+6\times\left(-\frac{1}{6}\right)=4+(-6)+(-1)=-3$
따라서 최종적으로 두 로봇 A, B 사이의 거리는 $4-(-3)=7$

상위 1%에 도달하는

Lv. X 심화 문제

대표 문제

다음 조건을 만족시키는 두 자연수 A, B $(A<B)$에 대하여 $B-A$의 값을 구하시오.

(가) $A+B=84$
(나) A, B의 최소공배수를 최대공약수로 나누면 그 몫이 12이다.

함께 풀기

STEP 1

주어진 조건과 구해야 하는 것 확인하기

1. 주어진 조건: ① $A+B=84$
② (최소공배수)÷(최대공약수)$=12$
③ $A<B$
2. 구해야 하는 것: $B-A$의 값

STEP 2

주어진 조건을 이용하여 식 세우기

두 자연수 A, B의 최대공약수를 G, 최소공배수를 L이라고 하자.

$A=a\times G$, $B=b\times G$ (a, b는 서로소, $a<b$)라고 하면 $L=a\times b\times G$

조건 (나)에 의하여 $\dfrac{L}{G}=\dfrac{a\times b\times G}{G}=a\times b=12$

STEP 3

조건을 만족시키는 a, b의 값 구하기

$a<b$이고 $a\times b=12$를 만족시키는 두 수 a, b를 (a, b)로 나타내면

$(1, 12)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$

이때 $a=2$, $b=6$은 서로소가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 (a, b)는 $(1, 12)$ 또는 $(3, 4)$이다.

STEP 4

조건을 이용하여 G의 값 구하기

조건 (가)에서 $A+B=84$이므로

(i) $a=1$, $b=12$일 때

$A=G$, $B=12\times G$이므로 $G+12\times G=84$

이때 $6+12\times 6=78$, $7+12\times 7=91$이므로 $G+12\times G=84$를 만족시키는 자연수 G의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a=3$, $b=4$일 때

$A=3\times G$, $B=4\times G$이므로 $3\times G+4\times G=84$

이때 이를 만족시키는 G의 값은 12이다.

STEP 5

$B-A$의 값 구하기

(i), (ii)에 의하여 $a=3$, $b=4$, $G=12$이므로 $A=3\times 12=36$, $B=4\times 12=48$

$\therefore B-A=48-36=12$

답 12

01

두 자연수 A, B $(A<B)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 가능한 자연수 A의 개수를 구하시오. 8

(가) A는 홀수이다.
(나) A와 B는 서로소이다.
(다) $A\times B=1\times2\times3\times\cdots\times10$

1부터 10까지의 곱을 소인수분해하면
$1\times2\times3\times\cdots\times10=2^8\times3^4\times5^2\times7$
조건 (나)에서 A와 B는 서로소이므로 공약수가 1뿐이다.
즉, A와 B를 소인수분해했을 때, 공통인 소인수가 없다.
또, 조건 (가)에서 A는 홀수이므로 2를 소인수로 가질 수 없다.
따라서 2^8은 B의 약수이고, A는 3^4, 5^2, 7의 곱으로 이루어진다.
즉, A가 될 수 있는 값은 1, 3^4, 5^2, 7, $3^4\times5^2$, $3^4\times7$, $5^2\times7$, $3^4\times5^2\times7$
이고 각각에 대하여 A, B의 값을 구하면 오른쪽 표와 같다.
따라서 조건을 만족시키는 A의 개수는 8이다.

A	B
1	$2^8\times3^4\times5^2\times7$
7	$2^8\times3^4\times5^2$
5^2	$2^8\times3^4\times7$
3^4	$2^8\times5^2\times7$
$5^2\times7$	$2^8\times3^4$
$3^4\times7$	$2^8\times5^2$
$3^4\times5^2$	$2^8\times7$
$3^4\times5^2\times7$	2^8

02

자연수 N은 서로 다른 두 소수 p, q $(p<q)$의 곱이다. N과 N의 가장 큰 소인수를 곱한 값이 600 이상 800 이하가 된다고 할 때, 가능한 모든 자연수 N의 값의 합을 구하시오. 93

$N=p\times q$ (p, q는 소수, $p<q$)이고, N의 가장 큰 소인수는 q이므로
N에 가장 큰 소인수 q를 곱한 값
$N\times q=(p\times q)\times q=p\times q^2$　　$\therefore 600\le p\times q^2\le800$
이때 $p\ge2$이므로 $2\times q^2\le800$에서 $q^2\le400$
$20^2=400$이므로 q는 20 이하의 소수이다.
(i) $q=19$일 때, $q^2=361$이므로 $600\le p\times361\le800$
　이때 $361\times2=722$, $361\times3=1083$이므로 $p=2$
(ii) $q=17$일 때, $q^2=289$이므로 $600\le p\times289\le800$
　이때 $289\times2=578$, $289\times3=867$이므로 가능한 p의 값은 없다.
(iii) $q=13$일 때, $q^2=169$이므로 $600\le p\times169\le800$
　이때 $169\times3=507$, $169\times5=845$이므로 가능한 p의 값은 없다.
(iv) $q=11$일 때, $q^2=121$이므로 $600\le p\times121\le800$
　이때 $121\times5=605$, $121\times7=847$이므로 $p=5$
(v) $q=7$일 때, $q^2=49$이므로 $600\le p\times49\le800$
　이때 $p<q$이므로 가능한 p의 값은 없다.
(i)~(v)에 의하여 $p=2$, $q=19$ 또는 $p=5$, $q=11$이므로
가능한 $N=p\times q$의 값은 $2\times19=38$, $5\times11=55$이다.
따라서 가능한 모든 자연수 N의 값의 합은
$38+55=93$

03

서로 다른 소수 p_i에 대하여 자연수 n을 소인수분해한 결과가

$$n=p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}\times\cdots\times p_k^{a_k}$$

이라고 할 때, $S(n)$을 $S(n)=a_1\times p_1+a_2\times p_2+\cdots+a_k\times p_k$라고 하자.
예를 들어 $12=2^2\times3$이므로 $S(12)=2\times2+1\times3=7$이다.
$S(n)=14$를 만족시키는 가장 작은 자연수 n의 값을 구하시오. 33

(i) $n=p^a$의 꼴일 때, $S(n)=a\times p$
　$a\times p=14$를 만족시키는 a, p의 값은 $a=2$, $p=7$ 또는 $a=7$, $p=2$
　이므로 n의 값은 $7^2=49$, $2^7=128$
(ii) $n=p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}$ $(p_1<p_2)$의 꼴일 때, $S(n)=a_1\times p_1+a_2\times p_2$
　ⓐ $p_1=2$이면 $a_1\times2+a_2\times p_2=14$이고 p_2는 홀수이므로 a_2는 짝수이어야 한다.
　따라서 이 조건을 만족시키는 n의 값은
　$2^1\times3^4=81$, $2^2\times5^2=100$, $2^4\times3^2=144$
　ⓑ $p_1=3$이면 $a_1\times3+a_2\times p_2=14$이고 p_2는 홀수이므로 a_1이 짝수이면 a_2도 짝수이어야 하고, a_1이 홀수이면 a_2도 홀수이어야 한다.
　따라서 이 조건을 만족시키는 n의 값은
　$3^1\times11^1=33$, $3^3\times5^1=135$
　ⓒ $p_1=5$이면 $a_1\times5+a_2\times p_2=14$
　이때 이를 만족시키는 $a_2\times p_2$의 값은 9, 4이지만, 9, 4가 되게 하는 p_2의 값은 없다.
　마찬가지로 $p_1\ge7$일 때 조건을 만족시키는 p_2의 값은 없다.
(iii) $n=p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}\times p_3^{a_3}$ $(p_1<p_2<p_3)$의 꼴일 때,
　$S(n)=a_1\times p_1+a_2\times p_2+a_3\times p_3$
　ⓐ $p_1\ne2$이면 $p_1+p_2+p_3>14$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
　ⓑ $p_1=2$이면 $a_1\times2+a_2\times p_2+a_3\times p_3=14$이므로
　$a_2\times p_2+a_3\times p_3<12$이고, 가능한 p_2, p_3을 $(p_2,\ p_3)$으로 나타내면 $(3,\ 5)$, $(3,\ 7)$, $(5,\ 7)$이다.
　이 중 조건을 만족시키는 n의 값은
　$2^1\times5^1\times7^1=70$, $2^2\times3^1\times7^1=84$, $2^3\times3^1\times5^1=120$
(iv) $n=p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}\times p_3^{a_3}\times p_4^{a_4}$ $(p_1<p_2<p_3<p_4)$의 꼴일 때,
　$S(n)=a_1\times p_1+a_2\times p_2+a_3\times p_3+a_4\times p_4$
　$a_1\times p_1+a_2\times p_2+a_3\times p_3+a_4\times p_4>14$
　이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(i)~(iv)에 의하여 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 33, 49, 70, 81, 84, 100, 120, 128, 135, 144이므로 가장 작은 수는 33이다.

04 다음 조건을 만족시키는 가장 큰 다섯 자리 자연수 n의 값을 구하시오. **92610**

> ㈎ n과 180의 최대공약수는 90이다.
>
> ㈏ $\frac{n}{210}$은 어떤 자연수의 제곱수이다.

조건 ㈎에서 n과 180의 최대공약수가 90이 되려면 n은 $90=2\times3^2\times5$를 약수로 가져야 한다.
이때 n이 $2^2=4$의 배수이면 최대공약수가 $2^2\times3^2\times5=180$이 되므로 n을 소인수분해했을 때 소인수 2의 지수는 1이다.

즉, $n=90\times k$ (k는 홀수)라고 하면 $\frac{n}{210}=\frac{90\times k}{210}=\frac{3k}{7}$

이 수가 제곱수이려면 k는 $k=7\times3\times m^2$ (m은 홀수)이어야 하므로

$\frac{n}{210}=\frac{3\times7\times3\times m^2}{7}=3^2\times m^2$

$\therefore\ n=1890\times m^2$

이때 m은 홀수이므로 n의 값은
$1890\times1^2=1890$, $1890\times3^2=17010$, $1890\times5^2=47250$, $1890\times7^2=92610$, $1890\times11^2=228690$, …
따라서 다섯 자리 자연수 n의 값 중 가장 큰 수는 92610이다.

05 다음 조건을 만족시키는 세 자연수 A, B, C $(A>B>C)$에 대하여 $A-B+C$의 값을 구하시오. **168**

> ㈎ A와 B의 곱은 10800이고, 최대공약수는 60이다.
>
> ㈏ B와 C의 최소공배수는 240이다.
>
> ㈐ 세 자연수 A, B, C의 최대공약수는 12이다.

조건 ㈎에서 A와 B의 최대공약수가 60이므로
$A=a\times60$, $B=b\times60$ (a, b는 서로소, $a>b$)이라고 하면
$A\times B=a\times60\times b\times60=a\times b\times3600$
또, A와 B의 곱이 10800이므로 $a\times b\times3600=10800$에서 $a\times b=3$
곱해서 3이 되는 자연수는 1과 3뿐이고 $a>b$이므로 $a=3$, $b=1$
$\therefore\ A=3\times60=180$, $B=1\times60=60$
조건 ㈏에서 B와 C의 최소공배수는 $240=2^4\times3\times5$이므로 C는 소인수를 2, 3, 5만 가질 수 있다.
$C=2^x\times3^y\times5^z$ (x, y, z는 0 이상의 정수)이라고 하면
$B=60=2^2\times3\times5$이므로 $x=4$
조건 ㈐에서 세 수 A, B, C의 최대공약수는 12이고, A와 B의 최대공약수가 60이므로 $60=2^2\times3\times5$와 C의 최대공약수가 $12=2^2\times3$이어야 한다. $\therefore\ y=1$, $z=0$
$\therefore\ C=2^4\times3=48$
$\therefore\ A-B+C=180-60+48=168$

06 두 유리수 a, b에 대하여

$$a*b=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}$$

라고 하자. 또, 세 유리수 x, y, z에 대하여 $x*y*z=(x*y)*z$라 하고 유리수 x에 대하여 $F(x)=\left(\frac{x}{2}\right)*\left(-\frac{3}{4}\right)*\left(-\frac{2}{3}\right)*\left(\frac{5}{6}\right)*\left(x-\frac{1}{2}\right)$이라고 할 때, $F(x)=-\frac{4}{3}$를 만족시키는 가장 작은 유리수 x의 값을 구하시오. $\mathbf{-\frac{8}{3}}$

$a\ge b$이면 $|a-b|=a-b$이므로 $a*b=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=b$

$a<b$이면 $|a-b|=b-a$이므로

$a*b=\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}=a$

따라서 $a*b$는 a, b 중 작은 값이다.

이때 $-\frac{3}{4}<-\frac{2}{3}<\frac{5}{6}$이므로 $\left(-\frac{3}{4}\right)*\left(-\frac{2}{3}\right)*\left(\frac{5}{6}\right)=-\frac{3}{4}$

$$\therefore\ F(x)=\left(\frac{x}{2}\right)*\left(-\frac{3}{4}\right)*\left(-\frac{2}{3}\right)*\left(\frac{5}{6}\right)*\left(x-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{x}{2}\right)*\left(-\frac{3}{4}\right)*\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

따라서 $F(x)$는 $\frac{x}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $x-\frac{1}{2}$의 값 중 가장 작은 값이고

$F(x)=-\frac{4}{3}$이므로 $F(x)=\frac{x}{2}$ 또는 $F(x)=x-\frac{1}{2}$

(i) $F(x)=\frac{x}{2}$일 때, $\frac{x}{2}=-\frac{4}{3}$이므로 $x=-\frac{4}{3}\times2=-\frac{8}{3}$

(ii) $F(x)=x-\frac{1}{2}$일 때, $x-\frac{1}{2}=-\frac{4}{3}$이므로

$x=-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=-\frac{5}{6}$

(i), (ii)에 의하여 가장 작은 x의 값은 $-\frac{8}{3}$이다.

조건 (다)에서 $\frac{a}{b}$는 정수가 아니므로 $a \neq 0$이고 b의 값은 -1, 0, 1이 아니다.

조건 (나)에서 $\frac{a}{b}$를 수직선에 점으로 나타내면 -1과 2 사이에 있으므로 $-1 < \frac{a}{b} < 2$

07

다음 조건을 만족시키는 서로 다른 두 정수 a, b $(b \neq 0)$에 대하여 만들 수 있는 서로 다른 유리수 $\frac{a}{b}$의 개수를 구하시오. 22

(가) $|a| \leq 5$, $|b| \leq 5$이고 $a \neq b$이다.
(나) $\frac{a}{b}$를 수직선에 점으로 나타내면 -1과 2 사이에 있다.
(다) $\frac{a}{b}$는 정수가 아니다.

(i) $b=2$일 때, $-1 < \frac{a}{2} < 2$에서 $-2 < a < 4$
이때 $\frac{a}{2}$는 정수가 아니므로 가능한 a의 값은 -1, 1, 3의 3개이다.

(ii) $b=3$일 때, $-1 < \frac{a}{3} < 2$에서 $-3 < a < 6$
이때 $\frac{a}{3}$는 정수가 아니므로 가능한 a의 값은 -2, -1, 1, 2, 4, 5의 6개이다.

(iii) $b=4$일 때, $-1 < \frac{a}{4} < 2$에서 $-4 < a < 8$
이때 $\frac{a}{4}$는 정수가 아니고 $|a| \leq 5$이므로 가능한 a의 값은 -3, -2, -1, 1, 2, 3, 5의 7개이다.
이때 $a=-2$, $a=2$이면 각각 $\frac{a}{b} = -\frac{1}{2}$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$이므로 $a=-1$, $b=2$, $a=1$, $b=2$일 때 구한 $\frac{a}{b}$의 값과 같다.
따라서 정수 a의 개수는 $7-2=5$

(iv) $b=5$일 때, $-1 < \frac{a}{5} < 2$에서 $-5 < a < 10$
이때 $\frac{a}{5}$는 정수가 아니고 $|a| \leq 5$이므로 가능한 a의 값은 -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4의 8개이다.

한편, $b<0$일 때 가능한 $\frac{a}{b}$의 값은 모두 $b>0$일 때와 같다.

따라서 서로 다른 $\frac{a}{b}$의 개수는 (i)~(iv)에 의하여 $3+6+5+8=22$

08

다음 조건을 만족시키는 서로 다른 세 정수 A, B, C $(A > B > C)$에 대하여 $A-B-C$의 값 중 가장 큰 수를 구하시오. 14

(가) 세 수의 절댓값은 모두 1보다 크고, 서로 다르다.
(나) 세 수의 곱은 -120이다.
(다) 세 수의 절댓값의 합은 18 이하이다.

세 수의 곱이 -120이므로 세 수 중 음수는 1개 또는 3개이다.
또, 1이 아닌 세 수의 곱이 120이 되는 경우는

$$\begin{aligned}120 &= 20 \times 3 \times 2 = 15 \times 4 \times 2 = 10 \times 6 \times 2 \\ &= 10 \times 4 \times 3 = 8 \times 5 \times 3 = 6 \times 5 \times 4\end{aligned}$$

이고, 세 수의 곱이 120이 되는 각각의 경우에 음수가 1개 또는 3개가 되는 경우는 각각 4개가 있다. 이때 세 수가 20, 3, 2 또는 15, 4, 2이면 $|A|+|B|+|C|=20+3+2>18$, $|A|+|B|+|C|=15+4+2>18$이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(i) 세 수가 10, 6, 2일 때, $A-B-C$의 값은 6 또는 14이다.
(ii) 세 수가 10, 4, 3일 때, $A-B-C$의 값은 9 또는 11이다.
(iii) 세 수가 8, 5, 3일 때, $A-B-C$의 값은 6 또는 10이다.
(iv) 세 수가 6, 5, 4일 때, $A-B-C$의 값은 5 또는 7이다.
(i)~(iv)에 의하여 가장 큰 $A-B-C$의 값은 14이다.

09

수직선에서 0을 나타내는 곳에 점 P가 있다. 동전을 한 번 던져서 앞면이 나오면 점 P를 양의 방향으로 $\frac{3}{4}$만큼, 뒷면이 나오면 점 P를 음의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 움직인다고 한다. 동전을 12번 던졌더니 점 P의 최종 위치가 나타내는 수가 정수가 되었다고 할 때, 앞면이 나온 횟수로 가능한 모든 값의 합을 구하시오. 24

(i) 점 P가 양의 방향과 음의 방향으로 이동한 수의 합이 각각 정수일 때
$\frac{3}{4}$만큼 여러번 움직인 점의 위치가 나타내는 수가 정수가 되려면 움직인 횟수가 4의 배수이어야 하고, $\frac{1}{2}$만큼 여러 번 움직인 점의 위치가 나타내는 수가 정수가 되려면 움직인 횟수가 2의 배수이어야 한다.
따라서 앞면 또는 뒷면만 나온 수를 이동했을 때, 그 수가 정수이려면 앞면이 나온 횟수가 4의 배수이어야 한다.
즉, 동전을 12번 던졌을 때 앞면이 0, 4, 8, 12번 나오면 뒷면이 나온 횟수는 각각 12, 8, 4, 0이고, 이 경우는 모두 정수의 값이 나오므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) 점 P가 양의 방향과 음의 방향으로 이동한 수의 합이 각각 정수가 아닐 때
앞면이 나온 수와 뒷면이 나온 수만큼 움직였을 때의 위치가 나타내는 수가 정수가 되는 경우는 앞면이 2번 나오고 뒷면이 한 번 나오는 경우이다.
즉, 동전을 12번 던졌을 때 이 경우가 포함되는 경우는 앞면이 8번, 뒷면이 4번 나오는 경우뿐이고, 이 경우는 (i)에서 구한 경우와 같다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 합은 $0+4+8+12=24$

Lv. Master 실력을 완성하는 대단원 평가

_____ 점 / 100점

01

두 수 300, $2^3\times7^2\times a$의 최대공약수는 20이다. a의 값이 가장 작을 때, 이 두 수의 최소공배수는? [4점]

① $2^3\times5^2$
② $2^2\times3\times5^2$
③ $2^3\times3\times5^2$
④ $2^3\times3\times5\times7^2$
✓⑤ $2^3\times3\times5^2\times7^2$

두 수 $300=2^2\times3\times5^2$, $2^3\times7^2\times a$의 최대공약수가 $20=2^2\times5$이므로 $a=5\times k$ (k는 3, 5와 서로소)의 꼴이어야 한다.
이때 a의 값 중 가장 작은 수는 5이므로 주어진 수는 $2^3\times5\times7^2$이다.
따라서 $2^2\times3\times5^2$, $2^3\times5\times7^2$의 최소공배수는 $2^3\times3\times5^2\times7^2$

02

다음 중 아래 수에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개) [4점]

$$10,\ -1.5,\ \frac{24}{6},\ 0,\ -9,\ -\frac{1}{3}$$

① 양수는 3개이다.
② 정수는 3개이다.
③ 유리수는 5개이다.
✓④ 음의 정수는 1개이다.
✓⑤ 정수가 아닌 유리수는 2개이다.

① 양수는 10, $\frac{24}{6}$의 2개이다.
② 정수는 10, $\frac{24}{6}=4$, 0, -9의 4개이다.
③ 유리수는 10, -1.5, $\frac{24}{6}$, 0, -9, $-\frac{1}{3}$의 6개이다.

03

다음 중 수직선에 나타낼 때, 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있는 것은? [4점]

① $+4$
✓② -7
③ 0
④ $+\frac{1}{5}$
⑤ $-\frac{1}{9}$

수직선에 나타낼 때, 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있는 수는 절댓값이 가장 큰 수이다.
각 수의 절댓값을 구해 보면 다음과 같다.
① $|+4|=4$
② $|-7|=7$
③ $|0|=0$
④ $\left|+\frac{1}{5}\right|=\frac{1}{5}$
⑤ $\left|-\frac{1}{9}\right|=\frac{1}{9}$
즉 $|0|<\left|-\frac{1}{9}\right|<\left|+\frac{1}{5}\right|<|+4|<|-7|$이므로
절댓값이 가장 큰 수는 -7이므로 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있는 것은 ②이다.

04

$|a|>|b|$인 두 수 a, b에 대하여 다음 중 옳은 것은? [4점]

① a는 b보다 크다.
② $b=0$일 때, a는 양수이다.
③ $a>0$, $b>0$이면 a는 b보다 작은 수이다.
④ $a<0$, $b<0$이면 수직선에서 a는 b보다 오른쪽에 위치한다.
✓⑤ 수직선에서 a를 나타내는 점은 b를 나타내는 점보다 원점에서 멀리 떨어져 있다.

① $a<0$, $b<0$이면 $a<b$이다.
② $b=0$일 때, $|a|>0$이지만 a가 양수인지는 알 수 없다.
③ $a>0$, $b>0$이면 a는 b보다 큰 수이다.
④ $a<0$, $b<0$이면 수직선에서 a는 b보다 왼쪽에 위치한다.

05

$A=\left(+\frac{7}{3}\right)\times\left(-\frac{15}{14}\right)$, $B=\left(-\frac{8}{27}\right)\div\left(-\frac{16}{9}\right)$일 때, $A+B$의 값은? [4점]

✓① $-\frac{7}{3}$
② $-\frac{3}{2}$
③ $-\frac{1}{12}$
④ $+\frac{1}{2}$
⑤ $+\frac{8}{3}$

$A=\left(+\frac{7}{3}\right)\times\left(-\frac{15}{14}\right)=-\frac{5}{2}$
$B=\left(-\frac{8}{27}\right)\div\left(-\frac{16}{9}\right)=\left(-\frac{8}{27}\right)\times\left(-\frac{9}{16}\right)=+\frac{1}{6}$
$\therefore A+B=\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)=\left(-\frac{15}{6}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)=-\frac{14}{6}=-\frac{7}{3}$

06

다음 조건을 만족시키는 서로 다른 세 수 A, B, C에 대하여 $A\times B-C$의 값은? [4점]

(가) A는 -8의 역수이다.
(나) B는 $\frac{5}{4}$의 역수이다.
(다) $C=\left(-\frac{1}{2}\right)^2\div\frac{1}{8}\times(-3)$

① $\frac{11}{2}$
② $\frac{57}{10}$
✓③ $\frac{59}{10}$
④ $\frac{61}{10}$
⑤ $\frac{63}{10}$

A는 -8의 역수이므로 $A=-\frac{1}{8}$, B는 $\frac{5}{4}$의 역수이므로 $B=\frac{4}{5}$
$C=\left(-\frac{1}{2}\right)^2\div\frac{1}{8}\times(-3)=\frac{1}{4}\times8\times(-3)=-6$
$\therefore A\times B-C=\left(-\frac{1}{8}\right)\times\frac{4}{5}-(-6)=-\frac{1}{10}+6=\frac{59}{10}$

07

다음 중 세 분수 $\frac{48}{n}$, $\frac{96}{n}$, $\frac{144}{n}$가 모두 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 값이 아닌 것은? [4점]

① 2　② 4　③ 6
✓④ 9　⑤ 12

세 분수 $\frac{48}{n}$, $\frac{96}{n}$, $\frac{144}{n}$가 모두 자연수가 되려면 분모 n이 48, 96, 144의 공약수이어야 한다.
이때 $48=2^4\times3$, $96=2^5\times3$, $144=2^4\times3^2$이므로 48, 96, 144의 최대공약수는 $2^4\times3=48$
따라서 48의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48이므로 자연수 n의 값이 아닌 것은 ④이다.

08

다음 수 중 절댓값이 $\frac{29}{9}$보다 작은 수의 개수는? [4점]

$$-6,\ -\frac{20}{7},\ +3.14,\ +\frac{21}{5},\ -1.23,\ +2$$

① 1　② 2　③ 3
✓④ 4　⑤ 5

$|-6|=6$, $\left|-\frac{20}{7}\right|=\frac{20}{7}$, $|+3.14|=3.14$,
$\left|+\frac{21}{5}\right|=\frac{21}{5}$, $|-1.23|=1.23$, $|+2|=2$
절댓값이 $\frac{29}{9}$보다 작은 수는 $-\frac{20}{7}$, $+3.14$, -1.23, $+2$의 4개이다.

$\frac{x}{|x|}$, $\frac{|y|}{y}$, $\frac{xy}{|xy|}$의 값은 x, y의 부호에 따라 1 또는 -1이 된다.
(i) $x>0$, $y>0$일 때, $x◎y=\frac{x}{|x|}+\frac{|y|}{y}-\frac{xy}{|xy|}=\frac{x}{x}+\frac{y}{y}-\frac{xy}{xy}=1$
(ii) $x>0$, $y<0$일 때, $x◎y=\frac{x}{|x|}+\frac{|y|}{y}-\frac{xy}{|xy|}=\frac{x}{x}+\frac{-y}{y}-\frac{xy}{-xy}=1$

09

0이 아닌 두 유리수 x, y에 대하여

$$x◎y=\frac{x}{|x|}+\frac{|y|}{y}-\frac{xy}{|xy|}$$

라고 하자. $(a◎b)+(b◎c)+(c◎a)$가 가장 큰 값을 가질 수 있는 세 유리수 a, b, c를 (a, b, c)로 나타낼 때, 다음 중 가능한 경우가 아닌 것은? [4점]

① (양수, 양수, 양수)　② (양수, 양수, 음수)
③ (양수, 음수, 양수)　④ (음수, 양수, 양수)
✓⑤ (음수, 음수, 음수)

(iii) $x<0$, $y>0$일 때, $x◎y=\frac{x}{|x|}+\frac{|y|}{y}-\frac{xy}{|xy|}=\frac{x}{-x}+\frac{y}{y}-\frac{xy}{-xy}=1$
(iv) $x<0$, $y<0$일 때, $x◎y=\frac{x}{|x|}+\frac{|y|}{y}-\frac{xy}{|xy|}=\frac{x}{-x}+\frac{-y}{y}-\frac{xy}{xy}=-3$
따라서 $(a◎b)+(b◎c)+(c◎a)$의 값은
(i) a, b, c가 모두 양수일 때, $1+1+1=3$
(ii) a, b, c에서 양수가 2개, 음수가 1개일 때, $1+1+1=3$
(iii) a, b, c에서 양수가 1개, 음수가 2개일 때, $1+(-3)+1=-1$
(iv) a, b, c가 모두 음수일 때, $(-3)+(-3)+(-3)=-9$
(i)~(iv)에 의하여 $(a◎b)+(b◎c)+(c◎a)$가 가질 수 있는 가장 큰 값은 3이므로 가능한 경우를 (a, b, c)로 나타내면 (양수, 양수, 양수), (양수, 양수, 음수), (양수, 음수, 양수), (음수, 양수, 양수)이다.

10

유리수 x에 대하여

$<x>=$(x를 소수점 첫째 자리에서 버림한 수)
$(x)=x-<x>$

라고 할 때, $<a>=3$, $<b>=-2$, $(b)=0.4$이다. 다음 중 $a+b$의 값이 될 수 있는 것은? [4점]

① -1.6　② 1.0　✓③ 1.4
④ 2.4　⑤ 3.4

$<a>=3$이므로 $3\le a<4$
$(b)=b-<b>$이므로 $0.4=b-(-2)$, $0.4=b+2$
$\therefore\ b=-1.6$
이때 $3+(-1.6)=1.4$, $4+(-1.6)=2.4$이므로 $1.4\le a+b<2.4$

11

네 수 a, b, c, d가 다음 조건을 만족시킬 때, d의 값은? [4점]

(가) a는 $-\frac{2}{3}$보다 $\frac{5}{12}$만큼 큰 수이다.
(나) b는 a보다 $-\frac{3}{10}$만큼 작은 수이다.
(다) $c=a\div b$
(라) c는 $-\frac{7}{2}$보다 d만큼 작은 수이다.

① $-\frac{3}{2}$　② $-\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$　✓⑤ $\frac{3}{2}$

$a=-\frac{2}{3}+\frac{5}{12}=-\frac{8}{12}+\frac{5}{12}=-\frac{3}{12}=-\frac{1}{4}$
$b=a-\left(-\frac{3}{10}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{3}{10}=-\frac{5}{20}+\frac{6}{20}=\frac{1}{20}$
$c=a\div b=\left(-\frac{1}{4}\right)\div\frac{1}{20}=\left(-\frac{1}{4}\right)\times20=-5$
$c=-\frac{7}{2}-d$이므로 $-5=-\frac{7}{2}-d$　$\therefore\ d=-\frac{7}{2}+5=-\frac{7}{2}+\frac{10}{2}=\frac{3}{2}$

12

수직선에서 0을 나타내는 점에 말이 있다. 주사위를 한 번 던져서 짝수의 눈이 나오면 양의 방향으로 4만큼, 홀수의 눈이 나오면 음의 방향으로 3만큼 이동한다고 한다. 주사위를 5번 던졌을 때, 다음 중 말이 위치하는 점이 나타내는 수가 아닌 것은? [4점]

✓① -9　② -1　③ 6
④ 13　⑤ 20

(i) 짝수의 눈이 5번 나올 때, $5\times(+4)=20$
(ii) 짝수의 눈이 4번, 홀수의 눈이 1번 나올 때, $4\times(+4)+1\times(-3)=16-3=13$
(iii) 짝수의 눈이 3번, 홀수의 눈이 2번 나올 때, $3\times(+4)+2\times(-3)=12-6=6$
(iv) 짝수의 눈이 2번, 홀수의 눈이 3번 나올 때, $2\times(+4)+3\times(-3)=8-9=-1$
(v) 짝수의 눈이 1번, 홀수의 눈이 4번 나올 때, $1\times(+4)+4\times(-3)=4-12=-8$
(vi) 홀수의 눈이 5번 나올 때, $5\times(-3)=-15$
(i)~(vi)에 의하여 주사위를 5번 던졌을 때 말이 위치하는 점이 나타내는 수가 아닌 것은 ①이다.

13

공장 안에 있는 세 기계 A, B, C가 다음과 같이 작동과 정지를 반복하고 있다.

기계 A: 35초 동안 작동하고 10초 동안 멈춘다.
기계 B: 40초 동안 작동하고 20초 동안 멈춘다.
기계 C: x초 동안 작동하고 15초 동안 멈춘다.

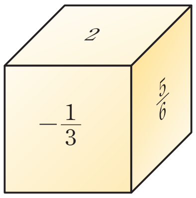
오전 9시 정각에 세 기계가 동시에 가동을 시작했고, 그로부터 15분 뒤에 처음으로 다시 세 기계가 동시에 가동을 시작했다고 한다. 이때 가장 작은 자연수 x의 값은? [4점]

✓① 10　② 13　③ 15
④ 17　⑤ 19

세 기계 A, B, C가 처음 가동하고 멈춘 후 다시 가동하는 데 걸리는 시간은 각각 45초, 60초, $(x+15)$초이다.
세 기계가 오전 9시 정각에 가동을 시작한 후 처음으로 다시 동시에 가동을 시작할 때까지 걸리는 시간은 45, 60, $x+15$의 최소공배수이고, 세 기계는 $15\times60=900$(초) 뒤에 처음으로 다시 동시에 가동을 시작했으므로 45, 60, $x+15$의 최소공배수는 900이다.
이때 $45=3^2\times5$, $60=2^2\times3\times5$, $900=2^2\times3^2\times5^2$이므로
$x+15$는 5^2의 배수이고 $2^2\times3^2\times5^2$의 약수이어야 한다.
따라서 $x+15=5^2=25$일 때 x의 값이 가장 작고 그때의 x의 값은 $x=10$이다.

14

오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 마주 보는 두 면에 적힌 두 수의 합이 항상 1일 때, 보이지 않는 세 면에 적힌 수 중 두 수를 뽑아 곱한 값 중 가장 작은 수는? [4점]



✓① $-\frac{4}{3}$　② $-\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{2}{9}$　⑤ $\frac{4}{3}$

보이는 세 면에 적힌 수 2, $\frac{5}{6}$, $-\frac{1}{3}$의 마주 보는 면에 적힌 수를 각각 a, b, c라고 하면
$2+a=1$, $\frac{5}{6}+b=1$, $-\frac{1}{3}+c=1$이므로
$a=-1$, $b=\frac{1}{6}$, $c=\frac{4}{3}$
이때 $a\times b=-1\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}$, $a\times c=-1\times\frac{4}{3}=-\frac{4}{3}$, $b\times c=\frac{1}{6}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{9}$이고
$-\frac{4}{3}<-\frac{1}{6}<\frac{2}{9}$이므로 가장 작은 수는 $-\frac{4}{3}$이다.

15

유리수 x에 대하여

$$<x>=\begin{cases}0 & (x\text{는 정수})\\1 & (x\text{는 정수가 아닌 유리수})\end{cases}$$

이라고 하자. $\left\langle\frac{n}{6}\right\rangle+\left\langle\frac{24}{n}\right\rangle=1$을 만족시키는 1 이상 50 이하의 모든 자연수 n의 값의 합은? [6점]

① 190　② 191　✓③ 192
④ 193　⑤ 194

$\left\langle\frac{n}{6}\right\rangle$, $\left\langle\frac{24}{n}\right\rangle$의 값은 0 또는 1이므로 $\left\langle\frac{n}{6}\right\rangle+\left\langle\frac{24}{n}\right\rangle=1$에서
$\left\langle\frac{n}{6}\right\rangle=0$, $\left\langle\frac{24}{n}\right\rangle=1$ 또는 $\left\langle\frac{n}{6}\right\rangle=1$, $\left\langle\frac{24}{n}\right\rangle=0$
(i) $\left\langle\frac{n}{6}\right\rangle=0$, $\left\langle\frac{24}{n}\right\rangle=1$일 때
$\frac{n}{6}$이 정수가 되도록 하는 자연수 n은 1 이상 50 이하의 6의 배수이므로
$n=6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48$
이때 $\frac{24}{n}$가 정수가 아닌 유리수가 되려면 자연수 n은 24의 약수가 아니어야 하므로
$n=18, 30, 36, 42, 48$
(ii) $\left\langle\frac{n}{6}\right\rangle=1$, $\left\langle\frac{24}{n}\right\rangle=0$일 때
$\frac{24}{n}$가 정수가 되도록 하는 자연수 n은 24의 약수이므로
$n=1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$
이때 $\frac{n}{6}$이 정수가 아닌 유리수가 되려면 자연수 n은 6의 배수가 아니어야 하므로
$n=1, 2, 3, 4, 8$
(i), (ii)에 의하여 주어진 식을 만족시키는 모든 자연수 n은 1, 2, 3, 4, 8, 18, 30, 36, 42, 48이므로 구하는 합은
$1+2+3+4+8+18+30+36+42+48=192$

16

$1\times2\times3\times\cdots\times15$를 3^k으로 나누어떨어지도록 하는 가장 큰 자연수 k의 값을 구하시오. [4점] **6**

$A=1\times2\times3\times\cdots\times15$라고 하면 A가 3^k으로 나누어떨어지므로 3^k은 A의 약수이다.
1부터 15까지의 자연수 중 3을 소인수로 갖는 자연수는
$3,\ 6=2\times3,\ 9=3^2,\ 12=2^2\times3,\ 15=3\times5$
이므로 A를 소인수분해한 결과에서 밑이 3인 소인수의 지수는 6이다.
따라서 가장 큰 자연수 k의 값은 6이다.

17

다음 조건을 만족시키는 서로 다른 세 정수 a, b, c에 대하여 $|a|+|b|+|c|-|a+b|+|a+c|-|c-b|$의 값을 구하시오. [4점] **$-24$**

(가) $a<b<c$
(나) $a\times b\times c>0$
(다) $a+b+c=-24$
(라) $|a|<|c|$

조건 (나)에서 $a\times b\times c>0$이므로 세 정수 a, b, c는 모두 양수이거나 두 정수가 음수이고 한 정수는 양수이다.
이때 조건 (다)에서 세 수의 합이 음수이므로 세 정수 a, b, c 중 두 정수는 음수이고 한 정수는 양수이다.
조건 (가)에서 $a<b<c$이므로 $a<0,\ b<0,\ c>0$
조건 (라)에서 $|a|<|c|$이므로 $-a<c$ $\quad\therefore a+c>0$

$$\begin{aligned}\therefore\ &|a|+|b|+|c|-|a+b|+|a+c|-|c-b|\\&=-a+(-b)+c-\{-(a+b)\}+(a+c)-(c-b)\\&=-a-b+c+a+b+a+c-c+b\\&=a+b+c=-24\end{aligned}$$

18

어떤 수에 $-\frac{8}{3}$을 더해야 할 것을 잘못하여 곱하였더니 그 결과가 $-\frac{4}{9}$가 되었다. 이때 바르게 계산한 값을 구하시오. [4점] **$-\frac{5}{2}$**

어떤 수를 A라고 하면 $A\times\left(-\frac{8}{3}\right)=-\frac{4}{9}$
$\therefore A=\left(-\frac{4}{9}\right)\times\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{6}$
따라서 바르게 계산한 값은
$\frac{1}{6}+\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{6}+\left(-\frac{16}{6}\right)=-\frac{15}{6}=-\frac{5}{2}$

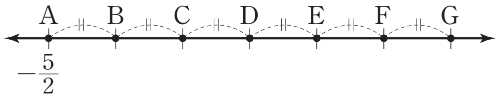
19

두 자연수 $A=2^2\times6^2\times5$, $B=2\times3^n\times10$에 대하여 A와 B의 약수의 개수가 서로 같을 때, 자연수 n의 값을 구하시오. [4점] **4**

$A=2^2\times6^2\times5=2^4\times3^2\times5$이므로 A의 약수의 개수는
$(4+1)\times(2+1)\times(1+1)=30$
$B=2\times3^n\times10=2^2\times3^n\times5$이므로 B의 약수의 개수는
$(2+1)\times(n+1)\times(1+1)=6\times(n+1)$
A, B의 약수의 개수가 서로 같으므로
$30=6\times(n+1)$, $n+1=5$
$\therefore n=4$

20

수직선에 7개의 점 A, B, C, D, E, F, G가 서로 같은 간격으로 놓여 있다. 두 점 B, F와 같은 거리에 있는 점이 나타내는 수가 1일 때, 세 점 C, E, G가 나타내는 수의 합을 구하시오. [4점] **$\frac{13}{2}$**



두 점 B, F와 같은 거리에 있는 점은 D이므로 점 D가 나타내는 수는 1이다.
따라서 두 점 A, D 사이의 거리는 $1-\left(-\frac{5}{2}\right)=1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$
두 점 A, D 사이에 두 점 B, C가 같은 간격으로 놓여 있으므로 이웃하는 두 점 사이의 거리는 $\frac{7}{2}\div3=\frac{7}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{6}$
점 B가 나타내는 수는 $-\frac{5}{2}+\frac{7}{6}=-\frac{4}{3}$
점 C가 나타내는 수는 $-\frac{4}{3}+\frac{7}{6}=-\frac{1}{6}$
점 E가 나타내는 수는 $1+\frac{7}{6}=\frac{13}{6}$
점 F가 나타내는 수는 $\frac{13}{6}+\frac{7}{6}=\frac{10}{3}$
점 G가 나타내는 수는 $\frac{10}{3}+\frac{7}{6}=\frac{9}{2}$
따라서 세 점 C, E, G가 나타내는 수의 합은 $\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{13}{6}+\frac{9}{2}=\frac{13}{2}$

21

수직선에서 서로 다른 세 정수 a, b, c가 $|a-b|+|b-c|=c-a$를 만족시킬 때, 세 수 a, b, c를 작은 수부터 차례대로 나열하시오. [4점] ***a*, *b*, *c***

a, b, c가 서로 다른 정수이므로 $|a-b|>0$, $|b-c|>0$
따라서 $|a-b|+|b-c|>0$이므로 $c-a>0$ $\quad\therefore c>a$
(ⅰ) $a<b<c$일 때, $a-b<0$, $b-c<0$이므로
$|a-b|+|b-c|=-(a-b)+\{-(b-c)\}=-a+b-b+c=c-a$
(ⅱ) $b<a<c$일 때, $a-b>0$, $b-c<0$이므로
$|a-b|+|b-c|=(a-b)+\{-(b-c)\}=a-b-b+c=a-2b+c$
(ⅲ) $a<c<b$일 때, $a-b<0$, $b-c>0$이므로
$|a-b|+|b-c|=-(a-b)+(b-c)=-a+b+b-c=-a+2b-c$
(ⅰ)～(ⅲ)에 의하여 $a<b<c$이므로 세 수 a, b, c를 작은 수부터 차례대로 나열하면 a, b, c이다.

22, 23번은 서술형입니다. 풀이 과정을 자세히 서술하시오.

22

수 A가 다음과 같을 때, A보다 큰 음의 정수는 모두 몇 개인지 구하시오. [7점] 37개

$$A=\frac{5}{2}\times\{(-2)^3+(-1)^4\times(-6)\}-3$$

$A=\frac{5}{2}\times\{(-2)^3+(-1)^4\times(-6)\}-3$

$=\frac{5}{2}\times\{(-8)+1\times(-6)\}-3$

$=\frac{5}{2}\times\{(-8)+(-6)\}-3$

$=\frac{5}{2}\times(-14)-3$

$=-35-3$

$=-38$ ······ 4점

따라서 A보다 큰 음의 정수는 -37, -36, -35, …, -1의 37개이다. ······ 3점

23

수직선에서 두 점 A, B가 나타내는 수는 각각 -4, 11이다. 이때 선분 AB를 2 : 3으로 나누는 점 P, 선분 AB를 3 : 2로 나누는 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이를 구하시오. (단, 점 P는 점 A에 더 가깝고, 점 Q는 점 B에 더 가깝다.) [7점] 3

수직선에서 두 점 A, B가 나타내는 수가 -4, 11이므로
선분 AB의 길이는 $11-(-4)=15$ ······ 2점

선분 AB를 5등분했을 때, 이웃하는 두 점 사이의 간격은 $15\times\frac{1}{5}=3$

따라서 선분 AB를 2 : 3으로 나누는 점 P가 나타내는 수는 $-4+3+3=2$

또, 선분 AB를 3 : 2로 나누는 점 Q가 나타내는 수는 $11-3-3=5$ ······ 3점

따라서 선분 PQ의 길이는 $5-2=3$ ······ 2점

Ⅱ

문자와 식

Ⅱ 문자와 식

01 문자의 사용과 식의 값

❶ 문자를 사용한 식

(1) **문자의 사용:** 문자를 사용하면 수량 사이의 관계를 식으로 나타낼 수 있다.

(2) **문자를 사용하여 식 세우기**

❶ 문제의 뜻을 파악하여 수량 사이의 관계를 찾는다.

❷ 문자를 사용하여 ❶에서 찾은 관계에 맞도록 식을 세운다.

(3) **곱셈 기호의 생략:** 문자를 사용한 식에서 곱셈 기호를 생략하고, 다음과 같이 간단히 나타낸다.

① (수)×(문자): 곱셈 기호를 생략하고 수를 문자 앞에 쓴다.

예 $2\times x=2x$, $y\times(-3)=-3y$

② $1\times$(문자) 또는 $(-1)\times$(문자): 곱셈 기호와 1을 생략한다.

예 $1\times x=x$, $(-1)\times x=-x$

③ (문자)×(문자): 곱셈 기호를 생략하고 알파벳 순서대로 쓴다.

예 $b\times a\times x=abx$

④ 같은 문자의 곱: 곱셈 기호를 생략하고 거듭제곱으로 나타낸다.

예 $x\times x\times x=x^3$, $a\times b\times a=a^2b$

⑤ (괄호가 있는 식)×(수): 곱셈 기호를 생략하고 수를 괄호 앞에 쓴다.

예 $(x+y)\times 2=2(x+y)$, $(a-b)\times(-3)=-3(a-b)$

(4) **나눗셈 기호의 생략:** 나눗셈 기호를 생략하고 분수의 꼴로 나타내거나 나눗셈을 역수의 곱셈으로 바꾼 후 곱셈 기호를 생략한다.

⇨ $a\div b=\dfrac{a}{b}$ (단, $b\neq 0$)

예 $x\div 2=\dfrac{x}{2}$, $y\div(-3)=\dfrac{y}{-3}=-\dfrac{y}{3}$

참고 곱셈, 나눗셈이 섞여 있을 때에는 앞에서부터 차례대로 기호 ×, ÷를 먼저 생략한다.

$a\div b\times c=a\times\dfrac{1}{b}\times c=\dfrac{ac}{b}$ (○)

$a\div b\times c=a\times\dfrac{1}{bc}=\dfrac{a}{bc}$ (×)

❷ 식의 값

(1) **대입:** 문자를 사용한 식에서 문자 대신 수를 바꾸어 넣는 것

(2) **식의 값:** 문자를 사용한 식에서 문자에 어떤 수를 대입하여 계산한 결과

(3) **식의 값을 구하는 방법**

❶ 생략된 기호 ×, ÷를 다시 쓴다.

❷ 문자에 주어진 수를 대입하여 계산한다.

예 $a=2$, $b=-1$일 때, $2a-b+2=2\times2-(-1)+2=4+1+2=7$

(4) **식의 값의 활용**

❶ 주어진 상황을 문자를 사용한 식으로 나타낸다.

❷ ❶의 식에 수를 대입하여 식의 값을 구한다.

1등급 비법노트

◆ **문자와 수량 사이의 관계**

① x % ⇨ $\dfrac{x}{100}$

② a의 x % ⇨ $a\times\dfrac{x}{100}$

③ (거리)=(속력)×(시간),
(속력)=$\dfrac{(거리)}{(시간)}$, (시간)=$\dfrac{(거리)}{(속력)}$

④ (소금물의 농도)
$=\dfrac{(소금의\ 양)}{(소금물의\ 양)}\times100$ (%),
(소금의 양)
$=\dfrac{(소금물의\ 농도)}{100}\times$(소금물의 양)

◆ **$0.1\times a$에서 곱셈 기호의 생략**

$0.1\times a$에서 1은 생략할 수 없으므로 $0.a$가 아니라 $0.1a$로 쓴다.

◆ 1과 −1로 나눌 때에는 1은 생략한다.

① $x\div1=\dfrac{x}{1}=x$

② $x\div(-1)=\dfrac{x}{-1}=-x$

◆ **문자에 음수, 분수 대입하기**

① 문자에 음수를 대입할 때에는 반드시 괄호를 사용한다.

② 분모에 분수를 대입할 때에는 생략된 나눗셈 기호를 다시 쓴 후에 대입한다.

3 다항식

(1) 다항식

① 항: 수 또는 수와 문자의 곱으로 이루어진 식

② 상수항: 문자 없이 수만으로 이루어진 항

③ 계수: 문자를 포함한 항에서 문자에 곱해진 수

④ 다항식: 한 개의 항 또는 두 개 이상의 항의 합으로 이루어진 식

⑤ 단항식: 다항식 중 하나의 항으로만 이루어진 식

⑥ 차수: 항에서 문자가 곱해진 개수

⑦ 다항식의 차수: 다항식에서 차수가 가장 큰 항의 차수

(2) 일차식: 차수가 1인 다항식

예

다항식	항	계수	상수항	다항식의 차수
$2x+3$	$2x$, 3	x의 계수: 2	3	1 (일차식)
x^2+4x-5	x^2, $4x$, -5	x^2의 계수: 1 x의 계수: 4	-5	2 (일차식이 아니다.)

1등급 비법노트

- 상수항의 차수는 0이다.
- 다항식의 항을 말할 때에는 부호까지 포함하여 말한다.
- 단항식은 모두 다항식이다.
- 분모에 문자가 있는 식은 다항식이 아니므로 일차식도 아니다.
  ⇨ $\frac{1}{x}=1\div x$이므로 수와 문자의 곱으로 이루어져 있지 않다.

4 일차식과 수의 곱셈, 나눗셈

(1) 단항식과 수의 곱셈, 나눗셈

① (단항식)×(수): 수끼리 곱하여 문자 앞에 쓴다.

예 $2x\times7=2\times x\times7=2\times7\times x=14x$

② (단항식)÷(수): 나눗셈을 역수의 곱셈으로 바꾸어 계산한다.

예 $8x\div(-4)=8\times x\times\left(-\frac{1}{4}\right)=8\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times x=-2x$

(2) 일차식과 수의 곱셈, 나눗셈

① (수)×(일차식): 분배법칙을 이용하여 일차식의 각 항에 수를 곱하여 계산한다.

참고 괄호 앞에 음수가 있으면 숫자뿐만 아니라 부호 −도 괄호 안의 모든 항에 곱해야 한다.

예 $-5(2x+1)=(-5)\times2x+(-5)\times1=-10x-5$

② (일차식)÷(수): 나눗셈을 역수의 곱셈으로 바꾸어 계산한다.

예 $(10x+4)\div2=(10x+4)\times\frac{1}{2}=10x\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{2}=5x+2$

- **역수**: 어떤 두 수의 곱이 1일 때, 한 수를 다른 한 수의 역수라고 한다.
- **분배법칙**
  세 수 a, b, c에 대하여
  ① $a(b+c)=ab+ac$
  ② $(a+b)c=ac+bc$

5 일차식의 덧셈과 뺄셈

(1) 동류항: 문자와 차수가 각각 같은 항

(2) 동류항의 덧셈과 뺄셈: 동류항끼리 모은 후 분배법칙을 이용하여 간단히 한다.

예
$$\begin{aligned}2x-3-x+8&=2x-x-3+8\\&=(2-1)x+(-3+8)\\&=x+5\end{aligned}$$

(3) 일차식의 덧셈과 뺄셈

❶ 괄호가 있으면 분배법칙을 이용하여 괄호를 푼다.

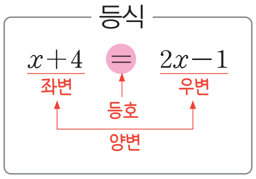
❷ 동류항끼리 모아서 계산한다.

예
$$\begin{aligned}(5x+2)-(7x-1)&=5x+2-7x+1\\&=5x-7x+2+1\\&=-2x+3\end{aligned}$$

- **동류항**
  ① $2x$, $3y$
  ⇨ 차수는 같지만 문자가 다르다.
  ⇨ 동류항이 아니다.
  ② $4x^2$, $5x$
  ⇨ 문자는 같지만 차수가 다르다.
  ⇨ 동류항이 아니다.
  ③ 1, -2
  ⇨ 상수항끼리는 모두 동류항이다.

02 일차방정식

❶ 방정식과 항등식



(1) **등식:** 등호($=$)를 사용하여 수량 사이의 관계를 나타낸 식
  ① 좌변: 등식에서 등호의 왼쪽 부분
  ② 우변: 등식에서 등호의 오른쪽 부분
  ③ 양변: 등식의 좌변과 우변

(2) **방정식:** 미지수의 값에 따라 참이 되기도 하고, 거짓이 되기도 하는 등식
  ① 미지수: 방정식에서 문자
  ② 방정식의 해(근): 방정식을 참이 되게 하는 미지수의 값
  ③ 방정식을 푼다: 방정식에서 해를 구하는 것

(3) **항등식:** 미지수에 어떤 값을 대입하여도 항상 참이 되는 등식
  ⇨ $ax+b=cx+d$가 x에 대한 항등식일 때, $a=c$, $b=d$

1등급 비법노트

- x에 대한 항등식
  ⇨ 모든 x에 대하여 성립할 때
  ⇨ x의 값에 관계없이 성립할 때
- 방정식, 항등식이 되는 조건
  x에 대한 등식 $ax+b=cx+d$에서
  ① $a\neq c$ ⇨ 방정식
  ② $a=c$, $b=d$ ⇨ 항등식
  ③ $a=c$, $b\neq d$ ⇨ 거짓인 등식

❷ 등식의 성질

(1) 등식의 양변에 같은 수를 더하여도 등식은 성립한다.
  ⇨ $a=b$이면 $a+c=b+c$

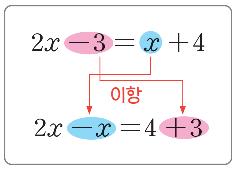
(2) 등식의 양변에서 같은 수를 빼어도 등식은 성립한다.
  ⇨ $a=b$이면 $a-c=b-c$

(3) 등식의 양변에 같은 수를 곱하여도 등식은 성립한다.
  ⇨ $a=b$이면 $ac=bc$

(4) 등식의 양변을 0이 아닌 같은 수로 나누어도 등식은 성립한다.
  ⇨ $a=b$이면 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$ (단, $c\neq0$)

참고 $ac=bc$라고 해서 반드시 $a=b$인 것은 아니다.
$c=0$이면 $2\times0=3\times0$이지만 $2\neq3$이다.

❸ 일차방정식



(1) **이항:** 등식의 성질을 이용하여 등식의 한 변에 있는 항을 그 부호를 바꾸어 다른 변으로 옮기는 것

(2) **일차방정식:** 방정식에서 우변에 있는 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이 (x에 대한 일차식)$=0$, 즉 $ax+b=0$ $(a\neq0)$의 꼴로 나타내어지는 방정식을 x에 대한 일차방정식이라고 한다.

(3) **일차방정식의 풀이**
  ❶ 괄호가 있으면 괄호를 푼다.
  ❷ 미지수 x를 포함하는 항은 좌변으로, 상수항은 우변으로 이항한다.
  ❸ 양변을 정리하여 $ax=b(a\neq0)$의 꼴로 만든다.
  ❹ 양변을 x의 계수로 나누어 해를 구한다.

- ① $+a$를 이항하면 $-a$
  ② $-a$를 이항하면 $+a$
- $ax+b=0$이 일차방정식이 되는 조건
  ⇨ $a\neq0$
- x에 대한 방정식 $ax+b=cx+d$에서
  ① 해가 무수히 많을 조건
    ⇨ $a=c$, $b=d$
  ② 해가 없을 조건
    ⇨ $a=c$, $b\neq d$
  ③ 해가 1개일 조건 ⇨ $a\neq c$

❹ 복잡한 일차방정식의 풀이

(1) **계수가 소수인 경우:** 양변에 10, 100, 1000, … 중 알맞은 수를 곱하여 모든 계수를 정수로 바꾼다.

(2) **계수가 분수인 경우:** 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 모든 계수를 정수로 바꾼다.

(3) **비례식인 경우:** $a:b=c:d$이면 $ad=bc$임을 이용한다.

- 계수에 소수와 분수가 섞여 있으면 소수를 분수로 바꾼 후 분모의 최소공배수를 곱한다.

03 일차방정식의 활용

❶ 일차방정식의 활용 (1)

(1) 일차방정식의 활용 문제의 풀이 순서

❶ 미지수 정하기: 문제의 뜻을 파악하고 구하려고 하는 것을 x로 놓는다.
❷ 방정식 세우기: 문제의 뜻에 맞게 x에 대한 일차방정식을 세운다.
❸ 방정식 풀기: 방정식을 풀어 해를 구한다.
❹ 확인하기: 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

(2) 수에 대한 문제

① 어떤 수에 대한 문제: 어떤 수를 x로 놓고 x에 대한 방정식을 세운다.
② 연속하는 세 자연수: $x-1$, x, $x+1$ 또는 x, $x+1$, $x+2$
③ 연속하는 세 홀수(짝수): $x-2$, x, $x+2$ 또는 x, $x+2$, $x+4$
④ 자릿수에 대한 문제: 십의 자리의 숫자가 a, 일의 자리의 숫자가 b인 두 자리 자연수는 $10a+b$

(3) 나이에 대한 문제

① a년 후의 나이: $\{$(현재 나이)$+a\}$살
② b년 전의 나이: $\{$(현재 나이)$-b\}$살

(4) 도형에 대한 문제

① (삼각형의 넓이)$=\frac{1}{2}\times$(밑변의 길이)$\times$(높이)
② (직사각형의 둘레의 길이)$=2\times\{$(가로의 길이)$+$(세로의 길이)$\}$
③ (직사각형의 넓이)$=$(가로의 길이)$\times$(세로의 길이)
④ (사다리꼴의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\{$(윗변의 길이)$+$(아랫변의 길이)$\}\times$(높이)

(5) 원가, 정가에 대한 문제

① 원가가 x원인 물건에 a %의 이익을 붙인 정가

⇨ (정가)$=$(원가)$+$(이익)$=x+x\times\frac{a}{100}=\left(1+\frac{a}{100}\right)x$원

② 정가가 x원인 물건을 a % 할인한 판매 가격

⇨ (판매 가격)$=$(정가)$-$(할인 금액)$=x-x\times\frac{a}{100}=\left(1-\frac{a}{100}\right)x$원

(6) 일에 대한 문제: 전체 일의 양을 1로 놓고 (하루에 하는 일의 양)$=\frac{1}{(\text{일한 날의 수})}$임을 이용한다.

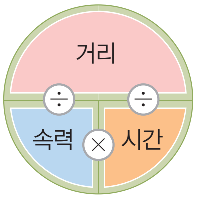
1등급 비법노트

- 문제에 단위가 있는 경우에는 답에 단위를 반드시 써야 한다.
- ① 연속하는 두 자연수: $x-1$, x 또는 x, $x+1$
  ② 연속하는 두 홀수(짝수): $x-2$, x 또는 x, $x+2$
- (이익)$=$(판매 가격)$-$(원가)
- 시계의 시침은 1분에 0.5°씩, 분침은 1분에 6°씩 움직인다.

❷ 일차방정식의 활용 (2)

(1) 거리, 속력, 시간에 대한 문제

① (거리)$=$(속력)$\times$(시간)　② (속력)$=\frac{(\text{거리})}{(\text{시간})}$
③ (시간)$=\frac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$



(2) 농도에 대한 문제

① (소금물의 농도)$=\frac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})}\times100$ (%)
② (소금의 양)$=\frac{(\text{소금물의 농도})}{100}\times$(소금물의 양)

- ① 1 km$=$1000 m
  ② 1시간$=$60분
- (열차가 다리를 완전히 통과할 때까지 이동한 거리)
  $=$(다리의 길이)$+$(열차의 길이)
- 소금물에 물을 더 넣거나 물을 증발시켜도 소금의 양은 변하지 않는다.

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

개념 1 문자를 사용한 식

01

다음 중 기호 ×, ÷를 생략하여 나타낸 식으로 옳은 것은?

① $2\div x\times y=2xy$ $\rightarrow 2\times\frac{1}{x}\times y=\frac{2y}{x}$

② $a\times 5\div(x-y)=\frac{a}{5(x-y)}$ $\rightarrow a\times 5\times\frac{1}{x-y}=\frac{5a}{x-y}$

③ $(a+2b)\div x\times(-3)=\frac{a+2b}{x}-3$ $\rightarrow (a+2b)\times\frac{1}{x}\times(-3)=\frac{-3(a+2b)}{x}$

✓④ $(-1)\times a+b\div 4=-a+\frac{b}{4}$ $\rightarrow (-1)\times a+b\times\frac{1}{4}=-a+\frac{b}{4}$

⑤ $(x+y)\div(z\div 9)=\frac{x+y}{9z}$ $\rightarrow (x+y)\div\frac{z}{9}=(x+y)\times\frac{9}{z}=\frac{9(x+y)}{z}$

02 출제 주의

다음 보기에서 계산 결과가 $\frac{ac}{b}$인 것을 모두 고르시오. ㄴ, ㄹ, ㅂ

〈 보기 〉

ㄱ. $a\times b\div c=a\times b\times\frac{1}{c}=\frac{ab}{c}$　ㄴ. $a\div b\times c=a\times\frac{1}{b}\times c=\frac{ac}{b}$

ㄷ. $a\div b\div c=a\times\frac{1}{b}\times\frac{1}{c}=\frac{a}{bc}$　ㄹ. $a\div(b\div c)=a\div\frac{b}{c}=a\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$

ㅁ. $a\times\left(\frac{1}{b}\div c\right)$ $\rightarrow =a\times\left(\frac{1}{b}\times\frac{1}{c}\right)=a\times\frac{1}{bc}=\frac{a}{bc}$　ㅂ. $a\div\left(b\times\frac{1}{c}\right)=a\div\frac{b}{c}=a\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$

03

다음 보기에서 문자를 사용하여 나타낸 식으로 옳지 않은 것을 모두 고른 것은?

〈 보기 〉

ㄱ. a, b, c의 평균은 $\frac{a+b+c}{3}$이다.

ㄴ. 1타에 12자루인 색연필 n타의 색연필의 수는 $12+n$이다.

ㄷ. 물통에 1초에 x L씩 물을 채울 때, 1분 동안 채워지는 물의 양은 $\frac{60}{x}$ L이다.

ㄹ. 귤 100개를 a명의 학생들에게 6개씩 나누어줄 때 남은 귤의 개수는 $100-6a$이다.

① ㄱ, ㄴ　② ㄱ, ㄷ　✓③ ㄴ, ㄷ

④ ㄴ, ㄹ　⑤ ㄷ, ㄹ

ㄴ. 1타에 12자루인 색연필 n타의 색연필의 수는 $12n$이다.

ㄷ. 물통에 1초에 x L씩 물을 채울 때, 1분 동안 채워지는 물의 양은 $60x$ L이다.

04

3개에 a원인 풀 5개와 b개에 2200원인 가위 2개의 가격의 합을 문자를 사용한 식으로 나타내면?

✓① $\left(\frac{5a}{3}+\frac{4400}{b}\right)$원　② $\left(\frac{5a}{3}+\frac{2200}{b}\right)$원

③ $\left(\frac{3}{5a}+\frac{4400}{b}\right)$원　④ $\left(\frac{3}{5a}+\frac{2200}{b}\right)$원

⑤ $\left(\frac{5}{3a}+\frac{2200}{b}\right)$원

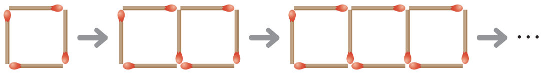
3개에 a원인 풀 한 개의 가격은 $\frac{a}{3}$원이므로 풀 5개의 가격은 $\frac{a}{3}\times 5=\frac{5a}{3}$(원)

b개에 2200원인 가위 한 개의 가격은 $\frac{2200}{b}$원이므로 가위 2개의 가격은 $\frac{2200}{b}\times 2=\frac{4400}{b}$(원)

따라서 구하는 가격의 합은 $\left(\frac{5a}{3}+\frac{4400}{b}\right)$원이다.

05

다음 그림과 같이 성냥개비를 사용하여 정사각형을 계속하여 만들려고 한다. 정사각형을 n개 만들려고 할 때, 필요한 성냥개비의 개수를 문자를 사용한 식으로 나타내면?



① $2n+1$　✓② $3n+1$　③ $3n+2$

④ $4n+1$　⑤ $4n+2$

정사각형 1개 ⇨ $1+3$
정사각형 2개 ⇨ $1+3+3=1+3\times 2$
정사각형 3개 ⇨ $1+3+3+3=1+3\times 3$
⋮　⋮
정사각형 n개 ⇨ $1+3+3+\cdots+3=1+3\times n=3n+1$

개념 2 식의 값

06 출제 주의

$a=-2$일 때, 다음 중 식의 값이 나머지 넷과 다른 하나는?

① $-2a^2$　② a^3　③ $-(-a)^3$

✓④ $-\left(-\frac{a^4}{2}\right)$　⑤ $-a^2+2a$

① $-2a^2=-2\times(-2)^2=-8$
② $a^3=(-2)^3=-8$
③ $-(-a)^3=-\{-(-2)\}^3=-8$
④ $-\left(-\frac{a^4}{2}\right)=-\left\{-\frac{(-2)^4}{2}\right\}=8$
⑤ $-a^2+2a=-(-2)^2+2\times(-2)=-8$

07

$a=3$, $b=-1$, $c=5$일 때, $\frac{1}{a}-\frac{b}{3}-\frac{c}{2}$의 값은?

① $-\frac{15}{6}$ ✓② $-\frac{11}{6}$ ③ -1
④ $\frac{11}{6}$ ⑤ $\frac{15}{6}$

$$\frac{1}{a}-\frac{b}{3}-\frac{c}{2}=\frac{1}{3}-\frac{-1}{3}-\frac{5}{2}$$
$$=\frac{2}{6}+\frac{2}{6}-\frac{15}{6}$$
$$=-\frac{11}{6}$$

08 서술형

기온이 x ℃일 때, 소리는 1초 동안 $(331+0.6x)$ m를 이동한다고 한다. 기온이 20 ℃일 때, 소리가 5초 동안 이동한 거리를 구하시오. **1715 m**

$331+0.6x$에 $x=20$을 대입하면 $331+0.6\times20=331+12=343$
즉, 소리는 1초 동안 343 m를 이동한다. ······························ 60 %
따라서 기온이 20 ℃일 때, 소리가 5초 동안 이동한 거리는
$343\times5=1715$ (m) ······························ 40 %

개념 3 다항식

09

다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르시오. ㄴ, ㄹ

< 보기 >
ㄱ. $x-1$은 단항식이다.
ㄴ. $\frac{x}{2}+9$는 일차식이다.
ㄷ. $5x-3$에서 상수항은 3이다.
ㄹ. $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-1$에서 x의 계수와 y의 계수의 합은 1이다.

ㄱ. $x-1$은 단항식이 아닌 다항식이다.
ㄷ. $5x-3$에서 상수항은 -3이다.
ㄹ. $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-1$에서 x의 계수는 $\frac{1}{3}$, y의 계수는 $\frac{2}{3}$이므로 그 합은 $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$이다.

10

다음 중 아래 다항식에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

$$1-2x+3y,\ 0.1x-0.5,\ -6x,\ \frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{2},\ \frac{3}{x}+\frac{7}{y}$$

① 단항식은 없다.
② 일차식은 4개이다.
✓③ 항이 3개인 식은 2개이다.
④ x의 계수가 음수인 식은 2개이다.
✓⑤ 차수가 가장 큰 식은 $\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$이다.

① 단항식은 $-6x$의 1개이다.
② 일차식은 $1-2x+3y$, $0.1x-0.5$, $-6x$의 3개이다.
③ 항이 3개인 식은 $1-2x+3y$, $\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$의 2개이다.
④ x의 계수가 음수인 식은 $1-2x+3y$, $-6x$, $\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$의 3개이다.
⑤ $\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$의 차수가 2로 가장 크므로 차수가 가장 큰 식은 $\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$이다.

11

다항식 $(a+2)x^2+(5-a)x+3a-6$이 x에 대한 일차식이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오. -2

주어진 식이 x에 대한 일차식이려면 x^2의 계수는 0이고 x의 계수는 0이 아니어야 하므로
$a+2=0$, $5-a\neq0$
$\therefore a=-2$

개념 4 일차식과 수의 곱셈, 나눗셈

12 출제 주의

다음 중 계산 결과가 $\overset{=3x-12}{\underline{-3(4-x)}}$와 같지 않은 것은?

① $(x-4)\times3$ ② $(4-x)\div\left(-\frac{1}{3}\right)$
③ $(2x-8)\div\frac{2}{3}$ ④ $(12-3x)\div(-1)$
✓⑤ $\left(2-\frac{1}{2}x\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)$

① $(x-4)\times3=3x-12$
② $(4-x)\div\left(-\frac{1}{3}\right)=(4-x)\times(-3)=3x-12$
③ $(2x-8)\div\frac{2}{3}=(2x-8)\times\frac{3}{2}=3x-12$
④ $(12-3x)\div(-1)=3x-12$
⑤ $\left(2-\frac{1}{2}x\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}x-3$

13

다음 중 $a+b+c+d$의 값은? (단, a, b, c, d는 상수이다.)

$$\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{5}\right)\times(-15)=ax+b$$
$$\left(\frac{3}{2}x-\frac{6}{5}y\right)\div\left(-\frac{3}{10}\right)=cx+dy$$

① -17　✓② -3　③ 10
④ 13　⑤ 20

$\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{5}\right)\times(-15)=-5x+3$이므로 $a=-5$, $b=3$
$\left(\frac{3}{2}x-\frac{6}{5}y\right)\div\left(-\frac{3}{10}\right)=\left(\frac{3}{2}x-\frac{6}{5}y\right)\times\left(-\frac{10}{3}\right)=-5x+4y$이므로 $c=-5$, $d=4$
$\therefore a+b+c+d=(-5)+3+(-5)+4=-3$

개념 5 일차식의 덧셈과 뺄셈

14 출제 주의

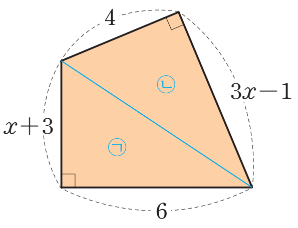
다음 중 옳은 것은?

① $(x+5)+(2x-3)=3x+8$
② $2(2x+1)-(3x-8)=7x+10$
③ $3(1-2x)-5(2-x)=-x-13$
✓④ $\frac{1}{2}(6x+4)+\frac{1}{3}(6x-9)=5x-1$
⑤ $-\frac{1}{4}(3x-4)+\frac{2}{5}(5x-1)=\frac{5}{4}x-\frac{3}{5}$

① $(x+5)+(2x-3)=3x+2$
② $2(2x+1)-(3x-8)=4x+2-3x+8=x+10$
③ $3(1-2x)-5(2-x)=3-6x-10+5x=-x-7$
④ $\frac{1}{2}(6x+4)+\frac{1}{3}(6x-9)=3x+2+2x-3=5x-1$
⑤ $-\frac{1}{4}(3x-4)+\frac{2}{5}(5x-1)=-\frac{3}{4}x+1+2x-\frac{2}{5}=\frac{5}{4}x+\frac{3}{5}$

15 서술형

오른쪽 그림과 같은 사각형의 넓이를 x를 사용한 식으로 나타내시오. $\mathbf{9x+7}$



오른쪽 그림과 같이 대각선을 그으면 주어진 사각형의 넓이는 두 직각삼각형의 넓이의 합과 같다. ······························· 20 %

(㉠의 넓이)$=\frac{1}{2}\times6\times(x+3)=3x+9$

(㉡의 넓이)$=\frac{1}{2}\times4\times(3x-1)=6x-2$ ······································ 40 %

∴ (사각형의 넓이)=(㉠의 넓이)+(㉡의 넓이)$=3x+9+6x-2=9x+7$ ········· 40 %

16

$A=2x-3$, $B=-x+4$일 때, $2(2A-B)-(3A-5B)$를 계산하였더니 $ax+b$가 되었다. 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

✓① -10　② -7　③ -2
④ 5　⑤ 8

$2(2A-B)-(3A-5B)=4A-2B-3A+5B$
$=A+3B$
$=2x-3+3(-x+4)$
$=-x+9$
따라서 $a=-1$, $b=9$이므로 $a-b=-1-9=-10$

17

$3x-\left[8x-\left\{4x+3-\frac{1}{2}(6x-2)\right\}\right]=ax+b$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

✓① -16　② -8　③ -4
④ 8　⑤ 16

$3x-\left[8x-\left\{4x+3-\frac{1}{2}(6x-2)\right\}\right]=3x-\{8x-(4x+3-3x+1)\}$
$=3x-\{8x-(x+4)\}$
$=3x-(8x-x-4)$
$=3x-(7x-4)$
$=3x-7x+4$
$=-4x+4$
따라서 $a=-4$, $b=4$이므로 $ab=(-4)\times4=-16$

18

다음 □ 안에 알맞은 식을 구하시오. $\mathbf{\frac{10}{3}x+1}$

$$\frac{2}{3}(x-3)+\square=4x-1$$

$\frac{2}{3}(x-3)+\square=4x-1$에서
$\square=4x-1-\frac{2}{3}(x-3)$
$=4x-1-\frac{2}{3}x+2$
$=\frac{10}{3}x+1$

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

01

어느 동아리에서 x명의 부원이 모여 학교 축제 홍보 포스터를 만드는 데 y시간이 걸린다고 한다. 이 포스터를 $(x-2)$명의 부원이 완성하는 데 걸리는 시간을 x, y를 사용한 식으로 나타내면?

(단, $x>2$이고 모든 부원의 작업 속도는 같다.)

✓① $\dfrac{xy}{x-2}$　② $\dfrac{y}{x-2}$　③ $\dfrac{x}{y(x-2)}$

④ $\dfrac{x-2}{xy}$　⑤ $\dfrac{x-2}{y}$

x명이 포스터를 만드는 데 y시간이 걸렸으므로 전체 일의 양은 xy이다. 이 포스터를 $(x-2)$명이 완성하는 데 걸린 시간을 T라고 하면

$(x-2)\times T=xy$　　$\therefore T=\dfrac{xy}{x-2}$

02

어느 동아리에서 체육 대회를 준비하려고 한다. 참가자는 30명이고, 이 중 관리자는 k명이다. 필요한 비용은 다음과 같고 이 비용을 모든 참가자가 똑같이 나누어 낼 때, 참가자 한 명이 내야 하는 비용을 x, y, k를 사용한 식으로 나타내시오. (단, 체육 대회는 하루만 열린다.) $\dfrac{x+40y+500k+52000}{30}$원

- 1일 장소 대관료: x원
- 참가자 모두에게 1200원짜리 팔찌 제공
- 참가자 모두에게 y원짜리 과자 2개와 800원짜리 음료 1병이 담긴 간식 바구니를 3명당 두 바구니 제공
- 관리자에게 500원짜리 배지 제공

1일 장소 대관료는 x원, 팔찌는 $30\times1200=36000$(원), 간식 바구니는 3명당 두 바구니이므로 총 20개의 간식 바구니가 필요하므로 $20(2y+800)=40y+16000$(원), 배지는 $500k$원이므로 체육 대회를 준비하는 데 필요한 비용은

$x+36000+40y+16000+500k=x+40y+500k+52000$

따라서 참가자 한 명이 내야 하는 비용은 $\dfrac{x+40y+500k+52000}{30}$원

03

성택이는 같은 반 학생들에게 가장 인기 있는 두 그룹 A, B의 팬클럽 가입 여부를 조사하였다. 그룹 A의 팬클럽에 가입한 학생 수는 x이고 두 그룹 A, B의 팬클럽에 모두 가입한 학생 수는 그룹 A의 팬클럽에 가입한 학생 수의 50 %, 그룹 B의 팬클럽에 가입한 학생 수의 25 %이었다. 이때 성택이네 반에서 그룹 A와 B의 팬클럽 중 적어도 한 곳에 가입한 학생 수를 x를 사용한 식으로 나타내시오. $\dfrac{5}{2}x$

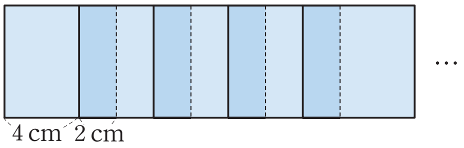
두 그룹 A, B의 팬클럽에 모두 가입한 학생 수는 그룹 A의 팬클럽에 가입한 학생 수의 50 %이므로 $\dfrac{50}{100}x=\dfrac{1}{2}x$

또, 그룹 B의 팬클럽에 가입한 학생 수의 25 %이므로 그룹 B의 팬클럽에 가입한 학생 수는 두 그룹 A, B의 팬클럽에 모두 가입한 학생 수의 4배, 즉 $\dfrac{1}{2}x\times4=2x$

따라서 그룹 A와 B의 팬클럽 중 적어도 한 곳에 가입한 학생 수는 $x+2x-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{5}{2}x$

04 출제 주의

한 변의 길이가 6 cm인 정사각형 모양의 종이 n장을 다음 그림과 같이 이웃하는 종이끼리 2 cm씩 겹치도록 이어 붙여 하나의 직사각형을 만들었다. 완성된 직사각형의 둘레의 길이를 n을 사용한 식으로 나타내시오. $(8n+16)$ cm



정사각형 모양의 종이 n장을 이어 붙였을 때, 직사각형의 가로의 길이는 $6+4\times(n-1)=4n+2$ (cm)

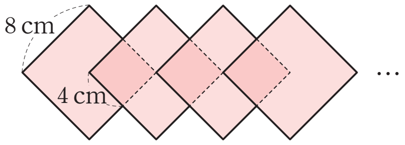
따라서 완성된 직사각형의 둘레의 길이는

$2\times6+2(4n+2)=12+8n+4=8n+16$ (cm)

장수	가로의 길이 (cm)
1	6
2	$6+4\times1$
3	$6+4\times2$
⋮	⋮

05

한 변의 길이가 8 cm인 정사각형 모양의 종이를 다음 그림과 같이 일정하게 겹쳐 놓았을 때, 겹쳐지는 부분은 한 변의 길이가 4 cm인 정사각형이다. 정사각형 모양의 종이를 n장 겹쳐 놓았을 때 생기는 도형의 넓이를 n을 사용한 식으로 나타내시오. $(48n+16)$ cm²



한 정사각형의 넓이는 $8\times8=64$ (cm²)

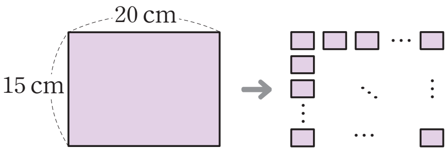
두 정사각형이 겹쳐지는 부분의 넓이는 $4\times4=16$ (cm²)

따라서 정사각형 모양의 종이 n장을 겹쳐 놓았을 때 겹쳐지는 부분은 $(n-1)$개이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned}64n-16(n-1)&=64n-16n+16\\&=48n+16\ (\text{cm}^2)\end{aligned}$$

06

가로의 길이가 20 cm, 세로의 길이가 15 cm인 직사각형 모양의 종이를 세로로 평행하게 n번, 가로로 평행하게 $2n$번 자를 때, 만들어진 모든 작은 직사각형들의 둘레의 길이의 합을 n을 사용한 식으로 나타내면?



① $(60n+70)$ cm　✓② $(110n+70)$ cm

③ $(110n+140)$ cm　④ $(140n+70)$ cm

⑤ $(140n+140)$ cm

주어진 직사각형 모양의 종이의 둘레의 길이는 $(20+15)\times2=70$ (cm)

종이를 한 번 자를 때마다 자른 선의 길이의 2배만큼 전체 둘레의 길이가 늘어난다.

즉, 세로로 평행하게 n번 자를 때 늘어나는 길이의 합은 $(15\times2)\times n=30n$ (cm)

가로로 평행하게 $2n$번 자를 때 늘어나는 길이의 합은 $(20\times2)\times2n=80n$ (cm)

따라서 모든 작은 직사각형의 둘레의 길이의 합은 $70+30n+80n=110n+70$ (cm)

사고를 확장하는

Lv. 2 실전 문제

정가가 x원인 상품에 대하여 쿠폰 A를 사용하면 $\left(\frac{4}{5}x-1000\right)$원

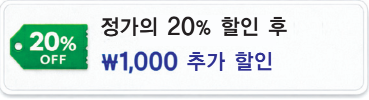
정가가 x원인 상품에 대하여 쿠폰 B를 사용하면 $\left(\frac{4}{5}x-800\right)$원

이때 $\frac{4}{5}x-1000<\frac{4}{5}x-800$이므로 ③이다.

07 **출제 주의**

어느 쇼핑몰에서는 정가가 x $(x>5000)$원인 상품에 대하여 두 가지 할인 쿠폰 A, B 중 하나를 선택하여 사용할 수 있을 때, 다음 중 옳은 것은?

쿠폰 A



쿠폰 B

① $x<10000$일 때, 쿠폰 A를 사용하는 것이 쿠폰 B를 사용하는 것보다 할인 금액이 더 크다.

② $x>10000$일 때, 쿠폰 A를 사용하는 것이 쿠폰 B를 사용하는 것보다 할인 금액이 더 크다.

✓③ 항상 쿠폰 A가 할인 금액이 더 크다.

④ 항상 쿠폰 B가 할인 금액이 더 크다.

⑤ 항상 쿠폰 A, B의 할인 금액이 같다.

합금 A에 들어 있는 순금의 양은 $x\times\frac{75}{100}=0.75x$ (g)

합금 B에 들어 있는 순금의 양은 $200\times\frac{y}{100}=2y$ (g) ························· 50 %

08 **서술형**

순금 함유량이 75 %인 합금 A가 x g, 순금 함유량이 y %인 합금 B가 200 g 있다. 이 두 합금을 함께 녹인 후, 여기에 순금 50 g을 추가로 더 녹여서 새로운 합금을 만들었을 때, 새로운 합금의 순금 함유량은 몇 %인지 x, y를 사용한 식으로 나타내시오. $\frac{75x+200y+5000}{x+250}$ %

이때 추가로 넣은 순금은 50 g이므로 새로운 합금에 들어 있는 순금의 양은
$0.75x+2y+50$ (g)
따라서 새로운 합금의 무게는 $x+200+50=x+250$ (g)이므로 새로운 합금의 순금 함유량은 $\frac{0.75x+2y+50}{x+250}\times100=\frac{75x+200y+5000}{x+250}$ (%) ···················· 50 %

09

$a=-\frac{1}{2}$일 때, 다음 네 식의 값의 대소를 비교하여 가장 큰 값을 M, 가장 작은 값을 m이라고 하자. 이때 $M\div m$의 값은?

$$-a^2,\ (-a)^2,\ -\frac{1}{a^2},\ |a|-1$$

① -32　② $-\frac{1}{8}$　✓③ $-\frac{1}{16}$

④ $\frac{1}{16}$　⑤ $\frac{1}{8}$

$-a^2=-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$, $(-a)^2=\left\{-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^2=\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{a^2}=-1\div\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-4$, $|a|-1=\left|-\frac{1}{2}\right|-1=-\frac{1}{2}$

이때 $-4<-\frac{1}{2}<-\frac{1}{4}<\frac{1}{4}$이므로 $M=\frac{1}{4}$, $m=-4$

$\therefore M\div m=\frac{1}{4}\div(-4)=\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{16}$

10

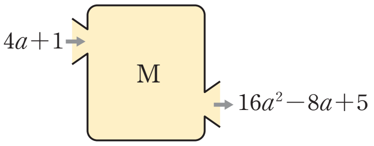
세 유리수 a, b, c에 대하여 $\frac{1}{a}=3$, $\frac{1}{b}=2$, $\frac{1}{c}=6$일 때, $\frac{2a^2b-3bc+4ac^3}{abc}$의 값을 구하시오. $-\frac{43}{9}$

$a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{6}$

$$\therefore \frac{2a^2b-3bc+4ac^3}{abc}=\frac{2a}{c}-\frac{3}{a}+\frac{4c^2}{b}$$
$$=2\times a\div c-3\div a+4\times c^2\div b$$
$$=2\times\frac{1}{3}\div\frac{1}{6}-3\div\frac{1}{3}+4\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\div\frac{1}{2}$$
$$=2\times\frac{1}{3}\times6-3\times3+4\times\frac{1}{36}\times2$$
$$=4-9+\frac{2}{9}=-\frac{43}{9}$$

11

다음 그림과 같이 상자 M에 $4a+1$을 넣으면 $16a^2-8a+5$가 나온다. 이 상자에 3을 넣었을 때 나오는 수는?



① $\frac{1}{2}$　② 3　③ $\frac{7}{2}$

④ $\frac{9}{2}$　✓⑤ 5

$4a+1=3$에서 $4a=2$　$\therefore a=\frac{1}{2}$

상자 M에 3을 넣었을 때 나오는 수는 $16a^2-8a+5$에 $a=\frac{1}{2}$을 대입한 값과 같으므로

$$16\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-8\times\frac{1}{2}+5=16\times\frac{1}{4}-4+5$$
$$=4-4+5=5$$

12

$a(x^2-5x)-[2x^2-3\{x-(2x+1)\}]+5$가 x에 대한 일차식일 때, x의 계수는? (단, a는 상수이다.)

① -15　✓② -13　③ -11

④ 13　⑤ 15

$$a(x^2-5x)-[2x^2-3\{x-(2x+1)\}]+5=ax^2-5ax-\{2x^2-3(-x-1)\}+5$$
$$=ax^2-5ax-(2x^2+3x+3)+5$$
$$=ax^2-5ax-2x^2-3x-3+5$$
$$=(a-2)x^2+(-5a-3)x+2$$

이때 주어진 식은 x에 대한 일차식이므로 $a-2=0$, $-5a-3\neq0$이어야 한다.
따라서 $a-2=0$에서 $a=2$이므로 x의 계수는 $-5a-3=-5\times2-3=-13$

13

x, y에 대한 식 $\frac{ax-3y+9}{3}-\frac{x-by-4}{2}+\frac{x+3y}{6}$를 간단히 한 결과가 상수 C일 때, $a+b+C$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -11　② -7　✓③ 7
④ 11　⑤ 15

$$\frac{ax-3y+9}{3}-\frac{x-by-4}{2}+\frac{x+3y}{6}=\frac{2(ax-3y+9)-3(x-by-4)+x+3y}{6}$$
$$=\frac{2ax-6y+18-3x+3by+12+x+3y}{6}$$
$$=\frac{2ax-2x+3by-3y+30}{6}$$
$$=\frac{2(a-1)x+3(b-1)y+30}{6} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 ㉠이 상수 C가 되어야 하므로 $a-1=0$, $b-1=0$

따라서 $a=1$, $b=1$이므로 ㉠에서 $C=\frac{30}{6}=5$

$\therefore a+b+C=1+1+5=7$

14

자연수 n이 홀수일 때, 다음 식을 간단히 하시오. $-y$

$$(-1)^{n+1}(5x-2y)-(-1)^{2n}(3x+2y)+\frac{1}{2}(-1)^{n}(4x-6y)$$

자연수 n이 홀수이므로

$(-1)^{n}=-1$, $(-1)^{n+1}=1$, $(-1)^{2n}=1$

$$\therefore (-1)^{n+1}(5x-2y)-(-1)^{2n}(3x+2y)+\frac{1}{2}(-1)^{n}(4x-6y)$$
$$=(5x-2y)-(3x+2y)-\frac{1}{2}(4x-6y)$$
$$=5x-2y-3x-2y-2x+3y$$
$$=-y$$

15 서술형

두 유리수 x, y에 대하여 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}$일 때, $\frac{x(3-4y)+3y}{xy-(3x+3y)}$의 값을 구하시오. 1

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}$에서 $\frac{x+y}{xy}=\frac{5}{6}$이므로

$x+y=5k$, $xy=6k$ $(k\neq0)$로 놓을 수 있다. ······························· 40 %

$$\therefore \frac{x(3-4y)+3y}{xy-(3x+3y)}=\frac{3x-4xy+3y}{xy-3(x+y)}$$
$$=\frac{3(x+y)-4xy}{xy-3(x+y)}$$
$$=\frac{3\times5k-4\times6k}{6k-3\times5k}$$
$$=\frac{15k-24k}{6k-15k}$$
$$=\frac{-9k}{-9k}=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 60\ \%$$

16

두 유리수 a, b에 대하여 $|a|=\frac{3}{4}$, $|b|=2$이고 $ab<0$이다. 수직선에서 a를 나타내는 점은 b를 나타내는 점보다 오른쪽에 있을 때, $\frac{b^2}{a}-\left(ab-\frac{a}{b}\right)$의 값은?

① $\frac{147}{24}$　② $\frac{149}{24}$　③ $\frac{151}{24}$
④ $\frac{153}{24}$　✓⑤ $\frac{155}{24}$

$ab<0$이므로 a, b의 부호는 다르고, 수직선에서 a를 나타내는 점은 b를 나타내는 점보다 오른쪽에 있으므로

$b<a$　　$\therefore a>0$, $b<0$

이때 $|a|=\frac{3}{4}$, $|b|=2$이므로 $a=\frac{3}{4}$, $b=-2$

$$\therefore \frac{b^2}{a}-\left(ab-\frac{a}{b}\right)=b^2\div a-ab+a\div b$$
$$=(-2)^2\div\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\times(-2)+\frac{3}{4}\div(-2)$$
$$=4\times\frac{4}{3}-\frac{3}{4}\times(-2)+\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{16}{3}+\frac{3}{2}-\frac{3}{8}=\frac{155}{24}$$

17

네 자리 수에 대하여 천의 자리의 숫자를 일의 자리로 이동하고 나머지 세 자리의 숫자들은 자리를 하나씩 올려 이동하여 새로운 네 자리 수를 만들었다. 새로 만들어진 수와 처음 수를 더한 결과로 가능한 수는?

① 3258　② 5047　✓③ 6380
④ 9876　⑤ 10111

천의 자리의 숫자를 a, 백의 자리의 숫자를 b, 십의 자리의 숫자를 c, 일의 자리의 숫자를 d라고 하면 네 자리 수는 $1000a+100b+10c+d$

천의 자리의 숫자를 일의 자리로 이동하고 나머지 세 자리의 숫자들을 한 자리씩 올려 이동한 네 자리 수는 $1000b+100c+10d+a$

두 수를 더하면

$$(1000a+100b+10c+d)+(1000b+100c+10d+a)=1001a+1100b+110c+11d$$
$$=11(91a+100b+10c+d)$$

즉, 두 수를 더한 수는 항상 11의 배수이다. 이때

① $3258=11\times296+2$　② $5047=11\times458+9$　③ $6380=11\times580$
④ $9876=11\times897+9$　⑤ $10111=11\times919+2$

18

희성이네 중학교에서 학년별 평균 수면 시간과 학생 수를 조사하였다. 전교생의 평균 수면 시간은 8시간보다 $\frac{1}{4}$시간만큼 더 길고 2학년 학생 수는 3학년 학생 수의 2배일 때, $\frac{3x}{z}$의 값을 구하시오. 7

	1학년	2학년	3학년
평균 수면 시간(시간)	9	8	7
학생 수(명)	x	y	z

전교생의 평균 수면 시간은 $8+\frac{1}{4}=\frac{33}{4}$(시간)

2학년 학생 수는 3학년 학생 수의 2배이므로 $y=2z$

1학년의 수면 시간의 합은 $9x$시간

2학년의 수면 시간의 합은 $8y=8\times2z=16z$(시간)

3학년의 수면 시간의 합은 $7z$시간

이때 전교생의 평균 수면 시간은 $\frac{9x+16z+7z}{x+2z+z}=\frac{9x+23z}{x+3z}$

즉, $\frac{9x+23z}{x+3z}=\frac{33}{4}$이므로 $4(9x+23z)=33(x+3z)$, $36x+92z=33x+99z$

$3x=7z$　　$\therefore \frac{3x}{z}=7$

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

선분 AB의 길이는 $(3x+14)-(-2x-1)=5x+15$

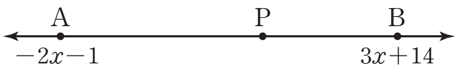
선분 AP와 선분 PB의 길이의 비가 $3:2$이므로 선분 AP의 길이는

$(5x+15)\times\frac{3}{5}=3x+9$

따라서 점 P가 나타내는 수는 $(-2x-1)+(3x+9)=x+8$

19

다음 그림과 같이 수직선에서 두 점 A, B가 나타내는 수는 각각 $-2x-1$, $3x+14$이다. 선분 AB 사이의 점 P에 대하여 선분 AP와 선분 PB의 길이의 비가 $3:2$일 때, 점 P가 나타내는 수를 x를 사용한 식으로 나타내시오. **$x+8$**

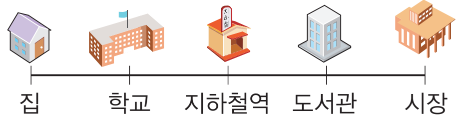


학교에서 시장까지의 거리는 $(19x+5)+(25x-4)+(10x-7)=54x-6$ (km)

따라서 민준이가 시속 6 km로 학교에서 시장까지 가는 데 걸리는 시간은 $\frac{54x-6}{6}=9x-1$(시간)

20 출제 주의

다음 그림과 같이 집, 학교, 지하철역, 도서관, 시장이 직선 도로 위에 있다. 집에서 학교까지의 거리는 $(12x+9)$ km, 학교에서 지하철역까지의 거리는 $(19x+5)$ km, 지하철역에서 도서관까지의 거리는 $(25x-4)$ km, 도서관에서 시장까지의 거리는 $(10x-7)$ km이다. 민준이가 이 도로를 따라 시속 6 km로 걸을 때, 학교에서 시장까지 가는 데 걸리는 시간을 x를 사용한 식으로 나타내시오. **$(9x-1)$시간**

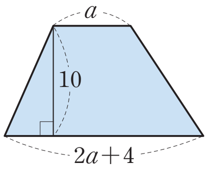


윗변의 길이를 20 % 늘이면 $a\left(1+\frac{20}{100}\right)=\frac{6}{5}a$

늘어난 윗변의 길이에서 50 %를 줄이면 $\frac{6}{5}a\times\left(1-\frac{50}{100}\right)=\frac{3}{5}a$ ·················· 25 %

21 서술형

오른쪽 그림의 사다리꼴을 다음과 같이 길이를 변경하여 새로운 사다리꼴을 만들었다. **$\frac{32}{5}a+20$**



- 윗변의 길이를 20 % 늘이고, 늘어난 윗변의 길이에서 50 %를 다시 줄였다.
- 아랫변의 길이를 50 % 줄이고, 줄어든 아랫변의 길이에서 3만큼 늘였다.
- 높이는 20 % 줄였다.

새로운 사다리꼴의 넓이를 a를 사용한 식으로 나타내시오.

아랫변의 길이를 50 % 줄이면 $(2a+4)\left(1-\frac{50}{100}\right)=a+2$

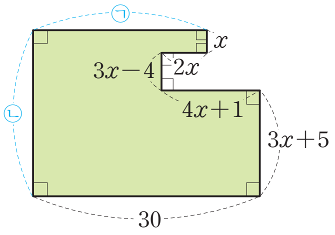
줄어든 아랫변의 길이에서 3만큼 늘이면 $(a+2)+3=a+5$ ······················ 25 %

기존의 높이를 20 % 줄이면 $10\times\left(1-\frac{20}{100}\right)=8$ ······························ 25 %

따라서 새로운 사다리꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{5}a+a+5\right)\times8=\frac{32}{5}a+20$ ·········· 25 %

22

다음 도형의 둘레의 길이를 x를 사용한 식으로 나타내시오. **$18x+62$**



(㉠의 길이)$=30-\{(4x+1)-2x\}=-2x+29$

(㉡의 길이)$=x+(3x-4)+(3x+5)=7x+1$

따라서 주어진 도형의 둘레의 길이는

$(-2x+29)+x+2x+(3x-4)+(4x+1)+(3x+5)+30+(7x+1)=18x+62$

23 출제 주의

용량이 $(45x+90)$ L인 물탱크에 물이 가득 차 있었다. 이 물이 다음과 같이 4일 동안 줄거나 늘었다.

> 첫째 날, 가득 찬 물탱크에서 물을 전체의 $\frac{1}{3}$만큼 사용했다.
> 둘째 날, 비가 와서 물탱크에 15 L의 빗물이 추가되었다.
> 셋째 날, 물탱크에 남아 있는 물의 40 %를 농업용수로 사용했다.
> 넷째 날, 자연 증발로 인해 $(3x-5)$ L만큼의 물이 줄어들었다.

최종적으로 남은 물의 양이 $(ax+b)$ L라고 할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. **65**

첫째 날, 남은 물의 양은 $(45x+90)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=30x+60$ (L)

둘째 날, 남은 물의 양은 $(30x+60)+15=30x+75$ (L)

셋째 날, 남은 물의 양은 $(30x+75)\times\left(1-\frac{40}{100}\right)=18x+45$ (L)

넷째 날, 남은 물의 양은 $18x+45-(3x-5)=15x+50$ (L)

따라서 $a=15$, $b=50$이므로 $a+b=15+50=65$

24

하준이와 지아가 계단에서 가위바위보를 하여 다음과 같은 규칙으로 이동하기로 했다.

- 이겼을 때 계단을 3칸 올라간다.
- 졌을 때 계단을 2칸 내려간다.
- 비겼을 때 두 사람 모두 계단을 1칸씩 올라간다.

가위바위보를 총 30번 하여 하준이가 x $(x>15)$번 이기고, y번 비겼을 때, 하준이는 지아보다 몇 칸 위에 있는지 구하시오. (단, 출발점은 같다.) **$(10x+5y-150)$칸**

하준이가 가위바위보를 마친 뒤 움직인 계단 수는

$3x+y-2(30-x-y)=3x+y-60+2x+2y=5x+3y-60$

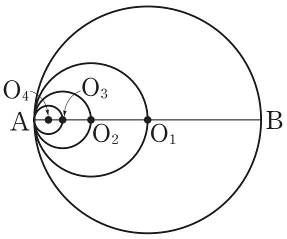
지아가 가위바위보를 마친 뒤 움직인 계단 수는

$3(30-x-y)+y-2x=90-3x-3y+y-2x=-5x-2y+90$

$\therefore$ (하준이의 위치)$-$(지아의 위치)$=5x+3y-60-(-5x-2y+90)$

$=10x+5y-150$

25



오른쪽 그림에서 네 점 O_1, O_2, O_3, O_4는 각각 네 원 O_1, O_2, O_3, O_4의 중심으로 모두 선분 AB 위에 있고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 원 O_4는 두 점 A, O_3을 지난다.
(나) 원 O_3은 두 점 A, O_2를 지난다.
(다) 원 O_2는 두 점 A, O_1을 지난다.
(라) 원 O_1은 두 점 A, B를 지난다.

네 원 O_1, O_2, O_3, O_4의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4라고 할 때, $(S_1-S_2):(S_2-S_3):(S_3-S_4)$를 가장 간단한 자연수의 비로 나타내시오. (단, 원주율은 π로 계산한다.) **16:4:1**

원 O_4의 반지름의 길이를 a라고 하면 세 원 O_3, O_2, O_1의 반지름의 길이는 각각 $2a$, $4a$, $8a$이다.
따라서 $S_1=\pi\times(8a)^2=64a^2\pi$, $S_2=\pi\times(4a)^2=16a^2\pi$, $S_3=\pi\times(2a)^2=4a^2\pi$,
$S_4=a^2\pi$이므로 $S_1-S_2=64a^2\pi-16a^2\pi=48a^2\pi$,
$S_2-S_3=16a^2\pi-4a^2\pi=12a^2\pi$,
$S_3-S_4=4a^2\pi-a^2\pi=3a^2\pi$
$\therefore (S_1-S_2):(S_2-S_3):(S_3-S_4)=48a^2\pi:12a^2\pi:3a^2\pi=16:4:1$

26

어느 등산 모임의 회원은 $\underbrace{\text{총 18명인데 이 중 6명}}_{\text{그룹 A}}$의 평균 체중은 a kg이고, 이 6명의 평균 체중은 나머지 12명의 평균 체중보다 b kg만큼 무겁다. 또, 나머지 $\underbrace{\text{12명 중 다시 6명을 뽑았더니}}_{\text{그룹 B}}$ 6명의 평균 체중이 전체 18명의 평균 체중보다 $\frac{1}{2}b$ kg만큼 무거웠다고 할 때, $\underbrace{\text{남은 6명}}_{\text{그룹 C}}$의 체중의 합을 a, b를 사용한 식으로 나타내시오. **$(6a-11b)$ kg**

그룹 A를 제외한 나머지 12명의 평균 체중은 $(a-b)$ kg, 체중의 합은 $12(a-b)$ kg
18명의 평균 체중은 $\frac{6a+12(a-b)}{18}=a-\frac{2}{3}b$ (kg)
그룹 B의 평균 체중은 $\left(a-\frac{2}{3}b\right)+\frac{1}{2}b=a-\frac{1}{6}b$ (kg),
체중의 합은 $6\left(a-\frac{1}{6}b\right)=6a-b$ (kg)
따라서 그룹 C의 체중의 합은 $12(a-b)-(6a-b)=6a-11b$ (kg)

27

다음 조건을 만족시키는 세 다항식 A, B, C에 대하여 $A-2B+3C$를 간단히 하시오. **$4x+36$**

(가) A에서 $2x-1$을 뺐더니 $\frac{1}{2}(20x-22)$가 되었다.
(나) $\frac{5}{3}A$에서 B를 뺐더니 $4(x+1)$이 되었다.
(다) C는 $2A$에서 B를 뺀 결과와 같다.

(가)에서 $A-(2x-1)=\frac{1}{2}(20x-22)$이므로 $A=\frac{1}{2}(20x-22)+(2x-1)=12x-12$
(나)에서 $\frac{5}{3}A-B=4(x+1)$이므로 $B=\frac{5}{3}(12x-12)-4(x+1)=16x-24$
(다)에서 $C=2A-B$이므로 $C=2(12x-12)-(16x-24)=8x$
$\therefore A-2B+3C=12x-12-2(16x-24)+3\times8x=4x+36$

28 서술형

일차식 $ax+b$에 -3을 곱했더니 $-12x+18$이 되었다. 이때 $-12x+18$을 k로 나누었더니 $4x-6$이 되었다. 일차식 $cx+d$는 $ax+b$에서 5를 뺀 것과 같을 때, 네 상수 a, b, c, d에 대하여 $\frac{a+b+c+d}{k}$의 값을 구하시오. **3**

$(ax+b)\times(-3)=-12x+18$이므로 $-3ax-3b=-12x+18$
즉, $-3a=-12$, $-3b=18$이므로 $a=4$, $b=-6$ ······ 30 %
$(-12x+18)\div k=4x-6$이므로 $-\frac{12}{k}x+\frac{18}{k}=4x-6$
즉, $-\frac{12}{k}=4$, $\frac{18}{k}=-6$이므로 $k=-3$ ······ 30 %
$cx+d=ax+b-5$이므로 $cx+d=4x-6-5=4x-11$
$\therefore c=4$, $d=-11$ ······ 30 %
$\therefore \frac{a+b+c+d}{k}=\frac{4+(-6)+4+(-11)}{-3}=\frac{-9}{-3}=3$ ······ 10 %

29

다음 규칙에 따라 아래 표의 빈칸을 채워 넣을 때, ★에 들어갈 식을 구하시오. **$x+4y$**

(가) 가로 방향: 맨 왼쪽 칸의 식에서 가운데 칸의 식의 2배를 뺀 결과를 맨 오른쪽 칸에 적는다.
(나) 세로 방향: 맨 위 칸의 식의 2배에 가운데 칸의 식을 더한 결과를 맨 아래 칸에 적는다.

★	$-2x+y$	㉡
$x-3y$	y	㉠
		$11x-y$

$(x-3y)-2y=$㉠ $\therefore$ ㉠$=x-5y$
$2\times$㉡$+(x-5y)=11x-y$
$2\times$㉡$=11x-y-(x-5y)=10x+4y$
$\therefore$ ㉡$=\frac{1}{2}(10x+4y)=5x+2y$
★$-2(-2x+y)=5x+2y$
$\therefore$ ★$=5x+2y+2(-2x+y)=5x+2y-4x+2y=x+4y$

30

어떤 다항식 A에서 $\frac{1}{3}x-2y$를 빼야 할 것을 잘못하여 $\frac{1}{3}x-2y$를 $\frac{1}{2}$배 하여 더했더니 $\frac{5}{6}x+y$가 되었다. 바르게 계산한 식은?

① $\frac{1}{3}x+y$
② $\frac{1}{3}x+2y$
✓③ $\frac{1}{3}x+4y$
④ $\frac{2}{3}x+3y$
⑤ $\frac{2}{3}x+4y$

$A+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x-2y\right)=\frac{5}{6}x+y$이므로
$A=\frac{5}{6}x+y-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x-2y\right)=\frac{5}{6}x+y-\frac{1}{6}x+y=\frac{2}{3}x+2y$
따라서 바르게 계산한 식은
$\frac{2}{3}x+2y-\left(\frac{1}{3}x-2y\right)=\frac{2}{3}x+2y-\frac{1}{3}x+2y=\frac{1}{3}x+4y$

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

개념 1 방정식과 항등식

01

다음 중 등식으로 나타낼 수 있는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① x의 3배에 1을 더한다.

② y에서 x의 5배를 뺀 값은 2보다 작다.

✓③ 매월 x원씩 1년 동안 저축한 총 금액은 y원이다.

④ 한 변의 길이가 x cm인 정사각형의 넓이는 25 cm^2 이상이다.

✓⑤ 농도가 5 %인 소금물 x g에 들어 있는 소금의 양은 20 g이다.

① $3x+1$ ② $y-5x<2$ ③ $12x=y$
④ $x^2\geq 25$ ⑤ $x\times\frac{5}{100}=20$

02 출제 주의

다음 중 [ ] 안의 수가 주어진 방정식의 해인 것은?

① $4x+16=0$ [4]

② $21-3x=0$ [-7]

✓③ $5x+4=x-8$ [-3]

④ $3-2x=-(x+1)$ [-4]

⑤ $\frac{2x-1}{3}-\frac{3(x+2)}{2}=-6$ [2]

① $4\times4+16\neq0$
② $21-3\times(-7)\neq0$
③ $5\times(-3)+4=(-3)-8$
④ $3-2\times(-4)\neq-(-4+1)$
⑤ $\frac{2\times2-1}{3}-\frac{3\times(2+2)}{2}\neq-6$

03

다음 보기에서 항등식인 것은 모두 몇 개인지 구하시오. 3개

〈 보기 〉

ㄱ. $6x=0$	ㄴ. $3x-2x=1$
ㄷ. $4x+5x=9x$	ㄹ. $6x-7=7-6x$
ㅁ. $x+2-5x=2-4x$	ㅂ. $-4(1-x)=4x-4$

ㄱ, ㄴ. 방정식
ㄷ. $4x+5x=9x$에서 $9x=9x$ (항등식)
ㄹ. $6x-7=7-6x$에서 $12x-14=0$ (방정식)
ㅁ. $x+2-5x=2-4x$에서 $2-4x=2-4x$ (항등식)
ㅂ. $-4(1-x)=4x-4$에서 $-4+4x=4x-4$ (항등식)

04 서술형

등식 $\frac{3}{5}x-\frac{1}{4}b=(1-a)x+\frac{1}{2}$이 모든 x의 값에 대하여 항상 참일 때, $5a-3b$의 값을 구하시오. 8

(단, a, b는 상수이다.)

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $\frac{3}{5}=1-a$, $-\frac{1}{4}b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a=\frac{2}{5}$, $b=-2$ ······ 60 %

$\therefore\ 5a-3b=5\times\frac{2}{5}-3\times(-2)=2+6=8$ ······ 40 %

개념 2 등식의 성질

05

다음 중 옳은 것은?

① $a=-b$이면 $a-3=3-b$이다.

② $2a=b$이면 $2a+4=b+2$이다.

③ $6a+3=3b-12$이면 $2a=b-6$이다.

✓④ $a+1=1-3b$이면 $\frac{a}{3}-1=-b-1$이다.

⑤ $\frac{a}{4}=\frac{b}{5}$이면 $5(a+1)=4(b+1)$이다.

① $a=-b$의 양변에서 3을 빼면 $a-3=-b-3$
② $2a=b$의 양변에 4를 더하면 $2a+4=b+4$
③ $6a+3=3b-12$의 양변을 3으로 나누면 $2a+1=b-4$ $\therefore\ 2a=b-5$
④ $a+1=1-3b$의 양변에서 1을 빼면 $a=-3b$
양변을 3으로 나누면 $\frac{a}{3}=-b$, 양변에서 1을 빼면 $\frac{a}{3}-1=-b-1$
⑤ $\frac{a}{4}=\frac{b}{5}$의 양변에 20을 곱하면 $5a=4b$
양변에 5를 더하면 $5a+5=4b+5$ $\therefore\ 5(a+1)=4b+5$

06

$a-2=b+3$일 때, 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)
└양변에 2를 더하면 $a=b+5$

✓① $a+3=b-2$ ② $a-5=b$

③ $-a-1=-b-6$ ④ $-4(a-5)=-4b$

✓⑤ $\frac{a-3}{2}=\frac{b+2}{3}$

① $a=b+5$의 양변에 3을 더하면 $a+3=b+8$
② $a=b+5$의 양변에서 5를 빼면 $a-5=b$
③ $a=b+5$의 양변에 -1을 곱하면 $-a=-b-5$
양변에서 1을 빼면 $-a-1=-b-6$
④ $a=b+5$의 양변에서 5를 빼면 $a-5=b$
양변에 -4를 곱하면 $-4(a-5)=-4b$
⑤ $a=b+5$의 양변에서 3을 빼면 $a-3=b+2$
양변을 2로 나누면 $\frac{a-3}{2}=\frac{b+2}{2}$

개념 3 일차방정식

07

다음 중 이항을 바르게 하지 않은 것은?

① $3x-5=1$ ⇨ $3x=1+5$

② $x=4x+9$ ⇨ $x-4x=9$

✓③ $6x-1=8-x$ ⇨ $6x+x=8-1$

④ $5-2x=4-x$ ⇨ $-2x+x=4-5$

⑤ $-7x-3=6x+11$ ⇨ $-7x-6x=11+3$

③ $6x-1=8-x$ ⇨ $6x+x=8+1$

08

등식 $2(x+3)=ax-3$이 x에 대한 일차방정식이 되기 위한 상수 a의 조건을 구하시오. $a\neq2$

$2(x+3)=ax-3$에서 $2x+6=ax-3$
$2x+6-ax+3=0$ $\quad\therefore (2-a)x+9=0$
위의 등식이 x에 대한 일차방정식이 되려면
(x에 대한 일차식)$=0$의 꼴이어야 한다.
따라서 $2-a\neq0$이므로 $a\neq2$

09

다음 중 일차방정식 $3(x+1)=x+7$과 해가 같은 것은?

① $4x-5=7$

② $2(x+4)=x+4$

③ $3x-1=2(x+1)$

✓④ $5x-3=3x+1$

⑤ $-(x-6)=2x+3$

$3(x+1)=x+7$에서 $3x+3=x+7$, $2x=4$ $\quad\therefore x=2$
① $4x-5=7$에서 $4x=12$ $\quad\therefore x=3$
② $2(x+4)=x+4$에서 $2x+8=x+4$ $\quad\therefore x=-4$
③ $3x-1=2(x+1)$에서 $3x-1=2x+2$ $\quad\therefore x=3$
④ $5x-3=3x+1$에서 $2x=4$ $\quad\therefore x=2$
⑤ $-(x-6)=2x+3$에서 $-x+6=2x+3$, $3x=3$ $\quad\therefore x=1$

10 출제 주의

승원이는 일차방정식 $5x-2=x+4$를 푸는데 좌변의 상수항 -2를 잘못 보고 풀어서 해가 $x=2$가 나왔다. 승원이가 -2를 어떤 수로 잘못 보았는지 구하시오. -4

승원이가 -2를 a로 잘못 보았다고 하자.
$5x+a=x+4$의 해가 $x=2$이므로 $5x+a=x+4$에 $x=2$를 대입하면
$10+a=2+4$ $\quad\therefore a=-4$
따라서 승원이는 -2를 -4로 잘못 보았다.

11

일차방정식 $ax+2=4(x+b)-6$의 해가 $x=4$일 때, $a-b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) 2

$ax+2=4(x+b)-6$에 $x=4$를 대입하면
$4a+2=4(4+b)-6$, $4a+2=16+4b-6$
$4a-4b=8$ $\quad\therefore a-b=2$

개념 4 복잡한 일차방정식의 풀이

12

다음 중 해가 가장 작은 것은?

① $9=2x-1$

② $3(x-3)=4x-5$

③ $0.6x+0.1=0.3x-0.2$

④ $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}x-\frac{5}{6}$

✓⑤ $\frac{3x-2}{4}=\frac{4x+1}{5}$

① $9=2x-1$에서 $2x=10$ $\quad\therefore x=5$
② $3(x-3)=4x-5$에서 $3x-9=4x-5$ $\quad\therefore x=-4$
③ $0.6x+0.1=0.3x-0.2$에서
$6x+1=3x-2$, $3x=-3$ $\quad\therefore x=-1$
④ $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}x-\frac{5}{6}$에서
$3x+4=2x-5$ $\quad\therefore x=-9$
⑤ $\frac{3x-2}{4}=\frac{4x+1}{5}$에서
$5(3x-2)=4(4x+1)$, $15x-10=16x+4$
$\therefore x=-14$

13

일차방정식 $-0.5(x-1)=1.1(3-x)+1$의 해를 $x=a$라고 할 때, a보다 작은 자연수의 개수는?

① 5 [✓ ② 6] ③ 7

④ 8 ⑤ 9

$-0.5(x-1)=1.1(3-x)+1$에서

$-5(x-1)=11(3-x)+10$

$-5x+5=33-11x+10$

$6x=38$ ∴ $x=\frac{19}{3}$

따라서 $a=\frac{19}{3}$이므로 $\frac{19}{3}$보다 작은 자연수는 1, 2, 3, …, 6의 6개이다.

14 **출제 주의**

일차방정식 $\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{2}{3}(2x-3)=0$의 해를 $x=a$, 일차방정식 $0.4x-5=-\frac{2(x+2)}{5}$의 해를 $x=b$라고 할 때, $b\div a$의 값을 구하시오. $\frac{7}{6}$

$\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{2}{3}(2x-3)=0$에서

$3(2x-1)-4(2x-3)=0$, $6x-3-8x+12=0$

$2x=9$ ∴ $x=\frac{9}{2}$

∴ $a=\frac{9}{2}$

$0.4x-5=-\frac{2(x+2)}{5}$에서 $\frac{2}{5}x-5=-\frac{2(x+2)}{5}$

$2x-25=-2(x+2)$, $2x-25=-2x-4$

$4x=21$ ∴ $x=\frac{21}{4}$

∴ $b=\frac{21}{4}$

∴ $b\div a=\frac{21}{4}\div\frac{9}{2}=\frac{21}{4}\times\frac{2}{9}=\frac{7}{6}$

15

다음 두 식을 만족시키는 x의 값이 같을 때, 상수 a의 값을 구하시오. $\frac{5}{3}$

$$3a-7=(a+1)x,\ (3x-4):5=(2x-1):2$$

$(3x-4):5=(2x-1):2$에서

$2(3x-4)=5(2x-1)$, $6x-8=10x-5$

$4x=-3$ ∴ $x=-\frac{3}{4}$

$3a-7=(a+1)x$에 $x=-\frac{3}{4}$을 대입하면

$3a-7=-\frac{3}{4}(a+1)$, $12a-28=-3(a+1)$

$12a-28=-3a-3$, $15a=25$

∴ $a=\frac{5}{3}$

16 **서술형**

일차방정식 $0.1x-0.2(x-a)=0.6$의 해가 일차방정식 $\frac{2x-5}{4}=\frac{3x-1}{3}-1$의 해의 12배일 때, 상수 a의 값을 구하시오. 4

$\frac{2x-5}{4}=\frac{3x-1}{3}-1$에서

$3(2x-5)=4(3x-1)-12$, $6x-15=12x-4-12$

$6x=1$ ∴ $x=\frac{1}{6}$ ······ 40 %

이때 방정식 $0.1x-0.2(x-a)=0.6$의 해가 $\frac{1}{6}$의 12배이므로

$x=\frac{1}{6}\times12=2$ ······ 20 %

$0.1x-0.2(x-a)=0.6$에 $x=2$를 대입하면

$0.2-0.2(2-a)=0.6$, $0.2-0.4+0.2a=0.6$

$0.2a=0.8$, $2a=8$

∴ $a=4$ ······ 40 %

17

x에 대한 일차방정식 $2x-\frac{4}{3}(x+2a)=-6$의 해가 음의 정수가 되도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합은?

[✓ ① 3] ② 4 ③ 5

④ 6 ⑤ 7

$2x-\frac{4}{3}(x+2a)=-6$에서

$6x-4(x+2a)=-18$, $6x-4x-8a=-18$

$2x=8a-18$ ∴ $x=4a-9$

이때 $4a-9$가 음의 정수가 되어야 하므로

$4a-9<0$, $4a<9$ ∴ $a<\frac{9}{4}$

이때 a는 자연수이므로

$a=1, 2$

따라서 모든 자연수 a의 값의 합은

$1+2=3$

18

일차방정식 $(a+5)x-9=3$의 해는 없고 일차방정식 $bx-\frac{1}{5}=c$의 해는 무수히 많을 때, $ac-b$의 값은?

(단, a, b, c는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0

[✓ ④ 1] ⑤ 2

$(a+5)x-9=3$, 즉 $(a+5)x=12$의 해가 없으므로

$a+5=0$ ∴ $a=-5$

$bx-\frac{1}{5}=c$, 즉 $bx=c+\frac{1}{5}$의 해는 무수히 많으므로

$b=0$, $c+\frac{1}{5}=0$

∴ $b=0$, $c=-\frac{1}{5}$

∴ $ac-b=-5\times\left(-\frac{1}{5}\right)-0=1$

사고를 확장하는 Lv.2 실전 문제

ㄱ. $3a=6b$의 양변을 3으로 나누면 $a=2b$

ㄴ. $x=y$의 양변을 z로 나누면 $\frac{x}{z}=\frac{y}{z}$

01 출제 주의

다음 보기에서 옳은 것의 개수는?

〈 보기 〉

ㄱ. $3a=6b$이면 $a=2b-3$

ㄴ. $x=y$, $z\neq0$이면 $\frac{x}{z}=\frac{y}{z}$

ㄷ. $x=2y$이면 $x+1=2(y+1)$

ㄹ. $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}$이면 $4a-3b=0$

ㅁ. $x(x-1)=2(x-1)$이면 $x=2$

① 1　✓② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

ㄷ. $x=2y$의 양변에 1을 더하면 $x+1=2y+1$

이때 $2(y+1)=2y+2\neq2y+1$

ㄹ. $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}$의 양변에 12를 곱하면 $4a=3b$　$\therefore 4a-3b=0$

ㅁ. $x-1=0$, 즉 $x=1$이면 $x\neq2$이지만 주어진 등식이 성립한다.

02

세 유리수 a, b, c에 대하여 $\overset{4a-4=2b+2}{\underline{4(a-1)=2b+2}}$가 성립할 때, 다음 보기에서 옳지 않은 것의 개수는?

〈 보기 〉

ㄱ. $2a-b+c=c+3$　ㄴ. $4ac-2bc=6c$

ㄷ. $a-\frac{3}{4}=\frac{b}{2}+\frac{1}{4}$　ㄹ. $a=\frac{b}{2}+1$

ㅁ. $\frac{2a-b}{c}=\frac{3}{c}$

① 1　✓② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

ㄷ. $4a-4=2b+2$의 양변을 4로 나누면 $a-1=\frac{b}{2}+\frac{1}{2}$,

양변에 $\frac{1}{4}$을 더하면 $a-\frac{3}{4}=\frac{b}{2}+\frac{3}{4}$

ㄹ. $4a-4=2b+2$의 양변을 4로 나누면 $a-1=\frac{b}{2}+\frac{1}{2}$　$\therefore a=\frac{b}{2}+\frac{3}{2}$

03

두 유리수 a, b에 대하여

$$[a,\ b]=-ax+b$$

라고 할 때, 두 상수 m, n에 대하여

$$[m,\ n+5]+[2m-4,\ n-1]=[2,\ 6]$$

이 x의 값과 관계없이 항상 성립한다고 한다. 이때 $m-n$의 값을 구하시오. **1**

$[m,\ n+5]+[2m-4,\ n-1]=[2,\ 6]$에서

$(-mx+n+5)+\{-(2m-4)x+n-1\}=-2x+6$

$(-3m+4)x+2n+4=-2x+6$　……㉠

이때 ㉠은 x에 대한 항등식이므로

$-3m+4=-2$, $2n+4=6$　$\therefore m=2$, $n=1$

$\therefore m-n=2-1=1$

04 서술형

오른쪽 그림과 같이 사탕과 초콜릿을 올려 놓은 윗접시저울이 평형을 이루고 있다. 사탕 1개의 무게가 8 g일 때, 등식의 성질을 이용하여 초콜릿 1개의 무게를 구하려고 한다. 무게를 구하는 과정에서 양쪽에서 덜어 낸 사탕의 개수를 a, 양쪽에서 덜어 낸 초콜릿의 개수를 b, 남게 된 사탕의 전체 무게를 c g, 초콜릿 1개의 무게를 d g이라고 하자. 이때 $a+b+c-d$의 값을 구하시오. **69**

양쪽에서 사탕을 3개씩 덜어내면 $a=3$ ……… 25 %

양쪽에서 초콜릿을 2개씩 덜어내면 $b=2$ ……… 25 %

즉, 사탕 12개의 무게와 초콜릿 3개의 무게는 같다.

따라서 남게 된 사탕 12개의 무게는 $c=96$ (g)이므로 초콜릿 3개의 무게는 96 g이다.

즉, $3d=96$이므로 $d=32$ ……… 40 %

$\therefore a+b+c-d=3+2+96-32=69$ ……… 10 %

05

등식 $4x(a-1)-3(2x-a)=x(a+5)+2(a-3)$이 x에 대한 일차방정식이 되지 않도록 하는 상수 a의 값은?

① 2　② 3　③ 4

✓④ 5　⑤ 6

$4x(a-1)-3(2x-a)=x(a+5)+2(a-3)$에서

$4ax-4x-6x+3a=ax+5x+2a-6$

$3ax-15x+a+6=0$

$\therefore (3a-15)x+a+6=0$

이 등식이 x에 대한 일차방정식이 되지 않으려면

$3a-15=0$, $3a=15$　$\therefore a=5$

06 서술형

일차방정식 $\frac{k(x+1)-4}{2}-\frac{k(bx-1)+a}{4}=1$이 상수 k의 값과 관계없이 항상 $x=3$을 해로 가질 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. **−9**

$\frac{k(x+1)-4}{2}-\frac{k(bx-1)+a}{4}=1$이 k의 값에 관계없이 항상 $x=3$을 해로 가지므로

$\frac{k(3+1)-4}{2}-\frac{k(3b-1)+a}{4}=1$

$\frac{4k-4}{2}-\frac{3bk-k+a}{4}=1$, $8k-8-3bk+k-a=4$

$\therefore (9-3b)k-a-12=0$　……㉠ ……… 45 %

이때 ㉠은 k에 대한 항등식이므로

$9-3b=0$, $-a-12=0$

$\therefore a=-12$, $b=3$ ……… 45 %

$\therefore a+b=-12+3=-9$ ……… 10 %

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

07

등식 $a(x-2)+8=3x-2b$가 x에 대한 항등식일 때, 일차방정식 $\frac{x-b}{a}-0.5\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}x$의 해는?

(단, a, b는 상수이다.)

① $x=\frac{1}{2}$　② $x=1$　✓③ $x=\frac{3}{2}$

④ $x=2$　⑤ $x=\frac{5}{2}$

$ax-2a+8=3x-2b$　……㉠

㉠은 x에 대한 항등식이므로 $a=3$, $-2a+8=-2b$

$\therefore a=3,\ b=-1$

따라서 $\frac{x-b}{a}-0.5\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}x$에서 $\frac{x+1}{3}-0.5\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}x$

$2(x+1)-3\left(x-\frac{1}{3}\right)=x,\ 2x+2-3x+1=x$

$2x=3$　$\therefore x=\frac{3}{2}$

08 출제 주의

등식 $\frac{5x+2}{4}-\frac{x-3}{2}=ax+b$가 x에 대한 항등식일 때, 일차방정식 $cx-7=3x+5$의 해가 $x=a$이다. 이때 세 상수 a, b, c에 대하여 $b\times c\div a$의 값을 구하시오. $\frac{152}{3}$

$\frac{5x+2}{4}-\frac{x-3}{2}=ax+b$에서

$5x+2-2(x-3)=4ax+4b$

$5x+2-2x+6=4ax+4b$

$3x+8=4ax+4b$　……㉠

이때 ㉠은 x에 대한 항등식이므로

$3=4a,\ 8=4b$　$\therefore a=\frac{3}{4},\ b=2$

방정식 $cx-7=3x+5$의 해가 $x=a$, 즉 $x=\frac{3}{4}$이므로

$\frac{3}{4}c-7=\frac{9}{4}+5,\ \frac{3}{4}c=\frac{57}{4}$　$\therefore c=19$

$\therefore b\times c\div a=2\times 19\div\frac{3}{4}=2\times 19\times\frac{4}{3}=\frac{152}{3}$

09

일차방정식

$$2x-\left[1.5x-3\left\{(0.5x-1)\div\frac{2}{5}-\frac{1}{4}(5x-8)\right\}\right]=7$$

의 해는?

① $x=15$　② $x=16$　✓③ $x=17$

④ $x=18$　⑤ $x=19$

$2x-\left[1.5x-3\left\{(0.5x-1)\div\frac{2}{5}-\frac{1}{4}(5x-8)\right\}\right]=7$에서

$2x-\left[\frac{3}{2}x-3\left\{\left(\frac{1}{2}x-1\right)\times\frac{5}{2}-\frac{1}{4}(5x-8)\right\}\right]=7$

$2x-\left\{\frac{3}{2}x-3\left(\frac{5}{4}x-\frac{5}{2}-\frac{5}{4}x+2\right)\right\}=7$

$2x-\left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\right)=7$

$\frac{1}{2}x=\frac{17}{2}$　$\therefore x=17$

$x\triangle 5=5x-x+\frac{5}{2}=4x+\frac{5}{2}$

$2\triangle(x+1)=2(x+1)-2+\frac{1}{2}(x+1)=2x+2-2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}$

따라서 $x\triangle 5-\{2\triangle(x+1)\}=6$에서

$\left(4x+\frac{5}{2}\right)-\left(\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}\right)=6,\ \frac{3}{2}x=4$　$\therefore x=\frac{8}{3}$

10

두 수 a, b에 대하여

$$a\triangle b=ab-a+\frac{1}{2}b$$

라고 할 때, 방정식 $x\triangle 5-\{2\triangle(x+1)\}=6$을 만족시키는 x의 값을 구하시오. $\frac{8}{3}$

㈎에서 $66=2\times 3\times 11$, $42=2\times 3\times 7$이므로 66과 42의 최대공약수는 $2\times 3=6$

$\therefore 66\bigstar 42=6$

$12=2^2\times 3$, $15=3\times 5$이므로 12와 15의 최소공배수는 $2^2\times 3\times 5=60$

$\therefore 12\diamondsuit 15=60$

$(66\bigstar 42)\times x-(12\diamondsuit 15)=12$에서

$6x-60=12,\ 6x=72$　$\therefore x=12$ ……………………………… 40 %

11 서술형

두 자연수 A, B에 대하여

$A\bigstar B=(A,\ B$의 최대공약수$)$

$A\diamondsuit B=(A,\ B$의 최소공배수$)$

라고 할 때, 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하시오. 252

㈎ $(66\bigstar 42)\times x-(12\diamondsuit 15)=12$

㈏ $\frac{y}{x\diamondsuit 5}-(x\bigstar 9)=1$

㈏에 $x=12$를 대입하면 $\frac{y}{12\diamondsuit 5}-(12\bigstar 9)=1$

$12=2^2\times 3$이므로 12와 5의 최소공배수는 $2^2\times 3\times 5=60$　$\therefore 12\diamondsuit 5=60$

$12=2^2\times 3$, $9=3^2$이므로 12와 9의 최대공약수는 3　$\therefore 12\bigstar 9=3$

$\frac{y}{12\diamondsuit 5}-(12\bigstar 9)=1$에서

$\frac{y}{60}-3=1,\ y-180=60$　$\therefore y=240$ ……………………………… 40 %

$\therefore x+y=12+240=252$ ……………………………… 20 %

12

두 일차방정식

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{3x+2}{4}=-\frac{7}{6},$$

$$0.03x+0.5=0.02(3x-5)+0.72$$

의 해를 각각 $x=a$, $x=b$라고 할 때, $a-b$의 값은?

① -8　② -4　③ 0

④ 4　✓⑤ 8

$\frac{2x-1}{3}-\frac{3x+2}{4}=-\frac{7}{6}$에서

$4(2x-1)-3(3x+2)=-14$

$8x-4-9x-6=-14$　$\therefore x=4$

$\therefore a=4$

$0.03x+0.5=0.02(3x-5)+0.72$에서

$3x+50=2(3x-5)+72,\ 3x+50=6x-10+72$

$3x=-12$　$\therefore x=-4$

$\therefore b=-4$

$\therefore a-b=4-(-4)=8$

13

어느 금고의 비밀번호는 다음 4개의 방정식 ㈎~㈑를 만족시키는 x의 값을 차례대로 나열한 것이다. 금고의 비밀번호를 구하시오. **3057**

㈎ $\frac{4}{3}x-2=\frac{2}{3}x$

㈏ $\frac{x-3}{4}-\frac{2x-1}{3}=-\frac{5}{12}$

㈐ $0.2(x-1)-0.5=0.3$

㈑ $(2x+1):5=(x+2):3$

㈎ $\frac{4}{3}x-2=\frac{2}{3}x$에서 $\frac{2}{3}x=2$ $\therefore x=3$
㈏ $\frac{x-3}{4}-\frac{2x-1}{3}=-\frac{5}{12}$에서
$3(x-3)-4(2x-1)=-5$, $3x-9-8x+4=-5$
$-5x=0$ $\therefore x=0$
㈐ $0.2(x-1)-0.5=0.3$에서
$2(x-1)-5=3$, $2x-2-5=3$
$2x=10$ $\therefore x=5$
㈑ $(2x+1):5=(x+2):3$에서 $3(2x+1)=5(x+2)$, $6x+3=5x+10$
$\therefore x=7$
따라서 금고의 비밀번호는 3057이다.

14

두 자연수 a, b에 대하여 a는 30보다 작은 소수 중 3번째로 큰 수이고 b는 48과 72의 최대공약수일 때, x에 대한 일차방정식 $\frac{a+5}{4}x-\frac{b}{6}=0.5(b-x)-3$의 해는?

① $x=1$ ✓② $x=2$ ③ $x=3$
④ $x=4$ ⑤ $x=5$

30보다 작은 소수 중 3번째로 큰 수는 19
$\therefore a=19$
$48=2^4\times3$, $72=2^3\times3^2$의 최대공약수는 $2^3\times3=24$
$\therefore b=24$
따라서 $\frac{a+5}{4}x-\frac{b}{6}=0.5(b-x)-3$에서 $\frac{19+5}{4}x-\frac{24}{6}=0.5(24-x)-3$
$6x-4=\frac{1}{2}(24-x)-3$, $6x-4=12-\frac{1}{2}x-3$
$\frac{13}{2}x=13$ $\therefore x=2$

15 서술형

일차방정식 $0.3(x-9)-0.27x=-2.4$를 만족시키는 x의 값이 일차방정식 $\frac{x+a}{2}-\frac{2x-1}{3}=\frac{a+2}{6}$를 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하시오. **5**

$0.3(x-9)-0.27x=-2.4$에서
$30(x-9)-27x=-240$, $30x-270-27x=-240$
$3x=30$ $\therefore x=10$ ······························ 50 %
일차방정식 $\frac{x+a}{2}-\frac{2x-1}{3}=\frac{a+2}{6}$의 해가 $x=10$이므로
$\frac{10+a}{2}-\frac{19}{3}=\frac{a+2}{6}$, $3(10+a)-38=a+2$
$30+3a-38=a+2$, $2a=10$ $\therefore a=5$ ······························ 50 %

16

다음 두 방정식의 해가 같을 때, 방정식 $(m-2)x+10=1$의 해를 구하시오. (단, m은 상수이다.) **$x=-3$**

$$\frac{3x+4}{2}-\frac{2x-1}{3}=\frac{17}{3},\quad \frac{mx-8}{3}=2x-m+1$$

$\frac{3x+4}{2}-\frac{2x-1}{3}=\frac{17}{3}$에서
$3(3x+4)-2(2x-1)=34$, $9x+12-4x+2=34$
$5x=20$ $\therefore x=4$
방정식 $\frac{mx-8}{3}=2x-m+1$의 해가 $x=4$이므로 $\frac{4m-8}{3}=8-m+1$
$4m-8=24-3m+3$, $7m=35$
$\therefore m=5$
따라서 방정식 $(m-2)x+10=1$에 $m=5$를 대입하면
$3x+10=1$, $3x=-9$
$\therefore x=-3$

17

$a\neq b$, $ab\neq0$인 두 수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, a의 값을 구하시오. **$-\frac{27}{20}$**

㈎ $2a+3b=3(a-b)$

㈏ $\frac{4a+b}{a-b}$의 값이 방정식 $\frac{x-8}{4}-2a=\frac{x+4-2a}{6}$의 해와 같다.

㈎에서 $2a+3b=3(a-b)$, $2a+3b=3a-3b$ $\therefore a=6b$
㈏에서 $\frac{4a+b}{a-b}$에 $a=6b$를 대입하면 $\frac{24b+b}{6b-b}=\frac{25b}{5b}=5$
따라서 방정식 $\frac{x-8}{4}-2a=\frac{x+4-2a}{6}$의 해가 $x=5$이므로
$\frac{5-8}{4}-2a=\frac{5+4-2a}{6}$, $-\frac{3}{4}-2a=\frac{9-2a}{6}$
$-9-24a=2(9-2a)$, $-9-24a=18-4a$
$20a=-27$ $\therefore a=-\frac{27}{20}$

18

두 일차방정식

$$0.4x-\frac{x-2}{5}=1.6,\quad 3|mx-4|-2x=6$$

의 해가 서로 같을 때, 모든 상수 m의 값의 합은?

✓① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

$0.4x-\frac{x-2}{5}=1.6$에서
$4x-2(x-2)=16$, $4x-2x+4=16$
$2x=12$ $\therefore x=6$
일차방정식 $3|mx-4|-2x=6$의 해가 $x=6$이므로
$3|6m-4|-12=6$, $6|3m-2|=18$
$\therefore |3m-2|=3$
즉, $3m-2=-3$ 또는 $3m-2=3$이므로 $m=-\frac{1}{3}$ 또는 $m=\frac{5}{3}$
따라서 모든 상수 m의 값의 합은 $-\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$

19

비례식 $(3x-2):(x+4)=2:1$을 만족시키는 x의 값이 비례식 $(a+x):(2a-x)=4:3$을 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하시오. **14**

$(3x-2):(x+4)=2:1$에서
$3x-2=2(x+4)$, $3x-2=2x+8$
$\therefore x=10$
따라서 $(a+x):(2a-x)=4:3$에 $x=10$을 대입하면
$(a+10):(2a-10)=4:3$, $3(a+10)=4(2a-10)$
$3a+30=8a-40$, $5a=70$
$\therefore a=14$

20

비례식 $2a:(2x-3)=3:(x+1)$을 만족시키는 x의 값이 일차방정식 $\frac{x}{2}-\frac{x-2b}{4}=0$의 해와 같을 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a-2ab+6b$의 값은?

① -6 ✓② $-\frac{9}{2}$ ③ -3
④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$2a:(2x-3)=3:(x+1)$에서
$3(2x-3)=2a(x+1)$, $6x-9=2ax+2a$
$(6-2a)x=2a+9$ $\quad\therefore x=\frac{2a+9}{6-2a}$
$\frac{x}{2}-\frac{x-2b}{4}=0$에서
$2x-x+2b=0$ $\quad\therefore x=-2b$
따라서 $\frac{2a+9}{6-2a}=-2b$이므로
$2a+9=-2b(6-2a)$, $2a+9=-12b+4ab$
$2a-4ab+12b=-9$ $\quad\therefore a-2ab+6b=-\frac{9}{2}$

21

일차방정식 $\frac{ax+4}{5}-0.6=0.2(x-2a)$에서 상수 a의 부호를 반대로 잘못 보고 풀었더니 해가 $x=3$이 되었다. 바르게 풀었을 때의 해를 $x=k$라고 할 때, $35k$의 값을 구하시오. **5**

a를 $-a$로 잘못 보고 풀었을 때 방정식 $\frac{-ax+4}{5}-0.6=0.2(x+2a)$의 해가 $x=3$이므로 $\frac{-3a+4}{5}-0.6=0.2(3+2a)$
$2(-3a+4)-6=2(3+2a)$, $-6a+8-6=6+4a$
$10a=-4$ $\quad\therefore a=-\frac{2}{5}$
$\frac{ax+4}{5}-0.6=0.2(x-2a)$에서 $2(ax+4)-6=2(x-2a)$
$a=-\frac{2}{5}$를 대입하면 $2\left(-\frac{2}{5}x+4\right)-6=2\left(x+\frac{4}{5}\right)$, $-\frac{4}{5}x+8-6=2x+\frac{8}{5}$
$\frac{14}{5}x=\frac{2}{5}$ $\quad\therefore x=\frac{1}{7}$
따라서 $k=\frac{1}{7}$이므로 $35k=35\times\frac{1}{7}=5$

a를 b로 잘못 보고 풀었을 때, 방정식 $\frac{x-b}{3}+\frac{x-b}{4}=\frac{x}{2}+\frac{5}{6}$의 해가 $x=-4$이므로
$\frac{-4-b}{3}+\frac{-4-b}{4}=\frac{-4}{2}+\frac{5}{6}$
$4(-4-b)+3(-4-b)=-14$, $-16-4b-12-3b=-14$
$7b=-14$ $\quad\therefore b=-2$

22 출제 주의

일차방정식 $\frac{x-a}{3}+\frac{x-b}{4}=\frac{x}{2}+\frac{5}{6}$에서 지수는 a를 b로 잘못 보고 풀어서 해가 $x=-4$가 되었고, 민호는 b를 $-a$로 잘못 보고 풀어서 해가 $x=13$이 되었다. 주어진 일차방정식의 옳은 해는? (단, a, b는 상수이다.)

① $x=10$ ② $x=12$ ③ $x=14$
✓④ $x=16$ ⑤ $x=18$

b를 $-a$로 잘못 보고 풀었을 때, 방정식 $\frac{x-a}{3}+\frac{x+a}{4}=\frac{x}{2}+\frac{5}{6}$의 해가 $x=13$이므로
$\frac{13-a}{3}+\frac{13+a}{4}=\frac{13}{2}+\frac{5}{6}$
$4(13-a)+3(13+a)=88$, $52-4a+39+3a=88$ $\quad\therefore a=3$
따라서 주어진 일차방정식에 $a=3$, $b=-2$를 대입하면 $\frac{x-3}{3}+\frac{x+2}{4}=\frac{x}{2}+\frac{5}{6}$
$4(x-3)+3(x+2)=6x+10$, $4x-12+3x+6=6x+10$ $\quad\therefore x=16$

$\frac{x-2}{4}-\frac{2x+a}{3}=-\frac{7}{12}$에서
$3(x-2)-4(2x+a)=-7$, $3x-6-8x-4a=-7$
$-5x=-1+4a$ $\quad\therefore x=\frac{1-4a}{5}$

23

x에 대한 일차방정식 $\frac{x-2}{4}-\frac{2x+a}{3}=-\frac{7}{12}$의 해가 $|x|\le10$인 정수가 되도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합은?

① 4 ② 9 ✓③ 13
④ 15 ⑤ 18

이때 a는 자연수이므로 $1-4a<0$
또, x가 정수가 되려면 $1-4a$는 5의 배수이어야 하고, $|x|\le10$이므로
$1-4a=-5, -10, -15, \dots, -50$
$1-4a=-5$일 때, $a=\frac{3}{2}$ $\qquad$ $1-4a=-10$일 때, $a=\frac{11}{4}$
$1-4a=-15$일 때, $a=4$ $\qquad$ $1-4a=-20$일 때, $a=\frac{21}{4}$
$1-4a=-25$일 때, $a=\frac{13}{2}$ $\qquad$ $1-4a=-30$일 때, $a=\frac{31}{4}$
$1-4a=-35$일 때, $a=9$ $\qquad$ $1-4a=-40$일 때, $a=\frac{41}{4}$
$1-4a=-45$일 때, $a=\frac{23}{2}$ $\qquad$ $1-4a=-50$일 때, $a=\frac{51}{4}$
이때 a가 자연수이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 4, 9
따라서 모든 자연수 a의 값의 합은 $4+9=13$

24 서술형

x에 대한 일차방정식 $\frac{ax-2}{2}-\frac{ax-6}{3}=5$의 해가 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오. **60**

$\frac{ax-2}{2}-\frac{ax-6}{3}=5$에서
$3(ax-2)-2(ax-6)=30$, $3ax-6-2ax+12=30$
$ax=24$ $\quad\therefore x=\frac{24}{a}$ ································· 60 %
이때 $\frac{24}{a}$가 자연수이어야 하므로 a는 24의 약수이다.
$\therefore a=1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ ································· 30 %
따라서 모든 자연수 a의 값의 합은
$1+2+3+4+6+8+12+24=60$ ································· 10 %

25

두 일차방정식

$$0.4(x+2)=0.6,\ (2a+1)x-5=0$$

의 해는 절댓값이 같고 부호가 반대이다. 이때 상수 a의 값을 구하시오. $\mathbf{\frac{9}{2}}$

$0.4(x+2)=0.6$에서

$4(x+2)=6,\ 4x+8=6,\ 4x=-2$

$\therefore\ x=-\frac{1}{2}$

따라서 일차방정식 $(2a+1)x-5=0$의 해는 $x=\frac{1}{2}$이므로

$(2a+1)\times\frac{1}{2}-5=0,\ a+\frac{1}{2}-5=0$

$\therefore\ a=\frac{9}{2}$

26 서술형

비례식 $(0.3x-1.5):2=\frac{1}{5}(x-2):1$을 만족시키는 x의 값과 일차방정식 $3a(x+1)-2=5x+a$의 해를 곱한 값이 1일 때, 상수 a의 값을 구하시오. $\mathbf{\frac{9}{11}}$

$(0.3x-1.5):2=\frac{1}{5}(x-2):1$에서 $0.3x-1.5=\frac{2}{5}(x-2)$

$3x-15=4(x-2),\ 3x-15=4x-8\qquad\therefore\ x=-7$ $\cdots\cdots$ 40 %

따라서 일차방정식 $3a(x+1)-2=5x+a$의 해는 $x=-\frac{1}{7}$ $\cdots\cdots$ 20 %

$3a(x+1)-2=5x+a$에 $x=-\frac{1}{7}$을 대입하면

$3a\left(-\frac{1}{7}+1\right)-2=5\times\left(-\frac{1}{7}\right)+a,\ \frac{18}{7}a-2=-\frac{5}{7}+a$

$\frac{11}{7}a=\frac{9}{7}\qquad\therefore\ a=\frac{9}{11}$ $\cdots\cdots$ 40 %

27

두 일차방정식

$$\frac{3x-a}{5}-1.6=0.2(x-3a),\ \frac{x}{3}-\frac{x-a}{2}=\frac{a}{6}$$

의 해를 차례대로 $x=m$, $x=n$이라고 하자. m이 n보다 5만큼 작을 때, 상수 a의 값은?

① 1　② 2　[✓ ③ 3]

④ 4　⑤ 5

$\frac{3x-a}{5}-1.6=0.2(x-3a)$에서

$2(3x-a)-16=2(x-3a),\ 6x-2a-16=2x-6a$

$4x=16-4a\qquad\therefore\ x=4-a$

$\frac{x}{3}-\frac{x-a}{2}=\frac{a}{6}$에서

$2x-3(x-a)=a,\ 2x-3x+3a=a$

$\therefore\ x=2a$

즉, $m=4-a$, $n=2a$이고, $m=n-5$이므로

$4-a=2a-5,\ 3a=9$

$\therefore\ a=3$

28 서술형

x에 대한 일차방정식 $0.5(x-3)+\frac{a}{6}=\frac{x+2}{3}$의 해는 3의 배수이고 x에 대한 비례식 $4:(b-2)=2:(y-1)$을 만족시키는 y의 값은 소수이다. $a\le20$이고 $b<20$인 두 자연수 a, b를 $(a,\ b)$로 나타낼 때, 가능한 모든 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오. **16**

$0.5(x-3)+\frac{a}{6}=\frac{x+2}{3}$에서

$15(x-3)+5a=10(x+2),\ 15x-45+5a=10x+20$

$5x=65-5a\qquad\therefore\ x=13-a$

이때 x는 3의 배수이고 a는 $a\le20$인 자연수이므로

$13-a=3,\ 6,\ 9,\ 12\qquad\therefore\ a=1,\ 4,\ 7,\ 10$ $\cdots\cdots$ 40 %

$4:(b-2)=2:(y-1)$에서 $4(y-1)=2(b-2),\ 4y-4=2b-4$

$4y=2b\qquad\therefore\ y=\frac{b}{2}$

이때 y는 소수이고 $b<20$에서 $\frac{b}{2}<10$이므로

$\frac{b}{2}=2,\ 3,\ 5,\ 7\qquad\therefore\ b=4,\ 6,\ 10,\ 14$ $\cdots\cdots$ 40 %

따라서 가능한 모든 $(a,\ b)$는

$(1,\ 4),\ (1,\ 6),\ (1,\ 10),\ (1,\ 14),\ (4,\ 4),\ (4,\ 6),\ (4,\ 10),\ (4,\ 14),\ (7,\ 4),\ (7,\ 6),$ $(7,\ 10),\ (7,\ 14),\ (10,\ 4),\ (10,\ 6),\ (10,\ 10),\ (10,\ 14)$의 16개이다. $\cdots\cdots$ 20 %

29

방정식 $\frac{2x+1}{3x}-\frac{x-3}{2x}-\frac{1}{6x}=1$의 해를 구하시오. $\mathbf{x=2}$

$\frac{2x+1}{3x}-\frac{x-3}{2x}-\frac{1}{6x}=1$에서

$2(2x+1)-3(x-3)-1=6x,\ 4x+2-3x+9-1=6x$

$5x=10\qquad\therefore\ x=2$

30

0이 아닌 세 상수 a, b, c에 대하여 $\frac{a}{4}=\frac{b}{6}=\frac{c}{9}$일 때, 방정식 $(a-b+c)(x-5)-(2a-3b+4c)=0$의 해를 구하시오. $\mathbf{x=\frac{61}{7}}$

$\frac{a}{4}=\frac{b}{6}=\frac{c}{9}=k$ ($k\ne0$인 상수)라고 하면 $a=4k,\ b=6k,\ c=9k$

$(a-b+c)(x-5)-(2a-3b+4c)=0$에 $a=4k,\ b=6k,\ c=9k$를 대입하면

$(4k-6k+9k)(x-5)-(8k-18k+36k)=0$

$7k(x-5)-26k=0,\ 7(x-5)-26=0$

$7x-35-26=0,\ 7x=61$

$\therefore\ x=\frac{61}{7}$

31

0이 아닌 세 상수 a, b, c에 대하여 $2a+3b+4c=24$일 때, 일차방정식

$$\frac{x}{2a}+\frac{x}{3b}+\frac{x}{4c}=3+\frac{3b+4c}{2a}+\frac{2a+4c}{3b}+\frac{2a+3b}{4c}$$

의 해를 구하시오. $x=24$

$(\text{우변})=3+\frac{3b+4c}{2a}+\frac{2a+4c}{3b}+\frac{2a+3b}{4c}$

$=1+\frac{3b+4c}{2a}+1+\frac{2a+4c}{3b}+1+\frac{2a+3b}{4c}$

$=\frac{2a+3b+4c}{2a}+\frac{2a+3b+4c}{3b}+\frac{2a+3b+4c}{4c}=\frac{24}{2a}+\frac{24}{3b}+\frac{24}{4c}$

즉, $\frac{x}{2a}+\frac{x}{3b}+\frac{x}{4c}=\frac{24}{2a}+\frac{24}{3b}+\frac{24}{4c}$이므로

$x\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{4c}\right)=24\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{4c}\right)$

이때 주어진 방정식이 x에 대한 일차방정식이고

$\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{4c}\neq0$이므로 $x=24$

32

약분하면 $\frac{3}{4}$이 되는 어떤 분수를 A라고 할 때, A의 분자에서 6을 빼고 분모에 6을 더한 다음 기약분수로 나타내면 $\frac{1}{2}$이 된다. 또, A의 분자에 $2x$를 더하고 분모에서 x를 뺀 다음 약분하면 $\frac{5}{3}$가 될 때, 자연수 x의 값을 구하시오. 9

$A=\frac{3k}{4k}$ (k는 자연수)라고 하면

$\frac{3k-6}{4k+6}=\frac{1}{2}$, $2(3k-6)=4k+6$

$6k-12=4k+6$, $2k=18$

$\therefore k=9$

즉, $A=\frac{3k}{4k}=\frac{27}{36}$이므로

$\frac{27+2x}{36-x}=\frac{5}{3}$, $3(27+2x)=5(36-x)$

$81+6x=180-5x$, $11x=99$

$\therefore x=9$

33 서술형

일차방정식 $\frac{2x-k}{3}-0.5(x-2k)=\frac{1}{6}$의 해를 S_k라고 하자. 예를 들어 S_2의 값은 $k=2$를 대입한 방정식 $\frac{2x-2}{3}-0.5(x-4)=\frac{1}{6}$을 만족시키는 x의 값이다.
이때 $-S_{10}+S_9-S_8+S_7-S_6+S_5$의 값을 구하시오.
(단, k는 상수이다.) 12

$\frac{2x-k}{3}-0.5(x-2k)=\frac{1}{6}$에서

$10(2x-k)-15(x-2k)=5$, $20x-10k-15x+30k=5$

$5x=5-20k$　　$\therefore x=1-4k$

$\therefore S_k=1-4k$ ······························ 50 %

$k=5$일 때, $S_5=-19$　　$k=6$일 때, $S_6=-23$

$k=7$일 때, $S_7=-27$　　$k=8$일 때, $S_8=-31$

$k=9$일 때, $S_9=-35$　　$k=10$일 때, $S_{10}=-39$

$\therefore -S_{10}+S_9-S_8+S_7-S_6+S_5$

$=-(-39)+(-35)-(-31)+(-27)-(-23)+(-19)=12$ ·········· 50 %

34

일차방정식 $0.5(x-2k)-\frac{x-3}{4}=\frac{k-x}{2}$의 해를 $x=a_k$라고 하자. 이때 $|a_2-a_5|$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① 4　　✓② 6　　③ 8

④ 10　　⑤ 12

$0.5(x-2k)-\frac{x-3}{4}=\frac{k-x}{2}$에서

$10(x-2k)-5(x-3)=10(k-x)$

$10x-20k-5x+15=10k-10x$

$15x=30k-15$　　$\therefore x=2k-1$

$k=2$, $k=5$일 때 일차방정식의 해가 각각 a_2, a_5이므로

(ⅰ) $k=2$일 때

$x=2\times2-1=3$　　$\therefore a_2=3$

(ⅱ) $k=5$일 때

$x=2\times5-1=9$　　$\therefore a_5=9$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $|a_2-a_5|=|3-9|=6$

35

방정식 $3||x-2|-5|=9$를 만족시키는 모든 x의 값의 합을 구하시오. 8

$3||x-2|-5|=9$에서 $||x-2|-5|=3$

$|x-2|-5=3$ 또는 $|x-2|-5=-3$

즉, $|x-2|=8$ 또는 $|x-2|=2$

(ⅰ) $|x-2|=8$일 때, $x-2=8$ 또는 $x-2=-8$

$\therefore x=10$ 또는 $x=-6$

(ⅱ) $|x-2|=2$일 때, $x-2=2$ 또는 $x-2=-2$

$\therefore x=4$ 또는 $x=0$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $3||x-2|-5|=9$를 만족시키는 x의 값은 10, -6, 4, 0이므로 구하는 합은

$10+(-6)+4+0=8$

36 출제 주의

다음 두 일차방정식 ㈎, ㈏에 대하여 방정식 ㈎의 해가 2개 이상일 때, 방정식 ㈏의 해가 존재하지 않도록 하는 c의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

㈎ $a(2x-1)+5=4(x+b)$

㈏ $\frac{x-a}{3}=\frac{cx+b}{6}$

① -1　　② 0　　③ 1

✓④ 2　　⑤ 3

방정식 ㈎는 해가 2개 이상이므로 해가 무수히 많다.

$a(2x-1)+5=4(x+b)$에서

$2ax-a+5=4x+4b$　　$\therefore (2a-4)x=a+4b-5$

따라서 $2a-4=0$, $a+4b-5=0$이므로 $2a=4$에서 $a=2$

$2+4b-5=0$에서 $4b=3$　　$\therefore b=\frac{3}{4}$

방정식 ㈏에 $\frac{x-a}{3}=\frac{cx+b}{6}$에서 $2(x-a)=cx+b$

이 방정식에 $a=2$, $b=\frac{3}{4}$을 대입하면 $2(x-2)=cx+\frac{3}{4}$, $2x-4=cx+\frac{3}{4}$

$\therefore (2-c)x=\frac{19}{4}$

이 방정식의 해가 존재하지 않아야 하므로 $2-c=0$　　$\therefore c=2$

Lv. 1 개념을 적용하는 핵심 문제

개념 1 일차방정식의 활용 (1)

01

어떤 수를 3배 하여 4를 더해야 할 것을 잘못하여 어떤 수에 2를 더한 후 4배 하였더니 구하려고 했던 수보다 7만큼 컸다. 이때 처음에 구하려고 했던 수는?

① 3　② 9　✓③ 13
④ 19　⑤ 23

어떤 수를 x라고 하면
$(3x+4)+7=4(x+2)$, $3x+11=4x+8$
$\therefore x=3$
따라서 어떤 수는 3이므로 처음에 구하려고 했던 수는
$3\times3+4=13$

02

연속하는 세 짝수 중 가장 큰 수의 5배는 다른 두 수의 합보다 30만큼 크다고 한다. 이때 가장 큰 수는?

① 6　✓② 8　③ 12
④ 16　⑤ 18

연속하는 세 짝수를 $x-2$, x, $x+2$라고 하면
$5(x+2)=(x-2)+x+30$, $5x+10=2x+28$
$3x=18$　$\therefore x=6$
따라서 연속하는 세 짝수는 4, 6, 8이므로 가장 큰 수는 8이다.

03

십의 자리의 숫자가 일의 자리의 숫자보다 3만큼 작은 두 자리 자연수가 있다. 이 자연수는 각 자리의 숫자의 합의 4배와 같다고 할 때, 이 자연수를 구하시오. 36

일의 자리의 숫자를 x라고 하면 십의 자리의 숫자는 $x-3$이므로
$10(x-3)+x=4(x+x-3)$, $10x-30+x=8x-12$
$3x=18$　$\therefore x=6$
따라서 구하는 자연수는 36이다.

04

어느 박물관에서 방문자 60명에게 기념품 60개를 나누어 주었다. 어른은 한 명에게 두 개씩, 어린이는 두 명에게 한 개씩 나누어 주었을 때, 어린이는 몇 명인가?

(단, 어린이 수는 짝수이다.)

① 24명　② 28명　③ 32명
④ 36명　✓⑤ 40명

어린이가 x명이라고 하면 어른은 $(60-x)$명이므로
$2(60-x)+\frac{1}{2}x=60$, $4(60-x)+x=120$
$240-4x+x=120$, $-3x=-120$
$\therefore x=40$

05 출제 주의

수민이와 이모의 나이의 차는 28살이다. 9년 후에 이모의 나이가 수민이의 나이의 2배보다 7살 많아진다고 할 때, 현재 수민이의 나이는?

✓① 12살　② 13살　③ 14살
④ 15살　⑤ 16살

현재 수민이의 나이를 x살이라고 하면 이모의 나이는 $(x+28)$살이므로
$(x+28)+9=2(x+9)+7$, $x+37=2x+18+7$
$\therefore x=12$

06 서술형

길이가 72 cm인 철사를 구부려 가로의 길이와 세로의 길이의 비가 1 : 3인 직사각형을 만들려고 할 때, 이 직사각형의 넓이를 구하시오. 243 cm^2

(단, 철사는 겹치는 부분이 없도록 한다.)

가로의 길이를 x cm라고 하면 세로의 길이는 $3x$ cm이므로 직사각형의 둘레의 길이는
$2(x+3x)=72$ ········· 40 %
$8x=72$　$\therefore x=9$
즉, 직사각형의 가로의 길이는 9 cm, 세로의 길이는
$3x=3\times9=27$ (cm) ········· 40 %
따라서 구하는 넓이는
$9\times27=243$ (cm^2) ········· 20 %

07 출제 주의

현재 은행에 주원이는 18000원, 서연이는 32000원이 예금되어 있다. 다음 달부터 두 사람이 매달 2000원씩 예금할 때, 주원이의 예금액의 4배와 서연이의 예금액의 3배가 같아지는 것은 몇 개월 후인가?

① 8개월　② 9개월　③ 10개월
④ 11개월　✓⑤ 12개월

x개월 후에 주원이의 예금액의 4배와 서연이의 예금액의 3배가 같아진다고 하면

$4(18000+2000x)=3(32000+2000x)$

$72000+8000x=96000+6000x$

$2000x=24000 \qquad \therefore x=12$

08

어떤 장갑의 원가에 30 %의 이익을 붙여서 정가를 정했다가 장갑이 팔리지 않아 정가에서 4000원 할인하여 팔았더니 원가의 10 %의 이익이 생겼다. 이 장갑의 원가를 구하시오. **20000원**

이 장갑의 원가를 x원이라고 하면 정가는 $x+\frac{30}{100}x=\frac{13}{10}x$(원)이고, 판매 가격은 $\left(\frac{13}{10}x-4000\right)$원이다.

이때 (이익)=(판매 가격)−(원가)이므로

$\left(\frac{13}{10}x-4000\right)-x=\frac{10}{100}x$

$\frac{3}{10}x-4000=\frac{1}{10}x,\ \frac{1}{5}x=4000$

$\therefore x=20000$

09 서술형

어느 등산회의 올해의 남자 회원은 작년보다 19명 감소하였고 여자 회원은 작년보다 10 % 감소하였다. 이 등산회의 작년 전체 회원은 300명이었고 올해는 작년보다 회원 수가 12 % 감소했을 때, 올해의 여자 회원 수를 구하시오. **153**

작년의 여자 회원 수를 x라고 하면 올해 감소한 회원 수는

$19+\frac{10}{100}x=300\times\frac{12}{100},\ 19+\frac{1}{10}x=36$

$\frac{1}{10}x=17 \qquad \therefore x=170$ ······ 60 %

따라서 올해의 여자 회원 수는

$170-170\times\frac{10}{100}=170-17=153$ ······ 40 %

10

라율이네 가족은 가족여행을 다녀왔는데 여행 기간의 $\frac{1}{8}$은 차를 탔고 $\frac{1}{6}$은 놀이를 하였고 $\frac{1}{3}$은 잠을 잤다. 또, 그 외의 시간을 모두 합하면 36시간이라고 할 때, 라율이네 가족이 여행한 총시간은?

① 72시간　② 76시간　③ 84시간
④ 92시간　✓⑤ 96시간

라율이네 가족이 x시간 동안 여행을 했다고 하면

$\frac{1}{8}x+\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}x+36=x,\ \frac{5}{8}x+36=x$

$\frac{3}{8}x=36 \qquad \therefore x=96$

11

어느 수영장에 물을 가득 채우려면 호스 A로는 3시간, 호스 B로는 5시간이 걸린다고 한다. 두 호스 A, B로 1시간 동안 물을 받다가 호스 A로만 물을 더 받아서 이 수영장에 물을 가득 채우려고 할 때, 호스 A로만 물을 더 받아야 하는 시간은?

① 1시간 20분　✓② 1시간 24분　③ 1시간 30분
④ 1시간 42분　⑤ 1시간 50분

수영장에 가득 찬 물의 양을 1이라고 하면 두 호스 A, B로 1시간 동안 채울 수 있는 물의 양은 각각 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$이다.

호스 A로만 물을 더 받아야 하는 시간을 x시간이라고 하면

$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\times1+\frac{1}{3}\times x=1,\ \frac{8}{15}+\frac{1}{3}x=1$

$\frac{1}{3}x=\frac{7}{15} \qquad \therefore x=\frac{7}{5}$

따라서 호스 A로만 물을 더 받아야 하는 시간은 $\frac{7}{5}=1\frac{24}{60}$(시간), 즉 1시간 24분이다.

개념 2 일차방정식의 활용 (2)

12

지웅이가 집에서 출발하여 꽃집에 다녀오는데 갈 때는 시속 4 km로 걸어가고 꽃집에서 15분 동안 꽃을 구입한 후 올 때는 같은 길을 따라 시속 5 km로 걸어서 총 1시간이 걸렸다. 지웅이네 집에서 꽃집까지의 거리를 구하시오. **$\frac{5}{3}$ km**

지웅이네 집에서 꽃집까지의 거리를 x km라고 하면

꽃을 구입하는 데 걸린 시간은 $\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$(시간)이므로

$\frac{x}{4}+\frac{1}{4}+\frac{x}{5}=1,\ \frac{9}{20}x+\frac{1}{4}=1$

$\frac{9}{20}x=\frac{3}{4} \qquad \therefore x=\frac{5}{3}$

13 **출제 주의**

언니와 동생이 동시에 집에서 출발하여 체육관까지 가는데 언니는 분속 60 m로 걷고 동생은 분속 50 m로 걸었다. 언니가 동생보다 10분 빨리 도착했을 때, 집에서 체육관까지의 거리는?

① 2 km　② 2.5 km　✓③ 3 km
④ 3.5 km　⑤ 4 km

집에서 체육관까지의 거리를 x m라고 하면
$\frac{x}{50}-\frac{x}{60}=10$, $\frac{1}{300}x=10$
∴ $x=3000$
따라서 집에서 체육관까지의 거리는 3000 m, 즉 3 km이다.

14

지민이와 서우가 둘레의 길이가 3.4 km인 호수 둘레의 한 지점에 서 있다. 지민이가 분속 80 m로 걷기 시작한 뒤 10분 후에 서우가 반대 방향으로 분속 50 m로 걷는다고 할 때, 서우가 출발한 지 몇 분 후에 처음으로 지민이를 만나게 되는지 구하시오. **20분**

서우가 출발한 지 x분 후에 처음으로 지민이를 만난다고 하면
$80(10+x)+50x=3400$, $800+80x+50x=3400$
$130x=2600$　　∴ $x=20$

15

일정한 속력으로 달리는 열차가 길이가 600 m인 터널을 완전히 통과하는 데 25초가 걸렸고, 길이가 900 m인 터널을 완전히 통과하는 데 35초가 걸렸을 때, 이 열차의 길이는?

① 130 m　② 135 m　③ 140 m
④ 145 m　✓⑤ 150 m

열차의 길이를 x m라고 하면 길이가 600 m인 터널을 완전히 통과할 때의 열차의 속력은 초속 $\frac{600+x}{25}$ m이고, 길이가 900 m인 터널을 완전히 통과할 때의 열차의 속력은 초속 $\frac{900+x}{35}$ m이다.
이때 열차의 속력은 일정하므로
$\frac{600+x}{25}=\frac{900+x}{35}$, $7(600+x)=5(900+x)$
$4200+7x=4500+5x$, $2x=300$
∴ $x=150$

16

20 %의 소금물을 만들려다가 물을 너무 많이 넣어서 10 %의 소금물 400 g을 만들었다. 다시 20 %의 소금물을 만들기 위해 넣어야 하는 소금의 양은?

✓① 50 g　② 55 g　③ 60 g
④ 65 g　⑤ 70 g

10 %의 소금물 400 g에 들어 있는 소금의 양은
$\frac{10}{100}\times400=40$ (g)
소금을 x g 넣는다고 하면
$\frac{20}{100}\times(400+x)=40+x$, $80+\frac{1}{5}x=40+x$
$\frac{4}{5}x=40$　　∴ $x=50$

17

4 %의 소금물과 10 %의 소금물을 섞었더니 8 %의 소금물 450 g이 되었다. 이때 4 %의 소금물의 양은?

① 140 g　✓② 150 g　③ 160 g
④ 170 g　⑤ 180 g

4 %의 소금물의 양을 x g이라고 하면
$\frac{4}{100}\times x+\frac{10}{100}\times(450-x)=\frac{8}{100}\times450$
$4x+4500-10x=3600$
$6x=900$　　∴ $x=150$

18 **서술형**

8 %의 소금물 400 g에 물 160 g과 소금을 더 넣어 12 %의 소금물을 만들려고 한다. 이때 더 넣어야 하는 소금의 양을 구하시오. **40 g**

소금을 x g 더 넣는다고 하면 12 %의 소금물의 양은
$(400+160+x)$ g이다. ·································· 40 %
섞기 전의 소금의 양의 합과 섞은 후의 소금물에 들어 있는 소금의 양은 같으므로
$\frac{8}{100}\times400+x=\frac{12}{100}\times(400+160+x)$
$3200+100x=4800+1920+12x$
$88x=3520$　　∴ $x=40$ ·································· 60 %

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

01

기온이 x ℃일 때 공기 중 소리의 속력은 초속 $(331+0.6x)$ m라고 한다. 어느 날 밤 수직으로 쏘아 올린 불꽃이 터지는 것을 두 지점 A, B에서 관측하였다. 불꽃이 터지는 것을 본 순간부터 그 소리가 들릴 때까지 A 지점에서는 2초, B 지점에서는 5초가 걸렸다고 한다. 두 지점 A, B 사이의 거리가 1029 m일 때, 이 날의 기온은?

(단, 빛의 속력은 무시할 만큼 빠르다.)

① 10 ℃　② 15 ℃　✓③ 20 ℃

④ 25 ℃　⑤ 30 ℃

두 지점 A, B 사이의 시간 차이는 3초이므로 소리의 속력은 초속 $\frac{1029}{3}=343$ (m)

이 날의 기온을 x ℃라고 하면 $331+0.6x=343$, $0.6x=12$

$\therefore x=20$

02 출제 주의

어느 시험에서는 원점수를 x점 이상 받아야 합격이다. 시험 성적은 환산된 점수로 공지되며, 환산식은

(환산 점수)$=0.9\times$(원점수)$+5$

이다. 이 시험의 결과가 다음 조건을 만족시킬 때, x의 값을 구하시오. 80

㈎ (합격자 수) : (불합격자 수)$=5:11$이다.

㈏ 합격자의 환산 점수의 평균은 최저 합격자의 환산 점수보다 16점 높다.

㈐ 불합격자의 환산 점수의 평균은 최저 합격자의 환산 점수보다 24점 낮다.

㈑ 전체 환산 점수의 평균은 65.5점이다.

최저 합격자의 원점수가 x점이므로 환산 점수는 $0.9x+5$(점)

합격자의 환산 점수의 평균은 $(0.9x+5)+16=0.9x+21$(점)

불합격자의 환산 점수의 평균은 $(0.9x+5)-24=0.9x-19$(점)

(합격자 수) : (불합격자 수)$=5:11$이므로 합격자 수를 $5k$, 불합격자 수를 $11k$라고 하면

$16k\times 65.5=5k(0.9x+21)+11k(0.9x-19)$, $1048=4.5x+105+9.9x-209$

$14.4x=1152$, $144x=11520$　　$\therefore x=80$

03

각 자리의 숫자의 합이 12인 세 자리 자연수가 있다. 백의 자리의 숫자가 일의 자리의 숫자의 2배이고 이 수의 백의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수는 처음 수보다 198만큼 작다고 할 때, 처음 세 자리 자연수를 구하시오. 462

처음 수의 백의 자리의 숫자를 x, 십의 자리의 숫자를 y, 일의 자리의 숫자를 z라고 하면

$x=2z$

백의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수는 처음 수보다 198만큼 작으므로

$100z+10y+2z=(200z+10y+z)-198$, $99z=198$　　$\therefore z=2$

이때 $x=2z=4$이고 각 자리의 숫자의 합이 12이므로 $4+y+2=12$　　$\therefore y=6$

따라서 처음 세 자리 자연수는 462이다.

9점을 맞힌 화살의 개수를 x라고 하면 10점을 맞힌 화살의 개수는 $\frac{x+2}{2}$, 8점을 맞힌 화살의 개수는 $\frac{1}{2}x$이다. ·································· 40 %

이때 민준이는 총 82점을 득점하였으므로 $10\times\frac{x+2}{2}+9x+8\times\frac{1}{2}x=82$

$5x+10+9x+4x=82$, $18x=72$

$\therefore x=4$ ·································· 60 %

04 서술형

10점, 9점, 8점 구역으로 나누어져 있는 과녁에 민준이가 화살을 쏘아 총 82점을 득점하였다. 9점을 맞힌 화살의 개수는 10점을 맞힌 화살의 개수의 2배보다 2개가 적고, 8점을 맞힌 화살의 개수는 9점을 맞힌 화살의 개수의 절반이다. 이때 민준이가 9점을 맞힌 화살의 개수를 구하시오. 4

세 번째부터 열다섯 번째까지의 학생은 모두 $(k+1)$번 자유투를 던졌으므로

$\frac{x+y+13(k+1)}{15}=\frac{x+y}{2}$

$2\{x+y+13(k+1)\}=15(x+y)$, $2x+2y+26k+26=15x+15y$

$26k+26=13x+13y$　　$\therefore k+1=\frac{1}{2}(x+y)$

05

15명의 학생 중 첫 번째 학생은 x번, 두 번째 학생은 y번 자유투를 던졌고, 세 번째부터 열다섯 번째 학생까지는 모두 k번 자유투를 던졌다. 선생님이 세 번째부터 열다섯 번째 학생들에게만 각각 1번씩 더 던지게 하였더니 전체 학생이 던진 자유투 횟수의 평균은 첫 번째와 두 번째 학생이 던진 자유투 횟수의 평균과 같아졌다. 열다섯 번째 학생이 던진 자유투의 총횟수를 x, y를 사용한 식으로 나타내면 $\frac{1}{a}(x+y)+b$일 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① $-\frac{3}{2}$　② $-\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{3}{2}$　✓⑤ 2

이때 열다섯 번째 학생이 던진 자유투의 총횟수는 $k+1=\frac{1}{2}(x+y)$이므로

$a=2$, $b=0$　　$\therefore a+b=2+0=2$

06 서술형

다음 그림과 같이 어느 달의 달력에서 윗 줄의 4칸과 아랫줄의 4칸을 택하여 직사각형의 형태로 묶을 때, 8칸의 수의 합이 192가 되도록 하려고 한다. 이때 묶인 칸에서 가장 큰 수의 칸은 며칠인지 구하시오. 29일

일	월	화	수	목	금	토
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

묶인 8칸 중 윗 줄의 맨 왼쪽의 수를 x라고 하면 8칸의 수는 다음과 같다.

x	$x+1$	$x+2$	$x+3$
$x+7$	$x+8$	$x+9$	$x+10$

·································· 40 %

$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+7)+(x+8)+(x+9)+(x+10)=192$이므로

$8x+40=192$, $8x=152$　　$\therefore x=19$ ·································· 40 %

따라서 묶인 칸에서 가장 큰 수는 $x+10=19+10=29$이므로 29일이다. ·········· 20 %

상품의 원가를 x원이라고 하면 정가는 $x+\frac{40}{100}x=\frac{7}{5}x$(원)

창립기념일을 맞아 정가에서 10 %를 할인한 가격에 추가로 1000원 할인 쿠폰까지 적용하여 판매한 가격은

$\frac{7}{5}x\left(1-\frac{10}{100}\right)-1000=\frac{63}{50}x-1000$(원)

07

어느 상품은 원가에 40 %의 이익을 붙여서 정가를 정한다. 창립기념일을 맞아 정가에서 10 %를 할인한 가격에 추가로 1000원 할인 쿠폰까지 적용하여 판매하였더니 원가의 6 %에 해당하는 이익을 얻었을 때, 이 상품의 정가는 얼마인지 구하시오. **7000원**

이때 이익이 원가의 6 %이므로

$\left(\frac{63}{50}x-1000\right)-x=\frac{6}{100}x$, $\frac{1}{5}x=1000$ $\quad\therefore x=5000$

따라서 이 상품의 정가는 $\frac{7}{5}\times5000=7000$(원)이다.

상품의 원가를 x원이라고 하면 정가는 $x+\frac{50}{100}x=\frac{3}{2}x$(원)

정가에서 20 % 할인한 판매 가격은 $\frac{3}{2}x\left(1-\frac{20}{100}\right)=\frac{6}{5}x$(원)이므로 이때의 이익은

$\frac{6}{5}x-x=\frac{1}{5}x$(원)

08

어느 상품은 원가에 50 %의 이익을 붙여서 정가를 정한다. 이 상품을 정가에서 20 %를 할인하여 20개를 판매했을 때의 총이익은 정가에서 500원을 할인하여 24개를 판매했을 때의 총이익과 같다고 한다. 이 상품의 원가는?

✓① 1500원 ② 2000원 ③ 2500원
④ 3000원 ⑤ 3500원

20개를 판매했을 때의 총이익은 $20\times\frac{1}{5}x=4x$(원) ……㉠

또, 정가에서 500원을 할인한 판매 가격은 $\left(\frac{3}{2}x-500\right)$원이므로 이때의 이익은

$\left(\frac{3}{2}x-500\right)-x=\frac{1}{2}x-500$(원)

24개를 판매했을 때의 총이익은 $24\left(\frac{1}{2}x-500\right)=12x-12000$(원) ……㉡

㉠, ㉡이 같아야 하므로 $4x=12x-12000$, $8x=12000$ $\quad\therefore x=1500$

09

어느 학교 축제의 음식 부스에서 햄버거와 음료수를 판매한다. 햄버거는 한 개에 4000원, 음료수는 한 캔에 2000원이고 햄버거와 음료수를 모두 구매하는 사람에게는 합계 금액의 10 %를 할인해 준다고 한다. 축제 첫날 음식 부스를 이용한 학생은 45명이었고 총매출은 205200원이었다. 음료수를 구매한 학생 수는 햄버거를 구매한 학생 수보다 3명 적다고 할 때, 햄버거만 구매한 학생 수는? (단, 아무것도 구매하지 않은 학생은 없으며, 각 메뉴는 1개씩만 구매 가능하다.)

① 6 ② 8 ✓③ 10
④ 12 ⑤ 14

햄버거를 구매한 학생 수를 x라고 하면 음료수를 구매한 학생 수는 $x-3$이므로
햄버거만 구매한 학생은 $45-(x-3)=48-x$
음료수만 구매한 학생은 $45-x$
두 개 모두 구매한 학생은 $x-(48-x)=2x-48$
두 개를 모두 구매할 때의 판매 가격은 $(4000+2000)\times\left(1-\frac{10}{100}\right)=5400$(원)
총매출이 205200원이므로 $4000(48-x)+2000(45-x)+5400(2x-48)=205200$
$20(48-x)+10(45-x)+27(2x-48)=1026$
$960-20x+450-10x+54x-1296=1026$, $24x=912$ $\quad\therefore x=38$
따라서 햄버거를 구매한 학생 수는 38이므로 햄버거만 구매한 학생 수는 $48-38=10$

10

어느 중학교에서 축제 홍보 포스터를 인쇄하기 위해 인쇄소를 선정하려고 한다. 두 인쇄소 A, B의 요금은 다음과 같다.

인쇄소 A: 기본 요금은 25000원이고 1장당 인쇄비는 20원이다.
인쇄소 B: 기본 요금은 10000원이고 400장까지의 1장당 인쇄비는 50원, 400장을 초과하면 초과한 장수에 대하여 1장당 40 %를 할인해 준다.

두 인쇄소 A, B에 맡길 때의 총비용이 서로 같아지는 인쇄 매수를 구하시오. **700**

인쇄 매수를 x라고 하면 인쇄소 A에 맡길 때의 총비용은 $25000+20x$(원)
인쇄소 B에 맡길 때의 총비용은
$10000+50\times400+30(x-400)=30000+30(x-400)$(원)
따라서 두 인쇄소 A, B에 맡길 때의 총비용이 서로 같아지는 인쇄 매수는
$25000+20x=30000+30(x-400)$
$25000+20x=30000+30x-12000$, $10x=7000$ $\quad\therefore x=700$

작년의 여학생 수를 x라고 하면 작년의 남학생 수는 $x-60$

올해의 남학생 수는 작년보다 20 % 증가했으므로 $\frac{20}{100}(x-60)=\frac{1}{5}x-12$

11 서술형

어느 동아리의 작년의 남학생 수는 여학생 수보다 60이 적었다. 올해의 남학생 수는 작년보다 20 % 증가하고 여학생 수는 10 % 감소하여 전체 학생 수는 작년보다 6만큼 증가했다고 할 때, 올해의 여학생 수를 구하시오. **162**

올해의 여학생 수는 작년보다 10 % 감소했으므로 $\frac{10}{100}x=\frac{1}{10}x$ ……………… 40 %

이때 올해 증가된 전체 학생 수는 6이므로 $\left(\frac{1}{5}x-12\right)-\frac{1}{10}x=6$

$10\left(\frac{1}{5}x-12\right)-x=60$, $2x-120-x=60$

$\therefore x=180$

즉, 작년의 여학생 수는 180이다. ……………………………………… 40 %

따라서 올해의 여학생 수는 $180-\frac{1}{10}\times180=180-18=162$ ……………… 20 %

작년의 남학생 수를 x라고 하면 작년의 여학생 수는 $500-x$

올해의 남학생 수는 $x\left(1-\frac{5}{100}\right)=\frac{19}{20}x$

12

어느 중학교의 작년 전체 학생 수는 500이었다. 올해 남학생 수는 작년보다 5 % 감소하였고, 여학생 수는 10 % 증가하였다. 또, 내년에 입학 예정인 남학생 수는 올해 남학생 수보다 10 % 감소하였고 여학생 수는 올해와 같다. 내년에 입학 예정인 전체 학생 수가 501일 때, 내년에 입학 예정인 남학생 수를 구하시오. **171**

올해의 여학생 수는 $(500-x)\left(1+\frac{10}{100}\right)=\frac{11}{10}(500-x)$

또, 내년에 입학 예정인 남학생 수는 $\frac{19}{20}x\left(1-\frac{10}{100}\right)=\frac{171}{200}x$

내년에 입학 예정인 여학생 수는 $\frac{11}{10}(500-x)$

내년에 입학 예정인 전체 학생 수는 501이므로

$\frac{171}{200}x+\frac{11}{10}(500-x)=501$, $171x+220(500-x)=100200$

$171x+110000-220x=100200$, $49x=9800$ $\quad\therefore x=200$

따라서 작년의 남학생 수는 200이므로 내년에 입학 예정인 남학생 수는

$\frac{171}{200}x=\frac{171}{200}\times200=171$

13 출제 주의

어느 회의에 참가한 학생들이 원형 탁자에 앉으려고 한다. 한 탁자에 6명씩 앉으면 8명의 학생이 앉지 못하고, 한 탁자에 7명씩 앉으면 탁자가 2개 남고 마지막 탁자에는 자리가 3개 남는다고 한다. 이때 회의에 참가한 학생 수를 구하시오. **158**

탁자의 개수를 x라고 하면 한 탁자에 6명씩 앉으면 8명의 학생이 앉지 못하므로 회의에 참가한 학생 수는 $6x+8$

또, 한 탁자에 7명씩 앉으면 탁자가 2개 남고 마지막 탁자에는 자리가 3개 남으므로 회의에 참가한 학생 수는 $7(x-3)+4$

한 탁자에 6명씩 앉을 때와 한 탁자에 7명씩 앉을 때의 학생 수는 같으므로

$6x+8=7(x-3)+4$

$6x+8=7x-21+4 \qquad \therefore x=25$

따라서 탁자의 개수는 25이므로 회의에 참가한 학생 수는

$6x+8=6\times25+8=158$

14

지후는 마트에서 한 종류의 과자를 사려고 한다. 과자를 5개 사면 500원이 할인되고, 1개 더 살 때마다 할인받는 금액이 100원씩 늘어난다고 한다. 지후가 가진 돈으로 과자를 7개 사면 300원이 부족하고, 과자를 5개 사면 700원이 남는다. 지후가 가진 돈으로 과자를 6개 사면 어떻게 되는가?

① 180원이 부족하다. ② 180원이 남는다.
③ 200원이 부족하다. ✓④ 200원이 남는다.
⑤ 220원이 부족하다.

과자 1개의 정가를 x원이라고 하자.

과자를 7개 살 때 지불해야 하는 금액은 $7x-700$(원)

과자를 5개 살 때 지불해야 하는 금액은 $5x-500$(원)

이때 지후가 과자를 7개 사면 300원이 부족하고, 5개를 사면 700원이 남으므로

$(7x-700)-300=(5x-500)+700$

$7x-1000=5x+200,\ 2x=1200 \qquad \therefore x=600$

따라서 과자 1개의 정가는 600원이므로 지후가 가진 돈은

$5x+200=5\times600+200=3200$(원)

따라서 과자를 6개 사면 $6x-600=6\times600-600=3000$(원)을 지불해야 하므로 지후는 가진 돈에서 $3200-3000=200$(원)이 남는다.

15

한별이는 가지고 있던 마카롱의 $\frac{1}{6}$을 아버지께, $\frac{1}{8}$을 어머니께, $\frac{1}{12}$을 누나에게 주고, 친구에게 10개를 주었다. 그 후 남은 마카롱의 개수가 아버지와 어머니께 드린 마카롱의 개수의 합보다 6개 더 많았다고 할 때, 한별이가 처음에 가지고 있던 마카롱의 개수를 구하시오. **48**

한별이가 처음에 가지고 있던 마카롱의 개수를 x라고 하면 한별이는 아버지께 $\frac{1}{6}x$개, 어머니께 $\frac{1}{8}x$개, 누나에게 $\frac{1}{12}x$개, 친구에게 10개를 주었으므로 남은 마카롱의 개수는

$x-\frac{1}{6}x-\frac{1}{8}x-\frac{1}{12}x-10=\frac{5}{8}x-10$

이때 남은 마카롱의 개수는 아버지와 어머니께 드린 마카롱의 개수의 합보다 6개 더 많으므로

$\frac{5}{8}x-10=\frac{1}{6}x+\frac{1}{8}x+6$

$\frac{1}{3}x=16 \qquad \therefore x=48$

처음의 전체 성과금을 x만 원이라고 하면 기획팀이 처음에 받은 성과금은 $\frac{1}{5}x+20$(만 원)

기획팀에 성과금을 주고 남은 금액은 $x-\left(\frac{1}{5}x+20\right)=\frac{4}{5}x-20$(만 원)

개발팀이 받은 성과금은 $\frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}x-20\right)+10=\frac{1}{5}x+5$(만 원)

마지막으로 남은 금액은 $\left(\frac{4}{5}x-20\right)-\left(\frac{1}{5}x+5\right)=\frac{3}{5}x-25$(만 원)

16

어느 기업에서 프로젝트 성과금을 기획팀과 개발팀에 나누어 주려고 한다. 기획팀에 전체 성과금의 $\frac{1}{5}$보다 20만 원을 더 주고, 개발팀에는 남은 금액의 $\frac{1}{4}$보다 10만 원을 더 주었다. 마지막으로 남은 금액을 모두 기획팀에 추가로 주었다. 기획팀이 받은 총 성과금이 개발팀이 받은 금액의 3배가 되었다고 할 때, 기획팀이 받은 총 성과금은 얼마인가?

① 25만 원 ② 50만 원 ✓③ 75만 원
④ 80만 원 ⑤ 100만 원

마지막으로 기획팀이 받은 총 성과금은 $\left(\frac{1}{5}x+20\right)+\left(\frac{3}{5}x-25\right)=\frac{4}{5}x-5$(만 원)

$\frac{4}{5}x-5=3\left(\frac{1}{5}x+5\right)$이므로 $\frac{4}{5}x-5=\frac{3}{5}x+15,\ \frac{1}{5}x=20 \qquad \therefore x=100$

따라서 처음의 전체 성과금이 100만 원이므로 기획팀이 받은 총 성과금은

$\frac{4}{5}x-5=\frac{4}{5}\times100-5=75$(만 원)

17

어느 회사의 채용 시험에서 입사 지원자의 남녀의 비는 5 : 3, 합격자의 남녀의 비는 4 : 1, 불합격자의 남녀의 비는 1 : 1이다. 이때 여자 입사 지원자가 여자 합격자보다 140명이 더 많다고 할 때, 이 회사의 전체 입사 지원자 수는?

✓① 480 ② 485 ③ 490
④ 495 ⑤ 500

여자 합격자 수를 x라고 하면 남자 합격자 수는 $4x$이다.

여자 입사 지원자 수는 $x+140$이고 여자 불합격자 수는 140이고, 남자 불합격자 수도 140이다.

즉, 남자 지원자 수는 $4x+140$이므로

$(4x+140):(x+140)=5:3,\ 3(4x+140)=5(x+140)$

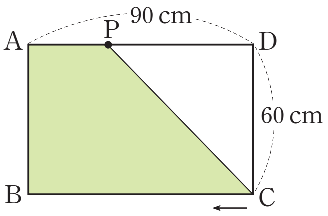
$12x+420=5x+700,\ 7x=280 \qquad \therefore x=40$

따라서 여자 합격자 수는 40이므로 전체 입사 지원자 수는

$(4x+140)+(x+140)=5x+280=5\times40+280=480$

18 서술형

오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 90 cm, 세로의 길이가 60 cm인 직사각형 ABCD가 있다. 점 P가 점 C에서 출발하여 점 B, A를 차례대로 지나 점 D까지 변을 따라 가는 데 점 C에서 점 A까지는 매초 3 cm의 속력으로 움직이고, 점 A에서 점 D까지는 매초 2 cm의 속력으로 움직인다. 점 P가 변 AD 위에 있고 사각형 ABCP의 넓이가 3300 cm^2일 때, 점 P가 움직인 시간은 몇 초인지 구하시오. **60초**

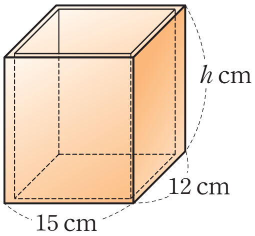


선분 AP의 길이를 x cm라고 하면 $\frac{1}{2}\times(x+90)\times60=3300$

$30(x+90)=3300,\ x+90=110 \qquad \therefore x=20$ ································· 50 %

따라서 점 P가 움직인 시간은 $\frac{90}{3}+\frac{60}{3}+\frac{20}{2}=30+20+10=60$(초) ·········· 50 %

19



오른쪽 그림과 같이 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 물통의 바깥쪽 가로의 길이는 15 cm, 세로의 길이는 12 cm, 높이는 h cm이고 물통의 두께는 1 cm이다. 물통에 물을 가득 채운 뒤 물을 325 cm^3 만큼 덜어냈더니 남아 있는 물의 높이가 14 cm가 되었을 때, h의 값을 구하시오. **17.5**

물통의 내부 공간의 가로의 길이는 13 cm, 세로의 길이는 10 cm이고 높이는 $(h-1)$ cm이다.
이때 물통에 물을 가득 채운 뒤 물을 325 cm^3만큼 덜어낸 후 남아 있는 물의 높이가 14 cm이므로
$13\times10\times\{(h-1)-14\}=325$
$h-15=\frac{5}{2}\qquad\therefore\ h=\frac{35}{2}=17.5$

20 서술형

어느 수영장의 물을 전부 퍼낼 때 양수기 A를 사용하면 12시간이 걸리고 양수기 B를 사용하면 6시간이 걸린다. 오늘의 작업 일지가 다음과 같을 때, 양수기 B를 추가로 사용하기 시작한 시각을 구하시오. **오후 1시 48분**

> 오전 9시부터 양수기 A만 사용하여 물을 퍼내기 시작하고 도중에 양수기 B를 함께 사용하였다.
> 양수기 B를 추가한 뒤부터 작업이 끝날 때까지 걸린 시간은 양수기 A만 사용한 시간의 $\frac{1}{2}$이었다.

수영장의 물 전체의 양을 1이라고 하면 두 양수기 A, B가 1시간 동안 퍼내는 물의 양은 각각 $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$이다. 양수기 A만 사용한 시간을 x시간이라고 하면 두 양수기 A, B를 함께 사용한 시간은 $\frac{1}{2}x$시간이다. ······························ 40 %
$\frac{1}{12}x+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{2}x=1$에서 $\frac{5}{24}x=1\qquad\therefore\ x=\frac{24}{5}$ ······················ 50 %
따라서 양수기 A만 사용한 시간은 $\frac{24}{5}$시간, 즉 4시간 48분이므로 양수기 B를 추가로 사용하기 시작한 시각은 오전 9시에서 4시간 48분 후인 오후 1시 48분이다. ······· 10 %

21

어느 일을 혼자 하면 주윤이는 10일, 민아는 15일, 나연이는 30일이 걸린다. 세 명이 다음과 같이 일을 하였을 때, 민아가 혼자 일을 한 기간을 구하시오. **4일**

> 주윤이가 혼자 일을 하고, 이어서 민아가 혼자 주윤이가 혼자 일을 한 날의 $\frac{3}{2}$배보다 1일 더 많이 일을 하였다. 이어서 주윤이와 나연이가 함께 3일 일을 하고 마지막으로 나연이가 혼자 4일 일을 하여 일을 모두 끝냈다.

전체 일의 양을 1이라고 하면 주윤, 민아, 나연이가 하루에 할 수 있는 일의 양은 각각 $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{30}$이다. 주윤이가 혼자 t일 일했다고 하면 민아는 $\left(\frac{3}{2}t+1\right)$일 일을 하였으므로
$\frac{1}{10}t+\frac{1}{15}\left(\frac{3}{2}t+1\right)+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{30}\right)\times3+\frac{1}{30}\times4=1,\ \frac{2}{10}t=\frac{2}{5}\qquad\therefore\ t=2$
따라서 주윤이가 혼자 2일 일을 하였으므로 민아가 혼자 일한 기간은
$\frac{3}{2}t+1=\frac{3}{2}\times2+1=4$(일)이다.

22

어느 프로젝트를 완성하는 데 기획자 A가 혼자 하면 20일, 기획자 B가 혼자 하면 30일이 걸린다. 처음에 두 사람이 함께 일을 시작했으나 도중에 기획자 A가 며칠 동안 휴가를 다녀왔다. 기획자 A가 돌아온 후 다시 둘이 함께 작업하여 마무리를 지었고, 프로젝트를 완성하는 데 15일이 걸렸다. 기획자 A가 쉬는 동안 기획자 B는 쉬지 않고 계속 일했을 때, 기획자 A는 며칠 동안 휴가를 다녀왔는지 구하시오. **5일**

전체 프로젝트의 양을 1이라고 하면 두 기획자 A, B가 하루에 할 수 있는 일의 양은 각각 $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$이다.
기획자 A가 휴가를 t일 동안 다녀왔다고 하면 기획자 A는 $(15-t)$일, 기획자 B는 15일 일을 하였으므로
$\frac{1}{20}(15-t)+\frac{1}{30}\times15=1$
$\frac{3}{4}-\frac{1}{20}t+\frac{1}{2}=1,\ \frac{1}{20}t=\frac{1}{4}$
$\therefore\ t=5$

23

어느 문서를 동하 혼자 입력하면 12분, 혜지 혼자 입력하면 18분이 걸린다. 동하가 먼저 입력을 시작했고 얼마 후 혜지가 함께 입력했다. 두 사람이 동시에 입력하면 서로 방해가 생겨 입력하는 속도가 각각 속도의 합의 90 %가 된다고 한다. 두 사람은 같은 시각에 작업을 끝냈고, 동하가 입력한 시간은 총 10분이었다. 이때 혜지가 입력한 시간을 구하시오. **4분**

전체 문서의 양을 1이라고 하면 동하와 혜지가 1분 동안 입력하는 문서의 양은 각각 $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{18}$이다. 두 사람이 함께 입력할 때의 문서 입력 속도는
$\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{18}\right)\times\frac{90}{100}=\frac{1}{8}$
이때 혜지가 x분 동안 입력했다고 하면 동하는 $(10-x)$분 동안 혼자 입력했으므로
$\frac{1}{12}(10-x)+\frac{1}{8}x=1$
$\frac{5}{6}-\frac{1}{12}x+\frac{1}{8}x=1,\ \frac{1}{24}x=\frac{1}{6}\qquad\therefore\ x=4$

24

빈 물통에 물을 가득 채우는 데 호스 A는 6시간, 호스 B는 9시간이 걸리고 바닥의 배수관 C는 가득 찬 물을 다 빼내는 데 12시간이 걸린다. 물통에 물을 채우기 위해 두 호스 A, B를 동시에 작동시켰는데 처음 얼마 동안 배수관 C가 열려 있었다. 나중에 이를 발견하고 배수관 C를 닫았더니 물통을 가득 채우는 데 총 4시간이 걸렸다. 이때 배수관 C가 몇 분 동안 열려 있었는지 구하시오. **80분**

전체 물통의 양을 1이라고 하면 두 호스 A, B가 1시간 동안 물을 채우는 양은 각각 $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$이고 배수관 C가 1시간 동안 물을 빼내는 양은 $\frac{1}{12}$이다. 배수관 C가 열려 있을 때 두 호스 A, B가 함께 물을 채우는 속도는 $\frac{1}{6}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}=\frac{7}{36}$
배수관 C가 닫혀 있을 때 두 호스 A, B가 함께 물을 채우는 속도는 $\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{5}{18}$
이때 배수관 C가 x시간 동안 열려 있었다고 하면
$\frac{7}{36}x+\frac{5}{18}(4-x)=1$
$\frac{7}{36}x+\frac{10}{9}-\frac{5}{18}x=1,\ \frac{1}{12}x=\frac{1}{9}\qquad\therefore\ x=\frac{4}{3}$
따라서 배수관 C는 $\frac{4}{3}$시간, 즉 80분 동안 열려 있었다.

25

6 %의 소금물과 12 %의 소금물을 섞은 후 물 50 g을 더 넣어서 8 %의 소금물을 만들었다. 이때 섞은 6 %의 소금물의 양이 12 %의 소금물의 양보다 100 g 더 많았다고 할 때, 12 %의 소금물의 양은 얼마인지 구하시오. **300 g**

12 %의 소금물의 양을 x g이라고 하면 6 %의 소금물의 양은 $(x+100)$ g
6 %의 소금물과 12 %의 소금물을 섞은 후 물 50 g을 더 넣어서 8 %의 소금물을 만들었으므로 $\frac{6}{100}(x+100)+\frac{12}{100}x=\frac{8}{100}(x+100+x+50)$
$6(x+100)+12x=8(2x+150)$
$6x+600+12x=16x+1200$
$2x=600 \qquad \therefore x=300$

26

x %의 소금물 400 g이 들어 있는 비커로 다음과 같은 실험을 진행하였다.

❶ 비커를 가열하여 소금물의 전체 질량의 20 %의 물을 증발시켰다.
❷ 소금 40 g을 더 넣어 완전히 녹였다.
❸ 물 40 g을 더 부었다.

위의 실험을 한 후, 최종 소금물의 농도가 처음 소금물의 농도의 3배가 되었을 때, x의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
✓④ 5 ⑤ 6

x %의 소금물 400 g에 들어 있는 소금의 양은 $\frac{x}{100}\times400=4x$ (g)
❶에서 물을 증발시켜 전체 질량이 20 % 감소되었으므로 남은 소금물의 양은
$400\times\left(1-\frac{20}{100}\right)=320$ (g)
❷에서 소금 40 g을 더 넣었으므로
소금물의 양은 $320+40=360$ (g), 소금의 양은 $4x+40$ (g)
❸에서 물 40 g을 더 부었으므로 최종 소금물의 양은 $360+40=400$ (g)
이때 최종 소금물의 농도는 처음 소금물의 농도의 3배인 $3x$ %가 되었으므로
$4x+40=\frac{3x}{100}\times400$, $4x+40=12x$, $8x=40 \qquad \therefore x=5$

27

15 %의 소금물 600 g이 들어 있는 비커 A에서 x g의 소금물을 덜어내고 5 %의 소금물 x g을 넣었다. 그 후 10 %의 소금물 400 g이 들어 있는 비커 B로 비커 A에 담긴 소금물을 모두 넣었더니 11 %의 소금물이 되었다고 한다. 이때 x의 값을 구하시오. **200**

비커 A에 처음 들어 있는 소금의 양은 $\frac{15}{100}\times600=90$ (g)
비커 A에서 x g의 소금물을 덜어내고 5 %의 소금물 x g을 넣었을 때, 비커 A에 들어 있는 소금의 양은 $\left(90-\frac{15}{100}x\right)+\frac{5}{100}x=90-\frac{1}{10}x$ (g)
10 %의 소금물 400 g이 들어 있는 비커 B로 비커 A에 담긴 소금물 600 g을 모두 넣었더니 11 %의 소금물이 되었으므로
$\frac{10}{100}\times400+\left(90-\frac{1}{10}x\right)=\frac{11}{100}\times(400+600)$
$40+\left(90-\frac{1}{10}x\right)=110$, $\frac{1}{10}x=20 \qquad \therefore x=200$

❶에서 그릇 A에 남은 소금의 양은 $\frac{8}{100}\times300=24$ (g)
실험 전 그릇 B의 소금물의 농도를 x %라고 하면 ❶에서 그릇 B의 소금의 양은
$\frac{x}{100}\times500+\frac{8}{100}\times200=5x+16$ (g)
그릇 B의 소금물의 농도는 $\frac{5x+16}{700}\times100=\frac{5x+16}{7}$ (%)
❷에서 그릇 A로 옮겨진 소금의 양은 $\frac{5x+16}{7}\times\frac{1}{100}\times200=\frac{10x+32}{7}$ (g)

28 출제 주의

8 %의 소금물 500 g이 들어 있는 그릇 A와 농도를 알 수 없는 소금물 500 g이 들어 있는 그릇 B로 다음과 같은 실험을 진행하였다.

❶ 그릇 A의 소금물 200 g을 그릇 B에 넣고 섞었다.
❷ 그릇 B의 소금물 200 g을 다시 그릇 A에 넣고 섞었다.

실험이 모두 끝난 후 그릇 A가 10 %의 소금물이 되었다고 할 때, 실험 전 그릇 B의 소금물의 농도는 몇 %인가?

① 12 % ② 13 % ③ 14 %
✓④ 15 % ⑤ 16 %

실험이 모두 끝난 후 그릇 A의 소금물의 농도가 10 %가 되었고 소금물의 양은 500 g이므로 $24+\frac{10x+32}{7}=\frac{10}{100}\times500$
$24+\frac{10x+32}{7}=50$, $10x=150 \qquad \therefore x=15$

(i) 합금 A를 전부 사용하는 경우: 사용한 합금 A에 들어 있는 금의 양은
$540\times\frac{1}{3}=180$ (g), 은의 양은 $540\times\frac{2}{3}=360$ (g)이므로 합금 B의 양을 x g이라고 하면 $180+\frac{4}{5}x=360+\frac{1}{5}x$, $\frac{3}{5}x=180 \qquad \therefore x=300$

29

(ii) 합금 B를 전부 사용하는 경우: 사용한 합금 B에 들어 있는 금의 양은

어느 보석 세공사는 금과 은이 1 : 2의 비율로 섞여 있는 합금 A를 540 g, 금과 은이 4 : 1의 비율로 섞여 있는 합금 B를 400 g 가지고 있다. 두 합금 A, B를 녹여서 금과 은이 1 : 1의 비율로 섞여 있는 합금 C를 가능한 한 많이 만들려고 할 때, 만들 수 있는 합금 C는 몇 g인가?

(단, 합금을 녹이는 과정에서 손실되는 양은 없다.)

① 780 g ② 800 g ③ 820 g
✓④ 840 g ⑤ 860 g

$400\times\frac{4}{5}=320$(g), 은의 양은 $400\times\frac{1}{5}=80$ (g)이므로 합금 A의 양을 y g이라고 하면 $\frac{1}{3}y+320=\frac{2}{3}y+80$, $\frac{1}{3}y=240 \qquad \therefore y=720$
이때 합금 A는 540 g만 가지고 있으므로 합금 B를 전부 사용하지 못한다.
(i), (ii)에 의하여 사용한 두 합금 A, B의 양은 540 g, 300 g이므로 만들 수 있는 합금 C는 $540+300=840$ (g)

30 서술형

재현이는 집에서 도서관까지 갈 때는 시속 4 km로 걷고, 도서관에서 집으로 올 때는 시속 10 km로 뛰었다. 도서관에서 집으로 오는 도중 편의점에서 6분 동안 머물렀음에도 집에서 도서관까지 걸어갔을 때 걸린 시간보다 9분 덜 걸렸다. 집과 도서관 사이의 거리를 구하시오. **$\frac{5}{3}$ km**

(단, 재현이는 갈 때와 올 때 모두 같은 길을 이용하였다.)

집과 도서관 사이의 거리를 x km라고 하면 집에서 도서관까지 걸어갔을 때 걸린 시간은 $\frac{x}{4}$시간, 도서관에서 집으로 뛰어왔을 때 걸린 시간은 $\frac{x}{10}$시간이다. ············ 40 %
$\frac{x}{4}-\left(\frac{x}{10}+\frac{6}{60}\right)=\frac{9}{60}$이므로
$\frac{3}{20}x=\frac{1}{4} \qquad \therefore x=\frac{5}{3}$ ···································· 60 %

선수 A가 자전거를 수리하는 데 걸린 시간을 x분이라고 하면 선수 A가 결승점까지 가는 데 걸린 시간은 $\frac{5000+600}{400}+x=14+x$(분)

선수 B가 결승점까지 가는 데 걸린 시간은 $\frac{5000}{200}=25$(분)

이때 선수 A는 선수 B보다 2분 먼저 결승점에 도착하였으므로

31

$14+x=25-2 \qquad \therefore x=9$

사이클 선수 A와 마라톤 선수 B가 경주를 한다. 선수 A는 선수 B보다 600 m 뒤에서 출발하고 두 선수가 동시에 출발한다. 결승점이 선수 B의 출발선으로부터 5 km 지점이고 선수 A의 속력은 분속 400 m, 선수 B의 속력은 분속 200 m이다. 선수 A는 출발 후 중간에 자전거 체인이 빠져 수리하고 다시 달렸는데 선수 B보다 2분 먼저 결승점에 도착하였다. 이때 선수 A가 자전거를 수리하는 데 걸린 시간은 몇 분인가?

① 8분　　✓② 9분　　③ 10분
④ 11분　　⑤ 12분

자동차 B가 출발하기 전까지 자동차 A가 달린 거리는 $60\times\frac{10}{60}=10\,(\text{km})$

자동차 B가 출발한 지 x시간 후에 자동차 A를 처음으로 따라 잡았다고 하면

$90x-60x=10,\ 30x=10 \qquad \therefore x=\frac{1}{3}$

즉, 자동차 B가 달린 거리는 $90x=90\times\frac{1}{3}=30\,(\text{km})$

32

따라서 자동차 B는 트랙을 총 $\frac{30}{4}=7.5$(바퀴) 돌았다.

트랙의 길이가 4 km인 원형의 자동차 주행 시험장이 있다. 이 트랙의 출발선에서 자동차 A가 시속 60 km로 먼저 출발하여 달리고 있었고, 자동차 A가 출발한 지 10분 후에 자동차 B가 같은 출발선에서 시속 90 km로 자동차 A와 같은 방향으로 달리기 시작했다. 자동차 B가 달린 거리가 자동차 A가 달린 거리와 같아질 때, 자동차 B는 트랙을 총 몇 바퀴 돌았는가?

① 7바퀴　　✓② 7.5바퀴　　③ 8바퀴
④ 8.5바퀴　　⑤ 9바퀴

로봇 α가 10분 동안 혼자 움직인 거리는 $10\times60=600\,(\text{m})$이므로 두 로봇 α, β 사이의 남은 거리는 $3300-600=2700\,(\text{m})$

두 로봇 α, β가 만날 때까지 걸린 시간을 x분이라고 하면

$60x+90x=2700,\ 150x=2700 \qquad \therefore x=18$

33

직선 도로 위에 3.3 km 떨어져 있는 두 지점 A, B가 있다. 로봇 α는 A 지점에서 출발하여 분속 60 m로 B 지점을 향해 가고, 로봇 β는 B 지점에서 출발하여 분속 90 m로 A 지점을 향해 마주 보고 간다. 로봇 α가 먼저 출발하고 10분 뒤에 로봇 β가 출발하였는데, 정찰 드론 한 대가 로봇 β와 동시에 B 지점에서 출발하여 분속 250 m로 두 지점 A, B 사이를 쉬지 않고 왕복해서 날아다니다가 두 로봇이 만나는 순간 멈췄다고 한다. 이 정찰 드론이 멈춘 순간 로봇 α와의 거리를 구하시오. **480 m**

따라서 두 로봇이 만날 때까지 걸린 시간이 18분이므로 로봇 α가 움직이는 거리는
$600+60\times18=1680\,(\text{m})$
이때 정찰 드론은 18분 날아다녔으므로 이동한 거리는 $250\times18=4500\,(\text{m})$
즉, 정찰 드론은 로봇 α가 출발한 지점으로부터 $4500-3300=1200\,(\text{m})$인 지점에 있으므로 로봇 α와 정찰 드론 사이의 거리는 $1680-1200=480\,(\text{m})$

34

서술형

어느 배가 강을 따라 A 지점에서 B 지점까지 갈 때 3시간이 걸렸다. 다시 B 지점에서 A 지점으로 가려고 하는데 배의 엔진에 문제가 생겨 배의 속력이 처음보다 20 % 줄어들어 5시간이 걸렸다. 강물은 A 지점에서 B 지점을 향해 시속 2 km로 흐른다고 할 때, 엔진에 문제가 생기기 전의 배의 원래 속력을 구하시오. **시속 16 km**

배의 원래 속력을 시속 x km라고 하면
(A 지점에서 B 지점까지 갈 때의 배의 속력)=(배의 원래 속력)+(강물의 속력)
$=x+2\,(\text{km/시})$ ·················· 40 %
(B 지점에서 A 지점까지 갈 때의 배의 속력)
=(엔진에 문제가 생긴 배의 속력)−(강물의 속력)
$=\left(1-\frac{20}{100}\right)x-2=\frac{4}{5}x-2\,(\text{km/시})$ ································ 40 %
두 지점 A, B 사이의 거리는 같으므로
$3(x+2)=5\left(\frac{4}{5}x-2\right)$
$3x+6=4x-10 \qquad \therefore x=16$ ···································· 20 %

35

길이가 150 m인 기차가 일정한 속력으로 달리고 있다. 이 기차가 어떤 다리를 완전히 통과하는 데는 23초가 걸렸고, 이 다리 길이의 3배인 터널을 통과할 때에는 45초 동안 기차가 보이지 않았다고 한다. 이때 다리의 길이는 몇 m인지 구하시오. **425 m**

다리의 길이를 x m라고 하면 터널의 길이는 $3x$ m이다. 길이가 150 m인 기차가 길이가 x m인 다리를 완전히 통과하려면 $(x+150)$ m를 달려야 하고, 길이가 $3x$ m인 터널을 통과할 때 기차가 보이지 않는 동안 기차는 $(3x-150)$ m를 달려야 한다.
이때 기차의 속력은 일정하므로 $\frac{x+150}{23}=\frac{3x-150}{45}$
$45(x+150)=23(3x-150)$
$45x+6750=69x-3450$
$24x=10200$
$\therefore x=425$

36

길이가 400 m인 터널을 완전히 통과하는 데 16초가 걸리는 열차 A와 초속 20 m로 달리는 길이가 120 m인 열차 B가 있다. 열차 A와 열차 B가 서로 반대 방향으로 달려서 두 열차가 서로를 완전히 통과하는 데 4초가 걸린다고 할 때, 열차 A의 길이는 몇 m인가?

① 60 m　　② 70 m　　✓③ 80 m
④ 90 m　　⑤ 100 m

열차 A의 길이를 x m라고 하면 열차 A의 속력은 $\frac{400+x}{16}$ m/초
두 열차 A, B가 서로 반대 방향으로 달려 완전히 지나치려면 두 열차의 길이의 합이 두 열차가 움직인 거리의 합과 같아야 하므로
$x+120=4\times\frac{400+x}{16}+4\times20$
$x+120=100+\frac{1}{4}x+80,\ \frac{3}{4}x=60$
$\therefore x=80$

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

대표 문제

길이가 같은 두 양초 A, B에 대하여 양초 A는 모두 타는 데 4시간이 걸리고, 양초 B는 모두 타는 데 3시간이 걸린다. 어느 날 두 양초에 동시에 불을 붙였는데 도중에 창문 틈으로 들어온 바람 때문에 양초 B가 꺼졌다. 이를 발견하고 양초 B에 다시 불을 붙였고, 그 후로 두 양초는 계속 타올랐다. 양초 B가 도중에 꺼진 시간은 30분이고, 이후 두 양초의 불을 다 껐을 때 두 양초의 남은 길이는 양초 A의 길이가 양초 B의 길이의 2배라고 한다. 이때 양초 A에 불이 붙어 있던 시간을 구하시오.

함께 풀기

STEP 1

주어진 조건과 구해야 하는 것 확인하기

1. 주어진 조건: ① 양초 A는 모두 타는 데 4시간, 양초 B는 모두 타는 데 3시간이 걸린다.
   ② 양초 B가 도중에 30분 동안 불이 꺼졌다.
   ③ 불을 껐을 때 남은 길이는 양초 A의 길이가 양초 B의 길이의 2배이다.
2. 구해야 하는 것: 양초 A에 불이 붙어 있던 시간

STEP 2

양초 B에 불이 붙어 있던 시간을 x를 사용한 식으로 나타내기

양초 A에 불이 붙어 있던 시간을 x시간이라고 하면 양초 B는 $\left(x-\frac{1}{2}\right)$시간 동안 불이 붙어 있었다.

STEP 3

두 양초 A, B의 남은 길이를 x를 사용한 식으로 나타내기

처음 양초의 길이를 1이라고 하면 1시간 동안 줄어든 두 양초 A, B의 길이는 각각 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$이므로

(양초 A의 남은 길이)$=1-\frac{1}{4}x$

(양초 B의 남은 길이)$=1-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}-\frac{1}{3}x$

STEP 4

두 양초 A, B의 남은 길이를 이용하여 방정식 세우기

양초 A의 남은 길이가 양초 B의 남은 길이의 2배이므로

$1-\frac{1}{4}x=2\left(\frac{7}{6}-\frac{1}{3}x\right)$

$1-\frac{1}{4}x=\frac{7}{3}-\frac{2}{3}x$

STEP 5

양초 A에 불이 붙어 있던 시간 구하기

양변에 12를 곱하면

$12-3x=28-8x$, $5x=16$

$\therefore x=\frac{16}{5}$

따라서 양초 A에 불이 붙어 있던 시간은 $\frac{16}{5}$시간, 즉 3시간 12분이다.

답 3시간 12분

01 절댓값이 4인 음수 x와 $y=-1$에 대하여 다음 식의 값을 구하시오. (단, n은 자연수이다.) -7

$$\frac{-(-x)^2y^{2n}}{|-x|}+y^{n(n+1)+1}\times\frac{16y^{2n+1}}{x^2}-\left(\frac{x}{2y^n}\right)^2$$

절댓값이 4인 음수는 -4이므로 $x=-4$

n이 홀수일 때, $2n$은 짝수, $n(n+1)+1$은 홀수, $2n+1$은 홀수이다.

따라서 주어진 식은

$$\frac{-\{-(-4)\}^2\times(-1)^{2n}}{|-(-4)|}+(-1)^{n(n+1)+1}\times\frac{16\times(-1)^{2n+1}}{(-4)^2}-\left\{\frac{-4}{2\times(-1)^n}\right\}^2=\frac{-4^2}{4}+(-1)\times\frac{16\times(-1)}{16}-\left\{\frac{-4}{2\times(-1)}\right\}^2$$
$$=-4+(-1)\times(-1)-2^2$$
$$=-4+1-4=-7$$

n이 짝수일 때, $2n$은 짝수, $n(n+1)+1$은 홀수, $2n+1$은 홀수이다.

즉, n이 홀수일 때와 주어진 식의 값이 같다.

따라서 구하는 값은 -7이다.

02 x의 계수가 a이고 상수항이 b인 x에 대한 일차식 P에 대하여 $x=k$일 때의 식 P의 값을 P_k라고 하자. 다음 등식이 성립할 때, a의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이고 $a\neq0$이다.) 5

$$P_1-P_2+P_3-P_4+\cdots+P_{49}-P_{50}=-125$$

$P=ax+b$라고 하면 $P_k=ak+b$

$P_1=a\times1+b=a+b$

$P_2=a\times2+b=2a+b$

$\therefore\ P_1-P_2=(a+b)-(2a+b)=-a$

이때

$P_{2n-1}-P_{2n}=\{a(2n-1)+b\}-(a\times2n+b)$

$=2an-a+b-2an-b=-a$

이므로 이웃한 두 항을 뺀 값은 항상 $-a$로 일정하다.

따라서 $P_1-P_2+P_3-P_4+\cdots+P_{49}-P_{50}=-125$에서

$(P_1-P_2)+(P_3-P_4)+\cdots+(P_{49}-P_{50})=-125$

$(-a)+(-a)+\cdots+(-a)=-125$

$-25a=-125$

$\therefore\ a=5$

03 방정식 $|x+3+|2x-1||=10$을 만족시키는 모든 x의 값의 합을 구하시오. $-\frac{10}{3}$

$|x+3+|2x-1||=10$에서

$x+3+|2x-1|=-10$ 또는 $x+3+|2x-1|=10$

(i) $x+3+|2x-1|=-10$일 때

$|2x-1|=-x-13$ ……㉠

$2x-1=x+13$ 또는 $2x-1=-x-13$

$\therefore\ x=14$ 또는 $x=-4$

$x=14$이면 $|2x-1|=|2\times14-1|=27$,

$-x-13=-14-13=-27$이므로 ㉠이 성립하지 않는다.

$x=-4$이면 $|2x-1|=|2\times(-4)-1|=9$,

$-x-13=-(-4)-13=-9$이므로 ㉠이 성립하지 않는다.

(ii) $x+3+|2x-1|=10$일 때

$|2x-1|=-x+7$ ……㉡

$2x-1=x-7$ 또는 $2x-1=-x+7$

$\therefore\ x=-6$ 또는 $x=\frac{8}{3}$

$x=-6$이면 $|2x-1|=|2\times(-6)-1|=13$,

$-x+7=-(-6)+7=13$이므로 ㉡이 성립한다.

$x=\frac{8}{3}$이면 $|2x-1|=\left|2\times\frac{8}{3}-1\right|=\frac{13}{3}$,

$-x+7=-\frac{8}{3}+7=\frac{13}{3}$이므로 ㉡이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=-6$, $x=\frac{8}{3}$이므로 그 합은

$-6+\frac{8}{3}=-\frac{10}{3}$

04 두 유리수 a, b에 대하여

$$a\text{◈}b=\begin{cases}2a-b & (a\ge b)\\ b-a & (a<b)\end{cases}$$

라고 할 때, x에 대한 방정식 $(x\text{◈}2)+(x\text{◈}5)=17$을 만족시키는 모든 유리수 x의 값의 합을 구하시오. 1

(ⅰ) $x<2$일 때
$x\text{◈}2=2-x$, $x\text{◈}5=5-x$이므로
$(x\text{◈}2)+(x\text{◈}5)=17$에서 $(2-x)+(5-x)=17$
$7-2x=17$, $-2x=10$ $\quad\therefore x=-5$
이때 $-5<2$이므로 성립한다.

(ⅱ) $2\le x<5$일 때
$x\text{◈}2=2x-2$, $x\text{◈}5=5-x$이므로
$(x\text{◈}2)+(x\text{◈}5)=17$에서 $(2x-2)+(5-x)=17$
$x+3=17$ $\quad\therefore x=14$
이때 14는 $2\le x<5$를 만족시키지 않으므로 해가 아니다.

(ⅲ) $x\ge5$일 때
$x\text{◈}2=2x-2$, $x\text{◈}5=2x-5$이므로
$(x\text{◈}2)+(x\text{◈}5)=17$에서 $(2x-2)+(2x-5)=17$
$4x-7=17$, $4x=24$
$\therefore x=6$
이때 $6\ge5$이므로 성립한다.

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 조건을 만족시키는 x의 값은 -5, 6이므로 구하는 합은
$(-5)+6=1$

05 다음 세 일차방정식에 대하여 방정식 ㈎의 해는 $x=n-1$, 방정식 ㈏의 해는 $x=n$, 방정식 ㈐의 해는 $x=n+1$일 때, $a+b+n$의 값을 구하시오. (단, a, b, n은 상수이다.) 11

㈎ $4(x-1)+x=3a+7$
㈏ $2(3x-1)-\{4(x+2)-b\}=7$
㈐ $1.5(x-1)=0.75(a+5)$

㈎에서 $4(x-1)+x=3a+7$
$4x-4+x=3a+7$, $5x=3a+11$ $\quad\therefore x=\frac{3a+11}{5}$
이때 ㈎의 해는 $x=n-1$이므로
$n-1=\frac{3a+11}{5}$ $\quad\therefore n=\frac{3a+16}{5}$ ……㉠
㈏에서 $2(3x-1)-\{4(x+2)-b\}=7$
$6x-2-(4x+8-b)=7$, $6x-2-4x-8+b=7$
$2x=17-b$ $\quad\therefore x=\frac{17-b}{2}$
이때 ㈏의 해는 $x=n$이므로 $n=\frac{17-b}{2}$ ……㉡
㈐에서 $1.5(x-1)=0.75(a+5)$
$6(x-1)=3(a+5)$, $6x-6=3a+15$
$6x=3a+21$ $\quad\therefore x=\frac{a+7}{2}$
이때 ㈐의 해는 $x=n+1$이므로
$n+1=\frac{a+7}{2}$ $\quad\therefore n=\frac{a+5}{2}$ ……㉢
㉠, ㉢에서 $\frac{3a+16}{5}=\frac{a+5}{2}$이므로
$2(3a+16)=5(a+5)$, $6a+32=5a+25$
$\therefore a=-7$
㉢에 $a=-7$을 대입하면
$n=\frac{-7+5}{2}=-1$
㉡에 $n=-1$을 대입하면
$-1=\frac{17-b}{2}$, $-2=17-b$ $\quad\therefore b=19$
$\therefore a+b+n=-7+19+(-1)=11$

06 0이 아닌 두 수 또는 두 식 A, B에 대하여

$$A\text{▣}B=2AB-A-B+1$$

이라고 하면 일차방정식 $\{3\text{▣}(x+1)\}\text{▣}2=(ax)\text{▣}b$의 해는 무수히 많다. 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오. 6

$3\text{▣}(x+1)=2\times3\times(x+1)-3-(x+1)+1$
$=6x+6-3-x-1+1$
$=5x+3$
$(5x+3)\text{▣}2=2(5x+3)\times2-(5x+3)-2+1$
$=20x+12-5x-3-1$
$=15x+8$
$(ax)\text{▣}b=2\times ax\times b-ax-b+1$
$=2abx-ax-b+1$
$=(2ab-a)x+(1-b)$
따라서 일차방정식 $\{3\text{▣}(x+1)\}\text{▣}2=(ax)\text{▣}b$에서
$15x+8=(2ab-a)x+(1-b)$
이 방정식의 해가 무수히 많으므로
$15=2ab-a$, $8=1-b$
$\therefore b=-7$
$15=2ab-a$에 $b=-7$을 대입하면
$15=2a\times(-7)-a$
$15=-15a$ $\quad\therefore a=-1$
$\therefore a-b=-1-(-7)=6$

07 어느 놀이공원 매표소에 사람들이 입장권을 사기 위해 줄을 서 있고, 매표소가 문을 연 뒤에도 매분 일정한 수의 대기자가 생긴다. 매표 창구를 5개 열면 줄이 완전히 사라지는 데 40분이 걸리고, 매표 창구를 8개 열면 줄이 완전히 사라지는 데 20분이 걸린다고 한다. 이때 대기했던 사람이 16분 이내에 모두 입장권을 구매하려면 매표 창구를 최소 몇 개 열어야 하는지 구하시오. **10개**

(단, 모든 매표 창구의 입장권 발권 속도는 동일하다.)

매표 창구 1개에서 1분 동안 판매된 입장권의 수를 k, 1분마다 새로 줄을 서는 인원수를 x, 처음 줄을 서 있던 인원수를 A라고 하자.
(40분 동안 판매된 입장권의 수)
=(처음 줄을 서 있던 인원 수)+(40분간 추가된 인원 수)
즉, $5\times k\times 40=A+40x$이므로
$A+40x=200k$ ……㉠
(20분 동안 판매된 입장권의 수)
=(처음 줄을 서 있던 인원수)+(20분간 추가된 인원수)
즉, $8\times k\times 20=A+20x$이므로
$A+20x=160k$ ……㉡
이때 $A=160k-20x$이므로 ㉠에 대입하면
$(160k-20x)+40x=200k$, $20x=40k$
$\therefore x=2k$
㉡에 $x=2k$를 대입하면
$A+20\times 2k=160k$, $A+40k=160k$ $\therefore A=120k$
16분 이내에 대기했던 사람들이 모두 입장권을 구매하기 위해 필요한 창구 수를 N이라고 하면
(16분 동안 판매된 입장권의 수)
=(처음 줄을 서 있던 인원수)+(16분간 추가된 인원수)
즉, $N\times k\times 16=120k+16\times 2k$이므로
$16Nk=120k+32k$
$\therefore N=9.5$
따라서 매표 창구가 9.5개 필요하고 N은 자연수이므로 매표 창구를 최소 10개 열어야 한다.

08 해나는 시계가 오후 4시 정각을 가리킬 때 집에서 학원으로 출발하였다. 학원에 도착하여 시계를 보니 분침이 시침을 추월하였고 분침과 시침이 이루는 각의 크기는 오후 4시 정각부터 현재까지 시침이 움직인 각의 크기와 같다고 한다. 해나가 학원에 도착한 시각을 구하시오. **오후 4시 24분**

구하는 시각을 오후 4시 x분이라고 하자.
분침은 1분에 6°씩, 시침은 1분에 0.5°씩 움직이므로 오후 4시 x분에 분침, 시침이 12시 방향으로부터 회전한 각도는 각각 $6x°$, $0.5x°$이다.
해나가 학원에 도착하였을 때 분침과 시침이 이루는 각의 크기는
$6x-(120+0.5x)=5.5x-120\ (°)$
이때 이 각의 크기가 오후 4시 정각부터 현재까지 시침이 움직인 각의 크기와 같으므로
$5.5x-120=0.5x$
$5x=120$ $\therefore x=24$
따라서 구하는 시각은 오후 4시 24분이다.

09 대형 물탱크에 물을 채우기 위해 두 급수관 A, B와 배수관 C가 설치되어 있다. 두 급수관 A, B를 모두 작동시켜 물을 채우면 가득 차는 데 12시간이 걸리고, 급수관 A와 배수관 C를 작동시켜 물을 채우면 가득 차는 데 20시간이 걸린다. 또 급수관 B와 배수관 C를 작동시켜 물을 채우면 가득 차는 데 60시간이 걸린다고 할 때, 처음에 물탱크가 비어 있는 상태에서 급수관 A, B를 동시에 작동시켜 3시간 동안 물을 채웠다. 그런데 실수로 3시간이 지난 시점부터 배수관 C가 급수관 A, B와 함께 작동되기 시작하였다고 할 때, 배수관 C가 작동된 이후 물탱크가 가득 찰 때까지 걸린 시간은 몇 시간인지 구하시오. **10시간**

전체 물의 양을 1이라 하고 두 급수관 A, B가 1시간 동안 채우는 물의 양을 각각 a, b, 배수관 C가 빼내는 물의 양을 c라고 하자.
두 급수관 A, B를 모두 작동시켜 물을 채우면 가득 차는 데 12시간이 걸리므로
$12(a+b)=1$ $\therefore a+b=\frac{1}{12}$ ……㉠
급수관 A와 배수관 C를 작동시켜 물을 채우면 가득 차는 데 20시간이 걸리므로
$20(a-c)=1$ $\therefore a-c=\frac{1}{20}$ ……㉡
급수관 B와 배수관 C를 작동시켜 물을 채우면 가득 차는 데 60시간이 걸리므로
$60(b-c)=1$ $\therefore b-c=\frac{1}{60}$ ……㉢
즉, ㉡, ㉢은 각각 $a=\frac{1}{20}+c$, $b=\frac{1}{60}+c$이므로
이를 ㉠에 대입하면
$\left(\frac{1}{20}+c\right)+\left(\frac{1}{60}+c\right)=\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}+2c=\frac{1}{12}$ $\therefore c=\frac{1}{120}$
㉡, ㉢에 $c=\frac{1}{120}$을 각각 대입하면
$a-\frac{1}{120}=\frac{1}{20}$, $b-\frac{1}{120}=\frac{1}{60}$ $\therefore a=\frac{7}{120}$, $b=\frac{1}{40}$
따라서 두 급수관 A, B를 동시에 작동시켜 3시간 동안 채운 물의 양은
$3\times(a+b)=3\times\left(\frac{7}{120}+\frac{1}{40}\right)=3\times\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$
배수관 C가 두 급수관 A, B와 함께 작동되기 시작하였을 때 시간당 물탱크에 물이 채워지는 양은
$(a+b)-c=\frac{1}{12}-\frac{1}{120}=\frac{3}{40}$
이므로 배수관 C가 작동된 이후 물탱크가 가득 찰 때까지 t시간이 걸린다고 하면
$\frac{1}{4}+\frac{3}{40}t=1$, $\frac{3}{40}t=\frac{3}{4}$ $\therefore t=10$

Lv. Master 실력을 완성하는 **대단원 평가**

_____ 점 / 100점

01

다음 중 기호 ×, ÷를 생략하여 나타낸 식으로 옳은 것은? [4점]

① $1\times b\times a=1ab$ $\rightarrow 1\times b\times a=ab$

② $x\times(-3)\times x=-3xx$ $\rightarrow x\times(-3)\times x=-3x^2$

③ $5\times(a-b)\div2=5+\frac{a-b}{2}$ $\rightarrow 5\times(a-b)\div2=\frac{5(a-b)}{2}$

④ $4\times x+(2\times y+1)\div3=\frac{4x+2y+1}{3}$

✓⑤ $x\div(-9)-x\div(6\times y)=-\frac{x}{9}-\frac{x}{6y}$

④ $4\times x+(2\times y+1)\div3=4x+(2y+1)\div3=4x+\frac{2y+1}{3}$

02

다음 보기에서 문자를 사용하여 나타낸 식으로 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

〈 보기 〉

ㄱ. 정가가 a원인 물건의 가격을 x % 올린 후, 다시 변경된 가격에서 x %를 할인하여 판매할 때의 가격은 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)$원이다.

ㄴ. 시속 4 km로 x분 동안 걸어간 거리는 $4x$ km이다.

ㄷ. 십의 자리의 숫자가 x, 일의 자리의 숫자가 y인 두 자리 자연수와 이 수의 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수의 합은 $11x+11y$이다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ

✓④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄴ. 시속 4 km로 x분$=\frac{x}{60}$시간 동안 걸어간 거리는 $4\times\frac{x}{60}=\frac{x}{15}$ (km)

ㄷ. 십의 자리의 숫자가 x, 일의 자리의 숫자가 y인 두 자리 자연수는 $10x+y$이고 이 수의 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수는 $10y+x$이므로 두 수의 합은 $(10x+y)+(10y+x)=11x+11y$

03

$x=\frac{1}{2}$, $y=-3$일 때, 다음 중 식의 값이 가장 큰 것은? [4점]

① $6xy$　② $2x-3y$　③ $4x\div\left(-\frac{1}{y}\right)$

④ $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}$　✓⑤ $\frac{3}{x}-2y$

① $6xy=6\times\frac{1}{2}\times(-3)=-9$　② $2x-3y=2\times\frac{1}{2}-3\times(-3)=10$

③ $4x\div\left(-\frac{1}{y}\right)=4\times\frac{1}{2}\div\left(-\frac{1}{-3}\right)=6$

④ $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}=1\div\frac{1}{2}+3\div(-3)=1$　⑤ $\frac{3}{x}-2y=3\div\frac{1}{2}-2\times(-3)=12$

04

$(-1)^3\times\frac{a-2b}{3}-(-1)^4\times\frac{a+3b}{2}$를 계산하면? [4점]

① $\frac{-5a-13b}{6}$　✓② $\frac{-5a-5b}{6}$　③ $\frac{-a-13b}{6}$

④ $\frac{-a-5b}{6}$　⑤ $\frac{a-5b}{6}$

$$\begin{aligned}(-1)^3\times\frac{a-2b}{3}-(-1)^4\times\frac{a+3b}{2}&=(-1)\times\frac{a-2b}{3}-1\times\frac{a+3b}{2}\\&=-\frac{a-2b}{3}-\frac{a+3b}{2}\\&=-\frac{2a-4b}{6}-\frac{3a+9b}{6}\\&=\frac{-2a+4b-3a-9b}{6}\\&=\frac{-5a-5b}{6}\end{aligned}$$

05

다음 중 등식의 개수는 a, 방정식의 개수는 b, 항등식의 개수는 c일 때, $a+b-c$의 값은? [4점]

$4x=4$, $x-2y+5$, $9-3>5$, $3x+7x=10x$
$2x+5=7$, $3x-3=3(x-1)$, $5x+6=11x$

① 0　② 3　✓③ 6

④ 8　⑤ 10

등식은 $4x=4$, $3x+7x=10x$, $2x+5=7$, $3x-3=3(x-1)$, $5x+6=11x$의 5개이므로 $a=5$

방정식은 $4x=4$, $2x+5=7$, $5x+6=11x$의 3개이므로 $b=3$

항등식은 $3x+7x=10x$, $3x-3=3(x-1)$의 2개이므로 $c=2$

$\therefore a+b-c=5+3-2=6$

06

다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (정답 2개) [4점]

✓① $ax=ay$이면 $x=y$이다.

② $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$이면 $bx=ay$이다.

③ $x=3y$이면 $x+a=3y+a$이다.

④ $4x-4=4(y+1)$이면 $x-1=y+1$이다.

✓⑤ $-\frac{x}{2}+5=5-y$이면 $x+3=-2y+3$이다.

① $a=0$, $x=2$, $y=3$이면 $0\times2=0\times3$이지만 $2\neq3$
즉, $a=0$이면 $ax=ay$이어도 $x\neq y$

⑤ $-\frac{x}{2}+5=5-y$의 양변에서 5를 빼면 $-\frac{x}{2}=-y$
양변에 -2를 곱하면 $x=2y$
양변에 3을 더하면 $x+3=2y+3$

$\frac{x-2}{2}-\frac{a+1}{3}=-1$에서 $3(x-2)-2(a+1)=-6$, $3x-6-2a-2=-6$

$3x=2a+2$　　$\therefore x=\frac{2a+2}{3}$

$\frac{x+a}{4}=x$에서 $x+a=4x$, $3x=a$　　$\therefore x=\frac{a}{3}$

이때 $\frac{2a+2}{3}=\frac{a}{3}\times\frac{3}{2}$이므로 $4a+4=3a$　　$\therefore a=-4$

07

일차방정식 $\frac{x-2}{2}-\frac{a+1}{3}=-1$의 해가 일차방정식 $\frac{x+a}{4}=x$의 해의 $\frac{3}{2}$배일 때, 상수 a의 값은? [4점]

✓① -4　② -3　③ -2

④ 3　⑤ 4

불합격자 중 남학생을 x명이라고 하면 $x:30=2:1$　　$\therefore x=60$

합격자 중 남학생, 여학생을 각각 $4a$명, $3a$명이라고 하면 $(4a+60):(3a+30)=5:3$

$3(4a+60)=5(3a+30)$, $3a=30$　　$\therefore a=10$

즉, 합격자 중 남학생, 여학생은 각각

$4\times10=40$(명), $3\times10=30$(명)이므로

입학 지원자 수는 $40+30+60+30=160$

08

어느 학교의 입학 시험에서 입학 지원자의 남녀의 비가 5∶3, 합격자의 남녀의 비가 4∶3, 불합격자의 남녀의 비가 2∶1이다. 불합격자 중 여학생은 30명일 때, 입학 지원자 수는? [4점]

① 150　✓② 160　③ 180

④ 200　⑤ 210

세 자리 자연수 x의 백의 자리의 숫자를 a, 십의 자리의 숫자를 b, 일의 자리의 숫자를 c라고 하면 $x=100a+10b+c$, $y=100c+10b+a$

이때 $x-y=297$이므로 $(100a+10b+c)-(100c+10b+a)=297$

$99a-99c=297$　　$\therefore a-c=3$

이때 x의 각 자리의 숫자의 합이 15이므로 $a+b+c=15$

(i) $a=4$, $c=1$일 때, $4+b+1=15$이므로 $b=10$

(ii) $a=5$, $c=2$일 때, $5+b+2=15$이므로 $b=8$

(iii) $a=6$, $c=3$일 때, $6+b+3=15$이므로 $b=6$

(iv) $a=7$, $c=4$일 때, $7+b+4=15$이므로 $b=4$

(v) $a=8$, $c=5$일 때, $8+b+5=15$이므로 $b=2$

(vi) $a=9$, $c=6$일 때, $9+b+6=15$이므로 $b=0$

09

어느 트랙터의 앞바퀴의 지름의 길이는 60 cm이고, 뒷바퀴의 지름의 길이는 90 cm이다. 이 트랙터가 일정한 거리를 달렸을 때, 앞바퀴가 뒷바퀴보다 50바퀴 더 회전했다고 한다. 이때 트랙터가 이동한 거리는?

(단, 원주율은 3으로 계산한다.) [4점]

✓① 270 m　② 280 m　③ 290 m

④ 300 m　⑤ 310 m

트랙터의 앞바퀴의 둘레의 길이는 $60\times3=180$ (cm),

뒷바퀴의 둘레의 길이는 $90\times3=270$ (cm)

뒷바퀴가 회전한 횟수를 x라고 하면 앞바퀴가 회전한 횟수는 $x+50$

두 바퀴가 굴러간 거리가 같으므로 $180(x+50)=270x$, $2(x+50)=3x$

$2x+100=3x$　　$\therefore x=100$

따라서 트랙터가 이동한 거리는 $270\times100=27000$ (cm) $=270$ (m)

왕이 처음에 가지고 있던 전체 금화의 개수를 x라고 하면 전사, 마법사, 궁수가 받은 금화의 개수는 각각 $\frac{1}{6}x$, $\frac{1}{4}x$, $4\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{6}x\right)$

통화 시간을 x초라고 하면 $x=200$일 때, 통화 요금은

$260+35\times\frac{200-40}{10}=820$(원)

$x>200$일 때, 통화 요금은 $820+45\times\frac{x-200}{10}=\frac{9}{2}x-80$(원)

10

다음과 같이 통화 요금이 청구된다고 한다. 승원이가 충전해 둔 금액인 6040원을 한 번 통화하여 다 썼다고 할 때, 얼마 동안 통화를 하였는가? [4점]

- 통화 처음 40초까지 기본 요금 260원
- 40초 초과부터 200초까지 10초마다 35원
- 200초 초과부터 10초마다 45원
- 통화 시간은 일의 자리에서 올림하여 10초 단위로 측정된다.

① 22분 20초　✓② 22분 40초　③ 23분

④ 23분 20초　⑤ 23분 40초

충전해 둔 금액을 모두 사용하려면 통화 요금이 6040원이어야 하므로

$\frac{9}{2}x-80=6040$, $\frac{9}{2}x=6120$　　$\therefore x=1360$

따라서 1360초, 즉 22분 40초 동안 통화를 하였다.

11

각 자리의 숫자가 모두 다른 세 자리 자연수 x가 있다. 이 자연수 x의 백의 자리 숫자와 일의 자리 숫자를 서로 바꾼 수를 y라고 하면 $x-y=297$이다. x의 각 자리의 숫자의 합이 15일 때, 이를 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은? [4점]

① 2312　✓② 2313　③ 2314

④ 2315　⑤ 2316

(i)~(vi)에 의하여 조건을 만족시키는 b의 값은 8, 2, 0이므로 자연수 x는 582, 825, 906

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은 $582+825+906=2313$

12

어느 왕이 왕국을 구한 용사들에게 보물 창고에 있는 금화를 다음과 같이 나누어 주려고 한다.

전사에게 전체 금화의 $\frac{1}{6}$을, 마법사에게 전체 금화의 $\frac{1}{4}$을 주었고 궁수에게 마법사와 전사에게 준 금화 개수의 차의 4배만큼을 주었다.

그리고 남은 금화의 절반은 성전 건립 기금으로 기부하였더니, 왕에게 남은 금화는 10개였다.

왕이 처음에 가지고 있던 전체 금화의 개수는? [4점]

① 75　✓② 80　③ 85

④ 90　⑤ 95

성전 건립 기금으로 기부한 금화는 남은 금화의 절반이고 왕에게 남은 금화의 개수와 같으므로

$\frac{1}{2}\left[x-\left\{\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}x+4\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{6}x\right)\right\}\right]=10$에서 $\frac{1}{8}x=10$　　$\therefore x=80$

13

어느 제품을 만드는 두 로봇 A, B에 대하여 로봇 A는 로봇 B보다 1분 동안 2개의 제품을 더 많이 만들고, 만든 제품 중 $\frac{1}{10}$은 불량품이다. 로봇 A를 50분 동안 투입하여 만들 수 있는 정상 제품과 로봇 B를 1시간 동안 투입하여 만들 수 있는 제품의 개수가 같을 때, 로봇 A를 1시간 30분 동안 투입하여 만들 수 있는 정상 제품의 개수는?

(단, 로봇 B는 불량품을 만들지 않는다.) [4점]

① 576 ② 600 ③ 624

✓④ 648 ⑤ 672

로봇 B가 1분 동안 만들 수 있는 제품의 개수를 x라고 하면 로봇 A가 1분 동안 만들 수 있는 제품의 개수는 $x+2$이므로 정상 제품의 개수는 $\frac{9}{10}(x+2)$

이때 두 로봇 A, B를 각각 50분, 1시간 동안 투입하여 만들 수 있는 제품의 개수가 같으므로 $50\times\frac{9}{10}(x+2)=60\times x$

$45x+90=60x$, $15x=90$

$\therefore x=6$

따라서 로봇 B가 1분 동안 만들 수 있는 제품의 개수는 6이므로 로봇 A를 1시간 30분, 즉 90분 동안 투입하여 만들 수 있는 정상 제품의 개수는

$90\times\frac{9}{10}\times(6+2)=648$

14

어느 미술관의 내년 입장료를 인상하기 위한 회의에서 민수와 수진이는 다음과 같은 조사 결과를 발표하였다. 두 의견의 입장료의 수입은 같다고 할 때, x의 값은? [4점]

> 민수: 입장료를 50 % 인상하면, 관람객 수는 20 % 감소한다.
>
> 수진: 입장료를 x % 인상하면, 관람객 수는 25 % 감소한다.

① 55 ② 56 ③ 58

✓④ 60 ⑤ 64

기존 입장료를 k원이라고 하면

민수의 의견에서 입장료 수입은 $k\left(1+\frac{50}{100}\right)\left(1-\frac{20}{100}\right)=\frac{6k}{5}$(원)

수진이의 의견에서 입장료 수입은 $k\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{25}{100}\right)=\frac{3k}{4}\left(1+\frac{x}{100}\right)$(원)

이때 두 의견의 입장료 수입은 같으므로

$\frac{6k}{5}=\frac{3k}{4}\left(1+\frac{x}{100}\right)$, $1+\frac{x}{100}=\frac{8}{5}$

$\frac{x}{100}=\frac{3}{5}$

$\therefore x=60$

15

수직선에서 세 점 P, Q, A가 나타내는 수는 각각 -2, 3, x이다. 점 A를 다음과 같이 이동시킨다.

> ❶ 점 P를 기준으로 점 P와 같은 거리에 있지만 점 A가 아닌 곳으로 이동시킨다.
>
> ❷ ❶에서 이동한 점을 점 Q를 기준으로 반대 방향에 있고 같은 거리에 있는 곳으로 이동시킨다.
>
> ❸ ❷에서 이동한 점을 다시 점 P를 기준으로 반대 방향에 있고 같은 거리에 있는 곳으로 이동시킨다.

이동시킨 후의 점 A와 처음 점 A 사이의 거리가 18일 때, 모든 x의 값의 합은? [6점]

① -16 ✓② -14 ③ 10

④ 14 ⑤ 16

점 A에서 점 P까지의 거리는 $x-(-2)=x+2$

이므로 점 P에서 점 A의 반대 방향으로 같은 거리만큼 이동한 점을 R라고 하면 점 R가 나타내는 수는

$-2-(x+2)=-x-4$

점 R와 점 Q 사이의 거리는 $3-(-x-4)=x+7$

이므로 점 Q에서 점 R의 반대 방향으로 같은 거리만큼 이동한 점을 S라고 하면 점 S가 나타내는 수는

$3+(x+7)=x+10$

점 S와 점 P 사이의 거리는 $(x+10)-(-2)=x+12$

이므로 점 P에서 점 S의 반대 방향으로 같은 거리만큼 이동한 점이 나타내는 수는

$-2-(x+12)=-x-14$

즉, 이동시킨 후의 점 A가 나타내는 수는 $-x-14$

이 점과 처음 점 A 사이의 거리가 18이므로

$|x-(-x-14)|=18$, $|2x+14|=18$

$2x+14=-18$ 또는 $2x+14=18$

$2x=-32$ 또는 $2x=4$ $\quad\therefore x=-16$ 또는 $x=2$

따라서 모든 x의 값의 합은 $-16+2=-14$

16

어떤 일차식을 2로 나눈 후 일차식 $3x-4$를 더해야 하는데 잘못하여 2를 곱한 후 일차식 $3x-4$를 빼었더니 $5x+8$이 되었다. 이때 바르게 계산한 결과를 구하시오.

$5x-3$ [4점]

어떤 일차식을 A라고 하면
$2A-(3x-4)=5x+8$, $2A-3x+4=5x+8$
$2A=8x+4$ $\quad\therefore A=4x+2$
따라서 바르게 계산하면
$$(4x+2)\div 2+(3x-4)=(4x+2)\times\frac{1}{2}+3x-4$$
$$=2x+1+3x-4$$
$$=5x-3$$

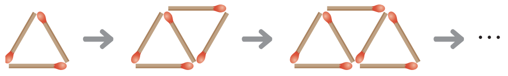
17

비례식 $2(x-3):\frac{1}{2}(x+1)=4:3$을 만족시키는 x의 값이 방정식 $5x-a=3(x-a)+6$의 해일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [4점] -2

$2(x-3):\frac{1}{2}(x+1)=4:3$에서
$6(x-3)=2(x+1)$, $6x-18=2x+2$
$4x=20$ $\quad\therefore x=5$
$5x-a=3(x-a)+6$에 $x=5$를 대입하면
$25-a=3(5-a)+6$, $25-a=15-3a+6$
$2a=-4$ $\quad\therefore a=-2$

18

다음 그림과 같이 성냥개비를 사용하여 정삼각형을 만들려고 한다. 성냥개비를 41개 사용하면 몇 개의 정삼각형을 만들 수 있는지 구하시오. [4점] 20개



1개의 정삼각형을 만드는 데 필요한 성냥개비는 3개이고, 1개의 정삼각형이 늘어날 때마다 성냥개비는 2개씩 늘어나므로 n개의 정삼각형을 만드는 데 필요한 성냥개비의 개수는
$3+2(n-1)=2n+1$
$2n+1=41$에서 $2n=40$
$\therefore n=20$

19

두 수 a, b에 대하여

$a\blacktriangle b=(a, b$ 중 작지 않은 수$)$

$a\blacktriangledown b=(a, b$ 중 크지 않은 수$)$

라고 할 때, 방정식 $3(x\blacktriangle 4)-2(|x|\blacktriangledown 4)=22$를 만족시키는 x의 값을 구하시오. (단, x는 유리수이다.) [4점] 10

$a\blacktriangle b=\begin{cases} a & (a\geq b)\\ b & (a<b)\end{cases}$, $a\blacktriangledown b=\begin{cases} b & (a\geq b)\\ a & (a<b)\end{cases}$이므로

(ⅰ) $x<-4$일 때, $x\blacktriangle 4=4$, $|x|\blacktriangledown 4=4$이므로
　$3(x\blacktriangle 4)-2(|x|\blacktriangledown 4)=22$에서
　$3\times 4-2\times 4=4\neq 22$
(ⅱ) $-4\leq x<4$일 때, $x\blacktriangle 4=4$, $|x|\blacktriangledown 4=|x|$이므로
　$3(x\blacktriangle 4)-2(|x|\blacktriangledown 4)=22$에서
　$3\times 4-2|x|=22$, $2|x|=-10$
　$\therefore |x|=-5$
(ⅲ) $x\geq 4$일 때, $x\blacktriangle 4=x$, $|x|\blacktriangledown 4=4$이므로
　$3(x\blacktriangle 4)-2(|x|\blacktriangledown 4)=22$에서
　$3x-2\times 4=22$, $3x=30$ $\quad\therefore x=10$
(ⅰ)～(ⅲ)에 의하여 주어진 방정식을 만족시키는 x의 값은 10이다.

20

지민이가 오후 5시와 오후 6시 사이에 열람실을 들어갈 때 시계의 시침과 분침은 직각을 이루고 있었다. 오후 8시와 오후 9시 사이에 공부를 마치고 나올 때는 시계의 시침과 분침이 반대 방향으로 일직선이 되어 있었다. 지민이가 열람실에 들어간 시각이 오후 5시 30분 이전일 때, 공부한 시간은 몇 시간인지 구하시오. [4점] 3시간

지민이가 열람실에 들어간 시각을 오후 5시 x분 $(x<30)$이라고 하면
$(30\times 5+0.5x)-6x=90$, $150-\frac{11}{2}x=90$, $\frac{11}{2}x=60$
$\therefore x=\frac{120}{11}=10\frac{10}{11}$
한편, 지민이가 열람실에서 나온 시각을 오후 8시 y분이라고 하면
$(30\times 8+0.5y)-6y=180$, $240-\frac{11}{2}y=180$, $\frac{11}{2}y=60$
$\therefore y=\frac{120}{11}=10\frac{10}{11}$
따라서 지민이는 오후 5시 $10\frac{10}{11}$분부터 오후 8시 $10\frac{10}{11}$분까지 공부했으므로 공부한 시간은 3시간이다.

21

어느 수련원에서 학생들에게 숙소를 배정하는데 한 방에 6명씩 배정하면 8명의 학생이 방을 쓰지 못하고, 한 방에 8명씩 배정하면 마지막 방에는 2명이 들어가고 완전히 빈 방이 4개가 생긴다. 이때 수련원의 전체 학생은 몇 명인지 구하시오. [4점] 146명

수련원의 방의 개수를 x라고 하면 한 방에 6명씩 배정하면 8명의 학생이 남으므로 수련원의 전체 학생 수는 $6x+8$
한 방에 8명씩 배정하면 8명이 가득찬 방의 개수는 $x-5$이므로 수련원의 전체 학생 수는
$8(x-5)+2=8x-40+2=8x-38$
한 방에 6명씩 배정할 때와 8명씩 배정할 때의 학생 수는 같으므로
$6x+8=8x-38$
$2x=46$ $\quad\therefore x=23$
따라서 수련원의 방의 개수는 23이므로 수련원의 전체 학생 수는
$6x+8=6\times 23+8=146$

22, 23번은 서술형입니다. 풀이 과정을 자세히 서술하시오.

22

아영이는 집에서 출발하여 자동차를 타고 뮤지컬 공연장에 가려고 한다. 시속 80 km로 가면 공연 시간보다 3분 빠르게 도착하고, 시속 60 km로 가면 공연 시간보다 4분 늦게 도착한다고 할 때, 아영이네 집에서 공연장까지 시속 70 km로 갈 때 걸리는 시간을 구하시오. [7점] **24분**

아영이네 집에서 공연장까지의 거리를 x km라고 하면

$\frac{x}{80}+\frac{3}{60}=\frac{x}{60}-\frac{4}{60}$ ……………………………………………3점

$3x+12=4x-16$　　$\therefore x=28$

즉, 아영이네 집에서 공연장까지의 거리는 28 km이다. ………………2점

따라서 아영이네 집에서 공연장까지 시속 70 km로 갈 때 걸리는 시간은

$\frac{28}{70}\times60=24$(분) ……………………………………………2점

23

0이 아닌 두 수 x, y에 대하여 $\frac{2x-5y}{3}=0.5(x-2y)$일 때, $\frac{3x-4y}{2x-3y}$의 값을 k라고 하자. z에 대한 일차방정식 $\frac{z-a}{2}=\frac{2z+1}{5}$의 해가 $z=k$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [7점] $-\frac{2}{25}$

$\frac{2x-5y}{3}=0.5(x-2y)$에서

$2(2x-5y)=3(x-2y)$, $4x-10y=3x-6y$

$\therefore x=4y$ ……………………………………………2점

$\frac{3x-4y}{2x-3y}$에 $x=4y$를 대입하면

$\frac{3\times4y-4y}{2\times4y-3y}=\frac{8y}{5y}=\frac{8}{5}$

$\therefore k=\frac{8}{5}$ ……………………………………………2점

$\frac{z-a}{2}=\frac{2z+1}{5}$에서

$5(z-a)=2(2z+1)$, $5z-5a=4z+2$

$\therefore z=5a+2$

이때 $z=k=\frac{8}{5}$이므로

$\frac{8}{5}=5a+2$, $5a=-\frac{2}{5}$

$\therefore a=-\frac{2}{25}$ ……………………………………………3점

Ⅲ

좌표평면과 그래프

Ⅲ 좌표평면과 그래프

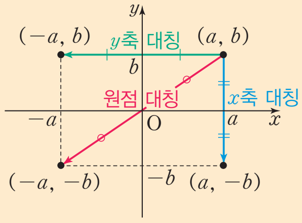
1등급 비법노트

- 원점의 좌표
  ① 수직선 ⇨ O(0)
  ② 좌표평면 ⇨ O$(0,\ 0)$

- $a\neq b$일 때, 순서쌍 $(a,\ b)$와 순서쌍 $(b,\ a)$는 서로 다르다.
  ① x축 위의 점의 좌표
  ⇨ $(x$좌표$,\ 0)$
  ② y축 위의 점의 좌표
  ⇨ $(0,\ y$좌표$)$

- 원점, x축 위의 점, y축 위의 점은 어느 사분면에도 속하지 않는다.

- 대칭인 점의 좌표: 점 $(a,\ b)$에 대하여
  ① x축에 대하여 대칭인 점: $(a,\ -b)$
  ② y축에 대하여 대칭인 점: $(-a,\ b)$
  ③ 원점에 대하여 대칭인 점: $(-a,\ -b)$

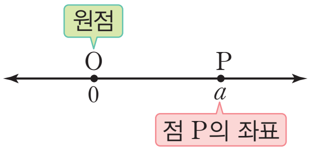


- 그래프는 점, 직선, 곡선 등으로 나타낼 수 있다.

01 좌표평면과 그래프

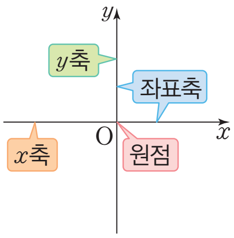
❶ 좌표와 좌표평면

(1) **좌표:** 수직선에서 한 점에 대응하는 수를 그 점의 좌표라고 하며, 점 P의 좌표가 a일 때, 기호로 P(a)와 같이 나타낸다. 또, 좌표가 0인 점을 원점이라고 하며 기호로 O(0)과 같이 나타낸다.



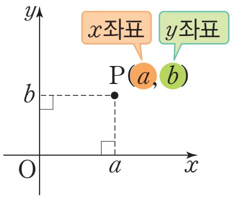
(2) **좌표평면:** 두 수직선이 점 O에서 서로 수직으로 만날 때

① x축: 가로의 수직선 ⎤
② y축: 세로의 수직선 ⎦ ⇦ 좌표축
③ 원점: 두 좌표축이 만나는 점 O
④ 좌표평면: 좌표축이 정해져 있는 평면



(3) **좌표평면 위의 점의 좌표**

① 순서쌍: 두 수나 문자의 순서를 정하여 짝 지어 나타낸 쌍
② 좌표평면 위의 한 점 P에서 x축, y축에 각각 수선을 그어 이 수선이 x축, y축과 만나는 점에 대응하는 수를 각각 a, b라고 할 때, 순서쌍 $(a,\ b)$를 점 P의 좌표라고 하며 기호로 P$(a,\ b)$와 같이 나타낸다.
이때 a를 점 P의 x좌표, b를 점 P의 y좌표라고 한다.



❷ 사분면

좌표평면은 좌표축에 의하여 네 부분으로 나누어진다. 이때 각 부분을 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면이라고 한다.

참고 각 사분면 위의 점의 x좌표, y좌표의 부호
① 제1사분면: $x>0$, $y>0$ ② 제2사분면: $x<0$, $y>0$
③ 제3사분면: $x<0$, $y<0$ ④ 제4사분면: $x>0$, $y<0$

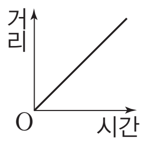
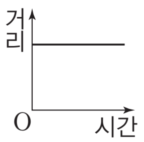
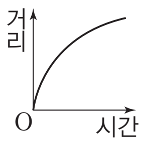
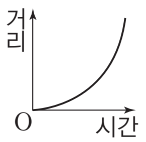
❸ 그래프

(1) **변수:** x, y와 같이 여러 가지로 변하는 값을 나타내는 문자

(2) **그래프:** 두 변수 사이의 관계를 좌표평면 위에 그림으로 나타낸 것

(3) **그래프의 이해:** 주어진 두 변수 사이의 관계를 그래프로 나타내면 두 변수의 변화 관계를 쉽게 파악할 수 있다.

참고 시간에 따른 거리의 변화를 나타낸 그래프의 이해

			
시간에 따라 거리가 일정하게 증가한다.	시간에 따른 거리의 변화가 없다.	시간에 따라 거리가 급격히 증가하다가 서서히 증가한다.	시간에 따라 거리가 서서히 증가하다가 급격히 증가한다.

02 정비례와 반비례

❶ 정비례

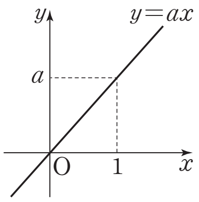
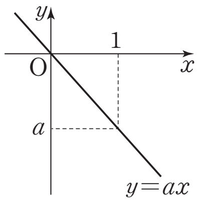
(1) **정비례:** 두 변수 x, y에 대하여 x의 값이 2배, 3배, 4배, …로 변함에 따라 y의 값도 2배, 3배, 4배, …로 변할 때, y는 x에 정비례한다고 한다.

(2) **정비례 관계식:** y가 x에 정비례하면 $y=ax\ (a\neq0)$가 성립한다.

참고 정비례 관계의 예

① 정다각형의 한 변의 길이가 x일 때, 둘레의 길이 y
② 일정한 속력으로 x시간 달렸을 때, 이동한 거리 y
③ 농도가 일정할 때, 소금물 x g에 들어 있는 소금의 양 y g

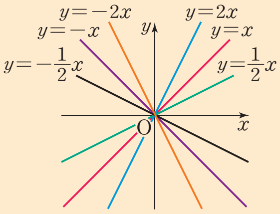
(3) **정비례 관계 $y=ax\ (a\neq0)$의 그래프:** x의 값의 범위가 수 전체일 때, 정비례 관계 $y=ax\ (a\neq0)$의 그래프는 원점을 지나는 직선이다.

	$a>0$일 때	$a<0$일 때
그래프		
그래프의 모양	오른쪽 위로 향하는 직선	오른쪽 아래로 향하는 직선
지나는 사분면	제1사분면, 제3사분면	제2사분면, 제4사분면
증가, 감소	x의 값이 증가하면 y의 값도 증가	x의 값이 증가하면 y의 값은 감소

1등급 비법노트

- y가 x에 정비례할 때, $\frac{y}{x}$의 값은 항상 일정하다.
  ⇨ $y=ax$에서 $\frac{y}{x}=a$ (일정)

- **정비례 관계 $y=ax\ (a\neq0)$의 그래프는**
  ① $|a|$가 클수록 y축에 가깝다.
  ② $|a|$가 작을수록 x축에 가깝다.



❷ 반비례

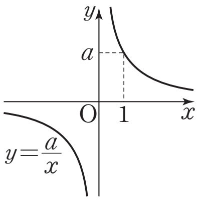
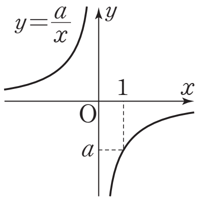
(1) **반비례:** 두 변수 x, y에 대하여 x의 값이 2배, 3배, 4배, …로 변함에 따라 y의 값은 $\frac{1}{2}$배, $\frac{1}{3}$배, $\frac{1}{4}$배, …로 변할 때, y는 x에 반비례한다고 한다.

(2) **반비례 관계식:** y가 x에 반비례하면 $y=\frac{a}{x}\ (a\neq0)$가 성립한다.

참고 반비례 관계의 예

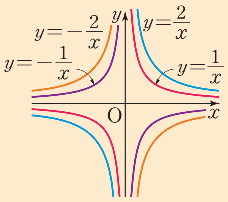
① 넓이가 일정한 삼각형의 밑변의 길이가 x일 때, 높이 y
② 부피가 일정한 원기둥의 밑면의 넓이가 x일 때, 높이 y
③ 일정한 거리를 x초 동안 움직였을 때, 속력 y

(3) **반비례 관계 $y=\frac{a}{x}\ (a\neq0)$의 그래프:** x의 값의 범위가 0을 제외한 수 전체일 때, 반비례 관계 $y=\frac{a}{x}\ (a\neq0)$의 그래프는 좌표축에 가까워지면서 한없이 뻗어 나가는 한 쌍의 매끄러운 곡선이다.

	$a>0$일 때	$a<0$일 때
그래프		
지나는 사분면	제1사분면, 제3사분면	제2사분면, 제4사분면
증가, 감소	각 사분면에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소	각 사분면에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가

- y가 x에 반비례할 때, xy의 값은 항상 일정하다.
  ⇨ $y=\frac{a}{x}$에서 $xy=a$ (일정)

- **반비례 관계 $y=\frac{a}{x}\ (a\neq0)$의 그래프는**
  ① 원점을 지나지 않고 x축, y축과 만나지 않는다.
  ② $|a|$가 클수록 원점에서 멀다.
  ③ $|a|$가 작을수록 원점에 가깝다.



개념을 적용하는

Lv. 1 핵심 문제

개념 1 좌표와 좌표평면

01

두 순서쌍 $(2-3a,\ a-2b+4)$, $(a+6,\ b-3)$이 서로 같을 때, $a-b$의 값은?

① -4 ✓② -3 ③ -2

④ 3 ⑤ 4

두 순서쌍 $(2-3a,\ a-2b+4)$, $(a+6,\ b-3)$이 서로 같으므로
$2-3a=a+6$에서 $-4a=4$ $\therefore a=-1$
$a-2b+4=b-3$에서 $-1-2b+4=b-3$
$-3b=-6$ $\therefore b=2$
$\therefore a-b=-1-2=-3$

02 출제 주의

두 점 $A(a-5,\ 2b+4)$, $B(a+3b,\ a-b)$는 각각 x축, y축 위의 점이다. 점 C는 점 A와 x좌표가 같고, 점 B와 y좌표가 같을 때, 점 C의 좌표는?

① $(-1,\ -4)$ ② $(1,\ 5)$ ✓③ $(1,\ 8)$

④ $(11,\ 4)$ ⑤ $(11,\ 8)$

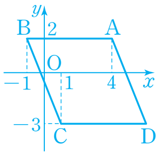
점 $A(a-5,\ 2b+4)$가 x축 위의 점이므로
$2b+4=0$, $2b=-4$ $\therefore b=-2$
점 $B(a+3b,\ a-b)$가 y축 위의 점이므로
$a+3b=0$, $a-6=0$ $\therefore a=6$
$\therefore A(1,\ 0)$, $B(0,\ 8)$
이때 점 C는 점 A와 x좌표가 같고, 점 B와 y좌표가 같으므로
$C(1,\ 8)$

03

좌표평면 위의 세 점 $A(4,\ 2)$, $B(-1,\ 2)$, $C(1,\ -3)$에 대하여 선분 AB와 선분 BC를 두 변으로 하는 평행사변형 ABCD에서 꼭짓점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라고 할 때, $a+b$의 값은?

① -9 ② -3 ③ 1

✓④ 3 ⑤ 6



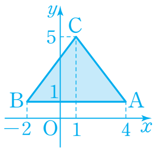
평행사변형 ABCD를 그리면 오른쪽 그림과 같다.
(변 CD의 길이)=(변 AB의 길이)
$=4-(-1)=5$
이므로 꼭짓점 D의 x좌표는
(점 C의 x좌표)$+5=1+5=6$
두 꼭짓점 C, D의 y좌표가 서로 같고 꼭짓점 C의 y좌표는 -3
이므로 $D(6,\ -3)$
따라서 $a=6$, $b=-3$이므로
$a+b=6+(-3)=3$

04 출제 주의

좌표평면 위의 세 점 $A(4,\ 1)$, $B(-2,\ 1)$, $C(1,\ 5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는?

✓① 12 ② 15 ③ 18

④ 21 ⑤ 24



세 점 $A(4,\ 1)$, $B(-2,\ 1)$, $C(1,\ 5)$를 좌표평면 위에 나타내면
오른쪽 그림과 같다.
따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\{4-(-2)\}\times(5-1)$
$=\frac{1}{2}\times6\times4=12$

개념 2 사분면

05

$a>0$, $b<0$일 때, 다음 중 점의 좌표와 그 점이 속하는 사분면을 바르게 짝 지은 것은?

① $(a,\ b)$ ⇨ 제1사분면
② $(-a,\ b)$ ⇨ 제2사분면
③ $(ab,\ a-b)$ ⇨ 제3사분면
✓④ $(b-a,\ b)$ ⇨ 제3사분면
⑤ $(a+b,\ -b)$ ⇨ 제4사분면

① $a>0$, $b<0$이므로 점 $(a,\ b)$는 제4사분면 위의 점이다.
② $-a<0$, $b<0$이므로 점 $(-a,\ b)$는 제3사분면 위의 점이다.
③ $ab<0$, $a-b>0$이므로 점 $(ab,\ a-b)$는 제2사분면 위의 점이다.
④ $b-a<0$, $b<0$이므로 점 $(b-a,\ b)$는 제3사분면 위의 점이다.
⑤ $a+b$의 부호는 알 수 없으나 $-b>0$이므로 점 $(a+b,\ -b)$는 제1사분면 또는 제2사분면 위의 점이다.

06 서술형

점 $A(a,\ b)$는 제3사분면 위의 점이고 점 $B(c,\ d)$는 제4사분면 위의 점일 때, 점 $(a-c,\ b+d)$는 어느 사분면 위의 점인지 구하시오. 제3사분면

점 $A(a,\ b)$는 제3사분면 위의 점이므로 $a<0$, $b<0$
점 $B(c,\ d)$는 제4사분면 위의 점이므로 $c>0$, $d<0$ ······························ 50 %
따라서 $a-c<0$, $b+d<0$이므로 점 $(a-c,\ b+d)$는 제3사분면 위의 점이다. ··· 50 %

07

두 점 $A(4a-1,\ 9)$, $B(2a-7,\ -3b)$가 x축에 대하여 대칭일 때, ab의 값은?

✓① -9　　② -3　　③ 3

④ 6　　⑤ 9

두 점 $A(4a-1,\ 9)$, $B(2a-7,\ -3b)$가 x축에 대하여 대칭이므로 두 점의 x좌표는 같고 y좌표는 부호가 반대이다.

즉, $4a-1=2a-7$에서 $2a=-6$　　$\therefore a=-3$

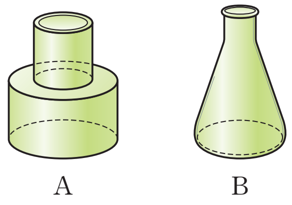
$9=-(-3b)$에서 $b=3$

$\therefore ab=-3\times3=-9$

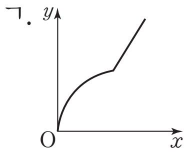
개념 3 그래프

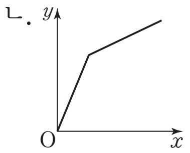
08 출제 주의

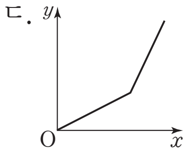
다음 그림과 같은 두 물병 A, B에 시간당 일정한 양의 물을 넣을 때, 물을 넣기 시작한 지 x초 후 물의 높이를 y cm라고 하자. 다음 보기에서 두 물병 A, B에 해당하는 그래프를 찾아 바르게 짝 지은 것은?

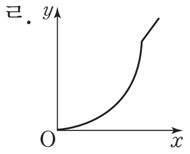


〈 보기 〉

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


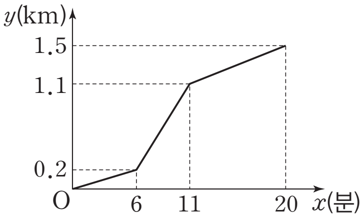
ㄹ.


	A	B
①	ㄱ	ㄴ
②	ㄴ	ㄱ
③	ㄴ	ㄹ
④	ㄷ	ㄱ
✓⑤	ㄷ	ㄹ

물병 A는 아랫부분은 폭이 넓고 일정하고 윗부분은 폭이 좁고 일정하므로 물의 높이가 느리고 일정하게 증가하다가 빠르고 일정하게 증가한다. 따라서 물병 A의 그래프로 알맞은 것은 ㄷ이다.

물병 B는 아랫부분은 폭이 점점 좁아지고 윗부분은 폭이 좁고 일정하므로 물의 높이가 점점 빠르게 증가하다가 일정하게 증가한다. 따라서 물병 B의 그래프로 알맞은 것은 ㄹ이다.

09



오른쪽 그림은 혜윤이가 집에서 출발하여 학교에 가는 상황을 그래프로 나타낸 것이다. 집에서 학교까지 가는 데 20분이 걸렸고, 혜윤이가 집에서 출발한 지 x분 후 집으로부터의 거리를 y km라고 할 때, 다음 중 ①~⑤에 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

- 출발 후 6분 동안 이동한 거리는 $\boxed{\text{①}}$ km이다.
- 출발 후 $\boxed{\text{②}}$분 동안 1.1 km만큼 이동했다.
- 집에서 학교까지의 거리는 $\boxed{\text{③}}$ km이다.
- $\boxed{\text{④}}$분부터 $\boxed{\text{⑤}}$분까지 가장 빠른 속력으로 이동했다.

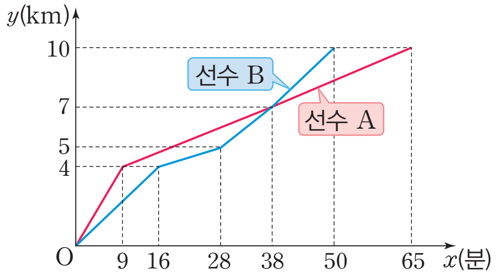
✓① 1.2　　② 11　　✓③ 20

④ 6　　⑤ 11

- 출발 후 6분 동안 이동한 거리는 0.2 km이다.
- 그래프에서 혜윤이는 20분 동안 총 1.5 km를 가고 멈췄으므로 집에서 학교까지의 거리는 1.5 km이다.

10

다음 그림은 10 km 마라톤 대회에 참가한 두 선수 A, B가 출발한 지 x분 후 출발점으로부터의 거리를 y km라고 할 때, x와 y 사이의 관계를 그래프로 나타낸 것이다. 다음 중 옳은 것은?



① 선수 A는 출발한 지 16분 후에 속력이 느려졌다.

✓② 선수 B는 출발점으로부터의 거리가 4 km인 지점에서 속력이 느려졌다.

③ 두 선수 A, B는 출발점으로부터의 거리가 4 km인 지점에서 만났다.

④ 출발한 지 16분 후에 두 선수 A, B의 순위가 바뀌었다.

⑤ 선수 A, 선수 B의 순서대로 결승점에 도착하였다.

① 선수 A는 출발한 지 9분 후에 속력이 느려졌다.
③ 두 선수 A, B는 출발점으로부터의 거리가 7 km인 지점에서 만났다.
④ 출발한 지 38분 후에 두 선수 A, B의 순위가 바뀌었다.
⑤ 선수 B, 선수 A의 순서대로 결승점에 도착하였다.

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

$a=1$일 때, $1+b\le4$이므로 b의 값은 $b=1$, 2, 3
$a=2$일 때, $2+b\le4$이므로 b의 값은 $b=1$, 2
$a=3$일 때, $3+b\le4$이므로 b의 값은 $b=1$
따라서 $a+b\le4$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는
(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)의 6개이다.

01

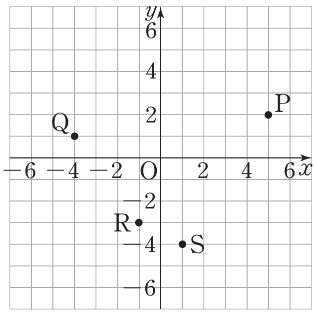
상자 A에는 1, 2, 3, 4, 5가 각각 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있고, 상자 B에는 1, 2, 3, 4가 각각 하나씩 적힌 4개의 공이 들어 있다. 두 상자 A, B에서 각각 공을 하나씩 꺼내어 꺼낸 공에 적힌 수를 각각 a, b라고 할 때, $a+b\le4$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. **6**

③ 점 A가 점 R이면 $a-3=-1$, $b=-3$ $\therefore a=2$
$\therefore$ A$(-1, -3)$, B$(5, 2)$, C$(1, -4)$, D$(-4, 1)$
⑤ ③에 의하여 점 $(a-2, b+2)$는 y축 위에 있다.

02

P(5, 2), Q(−4, 1), R(−1, −3), S(1, −4)

네 점 A$(a-3, b)$, B$(a-b, a)$, C$(-a-b, b-1)$, D$(a+2b, 2a+b)$는 각각 오른쪽 그림의 네 점 P, Q, R, S 중 한 점의 좌표와 같다. 다음 중 옳은 것은?



① 점 A는 점 P이다.
② 점 A는 점 Q이다.
✓③ 점 A는 점 R이다.
④ 점 A는 점 S이다.
⑤ 점 $(a-2, b+2)$는 x축 위에 있다.

삼각형 ABC가 직각삼각형이 되는 경우는 ∠A 또는 ∠B가 직각인 경우이다. ···· 10 %
(i) ∠A가 직각인 경우
(사각형 DBEF의 넓이)$=5\times3=15$
(삼각형 ADB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$, (삼각형 ACF의 넓이)$=\frac{1}{2}\times2\times2=2$
(삼각형 BEC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\{3-(-2)\}\times(4-3)=\frac{5}{2}$
$\therefore$ (직각삼각형 ABC의 넓이)$=15-\frac{9}{2}-2-\frac{5}{2}=6$ ························ 40 %

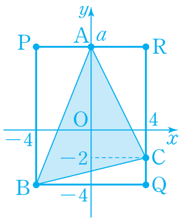
03

두 점 A$(3-2a, a-1)$, B$(b-2, 4b-1)$이 x축 또는 y축 위에 있다. 두 점 A, B와 같지 않은 점 C는 점 A와 x좌표가 같고, 점 B와 y좌표가 같을 때, 다음 중 점 C의 좌표가 될 수 있는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

✓① (0, 0)
② (0, 7)
③ (1, 0)
④ (1, 1)
✓⑤ (1, 7)

두 점 A, B는 모두 x축 또는 y축 위에 있거나 두 점이 각각 x축 또는 y축 위에 있다.
(i) 점 A는 x축 위에 있고, 점 B는 y축 위에 있는 경우: $a-1=0$, $b-2=0$이므로 $a=1$, $b=2$이다. 따라서 A(1, 0), B(0, 7)이므로 C(1, 7)이다.
(ii) 점 A는 y축 위에 있고, 점 B는 x축 위에 있는 경우: $3-2a=0$, $4b-1=0$이므로 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{4}$이다. 따라서 A$\left(0, \frac{1}{2}\right)$, B$\left(-\frac{7}{4}, 0\right)$이므로 C(0, 0)이다.

세 점 A$(0, a)$, B$(-4, -4)$, C$(4, -2)$를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 이때 만들어진 삼각형의 각 꼭짓점에서 x축, y축에 각각 평행한 선을 그어 직사각형 PBQR를 만들면 P$(-4, a)$, Q$(4, -4)$, R$(4, a)$이다.
(사각형 PBQR의 넓이)$=8a+32$
(삼각형 ACR의 넓이)$=2a+4$



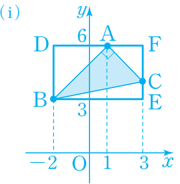
04 출제 주의

좌표평면 위에 세 점 A$(0, a)$, B$(-4, -4)$, C$(4, -2)$를 이어 만들어진 삼각형의 넓이가 36일 때, 자연수 a의 값은?

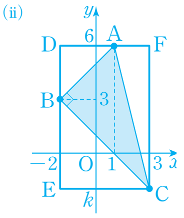
① 2
② 4
✓③ 6
④ 8
⑤ 10

(삼각형 PBA의 넓이)$=2a+8$, (삼각형 CBQ의 넓이)$=8$
이므로 $36=8a+32-(2a+4)-(2a+8)-8$ $\therefore a=6$

(i)



(ii)



05 서술형

정수 k에 대하여 좌표평면 위의 세 점 A(1, 6), B(−2, 3), C(3, k)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 직각삼각형이 되도록 할 때, 직각삼각형의 넓이가 될 수 있는 값 중 가장 큰 수를 구하시오. **15**

(ii) ∠B가 직각인 경우
(사각형 DECF의 넓이)$=5\times\{6-(-2)\}=40$
(삼각형 ADB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$
(삼각형 BEC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times5\times5=\frac{25}{2}$
(삼각형 ACF의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(3-1)\times\{6-(-2)\}=8$
$\therefore$ (직각삼각형 ABC의 넓이)$=40-\frac{9}{2}-\frac{25}{2}-8=15$ ························ 40 %
(i), (ii)에 의하여 가장 큰 수는 15이다. ································ 10 %

06

다음 중 옳지 않은 것은?

① 점 (a, b)가 제4사분면 위의 점이면 점 (b, a)는 제2사분면 위의 점이다.
② 점 $(a, -b)$가 제3사분면 위의 점이면 점 (b, a)는 제4사분면 위의 점이다.
③ 점 $(-a, b)$가 제2사분면 위의 점이면 점 (b, a)는 제1사분면 위의 점이다.
④ 점 $(-a, -b)$가 제1사분면 위의 점이면 점 (b, a)는 제3사분면 위의 점이다.
✓⑤ 점 $(-b, -a)$가 제4사분면 위의 점이면 점 (b, a)는 제4사분면 위의 점이다.

① $a>0$, $b<0$이므로 점 (b, a)는 제2사분면 위의 점이다.
② $a<0$, $-b<0$이므로 $b>0$, 즉 점 (b, a)는 제4사분면 위의 점이다.
③ $-a<0$, $b>0$이므로 $a>0$, 즉 점 (b, a)는 제1사분면 위의 점이다.
④ $-a>0$, $-b>0$이므로 $a<0$, $b<0$, 즉 점 (b, a)는 제3사분면 위의 점이다.
⑤ $-b>0$, $-a<0$이므로 $b<0$, $a>0$, 즉 점 (b, a)는 제2사분면 위의 점이다.

07

점 $(6-x,\ y-3)$이 제4사분면 위에 있도록 하는 두 자연수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 구하시오. **10**

점 $(6-x,\ y-3)$이 제4사분면 위의 점이면
$6-x>0$, $y-3<0$이어야 한다.
$6-x>0$을 만족시키는 자연수 x의 값은 1, 2, 3, 4, 5
$y-3<0$을 만족시키는 자연수 y의 값은 1, 2
따라서 조건을 만족시키는 두 자연수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$, $(3,\ 2)$, $(4,\ 1)$, $(4,\ 2)$, $(5,\ 1)$, $(5,\ 2)$의 10개이다.

08

$\overset{a<0,\ b>0}{\underline{\text{점 }(a,\ b)\text{가 제2사분면}}}$ 위에 있을 때, 다음 중 제4사분면 위에 있는 점의 좌표는?

① $(2a-b,\ 2b-a)$ ② $(b-a^2,\ b-a)$
③ $(a-b,\ ab)$ ✓④ $(-a^3,\ -b^3)$
⑤ $\left(\frac{a}{b},\ a\right)$

① $2a-b<0$, $2b-a>0$이므로 점 $(2a-b,\ 2b-a)$는 제2사분면 위의 점이다.
② $a^2>0$이므로 $b-a^2$의 부호는 알 수 없고, $b-a>0$이므로 점 $(b-a^2,\ b-a)$는 제1사분면 또는 제2사분면 위의 점이다.
③ $a-b<0$, $ab<0$이므로 점 $(a-b,\ ab)$는 제3사분면 위의 점이다.
④ $-a^3>0$, $-b^3<0$이므로 점 $(-a^3,\ -b^3)$은 제4사분면 위의 점이다.
⑤ $\frac{a}{b}<0$, $a<0$이므로 점 $\left(\frac{a}{b},\ a\right)$는 제3사분면 위의 점이다.

09 출제 주의

$\overset{a>0,\ b<0}{\underline{\text{점 }(-a,\ b)\text{가 제3사분면}}}$ 위의 점이고 $|a|>|b|$일 때, 다음 점 중 속하는 사분면이 나머지 넷과 $\underline{\text{다른}}$ 하나는?

① $(a,\ ab)$ ② $(-ab,\ b)$
③ $(a-b,\ b-a)$ ④ $(a+b,\ -a-b)$
✓⑤ $(a-b,\ -b)$

① $a>0$, $ab<0$이므로 점 $(a,\ ab)$는 제4사분면 위의 점이다.
② $-ab>0$, $b<0$이므로 점 $(-ab,\ b)$는 제4사분면 위의 점이다.
③ $a-b>0$, $b-a<0$이므로 점 $(a-b,\ b-a)$는 제4사분면 위의 점이다.
④ $|a|>|b|$이므로 $a+b>0$, $-a-b<0$이다. 따라서 점 $(a+b,\ -a-b)$는 제4사분면 위의 점이다.
⑤ $a-b>0$, $-b>0$이므로 점 $(a-b,\ -b)$는 제1사분면 위의 점이다.

10

$\overset{|a|<|b|,\ ab<0}{\underline{\text{점 }\left(|a|-|b|,\ -\frac{b}{a}\right)\text{가 제2사분면}}}$ 위의 점일 때, 점 $((a+b)(a-b),\ (|a|+|b|)(|a|-|b|))$는 어느 사분면 위의 점인가?

① 제1사분면 ② 제2사분면 ✓③ 제3사분면
④ 제4사분면 ⑤ 어느 사분면에도 속하지 않는다.

$a>0$, $b<0$ 또는 $a<0$, $b>0$이고 $|a|+|b|>0$이므로 $(|a|+|b|)(|a|-|b|)<0$
(i) $a>0$, $b<0$일 때, $a+b<0$, $a-b>0$이므로 $(a+b)(a-b)<0$
따라서 점 $((a+b)(a-b),\ (|a|+|b|)(|a|-|b|))$는 제3사분면 위의 점이다.
(ii) $a<0$, $b>0$일 때, $a+b>0$, $a-b<0$이므로 $(a+b)(a-b)<0$
따라서 점 $((a+b)(a-b),\ (|a|+|b|)(|a|-|b|))$는 제3사분면 위의 점이다.
(i), (ii)에 의하여 점 $((a+b)(a-b),\ (|a|+|b|)(|a|-|b|))$는 제3사분면 위의 점이다.

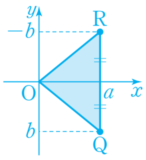
11

$\overset{a>0,\ b<0}{\underline{\text{점 P}(ab,\ a-b)\text{가 제2사분면}}}$ 위에 있을 때, 점 $\mathrm{Q}(a,\ b)$와 x축에 대하여 대칭인 점을 R라고 하자. 삼각형 OQR의 넓이를 a, b를 사용한 식으로 나타낸 것은?
(단, O는 원점이다.)

① $-2ab$ ② $-ab$ ✓③ ab
④ $2ab$ ⑤ $4ab$

점 $\mathrm{Q}(a,\ b)$는 제4사분면 위의 점이고, 점 $\mathrm{R}(a,\ -b)$는 제1사분면 위의 점이므로 두 점 Q, R를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore$ (삼각형 OQR의 넓이)$=\frac{1}{2}\times 2b\times a=ab$



12

점 $\mathrm{P}_1(-5,\ -3)$에 대하여 다음과 같은 과정을 계속하여 점 P_n을 정할 때, 점 P_{2026}의 좌표를 구하시오. **$(-5,\ 3)$**

> 점 P_2는 점 P_1과 x축에 대하여 대칭인 점이다.
> 점 P_3은 점 P_2와 y축에 대하여 대칭인 점이다.
> 점 P_4는 점 P_3과 x축에 대하여 대칭인 점이다.
> 점 P_5는 점 P_4와 y축에 대하여 대칭인 점이다.
> ⋮

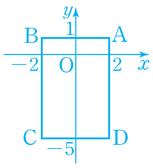
점 $\mathrm{P}_1(-5,\ -3)$과 x축에 대하여 대칭인 점 P_2의 좌표는 $(-5,\ 3)$
점 $\mathrm{P}_2(-5,\ 3)$과 y축에 대하여 대칭인 점 P_3의 좌표는 $(5,\ 3)$
점 $\mathrm{P}_3(5,\ 3)$과 x축에 대하여 대칭인 점 P_4의 좌표는 $(5,\ -3)$
점 $\mathrm{P}_4(5,\ -3)$과 y축에 대하여 대칭인 점 P_5의 좌표는 $(-5,\ -3)$
⋮
즉, 점 P_1, P_2, P_3, …의 좌표는 $(-5,\ -3)$, $(-5,\ 3)$, $(5,\ 3)$, $(5,\ -3)$이 이 순서대로 반복된다.
따라서 $2026=4\times 506+2$에서 점 P_{2026}의 좌표는 점 P_2의 좌표와 같으므로 점 P_{2026}의 좌표는 $(-5,\ 3)$이다.

13 서술형

다음 조건을 만족시키는 네 점 A, B, C, D에 대하여 사각형 ABCD의 둘레의 길이를 구하시오. **20**

> ㈎ 두 점 A, B는 점 $(2,\ -1)$과 각각 x축, 원점에 대하여 대칭인 점이다.
> ㈏ 점 C는 점 $(-2,\ 5)$와 x축에 대하여 대칭인 점이고, 점 D는 점 C와 y축에 대하여 대칭인 점이다.

조건 ㈎에서 점 $(2,\ -1)$과 x축에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(2,\ 1)$
점 $(2,\ -1)$과 원점에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(-2,\ 1)$
$\therefore$ $\mathrm{A}(2,\ 1)$, $\mathrm{B}(-2,\ 1)$ ······························ 30 %
조건 ㈏에서 점 $(-2,\ 5)$와 x축에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(-2,\ -5)$
$\therefore$ $\mathrm{C}(-2,\ -5)$
점 C와 y축에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(2,\ -5)$
$\therefore$ $\mathrm{D}(2,\ -5)$ ······························ 30 %
따라서 사각형 ABCD의 둘레의 길이는
$2\times[\{2-(-2)\}+\{1-(-5)\}]=20$ ··················· 40 %

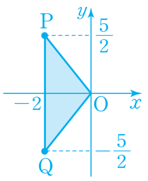


사고를 확장하는

Lv. 2 실전 문제

점 P$(-4a-10,\ 4-3b)$가 점 Q$(2+2a,\ -5b)$와 x축에 대하여 대칭이므로

$-4a-10=2+2a$에서 $a=-2$, $4-3b=5b$에서 $b=\frac{1}{2}$ ····60 %



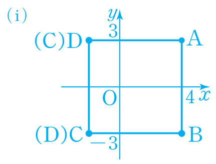
14 서술형

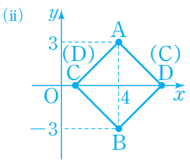
점 P$(-4a-10,\ 4-3b)$가 점 Q$(2+2a,\ -5b)$와 x축에 대하여 대칭일 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 구하시오. 5

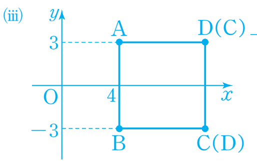
(단, O는 원점이다.)

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $\left(-2,\ \frac{5}{2}\right)$, $\left(-2,\ -\frac{5}{2}\right)$이므로 삼각형 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left\{\frac{5}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}\times\{0-(-2)\}=5$ ·································40 %







15

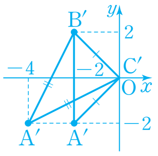
좌표평면 위의 점 $(x,\ y)$에 대하여 점 $(x,\ y)$를 점 $(2ax-y,\ x+y)$로 이동시키는 규칙이 있다. 세 점 A$(2,\ -4)$, B$(0,\ 2)$, C$(0,\ 0)$을 이 규칙에 따라 이동시킨 점을 각각 A′, B′, C′이라고 할 때, 삼각형 A′B′C′이 이등변삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값을 모두 고르면?

(정답 2개)

① -3 ② $-\frac{5}{2}$ ✓③ -2

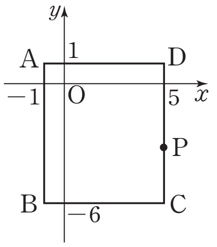
✓④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ -1

점 A$(2,\ -4)$를 주어진 규칙에 따라 이동시키면 A′$(4a+4,\ -2)$
점 B$(0,\ 2)$를 주어진 규칙에 따라 이동시키면 B′$(-2,\ 2)$
점 C$(0,\ 0)$을 주어진 규칙에 따라 이동시키면 C′$(0,\ 0)$
이때 삼각형 A′B′C′이 이등변삼각형이 되려면 오른쪽 그림과 같이 점 A′의 x좌표는 -4 또는 -2이어야 한다.
$4a+4=-4$에서 $4a=-8$ $\therefore a=-2$
$4a+4=-2$에서 $4a=-6$ $\therefore a=-\frac{3}{2}$
따라서 모든 상수 a의 값은 -2, $-\frac{3}{2}$이다.



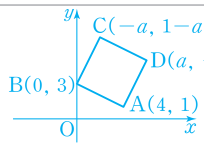
16

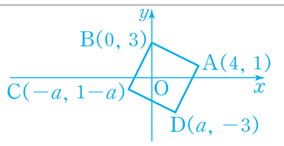
오른쪽 그림에서 점 P$(a,\ b)$가 직사각형 ABCD의 둘레를 움직인다. $a-b$의 값 중 가장 큰 값이 되는 a, b에 대하여 $3a+b$의 값을 구하시오. 9



$a-b$의 값이 가장 크려면 a의 값은 가장 크고 b의 값은 가장 작아야 한다.
즉, 점 P$(a,\ b)$가 점 C$(5,\ -6)$에 위치할 때 $a-b$의 값이 가장 크다.
따라서 $a=5$, $b=-6$이므로
$3a+b=3\times5+(-6)=9$

두 점 A, B를 한 변으로 하는 정사각형을 그리면 다음 그림과 같이 두 가지가 있다.





17

이때 점 D의 y좌표는 -3이므로 점 D는 제4사분면 위에 있고 점 C는 제3사분면 위에 있어야 한다. 따라서 $0<a<4$이어야 하므로 알맞은 것은 ③이다.

네 점 A$(4,\ 1)$, B$(0,\ 3)$, C$(-a,\ 1-a)$, D$(a,\ -3)$을 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 정사각형일 때, 정수 a의 값은?

① -2 ② 0 ✓③ 2

④ 4 ⑤ 6

정사각형이 만들어지는 경우는 다음과 같이 세 가지가 있다.
(i) 한 변의 길이가 $3-(-3)=6$인 정사각형이므로
C$(-2,\ -3)$, D$(-2,\ 3)$ 또는 C$(-2,\ 3)$, D$(-2,\ -3)$
$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2=4+9+4+9=26$
(ii) 대각선의 길이가 $3-(-3)=6$인 정사각형이므로
C$(1,\ 0)$, D$(7,\ 0)$ 또는 C$(7,\ 0)$, D$(1,\ 0)$
$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2=1+0+49+0=50$

18

네 정수 a, b, c, d에 대하여 좌표평면 위의 네 점 A, B, C, D를 A$(4,\ 3)$, B$(4,\ -3)$, C$(a,\ b)$, D$(c,\ d)$라고 하자. 네 점을 적당히 배열하여 정사각형을 만들었을 때, $a^2+b^2+c^2+d^2$의 값 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합은?

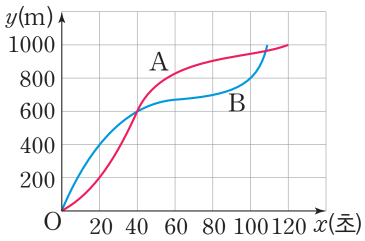
① 44 ② 136 ③ 218

④ 236 ✓⑤ 244

(iii) 한 변의 길이가 $3-(-3)=6$인 정사각형이므로
C$(10,\ -3)$, D$(10,\ 3)$ 또는 C$(10,\ 3)$, D$(10,\ -3)$
$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2=100+9+100+9=218$
(i)~(iii)에 의하여 가장 큰 수는 218, 가장 작은 수는 26이므로 구하는 합은
$218+26=244$

19 출제 주의

두 선수 A, B가 빙상경기장에서 스피드스케이팅 1000 m 시합을 했다. 출발점에서 동시에 출발하여 x초 동안 달린 거리를 y m라고 할 때, 두 선수 A, B의 x와 y 사이의 관계를 그래프로 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 다음 보기 중 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?



< 보기 >

ㄱ. 출발점을 제외하고 A, B는 두 번 만났다.

ㄴ. B가 800 m 지점을 통과한 것은 출발한 지 100초가 되었을 때이다.

ㄷ. 출발점으로부터 B가 A보다 두 배 멀리 간 순간과 A가 B보다 두 배 멀리 간 순간이 있다.

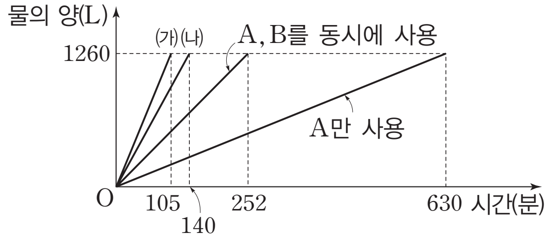
① ㄱ ✓② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄷ. 출발 후 20초가 되었을 때, B가 A보다 두 배 멀리 간 순간이 있으나, 그 반대가 되는 경우는 그래프에서 찾을 수 없다.

20

서로 다른 세 자연수 a, b, c에 대하여 세 수도꼭지 A, B, C는 각각 1분당 a L, b L, c L만큼 물이 나온다. 다음 그래프는 세 수도꼭지를 모두 또는 일부를 사용하여 1260 L의 수조를 가득 채우는 데 걸린 시간을 나타낸 그래프일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?



〈 보기 〉

ㄱ. 수도꼭지 C를 사용하여 수조를 가득 채우는 데 180분이 걸린다.

ㄴ. 그래프 (가)는 세 수도꼭지 A, B, C를 동시에 사용한 경우이다.

ㄷ. 그래프 (나)는 두 수도꼭지 B, C를 동시에 사용한 경우이다.

① ㄱ　② ㄴ　✓③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄷ

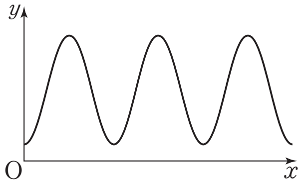
(ⅰ) 그래프 (가)가 세 수도꼭지 A, B, C를 모두 사용한 경우: $a+b+c=12$이므로
$2+3+c=12$에서 $c=7$
이때 그래프 (나)는 1분당 9 L만큼 물을 채울 수 있으므로
$a+c=2+7=9$에서 그래프 (나)는 두 수도꼭지 A, C를 동시에 사용한 경우이다.

(ⅱ) 그래프 (가)가 세 수도꼭지 A, B, C 중 2개를 사용한 경우: 그래프 (가)는 1분당 12 L만큼, 그래프 (나)는 1분당 9 L만큼 물을 채울 수 있고, $a<b$이므로 그래프 (가)는 두 수도꼭지 B, C를 사용하고, 그래프 (나)는 수도꼭지 A, C를 사용한 경우이다.
즉, $b+c=12$에서 $3+c=12$　$\therefore c=9$
이때 $a+c=2+9=11\neq9$이므로 성립하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $c=7$이므로 수도꼭지 C를 사용하여 수조를 가득 채우는 데 걸리는 시간은 $\frac{1260}{7}=180$(분)이다. 또, 그래프 (가)는 세 수도꼭지 A, B, C를 모두 사용한 경우, 그래프 (나)는 두 수도꼭지 A, C를 동시에 사용한 경우이다.

21

두 변수 x와 y 사이의 관계를 그래프로 나타내었더니 오른쪽 그림과 같았다. 다음 중 변수 x, y로 적합하지 않은 것은?



✓① 변기의 물을 주기적으로 내릴 때, 경과 시간에 따른 물의 높이 변화

② 시계의 분침의 끝이 가리키는 위치의 변화

③ 용수철을 일정한 힘으로 잡아당겼다 놓았을 때, 시간에 따른 용수철에 매달린 추의 높이 변화

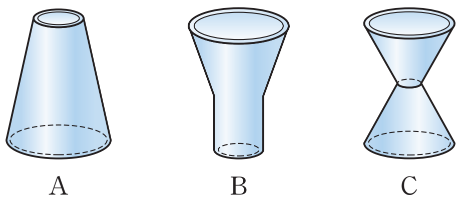
④ 대관람차를 탈 때, 특정 칸에서 경과 시간에 대한 지면으로부터의 높이 변화

⑤ 매달린 줄을 잡아당겼다 놓았을 때 일정한 지점에서의 시간에 따른 높이의 변화

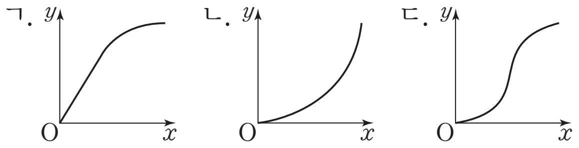
① 변기의 물의 높이는 보통 물을 내리는 순간 급격히 내려가고, 그 뒤 천천히 다시 차오르는 과정이 반복된다. 즉, 그래프는 규칙적인 물결 모양이 아니라, 불규칙적인 변화의 모양의 그래프이어야 한다.

22 출제 주의

다음과 같이 모양이 다른 세 물병 A, B, C가 있다. 각 물병에 시간당 일정한 양의 물을 넣을 때, 경과 시간 x에 따른 물의 높이를 y라고 한다. 각 물병에 해당하는 그래프를 보기에서 골라 짝 지으시오. **A－ㄴ, B－ㄱ, C－ㄷ**



〈 보기 〉

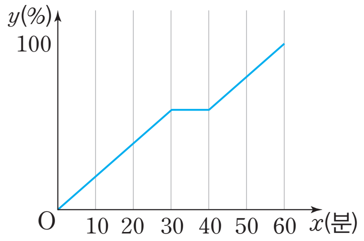


물병 A의 폭이 점점 좁아지는 부분에서 물의 높이는 점점 빠르게 증가하므로 그래프로 알맞은 것은 ㄴ이다.
물병 B는 폭이 일정한 부분과 폭이 점점 넓어지는 부분으로 나뉜다. 폭이 일정한 부분에서는 물의 높이가 일정하게 증가하고, 폭이 점점 넓어지는 부분에서는 물의 높이가 점점 느리게 증가하므로 알맞은 그래프는 ㄱ이다.
물병 C는 폭이 점점 좁아지는 부분과 폭이 점점 넓어지는 부분으로 나뉜다. 폭이 점점 좁아지는 부분에서는 물의 높이가 점점 빠르게 증가하고 폭이 점점 넓어지는 부분에서는 물의 높이가 점점 느리게 증가하므로 알맞은 그래프는 ㄷ이다.

23

다음을 보고 유진이의 핸드폰 배터리 충전 시간 x와 배터리 잔량 y 사이의 관계를 그래프로 나타내시오.

핸드폰 배터리가 부족해 핸드폰이 꺼진 유진이는 핸드폰에 충전기를 연결하여 처음 30분 동안은 배터리가 일정한 속도로 빠르게 차올랐다. 그러다 중간에 잠시 전력 공급이 끊겨 10분 동안은 배터리 잔량이 그대로 유지되었다. 문제를 해결한 후, 다시 충전이 시작되어 20분 만에 배터리가 100 % 완충되어 핸드폰을 켰다.



배터리를 충전하는 동안에는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, 전력 공급이 끊긴 동안에는 x의 값이 증가하여도 y의 값은 변화가 없이 일정하다.
핸드폰을 30분 동안 충전하다가 10분 동안은 전력 공급이 끊겼고, 다시 20분 동안 충전하였으므로 x의 값이 증가할 때 y의 값은 증가하다가 일정한 값을 유지하다가 다시 증가한다.

개념을 적용하는

Lv. 1 핵심 문제

개념 1 정비례

01

다음 중 y가 x에 정비례하는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

✓① 한 개의 무게가 120 g인 사과 x개의 무게는 y g이다.

② 한 송이에 x원인 장미꽃 7송이를 5000원짜리 바구니에 담아 구입할 때 총 가격은 y원이다.

③ 한 변의 길이가 x cm인 정사각형의 넓이는 $y\,\text{cm}^2$이다.

④ 하루 중 낮의 길이가 x시간일 때, 밤의 길이는 y시간이다.

✓⑤ 소금 x g이 들어 있는 소금물 500 g의 농도는 y %이다.

① $y=120x$ ② $y=7x+5000$

③ $y=x^2$ ④ $y=24-x$

⑤ $y=\frac{x}{500}\times100=\frac{x}{5}$

02

x, y가 다음 조건을 만족시킬 때, x와 y 사이의 관계식이 될 수 있는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

> ㈎ y가 x에 정비례한다.
> ㈏ $x=4$일 때의 y의 값과 $x=-2$일 때의 y의 값의 차가 36이다.

① $y=-18x$ ✓② $y=-6x$ ③ $y=-3x$

④ $y=3x$ ✓⑤ $y=6x$

조건 ㈎에서 y가 x에 정비례하므로 $y=ax$ $(a\neq0)$라고 하면 $x=4$일 때의 y의 값은 $4a$, $x=-2$일 때의 y의 값은 $-2a$이므로 조건 ㈏에서

$|4a-(-2a)|=36$, $|6a|=36$, $|a|=6$ $\therefore$ $a=-6$ 또는 $a=6$

따라서 x와 y 사이의 관계식은 $y=-6x$ 또는 $y=6x$

03 출제 주의

정비례 관계 $y=\frac{3}{2}x$의 그래프가 세 점 $(a,\ 6)$, $\left(b,\ -\frac{9}{2}\right)$, $\left(-\frac{4}{3},\ c\right)$를 지날 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① -9 ✓② -1 ③ 1

④ 9 ⑤ 11

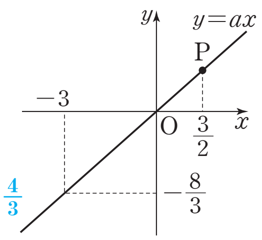
$y=\frac{3}{2}x$에 $x=a$, $y=6$을 대입하면 $6=\frac{3}{2}a$ $\therefore$ $a=4$

$y=\frac{3}{2}x$에 $x=b$, $y=-\frac{9}{2}$를 대입하면 $-\frac{9}{2}=\frac{3}{2}b$ $\therefore$ $b=-3$

$y=\frac{3}{2}x$에 $x=-\frac{4}{3}$, $y=c$를 대입하면 $c=\frac{3}{2}\times\left(-\frac{4}{3}\right)=-2$

$\therefore$ $a+b+c=4+(-3)+(-2)=-1$

04 서술형



정비례 관계 $y=ax$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. 그래프 위의 점 P의 x좌표가 $\frac{3}{2}$일 때, 점 P의 y좌표를 구하시오. (단, a는 상수이다.) $\frac{4}{3}$

$y=ax$에 $x=-3$, $y=-\frac{8}{3}$을 대입하면 $-\frac{8}{3}=-3a$ $\therefore$ $a=\frac{8}{9}$

$\therefore$ $y=\frac{8}{9}x$ ······································ 50 %

점 P의 x좌표가 $\frac{3}{2}$이므로 $y=\frac{8}{9}x$에 $x=\frac{3}{2}$을 대입하면 $y=\frac{8}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{4}{3}$

따라서 점 P의 y좌표는 $\frac{4}{3}$이다. ······························ 50 %

05

시속 60 km로 달리면 휘발유 4 L로 64 km를 갈 수 있는 자동차가 휘발유 x L로 y km를 갈 수 있다고 하자. 이 자동차가 시속 60 km로 달릴 때, 휘발유 30 L로 몇 시간을 갈 수 있는가?

① 6시간 ② 7시간 ✓③ 8시간

④ 9시간 ⑤ 10시간

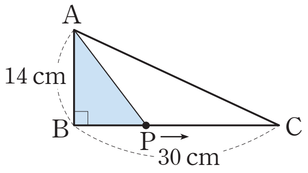
이 자동차가 시속 60 km로 달릴 때, 휘발유 4 L로 64 km를 갈 수 있으므로 휘발유 1 L로 16 km를 갈 수 있다.

즉, 휘발유 x L로 $16x$ km를 갈 수 있으므로 x와 y 사이의 관계식은 $y=16x$

$y=16x$에 $x=30$을 대입하면 $y=480$

따라서 휘발유 30 L로 480 km를 갈 수 있으므로 $\frac{480}{60}=8$(시간)을 갈 수 있다.

06



오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 점 P는 점 B를 출발하여 점 C까지 초속 2 cm로 변 BC 위를 움직인다. 점 P가 점 B를 출발한 지 x초 후의 삼각형 ABP의 넓이를 $y\,\text{cm}^2$라고 할 때, 삼각형 ABP의 넓이가 $168\,\text{cm}^2$가 되는 것은 점 P가 점 B를 출발한 지 몇 초 후인가?

(단, $0<x\le15$)

✓① 12초 ② 15초 ③ 18초

④ 21초 ⑤ 24초

x초 후의 선분 BP의 길이가 $2x$ cm이므로 $y=\frac{1}{2}\times2x\times14$ $\therefore$ $y=14x$

$y=14x$에 $y=168$을 대입하면

$168=14x$ $\therefore$ $x=12$

따라서 삼각형 ABP의 넓이가 $168\,\text{cm}^2$가 되는 것은 점 P가 점 B를 출발한 지 12초 후이다.

y가 x에 반비례하므로 $y=\frac{a}{x}$ $(a\neq0)$라고 하자.

개념 ② 반비례

$y=\frac{a}{x}$에 $x=-\frac{5}{4}$, $y=-16$을 대입하면

$-16=a\div\left(-\frac{5}{4}\right)$, $-16=a\times\left(-\frac{4}{5}\right)$ $\therefore a=20$

즉, x와 y 사이의 관계식은 $y=\frac{20}{x}$ ···················· 30 %

07 서술형

x의 값이 2배, 3배, 4배, …로 변함에 따라 y의 값은 $\frac{1}{2}$배, $\frac{1}{3}$배, $\frac{1}{4}$배, …로 변할 때, 다음 표에서 $A+B+C$의 값을 구하시오. 3

x	-10	$-\frac{5}{4}$	B	12
y	A	-16	6	C

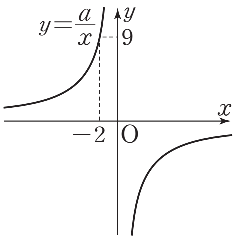
$y=\frac{20}{x}$에 $x=-10$, $y=A$를 대입하면 $A=\frac{20}{-10}=-2$

$y=\frac{20}{x}$에 $x=B$, $y=6$을 대입하면 $6=\frac{20}{B}$ $\therefore B=\frac{10}{3}$

$y=\frac{20}{x}$에 $x=12$, $y=C$를 대입하면 $C=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$ ································ 60 %

$\therefore A+B+C=-2+\frac{10}{3}+\frac{5}{3}=3$ ·· 10 %

08



다음 중 반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 이 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? (단, a는 상수이다.)

① a의 값은 -18이다.
② 제2사분면과 제4사분면을 지난다.
③ 점 $(6, -3)$을 지난다.
④ x의 값이 한없이 커져도 x축과 만나지 않는다.
✓⑤ $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

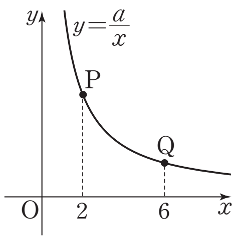
$y=\frac{a}{x}$에 $x=-2$, $y=9$를 대입하면

$9=\frac{a}{-2}$ $\therefore a=-18$

즉, x와 y 사이의 관계식은 $y=-\frac{18}{x}$

⑤ $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

09



오른쪽 그림은 반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$의 그래프의 일부이다. 이 그래프 위의 두 점 P, Q의 y좌표의 차가 $\frac{10}{3}$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② 3
③ $\frac{20}{3}$ ✓④ 10 ⑤ $\frac{31}{3}$

$y=\frac{a}{x}$에 $x=2$를 대입하면 $y=\frac{a}{2}$이므로 점 P의 y좌표는 $\frac{a}{2}$이다.

또, $y=\frac{a}{x}$에 $x=6$을 대입하면 $y=\frac{a}{6}$이므로 점 Q의 y좌표는 $\frac{a}{6}$이다.

이때 두 점 P, Q의 y좌표의 차가 $\frac{10}{3}$이므로

$\frac{a}{2}-\frac{a}{6}=\frac{10}{3}$, $\frac{1}{3}a=\frac{10}{3}$ $\therefore a=10$

반비례 관계 ㉠의 그래프를 나타내는 식을 $y=\frac{a}{x}$라고 할 때,

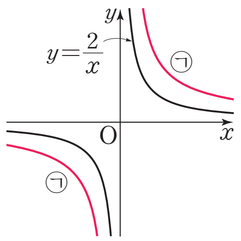
㉠의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프보다 원점에서 멀리 있으므로

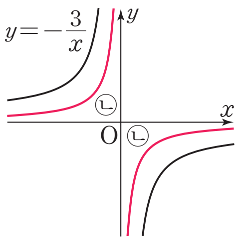
$a>0$, $|a|>|2|$

따라서 ㉠의 그래프로 알맞은 식은 $y=\frac{5}{x}$이다.

10 출제 주의

다음 ㉠, ㉡의 그래프와 보기의 반비례 관계를 나타내는 식을 올바르게 짝 지은 것을 모두 고르면? (정답 2개)





〈 보기 〉

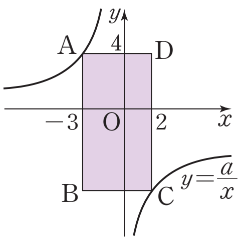
$y=\frac{5}{x}$ $y=\frac{1}{x}$ $y=-\frac{1}{x}$ $y=-\frac{5}{x}$

① ㉠: $y=\frac{1}{x}$ ✓② ㉠: $y=\frac{5}{x}$ ✓③ ㉡: $y=-\frac{1}{x}$
④ ㉡: $y=-\frac{4}{x}$ ⑤ ㉡: $y=\frac{5}{x}$

반비례 관계 ㉡의 그래프를 나타내는 식을 $y=\frac{b}{x}$라고 할 때, ㉡의 그래프는 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프보다 원점에 가까이 있으므로 $b<0$, $|b|<|-3|$

따라서 ㉡의 그래프로 알맞은 식은 $y=-\frac{1}{x}$이다.

11



오른쪽 그림은 반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$의 그래프이고 두 점 A, C는 이 그래프 위의 점이다. 이때 네 변이 x축 또는 y축에 평행한 직사각형 ABCD의 넓이는? (단, a는 상수이다.)

① 25 ② 30 ③ 35
✓④ 50 ⑤ 55

A$(-3, 4)$이므로 $y=\frac{a}{x}$에 $x=-3$, $y=4$를 대입하면 $4=\frac{a}{-3}$ $\therefore a=-12$

점 C의 x좌표가 2이므로 $y=-\frac{12}{x}$에 $x=2$를 대입하면 $y=-6$ $\therefore$ C$(2, -6)$

따라서 두 점 B, D의 좌표는 각각 $(-3, -6)$, $(2, 4)$이므로 직사각형 ABCD의 넓이는

$\{2-(-3)\}\times\{4-(-6)\}=5\times10=50$

12

일의 전체 양은 $20\times15=300$

20명이 함께 하면 15일 만에 끝나는 일이 있다. 이 일을 x명이 함께 하면 y일 만에 끝낼 수 있다고 할 때, 다음 보기 중 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?

〈 보기 〉

ㄱ. x의 값이 3배가 되면 y의 값도 3배가 된다.
ㄴ. 30명이 함께 하면 10일 만에 끝난다.
ㄷ. 12일 만에 끝내려면 25명이 함께 해야 한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ✓⑤ ㄴ, ㄷ

이 일을 x명이 함께 하면 y일 만에 끝낼 수 있으므로 $x\times y=300$ $\therefore y=\frac{300}{x}$

ㄱ. x의 값이 3배가 되면 y의 값은 $\frac{1}{3}$배가 된다.

ㄴ. $y=\frac{300}{x}$에 $x=30$을 대입하면 $y=10$

ㄷ. $y=\frac{300}{x}$에 $y=12$를 대입하면 $12=\frac{300}{x}$ $\therefore x=25$

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

01

두 정비례 관계 $y=3x$, $y=\frac{1}{a-1}x$의 그래프가 각각 점 $(a-1, -a+3)$, 점 $(b-1, -b+3)$을 지날 때, $2a+3b$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 6　② 7　✓③ 8

④ 9　⑤ 10

$y=3x$에 $x=a-1$, $y=-a+3$을 대입하면 $-a+3=3(a-1)$, $-a+3=3a-3$

$4a=6$　　$\therefore a=\frac{3}{2}$

$\therefore y=\frac{1}{a-1}x=1\div\left(\frac{3}{2}-1\right)\times x=2x$

따라서 $y=2x$에 $x=b-1$, $y=-b+3$을 대입하면

$-b+3=2(b-1)$, $-b+3=2b-2$

$3b=5$　　$\therefore b=\frac{5}{3}$

$\therefore 2a+3b=2\times\frac{3}{2}+3\times\frac{5}{3}=3+5=8$

02 출제 주의

세 점 O$(0, 0)$, A$(2, 4)$, B$(5-2n, n)$이 한 직선 위에 있을 때, n의 값을 구하시오. **2**

원점을 포함한 세 점이 한 직선 위에 있으므로 세 점은 정비례 관계 $y=ax$의 그래프 위의 점이다.

점 A$(2, 4)$가 $y=ax$의 그래프 위의 점이므로 $4=2a$　　$\therefore a=2$

$\therefore y=2x$

점 B$(5-2n, n)$이 $y=2x$의 그래프 위의 점이므로 $n=2(5-2n)$, $n=10-4n$

$5n=10$　　$\therefore n=2$

03

반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$의 그래프가 두 점 $\left(\frac{2^2+3^2}{1^2+2^2}, \frac{3^2+4^2}{2^2+3^2}\right)$, $(3, b+2)$를 지날 때, $a+b$의 값을 구하시오. $\frac{14}{3}$

(단, a는 상수이다.)

$y=\frac{a}{x}$에서 $a=xy$　……㉠

㉠에 $x=\frac{2^2+3^2}{1^2+2^2}$, $y=\frac{3^2+4^2}{2^2+3^2}$을 대입하면 $a=\frac{3^2+4^2}{1^2+2^2}=\frac{25}{5}=5$

따라서 $y=\frac{5}{x}$에 $x=3$, $y=b+2$를 대입하면 $b+2=\frac{5}{3}$　　$\therefore b=-\frac{1}{3}$

$\therefore a+b=5+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{14}{3}$

04 서술형

y가 x에 반비례하고 x와 y 사이의 관계를 표로 나타내면 다음과 같을 때, 세 양의 정수 a, b, c에 대하여 $a\times b\times c$의 값을 구하시오. **18**

x	$a-1$	a	$a+1$	…	6
y	$2b$	$b+1$	b	…	c

$y=\frac{k}{x}(k\neq0)$라 하고 $x=a-1$, $y=2b$를 대입하면 $2b=\frac{k}{a-1}$　……㉠

$y=\frac{k}{x}$에 $x=a+1$, $y=b$를 대입하면 $b=\frac{k}{a+1}$

㉠에 $b=\frac{k}{a+1}$를 대입하면 $2\left(\frac{k}{a+1}\right)=\frac{k}{a-1}$

$2a-2=a+1$　　$\therefore a=3$ ……………………………… 40 %

㉠에 $a=3$을 대입하면 $2b=\frac{k}{3-1}$, $k=4b$　　$\therefore y=\frac{4b}{x}$

$y=\frac{4b}{x}$에 $x=a=3$, $y=b+1$을 대입하면 $b+1=\frac{4b}{3}$, $3b+3=4b$

$\therefore b=3$ ……………………………… 30 %

$k=4\times3=12$이므로 $y=\frac{12}{x}$에 $x=6$, $y=c$를 대입하면 $c=\frac{12}{6}=2$ ………… 20 %

$\therefore a\times b\times c=3\times3\times2=18$ ……………………………… 10 %

05

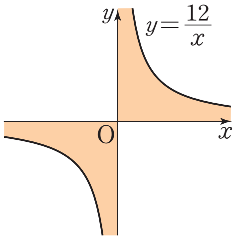
반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$의 그래프가 점 $\left(-\frac{3}{2}, 6\right)$을 지날 때, 이 그래프 위의 점 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구하시오. (단, a는 상수이다.) **6**

$y=\frac{a}{x}$, 즉 $a=xy$에 $x=-\frac{3}{2}$, $y=6$을 대입하면 $a=-\frac{3}{2}\times6=-9$

따라서 반비례 관계 $y=-\frac{9}{x}$의 그래프 위의 점 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 좌표는 $(1, -9)$, $(3, -3)$, $(9, -1)$, $(-1, 9)$, $(-3, 3)$, $(-9, 1)$의 6개이다.

06

오른쪽 그림은 반비례 관계 $y=\frac{12}{x}$의 그래프이다. 이 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 부분에 있는 점 중 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수는?



(단, 좌표축 및 곡선 위의 점은 포함하지 않는다.)

① 28　✓② 29　③ 30

④ 31　⑤ 32

x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점은 제1사분면 위에 있다.

$y=\frac{12}{x}$에서 y좌표가 자연수가 되는 x좌표는 12의 약수이므로 1, 2, 3, 4, 6, 12

$\frac{12}{1}=12$이므로 $x=1$일 때 $y=1, 2, \dots, 11$의 11개

$\frac{12}{2}=6$이므로 $x=2$일 때 $y=1, 2, \dots, 5$의 5개

$\frac{12}{3}=4$이므로 $x=3$일 때 $y=1, 2, 3$의 3개

$\frac{12}{4}=3$이므로 $x=4, 5$일 때 $y=1, 2$의 2개

$\frac{12}{6}=2$, $\frac{12}{12}=1$이므로 $x=6, 7, 8, 9, 10, 11$일 때 $y=1$의 1개

따라서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수는 $11+5+3+2\times2+6\times1=29$

Ⅲ−2. 정비례와 반비례

07

① $a<0$이므로 제2사분면, 제4사분면을 지난다.
② $-b<0$이므로 제2사분면, 제4사분면을 지난다.
③ $a<0$이므로 제2사분면, 제4사분면을 지난다.
④ $\frac{a^3}{b^2}<0$이므로 제2사분면, 제4사분면을 지난다.
⑤ $-\frac{b}{a^3}>0$이므로 제1사분면, 제3사분면을 지난다.

점 $(a,\ b)$가 제2사분면 위의 점일 때, 다음 중 그 그래프가 제3사분면을 지나는 것은? $a<0,\ b>0$

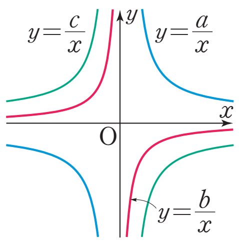
① $y=ax$　② $y=-bx$　③ $y=\frac{a}{x}$

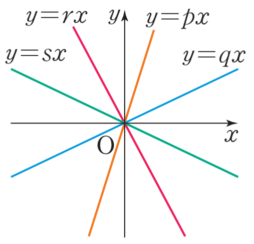
④ $y=\frac{a^3}{b^2x}$　✓⑤ $y=-\frac{b}{a^3x}$

08

ㄱ. $y=\frac{a}{x}$의 그래프는 제1사분면과 제3사분면에 한 쌍의 곡선으로 그려져 있으므로 $a>0$
$y=\frac{b}{x}$와 $y=\frac{c}{x}$는 제2사분면과 제4사분면에 한 쌍의 곡선으로 그려져 있으므로 $b<0,\ c<0$
이때 $y=\frac{c}{x}$의 그래프는 $y=\frac{b}{x}$의 그래프보다 원점에서 멀리 떨어져 있으므로 $b>c$
$\therefore\ c<b<a$

다음은 좌표평면 위에 $y=\frac{a}{x}$, $y=\frac{b}{x}$, $y=\frac{c}{x}$의 그래프와 $y=px$, $y=qx$, $y=rx$, $y=sx$의 그래프를 각각 나타낸 것이다. 이때 보기 중 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?
(단, a, b, c, p, q, r, s는 상수이다.)





〈 보기 〉
ㄱ. $c<b<a$　ㄴ. $s<r<q<p$
ㄷ. $bc<0$ → $b<0,\ c<0$이므로 $bc>0$　ㄹ. $pq+rs>0$ → $p>0,\ q>0,\ r<0,\ s<0$이므로 $pq>0,\ rs>0$　$\therefore\ pq+rs>0$

① ㄱ, ㄴ　✓② ㄱ, ㄹ　③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ　⑤ ㄷ, ㄹ

ㄴ. $y=px$, $y=qx$는 제1사분면과 제3사분면을 지나는 직선이므로 $p>0,\ q>0$
이때 $y=px$가 $y=qx$보다 y축에 더 가까우므로 $p>q$
$y=rx$, $y=sx$는 제2사분면과 제4사분면을 지나는 직선이므로 $r<0,\ s<0$
이때 $y=rx$가 $y=sx$보다 y축에 더 가까우므로 $s>r$　$\therefore\ r<s<q<p$

09

다음 보기에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?

〈 보기 〉
ㄱ. y가 x에 정비례하고 x가 z에 정비례하면 y는 z에 정비례한다.
ㄴ. y가 x에 정비례하고 x가 z에 반비례하면 y는 z에 정비례한다. → $y=a\times\frac{b}{z}=\frac{ab}{z}$이므로 y는 z에 반비례
ㄷ. y가 x에 반비례하고 x가 z에 반비례하면 y는 z에 반비례한다. → $y=\frac{a}{\frac{b}{z}}=\frac{a}{b}z$이므로 y는 z에 정비례

✓① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

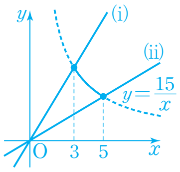
0이 아닌 상수 a, b에 대하여 y가 x에 정비례하면 $y=ax$, y가 x에 반비례하면 $y=\frac{a}{x}$, x가 z에 정비례하면 $x=bz$, x가 z에 반비례하면 $x=\frac{b}{z}$라고 하자.
ㄱ. y가 x에 정비례하므로 $y=ax$, x가 z에 정비례하므로 $x=bz$
따라서 $y=a\times bz=abz$이므로 y는 z에 정비례한다.

10

정비례 관계 $y=ax$의 그래프와 반비례 관계 $y=\frac{15}{x}$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점은 두 그래프 (i), (ii) 사이에 존재한다.

유리수 a에 대하여 정비례 관계 $y=ax$의 그래프와 반비례 관계 $y=\frac{15}{x}$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표는 k이고 $3\le k\le5$를 만족시킬 때, $15a$의 값 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합은?

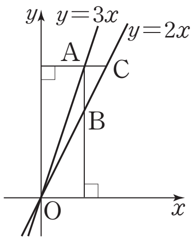
✓① 34　② 35　③ 36
④ 37　⑤ 38



(i) $k=3$일 때, $y=\frac{15}{x}$에 $x=3$을 대입하면 $y=5$
$y=ax$에 $x=3,\ y=5$를 대입하면 $5=3a$　$\therefore\ a=\frac{5}{3}$
(ii) $k=5$일 때, $y=\frac{15}{x}$에 $x=5$를 대입하면 $y=3$
$y=ax$에 $x=5,\ y=3$을 대입하면 $3=5a$　$\therefore\ a=\frac{3}{5}$
(i), (ii)에 의하여 $\frac{3}{5}\le a\le\frac{5}{3}$이므로 a의 값 중 가장 큰 수는 $\frac{5}{3}$, 가장 작은 수는 $\frac{3}{5}$이므로 구하는 값은 $15\times\frac{5}{3}+15\times\frac{3}{5}=25+9=34$

11 **서술형**

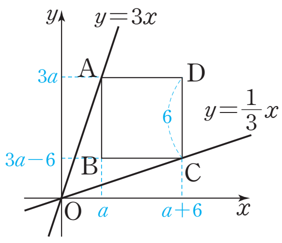
정비례 관계 $y=3x$의 그래프 위의 한 점 A에서 x축, y축에 수직인 직선을 그어 정비례 관계 $y=2x$의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라고 할 때, 선분 AB의 길이가 14가 되도록 하는 선분 AC의 길이를 구하시오. 7



두 점 A, B의 x좌표를 a라고 하면 $\mathrm{A}(a,\ 3a)$, $\mathrm{B}(a,\ 2a)$
이때 선분 AB의 길이가 14이므로　$3a-2a=14$　$\therefore\ a=14$
$\therefore\ \mathrm{A}(14,\ 42)$, $\mathrm{B}(14,\ 28)$ ························ 60 %
이때 점 C의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같으므로 $y=2x$에 $y=42$를 대입하면
$42=2x$　$\therefore\ x=21$
$\therefore\ \mathrm{C}(21,\ 42)$ ························ 30 %
따라서 선분 AC의 길이는 $21-14=7$ ························ 10 %

12

오른쪽 그림에서 제1사분면 위의 두 점 A, C는 각각 정비례 관계 $y=3x$, $y=\frac{1}{3}x$의 그래프 위의 점이다. 사각형 ABCD가 한 변의 길이가 6인 정사각형일 때, 점 A의 좌표는?



① $\left(\frac{1}{3},\ 1\right)$　② $(1,\ 3)$　③ $(2,\ 6)$
✓④ $(3,\ 9)$　⑤ $(6,\ 18)$

점 A의 x좌표를 a라고 하면 $\mathrm{A}(a,\ 3a)$이므로
$\mathrm{B}(a,\ 3a-6)$, $\mathrm{C}(a+6,\ 3a-6)$, $\mathrm{D}(a+6,\ 3a)$
이때 점 C는 $y=\frac{1}{3}x$의 그래프 위의 점이므로 $y=\frac{1}{3}x$에
$x=a+6,\ y=3a-6$을 대입하면 $3a-6=\frac{1}{3}(a+6)$　$\therefore\ a=3$
$\therefore\ \mathrm{A}(3,\ 9)$

Lv.2 사고를 확장하는 실전 문제

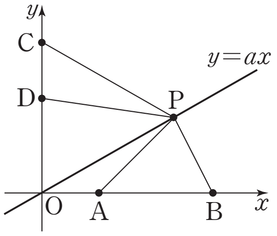
점 P는 $y=ax$의 그래프 위의 점이므로 점 P의 x좌표를 m $(m>0)$이라고 하면 $\mathrm{P}(m,\ am)$

(삼각형 PAB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(9-3)\times am=3am$

13

(삼각형 PCD의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(8-5)\times m=\frac{3}{2}m$

오른쪽 그림에서 정비례 관계 $y=ax$의 그래프는 점 P를 지나는 직선이다. 네 점 A, B, C, D의 좌표는 각각 $(3,\ 0)$, $(9,\ 0)$, $(0,\ 8)$, $(0,\ 5)$이고 삼각형 PAB의 넓이를 2배 한 값이 삼각형 PCD의 넓이를 3배 한 값과 같을 때, 상수 a의 값을 구하시오. $\mathbf{\frac{3}{4}}$



이때 삼각형 PAB의 넓이를 2배 한 값이 삼각형 PCD의 넓이를 3배 한 값과 같으므로

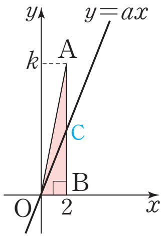
$2\times3am=3\times\frac{3}{2}m$, $6am=\frac{9}{2}m$ $\therefore a=\frac{3}{4}$

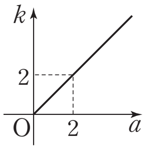
정비례 관계 $y=ax$의 그래프가 삼각형 AOB의 넓이를 이등분하므로 삼각형 COB의 넓이는 삼각형 AOB의 넓이의 $\frac{1}{2}$배이다. 이때 두 삼각형 AOB와 COB의 밑변

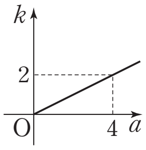
14

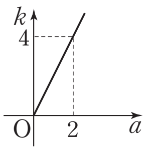
은 선분 OB로 같고 선분 AB의 길이가 k이므로 선분 BC의 길이는 $\frac{k}{2}$이다.

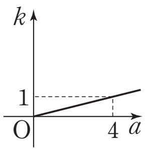
점 A의 y좌표는 k이고 점 B의 좌표는 $(2,\ 0)$일 때, 정비례 관계 $y=ax$의 그래프는 삼각형 AOB의 넓이를 이등분한다. 다음 중 상수 a와 k 사이의 관계를 정비례 관계의 그래프로 나타내었을 때 알맞은 것은? (단, O는 원점이다.)

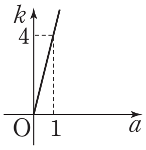


①


②


③


④


✓⑤


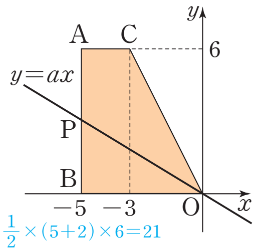
점 $\mathrm{C}\left(2,\ \frac{k}{2}\right)$는 $y=ax$의 그래프 위의 점이므로 $\frac{k}{2}=2a$ $\therefore k=4a$

따라서 정비례 관계 $k=4a$의 그래프로 알맞은 것은 ⑤이다.

15 서술형

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 세 점 $\mathrm{A}(-5,\ 6)$, $\mathrm{B}(-5,\ 0)$, $\mathrm{C}(-3,\ 6)$이 있다. 정비례 관계 $y=ax$의 그래프가 선분 AB 위의 점 P를 지나고 사다리꼴 ABOC의 넓이를 이등분할 때, 상수 a의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) $\mathbf{\frac{21}{25}}$

$\frac{1}{2}\times(5+2)\times6=21$



$y=ax$의 그래프가 사다리꼴 ABOC의 넓이를 이등분하므로

삼각형 PBO의 넓이는 $\frac{21}{2}$이다. ··································· 40 %

$y=ax$에 $x=-5$를 대입하면 $y=-5a$ $\therefore \mathrm{P}(-5,\ -5a)$ ················· 40 %

따라서 삼각형 PBO의 넓이는 $\frac{1}{2}\times5\times5a=\frac{25}{2}a=\frac{21}{2}$ $\therefore a=\frac{21}{25}$ ······· 20 %

점 $(p,\ q)$가 $y=\frac{a}{x}$의 그래프 위의 점이므로 $y=\frac{a}{x}$에 $x=p$, $y=q$를 대입하면

$q=\frac{a}{p}$ $\therefore pq=a$

ㄱ. p, q가 정수일 때, $pq=2$를 만족시키는 점 $(p,\ q)$는 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(-1,\ -2)$, $(-2,\ -1)$의 4개이다.

16

양의 정수 a에 대하여 $y=\frac{a}{x}$ $(a\neq0)$의 그래프가 있다. 이 그래프 위의 점 $(p,\ q)$에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?

〈 보기 〉

ㄱ. $a=2$일 때, p, q가 모두 정수인 그래프 위의 점의 개수는 4이다.

ㄴ. p, q가 모두 정수인 그래프 위의 점의 개수는 a의 값과 관계없이 항상 짝수 개이다.

ㄷ. p, q가 모두 정수인 그래프 위의 점의 개수가 4의 배수가 아닌 2의 배수가 되도록 하는 a는 100 이하에 오직 10개만 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄴ. a의 약수의 개수를 k라고 하자.

$pq=a$를 만족시키는 정수 p에 대하여 $|p|$의 값은 k개이므로 p의 값은 $2k$개이다.

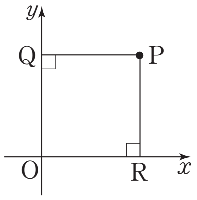
이때 p의 값에 대응되는 q의 값이 항상 한 개 존재하므로 $pq=a$를 만족시키는 점 $(p,\ q)$의 개수는 p의 개수와 같다.

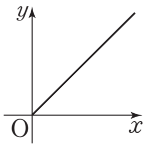
따라서 점의 개수는 항상 짝수이다.

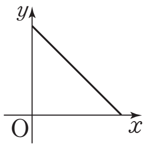
ㄷ. 점의 개수 $2k$가 4의 배수가 아니려면 k가 홀수이어야 한다. 이때 k는 a의 약수의 개수이고 k가 홀수이려면 a는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 하므로 100 이하의 수는 1^2, 2^2, …, 10^2의 10개이다.

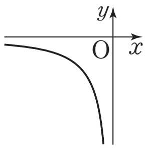
17

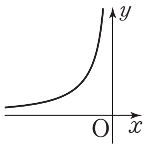
오른쪽 그림과 같이 제1사분면 위의 한 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 R, Q라고 하자. 사각형 PQOR의 넓이를 일정하게 유지하면서 점 P를 이동시킬 때, 다음 중 점 P가 나타내는 그래프로 알맞은 것은? (단, O는 원점이다.)

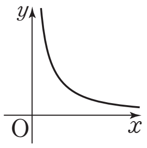


①


②


③


④


✓⑤


점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하고 사각형 PQOR의 넓이를 S라고 하면 $S=xy$

즉, $y=\frac{S}{x}$이므로 S를 일정하게 유지하면 y는 x에 반비례한다.

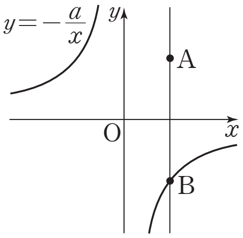
이때 $S>0$이므로 점 P가 나타내는 그래프로 알맞은 것은 ⑤이다.

선분 AB가 y축에 평행하므로 두 점 A, B는 x좌표가 같다.

따라서 점 B의 x좌표는 3이므로 $y=-\frac{a}{x}$에 $x=3$을 대입하면 $y=-\frac{a}{3}$

18

$\therefore \mathrm{B}\left(3,\ -\frac{a}{3}\right)$



오른쪽 그림은 반비례 관계 $y=-\frac{a}{x}$의 그래프이다. 점 A(3, 4)를 지나고 y축에 평행한 직선이 $y=-\frac{a}{x}$의 그래프와 만나는 점을 B라고 하면 선분 AB의 길이가 8이다. 이때 상수 a의 값을 구하시오. **12**

이때 선분 AB의 길이가 8이므로

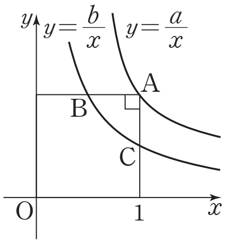
$4-\left(-\frac{a}{3}\right)=8,\ 4+\frac{a}{3}=8,\ \frac{a}{3}=4 \qquad \therefore a=12$

두 점 A, C의 x좌표가 같으므로 점 C의 x좌표는 1이다.

$y=\frac{a}{x}$에 $x=1$을 대입하면 $y=a \qquad \therefore \mathrm{A}(1,\ a)$

19

$y=\frac{b}{x}$에 $x=1$을 대입하면 $y=b \qquad \therefore \mathrm{C}(1,\ b)$



반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 점 A를 지나고 x축, y축에 평행한 직선이 $y=\frac{b}{x}$의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라고 하자. 점 A의 x좌표가 1이고 선분 AB와 선분 AC의 길이가 같을 때, 상수 a의 값을 구하시오. (단, $x>0$, $a\neq b$) **1**

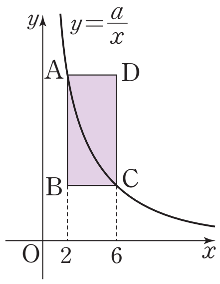
두 점 A, B의 y좌표가 같으므로 점 B의 y좌표는 a이다.

$y=\frac{b}{x}$에 $y=a$를 대입하면 $a=\frac{b}{x},\ x=\frac{b}{a} \qquad \therefore \mathrm{B}\left(\frac{b}{a},\ a\right)$

즉, 선분 AB와 선분 AC의 길이가 같으므로 $1-\frac{b}{a}=a-b,\ \frac{a-b}{a}=a-b$

이때 $a\neq b$이므로 양변을 $a-b$로 나누면 $\frac{1}{a}=1 \qquad \therefore a=1$

20 출제 주의



오른쪽 그림은 반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$의 그래프의 일부이고, 두 점 A, C는 이 그래프 위의 점이다. 직사각형 ABCD의 넓이가 36일 때, 상수 a의 값은? (단, 직사각형의 네 변은 x축 또는 y축에 평행하다.)

① 12
② 18
③ 21
④ 24
✓⑤ 27

점 A의 x좌표가 2이므로 $y=\frac{a}{x}$에 $x=2$를 대입하면 $y=\frac{a}{2} \qquad \therefore \mathrm{A}\left(2,\ \frac{a}{2}\right)$

점 C의 x좌표가 6이므로 $y=\frac{a}{x}$에 $x=6$을 대입하면 $y=\frac{a}{6} \qquad \therefore \mathrm{C}\left(6,\ \frac{a}{6}\right)$

이때 점 B는 점 A와 x좌표가 같고 점 C와 y좌표가 같으므로 $\mathrm{B}\left(2,\ \frac{a}{6}\right)$

점 D는 점 C와 x좌표가 같고 점 A와 y좌표가 같으므로 $\mathrm{D}\left(6,\ \frac{a}{2}\right)$

즉, 직사각형 ABCD의 넓이가 36이므로 $(6-2)\times\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{6}\right)=36 \qquad \therefore a=27$

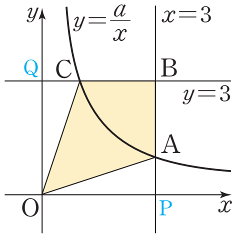
점 A의 x좌표가 3이므로 $y=\frac{a}{x}$에 $x=3$을 대입하면

$y=\frac{a}{3} \qquad \therefore \mathrm{A}\left(3,\ \frac{a}{3}\right)$

점 C의 y좌표가 3이므로 $y=\frac{a}{x}$에 $y=3$을 대입하면

21

$3=\frac{a}{x},\ x=\frac{a}{3} \qquad \therefore \mathrm{C}\left(\frac{a}{3},\ 3\right)$



오른쪽 그림은 반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$의 그래프의 일부이고, 두 직선 $x=3$, $y=3$과 만나는 점을 각각 A, C라고 하자. 사각형 OABC의 넓이가 6일 때, 상수 a의 값은?

(단, O는 원점이다.)

① 1
② 2
✓③ 3
④ 4
⑤ 5

(사각형 OPBQ의 넓이)$=3\times3=9$, (삼각형 OAP의 넓이)$=\frac{1}{2}\times3\times\frac{a}{3}=\frac{a}{2}$,

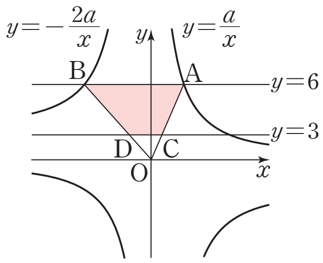
(삼각형 OCQ의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\frac{a}{3}\times3=\frac{a}{2}$이므로 $6=9-\frac{a}{2}-\frac{a}{2} \qquad \therefore a=3$

두 점 A, B의 y좌표는 6이므로 $\mathrm{A}\left(\frac{a}{6},\ 6\right)$, $\mathrm{B}\left(-\frac{a}{3},\ 6\right)$ ························ 25 %

두 점 A, C를 지나는 그래프를 정비례 관계 $y=bx$ (b는 상수)라고 하자.

22 서술형

$\therefore y=\frac{36}{a}x$, $\mathrm{C}\left(\frac{a}{12},\ 3\right)$ ································ 25 %



오른쪽 그림과 같이 두 반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$, $y=-\frac{2a}{x}$ $(a>0)$의 그래프가 직선 $y=6$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 선분 OA, OB가 직선 $y=3$과 만나는 점을 각각 C, D라고 할 때, 사각형 ABDC의 넓이가 27이다. 이때 상수 a의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) **24**

두 점 B, D를 지나는 그래프를 정비례 관계 $y=cx$ (c는 상수)라고 하자.

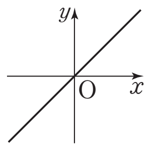
$\therefore y=-\frac{18}{a}x$, $\mathrm{D}\left(-\frac{a}{6},\ 3\right)$ ································ 25 %

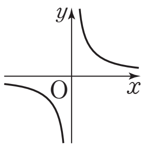
즉, 두 직선 $y=6$, $y=3$으로 만들어진 사각형 ABDC는 사다리꼴이고 넓이가 27이므로

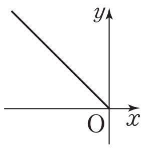
$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a\right)\times3=27 \qquad \therefore a=24$ ································ 25 %

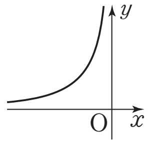
23

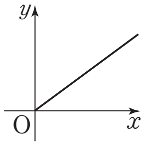
톱니 수가 각각 55개, 75개인 두 톱니바퀴 A, B가 서로 맞물려 돌고 있다. 톱니바퀴 A가 x번 회전할 때, 톱니바퀴 B가 y번 회전한다고 한다. 다음 중 x와 y 사이의 관계를 나타낸 그래프로 알맞은 것은?

①


②


③


④


✓⑤


일정한 기간 동안 맞물리는 톱니의 개수는 같으므로 $55\times x=75\times y \qquad \therefore y=\frac{11}{15}x$

이때 x, y는 톱니바퀴가 회전한 횟수이므로 $x>0$, $y>0$

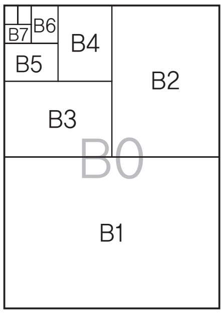
따라서 x와 y 사이의 관계를 나타낸 그래프로 알맞은 것은 $y=\frac{11}{15}x$의 그래프 중 $x>0$, $y>0$인 부분을 나타낸 ⑤이다.

Lv.2 사고를 확장하는 실전 문제

20초 동안 B4 용지 8장을 인쇄할 수 있으므로 60초, 즉 1분 동안 B4 용지 $3\times8=24$(장)을 인쇄할 수 있다.
또, B4 용지 24장을 인쇄하는 것은 B3 용지 12장, B2 용지 6장, B1 용지 3장을 인쇄하는 것과 같다.
따라서 1분 동안 B1 용지 3장을 인쇄할 수 있으므로 x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내면 $y=3x$

24

오른쪽 그림과 같이 B0용지를 반씩 접을 때마다 B1, B2, B3, …이 되고, 종이의 넓이에 따라 인쇄 속도가 달라진다. 20초 동안 B4용지 8장을 인쇄할 수 있는 대형 프린터로 x분 동안 B1 용지 y장을 인쇄할 수 있다고 할 때, x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내면?



① $y=x$　② $y=2x$　✓③ $y=3x$
④ $y=8x$　⑤ $y=16x$

$x\times y=243$이므로 $y=\frac{243}{x}$
이때 x, y는 자연수이고, $x>y$
따라서 $y=\frac{243}{x}$을 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(243,\ 1)$, $(81,\ 3)$, $(27,\ 9)$이므로 구하는 직사각형의 개수는 3이다.

25 출제 주의

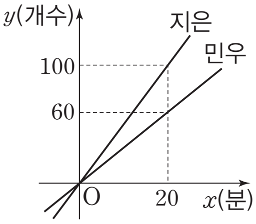
정사각형 모양의 타일 243개를 모두 사용하여 여러 가지 모양의 직사각형을 만들려고 한다. 가로에 놓인 타일의 개수를 x, 세로에 놓인 타일의 개수를 y라고 할 때, 가로의 길이가 세로의 길이보다 긴 서로 다른 모양의 직사각형의 개수는?

✓① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

지은이의 그래프는 $y=ax(a\neq0)$, 민우의 그래프는 $y=bx\ (b\neq0)$라고 하자.
지은이의 그래프가 점 $(20,\ 100)$을 지나므로 $a=5$
민우의 그래프가 점 $(20,\ 60)$을 지나므로 $b=3$
즉, 지은이의 그래프가 나타내는 식은 $y=5x$, 민우의 그래프가 나타내는 식은 $y=3x$

26

오른쪽 그림은 제빵 공장에서 지은이와 민우가 소금빵을 만드는 시간 x분과 소금빵의 개수 y 사이의 관계를 정비례 관계의 그래프로 나타낸 것이다. 다음 중 옳지 않은 것은?

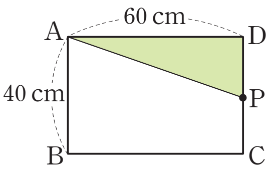


① 지은이가 1분 동안 만든 소금빵은 5개이다.
② 민우가 1분 동안 만든 소금빵은 3개이다.
③ 민우의 그래프가 나타내는 식은 $y=3x$이다.
④ 두 사람이 함께 800개의 소금빵을 만들기 위해서는 100분이 소요된다.
✓⑤ 지은이와 민우가 각각 30분 동안 소금빵을 만들면 지은이가 민우보다 40개 더 많은 소금빵을 만든다.

⑤ 그래프의 식에 $x=30$을 각각 대입하면 $y=5\times30=150$(개), $y=3\times30=90$(개)
즉, 지은이가 민우보다 $150-90=60$(개) 더 많은 소금빵을 만든다.

27 서술형

오른쪽 그림과 같은 직사각형 ABCD에서 점 P는 점 A에서 출발하여 시계 반대 방향으로 초속 5 cm로 직사각형의 변을 따라 움직인다. 점 P가 변 CD 위에 있으면서 삼각형 APD의 넓이가 600 cm^2가 되는 것은 점 P가 출발한 지 몇 초 후인지 구하시오. **24초**



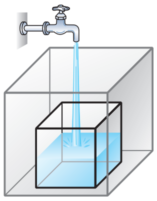
선분 PD의 길이를 x cm, 삼각형 APD의 넓이를 $y\ \text{cm}^2$라고 하면
$y=\frac{1}{2}\times x\times60$　　$\therefore\ y=30x$ ······························ 40 %
$y=30x$에 $y=600$을 대입하면 $600=30x$　　$\therefore\ x=20$ ·················· 30 %
따라서 선분 PC의 길이는 $40-20=20\ (\text{cm})$이므로 점 P가 움직인 거리는
$40+60+20=120\ (\text{cm})$
이때 점 P는 초속 5 cm로 직사각형의 변을 따라 움직이므로 점 P가 점 A에서 출발한 지 $\frac{120}{5}=24$(초) 후이다. ······························ 30 %

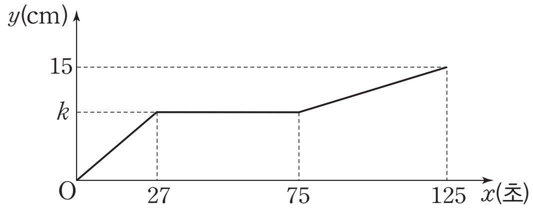
27초와 75초일 때 수면의 높이는 k cm로 같다. 즉, 수조의 물은 27초 동안 작은 수조에 물이 가득 차고, 75초 동안 큰 수조에 k cm만큼 물이 찬다. 그 후 125초까지 큰 수조의 물이 15 cm까지 채워진다. 이때 수조에 채워지는 물의 속력이 일정하므로 작은 수조가 없이 큰 수조에 물을 채웠다면 그래프는 0초부터 125초까지 정비례 관계의 그래프이어야 한다.

28

오른쪽 그림과 같이 크기가 다른 두 정육면체 모양의 수조가 포개져 있다. 수조에 일정한 속력으로 물을 채우려고 할 때 큰 수조의 한 모서리의 길이는 15 cm이고, 작은 수조의 한 모서리의 길이는 k cm라고 한다. x초 후의 수면의 최대 높이를 y cm라고 할 때, x와 y 사이의 관계를 다음과 같이 그래프로 나타내었다. 이때 작은 수조의 한 모서리의 길이는?

(단, 수조의 두께는 생각하지 않는다.)





① 1 cm　② 3 cm　③ 5 cm
④ 7 cm　✓⑤ 9 cm

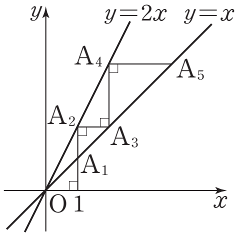
75초부터 125초까지의 구간의 그래프를 정비례 관계 $y=ax$의 그래프라고 하면
이 그래프는 점 $(125,\ 15)$를 지나므로
$y=ax$에 $x=125$, $y=15$를 대입하면 $15=125a$, $a=\frac{3}{25}$　　$\therefore\ y=\frac{3}{25}x$
$y=\frac{3}{25}x$에 $x=75$, $y=k$를 대입하면 $k=\frac{3}{25}\times75$　　$\therefore\ k=9$
따라서 작은 수조의 한 모서리의 길이는 9 cm이다.

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

대표 문제

오른쪽 그림과 같이 점 $(1,\ 0)$을 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 $y=x$와 만나는 점을 A_1, 직선 $y=2x$와 만나는 점을 A_2라 하고, 점 A_2를 지나고 x축과 평행한 직선이 직선 $y=x$와 만나는 점을 A_3이라고 하자. 또, 점 A_3을 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 $y=2x$와 만나는 점을 A_4, 점 A_4를 지나고 x축과 평행한 직선이 직선 $y=x$와 만나는 점을 A_5라고 하자.

이와 같은 방법으로 점 A_6, A_7, A_8, A_9, …를 정할 때, 선분 $A_{2026}A_{2027}$의 길이는 2^n이다. 이때 자연수 n의 값을 구하시오.



함께 풀기

STEP 1

주어진 조건과 구해야 하는 것 확인하기

주어진 조건: ① 두 직선 $y=x$, $y=2x$ 위의 점 A_1, A_2, A_3, …

② 점 A_1과 점 A_2의 x좌표는 1이다.

구해야 하는 것: 선분 $A_{2026}A_{2027}$의 길이가 2^n일 때, 자연수 n의 값

STEP 2

점 A_1, A_2, A_3, …의 좌표 구하기

$y=x$에 $x=1$을 대입하면

$y=1 \quad \therefore A_1(1,\ 1)$

$y=2x$에 $x=1$을 대입하면

$y=2 \quad \therefore A_2(1,\ 2)$

$y=x$에 $y=2$를 대입하면

$2=x \quad \therefore A_3(2,\ 2)$

$y=2x$에 $x=2$를 대입하면

$y=4 \quad \therefore A_4(2,\ 4)$

이와 같은 방법으로

$A_5(4,\ 4)$, $A_6(4,\ 8)$, $A_7(8,\ 8)$, $A_8(8,\ 16)$, $A_9(16,\ 16)$, …

STEP 3

선분 A_2A_3, A_4A_5, A_6A_7, …의 길이 구하기

이때 $A_2(1,\ 2)$, $A_3(2,\ 2)$이므로 선분 A_2A_3의 길이는 $2-1=1$

$A_4(2,\ 4)$, $A_5(4,\ 4)$이므로 선분 A_4A_5의 길이는 $4-2=2$

$A_6(4,\ 8)$, $A_7(8,\ 8)$이므로 선분 A_6A_7의 길이는 $8-4=4$

$A_8(8,\ 16)$, $A_9(16,\ 16)$이므로 선분 A_8A_9의 길이는 $16-8=8$

⋮

즉, 선분 $A_{2n}A_{2n+1}$의 길이는 2^{n-1}이다.

STEP 4

선분 $A_{2026}A_{2027}$의 길이 구하기

따라서 $2026=2\times1013$이므로 선분 $A_{2026}A_{2027}$의 길이는

$2^{1013-1}=2^{1012}$

STEP 5

n의 값 구하기

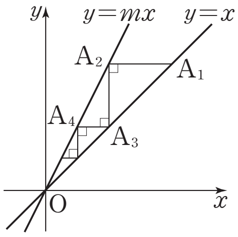
그러므로 $n=1012$이다.

답 1012

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

01

두 자연수 m, n에 대하여 점 $A_1(2048,\ 2048)$을 지나고 x축과 평행한 직선이 직선 $y=mx$와 만나는 점을 A_2, 점 A_2를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 $y=x$와 만나는 점을 A_3, 점 A_3을 지나고 x축과 평행한 직선이 직선 $y=mx$와 만나는 점을 A_4라고 하자. 이와 같은 방법으로 A_5, A_6, A_7, …을 정할 때, 점 A_n의 좌표가 $(1,\ 1)$이다. 이때 $m+n$의 값을 구하시오. 25



$y=mx$에 $y=2048$을 대입하면 $2048=mx$ $\quad \therefore x=\frac{2048}{m}$

$\therefore A_2\left(\frac{2048}{m},\ 2048\right)$, $A_3\left(\frac{2048}{m},\ \frac{2048}{m}\right)$

$y=mx$에 $y=\frac{2048}{m}$을 대입하면

$\frac{2048}{m}=mx \quad \therefore x=\frac{2048}{m^2}$

$\therefore A_4\left(\frac{2048}{m^2},\ \frac{2048}{m}\right)$, $A_5\left(\frac{2048}{m^2},\ \frac{2048}{m^2}\right)$

$y=mx$에 $y=\frac{2048}{m^2}$을 대입하면

$\frac{2048}{m^2}=mx \quad \therefore x=\frac{2048}{m^3}$

$\therefore A_6\left(\frac{2048}{m^3},\ \frac{2048}{m^2}\right)$, $A_7\left(\frac{2048}{m^3},\ \frac{2048}{m^3}\right)$

⋮

따라서 $A_{2k}\left(\frac{2048}{m^k},\ \frac{2048}{m^k-1}\right)$, $A_{2k+1}\left(\frac{2048}{m^k},\ \frac{2048}{m^k}\right)$($k$는 2 이상의 자연수)이므로 $A_n(1,\ 1)$을 만족시키는 n의 값은 홀수이다.

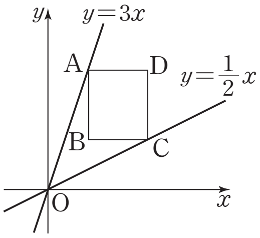
$\frac{2048}{m^k}=1$에서 $m^k=2048=2^{11}$

따라서 $m=2$, $k=11$이므로 $n=2\times11+1=23$

$\therefore m+n=2+23=25$

02

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=3x$ 위의 점 중 제1사분면 위의 점이면서 x좌표가 자연수인 점 A에 대하여 선분 AD가 x축과 평행하도록 점 A에서 오른쪽으로 2만큼 이동한 점을 D라고 하자. 점 D를 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 만나는 점을 C라고 할 때, 두 선분 AD, CD를 두 변으로 하는 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 l이라고 하자. l의 값이 될 수 있는 수를 작은 수부터 차례대로 나열하였을 때, 15번째 오는 수를 구하시오. 77



점 A의 좌표를 $(t,\ 3t)$ (t는 자연수)라고 하면 점 D의 좌표가 $(t+2,\ 3t)$이므로 $x=t+2$를 $y=\frac{1}{2}x$에 대입하면

$y=\frac{1}{2}(t+2)=\frac{1}{2}t+1 \quad \therefore C\left(t+2,\ \frac{1}{2}t+1\right)$

따라서 선분 AD의 길이는 2,

선분 CD의 길이는 $3t-\left(\frac{1}{2}t+1\right)=\frac{5}{2}t-1$

이므로 직사각형 ABCD의 둘레의 길이 l은

$l=2\left(2+\frac{5}{2}t-1\right)=5t+2$

따라서 l이 될 수 있는 값을 t의 값에 따라 작은 수부터 차례대로 나열해 보면 7, 12, 17, 22, 27, …이므로 15번째로 오는 수는 $5\times15+2=77$이다.

03

두 자연수 a, b에 대하여 반비례 관계 $y=\frac{K}{x}$ (K는 상수)의 그래프는 두 점 $A(5,\ a)$, $B(b,\ 7)$을 지나고, 직선 $y=mx$는 선분 AB와 만난다. 양의 정수 m의 값이 7개일 때, $a+b+K$의 값을 구하시오. 235

두 자연수 a, b에 대하여 두 점 $A(5,\ a)$, $B(b,\ 7)$이 반비례 관계 $y=\frac{K}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$a=\frac{K}{5}$, $7=\frac{K}{b}$ $\quad \therefore 5a=7b=K$

$5a=7b$에서 $a=7t$, $b=5t$ (t는 자연수)라고 하면 $K=35t$

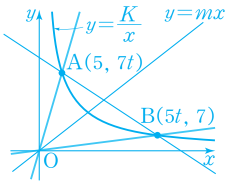
이때 직선 $y=mx$가 점 $A(5,\ 7t)$를 지나는 직선이면

$7t=5m \quad \therefore m=\frac{7t}{5}$

점 $B(5t,\ 7)$을 지나는 직선이면 $7=5tm \quad \therefore m=\frac{7}{5t}$

따라서 $y=\frac{K}{x}$의 그래프가 두 점 $A(5,\ 7t)$, $B(5t,\ 7)$을 지나므로 직선 $y=mx$가 선분 AB와 만나려면 $\frac{7}{5t}\le m\le\frac{7t}{5}$이어야 한다.

이때 t의 값이 커질수록 $\frac{7}{5t}$의 값은 작아지고, $\frac{7t}{5}$의 값은 커진다.



$\frac{7}{5t}$의 값은 $t=1$이면 $1<\frac{7}{5t}<2$, $t>1$이면 $0<\frac{7}{5t}<1$

$\frac{7t}{5}$의 값은 $t=1$이면 $1<\frac{7t}{5}<2$, $t=2$이면 $2<\frac{7t}{5}<3$, …

$t=1$이면 조건을 만족시키는 m의 값이 없으므로 $t\ge2$이고 양의 정수 m의 값이 7개이므로 $0<m<8$이어야 한다.

즉, $0<\frac{7}{5t}<1$이고 $7\le\frac{7t}{5}<8$이어야 하므로 $t=5$

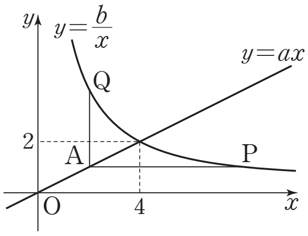
따라서 $a=7\times5=35$, $b=5\times5=25$, $K=35\times5=175$이므로

$a+b+K=35+25+175=235$

04

오른쪽 그림과 같이 $y=ax$와 $y=\frac{b}{x}$의 그래프가 모두 점 $(4,\ 2)$를 지난다. $y=ax$의 그래프 위의 한 점 A를 지나고, 점 A에서 x축, y축에 평행한 직선을 그어 $y=\frac{b}{x}$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라고 할 때, 선분 AP와 선분 AQ의 길이의 비를 구하시오.

(단, a, b는 상수이다.) **2:1**



$y=ax$에 $x=4$, $y=2$를 대입하면

$2=4a \quad \therefore a=\frac{1}{2} \quad \therefore y=\frac{1}{2}x$

$y=\frac{b}{x}$에 $x=4$, $y=2$를 대입하면

$2=\frac{b}{4} \quad \therefore b=8 \quad \therefore y=\frac{8}{x}$

이때 점 A는 $y=\frac{1}{2}x$의 그래프 위의 점이므로 $\mathrm{A}\left(t,\ \frac{1}{2}t\right)$라고 하면

점 P는 y좌표가 $\frac{1}{2}t$이고 $y=\frac{8}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$\frac{1}{2}t=\frac{8}{x}$, $x=\frac{16}{t} \quad \therefore \mathrm{P}\left(\frac{16}{t},\ \frac{1}{2}t\right)$

점 Q는 x좌표가 t이고 $y=\frac{8}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$y=\frac{8}{t} \quad \therefore \mathrm{Q}\left(t,\ \frac{8}{t}\right)$

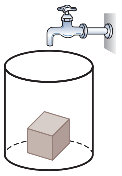
따라서 선분 AP의 길이는 $\frac{16}{t}-t$, 선분 AQ의 길이는

$\frac{8}{t}-\frac{1}{2}t=\frac{1}{2}\left(\frac{16}{t}-t\right)$이므로 선분 AP와 선분 AQ의 길이의 비는

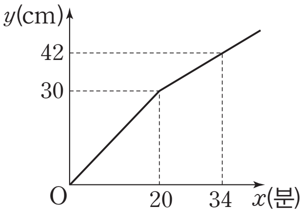
$\frac{16}{t}-t : \frac{1}{2}\left(\frac{16}{t}-t\right)=1:\frac{1}{2}=2:1$

05

[그림 1]과 같이 깊이가 90 cm인 원기둥 모양의 용기 바닥에 직육면체 모양의 벽돌이 들어 있고, 이 용기에 일정한 비율로 물을 넣는다. [그림 2]는 물의 높이가 시간이 지남에 따라 어떻게 변하는지를 그래프로 나타낸 것일 때, 용기의 부피는 벽돌의 부피의 몇 배인지 구하시오. **7배**



[그림 1]



[그림 2]

물의 높이가 30 cm가 될 때까지의 그래프의 기울기가 그 이후보다 가파르게 기울어졌으므로 물이 채워지는 용기의 높이가 30 cm일 때 변한다. 즉, 벽돌의 높이는 30 cm이다.

물을 채우기 시작하고 20분 동안 물의 높이가 30 cm 증가했으므로 20분까지 1분 동안 높이의 증가율은 $\frac{30}{20}=\frac{3}{2}$

그 후 34분까지 높이가 12 cm 증가했으므로 20분부터 34분까지 1분 동안 높이의 증가율은 $\frac{12}{14}=\frac{6}{7}$

1분 동안 넣는 물의 양을 V라 하고, 용기의 밑넓이를 S, 벽돌의 밑넓이를 P라고 하면

$V=(S-P)\times\frac{3}{2}=S\times\frac{6}{7}$

$S-P=\frac{4}{7}S$, $\frac{3}{7}S=P \quad \therefore S=\frac{7}{3}P$

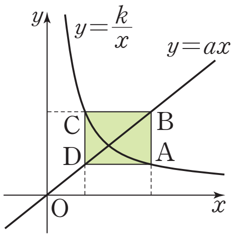
이때 벽돌의 높이는 30 cm이므로 부피는 $30P\ (\mathrm{cm}^3)$

용기의 높이는 90 cm이므로 부피는 $90S=90\times\frac{7}{3}P=210P\ (\mathrm{cm}^3)$

따라서 $\frac{(\text{용기의 부피})}{(\text{벽돌의 부피})}=\frac{210P}{30P}=7$이므로 용기의 부피는 벽돌의 부피의 7배이다.

06

10 이하의 두 자연수 a, k로 정의된 곡선 $y=\frac{k}{x}\ (x>0)$ 위의 점 A를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 $y=ax$와 만나는 점을 B, 점 B를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=\frac{k}{x}$와 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 $y=ax$와 만나는 점을 D라고 하자. 점 A의 x좌표가 1이고 직사각형 ABCD의 넓이가 9일 때, $a+k$의 값 중 가장 작은 수를 구하시오. (단, $a\neq k$) **5**



점 A의 x좌표가 1이므로 점 B의 x좌표도 1이다.

$\therefore \mathrm{A}(1,\ k)$, $\mathrm{B}(1,\ a)$

점 C의 y좌표가 a이므로 $y=a$를 $y=\frac{k}{x}$에 대입하면

$a=\frac{k}{x} \quad \therefore x=\frac{k}{a}$

$\therefore \mathrm{C}\left(\frac{k}{a},\ a\right)$, $\mathrm{D}\left(\frac{k}{a},\ k\right)$

선분 AB의 길이는 $a-k$, 선분 BC의 길이는 $1-\frac{k}{a}=\frac{a-k}{a}$이고,

직사각형 ABCD의 넓이는 9이므로

$(a-k)\left(\frac{a-k}{a}\right)=9$, $(a-k)^2=9a$

이때 $a-k\neq0$이고, $(a-k)^2>0$이므로 $a>0$

또, $9=3^2$이고 a는 자연수이므로 a는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

즉, 10 이하의 자연수 a의 값은 1, 4, 9이고 k는 자연수이므로

(ⅰ) $a=1$일 때, $(1-k)^2=9$에서 $1-k=-3 \quad \therefore k=4$
   $\therefore a+k=1+4=5$

(ⅱ) $a=4$일 때, $(4-k)^2=36$에서 $4-k=-6 \quad \therefore k=10$
   $\therefore a+k=4+10=14$

(ⅲ) $a=9$일 때, $(9-k)^2=81$에서 $9-k=-9 \quad \therefore k=18$
   이때 k는 10 이하의 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)～(ⅲ)에 의하여 $a+k$의 값 중 가장 작은 수는 5이다.

Lv. Master 실력을 완성하는 대단원 평가

_____ 점 / 100점

01

$x+y<0$, $xy>0$, $|x|<|y|$일 때, 다음 중 점 $\left(\frac{x}{y},\ \frac{x-y}{x}\right)$와 같은 사분면 위에 있는 점은? [4점]

① $\underbrace{(-4,\ 1)}_{\text{제2사분면}}$ ② $\underbrace{(-2,\ -7)}_{\text{제3사분면}}$ ③ $\underbrace{(0,\ -3)}_{y\text{축 위의 점}}$

✓④ $\underbrace{(3,\ -5)}_{\text{제4사분면}}$ ⑤ $\underbrace{(8,\ 5)}_{\text{제1사분면}}$

$x+y<0$, $xy>0$이므로 $x<0$, $y<0$

또, $|x|<|y|$이므로 $x-y>0$

따라서 $\frac{x}{y}>0$, $\frac{x-y}{x}<0$이므로 점 $\left(\frac{x}{y},\ \frac{x-y}{x}\right)$는 제4사분면 위의 점이다.

02

점 P$(2,\ -6)$과 x축에 대하여 대칭인 점을 $\overset{\text{A}(2,\ 6)}{\text{A}(a,\ b)}$, y축에 대하여 대칭인 점을 $\underset{\text{B}(-2,\ -6)}{\text{B}(c,\ d)}$라고 할 때, 다음 보기 중 옳은 것을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보기 〉

ㄱ. 두 점 A, B는 원점에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 점 P와 원점에 대하여 대칭인 점은 점 A와 x축에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $a+b+c+d=0$

ㄹ. $ad+bc=0$

ㄱ. 점 A$(2,\ 6)$과 원점에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(-2,\ -6)$

즉, 점 B는 점 A와 원점에 대하여 대칭이다.

① ㄱ, ㄴ ✓② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ

④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

ㄴ. 점 P와 원점에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(-2,\ 6)$

점 A$(2,\ 6)$과 x축에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(2,\ -6)$

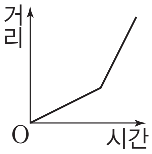
즉, 점 P와 원점에 대하여 대칭인 점은 점 A와 x축에 대하여 대칭이 아니다.

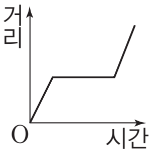
ㄷ. $a+b+c+d=2+6+(-2)+(-6)=0$

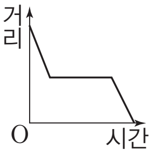
ㄹ. $ad+bc=2\times(-6)+6\times(-2)=-24\neq 0$

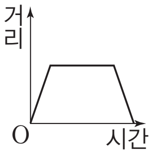
03

시우는 집에서 삼촌 댁까지 자전거를 타고 가려고 한다. 일정한 속력으로 가다가 도중에 자전거가 고장이 나서 잠깐 멈춰 수리를 하고 다시 일정한 속력으로 삼촌 댁까지 자전거를 타고 갔다. 다음 중 시우가 움직인 거리를 시간에 따라 나타낸 그래프로 알맞은 것은? [4점]

①


✓②


③


④


⑤


시우가 일정한 속력으로 갔을 때는 거리가 일정하게 증가하고 도중에 자전거가 고장이 나서 잠깐 멈춰 수리를 하였으므로 그때는 거리에 변화가 없다.

또, 다시 일정한 속력으로 갔으므로 거리가 다시 일정하게 증가한다.

04

① x의 값이 2배, 3배, 4배, …로 변함에 따라 y의 값도 2배, 3배, 4배, …로 변한다.

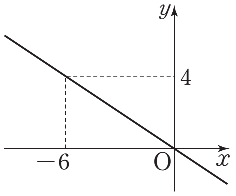
② 그래프는 원점과 점 $(-6,\ 4)$를 지나는 직선이므로

$y=ax$에 $x=-6$, $y=4$를 대입하면

$4=-6a$ $\therefore a=-\frac{2}{3}$

즉, x와 y 사이의 관계식은 $y=-\frac{2}{3}x$이다.

다음 중 오른쪽 그림과 같은 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은? [4점]



① x의 값이 2배, 3배, 4배, …로 변함에 따라 y의 값은 $\frac{1}{2}$배, $\frac{1}{3}$배, $\frac{1}{4}$배, …로 변한다.

② x와 y 사이의 관계식은 $y=-\frac{3}{2}x$이다.

③ 점 $(9,\ 6)$을 지난다.

✓④ 정비례 관계 $y=-3x$의 그래프보다 x축에 더 가깝다.

⑤ 제2사분면과 제3사분면을 지난다.

③ $y=-\frac{2}{3}x$에 $x=9$를 대입하면 $y=-\frac{2}{3}\times 9=-6$

즉, 점 $(9,\ -6)$을 지난다.

⑤ 제2사분면과 제4사분면을 지난다.

05

점 $(a,\ b)$가 $\overset{a>0,\ b<0}{\text{제4사분면}}$ 위의 점일 때, 다음 중 그 그래프가 제2사분면을 지나는 것을 모두 고르면? (정답 2개) [4점]

① $y=ax$ ✓② $y=abx$ ③ $y=(a-b)x$

✓④ $y=-\frac{a}{x}$ ⑤ $y=-\frac{ab}{x}$

① $a>0$이므로 제1사분면과 제3사분면을 지난다.

② $ab<0$이므로 제2사분면과 제4사분면을 지난다.

③ $a-b>0$이므로 제1사분면과 제3사분면을 지난다.

④ $-a<0$이므로 제2사분면과 제4사분면을 지난다.

⑤ $-ab>0$이므로 제1사분면과 제3사분면을 지난다.

06

두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, 점 P$(-a,\ b)$가 존재하는 사분면과 $b-a$의 값의 범위는? [4점]

(가) $a+b<0$ (나) $\frac{a}{b}>0$ (다) $|a|<|b|$

	사분면	$b-a$의 값의 범위
①	제2사분면	$b-a>0$
②	제2사분면	$b-a<0$
③	제3사분면	$b-a>0$
④	제4사분면	$b-a>0$
✓⑤	제4사분면	$b-a<0$

조건 (나)에 의하여 두 상수 a, b의 부호가 같다. 이때 조건 (가)에 의하여 $a<0$, $b<0$이고

조건 (다)에서 $|a|<|b|$이므로 $a>b$이다.

따라서 $-a>0$, $b<0$이므로 점 P$(-a,\ b)$는 제4사분면 위의 점이고 $b-a<0$이다.

$b-a>0$, $ab<0$이므로 $\frac{b-a}{ab}<0$

즉, x좌표는 음수이다.

이때 $a+b$의 부호는 알 수 없으므로 y좌표의 부호는 알 수 없다.

따라서 점 R는 제2사분면 또는 제3사분면 위의 점이다.

07

점 P(a, b)가 제2사분면 위의 점일 때,

$a<0$, $b>0$

점 R$\left(\frac{b-a}{ab}, \frac{ab}{a+b}\right)$가 존재할 수 있는 사분면을 모두 고르면? (정답 2개) [4점]

① 제1사분면 [✓ ② 제2사분면] [✓ ③ 제3사분면]

④ 제4사분면 ⑤ 어느 사분면에도 속하지 않는다.

$y=2x$에 $x=k$, $y=3k-3$을 대입하면 $3k-3=2k$ $\therefore k=3$

$\therefore$ A$(3, 6)$, B$(3, 0)$

따라서 삼각형 AOB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times3\times6=9$

직선 l은 원점을 지나므로 직선 l을 나타내는 식을 $y=ax$라고 하자.

삼각형 POB의 넓이는 삼각형 AOB의 넓이의 $\frac{1}{2}$배이다. 이때 두 삼각형 AOB, POB의 밑변은 선분 OB로 같고 선분 AB의 길이가 6이므로 선분 PB의 길이는 $\frac{6}{2}=3$이다.

$\therefore$ P$(3, 3)$

$y=ax$에 $x=3$, $y=3$을 대입하면 $3=3a$ $\therefore a=1$

따라서 직선 l을 나타내는 식은 $y=x$이다.

08

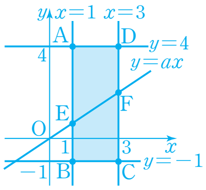
좌표평면 위의 네 직선 $x=1$, $x=3$, $y=-1$, $y=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 직선 $y=ax$의 그래프가 이등분할 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ [✓ ③ $\frac{3}{4}$]

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

오른쪽 그림과 같이 네 직선 $x=1$, $x=3$, $y=-1$, $y=4$의 교점을 각각 A, B, C, D라고 하면 사각형 ABCD의 넓이는 $2\times5=10$

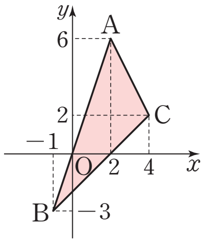
직선 $y=ax$의 그래프가 직선 AB, 직선 CD와 만나는 점을 각각 E, F라고 하면 직선 $y=ax$의 그래프가 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하므로 두 사다리꼴 AEFD, EBCF의 넓이는 같다. 두 점 E, F의 좌표는 각각 $(1, a)$, $(3, 3a)$이므로



$\frac{1}{2}\times\{(4-a)+(4-3a)\}\times2=\frac{1}{2}\times10$, $8-4a=5$ $\therefore a=\frac{3}{4}$

09

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 세 점 A$(2, 6)$, B$(-1, -3)$, C$(4, 2)$가 있다. 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

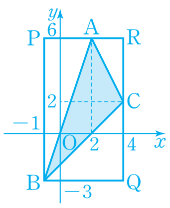


① 11 ② 12

③ 13 ④ 14

[✓ ⑤ 15]

오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C에서 x축, y축에 평행한 직선을 그어 직사각형 PBQR를 만들면 P$(-1, 6)$, Q$(4, -3)$, R$(4, 6)$이다.



(사각형 PBQR의 넓이)$=\{4-(-1)\}\times\{6-(-3)\}=45$

(삼각형 APB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\{2-(-1)\}\times\{6-(-3)\}$
$=\frac{27}{2}$

(삼각형 ACR의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(4-2)\times(6-2)=4$

(삼각형 CBQ의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\{4-(-1)\}\times\{2-(-3)\}=\frac{25}{2}$

$\therefore$ (삼각형 ABC의 넓이)$=45-\frac{27}{2}-4-\frac{25}{2}=15$

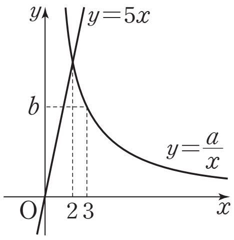
$y=5x$에 $x=2$를 대입하면 $y=5\times2=10$

즉, 두 그래프가 만나는 점의 좌표는 $(2, 10)$이므로

$y=\frac{a}{x}$에 $x=2$, $y=10$을 대입하면 $10=\frac{a}{2}$ $\therefore a=20$

10

오른쪽 그림은 정비례 관계 $y=5x$의 그래프와 반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$의 그래프의 일부이다. 반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$의 그래프가 점 $(3, b)$를 지나고, 두 그래프가 만나는 점의 x좌표가 2일 때, $a+3b$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]



① 35 [✓ ② 40] ③ 45

④ 50 ⑤ 55

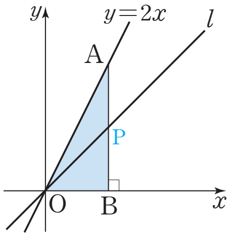
따라서 $y=\frac{20}{x}$에 $x=3$, $y=b$를 대입하면 $b=\frac{20}{3}$

$\therefore a+3b=20+3\times\frac{20}{3}=40$

11

오른쪽 그림과 같이 점 A$(k, 3k-3)$이 정비례 관계 $y=2x$의 그래프 위에 있다. 점 A에서 x축에 그은 수선이 x축과 만나는 점을 B라고 하자. 원점을 지나는 또 다른 직선 l이 삼각형 AOB의 넓이를 이등분할 때, 직선 l을 나타내는 식은?

(단, O는 원점이다.) [4점]



① $y=\frac{2}{3}x$ ② $y=\frac{3}{4}x$ [✓ ③ $y=x$]

④ $y=\frac{4}{3}x$ ⑤ $y=\frac{5}{4}x$

점 A의 x좌표를 k라고 할 때 점 A는 정비례 관계 $y=bx$의 그래프 위의 점이므로

A(k, bk) $\therefore$ B(k, ak), C$\left(\frac{bk}{a}, bk\right)$

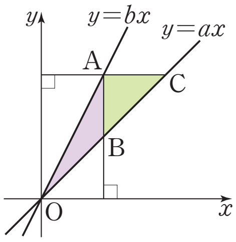
(삼각형 AOB의 넓이)$=\frac{1}{2}(b-a)k^2$, (삼각형 ABC의 넓이)$=\frac{(b-a)^2k^2}{2a}$

12

$\therefore \frac{1}{2}(b-a)k^2=\frac{(b-a)^2k^2}{2a}$

오른쪽 그림에서 정비례 관계 $y=bx$의 그래프 위의 한 점 A에서 x축, y축에 수직인 직선을 그어 정비례 관계 $y=ax$의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라고 하자. 삼각형 AOB의 넓이와 삼각형 ABC의 넓이가 같도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수는? [4점]

(단, O는 원점이고, a, b는 100 이하의 자연수이다.)



[✓ ① 50] ② 51 ③ 52

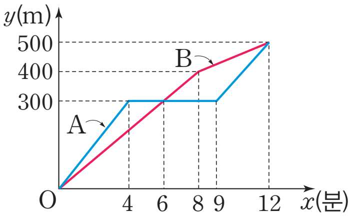
④ 53 ⑤ 54

이때 $k\neq0$, $a\neq b$이므로 $1=\frac{b-a}{a}$, $a=b-a$ $\therefore b=2a$

a, b는 100 이하의 자연수이므로 $b=2a\leq100$에서 $a\leq50$

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$, …, $(50, 100)$의 50개이다.

13



오른쪽 그림은 쌍둥이 남매 A, B가 집에서 출발하여 500 m 떨어진 도서관까지 걸어가는 상황을 그래프로 나타낸 것이다. A, B가 집에서 출발한 지 x분 후 집으로부터의 거리를 y m라고 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은? [4점]

① A는 출발 후 4분까지는 분속 75 m로 걸었다.

② A는 도중에 5분 동안 멈춰 있었다.

③ B는 집에서 출발하여 일정한 속력으로 걸어가다가 출발한 지 8분 후부터 더 천천히 걸어갔다.

④ 출발한 지 6분 후에 B는 A를 추월했다.

✓⑤ A가 걸은 거리는 B가 걸은 거리보다 더 길다.

① A는 출발 후 4분 동안 300 m를 걸어갔으므로 속력은 $\frac{300}{4}=75$

따라서 A는 출발 후 4분까지는 분속 75 m로 걸었다.

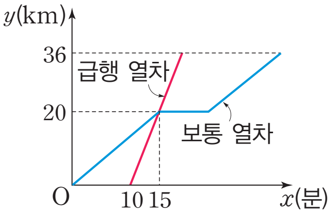
② A는 4분부터 9분까지 이동거리가 0 m이므로 5분 동안 멈춰 있었다.

③ B는 8분 후부터 움직인 거리의 변화율이 8분 이전의 움직인 거리의 변화율보다 줄어들었으므로 8분 후부터 속도가 줄어들었다.

④ A, B는 6분 후에 만났고, 그 후 B가 더 이동거리가 크므로 출발한 지 6분 후에 B가 A를 추월했다.

⑤ A, B가 집에서 도서관까지 걸어간 거리는 500 m로 서로 같다.

14



오른쪽 그래프는 A역에서 B역으로 가는 급행 열차와 보통 열차의 운행 시간과 A역과의 거리 사이의 관계를 나타낸 것이다. A역에서 B역까지의 거리는 36 km, A역에서 C역까지의 거리는 20 km이고 A역에서 급행 열차는 보통 열차가 출발한 지 10분 후에 출발한다. 보통 열차는 C역에 15분 뒤 도착하여 잠시 정차하고, 이때 급행 열차가 보통 열차를 추월하여 B역에 먼저 도착하게 된다. 보통 열차가 급행 열차보다 12분 30초 뒤에 B역에 도착하였다고 할 때, 도중에 C역에서 보통 열차가 정차한 시간은? (단, 정차한 시간을 제외하면 두 열차 모두 일정한 속력으로 달린다.) [4점]

① 3분 ② 3분 30초 ③ 4분

✓④ 4분 30초 ⑤ 5분

보통 열차는 15분 동안 20 km를 이동하였으므로 보통 열차의 속력은 분속 $\frac{20}{15}=\frac{4}{3}$ (km)

급행 열차는 5분 동안 20 km를 이동하였으므로 급행 열차의 속력은 분속 $\frac{20}{5}=4$ (km)

이때 보통 열차가 A역에서 C역까지 가는 데 걸린 시간과 중간에 정차한 시간, C역에서 B역까지 걸린 시간의 합은 급행 열차가 보통 열차보다 늦게 출발한 시간, 급행 열차가 A역에서 B역까지 가는 데 걸린 시간, 급행 열차가 보통 열차보다 빨리 도착한 시간의 합과 같다.

보통 열차가 C역에서 B역까지 가는 데 걸린 시간은 $16\times\frac{3}{4}=12$(분)

급행 열차가 A역에서 B역까지 가는 데 걸린 시간은 $\frac{36}{4}=9$(분)

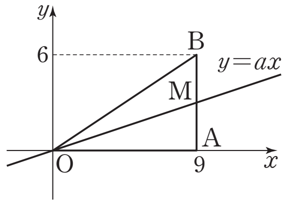
이때 보통 열차가 급행 열차보다 B역에 12분 30초, 즉 $\frac{25}{2}$분 뒤에 도착하므로

C역에서 보통 열차가 정차한 시간을 x분이라고 하면

$15+x+12=10+9+\frac{25}{2}$ $\therefore x=\frac{9}{2}$

따라서 C역에서 보통 열차가 $\frac{9}{2}$분, 즉 4분 30초 동안 정차하였다.

15



오른쪽 그림에서 두 점 A(9, 0), B(9, 6)에 대하여 삼각형 OAB의 내부에 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점이 k개 있다고 하자. $y=ax$의 그래프가 선분 AB와 만나는 점을 M이라고 할 때, 삼각형 OAM의 내부에 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점이 $\frac{k-1}{2}$개가 되도록 하는 상수 a의 값은? (단, O는 원점이다.) [6점]

① $\frac{5}{16}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{17}{48}$

✓④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{19}{48}$

두 점 O, B를 지나는 정비례 관계의 그래프의 식을 $y=bx$ (b는 상수)라 하고 이 그래프에 $x=9$, $y=6$을 대입하면 $6=9b$, $b=\frac{2}{3}$ $\therefore y=\frac{2}{3}x$

따라서 삼각형 OAB의 내부에 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는

$x=1$이면 $y=\frac{2}{3}$이므로 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 존재하지 않는다.

$x=2$이면 $y=\frac{4}{3}$이므로 (2, 1)의 1개

$x=3$이면 $y=\frac{6}{3}=2$이므로 (3, 1)의 1개

$x=4$이면 $y=\frac{8}{3}$이므로 (4, 1), (4, 2)의 2개

$x=5$이면 $y=\frac{10}{3}$이므로 (5, 1), (5, 2), (5, 3)의 3개

$x=6$이면 $y=\frac{12}{3}=4$이므로 (6, 1), (6, 2), (6, 3)의 3개

$x=7$이면 $y=\frac{14}{3}$이므로 (7, 1), (7, 2), (7, 3), (7, 4)의 4개

$x=8$이면 $y=\frac{16}{3}$이므로 (8, 1), (8, 2), (8, 3), (8, 4), (8, 5)의 5개

즉, 삼각형 OAB의 내부에 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는

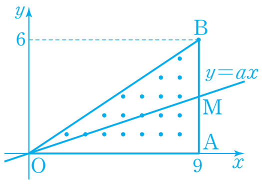
$1+1+2+3+3+4+5=19$ $\therefore k=19$

따라서 $\frac{k-1}{2}=\frac{19-1}{2}=9$이므로 삼각형 OAM의 내부에 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점이 9개 있어야 한다.

선분 AB를 이등분하는 점 (9, 3)을 점 M이라고 하면 $3=9a$에서 $a=\frac{1}{3}$

이때 $y=ax$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 삼각형 OAM의 내부에 x좌표와 y좌표가 정수인 점이 7개이다.

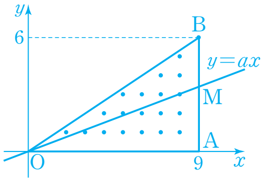
$\therefore a>\frac{1}{3}$



$y=ax$가 점 (8, 3)을 지나는 경우

$3=8a$에서 $a=\frac{3}{8}$

$y=\frac{3}{8}x$이면 오른쪽 그림과 같이 x좌표와 y좌표가 정수인 점이 9개이다.

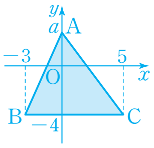


따라서 구하는 상수 a의 값은 $\frac{3}{8}$이다.

16

좌표평면 위의 세 점 A$(0, a)$, B$(-3, -4)$, C$(5, -4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이가 24일 때, 양수 a의 값을 구하시오. [4점] **2**

a가 양수이므로 세 점 A$(0, a)$, B$(-3, -4)$, C$(5, -4)$를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
이때 삼각형 ABC의 넓이가 24이므로
$\frac{1}{2}\times8\times(a+4)=24$
$4(a+4)=24$, $a+4=6$ $\therefore a=2$



17

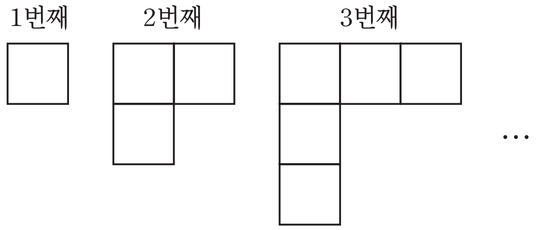
점 A$\left(a+1, \frac{1}{3}a+2\right)$가 x축 위의 점이므로
$\frac{1}{3}a+2=0$, $\frac{1}{3}a=-2$ $\therefore a=-6$
점 B$\left(b-4, 5-\frac{1}{2}b\right)$가 y축 위의 점이므로 $b-4=0$ $\therefore b=4$
따라서 두 점 $(-6, 0)$, $(0, 4)$를 이은 직선은 제4사분면을 지나지 않는다.

좌표평면 위의 두 점 A$\left(a+1, \frac{1}{3}a+2\right)$, B$\left(b-4, 5-\frac{1}{2}b\right)$는 각각 x축, y축 위의 점이다. 두 점 $(a, 0)$, $(0, b)$를 이은 직선이 지나지 않는 사분면을 구하시오. [4점] **제4사분면**

18

1번째 도형의 둘레의 길이는 4 cm
2번째 도형의 둘레의 길이는 $4\times2=8$ (cm)
3번째 도형의 둘레의 길이는 $4\times3=12$ (cm)
⋮
즉, x와 y 사이의 관계식은 $y=4x$
$y=4x$에 $x=15$를 대입하면 $y=60$
따라서 15번째 도형의 둘레의 길이는 60 cm이다.

다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1 cm인 정사각형을 이어 그릴 때, x번째 도형의 둘레의 길이를 y cm라고 하자. 이때 15번째 도형의 둘레의 길이를 구하시오. [4점] **60 cm**



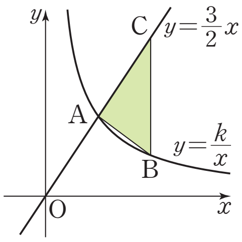
19

두 점 P, Q는 원점에 대하여 대칭이므로
$4-a=-3a$에서 $2a=-4$ $\therefore a=-2$
$7-2b=-(a-b+1)$에서 $7-2b=-a+b-1$
$3b=6$ $\therefore b=2$
$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+2^2=8$

원점을 지나는 직선 위의 서로 다른 두 점 P$(4-a, 7-2b)$, Q$(3a, a-b+1)$이 원점에서 같은 거리만큼 떨어져 있다. 이때 a^2+b^2의 값을 구하시오. [4점] **8**

20

점 A는 $y=\frac{3}{2}x$, $y=\frac{k}{x}$의 그래프 위의 점이므로
$y=\frac{3}{2}x$에 $x=2$를 대입하면 $y=\frac{3}{2}\times2=3$ $\therefore$ A$(2, 3)$
$y=\frac{k}{x}$에 $x=2$, $y=3$을 대입하면 $3=\frac{k}{2}$, $k=6$ $\therefore y=\frac{6}{x}$
점 B는 $y=\frac{6}{x}$의 그래프 위의 점이므로 $y=\frac{6}{x}$에 $x=4$를 대입하면 $y=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$
$\therefore$ B$\left(4, \frac{3}{2}\right)$

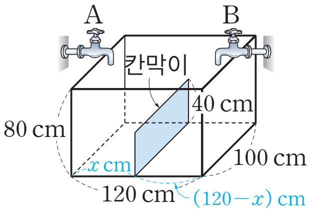


오른쪽 그림은 정비례 관계 $y=\frac{3}{2}x$의 그래프와 반비례 관계 $y=\frac{k}{x}$ (k는 상수)의 그래프의 일부이다. 두 그래프가 만나는 점을 A, $y=\frac{k}{x}$의 그래프 위의 한 점을 B, $y=\frac{3}{2}x$의 그래프 위의 한 점을 C라고 하면 세 점 A, B, C의 x좌표는 각각 2, 4, 4이다. 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 할 때, $2S$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점] **9**

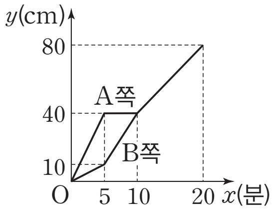
점 C는 $y=\frac{3}{2}x$의 그래프 위의 점이므로 $y=\frac{3}{2}x$에 $x=4$를 대입하면 $y=\frac{3}{2}\times4=6$
$\therefore$ C$(4, 6)$
따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는 $S=\frac{1}{2}\times2\times\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$ $\therefore 2S=9$

21

[그림 1]과 같은 수족관의 내부에 40 cm 높이의 칸막이가 100 cm인 모서리와 수평이 되도록 놓여 있고, 두 수도꼭지 A, B로부터 다른 양의 물이 매분 일정한 속력으로 수족관에 들어가며 가득 채우는 데 20분이 걸린다. 시간에 따른 물의 높이를 그래프로 나타낸 것이 [그림 2]일 때, 칸막이 왼쪽의 밑넓이와 칸막이 오른쪽 밑넓이의 비를 구하시오. [4점] **1 : 2**



[그림 1]



[그림 2]

칸막이 왼쪽에 5분 동안 채워진 물의 부피는 $x\times100\times40=4000x$ (cm^3)
따라서 수도꼭지 A에서 물이 나오는 속력은 $\frac{4000x}{5}=800x$
칸막이 오른쪽의 부분에 5분 동안 채워진 물의 부피는
$(120-x)\times100\times10=1000(120-x)$(cm^3)
따라서 수도꼭지 B에서 물이 나오는 속력은 $\frac{1000(120-x)}{5}=200(120-x)$
두 수도꼭지 A, B로 수족관에 물을 넣은 지 10분 후 수면의 높이가 40 cm가 되었으므로 그 부피는 $120\times100\times40=480000$ (cm^3)
따라서 수족관에 물이 차는 속력은 $\frac{480000}{10}=48000$
즉, $800x+200(120-x)=48000$이므로
$800x+24000-200x=48000$, $600x=24000$ $\therefore x=40$
따라서 칸막이 왼쪽의 밑넓이는 $40\times100=4000$ (cm^2), 오른쪽의 밑넓이는 $(120-40)\times100=8000$ (cm^2)이므로 두 밑넓이의 비는
$4000:8000=1:2$

22, 23번은 서술형입니다. 풀이 과정을 자세히 서술하시오.

22

넓이가 8 m^2인 직사각형 모양의 꽃밭에 꽃을 심는 비용은 76000원이다. 228000원으로 꽃을 심을 수 있는 꽃밭의 넓이는 a m^2이고, 이때의 꽃밭은 가로와 세로의 길이가 각각 x m, y m인 직사각형 모양이다. a의 값을 구하고, x와 y 사이의 관계식을 세우시오. $a=24$, $y=\frac{24}{x}$

(단, 꽃을 심는 비용은 꽃밭의 넓이에 정비례한다.) [7점]

넓이가 8 m^2인 직사각형 모양의 꽃밭에 꽃을 심는 비용이 76000원이므로 넓이가 1 m^2인 직사각형 모양의 꽃밭에 꽃을 심는 비용은

$\frac{76000}{8}=9500$(원)

따라서 228000원으로 꽃을 심을 수 있는 꽃밭의 넓이는

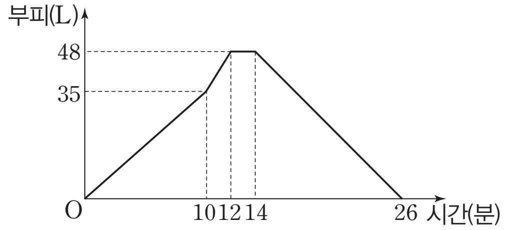
$\frac{228000}{9500}=24\ (\mathrm{m}^2)$ $\therefore a=24$ ……………………………… 4점

이때 꽃밭은 가로와 세로의 길이가 각각 x m, y m인 직사각형 모양이므로

$x\times y=24$ $\therefore y=\frac{24}{x}$ ……………………………… 3점

23

빈 물탱크에 일정한 속력으로 물을 넣는 두 수도꼭지 A, B와 일정한 속력으로 물을 빼는 관 C가 있다. 처음에는 수도꼭지 A만을 사용하여 물탱크에 물을 계속 넣고, 중간에 수도꼭지 B를 열어 물을 넣어 물탱크를 가득 채웠다. 물탱크에 물을 가득 채운 후 두 수도꼭지 A와 B를 동시에 잠그고 2분 뒤에 관 C를 열어 물을 빼기 시작했다. 다음 그림은 물을 넣기 시작한 뒤의 시간과 물탱크에 들어 있는 물의 양의 변화를 나타내는 그래프이다.



두 수도꼭지 A, B와 관 C를 동시에 열어 용량이 5배인 물탱크에 물을 가득 채우는 데 걸리는 시간을 구하시오. 96분

[7점]

그래프에서 10분이 지난 후 물이 채워지는 속력이 증가했으므로 수도꼭지 A만 사용한 시간은 10분까지이다. 수도꼭지 A만 사용하여 10분 동안 물 35 L를 채웠으므로 수도 A의 물을 넣는 속력은

분속 $\frac{35}{10}=3.5\ (\mathrm{L})$ ……………………………… 2점

10분부터 12분까지 두 수도꼭지 A, B를 동시에 사용하여 물의 양이 35 L에서 48 L로 늘었으므로 2분 동안 늘어난 양은 $48-35=13\ (\mathrm{L})$이다.

따라서 두 수도꼭지 A, B를 동시에 사용했을 때 물을 넣는 속력은

분속 $\frac{13}{2}=6.5\ (\mathrm{L})$

즉, 수도꼭지 B의 물을 넣는 속력은

분속 $6.5-3.5=3\ (\mathrm{L})$ ……………………………… 2점

물탱크가 가득 찬 후 14분부터 관 C를 열어 26분까지 물을 모두 빼냈으므로 12분 동안 48 L의 물이 빠졌다.

따라서 관 C의 물을 빼는 속력은

분속 $\frac{48}{12}=4\ (\mathrm{L})$ ……………………………… 2점

두 수도꼭지 A, B와 관 C를 동시에 열었을 때 물이 채워지는 속력은 분속 $3.5+3-4=2.5\ (\mathrm{L})$

따라서 물탱크의 용량이 48 L이므로 용량이 5배인 물탱크 $5\times48=240\ (\mathrm{L})$에 물을 가득 채우는 데 걸리는 시간은

$\frac{240}{2.5}=\frac{2400}{25}=96$(분) ……………………………… 1점