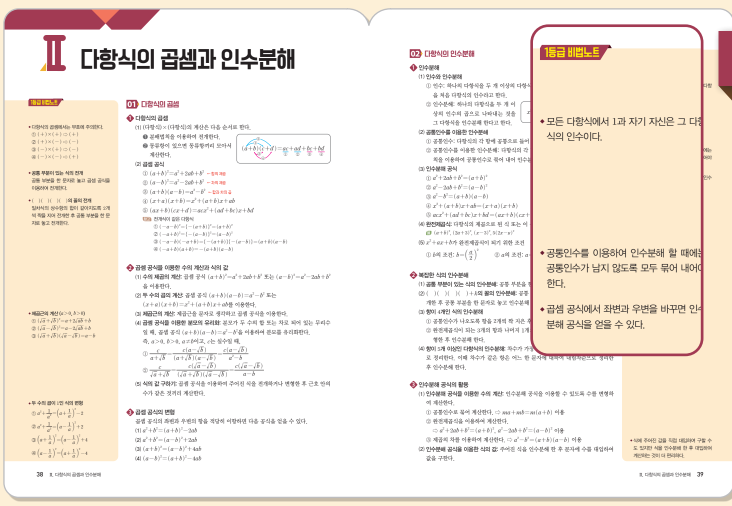
최고난도

중학수학 3-1

이 책의
구성과 특징



대단원 개념 정리

단원 핵심 내용 정리와 1등급 비법노트

대단원별 알아야 할 핵심 개념을 담았습니다.
또, 개념을 더 쉽게 이해할 수 있도록 예,
참고 등을 수록하여 정리하였습니다.

1등급 비법노트

새로 학습하는 개념과 연결되는 반드시 기억해야 할 내용과 문제를 풀 때 도움이 되는 실전 tip을 구조화하여 제공하였습니다.

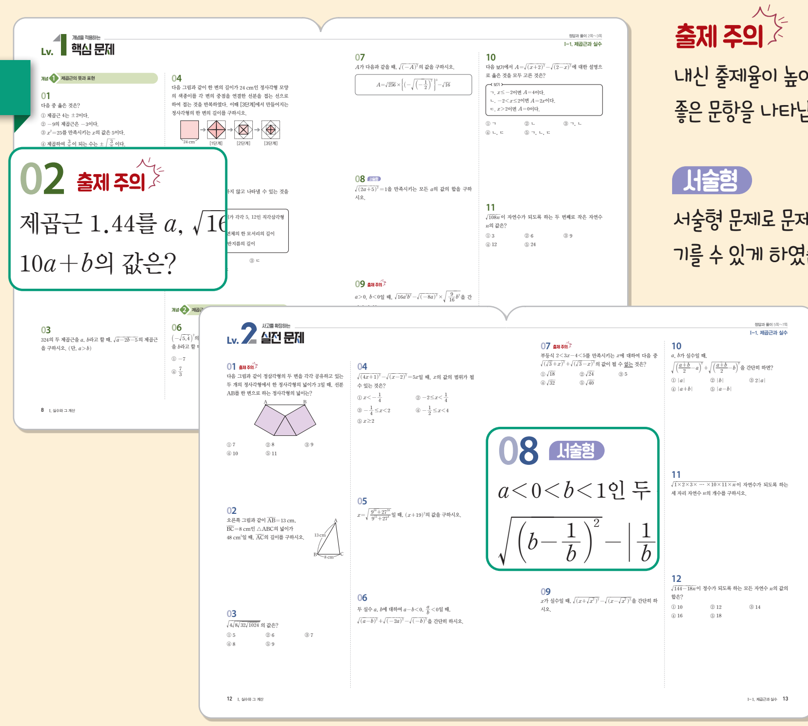
핵심 문제와 실전 문제

Lv. 1

중단원별 개념을 적용하여 내신 유형 학습에 적합한 핵심 문제를 담았습니다.

Lv. 2

중단원별 변별력과 사고력을 길러 주는 엄선된 문제를 담았습니다.



출제 주의

내신 출제율이 높아 한 번 더 풀어보면 좋은 문항을 나타냅니다.

서술형

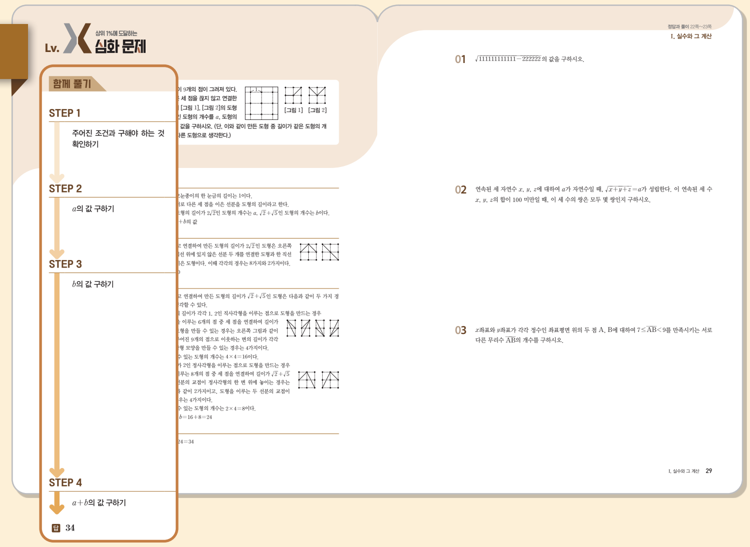
서술형 문제로 문제해결력을 기를 수 있게 하였습니다.

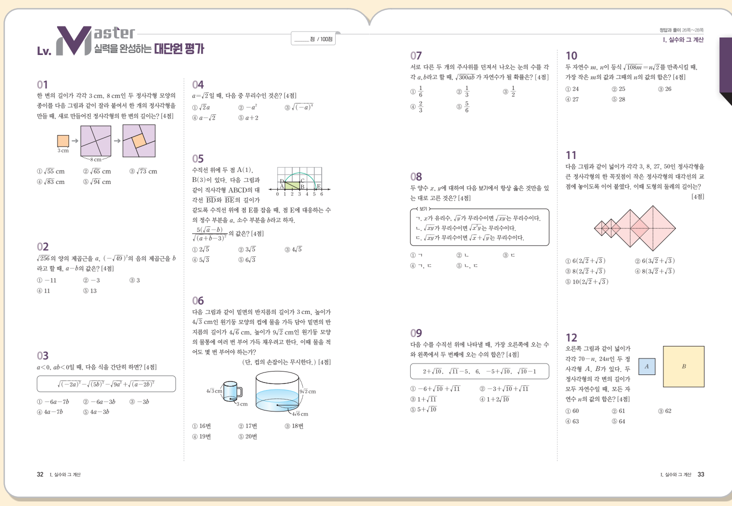
최상위권을 위한 심화 문제

대단원별 문제해결력과 응용력을 기를 수 있는 고난도 문제를 담았습니다.
또, 이전에 배운 개념과 여러 가지 수학적 개념이 포함된 복합 유형 문제로 구성하여 종합적 사고력을 기를 수 있습니다.

함께 풀기

이 단원의 대표적인 고난도 문제를 함께 차근차근 풀어보며 문제 해결을 위한 접근 방법을 익힐 수 있습니다.



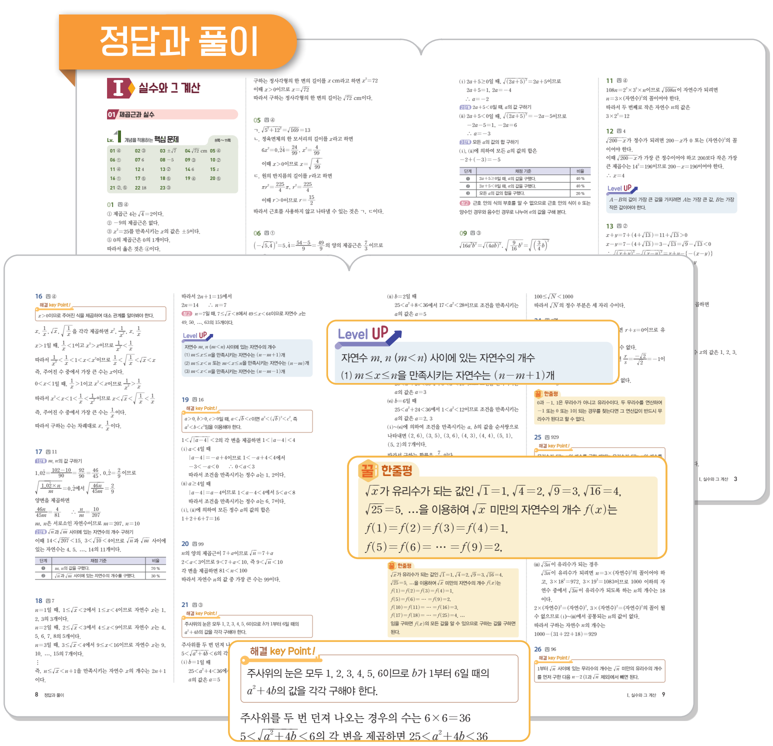


시험 대비 평가 문제

최종 점검을 위한 마무리 평가 문제

실력을 확인하고 완성할 수 있도록 수준 높은 문제로 대단원별 마무리 평가 문제를 담았습니다. 학교 시험과 유사하게 객관식, 주관식, 서술형 문제와 더불어 배점이 높은 변별력 있는 문제까지 담았습니다.

정답과 풀이



읽기만 해도 이해할 수 있는 쉽고 자세한 풀이를 제시하였습니다. 또, 참고와 다른 풀이를 담아 풀이 방법을 점검하고 사고력을 기를 수 있도록 하였으며, 서술형 문제에 대한 단계별 풀이와 채점표를 담았습니다.

해결 key Point!

문제 풀이의 접근법을 제시하여 스스로 해결할 수 있도록 실마리를 제공하였습니다.

Level UP

풀이 과정 중 필요한 첨삭이나 사고력 향상에 도움이 되는 개념을 담았습니다.

꿀 한줄평

문제를 풀 때 유의해야 할 핵심 내용을 수록하여 문제의 중요한 부분을 짚어주었습니다.

이 책의

차례

I 실수와 그 계산

I 실수와 그 계산

01 제곱근과 실수

1 제곱근의 뜻과 표현

(1) **제곱근:** 어떤 수 x를 제곱하여 a가 될 때, 즉 $x^2=a$일 때, x를 a의 제곱근이라고 한다.

(2) **제곱근의 개수**

① 양수의 제곱근은 양수와 음수 2개가 있고, 그 절댓값은 서로 같다.

② 음수의 제곱근은 없고, 0의 제곱근은 0의 1개이다.

(3) **제곱근의 표현**

① 제곱근은 기호 $\sqrt{}$ (근호)를 사용하여 나타내고, 이것을 '제곱근' 또는 '루트'라고 읽는다.

② 양수 a의 제곱근 중 양수인 것을 양의 제곱근, 음수인 것을 음의 제곱근이라 하고, 양의 제곱근은 $\sqrt{a}$, 음의 제곱근은 $-\sqrt{a}$로 나타낸다.

2 제곱근의 성질

(1) **제곱근의 성질:** $a>0$일 때

① $(\sqrt{a})^2=a$, $(-\sqrt{a})^2=a$ → a의 제곱근 $\sqrt{a}$와 $-\sqrt{a}$는 제곱하면 a가 된다.

② $\sqrt{a^2}=a$, $\sqrt{(-a)^2}=a$ → 근호 안의 수가 어떤 수의 제곱이면 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있다.

(2) **$\sqrt{a^2}$의 성질:** $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

3 제곱근의 대소 관계

$a>0$, $b>0$일 때

(1) $a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$ (2) $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 $a<b$ (3) $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 $-\sqrt{a}>-\sqrt{b}$

4 무리수와 실수

(1) **무리수:** 유리수가 아닌 수, 즉 순환소수가 아닌 무한소수로 나타내어지는 수

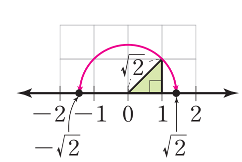
(2) **실수:** 유리수와 무리수를 통틀어 실수라고 한다.

(3) **실수의 분류:** 실수 $\begin{cases} \text{유리수} \begin{cases} \text{정수} \begin{cases} \text{양의 정수 (자연수): } 1,\ 2,\ 3,\ \cdots \\ 0 \\ \text{음의 정수: } -1,\ -2,\ -3,\ \cdots \end{cases} \\ \text{정수가 아닌 유리수: } \underbrace{0.5,\ -1.3,\ \frac{7}{3},\ \cdots}_{\text{유한소수, 순환소수}} \end{cases} \\ \text{무리수: } \underbrace{\sqrt{3},\ \pi,\ -\sqrt{7},\ \cdots}_{\text{순환소수가 아닌 무한소수}} \end{cases}$

5 실수와 수직선

(1) **무리수를 수직선 위에 나타내기:** 직각삼각형의 빗변의 길이를 이용하면 무리수를 수직선 위에 나타낼 수 있다.

예 $-\sqrt{2}$와 $\sqrt{2}$를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



(2) **실수의 대소 관계**

① 수직선 위에서 오른쪽에 있는 수가 왼쪽에 있는 수보다 크다.

② 양수끼리는 절댓값이 큰 수가 더 크고 음수끼리는 절댓값이 큰 수가 더 작다.

1등급 비법노트

◆ 제곱근의 개수

수	제곱근의 개수
양수	2
0	1
음수	0

◆ a의 제곱근과 제곱근 a (단, $a>0$)

a의 제곱근	제곱근 a
제곱하여 a가 되는 수	a의 양의 제곱근
$\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$

→ 한꺼번에 $\pm\sqrt{a}$로 나타내기도 한다.

◆ (1) $a\geq b$이면 $a-b\geq 0$이므로 $\sqrt{(a-b)^2}=a-b$

(2) $a<b$이면 $a-b<0$이므로 $\sqrt{(a-b)^2}=-(a-b)$

◆ a와 $\sqrt{b}$의 대소 비교

$a>0$, $b>0$일 때, a와 $\sqrt{b}$의 대소를 비교하려면 $a=\sqrt{a^2}$이므로 $\sqrt{a^2}$과 $\sqrt{b}$의 대소를 비교한다.

◆ 근호를 사용하여 나타낸 수라도 근호를 없앨 수 있는 수는 유리수이다.

◆ 모든 실수는 각각 수직선 위의 한 점에 대응하고, 또 수직선 위의 한 점에는 한 실수가 반드시 대응한다.
즉, 유리수와 무리수에 대응하는 점들로 수직선을 완전히 메울 수 있다.

◆ 서로 다른 두 실수 사이에는 무수히 많은 실수가 있다.

02 근호를 포함한 식의 계산

1 제곱근의 곱셈과 나눗셈

(1) **제곱근의 곱셈:** $a>0$, $b>0$이고 m, n이 유리수일 때

① $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ ② $m\sqrt{a}\times n\sqrt{b}=mn\sqrt{ab}$

(2) **제곱근의 나눗셈:** $a>0$, $b>0$이고 m, n이 유리수일 때

① $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ ② $m\sqrt{a}\div n\sqrt{b}=\dfrac{m}{n}\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (단, $n\neq0$)

(3) **근호가 있는 식의 변형:** $a>0$, $b>0$일 때

① $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=a\sqrt{b}$ ② $\sqrt{\dfrac{a}{b^2}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^2}}=\dfrac{\sqrt{a}}{b}$

2 분모의 유리화

(1) **분모의 유리화:** 분수의 분모가 근호를 포함한 무리수일 때, 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하여 분모를 유리수로 고치는 것

(2) **분모를 유리화하는 방법:** $a>0$, $b>0$일 때, $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{b}\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{a}$

3 제곱근표

(1) **제곱근표:** 1.00부터 99.99까지의 수의 양의 제곱근의 값을 반올림하여 소수점 아래 셋째 자리까지 나타낸 표

(2) **제곱근표를 읽는 방법:** 처음 두 자리 수의 가로줄과 끝자리 수의 세로줄이 만나는 곳에 적힌 수를 읽는다.

수	0	1	2
1.0	1.000	1.005	1.010
1.1	1.049	1.054	1.058
1.2	1.095	1.100	1.105

(3) **제곱근표에 없는 제곱근의 값 구하기**

① 100보다 큰 수의 제곱근의 값: $\sqrt{100a}=10\sqrt{a}$, $\sqrt{10000a}=100\sqrt{a}$, …의 꼴로 고친 후 구한다.

② 0보다 크고 1보다 작은 수의 제곱근의 값: $\sqrt{\dfrac{a}{100}}=\dfrac{\sqrt{a}}{10}$, $\sqrt{\dfrac{a}{10000}}=\dfrac{\sqrt{a}}{100}$, … 의 꼴로 고친 후 구한다.

4 제곱근의 덧셈과 뺄셈

l, m, n이 유리수이고 $\sqrt{a}$는 무리수일 때

(1) $m\sqrt{a}+n\sqrt{a}=(m+n)\sqrt{a}$ (2) $m\sqrt{a}-n\sqrt{a}=(m-n)\sqrt{a}$

5 근호를 포함한 복잡한 식의 계산

(1) **분배법칙을 이용한 식의 계산:** $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때

① $\sqrt{a}(\sqrt{b}\pm\sqrt{c})=\sqrt{ab}\pm\sqrt{ac}$ (복호동순)

② $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})\sqrt{c}=\sqrt{ac}\pm\sqrt{bc}$ (복호동순)

(2) **분모의 유리화를 이용한 식의 계산:** $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{c}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\times\sqrt{c}}{\sqrt{c}\times\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{ac}+\sqrt{bc}}{c}$$

(3) **근호를 포함한 복잡한 식의 계산**

❶ 괄호가 있으면 분배법칙을 이용하여 괄호를 푼다.

❷ $\sqrt{a^2b}$ $(a>0,\ b>0)$의 꼴이 있으면 $a\sqrt{b}$의 꼴로 변형한다.

❸ 분모에 근호를 포함한 무리수가 있으면 분모를 유리화한다.

❹ 곱셈, 나눗셈을 먼저 계산한 후 덧셈, 뺄셈을 계산한다.

1등급 비법노트

- $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때
  $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}=\sqrt{abc}$
- $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타낼 때, 보통 근호 안의 수는 가장 작은 자연수가 되도록 한다.
- $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$임을 이용하여 제곱인 인수를 근호 밖으로 꺼낸 후 분모를 유리화한다.
- 제곱근표에 있는 제곱근의 값은 대부분 반올림한 값이지만 등호를 사용하여 나타낸다.
- $a>0$, $b>0$, $a\neq b$일 때
  (1) $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$
  (2) $\sqrt{a}-\sqrt{b}\neq\sqrt{a-b}$
- $\sqrt{a^2b}$의 꼴이 포함된 경우는 $a\sqrt{b}$의 꼴로 변형한 후 계산한다.
- a, b, c가 유리수이고 $\sqrt{m}$이 무리수일 때
  (1) $a+b\sqrt{m}=c$이면 $a=c$, $b=m$
  (2) $a+b\sqrt{m}=c\sqrt{m}$이면 $a=0$, $b=c$
- **분배법칙**
  (1) $a(b+c)=ab+ac$
  (2) $(a+b)c=ac+bc$

핵심 문제

개념 1 제곱근의 뜻과 표현

01

다음 중 옳은 것은?

① 제곱근 4는 ± 2이다.

② -9의 제곱근은 -3이다.

③ $x^2=25$를 만족시키는 x의 값은 5이다.

√④ 제곱하여 $\frac{3}{7}$이 되는 수는 $\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$이다.

⑤ 음수가 아닌 수의 제곱근은 2개이고, 두 제곱근의 합은 0이다.

① 제곱근 4는 $\sqrt{4}=2$이다.
② -9의 제곱근은 없다.
③ $x^2=25$를 만족시키는 x의 값은 ± 5이다.
⑤ 0의 제곱근은 0의 1개이다.

02 출제 주의

제곱근 1.44를 a, $\sqrt{16}$의 음의 제곱근을 b라고 할 때, $10a+b$의 값은?

① 6 ② 8 √③ 10
④ 12 ⑤ 14

제곱근 1.44는 $\sqrt{1.44}=1.2$이므로 $a=1.2$
$\sqrt{16}=4$의 음의 제곱근은 -2이므로 $b=-2$
$\therefore 10a+b=10\times1.2+(-2)=10$

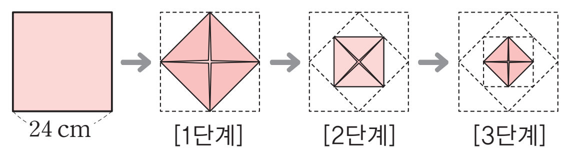
03

324의 두 제곱근을 a, b라고 할 때, $\sqrt{a-2b-5}$의 제곱근을 구하시오. (단, $a>b$) $\pm\sqrt{7}$

324의 두 제곱근은 18, -18이다.
이때 $a>b$이므로 $a=18$, $b=-18$
$\therefore \sqrt{a-2b-5}=\sqrt{18-2\times(-18)-5}=\sqrt{49}=7$
따라서 7의 제곱근은 $\pm\sqrt{7}$이다.

04

다음 그림과 같이 한 변의 길이가 24 cm인 정사각형 모양의 색종이를 각 변의 중점을 연결한 선분을 접는 선으로 하여 접는 것을 반복하였다. 이때 [3단계]에서 만들어지는 정사각형의 한 변의 길이를 구하시오. $\sqrt{72}$ cm



한 변의 길이가 24 cm인 정사각형의 넓이는 $24\times24=576(\text{cm}^2)$
1번 접었을 때 생긴 정사각형의 넓이는 $576\times\frac{1}{2}=288(\text{cm}^2)$
2번 접었을 때 생긴 정사각형의 넓이는 $288\times\frac{1}{2}=144(\text{cm}^2)$
3번 접었을 때 생긴 정사각형의 넓이는 $144\times\frac{1}{2}=72(\text{cm}^2)$
구하는 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라고 하면 $x^2=72$ $\therefore x=\sqrt{72}$
따라서 구하는 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{72}$ cm이다.

05

다음 보기에서 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있는 것을 모두 고른 것은?

〈 보기 〉
ㄱ. 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 5, 12인 직각삼각형의 빗변의 길이
ㄴ. 겉넓이가 $0.\dot{2}\dot{4}$인 $\underbrace{\text{정육면체의 한 모서리의 길이}}_{x}$
ㄷ. 넓이가 $\frac{225}{4}\pi$인 $\underbrace{\text{원의 반지름의 길이}}_{y}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
√④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13$
ㄴ. $6x^2=0.\dot{2}\dot{4}=\frac{24}{99}$, $x^2=\frac{4}{99}$ $\therefore x=\sqrt{\frac{4}{99}}$ ($\because x>0$)
ㄷ. $\pi r^2=\frac{225}{4}\pi$, $r^2=\frac{225}{4}$ $\therefore r=\frac{15}{2}$ ($\because r>0$)

개념 2 제곱근의 성질

06

$(-\sqrt{5.\dot{4}})^2$의 양의 제곱근을 a, $\sqrt{(-9)^2}$의 음의 제곱근을 b라고 할 때, ab의 값은?

√① -7 ② $-\frac{2}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ 7

$(-\sqrt{5.\dot{4}})^2=5.\dot{4}=\frac{54-5}{9}=\frac{49}{9}$의 양의 제곱근은 $\frac{7}{3}$이므로 $a=\frac{7}{3}$
$\sqrt{(-9)^2}=\sqrt{81}=9$의 음의 제곱근은 -3이므로 $b=-3$
$\therefore ab=\frac{7}{3}\times(-3)=-7$

07

A가 다음과 같을 때, $\sqrt{(-A)^2}$의 값을 구하시오. 6

$$A=\sqrt{256}\times\left\{-\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\right\}^3-\sqrt{16}$$

$A=\sqrt{256}\times\left\{-\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\right\}^3-\sqrt{16}$
$=16\times\left(-\frac{1}{8}\right)-4$
$=-6$
$\therefore \sqrt{(-A)^2}=\sqrt{\{-(-6)\}^2}=6$

08 서술형

$\sqrt{(2a+5)^2}=1$을 만족시키는 모든 a의 값의 합을 구하시오. -5

(i) $2a+5\geq0$일 때, $\sqrt{(2a+5)^2}=2a+5$이므로
$2a+5=1$, $2a=-4$
$\therefore a=-2$ ······ 40 %
(ii) $2a+5<0$일 때, $\sqrt{(2a+5)^2}=-2a-5$이므로
$-2a-5=1$, $-2a=6$
$\therefore a=-3$ ······ 40 %
(i), (ii)에 의하여 모든 a의 값의 합은
$-2+(-3)=-5$ ······ 20 %

09 출제 주의

$a>0$, $b<0$일 때, $\sqrt{16a^2b^2}-\sqrt{(-8a)^2}\times\sqrt{\frac{9}{16}b^2}$을 간단히 하면?

① $-10ab$ ② $-2ab$ ✓③ $2ab$
④ $-10a^2b^2$ ⑤ $-2a^2b^2$

$4ab<0$, $-8a<0$, $\frac{3}{4}b<0$이므로
$\therefore \sqrt{16a^2b^2}-\sqrt{(-8a)^2}\times\sqrt{\frac{9}{16}b^2}=\sqrt{(4ab)^2}-\sqrt{(-8a)^2}\times\sqrt{\left(\frac{3}{4}b\right)^2}$
$=-4ab-\{-(-8a)\}\times\left(-\frac{3}{4}b\right)$
$=-4ab+6ab=2ab$

10

다음 보기에서 $A=\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{(2-x)^2}$에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고른 것은?

〈 보기 〉
ㄱ. $x\leq-2$이면 $A=4$이다.
ㄴ. $-2<x\leq2$이면 $A=2x$이다.
ㄷ. $x>2$이면 $A=0$이다.

① ㄱ ✓② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $x\leq-2$이면 $x+2\leq0$, $2-x>0$
$\therefore A=\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{(2-x)^2}$
$=-(x+2)-(2-x)=-4$
ㄴ. $-2<x\leq2$이면 $x+2>0$, $2-x\geq0$
$\therefore A=\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{(2-x)^2}$
$=(x+2)-(2-x)=2x$
ㄷ. $x>2$이면 $x+2>0$, $2-x<0$
$\therefore A=\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{(2-x)^2}$
$=(x+2)-\{-(2-x)\}=4$

11

$\sqrt{108n}$이 자연수가 되도록 하는 두 번째로 작은 자연수 n의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9
✓④ 12 ⑤ 24

$108n=2^2\times3^3\times n$이므로 $\sqrt{108n}$이 자연수가 되려면 $n=3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.
따라서 두 번째로 작은 자연수 n의 값은
$3\times2^2=12$

12

$\sqrt{200-x}$가 가장 큰 정수가 되도록 하는 자연수 x의 값을 구하시오. 4

$\sqrt{200-x}$가 정수가 되려면 $200-x$가 0 또는 $(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.
이때 $\sqrt{200-x}$가 가장 큰 정수이어야 하고 200보다 작은 가장 큰 제곱수는 $14^2=196$이므로 $200-x=196$이어야 한다.
$\therefore x=4$

개념 3 제곱근의 대소 관계

13

$x=7$, $y=4+\sqrt{13}$일 때, $\sqrt{(x+y)^2}-\sqrt{(x-y)^2}$의 값은?

① -14 ✓② 14 ③ $3-\sqrt{13}$
④ $11-\sqrt{13}$ ⑤ $11+\sqrt{13}$

$x+y=7+(4+\sqrt{13})=11+\sqrt{13}>0$
$x-y=7-(4+\sqrt{13})=3-\sqrt{13}=\sqrt{9}-\sqrt{13}<0$
$\therefore \sqrt{(x+y)^2}-\sqrt{(x-y)^2}=x+y-\{-(x-y)\}=2x=2\times7=14$

14

부등식 $-5<-\sqrt{4x+1}<-2$를 만족시키는 자연수 x의 값 중에서 가장 큰 값을 M, 가장 작은 값을 m이라고 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. 6

$-5<-\sqrt{4x+1}<-2$의 각 변에 -1을 곱하면 $2<\sqrt{4x+1}<5$
각 변을 제곱하면
$4<4x+1<25$, $3<4x<24$
$\therefore \frac{3}{4}<x<6$
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 $M=5$, $m=1$
$\therefore M+m=5+1=6$

15

다음 세 수 x, y, z 중 가장 큰 수를 구하시오. z

$$x=2+\sqrt{11},\quad y=\sqrt{11}+\sqrt{7},\quad z=\sqrt{7}+4$$

$x-y=(2+\sqrt{11})-(\sqrt{11}+\sqrt{7})=2-\sqrt{7}=\sqrt{4}-\sqrt{7}<0$
$\therefore x<y$
$y-z=(\sqrt{11}+\sqrt{7})-(\sqrt{7}+4)=\sqrt{11}-4=\sqrt{11}-\sqrt{16}<0$
$\therefore y<z$
따라서 $x<y<z$이므로 가장 큰 수는 z이다.

개념 4 무리수와 실수

16

100 이하의 자연수 x에 대하여 $\sqrt{x}$가 무리수가 되도록 하는 x의 개수는?

✓① 90 ② 91 ③ 92
④ 93 ⑤ 94

x가 제곱수이면 $\sqrt{x}$가 유리수가 되므로 100 이하의 자연수 x에 대하여 유리수가 되도록 하는 x는 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100의 10개이다.
따라서 구하는 x의 개수는
$100-10=90$

17 출제 주의

다음 중 아래 수에 대한 설명으로 옳은 것은?

$$0,\quad \underbrace{\sqrt{1.21}}_{=1.1},\quad \underbrace{0.\dot{4}\dot{2}}_{=\frac{14}{33}},\quad -\frac{1}{3},\quad \sqrt{\frac{4}{15}},\quad \underbrace{-\sqrt{\left(-\frac{8}{2}\right)^2}}_{=-4}$$

① 정수는 없다.
② 정수가 아닌 유리수는 2개이다.
③ 무리수는 3개이다.
④ 실수는 4개이다.
✓⑤ $\frac{(\text{정수})}{(0\text{이 아닌 정수})}$의 꼴로 나타낼 수 있는 수는 5개이다.

① 정수는 0, $-\sqrt{\left(-\frac{8}{2}\right)^2}$의 2개이다.
② 정수가 아닌 유리수는 $\sqrt{1.21}$, $0.\dot{4}\dot{2}$, $-\frac{1}{3}$의 3개이다.
③ 무리수는 $\sqrt{\frac{4}{15}}$의 1개이다.
④ 실수는 0, $\sqrt{1.21}$, $0.\dot{4}\dot{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\sqrt{\frac{4}{15}}$, $-\sqrt{\left(-\frac{8}{2}\right)^2}$의 6개이다.
⑤ $\frac{(\text{정수})}{(0\text{이 아닌 정수})}$의 꼴로 나타낼 수 있는 수는 0, $\sqrt{1.21}$, $0.\dot{4}\dot{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\sqrt{\left(-\frac{8}{2}\right)^2}$의 5개이다.

18

다음 중 옳지 않은 것은?

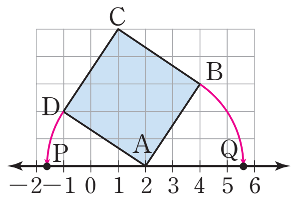
① 유리수는 실수이다.
② 무리수는 무한소수이다.
③ 순환소수가 아닌 무한소수는 실수이다.
④ 유리수가 아닌 실수는 무리수이다.
✓⑤ 유리수와 무리수의 합은 항상 유리수이다.

⑤ 유리수와 무리수의 합은 항상 무리수이다.

개념 5 실수와 수직선

19

오른쪽 그림은 한 눈금의 길이가 1인 모눈종이 위에 수직선과 정사각형 ABCD를 그린 것이다. $\overline{AD}=\overline{AP}$, $\overline{AB}=\overline{AQ}$일 때, 두 점 P, Q의 좌표를 각각 구하면?

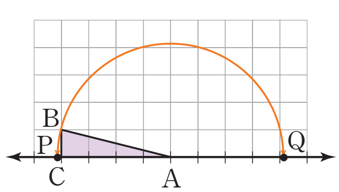


① $P(-\sqrt{13})$, $Q(\sqrt{13})$
② $P(2-\sqrt{5})$, $Q(2+\sqrt{5})$
③ $P(-2-\sqrt{5})$, $Q(2+\sqrt{5})$
✓④ $P(2-\sqrt{13})$, $Q(2+\sqrt{13})$
⑤ $P(-2-\sqrt{13})$, $Q(2+\sqrt{13})$

피타고라스 정리에 의하여 $\overline{AD}=\overline{AB}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$
$\overline{AP}=\overline{AD}=\sqrt{13}$이므로 점 P의 좌표는 $(2-\sqrt{13})$
$\overline{AQ}=\overline{AB}=\sqrt{13}$이므로 점 Q의 좌표는 $(2+\sqrt{13})$

20

다음 그림은 한 눈금의 길이가 1인 모눈종이 위에 수직선과 직각삼각형 ABC를 그린 것이다. 점 A를 중심으로 하고 $\overline{AB}$를 반지름으로 하는 원을 그리고 원과 수직선이 만나는 두 점을 각각 P, Q라고 하자. 점 P에 대응하는 수가 $-1-\sqrt{17}$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?



① $\overline{AB}=\sqrt{17}$
② $\overline{AP}=\sqrt{17}$
③ 점 A에 대응하는 수는 -1이다.
④ 점 C에 대응하는 수는 -5이다.
✓⑤ 점 Q에 대응하는 수는 $1+\sqrt{17}$이다.

① 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{AB}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$
② 원의 반지름의 길이는 같으므로 $\overline{AP}=\overline{AQ}=\overline{AB}=\sqrt{17}$
③ 점 P에 대응하는 수가 $-1-\sqrt{17}$이므로 점 A에 대응하는 수는 $-1-\sqrt{17}+\sqrt{17}=-1$
④ $\overline{AC}=4$이므로 점 C에 대응하는 수는 $-1-4=-5$
⑤ 점 Q에 대응하는 수는 $-1+\sqrt{17}$이다.

21 출제 주의

다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\sqrt{3}$과 $\sqrt{5}$ 사이에는 정수가 없다.
✓② $\sqrt{10}$과 $\sqrt{11}$ 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.
③ 서로 다른 두 정수 사이에는 무수히 많은 정수가 있다.
④ 무리수 중에는 수직선 위의 점에 대응되지 않는 수가 있다.
✓⑤ 수직선은 실수에 대응하는 점들로 완전히 메울 수 있다.

① $\sqrt{3}$과 $\sqrt{5}$ 사이에는 정수 2가 있다.
③ 서로 다른 두 정수 사이에는 유한개의 정수가 있다.
④ 무리수는 모두 수직선 위의 점에 대응된다.

22 서술형

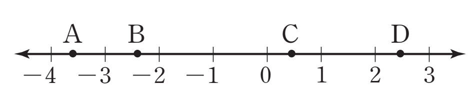
$\sqrt{8}-5$와 $9-\sqrt{8}$ 사이에 있는 모든 정수의 합을 구하시오.

18

$2<\sqrt{8}<3$이므로 $-3<\sqrt{8}-5<-2$ ······ 30 %
$2<\sqrt{8}<3$에서 $-3<-\sqrt{8}<-2$이므로 $6<9-\sqrt{8}<7$ ······ 30 %
이때 $\sqrt{8}-5$와 $9-\sqrt{8}$ 사이에 있는 모든 정수는
$-2, -1, 0, \dots, 6$ ······ 30 %
따라서 구하는 합은
$-2+(-1)+0+\cdots+6=18$ ······ 10 %

23

다음 수직선 위의 네 점 A, B, C, D는 각각 네 수 $-2+\sqrt{6}$, $-1-\sqrt{2}$, $-\sqrt{13}$, $\sqrt{20}-2$ 중 하나에 대응한다. 두 점 A, D에 대응하는 수를 차례대로 구하면?



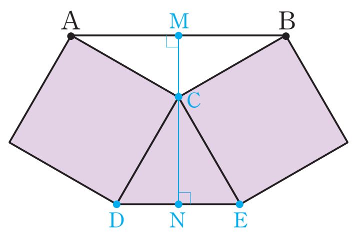
① $-2+\sqrt{6}$, $-\sqrt{13}$
② $-1-\sqrt{2}$, $-\sqrt{13}$
✓③ $-\sqrt{13}$, $\sqrt{20}-2$
④ $-\sqrt{13}$, $-2+\sqrt{6}$
⑤ $\sqrt{20}-2$, $-2+\sqrt{6}$

$2<\sqrt{6}<3$이므로 $0<-2+\sqrt{6}<1$
따라서 $-2+\sqrt{6}$은 점 C에 대응한다.
$1<\sqrt{2}<2$에서 $-2<-\sqrt{2}<-1$이므로 $-3<-1-\sqrt{2}<-2$
따라서 $-1-\sqrt{2}$는 점 B에 대응한다.
$3<\sqrt{13}<4$이므로 $-4<-\sqrt{13}<-3$
따라서 $-\sqrt{13}$은 점 A에 대응한다.
$4<\sqrt{20}<5$이므로 $2<\sqrt{20}-2<3$
따라서 $\sqrt{20}-2$는 점 D에 대응한다.
그러므로 두 점 A, D에 대응하는 수는 차례대로 $-\sqrt{13}$, $\sqrt{20}-2$이다.

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

01 출제 주의

다음 그림과 같이 정삼각형의 두 변을 각각 공유하고 있는 두 개의 정사각형에서 한 정사각형의 넓이가 3일 때, 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는?



① 7 ② 8 ✓③ 9

④ 10 ⑤ 11

넓이가 3인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{3}$이고, $\overline{DN}=\frac{1}{2}\overline{DE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\triangle CDN$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\overline{CN}^2=(\sqrt{3})^2$, $\overline{CN}^2=3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$

$\therefore \overline{CN}=\frac{3}{2}$

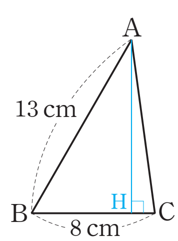
한편, $\triangle ACM$과 $\triangle CDN$에서 $\triangle ACM\equiv\triangle CDN$ (RHA 합동)

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AM}=2\overline{CN}=2\times\frac{3}{2}=3$

따라서 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 $3^2=9$

02

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=13\text{ cm}$, $\overline{BC}=8\text{ cm}$인 $\triangle ABC$의 넓이가 48 cm^2일 때, $\overline{AC}$의 길이를 구하시오. $\sqrt{153}\text{ cm}$



$\frac{1}{2}\times8\times\overline{AH}=48$, $4\overline{AH}=48$

$\therefore \overline{AH}=12\text{ cm}$

$\triangle ABH$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BH}=\sqrt{13^2-12^2}=\sqrt{25}=5(\text{cm})$

따라서 $\overline{CH}=8-5=3(\text{cm})$이므로 $\triangle AHC$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{3^2+12^2}=\sqrt{153}(\text{cm})$

03

$\sqrt{4\sqrt{8\sqrt{32\sqrt{1024}}}}$ 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7

✓④ 8 ⑤ 9

$$\begin{aligned}\sqrt{4\sqrt{8\sqrt{32\sqrt{1024}}}}&=\sqrt{4\sqrt{8\sqrt{32\sqrt{2^{10}}}}}\\&=\sqrt{4\sqrt{8\sqrt{2^{10}}}}\\&=\sqrt{4\sqrt{2^8}}\\&=\sqrt{2^6}\\&=8\end{aligned}$$

04

$\sqrt{(4x+1)^2}-\sqrt{(x-2)^2}=5x$일 때, x의 값의 범위가 될 수 있는 것은?

✓① $x<-\frac{1}{4}$ ② $-2\le x<\frac{1}{4}$

③ $-\frac{1}{4}\le x<2$ ④ $-\frac{1}{2}\le x<4$

⑤ $x\ge2$

(i) $x<-\frac{1}{4}$일 때, $4x+1<0$, $x-2<0$이므로

$\sqrt{(4x+1)^2}-\sqrt{(x-2)^2}=-(4x+1)-\{-(x-2)\}=-3x-3$

즉, $-3x-3=5x$이므로 $-8x=3$ $\therefore x=-\frac{3}{8}$

(ii) $-\frac{1}{4}\le x<2$일 때, $4x+1\ge0$, $x-2<0$이므로

$\sqrt{(4x+1)^2}-\sqrt{(x-2)^2}=(4x+1)-\{-(x-2)\}=5x-1$

즉, $5x-1=5x$이므로 $-1=0$

이때 $-1\ne0$이므로 조건을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $x\ge2$일 때, $4x+1>0$, $x-2\ge0$이므로

$\sqrt{(4x+1)^2}-\sqrt{(x-2)^2}=(4x+1)-(x-2)=3x+3$

즉, $3x+3=5x$이므로 $-2x=-3$ $\therefore x=\frac{3}{2}$

이때 $\frac{3}{2}\le2$이므로 조건을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에 의하여 조건을 만족시키는 x의 값의 범위가 될 수 있는 것은 $x<-\frac{1}{4}$이다.

05

$x=\sqrt{\frac{9^{10}+27^{10}}{9^{11}+27^4}}$일 때, $(x+19)^2$의 값을 구하시오. 10000

$x=\sqrt{\frac{9^{10}+27^{10}}{9^{11}+27^4}}=\sqrt{\frac{(3^2)^{10}+(3^3)^{10}}{(3^2)^{11}+(3^3)^4}}=\sqrt{\frac{3^{20}+3^{30}}{3^{22}+3^{12}}}=\sqrt{\frac{3^{20}(1+3^{10})}{3^{12}(3^{10}+1)}}=\sqrt{3^8}=3^4=81$

$\therefore (x+19)^2=(81+19)^2=100^2=10000$

06

두 실수 a, b에 대하여 $a-b<0$, $\frac{a}{b}<0$일 때,

$\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(-2a)^2}-\sqrt{(-b)^2}$을 간단히 하시오. $-3a$

$a<0$, $b>0$이므로 $-2a>0$, $-b<0$

$\therefore \sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(-2a)^2}-\sqrt{(-b)^2}=-(a-b)+(-2a)-\{-(-b)\}=-3a$

07 출제 주의

부등식 $2<3x-4<5$를 만족시키는 x에 대하여 다음 중 $\sqrt{(\sqrt{3}+x)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-x)^2}$의 값이 될 수 없는 것은?

① $\sqrt{18}$ ② $\sqrt{24}$ ③ 5
④ $\sqrt{32}$ ✓⑤ $\sqrt{40}$

$2<3x-4<5$에서
$6<3x<9$ $\quad\therefore 2<x<3$
이때 $1<\sqrt{3}<2$이므로 $\sqrt{3}+x>0$, $\sqrt{3}-x<0$
$\therefore \sqrt{(\sqrt{3}+x)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-x)^2}=\sqrt{3}+x+\{-(\sqrt{3}-x)\}=2x$
이때 $4<2x<6$이므로 $4<\sqrt{(\sqrt{3}+x)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-x)^2}<6$
⑤ $\sqrt{36}<\sqrt{40}<\sqrt{49}$, 즉 $6<\sqrt{40}<7$이므로 $\sqrt{40}$은 주어진 식의 값이 될 수 없다.

08 서술형

$a<0<b<1$인 두 수 a, b에 대하여 $|a|>|b|$일 때, $\sqrt{\left(b-\frac{1}{b}\right)^2}-\left|\frac{1}{b}-a\right|+\sqrt{(a+b)^2}$을 간단히 하시오. $-2b$

$0<b<1$이므로 $\frac{1}{b}>1$
$\therefore b-\frac{1}{b}<0$, $\frac{1}{b}-a>0$ ······ 20 %
$|a|>|b|$이므로 $a+b<0$ ······ 20 %
$\therefore \sqrt{\left(b-\frac{1}{b}\right)^2}-\left|\frac{1}{b}-a\right|+\sqrt{(a+b)^2}=-\left(b-\frac{1}{b}\right)-\left(\frac{1}{b}-a\right)+\{-(a+b)\}$
$=-2b$ ······ 60 %

09

x가 실수일 때, $\sqrt{(x+\sqrt{x^2})^2}-\sqrt{(x-\sqrt{x^2})^2}$을 간단히 하시오. $2x$

$\sqrt{(x+\sqrt{x^2})^2}-\sqrt{(x-\sqrt{x^2})^2}=\sqrt{(x+|x|)^2}-\sqrt{(x-|x|)^2}=|x+|x||-|x-|x||$
(i) $x\geq 0$일 때
$|x+|x||-|x-|x||=|x+x|-|x-x|=|2x|=2x$
(ii) $x<0$일 때
$|x+|x||-|x-|x||=|x-x|-|x-(-x)|=-|2x|=-(-2x)=2x$
(i), (ii)에 의하여 $\sqrt{(x+\sqrt{x^2})^2}-\sqrt{(x-\sqrt{x^2})^2}=2x$

10

a, b가 실수일 때,
$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2}$을 간단히 하면?

① $|a|$ ② $|b|$ ③ $2|a|$
④ $|a+b|$ ✓⑤ $|a-b|$

$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{-a+b}{2}\right)^2}=\left|\frac{-a+b}{2}\right|$, $\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=\left|\frac{a-b}{2}\right|$
(i) $a\geq b$인 경우
$-a+b\leq 0$, $a-b\geq 0$이므로
$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2}=\left|\frac{-a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|=-\frac{-a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=a-b$
(ii) $a<b$인 경우
$-a+b>0$, $a-b<0$이므로
$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2}=\left|\frac{-a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|=\frac{-a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=-a+b$
(i), (ii)에 의하여
$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2}=\begin{cases}a-b & (a\geq b)\\ -a+b & (a<b)\end{cases}=|a-b|$

11

$\sqrt{1\times2\times3\times\cdots\times10\times11\times n}$이 자연수가 되도록 하는 세 자리 자연수 n의 개수를 구하시오. 2

$1\times2\times3\times\cdots\times10\times11\times n$을 소인수분해하면 $2^8\times3^4\times5^2\times7\times11\times n$
$\sqrt{1\times2\times3\times\cdots\times10\times11\times n}=\sqrt{2^8\times3^4\times5^2\times7\times11\times n}$이 자연수가 되려면
$n=7\times11\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.
따라서 세 자리 자연수 n은 $7\times11\times2^2=308$, $7\times11\times3^2=693$의 2개이다.

12

$\sqrt{144-18n}$이 정수가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은?

① 10 ② 12 ✓③ 14
④ 16 ⑤ 18

$\sqrt{144-18n}=\sqrt{18(8-n)}=\sqrt{2\times3^2\times(8-n)}$이 정수가 되려면 $2(8-n)$이 0 또는 $(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.
이때 $0\leq 8-n<8$이므로 $8-n$의 값은 0, 2이다.
따라서 자연수 n의 값은 6, 8이므로 구하는 합은
$6+8=14$

13

한 변의 길이가 모두 자연수인 두 정사각형의 넓이가 각각 $3a$, $76-a$일 때, a가 될 수 있는 모든 자연수의 합은?

① 112 ✓② 114 ③ 116

④ 118 ⑤ 120

넓이가 각각 $3a$, $76-a$인 두 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{3a}$, $\sqrt{76-a}$

$\sqrt{76-a}$가 자연수가 되려면 $76-a$가 76보다 작은 제곱수이어야 하므로

$76-a=1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64$

즉, $a=75, 72, 67, 60, 51, 40, 27, 12$ …… ㉠

또, $\sqrt{3a}$가 자연수가 되려면 $a=3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 하므로

$a=3, 12, 27, 48, 75, \dots$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 a의 값은 12, 27, 75이므로 모든 자연수 a의 값의 합은

$12+27+75=114$

14 출제 주의

두 자연수 x, y에 대하여 $\sqrt{500-x}-\sqrt{200+y}$가 가장 큰 정수가 되도록 x, y의 값을 정할 때, $x+y$의 값은?

① 40 ✓② 41 ③ 42

④ 43 ⑤ 44

$\sqrt{500-x}-\sqrt{200+y}$가 0이 아닌 정수이려면 $500-x$와 $200+y$가 모두 제곱수이어야 한다.

이때 $\sqrt{500-x}-\sqrt{200+y}$의 값이 가장 큰 정수가 되려면 $\sqrt{500-x}$는 가장 큰 자연수가 되고, $\sqrt{200+y}$는 가장 작은 자연수가 되어야 한다.

x는 자연수이므로 500보다 작은 가장 큰 제곱수는 $22^2=484$이므로 $500-x=484$이어야 한다.

$\therefore x=16$

또, y도 자연수이므로 200보다 큰 가장 작은 제곱수는 $15^2=225$이므로 $200+y=225$이어야 한다.

$\therefore y=25$

$\therefore x+y=16+25=41$

15

다음 수를 크기가 작은 것부터 차례대로 나열하였을 때, 네 번째에 오는 수를 구하시오. $3-\sqrt{5}$

$$\frac{\sqrt{8}}{2},\quad 3-\sqrt{5},\quad \frac{1-\sqrt{6}}{2},\quad \frac{5}{2}-\sqrt{7},\quad -1$$

$2<\sqrt{8}<3$이므로 $1<\frac{\sqrt{8}}{2}<\frac{3}{2}$

$2<\sqrt{5}<3$에서 $-3<-\sqrt{5}<-2$이므로 $0<3-\sqrt{5}<1$

$2<\sqrt{6}<3$에서 $-2<1-\sqrt{6}<-1$이므로 $-1<\frac{1-\sqrt{6}}{2}<-\frac{1}{2}$

$2<\sqrt{7}<3$에서 $-3<-\sqrt{7}<-2$이므로 $-\frac{1}{2}<\frac{5}{2}-\sqrt{7}<\frac{1}{2}$

따라서 크기가 작은 것부터 차례대로 나열하면 -1, $\frac{1-\sqrt{6}}{2}$, $\frac{5}{2}-\sqrt{7}$, $3-\sqrt{5}$, $\frac{\sqrt{8}}{2}$이므로 네 번째에 오는 수는 $3-\sqrt{5}$이다.

16

다음 중 $x>1$일 때 가장 큰 것과 $0<x<1$일 때 가장 큰 것을 차례대로 구하면?

$$x,\quad \frac{1}{x},\quad \sqrt{x},\quad \sqrt{\frac{1}{x}}$$

① $\sqrt{\frac{1}{x}}$, $\sqrt{x}$ ② $\frac{1}{x}$, x

③ $\sqrt{x}$, $\sqrt{\frac{1}{x}}$ ✓④ x, $\frac{1}{x}$

⑤ x, $\sqrt{x}$

x, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt{\frac{1}{x}}$을 각각 제곱하면 x^2, $\frac{1}{x^2}$, x, $\frac{1}{x}$

$x>1$일 때, $\frac{1}{x}<1$이고 $x^2>x$이므로 $\frac{1}{x^2}<\frac{1}{x}$

따라서 $\frac{1}{x^2}<\frac{1}{x}<1<x<x^2$이므로 $\frac{1}{x}<\sqrt{\frac{1}{x}}<\sqrt{x}<x$

즉, 주어진 수 중에서 가장 큰 수는 x이다.

$0<x<1$일 때, $\frac{1}{x}>1$이고 $x^2<x$이므로 $\frac{1}{x^2}>\frac{1}{x}$

따라서 $x^2<x<1<\frac{1}{x}<\frac{1}{x^2}$이므로 $x<\sqrt{x}<\sqrt{\frac{1}{x}}<\frac{1}{x}$

즉, 주어진 수 중에서 가장 큰 수는 $\frac{1}{x}$이다.

따라서 구하는 수는 차례대로 x, $\frac{1}{x}$이다.

17 서술형

서로소인 두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt{\frac{1.0\dot{2}\times n}{m}}=0.\dot{2}$일 때, $\sqrt{n}$과 $\sqrt{m}$ 사이에 있는 자연수의 개수를 구하시오. 11

$1.0\dot{2}=\frac{92}{90}=\frac{46}{45}$, $0.\dot{2}=\frac{2}{9}$이므로 $\sqrt{\frac{1.0\dot{2}\times n}{m}}=0.\dot{2}$에서 $\sqrt{\frac{46n}{45m}}=\frac{2}{9}$

양변을 제곱하면

$\frac{46n}{45m}=\frac{4}{81}$ $\therefore \frac{n}{m}=\frac{10}{207}$

m, n은 서로소인 자연수이므로 $m=207$, $n=10$ ……………… 70 %

이때 $14<\sqrt{207}<15$, $3<\sqrt{10}<4$이므로 $\sqrt{n}$과 $\sqrt{m}$ 사이에 있는 자연수는 4, 5, …, 14의 11개이다. ……………… 30 %

18

자연수 n에 대하여 $n\le\sqrt{x}<n+1$을 만족시키는 자연수 x의 개수가 15일 때, n의 값을 구하시오. 7

$n=1$일 때, $1\le\sqrt{x}<2$에서 $1\le x<4$이므로 자연수 x는 1, 2, 3의 3개이다.

$n=2$일 때, $2\le\sqrt{x}<3$에서 $4\le x<9$이므로 자연수 x는 4, 5, 6, 7, 8의 5개이다.

$n=3$일 때, $3\le\sqrt{x}<4$에서 $9\le x<16$이므로 자연수 x는 9, 10, …, 15의 7개이다.

⋮

즉, $n\le\sqrt{x}<n+1$을 만족시키는 자연수 x의 개수는 $2n+1$이다.

따라서 $2n+1=15$에서

$2n=14$ $\therefore n=7$

19

$1<\sqrt{|a-4|}<2$를 만족시키는 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오. 16

$1<\sqrt{|a-4|}<2$의 각 변을 제곱하면 $1<|a-4|<4$
(i) $a<4$일 때
$|a-4|=-a+4$이므로 $1<-a+4<4$에서
$-3<-a<0$ $\quad\therefore 0<a<3$
따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 1, 2이다.
(ii) $a\ge4$일 때
$|a-4|=a-4$이므로 $1<a-4<4$에서 $5<a<8$
따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 6, 7이다.
(i), (ii)에 의하여 모든 정수 a의 값의 합은
$1+2+6+7=16$

20

$2<a<3$에 대하여 n의 양의 제곱근이 $7+a$일 때, 자연수 n의 값 중 가장 큰 수를 구하시오. 99

n의 양의 제곱근이 $7+a$이므로 $\sqrt{n}=7+a$
$2<a<3$이므로 $9<7+a<10$, 즉 $9<\sqrt{n}<10$
각 변을 제곱하면 $81<n<100$
따라서 자연수 n의 값 중 가장 큰 수는 99이다.

21

주사위를 두 번 던져서 첫 번째 나온 눈의 수를 a, 두 번째 나온 눈의 수를 b라고 할 때, $5<\sqrt{a^2+4b}<6$을 만족시킬 확률은?

① $\frac{5}{36}$ ② $\frac{1}{6}$ ✓③ $\frac{7}{36}$
④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

주사위를 두 번 던져 나오는 경우의 수는 $6\times6=36$
$5<\sqrt{a^2+4b}<6$의 각 변을 제곱하면 $25<a^2+4b<36$
(i) $b=1$일 때
$25<a^2+4<36$에서 $21<a^2<32$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 $a=5$
(ii) $b=2$일 때
$25<a^2+8<36$에서 $17<a^2<28$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 $a=5$
(iii) $b=3$일 때
$25<a^2+12<36$에서 $13<a^2<24$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 $a=4$
(iv) $b=4$일 때
$25<a^2+16<36$에서 $9<a^2<20$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 $a=4$
(v) $b=5$일 때
$25<a^2+20<36$에서 $5<a^2<16$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 $a=3$
(vi) $b=6$일 때
$25<a^2+24<36$에서 $1<a^2<12$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 $a=2, 3$
(i)~(vi)에 의하여 조건을 만족시키는 a, b의 값을 순서쌍으로 나타내면 (2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 2)의 7개이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{7}{36}$이다.

22

자연수 x에 대하여 $\sqrt{x}$ 미만의 자연수의 개수를 $f(x)$라 고 할 때, $f(2)+f(4)+f(6)+\cdots+f(20)$의 값을 구하시오. 26

$1<\sqrt{2}<2$이므로 $\sqrt{2}$ 미만의 자연수의 개수 $f(2)$는 $f(2)=1$
이때 $\sqrt{4}=2$이므로 $f(4)=1$
이와 마찬가지로 $\sqrt{6}<\sqrt{8}<\sqrt{9}=3$이므로 $f(6)=f(8)=2$
$\sqrt{10}<\sqrt{12}<\sqrt{14}<\sqrt{16}=4$이므로 $f(10)=f(12)=f(14)=f(16)=3$
$\sqrt{18}<\sqrt{20}<\sqrt{25}=5$이므로 $f(18)=f(20)=4$
$\therefore f(2)+f(4)+f(6)+\cdots+f(20)$
$=1\times2+2\times2+3\times4+4\times2$
$=26$

23

자연수 N이 다섯 자리 자연수일 때, $\sqrt{N}$의 정수 부분은 몇 자리 수인가?

① 한 자리 ② 두 자리 ✓③ 세 자리
④ 네 자리 ⑤ 다섯 자리

자연수 N이 다섯 자리 자연수이므로 $10000\le N<100000$, 즉
$\sqrt{10000}\le\sqrt{N}<\sqrt{100000}$이고 $\sqrt{10000}=\sqrt{100^2}=100$,
$\sqrt{100000}<\sqrt{1000000}=\sqrt{1000^2}=1000$이므로 $100\le\sqrt{N}<1000$
따라서 $\sqrt{N}$의 정수 부분은 세 자리 수이다.

24 출제 주의

서로 다른 실수 p, q, r, s에 대하여 p, q는 유리수, r, s는 무리수일 때, 다음 중 항상 옳은 설명을 한 학생은 몇 명인지 구하시오. 3명

> 종화: $p+q$는 반드시 유리수이다.
> 소민: pq는 반드시 유리수이다.
> 상혁: $r+s$는 반드시 무리수이다.
> 서현: $q+r$는 반드시 무리수이다.
> 경진: $\frac{r}{s}$는 반드시 무리수이다.

상혁: 두 무리수가 $r=-\sqrt{2}$, $s=\sqrt{2}$이면 $r+s=0$이므로 유리수이다.
즉, $r+s$가 반드시 무리수라고 할 수 없다.
경진: 두 무리수가 $r=-\sqrt{2}$, $s=\sqrt{2}$이면 $\frac{r}{s}=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1$이므로 유리수이다.
즉, $\frac{r}{s}$도 반드시 무리수라고 할 수 없다.

25

1000 이하의 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n}$, $\sqrt{2n}$, $\sqrt{3n}$이 모두 무리수가 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. 929

무리수의 개수는 전체에서 유리수의 개수를 빼는 것과 같다.
(i) $\sqrt{n}$이 유리수가 되는 경우
$\sqrt{n}$이 유리수가 되려면 n은 (자연수)^{2}의 꼴이어야 하고 1000 이하의 자연수 중에서 $\sqrt{n}$이 유리수가 되도록 하는 n의 개수는 31이다.
(ii) $\sqrt{2n}$이 유리수가 되는 경우
$\sqrt{2n}$이 유리수가 되려면 $n=2\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 하고, 1000 이하의 자연수 중에서 $\sqrt{2n}$이 유리수가 되도록 하는 n의 개수는 22이다.
(iii) $\sqrt{3n}$이 유리수가 되는 경우
$\sqrt{3n}$이 유리수가 되려면 $n=3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 하고, 1000 이하의 자연수 중에서 $\sqrt{3n}$이 유리수가 되도록 하는 n의 개수는 18이다.
$2\times$(자연수)^2=(자연수)^2, $3\times$(자연수)^2=(자연수)^{2}의 꼴이 될 수 없으므로 (i)~(iii)에서 공통되는 n의 값이 없다.
따라서 구하는 자연수 n의 개수는 $1000-(31+22+18)=929$

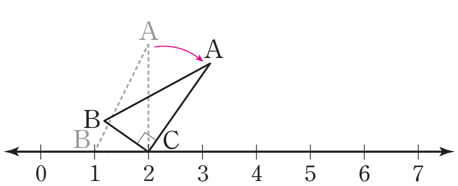
26 출제 주의

자연수 k $(1<k<n)$에 대하여 $\sqrt{k}$가 무리수인 것의 개수를 $f(n)$이라고 할 때, $f(10)+f(100)$의 값을 구하시오. 96

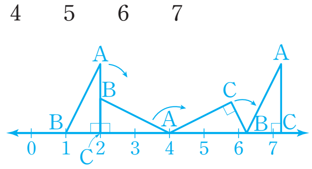
$\sqrt{n}$이 유리수가 되려면 n이 제곱수이어야 한다.
1보다 크고 10보다 작은 제곱수는 4, 9의 2개이므로 1 초과 10 미만의 무리수의 개수는 $f(10)=8-2=6$
1보다 크고 100보다 작은 제곱수는 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81의 8개이므로 1 초과 100 미만의 무리수의 개수는 $f(100)=98-8=90$
$\therefore f(10)+f(100)=6+90=96$

27

다음 그림과 같이 $\overline{AC}=2$, $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC의 두 꼭짓점 B, C가 각각 1, 2에 대응하는 수직선 위의 점에 있다. 삼각형 ABC가 수직선을 따라 시계 방향으로 한 바퀴 굴렸을 때, 꼭짓점 C가 수직선과 처음으로 다시 만나는 점의 좌표를 구하시오. $5+\sqrt{5}$



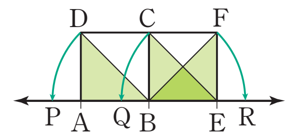
직각삼각형 ABC가 수직선을 따라 시계 방향으로 한 바퀴 굴렸을 때, 꼭짓점 C가 수직선과 처음으로 다시 만나는 점의 좌표는 점 C의 좌표에 직각삼각형 ABC의 둘레의 길이를 더한 것과 같다.



이때 $\overline{BC}=1$이므로 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{AB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$
직각삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\sqrt{5}+1+2=\sqrt{5}+3$
따라서 구하는 점의 좌표는
(점 C의 좌표)+(직각삼각형 ABC의 둘레의 길이)$=2+(\sqrt{5}+3)=5+\sqrt{5}$

28

오른쪽 그림과 같이 수직선 위에 한 변의 길이가 1인 두 정사각형 ABCD, BEFC가 있다. $\overline{BD}=\overline{BP}$, $\overline{CE}=\overline{EQ}$, $\overline{BF}=\overline{BR}$가 되도록 수직선 위에 세 점 P, Q, R를 정하고 여섯 개의 점 A, B, E, P, Q, R에 대응되는 수를 각각 a, b, e, p, q, r라고 할 때, 다음 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



〈 보기 〉
ㄱ. p가 유리수이면 a, b 모두 무리수이다.
ㄴ. q가 무리수이면 b, e는 유리수이다.
ㄷ. $r=-2+\sqrt{2}$이면 $q=-1-\sqrt{2}$이다.
ㄹ. $p=-1-\sqrt{2}$이면 $r=-2+\sqrt{2}$이다.

① ㄱ, ㄴ ✓② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

$\overline{BP}=\overline{BD}=\overline{CE}=\overline{EQ}=\overline{BF}=\overline{BR}=\sqrt{2}$
ㄱ. $b=p+\sqrt{2}$이므로 p가 유리수이면 b는 무리수이고, $a=b-1$이므로 무리수이다.
ㄴ. $q=-\sqrt{2}$이면 $e=q+\sqrt{2}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$, $b=e-1=-1$이므로 모두 유리수이지만 $q=-\sqrt{3}$이면 $e=q+\sqrt{2}=-\sqrt{3}+\sqrt{2}$이므로 무리수이다.
ㄷ. $r=-2+\sqrt{2}$이면 $b=r-\sqrt{2}=-2+\sqrt{2}-\sqrt{2}=-2$, $e=b+1=-1$이므로 $q=e-\sqrt{2}=-1-\sqrt{2}$
ㄹ. $p=-1-\sqrt{2}$이면 $b=p+\sqrt{2}=-1-\sqrt{2}+\sqrt{2}=-1$이므로 $r=b+\sqrt{2}=-1+\sqrt{2}$

29 서술형

양수 a의 정수 부분을 n, 소수 부분을 r라고 할 때, $(a+r)(a-r)=38+\sqrt{2}$가 성립한다. 이때 $(6r-1)^2$의 값을 구하시오. $\frac{1}{2}$

양수 a의 정수 부분이 n, 소수 부분이 r이므로 $a=n+r$
$(a+r)(a-r)=(n+r+r)(n+r-r)=(n+2r)n=n^2+2nr=38+\sqrt{2}$
이때 $0<r<1$이므로 $n^2<n^2+2nr<n^2+2n$ $\quad\therefore n^2<38+\sqrt{2}<n^2+2n$
$1<\sqrt{2}<2$에서 $39<38+\sqrt{2}<40$
따라서 $6^2<38+\sqrt{2}<6^2+2\times6$이므로 $n=6$ ··· 40 %
$a=6+r$이므로 $n^2+2nr=6^2+12r=38+\sqrt{2}$ $\quad\therefore r=\frac{2+\sqrt{2}}{12}$ ··· 30 %
$\therefore (6r-1)^2=\left(6\times\frac{2+\sqrt{2}}{12}-1\right)^2=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}-1\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ ··· 30 %

30

자연수 n에 대하여 $f(n)$은 $\sqrt{n}$을 소수점 아래 첫 번째 자리에서 반올림한 값을 나타낸다. 예를 들어 $\sqrt{3}=1.732\cdots$이므로 $f(3)=2$이다. 이때 $f(1)+f(2)+\cdots+f(12)$의 값을 구하시오. 28

$1.5=\sqrt{2.25}$이므로 $n<2.25$인 자연수 n에 대하여 $f(n)=1$이다.
$\therefore f(1)=f(2)=1$
$2.5=\sqrt{6.25}$이므로 $2.25\le n<6.25$인 자연수 n에 대하여 $f(n)=2$이다.
$\therefore f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=2$
$3.5=\sqrt{12.25}$이므로 $6.25\le n<12.25$인 자연수 n에 대하여 $f(n)=3$이다.
$\therefore f(7)=f(8)=\cdots=f(12)=3$
$\therefore f(1)+f(2)+\cdots+f(12)=1\times2+2\times4+3\times6=28$

31 서술형

자연수 n과 실수 x에 대하여 nx가 자연수가 되고, $\sqrt{nx}$의 정수 부분이 2가 되도록 하는 모든 x의 값의 합이 10일 때, n의 값을 구하시오. 3

$\sqrt{nx}$의 정수 부분이 2이면 $2 \le \sqrt{nx} < 3$이므로 $4 \le nx < 9$ ······ 30 %
$4 \le nx < 9$를 만족시키는 자연수 nx는
$nx=4, 5, 6, 7, 8$ $\quad \therefore x=\frac{4}{n}, \frac{5}{n}, \frac{6}{n}, \frac{7}{n}, \frac{8}{n}$ ······ 40 %
모든 x의 값의 합이 10이므로
$\frac{4}{n}+\frac{5}{n}+\frac{6}{n}+\frac{7}{n}+\frac{8}{n}=10$, $\frac{30}{n}=10$
$\therefore n=3$ ······ 30 %

32 출제 주의

등식 $\sqrt{3a}+\sqrt{b}=5$를 만족시키는 두 자연수 a, b에 대하여 $\sqrt{2a^2+b^2}$의 정수 부분을 x, 소수 부분을 y라고 할 때, $x-y$의 값을 구하시오. $10-\sqrt{34}$

$\sqrt{b}>0$이므로 $\sqrt{3a}+\sqrt{b}=5$에서 $\sqrt{3a}<5$
$\sqrt{3a}$가 5보다 작은 정수가 되려면 $a=3$이다.
따라서 $\sqrt{3a}+\sqrt{b}=5$에서
$\sqrt{b}=5-\sqrt{3a}=5-3=2$ $\quad \therefore b=4$
따라서 $\sqrt{2a^2+b^2}=\sqrt{2\times 3^2+4^2}=\sqrt{34}$이고 $5<\sqrt{34}<6$이므로 $\sqrt{34}$의 정수부분은 $x=5$,
소수 부분은 $y=\sqrt{34}-5$
$\therefore x-y=5-(\sqrt{34}-5)=10-\sqrt{34}$

33

두 실수 a, b에 대하여 a와 b 사이에 있는 정수의 개수를 $f(a, b)$라고 할 때, 다음 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보기 〉
ㄱ. $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2}\right)=1$
ㄴ. $f(2-\sqrt{5}, 3+\sqrt{3})=5$
ㄷ. $f(1-\sqrt{10}, \sqrt{7}+\sqrt{8})=7$

① ㄱ ✓② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $1<\sqrt{3}<2$이므로 $0<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$이고 $1<\sqrt{2}<2$이므로 $0<\frac{\sqrt{3}}{2}<1<\sqrt{2}<2$
따라서 두 수 $\frac{\sqrt{3}}{2}$과 $\sqrt{2}$ 사이에 있는 정수는 1의 1개이다. $\quad \therefore f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2}\right)=1$
ㄴ. $2<\sqrt{5}<3$에서 $-1<2-\sqrt{5}<0$이고 $1<\sqrt{3}<2$이므로 $4<3+\sqrt{3}<5$
즉, $-1<2-\sqrt{5}<0<4<3+\sqrt{3}<5$이므로 두 수 $2-\sqrt{5}$와 $3+\sqrt{3}$ 사이에 있는 정수는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다. $\quad \therefore f(2-\sqrt{5}, 3+\sqrt{3})=5$
ㄷ. $3<\sqrt{10}<4$에서 $-3<1-\sqrt{10}<-2$
$2.5=\sqrt{6.25}$에서 $2.5<\sqrt{7}<3$, $2.5<\sqrt{8}<3$이므로 $5<\sqrt{7}+\sqrt{8}<6$
즉, $-3<1-\sqrt{10}<-2<5<\sqrt{7}+\sqrt{8}<6$이므로 두 수 $1-\sqrt{10}$과 $\sqrt{7}+\sqrt{8}$ 사이에 있는 정수는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$의 8개이다. $\quad \therefore f(1-\sqrt{10}, \sqrt{7}+\sqrt{8})=8$

34 출제 주의

두 실수 a, b $(a<b)$에 대하여 $D(a, b)$를 a, b 사이의 정수의 개수라고 하자. 이때
$D(-\sqrt{15}, \sqrt{10})+D(2-\sqrt{3}, 3+\sqrt{5})$의 값은?

① 20 ② 18 ③ 16
④ 14 ✓⑤ 12

$-4<-\sqrt{15}<-3$, $3<\sqrt{10}<4$이므로 $-\sqrt{15}$와 $\sqrt{10}$ 사이의 정수는 $-3, -2, -1, \dots, 3$의 7개이다.
$\therefore D(-\sqrt{15}, \sqrt{10})=7$
$1<\sqrt{3}<2$에서 $0<2-\sqrt{3}<1$, $2<\sqrt{5}<3$에서 $5<3+\sqrt{5}<6$이므로 $2-\sqrt{3}$과 $3+\sqrt{5}$ 사이의 정수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.
$\therefore D(2-\sqrt{3}, 3+\sqrt{5})=5$
$\therefore D(-\sqrt{15}, \sqrt{10})+D(2-\sqrt{3}, 3+\sqrt{5})=7+5=12$

35

$a+\sqrt{2}<n<b-\sqrt{2}$를 만족시키는 정수 n의 개수가 6일 때, $b-a$의 값은? (단, a, b는 정수이다.)

✓① 9 ② 8 ③ 7
④ 6 ⑤ 5

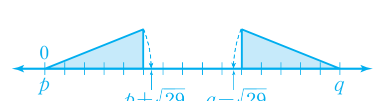
$1<\sqrt{2}<2$에서 $a+1<a+\sqrt{2}<a+2$
또, $-2<-\sqrt{2}<-1$에서 $b-2<b-\sqrt{2}<b-1$
a, b가 정수이고 두 수 $a+\sqrt{2}$, $b-\sqrt{2}$ 사이에 있는 정수의 개수는 $a+1<n<b-1$을 만족시키는 n의 값의 개수와 같다.
이때 주어진 부등식을 만족시키는 정수 n의 개수가 6이므로
$b-1-(a+1)-1=6$ $\quad \therefore b-a=9$

36

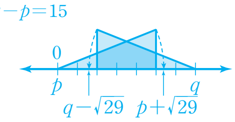
두 정수 p, q $(p<q)$에 대하여 $p+\sqrt{29}$와 $q-\sqrt{29}$ 사이의 정수의 개수가 4가 되도록 p, q의 값을 정할 때, $q-p$의 값을 모두 구하시오. 7, 15

$\sqrt{29}$는 두 변의 길이가 2, 5인 직각삼각형의 빗변의 길이이다.
점 p의 위치를 0, 두 점 p, q를 각각 두 직각삼각형의 한 점으로 하고 $p+\sqrt{29}$와 $q-\sqrt{29}$ 사이의 정수의 개수가 4가 되도록 수직선 위에 두 개의 직각삼각형을 나타내면 다음과 같다.

(ⅰ) $p+\sqrt{29}<q-\sqrt{29}$일 때
$5<\sqrt{29}<6$이므로
$5<p+\sqrt{29}<6$
$p+\sqrt{29}$와 $q-\sqrt{29}$ 사이의 정수의 개수가 4가 되려면 $9<q-\sqrt{29}<10$이어야 한다.
이때 q는 정수이므로 점 q의 좌표는 15이다. $\quad \therefore q-p=15$



(ⅱ) $p+\sqrt{29}>q-\sqrt{29}$일 때
$5<p+\sqrt{29}<6$이므로 $q-\sqrt{29}$와 $p+\sqrt{29}$ 사이의 정수의 개수가 4가 되려면 $1<q-\sqrt{29}<2$이어야 한다.
이때 q는 정수이므로 점 q의 좌표는 7이다.
$\therefore q-p=7$



(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $q-p$의 값은 7, 15이다.

개념을 적용하는

Lv. 1 핵심 문제

개념 1 제곱근의 곱셈과 나눗셈

01

$\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{a}\times\sqrt{10}=\sqrt{900}$일 때, 자연수 a의 값은?

① 5 ✓② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

$\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{a}\times\sqrt{10}=\sqrt{3\times5\times a\times10}$
$=\sqrt{150a}=\sqrt{900}$
따라서 $150a=900$이므로 $a=6$

02

$4\sqrt{7}\times\sqrt{\frac{75}{7}}$를 계산하여 근호 안의 수가 가장 작은 자연수가 되도록 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타낼 때, 두 유리수 a, b에 대하여 $\sqrt{a-6b}$의 값을 구하시오. $\sqrt{2}$

$4\sqrt{7}\times\sqrt{\frac{75}{7}}=4\sqrt{75}=20\sqrt{3}$이므로 $a=20$, $b=3$
$\therefore \sqrt{a-6b}=\sqrt{20-6\times3}=\sqrt{2}$

03 서술형

$\sqrt{\frac{242}{25}}$는 $\sqrt{2}$의 a배이고, $\sqrt{0.008}$은 $\sqrt{5}$의 b배일 때, 두 유리수 a, b에 대하여 $a\div b$의 값을 구하시오. 55

$\sqrt{\frac{242}{25}}=\sqrt{\frac{2\times11^2}{5^2}}=\frac{11}{5}\sqrt{2}$이므로 $a=\frac{11}{5}$ ··· 40 %

$\sqrt{0.008}=\sqrt{\frac{8}{1000}}=\sqrt{\frac{80}{10000}}=\frac{\sqrt{80}}{100}=\frac{4\sqrt{5}}{100}=\frac{1}{25}\sqrt{5}$

이므로 $b=\frac{1}{25}$ ··· 40 %

$\therefore a\div b=\frac{11}{5}\div\frac{1}{25}=\frac{11}{5}\times25=55$ ··· 20 %

04

$a>0$, $b>0$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\sqrt{(-a)^2b}=-a\sqrt{b}$ ② $\sqrt{a^2b^2}=-ab$
✓③ $\sqrt{a(-b)^2}=b\sqrt{a}$ ④ $\sqrt{\frac{b^2}{(-a)^2}}=-\frac{b}{a}$
✓⑤ $-\sqrt{\frac{ab}{a^2}}=-\frac{\sqrt{ab}}{a}$

$a>0$, $b>0$이므로 $ab>0$, $\frac{b}{a}>0$
① $\sqrt{(-a)^2b}=\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$
② $\sqrt{a^2b^2}=ab$
③ $\sqrt{a(-b)^2}=\sqrt{ab^2}=b\sqrt{a}$
④ $\sqrt{\frac{b^2}{(-a)^2}}=\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{b}{a}$
⑤ $-\sqrt{\frac{ab}{a^2}}=-\frac{\sqrt{ab}}{a}$

05 출제 주의

$\sqrt{3}=a$, $\sqrt{6}=b$라고 할 때, $\sqrt{0.48}+\sqrt{0.015}$를 a, b를 사용한 식으로 나타내면?

① $\frac{1}{5}a+\frac{3}{10}b$ ② $\frac{1}{5}a+\frac{1}{20}b$
③ $\frac{2}{5}a+\frac{3}{10}b$ ✓④ $\frac{2}{5}a+\frac{1}{20}b$
⑤ $\frac{3}{5}a+\frac{3}{20}b$

$\sqrt{0.48}+\sqrt{0.015}=\sqrt{\frac{48}{100}}+\sqrt{\frac{15}{1000}}$
$=\sqrt{\frac{12}{25}}+\sqrt{\frac{3}{200}}$
$=\sqrt{\frac{2^2\times3}{5^2}}+\sqrt{\frac{6}{20^2}}$
$=\frac{2}{5}\sqrt{3}+\frac{1}{20}\sqrt{6}$
$=\frac{2}{5}a+\frac{1}{20}b$

06

$a>0$, $b>0$이고 $\sqrt{ab}=16$일 때, $\frac{7}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{1}{b}\sqrt{\frac{9b}{a}}$의 값을 구하시오. $\frac{1}{4}$

$\frac{7}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{1}{b}\sqrt{\frac{9b}{a}}=7\sqrt{\frac{1}{a^2}\times\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{1}{b^2}\times\frac{9b}{a}}$
$=7\sqrt{\frac{1}{ab}}-\sqrt{\frac{9}{ab}}$
$=\frac{7}{\sqrt{ab}}-\frac{3}{\sqrt{ab}}$
$=\frac{4}{\sqrt{ab}}$
$=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

개념 2 분모의 유리화

07 출제 주의

$\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=a\sqrt{10}$, $\frac{10}{\sqrt{180}}=b\sqrt{5}$일 때, 두 유리수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. 1

$\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=3\sqrt{10}$이므로 $a=3$

$\frac{10}{\sqrt{180}}=\frac{10}{6\sqrt{5}}=\frac{5}{3\sqrt{5}}=\frac{1}{3}\sqrt{5}$이므로 $b=\frac{1}{3}$

$\therefore ab=3\times\frac{1}{3}=1$

08

$\frac{\sqrt{392}}{7\sqrt{n}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$을 만족시키는 자연수 n의 값은?

① 2　✓② 3　③ 6
④ 7　⑤ 10

$\frac{\sqrt{392}}{7\sqrt{n}}=\frac{14\sqrt{2}}{7\sqrt{n}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$

이때 $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$이므로

$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$　$\therefore \sqrt{n}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

$\therefore n=3$

09 서술형

A, B가 다음과 같을 때, $A\div B$의 값을 구하시오. $-\frac{1}{5}$

$$A=\frac{4}{\sqrt{18}}\times\sqrt{20}\div(-\sqrt{80})$$
$$B=(-5\sqrt{6})\div\frac{6}{\sqrt{7}}\times\left(-\frac{2}{\sqrt{21}}\right)$$

$A=\frac{4}{\sqrt{18}}\times\sqrt{20}\div(-\sqrt{80})=\frac{4}{3\sqrt{2}}\times2\sqrt{5}\div(-4\sqrt{5})$

$=\frac{4}{3\sqrt{2}}\times2\sqrt{5}\times\left(-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)=-\frac{2}{3\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ··· 40 %

$B=(-5\sqrt{6})\div\frac{6}{\sqrt{7}}\times\left(-\frac{2}{\sqrt{21}}\right)$

$=(-5\sqrt{6})\times\frac{\sqrt{7}}{6}\times\left(-\frac{2}{\sqrt{21}}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ··· 40 %

$\therefore A\div B=-\frac{\sqrt{2}}{3}\div\frac{5\sqrt{2}}{3}=-\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{3}{5\sqrt{2}}=-\frac{1}{5}$ ··· 20 %

10

가로의 길이와 세로의 길이의 비가 4 : 3인 직사각형의 세로의 길이를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이가 48일 때, 직사각형의 가로의 길이를 구하시오. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

직사각형의 가로의 길이를 $4x$, 세로의 길이를 $3x$ $(x>0)$라고 하면 직사각형의 세로의 길이를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이가 48이므로

$(3x)^2=48$, $9x^2=48$

$x^2=\frac{16}{3}$　$\therefore x=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}=\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$

이때 $x>0$이므로 $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

따라서 직사각형의 가로의 길이는

$4x=4\times\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{16\sqrt{3}}{3}$

개념 3 제곱근표

11

다음 제곱근표에서 $\sqrt{72.5}=a$, $\sqrt{b}=8.562$일 때, $1000a-10b$의 값을 구하시오. 7782

수	3	4	5	6
71	8.444	8.450	8.456	8.462
72	8.503	8.509	8.515	8.521
73	8.562	8.567	8.573	8.579

$\sqrt{72.5}=8.515$이므로 $a=8.515$

$\sqrt{73.3}=8.562$이므로 $b=73.3$

$\therefore 1000a-10b=1000\times8.515-10\times73.3$

$=8515-733=7782$

12 출제 주의

다음 중 $\sqrt{5}=2.236$임을 이용하여 그 값을 구할 수 없는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\sqrt{500}$　② $\sqrt{2000}$　✓③ $\sqrt{45000}$
✓④ $\sqrt{0.005}$　⑤ $\sqrt{1.25}$

① $\sqrt{500}=\sqrt{5\times100}=\sqrt{5\times10^2}=10\sqrt{5}$

② $\sqrt{2000}=\sqrt{5\times400}=\sqrt{5\times20^2}=20\sqrt{5}$

③ $\sqrt{45000}=\sqrt{50\times900}=\sqrt{50\times30^2}=30\sqrt{50}$

④ $\sqrt{0.005}=\sqrt{\frac{5}{1000}}=\sqrt{\frac{50}{10000}}=\sqrt{\frac{50}{100^2}}=\frac{\sqrt{50}}{100}$

⑤ $\sqrt{1.25}=\sqrt{\frac{125}{100}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\sqrt{\frac{5}{2^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

13

$\sqrt{2}=1.414$, $\sqrt{6}=2.449$일 때, $\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\div\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$의 값은?

① 2.449 ② 2.828 ✓③ 4.242
④ 4.898 ⑤ 5.656

$\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\div\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$
$=\frac{6}{\sqrt{2}}$
$=3\sqrt{2}$
$=3\times1.414=4.242$

개념 4 제곱근의 덧셈과 뺄셈

14

다음 중 옳은 것은?

① $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}=7\sqrt{5}$
② $\sqrt{7}-\sqrt{4}=\sqrt{3}$
✓③ $4\sqrt{2}+6\sqrt{8}=16\sqrt{2}$
④ $\frac{5\sqrt{11}}{3}-\frac{2\sqrt{11}}{3}=1$
⑤ $\frac{5}{8}+\frac{13\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{17\sqrt{3}}{8}$

② $\sqrt{7}-\sqrt{4}=\sqrt{7}-2$
③ $4\sqrt{2}+6\sqrt{8}=4\sqrt{2}+12\sqrt{2}=16\sqrt{2}$
④ $\frac{5\sqrt{11}}{3}-\frac{2\sqrt{11}}{3}=\frac{3\sqrt{11}}{3}=\sqrt{11}$
⑤ $\frac{5}{8}+\frac{13\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{5}{8}+\frac{13\sqrt{3}}{8}-\frac{2\sqrt{3}}{8}$
$=\frac{5}{8}+\left(\frac{13}{8}-\frac{2}{8}\right)\sqrt{3}$
$=\frac{5}{8}+\frac{11}{8}\sqrt{3}$

15

$\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{50}}-\frac{5}{\sqrt{48}}=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$일 때, 두 유리수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오. $\frac{1}{60}$

$\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{50}}-\frac{5}{\sqrt{48}}=\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{4}{5\sqrt{2}}-\frac{5}{4\sqrt{3}}$
$=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\frac{2}{5}\sqrt{2}-\frac{5}{12}\sqrt{3}$
$=\frac{3}{5}\sqrt{2}+\frac{7}{12}\sqrt{3}$

따라서 $a=\frac{3}{5}$, $b=\frac{7}{12}$이므로
$a-b=\frac{3}{5}-\frac{7}{12}=\frac{1}{60}$

16

$x=\frac{7\sqrt{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$, $y=\frac{7\sqrt{2}-\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$일 때, $\frac{x+y}{x-y}$의 값을 구하시오. $\sqrt{14}$

$x=\frac{7\sqrt{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{7\sqrt{14}+7}{7}=\sqrt{14}+1$
$y=\frac{7\sqrt{2}-\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{7\sqrt{14}-7}{7}=\sqrt{14}-1$
이므로
$x+y=(\sqrt{14}+1)+(\sqrt{14}-1)=2\sqrt{14}$
$x-y=(\sqrt{14}+1)-(\sqrt{14}-1)=2$
$\therefore \frac{x+y}{x-y}=\frac{2\sqrt{14}}{2}=\sqrt{14}$

개념 5 근호를 포함한 복잡한 식의 계산

17

$\sqrt{2}=a$, $\sqrt{3}=b$라고 할 때, 다음을 a, b를 사용한 식으로 나타내면?

$$2\sqrt{2}(4\sqrt{3}-\sqrt{6})-(3\sqrt{18}-9)\div\sqrt{3}$$

① $a-5b$ ② $5a-b$ ③ $5a-7b$
④ $-a-5ab$ ✓⑤ $-b+5ab$

$2\sqrt{2}(4\sqrt{3}-\sqrt{6})-(3\sqrt{18}-9)\div\sqrt{3}=8\sqrt{6}-4\sqrt{3}-3\sqrt{6}+3\sqrt{3}$
$=-\sqrt{3}+5\sqrt{6}$
$=-\sqrt{3}+5\sqrt{2}\times\sqrt{3}$
$=-b+5ab$

18

$\frac{\sqrt{3}}{4}(8+12\sqrt{2})-\frac{\square}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{6}$일 때, □ 안에 알맞은 수를 구하시오. $3+12\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}(8+12\sqrt{2})-\frac{\square}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{6}$에서
$2\sqrt{3}+3\sqrt{6}-\frac{\square}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{6}$
$\frac{\square}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}+3\sqrt{6}-(\sqrt{3}-\sqrt{6})=\sqrt{3}+4\sqrt{6}$
$\therefore \square=(\sqrt{3}+4\sqrt{6})\sqrt{3}=3+12\sqrt{2}$

19

다음 그림의 수직선에서 두 점 A, B에 대응하는 수가 각각 $3-\sqrt{5}$, $7+\sqrt{5}$이다. $\overline{AB}$의 중점을 M, $\overline{BM}$의 중점을 N이라고 할 때, 점 N에 대응하는 수를 구하시오. $\frac{12+\sqrt{5}}{2}$

$\overline{AB}=(7+\sqrt{5})-(3-\sqrt{5})=4+2\sqrt{5}$

$\therefore \overline{AM}=\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{4+2\sqrt{5}}{2}=2+\sqrt{5}$

$\overline{MN}=\overline{BN}=\frac{1}{2}\overline{BM}=\frac{2+\sqrt{5}}{2}$

따라서 점 N에 대응하는 수는 점 B에서 $\overline{BN}$을 뺀 수이므로

$7+\sqrt{5}-\frac{2+\sqrt{5}}{2}=\frac{12+\sqrt{5}}{2}$

20

$\sqrt{72}+\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}-a\left(\frac{\sqrt{48}-\sqrt{54}}{\sqrt{3}}\right)$를 계산한 값이 유리수가 되도록 하는 유리수 a의 값을 구하시오. -2

$\sqrt{72}+\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}-a\left(\frac{\sqrt{48}-\sqrt{54}}{\sqrt{3}}\right)=6\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-a\left(\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\right)$

$=6\sqrt{2}+2-a(4-3\sqrt{2})$

$=2-4a+(6+3a)\sqrt{2}$

이 값이 유리수가 되려면 무리수 부분이 0이어야 하므로

$6+3a=0$, $3a=-6$

$\therefore a=-2$

21 출제 주의

$\sqrt{48}-3$의 소수 부분을 a, $\sqrt{75}+4$의 소수 부분을 b라고 할 때, $b-a$의 값은?

① $-14-10\sqrt{3}$ ② $-14-\sqrt{3}$
③ $-2-\sqrt{3}$ ✓④ $-2+\sqrt{3}$
⑤ $14+\sqrt{3}$

$6<\sqrt{48}<7$이므로 $3<\sqrt{48}-3<4$

이때 $\sqrt{48}-3$의 정수 부분이 3이므로 소수 부분은

$(\sqrt{48}-3)-3=4\sqrt{3}-6$ $\therefore a=4\sqrt{3}-6$

$8<\sqrt{75}<9$이므로 $12<\sqrt{75}+4<13$

이때 $\sqrt{75}+4$의 정수 부분이 12이므로 소수 부분은

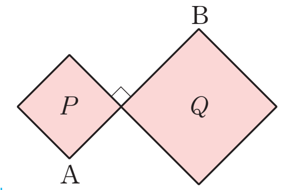
$(\sqrt{75}+4)-12=5\sqrt{3}-8$ $\therefore b=5\sqrt{3}-8$

$\therefore b-a=(5\sqrt{3}-8)-(4\sqrt{3}-6)$

$=-2+\sqrt{3}$

22

오른쪽 그림과 같이 넓이가 각각 24 cm^2, 96 cm^2인 두 정사각형 P, Q에서 선분 AB의 길이를 구하시오. $6\sqrt{6}$ cm



정사각형 P의 넓이가 24 cm^2이므로 한 변의 길이는

$\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ cm

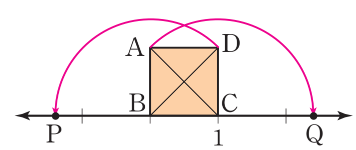
정사각형 Q의 넓이가 96 cm^2이므로 한 변의 길이는

$\sqrt{96}=4\sqrt{6}$ cm

$\therefore \overline{AB}=2\sqrt{6}+4\sqrt{6}=6\sqrt{6}$(cm)

23

다음 그림은 넓이가 4인 정사각형 ABCD를 점 C에 대응하는 수가 1이 되도록 수직선 위에 그린 것이다. $\overline{BD}=\overline{BP}$, $\overline{CA}=\overline{CQ}$이고 두 점 P, Q에 대응하는 수를 각각 a, b라고 할 때, $b-a$의 값을 구하시오. $2+4\sqrt{2}$



정사각형 ABCD의 넓이가 4이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{4}=2$

따라서 점 B에 대응하는 수는 $1-2=-1$이고 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{AC}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

즉, 점 Q에 대응하는 수는 $1+2\sqrt{2}$

$\therefore b=1+2\sqrt{2}$

마찬가지로 $\overline{BD}=\overline{AC}=2\sqrt{2}$이므로 점 P에 대응하는 수는 $-1-2\sqrt{2}$

$\therefore a=-1-2\sqrt{2}$

$\therefore b-a=(1+2\sqrt{2})-(-1-2\sqrt{2})$

$=2+4\sqrt{2}$

24 출제 주의

다음 세 수를 수직선 위에 나타낼 때, 가장 왼쪽에 오는 수를 구하시오. $\sqrt{28}-6$

$$2-\sqrt{7},\quad \sqrt{28}-6,\quad 3-\sqrt{7}$$

$(2-\sqrt{7})-(\sqrt{28}-6)=2-\sqrt{7}-2\sqrt{7}+6$

$=8-3\sqrt{7}$

$=\sqrt{64}-\sqrt{63}>0$

$\therefore 2-\sqrt{7}>\sqrt{28}-6$

$(2-\sqrt{7})-(3-\sqrt{7})=2-\sqrt{7}-3+\sqrt{7}$

$=-1<0$

$\therefore 2-\sqrt{7}<3-\sqrt{7}$

따라서 $\sqrt{28}-6<2-\sqrt{7}<3-\sqrt{7}$이므로 세 수를 수직선 위에 나타낼 때, 가장 왼쪽에 오는 수는 $\sqrt{28}-6$이다.

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

01

2 이상의 세 자연수 a, b, c에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}=10\sqrt{5}$이고, b와 c의 최대공약수는 5이다. 이때 모든 $a+b+c$의 값의 합을 구하시오. (단, $a\le b\le c$) 158

b와 c의 최대공약수는 5이므로 $b=5p$, $c=5q$ ($p\le q$이고 p, q는 서로소인 자연수)라고 하자.
이때 $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}=10\sqrt{5}$에서 $\sqrt{abc}=10\sqrt{5}$이므로
$\sqrt{a\times 5p\times 5q}=5\sqrt{apq}=10\sqrt{5}$, $\sqrt{apq}=2\sqrt{5}$
$\therefore apq=20$
이때 a는 2 이상의 자연수이므로 $apq=20=2^2\times 5$를 만족시키는 a, p, q를 순서쌍 (a, p, q)로 나타내면
$(2, 1, 2\times 5)$, $(2, 2, 5)$, $(2^2, 1, 5)$, $(5, 1, 2^2)$
각각의 순서쌍 (a, p, q)에 대하여 순서쌍 $(a, 5p, 5q)$, 즉 (a, b, c)는
$(2, 5, 50)$, $(2, 10, 25)$, $(4, 5, 25)$, $(5, 5, 20)$
이고, 각각의 $a+b+c$의 값은
$2+5+50=57$, $2+10+25=37$, $4+5+25=34$, $5+5+20=30$
따라서 모든 $a+b+c$의 값의 합은
$57+37+34+30=158$

02

두 자연수 m, n에 대하여 두 수 $\sqrt{24m}$, $\sqrt{45n}$의 곱이 가장 작은 자연수가 될 때, 가장 작은 $m+n$의 값은?

① 9 ✓② 11 ③ 13
④ 15 ⑤ 17

$\sqrt{24m}\sqrt{45n}=\sqrt{2^3\times 3^3\times 5\times m\times n}$이 자연수가 되려면 $mn=2\times 3\times 5\times k^2$ (k는 자연수)의 꼴이어야 한다.
$k=1$일 때, mn의 값은 가장 작은 값 $mn=30$을 갖고 이를 만족시키는 자연수 m, n을 순서쌍 (m, n)으로 나타내면
$(1, 30)$, $(2, 15)$, $(3, 10)$, $(5, 6)$, $(6, 5)$, $(10, 3)$, $(15, 2)$, $(30, 1)$
이고, 각각의 $m+n$의 값은 다음과 같다.

m	1	2	3	5	6	10	15	30
n	30	15	10	6	5	3	2	1
$m+n$	31	17	13	11	11	13	17	31

따라서 가장 작은 $m+n$의 값은 11이다.

03

두 자연수 $\sqrt{2^2\times 5\times x}$, $\sqrt{2\times 3^2\times y}$의 최대공약수는 6이고, 최소공배수는 120이다. 이때 두 자연수 x, y에 대하여 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하시오. 2

두 자연수 $\sqrt{2^2\times 5\times x}$, $\sqrt{2\times 3^2\times y}$의 최대공약수는 6이므로 $x=3^2\times a$, $y=2\times b$ (a, b는 서로소인 자연수, b는 5와 서로소인 자연수)의 꼴이어야 한다.
또, 두 자연수 $\sqrt{2^2\times 5\times x}=\sqrt{2^2\times 5\times 3^2\times a}=6\sqrt{5a}$, $\sqrt{2\times 3^2\times y}=\sqrt{2^2\times 3^2\times b}=6\sqrt{b}$의 최소공배수는 $120=6\times 20$이므로
$\sqrt{5a}\times\sqrt{b}=20$, $\sqrt{5ab}=20$
양변을 제곱하면
$5ab=400$ $\therefore ab=80$
이때 $80=2^4\times 5$이므로 a, b가 될 수 있는 값을 순서쌍 (a, b)로 나타내면
$(5, 2^4)$, $(2^4\times 5, 1)$
이고, 이때의 x, y의 값은
$(3^2\times 5, 2^5)$, $(2^4\times 3^2\times 5, 2)$
따라서 순서쌍 (x, y)의 개수는 2이다.

04 출제 주의

오른쪽 그림에서 가로, 세로, 대각선에 있는 세 수의 합이 모두 서로 같을 때, 서로 $y-x$의 값을 구하시오. $3\sqrt{3}-2$

$\sqrt{27}+1$		$\sqrt{75}+4$
x	$2\sqrt{3}$	y
$\sqrt{108}$		

$\sqrt{75}+4=5\sqrt{3}+4$, $\sqrt{108}=6\sqrt{3}$이므로 오른쪽 위에서 왼쪽 아래로의 대각선에 있는 세 수의 합은
$(\sqrt{75}+4)+2\sqrt{3}+\sqrt{108}=(5\sqrt{3}+4)+2\sqrt{3}+6\sqrt{3}=13\sqrt{3}+4$
$\sqrt{27}+1=3\sqrt{3}+1$이므로 왼쪽의 세로줄에 있는 세 수의 합은
$(\sqrt{27}+1)+x+\sqrt{108}=(3\sqrt{3}+1)+x+6\sqrt{3}=9\sqrt{3}+1+x$
즉, $9\sqrt{3}+1+x=13\sqrt{3}+4$이므로 $x=4\sqrt{3}+3$
또, 중앙의 가로줄에 있는 세 수의 합은 $x+2\sqrt{3}+y=(4\sqrt{3}+3)+2\sqrt{3}+y=6\sqrt{3}+3+y$
즉, $6\sqrt{3}+3+y=13\sqrt{3}+4$이므로 $y=7\sqrt{3}+1$
$\therefore y-x=(7\sqrt{3}+1)-(4\sqrt{3}+3)=3\sqrt{3}-2$

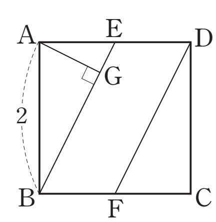
05 서술형

$\dfrac{3x-5y}{7x-2y}=\dfrac{1}{2}$일 때, $\dfrac{\sqrt{x-3y}}{\sqrt{2x+5y}}+\dfrac{\sqrt{5x-2y}}{\sqrt{x+y}}$의 값을 구하시오. $1+\sqrt{6}$

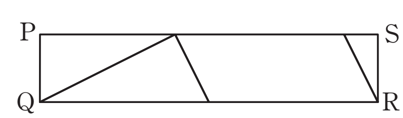
$\dfrac{3x-5y}{7x-2y}=\dfrac{1}{2}$에서
$2(3x-5y)=7x-2y$, $6x-10y=7x-2y$
$\therefore x=-8y$ ······ 50 %
$\therefore \dfrac{\sqrt{x-3y}}{\sqrt{2x+5y}}+\dfrac{\sqrt{5x-2y}}{\sqrt{x+y}}=\sqrt{\dfrac{x-3y}{2x+5y}}+\sqrt{\dfrac{5x-2y}{x+y}}$
$=\sqrt{\dfrac{-8y-3y}{-16y+5y}}+\sqrt{\dfrac{-40y-2y}{-8y+y}}$
$=\sqrt{\dfrac{-11y}{-11y}}+\sqrt{\dfrac{-42y}{-7y}}$
$=1+\sqrt{6}$ ······ 50 %

06

[그림 1]과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD에서 두 점 E, F는 각각 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$의 중점이고 $\overline{AG}$와 $\overline{BE}$는 서로 수직이다. 이 정사각형을 4조각으로 잘라 [그림 2]와 같이 직사각형 PQRS가 되도록 놓았을 때, $\dfrac{\overline{QR}}{\overline{PQ}}$의 값을 구하시오. 5



[그림 1]



[그림 2]

$\overline{AB}=2$, $\overline{AE}=\dfrac{1}{2}\overline{AD}=1$이므로 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{BE}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$
$\overline{DF}=\overline{BE}=\sqrt{5}$이므로 $\overline{QR}=\overline{BE}+\overline{DF}=\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$
이때 두 사각형의 넓이는 모두 4로 같으므로 $\overline{PQ}\times\overline{QR}=4$에서
$\overline{PQ}\times 2\sqrt{5}=4$ $\therefore \overline{PQ}=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
$\therefore \dfrac{\overline{QR}}{\overline{PQ}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=5$

07

두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt{63m}=n$을 만족시키는 가장 작은 m의 값을 x, 그때의 n의 값을 y라고 할 때, $x+y$의 값을 구하시오. **28**

$n=\sqrt{63m}=3\sqrt{7m}$이고 n은 자연수이므로 $m=7\times k^2$ (k는 자연수)의 꼴이어야 하고 이때의 n의 값은 $n=3\sqrt{7\times 7k^2}=21k$이다.
$k=1$일 때, $\sqrt{63m}$의 값은 최소가 되고 $m=7$, $n=21$이다.
따라서 $x=7$, $y=21$이므로
$x+y=7+21=28$

08

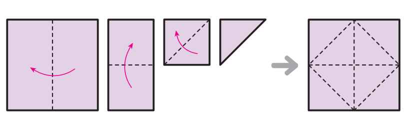
$125\sqrt{1\times2\times3\times4\times\cdots\times10}$의 정수 부분은 몇 자리 수인가?

① 네 자리　② 다섯 자리　✓③ 여섯 자리
④ 일곱 자리　⑤ 여덟 자리

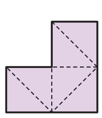
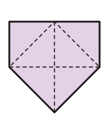
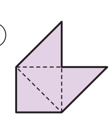
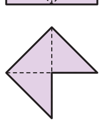
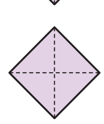
$1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10=2^8\times3^4\times5^2\times7$, $125=5^3=\sqrt{5^6}$
$\therefore\ 125\sqrt{1\times2\times3\times4\times\cdots\times10}=\sqrt{5^6\times2^8\times3^4\times5^2\times7}$
$=\sqrt{2^8\times3^4\times5^8\times7}$
$=\sqrt{567\times2^8\times5^8}$
$=\sqrt{567\times10^8}$
$=\sqrt{567}\times10^4$
이때 $\sqrt{100}<\sqrt{567}<\sqrt{10000}$, 즉 $10<\sqrt{567}<100$이므로 $\sqrt{567}$은 두 자리 수이다.
따라서 $125\sqrt{1\times2\times3\times4\times\cdots\times10}$은 여섯 자리 수이다.

09

다음 그림은 넓이가 8인 정사각형 모양의 색종이를 3번 접은 후 다시 펼쳐 놓은 것이다.



이 색종이의 접힌 선을 따라 일부를 잘라내어 모양이 다른 여러 가지 도형을 만들어 보았다. 이때 만들어진 다음 도형 중 둘레의 길이가 유리수로 나타나는 것은?

①

②

③

④

✓⑤


색종이는 넓이가 8인 정사각형이므로 정사각형 모양의 색종이의 한 변의 길이는 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
색종이를 4등분한 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}$
색종이를 4등분한 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$
보기의 도형의 둘레의 길이를 구하면 다음과 같다.
① $\sqrt{2}\times4+2\sqrt{2}\times2=8\sqrt{2}$ ⇨ 무리수　② $2\sqrt{2}+\sqrt{2}\times2+2\times2=4\sqrt{2}+4$ ⇨ 무리수
③ $\sqrt{2}\times4+2\times2=4\sqrt{2}+4$ ⇨ 무리수　④ $\sqrt{2}\times2+2\times3=2\sqrt{2}+6$ ⇨ 무리수
⑤ $2\times4=8$ ⇨ 유리수

10 출제 주의

자연수 x에 대하여 $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$일 때, $f(2)\times f(3)\times f(4)\times f(5)\times f(6)\times f(7)\times f(8)$의 값을 구하시오. **$108\sqrt{70}$**

$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{(x+1)\sqrt{x}}{x}$이므로
$f(2)\times f(3)\times f(4)\times f(5)\times f(6)\times f(7)\times f(8)$
$=\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{5\sqrt{4}}{4}\times\frac{6\sqrt{5}}{5}\times\frac{7\sqrt{6}}{6}\times\frac{8\sqrt{7}}{7}\times\frac{9\sqrt{8}}{8}$
$=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times2\times\sqrt{5}\times\sqrt{6}\times\sqrt{7}\times18\sqrt{2}}{2}$
$=18\sqrt{2^3\times3^2\times5\times7}$
$=108\sqrt{70}$

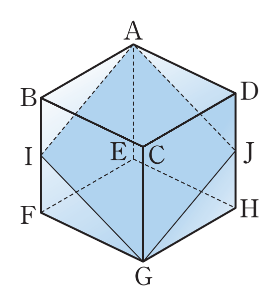
11

연립방정식 $\begin{cases}\sqrt{5}x-\sqrt{3}y=-2 & \cdots\cdots ㉠\\ \sqrt{3}x+\sqrt{5}y=2 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$의 해가 $x=p$, $y=q$일 때, $\frac{1}{p+q}$의 값을 구하시오. **$\frac{2\sqrt{3}}{3}$**

㉠의 식에 $\sqrt{3}$을 곱하면 $\sqrt{15}x-3y=-2\sqrt{3}$　$\cdots\cdots$ ㉢
㉡의 식에 $\sqrt{5}$를 곱하면 $\sqrt{15}x+5y=2\sqrt{5}$　$\cdots\cdots$ ㉣
㉢－㉣을 하면 $-8y=-2\sqrt{3}-2\sqrt{5}$　$\therefore\ y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$
$y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$를 ㉠에 대입하면 $\sqrt{5}x-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}=-2$, $\sqrt{5}x=-2+\frac{3+\sqrt{15}}{4}$
$\sqrt{5}x=\frac{-5+\sqrt{15}}{4}$　$\therefore\ x=\frac{-5+\sqrt{15}}{4\sqrt{5}}=\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4}$
따라서 $p=\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4}$, $q=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$이므로
$p+q=\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\therefore\ \frac{1}{p+q}=1\div\frac{\sqrt{3}}{2}=1\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

12

오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정육면체에서 모서리 BF의 중점을 I, 모서리 DH의 중점을 J라고 할 때, 사각형 AIGJ의 넓이는?



① $24\sqrt{6}$　✓② $18\sqrt{6}$
③ $12\sqrt{6}$　④ $6\sqrt{6}$
⑤ $\sqrt{6}$

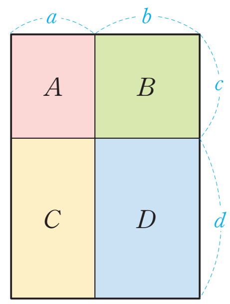
사각형 AIGJ는 네 변의 길이가 모두 같으므로 마름모이다.
정육면체의 한 모서리의 길이가 6이므로 $\overline{IJ}=\overline{FH}=\sqrt{\overline{FG}^2+\overline{GH}^2}=6\sqrt{2}$
직각삼각형 AEG에서 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{AG}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{EG}^2}=6\sqrt{3}$
따라서 사각형 AIGJ의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{IJ}\times\overline{AG}=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times6\sqrt{3}=18\sqrt{6}$

Lv. 2 사고를 확장하는

실전 문제

13

오른쪽 그림과 같이 한 직사각형을 네 개의 직사각형 A, B, C, D로 나누었다. 세 직사각형 A, C, D의 넓이가 각각 $\sqrt{0.\dot{2}}$, $\sqrt{0.\dot{5}}$, $\sqrt{1.\dot{1}\dot{1}}$일 때, 직사각형 B의 넓이는?



① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{4}{3}$

③ 1 ✓④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{1}{3}$

직사각형 A의 넓이는 $ac=\sqrt{0.\dot{2}}=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

직사각형 C의 넓이는 $ad=\sqrt{0.\dot{5}}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

직사각형 D의 넓이는 $bd=\sqrt{1.\dot{1}\dot{1}}=\sqrt{\frac{110}{99}}=\sqrt{\frac{10}{9}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$

따라서 직사각형 B의 넓이는 $bc=\frac{ac\times bd}{ad}=(ac\times bd)\div ad$

$=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{10}}{3}\right)\div\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{2\sqrt{5}}{9}\times\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{2}{3}$

14

다음 제곱근표에서 $a=\sqrt{\sqrt{3.35}}$이고, $\sqrt{\sqrt{b}}=1.364$일 때, $\sqrt{10a-3b}$의 값을 구하시오. 1.775

수	1	2	3	4	5	6
1.7	1.308	1.311	1.315	1.319	1.323	1.327
1.8	1.345	1.349	1.353	1.356	1.360	1.364
1.9	1.382	1.386	1.389	1.393	1.396	1.400
2.0	1.418	1.421	1.425	1.428	1.432	1.435
⋮			⋮			
3.1	1.764	1.766	1.769	1.772	1.775	1.778
3.2	1.792	1.794	1.797	1.800	1.803	1.806
3.3	1.817	1.822	1.825	1.828	1.830	1.833
3.4	1.844	1.849	1.852	1.855	1.857	1.860
3.5	1.871	1.876	1.879	1.881	1.884	1.887

$\sqrt{3.35}=1.830$이고 $\sqrt{1.83}=1.353$이므로 $a=\sqrt{\sqrt{3.35}}=\sqrt{1.83}=1.353$

$\sqrt{1.86}=1.364$이므로 $\sqrt{\sqrt{b}}=1.364$에서 $\sqrt{b}=1.86$

이때 $\sqrt{3.46}=1.860$이므로 $b=3.46$

$\therefore \sqrt{10a-3b}=\sqrt{10\times1.353-3\times3.46}=\sqrt{3.15}=1.775$

15

$2\sqrt{0.7}-5\sqrt{2.8}+\sqrt{425}$의 값을 구하시오. 13.78

(단, $\sqrt{17}=4.1$, $\sqrt{70}=8.4$로 계산한다.)

$2\sqrt{0.7}=2\times\sqrt{\frac{70}{100}}=2\times\frac{\sqrt{70}}{10}=2\times0.84=1.68$

$5\sqrt{2.8}=5\sqrt{\frac{280}{100}}=5\times\frac{2\sqrt{70}}{10}=8.4$

$\sqrt{425}=5\sqrt{17}=5\times4.1=20.5$

$\therefore 2\sqrt{0.7}-5\sqrt{2.8}+\sqrt{425}=1.68-8.4+20.5=13.78$

16 출제 주의

$\sqrt{3.51}=a$, $\sqrt{35.1}=b$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{0.0351}=0.1a$ ② $\sqrt{0.351}=0.1b$

③ $\sqrt{39}=\frac{10}{3}a$ ✓④ $\sqrt{1404}=20b$

⑤ $\sqrt{126360}=60b$

① $\sqrt{0.0351}=\sqrt{\frac{3.51}{100}}=\frac{\sqrt{3.51}}{10}=\frac{a}{10}=0.1a$

② $\sqrt{0.351}=\sqrt{\frac{35.1}{100}}=\frac{\sqrt{35.1}}{10}=\frac{b}{10}=0.1b$

③ $\sqrt{39}=\sqrt{\frac{351}{9}}=\sqrt{\frac{3.51\times100}{9}}=\frac{10}{3}a$

④ $\sqrt{1404}=\sqrt{3.51\times400}=20\sqrt{3.51}=20a$

⑤ $\sqrt{126360}=\sqrt{35.1\times3600}=60\sqrt{35.1}=60b$

17

다음 표는 제곱근표의 일부이다. 다음 중 이 표를 이용하여 그 값을 구할 수 없는 것은?

수	2	3	4	5	6
3.2	1.794	1.797	1.800	1.803	1.806
3.3	1.822	1.825	1.828	1.830	1.833
3.4	1.849	1.852	1.855	1.857	1.860
3.5	1.876	1.879	1.881	1.884	1.887
3.6	1.903	1.905	1.908	1.910	1.913

① $\sqrt{3.54}$ ② $\sqrt{342}$ ✓③ $\sqrt{36.6}$

④ $\sqrt{13.68}$ ⑤ $\sqrt{0.84}$

① $\sqrt{3.54}=1.881$

② $\sqrt{342}=\sqrt{3.42\times100}=10\sqrt{3.42}=10\times1.849=18.49$

④ $\sqrt{13.68}=\sqrt{4\times3.42}=2\sqrt{3.42}=2\times1.849=3.698$

⑤ $\sqrt{0.84}=\sqrt{\frac{3.36}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{3.36}=\frac{1}{2}\times1.833=0.9165$

18

$a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{5}$, $c=\sqrt{7}$일 때, $\sqrt{0.00343}$의 값을 a, b, c를 사용하여 나타내면?

✓① $\frac{c^3}{a^5b^5}$ ② $\frac{c^3}{a^4b^4}$ ③ $\frac{c^3}{a^3b^5}$

④ $\frac{c^4}{a^5b^4}$ ⑤ $\frac{c^4}{a^5b^3}$

$\sqrt{0.00343}=\sqrt{\frac{343}{100000}}=\sqrt{\frac{7^3}{10^5}}=\sqrt{\frac{7^3}{2^5\times5^5}}=\frac{(\sqrt{7})^3}{(\sqrt{2})^5\times(\sqrt{5})^5}=\frac{c^3}{a^5b^5}$

19 서술형

두 실수 x, y에 대하여 $[x,\ y]=\sqrt{xy}+\sqrt{x^2}$이라고 하자. $[2,\ a]=4$일 때, $[a,\ a]-[3,\ b]=-2$를 만족시키는 두 양수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 5

$[2,\ a]=\sqrt{2a}+\sqrt{2^2}=\sqrt{2a}+2$
즉, $[2,\ a]=4$에서 $\sqrt{2a}+2=4$이므로 $\sqrt{2a}=2$
양변을 제곱하면
$2a=4 \quad \therefore a=2$ ······ 40 %
이때 $[a,\ a]=\sqrt{a^2}+\sqrt{a^2}=a+a=2a=4$, $[3,\ b]=\sqrt{3b}+\sqrt{3^2}=\sqrt{3b}+3$이므로
$[a,\ a]-[3,\ b]=4-(\sqrt{3b}+3)=1-\sqrt{3b}$
즉, $[a,\ a]-[3,\ b]=-2$에서 $1-\sqrt{3b}=-2$이므로 $\sqrt{3b}=3$
양변을 제곱하면
$3b=9 \quad \therefore b=3$ ······ 40 %
$\therefore a+b=2+3=5$ ······ 20 %

20

두 자연수 m, n에 대하여 등식 $\sqrt{n}=\sqrt{5m}+\sqrt{2}$가 성립할 때, 가장 작은 자연수 m의 값을 a라고 하자. 이때 $n-a$의 값을 구하시오. 62

$\sqrt{n}=\sqrt{5m}+\sqrt{2}$가 성립하려면 $\sqrt{5m}$과 $\sqrt{2}$의 합을 계산할 수 있어야 하므로
$\sqrt{5m}=k\sqrt{2}$ (k는 자연수)의 꼴이어야 한다.
즉, $\sqrt{5m}=k\sqrt{2}=\sqrt{k^2\times 2}$이므로
$5m=2k^2 \quad \therefore m=\frac{2k^2}{5}$
이때 m은 자연수이므로 k^2은 5의 배수이어야 한다.
따라서 가장 작은 자연수 m의 값은 $k=5$일 때이므로
$m=\frac{2\times 5^2}{5}=10 \quad \therefore a=10$
$m=10$을 $\sqrt{n}=\sqrt{5m}+\sqrt{2}$에 대입하면
$\sqrt{n}=\sqrt{50}+\sqrt{2}=5\sqrt{2}+\sqrt{2}=6\sqrt{2}=\sqrt{72} \quad \therefore n=72$
$\therefore n-a=72-10=62$

21 출제 주의

$(\sqrt{2}-1)x+(\sqrt{2}+1)y=\sqrt{(2\sqrt{2}-4)^2}$을 만족시키는 두 유리수 x, y에 대하여 x^2-y^2의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7
✓④ 8 ⑤ 12

$2<2\sqrt{2}<3$이므로 $2\sqrt{2}-4<0$
$(\sqrt{2}-1)x+(\sqrt{2}+1)y=\sqrt{(2\sqrt{2}-4)^2}$에서
$\sqrt{2}x-x+\sqrt{2}y+y=-(2\sqrt{2}-4) \quad \therefore (-x+y)+(x+y)\sqrt{2}=4-2\sqrt{2}$
이때 x, y가 유리수이므로
$-x+y=4$, $x+y=-2$
두 식을 연립하여 풀면 $x=-3$, $y=1$
$\therefore x^2-y^2=(-3)^2-1^2=8$

22

두 유리수 a, b에 대하여 방정식 $x^3+ax^2-ax+b=0$의 한 근이 $\sqrt{3}$일 때, $a+b$의 값은?

① 12 ② 3 ✓③ -6
④ -9 ⑤ -12

$\sqrt{3}$이 방정식 $x^3+ax^2-ax+b=0$의 한 근이므로 $x=\sqrt{3}$을 방정식에 대입하면
$3\sqrt{3}+3a-a\sqrt{3}+b=0 \quad \therefore 3a+b+(3-a)\sqrt{3}=0$
즉, $3a+b=0$, $3-a=0$이므로 $a=3$, $b=-9$
$\therefore a+b=3+(-9)=-6$

23

실수 x에 대하여 x보다 크지 않은 정수를 $[x]$라 하고 $\langle\!\langle x\rangle\!\rangle=x-[x]$라고 하자. $x=\sqrt{5}+1$일 때, $[x]+[\langle\!\langle x\rangle\!\rangle]+p\langle\!\langle x\rangle\!\rangle=q+2\sqrt{5}$를 만족시키는 두 유리수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오. 1

$2<\sqrt{5}<3$에서 $3<\sqrt{5}+1<4$이므로
$[x]=3$, $\langle\!\langle x\rangle\!\rangle=\sqrt{5}+1-3=\sqrt{5}-2$
또, $0<\sqrt{5}-2<1$이므로 $[\langle\!\langle x\rangle\!\rangle]=0$
$\therefore [x]+[\langle\!\langle x\rangle\!\rangle]+p\langle\!\langle x\rangle\!\rangle=3+0+p(\sqrt{5}-2)$
$=3-2p+p\sqrt{5}$
즉, $3-2p+p\sqrt{5}=q+2\sqrt{5}$이고 p, q가 유리수이므로
$3-2p=q$, $p=2 \quad \therefore q=-1$
$\therefore p+q=2+(-1)=1$

24

$x_1=\sqrt{10}-1$이고 $x_{n+1}=x_n-[x_n]$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$이라고 할 때, $x_1-x_2+x_3-x_4+x_5+\cdots-x_{100}$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.) 2

$3<\sqrt{10}<4$이므로 $2<\sqrt{10}-1<3$
따라서 $[x_1]=[\sqrt{10}-1]=2$이므로 $x_2=x_1-[x_1]=(\sqrt{10}-1)-2=\sqrt{10}-3$
$0<\sqrt{10}-3<1$이므로 $[x_2]=[\sqrt{10}-3]=0$
따라서 $x_3=x_2-[x_2]=(\sqrt{10}-3)-0=\sqrt{10}-3$, $[x_3]=0$
$x_4=x_3-[x_3]=(\sqrt{10}-3)-0=\sqrt{10}-3$, $[x_4]=0$
⋮
즉, $x_2=x_3=x_4=\cdots=\sqrt{10}-3$이다.
$\therefore x_1-x_2+x_3-x_4+x_5+\cdots-x_{100}=x_1-x_2$
$=(\sqrt{10}-1)-(\sqrt{10}-3)$
$=2$

25

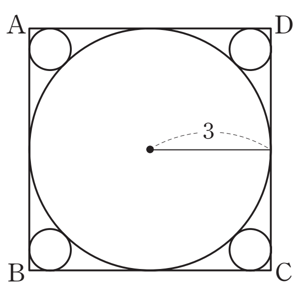
부등식 $2\sqrt{5}x+\sqrt{2}-8<\sqrt{10}(\sqrt{2}-\sqrt{5})x$를 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 0 ✓② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

$2\sqrt{5}x+\sqrt{2}-8<\sqrt{10}(\sqrt{2}-\sqrt{5})x$에서
$2\sqrt{5}x-\sqrt{10}(\sqrt{2}-\sqrt{5})x<8-\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}x<8-\sqrt{2}$
$x<\frac{8-\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}$ $\quad \therefore x<\frac{4\sqrt{2}-1}{5}$
$4<4\sqrt{2}<8$이므로 $3<4\sqrt{2}-1<7$ $\quad \therefore \frac{3}{5}<\frac{4\sqrt{2}-1}{5}<\frac{7}{5}$
따라서 x의 값 중 정수는 1뿐이므로 정수의 개수는 1이다.

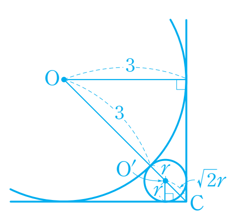
26

다음 그림과 같이 정사각형 ABCD에 내접하는 큰 원과 그 원에 외접하면서 정사각형의 두 변에 접하는 작은 원 4개가 있다. 큰 원의 반지름의 길이가 3일 때, 작은 원의 반지름의 길이 r에 대하여 $\frac{2}{3-r}$의 값은?



① $\frac{\sqrt{2}+1}{48}$ ② $\frac{\sqrt{2}+1}{24}$ ③ $\frac{\sqrt{2}+1}{12}$
④ $\frac{\sqrt{2}+1}{6}$ ✓⑤ $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$

큰 원의 반지름의 길이가 3이므로 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{OC}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$, $\overline{O'C}=\sqrt{r^2+r^2}=\sqrt{2}r$
이때 $\overline{OC}=3\sqrt{2}$에서 $3+r+\sqrt{2}r=3\sqrt{2}$이므로
$r+\sqrt{2}r=3\sqrt{2}-3$, $r(\sqrt{2}+1)=3(\sqrt{2}-1)$
$\therefore r=\frac{3(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1}$
따라서 $3-r=\frac{3(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}-\frac{3(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1}=\frac{6}{\sqrt{2}+1}$이므로 $\frac{2}{3-r}=\frac{\sqrt{2}+1}{3}$



27

$A=4-a\sqrt{2}$, $B=2a\sqrt{6}-5\sqrt{3}$일 때, $3\sqrt{2}A-\sqrt{3}B$의 값이 유리수가 되도록 하는 유리수 a의 값은?

① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{5}{3}$ ✓⑤ 2

$3\sqrt{2}A-\sqrt{3}B=3\sqrt{2}(4-a\sqrt{2})-\sqrt{3}(2a\sqrt{6}-5\sqrt{3})=-6a+15+(12-6a)\sqrt{2}$
이 값이 유리수가 되려면 무리수 부분이 0이어야 하므로
$12-6a=0$, $-6a=-12$ $\quad \therefore a=2$

28 출제 주의

$\sqrt{125}$와 $\sqrt{243}$의 소수 부분을 각각 p, q라고 할 때, $45\sqrt{15}$를 p와 q를 사용하여 나타내시오. $(p+11)(q+15)$

$11<\sqrt{125}<12$에서 $p=\sqrt{125}-11=5\sqrt{5}-11$
즉, $p+11=5\sqrt{5}$이므로 $\sqrt{5}=\frac{p+11}{5}$
또, $15<\sqrt{243}<16$에서 $q=\sqrt{243}-15=9\sqrt{3}-15$
즉, $q+15=9\sqrt{3}$이므로 $\sqrt{3}=\frac{q+15}{9}$
이때 $\sqrt{15}=\sqrt{5}\sqrt{3}$이므로
$45\sqrt{15}=45\left(\frac{p+11}{5}\right)\left(\frac{q+15}{9}\right)=(p+11)(q+15)$

29

$\frac{\sqrt{n}+4}{\sqrt{n}-2}$의 정수 부분이 3이 되도록 하는 두 자리 자연수 n의 개수를 구하시오. 9

$\frac{\sqrt{n}+4}{\sqrt{n}-2}$의 정수 부분이 3이면 $3\le\frac{\sqrt{n}+4}{\sqrt{n}-2}<4$이고, n이 두 자리 자연수이므로
$\sqrt{n}>\sqrt{9}=3$ $\quad \therefore \sqrt{n}-2>0$
각 변에 $\sqrt{n}-2$를 곱하면 $3\sqrt{n}-6\le\sqrt{n}+4<4\sqrt{n}-8$
$3\sqrt{n}-6\le\sqrt{n}+4$에서
$2\sqrt{n}\le10$ $\quad \therefore \sqrt{n}\le5$ …… ㉠
$\sqrt{n}+4<4\sqrt{n}-8$에서
$3\sqrt{n}>12$ $\quad \therefore \sqrt{n}>4$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $4<\sqrt{n}\le5$
즉, $16<n\le25$이므로 조건을 만족시키는 자연수 n은 17, 18, …, 25의 9개이다.

30

$\frac{2x-y}{y-x}=2$이고, $\sqrt{\frac{x+y}{y-x}}$의 소수 부분을 a라고 할 때, $(a+2)^2$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ✓⑤ 7

$\frac{2x-y}{y-x}=2$에서
$2x-y=2y-2x$, $4x=3y$
$\therefore y=\frac{4}{3}x$
이때 $y=\frac{4}{3}x$를 $\sqrt{\frac{x+y}{y-x}}$에 대입하면 $\sqrt{\frac{x+y}{y-x}}=\sqrt{\frac{x+\frac{4}{3}x}{\frac{4}{3}x-x}}=\sqrt{\frac{\frac{7}{3}x}{\frac{1}{3}x}}=\sqrt{7}$
즉, $2<\sqrt{7}<3$이므로 $\sqrt{\frac{x+y}{y-x}}$의 정수 부분은 2, 소수 부분은 $\sqrt{7}-2$이다.
따라서 $a=\sqrt{7}-2$이므로 $a+2=\sqrt{7}$에서
$(a+2)^2=(\sqrt{7})^2=7$

31

x가 실수일 때, $[x]$는 x의 정수 부분, $<x>$는 x의 소수 부분이라고 하자. $x=\sqrt{3}+1$, $y=2\sqrt{2}+1$일 때, $\left(\dfrac{<x>-[y]+4}{[x]+<y>}\right)^2$의 값은?

① $\dfrac{1}{8}$　✓② $\dfrac{3}{8}$　③ $\dfrac{5}{8}$

④ $\dfrac{7}{8}$　⑤ $\dfrac{9}{8}$

$1<\sqrt{3}<2$에서 $2<\sqrt{3}+1<3$이므로

$[x]=2$, $<x>=\sqrt{3}+1-2=\sqrt{3}-1$

또, $2<2\sqrt{2}<3$에서 $3<2\sqrt{2}+1<4$이므로

$[y]=3$, $<y>=2\sqrt{2}+1-3=2\sqrt{2}-2$

따라서 $\dfrac{<x>-[y]+4}{[x]+<y>}=\dfrac{\sqrt{3}-1-3+4}{2+2\sqrt{2}-2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$이므로

$\left(\dfrac{<x>-[y]+4}{[x]+<y>}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{3}{8}$

32 서술형

자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+1}$의 소수 부분을 a_n이라고 할 때, $(a_{2026}+2026)^2$의 일의 자리의 수를 구하시오. 7

모든 자연수 n에 대하여 $n=\sqrt{n^2}<\sqrt{n^2+1}$이고, $\sqrt{1^2+1}<2$, $\sqrt{2^2+1}<3$, $\sqrt{3^2+1}<4$, …이므로 $\sqrt{n^2+1}<n+1$이다.

즉, 모든 자연수 n에 대하여 $n<\sqrt{n^2+1}<n+1$이 성립한다.

따라서 $\sqrt{n^2+1}$의 정수 부분은 n이므로 $a_n=\sqrt{n^2+1}-n$ ·························· 40 %

$a_{2026}=\sqrt{2026^2+1}-2026$에서

$a_{2026}+2026=\sqrt{2026^2+1}$

$\therefore\ (a_{2026}+2026)^2=(\sqrt{2026^2+1})^2=2026^2+1$ ································ 30 %

즉, 구하는 수는 2026^2+1의 일의 자리의 수이다.

이때 2026^2의 일의 자리의 수는 $6^2=36$의 일의 자리의 수와 같으므로 2026^2+1의 일의 자리의 수는 $6+1=7$이다. ·· 30 %

33 출제 주의

$ab=4$인 두 양수 a, b에 대하여 $a\sqrt{\dfrac{50b}{9a}}+b\sqrt{\dfrac{2a}{9b}}$의 정수 부분을 x, 소수 부분을 y라고 할 때, $\dfrac{y}{x}$의 값은?

① $\dfrac{4\sqrt{2}}{5}-2$　✓② $\dfrac{4\sqrt{2}}{5}-1$　③ $\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$

④ $\dfrac{4\sqrt{2}}{5}+1$　⑤ $\dfrac{4\sqrt{2}}{5}+2$

$a\sqrt{\dfrac{50b}{9a}}+b\sqrt{\dfrac{2a}{9b}}=\sqrt{a^2\times\dfrac{50b}{9a}}+\sqrt{b^2\times\dfrac{2a}{9b}}=\sqrt{\dfrac{50ab}{9}}+\sqrt{\dfrac{2ab}{9}}$

$=\dfrac{\sqrt{200}}{3}+\dfrac{\sqrt{8}}{3}=\dfrac{10\sqrt{2}}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

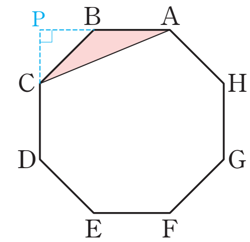
$=4\sqrt{2}$

이때 $5<4\sqrt{2}<6$이므로 $x=5$, $y=4\sqrt{2}-5$

$\therefore\ \dfrac{y}{x}=\dfrac{4\sqrt{2}-5}{5}=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}-1$

34

한 변의 길이가 2인 정팔각형 ABCDEFGH에서 삼각형 ABC의 넓이는?



① 1　✓② $\sqrt{2}$

③ 2　④ $2\sqrt{2}$

⑤ 4

정팔각형의 한 내각의 크기는 $\dfrac{180^\circ\times(8-2)}{8}=135^\circ$

$\angle PBC=180^\circ-135^\circ=45^\circ$이므로 삼각형 BPC는 직각이등변삼각형이다.

이때 $\overline{BC}=2$이므로 $\overline{BP}=\overline{PC}=a$라고 하면 피타고라스 정리에 의하여

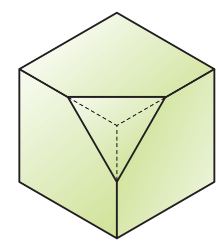
$a^2+a^2=4\qquad\therefore\ a=\sqrt{2}\qquad\therefore\ \overline{BP}=\overline{PC}=\sqrt{2}$

따라서 $\overline{AP}=\overline{AB}+\overline{BP}=2+\sqrt{2}$이므로

$\triangle ABC=\triangle APC-\triangle BPC=\dfrac{1}{2}(2+\sqrt{2})\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\sqrt{2}+1-1=\sqrt{2}$

35

한 모서리의 길이가 2인 정육면체에서 오른쪽 그림과 같이 각 모서리의 중점을 연결한 직선 부분을 잘라낸다. 8개의 꼭짓점 모두에서 이 부분을 잘라냈을 때, 잘라내고 남은 입체도형의 겉넓이는?



① $3(3+\sqrt{3})$　② $3(3+\sqrt{6})$　✓③ $4(3+\sqrt{3})$

④ $4(4+\sqrt{6})$　⑤ $4(4+\sqrt{3})$

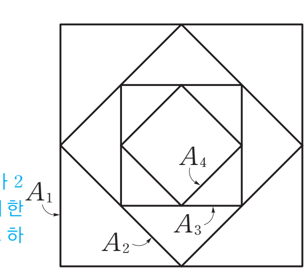
잘라내기 전 정육면체의 겉넓이는 $6\times2^2=24$, 정육면체의 한 면에서 잘라진 단면의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times1\times1=\dfrac{1}{2}$, 한 꼭짓점에 대하여 잘라진 단면의 넓이는 $3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$, 잘라낸 단면에 해당하는 정삼각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

따라서 잘라낸 단면의 정삼각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 정육면체의 8개의 꼭짓점에서 삼각뿔 모양의 입체도형을 잘라내고 남은 입체도형의 겉넓이는 정육면체의 겉넓이보다 $8\times\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=12-4\sqrt{3}$만큼 줄어든다.

따라서 구하는 입체도형의 겉넓이는 $24-(12-4\sqrt{3})=12+4\sqrt{3}=4(3+\sqrt{3})$

36

다음 그림과 같이 넓이가 2인 정사각형 A_1의 각 변의 중점을 차례대로 연결하여 정사각형 A_2를 만들고, 이 정사각형의 각 변의 중점을 연결하여 또다른 정사각형 A_3을 만드는 과정을 반복할 때, 정사각형 A_4까지 그려진 도형의 모든 변의 길이의 합을 구하시오. $6+6\sqrt{2}$



정사각형 A_1의 넓이가 2이므로 정사각형 A_1의 한 변의 길이를 x_1이라고 하면 $x_1=\sqrt{2}$이다.

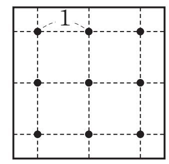
정사각형 A_2의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times2=1$이고, 정사각형 A_2의 한 변의 길이를 x_2라고 하면 $x_2=1$이다. 정사각형 A_3의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{1}{2}$이고, 정사각형 A_3의 한 변의 길이를 x_3이라고 하면 $x_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다. 정사각형 A_4의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$이고, 정사각형 A_4의 한 변의 길이를 x_4라고 하면 $x_4=\dfrac{1}{2}$이다.

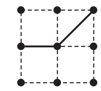
따라서 주어진 도형의 모든 변의 길이의 합은 $4(x_1+x_2+x_3+x_4)=6+6\sqrt{2}$

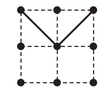
Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

대표 문제

한 눈금의 길이가 1인 모눈종이 위에 오른쪽 그림과 같이 9개의 점이 그려져 있다. 이 점들을 선분으로 연결하여 도형을 만들 때, 서로 다른 세 점을 끊지 않고 연결한 두 선분의 길이의 합을 도형의 길이라고 하자. 예를 들어 [그림 1], [그림 2]의 도형의 길이는 각각 $1+\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$이다. 도형의 길이가 $2\sqrt{2}$인 도형의 개수를 a, 도형의 길이가 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$인 도형의 개수를 b라고 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, 이와 같이 만든 도형 중 길이가 같은 도형의 개수를 셀 때, 도형의 모양이 같아도 위치가 다르면 서로 다른 도형으로 생각한다.)




[그림 1]


[그림 2]

함께 풀기

STEP 1

주어진 조건과 구해야 하는 것 확인하기

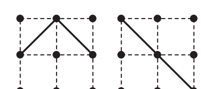
주어진 조건: ① 모눈종이의 한 눈금의 길이는 1이다.
② 서로 다른 세 점을 이은 선분을 도형의 길이라고 한다.
③ 도형의 길이가 $2\sqrt{2}$인 도형의 개수는 a, $\sqrt{2}+\sqrt{5}$인 도형의 개수는 b이다.

구해야 하는 것: $a+b$의 값

STEP 2

a의 값 구하기

세 점을 끊지 않고 연결하여 만든 도형의 길이가 $2\sqrt{2}$인 도형은 오른쪽 그림과 같이 한 직선 위에 있지 않은 선분 두 개를 연결한 도형과 한 직선 위의 두 선분을 이은 도형이다. 이때 각각의 경우는 8가지와 2가지이다.



$\therefore\ a=8+2=10$

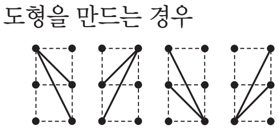
STEP 3

b의 값 구하기

세 점을 끊지 않고 연결하여 만든 도형의 길이가 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$인 도형은 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어서 생각할 수 있다.

(i) 이웃하는 변의 길이가 각각 1, 2인 직사각형을 이루는 점으로 도형을 만드는 경우

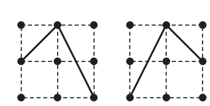
한 직사각형을 이루는 6개의 점 중 세 점을 연결하여 길이가 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$인 도형을 만들 수 있는 경우는 오른쪽 그림과 같이 4가지이고, 주어진 9개의 점으로 이웃하는 변의 길이가 각각 1, 2인 직사각형 모양을 만들 수 있는 경우는 4가지이다.



따라서 만들 수 있는 도형의 개수는 $4\times4=16$이다.

(ii) 한 변의 길이가 2인 정사각형을 이루는 점으로 도형을 만드는 경우

정사각형을 이루는 8개의 점 중 세 점을 연결하여 길이가 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$인 도형 중 선분의 교점이 정사각형의 한 변 위에 놓이는 경우는 오른쪽 그림과 같이 2가지이고, 도형을 이루는 두 선분의 교점이 될 수 있는 경우는 4가지이다.



따라서 만들 수 있는 도형의 개수는 $2\times4=8$이다.

(i), (ii)에 의하여 $b=16+8=24$

STEP 4

$a+b$의 값 구하기

$\therefore\ a+b=10+24=34$

답 34

01

$\sqrt{111111111111-222222}$의 값을 구하시오. 333333

$111111111111-222222=111111000000+111111-(111111+111111)$
$=111111\times1000000-111111$
$=111111(1000000-1)$
$=111111\times999999$
$=111111\times9\times111111$
$=3^2\times(111111)^2$
$=(333333)^2$
$\therefore\ \sqrt{111111111111-222222}=\sqrt{(333333)^2}=333333$

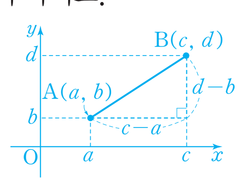
02

연속된 세 자연수 x, y, z에 대하여 a가 자연수일 때, $\sqrt{x+y+z}=a$가 성립한다. 이 연속된 세 수 x, y, z의 합이 100 미만일 때, 이 세 수의 쌍은 모두 몇 쌍인지 구하시오. 3쌍

x, y, z가 연속된 세 자연수이므로 $y=x+1$, $z=x+2$라고 하면 $x+y+z=x+(x+1)+(x+2)=3x+3=3(x+1)$
즉, $\sqrt{x+y+z}=a$에서 $\sqrt{3(x+1)}=a$이므로 양변을 제곱하면 $3(x+1)=a^2$
따라서 a는 3의 배수이고 $a^2<100$이므로 이를 만족시키는 a의 값은 10 이하의 3의 배수인 3, 6, 9이다.
(i) $a=3$, 즉 $3(x+1)=3^2=9$일 때
$x+1=3$이므로 $x=2$, $y=3$, $z=4$
(ii) $a=6$, 즉 $3(x+1)=6^2=36$일 때
$x+1=12$이므로 $x=11$, $y=12$, $z=13$
(iii) $a=9$, 즉 $3(x+1)=9^2=81$일 때
$x+1=27$이므로 $x=26$, $y=27$, $z=28$
(i)~(iii)에 의하여 구하는 세 수의 쌍은 3쌍이다.

03

x좌표와 y좌표가 각각 정수인 좌표평면 위의 두 점 A, B에 대하여 $7\le\overline{AB}<9$를 만족시키는 서로 다른 무리수 $\overline{AB}$의 개수를 구하시오. 11

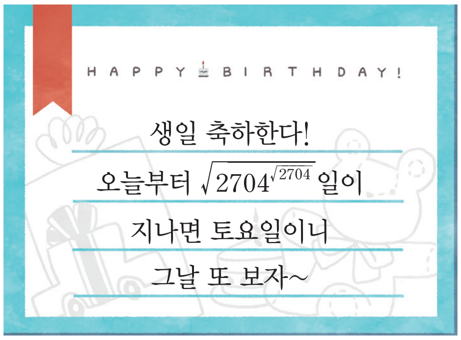


좌표평면 위의 두 점 $A(a, b)$, $B(c, d)$에 대하여 두 점 사이의 거리 $\overline{AB}$를 오른쪽 그림과 같이 피타고라스 정리를 이용하면
$\overline{AB}=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$임을 알 수 있다.
이때 a, b, c, d가 모두 정수이므로
$c-a$, $d-b$도 정수이다.
$c-a=p$, $d-b=q$ (p, q는 정수)로 놓으면 $\overline{AB}=\sqrt{p^2+q^2}$
이때 $7\le\overline{AB}<9$이므로 $\sqrt{49}\le\sqrt{p^2+q^2}<\sqrt{81}$
즉, $49\le p^2+q^2<81$이고 이를 만족시키는 정수 p, q의 값은 오른쪽과 같다.
따라서 조건을 만족시키는 서로 다른 무리수 $\overline{AB}$는 $\sqrt{50}$, $\sqrt{52}$, $\sqrt{53}$, $\sqrt{58}$, $\sqrt{61}$, $\sqrt{65}$, $\sqrt{68}$, $\sqrt{72}$, $\sqrt{73}$, $\sqrt{74}$, $\sqrt{80}$의 11개이다.

q \ p	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{37}$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{65}$
2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{40}$	$\sqrt{53}$	$\sqrt{68}$
3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{18}$	5	$\sqrt{34}$	$\sqrt{45}$	$\sqrt{58}$	$\sqrt{73}$
4	$\sqrt{17}$	$\sqrt{20}$	5	$\sqrt{32}$	$\sqrt{41}$	$\sqrt{52}$	$\sqrt{65}$	$\sqrt{80}$
5	$\sqrt{26}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{34}$	$\sqrt{41}$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{61}$	$\sqrt{74}$	$\sqrt{89}$
6	$\sqrt{37}$	$\sqrt{40}$	$\sqrt{45}$	$\sqrt{52}$	$\sqrt{61}$	$\sqrt{72}$	$\sqrt{85}$	10
7	$\sqrt{50}$	$\sqrt{53}$	$\sqrt{58}$	$\sqrt{65}$	$\sqrt{74}$	$\sqrt{85}$	$\sqrt{98}$	$\sqrt{113}$
8	$\sqrt{65}$	$\sqrt{68}$	$\sqrt{73}$	$\sqrt{80}$	$\sqrt{89}$	10	$\sqrt{113}$	$\sqrt{128}$

04 도희의 16번째 생일 선물에 포함된 축하 카드를 열어 보니 다음과 같은 메시지가 쓰여져 있었다. 도희의 16번째 생일인 오늘은 무슨 요일인지 구하시오. 일요일

(단, $2704=52^2$)



$\sqrt{2704}=\sqrt{52^2}=52$이므로 $\sqrt{2704^{\sqrt{2704}}}=\sqrt{(52^2)^{52}}=\sqrt{(52^{52})^2}=52^{52}$
이때 $52=7\times7+3$이므로 52를 7로 나눈 나머지는 3이다.
$52\times52=52\times(49+3)=52\times49+52\times3=52\times49+49\times3+3^2$
에서 52×49와 49×3은 7로 나누어떨어지므로 52^2을 7로 나눈 나머지는 3^2을 7로 나눈 나머지와 같으므로 나머지는 2이다.

$$\begin{aligned}52^3&=52^2\times52\\&=(52\times49+49\times3+3^2)\times52\\&=52^2\times49+52\times49\times3+49\times3^2+3^3\end{aligned}$$

이므로 52^3을 7로 나눈 나머지는 3^3을 7로 나눈 나머지와 같으므로 나머지는 6이다.

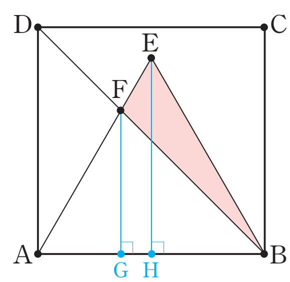
$$\begin{aligned}52^4&=52^3\times52\\&=(52^2\times49+52\times49\times3+49\times3^2+3^3)\times52\\&=52^3\times49+52^2\times49\times3+52\times49\times3^2+49\times3^3+3^4\end{aligned}$$

이므로 52^4을 7로 나눈 나머지는 3^4을 7로 나눈 나머지와 같으므로 나머지는 4이다.
따라서 52^n (n은 자연수)을 7로 나눈 나머지는 3^n을 7로 나눈 나머지와 같으므로 52^{52}을 7로 나눈 나머지는 3^{52}을 7로 나눈 나머지와 같다.
이때 3^n으로 나눈 나머지는 3, 2, 6, 4, 5, 1의 순서대로 반복된다.
즉, $3^{52}=3^{7\times7+3}$을 7로 나눈 나머지는 3^3을 7로 나눈 나머지와 같으므로 나머지는 6이다.
따라서 오늘부터 52^{52}일이 지나면 토요일이 되므로 도희의 16번째 생일은 일요일이다.

05 양수 x의 소수 부분이 y이고, 등식 $x^2+y^2=10$을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 양수 x의 자연수 부분을 구하시오. 3

양수 x의 자연수 부분을 n이라고 하면 $x=n+y$로 놓을 수 있다.
이때 $0\le y<1$이므로 $0\le y^2<1$
$x^2+y^2=10$에서 $y^2=10-x^2$이므로
$0\le10-x^2<1$, $-10\le-x^2<-9$
$\therefore 9<x^2\le10$
즉, $9<(n+y)^2\le10$이고 이를 만족시키는 n의 값은 3이다.
따라서 양수 x의 자연수 부분은 3이다.

06 오른쪽 그림과 같이 정사각형 ABCD의 내부에 $\overline{AB}$를 공유하는 정삼각형 ABE가 있고, 정사각형의 대각선 BD와 정삼각형 ABE의 교점을 F라고 하자. $\overline{AB}=\sqrt{1+\sqrt{3}}$일 때, 삼각형 BEF의 넓이를 구하시오. $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$



$\overline{AG}=x$라고 하면 $\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}$이므로 삼각형 AHE에서 피타고라스 정리에 의하여

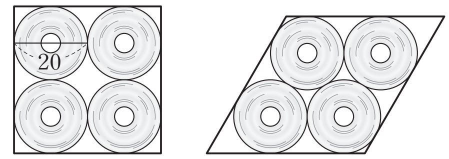
$$\overline{EH}=\sqrt{\overline{AE}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{\overline{AB}^2-\left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}\overline{AB}^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}$$

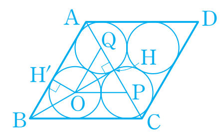
△AHE와 △AGF에서 △AHE∽△AGF (AA 닮음)
이때 $\overline{AG}:\overline{FG}=\overline{AH}:\overline{EH}=1:\sqrt{3}$이므로 $\overline{FG}=\sqrt{3}\,\overline{AG}=\sqrt{3}x$
한편, $\angle ABD=45^\circ$이므로 △BFG는 직각이등변삼각형이고
$\overline{BG}=\overline{FG}=\sqrt{3}x$이므로
$\overline{AB}=\overline{AG}+\overline{BG}=x+\sqrt{3}x=(1+\sqrt{3})x$
즉, $\sqrt{1+\sqrt{3}}=(1+\sqrt{3})x$이므로 양변을 제곱하면
$1+\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})^2x^2 \qquad \therefore x^2=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$

삼각형 ABF의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{FG}=\dfrac{1}{2}\times(1+\sqrt{3})x\times\sqrt{3}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
정삼각형 ABE의 넓이는
$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\overline{AB}^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\sqrt{1+\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$
$\therefore \triangle BEF=\triangle ABE-\triangle ABF=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$

07

오른쪽 그림은 지름의 길이가 20인 두루마리 화장지를 각각 4개씩 단면이 정사각형인 상자와 마름모 모양인 상자에 담아 위에서 바라본 것이다. 정사각형과 마름모의 한 변의 길이의 차를 구하시오. $20\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)$





원의 지름의 길이가 20이므로 정사각형의 한 변의 길이는 40이다.
오른쪽 그림과 같이 내부에서 서로 접하는 세 원의 중심을 각각 O, P, Q라고 하면
$\overline{OQ}=\overline{OP}=\overline{PQ}$이고 이 길이는 원의 반지름의 길이의 2배, 즉 지름의 길이와 같으므로 △QOP는 한 변의 길이가 20인 정삼각형이다.
이때 $\overline{OQ}$와 $\overline{AB}$가 서로 평행하므로 $\angle HAB=\angle HQO$
$\overline{OP}$와 $\overline{BC}$가 서로 평행하므로 $\angle BCH=\angle OPH$
∴ △ABC∽△QOP (AA 닮음)
정삼각형 QOP에서 $\overline{OH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 20=10\sqrt{3}$이고, 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H′이라고 하면 $\overline{OH'}=10$
△OHQ와 △BH′O에서 △OQH≡△BOH′ (ASA 합동)
따라서 $\overline{BO}=\overline{OQ}=20$이므로
$\overline{BH}=\overline{BO}+\overline{OH}=20+10\sqrt{3}=10(2+\sqrt{3})$
마찬가지로 △ABH∽△QOH (AA 닮음)이므로
$\overline{AB}:\overline{QO}=\overline{BH}:\overline{OH}$에서
$\overline{AB}:20=10(2+\sqrt{3}):10\sqrt{3}$, $10\sqrt{3}\,\overline{AB}=200(2+\sqrt{3})$
$\therefore \overline{AB}=\frac{200(2+\sqrt{3})}{10\sqrt{3}}=\frac{20(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}=20+\frac{40\sqrt{3}}{3}$
따라서 정사각형과 마름모의 한 변의 길이의 차는
$\left(20+\frac{40\sqrt{3}}{3}\right)-40=\frac{40\sqrt{3}}{3}-20=20\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)$

08

등식 $\sqrt{x}(y-\sqrt{225})+\sqrt{y}(x-\sqrt{225})=225-\sqrt{225xy}$를 만족시키는 두 자연수 x, y에 대하여 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하시오. 9

$\sqrt{x}(y-\sqrt{225})+\sqrt{y}(x-\sqrt{225})=225-\sqrt{225xy}$에서
$y\sqrt{x}-\sqrt{225x}+x\sqrt{y}-\sqrt{225y}=225-\sqrt{225xy}$
$\sqrt{xy^2}+\sqrt{x^2y}+\sqrt{225xy}=225+\sqrt{225x}+\sqrt{225y}$
$\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{225})=\sqrt{225}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{225})$
두 자연수 x, y에 대하여 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{225}>0$이므로 양변을 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{225}$로 나누면
$\sqrt{xy}=\sqrt{225}$ $\quad\therefore xy=225=3^2\times 5^2$
따라서 순서쌍 (x, y)의 개수는 225의 약수의 개수와 같으므로 개수는 $(2+1)(2+1)=9$이다.

09

$\sqrt{5}$의 소수 부분을 a라고 할 때, $\sqrt{\left(a-\frac{1}{4}\right)^2}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{5}\right)^2}$의 값을 구하시오. $\frac{1}{20}$

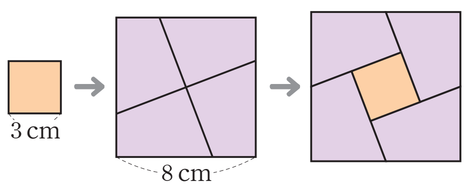
$2<\sqrt{5}<3$에서 $\sqrt{5}$의 정수 부분이 2이므로 $a=\sqrt{5}-2$
한편,
$4a-1=4(\sqrt{5}-2)-1=4\sqrt{5}-9=\sqrt{80}-\sqrt{81}<0$
$5a-1=5(\sqrt{5}-2)-1=5\sqrt{5}-11=\sqrt{125}-\sqrt{121}>0$
이므로
$a-\frac{1}{4}<0$, $a-\frac{1}{5}>0$
$\therefore \sqrt{\left(a-\frac{1}{4}\right)^2}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{5}\right)^2}=-\left(a-\frac{1}{4}\right)+\left(a-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{20}$

Lv. Master 실력을 완성하는 대단원 평가

______점 / 100점

01

한 변의 길이가 각각 3 cm, 8 cm인 두 정사각형 모양의 종이를 다음 그림과 같이 잘라 붙여서 한 개의 정사각형을 만들 때, 새로 만들어진 정사각형의 한 변의 길이는? [4점]



① $\sqrt{55}$ cm ② $\sqrt{65}$ cm ✓③ $\sqrt{73}$ cm
④ $\sqrt{83}$ cm ⑤ $\sqrt{94}$ cm

새로 만들어진 정사각형의 넓이는 $3^2+8^2=9+64=73(\text{cm}^2)$
넓이가 73 cm^2인 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라고 하면 $x^2=73$
이때 $x>0$이므로 $x=\sqrt{73}$
따라서 구하는 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{73}$ cm이다.

02

$\sqrt{256}$의 양의 제곱근을 a, $(-\sqrt{49})^2$의 음의 제곱근을 b라고 할 때, $a-b$의 값은? [4점]

① -11 ② -3 ③ 3
✓④ 11 ⑤ 13

$\sqrt{256}=\sqrt{16^2}=16$의 양의 제곱근은 4이므로 $a=4$
$(-\sqrt{49})^2=49$의 음의 제곱근은 -7이므로 $b=-7$
$\therefore a-b=4-(-7)=11$

03

$a<0$, $ab<0$일 때, 다음 식을 간단히 하면? [4점]

$$\sqrt{(-2a)^2}-\sqrt{(5b)^2}-\sqrt{9a^2}+\sqrt{(a-2b)^2}$$

① $-6a-7b$ ② $-6a-3b$ ✓③ $-3b$
④ $4a-7b$ ⑤ $4a-3b$

$a<0$, $ab<0$이므로 $b>0$
이때 $9a^2=(3a)^2$이고 $-2a>0$, $5b>0$, $3a<0$, $a-2b<0$이므로
$\sqrt{(-2a)^2}-\sqrt{(5b)^2}-\sqrt{9a^2}+\sqrt{(a-2b)^2}=\sqrt{(-2a)^2}-\sqrt{(5b)^2}-\sqrt{(3a)^2}+\sqrt{(a-2b)^2}$
$=-2a-5b-(-3a)-(a-2b)$
$=-3b$

04

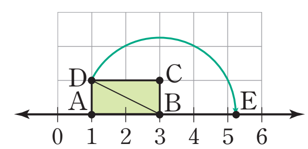
$a=\sqrt{2}$일 때, 다음 중 무리수인 것은? [4점]

① $\sqrt{2}a$ ② $-a^2$ ③ $\sqrt{(-a)^4}$
④ $a-\sqrt{2}$ ✓⑤ $a+2$

① $\sqrt{2}a=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ (유리수)
② $-a^2=-(\sqrt{2})^2=-2$ (유리수)
③ $\sqrt{(-a)^4}=\sqrt{a^4}=a^2=(\sqrt{2})^2=2$ (유리수)
④ $a-\sqrt{2}=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ (유리수)
⑤ $a+2=\sqrt{2}+2$ (무리수)

05

수직선 위에 두 점 A(1), B(3)이 있다. 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD의 대각선 $\overline{BD}$와 $\overline{BE}$의 길이가 같도록 수직선 위에 점 E를 잡을 때, 점 E에 대응하는 수의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 하자.



$\dfrac{5(\sqrt{a}-b)}{\sqrt{(a+b-3)^2}}$의 값은? [4점]

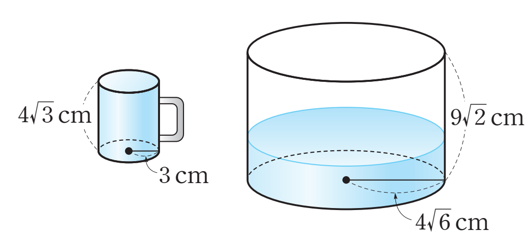
✓① $2\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{5}$
④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

$\overline{AD}=1$, $\overline{AB}=2$이므로 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=2^2+1^2=5$ $\therefore \overline{BD}=\sqrt{5}$
$\overline{BE}=\overline{BD}=\sqrt{5}$이므로 점 E에 대응하는 수는 $3+\sqrt{5}$이다.
이때 $2<\sqrt{5}<3$에서 $5<3+\sqrt{5}<6$이므로 $a=5$, $b=3+\sqrt{5}-5=\sqrt{5}-2$
$\therefore \dfrac{5(\sqrt{a}-b)}{\sqrt{(a+b-3)^2}}=\dfrac{5(\sqrt{a}-b)}{|a+b-3|}=\dfrac{5\{\sqrt{5}-(\sqrt{5}-2)\}}{|5+\sqrt{5}-2-3|}=2\sqrt{5}$

06

다음 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 3 cm, 높이가 $4\sqrt{3}$ cm인 원기둥 모양의 컵에 물을 가득 담아 밑면의 반지름의 길이가 $4\sqrt{6}$ cm, 높이가 $9\sqrt{2}$ cm인 원기둥 모양의 물통에 여러 번 부어 가득 채우려고 한다. 이때 물을 적어도 몇 번 부어야 하는가?

(단, 컵의 손잡이는 무시한다.) [4점]



① 16번 ② 17번 ③ 18번
④ 19번 ✓⑤ 20번

컵의 부피는 $\pi\times3^2\times4\sqrt{3}=36\sqrt{3}\pi(\text{cm}^3)$
물통의 부피는 $\pi\times(4\sqrt{6})^2\times9\sqrt{2}=864\sqrt{2}\pi(\text{cm}^3)$
이때 $\dfrac{864\sqrt{2}\pi}{36\sqrt{3}\pi}=8\sqrt{6}$이므로 물통의 부피는 컵의 부피의 $8\sqrt{6}$배이고, $19<8\sqrt{6}<20$이므로 물통에 물을 가득 채우려면 적어도 20번 부어야 한다.

07

서로 다른 두 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라고 할 때, $\sqrt{300ab}$가 자연수가 될 확률은? [4점]

✓① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$300ab=2^2\times3\times5^2\times ab$이므로 $ab=3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
a, b는 주사위의 눈의 수이므로 ab가 될 수 있는 수는 $3\times1^2=3$, $3\times2^2=12$
a, b에 대하여 순서쌍 (a, b)는
(ⅰ) $ab=3$일 때, $(1, 3)$, $(3, 1)$의 2개
(ⅱ) $ab=12$일 때, $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$의 4개
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 순서쌍 (a, b)의 개수는 6이므로 구하는 확률은
$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

08

두 양수 x, y에 대하여 다음 보기에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보기 〉
ㄱ. x가 유리수, $\sqrt{y}$가 무리수이면 $\sqrt{xy}$는 무리수이다.
ㄴ. $\sqrt{xy}$가 무리수이면 $\sqrt{x^2y}$는 무리수이다.
ㄷ. $\sqrt{xy}$가 무리수이면 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$는 무리수이다.

① ㄱ ② ㄴ ✓③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

ㄱ. $x=8$, $y=2$이면 $\sqrt{xy}=\sqrt{16}=4$이므로 유리수이다.
ㄴ. $\sqrt{x}$가 무리수일 때, $y=1$이면 $\sqrt{xy}$는 무리수이고 y는 유리수이다.
이때 $\sqrt{x^2y}=\sqrt{x^2}=x$는 유리수이다.
ㄷ. $\sqrt{xy}$가 무리수이면 $\sqrt{x}$와 $\sqrt{y}$ 중 적어도 하나는 무리수이다.
즉, $\sqrt{x}$ 또는 $\sqrt{y}$가 무리수이고, 두 수는 모두 양수이므로 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$는 무리수이다.

09

다음 수를 수직선 위에 나타낼 때, 가장 오른쪽에 오는 수와 왼쪽에서 두 번째에 오는 수의 합은? [4점]

$2+\sqrt{10}$, $\sqrt{11}-5$, 6, $-5+\sqrt{10}$, $\sqrt{10}-1$

① $-6+\sqrt{10}+\sqrt{11}$ ② $-3+\sqrt{10}+\sqrt{11}$
✓③ $1+\sqrt{11}$ ④ $1+2\sqrt{10}$
⑤ $5+\sqrt{10}$

주어진 수 중에서 음수는 $\sqrt{11}-5$, $-5+\sqrt{10}$이고 양수는 $2+\sqrt{10}$, 6, $\sqrt{10}-1$이다.
$(\sqrt{11}-5)-(-5+\sqrt{10})=\sqrt{11}-5+5-\sqrt{10}=\sqrt{11}-\sqrt{10}>0$
$\therefore \sqrt{11}-5>-5+\sqrt{10}$
$(2+\sqrt{10})-6=\sqrt{10}-4=\sqrt{10}-\sqrt{16}<0$ $\therefore 2+\sqrt{10}<6$
$(2+\sqrt{10})-(\sqrt{10}-1)=2+\sqrt{10}-\sqrt{10}+1=3>0$ $\therefore 2+\sqrt{10}>\sqrt{10}-1$
따라서 $-5+\sqrt{10}<\sqrt{11}-5<\sqrt{10}-1<2+\sqrt{10}<6$이므로 수직선 위에 나타낼 때 가장 오른쪽에 오는 수는 6, 왼쪽에서 두 번째에 오는 수는 $\sqrt{11}-5$이므로 구하는 합은
$6+(\sqrt{11}-5)=1+\sqrt{11}$

10

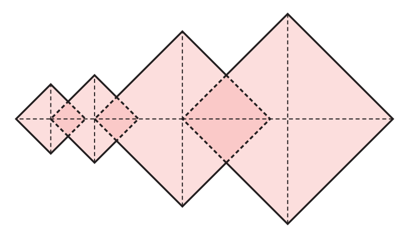
두 자연수 m, n이 등식 $\sqrt{108m}=n\sqrt{2}$를 만족시킬 때, 가장 작은 m의 값과 그때의 n의 값의 합은? [4점]

✓① 24 ② 25 ③ 26
④ 27 ⑤ 28

$\sqrt{108m}=\sqrt{2^2\times3^3\times m}$이므로 $\sqrt{108m}=n\sqrt{2}$를 만족시키려면 $m=2\times3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
이때 가장 작은 자연수 m의 값은 $m=2\times3\times1^2=6$
$m=6$이면 $\sqrt{108\times6}=18\sqrt{2}$이므로 $n=18$
$\therefore m+n=6+18=24$

11

다음 그림과 같이 넓이가 각각 3, 8, 27, 50인 정사각형을 큰 정사각형의 한 꼭짓점이 작은 정사각형의 대각선의 교점에 놓이도록 이어 붙였다. 이때 도형의 둘레의 길이는? [4점]

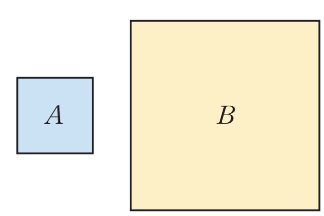


① $6(2\sqrt{2}+\sqrt{3})$ ② $6(3\sqrt{2}+\sqrt{3})$
③ $8(2\sqrt{2}+\sqrt{3})$ ✓④ $8(3\sqrt{2}+\sqrt{3})$
⑤ $10(2\sqrt{2}+\sqrt{3})$

넓이가 3, 8, 27, 50인 정사각형의 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$, $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$
또, 겹치는 부분의 세 정사각형의 한 변의 길이는 각각 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
따라서 도형의 둘레의 길이는
$4(\sqrt{3}+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+5\sqrt{2})-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=8(3\sqrt{2}+\sqrt{3})$

12

오른쪽 그림과 같이 넓이가 각각 $70-n$, $24n$인 두 정사각형 A, B가 있다. 두 정사각형의 각 변의 길이가 모두 자연수일 때, 모든 자연수 n의 값의 합은? [4점]



✓① 60 ② 61 ③ 62
④ 63 ⑤ 64

두 정사각형 A, B의 넓이가 각각 $70-n$, $24n$이므로 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{70-n}$, $\sqrt{24n}$이고, 두 정사각형의 각 변의 길이가 모두 자연수이므로 $70-n$, $24n$도 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
즉, $\sqrt{24n}=\sqrt{2^3\times3\times n}$에서 $n=2\times3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 하므로 이를 만족시키는 n의 값은 $n=6, 24, 54, 96, \cdots$
이 중 70 이하의 n의 값을 $\sqrt{70-n}$에 대입하면 $\sqrt{70-6}=\sqrt{64}=8$, $\sqrt{70-24}=\sqrt{46}$, $\sqrt{70-54}=\sqrt{16}=4$이므로 조건을 만족시키는 n의 값은 6, 54이다.
따라서 모든 자연수 n의 값의 합은 $6+54=60$

13

$\sqrt{400-m}-\sqrt{120+2n}$의 값이 최대인 자연수가 되도록 두 자연수 m, n의 값을 정할 때, $m+n$의 값은? [4점]

① 50　✓② 51　③ 52

④ 53　⑤ 54

$\sqrt{400-m}-\sqrt{120+2n}$의 값이 자연수가 되려면 $400-m$과 $120+2n$이 모두 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
이때 $\sqrt{400-m}-\sqrt{120+2n}$의 값이 최대인 자연수가 되려면 $\sqrt{400-m}$은 가장 큰 자연수가 되고, $\sqrt{120+2n}$은 가장 작은 자연수가 되어야 한다.
m은 자연수이므로 400보다 작은 가장 큰 수의 제곱수는 $19^2=361$이므로
$400-m=361$　$\therefore m=39$
n이 자연수이므로 120보다 큰 가장 작은 짝수의 제곱수는 $12^2=144$이므로
$120+2n=144$, $2n=24$　$\therefore n=12$
$\therefore m+n=39+12=51$

14

다음 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 범위는? [4점]

> (가) $0<a<1$
> (나) $a+\sqrt{7}$과 $a+2\sqrt{2}$ 사이에 있는 정수의 개수는 1이다.

① $8-3\sqrt{7}<a<3-2\sqrt{2}$

② $8-3\sqrt{7}<a<3-\sqrt{7}$

✓③ $3-2\sqrt{2}<a<3-\sqrt{7}$

④ $3-2\sqrt{2}<a<2-\sqrt{2}$

⑤ $3-\sqrt{7}<a<2-\sqrt{2}$

조건 (가)에서 $0<a<1$이므로 $2<a+2<3$, $3<a+3<4$
$2<\sqrt{7}<2\sqrt{2}<3$이므로
$a+2<a+\sqrt{7}<a+2\sqrt{2}<a+3$　$\therefore 2<a+\sqrt{7}<a+2\sqrt{2}<4$
조건 (나)에서 $a+\sqrt{7}$과 $a+2\sqrt{2}$ 사이에 있는 정수가 한 개 있으려면 그 정수는 3이어야 하므로 $a+\sqrt{7}<3<a+2\sqrt{2}$
$a+\sqrt{7}<3$에서 $a<3-\sqrt{7}$
$a+2\sqrt{2}>3$에서 $a>3-2\sqrt{2}$
$\therefore 3-2\sqrt{2}<a<3-\sqrt{7}$

15

수직선 위에 서로 다른 네 실수 $\sqrt{\frac{1}{8}}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a, b를 대응시켰더니 이웃하는 두 점 사이의 거리가 모두 같을 때, $2b-a$의 가장 큰 값과 가장 작은 값의 합은 $\frac{n\sqrt{2}}{m}$이다. 이때 $m+n$의 값은? (단, $a<b$, $ab\neq0$이고, m과 n은 서로소인 자연수이다.) [6점]

✓① 11　② 12　③ 13

④ 14　⑤ 15

$\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$이고 두 실수 a, b가 $a<b$, $ab\neq0$이므로 네 실수 $\sqrt{\frac{1}{8}}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a, b의 대소 관계는 다음과 같은 경우로 나눌 수 있다.

(i) $a<b<\sqrt{\frac{1}{8}}<\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때
$\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 이웃한 두 점 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{4}$이다.
이때 $b=\sqrt{\frac{1}{8}}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=0$이므로 $ab\neq0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<\sqrt{\frac{1}{8}}<b<\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때
네 점 사이의 간격이 같으므로 이웃한 두 점 사이의 거리는 $\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{\frac{1}{8}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{8}$
즉, $a=\sqrt{\frac{1}{8}}-\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{8}$, $b=\sqrt{\frac{1}{8}}+\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$이므로
$2b-a=2\times\frac{3\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$

(iii) $a<\sqrt{\frac{1}{8}}<\frac{\sqrt{2}}{2}<b$일 때
$\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 이웃한 두 점 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{4}$이다.
이때 $a=\sqrt{\frac{1}{8}}-\frac{\sqrt{2}}{4}=0$이므로 $ab\neq0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $\sqrt{\frac{1}{8}}<a<b<\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때
네 점 사이의 간격이 같으므로 이웃한 두 점 사이의 거리는 $\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{\frac{1}{8}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{12}$
즉, $a=\sqrt{\frac{1}{8}}+\frac{\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $b=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{12}=\frac{5\sqrt{2}}{12}$이므로
$2b-a=2\times\frac{5\sqrt{2}}{12}-\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(v) $\sqrt{\frac{1}{8}}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}<b$일 때
네 점 사이의 간격이 같으므로 이웃한 두 점 사이의 거리는 $\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{\frac{1}{8}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{8}$
즉, $a=\sqrt{\frac{1}{8}}+\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$, $b=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$이므로
$2b-a=2\times\frac{5\sqrt{2}}{8}-\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{7\sqrt{2}}{8}$

(vi) $\sqrt{\frac{1}{8}}<\frac{\sqrt{2}}{2}<a<b$일 때
$\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 이웃한 두 점 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{4}$이다.
즉, $a=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$, $b=\frac{3\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$이므로
$2b-a=2\times\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$

(i)~(vi)에 의하여 $2b-a$의 가장 큰 값은 $\frac{5\sqrt{2}}{4}$, 가장 작은 값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 두 값의 합은
$\frac{5\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$
따라서 $m=4$, $n=7$이므로
$m+n=4+7=11$

16

다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. [4점] **40**

> (가) $\sqrt{\dfrac{96}{x}}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 값 중 가장 작은 수는 a이다.
>
> (나) $\sqrt{47+x}$가 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 값 중 세 번째로 작은 수는 b이다.

조건 (가)에서 $\sqrt{\frac{96}{x}}=\sqrt{\frac{2^5\times3}{x}}$이 자연수가 되려면 x는 96의 약수이면서
$x=2\times3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
이때 x의 값 중 가장 작은 수는 $a=2\times3\times1^2=6$
조건 (나)에서 $\sqrt{47+x}$가 자연수가 되려면 $47+x$가 47보다 큰 (자연수)^{2}의 꼴이어야 하므로
$47+x=49,\ 64,\ 81,\ \cdots \qquad \therefore x=2,\ 17,\ 34,\ \cdots$
이때 x의 값 중 세 번째로 작은 수는 34이므로 $b=34$
$\therefore a+b=6+34=40$

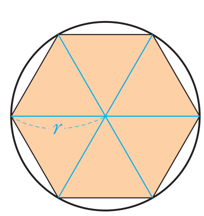
17

nx가 자연수인 두 양수 n, x에 대하여 $2\le\sqrt{nx-1}<3$을 만족시키는 모든 x의 값의 합이 5가 되도록 하는 n의 값을 구하시오. [4점] **7**

$2\le\sqrt{nx-1}<3$의 각 변을 제곱하면 $4\le nx-1<9$이므로 $5\le nx<10$
이때 nx는 자연수이므로 $nx=5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$
즉, $x=\frac{5}{n},\ \frac{6}{n},\ \frac{7}{n},\ \frac{8}{n},\ \frac{9}{n}$이고 모든 x의 값의 합이 5이므로
$\frac{5}{n}+\frac{6}{n}+\frac{7}{n}+\frac{8}{n}+\frac{9}{n}=5,\ \frac{35}{n}=5$
$\therefore n=7$

18

오른쪽 그림과 같이 넓이가 $48\pi\ \mathrm{cm}^2$인 원에 내접하는 정육각형의 넓이를 구하시오. [4점] **$72\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$**



원의 반지름의 길이를 r cm라고 하면
$\pi r^2=48\pi,\ r^2=48$
이때 $r>0$이므로 $r=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$
주어진 정육각형은 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 $4\sqrt{3}$ cm인 정삼각형 6개로 이루어져 있다.
한 변의 길이가 $4\sqrt{3}$ cm인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{3})^2=12\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$
따라서 구하는 정육각형의 넓이는
$12\sqrt{3}\times6=72\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$

19

$3+\sqrt{2}$의 정수 부분을 a, $2-\sqrt{5}$의 소수 부분을 b라고 할 때, $\sqrt{(\sqrt{5}-a)^2}+\sqrt{(b-2)^2}$의 값을 구하시오. [4점] **3**

$1<\sqrt{2}<2$에서 $4<3+\sqrt{2}<5$이므로 $3+\sqrt{2}$의 정수 부분은 $a=4$
$2<\sqrt{5}<3$에서 $-3<-\sqrt{5}<-2$이므로 $-1<2-\sqrt{5}<0$
$2-\sqrt{5}$의 정수 부분이 -1이므로 소수 부분은 $b=(2-\sqrt{5})-(-1)=3-\sqrt{5}$
따라서 $\sqrt{5}-a=\sqrt{5}-4=\sqrt{5}-\sqrt{16}<0$, $b-2=(3-\sqrt{5})-2=1-\sqrt{5}<0$이므로
$$\begin{aligned}\sqrt{(\sqrt{5}-a)^2}+\sqrt{(b-2)^2}&=\sqrt{(\sqrt{5}-4)^2}+\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}\\&=-(\sqrt{5}-4)-(1-\sqrt{5})\\&=3\end{aligned}$$

20

x가 실수일 때, x를 넘지 않는 최대의 정수를 $[x]$라 하고 x에 가까운 정수를 【x】라고 하자. $\dfrac{5a-4b}{5b-a}=2$일 때,
$\left[-\sqrt{\dfrac{6a+3b}{2a-b}}\right]+$【$\sqrt{\dfrac{6a+3b}{2a-b}}$】의 값을 구하시오. [4점] **$-1$**

$\frac{5a-4b}{5b-a}=2$에서
$5a-4b=2(5b-a),\ 5a-4b=10b-2a$
$7a=14b \qquad \therefore a=2b$
$a=2b$를 $\sqrt{\frac{6a+3b}{2a-b}}$에 대입하면 $\sqrt{\frac{6a+3b}{2a-b}}=\sqrt{\frac{12b+3b}{4b-b}}=\sqrt{\frac{15b}{3b}}=\sqrt{5}$
$2<\sqrt{5}<3$에서 $-3<-\sqrt{5}<-2$이므로 $-\sqrt{5}$를 넘지 않는 최대의 정수는 -3이다.
$\therefore \left[-\sqrt{\frac{6a+3b}{2a-b}}\right]=-3$
또, $2<\sqrt{5}<3$에서 $\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$이므로 $\sqrt{5}$에 가장 가까운 정수는 2이다.
$\therefore$ 【$\sqrt{\frac{6a+3b}{2a-b}}$】$=2$
$\therefore \left[-\sqrt{\frac{6a+3b}{2a-b}}\right]+$【$\sqrt{\frac{6a+3b}{2a-b}}$】$=-3+2=-1$

21

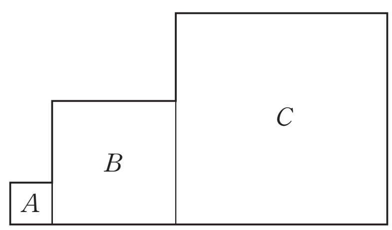
$\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{\sqrt{|x-7|}}<\dfrac{1}{2}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [4점] **57**

$\frac{1}{3}<\frac{1}{\sqrt{|x-7|}}<\frac{1}{2}$에서 $2<\sqrt{|x-7|}<3$이므로 각 변을 제곱하면 $4<|x-7|<9$
(i) $x<7$일 때, $|x-7|=-x+7$이므로 $4<|x-7|<9$에서
$4<-x+7<9,\ -3<-x<2$
$\therefore -2<x<3$
따라서 조건을 만족시키는 자연수 x는 1, 2이다.
(ii) $x\ge7$일 때, $|x-7|=x-7$이므로 $4<|x-7|<9$에서
$4<x-7<9 \qquad \therefore 11<x<16$
따라서 조건을 만족시키는 자연수 x는 12, 13, 14, 15이다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 x의 값의 합은
$1+2+12+13+14+15=57$

22, 23번은 서술형입니다. 풀이 과정을 자세히 서술하시오.

22

다음 그림과 같이 세 정사각형 A, B, C를 한 변이 맞닿도록 이어 붙여서 하나의 도형을 만들었다. 정사각형 A의 넓이가 12 cm^2이고 두 정사각형 B, C의 넓이는 각각 정사각형 A의 넓이의 4배, 9배일 때, 새로 만든 도형의 둘레의 길이를 구하시오. [7점] $36\sqrt{3}\text{ cm}$



정사각형 A의 넓이가 12 cm^2이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}(\text{cm})$ ············1점
정사각형 B의 넓이는 $12\times4=48(\text{cm}^2)$이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{48}=4\sqrt{3}(\text{cm})$
······························2점
정사각형 C의 넓이는 $12\times9=108(\text{cm}^2)$이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{108}=6\sqrt{3}(\text{cm})$
······························2점
따라서 새로 만든 도형의 둘레의 길이는
$2\times(2\sqrt{3}+4\sqrt{3}+6\sqrt{3})+2\times6\sqrt{3}=24\sqrt{3}+12\sqrt{3}$
$=36\sqrt{3}(\text{cm})$ ······························2점

23

두 실수 x, y가 $\sqrt{(x-y+2)^2}+\sqrt{3x-y}=0$을 만족시킬 때, $x+y$의 값을 구하시오. [7점] 4

$\sqrt{(x-y+2)^2}=|x-y+2|$
이때 $|x-y+2|\geq0$, $\sqrt{3x-y}\geq0$이므로
$|x-y+2|+\sqrt{3x-y}=0$을 만족시키려면 $x-y+2=0$, $3x-y=0$이어야 한다.
······························4점
두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=3$ ······························2점
$\therefore x+y=1+3=4$ ······························1점

Ⅱ 다항식의 곱셈과 인수분해

Ⅱ 다항식의 곱셈과 인수분해

01 다항식의 곱셈

1 다항식의 곱셈

(1) (다항식)×(다항식)의 계산은 다음 순서로 한다.

❶ 분배법칙을 이용하여 전개한다.

❷ 동류항이 있으면 동류항끼리 모아서 계산한다.

$$(a+b)(c+d)=\underset{①}{ac}+\underset{②}{ad}+\underset{③}{bc}+\underset{④}{bd}$$

(2) 곱셈 공식

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ← 합의 제곱

② $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ← 차의 제곱

③ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ← 합과 차의 곱

④ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

⑤ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

참고 전개식이 같은 다항식

① $(-a-b)^2=\{-(a+b)\}^2=(a+b)^2$

② $(-a+b)^2=\{-(a-b)\}^2=(a-b)^2$

③ $(-a-b)(-a+b)=\{-(a+b)\}\{-(a-b)\}=(a+b)(a-b)$

④ $(-a+b)(a+b)=-(a+b)(a-b)$

2 곱셈 공식을 이용한 수의 계산과 식의 값

(1) **수의 제곱의 계산:** 곱셈 공식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 또는 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$을 이용한다.

(2) **두 수의 곱의 계산:** 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 또는 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$를 이용한다.

(3) **제곱근의 계산:** 제곱근을 문자로 생각하고 곱셈 공식을 이용한다.

(4) **곱셈 공식을 이용한 분모의 유리화:** 분모가 두 수의 합 또는 차로 되어 있는 무리수일 때, 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하여 분모를 유리화한다.

즉, $a>0$, $b>0$, $a\neq b$이고, c는 실수일 때,

① $\dfrac{c}{a+\sqrt{b}}=\dfrac{c(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}=\dfrac{c(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$

② $\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$

(5) **식의 값 구하기:** 곱셈 공식을 이용하여 주어진 식을 전개하거나 변형한 후 근호 안의 수가 같은 것끼리 계산한다.

3 곱셈 공식의 변형

곱셈 공식의 좌변과 우변의 항을 적당히 이항하면 다음 공식을 얻을 수 있다.

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

(2) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

(3) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

(4) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

1등급 비법노트

◆ 다항식의 곱셈에서는 부호에 주의한다.

① $(+)\times(+)$ ⇨ $(+)$

② $(+)\times(-)$ ⇨ $(-)$

③ $(-)\times(+)$ ⇨ $(-)$

④ $(-)\times(-)$ ⇨ $(+)$

◆ **공통 부분이 있는 식의 전개**

공통 부분을 한 문자로 놓고 곱셈 공식을 이용하여 전개한다.

◆ **(　)(　)(　)(　)의 꼴의 전개**

일차식의 상수항의 합이 같아지도록 2개씩 짝을 지어 전개한 후 공통 부분을 한 문자로 놓고 전개한다.

◆ **제곱근의 계산** ($a>0$, $b>0$)

① $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+2\sqrt{ab}+b$

② $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a-2\sqrt{ab}+b$

③ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$

◆ **두 수의 곱이 1인 식의 변형**

① $a^2+\dfrac{1}{a^2}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-2$

② $a^2+\dfrac{1}{a^2}=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2+2$

③ $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2+4$

④ $\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-4$

02 다항식의 인수분해

1 인수분해

(1) 인수와 인수분해

① 인수: 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 때, 각각의 다항식을 처음 다항식의 인수라고 한다.

② 인수분해: 하나의 다항식을 두 개 이상의 인수의 곱으로 나타내는 것을 그 다항식을 인수분해 한다고 한다.

$$x^2+3x+2 \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} (x+1)(x+2)$$

(2) 공통인수를 이용한 인수분해

① 공통인수: 다항식의 각 항에 공통으로 들어 있는 인수

② 공통인수를 이용한 인수분해: 다항식의 각 항에 공통인수가 있을 때에는 분배법칙을 이용하여 공통인수로 묶어 내어 인수분해 한다. ⇨ $ma+mb=m(a+b)$

(3) 인수분해 공식

① $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

② $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

③ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

④ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

⑤ $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

(4) 완전제곱식: 다항식의 제곱으로 된 식 또는 이 식에 수를 곱한 식

예 $(a+b)^2$, $(2a+3)^2$, $(x-3)^2$, $5(2x-y)^2$

(5) x^2+ax+b가 완전제곱식이 되기 위한 조건

① b의 조건: $b=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ ② a의 조건: $a=\pm2\sqrt{b}$ (단, $b>0$)

2 복잡한 식의 인수분해

(1) 공통 부분이 있는 식의 인수분해: 공통 부분을 한 문자로 놓고 인수분해 한다.

(2) ( )( )( )( )$+k$의 꼴의 인수분해: 공통 부분이 생기도록 2개씩 짝을 지어 전개한 후 공통 부분을 한 문자로 놓고 인수분해 한다.

(3) 항이 4개인 식의 인수분해

① 공통인수가 나오도록 항을 2개씩 짝 지은 후 인수분해 한다.

② 완전제곱식이 되는 3개의 항과 나머지 1개의 항으로 나누어 A^2-B^2의 꼴로 변형한 후 인수분해 한다.

(4) 항이 5개 이상인 다항식의 인수분해: 차수가 가장 낮은 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다. 이때 차수가 같은 항은 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해 한다.

3 인수분해 공식의 활용

(1) 인수분해 공식을 이용한 수의 계산: 인수분해 공식을 이용할 수 있도록 수를 변형하여 계산한다.

① 공통인수로 묶어 계산한다. ⇨ $ma+mb=m(a+b)$ 이용

② 완전제곱식을 이용하여 계산한다.

⇨ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ 이용

③ 제곱의 차를 이용하여 계산한다. ⇨ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 이용

(2) 인수분해 공식을 이용한 식의 값: 주어진 식을 인수분해 한 후 문자에 수를 대입하여 값을 구한다.

1등급 비법노트

- 모든 다항식에서 1과 자기 자신은 그 다항식의 인수이다.
- 공통인수를 이용하여 인수분해 할 때에는 공통인수가 남지 않도록 모두 묶어 내어야 한다.
- 곱셈 공식에서 좌변과 우변을 바꾸면 인수분해 공식을 얻을 수 있다.
- 식에 주어진 값을 직접 대입하여 구할 수도 있지만 식을 인수분해 한 후 대입하여 계산하는 것이 더 편리하다.

개념 1 다항식의 곱셈

01

$(x-1)(x+6)-3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)$을 계산하면?

① $-10x-8$ ② $-10x-4$
✓③ $-2x^2-4$ ④ $-2x^2-10x-8$
⑤ $-2x^2-10x-4$

$(x-1)(x+6)-3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)$
$=x^2+5x-6-3\left(x^2+\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}\right)$
$=-2x^2-4$

02 출제 주의

$\left(5x+\frac{1}{2}a\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)$의 전개식에서 상수항이 2일 때, x의 계수는? (단, a는 상수이다.)

① -21 ✓② -11 ③ $-\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 19

$\left(5x+\frac{1}{2}a\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)=5x^2+\left(\frac{1}{2}a-1\right)x-\frac{1}{10}a$
이때 상수항이 2이므로
$-\frac{1}{10}a=2$ $\quad\therefore a=-20$
따라서 x의 계수는
$\frac{1}{2}a-1=-11$

03 서술형

$x+a$에 $4x+1$을 곱해야 할 것을 잘못하여 $x+4$를 곱했더니 $x^2-2x-24$가 되었다. 이때 바르게 계산한 결과를 구하시오. (단, a는 상수이다.) $4x^2-23x-6$

$(x+a)(x+4)=x^2+(a+4)x+4a$
$=x^2-2x-24$
이므로 $a+4=-2$, $4a=-24$
$\therefore a=-6$ ······ 60 %
따라서 바르게 계산하면
$(x-6)(4x+1)=4x^2-23x-6$ ······ 40 %

04

$(2x-4y+1)(2x+3y+1)$의 전개식에서 x의 계수를 a, y의 계수를 b, xy의 계수를 c라고 할 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① -6 ② -2 ✓③ 1
④ 3 ⑤ 7

$2x+1=A$라고 하면
$(2x-4y+1)(2x+3y+1)=(A-4y)(A+3y)$
$=A^2-Ay-12y^2$
$=(2x+1)^2-(2x+1)y-12y^2$
$=4x^2-2xy-12y^2+4x-y+1$
따라서 $a=4$, $b=-1$, $c=-2$이므로
$a+b+c=4+(-1)+(-2)=1$

05

$(x+1)(x-3)(x+2)(x+6)$의 전개식을 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$라고 할 때, $a+b-c-d+e$의 값은? (단, a, b, c, d, e는 상수이다.)

① -84 ② -70 ③ 2
✓④ 26 ⑤ 98

$(x+1)(x-3)(x+2)(x+6)=(x+1)(x+2)(x-3)(x+6)$
$=(x^2+3x+2)(x^2+3x-18)$ $x^2+3x=A$
$=(A+2)(A-18)$
$=A^2-16A-36$
$=(x^2+3x)^2-16(x^2+3x)-36$
$=x^4+6x^3-7x^2-48x-36$
따라서 $a=1$, $b=6$, $c=-7$, $d=-48$, $e=-36$이므로
$a+b-c-d+e=1+6-(-7)-(-48)+(-36)=26$

개념 2 곱셈 공식을 이용한 수의 계산과 식의 값

06

다음 보기 중 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하여 계산하면 편리한 것을 모두 고른 것은?

〈보기〉
ㄱ. $\left(\frac{33}{4}\right)^2$ ㄴ. 2.98^2
ㄷ. 51×56 ㄹ. 7.9×8.1
ㅁ. $(3\sqrt{3}-4)^2$ ㅂ. $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$

① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㄹ ③ ㄷ, ㄹ
④ ㄷ, ㅁ ✓⑤ ㄹ, ㅂ

ㄱ. $\left(\frac{33}{4}\right)^2=\left(8+\frac{1}{4}\right)^2$ ⇨ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
ㄴ. $2.98^2=(3-0.02)^2$ ⇨ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
ㄷ. $51\times56=(50+1)(50+6)$ ⇨ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
ㄹ. $7.9\times8.1=(8-0.1)(8+0.1)$ ⇨ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
ㅁ. $(3\sqrt{3}-4)^2$ ⇨ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
ㅂ. $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$ ⇨ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

07

$A=(a-4\sqrt{7})(3+2\sqrt{7})$일 때, A가 유리수가 되도록 하는 유리수 a의 값은?

① -12 ② -4 ③ -2
④ 3 ✓⑤ 6

$A=(a-4\sqrt{7})(3+2\sqrt{7})$
$=3a+(2a-12)\sqrt{7}-56$
$=3a-56+(2a-12)\sqrt{7}$
이때 A가 유리수가 되려면 무리수 부분이 0이어야 하므로
$2a-12=0$, $2a=12$
$\therefore a=6$

08 출제 주의

$\dfrac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{17}-4}+\dfrac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4}$를 계산하면?

① 33 ✓② 66
③ $34-8\sqrt{17}$ ④ $32+16\sqrt{17}$
⑤ $66-16\sqrt{17}$

$\dfrac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{17}-4}+\dfrac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4}=\dfrac{(\sqrt{17}+4)^2}{(\sqrt{17}-4)(\sqrt{17}+4)}+\dfrac{(\sqrt{17}-4)^2}{(\sqrt{17}+4)(\sqrt{17}-4)}$
$=33+8\sqrt{17}+33-8\sqrt{17}$
$=66$

09

$x=6-\sqrt{3}$일 때, $x^2-12x+27$의 값은?

① -33 ✓② -6 ③ 6
④ 33 ⑤ 60

$x=6-\sqrt{3}$에서 $x-6=-\sqrt{3}$
양변을 제곱하면
$x^2-12x+36=3$, $x^2-12x=-33$
$\therefore x^2-12x+27=-33+27=-6$

개념 3 곱셈 공식의 변형

10

$a-b=5\sqrt{2}$, $a^2+b^2=20$일 때, ab의 값은?

① -24 ② -21 ③ -18
✓④ -15 ⑤ -12

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$이므로
$20=(5\sqrt{2})^2+2ab$, $2ab=-30$
$\therefore ab=-15$

11

$x-y=8$, $xy=-4$일 때, $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$의 값은?

✓① -14 ② -12 ③ -10
④ 12 ⑤ 14

$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{(x-y)^2+2xy}{xy}=\dfrac{8^2+2\times(-4)}{-4}=-14$

12

$x+\dfrac{1}{x}=5$일 때, $x-\dfrac{1}{x}$의 값은? (단, $0<x<1$)

① $\sqrt{37}$ ② $\sqrt{29}$ ③ $\sqrt{21}$
✓④ $-\sqrt{21}$ ⑤ $-\sqrt{29}$

$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4=5^2-4=21$
이때 $0<x<1$에서 $\dfrac{1}{x}>1$이므로 $x-\dfrac{1}{x}<0$
$\therefore x-\dfrac{1}{x}=-\sqrt{21}$

01

$(4x^2-3x+1)(3x^3+5x^2+1)$을 전개하였을 때, 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합을 구하시오. 18

$(4x^2-3x+1)(3x^3+5x^2+1)$
$=12x^5+20x^4+4x^2-9x^4-15x^3-3x+3x^3+5x^2+1$
$=12x^5+11x^4-12x^3+9x^2-3x+1$
따라서 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은
$12+11+(-12)+9+(-3)+1=18$

02 서술형

$(x+1)(x-2)(x^2+ax+b)$의 전개식에서 x^3의 계수가 4이고 x의 계수가 1일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. -6

$(x+1)(x-2)(x^2+ax+b)$에서 x^3항은
$x\times(-2)\times x^2+1\times x\times x^2+x\times x\times ax=-2x^3+x^3+ax^3$
$=(a-1)x^3$
이때 x^3의 계수가 4이므로
$a-1=4$ $\therefore a=5$ ······ 40 %
$(x+1)(x-2)(x^2+ax+b)$에서 x항은
$x\times(-2)\times b+1\times x\times b+1\times(-2)\times ax=-2bx+bx-2ax$
$=(-2a-b)x$
이때 x의 계수가 1이므로
$-2a-b=1$, $-10-b=1$
$\therefore b=-11$ ······ 40 %
$\therefore a+b=5+(-11)=-6$ ······ 20 %

03

$abc=-1$일 때,

$$\frac{a+b}{(a+1)(b+1)}+\frac{b+c}{(b+1)(c+1)}+\frac{c+a}{(c+1)(a+1)}$$의 값은?

① 1 ② 2 ✓ ③ 3
④ 4 ⑤ 5

$\frac{a+b}{(a+1)(b+1)}+\frac{b+c}{(b+1)(c+1)}+\frac{c+a}{(c+1)(a+1)}$
$=\frac{(a+b)(c+1)+(b+c)(a+1)+(c+a)(b+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}$
$=\frac{2(ab+bc+ca+a+b+c)}{abc+ab+bc+ca+a+b+c+1}$
$=\frac{2(ab+bc+ca+a+b+c)}{-1+ab+bc+ca+a+b+c+1}$
$=\frac{2(ab+bc+ca+a+b+c)}{ab+bc+ca+a+b+c}=2$

04 서술형

세 자연수 a, b, c에 대하여 $(ax-b)(4x+c)$를 전개하면 $dx^2+2x-21$일 때, d의 값이 될 수 있는 모든 자연수의 합을 구하시오. 392

$(ax-b)(4x+c)=4ax^2+(ac-4b)x-bc=dx^2+2x-21$
이므로 $4a=d$, $ac-4b=2$, $-bc=-21$ ······ 30 %
(i) $b=1$, $c=21$일 때, $21a-4=2$에서 $a=\frac{2}{7}$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $b=3$, $c=7$일 때, $7a-12=2$, $7a=14$ $\therefore a=2$, $d=4\times2=8$
(iii) $b=7$, $c=3$일 때, $3a-28=2$, $3a=30$ $\therefore a=10$, $d=4\times10=40$
(iv) $b=21$, $c=1$일 때, $a-84=2$ $\therefore a=86$, $d=4\times86=344$
(i)~(iv)에 의하여 $d=8$, 40, 344 ······ 50 %
따라서 모든 자연수 d의 값의 합은 $8+40+344=392$ ······ 20 %

05

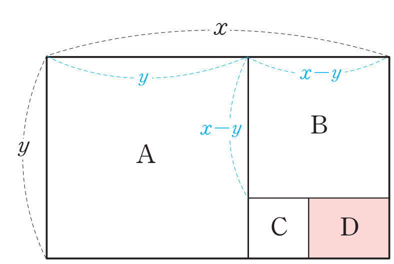
자연수 m을 8로 나누면 나머지가 5이고, 자연수 n을 4로 나누면 나머지가 2라고 한다. m^2+n^2을 16으로 나누었을 때의 나머지는?

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ✓ ⑤ 15

자연수 m을 8로 나누었을 때의 몫을 a (a는 상수)라고 하면 나머지가 5이므로
$m=8a+5$
자연수 n을 4로 나누었을 때의 몫을 b (b는 상수)라고 하면 나머지가 2이므로
$n=4b+2$
$\therefore m^2+n^2=(8a+5)^2+(4b+2)^2$
$=64a^2+80a+25+16b^2+16b+4$
$=16(4a^2+5a+b^2+b+1)+13$
따라서 m^2+n^2을 16으로 나누었을 때의 나머지는 13이다.

06 출제 주의

다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 x, y인 직사각형 모양의 종이를 3개의 정사각형 A, B, C와 1개의 직사각형 D로 나누었다. 직사각형 D의 넓이를 x, y에 대한 식으로 나타내면?

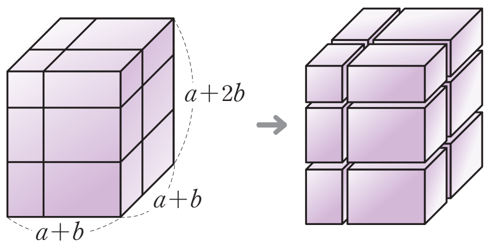


① $-2x^2+5xy-4y^2$ ② $-2x^2+7xy-4y^2$
③ $-2x^2+5xy-6y^2$ ④ $-2x^2+7xy-6y^2$ ✓
⑤ $-2x^2+7xy+6y^2$

(정사각형 B의 한 변의 길이)$=x-y$
(정사각형 C의 한 변의 길이)$=$(직사각형 D의 세로의 길이)
$=y-(x-y)=2y-x$
(직사각형 D의 가로의 길이)$=(x-y)-(2y-x)=2x-3y$
따라서 직사각형 D의 넓이는
$(2x-3y)(2y-x)=-2x^2+7xy-6y^2$

07

서로소인 두 자연수 a, b에 대하여 세 모서리의 길이가 각각 $a+b$, $a+b$, $a+2b$인 직육면체가 있다. 이 직육면체를 다음 그림과 같이 각 모서리의 길이가 a 또는 b가 되도록 12개의 작은 직육면체로 나누면 부피가 150인 직육면체가 5개일 때, $a+2b$의 값을 구하시오. **16**



나누기 전의 직육면체의 부피는 $(a+b)^2(a+2b)=a^3+4a^2b+5ab^2+2b^3$

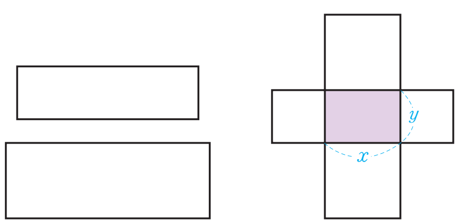
이므로 12개의 작은 직육면체의 개수는 부피가 a^3인 직육면체 1, 부피가 a^2b인 직육면체 4, 부피가 ab^2인 직육면체 5, 부피가 b^3인 직육면체 2

부피가 150인 직육면체가 5개이므로 $ab^2=150$　　$\therefore a=6,\ b=5$

$\therefore a+2b=6+2\times5=16$

08

[그림 1]의 두 직사각형의 둘레의 길이의 합은 56 cm이다. [그림 1]의 두 직사각형을 [그림 2]와 같이 겹쳐 놓았더니 가운데 직사각형(색칠한 부분)의 각 변을 한 변으로 하는 4개의 정사각형이 만들어졌다.



[그림 1]　　[그림 2]

[그림 2]의 5개의 사각형의 넓이의 합이 62 cm²일 때, 가운데 직사각형의 넓이를 구하시오. **12 cm²**

[그림 1]의 작은 직사각형의 둘레의 길이는 $2\{(x+2y)+y\}=2x+6y$

[그림 1]의 큰 직사각형의 둘레의 길이는 $2\{(2x+y)+x\}=6x+2y$

이때 [그림 1]의 두 직사각형의 둘레의 길이의 합이 56 cm이므로

$2x+6y+6x+2y=8x+8y=56$　　$\therefore x+y=7$

또, [그림 2]의 5개의 사각형의 넓이의 합이 62 cm²이므로

$2x^2+2y^2+xy=62$　　$\therefore 2(x^2+y^2)+xy=62$　　⋯⋯ ㉠

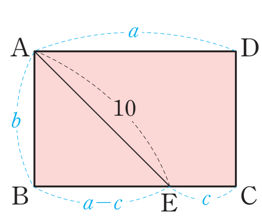
한편, $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=49-2xy$이므로 이 식을 ㉠에 대입하면

$2(49-2xy)+xy=62,\ 98-3xy=62$

$-3xy=-36$　　$\therefore xy=12$

09

오른쪽 그림과 같이 넓이가 160인 직사각형이 있다. $\overline{AE}=10$이고 꼭짓점 D에서 두 꼭짓점 A, B를 거쳐 꼭짓점 E까지의 길이는 선분 AE의 길이보다 12만큼 더 길고, 꼭짓점 D에서 꼭짓점 C를 거쳐 꼭짓점 E까지의 거리는 선분 AE의 길이보다 4만큼 더 길다. 이때 대각선 AC의 길이를 구하시오. **2**



직사각형 ABCD의 넓이가 160이므로 $ab=160$

또, 주어진 조건에서 $a+b+a-c=10+12,\ b+c=10+4$

$\therefore 2a+b-c=22$　　⋯⋯ ㉠

　$b+c=14$　　⋯⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면 $2a+2b=36$　　$\therefore a+b=18$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a+b)^2-2ab}=\sqrt{18^2-2\times160}=\sqrt{4}=2$

10

$(2^{44}+1)(5^{46}+1)$은 몇 자리 수인지 구하시오. **46**

$(2^{44}+1)(5^{46}+1)=2^{44}\times5^{46}+2^{44}+5^{46}+1$

$=25\times10^{44}+5^{46}+2^{44}+1$

즉, 10의 거듭제곱이 포함된 항 $25\times10^{44}=2.5\times10^{45}$이 46자리의 수이므로 $(2^{44}+1)(5^{46}+1)$은 46자리 수이다.

11

197^2+1191을 소인수분해하면 $2^a\times5^b$일 때, 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

✓① 10　　② 11　　③ 12

④ 13　　⑤ 14

$197^2+1191=(200-3)^2+(1200-9)$

$=40000-1200+9+1200-9$

$=40000$

$=2^6\times5^4$

따라서 $a=6,\ b=4$이므로

$a+b=6+4=10$

12

$(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$을 전개하시오. $\mathbf{\dfrac{3^{16}-1}{2}}$

$3-1=2$이므로

$(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)=\frac{1}{2}(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$

$=\frac{1}{2}(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$

$=\frac{1}{2}(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)$

$=\frac{1}{2}(3^8-1)(3^8+1)$

$=\frac{3^{16}-1}{2}$

13

자연수 $(10^{10}-3)^2$은 m자리 수이고, 각 자리의 숫자들의 합은 n일 때, $m+n$의 값은?

① 110 ② 111 ③ 112
④ 113 ✓⑤ 114

$(10^{10}-3)^2=(10^{10})^2-2\times3\times10^{10}+3^2=10^{20}-6\times10^{10}+9$

이때 $10^{20}=1\underbrace{000\cdots0}_{0\text{이 }20\text{개}}$이고 $10^{10}=1\underbrace{000\cdots0}_{0\text{이 }10\text{개}}$이므로

$10^{20}-6\times10^{10}+9=\underbrace{999\cdots9}_{9\text{가 }9\text{개}}4\underbrace{000\cdots0}_{0\text{이 }9\text{개}}9$

즉, $(10^{10}-3)^2$은 20자리 수이고 각 자리 숫자들의 합은 $9\times9+4+9=94$

따라서 $m=20$, $n=94$이므로

$m+n=20+94=114$

14

$\{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n\}^2-\{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n\}^2$의 값을 구하시오. 4

$(3+2\sqrt{2})^n=A$, $(3-2\sqrt{2})^n=B$라고 하면 주어진 식은

$$\begin{aligned}(A+B)^2-(A-B)^2&=A^2+2AB+B^2-(A^2-2AB+B^2)\\&=4AB\\&=4(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n\\&=4\{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\}^n\\&=4\times1^n=4\end{aligned}$$

15

두 유리수 a, b에 대하여
$(2\sqrt{2}-3)^{10}(2\sqrt{2}+3)^{12}=a+b\sqrt{2}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. 29

$$\begin{aligned}(2\sqrt{2}-3)^{10}(2\sqrt{2}+3)^{12}&=\{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)\}^{10}(2\sqrt{2}+3)^2\\&=(-1)^{10}(17+12\sqrt{2})\\&=17+12\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 $a=17$, $b=12$이므로

$a+b=17+12=29$

16

두 자연수 k, n에 대하여 $(\sqrt{1295}+\sqrt{k})(\sqrt{1295}-\sqrt{k})$가 n^4의 양의 제곱근이다. n^4의 양의 제곱근이 최대일 때의 k의 값은?

✓① 70 ② 87 ③ 105
④ 122 ⑤ 139

$(\sqrt{1295}+\sqrt{k})(\sqrt{1295}-\sqrt{k})=1295-k$

이때 n^4의 양의 제곱근은 $\sqrt{n^4}=n^2$이므로 $n^2=1295-k$

한편, k, n^2은 자연수이고 $36^2=1296$이므로 $1295-k<36^2$, 즉 $n<36$이어야 한다.

따라서 $n^2=1295-k$의 최댓값은 35^2이고, 그때의 k의 값은

$35^2=1295-k$ $\therefore$ $k=1295-35^2=1295-1225=70$

17 서술형

$(\sqrt{101}-2\sqrt{26})^3=k$일 때, $(\sqrt{101}+2\sqrt{26})^3$의 값을 k를 이용하여 나타내시오. $-\dfrac{27}{k}$

$$\begin{aligned}(\sqrt{101}+2\sqrt{26})^3\times k&=(\sqrt{101}+2\sqrt{26})^3(\sqrt{101}-2\sqrt{26})^3\\&=(\sqrt{101}+\sqrt{104})^3(\sqrt{101}-\sqrt{104})^3\\&=\{(\sqrt{101}+\sqrt{104})(\sqrt{101}-\sqrt{104})\}^3\\&=(-3)^3=-27\end{aligned}$$ ······ 60 %

따라서 $(\sqrt{101}+2\sqrt{26})^3\times k=-27$이고, $k\neq0$이므로

$(\sqrt{101}+2\sqrt{26})^3=-\dfrac{27}{k}$ ······ 40 %

18

$a+b=4$, $ab=3$, $x+y=6$, $xy=-2$일 때, $(ax+by)^2+(bx+ay)^2$의 값을 구하시오. 376

$a+b=4$, $ab=3$이므로 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4^2-2\times3=10$

$x+y=6$, $xy=-2$이므로 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=6^2-2\times(-2)=40$

$$\begin{aligned}\therefore\ (ax+by)^2+(bx+ay)^2&=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+b^2x^2+2abxy+a^2y^2\\&=a^2x^2+4abxy+b^2y^2+b^2x^2+a^2y^2\\&=a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)+4\times3\times(-2)\\&=40a^2+40b^2-24\\&=40(a^2+b^2)-24\\&=376\end{aligned}$$

19

$x+y=\sqrt{7\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, $x-y=\sqrt{7\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ 일 때, $x^2+3xy+y^2$의 값을 구하시오. $9\sqrt{5}-3\sqrt{3}$

$x+y=\sqrt{7\sqrt{5}-\sqrt{3}}$의 양변을 제곱하면
$x^2+2xy+y^2=7\sqrt{5}-\sqrt{3}$ …… ㉠
$x-y=\sqrt{7\sqrt{3}-\sqrt{5}}$의 양변을 제곱하면
$x^2-2xy+y^2=7\sqrt{3}-\sqrt{5}$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면
$2x^2+2y^2=6\sqrt{3}+6\sqrt{5}$ $\quad\therefore x^2+y^2=3\sqrt{3}+3\sqrt{5}$
㉠-㉡을 하면
$4xy=8\sqrt{5}-8\sqrt{3}$ $\quad\therefore xy=2\sqrt{5}-2\sqrt{3}$
$\therefore x^2+3xy+y^2=(x^2+y^2)+3xy$
$=3\sqrt{3}+3\sqrt{5}+3(2\sqrt{5}-2\sqrt{3})$
$=9\sqrt{5}-3\sqrt{3}$

20

$x>1$이고 $x+\frac{1}{x}=\sqrt{7}$일 때, $x-\frac{1}{x}$의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ✓⑤ $\sqrt{3}$

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=(\sqrt{7})^2-2=5$
$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=5-2=3$
이때 $x>1$에서 $0<\frac{1}{x}<1$이므로 $x-\frac{1}{x}>0$
$\therefore x-\frac{1}{x}=\sqrt{3}$

21 출제 주의

$0<x<1$인 실수 x가 $x^2+\frac{1}{x^2}=5$를 만족시킬 때, x의 값은?

① $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{3}$ ✓③ $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$
④ $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\sqrt{7}+\sqrt{3}$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=5+2=7$
이때 $x>0$이므로 $x+\frac{1}{x}>0$
$\therefore x+\frac{1}{x}=\sqrt{7}$ …… ㉠
또, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=5-2=3$
이때 $0<x<1$에서 $\frac{1}{x}>1$이므로 $x-\frac{1}{x}<0$
$\therefore x-\frac{1}{x}=-\sqrt{3}$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면
$2x=\sqrt{7}-\sqrt{3}$ $\quad\therefore x=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$

22

$x>1$이고 $x^2+\frac{1}{x^2}=34$일 때, $x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$의 값은?

✓① $4\sqrt{2}-2$ ② $4\sqrt{2}-1$ ③ $4\sqrt{2}$
④ $4\sqrt{2}+1$ ⑤ $4\sqrt{2}+2$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=34-2=32$
이때 $x>1$에서 $0<\frac{1}{x}<1$이므로 $x-\frac{1}{x}>0$
$\therefore x-\frac{1}{x}=4\sqrt{2}$
또, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=34+2=36$이므로 $x+\frac{1}{x}=6$
한편, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$이므로
$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=(\sqrt{x})^2+\frac{1}{(\sqrt{x})^2}-2=x+\frac{1}{x}-2=6-2=4$
이때 $x>1$에서 $\sqrt{x}>1$이고, $0<\frac{1}{\sqrt{x}}<1$이므로 $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}>0$
$\therefore \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=2$
$\therefore x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=x-\frac{1}{x}-\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=4\sqrt{2}-2$

23

$x^2-3x+1=0$일 때, $x^4-5x^2-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^4}$의 값을 구하시오. 12

$x^2-3x+1=0$의 양변을 x로 나누면
$x-3+\frac{1}{x}=0$ $\quad\therefore x+\frac{1}{x}=3$
이때
$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$,
$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=7^2-2=47$
이므로
$x^4-5x^2-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^4}=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-5\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$
$=47-5\times7=12$

24 출제 주의

$(x+2)^2=4$일 때, $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)$의 값은?

① 90 ② 95 ③ 100
✓④ 105 ⑤ 110

$(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)=(x-1)(x+5)(x-3)(x+7)$
$=(x^2+4x-5)(x^2+4x-21)$
이때 $(x+2)^2=4$에서 $x^2+4x+4=4$
즉, $x^2+4x=0$이므로
$(x^2+4x-5)(x^2+4x-21)=(0-5)(0-21)=105$

25

$x-\dfrac{10}{x}=2$일 때, $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)$의 값은?

① -18　② -16　③ -14
④ -12　✓⑤ -10

$x-\dfrac{10}{x}=2$의 양변에 x를 곱하면

$x^2-10=2x$　$\therefore x^2-2x=10$

$\therefore (x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=(x+2)(x-4)(x+3)(x-5)$
$=(x^2-2x-8)(x^2-2x-15)$
$=(10-8)(10-15)$
$=2\times(-5)=-10$

26 서술형

$x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$, $y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$일 때, $\dfrac{x^2+y^2-xy}{x-y}$의 값을 구하시오. $-\dfrac{13\sqrt{3}}{6}$

$x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$, $y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$ ············ 30 %

따라서

$x+y=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=4$

$x-y=(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$

$xy=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$ ············ 30 %

$\therefore \dfrac{x^2+y^2-xy}{x-y}=\dfrac{(x+y)^2-3xy}{x-y}$
$=\dfrac{4^2-3\times1}{-2\sqrt{3}}$
$=-\dfrac{13}{2\sqrt{3}}=-\dfrac{13\sqrt{3}}{6}$ ············ 40 %

27

$x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $y=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이고
$x^7y^5-x^3y^5-x^2y-y=a\sqrt{10}+b\sqrt{15}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. -2

$x+y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$, $xy=\left(\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)=1$

$\therefore x^5y^5=1$, $x^3y^3=1$

$x^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3}$, $y^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{7+2\sqrt{10}}{3}$

$\therefore x^2-y^2=\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3}-\dfrac{7+2\sqrt{10}}{3}=\dfrac{-4\sqrt{10}}{3}$

$\therefore x^7y^5-x^3y^5-x^2y-y=x^2\times x^5y^5-y^2\times x^3y^3-x\times xy-y$
$=x^2-y^2-(x+y)$
$=\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3}-\dfrac{7+2\sqrt{10}}{3}-\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$
$=\dfrac{-4\sqrt{10}}{3}-\dfrac{2\sqrt{15}}{3}=a\sqrt{10}+b\sqrt{15}$

따라서 $a=-\dfrac{4}{3}$, $b=-\dfrac{2}{3}$이므로 $a+b=-\dfrac{4}{3}+\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-2$

28 출제 주의

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$일 때,
$\dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(3)}+\cdots+\dfrac{1}{f(168)}$의 값을 구하시오. 12

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$이므로

$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$
$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$
$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$\therefore \dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(3)}+\cdots+\dfrac{1}{f(168)}$
$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{169}-\sqrt{168})$
$=\sqrt{169}-1$
$=13-1=12$

29

$x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$일 때, $(x^2-10x+4)(x^2-10x)-5$의 값을 구하시오. -8

$x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=5+2\sqrt{6}$에서 $x-5=2\sqrt{6}$

양변을 제곱하면

$x^2-10x+25=24$　$\therefore x^2-10x=-1$

$\therefore (x^2-10x+4)(x^2-10x)-5=(-1+4)\times(-1)-5$
$=-8$

30

세 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=10$이고
$a^2+b^2-c^2=20$일 때, $ab+10c$의 값을 구하시오. 40

$a+b+c=10$에서 $a+b=10-c$　…… ㉠

㉠의 양변을 제곱하면 $a^2+2ab+b^2=c^2-20c+100$

$2ab+20c=c^2+100-a^2-b^2$
$=100-(a^2+b^2-c^2)$
$=100-20=80$

즉, $2ab+20c=80$이므로

$ab+10c=40$

개념 1 인수분해

01

다음 중 $x^2y-12xy^2+36y^3$의 인수가 아닌 것을 모두 고르면? (정답 2개)

✓① x ② y ✓③ $x-6$

④ $y(x-6y)$ ⑤ $(x-6y)^2$

$x^2y-12xy^2+36y^3=y(x^2-12xy+36y^2)$

$=y(x-6y)^2$

따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ①, ③이다.

02

$(x+2)(x^2+2)+(2x+4)\left(\frac{1}{2}x^2-5\right)$를 인수분해 하면?

① $(x+2)^2(x-4)$ ② $(x+2)^2(x-2)$

✓③ $2(x+2)^2(x-2)$ ④ $2(x+2)^2(x+4)$

⑤ $4(x+2)^2(x+2)$

$(x+2)(x^2+2)+(2x+4)\left(\frac{1}{2}x^2-5\right)=(x+2)(x^2+2)+2(x+2)\left(\frac{1}{2}x^2-5\right)$

$=(x+2)(x^2+2+x^2-10)$

$=(x+2)(2x^2-8)$

$=2(x+2)(x^2-4)$

$=2(x+2)^2(x-2)$

03

$x^2+Ax-8=(x+B)(x+C)$일 때, 다음 중 A의 값이 될 수 없는 것은? (단, A, B, C는 정수이다.)

① -7 ② -2 ③ 2

④ 7 ✓⑤ 9

$x^2+Ax-8=(x+B)(x+C)=x^2+(B+C)x+BC$에서 $A=B+C$, $-8=BC$

곱이 -8인 두 정수 B, C를 순서쌍 (B, C)로 나타내면

$(-1, 8)$, $(1, -8)$, $(-2, 4)$, $(2, -4)$, $(-4, 2)$, $(4, -2)$, $(-8, 1)$, $(8, -1)$

이때 $A=B+C$이므로 $A=7, -7, 2, -2$

04 출제 주의

$(x-4)(x-5)+m$이 완전제곱식이 되도록 하는 상수 m의 값은?

✓① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 4

④ $\frac{161}{4}$ ⑤ 61

$(x-4)(x-5)+m=x^2-9x+20+m$

이 식이 완전제곱식이 되어야 하므로

$20+m=\left(\frac{-9}{2}\right)^2=\frac{81}{4}$ $\therefore m=\frac{1}{4}$

05

$-3<a<0$일 때, $\sqrt{a^2}-\sqrt{a^2-4a+4}+\sqrt{a^2+6a+9}$를 간단히 하면?

① $-a-5$ ② $-a-1$ ③ $a-5$

✓④ $a+1$ ⑤ $a+5$

$-3<a<0$이므로 $a<0$, $a-2<0$, $a+3>0$

$\therefore \sqrt{a^2}-\sqrt{a^2-4a+4}+\sqrt{a^2+6a+9}$

$=\sqrt{a^2}-\sqrt{(a-2)^2}+\sqrt{(a+3)^2}$

$=-a-\{-(a-2)\}+a+3$

$=a+1$

06

$12x^2-axy-14y^2$이 $3x+2y$로 나누어떨어질 때, 상수 a의 값은?

① -13 ② -7 ③ -3

④ 7 ✓⑤ 13

$12x^2-axy-14y^2=(3x+2y)(4x+ky)$ (k는 상수)라고 하면

$12x^2-axy-14y^2=(3x+2y)(4x+ky)$

$=12x^2+(3k+8)xy+2ky^2$

따라서 $-a=3k+8$, $-14=2k$이므로

$k=-7$, $a=13$

07 서술형

두 다항식 $2x^2+ax-20$, $\frac{1}{8}x^2-2b^2$의 공통인수가 $x-4$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. -2 (단, $b>0$)

$2x^2+ax-20=(x-4)(2x+c)$ (c는 상수)라고 하면
$2x^2+ax-20=2x^2+(c-8)x-4c$
따라서 $a=c-8$, $-20=-4c$이므로 $c=5$, $a=-3$ ··· 40 %
$\frac{1}{8}x^2-2b^2=(x-4)\left(\frac{1}{8}x+d\right)$ (d는 상수)라고 하면
$\frac{1}{8}x^2-2b^2=\frac{1}{8}x^2+\left(d-\frac{1}{2}\right)x-4d$
따라서 $d-\frac{1}{2}=0$, $-2b^2=-4d$이므로 $d=\frac{1}{2}$, $-2b^2=-2$ $\quad\therefore b^2=1$
이때 $b>0$이므로 $b=1$ ··· 50 %
$\therefore a+b=-3+1=-2$ ··· 10 %

08 출제 주의

x^2의 계수가 1인 어떤 이차식을 도하는 x의 계수를 잘못 보아 $(x+1)(x-10)$으로 인수분해 하였고, 서연이는 상수항을 잘못 보아 $(x+1)(x+2)$로 인수분해 하였다. 이때 처음 이차식을 바르게 인수분해 하면?

① $(x-3)(x-5)$
② $(x-3)(x+5)$
③ $(x-2)(x-5)$
✓④ $(x-2)(x+5)$
⑤ $(x+2)(x-3)$

도하는 상수항을 바르게 보았으므로 $(x+1)(x-10)=x^2-9x-10$에서 처음 이차식의 상수항은 -10이다.
또, 서연이는 x의 계수를 바르게 보았으므로 $(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$에서 처음 이차식의 x의 계수는 3이다.
따라서 처음 이차식은 $x^2+3x-10$이므로 바르게 인수분해 하면
$x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$

09

부피가 $(4x^2-324)\,\text{cm}^3$이고 높이가 4 cm인 직육면체의 밑면의 가로의 길이는 세로의 길이보다 18 cm만큼 길다. 이때 직육면체의 밑면의 가로의 길이와 직육면체의 겉넓이를 x로 나타낸 것은?

	가로의 길이	직육면체의 겉넓이
①	$(x-9)$ cm	$(x^2+8x-81)\,\text{cm}^2$
②	$(x-9)$ cm	$(2x^2+16x-162)\,\text{cm}^2$
③	$(x+9)$ cm	$(x^2+8x-81)\,\text{cm}^2$
④	$(x+9)$ cm	$(2x^2+8x-81)\,\text{cm}^2$
✓⑤	$(x+9)$ cm	$(2x^2+16x-162)\,\text{cm}^2$

$4x^2-324=4(x^2-81)=4(x+9)(x-9)$
따라서 직육면체의 밑면의 가로의 길이는 $(x+9)$ cm, 세로의 길이는 $(x-9)$ cm이므로 구하는 겉넓이는
$2\{(x+9)(x-9)+4(x+9)+4(x-9)\}=2(x^2-81+4x+36+4x-36)$
$=2(x^2+8x-81)$
$=2x^2+16x-162(\text{cm}^2)$

개념 2 복잡한 식의 인수분해

10

$(3x+y)(3x+y-2)-8$은 x의 계수가 3인 두 일차식의 곱으로 인수분해 된다. 이때 두 일차식의 합은?

① $6x-4y-2$
② $6x-2y-4$
③ $6x-2y-2$
✓④ $6x+2y-2$
⑤ $6x+2y-4$

$3x+y=A$라고 하면
$(3x+y)(3x+y-2)-8=A(A-2)-8$
$=A^2-2A-8$
$=(A+2)(A-4)$
$=(3x+y+2)(3x+y-4)$
따라서 두 일차식은 $3x+y+2$, $3x+y-4$이므로 두 일차식의 합은
$(3x+y+2)+(3x+y-4)=6x+2y-2$

11

$(x+2)^2+3(x+2)y-4y^2$을 인수분해 하면 $(x+ay+b)(x+cy+d)$일 때, 네 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하시오. (단, $a<0$) 7

$x+2=A$라고 하면
$(x+2)^2+3(x+2)y-4y^2=A^2+3Ay-4y^2$
$=(A-y)(A+4y)$
$=(x-y+2)(x+4y+2)$
이때 $a<0$이므로 $a=-1$, $b=2$, $c=4$, $d=2$
$\therefore a+b+c+d=-1+2+4+2=7$

12

$x(x-2)(x-4)(x-6)+15$를 인수분해 하면?

① $(x^2-6x)(x^2-6x+8)$
② $(x^2-6x-3)(x^2-6x-5)$
③ $(x^2-6x+3)(x^2-6x-5)$
✓④ $(x-1)(x-5)(x^2-6x+3)$
⑤ $(x+1)(x+5)(x^2-6x+3)$

$x(x-2)(x-4)(x-6)+15=x(x-6)(x-2)(x-4)+15$
$=(x^2-6x)(x^2-6x+8)+15$
이때 $x^2-6x=A$라고 하면
$A(A+8)+15=A^2+8A+15$
$=(A+3)(A+5)$
$=(x^2-6x+3)(x^2-6x+5)$
$=(x-1)(x-5)(x^2-6x+3)$

13

다음 보기에서 다항식 $3x^2y+5x^2-12y-20$의 인수인 것은 모두 몇 개인가?

〈 보기 〉

ㄱ. $x-2$	ㄴ. $x+2$	ㄷ. $x-4$
ㄹ. $3y-5$	ㅁ. $3y+5$	ㅂ. x^2-4
ㅅ. x^2+2	ㅇ. $(x+2)(3y-5)$	
ㅈ. $(x-2)(3y+5)$		

① 3개 ② 4개 ✓③ 5개
④ 6개 ⑤ 7개

$3x^2y+5x^2-12y-20=x^2(3y+5)-4(3y+5)$
$=(3y+5)(x^2-4)$
$=(3y+5)(x+2)(x-2)$

14 서술형

두 다항식 x^2-y^2-4x+4, $x^2-y^2+x-5y-6$의 공통인수를 구하시오. $x-y-2$

$x^2-y^2-4x+4=(x^2-4x+4)-y^2$
$=(x-2)^2-y^2$
$=(x+y-2)(x-y-2)$ ······ 40 %
$x^2-y^2+x-5y-6=x^2+x-(y^2+5y+6)$
$=x^2+x-(y+3)(y+2)$
$=(x+y+3)\{x-(y+2)\}$
$=(x+y+3)(x-y-2)$ ······ 50 %

$1 \quad y+3 \longrightarrow y+3$
$1 \quad -(y+2) \longrightarrow \underline{-y-2}\ (+$
1

따라서 주어진 두 다항식의 공통인수는 $x-y-2$이다. ······ 10 %

개념 3 인수분해 공식의 활용

15 출제 주의

다음 두 수 A, B를 인수분해 공식을 이용하여 계산할 때, AB의 값은?

$$A=99^2-6\times99-7,\ B=7.5^2\times\frac{1}{200}-2.5^2\times\frac{1}{200}$$

✓① 2300 ② 2400 ③ 4500
④ 9000 ⑤ 9200

$A=99^2-6\times99-7=(99+1)(99-7)=100\times92=9200$
$B=7.5^2\times\frac{1}{200}-2.5^2\times\frac{1}{200}=(7.5^2-2.5^2)\times\frac{1}{200}$
$=(7.5+2.5)(7.5-2.5)\times\frac{1}{200}=10\times5\times\frac{1}{200}=\frac{1}{4}$
$\therefore AB=9200\times\frac{1}{4}=2300$

16

$x=\frac{1}{4+\sqrt{15}}$, $y=\frac{1}{4-\sqrt{15}}$일 때, x^2y-xy^2의 값은?

① $-\sqrt{15}$ ✓② $-2\sqrt{15}$ ③ $4-\sqrt{15}$
④ $8-2\sqrt{15}$ ⑤ $8-4\sqrt{15}$

$x=\frac{1}{4+\sqrt{15}}=4-\sqrt{15}$,
$y=\frac{1}{4-\sqrt{15}}=4+\sqrt{15}$
이므로
$x-y=(4-\sqrt{15})-(4+\sqrt{15})=-2\sqrt{15}$,
$xy=(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})=1$
$\therefore x^2y-xy^2=xy(x-y)=-2\sqrt{15}$

17 출제 주의

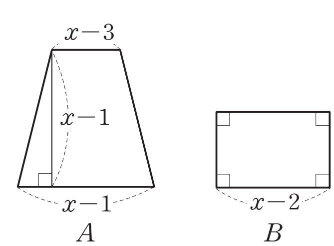
$x=7-\sqrt{3}$일 때, $(x-4)^2-6(x-4)+9$의 값은?

① -3 ② -2 ✓③ 3
④ 7 ⑤ 9

$x-4=A$라고 하면
$(x-4)^2-6(x-4)+9=A^2-6A+9$
$=(A-3)^2$
$=(x-7)^2$
$=(-\sqrt{3})^2=3$

18

다음 그림에서 사다리꼴 A와 직사각형 B의 넓이가 같을 때, 직사각형 B의 둘레의 길이를 구하시오. $4x-6$



(사다리꼴 A의 넓이)$=\frac{1}{2}\{(x-3)+(x-1)\}(x-1)$
$=\frac{1}{2}(2x-4)(x-1)$
$=(x-2)(x-1)$
직사각형 B는 사다리꼴 A와 넓이가 같고, 직사각형 B의 가로의 길이가 $x-2$이므로 세로의 길이는 $x-1$이다.
따라서 직사각형 B의 둘레의 길이는
$2(x-2+x-1)=2(2x-3)=4x-6$

01

다음은 근호 안에 근호가 있는 무리수 $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ 를 하나의 근호만 사용하여 나타내는 과정이다. 이 과정을 보고 $\sqrt{1+\sqrt{12+8\sqrt{2}}}$ 를 하나의 근호만 사용하여 나타내시오. $\sqrt{2}+1$

$$\begin{aligned}\sqrt{8-2\sqrt{15}}&=\sqrt{(5+3)-2\sqrt{5}\sqrt{3}}\\&=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}\\&=\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}=\sqrt{5}-\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\sqrt{12+8\sqrt{2}}}&=\sqrt{1+\sqrt{12+2\sqrt{32}}}\\&=\sqrt{1+\sqrt{(\sqrt{8}+\sqrt{4})^2}}\\&=\sqrt{3+2\sqrt{2}}\\&=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}\\&=\sqrt{2}+1\end{aligned}$$

02 출제 주의

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+k$가 완전제곱식이 되도록 하는 상수 k에 대하여 $10k^2$의 값을 구하시오. 10

$$\begin{aligned}&(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+k\\&=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)+k\\&=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+k\\&=(A+4)(A+6)+k \quad x^2+5x=A\\&=A^2+10A+24+k \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

㉠이 완전제곱식이 되려면 $24+k=\left(\frac{10}{2}\right)^2=25$이어야 하므로 $k=1$

$\therefore\ 10k^2=10\times1^2=10$

03

$0<x<1$일 때, $\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4}-\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4}$를 간단히 하시오. $2x$

$0<x<1$에서 $\frac{1}{x}>1$이므로 $x+\frac{1}{x}>0,\ x-\frac{1}{x}<0$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4}-\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4}&=\sqrt{x^2+2+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{x^2-2+\frac{1}{x^2}}\\&=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}-\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\\&=\left|x+\frac{1}{x}\right|-\left|x-\frac{1}{x}\right|\\&=x+\frac{1}{x}-\left\{-\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\}\\&=x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}=2x\end{aligned}$$

04

자연수 n에 대하여 $f(n)=1-\frac{1}{n^2}$일 때, $f(2)f(3)f(4)\times\cdots\times f(12)$의 값은?

① $\frac{6}{11}$　② $\frac{13}{22}$　③ $\frac{11}{23}$
④ $\frac{12}{23}$　✓⑤ $\frac{13}{24}$

$$\begin{aligned}&f(2)f(3)f(4)\times\cdots\times f(12)\\&=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{12^2}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{12}\right)\left(1+\frac{1}{12}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{11}{12}\times\frac{13}{12}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{13}{12}=\frac{13}{24}\end{aligned}$$

05 출제 주의

$x>y>0$인 임의의 두 양수 x, y에 대하여 $f(x,\ y)=\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-y^2}}$으로 정의할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $f(x,\ y)=\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-y^2}}$을 간단히 하시오. $f(x,\ y)=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}$

(2) $f(2,\ 1)+f(4,\ 1)+f(6,\ 1)+\cdots+f(80,\ 1)$의 값을 구하시오. 8

(1) $$\begin{aligned}f(x,\ y)&=\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-y^2}}\\&=\sqrt{2x-2\sqrt{(x+y)(x-y)}}\\&=\sqrt{(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})^2}\\&=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}&f(2,\ 1)+f(4,\ 1)+f(6,\ 1)+\cdots+f(80,\ 1)\\&=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{79})\\&=\sqrt{81}-1\\&=9-1=8\end{aligned}$$

06

다항식 x^3-ax+6을 인수분해 하면 $(x-2)(x^2+px+q)$일 때, 세 상수 a, p, q에 대하여 $a+p+q$의 값은?

① 2　② 4　✓③ 6
④ 8　⑤ 10

$$\begin{aligned}x^3-ax+6&=(x-2)(x^2+px+q)\\&=x^3+(p-2)x^2+(q-2p)x-2q\end{aligned}$$

따라서 $0=p-2,\ -a=q-2p,\ 6=-2q$이므로 $p=2,\ q=-3,\ a=7$

$\therefore\ a+p+q=7+2+(-3)=6$

07 서술형

다항식 $x^2+y^2+bxy-1$이 $x+ay-1$로 나누어떨어질 때, a, b의 값과 그때의 몫을 구하시오. (단, a, b는 양수이다.)

$a=1$, $b=2$, 몫: $x+y+1$

$x^2+y^2+bxy-1=(x+ay-1)(x+cy+1)$ (c는 상수)라고 하면

$x^2+y^2+bxy-1=(x+ay-1)(x+cy+1)$
$=x^2+cxy+x+axy+acy^2+ay-x-cy-1$
$=x^2+acy^2+(a+c)xy+(a-c)y-1$ ······ 40 %

따라서 $1=ac$, $b=a+c$, $0=a-c$이므로 $a=c$
이때 $ac=a^2=1$에서 a는 양수이므로 $a=1$
$\therefore c=1$, $b=2$ ······ 40 %
따라서 $x^2+y^2+2xy-1=(x+y-1)(x+y+1)$이므로 $x+y-1$로 나누었을 때의 몫은 $x+y+1$이다. ······ 20 %

08

$p=n^2+6n-27$일 때, p가 소수가 되도록 하는 자연수 n에 대하여 $n+p$의 값을 구하시오. **17**

$p=n^2+6n-27=(n+9)(n-3)$이 소수가 되려면 $n+9$, $n-3$ 중 하나는 1이 되어야 한다.
이때 $n-3<n+9$이므로
$n-3=1$ $\quad\therefore n=4$
따라서 $p=n^2+6n-27=4^2+6\times4-27=13$이므로
$n+p=4+13=17$

09

다항식 x^2+2x-n이 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 1보다 크고 100보다 작은 자연수 n의 개수는?

✓① 9 ② 12 ③ 15
④ 18 ⑤ 21

두 양수 p, q에 대하여 $x^2+2x-n=(x+p)(x-q)$라고 하면
$x^2+2x-n=(x+p)(x-q)$
$=x^2+(p-q)x-pq$
따라서 $p-q=2$, $pq=n$이므로 이를 만족시키는 p, q의 값과 그때의 n의 값을 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

p	3	4	5	⋯	11	12	⋯
q	1	2	3	⋯	9	10	⋯
n	3	8	15	⋯	99	120	⋯

따라서 1보다 크고 100보다 작은 자연수 n은 3, 8, 15, …, 99의 9개이다.

10

$m^2-mn-2n^2=7$을 만족시키는 두 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
✓④ 7 ⑤ 8

$m^2-mn-2n^2=7$에서 $(m-2n)(m+n)=7$
이때 7은 소수이고 $m+n>0$이므로 $\begin{cases} m-2n=1 \\ m+n=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} m-2n=7 \\ m+n=1 \end{cases}$
(i) $\begin{cases} m-2n=1 \\ m+n=7 \end{cases}$일 때, 연립방정식을 풀면 $m=5$, $n=2$
(ii) $\begin{cases} m-2n=7 \\ m+n=1 \end{cases}$일 때, 연립방정식을 풀면 $m=3$, $n=-2$
이때 m, n은 모두 자연수이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(i), (ii)에 의하여 $m=5$, $n=2$
$\therefore m+n=5+2=7$

11 서술형

다항식 $3x^2+kx+5$가 모든 계수가 정수인 두 일차식의 곱 $(3x-a)(x-b)$로 인수분해 될 때, 가장 큰 상수 k의 값을 구하시오. **16**

$3x^2+kx+5=(3x-a)(x-b)$
$=3x^2-(a+3b)x+ab$ ······ 20 %
따라서 $k=-(a+3b)$, $5=ab$이고, a, b가 정수이므로 a, b의 값을 순서쌍 (a, b)로 나타내면
$(-5, -1)$, $(-1, -5)$, $(1, 5)$, $(5, 1)$ ······ 40 %
(i) $a=-5$, $b=-1$일 때, $k=-\{-5+3\times(-1)\}=8$
(ii) $a=-1$, $b=-5$일 때, $k=-\{-1+3\times(-5)\}=16$
(iii) $a=1$, $b=5$일 때, $k=-(1+3\times5)=-16$
(iv) $a=5$, $b=1$일 때, $k=-(5+3\times1)=-8$
(i)~(iv)에 의하여 가장 큰 상수 k의 값은 16이다. ······ 40 %

12

이차식 $5x^2+ax+3$이 x의 계수와 상수항이 모두 정수인 두 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, 상수 a의 값이 될 수 있는 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차를 구하시오. **32**

네 정수 p, q, s, t에 대하여
$5x^2+ax+3=(px+s)(qx+t)$라고 하면
$5x^2+ax+3=(px+s)(qx+t)=pqx^2+(pt+qs)x+st$
따라서 $5=pq$, $a=pt+qs$, $3=st$이므로 이때 곱이 5인 두 정수는 -1, -5 또는 1, 5, 곱이 3인 두 정수는 -1, -3 또는 1, 3이므로 a의 값이 될 수 있는 수는 다음과 같다.
(i) $p=1$, $q=5$, $s=-3$, $t=-1$일 때
$a=pt+qs=1\times(-1)+5\times(-3)=-16$
(ii) $p=1$, $q=5$, $s=-1$, $t=-3$일 때
$a=pt+qs=1\times(-3)+5\times(-1)=-8$
(iii) $p=1$, $q=5$, $s=1$, $t=3$일 때
$a=pt+qs=1\times3+5\times1=8$
(iv) $p=1$, $q=5$, $s=3$, $t=1$일 때
$a=pt+qs=1\times1+5\times3=16$
(i)~(iv)에 의하여 a의 값이 될 수 있는 수 중 가장 큰 수는 16, 가장 작은 수는 -16이므로 구하는 차는 $16-(-16)=32$

13

$3x^2+19x+k$가 $(3x+a)(x+b)$로 인수분해 되도록 하는 가장 큰 실수 k의 값은? (단, a, b는 자연수이다.)

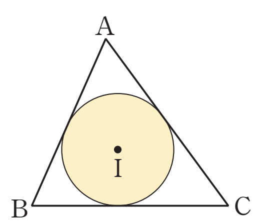
① 20　② 25　✓③ 30
④ 35　⑤ 40

$3x^2+19x+k=(3x+a)(x+b)$
$=3x^2+(a+3b)x+ab$
따라서 $19=a+3b$, $k=ab$이고 a, b는 자연수이므로 이를 만족시키는 a, b의 값과 그때의 k의 값을 표로 나타내면 오른쪽과 같다.
그러므로 가장 큰 실수 k의 값은 30이다.

a	1	4	7	10	13	16
b	6	5	4	3	2	1
k	6	20	28	30	26	16

14

오른쪽 그림의 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 $10x+14$이고 넓이가 $5x^2+17x+14$이다. 삼각형 ABC의 내심을 I라고 할 때, 삼각형 ABC의 내접원의 넓이는?



① $x^2\pi$　② $(x+1)^2\pi$　✓③ $(x+2)^2\pi$
④ $(x+3)^2\pi$　⑤ $(x+5)^2\pi$

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 a, b, c라고 하면 삼각형의 둘레의 길이가 $10x+14$이므로 $a+b+c=10x+14=2(5x+7)$
또, 이 삼각형의 내접원의 반지름의 길이를 r라고 하면 삼각형의 넓이는
$\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}r(a+b+c)$
$=\frac{1}{2}r\times2(5x+7)$
$=r(5x+7)$
이때 $5x^2+17x+14=(5x+7)(x+2)$이므로
$r(5x+7)=(5x+7)(x+2)$　$\therefore r=x+2$
따라서 삼각형 ABC의 내접원의 넓이는 $(x+2)^2\pi$이다.

15

다음 중 다항식 $(ax+by)^2+(ay-bx)^2+c^2x^2+c^2y^2$의 인수인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $a+b+c$　② $(a+b+c)(x^2+y^2)$
✓③ $a^2+b^2+c^2$　✓④ x^2+y^2
⑤ $(x+y)^2$

$(ax+by)^2+(ay-bx)^2+c^2x^2+c^2y^2$
$=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+a^2y^2-2abxy+b^2x^2+c^2x^2+c^2y^2$
$=a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2+c^2x^2+c^2y^2$
$=x^2(a^2+b^2+c^2)+y^2(a^2+b^2+c^2)$
$=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2)$

16

다음 중 다항식 $a^2b^2-6a^2b+9a^2-(b-3)^2$의 인수가 아닌 것은?

① $a-1$　② $b-3$
③ $(b-3)^2$　✓④ $ab+3a-b-3$
⑤ $ab-3a-b+3$

$a^2b^2-6a^2b+9a^2-(b-3)^2=a^2(b^2-6b+9)-(b-3)^2$
$=a^2(b-3)^2-(b-3)^2$
$=(a^2-1)(b-3)^2$
$=(a-1)(a+1)(b-3)^2$
④ $ab+3a-b-3=a(b+3)-(b+3)=(a-1)(b+3)$
⑤ $ab-3a-b+3=a(b-3)-(b-3)=(a-1)(b-3)$

17

여섯 실수 a, b, c, d, e, f에 대하여 $a=b+c=d+e+f$가 성립할 때, 다음 식을 간단히 하시오. a^3

$$a(ad+be+df)+be(c+f)+ce(c+f)+(d+e)f^2+f^3$$

$a(ad+be+df)+be(c+f)+ce(c+f)+(d+e)f^2+f^3$
$=a(ad+be+df)+(b+c)e(c+f)+(d+e+f)f^2$
$=a(ad+be+df)+ae(c+f)+af^2$
$=a\{ad+be+df+e(c+f)+f^2\}$
$=a\{ad+(b+c)e+(d+e+f)f\}$
$=a(ad+ae+af)=a^3$

18

$a+b+c=3$인 세 실수 a, b, c가 다음 등식을 만족시킬 때, $ab+bc+ca$의 값은? (단, $abc\neq0$)

$$a^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$$

① -6　② -3　✓③ 0
④ 3　⑤ 6

$a^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$에서
$a^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+a+b+c=0$
$a^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$
$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a^2+b^2+c^2)=0$
이때 $abc\neq0$에서 $a^2+b^2+c^2\neq0$이므로 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$
따라서 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=0$이므로
$ab+bc+ca=0$

19 출제 주의

다항식 $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$을 인수분해 하시오. $(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2$
$=(x^2+1)^2-x^2$
$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

이므로

$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=x^4(x+1)+x^2(x+1)+(x+1)$
$=(x+1)(x^4+x^2+1)$
$=(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

20

다음 중 다항식 $x^2y^2-x^2+2xy-2x$의 인수가 아닌 것은?

① x ② $y-1$ ③ $xy+x+2$
④ x^2y+x^2+2x ✓⑤ x^2y+x^2+2x-1

$x^2y^2-x^2+2xy-2x=x^2(y^2-1)+2x(y-1)$
$=x^2(y+1)(y-1)+2x(y-1)$
$=x(y-1)\{x(y+1)+2\}$
$=x(y-1)(xy+x+2)$

21 출제 주의

$(xy+2)(x+2)(y+1)+2xy$가
$(axy+x+b)(xy+cy+d)$로 인수분해 될 때, 네 상수 a, b, c, d에 대하여 $abcd$의 값을 구하시오. 8

$(xy+2)(x+2)(y+1)+2xy=(xy+2)(xy+x+2y+2)+2xy$ ⌉ $xy+2=A$
$=A(A+x+2y)+2xy$
$=A^2+(x+2y)A+2xy$
$=(A+x)(A+2y)$
$=(xy+x+2)(xy+2y+2)$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=2$, $d=2$이므로
$abcd=1\times2\times2\times2=8$

22 서술형

다항식 $a(a+1)+b(b+1)+2(ab+1)-4$를 두 일차식의 곱으로 나타낼 때, 두 일차식의 차를 구하시오. 3

$a(a+1)+b(b+1)+2(ab+1)-4=a^2+a+b^2+b+2ab+2-4$
$=a^2+2ab+b^2+a+b-2$
$=(a+b)^2+(a+b)-2$ ⌉ $a+b=A$
$=A^2+A-2$
$=(A+2)(A-1)$
$=(a+b+2)(a+b-1)$ ·················· 80 %

따라서 두 일차식은 $a+b+2$, $a+b-1$이므로 두 일차다항식의 차는
$(a+b+2)-(a+b-1)=3$ ·················· 20 %

23 출제 주의

다항식 $x^4+6x^3+9x^2-8(x^2+3x)-20$을 인수분해 하면 $(x+1)(x+2)(x+a)(x+b)$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값은? (단, $a<b$)

① 10 ② 9 ③ 8
✓④ 7 ⑤ 6

$x^4+6x^3+9x^2-8(x^2+3x)-20$
$=x^2(x^2+6x+9)-8x(x+3)-20$
$=\{x(x+3)\}^2-8x(x+3)-20$ ⌉ $x(x+3)=A$
$=A^2-8A-20$
$=(A-10)(A+2)$
$=(x^2+3x-10)(x^2+3x+2)$
$=(x+1)(x+2)(x-2)(x+5)$

따라서 $a<b$이므로 $a=-2$, $b=5$
$\therefore b-a=5-(-2)=7$

24

다항식 $(x^2+5x+6)(x^2-3x+2)-60$을 인수분해 하면 $(x^2+ax+b)(x+c)(x+d)$일 때, 네 상수 a, b, c, d에 대하여 $abcd$의 값을 구하시오. (단, $c>d$) -48

$(x^2+5x+6)(x^2-3x+2)-60$
$=(x+2)(x+3)(x-1)(x-2)-60$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-6)-60$ ⌉ $x^2+x=A$
$=(A-2)(A-6)-60$
$=A^2-8A-48$
$=(A+4)(A-12)$
$=(x^2+x+4)(x^2+x-12)$
$=(x^2+x+4)(x+4)(x-3)$

이때 $c>d$이므로 $a=1$, $b=4$, $c=4$, $d=-3$
$\therefore abcd=1\times4\times4\times(-3)=-48$

25

정수 a에 대하여 $x^2+2x+8=a^2$을 만족시키는 정수 x의 값을 모두 구하시오. $-4,\ 2$

$x^2+2x+8=a^2$에서
$x^2+2x+1+7=a^2$, $(x+1)^2-a^2=-7$
$\therefore\ (x+1+a)(x+1-a)=-7$
두 정수의 곱이 -7인 두 정수를 순서쌍으로 나타내면
$(-7,\ 1)$, $(-1,\ 7)$, $(1,\ -7)$, $(7,\ -1)$
(i) $x+1+a=-7$, $x+1-a=1$일 때
두 식을 연립하여 풀면 $x=-4$, $a=-4$
(ii) $x+1+a=-1$, $x+1-a=7$일 때
두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $a=-4$
(iii) $x+1+a=1$, $x+1-a=-7$일 때
두 식을 연립하여 풀면 $x=-4$, $a=4$
(iv) $x+1+a=7$, $x+1-a=-1$일 때
두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $a=4$
(i)~(iv)에 의하여 구하는 정수 x는 -4, 2이다.

26

$x^4+x^2-2ax+1-a^2$을 인수분해 하면?

① $(x^2+x-a+2)(x^2-x-a+2)$
② $(x^2+x-a+2)(x^2-x+a+2)$
③ $(x^2+x-a+1)(x^2-x+a+1)$
④ $(x^2+x+a-1)(x^2-x-a-1)$
✓⑤ $(x^2+x+a+1)(x^2-x-a+1)$

$$\begin{aligned}x^4+x^2-2ax+1-a^2&=x^4+2x^2+1-(x^2+2ax+a^2)\\&=(x^2+1)^2-(x+a)^2\\&=(x^2+1+x+a)\{x^2+1-(x+a)\}\\&=(x^2+x+a+1)(x^2-x-a+1)\end{aligned}$$

27

임의의 세 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $<a,\ b,\ c>=a^2(b-c)$로 정의할 때, $<a,\ b,\ c>+<b,\ c,\ a>+<c,\ a,\ b>$를 인수분해 하시오. $\mathbf{(a-b)(b-c)(a-c)}$

$$\begin{aligned}<a,\ b,\ c>+<b,\ c,\ a>+<c,\ a,\ b>&=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\&=a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2\\&=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2\\&=(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)\\&=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\&=(a-b)(b-c)(a-c)\end{aligned}$$

28

다음 중 다항식 $a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$의 인수가 아닌 것은?

① $a+b+c$　② $a+b-c$　③ $a-b-c$
✓④ $a^2+(b+c)^2$　⑤ $a^2-(b-c)^2$

$$\begin{aligned}&a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\\&=a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2\\&=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^4-2b^2c^2+c^4)\\&=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2\\&=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b+c)^2(b-c)^2\\&=\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\}\\&=(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccl}1 & -(b+c)^2 & \longrightarrow\ -b^2-2bc-c^2\\ 1 & -(b-c)^2 & \longrightarrow\ \underline{-b^2+2bc-c^2}\ (+\\ & & \quad\ -2b^2-2c^2=-2(b^2+c^2)\end{array}$$

29

$(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$의 인수인 것만을 보기에서 모두 고르시오. ㄱ, ㄹ

〈 보기 〉
ㄱ. $x+y+z$　　ㄴ. $x+y$
ㄷ. $x(xy+yz+zx)$　　ㄹ. $xy+yz+zx$
ㅁ. $(x+y)(yz+zx)$　　ㅂ. $z+1$

$$\begin{aligned}&(x+y)(y+z)(z+x)+xyz\\&=x^2y+xz^2+x^2z+y^2z+xy^2+yz^2+3xyz\\&=(y+z)x^2+(y^2+3yz+z^2)x+yz(y+z)\\&=\{(y+z)x+yz\}(x+y+z)\\&=(x+y+z)(xy+yz+zx)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccl}(y+z) & yz & \longrightarrow\ yz\\ 1 & (y+z) & \longrightarrow\ \underline{y^2+2yz+z^2}\ (+\\ & & \quad\ y^2+3yz+z^2\end{array}$$

30

$xyz-xy-yz-zx+x+y+z-1$을 인수분해하시오. $\mathbf{(x-1)(y-1)(z-1)}$

$$\begin{aligned}&xyz-xy-yz-zx+x+y+z-1\\&=(yz-y-z+1)x-(yz-y-z+1)\\&=(x-1)(yz-y-z+1)\\&=(x-1)\{y(z-1)-(z-1)\}\\&=(x-1)(y-1)(z-1)\end{aligned}$$

31 서술형

두 다항식 P, Q에 대하여

$PQ=x^2-xy-2y^2+2x+5y-3$일 때, 연립방정식

$\begin{cases} P=0 \\ Q=0 \end{cases}$을 만족시키는 x, y에 대하여 xy의 값을 구하시오.

$-\frac{4}{9}$

$x^2-xy-2y^2+2x+5y-3$
$=x^2+(-y+2)x-(2y^2-5y+3)$
$=x^2-(y-2)x-(2y-3)(y-1)$
$=\{x-(2y-3)\}(x+y-1)$
$=(x-2y+3)(x+y-1)$

$\begin{array}{lll} 1 & -(2y-3) & \to -2y+3 \\ 1 & y-1 & \to y-1\ (+ \\ & & -y+2 \end{array}$

············ 40 %

즉, 두 다항식 P, Q는 $x-2y+3$, $x+y-1$이므로 연립방정식 $\begin{cases} P=0 \\ Q=0 \end{cases}$은

$\begin{cases} x-2y+3=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y-1=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x+y-1=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-2y+3=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$이다.

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{4}{3}$ ············ 40 %

$\therefore xy=-\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}=-\frac{4}{9}$ ············ 20 %

32

다음 중 다항식 $(x^2-y^2)^2-8(x^2+y^2)+16$의 인수가 아닌 것은?

① $x-y-2$ ✓② $x-y-1$ ③ $x-y+2$
④ $x+y-2$ ⑤ $x+y+2$

$(x^2-y^2)^2=x^4-2x^2y^2+y^4$
$=x^4+2x^2y^2+y^4-4x^2y^2$
$=(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$

이므로

$(x^2-y^2)^2-8(x^2+y^2)+16=(x^2+y^2)^2-4x^2y^2-8(x^2+y^2)+16$
$=\{(x^2+y^2)^2-8(x^2+y^2)+16\}-4x^2y^2$
$=\{(x^2+y^2)-4\}^2-(2xy)^2$
$=(x^2+y^2+2xy-4)(x^2+y^2-2xy-4)$
$=\{(x+y)^2-2^2\}\{(x-y)^2-2^2\}$
$=(x+y+2)(x+y-2)(x-y+2)(x-y-2)$

33

다음 중 $2^{12}-1$의 약수의 개수는?

① 12 ② 15 ③ 16
④ 20 ✓⑤ 24

$2^{12}-1=(2^6+1)(2^6-1)$
$=(2^6+1)(2^3+1)(2^3-1)$
$=65\times9\times7$
$=3^2\times5\times7\times13$

따라서 약수의 개수는

$(2+1)(1+1)(1+1)(1+1)=24$

34 출제 주의

다음 중 $2^{40}-1$을 나누어떨어지게 하는 자연수가 아닌 것은?

① 11 ✓② 13 ③ 31
④ 33 ⑤ 93

$2^{40}-1=(2^{20}+1)(2^{20}-1)$
$=(2^{20}+1)(2^{10}+1)(2^{10}-1)$
$=(2^{20}+1)(2^{10}+1)(2^5+1)(2^5-1)$

$2^5=32$, $2^{10}=1024$이므로

$2^{40}-1=(2^{20}+1)\times1025\times33\times31$
$=(2^{20}+1)\times41\times31\times11\times5^2\times3$

이때 $33=11\times3$, $93=31\times3$이므로 $2^{40}-1$을 나누어떨어지게 하는 자연수가 아닌 것은 ②이다.

35

$3\times17^3\times n+9\times17^3(n+1)$이 어떤 자연수의 제곱이 되도록 하는 모든 세 자리 자연수 n의 값의 합은?

① 960 ② 984 ③ 1008
④ 1032 ✓⑤ 1056

$3\times17^3\times n+9\times17^3(n+1)=3\times17^3\times\{n+3(n+1)\}$
$=3\times17^3\times(4n+3)$

$4n+3$이 $3\times17\times k^2$ (k는 자연수)의 꼴이어야 한다.

이때 $4n+3$은 홀수이므로 $3\times17\times k^2$도 홀수이다.

즉, k는 홀수이다.

$4n+3=3\times17\times k^2$에서 $4n=3\times17\times k^2-3$ $\therefore n=\frac{3\times17\times k^2-3}{4}$

이때 $100\le\frac{3\times17\times k^2-3}{4}<1000$이므로

$403\le51k^2<4003$ $\therefore \frac{403}{51}\le k^2<\frac{4003}{51}$

즉, 가능한 홀수 k의 값은 3, 5, 7이다.

(i) $k=3$일 때, $4n+3=3\times17\times3^2=459$에서 $4n=456$ $\therefore n=114$
(ii) $k=5$일 때, $4n+3=3\times17\times5^2=1275$에서 $4n=1272$ $\therefore n=318$
(iii) $k=7$일 때, $4n+3=3\times17\times7^2=2499$에서 $4n=2496$ $\therefore n=624$

(i)~(iii)에 의하여 구하는 자연수 n의 값은 114, 318, 624이므로 그 합은

$114+318+624=1056$

36

$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots+99^2$의 값을 구하시오.

4950

$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots+99^2$
$=99^2-98^2+97^2-96^2+\cdots+3^2-2^2+1^2$
$=(99^2-98^2)+(97^2-96^2)+\cdots+(3^2-2^2)+1$
$=(99-98)(99+98)+(97-96)(97+96)+\cdots+(3-2)(3+2)+1$
$=99+98+97+96+\cdots+3+2+1$
$=(1+99)+(2+98)+\cdots+(49+51)+50$
$=49\times100+50=4950$

37 출제 주의

$\sqrt{13\times15\times12\times16-36\times16}$의 값을 구하시오. 192

$\sqrt{13\times15\times12\times16-36\times16}$
$=\sqrt{13\times15\times12\times16-3\times12\times16}$ ← $14=A$
$=\sqrt{(A-1)(A+1)(A-2)(A+2)-3(A-2)(A+2)}$
$=\sqrt{(A^2-1)(A^2-4)-3(A^2-4)}$
$=\sqrt{(A^2-4)(A^2-1-3)}$
$=A^2-4$
$=14^2-4$
$=192$

38 서술형

두 자연수 a, b에 대하여

$$a=22\times24+1,\ \sqrt{30\times31\times32\times33+1}=b$$

일 때, $2a-b$의 값을 구하시오. 67

$a=22\times24+1=22\times(22+2)+1=22^2+22\times2+1$
$=(22+1)^2=23^2=529$ ······ 30 %
$x=30$이라고 하면
$30\times31\times32\times33+1=x(x+1)(x+2)(x+3)+1$
$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$ ← $x^2+3x=A$
$=A(A+2)+1$
$=A^2+2A+1$
$=(A+1)^2$
$=(x^2+3x+1)^2$ ······ 30 %
이때 $x^2+3x+1>0$이므로
$b=\sqrt{30\times31\times32\times33+1}=\sqrt{(x^2+3x+1)^2}$
$=x^2+3x+1$
$=30^2+3\times30+1$
$=991$ ······ 30 %
$\therefore 2a-b=2\times529-991=67$ ······ 10 %

39

$x=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$, $y=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$일 때,

x^2+5x-y^2-5y의 값을 구하시오. $6\sqrt{2}+6\sqrt{3}$

$x+y=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2}{2}=1$
$x-y=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$
$\therefore x^2+5x-y^2-5y=x^2-y^2+5x-5y$
$=(x+y)(x-y)+5(x-y)$
$=(x-y)(x+y+5)$
$=(\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+5)$
$=6\sqrt{2}+6\sqrt{3}$

40

$\sqrt{52}$의 정수 부분을 x, 소수 부분을 y라고 할 때,

$\dfrac{x^3+2x^2y-xy^2-2y^3}{x-y}=a+b\sqrt{m}$이다. 이때 $a+bm$의 값은?

① -62　② -66　③ -70
④ -74　✓⑤ -78

$7<\sqrt{52}<8$이므로 $\sqrt{52}$의 정수 부분은 $x=7$, 소수 부분은 $y=\sqrt{52}-7=2\sqrt{13}-7$
$\therefore \dfrac{x^3+2x^2y-xy^2-2y^3}{x-y}=\dfrac{x^2(x+2y)-y^2(x+2y)}{x-y}$
$=\dfrac{(x+2y)(x^2-y^2)}{x-y}$
$=(x+2y)(x+y)$
$=\{7+2(2\sqrt{13}-7)\}(7+2\sqrt{13}-7)$
$=(7+4\sqrt{13}-14)\times2\sqrt{13}$
$=(4\sqrt{13}-7)\times2\sqrt{13}$
$=104-14\sqrt{13}$
따라서 $a=104$, $b=-14$, $m=13$이므로
$a+bm=104+(-14)\times13=-78$

41

$x+y=a$, $x-y=b$일 때, $x^3-x^2y+xy^2-y^3$을 a, b에 대한 식으로 나타내시오. $\dfrac{a^2b+b^3}{2}$

$x^3-x^2y+xy^2-y^3=x^2(x-y)+y^2(x-y)=(x-y)(x^2+y^2)$
$x+y=a$의 양변을 제곱하면 $x^2+2xy+y^2=a^2$ ······ ㉠
$x-y=b$의 양변을 제곱하면 $x^2-2xy+y^2=b^2$ ······ ㉡
㉠+㉡을 하면
$2x^2+2y^2=a^2+b^2$　$\therefore x^2+y^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}$
$\therefore x^3-x^2y+xy^2-y^3=(x-y)(x^2+y^2)=b\times\dfrac{a^2+b^2}{2}=\dfrac{a^2b+b^3}{2}$

42

자연수 n에 대하여 n^4+n^2+1이 소수일 때,

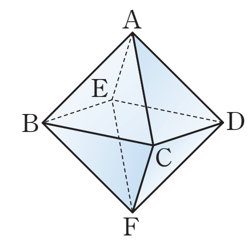
$n^4-n^3+n^2-n+1$의 값을 구하시오. 1

$n^4+n^2+1=n^4+2n^2+1-n^2$
$=(n^2+1)^2-n^2$
$=(n^2+n+1)(n^2-n+1)$
이때 n^4+n^2+1이 소수이므로 두 인수 n^2+n+1과 n^2-n+1 중 작은 수인 n^2-n+1은 반드시 1이 되어야 한다.
즉, $n^2-n+1=1$이므로 $n^2-n=0$
$\therefore n^4-n^3+n^2-n+1=n^2(n^2-n)+(n^2-n)+1=1$

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

대표 문제

오른쪽 그림과 같이 여덟 개의 정삼각형으로 이루어진 정팔면체가 있다. 이 정팔면체의 여섯 개의 꼭짓점에 자연수를 적고 여덟 개의 면에는 각각의 정삼각형의 꼭짓점에 적힌 세 자연수의 곱을 적는다. 여덟 개의 면에 적힌 모든 수의 합이 105일 때, 여섯 개의 꼭짓점에 적힌 모든 자연수의 합을 구하시오.



함께 풀기

STEP 1

주어진 조건과 구해야 하는 것 확인하기

주어진 조건: 정팔면체의 여섯 개의 꼭짓점에 자연수를 적고 여덟 개의 면에는 각각의 정삼각형의 꼭짓점에 적힌 세 자연수의 곱을 적을 때, 여덟 개의 면에 적힌 모든 수의 합이 105

구해야 하는 것: 여섯 개의 꼭짓점에 적힌 모든 자연수의 합

STEP 2

정팔면체 ABCDEF의 각 꼭짓점에 적힌 자연수를 문자로 나타내고 각 면에 적힌 모든 수의 합을 그 문자로 나타내기

정팔면체 ABCDEF의 각 꼭짓점에 적힌 자연수를 각각 a, b, c, d, e, f라고 하면 정팔면체의 여덟 개의 면에 적힌 모든 수의 합은

$abc+acd+ade+abe+fbc+fcd+fde+fbe$ ⋯⋯ ㉠

STEP 3

문자식으로 나타낸 여덟 개의 면에 적힌 숫자의 합을 인수분해 하기

㉠을 인수분해 하면

$$\begin{aligned}&abc+acd+ade+abe+fbc+fcd+fde+fbe\\&=a(bc+cd+de+be)+f(bc+cd+de+be)\\&=(a+f)(bc+cd+de+be)\\&=(a+f)\{c(b+d)+e(b+d)\}\\&=(a+f)(b+d)(c+e)\end{aligned}$$

STEP 4

$a+f$, $b+d$, $c+e$의 값이 될 수 있는 수 구하기

$105=3\times5\times7$이고 여덟 개의 면에 적힌 모든 수의 합이 105이므로

$105=3\times5\times7=(a+f)(b+d)(c+e)$

즉, $a+f$, $b+d$, $c+e$는 각각 자연수 3, 5, 7 중 하나이다.

STEP 5

정팔면체의 여섯 개의 꼭짓점에 적힌 모든 자연수의 합 구하기

따라서 정팔면체의 여섯 개의 꼭짓점에 적힌 모든 자연수의 합은

$$\begin{aligned}a+b+c+d+e+f&=(a+f)+(b+d)+(c+e)\\&=3+7+5=15\end{aligned}$$

답 15

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

01 다항식 $\{5x^3+(x+1)^2+2x+1\}^4$을 전개하였을 때, x의 계수를 구하시오. 128

$\{5x^3+(x+1)^2+2x+1\}^4=(5x^3+x^2+4x+2)^4$에서 x의 계수만 알면 되므로 차수가 2 이상인 항, 즉 x^3, x^2항이 곱해진 항은 구할 필요가 없다.
즉, $(4x+2)^4$의 전개식에서의 x의 계수를 구하면 $(5x^3+x^2+4x+2)^4$의 x의 계수와 같다.
또, $(4x+2)^4=\{(4x+2)^2\}^2=(16x^2+16x+4)^2$에서 마찬가지 방법으로 $(16x+4)^2$에서 x의 계수만 구하면 된다.
따라서 $(16x+4)^2=256x^2+128x+16$이므로 x의 계수는 128이다.

02 $a^2+b^2=c^2+d^2=2$, $ac+bd=0$일 때, a^2+c^2의 값을 구하시오. 2

$ac+bd=0$에서 $ac=-bd$이므로 $a^2c^2=b^2d^2$ …… ㉠
$a^2+b^2=2$에서 $b^2=2-a^2$ …… ㉡
$c^2+d^2=2$에서 $d^2=2-c^2$ …… ㉢
㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면
$a^2c^2=b^2d^2$
$=(2-a^2)(2-c^2)$
$=4-2(a^2+c^2)+a^2c^2$
따라서 $4-2(a^2+c^2)=0$이므로
$-2(a^2+c^2)=-4$ $\quad\therefore a^2+c^2=2$

03 1부터 100까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 100개의 공이 담긴 주머니에서 임의로 하나의 공을 뽑았을 때, 나온 공에 적힌 수를 n이라고 하자. 이때 다항식 x^2-3x-n이 일차항의 계수가 1이고 상수항이 정수인 두 일차식의 곱으로 인수분해 될 확률을 구하시오. $\frac{2}{25}$

다항식 x^2-3x-n이 일차항의 계수가 1이고 상수항이 정수인 두 일차식의 곱으로 인수분해 되므로 $x^2-3x-n=(x+a)(x+b)$ (a, b는 정수이고, $a>b$)라고 하자.
이때 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$이므로
$a+b=-3$ …… ㉠
$-n=ab$
즉, $1\le n\le 100$에서 $-100\le -n\le -1$이므로 $-100\le ab\le -1$ …… ㉡
㉠, ㉡을 모두 만족시키는 두 정수 a, b의 값과 그때의 n의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

a	1	2	3	4	5	6	7	8
b	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11
n	4	10	18	28	40	54	70	88

따라서 조건을 만족시키는 n의 값은 4, 10, 18, 28, 40, 54, 70, 88의 8개이므로 구하는 확률은
$\frac{8}{100}=\frac{2}{25}$

04 두 자연수 a, b에 대하여 다항식 $x^3+ax^2-4bx+10$과 다항식 $x^2+3x-10$의 공통인수가 일차식일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. 13

$x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$이므로 공통인수가 될 수 있는 일차식은 $x+5$ 또는 $x-2$이다.

(i) 공통인수가 $x+5$일 때

$x^3+ax^2-4bx+10=(x+5)(x^2+px+q)$
$=x^3+(p+5)x^2+(5p+q)x+5q$

(p, q는 상수)

라고 할 수 있다.

따라서 $a=p+5$, $-4b=5p+q$, $10=5q$이므로 $q=2$

이때 a, b가 자연수이므로 p는 정수이고 $a=p+5\geq1$에서 $p\geq-4$

$5p+2=-4b\leq-4$에서

$5p\leq-6$ $\quad\therefore p\leq-\frac{6}{5}$

따라서 $-4\leq p\leq-\frac{6}{5}$이므로 가능한 p의 값은 -4, -3, -2이다.

ⓐ $p=-4$일 때, $a=p+5=-4+5=1$

$-4b=5p+2=5\times(-4)+2=-18$이므로 $b=\frac{9}{2}$

이때 b는 자연수이어야 하므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

ⓑ $p=-3$일 때, $a=p+5=-3+5=2$

$-4b=5p+2=5\times(-3)+2=-13$이므로 $b=\frac{13}{4}$

이때 b는 자연수이어야 하므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

ⓒ $p=-2$일 때, $a=p+5=-2+5=3$

$-4b=5p+2=5\times(-2)+2=-8$이므로 $b=2$

(ii) 공통인수가 $x-2$일 때

$x^3+ax^2-4bx+10=(x-2)(x^2+rx+s)$
$=x^3+(r-2)x^2+(s-2r)x-2s$

(r, s는 상수)

라고 할 수 있다.

따라서 $a=r-2$, $-4b=s-2r$, $10=-2s$이므로 $s=-5$

이때 $-5-2r=-4b$, 즉 $2r+5=4b$에서 $2r+5$는 홀수이고 $4b$는 짝수이므로 조건을 만족시키는 a, b의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $a=3$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=3^2+2^2=13$

05 세 실수 x, y, z에 대하여 $<x,\ y,\ z>=(x-y)(x-z)$로 정의할 때, $<x,\ y,\ z>+<y,\ z,\ x>+<z,\ x,\ y>=0$이라고 한다. $x=10$일 때, $x+y+z$의 값을 구하시오. 30

$$\begin{aligned}<x,\ y,\ z>+<y,\ z,\ x>+<z,\ x,\ y>&=(x-y)(x-z)+(y-z)(y-x)+(z-x)(z-y)\\&=x^2-zx-xy+yz+y^2-xy-yz+zx+z^2-yz-zx+xy\\&=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\\&=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)\\&=\frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2zx+x^2)\\&=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0\end{aligned}$$

이때 $(x-y)^2\geq0$, $(y-z)^2\geq0$, $(z-x)^2\geq0$이므로

$(x-y)^2=0$, $(y-z)^2=0$, $(z-x)^2=0$

즉, $x-y=0$, $y-z=0$, $z-x=0$이므로 $x=y$, $y=z$, $z=x$

따라서 $x=y=z=10$이므로

$x+y+z=3x=3\times10=30$

06 $5\times7\times13\times16\times73+1=a^n$ (a, n은 자연수)일 때, an의 값을 구하시오. 36

(단, a, n은 자연수이고, $a<5$)

$$\begin{aligned}5\times7\times13\times16\times73+1&=2^4\times5\times7\times13\times73+1\\&=(7\times2^3\times13)\times(2\times5\times73)+1\\&=728\times730+1\\&=(729-1)(729+1)+1\\&=(3^6-1)(3^6+1)+1\\&=3^{12}-1+1=3^{12}\end{aligned}$$

이때 $a<5$이므로 $a=3$, $n=12$

$\therefore an=3\times12=36$

_____ 점 / 100점

01

$\left(3x+\frac{1}{4}a\right)\left(4x-\frac{1}{3}\right)$을 전개한 식에서 x의 계수가 상수항의 4배일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{16}$
④ $\frac{1}{4}$ ✓⑤ $\frac{3}{4}$

$\left(3x+\frac{1}{4}a\right)\left(4x-\frac{1}{3}\right)=12x^2+(-1+a)x-\frac{1}{12}a$
이때 x의 계수가 상수항의 4배이므로
$-1+a=4\times\left(-\frac{1}{12}a\right)$, $-1+a=-\frac{1}{3}a$
$\frac{4}{3}a=1$ $\therefore a=\frac{3}{4}$

02

$(x-3)(-4x-1)+(3x+2)(3x-2)$를 계산하면 ax^2+bx+c라고 할 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a-bc$의 값은? [4점]

① -16 ② -6 ③ -1
④ 6 ✓⑤ 16

$(x-3)(-4x-1)+(3x+2)(3x-2)=(-4x^2+11x+3)+(9x^2-4)$
$=5x^2+11x-1$
따라서 $a=5$, $b=11$, $c=-1$이므로
$a-bc=5-11\times(-1)=16$

03

$(3+2\sqrt{2})^{100}(3-2\sqrt{2})^{100}$을 계산하면? [4점]

✓① 1 ② 2 ③ 4
④ 8 ⑤ 16

$(3+2\sqrt{2})^{100}(3-2\sqrt{2})^{100}=\{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\}^{100}$
$=(9-8)^{100}$
$=1^{100}=1$

04

$x=\frac{7}{2+\sqrt{11}}$일 때, x^2+4x-9의 값은? [4점]

① -16 ② -12 ✓③ -2
④ 2 ⑤ 12

$x=\frac{7}{2+\sqrt{11}}=-2+\sqrt{11}$에서 $x+2=\sqrt{11}$
양변을 제곱하면
$x^2+4x+4=11$, $x^2+4x=7$
$\therefore x^2+4x-9=7-9=-2$

05

다항식 $9x^2+ax-24$가 두 일차식 $3x-4$, $x-b$와 상수의 곱으로 인수분해 될 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [4점]

① -8 ② -4 ③ 2
✓④ 4 ⑤ 8

$9x^2+ax-24=3(3x-4)(x-b)$
$=3\{3x^2+(-3b-4)x+4b\}$
$=9x^2+3(-3b-4)x+12b$
따라서 $a=3(-3b-4)$, $-24=12b$이므로 $b=-2$, $a=3\times\{-3\times(-2)-4\}=6$
$\therefore a+b=6+(-2)=4$

06

다음 세 다항식의 공통인수는? [4점]

$$ab+a+b+1,\quad a^2b+a^2-b-1,\quad ab^2-a-b^2+1$$

① $a+1$ ② $a-1$ ✓③ $b+1$
④ $b-1$ ⑤ $a-b$

$ab+a+b+1=a(b+1)+(b+1)$
$=(a+1)(b+1)$
$a^2b+a^2-b-1=a^2(b+1)-(b+1)$
$=(b+1)(a^2-1)$
$=(b+1)(a+1)(a-1)$
$ab^2-a-b^2+1=a(b^2-1)-(b^2-1)$
$=(a-1)(b^2-1)$
$=(a-1)(b+1)(b-1)$

07

서로 다른 두 실수 x, y에 대하여
$(1+x)(2026+y)=(2026-x)(1-y)$일 때,
$(2026-x)(y-2026)-x^2$의 값은? [4점]

✓① -2026^2　② -2026　③ 2026
④ 2025×2027　⑤ 2026^2

$(1+x)(2026+y)=(2026-x)(1-y)$에서
$2026+y+2026x+xy=2026-2026y-x+xy$, $2027x+2027y=0$
$2027(x+y)=0$, $x+y=0$
$\therefore x=-y$ ······ ㉠
㉠을 $(2026-x)(y-2026)-x^2$에 대입하면
$(2026-x)(y-2026)-x^2=\{2026-(-y)\}(y-2026)-(-y)^2$
$=(y+2026)(y-2026)-y^2$
$=y^2-2026^2-y^2$
$=-2026^2$

08

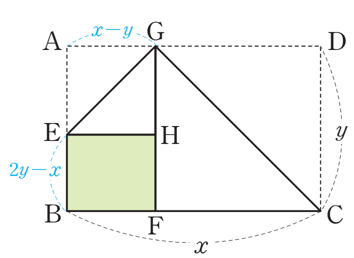
차가 2인 두 수 a, b에 대하여
$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})=pa^x+qb^y$
이 성립할 때, $p+q+x+y$의 값은? (단, $a>b$) [4점]

① 62　② 63　✓③ 64
④ 65　⑤ 66

$a>b$이고, 두 수 a, b의 차가 2이므로 $a-b=2$
$\therefore (a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})$
$=\frac{1}{2}(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})$
$=\frac{1}{2}(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})$
$=\frac{1}{2}(a^4-b^4)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})=\frac{1}{2}(a^8-b^8)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})$
$=\frac{1}{2}(a^{16}-b^{16})(a^{16}+b^{16})=\frac{1}{2}(a^{32}-b^{32})=\frac{1}{2}a^{32}-\frac{1}{2}b^{32}$
따라서 $p=\frac{1}{2}$, $q=-\frac{1}{2}$, $x=32$, $y=32$이므로 $p+q+x+y=64$

09

가로와 세로의 길이가 각각 x, y인 직사각형 모양의 종이 ABCD를 변 CD와 변 CF, 변 AE와 변 EH가 겹치도록 접었다. 이때 만들어진 사각형 EBFH의 넓이를 x, y에 대한 식으로 나타내면? [4점]



① $x^2+3xy-2y^2$　② $x^2-3xy+2y^2$
✓③ $-x^2+3xy-2y^2$　④ $-x^2-3xy+2y^2$
⑤ $-x^2-3xy-2y^2$

사각형 EBFH의 가로의 길이는 $x-y$이다.
사각형 EBFH의 세로의 길이는 $y-(x-y)=2y-x$이다.
따라서 사각형 EBFH의 넓이는
$(x-y)(2y-x)=-x^2+3xy-2y^2$

10

등식
$4x^4-8x^2y^2+y^4=(ax^2+bxy+cy^2)(dx^2-2xy+ey^2)$
을 만족시키는 다섯 상수 a, b, c, d, e에 대하여 옳지 않은 것은? [4점]

① $a=2$　② $b=2$　✓③ $c=1$
④ $d=2$　⑤ $e=-1$

$4x^4-8x^2y^2+y^4=4x^4-4x^2y^2+y^4-4x^2y^2$
$=(2x^2-y^2)^2-4x^2y^2$
$=(2x^2+2xy-y^2)(2x^2-2xy-y^2)$
이므로 $a=2$, $b=2$, $c=-1$, $d=2$, $e=-1$

11

다항식 $a^3+(2b+1)a^2+(b^2+2b-1)a+(b^2-1)$의 인수인 것을 보기에서 모두 고른 것은? [4점]

〈 보기 〉
ㄱ. $a+1$　ㄴ. $a+b+1$　ㄷ. $a-b+1$

① ㄱ　✓② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$a^3+(2b+1)a^2+(b^2+2b-1)a+(b^2-1)$
$=a^3+2a^2b+a^2+ab^2+2ab-a+b^2-1$
$=(a+1)b^2+2(a^2+a)b+a^3+a^2-a-1$
$=(a+1)b^2+2a(a+1)b+a^2(a+1)-(a+1)$
$=(a+1)(b^2+2ab+a^2-1)$
$=(a+1)\{(a+b)^2-1\}$
$=(a+1)(a+b+1)(a+b-1)$

12

3^8-1의 소인수의 합을 x라고 할 때, $x^2-16x+64$의 값은? [4점]

① 64　② 1156　✓③ 1600
④ 2304　⑤ 3136

$3^8-1=(3^4)^2-1$
$=(3^4+1)(3^4-1)$
$=(3^4+1)(3^2+1)(3^2-1)$
$=(3^4+1)(3^2+1)(3+1)(3-1)$
$=82\times10\times4\times2$
$=2^5\times5\times41$
즉, 3^8-1의 모든 소인수는 2, 5, 41이므로 모든 소인수의 합 x는 $x=2+5+41=48$
$\therefore x^2-16x+64=(x-8)^2=(48-8)^2=40^2=1600$

13

$x=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$일 때, $4x-\dfrac{\sqrt{2}}{x}$의 값은? [4점]

✓① $2\sqrt{6}$　② $\sqrt{2}+\sqrt{6}$　③ $2\sqrt{3}$
④ $2\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{6}$

$\dfrac{\sqrt{2}}{x}=\sqrt{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})=\sqrt{2}+2-\sqrt{6}$

이때

$x=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}}$

$=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{4}$

이므로

$4x=4\times\dfrac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{4}=\sqrt{2}+2+\sqrt{6}$

$\therefore 4x-\dfrac{\sqrt{2}}{x}=\sqrt{2}+2+\sqrt{6}-(\sqrt{2}+2-\sqrt{6})=2\sqrt{6}$

14

$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$를 인수분해 하면 $(x-1)(x-2)(x+a)(x+b)$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값은? [4점]

① -8　② -6　③ -4
✓④ 6　⑤ 8

$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$　$x^2+x=A$
$=A^2-8A+12$
$=(A-6)(A-2)$
$=(x^2+x-6)(x^2+x-2)$
$=(x+3)(x-2)(x+2)(x-1)$
따라서 $a=2$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=2$이므로
$ab=2\times3=6$

15

양수 x에 대하여 $\sqrt{x}=\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$일 때,

$\dfrac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{x+2-\sqrt{x^2+4x}}$를 a에 대한 식으로 나타내면? [6점]

① $\dfrac{1}{a^2}$　② $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$　③ a
④ $a\sqrt{a}$　✓⑤ a^2

$\sqrt{x}=\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$의 양변을 제곱하면

$x=a+\dfrac{1}{a}-2$　$\therefore x+2=a+\dfrac{1}{a}$

$\therefore \sqrt{x^2+4x}=\sqrt{(x+2)^2-4}$

$=\sqrt{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-4}$

$=\sqrt{a^2-2+\dfrac{1}{a^2}}$

$=\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2}$

이때 $\sqrt{x}=\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{a-1}{\sqrt{a}}>0$이므로 $a>1$

따라서 $0<\dfrac{1}{a}<1$이므로 $a-\dfrac{1}{a}>0$

$\therefore \dfrac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{x+2-\sqrt{x^2+4x}}=\dfrac{(x+2+\sqrt{x^2+4x})^2}{(x+2-\sqrt{x^2+4x})(x+2+\sqrt{x^2+4x})}$

$=\dfrac{2(x+2)^2+2(x+2)\sqrt{x^2+4x}-4}{4}$

$=\dfrac{2\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+2\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2}-4}{4}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2}-2\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a-\dfrac{1}{a}\right)-2\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(a^2+2+\dfrac{1}{a^2}+a^2-\dfrac{1}{a^2}-2\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times2a^2=a^2$

16

$x+y=10$, $xy=16$일 때, $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$의 값을 구하시오. **3**

(단, $x>y$) [4점]

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$
$=10^2-4\times16=36$
이때 $x>y$이므로 $x-y=6$
$\therefore \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$
$=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$
$=\dfrac{10+2\times\sqrt{16}}{6}$
$=\dfrac{18}{6}=3$

17

성혁이는 $(x+6)(x-2)$를 전개하는데 6을 a로 잘못 보아 $x^2+bx-18$이 되었고, 지은이는 $(x+5)(3x+7)$을 전개하는데 3을 c로 잘못 보아 $cx^2+17x+35$가 되었다. 이때 세 상수 a, b, c에 대하여 $a-b+c$의 값을 구하시오.

4 [4점]

$(x+a)(x-2)=x^2+(-2+a)x-2a$
$=x^2+bx-18$
이므로
$-2+a=b$, $-2a=-18$ $\quad\therefore a=9$, $b=7$
$(x+5)(cx+7)=cx^2+(7+5c)x+35$
$=cx^2+17x+35$
이므로
$7+5c=17$, $5c=10$
$\therefore c=2$
$\therefore a-b+c=9-7+2=4$

18

$2^{48}-1$이 60 이상 80 이하의 자연수 n으로 나누어떨어질 때, 서로 다른 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점] **128**

$2^{48}-1=(2^{24}+1)(2^{24}-1)$
$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{12}-1)$
$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^6+1)(2^6-1)$
$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(64+1)(64-1)$
$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)\times65\times63$
따라서 구하는 자연수 n은 63, 65이고, 그 합은
$63+65=128$

19

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4+x^2-1)$
$=ax^p+bx^q+cx^r+d$
일 때, $ap+bq+cr+d$의 값을 구하시오. [4점] **23**

(단, $p>q>r$이고, a, b, c, d, p, q, r는 상수이다.)

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ $\quad x^2+1=X$
$=(X+x)(X-x)$
$=X^2-x^2$
$=(x^2+1)^2-x^2$
$=x^4+x^2+1$
$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4+x^2-1)=(x^4+x^2+1)(x^4+x^2-1)$ $\quad x^4+x^2=Y$
$=(Y+1)(Y-1)$
$=Y^2-1$
$=(x^4+x^2)^2-1$
$=x^8+2x^6+x^4-1$
따라서 $a=1$, $p=8$, $b=2$, $q=6$, $c=1$, $r=4$, $d=-1$이므로
$ap+bq+cr+d=1\times8+2\times6+1\times4+(-1)=23$

20

다항식 $a^2-16b^2-c^2+6ab+10bc$가 두 일차식으로 인수분해 될 때, 두 일차식의 합을 구하시오. [4점] **$2a+6b$**

$a^2-16b^2-c^2+6ab+10bc$
$=a^2+6ab+9b^2-9b^2-16b^2+10bc-c^2$
$=(a^2+6ab+9b^2)-(25b^2-10bc+c^2)$
$=(a+3b)^2-(5b-c)^2$
$=(a+3b+5b-c)(a+3b-5b+c)$
$=(a+8b-c)(a-2b+c)$
따라서 두 일차식은 $a+8b-c$, $a-2b+c$이므로 그 합은
$(a+8b-c)+(a-2b+c)=2a+6b$

21

다항식 $x^2-4xy+3y^2-6x+2y-16$을 두 일차식으로 인수분해 하였을 때, 두 일차식의 x항과 y항의 계수의 합을 구하시오. [4점] **-2**

주어진 식을 x에 대하여 정리하면
$x^2-4xy+3y^2-6x+2y-16$
$=x^2-(4y+6)x+3y^2+2y-16$
$=x^2-(4y+6)x+(3y+8)(y-2)$
$=(x-3y-8)(x-y+2)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & -(3y+8) & \rightarrow -3y-8 \\ 1 & -(y-2) & \rightarrow -y+2 \;(+ \\ & & -4y-6 \end{array}$$

따라서 두 일차식은 $x-3y-8$, $x-y+2$이므로 두 일차식의 x항과 y항의 계수의 합은
$(1-3)+(1-1)=-2$

22, 23번은 서술형입니다. 풀이 과정을 자세히 서술하시오.

22

다항식 $16x^2-(m-35)x+121$이 완전제곱식이 되도록 하는 모든 상수 m의 값의 합을 구하시오. [7점] 70

$16x^2-(m-35)x+121=(4x)^2-(m-35)x+11^2$ ···· 2점
이 식이 완전제곱식이 되려면
$-(m-35)=2\times4\times11$ 또는 $-(m-35)=-2\times4\times11$
이어야 하므로
$-m+35=88$ 또는 $-m+35=-88$
$\therefore$ $m=-53$ 또는 $m=123$ ···· 4점
따라서 모든 상수 m의 값의 합은
$-53+123=70$ ···· 1점

23

두 자리의 자연수 $(x+y)^2-(y+6)^2$이 20 이하의 소수가 되도록 하는 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)를 모두 구하시오. [7점] $(7, 2)$, $(7, 3)$

$(x+y)^2-(y+6)^2=(x+y+y+6)(x+y-y-6)$
$=(x+2y+6)(x-6)$ ······ ㉠ ···· 2점
㉠이 20 이하의 소수가 되어야 하고 두 자연수 x, y에 대하여 $x+2y+6\geq9$이므로
$x-6=1$이어야 한다.
$\therefore$ $x=7$ ···· 2점
이때 $x+2y+6=7+2y+6=2y+13\geq15$이므로 ㉠이 20 이하의 소수가 되려면
$2y+13$의 값은 17 또는 19이다.
(ⅰ) $2y+13=17$일 때
$2y=4$ $\therefore$ $y=2$
(ⅱ) $2y+13=19$일 때
$2y=6$ $\therefore$ $y=3$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 순서쌍 (x, y)는
$(7, 2)$, $(7, 3)$ ···· 3점

Ⅲ

이차방정식

Ⅲ 이차방정식

1등급 비법노트

- 방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 상수)이 x에 대한 이차방정식이 되는 조건
⇨ $a\neq0$
- $x=k$가 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해이다.
⇨ $ak^2+bk+c=0$
- $A=0$ 또는 $B=0$이면 다음 세 가지 중 하나가 성립한다.
① $A=0$이고 $B=0$
② $A=0$이고 $B\neq0$
③ $A\neq0$이고 $B=0$
- 완전제곱식: 다항식의 제곱으로 된 식 또는 이 식에 상수를 곱한 식
- 이차방정식 $(x+p)^2=q$의 해

	$(x+p)^2=q$의 해
$q>0$	$x=-p\pm\sqrt{q}$
$q=0$	$x=-p$
$q<0$	해는 없다.

01 이차방정식의 풀이

1 이차방정식의 뜻과 해

(1) **x에 대한 이차방정식:** 방정식의 우변에 있는 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이 (x에 대한 이차식)$=0$의 꼴로 나타나는 방정식
⇨ $ax^2+bx+c=0$ (단, a, b, c는 상수, $a\neq0$)

(2) **이차방정식의 해(근):** 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 참이 되게 하는 x의 값

참고 x에 대한 이차방정식에서 x의 값의 범위가 주어지지 않으면 x의 값의 범위를 모든 실수로 생각한다.

(3) **이차방정식을 푼다:** 이차방정식의 해를 모두 구하는 것

2 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이

(1) **$AB=0$의 성질:** 두 수 또는 두 식 A, B에 대하여 다음이 성립한다.
$AB=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$

(2) **인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이**
❶ 주어진 이차방정식을 $ax^2+bx+c=0$의 꼴로 나타낸다.
❷ 좌변을 인수분해 한다.
❸ $AB=0$의 성질을 이용하여 해를 구한다.

(3) **중근:** 이차방정식의 두 해가 중복되어 서로 같을 때, 이 해를 주어진 이차방정식의 중근이라고 한다.

(4) **이차방정식이 중근을 가질 조건**
① 이차방정식이 (완전제곱식)$=0$의 꼴로 나타내어지면 이 이차방정식은 중근을 갖는다.
② 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ (a, b는 상수)이 중근을 가질 조건
⇨ $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$

3 완전제곱식을 이용한 이차방정식의 풀이

(1) **이차방정식 $x^2=q$ $(q\geq0)$의 해:** $x=\pm\sqrt{q}$

(2) **이차방정식 $(x+p)^2=q$ $(q\geq0)$의 해:** $x=-p\pm\sqrt{q}$

(3) **완전제곱식을 이용한 이차방정식의 풀이:** 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서
❶ 양변을 x^2의 계수 a로 나누어 x^2의 계수를 1로 만든다.
❷ 상수항을 우변으로 이항한다.
❸ 양변에 $\left\{\frac{(x\text{의 계수})}{2}\right\}^2$을 더한다.
❹ 좌변을 완전제곱식으로 만든다. 즉, (완전제곱식)$=$(상수)의 꼴로 만든다.
❺ 제곱근을 이용하여 이차방정식의 해를 구한다.

4 이차방정식의 근의 공식

다음과 같이 이차방정식의 근을 구하는 공식을 이차방정식의 근의 공식이라고 한다.

(1) **이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해:** $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (단, $b^2-4ac\ge0$)

(2) **이차방정식 $ax^2+\underbrace{2b'}_{x\text{의 계수가 짝수}}x+c=0$의 해:** $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ (단, $b'^2-ac\ge0$)

5 여러 가지 이차방정식의 풀이

(1) **괄호가 있는 이차방정식:** 곱셈공식이나 분배법칙을 이용하여 괄호를 풀어 전개하고, $ax^2+bx+c=0$의 꼴로 정리한다.

(2) **계수가 소수인 이차방정식:** 양변에 10, 100, 1000, …을 곱하여 모든 계수를 정수로 만든다.

(3) **계수가 분수인 이차방정식:** 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 모든 계수를 정수로 만든다.

(4) **공통부분이 있는 이차방정식:** 공통부분을 한 문자로 놓고 정리한다.

1등급 비법노트

- $b^2-4ac<0$ 또는 $b'^2-ac<0$이면 해가 없다.
- 이차방정식을 푸는 방법
  ① 좌변이 인수분해 되면
  ⇨ 인수분해를 이용하여 푼다.
  ② 좌변이 인수분해 되지 않으면
  ⇨ 이차방정식의 근의 공식을 이용한다.
- 공통부분이 있는 이차방정식을 푸는 방법
  ① 공통부분을 A로 놓고 정리한다.
  ② A에 대한 이차방정식을 푼다.
  ③ A에 원래의 식을 대입하여 x의 값을 구한다.

02 이차방정식의 활용

1 이차방정식의 근의 개수

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 개수는 b^2-4ac의 부호에 의해 결정된다.

(1) $b^2-4ac>0$ ⇨ 서로 다른 두 근을 갖는다. ⇨ 2개

(2) $b^2-4ac=0$ ⇨ 중근을 갖는다. ⇨ 1개

(3) $b^2-4ac<0$ ⇨ 근이 없다. ⇨ 0개

- x의 계수가 짝수일 때, 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 근의 개수는 b'^2-ac의 부호를 이용할 수도 있다.

2 이차방정식 구하기

(1) 두 근이 α, β이고 x^2의 계수가 a인 이차방정식

⇨ $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$, 즉 $a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$

(2) α를 중근으로 갖고 x^2의 계수가 a인 이차방정식

⇨ $a(x-\alpha)^2=0$

(3) 두 근의 합이 m, 곱이 n이고 x^2의 계수가 a인 이차방정식

⇨ $a(x^2-mx+n)=0$

(4) 계수가 유리수인 이차방정식에서 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다.

- 두 근의 조건이 주어졌을 때
  ① 두 근의 차가 k이면
  ⇨ α, $\alpha+k$
  ② 한 근이 다른 한 근의 k배이면
  ⇨ α, $k\alpha$
  ③ 두 근의 비가 $m:n$이면
  ⇨ $m\alpha$, $n\alpha$

3 이차방정식의 활용

이차방정식의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 푼다.

❶ 미지수 정하기: 문제의 뜻을 파악하고 구하려는 값을 미지수 x로 놓는다.

❷ 방정식 세우기: 문제의 뜻에 맞게 x에 대한 이차방정식을 세운다.

❸ 방정식 풀기: 이차방정식을 푼다.

❹ 확인하기: 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

- 개수, 인원수, 나이 등은 자연수이어야 하고, 길이, 넓이, 부피, 거리, 속력, 시간 등은 양수이어야 한다.

개념을 적용하는

Lv. 1 핵심 문제

개념 1 이차방정식의 뜻과 해

01

등식 $(2a-1)x^2+3x=(x-4)(3x+1)$이 x에 대한 이차방정식일 때, 다음 중 상수 a의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① -4 ② -2 ③ 0

✓④ 2 ⑤ 4

$(2a-1)x^2+3x=(x-4)(3x+1)$에서
$(2a-4)x^2+14x+4=0$
이 등식이 x에 대한 이차방정식이 되려면 $2a-4\neq0$이어야 하므로
$2a\neq4$ $\therefore a\neq2$

02

이차방정식 $x^2-2ax+8=0$의 한 근이 $x=4$이고, 이차방정식 $3x^2-4x-2b-5=0$의 한 근이 $x=-1$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -6 ② -3 ③ -1

✓④ 3 ⑤ 6

$x=4$를 $x^2-2ax+8=0$에 대입하면
$16-8a+8=0$, $-8a=-24$
$\therefore a=3$
$x=-1$을 $3x^2-4x-2b-5=0$에 대입하면
$3+4-2b-5=0$, $-2b=-2$
$\therefore b=1$
$\therefore ab=3\times1=3$

03 출제 주의

이차방정식 $6x^2+3x-1=0$의 한 근을 $x=p$, 이차방정식 $2x^2+4x-5=0$의 한 근을 $x=q$라고 할 때, $(2p^2+p+1)(q^2+2q-4)$의 값은?

✓① -2 ② $-\frac{7}{6}$ ③ $-\frac{5}{6}$

④ $\frac{1}{6}$ ⑤ 1

$x=p$를 $6x^2+3x-1=0$에 대입하면
$6p^2+3p-1=0$, $6p^2+3p=1$ $\therefore 2p^2+p=\frac{1}{3}$
$x=q$를 $2x^2+4x-5=0$에 대입하면
$2q^2+4q-5=0$, $2q^2+4q=5$ $\therefore q^2+2q=\frac{5}{2}$
$\therefore (2p^2+p+1)(q^2+2q-4)=\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{5}{2}-4\right)=-2$

개념 2 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이

04

이차방정식 $(4x+1)(x-3)=2x^2-2x-12$의 근을 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$라고 할 때, $4\alpha\beta$의 값은?

① -21 ② -18 ③ -12

④ 12 ✓⑤ 18

$(4x+1)(x-3)=2x^2-2x-12$에서
$4x^2-11x-3=2x^2-2x-12$, $2x^2-9x+9=0$
$(2x-3)(x-3)=0$ $\therefore x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=3$
따라서 $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=3$ 또는 $\alpha=3$, $\beta=\frac{3}{2}$이므로
$4\alpha\beta=4\times\frac{3}{2}\times3=18$

05 서술형

이차방정식 $x^2-10x+25=0$의 근이 이차방정식 $-2x^2-kx+10=0$의 한 근일 때, 이차방정식 $-2x^2-kx+10=0$의 다른 한 근을 구하시오. $x=-1$

(단, k는 상수이다.)

$x^2-10x+25=0$에서
$(x-5)^2=0$ $\therefore x=5$ ········ 30 %
$x=5$를 $-2x^2-kx+10=0$에 대입하면
$-50-5k+10=0$, $-5k=40$
$\therefore k=-8$ ········ 30 %
즉, $-2x^2+8x+10=0$에서
$x^2-4x-5=0$, $(x+1)(x-5)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$
따라서 다른 한 근은 $x=-1$이다. ········ 40 %

06

이차방정식 $x^2+2kx+k+6=0$이 중근을 갖도록 하는 상수 k의 값을 모두 고르면? (정답 2개)

① -6 ② -3 ✓③ -2

✓④ 3 ⑤ 6

$x^2+2kx+k+6=0$이 중근을 가지려면 $k+6=\left(\frac{2k}{2}\right)^2$이어야 하므로
$k^2-k-6=0$, $(k+2)(k-3)=0$
$\therefore k=-2$ 또는 $k=3$

개념 3 완전제곱식을 이용한 이차방정식의 풀이

07

이차방정식 $3x(3x-4)=5-12x$의 두 근의 곱은?

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{9}{5}$ ✓③ $-\frac{5}{9}$
④ $\frac{9}{5}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

$3x(3x-4)=5-12x$에서
$9x^2-12x=5-12x$, $9x^2=5$
$x^2=\frac{5}{9}$ $\therefore x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$
따라서 두 근의 곱은 $-\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3}=-\frac{5}{9}$

08

이차방정식 $3(x+a)^2=b$의 근이 $x=2\pm\sqrt{2}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. -12

$3(x+a)^2=b$에서
$(x+a)^2=\frac{b}{3}$, $x+a=\pm\sqrt{\frac{b}{3}}$
$\therefore x=-a\pm\sqrt{\frac{b}{3}}$
따라서 $-a=2$, $\frac{b}{3}=2$이므로 $a=-2$, $b=6$
$\therefore ab=-2\times6=-12$

09 출제 주의

이차방정식 $x^2-12x+30=0$을 $(x+a)^2=b$의 꼴로 나타내어 풀었더니 근이 $x=c$ 또는 $x=d$가 되었다. 이때 $ac-bd$의 값은? (단, $c<d$이고, a, b는 상수이다.)

✓① -72 ② -36 ③ -18
④ 24 ⑤ 48

$x^2-12x+30=0$에서
$x^2-12x=-30$, $(x-6)^2=6$
$\therefore x=6\pm\sqrt{6}$
따라서 $c<d$이므로 $a=-6$, $b=6$, $c=6-\sqrt{6}$, $d=6+\sqrt{6}$
$\therefore ac-bd=-6(6-\sqrt{6})-6(6+\sqrt{6})=-72$

개념 4 이차방정식의 근의 공식

10

이차방정식 $3x^2+6x-5=0$의 두 근의 합을 m이라고 할 때, $-5m$의 값은?

① 25 ② 20 ③ 15
✓④ 10 ⑤ 5

$3x^2+6x-5=0$에서 $x=\frac{-3\pm2\sqrt{6}}{3}$
따라서 $m=\frac{-3-2\sqrt{6}}{3}+\frac{-3+2\sqrt{6}}{3}=-2$이므로
$-5m=-5\times(-2)=10$

11

이차방정식 $x^2-2ax-a+2=0$을 x의 계수와 상수항을 잘못 보고 서로 바꾸어 풀었더니 한 근이 6이었다. 이때 처음 이차방정식의 해를 구하시오. (단, a는 상수이다.)
$x=6\pm2\sqrt{10}$

이차방정식 $x^2-2ax-a+2=0$에서 x의 계수와 상수항을 서로 바꾼 이차방정식은
$x^2+(-a+2)x-2a=0$
이 이차방정식의 한 근이 6이므로
$36-6a+12-2a=0$, $-8a=-48$
$\therefore a=6$
따라서 처음 이차방정식은 $x^2-12x-4=0$이므로
$x=6\pm2\sqrt{10}$

12

이차방정식 $Ax^2-5x-1=0$의 근이 $x=\frac{5\pm\sqrt{B}}{4}$일 때, 두 유리수 A, B에 대하여 $B-6A$의 값은?

① -15 ② -12 ③ -7
④ 18 ✓⑤ 21

$Ax^2-5x-1=0$에서 $x=\frac{5\pm\sqrt{25+4A}}{2A}$
따라서 $2A=4$, $25+4A=B$이므로 $A=2$, $B=33$
$\therefore B-6A=33-6\times2=21$

13

이차방정식 $x^2-ax+4b=0$의 근이 $x=2\pm4\sqrt{5}$일 때, 두 유리수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① 20　② 21　③ 22
✓④ 23　⑤ 24

$x^2-ax+4b=0$에서 $x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-16b}}{2}$
따라서 $\frac{a}{2}=2$, $\frac{\sqrt{a^2-16b}}{2}=4\sqrt{5}$이므로 $a=4$
$\frac{\sqrt{a^2-16b}}{2}=4\sqrt{5}$에서 $\sqrt{a^2-16b}=8\sqrt{5}$이므로 양변을 제곱하면
$a^2-16b=320$, $16b=4^2-320=-304$
$\therefore b=-19$
$\therefore a-b=4-(-19)=23$

개념 5 여러 가지 이차방정식의 풀이

14

이차방정식 $\frac{1}{5}x^2=\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}$의 두 근을 α, β라고 할 때, $2\beta-2\alpha$의 값을 구하시오. (단, $\alpha<\beta$) $\sqrt{41}$

$\frac{1}{5}x^2=\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}$의 양변에 10을 곱하면
$2x^2=5x+2$, $2x^2-5x-2=0$
$\therefore x=\frac{5\pm\sqrt{41}}{4}$
따라서 $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=\frac{5-\sqrt{41}}{4}$, $\beta=\frac{5+\sqrt{41}}{4}$
$\therefore 2\beta-2\alpha=2(\beta-\alpha)=2\left(\frac{5+\sqrt{41}}{4}-\frac{5-\sqrt{41}}{4}\right)=\sqrt{41}$

15

이차방정식 $(x+2)(x-1)-\frac{x^2-1}{3}=\frac{5x-3}{2}$의 두 근 중 작은 근을 $x=\alpha$라고 할 때, $9-8\alpha$의 값은?

✓① $\sqrt{97}$　② $3\sqrt{11}$　③ $9+\sqrt{97}$
④ $9+3\sqrt{11}$　⑤ $18+\sqrt{97}$

$(x+2)(x-1)-\frac{x^2-1}{3}=\frac{5x-3}{2}$의 양변에 6을 곱하면
$6(x^2+x-2)-2(x^2-1)=3(5x-3)$
$6x^2+6x-12-2x^2+2=15x-9$
$4x^2-9x-1=0$　$\therefore x=\frac{9\pm\sqrt{97}}{8}$
이때 두 근 중 작은 근은 $\frac{9-\sqrt{97}}{8}$이므로 $\alpha=\frac{9-\sqrt{97}}{8}$
$\therefore 9-8\alpha=9-8\times\frac{9-\sqrt{97}}{8}=\sqrt{97}$

16

이차방정식 $\frac{1}{7}x^2-0.9x=0.7$의 두 근 중 음수인 근을 A라고 할 때, $n<A<n+1$이 성립한다. 이때 정수 n의 값은?

① -3　② -2　✓③ -1
④ 0　⑤ 1

$\frac{1}{7}x^2-0.9x=0.7$에서 $\frac{1}{7}x^2-\frac{9}{10}x-\frac{7}{10}=0$
이 식의 양변에 70을 곱하면
$10x^2-63x-49=0$, $(10x+7)(x-7)=0$
$\therefore x=-\frac{7}{10}$ 또는 $x=7$
이때 음수인 근 A는 $A=-\frac{7}{10}$이고 $-1<-\frac{7}{10}<0$이므로
$-1<A<0$　$\therefore n=-1$

17 서술형

$(5x+2y)(5x+2y-6)+9=0$일 때, $-6y-15x$의 값을 구하시오. -9

$(5x+2y)(5x+2y-6)+9=0$에서 $5x+2y=A$라고 하면
$A(A-6)+9=0$ ······ 30 %
$A^2-6A+9=0$, $(A-3)^2=0$
$\therefore A=3$ ······ 40 %
따라서 $5x+2y=3$이므로
$-6y-15x=-3(5x+2y)=-3\times3=-9$ ······ 30 %

18

방정식 $(x^2-5x+1)(x^2-5x+9)+15=0$의 모든 해의 합을 구하시오. 10

$(x^2-5x+1)(x^2-5x+9)+15=0$에서 $x^2-5x=A$라고 하면
$(A+1)(A+9)+15=0$, $A^2+10A+24=0$
$(A+6)(A+4)=0$　$\therefore A=-6$ 또는 $A=-4$
(ⅰ) $A=-6$일 때
$x^2-5x=-6$, $x^2-5x+6=0$
$(x-2)(x-3)=0$　$\therefore x=2$ 또는 $x=3$
(ⅱ) $A=-4$일 때
$x^2-5x=-4$, $x^2-5x+4=0$
$(x-1)(x-4)=0$　$\therefore x=1$ 또는 $x=4$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 방정식의 해는
$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$
따라서 모든 해의 합은 $1+2+3+4=10$

01 출제 주의

이차방정식 $kx^2+ax+(k+1)b=0$은 실수 k의 값에 관계없이 항상 $x=2$를 근으로 갖는다. 이때 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① -10 ② -6 ③ -2

④ 2 ✓⑤ 6

$x=2$를 $kx^2+ax+(k+1)b=0$에 대입하면

$4k+2a+(k+1)b=0$

$4k+2a+kb+b=0$

위의 식을 k에 대하여 정리하면 $(4+b)k+(2a+b)=0$

위의 식이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면 $4+b=0$, $2a+b=0$이어야 한다.

따라서 $b=-4$, $a=2$이므로

$a-b=2-(-4)=6$

02

이차방정식

$$a(x+1)(x+2)+b(x+2)(x+3)+c(x+3)(x+1)=0$$

의 두 근이 $x=0$ 또는 $x=1$일 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $\dfrac{(c-a)^3}{abc}$의 값은?

① 24 ② 36 ✓③ 48

④ 60 ⑤ 72

$a(x+1)(x+2)+b(x+2)(x+3)+c(x+3)(x+1)=0$에

$x=0$을 대입하면 $2a+6b+3c=0$ …… ㉠

$x=1$을 대입하면 $6a+12b+8c=0$ $\quad\therefore 3a+6b+4c=0$ …… ㉡

㉡$-$㉠을 하면 $a+c=0$ $\quad\therefore a=-c$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $6b+c=0$ $\quad\therefore b=-\frac{1}{6}c$

따라서 $a:b:c=-c:-\frac{c}{6}:c=-6:-1:6$이므로

$a=-6k$, $b=-k$, $c=6k$ (k는 실수)라고 하면

$\frac{(c-a)^3}{abc}=\frac{\{6k-(-6k)\}^3}{-6k\times(-k)\times 6k}=\frac{(12k)^3}{36k^3}=48$

03 출제 주의

이차방정식 $(x-p)(x-q)=3$의 두 근을 α, β라고 할 때, 두 상수 p, q에 대하여 $\dfrac{(p-\alpha)(q-\alpha)}{\beta^2-(p+q)\beta+pq-2}$의 값을 구하시오. 3

$(x-p)(x-q)=3$의 두 근이 α, β이므로

$(\alpha-p)(\alpha-q)=3$, $(\beta-p)(\beta-q)=3$

이때 $(\alpha-p)(\alpha-q)=3$에서 $(p-\alpha)(q-\alpha)=3$

$(\beta-p)(\beta-q)=3$에서 $\beta^2-(p+q)\beta+pq=3$

$\therefore \frac{(p-\alpha)(q-\alpha)}{\beta^2-(p+q)\beta+pq-2}=\frac{3}{3-2}=3$

04

이차방정식 $x^2-5x+1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때,

$\alpha^4+\beta^2+\alpha+\beta+\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\alpha^4}+\dfrac{1}{\beta^2}$의 값은?

① 550 ✓② 560 ③ 570

④ 580 ⑤ 590

$x^2-5x+1=0$에서

$x-5+\frac{1}{x}=0$ $\quad\therefore x+\frac{1}{x}=5$

$\therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=5$, $\beta+\frac{1}{\beta}=5$

$\alpha+\frac{1}{\alpha}=5$에서

$\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2=5^2-2=23$

$\alpha^4+\frac{1}{\alpha^4}=\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)^2-2=23^2-2=527$

마찬가지 방법으로 $\beta^2+\frac{1}{\beta^2}=23$

$\therefore \alpha^4+\beta^2+\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha^4}+\frac{1}{\beta^2}=\alpha^4+\frac{1}{\alpha^4}+\alpha+\frac{1}{\alpha}+\beta^2+\frac{1}{\beta^2}+\beta+\frac{1}{\beta}$

$=527+5+23+5=560$

05

이차방정식 $[x]^2-6[x]-55=0$의 해의 범위를 구하시오.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

$-5\le x<-4$ 또는 $11\le x<12$

$[x]^2-6[x]-55=0$에서

$([x]+5)([x]-11)=0$ $\quad\therefore [x]=-5$ 또는 $[x]=11$

(i) $[x]=-5$일 때, $-5\le x<-4$

(ii) $[x]=11$일 때, $11\le x<12$

(i), (ii)에 의하여 $-5\le x<-4$ 또는 $11\le x<12$

06

일차부등식 $2(3x+2)>5(x+k)$와 이차방정식 $3(x+2)(x-7)=x(x-7)$을 동시에 만족시키는 x의 값이 7일 때, 상수 k의 값의 범위를 구하시오. $\frac{1}{5}\le k<\frac{11}{5}$

$3(x+2)(x-7)=x(x-7)$에서

$3(x^2-5x-14)=x^2-7x$, $2x^2-8x-42=0$

$x^2-4x-21=0$, $(x+3)(x-7)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=7$ …… ㉠

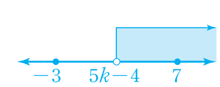
$2(3x+2)>5(x+k)$에서

$6x+4>5x+5k$ $\quad\therefore x>5k-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값이 7이려면

$-3\le 5k-4<7$이어야 하므로

$1\le 5k<11$ $\quad\therefore \frac{1}{5}\le k<\frac{11}{5}$



07 출제 주의

이차방정식 $x^2+3|x-1|-7=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은?

① 1　② 2　✓③ 3
④ 4　⑤ 5

(ⅰ) $x<1$일 때, $x^2-3(x-1)-7=0$이므로
$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$
$\therefore x=-1$ ($\because x<1$)
(ⅱ) $x\ge1$일 때, $x^2+3(x-1)-7=0$이므로
$x^2+3x-10=0$, $(x+5)(x-2)=0$
$\therefore x=2$ ($\because x\ge1$)
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 방정식의 근은 $x=-1$ 또는 $x=2$
따라서 $\alpha=-1$, $\beta=2$ 또는 $\alpha=2$, $\beta=-1$이므로
$|\alpha-\beta|=|-1-2|=3$

08

0이 아닌 두 실수 x, y 중 작지 않은 수를 $L(x, y)$라 하고, 크지 않은 수를 $S(x, y)$라고 하자. $L(x, y)=x^2+2y^2$, $S(x, y)=3x-y$를 모두 만족시키는 x, y에 대하여 $\frac{y}{x}$의 값을 구하시오. 2

(ⅰ) $x\ge y$일 때, $L(x, y)=x$이므로 $x=x^2+2y^2$ …… ㉠
$S(x, y)=y$이므로 $y=3x-y$, $2y=3x$　$\therefore y=\frac{3}{2}x$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $x=x^2+2\times\left(\frac{3}{2}x\right)^2$, $11x^2-2x=0$, $x(11x-2)=0$
$\therefore x=0$, $y=0$ 또는 $x=\frac{2}{11}$, $y=\frac{3}{11}$
이때 $x\ge y$이고 $x\ne0$, $y\ne0$이므로 주어진 조건을 만족시키는 x, y의 값은 없다.
(ⅱ) $x<y$일 때, $L(x, y)=y$이므로 $y=x^2+2y^2$ …… ㉢
$S(x, y)=x$이므로 $x=3x-y$　$\therefore y=2x$ …… ㉣
㉣을 ㉢에 대입하면 $2x=x^2+2\times(2x)^2$, $9x^2-2x=0$, $x(9x-2)=0$
$\therefore x=0$, $y=0$ 또는 $x=\frac{2}{9}$, $y=\frac{4}{9}$
이때 $x<y$이므로 $x=\frac{2}{9}$, $y=\frac{4}{9}$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $x=\frac{2}{9}$, $y=\frac{4}{9}$이므로 $\frac{y}{x}=y\times\frac{1}{x}=\frac{4}{9}\times\frac{9}{2}=2$

09

$P(x)=ax^2+bx+1$이 $P(x)+4x=P(x+2)+2$를 만족시킬 때, 이차방정식 $P(x)=19$의 해는? (단, a, b는 상수이다.)

① $x=-3$ 또는 $x=-6$
✓② $x=-3$ 또는 $x=6$
③ $x=-1$ 또는 $x=-4$
④ $x=-1$ 또는 $x=4$
⑤ $x=3$ 또는 $x=-6$

$P(x)+4x=P(x+2)+2$에서
$P(x+2)-P(x)=4x-2$
$P(x+2)-P(x)$
$=a(x+2)^2+b(x+2)+1-(ax^2+bx+1)$
$=ax^2+4ax+4a+bx+2b+1-ax^2-bx-1$
$=4ax+4a+2b=4x-2$
즉, $4a=4$, $4a+2b=-2$이므로
$a=1$, $b=-3$
따라서 $P(x)=x^2-3x+1$이므로 $P(x)=19$에서
$x^2-3x+1=19$, $x^2-3x-18=0$
$(x+3)(x-6)=0$　$\therefore x=-3$ 또는 $x=6$

10

이차방정식 $|x^2-4x+3|=\sqrt{9-6x+x^2}$의 모든 근의 합은?

✓① 5　② 6　③ 7
④ 8　⑤ 9

$|x^2-4x+3|=\sqrt{9-6x+x^2}$에서 $|x^2-4x+3|=|3-x|$
(ⅰ) $x^2-4x+3=-(3-x)$일 때
$x^2-4x+3=-3+x$, $x^2-5x+6=0$
$(x-2)(x-3)=0$　$\therefore x=2$ 또는 $x=3$
(ⅱ) $x^2-4x+3=3-x$일 때
$x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=3$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 근의 합은
$0+2+3=5$

11

점 $(a-1, a^2)$을 지나는 함수 $y=-\frac{a}{4}x+1$의 그래프가 제1, 2, 4사분면을 지날 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　✓③ 1
④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{3}{2}$

함수 $y=-\frac{a}{4}x+1$의 그래프가 제1, 2, 4사분면을 지나므로 기울기가 음수이어야 한다.
즉, $-\frac{a}{4}<0$에서 $a>0$
또, 점 $(a-1, a^2)$이 $y=-\frac{a}{4}x+1$의 그래프 위의 점이므로
$a^2=-\frac{a}{4}\times(a-1)+1$, $5a^2-a-4=0$
$(5a+4)(a-1)=0$　$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

12 출제 주의

이차방정식 $(1011x)^2-1010\times1012x-1=0$의 두 근 중 큰 근을 α라 하고 $x^2+1010x-1011=0$의 두 근 중 작은 근을 β라고 할 때, $\alpha-\beta$의 값을 구하시오. 1012

$(1011x)^2-1010\times1012x-1=0$에서 $1011=A$라고 하면
$A^2x^2-(A^2-1)x-1=0$, $(A^2x+1)(x-1)=0$
$\therefore x=-\frac{1}{A^2}$ 또는 $x=1$
즉, $(1011x)^2-1010\times1012x-1=0$의 두 근은 $x=-\frac{1}{1011^2}$ 또는 $x=1$이므로 $\alpha=1$
또, $x^2+1010x-1011=0$에서
$(x+1011)(x-1)=0$　$\therefore x=-1011$ 또는 $x=1$
$\therefore \beta=-1011$
$\therefore \alpha-\beta=1-(-1011)=1012$

13 서술형

$1-\sqrt{5}$의 정수 부분과 소수 부분을 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $2a+b$의 값을 구하시오. $4\sqrt{5}-4$

$-2<1-\sqrt{5}<-1$이므로 $1-\sqrt{5}$의 정수 부분은 -2이고 소수 부분은
$(1-\sqrt{5})-(-2)=3-\sqrt{5}$ ······ 30 %
$x=-2$가 $x^2+ax+b=0$의 근이므로
$4-2a+b=0$ $\quad\therefore b=2a-4$ ······ ㉠
$x=3-\sqrt{5}$도 $x^2+ax+b=0$의 근이므로
$(3-\sqrt{5})^2+a\times(3-\sqrt{5})+b=0$, $9-6\sqrt{5}+5+3a-\sqrt{5}a+b=0$
$\therefore 14-6\sqrt{5}+3a-\sqrt{5}a+b=0$ ······ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$14-6\sqrt{5}+3a-\sqrt{5}a+2a-4=0$, $(5-\sqrt{5})a=-10+6\sqrt{5}$
$\therefore a=\dfrac{6\sqrt{5}-10}{5-\sqrt{5}}=\dfrac{20\sqrt{5}-20}{20}=\sqrt{5}-1$
$b=2(\sqrt{5}-1)-4=2\sqrt{5}-6$ ······ 60 %
$\therefore 2a+b=2(\sqrt{5}-1)+(2\sqrt{5}-6)=4\sqrt{5}-4$ ······ 10 %

14

방정식 $|5-3x|=2$의 근 중 작은 근이 x에 대한 이차방정식 $x^2+2x+a=0$의 한 근일 때, 이 이차방정식의 또 다른 한 근을 구하시오. (단, a는 상수이다.) $x=-3$

$|5-3x|=2$에서
$5-3x=-2$ 또는 $5-3x=2$ $\quad\therefore x=\frac{7}{3}$ 또는 $x=1$
이때 둘 중 작은 근인 $x=1$이 $x^2+2x+a=0$의 근이므로
$1^2+2+a=0$ $\quad\therefore a=-3$
즉, $x^2+2x-3=0$에서
$(x+3)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=1$
따라서 또 다른 한 근은 $x=-3$이다.

15

x에 대한 이차방정식 $|x^2-(a+1)x+a^2-3a|=3$의 한 근이 1일 때, 모든 상수 a의 값의 곱은?

✓① -9 ② -6 ③ -3
④ 6 ⑤ 9

$x=1$을 $|x^2-(a+1)x+a^2-3a|=3$에 대입하면
$|1^2-(a+1)+a^2-3a|=3$, $|a^2-4a|=3$
$\therefore a^2-4a=-3$ 또는 $a^2-4a=3$
(i) $a^2-4a=-3$일 때
$a^2-4a+3=0$이므로
$(a-1)(a-3)=0$ $\quad\therefore a=1$ 또는 $a=3$
(ii) $a^2-4a=3$일 때
$a^2-4a-3=0$이므로 $a=2\pm\sqrt{7}$
(i), (ii)에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은
$1\times3\times(2-\sqrt{7})(2+\sqrt{7})=-9$

16

x에 대한 이차방정식 $x^2-2(a-2)x+a^2-4a-3b=0$에 대하여 $x+2=a+b$일 때, 모든 b의 값의 합은?
(단, a, b는 상수이다.)

① 1 ✓② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

$x^2-2(a-2)x+a^2-4a-3b=0$에서
$x^2-(2a-4)x+a(a-4)=3b$
$(x-a)(x-a+4)=3b$ ······ ㉠
$x+2=a+b$에서 $x-a=b-2$이므로 이를 ㉠에 대입하면
$(b-2)(b+2)=3b$, $b^2-3b-4=0$
$(b+1)(b-4)=0$ $\quad\therefore b=-1$ 또는 $b=4$
따라서 모든 b의 값의 합은 $-1+4=3$

17

일차방정식 $a(ax-1)-(x+1)=0$이 근을 갖지 않을 때, 이차방정식 $[x]^2-(4a-1)[x]-5a+1=0$을 만족시키는 가장 작은 x의 값은? (단, a는 상수이고, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① -5 ② -3 ✓③ -1
④ 1 ⑤ 3

$a(ax-1)-(x+1)=0$에서
$(a^2-1)x=a+1$ $\quad\therefore (a+1)(a-1)x=a+1$ ······ ㉠
㉠이 근을 갖지 않으므로
$(a+1)(a-1)=0$, $a+1\neq0$ $\quad\therefore a=1$
$a=1$을 $[x]^2-(4a-1)[x]-5a+1=0$에 대입하면
$[x]^2-3[x]-4=0$ ······ ㉡
$([x]+1)([x]-4)=0$ $\quad\therefore [x]=-1$ 또는 $[x]=4$
(i) $[x]=-1$일 때, $-1\le x<0$
(ii) $[x]=4$일 때, $4\le x<5$
(i), (ii)에 의하여 ㉡의 해는 $-1\le x<0$, $4\le x<5$이므로 가장 작은 x의 값은 -1이다.

18

$3k+\sqrt{2}k=7$을 만족시키는 실수 k의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 하자. 이때 이차방정식
$x^2+(2a+b+\sqrt{2})x-(2+\sqrt{2})b=3$의 해는?

① $x=-5$ 또는 $x=-1$
✓② $x=-5$ 또는 $x=1$
③ $x=-4$ 또는 $x=-1$
④ $x=-4$ 또는 $x=1$
⑤ $x=1$ 또는 $x=5$

$3k+\sqrt{2}k=7$에서
$(3+\sqrt{2})k=7$ $\quad\therefore k=\dfrac{7}{3+\sqrt{2}}=3-\sqrt{2}$
$3-\sqrt{2}$의 정수 부분은 $a=1$, 소수 부분은 $b=2-\sqrt{2}$
$x^2+(2a+b+\sqrt{2})x-(2+\sqrt{2})b=3$에서
$x^2+4x-2=3$, $x^2+4x-5=0$
$(x+5)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-5$ 또는 $x=1$

19 출제 주의

x에 대한 이차방정식 $(a+1)x^2-4x+4-4a=0$에서 a가 어떤 실수의 값을 갖더라도 주어진 이차방정식의 근이 될 수 없는 실수 x의 값은?

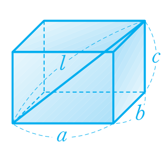
① -5 ② -4 ③ -3

✓④ -2 ⑤ -1

$(a+1)x^2-4x+4-4a=0$을 a에 대하여 정리하면
$(x^2-4)a+x^2-4x+4=0$, $(x+2)(x-2)a+(x-2)^2=0$
$(x-2)\{(x+2)a+(x-2)\}=0$ …… ㉠
이때 $x=-2$이면 ㉠에서 $-4\times(0\times a-4)=16\neq0$이므로 a가 어떤 실수의 값을 갖더라도 성립하지 않는다.
따라서 a가 어떤 실수의 값을 갖더라도 근이 될 수 없는 x의 값은 -2이다.

20 서술형

가로, 세로의 길이와 높이가 각각 a, b, c인 직육면체에서 모서리의 길이의 합을 m, 겉넓이를 S, 대각선의 길이를 l이라고 하자. 이차방정식 $3x^2-\frac{m}{2}x+\frac{S}{2}=0$이 중근을 가질 때, $\frac{m}{l}$의 값을 구하시오. $4\sqrt{3}$



$m=4(a+b+c)$, $S=2(ab+bc+ca)$,
$l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ······ 20 %
$m=4(a+b+c)$, $S=2(ab+bc+ca)$를 $3x^2-\frac{m}{2}x+\frac{S}{2}=0$
에 대입하면 $3x^2-\frac{4(a+b+c)}{2}x+\frac{2(ab+bc+ca)}{2}=0$
$\therefore 3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=0$ ······ 20 %
이 이차방정식이 중근을 가지므로 $2^2(a+b+c)^2-4\times3(ab+bc+ca)=0$
$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$ ······ 30 %
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$
즉, $a-b=0$ 또는 $b-c=0$ 또는 $c-a=0$이므로 $a=b=c$
따라서 $m=4(a+a+a)=12a$, $l=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=\sqrt{3}a$이므로
$\frac{m}{l}=\frac{12a}{\sqrt{3}a}=4\sqrt{3}$ ······ 30 %

21 출제 주의

두 이차방정식 $x^2+ax+a=x+2$, $x^2+ax-4a=4x$가 공통인 근을 가질 때, 모든 상수 a의 값의 합을 구하시오. -1

$x^2+ax+a=x+2$에서
$x^2+(a-1)x+a-2=0$, $(x+1)(x+a-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2-a$
$x^2+ax-4a=4x$에서
$x^2+(a-4)x-4a=0$, $(x-4)(x+a)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=-a$
두 이차방정식이 공통인 근을 가지므로 $-a=-1$ 또는 $2-a=4$ 또는 $2-a=-a$이다.
(i) $-a=-1$일 때, $a=1$
(ii) $2-a=4$일 때, $a=-2$
(iii) $2-a=-a$일 때, $2=0$이므로 만족시키는 a의 값은 없다.
(i)~(iii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 상수 a의 값의 합은
$1+(-2)=-1$

22

두 실수 a, b에 대하여 두 이차방정식

$$x^2+a^2x+b^2-2a=0,\ x^2-2ax+a^2+b^2=0$$

이 단 한 개의 공통인 근을 가질 때, 공통인 근을 구하시오. $x=1$

공통인 근을 $x=\alpha$라고 하면
$\alpha^2+a^2\alpha+b^2-2a=0$ …… ㉠
$\alpha^2-2a\alpha+a^2+b^2=0$ …… ㉡
㉠$-$㉡을 하면
$a^2\alpha+2a\alpha-2a-a^2=0$, $(a^2+2a)\alpha-(a^2+2a)=0$
$(a^2+2a)(\alpha-1)=0$ $\therefore a^2+2a=0$ 또는 $\alpha=1$
이때 $a^2+2a=0$이면 $a^2=-2a$이므로 ㉠, ㉡이 서로 같다.
즉, 두 개의 공통인 근을 가지므로 모순이다.
$\therefore \alpha=1$
따라서 구하는 공통인 근은 $x=1$이다.

23

다음 세 이차방정식의 공통인 근이 음수일 때, 두 상수 p, q에 대하여 $\frac{p}{q}$의 값을 구하시오. 4

$$x^2-(1+p)x+p=0$$
$$x^2-(q-1)x-q=0$$
$$x^2-2(p+2q)x+8pq=0$$

$x^2-(1+p)x+p=0$에서 $(x-1)(x-p)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=p$ …… ㉠
$x^2-(q-1)x-q=0$에서 $(x+1)(x-q)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=q$ …… ㉡
$x^2-2(p+2q)x+8pq=0$에서 $(x-2p)(x-4q)=0$ $\therefore x=2p$ 또는 $x=4q$ …… ㉢
세 이차방정식의 공통인 근이 음수이므로 ㉠에서 공통인 근은 $x=p$
또, $p<0$이므로 ㉢과 ㉠에서 $p\neq2p$
즉, ㉢에서 공통인 근은 $x=4q$이고 $4q<0$이므로 ㉡과 ㉢에서 $q\neq4q$
따라서 ㉡에서 공통인 근은 $x=-1$이므로
$p=4q=-1$ $\therefore p=-1$, $q=-\frac{1}{4}$
$\therefore \frac{p}{q}=p\times\frac{1}{q}=-1\times(-4)=4$

24

정수가 아닌 두 유리수 m, n에 대하여 이차방정식 $2x^2+4mx-m^2=n^2+3n$을 완전제곱식의 꼴로 나타내면 $(x-2n)^2=n+7$이다. $m-n=\frac{q}{p}$일 때, 서로소인 두 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은?

① 50 ✓② 55 ③ 60

④ 65 ⑤ 70

$2x^2+4mx-m^2=n^2+3n$에서 $(x+m)^2=\frac{1}{2}(3m^2+n^2+3n)$
$\therefore m=-2n$ …… ㉠
$\frac{1}{2}(3m^2+n^2+3n)=n+7$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{1}{2}(12n^2+n^2+3n)=n+7$, $13n^2+n-14=0$
$(13n+14)(n-1)=0$ $\therefore n=-\frac{14}{13}$ 또는 $n=1$
이때 n은 정수가 아닌 유리수이므로 $n=-\frac{14}{13}$ $\therefore m=-2\times\left(-\frac{14}{13}\right)=\frac{28}{13}$
$\therefore m-n=\frac{28}{13}-\left(-\frac{14}{13}\right)=\frac{42}{13}$
따라서 $p=13$, $q=42$이므로 $p+q=13+42=55$

25

이차방정식 $x^2-18x+81-3n=0$의 해가 모두 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은?

✓① 15　② 17　③ 19
④ 21　⑤ 23

$x^2-18x+81-3n=0$에서
$(x-9)^2=3n \qquad \therefore x=9\pm\sqrt{3n}$
이때 $x=9\pm\sqrt{3n}$이 자연수가 되려면 $9-\sqrt{3n}$이 자연수이어야 하므로
$9-\sqrt{3n}>0 \qquad \therefore \sqrt{3n}<9$
양변을 제곱하면
$3n<81 \qquad \therefore n<27 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
또, $\sqrt{3n}$도 자연수이어야 하므로 n은 $3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
따라서 ㉠을 만족시키는 n의 값은 $3\times1^2=3$, $3\times2^2=12$이므로 주어진 이차방정식의 해가 모두 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은
$3+12=15$

26

이차방정식 $\underbrace{x^2+\sqrt{x^2}=|x-1|+3}_{x^2+|x|=|x-1|+3}$의 해를 α, β라고 할 때, $\dfrac{1}{\alpha+\beta}$의 값은?

✓① $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1$　② $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$　③ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1$　⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$

(i) $x<0$일 때, $x^2-x=-(x-1)+3$이므로
$x^2=4 \qquad \therefore x=-2\ (\because x<0)$
(ii) $0\le x<1$일 때, $x^2+x=-(x-1)+3$이므로
$x^2+2x-4=0 \qquad \therefore x=-1\pm\sqrt{5}$
이때 $0\le x<1$이므로 만족시키는 해는 없다.
(iii) $x\ge1$일 때, $x^2+x=x-1+3$이므로
$x^2=2 \qquad \therefore x=\sqrt{2}\ (\because x\ge1)$
(i)~(iii)에 의하여 주어진 이차방정식의 해는 $x=-2$ 또는 $x=\sqrt{2}$이므로 $\alpha+\beta=\sqrt{2}-2$
$\therefore \dfrac{1}{\alpha+\beta}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-2}=\dfrac{\sqrt{2}+2}{-2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1$

27

x에 대한 이차방정식 $3x^2-x+a-4=0$의 두 근이 유리수가 되도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합은?

① 2　② 4　✓③ 6
④ 8　⑤ 10

$3x^2-x+a-4=0$에서 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{49-12a}}{6}$
이때 두 근이 유리수가 되려면 $49-12a$의 값이 0 또는 (정수)^{2}의 꼴이어야 하므로
$49-12a=0, 1, 4, 9, 16, 25, 36 \qquad \therefore a=\dfrac{49}{12}, 4, \dfrac{15}{4}, \dfrac{10}{3}, \dfrac{11}{4}, 2, \dfrac{13}{12}$
이때 a는 자연수이므로 $a=2, 4$
따라서 모든 자연수 a의 값의 합은
$2+4=6$

28

x, y에 대한 이차식 $2x^2+xy-y^2-x+2y+k$가 x, y에 대한 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, 상수 k의 값을 구하시오. **-1**

주어진 식을 x에 대하여 정리하면
$2x^2+(y-1)x-y^2+2y+k=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
근의 공식에 의하여
$\therefore x=\dfrac{-y+1\pm\sqrt{9y^2-18y-8k+1}}{4} \qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠이 x, y에 대한 일차식으로 인수분해 되므로 ㉠의 근이 y에 대한 일차식이 되어야 한다.
즉, ㉡에서 x의 값은 근호 안의 이차식이 완전제곱식이 되어야 y에 대한 일차식이 되므로 y에 대한 이차방정식 $9y^2-18y-8k+1=0$이 중근을 가져야 한다.
즉, $y^2-2y+\dfrac{-8k+1}{9}=0$이 중근을 가져야 하므로
$\dfrac{-8k+1}{9}=\left(\dfrac{-2}{2}\right)^2$, $-8k+1=9$
$\therefore k=-1$

29 서술형

이차방정식 $x^2-1.\dot{6}x+a=0$의 한 근이 $x=1.\dot{3}$일 때, 다른 한 근을 $x=b$라고 하자. 이때 $a+b$의 값을 구하시오. **$\dfrac{7}{9}$**
(단, a는 상수이다.)

$x^2-1.\dot{6}x+a=0$에서 $x^2-\dfrac{5}{3}x+a=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$x=1.\dot{3}=\dfrac{4}{3}$를 ㉠에 대입하면
$\dfrac{16}{9}-\dfrac{20}{9}+a=0 \qquad \therefore a=\dfrac{4}{9}$ ······································· 40 %
즉, 주어진 이차방정식은 $x^2-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{4}{9}=0$이므로 양변에 9를 곱하면
$9x^2-15x+4=0$, $(3x-1)(3x-4)=0$
$\therefore x=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}$
$\therefore b=\dfrac{1}{3}$ ······································· 40 %
$\therefore a+b=\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{9}$ ······································· 20 %

30

방정식 $x^4-10x^3+25x^2-6x(x-5)=0$의 모든 해의 합은?

① 6　② 7　③ 8
④ 9　✓⑤ 10

$x^4-10x^3+25x^2=x^2(x^2-10x+25)=(x^2-5x)^2$
$x^4-10x^3+25x^2-6x(x-5)=0$에서 $(x^2-5x)^2-6(x^2-5x)=0$
이때 $x^2-5x=A$라고 하면
$A^2-6A=0$, $A(A-6)=0$
$\therefore A=0$ 또는 $A=6$
(i) $A=0$일 때
$x^2-5x=0$이므로
$x(x-5)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=5$
(ii) $A=6$일 때
$x^2-5x=6$, 즉 $x^2-5x-6=0$이므로
$(x+1)(x-6)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=6$
(i), (ii)에 의하여 모든 해의 합은
$-1+0+5+6=10$

31 출제 주의

자연수 n에 대하여 $f(n)=n(n+1)(n+2)(n+3)+1$이라고 할 때, $f(1)=25=5^2$, $f(2)=121=11^2$, $f(3)=361=19^2$, …으로 $f(n)$의 값은 어떤 자연수의 제곱이 된다. 이때 $f(n)=181^2$이 되는 n의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ✓⑤ 12

$f(n)=181^2$에서
$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=181^2$
$n(n+1)(n+2)(n+3)=181^2-1=180\times182$
$n(n+1)(n+2)(n+3)=(n^2+3n)(n^2+3n+2)=180\times182$
이때 $n^2+3n=A$라고 하면
$A(A+2)=180\times182$ $\quad\therefore A=180$
즉, $n^2+3n=180$이므로
$n^2+3n-180=0$, $(n+15)(n-12)=0$
$\therefore n=-15$ 또는 $n=12$
이때 n은 자연수이므로 $n=12$

32

$<x>$는 자연수 x에 대하여 x 이하의 소수의 개수라고 할 때, 이차방정식 $(<x>-1)^2+2(<x>-1)-8=0$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. 11

$(<x>-1)^2+2(<x>-1)-8=0$에서 $<x>-1=X$라고 하면
$X^2+2X-8=0$, $(X+4)(X-2)=0$
$\therefore X=-4$ 또는 $X=2$
(ⅰ) $X=-4$일 때
$<x>-1=-4$이므로 $<x>=-3$이고, x 이하의 소수의 개수는 자연수이므로 자연수 x의 값은 없다.
(ⅱ) $X=2$일 때
$<x>-1=2$이므로 $<x>=3$이고, x 이하의 소수의 개수가 3이므로 자연수 x의 값은 5 또는 6이다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 x의 값의 합은
$5+6=11$

33

$x=a+6\sqrt{3}$, $y=1+2\sqrt{3}$일 때, $x^2-6xy+9y^2+2x-6y-8=0$이 성립하도록 하는 모든 a의 값의 합은?

① -2 ② 0 ③ 2
✓④ 4 ⑤ 6

$x^2-6xy+9y^2+2x-6y-8=0$에서 $(x-3y)^2+2(x-3y)-8=0$
이때 $x-3y=A$라고 하면
$A^2+2A-8=0$, $(A+4)(A-2)=0$
$A=-4$ 또는 $A=2$ $\quad\therefore x-3y=-4$ 또는 $x-3y=2$
또, $x-3y=(a+6\sqrt{3})-3(1+2\sqrt{3})=a-3$이므로
$a-3=-4$ 또는 $a-3=2$ $\quad\therefore a=-1$ 또는 $a=5$
따라서 모든 a의 값의 합은
$-1+5=4$

34

두 양수 a, b가 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4$, $(a-b)^2=16(ab)^3$을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. 2

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=4$에서
$a+b=4ab$ $\quad\therefore (a+b)^2=16(ab)^2$
또, $(a-b)^2=16(ab)^3$이고 $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$이므로 $16(ab)^2=16(ab)^3+4ab$
이때 $ab=A$라고 하면
$16A^2=16A^3+4A$, $4A=4A^2+1$
$4A^2-4A+1=0$, $(2A-1)^2=0$
$\therefore A=\frac{1}{2}$
따라서 $ab=\frac{1}{2}$이므로
$a+b=4ab=4\times\frac{1}{2}=2$

35

x, y에 대한 두 이차방정식 $x^2+xy+2y=57$, $y^2+xy+2x=42$를 모두 만족시키는 두 양수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ✓⑤ 9

주어진 두 이차방정식의 각 변을 각각 더하면
$x^2+y^2+2xy+2x+2y=99$ $\quad\therefore (x+y)^2+2(x+y)-99=0$
이때 $x+y=A$라고 하면
$A^2+2A-99=0$, $(A+11)(A-9)=0$
$\therefore A=-11$ 또는 $A=9$
$\therefore x+y=-11$ 또는 $x+y=9$
그런데 $x+y>0$이므로 $x+y=9$

36

두 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2-x-y+2xy-6=0$이고 $xy=\frac{5}{2}$일 때, x^2+y^2의 값을 구하시오. 4

$x^2+y^2-x-y+2xy-6=0$에서 $(x+y)^2-(x+y)-6=0$
이때 $x+y=A$라고 하면
$A^2-A-6=0$, $(A+2)(A-3)=0$
$\therefore A=-2$ 또는 $A=3$
(ⅰ) $A=-2$일 때
$x+y=-2$이므로 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(-2)^2-2\times\frac{5}{2}=-1$
이를 만족시키는 실수 x, y는 존재하지 않는다.
(ⅱ) $A=3$일 때
$x+y=3$이므로 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2\times\frac{5}{2}=4$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $x^2+y^2=4$

개념 1 이차방정식의 근의 개수

01

이차방정식 $x^2-3x+5=0$의 서로 다른 근이 a개, 이차방정식 $3x^2+7x-2=0$의 서로 다른 근이 b개일 때, $a+b$의 값은?

① 0 ② 1 ✓③ 2
④ 3 ⑤ 4

$x^2-3x+5=0$에서 $(-3)^2-4\times1\times5=-11<0$이므로 이차방정식 $x^2-3x+5=0$은 근이 없다.
$\therefore a=0$
$3x^2+7x-2=0$에서 $7^2-4\times3\times(-2)=73>0$이므로 이차방정식 $3x^2+7x-2=0$은 서로 다른 두 근을 가진다.
$\therefore b=2$
$\therefore a+b=0+2=2$

02

이차방정식 $2x^2-6x+\frac{k+3}{4}=0$이 서로 다른 두 근을 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위는?

① $k>-15$ ② $k>-13$ ③ $k<11$
④ $k<13$ ✓⑤ $k<15$

이차방정식 $2x^2-6x+\frac{k+3}{4}=0$이 서로 다른 두 근을 가지려면
$(-6)^2-4\times2\times\frac{k+3}{4}>0$, $36-2k-6>0$
$-2k>-30$ $\therefore k<15$

03 출제 주의

이차방정식 $x^2+2x+4-k=0$은 서로 다른 두 근을 갖고, 이차방정식 $6x^2-(k+2)x+\frac{3}{8}k=0$은 중근을 가질 때, 상수 k의 값은?

① -4 ② -1 ③ 1
✓④ 4 ⑤ 5

이차방정식 $x^2+2x+4-k=0$은 서로 다른 두 근을 가지므로
$2^2-4\times1\times(4-k)>0$, $4-16+4k>0$
$4k>12$ $\therefore k>3$ …… ㉠
이차방정식 $6x^2-(k+2)x+\frac{3}{8}k=0$은 중근을 가지므로
$\{-(k+2)\}^2-4\times6\times\frac{3}{8}k=0$, $k^2-5k+4=0$
$(k-1)(k-4)=0$ $\therefore k=1$ 또는 $k=4$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $k=4$

개념 2 이차방정식 구하기

04

이차방정식 $4x^2-2ax+3b=0$이 중근 $-\frac{3}{2}$을 가질 때, 두 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값은?

① -9 ② -3 ③ 3
✓④ 9 ⑤ 13

중근이 $-\frac{3}{2}$이고 x^2의 계수가 4인 이차방정식은
$4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=0$ $\therefore 4x^2+12x+9=0$
이때 $-2a=12$, $3b=9$이므로 $a=-6$, $b=3$
$\therefore b-a=3-(-6)=9$

05 서술형

이차방정식 $x^2+5x+6=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식을 $ax^2+bx+c=0$의 꼴로 나타내시오. (단, $\alpha>\beta$)

$2x^2+8x-10=0$

$x^2+5x+6=0$에서
$(x+3)(x+2)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=-2$
이때 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=-2$, $\beta=-3$ ……… 30 %
$\therefore \alpha+\beta=-2-3=-5$, $\alpha-\beta=-2-(-3)=1$ ……… 30 %
따라서 두 근이 -5, 1이고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은
$2(x+5)(x-1)=0$ $\therefore 2x^2+8x-10=0$ ……… 40 %

06

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$일 때, 두 유리수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은?

① 6 ✓② 17 ③ 21
④ 29 ⑤ 30

$\frac{1}{\sqrt{5}-2}=2+\sqrt{5}$
이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2+\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{5}$이다.
두 근이 $2-\sqrt{5}$, $2+\sqrt{5}$이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$\{x-(2-\sqrt{5})\}\{x-(2+\sqrt{5})\}=0$ $\therefore x^2-4x-1=0$
따라서 $a=-4$, $b=-1$이므로
$a^2+b^2=(-4)^2+(-1)^2=17$

07

이차방정식 $x^2+ax+b=0$을 푸는데 도윤이는 a를 잘못 보고 풀어 $x=-3$ 또는 $x=5$의 근을 얻었고, 승아는 b를 잘못 보고 풀어 $x=-8$ 또는 $x=-6$의 근을 얻었다. 처음 이차방정식을 바르게 풀면? (단, a, b는 상수이다.)

① $x=-15$ 또는 $x=-14$
✓② $x=-15$ 또는 $x=1$
③ $x=-5$ 또는 $x=-3$
④ $x=-5$ 또는 $x=3$
⑤ $x=-1$ 또는 $x=15$

두 근이 -3, 5이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x+3)(x-5)=0$ $\quad\therefore x^2-2x-15=0$
이때 도윤이는 b를 바르게 보았으므로 $b=-15$
두 근이 -8, -6이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x+8)(x+6)=0$ $\quad\therefore x^2+14x+48=0$
이때 승아는 a를 바르게 보았으므로 $a=14$
따라서 처음 이차방정식은 $x^2+14x-15=0$이므로
$(x+15)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-15$ 또는 $x=1$

개념 3 이차방정식의 활용

08

세 변의 길이가 연속한 세 홀수인 삼각형이 있다. 삼각형의 각 변을 한 변으로 하는 세 정사각형의 넓이의 합이 155일 때, 이 삼각형의 둘레의 길이는?

① 15 ② 17 ③ 19
✓④ 21 ⑤ 23

연속하는 세 홀수를 각각 $x-2$, x, $x+2$라고 하면 $(x-2)^2+x^2+(x+2)^2=155$에서
$3x^2+8=155$, $3x^2=147$
$x^2=49$ $\quad\therefore x=-7$ 또는 $x=7$
이때 $x+2>0$, 즉 $x>-2$이므로 $x=7$
따라서 연속하는 세 홀수는 5, 7, 9이므로 삼각형의 둘레의 길이는
$5+7+9=21$

09 출제 주의

n개의 축구팀이 한 팀도 빠짐없이 서로 한 번씩 경기를 치를 때, 총 경기 수는 $\dfrac{n(n-1)}{2}$이다. 어떤 축구 대회에 참가한 팀들이 치른 총 경기 수가 78일 때, 이 대회에 참가한 축구팀은 모두 몇 팀인가?

① 9팀 ② 10팀 ③ 11팀
④ 12팀 ✓⑤ 13팀

$\dfrac{n(n-1)}{2}=78$에서
$n^2-n-156=0$, $(n+12)(n-13)=0$
$\therefore n=13$ ($\because n>0$)

10

지면에서 초속 32 m로 똑바로 위로 던진 공의 t초 후의 높이는 $(80+32t-4t^2)$ m이다. 위로 던진 지 몇 초 후에 공이 지면에 떨어지겠는가?

① 2초 후 ② 4초 후 ③ 6초 후
④ 8초 후 ✓⑤ 10초 후

공이 지면에 떨어지는 것은 공의 높이가 0 m일 때이므로
$80+32t-4t^2=0$, $t^2-8t-20=0$
$(t+2)(t-10)=0$ $\quad\therefore t=10$ ($\because t>0$)

11

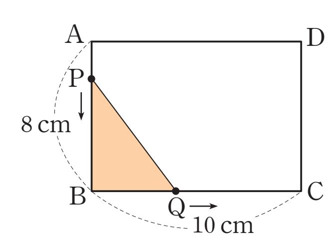
쿠키 270개를 학생들에게 남김없이 똑같이 나누어주면 한 학생이 받은 쿠키의 개수는 학생 수보다 3만큼 크다고 할 때, 학생은 모두 몇 명인가?

① 12명 ② 14명 ✓③ 15명
④ 17명 ⑤ 18명

전체 학생 수를 x라고 하면 한 학생이 받은 쿠키의 개수는 $(x+3)$이므로
$x(x+3)=270$, $x^2+3x-270=0$
$(x+18)(x-15)=0$ $\quad\therefore x=15$ ($\because x>0$)

12 서술형

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=8$ cm, $\overline{BC}=10$ cm인 직사각형 ABCD에서 점 P는 점 A를 출발하여 점 B까지 $\overline{AB}$ 위를 매초 1 cm의 속력으로, 점 Q는 점 B를 출발하여 점 C까지 $\overline{BC}$ 위를 매초 2 cm의 속력으로 움직인다. 두 점 P, Q가 동시에 출발할 때, 삼각형 PBQ의 넓이가 12 cm^{2}가 되는 것은 출발한 지 몇 초 후인지 구하시오. 2초 후



출발한 지 x초 후에 $\overline{PB}=8-x$(cm), $\overline{BQ}=2x$(cm)이므로 △PBQ의 넓이가 12 cm^{2}가 된다고 하면
$\frac{1}{2}\times 2x\times(8-x)=12$ $\quad\therefore x^2-8x+12=0$ ······ 40 %
$(x-2)(x-6)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=6$ ······ 40 %
이때 $0\le x\le 5$이므로 $x=2$
따라서 △PBQ의 넓이가 12 cm^{2}가 되는 것은 출발한 지 2초 후이다. ······ 20 %

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

정답과 풀이 69쪽~70쪽

01

x에 대한 이차방정식 $2x^2+4x+k=0$이 서로 다른 두 근을 갖도록 하는 가장 큰 정수 k의 값이 x에 대한 이차방정식 $(m+1)x^2-(m^2-6)x+13=0$의 근일 때, 양수 m의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4
✓④ 5　　⑤ 6

이차방정식 $2x^2+4x+k=0$이 서로 다른 두 근을 가져야 하므로
$16-8k>0$, $8k<16$
$\therefore k<2$
즉, 가장 큰 정수 k의 값은 1이다.
따라서 $x=1$이 $(m+1)x^2-(m^2-6)x+13=0$의 근이므로
$m^2-m-20=0$, $(m+4)(m-5)=0$
$\therefore m=5$ ($\because m>0$)

02

이차방정식 $x^2+(4k+1)x+4k^2-1=0$은 근을 갖지 않고, 이차방정식 $x^2-(k-3)x+9=0$은 중근을 가질 때, 상수 k의 값은?

① -5　　② -4　　✓③ -3
④ -2　　⑤ -1

이차방정식 $x^2+(4k+1)x+4k^2-1=0$은 근을 갖지 않으므로
$(4k+1)^2-4\times1\times(4k^2-1)<0$, $8k+5<0$
$\therefore k<-\frac{5}{8}$ …… ㉠
이차방정식 $x^2-(k-3)x+9=0$이 중근을 가지므로
$\{-(k-3)\}^2-4\times1\times9=0$, $k^2-6k-27=0$
$(k+3)(k-9)=0$　$\therefore k=-3$ 또는 $k=9$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $k=-3$

03

이차방정식 $x^2-3x+[a]=0$이 서로 다른 두 근을 갖도록 하는 가장 큰 $[a]$의 값이 이차방정식 $x^2-kx+10=0$의 근일 때, 상수 k의 값은?

(단, $[a]$는 a보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 6　　✓② 7　　③ 8
④ 9　　⑤ 10

이차방정식 $x^2-3x+[a]=0$이 서로 다른 두 근을 가지려면
$9-4[a]>0$　$\therefore [a]<\frac{9}{4}$
이때 $[a]$는 정수이므로 가장 큰 $[a]$의 값은 2이다.
따라서 $x=2$가 $x^2-kx+10=0$의 근이므로
$4-2k+10=0$, $-2k=-14$
$\therefore k=7$

04 출제 주의

x에 대한 이차방정식

$$x^2-2(a-b)x+2a^2+2b^2-4ab-2a+2b+1=0$$

이 해를 갖도록 a, b의 값을 정할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

✓① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

$x^2-2(a-b)x+2a^2+2b^2-4ab-2a+2b+1=0$에서
$x^2-2(a-b)x+2(a-b)^2-2(a-b)+1=0$
위의 방정식이 해를 가지려면
$\{-2(a-b)\}^2-4\times1\times\{2(a-b)^2-2(a-b)+1\}\ge0$
이때 $a-b=A$라고 하면
$(-2A)^2-4(2A^2-2A+1)\ge0$, $-4A^2+8A-4\ge0$
$(A-1)^2\le0$　$\therefore A=1$
$\therefore a-b=1$

05 서술형

주사위를 두 번 던져서 나온 첫 번째 눈의 수를 a, 두 번째 눈의 수를 b라고 할 때, 이차방정식 $x^2+(a+b)x+ab+1=0$의 근이 존재하지 않도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. **16**

이차방정식 $x^2+(a+b)x+ab+1=0$의 근이 존재하지 않으므로
$(a+b)^2-4\times1\times(ab+1)<0$, $a^2-2ab+b^2<4$
$\therefore (a-b)^2<4$ …… ㉠ ……………… 40 %
㉠을 만족시키는 $a-b$의 값은 $a-b=-1$ 또는 $a-b=0$ 또는 $a-b=1$
(i) $a-b=-1$일 때, 조건을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$의 5개이다.
(ii) $a-b=0$일 때, 조건을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$의 6개이다.
(iii) $a-b=1$일 때, 조건을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 4)$, $(6, 5)$의 5개이다. ……………… 40 %
(i)~(iii)에 의하여 주어진 이차방정식의 근이 존재하지 않도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는
$5+6+5=16$ ……………… 20 %

06

어떤 삼각형의 세 변의 길이가 각각 a, b, c이다. 이차방정식 $a(1+x^2)+2bx+c(1-x^2)=0$이 중근을 가질 때, 이 삼각형의 넓이를 a, b, c를 사용하여 나타내시오. $\frac{1}{2}bc$

$a(1+x^2)+2bx+c(1-x^2)=0$에서 $(a-c)x^2+2bx+a+c=0$
이 이차방정식이 중근을 가지므로
$4b^2-4(a^2-c^2)=0$　$\therefore a^2=b^2+c^2$
따라서 이 삼각형은 $\angle A=90°$인 직각삼각형이므로 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}bc$이다.

07

서로 다른 세 실수 a, b, c에 대하여 $c=-\dfrac{a+b}{7}$일 때, 이차방정식 $cx^2-bx+a=0$의 서로 다른 근의 개수를 구하시오. 2

$c=-\dfrac{a+b}{7}$에서 $-b=a+7c$
이차방정식 $cx^2-bx+a=0$에서
$(-b)^2-4ac=(a+7c)^2-4ac=a^2+10ac+49c^2=(a+5c)^2+24c^2$
이때 $(a+5c)^2+24c^2>0$이므로 $(-b)^2-4ac>0$
따라서 이차방정식 $cx^2-bx+a=0$의 서로 다른 근의 개수는 2이다.

08

이차방정식 $2x^2-4x-a=0$의 두 근이 -2와 2 사이에 있도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은?

① -5 ✓② -3 ③ -1
④ 1 ⑤ 3

$2x^2-4x-a=0$에서 $x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+2a}}{2}$
이때 이차방정식이 근을 가지므로 $2a+4\geq 0$이어야 한다.
$\therefore a\geq -2$ …… ㉠
또, $\dfrac{2-\sqrt{2a+4}}{2}>-2$, $\dfrac{2+\sqrt{2a+4}}{2}<2$이므로
$2-\sqrt{2a+4}>-4$, $2+\sqrt{2a+4}<4$
$2a+4<36$, $2a+4<4$
즉, $a<16$, $a<0$이므로 $a<0$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $-2\leq a<0$
따라서 조건을 만족시키는 정수 a의 값은 -2, -1이므로 그 합은
$-2+(-1)=-3$

09

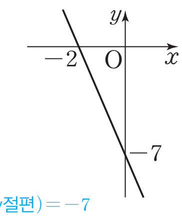
세 실수 a, b, c에 대하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근 $x=3$을 가질 때, 이차방정식 $b(2x+1)^2+c(2x+1)+6a=0$의 모든 해의 합은?

✓① $-\dfrac{1}{4}$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 1
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{1}{4}$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근 $x=3$을 가지므로 $a(x-3)^2=0$
$a(x-3)^2=ax^2-6ax+9a$이므로
$ax^2+bx+c=ax^2-6ax+9a$ $\quad\therefore b=-6a,\ c=9a$ …… ㉠
$b(2x+1)^2+c(2x+1)+6a=0$에서 $2x+1=A$라고 하면
$bA^2+cA+6a=0$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$-6aA^2+9aA+6a=0$, $-3a(2A^2-3A-2)=0$
$-3a(2A+1)(A-2)=0$ $\quad\therefore A=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $A=2$
즉, $2x+1=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $2x+1=2$이므로
$2x=-\dfrac{3}{2}$ 또는 $2x=1$ $\quad\therefore x=-\dfrac{3}{4}$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$
따라서 모든 해의 합은 $-\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}$

10

일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, a, b를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식을 구하시오. $2x^2+21x+49=0$ (단, a, b는 상수이다.)



일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서 $a=(\text{기울기})=-\dfrac{7}{2}$, $b=(y\text{절편})=-7$
따라서 $-\dfrac{7}{2}$, -7을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은
$2\left(x+\dfrac{7}{2}\right)(x+7)=0$ $\quad\therefore 2x^2+21x+49=0$

11

이차항의 계수가 1인 이차식 $P(x)$에 대하여 방정식 $P(x)=0$의 두 근의 합이 4, 곱이 3일 때, 이차방정식 $P(x)=15$의 해는?

① $x=-3$ 또는 $x=-1$
② $x=-3$ 또는 $x=1$
③ $x=-2$ 또는 $x=-6$
✓④ $x=-2$ 또는 $x=6$
⑤ $x=2$ 또는 $x=6$

이차항의 계수가 1인 이차식 $P(x)$의 두 근을 α, β라고 하면
$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$
또, $P(x)=0$의 두 근의 합이 4, 곱이 3이므로 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=3$
$\therefore P(x)=x^2-4x+3=0$
따라서 $P(x)=15$에서
$x^2-4x+3=15$, $x^2-4x-12=0$
$(x+2)(x-6)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

12

이차방정식 $(x+p)(x+q)-2=0$의 두 근이 α와 β일 때, 다음 중 이차방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)+2=0$의 두 근의 합은?

✓① $-p-q$ ② $-p+q$ ③ $p-q$
④ $p+q$ ⑤ $2p-q$

$(x+p)(x+q)-2=0$에서 $x^2+(p+q)x+pq-2=0$
이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로
$(x-\alpha)(x-\beta)=0$, $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$
$\therefore \alpha+\beta=-(p+q)$, $\alpha\beta=pq-2$ …… ㉠
$(x-\alpha)(x-\beta)+2=0$에서 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+2=0$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$x^2-\{-(p+q)\}x+pq-2+2=0$, $x^2+(p+q)x+pq=0$
$(x+p)(x+q)=0$ $\quad\therefore x=-p$ 또는 $x=-q$
따라서 이차방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)+2=0$의 두 근은 $-p$, $-q$이므로 두 근의 합은 $-p-q$이다.

13 서술형

이차방정식 $x^2-(k+3)x+30=0$의 두 근의 차가 1일 때, 음수 k의 값을 구하시오. -14

이차방정식 $x^2-(k+3)x+30=0$의 한 근을 α라고 하면 나머지 한 근은 $\alpha-1$이다.
이때 두 근이 α, $\alpha-1$이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-\alpha)\{x-(\alpha-1)\}=0$ $\therefore x^2-(2\alpha-1)x+\alpha(\alpha-1)=0$ ······ 40 %
따라서 $2\alpha-1=k+3$, $\alpha(\alpha-1)=30$이므로
$\alpha^2-\alpha=30$, $\alpha^2-\alpha-30=0$
$(\alpha+5)(\alpha-6)=0$ $\therefore \alpha=-5$ 또는 $\alpha=6$
(ⅰ) $\alpha=-5$일 때
$2\alpha-1=k+3$에서
$-10-1=k+3$ $\therefore k=-14$
(ⅱ) $\alpha=6$일 때
$2\alpha-1=k+3$에서
$12-1=k+3$ $\therefore k=8$ ······ 50 %
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 음수 k의 값은 -14이다. ······ 10 %

14

이차방정식 $ax^2+bx-12=0$의 두 근은 이차방정식 $x^2-7x+12=0$의 두 근보다 각각 1만큼씩 작다고 할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -12 ② -8 ③ -4
✓④ 8 ⑤ 12

$x^2-7x+12=0$에서
$(x-3)(x-4)=0$ $\therefore x=3$ 또는 $x=4$
즉, 이차방정식 $x^2-7x+12=0$의 두 근이 3, 4이므로 이차방정식 $ax^2+bx-12=0$의 두 근은 2, 3이다.
이때 두 근이 2, 3이고, x^2의 계수가 a인 이차방정식은
$a(x-2)(x-3)=0$ $\therefore ax^2-5ax+6a=0$
따라서 $-5a=b$, $6a=-12$이므로 $a=-2$, $b=10$
$\therefore a+b=-2+10=8$

15

이차방정식 $mx^2+(3m-5)x-24=0$에서 두 근의 절댓값의 비가 3 : 2일 때, 상수 m의 값은? (단, $m>1$)

① $\frac{20}{9}$ ✓② $\frac{25}{9}$ ③ $\frac{10}{3}$
④ $\frac{35}{9}$ ⑤ $\frac{40}{9}$

$mx^2+(3m-5)x-24=0$의 두 근을 α, β라고 하면
$m(x-\alpha)(x-\beta)=0$, $mx^2-m(\alpha+\beta)x+m\alpha\beta=0$
$\therefore 3m-5=-m(\alpha+\beta)$, $m\alpha\beta=-24$
이때 $m>1$이고 $m\alpha\beta=-24<0$이므로 $\alpha\beta<0$
즉, 주어진 이차방정식은 부호가 서로 다른 두 근을 갖는다.
따라서 두 근의 절댓값의 비가 3 : 2이므로 한 근을 $3t$ $(t\neq0)$라고 하면 다른 한 근은 $-2t$이다.
$3m-5=-m(\alpha+\beta)=-m(3t-2t)=-mt$에서 $t=-\frac{3m-5}{m}$ ······ ㉠
$m\alpha\beta=m\times(-6t^2)=-24$에서 $t^2=\frac{4}{m}$ ······ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{(3m-5)^2}{m^2}=\frac{4}{m}$, $9m^2-30m+25=4m$
$9m^2-34m+25=0$, $(m-1)(9m-25)=0$
$\therefore m=\frac{25}{9}$ $(\because m>1)$

16

세 자리 양의 정수에서 백의 자리의 숫자와 아래 두 자리의 수의 곱은 아래 두 자리의 수보다 96만큼 크고, 아래 두 자리의 수는 백의 자리의 숫자의 8배일 때, 이 정수를 구하시오. 432

백의 자리의 숫자를 a, 십의 자리의 숫자를 b, 일의 자리의 숫자를 c라고 하면
$\begin{cases} a\times(10b+c)=(10b+c)+96 & \cdots\cdots ㉠ \\ 10b+c=8a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉡을 ㉠에 대입하면
$8a^2=8a+96$, $a^2-a-12=0$
$(a+3)(a-4)=0$ $\therefore a=-3$ 또는 $a=4$
이때 $a>0$이므로 $a=4$
㉡에서 $10b+c=32$이고 b, c는 한 자리 자연수이므로 $b=3$, $c=2$
따라서 구하는 정수는 432이다.

17 출제 주의

서현이는 한정판으로 나온 옷을 5만 원에 구입하였지만 한 번도 입지 않아 원가의 x %의 이익을 붙여 중고 거래 사이트에 올렸다. 옷이 3일이 지나도록 판매되지 않아 올린 가격의 x %를 할인한 가격으로 판매하였더니 2000원의 손해를 봤다고 할 때, x의 값은? (단, $x>0$)

① 24 ② 22 ✓③ 20
④ 18 ⑤ 16

서현이가 중고 거래 사이트에 올린 옷의 가격은 $50000\times\left(1+\frac{x}{100}\right)$원
이 정가의 x %를 할인한 가격으로 판매하였더니 2000원의 손해를 봤으므로
$50000\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)=50000-2000$, $1-\frac{x^2}{10000}=\frac{24}{25}$
$x^2=400$ $\therefore x=20$ $(\because x>0)$

18

원가가 A만 원인 중고 컴퓨터를 100만 원에 구입해 이 컴퓨터를 수리하여 B만 원에 되팔려고 한다. 중고 컴퓨터 구입가 100만 원은 원가 A만 원에서 x만 원을 할인받은 가격이고, 판매가 B만 원은 구입가에 판매가의 x %를 이익으로 붙인 가격이다. 판매가와 원가의 차액이 $\frac{10}{9}$만 원일 때, x의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8
✓④ 10 ⑤ 12

$100=A-x$이므로 $A=100+x$이고 판매가와 원가의 차액이 $\frac{10}{9}$만 원이므로
$B-A=\frac{10}{9}$ $\therefore B=A+\frac{10}{9}=(100+x)+\frac{10}{9}$
또, 판매가 B만 원은 구입가 100만 원에 판매가의 x %의 이익을 붙인 가격이므로
$B=100+\frac{x}{100}\left(100+x+\frac{10}{9}\right)$
즉, $100+x+\frac{10}{9}=100+\frac{x}{100}\left(100+x+\frac{10}{9}\right)$이므로
$\frac{x^2}{100}+\frac{x}{90}-\frac{10}{9}=0$, $9x^2+10x-1000=0$
$(9x+100)(x-10)=0$ $\therefore x=10$ $(\because x>0)$

19

라떼를 제조하기 위하여 우유 2 L가 들어 있는 병에서 x mL를 덜어내고 덜어낸 양만큼 커피 원액을 넣고 잘 섞었더니 라떼의 색깔이 진하지 않아서 다시 라떼 x mL를 덜어내고 덜어낸 양만큼 커피 원액을 다시 넣었다. 이렇게 완성된 라떼의 우유와 커피 원액의 비가 49 : 51이라고 할 때, x의 값은?

① 400　　② 500　　✓③ 600

④ 700　　⑤ 800

완성된 라떼의 커피 원액의 양은 $2\times\frac{51}{100}=1.02(\mathrm{L})$, 즉 1020 mL이다.

처음 만든 라떼의 커피 원액의 비율은 $\frac{x}{2000}$, 처음 만든 라떼에서 덜어내진 커피 원액의 양은 $\frac{x^2}{2000}$이므로 $x-\frac{x^2}{2000}+x=1020$

$x^2-4000x+2040000=0$, $(x-600)(x-3400)=0$

$\therefore x=600$ ($\because 0<x<2000$)

20

건물의 용적률은 모든 층의 바닥 면적을 합한 연면적을 대지 면적으로 나눈 값을 백분율로 나타낸 것이다.

$$(\text{용적률})=\frac{(\text{연면적})}{(\text{대지 면적})}\times100(\%)$$

대지 면적이 $a\ \mathrm{m}^2$인 건물 P의 용적률은 b %이고, 대지 면적이 $(a+150)\ \mathrm{m}^2$인 건물 Q의 용적률은 $(b-50)$ %이다. 건물 P와 건물 Q의 연면적이 각각 450 m^2일 때, a의 값을 구하시오. **300**

$b=\frac{450}{a}\times100$ …… ㉠　　$b-50=\frac{450}{a+150}\times100$ …… ㉡

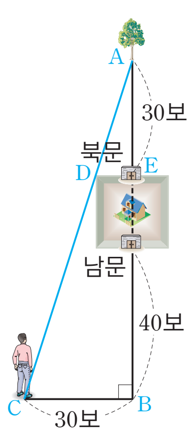
㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{450}{a}\times100-50=\frac{450}{a+150}\times100$,

$45000(a+150)-50a(a+150)=45000a$

$a^2+150a-135000=0$, $(a+450)(a-300)=0$　　$\therefore a=300$ ($\because a>0$)

21

오른쪽 그림과 같이 어느 저택은 정사각형 모양의 담장으로 둘러싸여 있다. 저택의 북문을 나와서 북쪽으로 30보 이동하면 나무가 한 그루 서 있는데 남문으로 나와서 남쪽으로 40보 간 곳에서 서쪽으로 30보 가면 처음으로 담장에 가려진 나무가 보인다고 한다. 이 담장의 한 쪽 벽의 길이는 몇 보인가?
(단, 걷는 사람의 보폭은 일정하고, 북문과 남문은 담장의 중간에 위치하며 담장과 나무의 높이는 고려하지 않는다.)



① 29보　　② 26보　　③ 23보

✓④ 20보　　⑤ 17보

△AED와 △ABC에서 △AED∽△ABC (AA 닮음)

따라서 담장 한 쪽 벽의 길이를 x보라고 하면 $\overline{DE}:\overline{CB}=\overline{AE}:\overline{AB}$에서

$\frac{x}{2}:30=30:(70+x)$, $\frac{x}{2}(70+x)=900$, $x^2+70x-1800=0$

$(x+90)(x-20)=0$　　$\therefore x=20$ ($\because x>0$)

22

직사각형 모양의 공원의 둘레를 따라 나무를 10 m의 간격으로 심으려고 한다. 이 공원의 넓이가 4000 m^2이고, 공원의 한 쪽 세로에 심은 나무의 수는 한 쪽 가로에 심은 나무의 수의 2배보다 3그루가 적다고 한다. 이 공원에 심은 나무는 모두 몇 그루인지 구하시오. **26그루**

(단, 직사각형의 네 꼭짓점에는 반드시 나무를 심는다.)

한 쪽 가로에 심은 나무의 수를 x라고 하면 한 쪽 세로에 심은 나무의 수는 $2x-3$이므로

공원의 가로의 길이는 $10(x-1)$ m, 세로의 길이는 $10(2x-4)$ m이다.

공원의 넓이가 4000 m^2이므로

$10(x-1)\times10(2x-4)=4000$, $x^2-3x-18=0$

$(x+3)(x-6)=0$　　$\therefore x=6$ ($\because x>0$)

꼭짓점을 제외한 한 쪽 가로에 심은 나무의 수는 $6-2=4$

꼭짓점을 제외한 한 쪽 세로에 심은 나무의 수는 $2\times6-3-2=7$

따라서 직사각형의 네 꼭짓점에 심은 나무의 수는 4이므로 공원에 심은 나무는

$2\times(4+7)+4=26$(그루)

23

형과 동생이 집 담벼락에 페인트를 칠하려고 한다. 동생이 혼자서 칠할 때에는 형이 혼자서 칠할 때보다 2시간이 더 걸리고, 형과 동생이 함께 칠하면 6시간이 걸린다고 한다. 형이 혼자서 담벼락에 페인트를 칠하는 데 걸리는 시간을 구하시오. **$(5+\sqrt{37})$시간**

형이 혼자서 칠할 때 걸린 시간을 x시간이라고 하면 동생이 혼자서 칠할 때 걸린 시간은 $(x+2)$시간이다.

총 일의 양을 1이라고 하면 형이 한 시간 동안 일한 양이 $\frac{1}{x}$, 동생이 한 시간 동안 일한 양이 $\frac{1}{x+2}$이므로

$\frac{6}{x}+\frac{6}{x+2}=1$, $6(x+2)+6x=x(x+2)$

$x^2-10x-12=0$　　$\therefore x=5+\sqrt{37}$ ($\because x>0$)

24

빈 급수통에 물을 급수하여 가득 채우는 데 45분이 걸린다. 어느 날 오후 1시부터 급수통에 가득 찬 물을 빼내기 시작해 물의 양이 급수통 전체 용량의 $\frac{1}{2}$이 되었을 때부터 동시에 급수를 시작하였더니 오후 2시 30분에 물이 다시 가득 찼다. 만약 급수통에 급수는 하지 않고 물을 빼내기만 한다면 가득 찬 물을 모두 빼낼 때까지 몇 분이 걸리는지 구하시오. (단, 시간당 급수하는 물의 양은 일정하고 빼내는 물의 양도 일정하다.) **90분**

급수통에 가득 채워진 물의 양을 1이라고 하면 분당 급수하는 물의 양은 $\frac{1}{45}$이다.

급수통의 물의 양이 전체 용량의 $\frac{1}{2}$이 되는데 걸리는 시간을 t분이라고 하면 분당 빼내는 물의 양은 $\frac{1}{2t}$이다.

따라서 $(90-t)$분 동안 물을 빼내면서 동시에 급수를 하여 수조에 물을 가득 채웠으므로

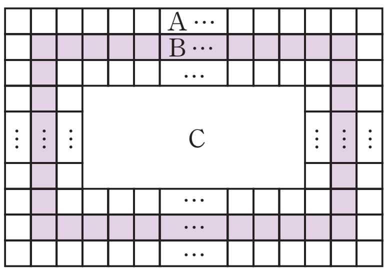
$(90-t)\left(\frac{1}{45}-\frac{1}{2t}\right)=\frac{1}{2}$, $\frac{(90-t)(2t-45)}{90t}=\frac{1}{2}$

$(90-t)(2t-45)=45t$, $t^2-90t+2025=0$, $(t-45)^2=0$　　$\therefore t=45$

따라서 급수통에 가득 찬 물을 모두 빼내는 데 걸리는 시간은 $2t=90$분이다.

25

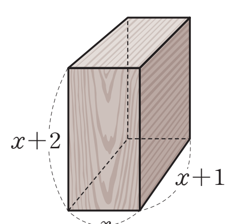
한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 타일 386개를 다음 그림과 같이 직사각형 모양의 바닥에 세 부분으로 나누어 붙이려고 한다. 가장 바깥쪽인 A 부분과 안쪽인 C 부분에는 흰색 타일을, B 부분에는 색깔이 있는 타일을 붙인다고 할 때, C 부분의 세로의 길이를 x라고 하면 가로의 길이는 $x+11$이다. 이 바닥을 모두 까는 데 필요한 흰색 타일의 개수를 구하시오. 316

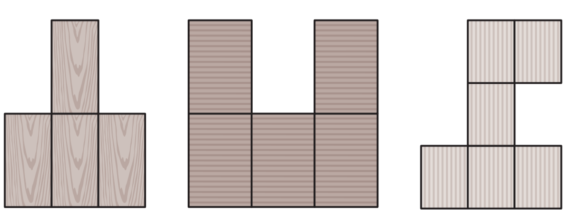


C 부분의 세로의 길이는 x이고 가로의 길이는 $x+11$이므로 C 부분의 흰색 타일의 개수는 $x(x+11)$
B 부분의 색깔이 있는 타일의 개수는 $2\{x+(x+11)\}+4=4x+26$
A 부분의 흰색 타일의 개수는 B 부분의 색깔이 있는 타일의 개수보다 4개가 더 필요하므로 $4x+30$이다.
이때 전체 타일이 386개이므로
$4x+30+4x+26+x(x+11)=386$, $x^2+19x-330=0$
$(x+30)(x-11)=0$ $\quad\therefore x=11\ (\because x>0)$
따라서 색깔이 있는 타일의 개수가 $4x+26=4\times11+26=70$이므로 흰색 타일의 개수는 $386-70=316$

26

오른쪽 그림과 같이 세 모서리의 길이가 각각 x, $x+1$, $x+2$인 직육면체 모양의 블록이 있다. 이 블록들을 쌓아 만든 입체도형을 앞면, 옆면, 윗면에서 바라본 모양은 다음과 같다.

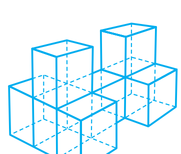




앞면 옆면 윗면

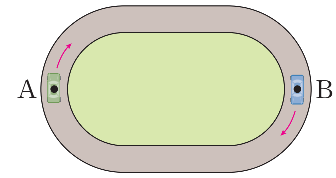
이 입체도형의 부피가 $8x^3+23x^2+20x+5$일 때, x의 값을 구하시오. 5

블록 한 개의 부피는 $x(x+1)(x+2)$이고, 완성된 입체도형의 블록의 개수는 8이므로
$8x(x+1)(x+2)=8x^3+23x^2+20x+5$, $x^2-4x-5=0$
$(x+1)(x-5)=0$ $\quad\therefore x=5\ (\because x>0)$



27 서술형

AI 프로그램을 통하여 원격으로 움직이는 자동차를 실험하고 있다. 오른쪽 그림과 같이 주행 트랙의 반대편인 두 지점에서 A, B 두 개의 원격 자동차가 각각 일정한 속력을 유지한 채 서로를 마주보며 동시에 출발했다. 자동차 B가 100 m를 달린 후 두 자동차가 처음으로 만났고, 자동차 A가 출발한 지점을 60 m 남겨 놓고 두 번째로 만났다. 이때 주행 트랙의 둘레의 길이를 구하시오. (단, 두 자동차가 두 번째 만날 때까지 자동차 A는 트랙을 한 바퀴도 돌지 못했다.) $\frac{320}{3}$ m



트랙의 둘레의 길이를 $2x$ m라고 하자.
두 자동차가 첫 번째 만났을 때의 A, B 두 개의 원격 자동차의 이동 거리는 각각 $(100-x)$ m, 100 m이고 두 번째 만났을 때의 두 자동차 A, B의 이동 거리는 각각 $(2x-60)$ m, $(3x-60)$ m이다. ········· 30 %
두 사람의 속력이 일정하므로 같은 시간 동안 움직인 거리의 비도 같으므로
$(100-x):100=(2x-60):(3x-60)$, $(100-x)(3x-60)=100(2x-60)$
$-3x^2+360x-6000=200x-6000$, $3x^2-160x=0$ ········· 40 %
$x(3x-160)=0$ $\quad\therefore x=\frac{160}{3}\ (\because x>0)$
따라서 주행 트랙의 둘레의 길이는 $2x=2\times\frac{160}{3}=\frac{320}{3}$ (m) ········· 30 %

28

어느 강의 상류와 하류에 있는 두 나루터 사이의 거리가 18 km이다. 어떤 배가 하류에서 상류로 올라갈 때의 속력은 상류에서 하류로 내려갈 때의 속력보다 시속 2 km 더 느리다. 이 배가 두 나루터를 한 번 왕복하는 데 7시간 30분이 걸렸다고 할 때, 배가 상류로 올라갈 때의 속력은?

① 5 km/시 ✓② 4 km/시 ③ 3 km/시
④ 2 km/시 ⑤ 1 km/시

상류로 올라갈 때의 속력을 x km/시라고 하면 이 배가 하류로 내려갈 때의 속력은 $(x+2)$ km/시이다.
이 배가 나루터를 왕복하는 데 7시간 30분이 걸렸으므로
$\frac{18}{x}+\frac{18}{x+2}=\frac{15}{2}$, $36(x+2)+36x=15x(x+2)$
$5x^2-14x-24=0$, $(5x+6)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=4\ (\because x>0)$

29 출제 주의

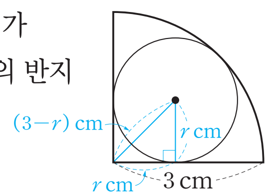
지면으로부터 20 m 높이의 건물 옥상에서 쏘아 올린 물로켓의 t초 후의 지면으로부터의 높이를 h m라고 하면 $h=20+50t-5t^2$인 관계가 성립한다. 이 물로켓이 지면으로부터 100 m 이상인 위치에 있었던 시간은 몇 초 동안인가?

① 5초 ✓② 6초 ③ 7초
④ 8초 ⑤ 9초

$20+50t-5t^2=100$에서
$t^2-10t+16=0$, $(t-2)(t-8)=0$
$\therefore t=2$ 또는 $t=8$
따라서 물로켓이 지면으로부터 100 m 이상인 위치에 있었던 시간은 2초부터 8초까지이므로 6초 동안 있었다.

30

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 3 cm인 사분원 안에 내접하는 원의 반지름의 길이는?

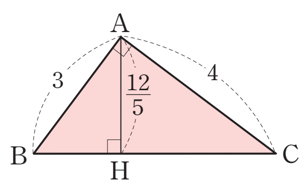


✓① $(-3+3\sqrt{2})$ cm
② $(-2+3\sqrt{2})$ cm
③ $(-1+3\sqrt{2})$ cm
④ $3\sqrt{2}$ cm
⑤ $2\sqrt{3}$ cm

내접하는 원의 반지름의 길이를 r cm라고 하면 피타고라스 정리에 의하여
$r^2+r^2=(3-r)^2$, $r^2+6r-9=0$
$\therefore r=-3\pm3\sqrt{2}$
이때 $r>0$이므로 원의 반지름의 길이는 $(-3+3\sqrt{2})$ cm이다.

31

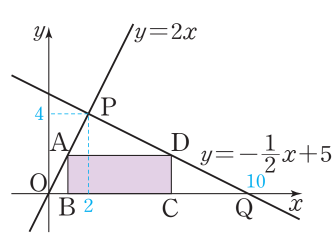
오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$이고 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=4$, $\overline{AH}=\frac{12}{5}$이다. $\overline{BH}=\alpha$, $\overline{CH}=\beta$라고 할 때, α, β를 두 근으로 하는 이차방정식이 $5x^2+ax+b=0$이다. 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. -720



$\frac{1}{2}\times3\times4=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\frac{12}{5}$ $\quad\therefore \overline{BC}=5$
$\alpha+\beta=\overline{BC}=5$이고 $\overline{AB}^2=\overline{BH}\times\overline{BC}$이므로 $3^2=5\alpha$ $\quad\therefore \alpha=\frac{9}{5}$
따라서 $\frac{9}{5}+\beta=5$이므로 $\beta=\frac{16}{5}$ $\quad\therefore \alpha\beta=\frac{9}{5}\times\frac{16}{5}=\frac{144}{25}$
α, β를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 5인 이차방정식은
$5x^2-5(\alpha+\beta)x+5\alpha\beta=0$ $\quad\therefore 5x^2-25x+\frac{144}{5}=0$
따라서 $a=-25$, $b=\frac{144}{5}$이므로 $ab=-720$

32

오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x+5$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 삼각형의 내부에 직사각형 ABCD가 있다. 두 함수 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x+5$의 그래프의 교점을 P, 함수 $y=-\frac{1}{2}x+5$의 그래프가 x축과 만나는 점을 Q라고 하자. 직사각형 ABCD의 넓이가 삼각형 OPQ의 넓이의 $\frac{1}{4}$일 때, $\overline{AB}$의 길이는? (단, $\overline{AB}>2$)

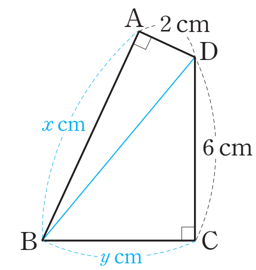


① $2+4\sqrt{2}$ ② $2+3\sqrt{2}$ ③ $2+2\sqrt{2}$
✓④ $2+\sqrt{2}$ ⑤ 2

$\triangle OPQ=\frac{1}{2}\times10\times4=20$
점 A의 x좌표를 t라고 하면 $A(t, 2t)$이므로 $\overline{AB}=\overline{DC}=2t$
점 D의 y좌표는 $2t$이므로 $2t=-\frac{1}{2}x+5$에서 $x=10-4t$ $\quad\therefore D(10-4t, 2t)$
$\overline{BC}=(10-4t)-t=10-5t$이므로 $\square ABCD=2t(10-5t)=20t-10t^2$이고, 사각형 ABCD의 넓이가 삼각형 OPQ의 넓이의 $\frac{1}{4}$배이므로
$20t-10t^2=20\times\frac{1}{4}$ $\quad\therefore t=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$
이때 $\overline{AB}=2t>2$에서 $t>1$이므로 $t=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$
$\therefore \overline{AB}=2\times\frac{2+\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2}$

33 서술형

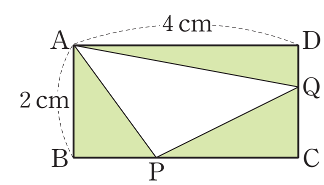
오른쪽 그림에서 사각형 ABCD의 각 변의 길이는 자연수이고 $\overline{AD}=2$ cm, $\overline{CD}=6$ cm, $\angle A=\angle C=90°$이다. 사각형 ABCD의 둘레의 최대 길이를 구하시오. 24 cm



$\overline{BD}^2=x^2+4$, $\overline{BD}^2=y^2+36$
즉, $x^2+4=y^2+36$이므로 $x^2-y^2=32$ $\quad\therefore (x+y)(x-y)=32$ ······ 40 %
$\therefore \begin{cases}x+y=32\\x-y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x+y=16\\x-y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x+y=8\\x-y=4\end{cases}$
(ⅰ) $\begin{cases}x+y=32\\x-y=1\end{cases}$일 때, 두 식을 연립하여 풀면 $x=\frac{33}{2}$, $y=\frac{31}{2}$
(ⅱ) $\begin{cases}x+y=16\\x-y=2\end{cases}$일 때, 두 식을 연립하여 풀면 $x=9$, $y=7$
(ⅲ) $\begin{cases}x+y=8\\x-y=4\end{cases}$일 때, 두 식을 연립하여 풀면 $x=6$, $y=2$ ······ 40 %
(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 □ABCD의 둘레의 길이가 최대일 때에는 $x=9$, $y=7$일 때이므로
□ABCD의 둘레의 최대 길이는
$x+y+2+6=9+7+2+6=24$ (cm) ······ 20 %

34 서술형

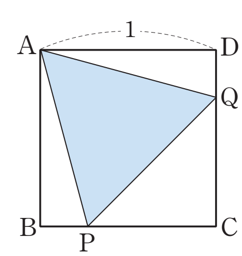
오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 4 cm, 2 cm인 직사각형 ABCD에서 △ABP, △PCQ, △AQD의 넓이가 같게 되도록 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ 위에 각각 점 P와 점 Q를 잡을 때, $\overline{BP}$의 길이를 구하시오. $(6-2\sqrt{5})$ cm



$\overline{BP}=x$ cm라고 하면
$\triangle ABP=\frac{1}{2}\times2\times x=x$, $\triangle AQD=\frac{1}{2}\times4\times\overline{QD}=2\overline{QD}$
$\triangle ABP=\triangle AQD$에서 $x=2\overline{QD}$ $\quad\therefore \overline{QD}=\frac{x}{2}$ cm ······ 40 %
$\triangle PCQ=\frac{1}{2}(4-x)\left(2-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}(4-x)^2$
$\triangle ABP=\triangle PCQ$에서 $x=\frac{1}{4}(4-x)^2$, $x^2-12x+16=0$ $\quad\therefore x=6\pm2\sqrt{5}$
이때 $x<4$이므로 $\overline{BP}=x=(6-2\sqrt{5})$ cm ······ 60 %

35

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ 위에 각각 점 P와 점 Q를 잡아 △APQ를 그렸더니 정삼각형이 되었다. 이때 정삼각형 APQ의 넓이는?

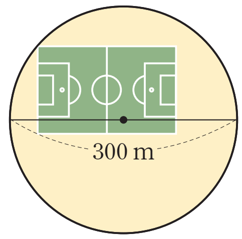


① $3\sqrt{2}-3$ ② $3\sqrt{2}+3$ ③ $2\sqrt{3}$
✓④ $2\sqrt{3}-3$ ⑤ $2\sqrt{3}+3$

△APQ가 정삼각형이므로 $\overline{AP}=\overline{AQ}$ $\quad\therefore \overline{BP}=\overline{DQ}$
$\overline{BP}=\overline{DQ}=x$라 하고 정삼각형 APQ의 한 변의 길이를 y라고 하면 $y^2=x^2+1$
△PCQ에서 $y^2=2(1-x)^2=2-4x+2x^2$
즉, $x^2+1=2-4x+2x^2$이므로 $x^2-4x+1=0$ $\quad\therefore x=2-\sqrt{3}$ ($\because 0<x<1$)
따라서 정삼각형 APQ의 넓이는
$\square ABCD-\triangle AQD-\triangle ABP-\triangle PCQ=1-\frac{x}{2}-\frac{x}{2}-\frac{(1-x)^2}{2}=\frac{1}{2}(1-x^2)$
$=\frac{1}{2}\{1-(2-\sqrt{3})^2\}=2\sqrt{3}-3$

36

오른쪽 그림과 같이 지름이 300 m인 원 모양의 땅에 둘레의 길이가 800 m인 직사각형 모양의 경기장을 만들려고 한다. 이 경기장의 넓이가 최소가 되게 하는 직사각형의 가로와 세로의 길이의 차는 몇 m인지 구하시오. **$100\sqrt{2}$ m**



직사각형의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라고 하면

$2x+2y=800$ $\quad\therefore x+y=400$

원의 지름이 300 m이고, 경기장의 넓이가 가장 클 때 직사각형의 대각선은 원의 지름과 같으므로

$x^2+y^2\le 90000$, $(x+y)^2-2xy\le 90000$, $160000-2xy\le 90000$ $\quad\therefore xy\ge 35000$

즉, $xy=35000$일 때 경기장의 넓이가 최소가 되고 $x+y=400$에서 $y=400-x$이므로

$x(400-x)=35000$, $x^2-400x+35000=0$

$\therefore x=200\pm 50\sqrt{2}$

$\therefore x=200-50\sqrt{2}$, $y=200+50\sqrt{2}$ 또는 $x=200+50\sqrt{2}$, $y=200-50\sqrt{2}$

따라서 직사각형의 가로와 세로의 길이의 차는 $200+50\sqrt{2}-(200-50\sqrt{2})=100\sqrt{2}$ (m)

$x^2-200x+16400=4x^2-720x+32400$, $3x^2-520x+16000=0$

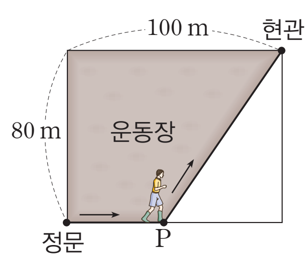
$(x-40)(3x-400)=0$ $\quad\therefore x=40$ 또는 $x=\frac{400}{3}$

이때 $180-2x\ge 0$에서 $-2x\ge -180$ $\quad\therefore x\le 90$

따라서 $x=40$이므로 정문에서 P 지점까지의 거리는 40 m이다.

37 출제 주의

어느 중학교의 운동장은 가로의 길이가 100 m, 세로의 길이가 80 m인 직사각형 모양이다. 준영이는 학교 정문을 들어선 후 오른쪽 그림과 같이 운동장의 가장 자리를 따라 1 m/초의 속력으로 걸어가다가 P 지점에서부터는 2 m/초의 속력으로 운동장을 가로질러 현관을 향하여 직선으로 뛰어갔다. 준영이가 정문에서 현관까지 가는 데 1분 30초 걸렸다면 정문에서 P 지점까지의 거리는?



✓① 40 m ② 41 m ③ 42 m
④ 43 m ⑤ 44 m

정문에서 P 지점까지의 거리를 x m라고 하면 P 지점에서 현관까지의 거리는

$\sqrt{(100-x)^2+80^2}=\sqrt{x^2-200x+16400}$

준영이가 정문에서 현관까지 가는 데 1분 30초, 즉 90초가 걸렸으므로

$\frac{x}{1}+\frac{\sqrt{x^2-200x+16400}}{2}=90$, $\sqrt{x^2-200x+16400}=180-2x$

(iii) $7\le t<12$일 때

$S=\frac{1}{2}\times\{(2t-12)+12\}\times\{14-(2t-12)-2\}+2\times 12$

$=-2t^2+24t+24$

이므로 $-2t^2+24t+24=64$, $(t-2)(t-10)=0$ $\quad\therefore t=10$ ($\because 7\le t<12$)

(iv) $12\le t\le 13$일 때 $S=\{12-(2t-14)\}\times 12=-24t+312$이므로

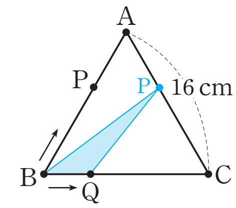
$-24t+312=64$, $24t=248$ $\quad\therefore t=\frac{31}{3}$

이때 $12\le t\le 13$이므로 만족시키는 근은 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에 의하여 사각형 A와 삼각형 B가 겹치는 부분의 넓이가 64 cm²가 되는 것은 두 도형이 겹치기 시작하고부터 $4\sqrt{2}$초 후와 10초 후이다.

38

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 16 cm인 정삼각형 ABC에서 점 P는 점 B에서 출발하여 점 A를 통과해 점 C까지 2 cm/s의 속력으로, 점 Q는 점 B에서 출발하여 점 C까지 1 cm/s의 속력으로 움직인다. 두 점 P, Q가 동시에 출발하였을 때, 출발한 지 x초 후에 삼각형 BPQ의 넓이가 $24\sqrt{3}$ cm²가 되었다. x의 값은? (단, $8<x<16$)



① 10 ✓② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

$8<x<16$이므로 점 P는 $\overline{AC}$ 위에 있다.

이때 $\overline{BQ}=x$ cm, $\overline{PC}=(32-2x)$ cm이고 점 P에서 변 BC에 내린 수선의 발은 한 변의 길이가 $\overline{PC}$인 정삼각형의 높이와 같으므로 ($\triangle$BPQ의 높이)$=\sqrt{3}(16-x)$

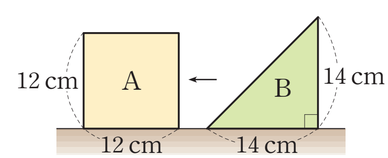
따라서 $\triangle BPQ=\frac{1}{2}\times x\times\sqrt{3}(16-x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(-x^2+16x)=24\sqrt{3}$이므로

$x^2-16x+48=0$, $(x-4)(x-12)=0$ $\quad\therefore x=12$ ($\because 8<x<16$)

39

오른쪽 그림과 같이 한 직선 위에 정사각형 A와 직각이등변삼각형 B가 있다. 삼각형 B가 초속 2 cm로 왼쪽을 향하여 움직일 때, 사각형 A와 삼각형 B가 겹쳐진 부분의 넓이가 64 cm²가 되는 것은 두 도형이 겹치기 시작하고부터 몇 초 후인지 모두 구하시오. **$4\sqrt{2}$초 후, 10초 후**

S cm²



(i) $0\le t\le 6$일 때, $S=\frac{1}{2}\times 2t\times 2t=2t^2$이므로 $2t^2=64$ $\quad\therefore t=4\sqrt{2}$ ($\because 0\le t\le 6$)

(ii) $6<t\le 7$일 때

$S=\frac{1}{2}\times\{(2t-12)+12\}\times\{12-(2t-12)\}+12\times(2t-12)$

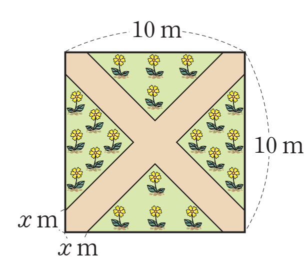
$=-2t^2+48t-144$

이므로 $-2t^2+48t-144=64$, $t^2-24t+104=0$ $\quad\therefore t=12\pm 2\sqrt{10}$

이때 $6<t\le 7$이므로 만족시키는 근은 존재하지 않는다.

40

한 변의 길이가 10 m인 정사각형 모양의 토지에 꽃밭을 만드는 데 산책로를 대각선으로 만들려고 한다. 오른쪽 그림과 같이 정사각형의 꼭짓점에서 양변으로 각각 x m인 지점에서 대각선과 평행한 직선을 그리면 산책로의 넓이가 꽃밭의 넓이의 $\frac{1}{4}$배일 때, x의 값은?



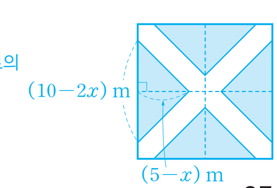
① $5-\sqrt{15}$ ② $5-\sqrt{10}$ ✓③ $5-\sqrt{5}$
④ $5+\sqrt{5}$ ⑤ $5+\sqrt{10}$

산책로의 넓이가 꽃밭의 넓이의 $\frac{1}{4}$배이므로 산책로의 넓이는 정사각형 모양의 토지의 넓이의 $\frac{1}{5}$배이다.

즉, $\frac{1}{2}\times(10-2x)\times(5-x)\times 4=10\times 10\times\frac{1}{5}$

이므로 $(5-x)^2=5$, $x^2-10x+20=0$

$\therefore x=5-\sqrt{5}$ ($\because 0<x<5$)



Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

대표 문제

한 변의 길이가 1인 정오각형의 대각선의 길이를 구하시오.

함께 풀기

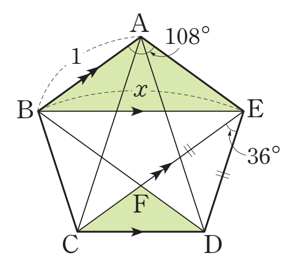
STEP 1

주어진 조건과 구해야 하는 것 구하기

주어진 조건: 한 변의 길이가 1인 정오각형
구해야 하는 것: 정오각형의 대각선의 길이

STEP 2

정오각형의 대각선의 길이를 x라 하고 정오각형의 내각의 크기를 이용하여 $\overline{CF}$의 길이를 x로 나타내기



오른쪽 그림과 같이 정오각형의 대각선의 길이를 x라고 하면

정오각형의 한 내각의 크기가 $\frac{180° \times (5-2)}{5} = 108°$이므로

$\triangle$DEC에서 $\overline{DE}=\overline{DC}$이므로

$\angle DEC = \angle DCE = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$

마찬가지로 $\angle CDB = 36°$이므로

$\angle EDF = 108° - 36° = 72°$

$\triangle$FCD에서 $\angle EFD = 36° + 36° = 72°$이므로 $\triangle$DEF는 $\overline{ED}=\overline{EF}$인 이등변삼각형이다.

따라서 $\overline{EF}=\overline{ED}=1$이므로 $\overline{CF}=x-1$

STEP 3

삼각형의 닮음을 이용하여 x에 대한 이차방정식 세우기

$\triangle$CFD에서 $\angle CFD = 180° - 72° = 108°$이므로 $\triangle$CDE와 $\triangle$CFD에서

$\angle CDE = \angle CFD$, $\angle CED = \angle CDF$

$\therefore$ $\triangle CDE \backsim \triangle CFD$ (AA 닮음)

즉, $\overline{CE} : \overline{CD} = \overline{CD} : \overline{CF}$이므로

$x : 1 = 1 : (x-1)$, $x(x-1)=1$

$\therefore x^2 - x - 1 = 0$

STEP 4

정오각형의 대각선의 길이 구하기

이차방정식 $x^2 - x - 1 = 0$에서

$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

이때 $x > 0$이므로 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

따라서 정오각형의 대각선의 길이는 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

답 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

01 정수 a에 대하여 이차방정식 $x^2+4x+7=a^2$을 만족시키는 모든 정수인 해의 합을 구하시오. -4

$x^2+4x+7=a^2$에서
$(x+2)^2+3=a^2$, $a^2-(x+2)^2=3$
$\therefore (a+x+2)(a-x-2)=3$
이때 a와 x 모두 정수이므로
$\begin{cases} a+x+2=-3 \\ a-x-2=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a+x+2=-1 \\ a-x-2=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a+x+2=1 \\ a-x-2=3 \end{cases}$
또는 $\begin{cases} a+x+2=3 \\ a-x-2=1 \end{cases}$
(ⅰ) $\begin{cases} a+x+2=-3 \\ a-x-2=-1 \end{cases}$일 때
두 식을 연립하여 풀면 $x=-3$, $a=-2$
(ⅱ) $\begin{cases} a+x+2=-1 \\ a-x-2=-3 \end{cases}$일 때
두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $a=-2$
(ⅲ) $\begin{cases} a+x+2=1 \\ a-x-2=3 \end{cases}$일 때
두 식을 연립하여 풀면 $x=-3$, $a=2$
(ⅳ) $\begin{cases} a+x+2=3 \\ a-x-2=1 \end{cases}$일 때
두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $a=2$
(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 정수인 해는 $x=-3$ 또는 $x=-1$이므로 그 합은
$-3+(-1)=-4$

02 서로 다른 두 자연수 m, n에 대하여 두 이차방정식

$$(m-1)x^2-(m^2+2)x+m^2+2m=0,$$
$$(n-1)x^2-(n^2+2)x+n^2+2n=0$$

이 한 개의 공통인 근을 가질 때, $\dfrac{m^n+n^m}{\dfrac{1}{m^n}+\dfrac{1}{n^m}}$의 값을 구하시오. (단, $m>n$) 256

두 이차방정식의 공통인 근을 α라고 하면
$(m-1)\alpha^2-(m^2+2)\alpha+m^2+2m=0$ …… ㉠
$(n-1)\alpha^2-(n^2+2)\alpha+n^2+2n=0$ …… ㉡
㉠$\times(n-1)$, ㉡$\times(m-1)$을 하면
$(n-1)(m-1)\alpha^2-(n-1)(m^2+2)\alpha+(n-1)(m^2+2m)=0$ …… ㉢
$(m-1)(n-1)\alpha^2-(m-1)(n^2+2)\alpha+(m-1)(n^2+2n)=0$ …… ㉣
㉢$-$㉣을 하면
$-(n-1)(m^2+2)\alpha+(n-1)(m^2+2m)$
$+(m-1)(n^2+2)\alpha-(m-1)(n^2+2n)=0$
$-m^2n\alpha-2n\alpha+m^2\alpha+2\alpha+m^2n+2mn-m^2-2m$
$+mn^2\alpha+2m\alpha-n^2\alpha-2\alpha-mn^2-2mn+n^2+2n=0$
$-m^2n\alpha-2n\alpha+m^2\alpha+m^2n-m^2-2m+mn^2\alpha+2m\alpha-n^2\alpha-mn^2$
$+n^2+2n=0$
$(m-n)\{-mn\alpha+2\alpha+(m+n)\alpha+mn-(m+n)-2\}=0$
$\therefore (m-n)(-\alpha+1)(mn-m-n-2)=0$
이때 $m\neq n$이므로 $-\alpha+1=0$ 또는 $mn-m-n-2=0$
$-\alpha+1=0$, 즉 $\alpha=1$이면 ㉠, ㉡에서 $m=n=1$
따라서 ㉠, ㉡의 x^2의 계수가 0이 되므로 조건을 만족시키지 않는다.
즉, $mn-m-n-2=0$이므로
$mn-m-n+1=3$, $(m-1)(n-1)=3$
이때 m, n은 자연수이고 $m>n$이므로
$m-1=3$, $n-1=1$
$\therefore m=4$, $n=2$
$\therefore \dfrac{m^n+n^m}{\dfrac{1}{m^n}+\dfrac{1}{n^m}}=(m^n+n^m)\div\left(\dfrac{1}{m^n}+\dfrac{1}{n^m}\right)$
$=(m^n+n^m)\times\dfrac{m^n n^m}{m^n+n^m}$
$=m^n n^m=4^2\times2^4$
$=2^8=256$

03 정수 k에 대하여 이차방정식 $x^2-(k+2)x+4k=0$이 서로 다른 두 개의 정수인 근을 갖도록 하는 모든 k의 값의 합을 구하시오. 24

$x^2-(k+2)x+4k=0$에서 $x=\dfrac{k+2\pm\sqrt{k^2-12k+4}}{2}$
주어진 이차방정식이 서로 다른 두 개의 정수인 근을 가져야 하므로
$k^2-12k+4=m^2$ (m은 자연수)이어야 한다.
이때 k는 정수이므로 k에 대한 이차방정식
$k^2-12k+4-m^2=0$ …… ㉠
도 정수인 근을 가져야 한다.
따라서 $k^2-12k+4-m^2=0$에서 $k=6\pm\sqrt{m^2+32}$이므로 $m^2+32=n^2$
(n은 자연수)이어야 한다.
$n^2-m^2=32$에서 $(n+m)(n-m)=32$
이때 m, n은 자연수이므로
$\begin{cases} n+m=8 \\ n-m=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} n+m=16 \\ n-m=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} n+m=32 \\ n-m=1 \end{cases}$
(ⅰ) $\begin{cases} n+m=8 \\ n-m=4 \end{cases}$일 때
두 식을 연립하여 풀면 $n=6$, $m=2$
이때 ㉠에서 $k^2-12k=0$, $k(k-12)=0$
$\therefore k=0$ 또는 $k=12$
(ⅱ) $\begin{cases} n+m=16 \\ n-m=2 \end{cases}$일 때
두 식을 연립하여 풀면 $n=9$, $m=7$
이때 ㉠에서
$k^2-12k-45=0$, $(k+3)(k-15)=0$
$\therefore k=-3$ 또는 $k=15$
(ⅲ) $\begin{cases} n+m=32 \\ n-m=1 \end{cases}$일 때
두 식을 연립하여 풀면 $n=\dfrac{33}{2}$, $m=\dfrac{31}{2}$
이때 m, n이 자연수가 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 k의 값은 -3, 0, 12, 15이므로 그 합은
$-3+0+12+15=24$

04 이차방정식 $x^2-x-1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 자연수 n에 대하여 α^n, β^n을 두 근으로 갖는 이차방정식은 $x^2-a_nx+b_n=0$이다. 이때 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 사이의 관계식을 이용하여 α^5, β^5을 두 근으로 하는 이차방정식을 구하시오. $x^2-11x-1=0$

두 근이 α, β이고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-\alpha)(x-\beta)=0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$
$\therefore \alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$
두 근이 α^n, β^n이고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-\alpha^n)(x-\beta^n)=0$, 즉 $x^2-(\alpha^n+\beta^n)x+\alpha^n\beta^n=0$
$\therefore a_n=\alpha^n+\beta^n$, $b_n=\alpha^n\beta^n=(\alpha\beta)^n=(-1)^n$
또, α, β가 방정식 $x^2-x-1=0$의 근이므로
$\alpha^2-\alpha-1=0$, $\beta^2-\beta-1=0$
두 방정식의 양변에 α^n, β^n을 각각 곱하면
$\alpha^{n+2}-\alpha^{n+1}-\alpha^n=0$, $\beta^{n+2}-\beta^{n+1}-\beta^n=0$
위의 두 식의 각 변을 각각 더하면
$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}-\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}-\alpha^n-\beta^n=0$,
$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\alpha^n+\beta^n$
$\therefore a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

이때 $a_1=\alpha+\beta=1$, $a_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3$이므로
$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$에서
$a_3=a_2+a_1=3+1=4$, $a_4=a_3+a_2=4+3=7$,
$a_5=a_4+a_3=7+4=11$, $b_5=(-1)^5=-1$
따라서 α^5, β^5을 두 근으로 하는 이차방정식은
$x^2-(\alpha^5+\beta^5)x+\alpha^5\beta^5=0$, $x^2-a_5x+b_5=0$
$\therefore x^2-11x-1=0$

05 두 자연수 p와 q가 모두 소수이고, x에 대한 이차방정식 $x^2+8px-q^2=0$의 두 근 α와 β가 모두 정수일 때, $|\alpha-\beta|+p+q$의 값을 구하시오. 34

두 근이 α, β이고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-\alpha)(x-\beta)=0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$
$\therefore \alpha+\beta=-8p$, $\alpha\beta=-q^2$
이때 α, β가 모두 정수이고 $\alpha\beta=-q^2$이므로 α, β는 $-q$ 또는 q, -1 또는 q^2, $-q^2$ 또는 1이다.
(i) $\alpha=-q$, $\beta=q$ 또는 $\alpha=q$, $\beta=-q$일 때, $\alpha+\beta=0$이므로 $p=0$
이때 p가 소수이어야 하므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $\alpha=-1$, $\beta=q^2$ 또는 $\alpha=q^2$, $\beta=-1$일 때,
$\alpha+\beta=q^2-1$이므로 $q^2-1=-8p$ $\quad\therefore (q+1)(q-1)=-8p$
이때 $(q+1)(q-1)>0$, $-8p<0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(iii) $\alpha=1$, $\beta=-q^2$ 또는 $\alpha=-q^2$, $\beta=1$일 때,
$\alpha+\beta=1-q^2$이므로 $1-q^2=-8p$ $\quad\therefore (1+q)(1-q)=-8p$
따라서 $(1+q)(1-q)$는 짝수이어야 하므로 q는 3 이상의 소수이다.
이때 p는 소수이므로 $-8p$를 두 정수의 곱으로 나타내면
$-1\times8p$, $-2\times4p$, $-4\times2p$, $-8\times p$, $1\times(-8p)$, $2\times(-4p)$, $4\times(-2p)$, $8\times(-p)$이므로 q가 될 수 있는 값은 4, 8, $2p$, $4p$, $8p$
ⓐ $1+q=4$일 때, $p=1$, $q=3$
이때 p가 소수이어야 하므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
ⓑ $1+q=8$일 때, $p=6$, $q=7$
이때 p가 소수이어야 하므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
ⓒ $1+q=2p$일 때, $p=3$, $q=5$
ⓓ $1+q=4p$일 때, $p=1$, $q=3$
이때 p가 소수이어야 하므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
ⓔ $1+q=8p$일 때, $q=2$
이때 $q\neq2$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(i)~(iii)에 의하여 $p=3$, $q=5$이므로 주어진 이차방정식은
$x^2+24x-25=0$, $(x+25)(x-1)=0$
$\therefore x=-25$ 또는 $x=1$
따라서 두 근은 -25, 1이므로 $|\alpha-\beta|=|-25-1|=26$
$\therefore |\alpha-\beta|+p+q=26+3+5=34$

06 이차방정식 $(a^2+1)x^2-4ax+2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 다음 조건을 만족시키는 실수 a의 값을 구하시오. $\sqrt{2}$

(가) 두 근의 합과 곱은 양수이다.	(나) $\beta=3\alpha$

이차방정식 $(a^2+1)x^2-4ax+2=0$은 상수항이 0이 아니므로 0을 근으로 갖지 않는다.
$\therefore \alpha\neq0$, $\beta\neq0$
$(a^2+1)x^2-4ax+2=0$에서 $a^2+1\neq0$이므로
$x^2-\dfrac{4a}{a^2+1}x+\dfrac{2}{a^2+1}=0$
두 근이 α, β이고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-\alpha)(x-\beta)=0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$
따라서
$\alpha+\beta=\dfrac{4a}{a^2+1}$, $\alpha\beta=\dfrac{2}{a^2+1}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
이고 조건 (가)에 의하여 $\alpha>0$, $\beta>0$이므로
$\alpha+\beta=\dfrac{4a}{a^2+1}>0$ $\quad\therefore a>0$

조건 (나)에 의하여 주어진 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로
$16a^2-8a^2-8>0$, $(a+1)(a-1)>0$
이때 $a+1>0$이므로
$a-1>0$ $\quad\therefore a>1$
또, 조건 (나)에 의하여 $\alpha+\beta=\alpha+3\alpha=4\alpha$이므로
$4\alpha=\dfrac{4a}{a^2+1}$ $\quad\therefore \alpha=\dfrac{a}{a^2+1}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
$\alpha\beta=\alpha\times3\alpha=3\alpha^2$이므로 $3\alpha^2=\dfrac{2}{a^2+1}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢
㉡을 ㉢에 대입하면
$3\left(\dfrac{a}{a^2+1}\right)^2=\dfrac{2}{a^2+1}$, $\dfrac{3a^2}{a^2+1}=2$
$3a^2=2a^2+2$, $a^2=2$
$\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>1$)

07

50 L의 소금물이 담긴 통에서 한 바가지의 소금물을 덜어내고 덜어낸 양만큼 한 바가지의 물을 채워 넣고 잘 섞었다. 이 과정을 한 번 더 반복하였더니, 소금물의 농도가 처음 농도의 36 %가 되었다. 이때 덜어낸 한 바가지의 부피를 구하시오. **20 L**

처음 소금물의 농도를 N이라고 하면 처음 50 L의 소금물에 담긴 소금의 양은 $50N$이고, 한 바가지의 부피를 x L라고 하면 처음 덜어낸 소금의 양은 xN이므로 한 바가지의 소금물을 덜어내고 통에 남은 소금의 양은

$50N-xN=(50-x)N$

이때 첫 번째 과정 후 소금물의 농도를 N_1이라고 하면

$N_1=\dfrac{(50-x)N}{50}=\left(1-\dfrac{x}{50}\right)N$

두 번째 과정 후 남은 소금의 양은

$50N_1-xN_1=(50-x)N_1$

두 번째 과정 후 소금물의 농도를 N_2라고 하면

$N_2=\dfrac{(50-x)N_1}{50}=\dfrac{(50-x)\left(1-\dfrac{x}{50}\right)N}{50}=\left(1-\dfrac{x}{50}\right)^2N$

두 번째 과정 후 소금물의 농도가 처음 농도의 36 %이므로

$N_2=\dfrac{36}{100}N$

즉, $\left(1-\dfrac{x}{50}\right)^2N=\dfrac{36}{100}N$이므로

$\left(1-\dfrac{x}{50}\right)^2=\dfrac{9}{25}$, $1-\dfrac{x}{50}=\pm\dfrac{3}{5}$

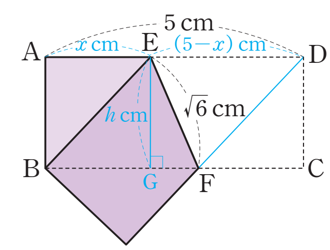
$\dfrac{x}{50}=\dfrac{2}{5}$ 또는 $\dfrac{x}{50}=\dfrac{8}{5}$ $\quad\therefore x=20$ 또는 $x=80$

이때 $x<50$이므로 $x=20$

따라서 덜어낸 한 바가지의 부피는 20 L이다.

08

가로의 길이가 5 cm이고 세로의 길이는 4 cm보다 작은 직사각형 모양의 종이가 있다. 이 직사각형 모양의 종이를 오른쪽 그림과 같이 대각선 방향으로 마주 보고 있는 두 꼭짓점이 서로 일치하도록 접는다. 접은 선의 길이가 $\sqrt{6}$ cm일 때, 이 직사각형 모양의 종이의 세로의 길이를 구하시오. **$\sqrt{5}$ cm**



$\angle BFE=\angle DEF$ (엇각), $\angle BEF=\angle DEF$ (접은 각)이므로

$\angle BEF=\angle BFE$

즉, $\triangle BEF$는 이등변삼각형이고 마찬가지로

$\angle DEF=\angle DFE$이므로 $\triangle DEF$도 이등변삼각형이다.

$\triangle BFE$와 $\triangle DFE$에서

$\overline{EF}$는 공통, $\overline{BF}=\overline{DF}$ (접은 선), $\angle BFE=\angle DEF=\angle DFE$이므로

$\triangle BFE\equiv\triangle DFE$ (SAS 합동)

$\overline{BF}=\overline{DF}=\overline{DE}=\overline{BE}=(5-x)$cm이고

$\overline{BG}=\overline{AE}=x$(cm)이므로

$\overline{FG}=\overline{BF}-\overline{BG}=5-2x$(cm)

직각삼각형 EFG에서 $h^2=(\sqrt{6})^2-(5-2x)^2=-4x^2+20x-19$

직각삼각형 BEG에서 $h^2=(5-x)^2-x^2=25-10x$

즉, $-4x^2+20x-19=25-10x$이므로

$2x^2-15x+22=0$, $(x-2)(2x-11)=0$

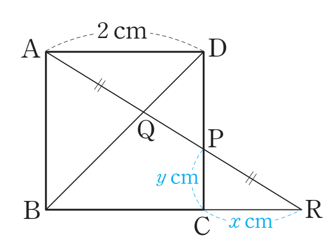
$\therefore x=2$ 또는 $x=\dfrac{11}{2}$

이때 $x<5$이므로 $x=2$

따라서 $h^2=25-10x=25-10\times2=5$에서 $h=\sqrt{5}$이므로 세로의 길이는 $\sqrt{5}$ cm이다.

09

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD가 있다. 변 CD 위의 점 P에 대하여 직선 AP와 선분 BD의 교점을 Q라 하고, 직선 AP와 직선 BC의 교점을 R라고 하자. $\overline{AQ}=\overline{RP}$이고, $\overline{CR}=x$ cm, $\overline{CP}=y$ cm라고 할 때, $x+y$의 값을 구하시오. **2**



$\triangle QDA$와 $\triangle QBR$에서 $\angle QAD=\angle QRB$ (엇각), $\angle AQD=\angle RQB$ (맞꼭지각)이므로 $\triangle QDA\backsim\triangle QBR$ (AA 닮음)

즉, $\overline{AD}:\overline{RB}=\overline{AQ}:\overline{RQ}$에서

$2:(x+2)=\overline{AQ}:\overline{RQ}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\triangle PCR$와 $\triangle PDA$에서

$\angle PAD=\angle PRC$ (엇각), $\angle APD=\angle RPC$ (맞꼭지각)이므로

$\triangle PCR\backsim\triangle PDA$ (AA 닮음)

즉, $\overline{RC}:\overline{AD}=\overline{RP}:\overline{AP}$에서 $x:2=\overline{RP}:\overline{AP}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

이때 $\overline{AQ}=\overline{RP}$이므로 $\overline{AP}=\overline{AQ}+\overline{QP}=\overline{RP}+\overline{QP}=\overline{RQ}$

㉠, ㉡에서

$x:2=\overline{RP}:\overline{AP}=\overline{AQ}:\overline{RQ}=2:(x+2)$, $x(x+2)=4$

$x^2+2x-4=0$ $\quad\therefore x=-1\pm\sqrt{5}$

이때 $x>0$이므로 $\overline{CR}=x=-1+\sqrt{5}$

또, $\triangle PCR$와 $\triangle PDA$에서 $\overline{CP}:\overline{CR}=\overline{DP}:\overline{DA}$이므로

$y:(-1+\sqrt{5})=(2-y):2$, $2y=(-1+\sqrt{5})(2-y)$

$(1+\sqrt{5})y=-2+2\sqrt{5}$ $\quad\therefore y=\dfrac{-2+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=3-\sqrt{5}$

$\therefore x+y=(-1+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})=2$

Lv. Master 실력을 완성하는 대단원 평가

_____ 점 / 100점

01

등식 $(a^2-3a)x^2-ax+1=4x^2+5x$가 x에 대한 이차방정식일 때, 다음 중 상수 a의 값이 될 수 없는 것을 모두 고르면? (정답 2개) [4점]

① -3　✓② -1　③ 0
④ 2　✓⑤ 4

$(a^2-3a)x^2-ax+1=4x^2+5x$에서 $(a^2-3a-4)x^2-(a+5)x+1=0$이므로
$a^2-3a-4\neq0$, $(a+1)(a-4)\neq0$
$\therefore a\neq-1$, $a\neq4$

02

어떤 수에서 3을 뺀 후 제곱해야 할 것을 잘못하여 3을 더한 후 2배 하였더니 바르게 계산한 결과보다 9만큼 컸다고 한다. 이때 어떤 수가 될 수 있는 수를 모두 고르면? (정답 2개) [4점]

① -6　② -2　✓③ 2
✓④ 6　⑤ 12

어떤 수를 x라고 하면 $(x-3)^2+9=2(x+3)$이므로
$x^2-6x+18=2x+6$, $x^2-8x+12=0$
$(x-2)(x-6)=0$　$\therefore x=2$ 또는 $x=6$

03

두 실수 a, b에 대하여

$$a*b=ab-a-b$$

라고 할 때, $(x-1)*(x+4)+|x*2|+1=0$을 만족시키는 모든 x의 값의 합은? [4점]

① -4　② -2　✓③ 0
④ 2　⑤ 4

$(x-1)*(x+4)=(x-1)(x+4)-(x-1)-(x+4)=x^2+x-7$
$|x*2|=|2x-x-2|=|x-2|$
즉, $(x-1)*(x+4)+|x*2|+1=0$에서
$x^2+x-7+|x-2|+1=0$　$\therefore x^2+x-6+|x-2|=0$
(i) $x<2$일 때, $x^2+x-6-(x-2)=0$이므로
　$x^2-4=0$, $(x+2)(x-2)=0$　$\therefore x=-2$ ($\because x<2$)
(ii) $x\geq2$일 때, $x^2+x-6+x-2=0$이므로
　$x^2+2x-8=0$, $(x+4)(x-2)=0$　$\therefore x=2$ ($\because x\geq2$)
(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식 해는 $x=-2$ 또는 $x=2$이므로 모든 x의 값의 합은
$-2+2=0$

04

자연수 x의 약수의 개수를 $<x>$로 나타낼 때, 등식 $<x^2>+<x>-6=0$을 만족시키는 15 이하의 자연수 x의 개수는? [4점]

① 3　② 4　③ 5
✓④ 6　⑤ 7

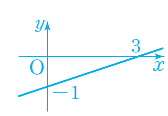
$<x^2>+<x>-6=0$에서
$(<x>+3)(<x>-2)=0$　$\therefore <x>=-3$ 또는 $<x>=2$
이때 $<x>$의 값은 양수이므로 $<x>=2$
따라서 약수의 개수가 2인 자연수는 소수이므로 15 이하의 자연수 x는 2, 3, 5, 7, 11, 13의 6개이다.

05

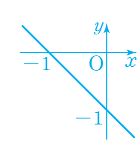
좌표평면에서 직선 $mx+3y=-3$이 점 $(2m+2, -m^2)$을 지나고 제2사분면을 지나지 않을 때, 상수 m의 값은? [4점]

✓① -1　② 0　③ 1
④ 2　⑤ 3

직선 $mx+3y=-3$이 점 $(2m+2, -m^2)$을 지나므로
$m(2m+2)+3(-m^2)=-3$, $m^2-2m-3=0$, $(m+1)(m-3)=0$
$\therefore m=-1$ 또는 $m=3$
(i) $m=-1$일 때
　$-x+3y=-3$, 즉 $y=\frac{1}{3}x-1$의 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.



(ii) $m=3$일 때
　$3x+3y=-3$, 즉 $y=-x-1$의 그래프는 제2사분면을 지난다.
(i), (ii)에 의하여 $m=-1$



06

$(a-b)^2-2(a-b)-24=0$이고 $ab=-3$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, $a>b$) [4점]

① 42　✓② 30　③ 24
④ -30　⑤ -42

$(a-b)^2-2(a-b)-24=0$에서 $a-b=A$라고 하면
$A^2-2A-24=0$, $(A+4)(A-6)=0$
$A=-4$ 또는 $A=6$　$\therefore a-b=-4$ 또는 $a-b=6$
이때 $a>b$이므로 $a-b=6$
$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=6^2+2\times(-3)=30$

07

$1<x<3$일 때, x에 대한 이차방정식 $x^2-[x]x-2=0$의 해는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

① $x=-1$　② $x=1-\sqrt{3}$
③ $x=\sqrt{3}$　✓④ $x=1+\sqrt{3}$
⑤ $x=2$

$x^2-[x]x-2=0$에서
(i) $1<x<2$일 때, $[x]=1$이므로
$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
이때 $1<x<2$이므로 만족시키는 해가 없다.
(ii) $2\le x<3$일 때, $[x]=2$이므로
$x^2-2x-2=0$　$\therefore x=1+\sqrt{3}$ ($\because 2\le x<3$)
(i), (ii)에 의하여 주어진 이차방정식의 해는 $x=1+\sqrt{3}$이다.

08

이차방정식 $x^2-7x+2a=0$이 중근을 가질 때, 상수 a의 값과 그때의 중근을 각각 구하면? [4점]

① $a=-\frac{49}{4}$, $x=\frac{7}{2}$　② $a=-\frac{49}{8}$, $x=-\frac{7}{2}$
③ $a=\frac{49}{8}$, $x=-\frac{7}{2}$　✓④ $a=\frac{49}{8}$, $x=\frac{7}{2}$
⑤ $a=\frac{49}{4}$, $x=-\frac{7}{2}$

$x^2-7x+2a=0$이 중근을 가지므로
$2a=\left(\frac{-7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$　$\therefore a=\frac{49}{8}$
따라서 $x^2-7x+\frac{49}{4}=0$에서
$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2=0$　$\therefore x=\frac{7}{2}$

09

두 이차방정식 $x^2-5x-36=0$, $3x^2+11x-4=0$의 공통인 근이 이차방정식 $x^2-ax+8=0$의 한 근일 때, 상수 a의 값은? [4점]

✓① -6　② -4　③ -2
④ 2　⑤ 4

$x^2-5x-36=0$에서
$(x+4)(x-9)=0$　$\therefore x=-4$ 또는 $x=9$
$3x^2+11x-4=0$에서
$(x+4)(3x-1)=0$　$\therefore x=-4$ 또는 $x=\frac{1}{3}$
즉, 두 이차방정식 $x^2-5x-36=0$, $3x^2+11x-4=0$의 공통인 근은 $x=-4$이다.
따라서 $x^2-ax+8=0$의 한 근이 $x=-4$이므로
$16+4a+8=0$, $4a=-24$
$\therefore a=-6$

10

이차방정식
$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$
이 중근을 가질 때, 세 상수 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인가? [4점]

① 둔각삼각형　② 이등변삼각형
③ 직각삼각형　④ 직각이등변삼각형
✓⑤ 정삼각형

$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$에서
$3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$
이 이차방정식이 중근을 가지므로
$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=0$, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$
$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$　$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$
따라서 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$이므로 $a=b=c$
즉, a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

11

이차방정식 $x^2-85x+n=0$ (n은 정수)의 두 근이 모두 소수일 때, 두 근의 차는? [4점]

① 80　✓② 81　③ 82
④ 83　⑤ 84

$x^2-85x+n=0$의 소수인 두 근을 p, q $(p<q)$라고 하면 $(x-p)(x-q)=0$
즉, $x^2-(p+q)x+pq=0$이므로 $p+q=85$
이때 85는 홀수이므로 $p+q=85$이려면 두 소수 p, q 중 하나는 반드시 짝수이어야 한다.
이때 짝수인 소수는 2뿐이므로 $p=2$
$2+q=85$에서 $q=83$
따라서 $x^2-85x+n=0$의 두 근은 2와 83이므로 두 근의 차는
$83-2=81$

12

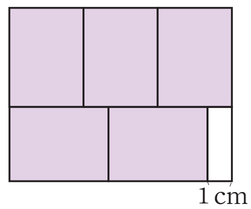
이차방정식 $ax^2-bx+3c=0$에서 a, b, c는 한 자리 자연수이고, 두 근 α, β가 $1<\alpha<2$, $5<\beta<6$을 만족시킬 때, $a+b+c$의 값은? [4점]

① 7　② 9　✓③ 11
④ 13　⑤ 15

$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$에서 $ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta=0$
즉, $-b=-a(\alpha+\beta)$, $3c=a\alpha\beta$이므로 $\alpha+\beta=\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{3c}{a}$
한편, $6<\alpha+\beta<8$이므로 $6<\frac{b}{a}<8$　$\therefore 6a<b<8a$ ($\because a>0$)　…… ㉠
b는 한 자리 자연수이므로 ㉠을 만족시키는 a의 값은 $a=1$　$\therefore b=7$
또, $5<\alpha\beta<12$이므로 $5<\frac{3c}{a}<12$, $5a<3c<12a$　$\therefore c=2$ 또는 $c=3$
(i) $a=1$, $b=7$, $c=2$일 때, $x^2-7x+6=0$에서
$(x-1)(x-6)=0$　$\therefore x=1$ 또는 $x=6$
따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $a=1$, $b=7$, $c=3$일 때, $x^2-7x+9=0$　$\therefore x=\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}$
(i), (ii)에 의하여 $a=1$, $b=7$, $c=3$이므로 $a+b+c=1+7+3=11$

13

오른쪽 그림과 같이 모양과 크기가 같은 직사각형 모양의 색종이 5장을 넓이가 27 cm^2인 직사각형 모양의 종이에 빈틈없이 붙였더니 가로의 길이가 1 cm인 직사각형 모양의 공간이 남았다. 이때 색종이 한 장의 둘레의 길이는? [4점]



① $\frac{5}{2}$ cm　② $\frac{9}{2}$ cm　③ 5 cm

✓④ 9 cm　⑤ 10 cm

색종이의 짧은 변의 길이를 x cm라고 하면 긴 변의 길이는

$(3x-1)\times\frac{1}{2}=\frac{3x-1}{2}$(cm)

이때 직사각형 모양의 종이의 넓이가 27 cm^2이므로

$3x\times\left(\frac{3x-1}{2}+x\right)=27$, $5x^2-x-18=0$

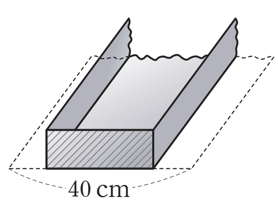
$(5x+9)(x-2)=0$　　$\therefore x=2\ (\because x>0)$

따라서 색종이의 짧은 변의 길이는 2 cm, 긴 변의 길이는 $\frac{3\times2-1}{2}=\frac{5}{2}$(cm)이므로

색종이 한 장의 둘레의 길이는 $2\times\left(2+\frac{5}{2}\right)=9$(cm)

14

오른쪽 그림과 같이 폭이 40 cm인 철판의 양쪽 끝을 같은 높이만큼 직각으로 접어 올려 물받이를 만들려고 한다. 빗금 친 부분의 넓이가 168 cm^2이고 물받이의 밑변의 길이가 20 cm보다 클 때, 물받이의 높이는? [4점]



① 2 cm　② 4 cm　✓③ 6 cm

④ 8 cm　⑤ 10 cm

물받이의 높이를 x cm라고 하면 물받이의 밑변의 길이는 $(40-2x)$ cm이므로

$x(40-2x)=168$, $x^2-20x+84=0$

$(x-6)(x-14)=0$　　$\therefore x=6$ 또는 $x=14$

이때 $40-2x>20$이므로

$2x<20$　　$\therefore x<10$

따라서 물받이의 높이는 6 cm이다.

15

이차방정식 $x^2+px+q=0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 가질 때, $|\alpha|$, $|\beta|$는 이차방정식 $x^2+(q-p)x+4p+q=0$의 근이 된다. 두 상수 p, q에 대하여 $p-q$의 값은? (단, $\alpha>\beta$) [6점]

① 1　② 2　✓③ 3

④ 4　⑤ 5

두 근이 α, β이고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$, 즉

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$이므로 $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$

마찬가지로 두 근이 $|\alpha|$, $|\beta|$이고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-|\alpha|)(x-|\beta|)=0$

즉, $x^2-(|\alpha|+|\beta|)x+|\alpha||\beta|=0$이므로

$|\alpha|+|\beta|=p-q$, $|\alpha||\beta|=|\alpha\beta|=4p+q$

(i) $\alpha\beta\geq0$일 때, $|\alpha\beta|=\alpha\beta$이므로

$4p+q=q$　　$\therefore p=0$

이때 $\alpha+\beta=-p=0$이므로 $\beta=-\alpha$

즉, α, β의 부호가 다르므로 $\alpha\beta\geq0$에 모순이다.

(ii) $\alpha\beta<0$일 때, $|\alpha\beta|=-\alpha\beta$이므로

$4p+q=-q$, $2q=-4p$　　$\therefore q=-2p$

이때 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha>0$, $\beta<0$이어야 한다.

즉, $|\alpha|+|\beta|=p-q$에서 $\alpha-\beta=p-(-2p)=3p$

두 식 $\alpha-\beta=3p$, $\alpha+\beta=-p$를 연립하여 풀면 $\alpha=p$, $\beta=-2p$

$\alpha\beta=q=-2p$이고 $\alpha\beta=p(-2p)=-2p^2$이므로

$-2p^2=-2p$, $p^2-p=0$

$p(p-1)=0$　　$\therefore p=0$ 또는 $p=1$

이때 $p=0$이면 $\alpha=\beta$이므로 $p=1$, $q=-2$

(i), (ii)에 의하여

$p-q=1-(-2)=3$

16

이차방정식 $x^2+(a+1)x-2a=0$의 x의 계수와 상수항을 서로 바꾸어 이차방정식을 풀면 한 근은 $x=3$이 된다. 이때 처음 이차방정식의 두 근의 합을 구하시오. [4점] -3

(단, a는 상수이다.)

$x^2+(a+1)x-2a=0$의 x의 계수와 상수항을 서로 바꾸면
$x^2-2ax+a+1=0$
$x=3$이 $x^2-2ax+a+1=0$의 근이므로
$9-6a+a+1=0$, $-5a=-10$
$\therefore a=2$
따라서 처음 이차방정식은 $x^2+3x-4=0$이므로
$(x+4)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-4$ 또는 $x=1$
따라서 두 근의 합은
$-4+1=-3$

17

이차방정식 $\dfrac{(x+1)(x-3)}{5}=0.4x(x+2)$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2-\beta^2$의 값을 구하시오. (단, $\alpha>\beta$) [4점] $-12\sqrt{6}$

$\dfrac{(x+1)(x-3)}{5}=0.4x(x+2)$의 양변에 5를 곱하면
$(x+1)(x-3)=2x(x+2)$, $x^2+6x+3=0$
$\therefore x=-3\pm\sqrt{6}$
이때 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=-3+\sqrt{6}$, $\beta=-3-\sqrt{6}$
$\alpha+\beta=-6$, $\alpha-\beta=2\sqrt{6}$이므로
$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=-6\times2\sqrt{6}=-12\sqrt{6}$

18

이차방정식 $(-2k+3)x^2+(2k+4)x+k+2=0$이 중근을 가질 때, 이차방정식
$(-k+4)x^2+(2k-1)x+k+3=0$이 근을 갖도록 하는 상수 k의 값을 구하시오. [4점] -2

이차방정식 $(-2k+3)x^2+(2k+4)x+k+2=0$이 중근을 가지므로
$(2k+4)^2-4(-2k+3)(k+2)=0$, $3k^2+5k-2=0$
$(k+2)(3k-1)=0$ $\quad\therefore k=-2$ 또는 $k=\frac{1}{3}$
(i) $k=-2$일 때
$(-k+4)x^2+(2k-1)x+k+3=0$, 즉 $6x^2-5x+1=0$에서
$(3x-1)(2x-1)=0$ $\quad\therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$
(ii) $k=\frac{1}{3}$일 때
$(-k+4)x^2+(2k-1)x+k+3=0$, 즉 $\frac{11}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}=0$에서
$11x^2-x+10=0$이므로 $(-1)^2-4\times11\times10=-439<0$
따라서 근은 없다.
(i), (ii)에 의하여 $k=-2$

19

이차방정식 $x^2+mx+m-6=0$의 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 모든 정수 m의 값의 합을 구하시오. [4점] 4

$x^2+mx+m-6=0$의 정수인 두 근을 α, β라고 하면
$x^2+mx+m-6=(x-\alpha)(x-\beta)=0$
$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$이므로 $\alpha+\beta=-m$, $\alpha\beta=m-6$
이때 $\alpha+\beta+\alpha\beta=-m+m-6=-6$에서
$\alpha+\beta+\alpha\beta+1=-5$, $(\alpha+1)(\beta+1)=-5$
$\therefore \begin{cases}\alpha+1=-5\\ \beta+1=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha+1=-1\\ \beta+1=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha+1=1\\ \beta+1=-5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha+1=5\\ \beta+1=-1\end{cases}$
즉, $\begin{cases}\alpha=-6\\ \beta=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=-6\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=-2\end{cases}$이므로
정수 $m=-(\alpha+\beta)$의 값은 $-(-6+0)=6$ 또는 $-(-2+4)=-2$
따라서 모든 정수 m의 값의 합은 $6+(-2)=4$

20

어느 도시의 수목원의 입장료를 x % 인상하면 수목원 방문객의 수는 $\frac{x}{2}$ % 줄어든다고 한다. 수목원 전체 총 수입액이 8 % 증가하도록 입장료를 정하려고 한다면 입장료를 몇 % 인상해야 하는지 구하시오. (단, 입장료를 한 번 인상할 때 이전 요금의 50 % 이상은 인상할 수 없다.) [4점]

20 %

해당 도시의 수목원의 입장료를 a, 방문객 수를 b라고 하면 입장료를 x % 인상한 후의 입장료는 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$, 방문객 수는 $b\left(1-\frac{x}{200}\right)$이므로 총 수입액은
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)=ab\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{200}\right)$
입장료를 인상한 후의 총 수입액이 $ab\left(1+\frac{8}{100}\right)$이어야 하므로
$ab\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{200}\right)=ab\left(1+\frac{8}{100}\right)$, $1+\frac{x}{200}-\frac{x^2}{20000}=1+\frac{8}{100}$
$x^2-100x+1600=0$, $(x-20)(x-80)=0$
$\therefore x=20$ 또는 $x=80$
이때 입장료를 한 번 인상할 때 50 % 이상은 인상할 수 없으므로 입장료는 20 % 인상해야 한다.

21

1부터 50까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 50개의 공이 담겨 있는 자루가 있다. 이 자루에서 임의로 한 개의 공을 뽑아 그 공에 적힌 자연수를 a라고 할 때, 이차방정식 $6x^2-5ax+a^2=0$이 적어도 하나의 정수인 해를 가질 확률을 구하시오. [4점] $\frac{33}{50}$

$6x^2-5ax+a^2=0$에서
$(2x-a)(3x-a)=0$ $\quad\therefore x=\frac{a}{2}$ 또는 $x=\frac{a}{3}$
이때 이차방정식이 적어도 하나의 정수인 해를 가지려면 a는 2의 배수 또는 3의 배수이어야 한다.
1부터 50까지의 자연수 중 2의 배수는 25개, 3의 배수는 16개이고 2의 배수이고 3의 배수인 6의 배수는 8개이다.
따라서 2의 배수 또는 3의 배수가 적힌 공의 개수는 $25+16-8=33$이므로 구하는 확률은 $\frac{33}{50}$이다.

22, 23번은 서술형입니다. 풀이 과정을 자세히 서술하시오.

22

A 그릇에는 농도가 30 %인 소금물 10 g이 담겨 있고, B 그릇에는 농도가 2 %인 소금물 50 g이 담겨 있다. A 그릇에는 x g의 물을 넣고, B 그릇은 가열하여 x g의 물을 증발시킨 후 $2x$ g의 소금을 넣었다. A 그릇과 B 그릇에 담긴 소금물의 농도가 서로 같을 때, x의 값을 구하시오. 5

[7점]

물을 넣기 전 A 그릇에 있는 소금의 양은 $10\times\frac{30}{100}=3(\mathrm{g})$

가열하기 전 B 그릇에 있는 소금의 양은 $50\times\frac{2}{100}=1(\mathrm{g})$ ······ 2점

A 그릇에는 x g의 물을 넣었으므로 A 그릇의 소금물 농도는

$\frac{3}{x+10}\times100=\frac{100}{x+10}(\%)$

B 그릇은 가열하여 x g의 물을 증발시킨 후 $2x$ g의 소금을 넣었으므로 B 그릇의 소금물 농도는 $\frac{1+2x}{50-x+2x}\times100=\frac{100(1+2x)}{50+x}(\%)$ ······ 2점

두 그릇 A, B의 소금물의 농도가 서로 같으므로

$\frac{300}{x+10}=\frac{100(1+2x)}{50+x}$, $3(50+x)=(x+10)(1+2x)$

$x^2+9x-70=0$, $(x+14)(x-5)=0$

$\therefore x=-14$ 또는 $x=5$

이때 $x>0$이므로 $x=5$ ······ 3점

23

어느 동아리의 구성원 n명이 큰 원탁에 둘러 앉아서 이웃한 구성원들과는 악수를 나누고 그 밖의 구성원들과는 한 사람도 빠짐없이 눈인사를 나누었다. 서로 눈인사를 나눈 경우가 총 44번이라고 할 때, 이 동아리의 구성원은 모두 몇 명인지 구하시오. [7점] **11명**

동아리의 구성원 n명이 큰 원탁에 둘러 앉은 경우 이웃하지 않은 사람과 눈인사를 나눈 횟수는 n각형에서의 대각선의 개수와 같다.

이때 n각형의 대각선의 개수가 $\frac{n(n-3)}{2}$이므로 $\frac{n(n-3)}{2}=44$ ······ 2점

$n(n-3)=88$에서

$n^2-3n-88=0$, $(n+8)(n-11)=0$

$\therefore n=-8$ 또는 $n=11$ ······ 3점

이때 $x>0$이므로 $n=11$

따라서 동아리의 구성원은 11명이다. ······ 2점

IV 이차함수

1. 이차함수의 그래프
2. 이차함수의 활용

Lv. X 상위 1%에 도달하는 심화 문제

Lv. M 실력을 완성하는 대단원 평가

IV 이차함수

1등급 비법노트

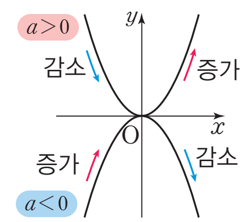
- $y=ax^2+bx+c$가 이차함수가 되는 조건
  ⇨ $a\neq0$
- **함수 $y=f(x)$에서 $f(a)$의 값**
  ⇨ $x=a$일 때의 함숫값
  ⇨ $x=a$일 때 y의 값
  ⇨ $f(x)$에 x 대신 a를 대입하여 얻은 값
- 이차함수 $y=ax^2$에서 $|a|$의 값이 커질수록
  ⇨ 그래프의 폭이 좁아진다.
  ⇨ 그래프가 y축에 가까워진다.
- 이차함수의 그래프를 평행이동하면 그래프의 모양과 폭은 변하지 않고 위치만 바뀐다.
- 이차함수 $y=a(x-p)^2$ $(a>0)$의 그래프는
  ① $x<p$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
  ② $x>p$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
- ① x축의 방향으로 p만큼 평행이동
  ⇨ x 대신 $x-p$를 대입
  ② y축의 방향으로 q만큼 평행이동
  ⇨ y 대신 $y-q$를 대입
- **각 사분면의 x좌표와 y좌표의 부호**

01 이차함수의 그래프

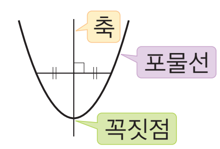
1 이차함수의 뜻과 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

(1) **이차함수:** 함수 $y=f(x)$에서 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)와 같이 y가 x에 대한 이차식으로 나타내어질 때, 이 함수를 x에 대한 이차함수라고 한다.

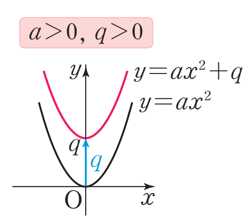
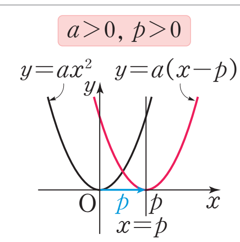
(2) **이차함수 $y=ax^2$의 그래프**
① 원점을 지나고 y축 $(x=0)$에 대하여 대칭이다.
② $a>0$일 때 아래로 볼록하고, $a<0$일 때 위로 볼록하다.
③ a의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아진다.
④ 이차함수 $y=-ax^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.



(3) **포물선:** 이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 같은 모양의 곡선
① 포물선의 축: 포물선이 대칭이 되는 직선
② 포물선의 꼭짓점: 포물선과 축의 교점

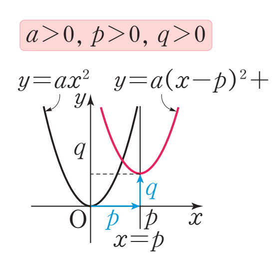


2 이차함수 $y=ax^2+q$, $y=a(x-p)^2$의 그래프

함수식	$y=ax^2+q$	$y=a(x-p)^2$
평행이동	이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동	이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동
그래프		
축의 방정식	$x=0$	$x=p$
꼭짓점의 좌표	$(0,\ q)$	$(p,\ 0)$

3 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

(1) 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
(2) **축의 방정식:** $x=p$
(3) **꼭짓점의 좌표:** $(p,\ q)$



4 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프에서 a, p, q의 부호

(1) **a의 부호:** 그래프의 모양으로 결정
① 아래로 볼록 ⇨ $a>0$　② 위로 볼록 ⇨ $a<0$

(2) **p, q의 부호:** 꼭짓점 $(p,\ q)$의 위치로 결정
① 제1사분면 ⇨ $p>0$, $q>0$　② 제2사분면 ⇨ $p<0$, $q>0$
③ 제3사분면 ⇨ $p<0$, $q<0$　④ 제4사분면 ⇨ $p>0$, $q<0$

02 이차함수의 활용

1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

(1) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 바꾸어 그린다.

(2) **축의 방정식:** $x=-\dfrac{b}{2a}$ (3) **꼭짓점의 좌표:** $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

(4) **y축과의 교점의 좌표:** $(0,\ c)$

2 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 a, b, c의 부호

(1) **a의 부호:** 그래프의 모양으로 결정

① 아래로 볼록 ⇨ $a>0$ ② 위로 볼록 ⇨ $a<0$

(2) **b의 부호:** 축의 위치로 결정

① 축이 y축의 왼쪽 ⇨ a, b는 같은 부호

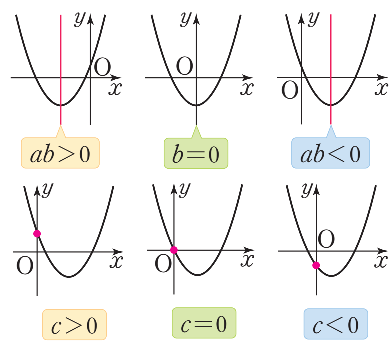
② 축이 y축의 오른쪽 ⇨ a, b는 다른 부호

③ 축이 y축에 위치 ⇨ $b=0$

(3) **c의 부호:** y축과의 교점의 위치로 결정

① y축과의 교점이 원점의 위쪽 ⇨ $c>0$

② y축과의 교점이 원점의 아래쪽 ⇨ $c<0$



3 이차함수의 식 구하기

(1) 꼭짓점의 좌표 $(p,\ q)$와 그래프 위의 다른 한 점의 좌표를 알 때

❶ 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$로 놓는다.

❷ ❶의 식에 주어진 한 점의 좌표를 대입하여 a의 값을 구한다.

(2) 축의 방정식 $x=p$와 그래프 위의 서로 다른 두 점의 좌표를 알 때

❶ 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$로 놓는다.

❷ ❶의 식에 주어진 두 점의 좌표를 각각 대입하여 a, q의 값을 구한다.

(3) y축과의 교점의 좌표 $(0,\ k)$와 그래프 위의 서로 다른 두 점의 좌표를 알 때

❶ 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+k$로 놓는다.

❷ ❶의 식에 주어진 두 점의 좌표를 각각 대입하여 a, b의 값을 구한다.

(4) x축과의 교점의 좌표 $(m,\ 0)$, $(n,\ 0)$과 그래프 위의 다른 한 점의 좌표를 알 때

❶ 이차함수의 식을 $y=a(x-m)(x-n)$으로 놓는다.

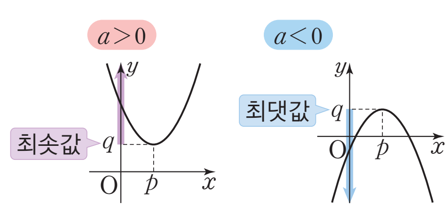
❷ ❶의 식에 다른 한 점의 좌표를 대입하여 a의 값을 구한다.

4 이차함수의 최댓값과 최솟값

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는

(1) $a>0$일 때 $x=p$에서 최솟값 q를 갖고, 최댓값은 없다.

(2) $a<0$일 때 $x=p$에서 최댓값 q를 갖고, 최솟값은 없다.



5 이차함수의 활용

이차함수의 최댓값과 최솟값에 대한 활용 문제는 다음과 같은 순서로 푼다.

❶ 문제의 뜻을 파악하고 두 변수 x, y를 정한다.

❷ 변수 x, y 사이의 관계를 식으로 나타낸다.

❸ 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

❹ 구한 답이 문제의 조건에 맞는지 확인한다.

1등급 비법노트

- **이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서**
  ① x축과의 교점의 x좌표
  ⇨ $y=0$일 때 x의 값
  ⇨ $ax^2+bx+c=0$의 해
  ② y축과의 교점의 y좌표
  ⇨ $x=0$일 때 y의 값
  ⇨ c

- **좌표축 위의 점의 좌표**
  ① x축 위의 점: (x좌표, 0)
  ② y축 위의 점: (0, y좌표)

- **함수의 최댓값과 최솟값**
  ① 최댓값: 어떤 함수의 함숫값 중에서 가장 큰 값
  ② 최솟값: 어떤 함수의 함숫값 중에서 가장 작은 값

개념을 적용하는

Lv. 1 핵심 문제

개념 1 이차함수의 뜻과 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

01

다음 보기에서 y가 x에 대한 이차함수인 것을 모두 고른 것은?

〈 보기 〉

ㄱ. 한 자루에 x원인 볼펜 $(x+3)$자루의 가격 y원

ㄴ. 자동차가 시속 70 km로 x시간 동안 달린 거리 y km

ㄷ. 한 모서리의 길이가 x cm인 정육면체의 겉넓이 $y\ \mathrm{cm}^2$

ㄹ. 윗변의 길이가 x cm, 아랫변의 길이가 $(x+5)$ cm이고 높이가 8 cm인 사다리꼴의 넓이 $y\ \mathrm{cm}^2$

ㅁ. 변의 개수가 x인 다각형의 대각선의 개수 y

① ㄱ, ㄴ, ㄹ ✓② ㄱ, ㄷ, ㅁ ③ ㄱ, ㄹ, ㅁ
④ ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㅁ

ㄱ. $y=x^2+3x$ ㄴ. $y=70x$ ㄷ. $y=6x^2$
ㄹ. $y=8x+20$ ㅁ. $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x$

02 출제 주의

이차함수 $f(x)=ax^2-2x+5$에서 $f(-1)=10$, $f(2)=b$일 때, $b-a$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -19 ② -13 ③ -6
✓④ 10 ⑤ 16

$f(-1)=10$이므로 $a+2+5=10$ $\therefore a=3$
$\therefore f(x)=3x^2-2x+5$
$f(2)=b$이므로 $b=12-4+5=13$
$\therefore b-a=13-3=10$

03

다음 중 이차함수 $y=-x^2$의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이다.
② y축에 대하여 대칭이다.
③ 제3사분면과 제4사분면을 지난다.
④ 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프보다 폭이 좁다.
✓⑤ 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다.

⑤ 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

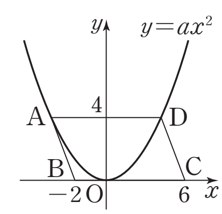
04 서술형

이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 이차함수 $y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이고 점 $(m,\ 2m-3)$을 지난다. 이때 $6a+m$의 값을 구하시오. 5

이차함수 $y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭인 그래프의 식은 $y=\frac{1}{3}x^2$이므로
$a=\frac{1}{3}$ ············ 40 %
이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2$의 그래프가 점 $(m,\ 2m-3)$을 지나므로
$2m-3=\frac{1}{3}m^2$, $m^2-6m+9=0$
$(m-3)^2=0$ $\therefore m=3$ ············ 40 %
$\therefore 6a+m=6\times\frac{1}{3}+3=5$ ············ 20 %

05

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, D는 이차함수 $y=ax^2$의 그래프 위의 점이고 두 점 B, C는 x축 위의 점이다. □ABCD가 평행사변형일 때, 상수 a의 값은?



① $\frac{1}{8}$ ✓② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

□ABCD가 평행사변형이므로 $\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$
즉, 두 점 A, D의 y좌표는 4로 같다.
또, $\overline{AD}=\overline{BC}=8$이므로 두 점 A, D와 y축 사이의 거리는 4
$\therefore$ A$(-4,\ 4)$, D$(4,\ 4)$
따라서 점 D$(4,\ 4)$가 이차함수 $y=ax^2$의 그래프 위의 점이므로
$4=16a$ $\therefore a=\frac{1}{4}$

개념 2 이차함수 $y=ax^2+q$, $y=a(x-p)^2$의 그래프

06

이차함수 $y=ax^2-3$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면 이차함수 $y=4x^2+1$의 그래프와 일치하고 점 $\left(-\frac{1}{2},\ b\right)$를 지난다. 이때 $a-b+q$의 값은?

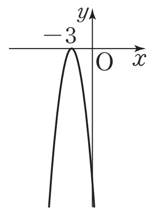
(단, a는 상수이다.)

① -10 ② -6 ③ 2
✓④ 6 ⑤ 10

이차함수 $y=ax^2-3$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면 $y=ax^2-3+q$
이 이차함수의 그래프와 $y=4x^2+1$의 그래프가 일치하므로
$a=4$, $-3+q=1$
$\therefore q=4$
이차함수 $y=4x^2+1$의 그래프가 점 $\left(-\frac{1}{2},\ b\right)$를 지나므로 $b=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1=2$
$\therefore a-b+q=4-2+4=6$

07

오른쪽 그림은 이차함수 $y=-2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동한 것이다. 이 그래프의 식을 $y=f(x)$라고 할 때, $f(1)-f(-4)$의 값은?



① -34 ✓② -30
③ -28 ④ 30
⑤ 34

주어진 그래프는 이차함수 $y=-2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 식은 $f(x)=-2(x+3)^2$
따라서 $f(1)=-32$, $f(-4)=-2$이므로
$f(1)-f(-4)=-32-(-2)=-30$

08

이차함수 $y=-5x^2+20$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 a, b라고 할 때, 이차함수 $y=a(x-b)^2$의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는? (단, $a<b$)

✓① -8 ② -4 ③ -2
④ 4 ⑤ 8

$y=-5x^2+20$에 $y=0$을 대입하면
$-5x^2+20=0$, $x^2=4$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$
이때 $a<b$이므로 $a=-2$, $b=2$
즉, $y=-2(x-2)^2$이고, 이 식에 $x=0$을 대입하면 $y=-8$
따라서 이차함수 $y=-2(x-2)^2$의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는 -8이다.

09

두 이차함수 $y=\frac{1}{6}x^2-6$, $y=a(x-p)^2$의 그래프가 서로의 꼭짓점을 지날 때, ap의 값은?
(단, a, p는 상수이고, $p>0$이다.)

① $-\frac{5}{3}$ ✓② -1 ③ $-\frac{2}{3}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

이차함수 $y=\frac{1}{6}x^2-6$의 그래프가 점 $(p, 0)$을 지나므로
$0=\frac{1}{6}p^2-6$, $p^2=36$ $\quad\therefore p=-6$ 또는 $p=6$
이때 $p>0$이므로 $p=6$
이차함수 $y=a(x-6)^2$의 그래프가 점 $(0, -6)$을 지나므로
$-6=36a$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{6}$
$\therefore ap=-\frac{1}{6}\times6=-1$

개념 3 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

10 출제 주의

이차함수 $y=-(x+2p)^2-3p^2$의 그래프의 꼭짓점이 직선 $y=x-8$ 위에 있을 때, 정수 p의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1
✓④ 2 ⑤ 3

이차함수 $y=-(x+2p)^2-3p^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2p, -3p^2)$
이 점이 직선 $y=x-8$ 위에 있으므로
$-3p^2=-2p-8$, $(3p+4)(p-2)=0$
$\therefore p=-\frac{4}{3}$ 또는 $p=2$
이때 p는 정수이므로 $p=2$

11

이차함수 $y=2(x+1)^2+k-7$의 그래프가 제1, 2, 3사분면만을 지날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $-9\le k\le7$ ② $-9\le k<7$ ③ $5<k<7$
④ $5\le k\le7$ ✓⑤ $5\le k<7$

이차함수 $y=2(x+1)^2+k-7$의 그래프의 꼭짓점은 제3사분면 위에 있고 y축과의 교점이 x축 또는 x축의 위쪽에 위치해야 한다.
(ⅰ) 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k-7)$이므로
$k-7<0$ $\quad\therefore k<7$
(ⅱ) $y=2(x+1)^2+k-7$에 $x=0$을 대입하면
$y=2+k-7=k-5\ge0$ $\quad\therefore k\ge5$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $5\le k<7$

12

다음 보기 중 이차함수 $y=\frac{1}{5}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고른 것은?

〈 보기 〉
ㄱ. 꼭짓점의 좌표는 $(-2, 1)$이다.
ㄴ. 위로 볼록한 포물선이다.
ㄷ. 축의 방정식은 $x=2$이다.
ㄹ. $x>-2$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
ㅁ. $y=-\frac{1}{5}x^2$의 그래프와 폭이 같다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㄹ ③ ㄱ, ㄷ, ㄹ
✓④ ㄱ, ㄹ, ㅁ ⑤ ㄴ, ㄹ, ㅁ

이차함수 $y=\frac{1}{5}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\frac{1}{5}(x+2)^2+1$
ㄴ. 아래로 볼록한 포물선이다.
ㄷ. 축의 방정식은 $x=-2$이다.

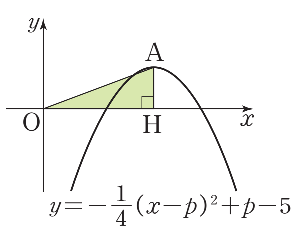
13 서술형

이차함수 $y=a(x+3)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 $b+2$만큼 평행이동하였더니 이차함수 $y=3x^2-kx+k$의 그래프와 일치하였다. 이때 $a+b+k$의 값을 구하시오. (단, a, k는 상수이다.) 13

이차함수 $y=a(x+3)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 $b+2$만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=a(x+3-5)^2+b+2=ax^2-4ax+4a+b+2$ ······ 40 %
이 이차함수의 그래프와 이차함수 $y=3x^2-kx+k$의 그래프가 일치하므로
$a=3$, $-4a=-k$, $4a+b+2=k$
$k=4a=12$이므로
$12+b+2=12$ $\quad\therefore b=-2$ ······ 40 %
$\therefore a+b+k=3+(-2)+12=13$ ······ 20 %

14

오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=-\frac{1}{4}(x-p)^2+p-5$의 그래프의 꼭짓점을 A라 하고 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 삼각형 OHA의 넓이가 12일 때, p의 값은?
(단, 점 A는 제1사분면 위의 점이고, 점 O는 원점이다.)



① -8 ② -3 ③ 3
④ 5 ✓⑤ 8

두 점 A, H의 좌표는 각각 $(p,\ p-5)$, $(p,\ 0)$이므로
$\overline{OH}=p$, $\overline{AH}=p-5$
△OHA의 넓이가 12이므로
$\frac{1}{2}p(p-5)=12$, $p^2-5p-24=0$
$(p+3)(p-8)=0$ $\quad\therefore p=-3$ 또는 $p=8$
이때 점 A는 제1사분면 위의 점이므로 $p=8$

15

다음 조건을 만족시키는 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식은?

(가) 아래로 볼록한 포물선이다.
(나) 이차함수 $y=-5x^2$의 그래프와 폭이 같다.
(다) 꼭짓점이 제4사분면 위에 있다.

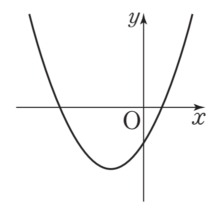
① $y=-5(x-3)^2-4$ ② $y=-5(x-2)^2+7$
✓③ $y=5(x-4)^2-1$ ④ $y=5(x-1)^2+6$
⑤ $y=5(x+2)^2+5$

구하는 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$라고 하면
조건 (가)에 의하여 $a>0$
조건 (나)에 의하여 $|a|=5$이므로 $a=5$
조건 (다)에 의하여 $p>0$, $q<0$

개념 4 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프에서 a, p, q의 부호

16 출제 주의

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 부호가 나머지 넷과 다른 하나는?
(단, a, p, q는 상수이다.)

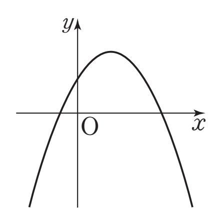


① $-a$ ② p
③ $p+q$ ✓④ $a+pq$
⑤ ap^2+q

$a>0$, $p<0$, $q<0$
① $-a<0$ ② $p<0$ ③ $p+q<0$ ④ $a+pq>0$
⑤ 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프의 y절편이 음수이므로 $ap^2+q<0$

17

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 이차함수 $y=(x-a+p)^2-q$의 그래프의 꼭짓점은 제몇사분면 위에 있는가?
(단, a, p, q는 상수이다.)

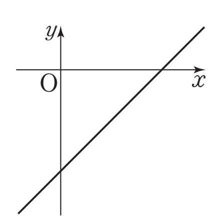


① 제1사분면 ② 제2사분면
✓③ 제3사분면 ④ 제4사분면
⑤ 알 수 없다.

그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
꼭짓점 $(p,\ q)$가 제1사분면 위에 있으므로 $p>0$, $q>0$
따라서 이차함수 $y=(x-a+p)^2-q$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(a-p,\ -q)$이고
$a-p<0$, $-q<0$이므로 꼭짓점은 제3사분면 위에 있다.

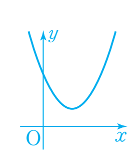
18

일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 이차함수 $y=a(x+b)^2-ab$의 그래프가 지나지 않는 사분면은?
(단, a, b는 상수이다.)



① 제1사분면 ② 제2사분면
③ 제3사분면 ④ 제1, 2사분면
✓⑤ 제3, 4사분면

그래프가 오른쪽 위로 향하므로 $a>0$
y절편이 음수이므로 $b<0$
이때 이차함수 $y=a(x+b)^2-ab$의 그래프는 아래로 볼록하다.
또, 꼭짓점의 좌표는 $(-b,\ -ab)$이고 $-b>0$, $-ab>0$이므로 꼭짓점은 제1사분면 위에 있다.
따라서 이차함수 $y=a(x+b)^2-ab$의 그래프는 제3, 4사분면을 지나지 않는다.



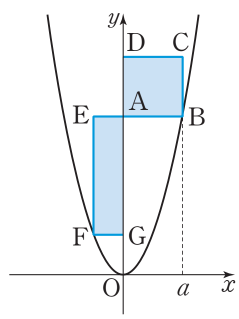
01

이차함수 $f(x)$가 $\underline{2f(x)+f(1-x)=3x^2}_{㉠}$을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

✓① 14　② 1　③ -1
④ -14　⑤ -27

x 대신에 $1-x$를 ㉠에 대입하면 $2f(1-x)+f(x)=3(1-x)^2$ …… ㉡
$2\times$㉠$-$㉡을 하면
$3f(x)=6x^2-3(x-1)^2=3x^2+6x-3$　$\therefore f(x)=x^2+2x-1$
$\therefore f(3)=3^2+2\times3-1=14$

02

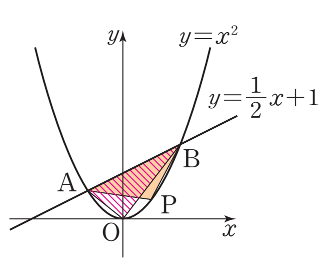


오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 두 점 B, F에 대하여 사각형 ABCD가 정사각형, 사각형 EFGA가 직사각형이 되도록 두 점 C, E를 잡았다. 두 사각형의 넓이가 같고 $\overline{AB}=2\overline{AE}=a$일 때, 정사각형 ABCD의 넓이는? (단, 세 점 A, D, G는 y축 위에 있다.)

① $\frac{20}{3}$　✓② $\frac{64}{9}$　③ $\frac{68}{9}$
④ 8　⑤ $\frac{76}{9}$

점 B의 좌표는 $(a,\ a^2)$이고 $\overline{AE}=\frac{1}{2}a$이므로 점 F의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}a,\ \frac{1}{4}a^2\right)$이다.
$\therefore \overline{AG}=\frac{3}{4}a^2$
정사각형 ABCD와 직사각형 EFGA의 넓이가 같으므로
$a^2=\frac{1}{2}a\times\frac{3}{4}a^2$, $a^2=\frac{3}{8}a^3$, $a^2\left(\frac{3}{8}a-1\right)=0$　$\therefore a=\frac{8}{3}$ ($\because a>0$)
따라서 정사각형 ABCD의 넓이는 $a^2=\frac{64}{9}$이다.

03 서술형

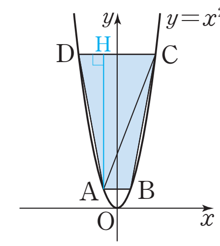


오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 일차함수 $y=\frac{1}{2}x+1$의 그래프의 교점을 A, B라고 하자. 원점을 출발하여 점 B까지 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위를 움직이는 점 P에 대하여 삼각형 AOB와 삼각형 APB의 넓이가 같아지는 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라고 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. $\frac{3}{4}$

(단, O는 원점이고, 점 P는 원점이 아니다.)

직선 OP의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다. ······························ 30 %
이때 두 점 $O(0,\ 0)$, $P(a,\ b)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$이므로 $x^2=\frac{1}{2}x$에서
$x^2-\frac{1}{2}x=0$, $x\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$　$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$
이때 점 P는 원점이 아니므로 $x=\frac{1}{2}$
따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$이므로 $a+b=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ ·················· 70 %

04

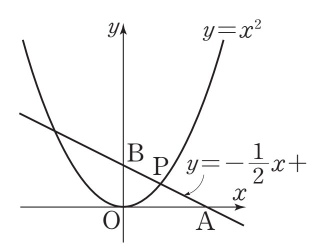


오른쪽 그림과 같이 x축에 평행한 두 직선과 이차함수 $y=x^2$의 그래프의 교점을 각각 A, B, C, D라고 하자. 삼각형 ABC와 삼각형 ACD의 넓이의 비가 $1:2$이고, 사다리꼴 ABCD의 대각선 AC의 길이가 $6\sqrt{5}$일 때, 이 사다리꼴의 높이는?

① 4　② 6　③ 8
④ 10　✓⑤ 12

삼각형 ABC와 삼각형 ACD의 높이는 같고 넓이의 비가 $1:2$이므로 두 밑변의 길이의 비는 $\overline{AB}:\overline{CD}=1:2$
점 A의 좌표를 $(-a,\ a^2)$ $(a>0)$이라고 하면 점 C의 좌표는 $(2a,\ 4a^2)$
$H(-a,\ 4a^2)$이고 삼각형 AHC가 직각삼각형, $\overline{CH}=3a$, $\overline{AH}=3a^2$이므로
$\overline{AC}=\sqrt{(3a)^2+(3a^2)^2}=3a\sqrt{1+a^2}$
즉, $3a\sqrt{1+a^2}=6\sqrt{5}$이므로 $a\sqrt{1+a^2}=2\sqrt{5}$
$a^2(1+a^2)=20$, $a^4+a^2-20=0$
$a^2=t$라고 하면
$t^2+t-20=0$, $(t+5)(t-4)=0$
$\therefore t=4$ ($\because t>0$)
즉, $a^2=4$이고 $a>0$이므로 $a=2$
$\therefore B(2,\ 4)$, $C(4,\ 16)$
따라서 사다리꼴 ABCD의 높이는 $16-4=12$이다.

05 출제 주의



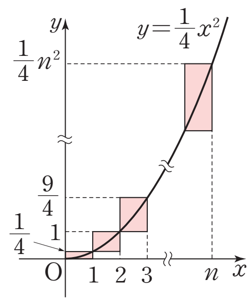
오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 x축과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라 하고, 포물선 $y=x^2$과 제1사분면에서 만나는 점을 P라고 하자. $\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$일 때, 상수 k의 값은? (단, $k\neq0$)

① $\frac{5}{3}$　② $\frac{4}{3}$　③ 1
✓④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{1}{3}$

$y=-\frac{1}{2}x+k$에 $y=0$을 대입하면
$0=-\frac{1}{2}x+k$　$\therefore x=2k$
$\therefore A(2k,\ 0)$
직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$의 x절편이 $2k$이고 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$이므로 점 P의 x좌표는
$\frac{1}{3}\times2k=\frac{2}{3}k$
따라서 $P\left(\frac{2}{3}k,\ \frac{4}{9}k^2\right)$이므로
$\frac{4}{9}k^2=-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}k+k$, $\frac{4}{9}k^2-\frac{2}{3}k=0$
$2k(2k-3)=0$　$\therefore k=0$ 또는 $k=\frac{2}{3}$
이때 $k\neq0$이므로 $k=\frac{2}{3}$

06

오른쪽 그림과 같이 원점과 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$에 대하여 $y=\frac{1}{4}x^2$의 그래프 위의 점 $\left(n, \frac{1}{4}n^2\right)$을 꼭짓점으로 하고, 가로의 길이가 1인 n개의 직사각형이 있다. 계단 모양으로 나열된 n개의 모든 직사각형의 넓이의 합이 144일 때, n의 값은?

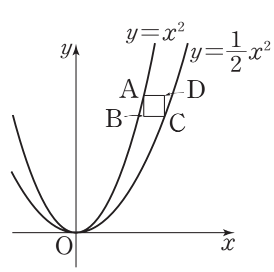


① 6　② 12　③ 18
✓④ 24　⑤ 30

계단 모양으로 나열된 n개의 모든 직사각형을 모두 y축으로 옮기면 모든 직사각형을 합친 도형은 가로의 길이가 1이고 세로의 길이가 $\frac{1}{4}n^2$인 직사각형이 된다.
따라서 계단 모양으로 나열된 n개의 모든 직사각형의 넓이의 합이 144이므로
$1\times\frac{1}{4}n^2=144$, $n^2=576$
$\therefore n=24$ ($\because n>0$)

07

오른쪽 그림과 같이 좌표평면의 제1사분면에 있는 정사각형 ABCD의 모든 변은 x축 또는 y축에 평행하다. 두 점 A, C는 각각 이차함수 $y=x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프 위에 있고, 점 A의 y좌표는 점 C의 y좌표보다 크다. $\overline{AB}=1$일 때, 점 A의 x좌표와 y좌표의 합을 구하시오. 12

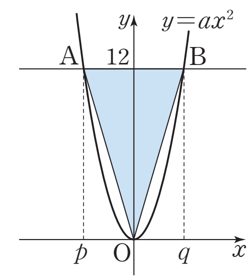


제1사분면 위의 점 A의 x좌표를 k $(k>0)$라고 하면
$A(k, k^2)$, $B(k, k^2-1)$, $C(k+1, k^2-1)$
이때 점 C는 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프 위의 점이므로 $C\left(k+1, \frac{1}{2}(k+1)^2\right)$
즉, $k^2-1=\frac{1}{2}(k+1)^2$이므로
$k^2-2k-3=0$, $(k+1)(k-3)=0$
$\therefore k=3$ ($\because k>0$)
따라서 점 A의 좌표는 $(3, 9)$이므로 점 A의 x좌표와 y좌표의 합은
$3+9=12$

08

오른쪽 그림과 같이 자연수 a에 대하여 이차함수 $y=ax^2$의 그래프 위의 두 점 $A(p, 12)$, $B(q, 12)$가 있다. 삼각형 AOB의 넓이가 자연수가 되도록 하는 자연수 a의 개수를 구하시오. 8

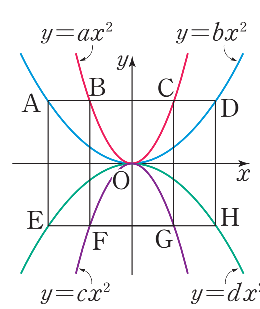
(단, O는 원점이다.)



두 점 A, B의 y좌표가 12이므로 $y=ax^2$ $(a>0)$에서
$12=ax^2$, $x^2=\frac{12}{a}$
$\therefore x=-\sqrt{\frac{12}{a}}$ 또는 $x=\sqrt{\frac{12}{a}}$
이때 $a>0$이므로 $p=-\sqrt{\frac{12}{a}}$, $q=\sqrt{\frac{12}{a}}$
$\therefore$ (삼각형 AOB의 넓이) $=\frac{1}{2}\times\left\{\sqrt{\frac{12}{a}}-\left(-\sqrt{\frac{12}{a}}\right)\right\}\times 12$
$=12\sqrt{\frac{12}{a}}=\sqrt{\frac{2^6\times3^3}{a}}$
삼각형 AOB의 넓이가 자연수가 되려면 a는 $2^6\times3^3$의 약수 중 $3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
따라서 자연수 a는 $a=3$, $a=3\times2^2$, $a=3\times2^4$, $a=3\times2^6$, $a=3^3$, $a=2^2\times3^3$, $a=2^4\times3^3$, $a=2^6\times3^3$의 8개이다.

09 서술형

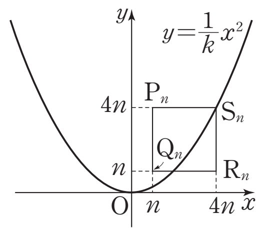
두 이차함수 $y=ax^2$, $y=bx^2$의 그래프와 각각에 대하여 x축에 대하여 대칭인 그래프 $y=cx^2$, $y=dx^2$이 오른쪽 그림과 같다. 네 이차함수의 그래프에 대하여 직선 $y=9$와의 교점을 각각 A, B, C, D, 직선 $y=-9$와의 교점을 각각 E, F, G, H라고 하자. $\overline{AB}=3$이고 사각형 AEHD의 넓이가 사각형 BFGC의 넓이의 2배일 때, $a+b-c+d$의 값을 구하시오. 2



점 C의 x좌표를 t라고 하면 $\overline{BC}=2t$, $\overline{CG}=18$이므로 사각형 BFGC의 넓이는
$2t\times18=36t$
한편, $\overline{AB}=\overline{CD}=3$에서 $\overline{AD}=2(t+3)$이므로 사각형 AEHD의 넓이는
$2(t+3)\times18=36(t+3)$
사각형 AEHD의 넓이가 사각형 BFGC의 넓이의 2배이므로
$36(t+3)=2\times36t$　$\therefore t=3$ ······ 30 %
즉, $C(3, 9)$이므로 $9=9a$　$\therefore a=1$
이때 두 이차함수 $y=ax^2$, $y=cx^2$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이므로 $c=-1$
······ 30 %
또, $\overline{CD}=\overline{AB}=3$이므로 $D(6, 9)$
$9=36b$　$\therefore b=\frac{1}{4}$
이때 두 이차함수 $y=bx^2$, $y=dx^2$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이므로 $d=-\frac{1}{4}$
······ 30 %
$\therefore a+b-c+d=1+\frac{1}{4}-(-1)+\left(-\frac{1}{4}\right)=2$ ······ 10 %

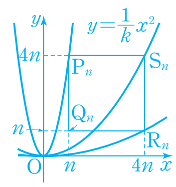
10 출제 주의

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{P}_n(n,\ 4n)$, $\mathrm{Q}_n(n,\ n)$, $\mathrm{R}_n(4n,\ n)$, $\mathrm{S}_n(4n,\ 4n)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 A_n이라고 할 때, 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=\frac{1}{k}x^2$의 그래프와 A_n이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 자연수 k의 개수를 $f(n)$이라고 하자. $f(8)$의 값은?



✓① 125　② 130　③ 135
④ 140　⑤ 145

정사각형 A_n에 대하여 이차함수 $y=\frac{1}{k}x^2$의 그래프가 점 $\mathrm{P}_n(n,\ 4n)$을 지날 때 $\frac{1}{k}$의 값이 최대이고, 점 $\mathrm{R}_n(4n,\ n)$을 지날 때 $\frac{1}{k}$의 값이 최소이다.



이차함수 $y=\frac{1}{k}x^2$의 그래프가 점 $\mathrm{P}_n(n,\ 4n)$을 지날 때

$4n=\frac{1}{k}n^2$　　$\therefore \frac{1}{k}=\frac{4}{n}$

이차함수 $y=\frac{1}{k}x^2$의 그래프가 점 $\mathrm{R}_n(4n,\ n)$을 지날 때 $n=\frac{1}{k}(4n)^2$　　$\therefore \frac{1}{k}=\frac{1}{16n}$

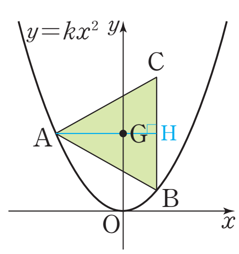
즉, $\frac{1}{16n}<\frac{1}{k}<\frac{4}{n}$일 때, 이차함수 $y=\frac{1}{k}x^2$의 그래프와 정사각형 A_n이 서로 다른 두 점에서 만난다.

$n=8$일 때, $\frac{1}{128}<\frac{1}{k}<\frac{1}{2}$이므로 $2<k<128$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k는 3, 4, 5, …, 127의 125개이므로 $f(8)=125$

11

오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=kx^2$의 그래프 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 한 변으로 하는 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 $2\sqrt{3}$이고 무게중심은 $\mathrm{G}(0,\ p)$이다. 변 BC가 y축과 평행할 때, $p+k$의 값은?



① $\frac{\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　③ $\sqrt{3}$
④ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　✓⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

점 $\mathrm{G}(0,\ p)$는 $\overline{\mathrm{AH}}$ 위에 있고 점 G가 정삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{BH}}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\triangle\mathrm{CAH}$에서 $\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3$

따라서 $\overline{\mathrm{AG}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{AH}}=2$, $\overline{\mathrm{GH}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{AH}}=1$이므로 $\mathrm{A}(-2,\ p)$, $\mathrm{B}(1,\ p-\sqrt{3})$

이때 두 점 A, B는 이차함수 $y=kx^2$의 그래프 위의 점이므로

$p=4k$　　…… ㉠

$p-\sqrt{3}=k$　　…… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $4k-\sqrt{3}=k$, $3k=\sqrt{3}$　　$\therefore k=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $p=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\therefore p+k=\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

12

$-1<x\le1$에서 이차함수 $f(x)=ax^2+c$가 $|f(x)|\le2$일 때, 가장 큰 a의 값은?

① 1　② 2　③ 3
✓④ 4　⑤ 5

가장 큰 a의 값을 구해야 하므로 $a>0$인 경우만 생각한다.

이차함수 $f(x)=ax^2+c$의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ c)$이고 $-1<x\le1$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(0)=c$, 최댓값은 $f(1)=a+c$이다.

이때 $|f(x)|\le2$이면 $-2\le f(x)\le2$이므로 $c\ge-2$

$a+c\le2$　　$\therefore a\le2-c$

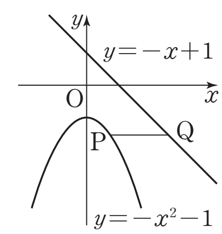
즉, a의 값이 최대가 되려면 c의 값이 최소가 되어야 하므로 $c=-2$

$\therefore a\le4$

13

오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2-1$의 그래프 위의 한 점 P에서 x축과 평행한 직선을 그어 일차함수 $y=-x+1$의 그래프와 만나는 점을 Q라고 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}=4$를 만족시키는 점 P의 x좌표는?

(단, 점 P는 제4사분면 위의 점이다.)



① 1　✓② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

$\mathrm{P}(a,\ -a^2-1)$이라고 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}=4$이므로 $\mathrm{Q}(a+4,\ -a^2-1)$

점 Q는 일차함수 $y=-x+1$의 그래프 위의 점이므로

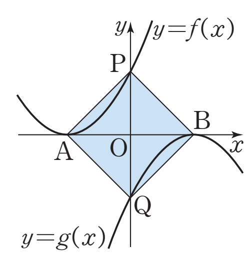
$-a^2-1=-(a+4)+1$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$　　$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

따라서 점 P는 제4사분면 위의 점이므로 점 P의 x좌표는 2이다.

14 출제 주의

오른쪽 그림과 같이 양수 a와 자연수 n에 대하여 꼭짓점이 각각 $\mathrm{A}(-a,\ 0)$, $\mathrm{B}(a,\ 0)$인 두 이차함수 $f(x)=\frac{1}{n}(x+a)^2$, $g(x)=-\frac{1}{n}(x-a)^2$의 그래프가 있다. 두 함수의 그래프가 y축과 만나는 점을 각각 P, Q라고 하면 사각형 AQBP는 넓이가 18인 정사각형일 때, $a+n$의 값을 구하시오. 6



사각형 AQBP는 정사각형이므로 한 변의 길이를 p라고 하면 $p^2=18$

이때 $p>0$이므로 $p=3\sqrt{2}$

삼각형 OBP가 직각이등변삼각형이므로

$a^2+a^2=(3\sqrt{2})^2$, $2a^2=18$

$a^2=9$　　$\therefore a=3\ (\because a>0)$

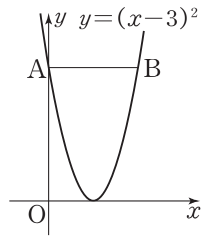
따라서 이차함수 $f(x)=\frac{1}{n}(x+3)^2$의 그래프가 점 $\mathrm{P}(0,\ 3)$을 지나므로

$3=\frac{1}{n}(0+3)^2$, $3=\frac{9}{n}$　　$\therefore n=3$

$\therefore a+n=3+3=6$

15 서술형

오른쪽 그림과 같이 점 A는 이차함수 $y=(x-3)^2$의 그래프의 y축과의 교점이고 선분 AB는 x축에 평행하다. 이때 1부터 8까지의 자연수가 각 면에 하나씩 적혀 있는 정팔면체 모양의 주사위를 한 번 던져 나오는 수를 a라고 할 때, 직선 $y=\frac{x}{3}+a$가 선분 AB와 만날 확률을 구하시오. $\frac{1}{4}$



A(0, 9)이고 점 B의 y좌표가 9이므로

$(x-3)^2=9$, $x^2-6x=0$

$x(x-6)=0$ ∴ B(6, 9) ······ 40 %

(i) 직선 $y=\frac{x}{3}+a$가 점 A(0, 9)를 지날 때

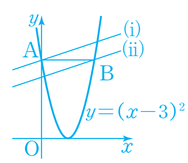
$9=0+a$ ∴ $a=9$

(ii) 직선 $y=\frac{x}{3}+a$가 점 B(6, 9)를 지날 때

$9=2+a$ ∴ $a=7$

(i), (ii)에 의하여 직선 a의 값이 7, 8이면 직선

$y=\frac{x}{3}+a$가 선분 AB와 만난다. ······ 40 %

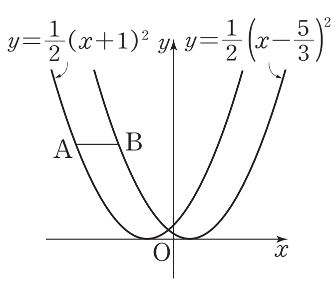


따라서 구하는 확률은

$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ ······ 20 %

16

오른쪽 그림과 같이 두 이차함수 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$, $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{3}\right)^2$의 그래프 위에 각각 점 A, B가 있다. 선분 AB가 x축과 평행할 때, 선분 AB의 길이는?



① $\frac{1}{3}$ ② 1 ③ $\frac{5}{3}$

④ 2 ✓⑤ $\frac{8}{3}$

두 이차함수 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$, $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{3}\right)^2$의 그래프는 평행이동하여 포개어질 수 있고 선분 AB는 x축과 평행하므로 선분 AB의 길이는 두 그래프의 꼭짓점 사이의 거리와 같다.

$y=\frac{1}{2}(x+1)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 0)$

$y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{3}\right)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$

따라서 선분 AB의 길이는

$\frac{5}{3}-(-1)=\frac{5}{3}+1=\frac{8}{3}$

17 출제 주의

이차함수 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 직선 $y=mx$와 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ의 길이를 이등분하는 점이 원점일 때, 상수 m의 값은? $y=(x+1)^2-2$

① 14 ② 11 ③ 8

④ 5 ✓⑤ 2

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라고 하면 $(\alpha+1)^2-2=m\alpha$, $(\beta+1)^2-2=m\beta$

∴ $\alpha^2+(2-m)\alpha-1=0$ ······ ㉠

$\beta^2+(2-m)\beta-1=0$ ······ ㉡

이때 선분 PQ의 길이를 이등분하는 점이 원점이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=0$ ∴ $\alpha+\beta=0$

∴ $\beta=-\alpha$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $\alpha^2-(2-m)\alpha-1=0$ ······ ㉣

㉠−㉣을 하면 $2(2-m)\alpha=0$ ∴ $\alpha=0$ 또는 $m=2$

$\alpha=0$일 때, 이차함수 $y=(x+1)^2-2$와 직선 $y=mx$는 한 점에서 만나므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

∴ $m=2$

18

이차함수 $y=-5(x+a-3)^2+7a-21$의 그래프의 축이 y축의 오른쪽에 위치할 때, 이 그래프의 꼭짓점이 어느 사분면 위에 있는지 구하시오. (단, a는 상수이다.) 제4사분면

이차함수 $y=-5(x+a-3)^2+7a-21$의 축의 방정식은 $x=-a+3$

축이 y축의 오른쪽에 위치하므로

$-a+3>0$ ∴ $a<3$

이차함수 $y=-5(x+a-3)^2+7a-21$의 꼭짓점의 좌표는 $(-a+3, 7a-21)$이므로

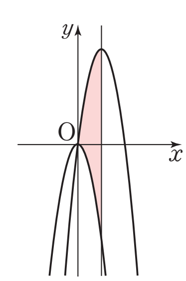
$a<3$에서

$7a<21$ ∴ $7a-21<0$

따라서 꼭짓점 $(-a+3, 7a-21)$은 제4사분면 위에 있다.

19

오른쪽 그림과 같이 두 이차함수 $y=-4x^2$과 $y=-4(x-2)^2+16$의 그래프에서 색칠한 부분의 넓이는?



① 30 ✓② 32

③ 34 ④ 36

⑤ 38

$y=-4(x-2)^2+16$의 그래프는 $y=-4x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 16만큼 평행이동한 것이다.

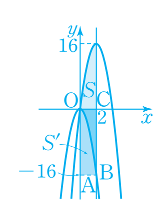
두 이차함수 $y=-4x^2$, $y=-4(x-2)^2+16$의 그래프의 교점의 x좌표는 $-4x^2=-4(x-2)^2+16$에서

$-4x^2=-4x^2+16x$ ∴ $x=0$

즉, 영역 S와 S'의 넓이가 같다.

따라서 구하는 넓이는 □OABC의 넓이와 같으므로

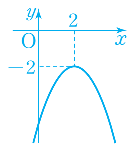
$2\times16=32$



20

이차함수 $f(x)=2(x-2)^2+2$의 그래프를 꼭짓점을 중심으로 180° 회전시킨 다음, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 이차함수 $g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 A, B라고 하자. $\overline{AB}=2\sqrt{2}$일 때, $g(x)$를 구하시오.

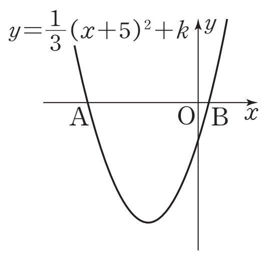
$g(x)=-2x^2+8x-4$



$y=f(x)$의 그래프를 180° 회전시키면 꼭짓점은 그대로이고 위로 볼록인 그래프가 된다.
따라서 이 그래프의 함수식은 $y=-2(x-2)^2+2$이고, 이 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 함수가 $g(x)$이므로
$g(x)=-2(x-2)^2+2+k=-2x^2+8x-6+k$
이때 $g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 A, B의 좌표를 각각 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$이라고 하면
$-2x^2+8x-6+k=-2(x-\alpha)(x-\beta)=-2x^2+2(\alpha+\beta)x-2\alpha\beta$
이므로 $8=2(\alpha+\beta)$, $-6+k=-2\alpha\beta$ $\quad\therefore \alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=\frac{6-k}{2}$
$\therefore \overline{AB}=|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{4^2-4\times\frac{6-k}{2}}=\sqrt{4+2k}$
즉, $\sqrt{4+2k}=2\sqrt{2}$이므로 $4+2k=8$, $2k=4$ $\quad\therefore k=2$
$\therefore g(x)=-2x^2+8x-4$

21

오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=\frac{1}{3}(x+5)^2+k$의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라고 하자. $\overline{AB}=12$일 때, 상수 k의 값은?

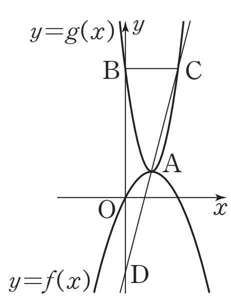


① -13 ② $-\frac{25}{2}$ ✓③ -12
④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

이차함수 $y=\frac{1}{3}(x+5)^2+k$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-5$이고 $\overline{AB}=12$이므로
$A(-5-6,\ 0)$, $B(-5+6,\ 0)$, 즉 $A(-11,\ 0)$, $B(1,\ 0)$
$y=\frac{1}{3}(x+5)^2+k$의 그래프가 점 $B(1,\ 0)$을 지나므로
$0=\frac{1}{3}(1+5)^2+k$ $\quad\therefore k=-12$

22

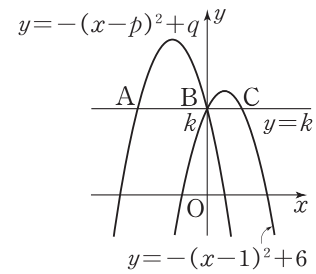
오른쪽 그림은 점 A가 꼭짓점인 두 이차함수 $f(x)=-(x-1)^2+1$, $g(x)=ax^2+bx+c$의 그래프이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 B, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C, 두 점 A, C를 지나는 직선이 y축과 만나는 점을 D라고 하면 삼각형 BDC의 넓이가 8일 때, $g(3)$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이고, $a>0$이다.) **17**



이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표도 $(1,\ 1)$이다.
즉, $g(x)=a(x-1)^2+1=ax^2-2ax+a+1$이므로 $b=-2a$, $c=a+1$
$B(0,\ a+1)$이고 점 C는 점 B와 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $C(2,\ a+1)$
두 점 A, C를 지나는 직선은 기울기가 a이므로 직선의 방정식을 $y=ax+n$ (n은 상수)이라고 하면 이 직선이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로 $1=a+n$ $\quad\therefore n=1-a$
$\therefore y=ax+1-a$
$D(0,\ 1-a)$, $\overline{BC}=2$, $\overline{BD}=2a$이고 삼각형 BDC의 넓이가 8이므로
$\frac{1}{2}\times2\times2a=8$ $\quad\therefore a=4$
따라서 $b=-8$, $c=5$이므로 $g(x)=4x^2-8x+5$
$\therefore g(3)=4\times3^2-8\times3+5=17$

23

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=k$가 두 이차함수 $y=-(x-p)^2+q$, $y=-(x-1)^2+6$의 그래프와 세 점 A, B, C에서 만난다. 점 B는 y축 위의 점이고, $\overline{AB}:\overline{BC}=2:1$일 때, $k+p+q$의 값을 구하시오. **12**
(단, k, p, q는 상수이고, 점 A는 제2사분면 위의 점이다.)

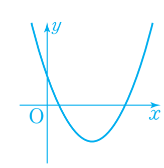


$B(0,\ 5)$이므로 $k=5$
점 C는 점 B와 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $C(2,\ 5)$
$\overline{BC}=2$이므로 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:1$에서 $\overline{AB}=2\overline{BC}=4$ $\quad\therefore A(-4,\ 5)$
두 점 $A(-4,\ 5)$, $B(0,\ 5)$가 이차함수 $y=-(x-p)^2+q$의 그래프 위의 점이므로
$5=-(-4-p)^2+q$, $5=-p^2+q$
$-(-4-p)^2+q=-p^2+q$, $-16-8p-p^2+q=-p^2+q$
$8p=-16$ $\quad\therefore p=-2$, $q=9$
$\therefore k+p+q=5+(-2)+9=12$

24

이차함수 $y=a(x+p)^2+q$의 그래프가 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면만을 지날 때, a, p, q의 부호는?
(단, a, p, q는 상수이다.)

① $a>0,\ p>0,\ q<0$ ✓② $a>0,\ p<0,\ q<0$
③ $a<0,\ p>0,\ q<0$ ④ $a<0,\ p<0,\ q>0$
⑤ $a<0,\ p<0,\ q<0$



이차함수 $y=a(x+p)^2+q$의 그래프가 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면만을 지나려면 아래로 볼록하고 꼭짓점 $(-p,\ q)$가 제4사분면에 있어야 한다.
따라서 $a>0$, $-p>0$, $q<0$이어야 하므로
$a>0$, $p<0$, $q<0$

개념을 적용하는

Lv. 1 핵심 문제

개념 1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

01

두 이차함수 $y=x^2-2ax+b$, $y=\frac{1}{2}x^2+4x+a-b$의 그래프의 꼭짓점이 서로 일치할 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① -6　✓② -2　③ 2
④ 6　⑤ 12

$y=x^2-2ax+b=(x-a)^2-a^2+b$
이므로 이차함수 $y=x^2-2ax+b$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(a,\ -a^2+b)$
$y=\frac{1}{2}x^2+4x+a-b=\frac{1}{2}(x+4)^2-8+a-b$
이므로 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+4x+a-b$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-4,\ -8+a-b)$
두 그래프의 꼭짓점이 서로 일치하므로 $a=-4$, $-a^2+b=-8+a-b$
$-a^2+b=-8+a-b$에서 $-16+b=-8-4-b$, $2b=4$　$\therefore b=2$
$\therefore a+b=-4+2=-2$

02

이차함수 $y=-6x^2+4x+a$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점 중 한 점의 x좌표가 $-\frac{1}{3}$일 때, 다른 한 점의 좌표와 이 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표는?

(단, a는 상수이다.)

	다른 한 점	y축과 만나는 점
①	$(-1,\ 0)$	$(0,\ 2)$
②	$(-1,\ 0)$	$(2,\ 0)$
③	$(1,\ 0)$	$(0,\ -2)$
✓④	$(1,\ 0)$	$(0,\ 2)$
⑤	$(1,\ 0)$	$(2,\ 0)$

이차함수 $y=-6x^2+4x+a$의 그래프가 점 $\left(-\frac{1}{3},\ 0\right)$을 지나므로
$0=-\frac{2}{3}-\frac{4}{3}+a$　$\therefore a=2$
$y=-6x^2+4x+2$에 $y=0$을 대입하면
$0=-6x^2+4x+2$, $0=-2(3x+1)(x-1)$　$\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$
즉, $y=-6x^2+4x+2$의 그래프가 x축과 만나는 다른 한 점의 좌표는 $(1,\ 0)$이다.
또, $y=-6x^2+4x+2$에 $x=0$을 대입하면 $y=2$이므로 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ 2)$이다.

03

이차함수 $y=2x^2-5x+3a$의 그래프가 점 $(a,\ 3a^2-8)$을 지나고 x축과 만나지 않을 때, 상수 a의 값은?

① -4　② -2　✓③ 2
④ 4　⑤ 6

$y=2x^2-5x+3a=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}+3a$
이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 y좌표는 양수이어야 한다.
즉, $-\frac{25}{8}+3a>0$이므로 $3a>\frac{25}{8}$　$\therefore a>\frac{25}{24}$
또, 이 이차함수의 그래프가 점 $(a,\ 3a^2-8)$을 지나므로
$3a^2-8=2a^2-5a+3a$, $(a+4)(a-2)=0$　$\therefore a=2\left(\because a>\frac{25}{24}\right)$

04 출제 주의

이차함수 $y=-\frac{1}{4}x^2-ax-\frac{1}{3}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프는 $x<2$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, $x>2$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. 이때 상수 a의 값은?

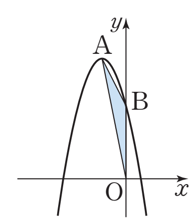
① -12　② -6　✓③ -3
④ 4　⑤ 8

$y=-\frac{1}{4}x^2-ax-\frac{1}{3}=-\frac{1}{4}(x+2a)^2+a^2-\frac{1}{3}$
이 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-\frac{1}{4}(x+2a+4)^2+a^2-\frac{1}{3}$이므로 이 이차함수의 축의 방정식은 $x=-2a-4$
이 그래프의 축의 방정식은 $x=2$이므로
$-2a-4=2$, $-2a=6$
$\therefore a=-3$

05 서술형

오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=-2x^2-4x+3$의 그래프의 꼭짓점을 A, y축과의 교점을 B라고 할 때, 삼각형 AOB의 넓이를 구하시오. $\frac{3}{2}$

(단, O는 원점이다.)



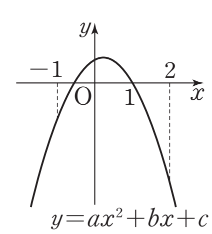
$y=-2x^2-4x+3=-2(x+1)^2+5$
이므로 $y=-2x^2-4x+3$의 그래프의 꼭짓점 A는 $\mathrm{A}(-1,\ 5)$ ··· 40 %
$y=-2x^2-4x+3$에 $x=0$을 대입하면
$y=3$　$\therefore \mathrm{B}(0,\ 3)$ ··· 40 %
$\therefore \triangle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\times3\times1=\frac{3}{2}$ ··· 20 %

개념 2 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 a, b, c의 부호

06

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

(단, a, b, c는 상수이다.)



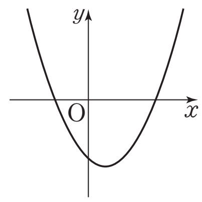
① $a<0$
② $b>0$
③ $a+b+c=0$
✓④ $a-b+c>0$
⑤ $4a+2b+c<0$

$a<0$, $b>0$, $c>0$
③ $y=ax^2+bx+c$에 $x=1$을 대입하면 $a+b+c=0$
④ $y=ax^2+bx+c$에 $x=-1$을 대입하면 $a-b+c<0$
⑤ $y=ax^2+bx+c$에 $x=2$를 대입하면 $4a+2b+c<0$

07

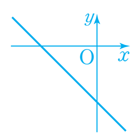
이차함수 $y=ax^2+bx-c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 일차함수 $y=-ax+bc$의 그래프가 지나지 않는 사분면은?

(단, a, b, c는 상수이다.)



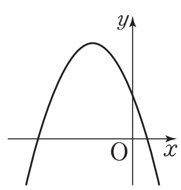
✓① 제1사분면　② 제2사분면
③ 제3사분면　④ 제1, 2사분면
⑤ 제3, 4사분면

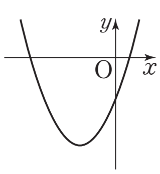
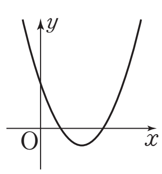
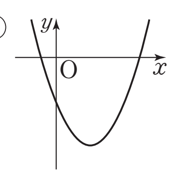
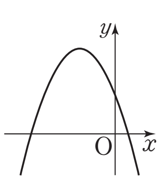
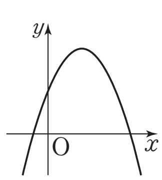
$a>0$, $b<0$, $c>0$
따라서 $-a<0$, $bc<0$이므로 일차함수 $y=-ax+bc$의 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다.



08

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 이차함수 $y=cx^2+bx+a$의 그래프로 알맞은 것은? (단, a, b, c는 상수이다.)



①

②

✓③

④

⑤


$a<0$, $b<0$, $c>0$
즉, $y=cx^2+bx+a$의 그래프는 아래로 볼록하고 축은 y축의 오른쪽에 있다.
또, y축과의 교점은 x축의 아래쪽에 있다.

개념 3 이차함수의 식 구하기

09

이차함수 $y=-2x^2+16x-21$의 그래프와 꼭짓점이 같고, 점 $(2, 7)$을 지나는 이차함수의 식은?

① $y=-2x^2-8x+3$　② $y=-x^2-8x-5$
✓③ $y=-x^2+8x-5$　④ $y=x^2-8x+5$
⑤ $y=2x^2+8x+3$

$y=-2x^2+16x-21=-2(x-4)^2+11$
구하는 이차함수의 식을 $y=a(x-4)^2+11$ (a는 상수)이라고 하자.
이 그래프가 점 $(2, 7)$을 지나므로 $7=4a+11$, $4a=-4$　$\therefore a=-1$
따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=-(x-4)^2+11=-x^2+8x-5$

10

축의 방정식이 $x=-1$인 포물선이 세 점 $(-2, -1)$, $(1, 8)$, $\left(-\frac{1}{3}, k\right)$를 지날 때, k의 값은?

✓① $-\frac{8}{3}$　② $-\frac{4}{3}$　③ $-\frac{2}{3}$
④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{8}{3}$

구하는 이차함수의 식을 $y=a(x+1)^2+q$ (a, q는 상수)라고 하자.
이 그래프가 두 점 $(-2, -1)$, $(1, 8)$을 지나므로
$-1=a+q$　⋯⋯ ㉠
$8=4a+q$　⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $q=-4$
따라서 $y=3(x+1)^2-4$의 그래프가 점 $\left(-\frac{1}{3}, k\right)$를 지나므로
$k=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-4=-\frac{8}{3}$

11 출제 주의

다음 중 세 점 $(-3, -12)$, $(-1, 4)$, $(0, 9)$를 지나는 포물선에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 아래로 볼록한 포물선이다.
② 점 $(4, 11)$을 지난다.
✓③ 꼭짓점의 좌표는 $(2, 13)$이다.
④ 이차함수 $y=x^2$의 그래프보다 폭이 좁다.
⑤ 평행이동하여 이차함수 $y=(x+5)^2+1$의 그래프와 포갤 수 있다.

구하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+9$ (a, b는 상수)라고 하면 이 그래프가 두 점 $(-3, -12)$, $(-1, 4)$를 지나므로 $-12=9a-3b+9$, $4=a-b+9$
$\therefore 3a-b=-7$　⋯⋯ ㉠
$a-b=-5$　⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=4$
즉, 구하는 이차함수의 식은 $y=-x^2+4x+9=-(x-2)^2+13$
① 위로 볼록한 포물선이다.
② $11\neq-4^2+4\times4+9$
④ 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 폭이 같다.
⑤ x^2항의 계수가 다르므로 평행이동하여 이차함수 $y=(x+5)^2+1$의 그래프와 포갤 수 없다.

12

이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2+ax+b$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 -4이고 이 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 6일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -3　② $-\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{3}$
④ 3　✓⑤ 5

이 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 6이므로 축에서 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는 3이다.
즉, x축과 만나는 두 점의 좌표는 각각 $(-7, 0)$, $(-1, 0)$이고 x^2의 계수가 $\frac{1}{3}$이므로
이차함수의 식은 $y=\frac{1}{3}(x+7)(x+1)=\frac{1}{3}x^2+\frac{8}{3}x+\frac{7}{3}$
따라서 $a=\frac{8}{3}$, $b=\frac{7}{3}$이므로
$a+b=\frac{8}{3}+\frac{7}{3}=5$

개념 4 이차함수의 최댓값과 최솟값

13 출제 주의

이차함수 $y=-2x^2+8ax-7$의 최댓값이 $2a-4$일 때, 음수 a의 값은?

① $-\frac{5}{4}$　② -1　③ $-\frac{3}{4}$
✓④ $-\frac{1}{2}$　⑤ $-\frac{1}{4}$

$y=-2x^2+8ax-7$
$=-2(x-2a)^2+8a^2-7$
이 이차함수의 최댓값이 $8a^2-7$이므로
$8a^2-7=2a-4$, $8a^2-2a-3=0$
$(2a+1)(4a-3)=0$　$\therefore a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{3}{4}$
이때 a는 음수이므로 $a=-\frac{1}{2}$

14

다음 조건을 만족시키는 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$라고 할 때, $\frac{b+c}{a}$의 값은?
(단, a, b, c는 상수이다.)

(가) 이차함수 $y=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}x^2$의 그래프와 폭이 같다.
(나) 축의 방정식은 $x=-1$이다.
(다) 최솟값이 -6이다.

① -11　② -12　③ -13
④ -14　✓⑤ -15

조건 (다)에 의하여 $a>0$이므로 조건 (가)에 의하여 $a=\frac{1}{3}$
두 조건 (나), (다)에 의하여 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, -6)$
즉, 이차함수의 식은 $y=\frac{1}{3}(x+1)^2-6=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{17}{3}$
따라서 $b=\frac{2}{3}$, $c=-\frac{17}{3}$이므로
$\frac{b+c}{a}=\left\{\frac{2}{3}+\left(-\frac{17}{3}\right)\right\}\div\frac{1}{3}=-15$

15

이차함수 $y=-3x^2+6ax+12a-1$의 최댓값을 M이라고 할 때, M의 최솟값은? (단, a는 상수이다.)

✓① -13　② -11　③ 3
④ 11　⑤ 13

$y=-3x^2+6ax+12a-1$
$=-3(x-a)^2+3a^2+12a-1$
이 이차함수의 최댓값이 $3a^2+12a-1$이므로
$M=3a^2+12a-1$
$=3(a+2)^2-13$
따라서 M의 최솟값은 -13이다.

개념 5 이차함수의 활용

16 서술형

합이 16인 두 수 x, y에 대하여 x^2+y^2의 최솟값을 구하시오. 128

$x+y=16$이므로 $y=16-x$ ······ 30 %
$\therefore x^2+y^2=x^2+(16-x)^2$
$=2x^2-32x+256$
$=2(x-8)^2+128$
따라서 x^2+y^2의 최솟값은 128이다. ······ 70 %

17

밑변의 길이가 6 cm, 높이가 10 cm인 삼각형의 밑변의 길이를 x cm만큼 늘이고, 높이를 x cm만큼 줄여서 새로운 삼각형을 만들었다. 새로운 삼각형의 넓이의 최댓값은?

① 25 cm²　② 28 cm²　✓③ 32 cm²
④ 35 cm²　⑤ 40 cm²

새로운 삼각형의 넓이를 y cm²라고 하면
$y=\frac{1}{2}(6+x)(10-x)$
$=-\frac{1}{2}(x^2-4x-60)$
$=-\frac{1}{2}(x-2)^2+32$
따라서 새로운 삼각형의 넓이의 최댓값은 32 cm²이다.

18

평지에서 골프 선수가 공을 쳤을 때, t초 후의 지면에서 공까지의 높이를 h m라고 하면 t와 h 사이에 $h=12t-t^2$인 관계가 성립한다. 이 골프공이 최고 높이에 도달할 때까지 걸리는 시간은 몇 초인지 구하시오. 6초

$h=12t-t^2$
$=-(t-6)^2+36$
따라서 골프공의 높이는 $t=6$일 때 최댓값 36을 갖으므로 골프공이 최고 높이에 도달할 때까지 걸리는 시간은 6초이다.

01

10 미만의 자연수 중 서로 다른 두 수를 골랐을 때, 최대공약수를 a, 최소공배수를 b라고 하자. 이차함수 $f(x)=ax^2-bx+54$에 대하여 $f(3)=f(9)=0$일 때, 두 수의 합은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ✓⑤ 14

$f(3)=0$이므로 $0=9a-3b+54$ $\quad\therefore 3a-b=-18$ …… ㉠
$f(9)=0$이므로 $0=81a-9b+54$ $\quad\therefore 9a-b=-6$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=24$
최대공약수가 2이고 최소공배수가 $24=2^3\times3$인 두 수를 P, Q라고 하면
$P=2\times p$, $Q=2\times q$ (p, q는 서로소)
이때 $PQ=2\times p\times2\times q=4pq=48$이므로 $pq=12=2^2\times3$
p, q는 서로소이므로 $p=3$, $q=4$ 또는 $p=4$, $q=3$이다.
$\therefore P=6$, $Q=8$ 또는 $P=8$, $Q=6$
따라서 두 수의 합은 $6+8=14$

02

$f(x^2)=f(x)f(-x)$를 만족시키는 이차함수 $f(x)$의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
✓④ 4 ⑤ 5

$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$라고 하면
$f(x)f(-x)=(ax^2+bx+c)(ax^2-bx+c)=a^2x^4+(2ac-b^2)x^2+c^2$
이때 $f(x^2)=f(x)f(-x)$이므로 $a=a^2$, $b=2ac-b^2$, $c=c^2$
$a=a^2$에서 $a=1$ ($\because a\neq0$), $c=c^2$에서 $c=0$ 또는 $c=1$
(ⅰ) $c=0$일 때, $b=2ac-b^2$에서
$b=-1$ 또는 $b=0$
(ⅱ) $c=1$일 때, $b=2ac-b^2$에서
$b=-2$ 또는 $b=1$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 이차함수 $f(x)$의 개수는 4이다.

a	b	c	$f(x)$
1	-1	0	x^2-x
1	0	0	x^2
1	-2	1	x^2-2x+1
1	1	1	x^2+x+1

03

이차항의 계수가 2인 두 이차함수 $f(x)=2x^2+ax+b$와 $g(x)=2x^2+px+q$가 다음 조건을 만족시킬 때, $ab-pq$의 값은? (단, a, b, p, q는 상수이다.)

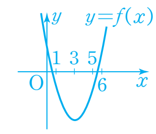
> (가) $f(2)=-3$이고, $g(3)=22$이다.
> (나) $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 서로 y축에 대하여 대칭이다.

① 24 ② 26 ③ 28
✓④ 30 ⑤ 32

조건 (가)에서 $f(2)=-3$이므로
$f(2)=8+2a+b=-3$ $\quad\therefore 2a+b=-11$ …… ㉠
$g(3)=22$이므로
$g(3)=18+3p+q=22$ $\quad\therefore 3p+q=4$ …… ㉡
조건 (나)에 의하여 $f(-x)=g(x)$이므로
$f(-x)=2(-x)^2+a(-x)+b=2x^2+px+q$ $\quad\therefore a=-p$, $b=q$ …… ㉢
이를 ㉠에 대입하면 $-2p+q=-11$ …… ㉣
㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $p=3$, $q=-5$
따라서 $a=-3$, $b=-5$이므로 $ab-pq=-3\times(-5)-3\times(-5)=30$

04

$f(x)=x^2-6x+a$에서 $f(n)<0$을 만족시키는 자연수 n의 개수가 5가 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오. 10



$f(n)=n^2-6n+a<0$을 만족시키는 자연수가 5개가 되려면 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0과 1 사이, 5와 6 사이에 있어야 한다.
즉, $f(0)>0$, $f(1)<0$이고, $f(5)<0$, $f(6)>0$이어야 하므로
$a>0$, $a-5<0$
$\therefore 0<a<5$
따라서 $f(n)<0$을 만족시키는 자연수 n의 개수가 5가 되도록 하는 모든 정수 a의 값은 1, 2, 3, 4이므로 그 합은
$1+2+3+4=10$

05 출제 주의

x에 대한 이차함수 $y=x^2-4kx+4k^2-k-6$의 그래프의 꼭짓점이 제3사분면 위에 있을 때, 다음 중 실수 k의 값이 될 수 없는 것은?

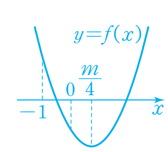
✓① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

$y=x^2-4kx+4k^2-k-6=(x-2k)^2-k-6$
이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2k, -k-6)$
점 $(2k, -k-6)$이 제3사분면 위에 있으므로
$2k<0$, $-k-6<0$
$\therefore k<0$, $k>-6$
따라서 $-6<k<0$

06

실수 m에 대하여 이차함수 $f(x)=2x^2-mx+\frac{3}{4}m-3$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표가 α, β일 때, $-1<\alpha<0$이다. m의 값의 범위가 $a<m<b$일 때, $a+b$의 값은? (단, $m>1$)

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{11}{7}$ ③ 3
④ $\frac{32}{7}$ ✓⑤ 5

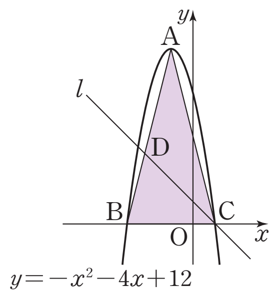


그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{m}{4}>\frac{1}{4}>0$
$f(-1)>0$, $f(0)<0$이어야 하므로
$f(-1)=2+m+\frac{3}{4}m-3>0$에서
$\frac{7}{4}m>1$ $\quad\therefore m>\frac{4}{7}$
$f(0)=\frac{3}{4}m-3<0$에서
$\frac{3}{4}m<3$ $\quad\therefore m<4$
따라서 $1<m<4$이므로 $a=1$, $b=4$
$\therefore a+b=1+4=5$

Lv. 2 사고를 확장하는 실전 문제

07 출제 주의 서술형

오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2-4x+12$의 그래프의 꼭짓점을 A, 그래프와 x축과의 교점을 각각 B, C라고 하자. 점 C를 지나는 직선 l이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분할 때, 직선 l과 선분 AB의 교점 D의 좌표를 구하시오. $(-4,\ 8)$



(단, 점 B의 x좌표가 점 C의 x좌표보다 작다.)

$y=-x^2-4x+12=-(x+2)^2+16$

이 그래프의 꼭짓점 A의 좌표는 $(-2,\ 16)$ ······ 20 %

또, 그래프와 x축과의 교점의 x좌표는 $-x^2-4x+12=0$에서

$(x+6)(x-2)=0 \quad \therefore x=-6$ 또는 $x=2$

$\therefore \mathrm{B}(-6,\ 0),\ \mathrm{C}(2,\ 0)$ ······ 30 %

$\triangle\mathrm{ABC}=64$이고 직선 l이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하므로

$\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times64=32$ ······ 20 %

점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 $\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\times8\times b=4b$이므로

$4b=32 \quad \therefore b=8$

$\therefore \mathrm{D}(a,\ 8)$

한편, 직선 AB의 방정식은 $y=4x+24$이고 점 $\mathrm{D}(a,\ 8)$이 이 직선 위에 있으므로

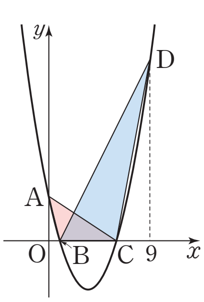
$8=4a+24,\ 4a=-16$

$\therefore a=-4$

$\therefore \mathrm{D}(-4,\ 8)$ ······ 30 %

08 출제 주의

오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프 위의 네 점 A, B, C, D에 대하여 점 A는 y축 위에 있고 $\mathrm{B}(1,\ 0)$, $\mathrm{C}(6,\ 0)$이며 점 D의 x좌표는 9이다. 삼각형 ABC의 넓이가 10일 때, 삼각형 BCD의 넓이를 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) 40



이차함수의 식은 $y=a(x-1)(x-6)$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 10이므로

$\frac{1}{2}\times5\times6a=10,\ 15a=10$

$\therefore a=\frac{2}{3}$

따라서 $y=\frac{2}{3}(x-1)(x-6)$이고 $x=9$일 때 $y=16$이므로 점 D의 좌표는 $(9,\ 16)$

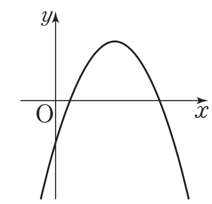
$\therefore \triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\times5\times16=40$

09

오른쪽 그림은 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프이다. 이때

$|f(-1)|-\sqrt{(c-b)^2}+\sqrt{(1-a)^2}$

을 간단히 하면?



✓① -1　② $-1+a$　③ $-1-a$

④ $-a-2c+2b$　⑤ $a+2c-2b$

$a<0,\ b>0,\ c<0$

따라서 $f(-1)=a-b+c<0$이고 $c-b<0,\ 1-a>0$이므로

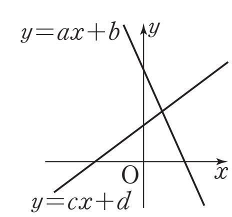
$|f(-1)|-\sqrt{(c-b)^2}-\sqrt{(1-a)^2}=|a-b+c|-|c-b|-|1-a|$

$=-(a-b+c)-\{-(c-b)\}-(1-a)$

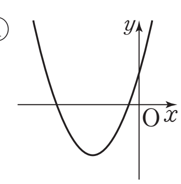
$=-1$

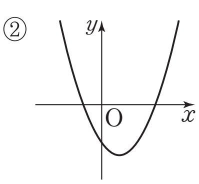
10

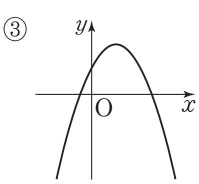
오른쪽 그림은 두 일차함수 $y=ax+b$, $y=cx+d$의 그래프이다. 다음 중 이차함수 $y=(ax+b)(cx+d)$의 그래프로 알맞은 것은?

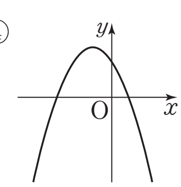


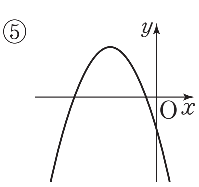
(단, a, b, c, d는 상수이다.)

①


②


③


✓④


⑤


$a<0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$

따라서 $y=(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$에서 $ac<0$이므로 이 이차함수의 그래프는 위로 볼록한 포물선이다.

이때 $y=(ax+b)(cx+d)$에서 $y=0$을 대입하면 $x=-\frac{b}{a}$ 또는 $x=-\frac{d}{c}$

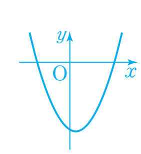
따라서 이차함수 $y=(ax+b)(cx+d)$의 x절편이 $-\frac{b}{a}>0,\ -\frac{d}{c}<0$이므로 구하는 이차함수의 그래프는 ④이다.

11

이차항의 계수가 a인 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(4,\ -48)$일 때, 이 그래프가 모든 사분면을 지나도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오. 2

이차함수의 식은 $y=a(x-4)^2-48=ax^2-8ax+16a-48$

꼭짓점이 제4사분면에 있으므로 이 그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 아래로 볼록해야 하므로 $a>0$ ······ ㉠

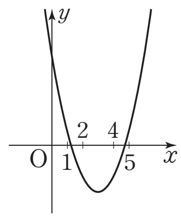
또, y축과의 교점이 x축의 아래쪽에 있어야 하므로

$16a-48<0,\ 16a<48 \quad \therefore a<3$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $0<a<3$이므로 정수 a는 1, 2의 2개이다.

12 서술형

축의 방정식이 $\frac{5}{2}$와 $\frac{7}{2}$ 사이에 존재하는 이차함수 $y=ax^2-bx+2c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. a, b, c가 한 자리의 자연수일 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) 10



$y=ax^2-bx+2c$의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{b}{2a}$이고 $\frac{5}{2}<\frac{b}{2a}<\frac{7}{2}$이므로

$5<\frac{b}{a}<7$

이때 a, b가 한 자리의 자연수이므로 $5a<b<7a$ …… ㉠

㉠을 만족시키는 a, b의 값은 $a=1$, $b=6$이다.

$\therefore y=x^2-6x+2c=(x-3)^2+2c-9$ ······ 50 %

또, 이 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 꼭짓점의 y좌표가 음수이어야 한다.

즉, $2c-9<0$이므로 $c<\frac{9}{2}$

이때 $f(x)=x^2-6x+2c$라고 하면 $f(1)>0$이므로

$1-6+2c>0$, $2c>5$ $\quad\therefore c>\frac{5}{2}$

$f(2)<0$이므로 $4-12+2c<0$, $2c<8$ $\quad\therefore c<4$

$f(4)<0$이므로 $16-24+2c<0$, $2c<8$ $\quad\therefore c<4$

$f(5)>0$이므로 $25-30+2c>0$, $2c>5$ $\quad\therefore c>\frac{5}{2}$

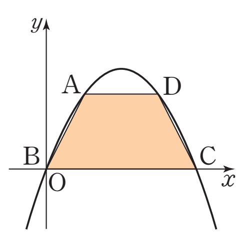
즉, $\frac{5}{2}<c<4$이고 c는 한 자리의 자연수이므로 $c=3$ ······ 40 %

$\therefore a+b+c=1+6+3=10$ ······ 10 %

13

오른쪽 그림과 같이 두 상수 a, b에 대하여 이차함수 $f(x)=ax^2+bx$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(p,\ q)$, D와 x축과의 두 교점 B, C를 꼭짓점으로 하는 사다리꼴 ABCD가 있다.

$\overline{\mathrm{BC}}=2\overline{\mathrm{AD}}$이고 사다리꼴 ABCD의 넓이가 24일 때, $f(7)$의 값은? (단, $1<p<q$이고, p, q는 자연수이다.)



✓① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3

④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

이차함수 $y=ax^2+bx$의 그래프는 직선 $x=2p$에 대하여 대칭이다.

또, $\overline{\mathrm{BC}}=2\overline{\mathrm{AD}}=4p$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=2p$

사다리꼴 ABCD의 넓이가 24이므로

$24=\frac{1}{2}(2p+4p)q$, $24=3pq$

$\therefore pq=8$

이때 $1<p<q$이고, p, q는 자연수이므로 $p=2$, $q=4$

점 C의 좌표는 $(4p,\ 0)$, 즉 $(8,\ 0)$이므로 $f(x)=ax(x-8)$

이차함수 $f(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$를 지나므로

$4=-12a$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{3}$

따라서 $y=-\frac{1}{3}x(x-8)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{8}{3}x$이므로 $b=\frac{8}{3}$

$\therefore f(7)=-\frac{1}{3}\times7^2+\frac{8}{3}\times7=\frac{7}{3}$

14

이차함수 $y=x^2+ax+3$의 그래프가 직선 $y=x-5$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위가 $2<x<b$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값은? (단, $b>2$)

① -10 ✓② -20 ③ -30

④ -40 ⑤ -50

이차함수 $y=x^2+ax+3$의 그래프와 직선 $y=x-5$의 그래프가 두 점에서 만나고 교점의 x좌표가 2 또는 b이다.

따라서 $x^2+ax+3=x-5$, 즉 $x^2+(a-1)x+8=0$의 두 근이 2, b이므로

$4+2(a-1)+8=0$, $2a=-10$

$\therefore a=-5$

따라서 $x^2-6x+8=0$이므로

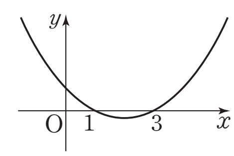
$(x-2)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=4$

$\therefore b=4$ ($\because b>2$)

$\therefore ab=-5\times4=-20$

15

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+ab+1$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $f(2)$의 값은?



① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$

✓③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$

⑤ $\frac{1}{2}$

이차함수의 식은

$f(x)=a(x-1)(x-3)$

$=ax^2-4ax+3a$

따라서 $b=-4a$, $ab+1=3a$이므로

$a\times(-4a)+1=3a$, $4a^2+3a-1=0$

$(a+1)(4a-1)=0$ $\quad\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{4}$

이때 $a>0$이므로 $a=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore b=-1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(x-1)(x-3)$이므로

$f(2)=\frac{1}{4}\times1\times(-1)=-\frac{1}{4}$

16

이차함수 $y=x^2-5x+4$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 y축에서 출발하여 x축과 만나는 한 점을 지나 다시 x축과 만나는 다른 한 점까지 움직일 때, $5a+b+1$의 최댓값은?

✓① 21 ② 23 ③ 25

④ 27 ⑤ 29

$x^2-5x+4=0$에서

$(x-1)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=4$

또, 이차함수 $y=x^2-5x+4$의 그래프와 y축과의 교점의 y좌표가 4이므로 점 P는 점 $(0,\ 4)$에서 출발하여 점 $(1,\ 0)$을 지나 점 $(4,\ 0)$까지 움직인다.

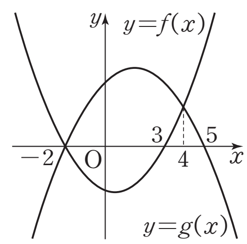
점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 $y=x^2-5x+4$의 그래프 위의 점이므로 $b=a^2-5a+4$

즉, $5a+b+1=5a+(a^2-5a+4)+1=a^2+5$

이때 $0\le a\le4$이므로 $5a+b+1$의 최댓값은 $a=4$일 때 $16+5=21$이다.

17

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



〈 보기 〉

ㄱ. $f(0)>g(0)$

ㄴ. $g(x)\geq g\left(\frac{3}{2}\right)$

ㄷ. $f(4)-f(-2)=g(-2)+g(4)$

ㄹ. 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 모든 해의 합은 2이다.

① ㄷ　② ㄱ, ㄹ　③ ㄴ, ㄷ
√④ ㄷ, ㄹ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄹ

ㄱ. $f(0)<0$, $g(0)>0$이므로 $f(0)<g(0)$
ㄴ. $y=g(x)$의 그래프는 위로 볼록하고 축의 방정식은 $x=\frac{-2+5}{2}=\frac{3}{2}$
따라서 $y=g(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 최댓값을 가지므로 $g(x)\leq g\left(\frac{3}{2}\right)$
ㄷ. $f(4)=g(4)$이고 $f(-2)=g(-2)=0$이므로 $f(4)-f(-2)=g(-2)+g(4)$
ㄹ. $f(x)-g(x)=0$, 즉 $f(x)=g(x)$를 만족시키는 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=4$
따라서 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 모든 해의 합은
$-2+4=2$

18

$2x+y=-3$을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 $2x^2+y^2$의 최솟값은?

$y=-2x-3$

① 5　② 4　√③ 3
④ 2　⑤ 1

$2x^2+y^2=2x^2+(-2x-3)^2$
$=2x^2+4x^2+12x+9$
$=6x^2+12x+9$
$=6(x+1)^2+3$
따라서 $2x^2+y^2$은 $x=-1$일 때 최솟값 3을 갖는다.

19

이차함수 $y=x^2+(a-4)x-1$의 그래프와 x축과의 두 교점 사이의 거리가 최소일 때, 실수 a의 값은?

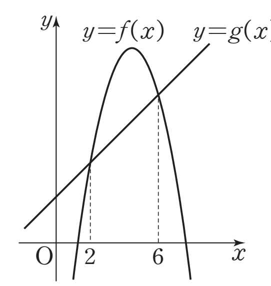
① 1　② 2　③ 3
√④ 4　⑤ 5

이차함수 $y=x^2+(a-4)x-1$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표를 α, β라고 하면
$y=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$
이므로 $\alpha+\beta=-a+4$, $\alpha\beta=-1$
이차함수 $y=x^2+(a-4)x-1$의 그래프와 x축과의 두 교점 사이의 거리는 $|\alpha-\beta|$이므로 $|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{(-a+4)^2+4}$
따라서 $|\alpha-\beta|$는 최솟값 $\sqrt{4}=2$를 갖고, 그때의 실수 a의 값은 4이다.

20 서술형

오른쪽 그림과 같이 이차함수 $f(x)=-x^2+ax+b$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표가 2, 6이다. $f(x)-g(x)$의 최댓값을 구하시오. 4

(단, a, b는 상수이다.)



두 함수 $f(x)=-x^2+ax+b$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표가 2, 6이므로 2, 6은 방정식 $f(x)=g(x)$의 두 근이다. ······ 30 %
이때 $f(x)-g(x)$의 이차항의 계수가 -1이므로
$f(x)-g(x)=-(x-2)(x-6)$ ······ 40 %
$=-x^2+8x-12$
$=-(x-4)^2+4$
따라서 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 4를 갖는다. ······ 30 %

21

일차함수 $y=-2x-3$의 그래프 위의 점 (p, q)에 대하여 점 $(p+q, pq)$가 나타내는 함수의 그래프의 최댓값을 구하시오. $\frac{9}{8}$

점 (p, q)가 일차함수 $y=-2x-3$의 그래프 위의 점이므로
$q=-2p-3$ ······ ㉠
$\therefore p+q=p+(-2p-3)=-p-3$,
$pq=p(-2p-3)=-2p^2-3p$
즉, 점 $(p+q, pq)$가 나타내는 함수의 그래프 위의 점 (x, y)에 대하여
$x=-p-3$　$\therefore p=-x-3$ ······ ㉡
$y=-2p^2-3p$ ······ ㉢
㉡을 ㉢에 대입하면
$y=-2(-x-3)^2-3(-x-3)=-2x^2-9x-9=-2\left(x+\frac{9}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$
따라서 $x=-\frac{9}{4}$일 때 최댓값 $\frac{9}{8}$를 갖는다.

22

두 상수 a, b에 대하여 $-5\le a\le -1$, $1\le b\le 8$이고 두 이차함수 $f(x)=x^2+ax$, $g(x)=x^2+bx$의 그래프와 동시에 접하는 직선의 기울기의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ 1

✓④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

이차함수 $f(x)=x^2+ax$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 접하려면 방정식
$x^2+ax=mx+n$, 즉 $x^2+(a-m)x-n=0$이 중근을 가져야 하므로
$(a-m)^2+4n=0$ …… ㉠
마찬가지로 이차함수 $g(x)=x^2+bx$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 접하려면 방정식
$x^2+bx=mx+n$, 즉 $x^2+(b-m)x-n=0$이 중근을 가져야 하므로
$(b-m)^2+4n=0$ …… ㉡
㉠-㉡을 하면 $(a-m)^2-(b-m)^2=0$, $a^2-b^2-2(a-b)m=0$
$(a-b)(a+b-2m)=0$　$\therefore a-b=0$ 또는 $a+b-2m=0$
이때 $a\ne b$이므로 $a+b-2m=0$　$\therefore m=\frac{a+b}{2}$
$-5\le a\le -1$, $1\le b\le 8$이므로 $-4\le a+b\le 7$　$\therefore -2\le m\le \frac{7}{2}$
따라서 직선의 기울기의 최댓값은 $\frac{7}{2}$, 최솟값은 -2이므로 그 합은 $\frac{7}{2}+(-2)=\frac{3}{2}$

23 서술형

두 상수 p, q에 대하여 이차함수
$f(x)=(x-p)^2-4(x-p)+q$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다. 함수 $f(x)$의 최솟값이 8일 때, $p+q$의 값을 구하시오. 12

$f(x)=(x-p)^2-4(x-p)+q$
$=x^2-2px+p^2-4x+4p+q$
$=\{x-(p+2)\}^2+q-4$
이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로
$p+2=2$　$\therefore p=0$ ………… 40 %
즉, $f(x)=(x-2)^2+q-4$이고 $f(x)$의 최솟값이 8이므로
$q-4=8$　$\therefore q=12$ ………… 40 %
$\therefore p+q=0+12=12$ ………… 20 %

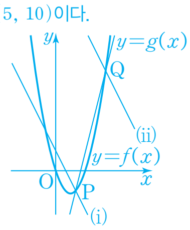
24

이차함수 $f(x)=x^2-3x$의 그래프와 일차함수 $g(x)=4x-10$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q라고 할 때, 함수 $y=-2x+a$의 그래프가 선분 PQ와 한 점에서 만난다고 한다. 이때 상수 a의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 18　② 20　✓③ 22

④ 24　⑤ 28

$f(x)=g(x)$에서
$x^2-3x=4x-10$, $x^2-7x+10=0$, $(x-2)(x-5)=0$　$\therefore x=2$ 또는 $x=5$
따라서 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 두 교점의 좌표는 $(2, -2)$, $(5, 10)$이다.
(ⅰ) $y=-2x+a$의 그래프가 점 P$(2, -2)$를 지날 때
$-2=(-2)\times 2+a$　$\therefore a=2$
(ⅱ) $y=-2x+a$의 그래프가 점 Q$(5, 10)$을 지날 때
$10=(-2)\times 5+a$　$\therefore a=20$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $2\le a\le 20$일 때 함수 $y=-2x+a$의 그래프가 선분 PQ와 한 점에서 만나므로 a의 최댓값은 20, 최솟값은 2이고 그 합은
$20+2=22$



25 출제 주의

이차함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값이 4이고, 이차함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 최댓값이 -5이다.
$f(x)-g(x)=3x^2-2x+12$일 때, $f(2)+g(-2)$의 값은?

① -6　✓② 0　③ 6

④ 12　⑤ 18

이차함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값이 4이므로 $f(x)=a(x-1)^2+4$ $(a>0)$
$g(x)$는 $x=-1$에서 최댓값이 -5이므로 $g(x)=b(x+1)^2-5$ $(b<0)$
라고 하면
$f(x)-g(x)=a(x-1)^2+4-\{b(x+1)^2-5\}$
$=ax^2-2ax+a+4-(bx^2+2bx+b-5)$
$=(a-b)x^2-2(a+b)x+a-b+9$
이므로
$3=a-b$, $-2=-2(a+b)$, $12=a-b+9$
즉, $a-b=3$, $a+b=1$이므로 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$
따라서 $f(x)=2(x-1)^2+4$, $g(x)=-(x+1)^2-5$이므로
$f(2)+g(-2)=6+(-6)=0$

26

이차함수 $y=ax^2+bx+c$는 $x=1$에서 최댓값이 8이고, 그래프는 x축과 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B 사이의 거리가 4일 때, $a-b-c$의 값은?

(단, a, b, c는 상수이다.)

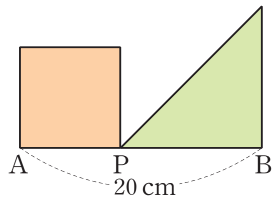
① -20　✓② -12　③ 0

④ 8　⑤ 12

이차함수의 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고 x축과 두 점 $(-1, 0)$, $(3, 0)$에서 만난다.
따라서 $y=a(x+1)(x-3)$이고 이 이차함수의 그래프가 점 $(1, 8)$을 지나므로
$8=-4a$　$\therefore a=-2$
따라서 $y=-2(x+1)(x-3)=-2x^2+4x+6$이므로
$a=-2$, $b=4$, $c=6$
$\therefore a-b-c=-2-4-6=-12$

27 출제 주의

오른쪽 그림과 같이 길이가 20 cm인 선분 AB 위에 점 P를 잡아 선분 AP를 한 변으로 하는 정사각형과 선분 BP를 빗변이 아닌 한 변으로 하는 직각이등변삼각형을 만들려고 한다. 이때 두 도형의 넓이의 합이 최소가 되도록 하는 선분 AP의 길이는?



① $\frac{4}{3}$ cm ② $\frac{8}{3}$ cm ③ 4 cm

④ $\frac{16}{3}$ cm ✓⑤ $\frac{20}{3}$ cm

$\overline{AP}=x$ cm라고 하면 $\overline{BP}=(20-x)$ cm이고 두 도형의 넓이의 합을 y cm^{2}라고 하면

$y=x^2+\frac{1}{2}(20-x)^2$

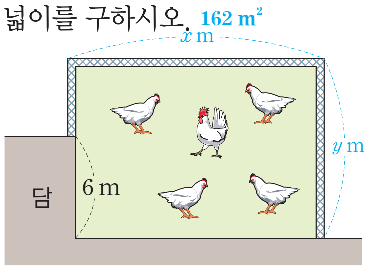
$=\frac{3}{2}x^2-20x+200$

$=\frac{3}{2}\left(x-\frac{20}{3}\right)^2+\frac{400}{3}$

따라서 두 도형의 넓이의 합의 최솟값은 $\frac{400}{3}$이고 그때의 x의 값은 $x=\frac{20}{3}$, 즉 $\overline{AP}=\frac{20}{3}$ cm이다.

28 서술형

길이가 30 m인 철망을 가지고 다음 그림과 같이 담에 붙은 직사각형 모양의 닭장을 만들려고 한다. 이때 만들어진 닭장의 최대 넓이를 구하시오. 162 m^2



담이 포함된 닭장의 세로 부분에 사용된 철망의 길이는 $(y-6)$ m이다.

이때 철망의 길이가 30 m이므로

$y+x+(y-6)=30$ ∴ $x=36-2y$ ······ 40 %

닭장의 넓이를 S m^{2}라고 하면

$S=xy$

$=(36-2y)y$

$=36y-2y^2$

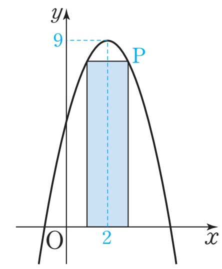
$=-2(y-9)^2+162$ ······ 50 %

따라서 닭장의 최대 넓이는 162 m^{2}이다. ······ 10 %

29

$y=-(x-2)^2+9$

오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+4x+5$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형에 내접하고 한 변이 x축과 겹치는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하시오. 20



이 그래프 위의 한 점을 $P(t,\ -t^2+4t+5)$ $(t>0)$라고 하면 직사각형은 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 가로의 길이는 $2(t-2)$, 세로의 길이는 $-t^2+4t+5$이다.

따라서 이 직사각형의 둘레의 길이는

$2\times\{2(t-2)+(-t^2+4t+5)\}=2(-t^2+6t+1)$

$=-2(t-3)^2+20$

이므로 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은 $t=3$일 때 20이다.

30

어느 편의점에서 한 개의 원가가 300원인 젤리를 매월 4500개씩 공급받아 350원에 모두 판매하였다. 판매 가격을 x원 올리면 월 판매 개수가 $30x$개 감소한다고 할 때, 한 달 판매 이익을 최대로 하는 젤리 한 개의 판매 가격은 얼마인가?

① 250원 ② 300원 ③ 350원

✓④ 400원 ⑤ 450원

젤리 한 개의 판매 가격을 x원 올리면 한 개에 대한 이익은 $(50+x)$원이고 젤리의 월 판매 개수는 $(4500-30x)$이다.

따라서 한 달 판매 이익을 y원이라고 하면

$y=(50+x)(4500-30x)$

$=225000+3000x-30x^2$

$=-30(x-50)^2+300000$

이므로 판매 가격을 50원 올릴 때, 즉 한 개의 판매 가격이 400원일 때 한 달 판매 이익이 최대가 된다.

대표 문제

소수인 두 자연수 p, q에 대하여 이차함수 $f(x)=x^2+px+q$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.

> (가) $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
> (나) 모든 정수 n에 대하여 $f(n)\geq 0$이다.

함께 풀기

STEP 1

주어진 조건과 구하해야 하는 것 확인하기

1. 주어진 조건: ① $f(x)=x^2+px+q$
   ② $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
   ③ 모든 정수 n에 대하여 $f(n)\geq 0$이다.
2. 구해야 하는 것: $f(-2)$의 값

STEP 2

조건 (가)를 만족시키는 p와 q의 관계식 구하기

이차함수 $f(x)=x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q$의 그래프는 아래로 볼록한 포물선이고,

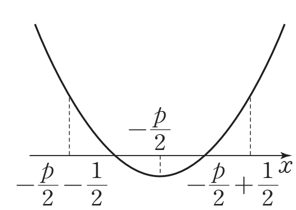
조건 (가)에서 그래프는 x축과 두 점에서 만나므로 꼭짓점의 y좌표가 음수이어야 한다.

즉, $-\frac{p^2}{4}+q<0$이므로 $p^2-4q>0$ $\quad\therefore p^2>4q$ …… ㉠

STEP 3

조건 (나)를 만족시키는 p와 q의 관계식 구하기

$f\left(-\frac{p}{2}\right)<0$이고 조건 (나)에서 $f(n)\geq 0$이므로 $-\frac{p}{2}$는 정수가 아니다.



따라서 p는 홀수이므로 $-\frac{p}{2}\pm\frac{1}{2}=$(정수)이고

$f\left(-\frac{p}{2}\pm\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{p}{2}\pm\frac{1}{2}+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q=\frac{1}{4}-\frac{p^2}{4}+q\geq 0$

$1-p^2+4q\geq 0 \quad \therefore 4q\geq p^2-1$ …… ㉡

STEP 4

p, q의 값 구하기

㉠, ㉡에서 $p^2-1\leq 4q<p^2$이고 p, q가 자연수이므로 $4q=p^2-1$이다.

이때 p는 홀수인 자연수이므로 $p=2k+1$ (k는 0 이상의 정수)이라고 하면

$4q=p^2-1=(2k+1)^2-1=4k^2+4k=4k(k+1)$

즉, $q=k(k+1)$이고 q가 소수이므로 $k=1$

2 이상의 연속한 자연수의 곱은 소수가 될 수 없다.

$\therefore q=1\times 2=2,\ p=2\times 1+1=3$

STEP 5

$f(-2)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=x^2+3x+2$이므로

$f(-2)=(-2)^2+3\times(-2)+2=0$

답 0

01 x축 위의 점 $(n, 0)$ $(n=1, 2, 3, \dots, 10)$에서 x축에 수직인 직선을 그었을 때 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 만나는 점을 P_n, 점 $(-k, 0)$ $(k=1, 2, 3, \dots, 10)$에서 x축에 수직인 직선을 그었을 때 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 만나는 점을 Q_k라고 하자. 이때 x축과 평행하지 않도록 두 점 P_n, Q_k를 선택하여 연결한 직선의 y절편이 될 수 있는 수는 모두 몇 개인지 구하시오. **36개**

이차함수 $y=x^2$의 그래프와 만나는 직선 위의 두 점을 $\mathrm{A}(\alpha, \alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta, \beta^2)$이라고 할 때, 이 두 점을 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=\alpha+\beta\ (\alpha\neq\beta)$

이때 직선의 방정식을 $y=(\alpha+\beta)x+p$라고 하면 이 직선이 점 $\mathrm{A}(\alpha, \alpha^2)$을 지나므로

$\alpha^2=(\alpha+\beta)\alpha+p \qquad \therefore p=-\alpha\beta$

$\therefore y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$

즉, 두 점 $\mathrm{P}_i(i, i^2)$, $\mathrm{Q}_j(-j, j^2)$ $(i, j=1, 2, 3, \dots, 10$이고 $i\neq j)$을 연결하여 만들어진 직선의 방정식은 $\alpha=i$, $\beta=-j$이므로

$y=\{i+(-j)\}x-i(-j) \qquad \therefore y=(i-j)x+ij$

이때 ij의 값은 오른쪽 표와 같다.

j \ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2		6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6		12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12		20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20		30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30		42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42		56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56		72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72		90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	

따라서 ij의 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 56, 60, 63, 70, 72, 80, 90이므로 y절편이 될 수 있는 수는 36개이다.

02 두 함수 $f(x)=2x^2$, $g(x)=x+3[x]$에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수를 p, 모든 실근의 합을 q라고 할 때, pq의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) **16**

⋮

$-1\le x<0$이면 $[x]=-1$이므로 $g(x)=x-3$

$0\le x<1$이면 $[x]=0$이므로 $g(x)=x$

$1\le x<2$이면 $[x]=1$이므로 $g(x)=x+3$

$2\le x<3$이면 $[x]=2$이므로 $g(x)=x+6$

$3\le x<4$이면 $[x]=3$이므로 $g(x)=x+9$

⋮

(i) $0\le x<1$일 때, $2x^2=x$에서

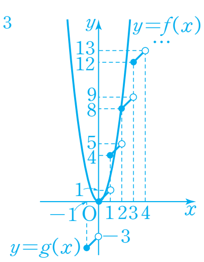
$2x^2-x=0$, $x(2x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

(ii) $1\le x<2$일 때, $2x^2=x+3$에서

$2x^2-x-3=0$, $(x+1)(2x-3)=0$

$\therefore x=\dfrac{3}{2}\ (\because 1\le x<2)$



(iii) $2\le x<3$일 때, $2x^2=x+6$에서

$2x^2-x-6=0$, $(2x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=2\ (\because 2\le x<3)$

(i)~(iii)에 의하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 0, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{2}$, 2의 4개이고 그 합은

$0+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}+2=4$

따라서 $p=4$, $q=4$이므로

$pq=4\times4=16$

03 실수 t에 대하여 $f(x)=x+t$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수

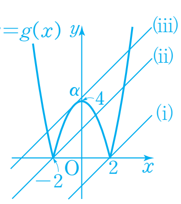
$g(x)=\begin{cases} x^2-4 & (x<-2,\ x>2) \\ 4-x^2 & (-2\le x\le 2) \end{cases}$ 의 그래프와 만나는 점의 개수를 $h(t)$라고 하자. 함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{t}{2}+2$가 만나는 점의 개수를 구하시오. **5**

$y=f(x)$의 그래프가 (i), (ii), (iii)인 경우를 기준으로 $h(t)$의 값이 변한다.

(i) $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프와 점 $(2, 0)$에서 만날 때, $0=2+t$에서 $t=-2$

(ii) $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프와 점 $(-2, 0)$에서 만날 때, $0=-2+t$에서 $t=2$

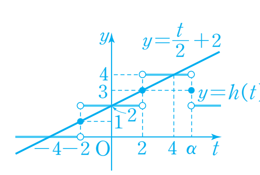
(iii) $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프와 접할 때, 두 그래프가 접할 때의 $y=f(x)$의 그래프의 y절편을 α라고 하면 $\alpha>4$이다.



(i)~(iii)에 의하여

$h(t)=\begin{cases} 0 & (t<-2) \\ 1 & (t=-2) \\ 2 & (-2<t<2 \text{ 또는 } t>\alpha) \\ 3 & (t=2 \text{ 또는 } t=\alpha) \\ 4 & (2<t<\alpha) \end{cases}$

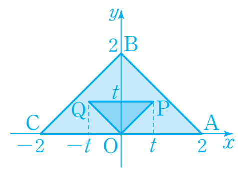
따라서 구하는 점의 개수는 5이다.

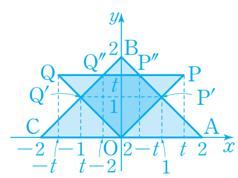


04 네 점 $O(0,\ 0)$, $A(2,\ 0)$, $B(0,\ 2)$, $C(-2,\ 0)$과 두 점 $P(t,\ t)$, $Q(-t,\ t)$에 대하여 삼각형 ABC와 삼각형 OPQ가 겹치는 부분의 넓이를 $f(t)$라고 할 때, 함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수를 구하시오. (단, t는 양수이다.) 2

(ⅰ) $0<t<1$일 때
$f(t)=\triangle OPQ=\frac{1}{2}\times 2t\times t=t^2$

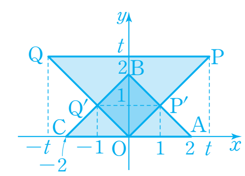
(ⅱ) $1\le t<2$일 때
$P'(1,\ 1)$, $Q'(-1,\ 1)$이라 하고, 두 점 $P(t,\ t)$와 $Q(-t,\ t)$를 이은 직선과 두 직선 AB, BC가 만나는 점을 각각 P'', Q''이라 하면
$P''(2-t,\ t)$, $Q''(t-2,\ t)$
$\therefore f(t)=\square OP'BQ'-\triangle P''BQ''$
$=\frac{1}{2}\times 2\times 2$
$-\frac{1}{2}\times 2(2-t)\times(2-t)$
$=2-(2-t)^2$
$=-t^2+4t-2$
$=-(t-2)^2+2$

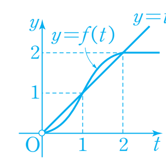




(ⅲ) $t\ge 2$일 때
두 점 P, Q의 y좌표가 점 B의 y좌표보다 크므로
$f(t)=\square OP'BQ'=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$

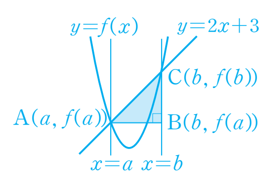
(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여
$$f(t)=\begin{cases} t^2 & (0<t<1) \\ -(t-2)^2+2 & (1\le t<2) \\ 2 & (t\ge 2)\end{cases}$$
이므로 양수 t에 대하여 함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수는 2이다.





05 이차함수 $f(x)=x^2-x+k$의 그래프와 직선 $y=2x+3$이 두 점에서 만날 때, 그 교점의 x좌표를 각각 a, b $(a<b)$라고 하자. 세 점 $A(a,\ f(a))$, $B(b,\ f(a))$, $C(b,\ f(b))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이가 16일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) 1

$\overline{AB}=b-a$,
$\overline{BC}=f(b)-f(a)$
$=(2b+3)-(2a+3)$
$=2(b-a)$
이므로
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times(b-a)\times 2(b-a)$
$=(b-a)^2$



이때 삼각형 ABC의 넓이가 16이므로
$(b-a)^2=16$ $\therefore b-a=4$ ($\because b-a>0$) …… ㉠
한편, 이차함수 $f(x)=x^2-x+k$의 그래프와 직선 $y=2x+3$의 두 교점의 x좌표가 a, b이므로 a, b는 이차방정식
$x^2-x+k=2x+3$, 즉 $x^2-3x+k-3=0$의 두 근이다.
두 근이 a, b이고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-a)(x-b)=0$ $\therefore x^2-(a+b)x+ab=0$
따라서 $-3=-(a+b)$, $k-3=ab$이므로 $a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{7}{2}$
따라서 $ab=-\frac{7}{4}=k-3$이므로 $k=\frac{5}{4}$
즉, $f(x)=x^2-x+\frac{5}{4}$이므로
$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}=1$

06 서로 다른 세 개의 주사위 A, B, C를 던져서 나온 눈의 수를 각각 a, b, c라고 하자. 이차함수 $y=ax^2+bx+c+3$의 그래프가 x축과 만날 확률을 구하시오. $\frac{11}{216}$

$y=ax^2+bx+c+3=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4a(c+3)}{4a}$
이 이차함수의 그래프가 x축과 만나려면 최솟값이 0보다 작거나 같아야 하므로
$-\frac{b^2-4a(c+3)}{4a}\le 0$, $b^2-4a(c+3)\ge 0$
$\therefore b^2\ge 4a(c+3)$
이때 a, b, c가 1부터 6까지의 자연수이므로 $4a(c+3)$의 최솟값은 16이다.
$\therefore b^2\ge 4a(c+3)\ge 16$

(ⅰ) $b=4$일 때, $16\le 4a(c+3)\le 16$
$a(c+3)=4$이므로 $a=1$, $c=1$
따라서 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 $(1,\ 4,\ 1)$의 1가지

(ⅱ) $b=5$일 때, $4\le a(c+3)\le\frac{25}{4}$
$a=1$이면 $4\le c+3\le\frac{25}{4}$ $\therefore 1\le c\le\frac{13}{4}$
즉, $a=1$, $c=1$ 또는 $a=1$, $c=2$ 또는 $a=1$, $c=3$
따라서 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 $(1,\ 5,\ 1)$, $(1,\ 5,\ 2)$, $(1,\ 5,\ 3)$의 3가지

(ⅲ) $b=6$일 때, $4\le a(c+3)\le 9$
$a=1$이면 $4\le c+3\le 9$ $\therefore 1\le c\le 6$
즉, $a=1$, $c=1$ 또는 $a=1$, $c=2$ 또는 $a=1$, $c=3$ 또는 $a=1$, $c=4$ 또는 $a=1$, $c=5$ 또는 $a=1$, $c=6$
$a=2$이면 $4\le 2(c+3)\le 9$, $2\le c+3\le\frac{9}{2}$ $\therefore -1\le c\le\frac{3}{2}$
즉, $a=2$, $c=1$
따라서 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 $(1,\ 6,\ 1)$, $(1,\ 6,\ 2)$, $(1,\ 6,\ 3)$, $(1,\ 6,\ 4)$, $(1,\ 6,\ 5)$, $(1,\ 6,\ 6)$, $(2,\ 6,\ 1)$의 7가지

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $1+3+7=11$이므로 구하는 확률은 $\frac{11}{216}$이다.

01

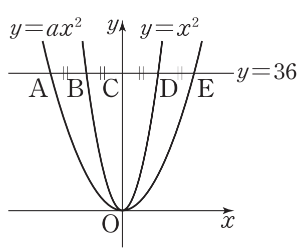
$y=(5a-a^2)x^2-3x+14x^2$이 x에 대한 이차함수일 때, 다음 중 상수 a의 값이 될 수 <u>없는</u> 것을 모두 고르면? (정답 2개) [4점]

① -7　✓② -2　③ 0
④ 2　✓⑤ 7

$y=(5a-a^2)x^2-3x+14x^2$
$=-(a^2-5a-14)x^2-3x$
$=-(a+2)(a-7)x^2-3x$
이 함수가 x에 대한 이차함수이려면 $-(a+2)(a-7)\neq 0$이어야 하므로
$a+2\neq 0$이고 $a-7\neq 0$　$\therefore a\neq -2$이고 $a\neq 7$

02

오른쪽 그림과 같이 두 이차함수 $y=x^2$, $y=ax^2$의 그래프가 직선 $y=36$과 만난다. $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$일 때, 상수 a의 값은? [4점]



① $\frac{5}{4}$　② 1　③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{1}{2}$　✓⑤ $\frac{1}{4}$

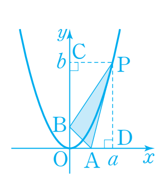
$y=x^2$에 $y=36$을 대입하면
$x^2=36$　$\therefore x=\pm 6$
$\therefore B(-6, 36), D(6, 36)$
$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=6$이므로 $A(-12, 36)$, $E(12, 36)$
$y=ax^2$의 그래프가 점 $A(-12, 36)$을 지나므로
$36=144a$　$\therefore a=\frac{1}{4}$

03

좌표평면 위에 두 점 $A(1, 0)$, $B(0, 1)$이 있다. 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위를 움직이는 점 $P(a, b)$에 대하여 삼각형 APB의 넓이가 $\frac{11}{2}$일 때, $\frac{b}{a}$의 값은? (단, $a>0$) [4점]

① 1　② 2　✓③ 3
④ 4　⑤ 5

점 $P(a, b)$는 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점이므로 $b=a^2$
삼각형 APB의 넓이를 S라고 하면



$S=\square ODPC-(\triangle OAB+\triangle BPC+\triangle ADP)$
$=ab-\left\{\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times a\times(b-1)+\frac{1}{2}\times(a-1)\times b\right\}$
$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a^2$
$S=\frac{11}{2}$이므로 $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a^2=\frac{11}{2}$, $(a+4)(a-3)=0$　$\therefore a=3\ (\because a>0)$
따라서 $b=3^2=9$이므로 $\frac{b}{a}=\frac{9}{3}=3$

04

이차함수 $y=(2a+1)x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 $a+5$만큼 평행이동하였더니 모든 x의 값에 대하여 y의 값이 음수가 되었다. 이때 정수 a의 최댓값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

✓① -6　② -5　③ -4
④ 4　⑤ 5

이차함수 $y=(2a+1)x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 $a+5$만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=(2a+1)x^2+a+5$
이때 모든 x의 값에 대하여 y의 값이 음수가 되어야 하므로
$2a+1<0$, $a+5<0$
$\therefore a<-\frac{1}{2}$, $a<-5$
따라서 $a<-5$이므로 정수 a의 최댓값은 -6이다.

05

이차함수 $y=a(x+4)^2-2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면 꼭짓점의 좌표가 $(-1, 2)$이고 점 $(-3, -6)$을 지난다. 이때 $a+p+q$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① -9　② -5　③ -1
✓④ 5　⑤ 9

이차함수 $y=a(x+4)^2-2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=a(x+4-p)^2-2+q$
이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-4+p, -2+q)$이므로
$-4+p=-1$, $-2+q=2$　$\therefore p=3, q=4$
따라서 이차함수 $y=a(x+1)^2+2$의 그래프가 점 $(-3, -6)$을 지나므로
$-6=4a+2$, $4a=-8$　$\therefore a=-2$
$\therefore a+p+q=-2+3+4=5$

06

$f(x)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

이차함수 $y=2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 그래프의 식을 $y=f(x)$라 하고, 이차함수 $y=2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 그래프의 식을 $y=g(x)$라고 할 때,

$y(x)=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

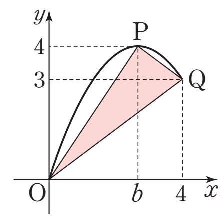
$\frac{g(1)\times g(2)\times\cdots\times g(12)}{f(1)\times f(2)\times\cdots\times f(12)}$의 값은? [4점]

① 70　✓② 73　③ 76
④ 79　⑤ 82

함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로
$f(1)=g(0)$, $f(2)=g(1)$, $f(3)=g(2)$, $\cdots$, $f(12)=g(11)$
$\therefore \frac{g(1)\times g(2)\times\cdots\times g(12)}{f(1)\times f(2)\times\cdots\times f(12)}=\frac{g(1)\times g(2)\times\cdots\times g(12)}{g(0)\times g(1)\times g(2)\times\cdots\times g(11)}=\frac{g(12)}{g(0)}$
이때 $g(0)=5$, $g(12)=365$이므로 $\frac{g(12)}{g(0)}=\frac{365}{5}=73$

07

오른쪽 그림은 이차함수의 그래프의 일부이다. 이 그래프의 꼭짓점 P의 좌표가 $(b,\ 4)$이고 점 Q의 좌표가 $(4,\ 3)$일 때, 삼각형 POQ의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



① 2　✓② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

이차함수의 식을 $y=a(x-b)^2+4$ (a는 상수)라고 하면 이 그래프가 두 점 $(0,\ 0)$, $(4,\ 3)$을 지나므로 $0=ab^2+4$, $ab^2=-4$

$\therefore a=-\dfrac{4}{b^2}$ …… ㉠

$3=a(4-b)^2+4$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$3=-\dfrac{4}{b^2}(4-b)^2+4$, $(3b-8)(b-8)=0$　$\therefore b=8$ ($\because b<4$)

$\triangle POQ=4\times4-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8}{3}\times4-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\times1-\dfrac{1}{2}\times4\times3=16-\dfrac{16}{3}-\dfrac{2}{3}-6=4$

08

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 x축과 두 점 $(-4,\ 0)$, $(2,\ 0)$에서 만나고 꼭짓점이 직선 $y=6$ 위에 있을 때, $a+p+q$의 값은? (단, a, p, q는 상수이다.) [4점]

① $\dfrac{11}{3}$　② 4　✓③ $\dfrac{13}{3}$
④ $\dfrac{14}{3}$　⑤ 5

그래프의 꼭짓점의 x좌표는 $\dfrac{-4+2}{2}=-1$

$\therefore p=-1$

또, 꼭짓점이 직선 $y=6$ 위에 있으므로 꼭짓점의 y좌표는 6이다.

$\therefore q=6$

이때 이차함수 $y=a(x+1)^2+6$의 그래프가 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

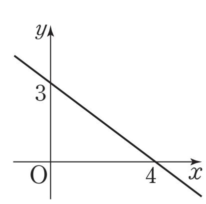
$0=9a+6$, $9a=-6$

$\therefore a=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore a+p+q=-\dfrac{2}{3}+(-1)+6=\dfrac{13}{3}$

09

일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 이차함수 $y=ax^2+bx-1$의 그래프의 축의 방정식은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]



① $x=-4$　② $x=-2$
③ $x=-\dfrac{3}{4}$　④ $x=\dfrac{3}{4}$
✓⑤ $x=2$

주어진 그래프가 두 점 $(4,\ 0)$, $(0,\ 3)$을 지나므로

$a=\dfrac{0-3}{4-0}=-\dfrac{3}{4}$, $b=3$

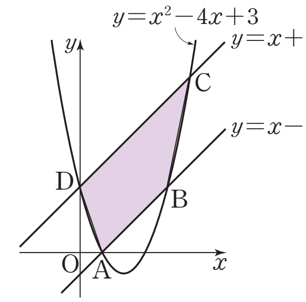
$\therefore y=-\dfrac{3}{4}x^2+3x-1$

$=-\dfrac{3}{4}(x-2)^2+2$

따라서 축의 방정식은 $x=2$이다.

10

오른쪽 그림은 이차함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프와 두 일차함수 $y=x-1$, $y=x+3$의 그래프의 교점을 연결하여 만든 사각형 ABCD이다. 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]



✓① 16　② 17　③ 18
④ 19　⑤ 20

$x^2-4x+3=x-1$에서

$x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$　$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

점 A가 x축 위에 있으므로 $A(1,\ 0)$, $B(4,\ 3)$

$x^2-4x+3=x+3$에서

$x^2-5x=0$, $x(x-5)=0$　$\therefore x=0$ 또는 $x=5$

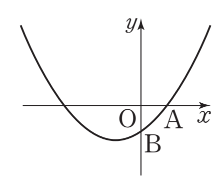
점 D는 y축 위에 있으므로 $D(0,\ 3)$, $C(5,\ 8)$

$\therefore \square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD=\dfrac{1}{2}\times4\times3+\dfrac{1}{2}\times4\times5=6+10=16$

11

오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(c\neq0)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라고 하자. $\overline{OA}=\overline{OB}$이고 $B(0,\ m)$일 때, ab의 최댓값은?

(단, O는 원점이고, a, b, c는 상수이다.) [4점]



① $-m$　② $-\dfrac{1}{2m}$　✓③ $-\dfrac{1}{4m}$
④ $\dfrac{1}{4m}$　⑤ $\dfrac{1}{2m}$

$a>0$, $b>0$

$m<0$에서 $\overline{OA}=\overline{OB}=-m$이므로 $A(-m,\ 0)$

또, 점 $B(0,\ m)$은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프 위의 점이므로 $c=m$

마찬가지로 $A(-m,\ 0)$도 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프 위의 점이므로

$am^2-bm+m=0$, $m(am-b+1)=0$, $am-b+1=0$　$\therefore b=am+1$

$\therefore ab=a(am+1)=ma^2+a=m\left(a+\dfrac{1}{2m}\right)^2-\dfrac{1}{4m}$

이때 $m<0$이므로 ab는 $a=-\dfrac{1}{2m}$일 때 최댓값 $-\dfrac{1}{4m}$을 갖는다.

12

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프가 x좌표가 3인 점에서 x축과 접할 때, 이차함수 $g(x)=bx^2+cx+6a$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점 $x=\alpha$, $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$에서 만난다. 이때 $\alpha\leq x\leq\beta$를 만족시키는 정수 x의 개수는?

(단, $a\neq0$) [4점]

① 1　② 2　✓③ 3
④ 4　⑤ 5

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ 0)$이다.

즉, $f(x)=a(x-3)^2=ax^2-6ax+9a$이므로 $b=-6a$, $c=9a$

또, $g(x)=bx^2+cx+6a=-6ax^2+9ax+6a$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$-6ax^2+9ax+6a=0$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=2$　$\therefore \alpha=-\dfrac{1}{2}$, $\beta=2$

따라서 $-\dfrac{1}{2}\leq x\leq2$를 만족시키는 정수 x는 0, 1, 2의 3개이다.

13

이차함수 $f(x)=ax^2+2bx+c$에서 $x\geq0$인 모든 x에 대하여 $f(x)>0$이라고 할 때, 다음 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보기 〉

ㄱ. $c>0$

ㄴ. $ab>0$

ㄷ. $b^2-ac<0$

✓① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

$f(x)=ax^2+2bx+c$가 $x\geq0$인 모든 x에 대하여 $f(x)>0$이므로 그래프는 아래로 볼록한 포물선이다.

$\therefore a>0$

ㄱ. $f(0)>0$이므로 $f(0)=c>0$

ㄴ, ㄷ. $f(x)=ax^2+2bx+c=a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2-ac}{a}$

(i) $-\frac{b}{a}>0$ 즉, $ab<0$일 때, $x\geq0$에서 최솟값은 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$이므로

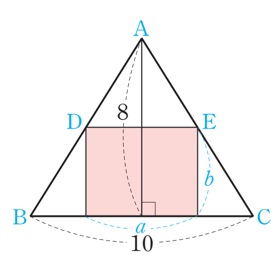
$f\left(-\frac{b}{a}\right)=-\frac{b^2-ac}{a}>0$에서 $b^2-ac<0$

(ii) $-\frac{b}{a}<0$, 즉 $ab>0$일 때, $x\geq0$에서 최솟값은 $f(0)$이므로 $f(0)=c>0$

(i), (ii)에 의하여 $ab<0$, $b^2-ac<0$ 또는 $ab>0$, $c>0$이므로 반드시 $ab>0$, $b^2-ac<0$이라고 할 수 없다.

14

오른쪽 그림과 같이 밑변의 길이가 10, 높이가 8인 이등변삼각형 모양의 땅에 직사각형 모양의 밭을 만들려고 한다. 이 밭의 최대 넓이는? [4점]



① 14　② 16　③ 18　✓④ 20　⑤ 24

$0<a<10$, $0<b<8$

두 삼각형 ABC, ADE에서 △ABC∽△ADE (AA 닮음)

즉, $10:a=8:(8-b)$이므로

$10(8-b)=8a$, $10b=-8a+80$

$\therefore b=-\frac{4}{5}a+8$

직사각형의 넓이를 S라고 하면

$S=ab$

$=a\left(-\frac{4}{5}a+8\right)$

$=-\frac{4}{5}a^2+8a$

$=-\frac{4}{5}(a-5)^2+20$

따라서 밭의 최대 넓이는 $a=5$일 때 20이다.

15

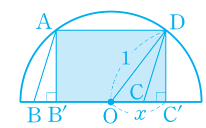
반지름의 길이가 1인 반원에 내접하는 평행사변형의 넓이의 최댓값은? (단, 한 변이 반원의 지름 위에 있는 경우에도 내접한다고 한다.) [6점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{4}$　✓④ 1　⑤ $\frac{3}{2}$

한 꼭짓점만 지름 위에 있는 반원에 내접하는 사각형은 평행사변형이 될 수 없다.

또, 한 변이 지름 위에 있는 평행사변형 ABCD의 넓이는 선분 BC를 선분 B′C′으로 옮겨서 만든 직사각형 AB′C′D의 넓이와 같다.

즉, 반지름의 길이가 1인 반원에 내접하는 평행사변형의 넓이의 최댓값은 직사각형의 넓이의 최댓값과 같다.



$\overline{OC'}=x$라고 하면 $\overline{B'C'}=2x$이고 삼각형 DOC′에서 $\overline{DC'}=\sqrt{1-x^2}$

$\therefore \square ABCD=\square AB'C'D=2x\sqrt{1-x^2}=2\sqrt{x^2(1-x^2)}$

$x^2=t$라고 하면 $2\sqrt{x^2(1-x^2)}=2\sqrt{t(1-t)}=2\sqrt{t-t^2}$

근호 안의 식을 $f(t)=t-t^2$이라고 하면 $f(t)$가 최대일 때 □ABCD의 넓이가 최대가 되므로

$f(t)=t-t^2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

따라서 $t=x^2=\frac{1}{2}$일 때 $f(t)$는 최댓값 $\frac{1}{4}$을 가지고 그때의 평행사변형의 넓이는

$2\sqrt{\frac{1}{4}}=2\times\frac{1}{2}=1$

16

이차함수 $y=\frac{1}{4}(x-3)^2-5$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 $y=\frac{1}{4}x^2-3x+7$의 그래프가 되었다. 이때 $m+n$의 값을 구하시오. [4점] 6

이차함수 $y=\frac{1}{4}(x-3)^2-5$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\frac{1}{4}(x-3-m)^2-5+n$
이때 $y=\frac{1}{4}x^2-3x+7=\frac{1}{4}(x-6)^2-2$이므로
$-3-m=-6$, $-5+n=-2$
따라서 $m=3$, $n=3$이므로
$m+n=3+3=6$

17

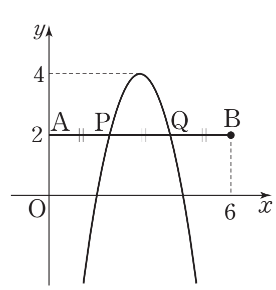
이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+bc$의 값을 구하시오. 4
(단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

(가) 이차함수 $y=2x^2$의 그래프를 평행이동하면 포개어진다.
(나) 축의 방정식은 $x=\frac{1}{2}$이다.
(다) 점 $(-1, 3)$을 지난다.

조건 (가)에 의하여 $a=2$
조건 (나)에 의하여 $y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+q$ (q는 상수)라고 하자.
조건 (다)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1, 3)$을 지나므로
$3=\frac{9}{2}+q$ $\quad\therefore q=-\frac{3}{2}$
$\therefore y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}=2x^2-2x-1$
따라서 $a=2$, $b=-2$, $c=-1$이므로
$a+bc=2+(-2)\times(-1)=4$

18

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(0, 2)$, $\mathrm{B}(6, 2)$가 있다. 꼭짓점의 y좌표가 4인 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(a<0)$의 그래프가 선분 AB와 두 점 P, Q에서 만나고 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QB}}$일 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [4점] -4



$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QB}}=2$ $\quad\therefore \mathrm{P}(2, 2)$, $\mathrm{Q}(4, 2)$
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 3이고 꼭짓점의 y좌표는 4이다.
따라서 $y=a(x-3)^2+4$이고 이 그래프가 점 $\mathrm{P}(2, 2)$를 지나므로
$2=a+4$ $\quad\therefore a=-2$
$\therefore y=-2(x-3)^2+4=-2x^2+12x-14$
따라서 $a=-2$, $b=12$, $c=-14$이므로
$a+b+c=-2+12+(-14)=-4$

19

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=f(2)=0$
(나) 이차방정식 $f(x)-6(x-2)=0$의 실근의 개수는 1이다.

$y=f(|x|)$의 그래프가 x축과 만나는 원점이 아닌 두 점 사이의 거리를 구하시오. [4점] 4

조건 (가)에 의하여 $f(x)=ax(x-2)$ (a는 상수)라고 하면 조건 (나)에 의하여 이차방정식 $ax(x-2)-6(x-2)=0$, 즉 $(ax-6)(x-2)=0$의 실근의 개수가 1이므로
$ax-6=0$의 근이 $x=2$이어야 한다.
$2a-6=0$에서
$2a=6$ $\quad\therefore a=3$
즉, $f(|x|)=3|x|(|x|-2)$이고 이 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는
$3|x|(|x|-2)=0$에서
$|x|=0$ 또는 $|x|-2=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
따라서 $y=f(|x|)$의 그래프가 x축과 만나는 원점이 아닌 점의 x좌표가 -2, 2이므로 두 점 사이의 거리는
$2-(-2)=4$

20

이차함수 $y=x^2-3x$의 그래프와 일차함수 $y=4x-10$의 그래프의 두 교점을 P, Q라고 하자. 일차함수 $y=2x+b$의 그래프가 선분 PQ와 만나도록 b의 값을 정할 때, b의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점] -6

$x^2-3x=4x-10$에서
$x^2-7x+10=0$, $(x-2)(x-5)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=5$
두 점 P, Q의 좌표는 $(2, -2)$, $(5, 10)$이다.
(ⅰ) $y=2x+b$의 그래프가 점 $(2, -2)$를 지날 때
$-2=2\times2+b$에서 $b=-6$
(ⅱ) $y=2x+b$의 그래프가 점 $(5, 10)$을 지날 때
$10=2\times5+b$에서 $b=0$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $-6\le b\le 0$이므로 b의 최댓값은 0, 최솟값은 -6이다.
따라서 b의 최댓값과 최솟값의 합은
$0+(-6)=-6$

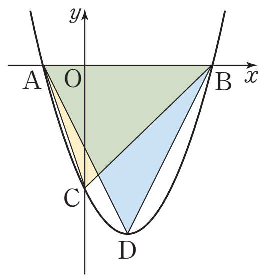
21

이차함수 $f(x)=2x^2-8ax+6a-1$의 최솟값을 $g(a)$라고 할 때, $g(a)$의 값이 최대가 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오. [4점] $\frac{3}{8}$

$f(x)=2x^2-8ax+6a-1$
$=2(x-2a)^2-8a^2+6a-1$
$f(x)$의 최솟값은 $x=2a$일 때 $g(a)=-8a^2+6a-1$이므로
$g(a)=-8a^2+6a-1$
$=-8\left(a-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{1}{8}$
따라서 $g(a)$는 최댓값 $\frac{1}{8}$을 갖고 그때의 상수 a의 값은 $\frac{3}{8}$이다.

22, 23번은 서술형입니다. 풀이 과정을 자세히 서술하시오.

22



오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2-2x-6$의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고 y축과 만나는 점을 C, 꼭짓점을 D라고 하자. 이때 △ACB : △ADB를 가장 간단한 자연수의 비로 나타내시오. [7점] 3 : 4

$y=\frac{1}{2}x^2-2x-6$에 $y=0$을 대입하면

$\frac{1}{2}x^2-2x-6=0$, $x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

$\therefore$ A$(-2, 0)$, B$(6, 0)$ ······ 2점

$y=\frac{1}{2}x^2-2x-6$에 $x=0$을 대입하면 $y=-6$

$\therefore$ C$(0, -6)$

$y=\frac{1}{2}x^2-2x-6$

$=\frac{1}{2}(x-2)^2-8$

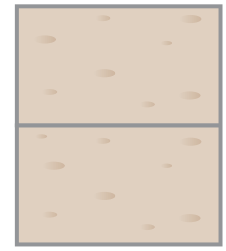
이므로 D$(2, -8)$ ······ 2점

△ACB와 △ADB는 밑변이 선분 AB로 같으므로

△ACB : △ADB $=|$(점 C의 y좌표)$|$: $|$(점 D의 y좌표)$|$

$=6:8=3:4$ ······ 3점

23



보경이네 반 학생들은 학교 체육관에 종이테이프를 사용하여 오른쪽 그림과 같이 서로 합동인 두 개의 직사각형 모양으로 된 피구장을 만들려고 한다. 사용할 수 있는 종이테이프의 전체 길이가 36 m일 때, 만들 수 있는 피구장의 최대 넓이를 구하시오. 54 m^2

(단, 종이테이프의 너비는 무시한다.) [7점]

피구장의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라고 하면 종이테이프는 가로 라인을 긋는 데 $3x$ m가 필요하고 세로 라인을 긋는 데 $2y$ m가 필요하므로

$3x+2y=36$, $2y=36-3x$

$\therefore y=\frac{1}{2}(36-3x)$ ······ 2점

$x>0$, $y>0$이므로

$\frac{1}{2}(36-3x)>0$, $36-3x>0$

$3x<36$ $\therefore x<12$

즉, $0<x<12$이고 피구장의 넓이를 $f(x)$라고 하면

$f(x)=xy$

$=x\times\frac{1}{2}(36-3x)$

$=\frac{1}{2}(-3x^2+36x)$ ······ 3점

$=-\frac{3}{2}(x-6)^2+54$

따라서 피구장의 최대 넓이는 54 m^{2}이다. ······ 2점

제곱근표 ①

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	1.000	1.005	1.010	1.015	1.020	1.025	1.030	1.034	1.039	1.044
1.1	1.049	1.054	1.058	1.063	1.068	1.072	1.077	1.082	1.086	1.091
1.2	1.095	1.100	1.105	1.109	1.114	1.118	1.122	1.127	1.131	1.136
1.3	1.140	1.145	1.149	1.153	1.158	1.162	1.166	1.170	1.175	1.179
1.4	1.183	1.187	1.192	1.196	1.200	1.204	1.208	1.212	1.217	1.221
1.5	1.225	1.229	1.233	1.237	1.241	1.245	1.249	1.253	1.257	1.261
1.6	1.265	1.269	1.273	1.277	1.281	1.285	1.288	1.292	1.296	1.300
1.7	1.304	1.308	1.311	1.315	1.319	1.323	1.327	1.330	1.334	1.338
1.8	1.342	1.345	1.349	1.353	1.356	1.360	1.364	1.367	1.371	1.375
1.9	1.378	1.382	1.386	1.389	1.393	1.396	1.400	1.404	1.407	1.411
2.0	1.414	1.418	1.421	1.425	1.428	1.432	1.435	1.439	1.442	1.446
2.1	1.449	1.453	1.456	1.459	1.463	1.466	1.470	1.473	1.476	1.480
2.2	1.483	1.487	1.490	1.493	1.497	1.500	1.503	1.507	1.510	1.513
2.3	1.517	1.520	1.523	1.526	1.530	1.533	1.536	1.539	1.543	1.546
2.4	1.549	1.552	1.556	1.559	1.562	1.565	1.568	1.572	1.575	1.578
2.5	1.581	1.584	1.587	1.591	1.594	1.597	1.600	1.603	1.606	1.609
2.6	1.612	1.616	1.619	1.622	1.625	1.628	1.631	1.634	1.637	1.640
2.7	1.643	1.646	1.649	1.652	1.655	1.658	1.661	1.664	1.667	1.670
2.8	1.673	1.676	1.679	1.682	1.685	1.688	1.691	1.694	1.697	1.700
2.9	1.703	1.706	1.709	1.712	1.715	1.718	1.720	1.723	1.726	1.729
3.0	1.732	1.735	1.738	1.741	1.744	1.746	1.749	1.752	1.755	1.758
3.1	1.761	1.764	1.766	1.769	1.772	1.775	1.778	1.780	1.783	1.786
3.2	1.789	1.792	1.794	1.797	1.800	1.803	1.806	1.808	1.811	1.814
3.3	1.817	1.819	1.822	1.825	1.828	1.830	1.833	1.836	1.838	1.841
3.4	1.844	1.847	1.849	1.852	1.855	1.857	1.860	1.863	1.865	1.868
3.5	1.871	1.873	1.876	1.879	1.881	1.884	1.887	1.889	1.892	1.895
3.6	1.897	1.900	1.903	1.905	1.908	1.910	1.913	1.916	1.918	1.921
3.7	1.924	1.926	1.929	1.931	1.934	1.936	1.939	1.942	1.944	1.947
3.8	1.949	1.952	1.954	1.957	1.960	1.962	1.965	1.967	1.970	1.972
3.9	1.975	1.977	1.980	1.982	1.985	1.987	1.990	1.992	1.995	1.997
4.0	2.000	2.002	2.005	2.007	2.010	2.012	2.015	2.017	2.020	2.022
4.1	2.025	2.027	2.030	2.032	2.035	2.037	2.040	2.042	2.045	2.047
4.2	2.049	2.052	2.054	2.057	2.059	2.062	2.064	2.066	2.069	2.071
4.3	2.074	2.076	2.078	2.081	2.083	2.086	2.088	2.090	2.093	2.095
4.4	2.098	2.100	2.102	2.105	2.107	2.110	2.112	2.114	2.117	2.119
4.5	2.121	2.124	2.126	2.128	2.131	2.133	2.135	2.138	2.140	2.142
4.6	2.145	2.147	2.149	2.152	2.154	2.156	2.159	2.161	2.163	2.166
4.7	2.168	2.170	2.173	2.175	2.177	2.179	2.182	2.184	2.186	2.189
4.8	2.191	2.193	2.195	2.198	2.200	2.202	2.205	2.207	2.209	2.211
4.9	2.214	2.216	2.218	2.220	2.223	2.225	2.227	2.229	2.232	2.234
5.0	2.236	2.238	2.241	2.243	2.245	2.247	2.249	2.252	2.254	2.256
5.1	2.258	2.261	2.263	2.265	2.267	2.269	2.272	2.274	2.276	2.278
5.2	2.280	2.283	2.285	2.287	2.289	2.291	2.293	2.296	2.298	2.300
5.3	2.302	2.304	2.307	2.309	2.311	2.313	2.315	2.317	2.319	2.322
5.4	2.324	2.326	2.328	2.330	2.332	2.335	2.337	2.339	2.341	2.343

제곱근표 2

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	2.345	2.347	2.349	2.352	2.354	2.356	2.358	2.360	2.362	2.364
5.6	2.366	2.369	2.371	2.373	2.375	2.377	2.379	2.381	2.383	2.385
5.7	2.387	2.390	2.392	2.394	2.396	2.398	2.400	2.402	2.404	2.406
5.8	2.408	2.410	2.412	2.415	2.417	2.419	2.421	2.423	2.425	2.427
5.9	2.429	2.431	2.433	2.435	2.437	2.439	2.441	2.443	2.445	2.447
6.0	2.449	2.452	2.454	2.456	2.458	2.460	2.462	2.464	2.466	2.468
6.1	2.470	2.472	2.474	2.476	2.478	2.480	2.482	2.484	2.486	2.488
6.2	2.490	2.492	2.494	2.496	2.498	2.500	2.502	2.504	2.506	2.508
6.3	2.510	2.512	2.514	2.516	2.518	2.520	2.522	2.524	2.526	2.528
6.4	2.530	2.532	2.534	2.536	2.538	2.540	2.542	2.544	2.546	2.548
6.5	2.550	2.551	2.553	2.555	2.557	2.559	2.561	2.563	2.565	2.567
6.6	2.569	2.571	2.573	2.575	2.577	2.579	2.581	2.583	2.585	2.587
6.7	2.588	2.590	2.592	2.594	2.596	2.598	2.600	2.602	2.604	2.606
6.8	2.608	2.610	2.612	2.613	2.615	2.617	2.619	2.621	2.623	2.625
6.9	2.627	2.629	2.631	2.632	2.634	2.636	2.638	2.640	2.642	2.644
7.0	2.646	2.648	2.650	2.651	2.653	2.655	2.657	2.659	2.661	2.663
7.1	2.665	2.666	2.668	2.670	2.672	2.674	2.676	2.678	2.680	2.681
7.2	2.683	2.685	2.687	2.689	2.691	2.693	2.694	2.696	2.698	2.700
7.3	2.702	2.704	2.706	2.707	2.709	2.711	2.713	2.715	2.717	2.718
7.4	2.720	2.722	2.724	2.726	2.728	2.729	2.731	2.733	2.735	2.737
7.5	2.739	2.740	2.742	2.744	2.746	2.748	2.750	2.751	2.753	2.755
7.6	2.757	2.759	2.760	2.762	2.764	2.766	2.768	2.769	2.771	2.773
7.7	2.775	2.777	2.778	2.780	2.782	2.784	2.786	2.787	2.789	2.791
7.8	2.793	2.795	2.796	2.798	2.800	2.802	2.804	2.805	2.807	2.809
7.9	2.811	2.812	2.814	2.816	2.818	2.820	2.821	2.823	2.825	2.827
8.0	2.828	2.830	2.832	2.834	2.835	2.837	2.839	2.841	2.843	2.844
8.1	2.846	2.848	2.850	2.851	2.853	2.855	2.857	2.858	2.860	2.862
8.2	2.864	2.865	2.867	2.869	2.871	2.872	2.874	2.876	2.877	2.879
8.3	2.881	2.883	2.884	2.886	2.888	2.890	2.891	2.893	2.895	2.897
8.4	2.898	2.900	2.902	2.903	2.905	2.907	2.909	2.910	2.912	2.914
8.5	2.915	2.917	2.919	2.921	2.922	2.924	2.926	2.927	2.929	2.931
8.6	2.933	2.934	2.936	2.938	2.939	2.941	2.943	2.944	2.946	2.948
8.7	2.950	2.951	2.953	2.955	2.956	2.958	2.960	2.961	2.963	2.965
8.8	2.966	2.968	2.970	2.972	2.973	2.975	2.977	2.978	2.980	2.982
8.9	2.983	2.985	2.987	2.988	2.990	2.992	2.993	2.995	2.997	2.998
9.0	3.000	3.002	3.003	3.005	3.007	3.008	3.010	3.012	3.013	3.015
9.1	3.017	3.018	3.020	3.022	3.023	3.025	3.027	3.028	3.030	3.032
9.2	3.033	3.035	3.036	3.038	3.040	3.041	3.043	3.045	3.046	3.048
9.3	3.050	3.051	3.053	3.055	3.056	3.058	3.059	3.061	3.063	3.064
9.4	3.066	3.068	3.069	3.071	3.072	3.074	3.076	3.077	3.079	3.081
9.5	3.082	3.084	3.085	3.087	3.089	3.090	3.092	3.094	3.095	3.097
9.6	3.098	3.100	3.102	3.103	3.105	3.106	3.108	3.110	3.111	3.113
9.7	3.114	3.116	3.118	3.119	3.121	3.122	3.124	3.126	3.127	3.129
9.8	3.130	3.132	3.134	3.135	3.137	3.138	3.140	3.142	3.143	3.145
9.9	3.146	3.148	3.150	3.151	3.153	3.154	3.156	3.158	3.159	3.161

제곱근표

3

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	3.162	3.178	3.194	3.209	3.225	3.240	3.256	3.271	3.286	3.302
11	3.317	3.332	3.347	3.362	3.376	3.391	3.406	3.421	3.435	3.450
12	3.464	3.479	3.493	3.507	3.521	3.536	3.550	3.564	3.578	3.592
13	3.606	3.619	3.633	3.647	3.661	3.674	3.688	3.701	3.715	3.728
14	3.742	3.755	3.768	3.782	3.795	3.808	3.821	3.834	3.847	3.860
15	3.873	3.886	3.899	3.912	3.924	3.937	3.950	3.962	3.975	3.987
16	4.000	4.012	4.025	4.037	4.050	4.062	4.074	4.087	4.099	4.111
17	4.123	4.135	4.147	4.159	4.171	4.183	4.195	4.207	4.219	4.231
18	4.243	4.254	4.266	4.278	4.290	4.301	4.313	4.324	4.336	4.347
19	4.359	4.370	4.382	4.393	4.405	4.416	4.427	4.438	4.450	4.461
20	4.472	4.483	4.494	4.506	4.517	4.528	4.539	4.550	4.561	4.572
21	4.583	4.593	4.604	4.615	4.626	4.637	4.648	4.658	4.669	4.680
22	4.690	4.701	4.712	4.722	4.733	4.743	4.754	4.764	4.775	4.785
23	4.796	4.806	4.817	4.827	4.837	4.848	4.858	4.868	4.879	4.889
24	4.899	4.909	4.919	4.930	4.940	4.950	4.960	4.970	4.980	4.990
25	5.000	5.010	5.020	5.030	5.040	5.050	5.060	5.070	5.079	5.089
26	5.099	5.109	5.119	5.128	5.138	5.148	5.158	5.167	5.177	5.187
27	5.196	5.206	5.215	5.225	5.235	5.244	5.254	5.263	5.273	5.282
28	5.292	5.301	5.310	5.320	5.329	5.339	5.348	5.357	5.367	5.376
29	5.385	5.394	5.404	5.413	5.422	5.431	5.441	5.450	5.459	5.468
30	5.477	5.486	5.495	5.505	5.514	5.523	5.532	5.541	5.550	5.559
31	5.568	5.577	5.586	5.595	5.604	5.612	5.621	5.630	5.639	5.648
32	5.657	5.666	5.675	5.683	5.692	5.701	5.710	5.718	5.727	5.736
33	5.745	5.753	5.762	5.771	5.779	5.788	5.797	5.805	5.814	5.822
34	5.831	5.840	5.848	5.857	5.865	5.874	5.882	5.891	5.899	5.908
35	5.916	5.925	5.933	5.941	5.950	5.958	5.967	5.975	5.983	5.992
36	6.000	6.008	6.017	6.025	6.033	6.042	6.050	6.058	6.066	6.075
37	6.083	6.091	6.099	6.107	6.116	6.124	6.132	6.140	6.148	6.156
38	6.164	6.173	6.181	6.189	6.197	6.205	6.213	6.221	6.229	6.237
39	6.245	6.253	6.261	6.269	6.277	6.285	6.293	6.301	6.309	6.317
40	6.325	6.332	6.340	6.348	6.356	6.364	6.372	6.380	6.387	6.395
41	6.403	6.411	6.419	6.427	6.434	6.442	6.450	6.458	6.465	6.473
42	6.481	6.488	6.496	6.504	6.512	6.519	6.527	6.535	6.542	6.550
43	6.557	6.565	6.573	6.580	6.588	6.595	6.603	6.611	6.618	6.626
44	6.633	6.641	6.648	6.656	6.663	6.671	6.678	6.686	6.693	6.701
45	6.708	6.716	6.723	6.731	6.738	6.745	6.753	6.760	6.768	6.775
46	6.782	6.790	6.797	6.804	6.812	6.819	6.826	6.834	6.841	6.848
47	6.856	6.863	6.870	6.877	6.885	6.892	6.899	6.907	6.914	6.921
48	6.928	6.935	6.943	6.950	6.957	6.964	6.971	6.979	6.986	6.993
49	7.000	7.007	7.014	7.021	7.029	7.036	7.043	7.050	7.057	7.064
50	7.071	7.078	7.085	7.092	7.099	7.106	7.113	7.120	7.127	7.134
51	7.141	7.148	7.155	7.162	7.169	7.176	7.183	7.190	7.197	7.204
52	7.211	7.218	7.225	7.232	7.239	7.246	7.253	7.259	7.266	7.273
53	7.280	7.287	7.294	7.301	7.308	7.314	7.321	7.328	7.335	7.342
54	7.348	7.355	7.362	7.369	7.376	7.382	7.389	7.396	7.403	7.409

제곱근표

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7.416	7.423	7.430	7.436	7.443	7.450	7.457	7.463	7.470	7.477
56	7.483	7.490	7.497	7.503	7.510	7.517	7.523	7.530	7.537	7.543
57	7.550	7.556	7.563	7.570	7.576	7.583	7.589	7.596	7.603	7.609
58	7.616	7.622	7.629	7.635	7.642	7.649	7.655	7.662	7.668	7.675
59	7.681	7.688	7.694	7.701	7.707	7.714	7.720	7.727	7.733	7.740
60	7.746	7.752	7.759	7.765	7.772	7.778	7.785	7.791	7.797	7.804
61	7.810	7.817	7.823	7.829	7.836	7.842	7.849	7.855	7.861	7.868
62	7.874	7.880	7.887	7.893	7.899	7.906	7.912	7.918	7.925	7.931
63	7.937	7.944	7.950	7.956	7.962	7.969	7.975	7.981	7.987	7.994
64	8.000	8.006	8.012	8.019	8.025	8.031	8.037	8.044	8.050	8.056
65	8.062	8.068	8.075	8.081	8.087	8.093	8.099	8.106	8.112	8.118
66	8.124	8.130	8.136	8.142	8.149	8.155	8.161	8.167	8.173	8.179
67	8.185	8.191	8.198	8.204	8.210	8.216	8.222	8.228	8.234	8.240
68	8.246	8.252	8.258	8.264	8.270	8.276	8.283	8.289	8.295	8.301
69	8.307	8.313	8.319	8.325	8.331	8.337	8.343	8.349	8.355	8.361
70	8.367	8.373	8.379	8.385	8.390	8.396	8.402	8.408	8.414	8.420
71	8.426	8.432	8.438	8.444	8.450	8.456	8.462	8.468	8.473	8.479
72	8.485	8.491	8.497	8.503	8.509	8.515	8.521	8.526	8.532	8.538
73	8.544	8.550	8.556	8.562	8.567	8.573	8.579	8.585	8.591	8.597
74	8.602	8.608	8.614	8.620	8.626	8.631	8.637	8.643	8.649	8.654
75	8.660	8.666	8.672	8.678	8.683	8.689	8.695	8.701	8.706	8.712
76	8.718	8.724	8.729	8.735	8.741	8.746	8.752	8.758	8.764	8.769
77	8.775	8.781	8.786	8.792	8.798	8.803	8.809	8.815	8.820	8.826
78	8.832	8.837	8.843	8.849	8.854	8.860	8.866	8.871	8.877	8.883
79	8.888	8.894	8.899	8.905	8.911	8.916	8.922	8.927	8.933	8.939
80	8.944	8.950	8.955	8.961	8.967	8.972	8.978	8.983	8.989	8.994
81	9.000	9.006	9.011	9.017	9.022	9.028	9.033	9.039	9.044	9.050
82	9.055	9.061	9.066	9.072	9.077	9.083	9.088	9.094	9.099	9.105
83	9.110	9.116	9.121	9.127	9.132	9.138	9.143	9.149	9.154	9.160
84	9.165	9.171	9.176	9.182	9.187	9.192	9.198	9.203	9.209	9.214
85	9.220	9.225	9.230	9.236	9.241	9.247	9.252	9.257	9.263	9.268
86	9.274	9.279	9.284	9.290	9.295	9.301	9.306	9.311	9.317	9.322
87	9.327	9.333	9.338	9.343	9.349	9.354	9.359	9.365	9.370	9.375
88	9.381	9.386	9.391	9.397	9.402	9.407	9.413	9.418	9.423	9.429
89	9.434	9.439	9.445	9.450	9.455	9.460	9.466	9.471	9.476	9.482
90	9.487	9.492	9.497	9.503	9.508	9.513	9.518	9.524	9.529	9.534
91	9.539	9.545	9.550	9.555	9.560	9.566	9.571	9.576	9.581	9.586
92	9.592	9.597	9.602	9.607	9.612	9.618	9.623	9.628	9.633	9.638
93	9.644	9.649	9.654	9.659	9.664	9.670	9.675	9.680	9.685	9.690
94	9.695	9.701	9.706	9.711	9.716	9.721	9.726	9.731	9.737	9.742
95	9.747	9.752	9.757	9.762	9.767	9.772	9.778	9.783	9.788	9.793
96	9.798	9.803	9.808	9.813	9.818	9.823	9.829	9.834	9.839	9.844
97	9.849	9.854	9.859	9.864	9.869	9.874	9.879	9.884	9.889	9.894
98	9.899	9.905	9.910	9.915	9.920	9.925	9.930	9.935	9.940	9.945
99	9.950	9.955	9.960	9.965	9.970	9.975	9.980	9.985	9.990	9.995

MEMO

MEMO