풍산자
개념완성

중학수학

3-1

구성과 특징

완벽한 개념으로 실전에 강해지는 개념 기본서

체계적인 개념과 꼭 필요한 핵심 문제로 확실하게 개념을 다지세요.

개념북

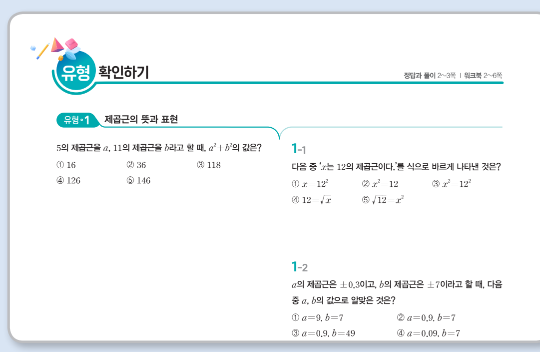
◆ 개념 학습 + 예제, 유제 문제

- 주제별 핵심 개념 정리
- 개념 이해를 돕는 풍쌤의 Point
- 개념의 예제를 통해 개념 확립
- 간단한 예제 및 유제 문제

◆ 개념 확인하기

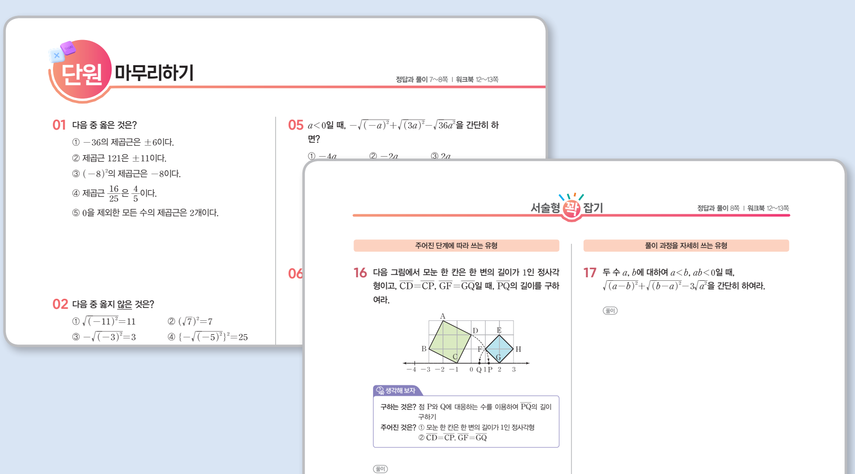
- 개념 확인 및 적용 문제

◆ 유형 확인하기



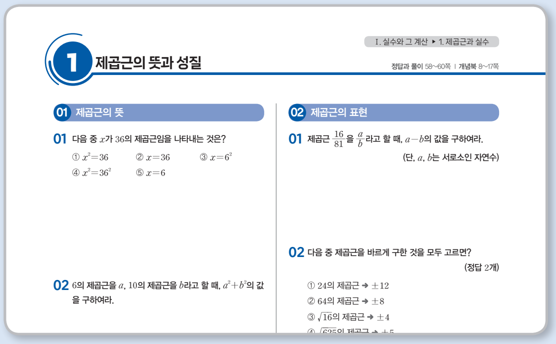
- 주제별 핵심 대표 유형 문제
- 핵심 문제 + 닮은꼴 문제

◆ 단원 마무리하기



- 중단원별 문제로 개념 점검
- 서술형 꽉 잡기

워크북


I. 실수와 그 계산 ▸ 1. 제곱근과 실수

1 제곱근의 뜻과 성질

정답과 풀이 58~60쪽 | 개념북 8~17쪽

01 제곱근의 뜻

01 다음 중 x가 36의 제곱근임을 나타내는 것은?

① $x^2=36$ ② $x=36$ ③ $x=6^2$ ④ $x^2=36^2$ ⑤ $x=6$

02 6의 제곱근을 a, 10의 제곱근을 b라고 할 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.

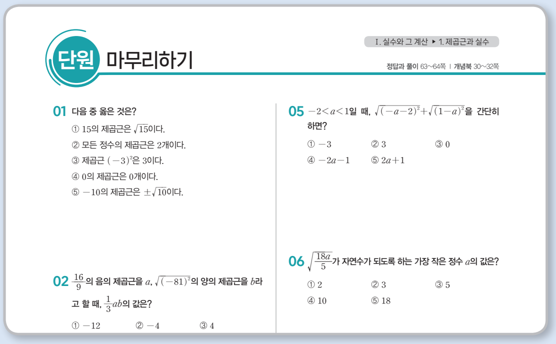
02 제곱근의 표현

01 제곱근 $\frac{16}{81}$을 $\sqrt{\frac{a}{b}}$라고 할 때, $a-b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 서로소인 자연수)

02 다음 중 제곱근을 바르게 구한 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① 24의 제곱근 → ±12
② 64의 제곱근 → ±8
③ $\sqrt{16}$의 제곱근 → ±4

• 개념북과 소단원별 핵심 유형 1:1 맞춤 문제 링크


I. 실수와 그 계산 ▸ 1. 제곱근과 실수

단원 마무리하기

정답과 풀이 63~64쪽 | 개념북 30~32쪽

01 다음 중 옳은 것은?

① 15의 제곱근은 $\sqrt{15}$이다.
② 모든 정수의 제곱근은 2개이다.
③ 제곱근 $(-3)^2$은 3이다.
④ 0의 제곱근은 0개이다.
⑤ -10의 제곱근은 $\pm\sqrt{10}$이다.

02 $\frac{16}{9}$의 음의 제곱근을 a, $\sqrt{(-81)^2}$의 양의 제곱근을 b라고 할 때, $\frac{1}{3}ab$의 값은?

① -12 ② -4 ③ 4

05 $-2<a<1$일 때, $\sqrt{(-a-2)^2}+\sqrt{(1-a)^2}$을 간단히 하면?

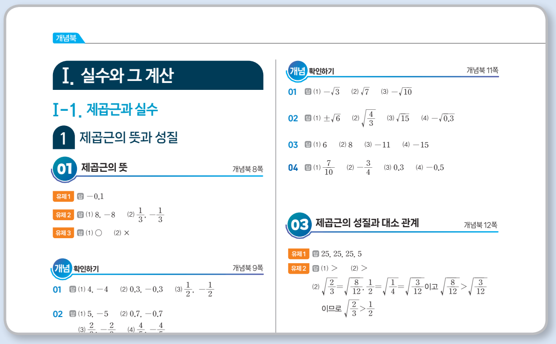
① -3 ② 3 ③ 0 ④ $-2a-1$ ⑤ $2a+1$

06 $\sqrt{\frac{18a}{5}}$가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 정수 a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 5 ④ 10 ⑤ 18

• 중단원별 마무리 문제 및 서술형 평가 문제

정답과 풀이


개념북

I. 실수와 그 계산

I-1. 제곱근과 실수

1 제곱근의 뜻과 성질

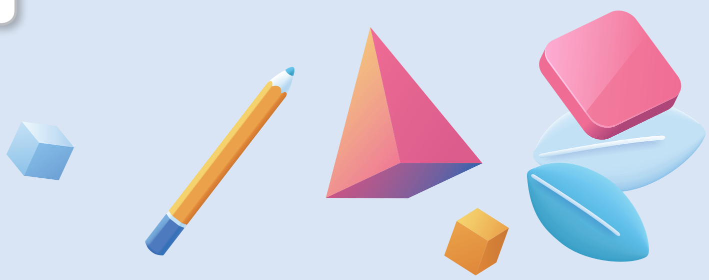
01 제곱근의 뜻 개념북 8쪽

개념 확인하기 개념북 9쪽

03 제곱근의 성질과 대소 관계 개념북 12쪽

• 문제 해결을 위한 최적의 풀이 방법을 자세히 제공

• 자기 주도학습이 가능한 명확하고 이해하기 쉬운 풀이 수록



이 책의 차례

Ⅰ 실수와 그 계산

Ⅱ 다항식의 곱셈과 인수분해

Ⅲ 이차방정식

Ⅲ-1 이차방정식

Ⅳ 이차함수

Ⅳ-1 이차함수의 그래프 (1)

Ⅳ-2 이차함수의 그래프 (2)

* 워크북이 책 속의 책으로 들어있어요!

과거의 한 걸음 한 걸음이
지금의 나로 이어져 있다.

Ⅰ 실수와 그 계산

1 제곱근과 실수

01 제곱근의 뜻

▶ 1-1. 제곱근의 뜻과 성질

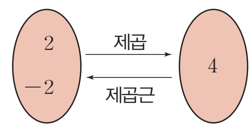
개념 1 제곱근의 뜻

1. 제곱근

어떤 수 x를 제곱하여 음이 아닌 수 a가 될 때, x를 a의 제곱근이라고 한다.

➔ $x^2=a$일 때, x는 a의 제곱근

예 $2^2=4$, $(-2)^2=4$이므로 4의 제곱근은 2, -2이다.



◆ **제곱근(뿌리 根)**
제곱한 수의 뿌리가 되는 수

풍쌤의 Point x는 a의 제곱근 ➔ x를 제곱하면 a ➔ $x^2=a$

예제 1

다음 □ 안에 공통으로 들어갈 수를 구하여라.

제곱하여 36이 되는 수는 6과 □
➔ $6^2=36$, $(\square)^2=36$
➔ 6과 □은 36의 제곱근

답 -6

유제 1

다음 □ 안에 공통으로 들어갈 수를 구하여라.

제곱하여 0.01이 되는 수는 0.1과 □
➔ $(0.1)^2=0.01$, $(\square)^2=0.01$
➔ 0.1과 □은 0.01의 제곱근

답 -0.1

예제 2

다음 수의 제곱근을 구하여라.

(1) 81 (2) 100

답 (1) 9, -9 (2) 10, -10

유제 2

다음 수의 제곱근을 구하여라.

(1) 64 (2) $\frac{1}{9}$

답 (1) 8, -8 (2) $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$

개념 2 제곱근의 개수

1. 제곱근의 개수

(1) 양수의 제곱근은 양수와 음수 2개가 있고, 그 절댓값은 서로 같다.
(2) 0의 제곱근은 0 하나뿐이다.
(3) 제곱하여 음수가 되는 수는 없으므로 음수의 제곱근은 없다.

예 9의 제곱근은 3과 -3의 2개이고, -9의 제곱근은 없다.

◆ 제곱근의 개수

수	개수
양수	2
0	1
음수	0

예제 3

제곱근에 대한 다음 설명 중 옳은 것에는 ○표, 옳지 않은 것에는 ×표를 하여라.

(1) 9의 제곱근은 3, -3이다. ( )
(2) 49의 제곱근은 1개이다. ( )

답 (1) ○ (2) ×

유제 3

제곱근에 대한 다음 설명 중 옳은 것에는 ○표, 옳지 않은 것에는 ×표를 하여라.

(1) $\frac{1}{4}$의 제곱근은 $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$이다. (○)
(2) 5^2의 제곱근은 1개이다. (×)

개념 확인하기

정답과 풀이 2쪽 | 워크북 2쪽

01 다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

▶ 개념 1 제곱근의 뜻

(1) 16의 제곱근은 $\boxed{4}$, $\boxed{-4}$이다.

(2) 제곱하여 0.09가 되는 수는 $\boxed{0.3}$, $\boxed{-0.3}$이다.
0.09의 제곱근

(3) $x^2=\frac{1}{4}$을 만족시키는 x의 값은 $\boxed{\frac{1}{2}}$, $\boxed{-\frac{1}{2}}$이다.
$\frac{1}{4}$의 제곱근

02 다음 수의 제곱근을 구하여라.

▶ 개념 1 제곱근의 뜻

(1) 25

(2) 0.49

(3) $\frac{4}{9}$

(4) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$

답 (1) $5, -5$ (2) $0.7, -0.7$ (3) $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$ (4) $\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}$

03 다음 수의 제곱근을 구하여라.

▶ 개념 1 제곱근의 뜻

(1) 0

(2) -4

(3) $(-6)^2$

(4) $(-0.2)^2$

답 (1) 0 (2) 없다. (3) $6, -6$ (4) $0.2, -0.2$

강의 tip

(어떤 수)^{2}의 제곱근은 수의 부호에 관계없이 |어떤 수|, −|어떤 수|이다. 제곱근을 구하는 것에 익숙하지 않은 학생들에게는 먼저 ( )^{2}을 계산한 후 제곱근을 구하도록 지도한다.

04 제곱근에 대한 다음 설명 중 옳은 것에는 ○표, 옳지 않은 것에는 ×표를 하여라.

▶ 개념 2 제곱근의 개수

음수의 제곱근은 없다.
(1) -16의 제곱근은 1개이다. (×)

(2) 모든 수의 제곱근은 2개이다. (×)
양수

(3) 0.64의 제곱근은 2개이고, 두 수의 합은 0이다. (○)
$0.8, -0.8$

02 제곱근의 표현

▶ 1-1. 제곱근의 뜻과 성질

개념 1 제곱근의 표현

1. 제곱근의 표현

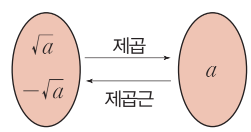
(1) 제곱근은 기호 $\sqrt{\ }$(근호)를 사용하여 나타내고, 이것을 제곱근 또는 루트(root)라고 읽는다.

$\sqrt{a}$ ➜ 제곱근 a, 루트 a

(2) 양수 a의 제곱근 중 양수인 것을 양의 제곱근, 음수인 것을 음의 제곱근이라 하고, 각각

$\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$

와 같이 나타낸다.



예 5의 양의 제곱근은 $\sqrt{5}$, 음의 제곱근은 $-\sqrt{5}$이다.

참고 $\sqrt{a}$와 $-\sqrt{a}$를 함께 $\pm\sqrt{a}$와 같이 나타내기도 한다.
이때 $\pm\sqrt{a}$는 '플러스 마이너스 루트 a'라고 읽는다.

(3) 근호 안의 수가 어떤 수의 제곱이면 근호를 사용하지 않고 나타낸다.

예 9의 제곱근: $\pm\sqrt{9}=\pm3$

참고 $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{16}=4$, $\cdots$

• $\sqrt{\ }$는 뿌리를 뜻하는 라틴어 radix의 첫 글자인 r를 변형하여 만든 기호이다.

• **제곱근 a와 a의 제곱근의 차이**
양수 a에 대하여
① 제곱근 a ➜ $\sqrt{a}$
② a의 제곱근 ➜ $\pm\sqrt{a}$

예제 1

다음을 근호를 사용하여 나타내어라.

(1) 제곱근 5 (2) 제곱근 8

답 (1) $\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{8}$

유제 1

다음을 근호를 사용하여 나타내어라.

(1) 제곱근 10 (2) 제곱근 18

답 (1) $\sqrt{10}$ (2) $\sqrt{18}$

예제 2

다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

양수 16의 제곱근을 근호를 사용하여 나타내면 $\sqrt{16}$과 □이다.
이때 16의 제곱근은 □와 -4이므로
$\sqrt{16}=$□, □$=-4$

답 $-\sqrt{16}$, 4, 4, $-\sqrt{16}$

유제 2

다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

양수 81의 제곱근을 근호를 사용하여 나타내면 $\sqrt{81}$과 $\boxed{-\sqrt{81}}$이다.
이때 81의 제곱근은 $\boxed{9}$와 -9이므로
$\sqrt{81}=\boxed{9}$, $\boxed{-\sqrt{81}}=-9$

예제 3

다음을 근호를 사용하여 나타내어라.

(1) 2의 제곱근 (2) 7의 제곱근

답 (1) $\pm\sqrt{2}$ (2) $\pm\sqrt{7}$

유제 3

다음을 근호를 사용하여 나타내어라.

(1) 13의 제곱근 (2) 24의 제곱근

답 (1) $\pm\sqrt{13}$ (2) $\pm\sqrt{24}$

개념 확인하기

정답과 풀이 2쪽 | 워크북 2~3쪽

01 다음은 양수 a의 제곱근을 표로 나타낸 것이다. 표의 빈칸에 알맞은 수를 써넣어라.

▷ 개념 1 제곱근의 표현

a	3	7	10
$\sqrt{a}$	$\sqrt{3}$	(2) $\sqrt{7}$	$\sqrt{10}$
$-\sqrt{a}$	(1) $-\sqrt{3}$	$-\sqrt{7}$	(3) $-\sqrt{10}$

02 다음을 구하여라.

▷ 개념 1 제곱근의 표현

(1) 6의 제곱근 (2) 제곱근 $\frac{4}{3}$

(3) 15의 양의 제곱근 (4) 0.3의 음의 제곱근

답 (1) $\pm\sqrt{6}$ (2) $\sqrt{\frac{4}{3}}$ (3) $\sqrt{15}$ (4) $-\sqrt{0.3}$

강의 tip
a의 제곱근과 제곱근 a를 혼동하지 않도록 주의시킨다.
제곱근 a는 a의 제곱근 $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$ 중에서 양의 제곱근 $\sqrt{a}$를 의미함을 알려 준다.

03 다음 수를 근호를 사용하지 않고 나타내어라.

▷ 개념 1 제곱근의 표현

(1) $\sqrt{36}$ (2) $\sqrt{64}$

(3) $-\sqrt{121}$ (4) $-\sqrt{225}$

답 (1) 6 (2) 8 (3) -11 (4) -15

04 다음 수를 근호를 사용하지 않고 나타내어라.

▷ 개념 1 제곱근의 표현

(1) $\sqrt{\frac{49}{100}}$ (2) $-\sqrt{\frac{9}{16}}$

(3) $\sqrt{0.09}$ (4) $-\sqrt{0.25}$

답 (1) $\frac{7}{10}$ (2) $-\frac{3}{4}$ (3) 0.3 (4) -0.5

03 제곱근의 성질과 대소 관계

▸ 1-1. 제곱근의 뜻과 성질

개념 1 제곱근의 성질

1. 제곱근의 성질

(1) $a>0$일 때

① $(\sqrt{a})^2=a$, $(-\sqrt{a})^2=a$ 예 $(\sqrt{2})^2=(-\sqrt{2})^2=2$

② $\sqrt{a^2}=a$, $\sqrt{(-a)^2}=a$ 예 $\sqrt{2^2}=\sqrt{4}=2$, $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$

(2) $\sqrt{a^2}$의 성질: $\sqrt{a^2}$의 값은 a의 절댓값과 같다.

➔ $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\ge 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$ 예 $\sqrt{2^2}=2$, $\sqrt{(-2)^2}=2$

부호 그대로 부호 반대로

풍쌤의 Point $\sqrt{(\text{양수})^2}=(\text{양수})$, $\sqrt{(\text{음수})^2}=-(\text{음수})=(\text{양수})$

- a가 양수일 때
  ① $(\sqrt{a})^2$, $(-\sqrt{a})^2$은 제곱한 것이므로 양수이다.
  ② $\sqrt{a^2}$, $\sqrt{(-a)^2}$은 양의 제곱근이므로 양수이다.

2. 근호 안의 제곱수

(1) 1, 4, 9, 16, $\dots$과 같이 자연수의 제곱인 수를 제곱수라고 한다.

(2) 근호 안의 수가 제곱수이면 근호를 사용하지 않고 자연수로 나타낼 수 있다.

➔ $\sqrt{(\text{제곱수})}=\sqrt{(\text{자연수})^2}=(\text{자연수})$ 예 $\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$

예제 1

다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$2^2=\square$, $(-2)^2=\square$이고, 4의 양의 제곱근은 2이므로
$\sqrt{2^2}=\sqrt{\square}=2$, $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=\square$

답 4, 4, 4, 2

유제 1

다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$5^2=\boxed{25}$, $(-5)^2=\boxed{25}$이고, 25의 양의 제곱근은 5이므로
$\sqrt{5^2}=\sqrt{\boxed{25}}=5$, $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=\boxed{5}$

개념 2 제곱근의 대소 관계

1. 제곱근의 대소관계

$a>0$, $b>0$일 때

(1) $a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$, $-\sqrt{b}<-\sqrt{a}$ 예 $2<3$ ➔ $\sqrt{2}<\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}<-\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 $a<b$ 예 $\sqrt{2}<\sqrt{3}$ ➔ $2<3$

예제 2

다음 ○ 안에 > 또는 <를 써넣어라.

(1) $\sqrt{11}$ ○ $\sqrt{13}$

(2) 4 ○ $\sqrt{17}$

풀이 (2) $4=\sqrt{16}$이고 $\sqrt{16}<\sqrt{17}$이므로 $4<\sqrt{17}$

답 (1) $<$ (2) $<$

유제 2

다음 ○ 안에 > 또는 <를 써넣어라.

(1) $-\sqrt{2}$ $>$ $-\sqrt{5}$

(2) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ $>$ $\frac{1}{2}$

(2) $\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{8}{12}}$, $\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{12}}$이고 $\sqrt{\frac{8}{12}}>\sqrt{\frac{3}{12}}$이므로 $\sqrt{\frac{2}{3}}>\frac{1}{2}$

개념 확인하기

정답과 풀이 2쪽 | 워크북 4~6쪽

01 다음 수를 근호를 사용하지 않고 나타내어라.

(1) $(\sqrt{3})^2$　　(2) $(-\sqrt{0.7})^2$

(3) $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$　　(4) $\sqrt{(-10)^2}$

답 (1) $\mathbf{3}$　(2) $\mathbf{0.7}$　(3) $\mathbf{\frac{2}{3}}$　(4) $\mathbf{10}$

▷ 개념 1 제곱근의 성질

02 $x>0$일 때, 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{(2x)^2}$　　(2) $\sqrt{(-3x)^2}$

답 (1) $\mathbf{2x}$　(2) $\mathbf{3x}$

(1) $2x>0$이므로 $\sqrt{(2x)^2}=2x$

(2) $-3x<0$이므로 $\sqrt{(-3x)^2}=-(-3x)=3x$

▷ 개념 1 제곱근의 성질

03 다음 물음에 답하여라.

(1) $x<0$일 때, $\sqrt{25x^2}$의 값을 구하여라.

(2) $x<2$일 때, $\sqrt{(x-2)^2}$의 값을 구하여라.

답 (1) $\mathbf{-5x}$　(2) $\mathbf{-x+2}$

(1) $\sqrt{25x^2}=\sqrt{(5x)^2}$이고 $5x<0$이므로 $\sqrt{25x^2}=-5x$

(2) $x<2$에서 $x-2<0$이므로 $\sqrt{(x-2)^2}=-(x-2)=-x+2$

▷ 개념 1 제곱근의 성질

04 다음 수가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 x의 값을 구하여라.

(1) $\sqrt{5x}$　　(2) $\sqrt{7x}$

(3) $\sqrt{2\times3\times x}$　　(4) $\sqrt{2^2\times3\times x}$

답 (1) $\mathbf{5}$　(2) $\mathbf{7}$　(3) $\mathbf{6}$　(4) $\mathbf{3}$

(3) x는 $2\times3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 하므로 가장 작은 자연수 x는 $2\times3=6$이다.

(4) x는 $3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 하므로 가장 작은 자연수 x는 3이다.

▷ 개념 1 제곱근의 성질

05 다음 중 4와 5 사이의 수를 모두 골라라.

$\sqrt{13},\ \sqrt{15},\ \sqrt{19},\ \sqrt{21},\ \sqrt{23},\ \sqrt{29}$

답 $\mathbf{\sqrt{19},\ \sqrt{21},\ \sqrt{23}}$

$\sqrt{13}<\sqrt{15}<\sqrt{16}(=4)<\sqrt{19}<\sqrt{21}<\sqrt{23}<\sqrt{25}(=5)<\sqrt{29}$이므로 4와 5 사이의 수는 $\sqrt{19}$, $\sqrt{21}$, $\sqrt{23}$이다.

▷ 개념 2 제곱근의 대소 관계

유형 확인하기

유형 1 제곱근의 뜻과 표현

5의 제곱근을 a, 11의 제곱근을 b라고 할 때, a^2+b^2의 값은?

① 16 ② 36 ③ 118
④ 126 ⑤ 146

답 ①
$a^2=5$, $b^2=11$이므로
$a^2+b^2=5+11=16$

1-1

다음 중 'x는 12의 제곱근이다.'를 식으로 바르게 나타낸 것은?

① $x=12^2$ ② $x^2=12$ ③ $x^2=12^2$
④ $12=\sqrt{x}$ ⑤ $\sqrt{12}=x^2$

답 ②
x는 12의 제곱근이다. ➞ x를 제곱하면 12이다.
➞ $x^2=12$
➞ $x=\pm\sqrt{12}$

1-2

a의 제곱근은 ±0.3이고, b의 제곱근은 ±7이라고 할 때, 다음 중 a, b의 값으로 알맞은 것은?

① $a=9$, $b=7$ ② $a=0.9$, $b=7$
③ $a=0.9$, $b=49$ ④ $a=0.09$, $b=7$
⑤ $a=0.09$, $b=49$

답 ⑤
$a=(\pm0.3)^2=0.09$, $b=(\pm7)^2=49$

유형 2 제곱근의 이해

다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① 제곱근 3과 3의 제곱근은 서로 같다.
② $\sqrt{5}$는 5의 양의 제곱근이다.
③ -2는 -4의 음의 제곱근이다.
④ $\sqrt{(-5)^2}$의 제곱근은 $\sqrt{5}$이다.
⑤ 제곱근 100의 제곱근은 $\pm\sqrt{10}$이다.

답 ②, ⑤
① 제곱근 3은 $\sqrt{3}$이고, 3의 제곱근은 $\pm\sqrt{3}$이므로 서로 같지 않다.
③ 음수의 제곱근은 없다.
④ $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5$의 제곱근은 $\pm\sqrt{5}$이다.
⑤ 제곱근 100은 $\sqrt{100}=10$, 10의 제곱근은 $\pm\sqrt{10}$이다.

강의 tip
⟨a의 제곱근⟩
① $a>0$ ➞ $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$ (2개)
② $a=0$ ➞ 0 (1개)
③ $a<0$ ➞ 없다.

강의 tip
$\sqrt{49}=7$이므로 제곱근 7을 구하는 것이다. 제곱근 49를 구하는 것으로 착각하지 않도록 주의시킨다.

2-1

다음 중 그 값이 나머지 넷과 다른 하나는?

① 제곱하여 25가 되는 수
② $x^2=25$를 만족시키는 x의 값
③ $\sqrt{625}$의 제곱근
④ 제곱근 25
⑤ $(-5)^2$의 제곱근

답 ④
①, ②, ③, ⑤ 25의 제곱근이므로 ±5이다.
④ 제곱근 25는 $\sqrt{25}$이므로 5이다.

2-2

다음 중 옳은 것은?

① 음의 정수의 제곱근은 2개이다. 없다.
② 0의 제곱근은 없다. 1개이다.
③ 제곱근 $\sqrt{49}$는 7이다. 0
④ 4의 제곱근은 $\pm\sqrt{2}$이다. ±2
⑤ 제곱근 $(-7)^2$은 7이다. $\sqrt{49}$

답 ⑤

유형 • 3 제곱근 구하기

$\sqrt{81}$의 양의 제곱근을 a, $(-5)^2$의 음의 제곱근을 b라고 할 때, $a-b$의 값은?

① -8 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 8

답 ⑤
$\sqrt{81}=9$의 양의 제곱근은 3이므로 $a=3$
$(-5)^2=25$의 음의 제곱근은 -5이므로 $b=-5$
$\therefore a-b=3-(-5)=8$

3-1

$\frac{9}{100}$의 양의 제곱근을 a, $(-15)^2$의 음의 제곱근을 b라고 할 때, ab의 값은?

① $-\frac{9}{2}$ ② $-\frac{2}{9}$ ③ $\frac{2}{9}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

답 ①
$\frac{9}{100}$의 양의 제곱근은 $\frac{3}{10}$이므로 $a=\frac{3}{10}$
$(-15)^2=225$의 음의 제곱근은 -15이므로 $b=-15$
$\therefore ab=\frac{3}{10}\times(-15)=-\frac{9}{2}$

3-2

밑변의 길이가 7, 높이가 14인 삼각형과 넓이가 같은 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.
x

답 7
(삼각형의 넓이)$=\frac{1}{2}\times7\times14=49$
$x^2=49$이므로 $x=\pm7$
이때 $x>0$이므로 $x=7$
따라서 구하는 정사각형의 한 변의 길이는 7이다.

유형 • 4 제곱근의 성질

다음 중 그 값이 나머지 넷과 다른 하나는?

① $(\sqrt{7})^2=7$ ② $\sqrt{49}=7$
③ $\sqrt{(-7)^2}=7$ ④ $-\sqrt{(-7)^2}=-7$
⑤ $(-\sqrt{7})^2=7$

답 ④

강의 tip
$a>0$일 때
$(\sqrt{a})^2=(-\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=a$

4-1

다음 중 가장 큰 수는?

① $\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$ ② $\sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{1}{6}$ ③ $\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$
④ $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2=\frac{1}{3}$ ⑤ $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}$

답 ④

4-2

$(-\sqrt{25})^2$의 양의 제곱근을 A, $\sqrt{(-36)^2}$의 음의 제곱근을 B라고 할 때, $\sqrt{-120AB}$의 값을 구하여라.

답 60
$(-\sqrt{25})^2=25$의 양의 제곱근은 $\sqrt{25}=5$이므로 $A=5$
$\sqrt{(-36)^2}=36$의 음의 제곱근은 $-\sqrt{36}=-6$이므로 $B=-6$
$\therefore \sqrt{-120AB}=\sqrt{-120\times5\times(-6)}=\sqrt{3600}=60$

유형•5 제곱근의 성질을 이용한 식의 계산 (1)

다음을 계산하여라.

(1) $(-\sqrt{8})^2+\sqrt{(-3)^2}=8+3=11$

(2) $\sqrt{12^2}-(-\sqrt{7})^2=12-7=5$

(3) $-\sqrt{36}\times\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=-6\times\frac{2}{3}=-4$

(4) $\sqrt{(-14)^2}\div\sqrt{2^2}=14\div2=7$

답 (1) 11 (2) 5 (3) -4 (4) 7

5-1

다음을 계산하여라.

(1) $\sqrt{(-7)^2}+(-\sqrt{5})^2=7+5=12$

(2) $\sqrt{10^2}-\sqrt{(-6)^2}=10-6=4$

(3) $\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2}\times\left(-\sqrt{\frac{5}{8}}\right)^2=\frac{4}{5}\times\frac{5}{8}=\frac{1}{2}$

(4) $-\sqrt{9^2}\div(\sqrt{3})^2=-9\div3=-3$

답 (1) 12 (2) 4 (3) $\frac{1}{2}$ (4) -3

5-2

다음 중 바르게 계산한 것은?

① $\sqrt{4^2}+\sqrt{(-5)^2}=-1$

② $\sqrt{0.01}\times(-\sqrt{0.5})^2=0.5$

③ $-\sqrt{7^2}+(-\sqrt{4})^2=-11$

④ $(\sqrt{12})^2\div(-\sqrt{3})^2=4$

⑤ $\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2}\times\left(-\sqrt{\frac{12}{25}}\right)^2=-\frac{2}{5}$

답 ④

① $\sqrt{4^2}+\sqrt{(-5)^2}=4+5=9$
② $\sqrt{0.01}\times(-\sqrt{0.5})^2=0.1\times0.5=0.05$
③ $-\sqrt{7^2}+(-\sqrt{4})^2=-7+4=-3$
④ $(\sqrt{12})^2\div(-\sqrt{3})^2=12\div3=4$
⑤ $\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2}\times\left(-\sqrt{\frac{12}{25}}\right)^2=\frac{5}{6}\times\frac{12}{25}=\frac{2}{5}$

유형•6 제곱근의 성질을 이용한 식의 계산 (2)

다음 식을 간단히 하여라.

(1) $a<0$일 때, $\sqrt{(3a)^2}+\sqrt{(-3a)^2}$

(2) $0<a<1$일 때, $\sqrt{(a+1)^2}-\sqrt{(a-1)^2}$

답 (1) $-6a$ (2) $2a$

(1) $a<0$이므로 $3a<0$, $-3a>0$
$\therefore \sqrt{(3a)^2}+\sqrt{(-3a)^2}=-3a+(-3a)=-6a$

(2) $0<a<1$이므로 $a+1>0$, $a-1<0$
$\therefore \sqrt{(a+1)^2}-\sqrt{(a-1)^2}=a+1-\{-(a-1)\}$
$=a+1+a-1=2a$

강의 tip
주어진 미지수의 범위에 속하는 수를 직접 대입하여 $\sqrt{A^2}$에서 A의 부호를 알아볼 수도 있다. 예를 들어 〈유형6-(2)〉에서 $a=0.5$이면 $a+1=1.5>0$, $a-1=-0.5<0$이다.

강의 tip
근호 안이 제곱식이면 → 먼저 근호 안의 식의 부호를 판별한다.
→ $\begin{cases} A\geq0\text{이면 } \sqrt{A^2}=A \\ A<0\text{이면 } \sqrt{A^2}=-A \end{cases}$

6-1

$a>0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a^2}+\sqrt{(-3a)^2}-\sqrt{9b^2}$을 간단히 하면?

① $-3a-2b$ ② $-a+2b$ ③ $2a-4b$
④ $4a-2b$ ⑤ $4a+3b$

답 ⑤

$a>0$, $b<0$이므로 $-3a<0$, $3b<0$
$\therefore \sqrt{a^2}+\sqrt{(-3a)^2}-\sqrt{9b^2}=\sqrt{a^2}+\sqrt{(-3a)^2}-\sqrt{(3b)^2}$
$=a+\{-(-3a)\}-(-3b)$
$=4a+3b$

6-2

$2<x<3$일 때, $\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(3-x)^2}$을 간단히 하면?

① -1 ② $-2x+5$ ③ $2x-5$
④ 1 ⑤ $2x+5$

답 ③

$2<x<3$이므로 $x-2>0$, $3-x>0$
$\therefore \sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(3-x)^2}=x-2-(3-x)=x-2-3+x=2x-5$

유형 · 7 제곱근이 자연수가 될 조건

$1 \le x \le 30$일 때, 다음 수가 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 값을 모두 구하여라.

(1) $\sqrt{21+x}$ (2) $\sqrt{72x}$

답 (1) **4, 15, 28** (2) **2, 8, 18**

(1) $1 \le x \le 30$이므로 $22 \le 21+x \le 51$
이때 $21+x$가 제곱수이어야 하므로
$21+x=25, 36, 49$ $\therefore x=4, 15, 28$

(2) $72x=2^3\times3^2\times x$가 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 값은 $2\times$(자연수)^{2}의 꼴이므로
$2, 2\times2^2=8, 2\times3^2=18$

7-1

$\sqrt{24-x}$가 정수가 되도록 하는 자연수의 x의 개수는?
└ $24-x \ge 0$ ➞ 0도 포함

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

답 ②

$24-x$는 0 또는 24 이하의 제곱수이어야 하므로
$24-x=0, 1, 4, 9, 16$
따라서 x는 8, 15, 20, 23, 24의 5개이다.

강의 tip
$\sqrt{24-x}$가 자연수인 경우와 구별하여 설명한다. ➞ $\sqrt{24-x}$가 자연수이면 $24-x>0$이므로 x는 24가 될 수 없다.

7-2

$\sqrt{\dfrac{450}{x}}$이 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 x의 값을 a, 이때의 $\sqrt{\dfrac{450}{x}}$의 값을 b라고 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

답 **17**

$\dfrac{450}{x}=\dfrac{2\times3^2\times5^2}{x}$이므로 $\sqrt{\dfrac{450}{x}}$이 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 x의 값은 2이다.
$\therefore a=2$
또, 이때의 $\sqrt{\dfrac{450}{x}}$의 값은
$\sqrt{\dfrac{2\times3^2\times5^2}{2}}=\sqrt{3^2\times5^2}=15$ $\therefore b=15$
$\therefore a+b=2+15=17$

유형 · 8 제곱근의 대소 관계

다음 중 두 수의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $-\sqrt{10}>-3$ ② $\sqrt{\dfrac{1}{5}}>\sqrt{\dfrac{1}{6}}$
③ $\sqrt{2}>1.5$ ④ $-\sqrt{8}<-3$
⑤ $\dfrac{1}{6}>\sqrt{\dfrac{1}{6}}$

답 ②

① $3=\sqrt{9}$이고 $10>9$이므로 $-\sqrt{10}<-3$
③ $1.5=\sqrt{1.5^2}=\sqrt{2.25}$이고 $2<2.25$이므로 $\sqrt{2}<1.5$
④ $3=\sqrt{9}$이고 $8<9$이므로 $-\sqrt{8}>-3$
⑤ $\dfrac{1}{6}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{6}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{36}}$이고 $\dfrac{1}{36}<\dfrac{1}{6}$이므로 $\dfrac{1}{6}<\sqrt{\dfrac{1}{6}}$

강의 tip
$\sqrt{a}$, a, a^2의 대소 관계
① $0<a<1$이면 ➞ $\sqrt{a}>a>a^2$
② $a>1$이면 ➞ $\sqrt{a}<a<a^2$

8-1

다음 수를 크기가 작은 것부터 차례로 나열하여라.

$\sqrt{7}$, $-\sqrt{3}$, $\underbrace{3}_{=\sqrt{9}}$, 0, $-\sqrt{5}$

답 **$-\sqrt{5}$, $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{7}$, 3**

8-2

$0<a<1$일 때, 다음 중 그 값이 가장 큰 것은?

① a^2 ② a ③ $\sqrt{a}$
④ $\dfrac{1}{a}$ ⑤ $\sqrt{\dfrac{1}{a}}$

답 ④

① $0<a^2<1$ ③ $0<\sqrt{a}<1$ ④ $\dfrac{1}{a}>1$ ⑤ $\sqrt{\dfrac{1}{a}}>1$

이때 $a^2<a<\sqrt{a}$이고 $\sqrt{\dfrac{1}{a}}<\dfrac{1}{a}$이므로 $a^2<a<\sqrt{a}<1<\sqrt{\dfrac{1}{a}}<\dfrac{1}{a}$

04 무리수와 실수

▸ 1-2. 무리수와 실수

개념 1 무리수와 실수

1. 무리수

(1) **무리수**: 유리수가 아닌 수, 즉 순환소수가 아닌 무한소수

예 $\sqrt{2}=1.41421\cdots$, $\sqrt{3}=1.73205\cdots$, $\pi=3.14159\cdots$ → 무리수

(2) **소수의 분류**

- 소수
  - 유한소수 ——— 유리수
  - 무한소수
    - 순환소수 ——— 유리수
    - 순환하지 않는 무한소수 — 무리수

풍쌤의 Point 근호를 사용하여 나타낸 수 중에서 근호를 없앨 수 있는 수는 유리수야.
예를 들어 $\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$, $-\sqrt{9}=-\sqrt{3^2}=-3$은 유리수야.

◆ 유리수와 무리수

유리수는 $\dfrac{(\text{정수})}{(0\text{이 아닌 정수})}$의 꼴, 즉 분수로 나타낼 수 있는 수이지만, 무리수는 분수로 나타낼 수 없다.

2. 실수

(1) **실수**: 유리수와 무리수를 통틀어 실수라고 한다.

참고 앞으로 '수'라고 하면 실수를 뜻하는 것으로 생각한다.

(2) **실수의 분류**

- 실수
  - 유리수
    - 정수
      - 양의 정수(자연수): $1, 2, 3, \cdots$
      - 0
      - 음의 정수: $-1, -2, -3, \cdots$
    - 정수가 아닌 유리수: $\dfrac{1}{2}$, -0.3, 1.5, $\cdots$
  - 무리수(순환하지 않는 무한소수): $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, $\cdots$

예제 1

다음 수를 유리수와 무리수로 구분하여라.

(1) $-\dfrac{1}{2}$ (2) $\sqrt{6}$

답 (1) 유리수 (2) 무리수

유제 1

다음 수를 유리수와 무리수로 구분하여라.

(1) π (2) $0.\dot{2}$

답 (1) 무리수 (2) 유리수

(2) $0.\dot{2}=\dfrac{2}{9}$

예제 2

다음 설명 중 옳은 것에는 ○표, 옳지 않은 것에는 ×표를 하여라.

(1) $\sqrt{8}$은 무리수이다. ( )

(2) 순환소수는 모두 유리수이다. ( )

(3) 무리수는 실수가 아니다. ( )

답 (1) ○ (2) ○ (3) ×

유제 2

다음 설명 중 옳은 것에는 ○표, 옳지 않은 것에는 ×표를 하여라.

(1) $\sqrt{16}$은 유리수이다. (○)

(2) 무한소수는 모두 무리수이다. (×)

(3) 유리수는 실수이다. (○)

(1) $\sqrt{16}=4$는 유리수이다.
(2) 무한소수 중 순환소수는 유리수이다.

정답과 풀이 4쪽 | 워크북 7쪽

01 다음 중 순환하지 않는 무한소수로 나타내어지는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

무리수

① $-\frac{2}{3}$ ② π ③ $2+\sqrt{9}=2+3=5$

④ $\sqrt{\frac{169}{25}}=\frac{13}{5}$ ⑤ $-\sqrt{0.1}$

답 ②, ⑤

▷ 개념 1 무리수와 실수

02 다음 수 중 무리수를 모두 골라라.

$\sqrt{0.04}=0.2$, $-\sqrt{3}$, $0.\dot{5}=\frac{5}{9}$, $\sqrt{10}$, $1+\sqrt{2}$, $-\sqrt{\frac{9}{16}}=-\frac{3}{4}$

답 $-\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$, $1+\sqrt{2}$

강의 tip
$1+\sqrt{2}=1+1.41421\cdots=2.41421\cdots$은 순환하지 않는 무한소수이므로 무리수이다.
→ (유리수)±(무리수): 무리수
(무리수)±(무리수): 무리수 또는 유리수

▷ 개념 1 무리수와 실수

03 다음 설명 중 옳은 것에는 ○표, 옳지 않은 것에는 ×표를 하여라.

(1) $\sqrt{7}$은 순환하지 않는 무한소수이다. (○)

(2) 근호를 사용하여 나타낸 수는 모두 무리수이다. (×)

(3) 무한소수 중에는 유리수인 것도 있다. (○)

(4) 4는 유리수이고 $\sqrt{4}$는 무리수이다. (×)

(2) $\sqrt{9}=3$이므로 유리수이다.
(3) 무한소수 중 순환소수는 유리수이다.
(4) $\sqrt{4}=2$이므로 유리수이다.

▷ 개념 1 무리수와 실수

04 실수를 다음과 같이 분류할 때, 다음 중 □ 안의 수에 해당하는 것은?

실수 $\begin{cases} \text{유리수} \\ \boxed{\text{무리수}} \end{cases}$

① $\sqrt{25}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $0.\dot{8}$

④ $\sqrt{0.9}$ ⑤ -2.34

답 ④

① $\sqrt{25}=5$ ③ $0.\dot{8}=\frac{8}{9}$

따라서 무리수는 ④이다.

▷ 개념 1 무리수와 실수

05 제곱근표를 이용한 제곱근의 값

개념 1 제곱근표

1. 제곱근표

1.00부터 99.9까지의 수에 대한 양의 제곱근의 값을 소수점 아래 넷째 자리에서 반올림하여 나타낸 표

2. 제곱근표를 이용하여 제곱근의 값 구하기

처음 두 자리 수의 가로줄과 끝자리 수의 세로줄이 만나는 곳에 있는 수를 읽는다.

예 $\sqrt{1.73}$의 값은 제곱근표에서 1.7의 가로줄과 3의 세로줄이 만나는 곳의 수인 1.315이다.

수	0	1	2	3	4
1.5	1.225	1.229	1.233	1.237	1.241
1.6	1.265	1.269	1.273	1.277	1.281
1.7	1.304	1.308	1.311	1.315	1.319
1.8	1.342	1.345	1.349	1.353	1.356
1.9	1.378	1.382	1.386	1.389	1.393

예제 1

다음은 제곱근표의 일부이다. 이 표를 이용하여 아래 제곱근의 값을 구하여라.

수	0	1	2	3	4
1.0	1.000	1.005	1.010	1.015	1.020
1.1	1.049	1.054	1.058	1.063	1.068
1.2	1.095	1.100	1.105	1.109	1.114
1.3	1.140	1.145	1.149	1.153	1.158
1.4	1.183	1.187	1.192	1.196	1.200
1.5	1.225	1.229	1.233	1.237	1.241
1.6	1.265	1.269	1.273	1.277	1.281
1.7	1.304	1.308	1.311	1.315	1.319
1.8	1.342	1.345	1.349	1.353	1.356
1.9	1.378	1.382	1.386	1.389	1.393

(1) $\sqrt{1.24}$　(2) $\sqrt{1.92}$

(3) $\sqrt{1.4}$　(4) $\sqrt{1.63}$

답 (1) 1.114　(2) 1.386　(3) 1.183　(4) 1.277

유제 1

다음은 제곱근표의 일부이다. 이 표를 이용하여 아래 제곱근의 값을 구하여라.

수	5	6	7	8	9
1.0	1.025	1.030	1.034	1.039	1.044
1.1	1.072	1.077	1.082	1.086	1.091
1.2	1.118	1.122	1.127	1.131	1.136
1.3	1.162	1.166	1.170	1.175	1.179
1.4	1.204	1.208	1.212	1.217	1.221
1.5	1.245	1.249	1.253	1.257	1.261
1.6	1.285	1.288	1.292	1.296	1.300
1.7	1.323	1.327	1.330	1.334	1.338
1.8	1.360	1.364	1.367	1.371	1.375
1.9	1.396	1.400	1.404	1.407	1.411

(1) $\sqrt{1.38}$　(2) $\sqrt{1.87}$

(3) $\sqrt{1.59}$　(4) $\sqrt{1.75}$

답 (1) 1.175　(2) 1.367　(3) 1.261　(4) 1.323

예제 2

예제 1의 제곱근표를 이용하여 a의 값을 구하여라.

(1) $\sqrt{a}=1.010$　(2) $\sqrt{a}=1.145$

(3) $\sqrt{a}=1.378$　(4) $\sqrt{a}=1.319$

답 (1) 1.02　(2) 1.31　(3) 1.9　(4) 1.74

유제 2

유제 1의 제곱근표를 이용하여 a의 값을 구하여라.

(1) $\sqrt{a}=1.039$　(2) $\sqrt{a}=1.122$

(3) $\sqrt{a}=1.253$　(4) $\sqrt{a}=1.411$

답 (1) 1.08　(2) 1.26　(3) 1.57　(4) 1.99

01 다음 제곱근표에서 $\sqrt{8.04}$의 값이 a이고, $\sqrt{8.42}$의 값이 b일 때, $10000a-1000b$의 값은?

수	2	3	4	5	6
8.0	2.832	2.834	2.835	2.837	2.839
8.1	2.850	2.851	2.853	2.855	2.857
8.2	2.867	2.869	2.871	2.872	2.874
8.3	2.884	2.886	2.888	2.890	2.891
8.4	2.902	2.903	2.905	2.907	2.909

① 2548 ② 2562 ③ 25448
④ 25628 ⑤ 28350

답 ③
$\sqrt{8.04}=2.835=a$, $\sqrt{8.42}=2.902=b$
$\therefore 10000a-1000b=28350-2902=25448$

▷ 개념 1 제곱근표

02 다음은 아래 제곱근표를 이용하여 제곱근의 값을 구한 것이다. 잘못 구한 사람은?

수	3	4	5	6
9.0	3.005	3.007	3.008	3.010
9.1	3.022	3.023	3.025	3.027
9.2	3.038	3.040	3.041	3.043
9.3	3.055	3.056	3.058	3.059
9.4	3.071	3.072	3.074	3.076

① 다희: $\sqrt{9.03}=3.005$ ② 진수: $\sqrt{9.45}=3.074$
③ 호연: $\sqrt{9.25}=3.041$ ④ 희재: $\sqrt{9.14}=3.025$
⑤ 재영: $\sqrt{9.36}=3.059$

답 ④
④ 희재: $\sqrt{9.14}=3.023$

▷ 개념 1 제곱근표

03 다음 제곱근표에서 $\sqrt{x}=7.880$, $\sqrt{y}=8.012$를 만족시키는 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?

수	0	1	2	3
60	7.746	7.752	7.759	7.765
61	7.810	7.817	7.823	7.829
62	7.874	7.880	7.887	7.893
63	7.937	7.944	7.950	7.956
64	8.000	8.006	8.012	8.019

① 121 ② 125.1 ③ 126
④ 126.2 ⑤ 126.3

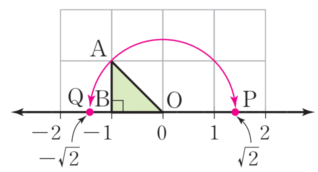
답 ⑤
$\sqrt{x}=7.880$에서 $x=62.1$, $\sqrt{y}=8.012$에서 $y=64.2$
$\therefore x+y=62.1+64.2=126.3$

▷ 개념 1 제곱근표

06 실수와 수직선

개념 1 무리수를 수직선 위에 나타내기

피타고라스 정리를 이용하여 무리수를 수직선 위에 나타낼 수 있다.



- 점 P(k)에서 오른쪽으로 $\sqrt{a}$만큼 ➔ $k+\sqrt{a}$
- 점 P(k)에서 왼쪽으로 $\sqrt{a}$만큼 ➔ $k-\sqrt{a}$

예 무리수 $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$를 수직선 위에 나타내는 방법

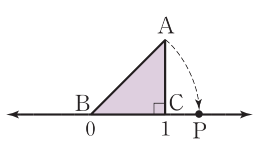
❶ 한 눈금의 길이가 1인 모눈종이 위에 직각이등변삼각형 OAB를 그린다.

❷ $\overline{\mathrm{OA}}=x$라고 하면 $x^2=1^2+1^2=2$이므로 $x=\sqrt{2}$ ($\because x>0$)

❸ 점 O를 중심으로 하고 $\overline{\mathrm{OA}}$를 반지름으로 하는 원을 그려서 수직선과 만나는 점을 P, Q라고 하면 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{2}$이므로 점 P, Q에 대응하는 수가 각각 $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$이다.

예제 1

오른쪽 수직선에서 △ABC는 직각이등변삼각형이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BP}}$가 되도록 점 P를 정할 때, 점 P에 대응하는 수를 구하여라.



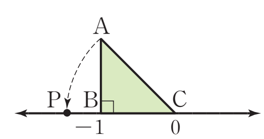
풀이 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$이므로 점 P는 기준점 B에서 오른쪽으로 $\sqrt{2}$만큼 떨어진 점이다.

$\therefore$ P$(0+\sqrt{2})=$P$(\sqrt{2})$

답 $\sqrt{2}$

유제 1

오른쪽 수직선에서 △ABC는 직각이등변삼각형이고 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{CP}}$가 되도록 점 P를 정할 때, 점 P에 대응하는 수를 구하여라.



답 $-\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}$이므로 점 P는 기준점 C에서 왼쪽으로 $\sqrt{2}$만큼 떨어진 점이다.

$\therefore$ P$(0-\sqrt{2})=$P$(-\sqrt{2})$

개념 2 실수와 수직선

1. 실수와 수직선

(1) 수직선은 유리수와 무리수, 즉 실수에 대응하는 점들로 완전히 메워져 있다.

(2) 서로 다른 두 실수 사이에는 무수히 많은 실수가 있다.

(3) 모든 실수는 각각 수직선 위의 한 점에 대응한다. 또한 수직선 위의 한 점에는 하나의 실수가 반드시 대응한다.

풍쌤의 Point 수직선을 유리수만으로 또는 무리수만으로 완전히 메울 수 없어.

예제 2

다음 설명 중 옳은 것에는 ○표, 옳지 않은 것에는 ×표를 하여라.

(1) $\dfrac{1}{4}$과 $\dfrac{1}{3}$ 사이에는 무수히 많은 무리수가 있다. (　　)

(2) 4와 5 사이에는 무리수가 유한개 있다. (　　)

답 (1) ○ (2) ×

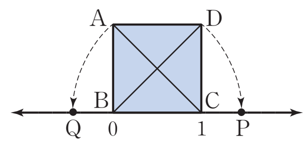
유제 2

다음 설명 중 옳은 것에는 ○표, 옳지 않은 것에는 ×표를 하여라.

(1) $\sqrt{2}$와 $\sqrt{5}$ 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다. (○)

(2) 모든 실수는 각각 수직선 위의 한 점에 대응한다. (○)

01 오른쪽 그림에서 사각형 ABCD는 한 변의 길이가 1인 정사각형이고 $\overline{BD}=\overline{BP}$, $\overline{CA}=\overline{CQ}$일 때, 두 점 P, Q에 대응하는 수를 각각 구하여라.



답 P: $\sqrt{2}$, Q: $1-\sqrt{2}$

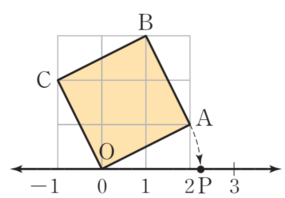
$\overline{BD}=\overline{CA}=\sqrt{2}$이므로 P$(\sqrt{2})$, Q$(1-\sqrt{2})$

▶ 개념 1
무리수를 수직선 위에 나타내기

02 오른쪽 그림에서 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. 다음 물음에 답하여라.

(1) □OABC의 한 변의 길이를 구하여라.

(2) $\overline{OA}=\overline{OP}$일 때, 점 P에 대응하는 수를 구하여라.



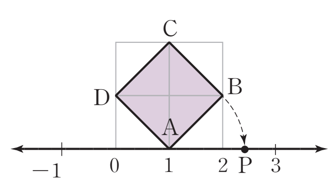
답 (1) $\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{5}$

(1) $\overline{OA}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$이므로 □OABC의 한 변의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

(2) $\overline{OP}=\overline{OA}=\sqrt{5}$이므로 점 P에 대응하는 수는 $\sqrt{5}$이다.

▶ 개념 1
무리수를 수직선 위에 나타내기

03 오른쪽 그림에서 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. $\overline{AB}=\overline{AP}$일 때, 점 P의 좌표를 구하여라.



답 $1+\sqrt{2}$

$\overline{AB}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

따라서 $\overline{AP}=\overline{AB}=\sqrt{2}$이므로 점 P의 좌표는 $1+\sqrt{2}$이다.

▶ 개념 1
무리수를 수직선 위에 나타내기

04 다음 〈보기〉 중 옳은 것을 모두 골라라.

보기

ㄱ. 1과 2 사이에는 무리수가 2개 있다.

ㄴ. 1에 가장 가까운 무리수는 $\sqrt{2}$이다.

ㄷ. 정수에 대응하는 점만으로 수직선을 완전히 메울 수 없다.

ㄹ. 실수만으로 수직선을 완전히 메울 수 없다.

ㅁ. 0.2와 0.4 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.

답 ㄷ, ㅁ

ㄱ. 1과 2 사이에는 무수히 많은 무리수가 있다.

ㄴ. 1에 가장 가까운 무리수는 정할 수 없다.

ㄹ. 실수만으로 수직선을 완전히 메울 수 있다.

▶ 개념 2
실수와 수직선

07 실수의 대소 관계

▸ 1-2. 무리수와 실수

개념 1 실수의 대소 관계

두 실수 a, b의 대소 관계는 $a-b$의 부호로 알 수 있다.

(1) $a-b>0$이면 $a>b$ (2) $a-b=0$이면 $a=b$ (3) $a-b<0$이면 $a<b$

예 두 수 $\sqrt{3}+1$과 3의 대소 관계 ➜ $(\sqrt{3}+1)-3=\sqrt{3}-2=\sqrt{3}-\sqrt{4}<0$이므로 $\sqrt{3}+1<3$

풍쌤의 Point 다음과 같은 방법으로도 두 실수의 대소 관계를 알 수 있어.

① 부등식의 성질 이용

$3-\sqrt{3}\ \bigcirc\ 2-\sqrt{3} \xrightarrow{\text{양변에 } \sqrt{3}\text{을 더하면}} 3 > 2 \quad \therefore 3-\sqrt{3} > 2-\sqrt{3}$

② 제곱근의 값 이용

$2\ \bigcirc\ \sqrt{2}+1 \xrightarrow{\sqrt{2}=1.414\cdots\text{로 계산}} 2 < 2.414\cdots \quad \therefore 2 < \sqrt{2}+1$

- 실수의 대소 관계
  - ① (음수)$<0<$(양수)
  - ② 음수끼리는 절댓값이 작은 수가 더 크다.
  - ③ 양수끼리는 절댓값이 큰 수가 더 크다.

예제 1

두 수 $\sqrt{3}-2$와 $\sqrt{5}-2$의 대소를 비교하는 다음 과정을 완성하여라.

[방법 1] 두 수를 직접 비교

$\sqrt{3}<\sqrt{5}$이므로 양변에 □를 빼면

$\sqrt{3}-2\ \bigcirc\ \sqrt{5}-2$

[방법 2] 두 수의 차 이용

$(\sqrt{3}-2)-(\sqrt{5}-2)=\sqrt{3}-\sqrt{5}\ \bigcirc\ 0$이므로

$\sqrt{3}-2\ \bigcirc\ \sqrt{5}-2$

답 2, <, <, <

유제 1

두 수 $2+\sqrt{3}$과 $\sqrt{5}+\sqrt{3}$의 대소를 비교하는 다음 과정을 완성하여라.

[방법 1] 두 수를 직접 비교

$2=\sqrt{4}$에서 $2 < \sqrt{5}$이므로

양변에 $\boxed{\sqrt{3}}$을 더하면 $2+\sqrt{3} < \sqrt{5}+\sqrt{3}$

[방법 2] 두 수의 차 이용

$2+\sqrt{3}-(\sqrt{5}+\sqrt{3})=\boxed{2}-\sqrt{5}$

$2-\sqrt{5}=\sqrt{\boxed{4}}-\sqrt{5}<0$이므로 $2+\sqrt{3} < \sqrt{5}+\sqrt{3}$

개념 2 무리수의 정수 부분과 소수 부분

무리수는 순환하지 않는 무한소수이므로 정수 부분과 소수 부분으로 나누어 나타낼 수 있다.

(무리수)=(정수 부분)+(소수 부분)

➜(소수 부분)=(무리수)−(정수 부분)

예 $1<\sqrt{2}<2$ ➜ ($\sqrt{2}$의 정수 부분)$=1$, ($\sqrt{2}$의 소수 부분)$=\sqrt{2}-1$

- $a>0$이고, n은 음이 아닌 정수일 때, $n<\sqrt{a}<n+1$이면
  - ① $\sqrt{a}$의 정수 부분 ➜ n
  - ② $\sqrt{a}$의 소수 부분 ➜ $\sqrt{a}-n$

예제 2

다음은 $\sqrt{8}$의 정수 부분과 소수 부분을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$\sqrt{4}<\sqrt{8}<\sqrt{9}$에서 $2<\sqrt{8}<$□이므로

(정수 부분)=□, (소수 부분)=□

답 3, 2, $\sqrt{8}-2$

유제 2

다음은 $\sqrt{13}$의 정수 부분과 소수 부분을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$\sqrt{9}<\sqrt{13}<\sqrt{16}$에서 $\boxed{3}<\sqrt{13}<4$이므로

(정수 부분)$=\boxed{3}$, (소수 부분)$=\boxed{\sqrt{13}-3}$

정답과 풀이 5쪽 | 워크북 10~11쪽

01 다음 두 수의 대소를 비교하여 ◯ 안에 > 또는 <를 써넣어라.

(1) $2+\sqrt{3}$ (<) $2+\sqrt{5}$ (2) $3-\sqrt{5}$ (>) $3-\sqrt{7}$

(3) $-1+\sqrt{3}$ (<) $-1+\sqrt{5}$ (4) $-4-\sqrt{11}$ (>) $-4-\sqrt{13}$

▷ 개념 1 실수의 대소 관계

02 다음 두 수의 대소를 비교하여 ◯ 안에 > 또는 <를 써넣어라.

(1) $\sqrt{3}+3$ (<) 5 (2) $1+\sqrt{2}$ (>) $\sqrt{4}$

(3) $\sqrt{7}-1$ (<) 2 (4) -5 (>) $-1-\sqrt{18}$

(1) $\sqrt{3}+3-5=\sqrt{3}-2=\sqrt{3}-\sqrt{4}<0$
(2) $1+\sqrt{2}-\sqrt{4}=1+\sqrt{2}-2=\sqrt{2}-1>0$
(3) $\sqrt{7}-1-2=\sqrt{7}-3=\sqrt{7}-\sqrt{9}<0$
(4) $-5-(-1-\sqrt{18})=-4+\sqrt{18}=-\sqrt{16}+\sqrt{18}>0$

▷ 개념 1 실수의 대소 관계

03 $\sqrt{10}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, 다음은 $a-b$의 값을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$3<\sqrt{10}<4$이므로 $a=\boxed{3}$, $b=\sqrt{10}-\boxed{3}$
$\therefore a-b=\boxed{3}-(\sqrt{10}-\boxed{3})=\boxed{6-\sqrt{10}}$

▷ 개념 2 무리수의 정수 부분과 소수 부분

04 다음 무리수의 정수 부분과 소수 부분을 각각 구하여라.

(1) $\sqrt{7}+1$ (2) $\sqrt{11}-1$

(3) $\sqrt{12}-3$ (4) $2+\sqrt{20}$

답 (1) (정수 부분)$=3$, (소수 부분)$=\sqrt{7}-2$ (2) (정수 부분)$=2$, (소수 부분)$=\sqrt{11}-3$
(3) (정수 부분)$=0$, (소수 부분)$=\sqrt{12}-3$ (4) (정수 부분)$=6$, (소수 부분)$=\sqrt{20}-4$

(1) $2<\sqrt{7}<3$이므로 $3<\sqrt{7}+1<4$ $\therefore$ (정수 부분)$=3$, (소수 부분)$=\sqrt{7}-2$
(2) $3<\sqrt{11}<4$이므로 $2<\sqrt{11}-1<3$ $\therefore$ (정수 부분)$=2$, (소수 부분)$=\sqrt{11}-3$
(3) $3<\sqrt{12}<4$이므로 $0<\sqrt{12}-3<1$ $\therefore$ (정수 부분)$=0$, (소수 부분)$=\sqrt{12}-3$
(4) $4<\sqrt{20}<5$이므로 $6<2+\sqrt{20}<7$ $\therefore$ (정수 부분)$=6$, (소수 부분)$=\sqrt{20}-4$

▷ 개념 2 무리수의 정수 부분과 소수 부분

유형 1 유리수와 무리수의 구별

다음 수에 대한 설명으로 옳은 것은?

$-6,\quad \underbrace{\sqrt{144}}_{=12},\quad 2.\dot{7},\quad \frac{3}{4},\quad \underbrace{\sqrt{0.09}}_{=0.3},\quad -\sqrt{0.2}$

① 정수는 1개이다. → -6, $\sqrt{144}$의 2개
② 자연수는 없다. → $\sqrt{144}$의 1개
③ 유리수는 2개이다. → -6, $\sqrt{144}$, $2.\dot{7}$, $\frac{3}{4}$, $\sqrt{0.09}$의 5개
④ 정수가 아닌 유리수는 4개이다. → $2.\dot{7}$, $\frac{3}{4}$, $\sqrt{0.09}$의 3개
⑤ 순환하지 않는 무한소수는 1개이다. → $-\sqrt{0.2}$의 1개

답 ⑤

1-1

다음 중 무리수인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $7-\sqrt{9}$　② $\frac{\sqrt{8}}{2}$　③ $-\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$
④ $\sqrt{0.\dot{4}}$　⑤ $\frac{\pi}{3}$

답 ②, ⑤
① $7-\sqrt{9}=7-3=4$　③ $-\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{1}{2}$　④ $\sqrt{0.\dot{4}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$
따라서 무리수인 것은 ②, ⑤이다.

1-2

다음 중 유리수의 개수를 a, 순환하지 않는 무한소수의 개수를 b라고 할 때, $a-b$의 값을 구하여라.

$\sqrt{\frac{25}{4}},\quad -\sqrt{0.01},\quad \sqrt{10},\quad \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{3},\quad 3.14,\quad -\sqrt{2}+2,\quad \sqrt{121}$

답 2

$\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$, $-\sqrt{0.01}=-0.1$, $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$, $\sqrt{121}=11$, 3.14는 유리수이므로 $a=5$
순환하지 않는 무한소수는 무리수이므로 무리수는 $\sqrt{10}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $-\sqrt{2}+2$의 3개이다.　$\therefore b=3$
$\therefore a-b=5-3=2$

유형 2 무리수의 이해

다음 중 옳지 않은 것은?

① 순환소수는 모두 유리수이다.
② 무한소수는 모두 무리수이다.
③ 순환소수는 모두 무한소수이다.
④ 순환하지 않는 무한소수는 무리수이다.
⑤ 실수 중에서 유리수가 아닌 수는 무리수이다.

답 ②
② 순환소수는 무한소수이지만 유리수이다.

강의 tip
⑤ 실수 중에는 유리수가 아니면서 무리수가 아닌 수는 없다. 또한 유리수이면서 무리수인 수도 없다. 즉, 실수는 유리수와 무리수로 이루어져 있으며 모든 실수는 유리수와 무리수 둘 중 하나이다.

2-1

다음 중 $\sqrt{3}$에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 제곱하면 유리수가 된다.
② 무리수이다.
③ 3의 양의 제곱근이다.
④ 순환하지 않는 무한소수로 나타내어진다.
⑤ 기약분수로 나타낼 수 있다.

답 ⑤
⑤ $\sqrt{3}$은 무리수이고 기약분수로 나타낼 수 있는 수는 유리수이므로 $\sqrt{3}$은 기약분수로 나타낼 수 없다.

2-2

다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① 유한소수는 모두 유리수이다.
② 소수는 유한소수와 순환소수로 이루어져 있다.
③ 무한소수는 모두 유리수이다.
④ 순환하지 않는 무한소수는 무리수이다.
⑤ 순환하는 무한소수는 $\frac{(\text{정수})}{(0\text{이 아닌 정수})}$의 꼴로 나타낼 수 없다.

답 ①, ④

② 소수는 유한소수와 무한소수로 이루어져 있다.
③ 무한소수 중 순환하지 않는 무한소수는 무리수이다.
⑤ 순환하는 무한소수, 즉 순환소수는 유리수이므로 $\frac{(\text{정수})}{(0\text{이 아닌 정수})}$의 꼴로 나타낼 수 있다.

유형 • 3 제곱근의 값 구하기

다음은 제곱근표의 일부분이다. 이 표를 이용하여 아래 제곱근의 값을 구하여라.

수	0	1	2	3
2.4	1.549	1.552	1.556	1.559
2.5	1.581	1.584	1.587	1.591
2.6	1.612	1.616	1.619	1.622
2.7	1.643	1.646	1.649	1.652

(1) $\sqrt{2.63}$ (2) $\sqrt{2.7}$

(3) $\sqrt{2.41}$ (4) $\sqrt{2.52}$

답 (1) **1.622** (2) **1.643** (3) **1.552** (4) **1.587**

3-1

다음은 제곱근표의 일부분이다. 이 표를 이용하여 $\sqrt{13.2}+\sqrt{16.3}$의 값을 구하여라.

수	0	1	2	3	4
12	3.464	3.479	3.493	3.507	3.521
13	3.606	3.619	3.633	3.647	3.661
14	3.742	3.755	3.768	3.782	3.795
15	3.873	3.886	3.899	3.912	3.924
16	4.000	4.012	4.025	4.037	4.050

답 **7.67**

$\sqrt{13.2}+\sqrt{16.3}=3.633+4.037=7.67$

3-2

위의 제곱근표에서 $\sqrt{x}=3.479$, $\sqrt{y}=3.912$일 때, $10y-x$의 값을 구하여라.

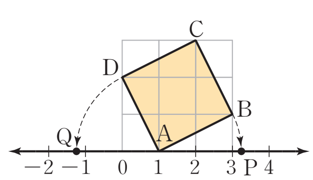
답 **140.9**

$\sqrt{x}=3.479$에서 $x=12.1$, $\sqrt{y}=3.912$에서 $y=15.3$

$\therefore 10y-x=10\times15.3-12.1=140.9$

유형 • 4 무리수를 수직선 위에 나타내기 (1)

오른쪽 그림에서 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1인 정사각형일 때, 다음을 구하여라.



(1) $\overline{AB}=\overline{AP}$일 때, 점 P에 대응하는 수

(2) $\overline{AD}=\overline{AQ}$일 때, 점 Q에 대응하는 수

답 (1) $\mathbf{1+\sqrt{5}}$ (2) $\mathbf{1-\sqrt{5}}$

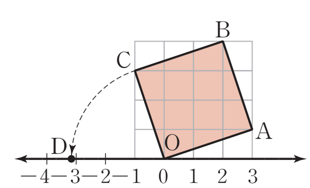
$\overline{AB}=\overline{AD}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

(1) $\overline{AP}=\overline{AB}=\sqrt{5}$이므로 점 P에 대응하는 수는 $1+\sqrt{5}$이다.

(2) $\overline{AQ}=\overline{AD}=\sqrt{5}$이므로 점 Q에 대응하는 수는 $1-\sqrt{5}$이다.

4-1

오른쪽 그림에서 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. $\overline{OC}=\overline{OD}$일 때, 점 D에 대응하는 수를 구하여라.



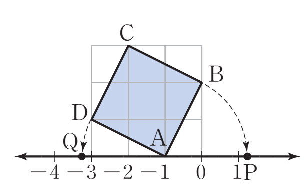
답 $\mathbf{-\sqrt{10}}$

$\overline{OC}=\overline{OA}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

따라서 $\overline{OD}=\overline{OC}=\sqrt{10}$이므로 점 D에 대응하는 수는 $-\sqrt{10}$이다.

4-2

오른쪽 그림에서 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. $\overline{AB}=\overline{AP}$, $\overline{AD}=\overline{AQ}$일 때, 두 점 P, Q에 대응하는 두 수의 합을 구하여라.



답 **−2**

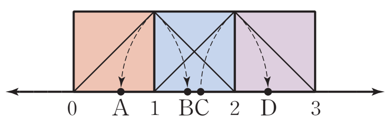
$\overline{AP}=\overline{AB}=\sqrt{5}$이므로 점 P에 대응하는 수는 $-1+\sqrt{5}$,

$\overline{AQ}=\overline{AD}=\sqrt{5}$이므로 점 Q에 대응하는 수는 $-1-\sqrt{5}$

$\therefore (-1+\sqrt{5})+(-1-\sqrt{5})=-2$

유형 • 5 무리수를 수직선 위에 나타내기 (2)

다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 3개의 정사각형을 수직선 위에 나타내었을 때, $2-\sqrt{2}$에 대응하는 점을 구하여라.

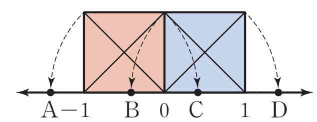


답 점 A

$2-\sqrt{2}$에 대응하는 점은 2에서 왼쪽으로 $\sqrt{2}$만큼 떨어진 점이다.
한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 $2-\sqrt{2}$에 대응하는 점은 점 A이다.

5-1

다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 2개의 정사각형을 수직선 위에 나타내었다. 이때 다음 각 수에 대응하는 점을 찾아라.



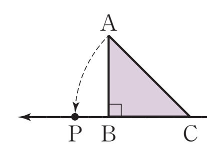
(1) $1-\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{2}-1$

답 (1) 점 B (2) 점 C

(1) $1-\sqrt{2}$에 대응하는 점은 1에서 왼쪽으로 $\sqrt{2}$만큼 떨어진 점이므로 점 B이다.
(2) $\sqrt{2}-1$에 대응하는 점은 -1에서 오른쪽으로 $\sqrt{2}$만큼 떨어진 점이므로 점 C이다.

5-2

오른쪽 그림에서 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{BC}=1$인 직각이등변삼각형이다. $\overline{AC}=\overline{CP}$이고, 점 P에 대응하는 수가 3일 때, 점 C에 대응하는 수를 구하여라.



강의 tip
주어진 수는 점 P에 대응하는 수이므로 도형의 꼭짓점 중 하나가 아니더라도 기준점이 점 P임에 주의한다.

답 $3+\sqrt{2}$

$\overline{CP}=\overline{AC}=\sqrt{2}$이고 점 C는 점 P에서 오른쪽으로 $\sqrt{2}$만큼 떨어진 점이므로 점 C에 대응하는 수는 $3+\sqrt{2}$이다.

유형 • 6 실수와 수직선

다음 설명 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① 0과 2 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.
② $\sqrt{3}$과 2 사이에는 무수히 많은 무리수가 있다.
③ 유리수에 대응하는 점들로 수직선을 완전히 메울 수 있다.
④ 유리수와 무리수에 대응하는 점들로 수직선을 완전히 메울 수 있다.
⑤ 서로 다른 두 정수 사이에는 무수히 많은 정수가 있다.

답 ③, ⑤

③ 수직선은 실수에 대응하는 점으로 완전히 메울 수 있다.
그러나 유리수에 대응하는 점만으로는 수직선을 완전히 메울 수 없다.
⑤ 서로 다른 두 정수 사이에는 정수가 없거나 유한개의 정수가 있다.

6-1

다음 〈보기〉 중 수직선에서 $\sqrt{3}$과 $\sqrt{10}$에 대응하는 두 점 사이에 있는 실수에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 골라라.

보기
ㄱ. 무리수는 6개이다.
ㄴ. 유리수는 무한개이다.
ㄷ. 무수히 많은 실수가 있다.

답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. 두 수 사이에 무수히 많은 무리수가 있다.

6-2

다음 〈보기〉 중 옳지 않은 것을 골라라.

보기
ㄱ. 0과 $\sqrt{2}$ 사이의 자연수는 하나뿐이다.
ㄴ. $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{2}$ 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.
ㄷ. $\sqrt{2}-1$은 수직선 위에서 원점의 왼쪽에 위치한다.

답 ㄷ

ㄱ. $1<\sqrt{2}<2$이므로 0과 $\sqrt{2}$ 사이의 자연수는 1 하나뿐이다.
ㄷ. $\sqrt{2}-1>0$이므로 $\sqrt{2}-1$은 수직선 위에서 원점의 오른쪽에 위치한다.

유형 • 7 실수의 대소 관계

다음 중 두 실수의 대소 관계가 옳은 것은?

① $3<\sqrt{10}-1$　② $2+\sqrt{7}>\sqrt{7}+\sqrt{5}$

③ $4-\sqrt{\frac{1}{6}}>4-\sqrt{\frac{1}{5}}$　④ $2-\sqrt{5}<1-\sqrt{5}$

⑤ $\sqrt{3}+\sqrt{6}>\sqrt{5}+\sqrt{6}$

답 ③

① $3-(\sqrt{10}-1)=4-\sqrt{10}=\sqrt{16}-\sqrt{10}>0$　$\therefore 3>\sqrt{10}-1$

② $(2+\sqrt{7})-(\sqrt{7}+\sqrt{5})=2-\sqrt{5}=\sqrt{4}-\sqrt{5}<0$　$\therefore 2+\sqrt{7}<\sqrt{7}+\sqrt{5}$

③ $\left(4-\sqrt{\frac{1}{6}}\right)-\left(4-\sqrt{\frac{1}{5}}\right)=-\sqrt{\frac{1}{6}}+\sqrt{\frac{1}{5}}>0$　$\therefore 4-\sqrt{\frac{1}{6}}>4-\sqrt{\frac{1}{5}}$

④ $(2-\sqrt{5})-(1-\sqrt{5})=1>0$　$\therefore 2-\sqrt{5}>1-\sqrt{5}$

⑤ $(\sqrt{3}+\sqrt{6})-(\sqrt{5}+\sqrt{6})=\sqrt{3}-\sqrt{5}<0$　$\therefore \sqrt{3}+\sqrt{6}<\sqrt{5}+\sqrt{6}$

7-1

다음 중 두 실수의 대소 관계가 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{11}-2<\sqrt{11}-1$　② $\sqrt{7}+1>\sqrt{5}+1$

③ $3<\sqrt{5}+2$　④ $\sqrt{2}+1<2$

⑤ $3+\sqrt{2}>\sqrt{2}+\sqrt{8}$

답 ④

① $(\sqrt{11}-2)-(\sqrt{11}-1)=-1<0$　$\therefore \sqrt{11}-2<\sqrt{11}-1$

② $(\sqrt{7}+1)-(\sqrt{5}+1)=\sqrt{7}-\sqrt{5}>0$　$\therefore \sqrt{7}+1>\sqrt{5}+1$

③ $3-(\sqrt{5}+2)=1-\sqrt{5}<0$　$\therefore 3<\sqrt{5}+2$

④ $(\sqrt{2}+1)-2=\sqrt{2}-1>0$　$\therefore \sqrt{2}+1>2$

⑤ $(3+\sqrt{2})-(\sqrt{2}+\sqrt{8})=3-\sqrt{8}=\sqrt{9}-\sqrt{8}>0$

$\therefore 3+\sqrt{2}>\sqrt{2}+\sqrt{8}$

7-2

다음 세 실수 a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은?

$$a=5-\sqrt{2},\quad b=5-\sqrt{3},\quad c=4$$

① $a<b<c$　② $a<c<b$　③ $b<a<c$

④ $b<c<a$　⑤ $c<a<b$

답 ③

$a-b=(5-\sqrt{2})-(5-\sqrt{3})=-\sqrt{2}+\sqrt{3}>0$이므로 $a>b$

$a-c=(5-\sqrt{2})-4=1-\sqrt{2}<0$이므로 $a<c$

$\therefore b<a<c$

강의 tip

$a=3.\times\times\times$, $b=3.\times\times\times$, $c=4$이므로 c는 a, b보다 크다. 따라서 a와 b의 대소만을 판별하면 세 수의 대소 관계를 알 수 있다.

유형 • 8 무리수의 정수 부분과 소수 부분

$\sqrt{7}-1$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $2a+b$의 값은?

① $-1+\sqrt{7}$　② $\sqrt{7}$　③ $2-\sqrt{7}$

④ 2　⑤ $2+\sqrt{7}$

답 ②

$2<\sqrt{7}<3$에서 $1<\sqrt{7}-1<2$이므로 $a=1$

$\therefore b=(\sqrt{7}-1)-1=\sqrt{7}-2$

$\therefore 2a+b=2\times1+(\sqrt{7}-2)=2+\sqrt{7}-2=\sqrt{7}$

강의 tip

〈간단하게 a, b의 값 구하기〉

$\sqrt{7}=2.\times\times\times$이므로 $\sqrt{7}-1=1.\times\times\times$

$\therefore a=1$, $b=(\sqrt{7}-1)-1=\sqrt{7}-2$

8-1

$5-\sqrt{11}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $b-a$의 값을 구하여라.

답 $3-\sqrt{11}$

$3<\sqrt{11}<4$에서 $-4<-\sqrt{11}<-3$이므로

$1<5-\sqrt{11}<2$　$\therefore a=1$

$\therefore b=(5-\sqrt{11})-1=4-\sqrt{11}$

$\therefore b-a=(4-\sqrt{11})-1=3-\sqrt{11}$

8-2

$\sqrt{8}-1$의 정수 부분을 x, $5-\sqrt{6}$의 소수 부분을 y라고 할 때, $x-y$의 값을 구하여라.

답 $-2+\sqrt{6}$

$2<\sqrt{8}<3$에서 $1<\sqrt{8}-1<2$이므로 $x=1$

$2<\sqrt{6}<3$에서 $-3<-\sqrt{6}<-2$이므로 $2<5-\sqrt{6}<3$

즉, $5-\sqrt{6}$의 정수 부분이 2이므로

$y=(5-\sqrt{6})-2=3-\sqrt{6}$

$\therefore x-y=1-(3-\sqrt{6})=-2+\sqrt{6}$

단원 마무리하기

정답과 풀이 7~8쪽 | 워크북 12~13쪽

01 다음 중 옳은 것은?

① -36의 제곱근은 ± 6이다.

② 제곱근 121은 ± 11이다.

③ $(-8)^2$의 제곱근은 -8이다.

④ 제곱근 $\frac{16}{25}$은 $\frac{4}{5}$이다.

⑤ 0을 제외한 모든 수의 제곱근은 2개이다.

답 ④

①, ⑤ 음수의 제곱근은 없다.

② 제곱근 121은 $\sqrt{121}=11$이다.

③ $(-8)^2=64$의 제곱근은 ± 8이다.

④ 제곱근 $\frac{16}{25}$은 $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$이다.

02 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{(-11)^2}=11$　② $(\sqrt{7})^2=7$

③ $-\sqrt{(-3)^2}=3$　④ $\{-\sqrt{(-5)^2}\}^2=25$

⑤ $-\sqrt{13^2}=-13$

답 ③

③ $-\sqrt{(-3)^2}=-3$

강의 tip

$\sqrt{(-81)^2}$이 -81이라고 착각하지 않도록 주의시킨다.

$\sqrt{(-81)^2}=\sqrt{81^2}=81$이므로 81의 음의 제곱근을 구하는 것이다.

03 $\sqrt{(-81)^2}$의 음의 제곱근을 a, $\frac{9}{64}$의 양의 제곱근을 b라고 할 때, $a \div b$의 값은?

① -24　② -12　③ 3

④ 12　⑤ 24

답 ①

$\sqrt{(-81)^2}=81$의 음의 제곱근은 $-\sqrt{81}=-9$이므로 $a=-9$

$\frac{9}{64}$의 양의 제곱근은 $\sqrt{\frac{9}{64}}=\frac{3}{8}$이므로 $b=\frac{3}{8}$

$\therefore a \div b=-9 \div \frac{3}{8}=-9\times\frac{8}{3}=-24$

04 $\sqrt{81}-\sqrt{(-8)^2}\times\sqrt{\frac{9}{4}}+(-\sqrt{5})^2$을 계산하면?

① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

답 ②

$\sqrt{81}-\sqrt{(-8)^2}\times\sqrt{\frac{9}{4}}+(-\sqrt{5})^2=9-8\times\frac{3}{2}+5$

$=9-12+5=2$

05 $a<0$일 때, $-\sqrt{(-a)^2}+\sqrt{(3a)^2}-\sqrt{36a^2}$을 간단히 하면?

① $-4a$　② $-2a$　③ $2a$

④ $4a$　⑤ $8a$

답 ④

$a<0$이므로 $-a>0$, $3a<0$, $6a<0$이다.

$\therefore -\sqrt{(-a)^2}+\sqrt{(3a)^2}-\sqrt{36a^2}=-\sqrt{(-a)^2}+\sqrt{(3a)^2}-\sqrt{(6a)^2}$

$=-(-a)+(-3a)-(-6a)$

$=a-3a+6a=4a$

06 다음 중 두 수의 대소 관계가 옳은 것은?

① $\sqrt{13}<\sqrt{10}$　② $0.2<\sqrt{0.02}$

③ $-\sqrt{7}<-\sqrt{6}$　④ $\sqrt{(-3)^2}<2$

⑤ $\sqrt{\frac{1}{7}}<\frac{1}{7}$

답 ③

① $\sqrt{13}>\sqrt{10}$

② $0.2=\sqrt{0.2^2}=\sqrt{0.04}$이므로 $0.2>\sqrt{0.02}$

③ $\sqrt{7}>\sqrt{6}$이므로 $-\sqrt{7}<-\sqrt{6}$

④ $\sqrt{(-3)^2}=3$이므로 $\sqrt{(-3)^2}>2$

⑤ $\frac{1}{7}=\sqrt{\frac{1}{49}}$이므로 $\sqrt{\frac{1}{7}}>\frac{1}{7}$

07 $\sqrt{(\sqrt{23}-5)^2}-\sqrt{(5-\sqrt{23})^2}$을 간단히 하면?

① -10　② $-\sqrt{23}$　③ 0

④ $\sqrt{23}$　⑤ 10

답 ③

$\sqrt{23}-5=\sqrt{23}-\sqrt{25}<0$, $5-\sqrt{23}=\sqrt{25}-\sqrt{23}>0$이다.

$\therefore \sqrt{(\sqrt{23}-5)^2}-\sqrt{(5-\sqrt{23})^2}=-(\sqrt{23}-5)-(5-\sqrt{23})$

$=-\sqrt{23}+5-5+\sqrt{23}$

$=0$

강의 tip

자연수가 될 때와 정수가 될 때를 구별하여 설명한다.

자연수이면 $21-x>0$, 정수이면 $21-x\geq 0$

08 $\sqrt{21-x}$가 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 값 중 가장 큰 값을 A, 가장 작은 값을 B라고 할 때, $A+B$의 값은?

① 25　② 27　③ 29

④ 32　⑤ 34

답 ①

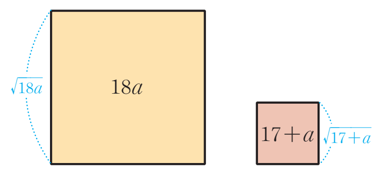
$\sqrt{21-x}$가 자연수가 되려면 $21-x$가 21보다 작은 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

즉, $21-x=1, 4, 9, 16$에서 $x=5, 12, 17, 20$

따라서 x의 값 중 가장 큰 값은 20, 가장 작은 값은 5이므로 $A=20$, $B=5$

$\therefore A+B=20+5=25$

09 다음 그림과 같이 넓이가 각각 $18a$, $17+a$인 두 개의 정사각형이 있다. 이 두 개의 정사각형의 한 변의 길이가 각각 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 a의 값은?



① 2　　② 3　　③ 8
④ 19　　⑤ 32

답 ③
넓이가 $18a$인 정사각형의 한 변의 길이 $\sqrt{18a}=\sqrt{2\times3^2\times a}$가 자연수가 되려면 a는 $2\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 하므로 a의 값은
$2\times1^2=2,\ 2\times2^2=8,\ 2\times3^2=18,\ 2\times4^2=32,\ \dots$ …… ㉠
넓이가 $17+a$인 정사각형의 한 변의 길이 $\sqrt{17+a}$가 자연수가 되려면 $17+a$는 17보다 큰 (자연수)^{2}의 꼴이어야 하므로
$17+a=25,\ 36,\ 49,\ \dots$ $\therefore a=8,\ 19,\ 32,\ \dots$ …… ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 구하는 가장 작은 자연수 a의 값은 8이다.

10 다음 중 무리수로만 짝지어진 것은?

① $\pi,\ \sqrt{5},\ 0.\dot{1}$ → $0.\dot{1}$은 유리수
② $\sqrt{21},\ -\sqrt{2},\ \sqrt{\dfrac{1}{100}}$
③ $\underbrace{\sqrt{2^3}}_{\sqrt{8}},\ \underbrace{\sqrt{3^3}}_{\sqrt{27}},\ -\sqrt{7}$　$\dfrac{1}{10}$
④ $\underbrace{1,\ 0}_{\text{유리수}},\ \pi$
⑤ $\dfrac{4}{3},\ \underbrace{\sqrt{16}}_{4},\ -2.4$

답 ③

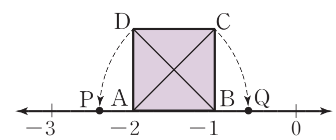
강의 tip
4개 이상의 수의 대소를 판별할 때에는
① 먼저 양수와 음수로 나눈다. → (음수)$<0<$(양수)
② 음수와 양수 각각에서 두 수씩 골라 대소를 비교한다.

11 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① 무리수는 순환하지 않는 무한소수이다.
② 양수의 제곱근은 모두 무리수이다.
③ $\sqrt{2}+1,\ -\sqrt{11},\ \sqrt{0.4}$는 모두 무리수이다.
④ 무리수는 분수 $\dfrac{b}{a}$ (a, b는 정수, $a\neq0$)의 꼴로 나타낼 수 없다.
⑤ $\underbrace{\sqrt{81}}_{9}$의 양의 제곱근은 무리수이다.

답 ②, ⑤
② 제곱수의 제곱근은 유리수이다.
⑤ $\sqrt{81}=9$의 양의 제곱근은 $\sqrt{9}=3$이므로 유리수이다.

12 다음 그림에서 □ABCD는 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. $\overline{BD}=\overline{BP}$, $\overline{AC}=\overline{AQ}$일 때, 두 점 P, Q에 각각 대응하는 수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?



① -3　　② -2　　③ -1
④ $-1+\sqrt{2}$　　⑤ $\sqrt{2}$

답 ①
$\overline{BP}=\overline{BD}=\overline{AC}=\overline{AQ}=\sqrt{2}$
즉, $P(-1-\sqrt{2})$, $Q(-2+\sqrt{2})$이므로
$a=-1-\sqrt{2},\ b=-2+\sqrt{2}$
$\therefore a+b=(-1-\sqrt{2})+(-2+\sqrt{2})=-3$

강의 tip
$\overline{AC}=\overline{BD}$이지만 두 점 P, Q는 기준점이 다르므로 좌표를 구할 때 주의해야 한다.

13 다음 중 두 실수의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $3+\sqrt{2}<4$　　② $1+\sqrt{3}>3$
③ $\sqrt{15}+1>5$　　④ $-1>\sqrt{5}-3$
⑤ $3-\sqrt{5}<5-\sqrt{5}$

답 ⑤
① $(3+\sqrt{2})-4=\sqrt{2}-1>0$　$\therefore 3+\sqrt{2}>4$
② $(1+\sqrt{3})-3=\sqrt{3}-2=\sqrt{3}-\sqrt{4}<0$　$\therefore 1+\sqrt{3}<3$
③ $(\sqrt{15}+1)-5=\sqrt{15}-4=\sqrt{15}-\sqrt{16}<0$　$\therefore \sqrt{15}+1<5$
④ $-1-(\sqrt{5}-3)=-\sqrt{5}+2=-\sqrt{5}+\sqrt{4}<0$　$\therefore -1<\sqrt{5}-3$
⑤ $(3-\sqrt{5})-(5-\sqrt{5})=-2<0$　$\therefore 3-\sqrt{5}<5-\sqrt{5}$

14 다음 수들을 수직선 위에 나타낼 때, 왼쪽에서 세 번째에 오는 수를 구하여라.

$1+\sqrt{3},\quad \sqrt{3}-1,\quad -\sqrt{3},\quad 1-\sqrt{3},\quad 1,\quad \sqrt{3}$

답 $\sqrt{3}-1$
$1<\sqrt{3}$이므로 $-\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$은 음수, $1+\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-1$, 1, $\sqrt{3}$은 양수이다.
이때 $\sqrt{3}-1<\sqrt{3}<1+\sqrt{3}$이고 $(\sqrt{3}-1)-1=\sqrt{3}-2=\sqrt{3}-\sqrt{4}<0$에서 $\sqrt{3}-1<1$이므로 $-\sqrt{3}<1-\sqrt{3}<\sqrt{3}-1<1<\sqrt{3}<1+\sqrt{3}$
따라서 구하는 수는 $\sqrt{3}-1$이다.

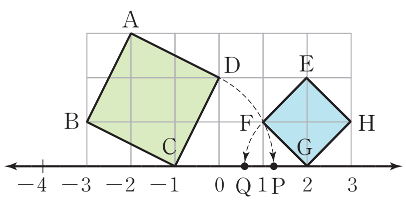
15 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)
(단, $\sqrt{2}$는 1.414, $\sqrt{3}$은 1.732, $\sqrt{5}$는 2.236으로 계산한다.)

① $\sqrt{5}-1$은 $\sqrt{3}$과 $\sqrt{5}$ 사이에 있는 무리수이다.
② $\sqrt{2}$와 $\sqrt{5}$ 사이에는 1개의 정수가 있다.
③ $\sqrt{3}$과 $\sqrt{5}$ 사이에는 무수히 많은 무리수가 있다.
④ $\sqrt{2}+1$은 $\sqrt{3}$과 $\sqrt{5}$ 사이에 있는 무리수이다.
⑤ $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$은 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에 있다.

답 ①, ④
① $\sqrt{5}-1$은 $2.236-1=1.236$이므로 $\sqrt{3}$보다 작다.
② $\sqrt{2}$와 $\sqrt{5}$ 사이에 있는 정수는 2의 1개이다.
④ $\sqrt{2}+1$은 $1.414+1=2.414$이므로 $\sqrt{5}$보다 크다.
⑤ $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$은 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$의 평균이므로 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에 있다.

주어진 단계에 따라 쓰는 유형

16 다음 그림에서 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1인 정사각형이고, $\overline{CD}=\overline{CP}$, $\overline{GF}=\overline{GQ}$일 때, $\overline{PQ}$의 길이를 구하여라.



생각해 보자

구하는 것은? 점 P와 Q에 대응하는 수를 이용하여 $\overline{PQ}$의 길이 구하기

주어진 것은? ① 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1인 정사각형
② $\overline{CD}=\overline{CP}$, $\overline{GF}=\overline{GQ}$

풀이

[1단계] $\overline{CD}$와 $\overline{GF}$의 길이 구하기 (30 %)

$\overline{CD}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$
$\overline{GF}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

[2단계] 두 점 P, Q에 대응하는 수 구하기 (40 %)

$\overline{CP}=\overline{CD}=\sqrt{5}$이므로 점 P에 대응하는 수는 $-1+\sqrt{5}$
$\overline{GQ}=\overline{GF}=\sqrt{2}$이므로 점 Q에 대응하는 수는 $2-\sqrt{2}$

[3단계] $\overline{PQ}$의 길이 구하기 (30 %)

$\therefore \overline{PQ}=(-1+\sqrt{5})-(2-\sqrt{2})$
$=-1+\sqrt{5}-2+\sqrt{2}$
$=\sqrt{5}+\sqrt{2}-3$

답 $\sqrt{5}+\sqrt{2}-3$

풀이 과정을 자세히 쓰는 유형

17 두 수 a, b에 대하여 $a<b$, $ab<0$일 때, $\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(b-a)^2}-3\sqrt{a^2}$을 간단히 하여라.

풀이

$ab<0$에서 a와 b의 부호는 서로 반대이고, $a<b$이므로
$a<0$, $b>0$ ······ ❶
이때 $a-b<0$, $b-a>0$이므로 ······ ❷
$\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(b-a)^2}-3\sqrt{a^2}=-(a-b)+(b-a)-3\times(-a)$
$=-a+b+b-a+3a$
$=a+2b$ ······ ❸

단계	채점 기준	비율
❶	a, b의 부호 구하기	30 %
❷	$a-b$, $b-a$의 부호 구하기	20 %
❸	주어진 식을 간단히 하기	50 %

답 $a+2b$

18 $\sqrt{\dfrac{12}{x}}$가 자연수가 되게 하는 가장 작은 자연수 x의 값을 a, $\sqrt{90-y}$가 자연수가 되게 하는 가장 작은 두 자리의 자연수 y의 값을 b라고 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

풀이

$\sqrt{\dfrac{12}{x}}=\sqrt{\dfrac{2^2\times3}{x}}$이 자연수가 되려면 x는 12의 약수이면서 $3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
즉, x의 값은 $3\times1^2=3$, $3\times2^2=12$이므로 가장 작은 자연수 x의 값은 3이다.
$\therefore a=3$ ······ ❶
$\sqrt{90-y}$가 자연수가 되려면 $90-y$는 90보다 작은 (자연수)^{2}의 꼴이어야 하므로
$90-y=1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$
$\therefore y=9, 26, 41, 54, 65, 74, 81, 86, 89$
따라서 가장 작은 두 자리의 자연수 y의 값은 26이다.
$\therefore b=26$ ······ ❷
$\therefore a+b=3+26=29$ ······ ❸

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값 구하기	40 %
❷	b의 값 구하기	40 %
❸	$a+b$의 값 구하기	20 %

답 29

2 근호를 포함한 식의 계산

01 제곱근의 곱셈과 나눗셈

▸ 2-1. 근호를 포함한 식의 곱셈과 나눗셈

개념 1 제곱근의 곱셈과 나눗셈

1. 제곱근의 곱셈

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 유리수일 때

(1) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 　예 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$

(2) $m\sqrt{a}\times n\sqrt{b}=mn\sqrt{ab}$ 　예 $2\sqrt{3}\times3\sqrt{5}=(2\times3)\sqrt{3\times5}=6\sqrt{15}$

2. 제곱근의 나눗셈

$a>0$, $b>0$이고 m, n $(n\neq0)$이 유리수일 때

(1) $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 　예 $\sqrt{3}\div\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

(2) $m\sqrt{a}\div n\sqrt{b}=m\sqrt{a}\times\dfrac{1}{n\sqrt{b}}=\dfrac{m}{n}\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 　예 $4\sqrt{10}\div2\sqrt{5}=\dfrac{4\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{4}{2}\sqrt{\dfrac{10}{5}}=2\sqrt{2}$

예제 1

다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times\square}=\sqrt{\square}$

(2) $\sqrt{3}\div\sqrt{5}=\sqrt{3\div\square}=\sqrt{\square}$

답 (1) 3, 6 　(2) 5, $\dfrac{3}{5}$

유제 1

다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}\times\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\sqrt{\dfrac{1}{3}\times\boxed{\dfrac{1}{5}}}=\sqrt{\boxed{\dfrac{1}{15}}}$

(2) $\sqrt{14}\div\sqrt{2}=\sqrt{14\div\boxed{2}}=\sqrt{\boxed{7}}$

개념 2 근호가 있는 식의 변형

1. 근호가 있는 식의 변형

근호 안의 제곱인 인수는 근호 밖으로 꺼내어 간단히 할 수 있다.

즉, $a>0$, $b>0$일 때

(1) $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$ 　예 $\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times3}=2\sqrt{3}$ (근호 밖으로)

(2) $\sqrt{\dfrac{b}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{b}}{a}$ 　예 $\sqrt{\dfrac{5}{9}}=\sqrt{\dfrac{5}{3^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ (근호 밖으로)

참고 근호 밖의 양수는 제곱하여 근호 안에 넣을 수 있다.

$3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\times2}=\sqrt{18}$, $-3\sqrt{2}=-\sqrt{3^2\times2}=-\sqrt{18}$ (제곱해서 안으로)

주의 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타낼 때에는 일반적으로 b가 가장 작은 자연수가 되도록 한다.

풍쌤의 Point 근호 밖에 있는 수를 근호 안에 넣을 때, 반드시 양수만 제곱하여 넣어야 해.

$-2\sqrt{2}=\sqrt{(-2)^2\times2}=\sqrt{8}$ (×) 　$-2\sqrt{2}=-\sqrt{2^2\times2}=-\sqrt{8}$ (○)

예제 2

다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) $\sqrt{8}=\sqrt{\square^2\times2}=\square\sqrt{2}$

(2) $2\sqrt{3}=\sqrt{\square^2\times3}=\sqrt{\square}$

답 (1) 2, 2 　(2) 2, 12

유제 2

다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) $\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\sqrt{\dfrac{3}{\boxed{2}^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\boxed{2}}$

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\dfrac{2}{\boxed{2}^2}}=\sqrt{\boxed{\dfrac{1}{2}}}$

01 다음을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{3}\sqrt{5}$
(2) $\sqrt{6}\times(-\sqrt{7})$

(3) $(-3\sqrt{2})\times4\sqrt{5}$
(4) $5\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$

답 (1) $\sqrt{15}$ (2) $-\sqrt{42}$ (3) $-12\sqrt{10}$ (4) $3\sqrt{6}$

▶ 개념 1 제곱근의 곱셈과 나눗셈

02 다음을 간단히 하여라.

(1) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{4}}$
(2) $-\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

(3) $2\sqrt{4}\div3\sqrt{2}$
(4) $6\sqrt{18}\div3\sqrt{3}$

답 (1) $\sqrt{3}$ (2) -2 (3) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (4) $2\sqrt{6}$

(1) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\dfrac{12}{4}}=\sqrt{3}$
(2) $-\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=-\sqrt{\dfrac{20}{5}}=-\sqrt{4}=-2$

(3) $2\sqrt{4}\div3\sqrt{2}=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{4}{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
(4) $6\sqrt{18}\div3\sqrt{3}=\dfrac{6}{3}\sqrt{\dfrac{18}{3}}=2\sqrt{6}$

▶ 개념 1 제곱근의 곱셈과 나눗셈

03 다음 수를 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타내어라.

(1) $\sqrt{20}$
(2) $-\sqrt{48}$

(3) $\sqrt{\dfrac{7}{36}}$
(4) $-\sqrt{\dfrac{5}{64}}$

답 (1) $2\sqrt{5}$ (2) $-4\sqrt{3}$ (3) $\dfrac{\sqrt{7}}{6}$ (4) $-\dfrac{\sqrt{5}}{8}$

(1) $\sqrt{20}=\sqrt{2^2\times5}=2\sqrt{5}$
(2) $-\sqrt{48}=-\sqrt{4^2\times3}=-4\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{\dfrac{7}{36}}=\sqrt{\dfrac{7}{6^2}}=\dfrac{\sqrt{7}}{6}$
(4) $-\sqrt{\dfrac{5}{64}}=-\sqrt{\dfrac{5}{8^2}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{8}$

▶ 개념 2 근호가 있는 식의 변형

04 다음 수를 $\sqrt{a}$의 꼴로 나타내어라.

(1) $4\sqrt{2}$
(2) $-3\sqrt{6}$

(3) $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$
(4) $-\dfrac{\sqrt{75}}{5}$

답 (1) $\sqrt{32}$ (2) $-\sqrt{54}$ (3) $\sqrt{\dfrac{7}{9}}$ (4) $-\sqrt{3}$

(1) $4\sqrt{2}=\sqrt{4^2\times2}=\sqrt{32}$
(2) $-3\sqrt{6}=-\sqrt{3^2\times6}=-\sqrt{54}$

(3) $\dfrac{\sqrt{7}}{3}=\sqrt{\dfrac{7}{3^2}}=\sqrt{\dfrac{7}{9}}$
(4) $-\dfrac{\sqrt{75}}{5}=-\sqrt{\dfrac{75}{5^2}}=-\sqrt{3}$

▶ 개념 2 근호가 있는 식의 변형

02 분모의 유리화와 곱셈, 나눗셈의 혼합 계산

▸ 2-1. 근호를 포함한 식의 곱셈과 나눗셈

개념 1 분모의 유리화

1. 분모의 유리화

분수의 분모가 근호를 포함한 무리수일 때, 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하여 분모를 유리수로 고치는 것

2. 분모의 유리화 방법

$a>0$, $b>0$일 때

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{1\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{a}$ 예 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{b}\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{a}$ 예 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(3) $\dfrac{c}{b\sqrt{a}}=\dfrac{c\times\sqrt{a}}{b\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\dfrac{c\sqrt{a}}{ab}$ 예 $\dfrac{3}{2\sqrt{5}}=\dfrac{3\times\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$

• 분모를 유리화할 때, 분모의 근호가 있는 부분만 분모와 분자에 각각 곱한다. 즉, $\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$의 분모와 분자에 $2\sqrt{5}$가 아닌 $\sqrt{5}$를 곱한다.

풍쌤의 Point 분모를 유리화할 때, 먼저 분모의 근호 안을 가장 간단한 자연수로 만드는 것이 편리해.

➜ $\dfrac{1}{\sqrt{8}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

예제 1

분모를 유리화하는 다음 과정을 완성하여라.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\square}=\dfrac{\sqrt{2}}{\square}$

(2) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\times\square}{\sqrt{3}\times\square}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\square}$

답 (1) $\sqrt{2}$, 2 (2) $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 3

유제 1

분모를 유리화하는 다음 과정을 완성하여라.

(1) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{7}\times\boxed{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}\times\boxed{\sqrt{5}}}=\dfrac{\boxed{\sqrt{35}}}{5}$

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\boxed{\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}\times\boxed{\sqrt{3}}}=\dfrac{\boxed{\sqrt{6}}}{6}$

개념 2 제곱근의 곱셈과 나눗셈의 혼합 계산

근호를 포함한 식의 계산에서 곱셈과 나눗셈의 혼합 계산은 다음과 같이 한다.

① 근호 안에 어떤 수의 제곱이 곱해져 있으면 근호 밖으로 꺼내고, 나눗셈은 역수의 곱셈으로 바꾼다.

② 앞에서부터 순서대로 계산한다.

③ 계산한 결과의 분모가 근호를 포함한 무리수일 때에는 분모를 유리화한다.

예제 2

다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{14}\div\sqrt{7}$ (2) $\sqrt{6}\div\sqrt{3}\times\sqrt{5}$

풀이 (1) $\sqrt{3}\times\sqrt{14}\div\sqrt{7}=\sqrt{3}\times\sqrt{14}\times\dfrac{1}{\sqrt{7}}=\sqrt{6}$

(2) $\sqrt{6}\div\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{6}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\sqrt{5}=\sqrt{10}$

답 (1) $\sqrt{6}$ (2) $\sqrt{10}$

유제 2

다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{21}\div\sqrt{6}$ (2) $\sqrt{6}\div\sqrt{15}\times\sqrt{35}$

답 (1) $\sqrt{7}$ (2) $\sqrt{14}$

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{21}\div\sqrt{6}=\sqrt{2}\times\sqrt{21}\times\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\sqrt{7}$

(2) $\sqrt{6}\div\sqrt{15}\times\sqrt{35}=\sqrt{6}\times\dfrac{1}{\sqrt{15}}\times\sqrt{35}=\sqrt{14}$

개념 확인하기

정답과 풀이 8~9쪽 | 워크북 15~16쪽

01 다음 수의 분모를 유리화하여라.

▶ 개념 1 분모의 유리화

(1) $\frac{3}{\sqrt{6}}$ (2) $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$

(3) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (4) $-\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}$

답 (1) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{33}}{11}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (4) $-\frac{\sqrt{10}}{8}$

(1) $\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{3\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

(2) $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}=-\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{11}}{\sqrt{11}\times\sqrt{11}}=-\frac{\sqrt{33}}{11}$

(3) $\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{1\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

(4) $-\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{4\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{8}$

02 다음 수의 분모를 유리화하여라.

▶ 개념 1 분모의 유리화

(1) $\frac{1}{\sqrt{24}}$ (2) $-\frac{2}{\sqrt{8}}$

(3) $\frac{5}{\sqrt{20}}$ (4) $-\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{18}}$

답 (1) $\frac{\sqrt{6}}{12}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (4) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

(1) $\frac{1}{\sqrt{24}}=\frac{1}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{12}$

(2) $-\frac{2}{\sqrt{8}}=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\frac{5}{\sqrt{20}}=\frac{5}{2\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{10}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

(4) $-\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{18}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=-\frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\frac{2\sqrt{6}}{6}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

03 다음을 간단히 하여라.

▶ 개념 2 제곱근의 곱셈과 나눗셈의 혼합 계산

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{5}\div\sqrt{15}$ (2) $\sqrt{5}\div\sqrt{15}\times\sqrt{6}$

(3) $\sqrt{12}\times\sqrt{6}\div\sqrt{3}$ (4) $\sqrt{18}\div\sqrt{6}\times\sqrt{8}$

답 (1) 1 (2) $\sqrt{2}$ (3) $2\sqrt{6}$ (4) $2\sqrt{6}$

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{5}\div\sqrt{15}=\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\frac{1}{\sqrt{15}}=1$

(2) $\sqrt{5}\div\sqrt{15}\times\sqrt{6}=\sqrt{5}\times\frac{1}{\sqrt{15}}\times\sqrt{6}=\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{12}\times\sqrt{6}\div\sqrt{3}=2\sqrt{3}\times\sqrt{6}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=2\sqrt{6}$

(4) $\sqrt{18}\div\sqrt{6}\times\sqrt{8}=3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{6}}\times2\sqrt{2}=6\sqrt{\frac{2}{3}}=2\sqrt{6}$

04 다음을 간단히 하여라.

▶ 개념 2 제곱근의 곱셈과 나눗셈의 혼합 계산

(1) $\sqrt{6}\div\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{8}\times\sqrt{\frac{5}{2}}\div\frac{1}{\sqrt{10}}$

(3) $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{7}\div\frac{\sqrt{6}}{4}$ (4) $\frac{6}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{12}}{2}\div\frac{1}{\sqrt{2}}$

답 (1) 4 (2) $10\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{14}$ (4) $6\sqrt{2}$

(1) $\sqrt{6}\div\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\sqrt{2}=2\sqrt{4}=4$

(2) $\sqrt{8}\times\sqrt{\frac{5}{2}}\div\frac{1}{\sqrt{10}}=\sqrt{8}\times\sqrt{\frac{5}{2}}\times\sqrt{10}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$

(3) $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{7}\div\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{7}\times\frac{4}{\sqrt{6}}=2\sqrt{\frac{7}{2}}=\sqrt{14}$

(4) $\frac{6}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{12}}{2}\div\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{12}}{2}\times\sqrt{2}=3\sqrt{8}=6\sqrt{2}$

03 제곱근표에 없는 제곱근의 값 구하기

▸ 2-1. 근호를 포함한 식의 곱셈과 나눗셈

개념 1 제곱근표에 없는 제곱근의 값 구하기

1. 제곱근표에 없는 제곱근의 값 구하기

제곱근표에 없는 수의 제곱근의 값은 $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$ $(a>0,\ b>0)$를 이용하여 구한다.

(1) **100보다 큰 수의 제곱근의 값**

① 근호 안의 수를 $100a$, $10000a$, $1000000a$, $\cdots$의 꼴로 나타낸다.

② $\sqrt{100a}=10\sqrt{a}$, $\sqrt{10000a}=100\sqrt{a}$, $\sqrt{1000000a}=1000\sqrt{a}$, $\cdots$임을 이용하여 값을 구한다.

예 $\sqrt{500}=\sqrt{100\times5}=10\sqrt{5}=10\times2.236=22.36$

제곱근표에서 $\sqrt{5}=2.236$임을 이용한다.

(2) **0보다 크고 1보다 작은 수의 제곱근의 값**

근호 안의 수를 $\dfrac{a}{100}$, $\dfrac{a}{10000}$, $\dfrac{a}{1000000}$, $\cdots$의 꼴로 나타낸다.

➜ $\sqrt{\dfrac{a}{100}}=\dfrac{\sqrt{a}}{10}$, $\sqrt{\dfrac{a}{10000}}=\dfrac{\sqrt{a}}{100}$, $\sqrt{\dfrac{a}{1000000}}=\dfrac{\sqrt{a}}{1000}$, $\cdots$임을 이용하여 값을 구한다.

예 $\sqrt{0.5}=\sqrt{\dfrac{50}{100}}=\dfrac{\sqrt{50}}{10}=\dfrac{7.071}{10}=0.7071$

제곱근표에서 $\sqrt{50}=7.071$임을 이용한다.

예제 1

$\sqrt{3}=1.732$일 때, 다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) $\sqrt{300}=\sqrt{\square\times3}=\square\sqrt{3}=\square$

(2) $\sqrt{0.03}=\sqrt{\dfrac{3}{\square}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\square}=\square$

답 (1) 100, 10, 17.32　(2) 100, 10, 0.1732

유제 1

$\sqrt{7}=2.646$일 때, 다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) $\sqrt{700}=\sqrt{\boxed{100}\times7}=\boxed{10}\sqrt{7}=\boxed{26.46}$

(2) $\sqrt{0.0007}=\sqrt{\dfrac{7}{\boxed{10000}}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\boxed{100}}=\boxed{0.02646}$

예제 2

$\sqrt{2}=1.414$, $\sqrt{20}=4.472$일 때, 다음 제곱근의 값을 구하여라.

(1) $\sqrt{200}$　(2) $\sqrt{0.2}$

풀이 (1) $\sqrt{200}=\sqrt{100\times2}=10\sqrt{2}=14.14$

(2) $\sqrt{0.2}=\sqrt{\dfrac{20}{100}}=\dfrac{\sqrt{20}}{10}=0.4472$

답 (1) 14.14　(2) 0.4472

유제 2

$\sqrt{6}=2.449$, $\sqrt{60}=7.746$일 때, 다음 제곱근의 값을 구하여라.

(1) $\sqrt{6000}$　(2) $\sqrt{0.06}$

답 (1) 77.46　(2) 0.2449

(1) $\sqrt{6000}=\sqrt{100\times60}=10\sqrt{60}=77.46$

(2) $\sqrt{0.06}=\sqrt{\dfrac{6}{100}}=\dfrac{\sqrt{6}}{10}=0.2449$

01 다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

개념 1 제곱근표에 없는 제곱근의 값 구하기

(1) $\sqrt{300}=\sqrt{\boxed{100}\times3}=\boxed{10}\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{25000}=\sqrt{\boxed{10000}\times2.5}=\boxed{100}\sqrt{2.5}$

(3) $\sqrt{0.02}=\sqrt{\dfrac{2}{\boxed{100}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\boxed{10}}$

02 제곱근표에서 $\sqrt{8.42}=2.902$, $\sqrt{84.2}=9.176$일 때, 다음 제곱근의 값을 구하여라.

개념 1 제곱근표에 없는 제곱근의 값 구하기

(1) $\sqrt{842}$　　(2) $\sqrt{8420}$

(3) $\sqrt{0.842}$　　(4) $\sqrt{0.000842}$

답 (1) 29.02　(2) 91.76　(3) 0.9176　(4) 0.02902

(1) $\sqrt{842}=\sqrt{100\times8.42}=10\sqrt{8.42}=10\times2.902=29.02$

(2) $\sqrt{8420}=\sqrt{100\times84.2}=10\sqrt{84.2}=10\times9.176=91.76$

(3) $\sqrt{0.842}=\sqrt{\dfrac{84.2}{100}}=\dfrac{\sqrt{84.2}}{10}=\dfrac{9.176}{10}=0.9176$

(4) $\sqrt{0.000842}=\sqrt{\dfrac{8.42}{10000}}=\dfrac{\sqrt{8.42}}{100}=\dfrac{2.902}{100}=0.02902$

03 $\sqrt{5.37}=2.317$일 때, $\sqrt{a}=23.17$을 만족시키는 유리수 a의 값은?

개념 1 제곱근표에 없는 제곱근의 값 구하기

① 53.7　② 537　③ 5370

④ 53700　⑤ 537000

답 ②

$23.17=10\times2.317=10\sqrt{5.37}=\sqrt{10^2\times5.37}=\sqrt{537}$

$\therefore a=537$

04 $\sqrt{3}=1.732$일 때, 다음 중 그 값을 구할 수 없는 것은?

개념 1 제곱근표에 없는 제곱근의 값 구하기

① $\sqrt{0.0003}$　② $\sqrt{0.03}$　③ $\sqrt{75}$

④ $\sqrt{300}$　⑤ $\sqrt{3000}$

답 ⑤

① $\sqrt{0.0003}=\sqrt{\dfrac{3}{10000}}=\dfrac{\sqrt{3}}{100}=\dfrac{1.732}{100}=0.01732$

② $\sqrt{0.03}=\sqrt{\dfrac{3}{100}}=\dfrac{\sqrt{3}}{10}=\dfrac{1.732}{10}=0.1732$

③ $\sqrt{75}=\sqrt{3\times5^2}=5\sqrt{3}=5\times1.732=8.66$

④ $\sqrt{300}=\sqrt{3\times10^2}=10\sqrt{3}=10\times1.732=17.32$

⑤ $\sqrt{3000}=\sqrt{30\times10^2}=10\sqrt{30}$

유형 확인하기

유형 • 1 제곱근의 곱셈과 나눗셈

다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{2}\times\sqrt{13}=\sqrt{26}$

② $\dfrac{\sqrt{7}}{2}\times6\sqrt{5}=3\sqrt{35}$

③ $-2\sqrt{6}\times\dfrac{7\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=-14\sqrt{21}$

④ $6\sqrt{24}\div\sqrt{6}=24$

⑤ $\dfrac{2\sqrt{8}}{\sqrt{3}}\div\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}}\right)=-8$

답 ④

③ $-2\sqrt{6}\times\dfrac{7\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=(-2\times7)\sqrt{6\times\dfrac{7}{2}}=-14\sqrt{21}$

④ $6\sqrt{24}\div\sqrt{6}=6\sqrt{24}\times\dfrac{1}{\sqrt{6}}=6\sqrt{24\times\dfrac{1}{6}}=6\sqrt{4}=6\times2=12$

⑤ $\dfrac{2\sqrt{8}}{\sqrt{3}}\div\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}}\right)=\dfrac{2\sqrt{8}}{\sqrt{3}}\times\left(-\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}\right)=-2\sqrt{\dfrac{8}{3}\times\dfrac{12}{2}}$

$=-2\sqrt{16}=-2\times4=-8$

1-1

다음 〈보기〉 중 옳은 것을 모두 골라라.

보기

ㄱ. $\sqrt{3}\times\sqrt{11}=\sqrt{33}$

ㄴ. $2\sqrt{20}\div(-6\sqrt{4})=-3\sqrt{5}$

ㄷ. $\sqrt{\dfrac{4}{5}}\times5\sqrt{\dfrac{15}{2}}=\sqrt{6}$

ㄹ. $\dfrac{6}{\sqrt{2}}\div\dfrac{3}{\sqrt{10}}=2\sqrt{5}$

답 ㄱ, ㄹ

ㄱ. $\sqrt{3}\times\sqrt{11}=\sqrt{3\times11}=\sqrt{33}$

ㄴ. $2\sqrt{20}\div(-6\sqrt{4})=2\sqrt{20}\times\left(-\dfrac{1}{6\sqrt{4}}\right)=-\dfrac{2}{6}\sqrt{20\times\dfrac{1}{4}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

ㄷ. $\sqrt{\dfrac{4}{5}}\times5\sqrt{\dfrac{15}{2}}=5\sqrt{\dfrac{4}{5}\times\dfrac{15}{2}}=5\sqrt{6}$

ㄹ. $\dfrac{6}{\sqrt{2}}\div\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{6}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{10}}{3}=\dfrac{6}{3}\sqrt{\dfrac{1}{2}\times10}=2\sqrt{5}$

1-2

다음을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

$$\sqrt{\frac{7}{2}}\times\sqrt{\frac{6}{35}}=a,\ \sqrt{8}\div\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}}=b$$

답 $\sqrt{2}$

$\sqrt{\dfrac{7}{2}}\times\sqrt{\dfrac{6}{35}}=\sqrt{\dfrac{7}{2}\times\dfrac{6}{35}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$이므로 $a=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

$\sqrt{8}\div\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}}=\sqrt{8}\times\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}=\sqrt{8\times\dfrac{5}{12}}=\sqrt{\dfrac{10}{3}}$이므로 $b=\sqrt{\dfrac{10}{3}}$

$\therefore ab=\sqrt{\dfrac{3}{5}}\times\sqrt{\dfrac{10}{3}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}\times\dfrac{10}{3}}=\sqrt{2}$

유형 • 2 근호가 있는 식의 변형

다음 중 옳지 않은 것은?

① $3\sqrt{2}=\sqrt{18}$

② $-4\sqrt{5}=-\sqrt{80}$

③ $\sqrt{\dfrac{12}{25}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

④ $\sqrt{0.24}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

⑤ $-\sqrt{0.4}=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

답 ④

① $3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\times2}=\sqrt{18}$

② $-4\sqrt{5}=-\sqrt{4^2\times5}=-\sqrt{80}$

③ $\sqrt{\dfrac{12}{25}}=\sqrt{\dfrac{2^2\times3}{5^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

④ $\sqrt{0.24}=\sqrt{\dfrac{24}{100}}=\sqrt{\dfrac{6}{25}}=\sqrt{\dfrac{6}{5^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{5}$

⑤ $-\sqrt{0.4}=-\sqrt{\dfrac{40}{100}}=-\sqrt{\dfrac{2^2\times10}{10^2}}=-\dfrac{2\sqrt{10}}{10}=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

2-1

$\sqrt{32}=a\sqrt{2}$, $\sqrt{\dfrac{11}{25}}=\dfrac{\sqrt{11}}{b}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

답 ②

$\sqrt{32}=\sqrt{4^2\times2}=4\sqrt{2}$이므로 $a=4$, $\sqrt{\dfrac{11}{25}}=\sqrt{\dfrac{11}{5^2}}=\dfrac{\sqrt{11}}{5}$이므로 $b=5$

$\therefore a-b=4-5=-1$

2-2

$3\sqrt{7}=\sqrt{a}$, $\sqrt{0.28}=\dfrac{\sqrt{b}}{5}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $\dfrac{a}{b}$의 값은?

① 5　② 7　③ 9　④ 11　⑤ 13

답 ③

$3\sqrt{7}=\sqrt{3^2\times7}=\sqrt{63}$이므로 $a=63$

$\sqrt{0.28}=\sqrt{\dfrac{28}{100}}=\sqrt{\dfrac{7}{25}}=\sqrt{\dfrac{7}{5^2}}=\dfrac{\sqrt{7}}{5}$이므로 $b=7$

$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{63}{7}=9$

유형·3 문자를 이용한 제곱근의 표현

$\sqrt{0.3}=a$, $\sqrt{3}=b$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{300}=10b$　② $\sqrt{30}=10a$

③ $\sqrt{0.03}=\frac{b}{10}$　④ $\sqrt{0.003}=\frac{a}{10}$

⑤ $\sqrt{0.00003}=\frac{b}{100}$

답 ⑤

① $\sqrt{300}=\sqrt{100\times3}=10\sqrt{3}=10b$

② $\sqrt{30}=\sqrt{100\times0.3}=10\sqrt{0.3}=10a$

③ $\sqrt{0.03}=\sqrt{\frac{3}{100}}=\frac{\sqrt{3}}{10}=\frac{b}{10}$

④ $\sqrt{0.003}=\sqrt{\frac{0.3}{100}}=\frac{\sqrt{0.3}}{10}=\frac{a}{10}$

⑤ $\sqrt{0.00003}=\sqrt{\frac{0.3}{10000}}=\frac{\sqrt{0.3}}{100}=\frac{a}{100}$

강의 tip

근호 안의 수를 10^2, 100^2, 1000^2, … 또는 $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{100^2}$, $\frac{1}{1000^2}$, …이 곱해진 형태로 나타낸다.

3-1

$\sqrt{2}=a$, $\sqrt{3}=b$일 때, $\sqrt{150}$을 a, b를 이용하여 나타내면?

① ab^2　② a^2b　③ $5ab^2$

④ $5ab$　⑤ $5a^2b$

답 ④

$\sqrt{150}=\sqrt{2\times3\times5^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times5=5ab$

3-2

$\sqrt{2}=x$, $\sqrt{3}=y$일 때, $\sqrt{48}-\sqrt{50}$을 a, b를 이용하여 나타내면?

① $-5x+4y$　② $-4x+5y$　③ $4x-5y$

④ $5x-5y$　⑤ $5x-4y$

답 ①

$\sqrt{48}-\sqrt{50}=\sqrt{4^2\times3}-\sqrt{5^2\times2}=4\sqrt{3}-5\sqrt{2}=-5x+4y$

유형·4 분모의 유리화

$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=a\sqrt{10}$, $\frac{4}{\sqrt{50}}=b\sqrt{2}$일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

(단, a, b는 유리수)

답 1

$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$　$\therefore a=\frac{3}{5}$

$\frac{4}{\sqrt{50}}=\frac{4}{5\sqrt{2}}=\frac{4\times\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{10}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$　$\therefore b=\frac{2}{5}$

$\therefore a+b=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1$

4-1

다음 중 분모를 유리화한 것으로 옳지 않은 것은?

① $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$　② $\frac{5}{\sqrt{12}}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$

③ $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{14}}{6}$　④ $\sqrt{\frac{3}{32}}=8\sqrt{6}$

⑤ $\frac{12\sqrt{5}}{\sqrt{12}}=2\sqrt{15}$

답 ④

④ $\sqrt{\frac{3}{32}}=\sqrt{\frac{3}{4^2\times2}}=\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{4\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{8}$

4-2

$\frac{6}{\sqrt{2}}=a\sqrt{2}$, $\frac{5}{\sqrt{2\sqrt{6}}}=b\sqrt{3}$일 때, ab의 값을 구하여라.

(단, a, b는 유리수)

답 $\frac{5}{2}$

$\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$　$\therefore a=3$

$\frac{5}{\sqrt{2\sqrt{6}}}=\frac{5}{2\sqrt{3}}=\frac{5\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$　$\therefore b=\frac{5}{6}$

$\therefore ab=3\times\frac{5}{6}=\frac{5}{2}$

유형 5 제곱근표에 없는 수의 제곱근의 값 구하기 (1)

$\sqrt{2.58}=1.606$, $\sqrt{25.8}=5.079$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{25800}=160.6$
② $\sqrt{2580}=50.79$
③ $\sqrt{258}=16.06$
④ $\sqrt{0.258}=0.1606$
⑤ $\sqrt{0.00258}=0.05079$

답 ④
① $\sqrt{25800}=\sqrt{10000\times2.58}=100\sqrt{2.58}=100\times1.606=160.6$
② $\sqrt{2580}=\sqrt{100\times25.8}=10\sqrt{25.8}=10\times5.079=50.79$
③ $\sqrt{258}=\sqrt{100\times2.58}=10\sqrt{2.58}=10\times1.606=16.06$
④ $\sqrt{0.258}=\sqrt{\frac{25.8}{100}}=\frac{\sqrt{25.8}}{10}=\frac{5.079}{10}=0.5079$
⑤ $\sqrt{0.00258}=\sqrt{\frac{25.8}{10000}}=\frac{\sqrt{25.8}}{100}=\frac{5.079}{100}=0.05079$

5-1

$\sqrt{7.35}=2.711$, $\sqrt{73.5}=8.573$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\sqrt{0.00735}=0.008573$　② $\sqrt{0.0735}=0.2711$
③ $\sqrt{0.735}=0.8573$　④ $\sqrt{735}=85.73$
⑤ $\sqrt{7350}=271.1$

답 ②, ③
① $\sqrt{0.00735}=\sqrt{\frac{73.5}{10000}}=\frac{\sqrt{73.5}}{100}=\frac{8.573}{100}=0.08573$
② $\sqrt{0.0735}=\sqrt{\frac{7.35}{100}}=\frac{\sqrt{7.35}}{10}=\frac{2.711}{10}=0.2711$
③ $\sqrt{0.735}=\sqrt{\frac{73.5}{100}}=\frac{\sqrt{73.5}}{10}=\frac{8.573}{10}=0.8573$
④ $\sqrt{735}=\sqrt{100\times7.35}=10\sqrt{7.35}=10\times2.711=27.11$
⑤ $\sqrt{7350}=\sqrt{100\times73.5}=10\sqrt{73.5}=10\times8.573=85.73$

5-2

$\sqrt{4.3}=2.074$, $\sqrt{43}=6.557$일 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 골라라.

보기
ㄱ. $\sqrt{0.043}=0.6557$　ㄴ. $\sqrt{4300}=65.57$
ㄷ. $\sqrt{0.43}=0.2074$　ㄹ. $\sqrt{43000}=207.4$

답 ㄴ, ㄹ
ㄱ. $\sqrt{0.043}=\sqrt{\frac{4.3}{100}}=\frac{\sqrt{4.3}}{10}=\frac{2.074}{10}=0.2074$
ㄴ. $\sqrt{4300}=\sqrt{100\times43}=10\sqrt{43}=10\times6.557=65.57$
ㄷ. $\sqrt{0.43}=\sqrt{\frac{43}{100}}=\frac{\sqrt{43}}{10}=\frac{6.557}{10}=0.6557$
ㄹ. $\sqrt{43000}=\sqrt{10000\times4.3}=100\sqrt{4.3}=100\times2.074=207.4$

유형 6 제곱근표에 없는 수의 제곱근의 값 구하기 (2)

제곱근표에서 $\sqrt{5}=2.236$일 때, 다음 중 이를 이용하여 값을 구할 수 없는 것은?

① $\sqrt{0.05}$　② $\sqrt{20}$　③ $\sqrt{45}$
④ $\sqrt{500}$　⑤ $\sqrt{5000}$

답 ⑤
① $\sqrt{0.05}=\sqrt{\frac{5}{100}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$
② $\sqrt{20}=\sqrt{2^2\times5}=2\sqrt{5}$
③ $\sqrt{45}=\sqrt{3^2\times5}=3\sqrt{5}$
④ $\sqrt{500}=\sqrt{100\times5}=10\sqrt{5}$
⑤ $\sqrt{5000}=\sqrt{100\times50}=10\sqrt{50}$

6-1

제곱근표에서 $\sqrt{7}=2.646$일 때, 다음 중 제곱근의 값을 구할 수 없는 것은?

① $\sqrt{0.0007}$　② $\sqrt{0.07}$　③ $\sqrt{\frac{14}{200}}$
④ $\sqrt{28}$　⑤ $\sqrt{700000}$

답 ⑤
① $\sqrt{0.0007}=\sqrt{\frac{7}{10000}}=\frac{\sqrt{7}}{100}$
② $\sqrt{0.07}=\sqrt{\frac{7}{100}}=\frac{\sqrt{7}}{10}$
③ $\sqrt{\frac{14}{200}}=\sqrt{\frac{7}{100}}=\frac{\sqrt{7}}{10}$
④ $\sqrt{28}=\sqrt{2^2\times7}=2\sqrt{7}$
⑤ $\sqrt{700000}=\sqrt{10000\times70}=100\sqrt{70}$

6-2

$\sqrt{3}=1.732$, $\sqrt{30}=5.477$일 때, $\sqrt{1200}$의 값은?

① 16.431　② 17.32　③ 34.64
④ 51.96　⑤ 54.77

답 ③
$\sqrt{1200}=\sqrt{10^2\times2^2\times3}=20\sqrt{3}=20\times1.732=34.64$

유형 • 7 제곱근의 곱셈과 나눗셈의 혼합 계산

$\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{12}}\times\sqrt{15}\div\dfrac{\sqrt{7}}{3}$을 간단히 하면?

① $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　② $\sqrt{2}$　③ $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$　④ $\sqrt{5}$　⑤ $3\sqrt{5}$

답 ⑤

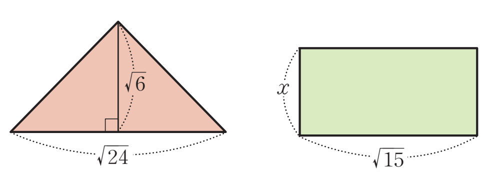
$\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{12}}\times\sqrt{15}\div\dfrac{\sqrt{7}}{3}=\dfrac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}\times\sqrt{15}\times\dfrac{3}{\sqrt{7}}$

$=\left(\dfrac{2}{2}\times3\right)\sqrt{\dfrac{7}{3}\times15\times\dfrac{1}{7}}$

$=3\sqrt{5}$

유형 • 8 제곱근의 곱셈과 나눗셈의 도형에의 활용

다음 그림과 같은 삼각형과 직사각형의 넓이가 서로 같을 때, 직사각형의 세로의 길이 x의 값은?



① $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　② $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$　③ $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$　④ 3　⑤ $2\sqrt{3}$

답 ②

(삼각형의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{24}\times\sqrt{6}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times\sqrt{6}=6$

따라서 (직사각형의 넓이)$=\sqrt{15}\times x=6$이므로

$x=\dfrac{6}{\sqrt{15}}=\dfrac{6\times\sqrt{15}}{\sqrt{15}\times\sqrt{15}}=\dfrac{6\sqrt{15}}{15}=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$

7-1

$\dfrac{\sqrt{50}}{2}\times(-4\sqrt{3})\div\dfrac{\sqrt{15}}{3}$를 간단히 하면?

① $-12\sqrt{10}$　② $-6\sqrt{10}$　③ $-6\sqrt{5}$　④ $-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$　⑤ $-\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

답 ②

$\dfrac{\sqrt{50}}{2}\times(-4\sqrt{3})\div\dfrac{\sqrt{15}}{3}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\times(-4\sqrt{3})\times\dfrac{3}{\sqrt{15}}$

$=\left\{\dfrac{5}{2}\times(-4)\times3\right\}\sqrt{2\times3\times\dfrac{1}{15}}$

$=-6\sqrt{10}$

7-2

$\dfrac{\sqrt{18}}{2}\div\sqrt{45}\times(-6\sqrt{5})=a\sqrt{2}$를 만족시키는 유리수 a의 값을 구하여라.

답 -3

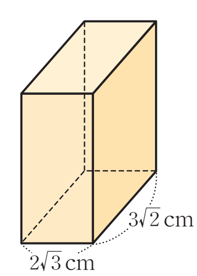
$\dfrac{\sqrt{18}}{2}\div\sqrt{45}\times(-6\sqrt{5})=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{3\sqrt{5}}\times(-6\sqrt{5})$

$=\left\{\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{3}\times(-6)\right\}\sqrt{2\times\dfrac{1}{5}\times5}=-3\sqrt{2}$

$\therefore a=-3$

8-1

오른쪽 그림과 같이 밑면의 가로, 세로의 길이가 각각 $2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, $3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$인 직육면체가 있다. 이 직육면체의 부피가 $24\sqrt{30}\,\mathrm{cm}^3$일 때, 높이는?



① $\sqrt{10}\,\mathrm{cm}$　② $2\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$　③ $4\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$　④ $6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$　⑤ $8\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$

답 ③

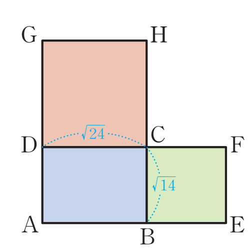
직육면체의 높이를 $x\,\mathrm{cm}$라고 하면

$2\sqrt{3}\times3\sqrt{2}\times x=24\sqrt{30}$, $6\sqrt{6}\times x=24\sqrt{30}$

$\therefore x=24\sqrt{30}\div6\sqrt{6}=24\sqrt{30}\times\dfrac{1}{6\sqrt{6}}=4\sqrt{5}\,(\mathrm{cm})$

8-2

오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD의 $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$를 각각 한 변으로 하는 두 정사각형 BEFC, DCHG가 있다. □BEFC$=14$, □DCHG$=24$일 때, 직사각형 ABCD의 넓이를 구하여라.



답 $4\sqrt{21}$

정사각형 BEFC는 넓이가 14이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{14}$이다.

또, 정사각형 DCHG는 넓이가 24이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$이다.

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$\sqrt{14}\times2\sqrt{6}=2\sqrt{84}=2\sqrt{2^2\times3\times7}=4\sqrt{21}$

04 근호를 포함한 식의 덧셈과 뺄셈

▸ 2-2. 근호를 포함한 식의 덧셈과 뺄셈

개념 1 제곱근의 덧셈과 뺄셈

1. 제곱근의 덧셈과 뺄셈

근호 안의 수가 같을 때, 근호를 포함한 식의 덧셈과 뺄셈은 다항식의 동류항의 계산과 같은 방법으로 한다.

l, m, n은 유리수이고 $\sqrt{a}$는 무리수일 때

(1) $m\sqrt{a}+n\sqrt{a}=(m+n)\sqrt{a}$

예 $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=(3+5)\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

(2) $m\sqrt{a}-n\sqrt{a}=(m-n)\sqrt{a}$

예 $3\sqrt{2}-5\sqrt{2}=(3-5)\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$

(3) $m\sqrt{a}+n\sqrt{a}-l\sqrt{a}=(m+n-l)\sqrt{a}$

예 $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-4\sqrt{2}=(3+5-4)\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

참고 ① 근호 안에 제곱인 인수가 있는 경우에는 $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$ $(a>0,\ b>0)$를 이용하여 근호 안을 간단히 한 후 제곱근의 덧셈과 뺄셈을 한다.

➜ $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2}+\sqrt{2^2\times 2}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

② 분모가 무리수이면 먼저 분모를 유리화한 후 제곱근의 덧셈과 뺄셈을 한다.

➜ $\sqrt{3}+\dfrac{6}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}+\dfrac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

• 근호 안의 수가 서로 다르면 덧셈과 뺄셈을 할 수 없다.

예제 1

다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(2+\square)\sqrt{2}=\square\sqrt{2}$

(2) $4\sqrt{6}-2\sqrt{6}=(4-\square)\sqrt{6}=\square\sqrt{6}$

답 (1) 3, 5 (2) 2, 2

유제 1

다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) $\sqrt{3}+4\sqrt{3}=(\boxed{1}+4)\sqrt{3}=\boxed{5}\sqrt{3}$

(2) $6\sqrt{7}-3\sqrt{7}=(\boxed{6}-3)\sqrt{7}=\boxed{3}\sqrt{7}$

예제 2

다음을 간단히 하여라.

(1) $2\sqrt{7}+\sqrt{7}$ (2) $5\sqrt{5}-2\sqrt{5}$

답 (1) $3\sqrt{7}$ (2) $3\sqrt{5}$

유제 2

다음을 간단히 하여라.

(1) $5\sqrt{11}+7\sqrt{11}$ (2) $-2\sqrt{6}+5\sqrt{6}$

답 (1) $12\sqrt{11}$ (2) $3\sqrt{6}$

예제 3

다음을 간단히 하여라.

(1) $2\sqrt{7}+3\sqrt{7}-\sqrt{7}$ (2) $\sqrt{3}-7\sqrt{3}+4\sqrt{3}$

풀이 (1) $2\sqrt{7}+3\sqrt{7}-\sqrt{7}=(2+3-1)\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

(2) $\sqrt{3}-7\sqrt{3}+4\sqrt{3}=(1-7+4)\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$

답 (1) $4\sqrt{7}$ (2) $-2\sqrt{3}$

유제 3

다음을 간단히 하여라.

(1) $3\sqrt{5}-9\sqrt{5}+4\sqrt{5}$ (2) $-4\sqrt{6}+6\sqrt{6}-5\sqrt{6}$

답 (1) $-2\sqrt{5}$ (2) $-3\sqrt{6}$

(1) $3\sqrt{5}-9\sqrt{5}+4\sqrt{5}=(3-9+4)\sqrt{5}=-2\sqrt{5}$

(2) $-4\sqrt{6}+6\sqrt{6}-5\sqrt{6}=(-4+6-5)\sqrt{6}=-3\sqrt{6}$

개념 확인하기

정답과 풀이 11~12쪽 | 워크북 18~19쪽

01 다음을 간단히 하여라.

(1) $5\sqrt{2}+4\sqrt{2}$ (2) $11\sqrt{3}-6\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{6}+\sqrt{24}$ (4) $\sqrt{45}-\sqrt{20}$

답 (1) $9\sqrt{2}$ (2) $5\sqrt{3}$ (3) $3\sqrt{6}$ (4) $\sqrt{5}$

(3) $\sqrt{6}+\sqrt{24}=\sqrt{6}+2\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

(4) $\sqrt{45}-\sqrt{20}=3\sqrt{5}-2\sqrt{5}=\sqrt{5}$

▷ 개념 1 제곱근의 덧셈과 뺄셈

02 다음을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{12}-\sqrt{48}+\sqrt{75}$ (2) $\sqrt{72}-\sqrt{50}-\sqrt{18}$

(3) $\sqrt{45}+\dfrac{7}{\sqrt{5}}-\dfrac{4}{\sqrt{20}}$ (4) $\sqrt{27}-\dfrac{6}{\sqrt{3}}+\dfrac{18}{\sqrt{12}}$

답 (1) $3\sqrt{3}$ (2) $-2\sqrt{2}$ (3) $4\sqrt{5}$ (4) $4\sqrt{3}$

(1) $\sqrt{12}-\sqrt{48}+\sqrt{75}=2\sqrt{3}-4\sqrt{3}+5\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{72}-\sqrt{50}-\sqrt{18}=6\sqrt{2}-5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{45}+\dfrac{7}{\sqrt{5}}-\dfrac{4}{\sqrt{20}}=3\sqrt{5}+\dfrac{7\sqrt{5}}{5}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=4\sqrt{5}$

(4) $\sqrt{27}-\dfrac{6}{\sqrt{3}}+\dfrac{18}{\sqrt{12}}=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

▷ 개념 1 제곱근의 덧셈과 뺄셈

03 $\sqrt{32}+\sqrt{18}-\sqrt{72}=k\sqrt{2}$일 때, 유리수 k의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1

④ 1 ⑤ 2

답 ④

$\sqrt{32}+\sqrt{18}-\sqrt{72}=4\sqrt{2}+3\sqrt{2}-6\sqrt{2}=\sqrt{2}$ $\therefore k=1$

▷ 개념 1 제곱근의 덧셈과 뺄셈

04 $-\sqrt{8}-\sqrt{50}+\sqrt{24}+2\sqrt{54}$를 간단히 하면?

① $-7\sqrt{2}+8\sqrt{6}$ ② $-6\sqrt{2}+3\sqrt{6}$ ③ $-\sqrt{2}+\sqrt{6}$

④ $6\sqrt{2}-3\sqrt{6}$ ⑤ $7\sqrt{2}+8\sqrt{6}$

답 ①

$-\sqrt{8}-\sqrt{50}+\sqrt{24}+2\sqrt{54}=-2\sqrt{2}-5\sqrt{2}+2\sqrt{6}+6\sqrt{6}$
$=-7\sqrt{2}+8\sqrt{6}$

▷ 개념 1 제곱근의 덧셈과 뺄셈

05 근호를 포함한 복잡한 식의 계산

▸ 2-2. 근호를 포함한 식의 덧셈과 뺄셈

개념 1 분배법칙을 이용한 식의 계산

1. 분배법칙을 이용한 식의 계산

$a>0$, $b>0$, $c>0$일 때

(1) $\sqrt{a}(\sqrt{b}\pm\sqrt{c})=\sqrt{a}\sqrt{b}\pm\sqrt{a}\sqrt{c}=\sqrt{ab}\pm\sqrt{ac}$ (복호동순)

(2) $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})\sqrt{c}=\sqrt{a}\sqrt{c}\pm\sqrt{b}\sqrt{c}=\sqrt{ac}\pm\sqrt{bc}$ (복호동순)

예제 1

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

$\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})=\sqrt{2}\times\square+\sqrt{2}\times\square=\square$

답 $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}+\sqrt{10}$

유제 1

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

$\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{5})=\sqrt{3}\times\boxed{\sqrt{7}}-\sqrt{3}\times\boxed{\sqrt{5}}=\boxed{\sqrt{21}-\sqrt{15}}$

예제 2

다음은 $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$의 분모를 유리화하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$$\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{(1+\sqrt{3})\times\square}{\sqrt{2}\times\square}=\frac{\sqrt{2}+\square}{\square}$$

답 $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{(1+\sqrt{3})\times\boxed{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\times\boxed{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}+\boxed{\sqrt{6}}}{\boxed{2}}$

유제 2

다음은 $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$의 분모를 유리화하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})\times\boxed{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}\times\boxed{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{15}-\boxed{\sqrt{6}}}{\boxed{3}}$$

개념 2 근호를 포함한 복잡한 식의 계산

1. 근호를 포함한 복잡한 식의 계산

(1) 괄호가 있는 경우: 분배법칙을 이용하여 괄호를 푼다.

(2) 근호 안에 제곱인 인수가 있는 경우: 제곱인 인수를 밖으로 꺼낸다.

(3) 분모에 무리수가 있는 경우: 분모를 유리화한다.

(4) 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 섞여 있는 경우: 곱셈과 나눗셈을 먼저 계산하고 덧셈과 뺄셈을 나중에 계산한다.

예제 3

다음을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{6}\times\sqrt{18}-2\sqrt{3}$　　(2) $\sqrt{20}-\sqrt{10}\div\sqrt{2}$

풀이 (1) $\sqrt{6}\times\sqrt{18}-2\sqrt{3}=\sqrt{6}\times3\sqrt{2}-2\sqrt{3}=6\sqrt{3}-2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{20}-\sqrt{10}\div\sqrt{2}=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$

답 (1) $4\sqrt{3}$　(2) $\sqrt{5}$

유제 3

다음을 간단히 하여라.

(1) $8\sqrt{6}-\sqrt{8}\times\sqrt{12}$　　(2) $\sqrt{63}\div\sqrt{7}+\sqrt{16}$

답 (1) $4\sqrt{6}$　(2) 7

(1) $8\sqrt{6}-\sqrt{8}\times\sqrt{12}=8\sqrt{6}-2\sqrt{2}\times2\sqrt{3}=8\sqrt{6}-4\sqrt{6}=4\sqrt{6}$

(2) $\sqrt{63}\div\sqrt{7}+\sqrt{16}=\sqrt{9}+4=3+4=7$

개념 확인하기

01 다음을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{3}(6+\sqrt{5})$　　(2) $\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{6})$

(3) $(\sqrt{10}+2\sqrt{2})\sqrt{5}$　　(4) $\sqrt{7}(\sqrt{8}-3\sqrt{5})$

답 (1) $6\sqrt{3}+\sqrt{15}$　(2) $\sqrt{6}-2\sqrt{3}$　(3) $5\sqrt{2}+2\sqrt{10}$　(4) $2\sqrt{14}-3\sqrt{35}$

(2) $\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{6})=\sqrt{6}-\sqrt{12}=\sqrt{6}-2\sqrt{3}$

(3) $(\sqrt{10}+2\sqrt{2})\sqrt{5}=\sqrt{50}+2\sqrt{10}=5\sqrt{2}+2\sqrt{10}$

(4) $\sqrt{7}(\sqrt{8}-3\sqrt{5})=\sqrt{56}-3\sqrt{35}=2\sqrt{14}-3\sqrt{35}$

▷ 개념 1 분배법칙을 이용한 식의 계산

02 다음 식에서 분모를 유리화하여라.

(1) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$　　(2) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$　　(4) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{3\sqrt{5}}$

답 (1) $\dfrac{\sqrt{3}+3}{3}$　(2) $\dfrac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}$　(3) $\dfrac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{2}$　(4) $\dfrac{5-\sqrt{35}}{15}$

(1) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{(1+\sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}+3}{3}$

(2) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{(2-\sqrt{3})\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{18}}{6}=\dfrac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{6})\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{12}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{2}$

(4) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{3\sqrt{5}}=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{7})\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{5-\sqrt{35}}{15}$

▷ 개념 1 분배법칙을 이용한 식의 계산

03 다음을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{27}-\sqrt{18}\div\sqrt{6}$　　(2) $\sqrt{3}\times\sqrt{18}+4\sqrt{3}\div\sqrt{2}$

답 (1) $2\sqrt{3}$　(2) $5\sqrt{6}$

(1) $\sqrt{27}-\sqrt{18}\div\sqrt{6}=\sqrt{27}-\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}=3\sqrt{3}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{3}\times\sqrt{18}+4\sqrt{3}\div\sqrt{2}=\sqrt{54}+\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=3\sqrt{6}+2\sqrt{6}=5\sqrt{6}$

▷ 개념 2 근호를 포함한 복잡한 식의 계산

04 다음을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{12}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{6}\right)+\dfrac{4}{\sqrt{2}}$　　(2) $\sqrt{20}-3\sqrt{2}\div\sqrt{3}+\dfrac{12-\sqrt{30}}{\sqrt{6}}$

답 (1) $2-4\sqrt{2}$　(2) $\sqrt{5}+\sqrt{6}$

(1) $\sqrt{12}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{6}\right)+\dfrac{4}{\sqrt{2}}=\sqrt{4}-\sqrt{72}+2\sqrt{2}=2-4\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{20}-3\sqrt{2}\div\sqrt{3}+\dfrac{12-\sqrt{30}}{\sqrt{6}}=2\sqrt{5}-\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\dfrac{12}{\sqrt{6}}-\dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}=2\sqrt{5}-\sqrt{6}+2\sqrt{6}-\sqrt{5}=\sqrt{5}+\sqrt{6}$

▷ 개념 2 근호를 포함한 복잡한 식의 계산

유형 확인하기

정답과 풀이 12~13쪽 | 워크북 18~20쪽

유형 • 1 제곱근의 덧셈과 뺄셈

$7\sqrt{3}+a\sqrt{2}+b\sqrt{3}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

답 ②
$7\sqrt{3}+a\sqrt{2}+b\sqrt{3}-\sqrt{2}=(a-1)\sqrt{2}+(7+b)\sqrt{3}$
$=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$
이므로
$a-1=3,\ 7+b=2$　$\therefore a=4,\ b=-5$
$\therefore a+b=4+(-5)=-1$

강의 tip
근호 안의 수가 다르면 더 이상 간단히 할 수 없음에 주의시킨다.

1-1

$3\sqrt{5}+\dfrac{2\sqrt{7}}{3}-2\sqrt{5}-\sqrt{7}$을 간단히 하여라.

답 $\sqrt{5}-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$
$3\sqrt{5}+\dfrac{2\sqrt{7}}{3}-2\sqrt{5}-\sqrt{7}=(3-2)\sqrt{5}+\left(\dfrac{2}{3}-1\right)\sqrt{7}$
$=\sqrt{5}-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

1-2

$5\sqrt{a}-8=2\sqrt{a}+7$을 만족시키는 양수 a의 값은?

① 4　② 9　③ 16
④ 25　⑤ 36

답 ④
$5\sqrt{a}-8=2\sqrt{a}+7$에서
$3\sqrt{a}=15$　$\therefore \sqrt{a}=5$
$\therefore a=25$

유형 • 2 근호 안에 제곱인 인수가 있는 경우

$\sqrt{24}-\sqrt{96}+\sqrt{54}=a\sqrt{6}$일 때, 정수 a의 값은?

① -3　② -2　③ -1
④ 1　⑤ 2

답 ④
$\sqrt{24}-\sqrt{96}+\sqrt{54}=2\sqrt{6}-4\sqrt{6}+3\sqrt{6}=\sqrt{6}$　$\therefore a=1$

2-1

$\sqrt{8}+\sqrt{72}-\sqrt{50}=m\sqrt{2}$일 때, 자연수 m의 값을 구하여라.

답 3
$\sqrt{8}+\sqrt{72}-\sqrt{50}=2\sqrt{2}+6\sqrt{2}-5\sqrt{2}=3\sqrt{2}$　$\therefore m=3$

2-2

$\sqrt{27}-\sqrt{32}+2\sqrt{2}+\sqrt{12}=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2　② -1　③ 1
④ 2　⑤ 3

답 ⑤
$\sqrt{27}-\sqrt{32}+2\sqrt{2}+\sqrt{12}=3\sqrt{3}-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$
$=-2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$
따라서 $a=-2,\ b=5$이므로
$a+b=-2+5=3$

유형•3 분모의 유리화

$6\sqrt{5}-\dfrac{10}{\sqrt{5}}-\sqrt{75}+\sqrt{12}=p\sqrt{3}+q\sqrt{5}$일 때, 유리수 p, q에 대하여 pq의 값은?

① -12 ② -10 ③ -6
④ 10 ⑤ 12

답 ①

$6\sqrt{5}-\dfrac{10}{\sqrt{5}}-\sqrt{75}+\sqrt{12}=6\sqrt{5}-2\sqrt{5}-5\sqrt{3}+2\sqrt{3}=-3\sqrt{3}+4\sqrt{5}$

따라서 $p=-3$, $q=4$이므로

$pq=-3\times4=-12$

3-1

$5\sqrt{2}+\dfrac{6}{\sqrt{8}}+\dfrac{3}{\sqrt{18}}=k\sqrt{2}$일 때, 유리수 k의 값은?

① 6 ② $\dfrac{13}{2}$ ③ 7
④ $\dfrac{15}{2}$ ⑤ 8

답 ③

$5\sqrt{2}+\dfrac{6}{\sqrt{8}}+\dfrac{3}{\sqrt{18}}=5\sqrt{2}+\dfrac{6}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=5\sqrt{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=7\sqrt{2}$

$\therefore k=7$

3-2

$3\sqrt{2}(\sqrt{3}-2)+\dfrac{\sqrt{16}+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=a\sqrt{6}+b\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0
④ 4 ⑤ 8

답 ⑤

$3\sqrt{2}(\sqrt{3}-2)+\dfrac{\sqrt{16}+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=3\sqrt{6}-6\sqrt{2}+\sqrt{8}+\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$=3\sqrt{6}-6\sqrt{2}+2\sqrt{2}+\sqrt{6}=4\sqrt{6}-4\sqrt{2}$

따라서 $a=4$, $b=-4$이므로 $a-b=4-(-4)=8$

유형•4 복잡한 식의 계산

$\dfrac{a}{\sqrt{3}}(\sqrt{27}-3)+\sqrt{18}\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$이 유리수가 되도록 하는 유리수 a의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

답 ③

$\dfrac{a}{\sqrt{3}}(\sqrt{27}-3)+\sqrt{18}\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)=\sqrt{9}a-\dfrac{3}{\sqrt{3}}a+3\sqrt{9}+\sqrt{3}$

$=3a-\sqrt{3}a+9+\sqrt{3}$

$=(3a+9)+(1-a)\sqrt{3}$

이 식이 유리수가 되려면 무리수 부분이 0이어야 하므로

$1-a=0$ $\therefore a=1$

4-1

$\sqrt{3}(2\sqrt{2}+a)-\sqrt{6}(2-\sqrt{2})$가 유리수가 되도록 하는 유리수 a의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

답 ②

$\sqrt{3}(2\sqrt{2}+a)-\sqrt{6}(2-\sqrt{2})=2\sqrt{6}+a\sqrt{3}-2\sqrt{6}+\sqrt{12}$

$=2\sqrt{6}+a\sqrt{3}-2\sqrt{6}+2\sqrt{3}$

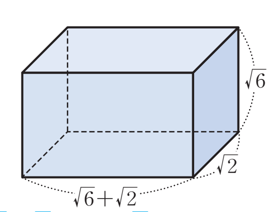
$=(a+2)\sqrt{3}$

이 식이 유리수가 되려면 무리수 부분이 0이어야 하므로

$a+2=0$ $\therefore a=-2$

4-2

오른쪽 그림과 같은 직육면체의 겉넓이를 구하여라.



답 $16+12\sqrt{3}$

(겉넓이)=(밑넓이)×2+(옆넓이)

$=\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\sqrt{2}\}\times2+\{(\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{2})\times2\}\times\sqrt{6}$

$=(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times2\sqrt{2}+(\sqrt{6}+2\sqrt{2})\times2\sqrt{6}$

$=2\sqrt{12}+4+12+4\sqrt{12}$

$=4\sqrt{3}+4+12+8\sqrt{3}$

$=16+12\sqrt{3}$

단원 마무리하기

정답과 풀이 13~14쪽 | 워크북 21~22쪽

01 다음 중 옳은 것은?

① $\sqrt{5}+\sqrt{7}=\sqrt{12}$ ② $\sqrt{\frac{7}{9}}=\frac{\sqrt{7}}{9}$

③ $\sqrt{3}\times\sqrt{11}=\sqrt{33}$ ④ $4\sqrt{5}=\sqrt{20}$

⑤ $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}+2$

답 ③

① $\sqrt{5}+\sqrt{7}$은 더 이상 간단히 나타낼 수 없다.

② $\sqrt{\frac{7}{9}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

④ $4\sqrt{5}=\sqrt{4^2\times5}=\sqrt{80}$

⑤ $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{(2\sqrt{2}+2\sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}+6}{3}$

02 $\sqrt{150}=a\sqrt{6}$, $5\sqrt{3}=\sqrt{b}$일 때, $\sqrt{3ab}$의 값은? (단, a, b는 유리수)

① $10\sqrt{3}$ ② $10\sqrt{6}$ ③ $15\sqrt{3}$

④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $15\sqrt{5}$

답 ⑤

$\sqrt{150}=\sqrt{5^2\times6}=5\sqrt{6}$ $\quad\therefore a=5$

$5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\times3}=\sqrt{75}$ $\quad\therefore b=75$

$\therefore \sqrt{3ab}=\sqrt{3\times5\times75}=\sqrt{15^2\times5}=15\sqrt{5}$

03 $\sqrt{3}=a$, $\sqrt{5}=b$일 때, $\sqrt{45}$를 a, b를 이용하여 나타내면?

① $15ab$ ② $9ab$ ③ $\sqrt{15ab}$

④ ab^2 ⑤ a^2b

답 ⑤

$\sqrt{45}=\sqrt{3^2\times5}=(\sqrt{3})^2\times\sqrt{5}=a^2b$

04 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\sqrt{3}\times\sqrt{6}\times\sqrt{14}=6\sqrt{7}$

② $3\sqrt{6}\times(-2\sqrt{3})\div(-\sqrt{2})=18$

③ $\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}$

④ $\sqrt{12}(\sqrt{2}-\sqrt{3})=2\sqrt{6}-6$

⑤ $(\sqrt{8}-\sqrt{12})\sqrt{6}=4\sqrt{2}-6\sqrt{3}$

답 ⑤

① $\sqrt{3}\times\sqrt{6}\times\sqrt{14}=\sqrt{6^2\times7}=6\sqrt{7}$

② $3\sqrt{6}\times(-2\sqrt{3})\div(-\sqrt{2})=\{3\times(-2)\times(-1)\}\sqrt{6\times3\times\frac{1}{2}}=18$

③ $\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{6}+1)\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}$

④ $\sqrt{12}(\sqrt{2}-\sqrt{3})=\sqrt{24}-\sqrt{36}=2\sqrt{6}-6$

⑤ $(\sqrt{8}-\sqrt{12})\sqrt{6}=\sqrt{48}-\sqrt{72}=4\sqrt{3}-6\sqrt{2}$

05 $\frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=a\sqrt{15}$, $\frac{20}{\sqrt{27}}=b\sqrt{3}$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 유리수)

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

답 ④

$\frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{15}}{5}$ $\quad\therefore a=\frac{9}{5}$

$\frac{20}{\sqrt{27}}=\frac{20}{3\sqrt{3}}=\frac{20\times\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{20\sqrt{3}}{9}$ $\quad\therefore b=\frac{20}{9}$

$\therefore ab=\frac{9}{5}\times\frac{20}{9}=4$

06 $\sqrt{0.025}=k\sqrt{10}$일 때, 유리수 k의 값은?

① $\frac{1}{40}$ ② $\frac{1}{25}$ ③ $\frac{1}{20}$

④ $\frac{1}{10}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

답 ③

$\sqrt{0.025}=\sqrt{\frac{25}{1000}}=\sqrt{\frac{1}{40}}=\sqrt{\frac{1}{2^2\times10}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{20}$

$\therefore k=\frac{1}{20}$

07 $2\sqrt{27}+\sqrt{125}-\sqrt{2}\left(\frac{5}{\sqrt{10}}-\frac{3}{\sqrt{6}}\right)=a\sqrt{3}+b\sqrt{5}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10

④ 11 ⑤ 12

답 ④

$2\sqrt{27}+\sqrt{125}-\sqrt{2}\left(\frac{5}{\sqrt{10}}-\frac{3}{\sqrt{6}}\right)=6\sqrt{3}+5\sqrt{5}-\frac{5}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{3}}$

$=6\sqrt{3}+5\sqrt{5}-\sqrt{5}+\sqrt{3}$

$=7\sqrt{3}+4\sqrt{5}$

따라서 $a=7$, $b=4$이므로 $a+b=7+4=11$

08 다음 〈보기〉 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. $-2\sqrt{3}>-3\sqrt{2}$

ㄴ. $\sqrt{5}-3<3-2\sqrt{5}$

ㄷ. $3-2\sqrt{7}<3-\sqrt{15}$

ㄹ. $5-2\sqrt{2}>4$

ㅁ. $3\sqrt{5}-4\sqrt{11}>-2\sqrt{11}-\sqrt{5}$

① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㅁ ③ ㄹ, ㅁ

④ ㄱ, ㄷ, ㅁ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ

답 ④

ㄱ. $-2\sqrt{3}-(-3\sqrt{2})=-\sqrt{12}+\sqrt{18}>0$ $\quad\therefore -2\sqrt{3}>-3\sqrt{2}$

ㄴ. $(\sqrt{5}-3)-(3-2\sqrt{5})=\sqrt{45}-\sqrt{36}>0$ $\quad\therefore \sqrt{5}-3>3-2\sqrt{5}$

ㄷ. $(3-2\sqrt{7})-(3-\sqrt{15})=-\sqrt{28}+\sqrt{15}<0$ $\quad\therefore 3-2\sqrt{7}<3-\sqrt{15}$

ㄹ. $(5-2\sqrt{2})-4=1-\sqrt{8}<0$ $\quad\therefore 5-2\sqrt{2}<4$

ㅁ. $(3\sqrt{5}-4\sqrt{11})-(-2\sqrt{11}-\sqrt{5})=\sqrt{80}-\sqrt{44}>0$

$\therefore 3\sqrt{5}-4\sqrt{11}>-2\sqrt{11}-\sqrt{5}$

09 $a=5\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{5}$일 때, $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$의 값은?

① $\dfrac{7\sqrt{10}}{10}$ ② $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$ ③ $\dfrac{5\sqrt{10}}{6}$

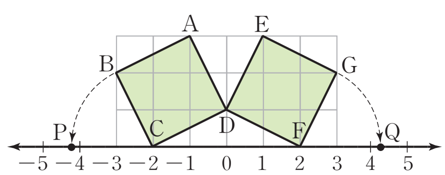
④ $\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$ ⑤ $\dfrac{7\sqrt{6}}{6}$

답 ①

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}+\dfrac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+\dfrac{5\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$

$=\dfrac{2\sqrt{10}}{10}+\dfrac{5\sqrt{10}}{10}=\dfrac{7\sqrt{10}}{10}$

10 다음 그림에서 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. $\overline{CB}=\overline{CP}$, $\overline{FG}=\overline{FQ}$일 때, $\overline{PQ}$의 길이는?



① 3 ② 4 ③ $2\sqrt{5}$

④ $2+2\sqrt{5}$ ⑤ $4+2\sqrt{5}$

답 ⑤

두 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 $\overline{CB}=\sqrt{5}$, $\overline{FG}=\sqrt{5}$

따라서 $\overline{CP}=\overline{CB}=\sqrt{5}$이므로 점 P에 대응하는 수는 $-2-\sqrt{5}$이다.

또, $\overline{FQ}=\overline{FG}=\sqrt{5}$이므로 점 Q에 대응하는 수는 $2+\sqrt{5}$이다.

$\therefore \overline{PQ}=(2+\sqrt{5})-(-2-\sqrt{5})=4+2\sqrt{5}$

11 다음 중 두 실수의 대소 관계가 옳지 않은 것은?

① $5\sqrt{2}+3\sqrt{2}<12$

② $\underbrace{4\sqrt{5}+3\sqrt{5}}_{7\sqrt{5}}>\underbrace{5\sqrt{5}-\sqrt{5}}_{4\sqrt{5}}$

③ $2\sqrt{5}-3\sqrt{3}<5\sqrt{5}-5\sqrt{3}$

④ $\sqrt{2}+\sqrt{3}<4\sqrt{2}-\sqrt{3}$

⑤ $\sqrt{18}+\sqrt{32}<8\sqrt{3}-\sqrt{27}$

답 ⑤

① $(5\sqrt{2}+3\sqrt{2})-12=8\sqrt{2}-12=\sqrt{128}-\sqrt{144}<0$

③ $(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})-(5\sqrt{5}-5\sqrt{3})=-3\sqrt{5}+2\sqrt{3}=-\sqrt{45}+\sqrt{12}<0$

④ $(\sqrt{2}+\sqrt{3})-(4\sqrt{2}-\sqrt{3})=-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}=-\sqrt{18}+\sqrt{12}<0$

⑤ $(\sqrt{18}+\sqrt{32})-(8\sqrt{3}-\sqrt{27})=(3\sqrt{2}+4\sqrt{2})-(8\sqrt{3}-3\sqrt{3})$

$=7\sqrt{2}-5\sqrt{3}=\sqrt{98}-\sqrt{75}>0$

12 $\sqrt{3}(2\sqrt{2}+a)-\sqrt{6}(2-\sqrt{2})$가 유리수가 되도록 하는 유리수 a의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1

④ 1 ⑤ 2

답 ②

$\sqrt{3}(2\sqrt{2}+a)-\sqrt{6}(2-\sqrt{2})=2\sqrt{6}+a\sqrt{3}-2\sqrt{6}+\sqrt{12}$

$=a\sqrt{3}+2\sqrt{3}=(a+2)\sqrt{3}$

이 식이 유리수가 되려면 무리수 부분이 0이어야 하므로

$a+2=0$ $\therefore a=-2$

13 $x+y=8$, $xy=2$일 때, $\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{y}}$의 값은?

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$

④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

답 ③

$x+y>0$, $xy>0$이므로 $x>0$, $y>0$

$\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{y})^2+(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}\sqrt{y}}$

$=\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}=\dfrac{8}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{8\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

14 제곱근표에서 $\sqrt{3}=1.732$, $\sqrt{5}=2.236$일 때, $\dfrac{15}{\sqrt{3}}+\dfrac{15}{\sqrt{5}}$의 값은?

① 10.472 ② 11.593 ③ 12.368

④ 14.582 ⑤ 15.368

답 ⑤

$\dfrac{15}{\sqrt{3}}+\dfrac{15}{\sqrt{5}}=\dfrac{15\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}+\dfrac{15\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$

$=5\sqrt{3}+3\sqrt{5}$

$=5\times1.732+3\times2.236$

$=8.66+6.708=15.368$

15 $\sqrt{11}+1$의 정수 부분을 a, $\sqrt{13}-2$의 소수 부분을 b라고 할 때, $\dfrac{a}{b+3}$의 값을 구하여라.

답 $\dfrac{4\sqrt{13}}{13}$

$3<\sqrt{11}<4$에서 $4<\sqrt{11}+1<5$이므로 $a=4$

$3<\sqrt{13}<4$에서 $1<\sqrt{13}-2<2$이므로 $b=\sqrt{13}-3$

$\therefore \dfrac{a}{b+3}=\dfrac{4}{(\sqrt{13}-3)+3}=\dfrac{4}{\sqrt{13}}=\dfrac{4\sqrt{13}}{13}$

16 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n}$의 소수 부분을 $f(n)$이라고 할 때, $f(48)-f(12)$의 값은?

① $2\sqrt{3}-3$ ② $4\sqrt{3}-3$ ③ $6\sqrt{3}-3$

④ $2\sqrt{3}+3$ ⑤ $6\sqrt{3}+3$

답 ①

$6<\sqrt{48}<7$이므로 $f(48)=\sqrt{48}-6=4\sqrt{3}-6$

$3<\sqrt{12}<4$이므로 $f(12)=\sqrt{12}-3=2\sqrt{3}-3$

$\therefore f(48)-f(12)=(4\sqrt{3}-6)-(2\sqrt{3}-3)$

$=2\sqrt{3}-3$

주어진 단계에 따라 쓰는 유형

17 넓이가 50인 직사각형의 이웃하는 두 변의 길이를 각각 a, b라고 할 때, $a\sqrt{\frac{8b}{a}}+b\sqrt{\frac{2a}{b}}$의 값을 구하여라.

생각해 보자

구하는 것은? $a\sqrt{\frac{8b}{a}}+b\sqrt{\frac{2a}{b}}$의 값

주어진 것은? 넓이가 50인 직사각형의 이웃하는 두 변의 길이가 각각 a, b

풀이

[1단계] 직사각형의 넓이를 a, b로 나타내기 ($20\ \%$)

직사각형의 이웃하는 두 변의 길이를 각각 a, b $(a>0,\ b>0)$라 하고 그 넓이가 50이므로

$ab=50$

[2단계] 주어진 식 변형하기 ($40\ \%$)

$$a\sqrt{\frac{8b}{a}}+b\sqrt{\frac{2a}{b}}=\sqrt{a^2\times\frac{8b}{a}}+\sqrt{b^2\times\frac{2a}{b}}$$
$$=\sqrt{8ab}+\sqrt{2ab}$$
$$=2\sqrt{2ab}+\sqrt{2ab}$$
$$=3\sqrt{2ab}$$

[3단계] 식의 값 구하기 ($40\ \%$)

$\therefore 3\sqrt{2ab}=3\sqrt{2\times 50}=3\sqrt{100}=30$

답 30

풀이 과정을 자세히 쓰는 유형

18 $\sqrt{2}(3\sqrt{2}-1)+\sqrt{8}(a-\sqrt{2})$가 유리수가 되도록 하는 유리수 a의 값을 구하여라.

풀이

$$\sqrt{2}(3\sqrt{2}-1)+\sqrt{8}(a-\sqrt{2})=6-\sqrt{2}+a\sqrt{8}-4$$
$$=6-\sqrt{2}+2a\sqrt{2}-4$$
$$=2+(2a-1)\sqrt{2} \quad ❶$$

이 식이 유리수가 되려면 무리수 부분이 0이어야 하므로

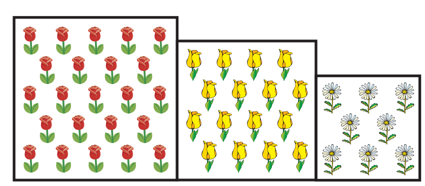
$2a-1=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ ❷

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 식 간단히 하기	$60\ \%$
❷	a의 값 구하기	$40\ \%$

답 $\frac{1}{2}$

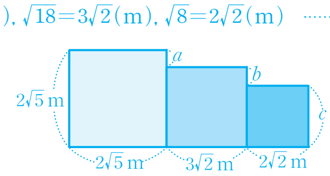
19 다음 그림과 같이 넓이가 각각 $20\ \mathrm{m}^2$, $18\ \mathrm{m}^2$, $8\ \mathrm{m}^2$인 정사각형 모양의 세 꽃밭이 붙어 있다. 이때 세 꽃밭으로 이루어진 전체 꽃밭의 둘레의 길이를 구하여라.



풀이

정사각형 모양인 세 꽃밭의 한 변의 길이는 각각

$\sqrt{20}=2\sqrt{5}(\mathrm{m})$, $\sqrt{18}=3\sqrt{2}(\mathrm{m})$, $\sqrt{8}=2\sqrt{2}(\mathrm{m})$ ❶



위의 그림에서 $a+b+c=2\sqrt{5}(\mathrm{m})$이므로

구하는 전체 꽃밭의 둘레의 길이는

$2\times(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}+2\sqrt{2})+2\sqrt{5}+(a+b+c)$ ❷

$=4\sqrt{5}+10\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{5}$

$=8\sqrt{5}+10\sqrt{2}(\mathrm{m})$ ❸

단계	채점 기준	비율
❶	정사각형 모양인 각 꽃밭의 한 변의 길이 구하기	$30\ \%$
❷	전체 꽃밭의 둘레의 길이 구하는 식 세우기	$40\ \%$
❸	전체 꽃밭의 둘레의 길이 구하기	$30\ \%$

답 $(8\sqrt{5}+10\sqrt{2})\ \mathrm{m}$

1 다항식의 곱셈

01 다항식의 곱셈 (1)

개념 1 다항식과 다항식의 곱셈

1. 다항식과 다항식의 곱셈

두 다항식의 곱은 분배법칙을 이용하여 전개한 다음 동류항이 있으면 동류항끼리 모아서 간단히 한다.

예 $(a+2)(a+3)=\underset{①}{\underline{a^2}}+\underset{②}{\underline{3a}}+\underset{③}{\underline{2a}}+\underset{④}{\underline{6}}=a^2+5a+6$

• $(a+b)(c+d)=\underset{①}{\underline{ac}}+\underset{②}{\underline{ad}}+\underset{③}{\underline{bc}}+\underset{④}{\underline{bd}}$

예제 1

$(x+1)(y-2)$를 전개하여라.

답 $xy-2x+y-2$

유제 1

$(2a-3b)(c+4d)$를 전개하여라.

답 $2ac+8ad-3bc-12bd$

개념 2 곱셈 공식 (1)

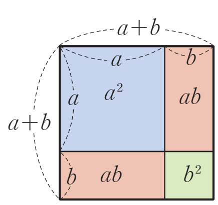
1. 합의 제곱: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ← $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$

2. 차의 제곱: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ← $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-2ab+b^2$

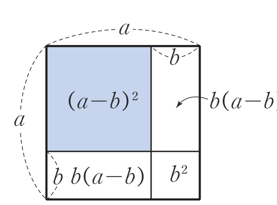
예 $(a+1)^2=a^2+2a+1$, $(a-1)^2=a^2-2a+1$

주의 $(a+b)^2\neq a^2+b^2$, $(a-b)^2\neq a^2-b^2$

참고 도형으로 이해하는 곱셈 공식 (1)



(색칠한 부분의 넓이의 합)
$=(a+b)^2$
$=a^2+2ab+b^2$

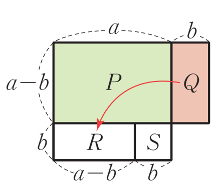


(색칠한 부분의 넓이)
$=(a-b)^2$
$=a^2-2ab+b^2$

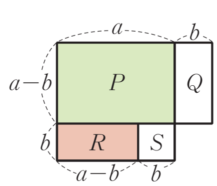
3. 합과 차의 곱: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ← $(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$

예 $(x+2)(x-2)=x^2-2^2=x^2-4$

참고 도형으로 이해하는 합과 차의 곱



=



$\{(P+Q)$의 넓이$\}=(a+b)(a-b)$
$=\{(P+R)$의 넓이$\}$
$=a^2-b^2$

예제 2

다음 식을 전개하여라.

(1) $(a+2)^2$ (2) $(x-2)^2$

(3) $(a+1)(a-1)$ (4) $(x+2y)(x-2y)$

답 (1) a^2+4a+4 (2) x^2-4x+4
(3) a^2-1 (4) x^2-4y^2

유제 2

다음 식을 전개하여라.

(1) $(2a+b)^2$ (2) $(3x-y)^2$

(3) $(a+2)(a-2)$ (4) $(2x+y)(2x-y)$

답 (1) $4a^2+4ab+b^2$ (2) $9x^2-6xy+y^2$
(3) a^2-4 (4) $4x^2-y^2$

01 다음 식을 전개하여라.

▶ 개념 1 다항식과 다항식의 곱셈

(1) $(a+4)(b-3)$ (2) $(x-2)(y-5)$

(3) $(a-b)(2c+3d)$ (4) $(-2a+4b)(x-3y)$

(5) $(-x+5)(2x+3)$ (6) $(2x+3y)(-3x-5y)$

답 (1) $ab-3a+4b-12$ (2) $xy-5x-2y+10$
(3) $2ac+3ad-2bc-3bd$ (4) $-2ax+6ay+4bx-12by$
(5) $-2x^2+7x+15$ (6) $-6x^2-19xy-15y^2$

강의 tip
(5), (6) 전개한 후 동류항끼리 모아서 간단히 한다.

02 다음 식을 전개하여라.

▶ 개념 2 곱셈 공식 (1)

(1) $(a+3)^2$ (2) $(5a+b)^2$

(3) $(3a+4b)^2$ (4) $(x-6)^2$

(5) $(2x-3y)^2$ (6) $(-2a+5)^2$

답 (1) a^2+6a+9 (2) $25a^2+10ab+b^2$
(3) $9a^2+24ab+16b^2$ (4) $x^2-12x+36$
(5) $4x^2-12xy+9y^2$ (6) $4a^2-20a+25$

03 다음 식을 전개하여라.

▶ 개념 2 곱셈 공식 (1)

(1) $(a+3)(a-3)$ (2) $(2x+1)(2x-1)$

(3) $(3x+5y)(3x-5y)$ (4) $(-x+7)(-x-7)$

답 (1) a^2-9 (2) $4x^2-1$ (3) $9x^2-25y^2$ (4) x^2-49

04 다음 식을 전개하여라.

▶ 개념 2 곱셈 공식 (1)

(1) $\left(2x+\frac{3}{2}y\right)^2$ (2) $\left(-\frac{1}{4}x-4y\right)^2$

(3) $(3a+2)(3a-2)$ (4) $\left(\frac{1}{5}a+\frac{3}{4}b\right)\left(\frac{1}{5}a-\frac{3}{4}b\right)$

답 (1) $4x^2+6xy+\frac{9}{4}y^2$ (2) $\frac{1}{16}x^2+2xy+16y^2$ (3) $9a^2-4$ (4) $\frac{1}{25}a^2-\frac{9}{16}b^2$

(1) $\left(2x+\frac{3}{2}y\right)^2=(2x)^2+2\times2x\times\frac{3}{2}y+\left(\frac{3}{2}y\right)^2=4x^2+6xy+\frac{9}{4}y^2$

(2) $\left(-\frac{1}{4}x-4y\right)^2=\left(\frac{1}{4}x+4y\right)^2=\left(\frac{1}{4}x\right)^2+2\times\frac{1}{4}x\times4y+(4y)^2=\frac{1}{16}x^2+2xy+16y^2$

(3) $(3a+2)(3a-2)=(3a)^2-2^2=9a^2-4$

(4) $\left(\frac{1}{5}a+\frac{3}{4}b\right)\left(\frac{1}{5}a-\frac{3}{4}b\right)=\left(\frac{1}{5}a\right)^2-\left(\frac{3}{4}b\right)^2=\frac{1}{25}a^2-\frac{9}{16}b^2$

02 다항식의 곱셈 (2)

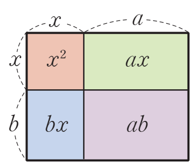
개념 1 곱셈 공식 (2)

x의 계수가 1인 두 일차식의 곱

$$(x+a)(x+b)=x^2+\underbrace{(a+b)}_{\text{합}}x+\underbrace{ab}_{\text{곱}} \leftarrow \begin{aligned}(x+a)(x+b)&=x^2+bx+ax+ab\\&=x^2+(a+b)x+ab\end{aligned}$$

예 $(x+2)(x+3)=x^2+\underbrace{(2+3)}_{\text{합}}x+\underbrace{2\times3}_{\text{곱}}=x^2+5x+6$

참고 도형으로 이해하는 곱셈 공식 (2)



$(x+a)(x+b)$=(큰 직사각형의 넓이)

=(작은 직사각형들의 넓이의 합)

$=x^2+ax+bx+ab$

$=x^2+(a+b)x+ab$

예제 1

다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+3)(x+5)$　　(2) $(x+7)(x-2)$

답 (1) $x^2+8x+15$　(2) $x^2+5x-14$

유제 1

다음 식을 전개하여라.

(1) $(x-3)(x+6)$　　(2) $(x-8)(x-4)$

답 (1) $x^2+3x-18$　(2) $x^2-12x+32$

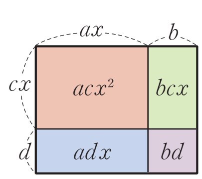
개념 2 곱셈 공식 (3)

x의 계수가 1이 아닌 두 일차식의 곱

$$(ax+b)(cx+d)=\underbrace{acx^2}_{①}+\underbrace{(ad+bc)}_{②}x+\underbrace{bd}_{③} \leftarrow \begin{aligned}(ax+b)(cx+d)&=acx^2+adx+bcx+bd\\&=acx^2+(ad+bc)x+bd\end{aligned}$$

예 $(2x+3)(3x+4)=\underbrace{(2\times3)}_{①}x^2+\underbrace{(2\times4+3\times3)}_{②}x+\underbrace{(3\times4)}_{③}=6x^2+17x+12$

참고 도형으로 이해하는 곱셈 공식 (3)



$(ax+b)(cx+d)$=(큰 직사각형의 넓이)

=(작은 직사각형들의 넓이의 합)

$=acx^2+adx+bcx+bd$

$=acx^2+(ad+bc)x+bd$

예제 2

다음 식을 전개하여라.

(1) $(2x+3)(4x+5)$　　(2) $(x+2)(3x-4)$

풀이 (1) $(2x+3)(4x+5)=8x^2+(10+12)x+15$
$=8x^2+22x+15$

(2) $(x+2)(3x-4)=3x^2+(-4+6)x-8$
$=3x^2+2x-8$

답 (1) $8x^2+22x+15$　(2) $3x^2+2x-8$

유제 2

다음 식을 전개하여라.

(1) $(7x-5)(x+4)$　　(2) $(3x-1)(4x-2)$

답 (1) $7x^2+23x-20$　(2) $12x^2-10x+2$

(1) $(7x-5)(x+4)=7x^2+(28-5)x-20=7x^2+23x-20$

(2) $(3x-1)(4x-2)=12x^2+(-6-4)x+2=12x^2-10x+2$

개념 확인하기

정답과 풀이 15~16쪽 | 워크북 25~26쪽

01 다음 식을 전개하여라.

(1) $(a+6b)(a+b)$ (2) $(x+2y)(x-5y)$

(3) $(x-3y)(x+4y)$ (4) $(a-7b)(a-9b)$

답 (1) $a^2+7ab+6b^2$ (2) $x^2-3xy-10y^2$ (3) $x^2+xy-12y^2$ (4) $a^2-16ab+63b^2$

▶ 개념 1 곱셈 공식 (2)

02 다음 식을 전개하여라.

(1) $(3x+7y)(2x+3y)$ (2) $(3x+5y)(8x-2y)$

(3) $(7x-2y)(5x+9y)$ (4) $(4x-3y)(5x-6y)$

답 (1) $6x^2+23xy+21y^2$ (2) $24x^2+34xy-10y^2$
(3) $35x^2+53xy-18y^2$ (4) $20x^2-39xy+18y^2$

(1) $(3x+7y)(2x+3y)=6x^2+(9+14)xy+21y^2=6x^2+23xy+21y^2$

(2) $(3x+5y)(8x-2y)=24x^2+(-6+40)xy-10y^2=24x^2+34xy-10y^2$

(3) $(7x-2y)(5x+9y)=35x^2+(63-10)xy-18y^2=35x^2+53xy-18y^2$

(4) $(4x-3y)(5x-6y)=20x^2+(-24-15)xy+18y^2=20x^2-39xy+18y^2$

▶ 개념 2 곱셈 공식 (3)

03 다음 식을 전개하여라.

(1) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$ (2) $(-5x+7)(x-6)$

(3) $\left(\frac{1}{2}x+3\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$ (4) $(-3x+8)(-2x+1)$

답 (1) $x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}$ (2) $-5x^2+37x-42$ (3) $\frac{1}{2}x^2+\frac{10}{3}x+2$ (4) $6x^2-19x+8$

(1) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=x^2+\left\{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}x+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}$

(2) $(-5x+7)(x-6)=-(5x-7)(x-6)$
$=-[(5\times1)x^2+\{5\times(-6)+(-7)\times1\}x+(-7)\times(-6)]$
$=-5x^2+37x-42$

(3) $\left(\frac{1}{2}x+3\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}\times1\right)x^2+\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+3\times1\right)x+3\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}x^2+\frac{10}{3}x+2$

(4) $(-3x+8)(-2x+1)=\{(-3)\times(-2)\}x^2+\{(-3)\times1+8\times(-2)\}x+8\times1=6x^2-19x+8$

▶ 개념 1, 2 곱셈 공식 (2), (3)

04 $\left(\frac{2}{3}x+2\right)\left(6x-\frac{3}{2}\right)$을 전개한 식에서 x의 계수를 구하여라.

답 11

$\left(\frac{2}{3}x+2\right)\left(6x-\frac{3}{2}\right)=4x^2+11x-3$이므로 x의 계수는 11이다.

▶ 개념 2 곱셈 공식 (3)

유형 1 다항식과 다항식의 곱셈

$(3x-4)(ay+5)$를 전개한 식에서 x의 계수와 y의 계수의 합이 23일 때, 상수 a의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

답 ②
x항은 $3x\times5=15x$
y항은 $-4\times ay=-4ay$
따라서 x의 계수는 15, y의 계수는 $-4a$이므로
$15-4a=23$, $4a=-8$
$\therefore a=-2$

1-1

$(x-4y)(-2x+3y)$를 전개한 식에서 xy의 계수는?

① -11 ② -6 ③ 0 ④ 6 ⑤ 11

답 ⑤
xy의 항은 $x\times3y+(-4y)\times(-2x)=3xy+8xy=11xy$
따라서 xy의 계수는 11이다.

1-2

$(x-3y-2z)^2$의 전개식에서 y^2의 계수를 a, xy의 계수를 b라고 할 때, $a+2b$의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

답 ②
$(x-3y-2z)^2=(x-3y-2z)(x-3y-2z)$
y^2항은 $-3y\times(-3y)=9y^2$
xy항은 $x\times(-3y)+(-3y)\times x=-3xy-3xy=-6xy$
따라서 $a=9$, $b=-6$이므로
$a+2b=9+2\times(-6)=-3$

유형 2 곱셈 공식 (1) – 합의 제곱, 차의 제곱

다음 중 옳은 것은?

① $(x+3)^2=x^2+9$
② $(x-1)^2=x^2-x+1$
③ $(-x-4)^2=x^2-8x+16$
④ $(-2a+3b)^2=4a^2+12ab+9b^2$
⑤ $\left(\frac{1}{2}a+b\right)^2=\frac{1}{4}a^2+ab+b^2$

답 ⑤
① $(x+3)^2=x^2+6x+9$
② $(x-1)^2=x^2-2x+1$
③ $(-x-4)^2=(x+4)^2=x^2+8x+16$
④ $(-2a+3b)^2=4a^2-12ab+9b^2$

2-1

다음 중 전개식이 $(3x-4)^2$과 같은 것은?

① $(3x+4)^2$ ② $(-3x-4)^2$
③ $(-3x+4)^2$ ④ $-(3x+4)^2$
⑤ $-(3x-4)^2$

답 ③
$(3x-4)^2=9x^2-24x+16$
③ $(-3x+4)^2=(3x-4)^2=9x^2-24x+16$

2-2

$\left(\frac{2}{3}x-a\right)^2=\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{3}x+b$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

답 $-\frac{1}{4}$
$\left(\frac{2}{3}x-a\right)^2=\frac{4}{9}x^2-\frac{4}{3}ax+a^2$이므로
$-\frac{4}{3}a=\frac{2}{3}$, $a^2=b$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$
$\therefore a+b=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$

유형 3 곱셈 공식 (1) – 합과 차의 제곱

다음 중 옳지 않은 것은?

① $(a+2b)(a-2b)=a^2-4b^2$

② $(4x+5)(4x-5)=16x^2-25$

③ $(-2x+y)(2x+y)=4x^2-y^2$

④ $(-3a-2)(3a-2)=-9a^2+4$

⑤ $-(2x+2y)(2x-2y)=-4x^2+4y^2$

답 ③

③ $(-2x+y)(2x+y)=(y-2x)(y+2x)=y^2-4x^2=-4x^2+y^2$

④ $(-3a-2)(3a-2)=-(3a+2)(3a-2)=-(9a^2-4)=-9a^2+4$

⑤ $-(2x+2y)(2x-2y)=-(4x^2-4y^2)=-4x^2+4y^2$

3-1

$(-3x-4)(-3x+4)$를 전개한 식에서 x^2의 계수를 a, 상수항을 b라고 할 때, $b-a$의 값은?

① -36 ② -25 ③ -16

④ 16 ⑤ 25

답 ②

$(-3x-4)(-3x+4)=9x^2-16$에서 x^2의 계수는 9, 상수항은 -16이므로

$a=9$, $b=-16$

$\therefore b-a=-16-9=-25$

3-2

$(x-1)(x+1)(x^2+1)$을 전개하여라.

답 x^4-1

$(x-1)(x+1)(x^2+1)=(x^2-1)(x^2+1)=x^4-1$

유형 4 곱셈 공식 (2), (3)

다음 중 옳은 것은?

① $(x+5)(x-1)=x^2+4x-4$

② $(-x+2)(x-3)=-x^2-x-1$

③ $(2x+1)(3x-5)=6x^2-7x-5$

④ $(-x+y)(-x-2y)=x^2-2xy-2y^2$

⑤ $\left(5x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=5x^2-\frac{13}{6}x+\frac{1}{6}$

답 ③

① $(x+5)(x-1)=x^2+4x-5$

② $(-x+2)(x-3)=-(x-2)(x-3)=-x^2+5x-6$

④ $(-x+y)(-x-2y)=(x-y)(x+2y)=x^2+xy-2y^2$

⑤ $\left(5x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=5x^2-\frac{17}{6}x+\frac{1}{6}$

강의 tip

일차항의 계수가 음수인 경우 부호를 주의한다.

4-1

$(3x+2)(4x-3)=ax^2+bx-6$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -12 ② -6 ③ -1

④ 6 ⑤ 12

답 ①

$(3x+2)(4x-3)=12x^2-x-6$

따라서 $a=12$, $b=-1$이므로

$ab=12\times(-1)=-12$

4-2

$(4x+a)(bx-1)=8x^2+cx-5$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13

④ 14 ⑤ 15

답 ③

$(4x+a)(bx-1)=4bx^2+(-4+ab)x-a$이므로

$4b=8$, $-4+ab=c$, $-a=-5$

따라서 $a=5$, $b=2$, $c=6$이므로

$a+b+c=5+2+6=13$

03 곱셈 공식의 활용 (1)

▶ 1-2. 곱셈 공식의 활용

개념 1 곱셈 공식을 이용한 수의 계산

1. 수의 제곱의 계산

곱셈 공식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 또는 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$을 이용하여 계산한다.

예 ① $101^2=(100+1)^2=100^2+2\times100\times1+1^2=10000+200+1=10201$

② $99^2=(100-1)^2=100^2-2\times100\times1+1^2=10000-200+1=9801$

2. 서로 다른 두 수의 곱의 계산

곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 또는 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$를 이용하여 계산한다.

예 ① $101\times99=(100+1)(100-1)=100^2-1^2=10000-1=9999$

② $101\times102=(100+1)(100+2)=100^2+(1+2)\times100+1\times2=10000+300+2=10302$

풍쌤의 Point 곱셈 공식을 이용하여 수의 계산을 할 때, a, b의 값은 계산이 편리해지는 값으로 정해야 해.

예제 1

곱셈 공식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$을 이용하여 102^2을 계산하여라.

풀이 $102^2=(100+2)^2=100^2+2\times100\times2+2^2$
$=10000+400+4=10404$

답 10404

유제 1

곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하여 103×97을 계산하여라.

답 9991
$103\times97=(100+3)(100-3)=100^2-3^2$
$=10000-9=9991$

개념 2 곱셈 공식의 변형

곱셈 공식 (1)을 변형하면 다음과 같은 공식을 얻을 수 있다.

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ (2) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

(3) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$ (4) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

참고 곱셈 공식의 변형에서 b 대신 $\frac{1}{a}$을 대입하면 다음과 같은 공식을 얻을 수 있다.

(1) $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2$ (2) $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2$

(3) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4$ (4) $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4$

+ 곱셈 공식 (1)
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

예제 2

다음은 $x+y=5$, $xy=4$일 때, x^2+y^2의 값을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

$x^2+y^2=(x+y)^2-\square$
$=5^2-\square\times4=\square$

답 $2xy$, 2, 17

유제 2

다음은 $x-y=1$, $xy=6$일 때, x^2+y^2의 값을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

$x^2+y^2=(x-y)^2+\boxed{2xy}$
$=1^2+\boxed{2}\times6=\boxed{13}$

개념 확인하기

정답과 풀이 17쪽 | 워크북 27~28쪽

01 다음 수를 곱셈 공식을 이용하여 계산하여라.

(1) 107^2　　(2) 69^2

(3) 3.1^2　　(4) 2.8^2

답 (1) **11449**　(2) **4761**　(3) **9.61**　(4) **7.84**

(1) $107^2=(100+7)^2=10000+1400+49=11449$

(2) $69^2=(70-1)^2=4900-140+1=4761$

(3) $3.1^2=(3+0.1)^2=9+0.6+0.01=9.61$

(4) $2.8^2=(3-0.2)^2=9-1.2+0.04=7.84$

▷ 개념 1
곱셈 공식을 이용한 수의 계산

02 다음 수를 곱셈 공식을 이용하여 계산하여라.

(1) 52×48　　(2) 104×96

(3) 2.7×3.3　　(4) 61×58

답 (1) **2496**　(2) **9984**　(3) **8.91**　(4) **3538**

(1) $52\times48=(50+2)(50-2)=2500-4=2496$

(2) $104\times96=(100+4)(100-4)=10000-16=9984$

(3) $2.7\times3.3=(3-0.3)(3+0.3)=9-0.09=8.91$

(4) $61\times58=(60+1)(60-2)=3600-60-2=3538$

▷ 개념 1
곱셈 공식을 이용한 수의 계산

03 두 수 a, b에 대하여 $a+b=-1$, $ab=-12$일 때, 다음 값을 구하여라.

(1) a^2+b^2　　(2) $(a-b)^2$

답 (1) **25**　(2) **49**

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(-1)^2-2\times(-12)=25$

(2) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=(-1)^2-4\times(-12)=49$

▷ 개념 2
곱셈 공식의 변형

04 두 수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=41$, $x-y=9$일 때, 다음 값을 구하여라.

(1) xy　　(2) $(x+y)^2$

답 (1) **-20**　(2) **1**

(1) $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$이므로

$41=9^2+2xy$, $-40=2xy$

$\therefore xy=-20$

(2) $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=9^2+4\times(-20)=1$

▷ 개념 2
곱셈 공식의 변형

04 곱셈 공식의 활용 (2)

▸ 1-2. 곱셈 공식의 활용

개념 1 곱셈 공식을 이용한 근호를 포함한 식의 계산

1. 곱셈 공식을 이용한 근호를 포함한 식의 계산

제곱근을 문자로 생각하고 곱셈 공식을 이용하여 다항식의 곱셈처럼 계산한다.

(1) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+2\sqrt{ab}+b$

(2) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a-2\sqrt{ab}+b$

(3) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$

예 $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+3)=(\sqrt{5})^2+(1+3)\sqrt{5}+1\times3=5+4\sqrt{5}+3=8+4\sqrt{5}$

예제 1

곱셈 공식을 이용하여 다음을 계산하여라.

(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ (2) $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})$

풀이 (1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=5+2\sqrt{6}$

(2) $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2=4$

답 (1) $5+2\sqrt{6}$ (2) 4

유제 1

곱셈 공식을 이용하여 다음을 계산하여라.

(1) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$ (2) $(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+3)$

답 (1) $7-2\sqrt{10}$ (2) $\sqrt{6}$

(1) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2=(\sqrt{5})^2-2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=7-2\sqrt{10}$

(2) $(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+3)=(\sqrt{6})^2+(-2+3)\sqrt{6}-6=\sqrt{6}$

개념 2 곱셈 공식을 이용한 분모의 유리화

1. 곱셈 공식을 이용한 분모의 유리화

분모가 두 수의 합 또는 차로 이루어진 무리수일 때, 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하여 분모를 유리화한다.

$a>0$, $b>0$이고, $a\neq b$일 때

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

풍쌤의 Point 분모와 분자에 모두 같은 수를 곱한 후, 분모는 곱셈 공식을 이용하여 유리화하고, 분자는 분배법칙 또는 곱셈 공식을 이용하여 계산해야 해.

예제 2

다음 수의 분모를 유리화하여라.

(1) $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}}$ (2) $\dfrac{4}{2-\sqrt{3}}$

풀이 (1) $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{2(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=\dfrac{2-2\sqrt{2}}{1-2}=-2+2\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{4}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{4(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\dfrac{8+4\sqrt{3}}{4-3}=8+4\sqrt{3}$

답 (1) $-2+2\sqrt{2}$ (2) $8+4\sqrt{3}$

유제 2

다음 수의 분모를 유리화하여라.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (2) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

답 (1) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$ (2) $\sqrt{7}+\sqrt{5}$

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$

(2) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\dfrac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}=\dfrac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{7-5}=\sqrt{7}+\sqrt{5}$

정답과 풀이 17~18쪽 | 워크북 28~29쪽

01 곱셈 공식을 이용하여 다음을 계산하여라.

(1) $(2\sqrt{3}+3)^2$ (2) $(\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2$

(3) $(\sqrt{11}+\sqrt{5})(\sqrt{11}-\sqrt{5})$ (4) $(2\sqrt{2}+\sqrt{7})(2\sqrt{2}-\sqrt{7})$

답 (1) $21+12\sqrt{3}$ (2) $23-6\sqrt{10}$ (3) 6 (4) 1

(1) $(2\sqrt{3}+3)^2=12+12\sqrt{3}+9=21+12\sqrt{3}$

(2) $(\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2=5-6\sqrt{10}+18=23-6\sqrt{10}$

(3) $(\sqrt{11}+\sqrt{5})(\sqrt{11}-\sqrt{5})=(\sqrt{11})^2-(\sqrt{5})^2=6$

(4) $(2\sqrt{2}+\sqrt{7})(2\sqrt{2}-\sqrt{7})=(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{7})^2=1$

▶ 개념 1
곱셈 공식을 이용한 근호를 포함한 식의 계산

02 곱셈 공식을 이용하여 다음을 계산하여라.

(1) $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}+5)$ (2) $(\sqrt{10}-4)(\sqrt{10}+6)$

(3) $(\sqrt{3}+4)(2\sqrt{3}-5)$ (4) $(5\sqrt{7}+\sqrt{2})(2\sqrt{7}-3\sqrt{2})$

답 (1) $17+8\sqrt{2}$ (2) $-14+2\sqrt{10}$ (3) $-14+3\sqrt{3}$ (4) $64-13\sqrt{14}$

(1) $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}+5)=2+8\sqrt{2}+15=17+8\sqrt{2}$

(2) $(\sqrt{10}-4)(\sqrt{10}+6)=10+2\sqrt{10}-24=-14+2\sqrt{10}$

(3) $(\sqrt{3}+4)(2\sqrt{3}-5)=6+3\sqrt{3}-20=-14+3\sqrt{3}$

(4) $(5\sqrt{7}+\sqrt{2})(2\sqrt{7}-3\sqrt{2})=70-13\sqrt{14}-6=64-13\sqrt{14}$

▶ 개념 1
곱셈 공식을 이용한 근호를 포함한 식의 계산

03 다음 분수의 분모를 유리화하여라.

(1) $\dfrac{\sqrt{5}}{2-\sqrt{3}}$ (2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}}$

(3) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ (4) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

답 (1) $2\sqrt{5}+\sqrt{15}$ (2) $3\sqrt{3}-2\sqrt{6}$ (3) $4-\sqrt{10}$ (4) $\dfrac{12+4\sqrt{6}}{3}$

(1) $\dfrac{\sqrt{5}}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{5}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2\sqrt{5}+\sqrt{15}$

(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=3\sqrt{3}-2\sqrt{6}$

(3) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{2}(2\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(2\sqrt{2}+\sqrt{5})(2\sqrt{2}-\sqrt{5})}=4-\sqrt{10}$

(4) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{2}(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}=\dfrac{12+4\sqrt{6}}{3}$

▶ 개념 2
곱셈 공식을 이용한 분모의 유리화

04 다음 분수의 분모를 유리화하여라.

(1) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ (2) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(3) $\dfrac{6-\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$ (4) $\dfrac{6\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$

답 (1) $-3+2\sqrt{2}$ (2) $5+2\sqrt{6}$ (3) $22-15\sqrt{2}$ (4) $8\sqrt{6}+6\sqrt{10}-8-2\sqrt{15}$

(1) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{(1-\sqrt{2})^2}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=-3+2\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=5+2\sqrt{6}$

(3) $\dfrac{6-\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}=\dfrac{(6-\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=22-15\sqrt{2}$

(4) $\dfrac{6\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-3\sqrt{5}}=\dfrac{(6\sqrt{2}-2\sqrt{3})(4\sqrt{3}+3\sqrt{5})}{(4\sqrt{3}-3\sqrt{5})(4\sqrt{3}+3\sqrt{5})}=8\sqrt{6}+6\sqrt{10}-8-2\sqrt{15}$

▶ 개념 2
곱셈 공식을 이용한 분모의 유리화

유형 확인하기

정답과 풀이 18쪽 | 워크북 27~29쪽

유형 • 1 곱셈 공식을 이용한 수의 계산 (1)

다음 중 주어진 수의 계산을 하는데 가장 편리한 곱셈 공식을 잘못 짝지은 것은?

① $1010^2 \rightarrow (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

② $999^2 \rightarrow (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

③ $99\times101 \rightarrow (a+b)(a-b)=a^2-b^2$

④ $201\times202 \rightarrow (x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

⑤ 297×303

$\rightarrow (ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

답 ⑤

⑤ $297\times303=(300-3)(300+3) \rightarrow (a+b)(a-b)=a^2-b^2$

1-1

다음 수의 계산 중 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하면 가장 편리한 것은?

① 53^2 $=(50+3)^2$　② 49^2 $=(50-1)^2$　③ 93×94 $=(100-7)(100-6)$

④ 199×201 $=(200-1)(200+1)$　⑤ 3.03×2.99 $=(3+0.03)(3-0.01)$

답 ④

강의 tip

서로 다른 두 수의 곱의 계산은 두 수의 평균을 기준으로 합차 공식을 적용한다. 단, ③, ⑤와 같이 평균을 구하기 번거롭거나 두 수의 평균이 복잡한 수로 나올 때는 다른 곱셈 공식을 적용한다.

1-2

다음 수의 계산 중 곱셈 공식 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$을 이용하면 가장 편리한 것은?

① 204^2 $=(200+4)^2$　② 999^2 $=(1000-1)^2$

③ 1.98×2.02 $=(2-0.02)(2+0.02)$　④ 96×102 $=(100-4)(100+2)$

⑤ 123×133 $=(130-7)(130+3)$

답 ②

유형 • 2 곱셈 공식을 이용한 수의 계산 (2)

곱셈 공식을 이용하여 다음을 계산하면?

$$75\times85-77\times83$$

① -24　② -16　③ -8

④ 0　⑤ 8

답 ②

$75\times85-77\times83=(80-5)(80+5)-(80-3)(80+3)$

$=(6400-25)-(6400-9)$

$=-25+9=-16$

2-1

곱셈 공식을 이용하여 $53\times47+62^2$을 계산하였을 때, 각 자리의 숫자의 합은?

① 14　② 15　③ 16

④ 17　⑤ 18

답 ④

$53\times47+62^2=(50+3)(50-3)+(60+2)^2$

$=(2500-9)+(3600+240+4)$

$=2491+3844=6335$

따라서 각 자리의 숫자의 합은 $6+3+3+5=17$

2-2

곱셈 공식을 이용하여 $(373\times377+4)\div375$의 값을 구하여라.

답 375

$(373\times377+4)\div375=\dfrac{373\times377+4}{375}=\dfrac{(375-2)(375+2)+4}{375}$

$=\dfrac{(375^2-4)+4}{375}=375$

유형 • 3 곱셈 공식의 변형 (1)

$x+y=7$, $xy=-2$일 때, $x-y$의 값은?

① $\pm\sqrt{41}$ ② $\pm\sqrt{43}$ ③ $\pm\sqrt{53}$
④ $\pm\sqrt{57}$ ⑤ $\pm\sqrt{65}$

답 ④
$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=7^2-4\times(-2)=57$
$\therefore x-y=\pm\sqrt{57}$

3-1

$x-y=3$, $xy=4$일 때, $x^2-5xy+y^2$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

답 ①
$x^2-5xy+y^2=(x-y)^2-3xy=3^2-3\times4=-3$

3-2

$a+b=6$, $a^2+b^2=20$일 때, $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$의 값을 구하여라.

답 $\frac{5}{2}$
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서
$20=6^2-2ab$, $2ab=16$
$\therefore ab=8$
$\therefore \frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$

유형 • 4 곱셈 공식의 변형 (2)

$a+\frac{1}{a}=2$일 때, $a^2+\frac{1}{a^2}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

답 ②
$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=2^2-2=2$

4-1

$a-\frac{1}{a}=-4$일 때, $a^2+\frac{1}{a^2}$의 값은?

① 11 ② 14 ③ 18
④ 27 ⑤ 38

답 ③
$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2=(-4)^2+2=18$

4-2

$x^2-5x+1=0$일 때, $x^2+\frac{1}{x^2}$의 값을 구하여라.

답 23
$x^2-5x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면
$x-5+\frac{1}{x}=0$ $\therefore x+\frac{1}{x}=5$
$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=5^2-2=23$

유형 • 5 곱셈 공식을 이용한 근호를 포함한 식의 계산

$(3\sqrt{3}-2)^2+(\sqrt{3}+3)(2\sqrt{3}-5)$를 간단히 하면?

① $22-11\sqrt{3}$ ② $22+11\sqrt{3}$ ③ $31-11\sqrt{3}$
④ $40-11\sqrt{3}$ ⑤ $40+11\sqrt{3}$

답 ①
$(3\sqrt{3}-2)^2+(\sqrt{3}+3)(2\sqrt{3}-5)=(27-12\sqrt{3}+4)+(6+\sqrt{3}-15)$
$=(31-12\sqrt{3})+(-9+\sqrt{3})$
$=22-11\sqrt{3}$

5-1

$(2\sqrt{5}+3\sqrt{3})(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})=a+b\sqrt{15}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라.

답 7
$(2\sqrt{5}+3\sqrt{3})(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})=30+5\sqrt{15}-18=12+5\sqrt{15}$
따라서 $a=12$, $b=5$이므로
$a-b=12-5=7$

5-2

다음 식을 간단히 하여라.

$$\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}{2}+(2\sqrt{5}+\sqrt{15})(2\sqrt{5}-\sqrt{15})$$

답 $10-\sqrt{21}$
$\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}{2}+(2\sqrt{5}+\sqrt{15})(2\sqrt{5}-\sqrt{15})$
$=\frac{7-2\sqrt{21}+3}{2}+(20-15)$
$=(5-\sqrt{21})+5=10-\sqrt{21}$

유형 • 6 곱셈 공식을 이용한 분모의 유리화

다음 중 분모를 유리화한 것으로 옳지 않은 것은?

① $\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

② $\frac{1}{1-\sqrt{2}}=-1-\sqrt{2}$

③ $\frac{3}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}=3\sqrt{10}+3\sqrt{7}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=2\sqrt{3}+3$

⑤ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$

답 ③
③ $\frac{3}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}=\frac{3(\sqrt{10}+\sqrt{7})}{(\sqrt{10}-\sqrt{7})(\sqrt{10}+\sqrt{7})}$
$=\frac{3(\sqrt{10}+\sqrt{7})}{3}$
$=\sqrt{10}+\sqrt{7}$

6-1

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$을 간단히 하면?

① $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$
④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{6}$

답 ②
$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}-\frac{\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$
$=\frac{\sqrt{18}+\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{18}-\sqrt{6}}{4}$
$=\frac{2\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

6-2

$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$를 간단히 하면?

① 1 ② $2\sqrt{6}$ ③ $4\sqrt{6}$
④ 10 ⑤ $10+4\sqrt{6}$

답 ③
$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}-\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$
$=(5+2\sqrt{6})-(5-2\sqrt{6})=4\sqrt{6}$

유형 • 7 곱셈 공식을 이용하여 식의 값 구하기 – $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$의 꼴

$x=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$일 때, x^2+y^2의 값은?

① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

답 ②

$x=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})}=\sqrt{6}+\sqrt{5}$

$y=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})}=\sqrt{6}-\sqrt{5}$

$x+y=(\sqrt{6}+\sqrt{5})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})=2\sqrt{6}$

$xy=(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})=(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2=1$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{6})^2-2\times1=22$

7-1

$a=\sqrt{7}+\sqrt{6}$, $b=\sqrt{7}-\sqrt{6}$일 때, a^2+b^2+3ab의 값을 구하여라.

답 29

$a+b=(\sqrt{7}+\sqrt{6})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})=2\sqrt{7}$

$ab=(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{6})^2=1$

$\therefore a^2+b^2+3ab=(a+b)^2+ab=(2\sqrt{7})^2+1=29$

7-2

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$일 때,

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값은?

① $-3-\sqrt{7}$ ② $-1-\sqrt{7}$ ③ $-1+\sqrt{7}$
④ $2+\sqrt{7}$ ⑤ $3+\sqrt{7}$

답 ③

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$
$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})$
$+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})$
$=-1+\sqrt{7}$

유형 • 8 곱셈 공식을 이용하여 식의 값 구하기 – $a\pm\sqrt{b}$의 꼴

$x=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$일 때, x^2-6x+4의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

답 ⑤

$x=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=3-2\sqrt{2}$에서 $x-3=-2\sqrt{2}$

양변을 제곱하면

$(x-3)^2=(-2\sqrt{2})^2$, $x^2-6x+9=8$

$\therefore x^2-6x=-1$

$\therefore x^2-6x+4=-1+4=3$

8-1

$x=\sqrt{7}-2$일 때, x^2+4x+7의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

답 ①

$x=\sqrt{7}-2$에서 $x+2=\sqrt{7}$

양변을 제곱하면

$(x+2)^2=(\sqrt{7})^2$, $x^2+4x+4=7$

$\therefore x^2+4x=3$

$\therefore x^2+4x+7=3+7=10$

8-2

$x=\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$일 때, $x^2-10x+5$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 2
④ 4 ⑤ 8

답 ④

$x=\frac{1}{5+2\sqrt{6}}=\frac{5-2\sqrt{6}}{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}=5-2\sqrt{6}$에서 $x-5=-2\sqrt{6}$

양변을 제곱하면

$(x-5)^2=(-2\sqrt{6})^2$, $x^2-10x+25=24$ $\therefore x^2-10x=-1$

$\therefore x^2-10x+5=-1+5=4$

01 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\left(2a+\frac{1}{4}\right)^2=4a^2+a+\frac{1}{16}$

② $(8a-b)(8a+b)=64a^2-b^2$

③ $(-2+x)(-2-x)=4-x^2$

④ $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2=\frac{1}{4}x^2-2x+1$

⑤ $(-6-2x)(6-2x)=4x^2-36$

답 ④

③ $(-2+x)(-2-x)=(-2)^2-x^2=4-x^2$

④ $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2=\frac{1}{4}x^2-x+1$

⑤ $(-6-2x)(6-2x)=-6^2+(-2x)^2=4x^2-36$

02 $(x+m)^2$을 전개한 식이 $x^2-nx+\frac{1}{4}$일 때, 상수 m, n에 대하여 $4m+n$의 값은? (단, $m<0$)

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

답 ②

$(x+m)^2=x^2+2mx+m^2$이므로 $2m=-n$, $m^2=\frac{1}{4}$

이때 $m<0$이므로 $m=-\frac{1}{2}$

$\therefore n=-2m=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

$\therefore 4m+n=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=-1$

03 $(4x-a)(4x+a)=bx^2-49$일 때, 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값은? (단, $a>0$)

① 1 ② 3 ③ 5

④ 7 ⑤ 9

답 ⑤

$(4x-a)(4x+a)=16x^2-a^2$이므로 $b=16$, $a^2=49$

이때 $a>0$이므로 $a=7$

$\therefore b-a=16-7=9$

04 다음 중 □ 안에 들어갈 수가 가장 작은 것은?

① $(2x+3)^2=4x^2+\boxed{12}x+9$

② $(3a+4)(3a-4)=9a^2-\boxed{16}$

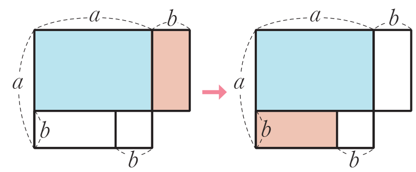
③ $(x+5)(x+6)=x^2+\boxed{11}x+30$

④ $(2a+3)(a-5)=2a^2-\boxed{7}a-15$

⑤ $(-x+5)(x-5)=-x^2+\boxed{10}x-25$

답 ④

05 다음 그림에서 설명하는 곱셈 공식을 이용하여 전개한 것은?



① $(a+5)^2=a^2+10a+25$

② $(3x-2)^2=9x^2-12x+4$

③ $(a+5)(a-5)=a^2-25$

④ $(x+2)(x+7)=x^2+9x+14$

⑤ $(2x+3)(4x+5)=8x^2+22x+15$

답 ③

06 $(Ax+3)(x+B)=2x^2+Cx-12$일 때, 상수 A, B, C에 대하여 $A+B+C$의 값은?

① 9 ② 7 ③ 1

④ -1 ⑤ -7

답 ⑤

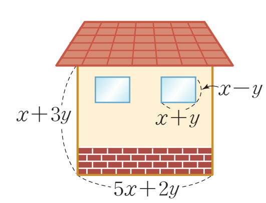
$(Ax+3)(x+B)=Ax^2+(AB+3)x+3B$이므로

$A=2$, $AB+3=C$, $3B=-12$

$\therefore B=-4$, $C=-8+3=-5$

$\therefore A+B+C=2+(-4)+(-5)=-7$

07 오른쪽 그림과 같은 집 모양의 그림에서 두 창문의 크기는 같다. 이때 지붕과 창문을 제외한 부분의 넓이는?



① $x^2+17xy+y^2$

② $x^2+17xy+8y^2$

③ $2x^2-xy+8y^2$

④ $3x^2+xy-8y^2$

⑤ $3x^2+17xy+8y^2$

답 ⑤

(구하는 넓이) $=(5x+2y)(x+3y)-2(x+y)(x-y)$

$=5x^2+17xy+6y^2-2(x^2-y^2)$

$=3x^2+17xy+8y^2$

08 다음 식을 바르게 전개한 것은?

$$(x+4)(x+1)+(2x-3)(-4x+5)$$

① $9x^2-2x-11$ ② $9x^2+27x+19$
③ $-7x^2-17x+19$ ④ $-7x^2-17x-11$
⑤ $-7x^2+27x-11$

답 ⑤
$(x+4)(x+1)+(2x-3)(-4x+5)$
$=(x^2+5x+4)+(-8x^2+22x-15)$
$=-7x^2+27x-11$

09 $(5-1)(5+1)(5^2+1)(5^4+1)=5^m-n$일 때, $m-n$의 값은? (단, n은 한 자리의 자연수이다.)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

답 ②
$(5-1)(5+1)(5^2+1)(5^4+1)$
$=(5^2-1)(5^2+1)(5^4+1)$
$=(5^4-1)(5^4+1)=5^8-1$
따라서 $m=8$, $n=1$이므로
$m-n=8-1=7$

10 곱셈 공식을 이용하여 다음 식의 값을 구하여라.

$$201^2-196\times204$$

답 417
$201^2-196\times204=(200+1)^2-(200-4)(200+4)$
$=40000+400+1-(40000-16)$
$=417$

11 $\dfrac{\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}+\dfrac{5+2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}=a+b\sqrt{6}$을 만족하는 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 56 ② 58 ③ 60
④ 62 ⑤ 64

답 ④
$\dfrac{\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}+\dfrac{5+2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}(5-2\sqrt{6})+(5+2\sqrt{6})^2}{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}$
$=5\sqrt{6}-12+25+20\sqrt{6}+24$
$=37+25\sqrt{6}$
따라서 $a=37$, $b=25$이므로
$a+b=37+25=62$

12 $ab=5$일 때, $(a+b)^2-(a-b)^2$의 값은?

① -20 ② -10 ③ 10
④ 20 ⑤ 50

답 ④
$(a+b)^2-(a-b)^2=(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$
$=4ab$
$=4\times5=20$

강의 tip
먼저 주어진 식을 간단히하여 ab에 대한 식으로 나타낸 후 ab 대신 수를 대입한다.

13 $x^2+2x-1=0$일 때, $x^2+\dfrac{1}{x^2}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

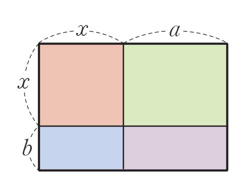
답 ④
$x^2+2x-1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면
$x+2-\dfrac{1}{x}=0$ $\therefore x-\dfrac{1}{x}=-2$
$\therefore x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=(-2)^2+2=4+2=6$

14 $a=\dfrac{2}{4-\sqrt{14}}$, $b=\dfrac{2}{4+\sqrt{14}}$일 때, $a^2+5ab+b^2$의 값은?

① 58 ② 66 ③ 70
④ $58+16\sqrt{14}$ ⑤ $70+16\sqrt{14}$

답 ③
$a=\dfrac{2(4+\sqrt{14})}{(4-\sqrt{14})(4+\sqrt{14})}=\dfrac{2(4+\sqrt{14})}{2}=4+\sqrt{14}$
$b=\dfrac{2(4-\sqrt{14})}{(4+\sqrt{14})(4-\sqrt{14})}=\dfrac{2(4-\sqrt{14})}{2}=4-\sqrt{14}$
$a+b=(4+\sqrt{14})+(4-\sqrt{14})=8$
$ab=(4+\sqrt{14})(4-\sqrt{14})=4^2-(\sqrt{14})^2=2$
$\therefore a^2+5ab+b^2=(a+b)^2+3ab=8^2+3\times2=70$

15 자연수 a, b에 대하여 오른쪽 그림의 직사각형의 넓이가 $x^2+12x+A$일 때, 다음 중 A의 값이 될 수 없는 것은?



① 11 ② 20 ③ 27
④ 30 ⑤ 32

답 ④
$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$이므로 $a+b=12$, $ab=A$
이때 더하여 12가 되는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(1, 11)$, $(2, 10)$, $(3, 9)$, $(4, 8)$, $(5, 7)$, $(6, 6)$, $(7, 5)$, $(8, 4)$, $(9, 3)$, $(10, 2)$, $(11, 1)$
① $11=1\times11$ ② $20=2\times10$ ③ $27=3\times9$ ⑤ $32=4\times8$

주어진 단계에 따라 쓰는 유형

16 $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$을 간단히 하면 2^p+q일 때, 상수 p, q에 대하여 $p-q$의 값을 구하여라.
(단, q는 한 자리의 정수이다.)

생각해 보자

구하는 것은? 상수 p, q에 대하여 $p-q$의 값

주어진 것은? $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)=2^p+q$

풀이

[1단계] 주어진 식을 합과 차의 곱셈 공식을 이용할 수 있는 꼴로 만들기 $(30\ \%)$

$2-1=1$이므로
$(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)=2^p+q$

강의 tip

곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하려면 합과 차의 곱의 꼴이어야 한다.
즉, 이 공식을 이용할 수 있도록 $(2+1)$과 곱해질 $(2-1)$을 곱해 준다.
이때 $2-1=1$이므로 이 수를 곱해도 계산 결과에 전혀 영향을 미치지 않는다.

[2단계] 2^p+q의 꼴로 나타내기 $(50\ \%)$

$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2^8-1)(2^8+1)=2^{16}-1$

[3단계] $p-q$의 값 구하기 $(20\ \%)$

따라서 $p=16$, $q=-1$이므로
$p-q=16-(-1)=17$

답 17

풀이 과정을 자세히 쓰는 유형

17 은지는 $(4x+3)(3x-7)$을 전개하는데 $3x$를 ax로 잘못 보고 전개하여 $4x^2+bx-21$을 얻었다. 이때 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

풀이

$(4x+3)(ax-7)=4ax^2+(3a-28)x-21$ ······ ❶
$4ax^2+(3a-28)x-21=4x^2+bx-21$에서 양변의 계수를 비교하면
$4a=4$, $3a-28=b$
따라서 $a=1$, $b=-25$이므로 ······ ❷
$a+b=1+(-25)=-24$ ······ ❸

단계	채점 기준	비율
❶	잘못 본 식 전개하기	$30\ \%$
❷	a, b의 값 구하기	$60\ \%$
❸	$a+b$의 값 구하기	$10\ \%$

답 -24

18 $x+\frac{1}{x}=3$일 때, $x-\frac{1}{x}$의 값을 구하여라. (단, $x>1$)

풀이

$x+\frac{1}{x}=3$의 양변을 제곱하면
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3^2$, $x^2+2+\frac{1}{x^2}=9$
$\therefore\ x^2+\frac{1}{x^2}=7$ ······ ❶
$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=7-2=5$이므로 $x-\frac{1}{x}=\pm\sqrt{5}$
이때 $x>1$이므로 $x-\frac{1}{x}>0$
$\therefore\ x-\frac{1}{x}=\sqrt{5}$ ······ ❷

단계	채점 기준	비율
❶	$x^2+\frac{1}{x^2}$의 값 구하기	$40\ \%$
❷	$x-\frac{1}{x}$의 값 구하기	$60\ \%$

답 $\sqrt{5}$

2

다항식의 인수분해

1. 인수분해 공식

2. 인수분해 공식의 활용

01 인수분해의 뜻

▸ 2-1. 인수분해 공식

개념 1 인수분해의 뜻

1. 인수분해

(1) **인수**: 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 때, 각각의 식을 처음 식의 인수라고 한다.

(2) **인수분해**: 하나의 다항식을 두 개 이상의 인수의 곱으로 나타내는 것

$$x^2+3x+2 \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} (x+1)(x+2)$$

인수: $1,\ x+1,\ x+2,\ (x+1)(x+2)$

풍쌤의 Point 인수분해는 더 이상 인수분해되지 않을 때까지 해야 해.

- 모든 다항식에서 1과 자기 자신은 그 다항식의 인수이다.
- 인수분해는 전개를 거꾸로 하는 과정이다.

예제 1

다음 식은 어떤 다항식을 인수분해한 것인지 구하여라.

(1) $x(x+1)$　　(2) $(x-1)(x+3)$

답 (1) x^2+x　(2) x^2+2x-3

유제 1

다음 식은 어떤 다항식을 인수분해한 것인지 구하여라.

(1) $2a(a-b)$　　(2) $(2a+1)(a-b)$

답 (1) $2a^2-2ab$　(2) $2a^2-2ab+a-b$

예제 2

다음 다항식의 인수를 모두 구하여라.

(1) $a(a+1)$　　(2) $(x+y)(x-y)$

답 (1) $1,\ a,\ a+1,\ a(a+1)$
(2) $1,\ x+y,\ x-y,\ (x+y)(x-y)$

유제 2

다음 다항식의 인수를 모두 구하여라.

(1) $(a-2)(a+3)$　　(2) $(x-4)^2$

답 (1) $1,\ a-2,\ a+3,\ (a-2)(a+3)$
(2) $1,\ x-4,\ (x-4)^2$

개념 2 공통인수를 이용한 인수분해

1. 공통인수를 이용한 인수분해

(1) **공통인수**: 다항식의 각 항에 공통으로 들어 있는 인수

(2) **공통인수를 이용한 인수분해**: 다항식에 공통인수가 있을 때에는 분배법칙을 이용하여 공통인수를 묶어 내어 인수분해한다.

$$ma+mb=m(a+b)$$
공통인수

예 $a^2b+ab^2=ab\times a+ab\times b=ab(a+b)$
공통인수

- 인수분해할 때에는 공통인수가 남지 않도록 모두 묶어 낸다.

예제 3

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $xz+2yz$　　(2) $3x^3-6x^2$

답 (1) $z(x+2y)$　(2) $3x^2(x-2)$

유제 3

다음 식을 인수분해하여라.

(1) y^2+3y　　(2) $6x^2y-9xy^2$

답 (1) $y(y+3)$　(2) $3xy(2x-3y)$

01 다음 〈보기〉 중 다항식 $xy(x-y-1)$의 인수를 모두 골라라.

▶ 개념 1 인수분해의 뜻

보기		
ㄱ. 1	ㄴ. y	ㄷ. x^2y
ㄹ. $x-y$	ㅁ. $x-y-1$	ㅂ. $x(x-y-1)$

답 ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅂ
$xy(x-y-1)$의 인수는 1, x, y, $x-y-1$, xy, $x(x-y-1)$, $y(x-y-1)$, $xy(x-y-1)$이다.

02 다음 〈보기〉 중 다항식 $x(x+y)(x-2y)$의 인수가 아닌 것을 모두 골라라.

▶ 개념 1 인수분해의 뜻

보기		
ㄱ. x	ㄴ. $x+y$	ㄷ. xy
ㄹ. $x-2y$	ㅁ. $y(x-2y)$	ㅂ. $x(x-y)$

답 ㄷ, ㅁ, ㅂ
$x(x+y)(x-2y)$의 인수는 1, x, $x+y$, $x-2y$, $x(x+y)$, $x(x-2y)$, $(x+y)(x-2y)$, $x(x+y)(x-2y)$이다.

03 다음 식을 인수분해하여라.

▶ 개념 2 공통인수를 이용한 인수분해

(1) $4ab-6a^2b$

(2) $3x^2y+6xy-9xy^2$

(3) $xy(x+y)-xy$

답 (1) $2ab(2-3a)$ (2) $3xy(x+2-3y)$ (3) $xy(x+y-1)$

04 다음 식을 인수분해하여라.

▶ 개념 2 공통인수를 이용한 인수분해

(1) $a^2b+a^2c-ab^2$

(2) $5y^2z-10yz+15yz^2$

(3) $(a+b)c-2c$

답 (1) $a(ab+ac-b^2)$ (2) $5yz(y-2+3z)$ (3) $c(a+b-2)$

02 인수분해 공식 (1)

▸ 2-1. 인수분해 공식

개념 1 $a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$의 인수분해

(1) **완전제곱식**: 다항식의 제곱으로 이루어진 식 또는 이 식에 상수를 곱한 식

예 $(a+b)^2$, $(x+2)^2$, $2(x-y)^2$

(2) **완전제곱식을 이용한 인수분해**

① $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

예 $x^2+2x+1=x^2+2\times x\times 1+1^2=(x+1)^2$

② $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

예 $x^2-6x+9=x^2-2\times x\times 3+3^2=(x-3)^2$

$a^2 \pm 2ab+b^2=(a \pm b)^2$

곱의 2배

• x^2+ax+b가 완전제곱식이 될 조건

→ $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$

예제 1

다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^2+4x+4 (2) $9x^2-6x+1$

풀이 (1) $x^2+4x+4=x^2+2\times x\times 2+2^2=(x+2)^2$

(2) $9x^2-6x+1=(3x)^2-2\times 3x\times 1+1^2=(3x-1)^2$

답 (1) $(x+2)^2$ (2) $(3x-1)^2$

유제 1

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $y^2-8y+16$ (2) $5x^2+10x+5$

답 (1) $(y-4)^2$ (2) $5(x+1)^2$

(1) $y^2-8y+16=y^2-2\times y\times 4+4^2=(y-4)^2$

(2) $5x^2+10x+5=5(x^2+2x+1)$

$=5(x^2+2\times x\times 1+1^2)$

$=5(x+1)^2$

예제 2

다음 식이 완전제곱식이 되도록 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) $x^2+10x+\square$ (2) $x^2-8x+\square$

풀이 (1) $\square=\left(\frac{10}{2}\right)^2=25$ (2) $\square=\left(\frac{-8}{2}\right)^2=16$

답 (1) 25 (2) 16

유제 2

다음 식이 완전제곱식이 되도록 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) $x^2+14x+\boxed{49}$ (2) $x^2-3x+\boxed{\frac{9}{4}}$

(1) $\square=\left(\frac{14}{2}\right)^2=49$ (2) $\square=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

개념 2 a^2-b^2의 인수분해

두 식의 제곱의 차, 즉 a^2-b^2의 꼴인 다항식은 두 식의 합과 차의 곱의 꼴로 나타낸다.

→ $\underbrace{a^2-b^2}_{\text{제곱의 차}}=\underbrace{(a+b)}_{\text{합}}\underbrace{(a-b)}_{\text{차}}$

예 $x^2-4=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$

• 특별한 조건이 없으면 다항식의 인수분해는 유리수의 범위에서 더 이상 인수분해할 수 없을 때까지 계속한다.

예제 3

다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^2-25 (2) $-a^2+81b^2$

풀이 (1) $x^2-25=x^2-5^2=(x+5)(x-5)$

(2) $-a^2+81b^2=(9b)^2-a^2=(9b+a)(9b-a)$

답 (1) $(x+5)(x-5)$ (2) $(9b+a)(9b-a)$

유제 3

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $4-9x^2$ (2) $5x^2-80y^2$

답 (1) $(2+3x)(2-3x)$ (2) $5(x+4y)(x-4y)$

(1) $4-9x^2=2^2-(3x)^2=(2+3x)(2-3x)$

(2) $5x^2-80y^2=5\{x^2-(4y)^2\}=5(x+4y)(x-4y)$

개념 확인하기

정답과 풀이 21~22쪽 | 워크북 32~34쪽

01 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $16x^2+8x+1$　　(2) $4x^2-36xy+81y^2$

(3) $4a^2+4a+1$　　(4) $3a^2-18a+27$

답 (1) $(4x+1)^2$　(2) $(2x-9y)^2$　(3) $(2a+1)^2$　(4) $3(a-3)^2$

(1) $16x^2+8x+1=(4x)^2+2\times4x\times1+1^2=(4x+1)^2$

(2) $4x^2-36xy+81y^2=(2x)^2-2\times2x\times9y+(9y)^2=(2x-9y)^2$

(3) $4a^2+4a+1=(2a)^2+2\times2a\times1+1^2=(2a+1)^2$

(4) $3a^2-18a+27=3(a^2-6a+9)=3(a^2-2\times a\times3+3^2)=3(a-3)^2$

▷ 개념 1
$a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$의 인수분해

02 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $a^2+ab+\frac{1}{4}b^2$　　(2) $16a^2-4a+\frac{1}{4}$

(3) $\frac{1}{4}x^2+3xy+9y^2$　　(4) $x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$

답 (1) $\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2$　(2) $\left(4a-\frac{1}{2}\right)^2$　(3) $\left(\frac{1}{2}x+3y\right)^2$　(4) $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$

(1) $a^2+ab+\frac{1}{4}b^2=a^2+2\times a\times\frac{1}{2}b+\left(\frac{1}{2}b\right)^2=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2$

(2) $16a^2-4a+\frac{1}{4}=(4a)^2-2\times4a\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(4a-\frac{1}{2}\right)^2$

(3) $\frac{1}{4}x^2+3xy+9y^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+2\times\frac{1}{2}x\times3y+(3y)^2=\left(\frac{1}{2}x+3y\right)^2$

(4) $x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}=x^2-2\times x\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$

▷ 개념 1
$a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$의 인수분해

03 다음 식이 완전제곱식이 되도록 □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

(1) $a^2+\boxed{\pm8a}+16$　　(2) $4x^2+\boxed{\pm12xy}+9y^2$

(3) $x^2+\boxed{\pm\frac{2}{3}x}+\frac{1}{9}$　　(4) $\frac{1}{4}a^2+\boxed{\pm\frac{1}{3}ab}+\frac{1}{9}b^2$

(1) $\square=\pm2\times a\times4=\pm8a$　　(2) $\square=\pm2\times2x\times3y=\pm12xy$

(3) $\square=\pm2\times x\times\frac{1}{3}=\pm\frac{2}{3}x$　　(4) $\square=\pm2\times\frac{1}{2}a\times\frac{1}{3}b=\pm\frac{1}{3}ab$

강의 tip
x의 계수가 양수, 음수 두 가지가 존재할 수 있음에 유의한다.

▷ 개념 1
$a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$의 인수분해

04 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $81x^2-9y^2$　　(2) $4a^2-100b^2$

(3) $-\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{4}y^2$　　(4) $-\frac{9}{25}x^2+1$

답 (1) $9(3x+y)(3x-y)$　(2) $4(a+5b)(a-5b)$

(3) $\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}x\right)\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}x\right)$　(4) $\left(1+\frac{3}{5}x\right)\left(1-\frac{3}{5}x\right)$

(1) $81x^2-9y^2=9\{(3x)^2-y^2\}=9(3x+y)(3x-y)$

(2) $4a^2-100b^2=4\{a^2-(5b)^2\}=4(a+5b)(a-5b)$

(3) $-\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{4}y^2=\left(\frac{1}{2}y\right)^2-\left(\frac{1}{3}x\right)^2=\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}x\right)\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}x\right)$

(4) $-\frac{9}{25}x^2+1=1^2-\left(\frac{3}{5}x\right)^2=\left(1+\frac{3}{5}x\right)\left(1-\frac{3}{5}x\right)$

▷ 개념 2
a^2-b^2의 인수분해

03 인수분해 공식 (2)

▸ 2-1. 인수분해 공식

개념 1 $x^2+(a+b)x+ab$의 인수분해

$x^2+(a+b)x+ab$의 인수분해 방법은 다음과 같다.

❶ 곱해서 상수항이 되는 두 수를 모두 찾는다.

❷ ❶에서 찾은 두 수 중 더해서 x의 계수가 되는 두 수 a, b를 찾는다.

❸ $(x+a)(x+b)$의 꼴로 나타낸다.

예 x^2+5x+6의 인수분해

❶ 곱하여 6이 되는 두 수는 1, 6 또는 -1, -6 또는 2, 3 또는 -2, -3

❷ 이 중 더해서 5가 되는 두 수는 2, 3

❸ $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

- $x^2+\underbrace{(a+b)}_{\text{두 수의 합}}x+\underbrace{ab}_{\text{두 수의 곱}}$ ⇨ $(x+a)(x+b)$

예제 1

다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^2+3x+2 (2) $x^2-7x+10$

풀이 (1) 곱이 2인 두 수 중 합이 3인 수는 1과 2이므로
$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

(2) 곱이 10인 두 수 중 합이 -7인 수는 -2와 -5이므로
$x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$

답 (1) $(x+1)(x+2)$ (2) $(x-2)(x-5)$

유제 1

다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^2+4x+3 (2) $x^2-8x+12$

답 (1) $(x+1)(x+3)$ (2) $(x-2)(x-6)$

(1) 곱이 3인 두 수 중 합이 4인 수는 1과 3이므로
$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$

(2) 곱이 12인 두 수 중 합이 -8인 수는 -2와 -6이므로
$x^2-8x+12=(x-2)(x-6)$

개념 2 $acx^2+(ad+bc)x+bd$의 인수분해

$acx^2+(ad+bc)x+bd$의 인수분해 방법은 다음과 같다.

❶ 곱해서 x^2의 계수가 되는 두 수 a, c를 세로로 나열한다.

❷ 곱해서 상수항이 되는 두 수 b, d를 세로로 나열한다.

❸ ❶, ❷의 수를 대각선으로 곱하여 합한 값 $ad+bc$가 x의 계수와 같은 것을 찾는다.

❹ $(ax+b)(cx+d)$의 꼴로 나타낸다.

$$\begin{array}{ccccc} ❶ & & ❷ & & \\ a & \times & b & \to & bc \\ c & & d & \to & \underline{ad} \ (+ \\ & & & & ad+bc \\ & & & & ❸ \end{array}$$

예 $3x^2+x-2$의 인수분해

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 1 & \to & 3 \\ 3 & & -2 & \to & \underline{-2} \ (+ \\ & & x\text{의 계수} & \to & 1 \end{array}$$

$\therefore 3x^2+x-2=(x+1)(3x-2)$

- 보통 a, c는 양수로 생각한다.

예제 2

다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣고, 주어진 식을 인수분해하여라.

$2x^2+5x+3$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & \square & \to & \square \\ 2 & & \square & \to & \underline{\square} \ (+ \\ & & & & \square \end{array}$$

답 1, 2, 3, 3, 5, $(x+1)(2x+3)$

유제 2

다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣고, 주어진 식을 인수분해하여라.

$3x^2-7x+2$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & \boxed{-2} & \to & \boxed{-6} \\ 3 & & \boxed{-1} & \to & \underline{\boxed{-1}} \ (+ \\ & & & & \boxed{-7} \end{array}$$

답 $(x-2)(3x-1)$

개념 확인하기

정답과 풀이 22~23쪽 | 워크북 34~36쪽

01 다음 식을 인수분해하여라.

▶ 개념 1
$x^2+(a+b)x+ab$의 인수분해

(1) x^2+x-2 (2) x^2+2x-3

(3) $x^2-3x-10$ (4) $x^2-4x-12$

답 (1) $(x-1)(x+2)$ (2) $(x-1)(x+3)$ (3) $(x+2)(x-5)$ (4) $(x+2)(x-6)$

02 다음 식을 인수분해하여라.

▶ 개념 1
$x^2+(a+b)x+ab$의 인수분해

(1) $x^2+5xy+6y^2$ (2) $x^2-7xy+6y^2$

(3) $x^2+xy-6y^2$ (4) $x^2-5xy-6y^2$

답 (1) $(x+2y)(x+3y)$ (2) $(x-y)(x-6y)$
(3) $(x-2y)(x+3y)$ (4) $(x+y)(x-6y)$

강의 tip

곱하면 y^2의 계수가 되고, 더하면 xy의 계수가 되는 것을 찾는다.
이때 인수분해한 식에서 y를 빠뜨리지 않도록 주의한다.

03 다음 식을 인수분해하여라.

▶ 개념 2
$acx^2+(ad+bc)x+bd$의 인수분해

(1) $2x^2+x-1$ (2) $3x^2+2x-1$

(3) $3x^2-x-2$ (4) $4x^2-4x-3$

답 (1) $(x+1)(2x-1)$ (2) $(x+1)(3x-1)$
(3) $(x-1)(3x+2)$ (4) $(2x-3)(2x+1)$

(1) $2x^2+x-1$
$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 1 & \to & 2 \\ 2 & & -1 & \to & -1\ (+ \\ & & & & 1 \end{array}$$
$\therefore 2x^2+x-1=(x+1)(2x-1)$

(2) $3x^2+2x-1$
$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 1 & \to & 3 \\ 3 & & -1 & \to & -1\ (+ \\ & & & & 2 \end{array}$$
$\therefore 3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$

(3) $3x^2-x-2$
$$\begin{array}{ccccc} 1 & & -1 & \to & -3 \\ 3 & & 2 & \to & 2\ (+ \\ & & & & -1 \end{array}$$
$\therefore 3x^2-x-2=(x-1)(3x+2)$

(4) $4x^2-4x-3$
$$\begin{array}{ccccc} 2 & & -3 & \to & -6 \\ 2 & & 1 & \to & 2\ (+ \\ & & & & -4 \end{array}$$
$\therefore 4x^2-4x-3=(2x-3)(2x+1)$

04 다음 식을 인수분해하여라.

▶ 개념 2
$acx^2+(ad+bc)x+bd$의 인수분해

(1) $4x^2+8xy+3y^2$ (2) $6x^2-13xy+6y^2$

(3) $12x^2+4xy-y^2$ (4) $8x^2-2xy-3y^2$

답 (1) $(2x+3y)(2x+y)$ (2) $(2x-3y)(3x-2y)$
(3) $(2x+y)(6x-y)$ (4) $(2x+y)(4x-3y)$

(1) $4x^2+8xy+3y^2$
$$\begin{array}{ccccc} 2 & & 3 & \to & 6 \\ 2 & & 1 & \to & 2\ (+ \\ & & & & 8 \end{array}$$
$\therefore 4x^2+8xy+3y^2=(2x+3y)(2x+y)$

(2) $6x^2-13xy+6y^2$
$$\begin{array}{ccccc} 2 & & -3 & \to & -9 \\ 3 & & -2 & \to & -4\ (+ \\ & & & & -13 \end{array}$$
$\therefore 6x^2-13xy+6y^2=(2x-3y)(3x-2y)$

(3) $12x^2+4xy-y^2$
$$\begin{array}{ccccc} 2 & & 1 & \to & 6 \\ 6 & & -1 & \to & -2\ (+ \\ & & & & 4 \end{array}$$
$\therefore 12x^2+4xy-y^2=(2x+y)(6x-y)$

(4) $8x^2-2xy-3y^2$
$$\begin{array}{ccccc} 2 & & 1 & \to & 4 \\ 4 & & -3 & \to & -6\ (+ \\ & & & & -2 \end{array}$$
$\therefore 8x^2-2xy-3y^2=(2x+y)(4x-3y)$

유형 확인하기

정답과 풀이 23쪽 | 워크북 32~36쪽

유형 1 인수 찾기

다음 〈보기〉 중 다항식 $3x^3y-3xy$의 인수를 모두 골라라.

보기

ㄱ. $3x$	ㄴ. $3y$	ㄷ. $x+1$
ㄹ. $y+1$	ㅁ. $x-1$	ㅂ. x^2+1

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ

$3x^3y-3xy=3xy(x^2-1)=3xy(x+1)(x-1)$

1-1

다음 〈보기〉 중 $x+1$을 인수로 갖는 것을 모두 골라라.

보기

ㄱ. $2x(x-1)$	ㄴ. $(x+1)^2$	ㄷ. x^2+1
ㄹ. $xy-y$	ㅁ. $3xy+3y$	ㅂ. $(x+1)(x+3)$

답 ㄴ, ㅁ, ㅂ

ㄹ. $xy-y=y(x-1)$

ㅁ. $3xy+3y=3y(x+1)$

1-2

다음 중 $10a^2b+2ab$의 인수가 아닌 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $2a$ ② ab ③ a^2

④ $5a+b$ ⑤ $2b(5a+1)$

답 ③, ④

$10a^2b+2ab=2ab(5a+1)$

유형 2 공통인수를 이용한 인수분해

$a(3x-y)-2b(y-3x)$를 인수분해하면?

① $(a-2b)(3x-y)$ ② $(a-2b)(3x+y)$

③ $(a+2b)(3x-y)$ ④ $(a+2b)(3x+y)$

⑤ $(2b-a)(3x-y)$

답 ③

$a(3x-y)-2b(y-3x)=a(3x-y)+2b(3x-y)$
$=(a+2b)(3x-y)$

2-1

다음 식을 인수분해하여라.

$$2x(x-y)-3y(x-y)-x+y$$

답 $(x-y)(2x-3y-1)$

$2x(x-y)-3y(x-y)-x+y=2x(x-y)-3y(x-y)-(x-y)$
$=(x-y)(2x-3y-1)$

2-2

다음 중 인수분해한 것이 옳지 않은 것은?

① $mx-2my=m(x-2y)$

② $2ab+8ab^2=2ab(1+4b)$

③ $3x(x+y)-2y(x+y)=(x+y)(3x+2y)$

④ $(2x+5)(x-3)-2y(x-3)=(x-3)(2x-2y+5)$

⑤ $a(a-b)-3b(-a+b)=(a-b)(a+3b)$

답 ③

③ $3x(x+y)-2y(x+y)=(x+y)(3x-2y)$

⑤ $a(a-b)-3b(-a+b)=a(a-b)+3b(a-b)=(a-b)(a+3b)$

유형 · 3 $a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$의 인수분해

다음 중 인수분해가 잘못된 것은?

① $a^2+12a+36=(a+6)^2$

② $\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}x+1=\left(\frac{1}{3}x-1\right)^2$

③ $\frac{9}{16}y^2+2y+\frac{16}{9}=\left(\frac{3}{4}y+\frac{4}{3}\right)^2$

④ $4x^2-12xy+9y^2=(2x-3y)^2$

⑤ $16a^2-16ab+4b^2=(4a-b)^2$

답 ⑤

⑤ $16a^2-16ab+4b^2=4(4a^2-4ab+b^2)=4(2a-b)^2$

3-1

다음 중 완전제곱식으로 인수분해할 수 없는 것은?

① $x^2+18x+81$ ② $x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{64}$

③ $6+12y+6y^2$ ④ $2x^2-12x+18$

⑤ $16x^2-12xy+9y^2$

답 ⑤

① $x^2+18x+81=(x+9)^2$

② $x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{64}=\left(x-\frac{1}{8}\right)^2$

③ $6+12y+6y^2=6(y^2+2y+1)=6(y+1)^2$

④ $2x^2-12x+18=2(x^2-6x+9)=2(x-3)^2$

3-2

다음 등식을 만족하는 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

$$3x(3x-10)+25=(ax+b)^2$$

답 8

$3x(3x-10)+25=9x^2-30x+25=(3x-5)^2$

따라서 $a=3$, $b=-5$이므로

$a-b=3-(-5)=8$

유형 · 4 완전제곱식이 될 조건

다항식 $4x^2+12x+a$가 $(bx+c)^2$으로 인수분해될 때, 양수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12

④ 13 ⑤ 14

답 ⑤

$4x^2+12x+a=(2x)^2+2\times2x\times3+a$가 완전제곱식으로 인수분해되므로

$a=3^2=9$

즉, $4x^2+12x+a=4x^2+12x+9=(2x+3)^2$이므로 $b=2$, $c=3$

$\therefore a+b+c=9+2+3=14$

강의 tip

다항식 x^2+ax+b $(b>0)$가 완전제곱식

$\rightarrow x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$

$\rightarrow b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$, $a=\pm2\sqrt{b}$

4-1

다음 두 다항식이 모두 완전제곱식이 되도록 하는 양수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

$$9x^2+24x+a,\ x^2-bx+49$$

답 30

$9x^2+24x+a=(3x)^2+2\times3x\times4+a$가 완전제곱식으로 인수분해되므로

$a=4^2=16$

$x^2-bx+49=x^2-2\times x\times7+7^2=(x-7)^2$이므로 $b=2\times7=14$

$\therefore a+b=16+14=30$

4-2

$(x-4)(x-8)+a$가 완전제곱식으로 인수분해될 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4

④ 8 ⑤ 16

답 ③

$(x-4)(x-8)+a=x^2-12x+32+a=x^2-2\times x\times6+32+a$가 완전제곱식으로 인수분해되므로 $32+a=6^2=36$ $\therefore a=4$

유형 • 5 근호 안이 완전제곱식으로 인수분해되는 식

$-2<x<2$일 때, $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-4x+4}$를 간단히 하면?

① -4 ② 4 ③ $2x-4$
④ $2x$ ⑤ $2x+4$

답 ②
$-2<x<2$이므로 $x+2>0$, $x-2<0$
$\therefore \sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2}$
$=(x+2)-(x-2)$
$=4$

강의 tip
근호 안의 식을 완전제곱식으로 인수분해한 후 부호에 주의하여 근호를 없앤다.
$\rightarrow \sqrt{A^2}=\begin{cases} A & (A\ge 0) \\ -A & (A<0) \end{cases}$

5-1

$3<x<4$일 때, $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2-8x+16}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

답 ②
$3<x<4$이므로 $x-3>0$, $x-4<0$
$\therefore \sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2-8x+16}=\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x-4)^2}$
$=(x-3)-(x-4)$
$=1$

5-2

$0<a<b$일 때, $\sqrt{a^2-2ab+b^2}-\sqrt{a^2+2ab+b^2}$의 값을 구하여라.

답 $-2a$
$0<a<b$이므로 $a-b<0$, $a+b>0$
$\therefore \sqrt{a^2-2ab+b^2}-\sqrt{a^2+2ab+b^2}=\sqrt{(a-b)^2}-\sqrt{(a+b)^2}$
$=-(a-b)-(a+b)$
$=-2a$

유형 • 6 a^2-b^2의 인수분해

다음 중 인수분해가 바르게 된 것은?

① $9a^2-b^2=(9a+b)(9a-b)$
② $16x^2-9=(4x+9)(4x-9)$
③ $-4x^2+y^2=(2x+y)(2x-y)$
④ $3x^2-12=3(x+2)(x-2)$
⑤ $\frac{1}{9}a^2-\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}\right)^2$

답 ④
① $9a^2-b^2=(3a+b)(3a-b)$
② $16x^2-9=(4x+3)(4x-3)$
③ $-4x^2+y^2=(y+2x)(y-2x)$
⑤ $\frac{1}{9}a^2-\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}\right)$

6-1

$(a-b)x^2+(b-a)y^2$의 인수가 아닌 것은?

① $a+b$ ② $a-b$ ③ $x+y$
④ $x-y$ ⑤ $(a-b)(x-y)$

답 ①
$(a-b)x^2+(b-a)y^2=(a-b)x^2-(a-b)y^2=(a-b)(x+y)(x-y)$

6-2

다음 중 x^8-1의 인수가 아닌 것은?

① x^4+1 ② x^2+1 ③ x^2
④ $x+1$ ⑤ $x-1$

답 ③
$x^8-1=(x^4+1)(x^4-1)$
$=(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)$
$=(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$

유형 • 7 $x^2+(a+b)x+ab$의 인수분해

두 다항식 x^2+2x-8과 $x^2-3x-18$을 각각 인수분해하였을 때, 다음 중 나오지 않는 인수는?

① $x-6$ ② $x-4$ ③ $x-2$
④ $x+3$ ⑤ $x+4$

답 ②
$x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$, $x^2-3x-18=(x+3)(x-6)$

7-1

다항식 $(x+3)(x-4)-3x$는 일차항의 계수가 1인 두 일차식의 곱으로 인수분해된다. 이 두 일차식의 합을 구하여라.

답 $2x-4$
$$(x+3)(x-4)-3x=(x^2-x-12)-3x$$
$$=x^2-4x-12$$
$$=(x+2)(x-6)$$
이므로 두 일차식의 합은
$(x+2)+(x-6)=2x-4$

7-2

다항식 $x^2+Ax+12$가 $(x+a)(x+b)$로 인수분해될 때, 다음 중 상수 A의 값이 될 수 없는 것은? (단, $a<b$인 정수)

① -13 ② -7 ③ 4
④ 8 ⑤ 13

답 ③
상수 A는 곱이 12인 두 정수의 합이다.
곱이 12인 두 정수는 -12와 -1, -6과 -2, -4와 -3, 3과 4, 2와 6, 1과 12이므로 A의 값이 될 수 있는 수는 -13, -8, -7, 7, 8, 13이다.

유형 • 8 $acx^2+(ad+bc)x+bd$의 인수분해

다항식 $2x^2-5xy+2y^2$이 x, y의 계수가 자연수인 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 이 두 일차식의 합은?

① $x-3y$ ② $x+3y$ ③ $3x-3y$
④ $3x+y$ ⑤ $3x+3y$

답 ③
$2x^2-5xy+2y^2=(2x-y)(x-2y)$이므로 두 일차식의 합은
$(2x-y)+(x-2y)=3x-3y$

8-1

다항식 $2x^2+x-21$을 인수분해하면 $(x+a)(2x+b)$일 때, 정수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하여라.

답 10
$2x^2+x-21=(x-3)(2x+7)$이므로 $a=-3$, $b=7$
$\therefore b-a=7-(-3)=10$

8-2

다항식 $60x^3+16x^2-12x$를 인수분해하면?

① $2x(5x+1)(6x-5)$ ② $2x(5x-1)(6x+5)$
③ $4x(5x+3)(3x-1)$ ④ $4x(5x-3)(3x+1)$
⑤ $6x(5x+2)(2x-3)$

답 ③
$$60x^3+16x^2-12x=4x(15x^2+4x-3)$$
$$=4x(5x+3)(3x-1)$$

유형 • 9 인수분해 공식의 종합

다음 중 □ 안에 알맞은 수가 다른 하나는?

① $9x^2-12x+4=(\square x-2)^2$

② $x^2-\square x-28=(x+4)(x-7)$

③ $9x^2-25=(\square x+5)(3x-5)$

④ $3x^2+x-2=(x+1)(\square x-2)$

⑤ $25x^2+30x+\square=(5x+3)^2$

답 ⑤

① $9x^2-12x+4=(3x-2)^2$ $\quad\therefore \square=3$

② $(x+4)(x-7)=x^2-3x-28$ $\quad\therefore \square=3$

③ $9x^2-25=(3x+5)(3x-5)$ $\quad\therefore \square=3$

④ $3x^2+x-2=(x+1)(3x-2)$ $\quad\therefore \square=3$

⑤ $(5x+3)^2=25x^2+30x+9$ $\quad\therefore \square=9$

9-1

다음 다항식 중 $x+2$를 인수로 갖지 않는 것은?

① x^2+2x ② x^2+4x+4

③ x^2-4 ④ x^2+2x-8

⑤ $2x^2-x-10$

답 ④

① $x^2+2x=x(x+2)$ ② $x^2+4x+4=(x+2)^2$

③ $x^2-4=(x+2)(x-2)$ ④ $x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$

⑤ $2x^2-x-10=(x+2)(2x-5)$

9-2

다음 등식을 만족시키는 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

$$4x^2+20xy+25y^2=(2x+ay)^2$$
$$25x^2-49y^2=(5x+7y)(5x+by)$$
$$x^2+6xy-16y^2=(x+cy)(x+8y)$$
$$12x^2+13xy-4y^2=(3x+4y)(4x+dy)$$

답 -5

$4x^2+20xy+25y^2=(2x+5y)^2$ $\quad\therefore a=5$

$25x^2-49y^2=(5x+7y)(5x-7y)$ $\quad\therefore b=-7$

$x^2+6xy-16y^2=(x-2y)(x+8y)$ $\quad\therefore c=-2$

$12x^2+13xy-4y^2=(3x+4y)(4x-y)$ $\quad\therefore d=-1$

$\therefore a+b+c+d=5+(-7)+(-2)+(-1)=-5$

유형 • 10 두 다항식의 공통인수

다음 두 다항식의 공통인수는?

$$2x^2-xy-3y^2,\ 4x^2-8xy+3y^2$$

① $2x-3y$ ② $2x-y$ ③ $2x+y$

④ $x+y$ ⑤ $2x+3y$

답 ①

$2x^2-xy-3y^2=(2x-3y)(x+y)$

$4x^2-8xy+3y^2=(2x-3y)(2x-y)$

따라서 두 다항식의 공통인수는 $2x-3y$이다.

10-1

다음 세 다항식의 공통인수는?

$$2x^2-8y^2,\ x^2-xy-6y^2,\ 3x^2+7xy+2y^2$$

① $x-3y$ ② $x-2y$ ③ $x+2y$

④ $2x+y$ ⑤ $2x+3y$

답 ③

$2x^2-8y^2=2(x^2-4y^2)=2(x+2y)(x-2y)$

$x^2-xy-6y^2=(x+2y)(x-3y)$

$3x^2+7xy+2y^2=(x+2y)(3x+y)$

따라서 세 다항식의 공통인수는 $x+2y$이다.

10-2

다음 중 나머지 넷과 1이 아닌 공통인수를 갖지 않는 것은?

① $-3x^2y+3xy$ ② $x^2+2xy-3y^2$ ③ $2x^2-3xy+y^2$

④ $3x^2-xy-2y^2$ ⑤ x^3y-xy^3

답 ①

① $-3x^2y+3xy=-3xy(x-1)$

② $x^2+2xy-3y^2=(x-y)(x+3y)$

③ $2x^2-3xy+y^2=(x-y)(2x-y)$

④ $3x^2-xy-2y^2=(x-y)(3x+2y)$

⑤ $x^3y-xy^3=xy(x^2-y^2)=xy(x-y)(x+y)$

따라서 나머지 넷과 1이 아닌 공통인수를 갖지 않는 것은 ①이다.

유형 • 11 일차식의 인수가 주어지는 경우

다항식 x^2-x+a가 $(x+5)(x+b)$로 인수분해될 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -36　② -32　③ -28
④ -24　⑤ -20

답 ①
$(x+5)(x+b)=x^2+(b+5)x+5b$이므로
$-1=b+5$, $a=5b$　$\therefore a=-30$, $b=-6$
$\therefore a+b=-30+(-6)=-36$

11-1

다항식 $6x^2+5x-a$가 $2x-1$을 인수로 가질 때, 이 다항식의 다른 한 인수는? (단, a는 상수)

① $x+4$　② $3x-4$　③ $3x-1$
④ $3x+1$　⑤ $3x+4$

답 ⑤
$6x^2+5x-a=(2x-1)(3x+m)$ (m은 상수)이라고 하면
$6x^2+5x-a=6x^2+(2m-3)x-m$이므로
$5=2m-3$, $-a=-m$
$\therefore m=4$, $a=4$
따라서 다항식의 다른 한 인수는 $3x+4$이다.

11-2

$x+2$가 두 다항식 $x^2+ax-10$, $2x^2-x+b$의 공통인수일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

답 30
$x^2+ax-10=(x+2)(x+m)$ (m은 상수)이라고 하면
$x^2+ax-10=x^2+(m+2)x+2m$이므로
$a=m+2$, $-10=2m$　$\therefore m=-5$, $a=-3$
$2x^2-x+b=(x+2)(2x+n)$ (n은 상수)이라고 하면
$2x^2-x+b=2x^2+(n+4)x+2n$이므로
$-1=n+4$, $b=2n$　$\therefore n=-5$, $b=-10$
$\therefore ab=-3\times(-10)=30$

유형 • 12 잘못 보고 인수분해한 경우

x^2의 계수가 1인 어떤 이차식을 인수분해하는데 시우는 x의 계수를 잘못 보고 $(x-2)(x+4)$로 인수분해하였고, 민서는 상수항을 잘못 보고 $(x-3)(x-4)$로 인수분해하였다. 처음 이차식을 바르게 인수분해하여라.

답 $(x+1)(x-8)$
시우는 상수항을 제대로 보았으므로 $(x-2)(x+4)=x^2+2x-8$에서 처음 이차식의 상수항은 -8이다.
민서는 x의 계수를 제대로 보았으므로 $(x-3)(x-4)=x^2-7x+12$에서 처음 이차식의 x의 계수는 -7이다.
따라서 처음 이차식은 x^2-7x-8이므로 바르게 인수분해하면
$x^2-7x-8=(x+1)(x-8)$

12-1

x^2의 계수가 1인 어떤 이차식을 인수분해하는데 정민이는 x의 계수를 잘못 보고 $(x-3)(x+6)$으로 인수분해하였고, 강욱이는 상수항을 잘못 보고 $(x-2)(x-5)$로 인수분해하였다. 처음 이차식을 바르게 인수분해하여라.

답 $(x+2)(x-9)$
정민이는 상수항을 제대로 보았으므로 $(x-3)(x+6)=x^2+3x-18$에서 처음 이차식의 상수항은 -18이다.
강욱이는 x의 계수를 제대로 보았으므로 $(x-2)(x-5)=x^2-7x+10$에서 처음 이차식의 x의 계수는 -7이다.
따라서 처음 이차식은 $x^2-7x-18$이므로 바르게 인수분해하면
$x^2-7x-18=(x+2)(x-9)$

12-2

x^2의 계수가 2인 어떤 이차식을 인수분해하는데 승찬이는 x의 계수를 잘못 보고 $(2x-3)(x+1)$로 인수분해하였고, 채은이는 상수항을 잘못 보고 $(2x-1)(x-2)$로 인수분해하였다. 처음 이차식을 바르게 인수분해하여라.

답 $(2x+1)(x-3)$
승찬이는 상수항을 제대로 보았으므로 $(2x-3)(x+1)=2x^2-x-3$에서 처음 이차식의 상수항은 -3이다.
채은이는 x의 계수를 제대로 보았으므로 $(2x-1)(x-2)=2x^2-5x+2$에서 처음 이차식의 x의 계수는 -5이다.
따라서 처음 이차식은 $2x^2-5x-3$이므로 바르게 인수분해하면
$2x^2-5x-3=(2x+1)(x-3)$

04 복잡한 식의 인수분해

▸ 2-2. 인수분해 공식의 활용

개념 1 복잡한 식의 인수분해

1. 공통인수가 있는 식의 인수분해

각 항의 공통인수로 묶어낸 후 인수분해 공식을 이용한다.

예 $a(\underbrace{b^2-1}_{\text{공통인수}})+c(b^2-1)=(a+c)(b^2-1)=(a+c)(b+1)(b-1)$

2. 공통부분이 있는 식의 인수분해

공통부분을 한 문자로 놓고 인수분해한다.

예 $(\underbrace{x+y}_{A\text{로 놓는다.}})^2+2(x+y)+1=A^2+2A+1=(A+1)^2=(\underbrace{x+y}_{\text{원래 식 대입}}+1)^2$

• 한 문자로 놓고 인수분해한 후 반드시 그 문자에 원래의 식을 대입하여야 한다.

3. 항이 4개인 식의 인수분해

항이 여러 개이면 적당한 항끼리 묶어서 인수분해한다.

(1) (항 2개)+(항 2개)로 묶기: 공통부분이 생기도록 두 항씩 묶어 인수분해한다.

예 $xy+x+y+1=x(\underbrace{y+1}_{\text{공통부분}})+y+1=(x+1)(y+1)$

(2) (항 3개)+(항 1개)로 묶기: 항 3개를 완전제곱식으로 인수분해한 후

$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$를 이용한다.

예 $x^2-2x+1-y^2=(x^2-2x+1)-y^2=(x-1)^2-y^2=(x+y-1)(x-y-1)$

예제 1

다음 식을 인수분해하여라.

$$(a+1)(a-3)+5(a-3)$$

풀이 $(a+1)(a-3)+5(a-3)=(a-3)(a+1+5)$
$=(a-3)(a+6)$

답 $(a-3)(a+6)$

유제 1

다음 식을 인수분해하여라.

$$x^2(x+2)-(x+2)$$

답 $(x+2)(x+1)(x-1)$

$x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)(x^2-1)$
$=(x+2)(x+1)(x-1)$

예제 2

다음 식을 인수분해하여라.

$$(x+y)^2-4(x+y)+4$$

풀이 $x+y=A$라고 하면

$(x+y)^2-4(x+y)+4=A^2-4A+4$
$=(A-2)^2$
$=(x+y-2)^2$

답 $(x+y-2)^2$

유제 2

다음 식을 인수분해하여라.

$$(x-y)^2+3(x-y)+2$$

답 $(x-y+1)(x-y+2)$

$x-y=A$라고 하면

$(x-y)^2+3(x-y)+2=A^2+3A+2$
$=(A+1)(A+2)$
$=(x-y+1)(x-y+2)$

01 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $(x+1)y^2-9(x+1)$

(2) $x^3y-6x^2y^2+9xy^3$

(3) $(x^2+2)^2-3(x^2+2)$

답 (1) $(x+1)(y+3)(y-3)$ (2) $xy(x-3y)^2$ (3) $(x^2+2)(x+1)(x-1)$

(1) $(x+1)y^2-9(x+1)=(x+1)(y^2-9)=(x+1)(y+3)(y-3)$

(2) $x^3y-6x^2y^2+9xy^3=xy(x^2-6xy+9y^2)=xy(x-3y)^2$

(3) $(x^2+2)^2-3(x^2+2)=(x^2+2)(x^2+2-3)=(x^2+2)(x+1)(x-1)$

▷ 개념 1 복잡한 식의 인수분해

02 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $2(\underbrace{x-y}_{A})^2+13(\underbrace{x-y}_{A})+6$

(2) $(\underbrace{x+y}_{A})(\underbrace{x+y}_{A}-4)+3$

(3) $(\underbrace{2x+1}_{A})^2-(\underbrace{y-1}_{B})^2$

(4) $(\underbrace{x+3}_{A})^2+(\underbrace{x+3}_{A})(\underbrace{y-2}_{B})-2(\underbrace{y-2}_{B})^2$

강의 tip
(3), (4) 공통 부분이 2개이면 각각 다른 문자로 치환하여 인수분해한다.

답 (1) $(2x-2y+1)(x-y+6)$ (2) $(x+y-1)(x+y-3)$
(3) $(2x+y)(2x-y+2)$ (4) $(x+2y-1)(x-y+5)$

(1) (주어진 식)$=2A^2+13A+6=(2A+1)(A+6)=(2x-2y+1)(x-y+6)$

(2) (주어진 식)$=A(A-4)+3=A^2-4A+3=(A-1)(A-3)=(x+y-1)(x+y-3)$

(3) (주어진 식)$=A^2-B^2=(A+B)(A-B)=(2x+y)(2x-y+2)$

(4) (주어진 식)$=A^2+AB-2B^2=(A+2B)(A-B)=(x+2y-1)(x-y+5)$

▷ 개념 1 복잡한 식의 인수분해

03 다음 〈보기〉 중 다항식 $(x+2y)^2-(y-z)^2$의 인수인 것을 모두 골라라.

보기

ㄱ. $x-y+z$	ㄴ. $x+y-z$	ㄷ. $x+y+z$
ㄹ. $x+3y-z$	ㅁ. $x+3y+z$	ㅂ. $x-3y-z$

답 ㄷ, ㄹ

$x+2y=A$, $y-z=B$라고 하면

$$\begin{aligned}(x+2y)^2-(y-z)^2&=A^2-B^2\\&=(A+B)(A-B)\\&=\{(x+2y)+(y-z)\}\{(x+2y)-(y-z)\}\\&=(x+3y-z)(x+y+z)\end{aligned}$$

▷ 개념 1 복잡한 식의 인수분해

04 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^2-y^2-x+y (2) $x^2+4x+4-y^2$

(3) x^3-x^2y-x+y (4) $a^2-b^2-c^2+2bc$

답 (1) $(x-y)(x+y-1)$ (2) $(x+y+2)(x-y+2)$
(3) $(x-y)(x+1)(x-1)$ (4) $(a+b-c)(a-b+c)$

(1) (주어진 식)$=(x^2-y^2)-(x-y)=(x+y)(x-y)-(x-y)=(x-y)(x+y-1)$

(2) (주어진 식)$=(x+2)^2-y^2=(x+y+2)(x-y+2)$

(3) (주어진 식)$=x^2(x-y)-(x-y)=(x-y)(x^2-1)=(x-y)(x+1)(x-1)$

(4) (주어진 식)$=a^2-(b^2-2bc+c^2)=a^2-(b-c)^2$
$=(a+b-c)\{a-(b-c)\}=(a+b-c)(a-b+c)$

▷ 개념 1 복잡한 식의 인수분해

05 인수분해 공식의 활용

▸ 2-2. 인수분해 공식의 활용

개념 1 인수분해 공식을 이용한 수의 계산

1. 인수분해 공식을 이용한 수의 계산

복잡한 수의 계산을 할 때, 인수분해 공식을 이용할 수 있도록 수의 모양을 바꾸어 계산한다.

(1) 공통인수로 묶어내기

➔ $ma+mb=m(a+b)$를 이용

예 $37\times23+37\times77=37(23+77)=37\times100=3700$

(2) 완전제곱식 이용하기

➔ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$을 이용

예 $19^2+2\times19\times1+1^2=(19+1)^2=20^2=400$

(3) 제곱의 차 이용하기

➔ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용

예 $53^2-47^2=(53+47)(53-47)=100\times6=600$

예제 1

인수분해 공식을 이용하여 다음을 계산하여라.

(1) $30\times49-30\times44$

(2) 99^2-1

풀이 (1) $30\times49-30\times44=30(49-44)=30\times5=150$

(2) $99^2-1=(99+1)(99-1)=100\times98=9800$

답 (1) 150 (2) 9800

유제 1

인수분해 공식을 이용하여 다음을 계산하여라.

(1) $1.75^2-0.25^2$

(2) $26^2-2\times26\times24+24^2$

답 (1) 3 (2) 4

(1) $1.75^2-0.25^2=(1.75+0.25)(1.75-0.25)=2\times1.5=3$

(2) $26^2-2\times26\times24+24^2=(26-24)^2=2^2=4$

개념 2 인수분해 공식을 이용한 식의 값

1. 문자의 값이 주어진 경우

➔ 주어진 식을 인수분해한 후, 문자의 값을 대입한다.

예 $x=97$일 때, x^2+6x+9의 값은

$x^2+6x+9=(x+3)^2=(97+3)^2=100^2=10000$

2. 두 문자의 합, 차, 곱 등의 값이 주어진 경우

➔ 주어진 두 문자의 합, 차, 곱 등의 형태가 나올 때까지 인수분해한 후, 그 값을 대입한다.

예 $a+b=4$, $ab=3$일 때, a^2b+ab^2의 값은

$a^2b+ab^2=ab(a+b)=3\times4=12$

예제 2

$x=198$일 때, x^2+4x+4의 값을 구하여라.

풀이 $x^2+4x+4=(x+2)^2=(198+2)^2=200^2=40000$

답 40000

유제 2

$x+y=3$, $x-y=7$일 때, x^2-y^2의 값을 구하여라.

답 21

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=3\times7=21$

개념 확인하기

01 다음 중 $104^2-2\times104\times4+4^2=100^2$임을 설명하는 데 가장 적당한 인수분해 공식은?

① $ma+mb=m(a+b)$

② $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

③ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

④ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

⑤ $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

답 ②

$104^2-2\times104\times4+4^2=(104-4)^2=100^2=10000$이므로 가장 적당한 인수분해 공식은 ②이다.

▷ 개념 1 인수분해 공식을 이용한 수의 계산

02 인수분해 공식을 이용하여 다음을 계산하여라.

(1) $43\times28-43\times26$

(2) $\sqrt{52^2-48^2}$

(3) $38^2+4\times38+4$

답 (1) 86 (2) 20 (3) 1600

(1) $43\times28-43\times26=43(28-26)=43\times2=86$

(2) $\sqrt{52^2-48^2}=\sqrt{(52+48)(52-48)}=\sqrt{100\times4}=\sqrt{400}=\sqrt{20^2}=20$

(3) $38^2+4\times38+4=38^2+2\times38\times2+2^2=(38+2)^2=40^2=1600$

▷ 개념 1 인수분해 공식을 이용한 수의 계산

03 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $x=12.5$, $y=2.5$일 때, x^2-y^2

(2) $x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$일 때, $x^2-2xy+y^2$

답 (1) 150 (2) 12

(1) $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=(12.5+2.5)(12.5-2.5)=15\times10=150$

(2) $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2=\{(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})\}^2=(2\sqrt{3})^2=12$

▷ 개념 2 인수분해 공식을 이용한 식의 값

04 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $x+y=\sqrt{3}$, $x-y=\sqrt{2}$일 때, $x^2-y^2+2x-2y$

(2) $x+y=3\sqrt{3}$, $xy=3$일 때, $x^3y+2x^2y^2+xy^3$

답 (1) $\sqrt{6}+2\sqrt{2}$ (2) 81

(1) $x^2-y^2+2x-2y=(x+y)(x-y)+2(x-y)=(x-y)(x+y+2)=\sqrt{2}(\sqrt{3}+2)=\sqrt{6}+2\sqrt{2}$

(2) $x^3y+2x^2y^2+xy^3=xy(x^2+2xy+y^2)=xy(x+y)^2=3\times(3\sqrt{3})^2=3\times27=81$

▷ 개념 2 인수분해 공식을 이용한 식의 값

유형 1 공통부분이 있는 식의 인수분해 (1)

$(x-3y)^2-2x+6y-3$을 인수분해하면 $(x+ay+1)(x+by+c)$일 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은?

① -9　② -5　③ -3
④ 0　⑤ 2

답 ①

$x-3y=A$라고 하면

$$\begin{aligned}(x-3y)^2-2x+6y-3&=(x-3y)^2-2(x-3y)-3\\&=A^2-2A-3\\&=(A+1)(A-3)\\&=(x-3y+1)(x-3y-3)\end{aligned}$$

따라서 $a=-3$, $b=-3$, $c=-3$이므로
$a+b+c=-3+(-3)+(-3)=-9$

1-1

$(a+2b)(a+2b-7)+10$을 인수분해하면 a의 계수가 1인 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 이 두 일차식의 합을 구하여라.

답 $2a+4b-7$

$a+2b=A$라고 하면

$$\begin{aligned}(a+2b)(a+2b-7)+10&=A(A-7)+10=A^2-7A+10\\&=(A-2)(A-5)=(a+2b-2)(a+2b-5)\end{aligned}$$

따라서 두 일차식의 합은
$(a+2b-2)+(a+2b-5)=2a+4b-7$

1-2

다음 식을 인수분해하여라.

$$(x-3)^2-2(x-3)(x+3)-8(x+3)^2$$

답 $-9(x+1)(x+5)$

$x-3=A$, $x+3=B$라고 하면

$$\begin{aligned}&(x-3)^2-2(x-3)(x+3)-8(x+3)^2\\&=A^2-2AB-8B^2\\&=(A+2B)(A-4B)\\&=\{x-3+2(x+3)\}\{x-3-4(x+3)\}\\&=(3x+3)(-3x-15)=-9(x+1)(x+5)\end{aligned}$$

유형 2 공통부분이 있는 식의 인수분해 (2)

$(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)+6$을 인수분해하면?

① $(x^2-2x+5)(x^2+2x-6)$
② $(x^2-2x-5)(x^2-2x-6)$
③ $(x^2-2x-5)(x^2+2x+6)$
④ $(x^2+2x-5)(x^2+2x+6)$
⑤ $(x^2+2x-5)(x^2+2x-6)$

답 ②

$$\begin{aligned}&(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)+6\\&=\{(x+1)(x-3)\}\{(x+2)(x-4)\}+6\\&=(x^2-2x-3)(x^2-2x-8)+6 \quad x^2-2x=A\\&=(A-3)(A-8)+6\\&=A^2-11A+30\\&=(A-5)(A-6)\\&=(x^2-2x-5)(x^2-2x-6)\end{aligned}$$

강의 tip
( )( )( )( )$+k$의 꼴은
① 상수항의 합 또는 곱이 같은 두 식끼리 묶는다.
→ 공통부분이 나온다.
② 공통부분을 한 문자로 놓고 전개한다.
③ 인수분해한다.

2-1

다음 중 다항식 $x(x+1)(x+2)(x+3)-8$의 인수인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① x^2+3x-2　② x^2-3x-2　③ x^2+3x-4
④ x^2-3x+4　⑤ x^2+3x+4

답 ①, ⑤

$$\begin{aligned}x(x+1)(x+2)(x+3)-8&=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}-8\\&=(x^2+3x)(x^2+3x+2)-8 \quad x^2+3x=A\\&=A(A+2)-8\\&=A^2+2A-8\\&=(A+4)(A-2)\\&=(x^2+3x+4)(x^2+3x-2)\end{aligned}$$

2-2

다음 식을 인수분해하여라.

$$(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)+25$$

답 $(x^2-x-7)^2$

$$\begin{aligned}&(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)+25\\&=\{(x+1)(x-2)\}\{(x+3)(x-4)\}+25\\&=(x^2-x-2)(x^2-x-12)+25 \quad x^2-x=A\\&=(A-2)(A-12)+25\\&=A^2-14A+49\\&=(A-7)^2=(x^2-x-7)^2\end{aligned}$$

유형 · 3 항이 4개인 식의 인수분해 (1)

다음 〈보기〉 중 x^3+x^2-4x-4의 인수인 것만을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. $x+1$	ㄴ. $x-1$	ㄷ. $x+2$
ㄹ. $x-2$	ㅁ. $x+4$	ㅂ. $x-4$

① ㄱ, ㄴ, ㄷ　② ㄱ, ㄷ, ㄹ
③ ㄴ, ㄷ, ㄹ　④ ㄴ, ㄹ, ㅁ
⑤ ㄷ, ㄹ, ㅂ

답 ②

$$\begin{aligned} x^3+x^2-4x-4 &= x^2(x+1)-4(x+1) \\ &= (x+1)(x^2-4) \\ &= (x+1)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

3-1

다항식 $x^2+6x-6y-y^2$을 인수분해하면 $(x+ay)(x+by+c)$가 된다고 한다. 이때 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

답 6

$$\begin{aligned} x^2+6x-6y-y^2 &= (x^2-y^2)+6(x-y) \\ &= (x+y)(x-y)+6(x-y) \\ &= (x-y)(x+y+6) \end{aligned}$$

따라서 $a=-1$, $b=1$, $c=6$이므로
$a+b+c=-1+1+6=6$

3-2

다항식 $a^3+4a^2-9a-36$이 세 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 세 일차식의 합을 구하여라.

답 $3a+4$

$$\begin{aligned} a^3+4a^2-9a-36 &= a^2(a+4)-9(a+4) \\ &= (a+4)(a^2-9) \\ &= (a+4)(a+3)(a-3) \end{aligned}$$

따라서 세 일차식의 합은
$(a+4)+(a+3)+(a-3)=3a+4$

유형 · 4 항이 4개인 식의 인수분해 (2)

다항식 $4x^2-4xy+y^2-9z^2$을 인수분해하면?

① $(2x+y+3z)(2x+y-3z)$
② $(2x+y+3z)(2x-y+3z)$
③ $(2x-y+3z)(2x+y-3z)$
④ $(2x-y+3z)(2x-y-3z)$
⑤ $(2x+y-3z)(2x-y-3z)$

답 ④

$$\begin{aligned} 4x^2-4xy+y^2-9z^2 &= (4x^2-4xy+y^2)-9z^2 \\ &= (2x-y)^2-(3z)^2 \\ &= (2x-y+3z)(2x-y-3z) \end{aligned}$$

4-1

다항식 $x^2y^2-4z^2-12xy+36$을 인수분해하면 $(xy+az+b)(xy-2z+c)$가 된다고 한다. 이때 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

답 -10

$$\begin{aligned} x^2y^2-4z^2-12xy+36 &= (x^2y^2-12xy+36)-4z^2 \\ &= (xy-6)^2-(2z)^2 \\ &= (xy+2z-6)(xy-2z-6) \end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=-6$, $c=-6$이므로
$a+b+c=2+(-6)+(-6)=-10$

4-2

다음 중 두 다항식의 공통인수인 것은?

$$x^2-y^2+2x+1,\ 2(x+1)^2+(x+1)y-y^2$$

① $x-1$　② $x+1$　③ $x-y+1$
④ $x-y$　⑤ $x+y+1$

답 ⑤

$$\begin{aligned} x^2-y^2+2x+1 &= x^2+2x+1-y^2=(x+1)^2-y^2 \\ &= (x+y+1)(x-y+1) \end{aligned}$$

또, $2(x+1)^2+(x+1)y-y^2$에서 $x+1=A$라고 하면
(주어진 식)$=2A^2+Ay-y^2=(2A-y)(A+y)=(2x-y+2)(x+y+1)$
따라서 공통인수는 $x+y+1$이다.

유형 • 5 항이 5개 이상인 식의 인수분해

다항식 $a^2-ab+a+2b-6$을 인수분해하면?

① $(a+2)(a-b+3)$
② $(a+2)(a-b-3)$
③ $(a-2)(a+b+3)$
④ $(a-2)(a-b+3)$
⑤ $(a-2)(a-b-3)$

답 ④

$a^2-ab+a+2b-6=(-ab+2b)+(a^2+a-6)$
$=-b(a-2)+(a+3)(a-2)$
$=(a-2)(a-b+3)$

5-1

다음 중 다항식 $2x^2+xy-7x-3y+3$의 인수인 것은?

① $x-2$ ② $x+3$
③ $2x+y-1$ ④ $2x-y+1$
⑤ $2x-y-1$

답 ③

$2x^2+xy-7x-3y+3=(xy-3y)+(2x^2-7x+3)$
$=y(x-3)+(2x-1)(x-3)$
$=(x-3)(2x+y-1)$

5-2

다음 식을 인수분해하여라.

$$x^2-xy-2y^2-4x+5y+3$$

답 $(x-2y-1)(x+y-3)$

$x^2-xy-2y^2-4x+5y+3=x^2+(-y-4)x-(2y^2-5y-3)$
$=x^2+(-y-4)x-(2y+1)(y-3)$
$=\{x-(2y+1)\}\{x+(y-3)\}$
$=(x-2y-1)(x+y-3)$

유형 • 6 인수분해 공식을 이용한 수의 계산

다음 중 $58^2-42^2=100\times16$임을 설명하는 데 가장 적당한 인수분해 공식은?

① $ma+mb=m(a+b)$
② $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
③ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
④ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
⑤ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

답 ④

$58^2-42^2=(58+42)(58-42)=100\times16=1600$

6-1

$\dfrac{75^2+2\times75\times25+25^2}{75^2-25^2}$의 값은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ 2
④ 4 ⑤ 8

답 ③

$\dfrac{75^2+2\times75\times25+25^2}{75^2-25^2}=\dfrac{(75+25)^2}{(75+25)(75-25)}=\dfrac{100^2}{100\times50}=2$

6-2

인수분해 공식을 이용하여 다음을 계산하면?

$$1^2-3^2+5^2-7^2+9^2-11^2+13^2-15^2$$

① -128 ② -64 ③ -32
④ 64 ⑤ 128

강의 tip
두 항씩 묶는다.
→ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 이용

답 ①

$(1^2-3^2)+(5^2-7^2)+(9^2-11^2)+(13^2-15^2)$
$=(1+3)(1-3)+(5+7)(5-7)+(9+11)(9-11)+(13+15)(13-15)$
$=4\times(-2)+12\times(-2)+20\times(-2)+28\times(-2)$
$=(4+12+20+28)\times(-2)=-128$

유형 • 7 인수분해 공식을 이용한 식의 값

$x=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$, $y=1-\sqrt{3}$일 때, $x^2-4xy+4y^2$의 값은?

① 3 ② 6 ③ 18
④ 24 ⑤ 27

답 ⑤

$x=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$이므로

$x^2-4xy+4y^2=(x-2y)^2$
$=\{2+\sqrt{3}-2(1-\sqrt{3})\}^2$
$=(3\sqrt{3})^2=27$

7-1

$x^2-4y^2-x-2y=10$, $x+2y=5$일 때, $x-2y$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 6

답 ④

$x^2-4y^2-x-2y=(x+2y)(x-2y)-(x+2y)$
$=(x+2y)(x-2y-1)$
$=5(x-2y-1)=10$

따라서 $x-2y-1=2$이므로 $x-2y=3$

7-2

$\sqrt{6}$의 소수 부분을 x라고 할 때, x^2+4x+4의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

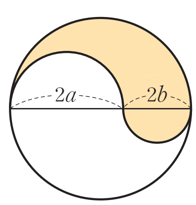
답 ③

$2<\sqrt{6}<3$이므로
$\sqrt{6}$의 정수 부분은 2이고 소수 부분은
$x=\sqrt{6}-2$이다.
$\therefore x^2+4x+4=(x+2)^2=(\sqrt{6}-2+2)^2=(\sqrt{6})^2=6$

강의 tip
(무리수)=(정수 부분)+(소수 부분)
➡ (소수 부분)=(무리수)−(정수 부분)

유형 • 8 인수분해의 도형에의 활용

오른쪽 그림과 같이 지름의 길이가 $2a+2b$인 원에 지름의 길이가 각각 $2a$, $2b$인 반원을 그렸을 때, 색칠한 부분의 넓이는?



① $ab\pi$ ② $a(a+b)\pi$
③ $b(a+b)\pi$ ④ $2a(a+b)\pi$
⑤ $2b(a+b)\pi$

답 ③

(색칠한 부분의 넓이)=(반지름의 길이가 $a+b$인 반원)−(반지름의 길이가 a인 반원)
+(반지름의 길이가 b인 반원)

$=\dfrac{1}{2}\pi(a+b)^2-\dfrac{1}{2}\pi a^2+\dfrac{1}{2}\pi b^2$
$=\dfrac{1}{2}\pi\{(a+b)^2-(a^2-b^2)\}$
$=\dfrac{1}{2}\pi\{(a+b)^2-(a+b)(a-b)\}$
$=\dfrac{1}{2}\pi(a+b)(a+b-a+b)$
$=b(a+b)\pi$

8-1

넓이가 $2x^2-3xy-2y^2$인 직사각형의 세로의 길이가 $x-2y$일 때, 이 직사각형의 둘레의 길이는?

① $3x-y$ ② $3x-3y$ ③ $6x-2y$
④ $6x-6y$ ⑤ $6x+2y$

답 ③

$2x^2-3xy-2y^2=(2x+y)(x-2y)$이고 세로의 길이가 $x-2y$이므로 가로의 길이는 $2x+y$이다.
따라서 직사각형의 둘레의 길이는
$2\{(2x+y)+(x-2y)\}=2(3x-y)=6x-2y$

8-2

둘레의 길이의 합이 80 cm이고, 넓이의 차가 80 cm^{2}인 두 정사각형이 있다. 이 두 정사각형의 둘레의 길이의 차를 구하여라.

답 16 cm

두 정사각형의 한 변의 길이를 각각 a cm, b cm $(a>b)$라고 하면
둘레의 길이의 합이 80 cm이므로 $4a+4b=80$ $\therefore a+b=20$
두 정사각형의 넓이의 차가 80 cm^{2}이므로
$a^2-b^2=80$, $(a+b)(a-b)=80$
$20(a-b)=80$ $\therefore a-b=4$
따라서 두 정사각형의 둘레의 길이의 차는
$4a-4b=4(a-b)=4\times4=16$(cm)

단원 마무리하기

정답과 풀이 28~29쪽 | 워크북 40~41쪽

01 다음 중 완전제곱식으로 인수분해되는 것은?

① $a^2-10a-25$ ② a^2-2a+2

③ x^2-81 ④ x^2+3x+9

⑤ $16x^2-8x+1$

답 ⑤

⑤ $16x^2-8x+1=(4x)^2-2\times4x\times1+1^2=(4x-1)^2$

02 $4x^2-(m+3)x+9$가 완전제곱식이 될 때, 양수 m의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5

④ 7 ⑤ 9

답 ⑤

$4x^2-(m+3)x+9=(2x\pm3)^2$이어야 하므로

$-(m+3)x=\pm2\times2x\times3=\pm12x$

이때 $m>0$이므로 $m+3=12$

$\therefore m=9$

03 다항식 x^2+4x+k가 $x-2$로 나누어떨어질 때, 상수 k의 값은?

① -12 ② -6 ③ 2

④ 6 ⑤ 12

답 ①

$x^2+4x+k=(x-2)(x+a)$ (a는 상수)로 놓으면

$x^2+4x+k=x^2+(a-2)x-2a$이므로

$4=a-2,\ k=-2a$

$\therefore a=6,\ k=-12$

04 다항식 $6x^2+Ax-20$을 인수분해하면 $(2x+4)(Bx-5)$일 때, 상수 A, B에 대하여 $A+B$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

답 ⑤

$6x^2+Ax-20=(2x+4)(Bx-5)=2Bx^2+(-10+4B)x-20$

따라서 $6=2B,\ A=-10+4B$이므로 $A=2,\ B=3$

$\therefore A+B=2+3=5$

05 두 다항식 $2x^2+5x+a$, $3x^2+bx-15$의 공통인수가 $x+3$일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2

④ 3 ⑤ 4

답 ②

$2x^2+5x+a=(x+3)(2x+m)$ (m은 상수)이라고 하면

$2x^2+5x+a=2x^2+(m+6)x+3m$이므로

$5=m+6,\ a=3m \quad \therefore m=-1,\ a=-3$

또, $3x^2+bx-15=(x+3)(3x+n)$ (n은 상수)이라고 하면

$3x^2+bx-15=3x^2+(n+9)x+3n$이므로

$b=n+9,\ -15=3n \quad \therefore n=-5,\ b=4$

$\therefore a+b=-3+4=1$

06 다항식 x^2+Ax-8을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)$일 때, 다음 중 상수 A의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은? (단, a, b는 정수)

① -7 ② -2 ③ 1

④ 2 ⑤ 7

답 ③

$x^2+Ax-8=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$이므로

$A=a+b,\ -8=ab$

$-8=-1\times8=1\times(-8)=-2\times4=2\times(-4)$이므로 정수 a, b는

-1, 8 또는 1, -8 또는 -2, 4 또는 2, -4

이때 $A=a+b$이므로 가능한 A의 값은 7, -7, 2, -2이다.

07 다음 두 다항식의 1이 <u>아닌</u> 공통인수는?

$$3x^2y-8xy-3y,\ (x-1)^2+6(x-1)-16$$

① $x-5$ ② $x-3$ ③ $x+3$

④ $3x-1$ ⑤ $3x+1$

답 ②

$3x^2y-8xy-3y=y(3x^2-8x-3)=y(3x+1)(x-3)$

$(x-1)^2+6(x-1)-16$에서 $x-1=A$라고 하면

$$\begin{aligned}(x-1)^2+6(x-1)-16&=A^2+6A-16\\&=(A-2)(A+8)\\&=(x-3)(x+7)\end{aligned}$$

따라서 두 다항식의 1이 아닌 공통인수는 $x-3$이다.

08 $x^3-2x^2-9x+18$이 x의 계수가 1인 세 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 이 세 일차식의 합은?

① $2x+1$ ② $2x-3$ ③ $3x-1$

④ $3x-2$ ⑤ $4x-3$

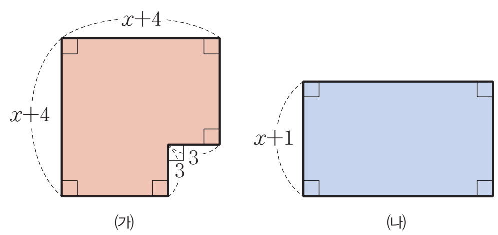
답 ④

$$\begin{aligned}x^3-2x^2-9x+18&=x^2(x-2)-9(x-2)\\&=(x-2)(x^2-9)\\&=(x-2)(x+3)(x-3)\end{aligned}$$

따라서 세 일차식의 합은

$(x-2)+(x+3)+(x-3)=3x-2$

09 다음 그림에서 두 도형 ㈎, ㈏의 넓이가 같을 때, 도형 ㈏의 가로의 길이를 구하여라.



답 $x+7$

도형 ㈎의 넓이는

$(x+4)^2-3^2=(x+4+3)(x+4-3)=(x+7)(x+1)$

도형 ㈏의 넓이는 도형 ㈎의 넓이와 같고, 도형 ㈏의 세로의 길이가 $x+1$이므로 가로의 길이는 $x+7$이다.

10 넓이가 $x^2y+5x-2xy-10$이고, 가로의 길이가 $x-2$인 직사각형의 둘레의 길이는?

① $xy+x-3$　② $xy+x+3$
③ $2(xy+x-3)$　④ $2(xy+x+3)$
⑤ $4(xy+x+3)$

답 ④

$x^2y+5x-2xy-10=(x^2y-2xy)+(5x-10)$
$=xy(x-2)+5(x-2)=(x-2)(xy+5)$

따라서 직사각형의 세로의 길이는 $xy+5$이므로 직사각형의 둘레의 길이는 $2\{(x-2)+(xy+5)\}=2(xy+x+3)$

11 두 실수 a, b에 대하여 $a*b=ab-a+b$라고 할 때, $(x+y)*(x-y)-1$을 인수분해하면?

① $(x+y+1)^2$
② $(x-y-1)^2$
③ $(x+y-1)(x-y+1)$
④ $(x+y+1)(x-y-1)$
⑤ $(x+y+1)(x-y+1)$

답 ④

$(x+y)*(x-y)-1=(x+y)(x-y)-(x+y)+(x-y)-1$
$=x^2-y^2-2y-1$
$=x^2-(y+1)^2$
$=(x+y+1)(x-y-1)$

12 $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$의 값은?

① $\frac{21}{100}$　② $\frac{7}{20}$　③ $\frac{37}{100}$
④ $\frac{19}{50}$　⑤ $\frac{11}{20}$

답 ⑤

$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$
$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1+\frac{1}{10}\right)$
$=\frac{1}{2}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\cdots\times\frac{\cancel{9}}{\cancel{10}}\times\frac{11}{10}=\frac{1}{2}\times\frac{11}{10}=\frac{11}{20}$

13 $x=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$일 때, $x^2+4xy+4y^2$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

답 ①

$x=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=3-2\sqrt{2}$

$y=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$

$\therefore x^2+4xy+4y^2=(x+2y)^2$
$=\{3-2\sqrt{2}+2(\sqrt{2}-1)\}^2$
$=1^2=1$

14 $a^2-a-4b^2-2b=3$, $a-2b=3$일 때, $a+2b$의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{4}$
④ 1　⑤ $\frac{3}{2}$

답 ⑤

$a^2-a-4b^2-2b=(a^2-4b^2)-(a+2b)$
$=(a+2b)(a-2b)-(a+2b)$
$=(a+2b)(a-2b-1)$
$=(a+2b)(3-1)=3$

$\therefore a+2b=\frac{3}{2}$

15 $\sqrt{5}$의 소수 부분을 a라고 할 때, $(a+3)^2-3(a+3)+2$의 값은?

① $5-\sqrt{5}$　② $\sqrt{5}$　③ $2\sqrt{5}$
④ $5+\sqrt{5}$　⑤ $5+2\sqrt{5}$

답 ①

$2<\sqrt{5}<3$이므로 $\sqrt{5}$의 정수 부분은 2이고 소수 부분은 $a=\sqrt{5}-2$이다.

$a+3=A$라고 하면

$(a+3)^2-3(a+3)+2=A^2-3A+2$
$=(A-1)(A-2)$
$=(a+3-1)(a+3-2)$
$=(a+2)(a+1)$
$=(\sqrt{5}-2+2)(\sqrt{5}-2+1)$
$=5-\sqrt{5}$

16 $x=4-2\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}-4$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

$$\frac{x^2+3xy+2y^2+x+2y}{x+y+1}$$

답 -4

$x^2+3xy+2y^2+x+2y=(x+y)(x+2y)+x+2y$
$=(x+2y)(x+y+1)$

$\therefore \frac{x^2+3xy+2y^2+x+2y}{x+y+1}=\frac{(x+2y)(x+y+1)}{x+y+1}=x+2y$
$=(4-2\sqrt{3})+2(\sqrt{3}-4)=-4$

주어진 단계에 따라 쓰는 유형

17 x^2의 계수가 1인 어떤 이차식을 인수분해하는 데 정한이는 x의 계수를 잘못 보아 $(x-2)(x+5)$로 인수분해하였고, 혜경이는 상수항을 잘못 보아 $(x+3)(x-6)$으로 인수분해하였다. 이 이차식을 바르게 인수분해하여라.

생각해 보자

구하는 것은? 어떤 이차식을 바르게 인수분해하기

주어진 것은? 정한이는 x의 계수를 잘못 보아 $(x-2)(x+5)$로, 혜경이는 상수항을 잘못 보아 $(x+3)(x-6)$으로 인수분해하였다.

풀이

[1단계] 어떤 이차식의 상수항 구하기 $(30\ \%)$

정한이는 상수항은 제대로 보았으므로 $(x-2)(x+5)=x^2+3x-10$에서 어떤 이차식의 상수항은 -10이다.

[2단계] 어떤 이차식의 x의 계수 구하기 $(30\ \%)$

혜경이는 x의 계수는 제대로 보았으므로 $(x+3)(x-6)=x^2-3x-18$에서 어떤 이차식의 x의 계수는 -3이다.

[3단계] 어떤 이차식을 구하고 바르게 인수분해하기 $(40\ \%)$

따라서 어떤 이차식은 $x^2-3x-10$이므로 바르게 인수분해하면
$x^2-3x-10=(x+2)(x-5)$

답 $(x+2)(x-5)$

풀이 과정을 자세히 쓰는 유형

18 $0<a<1$일 때, 다음 식을 간단히 하여라.

$$\sqrt{4a^2}+\sqrt{4a^2-8a+4}$$

풀이

$\sqrt{4a^2}=\sqrt{(2a)^2}$, $\sqrt{4a^2-8a+4}=\sqrt{4(a^2-2a+1)}=2\sqrt{(a-1)^2}$
이고 $0<a<1$에서 $2a>0$, $a-1<0$ ······ ❶
$\therefore \sqrt{4a^2}+\sqrt{4a^2-8a+4}=\sqrt{(2a)^2}+2\sqrt{(a-1)^2}$
$=2a-2(a-1)$
$=2a-2a+2$
$=2$ ······ ❷

단계	채점 기준	비율
❶	근호 안의 제곱식의 부호 판별하기	$50\ \%$
❷	근호를 없애고 식을 간단히 하기	$50\ \%$

답 2

19 $a+b=2\sqrt{3}$, $a-b=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$일 때, a^2-b^2-2a+1의 값을 구하여라.

풀이

$a-b=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$ ······ ❶
$\therefore a^2-b^2-2a+1=(a^2-2a+1)-b^2$
$=(a-1)^2-b^2$
$=(a+b-1)(a-b-1)$ ······ ❷
$=(2\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3}-1)$
$=(2\sqrt{3}-1)(1-\sqrt{3})$
$=2\sqrt{3}-6-1+\sqrt{3}$
$=3\sqrt{3}-7$ ······ ❸

단계	채점 기준	비율
❶	$a-b$의 분모를 유리화하기	$20\ \%$
❷	주어진 다항식을 인수분해하기	$60\ \%$
❸	식의 값 구하기	$20\ \%$

답 $3\sqrt{3}-7$

1 이차방정식

1. 이차방정식의 풀이

2. 이차방정식의 활용

01 이차방정식의 뜻과 그 해

▸ 1-1. 이차방정식의 풀이

개념 1 이차방정식의 뜻

1. 이차방정식

(1) **x에 대한 이차방정식:** 등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하였을 때, (x에 대한 이차식)$=0$의 꼴로 정리되는 방정식

(2) **이차방정식의 일반형:** $ax^2+bx+c=0$ (단, a, b, c는 상수, $a\neq0$)

예 $x^2-3x+2=0$, $4x^2-25=0$, $\frac{1}{2}x^2+x=0$

풍쌤의 Point a, b, c는 상수이고 $a\neq0$일 때, ax^2+bx+c는 이차식이고, $ax^2+bx+c=0$은 이차방정식이야.

- 이차방정식의 뜻
  (일차식)$=0$ → 일차방정식
  (이차식)$=0$ → 이차방정식

예제 1

다음 중 x에 대한 이차방정식인 것에는 ○표, 이차방정식이 아닌 것에는 ×표를 하여라.

(1) x^2+2x+1 (　　)　　(2) $2x^2+x-1=0$ (　　)

풀이 (1) 이차식　(2) 이차방정식

답 (1) ×　(2) ○

유제 1

다음 중 x에 대한 이차방정식인 것에는 ○표, 이차방정식이 아닌 것에는 ×표를 하여라.

(1) $5x^2=0$ (○)　　(2) $x^2+x=x^2-1$ (×)

(2) $x+1=0$이므로 일차방정식이다.

개념 2 이차방정식의 해(근)

1. 이차방정식의 해(근)

(1) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$을 참이 되게 하는 미지수 x의 값을 이차방정식의 해 또는 근이라고 한다.

예 $x=1$을 $x^2-3x+2=0$에 대입하면 $1^2-3\times1+2=0$으로 등식이 참이 되므로 $x=1$은 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 해이다.

(2) 이차방정식의 해를 모두 구하는 것을 '이차방정식을 푼다.'라고 한다.

풍쌤의 Point $x=p$가 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 해이면 $x=p$를 대입했을 때, $ap^2+bp+c=0$이 성립해.

- x에 대한 이차방정식에서 x의 값의 범위가 주어지지 않을 때에는 그 범위를 실수 전체로 생각한다.

예제 2

x의 값이 -1, 0, 1, 2일 때, 이차방정식 $x^2+x-6=0$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 아래 표를 완성하여라.

x	-1	0	1	2
x^2+x-6	-6			

(2) 이차방정식 $x^2+x-6=0$의 해를 구하여라.

풀이 (1) $x=0$일 때, $0^2+0-6=-6$
$x=1$일 때, $1^2+1-6=-4$
$x=2$일 때, $2^2+2-6=0$
(2) $x=2$일 때, $x^2+x-6=0$이므로 해는 $x=2$이다.

답 (1) -6, -4, 0　(2) $x=2$

유제 2

x의 값이 -2, -1, 0, 1일 때, 이차방정식 $x^2+x-2=0$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 아래 표를 완성하여라.

x	-2	-1	0	1
x^2+x-2	0	-2	-2	0

(2) 이차방정식 $x^2+x-2=0$의 해를 구하여라.

답 (2) $x=-2$ 또는 $x=1$

(1) $x=-1$일 때, $(-1)^2+(-1)-2=-2$
$x=0$일 때, $0^2+0-2=-2$
$x=1$일 때, $1^2+1-2=0$
(2) $x=-2$ 또는 $x=1$일 때, $x^2+x-2=0$이므로 해는 $x=-2$ 또는 $x=1$이다.

01 다음 〈보기〉 중 x에 대한 이차방정식인 것을 모두 골라라.

▶ 개념 1 이차방정식의 뜻

보기

ㄱ. $4x^2+x=(2x-1)^2$ 일차방정식
ㄴ. $2x^2+3x+1$ 이차식
ㄷ. $x^2+3=2x^2-1$ 이차방정식
ㄹ. $x(x+1)=x^2-2x$ 일차방정식
ㅁ. $x^3+4x=x^2(x-2)$ 이차방정식
ㅂ. $3x-4=x^2$ 이차방정식

답 ㄷ, ㅁ, ㅂ
ㄱ. $4x^2+x=4x^2-4x+1$, $5x-1=0$ ㄷ. $-x^2+4=0$ ㄹ. $x^2+x=x^2-2x$, $3x=0$
ㅁ. $x^3+4x=x^3-2x^2$, $2x^2+4x=0$ ㅂ. $-x^2+3x-4=0$

02 이차방정식 $(x-2)^2-x=3x-2x^2$을 $3x^2+ax+b=0$의 꼴로 나타낼 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 개념 1 이차방정식의 뜻

답 -4
$(x-2)^2-x=3x-2x^2$에서
$x^2-4x+4-x=3x-2x^2$, $3x^2-8x+4=0$
따라서 $a=-8$, $b=4$이므로
$a+b=-8+4=-4$

03 다음 중 $x=-1$을 해로 갖는 이차방정식은?

▶ 개념 2 이차방정식의 해(근)

① $x^2+x-1=0$
② $x^2-2x=3+x$
③ $2x^2-3x+1=0$
④ $3x^2+2x-1=0$
⑤ $(x-1)(2x+3)=0$

답 ④
① $(-1)^2+(-1)-1=-1\neq0$
② $(-1)^2-2\times(-1)=3\neq3+(-1)=2$
③ $2\times(-1)^2-3\times(-1)+1=6\neq0$
④ $3\times(-1)^2+2\times(-1)-1=0$
⑤ $(-1-1)\{2\times(-1)+3\}=-2\neq0$

04 다음 중 [ ] 안의 수가 주어진 이차방정식의 해가 아닌 것을 모두 고르면? (정답 2개)

▶ 개념 2 이차방정식의 해(근)

① $x^2-9=0$ $[-3]$
② $x^2+3x=0$ $[0]$
③ $x^2-3x-10=0$ $[2]$
④ $(x-1)(x+1)=0$ $[1]$
⑤ $(x+1)(2x-1)=0$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

답 ③, ⑤
③ $2^2-3\times2-10=-12\neq0$
⑤ $\left(-\frac{1}{2}+1\right)\left\{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right\}=\frac{1}{2}\times(-2)=-1\neq0$

05 이차방정식 $x^2-ax+10=0$의 한 근이 $x=2$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 개념 2 이차방정식의 해(근)

답 7
$x=2$를 $x^2-ax+10=0$에 대입하면
$2^2-2a+10=0$, $2a=14$
$\therefore a=7$

02 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이

▶ 1-1. 이차방정식의 풀이

개념 1 $AB=0$의 성질

두 수 또는 두 식 A, B에 대하여 $AB=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$

└ 반대 과정도 성립, 즉 $A=0$ 또는 $B=0$이면 $AB=0$

풍쌤의 Point 일반적으로 두 수 또는 두 식 A, B에 대하여 $AB=0$이면

① $A=0$, $B=0$ ② $A=0$, $B\neq0$ ③ $A\neq0$, $B=0$

의 세 가지 중 어느 하나가 반드시 성립해.

예제 1

다음은 등식 $(x-2)(x-4)=0$이 참이 되게 하는 x의 값을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$(x-2)(x-4)=0$에서

$x-2=0$ 또는 $x-4=0$이므로

$x=2$ 또는 $x=$□

답 4

유제 1

다음은 등식 $x(2x-1)=0$이 참이 되게 하는 x의 값을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$x(2x-1)=0$에서

$x=\boxed{0}$ 또는 $2x-1=\boxed{0}$이므로

$x=\boxed{0}$ 또는 $x=\boxed{\frac{1}{2}}$

개념 2 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이

인수분해를 이용하여 이차방정식은 다음의 순서로 푼다.

❶ 주어진 방정식을 정리한다. ➔ (x에 대한 이차식)$=0$

❷ 좌변을 인수분해한다. ➔ $(px-q)(rx-s)=0$ (단, $p\neq0$, $q\neq0$, r, s는 상수)

❸ $AB=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$임을 이용한다.

➔ $\underbrace{px-q=0}_{px=q}$ 또는 $\underbrace{rx-s=0}_{rx=s}$

❹ 해를 구한다. ➔ $x=\dfrac{q}{p}$ 또는 $x=\dfrac{s}{r}$

◆ 인수분해 공식

$x^2+(a+b)x+ab$
$=(x+a)(x+b)$
$acx^2+(ad+bc)x+bd$
$=(ax+b)(cx+d)$

풍쌤의 Point 이차방정식 $(ax-b)(cx-d)=0$의 해는 $x=\dfrac{b}{a}$ 또는 $x=\dfrac{d}{c}$

예제 2

다음은 이차방정식 $x^2-2x-3=0$의 해를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$x^2-2x-3=0$에서 좌변을 인수분해하면

$(x+1)(x-3)=0$

$x+1=$□ 또는 $x-3=0$이므로

$x=-1$ 또는 $x=$□

답 0, 3

유제 2

다음은 이차방정식 $4x^2-9=0$의 해를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$4x^2-9=0$에서 좌변을 인수분해하면

$(2x+3)(2x-3)=0$

$2x+3=\boxed{0}$ 또는 $2x-3=\boxed{0}$이므로

$x=\boxed{-\frac{3}{2}}$ 또는 $x=\boxed{\frac{3}{2}}$

정답과 풀이 30~31쪽 | 워크북 44~45쪽

01 다음 등식이 참이 되게 하는 x의 값을 구하여라.

(1) $x(x+5)=0$　　(2) $(x+3)(x-4)=0$

(3) $(x+7)(2x-3)=0$　　(4) $(3x+5)(2x-1)=0$

답 (1) $x=-5$ 또는 $x=0$　(2) $x=-3$ 또는 $x=4$

(3) $x=-7$ 또는 $x=\frac{3}{2}$　(4) $x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

(1) $x=0$ 또는 $x+5=0$　$\therefore x=-5$ 또는 $x=0$

(2) $x+3=0$ 또는 $x-4=0$　$\therefore x=-3$ 또는 $x=4$

(3) $x+7=0$ 또는 $2x-3=0$　$\therefore x=-7$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

(4) $3x+5=0$ 또는 $2x-1=0$　$\therefore x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

▶ 개념 1
$AB=0$의 성질

02 두 이차방정식 $x(x-2)=0$, $(x+1)(x-2)=0$의 공통인 해를 구하여라.

답 $x=2$

$x(x-2)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$(x+1)(x-2)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 두 이차방정식의 공통인 해는 $x=2$이다.

▶ 개념 1
$AB=0$의 성질

03 인수분해를 이용하여 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2-4x=0$　　(2) $x^2-16=0$

(3) $x^2+x-2=0$　　(4) $2x^2-5x-3=0$

답 (1) $x=0$ 또는 $x=4$　(2) $x=-4$ 또는 $x=4$

(3) $x=-2$ 또는 $x=1$　(4) $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$

(1) $x^2-4x=0$에서 $x(x-4)=0$　$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

(2) $x^2-16=0$에서 $(x+4)(x-4)=0$　$\therefore x=-4$ 또는 $x=4$

(3) $x^2+x-2=0$에서 $(x+2)(x-1)=0$　$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

(4) $2x^2-5x-3=0$에서 $(2x+1)(x-3)=0$　$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$

▶ 개념 2
인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이

04 인수분해를 이용하여 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2-2x=8$　　(2) $x^2+14=9x$

(3) $x(x+1)=12$　　(4) $(x-2)(x+2)=3x$

답 (1) $x=-2$ 또는 $x=4$　(2) $x=2$ 또는 $x=7$

(3) $x=-4$ 또는 $x=3$　(4) $x=-1$ 또는 $x=4$

(1) $x^2-2x=8$에서 $x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

(2) $x^2+14=9x$에서 $x^2-9x+14=0$, $(x-2)(x-7)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=7$

(3) $x(x+1)=12$에서 $x^2+x-12=0$, $(x+4)(x-3)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=3$

(4) $(x-2)(x+2)=3x$에서 $x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

▶ 개념 2
인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이

03 이차방정식의 중근

▸ 1-1. 이차방정식의 풀이

개념 1 이차방정식의 중근

이차방정식의 두 근이 중복되어 서로 같을 때, 이 근을 중근이라고 한다.

예 $x^2-2x+1=0 \rightarrow (x-1)^2=0$, 즉 $(x-1)(x-1)=0$

$\rightarrow x=1$ 또는 $x=1 \rightarrow x=1$ (중근)

풍쌤의 Point 중근을 갖는 이차방정식은 $a(x-m)^2=0$ $(a\neq0)$의 꼴이고, 이때의 중근은 $x=m$이야.

예제 1

다음 이차방정식이 중근을 가지면 ○표, 중근을 갖지 않으면 ×표를 하여라.

(1) $2(x-3)^2=0$ ( )

(2) $4x^2+4x+1=0$ ( )

(3) $x^2=8x-16$ ( )

(4) $(x+1)(x-1)=0$ ( )

풀이 (1) $x=3$ (중근)

(2) $4x^2+4x+1=0$에서

$(2x+1)^2=0$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$ (중근)

(3) $x^2=8x-16$에서 $x^2-8x+16=0$, $(x-4)^2=0$

$\therefore x=4$ (중근)

(4) $(x+1)(x-1)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

답 (1) ○ (2) ○ (3) ○ (4) ×

유제 1

다음 이차방정식이 중근을 가지면 ○표, 중근을 갖지 않으면 ×표를 하여라.

(1) $x^2-10x+25=0$ (○)

(2) $(x-3)^2=9$ (×)

(3) $5\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$ (○)

(4) $9x^2+4=12x$ (○)

(1) $x^2-10x+25=0$에서

$(x-5)^2=0$ $\therefore x=5$ (중근)

(2) $(x-3)^2=9$에서 $x^2-6x=0$, $x(x-6)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=6$

(3) $5\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$에서 $x=\frac{1}{2}$ (중근)

(4) $9x^2+4=12x$에서 $9x^2-12x+4=0$, $(3x-2)^2=0$

$\therefore x=\frac{2}{3}$ (중근)

개념 2 이차방정식이 중근을 가질 조건

1. 이차방정식이 중근을 가질 조건

(1) 이차방정식이 (완전제곱식)$=0$, 즉 $(\quad)^2=0$의 꼴로 나타내어지면 그 이차방정식은 중근을 갖는다.

(2) 이차항의 계수가 1인 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 중근을 갖기 위해서는 좌변이 완전제곱식이 되어야 하므로 $\underbrace{b=\left(\frac{a}{2}\right)^2}_{(\text{상수항})=\left\{\frac{(x\text{의 계수})}{2}\right\}^2}$이어야 한다.

> ◆ 완전제곱식
> $(x+y)^2$, $(x-y)^2$, $2(x+y)^2$과 같이 다항식의 제곱으로 된 식 또는 이 식에 상수를 곱한 식

풍쌤의 Point x^2의 계수가 1이 아닐 때에는 먼저 양변을 x^2의 계수로 나누어 $x^2+ax+b=0$의 꼴로 만든 다음 위의 방법을 이용해.

예제 2

이차방정식 $x^2-14x+a=0$이 중근을 가질 때, 상수 a의 값을 구하여라.

풀이 $a=\left(\frac{-14}{2}\right)^2=49$

답 49

유제 2

이차방정식 $x^2=6x-a$가 중근을 가질 때, 상수 a의 값을 구하여라.

답 9

$x^2=6x-a$에서

$x^2-6x+a=0$ $\therefore a=\left(\frac{-6}{2}\right)^2=9$

개념 확인하기

정답과 풀이 31쪽 | 워크북 45~46쪽

01 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $(x+2)^2=0$　　(2) $3(x-1)^2=0$

(3) $x^2+8x+16=0$　　(4) $4x^2-4x+1=0$

답 (1) $x=-2$ (중근)　(2) $x=1$ (중근)　(3) $x=-4$ (중근)　(4) $x=\frac{1}{2}$ (중근)

(3) $x^2+8x+16=0$에서

$(x+4)^2=0$　$\therefore x=-4$ (중근)

(4) $4x^2-4x+1=0$에서

$(2x-1)^2=0$　$\therefore x=\frac{1}{2}$ (중근)

▷ 개념 1
이차방정식의 중근

강의 tip
일반적으로 이차방정식의 근은 2개이고, 중근은 서로 같은 두 근임을 알 수 있도록 지도한다. 따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 해가 $x=\alpha$인 중근일 때, 반드시 '$x=\alpha$ (중근)'과 같이 중근임을 나타내어 표현하도록 강조한다.

02 이차방정식 $(x+p)^2=q$가 중근을 가질 때, 다음 중 항상 옳은 것은? (단, p, q는 상수)

① $p>0$　② $p<0$　③ $q>0$

④ $q=0$　⑤ $q<0$

답 ④

$(x+p)^2=q$에서 $q=0$일 때

$(x+p)^2=0$　$\therefore x=-p$ (중근)

▷ 개념 2
이차방정식이 중근을 가질 조건

03 다음 이차방정식이 중근을 가질 때, 상수 k의 값을 구하여라.

(1) $x^2-12x=k$

(2) $x^2+10x+k+12=0$

답 (1) -36　(2) 13

(1) $x^2-12x=k$에서

$x^2-12x-k=0$, $-k=\left(\frac{-12}{2}\right)^2=36$

$\therefore k=-36$

(2) $x^2+10x+k+12=0$에서

$k+12=\left(\frac{10}{2}\right)^2=25$

$\therefore k=13$

▷ 개념 2
이차방정식이 중근을 가질 조건

04 다음 이차방정식을 $(x+k)^2=0$의 꼴로 나타낼 수 있을 때, 상수 a, k의 값을 구하여라.

(1) $x^2-4x+a=0$

(2) $x^2+x+a=0$

답 (1) $a=4$, $k=-2$　(2) $a=\frac{1}{4}$, $k=\frac{1}{2}$

(1) $a=\left(\frac{-4}{2}\right)^2=4$이므로 주어진 이차방정식은

$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$

$\therefore k=-2$

(2) $a=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$이므로 주어진 이차방정식은

$x^2+x+\frac{1}{4}=0$, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0$

$\therefore k=\frac{1}{2}$

▷ 개념 2
이차방정식이 중근을 가질 조건

04 완전제곱식을 이용한 이차방정식의 풀이

▸ 1-1. 이차방정식의 풀이

개념 1 제곱근을 이용한 이차방정식의 풀이

1. 제곱근을 이용한 이차방정식의 풀이

(1) 이차방정식 $x^2=q$ $(q\ge0)$의 근은 $x=\pm\sqrt{q}$
　└ x는 q의 제곱근

(2) 이차방정식 $(x+p)^2=q$ $(q\ge0)$의 근은 $x=-p\pm\sqrt{q}$
　└ $x+p$는 q의 제곱근

참고 $(x+p)^2=q$ $(q\ge0)$에서
$x+p=\pm\sqrt{q}$　　$\therefore x=-p\pm\sqrt{q}$

- $a>0$, $q\ge0$일 때
$a(x+p)^2=q$에서
$(x+p)^2=\frac{q}{a}$, $x+p=\pm\sqrt{\frac{q}{a}}$
$\therefore x=-p\pm\sqrt{\frac{q}{a}}$

예제 1

다음은 제곱근을 이용하여 이차방정식 $(x-2)^2=3$의 해를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$(x-2)^2=3$에서 $x-2$는 3의 제곱근이므로
$x-2=\pm\sqrt{3}$
좌변의 -2를 우변으로 이항하면 $x=\square\pm\sqrt{\square}$

답 2, 3

유제 1

다음은 제곱근을 이용하여 이차방정식 $(4x+1)^2=5$의 해를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$(4x+1)^2=5$에서 $4x+1$은 $\boxed{5}$의 제곱근이므로
$4x+1=\pm\sqrt{5}$
좌변의 1을 우변으로 이항하면 $4x=\boxed{-1}\pm\sqrt{\boxed{5}}$
양변을 4로 나누면 $x=\frac{\boxed{-1}\pm\sqrt{\boxed{5}}}{4}$

개념 2 완전제곱식을 이용한 이차방정식의 풀이

1. 완전제곱식을 이용한 이차방정식의 풀이

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$에서 → $2x^2+8x+6=0$에서
❶ 양변을 a로 나누어 x^2의 계수를 1로 만든다. → $x^2+4x+3=0$
❷ 상수항을 우변으로 이항한다. → $x^2+4x=-3$
❸ 양변에 $\left\{\frac{(x\text{의 계수})}{2}\right\}^2$을 각각 더한다. → $x^2+4x+2^2=-3+2^2$
❹ 정리하여 $(x+p)^2=q$의 꼴로 나타낸다. → $(x+2)^2=1$
❺ 제곱근의 성질을 이용하여 해를 구한다. → $x+2=-1$ 또는 $x+2=1$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$

- 이차방정식 $(x+p)^2=q$가 해를 가질 조건
$(x+p)^2=q$에서
→ ① $q<0$: 해가 없다.
② $q=0$: $x=-p$ (중근)
③ $q>0$: $x=-p\pm\sqrt{q}$
→ 해를 가질 조건: $q\ge0$

풍쌤의 Point 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$에서 좌변을 인수분해하기 쉽지 않을 때에는 좌변을 완전제곱식으로 만들어 이차방정식을 풀 수 있어.

예제 2

이차방정식 $x^2-8x+4=0$을 $(x+p)^2=q$의 꼴로 나타내어라. (단, p, q는 상수)

풀이 $x^2-8x+16=-4+16$이므로 $(x-4)^2=12$

답 $(x-4)^2=12$

유제 2

등식 $x^2+3x+a=(x+b)^2$을 만족시키는 상수 a, b의 값을 구하여라.

답 $a=\frac{9}{4}$, $b=\frac{3}{2}$

$a=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$, $x^2+3x+\frac{9}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$이므로 $b=\frac{3}{2}$

개념 확인하기

정답과 풀이 31~32쪽 | 워크북 46~47쪽

01 제곱근을 이용하여 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2=36$ (2) $2x^2-18=0$

(3) $9x^2=4$ (4) $3x^2=24$

답 (1) $x=\pm6$ (2) $x=\pm3$ (3) $x=\pm\frac{2}{3}$ (4) $x=\pm2\sqrt{2}$

(2) $2x^2-18=0$에서 $2x^2=18$, $x^2=9$ $\therefore x=\pm3$

(3) $9x^2=4$에서 $x^2=\frac{4}{9}$ $\therefore x=\pm\frac{2}{3}$

(4) $3x^2=24$에서 $x^2=8$ $\therefore x=\pm\sqrt{8}=\pm2\sqrt{2}$

▶ 개념 1 제곱근을 이용한 이차방정식의 풀이

02 제곱근을 이용하여 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $(x-1)^2=4$ (2) $2(x+3)^2=10$

(3) $3(x+2)^2-9=0$ (4) $4(x-5)^2=3$

답 (1) $x=-1$ 또는 $x=3$ (2) $x=-3\pm\sqrt{5}$ (3) $x=-2\pm\sqrt{3}$ (4) $x=5\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) $x-1=\pm2$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$ (2) $(x+3)^2=5$, $x+3=\pm\sqrt{5}$ $\therefore x=-3\pm\sqrt{5}$

(3) $(x+2)^2=3$, $x+2=\pm\sqrt{3}$ $\therefore x=-2\pm\sqrt{3}$ (4) $(x-5)^2=\frac{3}{4}$, $x-5=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}$ $\therefore x=5\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

▶ 개념 1 제곱근을 이용한 이차방정식의 풀이

03 다음은 이차방정식을 $(x+p)^2=q$의 꼴로 고쳐서 해를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라. (단, p, q는 상수)

(1)

$x^2+2x-2=0$

$x^2+2x=2$

$x^2+2x+\boxed{1}=2+\boxed{1}$

$(x+\boxed{1})^2=\boxed{3}$

$\therefore x=\boxed{-1\pm\sqrt{3}}$

(2)

$2x^2-8x-3=0$

$x^2-4x=\boxed{\frac{3}{2}}$

$x^2-4x+4=\boxed{\frac{11}{2}}$

$(x-\boxed{2})^2=\boxed{\frac{11}{2}}$

$\therefore x=\boxed{2\pm\frac{\sqrt{22}}{2}}$

▶ 개념 2 완전제곱식을 이용한 이차방정식의 풀이

04 오른쪽은 완전제곱식을 이용하여 이차방정식 $4x^2-2x-1=0$의 해를 구하는 과정이다. (가)~(마)에 들어갈 수로 옳지 않은 것은?

$4x^2-2x-1=0$에서

$x^2-\boxed{(가)}x=\boxed{(나)}$

$(x-\boxed{(다)})^2=\boxed{(라)}$

$\therefore x=\boxed{(마)}$

① (가) $\frac{1}{2}$ ② (나) $\frac{1}{4}$

③ (다) $\frac{1}{4}$ ④ (라) $\frac{5}{16}$

⑤ (마) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

답 ⑤

$4x^2-2x-1=0$의 양변을 4로 나누면 $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=0$, $x^2-\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}$

$x^2-\frac{1}{2}x+\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{5}{16}$ $\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\therefore$ (가) $\frac{1}{2}$, (나) $\frac{1}{4}$, (다) $\frac{1}{4}$, (라) $\frac{5}{16}$, (마) $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

▶ 개념 2 완전제곱식을 이용한 이차방정식의 풀이

05 이차방정식의 근의 공식

▸ 1-1. 이차방정식의 풀이

개념 1 이차방정식의 근의 공식

1. 이차방정식의 근의 공식

(1) **근의 공식 [1]:** 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ (\text{단, } b^2-4ac\geq0)$$

예 $x^2-x-1=0$ → $a=1,\ b=-1,\ c=-1$이므로 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

(2) **근의 공식 [2] (짝수 공식):** 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$에서 일차항 x의 계수 b가 짝수, 즉 $b=2b'$일 때 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 근은

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}\ (\text{단, } b'^2-ac\geq0)$$

예 $x^2-2x-1=0$ → $a=1,\ b'=-1,\ c=-1$이므로 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\times(-1)}}{1}=1\pm\sqrt{2}$$

풍쌤의 Point 일차항의 계수가 짝수일 때, 짝수 공식을 쓰면 계산이 간단해.

예제 1

다음은 근의 공식을 이용하여 이차방정식 $2x^2-5x-1=0$의 해를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$2x^2-5x-1=0$에서 $a=2,\ b=-5,\ c=-1$을 근의 공식에 대입하면

$$x=\frac{-\boxed{}\pm\sqrt{(\boxed{})^2-4\times2\times(-1)}}{2\times\boxed{}}=\frac{\boxed{}\pm\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}}$$

답 $-5, -5, 2, 5, 33, 4$

유제 1

다음은 근의 공식을 이용하여 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 해를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$x^2-3x+1=0$에서 $a=1,\ b=\boxed{-3},\ c=\boxed{1}$을 근의 공식에 대입하면

$$x=\frac{-\boxed{-3}\pm\sqrt{(\boxed{-3})^2-4\times1\times1}}{2\times\boxed{1}}=\frac{\boxed{3}\pm\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$$

예제 2

다음은 근의 공식 (짝수 공식)을 이용하여 이차방정식 $x^2+6x-2=0$의 해를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$x^2+6x-2=0$에서 $a=1,\ b'=3,\ c=-2$를 근의 공식 (짝수 공식)에 대입하면

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{\boxed{}^2-1\times(-2)}}{1}=\boxed{}\pm\sqrt{\boxed{}}$$

답 $3,\ -3,\ 11$

유제 2

다음은 근의 공식 (짝수 공식)을 이용하여 이차방정식 $4x^2-12x+3=0$의 해를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$4x^2-12x+3=0$에서 $a=4,\ b'=\boxed{-6},\ c=3$을 근의 공식 (짝수 공식)에 대입하면

$$x=\frac{-\boxed{-6}\pm\sqrt{(\boxed{-6})^2-\boxed{4}\times3}}{4}=\frac{\boxed{3}\pm\sqrt{\boxed{6}}}{2}$$

01 다음은 완전제곱식을 이용하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 근을 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것을 써넣어라.

> 개념 1 이차방정식의 근의 공식

$ax^2+bx+c=0$의 양변을 a로 나누면

$x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0 \quad \therefore\ x^2+\dfrac{b}{a}x=-\dfrac{c}{a}$

좌변을 완전제곱식으로 만들면

$x^2+\dfrac{b}{a}x+\left(\boxed{(가)}\right)^2=-\dfrac{c}{a}+\left(\boxed{(가)}\right)^2$

$\left(x+\boxed{(가)}\right)^2=\dfrac{\boxed{(나)}}{4a^2}$, $x+\boxed{(가)}=\pm\dfrac{\sqrt{\boxed{(나)}}}{2a}$

$\therefore\ x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\boxed{(나)}}}{2a}$

답 (가) $\dfrac{b}{2a}$ (나) b^2-4ac

02 다음 이차방정식을 근의 공식을 이용하여 풀어라.

> 개념 1 이차방정식의 근의 공식

(1) $x^2+5x+1=0$ (2) $x^2-3x-1=0$

답 (1) $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$ (2) $x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

(1) $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

(2) $x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

강의 tip
이차방정식의 근의 공식을 정확하게 외우고, a, b, c의 값이 음수인 경우 부호에 주의하게 한다.

03 다음 이차방정식을 근의 공식을 이용하여 풀어라.

> 개념 1 이차방정식의 근의 공식

(1) $2x^2-5x+1=0$ (2) $4x^2-3x-1=0$

답 (1) $x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{4}$ (2) $x=-\dfrac{1}{4}$ 또는 $x=1$

(1) $x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times2\times1}}{2\times2}=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{4}$

(2) $x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times4\times(-1)}}{2\times4}=\dfrac{3\pm\sqrt{25}}{8}=\dfrac{3\pm5}{8}$ $\therefore\ x=-\dfrac{1}{4}$ 또는 $x=1$

04 다음 이차방정식을 근의 공식을 이용하여 풀어라.

> 개념 1 이차방정식의 근의 공식

(1) $x^2+4x-2=0$ (2) $3x^2-8x-4=0$

답 (1) $x=-2\pm\sqrt{6}$ (2) $x=\dfrac{4\pm2\sqrt{7}}{3}$

(1) $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-1\times(-2)}}{1}=-2\pm\sqrt{6}$

(2) $x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-3\times(-4)}}{3}=\dfrac{4\pm\sqrt{28}}{3}=\dfrac{4\pm2\sqrt{7}}{3}$

06 복잡한 이차방정식의 풀이

▸ 1-1. 이차방정식의 풀이

개념 1 복잡한 이차방정식의 풀이

1. 복잡한 이차방정식의 풀이

(1) 계수가 분수 또는 소수이면 양변에 적당한 수를 곱하여 계수를 정수로 만든다.

① 계수가 분수일 때: 양변에 분모의 최소공배수를 곱한다.

② 계수가 소수일 때: 양변에 10의 거듭제곱을 곱한다.

예 $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$에서 양변에 분모의 최소공배수 4를 곱하면 $x^2-2x-2=0$이므로 근의 공식을 이용하면 $x=1\pm\sqrt{3}$

풍쌤의 Point 양변에 어떤 수를 곱할 때에는 모든 항에 곱해 주어야 해.

(2) 괄호가 있을 때는 전개하여 $ax^2+bx+c=0$의 꼴로 정리한다.

(3) 공통 부분이 있으면 공통 부분을 한 문자로 놓은 다음 인수분해 또는 근의 공식을 이용하여 해를 구한다.

◆ 이차방정식의 풀이
인수분해가 되면 인수분해를 이용하여 해를 구하고, 인수분해가 어려우면 근의 공식을 이용하여 해를 구한다.

예제 1

다음은 이차방정식 $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}=0$의 해를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}=0$의 양변에 □을 곱하면

$x^2+2x-\square=0$

좌변을 인수분해하여 해를 구하면

$(x+3)(x-\square)=0$

$\therefore x=\square$ 또는 $x=\square$

답 6, 3, 1, -3, 1

유제 1

다음은 이차방정식 $0.3x^2-0.1x-0.5=0$의 해를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$0.3x^2-0.1x-0.5=0$의 양변에 $\boxed{10}$을 곱하면

$3x^2-x-\boxed{5}=0$

근의 공식을 이용하여 해를 구하면

$x=\frac{\boxed{1}\pm\sqrt{\boxed{61}}}{6}$

예제 2

다음은 이차방정식 $(x-1)^2-6(x-1)+3=0$의 해를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$(x-1)^2-6(x-1)+3=0$에서 $x-1=A$라고 하면

$A^2-6A+3=0$

$\therefore A=3\pm\sqrt{\square}$

즉, $x-1=3\pm\sqrt{\square}$이므로

$x=\square\pm\sqrt{\square}$

답 6, 6, 4, 6

유제 2

이차방정식 $2(x+1)^2+5(x+1)-3=0$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $x+1=A$라고 할 때, 주어진 이차방정식을 A에 대한 이차방정식으로 나타내어라.

(2) (1)의 이차방정식을 풀어 A의 값을 구하여라.

(3) x의 값을 구하여라.

답 (1) $2A^2+5A-3=0$ (2) $A=-3$ 또는 $A=\frac{1}{2}$
(3) $x=-4$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

(2) $2A^2+5A-3=0$, $(A+3)(2A-1)=0$ $\therefore A=-3$ 또는 $A=\frac{1}{2}$

(3) $x+1=-3$ 또는 $x+1=\frac{1}{2}$이므로 $x=-4$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

01 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x-\frac{1}{3}=0$　　(2) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}=0$

(3) $0.1x^2-0.3x+0.2=0$　　(4) $x^2-0.3x-0.1=0$

답 (1) $x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{3}$　(2) $x=\frac{2\pm\sqrt{10}}{3}$　(3) $x=1$ 또는 $x=2$　(4) $x=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

(1) $\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x-\frac{1}{3}=0$의 양변에 6을 곱하면 $3x^2+5x-2=0$, $(x+2)(3x-1)=0$　$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

(2) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}=0$의 양변에 12를 곱하면

$3x^2-4x-2=0$　$\therefore x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-3\times(-2)}}{3}=\frac{2\pm\sqrt{10}}{3}$

(3) $0.1x^2-0.3x+0.2=0$의 양변에 10을 곱하면 $x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$　$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

(4) $x^2-0.3x-0.1=0$의 양변에 10을 곱하면 $10x^2-3x-1=0$, $(5x+1)(2x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

▶ 개념 1
복잡한 이차방정식의 풀이

강의 tip
소수나 분수 계수를 그대로 근의 공식에 대입해도 이차방정식을 풀 수는 있지만 계산 과정이 복잡해지므로 계수를 정수로 고쳐서 풀도록 한다.

02 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $0.3x^2+\frac{1}{2}x-0.5=0$　　(2) $2x^2-0.5x-\frac{3}{4}=0$

답 (1) $x=\frac{-5\pm\sqrt{85}}{6}$　(2) $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{4}$

(1) $0.3x^2+\frac{1}{2}x-0.5=0$의 양변에 10을 곱하면

$3x^2+5x-5=0$　$\therefore x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times3\times(-5)}}{2\times3}=\frac{-5\pm\sqrt{85}}{6}$

(2) $2x^2-0.5x-\frac{3}{4}=0$의 양변에 4를 곱하면

$8x^2-2x-3=0$, $(2x+1)(4x-3)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{4}$

▶ 개념 1
복잡한 이차방정식의 풀이

강의 tip
계수에 분수와 소수가 모두 있는 경우에는 소수를 분수로 바꾼 후 분모의 최소공배수를 양변에 곱한다.

03 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $2x(x-3)+3=0$　　(2) $(x+2)(x+3)=4$

답 (1) $x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$　(2) $x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$

(1) $2x(x-3)+3=0$에서

$2x^2-6x+3=0$　$\therefore x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-2\times3}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$

(2) $(x+2)(x+3)=4$에서

$x^2+5x+6=4$, $x^2+5x+2=0$　$\therefore x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times2}}{2\times1}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$

▶ 개념 1
복잡한 이차방정식의 풀이

04 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $(x+2)^2-7(x+2)+12=0$

(2) $(x-1)^2-3(x-1)-18=0$

답 (1) $x=1$ 또는 $x=2$　(2) $x=-2$ 또는 $x=7$

(1) $x+2=A$라고 하면 $A^2-7A+12=0$, $(A-3)(A-4)=0$

$\therefore A=3$ 또는 $A=4$

$A=x+2$이므로

$x+2=3$ 또는 $x+2=4$　$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

(2) $x-1=A$라고 하면 $A^2-3A-18=0$, $(A+3)(A-6)=0$

$\therefore A=-3$ 또는 $A=6$

$A=x-1$이므로

$x-1=-3$ 또는 $x-1=6$　$\therefore x=-2$ 또는 $x=7$

▶ 개념 1
복잡한 이차방정식의 풀이

유형 확인하기

유형 • 1 이차방정식의 뜻

다음 중 x에 대한 방정식 $(k-1)x^2+5x=x^2-6$이 이차방정식이 되기 위한 상수 k의 조건은?

① $k\neq0$ ② $k\neq1$ ③ $k\neq2$
④ $k=1$ ⑤ $k=2$

답 ③
$(k-1)x^2+5x=x^2-6$에서 $(k-2)x^2+5x+6=0$
이 방정식이 이차방정식이 되려면
$k-2\neq0$ $\therefore k\neq2$

강의 tip
x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서
① $a\neq0$은 이차방정식이 되기 위한 조건이다.
② b, c는 0이어도 상관 없다.

1-1

다음 중 x에 대한 이차방정식인 것은?

① $3-x^2$ ② $x^3+4x^2=x(x^2+1)$
③ $x^2-x(x+1)=0$ ④ $x^2+x=(x-1)^2$
⑤ $x(x^2-1)=x$

답 ②
② $x^3+4x^2=x^3+x$, $4x^2-x=0$
③ $x^2-x^2-x=0$, $x=0$
④ $x^2+x=x^2-2x+1$, $3x-1=0$
⑤ $x^3-x=x$, $x^3-2x=0$

1-2

다음 중 x에 대한 방정식 $x(ax-3)=4-x^2$이 이차방정식이 되도록 하는 상수 a의 값으로 적당하지 않은 것은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

답 ③
$x(ax-3)=4-x^2$에서
$ax^2-3x=4-x^2$, $(a+1)x^2-3x-4=0$
이 방정식이 이차방정식이 되려면
$a+1\neq0$ $\therefore a\neq-1$

유형 • 2 이차방정식의 해

$x=2$가 다음 이차방정식의 해일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

(1) $x^2-(k+2)x+6=0$
(2) $4x^2-9x+k=0$

답 (1) 3 (2) 2
(1) $2^2-(k+2)\times2+6=0$에서
$4-2k-4+6=0$, $2k=6$
$\therefore k=3$
(2) $4\times2^2-9\times2+k=0$에서
$16-18+k=0$ $\therefore k=2$

2-1

$x=-2$가 이차방정식 $x^2-(2a-3)x+7-3a=0$의 해일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

답 -5
$(-2)^2-(2a-3)\times(-2)+7-3a=0$이므로
$4+4a-6+7-3a=0$ $\therefore a=-5$

2-2

$x=-1$이 이차방정식 $x^2-5x+a=0$의 해이면서 $2x^2+(b-1)x=0$의 해일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

답 -3
$x=-1$을 $x^2-5x+a=0$에 대입하면
$(-1)^2-5\times(-1)+a=0$, $1+5+a=0$
$\therefore a=-6$
$x=-1$을 $2x^2+(b-1)x=0$에 대입하면
$2\times(-1)^2+(b-1)\times(-1)=0$, $2-b+1=0$
$\therefore b=3$
$\therefore a+b=-6+3=-3$

유형 • 3 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이

다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2+6x-16=0$

(2) $3x^2+2=5x$

(3) $6x^2-6x=5x-3$

(4) $(x-2)(x-3)=6$

답 (1) $x=-8$ 또는 $x=2$ (2) $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=1$

(3) $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$ (4) $x=0$ 또는 $x=5$

(1) $(x+8)(x-2)=0$ $\therefore x=-8$ 또는 $x=2$

(2) $3x^2-5x+2=0$, $(3x-2)(x-1)=0$ $\therefore x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=1$

(3) $6x^2-11x+3=0$, $(3x-1)(2x-3)=0$ $\therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

(4) $x^2-5x+6=6$, $x^2-5x=0$

$x(x-5)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=5$

강의 tip

$x(x-5)=0$의 해를 $x=5$ 하나만 구하는 경우가 있다. $x(x+a)=0$ $(a\neq 0)$의 해는 $x=0$을 빠뜨리지 말고 $x=0$ 또는 $x=-a$로 구할 수 있게 한다.

3-1

이차방정식 $(x+1)^2=x+7$의 두 근을 p, q라고 할 때, p^2+q^2의 값을 구하여라.

답 13

$(x+1)^2=x+7$에서

$x^2+2x+1=x+7$, $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

$\therefore p^2+q^2=(-3)^2+2^2=13$

3-2

다음 두 이차방정식의 공통인 해를 구하여라.

$$x^2-x-20=0,\ 2x^2+7x-4=0$$

답 $x=-4$

$x^2-x-20=0$에서

$(x+4)(x-5)=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=5$

$2x^2+7x-4=0$에서

$(x+4)(2x-1)=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

따라서 두 이차방정식의 공통인 해는 $x=-4$이다.

유형 • 4 한 근이 주어진 이차방정식의 다른 한 근

이차방정식 $3x^2-ax-5=0$의 한 근이 $x=-1$일 때, 상수 a의 값과 다른 한 근을 각각 구하여라.

답 $a=2$, $x=\frac{5}{3}$

$x=-1$을 $3x^2-ax-5=0$에 대입하면

$3\times(-1)^2-a\times(-1)-5=0$, $3+a-5=0$

$\therefore a=2$

따라서 주어진 이차방정식은

$3x^2-2x-5=0$, $(x+1)(3x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

즉, 다른 한 근은 $x=\frac{5}{3}$이다.

4-1

이차방정식 $x^2+2ax-a+3=0$의 한 근이 $x=3$이고, 다른 한 근이 $x=b$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ 0

④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

답 ②

$x=3$을 $x^2+2ax-a+3=0$에 대입하면

$3^2+2a\times 3-a+3=0$ $\therefore a=-\frac{12}{5}$

따라서 주어진 이차방정식은 $x^2-\frac{24}{5}x+\frac{27}{5}=0$ $\therefore x=\frac{9}{5}$ 또는 $x=3$

즉, $b=\frac{9}{5}$이므로 $a+b=-\frac{12}{5}+\frac{9}{5}=-\frac{3}{5}$

4-2

이차방정식 $3x^2+2x-a-1=0$의 한 근이 $x=2$이고, 다른 한 근을 $x=b$라고 할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -40 ② -35 ③ 30

④ 35 ⑤ 40

답 ①

$x=2$를 $3x^2+2x-a-1=0$에 대입하면 $3\times 2^2+2\times 2-a-1=0$ $\therefore a=15$

따라서 주어진 이차방정식은 $3x^2+2x-16=0$ $\therefore x=-\frac{8}{3}$ 또는 $x=2$

즉, $b=-\frac{8}{3}$이므로 $ab=15\times\left(-\frac{8}{3}\right)=-40$

유형 5 이차방정식의 중근

다음 이차방정식 중 중근을 갖는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $x^2=1$ ② $x^2-8x+7=0$

③ $3x^2-6x-9=0$ ④ $2x^2=0$

⑤ $9x^2-12x=-4$

답 ④, ⑤

① $x^2=1$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

② $x^2-8x+7=0$에서
$(x-1)(x-7)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=7$

③ $3x^2-6x-9=0$에서
$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

④ $2x^2=0$에서
$x^2=0$ $\therefore x=0$ (중근)

⑤ $9x^2-12x=-4$에서
$9x^2-12x+4=0$, $(3x-2)^2=0$
$\therefore x=\frac{2}{3}$ (중근)

5-1

다음 이차방정식 중 중근을 갖는 것은?

① $x^2=36$ ② $x^2-3x-4=0$

③ $(x+3)(x-4)=0$ ④ $x^2+14x+49=0$

⑤ $2x^2-x-3=0$

답 ④

① $x=-6$ 또는 $x=6$

② $(x+1)(x-4)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

③ $x=-3$ 또는 $x=4$

④ $(x+7)^2=0$ $\therefore x=-7$ (중근)

⑤ $(x+1)(2x-3)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

5-2

다음 〈보기〉의 이차방정식 중 중근을 갖지 않는 것을 골라라.

보기

ㄱ. $3(x+2)^2=0$ ㄴ. $4x(x+1)=-1$

ㄷ. $x^2-10x+25=0$ ㄹ. $x^2+8=6x$

답 ㄹ

ㄱ. $(x+2)^2=0$ $\therefore x=-2$ (중근)

ㄴ. $4x^2+4x+1=0$, $(2x+1)^2=0$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$ (중근)

ㄷ. $(x-5)^2=0$ $\therefore x=5$ (중근)

ㄹ. $x^2-6x+8=0$, $(x-2)(x-4)=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=4$

유형 6 이차방정식이 중근을 가질 조건

이차방정식 $x^2+ax-2a-4=0$이 중근을 가질 때, 상수 a의 값과 그때의 중근을 각각 구하여라.

답 $a=-4$, $x=2$ (중근)

$-2a-4=\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$이므로
$a^2+8a+16=0$, $(a+4)^2=0$
$\therefore a=-4$
따라서 주어진 이차방정식은
$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$
$\therefore x=2$ (중근)

6-1

이차방정식 $x^2-8x+6a-2=0$이 중근을 가질 때, 상수 a의 값과 그때의 중근을 각각 구하여라.

답 $a=3$, $x=4$ (중근)

$6a-2=\left(\frac{-8}{2}\right)^2=16$이므로
$6a=18$ $\therefore a=3$
따라서 주어진 이차방정식은
$x^2-8x+16=0$, $(x-4)^2=0$
$\therefore x=4$ (중근)

6-2

이차방정식 $x^2-10x+2k+1=0$이 중근 $x=m$을 가질 때, 상수 k, m의 합 $k+m$의 값을 구하여라.

답 17

$2k+1=\left(\frac{-10}{2}\right)^2=25$이므로 $2k=24$ $\therefore k=12$
따라서 주어진 이차방정식은 $x^2-10x+25=0$, $(x-5)^2=0$ $\therefore x=5$ (중근)
$\therefore m=5$
$\therefore k+m=12+5=17$

유형 • 7 제곱근을 이용한 이차방정식의 풀이

이차방정식 $3(x+4)^2-15=0$의 해가 $x=a\pm\sqrt{b}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

답 1

$3(x+4)^2-15=0$에서

$3(x+4)^2=15$, $(x+4)^2=5$

$x+4=\pm\sqrt{5}$ $\quad\therefore x=-4\pm\sqrt{5}$

따라서 $a=-4$, $b=5$이므로

$a+b=-4+5=1$

7-1

이차방정식 $(x+a)^2=b\ (b\ge0)$의 해가 $x=1\pm\sqrt{3}$일 때, 유리수 a, b의 값을 구하여라.

답 $a=-1$, $b=3$

$(x+a)^2=b$에서

$x+a=\pm\sqrt{b}$ $\quad\therefore x=-a\pm\sqrt{6}$

이때 $x=1\pm\sqrt{3}$이므로 $a=-1$, $b=3$

7-2

이차방정식 $(3x+a)^2=18$의 해가 $x=-1\pm\sqrt{b}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

답 6

$(3x+a)^2=18$에서

$3x+a=\pm3\sqrt{2}$, $3x=-a\pm3\sqrt{2}$ $\quad\therefore x=-\frac{a}{3}\pm\sqrt{2}$

이때 $x=-1\pm\sqrt{b}$이므로 $a=3$, $b=2$

$\therefore ab=3\times2=6$

유형 • 8 완전제곱식을 이용한 이차방정식의 풀이

이차방정식 $2x^2-3x-1=0$의 해가 $x=\frac{a\pm\sqrt{b}}{4}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

답 20

$2x^2-3x-1=0$의 양변을 2로 나누면

$x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=0$, $x^2-\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}$

$x^2-\frac{3}{2}x+\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{4}\right)^2$, $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{17}{16}$

$x-\frac{3}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$ $\quad\therefore x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$

따라서 $a=3$, $b=17$이므로

$a+b=3+17=20$

8-1

이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 해가 $x=2\pm\sqrt{5}$일 때, 유리수 k의 값을 구하여라.

답 -1

$x^2-4x+k=0$에서

$x^2-4x=-k$, $x^2-4x+(-2)^2=-k+(-2)^2$

$(x-2)^2=4-k$, $x-2=\pm\sqrt{4-k}$

$\therefore x=2\pm\sqrt{4-k}$

따라서 $4-k=5$이므로 $k=-1$

8-2

이차방정식 $x^2-3x+p=0$의 해가 $x=\frac{q\pm\sqrt{17}}{2}$일 때, 유리수 p, q에 대하여 $p-q$의 값을 구하여라.

답 -5

$x^2-3x+p=0$에서

$x^2-3x=-p$, $x^2-3x+\left(-\frac{3}{2}\right)^2=-p+\left(-\frac{3}{2}\right)^2$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9-4p}{4}$, $x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{9-4p}}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{3\pm\sqrt{9-4p}}{2}$

따라서 $q=3$이고, $9-4p=17$에서 $-4p=8$ $\quad\therefore p=-2$

$\therefore p-q=-2-3=-5$

유형 확인하기

유형 • 9 근의 공식을 이용한 이차방정식의 풀이

이차방정식 $3x^2-4x=x+1$의 근이 $x=\frac{A\pm\sqrt{B}}{6}$일 때, 유리수 A, B에 대하여 $A+B$의 값을 구하여라.

답 42

$3x^2-4x=x+1$에서

$3x^2-5x-1=0 \quad \therefore x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times3\times(-1)}}{2\times3}=\frac{5\pm\sqrt{37}}{6}$

따라서 $A=5$, $B=37$이므로

$A+B=5+37=42$

9-1

이차방정식 $x^2+3x=7x+2$의 근이 $x=A\pm\sqrt{B}$일 때, 유리수 A, B에 대하여 AB의 값을 구하여라.

답 12

$x^2+3x=7x+2$에서

$x^2-4x-2=0 \quad \therefore x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\times(-2)}}{1}=2\pm\sqrt{6}$

따라서 $A=2$, $B=6$이므로

$AB=2\times6=12$

9-2

이차방정식 $2x^2=8x-3$의 근이 $x=\frac{A\pm\sqrt{B}}{2}$일 때, 유리수 A, B에 대하여 $A+B$의 값을 구하여라.

답 14

$2x^2=8x-3$에서

$2x^2-8x+3=0 \quad \therefore x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-2\times3}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}$

따라서 $A=4$, $B=10$이므로

$A+B=4+10=14$

유형 • 10 근의 공식을 이용하여 미지수의 값 구하기

이차방정식 $x^2+5x-k=0$의 근이 $x=\frac{-5\pm\sqrt{37}}{2}$일 때, 유리수 k의 값을 구하여라.

답 3

$x^2+5x-k=0$에서 $x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times(-k)}}{2\times1}=\frac{-5\pm\sqrt{25+4k}}{2}$

따라서 $25+4k=37$이므로

$4k=12 \quad \therefore k=3$

10-1

이차방정식 $x^2-6x+2k+1=0$의 근이 $x=3\pm\sqrt{2}$일 때, 유리수 k의 값을 구하여라.

답 3

$x^2-6x+2k+1=0$에서

$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\times(2k+1)}}{1}=3\pm\sqrt{8-2k}$

따라서 $8-2k=2$이므로

$-2k=-6 \quad \therefore k=3$

10-2

이차방정식 $2x^2+4x+A=0$의 근이 $x=\frac{B\pm\sqrt{14}}{2}$일 때, 유리수 A, B에 대하여 $A+B$의 값을 구하여라.

답 -7

$2x^2+4x+A=0$에서 $x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-2\times A}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-2A}}{2}$

따라서 $B=-2$, $4-2A=14$이므로

$-2A=10 \quad \therefore A=-5$

$\therefore A+B=-5+(-2)=-7$

유형 • 11 계수가 분수 또는 소수인 이차방정식의 풀이

이차방정식 $0.1x^2+\frac{3}{5}x-0.4=0$의 근이 $x=A\pm\sqrt{B}$일 때, 유리수 A, B에 대하여 $A+B$의 값을 구하여라.

답 10

$0.1x^2+\frac{3}{5}x-0.4=0$의 양변에 10을 곱하면

$x^2+6x-4=0 \quad \therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-1\times(-4)}}{1}=-3\pm\sqrt{13}$

따라서 $A=-3$, $B=13$이므로

$A+B=-3+13=10$

11-1

다음 두 이차방정식의 공통인 근을 구하여라.

$$\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x=\frac{1}{2},\ 0.04x^2-0.3x+0.54=0$$

답 $x=3$

$\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x=\frac{1}{2}$의 양변에 6을 곱하면

$2x^2-5x=3$, $2x^2-5x-3=0$

$(2x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$

$0.04x^2-0.3x+0.54=0$의 양변에 100을 곱하면

$4x^2-30x+54=0$, $2x^2-15x+27=0$

$(x-3)(2x-9)=0 \quad \therefore x=3$ 또는 $x=\frac{9}{2}$

따라서 두 이차방정식의 공통인 근은 $x=3$이다.

11-2

이차방정식 $\frac{x(x+4)}{4}-0.5x=\frac{1}{8}$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha-\beta$의 값은? (단, $\alpha>\beta$)

① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$

④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

답 ③

$\frac{x(x+4)}{4}-0.5x=\frac{1}{8}$의 양변에 8을 곱하면

$2x(x+4)-4x=1$, $2x^2+4x-1=0 \quad \therefore x=\frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{-2+\sqrt{6}}{2}$, $\beta=\frac{-2-\sqrt{6}}{2}$이므로 $\alpha-\beta=\frac{-2+\sqrt{6}}{2}-\frac{-2-\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$

유형 • 12 공통 부분이 있는 이차방정식의 풀이

이차방정식 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-2=3\left(x+\frac{1}{2}\right)$을 풀면?

① $x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$ ② $x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

③ $x=\frac{2\pm\sqrt{17}}{2}$ ④ $x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

⑤ $x=\frac{4\pm\sqrt{17}}{2}$

답 ③

$x+\frac{1}{2}=A$라고 하면

$A^2-2=3A$, $A^2-3A-2=0$

$\therefore A=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

즉, $x+\frac{1}{2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$이므로 $x=\frac{2\pm\sqrt{17}}{2}$

12-1

다음 이차방정식을 풀어라.

$$0.2(x-1)^2+0.1(x-1)-1=0$$

답 $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=3$

$x-1=A$라고 하면 $0.2A^2+0.1A-1=0$

이 식의 양변에 10을 곱하면

$2A^2+A-10=0$, $(2A+5)(A-2)=0 \quad \therefore A=-\frac{5}{2}$ 또는 $A=2$

즉, $x-1=-\frac{5}{2}$ 또는 $x-1=2$이므로 $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=3$

12-2

이차방정식 $0.3(x-4)^2-0.8=\frac{1}{5}(x-4)$의 두 근의 곱은?

① -16 ② $-\frac{8}{3}$ ③ -1

④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 16

답 ⑤

$0.3(x-4)^2-0.8=\frac{1}{5}(x-4)$의 양변에 10을 곱하면

$3(x-4)^2-8=2(x-4)$

$x-4=A$라고 하면

$3A^2-2A-8=0$, $(3A+4)(A-2)=0 \quad \therefore A=-\frac{4}{3}$ 또는 $A=2$

즉, $x-4=-\frac{4}{3}$ 또는 $x-4=2$이므로 $x=\frac{8}{3}$ 또는 $x=6$

따라서 구하는 두 근의 곱은 $\frac{8}{3}\times6=16$

07 이차방정식의 근의 개수

개념 1 이차방정식의 근의 개수

1. 이차방정식의 근의 개수

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 서로 다른 근의 개수는 근의 공식

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$에서 b^2-4ac의 부호에 의해 결정된다.

(1) $b^2-4ac>0$이면 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

➜ 서로 다른 두 근을 갖는다. ➜ 근이 2개

(2) $b^2-4ac=0$이면 $x=-\dfrac{b}{2a}$

➜ 한 근(중근)을 갖는다. ➜ 근이 1개

(3) $b^2-4ac<0$이면 근호 안이 음수가 된다.

근호 안이 음수인 제곱근은 없다.

➜ 근이 없다. ➜ 근이 0개

풍쌤의 Point 근의 공식 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$에서 근호 안의 수는 0 이상이어야 하므로 $b^2-4ac<0$이면 이차방정식의 근은 없어.

• 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 근이 존재할 조건은 $b^2-4ac\geq0$

예제 1

다음 이차방정식의 근의 개수를 구하여라.

(1) $x^2-x+\dfrac{1}{4}=0$　　(2) $4x^2+6x+3=0$

풀이 (1) $(-1)^2-4\times1\times\dfrac{1}{4}=0$이므로 1개

(2) $6^2-4\times4\times3=-12<0$이므로 0개

답 (1) 1개　(2) 0개

유제 1

다음 이차방정식의 근의 개수를 구하여라.

(1) $x^2-4x+6=0$　　(2) $2x^2+x-3=0$

답 (1) 0　(2) 2

(1) $(-4)^2-4\times1\times6=-8<0$이므로 0개

(2) $1^2-4\times2\times(-3)=25>0$이므로 2개

개념 2 이차방정식이 중근을 가질 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$이 중근을 가질 조건은 $b^2-4ac=0$

예제 2

이차방정식 $2x^2-3x+k=0$이 중근을 가질 때, 상수 k의 값과 이때의 중근을 구하여라.

풀이 $(-3)^2-4\times2\times k=0$이어야 하므로

$8k=9$　　$\therefore k=\dfrac{9}{8}$

$k=\dfrac{9}{8}$를 주어진 이차방정식에 대입하면

$2x^2-3x+\dfrac{9}{8}=0$, $2\left(x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{16}\right)=0$

$2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2=0$　　$\therefore x=\dfrac{3}{4}$ (중근)

답 $k=\dfrac{9}{8}$, $x=\dfrac{3}{4}$ (중근)

유제 2

이차방정식 $x^2+5x+k=0$이 중근을 가질 때, 상수 k의 값과 이때의 중근을 구하여라.

답 $k=\dfrac{25}{4}$, $x=-\dfrac{5}{2}$ (중근)

$5^2-4\times1\times k=0$이어야 하므로

$4k=25$　　$\therefore k=\dfrac{25}{4}$

$k=\dfrac{25}{4}$를 주어진 이차방정식에 대입하면

$x^2+5x+\dfrac{25}{4}=0$, $\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2=0$

$\therefore x=-\dfrac{5}{2}$ (중근)

01 다음은 이차방정식의 서로 다른 근의 개수를 구하는 과정이다. 표를 완성하여라.

▶ 개념 1 이차방정식의 근의 개수

$ax^2+bx+c=0$	b^2-4ac의 값	근의 개수
$4x^2+4x+1=0$	(1) **0**	(2) **1**
$x^2-5x-2=0$	(3) **33**	(4) **2**
$3x^2-4x+2=0$	(5) **-8**	(6) **0**

(1) $4^2-4\times4\times1=0$
(3) $(-5)^2-4\times1\times(-2)=33>0$
(5) $(-4)^2-4\times3\times2=-8<0$

02 다음 〈보기〉의 이차방정식 중 서로 다른 두 근을 갖는 것을 모두 골라라.

▶ 개념 1 이차방정식의 근의 개수

보기

ㄱ. $2x^2-3x+2=0$　　ㄴ. $x^2+6x-8=0$

ㄷ. $0.4x^2-1.2x+0.9=0$　　ㄹ. $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-1=0$

답 ㄴ, ㄹ
ㄱ. $(-3)^2-4\times2\times2=-7<0$ ➡ 근이 없다.
ㄴ. $6^2-4\times1\times(-8)=68>0$ ➡ 서로 다른 두 근을 갖는다.
ㄷ. $0.4x^2-12x+0.9=0$의 양변에 10을 곱하면 $4x^2-12x+9=0$이므로 $(-12)^2-4\times4\times9=0$ ➡ 중근을 갖는다.
ㄹ. $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-1=0$의 양변에 4를 곱하면 $x^2+2x-4=0$이므로 $2^2-4\times1\times(-4)=20>0$ ➡ 서로 다른 두 근을 갖는다.

03 이차방정식 $x^2+x+k=0$의 근이 다음과 같을 때, 상수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하여라.

▶ 개념 1 이차방정식의 근의 개수

(1) 서로 다른 두 근을 갖는다.

(2) 중근을 갖는다.

(3) 근을 갖지 않는다.

답 (1) $k<\frac{1}{4}$　(2) $k=\frac{1}{4}$　(3) $k>\frac{1}{4}$
$1^2-4\times1\times k=1-4k$에서
(1) $1-4k>0$이므로 $k<\frac{1}{4}$　(2) $1-4k=0$이므로 $k=\frac{1}{4}$　(3) $1-4k<0$이므로 $k>\frac{1}{4}$

04 다음 이차방정식이 중근을 가질 때, 양수 k의 값을 구하여라.

▶ 개념 2 이차방정식이 중근을 가질 조건

(1) $4x^2+2(k+1)x+1=0$

(2) $x^2+2kx+3k=0$

답 (1) 1　(2) 3
(1) $\{2(k+1)\}^2-4\times4\times1=0$이어야 하므로 $4k^2+8k-12=0$, $4(k+3)(k-1)=0$
$\therefore k=-3$ 또는 $k=1$
이때 k는 양수이므로 $k=1$
(2) $(2k)^2-4\times1\times3k=0$이어야 하므로 $4k^2-12k=0$, $4k(k-3)=0$
$\therefore k=0$ 또는 $k=3$
이때 k는 양수이므로 $k=3$

08 이차방정식 구하기

개념 1 이차방정식 구하기

1. 두 근이 α, β이고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은

$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ ➔ $a\{x^2-\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{두 근의 합}}x+\underbrace{\alpha\beta}_{\text{두 근의 곱}}\}=0$

예 두 근이 1, 2이고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2(x-1)(x-2)=0$ $\therefore 2x^2-6x+4=0$

2. 중근이 α이고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은 $a(x-\alpha)^2=0$

예 중근이 1이고 x^2의 계수가 3인 이차방정식은

$3(x-1)^2=0$ $\therefore 3x^2-6x+3=0$

예제 1

다음 두 수를 근으로 하는 x에 대한 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$의 꼴로 나타내어라.

(1) -3, 5 (2) 2 (중근)

풀이 (1) $(x+3)(x-5)=0$이므로 $x^2-2x-15=0$
(2) $(x-2)^2=0$이므로 $x^2-4x+4=0$

답 (1) $x^2-2x-15=0$ (2) $x^2-4x+4=0$

유제 1

다음 두 수를 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식을 구하여라.

(1) -4, 1 (2) -1 (중근)

답 (1) $2x^2+6x-8=0$ (2) $2x^2+4x+2=0$
(1) $2(x+4)(x-1)=0$이므로 $2x^2+6x-8=0$
(2) $2(x+1)^2=0$이므로 $2x^2+4x+2=0$

개념 2 계수가 유리수인 이차방정식의 근

1. 계수가 유리수인 이차방정식에서 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다. (단, p, q는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수)

예 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이면 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.
(단, a, b는 유리수)

2. 두 근이 $p+q\sqrt{m}$, $p-q\sqrt{m}$이고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은

$a\{x-(p+q\sqrt{m})\}\{x-(p-q\sqrt{m})\}=0$

➔ $a\{x^2-\underbrace{2p}_{\text{두 근의 합}}x+\underbrace{(p^2-mq^2)}_{\text{두 근의 곱}}\}=0$

- 계수가 유리수인 이차방정식의 무리수인 한 근을 알면 이차방정식을 풀지 않아도 다른 한 근을 쉽게 구할 수 있다.

풍쌤의 Point 두 근이 무리수인 α, β이고 x^2의 계수가 a인 이차방정식을 구할 때에는
$a\{x^2-$(두 근의 합)$x+$(두 근의 곱)$\}=0$으로 구하는 것이 편리해.

예제 2

다음에 주어진 값이 계수가 모두 유리수인 이차방정식의 한 근일 때, 다른 한 근을 구하여라.

(1) $1+\sqrt{5}$ (2) $-\sqrt{7}$

답 (1) $1-\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{7}$

유제 2

다음에 주어진 값이 계수가 모두 유리수인 이차방정식의 한 근일 때, 다른 한 근을 구하여라.

(1) $3-\sqrt{2}$ (2) $-4-\sqrt{10}$

답 (1) $3+\sqrt{2}$ (2) $-4+\sqrt{10}$

개념 확인하기

01 다음 조건을 만족하는 이차방정식을 구하여라.

(1) 두 근이 3, -5이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식

(2) 두 근이 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$이고 x^2의 계수가 6인 이차방정식

답 (1) $x^2+2x-15=0$ (2) $6x^2-5x+1=0$

(1) $(x-3)(x+5)=0$이므로 $x^2+2x-15=0$

(2) $6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=0$이므로

$6\left(x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)=0$

$\therefore 6x^2-5x+1=0$

강의 tip

두 근이 α, β이고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은 주어진 근의 형태에 따라 더 편리한 방법을 택하여 구하도록 한다.

$\begin{cases} a(x-\alpha)(x-\beta)=0 \rightarrow \text{두 근이 정수일 때 편리하다.} \\ a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0 \rightarrow \text{두 근이 무리수일 때 편리하다.} \end{cases}$

▶ 개념 1 이차방정식 구하기

02 다음 조건을 만족하는 이차방정식을 구하여라.

(1) 중근이 -2이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식

(2) 중근이 $\frac{1}{2}$이고 x^2의 계수가 4인 이차방정식

답 (1) $x^2+4x+4=0$ (2) $4x^2-4x+1=0$

(1) $(x+2)^2=0$이므로 $x^2+4x+4=0$

(2) $4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$이므로 $4x^2-4x+1=0$

▶ 개념 1 이차방정식 구하기

03 다음 조건을 만족하는 이차방정식을 구하여라.

(1) 두 근이 $2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식

(2) 두 근이 $-1+\sqrt{3}$, $-1-\sqrt{3}$이고 x^2의 계수가 -1인 이차방정식

답 (1) $x^2-4x+2=0$ (2) $-x^2-2x+2=0$

(1) (두 근의 합)$=4$, (두 근의 곱)$=2$이므로 $x^2-4x+2=0$

(2) (두 근의 합)$=-2$, (두 근의 곱)$=-2$이므로

$-(x^2+2x-2)=0$ $\therefore -x^2-2x+2=0$

▶ 개념 2 계수가 유리수인 이차방정식의 근

04 다음과 같이 무리수인 한 근과 x^2의 계수가 주어질 때, 계수가 모두 유리수인 이차방정식을 구하여라.

(1) 한 근: $3-2\sqrt{2}$, x^2의 계수: -1

(2) 한 근: $-2+\sqrt{5}$, x^2의 계수: 3

답 (1) $-x^2+6x-1=0$ (2) $3x^2+12x-3=0$

(1) 다른 한 근은 $3+2\sqrt{2}$이므로 (두 근의 합)$=6$, (두 근의 곱)$=1$

$-(x^2-6x+1)=0$ $\therefore -x^2+6x-1=0$

(2) 다른 한 근은 $-2-\sqrt{5}$이므로 (두 근의 합)$=-4$, (두 근의 곱)$=-1$

$3(x^2+4x-1)=0$ $\therefore 3x^2+12x-3=0$

▶ 개념 2 계수가 유리수인 이차방정식의 근

09 이차방정식의 활용 (1)

개념 1 이차방정식의 활용 (1)

1. 이차방정식의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 해결한다.

❶ 미지수 정하기: 구하려는 것을 미지수 x로 놓는다.
❷ 방정식 세우기: 문제의 뜻에 맞게 이차방정식을 세운다.
❸ 방정식 풀기: 이차방정식을 푼다.
❹ 답 구하기: 구한 해 중에서 문제의 뜻에 맞는 것을 택한다.

• 시간, 속력, 거리, 길이, 넓이, 부피 등은 양수가 되어야 하고, 개수, 나이 등은 자연수가 되어야 한다.

풍쌤의 Point 이차방정식의 활용 문제에서 이차방정식의 해가 모두 답이 되는 것은 아니므로 문제의 뜻에 맞는지 반드시 확인해야 해.

2. 이차방정식의 활용 — 수에 대한 문제

미지수를 다음과 같이 정하고 이차방정식을 세운다.

(1) 연속하는 두 정수 → x, $x+1$ 또는 $x-1$, x
(2) 연속하는 세 정수 → $x-1$, x, $x+1$ 또는 x, $x+1$, $x+2$
(3) 연속하는 두 짝수 → x, $x+2$ (x는 짝수) 또는 $2x$, $2x+2$ (x는 자연수)
(4) 연속하는 두 홀수 → x, $x+2$ (x는 홀수) 또는 $2x-1$, $2x+1$ (x는 자연수)

참고 자주 활용되는 간단한 공식

① 자연수 1부터 n까지의 합 → $\frac{n(n+1)}{2}$ ② n각형의 대각선의 총 개수 → $\frac{n(n-3)}{2}$

예제 1

다음은 연속하는 두 자연수의 곱이 30일 때, 두 수를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

❶ 미지수 정하기
연속하는 두 자연수 중 작은 수를 x라고 하면 큰 수는 □이다.
❷ 방정식 세우기
두 자연수의 곱이 30이므로
$x(\square)=30$ …… ㉠
❸ 방정식 풀기
㉠을 정리하여 풀면 $x^2+\square-30=0$
$(x+\square)(x-\square)=0$
$\therefore x=\square$ 또는 $x=\square$
❹ 답 구하기
그런데 x는 자연수이므로 $x=\square$
따라서 구하는 곱이 30인 연속하는 두 자연수는 □, □이다.

답 $x+1$, $x+1$, x, 6, 5, -6, 5, 5, 5, 6

유제 1

다음은 연속하는 짝수인 두 자연수의 제곱의 합이 100일 때, 두 수를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

❶ 미지수 정하기
연속하는 짝수인 두 자연수 중 작은 수를 x라고 하면 큰 수는 $\boxed{x+2}$이다.
❷ 방정식 세우기
두 자연수의 제곱의 합이 100이므로
$x^2+(\boxed{x+2})^2=100$ …… ㉠
❸ 방정식 풀기
㉠을 정리하여 풀면 $x^2+2x-\boxed{48}=0$
$(x+\boxed{8})(x-\boxed{6})=0$
$\therefore x=\boxed{-8}$ 또는 $x=\boxed{6}$
❹ 답 구하기
그런데 x는 자연수이므로 $x=\boxed{6}$
따라서 구하는 연속하는 짝수인 두 자연수는 $\boxed{6}$, $\boxed{8}$이다.

개념 확인하기

정답과 풀이 37쪽 | 워크북 52쪽

01 어떤 자연수를 제곱한 수는 처음 수의 2배보다 15만큼 크다고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 어떤 자연수를 x라고 할 때, x에 대한 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$의 꼴로 나타내어라.

(2) x의 값을 구하여라.

답 (1) $x^2-2x-15=0$ (2) 5

(1) $x^2=2x+15$이므로 $x^2-2x-15=0$

(2) $x^2-2x-15=0$에서

$(x+3)(x-5)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=5$

이때 x는 자연수이므로 $x=5$

▷ 개념 1 이차방정식의 활용 (1)

02 어떤 자연수를 제곱해야 할 것을 잘못하여 3배 하였더니 제곱한 것보다 28만큼 작아졌다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 어떤 자연수를 x라고 할 때, x에 대한 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$의 꼴로 나타내어라.

(2) x의 값을 구하여라.

답 (1) $x^2-3x-28=0$ (2) 7

(1) $3x=x^2-28$이므로 $x^2-3x-28=0$

(2) $x^2-3x-28=0$에서

$(x+4)(x-7)=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=7$

이때 x는 자연수이므로 $x=7$

▷ 개념 1 이차방정식의 활용 (1)

03 연속하는 두 자연수의 제곱의 합이 145이다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 연속하는 두 자연수 중 작은 수를 x라고 할 때, x에 대한 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$의 꼴로 나타내어라.

(2) x의 값을 구하여라.

(3) 연속하는 두 자연수를 구하여라.

답 (1) $x^2+x-72=0$ (2) 8 (3) 8, 9

(1) $x^2+(x+1)^2=145$이므로

$2x^2+2x-144=0$ $\therefore x^2+x-72=0$

(2) $x^2+x-72=0$에서

$(x+9)(x-8)=0$ $\therefore x=-9$ 또는 $x=8$

이때 x는 자연수이므로 $x=8$

▷ 개념 1 이차방정식의 활용 (1)

04 자연수 중 연속하는 두 홀수의 곱이 143이다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 연속하는 두 홀수 중 큰 수를 $2x+1$이라고 할 때, 다른 한 수를 x에 대한 식으로 나타내어라. (단, x는 자연수)

(2) x의 값을 구하여라.

(3) 연속하는 두 홀수를 구하여라.

답 (1) $2x-1$ (2) 6 (3) 11, 13

(2) $(2x+1)(2x-1)=143$이므로

$4x^2-1=143$, $4x^2=144$

$x^2=36$ $\therefore x=-6$ 또는 $x=6$

이때 x는 자연수이므로 $x=6$

(3) $x=6$이므로

$2x-1=11$, $2x+1=13$

따라서 구하는 두 홀수는 11, 13이다.

▷ 개념 1 이차방정식의 활용 (1)

10 이차방정식의 활용 (2)

▸ 1-2. 이차방정식의 활용

개념 1 이차방정식의 활용 (2)

1. 이차방정식의 활용 — 쏘아 올린 물체

t초 후의 높이가 (at^2+bt+c) m로 주어졌을 때, 높이가 h m일 때의 시각을 구하려면 t에 대한 이차방정식 $h=at^2+bt+c$의 해를 구한다.

참고 지면에서 똑바로 던져 올린 물체의 t초 후의 높이가 $h=at^2+bt+c$ (m)일 때

① p초 후 물체의 높이는 t에 p를 대입하여 구한다.

② 물체의 높이가 k m일 때의 시각은 h에 k를 대입하여 구한다.

③ 물체가 지면에 떨어질 때의 높이는 0 m이다.

2. 이차방정식의 활용 — 도형에 대한 문제

(1) (삼각형의 넓이)$=\frac{1}{2}\times$(밑변의 길이)$\times$(높이)

(2) (직사각형의 넓이)$=$(가로의 길이)$\times$(세로의 길이)

(직사각형의 둘레의 길이)$=2\times\{$(가로의 길이)$+$(세로의 길이)$\}$

(3) (원의 넓이)$=\pi\times$(반지름의 길이)^2

(원의 둘레의 길이)$=2\pi\times$(반지름의 길이)

(4) (사다리꼴의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\{$(윗변의 길이)$+$(아랫변의 길이)$\}\times$(높이)

예제 1

다음은 넓이가 108 cm^2이고, 세로의 길이가 가로의 길이보다 3 cm만큼 긴 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

❶ 미지수 정하기

직사각형의 가로의 길이를 x cm라고 하면 세로의 길이는 (□) cm이다.

❷ 방정식 세우기

직사각형의 넓이가 108 cm^2이므로

$x($ □ $)=108$ …… ㉠

❸ 방정식 풀기

㉠을 정리하여 풀면

x^2+ □ $-108=0$, $(x+$ □ $)(x-$ □ $)=0$

$\therefore x=$ □ 또는 $x=$ □

❹ 답 구하기

이때 $x>0$이므로 $x=$ □

따라서 직사각형의 가로의 길이는 □ cm, 세로의 길이는 □ cm이다.

답 $x+3$, $x+3$, $3x$, 12, 9, -12, 9, 9, 9, 12

유제 1

다음은 어떤 원의 반지름의 길이를 2 cm만큼 늘였더니 그 넓이가 처음 원의 4배가 되었을 때, 처음 원의 반지름의 길이를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

❶ 미지수 정하기

처음 원의 반지름의 길이를 x cm라고 하면 늘인 원의 반지름의 길이는 ($\boxed{x+2}$) cm이다.

❷ 방정식 세우기

늘인 원의 넓이가 처음 원의 넓이의 4배이므로

$\pi\times(\boxed{x+2})^2=\boxed{4}\times\pi\times x^2$ …… ㉠

❸ 방정식 풀기

㉠을 정리하여 풀면

$3x^2-4x-\boxed{4}=0$, $(3x+\boxed{2})(x-\boxed{2})=0$

$\therefore x=\boxed{-\frac{2}{3}}$ 또는 $x=\boxed{2}$

❹ 답 구하기

이때 $x>0$이므로 $x=\boxed{2}$

따라서 처음 원의 반지름의 길이는 $\boxed{2}$ cm이다.

개념 확인하기

정답과 풀이 37~38쪽 | 워크북 53~54쪽

01 **지면에서 초속 70 m로 똑바로 던져 올린 공의 t초 후의 지면으로부터의 높이가 $(70t-5t^2)$ m라고 한다. 다음 물음에 답하여라.**

▷ 개념 1 이차방정식의 활용 (2)

(1) 물체가 지면에 떨어질 때의 높이를 구하여라.

(2) 물체를 던진 후 지면에 떨어질 때까지 걸리는 시간을 구하여라.

답 (1) **0 m** (2) **14초**

(2) $70t-5t^2=0$에서

$t^2-14t=0$, $t(t-14)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=14$

이때 $t>0$이므로 $t=14$

따라서 물체를 던진 후 지면에 떨어질 때까지 걸린 시간은 14초이다.

02 **지면에서 초속 30 m로 똑바로 던져 올린 공의 t초 후의 지면으로부터의 높이가 $(30t-5t^2)$ m라고 한다. 다음 물음에 답하여라.**

▷ 개념 1 이차방정식의 활용 (2)

(1) 던져 올린 지 2초 후의 공의 높이를 구하여라.

(2) 공의 높이가 지면으로부터 25 m에 도달하는 것은 던져 올린 지 몇 초 후인지 구하여라.

답 (1) **40 m** (2) **1초 후 또는 5초 후**

(1) $30t-5t^2$에 $t=2$를 대입하면 $30\times2-5\times2^2=40$

따라서 2초 후의 공의 높이는 40 m이다.

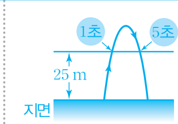
(2) $30t-5t^2=25$에서 $5t^2-30t+25=0$, $t^2-6t+5=0$

$(t-1)(t-5)=0$ $\therefore t=1$ 또는 $t=5$

따라서 25 m에 도달하는 것은 던져 올린 지 1초 후 또는 5초 후이다.

강의 tip

던져 올린 공의 높이가 h m인 경우는 공이 가장 높이 올라간 경우를 제외하고 올라갈 때와 내려올 때의 2번이다.



03 **가로, 세로의 길이가 각각 6 m, 5 m인 직사각형이 있다. 이 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x m씩 늘였을 때, 다음 물음에 답하여라.**

▷ 개념 1 이차방정식의 활용 (2)

(1) 늘인 후의 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x에 대한 식으로 나타내어라.

(2) 새로운 직사각형의 넓이를 x에 대한 식으로 나타내어라.

(3) 새로운 직사각형의 넓이가 처음 직사각형의 넓이보다 12 m^{2}만큼 클 때, x의 값을 구하여라.

답 (1) **가로의 길이: $(x+6)$ m, 세로의 길이: $(x+5)$ m** (2) **$(x^2+11x+30)$ m^2** (3) **1**

(2) $(x+6)(x+5)=x^2+11x+30$

(3) $x^2+11x+30=30+12$이므로 $x^2+11x-12=0$, $(x+12)(x-1)=0$

$\therefore x=-12$ 또는 $x=1$

이때 $x>0$이므로 $x=1$

04 **둘레의 길이가 32 cm이고 넓이가 60 cm^{2}인 직사각형이 있다. 이 직사각형의 가로의 길이가 세로의 길이보다 더 길 때, 다음 물음에 답하여라.**

▷ 개념 1 이차방정식의 활용 (2)

(1) 직사각형의 가로의 길이를 x cm라고 할 때, 세로의 길이를 x에 대한 식으로 나타내어라.

(2) x의 값을 구하여라.

(3) 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 구하여라.

답 (1) **$(16-x)$ cm** (2) **$x=6$ 또는 $x=10$** (3) **가로의 길이: 10 cm, 세로의 길이: 6 cm**

(1) 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 합이 16 cm이고, 가로의 길이가 x cm이므로 세로의 길이는 $(16-x)$ cm

(2) $x(16-x)=60$에서

$x^2-16x+60=0$, $(x-6)(x-10)=0$

$\therefore x=6$ 또는 $x=10$

(3) 가로의 길이가 세로의 길이보다 더 기므로 직사각형의 가로의 길이는 10 cm, 세로의 길이는 6 cm이다.

유형 확인하기

정답과 풀이 38~39쪽 | 워크북 50~54쪽

유형 • 1 근의 개수에 따른 미지수의 값 구하기

이차방정식 $x^2+6x+5-k=0$이 근을 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위는?

① $k<-4$ ② $k\geq -4$
③ $-4\leq k<4$ ④ $k\geq 4$
⑤ $k>4$

답 ②
$x^2+6x+5-k=0$이 근을 가지려면
$6^2-4\times1\times(5-k)\geq0$, $16+4k\geq0$
$\therefore k\geq -4$

강의 tip
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에 대하여
① 서로 다른 두 근을 가질 조건: $b^2-4ac>0$ (중근 제외)
② 근을 가질 조건: $b^2-4ac\geq0$ (중근 포함)

1-1

이차방정식 $3x^2+2x+k-4=0$이 해를 갖지 않도록 하는 상수 k의 값 중 가장 작은 자연수를 구하여라.

답 5
$3x^2+2x+k-4=0$이 해를 갖지 않으려면
$2^2-4\times3\times(k-4)<0$, $52-12k<0$
$\therefore k>\frac{13}{3}$
따라서 k의 값 중 가장 작은 자연수는 5이다.

1-2

이차방정식 $x^2+3x+k-4=0$이 서로 다른 두 근을 가질 때, 자연수 k의 최댓값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

답 ③
$x^2+3x+k-4=0$이 서로 다른 두 근을 가지므로
$3^2-4\times1\times(k-4)>0$, $25-4k>0$
$\therefore k<\frac{25}{4}$
따라서 자연수 k의 최댓값은 6이다.

유형 • 2 이차방정식이 중근을 가질 조건

이차방정식 $x^2+(k+3)x+4k=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 상수 k의 값의 합은?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

답 ③
$(k+3)^2-4\times1\times4k=0$이므로
$k^2-10k+9=0$, $(k-1)(k-9)=0$
$\therefore k=1$ 또는 $k=9$
따라서 모든 상수 k의 값의 합은 10이다.

2-1

이차방정식 $x^2-2(m-1)x+4=0$이 중근을 가질 때, 양수 m의 값을 구하여라.

답 3
$\{-2(m-1)\}^2-4\times1\times4=0$이므로
$m^2-2m-3=0$, $(m+1)(m-3)=0$
$\therefore m=-1$ 또는 $m=3$
이때 m이 양수이므로 $m=3$

2-2

이차방정식 $(k+1)x^2-(k+1)x+1=0$이 중근을 갖도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

답 3
$\{-(k+1)\}^2-4\times(k+1)\times1=0$이므로
$k^2-2k-3=0$, $(k+1)(k-3)=0$
$\therefore k=-1$ 또는 $k=3$
이때 $k=-1$이면 이차방정식이 아니므로 $k=3$

유형 • 3 이차방정식 구하기

이차방정식 $\frac{1}{2}x^2+ax+b=0$의 두 근이 -2, 4일 때, 상수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

답 ④

두 근이 -2, 4이고, x^2의 계수가 $\frac{1}{2}$인 이차방정식은

$\frac{1}{2}(x+2)(x-4)=0$, $\frac{1}{2}x^2-x-4=0$

따라서 $a=-1$, $b=-4$이므로 $\frac{b}{a}=4$

3-1

이차방정식 $9x^2+ax+b=0$이 중근 $-\frac{1}{3}$을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

답 7

중근이 $-\frac{1}{3}$이고, x^2의 계수가 9인 이차방정식은

$9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=0$, $9x^2+6x+1=0$

따라서 $a=6$, $b=1$이므로

$a+b=6+1=7$

3-2

이차방정식 $3x^2+ax+b=0$의 두 근이 $-\frac{2}{3}$, 1일 때, 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근의 차를 구하여라.

(단, a, b는 상수)

답 3

두 근이 $-\frac{2}{3}$, 1이고 x^2의 계수가 3인 이차방정식은

$3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-1)=0$, $3\left(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)=0$ $\quad\therefore 3x^2-x-2=0$

즉, $a=-1$, $b=-2$이므로 $x^2+ax+b=0$에 대입하면

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 두 근의 차는 $2-(-1)=3$

유형 • 4 한 근이 무리수일 때 미지수의 값 구하기

이차방정식 $x^2+6x+k=0$의 한 근이 $\underset{\text{다른 한 근은 } -3-\sqrt{5}}{\underline{-3+\sqrt{5}}}$일 때, 유리수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

답 ④

(두 근의 곱)$=(-3+\sqrt{5})(-3-\sqrt{5})=(-3)^2-(\sqrt{5})^2=4$이므로

$k=4$

4-1

이차방정식 $x^2-mx+3=0$의 한 근이 $\underset{\text{다른 한 근은 } 3+\sqrt{6}}{\underline{3-\sqrt{6}}}$일 때, 유리수 m의 값은?

① -6 ② -4 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

답 ⑤

(두 근의 합)$=(3+\sqrt{6})+(3-\sqrt{6})=6$이므로 $m=6$

4-2

이차방정식 $x^2+2ax+2b=0$의 한 근이 $\underset{\text{다른 한 근은 } 3-2\sqrt{2}}{\underline{3+2\sqrt{2}}}$일 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 유리수)

① -4 ② $-\frac{7}{2}$ ③ $-\frac{3}{2}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

답 ②

(두 근의 합)$=-2a=(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=6$ $\quad\therefore a=-3$

(두 근의 곱)$=2b=(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=3^2-(2\sqrt{2})^2=1$ $\quad\therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore a-b=-3-\frac{1}{2}=-\frac{7}{2}$

유형 5 수에 대한 문제

연속하는 세 자연수의 제곱의 합이 302일 때, 세 자연수를 구하여라.

답 $9, 10, 11$

연속하는 세 자연수를 $x-1$, x, $x+1$이라고 하면

$(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=302$, $3x^2+2=302$

$3x^2=300$, $x^2=100$

$\therefore x=-10$ 또는 $x=10$

이때 x는 자연수이므로 $x=10$

따라서 구하는 세 자연수는 $9, 10, 11$이다.

5-1

연속하는 세 자연수가 있다. 가운데 수의 제곱의 3배가 나머지 두 수의 제곱의 합보다 2만큼 클 때, 가장 작은 자연수를 구하여라.

답 1

연속하는 세 자연수를 $x-1$, x, $x+1$이라고 하면

$3x^2=(x-1)^2+(x+1)^2+2$, $3x^2=2x^2+4$

$x^2=4$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

이때 x는 자연수이므로 $x=2$

따라서 가장 작은 자연수는 $x-1=2-1=1$이다.

5-2

연속하는 홀수인 두 자연수의 제곱의 합이 130일 때, 두 홀수의 합은?

① 12　② 16　③ 20　④ 24　⑤ 28

답 ②

연속하는 두 홀수를 x, $x+2$ (x는 홀수)라고 하면

$x^2+(x+2)^2=130$, $2x^2+4x-126=0$

$x^2+2x-63=0$, $(x+9)(x-7)=0$

$\therefore x=-9$ 또는 $x=7$

이때 $x>0$이므로 $x=7$

따라서 연속하는 홀수인 두 자연수는 $7, 9$이므로 구하는 합은 $7+9=16$이다.

강의 tip

홀수를 제곱하여 식을 세우므로 연속하는 두 홀수를 x, $x+2$ (x는 홀수)로 놓고 푸는 것이 $2x-1$, $2x+1$ (x는 자연수)로 놓고 푸는 것보다 간편하다.

유형 6 실생활에 대한 문제

나이 차이가 4살인 남매가 있다. 동생 나이의 제곱은 오빠 나이의 7배보다 2살이 많을 때, 동생의 나이를 구하여라.

답 10살

동생의 나이를 x살이라고 하면 오빠의 나이는 $(x+4)$살이므로

$x^2=7(x+4)+2$, $x^2-7x-30=0$

$(x+3)(x-10)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=10$

이때 x는 자연수이므로 $x=10$

따라서 동생의 나이는 10살이다.

6-1

어느 수학 문제집을 펼쳤더니 두 면에 적힌 쪽수의 곱이 210이었다. 이 두 면의 쪽수의 합을 구하여라.

답 29

펼쳐진 두 면의 쪽수 중 작은 것을 x라고 하면 다른 쪽수는 $x+1$이므로

$x(x+1)=210$, $x^2+x-210=0$

$(x+15)(x-14)=0$ $\quad\therefore x=-15$ 또는 $x=14$

이때 x는 자연수이므로 $x=14$

따라서 펼쳐진 두 면의 쪽수는 $14, 15$이므로 구하는 합은 29이다.

6-2

수정이는 여름 캠프를 8월에 2박 3일 동안 가기로 하였는데 3일간의 날짜를 각각 제곱하여 더하였더니 194였다. 여름 캠프의 출발 날짜는?

① 8월 5일　② 8월 6일　③ 8월 7일　④ 8월 8일　⑤ 8월 9일

답 ③

여름 캠프의 날짜를 $(x-1)$일, x일, $(x+1)$일이라고 하면

$(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=194$, $3x^2=192$

$x^2=64$ $\quad\therefore x=-8$ 또는 $x=8$

이때 x는 자연수이므로 $x=8$

따라서 출발 날짜는 8월 7일이다.

유형 • 7 물건의 개수에 대한 문제

연필 144자루를 남김없이 학생들에게 똑같이 나누어 주었다. 한 학생이 받은 연필의 수가 전체 학생의 수보다 10만큼 적다고 할 때, 전체 학생의 수를 구하여라.

답 18

전체 학생의 수를 x라고 하면 한 학생이 받은 연필의 수가 $x-10$이므로
$x(x-10)=144$, $x^2-10x-144=0$
$(x+8)(x-18)=0$ $\quad\therefore x=-8$ 또는 $x=18$
이때 $x>10$이므로 $x=18$
따라서 전체 학생의 수는 18이다.

7-1

사탕 112개를 남김없이 어떤 모둠의 학생들에게 똑같이 나누어 주려고 한다. 한 학생이 받을 사탕의 수가 모둠의 학생의 수보다 6만큼 적다고 할 때, 이 모둠의 학생의 수를 구하여라.

답 14

모둠의 학생의 수를 x라고 하면 한 학생이 받을 사탕의 수가 $x-6$이므로
$x(x-6)=112$, $x^2-6x-112=0$
$(x+8)(x-14)=0$ $\quad\therefore x=-8$ 또는 $x=14$
이때 $x>6$이므로 $x=14$
따라서 모둠의 학생의 수는 14이다.

7-2

한 봉지에 30개가 들어 있는 호두과자 6봉지를 남김없이 학생들에게 똑같이 나누어 주려고 한다. 한 학생이 받을 호두과자의 수는 전체 학생의 수보다 3만큼 적다고 할 때, 전체 학생의 수를 구하여라.

답 15

전체 학생의 수를 x라고 하면 한 학생이 받을 호두과자의 수가 $x-3$이므로
$x(x-3)=30\times6$, $x^2-3x-180=0$
$(x+12)(x-15)=0$ $\quad\therefore x=-12$ 또는 $x=15$
이때 $x>3$이므로 $x=15$
따라서 전체 학생의 수는 15이다.

유형 • 8 공식 활용에 대한 문제

n각형의 대각선의 총 개수는 $\dfrac{n(n-3)}{2}$이다. 대각선의 총 개수가 다음과 같은 다각형은 몇 각형인지 구하여라.

(1) 35 (2) 65

답 (1) 십각형 (2) 십삼각형

(1) $\dfrac{n(n-3)}{2}=35$, $n^2-3n-70=0$
$(n+7)(n-10)=0$ $\quad\therefore n=-7$ 또는 $n=10$
이때 $n>3$이므로 $n=10$

(2) $\dfrac{n(n-3)}{2}=65$, $n^2-3n-130=0$
$(n+10)(n-13)=0$ $\quad\therefore n=-10$ 또는 $n=13$
이때 $n>3$이므로 $n=13$

8-1

자연수 1부터 n까지의 합은 $\dfrac{n(n+1)}{2}$이다. 합이 210이 되려면 1부터 얼마까지 더해야 하는가?

① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

답 ⑤

$\dfrac{n(n+1)}{2}=210$이므로 $n^2+n-420=0$, $(n+21)(n-20)=0$
$\therefore n=-21$ 또는 $n=20$
이때 n은 자연수이므로 $n=20$

8-2

n명의 학생들이 서로 한 번씩 악수를 하면 그 총 횟수는 $\dfrac{n(n-1)}{2}$이 된다. n명의 학생들이 서로 한 번씩 악수한 총 횟수가 28일 때, 학생의 수는?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

답 ①

$\dfrac{n(n-1)}{2}=28$에서 $n^2-n-56=0$, $(n+7)(n-8)=0$
$\therefore n=-7$ 또는 $n=8$
이때 n은 자연수이므로 $n=8$
따라서 구하는 학생의 수는 8이다.

유형 9 쏘아 올린 물체에 대한 문제

지면에서 초속 15 m로 똑바로 쏘아 올린 공의 t초 후의 지면으로부터의 높이가 $(15t-5t^2)$ m라고 한다. 이 공이 다시 땅에 떨어지는 것은 공을 쏘아 올린 지 몇 초 후인가?

① 2초 후 ② 3초 후 ③ 4초 후
④ 5초 후 ⑤ 6초 후

답 ②
공이 땅에 떨어지는 것은 지면으로부터의 높이가 0 m가 되는 순간이므로
$15t-5t^2=0$, $t^2-3t=0$
$t(t-3)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=3$
따라서 공이 다시 땅에 떨어지는 것은 공을 쏘아 올린 지 3초 후이다.

9-1

지면으로부터 30 m 높이의 건물 꼭대기에서 초속 45 m로 똑바로 위로 던진 공의 t초 후의 지면으로부터의 높이가 $(30+45t-5t^2)$ m라고 한다. 공의 높이가 처음으로 지면으로부터 120 m가 되는 것은 공을 던진 지 몇 초 후인지 구하여라.

답 3초 후
$30+45t-5t^2=120$이므로 $5t^2-45t+90=0$, $t^2-9t+18=0$
$(t-3)(t-6)=0$ $\therefore t=3$ 또는 $t=6$
따라서 공의 높이가 지면으로부터 처음으로 120 m가 되는 것은 공을 던진 지 3초 후이다.

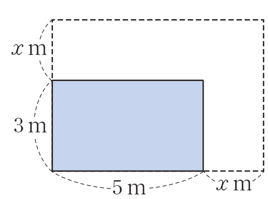
9-2

지면으로부터 100 m 높이의 옥상에서 초속 40 m로 쏘아 올린 폭죽의 t초 후의 지면으로부터의 높이는 $(100+40t-5t^2)$ m이다. 이 폭죽이 처음으로 지면으로부터의 높이가 160 m인 지점에 도달하였을 때 터지도록 하려면 몇 초 후에 터지도록 해야 하는지 구하여라.

답 2초 후
$100+40t-5t^2=160$이므로 $5t^2-40t+60=0$, $t^2-8t+12=0$
$(t-2)(t-6)=0$ $\therefore t=2$ 또는 $t=6$
따라서 2초 후에 터지도록 해야 한다.

유형 10 도형에 대한 문제 (1)

오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 5 m, 3 m인 직사각형에서 가로, 세로의 길이를 똑같이 x m씩 늘여서 그 넓이를 20 m^{2}만큼 넓히려고 한다. 이때 x의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

답 ②
처음 직사각형의 넓이가 $5\times3=15(\text{m}^2)$이므로 새로운 직사각형의 넓이는
$(x+5)(x+3)=15+20$, $x^2+8x-20=0$
$(x+10)(x-2)=0$ $\therefore x=-10$ 또는 $x=2$
이때 $x>0$이므로 $x=2$

10-1

밑변의 길이와 높이가 같은 삼각형이 있다. 이 삼각형의 밑변의 길이를 6 cm, 높이를 4 cm 늘였더니 그 넓이가 처음 삼각형의 2배가 되었다. 이때 처음 삼각형의 넓이를 구하여라.

답 72 cm^2
처음 삼각형의 밑변의 길이를 x cm라고 하면
$\frac{1}{2}(x+6)(x+4)=2\times\left(\frac{1}{2}\times x\times x\right)$, $x^2-10x-24=0$
$(x+2)(x-12)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=12$
이때 $x>0$에서 $x=12$
따라서 처음 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times12\times12=72(\text{cm}^2)$

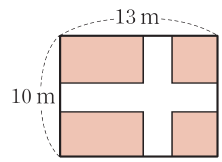
10-2

가로, 세로의 길이가 각각 12 cm, 8 cm인 직사각형이 있다. 이 직사각형의 가로의 길이는 매초 1 cm씩 줄어들고, 세로의 길이는 매초 2 cm씩 늘어날 때, 넓이가 처음과 같아지는 데 걸리는 시간은 몇 초인지 구하여라.

답 8초
t초 후 가로의 길이는 $(12-t)$ cm, 세로의 길이는 $(8+2t)$ cm가 되므로 t초 후 직사각형의 넓이가 처음과 같아진다고 하면
$(12-t)(8+2t)=12\times8$, $-2t^2+16t+96=96$
$2t^2-16t=0$, $t^2-8t=0$
$t(t-8)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=8$
이때 $0<t<12$이므로 $t=8$
따라서 넓이가 처음과 같아지는 데 걸리는 시간은 8초이다.

유형 • 11 도형에 대한 문제 (2)

오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 13 m, 10 m인 직사각형 모양의 땅에 폭이 일정한 도로를 만들려고 한다. 도로를 제외한 부분의 넓이가 88 m^2가 되도록 할 때, 이 도로의 폭은?
x m



① $\frac{1}{2}$ m　　② 1 m　　③ $\frac{3}{2}$ m

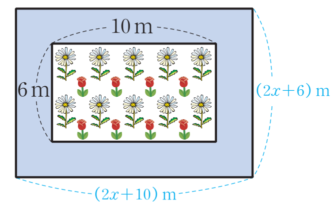
④ 2 m　　⑤ $\frac{5}{2}$ m

답 ④
$(13-x)(10-x)=88$, $x^2-23x+42=0$
$(x-2)(x-21)=0$　　$\therefore x=2$ 또는 $x=21$
이때 $0<x<10$이므로 $x=2$
따라서 구하는 도로의 폭은 2 m이다.

강의 tip
도로의 폭은 0보다는 크지만 직사각형의 가로, 세로의 길이보다는 좁아야 한다.

11-1

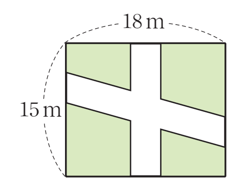
오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 10 m, 6 m인 직사각형 모양의 꽃밭이 있다. 이 꽃밭의 둘레에 폭이 일정하고, 넓이가 80 m^2인 산책로를 만들려고 할 때, 산책로의 폭은 몇 m로 해야 하는지 구하여라.
x m



답 2 m
$(2x+10)(2x+6)-10\times6=80$, $x^2+8x-20=0$
$(x+10)(x-2)=0$　　$\therefore x=-10$ 또는 $x=2$
이때 $x>0$이므로 $x=2$
따라서 산책로의 폭은 2 m이다.

11-2

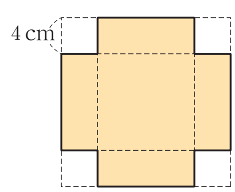
오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 18 m, 15 m인 직사각형 모양의 땅에 폭이 일정한 도로를 만들려고 한다. 도로를 제외한 부분의 넓이가 180 m^2가 되도록 할 때, 이 도로의 폭을 몇 m로 해야 하는지 구하여라.
x m



답 3 m
$(18-x)(15-x)=180$, $x^2-33x+90=0$
$(x-3)(x-30)=0$　　$\therefore x=3$ 또는 $x=30$
이때 $0<x<15$이므로 $x=3$
따라서 구하는 도로의 폭은 3 m이다.

유형 • 12 도형에 대한 문제 (3)

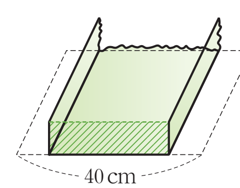
오른쪽 그림과 같은 정사각형 모양의 종이의 네 귀퉁이에서 한 변의 길이가 4 cm인 정사각형을 잘라내고 나머지로 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 상자를 만들었더니 부피가 144 cm^3가 되었다. 처음 정사각형 모양의 종이의 한 변의 길이를 구하여라.
x cm



답 14 cm
$4(x-8)^2=144$, $(x-8)^2=36$
$x-8=\pm6$　　$\therefore x=2$ 또는 $x=14$
$x-8>0$에서 $x>8$이므로 $x=14$
따라서 처음 정사각형 모양의 종이의 한 변의 길이는 14 cm이다.

12-1

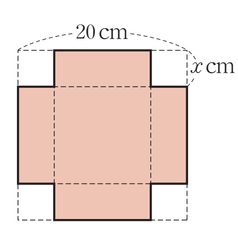
오른쪽 그림과 같이 폭이 40 cm인 철판의 양쪽을 같은 높이만큼 직각으로 접어 올려 색칠한 단면의 넓이가 150 cm^2인 물받이를 만들려고 한다. 가능한 물받이의 높이를 모두 구하여라.
x cm



답 5 cm, 15 cm
$x(40-2x)=150$, $(x-5)(x-15)=0$　　$\therefore x=5$ 또는 $x=15$
$40-2x>0$에서 $-2x>-40$이므로 $0<x<20$
따라서 가능한 물받이의 높이는 5 cm 또는 15 cm이다.

12-2

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 20 cm인 정사각형 모양의 종이의 네 귀퉁이에서 한 변의 길이가 x cm인 정사각형 모양의 종이를 오려내어 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다. 이 상자의 겉넓이가 300 cm^2일 때, x의 값을 구하여라.



답 5

$(20-2x)^2+4x(20-2x)=300$, $4x^2-100=0$
$x^2-25=0$, $(x+5)(x-5)=0$
$\therefore x=-5$ 또는 $x=5$
$20-2x>0$에서 $-2x>-20$이므로 $0<x<10$
$\therefore x=5$

단원 마무리하기

정답과 풀이 41~42쪽 | 워크북 55~57쪽

01 다음 중 이차방정식인 것은?

① $2x+5=5x-3$

② $-x^2+x^3=2x-3+2x^2$

③ $x^3+x=-2x^2+x^3 \rightarrow 2x^2+x=0$

④ $x^2+\dfrac{1}{x}=3$

⑤ $x^2+2=\dfrac{1}{x^2}-1$

답 ③

① $-3x+8=0 \rightarrow$ 일차방정식

② $x^3-3x^2-2x+3=0 \rightarrow$ 이차방정식이 아니다.

④ $x^2+\dfrac{1}{x}-3=0 \rightarrow$ 이차방정식이 아니다.

⑤ $x^2-\dfrac{1}{x^2}+3=0 \rightarrow$ 이차방정식이 아니다.

02 이차방정식 $3x^2-(a-2)x-a+3=0$의 한 근이 $x=-2$일 때, 상수 a의 값은?

① -15 ② -11 ③ -7

④ -3 ⑤ -1

답 ②

$x=-2$를 $3x^2-(a-2)x-a+3=0$에 대입하면

$3\times(-2)^2-(a-2)\times(-2)-a+3=0$, $12+2(a-2)-a+3=0$

$a+11=0$ $\therefore a=-11$

03 이차방정식 $x^2+4x-12=0$의 두 근 중 큰 근을 a라고 할 때, 이차방정식 $2x^2-(a+1)x-20=0$을 풀면?

① $x=-5$ 또는 $x=2$ ② $x=-4$ 또는 $x=\dfrac{5}{2}$

③ $x=-\dfrac{5}{2}$ 또는 $x=4$ ④ $x=\dfrac{5}{2}$ 또는 $x=4$

⑤ $x=2$ 또는 $x=5$

답 ③

$x^2+4x-12=0$에서 $(x+6)(x-2)=0$ $\therefore x=-6$ 또는 $x=2$

따라서 $a=2$이므로 $2x^2-(a+1)x-20=0$에 대입하면

$2x^2-3x-20=0$, $(2x+5)(x-4)=0$

$\therefore x=-\dfrac{5}{2}$ 또는 $x=4$

04 다음 두 이차방정식의 근이 서로 같을 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

$x=-2$ 또는 $x=-b$

$$x^2+ax-a+5=0,\ (x+2)(x+b)=0$$

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

답 ②

$(x+2)(x+b)=0$의 한 근 $x=-2$가 $x^2+ax-a+5=0$의 근이므로

$(-2)^2+a\times(-2)-a+5=0$ $\therefore a=3$

$a=3$을 $x^2+ax-a+5=0$에 대입하면

$x^2+3x+2=0$, $(x+2)(x+1)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

따라서 $-b=-1$이므로 $b=1$

$\therefore a-b=3-1=2$

05 이차방정식 $x^2-2ax+12-4a=0$이 중근을 가질 때, 모든 상수 a의 값의 곱은?

① -12 ② -6 ③ 0

④ 6 ⑤ 12

답 ①

$x^2-2ax+12-4a=0$에서

$12-4a=(-a)^2$, $a^2+4a-12=0$

$(a+6)(a-2)=0$ $\therefore a=-6$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 곱은

$-6\times2=-12$

06 이차방정식 $4(x+a)^2=b$의 해가 $x=-2\pm\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

답 ⑤

$4(x+a)^2=b$에서

$(x+a)^2=\dfrac{b}{4}$, $x+a=\pm\sqrt{\dfrac{b}{4}}$

$\therefore x=-a\pm\sqrt{\dfrac{b}{4}}=-2\pm\sqrt{2}$

따라서 $-a=-2$, $\dfrac{b}{4}=2$이므로 $a=2$, $b=8$

$\therefore a+b=2+8=10$

07 이차방정식 $5x^2+12x+a=0$의 해가 $x=\dfrac{b\pm\sqrt{51}}{5}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -14 ② -11 ③ -9

④ -6 ⑤ -2

답 ③

$5x^2+12x+a=0$에서 $x^2+\dfrac{12}{5}x+\dfrac{a}{5}=0$, $x^2+\dfrac{12}{5}x=-\dfrac{a}{5}$

$x^2+\dfrac{12}{5}x+\left(\dfrac{6}{5}\right)^2=-\dfrac{a}{5}+\left(\dfrac{6}{5}\right)^2$, $\left(x+\dfrac{6}{5}\right)^2=\dfrac{36-5a}{25}$

$x+\dfrac{6}{5}=\pm\dfrac{\sqrt{36-5a}}{5}$ $\therefore x=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-5a}}{5}$

따라서 $b=-6$이고, $36-5a=51$에서 $5a=-15$ $\therefore a=-3$

$\therefore a+b=-3+(-6)=-9$

08 이차방정식 $3x^2-2x-3=0$의 두 근 중 큰 근을 k라고 할 때, $\dfrac{3}{k}+1$의 값은?

① $-\sqrt{10}+1$ ② $\sqrt{10}-1$ ③ $\sqrt{10}$

④ $\sqrt{10}+1$ ⑤ $\sqrt{10}+2$

답 ③

$3x^2-2x-3=0$에서

$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-3\times(-3)}}{3}=\dfrac{1\pm\sqrt{10}}{3}$

따라서 $k=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$이므로

$\dfrac{3}{k}+1=\dfrac{9}{1+\sqrt{10}}+1=\dfrac{9(1-\sqrt{10})}{(1+\sqrt{10})(1-\sqrt{10})}+1$

$=-(1-\sqrt{10})+1=\sqrt{10}$

09 이차방정식 $0.3x^2+x=0.8(x+1)$의 두 근 중 큰 근을 k라고 할 때, $15k$의 값은?

① 1　② 5　③ 10
④ 15　⑤ 20

답 ⑤
$0.3x^2+x=0.8(x+1)$의 양변에 10을 곱하면
$3x^2+10x=8(x+1)$, $3x^2+2x-8=0$
$(x+2)(3x-4)=0$　$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{4}{3}$
따라서 $k=\frac{4}{3}$이므로 $15k=15\times\frac{4}{3}=20$

10 $(2x+y)^2-7=12x+6y$일 때, 양수 x, y에 대하여 $2x+y$의 값은?

① 1　② 3　③ 5
④ 7　⑤ 9

답 ④
$(2x+y)^2-7=12x+6y$에서
$(2x+y)^2-7=6(2x+y)$, $(2x+y)^2-6(2x+y)-7=0$
$2x+y=A$라고 하면
$A^2-6A-7=0$, $(A+1)(A-7)=0$
$\therefore A=-1$ 또는 $A=7$
이때 x, y가 양수이므로 $A>0$
$\therefore A=2x+y=7$

11 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이 -1, $\frac{1}{4}$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ 1
④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

답 ③
두 근이 -1, $\frac{1}{4}$이고, x^2의 계수가 2인 이차방정식은
$2(x+1)\left(x-\frac{1}{4}\right)=0$, $2x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=0$
따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이므로
$a+b=\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

12 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-\sqrt{5}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -4　② -2　③ 2
④ 4　⑤ 8

답 ④
한 근이 $2-\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $2+\sqrt{5}$이다.
(두 근의 합)$=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$이므로
$-a=4$　$\therefore a=-4$
(두 근의 곱)$=(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=-1$이므로 $b=-1$
$\therefore ab=-4\times(-1)=4$

13 두 수 a, b에 대하여 $a \circledcirc b=(a+1)(b-1)$로 나타낼 때, 다음을 만족시키는 x의 값을 모두 구하면?

$$(x+2)\circledcirc 2x=4$$

① $-\frac{7}{2}$, 1　② $-\frac{5}{2}$, 1　③ -1, $\frac{3}{2}$
④ -1, $\frac{5}{2}$　⑤ $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$

강의 tip
$x+2$를 a에, $2x$를 b에 대입한다고 생각한다.

답 ①
$(x+2)\circledcirc 2x=\{(x+2)+1\}(2x-1)=4$이므로
$(x+3)(2x-1)=4$, $2x^2+5x-7=0$
$(2x+7)(x-1)=0$　$\therefore x=-\frac{7}{2}$ 또는 $x=1$

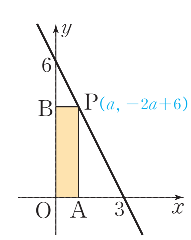
강의 tip
(사진의 넓이)+(테두리의 넓이)=2×(사진의 넓이)임을 이용하여 식을 세워도 된다.

14 오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 18 cm, 12 cm인 직사각형 모양의 사진을 폭이 x cm로 일정한 테두리를 가진 액자에 끼웠다. 테두리의 넓이가 사진의 넓이와 같을 때, x의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

답 ③
(테두리의 넓이)=(사진의 넓이)이므로
$(18+2x)(12+2x)-18\times12=18\times12$, $4x^2+60x-216=0$
$x^2+15x-54=0$, $(x+18)(x-3)=0$
$\therefore x=-18$ 또는 $x=3$
이때 $x>0$이므로 $x=3$

15 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-2x+6$ 위의 한 점 P를 잡아 직사각형 OAPB를 만들었다. □OAPB의 넓이가 4일 때, 점 P의 좌표를 구하여라.



(단, $\overline{OA}<\overline{OB}$이고 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)

답 (1, 4)
□OAPB$=a(-2a+6)$이므로
$a(-2a+6)=4$, $-2a^2+6a-4=0$
$a^2-3a+2=0$, $(a-1)(a-2)=0$
$\therefore a=1$ 또는 $a=2$
$\therefore$ P(1, 4) 또는 P(2, 2)
이때 $\overline{OA}<\overline{OB}$이므로 구하는 점 P의 좌표는 (1, 4)이다.

주어진 단계에 따라 쓰는 유형

16 이차방정식 $x^2+(2k+1)x+1-k^2=0$의 한 근이 $x=1$일 때, 다른 한 근을 $x=m$이라고 하자. 상수 k, m에 대하여 $k-m$의 값을 모두 구하여라.

생각해 보자

구하는 것은? $k-m$의 값

주어진 것은? ① 이차방정식 $x^2+(2k+1)x+1-k^2=0$
② 이차방정식의 한 근이 $x=1$, 다른 한 근은 $x=m$

풀이

[1단계] k의 값 구하기 $(40\ \%)$

$x=1$은 $x^2+(2k+1)x+1-k^2=0$의 한 근이므로
$1^2+(2k+1)\times1+1-k^2=0$, $k^2-2k-3=0$
$(k+1)(k-3)=0$ $\therefore k=-1$ 또는 $k=3$

[2단계] m의 값 구하기 $(40\ \%)$

(i) $k=-1$일 때, $x^2-x=0$, $x(x-1)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ $\therefore m=0$
(ii) $k=3$일 때, $x^2+7x-8=0$, $(x+8)(x-1)=0$
$\therefore x=-8$ 또는 $x=1$ $\therefore m=-8$

[3단계] 모든 $k-m$의 값 구하기 $(20\ \%)$

$k=-1$, $m=0$일 때, $k-m=-1-0=-1$
$k=3$, $m=-8$일 때, $k-m=3-(-8)=11$
따라서 $k-m$의 값은 -1 또는 11이다.

답 -1 또는 11

풀이 과정을 자세히 쓰는 유형

17 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -6, 1이고, 이차방정식 $ax^2+bx+1=0$의 두 근이 α, β일 때, $\alpha+10\beta$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수이고, $\alpha>\beta$)

풀이

두 근이 -6, 1이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x+6)(x-1)=0$, $x^2+5x-6=0$
$\therefore a=5$, $b=-6$ ······ ❶
a, b의 값을 $ax^2+bx+1=0$에 대입하면 $5x^2-6x+1=0$이므로
$(5x-1)(x-1)=0$ $\therefore x=\frac{1}{5}$ 또는 $x=1$
이때 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=1$, $\beta=\frac{1}{5}$ ······ ❷
$\therefore \alpha+10\beta=1+10\times\frac{1}{5}=3$ ······ ❸

단계	채점 기준	비율
❶	상수 a, b의 값 구하기	$30\ \%$
❷	α, β의 값 구하기	$40\ \%$
❸	$\alpha+10\beta$의 값 구하기	$30\ \%$

답 3

18 x에 대한 이차방정식 $ax^2+(a+3)x+a=0$이 중근을 가질 때, 이차방정식 $2x^2+5x+a=0$을 풀어라. (단, $a>0$)

풀이

$ax^2+(a+3)x+a=0$이 중근을 가지므로
$(a+3)^2-4\times a\times a=0$, $-3a^2+6a+9=0$
$a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$
이때 $a>0$이므로 $a=3$ ······ ❶
따라서 $a=3$을 $2x^2+5x+a=0$에 대입하면
$2x^2+5x+3=0$, $(2x+3)(x+1)=0$
$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$ ······ ❷

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값 구하기	$60\ \%$
❷	이차방정식 $2x^2+5x+a=0$ 풀기	$40\ \%$

답 $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

Ⅳ 이차함수

1

이차함수의 그래프 (1)

1. 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

2. 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

01 이차함수 $y=x^2$의 그래프

▸ 1-1. 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

개념 1 이차함수 $y=x^2$의 그래프

1. 이차함수의 뜻

함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 대한 이차식 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)로 나타내어질 때, 이 함수 f를 x에 대한 이차함수라고 한다.

$a=0$, $b\neq0$이면 함수 f는 일차함수

예 $y=x^2$, $y=x^2-4$, $y=-2x^2+2x+3$

2. 이차함수 $y=x^2$의 그래프

(1) 원점 $(0, 0)$을 지나고 아래로 볼록한 곡선이다.

(2) y축에 대하여 대칭이다.

(3) (i) $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

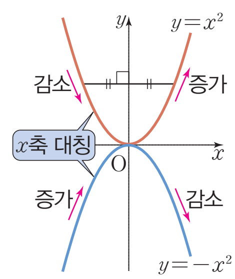
(ii) $x>0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

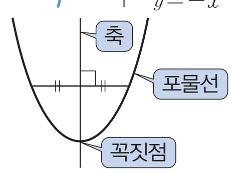
(4) 원점을 제외한 모든 부분은 x축보다 위쪽에 있다.

(5) $y=-x^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

참고 ① 이차함수의 그래프와 같은 모양의 곡선을 포물선이라고 한다.

② 포물선은 선대칭도형이며 그 대칭축을 포물선의 축, 포물선과 축의 교점을 포물선의 꼭짓점이라고 한다.





- **함숫값**
이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$에서 $x=k$일 때의 함숫값은 $f(k)=ak^2+bk+c$

- x의 값의 범위에 대한 특별한 언급이 없으면 x의 값의 범위는 실수 전체로 생각한다.

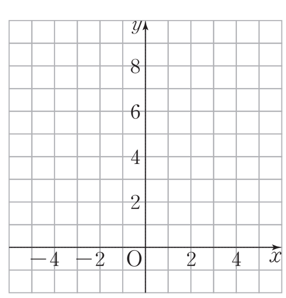
예제 1

이차함수 $y=x^2$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 아래 표를 완성하여라.

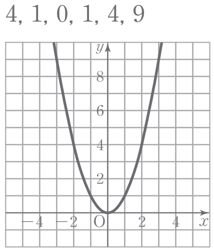
x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	9							$\cdots$

(2) (1)의 표를 이용하여 x의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그려라.



답 (1) 4, 1, 0, 1, 4, 9

(2)



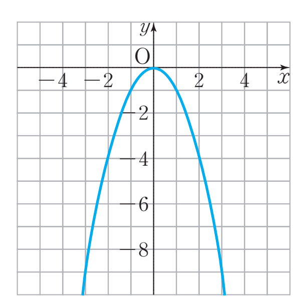
유제 1

이차함수 $y=-x^2$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 아래 표를 완성하여라.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	$\cdots$

(2) (1)의 표를 이용하여 x의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그려라.



개념 확인하기

01 다음 〈보기〉 중 이차함수인 것을 모두 골라라.

▶ 개념 1 이차함수 $y=x^2$의 그래프

보기

ㄱ. $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}$　ㄴ. $y=-x^3-3x^2+2$　ㄷ. $y=0.1x^2-(3x+4)$

ㄹ. $y=x^2-(x^2+3)$　ㅁ. $y-x^2=-x^2+2x-5$

답 ㄱ, ㄷ

02 다음에서 y를 x에 대한 식으로 나타내고, 이차함수인지 아닌지 말하여라.

▶ 개념 1 이차함수 $y=x^2$의 그래프

(1) 반지름의 길이가 x cm인 원의 넓이 y cm^2

(2) 시속 70 km로 x시간 동안 달린 거리 y km

(3) 밑면의 반지름의 길이가 x cm, 높이가 4 cm인 원기둥의 부피 y cm^3

답 (1) $y=\pi x^2$, 이차함수이다. (2) $y=70x$, 이차함수가 아니다. (3) $y=4\pi x^2$, 이차함수이다.

03 두 이차함수 $y=x^2$, $y=-x^2$의 그래프에 대하여 다음 빈칸에 알맞은 것을 써넣어라.

▶ 개념 1 이차함수 $y=x^2$의 그래프

	$y=x^2$	$y=-x^2$
(1) 꼭짓점의 좌표	$(0, 0)$	$(0, 0)$
(2) 축의 방정식	$x=0$	$x=0$
(3) 그래프가 지나는 사분면	제1, 2사분면	제3, 4사분면

04 다음 중 이차함수 $y=x^2$의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

▶ 개념 1 이차함수 $y=x^2$의 그래프

① 원점을 지난다.

② 점 $(-4, 16)$을 지난다.

③ y축에 대하여 대칭이다.

④ x가 어떤 값을 갖더라도 $y>0$이다.

⑤ $x>0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

답 ④

④ $x=0$일 때 $y=0$이므로 항상 $y>0$인 것은 아니다.

02 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

개념 1 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

1. 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

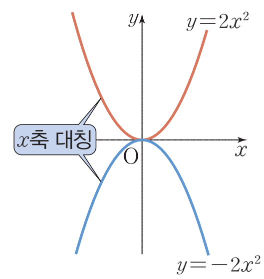
(1) 원점 $(0,\ 0)$을 꼭짓점으로 하고, y축을 축으로 하는 포물선이다.
축의 방정식은 $x=0$

(2) a의 부호에 따라 포물선의 모양이 달라진다.

① $a>0$이면 아래로 볼록한 포물선이다.

② $a<0$이면 위로 볼록한 포물선이다.

(3) 이차함수 $y=-ax^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.
ax^2의 값과 $-ax^2$의 값은 절댓값이 같고 부호만 다르다.

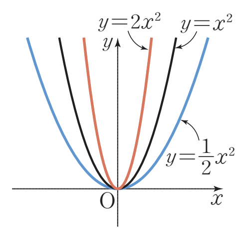


- 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 $a>0$일 때 제1, 2사분면을 지나고, $a<0$일 때 제3, 4사분면을 지난다.

예 이차함수 $y=2x^2$의 그래프와 $y=-2x^2$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다.

(4) a의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아진다.
y축에 가까워진다.

예 이차함수 $y=2x^2$의 그래프의 폭은 이차함수 $y=x^2$의 그래프의 폭보다 좁고, 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프의 폭은 이차함수 $y=x^2$의 그래프의 폭보다 넓다.



풍쌤의 Point 이차함수 $y=ax^2$에서 a의 부호는 그래프의 모양을 결정하고, $|a|$는 그래프의 폭을 결정해.

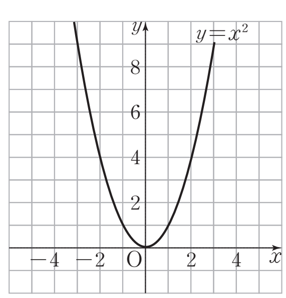
예제 1

두 이차함수 $y=x^2$, $y=2x^2$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 아래 표를 완성하여라.

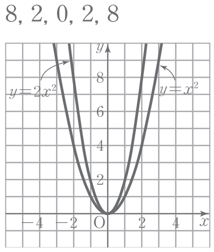
x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$y=x^2$	$\cdots$	4	1	0	1	4	$\cdots$
$y=2x^2$	$\cdots$						$\cdots$

(2) 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 이용하여 $y=2x^2$의 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그려라.



답 (1) 8, 2, 0, 2, 8

(2)



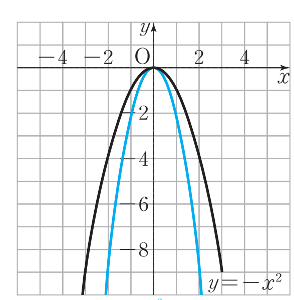
유제 1

두 이차함수 $y=-x^2$, $y=-2x^2$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 아래 표를 완성하여라.

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$y=-x^2$	$\cdots$	-4	-1	0	-1	-4	$\cdots$
$y=-2x^2$	$\cdots$	-8	-2	0	-2	-8	$\cdots$

(2) 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 이용하여 $y=-2x^2$의 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그려라.



개념 확인하기

정답과 풀이 43쪽 | 워크북 59~60쪽

01 다음 〈보기〉의 이차함수에 대하여 물음에 답하여라.

보기

ㄱ. $y=-x^2$　　ㄴ. $y=2x^2$　　ㄷ. $y=-\frac{3}{4}x^2$

ㄹ. $y=\frac{3}{4}x^2$　　ㅁ. $y=-2x^2$　　ㅂ. $y=\frac{4}{3}x^2$

(1) 그래프가 아래로 볼록한 것을 모두 골라라.

(2) 그래프가 x축에 대하여 대칭인 두 이차함수를 모두 골라라.

답 (1) ㄴ, ㄹ, ㅂ　(2) ㄴ과 ㅁ, ㄷ과 ㄹ

▶ 개념 1 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

02 이차함수 $y=ax^2$의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것에는 ○표, 옳지 않은 것에는 ×표를 하여라.

(1) 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이다. (○)

(2) x축에 대하여 대칭이다. → y축에 대하여 대칭 (×)

(3) $a<0$이면 아래로 볼록한 포물선이다. → $a<0$이면 위로 볼록 (×)

(4) 이차함수 $y=-ax^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다. (○)

(5) $a=2$일 때의 그래프의 폭이 $a=5$일 때의 그래프의 폭보다 넓다. (○)

▶ 개념 1 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

03 다음 〈보기〉 중 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 골라라.

보기

ㄱ. 위로 볼록한 포물선이다.

ㄴ. 제1, 2사분면을 지난다.

ㄷ. 축의 방정식은 $x=0$이다.

ㄹ. $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

ㅁ. 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

답 ㄴ, ㄷ, ㅁ

ㄱ. 아래로 볼록한 포물선이다.　ㄹ. $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

▶ 개념 1 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

04 다음 〈보기〉의 이차함수 중 그래프의 폭이 좁은 것부터 차례대로 나열하여라.

보기

ㄱ. $y=x^2$　　ㄴ. $y=-2x^2$

ㄷ. $y=\frac{5}{2}x^2$　　ㄹ. $y=-\frac{1}{6}x^2$

답 ㄷ, ㄴ, ㄱ, ㄹ

이차함수 $y=ax^2$의 그래프에서 a의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아진다.

따라서 $\left|-\frac{1}{6}\right|<|1|<|-2|<\left|\frac{5}{2}\right|$이므로 그래프의 폭이 좁은 것부터 차례대로 나열하면 ㄷ, ㄴ, ㄱ, ㄹ이다.

▶ 개념 1 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

유형 확인하기

유형 1 이차함수의 뜻

다음 중 y를 x에 대한 식으로 나타낼 때, 이차함수인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① 밑변의 길이가 $x+1$, 높이가 x^2인 삼각형의 넓이 y
② 한 모서리의 길이가 x인 정육면체의 겉넓이 y
③ 한 모서리의 길이가 x인 정육면체의 부피 y
④ 두 대각선의 길이가 각각 x, $2x$인 마름모의 넓이 y
⑤ 한 변의 길이가 x인 정사각형의 둘레의 길이 y

답 ②, ④
① $y=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2$ ② $y=6x^2$ ③ $y=x^3$ ④ $y=x^2$ ⑤ $y=4x$

1-1

다음 〈보기〉 중 이차함수인 것을 모두 골라라.

보기
ㄱ. $y=\frac{3}{x^2}+2$
ㄴ. $y=3-x^2$
ㄷ. $y=(2x-3)^2-4x^2$ $=-12x+9$
ㄹ. $y=x(2x-1)+x-1$ $=2x^2-1$

답 ㄴ, ㄹ

1-2

가로의 길이가 $x-1$, 세로의 길이가 $2-x$인 직사각형의 넓이를 y라고 할 때, y를 x에 대한 식으로 나타내고, 이차함수인지 말하여라.

답 $y=-x^2+3x-2$, 이차함수이다.
$y=(x-1)(2-x)=-x^2+3x-2$

유형 2 이차함수의 함숫값

이차함수 $f(x)=x^2+3x$에서 $f(2)-f(1)$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

답 ②
$f(2)=2^2+3\times2=10$, $f(1)=1^2+3\times1=4$
$\therefore f(2)-f(1)=10-4=6$

2-1

이차함수 $f(x)=-x^2+x+12$에서 $x=-2$일 때의 함숫값을 구하여라.

답 6
$f(-2)=-(-2)^2+(-2)+12=6$

2-2

이차함수 $f(x)=2x^2+kx+1$에 대하여 $f(2)=3$일 때, 상수 k의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

답 ③
$f(2)=2\times2^2+k\times2+1=2k+9=3$이므로
$2k=-6$ $\therefore k=-3$

유형 • 3 이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 성질

다음 〈보기〉의 이차함수의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

보기

ㄱ. $y=4x^2$	ㄴ. $y=\frac{2}{3}x^2$
ㄷ. $y=-3x^2$	ㄹ. $y=-\frac{3}{2}x^2$

① 모두 y축에 대하여 대칭이다.

② 모두 원점 $(0, 0)$을 지난다.

③ 그래프의 폭이 가장 좁은 것은 ㄱ이다.

④ ㄴ과 ㄹ은 x축에 대하여 대칭이다.

⑤ 아래로 볼록한 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

④ ㄴ과 ㄹ은 x^2의 계수의 절댓값이 같지 않으므로 x축에 대하여 대칭이 아니다.

3-1

이차함수 $y=(a-2)x^2$의 그래프가 위로 볼록할 때, 다음 중 상수 a의 값이 될 수 없는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① -1 ② 0 ③ 1

④ 2 ⑤ 3

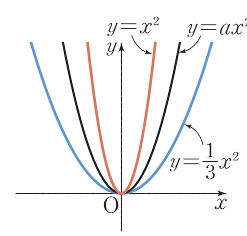
답 ④, ⑤

그래프가 위로 볼록하므로 $a-2<0$ $\therefore a<2$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ④, ⑤이다.

3-2

세 이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2$, $y=ax^2$, $y=x^2$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 상수 a의 값이 될 수 있는 것을 모두 고르면? (정답 2개)



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$

⑤ 2

답 ②, ③

$y=ax^2$의 그래프가 $y=\frac{1}{3}x^2$의 그래프보다 폭이 좁고 $y=x^2$의 그래프보다 폭이 넓으므로 $\frac{1}{3}<a<1$

유형 • 4 이차함수 $y=ax^2$의 그래프 위의 점

이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 두 점 $(4, 8)$, $(-2, b)$를 지날 때, $a+b$의 값은? (단, a는 상수)

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

답 ④

$y=ax^2$의 그래프가 점 $(4, 8)$을 지나므로

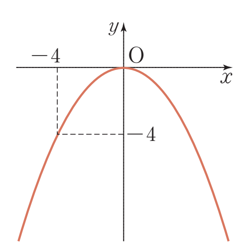
$8=16a$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프가 점 $(-2, b)$를 지나므로 $b=\frac{1}{2}\times(-2)^2=2$

$\therefore a+b=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

4-1

오른쪽 그림은 꼭짓점이 원점이고 대칭축이 y축인 포물선이다. 이 포물선이 점 $(2, k)$를 지날 때, k의 값을 구하여라.



답 -1

주어진 포물선을 나타내는 이차함수의 식을 $y=ax^2$ $(a\neq0)$이라고 하자.

이 포물선이 점 $(-4, -4)$를 지나므로

$-4=a\times(-4)^2$, $16a=-4$

$\therefore a=-\frac{1}{4}$

따라서 $y=-\frac{1}{4}x^2$의 그래프가 점 $(2, k)$를 지나므로 $k=-\frac{1}{4}\times2^2=-1$

4-2

이차함수 $y=2x^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭인 그래프가 점 $(a, a-3)$을 지날 때, 양수 a의 값을 구하여라.

답 1

이차함수 $y=2x^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭인 그래프가 나타내는 이차함수의 식은 $y=-2x^2$

이 그래프가 점 $(a, a-3)$을 지나므로 $a-3=-2a^2$, $2a^2+a-3=0$

$(2a+3)(a-1)=0$ $\therefore a=-\frac{3}{2}$ 또는 $a=1$

이때 a는 양수이므로 $a=1$

03 이차함수 $y=ax^2+q$와 $y=a(x-p)^2$의 그래프

▶ 1-2. 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

개념 1 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프

1. 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프

이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

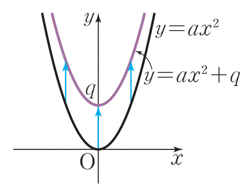
(1) **꼭짓점의 좌표:** $(0,\ q)$

(2) **축의 방정식:** $x=0$ (y축)

예 이차함수 $y=x^2+3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 3)$, 축의 방정식은 $x=0$이다.

참고 $q>0$이면 y축의 양의 방향(위쪽)으로 이동하고, $q<0$이면 y축의 음의 방향(아래쪽)으로 이동한다.

$a>0,\ q>0$



◆ **평행이동**
한 도형을 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 옮기는 것을 평행이동이라고 한다. 평행이동은 도형의 모양을 변화시키지 않으면서 그 위치만 변화시킨다.

풍쌤의 Point 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동하려면 y 대신 $y-q$를 대입하면 돼.

예제 1

다음 이차함수의 그래프를 y축의 방향으로 [　　] 안의 수만큼 평행이동한 그래프의 식을 구하여라.

(1) $y=3x^2$ [2]　　(2) $y=-\frac{1}{2}x^2$ [-1]

답 (1) $y=3x^2+2$　(2) $y=-\frac{1}{2}x^2-1$

유제 1

다음 이차함수의 그래프는 $y=2x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 얼마만큼 평행이동한 것인지 구하여라.

(1) $y=2x^2-3$　　(2) $y=2x^2+\frac{1}{5}$

답 (1) -3　(2) $\frac{1}{5}$

개념 2 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프

1. 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프

이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 것이다.

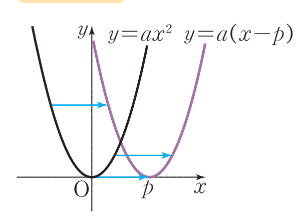
(1) **꼭짓점의 좌표:** $(p,\ 0)$

(2) **축의 방정식:** $x=p$

예 이차함수 $y=(x-3)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 0)$, 축의 방정식은 $x=3$이다.

참고 $p>0$이면 x축의 양의 방향(오른쪽)으로 이동하고, $p<0$이면 x축의 음의 방향(왼쪽)으로 이동한다.

$a>0,\ p>0$



풍쌤의 Point 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동하려면 x 대신 $x-p$를 대입하면 돼.

예제 2

다음 이차함수의 그래프를 x축의 방향으로 [　　] 안의 수만큼 평행이동한 그래프의 식을 구하여라.

(1) $y=\frac{3}{4}x^2$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$　　(2) $y=-x^2$ [1]

답 (1) $y=\frac{3}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$　(2) $y=-(x-1)^2$

유제 2

다음 이차함수의 그래프는 $y=-2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 얼마만큼 평행이동한 것인지 구하여라.

(1) $y=-2\left(x-\frac{2}{3}\right)^2$　　(2) $y=-2(x+2)^2$

답 (1) $\frac{2}{3}$　(2) -2

개념 확인하기

정답과 풀이 44쪽 | 워크북 61~62쪽

01 이차함수 $y=-\frac{2}{3}x^2$의 그래프를 다음과 같이 평행이동한 그래프가 나타내는 이차함수의 식을 구하여라.

(1) y축의 방향으로 -3만큼 평행이동

(2) x축의 방향으로 5만큼 평행이동

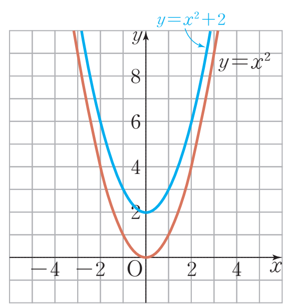
답 (1) $y=-\frac{2}{3}x^2-3$ (2) $y=-\frac{2}{3}(x-5)^2$

강의 tip
(1) y축의 방향으로 q만큼 평행이동
→ y 대신 $y-q$를 대입
→ $-q$를 우변으로 이항하면 q가 됨을 확인시킨다.
(2) x축의 방향으로 p만큼 평행이동
→ x 대신 $x+p$가 아닌 $x-p$를 대입해야 함에 주의시킨다.

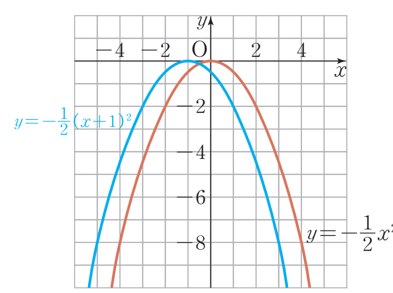
▶ 개념 1, 2
이차함수 $y=ax^2+q$, $y=a(x-p)^2$의 그래프

02 주어진 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 그리고, 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식을 각각 구하여라.

(1) $y=x^2+2$



(2) $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$



답 (1) 꼭짓점의 좌표: $(0, 2)$, 축의 방정식: $x=0$
(2) 꼭짓점의 좌표: $(-1, 0)$, 축의 방정식: $x=-1$

▶ 개념 1, 2
이차함수 $y=ax^2+q$, $y=a(x-p)^2$의 그래프

03 다음 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식을 각각 구하여라.

(1) $y=-x^2+\frac{2}{5}$

(2) $y=3(x+4)^2$

(3) $y=\frac{4}{5}x^2-1$

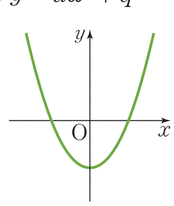
(4) $y=-(x-6)^2$

답 (1) 꼭짓점의 좌표: $\left(0, \frac{2}{5}\right)$, 축의 방정식: $x=0$ (2) 꼭짓점의 좌표: $(-4, 0)$, 축의 방정식: $x=-4$
(3) 꼭짓점의 좌표: $(0, -1)$, 축의 방정식: $x=0$ (4) 꼭짓점의 좌표: $(6, 0)$, 축의 방정식: $x=6$

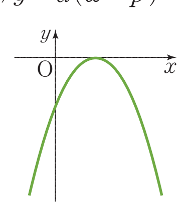
▶ 개념 1, 2
이차함수 $y=ax^2+q$, $y=a(x-p)^2$의 그래프

04 다음과 같이 주어진 이차함수의 그래프가 아래와 같을 때, a, p의 부호를 구하여라.

(1) $y=ax^2+q$



(2) $y=a(x-p)^2$



답 (1) $a>0$, $q<0$ (2) $a<0$, $p>0$

▶ 개념 1, 2
이차함수 $y=ax^2+q$, $y=a(x-p)^2$의 그래프

04 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

▸ 1-2. 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

개념 1 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

1. 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

└ x 대신 $x-p$, y 대신 $y-q$ 대입

(1) **꼭짓점의 좌표:** $(p,\ q)$

(2) **축의 방정식:** $x=p$

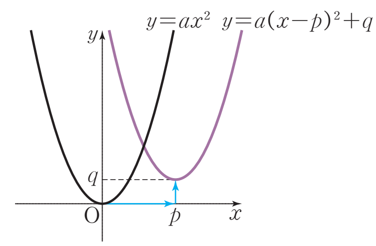
예 이차함수 $y=(x-3)^2+4$의 그래프는

① 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

② 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 4)$, 축의 방정식은 $x=3$이다.

참고 $y=a(x-p)^2+q\ (a\neq0)$의 꼴을 이차함수의 표준형이라고 한다.

$a>0,\ p>0,\ q>0$



• 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프로 평행이동할 때, x축의 방향과 y축의 방향의 평행이동의 순서는 관계가 없다.

• 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프에서 그래프의 모양은 a가 결정하고, 꼭짓점의 위치는 p, q가 결정한다.

예제 1

다음 이차함수의 그래프를 x축, y축의 방향으로 각각 [ ] 안의 수만큼 평행이동한 그래프의 식을 구하여라.

(1) $y=x^2$ $[\,1,\ 2\,]$ (2) $y=-x^2$ $[\,-5,\ -5\,]$

답 (1) $y=(x-1)^2+2$ (2) $y=-(x+5)^2-5$

유제 1

다음 이차함수의 그래프는 $y=\frac{1}{3}x^2$의 그래프를 x축, y축의 방향으로 각각 얼마만큼 평행이동한 것인지 구하여라.

(1) $y=\frac{1}{3}(x-3)^2-\frac{2}{3}$ (2) $y=\frac{1}{3}(x+6)^2-3$

답 (1) x축: 3, y축: $-\frac{2}{3}$ (2) x축: -6, y축: -3

개념 2 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프에서 a, p, q의 부호

(1) **a의 부호:** 그래프의 모양 결정

① $a>0$ ➔ 아래로 볼록 (∪) ② $a<0$ ➔ 위로 볼록 (∩)

(2) **p, q의 부호:** 꼭짓점의 위치 결정

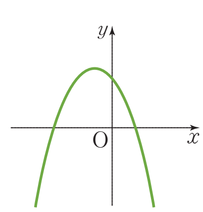
└ $(p,\ q)$

꼭짓점의 위치	제1사분면	제2사분면	제3사분면	제4사분면
p, q의 부호	$p>0,\ q>0$	$p<0,\ q>0$	$p<0,\ q<0$	$p>0,\ q<0$

예제 2

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

(단, a, p, q는 상수)



(1) 그래프가 □로 볼록하므로 a □ 0

(2) 꼭짓점의 □ 좌표가 음수이므로 p □ 0

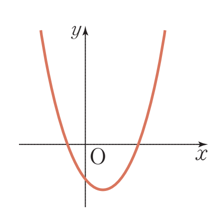
(3) 꼭짓점의 □ 좌표가 양수이므로 q □ 0

답 (1) 위, $<$ (2) x, $<$ (3) y, $>$

유제 2

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

(단, a, p, q는 상수)



(1) 그래프가 아래로 볼록하므로 a $>$ 0

(2) 꼭짓점의 x 좌표가 양수이므로 p $>$ 0

(3) 꼭짓점의 y 좌표가 음수이므로 q $<$ 0

개념 확인하기

정답과 풀이 44~45쪽 | 워크북 62~63쪽

01 다음 이차함수의 그래프를 x축, y축의 방향으로 각각 [ ] 안의 수만큼 평행이동한 그래프가 나타내는 이차함수의 식을 구하여라.

(1) $y=x^2$ $[-2, 4]$ (2) $y=-\frac{3}{2}x^2$ $[4, -3]$

답 (1) $y=(x+2)^2+4$ (2) $y=-\frac{3}{2}(x-4)^2-3$

▷ 개념 1
이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

02 다음 이차함수의 그래프는 이차함수 $y=-4x^2$의 그래프를 x축, y축의 방향으로 각각 얼마만큼 평행이동한 것인지 구하여라.

(1) $y=-4(x-2)^2+3$ (2) $y=-4(x+4)^2-5$

답 (1) x축: 2, y축: 3 (2) x축: -4, y축: -5

▷ 개념 1
이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

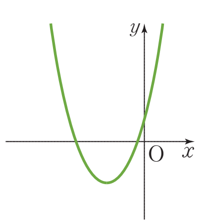
03 다음 이차함수의 그래프에 대하여 빈칸에 알맞은 것을 써넣어라.

이차함수	꼭짓점의 좌표	축의 방정식
(1) $y=-(x+2)^2+1$	$(-2, 1)$	$x=-2$
(2) $y=2(x-2)^2+3$	$(2, 3)$	$x=2$

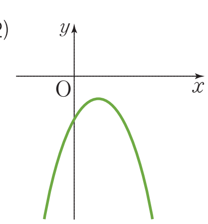
▷ 개념 1
이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

04 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 다음과 같을 때, a, p, q의 부호를 구하여라.

(1)



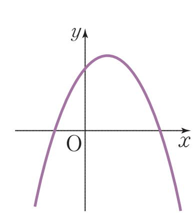
(2)



답 (1) $a>0$, $p<0$, $q<0$ (2) $a<0$, $p>0$, $q<0$

▷ 개념 2
이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프에서 a, p, q의 부호

05 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, p, q에 대하여 apq의 부호를 구하여라.



답 $apq<0$
그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
꼭짓점 (p, q)가 제1사분면 위에 있으므로 $p>0$, $q>0$
$\therefore apq<0$

▷ 개념 2
이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프에서 a, p, q의 부호

유형 • 1 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프의 성질

다음 중 이차함수 $y=4x^2-3$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 위로(아래) 볼록한 포물선이다.

② 축의 방정식은 $x=-3$이다. ($x=0$ (y축))

③ 꼭짓점의 좌표는 $(-3, 0)$이다. ($(0, -3)$)

④ $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

⑤ 이차함수 $y=4x^2$의 그래프를 x축(y축)의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

답 ④

1-1

이차함수 $y=-\frac{4}{5}x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 꼭짓점의 좌표가 (a, b)일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

답 4

$y=-\frac{4}{5}x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{4}{5}x^2+4$

이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 4)$이므로 $a=0$, $b=4$

$\therefore a+b=0+4=4$

1-2

다음 〈보기〉 중 이차함수 $y=-x^2+q$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 골라라. (단, q는 상수)

보기

ㄱ. 꼭짓점이 y축 위에 있다.

ㄴ. 축의 방정식은 $y=0$이다.

ㄷ. $y=x^2$의 그래프와 폭이 같다.

답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. 꼭짓점의 좌표가 $(0, q)$이므로 꼭짓점은 y축 위에 있다.

ㄴ. 축의 방정식은 $x=0$이다.

ㄷ. x^2의 계수의 절댓값이 같으므로 $y=x^2$의 그래프와 폭이 같다.

유형 • 2 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프

이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 점 $(2, k)$를 지난다고 할 때, k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1

④ 2 ⑤ 3

답 ③

이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{1}{2}x^2+3$

이 그래프가 점 $(2, k)$를 지나므로 $k=-\frac{1}{2}\times2^2+3=1$

2-1

이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하면 점 $(-4, 3)$을 지날 때, k의 값을 구하여라.

답 -5

$y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\frac{1}{2}x^2+k$

이 그래프가 점 $(-4, 3)$을 지나므로 $3=\frac{1}{2}\times(-4)^2+k$ $\therefore k=-5$

2-2

이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프는 점 $(2, -5)$를 지나고, 이 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 이차함수 $y=ax^2-4$의 그래프와 완전히 포개어진다. 이때 상수 a, q에 대하여 $2a+q$의 값을 구하여라.

답 -6

$y=ax^2+q$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=ax^2+q+3$

이 그래프가 $y=ax^2-4$의 그래프와 완전히 포개어지므로

$q+3=-4$ $\therefore q=-7$

즉, $y=ax^2-7$의 그래프가 점 $(2, -5)$를 지나므로 $-5=a\times2^2-7$, $4a=2$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore 2a+q=2\times\frac{1}{2}+(-7)=-6$

유형 • 3 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프의 성질

다음 중 이차함수 $y=4(x-2)^2$의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 점 $(1, 4)$를 지난다. → $4=4(1-2)^2$

② 꼭짓점의 좌표는 $(2, 0)$이다.

③ 축의 방정식은 $x=2$이다.

④ $x<2$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. (감소)

⑤ 이차함수 $y=4x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

답 ④

강의 tip
$y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동하면 축의 방정식이 $x=p$로 변하므로 그래프가 증가, 감소하는 x의 범위가 변함에 주의시킨다.

3-1

이차함수 $y=-6x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 8만큼 평행이동한 그래프의 꼭짓점의 좌표를 (a, b), 축의 방정식을 $x=c$라고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

답 16

$y=-6x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 8만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-6(x-8)^2$
이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(8, 0)$, 축의 방정식은 $x=8$이므로 $a=8$, $b=0$, $c=8$
$\therefore a+b+c=8+0+8=16$

3-2

이차함수 $y=\frac{1}{4}(x+3)^2$의 그래프에서 x의 값이 증가할 때 y의 값이 감소하는 x의 값의 범위는?

① $x<-3$　② $x>-3$　③ $x>0$
④ $x<3$　⑤ $x>3$

답 ①

강의 tip
이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프는 축의 방정식인 $x=p$를 기준으로 x의 값이 증가할 때 y의 값의 증가, 감소가 바뀐다.

유형 • 4 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프

이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 점 $(1, 8)$을 지난다고 할 때, 상수 a의 값은?

① -3　② -2　③ -1
④ 1　⑤ 2

답 ⑤

$y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=a(x+1)^2$
이 그래프가 점 $(1, 8)$을 지나므로
$8=a\times2^2$　$\therefore a=2$

4-1

이차함수 $y=-5x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프가 점 $(-4, k)$를 지날 때, k의 값을 구하여라.

답 -5

$y=-5x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-5(x+3)^2$
이 그래프가 점 $(-4, k)$를 지나므로 $k=-5(-4+3)^2=-5$

4-2

이차함수 $y=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 $y=f(x)$라고 하자. 이때 $f(3)$의 값을 구하여라.

답 8

$y=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼 평행이동한 그래프의 식은
$f(x)=2\left(x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=2(x-1)^2$
$\therefore f(3)=2(3-1)^2=8$

유형·5 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프의 성질

다음 〈보기〉 중 이차함수 $y=-(x-2)^2-5$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 골라라.

보기

ㄱ. y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

ㄴ. 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ -5)$이고, 축의 방정식은 $x=2$ 이다.

ㄷ. $x>2$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

ㄹ. $y=-x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.
2

답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $y=-(x-2)^2-5$에 $x=0$을 대입하면
$y=-(0-2)^2-5=-9$이므로 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ -9)$이다.

강의 tip
주어진 함수식에 $x=0$을 대입하여 y축과 만나는 점의 y좌표를 구할 수 있다.

5-1

다음 중 이차함수 $y=2(x+3)^2-1$의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 아래로 볼록한 포물선이다.

② 꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ -1)$이다.

③ y축과 만나는 점의 y좌표는 -1이다.
17

④ 제4사분면을 지나지 않는다.

⑤ $y=2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

답 ③

5-2

다음 중 이차함수 $y=-2(x-1)^2-3$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은?

$(1,\ -3)$

① 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 3)$이다.

② 아래로 볼록한 포물선이다.
위

③ 두 점 $(-2,\ -5)$, $(2,\ -5)$를 지난다.

④ 제2, 3, 4사분면을 지난다.
제3, 4사분면

⑤ $x<-2$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

답 ⑤

③ $y=-5$일 때, $-5=-2(x-1)^2-3$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
따라서 두 점 $(0,\ -5)$, $(2,\ -5)$를 지난다.

강의 tip
⑤ 이차함수 $y=-2(x-1)^2-3$의 그래프는 $x<1$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $x<-2$일 때도 마찬가지이다.

유형·6 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

이차함수 $y=-3x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ b)$이고, 점 $(-1,\ c)$를 지난다. 이때 $a+b+c$의 값을 구하여라.

답 3

$y=-3x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-3(x-a)^2+4$
이 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ b)$이므로 $a=-2$, $b=4$
즉, $y=-3(x+2)^2+4$의 그래프가 점 $(-1,\ c)$를 지나므로
$c=-3(-1+2)^2+4=1$
$\therefore a+b+c=-2+4+1=3$

6-1

이차함수 $y=3x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프가 점 $(-4,\ k)$를 지날 때, k의 값을 구하여라.

답 1

$y=3x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=3(x+3)^2-2$
이 그래프가 점 $(-4,\ k)$를 지나므로 $k=3(-4+3)^2-2=1$

6-2

이차함수 $y=2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프에서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하는 x의 값의 범위를 구하여라.

답 $x<-2$

$y=2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=2(x+2)^2+2$
따라서 이 그래프는 $x<-2$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

유형 • 7 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프의 평행이동

이차함수 $y=2(x-3)^2-4$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프가 나타내는 이차함수의 식을 구하여라.

답 $y=2(x-7)^2-5$

$y=2(x-3)^2-4$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2(x-4-3)^2-4-1 \quad \therefore y=2(x-7)^2-5$

7-1

이차함수 $y=(x-2)^2+1$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 $y=(x+1)^2-3$의 그래프와 일치하였다. 이때 ab의 값을 구하여라.

답 12

평행이동한 그래프의 식은 $y=(x-a-2)^2+1+b$

이 그래프가 $y=(x+1)^2-3$의 그래프와 일치하므로

$-a-2=1$, $1+b=-3$

따라서 $a=-3$, $b=-4$이므로 $ab=-3\times(-4)=12$

7-2

이차함수 $y=3(x-3)^2+4$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프가 점 $(3,\ a)$를 지날 때, a의 값을 구하여라.

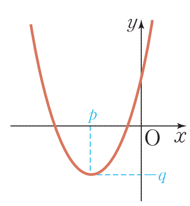
답 11

$y=3(x-3)^2+4$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=3(x+2-3)^2+4-5 \quad \therefore y=3(x-1)^2-1$

이 그래프가 점 $(3,\ a)$를 지나므로 $a=3(3-1)^2-1=11$

유형 • 8 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프에서 a, p, q의 부호

이차함수 $y=a(x-p)^2-q$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, p, q의 부호는?



① $a>0$, $p>0$, $q<0$

② $a>0$, $p<0$, $q>0$

③ $a>0$, $p<0$, $q<0$

④ $a<0$, $p<0$, $q>0$

⑤ $a<0$, $p<0$, $q<0$

답 ②

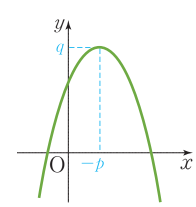
그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

꼭짓점 $(p,\ -q)$가 제3사분면 위에 있으므로

$p<0$, $-q<0 \quad \therefore p<0$, $q>0$

8-1

이차함수 $y=a(x+p)^2+q$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, p, q의 곱 apq의 부호를 구하여라.



답 $apq>0$

그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

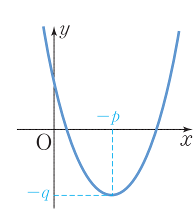
꼭짓점 $(-p,\ q)$가 제1사분면 위에 있으므로

$-p>0$, $q>0 \quad \therefore p<0$, $q>0$

$\therefore apq>0$

8-2

이차함수 $y=a(x+p)^2-q$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 나머지 넷과 부호가 다른 하나는? (단, a, p, q는 상수)



① a ② $-p$

③ q ④ aq ⑤ apq

답 ⑤

그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

꼭짓점 $(-p,\ -q)$가 제4사분면 위에 있으므로

$-p>0$, $-q<0 \quad \therefore p<0$, $q>0$

$\therefore aq>0$, $apq<0$

단원 마무리하기

정답과 풀이 46~48쪽 | 워크북 64~65쪽

01 $y=x(x^2-2x)-ax^3$이 이차함수일 때, 다음 중 이차함수인 것은?

① $y=ax-3$　② $y=ax^2-(x-1)^2$
③ $y=ax^3-4$　④ $y=ax^2-3$
⑤ $y=a(x+1)(x+2)-x^2$

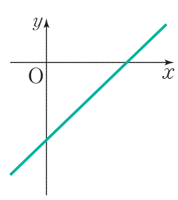
답 ④
$y=x(x^2-2x)-ax^3=(1-a)x^3-2x^2$이 이차함수이므로
$1-a=0$　$\therefore a=1$
① $y=x-3$　② $y=x^2-(x-1)^2=2x-1$
③ $y=x^3-4$　④ $y=x^2-3$
⑤ $y=(x+1)(x+2)-x^2=3x+2$

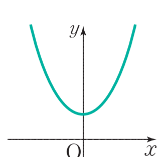
02 이차함수 $f(x)=-x^2+4x+3$에 대하여 $f(-2)+f(1)$의 값은?

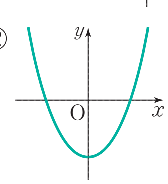
① -5　② -4　③ -3
④ -2　⑤ -1

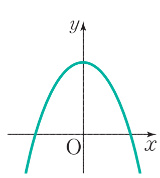
답 ③
$f(-2)=-(-2)^2+4\times(-2)+3=-9$
$f(1)=-1^2+4\times1+3=6$
$\therefore f(-2)+f(1)=-9+6=-3$

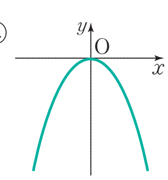
03 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 이차함수 $y=ax^2+b$의 그래프로 적당한 것은? (단, a, b는 상수)

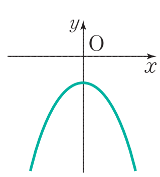


①


②


③


④


⑤


답 ②
$y=ax+b$의 그래프가 오른쪽 위로 향하므로 $a>0$
또, y절편이 0보다 작으므로 $b<0$
따라서 이차함수 $y=ax^2+b$의 그래프는 아래로 볼록하고 꼭짓점의 y좌표가 음수인 포물선이므로 ②이다.

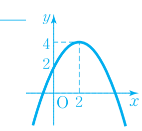
04 다음 이차함수의 그래프 중 폭이 가장 넓은 것은?

① $y=-\frac{1}{2}x^2$　② $y=3x^2$
③ $y=-(x-1)^2+1$　④ $y=\frac{1}{4}(x-3)^2$
⑤ $y=-4x^2+3$

답 ④
x^2의 계수의 절댓값이 작을수록 그래프의 폭이 넓어지므로 폭이 가장 넓은 것은 ④이다.

05 다음 이차함수의 그래프 중 모든 사분면을 지나는 것은?

① $y=3(x+1)^2-1$　② $y=-(x-4)^2+4$
③ $y=x^2+4$　④ $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+4$
⑤ $y=-2(x-1)^2$



답 ④

06 이차함수 $y=(x-a)^2+b$의 그래프는 점 $(1, 6)$을 지나고 꼭짓점이 직선 $y=2x-4$ 위에 있다. 이때 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? (단, $a>0$)
(가) (나)

① -3　② -1　③ 1
④ 3　⑤ 5

답 ⑤
(가)에 의하여 $6=(1-a)^2+b$　…… ㉠
(나)에 의하여 $b=2a-4$　…… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $6=(1-a)^2+2a-4$, $a^2=9$　$\therefore a=-3$ 또는 $a=3$
이때 $a>0$이므로 $a=3$, $b=2\times3-4=2$　$\therefore a+b=3+2=5$

07 다음 조건을 모두 만족시키는 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식은?

(가) 이차함수 $y=2x^2$의 그래프와 폭이 같다.
(나) 꼭짓점의 좌표가 제3사분면 위에 있다.
(다) 위로 볼록한 그래프이다.

① $y=-2(x-2)^2+3$ → 꼭짓점의 좌표: $(2, 3)$
② $y=-2(x+2)^2+4$ → 꼭짓점의 좌표: $(-2, 4)$
③ $y=-2(x+3)^2-4$ → 꼭짓점의 좌표: $(-3, -4)$
④ $y=2(x-2)^2-2$ → 꼭짓점의 좌표: $(2, -2)$
⑤ $y=2(x+3)^2-4$ → 꼭짓점의 좌표: $(-3, -4)$

답 ③
조건 (가), (다)에 의하여 x^2의 계수는 -2이다.
조건 (나)에 의하여 꼭짓점의 x좌표와 y좌표는 모두 음수이다.
따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식은 ③이다.

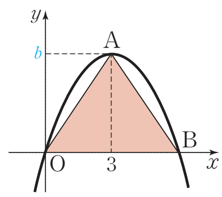
08 이차함수 $y=a(x-3)^2+b$의 그래프가 직선 $x=p$를 축으로 하고 두 점 $(5,\ 9)$, $(1,\ q)$를 지날 때, $p+q$의 값은? (단, a, b는 상수)

① -12 ② -6 ③ 3
④ 6 ⑤ 12

답 ⑤
$y=a(x-3)^2+b$의 그래프의 축의 방정식이 $x=3$이므로 $p=3$
이 그래프가 점 $(5,\ 9)$를 지나므로 $9=4a+b$
또, 이 그래프가 점 $(1,\ q)$를 지나므로 $q=4a+b$ $\therefore q=9$
$\therefore p+q=3+9=12$

09 이차함수 $y=-\dfrac{1}{2}(x+a)^2+b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $\triangle$AOB의 넓이는?

$y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+b$



(단, a, b는 상수이고, 점 A는 꼭짓점이다.)

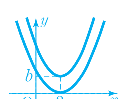
① $\dfrac{19}{2}$ ② $\dfrac{23}{2}$ ③ $\dfrac{27}{2}$
④ $\dfrac{31}{2}$ ⑤ $\dfrac{35}{2}$

답 ③
그래프가 원점 $(0,\ 0)$을 지나므로 $0=-\frac{1}{2}\times(-3)^2+b$ $\therefore b=\frac{9}{2}$
즉, 두 점 $\mathrm{A}\left(3,\ \frac{9}{2}\right)$, $\mathrm{B}(6,\ 0)$이므로 $\triangle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\times6\times\frac{9}{2}=\frac{27}{2}$

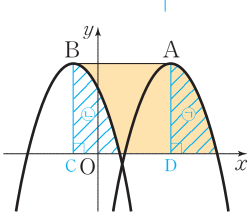
10 이차함수 $y=a(x-2)^2+b$의 그래프가 제3, 4사분면을 지나지 않을 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a<0$ ② $b>0$ ③ $b\le0$
④ $ab\ge0$ ⑤ $ab\le0$

답 ④
그래프가 제 3, 4분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야하므로 $a>0$, $b\ge0$
$\therefore ab\ge0$



11 두 이차함수
$y=-(x-3)^2+6$,
$y=-(x+1)^2+6$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 색칠한 부분의 넓이는?



(단, 점 A, B는 각 그래프의 꼭짓점이다.)

① 12 ② 18 ③ 24
④ 30 ⑤ 36

답 ③
$y=-(x-3)^2+6$, $y=-(x+1)^2+6$의 그래프의 폭이 같으므로 ㉠의 넓이와 ㉡의 넓이는 같다.
따라서 색칠한 부분의 넓이는 □ABCD의 넓이와 같다.
이때 $\mathrm{A}(3,\ 6)$, $\mathrm{B}(-1,\ 6)$이므로
$\square\mathrm{ABCD}=4\times6=24$

12 이차함수 $y=(x-6)^2-28$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면 이차함수 $y=(x+1)^2+2$의 그래프와 일치한다. 이때 $p+q$의 값은?

① -23 ② -11 ③ 5
④ 11 ⑤ 23

답 ⑤
$y=(x-6)^2-28$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=(x-p-6)^2-28+q$
이 그래프가 $y=(x+1)^2+2$의 그래프와 일치하므로
$-p-6=1$, $-28+q=2$
따라서 $p=-7$, $q=30$이므로 $p+q=-7+30=23$

13 이차함수 $y=-2x^2+8$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $3-p$만큼 평행이동한 그래프의 꼭짓점이 제4사분면 위에 있을 때, p의 값의 범위는?

① $p<-11$ ② $-11<p<-1$
③ $-1<p<1$ ④ $1<p<11$
⑤ $p>11$

답 ⑤
$y=-2x^2+8$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $3-p$만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-2(x-p)^2+11-p$
이 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(p,\ 11-p)$이고 이 점이 제4사분면 위에 있으므로
$p>0$, $11-p<0$ $\therefore p>11$

14 다음 〈보기〉의 이차함수의 그래프 중 평행이동하여 이차함수 $y=2x^2$의 그래프와 완전히 포갤 수 있는 것은 모두 몇 개인지 구하여라.

보기
ㄱ. $y=(x-2)^2-3$ ㄴ. $y=(x-1)^2+4$
ㄷ. $y=3(x+2)^2$ ㄹ. $y=2x^2+3$
ㅁ. $y=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+2$ ㅂ. $y=\dfrac{1}{2}(x-2)^2$

답 2개
x^2의 계수가 같으면 평행이동하여 완전히 포갤 수 있다.

15 이차함수 $y=-2(x-2)^2+3$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 $2k$만큼 평행이동한 그래프가 점 $(3,\ 1)$을 지난다. 이때 양수 k의 값을 구하여라.

답 3
평행이동한 그래프의 식은 $y=-2(x-k-2)^2+3+2k$
이 그래프가 점 $(3,\ 1)$을 지나므로
$1=-2(3-k-2)^2+3+2k$, $-2k^2+6k=0$
$k^2-3k=0$, $k(k-3)=0$
이때 $k>0$이므로 $k=3$

주어진 단계에 따라 쓰는 유형

16 이차함수 $y=2(x-1)^2-3$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(c,\ 2)$이고, 점 $(1,\ 4)$를 지난다. 이때 양수 $a,\ b,\ c$의 곱 abc의 값을 구하여라.

생각해 보자

구하는 것은? 양수 $a,\ b,\ c$의 곱 abc의 값

주어진 것은? ① 이차함수 $y=2(x-1)^2-3$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동

② 평행이동한 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(c,\ 2)$

③ 평행이동한 그래프가 지나는 한 점의 좌표는 $(1,\ 4)$

풀이

[1단계] $a,\ b,\ c$에 대한 식 세우기 (30 %)

$y=2(x-1)^2-3$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=2(x-a-1)^2-3+b$

이 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(a+1,\ -3+b)$이므로

$a+1=c,\ -3+b=2$

[2단계] $a,\ b,\ c$의 값 구하기 (60 %)

$\therefore\ b=5$

$y=2(x-c)^2+2$의 그래프가 점 $(1,\ 4)$를 지나므로

$4=2(1-c)^2+2,\ 2=2(1-c)^2$

$(1-c)^2=1,\ 1-c=\pm1$

$\therefore\ c=0$ 또는 $c=2$

이때 $c>0$이므로 $c=2$

$\therefore\ a=c-1=2-1=1$

[3단계] abc의 값 구하기 (10 %)

$\therefore\ abc=1\times5\times2=10$

답 10

풀이 과정을 자세히 쓰는 유형

17 이차함수 $y=-3x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 점 $(m,\ 2)$를 지난다. 이때 m의 값을 구하여라.

풀이

$y=-3x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-3(x+1)^2+2$ ······ ❶

이 그래프가 점 $(m,\ 2)$를 지나므로

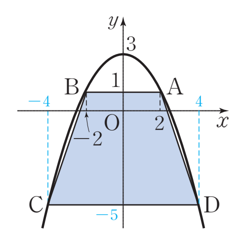
$2=-3(m+1)^2+2,\ (m+1)^2=0$

$\therefore\ m=-1$ ······ ❷

단계	채점 기준	비율
❶	평행이동한 그래프의 식 구하기	50 %
❷	m의 값 구하기	50 %

답 -1

18 오른쪽 그림과 같은 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프는 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 1)$, $\mathrm{B}(-2,\ 1)$을 지난다. 이 그래프 위의 두 점 C, D는 y좌표가 같고 $\overline{\mathrm{CD}}=8$일 때, □ABCD의 넓이를 구하여라. (단, $a,\ q$는 상수)



풀이

주어진 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ 3)$이므로 $q=3$

즉, $y=ax^2+3$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(2,\ 1)$을 지나므로

$1=a\times2^2+3,\ 4a=-2$

$\therefore\ a=-\frac{1}{2}$ ······ ❶

$\overline{\mathrm{CD}}=8$이므로 점 C의 x좌표는 -4이고, 점 D의 x좌표는 4이다.

$x=4$일 때, $y=-\frac{1}{2}\times4^2+3=-5$이므로

$\mathrm{C}(-4,\ -5),\ \mathrm{D}(4,\ -5)$ ······ ❷

□ABCD에서 $\overline{\mathrm{AB}}=4,\ \overline{\mathrm{CD}}=8$이고, 높이는 $1-(-5)=6$이므로

□ABCD$=\frac{1}{2}\times(4+8)\times6=36$ ······ ❸

단계	채점 기준	비율
❶	$a,\ q$의 값 구하기	30 %
❷	두 점 C, D의 좌표 구하기	40 %
❸	□ABCD의 넓이 구하기	30 %

답 36

Ⅳ 이차함수

2

이차함수의 그래프 (2)

01 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

▸ 2-1. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

개념 1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

1. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고쳐서 그린다.

$$y=ax^2+bx+c \rightarrow y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

(1) 꼭짓점의 좌표: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

(2) 축의 방정식: $\underbrace{x=-\frac{b}{2a}}_{\text{꼭짓점의 } x\text{좌표}}$

(3) x축과의 교점: $\underbrace{y=0}_{\text{이차방정식 } ax^2+bx+c=0\text{의 해}}$일 때의 x의 값을 구한다.

풍쌤의 Point 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해가 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이면 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축과의 교점의 좌표는 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$이야.

(4) y축과의 교점의 좌표: $(0, c)$

참고 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 또는 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프가 나타내는 이차함수의 식은 (x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$)

$$y=a(x-m)^2+b(x-m)+c+n \text{ 또는 } y=a(x-m-p)^2+q+n$$

- $y=ax^2+bx+c$의 꼴을 이차함수의 일반형이라 하고, $y=a(x-p)^2+q$의 꼴을 이차함수의 표준형이라고 한다.

예제 1

다음은 이차함수 $y=2x^2-12x+5$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 변형하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$y=2x^2-12x+5$
$=2(x^2-\square x)+5$
$=2(x^2-\square x+\square-\square)+5$
$=2(x-\square)^2-\square$

답 $6, 6, 9, 9, 3, 13$

유제 1

다음은 이차함수 $y=-x^2+8x-7$을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 변형하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$y=-x^2+8x-7$
$=-(x^2-\boxed{8}x)-7$
$=-(x^2-\boxed{8}x+\boxed{16}-\boxed{16})-7$
$=-(x-\boxed{4})^2+\boxed{9}$

예제 2

이차함수 $y=x^2-6x+8$의 그래프와 x축과의 교점의 좌표를 모두 구하여라.

풀이 $x^2-6x+8=0$에서
$(x-2)(x-4)=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=4$
따라서 구하는 교점의 좌표는 $(2, 0)$, $(4, 0)$

답 $(2, 0)$, $(4, 0)$

유제 2

이차함수 $y=-2x^2+x+3$의 그래프와 x축과의 교점의 좌표를 모두 구하여라.

답 $(-1, 0)$, $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

$-2x^2+x+3=0$에서
$-(x+1)(2x-3)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$
따라서 구하는 교점의 좌표는 $(-1, 0)$, $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

01 다음 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고쳐라.

(1) $y=x^2-4x+5$ (2) $y=3x^2+6x$

(3) $y=-2x^2-4x+3$ (4) $y=\frac{1}{3}x^2-4x+8$

답 (1) $y=(x-2)^2+1$ (2) $y=3(x+1)^2-3$ (3) $y=-2(x+1)^2+5$ (4) $y=\frac{1}{3}(x-6)^2-4$

(1) $y=x^2-4x+5=(x^2-4x+4-4)+5=(x-2)^2+1$

(2) $y=3x^2+6x=3(x^2+2x)=3(x^2+2x+1-1)=3(x+1)^2-3$

(3) $y=-2x^2-4x+3=-2(x^2+2x)+3=-2(x^2+2x+1-1)+3=-2(x+1)^2+5$

(4) $y=\frac{1}{3}x^2-4x+8=\frac{1}{3}(x^2-12x)+8=\frac{1}{3}(x^2-12x+36-36)+8=\frac{1}{3}(x-6)^2-4$

▶ 개념 1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

02 다음 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식을 각각 구하여라.

(1) $y=3x^2-8x+2=3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{10}{3}$ (2) $y=-\frac{1}{2}x^2+x-2=-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{3}{2}$

답 (1) 꼭짓점의 좌표: $\left(\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}\right)$, 축의 방정식: $x=\frac{4}{3}$

(2) 꼭짓점의 좌표: $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$, 축의 방정식: $x=1$

강의 tip
이차함수의 일반형을 표준형으로 고쳐서 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식을 구한다.

▶ 개념 1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

03 다음 이차함수의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 x축, y축의 방향으로 각각 얼마만큼 평행이동한 것인지 구하여라.

(1) $y=x^2+10x+29$ (2) $y=x^2-x+1$

답 (1) x축: -5, y축: 4 (2) x축: $\frac{1}{2}$, y축: $\frac{3}{4}$

(1) $y=x^2+10x+29=(x+5)^2+4$
이므로 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

(2) $y=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$
이므로 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{3}{4}$만큼 평행이동한 것이다.

▶ 개념 1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

04 다음 이차함수의 그래프는 $y=-x^2$의 그래프를 x축, y축의 방향으로 각각 얼마만큼 평행이동한 것인지 구하여라.

(1) $y=-x^2+6x-10$ (2) $y=-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$

답 (1) x축: 3, y축: -1 (2) x축: $-\frac{1}{4}$, y축: $\frac{5}{16}$

(1) $y=-x^2+6x-10==-(x-3)^2-1$
이므로 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

(2) $y=-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=-\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{5}{16}$
이므로 x축의 방향으로 $-\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{5}{16}$만큼 평행이동한 것이다.

▶ 개념 1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

05 다음 이차함수의 그래프와 x축, y축과의 교점의 좌표를 구하여라.

(1) $y=x^2+2x+1$ (2) $y=-4x^2+5x-1$

답 (1) x축: $(-1, 0)$, y축: $(0, 1)$

(2) x축: $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $(1, 0)$, y축: $(0, -1)$

강의 tip
$y=ax^2+bx+c$ (일반형)에서는 y축과의 교점의 좌표 $(0, c)$를 바로 알 수 있음을 알려 준다.

▶ 개념 1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

02 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 a, b, c의 부호

▶ 2-1. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

개념 1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 a, b, c의 부호

> ◆ 이차함수의 그래프
>
> 이차함수 $y=\underbrace{a}_{\text{그래프의 모양}}x^2+\overbrace{\underbrace{b}_{}}^{\text{축의 위치}}x+\underbrace{c}_{y\text{축과의 교점의 위치}}$

(1) a의 부호: 그래프의 모양에 따라 결정된다.

① 아래로 볼록(∪) ➔ $a>0$

② 위로 볼록(∩) ➔ $a<0$

(2) b의 부호: 축의 위치에 따라 결정된다.

① 축이 y축의 왼쪽에 위치

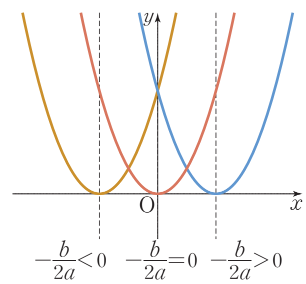
➔ a와 b는 같은 부호

② 축이 y축의 오른쪽에 위치

➔ a와 b는 다른 부호

③ 축이 y축과 일치

➔ $b=0$



참고 이차함수 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$의 그래프에서 축의 방정식은

$x=-\frac{b}{2a}$이므로 축의 위치가

① y축의 왼쪽: $-\frac{b}{2a}<0$ ➔ $ab>0$

② y축의 오른쪽: $-\frac{b}{2a}>0$ ➔ $ab<0$

(3) c의 부호: y축과의 교점의 위치에 따라 결정된다.

① y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 위치 ➔ $c>0$

② y축과의 교점이 x축보다 아래쪽에 위치 ➔ $c<0$

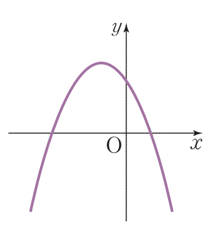
③ y축과의 교점이 원점에 위치 ➔ $c=0$

└ 그래프가 원점을 지난다.

풍쌤의 Point 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서 먼저 a의 부호를 결정한 후 b의 부호를 결정하면 편리해.

예제 1

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 □ 안에 알맞은 부등호를 써넣어라.



(1) 그래프가 위로 볼록하므로 a□0

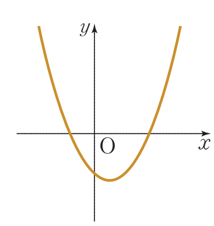
(2) 축이 y축의 왼쪽에 있으므로 a와 b는 같은 부호이다. 즉, b□0

(3) y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있으므로 c□0

답 (1) $<$ (2) $<$ (3) $>$

유제 1

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 □ 안에 알맞은 부등호를 써넣어라.

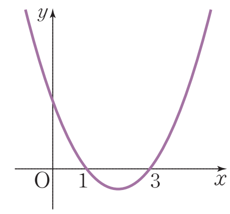


(1) 그래프가 아래로 볼록하므로 $a\boxed{>}0$

(2) 축이 y축의 오른쪽에 있으므로 a와 b는 다른 부호이다. 즉, $b\boxed{<}0$

(3) y축과의 교점이 x축보다 아래쪽에 있으므로 $c\boxed{<}0$

[01~02] 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 물음에 답하여라. (단, a, b, c는 상수)



01 다음은 a, b, c의 부호를 정하는 과정이다. $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

▶ 개념 1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 a, b, c의 부호

> 그래프가 아래로 볼록하므로 $a\boxed{>}0$
> 축이 y축의 오른쪽에 있으므로 a와 b는 서로 $\boxed{\text{다른}}$ 부호이다. 즉, $b\boxed{<}0$
> 또, y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있으므로 $c\boxed{>}0$

02 다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

▶ 개념 1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 a, b, c의 부호

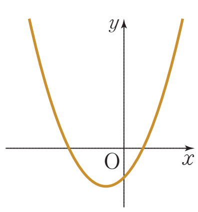
(1) $a-b+c$의 값은 $x=\boxed{-1}$일 때의 y의 값이므로 $a-b+c\boxed{>}0$

(2) $4a+2b+c$의 값은 $x=\boxed{2}$일 때의 y의 값이므로 $4a+2b+c\boxed{<}0$

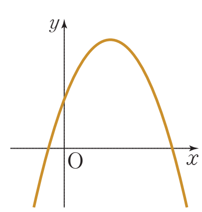
03 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 a, b, c의 부호를 구하여라.

▶ 개념 1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 a, b, c의 부호

(1)



(2)



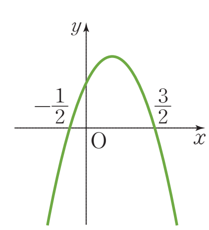
답 (1) $a>0$, $b>0$, $c<0$ (2) $a<0$, $b>0$, $c>0$

(1) 아래로 볼록: $a>0$, 축이 y축의 왼쪽: $b>0$ → 같은 부호
y축과의 교점이 x축보다 아래쪽: $c<0$

(2) 위로 볼록: $a<0$, 축이 y축의 오른쪽: $b>0$ → 다른 부호
y축과의 교점이 x축보다 위쪽: $c>0$

04 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 $\square$ 안에 알맞은 부등호를 써넣어라.

▶ 개념 1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 a, b, c의 부호



(1) $a+b+c\boxed{>}0$

(2) $a-b+c\boxed{<}0$

(1) $a+b+c$의 값은 $x=1$일 때 y의 값이므로 $a+b+c>0$
(2) $a-b+c$의 값은 $x=-1$일 때 y의 값이므로 $a-b+c<0$

유형 • 1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표

다음 중 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 바르게 구한 것은?

① $y=x^2-6x+10 \rightarrow (-3, 1)$
② $y=-3x^2-6x \rightarrow (-1, 3)$
③ $y=\frac{1}{2}x^2-x+3 \rightarrow (1, 2)$
④ $y=(x+2)(x-2) \rightarrow (-4, 0)$
⑤ $y=-(x+4)(x-2) \rightarrow (-1, -9)$

답 ②
① $y=x^2-6x+10=(x-3)^2+1 \rightarrow (3, 1)$
② $y=-3x^2-6x=-3(x+1)^2+3 \rightarrow (-1, 3)$
③ $y=\frac{1}{2}x^2-x+3=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{5}{2} \rightarrow \left(1, \frac{5}{2}\right)$
④ $y=(x+2)(x-2)=x^2-4 \rightarrow (0, -4)$
⑤ $y=-(x+4)(x-2)=-x^2-2x+8=-(x+1)^2+9 \rightarrow (-1, 9)$

강의 tip
점 (x_1, y_1)이 직선 $y=ax+b$ 위에 있다.
$\rightarrow$ 점 (x_1, y_1)이 직선 $y=ax+b$를 지난다.
$\rightarrow y_1=ax_1+b$

1-1

다음 중 이차함수의 그래프의 꼭짓점이 제4사분면 위에 있는 것은?

① $y=2x^2+1$
② $y=2x^2-8x+9$
③ $y=-x^2+4x-5$
④ $y=x(2x-4)+4$
⑤ $y=\frac{1}{2}x^2+x-1$

강의 tip
좌표축 위의 점은 어느 사분면에도 속하지 않음에 주의시킨다.

답 ③
① $y=2x^2+1 \rightarrow (0, 1)$
② $y=2(x-2)^2+1 \rightarrow (2, 1)$
③ $y=-(x-2)^2-1 \rightarrow (2, -1)$
④ $y=2(x-1)^2+2 \rightarrow (1, 2)$
⑤ $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{3}{2} \rightarrow \left(-1, -\frac{3}{2}\right)$

1-2

이차함수 $y=2x^2-4x+m-1$의 그래프의 꼭짓점이 직선 $y=x+3$ 위에 있을 때, 상수 m의 값을 구하여라.

답 7
$y=2x^2-4x+m-1=2(x-1)^2+m-3$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(1, m-3)$이다.
이때 꼭짓점이 직선 $y=x+3$ 위에 있으므로
$m-3=1+3$ $\therefore m=7$

유형 • 2 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 축의 방정식

다음 이차함수의 그래프 중 축의 방정식이 나머지 넷과 다른 하나는?

① $y=x^2-4x+8$ $=(x-2)^2+4$
② $y=-\frac{1}{2}x^2-4x+4$ $=-\frac{1}{2}(x+4)^2+12$
③ $y=-2x^2+8x+4$ $=-2(x-2)^2+12$
④ $y=(x-2)^2+4$
⑤ $y=\frac{1}{2}x^2-2x-4$ $=\frac{1}{2}(x-2)^2-6$

답 ②
①, ③, ④, ⑤ $x=2$
② $x=-4$

강의 tip
그래프의 축의 방정식을 구하기 위하여 $y=ax^2+bx+c$의 꼴을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고칠 때에는 p의 값만 알면 되므로 q의 값까지는 구하지 않아도 된다. $\rightarrow x=-\frac{b}{2a}$

2-1

다음 이차함수의 그래프 중 축이 가장 오른쪽에 있는 것은?

① $y=-x^2+2x-1$
② $y=2x^2+4x$
③ $y=3x^2+9x+4$
④ $y=\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}$
⑤ $y=\frac{1}{4}x^2-x-\frac{5}{4}$

답 ⑤
축의 방정식을 구하면 다음과 같다.
① $x=1$ ② $x=-1$ ③ $x=-\frac{3}{2}$ ④ $x=-2$ ⑤ $x=2$

2-2

이차함수 $y=2x^2-ax+5$의 그래프의 축의 방정식이 $x=4$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

답 16
축의 방정식 $x=-\frac{-a}{2\times 2}=\frac{a}{4}$이므로
$\frac{a}{4}=4$ $\therefore a=16$

유형 • 3 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 평행이동

이차함수 $y=x^2-4x+6$의 그래프는 이차함수 $y=(x-3)^2-2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다. 이때 $m+n$의 값을 구하여라.

답 3

$y=x^2-4x+6=(x-2)^2+2$이므로 이 이차함수의 그래프는
$y=(x-3)^2-2$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $m=-1$, $n=4$이므로
$m+n=-1+4=3$

3-1

이차함수 $y=2x^2+12x+11$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 일치한다. 이때 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하여라.

답 16

$y=2x^2+12x+11=2(x+3)^2-7$이므로 이 이차함수의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=2(x-1)^2-4=2x^2-4x-2$
따라서 $a=2$, $b=-4$, $c=-2$이므로
$abc=2\times(-4)\times(-2)=16$

3-2

이차함수 $y=-x^2-2x+8$의 그래프는 이차함수 $y=-x^2-6x-4$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다. 이때 $m-n$의 값을 구하여라.

답 -2

$y=-x^2-2x+8=-(x+1)^2+9$, $y=-x^2-6x-4=-(x+3)^2+5$
이므로 $y=-x^2-6x-4$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-x^2-2x+8$이다.
따라서 $m=2$, $n=4$이므로
$m-n=2-4=-2$

유형 • 4 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 축과의 교점

이차함수 $y=x^2+6x+8$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표가 a, b이고, y축과 만나는 점의 y좌표가 c일 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

답 2

$y=0$을 $y=x^2+6x+8$에 대입하면
$x^2+6x+8=0$, $(x+4)(x+2)=0$
$\therefore x=-4$ 또는 $x=-2$
$\therefore a=-4$, $b=-2$ 또는 $a=-2$, $b=-4$
$x=0$을 $y=x^2+6x+8$에 대입하면
$y=8$ $\therefore c=8$
$\therefore a+b+c=-4+(-2)+8=2$

4-1

이차함수 $y=-x^2+x+20$의 그래프와 x축과의 두 교점을 각각 A, B라고 할 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하여라.

답 9

$y=0$을 $y=-x^2+x+20$에 대입하면
$-x^2+x+20=0$, $-(x+4)(x-5)=0$
$\therefore x=-4$ 또는 $x=5$
따라서 두 점 A, B의 좌표가 $(-4, 0)$, $(5, 0)$이므로 $\overline{AB}=5-(-4)=9$

4-2

이차함수 $y=-2x^2+7x+k$의 그래프와 y축이 만나는 점의 y좌표가 -3일 때, x축과 만나는 두 점의 x좌표는 m, n이다. 이때 $k+m+n$의 값을 구하여라. (단, k는 상수)

답 $\frac{1}{2}$

$y=-2x^2+7x+k$의 그래프와 y축이 만나는 점의 y좌표가 -3이므로 $k=-3$
$y=0$을 $y=-2x^2+7x-3$에 대입하면
$-2x^2+7x-3=0$, $-(2x-1)(x-3)=0$ $\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$
$\therefore m=\frac{1}{2}$, $n=3$ 또는 $m=3$, $n=\frac{1}{2}$
$\therefore k+m+n=-3+\frac{1}{2}+3=\frac{1}{2}$

유형 • 5 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 성질

다음 〈보기〉 중 이차함수 $y=-x^2-6x+1$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 골라라.

보기

ㄱ. 점 $(0, 1)$을 지난다.

ㄴ. 꼭짓점의 좌표는 $(3, -8)$이다.

ㄷ. y축과의 교점의 y좌표는 1이다.

ㄹ. 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 10만큼 평행이동한 것이다.

답 ㄱ, ㄷ

ㄴ. $y=-x^2-6x+1=-(x+3)^2+10$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-3, 10)$이다.

ㄹ. $y=-(x+3)^2+10$의 그래프는 $y=-x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 10만큼 평행이동한 것이다.

5-1

이차함수 $y=3x^2+6x+4$의 그래프에서 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소하는 x의 값의 범위를 구하여라.

답 $x<-1$

$y=3x^2+6x+4=3(x+1)^2+1$이므로 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하는 x의 값의 범위는 $x<-1$

5-2

$y=2(x-2)^2-7$

다음 중 이차함수 $y=2x^2-8x+1$의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

$x=2$

① 축의 방정식은 $x=-2$이다.

② 점 $(-1, 11)$을 지난다. → $11=2\times(-1)^2-8\times(-1)+1$

③ y축과 만나는 점의 y좌표는 -1이다. 1

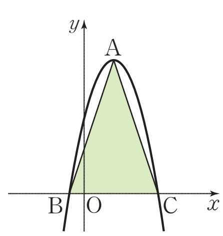
④ 꼭짓점의 좌표는 $(2, -7)$이다.

⑤ 이차함수 $y=2x^2-7$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

답 ①, ③

유형 • 6 이차함수의 그래프와 도형의 넓이

오른쪽 그림은 이차함수 $y=-x^2+4x+5$의 그래프이다. 꼭짓점을 A, x축과의 교점을 각각 B, C라고 할 때, △ABC의 넓이를 구하여라.



답 27

$y=-x^2+4x+5=-(x-2)^2+9$이므로 $A(2, 9)$

$-x^2+4x+5=0$에서

$x^2-4x-5=0$, $(x+1)(x-5)=0$

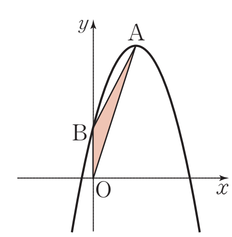
$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

$\therefore B(-1, 0)$, $C(5, 0)$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times6\times9=27$

6-1

오른쪽 그림은 이차함수 $y=-2x^2+4x+1$의 그래프이다. 꼭짓점을 A, y축과의 교점을 B, 원점을 O라고 할 때, △ABO의 넓이를 구하여라.



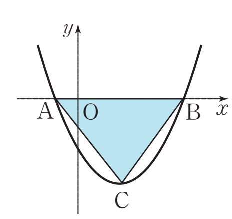
답 $\frac{1}{2}$

$y=-2x^2+4x+1=-2(x-1)^2+3$이므로 $A(1, 3)$

y축과의 교점은 $B(0, 1)$ $\therefore \triangle ABO=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$

6-2

오른쪽 그림은 이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프이다. x축과의 교점을 A, B, 꼭짓점을 C라고 할 때, △ABC의 넓이를 구하여라.



답 8

$x^2-2x-3=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

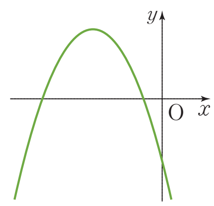
$\therefore A(-1, 0)$, $B(3, 0)$

$y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$이므로 $C(1, -4)$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times4=8$

유형 • 7 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프 a, b, c의 부호

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, a, b, c의 부호는? (단, a, b, c는 상수)



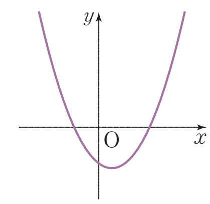
① $a>0$, $b>0$, $c>0$
② $a>0$, $b<0$, $c>0$
③ $a<0$, $b>0$, $c>0$
④ $a<0$, $b<0$, $c>0$
⑤ $a<0$, $b<0$, $c<0$

답 ⑤

위로 볼록: $a<0$
축이 y축의 왼쪽: $b<0$ — 같은 부호
y축과의 교점이 x축보다 아래쪽: $c<0$

7-1

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 항상 양수인 것을 모두 고르면? (단, a, b, c는 상수, 정답 2개)



① $a-b$　　② $b+c$
③ $c-a$　　④ ab
⑤ bc

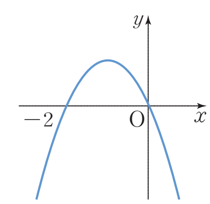
아래로 볼록: $a>0$
축이 y축의 오른쪽: $b<0$
y축과의 교점이 x축보다 아래쪽: $c<0$

답 ①, ⑤

① $-b>0$이므로 $a-b>0$　② $b+c<0$
③ $-a<0$이므로 $c-a<0$　④ $ab<0$　⑤ $bc>0$

7-2

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것은? (단, a, b, c는 상수)



① $ab<0$　　② $a+b>0$
③ $b+c>0$　　④ $a+b+c>0$
⑤ $a-b+c>0$

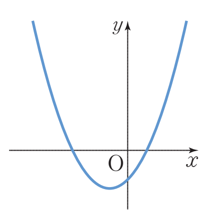
위로 볼록: $a<0$
축이 y축의 왼쪽: $b<0$
원점 $(0, 0)$을 지나므로 $c=0$

답 ⑤

① $ab>0$　② $a+b<0$　③ $b+c<0$
④ $x=1$일 때, $a+b+c<0$　⑤ $x=-1$일 때, $a-b+c>0$

유형 • 8 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 개형

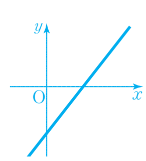
이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 함수 $y=ax+b$의 그래프가 지나지 않는 사분면은? (단, a, b는 상수)



① 제1사분면
② 제2사분면
③ 제3사분면
④ 제4사분면
⑤ 모든 사분면을 지난다.

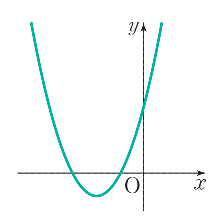
답 ②

축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $a>0$
y축과의 교점이 x축보다 아래쪽에 있으므로 $b<0$
따라서 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다.



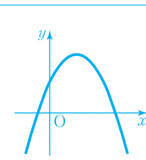
8-1

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 이차함수 $y=-ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점은 제몇사분면 위에 있는지 구하여라. (단, a, b, c는 상수)



답 제1사분면

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 $-a<0$, $b>0$, $c>0$
이차함수 $y=-ax^2+bx+c$의 그래프는
(i) $-a<0$이므로 위로 볼록하다.
(ii) $-a$, b의 부호가 다르므로 축이 y축의 오른쪽에 있다.
(iii) $c>0$이므로 y축과의 교점은 x축보다 위쪽에 있다.
(i)~(iii)에 의하여 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 꼭짓점은 제1사분면 위에 있다.



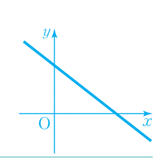
8-2

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점이 제2사분면 위에 있고, $a<0$, $c>0$일 때, 일차함수 $y=bx+c$의 그래프가 지나지 않는 사분면은? (단, a, b, c는 상수)

① 제1사분면　　② 제2사분면
③ 제3사분면　　④ 제4사분면
⑤ 모든 사분면을 지난다.

답 ③

축이 y축의 왼쪽에 있으므로 a와 b의 부호가 같다.
$\therefore b<0$
따라서 $y=bx+c$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



03 이차함수의 식 구하기 (1)

▸ 2-2. 이차함수의 식 구하기

개념 1 이차함수의 식 구하기 – 꼭짓점의 좌표와 그래프 위의 다른 한 점이 주어질 때

이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 (p, q)이고, 다른 한 점 (x_1, y_1)을 지날 때, 이차함수의 식은 다음과 같이 구한다.

❶ 구하는 식을 $y=a(x-p)^2+q\ (a\neq0)$로 놓는다.

❷ 주어진 다른 한 점의 좌표를 ❶의 식에 대입하여 a의 값을 구한다.

$x=x_1$, $y=y_1$을 $y=a(x-p)^2+q$에 대입

• 꼭짓점에 따른 이차함수의 식

꼭짓점의 좌표가

① $(0, 0)$ ➔ $y=ax^2$

② $(0, q)$ ➔ $y=ax^2+q$

③ $(p, 0)$ ➔ $y=a(x-p)^2$

④ (p, q) ➔ $y=a(x-p)^2+q$

예제 1

다음은 꼭짓점의 좌표가 $(3, 4)$이고, 점 $(0, -5)$를 지나는 그래프가 나타내는 이차함수의 식을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

꼭짓점의 좌표가 $(3, 4)$이므로 이차함수의 식을

$y=a(x-\square)^2+\square$로 놓을 수 있다.

이 그래프가 점 $(0, -5)$를 지나므로

$x=\square$, $y=\square$를 대입하면 $a=\square$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=\square$

답 $3, 4, 0, -5, -1, y=-(x-3)^2+4$

유제 1

다음은 꼭짓점의 좌표가 $(-1, 2)$이고, 점 $(-2, 4)$를 지나는 그래프가 나타내는 이차함수의 식을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

꼭짓점의 좌표가 $(-1, 2)$이므로 이차함수의 식을

$y=a(x+\boxed{1})^2+\boxed{2}$로 놓을 수 있다.

이 그래프가 점 $(-2, 4)$를 지나므로

$x=\boxed{-2}$, $y=\boxed{4}$를 대입하면 $a=\boxed{2}$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=\boxed{2(x+1)^2+2}$

개념 2 이차함수의 식 구하기 – 축의 방정식과 그래프 위의 두 점이 주어질 때

이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=p$이고, 서로 다른 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지날 때, 이차함수의 식은 다음과 같이 구한다.

꼭짓점의 x좌표가 p

❶ 구하는 식을 $y=a(x-p)^2+q\ (a\neq0)$로 놓는다.

❷ 주어진 두 점의 좌표를 ❶의 식에 각각 대입하여 a, q의 값을 구한다.

• 축의 방정식에 따른 이차함수의 식

축의 방정식이

① $x=0$ ➔ $y=ax^2+q$

② $x=p$ ➔ $y=a(x-p)^2+q$

예제 2

다음은 축의 방정식이 $x=4$이고 두 점 $(2, 5)$, $(3, 2)$를 지나는 그래프가 나타내는 이차함수의 식을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

구하는 이차함수의 식을 $y=a(x-\square)^2+q$로 놓는다.

두 점의 좌표를 각각 대입하여 풀면 $a=\square$, $q=\square$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=\square$

답 $4, 1, 1, (x-4)^2+1$

유제 2

다음은 축의 방정식이 $x=-2$이고 두 점 $(-1, 4)$, $(3, -20)$을 지나는 그래프가 나타내는 이차함수의 식을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

구하는 이차함수의 식을 $y=a(x+\boxed{2})^2+q$로 놓는다.

두 점의 좌표를 각각 대입하여 풀면 $a=\boxed{-1}$, $q=\boxed{5}$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=\boxed{-(x+2)^2+5}$

개념 확인하기

01 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -3)$이고, 점 $(2,\ -5)$를 지나는 그래프가 나타내는 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 나타내어라.

답 $y=-2(x-1)^2-3$
꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -3)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2-3$으로 놓을 수 있다.
이 그래프가 점 $(2,\ -5)$를 지나므로
$-5=a(2-1)^2-3$, $-5=a-3$
$\therefore a=-2$
$\therefore y=-2(x-1)^2-3$

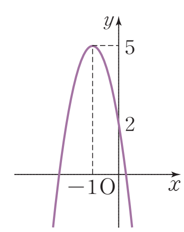
▷ 개념 1
이차함수의 식 구하기 – 꼭짓점의 좌표와 그래프 위의 다른 한 점이 주어질 때

02 꼭짓점의 좌표가 $(4,\ 7)$이고, 점 $(3,\ 10)$을 지나는 그래프가 나타내는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$의 꼴로 나타내어라.

답 $y=3x^2-24x+55$
꼭짓점의 좌표가 $(4,\ 7)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-4)^2+7$로 놓을 수 있다.
이 그래프가 점 $(3,\ 10)$을 지나므로
$10=a(3-4)^2+7$, $10=a+7$
$\therefore a=3$
$\therefore y=3(x-4)^2+7=3x^2-24x+55$

▷ 개념 1
이차함수의 식 구하기 – 꼭짓점의 좌표와 그래프 위의 다른 한 점이 주어질 때

03 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, abc의 값을 구하여라.



답 36
꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 5)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+1)^2+5$로 놓을 수 있다.
이 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로
$2=a(0+1)^2+5$, $2=a+5$
$\therefore a=-3$
$\therefore y=-3(x+1)^2+5=-3x^2-6x+2$
따라서 $a=-3$, $b=-6$, $c=2$이므로
$abc=-3\times(-6)\times2=36$

▷ 개념 1
이차함수의 식 구하기 – 꼭짓점의 좌표와 그래프 위의 다른 한 점이 주어질 때

04 이차함수 $y=2(x-p)^2+q$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-1$이다. 이 그래프가 점 $(1,\ 5)$를 지날 때, 상수 p, q의 값을 구하여라.

답 $p=-1$, $q=-3$
$y=2(x-p)^2+q$의 그래프의 축의 방정식은 $x=p$이므로 $p=-1$
따라서 $y=2(x+1)^2+q$의 그래프가 점 $(1,\ 5)$를 지나므로
$5=2(1+1)^2+q$, $5=8+q$
$\therefore q=-3$

▷ 개념 2
이차함수의 식 구하기 – 축의 방정식과 그래프 위의 두 점이 주어질 때

05 축의 방정식이 $x=1$이고, 두 점 $(0,\ 2)$, $(3,\ 8)$을 지나는 그래프가 나타내는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$의 꼴로 나타내어라.

답 $y=2x^2-4x+2$
축의 방정식이 $x=1$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2+q$로 놓으면 이 그래프가 두 점 $(0,\ 2)$, $(3,\ 8)$을 지나므로 $2=a+q$, $8=4a+q$
두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $q=0$
$\therefore y=2(x-1)^2=2x^2-4x+2$

▷ 개념 2
이차함수의 식 구하기 – 축의 방정식과 그래프 위의 두 점이 주어질 때

04 이차함수의 식 구하기 (2)

▶ 2-2. 이차함수의 식 구하기

개념 1 이차함수의 식 구하기 – y축과의 교점과 그래프 위의 두 점이 주어질 때

이차함수의 그래프가 y축과 $(0,\ k)$에서 만나고 다른 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지날 때, 이차함수의 식은 다음과 같이 구한다.

❶ 구하는 식을 $y=ax^2+bx+k\ (a\neq0)$로 놓는다.

❷ 주어진 두 점의 좌표를 ❶의 식에 각각 대입하여 a, b의 값을 구한다.

예제 1

다음은 y축과 $(0,\ 1)$에서 만나고, 두 점 $(1,\ -1)$, $(2,\ 1)$을 지나는 그래프가 나타내는 이차함수의 식을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

y축과 $(0,\ 1)$에서 만나므로 구하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+1$로 놓을 수 있다.

점 $(1,\ -1)$을 지나므로

$\square=a+b+1 \quad \therefore\ a+b=\square$ …… ㉠

점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$\square=4a+2b+1 \quad \therefore\ 2a+b=\square$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\square$, $b=\square$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=\square$

답 -1, -2, 1, 0, 2, -4, $2x^2-4x+1$

유제 1

다음은 세 점 $(0,\ -2)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$를 지나는 그래프가 나타내는 이차함수의 식을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

점 $(0,\ -2)$를 지나므로 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx-2$로 놓을 수 있다.

점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$\boxed{1}=a+b-2 \quad \therefore\ a+b=\boxed{3}$ …… ㉠

점 $(2,\ 2)$를 지나므로

$\boxed{2}=4a+2b-2 \quad \therefore\ 2a+b=\boxed{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\boxed{-1}$, $b=\boxed{4}$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=\boxed{-x^2+4x-2}$

개념 2 이차함수의 식 구하기 – x축과의 두 교점과 그래프 위의 다른 한 점이 주어질 때

이차함수의 그래프가 x축과 두 점 $(m,\ 0)$, $(n,\ 0)$에서 만나고, 그래프가 다른 한 점 $(x_1,\ y_1)$을 지날 때, 이차함수의 식은 다음과 같이 구한다.

❶ 구하는 식을 $y=a(x-m)(x-n)\ (a\neq0)$으로 놓는다.

❷ 주어진 다른 한 점의 좌표를 ❶의 식에 대입하여 a의 값을 구한다.

$x=x_1$, $y=y_1$을 $y=a(x-m)(x-n)$에 대입

예제 2

다음은 x축과 두 점 $(-2,\ 0)$, $(1,\ 0)$에서 만나고, 점 $(0,\ 2)$를 지나는 그래프가 나타내는 이차함수의 식을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

x축과 두 점 $(-2,\ 0)$, $(1,\ 0)$에서 만나므로 이차함수의 식을 $y=a(x+\square)(x-\square)$로 놓을 수 있다.

이 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$\square=-2a \quad \therefore\ a=\square$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=\square$

답 2, 1, 2, -1, $-x^2-x+2$

유제 2

다음은 세 점 $(-1,\ 0)$, $(3,\ 0)$, $(0,\ -3)$을 지나는 그래프가 나타내는 이차함수의 식을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만나므로 이차함수의 식을 $y=a(x+\boxed{1})(x-\boxed{3})$으로 놓을 수 있다.

이 그래프가 점 $(0,\ -3)$을 지나므로

$\boxed{-3}=-3a \quad \therefore\ a=\boxed{1}$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=\boxed{x^2-2x-3}$

01 다음 세 점을 지나는 그래프가 나타내는 이차함수의 식을 구하여라.

(1) $(0,\ 1)$, $(-1,\ 3)$, $(1,\ -5)$

(2) $(1,\ 3)$, $(-1,\ -3)$, $(0,\ -2)$

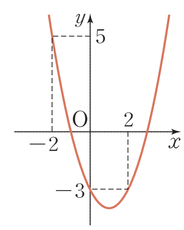
답 (1) $y=-2x^2-4x+1$ (2) $y=2x^2+3x-2$

(1) 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+1$로 놓을 수 있다.
점 $(-1,\ 3)$을 지나므로 $a-b=2$ …… ㉠
점 $(1,\ -5)$를 지나므로 $a+b=-6$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-4$ $\quad\therefore y=-2x^2-4x+1$

(2) 점 $(0,\ -2)$을 지나므로 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx-2$로 놓을 수 있다.
점 $(1,\ 3)$을 지나므로 $a+b=5$ …… ㉠
점 $(-1,\ -3)$을 지나므로 $a-b=-1$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$ $\quad\therefore y=2x^2+3x-2$

▷ 개념 1
이차함수의 식 구하기 – y축과 의 교점과 그래프 위의 두 점이 주어질 때

02 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, b, c의 값을 구하여라.



답 $a=1$, $b=-2$, $c=-3$

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(0,\ -3)$을 지나므로 $c=-3$
점 $(2,\ -3)$을 지나므로
$4a+2b-3=-3$, $4a+2b=0$
$\therefore\ 2a+b=0$ …… ㉠
점 $(-2,\ 5)$를 지나므로
$4a-2b-3=5$, $4a-2b=8$
$\therefore\ 2a-b=4$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$

▷ 개념 1
이차함수의 식 구하기 – y축과 의 교점과 그래프 위의 두 점이 주어질 때

03 다음 세 점을 지나는 그래프가 나타내는 이차함수의 식을 구하여라.

(1) $(-1,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(0,\ -6)$

(2) $(-4,\ 0)$, $(4,\ 0)$, $(3,\ 7)$

답 (1) $y=3x^2-3x-6$ (2) $y=-x^2+16$

(1) x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(2,\ 0)$에서 만나므로 이차함수의 식을 $y=a(x+1)(x-2)$로 놓을 수 있다.
이 그래프가 점 $(0,\ -6)$을 지나므로
$-6=-2a$ $\quad\therefore a=3$
$\therefore y=3(x+1)(x-2)=3x^2-3x-6$

(2) x축과 두 점 $(-4,\ 0)$, $(4,\ 0)$에서 만나므로 이차함수의 식을 $y=a(x+4)(x-4)$로 놓을 수 있다.
이 그래프가 점 $(3,\ 7)$을 지나므로
$7=-7a$ $\quad\therefore a=-1$
$\therefore y=-(x+4)(x-4)=-x^2+16$

▷ 개념 2
이차함수의 식 구하기 – x축과 의 두 교점과 그래프 위의 다른 한 점이 주어질 때

04 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 두 점 $(2,\ 0)$, $(6,\ 0)$에서 만나고, 점 $(0,\ 12)$를 지날 때, 상수 a, b, c의 값을 구하여라.

답 $a=1$, $b=-8$, $c=12$

x축과 두 점 $(2,\ 0)$, $(6,\ 0)$에서 만나므로 이차함수의 식을 $y=a(x-2)(x-6)$으로 놓을 수 있다.
이 그래프가 점 $(0,\ 12)$를 지나므로
$12=12a$ $\quad\therefore a=1$
따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=(x-2)(x-6)=x^2-8x+12$이므로 $a=1$, $b=-8$, $c=12$

▷ 개념 2
이차함수의 식 구하기 – x축과 의 두 교점과 그래프 위의 다른 한 점이 주어질 때

유형 확인하기

정답과 풀이 52~53쪽 | 워크북 70~71쪽

유형 • 1 이차함수의 식 구하기 – 꼭짓점의 좌표와 그래프 위의 다른 한 점이 주어질 때

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 4)$이고, 점 $(-2,\ 6)$을 지난다. 이때 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b-c$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 4 ⑤ 6

답 ③
꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 4)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+1)^2+4$로 놓을 수 있다.
이 그래프가 점 $(-2,\ 6)$을 지나므로
$6=a(-2+1)^2+4,\ 6=a+4$
$\therefore a=2$
따라서 $y=2(x+1)^2+4=2x^2+4x+6$이므로 $b=4,\ c=6$
$\therefore a+b-c=2+4-6=0$

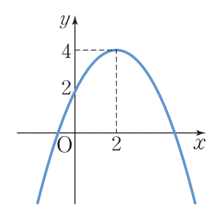
1-1

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -3)$이고, 점 $(1,\ 4)$를 지나는 이차함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표를 구하여라.

답 $(0,\ 25)$
꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -3)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-2)^2-3$으로 놓을 수 있다.
이 그래프가 점 $(1,\ 4)$를 지나므로 $4=a(1-2)^2-3,\ 4=a-3$ $\therefore a=7$
따라서 $y=7(x-2)^2-3$이고 $x=0$을 대입하면 $y=7\times4-3=25$이므로 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ 25)$이다.

1-2

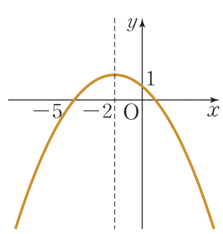
오른쪽 그림과 같은 이차함수의 그래프가 점 $(4,\ k)$를 지날 때, k의 값을 구하여라.



답 2
꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 4)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-2)^2+4$로 놓을 수 있다.
이 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로
$2=a(0-2)^2+4,\ 2=4a+4$ $\therefore a=-\frac{1}{2}$
따라서 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+4$이고 이 그래프가 점 $(4,\ k)$를 지나므로
$k=-\frac{1}{2}\times(4-2)^2+4=2$

유형 • 2 이차함수의 식 구하기 – 축의 방정식과 그래프 위의 두 점이 주어질 때

오른쪽 그림과 같이 직선 $x=-2$를 축으로 하는 그래프가 나타내는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$라고 할 때, 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a-b+c$의 값을 구하여라.



답 $\frac{8}{5}$
축의 방정식이 $x=-2$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+2)^2+q$로 놓으면 이 그래프가 두 점 $(-5,\ 0),\ (0,\ 1)$을 지나므로 $0=9a+q,\ 1=4a+q$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{5},\ q=\frac{9}{5}$
따라서 $y=-\frac{1}{5}(x+2)^2+\frac{9}{5}=-\frac{1}{5}x^2-\frac{4}{5}x+1$이므로 $b=-\frac{4}{5},\ c=1$
$\therefore a-b+c=-\frac{1}{5}-\left(-\frac{4}{5}\right)+1=\frac{8}{5}$

2-1

축의 방정식이 $x=3$이고, 두 점 $(1,\ 0),\ (4,\ 3)$을 지나는 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구하여라.

답 $(3,\ 4)$
축의 방정식이 $x=3$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-3)^2+q$로 놓으면 이 그래프가 두 점 $(1,\ 0),\ (4,\ 3)$을 지나므로 $0=4a+q,\ 3=a+q$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-1,\ q=4$
따라서 $y=-(x-3)^2+4$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 4)$이다.

2-2

축의 방정식이 $x=2$이고, 두 점 $(4,\ 3),\ (-2,\ -3)$을 지나는 이차함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표를 구하여라.

답 3
축의 방정식이 $x=2$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-2)^2+q$로 놓으면 이 그래프가 두 점 $(4,\ 3),\ (-2,\ -3)$을 지나므로 $3=4a+q,\ -3=16a+q$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2},\ q=5$
따라서 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+5$의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는 $x=0$을 대입하면 $y=-\frac{1}{2}\times(-2)^2+5=3$

유형 • 3 이차함수의 식 구하기 – y축과의 교점과 그래프 위의 두 점이 주어질 때

세 점 $(0,\ 2)$, $(2,\ 6)$, $(3,\ 14)$를 지나는 이차함수의 그래프가 점 $(1,\ k)$를 지날 때, k의 값은?

① 2 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

답 ①
점 $(0,\ 2)$를 지나므로 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+2$로 놓을 수 있다.
점 $(2,\ 6)$을 지나므로
$6=4a+2b+2$ $\therefore 2a+b=2$ …… ㉠
점 $(3,\ 14)$를 지나므로
$14=9a+3b+2$ $\therefore 3a+b=4$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-2$
따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=2x^2-2x+2$이므로 이 그래프가 점 $(1,\ k)$를 지나면
$k=2-2+2=2$

3-1

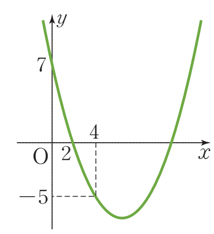
세 점 $(-2,\ 7)$, $(-3,\ 0)$, $(0,\ 15)$를 지나는 이차함수의 그래프가 점 $(2,\ k)$를 지날 때, k의 값을 구하여라.

답 15
점 $(0,\ 15)$를 지나므로 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+15$로 놓을 수 있다.
점 $(-2,\ 7)$을 지나므로 $2a-b=-4$ …… ㉠
점 $(-3,\ 0)$을 지나므로 $3a-b=-5$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=2$
따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=-x^2+2x+15$이므로
이 그래프가 점 $(2,\ k)$를 지나면 $k=-4+4+15=15$

3-2

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 이 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구하여라.

(단, a, b, c는 상수)



답 $(8,\ -9)$
$y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(0,\ 7)$을 지나므로 $c=7$
점 $(2,\ 0)$을 지나므로 $4a+2b=-7$ …… ㉠
점 $(4,\ -5)$를 지나므로 $4a+b=-3$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{4},\ b=-4$
따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=\frac{1}{4}x^2-4x+7=\frac{1}{4}(x-8)^2-9$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(8,\ -9)$이다.

유형 • 4 이차함수의 식 구하기 – x축과의 두 교점과 그래프 위의 다른 한 점이 주어질 때

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(5,\ 0)$에서 만나고 점 $(2,\ 9)$를 지날 때, 상수 a, b, c에 대하여 $4a-2b+c$의 값을 구하여라.

답 -7
x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(5,\ 0)$에서 만나므로 이차함수의 식을
$y=a(x+1)(x-5)$로 놓을 수 있다.
이 그래프가 점 $(2,\ 9)$를 지나므로
$9=-9a$ $\therefore a=-1$
따라서 $y=-(x+1)(x-5)=-x^2+4x+5$이므로 $b=4,\ c=5$
$\therefore 4a-2b+c=4\times(-1)-2\times4+5=-7$

4-1

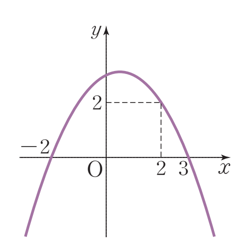
x축과 만나는 두 점의 x좌표가 3, 7이고, 점 $(4,\ -6)$을 지나는 이차함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는?

① -42 ② -21 ③ 10
④ 21 ⑤ 42

답 ⑤
$y=a(x-3)(x-7)$로 놓으면 이 그래프가 점 $(4,\ -6)$을 지나므로
$-6=-3a$ $\therefore a=2$
따라서 $y=2(x-3)(x-7)=2x^2-20x+42$이므로 y축과 만나는 점의 y좌표는 42이다.

4-2

오른쪽 그림과 같이 x축과 두 점 $(-2,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만나고, 점 $(2,\ 2)$를 지나는 이차함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표를 구하여라.



답 3
$y=a(x+2)(x-3)$으로 놓으면 점 $(2,\ 2)$를 지나므로
$2=-4a$ $\therefore a=-\frac{1}{2}$
따라서 $y=-\frac{1}{2}(x+2)(x-3)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3$이므로 y축과 만나는 점의 y좌표는 3이다.

05 이차함수의 최댓값과 최솟값

▸ 2-3. 이차함수의 활용

개념 1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최댓값과 최솟값

1. 최댓값과 최솟값

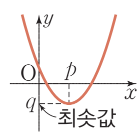
어떤 함수의 함숫값 중에서 가장 큰 값을 최댓값, 가장 작은 값을 최솟값이라고 한다.

2. 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값

(1) $a>0$일 때

$x=p$에서 최솟값 q를 갖고, 최댓값은 없다.

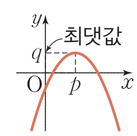
└ 꼭짓점의 y좌표



(2) $a<0$일 때

$x=p$에서 최댓값 q를 갖고, 최솟값은 없다.

└ 꼭짓점의 y좌표



참고 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최댓값과 최솟값은 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고쳐서 구한다.

예제 1

다음은 이차함수 $y=-2x^2-12x-10$의 최댓값을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

$y=-2x^2-12x-10=-2(x+\square)^2+\square$

따라서 이차함수 $y=-2x^2-12x-10$은 $x=\square$일 때 최댓값 $\square$을 갖는다.

답 3, 8, −3, 8

유제 1

다음은 이차함수 $y=2x^2-4x-1$의 최솟값을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

$y=2x^2-4x-1=2(x-\boxed{1})^2-\boxed{3}$

따라서 이차함수 $y=2x^2-4x-1$은 $x=\boxed{1}$일 때 최솟값 $\boxed{-3}$을 갖는다.

개념 2 최댓값 또는 최솟값을 알 때, 이차함수의 식 구하기

$x=p$일 때, 최댓값 또는 최솟값이 q인 이차함수의 식은 다음과 같이 구한다.

└ 그래프의 꼭짓점의 좌표는 (p, q)

❶ 구하는 식을 $y=a(x-p)^2+q$ $(a\neq0)$로 놓는다.

❷ 주어진 다른 조건을 이용하여 a의 값을 구한다.

풍쌤의 Point 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$가 최솟값을 가지면 $a>0$이고 최댓값을 가지면 $a<0$이다.

예제 2

다음은 $x=1$일 때 최솟값 3을 갖고, 점 $(0, 5)$를 지나는 이차함수의 그래프의 식을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

$x=1$일 때 최솟값 3을 가지므로 이차함수의 식을 $y=a(x-\square)^2+\square$으로 놓을 수 있다.

점 $(0, 5)$를 지나므로

$5=a+\square$　　$\therefore a=\square$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=\square$

답 1, 3, 3, 2, $2(x-1)^2+3$

유제 2

다음은 $x=-1$일 때 최댓값 1을 갖고, 점 $(0, -2)$를 지나는 이차함수의 그래프의 식을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

$x=-1$일 때 최댓값 1을 가지므로 이차함수의 식을 $y=a(x+\boxed{1})^2+\boxed{1}$로 놓을 수 있다.

점 $(0, -2)$를 지나므로

$-2=a+\boxed{1}$　　$\therefore a=\boxed{-3}$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=\boxed{-3(x+1)^2+1}$

개념 확인하기

정답과 풀이 53~54쪽 | 워크북 72~73쪽

01 다음 표의 빈칸에 알맞은 것을 써넣어라.

이차함수	그래프의 모양	꼭짓점의 좌표	최댓값 또는 최솟값
(1) $y=2x^2$	아래로 볼록	$(0, 0)$	최솟값 0
(2) $y=-x^2+7$	위로 볼록	$(0, 7)$	최댓값 7
(3) $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$	아래로 볼록	$(1, 0)$	최솟값 0
(4) $y=-3(x+1)^2-4$	위로 볼록	$(-1, -4)$	최댓값 -4

강의 tip
이차함수 $y=a(x-p)^2+q$에서 최댓값 또는 최솟값의 결정 여부는 a의 부호에 따른다.
➞ $a>0$: 최솟값, $a<0$: 최댓값

▷ 개념 1
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최댓값과 최솟값

02 다음 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하고, 그때의 x의 값을 구하여라.

(1) $y=3x^2-6x+4$　　(2) $y=-2x^2+16x-20$

답 (1) $x=1$일 때 최솟값 1　(2) $x=4$일 때 최댓값 12
(1) $y=3x^2-6x+4=3(x-1)^2+1$
(2) $y=-2x^2+16x-20=-2(x-4)^2+12$

강의 tip
중학교 3학년 과정에서는 수 전체의 범위에서의 그래프만을 다루기 때문에 하나의 이차함수에 대하여 최댓값 또는 최솟값 둘 중 한 가지만 존재한다. 하지만 고교 과정에서는 x의 값의 범위가 제한 범위로 주어질 수도 있는데, 이때는 최댓값과 최솟값이 모두 존재하기도 한다.

▷ 개념 1
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최댓값과 최솟값

03 이차함수 $y=-x^2+4x+k-2$의 최댓값이 5일 때, 상수 k의 값은?

① -3　② -1　③ 1
④ 3　⑤ 5

답 ④
$y=-x^2+4x+k-2$
$=-(x^2-4x)+k-2$
$=-(x^2-4x+4-4)+k-2$
$=-(x-2)^2+k+2$
따라서 $x=2$일 때 최댓값 $k+2$를 가지므로
$k+2=5$　$\therefore k=3$

▷ 개념 2
최댓값 또는 최솟값을 알 때, 이차함수의 식 구하기

04 이차함수 $y=-ax^2-6ax-4a+6$의 최솟값이 -4일 때, 상수 a의 값은?

① -3　② -2　③ -1
④ 1　⑤ 2

답 ②
$y=-ax^2-6ax-4a+6$
$=-a(x^2+6x)-4a+6$
$=-a(x+3)^2+5a+6$
따라서 $x=-3$일 때 최솟값 $5a+6$을 가지므로
$5a+6=-4$, $5a=-10$
$\therefore a=-2$

▷ 개념 2
최댓값 또는 최솟값을 알 때, 이차함수의 식 구하기

06 이차함수의 활용

▸ 2-3. 이차함수의 활용

개념 1 이차함수의 활용

1. 이차함수의 활용

이차함수를 활용하여 문제를 해결할 때에는 다음과 같은 순서로 푼다.

❶ 변수 x, y 정하기 : 문제의 뜻을 파악하고, 주어진 조건에 따라 두 변수 x, y를 정한다.

참고 일반적으로 먼저 변하는 양을 x로, x에 따라 변하는 양을 y로 놓는다.

❷ 식 세우기 : 두 변수 x, y 사이의 관계식을 세운다.

❸ 답 구하기 : 식이나 그래프를 이용하여 답을 구한다.

❹ 확인하기 : 구한 답이 문제의 조건에 맞는지 확인한다.

주의 구한 답 중에서 문제의 조건에 맞지 않는 것은 제외한다. 특히, 길이, 높이, 넓이 등에 해당하는 수는 양수이므로 구한 답 중에서 음수가 나오면 제외한다.

예제 1

다음은 가로의 길이와 세로의 길이의 합이 10 cm인 직사각형의 넓이가 최대일 때의 가로의 길이와 세로의 길이를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

직사각형의 가로의 길이를 x cm라고 하면 세로의 길이는 (□) cm이다.
이 직사각형의 넓이를 y cm^2라고 하면
$y=x(\square)=-x^2+10x=-(x-\square)^2+\square$
따라서 $x=\square$일 때 최댓값 □를 가지므로 넓이가 최대일 때의 가로의 길이는 □cm, 세로의 길이는 □cm이다.

답 $10-x$, $10-x$, 5, 25, 5, 25, 5, 5

유제 1

밑변의 길이가 8 cm, 높이가 12 cm인 삼각형의 밑변의 길이를 x cm만큼 늘이고, 높이를 x cm만큼 줄여서 새로운 삼각형을 만들었다. 새로운 삼각형의 넓이가 최대가 되도록 하는 x의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

답 ④

새로운 삼각형의 넓이를 y cm^2라고 하면 이 삼각형의 밑변의 길이는 $(8+x)$ cm, 높이는 $(12-x)$ cm이므로

$y=\frac{1}{2}(8+x)(12-x)=\frac{1}{2}(-x^2+4x+96)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+50$

따라서 $x=2$일 때 새로운 삼각형의 넓이가 최대가 된다.

예제 2

수면으로부터 초속 30 m로 위를 향해 똑바로 물을 뿜어 올리는 분수가 있다. 위로 뿜어 올려진 지 x초 후의 수면으로부터 물의 높이를 y m라고 하면 $y=30x-5x^2$인 관계가 성립한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 2초 후의 물의 높이를 구하여라.

(2) 분수에서 뿜어 올려지는 물의 최고 높이를 구하여라.

풀이 (1) $y=30\times2-5\times2^2=40(\text{m})$
(2) $y=30x-5x^2=-5(x-3)^2+45$이므로 물의 최고 높이는 45 m이다.

답 (1) 40 m (2) 45 m

유제 2

어느 공장에서 하루에 x개의 제품을 생산할 때의 이익은 $\left(-\frac{1}{10}x^2+20x-400\right)$만 원이라고 한다. 이익을 최대로 하려면 하루에 몇 개의 제품을 생산해야 하는지 구하여라.

답 100개

하루에 x개의 제품을 생산할 때의 이익을 y만 원이라고 하면

$y=-\frac{1}{10}x^2+20x-400=-\frac{1}{10}(x-100)^2+600$

따라서 하루에 100개의 제품을 생산할 때 이익이 최대가 된다.

01 차가 22인 두 수의 곱의 최솟값을 구하여라.

▷ 개념 1 이차함수의 활용

답 -121

두 수를 x, $x+22$로 놓고 두 수의 곱을 y라고 하면

$y=x(x+22)=x^2+22x=(x+11)^2-121$

따라서 두 수의 곱의 최솟값은 -121이다.

02 농구 선수가 링을 향해 비스듬히 던진 공의 t초 후의 지면으로 부터의 높이를 h m라고 하면 $h=-5t^2+10t+1$인 관계가 성립한다. 이 공의 최고 높이를 구하여라.

▷ 개념 1 이차함수의 활용

답 6 m

$h=-5t^2+10t+1=-5(t-1)^2+6$

따라서 공을 던진 지 1초 후에 최고 높이 6 m에 도달한다.

03 지면에서 초속 40 m로 똑바로 쏘아 올린 물체의 x초 후의 지면으로부터의 높이를 y m라고 하면 $y=40x-5x^2$인 관계가 성립한다. 이 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸리는 시간은 몇 초인가?

▷ 개념 1 이차함수의 활용

① 1초　② 2초　③ 3초

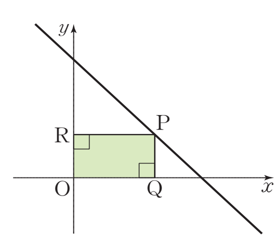
④ 4초　⑤ 5초

답 ④

$y=40x-5x^2=-5(x-4)^2+80$

따라서 최고 높이에 도달할 때까지 걸리는 시간은 4초이다.

04 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-x+4$ 위의 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 Q, R라고 할 때, □OQPR의 넓이의 최댓값은?



▷ 개념 1 이차함수의 활용

① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

답 ④

점 P의 좌표를 $(x, -x+4)$, □OQPR의 넓이를 y라고 하면

$y=x(-x+4)$

$=-x^2+4x$

$=-(x-2)^2+4$

따라서 □OQPR의 넓이의 최댓값은 4이다.

유형 확인하기

정답과 풀이 54~55쪽 | 워크북 72~75쪽

유형 1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최댓값과 최솟값

이차함수 $y=\frac{2}{3}x^2-2x+1$은 $x=a$일 때 최솟값 b를 갖는다. 이때 $2a+4b$의 값은?

① -5　② -4　③ -2　④ -1　⑤ 1

답 ⑤

$y=\frac{2}{3}x^2-2x+1=\frac{2}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

이므로 $x=\frac{3}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{1}{2}$을 갖는다.

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이므로

$2a+4b=2\times\frac{3}{2}+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

강의 tip

$y=a(x-p)^2+q\ (a>0)$
→ $x=p$일 때 최솟값 q를 갖는다.
$y=a(x-p)^2+q\ (a<0)$
→ $x=p$일 때 최댓값 q를 갖는다.

1-1

이차함수 $y=-2x^2+2x+3$은 $x=a$일 때 최댓값 b를 갖는다. 이때 $a-b$의 값을 구하여라.

답 -3

$y=-2x^2+2x+3=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$

이므로 $x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{7}{2}$을 갖는다.

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{7}{2}$이므로 $a-b=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}=-3$

1-2

다음 이차함수 중 최댓값이 없는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $y=2x^2+2$　② $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-2$
③ $y=-x^2+6x-9$　④ $y=x^2+x-2$
⑤ $y=-3x^2-x+2$

답 ①, ④

이차함수에서 x^2의 계수가 양수이면 최솟값을 갖고, 최댓값은 없다.
따라서 최댓값이 없는 것은 ①, ④이다.

유형 2 최댓값 또는 최솟값을 알 때, 미지수의 값 구하기

이차함수 $y=-4x^2+16x+k$의 최댓값이 7일 때, 상수 k의 값은?

① -9　② -7　③ -5　④ -3　⑤ -1

답 ①

$y=-4x^2+16x+k=-4(x-2)^2+k+16$
따라서 $x=2$일 때 최댓값 $k+16$을 가지므로
$k+16=7$　$\therefore k=-9$

강의 tip

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최댓값 또는 최솟값이 주어진 경우에는 먼저 함수식을 표준형 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고친 후 주어진 값과 비교한다.

2-1

이차함수 $y=3x^2-6x+k-1$의 최솟값이 1일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

답 5

$y=3x^2-6x+k-1=3(x-1)^2+k-4$
따라서 $x=1$일 때 최솟값 $k-4$를 가지므로
$k-4=1$　$\therefore k=5$

2-2

이차함수 $y=ax^2+bx+c$는 $x=-1$일 때 최댓값 4를 갖고, 그래프가 점 $(0, 3)$을 지난다. 이때 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값을 구하여라.

답 0

$y=ax^2+bx+c$가 $x=-1$일 때 최댓값 4를 가지므로 이차함수의 식을 $y=a(x+1)^2+4$로 놓을 수 있다.
이 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로
$3=a(0+1)^2+4$, $3=a+4$
$\therefore a=-1$
따라서 $y=-(x+1)^2+4=-x^2-2x+3$이므로 $b=-2$, $c=3$
$\therefore a+b+c=-1+(-2)+3=0$

유형 • 3 수에서 이차함수의 활용

차가 12인 두 수의 곱이 최소일 때, 두 수를 구하여라.

답 -6, 6

두 수를 x, $x+12$로 놓고 두 수의 곱을 y라고 하면

$y=x(x+12)=x^2+12x=(x+6)^2-36$

따라서 y는 $x=-6$일 때 최솟값 -36을 가지므로 구하는 두 수는 -6, 6이다.

강의 tip

차가 a인 두 수의 곱의 최솟값을 묻는 문제는 두 수를 x, $x+a$로 놓는다. ➜ 두 수의 부호가 반대이고, 절댓값이 같을 때 두 수의 곱은 최소가 된다.

합이 a인 두 수의 곱의 최댓값을 묻는 문제는 두 수를 x, $a-x$로 놓는다. ➜ 두 수가 서로 같을 때, 즉 $x=\frac{a}{2}$일 때 두 수의 곱은 최대가 된다.

3-1

합이 40인 두 수의 곱의 최댓값을 구하여라.

답 400

두 수를 x, $40-x$로 놓고 두 수의 곱을 y라고 하면

$y=x(40-x)=-x^2+40x=-(x-20)^2+400$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 400이다.

3-2

차가 8인 두 수의 곱이 최소일 때, 두 수 중 큰 수를 a, 그때의 곱의 최솟값을 k라고 하자. 이때 $a-k$의 값을 구하여라.

답 20

두 수를 x, $x+8$로 놓고 두 수의 곱을 y라고 하면

$y=x(x+8)=x^2+8x=(x+4)^2-16$이므로 $x=-4$일 때 최솟값 -16을 갖는다.

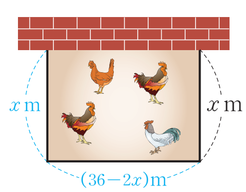
따라서 큰 수는 $x+8=-4+8=4$이므로 $a=4$이고 최솟값이 -16이므로

$k=-16$

$\therefore a-k=4-(-16)=20$

유형 • 4 도형에서 이차함수의 활용

길이가 36 m인 철망으로 오른쪽 그림과 같이 세로의 길이가 x m인 직사각형 모양의 닭장을 만들려고 한다. 닭장의 넓이가 최대가 될 때, x의 값은? (단, 벽에는 철망을 사용하지 않는다.)



① 5 ② 6 ③ 7

④ 8 ⑤ 9

답 ⑤

닭장의 세로의 길이가 x m이므로 가로의 길이는 $(36-2x)$ m이다.

닭장의 넓이를 y m²라고 하면

$y=x(36-2x)=-2x^2+36x=-2(x-9)^2+162$

따라서 $x=9$일 때 닭장의 넓이가 최대가 된다.

강의 tip

둘레의 길이가 $2a$인 직사각형의 가로와 세로의 길이의 합은 $\frac{2a}{2}=a$이므로

(가로의 길이)$=x$, (세로의 길이)$=a-x$로 놓을 수 있다.

4-1

길이가 40 cm인 끈으로 직사각형을 만들려고 한다. 직사각형의 넓이가 최대가 될 때의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 구하여라.

답 가로의 길이: 10 cm, 세로의 길이: 10 cm

가로의 길이를 x cm라고 하면 세로의 길이는 $(20-x)$ cm이다.

직사각형의 넓이를 y cm²라고 하면

$y=x(20-x)=-x^2+20x=-(x-10)^2+100$

따라서 y는 $x=10$일 때 최댓값 100을 가지므로 직사각형의 넓이가 최대가 될 때의 가로의 길이와 세로의 길이는 각각 10 cm, 10 cm이다.

4-2

밑변의 길이와 높이의 합이 20 cm인 삼각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.

답 50 cm²

삼각형의 밑변의 길이를 x cm라고 하면 높이는 $(20-x)$ cm이다.

삼각형의 넓이를 y cm²라고 하면

$y=\frac{1}{2}x(20-x)=-\frac{1}{2}x^2+10x=-\frac{1}{2}(x-10)^2+50$이므로 $x=10$일 때 최댓값 50을 갖는다.

따라서 구하는 삼각형의 넓이의 최댓값은 50 cm²이다.

단원 마무리하기

정답과 풀이 55~56쪽 | 워크북 76~78쪽

01 이차함수 $y=-x^2+4x-1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식을 차례대로 구하면?

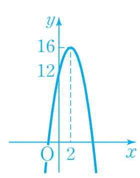
① $(-2,\ -3)$, $x=2$　② $(-2,\ 3)$, $x=-2$
③ $(-2,\ 3)$, $x=3$　④ $(2,\ 3)$, $x=2$
⑤ $(2,\ 3)$, $x=-2$

답 ④
$y=-x^2+4x-1=-(x-2)^2+3$

02 다음 중 이차함수 $y=-x^2+4x+12$의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 16)$이다.
② y축과 만나는 점의 y좌표는 12이다.
③ 모든 사분면을 지난다.
④ x축과의 두 교점의 좌표는 $(-6,\ 0)$, $(2,\ 0)$이다.
⑤ $x<2$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

답 ④
$y=-x^2+4x+12=-(x-2)^2+16$
④ $-x^2+4x+12=0$에서
$(x+2)(x-6)=0$　$\therefore x=-2$ 또는 $x=6$
따라서 x축과의 두 교점의 좌표는 $(-2,\ 0)$, $(6,\ 0)$이다.



03 이차함수 $y=x^2-4ax+4a^2+3a+2$의 그래프의 꼭짓점이 제3사분면 위에 있을 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a>-\frac{3}{4}$　② $a>-\frac{2}{3}$　③ $a>-\frac{1}{2}$
④ $a<-\frac{1}{2}$　⑤ $a<-\frac{2}{3}$

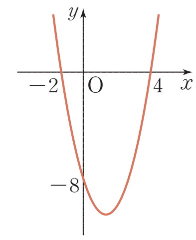
답 ⑤
$y=x^2-4ax+4a^2+3a+2=(x-2a)^2+3a+2$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2a,\ 3a+2)$
즉, $2a<0$, $3a+2<0$이어야 하므로 $a<0$, $a<-\frac{2}{3}$
$\therefore a<-\frac{2}{3}$

04 이차함수 $y=4x^2-8x-5$의 그래프와 x축과의 두 교점을 각각 A, B라고 할 때, $\overline{AB}$의 길이는?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2
④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

답 ⑤
$y=0$을 대입하면
$4x^2-8x-5=0$, $(2x+1)(2x-5)=0$　$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{2}$
따라서 두 점 A, B는 $A\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$, $B\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$ 또는 $A\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$이므로 $\overline{AB}=\frac{5}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=3$

05 오른쪽 그림은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프이다. 이때 이차방정식 $cx^2+bx+a=0$의 해를 구하여라.

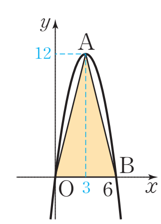


답 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{4}$
$y=a(x+2)(x-4)$의 그래프가 점 $(0,\ -8)$을 지나므로
$-8=-8a$　$\therefore a=1$
따라서 $y=(x+2)(x-4)=x^2-2x-8$이므로 $b=-2$, $c=-8$
$-8x^2-2x+1=0$, $8x^2+2x-1=0$
$(2x+1)(4x-1)=0$　$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{4}$

06 이차함수 $y=3x^2+3$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프가 점 $(2,\ 8)$을 지난다. 이 그래프에서 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 x의 값의 범위가 $x>3$일 때, q의 값을 구하여라.

답 2
$y=3x^2+3$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=3(x-p)^2+3+q$
이 그래프에서 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 x의 값의 범위가 $x>3$이므로 $p=3$
$y=3(x-3)^2+3+q$의 그래프가 점 $(2,\ 8)$을 지나므로
$8=3(2-3)^2+3+q$, $6+q=8$
$\therefore q=2$

07 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 두 점 O, B에서 만난다. 이 그래프의 꼭짓점이 A이고, $\triangle$OAB의 넓이가 36일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $3a+b-c$의 값은?



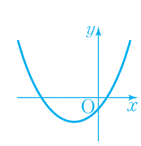
① -4　② -2　③ 0
④ 2　⑤ 4

답 ⑤
$\frac{1}{2}\times6\times$(점 A의 y좌표)$=36$　$\therefore$ (점 A의 y좌표)$=12$
따라서 점 $A(3,\ 12)$이므로 $y=a(x-3)^2+12$
이 그래프가 점 $(0,\ 0)$을 지나므로 $0=a(0-3)^2+12$　$\therefore a=-\frac{4}{3}$
따라서 $y=-\frac{4}{3}(x-3)^2+12=-\frac{4}{3}x^2+8x$이므로
$a=-\frac{4}{3}$, $b=8$, $c=0$　$\therefore 3a+b-c=3\times\left(-\frac{4}{3}\right)+8-0=4$

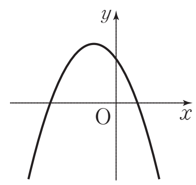
08 $a>0$, $b<0$일 때, 이차함수 $y=ax^2-bx+b$의 그래프의 꼭짓점이 있는 곳은?

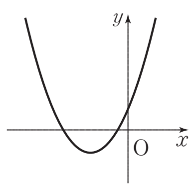
① 제2사분면　② 제3사분면
③ 제4사분면　④ x축
⑤ y축

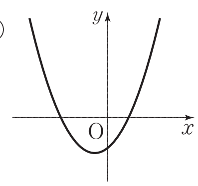
답 ②
(ⅰ) $a>0$이므로 그래프는 아래로 볼록하다.
(ⅱ) $a>0$, $-b>0$에서 축은 y축의 왼쪽에 있다.
(ⅲ) $b<0$이므로 y축과의 교점은 x축보다 아래쪽에 있다.
(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 $y=ax^2-bx+b$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 꼭짓점은 제3사분면 위에 있다.

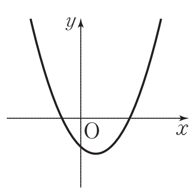


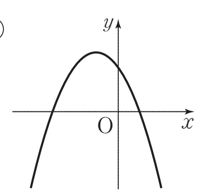
09 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 이차함수 $y=cx^2+bx+a$의 그래프의 개형은?

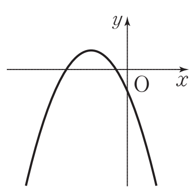


①


②


③


④


⑤


답 ③
그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
꼭짓점이 y축의 왼쪽에 있으므로 a와 b는 같은 부호이다.
$\therefore b<0$
y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있으므로 $c>0$
따라서 $y=cx^2+bx+a$의 그래프의 개형은 ③이다.

10 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 1)$이고, 점 $(0,\ -2)$를 지날 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은?

① $-\frac{1}{4}$　② $-\frac{1}{2}$　③ 0
④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{1}{4}$

답 ⑤
$y=a(x-2)^2+1$의 그래프가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로 $a=-\frac{3}{4}$
따라서 $y=-\frac{3}{4}(x-2)^2+1=-\frac{3}{4}x^2+3x-2$이므로 $b=3$, $c=-2$
$\therefore a+b+c=-\frac{3}{4}+3+(-2)=\frac{1}{4}$

11 이차함수 $y=x^2-2ax+b$의 그래프는 점 $(2,\ 7)$을 지나고 꼭짓점이 직선 $y=2x$ 위에 있다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $a<0$)

① -2　② -1　③ 1
④ 2　⑤ 3

답 ①
$y=x^2-2ax+b$의 그래프가 점 $(2,\ 7)$을 지나므로
$7=4-4a+b$　　$\therefore b=4a+3$
$y=x^2-2ax+4a+3=(x-a)^2-a^2+4a+3$이므로 이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(a,\ -a^2+4a+3)$
꼭짓점이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로
$-a^2+4a+3=2a$, $a^2-2a-3=0$
$(a+1)(a-3)=0$　　$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$
이때 $a<0$이므로 $a=-1$, $b=-1$
$\therefore a+b=-1+(-1)=-2$

12 축의 방정식이 $x=-4$인 포물선이 세 점 $(-2,\ 1)$, $(0,\ 13)$, $(1,\ k)$를 지날 때, k의 값은?

① -2　② 4　③ 10
④ 16　⑤ 22

답 ⑤
$y=a(x+4)^2+q$의 그래프가
점 $(-2,\ 1)$을 지나므로 $1=4a+q$　　······ ㉠
점 $(0,\ 13)$을 지나므로 $13=16a+q$　　······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $q=-3$
따라서 $y=(x+4)^2-3$의 그래프가 점 $(1,\ k)$를 지나므로
$k=25-3=22$

13 이차함수 $y=3x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면 $x=2$에서 최솟값 -12를 갖고, 이 그래프는 x축과 두 점 $(a,\ 0)$, $(b,\ 0)$에서 만난다. 이때 $a+b+p+q$의 값은?

① -6　② -4　③ 0
④ 4　⑤ 6

답 ①
$y=3x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 이차함수의 식은 $y=3(x-p)^2+q$
이 이차함수가 $x=2$에서 최솟값 -12를 가지므로 $p=2$, $q=-12$
$y=3(x-2)^2-12=3x^2-12x$에 $y=0$을 대입하면
$0=3x^2-12x$, $x^2-4x=0$
$x(x-4)=0$　　$\therefore x=0$ 또는 $x=4$
따라서 $a=0$, $b=4$ 또는 $a=4$, $b=0$이므로
$a+b+p+q=0+4+2+(-12)=-6$

14 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축과의 두 교점이 $(-4,\ 0)$, $(1,\ 0)$이다. 이 이차함수의 최댓값이 $\frac{25}{2}$일 때, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$의 값은? (단, a, b, c는 상수)

① $-\frac{21}{2}$　② -5　③ $\frac{1}{2}$
④ 5　⑤ $\frac{21}{2}$

답 ⑤
$y=f(x)$의 그래프와 x축과의 두 교점이 $(-4,\ 0)$, $(1,\ 0)$이므로
$f(x)=a(x+4)(x-1)=a\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}a$
이 이차함수의 최댓값이 $\frac{25}{2}$이므로
$-\frac{25}{4}a=\frac{25}{2}$　　$\therefore a=-2$
따라서 $f(x)=-2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$이므로
$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2+\frac{25}{2}=\frac{21}{2}$

주어진 단계에 따라 쓰는 유형

15 세 점 $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(-1, 5)$를 지나는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(-2, k)$를 지날 때, k의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수)

생각해 보자

구하는 것은? 조건을 만족시키는 k의 값

주어진 것은? 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 네 점 $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(-1, 5)$, $(-2, k)$를 지난다.

풀이

[1단계] c의 값 구하기 $(20\ \%)$

$y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로
$c=2$

[2단계] a, b의 값 구하기 $(50\ \%)$

$y=ax^2+bx+2$의 그래프가 두 점 $(1, 1)$, $(-1, 5)$를 지나므로
$1=a+b+2$ $\quad \therefore a+b=-1$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠
$5=a-b+2$ $\quad \therefore a-b=3$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$

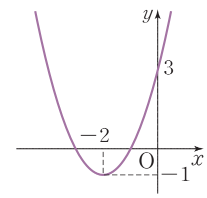
[3단계] k의 값 구하기 $(30\ \%)$

따라서 $y=x^2-2x+2$의 그래프가 점 $(-2, k)$를 지나므로
$k=(-2)^2-2\times(-2)+2=10$

답 10

풀이 과정을 자세히 쓰는 유형

16 오른쪽 그림과 같은 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 a, b라고 할 때, $b-a$의 값을 구하여라. (단, $b>a$)



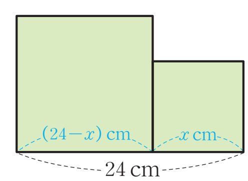
풀이

꼭짓점의 좌표가 $(-2, -1)$이므로 이차함수의 식을
$y=a(x+2)^2-1$로 놓을 수 있다.
이 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로 $3=a(0+2)^2-1$, $3=4a-1$
$4a=4$ $\quad \therefore a=1$
$\therefore y=(x+2)^2-1=x^2+4x+3$ ······ ❶
이차함수의 식에 $y=0$을 대입하면
$x^2+4x+3=0$에서
$(x+3)(x+1)=0$ $\quad \therefore x=-3$ 또는 $x=-1$
이때 $b>a$이므로 $a=-3$, $b=-1$ ······ ❷
$\therefore b-a=-1-(-3)=2$ ······ ❸

단계	채점 기준	비율
❶	이차함수의 식 구하기	50 %
❷	a, b의 값 구하기	30 %
❸	$b-a$의 값 구하기	20 %

답 2

17 오른쪽 그림과 같이 길이가 24 cm인 선분을 둘로 나누어 그 각각을 한 변으로 하는 두 개의 정사각형을 만들려고 한다. 이때 두 정사각형의 넓이의 합의 최솟값을 구하여라.



풀이

두 정사각형의 한 변의 길이를 각각 x cm, $(24-x)$ cm로 놓고 두 정사각형의 넓이의 합을 y cm²라고 하면 ······ ❶
$y=x^2+(24-x)^2$ ······ ❷
$\quad =2(x-12)^2+288$
따라서 두 정사각형의 넓이의 합의 최솟값은 288 cm²이다. ······ ❸

단계	채점 기준	비율
❶	변수 x, y 정하기	20 %
❷	두 변수 x, y 사이의 관계식 세우기	30 %
❸	두 정사각형의 넓이의 합의 최솟값 구하기	50 %

답 288 cm²

제곱근표 ①

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	1.000	1.005	1.010	1.015	1.020	1.025	1.030	1.034	1.039	1.044
1.1	1.049	1.054	1.058	1.063	1.068	1.072	1.077	1.082	1.086	1.091
1.2	1.095	1.100	1.105	1.109	1.114	1.118	1.122	1.127	1.131	1.136
1.3	1.140	1.145	1.149	1.153	1.158	1.162	1.166	1.170	1.175	1.179
1.4	1.183	1.187	1.192	1.196	1.200	1.204	1.208	1.212	1.217	1.221
1.5	1.225	1.229	1.233	1.237	1.241	1.245	1.249	1.253	1.257	1.261
1.6	1.265	1.269	1.273	1.277	1.281	1.285	1.288	1.292	1.296	1.300
1.7	1.304	1.308	1.311	1.315	1.319	1.323	1.327	1.330	1.334	1.338
1.8	1.342	1.345	1.349	1.353	1.356	1.360	1.364	1.367	1.371	1.375
1.9	1.378	1.382	1.386	1.389	1.393	1.396	1.400	1.404	1.407	1.411
2.0	1.414	1.418	1.421	1.425	1.428	1.432	1.435	1.439	1.442	1.446
2.1	1.449	1.453	1.456	1.459	1.463	1.466	1.470	1.473	1.476	1.480
2.2	1.483	1.487	1.490	1.493	1.497	1.500	1.503	1.507	1.510	1.513
2.3	1.517	1.520	1.523	1.526	1.530	1.533	1.536	1.539	1.543	1.546
2.4	1.549	1.552	1.556	1.559	1.562	1.565	1.568	1.572	1.575	1.578
2.5	1.581	1.584	1.587	1.591	1.594	1.597	1.600	1.603	1.606	1.609
2.6	1.612	1.616	1.619	1.622	1.625	1.628	1.631	1.634	1.637	1.640
2.7	1.643	1.646	1.649	1.652	1.655	1.658	1.661	1.664	1.667	1.670
2.8	1.673	1.676	1.679	1.682	1.685	1.688	1.691	1.694	1.697	1.700
2.9	1.703	1.706	1.709	1.712	1.715	1.718	1.720	1.723	1.726	1.729
3.0	1.732	1.735	1.738	1.741	1.744	1.746	1.749	1.752	1.755	1.758
3.1	1.761	1.764	1.766	1.769	1.772	1.775	1.778	1.780	1.783	1.786
3.2	1.789	1.792	1.794	1.797	1.800	1.803	1.806	1.808	1.811	1.814
3.3	1.817	1.819	1.822	1.825	1.828	1.830	1.833	1.836	1.838	1.841
3.4	1.844	1.847	1.849	1.852	1.855	1.857	1.860	1.863	1.865	1.868
3.5	1.871	1.873	1.876	1.879	1.881	1.884	1.887	1.889	1.892	1.895
3.6	1.897	1.900	1.903	1.905	1.908	1.910	1.913	1.916	1.918	1.921
3.7	1.924	1.926	1.929	1.931	1.934	1.936	1.939	1.942	1.944	1.947
3.8	1.949	1.952	1.954	1.957	1.960	1.962	1.965	1.967	1.970	1.972
3.9	1.975	1.977	1.980	1.982	1.985	1.987	1.990	1.992	1.995	1.997
4.0	2.000	2.002	2.005	2.007	2.010	2.012	2.015	2.017	2.020	2.022
4.1	2.025	2.027	2.030	2.032	2.035	2.037	2.040	2.042	2.045	2.047
4.2	2.049	2.052	2.054	2.057	2.059	2.062	2.064	2.066	2.069	2.071
4.3	2.074	2.076	2.078	2.081	2.083	2.086	2.088	2.090	2.093	2.095
4.4	2.098	2.100	2.102	2.105	2.107	2.110	2.112	2.114	2.117	2.119
4.5	2.121	2.124	2.126	2.128	2.131	2.133	2.135	2.138	2.140	2.142
4.6	2.145	2.147	2.149	2.152	2.154	2.156	2.159	2.161	2.163	2.166
4.7	2.168	2.170	2.173	2.175	2.177	2.179	2.182	2.184	2.186	2.189
4.8	2.191	2.193	2.195	2.198	2.200	2.202	2.205	2.207	2.209	2.211
4.9	2.214	2.216	2.218	2.220	2.223	2.225	2.227	2.229	2.232	2.234
5.0	2.236	2.238	2.241	2.243	2.245	2.247	2.249	2.252	2.254	2.256
5.1	2.258	2.261	2.263	2.265	2.267	2.269	2.272	2.274	2.276	2.278
5.2	2.280	2.283	2.285	2.287	2.289	2.291	2.293	2.296	2.298	2.300
5.3	2.302	2.304	2.307	2.309	2.311	2.313	2.315	2.317	2.319	2.322
5.4	2.324	2.326	2.328	2.330	2.332	2.335	2.337	2.339	2.341	2.343

제곱근표

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	2.345	2.347	2.349	2.352	2.354	2.356	2.358	2.360	2.362	2.364
5.6	2.366	2.369	2.371	2.373	2.375	2.377	2.379	2.381	2.383	2.385
5.7	2.387	2.390	2.392	2.394	2.396	2.398	2.400	2.402	2.404	2.406
5.8	2.408	2.410	2.412	2.415	2.417	2.419	2.421	2.423	2.425	2.427
5.9	2.429	2.431	2.433	2.435	2.437	2.439	2.441	2.443	2.445	2.447
6.0	2.449	2.452	2.454	2.456	2.458	2.460	2.462	2.464	2.466	2.468
6.1	2.470	2.472	2.474	2.476	2.478	2.480	2.482	2.484	2.486	2.488
6.2	2.490	2.492	2.494	2.496	2.498	2.500	2.502	2.504	2.506	2.508
6.3	2.510	2.512	2.514	2.516	2.518	2.520	2.522	2.524	2.526	2.528
6.4	2.530	2.532	2.534	2.536	2.538	2.540	2.542	2.544	2.546	2.548
6.5	2.550	2.551	2.553	2.555	2.557	2.559	2.561	2.563	2.565	2.567
6.6	2.569	2.571	2.573	2.575	2.577	2.579	2.581	2.583	2.585	2.587
6.7	2.588	2.590	2.592	2.594	2.596	2.598	2.600	2.602	2.604	2.606
6.8	2.608	2.610	2.612	2.613	2.615	2.617	2.619	2.621	2.623	2.625
6.9	2.627	2.629	2.631	2.632	2.634	2.636	2.638	2.640	2.642	2.644
7.0	2.646	2.648	2.650	2.651	2.653	2.655	2.657	2.659	2.661	2.663
7.1	2.665	2.666	2.668	2.670	2.672	2.674	2.676	2.678	2.680	2.681
7.2	2.683	2.685	2.687	2.689	2.691	2.693	2.694	2.696	2.698	2.700
7.3	2.702	2.704	2.706	2.707	2.709	2.711	2.713	2.715	2.717	2.718
7.4	2.720	2.722	2.724	2.726	2.728	2.729	2.731	2.733	2.735	2.737
7.5	2.739	2.740	2.742	2.744	2.746	2.748	2.750	2.751	2.753	2.755
7.6	2.757	2.759	2.760	2.762	2.764	2.766	2.768	2.769	2.771	2.773
7.7	2.775	2.777	2.778	2.780	2.782	2.784	2.786	2.787	2.789	2.791
7.8	2.793	2.795	2.796	2.798	2.800	2.802	2.804	2.805	2.807	2.809
7.9	2.811	2.812	2.814	2.816	2.818	2.820	2.821	2.823	2.825	2.827
8.0	2.828	2.830	2.832	2.834	2.835	2.837	2.839	2.841	2.843	2.844
8.1	2.846	2.848	2.850	2.851	2.853	2.855	2.857	2.858	2.860	2.862
8.2	2.864	2.865	2.867	2.869	2.871	2.872	2.874	2.876	2.877	2.879
8.3	2.881	2.883	2.884	2.886	2.888	2.890	2.891	2.893	2.895	2.897
8.4	2.898	2.900	2.902	2.903	2.905	2.907	2.909	2.910	2.912	2.914
8.5	2.915	2.917	2.919	2.921	2.922	2.924	2.926	2.927	2.929	2.931
8.6	2.933	2.934	2.936	2.938	2.939	2.941	2.943	2.944	2.946	2.948
8.7	2.950	2.951	2.953	2.955	2.956	2.958	2.960	2.961	2.963	2.965
8.8	2.966	2.968	2.970	2.972	2.973	2.975	2.977	2.978	2.980	2.982
8.9	2.983	2.985	2.987	2.988	2.990	2.992	2.993	2.995	2.997	2.998
9.0	3.000	3.002	3.003	3.005	3.007	3.008	3.010	3.012	3.013	3.015
9.1	3.017	3.018	3.020	3.022	3.023	3.025	3.027	3.028	3.030	3.032
9.2	3.033	3.035	3.036	3.038	3.040	3.041	3.043	3.045	3.046	3.048
9.3	3.050	3.051	3.053	3.055	3.056	3.058	3.059	3.061	3.063	3.064
9.4	3.066	3.068	3.069	3.071	3.072	3.074	3.076	3.077	3.079	3.081
9.5	3.082	3.084	3.085	3.087	3.089	3.090	3.092	3.094	3.095	3.097
9.6	3.098	3.100	3.102	3.103	3.105	3.106	3.108	3.110	3.111	3.113
9.7	3.114	3.116	3.118	3.119	3.121	3.122	3.124	3.126	3.127	3.129
9.8	3.130	3.132	3.134	3.135	3.137	3.138	3.140	3.142	3.143	3.145
9.9	3.146	3.148	3.150	3.151	3.153	3.154	3.156	3.158	3.159	3.161

제곱근표

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	3.162	3.178	3.194	3.209	3.225	3.240	3.256	3.271	3.286	3.302
11	3.317	3.332	3.347	3.362	3.376	3.391	3.406	3.421	3.435	3.450
12	3.464	3.479	3.493	3.507	3.521	3.536	3.550	3.564	3.578	3.592
13	3.606	3.619	3.633	3.647	3.661	3.674	3.688	3.701	3.715	3.728
14	3.742	3.755	3.768	3.782	3.795	3.808	3.821	3.834	3.847	3.860
15	3.873	3.886	3.899	3.912	3.924	3.937	3.950	3.962	3.975	3.987
16	4.000	4.012	4.025	4.037	4.050	4.062	4.074	4.087	4.099	4.111
17	4.123	4.135	4.147	4.159	4.171	4.183	4.195	4.207	4.219	4.231
18	4.243	4.254	4.266	4.278	4.290	4.301	4.313	4.324	4.336	4.347
19	4.359	4.370	4.382	4.393	4.405	4.416	4.427	4.438	4.450	4.461
20	4.472	4.483	4.494	4.506	4.517	4.528	4.539	4.550	4.561	4.572
21	4.583	4.593	4.604	4.615	4.626	4.637	4.648	4.658	4.669	4.680
22	4.690	4.701	4.712	4.722	4.733	4.743	4.754	4.764	4.775	4.785
23	4.796	4.806	4.817	4.827	4.837	4.848	4.858	4.868	4.879	4.889
24	4.899	4.909	4.919	4.930	4.940	4.950	4.960	4.970	4.980	4.990
25	5.000	5.010	5.020	5.030	5.040	5.050	5.060	5.070	5.079	5.089
26	5.099	5.109	5.119	5.128	5.138	5.148	5.158	5.167	5.177	5.187
27	5.196	5.206	5.215	5.225	5.235	5.244	5.254	5.263	5.273	5.282
28	5.292	5.301	5.310	5.320	5.329	5.339	5.348	5.357	5.367	5.376
29	5.385	5.394	5.404	5.413	5.422	5.431	5.441	5.450	5.459	5.468
30	5.477	5.486	5.495	5.505	5.514	5.523	5.532	5.541	5.550	5.559
31	5.568	5.577	5.586	5.595	5.604	5.612	5.621	5.630	5.639	5.648
32	5.657	5.666	5.675	5.683	5.692	5.701	5.710	5.718	5.727	5.736
33	5.745	5.753	5.762	5.771	5.779	5.788	5.797	5.805	5.814	5.822
34	5.831	5.840	5.848	5.857	5.865	5.874	5.882	5.891	5.899	5.908
35	5.916	5.925	5.933	5.941	5.950	5.958	5.967	5.975	5.983	5.992
36	6.000	6.008	6.017	6.025	6.033	6.042	6.050	6.058	6.066	6.075
37	6.083	6.091	6.099	6.107	6.116	6.124	6.132	6.140	6.148	6.156
38	6.164	6.173	6.181	6.189	6.197	6.205	6.213	6.221	6.229	6.237
39	6.245	6.253	6.261	6.269	6.277	6.285	6.293	6.301	6.309	6.317
40	6.325	6.332	6.340	6.348	6.356	6.364	6.372	6.380	6.387	6.395
41	6.403	6.411	6.419	6.427	6.434	6.442	6.450	6.458	6.465	6.473
42	6.481	6.488	6.496	6.504	6.512	6.519	6.527	6.535	6.542	6.550
43	6.557	6.565	6.573	6.580	6.588	6.595	6.603	6.611	6.618	6.626
44	6.633	6.641	6.648	6.656	6.663	6.671	6.678	6.686	6.693	6.701
45	6.708	6.716	6.723	6.731	6.738	6.745	6.753	6.760	6.768	6.775
46	6.782	6.790	6.797	6.804	6.812	6.819	6.826	6.834	6.841	6.848
47	6.856	6.863	6.870	6.877	6.885	6.892	6.899	6.907	6.914	6.921
48	6.928	6.935	6.943	6.950	6.957	6.964	6.971	6.979	6.986	6.993
49	7.000	7.007	7.014	7.021	7.029	7.036	7.043	7.050	7.057	7.064
50	7.071	7.078	7.085	7.092	7.099	7.106	7.113	7.120	7.127	7.134
51	7.141	7.148	7.155	7.162	7.169	7.176	7.183	7.190	7.197	7.204
52	7.211	7.218	7.225	7.232	7.239	7.246	7.253	7.259	7.266	7.273
53	7.280	7.287	7.294	7.301	7.308	7.314	7.321	7.328	7.335	7.342
54	7.348	7.355	7.362	7.369	7.376	7.382	7.389	7.396	7.403	7.409

제곱근표

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7.416	7.423	7.430	7.436	7.443	7.450	7.457	7.463	7.470	7.477
56	7.483	7.490	7.497	7.503	7.510	7.517	7.523	7.530	7.537	7.543
57	7.550	7.556	7.563	7.570	7.576	7.583	7.589	7.596	7.603	7.609
58	7.616	7.622	7.629	7.635	7.642	7.649	7.655	7.662	7.668	7.675
59	7.681	7.688	7.694	7.701	7.707	7.714	7.720	7.727	7.733	7.740
60	7.746	7.752	7.759	7.765	7.772	7.778	7.785	7.791	7.797	7.804
61	7.810	7.817	7.823	7.829	7.836	7.842	7.849	7.855	7.861	7.868
62	7.874	7.880	7.887	7.893	7.899	7.906	7.912	7.918	7.925	7.931
63	7.937	7.944	7.950	7.956	7.962	7.969	7.975	7.981	7.987	7.994
64	8.000	8.006	8.012	8.019	8.025	8.031	8.037	8.044	8.050	8.056
65	8.062	8.068	8.075	8.081	8.087	8.093	8.099	8.106	8.112	8.118
66	8.124	8.130	8.136	8.142	8.149	8.155	8.161	8.167	8.173	8.179
67	8.185	8.191	8.198	8.204	8.210	8.216	8.222	8.228	8.234	8.240
68	8.246	8.252	8.258	8.264	8.270	8.276	8.283	8.289	8.295	8.301
69	8.307	8.313	8.319	8.325	8.331	8.337	8.343	8.349	8.355	8.361
70	8.367	8.373	8.379	8.385	8.390	8.396	8.402	8.408	8.414	8.420
71	8.426	8.432	8.438	8.444	8.450	8.456	8.462	8.468	8.473	8.479
72	8.485	8.491	8.497	8.503	8.509	8.515	8.521	8.526	8.532	8.538
73	8.544	8.550	8.556	8.562	8.567	8.573	8.579	8.585	8.591	8.597
74	8.602	8.608	8.614	8.620	8.626	8.631	8.637	8.643	8.649	8.654
75	8.660	8.666	8.672	8.678	8.683	8.689	8.695	8.701	8.706	8.712
76	8.718	8.724	8.729	8.735	8.741	8.746	8.752	8.758	8.764	8.769
77	8.775	8.781	8.786	8.792	8.798	8.803	8.809	8.815	8.820	8.826
78	8.832	8.837	8.843	8.849	8.854	8.860	8.866	8.871	8.877	8.883
79	8.888	8.894	8.899	8.905	8.911	8.916	8.922	8.927	8.933	8.939
80	8.944	8.950	8.955	8.961	8.967	8.972	8.978	8.983	8.989	8.994
81	9.000	9.006	9.011	9.017	9.022	9.028	9.033	9.039	9.044	9.050
82	9.055	9.061	9.066	9.072	9.077	9.083	9.088	9.094	9.099	9.105
83	9.110	9.116	9.121	9.127	9.132	9.138	9.143	9.149	9.154	9.160
84	9.165	9.171	9.176	9.182	9.187	9.192	9.198	9.203	9.209	9.214
85	9.220	9.225	9.230	9.236	9.241	9.247	9.252	9.257	9.263	9.268
86	9.274	9.279	9.284	9.290	9.295	9.301	9.306	9.311	9.317	9.322
87	9.327	9.333	9.338	9.343	9.349	9.354	9.359	9.365	9.370	9.375
88	9.381	9.386	9.391	9.397	9.402	9.407	9.413	9.418	9.423	9.429
89	9.434	9.439	9.445	9.450	9.455	9.460	9.466	9.471	9.476	9.482
90	9.487	9.492	9.497	9.503	9.508	9.513	9.518	9.524	9.529	9.534
91	9.539	9.545	9.550	9.555	9.560	9.566	9.571	9.576	9.581	9.586
92	9.592	9.597	9.602	9.607	9.612	9.618	9.623	9.628	9.633	9.638
93	9.644	9.649	9.654	9.659	9.664	9.670	9.675	9.680	9.685	9.690
94	9.695	9.701	9.706	9.711	9.716	9.721	9.726	9.731	9.737	9.742
95	9.747	9.752	9.757	9.762	9.767	9.772	9.778	9.783	9.788	9.793
96	9.798	9.803	9.808	9.813	9.818	9.823	9.829	9.834	9.839	9.844
97	9.849	9.854	9.859	9.864	9.869	9.874	9.879	9.884	9.889	9.894
98	9.899	9.905	9.910	9.915	9.920	9.925	9.930	9.935	9.940	9.945
99	9.950	9.955	9.960	9.965	9.970	9.975	9.980	9.985	9.990	9.995