

필수 개념 연계 문항들로 빠르게 끝내는 단기 완성서

# ≧ 풍산자 ≦ 라이트

수학 II

정답과 풀이

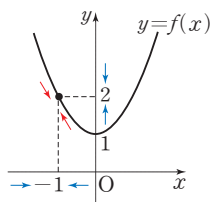
## 01 함수의 수렴과 발산

p. 06

01 (1) 2 (2) 3 (3)  $-\infty$  (4)  $\infty$ 02 (1)  $-2$  (2) 0 (3)  $\infty$  (4)  $\infty$  03 ④ 04 ⑤05  $-2$  06  $-3$  07 ⑤

- 01 (1)  $f(x) = x^2 + 1$ 로 놓으면  
 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽  
 그림과 같다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 1) = 2$$

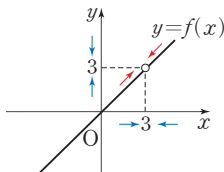


- (2)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$ 로 놓으면

$$x \neq 3 \text{ 일 때 } f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \frac{x(x - 3)}{x - 3} = x$$

이므로  $y = f(x)$ 의 그래프는  
 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = 3$$

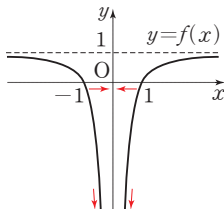


## 참고

분자를 인수분해하고 약분하여 식을 간단히 한 후 그래프를 그린다.

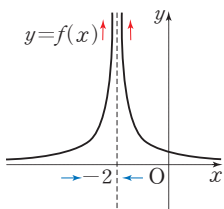
- (3)  $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ 로 놓으면  
 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽  
 그림과 같다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$



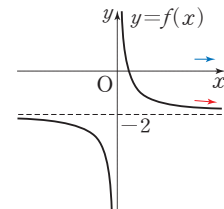
- (4)  $f(x) = \frac{1}{|x + 2|}$ 로 놓으면  
 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽  
 그림과 같다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{|x + 2|} = \infty$$



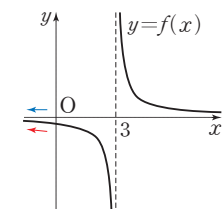
- 02 (1)  $f(x) = \frac{1}{x} - 2$ 로 놓으면  
 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽  
 그림과 같다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - 2\right) = -2$$

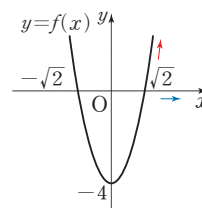


- (2)  $f(x) = \frac{1}{x - 3}$ 로 놓으면  
 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽  
 그림과 같다.

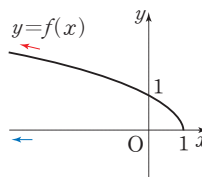
$$\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - 3} = 0$$



- (3)  $f(x) = 2x^2 - 4$ 로 놓으면  
 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽  
 그림과 같다.  
 $\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - 4) = \infty$



- (4)  $f(x) = \sqrt{1 - x}$ 로 놓으면  
 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽  
 그림과 같다.  
 $\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - x} = \infty$



- 03  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ 이므로  
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$   
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + 3 = 4$

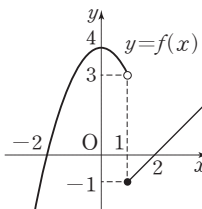
- 04 함수  $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽  
 그림과 같다.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$$

이므로  $a = 3, b = -1$

$$\therefore a + b = 3 + (-1) = 2$$

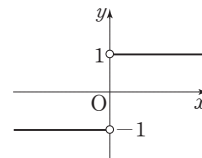


- 05  $x > 0$ 일 때  $f(x) = \frac{x}{x} = 1$

$$x < 0 \text{ 일 때 } f(x) = \frac{-x}{x} = -1$$

함수  $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽  
 그림과 같다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 - 1 = -2$$



- 06  $\lim_{x \rightarrow -2} \{8f(x)g(x) - g(x)\}$   
 $= 8 \times \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -2} g(x) - \lim_{x \rightarrow -2} g(x)$   
 $= 8 \times \frac{1}{4} \times (-3) - (-3) = -3$

- 07  $\lim_{x \rightarrow -1} (3x - 7)(x + 6) = \lim_{x \rightarrow -1} (3x - 7) \lim_{x \rightarrow -1} (x + 6)$   
 $= \{3 \times (-1) - 7\} \times (-1 + 6)$   
 $= -50$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 5}{x + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 5)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x + 5)}$$

$$= \frac{3 - 5}{3 + 5} = -\frac{1}{4}$$

따라서  $a = -50, b = -\frac{1}{4}$ 이므로

$$ab = -50 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{2}$$

## 02 극한값의 계산

p. 08

- 01 ⑤    02 ④    03 ②    04 -1    05 ①  
06 1    07 2

$$\begin{aligned} 01 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+1)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (3x+1) \\ &= 3 \times 2 + 1 = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 02 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x-1)(6x^2+5)}{2x^3-3x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(4-\frac{1}{x}\right)\left(6+\frac{5}{x^2}\right)}{2-\frac{3}{x}} \\ &= \frac{4 \times 6}{2} = 12 \end{aligned}$$

$$03 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-4x}-1}{\sqrt{9x^2+3x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1-\frac{4}{x}}-\frac{1}{x}}{\sqrt{9+\frac{3}{x}}} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} 04 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^2+x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+x})}{\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{1-\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 05 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left\{ \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{4} \right\} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \times \frac{-x(x+4)}{4(x+2)^2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x+4)}{4(x+2)^2} \\ &= \frac{-4}{4 \times 4} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$06 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax + b}{x - 1} = -2 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - ax + b) = 1 - a + b = 0$$

$$\therefore b = a - 1$$

..... ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax + b}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax + a - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-a+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-a+1) \\ &= -a+2 = -2 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 4$$

$$a = 4 \text{를 ㉠에 대입하면 } b = 3$$

$$\therefore a - b = 4 - 3 = 1$$

$$07 \quad \frac{2x^2+x-1}{x^2+9} < f(x) < \frac{2x^2+8}{x^2+1} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x-1}{x^2+9} = 2, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+8}{x^2+1} = 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

## 실력 확인 문제

01 02 p. 10

- |      |       |      |       |      |
|------|-------|------|-------|------|
| 01 ④ | 02 ①  | 03 ④ | 04 -1 | 05 ⑤ |
| 06 ④ | 07 30 | 08 ② | 09 ②  | 10 ⑤ |
| 11 ① | 12 ①  | 13 ① | 14 ④  | 15 ③ |
| 16 ① | 17 ②  | 18 ③ | 19 ④  | 20 6 |
| 21 ③ | 22 ②  | 23 2 | 24 ③  |      |

$$01 \quad \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = -2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) - \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 2 - (-2) = 4$$

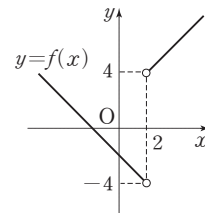
02  $x > 2$ 일 때

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2$$

$x < 2$ 일 때

$$f(x) = \frac{x^2-4}{-(x-2)} = \frac{(x+2)(x-2)}{-(x-2)} = -x-2$$

함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = -4 \text{이므로 } a = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 4 \text{이므로 } b = 4$$

$$\therefore a + b = -4 + 4 = 0$$

03  $x \rightarrow 0+$ 일 때,  $x-1 \rightarrow -1+$ 이므로

$$[x-1] \rightarrow -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x-1}{[x-1]} = \frac{0-1}{-1} = 1$$

**참고**

$[x]$ 가  $x$ 보다 크지 않은 최대의 정수일 때, 정수  $n$ 에 대하여

(1)  $x \rightarrow n-$ 이면  $n-1 \leq x < n$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow n-} [x] = n-1$$

(2)  $x \rightarrow n+$ 이면  $n \leq x < n+1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow n+} [x] = n$$

04  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax - a) = -2a$   
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - 2x + a) = 3 + a$   
 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값이 존재하려면  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$   
이어야 하므로  
 $-2a = 3 + a$   
 $\therefore a = -1$

05  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + 6) = 1$ 에서  
 $1 + a + 6 = 1$   
 $\therefore a = -6$   
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{-3x - a} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{-3x + 6}$   
 $= \sqrt{9} = 3$

06  $2f(x) - 5g(x) = h(x)$ 로 놓으면  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 3$ 이고,  
 $g(x) = \frac{2f(x) - h(x)}{5}$  이므로  
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x) - h(x)}{5}$   
 $= \frac{2\lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} h(x)}{5}$   
 $= \frac{2 \times 4 - 3}{5} = 1$

#### 참고

두 함수  $f(x), g(x)$ 에 대하여  
 $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = L$  ( $L$ 은 실수)일 때  
 $\Rightarrow f(x) - g(x) = h(x)$ 로 놓고  
 $g(x) = f(x) - h(x), \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$   
임을 이용한다.

07 [1단계]  
 $\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)f(x) = 1$ 에서  
 $\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \times \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$   
 $2\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$   
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$   
[2단계]  
 $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 1)f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 1) \times \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$   
 $= 3\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$   
 $= 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

[3단계]  
따라서  $a = \frac{3}{2}$  이므로  
 $20a = 20 \times \frac{3}{2} = 30$

08  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+2)}{(x+1)(x+2)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x+1}$   
 $= \frac{-2}{-2+1} = 2$

09  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3 - \sqrt{x^2 + 5})(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{(x - 2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{(x - 2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+2)(x-2)}{(x-2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+2)}{3 + \sqrt{x^2 + 5}}$   
 $= \frac{-(2+2)}{3 + \sqrt{9}}$   
 $= -\frac{2}{3}$

10  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)f(x)}{\sqrt{x+6}-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)f(x)(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)f(x)(\sqrt{x+6}+3)}{x-3}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 3} f(x)(\sqrt{x+6}+3)$   
 $= \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+6}+3)$   
 $= \frac{1}{6} \times (\sqrt{9}+3) = 1$

11  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + a) = a = 4$

12  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 - 3x + 1}{-5x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{-5 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$   
 $= \frac{10}{-5} = -2$

13  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7-4x}{\sqrt{x^2+8}-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{x}-4}{\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}-\frac{1}{x}} = -4$

14  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3f(x)}{x^2 + 4f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-3 \times \frac{f(x)}{x} \times \frac{1}{x}}{1+4 \times \frac{f(x)}{x} \times \frac{1}{x}}$   
 $= \frac{2-3 \times a \times 0}{1+4 \times a \times 0} = 2$

15  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + bx^2 - x + 6}{x^2 - 2x - 10} = 3$ 이므로  
 $a=0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx^2 - x + 6}{x^2 - 2x - 10} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b - \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} - \frac{10}{x^2}} = b = 3$$

$\therefore a+b=0+3=3$

16  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-5})$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-5})(\sqrt{x+5} + \sqrt{x-5})}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-5}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-5}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{10}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + \sqrt{1 - \frac{5}{x}}} = 0$$

17  $x = -t$ 로 놓으면  $x \rightarrow -\infty$ 일 때  $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 9} + x)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 - 2t + 9} - t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2 - 2t + 9} - t)(\sqrt{t^2 - 2t + 9} + t)}{\sqrt{t^2 - 2t + 9} + t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2t + 9}{\sqrt{t^2 - 2t + 9} + t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{9}{t}}{\sqrt{1 - \frac{2}{t} + \frac{9}{t^2}} + 1}$$

$$= \frac{-2}{1+1} = -1$$

18  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \times \frac{-x}{\sqrt{3}(\sqrt{3-x})} \right\}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{3}(\sqrt{3-x})}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

19 [1단계]

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - a}{x - 2} = b \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - a) = 8 - a = 0$$

$\therefore a=8$

[2단계]

$a=8$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - a}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4)$$

$$= 4 + 4 + 4$$

$$= 12 = b$$

[3단계]

$\therefore a+b=8+12=20$

20 [1단계]

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+a-b}}{x-1} = \frac{1}{4} \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+a-b}) = \sqrt{1+a-b} = 0$$

$\therefore b = \sqrt{1+a}$  ..... ㉠

[2단계]

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+a-b}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{1+a}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{1+a})(\sqrt{x+a} + \sqrt{1+a})}{(x-1)(\sqrt{x+a} + \sqrt{1+a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+a} + \sqrt{1+a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{1+a}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+a}}$$

[3단계]

$$\frac{1}{2\sqrt{1+a}} = \frac{1}{4} \text{에서 } a=3$$

$a=3$ 을 ㉠에 대입하면  $b=2$

$\therefore ab=3 \times 2=6$

21 [1단계]

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2 - ax - b} = -\frac{1}{2} \text{에서 } -\frac{1}{2} \neq 0 \text{이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x+3) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - ax - b) = 9 + 3a - b = 0$$

$\therefore b=3a+9$  ..... ㉡

[2단계]

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2-ax-b} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2-ax-3a-9} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{(x+3)(x-a-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x-a-3} \\ &= -\frac{1}{a+6}\end{aligned}$$

[3단계]

$$-\frac{1}{a+6} = -\frac{1}{2} \text{에서}$$

$$a = -4$$

$a = -4$ 를 ㉠에 대입하면

$$b = -3$$

$$\therefore a-b = -4 - (-3) = -1$$

## 22 [1단계]

조건 (가)의  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$ 에서  $f(x)$ 는 이차항의 계수가 2

인 이차식이어야 한다.

조건 (나)의  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ 에서  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

따라서  $f(x) = 2x^2 + ax$  ( $a$ 는 상수)로 놓을 수 있다.

[2단계]

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x+a)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (2x+a) = a\end{aligned}$$

$$\therefore a = 3$$

[3단계]

따라서  $f(x) = 2x^2 + 3x$ 이므로

$$f(2) = 14$$

**참고**

인수정리

$x$ 에 대한 다항식  $f(x)$ 가 일차식  $x-a$ 로 나누어 떨어지면  $f(a) = 0$ 이다. 그 역도 성립한다.

## 23 $2x^2 + 1 > 0$ 이므로 $4x^2 - 2 \leq (2x^2 + 1)f(x) \leq 4x^2 + 3$ 의 각 변을 $2x^2 + 1$ 로 나누면

$$\frac{4x^2 - 2}{2x^2 + 1} \leq f(x) \leq \frac{4x^2 + 3}{2x^2 + 1}$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2}{2x^2 + 1} = 2, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3}{2x^2 + 1} = 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

## 24 (i) $x > 0$ 일 때, 주어진 부등식의 각 변에 $x$ 를 곱하면

$$\frac{3x^2 + x}{x^2 + 5} < xf(x) < \frac{3x^2 + 6x}{x^2 + 3}$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x}{x^2 + 5} = 3, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 6x}{x^2 + 3} = 3 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = 3$$

## (ii) $x < 0$ 일 때, 주어진 부등식의 각 변에 $x$ 를 곱하면

$$\frac{3x^2 + 6x}{x^2 + 3} < xf(x) < \frac{3x^2 + x}{x^2 + 5}$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 6x}{x^2 + 3} = 3, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + x}{x^2 + 5} = 3 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xf(x) = 3$$

(i), (ii)에 의하여  $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = 3$

## 03 함수의 연속

p. 14

01  $\neg, \subset$  02 (1) 연속 (2) 불연속 (3) 불연속 03 ④

04 ⑤ 05  $(-\infty, 9) \cup (9, \infty)$  06  $[4, \infty)$

07 ⑤

01  $\neg$ .  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 이므로  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재한다. (참)

$\neg$ .  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1, f(-1) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \neq f(-1)$$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = -1$ 에서 불연속이다. (거짓)

$\subset$ .  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$

즉,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 이므로  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는다.

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = 1$ 에서 불연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은  $\neg, \subset$ 이다.

02 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1, f(0) = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = 0$ 에서 연속이다.

(2) 함수값  $f(0)$ 이 정의되지 않으므로 함수  $f(x)$ 는  $x = 0$ 에서 불연속이다.

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0$$

즉,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 이므로  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는다.

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = 0$ 에서 불연속이다.

- 03 함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에서 연속이려면  $x=-1$ 에서도 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+3) = f(-1)$$

즉,  $-1+3 = -(-1)+k$ 이어야 하므로

$$2=1+k$$

$$\therefore k=1$$

- 04 함수  $f(x)$ 가  $x=2$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-7x+a}{x-2} = b$$

..... ㉠

㉠이 수렴하고  $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-7x+a) = -10+a=0$$

$$\therefore a=10$$

$a=10$ 을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-7x+a}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-7x+10}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-5)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x-5) \\ &= -3=b \end{aligned}$$

$$\therefore a+b=10+(-3)=7$$

- 05 정의역은  $x \neq 9$ 인 실수 전체의 집합이므로 구간으로 나타내면  $(-\infty, 9) \cup (9, \infty)$ 이다.

- 06  $x-4 \geq 0$ 에서  $x \geq 4$

즉, 함수  $f(x)$ 는  $x \geq 4$ 인 모든 실수에서 연속이다.

따라서 연속인 구간은  $[4, \infty)$ 이다.

- 07 함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에서 연속이려면  $x=-2$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} (x-7) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2+8x+a) = f(-2)$$

$$-2-7=4-16+a$$

$$\therefore a=3$$

## 04 연속함수의 성질

p. 16

- 01 (1)  $(-\infty, \infty)$  (2)  $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

- 02  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$  03 최댓값: 없다., 최솟값:  $-2$

- 04 ㉢ 05 (가) 연속, (나) 연속, (다) 사잇값의 정리

- 06 풀이 참조 07 ㉢

- 01 (1)  $2f(x)-f(x)g(x)=2(2x^2-1)-(2x^2-1)(x+1)$   
 $=-2x^3+2x^2+x-1$

은 다항함수이므로 모든 실수에서 연속이다.

따라서 연속인 구간은  $(-\infty, \infty)$ 이다.

- (2)  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^2-1}{x+1}$ 은 유리함수이므로  $x \neq -1$ 인 모든 실수에서 연속이다.

따라서 연속인 구간은  $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ 이다.

- 02  $\neg$ .  $3g(x)$ 가  $x=a$ 에서 연속이므로 함수  $f(x)+3g(x)$ 도  $x=a$ 에서 연속이다.

$\neg$ .  $\{g(x)\}^2 = g(x) \times g(x)$ 이므로  $\{g(x)\}^2$ 도  $x=a$ 에서 연속이다.

$\neg$ . (반례)  $g(a)=0$ 이면 함수  $\frac{1}{2g(x)}$ 은  $x=a$ 에서 정의되지 않으므로 함수  $f(x) - \frac{1}{2g(x)}$ 은  $x=a$ 에서 불연속이다.

$\neg$ . 함수  $f(x)g(x)$ 가  $x=a$ 에서 연속이므로 함수  $2f(x)g(x)$ 도  $x=a$ 에서 연속이다.

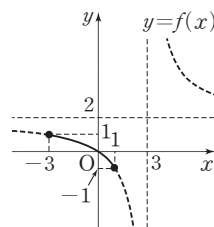
따라서  $x=a$ 에서 항상 연속인 것은  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ 이다.

- 03 닫힌구간  $[-2, 2]$ 에서 최댓값은 없고  $x=-2$ 일 때 최솟값은  $-2$ 이다.

- 04  $f(x) = \frac{2x}{x-3} = \frac{2(x-3)+6}{x-3}$   
 $= \frac{6}{x-3} + 2$

함수  $f(x)$ 는 닫힌구간  $[-3, 1]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여  $f(x)$ 는 닫힌구간  $[-3, 1]$ 에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

닫힌구간  $[-3, 1]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수  $f(x)$ 는  $x=-3$ 일 때 최댓값 1,  $x=1$ 일 때 최솟값  $-1$ 을 갖는다.

따라서  $a=1, b=-1$ 이므로

$$ab=1 \times (-1) = -1$$

**06**  $f(x)=x^2-9x+4$ 로 놓으면 함수  $f(x)$ 는 모든 실수  $x$ 에  
서 연속이므로 닫힌구간  $[-1, 1]$ 에서 연속이고

$$f(-1)=14, f(1)=-4$$

$$\text{이므로 } f(-1)f(1) < 0$$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식  $x^2-9x+4=0$ 은  
열린구간  $(-1, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

**07**  $f(x)=2x^3+x-5$ 로 놓으면 함수  $f(x)$ 는 모든 실수  $x$ 에  
서 연속이고

$$f(-1)=-8, f(0)=-5, f(1)=-2,$$

$$f(2)=13, f(3)=52, f(4)=127$$

$$\text{이므로 } f(1)f(2) < 0$$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식  $2x^3+x-5=0$ 은  
열린구간  $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

### 실력 확인 문제

**03** **04** p. 18

- |                                                         |                        |                                           |               |             |
|---------------------------------------------------------|------------------------|-------------------------------------------|---------------|-------------|
| <b>01</b> ③                                             | <b>02</b> ②            | <b>03</b> 3                               | <b>04</b> 불연속 | <b>05</b> ② |
| <b>06</b> ④                                             | <b>07</b> ①            | <b>08</b> ②                               | <b>09</b> ①   |             |
| <b>10</b> $(-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, \infty)$ | <b>11</b> ③            |                                           |               |             |
| <b>12</b> ②                                             | <b>13</b> ③            | <b>14</b> $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$ |               |             |
| <b>15</b> ④                                             | <b>16</b> ②            | <b>17</b> 최댓값: 2, 최솟값: 0                  |               |             |
| <b>18</b> ②                                             | <b>19</b> ③            | <b>20</b> ④                               | <b>21</b> ②   | <b>22</b> ④ |
| <b>23</b> ①                                             | <b>24</b> $-1 < a < 2$ |                                           |               |             |

**01**  $\neg$ .  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=0, f(1)=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1)$$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 연속이다.

$\neg$ . 함수값  $f(1)$ 이 정의되지 않으므로  $x=1$ 에서 불연속이다.

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \end{aligned}$$

$$f(1)=2$$

따라서  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1)$ 이므로 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에  
서 연속이다.

이상에서  $x=1$ 에서 항상 연속인 것은  $\neg$ , ㄷ이다.

**02** ①, ③  $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)=-1, \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)=1$

즉,  $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)$ 이므로  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의  
값이 존재하지 않는다.

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=-1$ 에서 불연속이다.

②, ⑤  $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)=0, \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)=0$

즉,  $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)=\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$ 이므로  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이  
존재한다. 또한,  $f(1)=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1)$$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 연속이다.

④  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=-1, f(0)=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 불연속이다.

**03** (i)  $\lim_{x \rightarrow -2-} f(x)=2, \lim_{x \rightarrow -2+} f(x)=2$

즉,  $\lim_{x \rightarrow -2-} f(x)=\lim_{x \rightarrow -2+} f(x)=2$ 이므로  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ 의 값  
이 존재한다. 또한,  $f(-2)=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \neq f(-2)$$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=-2$ 에서 불연속이다.

(ii)  $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)=0, \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)=-1$

즉,  $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)$ 이므로  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값  
이 존재하지 않는다.

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=-1$ 에서 불연속이다.

(iii)  $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)=0, \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)=0$

즉,  $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)=\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)=0$ 이므로  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값  
이 존재한다. 또한,  $f(0)=-1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 불연속이다.

(i), (ii), (iii)에서 불연속인 점은  $x=-2, x=-1, x=0$ 일

때의 3개이고 극한값이 존재하지 않는 점은  $x=-1$ 의 1개  
이므로

$$a=3, b=1$$

$$\therefore ab=3 \times 1=3$$

**04**  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+3x-10}{x-2}$

$$=\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+5)}{x-2}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 2} (x+5)=7$$

또한,  $f(2)=5$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=2$ 에서 불연속이다.

- 05 함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에서 연속이라면  $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (5x^2 - a) = f(1)$$

즉,  $5 - a = 1 + a$ 이어야 하므로

$$a = 2$$

06 [1단계]

함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에서 연속이라면  $x=3$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + a}{x - 3} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

[2단계]

$\textcircled{1}$ 이 수렴하고  $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + a) = 9 - 15 + a = 0$$

$$\therefore a = 6$$

[3단계]

$a = 6$ 을  $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + a}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x-2) \\ &= 1 = b \end{aligned}$$

[4단계]

$$\therefore a + b = 6 + 1 = 7$$

- 07  $x \neq 1$ 이면  $f(x) = \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$

이때 함수  $f(x)$ 가 연속함수이므로  $x=1$ 에서도 연속이다.

따라서  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} \therefore f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+8}+3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

- 08  $\neg$ .  $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(0) = 0$  (참)

$$\neg$$
.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(f(x)) = g(-1) = -1,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(f(x)) = g(1) = -1$$

따라서  $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (g \circ f)(x)$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x)$ 의 값이 존재한다. (참)

$\neg$ .  $\neg$ .  $\neg$ 에서  $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(0)$ 이므로

$(g \circ f)(x)$ 는  $x=0$ 에서 불연속이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은  $\neg$ ,  $\neg$ 이다.

09 [1단계]

$f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로  $x=2$ 에서도 연속이다.

따라서  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이어야 한다.

$$x \neq 2 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{x^2 + x + k}{x - 2} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x + k}{x - 2} = f(2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 이 수렴하고  $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + k) = 6 + k = 0$$

$$\therefore k = -6$$

[2단계]

$k = -6$ 을  $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+3) \\ &= 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

- 10  $x^2 - 16 \neq 0$ 에서  $x \neq \pm 4$

즉, 함수  $f(x)$ 는  $x \neq \pm 4$ 인 모든 실수에서 연속이다.

따라서 연속인 구간은  $(-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, \infty)$ 이다.

- 11 함수  $f(x)$ 가  $x=4$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (2x + 3) = 11,$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (ax + 1) = 4a + 1,$$

$$f(4) = 4a + 1$$

이므로

$$4a + 1 = 11$$

$$\therefore a = \frac{5}{2}$$

12 [1단계]

$f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에서 연속이므로  $x=-1$ ,  $x=1$ 에서 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1),$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$$

[2단계]

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 = 1, \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax + b) = a + b, f(1) = 1 \text{ 이므로}$$

$$a + b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (ax+b) = -a+b, \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 = 1, f(-1) = 1$$

이므로  $-a+b=1$  ..... ㉔

[3단계]

㉓, ㉔을 연립하여 풀면  $a=0, b=1$

$$\therefore a-b=0-1=-1$$

13  $\neg. \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x+2) = 1$  (참)

ㄴ.  $a=0$ 일 때, 함수  $f(x)$ 가  $x=1$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{ 이어야 한다.}$$

$$\neg \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \text{ 이고 } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

따라서  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  이므로 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ.  $g(x) = (x-1)f(x)$ 라고 하면 함수  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면  $x=1$ 에서 연속이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)f(x) = 0, g(1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$$

따라서 함수  $g(x)$ 는  $x=1$ 에서 연속이므로 함수

$y = (x-1)f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

14  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+3}{x^2-6x+9} = \frac{x+3}{(x-3)^2}$ 은 유리함수이므로  $x \neq 3$ 인 모든 실수에서 연속이다. 따라서 연속인 구간은  $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$ 이다.

15 ①  $f(x) + g(x) = x^2 + \frac{1}{x} + 1$ 은  $x=0$ 에서 불연속이다.

②  $f(x) - g(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 1$ 은  $x=0$ 에서 불연속이다.

③  $f(x)g(x) = x + \frac{1}{x}$ 은  $x=0$ 에서 불연속이다.

④  $\frac{f(x)}{g(x)} = x^3 + x$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

⑤  $\{g(x)+1\}^2 = \left(\frac{1}{x}+1\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 1$ 은  $x=0$ 에서 불연속이다.

16  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-1}{x^2+x-2} = \frac{x-1}{(x+2)(x-1)}$ 은  $x=-2, x=1$

에서 정의되지 않으므로 함수  $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는  $x=-2, x=1$ 에

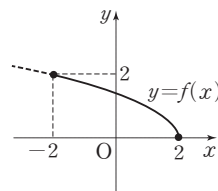
서 불연속이다.

따라서 구하는 모든 상수  $a$ 의 값의 합은

$$-2+1=-1$$

17 함수  $f(x)$ 는 닫힌구간  $[-2, 2]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여  $f(x)$ 는 닫힌구간  $[-2, 2]$ 에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

닫힌구간  $[-2, 2]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



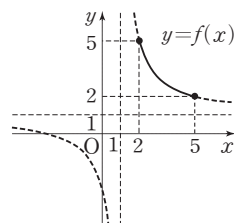
따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=-2$ 일 때 최댓값 2,  $x=2$ 일 때 최솟값 0을 갖는다.

18  $f(x) = \frac{x+3}{x-1} = \frac{(x-1)+4}{x-1}$

$$= \frac{4}{x-1} + 1$$

함수  $f(x)$ 는 닫힌구간  $[2, 5]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여  $f(x)$ 는 닫힌구간  $[2, 5]$ 에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

닫힌구간  $[2, 5]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수  $f(x)$ 는  $x=2$ 일 때 최댓값 5,  $x=5$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.

따라서  $M=5, m=2$ 이므로

$$M-m=5-2=3$$

19  $x \neq 1$ 일 때

$$f(x) = \frac{x^3+x^2-4x-4}{x+1}$$

$$= \frac{(x+1)(x+2)(x-2)}{x+1}$$

$$= (x+2)(x-2)$$

$$= x^2-4$$

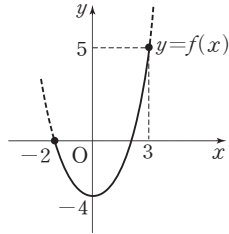
이때  $f(-1) = -3$ 이고,

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2-4) = -3 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

즉, 함수  $f(x)$ 가  $x = -1$ 에서 연속이므로 닫힌구간  $[-2, 3]$ 에서 연속이다. 따라서 최대·최소 정리에 의하여  $f(x)$ 는 닫힌구간  $[-2, 3]$ 에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

닫힌구간  $[-2, 3]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수  $f(x)$ 는  $x=3$ 일 때 최댓값 5,  $x=0$ 일 때 최솟값  $-4$ 를 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$$5 + (-4) = 1$$

- 20 ㄱ. 주어진 그래프가  $x = -1$ ,  $x = 1$ 에서 끊어져 있으므로 불연속이 되는 점은  $x = -1$ ,  $x = 1$ 일 때의 2개이다.

(참)

ㄴ.  $x = 1$ 에서 불연속이므로 닫힌구간  $[0, 2]$ 에서 최솟값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. 닫힌구간  $[2, 4]$ 에서  $x = 3$ 일 때 최댓값 1을 갖는다.

(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

- 21  $f(0)f(1) < 0, f(1)f(2) < 0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식  $f(x) = 0$ 은 열린구간  $(0, 1)$ ,  $(1, 2)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다. 따라서 방정식  $f(x) = 0$ 은 열린구간  $(-2, 2)$ 에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

- 22 [1단계]

$f(x) = x^3 + 3x - 3$ 으로 놓으면 함수  $f(x)$ 는 모든 실수  $x$ 에서 연속이고

$$f(-2) = -17, f(-1) = -7, f(0) = -3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{11}{8}, f(1) = 1, f(2) = 11$$

[2단계]

즉,  $f\left(\frac{1}{2}\right)f(1) < 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식

$f(x) = 0$ 은 열린구간  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 에서 적어도 하나의 실근을

갖는다. 따라서  $a$ 는 열린구간  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 에 속한다.

- 23  $f(x) = x^2 + kx - 5$ 로 놓으면 함수  $f(x)$ 는 모든 실수  $x$ 에서 연속이므로  $f(-1)f(3) < 0$ 일 때 사잇값의 정리에 의하여 방정식  $f(x) = 0$ 은 열린구간  $(-1, 3)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$$f(-1) = -k - 4, f(3) = 3k + 4 \text{이므로}$$

$$f(-1)f(3) < 0 \text{에서}$$

$$(-k - 4)(3k + 4) < 0$$

$$(k + 4)(3k + 4) > 0$$

$$\therefore k < -4 \text{ 또는 } k > -\frac{4}{3}$$

따라서 이 범위에 속하지 않는  $k$ 의 값은 ①이다.

- 24  $g(x) = f(x) + x^2$ 으로 놓으면 함수  $g(x)$ 는 연속함수이므로  $g(1)g(2) < 0$ 일 때 사잇값의 정리에 의하여 방정식  $g(x) = 0$ 은 1과 2 사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$$g(1) = f(1) + 1 = a + 1,$$

$$g(2) = f(2) + 4 = (a - 6) + 4 = a - 2$$

이므로

$$g(1)g(2) < 0 \text{에서}$$

$$(a + 1)(a - 2) < 0$$

$$\therefore -1 < a < 2$$

05 평균변화율과 미분계수

p. 22

- 01 ①    02 ④    03 ④    04 ⑤    05 ④  
06 -8    07 ⑤    08 ①

01  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{-2-7}{3} = -3$

02  $f'(-3) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(-x^3+x-4)-20}{x+3}$   
 $= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(-x^2+3x-8)}{x+3}$   
 $= \lim_{x \rightarrow -3} (-x^2+3x-8)$   
 $= -26$

03 점 (1, 2)에서의 접선의 기울기는  $f'(1)$ 과 같으므로

$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{3(1+h)^3-(1+h)^2\}-2}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^3+8h^2+7h}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} (3h^2+8h+7)$   
 $= 7$

04  $x$ 의 값이 1에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{11-5}{1} = 6$

$x=a$ 에서의 미분계수는

$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(a+h)^2+3(a+h)+1\}-(a^2+3a+1)}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2+2ah+3h}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} (h+2a+3)$   
 $= 2a+3$

따라서  $2a+3=6$ 이므로

$a = \frac{3}{2}$

05  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{2h} \times 2$   
 $= 2f'(a)$

06  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h)-f(1-h)}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(1+3h)-f(1)}{3h} \times 3 + \frac{f(1)-f(1-h)}{-h} \right\}$   
 $= 3f'(1) + f'(1) = 4f'(1)$   
 $= 4 \times (-2) = -8$

07  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \times \frac{1}{x+2} \right\}$   
 $= \frac{1}{4} f'(2)$   
 $= \frac{1}{4} \times 12 = 3$

08  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(1)-f(x)}{x-1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(1)-f(1)+f(1)-f(x)}{x-1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1)(x^2-1)-\{f(x)-f(1)\}}{x-1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ f(1)(x+1) - \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \right\}$   
 $= 2f(1) - f'(1)$   
 $= 2 \times 3 - 5 = 1$

06 미분가능성과 연속성

p. 24

- 01 (가) 0 (나) 연속 (다) 1 (라) -1 (마) 미분가능  
02 (1) 연속이다. (2) 미분가능하다.  
03 (1) 연속이지만 미분가능하지 않다.  
(2) 연속이지만 미분가능하지 않다.  
04 ④    05 7    06 ③

02 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0,$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 = 0,$   
 $f(0) = 0$ 이므로  
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$   
따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 연속이다.  
(2)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0,$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$   
이므로  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 이 존재한다.  
따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 미분가능하다.

03 (1)(i)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} |x^2 - 1| = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2 + 1) = 0,$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} |x^2 - 1| = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 0,$

$f(1) = 0$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 연속이다.

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1) - 0}{x - 1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x+1)(x-1)}{x-1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1^-} \{-(x+1)\} = -2,$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 - 1) - 0}{x - 1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$

이므로  $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ 이 존재하지 않는

다. 따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에 의하여 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

(2)(i)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 2) = -1,$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x^2 + x - 4) = -1,$

$f(1) = -1$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 연속이다.

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^2 - 2) - (-1)}{x - 1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1)$   
 $= 2$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(2x^2 + x - 4) - (-1)}{x - 1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(2x+3)}{x-1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+3)$   
 $= 5$

이므로  $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ 이 존재하지 않는

다. 따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에 의하여  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

04 ①, ③  $x=a$ 에서 연속이지만  $f'(a)$ 가 존재하지 않으므로 미분가능하지 않다.

②, ⑤  $x=a$ 에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

④  $f'(a) = 0$ 이므로 미분가능하다.

05 열린구간  $(a, e)$ 에서 함수  $f(x)$ 가

불연속인 점은  $x=b, x=c$ 일 때의 2개이므로

$m=2$

미분가능하지 않은 점은  $x=b, x=c, x=d$ 의 3개이므로

$n=3$

$\therefore 2m+n=2 \times 2+3=7$

06 ㄴ.  $x=1$ 에서 연속이 아니므로  $x=1$ 에서 미분가능하지 않다. (거짓)

ㄹ.  $f'(3)$ 의 값이 존재하지 않으므로  $f(x)$ 는  $x=3$ 에서 미분가능하지 않다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

## 07 도함수

p. 26

01 (1)  $y' = 0$  (2)  $y' = 6x^5$  (3)  $y' = -2$

(4)  $y' = 3x^2 + 4x - 5$

02 (1)  $y' = 9x^2 + 6x - 4$  (2)  $y' = 4x^3 + 18x^2 - 4x - 12$

(3)  $y' = 6(2x-5)^2$  (4)  $y' = 3x^2 - 14x + 15$

03 -5 04 ⑤ 05 -27 06 ⑤ 07 ②

08  $13x - 18$

02 (1)  $y' = (x+1)'(3x^2-4) + (x+1)(3x^2-4)'$

$= 1 \times (3x^2-4) + (x+1) \times 6x$

$= 9x^2 + 6x - 4$

(2)  $y' = (x)'(x^2-2)(x+6) + x(x^2-2)'(x+6)$

$+ x(x^2-2)(x+6)'$

$= 1 \times (x^2-2)(x+6) + x \times 2x \times (x+6)$

$+ x(x^2-2) \times 1$

$= 4x^3 + 18x^2 - 4x - 12$

(3)  $y' = 3(2x-5)^2(2x-5)'$

$= 3(2x-5)^2 \times 2 = 6(2x-5)^2$

(4)  $y' = \{(3-x)^2\}'(x-1) + (3-x)^2(x-1)'$

$= 2(3-x) \times (-1) \times (x-1) + (3-x)^2 \times 1$

$= 3x^2 - 14x + 15$

03  $f'(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ 이므로  $x = -2$ 에서의 미분계수는

$f'(-2) = -8 + 4 - 2 + 1 = -5$

04  $f'(x) = (x^3+3)'(x^2-x) + (x^3+3)(x^2-x)'$   
 $= 3x^2(x^2-x) + (x^3+3)(2x-1)$   
 $= 5x^4 - 4x^3 + 6x - 3$   
 $\therefore f'(1) = 4$

05  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3-2h)}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3) + f(3) - f(3-2h)}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(3+h) - f(3)}{h} + \frac{f(3) - f(3-2h)}{-h} \right\}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(3+h) - f(3)}{h} + \frac{f(3-2h) - f(3)}{-2h} \times 2 \right\}$   
 $= f'(3) + 2f'(3)$   
 $= 3f'(3)$   
 이때  $f'(x) = -4x + 3$ 이므로  
 $f'(3) = -9$   
 $\therefore 3f'(3) = 3 \times (-9) = -27$

06  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = 3$ 에서  
 $f'(-1) = 3$   
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = -6$ 에서  
 $f'(2) = -6$   
 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 에서  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$   
 $f'(-1) = 3 - 2a + b = 3$   
 $\therefore 2a - b = 0$  ..... ㉠  
 $f'(2) = 12 + 4a + b = -6$   
 $\therefore 4a + b = -18$  ..... ㉡  
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면  
 $a = -3, b = -6$   
 $\therefore ab = -3 \times (-6) = 18$

07 (i)  $f(x)$ 가  $x=2$ 에서 연속이므로  
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3 - ax) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (bx^2 + 2x + 4) = f(2)$   
 $8 - 2a = 4b + 4 + 4$   
 $\therefore a + 2b = 0$  ..... ㉠  
 (ii)  $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - a & (x < 2) \\ 2bx + 2 & (x > 2) \end{cases}$   
 $f'(2)$ 가 존재하므로  
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} (3x^2 - a) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2bx + 2)$   
 $12 - a = 4b + 2$   
 $\therefore a + 4b = 10$  ..... ㉡  
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면  $a = -10, b = 5$   
 $\therefore a + b = -10 + 5 = -5$

08  $x^5 + 4x^2 - 10$ 을  $(x-1)^2$ 으로 나눈 몫을  $Q(x)$ , 나머지를  $ax + b$  ( $a, b$ 는 상수)라고 하면  
 $x^5 + 4x^2 - 10 = (x-1)^2 Q(x) + ax + b$  ..... ㉠  
 ㉠의 양변에  $x=1$ 을 대입하면  $a + b = -5$  ..... ㉡  
 ㉠의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면  
 $5x^4 + 8x = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) + a$   
 이 식의 양변에  $x=1$ 을 대입하면  $a = 13$   
 $a = 13$ 을 ㉡에 대입하면  $b = -18$   
 따라서 구하는 나머지는  $13x - 18$ 이다.

### 실력 확인 문제

05 06 07 p. 28

|         |      |       |      |      |
|---------|------|-------|------|------|
| 01 ㉠    | 02 ㉡ | 03 -3 | 04 ㉡ | 05 ㉠ |
| 06 ㉢    | 07 ㉠ | 08 ㉡  | 09 ㉠ | 10 2 |
| 11 ㉠, ㉡ | 12 ㉡ | 13 ㉢  | 14 ㉠ | 15 ㉡ |
| 16 ㉡    | 17 ㉢ | 18 ㉠  | 19 ㉡ | 20 ㉢ |
| 21 16   | 22 ㉡ | 23 36 | 24 ㉠ |      |

01 함수  $f(x)$ 의  $x$ 의 값이  $a$ 에서  $a+1$ 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+1) - f(a)}{(a+1) - a}$$

$$= \frac{\{(a+1)^2 - 2(a+1)\} - (a^2 - 2a)}{1}$$

$$= 2a - 1 = -5$$

$$\therefore a = -2$$

02 함수  $f(x)$ 의 닫힌구간  $[-1, 1]$ 에서의 평균변화율은 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기와 같으므로

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{3 - (-1)}{2} = 2$$

따라서 직선 AB의 기울기는 2이다.

03 [1단계]

직선 AB의 기울기는 함수  $f(x)$ 의 닫힌구간  $[1, 2]$ 에서의 평균변화율과 같으므로

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 3$$

$$\therefore f(2) - f(1) = 3$$

[2단계]

주어진 이차함수  $y = f(x)$ 의 그래프는  $x=1$ 을 기준으로 좌우대칭이므로

$$f(0) = f(2)$$

[3단계]

따라서  $x$ 의 값이 0에서 1까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f(1)-f(0) \\ &= -\{f(2)-f(1)\} = -3\end{aligned}$$

04 [1단계]

함수  $f(x)$ 의 닫힌구간  $[1, 4]$ 에서의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{(16+4a+b)-(1+a+b)}{3} \\ &= \frac{15+3a}{3} = 5+a=2\end{aligned}$$

$\therefore a = -3$

[2단계]

따라서 함수  $f(x) = x^2 - 3x + b$ 의  $x=4$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(4+h)^2 - 3(4+h) + b\} - (16-12+b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2+5h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h+5) = 5\end{aligned}$$

05  $\therefore \frac{f(a)}{a}$ 는 원점과 점

$(a, f(a))$ 를 잇는 직선의

기울기이고,  $\frac{f(b)}{b}$ 는 원점

과 점  $(b, f(b))$ 를 잇는 직선의 기울기이므로

$$\frac{f(a)}{a} > \frac{f(b)}{b} \text{ (거짓)}$$

ㄴ.  $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ 일 때, 직선 AB의 기울기는 1보다 작으므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 1$$

이때  $b-a > 0$ 이므로

$$f(b)-f(a) < b-a \text{ (거짓)}$$

ㄷ.  $f'(a), f'(b)$ 는 각각 점  $(a, f(a)), (b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기이고, 점  $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기가 점  $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기보다 크므로  $f'(a) > f'(b)$  (참)

이상에서 옳은 것은 ㄷ이다.

$$\begin{aligned}06 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h)-f(3)}{-h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h)-f(3)}{2h} \times (-2) \\ &= -2f'(3) \\ &= -2 \times (-5) = 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}07 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(\sqrt{x})-f(1)}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(\sqrt{x})-f(1)}{(x+1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(\sqrt{x})-f(1)}{\sqrt{x}-1} \times \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} \right\} \\ &= \frac{1}{4} f'(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}08 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(2)-2f(x)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(2)-2f(2)+2f(2)-2f(x)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2)(x-2)-2\{f(x)-f(2)\}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ f(2)-2 \times \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \right\} \\ &= f(2)-2f'(2) \\ &= -4-2 \times 5 = -14\end{aligned}$$

09 [1단계]

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x^2-1} = 3 \text{에서 극한값이 존재하고}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-2\} = 0$$

$$\therefore f(1) = 2$$

[2단계]

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} f'(1) = 3\end{aligned}$$

$$\therefore f'(1) = 6$$

[3단계]

$$\therefore \frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

10 [1단계]

$f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$ 의 양변에  $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) - 1$$

$$\therefore f(0) = 1$$

[2단계]

$$\begin{aligned}f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(2)+f(h)-1\}-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-1}{h} = 1\end{aligned}$$

..... ㉠

[3단계]

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(1) + f(h) - 1\} - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} = 1 \quad (\because \ominus) \end{aligned}$$

[4단계]

$$\therefore f(0) + f'(1) = 1 + 1 = 2$$

11  $\neg$ .  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

이므로 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 불연속이다.

$\neg$ . (i)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x|x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x^2 = 0,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x|x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0,$$

$$f(0) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 연속이다.

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{x}$   

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x}$$
  

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\text{이므로 } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{이 존재한다. 즉,}$$

함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 미분가능하다.

(i), (ii)에 의하여 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 연속이고 미분가능하다.

$\neg$ .  $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0,$$

$$f(0) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 연속이다.

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$   

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$$
  

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\text{이므로 } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{이 존재하지 않는다}$$

다. 즉, 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에 의하여 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 연속이고 미분가능하지 않다.

$\neg$ . (i)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (|x| - x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x) = 0,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (|x| - x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0,$$

$$f(0) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 연속이다.

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - x}{x}$   

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{x}$$
  

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2) = -2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - x}{x}$$
  

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0$$

$$\text{이므로 } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{이 존재하지 않는다}$$

다. 즉, 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에 의하여 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 연속이고 미분가능하지 않다.

$\neg$ . (i)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0,$$

$$f(0) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 연속이다.

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\text{이므로 } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{이 존재한다. 즉,}$$

함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 미분가능하다.

(i), (ii)에 의하여 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 연속이고 미분가능하다.

이상에서  $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는  $\neg$ ,  $\neg$ 이다.

12 ① 불연속인 점은  $x=d$ ,  $x=e$ 일 때의 2개이다.

②  $\lim_{x \rightarrow d^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow d^-} f(x)$ 이므로  $\lim_{x \rightarrow d} f(x)$ 의 값이 존재한다.

③  $f'(x)=0$ 인 점, 즉 기울기가 0인 점은  $a < x < c$ ,  $c < x < d$ ,  $d < x < e$ 에서 존재하고,  $e < x < b$ 에서 함수  $f(x)$ 는 상수함수이므로  $f'(x)=0$ 이다.

④ 미분가능하지 않은 점은  $x=c$ ,  $x=d$ ,  $x=e$ 일 때의 3개이다.

⑤ 연속이지만 미분가능하지 않은 점은  $x=c$ 일 때의 1개이다.

13  $f(x) = -3x^2 + ax - 6$ 에서  $f'(x) = -6x + a$

$$f'(2) = -12 + a = -7 \text{이므로 } a = 5$$

$$14 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \times \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{2} f'(1) = 6$$

$$\therefore f'(1) = 12$$

$$\text{이때 } f'(x) = 2x + a \text{ 이므로}$$

$$f'(1) = 2 + a = 12$$

$$\therefore a = 10$$

$$15 \quad f(1) = 1 + 3 - 1 = 3 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 \text{ 에서 } f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$\therefore f'(1) = 3 + 6 = 9$$

$$16 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 3 \text{ 에서 극한값이 존재하고}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 \quad \therefore f(-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = f'(-1) = 3$$

$$f(x) = x^2 + ax + b \text{ 에서 } f'(x) = 2x + a$$

$$f(-1) = 1 - a + b = 0$$

$$\therefore a - b = 1$$

..... ㉠

$$f'(-1) = -2 + a = 3$$

$$\therefore a = 5$$

$$a = 5 \text{ 를 ㉠ 에 대입하면 } b = 4$$

$$\therefore ab = 5 \times 4 = 20$$

$$17 \quad f'(x) = 3x^2 + 2ax + a^2 \text{ 이므로}$$

$$f'(1) = 3 + 2a + a^2 = 6 \quad \therefore a^2 + 2a - 3 = 0$$

따라서 상수  $a$ 의 값의 합은 근과 계수의 관계에 의하여  $-2$ 이다.

**참고**

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식  $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을  $\alpha, \beta$ 라고 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$18 \quad [1\text{단계}]$$

$$(x^2 + x + 1)f(x) = (x+1)(x^6 - 1) \text{ 에서}$$

$$(x^2 + x + 1)f(x)$$

$$= (x+1)(x-1)(x^3+1)(x^2+x+1)$$

$$\therefore f(x) = (x^2-1)(x^3+1)$$

$$[2\text{단계}]$$

$$f'(x) = (x^2-1)'(x^3+1) + (x^2-1)(x^3+1)'$$

$$= 2x \times (x^3+1) + (x^2-1) \times 3x^2$$

$$= 5x^4 - 3x^2 + 2x$$

$$[3\text{단계}]$$

$$\therefore f'(-1) = 5 - 3 - 2 = 0$$

$$19 \quad g'(x) = (2x^2 - 5x)'f(x) + (2x^2 - 5x)f'(x) \\ = (4x - 5)f(x) + (2x^2 - 5x)f'(x)$$

$$\therefore g'(2) = 3f(2) - 2f'(2)$$

$$= 3 \times 3 - 2 \times (-1) = 11$$

$$20 \quad f(x) = x^{10} + 4x \text{ 로 놓으면 } f(1) = 1 + 4 = 5 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} + 4x - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

$$\text{이때 } f'(x) = 10x^9 + 4 \text{ 이므로}$$

$$f'(1) = 10 + 4 = 14$$

$$21 \quad [1\text{단계}]$$

$f(x)$ 를  $n$ 차함수라고 하면  $f'(x)$ 는  $(n-1)$ 차함수이므로

$f(x)f'(x)$ 는  $n + (n-1) = 2n-1$ 에서  $(2n-1)$ 차식이다.

$2x^3 - 9x^2 + 5x + 6$ 은 삼차식이므로

$$2n-1=3 \quad \therefore n=2$$

즉,  $f(x)$ 는 이차식이고 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x) = x^2 + ax + b$  ( $a, b$ 는 상수)로 놓을 수 있다.

$$[2\text{단계}]$$

$$f'(x) = 2x + a \text{ 이므로}$$

$$f(x)f'(x) = (x^2 + ax + b)(2x + a)$$

$$= 2x^3 + 3ax^2 + (a^2 + 2b)x + ab$$

$$= 2x^3 - 9x^2 + 5x + 6$$

$$\text{따라서 } 3a = -9, a^2 + 2b = 5, ab = 6 \text{ 이므로}$$

$$a = -3, b = -2$$

$$[3\text{단계}]$$

$$\text{즉, } f(x) = x^2 - 3x - 2 \text{ 이므로}$$

$$f(-3) = 9 + 9 - 2 = 16$$

$$22 \quad \text{함수 } f(x) \text{가 } x=1 \text{에서 미분가능하므로 } x=1 \text{에서 연속이}$$

다.

$f(x)$ 가  $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 - b) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + 2) = f(1)$$

$$3 - b = a + 2$$

$$\therefore a + b = 1$$

..... ㉠

$$f'(x) = \begin{cases} a & (x > 1) \\ 6x & (x < 1) \end{cases} \text{ 이고 } f'(1) \text{이 존재하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 6x = \lim_{x \rightarrow 1^+} a$$

$$\therefore a = 6$$

$$a = 6 \text{ 을 ㉠ 에 대입하면 } b = -5$$

$$\therefore ab = 6 \times (-5) = -30$$

$$23 \quad \text{함수 } f(x) \text{가 모든 실수에서 미분가능하므로 } x=3 \text{에서 미}$$

분가능하다. 즉,  $x=3$ 에서 연속이고  $f'(3)$ 이 존재한다.

$f(x)$ 가  $x=3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left\{ -\frac{1}{2}(x-a)^2 + b \right\} = f(3)$$

$$9 = -\frac{1}{2}(3-a)^2 + b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & (x < 3) \\ -x+a & (x > 3) \end{cases} \text{이고 } f'(3) \text{이 존재하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} 2x = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x+a)$$

$$6 = -3+a \quad \therefore a=9$$

$$a=9 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b=27$$

$$\therefore a+b=9+27=36$$

**24**  $x^6+ax^3+bx+3$ 을  $(x+1)^2$ 으로 나눈 몫을  $Q(x)$ 라고 하면

$$x^6+ax^3+bx+3=(x+1)^2Q(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에  $x=-1$ 을 대입하면

$$1-a-b+3=0$$

$$\therefore a+b=4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$6x^5+3ax^2+b=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$$

이 식의 양변에  $x=-1$ 을 대입하면

$$-6+3a+b=0$$

$$\therefore 3a+b=6 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면  $a=1, b=3$

$$\therefore a-b=1-3=-2$$

**참고**

다항식  $f(x)$ 를  $(x-a)^2$ 으로 나눌 때

- ① 나누어떨어지면  
 $\Leftrightarrow f(a)=0, f'(a)=0$
- ② 몫이  $Q(x)$ , 나머지가  $R(x)$ 이면  
 $\Leftrightarrow f(x)=(x-a)^2Q(x)+R(x)$ 에서  
 $f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)+R'(x)$

**08 접선의 방정식과 평균값 정리**

p. 32

- 01** 49    **02** ④    **03**  $y=3x-\frac{2}{3}, y=3x+\frac{2}{3}$   
**04** ④    **05**  $y=3x-1$     **06** ①    **07** 3  
**08** ②

- 01**  $f(x)=3x^3-2x+1$ 로 놓으면  $f'(x)=9x^2-2$   
곡선  $y=f(x)$  위의 점  $(-1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는  
 $f'(-1)=7$   
따라서 점  $(-1, 0)$ 에서의 접선의 방정식은  
 $y-0=7\{x-(-1)\} \quad \therefore y=7x+7$   
즉,  $a=7, b=7$ 이므로  
 $ab=7 \times 7=49$

- 02**  $f(x)=x^3-3x$ 로 놓으면  $f'(x)=3x^2-3$   
이 곡선 위의 점  $(2, 2)$ 에서의 접선의 기울기는  
 $f'(2)=9$ 이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는  $-\frac{1}{9}$   
이다.  
따라서 구하는 직선의 방정식은  
 $y-2=-\frac{1}{9}(x-2)$   
 $y=-\frac{1}{9}x+\frac{20}{9}$   
 $\therefore x+9y-20=0$

- 03**  $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+4x$ 로 놓으면  
 $f'(x)=-x^2+4$   
접선의 기울기가 3이므로 접점의  $x$ 좌표를  $a$ 라고 하면  
 $-a^2+4=3, a^2=1$   
 $\therefore a=\pm 1$   
따라서 접점의 좌표는  $(-1, -\frac{11}{3}), (1, \frac{11}{3})$ 이므로  
구하는 접선의 방정식은  
 $y-\left(-\frac{11}{3}\right)=3\{x-(-1)\}, y-\frac{11}{3}=3(x-1)$   
 $\therefore y=3x-\frac{2}{3}, y=3x+\frac{2}{3}$

- 04** 직선  $2x-y+7=0$ 에서  
 $y=2x+7$   
따라서 접선의 기울기는 2이다.  
 $f(x)=-x^2+6x+2$ 로 놓으면  
 $f'(x)=-2x+6$   
접선의 기울기가 2이므로 접점의  $x$ 좌표를  $a$ 라고 하면  
 $-2a+6=2$   
 $\therefore a=2$   
따라서 접점의 좌표는  $(2, 10)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은  
 $y-10=2(x-2)$   
 $\therefore y=2x+6$

- 05**  $f(x)=x^3-x^2+2x$ 로 놓으면  $f'(x)=3x^2-2x+2$   
접점의 좌표를  $(a, a^3-a^2+2a)$ 라고 하면 접선의 기울기는  
 $f'(a)=3a^2-2a+2$ 이므로 접선의 방정식은  
 $y-(a^3-a^2+2a)=(3a^2-2a+2)(x-a) \quad \dots\dots \textcircled{1}$   
이 직선이 점  $(0, -1)$ 을 지나므로  
 $-1-(a^3-a^2+2a)=(3a^2-2a+2) \times (-a)$   
 $2a^3-a^2-1=0$   
 $(a-1)(2a^2+a+1)=0$   
 $\therefore a=1$  ( $\because a$ 는 실수)  
 $a=1$ 을  $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은  
 $y=3x-1$

- 06  $f(x)=ax^3+b, g(x)=x^2-5x+6$ 으로 놓으면  
 $f'(x)=3ax^2, g'(x)=2x-5$   
 두 곡선이 점  $(1, 2)$ 에서 공통인 접선을 가지므로  
 $f(1)=g(1)$ 에서  $a+b=1-5+6$   
 $\therefore a+b=2$  ..... ㉠  
 $f'(1)=g'(1)$ 에서  $3a=2-5$   
 $\therefore a=-1$   
 $a=-1$ 을 ㉠에 대입하면  $b=3$   
 $\therefore ab=-1 \times 3=-3$

- 07 함수  $f(x)$ 는 닫힌구간  $[2, 4]$ 에서 연속이고 열린구간  $(2, 4)$ 에서 미분가능하며  $f(2)=f(4)=8$ 이므로 롤의 정리에 의하여  $f'(c)=0$ 인  $c$ 가 2와 4 사이에 적어도 하나 존재한다.  
 $f'(x)=-2x+6$ 이므로  
 $f'(c)=-2c+6=0$   
 $\therefore c=3$

- 08 함수  $f(x)$ 는 닫힌구간  $[-3, 2]$ 에서 연속이고 열린구간  $(-3, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여  
 $\frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)}=f'(c)$ 인  $c$ 가  $-3$ 과  $2$  사이에 적어도 하나 존재한다.  
 $f'(x)=3x^2-2x$ 이므로  
 $\frac{5-(-35)}{2-(-3)}=3c^2-2c$   
 $3c^2-2c-8=0$   
 $(3c+4)(c-2)=0$   
 $\therefore c=-\frac{4}{3} (\because -3 < c < 2)$

### 09 함수의 극대와 극소

p. 34

01 (1) 감소 (2) 증가

02 구간  $(-\infty, 0], [1, \infty)$ 에서 증가,

닫힌구간  $[0, 1]$ 에서 감소 03  $-3 \leq k \leq 3$

04 ④ 05 ③ 06 극댓값: 없다., 극솟값:  $\frac{5}{16}$

07 -12 08 ④

- 01 (1) 구간  $(1, \infty)$ 에서  $f'(x)=-6x+2 < 0$ 이므로  
 함수  $f(x)$ 는 구간  $(1, \infty)$ 에서 감소한다.  
 (2) 구간  $(-\infty, \infty)$ 에서  $f'(x)=12x^2+1 > 0$ 이므로  
 함수  $f(x)$ 는 구간  $(-\infty, \infty)$ 에서 증가한다.

- 02  $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$   
 $f'(x)=0$ 에서  $x=0$  또는  $x=1$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ... | 0 | ... | 1 | ... |
|---------|-----|---|-----|---|-----|
| $f'(x)$ | +   | 0 | -   | 0 | +   |
| $f(x)$  | ↗   | 1 | ↘   | 0 | ↗   |

따라서 함수  $f(x)$ 는 구간  $(-\infty, 0], [1, \infty)$ 에서 증가하고, 닫힌구간  $[0, 1]$ 에서 감소한다.

- 03 함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면

$$f'(x)=-3x^2+2kx-3 \leq 0$$

위의 이차부등식이 모든 실수  $x$ 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식  $f'(x)=0$ 의 판별식을  $D$ 라고 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-9 \leq 0$$

$$(k+3)(k-3) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq k \leq 3$$

#### 참고

이차부등식이 항상 성립할 조건

① 모든 실수  $x$ 에 대하여  $ax^2+bx+c > 0$ 이면

$$\Leftrightarrow a > 0, b^2-4ac < 0$$

② 모든 실수  $x$ 에 대하여  $ax^2+bx+c \geq 0$ 이면

$$\Leftrightarrow a > 0, b^2-4ac \leq 0$$

③ 모든 실수  $x$ 에 대하여  $ax^2+bx+c < 0$ 이면

$$\Leftrightarrow a < 0, b^2-4ac < 0$$

④ 모든 실수  $x$ 에 대하여  $ax^2+bx+c \leq 0$ 이면

$$\Leftrightarrow a < 0, b^2-4ac \leq 0$$

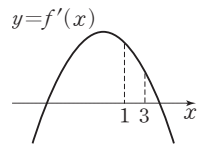
- 04 함수  $f(x)$ 가 열린구간  $(1, 3)$ 에서 증가하므로 이 구간에서  $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$$f'(x)=-3x^2-6x+3a$$

$$=-3(x+1)^2+3a+3$$

이므로  $y=f'(x)$ 의 그래프가 오른쪽

쪽 그림과 같아야 한다.



$$f'(1)=-3-6+3a \geq 0 \text{에서}$$

$$a \geq 3$$

..... ㉠

$$f'(3)=-27-18+3a \geq 0 \text{에서 } a \geq 15$$

..... ㉡

㉠, ㉡에서  $a \geq 15$

따라서  $a$ 의 최솟값은 15이다.

- 05 ㄱ. 구간  $(-\infty, a)$ 에서  $f'(x) > 0$ 이므로 함수  $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다. (거짓)  
 ㄴ. 열린구간  $(b, c)$ 에서  $f'(x) < 0$ 이므로 함수  $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다. (거짓)  
 ㄷ.  $f'(a)=0$ 이고  $x=a$ 의 좌우에서  $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄹ.  $f'(c)=0$ 이고  $x=c$ 의 좌우에서  $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로  $f(x)$ 는  $x=c$ 에서 극솟값을 갖는다. (참)  
이상에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

06  $f'(x)=4x^3-6x^2$   
 $=2x^2(2x-3)$

$f'(x)=0$ 에서  $x=0$  또는  $x=\frac{3}{2}$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ...        | 0 | ...        | $\frac{3}{2}$  | ...        |
|---------|------------|---|------------|----------------|------------|
| $f'(x)$ | -          | 0 | -          | 0              | +          |
| $f(x)$  | $\searrow$ | 2 | $\searrow$ | $\frac{5}{16}$ | $\nearrow$ |

따라서 함수  $f(x)$ 는 극댓값을 갖지 않고,  $x=\frac{3}{2}$ 일 때 극솟값  $\frac{5}{16}$ 를 갖는다.

07  $f'(x)=3x^2-6x-9$   
 $=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$ 에서  $x=-1$  또는  $x=3$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ...        | -1 | ...        | 3   | ...        |
|---------|------------|----|------------|-----|------------|
| $f'(x)$ | +          | 0  | -          | 0   | +          |
| $f(x)$  | $\nearrow$ | 10 | $\searrow$ | -22 | $\nearrow$ |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=-1$ 일 때 극댓값 10을 갖고,  $x=3$ 일 때 극솟값 -22를 갖는다.

즉,  $M=10$ ,  $m=-22$ 이므로

$M+m=10+(-22)=-12$

08  $f'(x)=-3x^2+a$

함수  $f(x)$ 가  $x=1$ 에서 극댓값 4를 가지므로

$f(1)=-1+a+b=4$

$\therefore a+b=5$

..... ㉠

$f'(1)=-3+a=0$

$\therefore a=3$

$a=3$ 을 ㉠에 대입하면  $b=2$

$\therefore ab=3 \times 2=6$

## 10 함수의 그래프

p. 36

01 풀이 참조

02 풀이 참조

03 ㉢

04  $a < 0$  또는  $0 < a < \frac{3}{2}$

05 최댓값: -2, 최솟값: -11

06 ㉢

07 ㉤

08 ㉣

01 (1)  $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x$ 에서

$f'(x)=2x^2-2=2(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ 에서  $x=-1$  또는  $x=1$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

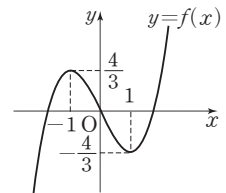
| $x$     | ...        | -1            | ...        | 1              | ...        |
|---------|------------|---------------|------------|----------------|------------|
| $f'(x)$ | +          | 0             | -          | 0              | +          |
| $f(x)$  | $\nearrow$ | $\frac{4}{3}$ | $\searrow$ | $-\frac{4}{3}$ | $\nearrow$ |

따라서  $f(x)$ 는  $x=-1$ 일 때

극댓값  $\frac{4}{3}$ ,  $x=1$ 일 때 극솟값

$-\frac{4}{3}$ 를 가지므로 함수  $f(x)$ 의

그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2)  $f(x)=-x^3+3x^2-3x$ 에서

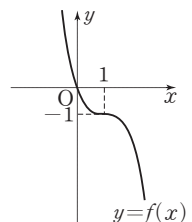
$f'(x)=-3x^2+6x-3=-3(x-1)^2$

$f'(x)=0$ 에서  $x=1$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ...        | 1  | ...        |
|---------|------------|----|------------|
| $f'(x)$ | -          | 0  | -          |
| $f(x)$  | $\searrow$ | -1 | $\searrow$ |

따라서  $f(x)$ 는 극값을 갖지 않으므로 함수  $f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



02 (1)  $f(x)=x^4-4x^3+4x^2+1$ 에서

$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$ 에서  $x=0$  또는  $x=1$  또는  $x=2$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

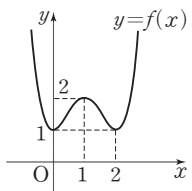
| $x$     | ...        | 0 | ...        | 1 | ...        | 2 | ...        |
|---------|------------|---|------------|---|------------|---|------------|
| $f'(x)$ | -          | 0 | +          | 0 | -          | 0 | +          |
| $f(x)$  | $\searrow$ | 1 | $\nearrow$ | 2 | $\searrow$ | 1 | $\nearrow$ |

따라서  $f(x)$ 는  $x=1$ 일 때 극댓값

2,  $x=0$ ,  $x=2$ 일 때 극솟값 1을

가지므로 함수  $f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.



(2)  $f(x) = -x^4 + 2x^3$ 에서

$$f'(x) = -4x^3 + 6x^2 = -2x^2(2x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}$$

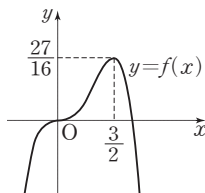
함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ... | 0 | ... | $\frac{3}{2}$   | ... |
|---------|-----|---|-----|-----------------|-----|
| $f'(x)$ | +   | 0 | +   | 0               | -   |
| $f(x)$  | ↗   | 0 | ↗   | $\frac{27}{16}$ | ↘   |

따라서  $f(x)$ 는  $x=\frac{3}{2}$ 일 때 극댓

값  $\frac{27}{16}$ 을 가지므로 함수  $f(x)$ 의

그래프는 오른쪽 그림과 같다.



03  $f'(x) = 6x^2 - 12x + a$

함수  $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 방정식  $f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

방정식  $f'(x) = 0$ 의 판별식을  $D$ 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 36 - 6a \leq 0 \quad \therefore a \geq 6$$

따라서  $a$ 의 최솟값은 6이다.

04  $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 6ax$

$$= 2x(2x^2 - 6x + 3a)$$

사차항의 계수가 양수인 사차함수  $f(x)$ 가 극댓값을 가지면 방정식  $f'(x) = 0$ 은 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f'(x) = 0$ 의 한 근이  $x=0$ 이므로 방정식  $2x^2 - 6x + 3a = 0$ 은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i)  $x=0$ 이  $2x^2 - 6x + 3a = 0$ 의 근이 아니므로

$$a \neq 0$$

(ii) 방정식  $2x^2 - 6x + 3a = 0$ 의 판별식을  $D$ 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 9 - 6a > 0$$

$$\therefore a < \frac{3}{2}$$

(i), (ii)에 의하여  $a < 0$  또는  $0 < a < \frac{3}{2}$

**참고**

최고차항의 계수가 양수인 사차함수가 극댓값을 갖거나 갖지 않을 조건

최고차항의 계수가 양수인 사차함수  $f(x)$ 에 대하여

①  $f(x)$ 가 극댓값을 갖는다.

⇨ 삼차방정식  $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖는다.

②  $f(x)$ 가 극댓값을 갖지 않는다.

⇨ 삼차방정식  $f'(x) = 0$ 은 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 갖는다.

05  $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 3$ 에서

$$f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

닫힌구간  $[-2, 1]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | -2  | ... | -1 | ... | 0  | ... | 1  |
|---------|-----|-----|----|-----|----|-----|----|
| $f'(x)$ |     | +   | 0  | -   | 0  | +   | 0  |
| $f(x)$  | -11 | ↗   | -2 | ↘   | -3 | ↗   | -2 |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=-1, x=1$ 일 때 최댓값  $-2$ ,

$x=-2$ 일 때 최솟값  $-11$ 을 갖는다.

06  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + m$ 에서

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=2 \quad (\because 0 \leq x \leq 3)$$

닫힌구간  $[0, 3]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | 0   | ... | 2       | ... | 3      |
|---------|-----|-----|---------|-----|--------|
| $f'(x)$ |     | -   | 0       | +   |        |
| $f(x)$  | $m$ | ↘   | $-20+m$ | ↗   | $-9+m$ |

$-20+m < -9+m$ 이므로 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 일 때 최댓값  $m$ ,  $x=2$ 일 때 최솟값  $-20+m$ 을 갖는다.

이때 함수  $f(x)$ 의 최솟값이  $-8$ 이므로

$$-20+m = -8$$

$$\therefore m = 12$$

따라서 최댓값은 12이다.

07  $f(x) = ax^3 - 6ax^2 + b$ 에서

$$f'(x) = 3ax^2 - 12ax = 3ax(x-4) \quad (a > 0)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \quad (\because -1 \leq x \leq 2)$$

닫힌구간  $[-1, 2]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | -1      | ... | 0   | ... | 2        |
|---------|---------|-----|-----|-----|----------|
| $f'(x)$ |         | +   | 0   | -   |          |
| $f(x)$  | $-7a+b$ | ↗   | $b$ | ↘   | $-16a+b$ |

$a > 0$ 이므로  $-16a+b < -7a+b < b$

즉, 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 일 때 최댓값  $b$ ,  $x=2$ 일 때 최솟값  $-16a+b$ 를 갖는다.

이때 함수  $f(x)$ 의 최댓값이 3, 최솟값이  $-29$ 이므로

$$b = 3, -16a + b = -29$$

$$\therefore a = 2, b = 3$$

$$\therefore a + b = 2 + 3 = 5$$

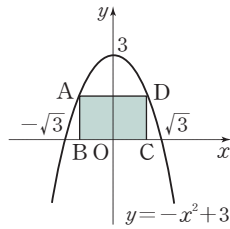
08  $-x^2 + 3 = 0$ 에서

$$x^2 - 3 = 0$$

$$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x = -\sqrt{3} \text{ 또는 } x = \sqrt{3}$$

다음 그림에서  $C(a, 0)$  ( $0 < a < \sqrt{3}$ )이라고 하면  
 $A(-a, -a^2+3)$ ,  $B(-a, 0)$ ,  $D(a, -a^2+3)$



직사각형 ABCD의 넓이를  $S(a)$ 라고 하면

$$S(a) = 2a(-a^2+3) = -2a^3+6a$$

$$S'(a) = -6a^2+6$$

$$= -6(a+1)(a-1)$$

$$S'(a)=0 \text{에서 } a=1 \text{ (} \because 0 < a < \sqrt{3} \text{)}$$

$0 < a < \sqrt{3}$ 에서  $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $a$     | (0) | ... | 1 | ... | $(\sqrt{3})$ |
|---------|-----|-----|---|-----|--------------|
| $S'(a)$ |     | +   | 0 | -   |              |
| $S(a)$  |     | ↗   | 4 | ↘   |              |

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는  $a=1$ 일 때 최대이고 그때의 넓이는 4이다.

### 실력 확인 문제

08 09 10 p. 38

- 01 ②    02 ④    03 ①    04 ③    05 ②  
 06 ②    07 ⑤    08 ④    09 ③    10 ①  
 11 ④    12  $a \geq \frac{4}{3}$     13 ④    14 ②    15 ③  
 16 ③    17 16    18 ③  
 19  $a=0$  또는  $a \leq -\frac{9}{2}$     20 ⑤    21 ①  
 22 ①    23  $\angle, \square$     24 ⑤

- 01  $f(x)=4x^2+ax+b$ 로 놓으면 곡선  $y=f(x)$ 가 점  $(2, -1)$ 을 지나므로  
 $f(2)=16+2a+b=-1$   
 $\therefore 2a+b=-17$  ..... ㉠  
 또, 곡선  $y=f(x)$ 가 점  $(2, -1)$ 에서 직선  $y=x-3$ 에 접하므로  
 $f'(2)=1$   
 $f'(x)=8x+a$ 이므로  
 $f'(2)=16+a=1$   
 $\therefore a=-15$   
 $a=-15$ 를 ㉠에 대입하면  
 $b=13$   
 $\therefore a+b=-15+13=-2$

- 02  $f(x)=x^3-2x^2+4$ 로 놓으면  $f'(x)=3x^2-4x$

이 곡선 위의 점  $(1, 3)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=-1$$

이므로 접선의 방정식은

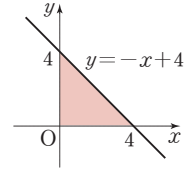
$$y-3=-(x-1)$$

$$\therefore y=-x+4$$

따라서 접선의  $x$ 절편,  $y$ 절편은

각각 4, 4이므로 접선과  $x$ 축 및  $y$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$



- 03  $f(x)=2x^3+ax+b$ 로 놓으면 곡선  $y=f(x)$ 가 점  $(1, 1)$ 을 지나므로

$$f(1)=2+a+b=1$$

$$\therefore a+b=-1$$
 ..... ㉠

$f'(x)=6x^2+a$ 이므로 점  $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=6+a$$

접선과 수직인 직선의 기울기가  $-\frac{1}{2}$ 이므로

$$6+a=2$$

$$\therefore a=-4$$

$a=-4$ 를 ㉠에 대입하면  $b=3$

$$\therefore a^2+b^2=(-4)^2+3^2=25$$

- 04  $f(x)=x^2-4x+7$ 로 놓으면

$$f'(x)=2x-4$$

접선이 직선  $y=2x-5$ 에 평행하므로 접선의 기울기는 2이다.

접점의  $x$ 좌표를  $a$ 라고 하면

$$f'(a)=2a-4=2$$

$$\therefore a=3$$

접점의 좌표는  $(3, 4)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-4=2(x-3)$$

$$\therefore y=2x-2$$

따라서  $a=2$ ,  $b=-2$ 이므로

$$ab=2 \times (-2) = -4$$

- 05  $f(x)=x^3-x$ 로 놓으면  $f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를  $(t, t^3-t)$ 라고 하면 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2-1$$
이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2-1)x-t^3+t$$

이 직선이 점  $(1, -1)$ 을 지나므로

$$-1=3t^2-1-t^3+t$$

$$t(t-2)=0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=2$$

따라서 두 접선의 기울기의 합은

$$f'(0)+f'(2)=-1+3=2$$

- 06  $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx$ 로 놓으면  
 $f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$   
 점  $(-2, 4)$ 가 곡선  $y=f(x)$  위의 점이므로  
 $f(-2) = 8 + 4a - 2b = 4$   
 $\therefore 2a - b = -2$  ..... ㉠  
 점  $(-2, 4)$ 에서의 접선의 기울기가  $-2$ 이므로  
 $f'(-2) = -12 - 4a + b = -2$   
 $\therefore 4a - b = -10$  ..... ㉡  
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면  $a = -4, b = -6$   
 $\therefore b - a = -6 - (-4) = -2$

- 07 함수  $g(x)$ 의 도함수가  $f(x)$ 이므로  
 $g'(x) = f(x)$   
 곡선  $y=g(x)$  위의 점  $(2, g(2))$ 에서의 접선의 기울기는  
 $g'(2) = f(2) = 1$   
 이때 접선의  $y$ 절편이  $-5$ 이므로 접선의 방정식은  
 $y = x - 5$   
 따라서 이 접선의  $x$ 절편은  $5$ 이다.

- 08  $f(x) = x^2 + ax + b, g(x) = -x^3 + 3$ 으로 놓으면  
 $f'(x) = 2x + a, g'(x) = -3x^2$   
 점  $(1, 2)$ 가 곡선  $y=f(x)$  위의 점이므로  
 $f(1) = g(1)$ 에서  $1 + a + b = 2$   
 $\therefore a + b = 1$  ..... ㉠  
 점  $(1, 2)$ 에서 공통인 접선을 가지므로  
 $f'(1) = g'(1)$ 에서  $2 + a = -3 \quad \therefore a = -5$   
 $a = -5$ 를 ㉠에 대입하면  $b = 6$   
 $\therefore ab = -5 \times 6 = -30$

- 09 함수  $f(x)$ 는 닫힌구간  $[-2, 2]$ 에서 연속이고 열린구간  
 $(-2, 2)$ 에서 미분가능하며  $f(-2) = f(2) = 0$ 이므로 롤  
 의 정리에 의하여  $f'(c) = 0$ 인  $c$ 가  $-2$ 와  $2$  사이에 적어도  
 하나 존재한다.  
 $f'(x) = 12x^3 - 12x$ 이므로  
 $f'(c) = 12c^3 - 12c = 0$   
 $12c(c+1)(c-1) = 0$   
 $\therefore c = -1$  또는  $c = 0$  또는  $c = 1$   
 따라서 구하는 상수  $c$ 의 개수는  $3$ 이다.

- 10 평균값 정리를 만족시키는 상수는  $-2$ 이므로  
 $\frac{f(0) - f(k)}{0 - k} = f'(-2)$  (단,  $k < -2$ )  
 이때  $f'(x) = 3x^2 + 6x$ 이므로  
 $\frac{0 - (k^3 + 3k^2)}{0 - k} = 0, k^2 + 3k = 0$   
 $k(k+3) = 0$   
 $\therefore k = -3$  ( $\because k < -2$ )

- 11  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ 이고 열린구간  $(1, a)$ 에서 함수  $f(x)$   
 가 감소하므로 이 구간에서  $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.  
 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \leq 0$ 에서  
 $3(x+1)(x-3) \leq 0$   
 $\therefore -1 \leq x \leq 3$   
 따라서  $a \leq 3$ 이어야 하므로  $a$ 의 최댓값은  $3$ 이다.

- 12 함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수  
 $x$ 에서  $f'(x) = 3x^2 + 4x + a \geq 0$ 이어야 한다.  
 위의 이차부등식이 모든 실수  $x$ 에 대하여 성립해야 하므로  
 이차방정식  $f'(x) = 0$ 의 판별식을  $D$ 라고 하면  
 $\frac{D}{4} = 4 - 3a \leq 0$   
 $\therefore a \geq \frac{4}{3}$

- 13  $x_1 < x_2$ 인 임의의 실수  $x_1, x_2$ 에 대하여  $f(x_1) > f(x_2)$ 가 되  
 려면 함수  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 감소하여야 한다.  
 즉, 모든 실수  $x$ 에서  $f'(x) = -x^2 + 2ax - (5a - 4) \leq 0$   
 이어야 하므로 이차방정식  $f'(x) = 0$ 의 판별식을  $D$ 라고  
 하면  
 $\frac{D}{4} = a^2 - (5a - 4) \leq 0$   
 $a^2 - 5a + 4 \leq 0$   
 $(a-1)(a-4) \leq 0$   
 $\therefore 1 \leq a \leq 4$   
 따라서 구하는 정수  $a$ 는  $1, 2, 3, 4$ 의  $4$ 개이다.

- 14  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 2$ 에서  
 $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$   
 $f'(x) = 0$ 에서  $x = 1$  또는  $x = 2$   
 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ...        | 1 | ...        | 2 | ...        |
|---------|------------|---|------------|---|------------|
| $f'(x)$ | +          | 0 | -          | 0 | +          |
| $f(x)$  | $\nearrow$ | 7 | $\searrow$ | 6 | $\nearrow$ |

따라서  $f(x)$ 는  $x = 1$ 일 때 극댓값  $7$ 을 가지므로  
 $a = 1, b = 7$   
 $\therefore ab = 1 \times 7 = 7$

- 15  $f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$   
 $f(x)$ 가  $x = 0, x = 1$ 에서 각각 극값을 가지므로  
 $f'(0) = 0, f'(1) = 0$   
 즉,  $b = 0, 6 + 2a + b = 0$ 이므로  
 $a = -3, b = 0$   
 $\therefore a + b = (-3) + 0 = -3$

- 16  $f(x) = x^3 - 3kx^2 - 9k^2x + 2$ 에서  
 $f'(x) = 3x^2 - 6kx - 9k^2 = 3(x+k)(x-3k)$  ( $k > 0$ )  
 $f'(x) = 0$ 에서  $x = -k$  또는  $x = 3k$

|         |     |          |     |            |     |
|---------|-----|----------|-----|------------|-----|
| $x$     | ... | $-k$     | ... | $3k$       | ... |
| $f'(x)$ | +   | 0        | -   | 0          | +   |
| $f(x)$  | ↗   | $5k^3+2$ | ↘   | $-27k^3+2$ | ↗   |

$k > 0$ 이므로  $5k^3+2 > -27k^3+2$   
 따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = -k$ 일 때 극댓값  $5k^3+2$ 를 갖고,  
 $x = 3k$ 일 때 극솟값  $-27k^3+2$ 를 갖는다.  
 이때 함수  $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 합은  $-18$ 이므로  
 $(5k^3+2) + (-27k^3+2) = -18$   
 $-22k^3+4 = -18, k^3=1 \quad \therefore k=1$

- 17  $g'(x) = 3x^2f(x) + (x^3+2)f'(x)$   
 $g(x)$ 가  $x=1$ 에서 극솟값 24를 가지므로  
 $g'(1)=0, g(1)=24$   
 $g'(1)=0$ 에서  $3f(1)+3f'(1)=0$  ..... ㉠  
 $g(1)=24$ 에서  $3f(1)=24$   
 $\therefore f(1)=8$   
 $f(1)=8$ 을 ㉠에 대입하면  $f'(1)=-8$   
 $\therefore f(1)-f'(1)=8-(-8)=16$

- 18  $f'(x) = x^2 - 4ax + 3a$   
 함수  $f(x)$ 가 극값을 가지려면 방정식  $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.  
 방정식  $f'(x)=0$ 의 판별식을  $D$ 라고 하면  
 $\frac{D}{4} = 4a^2 - 3a > 0$   
 $a(4a-3) > 0$   
 $\therefore a < 0$  또는  $a > \frac{3}{4}$   
 따라서  $a$ 의 값이 될 수 없는 것은 ㉢이다.

- 19  $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 2ax = 2x(2x^2 + 6x - a)$   
 사차항의 계수가 양수인 사차함수  $f(x)$ 가 극댓값을 갖지 않으려면 방정식  $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근을 갖거나 삼중근을 가져야 한다.  
 (i)  $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 가질 때  
 $2x(2x^2+6x-a)=0$ 의 한 근이  $x=0$ 이므로 이차방정식  $2x^2+6x-a=0$ 이 두 허근을 가져야 한다.  
 따라서 이차방정식  $2x^2+6x-a=0$ 의 판별식을  $D$ 라고 하면  
 $\frac{D}{4} = 9+2a < 0$   
 $\therefore a < -\frac{9}{2}$   
 (ii)  $f'(x)=0$ 이 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가질 때  
 $2x(2x^2+6x-a)=0$ 의 한 근이  $x=0$ 이므로 이차방정

식  $2x^2+6x-a=0$ 이  $x=0$ 을 근으로 갖거나 중근을 가져야 한다.

$2x^2+6x-a=0$ 이  $x=0$ 을 근으로 가지면

$$0-a=0 \quad \therefore a=0$$

$2x^2+6x-a=0$ 이 중근을 가지면 판별식을  $D$ 라고 할 때

$$\frac{D}{4} = 9+2a=0$$

$$\therefore a = -\frac{9}{2}$$

(i), (ii)에 의하여

$$a=0 \text{ 또는 } a \leq -\frac{9}{2}$$

- 20  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ 에서  
 $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x+2)(x-2)$   
 $f'(x)=0$ 에서  $x = -2$  또는  $x=0$  또는  $x=2$   
 닫힌구간  $[-2, 3]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |     |     |   |     |     |     |    |
|---------|-----|-----|---|-----|-----|-----|----|
| $x$     | -2  | ... | 0 | ... | 2   | ... | 3  |
| $f'(x)$ | 0   | +   | 0 | -   | 0   | +   |    |
| $f(x)$  | -11 | ↗   | 5 | ↘   | -11 | ↗   | 14 |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=3$ 일 때 최댓값 14,  $x=-2, x=2$ 일 때 최솟값 -11을 갖는다.

즉,  $M=14, m=-11$ 이므로

$$M+m=14+(-11)=3$$

- 21  $f(x) = -x^3 + 3x^2 + a$ 에서  
 $f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$   
 $f'(x)=0$ 에서  $x=0$  또는  $x=2$   
 닫힌구간  $[-2, 2]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |        |     |     |     |       |
|---------|--------|-----|-----|-----|-------|
| $x$     | -2     | ... | 0   | ... | 2     |
| $f'(x)$ |        | -   | 0   | +   | 0     |
| $f(x)$  | $20+a$ | ↘   | $a$ | ↗   | $4+a$ |

$a < 4+a < 20+a$ 이므로 함수  $f(x)$ 는  $x=-2$ 일 때 최댓값  $20+a$ ,  $x=0$ 일 때 최솟값  $a$ 를 갖는다.

이때 최솟값이 -4이므로  $a=-4$

따라서 최댓값은  $20+a=20+(-4)=16$

- 22  $f(x) = ax^4 - 4ax^3 + b$  ( $a > 0$ )에서  
 $f'(x) = 4ax^3 - 12ax^2 = 4ax^2(x-3)$   
 $f'(x)=0$ 에서  $x=3$  ( $\because 1 \leq x \leq 4$ )  
 닫힌구간  $[1, 4]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |         |     |          |     |     |
|---------|---------|-----|----------|-----|-----|
| $x$     | 1       | ... | 3        | ... | 4   |
| $f'(x)$ |         | -   | 0        | +   |     |
| $f(x)$  | $-3a+b$ | ↘   | $-27a+b$ | ↗   | $b$ |

$$a > 0 \text{이므로 } -27a + b < -3a + b < b$$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=4$ 일 때 최댓값  $b$ ,  $x=3$ 일 때 최솟값  $-27a+b$ 를 갖는다.

이때 함수  $f(x)$ 의 최댓값이 3, 최솟값이  $-6$ 이므로

$$b=3, -27a+b=-6$$

$$\therefore a=\frac{1}{3}, b=3$$

$$\therefore ab=\frac{1}{3} \times 3=1$$

- 23**  $y=f'(x)$ 의 그래프가  $x$ 축과  $x=-1, x=1, x=2, x=3$ 에서 만나므로  $f'(x)=0$ 에서

$$x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=3$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ...        | -1 | ...        | 1  | ...        | 2 | ...        | 3  | ...        |
|---------|------------|----|------------|----|------------|---|------------|----|------------|
| $f'(x)$ | -          | 0  | +          | 0  | -          | 0 | -          | 0  | +          |
| $f(x)$  | $\searrow$ | 극소 | $\nearrow$ | 극대 | $\searrow$ |   | $\searrow$ | 극소 | $\nearrow$ |

ㄱ.  $y=f(x)$ 는  $x=1$ 일 때만 극댓값을 가지므로 1개의 극댓값을 갖는다. (거짓)

ㄴ.  $y=f(x)$ 는  $x=-1, x=3$ 일 때 극솟값을 가지므로 두 개의 극솟값을 갖는다. (참)

ㄷ.  $-1 \leq x \leq 3$ 에서  $x=1$ 일 때 극대이고 최대이다. (참)

ㄹ.  $-1 \leq x \leq 3$ 에서  $f(-1), f(3)$  중 작은 값이 최솟값이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

- 24** 잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이를  $x$  cm ( $0 < x < 6$ )라고 하면 상자의 밑면의 한 변의 길이는  $(12-2x)$  cm, 높이는  $x$  cm이다.

상자의 부피를  $V(x)$  cm<sup>3</sup>라고 하면

$$V(x)=x(12-2x)^2$$

$$=4x^3-48x^2+144x \quad (0 < x < 6)$$

$$V'(x)=12x^2-96x+144$$

$$=12(x-2)(x-6)$$

$$V'(x)=0 \text{에서 } x=2 \quad (\because 0 < x < 6)$$

$V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | (0) | ...        | 2   | ...        | (6) |
|---------|-----|------------|-----|------------|-----|
| $V'(x)$ |     | +          | 0   | -          |     |
| $V(x)$  |     | $\nearrow$ | 128 | $\searrow$ |     |

따라서  $V(x)$ 는  $x=2$ 일 때 극대이고 최대이므로 상자의 부피의 최댓값은  $V(2)=128(\text{cm}^3)$ 이다.

## 11 방정식과 부등식에의 활용

p. 42

- 01** (1) 3 (2) 1 (3) 4

- 02** (1)  $0 < k < 1$  (2)  $k=0$  또는  $k=1$  (3)  $k < 0$  또는  $k > 1$

- 03** 22 **04** ② **05** ④ **06** 풀이 참조

- 07**  $k > 1$  **08** ②

- 01** (1)  $f(x)=x^3-3x^2+1$ 이라고 하면

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

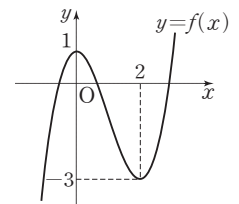
$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ...        | 0 | ...        | 2  | ...        |
|---------|------------|---|------------|----|------------|
| $f'(x)$ | +          | 0 | -          | 0  | +          |
| $f(x)$  | $\nearrow$ | 1 | $\searrow$ | -3 | $\nearrow$ |

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래

프는 오른쪽 그림과 같고  $x$ 축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



- (2)  $f(x)=-2x^3+3x^2+4$ 라고 하면

$$f'(x)=-6x^2+6x=-6x(x-1)$$

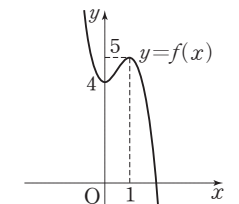
$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ...        | 0 | ...        | 1 | ...        |
|---------|------------|---|------------|---|------------|
| $f'(x)$ | -          | 0 | +          | 0 | -          |
| $f(x)$  | $\searrow$ | 4 | $\nearrow$ | 5 | $\searrow$ |

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래

프는 오른쪽 그림과 같고  $x$ 축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



- (3)  $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x-2$ 라고 하면

$$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12$$

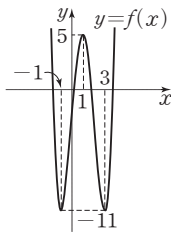
$$=4(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ...        | -1  | ...        | 1 | ...        | 3   | ...        |
|---------|------------|-----|------------|---|------------|-----|------------|
| $f'(x)$ | -          | 0   | +          | 0 | -          | 0   | +          |
| $f(x)$  | $\searrow$ | -11 | $\nearrow$ | 5 | $\searrow$ | -11 | $\nearrow$ |

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고  $x$ 축과 서로 다른 네 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.



**02**  $f(x)=2x^3-3x^2+k$ 라고 하면

$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ... | 0   | ... | 1      | ... |
|---------|-----|-----|-----|--------|-----|
| $f'(x)$ | +   | 0   | -   | 0      | +   |
| $f(x)$  | ↗   | $k$ | ↘   | $-1+k$ | ↗   |

따라서  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 극댓값  $k$ ,  $x=1$ 에서 극솟값  $-1+k$ 를 갖는다.

(1) (극댓값)  $\times$  (극솟값)  $< 0$ 이어야 하므로

$$k(-1+k) < 0$$

$$\therefore 0 < k < 1$$

(2) (극댓값)  $\times$  (극솟값)  $= 0$ 이어야 하므로

$$k(-1+k) = 0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=1$$

(3) (극댓값)  $\times$  (극솟값)  $> 0$ 이어야 하므로

$$k(-1+k) > 0$$

$$\therefore k < 0 \text{ 또는 } k > 1$$

**03**  $f(x)=x^3-3x^2-9x+k$ 라고 하면

$$f'(x)=3x^2-6x-9$$

$$=3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ... | -1    | ... | 3       | ... |
|---------|-----|-------|-----|---------|-----|
| $f'(x)$ | +   | 0     | -   | 0       | +   |
| $f(x)$  | ↗   | $5+k$ | ↘   | $-27+k$ | ↗   |

따라서  $f(x)$ 는  $x=-1$ 에서 극댓값  $5+k$ ,  $x=3$ 에서 극솟값  $-27+k$ 를 갖는다.

삼차방정식  $f(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$$(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) = 0$$

$$(5+k)(-27+k) = 0$$

$$\therefore k=-5 \text{ 또는 } k=27$$

따라서 모든 실수  $k$ 의 값의 합은

$$-5+27=22$$

**04** 두 곡선  $y=2x^3-x^2-6x$ ,  $y=2x^2+6x-k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 방정식

$$2x^3-x^2-6x=2x^2+6x-k, \text{ 즉 } 2x^3-3x^2-12x+k=0$$

이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x+k \text{로 놓으면}$$

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

$f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ... | -1    | ... | 2       | ... |
|---------|-----|-------|-----|---------|-----|
| $f'(x)$ | +   | 0     | -   | 0       | +   |
| $f(x)$  | ↗   | $7+k$ | ↘   | $-20+k$ | ↗   |

따라서  $f(x)$ 는  $x=-1$ 에서 극댓값  $7+k$ ,  $x=2$ 에서 극솟값은  $-20+k$ 를 갖는다.

삼차방정식  $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지므로

$$(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) < 0$$

$$(7+k)(-20+k) < 0$$

$$\therefore -7 < k < 20$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 음의 정수  $k$ 는

$-6, -5, -4, -3, -2, -1$ 의 6개이다.

**05**  $f(x)=2x^3-6x+k$ 로 놓으면

$$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ... | -1    | ... | 1      | ... |
|---------|-----|-------|-----|--------|-----|
| $f'(x)$ | +   | 0     | -   | 0      | +   |
| $f(x)$  | ↗   | $4+k$ | ↘   | $-4+k$ | ↗   |

따라서  $f(x)$ 는  $x=-1$ 에서 극댓값  $4+k$ ,  $x=1$ 에서 극솟값은  $-4+k$ 를 갖는다.

방정식  $f(x)=0$ 이 한 개의 음의

근과 두 개의 서로 다른 양의 근

을 가지므로  $y=f(x)$ 의 그래프

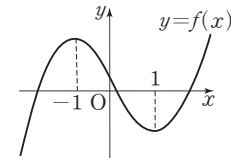
는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉, (극댓값)  $> 0$ , (극솟값)  $< 0$ ,

( $y$ 축과 만나는 점의  $y$ 좌표)  $> 0$ 이어야 하므로

$$4+k > 0, -4+k < 0, k > 0$$

$$\therefore 0 < k < 4$$



**06**  $f(x)=2x^3+3x^2$ 으로 놓으면

$$f'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=0$$

$x \geq -1$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | -1 | ... | 0 | ... |
|---------|----|-----|---|-----|
| $f'(x)$ | 0  | -   | 0 | +   |
| $f(x)$  | 1  | ↘   | 0 | ↗   |

따라서  $x \geq -1$ 에서 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 일 때 극소이면서 최소이다.

즉,  $f(x)$ 의 최솟값이  $f(0)=0$ 이므로  $x \geq -1$ 일 때 부등식

$$2x^3+3x^2 \geq 0 \text{이 항상 성립한다.}$$

07  $f(x)=3x^4-4x^3+k$ 라고 하면

$$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

$f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ...        | 0   | ...        | 1      | ...        |
|---------|------------|-----|------------|--------|------------|
| $f'(x)$ | -          | 0   | -          | 0      | +          |
| $f(x)$  | $\searrow$ | $k$ | $\searrow$ | $-1+k$ | $\nearrow$ |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 일 때 극소이면서 최소이다.

즉,  $f(x)$ 의 최솟값이  $f(1)=-1+k$ 이므로 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x)>0$ 이 항상 성립하려면

$$-1+k>0$$

$$\therefore k>1$$

08  $h(x)=f(x)-g(x)$ 로 놓으면

$$h(x)=(x^3+k)-(x^2+x+1)$$

$$=x^3-x^2-x+k-1$$

$$h'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$$

$$h'(x)=0 \text{에서 } x=1 (\because x \geq 0)$$

$x \geq 0$ 에서 함수  $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | 0     | ...        | 1     | ...        |
|---------|-------|------------|-------|------------|
| $h'(x)$ |       | -          | 0     | +          |
| $h(x)$  | $k-1$ | $\searrow$ | $k-2$ | $\nearrow$ |

$x \geq 0$ 에서 함수  $h(x)$ 는  $x=1$ 일 때 극소이면서 최소이다.

$x \geq 0$ 에서  $h(x) \geq 0$ 이려면

$$k-2 \geq 0$$

$$\therefore k \geq 2$$

따라서  $k$ 의 최솟값은 2이다.

02 점 P의 시각  $t$ 에서의 속도를  $v$ , 가속도를  $a$ 라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-2t-1, a=\frac{dv}{dt}=12t-2$$

속도가 3인 순간의 시각은

$$6t^2-2t-1=3, 3t^2-t-2=0$$

$$(3t+2)(t-1)=0 \quad \therefore t=1 (\because t>0)$$

따라서 시각  $t=1$ 에서의 점 P의 가속도는

$$a=12 \times 1 - 2 = 10$$

03 점 P의 시각  $t$ 에서의 속도를  $v$ 라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=-2t+4$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$v=-2t+4=0 \quad \therefore t=2$$

04  $t$ 초 후의 속도를  $v$ 라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=60-3t$$

기차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$$60-3t=0 \quad \therefore t=20$$

즉, 제동을 건 후 기차가 멈추는 것은 20초 후이다.

따라서 기차가 20초 동안 움직인 거리는

$$60 \times 20 - 1.5 \times 20^2 = 600(\text{m})$$

05  $t$ 초 후의 속도를  $v$ 라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=-10t+20$$

물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0 m/초이므로

$$-10t+20=0 \quad \therefore t=2$$

따라서 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은 2초이고, 그때의 높이는

$$x=-5 \times 2^2 + 20 \times 2 = 20(\text{m})$$

06 시각  $t$ 에서의 길이  $l$ 의 변화율은  $\frac{dl}{dt}=4t+1$ 이므로 시각

$$t=\frac{1}{2} \text{에서의 물체의 길이의 변화율은}$$

$$4 \times \frac{1}{2} + 1 = 3$$

07  $t$ 초 후의 직사각형의 가로의 길이는  $(10+t)$  cm, 세로의 길이는  $(6+2t)$  cm이므로  $t$ 초 후의 직사각형의 넓이를  $S \text{ cm}^2$ 라고 하면

$$S=(10+t)(6+2t)=2t^2+26t+60$$

시각  $t$ 에서의 넓이  $S$ 의 변화율은

$$\frac{dS}{dt}=4t+26$$

직사각형이 정사각형이 되는 순간은  $10+t=6+2t$ 이므로  $t=4$

따라서  $t=4$ 일 때, 직사각형의 넓이의 변화율은

$$4 \times 4 + 26 = 42(\text{cm}^2/\text{초})$$

## 12 속도와 가속도

p. 44

01 속도: 25, 가속도: 18

02 ①

03 2

04 ③

05 ①

06 ③

07 ③

08  $\frac{36}{5} \pi \text{ cm}^3/\text{초}$

01 점 P의 시각  $t$ 에서의 속도를  $v$ , 가속도를  $a$ 라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-2, a=\frac{dv}{dt}=6t$$

따라서 시각  $t=3$ 에서의 속도는

$$v=3 \times 3^2 - 2 = 25$$

가속도는

$$a=6 \times 3 = 18$$

- 08  $t$ 초 후의 풍선의 반지름의 길이를  $r$  cm, 부피를  $V$  cm<sup>3</sup>라고 하면

$$r = 2 + 0.2t$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(2+0.2t)^3$$

시간  $t$ 에서의 부피  $V$ 의 변화율은

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \times 3 \times (2+0.2t)^2 \times 0.2 = \frac{4}{5}\pi(2+0.2t)^2$$

따라서  $t=5$ 일 때, 부피가 증가하는 속도는

$$\frac{4}{5}\pi \times (2+0.2 \times 5)^2 = \frac{36}{5}\pi \text{ (cm}^3/\text{초)}$$

### 실력 확인 문제

11 12 p.46

- 01 ② 02 ② 03 ④ 04 ② 05 ⑤  
06 ② 07 ④ 08 12 09 ④ 10 ②  
11 1.1 m/초 12  $675\pi$  cm<sup>3</sup>/초

- 01  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 4 - k$ 로 놓으면

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ... | -3     | ... | 1      | ... |
|---------|-----|--------|-----|--------|-----|
| $f'(x)$ | +   | 0      | -   | 0      | +   |
| $f(x)$  | ↗   | $31-k$ | ↘   | $-1-k$ | ↗   |

따라서  $f(x)$ 는  $x = -3$ 일 때 극댓값  $31-k$ ,  $x = 1$ 일 때 극솟값  $-1-k$ 를 갖는다.

방정식  $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지므로

$$(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) < 0$$

$$(31-k)(-1-k) < 0$$

$$(k+1)(k-31) < 0$$

$$\therefore -1 < k < 31$$

즉, 주어진 조건을 만족시키는 정수  $k$ 는 0, 1, 2, ..., 30의 31개이다.

- 02 [1단계]

주어진 곡선과 직선이 한 점에서 접하고, 다른 한 점에서 만나려면 방정식  $x^3 - 4x + a = 8x$ , 즉  $x^3 - 12x + a = 0$ 이 한 실근과 중근을 가져야 한다. 즉, 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

[2단계]

$$f(x) = x^3 - 12x + a \text{로 놓으면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ... | -2     | ... | 2       | ... |
|---------|-----|--------|-----|---------|-----|
| $f'(x)$ | +   | 0      | -   | 0       | +   |
| $f(x)$  | ↗   | $16+a$ | ↘   | $-16+a$ | ↗   |

[3단계]

따라서  $f(x)$ 는  $x = -2$ 일 때 극댓값  $16+a$ ,  $x = 2$ 일 때 극솟값  $-16+a$ 를 갖는다.

방정식  $f(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$$(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) = 0$$

$$(16+a)(-16+a) = 0$$

$$\therefore a = 16 \text{ (} \because a > 0 \text{)}$$

- 03  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - a$ 로 놓으면

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

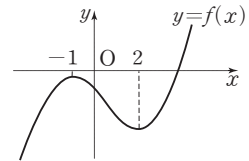
$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ... | -1    | ... | 2       | ... |
|---------|-----|-------|-----|---------|-----|
| $f'(x)$ | +   | 0     | -   | 0       | +   |
| $f(x)$  | ↗   | $7-a$ | ↘   | $-20-a$ | ↗   |

따라서  $f(x)$ 는  $x = -1$ 일 때 극댓값  $7-a$ ,  $x = 2$ 일 때 극솟값  $-20-a$ 를 갖는다.

방정식  $f(x) = 0$ 이 오직 양의 실근 1개만 가지므로  $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉,  $(\text{극댓값}) < 0$ 이어야 하므로

$$7-a < 0 \quad \therefore a > 7$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수  $a$ 의 최솟값은 8이다.

- 04  $f(x) = x^4 - 4x - k^2 + 4k$ 로 놓으면

$$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2+x+1)$$

$$\text{이때 } x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{이므로}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ... | 1           | ... |
|---------|-----|-------------|-----|
| $f'(x)$ | -   | 0           | +   |
| $f(x)$  | ↘   | $-k^2+4k-3$ | ↗   |

함수  $f(x)$ 는  $x = 1$ 일 때 극소이면서 최소이다.

즉,  $f(x)$ 의 최솟값이  $f(1) = -k^2 + 4k - 3$ 이므로

모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-k^2 + 4k - 3 \geq 0, \quad k^2 - 4k + 3 \leq 0$$

$$(k-1)(k-3) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq k \leq 3$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수  $k$ 는 1, 2, 3이므로 구하는 합은  $1+2+3=6$

05  $f(x)=x^3-3x^2+k$ 로 놓으면  
 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$   
 $0<x<2$ 일 때,  $f'(x)<0$ 이므로 함수  $f(x)$ 는 열린구간  
 $(0, 2)$ 에서 감소한다. 즉,  $0<x<2$ 일 때,  $f(x)>0$ 이려면  
 $f(2)\geq 0$ 이어야 하므로  
 $f(2)=8-12+k\geq 0$   
 $\therefore k\geq 4$

06  $h(x)=f(x)-g(x)$ 로 놓으면  
 $h(x)=(x^3+2x^2-3x+2)-(2x^2+k+1)$   
 $=x^3-3x-k+1$   
 $h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$   
 $h'(x)=0$ 에서  $x=1$  ( $\because 0\leq x\leq 3$ )  
단한구간  $[0, 3]$ 에서 함수  $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나  
타내면 다음과 같다.

| $x$     | 0     | ...        | 1      | ...        | 3      |
|---------|-------|------------|--------|------------|--------|
| $h'(x)$ |       | -          | 0      | +          |        |
| $h(x)$  | $1-k$ | $\searrow$ | $-1-k$ | $\nearrow$ | $19-k$ |

단한구간  $[0, 3]$ 에서 함수  $h(x)$ 는  $x=1$ 일 때 극소이면서  
최소이다. 즉,  $h(x)$ 의 최솟값은  $h(1)=-1-k$ 이므로 단  
한구간  $[0, 3]$ 에서  $h(x)\geq 0$ 이려면  
 $-1-k\geq 0$   
 $\therefore k\leq -1$   
따라서  $k$ 의 최댓값은  $-1$ 이다.

07 점 P의 시각  $t$ 에서의 속도를  $v$ 라고 하면  
 $\frac{dx}{dt}=3t^2-12$   
운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로  
 $3t^2-12=0, 3(t+2)(t-2)=0$   
 $\therefore t=2$  ( $\because t>0$ )  
점 P의 운동 방향이 원점에서 바뀌므로 시각  $t=2$ 일 때의  
위치는 0이다.  
즉,  $2^3-12\times 2+k=0$ 이므로  
 $-16+k=0$   
 $\therefore k=16$

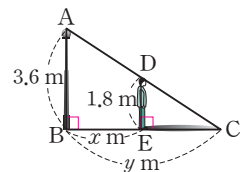
08 [1단계]  
 $t$ 초 후의 두 점 P, Q의 속도를 각각  $v_P, v_Q$ 라고 하면  
 $v_P=\frac{dP(t)}{dt}=t^2+4, v_Q=\frac{dQ(t)}{dt}=4t$   
[2단계]  
두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각은  
 $t^2+4=4t, t^2-4t+4=0$   
 $(t-2)^2=0$   
 $\therefore t=2$

[3단계]  
따라서 시각  $t=2$ 에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각  
 $P(2)=10, Q(2)=-2$   
이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는  
 $10-(-2)=12$

09 ㄱ. 점 P의 가속도는  $v'(t)$ , 즉  $v(t)$ 의 그래프의 기울기와  
같으므로  $1<t<3$ 에서 점 P의 가속도는 일정하다. (참)  
ㄴ.  $v(1)>0, v(3)<0$ 이므로  $t=1$ 일 때와  $t=3$ 일 때의 운  
동 방향은 서로 반대이다. (거짓)  
ㄷ.  $v(2)=0, v(5)=0$ 이고  $t=2, t=5$ 의 좌우에서  $v(t)$   
의 부호가 바뀌므로  $t=2, t=5$ 일 때 점 P는 운동 방향  
을 바꾼다. 즉, 점 P는 운동 방향을 2번 바꾼다. (참)  
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

10  $t$ 초 후의 속도를  $v$ 라고 하면  
 $v=\frac{dx}{dt}=-10t+5$   
물체가 지면에 떨어지면  $x=0$ 이므로  
 $-5t^2+5t+30=0$   
 $-5(t+2)(t-3)=0$   
 $\therefore t=3$  ( $\because t>0$ )  
따라서 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속도는  
 $-10\times 3+5=-25$ (m/초)

11 [1단계]  
오른쪽 그림과 같이  $t$ 초 후에 가  
로등을 기준으로 학생이 움직인  
거리를  $x$  m, 그림자의 끝이 움  
직인 거리를  $y$  m라고 하자.  
 $\triangle ABC\sim\triangle DEC$  (AA 닮음)  
이므로  
 $\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{EC}$   
 $3.6:1.8=y:(y-x)$   
즉,  $2:1=y:(y-x)$ 이므로  
 $y=2x$  ..... ㉠  
학생이 매초 1.1 m의 속도로 걸어가므로  $t$ 초 후 학생이 움  
직인 거리는  $x=1.1t$   
 $x=1.1t$ 를 ㉠에 대입하면  
 $y=2\times 1.1t=2.2t$   
[2단계]  
 $t$ 초 후의 그림자의 길이를  $l$  m라고 하면  
 $l=y-x=2.2t-1.1t=1.1t$   
따라서 그림자의 길이의 변화율은  
 $\frac{dl}{dt}=1.1$ (m/초)



## 12 [1단계]

$t$ 초 후의 수면의 반지름의 길이를  $r$  cm, 그릇에 담긴 물의 높이를  $h$  cm라고 하면 그릇과 물이 담긴 부분은 닮음이므로

$$20 : r = 40 : h$$

$$\therefore r = \frac{1}{2}h$$

그릇에 매초 3 cm의 비율로 수면의 높이가 올라가므로  $h = 3t$

$$h = 3t \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } r = \frac{3}{2}t$$

## [2단계]

물의 부피를  $V \text{ cm}^3$ 라고 하면

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{3}{2}t\right)^2 \times 3t = \frac{9}{4}\pi t^3$$

시간  $t$ 에서의 물의 부피의 변화율은

$$\frac{dV}{dt} = \frac{27}{4}\pi t^2$$

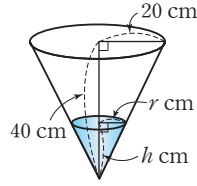
## [3단계]

수면의 높이가 30 cm가 되는 시각은

$$30 = 3t \quad \therefore t = 10$$

따라서 시간  $t = 10$ 일 때의 물의 부피의 변화율은

$$\frac{27}{4}\pi \times 10^2 = 675\pi \text{ (cm}^3/\text{초)}$$



..... ㉠

## 13 부정적분

p. 48

01 (1)  $\frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + x + C$  (2)  $-x^4 + \frac{4}{9}x^3 + C$

(3)  $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$  (4)  $x^3 - x^2 - 4x + C$

02  $f(x) = 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 10x - \frac{1}{2}$  03 1

04 ② 05 2 06 ⑤ 07 -5 08 ⑤

01 (1)  $\int (2x^2 - 6x + 1) dx = 2 \int x^2 dx - 6 \int x dx + \int dx$

$$= 2 \times \frac{1}{3}x^3 - 6 \times \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + x + C$$

(2)  $\int 4x \left(-x^2 + \frac{1}{3}x\right) dx = \int \left(-4x^3 + \frac{4}{3}x^2\right) dx$

$$= -4 \int x^3 dx + \frac{4}{3} \int x^2 dx$$

$$= -4 \times \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3} \times \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$= -x^4 + \frac{4}{9}x^3 + C$$

(3)  $\int \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx = \int \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} dx$

$$= \int (x^2 + x + 1) dx$$

$$= \int x^2 dx + \int x dx + \int dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

(4)  $\int (x^2 - 3x) dx + \int (2x^2 + x - 4) dx$

$$= \int \{(x^2 - 3x) + (2x^2 + x - 4)\} dx$$

$$= \int (3x^2 - 2x - 4) dx$$

$$= 3 \int x^2 dx - 2 \int x dx - \int 4 dx$$

$$= 3 \times \frac{1}{3}x^3 - 2 \times \frac{1}{2}x^2 - 4x + C$$

$$= x^3 - x^2 - 4x + C$$

02  $f(x) = \int (3x + 2)(4x - 5) dx$

$$= \int (12x^2 - 7x - 10) dx$$

$$= 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 10x + C$$

$$f(-1) = \frac{5}{2} + C = 2 \text{이므로}$$

$$C = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 10x - \frac{1}{2}$$

03  $f(x) = \int (3x^2 + ax - 2) dx$

$$= x^3 + \frac{1}{2}ax^2 - 2x + C$$

$f(0) = -3$ 이므로  $C = -3$

$$\therefore f(x) = x^3 + \frac{1}{2}ax^2 - 2x - 3$$

$f(2) = 3$ 이므로  $2a + 1 = 3$

$$\therefore a = 1$$

04  $\int (x+2)^2 dx - \int (x-2)^2 dx$

$$= \int (x^2 + 4x + 4) dx - \int (x^2 - 4x + 4) dx$$

$$= \int \{(x^2 + 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4)\} dx$$

$$= \int 8x dx$$

$$= 4x^2 + C$$

05  $f(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx}(x^2 - 4x) \right\} dx$

$$= x^2 - 4x + C$$

$f(0) = 5$ 이므로  $C = 5$

따라서  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ 이므로

$$f(1) = 2$$

06  $f(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \int (x^2 - 10x + a) dx \right\}$

$$= x^2 - 10x + a$$

$$= (x-5)^2 + a - 25$$

따라서  $f(x)$ 는  $x=5$ 일 때 최솟값  $a-25$ 를 가지므로

$$a - 25 = -15$$

$$\therefore a = 10$$

07 주어진 식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$(x-1)f(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$$

따라서  $f(x) = 3x+1$ 이므로

$$f(-2) = -5$$

08  $f(x) = \int (3x^2 + 4x - 7) dx$

$$= x^3 + 2x^2 - 7x + C$$

$f(0) = 1$ 이므로  $C = 1$

따라서  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 1$ 이므로

$$f(3) = 25$$

## 14 정적분

p. 50

01 (1) 2 (2)  $\frac{33}{4}$  (3) 0 (4) 18

02 9

03  $\frac{1}{2}$

04 ④

05 18

06  $\frac{25}{6}$

07 ①

08 ⑤

01 (1)  $\int_{-1}^1 (4x^3 - 3x^2 + 2) dx = [x^4 - x^3 + 2x]_{-1}^1$   
 $= 2 - 0 = 2$

(2)  $\int_2^3 (x-2)(x^2+2x+4) dx = \int_2^3 (x^3-8) dx$   
 $= \left[ \frac{1}{4}x^4 - 8x \right]_2^3$   
 $= -\frac{15}{4} - (-12)$   
 $= \frac{33}{4}$

(4)  $\int_3^0 (x^2-9) dx = -\int_0^3 (x^2-9) dx$   
 $= -\left[ \frac{1}{3}x^3 - 9x \right]_0^3$   
 $= -(-18) = 18$

02  $\int_0^1 (ax^2+1) dx = \left[ \frac{1}{3}ax^3 + x \right]_0^1 = \frac{1}{3}a + 1 = 4$   
 $\therefore a = 9$

03  $\int_1^2 \frac{x^2}{x+1} dx - \int_1^2 \frac{1}{t+1} dt$   
 $= \int_1^2 \frac{x^2}{x+1} dx - \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx$   
 $= \int_1^2 \frac{x^2-1}{x+1} dx$   
 $= \int_1^2 \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} dx$   
 $= \int_1^2 (x-1) dx$   
 $= \left[ \frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^2 = \frac{1}{2}$

04  $\int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_2^1 f(x) dx$   
 $= \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$   
 $= \int_{-2}^2 f(x) dx$   
 $= \int_{-2}^2 (9x^2 - 2x) dx$   
 $= \left[ 3x^3 - x^2 \right]_{-2}^2 = 48$

05  $f(k) = \int_1^3 (x+k)^2 dx - \int_3^1 (2x^2+1) dx$   
 $= \int_1^3 (x^2 + 2kx + k^2) dx + \int_1^3 (2x^2+1) dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^3 (3x^2 + 2kx + k^2 + 1) dx \\
&= \left[ x^3 + kx^2 + (k^2 + 1)x \right]_1^3 \\
&= 2k^2 + 8k + 28 \\
&= 2(k+2)^2 + 20
\end{aligned}$$

이므로  $f(k)$ 는  $k=-2$ 일 때, 최솟값 20을 갖는다.  
따라서  $a=-2$ ,  $b=20$ 이므로  
 $a+b=-2+20=18$

**06**  $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (x+2) dx + \int_1^2 (-x^2+4) dx \\
&= \left[ \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^1 + \left[ -\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_1^2 \\
&= \frac{5}{2} + \frac{5}{3} = \frac{25}{6}
\end{aligned}$$

**07**  $f(x) = \begin{cases} x+2 & (x \leq 0) \\ 2 & (x > 0) \end{cases}$  이므로

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 3xf(x) dx &= \int_{-1}^0 3x(x+2) dx + \int_0^1 (3x \times 2) dx \\
&= \int_{-1}^0 (3x^2 + 6x) dx + \int_0^1 6x dx \\
&= \left[ x^3 + 3x^2 \right]_{-1}^0 + \left[ 3x^2 \right]_0^1 \\
&= -2 + 3 = 1
\end{aligned}$$

**08**  $|x^2+3x| = \begin{cases} -x^2-3x & (-3 < x < 0) \\ x^2+3x & (x \leq -3 \text{ 또는 } x \geq 0) \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\therefore \int_{-3}^1 |x^2+3x| dx &= \int_{-3}^0 (-x^2-3x) dx + \int_0^1 (x^2+3x) dx \\
&= \left[ -\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-3}^0 + \left[ \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 \\
&= \frac{9}{2} + \frac{11}{6} = \frac{19}{3}
\end{aligned}$$

### 15 여러 가지 정적분의 계산

p. 52

- 01** -6    **02** 32    **03** 7    **04** ④  
**05**  $f(x)=3x^2-10x+4$     **06** ③    **07** ⑤  
**08** ③

**01**  $\int_{-1}^1 (6x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1) dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^1 (6x^5 + 4x^3 + 2x) dx + \int_{-1}^1 (-5x^4 - 3x^2 - 1) dx \\
&= 0 + 2 \int_0^1 (-5x^4 - 3x^2 - 1) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left[ -x^5 - x^3 - x \right]_0^1 \\
&= 2 \times (-3) = -6
\end{aligned}$$

**02** 조건 ④에서  $f(x)=f(x+4)$ 이므로

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^6 f(x) dx = \int_6^{10} f(x) dx \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때  $f(x)$ 가 짝함수이므로

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에 의하여

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{10} f(x) dx &= \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx \\
&= 6 \int_0^2 f(x) dx \\
&= 6 \int_0^2 (-x^2+4) dx \\
&= 6 \left[ -\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_0^2 \\
&= 6 \times \frac{16}{3} = 32
\end{aligned}$$

**03**  $F(x) = \int_0^x (t^3-1) dt$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면  
 $F'(x) = x^3 - 1$   
 $\therefore F'(2) = 7$

**04**  $\int_0^2 f(x) dx = k$  ( $k$ 는 상수)  $\cdots \cdots \textcircled{1}$

로 놓으면

$$f(x) = -3x^2 - 8x + k$$

이것을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (-3x^2 - 8x + k) dx &= k \\
\left[ -x^3 - 4x^2 + kx \right]_0^2 &= k \\
-24 + 2k &= k \quad \therefore k = 24
\end{aligned}$$

따라서  $f(x) = -3x^2 - 8x + 24$ 이므로  
 $f(1) = 13$

**05** 주어진 식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = 6x^2 - 10x + f(x)$$

$$xf'(x) = 6x^2 - 10x$$

이 식이 모든 실수  $x$ 에 대하여 성립하므로

$$f'(x) = 6x - 10$$

$$\therefore f(x) = \int (6x - 10) dx = 3x^2 - 10x + C \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, 주어진 식의 양변에  $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = 2 - 5 + 0 = -3$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } f(1) = 3 - 10 + C = -3$$

$$\therefore C = 4$$

$C=4$ 를 ①에 대입하면

$$f(x) = 3x^2 - 10x + 4$$

06  $\int f(t) dt = F(t) + C$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} \int_{-1}^x f(t) dt &= [F(x)]_{-1}^x = F(x) - F(-1) \\ \therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2 - 1} \int_{-1}^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \left\{ \frac{F(x) - F(-1)}{x + 1} \times \frac{1}{x - 1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \left\{ \frac{F(x) - F(-1)}{x - (-1)} \times \frac{1}{x - 1} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} F'(-1) = -\frac{1}{2} f(-1) \\ &= -\frac{1}{2} \times 2 = -1 \end{aligned}$$

07  $\int \left( \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2 \right) dx = F(x) + C$  ..... ㉠

로 놓으면

$$\begin{aligned} \int_2^{2+3h} \left( \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2 \right) dx &= [F(x)]_2^{2+3h} \\ &= F(2+3h) - F(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+3h} \left( \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2 \right) dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+3h) - F(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+3h) - F(2)}{3h} \times 3 \\ &= 3F'(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{㉠에서 } F'(x) &= \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2 \text{이므로} \\ 3F'(2) &= 3 \times 6 = 18 \end{aligned}$$

08 주어진 식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |     |    |     |    |     |
|---------|-----|----|-----|----|-----|
| $x$     | ... | -1 | ... | 2  | ... |
| $f'(x)$ | +   | 0  | -   | 0  | +   |
| $f(x)$  | ↗   | 극대 | ↘   | 극소 | ↗   |

함수  $f(x)$ 는  $x = -1$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$\begin{aligned} f(-1) &= \int_0^{-1} (t^2 - t - 2) dt \\ &= \left[ \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 2t \right]_0^{-1} = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

또한, 함수  $f(x)$ 는  $x = 2$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$\begin{aligned} f(2) &= \int_0^2 (t^2 - t - 2) dt \\ &= \left[ \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 2t \right]_0^2 = -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } M = \frac{7}{6}, m = -\frac{10}{3} \text{이므로}$$

$$M + m = -\frac{13}{6}$$

## 실력 확인 문제

13 14 15 p. 54

- |                                      |                                                  |       |        |      |
|--------------------------------------|--------------------------------------------------|-------|--------|------|
| 01 ②                                 | 02 ⑤                                             | 03 ④  | 04 ④   | 05 ④ |
| 06 ③                                 | 07 $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3$ | 08 ①  |        |      |
| 09 ②                                 | 10 ④                                             | 11 ④  | 12 -25 | 13 ② |
| 14 ③                                 | 15 ④                                             | 16 17 | 17 ③   |      |
| 18 $f(x) = -9x^2 + x - \frac{11}{2}$ | 19 ②                                             | 20 ①  |        |      |
| 21 ②                                 | 22 ②                                             | 23 ④  | 24 ③   |      |

01  $F(x) = 2x^3 - \frac{a}{2}x^2 + x + C$ 로 놓으면

$$f(x) = F'(x) = 6x^2 - ax + 1$$

$$f(2) = 3 \text{이므로}$$

$$24 - 2a + 1 = 3 \quad \therefore a = 11$$

$$\begin{aligned} 02 \quad \int (3x-2)^2 dx &= \int (9x^2 - 12x + 4) dx \\ &= 9 \int x^2 dx - 12 \int x dx + \int 4 dx \\ &= 9 \times \frac{1}{3}x^3 - 12 \times \frac{1}{2}x^2 + 4x + C \\ &= 3x^3 - 6x^2 + 4x + C \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} \int (3x-2)^2 dx &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} (3x-2)^3 + C_1 \\ &= \frac{1}{9} (3x-2)^3 + C_1 \\ &= 3x^3 - 6x^2 + 4x + C \end{aligned}$$

(단,  $C = -\frac{8}{9} + C_1$ )

$$\begin{aligned} 03 \quad f(x) &= \int \left( \frac{1}{2}x^3 + 2x + 1 \right) dx - \int \left( \frac{1}{2}x^3 + x \right) dx \\ &= \int \left\{ \left( \frac{1}{2}x^3 + 2x + 1 \right) - \left( \frac{1}{2}x^3 + x \right) \right\} dx \\ &= \int (x+1) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + C \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f(0) = 1 \text{이므로 } C = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \text{이므로}$$

$$f(4) = 13$$

$$\begin{aligned} 04 \quad f(x) &= \int \left\{ \frac{d}{dx} (x^3 - 2x^2 + 3x) \right\} dx = x^3 - 2x^2 + 3x + C \\ \text{이때 } f(0) &= 3 \text{이므로 } C = 3 \\ \text{따라서 } f(x) &= x^3 - 2x^2 + 3x + 3 \text{이므로} \\ f(2) &= 9 \end{aligned}$$

05 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기는  $f'(x)$ 이므로

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

$$\therefore f(x) = \int (3x^2 + 2x) dx = x^3 + x^2 + C$$

곡선  $y=f(x)$ 가 점  $(0, 2)$ 를 지나므로  $C=2$

따라서  $f(x) = x^3 + x^2 + 2$ 이므로

$$f(1) = 4$$

**06** 주어진 식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf(x) = 3x^2 - 2x - 5$$

$$(1+x)f(x) = (x+1)(3x-5)$$

$$\therefore f(x) = 3x - 5$$

**07** [1단계]

$f(x)$ 의 도함수는 이차식이므로 주어진 그림에서

$$f'(x) = ax(x-2) \quad (a < 0)$$

로 놓을 수 있다.

[2단계]

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ... | 0 | ... | 2 | ... |
|---------|-----|---|-----|---|-----|
| $f'(x)$ | -   | 0 | +   | 0 | -   |
| $f(x)$  |     | ↘ | 극소  | ↗ | 극대  |

이때  $f(x)$ 의 극솟값이 3, 극댓값이 5이므로

$$f(0) = 3, f(2) = 5$$

[3단계]

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int ax(x-2) dx \\ &= \int (ax^2 - 2ax) dx = \frac{1}{3}ax^3 - ax^2 + C \end{aligned}$$

$$f(0) = 3 \text{에서 } C = 3$$

$$f(x) = \frac{1}{3}ax^3 - ax^2 + 3 \text{이므로}$$

$$f(2) = 5 \text{에서 } -\frac{4}{3}a + 3 = 5 \quad \therefore a = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3$$

**08**  $\int_0^a (3x^2 - 4) dx = \left[ x^3 - 4x \right]_0^a = a^3 - 4a = 0$

$$a(a+2)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 0 \text{ 또는 } a = 2$$

이때  $a > 0$ 이므로  $a = 2$

**09**  $\int_1^2 (3x-1)^2 dx + \int_1^2 (4x+3) dx$

$$= \int_1^2 (9x^2 - 6x + 1) dx + \int_1^2 (4x + 3) dx$$

$$= \int_1^2 \{(9x^2 - 6x + 1) + (4x + 3)\} dx$$

$$= \int_1^2 (9x^2 - 2x + 4) dx$$

$$= \left[ 3x^3 - x^2 + 4x \right]_1^2 = 22$$

**10** [1단계]

$0 < a < 3$ 이므로

$$\int_0^3 (6x+5) dx - \int_a^3 (6x+5) dx$$

$$= \int_0^a (6x+5) dx$$

$$= \left[ 3x^2 + 5x \right]_0^a = 3a^2 + 5a$$

[2단계]

즉,  $3a^2 + 5a = 22$ 이므로

$$3a^2 + 5a - 22 = 0, (3a+11)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{11}{3} \text{ 또는 } a = 2$$

이때  $0 < a < 3$ 이므로  $a = 2$

**11**  $\int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx$

$$= 2 + 5 = 7$$

$$\therefore \int_2^3 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx$$

$$= 7 - 3 = 4$$

**12**  $\int_0^3 f(x) dx$

$$= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 (4x-5) dx + \int_1^3 (-3x^2+2) dx$$

$$= \left[ 2x^2 - 5x \right]_0^1 + \left[ -x^3 + 2x \right]_1^3$$

$$= -3 + (-22) = -25$$

**13**  $x^3 + 2x + 1 + |x-1| = \begin{cases} x^3 + x + 2 & (x \leq 1) \\ x^3 + 3x & (x > 1) \end{cases}$

$$\therefore \int_0^2 (x^3 + 2x + 1 + |x-1|) dx$$

$$= \int_0^1 (x^3 + x + 2) dx + \int_1^2 (x^3 + 3x) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^1 + \left[ \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \right]_1^2$$

$$= \frac{11}{4} + \frac{33}{4} = 11$$

**14**  $\int_{-2}^1 (3x^2 - 2x + 1) dx + \int_1^2 (1 - 2t + 3t^2) dt$

$$= \int_{-2}^1 (3x^2 - 2x + 1) dx + \int_1^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$$

$$= \int_{-2}^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$$

$$= \int_{-2}^2 (3x^2 + 1) dx + \int_{-2}^2 (-2x) dx$$

$$= 2 \int_0^2 (3x^2 + 1) dx + 0$$

$$= 2 \left[ x^3 + x \right]_0^2 = 2 \times 10$$

$$= 20$$

15 [1단계]

조건 (가)에서  $f(-x)=f(x)$ 이므로

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서  $f(x)=f(x+2)$ 이므로

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_{-2}^{-1} f(x) dx \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

[2단계]

①, ②에서

$$\int_{-2}^{-1} f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 8$$

이므로

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 f(x) dx &= \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx \\ &= 2 \int_0^1 f(x) dx \\ &= 2 \times 8 = 16 \end{aligned}$$

[3단계]

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-2}^6 f(x) dx &= \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \\ &\quad + \int_4^6 f(x) dx \\ &= 4 \int_{-2}^0 f(x) dx \\ &= 4 \times 16 = 64 \end{aligned}$$

16  $f(x) = \int_0^x (3t^2 + 5) dt$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 + 5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 17$$

17  $\int_0^2 f(t) dt = k$  ( $k$ 는 상수) ..... ①

로 놓으면  $f(x) = 6x^2 - 4x + k$

이것을 ①에 대입하면

$$\int_0^2 (6t^2 - 4t + k) dt = k$$

$$\left[ 2t^3 - 2t^2 + kt \right]_0^2 = k$$

$$8 + 2k = k \quad \therefore k = -8$$

따라서  $f(x) = 6x^2 - 4x - 8$ 이므로

$$f(-1) = 2$$

18  $\int_0^1 tf'(t) dt = k$  ( $k$ 는 상수) ..... ①

로 놓으면  $f(x) = -9x^2 + x + k$

$f'(x) = -18x + 1$ 을 ①에 대입하면

$$\int_0^1 (-18t^2 + t) dt = k, \left[ -6t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 = k$$

$$\therefore k = -\frac{11}{2}$$

$$\therefore f(x) = -9x^2 + x - \frac{11}{2}$$

19  $f(x) = x^2 + \int_0^1 (2x+1)f(t) dt$

$$= x^2 + 2x \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt$$

$$\int_0^1 f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 놓으면  $f(x) = x^2 + 2kx + k$

이것을 ①에 대입하면

$$\int_0^1 (t^2 + 2kt + k) dt = k$$

$$\left[ \frac{1}{3}t^3 + kt^2 + kt \right]_0^1 = k$$

$$\frac{1}{3} + 2k = k$$

$$\therefore k = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{3}$$

20 [1단계]

주어진 식의 양변에  $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 1 + a - 10 + 6 \quad \therefore a = 3$$

[2단계]

$$\int_1^x (x-t)f(t) dt = x^4 + 3x^2 - 10x + 6 \text{에서}$$

$$x \int_1^x f(t) dt - \int_1^x tf(t) dt = x^4 + 3x^2 - 10x + 6$$

이 식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = 4x^3 + 6x - 10$$

$$\int_1^x f(t) dt = 4x^3 + 6x - 10$$

다시 이 식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 12x^2 + 6$$

[3단계]

$$\therefore f(1) = 18$$

21 [1단계]

주어진 식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$2xf(x) + x^2f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 2xf(x)$$

$$x^2f'(x) = 12x^3 - 6x^2$$

이 식이 모든 실수  $x$ 에 대하여 성립하므로

$$f'(x) = 12x - 6$$

$$\therefore f(x) = \int (12x - 6) dx = 6x^2 - 6x + C \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

[2단계]

주어진 식의 양변에  $x=2$ 를 대입하면

$$4f(2) = 48 - 16 + 0 \quad \therefore f(2) = 8$$

[3단계]

$$\textcircled{1} \text{에서 } f(2) = 24 - 12 + C = 8 \quad \therefore C = -4$$

$C = -4$ 를 ①에 대입하면

$$f(x) = 6x^2 - 6x - 4$$

$$\therefore f(0) = -4$$

22  $\int f(t) dt = F(t) + C$ 로 놓으면

$$\int_2^x f(t) dt = \left[ F(x) \right]_2^x = F(x) - F(2)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x-2} = F'(2) = f(2) = -9$$

23  $\int (12x^2 - 8x + 5) dx = F(x) + C$  ..... ㉠

로 놓으면

$$\int_{1-h}^{1+h} (12x^2 - 8x + 5) dx = \left[ F(x) \right]_{1-h}^{1+h} = F(1+h) - F(1-h)$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{1-h}^{1+h} (12x^2 - 8x + 5) dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1) + F(1) - F(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(1+h) - F(1)}{h} + \frac{F(1) - F(1-h)}{-h} \right\} \\ &= F'(1) + F'(1) \\ &= 2F'(1) \end{aligned}$$

㉠에서  $F'(x) = 12x^2 - 8x + 5$ 이므로

$$2F'(1) = 2 \times 9 = 18$$

24 주어진 식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ 에서  $x=1$  ( $\because 0 \leq x \leq 2$ )

닫힌구간  $[0, 2]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |   |     |    |     |   |
|---------|---|-----|----|-----|---|
| $x$     | 0 | ... | 1  | ... | 2 |
| $f'(x)$ |   | +   | 0  | -   |   |
| $f(x)$  |   | ↗   | 극대 | ↘   |   |

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_{-1}^0 (3t^2 - 12t + 9) dt \\ &= \left[ t^3 - 6t^2 + 9t \right]_{-1}^0 = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_{-1}^1 (3t^2 - 12t + 9) dt \\ &= 2 \int_0^1 (3t^2 + 9) dt \\ &= 2 \left[ t^3 + 9t \right]_0^1 = 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= \int_{-1}^2 (3t^2 - 12t + 9) dt \\ &= \left[ t^3 - 6t^2 + 9t \right]_{-1}^2 = 18 \end{aligned}$$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 최댓값 20,  $x=0$ 에서 최솟값 16을 가지므로

$$\begin{aligned} a &= 20, b = 16 \\ \therefore a + b &= 36 \end{aligned}$$

## 16 넓이

p. 58

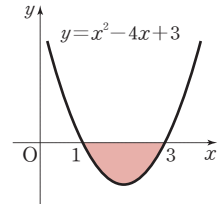
- 01  $\frac{4}{3}$     02 ①    03  $\frac{37}{12}$     04 ⑤    05 3  
06 ④    07  $\frac{27}{4}$     08 ②

01 주어진 곡선과  $x$ 축의 교점의  $x$ 좌표는

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ (x-1)(x-3) &= 0 \\ \therefore x &= 1 \text{ 또는 } x = 3 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$-\int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx = -\left[ \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_1^3 = \frac{4}{3}$$

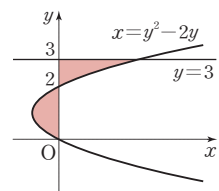


02 주어진 곡선과  $y$ 축의 교점의  $y$ 좌표는

$$\begin{aligned} y^2 - 2y &= 0, y(y-2) = 0 \\ \therefore y &= 0 \text{ 또는 } y = 2 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} -\int_0^2 (y^2 - 2y) dy + \int_2^3 (y^2 - 2y) dy &= -\left[ \frac{1}{3}y^3 - y^2 \right]_0^2 + \left[ \frac{1}{3}y^3 - y^2 \right]_2^3 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

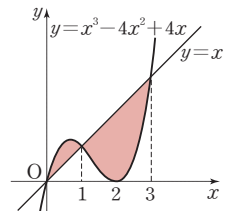


03 곡선과 직선의 교점의  $x$ 좌표는

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 4x &= x \\ x^3 - 4x^2 + 3x &= 0 \\ x(x-1)(x-3) &= 0 \\ \therefore x &= 0 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{(x^3 - 4x^2 + 4x) - x\} dx &+ \int_1^3 \{x - (x^3 - 4x^2 + 4x)\} dx \\ &= \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x) dx + \int_1^3 (-x^3 + 4x^2 - 3x) dx \\ &= \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[ -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_1^3 \\ &= \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12} \end{aligned}$$



04 주어진 두 포물선의 교점의  $x$ 좌표는

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 2 &= -x^2 + 6x + 4, 2x^2 - 4x - 6 = 0 \\ 2(x+1)(x-3) &= 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\left| \frac{1 - (-1)}{6} \{3 - (-1)\}^3 \right| = \frac{64}{3}$$

05 주어진 포물선과  $x$ 축의 교점의  $x$ 좌표는

$$-3x^2 + 6kx = 0$$

$$-3x(x-2k) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2k$$

포물선과  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 108이므로

$$\left| \frac{-3}{6}(2k-0)^3 \right| = 4k^3 = 108$$

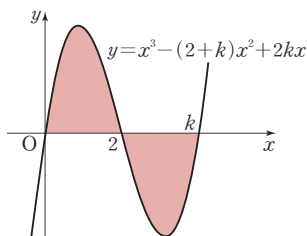
$$k^3 = 27 \quad \therefore k = 3$$

06 주어진 곡선과  $x$ 축의 교점의  $x$ 좌표는

$$x^3 - (2+k)x^2 + 2kx = 0$$

$$x(x-2)(x-k) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=k$$



주어진 곡선과  $x$ 축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_0^k \{x^3 - (2+k)x^2 + 2kx\} dx = 0$$

$$\left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{2+k}{3}x^3 + kx^2 \right]_0^k = 0$$

$$-\frac{1}{12}k^4 + \frac{1}{3}k^3 = 0$$

$$k^4 - 4k^3 = 0$$

$$k^3(k-4) = 0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=4$$

이때  $k > 2$ 이므로  $k=4$

07  $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 2$ 로 놓으면

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 1$$

곡선  $y=f(x)$  위의 점  $(0, 2)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(0) = -1$$

따라서 접선의 방정식은

$$y = -x + 2$$

곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y = -x + 2$ 의 교점의  $x$ 좌표는

$$-x^3 + 3x^2 - x + 2 = -x + 2 \text{에서}$$

$$x^3 - 3x^2 = 0, x^2(x-3) = 0$$

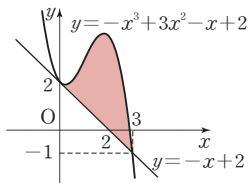
$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^3 \{(-x^3 + 3x^2 - x + 2) - (-x + 2)\} dx$$

$$= \int_0^3 (-x^3 + 3x^2) dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \right]_0^3 = \frac{27}{4}$$



08 두 곡선  $y=f(x), y=g(x)$ 는 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는 곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.

곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=x$ 의 교점의  $x$ 좌표는

$$x^2 = x, x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

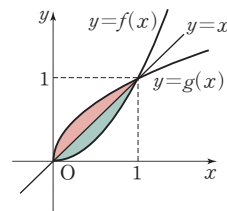
$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 구하는 넓이는

$$2 \int_0^1 (x - x^2) dx$$

$$= 2 \left[ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1$$

$$= 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$



## 17 속도와 거리

p. 60

01 ①    02 -8    03  $\frac{19}{3}$     04 ⑤    05 ③

06 50 m    07  $\frac{3}{2}$     08 ⑤

01  $t=0$ 일 때의 점 P의 위치가  $-1$ 이므로  $t=2$ 일 때의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} -1 + \int_0^2 (t^2 - 2t) dt &= -1 + \left[ \frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_0^2 \\ &= -1 + \left( -\frac{4}{3} \right) \\ &= -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$02 \int_1^3 (2t-8) dt = \left[ t^2 - 8t \right]_1^3 = -8$$

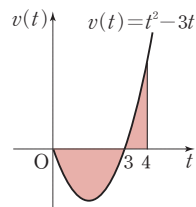
$$03 \int_0^4 |t^2 - 3t| dt$$

$$= \int_0^3 (-t^2 + 3t) dt$$

$$+ \int_3^4 (t^2 - 3t) dt$$

$$= \left[ -\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \right]_0^3 + \left[ \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 \right]_3^4$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{11}{6} = \frac{19}{3}$$



$$\begin{aligned} 04 \quad 20 + \int_0^4 (20 - 5t) dt &= 20 + \left[ 20t - \frac{5}{2}t^2 \right]_0^4 \\ &= 20 + 40 = 60 \text{ (m)} \end{aligned}$$

05 최고 높이에 도달했을 때는

$$v(t) = -t^2 - 4t + 21 = 0 \text{에서}$$

$$-(t-3)(t+7)=0 \quad \therefore t=3 (\because t>0)$$

따라서  $t=3$ (초)일 때 최고 높이이므로 구하는 높이는

$$\int_0^3 (-t^2 - 4t + 21) dt = \left[ -\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 21t \right]_0^3 = 36 \text{ (m)}$$

06 최고 높이에 도달했을 때는

$$v(t) = 30 - 10t = 0 \text{에서 } t=3$$

따라서 4초 동안 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^4 |30 - 10t| dt \\ &= \int_0^3 (30 - 10t) dt + \int_3^4 (10t - 30) dt \\ &= \left[ 30t - 5t^2 \right]_0^3 + \left[ 5t^2 - 30t \right]_3^4 \\ &= 45 + 5 = 50 \text{ (m)} \end{aligned}$$

07 점 P는 시각  $t=3$ 일 때 운동 방향을 바꾸므로 이때까지 움직인 거리는

$$\int_0^3 v(t) dt = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{3}{2}$$

08 실제로 움직인 거리는 속도의 그래프와  $t$ 축 사이의 넓이와 같으므로 구하는 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^6 |v(t)| dt &= \int_0^2 |v(t)| dt + \int_2^6 |v(t)| dt \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 5 \end{aligned}$$

### 실력 확인 문제

16 17 p. 62

- |      |       |      |      |      |
|------|-------|------|------|------|
| 01 ⑤ | 02 ③  | 03 ② | 04 4 | 05 ② |
| 06 ② | 07 ③  | 08 ② | 09 ② | 10 ⑤ |
| 11 ① | 12 5초 | 13 ② | 14 ③ | 15 ⑤ |
| 16 ⑤ | 17 ②  |      |      |      |

01 주어진 곡선과  $x$ 축의 교점의

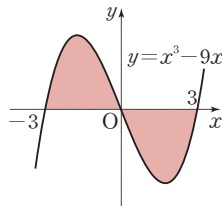
$x$ 좌표는

$$x^3 - 9x = 0$$

$$x(x+3)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 0$$

$$\text{또는 } x = 3$$



따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-3}^0 (x^3 - 9x) dx + \int_0^3 (9x - x^3) dx \\ &= \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 \right]_{-3}^0 + \left[ \frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^3 \\ &= -\frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{81}{2} \end{aligned}$$

02 주어진 곡선과 직선의 교점의

$x$ 좌표는

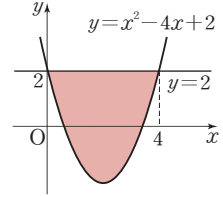
$$x^2 - 4x + 2 = 2$$

$$x(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^4 \{2 - (x^2 - 4x + 2)\} dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^4 \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$



03 주어진 곡선과  $y$ 축의 교점의  $y$ 좌

표는

$$y(y-k)^2 = 0$$

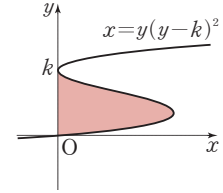
$$\therefore y = 0 \text{ 또는 } y = k$$

주어진 곡선과  $y$ 축으로 둘러싸인

부분의 넓이가 12이므로

$$\begin{aligned} \int_0^k y(y-k)^2 dy &= \int_0^k (y^3 - 2ky^2 + k^2y) dy \\ &= \left[ \frac{1}{4}y^4 - \frac{2}{3}ky^3 + \frac{1}{2}k^2y^2 \right]_0^k \\ &= \frac{1}{12}k^4 = 12 \end{aligned}$$

$$k^4 = 144 \text{이므로 } k = 2\sqrt{3} (\because k > 0)$$



04 주어진 곡선과 직선의 교점의

$x$ 좌표는

$$-2x^2 + 3x = x$$

$$-2x^2 + 2x = 0$$

$$-2x(x-1) = 0$$

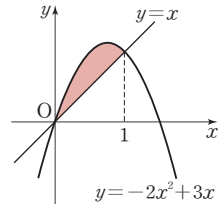
$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 주어진 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \{(-2x^2 + 3x) - x\} dx = \int_0^1 (-2x^2 + 2x) dx \\ &= \left[ -\frac{2}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

따라서  $p=3, q=1$ 이므로

$$p+q=4$$



$$05 \quad S_2 = \int_0^1 x^3 dx = \left[ \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$S_1 + S_2 = 1 \text{ 이므로 } S_1 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore S_1 : S_2 = \frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3 : 1$$

06 주어진 포물선과 직선의 교점의  $x$ 좌표는

$$x^2 - 2x = kx, x^2 - (k+2)x = 0, x\{x - (k+2)\} = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=k+2$$

주어진 포물선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이가  $\frac{32}{3}$ 이

므로

$$\frac{1}{6}(k+2)^3 = \frac{32}{3}, (k+2)^3 = 64$$

$$k+2=4 \quad \therefore k=2$$

07 두 부분 A, B의 넓이가 같으므로

$$\int_0^a (2x^2 - 4x) dx = 0, \left[ \frac{2}{3} x^3 - 2x^2 \right]_0^a = 0, \frac{2}{3} a^3 - 2a^2 = 0$$

$$\frac{2}{3} a^2(a-3) = 0 \quad \therefore a=3 (\because a>2)$$

08 [1단계]

$$f(x) = x^2 - 3x + 4 \text{로 놓으면 } f'(x) = 2x - 3$$

접점의 좌표를  $(a, a^2 - 3a + 4)$ 라고 하면 접선의 기울기는

$$f'(a) = 2a - 3$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - (a^2 - 3a + 4) = (2a - 3)(x - a)$$

$$\therefore y = (2a - 3)x - a^2 + 4$$

이 접선이 점  $(2, 1)$ 을 지나므로

$$1 = (2a - 3) \times 2 - a^2 + 4$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0, (a-1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=3$$

따라서 두 접선의 방정식은

$$y = -x + 3, y = 3x - 5$$

[2단계]

곡선  $y = x^2 - 3x + 4$ 와 직선

$y = -x + 3$ 의 교점의  $x$ 좌표는

접점의  $x$ 좌표이므로  $x=1$

또, 곡선  $y = x^2 - 3x + 4$ 와 직선

$y = 3x - 5$ 의 교점의  $x$ 좌표

는 접점의  $x$ 좌표이므로  $x=3$

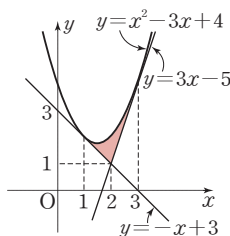
[3단계]

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^3 (x^2 - 3x + 4) dx - \int_1^2 (-x + 3) dx - \int_2^3 (3x - 5) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 4x \right]_1^3 - \left[ -\frac{1}{2} x^2 + 3x \right]_1^2 - \left[ \frac{3}{2} x^2 - 5x \right]_2^3$$

$$= \frac{14}{3} - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = \frac{2}{3}$$



09 두 곡선  $y=f(x), y=g(x)$ 는 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는 곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.

곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=x$ 의 교점의  $x$ 좌표는

$$\frac{1}{4} x^3 = x, x^3 - 4x = 0$$

$$x(x+2)(x-2) = 0$$

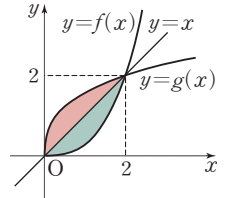
$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2 (\because x \geq 0)$$

따라서 구하는 넓이는

$$2 \int_0^2 \left( x - \frac{1}{4} x^3 \right) dx$$

$$= 2 \left[ \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{16} x^4 \right]_0^2$$

$$= 2 \times 1 = 2$$



10 출발점의 위치가 0이므로 시각  $t=3$ 에서의 점 P의 위치는

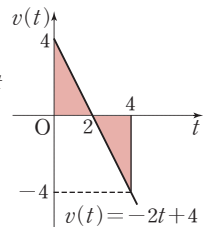
$$0 + \int_0^3 (4-t) dt = \left[ 4t - \frac{1}{2} t^2 \right]_0^3 = \frac{15}{2}$$

$$11 \quad \int_0^4 |-2t+4| dt$$

$$= \int_0^2 (-2t+4) dt + \int_2^4 (2t-4) dt$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 4 + \frac{1}{2} \times 2 \times 4$$

$$= 4 + 4 = 8$$



12  $t$ 초 후에 두 점 P, Q가 다시 만난다고 하면  $t$ 초 후에 두 점 P, Q의 위치가 같아진다.

$t$ 초 후 두 점 P, Q의 위치는 각각

$$\int_0^t 3t(4-t) dt, \int_0^t 2t dt$$

이므로

$$\int_0^t (12t - 3t^2) dt = \int_0^t 2t dt$$

$$6t^2 - t^3 = t^2, t^3 - 5t^2 = 0$$

$$t^2(t-5) = 0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=5$$

따라서 5초 후에 두 점 P, Q는 다시 만난다.

13 기차가 정지하는 시각은

$$v(t) = -2t + 20 = 0 \text{ 에서 } t=10$$

따라서 기차가 10초 동안 움직인 거리는

$$\int_0^{10} |-2t+20| dt = \int_0^{10} (-2t+20) dt$$

$$= \left[ -t^2 + 20t \right]_0^{10}$$

$$= 100 \text{ (m)}$$

- 14  $t=a$  ( $a>0$ )일 때, 점 P가 다시 원점으로 돌아온다고 하면 시각  $t=0$ 에서  $t=a$ 까지의 점 P의 위치의 변화량은 0이므로

$$\int_0^a (-3t^2 - 2t + 12) dt = 0, \left[ -t^3 - t^2 + 12t \right]_0^a = 0$$

$$-a^3 - a^2 + 12a = 0, -a(a+4)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 3 (\because a > 0)$$

따라서 3초 후에 다시 원점으로 돌아온다.

- 15 실제로 움직인 거리는 속도의 그래프와  $t$ 축 사이의 넓이와 같으므로 구하는 거리는

$$\int_0^6 |v(t)| dt$$

$$= \int_0^4 |v(t)| dt + \int_4^6 |v(t)| dt$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times (1+2) \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 1$$

$$= \frac{1}{2} + 3 + 1 + 1 = \frac{11}{2}$$

- 16 [1단계]

출발점의 위치가 0이고, 시각  $t=10$ (초)일 때 점 P의 위치가  $\frac{35}{3}$ 이므로

$$0 + \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^8 v(t) dt + \int_8^{10} v(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 2k + \left( -\frac{1}{2} \times 2 \times k \right)$$

$$= 7k = \frac{35}{3}$$

$$\therefore k = \frac{5}{3}$$

[2단계]

실제로 움직인 거리는 속도의 그래프와  $t$ 축 사이의 넓이와 같으므로 구하는 거리는

$$\int_0^{10} |v(t)| dt$$

$$= \int_0^8 |v(t)| dt + \int_8^{10} |v(t)| dt$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{10}{3} + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{5}{3}$$

$$= \frac{40}{3} + \frac{5}{3} = 15$$

- 17 ㄱ. 1초 동안  $v(t)=0$ 인 경우는 없으므로 점 P는 1초 동안 멈춘 적이 없다. (거짓)

ㄴ.  $t=2, t=4$ 를 전후하여  $v(t)$ 의 부호가 바뀌므로 점 P는 움직이는 동안 방향을 2번 바꿨다. (거짓)

ㄷ. 시각  $t=0$ 에서  $t=2$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 v(t) dt = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

시각  $t=2$ 에서  $t=4$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_2^4 v(t) dt = -\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = -2$$

즉,  $\int_0^4 v(t) dt = 0$ 이므로  $t=4$ 일 때 점 P의 위치는 원점이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄷ이다.