친절한 교과서 해설을 통한
내신 준비서

자습서

중학교

수학 2

장경윤 교과서편

머리말

"수학은
보이지 않는 것을
볼 수 있게 만든다."

| 케이드 데블린 |

우리는 주변의 여러 현상과 상황 속에서 수, 도형, 자료, 또 이들 사이의 관계와 변화를 다루는 수학을 만납니다. 수학의 언어는 보이지 않는 것을 볼 수 있게 해 줍니다. 건축 설계 및 시공, 운동과 변화 등 일상과 활동에서, 때로 무질서하게 보이는 현상과 방대한 자료 속에서 수학의 언어는 상황을 해석하고 설명하며 문제를 해결할 수 있게 하는 중요한 도구입니다. 최근 주목받고 있는 인공지능(AI)의 기계 학습이나 딥러닝을 위한 프로그램도 알고리즘 등 수학적 언어 발달이 이뤄낸 결과입니다.

수학은 문제 해결을 위해 고안된 학문으로, 학교에서 학습하는 수학은 우리의 생활과 밀접한 관계가 있습니다. 수학의 언어는 만국 공통이며 새로운 언어를 사용하려면 문법을 학습해야 하듯이 수학의 언어 사용을 위해서도 학습이 필요합니다. 우리는 학습을 통하여 수학의 여러 분야의 용어와 기호, 개념, 원리, 법칙을 이해하고 기능을 습득하여 논리적으로 사고하고 소통하며 합리적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기를 수 있습니다.

이 자습서는 2022 개정 교육과정에 따라 집필된 교과서를 토대로 학생들의 적극적인 활동을 유도하여 수학을 쉽게 이해할 수 있도록 저술되었습니다. 이 자습서의 기획 방향은 다음과 같습니다.

첫째, 친절한 개념 정리로 교과서 내용의 깊은 이해가 가능하도록 하였습니다.
둘째, 자세한 문제 풀이로 스스로 학습이 가능하도록 하였습니다.
셋째, 대단원별 '교과서 문제 뛰어넘기'로 문제 해결 능력을 향상시킬 수 있도록 하였습니다.
넷째, 추가로 제공되는 실전 대비 문제로 내신을 정복할 수 있도록 하였습니다.

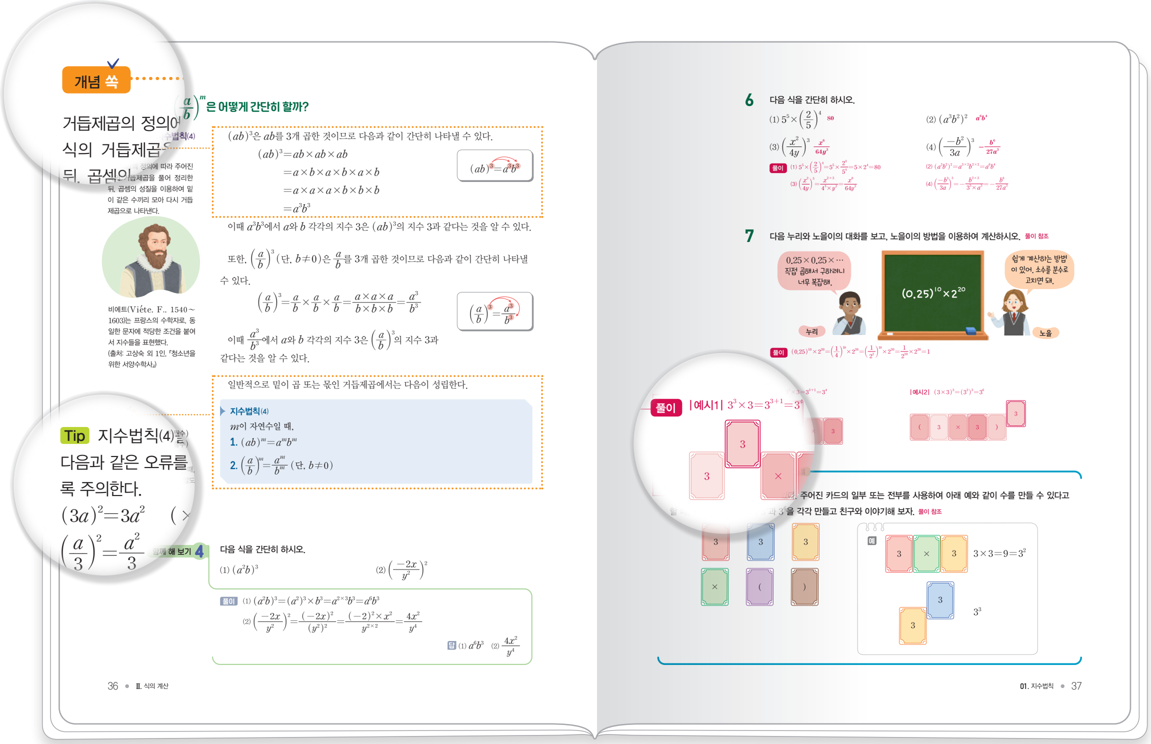
학생들이 이 자습서를 통하여 수학에 관심을 가지고, 창의적 인성과 수학적 역량을 갖춘 미래 사회의 주역의 주역으로 성장해 나아가길 기원합니다.

저자 일동

구성과 특징

이 자습서는 2022 개정 교육과정에 따라 집필된 교과서를 토대로 학생들이 손쉽게 자기주도적 학습을 할 수 있도록 하였습니다.

특히, 친절한 교과서 개념 정리와 자세한 문제 풀이를 하였고, 부록으로 실전 대비 문제를 수록하여 수학에 대한 흥미와 자신감을 가지고 내신을 정복할 수 있도록 구성하였습니다.



〔 개념 쏙 〕

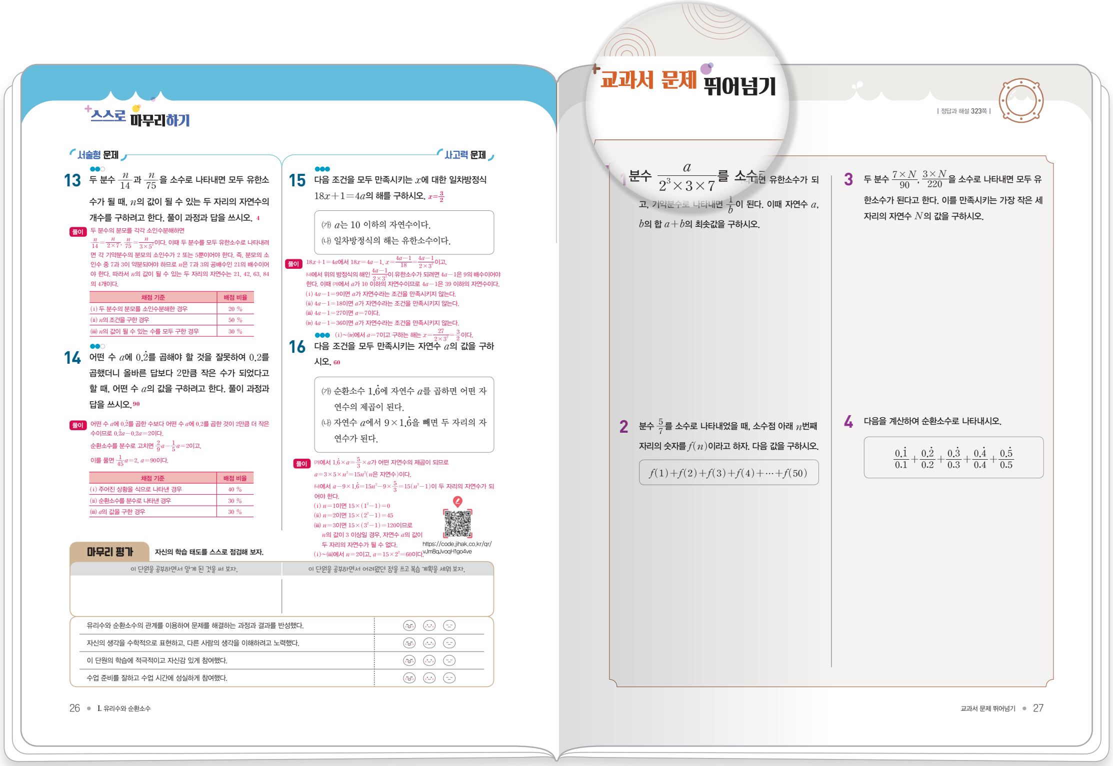
교과서 본문의 개념이나 '함께 해 보기'에서 꼭 알아야 할 핵심 내용들을 정리하였습니다.

〔 Tip 〕

본문 내용 중에 꼭 알아야 하거나 주의해야 하는 내용을 한 번 더 짚어 주었습니다.

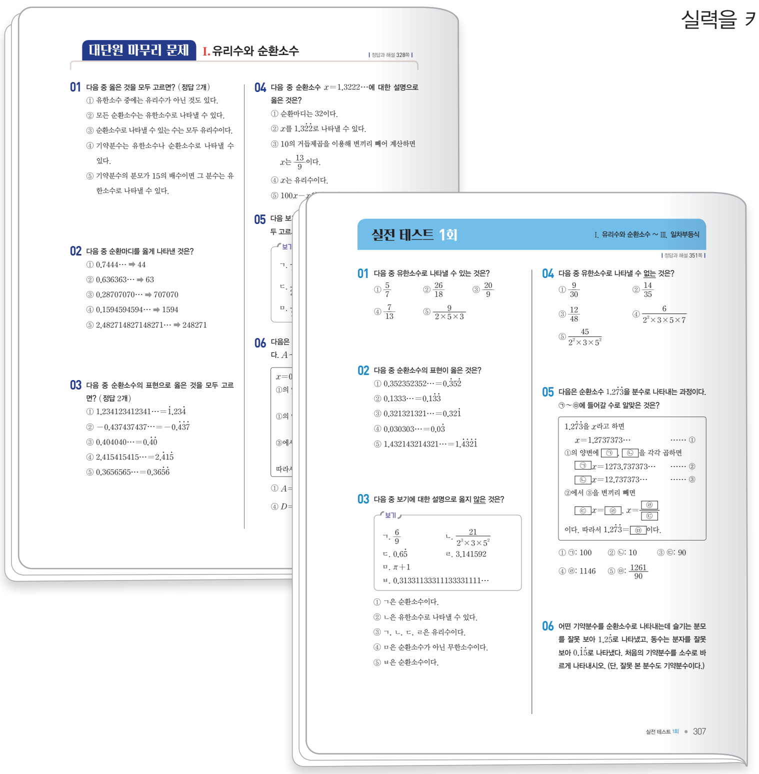
〔 문제 풀이 〕

본문에 수록된 문제의 풀이를 자세하게 설명하였습니다.



(교과서 문제 뛰어넘기)

대단원별로 꼭 알아야 하는 문제 또는 교과서 심화 문제로 실력을 키울 수 있도록 하였습니다.



(실전 대비 문제)

대단원 마무리 문제, 실전 테스트를 부록으로 제공하여 학교 시험에 대비할 수 있도록 하였습니다.

차례

I

유리수와 순환소수

단원 이야기

일상 생활에서 어떤 물건을 나누고 그 결과를 표현할 때 분수가 자주 사용되고, 정확한 양을 측정하거나 수의 크기를 비교할 때 소수가 유용하게 사용된다.

이 단원에서는 유리수를 분수나 소수로 나타내는 과정을 통해 유리수와 소수 사이의 관계를 배운다.

| 배운 내용 |

초5~6
- 분수와 소수의 관계

중1
- 소인수분해
- 정수와 유리수

| 이어질 내용 |

중3
- 제곱근과 실수


8
5
7

이것만은 알고 가기

초 5~6 분수와 소수의 관계 잘함 보통 모름

1 다음 분수를 소수로 나타내시오.

(1) $\frac{3}{10}$ 0.3　　(2) $\frac{79}{100}$ 0.79

(3) $\frac{13}{20}$ 0.65　　(4) $\frac{7}{5}$ 1.4

풀이 (1) $\frac{3}{10}=0.3$　(2) $\frac{79}{100}=0.79$
(3) $\frac{13}{20}=\frac{65}{100}=0.65$　(4) $\frac{7}{5}=\frac{14}{10}=1.4$

• 분수를 소수로 나타낼 때에는 분모를 10, 100, 1000, … 과 같이 10의 거듭제곱의 꼴로 바꾼 후 소수로 나타낸다.

초 5~6 분수와 소수의 관계 잘함 보통 모름

2 다음 소수를 기약분수로 나타내시오.

(1) 0.7 $\frac{7}{10}$　　(2) 0.6 $\frac{3}{5}$

(3) 0.25 $\frac{1}{4}$　　(4) 1.32 $\frac{33}{25}$

풀이 (1) $0.7=\frac{7}{10}$　(2) $0.6=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$
(3) $0.25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$　(4) $1.32=\frac{132}{100}=\frac{33}{25}$

• 분모와 분자의 공약수가 1뿐인 분수를 기약분수라고 한다.

중 1 소인수분해 잘함 보통 모름

3 다음 자연수를 소인수분해하시오.

(1) 27 3^3　　(2) 36 $2^2\times3^2$

(3) 120 $2^3\times3\times5$　　(4) 280 $2^3\times5\times7$

풀이 (1) $27=3\times9=3\times3\times3=3^3$
(2) $36=2\times18=2\times2\times9=2\times2\times3\times3=2^2\times3^2$
(3) $120=2\times60=2\times2\times30=2\times2\times2\times15=2\times2\times2\times3\times5=2^3\times3\times5$
(4) $280=2\times140=2\times2\times70=2\times2\times2\times35=2\times2\times2\times5\times7=2^3\times5\times7$

• 1보다 큰 자연수 중에서 약수가 1과 자기 자신뿐인 수를 소수라고 한다.
• 1보다 큰 자연수를 소인수들만의 곱으로 나타내는 것을 소인수분해한다고 한다.

중 1 정수와 유리수 잘함 보통 모름

4 다음 수 중에서 아래에 알맞은 수를 모두 찾으시오.

$-2,\quad 1,\quad -\frac{3}{5},\quad 0.8,\quad 0,\quad \frac{7}{2}$

(1) 양의 정수
1

(2) 음의 유리수
$-2,\ -\frac{3}{5}$

(3) 정수가 아닌 유리수
$-\frac{3}{5},\ 0.8,\ \frac{7}{2}$

• 자연수에 양의 부호 +를 붙인 수인 양의 정수와 0 그리고 자연수에 음의 부호 −를 붙인 수인 음의 정수를 통틀어 정수라고 한다.
• 분자, 분모가 자연수인 분수에 양의 부호 +를 붙인 수인 양의 유리수와 0 그리고 분자, 분모가 자연수인 분수에 음의 부호 −를 붙인 수인 음의 유리수를 통틀어 유리수라고 한다.

01 유리수의 소수 표현

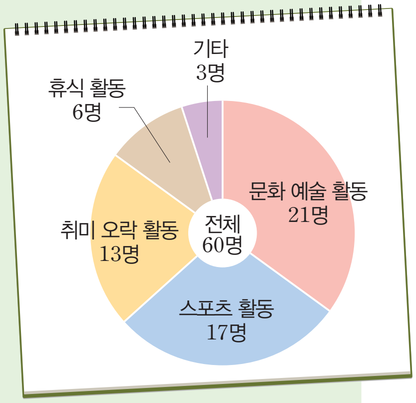
이 단원에서 배우는 용어와 기호
유한소수, 무한소수, 순환소수, 순환마디, 순환소수 표현
(예: $7.\dot{2}1\dot{5}$)

[학습 목표] 순환소수의 뜻을 안다.

유한소수, 무한소수, 순환소수는 무엇일까?

생각 펼치기

오른쪽 그림은 어느 해 60명의 청소년을 대상으로 지난 1년 동안 어떤 여가 활동에 가장 많이 참여했는지 조사한 결과를 나타낸 것이다. 다음 물음에 답해 보자.



1. 문화 예술 활동과 스포츠 활동으로 응답한 청소년의 비율을 각각 분수로 나타내 보자. $\frac{7}{20}$, $\frac{17}{60}$

2. 1에서 나타낸 분수를 각각 소수로 나타내고, 두 소수의 차이점을 말해 보자. 풀이 참조

풀이 1. 문화 예술 활동으로 응답한 청소년의 비율은 $\frac{21}{60}=\frac{7}{20}$이고, 스포츠 활동으로 응답한 청소년의 비율은 $\frac{17}{60}$이다.
2. $\frac{7}{20}=0.35$, $\frac{17}{60}=0.28333\cdots$으로 0.35는 소수점 아래에 0이 아닌 숫자가 유한 번 나타나고, 0.28333…은 소수점 아래에 0이 아닌 숫자가 무한 번 나타난다.

유한소수와 무한소수

생각 펼치기 에서 문화 예술 활동과 스포츠 활동에 참여했다고 응답한 청소년의 비율을 나타낸 두 수 $\frac{7}{20}$, $\frac{17}{60}$과 같이 분수 $\frac{a}{b}$(단, a, b는 정수, $b\neq0$)로 나타낼 수 있는 수를 유리수라고 한다. 이러한 분수는 분자를 분모로 나누어 정수 또는 소수로 나타낼 수 있다. 예를 들어

$$\frac{7}{20}=7\div20=0.35,\ \frac{17}{60}=17\div60=0.28333\cdots$$

이다. 이때 0.35와 같이 소수점 아래에 0이 아닌 숫자가 유한 번 나타나는 소수를 **유한소수**라 하고, 0.28333…과 같이 소수점 아래에 0이 아닌 숫자가 무한 번 나타나는 소수를 **무한소수**라고 한다.

$$\begin{array}{r} 0.2833\cdots \\ 60\,\overline{)\,17} \\ 120 \\ \hline 500 \\ 480 \\ \hline 200 \\ 180 \\ \hline 200 \\ 180 \\ \hline 20 \\ \vdots \end{array}$$

개념 쏙
소수 { 유한소수 / 무한소수

확인하기
(1) 0.5는 (유한소수, 무한소수)이다.
(2) 2.1666…은 (유한소수, 무한소수)이다.

1 다음 분수를 소수로 나타내고, 유한소수와 무한소수로 구분하시오.

(1) $\frac{1}{20}$ 0.05, 유한소수

(2) $-\frac{4}{3}$ $-1.333\cdots$, 무한소수

(3) $\frac{3}{16}$ 0.1875, 유한소수

(4) $-\frac{6}{11}$ $-0.545454\cdots$, 무한소수

순환소수

무한소수 중에서 0.333…, 0.1232323…, 7.215215215…와 같이 소수점 아래의 어떤 자리에서부터 일정한 숫자의 배열이 한없이 되풀이되는 것을 **순환소수**라고 한다. 이때 한없이 되풀이되는 가장 짧은 한 부분을 **순환마디**라고 한다.

무한소수 중에는 원주율 $\pi=3.141592\cdots$, 0.1010010001…과 같이 순환소수가 아닌 무한소수도 있다.

순환소수는 첫 번째 순환마디의 양 끝의 숫자 위에 점을 찍어 다음과 같이 간단히 나타낸다.

$0.333\cdots=0.\dot{3}$ 순환마디: 3

$0.1232323\cdots=0.1\dot{2}\dot{3}$ 순환마디: 23

$7.215215215\cdots=7.\dot{2}1\dot{5}$ 순환마디: 215

순환소수 7.215215215…를 $7.2\dot{1}5\dot{2}$ 또는 $7.\dot{2}1521\dot{5}$ 또는 $7.\dot{2}\dot{1}\dot{5}$와 같이 나타내지 않는다.

확인하기

(1) 2.222…의 순환마디는 $\boxed{2}$이고, 순환마디의 양 끝의 숫자 위에 점을 찍어 $\boxed{2.\dot{2}}$(으)로 나타낸다.

(2) 0.030303…의 순환마디는 $\boxed{03}$이고, 순환마디의 양 끝의 숫자 위에 점을 찍어 $\boxed{0.\dot{0}\dot{3}}$(으)로 나타낸다.

2 다음 순환소수의 순환마디를 말하고, 순환마디에 점을 찍어 간단히 나타내시오.

(1) 0.797979… 79, $0.\dot{7}\dot{9}$

(2) 1.6474747… 47, $1.6\dot{4}\dot{7}$

(3) −3.4555… 5, $-3.4\dot{5}$

(4) −1.030030030… 030, $-1.\dot{0}3\dot{0}$

어떤 유리수를 유한소수로 나타낼 수 있을까?

생각 펼치기

다음 표는 기약분수의 분모의 소인수를 구하고, 기약분수를 소수로 나타낸 것이다. 물음에 답해 보자.

기약분수	$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{11}$
분모의 소인수	5	2, 5	2, 3	2	11
소수	0.8	0.35	$0.8\dot{3}$	0.125	$0.\dot{3}\dot{6}$

1. 위의 표를 완성해 보자.

2. 위의 표에서 유한소수를 찾고, 유한소수에서 분모의 소인수가 어떤 공통된 특징을 가지고 있는지 말해 보자. 풀이 참조

풀이 유한소수는 0.8, 0.35, 0.125이고, 유한소수가 되는 기약분수는 모두 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이다.

개념 쏙

모든 유한소수는 분모가 10의 거듭제곱인 분수로 나타낼 수 있다. 10^n을 소인수분해하면 $10^n=2^n\times5^n$이므로 분모는 아무리 약분해도 2 또는 5만을 소인수로 갖게 되므로 유한소수를 분수로 고치면 분모의 소인수는 2나 5뿐이다.

유한소수로 나타낼 수 있는 유리수

네이피어(Napier, J., 1550~1617)는 영국의 수학자로, 오늘날 우리가 사용하는 것과 똑같은 소수 표기법을 발명했다.
(출처: 고상숙 외 1인, 『청소년을 위한 서양수학사』)

생각 펼치기 에서 유한소수는 다음과 같이 분모가 10의 거듭제곱인 분수로 나타낼 수 있다.

$$0.8=\frac{8}{10},\quad 0.35=\frac{35}{100},\quad 0.125=\frac{125}{1000}$$

이때 분모를 각각 소인수분해하면

$$10=2\times5,\ 10^2=2^2\times5^2,\ 10^3=2^3\times5^3$$

과 같이 소인수가 2 또는 5뿐임을 알 수 있다.

한편, 분수 $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{1}{8}$은 다음과 같이 유한소수로 나타낼 수 있다.

$$\frac{4}{5}=\frac{4\times2}{5\times2}=\frac{8}{10}=0.8$$

$$\frac{7}{20}=\frac{7}{2^2\times5}=\frac{7\times5}{2^2\times5\times5}=\frac{35}{10^2}=0.35$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}=\frac{5^3}{2^3\times5^3}=\frac{125}{10^3}=0.125$$

더 이상 약분되지 않는 분수를 기약분수라고 한다.

이와 같이 정수가 아닌 유리수를 기약분수로 나타냈을 때, 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이면 분모와 분자에 2 또는 5의 거듭제곱을 적당히 곱하여 분모가 10의 거듭제곱인 분수로 고칠 수 있으므로 그 유리수는 유한소수로 나타낼 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

분모가 2 또는 5 이외의 소인수를 가지는 기약분수는 유한소수로 나타낼 수 없다.

유한소수로 나타낼 수 있는 유리수

정수가 아닌 유리수를 기약분수로 나타냈을 때, 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이면 그 유리수는 유한소수로 나타낼 수 있다.

함께 해 보기 1 다음 분수 중에서 유한소수로 나타낼 수 있는 것을 모두 찾으시오.

$$\frac{3}{3\times5},\quad \frac{21}{56},\quad -\frac{12}{180}$$

개념 쏙

분모의 소인수가 2나 5뿐이라는 것은 2와 5를 모두 소인수로 가진다는 뜻이 아니라 2만 가지거나 5만 가지거나 2와 5를 모두 가져도 된다는 의미이다. 즉, 2와 5 이외의 소인수를 가지지 않는다는 뜻이다.

풀이 분수를 각각 기약분수로 나타낸 다음 분모를 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\frac{3}{3\times5}=\frac{1}{5},\ \frac{21}{56}=\frac{3}{8}=\frac{3}{2^3},\ -\frac{12}{180}=-\frac{1}{15}=-\frac{1}{3\times5}$$

따라서 주어진 분수 중에서 유한소수로 나타낼 수 있는 것은 기약분수로 나타냈을 때, 분모의 소인수가 2 또는 5뿐인 $\frac{3}{3\times5}$, $\frac{21}{56}$ 이다.

답 $\frac{3}{3\times5}$, $\frac{21}{56}$

Tip 기약분수가 아니라면 먼저 기약분수로 고치는 과정이 필요하다.

3 다음 분수 중에서 유한소수로 나타낼 수 있는 것을 모두 찾으시오. $\frac{21}{2^2\times5\times7}$, $-\frac{35}{112}$

$$\frac{21}{2^2\times5\times7},\quad \frac{24}{270},\quad \frac{2}{165},\quad -\frac{35}{112}$$

풀이 $\frac{21}{2^2\times5\times7}=\frac{3}{2^2\times5}$, $\frac{24}{270}=\frac{4}{45}=\frac{2^2}{3^2\times5}$, $\frac{2}{165}=\frac{2}{3\times5\times11}$, $-\frac{35}{112}=-\frac{5}{2^4}$이다. 따라서 주어진 분수 중에서 유한소수로 나타낼 수 있는 것은 기약분수로 나타냈을 때, 분모의 소인수가 2 또는 5뿐인 $\frac{21}{2^2\times5\times7}$, $-\frac{35}{112}$이다.

어떤 유리수를 순환소수로 나타낼 수 있을까?

순환소수로 나타낼 수 있는 유리수

분모가 2 또는 5 이외의 소인수를 가지는 기약분수를 소수로 나타내는 과정은 다음과 같다.

예를 들어 $\frac{3}{7}$을 소수로 나타내기 위해 오른쪽과 같이 계산할 때, 각 단계에서 나머지는 7보다 작은 자연수 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 하나로 나타난다. 따라서 적어도 7번째 안에는 앞에서 나온 나머지와 같은 수가 나타난다. 각 계산 단계에서 나머지를 차례대로 적어 보면

3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, …

이고, 나머지가 처음과 같이 3이 되면 그때부터 같은 몫이 되풀이되므로 순환마디가 생기게 된다.

$$\begin{array}{r}
0.4\,2\,8\,5\,7\,1\,4\cdots \\
7\,\overline{)\,3} \\
2\,8 \\
\hline
2\,0 \\
1\,4 \\
\hline
6\,0 \\
5\,6 \\
\hline
4\,0 \\
3\,5 \\
\hline
5\,0 \\
4\,9 \\
\hline
1\,0 \\
7 \\
\hline
3 \\
\vdots
\end{array}$$

같다.

즉, $\frac{3}{7}$은 다음과 같은 순환소수로 나타낼 수 있다.

$$\frac{3}{7}=0.428571428571428571\cdots$$
$$=0.\dot{4}2857\dot{1}$$

수학 호기심

각 단계에서 나머지가 0이 나타나지 않은 이유는 무엇일까?

풀이 나머지가 0이 나타나게 되면 더 이상 나눗셈을 할 수 없으므로 유한소수가 된다. 따라서 순환소수에서는 나머지가 0이 나타나지 않는다.

Tip 분모가 2나 5 이외의 소인수를 가지는 유리수 $\frac{a}{b}(b>0)$를 소수로 나타내기 위해 a를 b로 나누면 나머지가 0인 경우는 없다. 따라서 나머지로 나타날 수 있는 수는 1, 2, …, $b-1$의 최대 $(b-1)$개이다.
따라서 b번의 나눗셈 이내에 앞에 나왔던 나머지와 같은 나머지가 나오게 되고 그 후에는 앞의 나눗셈이 되풀이된다.

이와 같이 정수가 아닌 유리수를 기약분수로 나타냈을 때, 분모가 2 또는 5 이외의 소인수를 가지면 그 분수는 무한소수로 나타낼 수 있으며 그 무한소수는 순환소수가 된다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

순환소수로 나타낼 수 있는 유리수

정수가 아닌 유리수를 기약분수로 나타냈을 때, 분모가 2 또는 5 이외의 소인수를 가지는 유리수는 순환소수로 나타낼 수 있다.

함께 해 보기 2

두 분수 $\frac{11}{55}$과 $\frac{8}{15}$ 중에서 유한소수로 나타낼 수 없는 것을 찾고, 이를 순환소수로 나타내시오.

Tip 분모를 소인수분해한 뒤 주어진 분수가 기약분수인가 아닌가를 우선적으로 판단하여야 한다.

풀이 분수를 각각 기약분수로 나타낸 다음 분모를 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\frac{11}{55}=\frac{1}{5},\ \frac{8}{15}=\frac{8}{3\times5}$$

따라서 유한소수로 나타낼 수 없는 것은 기약분수로 나타냈을 때, 분모가 2 또는 5 이외의 소인수를 가지는 $\frac{8}{15}$이고, 이를 순환소수로 나타내면

$$\frac{8}{15}=0.5333\cdots=0.5\dot{3}$$

이다.

답 $\frac{8}{15}$, $0.5\dot{3}$

4 다음 분수 중에서 유한소수로 나타낼 수 없는 것을 모두 찾고, 이를 각각 순환소수로 나타내시오. $-\frac{4}{9}=-0.\dot{4}$, $\frac{5}{11}=0.\dot{4}\dot{5}$

$$-\frac{4}{9},\quad \frac{12}{20},\quad -\frac{63}{72},\quad \frac{5}{11}$$

풀이 $-\frac{4}{9}=-\frac{4}{3^2}$, $\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$, $-\frac{63}{72}=-\frac{7}{2^3}$, $\frac{5}{11}$에서 유한소수로 나타낼 수 없는 것은 기약분수로 나타냈을 때 분모가 2 또는 5 이외의 소인수를 가지는 $-\frac{4}{9}$, $\frac{5}{11}$이다. 이를 순환소수로 나타내면 $-\frac{4}{9}=-0.\dot{4}$, $\frac{5}{11}=0.\dot{4}\dot{5}$이다.

생각 더 나아가기 추론

다음은 이안이가 자연수 중 하나인 n을 떠올리고 그 수에 대하여 설명한 것이다. 이안이가 생각한 수를 맞혀 보자. 6

- n은 10 이하의 자연수이다.
- $\frac{n}{48}$은 유한소수로 나타낼 수 있다.
- $\frac{1}{n+1}$은 순환소수로 나타낼 수 있다.

풀이 $\frac{n}{48}=\frac{n}{2^4\times3}$을 유한소수로 나타내기 위해서는 기약분수로 나타냈을 때 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 하므로 n은 3의 배수이다.
10 이하의 자연수 중 3의 배수인 것은 3, 6, 9이다.
$n=3$일 때 $\frac{1}{n+1}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$, $n=6$일 때 $\frac{1}{n+1}=\frac{1}{7}$, $n=9$일 때 $\frac{1}{n+1}=\frac{1}{10}=\frac{1}{2\times5}$이므로
이 중에서 $\frac{1}{n+1}$을 순환소수로 나타낼 수 있는 것은 분모가 2 또는 5 이외의 소인수를 가지는 $\frac{1}{7}$뿐이다. 따라서 $n=6$이다.

스스로 점검하기

1

다음 □ 안에 알맞은 말을 써넣으시오.

(1) 소수점 아래에 0이 아닌 숫자가 유한 번 나타나는 소수를 [유한소수](이)라 하고, 무한 번 나타나는 소수를 [무한소수](이)라고 한다.

(2) 소수점 아래의 어떤 자리에서부터 일정한 숫자의 배열이 한없이 되풀이되는 무한소수를 [순환소수](이)라 하고, 되풀이되는 가장 짧은 한 부분을 [순환마디](이)라고 한다.

2

다음을 유한소수와 무한소수로 구분하시오.

(1) 0.1 유한소수 (2) 1.232323⋯ 무한소수

(3) 5.77777777 유한소수 (4) 0.1223334444⋯ 무한소수

3

다음 순환소수의 순환마디를 말하고, 순환마디에 점을 찍어 간단히 나타내시오.

(1) $0.111\cdots$ 1, $0.\dot{1}$ (2) $2.171717\cdots$ 17, $2.\dot{1}\dot{7}$

(3) $0.4656565\cdots$ 65, $0.4\dot{6}\dot{5}$ (4) $4.614614614\cdots$ 614, $4.\dot{6}1\dot{4}$

4

다음 분수 중에서 유한소수로 나타낼 수 있는 것을 모두 찾으시오. (1), (3)

(1) $\dfrac{12}{15}$ (2) $\dfrac{13}{60}$

(3) $-\dfrac{7}{28}$ (4) $\dfrac{44}{77}$

풀이 (1) $\dfrac{12}{15}=\dfrac{4}{5}$, (2) $\dfrac{13}{60}=\dfrac{13}{2^2\times3\times5}$, (3) $-\dfrac{7}{28}=-\dfrac{1}{2^2}$, (4) $\dfrac{44}{77}=\dfrac{4}{7}$
에서 유한소수로 나타낼 수 있는 것은 기약분수로 나타냈을 때 분모의 소인수가 2 또는 5 뿐인 $\dfrac{12}{15}$, $-\dfrac{7}{28}$이다.

5

분수 $\dfrac{15}{n}$를 정수 또는 유한소수로 나타낼 수 있는 20 이하의 자연수 n의 값은 모두 몇 개인지 구하시오. 12개

풀이 $\dfrac{15}{n}=\dfrac{3\times5}{n}$를 정수 또는 유한소수로 나타낼 수 있도록 하는 20 이하의 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20으로 12개이다.

6 사고력 UP

추론

도연이와 희경이가 자연수 5, 6, 8, 9가 하나씩 적힌 4장의 카드를 사용하여 다음 규칙에 따라 게임을 한 번 했다. 도연이가 받은 점수가 0점일 때, 희경이가 만든 분수 2개와 받은 점수를 각각 구하시오. $\dfrac{6}{9}$, $\dfrac{9}{6}$, 1점

- 각자 카드를 2장씩 나누어 갖는다.
- 자신이 가진 카드에 적힌 두 수를 a, b라고 할 때, $\dfrac{b}{a}$와 $\dfrac{a}{b}$ 중에서 순환소수로 나타낼 수 있는 것의 개수당 1점을 받는다.

풀이 도연이가 받은 점수가 0점이므로 도연이는 가진 카드로 만든 두 수 $\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{a}{b}$를 소수로 나타내면 모두 유한소수이다.
5, $6=2\times3$, $8=2^3$, $9=3^2$이므로 도연이가 6 또는 9가 적힌 카드를 가지면 두 수 $\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{a}{b}$ 중 적어도 하나는 기약분수로 나타냈을 때 분모가 소인수 3을 갖는 경우가 생긴다. 그러므로 도연이는 5와 8이 적힌 카드를 가졌다. 따라서 희경이가 가진 카드에 적힌 두 수는 6, 9이고, 희경이가 만든 분수는 $\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}$으로 2개이다. 이 중에서 순환소수로 나타낼 수 있는 것은 $\dfrac{6}{9}$뿐이므로 희경이가 받은 점수는 1점이다.

자기 평가	
순환소수의 뜻을 안다.	
유한소수로 나타낼 수 있는 유리수와 순환소수로 나타낼 수 있는 유리수를 구분할 수 있다.	

수학으로 세상 보기

그림으로 순환소수 표현하기

문제 해결 · 의사소통 · 연결

학습한 수학 내용과 관련하여 자신이 이해한 수학적 개념의 의미나 특징 또는 문제 해결 방법 등을 수식이나 글로 표현하는 방법 외에 그림으로 표현하는 방법도 있다. 오른쪽 그림은 순환소수 $0.1666\cdots$을 순환마디의 숫자 위에 점을 찍어 $0.1\dot{6}$으로 간단히 나타낼 수 있음을 그림으로 재치 있게 표현한 것이다.

다음 활동을 통해 순환소수를 그림으로 표현해 보자.

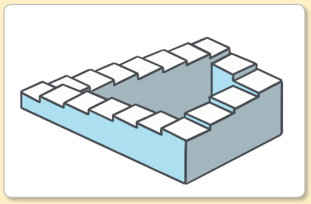
1 다음에서 그림으로 표현하는 과정을 살펴보자.

1 순환소수에 대한 내용 중에서 그림으로 표현하고 싶은 내용을 정한다.

예 유한소수로 나타낼 수 없는 유리수는 순환소수가 된다. 예를 들어 $\frac{2}{7}=0.\dot{2}8571\dot{4}$이다.

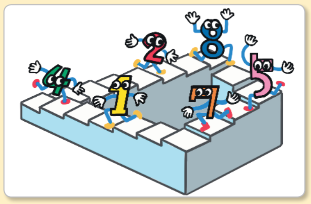
2 순환소수를 표현하기에 적합한 상황이나 소재를 생각한다.

예 오른쪽 그림은 인간의 착시를 이용해서 그린 펜로즈의 계단이다. 계단을 오르거나 내려가도 결국 제자리로 돌아오게 되어 무한히 오르내릴 수 있는 계단처럼 보인다.



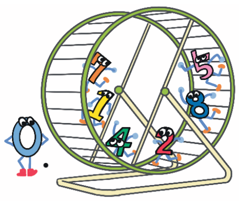
3 순환소수를 그림으로 표현한다.

예 순환소수에서 순환마디가 무한히 반복되는 특징을 무한히 오르내릴 수 있는 펜로즈의 계단에 빗대어 표현했다.



2 순환소수에 대하여 학습한 내용을 그림으로 표현해 보자.

풀이 |예시| 순환소수 $0.\dot{7}1428\dot{5}$의 순환마디 714285가 계속 반복되는 것을 쳇바퀴에서 달리는 모습으로 표현했다.



02 순환소수의 분수 표현

[학습 목표] 유리수와 순환소수의 관계를 설명할 수 있다.

순환소수를 분수로 어떻게 나타낼까?

생각 펼치기

다음은 순환소수를 분수로 나타내는 방법에 대하여 두 학생과 선생님이 나눈 대화이다. 대화를 읽고, 물음에 답해 보자.

1. $0.\dot{2}=x$라고 할 때, 두 순환소수 x와 $10x$의 공통점을 말해 보자. x와 $10x$는 모두 소수점 아래의 부분이 서로 같다.

2. 위의 **1**에서 $10x-x$의 값을 구해 보자. $10x-x=2$

순환소수를 분수로 나타내기

생각 펼치기 에서 $10x-x$의 값을 구하면 $10x-x=2$와 같이 정수가 된다.

이와 같이 어떤 순환소수에 10의 거듭제곱을 적당히 곱하여 그 소수점 아래의 부분이 처음 순환소수와 같아지도록 만들면 두 수의 차는 정수임을 알 수 있다.

이를 이용하여 순환소수를 분수로 나타내 보자.

개념 쏙

소수점 아래의 부분이 같아지도록 10, 100, 1000, … 중에서 적당한 수를 찾아 곱한다.

순환소수 $0.\dot{2}$를 x라고 하면

$$x=0.222\cdots \quad \cdots\cdots ①$$

이고, ①의 양변에 10을 곱하면

$$10x=2.222\cdots \quad \cdots\cdots ②$$

이다. x와 $10x$는 소수점 아래의 부분이 같으므로 ②에서 ①을 변끼리 빼면

$$9x=2, \text{ 즉 } x=\frac{2}{9}$$

이다. 따라서 $0.\dot{2}=\frac{2}{9}$이다.

$$\begin{array}{rr} & 10x=2.222\cdots \\ -) & x=0.222\cdots \\ \hline & 9x=2 \end{array}$$

이와 같은 방법으로 모든 순환소수를 분수로 나타낼 수 있다.

함께 해 보기 1 순환소수 $0.\dot{2}\dot{7}$을 분수로 나타내시오.

풀이 $0.\dot{2}\dot{7}$을 x라고 하면

$x=0.272727\cdots$ ······ ①

①의 양변에 100을 곱하면

$100x=27.272727\cdots$ ······ ②

②에서 ①을 변끼리 빼면

$99x=27,\ x=\dfrac{27}{99}=\dfrac{3}{11}$

이다. 따라서 $0.\dot{2}\dot{7}=\dfrac{3}{11}$이다.

$$\begin{array}{rr} 100x= & 27.272727\cdots \\ -)\quad x= & 0.272727\cdots \\ \hline 99x= & 27 \end{array}$$

답 $\dfrac{3}{11}$

1 다음 순환소수를 분수로 나타내시오.

(1) $0.\dot{5}$ $\dfrac{5}{9}$　(2) $4.\dot{3}$ $\dfrac{13}{3}$　(3) $0.\dot{8}\dot{1}$ $\dfrac{9}{11}$　(4) $3.\dot{1}4\dot{1}$ $\dfrac{1046}{333}$

풀이

(1) $x=0.\dot{5}$라고 하면

$x=0.555\cdots$ ······ ①

①의 양변에 10을 곱하면

$10x=5.555\cdots$ ······ ②

②에서 ①을 변끼리 빼면

$9x=5,$

$x=\dfrac{5}{9}$

따라서 $0.\dot{5}=\dfrac{5}{9}$이다.

(2) $x=4.\dot{3}$이라고 하면

$x=4.333\cdots$ ······ ①

①의 양변에 10을 곱하면

$10x=43.333\cdots$ ······ ②

②에서 ①을 변끼리 빼면

$9x=39,\ x=\dfrac{13}{3}$

따라서 $4.\dot{3}=\dfrac{13}{3}$이다.

(3) $x=0.\dot{8}\dot{1}$이라고 하면

$x=0.818181\cdots$ ······ ①

①의 양변에 100을 곱하면

$100x=81.818181\cdots$ ······ ②

②에서 ①을 변끼리 빼면

$99x=81,\ x=\dfrac{9}{11}$

따라서 $0.\dot{8}\dot{1}=\dfrac{9}{11}$이다.

(4) $x=3.\dot{1}4\dot{1}$이라고 하면

$x=3.141141141\cdots$ ······ ①

①의 양변에 1000을 곱하면

$1000x=3141.141141141\cdots$ ······ ②

②에서 ①를 변끼리 빼면 $999x=3138,\ x=\dfrac{1046}{333}$ 따라서 $3.\dot{1}4\dot{1}=\dfrac{1046}{333}$이다.

함께 해 보기 2 순환소수 $0.1\dot{7}\dot{3}$을 분수로 나타내시오.

풀이 $0.1\dot{7}\dot{3}$을 x라고 하면

$x=0.1737373\cdots$ ······ ①

①의 양변에 10을 곱하면

$10x=1.737373\cdots$ ······ ②

①의 양변에 1000을 곱하면

$1000x=173.737373\cdots$ ······ ③

③에서 ②를 변끼리 빼면

$990x=172,\ x=\dfrac{172}{990}=\dfrac{86}{495}$

이다. 따라서 $0.1\dot{7}\dot{3}=\dfrac{86}{495}$이다.

$$\begin{array}{rr} 1000x= & 173.737373\cdots \\ -)\quad 10x= & 1.737373\cdots \\ \hline 990x= & 172 \end{array}$$

답 $\dfrac{86}{495}$

2 다음 순환소수를 분수로 나타내시오.

(1) $0.2\dot{5}$ $\dfrac{23}{90}$　(2) $1.4\dot{8}$ $\dfrac{67}{45}$　(3) $0.9\dot{1}\dot{2}$ $\dfrac{301}{330}$　(4) $1.3\dot{1}\dot{5}$ $\dfrac{217}{165}$

풀이

(1) $x=0.2\dot{5}$라고 하면

$x=0.2555\cdots$ ······ ①

①의 양변에 10을 곱하면

$10x=2.555\cdots$ ······ ②

①의 양변에 100을 곱하면

$100x=25.555\cdots$ ······ ③

③에서 ②를 변끼리 빼면

$90x=23,\ x=\dfrac{23}{90}$

따라서 $0.2\dot{5}=\dfrac{23}{90}$이다.

(2) $x=1.4\dot{8}$이라고 하면

$x=1.4888\cdots$ ······ ①

①의 양변에 10을 곱하면

$10x=14.888\cdots$ ······ ②

①의 양변에 100을 곱하면

$100x=148.888\cdots$ ······ ③

③에서 ②를 변끼리 빼면

$90x=134,\ x=\dfrac{67}{45}$

따라서 $1.4\dot{8}=\dfrac{67}{45}$이다.

(3) $x=0.9\dot{1}\dot{2}$라고 하면 $x=0.9121212\cdots$ ······ ①

①의 양변에 10을 곱하면 $10x=9.121212\cdots$ ······ ②

①의 양변에 1000을 곱하면 $1000x=912.121212\cdots$ ······ ③

③에서 ②를 변끼리 빼면 $990x=903,\ x=\dfrac{301}{330}$ 따라서 $0.9\dot{1}\dot{2}=\dfrac{301}{330}$이다.

(4) $x=1.3\dot{1}\dot{5}$라고 하면 $x=1.3151515\cdots$ ······ ①

①의 양변에 10을 곱하면 $10x=13.151515\cdots$ ······ ②

①의 양변에 1000을 곱하면 $1000x=1315.151515\cdots$ ······ ③

③에서 ②를 변끼리 빼면, $990x=1302,\ x=\dfrac{651}{495}=\dfrac{217}{165}$ 따라서 $1.3\dot{1}\dot{5}=\dfrac{217}{165}$이다.

유리수와 소수 사이의 관계

이와 같이 모든 순환소수는 분수로 나타낼 수 있으므로 유리수이다. 또한, 유한소수 역시 분수로 나타낼 수 있으므로 유리수이다.

개념 쏙

$\frac{a}{b}$(단, $b \neq 0$, a, b는 정수)와 같이 분수로 나타낼 수 있는 수를 유리수라고 한다.

일반적으로 유리수와 소수 사이에는 다음이 성립한다.

유리수와 소수의 관계

유한소수와 순환소수는 모두 유리수이다.

- 소수
  - 유한소수 — 유리수
  - 무한소수
    - 순환소수 — 유리수
    - 순환소수가 아닌 무한소수

풀이 유리수는 분수의 꼴로 나타낼 수 있는 수이다. 유리수는 정수 또는 소수로 나타낼 수 있고, 정수가 아닌 유리수는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다. 따라서 주어진 수 중에서 유리수는 $\frac{5}{9}$, -0.4, $0.\dot{2}\dot{3}$, -7이다.

3 다음 수 중에서 유리수를 모두 찾으시오. $\frac{5}{9}$, -0.4, $0.\dot{2}\dot{3}$, -7

$$\frac{5}{9},\quad -0.4,\quad 0.\dot{2}\dot{3},\quad \pi,\quad -7$$

풀이 ①에서 $0.\dot{a}=\frac{2}{\square}$라고 하자. (단, a는 한 자리 자연수) $x=0.\dot{a}$라고 하면 $10x-x=a$, $x=\frac{a}{9}$, 즉 $0.\dot{a}=\frac{a}{9}$이다.

그런데 숫자 카드에 9가 없으므로 a는 9의 약수인 3 또는 3의 배수인 6이어야 한다.

즉, $0.\dot{\boxed{3}}=\frac{2}{\boxed{6}}$ 또는 $0.\dot{\boxed{6}}=\frac{2}{\boxed{3}}$이다.

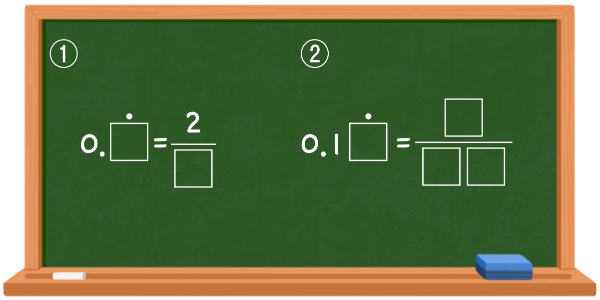
②에서 $0.1\dot{b}=\frac{\square}{\square\square}$라고 하자. (단, b는 한 자리 자연수)

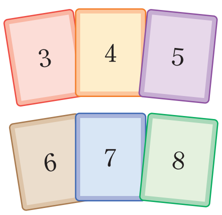
$x=0.1\dot{b}$라고 하면 $100x-10x=(10+b+0.\dot{b})-(1+0.\dot{b})=9+b$에서 $x=\frac{9+b}{90}$이다.

b는 4, 5, 7, 8 중 하나이므로 $0.1\dot{4}=\frac{13}{90}$, $0.1\dot{5}=\frac{14}{90}=\frac{7}{45}$, $0.1\dot{7}=\frac{8}{45}$, $0.1\dot{8}=\frac{17}{90}$에서 $0.1\dot{\boxed{7}}=\frac{\boxed{8}}{\boxed{4}\boxed{5}}$이다.

생각 더 나아가기 추론 의사소통

3부터 8까지의 자연수가 각각 적힌 6장의 숫자 카드가 있다. 이 숫자 카드를 칠판에 적힌 두 식의 □ 안에 하나씩 놓아 두 식이 모두 성립하도록 만들어 보고, 자신이 카드를 놓은 방법을 친구에게 설명해 보자. 풀이 참조





스스로 점검하기

1

다음 설명 중 옳은 것은 ○표, 옳지 않은 것은 ×표 하시오.

(1) 모든 순환소수는 분수로 나타낼 수 있다. (○)

(2) 모든 유리수는 정수 또는 유한소수로 나타낼 수 있다. (×)

풀이 (1) 모든 순환소수는 10의 거듭제곱을 이용하여 분수로 나타낼 수 있다.
(2) |예시| 정수가 아닌 유리수 $\frac{1}{6}$은 유한소수로 나타낼 수 없다.

2

다음은 순환소수 $0.\dot{4}\dot{8}$을 분수로 나타내는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

> $0.\dot{4}\dot{8}$을 x라고 하면
> $x=0.484848\cdots$ ······ ①
> ①의 양변에 100을 곱하면
> $100x=\boxed{48.484848\cdots}$ ······ ②
> ②에서 ①을 변끼리 빼면
> $99x=\boxed{48}$, $x=\boxed{\frac{48}{99}}=\boxed{\frac{16}{33}}$
> 이다. 따라서 $0.\dot{4}\dot{8}=\boxed{\frac{16}{33}}$이다.

3

다음 순환소수를 분수로 나타내시오.

(1) $0.\dot{1}$ $\frac{1}{9}$

(2) $1.\dot{4}$ $\frac{13}{9}$

(3) $0.\dot{3}\dot{5}$ $\frac{35}{99}$

(4) $1.\dot{3}5\dot{1}$ $\frac{50}{37}$

풀이 (1) $x=0.\dot{1}$이라고 하면 $x=0.111\cdots$ ······ ①
①의 양변에 10을 곱하면 $10x=1.111\cdots$ ······ ②
②에서 ①을 변끼리 빼면 $9x=1$, $x=\frac{1}{9}$, 따라서 $0.\dot{1}=\frac{1}{9}$이다.
(2) $x=1.\dot{4}$라고 하면 $x=1.444\cdots$ ······ ①
①의 양변에 10을 곱하면 $10x=14.444\cdots$ ······ ②
②에서 ①을 변끼리 빼면 $9x=13$, $x=\frac{13}{9}$, 따라서 $1.\dot{4}=\frac{13}{9}$이다.

(3) $x=0.\dot{3}\dot{5}$라고 하면
$x=0.353535\cdots$ ······ ①
①의 양변에 100을 곱하면
$100x=35.353535\cdots$ ······ ②
②에서 ①을 변끼리 빼면
$99x=35$, $x=\frac{35}{99}$, 따라서 $0.\dot{3}\dot{5}=\frac{35}{99}$

(4) $x=1.\dot{3}5\dot{1}$이라고 하면
$x=1.351351351\cdots$ ······ ①
①의 양변에 1000을 곱하면
$1000x=1351.351351351\cdots$ ······ ②
②에서 ①을 변끼리 빼면 $999x=1350$,
$x=\frac{50}{37}$, 따라서 $1.\dot{3}5\dot{1}=\frac{50}{37}$이다.

4

분수 $\frac{a}{3}$를 소수로 나타내면 $4.\dot{6}$일 때, 자연수 a의 값을 구하시오. 14

풀이 $x=4.\dot{6}$이라고 하면 $x=4.666\cdots$ ······ ①
①의 양변에 10을 곱하면 $10x=46.666\cdots$ ······ ②
②에서 ①을 변끼리 빼면 $9x=42$, $x=\frac{14}{3}$이다.
따라서 $a=14$이다.

5

$1.0\dot{3}\times a$가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 a의 값을 구하시오. 30

풀이 $x=1.0\dot{3}$이라고 하면 $x=1.0333\cdots$ ······ ①
①의 양변에 10을 곱하면 $10x=10.333\cdots$ ······ ②
①의 양변에 100을 곱하면 $100x=103.333\cdots$ ······ ③
③에서 ②를 변끼리 빼면 $90x=93$, $x=\frac{31}{30}$이다.
즉, $1.0\dot{3}=\frac{31}{30}$이다. 따라서 $1.0\dot{3}\times a$가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 a는 30이다.

6 사고력 UP

추론

어떤 기약분수를 소수로 나타내는데 은우는 분모를 잘못 보아 $1.\dot{6}$으로 나타냈고, 나연이는 분자를 잘못 보아 $1.\dot{1}\dot{6}$으로 나타냈다. 처음의 기약분수를 소수로 바르게 나타내시오. (단, 잘못 본 분수도 기약분수이다.) $0.\dot{0}\dot{5}$

풀이 은우는 $1.\dot{6}=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$로 계산하였고, 나연이는 $1.\dot{1}\dot{6}=\frac{115}{99}$로 계산하였다.
이때 은우는 분자를 제대로 보고, 나연이는 분모를 제대로 본 것이므로 처음의 기약분수는 $\frac{5}{99}=0.\dot{0}\dot{5}$이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/nTD5DQXWnzg6iUjC

자기 평가	
유리수와 순환소수의 관계를 설명할 수 있다.	
유리수와 순환소수의 관계를 이용하는 문제 해결 과정을 반성할 수 있다.	

수학으로+ 탐험하기

순환마디의 성질 찾기

1 다음을 읽고, 분모가 7인 분수의 순환마디의 성질에 대해 알아보자.

분모가 7인 분수를 순환소수로 나타내면 순환마디를 이루는 숫자와 그 배열에서 재미있는 성질을 발견할 수 있다.

분수 $\frac{1}{7}$을 순환소수로 나타내기 위해 오른쪽 그림과 같이 나눗셈을 반복하면

$$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$$

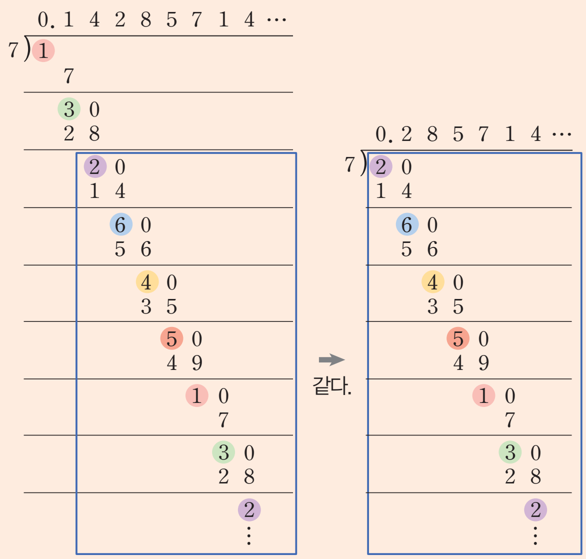
임을 알 수 있다.

이때 이 나눗셈 과정을 이용하면 $\frac{2}{7}$를 순환소수로 나타낼 수 있다.

$\frac{2}{7}=2\div7$에서 몫은 0, 나머지는 2이다. 나머지 2가 처음으로 나타나는 부분부터 그 다음에 이어지는 나눗셈 과정이 바로 $2\div7$을 구하는 과정이므로

$$\frac{2}{7}=0.\dot{2}8571\dot{4}$$

임을 알 수 있다.



(1) 위의 나눗셈 과정을 이용하여 분수를 순환소수로 나타내 보자.

	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$
순환소수	$0.\dot{1}4285\dot{7}$	$0.\dot{2}8571\dot{4}$	$0.\dot{4}2857\dot{1}$	$0.\dot{5}7142\dot{8}$	$0.\dot{7}1428\dot{5}$	$0.\dot{8}5714\dot{2}$

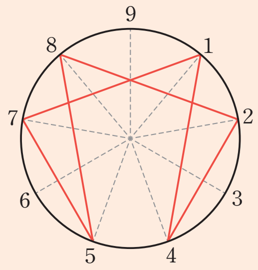
(2) 위의 나눗셈 과정을 이용하여 $\frac{20}{7}$을 순환소수로 나타내고, (1)의 표를 이용하여 구하는 방법에 대해 이야기해 보자. $\frac{20}{7}=2.\dot{8}5714\dot{2}$

풀이 [방법1] $20\div7$은 몫이 2이고 나머지가 6이다.
즉, $\frac{20}{7}=2+\frac{6}{7}$이다. 따라서 $\frac{6}{7}=0.\dot{8}5714\dot{2}$임을 이용하면 $\frac{20}{7}=2.\dot{8}5714\dot{2}$이다.
[방법2] $\frac{20}{7}=10\times\frac{2}{7}$이다. 따라서 $\frac{2}{7}=0.\dot{2}8571\dot{4}$임을 이용하면 $\frac{20}{7}=2.\dot{8}5714\dot{2}$이다.

2 다음을 읽고, 순환소수를 도형으로 나타내 보자.

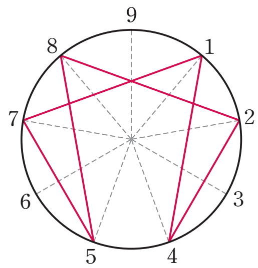
인도의 베다 수학은 구전 전통 수학을 정리한 책으로 수 계산을 쉽고 빠르게 하기 위한 비법이 실려 있다. 이 책에 소개된 내용 중에는 1부터 9까지의 숫자를 간격이 같도록 시계 방향으로 기록한 베다 원 위에 순환소수에서 반복되는 숫자를 순서에 따라 선으로 연결하여 순환소수를 도형으로 나타낸 부분이 있다.

분수 $\frac{1}{7}$ 을 이러한 도형으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



(출처: 마키노 다케후미, 『도형이 쉬워지는 인도 베다 수학』)

(1) 분모가 7이고 분자가 2, 3, 4, 5, 6 중 하나인 분수를 택하여 오른쪽 원에 위의 방법과 같이 도형으로 나타내 보자.



풀이 |예시| $\frac{3}{7}$을 도형으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

(2) 친구가 나타낸 도형과 서로 비교해 보고, 이야기해 보자.

풀이 5개의 분수 $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$이 모두 $\frac{1}{7}$과 같은 모양으로 나타난다.

3 $\frac{1}{7}$의 순환마디와 **1**, **2**의 관계를 설명해 보자.

(1) 다음은 활동 **1**, **2**의 내용을 정리한 것이다. 빈칸에 알맞은 내용을 완성해 보자.

분모가 7이고 분자가 7의 배수가 아닌 분수를 순환소수로 나타내면 순환마디를 이루는 숫자는 [1], [4], [2], [8], [5], [7]의 6개뿐이고, 순환마디를 이루는 숫자들의 배열에서 첫 번째 숫자만 달라지고 배열 순서는 [일정하다].

(2) (1)과 같은 순환마디의 성질이 나타나는 이유를 설명해 보자.

풀이 $\frac{1}{7}$을 계산하는 과정에서 나머지로 7보다 작은 자연수인 1, 2, 3, 4, 5, 6이 모두 나타난다. 이때 몫으로 나타나는 숫자는 1, 4, 2, 8, 5, 7의 6개뿐이다. 따라서 $\frac{1}{7}$의 순환마디를 이루는 숫자는 6개뿐이고 (1)과 같은 성질이 나타난다.

| 상호 평가표 |

	평가 내용	자기 평가	친구 평가
내용	유리수와 순환소수의 관계를 다양하게 표현할 수 있다.		
	순환마디의 성질을 설명할 수 있다.		
태도	유리수와 순환소수의 관계를 다양하게 표현하는 과정에서 수 체계의 논리적 아름다움에 관심을 가진다.		

스스로 마무리하기

생각 완성하기

● 각 단원의 내용을 정리하여 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

01 유리수의 소수 표현

• 유한소수와 무한소수
유한소수: 0.35, 무한소수: 0.28333…

• 순환소수
7.215215… → 순환마디: $\boxed{215}$
순환소수 표현: $\boxed{7.\dot{2}1\dot{5}}$

02 순환소수의 분수 표현

• 순환소수 $0.\dot{2}\dot{7}$을 분수로 나타내기

$0.\dot{2}\dot{7}=x$

$$\begin{array}{rl} \boxed{100}x= & 27.2727\cdots \\ -)\quad x= & 0.2727\cdots \\ \hline \boxed{99}x= & 27 \end{array} \longrightarrow x=\frac{27}{\boxed{99}}=\frac{3}{11}$$

---

1 다음 분수를 소수로 나타내고, 유한소수와 무한소수로 구분하시오.

(1) $\frac{3}{4}$ 0.75, 유한소수　　(2) $\frac{7}{3}$ $2.\dot{3}$, 무한소수

(3) $\frac{17}{12}$ $1.41\dot{6}$, 무한소수　　(4) $\frac{3}{30}$ 0.1, 유한소수

풀이 (1) $\frac{3}{4}=\frac{75}{100}=0.75$, 유한소수
(2) $\frac{7}{3}=2.333\cdots=2.\dot{3}$, 무한소수
(3) $\frac{17}{12}=1.41666\cdots=1.41\dot{6}$, 무한소수
(4) $\frac{3}{30}=\frac{1}{10}=0.1$, 유한소수

2 다음 보기 중에서 순환소수의 표현이 옳은 것을 모두 고르시오. ㄷ, ㄹ

보기
ㄱ. $1.2333\cdots=1.\dot{2}\dot{3}$
ㄴ. $4.343434\cdots=\dot{4}.\dot{3}$
ㄷ. $0.356356356\cdots=0.\dot{3}5\dot{6}$
ㄹ. $1.121212\cdots=1.\dot{1}\dot{2}$

풀이 ㄱ. $1.2333\cdots=1.2\dot{3}$
ㄴ. $4.343434\cdots=4.\dot{3}\dot{4}$
ㄷ. $0.356356356\cdots=0.\dot{3}5\dot{6}$
ㄹ. $1.121212\cdots=1.\dot{1}\dot{2}$
이다. 따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

3 다음 분수 중에서 유한소수로 나타낼 수 있는 것을 모두 찾으시오. $\frac{27}{15}$, $\frac{98}{5^2\times7}$

$$\frac{4}{12},\quad \frac{27}{15},\quad \frac{98}{5^2\times7},\quad \frac{2^2\times5}{2\times3^2\times7}$$

풀이 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, $\frac{27}{15}=\frac{9}{5}$, $\frac{98}{5^2\times7}=\frac{14}{5^2}$, $\frac{2^2\times5}{2\times3^2\times7}=\frac{2\times5}{3^2\times7}$이므로 유한소수로 나타낼 수 있는 것은 분수를 기약분수로 나타냈을 때, 분모의 소인수가 2 또는 5뿐인 $\frac{27}{15}$, $\frac{98}{5^2\times7}$이다.

4 다음 중에서 순환소수 $x=1.\dot{3}\dot{4}$를 분수로 나타낼 때, 가장 편리한 식은? ②

① $10x-x$　　② $100x-x$
③ $100x-10x$　　④ $1000x-x$
⑤ $1000x-100x$

풀이 $x=1.\dot{3}\dot{4}$에 10의 거듭제곱을 곱해서 소수점 아래의 부분이 같은 수 중 가장 작은 수는 $100x=134.\dot{3}\dot{4}$이므로 $100x-x$가 가장 편리하다.

5 두 자연수 m, n에 대하여 분수 $\frac{7}{20}$을 $\frac{n}{10^m}$의 꼴로 고쳐서 유한소수로 나타낼 때, $m+n$의 값 중에서 가장 작은 값을 구하시오. 37

풀이 $\frac{7}{20}=\frac{7}{2^2\times5}$이므로 $\frac{n}{10^m}$의 꼴로 나타내려면 분모, 분자에 5, 5×10, 5×10^2, … 을 곱하면 된다. 따라서 분모, 분자에 5를 곱할 때 m, n이 가장 작고 $\frac{7}{20}=\frac{7\times5}{20\times5}=\frac{35}{10^2}$이므로 $m+n$의 값 중에서 가장 작은 값은 $m=2$, $n=35$일 때 $m+n=2+35=37$이다.

6 두 분수 $\frac{1}{3}$과 $\frac{4}{5}$ 사이에 있는 분모가 15인 분수 중에서 순환소수로 나타낼 수 있는 분수의 개수는? ③

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

풀이 $\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$, $\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$이므로 순환소수로 나타낼 수 있는 분수는 분모가 15이고 분자가 6 이상 11 이하인 자연수 중 3의 배수가 아닌 수이다. 따라서 구하는 분수는 $\frac{7}{15}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{11}{15}$이므로 그 개수는 4이다.

7 다음 조건을 모두 만족시키는 50 이하의 모든 자연수 a의 개수를 구하시오. 3

> (가) 분수 $\frac{a}{28}$를 소수로 나타내면 유한소수가 된다.
>
> (나) 분수 $\frac{28}{a}$은 순환소수로 나타낼 수 있다.

풀이 $\frac{a}{28}=\frac{a}{2^2\times7}$가 유한소수이므로 a는 7의 배수이다. 즉, 50 이하의 자연수 중 7의 배수는 $a=7m(m=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$으로 나타낼 수 있다. $\frac{28}{a}=\frac{2^2\times7}{7m}=\frac{2^2}{m}$을 순환소수로 나타낼 수 있으므로 m은 2 또는 5 이외의 소인수를 가져야 한다. 즉, $m=3$ 또는 $m=6$ 또는 $m=7$이다. 따라서 a는 7×3, 7×6, 7×7이고, 그 개수는 3이다.

8 순환소수 $1.4\dot{2}=\frac{64}{a}$일 때, 자연수 a의 값을 구하시오. 45

풀이 $x=1.4\dot{2}$이라고 하면 $x=1.4222\cdots$ …… ①
①의 양변에 10을 곱하면 $10x=14.222\cdots$ …… ②
①의 양변에 100을 곱하면 $100x=142.222\cdots$ …… ③
③에서 ②를 변끼리 빼면 $90x=128$, $x=\frac{64}{45}$,
즉 $1.4\dot{2}=\frac{64}{45}$이다. 따라서 $a=45$이다.

9 $1.\dot{4}\dot{8}=0.\dot{4}\dot{9}\times x$일 때, x의 값을 구하시오. 3

풀이 $a=1.\dot{4}\dot{8}$이라고 하면 $a=1.484848\cdots$ …… ①
①의 양변에 100을 곱하면 $100a=148.484848\cdots$ …… ②
②에서 ①을 변끼리 빼면 $99a=147$, $a=\frac{49}{33}$이다.
$b=0.\dot{4}\dot{9}$라고 하면 $b=0.494949\cdots$ …… ③
③의 양변에 100을 곱하면 $100b=49.494949\cdots$ …… ④
④에서 ③을 변끼리 빼면 $99b=49$, $b=\frac{49}{99}$이다.
$1.\dot{4}\dot{8}=0.\dot{4}\dot{9}\times x$에서 $\frac{49}{33}=\frac{49}{99}x$, 따라서 $x=\frac{49}{33}\times\frac{99}{49}=3$이다.

10 순환소수 $1.\dot{5}\dot{1}$에 a를 곱하면 자연수가 될 때, a의 값이 될 수 있는 수 중 가장 작은 자연수를 구하시오. 33

풀이 $x=1.\dot{5}\dot{1}$이라고 하면 $x=1.515151\cdots$ …… ①
①의 양변에 100을 곱하면 $100x=151.515151\cdots$ …… ②
②에서 ①을 변끼리 빼면 $99x=150$, $x=\frac{50}{33}$이다.
$1.\dot{5}\dot{1}\times a=\frac{50}{33}\times a$가 자연수가 되려면 $a=33n$(단, n은 자연수)의 꼴이어야 한다. 따라서 구하는 a의 값이 될 수 있는 수 중 가장 작은 자연수는 33이다.

11 분수 $\frac{1}{22}$을 순환소수로 나타냈을 때, 소수점 아래 22번째 자리의 숫자를 구하시오. 4

풀이 $\frac{1}{22}=0.0454545\cdots$이므로 소수점 아래 짝수 번째 자리의 숫자는 항상 4이다. 따라서 소수점 아래 22번째 자리의 숫자는 4이다.

12 다음 중에서 옳은 것을 모두 고르면? ③, ⑤

① 모든 무한소수는 순환소수이다.
② 모든 무한소수는 유리수이다.
③ 모든 순환소수는 유리수이다.
④ 유한소수로 나타낼 수 있는 기약분수는 분모의 소인수가 2 또는 3뿐이어야 한다.
⑤ 정수가 아닌 유리수는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다.

풀이 ① 무한소수 중에는 π와 같이 순환소수가 아닌 것도 있다.
② 무한소수 중에는 유리수가 아닌 것도 있다.
④ 유한소수로 나타낼 수 있는 기약분수는 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 한다.
따라서 옳은 것은 ③, ⑤이다.

스스로 마무리하기

서술형 문제

13 두 분수 $\frac{n}{14}$과 $\frac{n}{75}$을 소수로 나타내면 모두 유한소수가 될 때, n의 값이 될 수 있는 두 자리의 자연수의 개수를 구하려고 한다. 풀이 과정과 답을 쓰시오. 4

풀이 두 분수의 분모를 각각 소인수분해하면

$\frac{n}{14}=\frac{n}{2\times7}$, $\frac{n}{75}=\frac{n}{3\times5^2}$이다. 이때 두 분수를 모두 유한소수로 나타내려면 각 기약분수의 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 한다. 즉, 분모의 소인수 중 7과 3이 약분되어야 하므로 n은 7과 3의 공배수인 21의 배수이어야 한다. 따라서 n의 값이 될 수 있는 두 자리의 자연수는 21, 42, 63, 84의 4개이다.

채점 기준	배점 비율
(i) 두 분수의 분모를 소인수분해한 경우	20 %
(ii) n의 조건을 구한 경우	50 %
(iii) n의 값이 될 수 있는 수를 모두 구한 경우	30 %

14 어떤 수 a에 $0.\dot{2}$를 곱해야 할 것을 잘못하여 0.2를 곱했더니 올바른 답보다 2만큼 작은 수가 되었다고 할 때, 어떤 수 a의 값을 구하려고 한다. 풀이 과정과 답을 쓰시오. 90

풀이 어떤 수 a에 $0.\dot{2}$를 곱한 수보다 어떤 수 a에 0.2를 곱한 것이 2만큼 더 작은 수이므로 $0.\dot{2}a-0.2a=2$이다.

순환소수를 분수로 고치면 $\frac{2}{9}a-\frac{1}{5}a=2$이고,

이를 풀면 $\frac{1}{45}a=2$, $a=90$이다.

채점 기준	배점 비율
(i) 주어진 상황을 식으로 나타낸 경우	40 %
(ii) 순환소수를 분수로 나타낸 경우	30 %
(iii) a의 값을 구한 경우	30 %

사고력 문제

15 다음 조건을 모두 만족시키는 x에 대한 일차방정식 $18x+1=4a$의 해를 구하시오. $x=\frac{3}{2}$

> (가) a는 10 이하의 자연수이다.
> (나) 일차방정식의 해는 유한소수이다.

풀이 $18x+1=4a$에서 $18x=4a-1$, $x=\frac{4a-1}{18}=\frac{4a-1}{2\times3^2}$이고,

(나)에서 위의 방정식의 해인 $\frac{4a-1}{2\times3^2}$이 유한소수가 되려면 $4a-1$은 9의 배수이어야 한다. 이때 (가)에서 a가 10 이하의 자연수이므로 $4a-1$은 39 이하의 자연수이다.

(i) $4a-1=9$이면 a가 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $4a-1=18$이면 a가 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $4a-1=27$이면 $a=7$이다.

(iv) $4a-1=36$이면 a가 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 $a=7$이고 구하는 해는 $x=\frac{27}{2\times3^2}=\frac{3}{2}$이다.

16 다음 조건을 모두 만족시키는 자연수 a의 값을 구하시오. 60

> (가) 순환소수 $1.\dot{6}$에 자연수 a를 곱하면 어떤 자연수의 제곱이 된다.
> (나) 자연수 a에서 $9\times1.\dot{6}$을 빼면 두 자리의 자연수가 된다.

풀이 (가)에서 $1.\dot{6}\times a=\frac{5}{3}\times a$가 어떤 자연수의 제곱이 되므로

$a=3\times5\times n^2=15n^2$($n$은 자연수)이다.

(나)에서 $a-9\times1.\dot{6}=15n^2-9\times\frac{5}{3}=15(n^2-1)$이 두 자리의 자연수가 되어야 한다.

(i) $n=1$이면 $15\times(1^2-1)=0$

(ii) $n=2$이면 $15\times(2^2-1)=45$

(iii) $n=3$이면 $15\times(3^2-1)=120$이므로

n의 값이 3 이상일 경우, 자연수 a의 값이 두 자리의 자연수가 될 수 없다.

(i)~(iii)에서 $n=2$이고, $a=15\times2^2=60$이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/vJm8qJvoqH1go4ve

마무리 평가

자신의 학습 태도를 스스로 점검해 보자.

이 단원을 공부하면서 알게 된 것을 써 보자.	이 단원을 공부하면서 어려웠던 점을 쓰고 복습 계획을 세워 보자.

유리수와 순환소수의 관계를 이용하여 문제를 해결하는 과정과 결과를 반성했다.	
자신의 생각을 수학적으로 표현하고, 다른 사람의 생각을 이해하려고 노력했다.	
이 단원의 학습에 적극적이고 자신감 있게 참여했다.	
수업 준비를 잘하고 수업 시간에 성실하게 참여했다.	

교과서 문제 뛰어넘기

| 정답과 해설 323쪽 |

1 분수 $\frac{a}{2^3\times3\times7}$를 소수로 나타내면 유한소수가 되고, 기약분수로 나타내면 $\frac{1}{b}$이 된다. 이때 자연수 a, b의 합 $a+b$의 최솟값을 구하시오.

2 분수 $\frac{5}{7}$를 소수로 나타내었을 때, 소수점 아래 n번째 자리의 숫자를 $f(n)$이라고 하자. 다음 값을 구하시오.

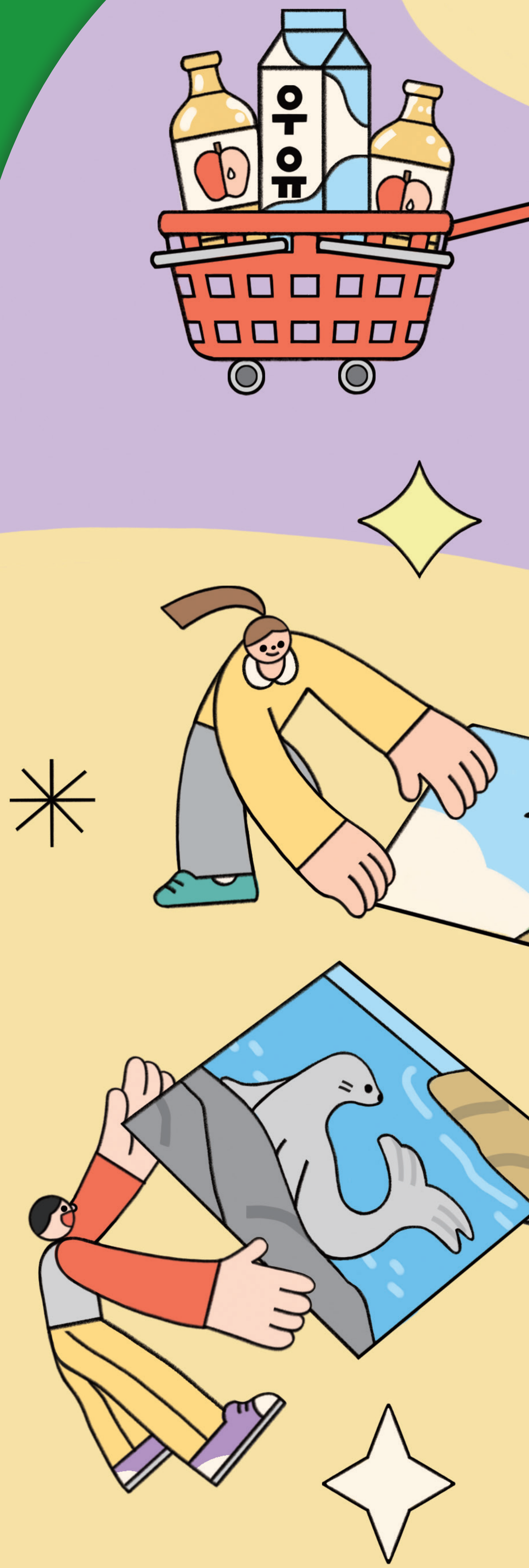
$$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(50)$$

3 두 분수 $\frac{7\times N}{90}$, $\frac{3\times N}{220}$을 소수로 나타내면 모두 유한소수가 된다고 한다. 이를 만족시키는 가장 작은 세 자리의 자연수 N의 값을 구하시오.

4 다음을 계산하여 순환소수로 나타내시오.

$$\frac{0.\dot{1}}{0.1}+\frac{0.\dot{2}}{0.2}+\frac{0.\dot{3}}{0.3}+\frac{0.\dot{4}}{0.4}+\frac{0.\dot{5}}{0.5}$$

Ⅱ 식의 계산



단원 이야기

지구와 태양 사이의 거리나 카메라의 화소와 같이 매우 큰 수를 나타낼 때, 거듭제곱을 이용하면 간단하게 나타낼 수 있고, 계산도 편리하게 할 수 있다. 단항식과 다항식의 계산은 앞으로 배우게 될 방정식 등의 학습의 기초가 된다.

이 단원에서는 지수법칙을 배우고 단항식과 다항식의 계산 원리와 방법을 배운다.

| 배운 내용 |

중1

- 소인수분해
- 정수와 유리수
- 문자의 사용과 식의 값

| 이어질 내용 |

중2

- 연립일차방정식

중3

- 다항식의 곱셈과 인수분해
- 이차방정식


3a4
x(a+2b)

이것만은 알고 가기

중 1 거듭제곱 　 잘함 보통 모름

1 다음을 거듭제곱을 사용하여 나타내시오.

(1) 3×3 3^2

(2) $2\times2\times2\times5$ $2^3\times5$

(3) $5\times5\times7\times7$ $5^2\times7^2$

(4) $2\times2\times3\times3\times3\times11\times11$ $2^2\times3^3\times11^2$

• 2^2, 2^3, 2^4, … 을 통틀어 2의 거듭제곱이라고 한다.

• $\underbrace{2\times2\times2}_{3\text{개}}=2^3$

중 1 문자를 사용한 식 　 잘함 보통 모름

2 다음 식을 곱셈 기호, 나눗셈 기호를 생략하여 나타내시오.

(1) $(-0.1)\times a\times b$ $-0.1ab$

(2) $a\times2\times b\times a$ $2a^2b$

(3) $x\div y\times5$ $\frac{5x}{y}$

(4) $\frac{1}{2}\times x\times x-4\div y$ $\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{y}$

• 곱셈과 나눗셈 기호의 생략

$a\times2=2a$

$a\times(-1)=-a$

$a\times b=ab$

$a\div b=\frac{a}{b}$ (단, $b\neq0$)

중 1 일차식과 수의 곱셈과 나눗셈 　 잘함 보통 모름

3 다음을 계산하시오.

(1) $6x\times4$ $24x$

(2) $10y\div\left(-\frac{2}{5}\right)$ $-25y$

(3) $3(2a+4)$ $6a+12$

(4) $(8+2b)\div(-2)$ $-4-b$

풀이 (1) $6x\times4=6\times4\times x=24x$

(2) $10y\div\left(-\frac{2}{5}\right)=10y\times\left(-\frac{5}{2}\right)=-25y$

(3) $3(2a+4)=3\times2a+3\times4=6a+12$

(4) $(8+2b)\div(-2)=(8+2b)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$
$=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2b\times\left(-\frac{1}{2}\right)$
$=-4-b$

• 분배법칙

$a(b+c)=ab+ac$

$(a+b)c=ac+bc$

중 1 일차식의 덧셈과 뺄셈 　 잘함 보통 모름

4 다음을 계산하시오.

(1) $(4a+5)+(2a-3)$ $6a+2$

(2) $(b+2)-(3b-1)$ $-2b+3$

(3) $2(3x+1)+\frac{1}{2}(2x-4)$ $7x$

(4) $\frac{2y-1}{3}-\frac{y+3}{2}$ $\frac{1}{6}y-\frac{11}{6}$

풀이 (1) $(4a+5)+(2a-3)=4a+5+2a-3=4a+2a+5-3=6a+2$

(2) $(b+2)-(3b-1)=b+2-3b+1=b-3b+2+1=-2b+3$

(3) $2(3x+1)+\frac{1}{2}(2x-4)=6x+2+x-2=6x+x+2-2=7x$

(4) $\frac{2y-1}{3}-\frac{y+3}{2}=\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)y-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{6}y-\frac{11}{6}$

• 괄호가 있는 일차식의 덧셈은 분배법칙을 이용하여 괄호를 먼저 풀고 동류항끼리 모아서 계산한다. 또, 일차식의 뺄셈은 수의 뺄셈과 같이 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어 더한다.

01 지수법칙

[**학습 목표**] 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 할 수 있다.

$a^m \times a^n$은 어떻게 간단히 할까?

생각 펼치기

환경·지속 가능발전 교육

다온이네 학교에서는 일상생활에서 환경 보호를 실천한 내용을 사진 또는 영상으로 촬영하여 자신의 누리 소통망에 게시하는 캠페인을 진행하려고 한다. 첫째 날 4명이 참여하여 게시물을 올리고, 참여자 1명당 2명씩 지목하여 지목받은 사람은 다음 날 게시물을 올리기로 했다. 이때 3일 후에 게시물을 올린 참여자는 모두 몇 명인지 구해 보자. (단, 참여자는 한 번만 참여할 수 있다.) 32명

풀이 첫째 날 참여자는 4명이고, 참여자는 전날의 2배가 되므로 3일 후에는 첫째 날 참여자의 2^3배가 캠페인에 참여하게 된다. 따라서 3일 후에 게시물을 올린 참여자는 모두 $4\times2^3=2^2\times2^3=2\times2\times2\times2\times2=2^5$(명)이다.

지수법칙(1)

생각 펼치기에서 첫째 날 참여자는 $4(=2^2)$명이고, 참여자는 전날의 2배가 되므로 1일 후에는 첫째 날 참여자의 2배, 2일 후에는 첫째 날 참여자의 2^2배, 3일 후에는 첫째 날 참여자의 2^3배가 캠페인에 참여하게 된다. 따라서 3일 후에 게시물을 올린 참여자는 모두

$$\begin{aligned}2^2\times2^3&=(\underbrace{2\times2}_{2\text{개}})\times(\underbrace{2\times2\times2}_{3\text{개}})\\&=\underbrace{2\times2\times2\times2\times2}_{(2+3)\text{개}}\\&=2^{2+3}=2^5(\text{명})\end{aligned}$$

이다.

데카르트(Descartes, R., 1596～1650)는 프랑스의 수학자로, 제곱이나 세제곱 등의 거듭제곱을 x^2, x^3과 같이 밑과 지수를 이용하여 나타냈다.
(출처: 고상숙 외 1인, 『청소년을 위한 서양수학사』)

같은 방법으로 $a^2\times a^3$은 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}a^2\times a^3&=(\underbrace{a\times a}_{2\text{개}})\times(\underbrace{a\times a\times a}_{3\text{개}})\\&=\underbrace{a\times a\times a\times a\times a}_{(2+3)\text{개}}\\&=a^{2+3}=a^5\end{aligned}$$

두 지수의 합

$a^2\times a^3=a^{2+3}$

이때 a^5의 지수 5는 $a^2\times a^3$에서 두 지수 2와 3의 합과 같다는 것을 알 수 있다.

Tip 지수법칙(1)을 사용할 때, 다음과 같은 오류를 범하지 않도록 주의한다.

$5^2\times5^3=5^{2\times3}$ (×)

$5^2+5^3=5^{2+3}$ (×)

일반적으로 밑이 같은 거듭제곱의 곱셈에서는 다음이 성립한다.

지수법칙(1)

m, n이 자연수일 때,

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

함께 해 보기 1

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $5^3\times5^6$

(2) $a\times a^9$

(3) $b^3\times b^4\times b^5$

(4) $x^2\times y^4\times x^5\times y^2$

풀이 (1) $5^3\times5^6=5^{3+6}=5^9$

(2) $a\times a^9=a^{1+9}=a^{10}$

(3) $b^3\times b^4\times b^5=b^{3+4}\times b^5=b^7\times b^5=b^{7+5}=b^{12}$

(4) $x^2\times y^4\times x^5\times y^2=(x^2\times x^5)\times(y^4\times y^2)$

$=x^{2+5}\times y^{4+2}$

$=x^7\times y^6$

$=x^7y^6$

답 (1) 5^9 (2) a^{10} (3) b^{12} (4) x^7y^6

Tip

① 지수법칙(1)은 세 수 이상의 곱셈에도 적용할 수 있다. 즉, l, m, n이 자연수일 때, $a^l\times a^m\times a^n=a^{l+m+n}$이다.

② 교환법칙을 이용하여 밑이 같은 두 수에 대하여 지수법칙(1)을 적용하며, $x^7\times y^6$의 경우 더 이상 간단히 할 수 없다.

1 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $3\times3^2\times3^3$ 3^6

(2) $a^4\times a^4$ a^8

(3) $a\times x^3\times x^4$ ax^7

(4) $a^2\times b^3\times a^5\times b^6$ a^7b^9

풀이 (1) $3\times3^2\times3^3=3^{1+2}\times3^3=3^3\times3^3=3^{3+3}=3^6$

(2) $a^4\times a^4=a^{4+4}=a^8$

(3) $a\times x^3\times x^4=a\times x^{3+4}=ax^7$

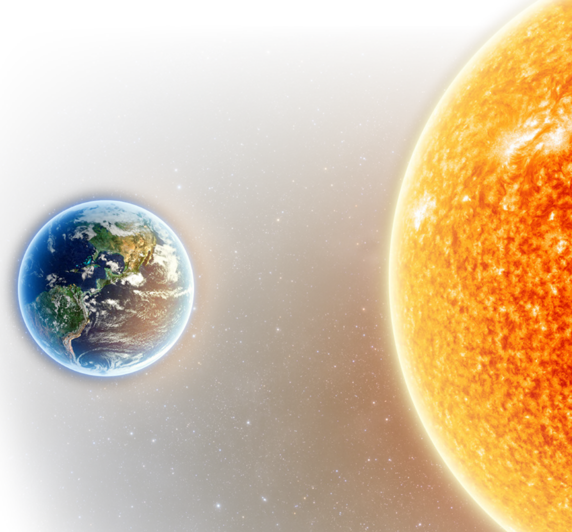
(4) $a^2\times b^3\times a^5\times b^6=a^2\times a^5\times b^3\times b^6=a^{2+5}\times b^{3+6}=a^7b^9$

2 빛의 속력은 약 초속 3×10^8 m로 알려져 있고, 지구와 태양 사이의 거리를 빛의 속력으로 이동할 경우 약 8분 20초가 걸린다고 한다. 지구와 태양 사이의 거리는 약 몇 m인지 10의 거듭제곱을 사용하여 나타내시오. 약 1.5×10^{11} m

풀이 8분 20초는 $8\times60+20=500=5\times10^2$(초)이므로

지구와 태양 사이의 거리는 약

$(3\times10^8)\times(5\times10^2)=15\times10^{10}=1.5\times10^{11}$(m)이다.



$(a^m)^n$은 어떻게 간단히 할까?

지수법칙(2)

a^2의 세제곱 $(a^2)^3$은 a^2을 3개 곱한 것이므로 $(a^2)^3$은 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}(a^2)^3&=a^2\times a^2\times a^2\\&=a^{2+2+2}\\&=a^{2\times3}=a^6\end{aligned}$$

두 지수의 곱

$(a^2)^3=a^{2\times3}$

이때 a^6의 지수 6은 $(a^2)^3$에서 두 지수 2와 3의 곱과 같다는 것을 알 수 있다.

일반적으로 거듭제곱의 거듭제곱에서는 다음이 성립한다.

Tip 지수법칙(2)를 사용할 때, 다음과 같은 오류를 범하지 않도록 주의한다.
$(5^2)^3=5^{2+3}$ (×)
$(5^2)^3=5^{2^3}$ (×)

지수법칙(2)

m, n이 자연수일 때,

$$(a^m)^n=a^{mn}$$

함께 해 보기 2 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(a^5)^5$　　(2) $(x^2)^4\times(x^4)^3$

풀이 (1) $(a^5)^5=a^{5\times5}=a^{25}$

(2) $(x^2)^4\times(x^4)^3=x^{2\times4}\times x^{4\times3}=x^8\times x^{12}=x^{8+12}=x^{20}$

답 (1) a^{25}　(2) x^{20}

3 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(5^3)^4$ 5^{12}　　(2) $(a^6)^2$ a^{12}

(3) $x^2\times(x^5)^3$ x^{17}　　(4) $x^2\times(y^4)^2\times(x^2)^3$ x^8y^8

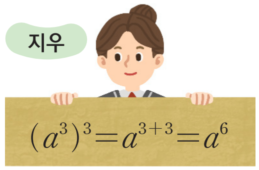
풀이 (1) $(5^3)^4=5^{3\times4}=5^{12}$

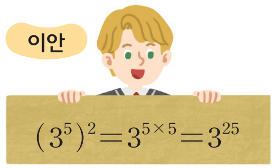
(2) $(a^6)^2=a^{6\times2}=a^{12}$

(3) $x^2\times(x^5)^3=x^2\times x^{5\times3}$
$=x^2\times x^{15}=x^{17}$

(4) $x^2\times(y^4)^2\times(x^2)^3=x^2\times y^{4\times2}\times x^{2\times3}$
$=x^2\times y^8\times x^6=x^{2+6}\times y^8=x^8y^8$

4 다음은 세 학생이 각각 주어진 식을 지수법칙을 이용하여 간단히 나타낸 것이다. 틀린 부분을 각각 찾아 바르게 고치시오. 가람: $x^4\times x^6=x^{4+6}=x^{10}$, 지우: $(a^3)^3=a^{3\times3}=a^9$, 이안: $(3^5)^2=3^{5\times2}=3^{10}$





$a^m \div a^n$은 어떻게 간단히 할까?

생각 펼치기

도연이는 교내 환경 사랑 공모전에 화소가 각각 10^8화소, 10^6화소인 두 디지털 카메라로 찍은 사진을 응모하였다. 다음 물음에 답해 보자.

1. 10^8화소는 10^6화소의 몇 배인지 말해 보자. 100배

풀이 10^8화소는 100000000화소이고, 10^6화소는 1000000화소이므로 10^8화소는 10^6화소의 $100000000 \div 1000000 = 100$(배)이다.

2. **1**에서 구한 값을 10의 거듭제곱을 사용하여 나타내 보자. 10^2

풀이 **1**에서 구한 값은 100이므로 $100 = 10^2$이다.

화소란, 화상 데이터를 구성하고 있는 요소 중에서 가장 작은 단위의 점으로, 화소 수가 많을수록 해상도가 높다고 한다.

지수법칙(3)

생각 펼치기에서 10^8, 10^6은 10을 각각 8개, 6개 곱한 것이므로 $10^8 \div 10^6$을 거듭제곱을 사용하여 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$10^8 \div 10^6 = \frac{\overbrace{\cancel{10} \times \cancel{10} \times \cancel{10} \times \cancel{10} \times \cancel{10} \times \cancel{10} \times 10 \times 10}^{8\text{개}}}{\underbrace{\cancel{10} \times \cancel{10} \times \cancel{10} \times \cancel{10} \times \cancel{10} \times \cancel{10}}_{6\text{개}}}$$

$$= 10^{8-6} = 10^2$$

$a \div b = \dfrac{a}{b}$ (단, $b \neq 0$)

개념 쏙

거듭제곱으로 나타낸 수의 나눗셈은 분수의 꼴로 나타내어 계산할 수 있다.

같은 방법으로 $a \neq 0$일 때, $a^5 \div a^3$, $a^3 \div a^3$, $a^3 \div a^5$은 각각 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$a^5 \div a^3 = \frac{a^5}{a^3} = \frac{\overbrace{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times a \times a}^{5\text{개}}}{\underbrace{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a}}_{3\text{개}}}$$

$$= a^{5-3} = a^2$$

지수의 차

$a^5 \div a^3 = a^{5-3}$

$$a^3 \div a^3 = \frac{a^3}{a^3} = \frac{\overbrace{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a}}^{3\text{개}}}{\underbrace{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a}}_{3\text{개}}}$$

$$= 1$$

$$a^3 \div a^5 = \frac{a^3}{a^5} = \frac{\overbrace{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a}}^{3\text{개}}}{\underbrace{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times a \times a}_{5\text{개}}}$$

$$= \frac{1}{a^{5-3}} = \frac{1}{a^2}$$

$a^3 \div a^5 = \dfrac{1}{a^{5-3}}$

지수의 차

이때 a^2의 지수 2는 $a^5 \div a^3$에서 두 지수 5와 3의 차와 같고, 지수가 같은 거듭제곱의 나눗셈은 그 결과가 1이 된다. 또, $\frac{1}{a^2}$에서 분모 a^2의 지수 2는 $a^3 \div a^5$에서 두 지수 3과 5의 차와 같다.

일반적으로 밑이 같은 거듭제곱의 나눗셈에서는 다음이 성립한다.

나눗셈의 경우 특별히 밝히지 않아도 나누는 수는 0이 아닌 것으로 본다.

Tip 지수법칙(3)을 사용할 때, 다음과 같은 오류를 범하지 않도록 주의한다.

$5^6 \div 5^2 = 5^{6 \div 2}$ (×)

$3^2 \div 3^6 = \frac{3^2}{3^6} = \frac{2}{6}$ (×)

지수법칙(3)

$a \neq 0$이고, m, n이 자연수일 때,

1. $m > n$이면 $a^m \div a^n = a^{m-n}$

2. $m = n$이면 $a^m \div a^n = 1$

3. $m < n$이면 $a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$

함께 해 보기 3

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $2^9 \div 2^4$ (2) $a^3 \div a^7$

(3) $b^8 \div b^3 \div b^2$ (4) $(x^4)^2 \div x^{10}$

풀이 (1) $2^9 \div 2^4 = 2^{9-4} = 2^5$

(2) $a^3 \div a^7 = \frac{1}{a^{7-3}} = \frac{1}{a^4}$

(3) $b^8 \div b^3 \div b^2 = b^{8-3} \div b^2 = b^5 \div b^2 = b^{5-2} = b^3$

(4) $(x^4)^2 \div x^{10} = x^{4\times2} \div x^{10} = x^8 \div x^{10} = \frac{1}{x^{10-8}} = \frac{1}{x^2}$

답 (1) 2^5 (2) $\frac{1}{a^4}$ (3) b^3 (4) $\frac{1}{x^2}$

수학 호기심

(3)에서 $b^8 \div (b^3 \div b^2)$과 같이 뒤의 두 식부터 계산해도 될까?

풀이

$b^8 \div (b^3 \div b^2) = b^8 \div b^{3-2}$
$= b^8 \div b^1$
$= b^{8-1} = b^7$

이므로

$b^8 \div (b^3 \div b^2) \neq b^8 \div b^3 \div b^2$

이다. 따라서 나눗셈이 포함된 연산에서는 결합법칙이 성립하지 않으므로 앞의 두 식부터 차례대로 계산해야 한다.

풀이 (1) $3^6 \div 3^2 = 3^{6-2} = 3^4$ (2) $a^4 \div a^4 = 1$

(3) $x^{11} \div x^7 \div x^5 = x^{11-7} \div x^5 = x^4 \div x^5 = \frac{1}{x^{5-4}} = \frac{1}{x}$ (4) $(y^4)^4 \div (y^5)^5 = y^{4\times4} \div y^{5\times5} = y^{16} \div y^{25} = \frac{1}{y^{25-16}} = \frac{1}{y^9}$

5 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $3^6 \div 3^2$ 3^4 (2) $a^4 \div a^4$ 1

(3) $x^{11} \div x^7 \div x^5$ $\frac{1}{x}$ (4) $(y^4)^4 \div (y^5)^5$ $\frac{1}{y^9}$

$(ab)^m$과 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m$은 어떻게 간단히 할까?

지수법칙(4)

개념 쏙

거듭제곱의 정의에 따라 주어진 식의 거듭제곱을 풀어 정리한 뒤, 곱셈의 성질을 이용하여 밑이 같은 수끼리 모아 다시 거듭제곱으로 나타낸다.

비에트(Viéte, F., 1540~1603)는 프랑스의 수학자로, 동일한 문자에 적당한 조건을 붙여서 지수들을 표현했다.
(출처: 고상숙 외 1인, 『청소년을 위한 서양수학사』)

$(ab)^3$은 ab를 3개 곱한 것이므로 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}(ab)^3&=ab\times ab\times ab\\&=a\times b\times a\times b\times a\times b\\&=a\times a\times a\times b\times b\times b\\&=a^3b^3\end{aligned}$$

$(ab)^3=a^3b^3$

이때 a^3b^3에서 a와 b 각각의 지수 3은 $(ab)^3$의 지수 3과 같다는 것을 알 수 있다.

또한, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3$ (단, $b\neq0$)은 $\dfrac{a}{b}$를 3개 곱한 것이므로 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a\times a\times a}{b\times b\times b}=\frac{a^3}{b^3}$$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^3=\dfrac{a^3}{b^3}$

이때 $\dfrac{a^3}{b^3}$에서 a와 b 각각의 지수 3은 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3$의 지수 3과 같다는 것을 알 수 있다.

일반적으로 밑이 곱 또는 몫인 거듭제곱에서는 다음이 성립한다.

개념 쏙

$(-a)^n=\begin{cases}a^n & (n\text{은 짝수})\\-a^n & (n\text{은 홀수})\end{cases}$

> **지수법칙(4)**
>
> m이 자연수일 때,
>
> **1.** $(ab)^m=a^mb^m$
>
> **2.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}$ (단, $b\neq0$)

Tip 지수법칙(4)를 사용할 때, 다음과 같은 오류를 범하지 않도록 주의한다.

$(3a)^2=3a^2$ $(\times)$

$\left(\dfrac{a}{3}\right)^2=\dfrac{a^2}{3}$ $(\times)$

$(-a)^2=-a^2$ $(\times)$

함께 해 보기 4

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(a^2b)^3$

(2) $\left(\dfrac{-2x}{y^2}\right)^2$

풀이 (1) $(a^2b)^3=(a^2)^3\times b^3=a^{2\times3}b^3=a^6b^3$

(2) $\left(\dfrac{-2x}{y^2}\right)^2=\dfrac{(-2x)^2}{(y^2)^2}=\dfrac{(-2)^2\times x^2}{y^{2\times2}}=\dfrac{4x^2}{y^4}$

답 (1) a^6b^3 (2) $\dfrac{4x^2}{y^4}$

6 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $5^5\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^4$ **80**

(2) $(a^3b^2)^2$ $\boldsymbol{a^6b^4}$

(3) $\left(\dfrac{x^2}{4y}\right)^3$ $\boldsymbol{\dfrac{x^6}{64y^3}}$

(4) $\left(\dfrac{-b^2}{3a}\right)^3$ $\boldsymbol{-\dfrac{b^6}{27a^3}}$

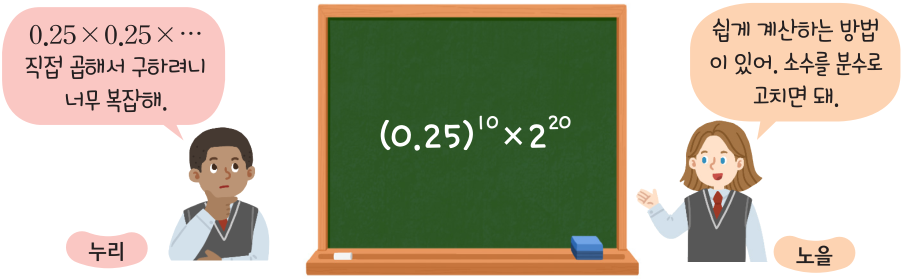
풀이 (1) $5^5\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^4=5^5\times\dfrac{2^4}{5^4}=5\times2^4=80$

(2) $(a^3b^2)^2=a^{3\times2}b^{2\times2}=a^6b^4$

(3) $\left(\dfrac{x^2}{4y}\right)^3=\dfrac{x^{2\times3}}{4^3\times y^3}=\dfrac{x^6}{64y^3}$

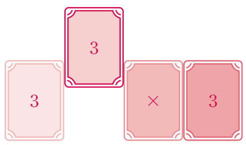
(4) $\left(\dfrac{-b^2}{3a}\right)^3=-\dfrac{b^{2\times3}}{3^3\times a^3}=-\dfrac{b^6}{27a^3}$

7 다음 누리와 노을이의 대화를 보고, 노을이의 방법을 이용하여 계산하시오. 풀이 참조

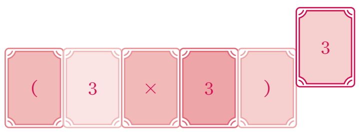


풀이 $(0.25)^{10}\times2^{20}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{10}\times2^{20}=\left(\dfrac{1}{2^2}\right)^{10}\times2^{20}=\dfrac{1}{2^{20}}\times2^{20}=1$

풀이 |예시1| $3^3\times3=3^{3+1}=3^4$

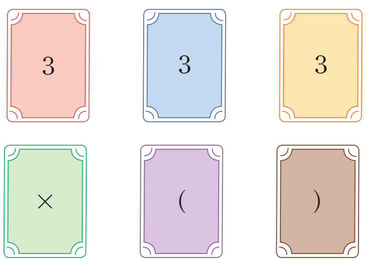


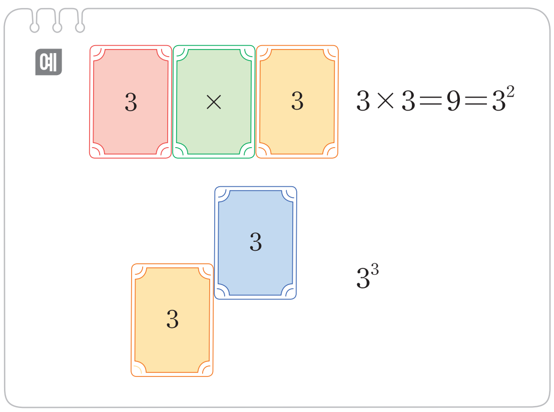
|예시2| $(3\times3)^3=(3^2)^3=3^6$



생각 더 나아가기 추론 의사소통

다음 그림과 같은 6장의 카드가 있다. 주어진 카드의 일부 또는 전부를 사용하여 아래 예와 같이 수를 만들 수 있다고 할 때, 이 카드를 사용하여 3^4과 3^6을 각각 만들고 친구와 이야기해 보자. 풀이 참조





스스로 점검하기

1

$a\neq0$이고, m, n이 자연수일 때, 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $a^m\times a^n=a^{\boxed{m+n}}$

(2) $(a^m)^n=a^{\boxed{mn}}$

(3) $m>n$이면 $a^m\div a^n=a^{\boxed{m-n}}$,

$m=n$이면 $a^m\div a^n=\boxed{1}$,

$m<n$이면 $a^m\div a^n=\dfrac{1}{a^{\boxed{n-m}}}$

(4) $(ab)^m=a^{\boxed{m}}b^{\boxed{m}}$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^{\boxed{m}}}{b^{\boxed{m}}}$ (단, $b\neq0$)

2

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $a^2\times a^3\times a^5$ a^{10}

(2) $(a^2)^5\times a^4$ a^{14}

(3) $x^5\times x^2\div x^9$ $\dfrac{1}{x^2}$

(4) $\left(\dfrac{2x}{y^3}\right)^3$ $\dfrac{8x^3}{y^9}$

풀이 (1) $a^2\times a^3\times a^5=a^{2+3+5}=a^{10}$

(2) $(a^2)^5\times a^4=a^{2\times5}\times a^4=a^{10}\times a^4=a^{10+4}=a^{14}$

(3) $x^5\times x^2\div x^9=x^{5+2}\div x^9=x^7\div x^9=\dfrac{1}{x^{9-7}}=\dfrac{1}{x^2}$

(4) $\left(\dfrac{2x}{y^3}\right)^3=\dfrac{2^3\times x^3}{y^{3\times3}}=\dfrac{8x^3}{y^9}$

3

다음 보기 중에서 옳은 것을 모두 고르시오. ㄱ, ㄷ

보기

ㄱ. $x^3\times y\times x=x^4y$ ㄴ. $(a^2)^3\div a^2=a^3$

ㄷ. $(2x^2y)^3=8x^6y^3$ ㄹ. $(-x^3y^2)^3=x^9y^6$

풀이 ㄴ. $(a^2)^3\div a^2=a^{2\times3}\div a^2=a^{6-2}=a^4$

ㄹ. $(-x^3y^2)^3=-(x^3)^3(y^2)^3=-x^{3\times3}y^{2\times3}=-x^9y^6$

4

$3\times81^3\div9^2$을 간단히 하시오. 3^9

풀이 $3\times81^3\div9^2$

$=3\times(3^4)^3\div(3^2)^2$

$=3\times3^{12}\div3^4$

$=3^{1+12-4}$

$=3^9$

5

$2^{11}\times5^7$은 n자리의 자연수일 때, 자연수 n의 값을 구하시오. 9

풀이 $2^{11}\times5^7=2^{4+7}\times5^7=2^4\times2^7\times5^7=2^4\times(2\times5)^7=16\times10^7$

이므로 $2^{11}\times5^7$은 9자리의 자연수이다.

따라서 $n=9$이다.

6 실생활 연결

다음은 컴퓨터의 정보 저장 단위를 나타낸 표이다. 용량이 8 TiB인 휴대용 저장 장치에 용량이 512 MiB인 동영상을 몇 편 저장할 수 있는지 구하시오. 2^{14}편

1 B	1 KiB	1 MiB	1 GiB	1 TiB
2^3 bit	2^{10} B	2^{10} KiB	2^{10} MiB	2^{10} GiB

풀이 8 TiB는 8×2^{10} GiB이고, 8×2^{10} GiB는 $8\times2^{10}\times2^{10}$ MiB이다.

$8\times2^{10}\times2^{10}=2^3\times2^{10}\times2^{10}=2^{3+10+10}=2^{23}$(MiB)이고, $512=2^9$이므로

$2^{23}\div2^9=2^{23-9}=2^{14}$(편)이다.

따라서 용량이 8 TiB인 휴대용 저장 장치에 용량이 512 MiB인 동영상을 2^{14}편 저장할 수 있다.

https://code.jihak.co.kr/qr/nBMDFkQEnOqLOtnP

자기 평가

지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 할 수 있다.

상황에 맞게 지수법칙을 적용하면서 필요성을 알 수 있다.

02 단항식의 곱셈과 나눗셈

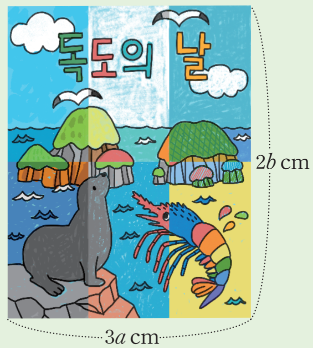
[학습 목표] 단항식의 곱셈과 나눗셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.

단항식의 곱셈은 어떻게 할까?

생각 펼치기

독도 교육

어느 학급에서는 독도의 날을 맞아 포스터를 만들기로 했다. 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 $3a$ cm, 세로의 길이가 $2b$ cm인 포스터를 가로로 3등분, 세로로 2등분해서 직사각형 모양의 종이 6장으로 자른 후 모둠별로 각각 나누어 색칠하고, 다시 붙여 포스터를 완성했다. 다음 물음에 답해 보자.



1. 포스터의 넓이를 (가로의 길이)$\times$(세로의 길이)의 꼴로 나타내 보자. $(3a\times2b)$ cm^2

2. 모둠별로 나누어 색칠하는 종이 1장의 넓이를 이용하여 포스터의 넓이를 식으로 나타내 보자. $3a\times2b=6ab(\text{cm}^2)$

풀이 1. 포스터의 가로의 길이가 $3a$ cm, 세로의 길이가 $2b$ cm이므로 포스터의 넓이는 $(3a\times2b)$ cm^{2}이다.
2. 종이 1장의 가로의 길이가 a cm, 세로의 길이가 b cm이므로 종이 1장의 넓이는 ab cm^{2}이다. 따라서 포스터의 넓이는 $6\times ab=6ab(\text{cm}^2)$이므로 포스터의 넓이를 식으로 나타내면 $3a\times2b=6ab(\text{cm}^2)$이다.

단항식의 곱셈

생각 펼치기에서 포스터의 가로의 길이가 $3a$ cm, 세로의 길이가 $2b$ cm이므로 포스터의 넓이는 $(3a\times2b)$ cm^{2}이다. 이 포스터는 넓이가 ab cm^{2}인 종이 6장을 붙여 만들었으므로

$$3a\times2b=6ab$$

가 성립함을 알 수 있다. 이것은 곱셈의 교환법칙과 결합법칙을 이용하여 다음과 같이 계산한 것과 같다.

곱셈의 교환법칙
$a\times b=b\times a$
곱셈의 결합법칙
$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$

$$\begin{aligned}3a\times2b&=3\times a\times2\times b\\&=3\times2\times a\times b\\&=(3\times2)\times(a\times b)\\&=6ab\end{aligned}$$

곱셈의 교환법칙
곱셈의 결합법칙

계수끼리의 곱
$3a\times2b=6ab$
문자끼리의 곱

이와 같이 단항식의 곱셈은 계수는 계수끼리, 문자는 문자끼리 곱하여 계산한다.

함께 해 보기 1 다음을 계산하시오.

(1) $-a^3\times 4ab^2$　　(2) $7x^2\times(2x)^3$

풀이 (1) $-a^3\times 4ab^2=(-1)\times 4\times a^3\times a\times b^2$
$=-4a^4b^2$

(2) $7x^2\times(2x)^3=7\times x^2\times 2^3\times x^3$
$=7\times 2^3\times x^2\times x^3$
$=56x^5$

답 (1) $-4a^4b^2$　(2) $56x^5$

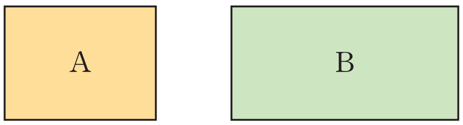
1 다음을 계산하시오.

(1) $(-2a)^2\times 5b$ $\mathbf{20a^2b}$　　(2) $4x^3\times(-6x^5)$ $\mathbf{-24x^8}$

(3) $\frac{1}{6}a^2b\times(3ab)^2$ $\mathbf{\frac{3}{2}a^4b^3}$　　(4) $(-xy)^3\times(-2x^2y)^2$ $\mathbf{-4x^7y^5}$

풀이 (1) $(-2a)^2\times 5b=(-2)^2\times a^2\times 5\times b=4\times 5\times a^2\times b=20a^2b$
(2) $4x^3\times(-6x^5)=4\times(-6)\times x^3\times x^5=-24x^8$
(3) $\frac{1}{6}a^2b\times(3ab)^2=\frac{1}{6}\times a^2\times b\times 3^2\times a^2\times b^2=\frac{1}{6}\times 3^2\times a^2\times a^2\times b\times b^2=\frac{3}{2}a^4b^3$
(4) $(-xy)^3\times(-2x^2y)^2=(-1)^3\times x^3\times y^3\times(-2)^2\times x^4\times y^2=-1\times 4\times x^3\times x^4\times y^3\times y^2=-4x^7y^5$

2 다음 그림의 두 직사각형 A, B는 세로의 길이가 같고, 직사각형 B의 가로의 길이는 직사각형 A의 가로의 길이의 $2a$배이다. 직사각형 A의 넓이가 $5a^3b$일 때, 직사각형 B의 넓이를 구하시오. $\mathbf{10a^4b}$



풀이 직사각형 A의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라고 하면 직사각형 A의 넓이가 $5a^3b$이므로 $xy=5a^3b$이다.
직사각형 B의 가로의 길이는 직사각형의 가로의 길이의 $2a$배이므로 $2a\times x=2ax$이고 세로의 길이는 y이므로
직사각형 B의 넓이는 $2ax\times y=2a\times xy=2a\times 5a^3b=10a^4b$이다.

단항식의 나눗셈은 어떻게 할까?

생각 펼치기

오른쪽 그림은 직사각형 모양의 벽면에 타일을 붙인 것이다. 벽면의 넓이가 $30ab$ cm^{2}이고 벽면의 가로의 길이가 $6a$ cm일 때, 벽면의 세로의 길이를 식으로 나타내 보자. $\mathbf{(30ab\div 6a)}$ **cm**

풀이 벽면의 넓이가 $30ab$ cm^{2}이고 벽면의 가로의 길이가 $6a$ cm이므로 벽면의 세로의 길이를 식으로 나타내면 $(30ab\div 6a)$ cm이다.

$6a$ cm

단항식의 나눗셈

Tip $xy \div ab$를 $x \times y \div a \times b$로 잘못 생각하면 안 된다. $xy \div ab$는 $(xy) \div (ab)$와 같이 생각해야 한다.

즉, $xy \div ab = \frac{xy}{ab}$이다.

생각 펼치기에서 벽면의 넓이가 $30ab\ \mathrm{cm}^2$이고, 벽면의 가로의 길이가 $6a\ \mathrm{cm}$이므로 벽면의 세로의 길이를 식으로 나타내면 $(30ab \div 6a)\ \mathrm{cm}$이다.

단항식의 나눗셈은 단항식을 수로 나눌 때와 마찬가지로 나눗셈을 곱셈으로 고치거나 주어진 식을 분수의 꼴로 나타내어 계수는 계수끼리, 문자는 문자끼리 계산한다.

$30ab \div (6a)$는 괄호를 생략하여 $30ab \div 6a$로 나타낸다.

즉, 위의 식 $30ab \div 6a$는 다음과 같이 두 가지 방법으로 계산할 수 있다.

$A \div B = A \times \frac{1}{B}$

$A \div B = \frac{A}{B}$

방법 1

$$\begin{aligned} 30ab \div 6a &= 30ab \times \frac{1}{6a} \\ &= 30 \times \frac{1}{6} \times a \times \frac{1}{a} \times b \\ &= 5 \times b \\ &= 5b \end{aligned}$$

방법 2

$$\begin{aligned} 30ab \div 6a &= \frac{30ab}{6a} \\ &= \frac{30 \times a \times b}{6 \times a} \\ &= \frac{30}{6} \times \frac{ab}{a} \\ &= 5b \end{aligned}$$

3 **다음을 계산하시오.**

(1) $6a^7 \div 2a^3$ $3a^4$

(2) $6x^2y^4 \div (-3y^3)$ $-2x^2y$

(3) $(4a^2b^3)^2 \div 8a^2b^2$ $2a^2b^4$

(4) $\frac{12}{5}xy^5 \div 4xy^3$ $\frac{3}{5}y^2$

풀이
(1) $6a^7 \div 2a^3 = 6a^7 \times \frac{1}{2a^3} = 6 \times \frac{1}{2} \times a^7 \times \frac{1}{a^3} = 3a^4$

(2) $6x^2y^4 \div (-3y^3) = 6x^2y^4 \times \frac{1}{-3y^3} = 6 \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times x^2 \times y^4 \times \frac{1}{y^3} = -2x^2y$

(3) $(4a^2b^3)^2 \div 8a^2b^2 = 4^2 \times (a^2)^2 \times (b^3)^2 \times \frac{1}{8a^2b^2} = 16 \times \frac{1}{8} \times a^4 \times \frac{1}{a^2} \times b^6 \times \frac{1}{b^2} = 2a^2b^4$

(4) $\frac{12}{5}xy^5 \div 4xy^3 = \frac{12}{5}xy^5 \times \frac{1}{4xy^3} = \frac{12}{5} \times \frac{1}{4} \times x \times \frac{1}{x} \times y^5 \times \frac{1}{y^3} = \frac{3}{5}y^2$

단항식의 계산에서 곱셈과 나눗셈이 섞여 있는 경우에는 나눗셈을 곱셈으로 고쳐서 계산하면 편리하다.

함께 해 보기 2 $12a^4b^3 \div 4ab^2 \times a^2b$를 계산하시오.

Tip 단항식의 계산에서 곱셈과 나눗셈이 섞여 있는 경우에는 앞에서부터 순서대로 계산한다.

풀이

$$\begin{aligned} 12a^4b^3 \div 4ab^2 \times a^2b &= 12a^4b^3 \times \frac{1}{4ab^2} \times a^2b \\ &= \frac{12a^4b^3 \times a^2b}{4ab^2} \\ &= \frac{12a^6b^4}{4ab^2} \\ &= 3a^5b^2 \end{aligned}$$

답 $3a^5b^2$

4 다음을 계산하시오.

(1) $3a^2b\times 2b\div a$ $6ab^2$

(2) $(6x^2y)^2\div 9xy\times x^3y^2$ $4x^6y^3$

풀이 (1) $3a^2b\times 2b\div a=3a^2b\times 2b\times \frac{1}{a}$

$=\frac{3a^2b\times 2b}{a}$

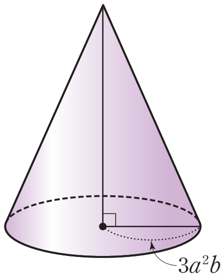
$=\frac{6a^2b^2}{a}=6ab^2$

(2) $(6x^2y)^2\div 9xy\times x^3y^2=36x^4y^2\times \frac{1}{9xy}\times x^3y^2$

$=\frac{36x^4y^2\times x^3y^2}{9xy}$

$=\frac{36x^7y^4}{9xy}=4x^6y^3$

5 오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 $3a^2b$인 원뿔의 부피가 $15\pi a^5b^4$일 때, 이 원뿔의 높이를 구하시오. $5ab^2$



풀이 원뿔의 높이를 h, 부피를 V라고 하면

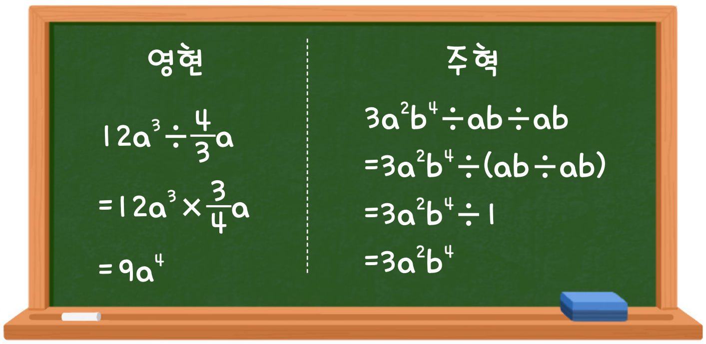
$V=\frac{1}{3}\times \pi(3a^2b)^2\times h$

$=\frac{1}{3}\pi\times 9a^4b^2\times h=3\pi a^4b^2h$

이고, 이 원뿔의 부피가 $15\pi a^5b^4$이므로 $3\pi a^4b^2h=15\pi a^5b^4$이다.

따라서 $h=\frac{15\pi a^5b^4}{3\pi a^4b^2}=5ab^2$이다.

6 다음은 영현이와 주혁이가 단항식의 나눗셈 문제를 해결하는 과정이다. 틀린 부분을 모두 찾아 바르게 고치고, 그 이유를 각각 말하시오. 풀이 참조



풀이 영현: $12a^3\div\frac{4}{3}a=12a^3\times\frac{3}{4a}=\frac{36a^3}{4a}=9a^2$

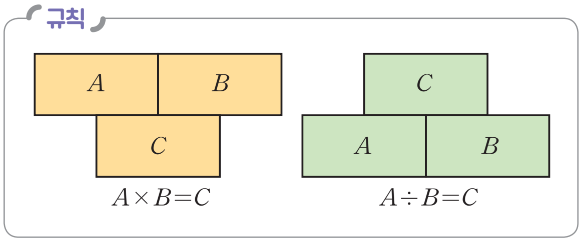
위와 같이 나눗셈을 곱셈으로 고칠 때, 나누는 식의 계수뿐만 아니라 문자도 역수로 고쳐야 한다.

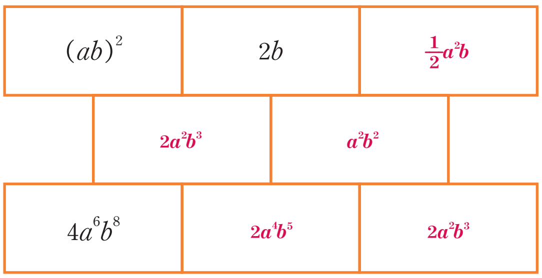
주혁: $3a^2b^4\div ab\div ab=3a^2b^4\times\frac{1}{ab}\times\frac{1}{ab}=\frac{3a^2b^4}{a^2b^2}=3b^2$

위와 같이 나눗셈이 포함된 연산에서는 결합법칙이 성립하지 않으므로 앞의 두 식부터 차례대로 나눗셈을 하거나 나눗셈을 모두 곱셈으로 고쳐서 계산해야 한다.

생각 더 나아가기 추론

다음과 같은 규칙에 따라 오른쪽 그림의 빈칸에 알맞은 식을 써넣어 보자.





풀이 빈칸에 알맞은 식을 위에서부터 차례대로 A, B, C, D, E라고 하자.

$B=(ab)^2\times 2b=a^2b^2\times 2b=2a^2b^3$, $B\div C=2b$에서 $C=B\div 2b=\frac{2a^2b^3}{2b}=a^2b^2$

$2b\times A=C$에서 $A=C\div 2b=\frac{a^2b^2}{2b}=\frac{1}{2}a^2b$, $4a^6b^8\div D=B$에서 $D=4a^6b^8\div B=\frac{4a^6b^8}{2a^2b^3}=2a^4b^5$, $D\div E=C$에서 $E=D\div C=\frac{2a^4b^5}{a^2b^2}=2a^2b^3$

스스로 점검하기

1

다음을 계산하시오.

(1) $-3a\times 2b$ $-6ab$

(2) $5a^2b\times(-2a)^2$ $20a^4b$

(3) $\dfrac{1}{2}ab^3\times(4a)^2$ $8a^3b^3$

(4) $(-3a)^2\times(-2a^2b)^3$ $-72a^8b^3$

풀이 (1) $-3a\times 2b=-3\times 2\times a\times b=-6ab$

(2) $5a^2b\times(-2a)^2=5a^2b\times 4a^2=20a^4b$

(3) $\dfrac{1}{2}ab^3\times(4a)^2=\dfrac{1}{2}ab^3\times 16a^2=8a^3b^3$

(4) $(-3a)^2\times(-2a^2b)^3=9a^2\times(-8a^6b^3)=-72a^8b^3$

2

다음을 계산하시오.

(1) $4a\div 6a^3$ $\dfrac{2}{3a^2}$

(2) $8x^4y^5\div 2x^2y$ $4x^2y^4$

(3) $6a^3b^2\div(4a^2b)^2$ $\dfrac{3}{8a}$

(4) $(-8a^4b^5)\div(2ab)^3$ $-ab^2$

풀이 (1) $4a\div 6a^3=\dfrac{4a}{6a^3}=\dfrac{2}{3a^2}$

(2) $8x^4y^5\div 2x^2y=\dfrac{8x^4y^5}{2x^2y}=4x^2y^4$

(3) $6a^3b^2\div(4a^2b)^2=\dfrac{6a^3b^2}{16a^4b^2}=\dfrac{3}{8a}$

(4) $(-8a^4b^5)\div(2ab)^3=\dfrac{-8a^4b^5}{8a^3b^3}=-ab^2$

3

다음을 계산하시오.

(1) $16x^3y\times(-2y^4)\div 4xy$ $-8x^2y^4$

(2) $(-3x^2y)^2\div 6y^2\div\dfrac{1}{2}x$ $3x^3$

풀이 (1) $16x^3y\times(-2y^4)\div 4xy=16x^3y\times(-2y^4)\times\dfrac{1}{4xy}$

$=\dfrac{16x^3y\times(-2y^4)}{4xy}$

$=\dfrac{-32x^3y^5}{4xy}=-8x^2y^4$

(2) $(-3x^2y)^2\div 6y^2\div\dfrac{1}{2}x=(-3)^2\times x^4\times y^2\times\dfrac{1}{6y^2}\times\dfrac{2}{x}=\dfrac{18x^4y^2}{6xy^2}=3x^3$

4

다음 등식을 만족시키는 식 A를 구하시오. $2x^4y^2$

$$4x^3y^2\times A\div(-xy)=(-2x^2y)^3$$

풀이 (좌변)$=4x^3y^2\times A\div(-xy)=4x^3y^2\times A\times\dfrac{1}{-xy}$

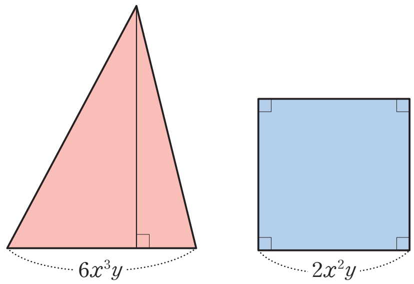
$=4x^3y^2\times\dfrac{1}{-xy}\times A=-4x^2y\times A$

(우변)$=(-2x^2y)^3=(-2)^3\times(x^2)^3\times y^3=-8x^6y^3$

에서 $-4x^2y\times A=-8x^6y^3$이므로 $A=\dfrac{-8x^6y^3}{-4x^2y}=2x^4y^2$이다.

5

다음 그림에서 삼각형과 정사각형의 넓이가 서로 같을 때, 삼각형의 높이를 구하시오. $\dfrac{4}{3}xy$



풀이 주어진 삼각형의 높이를 h라고 하면 이 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 6x^3y\times h=3x^3y\times h$이고, 주어진 정사각형의 넓이는

$(2x^2y)^2=4x^4y^2$이다. 이때 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$3x^3y\times h=4x^4y^2$에서 $h=\dfrac{4x^4y^2}{3x^3y}=\dfrac{4}{3}xy$이다.

따라서 삼각형의 높이는 $\dfrac{4}{3}xy$이다.

6 사고력 UP

추론

다음은 왼쪽에 있는 단항식에 일정한 식을 곱하여 오른쪽에 써넣은 것이다. $A\times B$를 구하시오. $18x^6y^7$

$$\boxed{A}\longrightarrow\boxed{3x^2y^3}\longrightarrow\boxed{6x^4y^4}\longrightarrow\boxed{B}$$

풀이 $\dfrac{6x^4y^4}{3x^2y^3}=2x^2y$이므로 곱하는 일정한 식은 $2x^2y$이다.

$A\times 2x^2y=3x^2y^3$에서

$A=\dfrac{3x^2y^3}{2x^2y}=\dfrac{3}{2}y^2$이고,

$B=6x^4y^4\times 2x^2y=12x^6y^5$이다.

따라서 $A\times B=\dfrac{3}{2}y^2\times 12x^6y^5=18x^6y^7$이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/B0VQcEKqQfQ7FvG9

자기 평가

단항식의 곱셈과 나눗셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.

실생활에서 문자의 유용성을 인식할 수 있다.

수학으로 세상 보기

독도는 우리 땅! 독도 등대의 도로명 주소는?

독도 교육

추론 연결

독도는 2개의 큰 섬인 동도, 서도와 여러 개의 작은 섬으로 이루어져 있으며, 동도에는 독도 등대와 독도 경비대가 있고, 서도에는 주민 숙소가 있다. 동도와 서도에 있는 주요 시설의 도로명 주소는 독도를 지켜 낸 인물의 이름을 붙여 만들었다. 다음 활동을 통해 그 인물의 이름을 알아보자.

풀이 ① $(2a)^3\times5a^2=8a^3\times5a^2=40a^5$

② $(ab^2)^2\times(a^3b)^4=a^2b^4\times a^{12}b^4=a^{14}b^8$

③ $(2a^2b)^3\div2a^2b\div a=8a^6b^3\times\dfrac{1}{2a^2b}\times\dfrac{1}{a}$

$=4a^4b^2\times\dfrac{1}{a}=4a^3b^2$

● 다음 □ 안에 알맞은 수를 구하고, 아래 숫자판에서 그 수가 쓰여 있는 칸을 모두 찾아 색칠하면 인물의 이름이 나타난다. 인물의 이름을 괄호 안에 넣어 독도 등대의 도로명 주소를 완성해 보자. 풀이 참조

④ $12a^3b^2\div4a^4b^2\times3ab^2=12a^3b^2\times\dfrac{1}{4a^4b^2}\times3ab^2=\dfrac{3}{a}\times3ab^2=9b^2$

⑤ $3a^9\times a^4\div\dfrac{a^3}{2}=3a^9\times a^4\times\dfrac{2}{a^3}=6a^{10}$

⑥ $(-ab^2)^3\div\dfrac{3}{5}b^7\times(-3a^2b)^2=-a^3b^6\times\dfrac{5}{3b^7}\times9a^4b^2=-\dfrac{5a^3}{3b}\times9a^4b^2=-15a^7b$

[독도 등대의 도로명 주소]

경상북도 울릉군 울릉읍 독도(이사부)길 63

① $(2a)^3\times5a^2=40a^{\boxed{5}}$

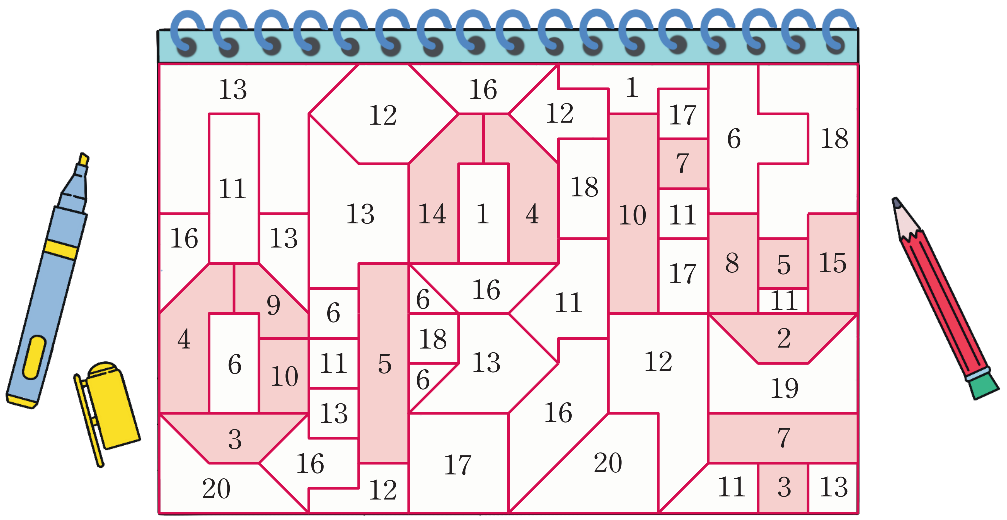
② $(ab^2)^2\times(a^3b)^4=a^{\boxed{14}}b^{\boxed{8}}$

③ $(2a^2b)^3\div2a^2b\div a=\boxed{4}\,a^{\boxed{3}}b^2$

④ $12a^3b^2\div4a^4b^2\times3ab^2=\boxed{9}\,b^{\boxed{2}}$

⑤ $3a^9\times a^4\div\dfrac{a^3}{2}=6a^{\boxed{10}}$

⑥ $(-ab^2)^3\div\dfrac{3}{5}b^7\times(-3a^2b)^2=-\boxed{15}\,a^{\boxed{7}}b$



03 다항식의 덧셈과 뺄셈

[학습 목표] 다항식의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.

다항식의 덧셈과 뺄셈은 어떻게 할까?

생각 펼치기

어느 가게에서 판매하는 주스 한 병은 a원이고, 우유 한 개는 b원이다. 가람이와 노을이가 각각 다음과 같이 주스와 우유를 구입했을 때, 다음 물음에 답해 보자.

1. 가람이와 노을이가 구입한 주스와 우유의 전체 금액을 각각 a, b에 대한 식으로 나타내 보자. 풀이 참조

2. 두 사람이 구입한 주스와 우유의 전체 금액에 대한 다음 문장을 완성해 보자.

> 두 사람이 구입한 주스는 모두 $\boxed{6}$병, 우유는 모두 $\boxed{3}$개이므로 두 사람이 구입한 주스와 우유의 전체 금액은 $(\boxed{6}\,a+\boxed{3}\,b)$원이다.

풀이 1. 가람이가 구입한 주스와 우유의 전체 금액은 $(2a+2b)$원이고,
노을이가 구입한 주스와 우유의 전체 금액은 $(4a+b)$원이다.

문자가 2개 이상인 다항식의 덧셈과 뺄셈

개념 쏙

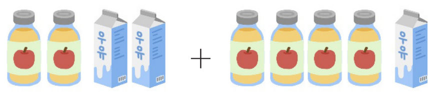
문자가 2개 이상인 다항식의 덧셈과 뺄셈

① 괄호를 푼다.

② 교환법칙을 이용하여 동류항을 모은다.

③ 동류항끼리 덧셈 또는 뺄셈을 한다.

생각 펼치기에서 가람이와 노을이가 구입한 주스와 우유의 전체 금액은 다음과 같이 나타낼 수 있다.



$2a+2b$ $\quad$ $4a+b$

$(2a+2b)+(4a+b)$

$=2a+2b+4a+b$

$2a+4a$ $\quad$ $2b+b$

$=(2a+4a)+(2b+b)$

$6a$ $\quad$ $3b$

$=6a+3b$

이와 같이 문자가 2개 이상인 다항식의 덧셈과 뺄셈은 문자가 1개인 일차식의 덧셈과 뺄셈과 마찬가지로 먼저 괄호를 풀고 동류항끼리 모아서 계산한다.

문자와 차수가 같은 항을 동류항이라고 한다.

함께 해 보기 1 다음을 계산하시오.

(1) $(3a+4b)+(2a-3b)$ (2) $(x+3y-2)-(4x-y-5)$

$$\begin{array}{r} 3a+4b \\ +)\ 2a-3b \\ \hline 5a+\ b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x+3y-2 \\ -)\ 4x-\ y-5 \\ \hline -3x+4y+3 \end{array}$$

풀이 (1) $(3a+4b)+(2a-3b)=3a+4b+2a-3b$
$=3a+2a+4b-3b$
$=5a+b$

(2) $(x+3y-2)-(4x-y-5)=x+3y-2-4x+y+5$
$=x-4x+3y+y-2+5$
$=-3x+4y+3$

답 (1) $5a+b$ (2) $-3x+4y+3$

개념 쏙 괄호 앞의 기호 '$-$'는 '-1'에서 1이 생략되어 있는 것으로 분배법칙을 이용하여 괄호를 푼다. 예를 들면
$-(2a-b)$
$=(-1)\times(2a-b)$
$=(-1)\times 2a+(-1)\times(-b)$
$=-2a+b$

1 다음을 계산하시오.

(1) $(a+5b)+2(a-b)$ $3a+3b$ (2) $(5x+2y-1)-(-3x+4y+3)$ $8x-2y-4$

풀이 (1) $(a+5b)+2(a-b)$
$=a+5b+2a-2b$
$=a+2a+5b-2b=3a+3b$

(2) $(5x+2y-1)-(-3x+4y+3)$
$=5x+2y-1+3x-4y-3$
$=5x+3x+2y-4y-1-3=8x-2y-4$

이차식의 덧셈과 뺄셈

x에 대한 다항식 $3x^2+4x-2$는 세 개의 항 $3x^2$, $4x$, -2로 이루어져 있다. 이 중에서 차수가 가장 높은 항은 $3x^2$이므로 이 다항식의 차수는 2이다. 이와 같이 x에 대한 다항식 중에서 차수가 2인 다항식을 x에 대한 이차식이라고 한다.

확인하기
(1) 다항식 $-x^2+2x+5$는 x에 대한 이차식(이다, 이 아니다).
(2) 다항식 $2x^2+x^3$은 x에 대한 이차식(이다, 이 아니다).

다항식에서 차수가 가장 큰 항의 차수를 그 다항식의 차수라고 한다.

이차식의 덧셈과 뺄셈도 일차식의 경우와 마찬가지로 먼저 괄호를 풀고 동류항끼리 모아서 계산한다.

함께 해 보기 2 다음을 계산하시오.

(1) $(2x^2-4x+3)+(5x^2+x-1)$ (2) $(4x^2-x-2)-(-x^2+2x-3)$

$$\begin{array}{r} 2x^2-4x+3 \\ +)\ 5x^2+\ x-1 \\ \hline 7x^2-3x+2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x^2-\ x-2 \\ -)\ -x^2+2x-3 \\ \hline 5x^2-3x+1 \end{array}$$

풀이 (1) $(2x^2-4x+3)+(5x^2+x-1)=2x^2-4x+3+5x^2+x-1$
$=2x^2+5x^2-4x+x+3-1$
$=7x^2-3x+2$

(2) $(4x^2-x-2)-(-x^2+2x-3)=4x^2-x-2+x^2-2x+3$
$=4x^2+x^2-x-2x-2+3$
$=5x^2-3x+1$

답 (1) $7x^2-3x+2$ (2) $5x^2-3x+1$

2 다음을 계산하시오.

(1) $(x^2-5)+(x^2-2x+7)$ $2x^2-2x+2$ (2) $(3x^2+2x-6)-2(x^2+x-3)$ x^2

풀이 (1) $(x^2-5)+(x^2-2x+7)$
$=x^2-5+x^2-2x+7$
$=x^2+x^2-2x-5+7=2x^2-2x+2$

(2) $(3x^2+2x-6)-2(x^2+x-3)$
$=3x^2+2x-6-2x^2-2x+6$
$=3x^2-2x^2+2x-2x-6+6=x^2$

여러 가지 괄호가 있는 다항식의 덧셈과 뺄셈

여러 가지 괄호가 있는 다항식의 덧셈과 뺄셈에서 괄호를 풀 때에는 소괄호, 중괄호, 대괄호 순으로 풀어서 계산한다.

함께 해 보기 3 $x^2+[3x-\{x+2(x^2+2x)\}]$를 계산하시오.

풀이 $x^2+[3x-\{x+2(x^2+2x)\}]=x^2+\{3x-(x+2x^2+4x)\}$
$=x^2+\{3x-(2x^2+5x)\}$
$=x^2+(3x-2x^2-5x)$
$=x^2+(-2x^2-2x)$
$=x^2-2x^2-2x$
$=-x^2-2x$

답 $-x^2-2x$

Tip 여러 가지 괄호가 있는 다항식의 덧셈과 뺄셈에서 괄호를 풀 때 대괄호, 중괄호, 소괄호 순으로 풀어서 계산할 수도 있다. 이때 계산 결과는 같으나 소괄호, 중괄호, 대괄호 순으로 푸는 것이 계산 실수를 줄일 수 있는 방법이 될 수 있다.

3 다음을 계산하시오.

(1) $b-3\{4a+(5a-2b)\}$ $-27a+7b$

(2) $5y-[4y^2-\{y-(y^2+3y)\}]$ $-5y^2+3y$

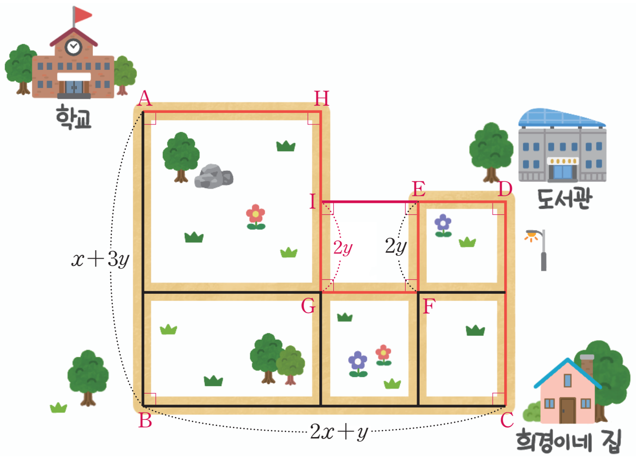
풀이 (1) $b-3\{4a+(5a-2b)\}$
$=b-3(4a+5a-2b)$
$=b-3(9a-2b)$
$=b-27a+6b$
$=-27a+b+6b$
$=-27a+7b$

(2) $5y-[4y^2-\{y-(y^2+3y)\}]$
$=5y-\{4y^2-(y-y^2-3y)\}$
$=5y-\{4y^2-(-y^2-2y)\}$
$=5y-(4y^2+y^2+2y)$
$=5y-(5y^2+2y)$
$=5y-5y^2-2y$
$=-5y^2+3y$

생각 더 나아가기 문제 해결 · 추론

다음 그림과 같이 직사각형 모양으로 이루어진 길이 있다. 희경이가 학교에서 출발하여 빨간 선으로 표시된 길을 따라 도서관을 지나서 집으로 갈 때, 희경이가 걸은 거리를 구해 보자. $3x+8y$

풀이 오른쪽 그림에서 $\overline{DE}$의 연장선이 $\overline{GH}$와 만나는 점을 I라고 하면
$\overline{AH}+\overline{GF}+\overline{ED}=2x+y$,
$\overline{HI}+\overline{DC}=x+3y$,
$\overline{IG}=\overline{EF}=2y$이므로
(희경이가 걸은 거리)
$=(2x+y)+(x+3y)+2\times 2y$
$=3x+8y$
이다.



스스로 점검하기

1

다음 □ 안에 알맞은 말을 써넣으시오.

> 문자가 2개 이상인 다항식의 덧셈과 뺄셈은 먼저 괄호를 풀고 [동류항] 끼리 모아서 계산한다.

2

다음을 계산하시오.

(1) $(a+4b)+(-3a+6b)$ $-2a+10b$

(2) $3(a-b)-(5a-2b)$ $-2a-b$

(3) $(2x-y+2)-(-3x+2y+1)$ $5x-3y+1$

풀이 (1) $(a+4b)+(-3a+6b)=a+4b-3a+6b$
$=a-3a+4b+6b$
$=-2a+10b$

(2) $3(a-b)-(5a-2b)=3a-3b-5a+2b$
$=3a-5a-3b+2b$
$=-2a-b$

(3) $(2x-y+2)-(-3x+2y+1)=2x-y+2+3x-2y-1$
$=2x+3x-y-2y+2-1$
$=5x-3y+1$

3

다음을 계산하시오.

(1) $(3x^2-x+4)+(-4x^2+3x-5)$ $-x^2+2x-1$

(2) $(x^2+2x)-(5x^2-3x+2)$ $-4x^2+5x-2$

(3) $(x^2+4)-5(-x^2+2x-1)$ $6x^2-10x+9$

풀이 (1) $(3x^2-x+4)+(-4x^2+3x-5)=3x^2-x+4-4x^2+3x-5$
$=3x^2-4x^2-x+3x+4-5$
$=-x^2+2x-1$

(2) $(x^2+2x)-(5x^2-3x+2)=x^2+2x-5x^2+3x-2$
$=x^2-5x^2+2x+3x-2$
$=-4x^2+5x-2$

(3) $(x^2+4)-5(-x^2+2x-1)=x^2+4+5x^2-10x+5$
$=x^2+5x^2-10x+4+5$
$=6x^2-10x+9$

4

$4a+2b+[-2a-3\{a+(b-2a)\}]$를 계산하시오. $5a-b$

풀이 $4a+2b+[-2a-3\{a+(b-2a)\}]$
$=4a+2b+\{-2a-3(a+b-2a)\}$
$=4a+2b+\{-2a-3(-a+b)\}$
$=4a+2b+(-2a+3a-3b)$
$=4a+2b+(a-3b)$
$=4a+2b+a-3b$
$=5a-b$

5

어떤 다항식에 $4x^2-5x+3$을 더해야 할 것을 잘못하여 뺐더니 $7x^2-3x+6$이 되었다. 바르게 계산한 식을 구하시오. $15x^2-13x+12$

풀이 주어진 어떤 다항식을 A라고 하면
$A-(4x^2-5x+3)=7x^2-3x+6$에서
$A=(7x^2-3x+6)+(4x^2-5x+3)$
$=7x^2-3x+6+4x^2-5x+3$
$=7x^2+4x^2-3x-5x+6+3=11x^2-8x+9$
따라서 바르게 계산한 식은
$A+(4x^2-5x+3)=(11x^2-8x+9)+(4x^2-5x+3)$
$=11x^2-8x+9+4x^2-5x+3$
$=11x^2+4x^2-8x-5x+9+3$
$=15x^2-13x+12$

6 사고력 UP 추론

도연이가 다음과 같은 다항식이 적힌 6장의 카드 중에서 2장의 카드를 선택했다. 2장의 카드에 적힌 두 다항식의 뺄셈을 한 결과 중 하나가 $3x-y$일 때, 도연이가 선택한 2장의 카드가 될 수 있는 것을 모두 찾으시오.
$2x+3y$와 $5x+2y$, $-2x-y$와 $x-2y$

$2x+3y$	$4x+y$	$-2x-y$
$x-2y$	$5x+2y$	$-2x-3y$

풀이 $(5x+2y)-(2x+3y)=5x+2y-2x-3y=3x-y$,
$(x-2y)-(-2x-y)=x-2y+2x+y=3x-y$
따라서 선택한 2장의 카드가 될 수 있는 것은
$2x+3y$와 $5x+2y$, $-2x-y$와 $x-2y$이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/dPbg1XWHhAGusdvh

자기 평가	
다항식의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.	
일차식에 대한 사칙연산이 다항식으로 확장될 수 있음을 알 수 있다.	

수학으로 세상 보기

생일을 맞히는 나만의 마술 만들기

문제 해결 추론

다음은 지호가 수민이의 생일을 맞히는 마술을 하는 상황이다.

지호는 어떻게 수민이의 생일을 맞힐 수 있었을까? 이 마술의 비밀은 다항식의 덧셈과 뺄셈에 있다. 어떤 사람의 생일이 x월 y일이라고 할 때, 다음과 같은 다항식의 덧셈과 뺄셈으로 이 마술의 비밀을 파헤쳐 보자.

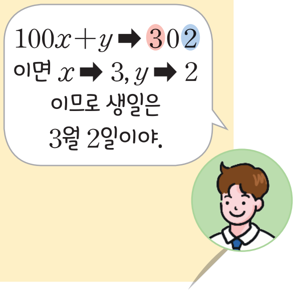
다음 단계에 따라 생일을 맞히는 과정을 살펴보고, 나만의 마술을 만들어 보자.

1 생일이 x월 y일이라고 할 때, 수민이의 생일을 맞히는 지호의 마술 과정을 살펴보자.

1 태어난 달에 50을 곱하고 태어난 날을 더한다. ➡ $50x+y$

2 그 수에서 1을 빼고 2를 곱한다. ➡ $2(50x+y-1)$
$=100x+2y-2$

3 그 수에서 태어난 날을 빼고 2를 더한다. ➡ $100x+2y-2-y+2$
$=100x+y$



$100x+y$에서 x, y는 두 자리 이하의 자연수이므로 생일을 맞힐 수 있었던 것이다.

2 생일이 x월 y일이라고 할 때, 다음 표를 완성해 보고, 친구와 서로의 생일을 맞혀 보자.

1 태어난 달에 75를 곱하고, 태어난 날을 더한 후 1을 뺀다. ➡ $75x+y-1$

2 그 수에 4를 곱하고 태어난 날을 뺀다. ➡ $4(75x+y-1)-y=300x+3y-4$

3 그 수에 4를 더하고 3으로 나눈다. ➡ $(300x+3y-4+4)\div3=100x+y$

3 **2**와 같은 방법으로 친구의 생일인 x월 y일을 맞히는 나만의 마술을 만들어 보자. 풀이 참조

풀이 |예시| 1단계: 태어난 달에 100을 곱하고 10을 더한다.
2단계: 그 수에 태어난 날을 더한 후 2를 곱한다.
3단계: 그 수에서 20을 빼고 2로 나눈다.

04 다항식의 곱셈과 나눗셈

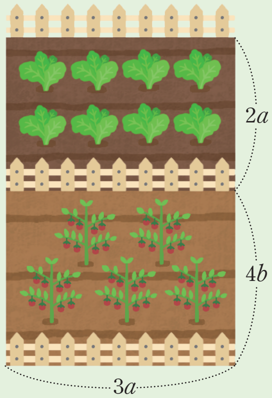
이 단원에서 배우는 용어와 기호
전개

[학습 목표] '(다항식)×(다항식)', '(다항식)÷(단항식)'과 같은 곱셈과 나눗셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.

(단항식)×(다항식)은 어떻게 할까?

생각 펼치기

오른쪽 그림과 같이 직사각형 모양의 학교 텃밭을 두 부분으로 나누어 상추와 방울토마토를 심을 때, 다음 물음에 답해 보자.



1. 텃밭 전체의 넓이를 (가로의 길이)×(세로의 길이)의 꼴로 나타내 보자. $3a\times(2a+4b)$

2. 상추를 심은 텃밭과 방울토마토를 심은 텃밭의 넓이를 이용하여 텃밭 전체의 넓이를 식으로 나타내 보자. $6a^2+12ab$

풀이 1. 텃밭 전체의 가로의 길이는 $3a$, 세로의 길이는 $2a+4b$이므로 텃밭 전체의 넓이는 $3a\times(2a+4b)$이다.
2. 상추를 심은 텃밭의 넓이는 $6a^2$이고, 방울토마토를 심은 텃밭의 넓이는 $12ab$이므로 텃밭 전체의 넓이는 $6a^2+12ab$이다.

Tip (단항식)×(다항식)에서 곱셈 기호를 생략할 수 있다.
즉, $4a\times(2a+3b)$
$=4a(2a+3b)$
특히,
$4a+(2a+3b)$
$\neq 4a(2a+3b)$
임에 유의한다.

단항식과 다항식의 곱셈

생각 펼치기에서 텃밭 전체의 가로의 길이는 $3a$, 세로의 길이는 $2a+4b$이므로 텃밭 전체의 넓이는 $3a\times(2a+4b)$이다.

한편, 상추를 심은 텃밭의 넓이는 $3a\times 2a=6a^2$, 방울토마토를 심은 텃밭의 넓이는 $3a\times 4b=12ab$이므로 텃밭 전체의 넓이는 $6a^2+12ab$이다.

따라서 $3a\times(2a+4b)=6a^2+12ab$임을 알 수 있다.

이것은 다음과 같이 분배법칙을 이용하여 단항식을 다항식의 각 항에 곱하여 계산한 것과 같다.

분배법칙
$a\times(b+c)=ab+ac$
$(a+b)\times c=ac+bc$

$$\begin{aligned}3a\times(2a+4b)&=3a\times 2a+3a\times 4b\\&=6a^2+12ab\end{aligned}$$

이와 같이 단항식과 다항식의 곱셈에서 분배법칙을 이용하여 하나의 다항식으로 나타내는 것을 **전개**한다고 한다.

$$3a\times(2a+4b)\xrightarrow{\text{전개}}6a^2+12ab$$

전개하여 얻은 식을 전개식이라고 한다.

확인하기
(1) $3a(4a-b)=3a\times 4a+3a\times(-b)=\boxed{12a^2}-3ab$
(2) $x(x-5y+4)=x\times x+x\times(-5y)+x\times 4=x^2+(\boxed{-5xy})+4x$

1 다음 식을 전개하시오.

(1) $5a(4a+2)$ $20a^2+10a$

(2) $-6x(x-2y+1)$ $-6x^2+12xy-6x$

(3) $(3a-2b)\times(-3b)$ $-9ab+6b^2$

(4) $(-4x+y-3)\times 2y$ $-8xy+2y^2-6y$

풀이 (1) $5a(4a+2)=5a\times 4a+5a\times 2=20a^2+10a$

(2) $-6x(x-2y+1)$
$=-6x\times x+(-6x)\times(-2y)+(-6x)\times 1$
$=-6x^2+12xy-6x$

(3) $(3a-2b)\times(-3b)$
$=3a\times(-3b)+(-2b)\times(-3b)$
$=-9ab+6b^2$

(4) $(-4x+y-3)\times 2y$
$=(-4x)\times 2y+y\times 2y+(-3)\times 2y$
$=-8xy+2y^2-6y$

함께 해 보기 1 다음을 계산하시오.

(1) $a(2a+3)+a(3a+2)$

(2) $3x(2x-4y)-x(x-5y)$

풀이 (1) $a(2a+3)+a(3a+2)$
$=a\times 2a+a\times 3+a\times 3a+a\times 2$
$=2a^2+3a+3a^2+2a$
$=5a^2+5a$

(2) $3x(2x-4y)-x(x-5y)$
$=3x\times 2x+3x\times(-4y)+(-x)\times x+(-x)\times(-5y)$
$=6x^2-12xy-x^2+5xy$
$=5x^2-7xy$

답 (1) $5a^2+5a$ (2) $5x^2-7xy$

2 다음을 계산하시오.

(1) $2a(a-b)+3a(3a-2b)$ $11a^2-8ab$

(2) $x(x-4y)-y(x-4y)$ $x^2-5xy+4y^2$

풀이 (1) $2a(a-b)+3a(3a-2b)$
$=2a\times a+2a\times(-b)+3a\times 3a+3a\times(-2b)$
$=2a^2-2ab+9a^2-6ab$
$=11a^2-8ab$

(2) $x(x-4y)-y(x-4y)$
$=x\times x+x\times(-4y)+(-y)\times x+(-y)\times(-4y)$
$=x^2-4xy-xy+4y^2$
$=x^2-5xy+4y^2$

(다항식)÷(단항식)은 어떻게 할까?

다항식과 단항식의 나눗셈

다항식을 단항식으로 나눌 때에는 단항식의 나눗셈과 마찬가지로 나눗셈을 곱셈으로 고치거나 주어진 식을 분수의 꼴로 나타내어 계산한다.

예를 들어 $(8a^2+4ab)\div 2a$는 다음과 같이 두 가지 방법으로 계산할 수 있다.

방법 1

$(8a^2+4ab)\div 2a$
$=(8a^2+4ab)\times\dfrac{1}{2a}$
$=8a^2\times\dfrac{1}{2a}+4ab\times\dfrac{1}{2a}$
$=4a+2b$

방법 2

$(8a^2+4ab)\div 2a$
$=\dfrac{8a^2+4ab}{2a}$
$=\dfrac{8a^2}{2a}+\dfrac{4ab}{2a}$
$=4a+2b$

개념 쏙

다항식을 단항식으로 나눌 때, 나눗셈을 곱셈으로 고쳐서 분배법칙을 이용하는 방법과 분수의 꼴로 고쳐서 다항식의 각 항을 단항식으로 나누는 방법이 있다. 이때 두 가지 방법의 계산 결과는 서로 같다.

3 다음을 계산하시오.

(1) $(9a^2-6a)\div 3a$ **$3a-2$**

(2) $(4x^2+8xy)\div(-2x)$ **$-2x-4y$**

(3) $(2a^2-3ab)\div\frac{1}{2}a$ **$4a-6b$**

(4) $(10x^2-15xy)\div\frac{5}{2}x$ **$4x-6y$**

풀이

(1) $(9a^2-6a)\div 3a$
$=(9a^2-6a)\times\frac{1}{3a}$
$=9a^2\times\frac{1}{3a}+(-6a)\times\frac{1}{3a}$
$=3a-2$

(2) $(4x^2+8xy)\div(-2x)$
$=(4x^2+8xy)\times\left(-\frac{1}{2x}\right)$
$=4x^2\times\left(-\frac{1}{2x}\right)+8xy\times\left(-\frac{1}{2x}\right)$
$=-2x-4y$

(3) $(2a^2-3ab)\div\frac{1}{2}a=(2a^2-3ab)\times\frac{2}{a}$
$=2a^2\times\frac{2}{a}+(-3ab)\times\frac{2}{a}=4a-6b$

(4) $(10x^2-15xy)\div\frac{5}{2}x=(10x^2-15xy)\times\frac{2}{5x}$
$=10x^2\times\frac{2}{5x}+(-15xy)\times\frac{2}{5x}$
$=4x-6y$

함께 해 보기 2 $2x(x-5)+(-9xy+6y^2)\div\frac{3}{5}y$를 계산하시오.

풀이 $2x(x-5)+(-9xy+6y^2)\div\frac{3}{5}y$

$=2x(x-5)+(-9xy+6y^2)\times\frac{5}{3y}$

$=2x\times x+2x\times(-5)+(-9xy)\times\frac{5}{3y}+6y^2\times\frac{5}{3y}$

$=2x^2-10x-15x+10y$

$=2x^2-25x+10y$

답 $2x^2-25x+10y$

4 다음을 계산하시오.

(1) $a(4a+2b)+(8a^2b-12ab)\div 4a$ **$4a^2+4ab-3b$**

(2) $(xy^2-2x^2y)\div 3xy-\frac{xy-3y^2}{y}$ **$-\frac{5}{3}x+\frac{10}{3}y$**

풀이 (1) $a(4a+2b)+(8a^2b-12ab)\div 4a$
$=a\times 4a+a\times 2b+(8a^2b-12ab)\times\frac{1}{4a}$
$=a\times 4a+a\times 2b+8a^2b\times\frac{1}{4a}+(-12ab)\times\frac{1}{4a}$
$=4a^2+2ab+2ab-3b$
$=4a^2+4ab-3b$

(2) $(xy^2-2x^2y)\div 3xy-\frac{xy-3y^2}{y}$
$=(xy^2-2x^2y)\times\frac{1}{3xy}-\left(\frac{xy}{y}-\frac{3y^2}{y}\right)$
$=xy^2\times\frac{1}{3xy}-2x^2y\times\frac{1}{3xy}-\left(\frac{xy}{y}-\frac{3y^2}{y}\right)$
$=\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}x-(x-3y)=\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}x-x+3y=-\frac{5}{3}x+\frac{10}{3}y$

생각 더 나아가기 추론 의사소통

다음은 한결이가 질문 게시판에 올린 내용이다. 틀린 부분을 각각 찾아 친구와 이야기해 보고, 바르게 고쳐 보자. 풀이 참조

풀이 ① $3x^2-2x(x+1)$
$=3x^2+(-2x)\times x+(-2x)\times 1$
$=3x^2-2x^2-2x=x^2-2x$

② $(12a^2+5ab)\div 3a$
$=\frac{12a^2+5ab}{3a}$
$=\frac{12a^2}{3a}+\frac{5ab}{3a}=4a+\frac{5}{3}b$

한결이의 질문 게시판

제 목 다항식의 곱셈과 나눗셈

[질문] 다항식의 계산을 했는데 답이 틀렸어요. 어느 부분이 틀렸는지 모르겠어요.

①
$3x^2-2x(x+1)$
$=3x^2-2x^2+1$
$=x^2+1$

②
$(12a^2+5ab)\div 3a$
$=\frac{12a^2+5ab}{3a}$
$=4a+5ab$

돌아가기 목록보기 저장하기

스스로 점검하기

1

다음 □ 안에 알맞은 말을 써넣으시오.

> 단항식과 다항식의 곱셈에서 분배법칙을 이용하여 하나의 다항식으로 나타내는 것을 $\boxed{\text{전개}}$한다고 한다.

2

다음을 계산하시오.

(1) $2a(4b+3)$ $\mathbf{8ab+6a}$

(2) $a(a+2b)+2a(2a-b)$ $\mathbf{5a^2}$

(3) $4x(x+y)-3x(x-3y)$ $\mathbf{x^2+13xy}$

풀이 (1) $2a(4b+3)=2a\times4b+2a\times3=8ab+6a$

(2) $a(a+2b)+2a(2a-b)=a\times a+a\times2b+2a\times2a+2a\times(-b)$
$=a^2+2ab+4a^2-2ab$
$=5a^2$

(3) $4x(x+y)-3x(x-3y)$
$=4x\times x+4x\times y+(-3x)\times x+(-3x)\times(-3y)$
$=4x^2+4xy-3x^2+9xy$
$=x^2+13xy$

3

다음을 계산하시오.

(1) $(6a^2+8a)\div2a$ $\mathbf{3a+4}$

(2) $(a^2b-6b^2)\div(-3b)$ $\mathbf{-\frac{1}{3}a^2+2b}$

(3) $(2x^2y-4y^2)\div\left(-\frac{1}{2}y\right)$ $\mathbf{-4x^2+8y}$

풀이 (1) $(6a^2+8a)\div2a=(6a^2+8a)\times\frac{1}{2a}$
$=6a^2\times\frac{1}{2a}+8a\times\frac{1}{2a}=3a+4$

(2) $(a^2b-6b^2)\div(-3b)=(a^2b-6b^2)\times\left(-\frac{1}{3b}\right)$
$=a^2b\times\left(-\frac{1}{3b}\right)+(-6b^2)\times\left(-\frac{1}{3b}\right)=-\frac{1}{3}a^2+2b$

(3) $(2x^2y-4y^2)\div\left(-\frac{1}{2}y\right)=(2x^2y-4y^2)\times\left(-\frac{2}{y}\right)$
$=2x^2y\times\left(-\frac{2}{y}\right)+(-4y^2)\times\left(-\frac{2}{y}\right)$
$=-4x^2+8y$

4

$a(4a-3b)-(8a^2b-2ab^2)\div2b$를 계산하시오. $\mathbf{-2ab}$

풀이 $a(4a-3b)-(8a^2b-2ab^2)\div2b$
$=a\times4a+a\times(-3b)-(8a^2b-2ab^2)\times\frac{1}{2b}$
$=a\times4a+a\times(-3b)-\left(8a^2b\times\frac{1}{2b}-2ab^2\times\frac{1}{2b}\right)$
$=4a^2-3ab-(4a^2-ab)$
$=4a^2-3ab-4a^2+ab$
$=-2ab$

5

$\frac{6x^2+5xy}{x}-\frac{2y^2+10xy}{2y}$를 계산했을 때, x의 계수와 y의 계수를 각각 구하시오. **x의 계수: 1, y의 계수: 4**

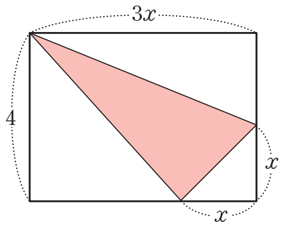
풀이 $\frac{6x^2+5xy}{x}-\frac{2y^2+10xy}{2y}=(6x+5y)-(y+5x)$
$=6x+5y-y-5x$
$=x+4y$

이므로 x의 계수는 1이고, y의 계수는 4이다.

6 사고력 UP

문제 해결

다음 그림과 같이 가로의 길이가 $3x$, 세로의 길이가 4인 직사각형이 있다. 색칠한 삼각형의 넓이를 구하시오. $\mathbf{x^2+2x}$



풀이 가로의 길이가 $3x$, 세로의 길이가 4인 직사각형의 넓이는 $3x\times4=12x$이다. 이때 색칠하지 않은 세 삼각형의 넓이는 각각

$\frac{1}{2}\times4\times(3x-x)=2\times2x=4x$,

$\frac{1}{2}\times3x\times(4-x)=\frac{3x}{2}\times(4-x)=6x-\frac{3}{2}x^2$,

$\frac{1}{2}\times x\times x=\frac{1}{2}x^2$이므로 색칠한 삼각형의 넓이는

$12x-\left\{4x+\left(6x-\frac{3}{2}x^2\right)+\frac{1}{2}x^2\right\}$
$=12x-(-x^2+10x)$
$=12x+x^2-10x$
$=x^2+2x$이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/hqNUnxQOrVH7liJg

자기 평가

'(단항식)×(다항식)', '(다항식)÷(단항식)'과 같은 곱셈과 나눗셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.

일차식에 대한 사칙연산이 다항식으로 확장될 수 있음을 알 수 있다.

수학으로⁺ 탐험하기

315~ 318쪽 꾸러미에 있는 도미노 카드를 이용해.

다항식의 계산으로 만드는 도미노 카드

정사각형 2개를 이어 붙여 만든 직사각형 모양의 도형을 도미노 카드라고 한다. 도미노 카드는 여러 가지 종류가 있는데 주사위 눈이나 숫자, 그림 등 다양한 요소들로 꾸며 도미노 카드 게임에서 정한 규칙에 따라 카드를 이어 붙이는 데 사용된다. 현우는 다항식이 적혀 있는 도미노 카드를 만들고, 규칙을 정해 친구들과 함께 게임을 하려고 한다.

다음은 현우와 친구들이 정한 도미노 카드 게임 규칙이다.

게임 규칙

❶ 한 도미노 카드에 적힌 두 다항식의 계산 결과를 구한다. 예를 들어 오른쪽 도미노 카드에서 구할 수 있는 다항식의 계산 결과는 $9a\times\frac{1}{3}a^2=3a^3$이다.

$9a$	$\times\frac{1}{3}a^2$

❷ ❶에서 구한 다항식의 계산 결과가 적힌 도미노 카드를 찾아서 서로 연결한다. 예를 들어 다음과 같이 ❶에서 구한 다항식의 계산 결과인 $3a^3$이 적혀 있는 다른 도미노 카드를 찾아서 서로 연결한다.

$9a$	$\times\frac{1}{3}a^2$	$3a^3$	$\div a^2$

● 다항식과 연산 기호가 적힌 도미노 카드를 이용하여 다음 활동을 해 보자.

$3a^2+6ab$	$\times\frac{1}{3}a^2$

$3a$	$\times(a+2b)$

$3a^3$	$\div a^2$

a^4+2a^3b	$\div a^3$

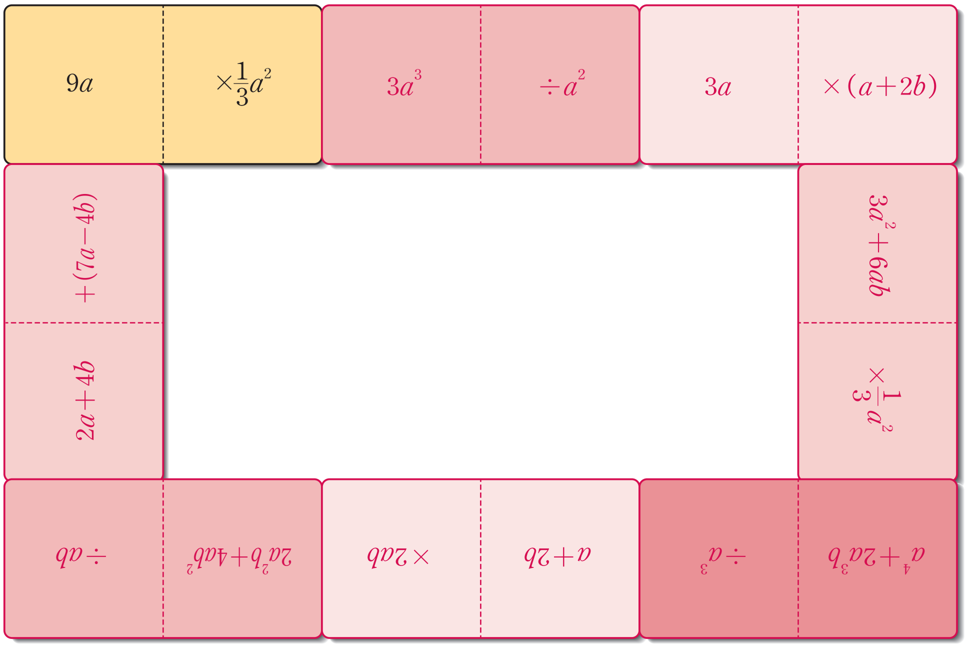
$2a^2b+4ab^2$	$\div ab$

$9a$	$\times\frac{1}{3}a^2$

$a+2b$	$\times 2ab$

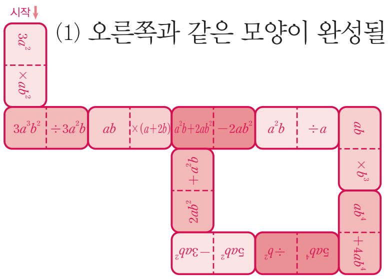
$2a+4b$	$+(7a-4b)$

1 도미노 카드 게임 규칙에 따라 각 도미노 카드를 연결하여 아래 그림을 완성해 보자.

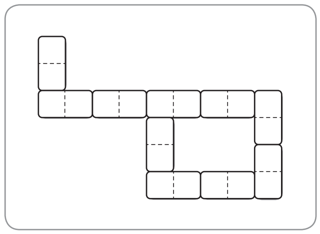


2 모둠별로 다항식과 연산 기호가 적힌 새로운 도미노 카드를 만들어 보고, 연결해 보자.

풀이 |예시|

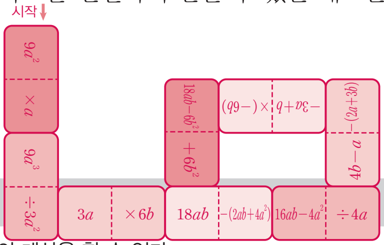


(1) 오른쪽과 같은 모양이 완성될 수 있는 도미노 카드를 만들어 보자. 풀이 참조



(2) 도미노 카드를 연결하여 만들 수 있는 새로운 모양을 만들어 보고, 다른 모둠과 비교해 보자. 풀이 참조

풀이 |예시|



| 상호 평가표 |

		자기 평가	친구 평가
내용	다항식의 계산을 할 수 있다.		
	특정한 조건을 만족시키는 다항식의 계산식을 만들 수 있다.		
태도	도미노 카드를 연결하여 여러 가지 모양을 만들면서 다항식의 계산에 적극적으로 참여했다.		

스스로 마무리하기

생각 완성하기

각 단원의 내용을 정리하여 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

01 지수법칙

• 지수법칙

$a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$

$(a^2)^3 = a^{2\times3} = a^{6}$

$a^4 \div a^2 = a^{4-2} = a^2$

$a^4 \div a^9 = \dfrac{1}{a^{9-4}} = \dfrac{1}{a^{5}}$

$(a^2b^3)^2 = a^{2\times2}b^{3\times2} = a^4b^6$

02 단항식의 곱셈과 나눗셈

• 단항식의 곱셈

$3a \times 2b$

$= (3\times2)\times(a\times b)$

$= 6ab$

• 단항식의 나눗셈

$30ab \div 6a = 30ab \times \dfrac{1}{6a}$

$= \left(30\times\dfrac{1}{6}\right)\times\left(ab\times\dfrac{1}{a}\right)$

$= 5b$

03 다항식의 덧셈과 뺄셈

• 다항식의 덧셈과 뺄셈

$(3a+4b)+(2a-3b)$

$= 3a+2a+4b-3b$

$= 5a+b$

04 다항식의 곱셈과 나눗셈

• (단항식)×(다항식)

$3a\times(2a+4b)$

$= 3a\times2a+3a\times4b$

$= 6a^2+12ab$

• (다항식)÷(단항식)

$(8a^2+4ab)\div2a$

$= (8a^2+4ab)\times\boxed{\dfrac{1}{2a}}$

$= 8a^2\times\boxed{\dfrac{1}{2a}}+4ab\times\boxed{\dfrac{1}{2a}}$

$= \boxed{4a+2b}$

---

1 다음 보기 중에서 옳은 것을 모두 고르시오. ㄷ, ㄹ

보기

ㄱ. $a^2\times a^5 = a^{10}$　　ㄴ. $(x^5)^4 = x^9$

ㄷ. $3^5\div3^2 = 3^3$　　ㄹ. $\left(-\dfrac{y^3}{x^2}\right)^4 = \dfrac{y^{12}}{x^8}$

풀이 ㄱ. $a^2\times a^5 = a^{2+5} = a^7$　ㄴ. $(x^5)^4 = x^{5\times4} = x^{20}$

ㄷ. $3^5\div3^2 = 3^{5-2} = 3^3$　ㄹ. $\left(-\dfrac{y^3}{x^2}\right)^4 = (-1)^4\times\dfrac{y^{3\times4}}{x^{2\times4}} = \dfrac{y^{12}}{x^8}$

2 다음을 계산하시오.

(1) $10xy^2\times(-x)^3$ $-10x^4y^2$

(2) $(3x^2y^2)^3\div(-xy^2)$ $-27x^5y^4$

풀이 (1) $10xy^2\times(-x)^3 = 10\times(-1)^3\times x\times x^3\times y^2 = -10x^4y^2$

(2) $(3x^2y^2)^3\div(-xy^2) = 3^3x^6y^6\times\left(-\dfrac{1}{xy^2}\right) = -27x^5y^4$

3 다음을 계산하시오.

(1) $(4a+2b)-(-3a+5b)$ $7a-3b$

(2) $(x^2+3x-5)-3(2x^2-2x+4)$ $-5x^2+9x-17$

풀이 (1) $(4a+2b)-(-3a+5b) = 4a+2b+3a-5b$
$= 4a+3a+2b-5b = 7a-3b$

(2) $(x^2+3x-5)-3(2x^2-2x+4) = x^2+3x-5-6x^2+6x-12$
$= x^2-6x^2+3x+6x-5-12$
$= -5x^2+9x-17$

4 다음을 계산하시오.

(1) $2a(8a-3b)$ $16a^2-6ab$

(2) $(15x-18xy^2)\div3x$ $5-6y^2$

풀이 (1) $2a(8a-3b) = 2a\times8a+2a\times(-3b) = 16a^2-6ab$

(2) $(15x-18xy^2)\div3x$
$= (15x-18xy^2)\times\dfrac{1}{3x}$
$= 5-6y^2$

5 $27^6=(3^a)^6=3^b$일 때, $a+b$의 값은? ⑤

① 17 ② 18 ③ 19

④ 20 ⑤ 21

풀이 $27=3^3$이므로 $27^6=(3^3)^6=3^{18}$이고,
$a=3$, $b=18$이므로 $a+b=21$이다.

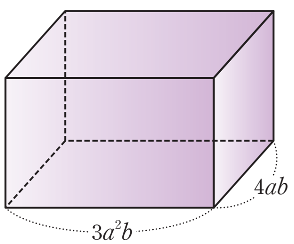
6 $4^4\times18^5\div9=2^m\times3^n$일 때, 자연수 m, n의 값을 각각 구하시오. $m=13$, $n=8$

풀이 $4^4\times18^5\div9=2^8\times(2\times3^2)^5\div3^2$
$=2^8\times2^5\times3^{2\times5}\div3^2$
$=2^{8+5}\times3^{10-2}$
$=2^{13}\times3^8$
따라서 $m=13$, $n=8$이다.

7 마트에서 준호는 빵 3개와 우유 2개를 샀고, 용우는 빵 1개와 우유 5개를 샀다. 빵과 우유 1개의 가격이 각각 x원, y원일 때, 두 사람이 지불해야 할 금액을 각각 식으로 나타내고, 두 금액의 합을 구하시오.
(단, 준호와 용우가 산 빵과 우유의 종류는 각각 같다.)
준호: $(3x+2y)$원, 용우: $(x+5y)$원, 두 금액의 합: $(4x+7y)$원

풀이 준호가 지불해야 할 금액은 $3\times x+2\times y=3x+2y$(원),
용우가 지불해야 할 금액은 $1\times x+5\times y=x+5y$(원)이다.
따라서 두 사람이 지불해야 할 금액의 합은
$(3x+2y)+(x+5y)=4x+7y$(원)이다.

8 다음 그림과 같이 가로의 길이가 $3a^2b$, 세로의 길이가 $4ab$인 직육면체의 부피가 $48a^4b^2+60a^3b^2$일 때, 이 직육면체의 높이를 구하시오. $4a+5$



풀이 (직육면체의 부피)
=(밑면의 가로)×(밑면의 세로)×(직육면체의 높이)이므로
$48a^4b^2+60a^3b^2=3a^2b\times4ab\times$(직육면체의 높이)
$=12a^3b^2\times$(직육면체의 높이)
이다. 따라서 직육면체의 높이는 $(48a^4b^2+60a^3b^2)\div12a^3b^2=4a+5$
이다.

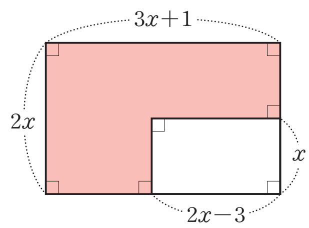
9 $\dfrac{12x^2-18xy}{3x}-\dfrac{10y^2-15xy}{5y}=ax+by$일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오. $a=7$, $b=-8$

풀이 $\dfrac{12x^2-18xy}{3x}-\dfrac{10y^2-15xy}{5y}=(4x-6y)-(2y-3x)$
$=4x-6y-2y+3x$
$=4x+3x-6y-2y$
$=7x-8y$
따라서 $a=7$, $b=-8$이다.

10 $5x^2-[2x+4\{x+3x(1-x)\}]$를 계산하시오.
$17x^2-18x$

풀이 $5x^2-[2x+4\{x+3x(1-x)\}]=5x^2-\{2x+4(x+3x-3x^2)\}$
$=5x^2-\{2x+4(-3x^2+4x)\}$
$=5x^2-(2x-12x^2+16x)$
$=5x^2-(-12x^2+18x)$
$=5x^2+12x^2-18x$
$=17x^2-18x$

11 다음 그림에서 색칠한 부분의 넓이는? ②



① $4x^2-5x$ ② $4x^2+5x$

③ $8x^2-5x$ ④ $8x^2+5x$

⑤ $2x^2-5x$

풀이 색칠한 부분의 넓이는 큰 직사각형의 넓이에서 작은 직사각형의 넓이를 빼면 구할 수 있다.
$2x(3x+1)-x(2x-3)$
$=6x^2+2x-2x^2+3x$
$=4x^2+5x$

12 다음 □ 안에 들어갈 알맞은 식을 구하시오. $4x^2-4x+2$

$2\times(\square)-(6x^2-3x+3)$
$=2x^2-5x+1$

풀이 $2\times(\square)-(6x^2-3x+3)=2x^2-5x+1$
$2\times(\square)=2x^2-5x+1+(6x^2-3x+3)$
$=8x^2-8x+4$
$\square=(8x^2-8x+4)\div2$
$=4x^2-4x+2$

스스로 마무리하기

서술형 문제

13 다음 두 식 A, B에 대하여 $A\div5B$를 간단히 나타내려고 한다. 풀이 과정과 답을 쓰시오. $\dfrac{2y}{x^5}$

$$A=8x^4y^2\times(-2xy^2)^2\div\frac{16}{5}x^5y^3$$
$$B=(x^2y^3)^2\times\left(\frac{x^2}{y}\right)^3\div x^4y$$

풀이 $A=8x^4y^2\times(-2xy^2)^2\div\dfrac{16}{5}x^5y^3=8x^4y^2\times4x^2y^4\times\dfrac{5}{16x^5y^3}=10xy^3$,

$B=(x^2y^3)^2\times\left(\dfrac{x^2}{y}\right)^3\div x^4y=x^4y^6\times\dfrac{x^6}{y^3}\times\dfrac{1}{x^4y}=x^6y^2$

$A\div5B=10xy^3\div5x^6y^2=10xy^3\times\dfrac{1}{5x^6y^2}=\dfrac{2y}{x^5}$

채점 기준	배점 비율
(i) 주어진 식 A를 간단히 나타낸 경우	30 %
(ii) 주어진 식 B를 간단히 나타낸 경우	30 %
(iii) $A\div5B$를 간단히 나타낸 경우	40 %

14 어떤 다항식에 $-2x^2y$를 곱해야 할 것을 잘못하여 나누었더니 $-3x^2y^5+\dfrac{1}{2}x^3y$가 되었다. 이때 바르게 계산한 식을 구하려고 한다. 풀이 과정과 답을 쓰시오. $-12x^6y^7+2x^7y^3$

풀이 어떤 다항식을 A라고 하면

$A\div(-2x^2y)=-3x^2y^5+\dfrac{1}{2}x^3y$

$A=\left(-3x^2y^5+\dfrac{1}{2}x^3y\right)\times(-2x^2y)$

$=(-3x^2y^5)\times(-2x^2y)+\dfrac{1}{2}x^3y\times(-2x^2y)=6x^4y^6-x^5y^2$

이다. 따라서 바르게 계산한 식은

$(6x^4y^6-x^5y^2)\times(-2x^2y)=-12x^6y^7+2x^7y^3$이다.

채점 기준	배점 비율
(i) 어떤 다항식을 구한 경우	50 %
(ii) 바르게 계산한 식을 구한 경우	50 %

사고력 문제

15 $8\times(4^3+4^3+4^3)\times125\times(5^3+5^3+5^3+5^3)$ 이 n자리의 자연수일 때, 자연수 n의 값을 구하시오. 8

풀이 $8\times(4^3+4^3+4^3)\times125\times(5^3+5^3+5^3+5^3)$

$=8\times3\times4^3\times125\times4\times5^3$

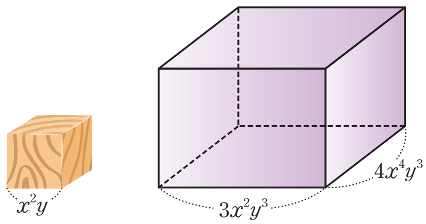
$=2^3\times3\times2^6\times5^3\times2^2\times5^3$

$=3\times2^{11}\times5^6=3\times2^5\times2^6\times5^6=96\times10^6$

따라서 $8\times(4^3+4^3+4^3)\times125\times(5^3+5^3+5^3+5^3)$은 8자리의 자연수이므로 $n=8$이다.

16 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 x^2y인 정육면체 모양의 나무토막을 밑면의 가로, 세로의 길이가 각각 $3x^2y^3$, $4x^4y^3$인 직육면체 모양의 상자에 차곡차곡 넣으면 정확히 $36x^3y^4$개가 들어가고 남는 공간은 없다고 할 때, 상자의 높이를 구하시오. $3x^3y$

(단, 상자의 두께는 무시한다.)



풀이 나무토막 1개의 부피는 $(x^2y)^3=x^6y^3$이므로 상자의 높이를 h라고 하면

$3x^2y^3\times4x^4y^3\times h=x^6y^3\times36x^3y^4$

이고, $12x^6y^6\times h=36x^9y^7$이다.

따라서 $h=\dfrac{36x^9y^7}{12x^6y^6}=3x^3y$이고,

상자의 높이는 $3x^3y$이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/Tw2e57K1b1lKJWQm

마무리 평가

자신의 학습 태도를 스스로 점검해 보자.

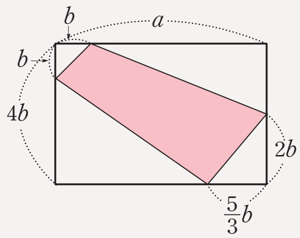
이 단원을 공부하면서 알게 된 것을 써 보자.	이 단원을 공부하면서 어려웠던 점을 쓰고 복습 계획을 세워 보자.

식의 계산을 이용하여 문자의 유용성을 인식하기 위해 노력했다.	
자신의 생각을 수학적으로 표현하고, 다른 사람의 생각을 이해하려고 노력했다.	
수업 준비를 잘하고 수업 시간에 성실하게 참여했다.	
문제를 풀 때 끈기 있게 도전했다.	

| 정답과 해설 323쪽 |

1 $2^n=a$, $5^n=b$일 때, $5^{n+1}(4^{n+1}+3\times4^n)$을 a, b를 사용하여 간단히 나타내시오. (단, $n>1$)

2 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 a, $4b$인 직사각형에서 색칠한 부분의 넓이를 a, b에 대한 식으로 나타내시오.



3 $a:b=2:3$, $b:c=4:5$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

$$(-a^2bc^3)^3\div\left(-\frac{1}{3}a^2bc^4\right)^2\div(-12abc^2)$$

4 다음 표는 가로 방향으로는 덧셈을, 세로 방향으로는 뺄셈을 하여 색칠한 칸을 채운 것이다. 세 다항식 A, B, C의 합을 구하시오.

x^2-2x+3	$2x^2-5x-7$	$3x^2-7x-4$
$5x^2-4x+6$	$3x^2+x-2$	A
$-4x^2+2x-3$	B	C

III 일차부등식

01 부등식과 그 해

02 일차부등식의 풀이

단원 이야기

최대 풍속을 기준으로 분류되는 태풍의 강도와 물건 배송의 무게 제한 등과 같이 어떤 값의 범위는 부등호를 사용한 식으로 나타낼 수 있다.

이 단원에서는 부등식의 뜻과 성질을 이해하고, 일차부등식의 풀이 방법과 이를 활용하여 문제를 해결하는 방법을 배운다.

| 배운 내용 |

초5~6
- 수의 범위와 올림, 버림, 반올림

중1
- 정수와 유리수
- 문자의 사용과 식의 값
- 일차방정식

| 이어질 내용 |

고1
- 여러 가지 일차부등식
- 이차부등식과 연립이차부등식

이것만은 알고 가기

초 5~6 이상, 이하, 초과, 미만 잘함 보통 모름

1 다음 중에서 20 초과인 수에 ○표, 10 이하인 수에 △표를 하시오.

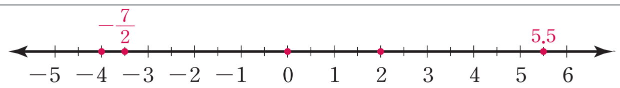
2, 8, 10, 19, 20, 27, 33, 41

- 이상: 크거나 같다.
- 이하: 작거나 같다.
- 초과: 크다.
- 미만: 작다.

중 1 정수와 유리수의 대소 관계 잘함 보통 모름

2 다음 수를 수직선 위에 나타내고, 작은 수부터 차례로 나열하시오. $-4,\ -\frac{7}{2},\ 0,\ 2,\ 5.5$

$-4,\quad 2,\quad 5.5,\quad -\frac{7}{2},\quad 0$



- 양수는 0보다 크고, 음수는 0보다 작다.
- 양수는 음수보다 크다.
- 양수끼리는 절댓값이 큰 수가 더 크다.
- 음수끼리는 절댓값이 큰 수가 더 작다.

중 1 정수와 유리수의 대소 관계 잘함 보통 모름

3 다음 ○ 안에 부등호 $<$, $>$ 중에서 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $+3$ ($>$) -5

(2) -4 ($>$) -6.5

(3) 0.6 ($<$) $\frac{5}{8}$

(4) $-\frac{9}{4}$ ($<$) -2.2

- $a<b$: a는 b보다 작다.
- $a>b$: a는 b보다 크다.

중 1 정수와 유리수의 대소 관계 잘함 보통 모름

4 다음 문장을 부등호를 사용하여 나타내시오.

(1) a는 4 이하이다. $a\le 4$

(2) b는 2 이상이다. $b\ge 2$

(3) c는 -1보다 크고 3보다 작거나 같다. $-1<c\le 3$

- $a\le b$: a는 b보다 작거나 같다. (a는 b 이하이다.)
- $a\ge b$: a는 b보다 크거나 같다. (a는 b 이상이다.)

01 부등식과 그 해

이 단원에서 배우는 용어와 기호
부등식

[학습 목표] 부등식과 그 해의 뜻을 알고, 부등식의 성질을 설명할 수 있다.

부등식은 무엇일까?

생각 펼치기

태풍의 강도는 태풍 중심부의 최대 풍속을 기준으로 분류된다. 다음 표를 보고, 물음에 답해 보자.

강도	최대 풍속(m/s)
중	25 이상 33 미만
강	33 이상 44 미만
매우 강	44 이상 54 미만
초강력	54 이상

1. 태풍 중심부의 최대 풍속이 30 m/s일 때, 태풍의 강도를 말해 보자. 중

풀이 태풍 중심부의 최대 풍속이 30 m/s일 때, 태풍의 강도는 '중'이다.

2. 태풍의 강도가 '초강력'인 태풍 중심부의 최대 풍속을 x m/s라고 할 때, x의 값의 범위를 부등호를 사용하여 나타내 보자. $x \geq 54$

풀이 태풍의 강도가 '초강력'인 태풍 중심부의 최대 풍속을 x m/s라고 하면 $x \geq 54$이다.

부등식

생각 펼치기 에서 태풍 중심부의 최대 풍속이 30 m/s일 때, 태풍의 강도는 '중'이다. 태풍의 강도가 '초강력'인 태풍 중심부의 최대 풍속을 x m/s라고 하면 $x \geq 54$로 나타낼 수 있다.

이와 같이 부등호 $<$, $>$, $\leq$, $\geq$를 사용하여 수 또는 식의 대소 관계를 나타낸 식을 **부등식**이라고 한다. 예를 들어

$$1<5,\ x>-3,\ x+3\leq 7,\ 2x-5\geq -x+1$$

은 모두 부등식이다.

개념 쏙

부등식: 부등호 $>$, $<$, $\geq$, $\leq$를 사용하여 수 또는 식의 대소 관계를 나타낸 식

등식에서와 같이 부등식에서도 부등호의 왼쪽 부분을 좌변, 오른쪽 부분을 우변이라 하고, 좌변과 우변을 통틀어 양변이라고 한다.

$\underbrace{\underbrace{x}_{\text{좌변}} < \underbrace{18.5}_{\text{우변}}}_{\text{양변}}$

1 다음 문장을 부등식으로 나타내시오.

(1) a에서 5를 빼면 3보다 크다. $a-5>3$

(2) x km의 거리를 시속 4 km로 걸어가면 1시간 이상 걸린다. $\frac{x}{4}\geq 1$

(3) 한 권에 2000원인 공책 x권의 값과 배송료 3000원의 합은 15000원 미만이다. $2000x+3000<15000$

2 다음과 같이 우리 주변에서 부등식으로 나타낼 수 있는 상황을 찾아보고, 이를 부등식으로 나타내시오. 풀이 참조

> 유진: 18세 이상의 국민은 대통령 및 국회 의원의 선거권이 있어!
> 서연: 선거일 기준으로 선거에 참여할 수 있는 사람의 나이를 x세라고 하면 $x \geq 18$로 나타낼 수 있겠구나.

풀이 |예시| 도로에서 속도 제한이 시속 60 km인 경우, 차량의 속도를 시속 x km라고 하면 $x \leq 60$으로 나타낼 수 있다.

해리엇(Harriot, T., 1560～1621)은 영국의 수학자로, 부등호 <와 >를 처음 사용하였다.
(출처: 고상숙 외 1인, 『청소년을 위한 서양수학사』)

x의 값이 1, 2, 3, 4일 때, 부등식 $2x-5<1$을 참이 되게 하는 x의 값을 살펴보면 다음 표와 같다.

x	좌변의 값	대소 비교	우변의 값	부등식의 참/거짓
1	$2\times1-5=-3$	$<$	1	참
2	$2\times2-5=-1$	$<$	1	참
3	$2\times3-5=1$	$=$	1	거짓
4	$2\times4-5=3$	$>$	1	거짓

위의 표에서 부등식 $2x-5<1$을 참이 되게 하는 x의 값은 1, 2이다.

이와 같이 미지수 x를 포함한 부등식이 참이 되게 하는 x의 값을 그 부등식의 해라 하고, 부등식의 해를 모두 구하는 것을 부등식을 푼다고 한다.

개념 쏙

부등식의 해: 부등식을 참이 되게 하는 미지수의 값

함께 해 보기 1 x의 값이 -1, 0, 1, 2일 때, 부등식 $3x+1>2$를 푸시오.

풀이 부등식 $3x+1>2$의 x에 -1, 0, 1, 2를 차례대로 대입하면 다음 표와 같다.

x	좌변의 값	대소 비교	우변의 값	부등식의 참/거짓
-1	$3\times(-1)+1=-2$	$<$	2	거짓
0	$3\times0+1=1$	$<$	2	거짓
1	$3\times1+1=4$	$>$	2	참
2	$3\times2+1=7$	$>$	2	참

위의 표에서 부등식 $3x+1>2$를 참이 되게 하는 x의 값은 1, 2이다.
따라서 주어진 부등식의 해는 1, 2이다.

답 1, 2

Tip 부등호 '$\leq$'는 '$<$ 또는 $=$'를 의미하므로 '$<$'를 만족시키는 수와 '$=$'를 만족시키는 수는 모두 부등식의 해가 된다.

3 x의 값이 -2, -1, 0, 1일 때, 다음 부등식을 푸시오.

(1) $x+3 \leq 5$ $-2, -1, 0, 1$

(2) $3x-3<4x-2$ $0, 1$

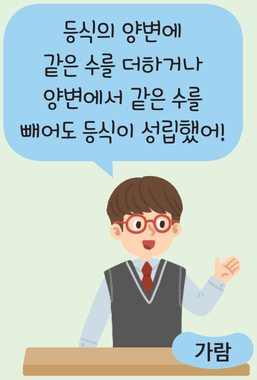
풀이 (1) $x=-2$일 때 $1 \leq 5$, $x=-1$일 때 $2 \leq 5$, $x=0$일 때 $3 \leq 5$, $x=1$일 때 $4 \leq 5$이다.
따라서 주어진 부등식의 해는 -2, -1, 0, 1이다.

(2) $x=0$일 때 $-3<-2$, $x=1$일 때 $0<2$이다.
따라서 주어진 부등식의 해는 0, 1이다.

부등식에는 어떤 성질이 있을까?

생각 펼치기 다음은 등식과 부등식의 성질에 대하여 가람이와 노을이가 대화하는 모습이다. 대화를 읽고, 물음에 답해 보자.

$a=b$이면
$a+c=b+c$
$a-c=b-c$
$ac=bc$
$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$ (단, $c\neq 0$)



$2<4$

$2+2$ (<) $4+2$

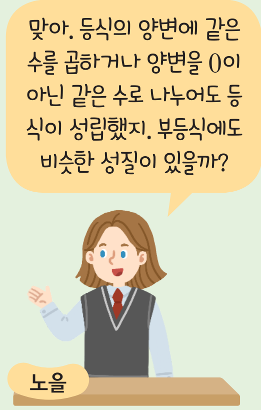
$2-2$ (<) $4-2$

2×2 (<) 4×2

$2\div2$ (<) $4\div2$

$2\times(-2)$ (>) $4\times(-2)$

$2\div(-2)$ (>) $4\div(-2)$



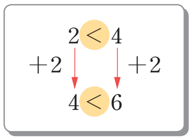
1. ◯ 안에 알맞은 부등호를 써넣어 보자.

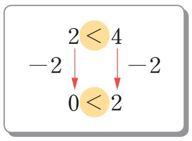
2. 부등식 $2<4$와 비교하여 부등호의 방향이 바뀌는 것은 언제인지 말해 보자. 풀이 참조

풀이 부등식 $2<4$의 양변에 음수 -2를 곱하거나 양변을 음수 -2로 나눌 때, 부등호의 방향이 바뀐다.

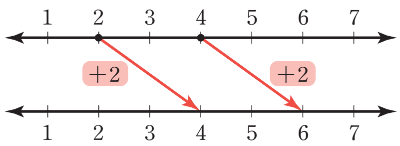
부등식의 성질

생각 펼치기와 같이 부등식 $2<4$의 양변에 2를 더하거나 양변에서 2를 빼어도 다음과 같이 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

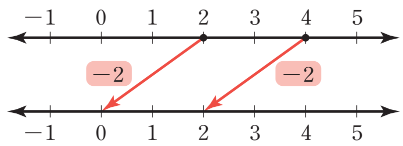




$2+2 < 4+2$



$2-2 < 4-2$



일반적으로 부등식의 양변에 같은 수를 더하거나 양변에서 같은 수를 빼어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

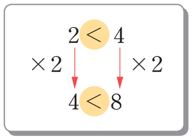
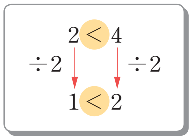
4 $a<b$일 때, 다음 ◯ 안에 알맞은 부등호를 써넣으시오.

(1) $a+1$ (<) $b+1$　　(2) $a-4$ (<) $b-4$

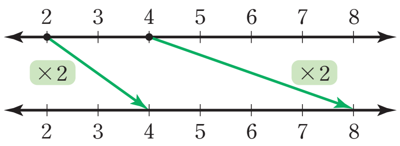
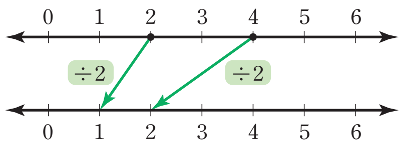
(3) $a+(-3)$ (<) $b+(-3)$　　(4) $a-(-7)$ (<) $b-(-7)$

풀이 부등식의 양변에 같은 수를 더하거나 양변에서 같은 수를 빼어도 부등호의 방향은 바뀌지 않으므로
(1) $a+1<b+1$　(2) $a-4<b-4$　(3) $a+(-3)<b+(-3)$　(4) $a-(-7)<b-(-7)$

또, 부등식 $2<4$의 양변에 양수 2를 곱하거나 양변을 양수 2로 나누어도 다음과 같이 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

$$2\times 2 \ < \ 4\times 2 \qquad\qquad 2\div 2 \ < \ 4\div 2$$

일반적으로 부등식의 양변에 같은 양수를 곱하거나 양변을 같은 양수로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

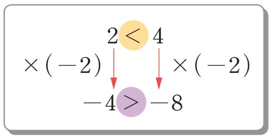
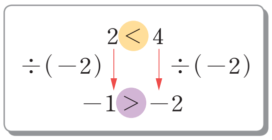
5 $a<b$일 때, 다음 ◯ 안에 알맞은 부등호를 써넣으시오.

(1) $a\times 5$ $<$ $b\times 5$ (2) $a\div 2$ $<$ $b\div 2$

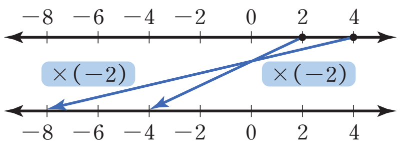
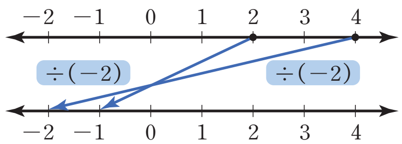
(3) $\frac{4}{3}a$ $<$ $\frac{4}{3}b$ (4) $\frac{a}{7}$ $<$ $\frac{b}{7}$

풀이 부등식의 양변에 같은 양수를 곱하거나 양변을 같은 양수로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않으므로
(1) $a\times 5<b\times 5$ (2) $a\div 2<b\div 2$ (3) $\frac{4}{3}a<\frac{4}{3}b$ (4) $\frac{a}{7}<\frac{b}{7}$

한편, 부등식 $2<4$의 양변에 음수 -2를 곱하거나 양변을 음수 -2로 나누면 다음과 같이 부등호의 방향이 바뀐다.

$$2\times(-2) \ > \ 4\times(-2) \qquad\qquad 2\div(-2) \ > \ 4\div(-2)$$

일반적으로 부등식의 양변에 같은 음수를 곱하거나 양변을 같은 음수로 나누면 부등호의 방향은 바뀐다.

6 $a<b$일 때, 다음 ◯ 안에 알맞은 부등호를 써넣으시오.

(1) $a\times(-5)$ $>$ $b\times(-5)$ (2) $a\div(-1)$ $>$ $b\div(-1)$

(3) $-4a$ $>$ $-4b$ (4) $-\frac{a}{2}$ $>$ $-\frac{b}{2}$

풀이 부등식의 양변에 같은 음수를 곱하거나 양변을 같은 음수로 나누면 부등호의 방향은 바뀌므로
(1) $a\times(-5)>b\times(-5)$ (2) $a\div(-1)>b\div(-1)$ (3) $-4a>-4b$ (4) $-\frac{a}{2}>-\frac{b}{2}$

이상을 정리하면 다음과 같다.

부등호 $<$를 $\le$로, $>$를 $\ge$로 바꾸어도 부등식의 성질은 성립한다.

부등식의 성질

1. 부등식의 양변에 같은 수를 더하거나 양변에서 같은 수를 빼어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$$a<b\text{이면} \quad a+c<b+c,\quad a-c<b-c$$

2. 부등식의 양변에 같은 양수를 곱하거나 양변을 같은 양수로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$$a<b,\ c>0\text{이면} \quad ac<bc,\quad \frac{a}{c}<\frac{b}{c}$$

3. 부등식의 양변에 같은 음수를 곱하거나 양변을 같은 음수로 나누면 부등호의 방향은 바뀐다.

$$a<b,\ c<0\text{이면} \quad ac>bc,\quad \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$$

?! 수학 호기심

부등식 $a<b$의 양변에 0을 곱하면 어떻게 될까?

풀이 부등식 $a<b$의 양변에 0을 곱하면 좌변과 우변의 값이 모두 0이 되어 부등식이 성립하지 않는다.

함께 해 보기 2 $a\le b$일 때, 다음 ◯ 안에 알맞은 부등호를 써넣으시오.

(1) $2a-1$ ◯ $2b-1$ (2) $-3a+5$ ◯ $-3b+5$

풀이 (1) $a\le b$의 양변에 2를 곱하면 $2a\le 2b$

또, 양변에서 1을 빼면 $2a-1\le 2b-1$

(2) $a\le b$의 양변에 -3을 곱하면 $-3a\ge -3b$

또, 양변에 5를 더하면 $-3a+5\ge -3b+5$

답 (1) $\le$ (2) $\ge$

7 $a\ge b$일 때, 다음 ◯ 안에 알맞은 부등호를 써넣으시오.

(1) $6-a$ $\le$ $6-b$ (2) $\frac{a}{4}+1$ $\ge$ $\frac{b}{4}+1$

풀이 (1) $a\ge b$의 양변에 -1을 곱하면 $-a\le -b$이고, 양변에 6을 더하면 $6-a\le 6-b$이다.

(2) $a\ge b$의 양변을 4로 나누면 $\frac{a}{4}\ge\frac{b}{4}$이고, 양변에 1을 더하면 $\frac{a}{4}+1\ge\frac{b}{4}+1$이다.

8 다음 ◯ 안에 알맞은 부등호를 써넣으시오.

(1) $3-a>3-b$일 때, a $<$ b

(2) $\frac{3}{2}a-1\le\frac{3}{2}b-1$일 때, a $\le$ b

풀이 (1) $3-a>3-b$의 양변에서 3을 빼면 $-a>-b$이고, 양변에 -1을 곱하면 $a<b$이다.

(2) $\frac{3}{2}a-1\le\frac{3}{2}b-1$의 양변에 1을 더하면 $\frac{3}{2}a\le\frac{3}{2}b$이고, 양변에 $\frac{2}{3}$를 곱하면 $a\le b$이다.

생각 더 나아가기 추론 의사소통

등식의 성질과 부등식의 성질을 비교해 보고, 공통점과 차이점에 대하여 말해 보자. 풀이 참조

풀이 공통점: 부등식의 양변에 같은 수를 더하거나 양변에서 같은 수를 빼어도 등식과 같이 원래의 부등식이 성립한다.
또한, 부등식의 양변에 같은 양수를 곱하거나 양변을 같은 양수로 나누어도 등식과 같이 원래의 부등식이 성립한다.
차이점: 등식에서는 양변에 같은 음수를 곱하거나 양변을 같은 음수로 나누어도 등식이 성립하지만 부등식에서는 양변에 같은 음수를 곱하거나 양변을 같은 음수로 나누면 부등호의 방향이 바뀐다.

스스로 점검하기

1

다음 □ 안에 알맞은 말을 써넣으시오.

(1) 부등호 $<$, $>$, $\le$, $\ge$를 사용하여 수 또는 식의 대소 관계를 나타낸 식을 부등식(이)라고 한다.

(2) 미지수 x를 포함한 부등식이 참이 되게 하는 x의 값을 그 부등식의 해(이)라고 한다.

2

다음 보기 중에서 부등식을 모두 고르시오. ㄴ, ㄹ

보기

ㄱ. $2x-5$　　　ㄴ. $3\times4\le15$

ㄷ. $x+7=9$　　　ㄹ. $6x+1>2$

풀이 ㄱ. $2x-5$는 일차식이다.
ㄷ. $x+7=9$는 일차방정식이다.
따라서 부등식은 ㄴ, ㄹ이다.

3

x의 값이 1, 2, 3일 때, 부등식 $5x-3\ge3x+1$을 푸시오. 2, 3

풀이 부등식 $5x-3\ge3x+1$의 x에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면 다음 표와 같다.

x	좌변의 값	대소 비교	우변의 값	참/거짓
1	$5\times1-3=2$	$\le$	$3\times1+1=4$	거짓
2	$5\times2-3=7$	$=$	$3\times2+1=7$	참
3	$5\times3-3=12$	$\ge$	$3\times3+1=10$	참

위의 표에서 부등식 $5x-3\ge3x+1$을 참이 되게 하는 x의 값은 2, 3이다.
따라서 주어진 부등식의 해는 2, 3이다.

4

다음 중에서 [　] 안의 수를 주어진 부등식의 해로 갖는 것을 모두 찾으시오. (1), (2)

(1) $2x-3<7$　　　[4]

(2) $5-x\ge6$　　　[-2]

(3) $8x+3\le4x+1$　　　[0]

(4) $4-2x\ge3x+1$　　　[1]

풀이 각 부등식의 x에 [　] 안의 수를 대입하면
(1) $2\times4-3=5<7$이므로 $x=4$를 해로 갖는다.
(2) $5-(-2)=7\ge6$이므로 $x=-2$를 해로 갖는다.
(3) (좌변)$=8\times0+3=3$, (우변)$=4\times0+1=1$
$3>1$이므로 $x=0$은 주어진 부등식의 해가 아니다.
(4) (좌변)$=4-2\times1=2$, (우변)$=3\times1+1=4$
$2<4$이므로 $x=1$은 주어진 부등식의 해가 아니다.
따라서 [　] 안의 수를 주어진 부등식의 해로 갖는 것은 (1), (2)이다.

5

$-2a+\dfrac{8}{3}\le-2b+\dfrac{8}{3}$일 때, 다음 ○ 안에 알맞은 부등호를 써넣으시오.

$$3a-1 \ \ge \ 3b-1$$

풀이 $-2a+\frac{8}{3}\le-2b+\frac{8}{3}$의 양변에서 $\frac{8}{3}$을 빼면 $-2a\le-2b$이고, 양변을 -2로 나누면 $a\ge b$이다.
$a\ge b$의 양변에 3을 곱하면 $3a\ge3b$이고, 양변에서 1을 빼면 $3a-1\ge3b-1$이다.

6 사고력 UP　　추론

$a<b<0$일 때, 다음 보기 중에서 옳은 것을 모두 고르시오. ㄱ, ㄷ

보기

ㄱ. $3a-2<3b-2$　　　ㄴ. $a^2<b^2$

ㄷ. $ab>b^2$　　　ㄹ. $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

풀이 ㄱ. $a<b$이므로 $3a-2<3b-2$이다.
ㄴ. $a<b<0$이므로 $a^2>b^2$이다.
ㄷ. $b<0$이므로 $a<b$의 양변에 b를 곱하면
$ab>b^2$이다.
ㄹ. $ab>0$이므로 $a<b$의 양변을 ab로 나누면
$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$, 즉 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/PETsVESNPGys74ig

자기 평가

부등식과 그 해의 뜻을 알고, 부등식의 성질을 설명할 수 있다.

문제를 해결하면서 부등식의 필요성을 알 수 있다.

수학으로 세상 보기

부등식과 함께하는 물 절약 생활

환경·지속 가능발전 교육

추론 연결

1992년 12월, 국제 연합(UN)은 물의 소중함을 알리고 물 문제 해결을 위한 세계 각국의 관심과 협력을 증진하기 위해 매년 3월 22일을 ‘세계 물의 날’로 선포하였다. 지구 온난화, 이상 기후, 가뭄 등으로 인해 발생하는 물 부족은 식수와 농업뿐만 아니라 동식물이 살아가는 데 필요한 수자원이 줄어드는 등의 다양한 사회적, 환경적 문제를 야기한다. 이에 따라 지속적으로 물의 중요성에 관심을 가지고 실생활 속에서 물 절약을 실천해야 한다. 오른쪽 그림은 일상생활 속에서 우리가 실천할 수 있는 물 절약 실천 방안이다.

(출처: 기후에너지환경부 물사랑누리집, 2023)

다음은 물 절약을 실천하기 위해 누리가 조사한 인터넷 신문 기사의 일부이다. 누리의 하루 물 사용량이 300 L라고 할 때, 물음에 답해 보자.

> A시는 최악의 가뭄으로 인한 식수원 고갈을 대비해 시민 1인당 20 % 물 절약 실천 캠페인을 펼치고 있다. … (중략) … ㈎ 시민 1인당 최소 20 % 물 절약을 실천하면 내년 장마가 시작되는 6월 초까지 제한 급수를 하지 않고 물 공급이 가능하다는 계산이 나온다.
>
> (출처: 광주드림, 2022. 12. 2.)

1 ㈎를 실천하기 위해 누리가 하루 동안 절약해야 하는 물의 양을 x L라고 할 때, x의 값의 범위를 부등호를 사용하여 나타내 보자. $x\geq 60$

풀이 1인당 최소 20 % 물 절약을 실천해야 하므로 $x\geq 300\times\frac{20}{100}$, $x\geq 60$이다.

2 다음 누리의 환경 일기를 읽은 후 누리가 ㈎를 실천했는지 물 절약 실천 방안을 기준으로 판단해 보고, 그 이유를 말해 보자. 풀이 참조

> 오늘은 물 절약을 위해 아침, 점심, 저녁 하루에 세 번 양치할 때마다 양치 컵을 사용해 물을 아꼈다. 또한, 하루 일과를 마치고 샤워할 때, 샤워 시간을 평소보다 4분 줄여서 물 사용량을 줄였다. 작은 변화지만 환경 보호에 기여한 것 같아 뿌듯하다. 앞으로도 물 절약을 위해 지속적으로 노력해야겠다.

풀이 하루에 세 번 양치할 때마다 양치컵을 사용했으므로 $4.8\times 3=14.4$(L)의 물을 절약했다. 또, 샤워할 때 샤워 시간을 4분 줄였으므로 $12\times 4=48$(L)를 절약했다. 총 $14.4+48=62.4$(L)의 물을 절약하여 60 L 이상의 물을 절약했으므로 누리는 ㈎를 실천했다고 볼 수 있다.

02 일차부등식의 풀이

이 단원에서 배우는 용어와 기호

일차부등식

[학습 목표] 일차부등식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

일차부등식은 무엇일까?

생각 펼치기

드론을 이용한 배송은 물품을 신속하고 효율적으로 전달할 수 있다는 장점이 있다. 1개에 7 kg인 물품 여러 개를 무게가 3 kg인 상자에 담아서 드론에 실어 배송하려고 할 때, 다음 물음에 답해 보자.

1. 물품의 개수를 x라고 할 때, 드론에 실을 물품과 상자의 무게의 합을 식으로 나타내 보자. $7x+3$

2. 드론에 실을 물품과 상자의 무게의 합이 40 kg 이하가 되도록 물품을 담으려고 한다. 이 상황을 부등식으로 나타내 보자. $7x+3\le 40$

풀이 1. 1개에 7 kg인 물품 여러 개를 무게가 3 kg인 상자에 담아서 드론에 실어 배송하려고 할 때, 물품의 개수가 x이므로 드론에 실을 물품과 상자의 무게의 합을 식으로 나타내면 $7x+3$이다.
2. 드론에 실을 물품과 상자의 무게의 합이 40 kg 이하이어야 하므로 이 상황을 부등식으로 나타내면 $7x+3\le 40$이다.

일차부등식의 뜻

생각 펼치기에서 드론에 실을 물품과 상자의 무게의 합은 $(7x+3)$ kg이다. 이때 전체 무게의 합이 40 kg 이하가 되어야 하므로 이 상황을 부등식으로 나타내면

$$7x+3\le 40$$

이다. 이 부등식의 양변에서 40을 빼면

$$7x+3-40\le 40-40$$

$$7x+3-40\le 0$$

이다. 이것은 부등식 $7x+3\le 40$에서 우변에 있는 40의 부호를 바꾸어 좌변으로 옮긴 것과 같다.

$7x+3\le 40$

이항

$7x+3-40\le 0$

이와 같이 방정식에서와 마찬가지로 부등식에서도 어느 한 변에 있는 항을 다른 변으로 이항할 수 있다.

$a<b$이면
$a+c<b+c$
$a-c<b-c$

Tip 이항은 부등식의 성질을 이용하여 항을 옮기는 과정을 생략하여 나타낸 것이며, 이때 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

한편, 부등식 $7x+3-40\le 0$을 정리하면

$$7x-37\le 0$$

이다. 이때 이 부등식의 좌변 $7x-37$은 일차식이다. 이와 같이 부등식에서 우변에 있는 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리했을 때,

$$(\text{일차식})<0,\ (\text{일차식})>0,\ (\text{일차식})\le 0,\ (\text{일차식})\ge 0$$

중 어느 하나의 꼴로 나타낼 수 있는 부등식을 **일차부등식**이라고 한다.

개념 쏙

일차부등식: 부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리했을 때, (일차식)>0, (일차식)<0, (일차식)≥ 0, (일차식)≤ 0 중 어느 하나의 꼴로 나타낼 수 있는 부등식

확인하기

(1) 부등식 $x+2<3$에서 우변의 3을 좌변으로 이항하여 정리하면 $x-1<0$이므로 부등식 $x+2<3$은 일차부등식(이다, 이 아니다).

(2) 부등식 $3x+1\geq 3x$에서 우변의 $3x$를 좌변으로 이항하여 정리하면 $1\geq 0$이므로 부등식 $3x+1\geq 3x$는 일차부등식(이다, 이 아니다).

1 다음 중에서 일차부등식을 모두 찾으시오. (1), (2)

(1) $5x-3>1$ (2) $2x+1<3x-4$

(3) $x-2\leq 2+x$ (4) $-3x^2+1\geq 5$

풀이 (1) $5x-3>1$에서 우변의 1을 좌변으로 이항하여 정리하면 $5x-4>0$이므로 일차부등식이다.
(2) $2x+1<3x-4$에서 우변의 $3x$와 -4를 좌변으로 이항하여 정리하면 $-x+5<0$이므로 일차부등식이다.
(3) $x-2\leq 2+x$에서 우변의 2와 x를 좌변으로 이항하여 정리하면 $-4\leq 0$이므로 일차부등식이 아니다.
(4) $-3x^2+1\geq 5$에서 우변의 5를 이항하여 정리하면 $-3x^2-4\geq 0$이므로 일차부등식이 아니다.
따라서 일차부등식은 (1), (2)이다.

일차부등식은 어떻게 풀까?

일차부등식의 풀이

이항과 부등식의 성질을 이용하여 일차부등식 $2x+1>3$을 풀면 다음과 같다.

일차부등식 $2x+1>3$에서 좌변의 1을 우변으로 이항하여 정리하면

$$2x>3-1$$
$$2x>2$$

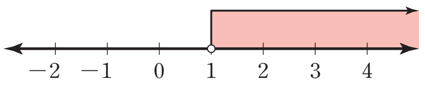
이고, 양변을 2로 나누면

$$x>1$$

이다.

이때 1보다 큰 모든 수는 일차부등식 $2x+1>3$을 참이 되게 한다.

따라서 일차부등식 $2x+1>3$의 해는 $x>1$이고, 이것을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

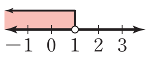


개념 쏙

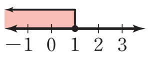
일차부등식을 풀 때, 미지수를 포함한 항은 좌변으로, 상수항은 우변으로 이항하여 정리한다.

해를 수직선 위에 나타낼 때, '∘'은 그 점에 대응하는 수가 부등식의 해에 포함되지 않음을 뜻하고, '•'은 그 점에 대응하는 수가 부등식의 해에 포함됨을 뜻한다.

$x<1$



$x\leq 1$



일반적으로 일차부등식을 풀 때에는 일차항은 좌변으로, 상수항은 우변으로 각각 이항한 후 부등식의 성질을 이용하여 주어진 일차부등식을

$$x<(\text{수}),\ x>(\text{수}),\ x\leq(\text{수}),\ x\geq(\text{수})$$

중 어느 하나의 꼴로 바꾸어 해를 구한다.

2 다음 일차부등식을 푸시오.

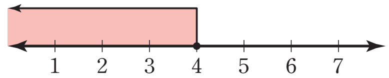
(1) $\frac{1}{3}x>1$ $x>3$　　　(2) $3x\ge-6$ $x\ge-2$

(3) $2x+3<5$ $x<1$　　　(4) $-5x\le20$ $x\ge-4$

풀이 (1) 양변에 3을 곱하면 $x>3$이다.
(2) 양변을 3으로 나누면 $x\ge-2$이다.
(3) 좌변의 3을 이항하면 $2x<2$이고, 양변을 2로 나누면 $x<1$이다.
(4) 양변을 -5로 나누면 $x\ge-4$이다.

함께 해 보기 1 일차부등식 $x\ge3x-8$을 풀고, 그 해를 수직선 위에 나타내시오.

풀이 $3x$를 이항하면　$x-3x\ge-8$
양변을 정리하면　$-2x\ge-8$
양변을 -2로 나누면　$x\le4$
이 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.

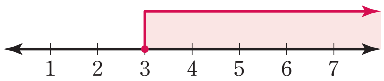


답 $x\le4$, 풀이 참조

부등식의 양변에 같은 음수를 곱하거나 양변을 같은 음수로 나누면 부등호의 방향은 바뀐다.

3 다음은 일차부등식 $2x+5\le4x-1$을 푸는 과정이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣고, 그 해를 수직선 위에 나타내시오.

5와 $4x$를 각각 이항하면　$2x-4x\le-1-5$
양변을 정리하면　$-2x\le-6$
양변을 $\boxed{-2}$(으)로 나누면　x ($\ge$) 3
이 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.

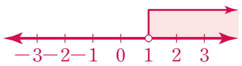


4 다음 일차부등식을 풀고, 그 해를 수직선 위에 나타내시오.

(1) $4x-1>3$ $x>1$　　　(2) $-x\le3x+8$ $x\ge-2$

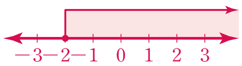
(3) $-6x+3>-2x-9$ $x<3$　　　(4) $5x+7\le-3x-1$ $x\le-1$

풀이 (1)



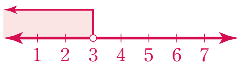
-1을 이항하면 $4x>3+1$
양변을 정리하면 $4x>4$
양변을 4로 나누면 $x>1$

(2)



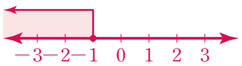
$3x$를 이항하면 $-3x-x\le8$
양변을 정리하면 $-4x\le8$
양변을 -4로 나누면 $x\ge-2$

(3)



3과 $-2x$를 각각 이항하면
$-6x+2x>-9-3$
양변을 정리하면 $-4x>-12$
양변을 -4로 나누면 $x<3$

(4)



$5x$와 $-3x$를 각각 이항하면
$5x+3x\le-1-7$
양변을 정리하면 $8x\le-8$
양변을 8로 나누면 $x\le-1$

괄호가 있는 일차부등식의 풀이

괄호가 있는 일차부등식은 분배법칙을 이용하여 괄호를 먼저 풀어 정리한 후 부등식을 푼다.

함께 해 보기 2 일차부등식 $5(4-x) \le -3x+6$을 푸시오.

풀이 괄호를 풀면 $20-5x \le -3x+6$

20과 $-3x$를 각각 이항하면 $-5x+3x \le 6-20$

양변을 정리하면 $-2x \le -14$

양변을 -2로 나누면 $x \ge 7$

답 $x \ge 7$

개념 쏙

괄호가 있는 부등식은 분배법칙을 이용하여 먼저 괄호를 풀어 정리한 후 부등식을 푼다. 이때 괄호 앞의 수의 부호에 주의하여 괄호를 풀도록 한다.

5 다음 일차부등식을 푸시오.

(1) $3(x-1) < x+9$ $x<6$

(2) $2(x-3) \ge 6+4x$ $x \le -6$

(3) $3(1-2x) \le -4(x-7)$ $x \ge -\frac{25}{2}$

(4) $5(-x-2) > 2(x+9)$ $x<-4$

풀이 (1) $3x-3<x+9$, $3x-x<9+3$, $2x<12$, $x<6$

(2) $2x-6 \ge 6+4x$, $2x-4x \ge 6+6$, $-2x \ge 12$, $x \le -6$

(3) $3-6x \le -4x+28$, $-6x+4x \le 28-3$, $-2x \le 25$, $x \ge -\frac{25}{2}$

(4) $-5x-10>2x+18$, $-5x-2x>18+10$, $-7x>28$, $x<-4$

계수가 소수 또는 분수인 일차부등식의 풀이

계수가 소수이거나 분수인 일차부등식은 양변에 적당한 수를 곱하여 계수를 모두 정수로 고쳐서 풀면 편리하다.

함께 해 보기 3 다음 일차부등식을 푸시오.

(1) $0.3x-0.2 \le 1-0.1x$

(2) $\frac{2}{3}x-1 > \frac{3}{2}x+\frac{2}{3}$

풀이 (1) 양변에 10을 곱하면 $3x-2 \le 10-x$

-2와 $-x$를 각각 이항하면 $3x+x \le 10+2$

양변을 정리하면 $4x \le 12$

양변을 4로 나누면 $x \le 3$

(2) 양변에 6을 곱하면 $4x-6 > 9x+4$

-6과 $9x$를 각각 이항하면 $4x-9x > 4+6$

양변을 정리하면 $-5x > 10$

양변을 -5로 나누면 $x < -2$

답 (1) $x \le 3$ (2) $x < -2$

6 다음 일차부등식을 푸시오.

(1) $0.12x>0.7+0.05x$ $x>10$

(2) $\frac{x}{4}<\frac{x}{3}+\frac{1}{4}$ $x>-3$

풀이 (1) 양변에 100을 곱하면 $12x>70+5x$
$5x$를 이항하면 $12x-5x>70$
양변을 정리하면 $7x>70$
양변을 7로 나누면 $x>10$

(2) 양변에 12를 곱하면 $3x<4x+3$
$4x$를 이항하면 $3x-4x<3$
양변을 정리하면 $-x<3$
양변을 -1로 나누면 $x>-3$

일반적으로 일차부등식의 풀이 방법은 다음과 같다.

일차부등식의 풀이

1. 계수에 소수나 분수가 있으면 양변에 적당한 수를 곱하여 계수를 정수로 고친다.

2. 괄호가 있으면 괄호를 풀고 정리한다.

3. 일차항은 좌변으로, 상수항은 우변으로 각각 이항한다.

4. 양변을 정리하여 다음 중 어느 하나의 꼴로 바꾼다.

$$ax<b,\ ax>b,\ ax\le b,\ ax\ge b\ (\text{단, } a\ne 0)$$

5. 양변을 x의 계수 a로 나눈다. 이때 a가 음수이면 부등호의 방향이 바뀐다.

7 다음 일차부등식을 푸시오.

(1) $\frac{1}{2}(x-1)\ge 0.8(x+2)$ $x\le -7$

(2) $\frac{2-3x}{5}-1<-1.5(x+1)$ $x<-1$

풀이 (1) 양변에 10을 곱하면 $5(x-1)\ge 8(x+2)$
양변의 괄호를 풀면 $5x-5\ge 8x+16$
-5와 $8x$를 각각 이항하면 $5x-8x\ge 16+5$
양변을 정리하면 $-3x\ge 21$
양변을 -3으로 나누면 $x\le -7$

(2) 양변에 10을 곱하면 $2(2-3x)-10<-15(x+1)$
양변의 괄호를 풀면 $4-6x-10<-15x-15$
4와 -10과 $-15x$를 각각 이항하면 $-6x+15x<-15-4+10$
양변을 정리하면 $9x<-9$
양변을 9로 나누면 $x<-1$

8 다음은 세라가 일차부등식 $\frac{5}{6}x+\frac{3}{2}\le -\frac{1}{3}+\frac{4}{7}x$를 푼 것이다. 세라의 풀이와 다른 방법으로 일차부등식을 푸시오.

세라의 풀이

$$\frac{5}{6}x+\frac{3}{2}\le -\frac{1}{3}+\frac{4}{7}x$$
$$\frac{5}{6}x-\frac{4}{7}x\le -\frac{1}{3}-\frac{3}{2}$$
$$\frac{35}{42}x-\frac{24}{42}x\le -\frac{2}{6}-\frac{9}{6}$$
$$\frac{11}{42}x\le -\frac{11}{6}$$
$$11x\le -77$$
$$x\le -7$$

나의 풀이

풀이 |예시| 양변에 42를 곱하면
$35x+63\le -14+24x$
63과 $24x$를 각각 이항하면
$35x-24x\le -14-63$
양변을 정리하면 $11x\le -77$
양변을 11로 나누면 $x\le -7$

일차부등식을 활용하여 실생활 문제를 어떻게 해결할 수 있을까?

생각 펼치기

인성 교육

유리와 친구들은 불우 이웃을 돕기 위해 마을 벼룩시장에서 공예품을 판매하기로 했다. 공예품 1개의 판매 수익금은 3000원이고, 유리와 친구들이 그동안 모은 성금 20000원과 공예품 판매 수익금을 합쳐 기부하려고 한다. 90000원 이상 기부하려고 할 때, 공예품을 몇 개 이상 판매해야 하는지 구해 보자. 24개 이상

풀이 판매해야 하는 공예품의 개수를 x라고 하자. 유리와 친구들이 모은 성금은 20000원이고, 공예품 판매 수익금은 $3000x$원이다. 이때 목표 기부 금액이 90000원 이상이므로 일차부등식으로 나타내면 $20000+3000x\geq 90000$이다. 일차부등식을 풀면 $3000x\geq 90000-20000$, $3000x\geq 70000$, $x\geq\frac{70000}{3000}=\frac{70}{3}=23.333\cdots$이고, x는 자연수이므로 90000원 이상 기부하려면 공예품을 24개 이상 판매해야 한다.

일차부등식의 활용

생각 펼치기 의 문제를 다음 단계에 따라 풀 수 있다.

미지수 정하기

❶ 문제의 뜻을 파악하고, 구하고자 하는 것을 미지수 x로 놓는다.

판매해야 하는 공예품의 개수를 x라고 하자.

일차부등식 세우기

❷ 문제의 뜻에 맞게 일차부등식을 세운다.

유리와 친구들이 모은 성금은 20000원이고, 공예품 판매 수익금은 $3000x$원이다. 이때 목표 기부 금액이 90000원 이상이므로 일차부등식으로 나타내면

$$20000+3000x\geq 90000$$

이다.

일차부등식 풀기

Tip 일차부등식의 활용 문제에서 구하는 값이 정수 또는 자연수인 경우에는 부등식의 해를 구한 후 그 해 중에서 정수 또는 자연수 값만 생각하도록 한다.

❸ 일차부등식을 푼다.

$$3000x\geq 90000-20000,\ 3000x\geq 70000$$

$$x\geq\frac{70000}{3000}=\frac{70}{3}=23.333\cdots$$

그런데 x는 자연수이므로 90000원 이상 기부하려면 공예품을 24개 이상 판매해야 한다.

확인하기

❹ 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

공예품을 24개 판매했을 때, 기부 금액은

$$20000+24\times 3000=92000\,(\text{원})$$

이므로 90000원 이상이다. 공예품을 23개 판매했을 때, 기부 금액은

$$20000+23\times 3000=89000\,(\text{원})$$

이므로 90000원 미만이다. 따라서 구한 해는 문제의 뜻에 맞는다.

함께 해 보기 4 **선미는 등산을 하는데 올라갈 때는 시속 2 km의 일정한 속력으로, 같은 길을 내려올 때는 시속 3 km의 일정한 속력으로 걸어서 5시간 이내로 등산을 마치려고 한다. 이때 선미는 출발 지점으로부터 최대 몇 km 떨어진 지점까지 올라갔다가 내려올 수 있는지 구하시오.**

미지수 정하기

풀이 출발 지점으로부터 x km 떨어진 지점까지 간다고 하자.

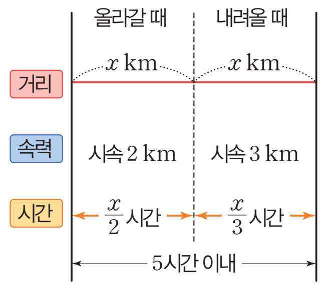
일차부등식 세우기

$(\text{시간})=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$이므로

올라갈 때 걸린 시간: $\dfrac{x}{2}$시간

내려올 때 걸린 시간: $\dfrac{x}{3}$시간

5시간 이내로 등산을 마치려면 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}\le 5$



일차부등식 풀기

일차부등식을 풀면

$3x+2x\le 30,\ 5x\le 30,\ x\le 6$

이므로 선미는 출발 지점으로부터 최대 6 km 떨어진 지점까지 올라갔다가 내려올 수 있다.

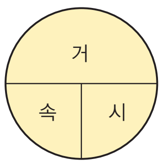
확인하기

올라갈 때 걸리는 시간은 최대 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{6}{2}=3$(시간), 내려올 때 걸리는 시간은 최대 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{6}{3}=2$(시간)이므로 5시간 이내로 등산을 마칠 수 있다.

따라서 구한 해는 문제의 뜻에 맞는다.

답 6 km

Tip



(거리)=(속력)×(시간)

$(\text{속력})=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{시간})}$

$(\text{시간})=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$

9 **한 번에 600 kg까지 운반할 수 있는 승강기가 있다. 몸무게가 75 kg인 사람이 이 승강기를 타고 무게가 30 kg인 상자 여러 개를 운반하려고 할 때, 한 번에 최대 몇 개의 상자를 운반할 수 있는지 구하려고 한다. 다음 물음에 답하시오.**

(1) 문제의 뜻에 맞게 일차부등식을 세우시오. $30x+75\le 600$

(2) (1)에서 세운 일차부등식을 풀어 한 번에 최대 몇 개의 상자를 운반할 수 있는지 구하시오. 17개

풀이 한 번에 운반할 수 있는 상자의 개수를 x라고 하자. 전체 무게의 합이 600 kg 이하이어야 하므로 $75+30x\le 600$, $x\le 17.5$이다. 이때 x는 자연수이므로 한 번에 운반할 수 있는 상자는 최대 17개이다.
상자 17개를 운반할 때, 전체 무게는 $75+30\times 17=585$(kg)이므로 600 kg 이하이고, 상자 18개를 운반할 때, 전체 무게는 $75+30\times 18=615$(kg)이므로 600 kg을 초과한다. 따라서 구한 해는 문제의 뜻에 맞는다.

생각 더 나아가기

문제 해결 · 의사소통

경제·금융 교육

볼펜 1자루의 가격이 집 앞 A 마트에서는 2000원, 이웃 동네 B 마트에서는 1500원이고, 집에서 B 마트에 다녀오는 데 필요한 왕복 교통비는 1800원이다. 볼펜을 몇 자루 이상 구매할 때, A 마트보다 B 마트에서 구매하는 것이 더 저렴한지 구해 보고, 친구에게 설명해 보자. 풀이 참조

풀이 구매하려는 볼펜을 x자루라고 하자. A 마트에서 구매할 때의 가격은 $2000x$원이고, B 마트에서 구매할 때의 가격은 $(1800+1500x)$원이다. 이때 B 마트에서 구매하는 것이 더 저렴하려면 $2000x>1800+1500x$, $x>3.6$이어야 한다.
따라서 4자루 이상 구매할 경우에 B 마트에서 구매하는 것이 더 저렴하다. 이때 볼펜을 3자루 구매할 경우에 A 마트와 B 마트에서의 구매 가격이 각각 6000원, 6300원이므로 A 마트에서 구매하는 것이 더 저렴하고, 볼펜을 4자루 구매할 경우에 A 마트와 B 마트에서의 구매 가격이 각각 8000원, 7800원이므로 B 마트에서 구매하는 것이 더 저렴하다. 따라서 구한 해는 문제의 뜻에 맞는다.

스스로 점검하기

1

다음 □ 안에 알맞은 말을 써넣으시오.

> 부등식에서 우변에 있는 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리했을 때,
>
> (일차식)<0, (일차식)>0,
>
> (일차식)≤ 0, (일차식)≥ 0
>
> 중 어느 하나의 꼴로 나타낼 수 있는 부등식을 $\boxed{\text{일차부등식}}$(이)라고 한다.

2

다음 보기 중에서 일차부등식을 모두 고르시오. ㄱ, ㄷ

보기

ㄱ. $-x<20$

ㄴ. $2x+1=10$

ㄷ. $5x-3\ge 11$

ㄹ. $4(2x+5)\le -2(3-4x)$

풀이 주어진 부등식의 우변의 항을 모두 좌변으로 이항하여 정리하면

ㄱ. $-x-20<0$

ㄴ. 일차방정식이다.

ㄷ. $5x-14\ge 0$

ㄹ. $26\le 0$

이다. 따라서 일차부등식은 ㄱ, ㄷ이다.

3

다음 일차부등식을 푸시오.

(1) $-(x+2)<3x+7$ $x>-\frac{9}{4}$

(2) $\frac{5x-1}{3}-2\le 0.5x$ $x\le 2$

풀이 (1) 괄호를 풀면

$-x-2<3x+7$

일차부등식을 풀면

$-4x<9$, $x>-\frac{9}{4}$

(2) 양변에 30을 곱하면

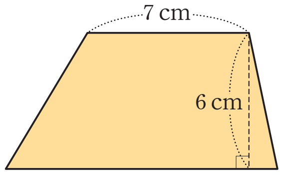
$10(5x-1)-60\le 15x$

일차부등식을 풀면

$50x-70\le 15x$, $35x\le 70$, $x\le 2$

4

다음 그림과 같이 윗변의 길이가 7 cm이고, 높이가 6 cm인 사다리꼴의 넓이가 57 cm^2 이상일 때, 이 사다리꼴의 아랫변의 길이의 범위를 구하시오. 12 cm 이상



풀이 사다리꼴의 아랫변의 길이를 x cm라고 하자.

사다리꼴의 넓이가 57 cm^2 이상이므로

$\frac{6(7+x)}{2}\ge 57$, $x\ge 12$이다.

따라서 아랫변의 길이는 12 cm 이상이어야 한다.

5

x에 대한 일차부등식 $-2x>3(x-1)+a$의 해가 $x<1$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. -2

풀이 일차부등식을 풀면 $-2x>3x-3+a$, $-5x>-3+a$, $x<\frac{-3+a}{-5}$이고,

주어진 일차부등식의 해가 $x<1$이므로 $\frac{-3+a}{-5}=1$, $a=-2$이다.

따라서 $a=-2$이다.

6 실생활

문제 해결

예원이는 올림픽 경기 중계방송이 시작되기 전까지 35분의 여유가 있어서 이 시간을 이용하여 편의점을 다녀오려고 한다. 걷는 속력이 분속 50 m로 일정하고, 편의점에서 물건을 사는 데 걸리는 시간이 5분일 때, 올림픽 경기 중계방송을 처음부터 시청하기 위해서는 집에서부터 최대 몇 m 이내에 있는 편의점을 다녀올 수 있는지 구하시오. 750 m

풀이 집에서부터 x m 떨어진 편의점까지 갔다 올 수 있다고 하자. 편의점에 갈 때 걸리는 시간과 올 때 걸리는 시간은 각각 $\frac{x}{50}$분이고, 물건을 사는 데 걸리는 시간이 5분이므로

$\frac{x}{50}+5+\frac{x}{50}\le 35$이다.

일차부등식을 풀면 $\frac{x}{25}+5\le 35$, $\frac{x}{25}\le 30$,

$x\le 750$이다.

따라서 집에서부터 최대 750 m 이내에 있는 편의점을 다녀올 수 있다.

https://code.jihak.co.kr/qr/VtlEKLNYMiHBqQYp

자기 평가	
일차부등식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.	
일차부등식을 활용하여 실생활 문제를 도전적인 태도로 해결할 수 있다.	

수학으로+ 탐험하기

재활용품 무인 회수기에서 찾은 부등식

재활용품 무인 회수기는 새로운 자원으로 활용할 수 있는 투명 페트병, 음료 캔과 같은 재활용품을 투입하면 투입한 재활용품의 개수에 따라 현금으로 돌려주는 장치이다. 재활용품 무인 회수기는 환경 보호의 실천과 함께 경제적인 이익도 얻을 수 있어 재활용품 무인 회수기를 통해 분리수거에 참여하는 사람들이 전국적으로 늘어나고 있다고 한다.

● 재활용품 무인 회수기의 이용 규칙을 살펴보고, 다음 물음에 답해 보자.

이용 규칙

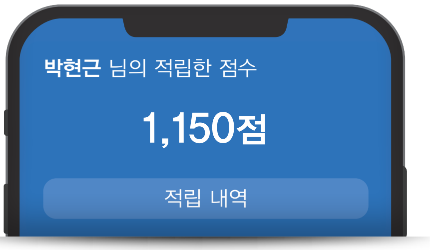
투입 가능한 자원: 투명 페트병, 음료 캔
투입 가능 개수: 1일 최대 30개
적립되는 점수: 투명 페트병 1개당 10점
음료 캔 1개당 10점

2000점부터 1점당 1원으로 현금 전환 가능

1 5월 1일부터 하루에 30개씩 매일 재활용품을 투입한다고 할 때, 현금으로 전환이 가능한 것은 언제부터인지 부등식을 이용하여 구해 보자. 5월 7일

풀이 x일째 되는 날 현금으로 전환이 가능하다고 하면 $300x \geq 2000$, $x \geq 6.66\cdots$이다.
따라서 7일째인 5월 7일부터 현금으로 전환이 가능하다.

2 재활용품 무인 회수기를 사용한 내역은 휴대 전화 애플리케이션을 통해 확인할 수 있다. 현근이가 4월 30일까지 적립한 점수는 1150점이다. 5월 1일부터 매일 5개씩 재활용품을 투입한다고 할 때, 현금으로 전환이 가능한 것은 언제부터인지 부등식을 이용하여 구해 보자. 5월 17일



풀이 x일째 되는 날 현금으로 전환이 가능하다고 하면 $50x+1150 \geq 2000$, $50x \geq 850$, $x \geq 17$이다.
따라서 17일째인 5월 17일부터 현금으로 전환이 가능하다.

3 하나와 지호가 4월 30일까지 재활용품 무인 회수기를 사용하여 적립한 점수는 다음과 같다. 5월 1일부터 하나는 재활용품을 매일 15개씩 투입하고, 지호는 매일 20개씩 투입한다고 할 때, 다음 물음에 답해 보자.

(1) x일째 되는 날 하나와 지호가 적립한 점수를 x에 대한 식으로 각각 나타내 보자. **하나: $150x+780$ 지호: $200x+150$**

풀이 x일째 되는 날 하나의 점수: $150x+780$
x일째 되는 날 지호의 점수: $200x+150$

(2) 지호의 점수가 하나의 점수보다 높아지는 것은 언제부터인지 부등식을 이용하여 구해 보자. **5월 13일**

풀이 지호의 점수가 하나의 점수보다 높으려면 $200x+150>150x+780$이어야 하므로 $200x+150>150x+780$, $50x>630$, $x>12.6$이다. 따라서 13일째인 5월 13일부터 지호의 점수가 하나의 점수보다 높아진다.

4 모둠별로 재활용품 무인 회수기의 이용 규칙을 바꿔 보고, 위와 같이 여러 가지 질문을 만들어 보자. **풀이 참조**

풀이 |예시| 재활용품 1개당 적립되는 점수가 20점이라고 할 때, 지호의 점수가 하나의 점수보다 높아지는 것은 언제부터인지 구해 보자.

5 재활용품 무인 회수기의 이용 규칙처럼 부등식이 이용되는 사례를 찾아서 발표해 보자. **풀이 참조**

풀이 |예시| 기본요금과 주차 시간에 따라 요금이 결정되는 주차장의 요금 계산에서 부등식이 이용된다.

| 상호 평가표 |

평가 내용		자기 평가	친구 평가
내용	필요한 자료를 활용하여 문제 해결에 적절한 부등식을 세울 수 있다.		
	부등식을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.		
태도	구한 해가 문제 상황에 적합한지 확인하고 타당한 근거에 따라 자신의 의견을 논리적으로 설명했다.		

스스로 마무리하기

생각 완성하기

● 각 단원의 내용을 정리하여 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

01 부등식과 그 해

• 부등식의 성질

$a<b$이면 $a+2<b+2$

$a-2<b-2$

$2a<2b$

$-2a>-2b$

02 일차부등식의 풀이

• 일차부등식의 풀이

$2x+5\le 4x-1$

$2x-4x\le -1-5$

$-2x\le -6$

$x\ge 3$

1 다음 문장을 부등식으로 나타내시오.

(1) a의 2배에 3을 더하면 7 이하이다. $2a+3\le 7$

(2) 가로의 길이가 5이고, 세로의 길이가 x인 직사각형의 둘레의 길이는 20보다 크다. $2(5+x)>20$

2 $a>b$일 때, 다음 부등식 중에서 옳은 것은? ⑤

① $a-2<b-2$

② $-\dfrac{a}{3}>-\dfrac{b}{3}$

③ $1-4a>1-4b$

④ $-a-5>-b-5$

⑤ $\dfrac{-a+3}{2}<\dfrac{-b+3}{2}$

풀이 $a>b$의 양변에

① 2를 빼면 $a-2>b-2$이다.

② $-\frac{1}{3}$을 곱하면 $-\frac{a}{3}<-\frac{b}{3}$이다.

③ -4를 곱하면 $-4a<-4b$, 1을 더하면 $1-4a<1-4b$이다.

④ -1을 곱하면 $-a<-b$, 5를 빼면 $-a-5<-b-5$이다.

⑤ -1을 곱하면 $-a<-b$, 3을 더하면 $-a+3<-b+3$,

2로 나누면 $\frac{-a+3}{2}<\frac{-b+3}{2}$이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

3 다음 보기의 부등식 중에서 $x=-2$를 해로 갖는 것을 모두 고르시오. ㄴ, ㄹ

보기

ㄱ. $x-5\ge -2$ ㄴ. $3x+2<5$

ㄷ. $2x+9\ge 7$ ㄹ. $4x-1<2x+5$

풀이 각 부등식에 $x=-2$를 대입하면

ㄱ. $-2-5\ge -2$, $-7<-2$이므로 $x=-2$는 해가 아니다.

ㄴ. $3\times(-2)+2<5$, $-4<5$이므로 $x=-2$를 해로 갖는다.

ㄷ. $2\times(-2)+9\ge 7$, $5<7$이므로 $x=-2$는 해가 아니다.

ㄹ. $4\times(-2)-1<2\times(-2)+5$, $-9<1$이므로 $x=-2$를 해로 갖는다.

따라서 $x=-2$를 해로 갖는 것은 ㄴ, ㄹ이다.

4 다음 중에서 일차부등식이 아닌 것은? ④

① $-3x\le 2x$

② $2x+1<11$

③ $3x+1>6x-2$

④ $-x+7\le 4-x$

⑤ $9-2x\ge -1-5(x+1)$

풀이 주어진 부등식에서 우변의 항을 모두 좌변으로 이항하여 정리하면

① $-5x\le 0$

② $2x+10<0$

③ $-3x+3>0$

④ $3\le 0$이므로 일차부등식이 아니다.

⑤ $x+5\ge 0$

따라서 일차부등식이 아닌 것은 ④이다.

5 x가 자연수일 때, 부등식 $3x<-x+7$을 만족시키는 x의 값을 구하시오. 1

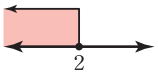
풀이 부등식에서 $-x$를 좌변으로 이항하면
$3x+x<7$, $4x<7$, $x<\frac{7}{4}=1.75$이다.
이때 x가 자연수이므로 $x=1$이다.

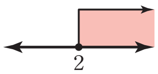
6 다음 일차부등식 중에서 그 해가 나머지 넷과 다른 것은? ⑤

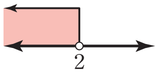
① $-2x>6$　② $-2x>x+9$
③ $3x+4<-5$　④ $x-5>3x+1$
⑤ $5x+5>2x-4$

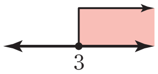
풀이 ①, ②, ③, ④는 $x<-3$이고, ⑤는 $x>-3$이므로 해가 나머지 넷과 다른 것은 ⑤이다.

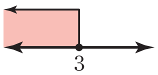
7 다음 중에서 일차부등식 $-4x-1\geq x-11$의 해를 수직선 위에 바르게 나타낸 것은? ①

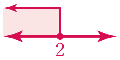
①


②


③


④


⑤


풀이 -1, x를 각각 이항하여 정리하면 $-5x\geq-10$, $x\leq2$이다.
이 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.


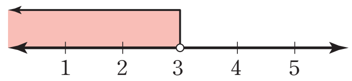
따라서 바르게 나타낸 것은 ①이다.

8 $a<0$일 때, x에 대한 일차부등식 $1-ax\geq0$의 해는? ①

① $x\geq\frac{1}{a}$　② $x\leq\frac{1}{a}$　③ $x\geq1-a$
④ $x\geq-\frac{1}{a}$　⑤ $x\leq-\frac{1}{a}$

풀이 주어진 부등식에서 1을 이항하여 정리하면
$-ax\geq-1$, $ax\leq1$에서 $a<0$이므로 $x\geq\frac{1}{a}$이다.
따라서 주어진 일차부등식의 해는 ①이다.

9 일차부등식 $0.2(x+8)>a+0.4x$의 해를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다. 이때 상수 a의 값을 구하시오. 1

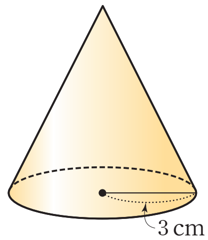


풀이 양변에 10을 곱하면 $2(x+8)>10a+4x$이고, 이를 정리하면
$2x+16>10a+4x$, $x<-5a+8$이다.
이때 주어진 일차부등식의 해가 $x<3$이므로
$-5a+8=3$, $a=1$이다.

10 일차부등식 $\frac{3x+6}{2}-\frac{2x-5}{3}<8$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. 6

풀이 양변에 6을 곱하면 $3(3x+6)-2(2x-5)<48$이고, 이를 정리하면 $5x<20$, $x<4$이다. 따라서 모든 자연수 x의 값의 합은 $1+2+3=6$이다.

11 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 3 cm인 원을 밑면으로 하는 원뿔의 부피가 15π cm^3 이상일 때, 이 원뿔의 높이의 범위를 구하시오. 5 cm 이상



풀이 원뿔의 높이를 x cm라고 하자.
원뿔의 부피가 15π cm^3 이상이므로
$\pi\times3^2\times x\times\frac{1}{3}\geq15\pi$, $x\geq5$이다.
따라서 원뿔의 높이는 5 cm 이상이다.

12 설아는 건강을 위해 하루 당류 섭취량을 조절하려고 한다. 오전에 14 g의 당류가 들어 있는 요구르트 1개를 섭취하고, 오후에 8 g의 당류가 들어 있는 초콜릿을 여러 개 먹으려고 할 때, 하루 당류 섭취량을 50 g 이하로 하려면 최대 몇 개의 초콜릿을 먹을 수 있는지 구하시오. 4개

풀이 설아가 먹는 초콜릿의 개수를 x라고 하자.
하루 당류 섭취량이 50 g 이하이어야 하므로
$14+8x\leq50$, $8x\leq36$, $x\leq4.5$이다.
따라서 하루 당류 섭취량을 50 g 이하로 하려면 최대 4개의 초콜릿을 먹을 수 있다.

스스로 마무리하기

서술형 문제

13 다음 두 일차부등식의 해가 서로 같을 때, 상수 a의 값을 구하려고 한다. 풀이 과정과 답을 쓰시오. -2

$$\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}a>\frac{1}{6},\ -3x+4<-5$$

풀이 일차부등식 $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}a>\frac{1}{6}$에서 $3x+4a>1$이고, $3x>1-4a$, $x>\frac{1-4a}{3}$이다. 일차부등식 $-3x+4<-5$에서 $-3x<-9$, $x>3$이다. 이때 두 일차부등식의 해가 같으므로 $\frac{1-4a}{3}=3$, $1-4a=9$, $-4a=8$, $a=-2$이다.

채점 기준	배점 비율
(i) 일차부등식 $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}a>\frac{1}{6}$을 바르게 푼 경우	40 %
(ii) 일차부등식 $-3x+4<-5$를 바르게 푼 경우	40 %
(iii) a의 값을 구한 경우	20 %

14 어느 중학교의 2학년 1반 학생은 20명이고, 2반 학생은 25명이다. 이번 2학년 수학 시험에서 1반 점수의 평균은 80점이고, 1반과 2반 전체 점수의 평균은 85점 이상이었다. 이때 2반 점수의 평균은 최소 몇 점 이상이었는지 구하려고 한다. 풀이 과정과 답을 쓰시오. 89점

풀이 2반 점수의 평균을 x점이라고 하면 1반과 2반의 전체 학생 수는 $20+25=45$이므로 $\frac{80\times20+x\times25}{45}\geq85$, $1600+25x\geq3825$, $25x\geq2225$, $x\geq89$이다. 따라서 2반 점수의 평균은 최소 89점 이상이다.
2반 점수의 평균이 89점 이상일 때, 1반과 2반의 전체 점수의 평균이 $\frac{80\times20+89\times25}{45}=85$(점) 이상이므로 구한 해는 문제의 뜻에 맞는다.

채점 기준	배점 비율
(i) 일차부등식을 바르게 세운 경우	50 %
(ii) 일차부등식을 바르게 푼 경우	30 %
(iii) 2반의 최소 평균 점수를 구한 경우	20 %

사고력 문제

15 부등식 $2ax+b<3b$의 해가 $x>-2$일 때, 부등식 $(a+b)x+(5a-b)>0$의 해를 구하시오. $x>7$
(단, a, b는 상수)

풀이 부등식 $2ax+b<3b$에서 $2ax<2b$이다. 이 부등식의 해가 $x>-2$이므로 $2a<0$, 즉 $a<0$이고, $x>\frac{b}{a}$이다.
이때 $\frac{b}{a}=-2$이므로 $b=-2a$이다.
부등식 $(a+b)x+(5a-b)>0$에서 $b=-2a$를 대입하면 $-ax+7a>0$, $-ax>-7a$, $x>7$이다.

16 어느 박물관의 입장료는 한 사람당 2000원이고, 25명 이상 단체 입장을 하면 입장료의 15 %를 할인해 준다. 이때 25명 미만의 단체가 몇 명 이상부터 25명 단체의 표를 사는 것이 더 저렴한지 구하시오. (단, 25명 미만이어도 25명의 단체 입장권을 살 수 있다.) 22명

풀이 박물관에 입장하는 사람 수를 x라고 하면 x명의 개인 입장료의 합은 $2000x$원이고, 25명의 단체 입장료는 $25\times2000\times(1-0.15)=42500$(원)이다.
25명의 단체 입장료가 개인 입장료의 합보다 더 저렴해야 하므로 $42500<2000x$, $x>\frac{42500}{2000}=21.25$이다.
따라서 22명 이상부터 25명 단체의 표를 사는 것이 더 저렴하다.

https://code.jihak.co.kr/qr/doxLcvE87rQqcdpZ

마무리 평가 자신의 학습 태도를 스스로 점검해 보자.

이 단원을 공부하면서 알게 된 것을 써 보자.	이 단원을 공부하면서 어려웠던 점을 쓰고 복습 계획을 세워 보자.

일차부등식을 이용하여 체계적으로 사고하고 합리적인 의사 결정을 하기 위해 노력했다.	
자신의 생각을 수학적으로 표현하고, 다른 사람의 생각을 이해하려고 노력했다.	
이 단원의 학습에 적극적이고 자신감 있게 참여했다.	
잘 이해하지 못한 내용은 친구나 선생님의 도움을 받아 확실하게 알도록 노력했다.	

| 정답과 해설 324쪽 |

1 $\frac{a+1}{2}$의 값을 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하면 5가 된다고 할 때, a의 값의 범위를 구하시오.

2 $x=2$가 일차부등식 $\frac{2x-a}{5}-\frac{x}{2}<1$의 해가 아닐 때, 상수 a의 값의 범위를 구하시오.

3 다음은 석현이가 자신의 사물함 번호에 대하여 말한 것이다. 사물함 번호가 1번부터 38번까지 있다고 할 때, 석현이의 사물함 번호를 구하시오.

- 내 사물함 번호를 5로 나눈 후 10을 더한 수는 내 사물함 번호의 반보다 작아.
- 내 사물함 번호는 5의 배수야.

4 한 개의 무게가 25 kg인 물건과 50 kg인 물건을 트럭에 실으려고 한다. 두 종류의 물건을 합하여 20개를 실어야 하고, 트럭에 실을 수 있는 물건의 최대 무게는 800 kg이다. 무게가 25 kg인 물건을 최대한 적게 실으려고 할 때, 무게가 50 kg인 물건은 몇 개를 실어야 하는지 구하시오.

Ⅳ 연립일차방정식

단원 이야기

두 가지 이상의 조건을 동시에 만족시키는 값을 찾아야 하는 놀이공원의 입장료나 여러 물건의 가격 계산과 같은 경우, 방정식을 이용하면 이를 효과적으로 해결할 수 있다.

이 단원에서는 연립방정식의 뜻을 알고, 연립방정식의 풀이 방법과 이를 활용하여 문제를 해결하는 방법을 배운다.

| 배운 내용 |

중1
- 문자의 사용과 식의 값
- 일차방정식

중2
- 식의 계산

| 이어질 내용 |

중3
- 이차방정식

이것만은 알고 가기

중 1 식의 값 잘함 보통 모름

1 **$x=-1$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.**

(1) $x+3$ **2**

(2) $-2x+5$ **7**

풀이 주어진 식에서 $x=-1$을 대입하면
(1) $(-1)+3=2$
(2) $-2\times(-1)+5=7$

• 문자에 수를 대입하여 계산한 결과를 그 식의 값이라고 한다.

중 1 방정식과 그 해 잘함 보통 모름

2 **다음 문장을 등식으로 나타내시오.**

(1) x의 2배에서 6을 뺀 값이 15이다. **$2x-6=15$**

(2) 300원짜리 연필 x자루와 400원짜리 지우개 1개의 값의 합은 1900원이다. **$300x+400=1900$**

• 등호 =를 사용하여 두 수 또는 두 식이 같음을 나타낸 식을 등식이라고 한다.

중 1 일차방정식의 풀이 잘함 보통 모름

3 **다음 일차방정식을 푸시오.**

(1) $3x-5=1$ **$x=2$**

(2) $7x+2=5x-4$ **$x=-3$**

풀이 (1) $3x=6$, $x=2$
(2) $7x-5x=-4-2$, $2x=-6$, $x=-3$

• 일차방정식은 이항과 등식의 성질을 이용하여 푼다.

중 2 다항식의 계산 잘함 보통 모름

4 **다음을 계산하시오.**

(1) $(3a+2b)+(2a-3b)$ **$5a-b$**

(2) $(5a+2b-3)-(4a+3b+4)$ **$a-b-7$**

풀이 (1) $(3a+2b)+(2a-3b)=3a+2a+2b-3b=5a-b$
(2) $(5a+2b-3)-(4a+3b+4)=5a-4a+2b-3b-3-4=a-b-7$

• 문자가 2개 이상인 다항식의 덧셈과 뺄셈은 먼저 괄호를 풀고 동류항끼리 모아서 계산한다.

01 연립일차방정식

이 단원에서 배우는 용어와 기호

연립방정식

[**학습 목표**] 미지수가 2개인 연립일차방정식과 그 해의 뜻을 안다.

미지수가 2개인 일차방정식은 무엇일까?

생각 펼치기

안전·건강 교육

채원이네 반 학생 20명은 재난·안전사고에 대처하는 방법을 배우기 위해 안전 체험관에 방문했다. 안전 체험관에서 3명 또는 4명이 한 모둠을 이루어 재난 체험에 참여하려고 한다. 3명인 모둠을 x개, 4명인 모둠을 y개라고 할 때, x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내 보자. $3x+4y=20$

풀이 3명인 모둠이 x개, 4명인 모둠이 y개이고, 학생은 모두 20명이므로 x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내면 $3x+4y=20$이다.

미지수가 2개인 일차방정식

생각 펼치기에서 3명인 모둠이 x개, 4명인 모둠이 y개이고, 학생은 모두 20명이므로 x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내면

$$3x+4y=20$$

이다. 이 식은 x, y의 값에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하므로 x, y에 대한 방정식이다. 또, 이 방정식은 미지수가 x, y의 2개이고, 그 차수가 모두 1이다.

이와 같이 미지수가 2개이고 차수가 1인 방정식을 미지수가 2개인 일차방정식 또는 간단히 일차방정식이라고 한다.

일반적으로 미지수가 x, y의 2개인 일차방정식은

$$ax+by+c=0\text{(단, } a,\ b,\ c\text{는 상수, } a\neq0,\ b\neq0)$$

과 같이 나타낼 수 있다.

개념 쏙

미지수가 2개인 일차방정식: $ax+by+c=0$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$, $b\neq0$)

변하지 않는 일정한 값을 가진 수를 상수라고 한다.

1 다음 중에서 미지수가 2개인 일차방정식을 모두 찾으시오. (1), (2)

(1) $x-5=3+y$ (2) $-x+2y-1=0$

(3) $3x-6=0$ (4) $2x-y=2(x+1)$

풀이 우변의 항을 모두 좌변으로 이항하여 정리하면

(1) $x-y-8=0$ (2) $-x+2y-1=0$

(3) $3x-6=0$ (4) $-y-2=0$

이다. 따라서 미지수가 2개인 일차방정식은 (1), (2)이다.

2 **다음 문장을 미지수가 2개인 일차방정식으로 나타내시오.**

(1) x의 2배는 y의 5배보다 3만큼 작다. $2x=5y-3$

(2) 두발자전거 x대와 세발자전거 y대의 전체 바퀴는 모두 63개이다. $2x+3y=63$

미지수가 2개인 일차방정식의 해

x, y가 자연수일 때, 미지수가 2개인 일차방정식 $2x+y=7$을 참이 되게 하는 x, y의 값은 다음과 같이 구할 수 있다.

일차방정식 $2x+y=7$의 x에 자연수 1, 2, 3, … 을 차례대로 대입하여 y의 값을 구하면 다음 표와 같다.

x	1	2	3	4	$\cdots$
y	5	3	1	-1	$\cdots$

?! 수학 호기심

x, y의 값이 수 전체일 때, 일차방정식 $2x+y=7$의 해는 모두 몇 개일까? 무수히 많다.

이때 y의 값도 자연수이므로 일차방정식 $2x+y=7$을 참이 되게 하는 x, y의 값을 구하면

$$x=1,\ y=5 \text{ 또는 } x=2,\ y=3 \text{ 또는 } x=3,\ y=1$$

이고, 이것을 각각 순서쌍 (x, y)로 나타내면 $(1, 5)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$이다.

개념 쏙

미지수가 2개인 일차방정식의 해: 미지수가 2개인 일차방정식을 만족시키는 x, y의 값 또는 그 순서쌍 (x, y)

이와 같이 미지수가 2개인 일차방정식을 참이 되게 하는 x, y의 값 또는 순서쌍 (x, y)를 그 일차방정식의 해라 하고, 일차방정식의 해를 모두 구하는 것을 일차방정식을 푼다고 한다.

3 **x, y가 자연수일 때, 아래 표를 이용하여 다음 일차방정식을 푸시오.**

(1) $x+y=5$ $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$

x	1	2	3	4
y	4	3	2	1

(2) $3x+y=13$ $(1, 10)$, $(2, 7)$, $(3, 4)$, $(4, 1)$

x	1	2	3	4
y	10	7	4	1

4 다음 중에서 $x=2$, $y=1$을 해로 갖는 일차방정식을 모두 찾으시오. (1), (3), (4)

(1) $2x-y=3$ (2) $4x+y=10$

(3) $x-y-1=0$ (4) $-3x+5y+1=0$

풀이 좌변에 $x=2$, $y=1$을 각각 대입하면

(1) $2\times2-1=3$ (2) $4\times2+1\neq10$

(3) $2-1-1=0$ (4) $-3\times2+5\times1+1=0$

이다. 따라서 $x=2$, $y=1$을 해로 갖는 일차방정식은 (1), (3), (4)이다.

미지수가 2개인 연립일차방정식은 무엇일까?

생각 펼치기

카약을 타러 간 현근이네 동아리 학생 12명은 1명씩 또는 2명씩 탑승하여 총 7척의 카약에 탔다. 1명씩 탄 카약을 x척, 2명씩 탄 카약을 y척이라고 할 때, 다음 물음에 답해 보자.

(단, x, y는 자연수)

1. 전체 카약의 수를 x와 y에 대한 식으로 나타내 보자. $x+y=7$

2. 전체 학생 수를 x와 y에 대한 식으로 나타내 보자. $x+2y=12$

풀이 1. 1명씩 탄 카약이 x척, 2명씩 탄 카약이 y척일 때, 카약이 모두 7척이므로 전체 카약의 수를 x와 y에 대한 식으로 나타내면 $x+y=7$이다.

2. 1명씩 탄 카약이 x척, 2명씩 탄 카약이 y척이고, 학생은 모두 12명이므로 전체 학생 수를 x와 y에 대한 식으로 나타내면 $x+2y=12$이다.

미지수가 2개인 연립일차방정식

생각 펼치기에서 1명씩 탄 카약을 x척, 2명씩 탄 카약을 y척이라고 할 때, 카약이 모두 7척이므로

$$x+y=7$$

이다. 또, 학생은 모두 12명이므로

$$x+2y=12$$

이다. 이때 x, y의 값은 두 일차방정식을 동시에 참이 되게 하는 자연수이어야 한다.

이처럼 두 일차방정식을 동시에 참이 되게 하는 x, y의 값을 구할 때, 이 두 일차방정식을 한 쌍으로 묶어서

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x+2y=12 \end{cases}$$

와 같이 나타낸다.

이와 같이 미지수가 2개인 두 일차방정식을 한 쌍으로 묶어서 나타낸 것을 미지수가 2개인 연립일차방정식 또는 간단히 **연립방정식**이라고 한다.

개념 쏙

연립방정식: 미지수가 2개인 두 일차방정식을 한 쌍으로 묶어 놓은 것

미지수가 2개인 연립일차방정식의 해

디오판토스(Diophantos, 200?~284?)는 고대 그리스의 수학자로, 연립방정식의 해를 구하는 방법을 연구했다.
(출처: 계영희 외 8인, 『행복한 교과서, 수학자를 만나다』)

개념 쏙

연립일차방정식의 해는 두 일차방정식을 동시에 만족시키는 공통 해이다.

x, y가 자연수일 때, 연립방정식 $\begin{cases} x+y=7 \\ x+2y=12 \end{cases}$ 의 두 일차방정식을 동시에 참이 되게 하는 x, y의 값은 다음과 같이 구할 수 있다.

일차방정식의 $x+y=7$을 참이 되게 하는 자연수 x, y의 값은 다음 표와 같다.

x	1	2	3	4	5	6
y	6	5	4	3	2	1

또, 일차방정식 $x+2y=12$를 참이 되게 하는 자연수 x, y의 값은 다음 표와 같다.

x	10	8	6	4	2
y	1	2	3	4	5

위의 표에서 두 일차방정식을 동시에 참이 되게 하는 x, y의 값은 $x=2$, $y=5$이고, 이것을 순서쌍 (x, y)로 나타내면 $(2, 5)$이다.

이와 같이 연립방정식에서 두 일차방정식을 동시에 참이 되게 하는 x, y의 값 또는 순서쌍 (x, y)를 그 연립방정식의 해라 하고, 연립방정식의 해를 구하는 것을 연립방정식을 푼다고 한다.

5 **다음 중에서 해가 $x=2$, $y=-1$인 연립방정식을 모두 찾으시오.** (1), (3)

(1) $\begin{cases} x-y=3 \\ 3x+y=5 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y=1 \\ -2x+y=10 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ x+6y=-7 \end{cases}$

풀이 $x=2$, $y=-1$을 연립방정식의 두 일차방정식에 각각 대입했을 때, 등식이 모두 참이 되게 하는 것을 찾으면

(1) $\begin{cases} 2-(-1)=3 \\ 3\times2+(-1)=5 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 2\times2-3\times(-1)=7 \\ -2+3\times(-1)=-5 \end{cases}$

이다. 따라서 해가 $x=2$, $y=-1$인 연립방정식은 (1), (3)이다.

함께 해 보기 1

x, y가 자연수일 때, 다음 연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} x+y=4 & \cdots\cdots ① \\ x+2y=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

풀이 x, y가 자연수이므로 두 일차방정식 ①, ②의 해를 각각 표로 나타내면 다음과 같다.

①

x	1	2	3
y	3	2	1

②

x	1	3
y	2	1

따라서 연립방정식의 해는 두 일차방정식 ①, ②를 동시에 참이 되게 하는 x, y의 값인 $x=3$, $y=1$이다.

답 $x=3$, $y=1$

6 x, y가 자연수일 때, 아래 표를 이용하여 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+y=5 & \cdots\cdots ① \\ 2x+y=9 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ $x=4$, $y=1$

①

x	1	2	3	4	
y	4	3	2	1	

②

x	1	2	3	4	
y	7	5	3	1	

(2) $\begin{cases} x+y=6 & \cdots\cdots ① \\ x+4y=21 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ $x=1$, $y=5$

①

x	1	2	3	4	5
y	5	4	3	2	1

②

x	1	5	9	13	17
y	5	4	3	2	1

생각 더 나아가기 문제 해결 · 의사소통

다음은 x, y가 자연수일 때, 주어진 연립방정식 $\begin{cases} 3x+y=16 \\ x+y=12 \end{cases}$를 푸는 방법에 대하여 누리와 다온이가 대화하는 모습이다. 대화를 읽고, 다온이가 구하려는 방법에 대해 이야기해 보자. 풀이 참조

풀이 |예시| 구하고자 하는 연립방정식의 해는 ①과 ②를 동시에 참이 되게 하는 x, y의 값이야. 그러므로 ①의 해인 $(1, 13)$, $(2, 10)$, $(3, 7)$, $(4, 4)$, $(5, 1)$ 중에서 ②를 참이 되도록 하는 해를 구하면 돼. 이때 주어진 연립방정식의 해는 $x=2$, $y=10$이야.

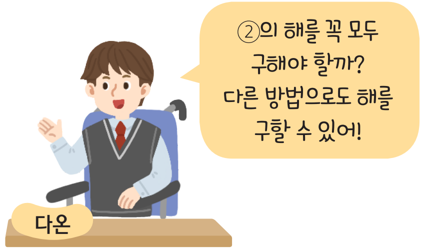
$\begin{cases} 3x+y=16 & \cdots\cdots ① \\ x+y=12 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①

x	1	2	3	4	5
y	13	10	7	4	1

②

x	1	2	3	4	5	$\cdots$	10	11
y								



스스로 점검하기

1

다음 ☐ 안에 알맞은 말을 써넣으시오.

(1) 미지수가 2개이고 차수가 1인 방정식을 미지수가 2개인 [일차방정식](이)라고 한다.

(2) 미지수가 2개인 두 일차방정식을 한 쌍으로 묶어서 나타낸 것을 미지수가 2개인 연립일차방정식 또는 간단히 [연립방정식](이)라고 한다.

2

다음 보기 중에서 미지수가 2개인 일차방정식을 모두 고르시오. ㄱ, ㄷ

보기

ㄱ. $x+y=-1$

ㄴ. $x+2y+3=2(x+y)$

ㄷ. $y=x-2$

ㄹ. $3x+2y-4=4-x+2y$

풀이 우변의 항을 모두 좌변으로 이항하여 정리하면

ㄱ. $x+y+1=0$ ㄴ. $-x+3=0$

ㄷ. $-x+y+2=0$ ㄹ. $4x-8=0$

이다. 따라서 미지수가 2개인 일차방정식은 ㄱ, ㄷ이다.

3

x, y가 자연수일 때, 다음 일차방정식을 푸시오.

(1) $2x+y=7$ $(1, 5), (2, 3), (3, 1)$

(2) $3x+4y=16$ $(4, 1)$

풀이 (1) x, y가 자연수이므로 x에 1, 2, 3, 4, … 를 차례대로 대입하면 다음 표와 같다.

x	1	2	3	4	…
y	5	3	1	-1	…

따라서 구하는 해는 $(1, 5)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$이다.

(2) x, y가 자연수일 때, 일차방정식 $3x+4y=16$을 만족시키는 x, y의 값은 $x=4$, $y=1$이다. 따라서 구하는 해는 $(4, 1)$이다.

4

x, y가 자연수일 때, 다음 연립방정식을 푸시오. $x=3$, $y=2$

$$\begin{cases} x+2y=7 \\ 3x+y=11 \end{cases}$$

풀이 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=7 & \cdots\cdots ① \\ 3x+y=11 & \cdots\cdots ② \end{cases}$에서 x, y가 자연수이므로 두 일차방정식 ①, ②의 해를 각각 표로 나타내면 다음과 같다.

①의 해

x	5	3	1
y	1	2	3

②의 해

x	1	2	3
y	8	5	2

따라서 연립방정식의 해는 두 일차방정식 ①, ②를 동시에 참이 되게 하는 x, y의 값인 $x=3$, $y=2$이다.

5

연립방정식 $\begin{cases} 2x+ay=8 \\ 3bx+y=10 \end{cases}$ 의 해가 $x=2$, $y=4$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 2

풀이 $\begin{cases} 2x+ay=8 & \cdots\cdots ① \\ 3bx+y=10 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①에 $x=2$, $y=4$를 대입하면 $4+4a=8$, $a=1$이고,

②에 $x=2$, $y=4$를 대입하면 $6b+4=10$, $b=1$이다.

따라서 $a+b=1+1=2$이다.

6 단계형 문제

문제 해결

자연수 x, y에 대하여 일차방정식 $x+4y=15$의 한 해가 일차방정식 $ax-y=9$를 만족시킬 때, 자연수 a의 값을 구하려고 한다. 다음 물음에 답하시오.

(1) 일차방정식 $x+4y=15$의 해를 모두 구하시오. $(11, 1), (7, 2), (3, 3)$

(2) (1)에서 구한 해를 이용하여 자연수 a의 값을 구하시오. 4

풀이 (1) 일차방정식 $x+4y=15$를 만족시키는 자연수 x, y의 값은 다음과 같다.

x	11	7	3
y	1	2	3

따라서 x, y가 자연수일 때, 일차방정식 $x+4y=15$의 해는 $(11, 1)$, $(7, 2)$, $(3, 3)$이다.

(2) (i) $x=11$, $y=1$인 경우

$x=11$, $y=1$을 일차방정식 $ax-y=9$에 대입하면

$11a-1=9$, $11a=10$, $a=\frac{10}{11}$이고,

$a=\frac{10}{11}$은 자연수가 아니므로 $x=11$, $y=1$은 일차방정식 $ax-y=9$의 해가 아니다.

(ii) $x=7$, $y=2$인 경우

$x=7$, $y=2$를 일차방정식 $ax-y=9$에 대입하면 $7a-2=9$, $7a=11$, $a=\frac{11}{7}$이고,

$a=\frac{11}{7}$은 자연수가 아니므로 $x=7$, $y=2$는 일차방정식 $ax-y=9$의 해가 아니다.

(iii) $x=3$, $y=3$인 경우

$x=3$, $y=3$을 일차방정식 $ax-y=9$에 대입하면

$3a-3=9$, $3a=12$, $a=4$이다. a의 값이 자연수이므로 문제의 뜻에 맞는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $a=4$이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/lRBZpZ5au6gmAeCg

자기 평가

미지수가 2개인 연립일차방정식과 그 해의 뜻을 안다.

실생활의 다양한 상황을 연립방정식으로 나타내고, 연립방정식의 필요성을 알 수 있다.

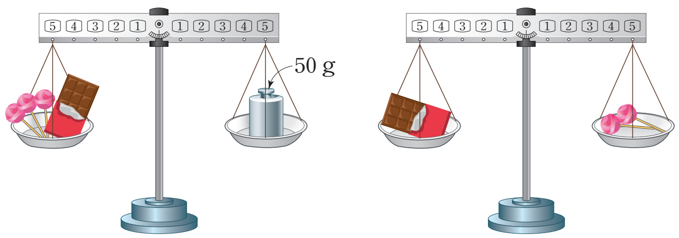
02 연립일차방정식의 풀이

[학습 목표] 미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

식의 대입을 이용하여 연립방정식을 어떻게 풀까?

생각 펼치기

다음 그림과 같이 양팔저울의 양쪽 접시 위에 막대 사탕과 초콜릿, 50 g짜리 추를 올려 놓았더니 저울이 평형을 이루었다. 물음에 답해 보자.



〈그림 1〉 〈그림 2〉

1. 〈그림 1〉, 〈그림 2〉에서 알 수 있는 사실을 말해 보자. 풀이 참조

2. 〈그림 2〉의 상황을 이용하여 〈그림 1〉에서 막대 사탕 1개의 무게를 어떻게 구할 수 있는지 말해 보자. 풀이 참조

풀이 1. 〈그림 1〉에서 막대 사탕 3개와 초콜릿 1개의 무게의 합은 50 g임을 알 수 있다. 〈그림 2〉에서 초콜릿 1개와 막대 사탕 2개의 무게는 서로 같음을 알 수 있다.
2. 초콜릿 1개의 무게와 막대 사탕 2개의 무게가 서로 같으므로 〈그림 1〉에서 왼쪽 저울접시 위의 초콜릿 1개 대신 막대 사탕 2개를 올려놓는다. 그러면 막대 사탕 5개의 무게가 50 g이므로 막대 사탕 1개의 무게를 구할 수 있다.

식의 대입을 이용한 풀이

생각 펼치기 에서 막대 사탕 1개의 무게를 x g, 초콜릿 1개의 무게를 y g이라고 할 때, x와 y 사이의 관계는 다음과 같이 연립방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} 3x+y=50 & \cdots\cdots ① \\ y=2x & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

이때 미지수 y를 없애기 위해 ②를 ①에 대입하면

$$3x+2x=50$$

이고, 이를 정리하면

$$5x=50,\ x=10$$

이다. 또, $x=10$을 ②에 대입하면

$$y=2\times 10=20$$

이다. 따라서 이 연립방정식의 해는 $x=10$, $y=20$이므로 막대 사탕 1개의 무게는 10 g, 초콜릿 1개의 무게는 20 g이다.

$$3x+y=50$$
$$\downarrow y=2x$$
$$3x+2x=50$$

문자에 수를 대입하는 것과 마찬가지로 주어진 식의 한 문자에 그 문자가 나타내는 다른 식을 대입할 수 있다.

한 방정식을 하나의 미지수에 대하여 정리하고, 이것을 다른 방정식에 대입하여 해를 구하는 방법을 대입법이라고 한다.

이와 같이 연립방정식의 한 방정식이 $y=(x$에 대한 식$)$ 또는 $x=(y$에 대한 식$)$의 꼴일 때, 이를 다른 방정식에 대입하여 한 미지수를 없앤 후 연립방정식의 해를 구할 수 있다.

1 **다음 연립방정식을 대입을 이용하여 푸시오.**

(1) $\begin{cases} x=3y \\ x-4y=2 \end{cases}$ **$x=-6$, $y=-2$**

(2) $\begin{cases} x-2y=21 \\ y=4x \end{cases}$ **$x=-3$, $y=-12$**

풀이 (1) $\begin{cases} x=3y & \cdots\cdots ① \\ x-4y=2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 에서 ①을 ②에 대입하면 $3y-4y=2$, $y=-2$이다. 또, $y=-2$를 ①에 대입하면 $x=-6$이다. 따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=-6$, $y=-2$ 이다.

(2) $\begin{cases} x-2y=21 & \cdots\cdots ① \\ y=4x & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 에서 ②를 ①에 대입하면 $x-8x=21$, $x=-3$이다.
또, $x=-3$을 ②에 대입하면 $y=-12$이다. 따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=-3$, $y=-12$ 이다.

Tip 연립방정식을 풀 때, 한 방정식을 한 문자에 대한 식, 즉 $x=(y$의 식$)$ 또는 $y=(x$의 식$)$ 중 하나의 꼴로 나타내어 다른 방정식에 대입하여 해를 구한다.

식의 대입을 이용하여 연립방정식을 풀기 위해서는 한 방정식에서 한 미지수를 다른 미지수에 대한 식으로 나타내야 한다.

개념 쏙

주어진 두 방정식 중 한 문자를 다른 문자에 대한 식으로 나타내기 쉬운 식을 선택하여 변형한다.

함께 해 보기 1

다음 연립방정식을 대입을 이용하여 푸시오.

$$\begin{cases} x+y=5 & \cdots\cdots ① \\ 3x+2y=11 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

풀이 ①에서 x를 이항하면

$$y=5-x \quad \cdots\cdots ③$$

이다. ③을 ②에 대입하면

$$3x+2(5-x)=11,\ x+10=11,\ x=1$$

이고, $x=1$을 ③에 대입하면

$$y=5-1,\ y=4$$

이다. 따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=1$, $y=4$이다.

확인 $x=1$, $y=4$를 ①, ②에 각각 대입하면 모두 (좌변)=(우변)이므로 $x=1$, $y=4$는 이 연립방정식의 해이다.

답 $x=1$, $y=4$

수학 호기심

연립방정식 $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+2y=11 \end{cases}$ 에서 식의 대입을 이용하여 미지수 x를 먼저 없앨 수도 있을까?

풀이
$\begin{cases} x+y=5 & \cdots\cdots ① \\ 3x+2y=11 & \cdots\cdots ② \end{cases}$
x를 먼저 없애기 위해 ①에서 y를 이항하면 $x=5-y$ $\cdots\cdots$ ③
이다. ③을 ②에 대입하면 $3(5-y)+2y=11$이다.

풀이 (1) $\begin{cases} x+3y=0 & \cdots\cdots ① \\ 2x+y=-5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$
①에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면 $x=-3y$ $\cdots\cdots$ ③이다. ③을 ②에 대입하면 $2\times(-3y)+y=-5$, $y=1$이고, $y=1$을 ③에 대입하면 $x=-3\times1=-3$이다.
따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=-3$, $y=1$이다.

2 **다음 연립방정식을 대입을 이용하여 푸시오.**

(1) $\begin{cases} x+3y=0 \\ 2x+y=-5 \end{cases}$ **$x=-3$, $y=1$**

(2) $\begin{cases} 4x-y=-1 \\ 9x-2y=2 \end{cases}$ **$x=4$, $y=17$**

(2) $\begin{cases} 4x-y=-1 & \cdots\cdots ① \\ 9x-2y=2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$, y를 없애기 위해 ①에서 y를 x에 대한 식으로 나타내면 $y=4x+1$ $\cdots\cdots$ ③이다.
③을 ②에 대입하면 $9x-2(4x+1)=2$, $x=4$이고, $x=4$를 ③에 대입하면 $y=4\times4+1=17$이다.
따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=4$, $y=17$이다.

두 식의 합 또는 차를 이용하여 연립방정식을 어떻게 풀까?

생각 펼치기

매점에서 도넛 2개와 딸기우유 3개의 가격은 6000원이고, 도넛 2개와 딸기우유 1개의 가격은 4000원이라고 한다. 이때 딸기우유 1개의 가격을 구하는 과정을 말해 보자. 풀이 참조

풀이 도넛 2개와 딸기우유 3개의 가격은 6000원이고, 도넛 2개와 딸기우유 1개의 가격은 4000원이다. 따라서 딸기우유 2개의 가격은 2000원이므로 딸기우유 1개의 가격은 1000원이다.

식의 합 또는 차를 이용한 풀이

생각 펼치기에서 도넛 1개의 가격을 x원, 딸기우유 1개의 가격을 y원이라고 할 때, x와 y 사이의 관계는 다음과 같이 연립방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} 2x+3y=6000 & \cdots\cdots \text{①} \\ 2x+y=4000 & \cdots\cdots \text{②} \end{cases}$$

이때 $2x$를 없애기 위해 ①에서 ②를 변끼리 빼면

$$(2x+3y)-(2x+y)=6000-4000$$
$$2y=2000$$
$$y=1000$$

$$\begin{array}{rr} & 2x+3y=6000 \\ -) & 2x+\ \ y=4000 \\ \hline & 2y=2000 \end{array}$$

이다.

또, $y=1000$을 ②에 대입하면

$$2x+1000=4000$$
$$2x=3000$$
$$x=1500$$

이다.

따라서 이 연립방정식의 해는 $x=1500$, $y=1000$이므로 도넛 1개의 가격은 1500원, 딸기우유 1개의 가격은 1000원이다.

두 방정식을 변끼리 더하거나 빼서 해를 구하는 방법을 가감법이라고 한다.

이와 같이 연립방정식의 두 일차방정식을 변끼리 더하거나 빼서 한 미지수를 없앤 후 연립방정식의 해를 구할 수 있다.

Tip 주어진 두 일차방정식에서 계수의 절댓값이 같은 미지수가 있으면 그 미지수를 소거하는(없애는) 것이 편리하다.

3 다음 연립방정식을 두 식의 합 또는 차를 이용하여 푸시오.

(1) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x+y=-4 \end{cases}$ $x=-5,\ y=11$

(2) $\begin{cases} -2x+5y=4 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$ $x=3,\ y=2$

풀이 (1) $\begin{cases} 2x+y=1 & \cdots\cdots ① \\ 3x+y=-4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①에서 ②를 변끼리 빼면 $-x=5$, $x=-5$이고, $x=-5$를 ①에 대입하면 $2\times(-5)+y=1$, $y=11$이다. 따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=-5$, $y=11$이다.

(2) $\begin{cases} -2x+5y=4 & \cdots\cdots ① \\ 2x+3y=12 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①과 ②를 변끼리 더하면 $8y=16$, $y=2$이고, $y=2$를 ①에 대입하면 $-2x+5\times2=4$, $x=3$이다. 따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=3$, $y=2$이다.

연립방정식을 풀 때, 두 방정식을 더하거나 빼도 한 미지수가 없어지지 않는 경우가 있다. 이 경우에는 연립방정식의 두 일차방정식에서 각 방정식의 양변에 적당한 수를 곱하여 x 또는 y의 계수의 절댓값을 같게 만든 후 두 식의 합 또는 차를 이용하여 연립방정식을 풀 수 있다.

개념 쏙

두 문자 중 계수의 절댓값이 같아지는 수가 더 작은 미지수를 정하고, 소거할 문자의 계수의 절댓값이 두 계수의 최소공배수가 되도록 한다.

함께 해 보기 2 다음 연립방정식을 두 식의 합 또는 차를 이용하여 푸시오.

$$\begin{cases} 3x+7y=1 & \cdots\cdots ① \\ 2x+3y=4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

풀이 ①의 양변에 2를 곱하고, ②의 양변에 3을 곱하면

$$\begin{cases} 6x+14y=2 & \cdots\cdots ③ \\ 6x+9y=12 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

이다. ③에서 ④를 변끼리 빼면

$5y=-10$, $y=-2$

이고, $y=-2$를 ①에 대입하면

$3x-14=1$, $3x=15$, $x=5$

이다. 따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=5$, $y=-2$이다.

$$\begin{array}{rr} & 6x+14y=2 \\ -) & 6x+\ \ 9y=12 \\ \hline & 5y=-10 \end{array}$$

확인 $x=5$, $y=-2$를 ①, ②에 각각 대입하면 모두 (좌변)=(우변)이므로 $x=5$, $y=-2$는 이 연립방정식의 해이다.

답 $x=5$, $y=-2$

수학 호기심

연립방정식 $\begin{cases} 3x+7y=1 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$ 에서 두 식의 합 또는 차를 이용하여 미지수 y를 먼저 없앨 수도 있을까?

풀이 $\begin{cases} 3x+7y=1 & \cdots\cdots ① \\ 2x+3y=4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

y를 먼저 없애기 위해 ①의 양변에 3을 곱하고, ②의 양변에 7을 곱하면

$\begin{cases} 9x+21y=3 & \cdots\cdots ③ \\ 14x+21y=28 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$

이다. ③에서 ④를 변끼리 빼면 $-5x=-25$이다.

4 다음 연립방정식을 두 식의 합 또는 차를 이용하여 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+5y=4 \\ -2x-3y=-1 \end{cases}$ $x=-1,\ y=1$

(2) $\begin{cases} 3x+5y=4 \\ 2x-3y=-10 \end{cases}$ $x=-2,\ y=2$

풀이

(1) $\begin{cases} x+5y=4 & \cdots\cdots ① \\ -2x-3y=-1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①의 양변에 2를 곱하면

$\begin{cases} 2x+10y=8 & \cdots\cdots ③ \\ -2x-3y=-1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

이다. ③과 ②를 변끼리 더하면 $7y=7$, $y=1$이고, $y=1$을 ①에 대입하면 $x+5\times1=4$, $x=-1$ 이다. 따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=-1$, $y=1$이다.

(2) $\begin{cases} 3x+5y=4 & \cdots\cdots ① \\ 2x-3y=-10 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①의 양변에 2를 곱하고, ②의 양변의 3을 곱하면

$\begin{cases} 6x+10y=8 & \cdots\cdots ③ \\ 6x-9y=-30 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$

이다. ③에서 ④를 변끼리 빼면 $19y=38$, $y=2$이고, $y=2$를 ①에 대입하면 $3x+5\times2=4$, $x=-2$이다. 따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=-2$, $y=2$ 이다.

계수가 소수 또는 분수인 연립방정식의 풀이

계수에 소수나 분수가 있는 연립방정식은 각 방정식의 양변에 적당한 수를 곱하여 계수를 모두 정수로 고쳐서 풀면 편리하다.

함께 해 보기 3

개념 쏙

계수가 소수인 경우 10의 거듭제곱을 곱하고, 분수인 경우 분모의 최소공배수를 곱한다.

다음 연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} 0.1x+0.4y=0.6 & \cdots\cdots \text{①} \\ \dfrac{1}{2}x-\dfrac{2}{3}y=\dfrac{1}{3} & \cdots\cdots \text{②} \end{cases}$$

풀이 ①의 양변에 10을 곱하고, ②의 양변에 6을 곱하면

$$\begin{cases} x+4y=6 & \cdots\cdots \text{③} \\ 3x-4y=2 & \cdots\cdots \text{④} \end{cases}$$

이다. ③과 ④를 변끼리 더하면

$4x=8,\ x=2$

$$\begin{array}{rrl} & x+4y & =6 \\ +) & 3x-4y & =2 \\ \hline & 4x & =8 \end{array}$$

이고, $x=2$를 ③에 대입하면

$2+4y=6,\ 4y=4,\ y=1$

이다. 따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=2,\ y=1$이다.

확인 $x=2,\ y=1$을 ①, ②에 각각 대입하면 모두 (좌변)=(우변)이므로 $x=2,\ y=1$은 이 연립방정식의 해이다.

답 $x=2,\ y=1$

5 **다음 연립방정식을 푸시오.**

(1) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{2}y=2 \\ \dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{4}y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ **$x=3,\ y=2$**

(2) $\begin{cases} \dfrac{1}{5}x-\dfrac{1}{4}y=-\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{6}y=3 \end{cases}$ **$x=\frac{5}{2},\ y=8$**

풀이

(1) $\begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=2 & \cdots\cdots \text{①} \\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{4}y=\frac{3}{2} & \cdots\cdots \text{②} \end{cases}$

①의 양변에 6을 곱하고, ②의 양변에 12를 곱하면

$\begin{cases} 2x+3y=12 & \cdots\cdots \text{③} \\ 8x-3y=18 & \cdots\cdots \text{④} \end{cases}$

이다. ③과 ④를 변끼리 더하면 $10x=30$, $x=3$이고, $x=3$을 ③에 대입하면 $2\times3+3y=12$, $y=2$이다. 따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=3,\ y=2$이다.

(2) $\begin{cases} \frac{1}{5}x-\frac{1}{4}y=-\frac{3}{2} & \cdots\cdots \text{①} \\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{6}y=3 & \cdots\cdots \text{②} \end{cases}$

①의 양변에 20를 곱하고, ②의 양변에 6을 곱하면 $\begin{cases} 4x-5y=-30 & \cdots\cdots \text{③} \\ 4x+y=18 & \cdots\cdots \text{④} \end{cases}$

이다. ③에서 ④를 변끼리 빼면 $-6y=-48$, $y=8$이고, $y=8$을 ③에 대입하면 $4x-5\times8=-30$, $x=\frac{5}{2}$이다.

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=\frac{5}{2}$, $y=8$이다.

6 **다음 연립방정식을 푸시오.**

(1) $\begin{cases} 0.01x+0.03y=1 \\ 0.2x-0.3y=-7 \end{cases}$ **$x=10,\ y=30$**

(2) $\begin{cases} 0.02x+0.1y=-0.03 \\ 1.3x+y=0.8 \end{cases}$ **$x=1,\ y=-\frac{1}{2}$**

풀이

(1) $\begin{cases} 0.01x+0.03y=1 & \cdots\cdots \text{①} \\ 0.2x-0.3y=-7 & \cdots\cdots \text{②} \end{cases}$

①의 양변에 100을 곱하고, ②의 양변에 10을 곱하면

$\begin{cases} x+3y=100 & \cdots\cdots \text{③} \\ 2x-3y=-70 & \cdots\cdots \text{④} \end{cases}$

이다. ③과 ④를 변끼리 더하면 $3x=30$, $x=10$이고, $x=10$을 ③에 대입하면 $10+3y=100$, $y=30$이다.

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=10$, $y=30$이다.

(2) $\begin{cases} 0.02x+0.1y=-0.03 & \cdots\cdots \text{①} \\ 1.3x+y=0.8 & \cdots\cdots \text{②} \end{cases}$

①의 양변에 100을 곱하고, ②의 양변에 10을 곱하면

$\begin{cases} 2x+10y=-3 & \cdots\cdots \text{③} \\ 13x+10y=8 & \cdots\cdots \text{④} \end{cases}$

이다. ③에서 ④를 변끼리 빼면 $-11x=-11$, $x=1$이고, $x=1$을 ③에 대입하면

$2\times1+10y=-3$, $y=-\frac{1}{2}$이다.

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=1$, $y=-\frac{1}{2}$이다.

연립방정식을 활용하여 실생활 문제를 어떻게 해결할 수 있을까?

생각 펼치기

개념 쏙

연립방정식을 활용하여 실생활 문제 해결하기

미지수 정하기
↓
연립방정식 세우기
↓
연립방정식 풀기
↓
확인하기

용우는 체육 수업 때 농구 경기에서 2점 슛과 3점 슛을 합하여 모두 11개를 넣어 27점을 얻었다. 용우가 2점 슛과 3점 슛을 각각 몇 개씩 넣었는지 구해 보자. 풀이 참조

풀이 용우가 넣은 2점 슛을 x개, 3점 슛을 y개라고 할 때, 2점 슛과 3점 슛을 합하여 모두 11개를 넣었으므로 $x+y=11$이고, 27점을 얻었으므로 $2x+3y=27$이다.
이를 연립방정식으로 나타내면 $\begin{cases} x+y=11 \\ 2x+3y=27 \end{cases}$ 이고, 이 연립방정식을 풀면 $x=6$, $y=5$이다. 따라서 2점 슛은 6개, 3점 슛은 5개이다.

연립방정식의 활용

생각 펼치기 의 문제를 다음 단계에 따라 풀 수 있다.

미지수 정하기

❶ 문제의 뜻을 파악하고, 구하고자 하는 것을 미지수 x, y로 놓는다.

용우가 넣은 2점 슛을 x개, 3점 슛을 y개라고 하자.

연립방정식 세우기

❷ 문제의 뜻에 맞게 연립방정식을 세운다.

2점 슛과 3점 슛을 합하여 모두 11개를 넣었으므로 $x+y=11$이고, 용우가 얻은 점수가 27점이므로 $2x+3y=27$이다.

이것을 연립방정식으로 나타내면 $\begin{cases} x+y=11 & \cdots\cdots ① \\ 2x+3y=27 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

이다.

연립방정식 풀기

❸ 연립방정식을 푼다.

①의 양변에 2를 곱하면 $2x+2y=22$ $\cdots\cdots$ ③

이고, ②에서 ③을 변끼리 빼면 $y=5$이다.

이때 $y=5$를 ①에 대입하면 $x+5=11$, $x=6$이다.

따라서 2점 슛은 6개, 3점 슛은 5개이다.

확인하기

❹ 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

2점 슛과 3점 슛의 개수의 합은 $6+5=11$이고, 용우가 얻은 점수는 $2\times6+3\times5=27$(점)이다. 따라서 구한 해는 문제의 뜻에 맞는다.

7 5년 전에는 오빠와 동생의 나이의 합이 30세였고, 지금부터 2년 후에는 동생의 나이가 현재 오빠의 나이와 같아진다고 한다. 현재 오빠의 나이를 구하시오. 21세

풀이 현재 오빠의 나이를 x살, 동생의 나이를 y살이라고 하면 $\begin{cases} (x-5)+(y-5)=30 & \cdots\cdots ① \\ y+2=x & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 이다. ②를 ①에 대입하면 $(y+2-5)+(y-5)=30$, $y=19$이다. $y=19$를 ②에 대입하면 $x=19+2$, $x=21$이다.
따라서 현재 오빠는 21살, 동생은 19살이다. 5년 전 오빠의 동생의 나이의 합은 $(21-5)+(19-5)=30$(살)이고, 2년 뒤 동생의 나이는 21살이므로 현재 오빠의 나이와 같다. 따라서 구한 해는 문제의 뜻에 맞는다.

함께 해 보기 4

채리는 전체 거리가 3 km인 둘레길 걷기를 할 때, 처음에는 시속 6 km의 일정한 속력으로 걷다가 중간 어느 지점부터 시속 4 km의 일정한 속력으로 걸었더니 완주하는 데 총 40분이 걸렸다. 시속 6 km로 걸은 거리와 시속 4 km로 걸은 거리를 각각 구하시오.

미지수 정하기

풀이 시속 6 km로 걸은 거리를 x km, 시속 4 km로 걸은 거리를 y km라고 하자.

연립방정식 세우기

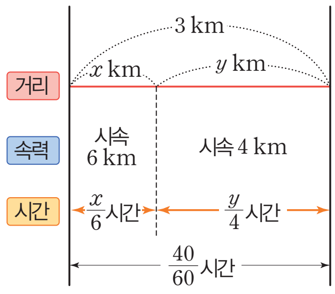
둘레길 전체 거리가 3 km이므로 $x+y=3$

둘레길 걷기를 완주하는 데 40분이 걸렸으므로

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=\frac{40}{60}$$

이를 연립방정식으로 나타내면

$$\begin{cases} x+y=3 & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}=\dfrac{40}{60} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$



연립방정식 풀기

②의 양변에 12를 곱하면 $2x+3y=8$ $\cdots\cdots$ ③

①의 양변에 3을 곱하면 $3x+3y=9$ $\cdots\cdots$ ④

④에서 ③을 변끼리 빼면 $x=1$

$x=1$을 ①에 대입하면 $1+y=3$, $y=2$

따라서 시속 6 km로 걸은 거리는 1 km, 시속 4 km로 걸은 거리는 2 km이다.

확인하기

확인 둘레길을 걸은 거리는 $1+2=3$(km)이고, 코스를 완주하는 데 걸린 시간은

$\frac{1}{6}+\frac{2}{4}=\frac{2}{3}$(시간), 즉 40분이다. 따라서 구한 해는 문제의 뜻에 맞는다.

답 시속 6 km로 걸은 거리: 1 km, 시속 4 km로 걸은 거리: 2 km

8 **1.6 km 떨어진 두 지점에서 서준이와 윤정이가 마주 보고 동시에 출발하여 도중에 만났다. 서준이는 분속 300 m로 자전거를 타고 가고 윤정이는 분속 100 m로 걸어갔을 때, 서준이가 자전거를 타고 만난 지점까지 간 거리는 몇 km인지 구하시오.** 1.2 km

풀이
도중에 만날 때까지 서준이가 자전거를 타고 간 거리를 x km, 윤정이가 걸어간 거리를 y km라고 하자. 이를 연립방정식으로 나타내면

$\begin{cases} x+y=1.6 & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{x}{0.3}=\dfrac{y}{0.1} & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 이다.

①의 양변에 10을 곱하고, ②의 양변에 0.3을 곱하면

$\begin{cases} 10x+10y=16 & \cdots\cdots ③ \\ x=3y & \cdots\cdots ④ \end{cases}$

이다. ④를 ③에 대입하면 $10\times3y+10y=16$, $y=0.4$이고, $y=0.4$를 ④에 대입하면 $x=3\times0.4=1.2$이다.

따라서 서준이가 자전거를 타고 간 거리는 1.2 km이다. 이때 서준이와 윤정이가 이동한 거리의 합은 $1.2+0.4=1.6$(km)이고, 이동한 시간은 $\frac{1.2}{0.3}=\frac{0.4}{0.1}$로 서로 같다. 따라서 구한 해는 문제의 뜻에 맞는다.

생각 더 나아가기

문제 해결 · 의사소통

다음 두 연립방정식에 대하여 식의 대입을 이용하는 방법과 두 식의 합 또는 차를 이용하는 방법 중 더 나은 풀이 방법이 무엇인지 생각해 보고, 그 이유를 친구와 이야기해 보자. 풀이 참조

$$(ㄱ)\begin{cases} 4x-3y=6 \\ -2x+5y=4 \end{cases} \qquad (ㄴ)\begin{cases} y=-2x+5 \\ 4x+y=3 \end{cases}$$

풀이 (ㄱ)의 경우 연립방정식에서 하나의 일차방정식의 양변에 적당한 수를 곱하여 x의 계수를 같게 만든 후 두 식의 합을 이용하여 푸는 것이 더 낫다.

연립방정식 $\begin{cases} 4x-3y=6 & \cdots\cdots ① \\ -2x+5y=4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

에서 ②의 양변에 2를 곱하면 $-4x+10y=8$ $\cdots\cdots$ ③이고, ①과 ③을 변끼리 더하면 $7y=14$, $y=2$이다. $y=2$를 ①에 대입하면 $4x-6=6$, $4x=12$, $x=3$이다. 따라서 (ㄱ)은 두 식의 합 또는 차를 이용하여 푸는 것이 더 낫다.

(ㄴ)의 경우 한 방정식이 $y=(x$에 대한 식$)$의 꼴이므로 이를 다른 방정식에 대입하여 푸는 것이 더 낫다.

연립방정식 $\begin{cases} y=-2x+5 & \cdots\cdots ① \\ 4x+y=3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 에서 ①을 ②에 대입하면 $4x+(-2x+5)=3$, $2x+5=3$, $x=-1$이고, $x=-1$을 ①에 대입하면 $y=2+5$, $y=7$이다. 따라서 (ㄴ)은 식의 대입을 이용하여 푸는 것이 더 낫다.

스스로 점검하기

1

다음 □ 안에 알맞은 말을 써넣으시오.

연립방정식에서 식의 $\boxed{\text{대입}}$을/를 이용하거나 두 식의 $\boxed{\text{합}}$ 또는 $\boxed{\text{차}}$을/를 이용하여 한 미지수를 없앤 후 연립방정식의 해를 구할 수 있다.

2

다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} y=2x-4 \\ 3x+y=16 \end{cases}$ $x=4,\ y=4$ (2) $\begin{cases} x=2-y \\ 2x+3y=3 \end{cases}$ $x=3,\ y=-1$

풀이 (1) $\begin{cases} y=2x-4 & \cdots\cdots ① \\ 3x+y=16 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①을 ②에 대입하면

$3x+(2x-4)=16$, $x=4$이고,

$x=4$를 ①에 대입하면

$y=2\times4-4=4$이다.

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=4$, $y=4$이다.

(2) $\begin{cases} x=2-y & \cdots\cdots ① \\ 2x+3y=3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①을 ②에 대입하면

$2(2-y)+3y=3$, $y=-1$이고,

$y=-1$를 ①에 대입하면

$x=2-(-1)=3$이다.

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=3$, $y=-1$이다.

3

다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+2y=9 \\ 3x-4y=-3 \end{cases}$ $x=3,\ y=3$ (2) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 3x+2y=-1 \end{cases}$ $x=7,\ y=-11$

풀이 (1) $\begin{cases} x+2y=9 & \cdots\cdots ① \\ 3x-4y=-3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①의 양변에 2를 곱하면

$2x+4y=18$ $\cdots\cdots$ ③

②와 ③을 변끼리 더하면

$5x=15$, $x=3$이고,

$x=3$을 ①에 대입하면

$3+2y=9$, $y=3$이다.

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=3$, $y=3$이다.

(2) $\begin{cases} 5x+3y=2 & \cdots\cdots ① \\ 3x+2y=-1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①의 양변에 2를 곱하고,

②의 양변에 3을 곱하면

$\begin{cases} 10x+6y=4 & \cdots\cdots ③ \\ 9x+6y=-3 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$

③에서 ④를 변끼리 빼면 $x=7$이고,

$x=7$을 ①에 대입하면

$5\times7+3y=2$, $y=-11$이다. 따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=7$, $y=-11$이다.

4

다음 연립방정식을 푸시오. $x=1,\ y=-1$

$$\begin{cases} 0.5x+\dfrac{1}{3}(y-1)=-\dfrac{1}{6} \\ x-3y=4 \end{cases}$$

풀이 $\begin{cases} 0.5x+\frac{1}{3}(y-1)=-\frac{1}{6} & \cdots\cdots ① \\ x-3y=4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①의 양변에 6을 곱하여 괄호를 풀고 동류항끼리 정리하면 $3x+2y=1$ $\cdots\cdots$ ③

②에서 $x=4+3y$를 ③에 대입하면 $3(4+3y)+2y=1$, $y=-1$이고,

$y=-1$을 ②에 대입하면 $x-3\times(-1)=4$, $x=1$이다.

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=1$, $y=-1$이다.

5

연립방정식 $\begin{cases} 5x-2y=2 \\ ax-y=2 \end{cases}$ 의 해가 일차방정식 $x+3y=14$를 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하시오. 3

풀이 $\begin{cases} 5x-2y=2 & \cdots\cdots ① \\ x+3y=14 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

②의 양변에 5를 곱하면 $5x+15y=70$ $\cdots\cdots$ ③

①에서 ③을 변끼리 빼면 $-17y=-68$, $y=4$이고, $y=4$를 ②에 대입하면

$x+3\times4=14$, $x=2$이다. $x=2$, $y=4$를

$ax-y=2$에 대입하면 $2a-4=2$, $a=3$이다.

6 사고력 UP

문제 해결

다음 그림과 같이 둘레의 길이가 2 km인 공원이 있다. 이 공원의 같은 지점에서 정수와 정은이가 동시에 출발하여 각각 일정한 속력으로 공원의 둘레를 따라 서로 반대 방향으로 돌면 10분 후에 처음으로 만나고, 같은 방향으로 돌면 50분 후에 처음으로 만난다. 정수의 속력이 정은이의 속력보다 빠를 때, 정수와 정은이의 속력은 분속 몇 m인지 각각 구하시오. 정수의 속력: 분속 120 m, 정은이의 속력: 분속 80 m

풀이 정수의 속력을 분속 x m, 정은이의 속력을 분속 y m라고 하자. 서로 반대 방향으로 돌면 10분 후에 처음으로 만나므로 $10x+10y=2000$이고, 같은 방향으로 돌면 50분 후에 처음으로 만나므로 $50x-50y=2000$이다. 이를 연립방정식으로 나타내면

$\begin{cases} 10x+10y=2000 & \cdots\cdots ① \\ 50x-50y=2000 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 이다. ①의 양변을 10으로 나누고, ②의 양변을 50으로 나누면 $\begin{cases} x+y=200 & \cdots\cdots ③ \\ x-y=40 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$ 이다. ③과 ④를 변끼리 더하면 $2x=240$, $x=120$이고, $x=120$을 ③에 대입하면 $120+y=200$, $y=80$이다.

따라서 정수의 속력은 분속 120 m, 정은이의 속력은 분속 80 m이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/N1lekzKdK4A2lko7

자기 평가	
	미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
	연립방정식을 여러 가지 방법으로 풀어 보면서 더 나은 풀이 방법으로 해를 찾을 수 있다.

수학으로 세상 보기

스프레드시트로 푸는 연립방정식

공학 도구

문제 해결 의사소통 정보처리

스프레드시트란, 셀에 숫자나 문자를 입력하고 조작하여 자료를 처리하는 프로그램으로 이를 활용하면 복잡한 계산이나 데이터를 손쉽게 처리할 수 있다.

스프레드시트를 이용하여 x의 값이 1부터 10까지의 자연수일 때, 연립방정식 $\begin{cases} y=x+5 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ 의 해를 구해 보자.

① 셀 A2부터 셀 A11까지 x의 값인 1부터 10까지의 자연수를 각각 입력한다.

	A	B	C	D
1	x의 값			
2	1			
3	2			
4	3			
5	4			
6	5			
7	6			
8	7			
9	8			
10	9			
11	10			

② 셀 B2에 '=A2+5'를 입력하고, 셀 B2를 셀 B3부터 B11까지 드래그하여 채운다.

	A	B	C	D
1	x의 값	y의 값		
2	1	=A2+5		
3	2			
4	3			
5	4			
6	5			
7	6			
8	7			
9	8			
10	9			
11	10			

③ 셀 C2에 '=2*A2−B2'를 입력하고, 셀 C2를 셀 C3부터 셀 C11까지 드래그하여 채운다.

	A	B	C	D
1	x의 값	y의 값	$2x-y$의 값	
2	1	6	=2*A2−B2	
3	2	7		
4	3	8		
5	4	9		
6	5	10		
7	6	11		
8	7	12		
9	8	13		
10	9	14		
11	10	15		

④ 연립방정식 $\begin{cases} y=x+5 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ 의 해는 $x=6$, $y=11$이다.

	A	B	C	D
1	x의 값	y의 값	$2x-y$의 값	
2	1	6	−4	
3	2	7	−3	
4	3	8	−2	
5	4	9	−1	
6	5	10	0	
7	6	11	1	
8	7	12	2	
9	8	13	3	
10	9	14	4	
11	10	15	5	

https://code.jihak.co.kr/qr/wLmf3eEtl3kUKHCC

1 x의 값이 1부터 10까지의 자연수일 때, 스프레드시트를 이용하여 다음 연립방정식을 풀어 보고, 친구와 풀이 과정을 비교해 보자.

(1) $\begin{cases} y=x+6 \\ 2x-y=-3 \end{cases}$

$x=3$, $y=9$

풀이

	A	B	C
1	x의 값	y의 값	$2x-y$의 값
2	1	7	−5
3	2	8	−4
4	3	9	−3
5	4	10	−2
6	5	11	−1
7	6	12	0
8	7	13	1
9	8	14	2
10	9	15	3
11	10	16	4

(2) $\begin{cases} 5x+2y=50 \\ 3x-4y=4 \end{cases}$

$x=8$, $y=5$

풀이

	A	B	C
1	x의 값	y의 값	$3x-4y$의 값
2	1	22.5	−87
3	2	20	−74
4	3	17.5	−61
5	4	15	−48
6	5	12.5	−35
7	6	10	−22
8	7	7.5	−9
9	8	5	4
10	9	2.5	17
11	10	0	30

수학으로 탐험하기

탄소 발자국 줄이기

탄소 발자국은 우리가 일상에서 사용하는 에너지와 소비하는 물품으로 인해 발생하는 이산화탄소의 양을 의미한다. 전 세계적으로 많은 나라와 기업들이 탄소 중립을 목표로 삼고 있으며 탄소 발자국을 줄이기 위한 노력을 하고 있다. 가정에서 사용하는 전기와 도시가스도 탄소 발자국의 원인 중 하나이다. 전기는 주로 화석 연료를 태워 만들기 때문에 많은 이산화탄소가 배출되며 도시가스 역시 난방 또는 요리를 할 때, 이산화탄소를 내보낸다. 따라서 탄소 발자국을 줄이기 위해서는 에너지 절약형 가전제품을 사용하고, 전기와 가스를 아껴 쓰는 습관을 들이는 것이 필요하다.

● **다음 물음에 답해 보자.**

1 어느 가정에서 지난달에 전기 250 kWh, 도시가스 20 m^3를 사용했을 때, 탄소 발자국이 169 kg이고, 이번 달에 전기 300 kWh, 도시가스 50 m^3를 사용했을 때의 탄소 발자국이 260 kg이었다. 전기 1 kWh를 사용할 때의 탄소 발자국과 도시가스 1 m^3를 사용할 때의 탄소 발자국을 각각 구해 보자.

(1) 전기 1 kWh를 사용했을 때 발생하는 탄소 발자국을 x kg, 도시가스 1 m^3를 사용했을 때 발생하는 탄소 발자국을 y kg이라고 할 때, 다음 표를 완성해 보자.

	전기를 사용했을 때 발생한 탄소 발자국(kg)	도시가스를 사용했을 때 발생한 탄소 발자국(kg)	발생한 탄소 발자국 총량(kg)
지난달	$250x$	$20y$	169
이번 달	$300x$	$50y$	260

(2) 지난달과 이번 달에 발생한 탄소 발자국을 연립방정식으로 나타내 보자. $\begin{cases} 250x+20y=169 \\ 300x+50y=260 \end{cases}$

(3) (2)에서 세운 연립방정식을 풀어 보자. $x=0.5$, $y=2.2$

풀이 연립방정식 $\begin{cases} 250x+20y=169 \\ 300x+50y=260 \end{cases}$을 풀면 $x=0.5$, $y=2.2$이다. 따라서 전기 1 kWh를 사용했을 때 발생하는 탄소 발자국은 0.5 kg이고, 도시가스 1 m^3를 사용했을 때 발생하는 탄소 발자국은 2.2 kg이다.

2 지혜네 가족과 시아네 가족은 나무 심기 캠페인에 참여하여 신갈나무와 낙엽송을 각각 심었다. 20년 후 각 가족이 심은 나무가 일 년 동안 흡수하는 이산화탄소의 양을 조사했더니 다음 표와 같았다. 20년생 신갈나무와 낙엽송 한 그루가 일 년 동안 흡수하는 이산화탄소의 양을 각각 구해 보자. 신갈나무: 9 kg, 낙엽송: 5.8 kg

	신갈나무(그루)	낙엽송(그루)	흡수한 이산화탄소의 양(kg)
지혜네 가족	3	1	32.8
시아네 가족	2	3	35.4

풀이 20년생 신갈나무 한 그루가 일 년 동안 흡수하는 이산화탄소의 양을 x kg, 낙엽송 한 그루가 일 년 동안 흡수하는 이산화탄소의 양을 y kg라 하고, 연립방정식을 세우면 다음과 같다. $\begin{cases} 3x+y=32.8 \\ 2x+3y=35.4 \end{cases}$
연립방정식을 풀면 $x=9$, $y=5.8$이다. 따라서 20년생 신갈나무 한 그루가 일 년 동안 흡수하는 이산화탄소의 양은 9 kg, 낙엽송 한 그루가 일 년 동안 흡수하는 이산화탄소의 양은 5.8 kg이다.

3 **1**, **2**의 활동을 보고, 지난해 우리 집의 전기, 도시가스 사용량에 따른 이산화탄소 배출량을 알아보자. 그리고 배출되는 이산화탄소를 모두 흡수하기 위해서는 20년생 신갈나무가 몇 그루 이상 있어야 하는지 구해 보자. 풀이 참조

풀이 |예시| 지난해 우리 집에서 사용한 전기 사용량은 4200 kWh, 도시가스 사용량은 480 m^3이므로 지난해 우리 집에서 발생한 탄소 발자국은 $4200\times0.5+480\times2.2=3156$(kg)이다. 20년생 신갈나무 한 그루가 일 년 동안 흡수하는 이산화탄소량은 9 kg이므로 $3156\div9=350.666\cdots$ 이다. 따라서 우리 집에서 발생한 탄소 발자국을 모두 흡수하기 위해서는 20년생 신갈나무가 351그루 이상 있어야 한다.

4 생활 속에서 탄소 발자국을 줄이기 위한 실천 방안을 찾아보고, 이를 환경 카드 뉴스로 만들어 보자. 풀이 참조

풀이 |예시| 생활 속에서 탄소 발자국을 줄이기 위한 실천 방안에는 적정 실내 온도 유지하기와 텀블러 사용하기 등이 있다.

| 상호 평가표 |

	평가 내용	자기 평가	친구 평가
내용	주어진 상황을 연립방정식으로 나타낼 수 있다.		
내용	연립방정식을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다.		
태도	탄소 발자국을 연립방정식으로 나타냄으로써 수학의 가치를 인식했다.		

스스로 마무리하기

생각 완성하기

● 각 단원의 내용을 정리하여 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

01 연립일차방정식

• 미지수가 2개인 일차방정식
$2x+y=7$(단, x, y는 자연수)

x	1	2	3
y	5	3	1

→ $x=1$, $y=5$
또는 $x=2$, $y=3$
또는 $x=3$, $y=1$

02 연립일차방정식의 풀이

• 연립방정식의 풀이(1)

$$\begin{cases} 3x+y=50 & \cdots\cdots ① \\ y=2x & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②를 ①에 대입
$3x+2x=50$, $5x=50$,
$x=10$
$x=10$을 ②에 대입
$y=2\times10=20$

• 연립방정식의 풀이(2)

$$\begin{cases} 2x+3y=60 & \cdots\cdots ① \\ 2x+y=40 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①−②를 하면
$2y=20$, $y=10$
$y=10$을 ②에 대입
$2x+10=40$, $2x=30$,
$x=15$

1 다음 문장을 미지수가 2개인 일차방정식으로 나타내시오.

(1) 3점짜리 문제 a개와 4점짜리 문제 b개를 맞혀 90점을 받았다. $3a+4b=90$

(2) x cm인 승연이의 키는 y cm인 지선이의 키보다 2 cm 더 크다. $x=y+2$

2 다음 중에서 미지수가 2개인 일차방정식을 모두 고르면? ①, ③

① $x-5=2(x-3y)$

② $2x-y+1$

③ $3y-4x-1=0$

④ $x+y^2-7=0$

⑤ $x-2y-6=2(x-y)$

풀이 ① $-x+6y-5=0$이므로 미지수가 2개인 일차방정식이다.
② 다항식 $2x-y+1$은 방정식이 아니다.
③ $3y-4x-1=0$이므로 미지수가 2개인 일차방정식이다.
④ y^2항이 있으므로 일차방정식이 아니다.
⑤ $-x-6=0$이므로 미지수가 1개인 일차방정식이다.
따라서 미지수가 2개인 일차방정식은 ①, ③이다.

3 다음 보기의 일차방정식 중에서 $x=1$, $y=-2$가 해인 것을 모두 고르시오. ㄱ, ㄷ, ㄹ

보기
ㄱ. $x-y=3$　　ㄴ. $x+2y=5$
ㄷ. $2x+3y=-4$　　ㄹ. $3x+y=1$

풀이 $x=1$, $y=-2$를 주어진 일차방정식에 대입하면
ㄱ. $1-(-2)=3$　　ㄴ. $1+2\times(-2)\neq5$
ㄷ. $2\times1+3\times(-2)=-4$　　ㄹ. $3\times1+(-2)=1$
이다. 따라서 $x=1$, $y=-2$가 해인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

4 다음 연립방정식 중에서 $x=-1$, $y=3$이 해인 것은? ④

① $\begin{cases} 3x-y=0 \\ x+2y=5 \end{cases}$　　② $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-2y=-5 \end{cases}$

③ $\begin{cases} x-2y=-1 \\ x-y=-4 \end{cases}$　　④ $\begin{cases} x-y=-4 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} x+y=2 \\ x+2y=3 \end{cases}$

풀이 $x=-1$, $y=3$을 연립방정식의 두 일차방정식에 대입했을 때, 등식이 모두 참이 되게 하는 것을 찾으면
④ $\begin{cases} -1-3=-4 \\ 2\times(-1)+3=1 \end{cases}$
이다. 따라서 $x=-1$, $y=3$이 해인 것은 ④이다.

풀이 이안 : ①의 양변에 3을 곱하면

$\begin{cases} 9x+3y=12 & \cdots\cdots ③ \\ 4x-3y=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

이다. 이때 ③과 ②를 변끼리 더하면 y를 없애서 풀 수 있다.

지우 : y를 없애기 위해 ①에서 y를 x에 대한 식으로 나타내면 $y=-3x+4$이다.

5 일차방정식 $4x+y=23$을 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는? ⑤

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

풀이 일차방정식 $4x+y=23$을 만족시키는 자연수 x, y의 값은 다음과 같다.

x	1	2	3	4	5
y	19	15	11	7	3

따라서 x, y가 자연수일 때, 일차방정식 $4x+y=23$의 해는 $(1, 19)$, $(2, 15)$, $(3, 11)$, $(4, 7)$, $(5, 3)$의 5개이다.

6 다음 연립방정식을 푸시오. $x=-2$, $y=4$

$$\begin{cases} 3x+2y=2 \\ y=-5x-6 \end{cases}$$

풀이 $\begin{cases} 3x+2y=2 & \cdots\cdots ① \\ y=-5x-6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

②를 ①에 대입하면 $3x+2(-5x-6)=2$, $x=-2$이고, $x=-2$를 ②에 대입하면 $y=4$이다.

7 다음은 연립방정식 $\begin{cases} 3x+y=4 & \cdots\cdots ① \\ 4x-3y=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$의 풀이에 대한 학생들의 대화이다. 옳게 설명한 학생을 모두 찾으시오. 이안, 누리


이안: ①의 양변에 3을 곱한 식과 ②를 변끼리 더하면 y를 없애서 풀 수 있어.


지우: ①을 $y=3x+4$로 변형한 다음 ②에 대입해서 풀면 돼.


누리: ①의 양변에 4를 곱한 식과 ②의 양변에 3을 곱한 식을 변끼리 빼면 x를 없애서 풀 수 있어.

누리 : ①의 양변에 4를 곱하고, ②의 양변에 3을 곱하면

$\begin{cases} 12x+4y=16 & \cdots\cdots ④ \\ 12x-9y=3 & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$

이다. 이때 ④에서 ⑤를 변끼리 빼면 x를 없애서 풀 수 있다.

따라서 옳게 설명한 학생은 이안, 누리이다.

8 연립방정식 $\begin{cases} ax-y=-6 \\ 3x+y=-1 \end{cases}$을 만족시키는 y의 값이 2일 때, 상수 a의 값을 구하시오. 4

풀이 $y=2$를 주어진 연립방정식에 대입하면

$\begin{cases} ax-2=-6 & \cdots\cdots ① \\ 3x+2=-1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

이다. ②에서 $3x=-1-2$, $x=-1$이고, $x=-1$을 ①에 대입하면 $-a-2=-6$, $a=4$이다.

9 일차방정식 $4x+5y=46$을 만족시키는 x, y의 값 중에서 $x:y=2:3$인 x, y의 값을 각각 구하시오. $x=4$, $y=6$

풀이 $x:y=2:3$에서 $3x=2y$, 즉, $3x-2y=0$이다.

$\begin{cases} 3x-2y=0 & \cdots\cdots ① \\ 4x+5y=46 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①의 양변에 5를 곱하고, ②의 양변에 2를 곱하면

$\begin{cases} 15x-10y=0 & \cdots\cdots ③ \\ 8x+10y=92 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$

이다. ③과 ④를 변끼리 더하면 $23x=92$, $x=4$이고, $x=4$를 ①에 대입하면 $3\times4-2y=0$, $y=6$이다.

10 다음 연립방정식을 푸시오. $x=\frac{1}{2}$, $y=-2$

$$\begin{cases} 2(x-y)+8=3-5y \\ 4x-(2x+2y)=5 \end{cases}$$

풀이 주어진 연립방정식의 괄호를 풀고 동류항끼리 정리하면

$\begin{cases} 2x+3y=-5 & \cdots\cdots ① \\ 2x-2y=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

이다. ①에서 ②를 변끼리 빼면 $5y=-10$, $y=-2$이고, $y=-2$를 ①에 대입하면 $2x+3\times(-2)=-5$, $x=\frac{1}{2}$이다.

11 연립방정식 $\begin{cases} 0.3x+0.4y=3.4 \\ \frac{x-2}{6}+\frac{2}{3}y=2 \end{cases}$의 해가 일차방정식 $ax-4y-6=0$의 해일 때, 상수 a의 값은? ①

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

풀이 $\begin{cases} 0.3x+0.4y=3.4 & \cdots\cdots ① \\ \frac{x-2}{6}+\frac{2}{3}y=2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①의 양변에 10을 곱하면 $3x+4y=34$ $\cdots\cdots$ ③이고, ②의 양변에 6을 곱하고, 동류항끼리 정리하면 $x+4y=14$ $\cdots\cdots$ ④이다. ③에서 ④를 변끼리 빼면 $2x=20$, $x=10$이고, $x=10$을 ④에 대입하면 $10+4y=14$, $y=1$이다. $x=10$, $y=1$을 일차방정식 $ax-4y-6=0$에 대입하면 $10a-4-6=0$, $a=1$이다.

12 작년 누리네 중학교의 1, 2학년 전체 학생은 410명이었다. 올해는 작년에 비하여 1학년 학생 수가 5 % 감소하고, 2학년 학생 수가 10 % 증가하여 1, 2학년 전체 학생은 11명 증가하였다. 올해 누리네 중학교의 1학년 학생 수를 구하시오. 190

풀이 작년 누리네 중학교의 1학년 학생 수를 x, 2학년 학생 수를 y라고 하면 1, 2학년 전체 학생이 410명이었으므로

$x+y=410$ $\cdots\cdots$ ①이다. 또,

(올해 감소한 1학년 학생 수) $=x\times\frac{5}{100}=\frac{5}{100}x$

(올해 증가한 2학년 학생 수) $=y\times\frac{10}{100}=\frac{10}{100}y$

이고, 올해 1, 2학년 전체 학생이 11명 증가했으므로

$-\frac{5}{100}x+\frac{10}{100}y=11$ $\cdots\cdots$ ②

①, ②를 연립하여 풀면 $x=200$, $y=210$이다. 따라서 올해 누리네 중학교의 1학년 학생 수는 $200-\frac{5}{100}\times200=190$이다.

스스로 마무리하기

서술형 문제

13 다음 두 연립방정식의 해가 서로 같을 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하려고 한다. 풀이 과정과 답을 쓰시오. **$a=1$, $b=3$**

$$\begin{cases} ax+by=-11 \\ x-y=-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-y=-8 \\ ax-by=1 \end{cases}$$

풀이 연립방정식을 세우면 $\begin{cases} x-y=-3 & \cdots\cdots ① \\ 2x-y=-8 & \cdots\cdots ② \end{cases}$이다. ②에서 ①을 변끼리 빼면 $x=-5$이다. $x=-5$를 ①에 대입하면 $y=-2$이다. $x=-5$, $y=-2$를 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=-11 \\ ax-by=1 \end{cases}$에 대입하면 $\begin{cases} -5a-2b=-11 & \cdots\cdots ③ \\ -5a+2b=1 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$이다. ③과 ④를 변끼리 더하면 $-10a=-10$, $a=1$이고, $a=1$을 ③에 대입하면 $-5-2b=-11$, $2b=6$, $b=3$이다.

채점 기준	배점 비율
(i) 연립방정식의 해를 구한 경우	50 %
(ii) a, b의 값을 구한 경우	50 %

14 두 자리의 자연수가 있다. 각 자리의 숫자의 합은 13이고, 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수는 처음 수보다 9만큼 작다고 할 때, 처음 자연수를 구하려고 한다. 풀이 과정과 답을 쓰시오. **76**

풀이 처음 자연수의 십의 자리 숫자를 x, 일의 자리 숫자를 y라고 하면 각 자리의 숫자의 합은 13이므로 $x+y=13$이다.
이때 각 자리의 숫자를 바꾼 수는 처음 수보다 9만큼 작으므로 $10y+x=(10x+y)-9$이다. 연립방정식을 세우면
$\begin{cases} x+y=13 \\ 10y+x=(10x+y)-9 \end{cases}$이다. 즉, $\begin{cases} x+y=13 & \cdots\cdots ① \\ x-y=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$이다.
①과 ②를 변끼리 더하면 $2x=14$, $x=7$이고, $x=7$을 ①에 대입하면 $7+y=13$, $y=6$이다. 따라서 처음 자연수는 76이다.

채점 기준	배점 비율
(i) 연립방정식을 세운 경우	50 %
(ii) 연립방정식의 해를 구한 경우	30 %
(iii) 처음 자연수를 구한 경우	20 %

사고력 문제

15 연립방정식 $\begin{cases} ax-by=7 \\ bx+ay=-4 \end{cases}$를 푸는데 각 일차방정식에서 x, y의 계수를 서로 바꾸어 놓고 풀었더니 해가 $x=2$, $y=-1$이었다. 처음 연립방정식의 해를 구하시오. (단, a, b는 상수) **$x=-1$, $y=2$**

풀이 x, y의 계수를 서로 바꾸어 놓은 연립방정식 $\begin{cases} -bx+ay=7 \\ ax+by=-4 \end{cases}$에
$x=2$, $y=-1$을 대입하면 $\begin{cases} -a-2b=7 & \cdots\cdots ① \\ 2a-b=-4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$이다. ①의 양변에 2를 곱하면
$-2a-4b=14$ $\cdots\cdots$ ③이다. ②와 ③을 변끼리 더하면 $-5b=10$, $b=-2$이고,
$b=-2$를 ②에 대입하면 $2a-(-2)=-4$, $2a=-6$, $a=-3$이다.
$a=-3$, $b=-2$를 처음 연립방정식
$\begin{cases} ax-by=7 \\ bx+ay=-4 \end{cases}$에 대입하면 $\begin{cases} -3x+2y=7 & \cdots\cdots ④ \\ -2x-3y=-4 & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$이다.
④의 양변에 3을 곱하고, ⑤의 양변에 2를 곱하여 변끼리 더하면
$-13x=13$, $x=-1$이다. $x=-1$을 ④에 대입하면 $3+2y=7$,
$2y=4$, $y=2$이다. 따라서 처음 연립방정식의 해는 $x=-1$, $y=2$이다.

16 어느 놀이공원에 행복 열차, 희망 열차가 있다. 행복 열차는 길이가 500 m인 구간을 완전히 통과하는 데 16초가 걸렸고, 행복 열차보다 길이가 20 m 짧은 희망 열차는 행복 열차의 속력보다 초속 10 m 빠른 속력으로 같은 구간을 완전히 통과하는 데 12초가 걸렸다. 다음 물음에 답하시오.
(단, 두 열차의 속력은 일정하다.)

(1) 행복 열차의 길이를 x m, 속력을 초속 y m로 놓고, 위의 상황을 연립방정식으로 나타내시오. **$\begin{cases} x+500=16y \\ x+480=12(y+10) \end{cases}$**

(2) 행복 열차의 길이와 속력을 각각 구하시오. **길이 : 60 m, 속력 : 초속 35 m**

풀이 (1) 행복 열차의 길이를 x m, 속력을 초속 y m라고 하면 희망 열차의 길이는 $(x-20)$ m이고, 희망 열차의 속력은 초속 $(y+10)$ m이다. 문제의 뜻에 따라 식을 세우면
$\begin{cases} x+500=16y \\ x+480=12(y+10) \end{cases}$이다.
(2) $\begin{cases} x+500=16y & \cdots\cdots ① \\ x+480=12(y+10) & \cdots\cdots ② \end{cases}$
①에서 $x=16y-500$을 ②에 대입하면
$16y-500+480=12(y+10)$, $16y-20=12y+120$, $4y=140$, $y=35$이고,
$y=35$를 ①에 대입하면 $x+500=16\times35$, $x+500=560$, $x=60$이다.
따라서 행복 열차의 길이는 60 m이고, 속력은 초속 35 m이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/xAq0xkPy91TRcHp8

마무리 평가

자신의 학습 태도를 스스로 점검해 보자.

이 단원을 공부하면서 알게 된 것을 써 보자.	이 단원을 공부하면서 어려웠던 점을 쓰고 복습 계획을 세워 보자.

연립방정식을 이용하여 실생활, 사회 및 자연 현상과 관련된 문제를 도전적인 태도로 해결하기 위해 노력했다.	
자신의 생각을 수학적으로 표현하고, 다른 사람의 생각을 이해하려고 노력했다.	
수업 준비를 잘하고 수업 시간에 성실하게 참여했다.	
문제를 풀 때 끈기 있게 도전했다.	

| 정답과 해설 324쪽 |

1 다음 두 연립방정식에서 ㈎의 해는 $x=m$, $y=n$이고 ㈏의 해는 $x=n$, $y=m$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

㈎ $\begin{cases} 3x+y=-1 \\ 4x+by=a \end{cases}$ ㈏ $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ ax+y=b \end{cases}$

2 연립방정식 $\begin{cases} 2^x\times 8^y=32 \\ 9^x\times 3^y=243 \end{cases}$의 해 (x, y)가 일차방정식 $2x-ay+3=0$을 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하시오.

3 어느 인증시험에 응시한 남학생과 여학생 수의 비는 $2:3$, 합격자의 남학생과 여학생 수의 비는 $3:5$, 불합격자의 남학생과 여학생 수는 $3:4$이다. 합격자 수가 80명일 때, 인증시험에 응시한 남학생 수와 여학생 수를 각각 구하시오.

4 오른쪽 표는 호두 1개와 검은콩 1개에 들어 있는 단백질과 지방의 양을 각각 나타낸 것이다. 호두와 검은콩을 통해 단백질 32 g과 지방 26 g을 섭취하려면 호두와 검은콩을 각각 몇 개씩 먹어야 하는지 구하시오.

식품	단백질	지방
호두	2 g	6 g
검은콩	4 g	2 g

V

일차함수

단원 이야기

자연 현상이나 실생활 상황에서 규칙이 있는 두 양 사이의 관계를 찾아 식이나 그래프로 간단히 나타낼 수 있다. 예를 들어 일정한 속력으로 달리는 자동차가 이동한 시간과 거리의 관계는 일차식으로 표현할 수 있다.

이 단원에서는 함수 개념과 함께 일차함수와 그 그래프에 대하여 알아보고, 일차함수와 일차방정식 사이의 관계를 배운다.

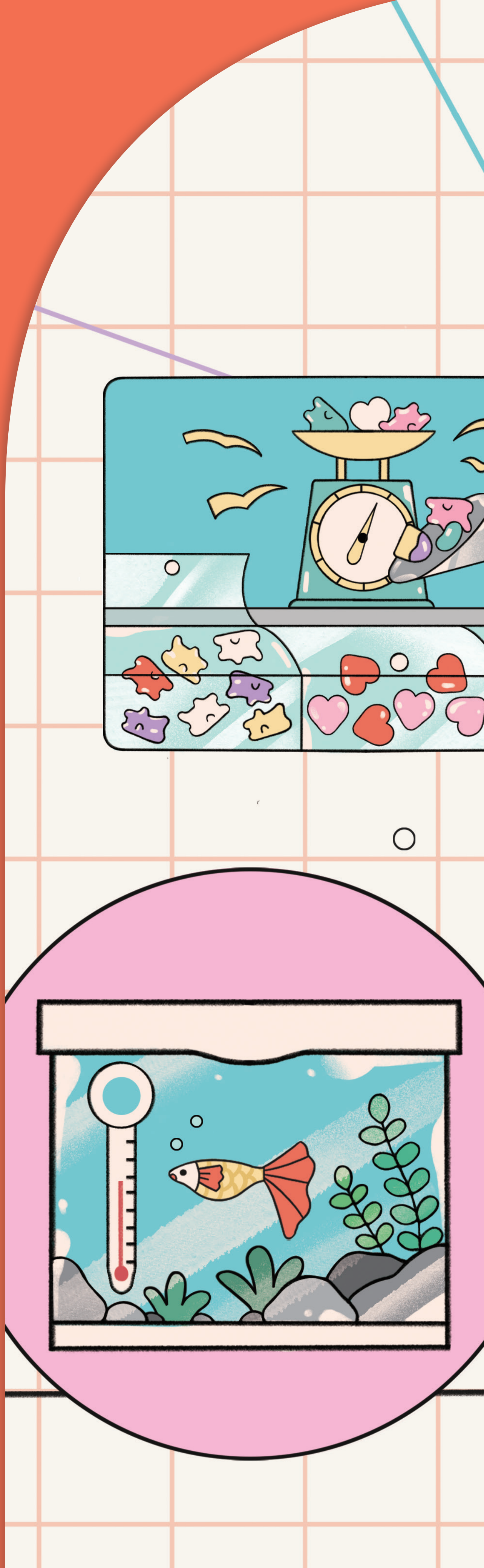
| 배운 내용 |

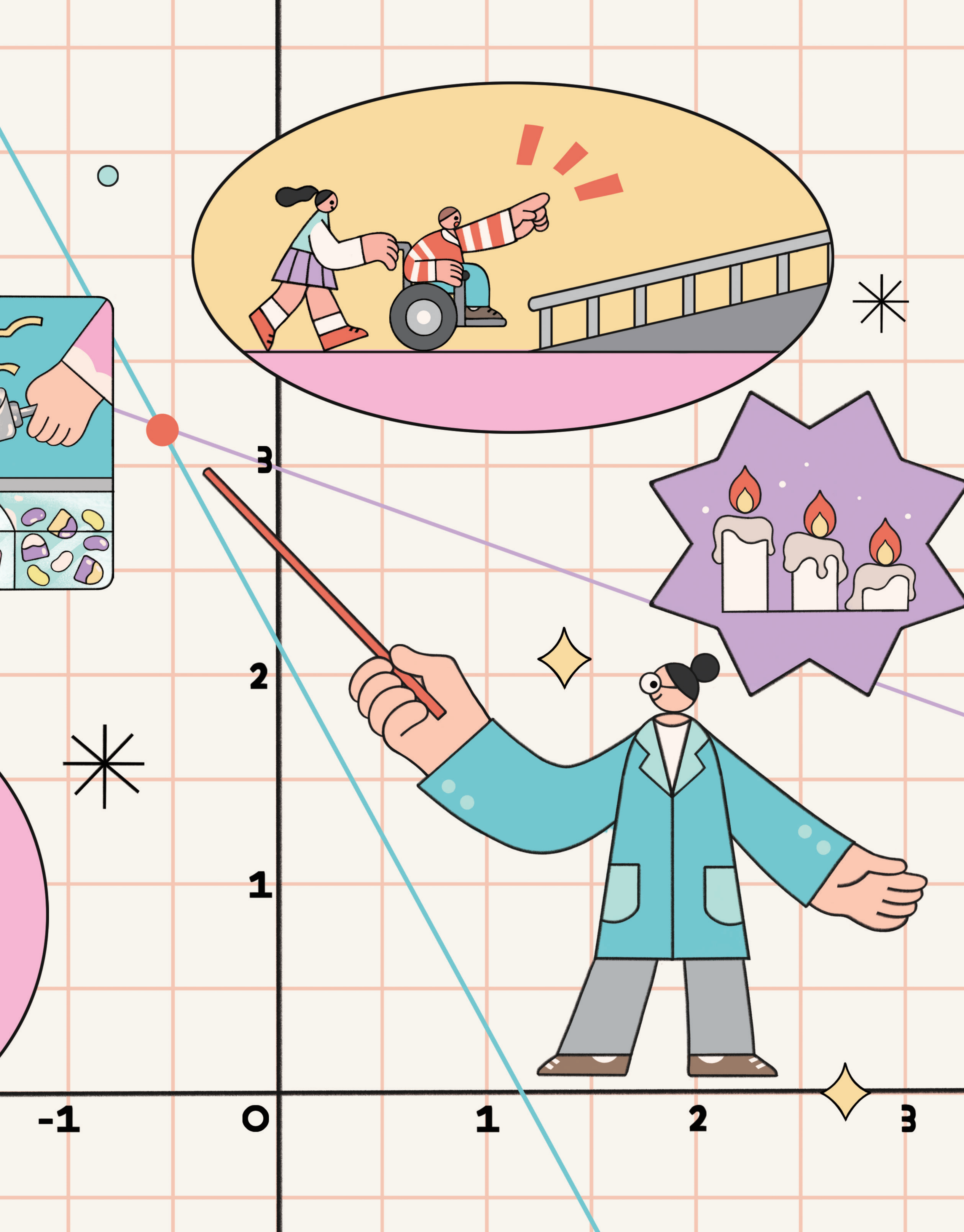
초5~6
- 대응 관계
- 비와 비율
- 비례식과 비례배분

중1
- 일차방정식
- 좌표평면과 그래프

| 이어질 내용 |

중3
- 이차함수와 그 그래프




3
2
1
-1
0
1
2
3

이것만은 알고 가기

중 1 순서쌍과 좌표

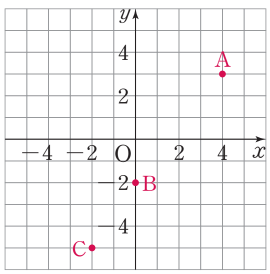
잘함 보통 모름

1 **다음 점의 위치를 오른쪽 좌표평면 위에 나타내시오.**

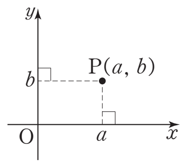
(1) $\mathrm{A}(4,\ 3)$

(2) $\mathrm{B}(0,\ -2)$

(3) $\mathrm{C}(-2,\ -5)$



• 좌표평면 위의 한 점 P에서 x축, y축에 각각 내린 수선과 x축, y축이 만나는 점에 대응하는 수를 각각 a, b라고 할 때, 순서쌍 $(a,\ b)$를 점 P의 좌표라 하고, 이것을 기호 $\mathrm{P}(a,\ b)$로 나타낸다.



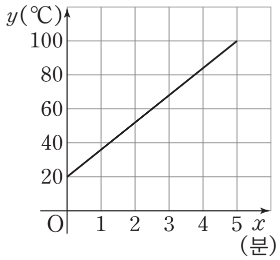
중 1 그래프

잘함 보통 모름

2 **오른쪽 그래프는 냄비에 물을 넣고 끓을 때까지 가열할 때, 가열한 시간에 따른 물의 온도 변화를 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하시오.**

(1) 가열을 시작할 때의 물의 온도는 얼마인지 구하시오. 20 ℃

(2) 물의 온도가 100 ℃가 될 때까지 가열한 시간은 얼마인지 구하시오. 5분



풀이 (1) 그래프 위의 점 $(0,\ 20)$은 가열을 시작할 때의 물의 온도가 20 ℃임을 의미한다.
(2) 그래프 위의 점 $(5,\ 100)$은 물의 온도가 100 ℃가 될 때까지 가열한 시간이 5분임을 나타낸다.

• 서로 관계가 있는 두 변수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 모두 나타낸 것을 그래프라고 한다.

중 1 정비례

잘함 보통 모름

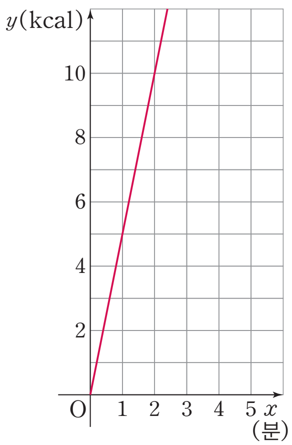
3 **일정한 속도로 1분 동안 계단을 오르면 5 kcal의 열량이 소모된다고 한다. 계단을 오르는 시간을 x분, 소모한 열량을 y kcal라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.**

(1) 표를 완성하시오.

x(분)	0	1	2	3	4	⋯
y(kcal)	0	5	10	15	20	⋯

(2) x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내시오. $y=5x$

(3) x와 y 사이의 관계를 오른쪽 좌표평면 위에 그래프로 나타내시오.



• 정비례 관계의 그래프는 원점 O와 그래프가 지나는 또 다른 한 점을 찾아 직선으로 이으면 쉽게 그릴 수 있다.

01

함수의 뜻

이 단원에서 배우는 용어와 기호
함수, 함숫값,
$y=f(x)$, $f(x)$

[**학습 목표**] 함수의 개념을 이해하고, 함숫값을 구할 수 있다.

함수는 무엇일까?

생각 펼치기

인성 교육

상원이네 가족은 난민 아동을 후원하기 위해 국제 난민 기구에 매월 2만 원씩 기부금을 보내고 있다. x개월 동안 보낸 기부금을 y만 원이라고 할 때, 다음 물음에 답해 보자.

1. x의 각 값에 대응하는 y의 값을 구하여 다음 표를 완성해 보자.

x(개월)	1	2	3	4	5	$\cdots$
y(만 원)	2	4	6	8	10	$\cdots$

2. x의 값이 변함에 따라 그에 대응하는 y의 값은 각각 몇 개로 정해지는지 말해 보자. 풀이 참조

풀이 x의 값이 1, 2, 3, 4, 5, … 로 변함에 따라 그에 대응하는 y의 값이 2, 4, 6, 8, 10, … 으로 각각 하나씩 정해진다.

함수

생각 펼치기 의 표에서 x의 값이 1, 2, 3, 4, 5, … 로 변함에 따라 그에 대응하는 y의 값이 2, 4, 6, 8, 10, … 으로 각각 하나씩 정해진다.

변수는 여러 가지로 변하는 값을 나타내는 문자를 말한다.

이와 같이 두 변수 x, y에 대하여 x의 값이 변함에 따라 y의 값이 각각 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계가 성립할 때, y를 x의 **함수**라고 한다.

확인하기

(1) 시속 60 km로 달리는 자동차가 x시간 동안 이동한 거리를 y km라고 할 때, x와 y 사이의 대응 관계를 표로 나타내면 다음과 같다.

x(시간)	1	2	3	4	$\cdots$
y(km)	60	120	$\boxed{180}$	$\boxed{240}$	$\cdots$

이때 x의 값이 변함에 따라 y의 값이 각각 하나씩 정해지는 대응 관계가 성립하므로 y는 x의 함수(이다, 가 아니다).

(2) 자연수 x의 약수를 y라고 할 때, x와 y 사이의 대응 관계를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	2	3	4	$\cdots$
y	1	1, 2	1, $\boxed{3}$	1, $\boxed{2}$, 4	$\cdots$

이때 x의 값 하나에 y의 값이 하나씩 정해지지 않으므로 y는 x의 함수(이다, 가 아니다).

라이프니츠(Leibniz, G. W., 1646~1716)는 독일의 수학자로, 함수라는 용어를 도입하였다. (출처: 고상숙 외 1인 『청소년을 위한 서양수학사』)

1 **다음 두 변수 x, y에 대하여 y가 x의 함수인지 알아보고, 그 이유를 말하시오.**

(1) 200쪽짜리 소설책을 x쪽 읽었을 때 남은 쪽수 y y는 x의 함수이다.

(2) 넓이가 24 cm^2인 직사각형의 가로의 길이 x cm와 세로의 길이 y cm y는 x의 함수이다.

(3) 자연수 x보다 작은 소수 y y는 x의 함수가 아니다.

풀이 (1) y는 x의 함수이다. x의 값이 변함에 따라 y의 값이 각각 하나씩 정해진다.
(2) y는 x의 함수이다. x의 값이 변함에 따라 y의 값이 각각 하나씩 정해진다.
(3) y는 x의 함수가 아니다. 자연수 4보다 작은 소수는 2, 3이므로 $x=4$일 때, y의 값이 하나로 정해지지 않는다.

함숫값은 무엇일까?

함숫값

정비례 관계 $y=5x$에서 x의 값이 1, 2, 3, … 으로 변함에 따라 y의 값은 5, 10, 15, … 로 하나씩 정해지는 대응 관계가 성립하므로 y는 x의 함수이다. 또, 반비례 관계 $y=\frac{6}{x}$(단, $x\neq0$)에서 x의 값이 1, 2, 3, … 으로 변함에 따라 y의 값은 6, 3, 2, … 로 하나씩 정해지는 대응 관계가 성립하므로 y는 x의 함수이다.

Tip $f(x)$는 y의 값으로 $y=f(x)$와는 다르다. 또한, 함숫값 $f(x)$를 함수로 생각하지 않도록 주의한다.

식 $y=5x$, $y=\frac{6}{x}$(단, $x\neq0$)과 같이 두 변수 x, y에 대하여 y가 x의 함수일 때, 이것을 기호

$$y=f(x)$$

와 같이 나타낸다.

함수 $y=f(x)$에서 f는 함수를 뜻하는 function의 첫 글자이다.

예를 들어 함수 $y=5x$는 $f(x)=5x$로 나타내기도 한다.

또한, 함수 $y=f(x)$에서 x의 값에 따라 하나씩 정해지는 y의 값 $f(x)$를 x에 대한 **함숫값**이라고 하며, 이것을 기호

$$f(x)$$

와 같이 나타낸다.

예를 들어 함수 $y=5x$에서 x의 값이 1, 2, 3일 때의 함숫값은

$x=1$일 때, $f(1)=5\times1=5$

$x=2$일 때, $f(2)=5\times2=10$

$x=3$일 때, $f(3)=5\times3=15$

이다.

코시(Cauchy, A. L., 1789~1857)는 프랑스의 수학자로, 두 개의 변수 x와 y 사이에 어떤 관계가 있어서 x의 값이 정해진 다음 y의 값이 정해질 때, y를 x의 함수라고 정의했다.
(출처: 고상숙 외 1인, 『청소년을 위한 서양수학사』)

확인하기

함수 $f(x)=\frac{12}{x}$ (단, $x\neq0$)에서 $x=2$일 때의 함숫값은 $f(2)=\frac{12}{\boxed{2}}=\boxed{6}$이고, $x=-3$일 때의 함숫값은 $f(-3)=\frac{12}{\boxed{-3}}=\boxed{-4}$이다.

2 함수 $y=f(x)$가 다음과 같을 때, $f(5)$, $f(-3)$의 값을 각각 구하시오.

(1) $f(x)=20x$ (2) $f(x)=\dfrac{15}{x}$ (3) $f(x)=5-2x$

$f(5)=100$, $f(-3)=-60$ $f(5)=3$, $f(-3)=-5$ $f(5)=-5$, $f(-3)=11$

풀이 (1) $f(5)=20\times5=100$, $f(-3)=20\times(-3)=-60$

(2) $f(5)=\dfrac{15}{5}=3$, $f(-3)=\dfrac{15}{-3}=-5$

(3) $f(5)=5-2\times5=-5$, $f(-3)=5-2\times(-3)=11$

함께 해 보기 1

음식물 쓰레기 종량제 기기는 음식물 쓰레기를 버리면 전자저울에 의해 배출량이 자동 측정되어 버린 만큼 요금을 부과하는 장치이다.

어느 공동 주택에서 사용하는 음식물 쓰레기 종량제 기기는 음식물 쓰레기 배출량 1 kg당 70원의 요금을 부과한다고 한다. 음식물 쓰레기 배출량을 x kg, 배출량에 따른 요금을 y원이라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) y가 x의 함수인지 알아보고, 그 이유를 말하시오.

(2) $y=f(x)$라고 할 때, $f(x)$를 구하시오.

(3) $f(15)$의 값을 구하고, 이 값이 무엇을 의미하는지 말하시오.

풀이 (1) y는 x의 함수이다. x의 값이 1, 2, 3, … 으로 변함에 따라 y의 값이 70, 140, 210, … 으로 각각 하나씩 정해지는 대응 관계가 성립하므로 y는 x의 함수이다.

(2) x와 y 사이의 관계식은 $y=70x$이므로 $f(x)=70x$이다.

(3) $f(x)=70x$이므로 $f(15)=70\times15=1050$이다. 이것은 음식물 쓰레기 배출량이 15 kg일 때의 요금이 1050원임을 의미한다.

답 (1) 함수이다, 풀이 참조 (2) $f(x)=70x$ (3) $f(15)=1050$, 풀이 참조

3 현서는 젤리 가게에서 100 g당 4300원에 판매하는 젤리를 구입하려고 한다. 현서가 구입한 젤리의 무게를 x g, 지불한 가격을 y원이라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) y가 x의 함수인지 알아보고, 그 이유를 말하시오. 풀이 참조

(2) $y=f(x)$라고 할 때, $f(x)$를 구하시오. $f(x)=43x$

(3) $f(300)$의 값을 구하고, 이 값이 무엇을 의미하는지 말하시오. 풀이 참조

풀이 (1) y는 x의 함수이다. x의 값이 변함에 따라 y의 값이 각각 하나씩 정해진다.

(2) x와 y 사이의 관계식은 $y=43x$이므로 $f(x)=43x$이다.

(3) $f(300)=43\times300=12900$이다. 이것은 구입한 젤리의 무게가 300 g일 때, 지불한 가격이 12900원임을 의미한다.

생각 더 나아가기 문제 해결 · 의사소통 · 연결

우리 주변의 상황에서 두 양 사이의 관계가 함수인 경우를 찾고, 그것이 함수인 이유를 친구와 이야기해 보자. 풀이 참조

풀이 |예시| 1달러가 1350원이고, x달러에 대한 원화를 y원이라고 할 때, x의 값이 변함에 따라 y의 값이 각각 하나씩 정해지는 대응 관계가 성립하므로 y는 x의 함수이다.

스스로 점검하기

1

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 두 변수 x, y에 대하여 y가 x의 함수일 때, 이것을 기호 $\boxed{y=f(x)}$와/과 같이 나타낸다.

(2) 함수 $y=f(x)$에서 x의 값에 따라 하나씩 정해지는 y의 값 $f(x)$를 x에 대한 $\boxed{\text{함숫값}}$(이)라고 한다.

2

다음 보기 중에서 y가 x의 함수인 것을 모두 고르시오. ㄱ, ㄴ

보기

ㄱ. 한 개에 1500원 하는 과자 x개의 가격 y원

ㄴ. 동생의 나이가 x살이고, 누나가 동생보다 2살 더 많을 때, 누나의 나이 y살

ㄷ. 절댓값이 자연수 x인 수 y

ㄹ. 자연수 x의 배수 y

풀이 ㄱ, ㄴ은 모두 x의 값이 변함에 따라 y의 값이 각각 하나씩 정해지므로 y는 x의 함수이다.
ㄷ, ㄹ은 모두 x의 값 하나에 y의 값이 하나씩 정해지지 않으므로 y는 x의 함수가 아니다.

3

정가가 x원인 신발의 20 % 할인된 가격을 y원이라고 하면 y는 x의 함수이다. 이 함수를 $y=f(x)$라고 할 때, $f(x)$를 구하시오. $f(x)=\frac{4}{5}x$

풀이 $y=\frac{80}{100}x=\frac{4}{5}x$이고, $y=f(x)$이므로 $f(x)=\frac{4}{5}x$이다.

4

함수 $y=f(x)$가 다음과 같을 때, $f(15)$, $f(-10)$의 값을 각각 구하시오.

(1) $f(x)=-\dfrac{60}{x}$ $f(15)=-4$, $f(-10)=6$

(2) $f(x)=1-2x$ $f(15)=-29$, $f(-10)=21$

풀이 (1) $f(15)=-\frac{60}{15}=-4$, $f(-10)=-\frac{60}{-10}=6$
(2) $f(15)=1-2\times15=-29$, $f(-10)=1-2\times(-10)=21$

5

함수 $f(x)=\dfrac{a}{x}$ (단, $x\neq0$)에 대하여 $f(3)=9$일 때, $f(-3)-f(6)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수) $-\frac{27}{2}$

풀이 $f(x)=\frac{a}{x}$일 때, $f(3)=\frac{a}{3}=9$이므로 $a=27$이다. $f(x)=\frac{27}{x}$이므로 $f(-3)=-9$, $f(6)=\frac{9}{2}$이다. 따라서 $f(-3)-f(6)=-\frac{27}{2}$이다.

6 실생활 연결

높이가 80 cm인 의자가 있다. 이 의자 위에 크기와 모양이 같은 의자를 하나씩 쌓을 때마다 전체 높이는 6 cm씩 일정하게 높아진다고 한다. 이 의자 한 개 위에 x개를 쌓은 전체 높이를 y cm라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) y가 x의 함수인지 알아보고, 그 이유를 말하시오. 풀이 참조

(2) $y=f(x)$라고 할 때, $f(x)$를 구하시오. $f(x)=6x+80$

(3) $f(10)$의 값을 구하고, 이 값이 무엇을 의미하는지 말하시오. 풀이 참조

풀이 (1) y는 x의 함수이다. x의 값이 변함에 따라 y의 값이 각각 하나씩 정해진다.
(2) x와 y 사이의 관계식은 $y=6x+80$이므로 $f(x)=6x+80$이다.
(3) $f(10)=6\times10+80=140$이다.
이것은 의자 한 개 위에 10개를 쌓은 전체 높이가 140 cm임을 의미한다.

https://code.jihak.co.kr/qr/kzi3lhfzC4nBzsTR

자기 평가	
함수의 개념을 이해하고, 함숫값을 구할 수 있다.	
실생활에서 함수 관계를 찾고, 함수의 필요성을 인식할 수 있다.	

02 일차함수와 그 그래프

이 단원에서 배우는 용어와 기호

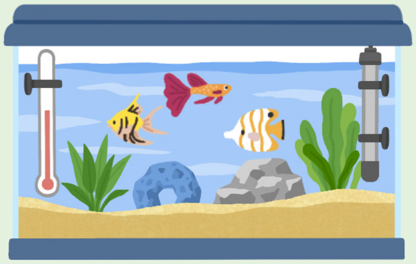
일차함수, 기울기, x절편, y절편, 평행이동

[학습 목표] 일차함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 그릴 수 있다.

일차함수는 무엇일까?

생각 펼치기

물고기를 키울 때에는 어항 속 물의 온도를 적정하게 유지하는 것이 중요하다. 어느 어항에 온도 조절기를 장착하여 가동하였더니 물의 온도가 1시간에 4 ℃씩 일정하게 올라갔다. 처음 물의 온도가 10 ℃인 어항에 이 온도 조절기를 x시간 동안 가동하면 물의 온도가 y ℃라고 할 때, 다음 물음에 답해 보자.



1. 다음 표를 완성해 보자.

x(시간)	0	1	2	3	4	…
y(℃)	10	14	18	22	26	…

2. 변수 x와 y 사이의 대응 관계를 식으로 나타내 보자. $y=4x+10$

풀이 처음 물의 온도가 10 ℃이고, x시간 후에 물의 온도 y ℃는 처음보다 $4x$씩 증가하므로 y를 x에 대한 식으로 나타내면 $y=4x+10$이다.

일차함수

생각 펼치기 에서 처음 물의 온도가 10 ℃이고, 물의 온도가 1시간에 4 ℃씩 일정하게 올라가므로 온도 조절기를 x시간 동안 가동했을 때의 물의 온도를 y ℃라고 하면

$$y=4x+10$$

과 같이 y는 x에 대한 일차식으로 나타난다. 이때 두 변수 x, y에 대하여 x의 값이 변함에 따라 y의 값이 각각 하나씩 정해지는 대응 관계가 성립하므로 y는 x의 함수이다.

일반적으로 함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 대한 일차식

$$y=ax+b\text{(단, } a, b\text{는 상수, } a\neq 0)$$

로 나타날 때, 이 함수를 x에 대한 **일차함수**라고 한다.

개념 쏙

x, $3x$, $-2x+4$, $\frac{x}{3}-4$, … 는 x의 차수가 1이므로 x에 대한 일차식이다.

-10, $\frac{4}{x}+3$, $-x^2+2x$, … 는 x의 차수가 1이 아니므로 x에 대한 일차식이 아니다.

확인하기

(1) 함수 $y=3x+4$는 x에 대한 일차함수(이다, 가 아니다).

(2) 함수 $y=-x$는 x에 대한 일차함수(이다, 가 아니다).

(3) 함수 $y=x^2+1$은 x에 대한 일차함수(이다, 가 아니다).

풀이 (1) y가 x에 대한 일차식 $y=3x+4$이므로 y는 x의 일차함수이다.
(2) y가 x에 대한 일차식 $y=-x$이므로 y는 x의 일차함수이다.
(3) $y=x^2+1$이므로 y는 x의 일차함수가 아니다.

1 다음 중 y가 x의 일차함수인 것을 모두 찾으시오. (1), (3)

(1) $y=-x+3$ (2) $y=\dfrac{1}{x}-4$

(3) $y=\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{3}x$ (4) $y=x-2x^2$

풀이 (1) y가 x에 대한 일차식 $y=-x+3$이므로 y는 x의 일차함수이다.
(2) $y=\frac{1}{x}-4$이므로 y는 x의 일차함수가 아니다.
(3) y가 x에 대한 일차식 $y=\frac{3}{2}+\frac{2}{3}x$이므로 y는 x의 일차함수이다.
(4) $y=x-2x^2$이므로 y는 x의 일차함수가 아니다.

2 다음에서 y를 x에 대한 식으로 나타내고, y가 x의 일차함수인 것을 모두 찾으시오.

(1) 올해 15세인 민주의 x년 후의 나이는 y세이다. $y=x+15$이므로 y는 x의 일차함수이다.

(2) 500원짜리 지우개 한 개와 x원짜리 연필 3자루를 사고 지불한 금액이 y원이다.
$y=3x+500$이므로 y는 x의 일차함수이다.

(3) 반지름의 길이가 x cm인 원의 넓이는 y cm^{2}이다.
$y=\pi x^2$이므로 y는 x의 일차함수가 아니다.

일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 어떻게 그릴까?

생각 펼치기

일차함수 $y=2x+1$에 대하여 다음 물음에 답해 보자.

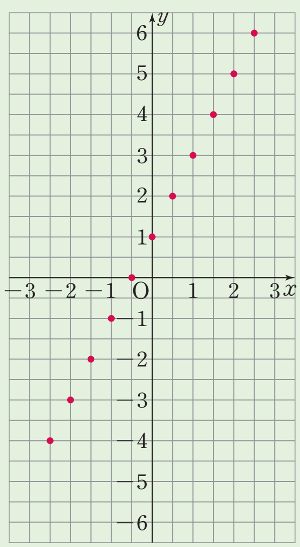
1. 다음 표를 완성하고, 그 순서쌍 (x, y)를 좌표로 하는 점을 오른쪽 좌표평면 위에 나타내 보자.

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
y	$\cdots$	-3	-1	1	3	5	$\cdots$

2. 다음 표를 완성하고, 그 순서쌍 (x, y)를 좌표로 하는 점을 오른쪽 좌표평면 위에 나타내 보자.

x	$\cdots$	-2.5	-1.5	-0.5	0.5	1.5	2.5	$\cdots$
y	$\cdots$	-4	-2	0	2	4	6	$\cdots$

3. x의 값의 범위를 수 전체로 할 때, 일차함수 $y=2x+1$의 그래프가 어떤 모양이 될지 말해 보자.
직선 모양이 될 것이다.

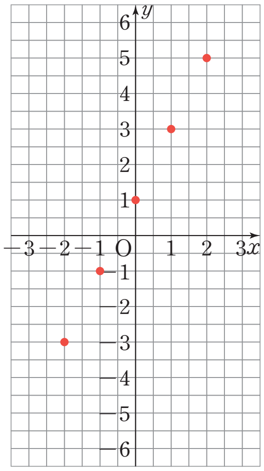


일차함수의 그래프

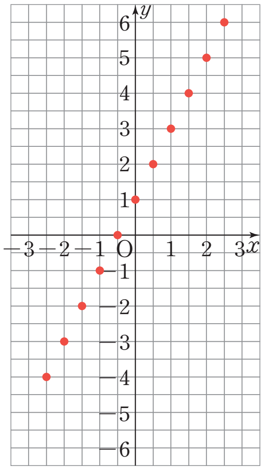
개념 쏙

일차함수의 그래프가 항상 직선이 아닐 수도 있다. 그래프를 그릴 때에는 반드시 x의 값의 범위를 확인해야 한다. x의 값이 수 전체일 때에만 일차함수의 그래프가 직선이 된다.

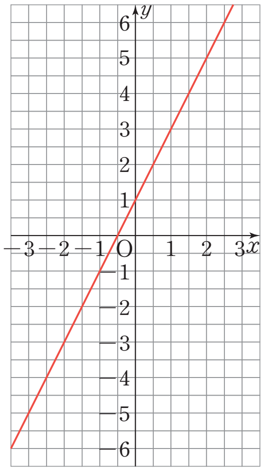
생각 펼치기 에서 x의 값이 -2, -1, 0, 1, 2일 때, 일차함수 $y=2x+1$은 〈그림 1〉과 같이 그래프로 나타낼 수 있다. 이때 x의 값의 간격을 점점 작게 하면 그래프는 〈그림 2〉와 같이 점의 간격도 점점 작아진다. x의 값의 범위를 수 전체로 확대하면 그래프는 〈그림 3〉과 같은 직선이 된다. 이 직선이 일차함수 $y=2x+1$의 그래프이다.



〈그림 1〉



〈그림 2〉



〈그림 3〉

일반적으로 x의 값의 범위가 수 전체일 때, 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 직선이 된다.

이때 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 오직 하나뿐이므로 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 이 그래프가 지나는 서로 다른 두 점을 찾아 직선으로 연결하면 쉽게 그릴 수 있다.

풀이 (1) 일차함수 $y=2x-2$에서 x의 값에 대응하는 y의 값을 구하면 다음 표와 같다.

x	…	-1	…	0	…	1	…
y	…	-4	…	-2	…	0	…

따라서 그래프는 다음 그림과 같다.

(2) 일차함수 $y=-x+3$에서 x의 값에 대응하는 y의 값을 구하면 다음 표와 같다.

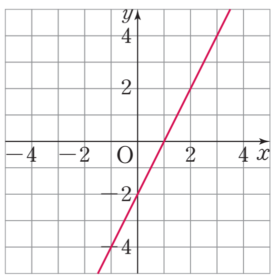
x	…	-1	…	0	…	1	…
y	…	4	…	3	…	2	…

따라서 그래프는 다음 그림과 같다.

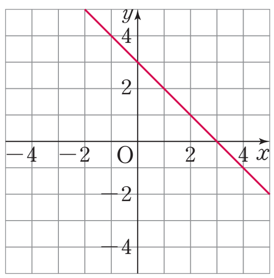
3 다음 일차함수의 그래프를 아래 좌표평면 위에 그리시오.

x의 값이 정해져 있지 않을 때에는 x의 값의 범위가 수 전체일 때로 생각한다.

(1) $y=2x-2$



(2) $y=-x+3$



함께 해 보기 1 일차함수 $y=\frac{1}{2}x+2$의 그래프가 지나는 두 점을 이용하여 그 그래프를 그리시오.

풀이 일차함수 $y=\frac{1}{2}x+2$에서

$x=0$일 때, $y=\frac{1}{2}\times0+2=2$,

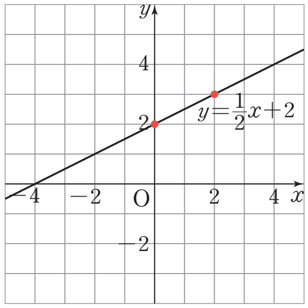
$x=2$일 때, $y=\frac{1}{2}\times2+2=3$

이므로 이 일차함수의 그래프는 두 점

$(0,\ 2)$, $(2,\ 3)$을 지난다.

따라서 일차함수 $y=\frac{1}{2}x+2$의 그래프는

오른쪽 그림과 같이 두 점 $(0,\ 2)$, $(2,\ 3)$을 지나는 직선이다.



답 풀이 참조

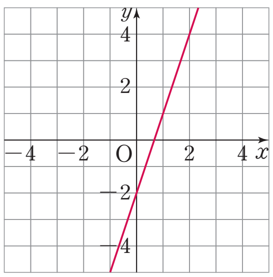
풀이 (1) 일차함수 $y=3x-2$에서 $x=0$일 때 $y=-2$이고, $x=1$일 때 $y=1$이므로 이 일차함수의 그래프는 두 점 $(0,\ -2)$와 점 $(1,\ 1)$을 지나는 직선이다.

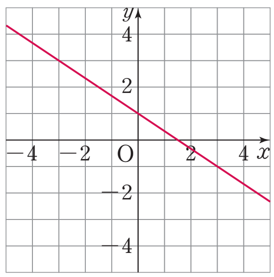
(2) 일차함수 $y=-\frac{2}{3}x+1$에서 $x=0$일 때 $y=1$이고, $x=3$일 때 $y=-1$이므로 이 일차함수의 그래프는 두 점 $(0,\ 1)$과 $(3,\ -1)$을 지나는 직선이다.

4 다음 일차함수의 그래프가 지나는 두 점을 이용하여 그 그래프를 아래 좌표평면 위에 그리시오.

(1) $y=3x-2$

(2) $y=-\frac{2}{3}x+1$





두 일차함수 $y=ax$와 $y=ax+b$의 그래프 사이에는 어떤 관계가 있을까?

생각 펼치기 다음 표는 두 일차함수 $y=2x$, $y=2x+3$에 대하여 x의 각 값에 대응하는 y의 값을 나타낸 것이다. 물음에 답해 보자.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$y=2x$	$\cdots$	-6	-4	-2	0	2	4	6	$\cdots$
$y=2x+3$	$\cdots$	-3	-1	1	3	5	7	9	$\cdots$

1. 위의 표를 완성해 보자.

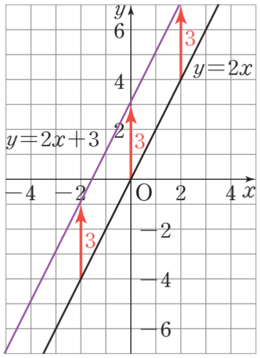
2. x의 각 값에 대하여 두 일차함수 $y=2x$와 $y=2x+3$의 함숫값의 차이를 말해 보자.

3만큼 차이가 난다.

일차함수 $y=ax+b$의 그래프

생각 펼치기 에서 x의 각 값에 대하여 일차함수 $y=2x+3$의 함숫값은 일차함수 $y=2x$의 함숫값보다 항상 3만큼 크다는 것을 알 수 있다.

따라서 일차함수 $y=2x+3$의 그래프는 일차함수 $y=2x$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행하게 이동한 직선이 된다.



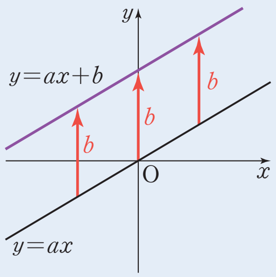
이와 같이 한 도형을 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 옮기는 것을 **평행이동**이라고 한다.

Tip 일차함수 $y=2x-3$의 그래프는 일차함수 $y=2x$의 그래프를 y축의 음의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선으로도 표현할 수 있다.

일반적으로 두 일차함수 $y=ax$와 $y=ax+b$의 그래프 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

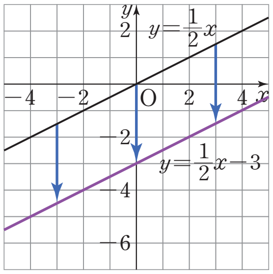
일차함수 $y=ax+b$의 그래프

일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 일차함수 $y=ax$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선이다.



확인하기

일차함수 $y=\frac{1}{2}x-3$의 그래프는 일차함수 $y=\frac{1}{2}x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\boxed{-3}$만큼 평행이동한 직선이다.



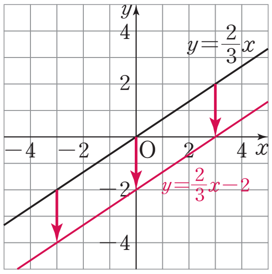
5 다음 일차함수의 그래프는 일차함수 $y=-2x$의 그래프를 y축의 방향으로 얼마만큼 평행이동한 것인지 구하시오.

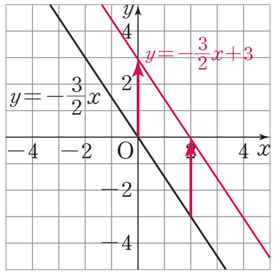
(1) $y=-2x+4$ 4　　　(2) $y=-2x-5$ -5

풀이 (1) $y=-2x+4$의 그래프는 $y=-2x$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동했다.
(2) $y=-2x-5$의 그래프는 $y=-2x$의 그래프를 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동했다.

6 아래 그림은 두 일차함수 $y=\frac{2}{3}x$와 $y=-\frac{3}{2}x$의 그래프이다. 이 그래프를 평행이동하여 다음 일차함수의 그래프를 각각의 좌표평면 위에 그리시오.

(1) $y=\frac{2}{3}x-2$ (2) $y=-\frac{3}{2}x+3$





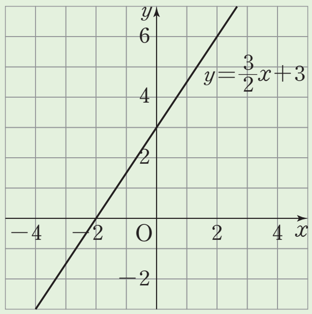
풀이 (1) 일차함수 $y=\frac{2}{3}x-2$의 그래프는 일차함수 $y=\frac{2}{3}x$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선이다.

(2) 일차함수 $y=-\frac{3}{2}x+3$의 그래프는 일차함수 $y=-\frac{3}{2}x$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선이다.

x절편과 y절편은 무엇일까?

생각 펼치기

오른쪽 그림은 일차함수 $y=\frac{3}{2}x+3$의 그래프를 그린 것이다. 다음 물음에 답해 보자.



1. 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표를 구하고, 그 점의 x좌표를 말해 보자. $(-2, 0)$, -2

2. 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표를 구하고, 그 점의 y좌표를 말해 보자. $(0, 3)$, 3

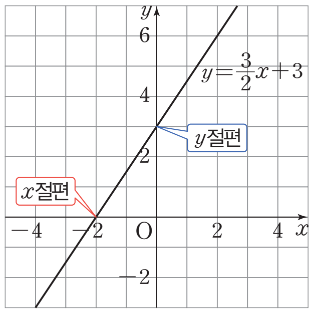
x절편, y절편

개념 쏙

절편: 끊을 절(截), 조각 편(片) —끊어 낸 조각

생각 펼치기에서 일차함수 $y=\frac{3}{2}x+3$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표는 $(-2,\ 0)$이고, 이 점의 x좌표는 -2이다. 또, 이 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ 3)$이고, 이 점의 y좌표는 3이다.

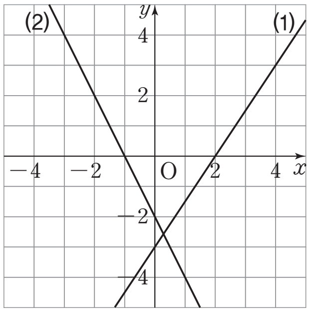
이와 같이 일차함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 이 그래프의 ***x*절편**이라 하고, y축과 만나는 점의 y좌표를 이 그래프의 ***y*절편**이라고 한다.



예를 들어 일차함수 $y=\frac{3}{2}x+3$의 그래프에서 x절편은 -2이고, y절편은 3이다.

7 일차함수의 그래프 (1), (2)가 오른쪽 그림과 같을 때, 두 그래프의 x절편과 y절편을 각각 구하시오.

(1) x절편: 2, y절편: -3
(2) x절편: -1, y절편: -2



풀이 (1) 일차함수의 그래프가 x축과 만나는 점 $(2,\ 0)$의 x좌표는 2이고, y축과 만나는 점 $(0,\ -3)$의 y좌표는 -3이다. 따라서 x절편은 2이고, y절편은 -3이다.
(2) 일차함수의 그래프가 x축과 만나는 점 $(-1,\ 0)$의 x좌표는 -1이고, y축과 만나는 점 $(0,\ -2)$의 y좌표는 -2이다. 따라서 x절편은 -1이고, y절편은 -2이다.

일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 x축과 만나는 점의 y좌표는 0이므로 x절편은 $y=ax+b$에 $y=0$을 대입하여 구할 수 있다.

마찬가지로 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 y축과 만나는 점의 x좌표는 0이므로 y절편은 $y=ax+b$에 $x=0$을 대입하여 구할 수 있다. 이때 $y=b$이므로 y절편은 상수항 b와 같다.

$y=ax+b$
y절편

함께 해 보기 2 일차함수 $y=-\frac{3}{4}x+6$의 그래프의 x절편과 y절편을 각각 구하시오.

개념 쏙
① x절편: $y=0$을 대입했을 때 x의 값
② y절편: $x=0$을 대입했을 때 y의 값

풀이 $y=-\frac{3}{4}x+6$에 $y=0$을 대입하면

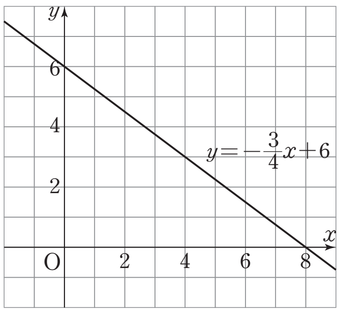
$$0=-\frac{3}{4}x+6,\ \frac{3}{4}x=6,\ x=8$$

이므로 x절편은 8이다.

또, $y=-\frac{3}{4}x+6$에 $x=0$을 대입하면

$$y=-\frac{3}{4}\times 0+6=6$$

이므로 y절편은 6이다.



답 x절편: 8, y절편: 6

풀이 (1) 일차함수 $y=2x+3$에 $y=0$을 대입하면 $x=-\frac{3}{2}$이므로 x절편은 $-\frac{3}{2}$이다. 또, 일차함수 $y=2x+3$에 $x=0$을 대입하면 $y=3$이므로 y절편은 3이다.
(2) 일차함수 $y=\frac{3}{5}x-\frac{9}{5}$에 $y=0$을 대입하면 $x=3$이므로 x절편은 3이다. 또, 일차함수 $y=\frac{3}{5}x-\frac{9}{5}$에 $x=0$을 대입하면 $y=-\frac{9}{5}$이므로 y절편은 $-\frac{9}{5}$이다.

Tip 그래프의 절편을 답할 때 그 표현 방법에 주의를 기울인다.

8 다음 일차함수의 그래프의 x절편과 y절편을 각각 구하시오.

(1) $y=2x+3$ x절편: $-\frac{3}{2}$, y절편: 3

(2) $y=\frac{3}{5}x-\frac{9}{5}$ x절편: 3, y절편: $-\frac{9}{5}$

9 일차함수 $y=ax+5$의 그래프의 x절편이 5일 때, 다음을 구하시오.

(1) y절편 5　　　(2) 상수 a의 값 -1

풀이 (1) 일차함수 $y=ax+5$에 $x=0$을 대입하면 $y=5$이므로 y절편은 5이다.
(2) 일차함수 $y=ax+5$의 그래프의 x절편이 5이므로 이 그래프는 점 $(5, 0)$을 지난다. 일차함수 $y=ax+5$에 $x=5$, $y=0$을 대입하면 $0=5a+5$이므로 $a=-1$이다.

x절편, y절편을 이용하여 일차함수의 그래프 그리기

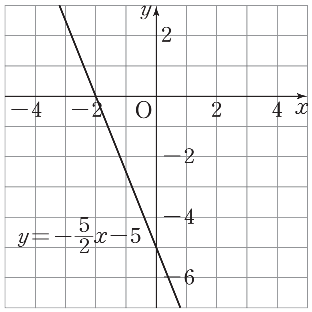
원점을 지나지 않는 일차함수의 그래프의 x절편과 y절편을 알면 이 그래프가 x축, y축과 만나는 두 점을 알 수 있다. 일차함수의 그래프는 직선이므로 이 두 점을 이용하면 일차함수의 그래프를 그릴 수 있다.

원점을 지나는 직선은 원점에서 x축, y축과 동시에 만난다.

함께 해 보기 3 x절편과 y절편을 이용하여 일차함수 $y=-\frac{5}{2}x-5$의 그래프를 그리시오.

풀이 $y=-\frac{5}{2}x-5$에 $y=0$을 대입하면 $x=-2$, $x=0$을 대입하면 $y=-5$이므로 x절편은 -2이고, y절편은 -5이다.

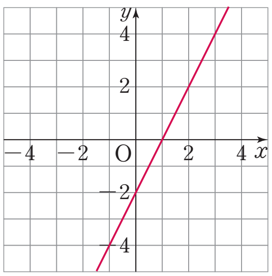
따라서 일차함수 $y=-\frac{5}{2}x-5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-2, 0)$, $(0, -5)$를 지나는 직선이다.

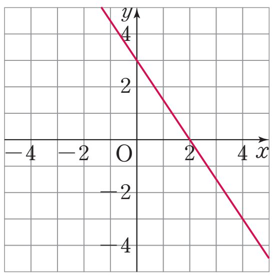


답 풀이 참조

10 x절편과 y절편을 이용하여 다음 일차함수의 그래프를 아래 좌표평면 위에 그리시오.

(1) $y=2x-2$　　　(2) $y=-\frac{3}{2}x+3$





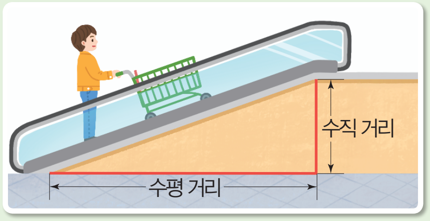
풀이 (1) 일차함수 $y=2x-2$의 그래프의 x절편과 y절편은 각각 1, -2이다. 따라서 일차함수 $y=2x-2$의 그래프는 두 점 $(1, 0)$, $(0, -2)$를 지나는 직선이다.
(2) 일차함수 $y=-\frac{3}{2}x+3$의 그래프의 x절편과 y절편은 각각 2, 3이다. 따라서 일차함수 $y=-\frac{3}{2}x+3$의 그래프는 두 점 $(2, 0)$, $(0, 3)$을 지나는 직선이다.

기울기는 무엇일까?

생각 펼치기

자동보도는 사람이나 화물이 자동적으로 이동할 수 있게 만든 경사진 길 모양의 장치이다.

경사로의 기울어진 정도는 $\dfrac{(\text{수직 거리})}{(\text{수평 거리})}$로 구한다. A 마트와 B 마트에 설치된 자동보도의 수평 거리와 수직 거리가 다음 표와 같을 때, 물음에 답해 보자.



	A 마트	B 마트
수평 거리(m)	40	50
수직 거리(m)	7	10
기울어진 정도	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{5}$

1. 위의 표를 완성해 보자.

2. A 마트와 B 마트 중 어느 마트의 자동보도의 기울어진 정도가 더 큰지 말해 보자. B 마트

풀이 A 마트의 자동보도의 기울어진 정도는 $\frac{7}{40}$이고, B 마트의 자동보도의 기울어진 정도는 $\frac{1}{5}=\frac{8}{40}$이므로 B 마트의 자동보도의 기울어진 정도가 A 마트의 자동보도의 기울어진 정도보다 크다.

기울기

생각 펼치기에서 A 마트의 자동보도의 기울어진 정도는 $\dfrac{7}{40}$이고, B 마트의 자동보도의 기울어진 정도는 $\dfrac{10}{50}=\dfrac{1}{5}=\dfrac{8}{40}$이므로 B 마트의 자동보도의 기울어진 정도가 A 마트의 자동보도의 기울어진 정도보다 크다.

일차함수의 그래프의 기울어진 정도를 나타내는 방법은 다음과 같다.

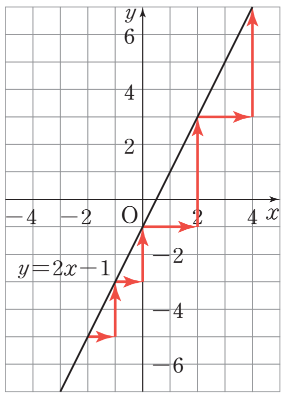
일차함수 $y=2x-1$에서 x의 값에 따라 정해지는 y의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

+1 +1 +2 +2

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	-5	-3	-1	1	3	5	7	$\cdots$

+2 +2 +4 +4

위의 표에서 x의 값이 1만큼 증가하면 y의 값은 2만큼 증가하고, x의 값이 2만큼 증가하면 y의 값은 4만큼 증가함을 알 수 있다.



이때 x의 값의 증가량에 대한 y의 값의 증가량의 비율은

$$\frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\cdots=2$$

로 일정하고, 이 비율은 일차함수 $y=2x-1$에서 x의 계수 2와 같음을 알 수 있다.

개념 쏙

일차함수의 그래프에서
(기울기)=(x의 계수)
(y절편)=(상수항)

일반적으로 일차함수 $y=ax+b$에서 x의 값의 증가량에 대한 y의 값의 증가량의 비율은 항상 일정하며, 그 비율은 x의 계수 a와 같다.

$y=ax+b$
기울기 y절편

이때 이 증가량의 비율 a를 일차함수 $y=ax+b$의 그래프의 **기울기**라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

일차함수의 그래프의 기울기

일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서

$$(\text{기울기})=\frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}=a$$

11 다음 일차함수의 그래프의 기울기를 구하시오.

(1) $y=-x$ -1

(2) $y=2x-3$ 2

(3) $y=-\frac{4}{3}x+\frac{7}{2}$ $-\frac{4}{3}$

(4) $y=1-\frac{5}{2}x$ $-\frac{5}{2}$

Tip 일차함수의 그래프의 기울기를 구하는 경우 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점을 선택하여 구할 수 있다.

12 오른쪽 일차함수의 그래프 (1), (2)의 기울기를 각각 구하시오.

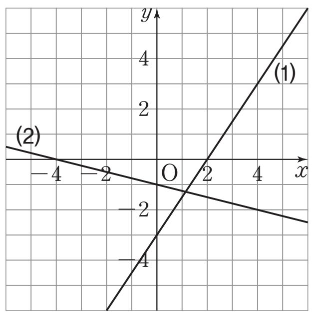
(1) $\frac{3}{2}$, (2) $-\frac{1}{4}$

풀이 (1) 그래프 위의 두 점 $(2,\ 0)$과 $(4,\ 3)$을 이용하여

$(\text{기울기})=\frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}=\frac{3}{2}$이다.

(2) 그래프 위의 두 점 $(-4,\ 0)$과 $(0,\ -1)$을 이용하여

$(\text{기울기})=\frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}=\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}$이다.



기울기와 y절편을 이용하여 일차함수의 그래프 그리기

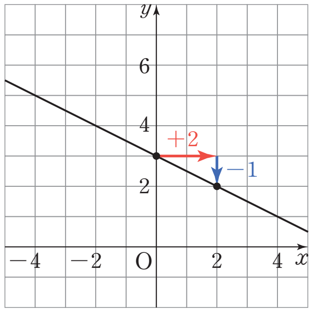
일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서 y절편은 b이므로 점 $(0,\ b)$를 지나고, 기울기가 a이므로 점 $(0,\ b)$로부터 x의 값의 증가량에 대한 y의 값의 증가량의 비율이 a인 또 다른 한 점을 구할 수 있다.

따라서 일차함수의 그래프의 기울기와 y절편을 알면 그 그래프를 그릴 수 있다.

함께 해 보기 4 기울기와 y절편을 이용하여 일차함수 $y=-\frac{1}{2}x+3$의 그래프를 그리시오.

풀이 일차함수 $y=-\frac{1}{2}x+3$의 그래프는 y절편이 3이므로 점 $(0,\ 3)$을 지난다. 또, 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 점 $(0,\ 3)$에서 x축의 방향으로 2만큼 증가하고 y축의 방향으로 1만큼 감소한 점 $(2,\ 2)$를 지난다.

따라서 일차함수 $y=-\frac{1}{2}x+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(0,\ 3)$, $(2,\ 2)$를 지나는 직선이다.



답 풀이 참조

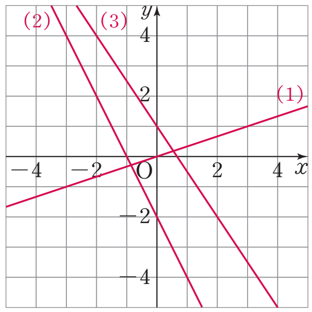
13

기울기와 y절편을 이용하여 다음 일차함수의 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그리시오.

(1) $y=\frac{1}{3}x$

(2) $y=-2x-2$

(3) $y=1-\frac{3}{2}x$



풀이 (1) 일차함수 $y=\frac{1}{3}x$의 그래프는 y절편이 0이므로 점 $(0,\ 0)$을 지난다. 또, 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로 점 $(0,\ 0)$에서 x축의 방향으로 3만큼 증가하고 y축의 방향으로 1만큼 증가한 점 $(3,\ 1)$을 지난다. 따라서 일차함수 $y=\frac{1}{3}x$의 그래프는 두 점 $(0,\ 0)$, $(3,\ 1)$을 지나는 직선이다.

(2) 일차함수 $y=-2x-2$의 그래프는 y절편이 -2이므로 점 $(0,\ -2)$를 지난다. 또, 기울기가 -2이므로 점 $(0,\ -2)$에서 x축의 방향으로 1만큼 증가하고 y축의 방향으로 -2만큼 증가한 점 $(1,\ -4)$를 지난다. 따라서 일차함수 $y=-2x-2$의 그래프는 두 점 $(0,\ -2)$, $(1,\ -4)$를 지나는 직선이다.

(3) 일차함수 $y=1-\frac{3}{2}x$의 그래프는 y절편이 1이므로 점 $(0,\ 1)$을 지난다. 또, 기울기가 $-\frac{3}{2}$이므로 점 $(0,\ 1)$에서 x축의 방향으로 2만큼 증가하고 y축의 방향으로 -3만큼 증가한 점 $(2,\ -2)$를 지난다. 따라서 일차함수 $y=1-\frac{3}{2}x$의 그래프는 두 점 $(0,\ 1)$, $(2,\ -2)$를 지나는 직선이다.

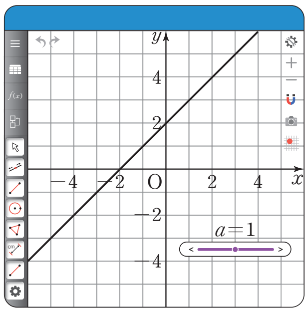
생각 더 나아가기

문제 해결 · 추론 · 정보처리

공학 도구

알지오매스를 이용하여 일차함수 $y=ax+2$의 그래프를 다음 단계에 따라 그려 보고, 물음에 답해 보자.

❶ $f(x)$를 눌러 함수를 입력하는 창에 $y=ax+2$를 입력하자.
❷ 슬라이더를 움직여 a의 값을 변화시켜 보자.



(1) a의 값에 따라 일차함수 $y=ax+2$의 그래프에서 변하는 것을 말해 보자.
그래프의 기울기가 변한다.

(2) a의 값에 상관없이 일차함수 $y=ax+2$의 그래프에서 변하지 않는 것을 말해 보자.
그래프의 모양(직선)과 y절편은 변하지 않는다.

풀이 (1) a의 값에 따라 일차함수 $y=ax+2$의 그래프의 기울기가 변한다는 사실을 알 수 있다. 특히, $a>0$일 때, a의 값이 증가할수록 일차함수 $y=ax+2$의 그래프가 y축에 가까워지는 반면, $a<0$일 때, a의 값이 증가할수록 일차함수 $y=ax+2$의 그래프가 x축에 가까워진다는 사실을 알 수 있다.
(2) 그래프의 모양은 직선 모양으로 변하지 않고, y절편은 2로 변하지 않는다.

https://code.jihak.co.kr/qr/slvXfsDfjG7AFXva

스스로 점검하기

1

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 대한 일차식으로 나타날 때, 이 함수를 x의 [일차함수](이)라고 한다.

(2) 일차함수 $y=ax+b$의 그래프의 기울기는 [a]이고, y절편은 [b]이다.

2

다음 보기 중에서 y가 x의 일차함수인 것을 모두 고르시오. ㄱ, ㄴ

보기

ㄱ. 가로의 길이가 x cm, 세로의 길이가 10 cm인 직사각형의 둘레의 길이는 y cm이다.

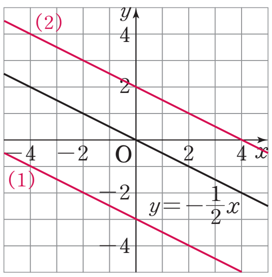
ㄴ. 300석의 좌석이 있는 영화관에 x명의 관람객이 입장하였을 때, 남은 좌석의 수는 y이다.

ㄷ. 자동차가 300 km 떨어진 거리를 시속 x km의 속력으로 y시간 동안 달려 도착하였다.

풀이 (1) y가 x에 대한 일차식 $y=2x+20$으로 나타내어지므로 일차함수이다.
(2) y가 x에 대한 일차식 $y=-x+300$으로 나타내어지므로 일차함수이다.
(3) y가 x에 대한 일차식으로 나타내어지지 않으므로 일차함수가 아니다.

3

오른쪽 그림은 일차함수 $y=-\frac{1}{2}x$의 그래프이다. 이 그래프를 이용하여 다음 일차함수의 그래프를 그리시오.



(1) $y=-\frac{1}{2}x-3$

(2) $y=2-\frac{1}{2}x$

풀이 (1) 일차함수 $y=-\frac{1}{2}x-3$의 그래프는 일차함수 $y=-\frac{1}{2}x$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선이다.
(2) 일차함수 $y=2-\frac{1}{2}x$의 그래프는 일차함수 $y=-\frac{1}{2}x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선이다.

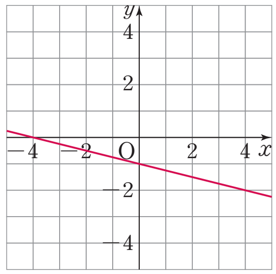
4

일차함수 $y=-\frac{3}{2}x-6$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. 12

풀이 일차함수 $y=-\frac{3}{2}x-6$의 그래프의 x절편과 y절편은 각각 -4, -6이므로 이 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times6=12$이다.

5

기울기와 y절편을 이용하여 일차함수 $y=-\frac{1}{4}x-1$의 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그리시오.

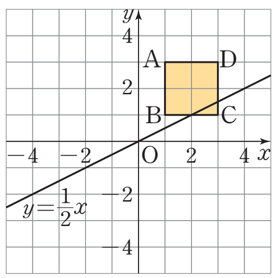


풀이 일차함수 $y=-\frac{1}{4}x-1$의 그래프의 기울기와 y절편은 각각 $-\frac{1}{4}$, -1이므로 점 $(0, -1)$에서 x축 방향으로 4만큼 증가하고 y축 방향으로 -1만큼 증가한 점 $(4, -2)$를 지난다. 따라서 일차함수 $y=-\frac{1}{4}x-1$의 그래프는 두 점 $(0, -1)$, $(4, -2)$를 지나는 직선이다.

6 사고력 UP

추론

오른쪽 그림은 좌표평면 위에 네 점 $A(1, 3)$, $B(1, 1)$, $C(3, 1)$, $D(3, 3)$을 꼭짓점으로 하는 사각형과 일차함수 $y=\frac{1}{2}x$의 그래프를 그린 것이다. 이 사각형과 일차함수 $y=\frac{1}{2}x+b$의 그래프가 만나도록 하는 b의 값의 범위를 구하시오. $-\frac{1}{2}\le b\le\frac{5}{2}$



풀이 일차함수 $y=\frac{1}{2}x+b$의 그래프의 y절편은 b이다.
사각형과 일차함수 $y=\frac{1}{2}x+b$의 그래프가 만나도록 하는 b의 값이 가장 클 때는 점 $A(1, 3)$을 지나는 경우이고, 가장 작을 때는 점 $C(3, 1)$를 지나는 경우이다. 이 두 점의 좌표를 일차함수의 식에 대입하여 풀면 각각 $b=\frac{5}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이다. 따라서 $-\frac{1}{2}\le b\le\frac{5}{2}$이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/KTKiXTo4HkTWc7MG

자기 평가	
일차함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 그릴 수 있다.	
다양한 상황을 일차함수의 식으로 나타내고, 그래프를 그릴 수 있다.	

수학으로 세상 보기

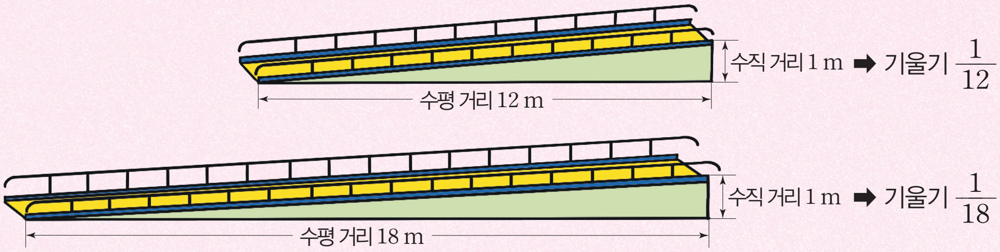
장애인을 위한 경사로

안전·건강 교육

문제 해결 연결

우리 주변에는 계단이 있는 곳에 장애인이 휠체어를 타고 이동할 수 있도록 경사로가 함께 설치되어 있는 경우가 많다. 그러나 경사로가 지나치게 가파르면 휠체어를 타고 경사로를 오르기가 매우 어렵다. 그래서 장애인이 휠체어를 타고 편안하게 이동하기 위해서는 경사로의 기울기에 대한 규정이 필요하다.

우리나라에서는 장애인, 노인, 임산부 등의 편의 증진 보장에 관한 법률 시행 규칙을 통해 장애인 경사로의 기울기는 $\frac{1}{18}$ 이하이어야 한다고 규정하고 있다. 그러나 공간이 협소하고 지형상 이를 지키기 어려운 경우에는 $\frac{1}{12}$ 이하로 기준을 완화할 수 있다.



(출처: 국가법령정보센터, 2023)

다음 물음에 답해 보자.

1 새롬이는 줄자를 이용하여 학교 건물에 있는 경사로의 수평 거리와 수직 거리를 다음과 같이 측정하였다. 새롬이네 학교 건물에 있는 경사로의 기울기를 구하고, 이 경사로가 장애인, 노인, 임산부 등의 편의 증진 보장에 관한 법률 시행 규칙 기준을 만족시키는지 살펴보자. 풀이 참조

풀이 새롬이네 학교 건물에 있는 경사로의 기울기는 $\frac{1}{14}$이다. 장애인 경사로의 기울기는 $\frac{1}{18}$ 이하이어야 하지만, 공간이 협소하고 지형상 이를 지키기 어려운 경우라면 $\frac{1}{12}$ 이하로 기준을 완화할 수 있다. 이때 $\frac{1}{14}<\frac{1}{12}$이므로 장애인, 노인, 임산부 등의 편의 증진 보장에 관한 법률 시행 규칙을 만족시킨다고 할 수 있다.

2 고령자나 장애인이 비장애인과 다름없이 지금보다 더욱 편안한 이동과 문화생활을 누릴 수 있도록 '장애물 없는 생활 환경 인증 제도'가 만들어졌다. 장애인을 위한 경사로의 기울기가 어느 정도이어야 이 제도에서 최우수 등급을 받을 수 있는지 누리 소통망에서 찾아 확인해 보자. 풀이 참조

풀이 경사로의 기울기가 $\frac{1}{24}$ 이하이면 최우수 등급을 받을 수 있다.

Barrier Free 장애물 없는 생활환경

03 일차함수의 그래프의 성질

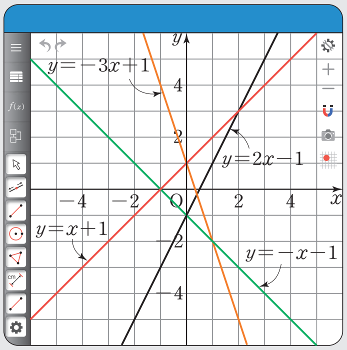
[학습 목표] 일차함수의 그래프의 성질을 이해한다.

일차함수의 그래프의 성질은 무엇일까?

생각 펼치기

공학 도구

오른쪽 그림은 알지오매스를 이용하여 서로 다른 4개의 일차함수의 그래프를 좌표평면 위에 그린 것이다. 다음 물음에 답해 보자.



1. 오른쪽 위로 향하는 그래프를 모두 찾아보고, 그 그래프의 기울기의 공통점을 말해 보자.

$y=x+1$, $y=2x-1$, 기울기가 양수이다.

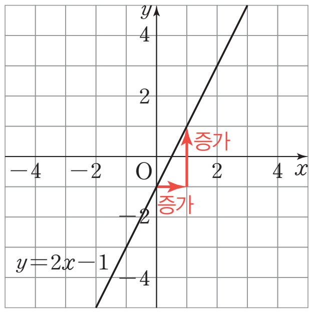
2. 오른쪽 아래로 향하는 그래프를 모두 찾아보고, 그 그래프의 기울기의 공통점을 말해 보자.

$y=-x-1$, $y=-3x+1$, 기울기가 음수이다.

일차함수의 그래프의 성질

생각 펼치기 에서 일차함수 $y=2x-1$의 그래프의 기울기는 2이므로 x의 값이 1만큼 증가할 때, y의 값은 2만큼 증가한다.

따라서 일차함수 $y=2x-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 오른쪽 위로 향하는 직선이다.

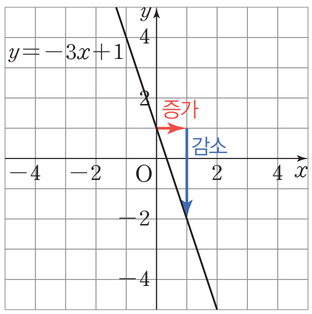


개념 쏙

'x의 값이 증가할 때, y의 값이 감소한다.'='x의 값이 감소할 때, y의 값이 증가한다.'

또한, 일차함수 $y=-3x+1$의 그래프의 기울기는 -3이므로 x의 값이 1만큼 증가할 때, y의 값은 3만큼 감소한다.

따라서 일차함수 $y=-3x+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 오른쪽 아래로 향하는 직선이다.



일반적으로 일차함수 $y=ax+b$의 그래프의 기울기 a가 양수이면 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로 그래프는 오른쪽 위로 향하는 직선이고, 기울기 a가 음수이면 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하므로 그래프는 오른쪽 아래로 향하는 직선이다.

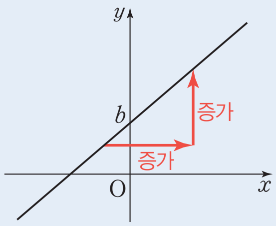
이상을 정리하면 다음과 같다.

일차함수 $y=ax+b$의 그래프

일차함수 $y=ax+b$의 그래프는

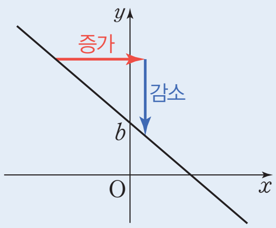
1. $a>0$이면

오른쪽 위로 향하는 직선이다.



2. $a<0$이면

오른쪽 아래로 향하는 직선이다.



확인하기

(1) 일차함수 $y=3x-2$의 그래프는 기울기가 3이므로 오른쪽 (위, 아래)로 향하는 직선이다.

(2) 일차함수 $y=-\frac{1}{2}x+5$의 그래프는 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 오른쪽 (위, 아래)로 향하는 직선이다.

1 다음 일차함수의 그래프 중에서 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가하는 것을 모두 찾으시오. (1), (3)

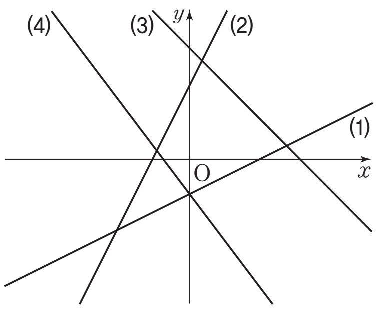
(1) $y=x-1$　(2) $y=-3x+2$

(3) $y=\frac{1}{3}x+2$　(4) $y=-2x-\frac{1}{2}$

풀이 기울기가 양수이면 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가하므로 그래프는 오른쪽 위로 향하는 직선이다. 따라서 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가하는 것은 (1), (3)이다.

2 오른쪽 그림의 (1)~(4)는 일차함수의 그래프이다. 기울기가 음수인 것을 모두 고르시오. (3), (4)

풀이 기울기가 음수이면 오른쪽 아래로 향하는 직선이므로 기울기가 음수인 것은 (3), (4)이다.



기울기가 같은 두 일차함수의 그래프는 어떤 관계가 있을까?

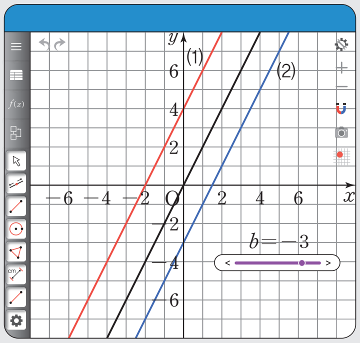
생각 펼치기

공학 도구

알지오매스를 이용하여 다음 단계에 따라 일차함수 $y=2x$, $y=2x+b$의 그래프를 그려 보고, 물음에 답해 보자.

❶ $f(x)$를 눌러 함수를 입력하는 창에 $y=2x$, $y=2x+b$를 입력하자.

❷ 슬라이더를 움직여서 b의 값을 변화시켜 보자.



https://code.jihak.co.kr/qr/HoLptXBULw7jxc31

1. 일차함수 $y=2x+b$의 그래프가 (1)과 (2)처럼 각각 그려질 때, 이 그래프는 일차함수 $y=2x$의 그래프를 y축의 방향으로 각각 얼마만큼 평행이동한 그래프인지 말해 보자. 풀이 참조

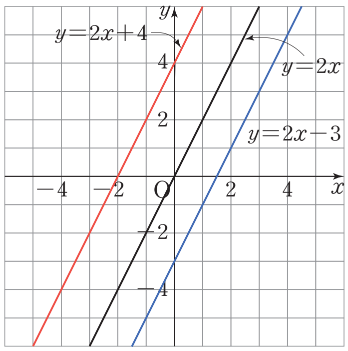
2. 일차함수 $y=2x$와 $y=2x+b$의 그래프는 서로 어떤 관계가 있는지 말해 보자. 풀이 참조

풀이 1. (1)의 경우 y축의 방향으로 4만큼 평행이동하였고, (2)의 경우 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하였다.
2. $y=2x$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였다.

기울기가 같은 두 일차함수의 그래프의 성질

생각 펼치기에서 두 일차함수 $y=2x+4$, $y=2x-3$의 그래프는 일차함수 $y=2x$의 그래프를 y축의 방향으로 각각 4와 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 세 일차함수 $y=2x+4$, $y=2x$, $y=2x-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 서로 평행하다. 이때 세 일차함수의 그래프의 기울기는 모두 2로 같다.



일반적으로 기울기가 같은 두 일차함수의 그래프는 y절편이 다르면 서로 평행하고, y절편이 같으면 일치한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

일차함수의 그래프의 기울기와 평행

1. 기울기가 같은 두 일차함수의 그래프는 서로 평행하거나 일치한다.

2. 서로 평행한 두 일차함수의 그래프의 기울기는 서로 같다.

3 다음 일차함수의 그래프가 서로 평행한 것끼리 짝 지으시오.

(1) $y=3x+4$ • — • (가) $y=-4x-3$

(2) $y=-4x+1$ • — • (나) $y=-\frac{1}{2}x+3$

(3) $y=-\frac{1}{2}x-2$ • — • (다) $y=3x-\frac{1}{4}$

풀이 서로 평행한 두 일차함수의 그래프는 기울기가 같고, y절편이 다르므로 서로 기울기가 같고 y절편이 다른 일차함수 식을 찾으면 (1) — (다), (2) — (가), (3) — (나)이다.

4 다음 두 일차함수의 그래프가 일치할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

(1) $y=2x-3$, $y=2x+a$ -3

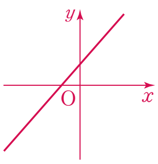
(2) $y=ax+7$, $y=-\frac{2}{3}x+7$ $-\frac{2}{3}$

풀이 (1) 두 일차함수의 그래프가 일치하면 기울기와 y절편이 같으므로 $a=-3$이다.
(2) 두 일차함수의 그래프가 일치하면 기울기와 y절편이 같으므로 $a=-\frac{2}{3}$이다.

5 두 일차함수 $y=\frac{a}{3}x+1$과 $y=2x+4$의 그래프가 서로 평행할 때, 상수 a의 값을 구하시오. 6

풀이 서로 평행한 두 일차함수의 그래프는 기울기는 같고, y절편이 다르므로 $\frac{a}{3}=2$, $a=6$이다.

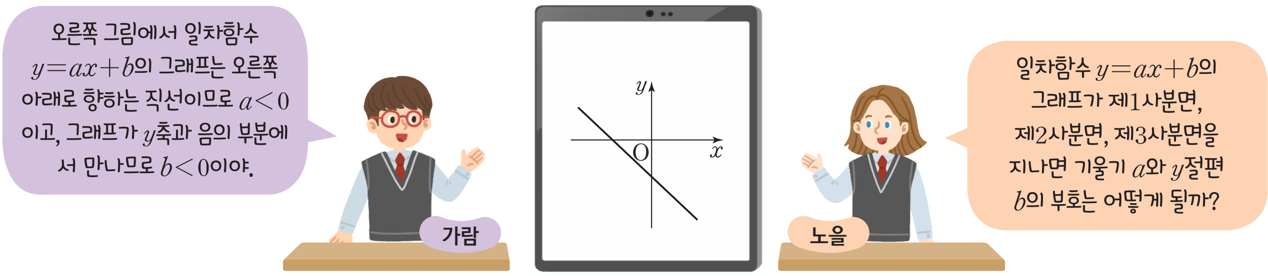
풀이 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면을 지날 때, 이를 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다. 그래프는 오른쪽 위로 향하는 직선이므로 $a>0$이고, 그래프가 y축과 양의 부분에서 만나므로 $b>0$이다.



생각 더 나아가기

문제 해결 · 추론 · 의사소통

다음은 일차함수 $y=ax+b$의 그래프에 대하여 가람이와 노을이가 대화하는 모습이다. 대화를 읽고, 노을이의 질문에 대한 답을 친구와 이야기해 보자. 풀이 참조



스스로 점검하기

1

다음 설명 중 옳은 것은 ○표, 옳지 않은 것은 ×표 하시오.

(1) 일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서 $a<0$이면 오른쪽 위로 향하는 그래프이다. (×)

(2) 기울기가 같은 두 일차함수의 그래프는 서로 평행하거나 일치한다. (○)

(3) 서로 평행한 두 일차함수의 그래프의 y절편은 서로 같다. (×)

2

다음 보기의 일차함수 중에서 그 그래프가 오른쪽 위로 향하는 직선인 것을 모두 고르시오. ㄷ, ㄹ

보기

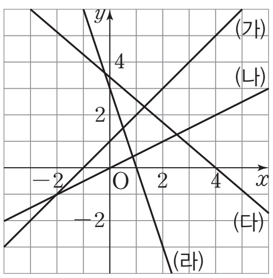
ㄱ. $y=-5x$ ㄴ. $y=-\frac{1}{4}x+2$

ㄷ. $y=\frac{x}{2}+1$ ㄹ. $y=2x-\frac{1}{4}$

풀이 일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서 기울기가 양수$(a>0)$이면 오른쪽 위로 향하는 직선이므로 ㄷ, ㄹ이다.

3

오른쪽 그림과 같은 일차함수의 그래프를 보고, 다음을 찾으시오.



(1) 기울기가 양수인 그래프 (가), (나)

(2) 기울기가 음수인 그래프 (다), (라)

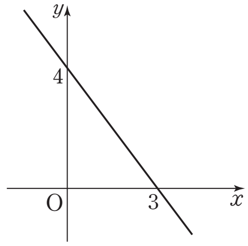
풀이 일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서 기울기가 양수$(a>0)$이면 오른쪽 위로 향하는 직선이고, 기울기가 음수$(a<0)$이면 오른쪽 아래로 향하는 직선이다. 따라서

(1) 기울기가 양수인 그래프는 (가), (나)이다.

(2) 기울기가 음수인 그래프는 (다), (라)이다.

4

일차함수 $y=ax-2$의 그래프가 오른쪽 그림의 그래프와 평행할 때, 상수 a의 값을 구하시오. $-\frac{4}{3}$



풀이 일차함수 $y=ax-2$의 그래프가 위 그래프와 서로 평행하므로 두 일차함수의 기울기는 같다. 위 그래프를 살펴보면 x값이 3만큼 증가할 때 y값은 4만큼 감소하므로 기울기는 $-\frac{4}{3}$이다. 따라서 $a=-\frac{4}{3}$이다.

5

두 일차함수 $y=ax+1$과 $y=2x+b$의 그래프가 서로 평행할 때, 상수 a, b의 조건을 각각 구하시오. $a=2$, $b\neq1$

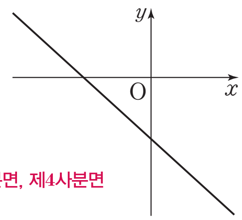
풀이 두 일차함수의 그래프가 서로 평행하므로 두 일차함수의 기울기는 같고, y절편은 서로 달라야 한다. 따라서 상수 a, b의 조건은 $a=2$, $b\neq1$이다.

6 사고력 UP

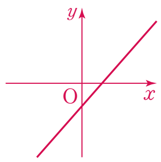
추론

일차함수 $y=ax-b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 일차함수 $y=bx+a$의 그래프가 지나는 사분면을 모두 쓰시오. 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면

(단, a, b는 상수)



풀이 위의 그림을 살펴보면 일차함수 $y=ax-b$의 그래프는 오른쪽 아래로 향하고 y축과 음의 부분에서 만나는 그래프이다. 따라서 $a<0$, $-b<0$이므로 $a<0$, $b>0$이다. 이때 일차함수 $y=bx+a$의 그래프에서 $a<0$, $b>0$이므로 그래프를 그려 보면 다음 그림과 같다. 따라서 일차함수 $y=bx+a$의 그래프는 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지난다.



https://code.jihak.co.kr/qr/L1290eu26LGrGf5D

자기 평가	
일차함수의 그래프의 성질을 이해한다.	
일차함수의 식과 그래프를 이용하여 일차함수의 성질을 파악할 수 있다.	

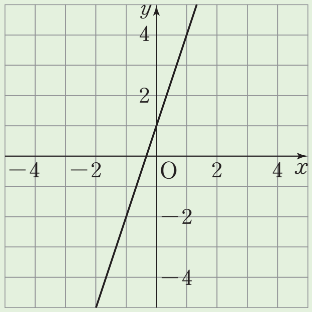
04 일차함수의 식 구하기

[학습 목표] 일차함수의 그래프의 성질을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

일차함수의 식은 어떻게 구할까?

생각 펼치기

오른쪽 그림은 어떤 일차함수의 그래프를 좌표평면 위에 그린 것이다. 다음 물음에 답해 보자.



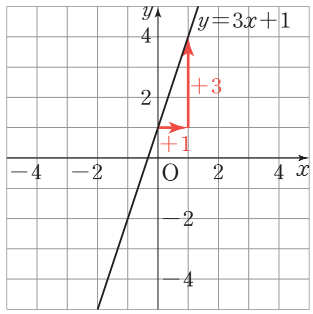
1. 이 그래프의 기울기와 y절편을 각각 구해 보자.

기울기: 3, y절편: 1

2. **1**의 결과를 이용하여 이 그래프가 나타내는 일차함수의 식을 구해 보자. $y=3x+1$

풀이 기울기가 3이고, y절편은 1이므로 일차함수의 식은 $y=3x+1$이다.

기울기와 y절편이 주어진 일차함수의 식



생각 펼치기에서 일차함수의 그래프는 x의 값이 1만큼 증가할 때, y의 값은 3만큼 증가하므로 직선의 기울기는 3이다. 또, 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표가 $(0,\ 1)$이므로 y절편은 1이다.

따라서 일차함수의 식 $y=ax+b$에서 $a=3$, $b=1$이므로 이 그래프가 나타내는 일차함수의 식은 $y=3x+1$이다.

이와 같이 일차함수의 그래프의 기울기와 y절편을 알면 그 일차함수의 식을 구할 수 있다.

확인하기

(1) 일차함수 $y=2x-3$의 그래프는 기울기가 $\boxed{2}$이고, y절편이 $\boxed{-3}$인 직선이다.

(2) 일차함수의 그래프의 기울기가 1이고 y절편이 3일 때, 이 일차함수의 식은 $\boxed{y=x+3}$이다.

1 다음 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.

(1) 기울기가 4이고, y절편이 -2인 직선 $y=4x-2$

(2) 기울기가 $-\dfrac{2}{3}$이고, y절편이 4인 직선 $y=-\dfrac{2}{3}x+4$

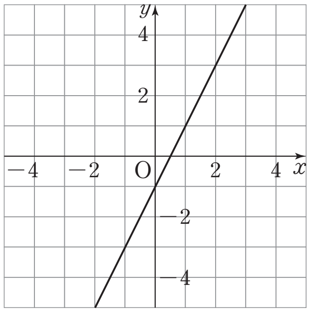
풀이 일차함수의 식 $y=ax+b$에서 a는 기울기, b는 y절편이므로

(1) 기울기가 4이고, y절편이 -2인 직선은 $y=4x-2$이다.

(2) 기울기가 $-\dfrac{2}{3}$이고, y절편이 4인 직선은 $y=-\dfrac{2}{3}x+4$이다.

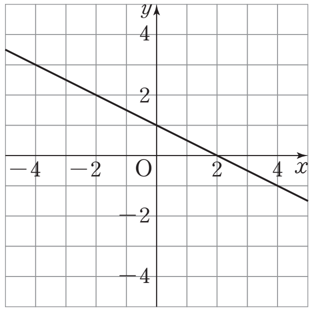
2 일차함수의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 기울기와 y절편을 이용하여 일차함수의 식을 구하시오.

(1)



$y=2x-1$

(2)



$y=-\frac{1}{2}x+1$

풀이 (1) 기울기는 2, y절편은 -1이므로 일차함수의 식은 $y=2x-1$이다.
(2) 기울기는 $-\frac{1}{2}$, y절편은 1이므로 일차함수의 식은 $y=-\frac{1}{2}x+1$이다.

기울기와 한 점이 주어진 일차함수의 식

일차함수의 그래프의 기울기와 그래프가 지나는 한 점의 좌표를 알면 그 일차함수의 식을 구할 수 있다.

함께 해 보기 1 기울기가 2이고, 점 $(2,\ 1)$을 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.

개념 쏙

일차함수의 식 $y=ax+b$에 기울기와 한 점의 좌표를 대입하여 y절편 b의 값을 구한다.

풀이 ▶ 기울기를 알 때, 일차함수의 식으로 나타내기

기울기가 2이므로 y절편을 b라고 하면 구하는 일차함수의 식은

$$y=2x+b$$

이다.

▶ 한 점의 좌표를 이용하여 y절편 구하기

이 일차함수의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지나므로 $y=2x+b$에 $x=2$, $y=1$을 대입하면

$$1=2\times2+b,\ b=-3$$

이다.

▶ 일차함수의 식 구하기

따라서 구하는 일차함수의 식은 $y=2x-3$이다.

답 $y=2x-3$

풀이 (1) 기울기가 -4이므로 $y=-4x+b$이고, $y=-4x+b$에 $x=3$, $y=-5$를 대입하면 $-5=-4\times3+b$, $b=7$이다. 따라서 일차함수의 식은 $y=-4x+7$이다.
(2) 일차함수 $y=\frac{3}{2}x-2$와 평행하므로 기울기는 $\frac{3}{2}$이고, $y=\frac{3}{2}x+b$에 $x=2$, $y=4$를 대입하면 $4=\frac{3}{2}\times2+b$, $b=1$이다. 따라서 일차함수의 식은 $y=\frac{3}{2}x+1$이다.

3 다음 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.

(1) 기울기가 -4이고, 점 $(3,\ -5)$를 지나는 직선 $y=-4x+7$

(2) 일차함수 $y=\frac{3}{2}x-2$의 그래프와 평행하고, 점 $(2,\ 4)$를 지나는 직선 $y=\frac{3}{2}x+1$

두 점이 주어진 일차함수의 식

일차함수의 그래프가 지나는 서로 다른 두 점의 좌표를 알면 그 일차함수의 식을 구할 수 있다.

함께 해 보기 2 두 점 $(1, 2)$, $(3, -2)$를 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.

개념 쏙

서로 다른 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기

➡ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

Tip 두 점의 좌표를 일차함수의 식 $y=ax+b$에 대입하여 연립방정식을 풀어 기울기 a와 y절편 b를 구한 후 a, b를 $y=ax+b$에 다시 대입하여 일차함수의 식을 구할 수도 있다.

풀이 ▶ 두 점을 지나는 일차함수의 기울기 구하기

두 점 $(1, 2)$, $(3, -2)$를 지나는 직선의 기울기는

$$(\text{기울기})=\frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}=\frac{-2-2}{3-1}=\frac{-4}{2}=-2$$

이다.

▶ 기울기를 알 때, 일차함수의 식으로 나타내기

기울기가 -2이므로 y절편을 b라고 하면 구하는 일차함수의 식은

$$y=-2x+b$$

이다.

▶ 한 점의 좌표를 이용하여 y절편 구하기

이 일차함수의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로 $y=-2x+b$에 $x=1$, $y=2$를 대입하면

$$2=-2\times1+b,\ b=4$$

이다.

▶ 일차함수의 식 구하기

따라서 구하는 일차함수의 식은 $y=-2x+4$이다.

답 $y=-2x+4$

4 다음 두 점을 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.

(1) 두 점 $(-1, 2)$, $(2, 8)$을 지나는 직선 $y=2x+4$

(2) 두 점 $(-2, 4)$, $(1, -2)$를 지나는 직선 $y=-2x$

풀이 (1) 두 점 $(-1, 2)$, $(2, 8)$을 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{8-2}{2-(-1)}=\dfrac{6}{3}=2$이므로 $y=2x+b$이고, $y=2x+b$에 $x=-1$, $y=2$를 대입하면 $2=2\times(-1)+b$, $b=4$이다. 따라서 일차함수의 식은 $y=2x+4$이다.

(2) 두 점 $(-2, 4)$, $(1, -2)$를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{-2-4}{1-(-2)}=\dfrac{-6}{3}=-2$이므로 $y=-2x+b$이고, $y=-2x+b$에 $x=-2$, $y=4$를 대입하면 $4=-2\times(-2)+b$, $b=0$이다. 따라서 일차함수의 식은 $y=-2x$이다.

5 다음 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.

(1) x절편이 2, y절편이 1인 직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$

(2) x절편이 -1, y절편이 3인 직선 $y=3x+3$

풀이 (1) x절편이 2, y절편이 1이므로 직선의 기울기는 $\dfrac{0-1}{2-0}=\dfrac{-1}{2}=-\dfrac{1}{2}$이므로 $y=-\dfrac{1}{2}x+b$이고, $y=-\dfrac{1}{2}x+b$에 $x=2$, $y=0$을 대입하면 $0=-\dfrac{1}{2}\times2+b$, $b=1$이다. 따라서 일차함수의 식은 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$이다.

(2) x절편이 -1, y절편이 3이므로 직선의 기울기는 $\dfrac{3-0}{0-(-1)}=\dfrac{3}{1}=3$이므로 $y=3x+b$이고, $y=3x+b$에 $x=-1$, $y=0$을 대입하면 $0=3\times(-1)+b$, $b=3$이다. 따라서 일차함수의 식은 $y=3x+3$이다.

실생활에서 일차함수를 어떻게 활용할까?

생각 펼치기

진우는 과학 시간에 연소의 원리를 이해하기 위해 양초가 타는 과정을 관찰하였다. 그 결과 길이가 25 cm인 양초에 불을 붙이면 1분에 0.2 cm씩 일정하게 길이가 줄어든다는 것을 발견하였다. 다음 물음에 답해 보자.

1. 양초에 불을 붙인 지 x분 후 남은 양초의 길이를 y cm라고 할 때, x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내 보자. $y=-0.2x+25$

2. 양초에 불을 붙인 지 30분 후 남은 양초의 길이를 구해 보자. 19 cm

풀이 $y=-0.2x+25$에 $x=30$을 대입하면 $y=-0.2\times30+25=19$이다.
따라서 불을 붙인지 30분 후 남은 양초의 길이는 19 cm이다.

일차함수의 활용

생각 펼치기 의 문제를 다음 단계에 따라 풀 수 있다.

변수 정하기

❶ 문제의 뜻을 파악하여 변하는 두 양을 변수 x, y로 정한다.

양초에 불을 붙인 지 x분 후 남은 양초의 길이를 y cm라고 하자.

일차함수의 식으로 나타내기

❷ 두 변수 x와 y 사이의 관계를 일차함수의 식 $y=ax+b$로 나타낸다.

1분에 0.2 cm씩 줄어든다고 했으므로 x와 y 사이의 관계식은 $y=-0.2x+b$이다.

불을 붙이기 전 양초의 길이가 25 cm이므로 $x=0$, $y=25$를 $y=-0.2x+b$에 대입하면

$$25=-0.2\times0+b,\ b=25$$

이다. 따라서 x와 y 사이의 관계식은 $y=-0.2x+25$이다.

구하고자 하는 값 구하기

❸ 함숫값이나 그래프를 이용하여 구하고자 하는 값을 구한다.

양초에 불을 붙인지 30분 후 남은 양초의 길이는 $y=-0.2x+25$에 $x=30$을 대입하여 구할 수 있다. 즉,

$$y=-0.2\times30+25,\ y=-6+25=19$$

이다. 따라서 양초에 불을 붙인 지 30분 후 남은 양초의 길이는 19 cm이다.

풀이 (1) 길이가 15 cm인 용수철 저울은 추의 무게가 10 g 늘어날 때마다 용수철의 길이가 1 cm씩 일정하게 늘어나므로 1 g 늘어날 때마다 용수철의 길이가 $\frac{1}{10}$ cm씩 늘어난다. 따라서 x와 y 사이의 관계식은 $y=\frac{1}{10}x+15$이다.
(2) $y=\frac{1}{10}x+15$에 $x=30$을 대입하면 $y=\frac{1}{10}\times30+15=18$이다. 따라서 30 g짜리 추를 매달았을 때의 용수철의 길이는 18 cm이다.

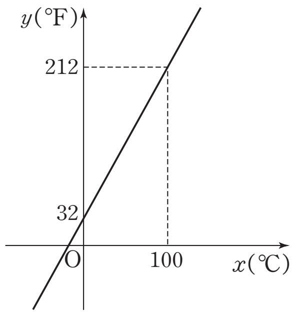
6 길이가 15 cm인 용수철 저울은 추의 무게가 10 g 늘어날 때마다 용수철의 길이가 1 cm씩 일정하게 늘어난다고 한다. 무게가 x g인 추를 매달았을 때의 용수철의 길이를 y cm라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내시오. $y=\frac{1}{10}x+15$

(2) 30 g짜리 추를 매달았을 때의 용수철의 길이를 구하시오. 18 cm

함께 해 보기 3

온도를 재는 단위는 여러 가지가 있는데 그중 많이 쓰이는 단위로 섭씨온도와 화씨온도가 있다. 오른쪽 그림은 섭씨온도를 x ℃, 화씨온도를 y ℉로 하여 나타낸 그래프이다. 섭씨온도가 30 ℃일 때, 화씨온도를 구하시오.



변수 정하기

풀이 섭씨온도를 x ℃, 화씨온도를 y ℉라고 하자.

일차함수의 식으로 나타내기

그래프를 보면 섭씨온도가 0 ℃일 때, 화씨온도는 32 ℉이다. 또, 섭씨온도가 100 ℃일 때, 화씨온도는 212 ℉이므로 이 그래프는 두 점 $(0,\ 32)$, $(100,\ 212)$를 지나는 그래프이다.

따라서 기울기는 $\dfrac{212-32}{100-0}=\dfrac{180}{100}=\dfrac{9}{5}$이고, y절편은 32이다. 그러므로 x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내면 $y=\dfrac{9}{5}x+32$이다.

구하고자 하는 값 구하기

섭씨온도가 30 ℃이므로 위의 식에 $x=30$을 대입하면 $y=\dfrac{9}{5}\times 30+32$, $y=86$이므로 섭씨 30 ℃는 화씨온도로 86 ℉이다.

답 86 ℉

Tip 일차함수를 활용하여 실생활 문제를 해결할 때에는 보통 x의 범위가 수 전체가 아니므로 문제 상황에서 x의 범위를 적절하게 고려해야 한다.

7 같은 시간 동안에 일정한 양의 수증기를 발생시키는 가습기가 있다. 가습기를 가동한 지 4시간 후에 남아 있는 물의 양이 400 mL이고, 7시간 후에 남아 있는 물의 양이 280 mL이다. 이 가습기는 가동한 지 몇 시간 후에 가습기의 물이 남아 있지 않게 되는지 구하시오. 14시간 후

풀이 4시간 후에 남아 있는 물의 양이 400 mL이고, 7시간 후에 남아 있는 물의 양이 280 mL이므로 이를 시간과 남아 있는 물의 양에 대한 순서쌍으로 나타내면 $(4,\ 400)$, $(7,\ 280)$이다. 이때 이 일차함수의 기울기를 구하면 $\dfrac{280-400}{7-4}=-\dfrac{120}{3}=-40$이므로 $y=-40x+b$이고, $y=-40x+b$에 $x=4$, $y=400$을 대입하면 $400=-40\times 4+b$, $b=560$이다. 따라서 $y=-40x+560$이다. 이 가습기가 물이 남아 있지 않게 되는 경우는 $y=0$이므로 $0=-40x+560$, $40x=560$, $x=14$이다. 따라서 이 가습기는 가동한 지 14시간 후에 가습기의 물이 남아 있지 않게 된다.

생각 더 나아가기

추론 · 의사소통 · 연결

우리 주변의 상황에서 두 변수 사이의 관계를 일차함수로 나타낼 수 있는 사례를 찾아보고, 일차함수를 활용했을 때 유용한 점을 친구와 이야기해 보자. 풀이 참조

풀이 |예시| 택시 요금은 기본요금과 거리에 따른 요금으로 구성되어 있으며, 이는 일차함수로 나타낼 수 있다. 일차함수를 활용하면 택시 요금을 쉽게 계산할 수 있고, 거리에 따른 요금 변화를 쉽게 파악할 수 있다.

스스로 점검하기

1

다음 설명 중 옳은 것은 ○표, 옳지 않은 것은 ×표 하시오.

(1) 기울기가 a이고, y절편이 b인 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식은 $y=ax+b$이다. (○)

(2) 두 점 $(m, 0)$, $(0, n)$을 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식은 $y=\frac{n}{m}x+n$이다. (×)

2

다음 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.

(1) x의 값이 2만큼 증가할 때 y의 값이 -4만큼 증가하고, y절편이 -3인 직선 $y=-2x-3$

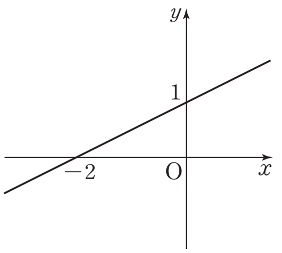
(2) x절편이 -3이고, 점 $(3, 2)$를 지나는 직선 $y=\frac{1}{3}x+1$

풀이 (1) x의 값이 2만큼 증가할 때 y의 값이 -4만큼 증가하므로 기울기는 $\frac{-4}{2}=-2$이고, y절편이 -3이므로 일차함수의 식은 $y=-2x-3$이다.

(2) x절편이 -3이므로 이 직선은 점 $(-3, 0)$, $(3, 2)$를 지나는 직선이다.
기울기는 $\frac{0-2}{-3-3}=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$이므로 $y=\frac{1}{3}x+b$이고, $(-3, 0)$을 대입하면 $0=\frac{1}{3}\times(-3)+b$, $b=1$이다.
따라서 일차함수의 식은 $y=\frac{1}{3}x+1$이다.

3

오른쪽 그림은 일차함수의 그래프이다. 이 그래프와 서로 평행하고, 점 $(0, -2)$를 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.



$y=\frac{1}{2}x-2$

풀이 주어진 그래프와 평행하므로 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.
또, 이 그래프가 점 $(0, -2)$를 지나므로 일차함수의 식은 $y=\frac{1}{2}x-2$이다.

4

지면에서 지상 10 km까지는 높이가 1 km 높아질 때마다 기온이 6 ℃씩 내려간다고 한다. 현재 지면의 기온이 20 ℃라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 높이가 x km인 곳의 기온을 y ℃라고 할 때, x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내시오. $y=20-6x$

(2) 지상 8 km인 지점의 기온을 구하시오. 영하 28 ℃

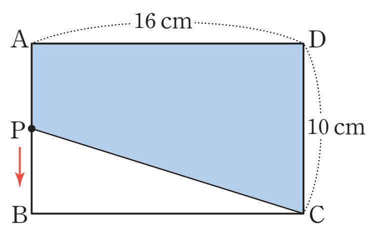
풀이 (1) 높이가 1 km 높아질 때마다 기온이 6 ℃씩 내려가므로 기울기는 -6이다. 현재 지면의 기온이 20 ℃이므로 일차함수의 식은 $y=20-6x$이다.

(2) $x=8$을 대입하면 $y=20-6\times8=-28$이다. 따라서 지상 8 km인 지점의 기온은 영하 28 ℃이다.

5 단계형 문제

문제 해결

다음 그림과 같이 $\overline{AD}=16$ cm, $\overline{CD}=10$ cm인 직사각형 ABCD가 있다. 점 P가 점 A를 출발하여 선분 AB를 따라 점 B까지 초속 2 cm로 움직일 때, t초 후의 사각형 APCD의 넓이가 S cm²가 된다고 한다. 물음에 답하시오.



(1) t와 S 사이의 관계를 식으로 나타내시오. $S=16t+80$

(2) 사각형 APCD의 넓이가 144 cm²가 되는 것은 몇 초 후인지 구하시오. 4초 후

풀이 (1) 초속 2 cm로 움직이므로 t초 후 사각형 APCD의 넓이 S는 $(2t+10)\times16\times\frac{1}{2}=16t+80$이다.
따라서 $S=16t+80$이다.

(2) $S=144$를 대입하면 $144=16t+80$, $16t=64$, $t=4$이다. 따라서 4초 후이다.

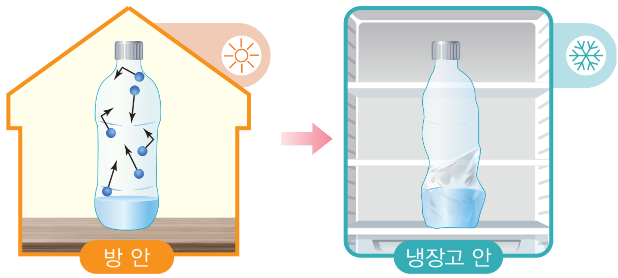
https://code.jihak.co.kr/qr/491W3oA0LqR2377H

자기 평가	
일차함수의 그래프의 성질을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.	
일상생활에서 일차함수의 유용성을 알 수 있다.	

수학으로 세상 보기

페트병을 냉장고에 보관하면 찌그러지는 이유

문제 해결 연결



페트병을 마개로 막아 냉장고에 보관하면 찌그러지고, 이 페트병을 냉장고 밖에 꺼내 두면 찌그러진 부분이 펴진다.

이러한 현상이 일어나는 이유는 무엇일까? 일반적으로 기체는 온도가 낮아짐에 따라 부피가 줄어들고, 반대로 온도가 높아짐에 따라 부피가 늘어난다. 프랑스의 물리학자인 샤를(Charles, J. A. C., 1746~1823)은 압력이 일정하다는 조건에서 기체의 초기 양이 주어지면 기체의 온도와 부피 사이의 관계는 기울기가 양수인 일차함수의 식으로 나타낼 수 있음을 발견하였다. 냉장고에서는 페트병 안에 들어있는 공기의 온도가 낮아짐에 따라 부피가 줄어들기 때문에 페트병이 찌그러지는 현상이 나타난 것이다.

다음 물음에 답해 보자.

1 다솔이는 과학 시간에 일정한 압력에서 공기가 들어 있는 주사기의 마개를 막은 후, 공기의 온도를 변화시키는 실험을 하고 있다. 이때 주사기 속 공기의 온도를 x ℃, 주사기 속 공기의 부피를 y mL라고 하면 x와 y 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$y=0.1x+27.3$$

주사기가 들어 있는 비커의 물을 가열하여 공기의 온도를 변화시키면, 주사기 속 공기의 부피는 어떻게 변할지 다음 표를 완성해 보자.

공기의 온도(℃)	27	47	67	87
공기의 부피(mL)	30	32	34	36

풀이 주사기 속 공기의 온도와 부피의 관계를 나타낸 일차함수의 식 $y=0.1x+27.3$의 x의 값에 27, 47, 67, 87을 각각 대입하면 다음과 같다.
$0.1\times27+27.3=30$, $0.1\times47+27.3=32$, $0.1\times67+27.3=34$, $0.1\times87+27.3=36$

2 실험실에서 압력을 일정하게 유지한 상태로 어떤 기체의 온도와 부피를 측정하였더니 각각 12 ℃, 570 mL였다. 냉각 장치를 이용하여 이 기체의 온도를 -13 ℃로 낮추었더니 부피가 520 mL가 되었다. 기체의 온도를 x ℃, 부피를 y mL라고 할 때, x와 y 사이의 관계식을 구해 보자. $y=2x+546$

풀이 x와 y 사이의 관계는 기울기가 양수인 일차함수의 식으로 나타낼 수 있으므로 $y=ax+b$(단, $a>0$)라고 하자. $x=12$일 때 $y=570$이고, $x=-13$일 때 $y=520$이므로 다음과 같은 연립방정식을 세울 수 있다.

$\begin{cases} 570=12a+b \\ 520=-13a+b \end{cases}$ 이 연립방정식의 해를 구하면 $a=2$, $b=546$이므로 x와 y 사이의 관계식은 $y=2x+546$이다.

3 페트병 외에도 일상생활에서 기체의 온도와 부피 사이의 일차함수 관계가 나타나는 현상에는 어떤 것들이 있는지 이야기해 보자. 풀이 참조

풀이 |예시| 여름에 타이어가 팽팽해지는 현상, 열기구 내부의 공기를 가열하면 열기구가 상승하는 현상 등이 있다.

05 일차함수와 일차방정식

이 단원에서 배우는 용어와 기호

직선의 방정식

[**학습 목표**] 일차함수와 미지수가 2개인 일차방정식의 관계를 설명할 수 있다.

일차함수와 일차방정식 사이에는 어떤 관계가 있을까?

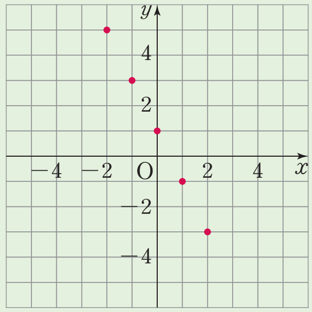
생각 펼치기

다음 표는 일차방정식 $2x+y-1=0$에서 해의 일부를 나타낸 것이다. 물음에 답해 보자.

x	-2	-1	0	1	2
y	5	3	1	-1	-3

1. 위의 표를 완성해 보자.

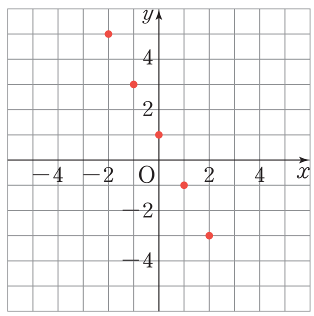
2. 위의 표에서 구한 해의 순서쌍 (x, y)를 좌표로 하는 점을 오른쪽 좌표평면 위에 나타내 보자.



일차방정식의 그래프

생각 펼치기 에서 일차방정식 $2x+y-1=0$의 해의 순서쌍 (x, y)를 좌표평면 위에 나타내면 〈그림 1〉과 같다.

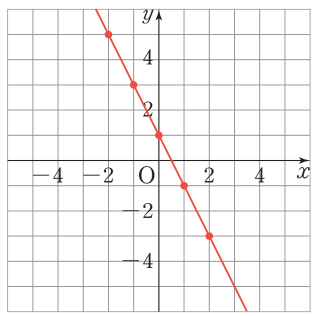
또, x, y의 값의 범위가 수 전체일 때, 일차방정식 $2x+y-1=0$의 해의 순서쌍 (x, y)는 무수히 많고, 이것을 좌표평면 위에 나타내면 〈그림 2〉와 같은 직선이 된다. 이때 일차방정식 $2x+y-1=0$의 해를 나타내는 이 직선을 일차방정식의 그래프라고 한다.



〈그림 1〉

한편, 〈그림 2〉의 직선은 기울기가 -2이고, y절편이 1이므로 일차함수 $y=-2x+1$의 그래프와 같다. 즉, 일차방정식 $2x+y-1=0$의 그래프는 일차함수 $y=-2x+1$의 그래프와 서로 같음을 알 수 있다.

일차방정식 $2x+y-1=0$에서 y를 x에 대한 식으로 나타내면 $y=-2x+1$을 얻는다.



〈그림 2〉

일차방정식 $ax+by+c=0$에서 x, y의 값이 구체적으로 주어지지 않을 경우 x, y의 값의 범위는 수 전체로 생각한다.

일반적으로 $a \neq 0$, $b \neq 0$일 때, 일차방정식 $ax+by+c=0$에서 y를 x에 대한 식으로 나타내면 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$와 같은 일차함수의 식을 얻는다.

따라서 일차방정식 $ax+by+c=0$의 그래프는 일차함수 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$의 그래프와 같다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

일차방정식과 일차함수의 그래프

일차방정식 $ax+by+c=0$(단, a, b, c는 상수, $a \neq 0$, $b \neq 0$)의 그래프는 일차함수 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$의 그래프와 같다.

함께 해 보기 1 **일차방정식 $-2x+3y+6=0$의 그래프를 그리시오.**

개념 쏙

일차방정식 $ax+by+c=0$(a, b, c는 상수, $a \neq 0$, $b \neq 0$)의 그래프 그리기

① 일차함수 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$의 식으로 나타낸다.

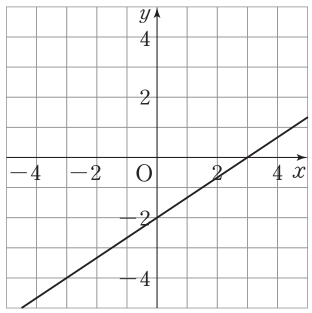
② 기울기는 $-\dfrac{a}{b}$, y절편은 $-\dfrac{c}{b}$인 직선을 그린다.

풀이 일차방정식 $-2x+3y+6=0$에서 y를 x에 대한 식으로 나타내면

$$3y=2x-6,\ y=\frac{2}{3}x-2$$

이다. 즉, 주어진 일차방정식의 그래프는 기울기가 $\dfrac{2}{3}$이고, y절편이 -2인 일차함수 $y=\dfrac{2}{3}x-2$의 그래프와 같다.

따라서 일차방정식 $-2x+3y+6=0$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

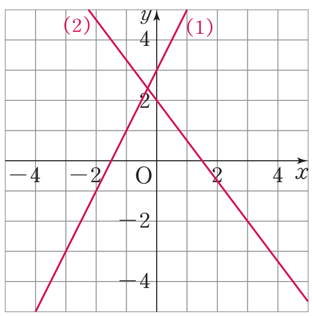


답 풀이 참조

1 **다음 일차방정식의 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그리시오.**

(1) $2x-y+3=0$

(2) $4x+3y-6=0$



일차방정식 $x=p$, $y=q$의 그래프는 어떤 모양일까?

일차방정식 $x=p$, $y=q$의 그래프

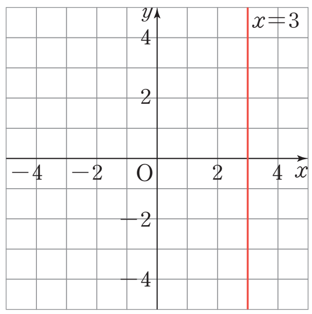
일차방정식 $ax+by+c=0$에서 a, b 중 어느 하나가 0인 경우의 그래프는 다음과 같다.

일차방정식 $x=3$을 $ax+by+c=0$의 꼴로 나타내면

$$1\times x+0\times y-3=0$$

이고, 이 일차방정식의 y에 어떤 값을 대입해도 x의 값은 항상 3이다.

따라서 일차방정식 $x=3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $(3,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이다.

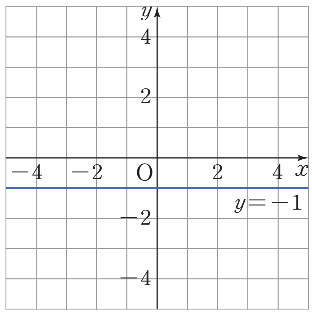


일차방정식 $y=-1$을 $ax+by+c=0$의 꼴로 나타내면

$$0\times x+1\times y+1=0$$

이고, 이 일차방정식의 x에 어떤 값을 대입해도 y의 값은 항상 -1이다.

따라서 일차방정식 $y=-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $(0,\ -1)$을 지나고 x축에 평행한 직선이다.



일반적으로 일차방정식 $x=p$, $y=q$의 그래프는 다음과 같다.

수학 호기심

일차방정식 $x=0$, $y=0$의 그래프는 각각 어떤 직선을 나타낼까?

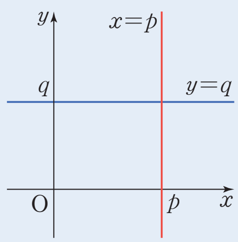
풀이

일차방정식 $x=0$, $y=0$의 그래프는 각각 y축, x축을 나타낸다.

일차방정식 $x=p$, $y=q$ (단, p, q는 상수)의 그래프

1. 일차방정식 $x=p$(단, p는 상수, $p\neq 0$)의 그래프는 점 $(p,\ 0)$을 지나고, y축에 평행한 직선이다.

2. 일차방정식 $y=q$(단, q는 상수, $q\neq 0$)의 그래프는 점 $(0,\ q)$를 지나고, x축에 평행한 직선이다.



확인하기

(1) 일차방정식 $x+2=0$의 그래프는 점 $(\boxed{-2},\ 0)$을 지나고, (x축, y축)에 평행한 직선이다.

(2) 일차방정식 $y-5=0$의 그래프는 점 $(0,\ \boxed{5})$을/를 지나고, (x축, y축)에 평행한 직선이다.

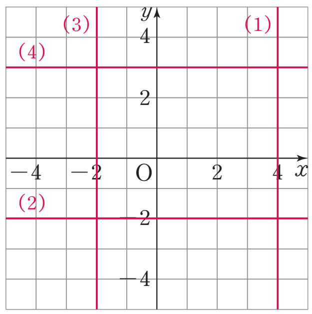
2 다음 일차방정식의 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그리시오.

(1) $x=4$

(2) $y=-2$

(3) $2x+4=0$

(4) $3y-9=0$



직선의 방정식

일반적으로 x, y의 값의 범위가 수 전체일 때, 일차방정식

$$ax+by+c=0(\text{단, } a,\ b,\ c\text{는 상수, } a\neq 0 \text{ 또는 } b\neq 0)$$

의 해는 무수히 많고, 그 해를 좌표평면 위에 나타내면 직선이 된다.

이때 이 일차방정식 $ax+by+c=0$을 **직선의 방정식**이라고 한다.

3 다음 조건을 모두 만족시키는 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 두 점 $(2,\ 3)$, $(-1,\ 5)$를 지나는 직선 $2x+3y-13=0$

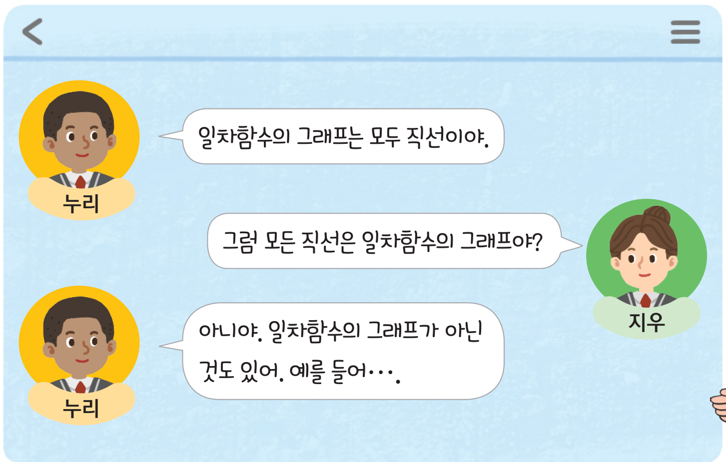
(2) 점 $(-4,\ 0)$을 지나고, y축에 평행한 직선 $x+4=0$

풀이 (1) 두 점 $(2, 3)$, $(-1, 5)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{3-5}{2-(-1)}=\frac{-2}{3}$이므로 $y=-\frac{2}{3}x+b$이고, $y=-\frac{2}{3}x+b$에 $x=2$, $y=3$을 대입하면 $3=-\frac{2}{3}\times 2+b$, $b=\frac{13}{3}$이다. 즉, $y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$이다. 따라서 직선의 방정식은 $2x+3y-13=0$이다.

(2) 점 $(-4, 0)$을 지나고, y축에 평행한 직선은 $x=-4$이므로 직선의 방정식은 $x+4=0$이다.

생각 더 나아가기 추론 의사소통

다음 누리와 지우의 대화를 읽은 후 지우의 질문에 대한 누리의 대답을 완성하고, 친구와 이야기해 보자. 풀이 참조



풀이 |예시| $x=p$와 $y=q$의 그래프의 경우 y가 x에 대한 일차식, 즉 $y=ax+b$의 형태로 표현되지 않으므로 일차함수가 아니다.

스스로 점검하기

1

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 일차방정식 $ax+by+c=0$(단, a, b, c는 상수, $a\neq0$, $b\neq0$)의 그래프는 일차함수 $\boxed{y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}}$ 의 그래프와 같다.

(2) x, y의 값의 범위가 수 전체일 때, 일차방정식 $ax+by+c=0$(단, a, b, c는 상수, $a\neq0$ 또는 $b\neq0$)의 해는 무수히 많고, 그 해를 좌표평면 위에 나타내면 직선이 된다. 이때 이 일차방정식 $ax+by+c=0$을 $\boxed{\text{직선의 방정식}}$(이)라고 한다.

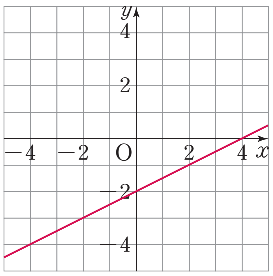
2

일차방정식 $3x+2y+6=0$의 그래프와 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 서로 같을 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오. $a=-\frac{3}{2}$, $b=-3$

풀이 일차방정식 $3x+2y+6=0$에서 y를 x에 대한 식으로 나타내면 $y=-\frac{3}{2}x-3$이고, 이 그래프와 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 서로 같으므로 $a=-\frac{3}{2}$, $b=-3$이다.

3

일차방정식 $x-2y-4=0$의 그래프를 그리시오.



풀이 일차방정식 $x-2y-4=0$에서 y를 x에 대한 식으로 나타내면 $y=\frac{1}{2}x-2$이므로 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

4

다음 조건을 모두 만족시키는 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(1,\ 3)$을 지나고, y축에 평행한 직선 $x=1$

(2) 점 $(3\ ,\ -3)$을 지나고, x축에 평행한 직선 $y=-3$

풀이 (1) y축에 평행한 직선은 $x=p$의 그래프이고, 점 $(1,\ 3)$을 지나므로 직선의 방정식은 $x=1$이다.
(2) x축에 평행한 직선은 $y=q$의 그래프이고, 점 $(3,\ -3)$을 지나므로 직선의 방정식은 $y=-3$이다.

5

일차방정식 $4x-2y+3=0$의 그래프와 평행하고 y절편이 3인 직선 위에 점 $(a,\ 2)$가 있을 때, 상수 a의 값을 구하시오. $-\frac{1}{2}$

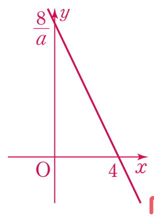
풀이 일차방정식 $4x-2y+3=0$에서 y를 x에 대한 식으로 나타내면 $y=2x+\frac{3}{2}$이다. 이 그래프와 평행하므로 기울기는 2이고, y절편이 3이므로 직선의 방정식은 $y=2x+3$이다. 따라서 점 $(a,\ 2)$가 이 직선 위에 있으므로 $x=a$, $y=2$를 $y=2x+3$에 대입하면
$2=2a+3$, $a=-\frac{1}{2}$이다.

6 사고력 UP

문제 해결

일차방정식 $2x+ay=8$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 16일 때, 양수 a의 값을 구하시오. 1

풀이 일차방정식 $2x+ay=8$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 16이므로 $a\neq0$이다.
$2x+ay=8$에서 y를 x에 대한 식으로 나타내면
$y=-\frac{2}{a}x+\frac{8}{a}$이고,
x절편과 y절편을 각각 구하면 4, $\frac{8}{a}$이다.
따라서 $\frac{1}{2}\times4\times\frac{8}{a}=16$, $a=1$이다.



https://code.jihak.co.kr/qr/eXJxNZvmUWlbb2FO

자기 평가	
일차함수와 미지수가 2개인 일차방정식의 관계를 설명할 수 있다.	
일차함수와 일차방정식의 관계를 알고, 이와 관련한 문제를 해결할 수 있다.	

06 일차함수의 그래프와 연립일차방정식

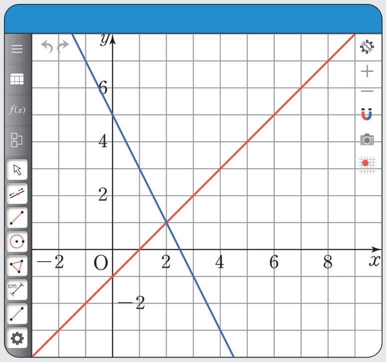
[학습 목표] 두 일차함수의 그래프와 연립일차방정식의 관계를 설명할 수 있다.

일차함수의 그래프와 연립일차방정식 사이에는 어떤 관계가 있을까?

생각 펼치기

공학 도구

오른쪽 그림은 알지오매스를 이용하여 두 일차함수 $y=x-1$, $y=-2x+5$의 그래프를 좌표평면 위에 그린 것이다. 다음 물음에 답해 보자.



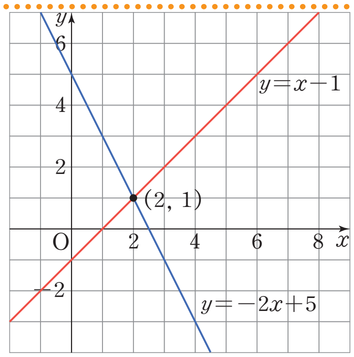
1. 두 일차함수의 그래프의 교점의 좌표를 말해 보자. (2, 1)

2. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ 의 해를 구하고, **1**에서 구한 교점의 좌표와 비교해 보자.
$x=2$, $y=1$, 두 그래프의 교점의 좌표와 같다.

풀이 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ 에서 두 식을 더하면 $3x=6$, $x=2$이고, $x=2$을 $x-y=1$에 대입하면 $2-y=1$, $y=1$이다.
따라서 해는 $x=2$, $y=1$이고, **1**에서 구한 교점의 좌표와 같다.

일차함수의 그래프와 연립일차방정식의 해

생각 펼치기에서 두 일차함수 $y=x-1$, $y=-2x+5$의 그래프의 교점의 좌표는 $(2,\ 1)$이다.



또, 두 직선 위의 점의 좌표는 각각 두 일차방정식 $x-y=1$, $2x+y=5$의 해이므로 두 직선의 교점의 좌표 $(2,\ 1)$은 두 일차방정식의 공통의 해를 나타낸다.

이때 두 일차방정식 $x-y=1$, $2x+y=5$의 그래프는 각각 일차함수 $y=x-1$, $y=-2x+5$의 그래프와 같다.

따라서 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ 의 해는 두 일차함수 $y=x-1$, $y=-2x+5$의 그래프의 교점의 좌표와 같다.

개념 쏙

일차방정식의 그래프는 일차함수의 그래프와 같고, 일차함수의 그래프인 직선 위의 점의 좌표는 일차방정식의 해이므로 두 직선의 교점은 두 일차방정식을 모두 만족시키는 점이다.

확인하기

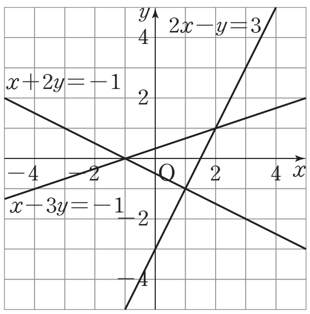
연립방정식 $\begin{cases} 2x-y=1 \\ -2x+3y=3 \end{cases}$ 의 해는 두 일차함수 $\boxed{y=2x-1}$, $\boxed{y=\frac{2}{3}x+1}$ 의 그래프의 교점의 좌표와 같다.

일반적으로 미지수가 2개인 연립방정식의 해와 두 일차함수의 그래프 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

연립방정식의 해와 그래프(1)

연립방정식 $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ (단, $a\neq0$, $b\neq0$, $a'\neq0$, $b'\neq0$)의 해는 두 일차함수 $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b}$, $y=-\dfrac{a'}{b'}x+\dfrac{c'}{b'}$의 그래프의 교점의 좌표와 같다.

1 오른쪽 그래프를 이용하여 다음 연립방정식의 해를 구하시오.

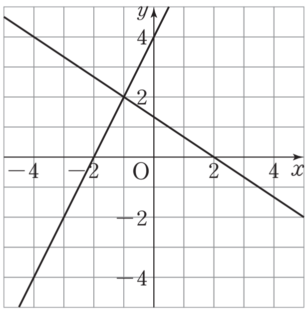


(1) $\begin{cases} x+2y=-1 \\ x-3y=-1 \end{cases}$ **$(-1, 0)$**

(2) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-3y=-1 \end{cases}$ **$(2, 1)$**

풀이 일차함수의 그래프의 교점의 좌표는 연립방정식의 해와 같으므로
(1) 두 직선 $x+2y=-1$과 $x-3y=-1$의 그래프의 교점의 좌표는 $(-1, 0)$이므로 주어진 연립방정식의 해는 $(-1, 0)$이다.
(2) 두 직선 $2x-y=3$과 $x-3y=-1$의 그래프의 교점의 좌표는 그래프의 교점의 좌표는 $(2, 1)$이므로 주어진 연립방정식의 해는 $(2, 1)$이다.

2 오른쪽 그림의 두 직선의 방정식으로 이루어진 연립방정식을 세우고, 그 해를 구하시오. **$\begin{cases} 2x-y+4=0 \\ 2x+3y-4=0 \end{cases}$, $(-1, 2)$**



풀이 두 그래프의 일차함수의 식을 구하면 $y=2x+4$, $y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$이고, 두 직선의 방정식으로 이루어진 연립방정식을 구하면 $\begin{cases} 2x-y+4=0 \\ 2x+3y-4=0 \end{cases}$ 이다. 이 연립방정식을 풀면 해는 $(-1, 2)$이다.

3 연립방정식 $\begin{cases} x+y=5 \\ ax-y=-1 \end{cases}$에서 각 방정식의 그래프를 그렸더니 두 직선이 한 점 $(3, b)$에서 만났다. 상수 a, b의 값을 각각 구하시오. **$a=\frac{1}{3}$, $b=2$**

풀이 두 직선의 방정식의 그래프의 교점의 좌표는 연립방정식의 해와 같으므로 $(3, b)$를 $x+y=5$에 대입하면 $b=2$이다. $(3, 2)$를 $ax-y=-1$에 대입하면 $3a-2=-1$, $3a=1$, $a=\frac{1}{3}$이다. 따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=2$이다.

연립일차방정식의 해가 없거나 무수히 많은 경우는 언제일까?

연립방정식에서 두 일차방정식의 그래프가 평행하면 두 그래프의 교점이 없으므로 연립방정식의 해는 없다는 것을 알 수 있다. 또, 두 일차방정식의 그래프가 일치하면 두 그래프의 교점이 무수히 많으므로 연립방정식의 해는 무수히 많다는 것을 알 수 있다.

개념 쏙

연립방정식 $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ 의 해는 계수의 관계에 따라

(1) $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$일 때,
두 직선은 한 점에서 만나므로 해는 하나이다.

(2) $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$일 때,
두 직선은 평행하므로 해는 없다.

(3) $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$일 때,
두 직선은 일치하므로 해는 무수히 많다.

따라서 연립방정식의 해와 두 일차방정식의 그래프 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

연립방정식의 해와 그래프(2)

연립방정식에서 각 일차방정식의 그래프인 두 직선이

1. 한 점에서 만나면 연립방정식의 해는 하나이다.

2. 평행하면 연립방정식의 해는 없다.

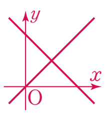
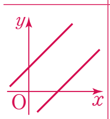
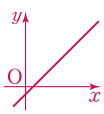
3. 일치하면 연립방정식의 해는 무수히 많다.

함께 해 보기 1

그래프를 이용하여 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 9x-3y=-6 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 4x+2y=2 \end{cases}$

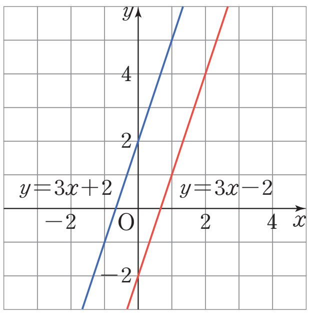
Tip 연립방정식의 해와 두 일차함수의 그래프의 교점 사이의 관계를 이해하고 교점의 개수에 따라 연립방정식의 해가 한 개만 있는 경우, 없는 경우, 무수히 많은 경우로 나뉠 수 있음을 파악하게 한다. 이를 표로 정리하면 다음과 같다.

두 일차함수의 그래프	교점의 개수	연립방정식의 해의 개수
	1개 (한 점에서 만난다.)	1개
	없다. (평행하다.)	없다.
	무수히 많다. (일치한다.)	무수히 많다.

풀이 (1) 주어진 두 일차방정식에서 각각 y를 x에 대한 식으로 나타내면

$$\begin{cases} y=3x-2 \\ y=3x+2 \end{cases}$$

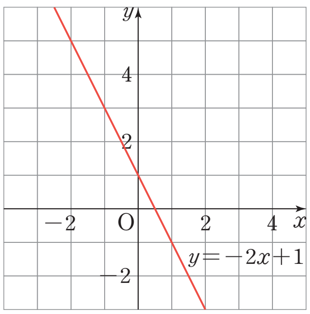
이므로 두 방정식의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 서로 평행하다. 따라서 두 직선의 교점이 없으므로 주어진 연립방정식의 해는 없다.



(2) 주어진 두 일차방정식에서 각각 y를 x에 대한 식으로 나타내면

$$\begin{cases} y=-2x+1 \\ y=-2x+1 \end{cases}$$

이므로 두 방정식의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 일치한다. 따라서 두 직선의 교점이 무수히 많으므로 주어진 연립방정식의 해는 무수히 많다.

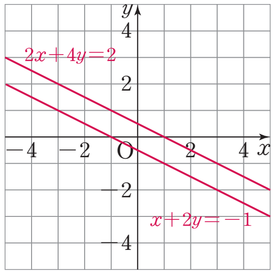


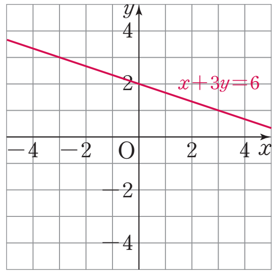
답 (1) 해가 없다. (2) 해가 무수히 많다.

4 그래프를 이용하여 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$ 해가 없다.

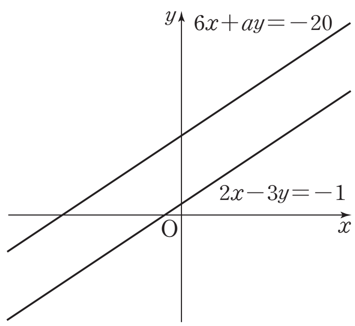
(2) $\begin{cases} x+3y=6 \\ 2x+6y=12 \end{cases}$ 해가 무수히 많다.





풀이 두 일차방정식을 각각 y를 x에 대한 식으로 나타낸 후 그래프를 그릴 수 있다.
(1) 두 일차방정식의 그래프가 평행하여 두 직선의 교점이 없으므로 해가 없다.
(2) 두 일차방정식의 그래프가 일치하여 두 직선의 교점이 무수히 많으므로 해가 무수히 많다.

5 연립방정식 $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ 6x+ay=-20 \end{cases}$ 에서 두 일차방정식의 그래프를 그렸더니 오른쪽 그림과 같이 서로 평행하였다. 다음 물음에 답하시오.



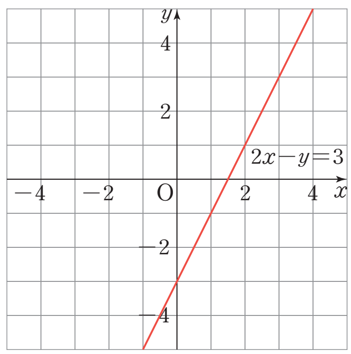
(1) 이 연립방정식의 해를 구하시오. 해가 없다.

(2) 상수 a의 값을 구하시오. -9

풀이 (1) 두 일차방정식의 그래프가 서로 평행하므로 두 직선의 교점이 없다. 따라서 연립방정식의 해가 없다.
(2) 두 직선이 서로 평행하므로 기울기가 같아야 한다. 두 일차방정식 $2x-3y=-1$, $6x+ay=-20$을 각각 y를 x에 대한 식으로 나타내면 $2x-3y=-1$은 $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$이고, 기울기가 $\frac{2}{3}$이므로 $6x+ay=-20$의 기울기도 $\frac{2}{3}$이어야 한다.
따라서 $-\frac{6}{a}=\frac{2}{3}$, $a=-9$이다.

생각 더 나아가기 | 문제 해결 · 추론 · 의사소통

오른쪽 일차방정식 $2x-y=3$의 그래프를 이용하여 아래 조건을 만족시키는 연립방정식을 만들고, 친구와 비교해 보자. 풀이 참조



(1) 해가 없는 경우

$\begin{cases} 2x-y=3 \\ \boxed{} \end{cases}$

(2) 해가 무수히 많은 경우

$\begin{cases} 2x-y=3 \\ \boxed{} \end{cases}$

풀이 (1) 해가 없는 경우는 두 직선이 평행하므로 기울기가 같고, y절편이 달라야 한다. 따라서 기울기가 2이고, y절편이 -3이 아닌 일차방정식이다. **[예시]** $2x-y=5$, $4x-2y=7$ 등
(2) 해가 무수히 많은 경우는 두 직선이 일치하므로 기울기와 y절편이 같아야 한다. 따라서 기울기가 2이고, y절편이 -3인 일차방정식이다. **[예시]** $4x-2y=6$, $6x-3y=9$ 등

스스로 점검하기

1

다음 □ 안에 알맞은 말을 써넣으시오.

연립방정식에서 각 일차방정식의 그래프인 두 직선이

(1) 한 점에서 만나면 연립방정식의 해는 $\boxed{\text{하나}}$이다.

(2) 평행하면 연립방정식의 해는 $\boxed{\text{없다}}$.

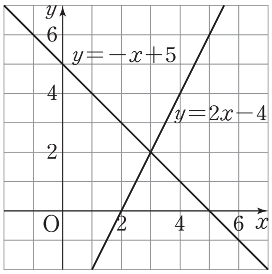
(3) 일치하면 연립방정식의 해는 $\boxed{\text{무수히 많다}}$.

2

오른쪽 그래프를 이용하여 연립방정식

$$\begin{cases} x+y=5 \\ -2x+y=-4 \end{cases}$$

의 해를 구하시오. $(3,\ 2)$



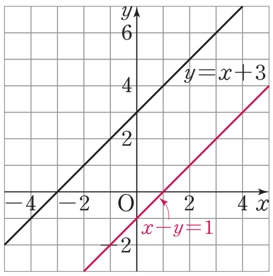
풀이 두 일차방정식의 그래프의 교점이 $(3,\ 2)$이므로 연립방정식의 해는 $(3,\ 2)$이다.

3

오른쪽 좌표평면 위에 일차방정식 $x-y=1$의 그래프를 그리고, 이를 이용하여 다음 연립방정식

$$\begin{cases} y=x+3 \\ x-y=1 \end{cases}$$

의 해를 구하시오. 해가 없다.



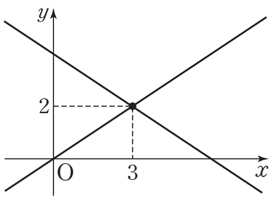
풀이 $x-y=1$의 그래프를 그리면 두 직선이 평행하므로 두 직선의 교점이 없다. 따라서 연립방정식의 해가 없다.

4

오른쪽 그림은 연립방정식

$$\begin{cases} ax+y=4 \\ bx+3y=0 \end{cases}$$

의 해를 그래프로 나타낸 것이다. 이때 상수 a, b의 값을 각각 구하시오. $a=\frac{2}{3}$, $b=-2$



풀이 주어진 그래프를 살펴보면 연립방정식 $\begin{cases} ax+y=4 \\ bx+3y=0 \end{cases}$의 해가 $(3,\ 2)$이므로 $x=3$, $y=2$를 $ax+y=4$, $bx+3y=0$에 각각 대입하여 a, b를 구하면 $a=\frac{2}{3}$, $b=-2$이다.

5

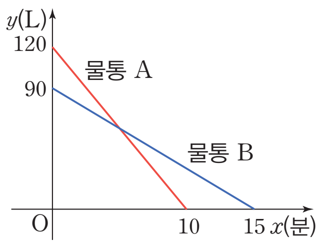
연립방정식 $\begin{cases} x+y=2 \\ ax+2y=b \end{cases}$의 해가 무수히 많을 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수) 6

풀이 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2 \\ ax+2y=b \end{cases}$의 해가 무수히 많으므로 두 직선의 그래프는 일치한다. 두 그래프가 일치하려면 기울기와 y절편이 같아야 하므로 $x+y=2$의 각 항에 2배를 하면 $2x+2y=4$이고, 이 식은 $ax+2y=b$와 같아야 한다. 따라서 $a=2$, $b=4$이다. 그러므로 $a+b=6$이다.

6 실생활

문제 해결

두 물통 A와 B에는 각각 120 L와 90 L의 물이 들어 있다. 오른쪽 그래프는 두 물통에서 각각 일정한 속력으로 동시에 물을 빼낸다고 할 때, x분 후에 남아 있는 물의 양 y L를 나타낸 것이다. 두 물통에 남아 있는 물의 양이 같아지는 것은 몇 분 후인지 구하시오. 5분 후



풀이 물통 A의 그래프의 식은 $y=120-12x$, 물통 B의 그래프의 식은 $y=90-6x$이다. 두 물통에 남아 있는 물의 양이 같아지는 시간을 구하기 위해 연립방정식 $\begin{cases} y=90-6x \\ y=120-12x \end{cases}$를 풀면 $x=5$, $y=60$이다. 따라서 두 물통에 남아 있는 물의 양이 같아지는 것은 5분 후이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/Uz9OdogRPPbD1R1P

자기 평가

두 일차함수의 그래프와 연립일차방정식의 관계를 설명할 수 있다.

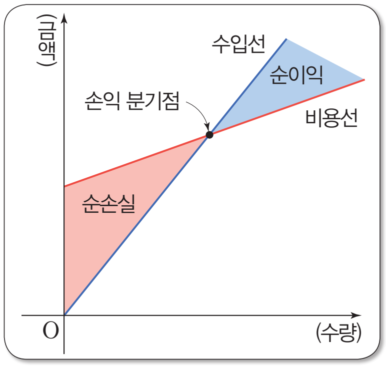
두 일차함수의 그래프와 연립일차방정식의 관계를 알고, 이와 관련한 문제를 해결할 수 있다.

수학으로+ 탐험하기

풀이 수어 키링을 제작하는 데 드는 재료비는 개당 1000원이므로 총 재료비는 $1000x$원이다. 또한, 로고 인쇄기를 구입하는 데 100000원이 필요하므로 수어 키링을 x개 제작하는 데 드는 비용을 y원이라고 할 때, x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내면 $y=1000x+100000$이다.

일차함수로 생각해 보는 사회적 기업의 지속 가능성

오늘날 여러 사회적 기업들이 소외 계층이나 취약 계층의 삶의 질을 높일 수 있는 서비스를 제공하고자 노력하고 있다. 그러나 기업이 들이는 비용이 수입보다 많으면 이러한 서비스를 지속적으로 제공할 수 없다. 사회적 기업이 일정한 이익을 얻어 사업을 지속하기 위해서는 상품의 가격을 정하는 일이 매우 중요하다.



수입이 비용보다 많으면 이익을 얻게 되고, 반대로 비용이 수입보다 많으면 손해를 보게 된다. 이때 수입과 비용이 일치하는 지점을 손익 분기점이라고 한다. 오른쪽 그림과 같이 판매량에 따른 수입과 비용을 그래프로 나타내면 이익과 손해에 대한 정보를 쉽게 확인할 수 있다.

● **한 사회적 기업은 장애인의 어려움에 대한 인식을 높이기 위해 다양한 상품을 만들어 판매하고, 그로 인해 얻은 이익으로 장애인을 위한 수어, 점자 등의 다양한 교육 프로그램을 개발하려고 한다. 다음 두 직원의 행사 기획을 보고, 활동을 해 보자.**

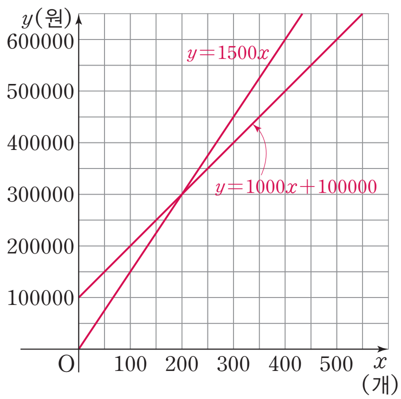
1 직원 A는 청각 장애인의 어려움에 대한 인식을 높이기 위해 수어 키링을 만들어 판매하는 행사를 기획하였다. 이 키링을 제작하기 위해서 로고 인쇄기를 구입하는 데 100000원, 키링 재료를 구입하는 데 1개당 1000원이 필요하다. 키링 1개당 1500원에 판매하려고 할 때, 다음 물음에 답해 보자.

(1) 수어 키링을 x개 제작하는 데 드는 비용이 y원이라고 할 때, x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내 보자. $y=1000x+100000$

(2) 수어 키링을 x개 판매하여 얻은 금액을 y원이라고 할 때, x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내 보자. $y=1500x$

풀이 수어 키링의 판매 가격은 개당 1500원이므로 수어 키링을 x개 판매하여 얻은 금액을 y원이라고 할 때, x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내면 $y=1500x$이다.

(3) (1), (2)에서 구한 식을 오른쪽 좌표평면 위에 그래프로 나타내 보자. 또, 손익 분기점을 찾고, 그때의 키링 판매량을 구해 보자. 풀이 참조



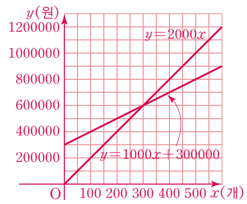
풀이 일차함수 $y=1000x+100000$, $y=1500x$의 그래프를 좌표평면 위에 그래프로 나타내면 다음과 같다. 이때 두 그래프의 교점은 손익 분기점을 나타낸다.

연립방정식 $\begin{cases} y=1000x+100000 \\ y=1500x \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=200$, $y=300000$이다.

따라서 손익 분기점일 때의 키링 판매량은 200개이다.

2 직원 B는 시각 장애인의 어려움에 대한 인식을 높이기 위해 점자 책갈피를 만들어 판매하는 행사를 기획하였다. 이 책갈피를 제작하기 위해서 로고 인쇄기를 구입하는 데 100000원, 점자 인쇄기를 구입하는 데 200000원, 책갈피 재료를 구입하는 데 1개당 1000원이 필요하다. 책갈피 1개당 2000원에 판매하려고 할 때, 손익 분기점을 찾고, 그때의 책갈피 판매량을 구해 보자. **300개**

풀이 점자 책갈피를 x개 제작하기 위해서는 로고 인쇄기 구입비 100000원, 점자 인쇄기 구입비 200000원, 책갈피 재료비 $1000x$원이 필요하다. 따라서 점자 책갈피를 x개 제작하는 데 드는 비용을 y원이라고 할 때, x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내면 $y=1000x+300000$이다. 또한, 점자 책갈피를 1개당 2000원에 판매한다면 점자 책갈피를 x개 판매하여 얻은 금액을 y원이라고 할 때, x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내면 $y=2000x$이다.
일차함수 $y=1000x+300000$, $y=2000x$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.
이때 두 그래프의 교점은 손익 분기점을 나타낸다. 연립방정식 $\begin{cases} y=1000x+300000 \\ y=2000x \end{cases}$의 해를 구하면 $x=300$, $y=600000$이다. 따라서 손익 분기점일 때의 책갈피 판매량은 300개이다.



3 장애인을 위한 교육 프로그램을 제작하기 위해서는 총 900000원이 필요하다고 한다. 다음 물음에 답해 보자.

(1) **1**에서 직원 A가 기획한 행사의 수익금으로 교육 프로그램을 제작하기 위해서 판매해야 하는 수어 키링은 몇 개인지 구해 보자. **2000개**

풀이 **1**에서 직원 A가 기획한 행사의 수익금을 y원이라고 할 때, $y=(1500x)-(1000x+100000)=500x-100000$이다. 이 일차함수의 식에 $y=900000$을 대입하면 $x=2000$이 되므로, 900000원의 수익금을 내기 위해 판매해야 하는 수어 키링은 2000개이다.

(2) **2**에서 직원 B가 기획한 행사의 수익금으로 교육 프로그램을 제작하기 위해서 판매해야 하는 점자 책갈피는 몇 개인지 구해 보자. **1200개**

풀이 **2**에서 직원 B가 기획한 행사의 수익금을 y원이라고 할 때, $y=(2000x)-(1000x+300000)=1000x-300000$이다. 이 일차함수의 식에 $y=900000$을 대입하면 $x=1200$이 되므로, 900000원의 수익금을 내기 위해 판매해야 하는 점자 책갈피는 1200개이다.

(3) 이 기업에서 기획한 두 행사를 비교하고, 두 행사 중 어느 행사를 시행하는 것이 좋을지 친구와 이야기해 보자. **풀이 참조**

풀이 **|예시 1|** 손익 분기점까지 도달하는 데 필요한 판매량은 키링이 책갈피보다 더 적기 때문에 더 적은 판매량으로 이익을 낼 수 있다. 따라서 초기 부담이 적고 적은 판매량으로도 이익을 낼 수 있는 키링을 만들어 판매하는 행사를 시행하는 것이 더 좋을 것 같다.
|예시 2| 교육 프로그램을 제작하는 데 필요한 판매량은 책갈피가 키링보다 더 적다. 따라서 더 적은 판매량으로 목표 금액을 달성할 수 있는 책갈피를 만들어 판매하는 행사를 시행하는 것이 더 좋을 것 같다.

| 상호 평가표 |

평가 내용		자기 평가	친구 평가
내용	수입과 비용을 방정식, 그래프로 나타내고 수입과 비용의 관계를 탐구할 수 있다.		
	그래프에서 손익 분기점을 찾고, 그 의미를 알 수 있다.		
태도	경제·금융 분야에서 일차함수가 활용되는 사례를 통해 수학의 유용성을 인식했다.		

스스로 마무리하기

생각 완성하기

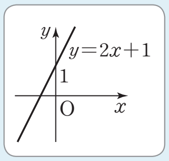
● 각 단원의 내용을 정리하여 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

01 함수의 뜻

• 함수
함수 $y=5x$에서
$x=3$일 때의 함숫값
➜ $f(3)=5\times\boxed{3}=\boxed{15}$

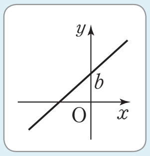
02 일차함수와 그 그래프

• 일차함수의 그래프
일차함수 $y=2x+1$에서
기울기: $\boxed{2}$
y절편: 1

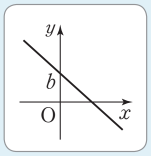


03 일차함수의 그래프의 성질

• 일차함수 $y=ax+b$의 성질



$a>0$일 때



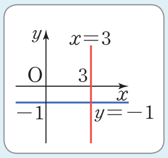
$\boxed{a<0}$일 때

04 일차함수의 식 구하기

• 일차함수의 식 구하기
① 기울기와 한 점의 좌표를 함수식에 대입하여 구한다.
② 함수식에 두 점의 좌표를 대입하여 구한다.

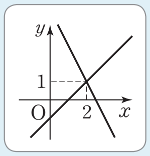
05 일차함수와 일차방정식

• 일차방정식 $x=p$, $y=q$의 그래프
오른쪽 그래프에서
$x=3$,
$y=-1$



06 일차함수의 그래프와 연립일차방정식

• 연립방정식의 해와 그래프
두 그래프의 교점의
좌표 (2, 1)
➜ $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$
의 해 $(\boxed{2}, \boxed{1})$



●○○

1 다음 중에서 y가 x의 함수가 아닌 것은? ④

① 올해 14세인 수미의 x년 후의 나이는 y세이다.

② 1개에 500원인 빵 x개의 값은 y원이다.

③ 한 변의 길이가 x cm인 정사각형의 둘레의 길이는 y cm이다.

④ 자연수 x보다 큰 홀수 y

⑤ 자전거를 타고 시속 x km로 2시간 동안 달린 거리는 y km이다.

풀이 함수란 두 변수 x, y에 대하여 x의 값이 변함에 따라 y의 값이 각각 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계이다.
④ 예를 들어 자연수 2보다 큰 홀수는 3, 5, 7, 9, … 로 자연수 x보다 큰 홀수 y의 값이 하나로 정해지지 않으므로 함수가 아니다.
따라서 y가 x의 함수가 아닌 것은 ④이다.

●○○

2 함수 $f(x)=ax+3$에서 $f(2)=5$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. 1

풀이 $f(2)=5$는 $x=2$일 때, $y=5$를 의미한다. 따라서 $x=2$, $y=5$를 $f(x)=ax+3$에 대입하면 $5=2a+3$, $a=1$이다.

●○○

3 다음 중 y가 x의 일차함수인 것은? ③

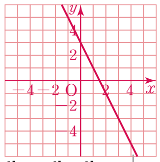
① $y=4$　　② $5x+4=0$

③ $y=2x-4$　　④ $y^2=x-6$

⑤ $xy+4=0$

풀이 y가 x의 일차함수인 것은 y가 x에 대한 일차식으로, 즉 $y=ax+b$로 나타낼 수 있는 함수이다. 따라서 y가 x의 일차함수인 것은 ③이다.

풀이 일차함수 $y=-2x+3$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



① $x=-2$를 $y=-2x+3$에 대입하면 $y=-2\times(-2)+3=7$이므로 점 $(-2, 7)$을 지난다.

4 다음 중에서 일차함수 $y=-2x+3$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르면? ②, ⑤

① 점 $(-2, 3)$을 지난다.

② 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면을 지난다.

③ 오른쪽 위로 향하는 직선이다.

④ x절편은 -2이고, y절편은 3이다.

⑤ 일차함수 $y=-2x$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프이다.

② 일차함수 $y=-2x+3$의 그래프를 보면 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면을 지난다.

③ 기울기가 $-2<0$이므로 오른쪽 아래로 향하는 직선이다.

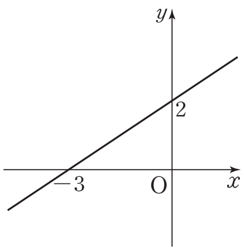
④ x절편은 $\frac{3}{2}$, y절편은 3이다.

⑤ 일차함수 $y=-2x$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 옳은 것은 ②, ⑤이다.

5 오른쪽 그림은 일차함수 $y=ax-3$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다. 이때 $3a+b$의 값을 구하시오. 7

(단, a, b는 상수)

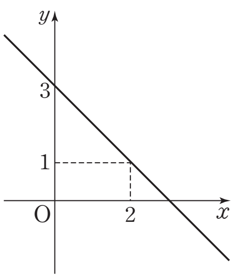


풀이 주어진 그래프를 보면 기울기는 $\frac{2}{3}$이고, y절편은 2이다.

주어진 그래프는 일차함수 $y=ax-3$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이므로 $a=\frac{2}{3}$, $2=-3+b$, $b=5$이다.

따라서 $3a+b=3\times\frac{2}{3}+5=7$이다.

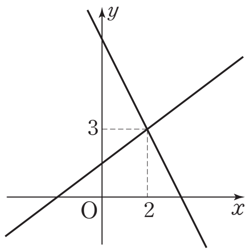
6 오른쪽 그림과 같은 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오. $y=-x+3$



풀이 주어진 그래프는 $(2, 1)$, $(0, 3)$을 지나는 그래프이므로 기울기가 $\frac{1-3}{2-0}=-1$이고, y절편이 3인 일차함수이다.

따라서 $y=-x+3$이다.

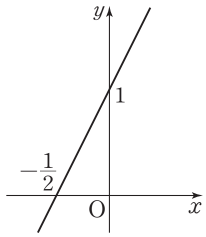
7 오른쪽 그림은 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x+ay=-6 \end{cases}$ 의 해를 구하기 위해 각 방정식의 그래프를 그린 것이다. 이때 상수 a의 값을 구하시오. -4



풀이 주어진 방정식의 그래프에서 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x+ay=-6 \end{cases}$ 의 해는 $(2, 3)$이므로 $x=2$, $y=3$을 $3x+ay=-6$에 대입하면 $3\times2+3a=-6$, $a=-4$이다.

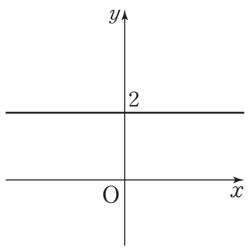
8 일차방정식 $x+ay+b=0$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, ab의 값을 구하시오. $-\frac{1}{4}$

(단, a, b는 상수)



풀이 주어진 그래프는 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $(0, 1)$을 지나므로 기울기는 2이고, y절편이 1이므로 일차함수 식은 $y=2x+1$이다. 이 일차함수 식을 $x+ay+b=0$의 형태로 표현하면 $x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}=0$이므로 $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이다. 따라서 $ab=-\frac{1}{4}$이다.

9 일차방정식 $ax+by+4=0$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 x축과 평행할 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오. $a=0$, $b=-2$



풀이 주어진 그래프는 점 $(0, 2)$를 지나고 x축에 평행하므로 $y=2$의 그래프이다. 따라서 $a=0$, $b=-2$이다.

10 연립방정식 $\begin{cases} 3x-2y=b \\ ax-y=3 \end{cases}$ 의 해가 무수히 많을 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오. $a=\frac{3}{2}$, $b=6$

풀이 주어진 연립방정식의 해가 무수히 많으므로 연립방정식의 두 일차방정식의 그래프는 일치한다. 두 일차방정식의 그래프가 일치하려면 기울기와 y절편이 같아야 하므로 $ax-y=3$의 각 항에 2배를 하면 $2ax-2y=6$이고, 이 식은 $3x-2y=b$와 같아야 한다.

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=6$이다.

스스로 마무리하기

서술형 문제

11 두 점 $(0,\ 6)$, $(2,\ 0)$을 지나는 직선 l과 y절편이 -6인 직선 m이 점 $(k,\ -3)$에서 만난다고 할 때, 직선 m의 방정식을 구하려고 한다. 풀이 과정과 답을 쓰시오. (단, k는 상수) $y=x-6$

풀이 두 점 $(0,\ 6)$, $(2,\ 0)$을 지나는 직선 l은 $y=-3x+6$이고, y절편이 -6인 직선 m을 $y=ax-6$이라고 할 때, 두 직선이 $(k,\ -3)$에서 만나므로 $x=k$, $y=-3$을 $y=-3x+6$에 대입하면
$-3=-3k+6$, $k=3$이다. 따라서 $(3,\ -3)$을 $y=ax-6$에 대입하면 $-3=3a-6$, $a=1$이므로 직선 m의 방정식은
$y=x-6$이다.

채점 기준	배점 비율
(i) k의 값을 구한 경우	50 %
(ii) 직선 m의 기울기를 구한 경우	40 %
(iii) 직선 m의 방정식을 구한 경우	10 %

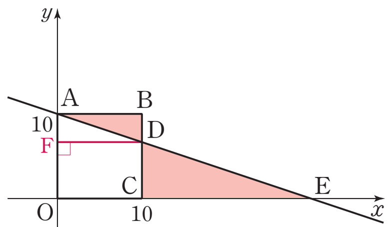
12 100 L의 물이 들어 있는 물통에서 물이 1분당 2 L씩 일정하게 흘러나오고 있다. x분 후 물통에 남아 있는 물의 양을 y L라고 할 때, 30 L의 물이 남아 있기까지 걸리는 시간을 구하려고 한다. 풀이 과정과 답을 쓰시오. 35분

풀이 물이 1분당 2 L씩 일정하게 흘러나오고 있으므로 x분 후 물통에 남아 있는 물의 양 y는 $y=-2x+100$이다. 물의 양이 30 L 남아 있으므로 $y=30$을 대입하면 $30=-2x+100$, $x=35$이다. 따라서 35분 후 물의 양이 30 L 남아 있다.

채점 기준	배점 비율
(i) 일차함수의 식을 세운 경우	60 %
(ii) 30 L의 물이 남아 있기까지 걸리는 시간을 구한 경우	40 %

사고력 문제

13 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 정사각형 AOCB가 있다. 점 A와 변 BC 위의 한 점 D를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 E라고 하자. 색칠한 두 부분의 넓이의 합이 사다리꼴 AOCD의 넓이와 같다고 할 때, 점 A, E를 지나는 직선의 방정식을 구하시오. $y=-\frac{1}{3}x+10$
(단, 점 O는 원점이다.)



풀이 점 D에서 y축에 내린 수선의 발을 F라고 하면 $\triangle ADB \equiv \triangle DAF$이고, 색칠한 부분의 넓이와 사다리꼴 AOCD의 넓이가 같으므로 삼각형 DCE의 넓이와 사각형 OCDF의 넓이도 같다.
$\frac{1}{2}\times\overline{CE}\times\overline{CD}=10\times\overline{CD}$, $\overline{CE}=20$
따라서 직선 AE는 두 점 $A(0,\ 10)$, $E(30,\ 0)$을 지나므로 점 A, E를 지나는 직선의 방정식은 직선 AE가 나타내는 일차함수의 식과 같고, $y=-\frac{1}{3}x+10$이다.

14 서로 다른 세 직선 $x-y=0$, $2x+y=3$, $4x+ky=2$가 삼각형을 이루지 않도록 하는 모든 상수 k의 값의 합을 구하시오. -4

풀이 (i) 세 직선 중 두 직선이 평행할 때
직선 $4x+ky=2$의 기울기가 $-\frac{4}{k}$이므로
$-\frac{4}{k}=1$ 또는 $-\frac{4}{k}=-2$이어야 한다.
따라서 $k=-4$ 또는 $k=2$이다.
(ii) 세 직선이 한 점에서 만날 때
$x-y=0$, $2x+y=3$의 해는 $x=1$, $y=1$이므로 이를 $4x+ky=2$에 대입하면 $k=-2$이다.
(i), (ii)에서 모든 k의 값의 합은 -4이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/o5ai1vC2DeO0jaj4

마무리 평가

자신의 학습 태도를 스스로 점검해 보자.

이 단원을 공부하면서 알게 된 것을 써 보자.	이 단원을 공부하면서 어려웠던 점을 쓰고 복습 계획을 세워 보자.

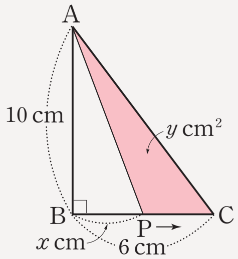
일차함수를 이용하여 실생활, 사회 및 자연 현상과 관련된 문제를 도전적인 태도로 해결하기 위해 노력했다.	
자신의 생각을 수학적으로 표현하고, 다른 사람의 생각을 이해하려고 노력했다.	
잘 이해하지 못한 내용은 친구나 선생님의 도움을 받아 확실하게 알도록 노력했다.	
문제를 풀 때 끈기 있게 도전했다.	

교과서 문제 뛰어넘기

| 정답과 해설 325쪽 |

1 두 일차함수 $y=-\frac{2}{5}x+4$, $y=\frac{2}{3}x+4$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하시오.

2 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=10\text{ cm}$, $\overline{BC}=6\text{ cm}$인 직각삼각형 ABC에서 점 P가 점 B를 출발하여 점 C까지 이동할 때, $\overline{BP}=x\text{ cm}$, $\triangle APC=y\text{ cm}^2$라고 하자. 이때 x와 y 사이의 관계식을 구하시오.

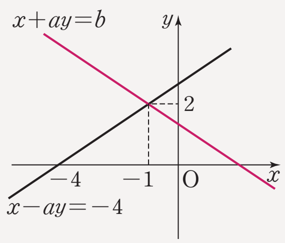


3 두 직선 $x+ay=b$, $x-ay=-4$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 연립방정식

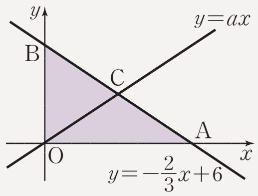
$$\begin{cases} x+ay=b \\ x-ay=-4 \end{cases}$$

에서 ab의 값을 구하시오.

(단, a, b는 상수)

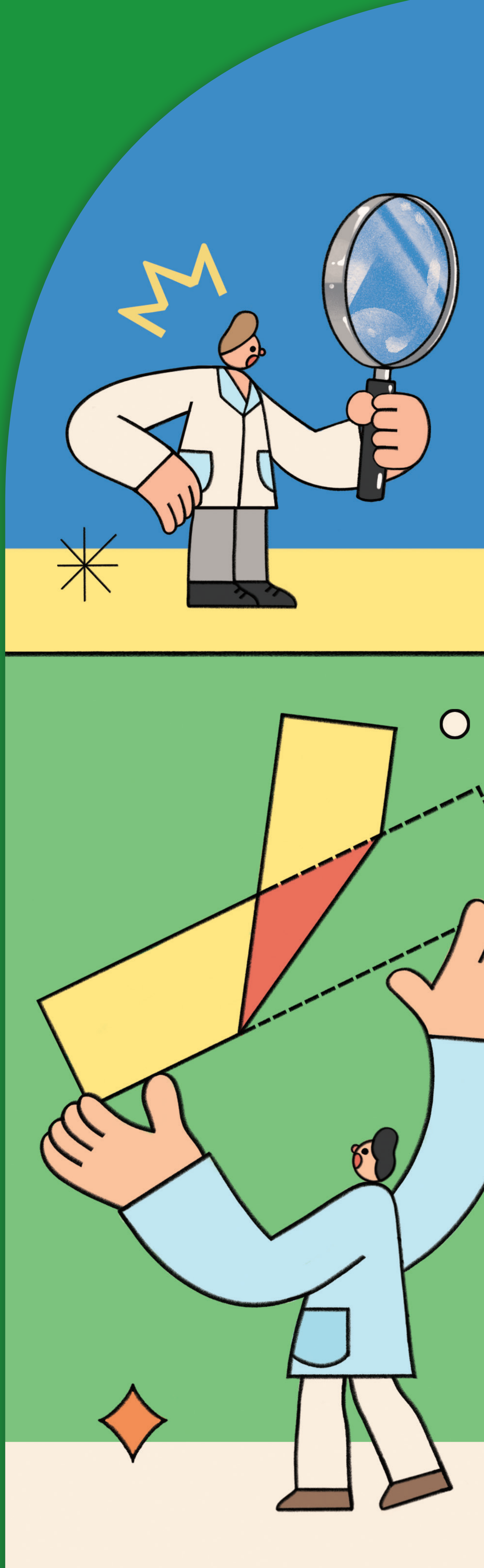


4 오른쪽 그림과 같이 일차함수 $y=-\frac{2}{3}x+6$의 그래프가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라고 하자. 일차함수 $y=ax$의 그래프가 $\triangle OAB$의 넓이를 이등분할 때, 상수 a의 값을 구하시오. (단, O는 원점)



Ⅵ

삼각형과 사각형의 성질



단원 이야기

우리 주변에서 삼각형과 사각형의 성질을 이용하여 설계한 건축물, 교량, 철탑 등을 볼 수 있다. 삼각형과 사각형의 성질은 건축이나 측량 등에 이용될 뿐만 아니라 논리적이고 합리적인 사고를 키우는 데에도 도움이 된다.

이 단원에서는 여러 가지 삼각형과 사각형의 성질과 조건을 배우고 관계를 이해한다.

| 배운 내용 |

초3~4
- 여러 가지 삼각형
- 여러 가지 사각형

중1
- 기본 도형
- 작도와 합동
- 평면도형의 성질

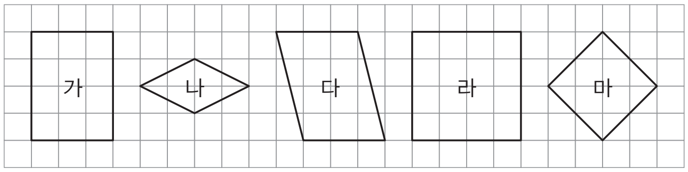
| 이어질 내용 |

중3
- 삼각비
- 원의 성질

이것만은 알고 가기

초 3~4 여러 가지 사각형 잘함 보통 모름

1 다음 그림을 보고, 알맞은 도형을 각각 찾으시오.

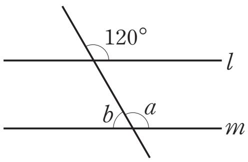


(1) 정사각형 라, 마 (2) 직사각형 가, 라, 마 (3) 마름모 나, 라, 마 (4) 평행사변형 가, 나, 다, 라, 마

중 1 평행선의 성질 잘함 보통 모름

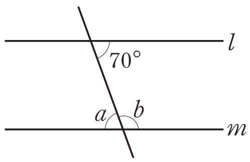
2 다음 그림에서 $l /\!/ m$일 때, $\angle a$, $\angle b$의 크기를 각각 구하시오.

(1)



$\angle a=120^\circ$, $\angle b=60^\circ$

(2)



$\angle a=70^\circ$, $\angle b=110^\circ$

풀이 (1) $l /\!/ m$이므로 동위각의 크기는 서로 같다.
따라서 $\angle a=120^\circ$이고,
$\angle b=180^\circ-120^\circ=60^\circ$이다.

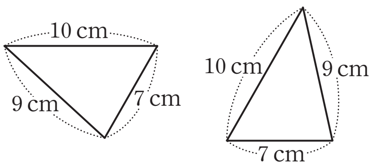
(2) $l /\!/ m$이므로 엇각의 크기는 서로 같다.
따라서 $\angle a=70^\circ$이고,
$\angle b=180^\circ-70^\circ=110^\circ$이다.

- 평행한 두 직선이 다른 한 직선과 만날 때, 동위각의 크기는 서로 같다.
- 평행한 두 직선이 다른 한 직선과 만날 때, 엇각의 크기는 서로 같다.

중 1 삼각형의 합동 조건 잘함 보통 모름

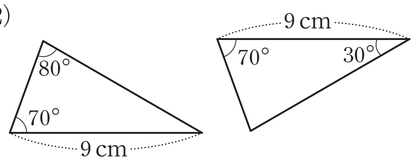
3 다음 두 삼각형의 합동 조건을 말하시오.

(1)



세 대응변의 길이가 각각 같다.

(2)



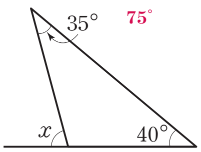
한 대응변의 길이가 같고, 그 양 끝 각의 크기가 각각 같다.

- 두 삼각형은 다음의 각 경우에 서로 합동이다.
  ① 세 대응변의 길이가 각각 같다.
  ② 두 대응변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같다.
  ③ 한 대응변의 길이가 같고, 그 양 끝 각의 크기가 각각 같다.

중 1 삼각형의 내각와 외각 잘함 보통 모름

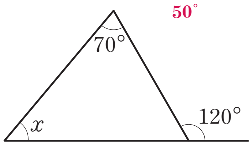
4 다음 그림에서 $\angle x$의 크기를 구하시오.

(1)



75°

(2)

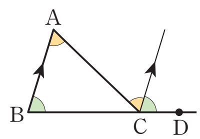


50°

풀이 (1) 삼각형에서 한 외각의 크기는 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같으므로 $\angle x=35^\circ+40^\circ=75^\circ$이다.

(2) 삼각형에서 한 외각의 크기는 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같으므로 $\angle x=120^\circ-70^\circ=50^\circ$이다.

- 삼각형의 한 외각의 크기



$\angle ACD=\angle A+\angle B$

01 이등변삼각형의 성질

이 단원에서 배우는 용어와 기호

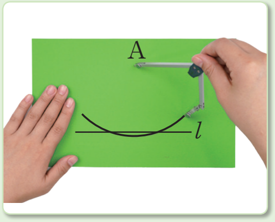
증명

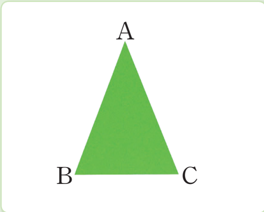
[학습 목표] 이등변삼각형의 성질을 이해하고 정당화할 수 있다.

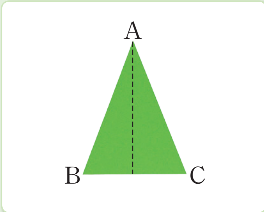
이등변삼각형에는 어떤 성질이 있을까?

생각 펼치기

다음 순서에 따라 활동을 하고, 물음에 답해 보자. [준비물: 종이, 연필, 자, 컴퍼스, 가위]







❶ 종이 위에 직선 l과 그 직선 위에 있지 않은 점 A를 그린 뒤, 점 A를 중심으로 하고 직선 l과 두 점에서 만나는 원을 그린다.

❷ 원과 직선의 교점을 각각 B, C라고 할 때, 세 점 A, B, C를 연결하여 만든 △ABC를 잘라 낸다.

❸ △ABC의 두 변 AB와 AC가 겹치도록 접었다 편다.

1. △ABC가 어떤 삼각형인지 말해 보자. 이등변삼각형

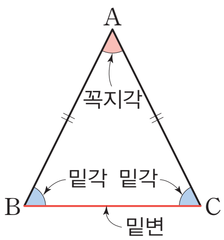
2. ❸에서 접는 활동을 할 때, △ABC에서 발견할 수 있는 성질을 말해 보자. 풀이 참조

풀이 이등변삼각형 ABC는 두 변 AB와 AC가 겹치도록 접으면 완전히 포개어지므로 ∠B와 ∠C의 크기가 서로 같다는 것을 알 수 있다. 또, 접은 선은 ∠A의 이등분선이며 $\overline{BC}$를 수직이등분한다는 것을 알 수 있다.

이등변삼각형의 성질

Tip 이등변삼각형에서 한 내각이 아래에 있다고 밑각이라고 단정지으면 안됨을 주의한다.

이등변삼각형은 두 변의 길이가 서로 같은 삼각형이다. 이등변삼각형에서 길이가 같은 두 변이 이루는 각을 꼭지각, 꼭지각의 대변을 밑변, 밑변의 양 끝 각을 밑각이라고 한다.



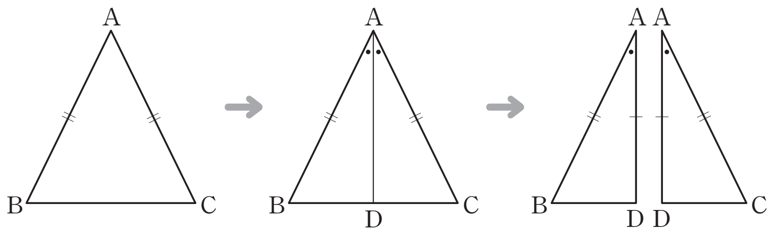
확인하기 오른쪽 그림과 같은 △ABC에서 ∠BAC는 꼭지각, ∠ABC와 ∠ACB는 밑각, $\overline{BC}$는 밑변(이)라고 한다.

생각 펼치기에서 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$는 원의 반지름이므로 △ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이다. 이때 이등변삼각형 ABC는 두 변 AB와 AC가 겹치도록 접으면 완전히 포개어지므로 두 밑각인 ∠B와 ∠C의 크기가 서로 같다는 것을 알 수 있다. 또, 접은 선은 ∠A의 이등분선이며 $\overline{BC}$를 수직이등분한다는 것을 알 수 있다.

이제 이등변삼각형의 두 밑각의 크기가 서로 같다는 성질이 성립하는지 확인해 보자.

탈레스(Thales, B.C. 624?~B.C. 546?)는 고대 그리스의 수학자로, 최초로 '이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 서로 같다'를 논리적인 방법으로 증명하였다. (출처: 김화영, 『교과서를 만든 수학자들』)

다음 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선을 그어 밑변 BC와의 교점을 D라고 하자.



▶ **두 삼각형이 서로 합동임을 보이기**

$\triangle ABD$와 $\triangle ACD$에서

$$\overline{AB}=\overline{AC},\ \overline{AD}\text{는 공통},\ \angle BAD=\angle CAD$$

이다. 따라서 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같으므로

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$$

이다.

대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때, 두 삼각형은 서로 합동이다.

개념 쏙

두 삼각형은 다음의 각 경우에 서로 합동이다.

① 세 대응변의 길이가 각각 같을 때(SSS 합동)

② 두 대응변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때(SAS 합동)

③ 한 대응변의 길이가 같고, 그 양 끝 각의 크기가 각각 같을 때(ASA 합동)

▶ **이등변삼각형의 두 밑각의 크기가 서로 같음을 보이기**

$\triangle ABD$와 $\triangle ACD$에서 대응하는 각의 크기가 각각 같으므로

$$\angle B=\angle C$$

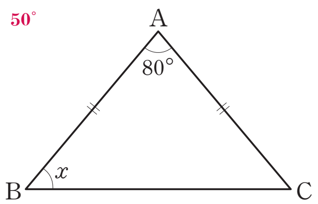
이다. 즉, 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 서로 같다.

관찰로부터 얻은 추측이 항상 옳다고 말하려면 그 이유를 밝히는 논리적인 설명이 필요하다.

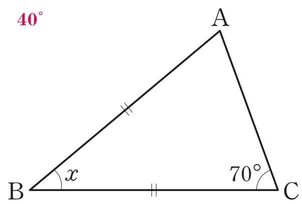
이와 같이 이미 알고 있는 옳은 사실이나 밝혀진 성질들을 이용하여 어떤 사실이 참임을 밝히는 것을 **증명**이라고 한다.

1 **다음 그림에서 $\angle x$의 크기를 구하시오.**

(1) 50°



(2) 40°

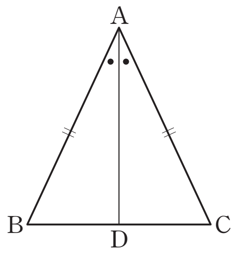


풀이 (1) 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 서로 같고, 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로 $\angle x+\angle x+80^\circ=180^\circ$이다. 따라서 $\angle x=50^\circ$이다.

(2) 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 서로 같고, 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로 $70^\circ+70^\circ+\angle x=180^\circ$이다. 따라서 $\angle x=40^\circ$이다.

이제 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선이 밑변을 수직이등분함을 증명을 통해 확인해 보자.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선을 그어 밑변 BC와의 교점을 D라고 하자.



▶ 두 삼각형이 서로 합동임을 보이기

$\triangle ABD$와 $\triangle ACD$에서

$$\overline{AB}=\overline{AC},\ \overline{AD}\text{는 공통},\ \angle BAD=\angle CAD$$

이다. 따라서 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같으므로

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$$

이다.

▶ 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선이 밑변을 수직이등분함을 보이기

$\triangle ABD$와 $\triangle ACD$에서 대응하는 변의 길이가 각각 같으므로

$$\overline{BD}=\overline{CD}$$

이다. 또, $\angle ADB=\angle ADC$이고 $\angle ADB+\angle ADC=180^\circ$이므로

$$\angle ADB=\angle ADC=90^\circ$$

이다. 따라서 $\overline{AD}$는 $\overline{BC}$를 수직이등분한다.

즉, 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다.

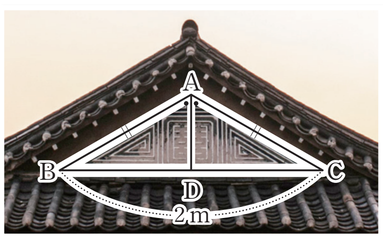
이상을 정리하면 다음과 같다.

이등변삼각형의 성질

1. 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 서로 같다.

2. 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다.

2 오른쪽 그림과 같이 전통 건축물에 나타난 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 $\overline{BC}$의 교점을 D라고 하자. $\overline{BC}=2$ m일 때, 다음을 구하시오.



(1) $\overline{BD}$의 길이 1 m

(2) $\angle ADC$의 크기 90°

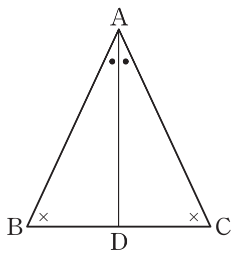
풀이 (1) $\overline{BD}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 2=1(\text{m})$

(2) $\angle ADC=90^\circ$

이등변삼각형이 되는 조건은 무엇일까?

이등변삼각형이 되는 조건

이번에는 두 내각의 크기가 서로 같은 삼각형이 이등변삼각형임을 증명을 통해 확인해 보자.



오른쪽 그림과 같이 $\angle B=\angle C$인 $\triangle ABC$에서 $\angle A$의 이등분선을 그어 $\overline{BC}$와의 교점을 D라고 하자.

▶ **두 삼각형이 서로 합동임을 보이기**

$\triangle ABD$와 $\triangle ACD$에서

$$\angle B=\angle C,\ \angle BAD=\angle CAD,\ \overline{AD}\text{는 공통}$$

이다.

이때 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$$\angle ADB=\angle ADC$$

이다. 따라서 대응하는 한 변의 길이가 같고, 그 양 끝 각의 크기가 각각 같으므로

$$\triangle ABD\equiv\triangle ACD$$

이다.

대응하는 한 변의 길이가 같고, 그 양 끝 각의 크기가 각각 같을 때, 두 삼각형은 서로 합동이다.

▶ **두 내각의 크기가 서로 같은 삼각형은 이등변삼각형임을 보이기**

$\triangle ABD$와 $\triangle ACD$에서 대응하는 변의 길이가 각각 같으므로

$$\overline{AB}=\overline{AC}$$

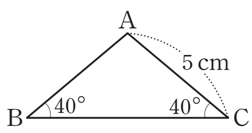
이다. 즉, 두 내각의 크기가 서로 같은 삼각형은 이등변삼각형이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

이등변삼각형이 되는 조건

두 내각의 크기가 서로 같은 삼각형은 이등변삼각형이다.

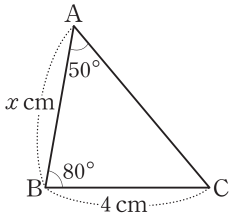
확인하기



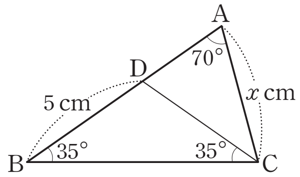
오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 $\angle B=\angle C$이므로 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이다. 따라서 $\overline{AB}=\boxed{5}$ cm이다.

함께 해 보기 1 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

(1)



(2)



풀이 (1) 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$$\angle ACB=180^\circ-(50^\circ+80^\circ)=50^\circ$$

이다. 따라서 두 내각의 크기가 서로 같으므로 $\triangle ABC$는 이등변삼각형이다. 즉, $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로 $x=4$이다.

(2) $\triangle DBC$에서 $\angle DBC=\angle DCB$이므로 $\triangle DBC$는 이등변삼각형이다. 따라서 $\overline{DB}=\overline{DC}=5$ cm이다. 또, $\triangle DBC$에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같으므로

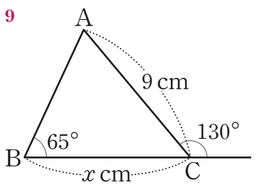
$$\angle ADC=\angle DBC+\angle DCB=35^\circ+35^\circ=70^\circ$$

이다. 따라서 두 내각의 크기가 서로 같으므로 $\triangle ADC$는 이등변삼각형이다. 즉, $\overline{AC}=\overline{DC}$이므로 $x=5$이다.

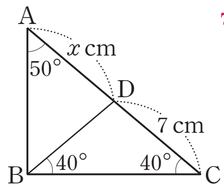
답 (1) 4 (2) 5

3 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

(1) 9



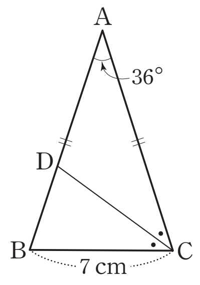
(2) 7



풀이 (1) $\angle A=130^\circ-\angle B=130^\circ-65^\circ=65^\circ$로 두 내각의 크기가 서로 같으므로 $\triangle ABC$는 이등변삼각형이다. 따라서 $x=9$이다.

(2) $\angle C=\angle DBC=40^\circ$로 두 내각의 크기가 서로 같으므로 $\triangle DBC$는 이등변삼각형이다. 따라서 $\overline{DB}=\overline{DC}=7$ cm이다. $\angle ABD=90^\circ-40^\circ=50^\circ$, $\angle A=\angle ABD$로 두 내각의 크기가 같으므로 $\triangle ADB$는 이등변삼각형이다. 따라서 $x=7$이다.

4 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\angle C$의 이등분선과 $\overline{AB}$의 교점을 D라고 할 때, 다음을 구하시오.



(1) $\angle BDC$의 크기 72°

(2) $\overline{AD}$의 길이 7 cm

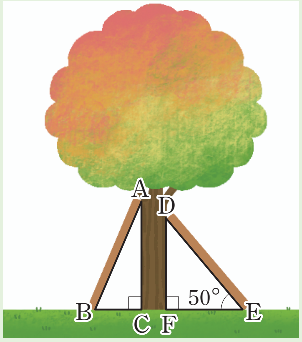
풀이 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 두 밑각의 크기는 서로 같다.

$\angle B=\angle C=(180^\circ-36^\circ)\times\frac{1}{2}=72^\circ$이고, $\angle BCD=\angle ACD=\frac{1}{2}\angle C=36^\circ$이므로 $\angle BDC=72^\circ$이다. 이때 $\angle ACD=\angle CAD$이므로 $\triangle ACD$는 이등변삼각형이고, $\overline{AD}=\overline{CD}$이다. 또한, $\angle BDC=72^\circ=\angle B$이므로 $\triangle CBD$는 이등변삼각형이고, $\overline{CB}=\overline{CD}$이다. 따라서 $\overline{AD}=7$ cm이다.

두 직각삼각형은 어떤 조건에서 합동이 될까?

생각 펼치기

오른쪽 그림과 같이 가로수의 양옆에 길이가 같은 나무 막대기 두 개로 지지대를 설치하려고 한다. $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$가 같은 모양이 되도록 왼쪽에 있는 지지대의 위치를 조정하려고 할 때, $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$가 서로 합동이 되게 하는 $\angle B$의 크기를 말해 보자. 풀이 참조



풀이 길이가 같은 나무 막대기 2개이므로 $\overline{AB}=\overline{DE}$이고, $\angle B=50^\circ$가 되도록 왼쪽에 있는 지지대의 위치를 조정하면 $\angle A=40^\circ$가 된다. 따라서 대응하는 한 변의 길이가 같고, 그 양 끝 각의 크기가 각각 같으므로 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$는 서로 합동이 된다.

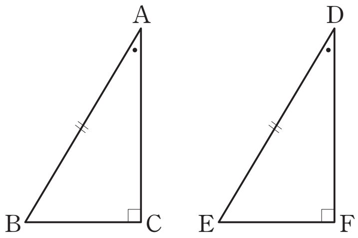
직각삼각형의 합동 조건

생각 펼치기 의 빗변의 길이가 같은 두 직각삼각형에서 한 내각의 크기가 90°이므로 한 예각의 크기가 같으면 다른 예각의 크기도 같아진다는 것을 알 수 있다. 이를 이용하여 빗변의 길이가 같은 두 직각삼각형의 합동 조건을 알아볼 수 있다.

직각삼각형에서 직각의 대변을 빗변이라고 한다.

빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같은 두 직각삼각형이 서로 합동임을 증명을 통해 확인해 보자.

오른쪽 그림과 같은 두 직각삼각형 ABC와 DEF에서 $\angle C=\angle F=90^\circ$, $\overline{AB}=\overline{DE}$, $\angle A=\angle D$라고 하자.



▶ **$\angle B$와 $\angle E$의 크기가 서로 같음을 보이기**

직각삼각형에서 직각을 뺀 두 내각의 크기의 합은 90°이므로

$$\angle B=90^\circ-\angle A=90^\circ-\angle D=\angle E$$

이다.

▶ **두 삼각형이 서로 합동임을 보이기**

$\triangle ABC$와 $\triangle DEF$에서 대응하는 한 변의 길이가 같고, 그 양 끝 각의 크기가 각각 같으므로

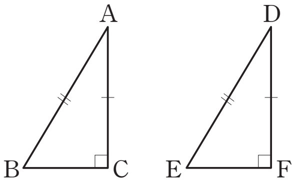
$$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$$

이다. 즉, 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같은 두 직각삼각형은 서로 합동이다.

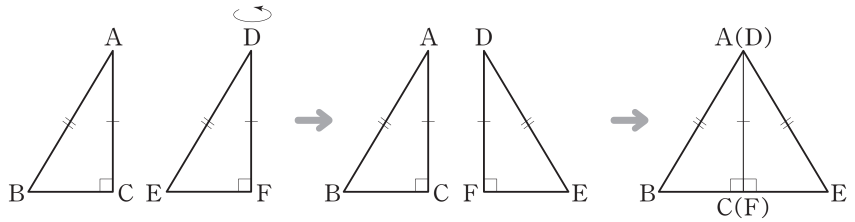
개념 쏙

평각의 크기는 180°이다.

5 오른쪽 그림과 같은 $\angle C = \angle F = 90^\circ$인 두 직각삼각형 ABC와 DEF에서 $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$일 때, $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$임을 증명하는 과정이다. 다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.



다음 그림과 같이 $\overline{AC}$와 $\overline{DF}$가 맞닿도록 $\triangle DEF$를 뒤집어 $\triangle ABC$에 붙이자.



이때 $\angle C + \angle F$의 크기는 두 직각의 합인 $\boxed{180^\circ}$이다. 따라서 세 점 B, C(F), E는 한 직선 위에 있다. 또한, $\triangle ABE$에서 $\overline{AB} = \boxed{\overline{AE}}$이므로 $\triangle ABE$는 이등변삼각형이고

$\angle B = \boxed{\angle E}$

이다. 따라서 두 직각삼각형의 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같으므로

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

이다. 즉, 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같은 두 직각삼각형은 서로 합동이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

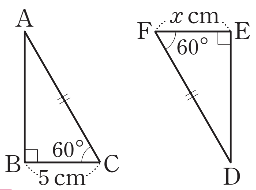
Right angle(직각), Hypotenuse(빗변), Angle(각), Side(변)의 첫 글자를 이용하여 직각삼각형의 합동 조건을 간단히
1. RHA 합동
2. RHS 합동
으로 나타내기도 한다.

직각삼각형의 합동 조건

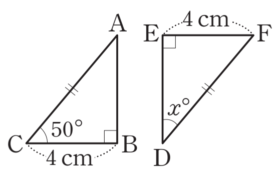
1. 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같은 두 직각삼각형은 서로 합동이다.
2. 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같은 두 직각삼각형은 서로 합동이다.

6 다음 그림과 같은 두 직각삼각형 ABC와 DEF에서 $\overline{AC} = \overline{DF}$일 때, x의 값을 구하시오.

(1) 5



(2) 40



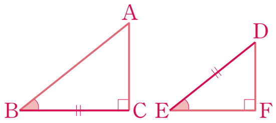
풀이 (1) 두 직각삼각형 ABC와 DEF에서 $\overline{AC} = \overline{DF}$, $\angle ACB = \angle DFE$이다. 이때 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같으므로 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$이다. 따라서 $x = 5$이다.

(2) 두 직각삼각형 ABC와 DEF에서 $\overline{AC} = \overline{DF}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$이다. 이때 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 같으므로 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$이다. 따라서 $x = 40$이다.

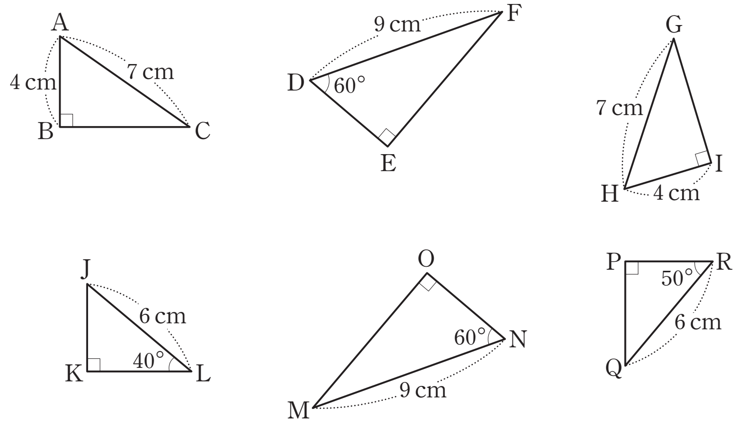
?! 수학 호기심

한 변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같은 두 직각삼각형도 서로 합동일까?

풀이 다음 그림과 같이 $\overline{BC}=\overline{DE}$, $\angle B=\angle E$인 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$에 대해 $\overline{BC}$는 빗변이 아닌 다른 한 변이고, $\overline{DE}$는 빗변인 경우 두 삼각형은 서로 합동이 아니다.

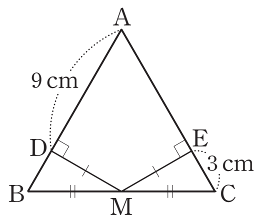


7 다음 중에서 서로 합동인 직각삼각형을 모두 찾아 기호 ≡를 사용하여 나타내고, 이때 사용한 직각삼각형의 합동 조건을 각각 말하시오. $\triangle ABC\equiv\triangle HIG$, 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같다. $\triangle DEF\equiv\triangle NOM$, 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같다. $\triangle JKL\equiv\triangle RPQ$, 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같다.



풀이 두 직각삼각형 ABC와 HIG에서 $\overline{AC}=\overline{HG}$, $\overline{AB}=\overline{HI}$이다.
이때 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같으므로 $\triangle ABC\equiv\triangle HIG$이다.
두 직각삼각형 DEF와 NOM에서 $\overline{DF}=\overline{NM}$, $\angle D=\angle N$이다.
이때 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같으므로 $\triangle DEF\equiv\triangle NOM$이다.
두 직각삼각형 JKL과 RPQ에서 $\overline{JL}=\overline{QR}$, $\angle L=90^\circ-\angle R=40^\circ=\angle Q$이다.
이때 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같으므로 $\triangle JKL\equiv\triangle RPQ$이다.

8 오른쪽 그림과 같은 $\triangle ABC$에서 점 M은 $\overline{BC}$의 중점이고, 점 M에서 두 변 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라고 하자. $\overline{MD}=\overline{ME}$이고, $\overline{AD}=9$ cm, $\overline{EC}=3$ cm일 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하시오. 12 cm

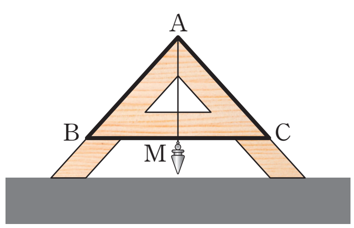


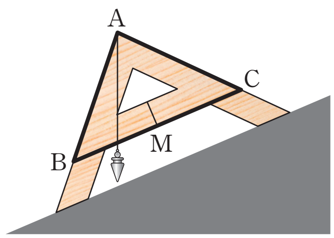
풀이 두 직각삼각형 MDB와 MEC에서 $\overline{MB}=\overline{MC}$, $\overline{MD}=\overline{ME}$이다. 이때 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같으므로 $\triangle MDB\equiv\triangle MEC$이다.
따라서 $\overline{BD}=\overline{CE}=3$ cm이므로 $\overline{AB}=12$ cm이다.

생각 더 나아가기

의사소통 연결

고대 이집트에서는 다음 그림과 같은 이등변삼각형 모양의 도구를 건축에 사용했다고 한다. $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{BC}$의 중점이 M인 이등변삼각형이고, 점 A에 달아둔 추는 항상 지면을 향한다고 한다. 이등변삼각형의 성질을 이용하여 이 도구로 수평을 확인할 수 있는지 친구와 이야기해 보자. 풀이 참조





풀이 점 A에 달아둔 추가 항상 지면을 향하므로 추를 매단 끈과 지면은 수직이다. 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분하므로 건물 바닥이 수평을 이룰 때, 추를 매단 끈은 $\overline{BC}$의 중점 M을 지난다. 따라서 추가 $\overline{BC}$의 중점 M을 향하면 바닥은 수평이고, 중점 M이 아닌 다른 곳을 향하면 바닥은 수평이 아니다.

스스로 점검하기

1

다음 □ 안에 알맞은 말을 써넣으시오.

(1) 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분 한다.

(2) 두 내각의 크기가 같은 삼각형은 이등변삼각형 이다.

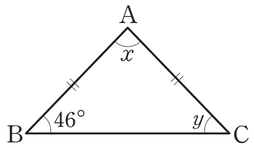
(3) 빗변의 길이와 한 예각 의 크기가 각각 같은 두 직각삼각형은 서로 합동이다.

(4) 빗변의 길이와 다른 한 변 의 길이가 각각 같은 두 직각삼각형은 서로 합동이다.

2

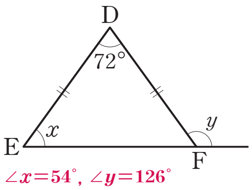
다음 그림에서 $\angle x$와 $\angle y$의 크기를 각각 구하시오.

(1)



$\angle x=88°$, $\angle y=46°$

(2)



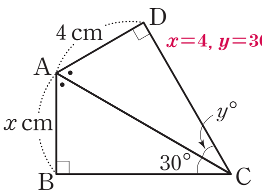
$\angle x=54°$, $\angle y=126°$

풀이 (1) 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 서로 같고, 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $180°$이므로 $\angle y=46°$이고,
$\angle x+46°+\angle y=180°$, $\angle x+46°+46°=180°$, $\angle x=88°$이다.
(2) 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 서로 같고, 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $180°$이므로 $72°+\angle x+\angle x=180°$, $\angle x=54°$이고,
$\angle y=180°-54°=126°$이다.

3

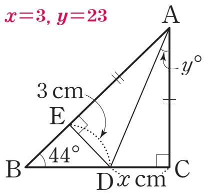
다음 그림에서 x, y의 값을 각각 구하시오.

(1)



$x=4$, $y=30$

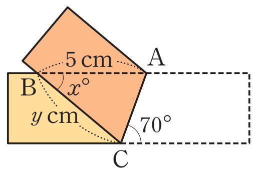
(2) $x=3$, $y=23$



풀이 (1) 두 직각삼각형 ABC와 ADC에서 $\overline{AC}$는 공통, $\angle BAC=\angle DAC$이다. 이때 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같으므로 $\triangle ABC\equiv\triangle ADC$이다. 따라서 $x=4$, $y=30$이다.
(2) 두 직각삼각형 AED와 ACD에서 $\overline{AD}$는 공통, $\overline{AE}=\overline{AC}$이다. 이때 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같으므로 $\triangle AED\equiv\triangle ACD$이다. 따라서 $x=3$이다.
또, $\angle DAC=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\times 46°=23°$이므로 $y=23$이다.

4

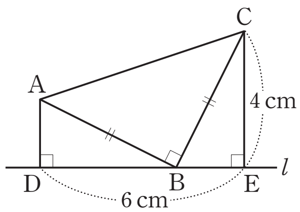
오른쪽 그림은 직사각형 모양의 종이를 $\overline{AC}$를 접는 선으로 하여 접은 모양이다. x, y의 값을 각각 구하시오. $x=40$, $y=5$



풀이 종이를 접었으므로 $\angle BCA=70°$이고, 평행선의 성질에 의하여 $\angle BAC=70°$이다.
$\triangle ABC$에서 두 내각의 크기가 같으므로 $\triangle ABC$는 이등변삼각형이다.
따라서 $x=40$, $y=5$이다.

5

다음 그림에서 $\triangle ABC$는 $\angle B=90°$이고, $\overline{AB}=\overline{BC}$인 직각이등변삼각형이다. 두 점 A, C에서 점 B를 지나는 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 D, E라고 할 때, $\overline{AD}$의 길이를 구하시오. 2 cm

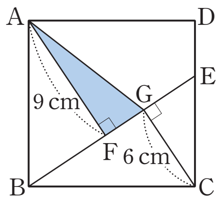


풀이 두 직각삼각형 ADB와 BEC에서 $\angle ABD+\angle CBE=90°$,
$\angle CBE+\angle BCE=90°$이므로 $\angle ABD=\angle BCE$이고 $\overline{AB}=\overline{BC}$이다.
이때 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같으므로
$\triangle ABD\equiv\triangle BCE$이다.
따라서 $\overline{BD}=\overline{CE}=4$ cm이므로 $\overline{AD}=\overline{BE}=6-4=2$(cm)이다.

6 사고력 UP

추론

오른쪽 그림과 같은 정사각형 ABCD에서 꼭짓점 B를 지나는 직선과 $\overline{CD}$의 교점을 E라고 하자. 두 점 A, C에서 $\overline{BE}$에 내린 수선의 발을 각각 F, G라고 하면 $\overline{AF}=9$ cm, $\overline{CG}=6$ cm이다. 이때 $\triangle AFG$의 넓이를 구하시오. $\frac{27}{2}$ cm²



풀이 $\triangle ABF$와 $\triangle BCG$에서 $\angle BAF+\angle ABF=90°$, $\angle ABF+\angle CBG=90°$이므로 $\angle BAF=\angle CBG$이다. 또한, $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\angle AFB=\angle BGC=90°$이므로 $\triangle ABF\equiv\triangle BCG$(RHA 합동)이다. 따라서 $\overline{BG}=\overline{AF}=9$ cm,
$\overline{BF}=\overline{CG}=6$ cm이므로
$\overline{FG}=\overline{BG}-\overline{BF}$
$=9-6=3$(cm)이고,
$\triangle AFG=\frac{1}{2}\times\overline{AF}\times\overline{FG}=\frac{1}{2}\times 9\times 3=\frac{27}{2}$(cm²)이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/4clQilMGRlbTCdjy

자기 평가	
이등변삼각형의 성질을 이해하고 정당화할 수 있다.	
구체적인 모형을 이용하여 이등변삼각형과 직각삼각형을 탐구하고, 그 성질을 알 수 있다.	

02 삼각형의 외심과 내심

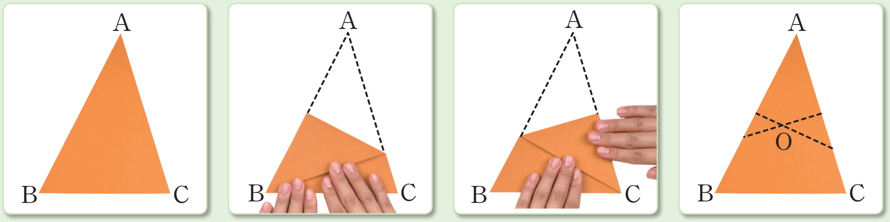
이 단원에서 배우는 용어와 기호
외심, 외접, 외접원, 접선, 접점, 접한다, 내심, 내접, 내접원

[학습 목표] 삼각형의 외심과 내심의 성질을 이해하고 정당화할 수 있다.

삼각형의 외심은 무엇일까?

생각 펼치기

다음 순서에 따라 활동을 하고, 물음에 답해 보자. [준비물: 종이, 연필, 자, 컴퍼스]



❶ 예각삼각형 ABC를 만든다.

❷ 두 꼭짓점 A와 B가 겹치도록 접었다 편다.

❸ 두 꼭짓점 A와 C가 겹치도록 접었다 편다.

❹ ❷와 ❸에서 접은 두 선의 교점을 O라고 표시한다.

1. ❷, ❸에서 접은 두 선이 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 수직이등분선임을 설명해 보자. 풀이 참조

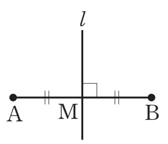
2. 두 꼭짓점 B와 C가 겹치도록 접었다 펼 때, 접은 선이 점 O를 지나는지 확인해 보자. 풀이 참조

3. 자 또는 컴퍼스를 이용하여 점 O에서 세 꼭짓점 A, B, C에 이르는 거리를 비교해 보자. 풀이 참조

풀이 1. 접은 선은 변의 길이를 이등분하고, 각의 크기를 90°로 이등분하므로 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 수직이등분선이다.
2. 점 O를 지난다.
3. 점 O에서 세 꼭짓점 A, B, C에 이르는 거리는 모두 같다.

삼각형의 외심

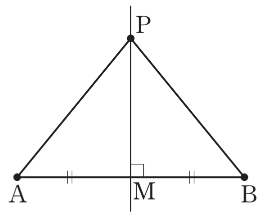
Tip 직선 l이 선분 AB의 중점 M을 지나고 선분 AB에 수직이면 직선 l은 선분 AB의 수직이등분선이다.



생각 펼치기에서 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만나고, 그 점에서 세 꼭짓점에 이르는 거리가 모두 같다는 것을 알 수 있다.

한편, 선분의 수직이등분선의 성질을 알아보면 다음과 같다.

오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 중점을 M이라 하고, $\overline{AB}$의 수직이등분선 위의 한 점을 잡아 P라고 하자.



$\triangle$PMA와 $\triangle$PMB에서

$$\overline{AM}=\overline{BM},\ \overline{PM}\text{은 공통},\ \angle PMA=\angle PMB$$

이다. 따라서 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같으므로

$$\triangle PMA \equiv \triangle PMB$$

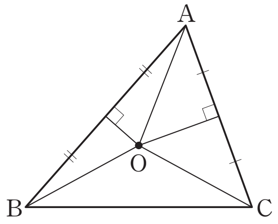
이다. 즉, $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로 선분 AB의 수직이등분선 위의 한 점 P에서 두 점 A, B에 이르는 거리는 서로 같다.

이제 선분의 수직이등분선의 성질을 이용하여 삼각형의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만난다는 것을 증명을 통해 확인해 보자.

개념 쏙

삼각형 ABC의 외심 O가 주어진 문제를 풀 때 외심 O에서 세 꼭짓점에 이르는 보조선을 그은 후 다음 성질을 이용한다.
① 외심 O는 세 변의 수직이등분선의 교점이다.
② 외심 O에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.
③ $\triangle ABO$, $\triangle BCO$, $\triangle CAO$는 모두 이등변삼각형이다.

오른쪽 그림과 같은 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$의 수직이등분선의 교점을 O라고 하자.



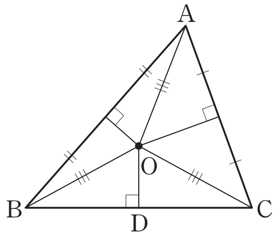
▶ **세 꼭짓점에 이르는 거리가 모두 같음을 보이기**

점 O는 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 수직이등분선 위에 있으므로

$$\overline{OA}=\overline{OB},\ \overline{OA}=\overline{OC}$$

이다. 따라서 점 O에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 모두 같다.

▶ **두 삼각형이 서로 합동임을 보이기**



점 O에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 D라고 하자.

직각삼각형 BOD와 COD에서

$$\overline{OD}\text{는 공통},\ \overline{OB}=\overline{OC}$$

이다. 따라서 두 직각삼각형의 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같으므로 $\triangle BOD \equiv \triangle COD$이다.

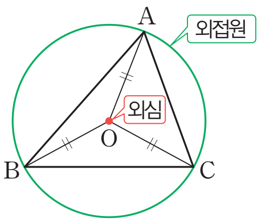
▶ **세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만남을 보이기**

$\triangle BOD$와 $\triangle COD$에서 $\overline{BD}=\overline{CD}$, $\angle ODB=\angle ODC=90^\circ$이므로 $\overline{OD}$는 $\overline{BC}$의 수직이등분선이다. 즉, 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.

개념 쏙

삼각형 ABC의 외심 O와 관련된 다음 사항을 기억한다.
① (뜻) 외접원의 중심이다.
② (작도) 세 변의 수직이등분선의 교점이다.
③ (성질) 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

한편, 점 O에서 $\triangle ABC$의 세 꼭짓점에 이르는 거리는 모두 같으므로 점 O를 중심으로 하고 $\overline{OA}$를 반지름으로 하는 원을 그리면 이 원은 $\triangle ABC$의 세 꼭짓점을 지난다.



오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$의 세 꼭짓점이 원 O 위에 있을 때, 원 O는 $\triangle ABC$에 **외접**한다고 하며 원 O를 $\triangle ABC$의 **외접원**, 외접원의 중심 O를 $\triangle ABC$의 **외심**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

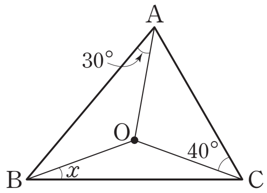
삼각형의 외심

1. 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만난다.

2. 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 모두 같다.

함께 해 보기 1

오른쪽 그림에서 점 O가 $\triangle ABC$의 외심일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.



풀이 점 O는 $\triangle ABC$의 외심이므로 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$이다.

즉, $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$는 모두 이등변삼각형이므로

$$\angle OBA=30^\circ,\ \angle OCB=\angle x,\ \angle OAC=40^\circ$$

이다. 이때 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$$2\times(30^\circ+\angle x+40^\circ)=180^\circ,$$

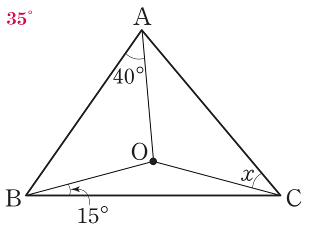
$$\angle x=20^\circ$$

이다.

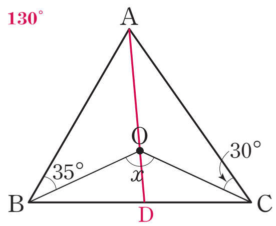
답 20°

1 다음 그림에서 점 O가 $\triangle ABC$의 외심일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

(1) 35°



(2) 130°



풀이 (1) 점 O는 $\triangle ABC$의 외심이므로 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$이다. 따라서 $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$는 모두 이등변삼각형이므로 $\angle OBA=40^\circ$, $\angle OCB=15^\circ$, $\angle OAC=\angle x$이다. 이때 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$2\times(40^\circ+15^\circ+\angle x)=180^\circ$, $\angle x=35^\circ$이다.

(2) 반직선 AO와 변 BC의 교점을 D라고 하면

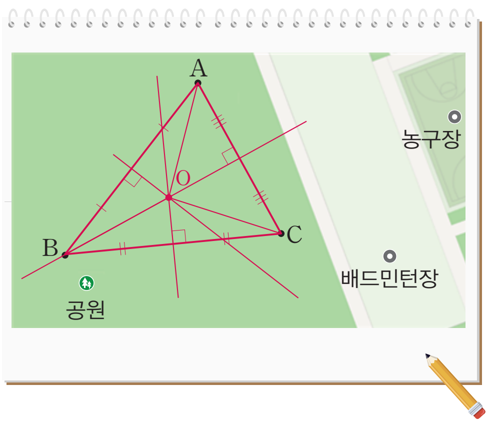
$\angle BOC=\angle BOD+\angle COD$

$=2\angle ABO+2\angle ACO=70^\circ+60^\circ=130^\circ$

이다. 따라서 $x=130^\circ$이다.

2 한솔이와 두 친구는 각각 지도 위의 세 지점 A, B, C에 서 있다. 세 친구가 각자 서 있는 지점으로부터 지도상에서 같은 거리에 있는 지점에서 만나기로 했을 때, 세 친구는 어느 지점에서 만나게 되는지 지도 위에 작도해 보자.

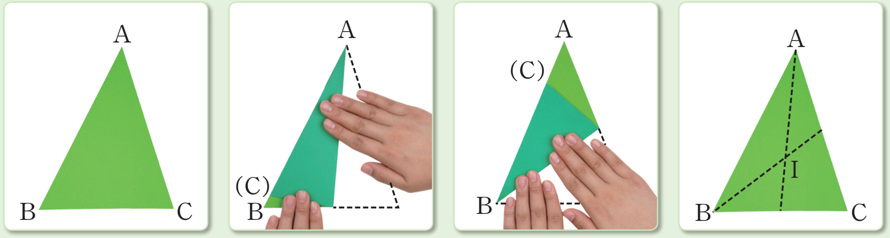
[준비물: 눈금 없는 자, 컴퍼스]



풀이 세 지점 A, B, C로부터 같은 거리에 있는 지점은 $\triangle ABC$의 외심의 위치와 같다. 따라서 세 친구는 $\triangle ABC$의 세 변의 수직이등분선의 교점인 점 O에서 만나게 된다.

삼각형의 내심은 무엇일까?

생각 펼치기 다음 순서에 따라 활동을 하고, 물음에 답해 보자. [준비물: 종이, 연필, 자, 컴퍼스]



❶ 예각삼각형 ABC를 만든다.

❷ 두 변 AB와 AC가 겹치도록 접었다 편다.

❸ 두 변 AB와 BC가 겹치도록 접었다 편다.

❹ ❷와 ❸에서 접은 두 선의 교점을 I라고 표시한다.

1. ❷, ❸에서 접은 두 선이 각각 $\angle A$, $\angle B$의 이등분선임을 설명해 보자. 풀이 참조

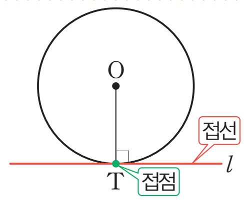
2. 두 변 AC와 BC가 겹치도록 접었다 펼 때, 접은 선이 점 I를 지나는지 확인해 보자. 풀이 참조

3. 자 또는 컴퍼스를 이용하여 점 I에서 $\triangle ABC$의 세 변에 이르는 거리를 비교해 보자. 풀이 참조

풀이 1. 접어서 생긴 두 각의 크기가 같으므로 접은 선은 각각 $\angle A$, $\angle B$의 이등분선이다.
2. 점 I를 지난다.
3. 점 I에서 세 변 AB, BC, CA에 이르는 거리는 모두 같다.

삼각형의 내심

오른쪽 그림과 같이 직선 l이 원 O와 한 점 T에서 만날 때, 직선 l이 원 O에 **접한다**고 한다. 이때 직선 l을 원 O의 **접선**이라 하고, 점 T를 **접점**이라고 한다. 또, 원 O의 접선 l은 접점에서 반지름 OT와 수직으로 만나며 $\overline{OT}$는 점 O와 직선 l 사이의 거리이다.



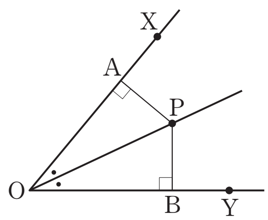
개념 쏙

원과 직선의 위치 관계
① 서로 다른 두 점에서 만난다.
② 한 점에서 만난다(접한다).
③ 만나지 않는다.

생각 펼치기에서 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만나고, 그 점에서 세 변에 이르는 거리가 모두 같다는 것을 알 수 있다.

한편, 각의 이등분선의 성질을 알아보면 다음과 같다.

오른쪽 그림과 같이 $\angle XOY$의 이등분선 위의 한 점을 P라 하고, 점 P에서 $\overrightarrow{OX}$와 $\overrightarrow{OY}$에 내린 수선의 발을 각각 A, B라고 하자.



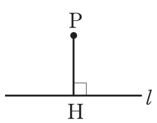
두 직각삼각형 POA와 POB에서

$$\overline{PO}\text{는 공통, } \angle POA = \angle POB$$

이다. 따라서 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같으므로 $\triangle POA \equiv \triangle POB$이다. 즉, $\overline{PA} = \overline{PB}$이므로 각의 이등분선 위의 한 점 P에서 각의 두 변에 이르는 거리는 서로 같다.

개념 쏙

점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 선분 PH의 길이를 점 P와 직선 l 사이의 거리라고 한다.



이제 각의 이등분선의 성질을 이용하여 삼각형의 세 내각의 이등분선이 한 점에서 만난다는 것을 증명을 통해 확인해 보자.

개념 쏙

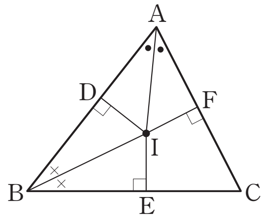
삼각형 ABC의 내심 I가 주어진 문제를 풀 때 내심 I에서 세 변 AB, BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F로 표시한 후 다음 성질을 이용한다.

① 내심 I는 세 내각의 이등분선의 교점이다.

② 내심 I에서 세 변에 이르는 거리는 같다.

③ $\triangle ADI \equiv \triangle AFI$, $\triangle BDI \equiv \triangle BEI$, $\triangle CEI \equiv \triangle CFI$

오른쪽 그림과 같은 $\triangle ABC$에서 $\angle A$와 $\angle B$의 이등분선의 교점을 I라 하고, 점 I에서 세 변 AB, BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라고 하자.



▶ 세 변에 이르는 거리가 모두 같음을 보이기

점 I는 $\angle A$, $\angle B$의 이등분선 위에 있으므로

$$\overline{ID}=\overline{IF},\ \overline{ID}=\overline{IE}$$

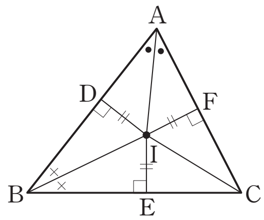
이다. 따라서 점 I에서 $\triangle ABC$의 세 변에 이르는 거리는 모두 같다.

▶ 두 삼각형이 서로 합동임을 보이기

직각삼각형 ICE와 ICF에서

$$\overline{IC}\text{는 공통},\ \overline{IE}=\overline{IF}$$

이다. 따라서 두 직각삼각형의 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같으므로 $\triangle ICE \equiv \triangle ICF$이다.



▶ 세 내각의 이등분선이 한 점에서 만남을 보이기

$\triangle ICE$와 $\triangle ICF$에서 $\angle ICE=\angle ICF$이므로 $\overline{IC}$는 $\angle C$의 이등분선이다. 즉, 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만난다.

개념 쏙

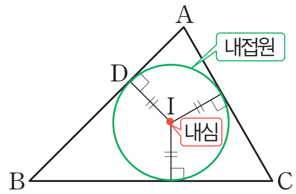
삼각형 ABC의 내심 I와 관련된 다음 사항을 기억한다.

① (뜻) 내접원의 중심이다.

② (작도) 세 내각의 이등분선의 교점이다.

③ (성질) 내심에서 세 변에 이르는 거리는 같다.

한편, 점 I에서 $\triangle ABC$의 세 변에 이르는 거리는 모두 같으므로 점 I를 중심으로 하고 $\overline{ID}$를 반지름으로 하는 원을 그리면 이 원은 $\triangle ABC$의 세 변과 각각 한 점에서 만난다.



오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$의 세 변이 원 I에 접할 때, 원 I는 $\triangle ABC$에 **내접**한다고 하며 원 I를 $\triangle ABC$의 **내접원**, 내접원의 중심 I를 $\triangle ABC$의 **내심**이라고 한다.

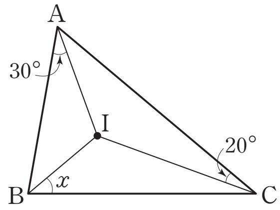
이상을 정리하면 다음과 같다.

삼각형의 내심

1. 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점(내심)에서 만난다.
2. 삼각형의 내심에서 세 변에 이르는 거리는 모두 같다.

함께 해 보기 2

오른쪽 그림에서 점 I가 $\triangle ABC$의 내심일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.



풀이 점 I가 $\triangle ABC$의 내심이므로

$$\angle BAI = \angle CAI,\ \angle ABI = \angle CBI,\ \angle ACI = \angle BCI$$

이다. 이때 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$$2\times(30^\circ + \angle x + 20^\circ) = 180^\circ,$$

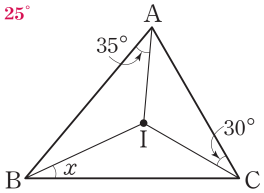
$$\angle x = 40^\circ$$

이다.

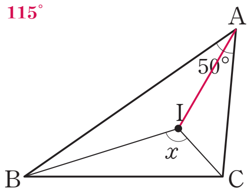
답 40°

3 다음 그림에서 점 I가 $\triangle ABC$의 내심일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

(1) 25°



(2) 115°



풀이 (1) 점 I가 $\triangle ABC$의 내심이므로 $\angle BAI = \angle CAI$, $\angle ABI = \angle CBI$, $\angle ACI = \angle BCI$이다.
이때 $\triangle ABC$의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로 $2\times(35^\circ + \angle x + 30^\circ) = 180^\circ$, $\angle x = 25^\circ$이다.
(2) 위의 그림과 같이 선분 AI를 그으면 점 I가 $\triangle ABC$의 내심이므로
$\angle IAB = \angle IAC = 25^\circ$이다. $\triangle ABC$의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로
$2\times(\angle IAB + \angle IBC + \angle ICB) = 180^\circ$이고, $\angle IAB = 25^\circ$이므로 $\angle IBC + \angle ICB = 65^\circ$이다.
따라서 $\triangle IBC$에서 $\angle x = 180^\circ - (\angle IBC + \angle ICB) = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$이다.

생각 더 나아가기 추론

다음은 이등변삼각형의 외심과 내심에 대하여 이안이와 다온이가 대화하는 모습이다. 대화를 읽고, 다온이의 대답을 완성해 보자. 풀이 참조

풀이 이등변삼각형의 외심은 밑변의 수직이등분선 위에 있고, 내심은 꼭지각의 이등분선 위에 있어. 그런데 이등변삼각형은 꼭지각의 이등분선이 밑변의 수직이등분선이므로 내심과 외심이 모두 꼭지각의 이등분선 위에 있게 돼.

스스로 점검하기

1

다음 설명 중 옳은 것은 ○표, 옳지 않은 것은 ×표 하시오.

(1) 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만나고, 이 점을 외심이라고 한다. (○)

(2) 삼각형의 외심에서 세 변에 이르는 거리는 모두 같다. (×)

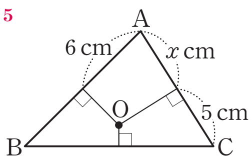
(3) 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만나고, 이 점을 내심이라고 한다. (○)

(4) 삼각형의 내심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 모두 같다. (×)

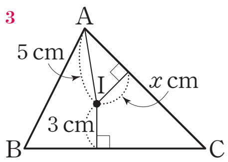
2

다음 그림에서 점 O가 △ABC의 외심, 점 I가 △ABC의 내심일 때, x의 값을 구하시오.

(1) 5



(2) 3

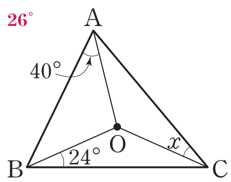


풀이 (1) 삼각형의 외심은 세 변의 수직이등분선의 교점이므로 $x=5$이다.
(2) 삼각형의 내심은 세 변에 이르는 거리가 모두 같으므로 $x=3$이다.

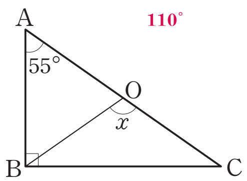
3

다음 그림에서 점 O가 △ABC의 외심일 때, ∠x의 크기를 구하시오.

(1) 26°



(2) 110°

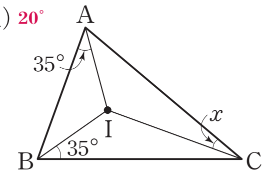


풀이 (1) 점 O는 △ABC의 외심이므로 $2\times(40^\circ+24^\circ+\angle x)=180^\circ$이다.
따라서 $\angle x=26^\circ$이다.
(2) 점 O는 △ABC의 외심이므로 $\angle OAB=\angle OBA=55^\circ$이다.
따라서 $\angle x=110^\circ$이다.

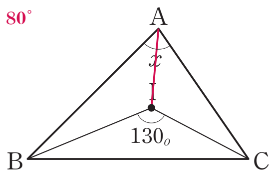
4

다음 그림에서 점 I가 △ABC의 내심일 때, ∠x의 크기를 구하시오.

(1) 20°



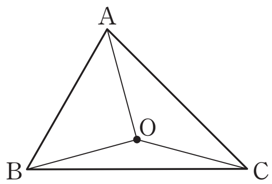
(2) 80°



풀이 (1) 점 I는 △ABC의 내심이므로 $2\times(35^\circ+35^\circ+\angle x)=180^\circ$이다.
따라서 $\angle x=20^\circ$이다.
(2) △IBC에서 $\angle IBC+\angle ICB=180^\circ-130^\circ=50^\circ$이다.
점 I는 △ABC의 내심이므로
$2\times(\angle IAB+\angle IBC+\angle ICB)=180^\circ$이다.
따라서 $\angle x=2\times\angle IAB=80^\circ$이다.

5

다음 그림에서 점 O는 △ABC의 외심이다. $\angle AOB:\angle BOC:\angle COA=3:5:4$일 때, ∠ABC의 크기를 구하시오. 60°

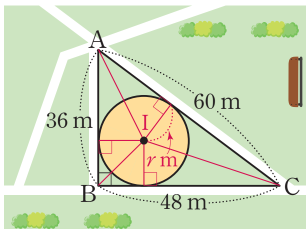


풀이 점 O는 △ABC의 내심이므로 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$이다.
$\angle AOB=\frac{3}{3+5+4}\times360^\circ=90^\circ$이므로 $\angle OBA=45^\circ$이다.
$\angle BOC=\frac{5}{3+5+4}\times360^\circ=150^\circ$이므로 $\angle OBC=15^\circ$이다.
따라서 $\angle ABC=\angle OBA+\angle OBC=60^\circ$이다.

6 실생활

연결

오른쪽 그림과 같이 공원 내 직각삼각형 모양의 부지 안에 원 모양의 어린이 놀이터를 조성하려고 한다. 가장 넓게 만들 수 있는 어린이 놀이터의 넓이는 몇 m^2인지 구하시오. 144π m^2



풀이
삼각형 내부에 가장 넓은 원을 만들려면 삼각형에 원이 내접해야 한다. 위의 그림에서 △ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times36\times48=864(m^2)$이다. 또, 내심을 I, 내접원의 반지름의 길이를 r m라고 하면
$\triangle ABC=\triangle AIB+\triangle BIC+\triangle CIA$
$=\frac{1}{2}\times36\times r+\frac{1}{2}\times48\times r+\frac{1}{2}\times60\times r=72r(m^2)$
이다. 따라서 $864=72r$이므로 $r=12$이고, 어린이 놀이터의 넓이는 $12^2\times\pi=144\pi(m^2)$이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/cZ82MU2DkdZ884KC

자기 평가	
삼각형의 외심과 내심의 성질을 이해하고 정당화할 수 있다.	
다양한 방법으로 삼각형의 외심과 내심의 성질을 탐구하고, 이를 설명할 수 있다.	

수학으로 세상 보기

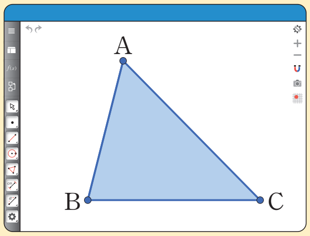
공학 도구로 삼각형의 외심 탐구하기

공학 도구

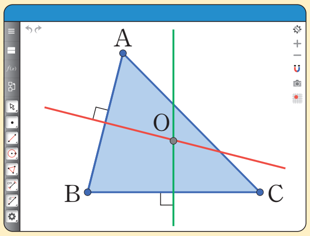
문제 해결 추론 정보처리

알지오매스를 이용하여 다음 활동을 해 보고, 물음에 답해 보자.

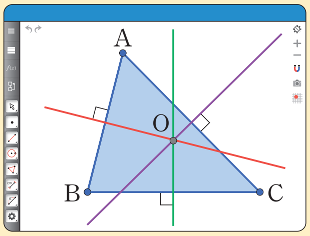
1 알지오매스를 이용하여 다음 단계에 따라 $\triangle ABC$의 세 변의 수직이등분선을 그리고, 물음에 답해 보자.



① 다각형 을 눌러 $\triangle ABC$를 그린다.

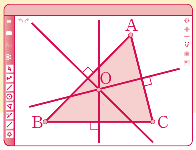


② 수직이등분선 과 교점 을 눌러 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$의 수직이등분선과 그 교점 O를 각각 그린다.

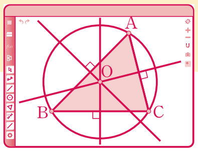


③ 수직이등분선 을 눌러 $\overline{AC}$의 수직이등분선을 그린다.

풀이 (1) 오른쪽 그림과 같이 점 A를 움직여도 삼각형의 모양에 관계없이 세 변의 수직이등분선이 점 O에서 만난다.



(2) 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{OA}$인 원을 그리면 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$의 외접원이 되어 세 점 A, B, C를 모두 지난다.

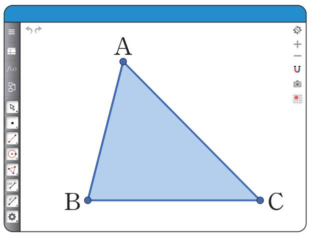


https://code.jihak.co.kr/qr/h5gwYy6xcClw3PLt

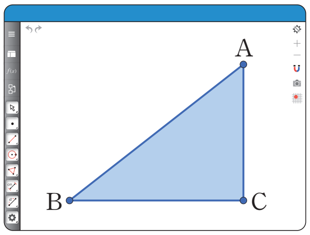
(1) 점 A를 움직이면서 삼각형의 모양에 관계없이 세 변의 수직이등분선이 점 O에서 만나는지 확인해 보자. 풀이 참조

(2) 원: 중심과 한 점 을 눌러 점 O를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 $\overline{OA}$인 원을 그리고, 그 원이 두 점 B, C도 지나는지 확인해 보자. 풀이 참조

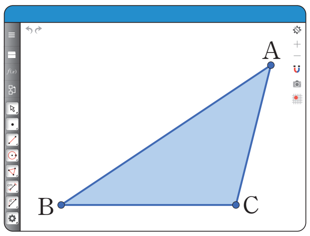
(3) 다음 그림과 같이 선분 BC는 고정하고 점 A를 움직여서 예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형으로 모양을 바꾼 뒤, 각 삼각형의 종류에 따른 외심의 위치를 말해 보자. 풀이 참조



예각삼각형



직각삼각형

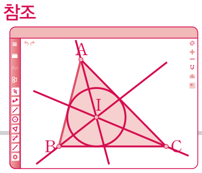


둔각삼각형

(3) 예각삼각형일 때 외심은 $\triangle ABC$의 내부에 위치한다.
직각삼각형일 때 외심은 $\triangle ABC$의 빗변의 중점에 위치한다.
둔각삼각형일 때 외심은 $\triangle ABC$의 외부에 위치한다.

2 **1**의 활동을 참고하여 삼각형의 세 내각의 이등분선이 한 점에서 만나는지 확인해 보고, 예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형에 따른 내심의 위치를 말해 보자. 풀이 참조

풀이 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만난다. 그 점을 I라고 할 때, 점 I를 중심으로 선분 AB까지의 거리를 반지름으로 하는 원을 그리면 오른쪽 그림과 같다. 삼각형의 내심은 예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형에 관계없이 모두 삼각형의 내부에 위치한다.



https://code.jihak.co.kr/qr/hbjvubvYGm8ahgXG

03 평행사변형의 성질

이 단원에서 배우는 용어와 기호

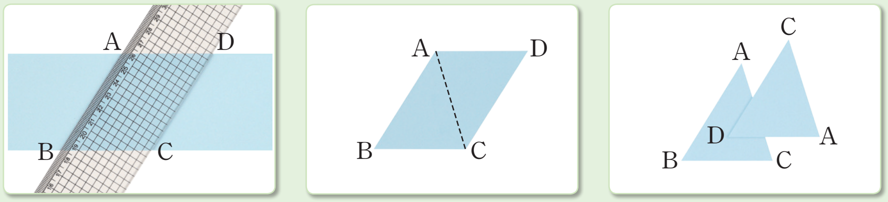
□ABCD

[학습 목표] 평행사변형의 성질을 이해하고 정당화할 수 있다.

평행사변형에는 어떤 성질이 있을까?

생각 펼치기

다음 순서에 따라 활동을 하고, 물음에 답해 보자. [준비물: 직사각형 모양의 종이, 자, 가위]



❶ 직사각형 모양의 종이 위에 자를 대어 양쪽을 잘라내고, 평행사변형 ABCD를 만든다.

❷ 평행사변형 ABCD의 대각선 AC를 따라 자른다.

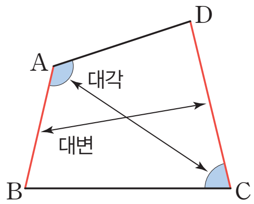
❸ 평행사변형 ABCD를 잘라서 만들어진 두 삼각형 ABC와 CDA를 서로 포개어 본다.

1. △CDA에서 변 AB와 길이가 같은 변을 말해 보자. 변 CD

2. △CDA에서 ∠B와 크기가 같은 각을 말해 보자. ∠D

평행사변형의 성질

삼각형 ABC를 기호 △ABC로 나타내듯이 사각형 ABCD는 기호 **□ABCD**로 나타낸다. 이때 서로 마주 보는 변을 대변, 서로 마주 보는 각을 대각이라고 한다.



Tip 사각형에서의 대변, 대각의 개념과 삼각형에서의 대변, 대각의 개념이 다름을 주의한다.

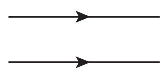
확인하기 오른쪽 그림과 같은 □ABCD에서 $\overline{AD}$의 대변은 $\boxed{BC}$이고, ∠B의 대각은 $\boxed{\angle D}$이다.

평행사변형은 두 쌍의 대변이 각각 서로 평행한 사각형이다.

생각 펼치기에서 □ABCD를 잘라서 만들어진 △ABC와 △CDA는 완전히 포개어지므로 평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이와 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같다는 것을 알 수 있다.

이제 평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이와 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같다는 것을 증명을 통해 확인해 보자.

평행한 두 직선은 화살표를 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

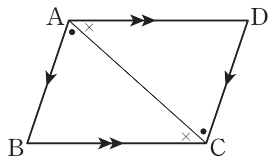


평행한 두 직선이 다른 한 직선과 만날 때, 엇각의 크기는 같다.

개념 쏙

엇각의 성질
한 평면 위에 있는 두 직선이 한 직선과 만날 때 두 직선이 서로 평행하면 엇각의 크기는 서로 같다.

오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD에서 대각선 AC를 그어 보자.



▶ **두 삼각형이 서로 합동임을 보이기**

$\triangle$ABC와 $\triangle$CDA에서 $\overline{AB}/\!/\overline{DC}$, $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로

$\angle BAC=\angle DCA$(엇각),

$\angle BCA=\angle DAC$(엇각),

$\overline{AC}$는 공통

이다. 따라서 대응하는 한 변의 길이가 같고, 그 양 끝 각의 크기가 각각 같으므로

$\triangle ABC\equiv\triangle CDA$

이다.

▶ **평행사변형의 대변의 길이와 대각의 크기가 각각 같음을 보이기**

$\triangle$ABC와 $\triangle$CDA에서 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같으므로 $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{BC}=\overline{DA}$, $\angle B=\angle D$이다. 또,

$\angle A=\angle BAC+\angle DAC=\angle DCA+\angle BCA=\angle C$

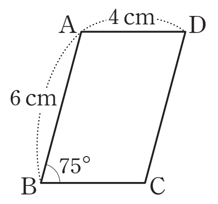
이다. 따라서

$\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{BC}=\overline{DA}$, $\angle B=\angle D$, $\angle A=\angle C$

이다. 즉, 평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이와 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같다.

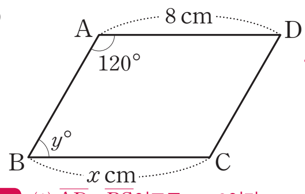
확인하기

오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 $\overline{CD}=\boxed{6}$ cm이고,
$\angle D=\boxed{75}$°이다.



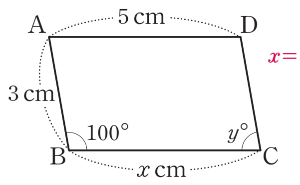
1 **다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 x, y의 값을 각각 구하시오.**

(1)



$x=8$, $y=60$

(2)

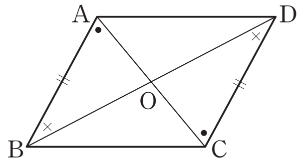


$x=5$, $y=80$

풀이 (1) $\overline{AD}=\overline{BC}$이므로 $x=8$이다.
$\angle A=\angle C=120°$이고, $\angle B=\angle D$이므로
$y=60$이다.

(2) $\overline{AD}=\overline{BC}$이므로 $x=5$이다.
$\angle B=\angle D=100°$이고, $\angle A=\angle C$이므로
$y=80$이다.

이제 평행사변형의 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다는 것을 증명을 통해 확인해 보자.



오른쪽 평행사변형 ABCD에서 두 대각선의 교점을 O라고 하자.

▶ **두 삼각형이 서로 합동임을 보이기**

$\triangle$ABO와 $\triangle$CDO에서 $\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$이므로

$$\angle OAB = \angle OCD \text{(엇각)},$$

$$\angle OBA = \angle ODC \text{(엇각)},$$

$$\overline{AB} = \overline{CD}$$

이다. 따라서 대응하는 한 변의 길이가 같고, 그 양 끝 각의 크기가 각각 같으므로

$$\triangle ABO \equiv \triangle CDO$$

이다.

▶ **평행사변형의 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분함을 보이기**

$\triangle$ABO와 $\triangle$CDO에서 대응하는 변의 길이가 각각 같으므로

$$\overline{OA} = \overline{OC},\ \overline{OB} = \overline{OD}$$

이다.

즉, 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평행사변형의 성질

1. 평행사변형은 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.

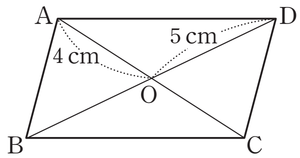
2. 평행사변형은 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.

3. 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

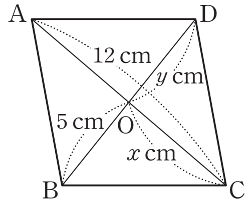
확인하기

오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서

$\overline{OB} = \boxed{5}$ cm, $\overline{OC} = \boxed{4}$ cm이다.

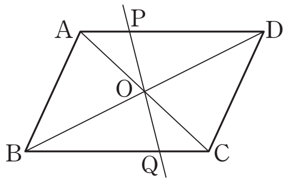


2 오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 두 대각선의 교점을 O라고 할 때, x, y의 값을 각각 구하시오. $x=6$, $y=5$



풀이 $\overline{OA}=\overline{OC}$이므로 $x=6$이고, $\overline{OB}=\overline{OD}$이므로 $y=5$이다.

3 오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 두 대각선의 교점 O를 지나는 직선이 변 AD, BC와 만나는 점을 각각 P, Q라고 할 때, $\overline{OP}=\overline{OQ}$임을 증명하려고 한다. 다음 물음에 답하시오.



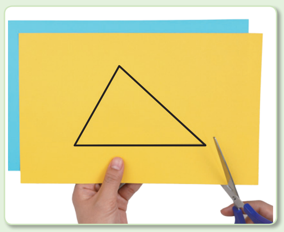
(1) $\triangle OPD \equiv \triangle OQB$임을 증명하시오. 풀이 참조

(2) (1)을 이용하여 $\overline{OP}=\overline{OQ}$임을 증명하시오. 풀이 참조

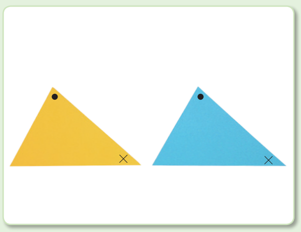
풀이 (1) $\triangle OPD$와 $\triangle OQB$에서 $\overline{OD}=\overline{OB}$, $\angle ODP=\angle OBQ$, $\angle DOP=\angle BOQ$이다.
따라서 대응하는 한 변의 길이가 같고, 그 양 끝 각의 크기가 각각 같으므로 $\triangle OPD \equiv \triangle OQB$(ASA 합동)이다.
(2) 합동인 두 삼각형 OPD와 OQB에서 대응하는 변의 길이가 각각 같으므로 $\overline{OP}=\overline{OQ}$이다.

평행사변형이 되는 조건은 무엇일까?

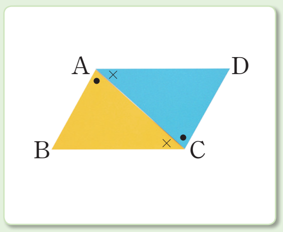
생각 펼치기 다음 순서대로 활동을 하고, 물음에 답해 보자. [준비물: 종이, 연필, 자, 가위]



❶ 종이 두 장을 포개어 놓고, 삼각형을 자른다.



❷ 서로 합동인 두 삼각형에서 두 쌍의 대응하는 각을 찾아 표시한다.



❸ 두 쌍의 대응하는 각이 엇갈리도록 맞붙여서 사각형 ABCD를 만든다.

1. □ABCD에서 변 AB, 변 BC와 길이가 같은 변을 각각 말해 보자. 변 CD, 변 AD

2. □ABCD는 어떤 사각형인지 말해 보자. 평행사변형

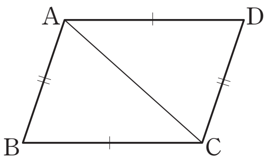
평행사변형이 되는 조건

생각 펼치기 에서 □ABCD는 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다. 이때 두 쌍의 대변이 각각 평행하므로 평행사변형이다.

이제 사각형이 어떤 조건을 만족시킬 때 평행사변형이 되는지 알아보자.

이제 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같은 사각형은 평행사변형임을 증명을 통해 확인해 보자.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{BC}=\overline{DA}$인 □ABCD에서 대각선 AC를 그어 보자.



▶ **두 삼각형이 서로 합동임을 보이기**

△ABC와 △CDA에서

$$\overline{AB}=\overline{CD},\ \overline{BC}=\overline{DA},\ \overline{AC}\text{는 공통}$$

이다. 따라서 대응하는 세 변의 길이가 각각 같으므로

$$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$$

이다.

▶ **두 쌍의 대변이 각각 평행함을 보이기**

△ABC와 △CDA에서 대응하는 각의 크기가 각각 같으므로

$$\angle BCA=\angle DAC,\ \angle BAC=\angle DCA$$

이다. 엇각의 크기가 각각 같으므로

$$\overline{AD} /\!/ \overline{BC},\ \overline{AB} /\!/ \overline{DC}$$

이다. 따라서 □ABCD는 두 쌍의 대변이 각각 평행하므로 평행사변형이다. 즉, 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같은 사각형은 평행사변형이다.

한 평면 위에 있는 두 직선이 한 직선과 만날 때 생기는 엇각의 크기가 서로 같으면 두 직선은 서로 평행하다.

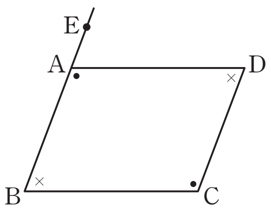
함께 해 보기 1 **□ABCD에서 $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$일 때, □ABCD는 평행사변형임을 증명하시오.**

풀이 $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$인 □ABCD에서

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$이므로

$$\angle A+\angle B=180^\circ$$

이다. 또, 오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 연장선 위에 점 E를 잡으면



$$\angle BAD+\angle EAD=180^\circ$$

이다. 따라서 $\angle B=\angle EAD$이다.

이때 $\angle B$와 $\angle EAD$가 동위각이고, 그 크기가 서로 같으므로

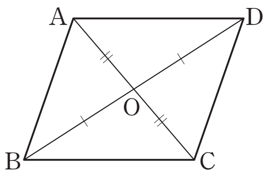
$$\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$$

이다. 같은 방법으로 $\overline{AB} /\!/ \overline{DC}$이다. 따라서 □ABCD는 두 쌍의 대변이 각각 평행하므로 평행사변형이다.

답 풀이 참조

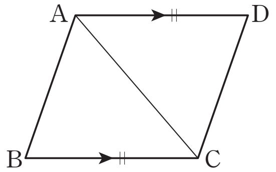
한 평면 위에 있는 두 직선이 한 직선과 만날 때 생기는 동위각의 크기가 서로 같으면 두 직선은 서로 평행하다.

4 다음은 오른쪽 그림과 같은 □ABCD의 두 대각선이 점 O에서 만나고 $\overline{OA}=\overline{OC}$, $\overline{OB}=\overline{OD}$일 때, □ABCD가 평행사변형임을 증명하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.



△OAB와 △OCD에서
$\overline{OA}=\overline{OC}$,
$\overline{OB}=\boxed{\overline{OD}}$,
$\angle AOB=\boxed{\angle COD}$(맞꼭지각)
이다. 따라서 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같으므로
△OAB≡△OCD
이다. 같은 방법으로 △OAD≡△OCB이다.
△OAB와 △OCD에서 대응하는 변의 길이가 각각 같으므로 $\overline{AB}=\overline{CD}$이고,
△OAD와 △OCB에서 대응하는 변의 길이가 각각 같으므로 $\boxed{\overline{AD}=\overline{CB}}$
이다. 즉, □ABCD는 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같으므로 평행사변형이다.

5 오른쪽 그림과 같은 □ABCD에서 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$이고, $\overline{AC}$는 대각선일 때, 다음 물음에 답하시오.



(1) △ABC≡△CDA임을 증명하시오. 풀이 참조

(2) (1)을 이용하여 □ABCD가 평행사변형임을 증명하시오. 풀이 참조

풀이 (1) △ABC와 △CDA에서 $\overline{BC}=\overline{DA}$, $\overline{AC}$는 공통, ∠BCA=∠DAC(엇각)이다.
따라서 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같으므로 △ABC≡△CDA(SAS 합동)이다.
(2) △ABC≡△CDA에서 ∠BAC=∠DCA이므로 $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이다.
따라서 두 쌍의 대변이 각각 평행하므로 □ABCD는 평행사변형이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

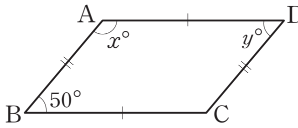
Tip 평행사변형이 되는
조건 1) 평행사변형의 뜻
조건 2~4) 평행사변형의 성질
조건 5) 어떤 사각형이 평행사변형이 되기 위한 추가적인 조건

평행사변형이 되는 조건

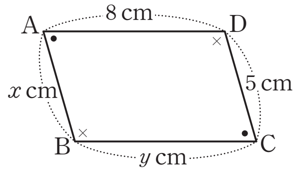
다음 조건 중에서 어느 하나를 만족시키는 사각형은 평행사변형이다.

1. 두 쌍의 대변이 각각 평행하다.
2. 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.
3. 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.
4. 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.
5. 한 쌍의 대변이 평행하고, 그 길이가 같다.

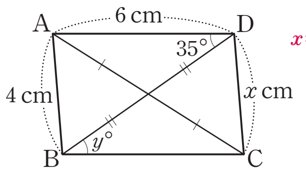
6 다음 그림과 같은 □ABCD에서 x, y의 값을 각각 구하시오.

(1)


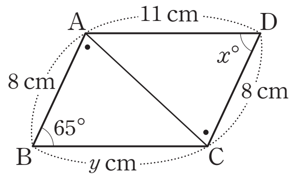
$x=130$, $y=50$

(2)


$x=5$, $y=8$

(3)


$x=4$, $y=35$

(4)


$x=65$, $y=11$

풀이 (1) 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같으므로 □ABCD는 평행사변형이다. 따라서 $x=130$, $y=50$이다.
(2) 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같으므로 □ABCD는 평행사변형이다. 따라서 $x=5$, $y=8$이다.
(3) 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하므로 □ABCD는 평행사변형이다. 따라서 $x=4$, $y=35$이다.
(4) 변 AB와 변 CD가 평행하고, 그 길이가 같으므로 □ABCD는 평행사변형이다. 따라서 $x=65$, $y=11$이다.

7 다음 중 □ABCD가 평행사변형인 것을 모두 찾고, 그 이유를 각각 설명하시오. 풀이 참조

(단, 점 O는 두 대각선의 교점이다.)

(1) $\overline{AB}=4$ cm, $\overline{BC}=5$ cm, $\overline{CD}=4$ cm, $\overline{DA}=5$ cm

(2) $\angle A=70°$, $\angle B=70°$, $\angle C=110°$, $\angle D=110°$

(3) $\overline{OA}=4$ cm, $\overline{OB}=4$ cm, $\overline{OC}=3$ cm, $\overline{OD}=3$ cm

(4) $\overline{AB} /\!/ \overline{DC}$, $\overline{AB}=\overline{DC}=6$ cm

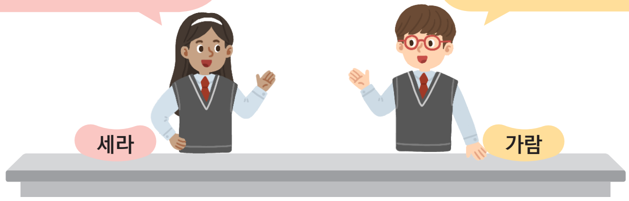
풀이 평행사변형인 것은 (1), (4)이다.
(1) 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같으므로 평행사변형이다.
(4) 한 쌍의 대변이 평행하고, 그 길이가 같으므로 평행사변형이다.

생각 더 나아가기 추론 의사소통

세라와 가람이가 말하는 사각형을 각각 생각해 보고, 이러한 사각형이 항상 평행사변형이 되는지 친구와 이야기해 보자.

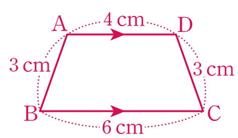
이웃하는 두 내각의 크기의 합이 항상 $180°$인 사각형은 평행사변형일까?

한 쌍의 대변이 평행하고 다른 한 쌍의 대변의 길이가 같은 사각형은 평행사변형일까?



풀이 세라: 평행사변형의 네 내각의 크기의 합은 $360°$이고, 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같으므로 세라가 말하는 사각형은 항상 평행사변형이 된다.

가람: □ABCD에서 $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$이고, $\overline{AB}=\overline{CD}$인 경우는 평행사변형도 될 수 있지만 다음 그림과 같이 평행사변형이 되지 않을 수도 있다. 따라서 가람이가 말하는 사각형은 평행사변형이 되지 않을 수도 있다.

|예시|


스스로 점검하기

1

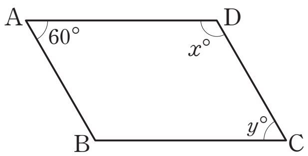
다음 설명 중 옳은 것은 ○표, 옳지 않은 것은 ×표 하시오.

(1) 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다. (○)

(2) 한 쌍의 대변이 평행하고, 그 길이가 같은 사각형은 평행사변형이다. (○)

2

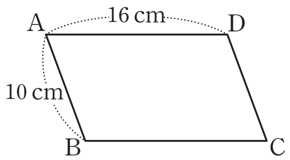
다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 x, y의 값을 각각 구하시오. $x=120$, $y=60$



풀이 평행사변형의 대각의 크기는 각각 같으므로
$y=60$이고, $x=120$이다.

3

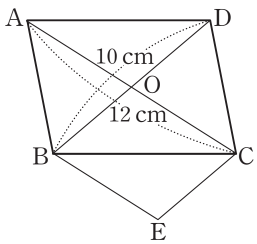
오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 $\overline{AB}=10$ cm, $\overline{AD}=16$ cm일 때, 평행사변형 ABCD의 둘레의 길이를 구하시오. 52 cm



풀이 평행사변형의 대변의 길이는 각각 같으므로
$\overline{AB}=\overline{DC}=10$ cm, $\overline{AD}=\overline{BC}=16$ cm이다.
따라서 평행사변형 ABCD의 둘레의 길이는 52 cm이다.

4

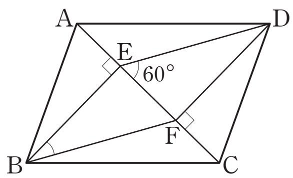
오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 두 대각선의 교점이 O이고, □OBEC는 평행사변형이다. $\overline{AC}=12$ cm, $\overline{BD}=10$ cm일 때, □OBEC의 둘레의 길이를 구하시오. 22 cm



풀이 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로
$\overline{OC}=6$ cm, $\overline{OB}=5$ cm이다. □OBEC는 평행사변형이므로
$\overline{OC}=\overline{BE}=6$ cm, $\overline{OB}=\overline{CE}=5$ cm이다.
따라서 □OBEC의 둘레의 길이는 22 cm이다.

5

다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD의 두 꼭짓점 B, D에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라고 하자. $\angle DEF=60°$일 때, $\angle EBF$의 크기를 구하시오. 30°

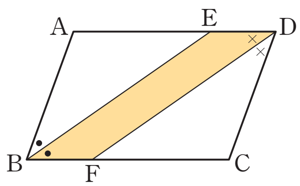


풀이 $\angle BEF=\angle DFE=90°$(엇각)이므로 $\overline{BE}/\!/\overline{DF}$,
$\triangle ABE \equiv \triangle CDF$(RHA 합동)이므로 $\overline{BE}=\overline{DF}$이다.
따라서 □EBFD는 평행사변형이다.
$\angle EDF=180°-(90°+60°)=30°$이다.
즉, $\angle EBF=\angle EDF=30°$이다.

6 사고력 UP

추론

다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 $\angle B$와 $\angle D$의 이등분선이 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$와 만나는 점을 각각 E, F라고 할 때, □EBFD가 평행사변형임을 증명하시오. 풀이 참조



풀이 $\angle EBF=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle ADC=\angle FDE$이다.
$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로 $\angle EBF=\angle AEB$(엇각)이다.
$\angle EDF=\angle AEB$(동위각)이므로 $\overline{EB}/\!/\overline{DF}$이다.
따라서 □EBFD는 두 쌍의 대변이 각각 서로 평행하므로 평행사변형이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/kvLrjhbk847G7fY0

자기 평가	
평행사변형의 성질을 이해하고 정당화할 수 있다.	
여러 가지 교구를 이용하여 평행사변형의 성질을 탐구할 수 있다.	

04 여러 가지 사각형의 성질

[**학습 목표**] 여러 가지 사각형의 성질을 이해하고 정당화할 수 있다.

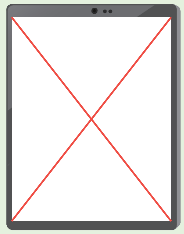
직사각형에는 어떤 성질이 있을까?

생각 펼치기

태블릿 컴퓨터의 화면이 직사각형 모양일 때, 화면의 두 대각선의 길이를 재어 보고, 그 길이를 서로 비교해 보자. 두 대각선의 길이는 서로 같다.

[준비물: 태블릿 컴퓨터, 자]

풀이 자를 이용하여 두 대각선의 길이를 재어 보면 그 길이는 서로 같음을 알 수 있다.



직사각형의 성질

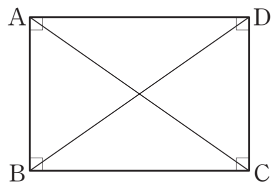
Tip 직사각형이 평행사변형과 별개의 도형이 아니라 직사각형이 평행사변형이 됨을 확인한다.

생각 펼치기에서 직사각형의 두 대각선의 길이는 서로 같다는 것을 알 수 있다.

직사각형은 네 내각의 크기가 모두 같으므로 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같아서 평행사변형이다. 따라서 직사각형은 평행사변형의 성질을 모두 만족시킨다.

이제 직사각형의 두 대각선의 길이가 서로 같다는 것을 증명을 통해 확인해 보자.

오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD에서 대각선 AC와 BD를 그어 보자.



▶ **합동인 삼각형을 찾고 두 삼각형이 서로 합동임을 보이기**

직사각형은 평행사변형이므로 $\triangle ABC$와 $\triangle DCB$에서

$$\overline{AB}=\overline{DC}$$

이다. 또, □ABCD는 직사각형이므로

$$\angle ABC=\angle DCB=90^\circ,\ \overline{BC}\text{는 공통}$$

이다. 따라서 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같으므로

$$\triangle ABC\equiv\triangle DCB$$

이다.

▶ **직사각형의 두 대각선의 길이가 서로 같음을 보이기**

$\triangle ABC$와 $\triangle DCB$에서 대응하는 변의 길이가 각각 같으므로 $\overline{AC}=\overline{DB}$이다. 즉, 직사각형의 두 대각선의 길이는 서로 같다.

개념 쏙

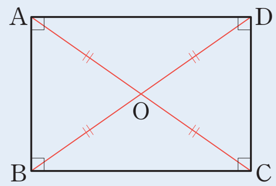
두 대각선의 교점에서 각 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

한편, 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다. 따라서 직사각형도 평행사변형이므로 직사각형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다. 즉, 직사각형의 두 대각선은 길이가 서로 같고, 서로 다른 것을 이등분한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

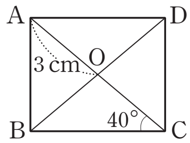
직사각형의 성질

직사각형의 두 대각선은 길이가 서로 같고, 서로 다른 것을 이등분한다.



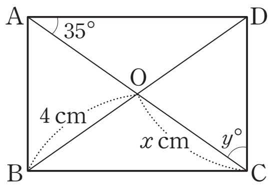
확인하기

오른쪽 그림과 같은 직사각형 ABCD에서 $\overline{BD}=$ $\boxed{6}$ cm이고, $\angle OBC=$ $\boxed{40}$ °이다.



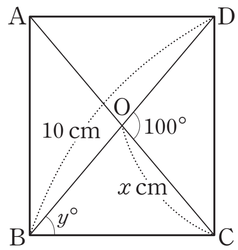
1 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD에서 두 대각선의 교점을 O라고 할 때, x, y의 값을 각각 구하시오.

(1)



$x=4$, $y=55$

(2)

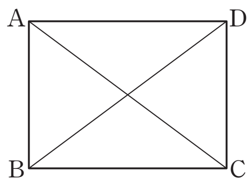


$x=5$, $y=50$

풀이 (1) 직사각형의 두 대각선은 길이가 서로 같고, 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{OB}=\overline{OC}$이고, $x=4$이다. 또한, 직사각형은 평행사변형이므로 $\angle OCB=\angle OAD=35^\circ$(엇각)이고, $y=55$이다.

(2) 직사각형의 두 대각선은 길이가 서로 같고, 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{AC}=10$ cm이고, $x=5$이다. 또한, $\angle COB=80^\circ$이고, $\triangle OBC$는 이등변삼각형이므로 $y=50$이다.

2 오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 두 대각선의 길이가 서로 같을 때, □ABCD가 직사각형임을 증명하려고 한다. 다음 물음에 답하시오.



(1) $\triangle ABC\equiv\triangle DCB$임을 증명하시오. 풀이 참조

(2) (1)을 이용하여 □ABCD가 직사각형임을 증명하시오. 풀이 참조

풀이 (1) $\triangle ABC$와 $\triangle DCB$에서 $\overline{AB}=\overline{DC}$, $\overline{AC}=\overline{DB}$, $\overline{BC}$는 공통이므로 $\triangle ABC\equiv\triangle DCB$(SSS 합동)이다.

(2) $\triangle ABC\equiv\triangle DCB$이므로 $\angle ABC=\angle DCB$이다. □ABCD가 평행사변형이므로 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같고, $\angle ABC=\angle CDA$, $\angle DCB=\angle BAD$이다. 따라서 □ABCD에서 $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$이므로 □ABCD는 직사각형이다.

마름모에는 어떤 성질이 있을까?

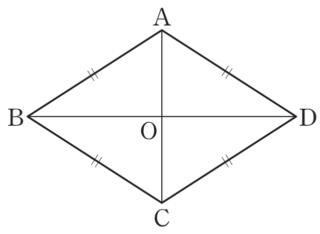
마름모의 성질

Tip 마름모는 평행사변형과 별개의 도형이 아니라 마름모가 평행사변형이 됨을 확인한다.

마름모는 네 변의 길이가 모두 같으므로 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같아서 평행사변형이다. 따라서 마름모는 평행사변형의 성질을 모두 만족시킨다.

이제 마름모의 두 대각선이 서로 수직임을 증명을 통해 확인해 보자.

오른쪽 그림과 같이 마름모 ABCD에서 두 대각선 AC와 BD의 교점을 O라고 하자.



▶ **합동인 삼각형을 찾고 두 삼각형이 서로 합동임을 보이기**

마름모는 평행사변형이므로 $\triangle$ABO와 $\triangle$ADO에서

$$\overline{OB}=\overline{OD},\ \overline{AB}=\overline{AD},\ \overline{OA}\text{는 공통}$$

이다. 따라서 대응하는 세 변의 길이가 각각 같으므로

$$\triangle ABO \equiv \triangle ADO$$

이다.

개념 쏙

마름모의 두 대각선에 의하여 생긴 4개의 삼각형은 모두 합동이다.

▶ **마름모의 두 대각선이 서로 수직임을 보이기**

$\triangle$ABO와 $\triangle$ADO에서 대응하는 각의 크기가 각각 같으므로

$$\angle BAO=\angle DAO$$

이고, $\overline{AC}$는 이등변삼각형 ABD의 꼭지각인 $\angle$A의 이등분선이 되므로

$$\overline{AC}\perp\overline{BD}$$

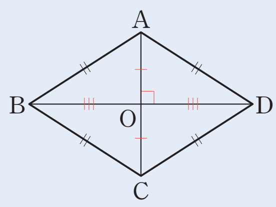
이다. 즉, 마름모의 두 대각선은 서로 수직이다.

한편, 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다. 따라서 마름모도 평행사변형이므로 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다. 즉, 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

마름모의 성질

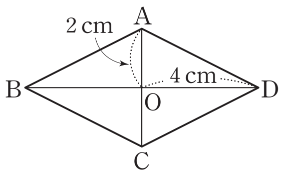
마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다.



확인하기

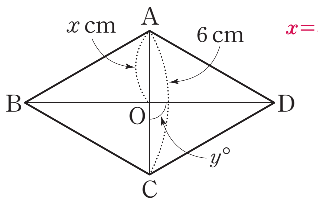
오른쪽 그림과 같은 마름모 ABCD에서 $\overline{OC}=\boxed{2}$ cm이고,

$\angle AOD=\boxed{90}$°이다.



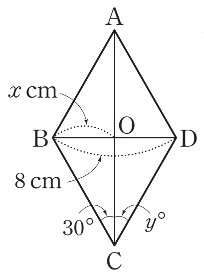
3 다음 그림과 같은 마름모 ABCD에서 두 대각선의 교점을 O라고 할 때, x, y의 값을 각각 구하시오.

(1)



$x=3$, $y=90$

(2)

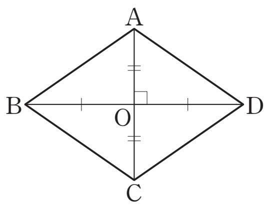


$x=4$, $y=30$

풀이 (1) 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로 $x=3$이고, $y=90$이다.

(2) 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로 $x=4$이고, 두 직각삼각형 BOC와 DOC에서 $\overline{BO}=\overline{DO}$, $\overline{BC}=\overline{DC}$이므로 $\triangle BOC\equiv\triangle DOC$(RHS 합동)이다. 따라서 $\angle OCB=\angle OCD$이므로 $y=30$이다.

4 다음은 오른쪽 그림과 같은 □ABCD에서 두 대각선이 점 O에서 만나고 서로 다른 것을 수직이등분할 때, □ABCD가 마름모임을 증명하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.



$\triangle ABO$와 $\triangle CBO$에서

$\overline{AO}=\boxed{CO}$, $\overline{BO}$는 공통, $\angle AOB=\boxed{\angle COB}$

이다. 따라서 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같으므로

$\triangle ABO\equiv\triangle CBO$

이다. $\triangle ABO$와 $\triangle CBO$에서 대응하는 변의 길이가 각각 같으므로

$\overline{AB}=\boxed{CB}$

이다. 같은 방법으로 $\triangle ABO\equiv\triangle ADO$, $\triangle CBO\equiv\triangle CDO$이므로

$\overline{AB}=\boxed{AD}$, $\overline{CB}=\boxed{CD}$

이다. 즉, □ABCD는 네 변의 길이가 모두 같으므로 마름모이다.

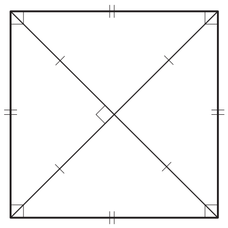
정사각형에는 어떤 성질이 있을까?

정사각형의 성질

Tip 정사각형이 직사각형, 마름모와 별개의 도형이 아니라 정사각형이 직사각형도 되고 마름모도 됨을 확인한다.

정사각형은 네 변의 길이가 모두 같고, 네 내각의 크기가 모두 같은 사각형이다.

정사각형은 네 변의 길이가 모두 같으므로 마름모이고, 네 내각의 크기가 모두 같으므로 직사각형이다. 따라서 정사각형의 두 대각선은 길이가 서로 같고, 서로 다른 것을 수직이등분한다.



개념 쏙

정사각형의 성질과 관련된 다음 사항을 기억한다.

① 정사각형은 평행사변형의 성질을 모두 만족한다.
② 정사각형은 직사각형의 성질을 모두 만족한다.
③ 정사각형은 마름모의 성질을 모두 만족한다.

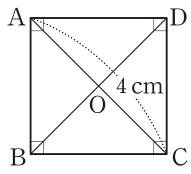
이상을 정리하면 다음과 같다.

정사각형의 성질

정사각형의 두 대각선은 길이가 서로 같고, 서로 다른 것을 수직이등분한다.

확인하기

오른쪽 그림과 같은 정사각형 ABCD에서 $\overline{BD}=$ $\boxed{4}$ cm이고, $\angle AOD=$ $\boxed{90}$°이다.

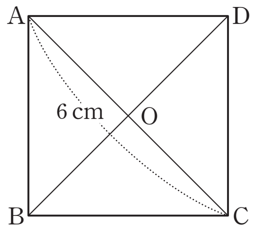


5 오른쪽 그림과 같은 정사각형 ABCD에서 두 대각선의 교점을 O라고 할 때, 다음을 구하시오.

(1) $\overline{DO}$의 길이 3 cm

(2) $\angle DAO$의 크기 45°

(3) □ABCD의 넓이 18 cm²

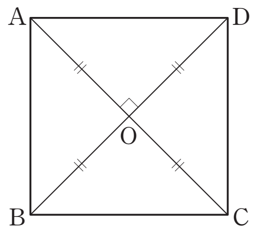


풀이 (1) 정사각형의 두 대각선은 길이가 서로 같고, 서로 다른 것을 수직이등분하므로 $\overline{DO}=3$ cm이다.
(2) △OAD는 직각이등변삼각형이므로 $\angle DAO=45°$이다.
(3) □ABCD는 마름모이므로 그 넓이는 $\frac{1}{2}\times 6\times 6=18$ (cm²)이다.

6 오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 두 대각선의 길이가 서로 같고, 서로 다른 것을 수직이등분할 때, □ABCD가 정사각형임을 증명하려고 한다. 다음 물음에 답하시오.

(1) □ABCD는 마름모임을 증명하시오. 풀이 참조

(2) (1)을 이용하여 □ABCD가 정사각형임을 증명하시오. 풀이 참조



풀이 (1) 두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분하므로 □ABCD는 마름모이다.
(2) □ABCD의 두 대각선의 교점을 O라고 하면 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$에서 $\overline{AC}=\overline{BD}$이므로 □ABCD는 직사각형이다.
즉, $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$이다. 한편, □ABCD는 마름모이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}$이다.
따라서 네 내각의 크기가 모두 같고, 네 변의 길이가 모두 같으므로 정사각형이다.

여러 가지 사각형 사이에는 어떤 관계가 있을까?

여러 가지 사각형 사이의 관계

각 사각형들 사이의 관계를 알고 있으면 그들의 성질을 이해하는 데 많은 도움이 된다. 여러 가지 사각형 사이에는 어떤 관계가 있는지 알아보자.

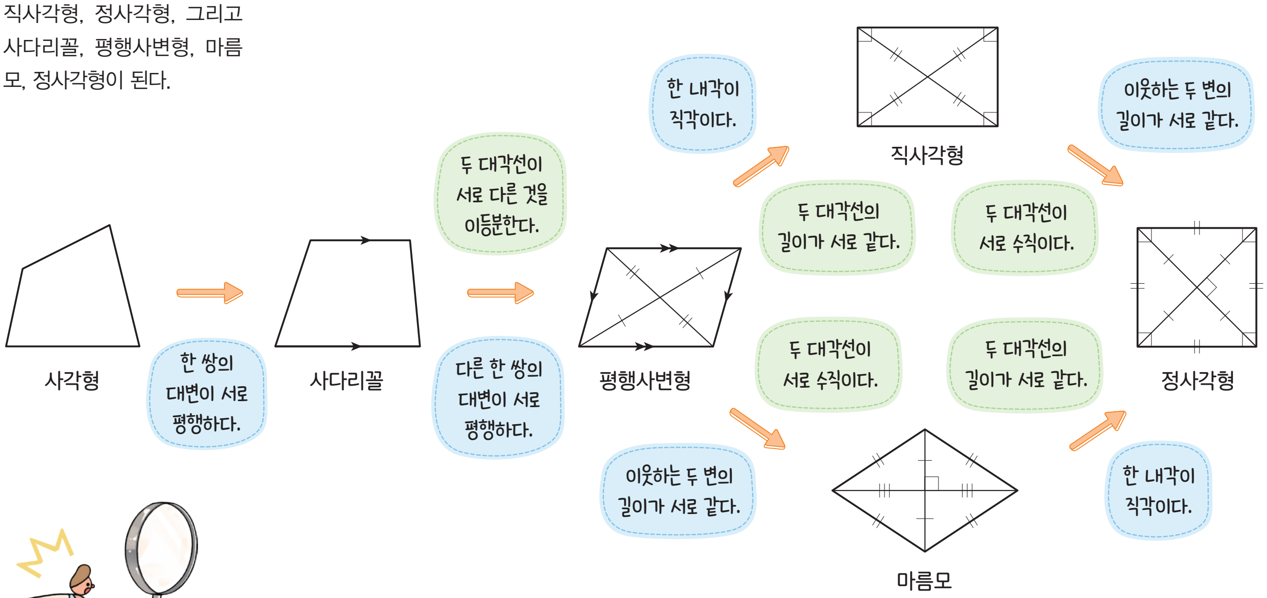
개념 쏙

여러 가지 사각형 사이의 관계와 관련된 다음 사항을 이해한다.
① 직사각형과 마름모는 평행사변형이기도 하고 사다리꼴이기도 하다.
② 정사각형은 직사각형, 마름모, 평행사변형, 사다리꼴이기도 하다.
③ 사각형에 조건을 하나씩 추가하면 사다리꼴, 평행사변형, 직사각형, 정사각형, 그리고 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 정사각형이 된다.

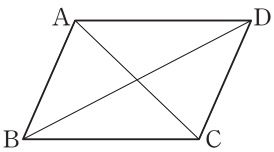
사각형의 한 쌍의 대변이 서로 평행하면 사다리꼴이고, 사다리꼴에서 다른 한 쌍의 대변도 서로 평행하면 평행사변형이다.

평행사변형에서 한 내각이 직각이면 모든 내각의 크기가 90°로 같아지므로 직사각형이고, 이웃하는 두 변의 길이가 서로 같으면 네 변의 길이가 모두 같아지므로 마름모이다.

또한, 직사각형의 이웃하는 두 변의 길이가 서로 같으면 네 변의 길이가 모두 같아지므로 정사각형이고, 마름모의 한 내각이 직각이면 모든 내각의 크기가 90°로 같아지므로 정사각형이다.



7 다음 조건을 만족시키는 평행사변형 ABCD는 어떤 사각형인지 말하시오.



(1) $\angle A=90^\circ$ 직사각형

(2) $\overline{AB}=\overline{AD}$ 마름모

(3) $\overline{AC}=\overline{BD}$ 직사각형

(4) $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ 마름모

(5) $\overline{AC}=\overline{BD}$, $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ 정사각형

풀이 (1) $\angle A=90^\circ$이면 □ABCD의 네 내각은 모두 90°로 같으므로 □ABCD는 직사각형이다.
(2) 평행사변형은 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같으므로 $\overline{AB}=\overline{DC}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$이다. 이때 $\overline{AB}=\overline{AD}$이므로 네 변의 길이가 같아 마름모이다.
(3) $\overline{AC}=\overline{BD}$이면 평행사변형 □ABCD는 두 대각선의 길이가 서로 같으므로 직사각형이다.
(4) $\overline{AC}\perp\overline{BD}$이면 두 대각선이 직교하고 □ABCD는 평행사변형이므로 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다. 따라서 평행사변형 ABCD는 마름모이다.
(5) $\overline{AC}=\overline{BD}$이면 평행사변형 ABCD는 직사각형이고, $\overline{AC}\perp\overline{BD}$이면 평행사변형 ABCD는 마름모이므로 평행사변형 ABCD는 정사각형이다.

8 다음은 여러 가지 사각형의 성질을 나타낸 표이다. 주어진 성질을 만족시키면 ○표, 만족시키지 않으면 ×표를 빈칸에 써넣으시오.

사각형의 성질	평행사변형	직사각형	마름모	정사각형
두 쌍의 대변이 각각 평행하다.	○	○	○	○
두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.	○	○	○	○
두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.	○	○	○	○
두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.	○	○	○	○
두 대각선의 길이가 서로 같다.	×	○	×	○
두 대각선이 서로 수직으로 만난다.	×	×	○	○
두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분한다.	×	×	○	○

평행선과 삼각형의 넓이 사이에는 어떤 관계가 있을까?

생각 펼치기

공학 도구

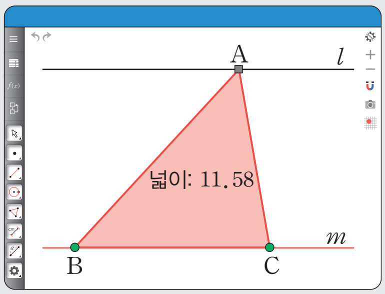
알지오매스를 이용하여 다음 단계에 따라 평행선과 삼각형을 그려 보고, 물음에 답해 보자.

❶ 직선을 눌러 점 B, C와 직선 m을 그린다.

❷ 평행선을 눌러 직선 m과 평행한 직선 l을 그린다.

❸ 대상 위의 점을 눌러 직선 l 위에 점 A를 그린다.

❹ 다각형을 눌러 △ABC를 그린 뒤, 넓이를 눌러 △ABC의 넓이를 구한다.



https://code.jihak.co.kr/qr/UaTDHNjsWdNnZ3E7

1. 점 A를 직선 l을 따라 이동시켜 보고, △ABC의 넓이가 어떻게 변하는지 말해 보자. 풀이 참조

풀이 점 A가 직선 l을 따라 이동하여도 △ABC의 넓이는 일정하다.

평행선과 삼각형의 넓이 사이의 관계

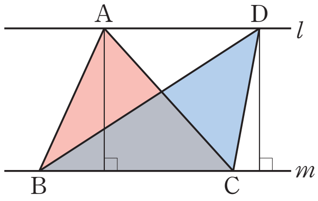
생각 펼치기에서 평행한 두 직선 사이에 그린 △ABC의 점 A가 변 BC와 평행한 직선 위를 움직일 때, 삼각형의 모양이 바뀌어도 그 넓이는 항상 일정하다는 것을 알 수 있다.

개념 쏙

$\triangle ABC = \triangle DBC$
➡ 넓이가 같다.
$\triangle ABC \equiv \triangle DBC$
➡ 합동이다.

오른쪽 그림과 같이 두 직선 l과 m이 서로 평행할 때, $\triangle ABC$와 $\triangle DBC$의 넓이를 비교해 보자.

$\triangle ABC$와 $\triangle DBC$는 밑변 BC가 공통이고 높이가 같으므로 두 삼각형의 넓이는 서로 같다.



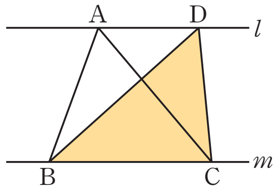
일반적으로 두 삼각형 ABC와 DBC의 넓이가 같을 때, 이것을 기호

$$\triangle ABC = \triangle DBC$$

로 나타낸다.

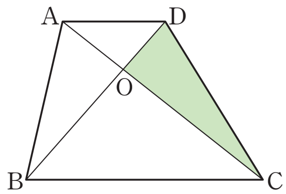
9 오른쪽 그림에서 $l /\!/ m$이고 $\triangle ABC$의 넓이가 10 cm^2일 때, $\triangle DBC$의 넓이를 구하시오. 10 cm^2

풀이 $\triangle ABC$와 $\triangle DBC$는 밑변 BC가 공통이고 높이가 같으므로 두 삼각형의 넓이는 서로 같다. 따라서 $\triangle DBC$의 넓이는 10 cm^2이다.



10 오른쪽 그림과 같은 $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$인 사다리꼴 ABCD에서 두 대각선의 교점이 O, $\triangle AOB$의 넓이가 12 cm^2일 때, $\triangle DOC$의 넓이를 구하시오. 12 cm^2

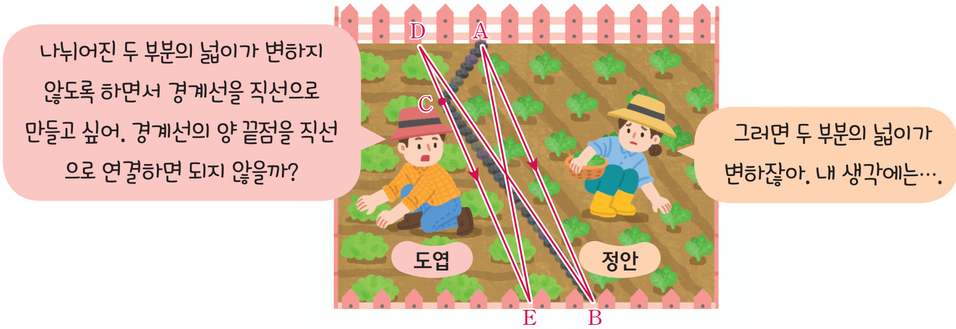
풀이 $\triangle ABD$와 $\triangle ACD$는 밑변 AD가 공통이고 높이가 같으므로 $\triangle ABD = \triangle ACD$이다. 그런데 두 삼각형 ABD와 ACD에서 $\triangle AOD$가 공통이므로 $\triangle AOB$와 $\triangle COD$의 넓이는 같다. 따라서 $\triangle DOC$의 넓이는 12 cm^2이다.



생각 더 나아가기

추론 의사소통 연결

다음 그림과 같이 직사각형 모양의 밭이 경계선에 의해 두 부분으로 나뉘어져 있다. 다음 대화를 읽고, 도엽이의 질문에 대한 정안이의 대답을 완성해 보자. 또, 그 이유를 친구들과 이야기해 보자. 풀이 참조



풀이 위의 그림과 같이 선분 AB를 그은 뒤, 점 C를 지나고 선분 AB와 평행한 선분 DE를 그으면 $\triangle ACB = \triangle ADB = \triangle AEB$야. 따라서 $\overline{AE}$ 또는 $\overline{DB}$를 경계선으로 정하면 두 부분의 넓이가 변하지 않으면서 경계선을 직선으로 만들 수 있어.

스스로 점검하기

1

다음 □ 안에 알맞은 말을 써넣으시오.

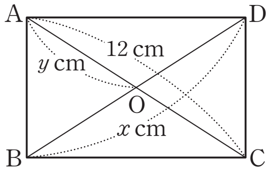
(1) 직사각형의 두 $\boxed{\text{대각선}}$은/는 길이가 서로 같고, 서로 다른 것을 이등분한다.

(2) 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 $\boxed{\text{수직이등분}}$한다.

(3) $\boxed{\text{정사각형}}$의 두 대각선은 길이가 서로 같고, 서로 다른 것을 수직이등분한다.

2

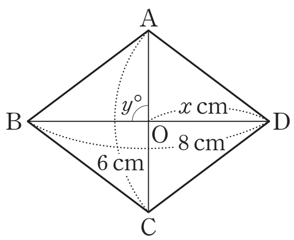
다음 그림과 같은 직사각형 ABCD에서 x, y의 값을 각각 구하시오. **$x=12$, $y=6$**



풀이 직사각형의 두 대각선은 길이가 서로 같고, 서로 다른 것을 이등분하므로 $x=12$, $y=6$이다.

3

오른쪽 그림과 같은 마름모 ABCD에서 다음을 구하시오.



(1) x, y의 값 **$x=4$, $y=90$**

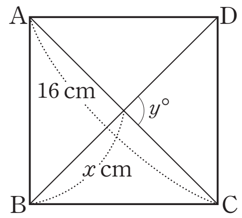
(2) 마름모의 넓이 **24 cm^2**

풀이 (1) 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로 $x=4$, $y=90$이다.

(2) 마름모의 넓이는 $\frac{1}{2}\times8\times6=24(\text{cm}^2)$이다.

4

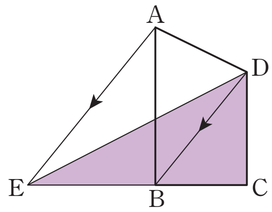
오른쪽 그림과 같은 정사각형 ABCD에서 x, y의 값을 각각 구하고, □ABCD의 넓이를 구하시오. **$x=8$, $y=90$, □ABCD의 넓이: 128 cm^2**



풀이 정사각형의 두 대각선은 길이가 서로 같고, 서로 다른 것을 수직이등분하므로 $x=8$, $y=90$이다. 또한, 정사각형은 마름모이므로 넓이는 $\frac{1}{2}\times16\times16=128(\text{cm}^2)$이다.

5

오른쪽 그림과 같은 □ABCD에서 점 A를 지나고 $\overline{BD}$와 평행한 직선이 $\overline{BC}$의 연장선과 만나는 점을 E라고 하자. □ABCD의 넓이가 35 cm^2일 때, △DEC의 넓이를 구하시오. **35 cm^2**

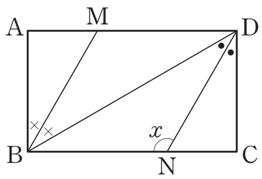


풀이 $\overline{AE}/\!/\overline{BD}$이므로 △BDE=△ABD이다.
△DEC=△BDE+△BCD=△ABD+△BCD=□ABCD이므로
△DEC의 넓이는 35 cm^2이다.

6 사고력 UP

추론

오른쪽 그림과 같은 직사각형 ABCD에서 $\overline{BM}$, $\overline{DN}$은 각각 ∠ABD, ∠BDC의 이등분선이다. □MBND가 마름모일 때, ∠x의 크기를 구하시오. **120°**



풀이 □MBND가 마름모이므로 $\overline{BN}=\overline{DN}$이다. 따라서 △BDN은 이등변삼각형이므로 ∠DBN=∠BDN이다. ∠MBD=∠BDN이므로
∠DBN$=\frac{1}{3}$∠ABC$=30^\circ$이다.
즉, △BDN에서 ∠x의 크기는 $180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/Pg0PEsWVCOOGhplh

자기 평가	
여러 가지 사각형의 성질을 이해하고 정당화할 수 있다.	
여러 가지 교구를 이용하여 사각형의 성질을 탐구할 수 있다.	

수학으로 세상 보기

일상생활에서 찾은 평행사변형과 마름모

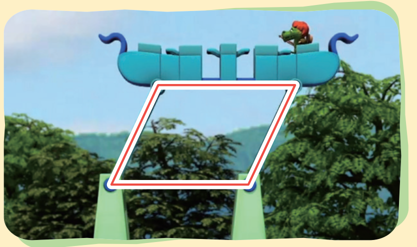
추론 연결

우리는 주변의 건축물, 문화유산, 예술 작품 등에서 도형의 성질을 사용하는 모습을 쉽게 찾을 수 있다. 특히, 사각형의 성질을 활용하여 기능을 향상시키거나 구조적 안정성을 높이기도 한다.

다음을 읽고, 평행사변형과 마름모의 성질을 활용한 사례들을 살펴보자.

1 평행사변형의 성질을 활용한 놀이기구

오른쪽 사진과 같이 놀이공원에는 반복적으로 오르내리는 놀이기구들이 있다. 놀이기구가 바닥과 평행을 유지하는 이유는 길이가 같은 두 개의 기둥에 연결되어 한 쌍의 대변이 평행하고, 그 길이가 같은 평행사변형을 이루기 때문이다. 이로 인해 놀이기구는 바닥과 평행을 유지하여 기울어지지 않는다.



(출처: EBS Math, 절대 기울어지지 않는 놀이기구)

2 마름모의 성질을 활용한 고소 작업대

오른쪽 사진과 같이 고소 작업대는 사람이나 물건을 들어 올리는 장치이다. 고소 작업대가 균형을 유지하며 아래위로 움직이는 이유는 마름모의 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분하는 성질을 이용해 좌우 폭이 좁아질 때 수직으로 높아지기 때문이다. 이로 인해 고소 작업대는 균형을 유지해 작업자의 부상 위험을 줄인다.

(출처: EBS Math, 나와라 가제트팔)

3 우리 생활 주변에서 사각형의 성질을 활용한 사례를 찾아보자. 풀이 참조

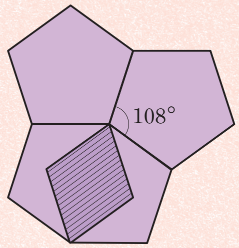
풀이 |예시| 건축과 설계에서 다이아그리드라는 마름모 형태의 구조적 요소를 사용하여 구조의 안정성을 높이고, 균형을 이룰 수 있다. 초고층 건물에 다이아그리드 공법을 적용하면 기둥 없이 건물의 하중을 견딜 수 있어 비틀어지고 기울어진 외관을 갖출 수 있다.

수학으로⁺ 탐험하기

테셀레이션을 만들어 보자!

일정한 형태의 도형을 겹치지 않게 반복적으로 이어 붙여 평면을 빈틈없이 채우는 것을 테셀레이션이라 하고, 우리말로는 쪽매 맞춤이라고도 부른다. 오른쪽 그림과 같이 테셀레이션은 건물의 벽면이나 천장 등에서 발견할 수 있고, 구조적 특성을 이용하여 건축과 공학을 비롯한 다양한 분야에서 활용된다.

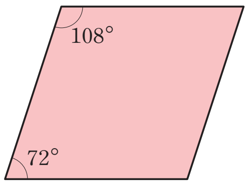
한 종류의 정다각형으로 평면을 채우려면 그 다각형의 한 내각의 크기로 360°를 정확히 나눌 수 있어야 한다. 따라서 정삼각형, 정사각형, 정육각형만 테셀레이션을 만들 수 있다. 한편, 정오각형은 한 내각의 크기가 108°이므로 정오각형을 이어 붙이면 빈틈이나 겹침이 발생한다. 예를 들어 오른쪽 그림과 같이 정오각형 4개를 이어 붙이면 네 내각의 크기의 합이 $4\times108^\circ=432^\circ$이므로 겹치는 부분이 생긴다.



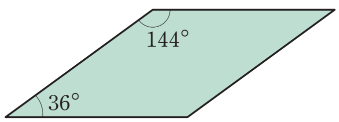
정다각형은 아니지만 직사각형이나 평행사변형으로도 평면을 빈틈없이 채울 수 있다. 또한, 한 변의 길이가 서로 같고, 내각의 크기가 서로 다른 두 종류의 마름모로도 평면을 빈틈없이 채울 수 있다고 알려져 있다.

(출처: 동아사이언스, 2021)

● 다음 그림과 같은 마름모 A, B를 이용하여 테셀레이션을 만들어 보자. [준비물: 마름모 A, B 카드]

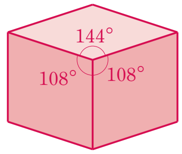


마름모 A



마름모 B

풀이 (1) 다음 그림과 같이 2개의 마름모 A로 $216^\circ(=108^\circ\times2)$를 만들고, 1개의 마름모 B의 144°와 이어 붙이면 빈틈없이 채울 수 있다.

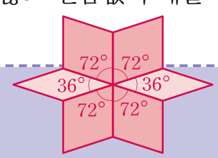


1 주어진 마름모 A, B에 대하여 다음 물음에 답해 보자.

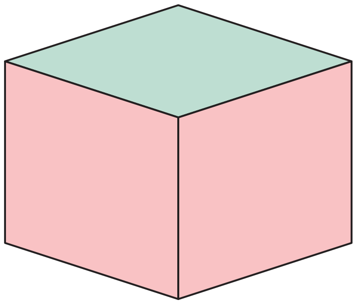
(1) 2개의 마름모 A와 1개의 마름모 B로 360°를 겹치지 않고 빈틈없이 채울 수 있는지 말해 보자.
풀이 참조

(2) 4개의 마름모 A와 2개의 마름모 B로 360°를 겹치지 않고 빈틈없이 채울 수 있는지 말해 보자.
풀이 참조

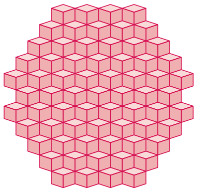
(2) 오른쪽 그림과 같이 4개의 마름모 A로 $288^\circ(=72^\circ\times4)$를 만들고, 2개의 마름모 B로 $72^\circ(=36^\circ\times2)$를 만들어 이어 붙이면 빈틈없이 채울 수 있다.



2 마름모 카드를 이용하여 오른쪽 그림과 같은 도형을 만들어 보고, 이 도형을 이용하여 테셀레이션을 만들어 보자. 풀이 참조

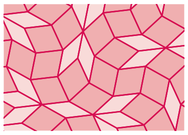


풀이 |예시|



3 마름모 A와 마름모 B를 이용하여 **2**에서 만든 테셀레이션과 다른 모양의 테셀레이션을 만들어 보자. 풀이 참조

풀이 |예시|



4 **2**에서 만든 테셀레이션과 **3**에서 만든 테셀레이션의 차이점에 대해 친구와 이야기해 보자. 풀이 참조

풀이 |예시| **2**에서 만든 테셀레이션은 같은 모양이 반복되는 것에 비해 **3**에서 만든 테셀레이션은 같은 모양이 반복되지 않는다.

5 테셀레이션이 활용된 건축물이나 문화유산에 대해 조사해 보고, 친구와 이야기해 보자. 풀이 참조

풀이 |예시| 우리나라 경복궁의 벽면 장식, 이집트의 벽지 무늬, 영국 옥스퍼드대 워덤칼리지의 바닥에서 테셀레이션을 확인할 수 있다.

| 상호 평가표 |

	평가 내용	자기 평가	친구 평가
내용	마름모를 이용하여 여러 가지 방법으로 평면을 채울 수 있다.		
	두 테셀레이션의 차이점을 설명할 수 있다.		
태도	마름모를 활용한 테셀레이션을 만들면서 수학에 대한 흥미와 관심을 갖게 되었다.		

스스로 마무리하기

생각 완성하기

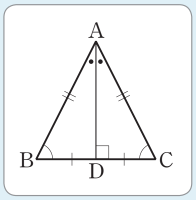
● 각 단원의 내용을 정리하여 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

01 이등변삼각형의 성질

• 이등변삼각형의 성질

① $\angle B = \angle C$

② $\boxed{\overline{AD} \perp \overline{BC}}$, $\overline{BD} = \overline{CD}$



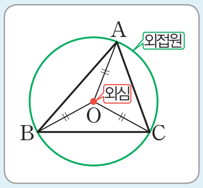
• 직각삼각형의 합동 조건

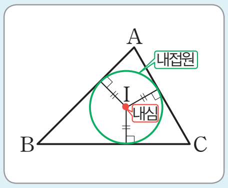
① 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같을 때

② 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같을 때

02 삼각형의 외심과 내심

• 외심과 내심





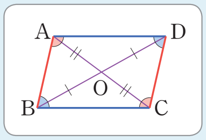
03 평행사변형의 성질

• 평행사변형의 성질

① $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$

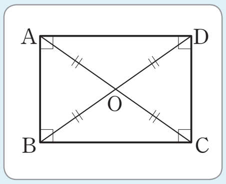
② $\boxed{\angle A = \angle C}$, $\angle B = \angle D$

③ $\overline{OA} = \overline{OC}$, $\boxed{\overline{OB} = \overline{OD}}$



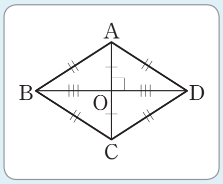
04 여러 가지 사각형의 성질

• 직사각형의 성질



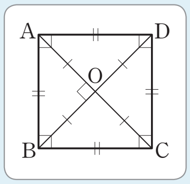
$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$

• 마름모의 성질



$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

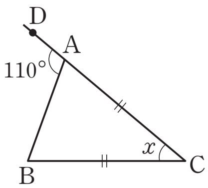
• 정사각형의 성질



$\overline{AC} = \overline{BD}$, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

●○○

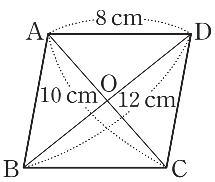
1 오른쪽 그림과 같은 $\overline{AC} = \overline{BC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AC}$의 연장선 위의 점 D를 잡을 때, $\angle DAB = 110^\circ$이다. $\angle x$의 크기를 구하시오. 40°



풀이 $\angle BAC = 70^\circ$이므로 $\angle x = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ$이다.

●○○

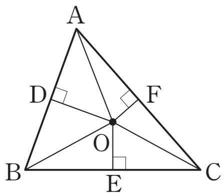
2 오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 $\overline{AD} = 8$ cm, $\overline{AC} = 10$ cm, $\overline{BD} = 12$ cm일 때, △OAD의 둘레의 길이를 구하시오. 19 cm



풀이 $\overline{OA} = 5$ cm, $\overline{OD} = 6$ cm, $\overline{AD} = 8$ cm이므로 △OAD의 둘레의 길이는 19 cm이다.

●○○

3 오른쪽 그림에서 점 O가 △ABC의 외심일 때, 다음 보기 중에서 옳은 것을 모두 고르시오. ㄱ, ㄹ



보기

ㄱ. $\overline{AD} = \overline{BD}$

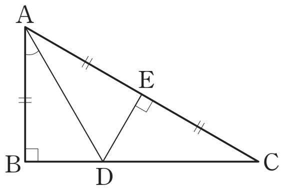
ㄴ. $\overline{OE} = \overline{OF}$

ㄷ. $\angle OBD = \angle OBE$

ㄹ. $\angle OBE = \angle OCE$

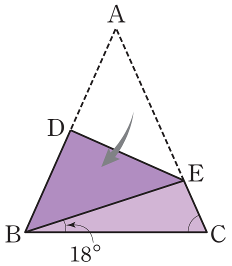
풀이 삼각형의 외심은 세 변의 수직이등분선의 교점이므로 $\overline{AD} = \overline{BD}$이다. 또한, 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로 $\overline{OB} = \overline{OC}$이고, $\angle OEB = \angle OEC = 90^\circ$, $\overline{OE}$는 공통이므로 $\triangle OBE \equiv \triangle OCE$(RHS 합동)이다. 합동인 두 삼각형에서 대응하는 각의 크기는 같으므로 $\angle OBE = \angle OCE$이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

4 다음 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\angle B=90^\circ$, $\overline{AC}=2\overline{AB}$이다. $\overline{AC}$의 중점을 E, $\overline{AC}$의 수직이등분선과 $\overline{BC}$의 교점을 D라고 할 때, $\angle BAD$의 크기를 구하시오. 30°



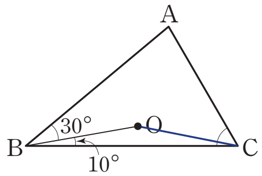
풀이 두 직각삼각형 ABD와 AED에서 $\overline{AD}$가 공통, $\overline{AB}=\overline{AE}$이다. 이때 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같으므로 $\triangle ABD\equiv\triangle AED$(RHS 합동)이다. 또, 두 직각삼각형 ADE와 CDE에서 $\angle AED=\angle CED=90^\circ$, $\overline{AE}=\overline{CE}$, $\overline{ED}$는 공통이다. 이때 두 대응변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같으므로 $\triangle ADE\equiv\triangle CDE$(SAS 합동)이다. 따라서 $\angle BAD=\angle EAD=\angle ECD$이므로
$\angle A+\angle C=\angle BAD+\angle EAD+\angle ECD=90^\circ$, $\angle BAD=30^\circ$이다.

5 오른쪽 그림은 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 모양의 종이를 점 A가 점 B에 오도록 접은 모양이다. $\angle EBC=18^\circ$일 때, $\angle C$의 크기를 구하시오. 66°



풀이 $\triangle ABC$는 이등변삼각형이므로
$\angle EBD=\angle B-18^\circ=\angle C-18^\circ$이고, 종이를 접었으므로
$\angle A=\angle EBD=\angle C-18^\circ$이다.
삼각형의 내각의 합은 180°이므로
$\angle A+\angle B+\angle C=(\angle C-18^\circ)+\angle C+\angle C=180^\circ$이다.
따라서 $\angle C=66^\circ$이다.

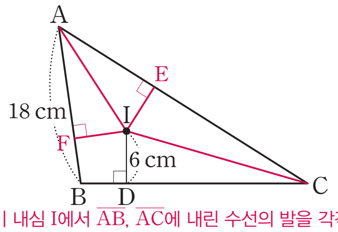
6 오른쪽 그림에서 점 O는 $\triangle ABC$의 외심이다. $\angle ABO=30^\circ$, $\angle OBC=10^\circ$일 때, $\angle C$의 크기는? ⑤



① 40°　② 45°　③ 50°
④ 55°　⑤ 60°

풀이 위의 그림과 같이 선분 OC를 그으면
$\angle OBA+\angle OBC+\angle OCA=30^\circ+10^\circ+\angle OCA=90^\circ$이므로
$\angle OCA=50^\circ$이다. 이때 $\angle OBC=\angle OCB=10^\circ$이므로 $\angle C=60^\circ$이다.

7 다음 그림에서 점 I가 $\triangle ABC$의 내심이고, 내심 I에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 D라고 하자. $\overline{ID}=6$ cm, $\overline{AB}=18$ cm이고, $\triangle ABC$의 넓이가 240 cm^{2}일 때, $\overline{BC}+\overline{CA}$의 길이를 구하시오. 62 cm

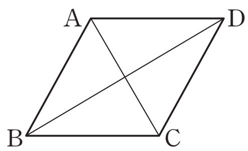


풀이 위의 그림과 같이 내심 I에서 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 각각 F, E라고 하자.

$$\triangle ABC=\triangle IAB+\triangle IBC+\triangle ICA=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{IF}+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{ID}+\frac{1}{2}\times\overline{CA}\times\overline{IE}$$
$$=\frac{1}{2}\times18\times6+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times6+\frac{1}{2}\times\overline{CA}\times6$$
$$=54+3(\overline{BC}+\overline{CA})=240(\text{cm}^2)$$

따라서 $\overline{BC}+\overline{CA}=62$(cm)이다.

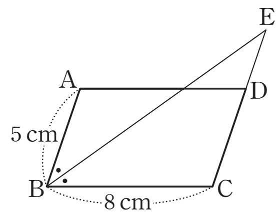
8 오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은? ⑤



① $\overline{AC}\perp\overline{BD}$이면 마름모이다.
② $\overline{AB}=\overline{BC}$이면 마름모이다.
③ $\angle B=90^\circ$이면 직사각형이다.
④ $\overline{AC}=\overline{BD}$이면 직사각형이다.
⑤ $\angle A=90^\circ$, $\overline{AC}=\overline{BD}$이면 정사각형이다.

풀이 ⑤ $\angle A=90^\circ$, $\overline{AC}=\overline{BD}$이면 직사각형이다.
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

9 오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 $\angle B$의 이등분선과 $\overline{CD}$의 연장선의 교점을 E라 고 하자. $\overline{AB}=5$ cm, $\overline{BC}=8$ cm일 때, $\overline{DE}$의 길이를 구하시오. 3 cm

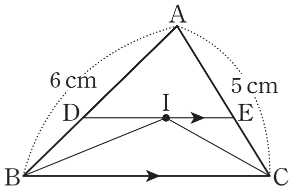


풀이 $\angle ABE=\angle DEB$(엇각)이므로 $\triangle CEB$는 $\overline{CB}=\overline{CE}$인 이등변삼각형이고, $\overline{CE}=8$ cm이다.
따라서 $\overline{DE}=\overline{CE}-\overline{CD}=8-5=3$(cm)이다.

스스로 마무리하기

서술형 문제

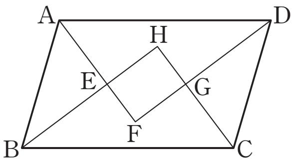
10 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$의 내심 I를 지나고, $\overline{BC}$에 평행한 직선이 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$와 만나는 점을 각각 D, E라고 하자. $\overline{AB}=6$ cm, $\overline{AC}=5$ cm일 때, $\triangle ADE$의 둘레의 길이를 구하려고 한다. 풀이 과정과 답을 쓰시오. **11 cm**



풀이 점 I가 $\triangle ABC$의 내심이므로 $\angle DBI=\angle IBC$이다. 또, $\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$이므로 $\angle DIB=\angle IBC$(엇각)이다.
따라서 $\angle DBI=\angle DIB$이므로 $\overline{DB}=\overline{DI}$이다. 같은 방법으로 $\angle ECI=\angle EIC$이므로 $\overline{EC}=\overline{EI}$이다.
즉, $\triangle ADE$의 둘레의 길이는
$\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{EA}=\overline{AD}+\overline{DI}+\overline{IE}+\overline{EA}=\overline{AD}+\overline{DB}+\overline{EC}+\overline{EA}=\overline{AB}+\overline{AC}=6+5=11$(cm)이다.

채점 기준	배점 비율
(i) $\overline{DB}=\overline{DI}$임을 밝힌 경우	30 %
(ii) $\overline{EC}=\overline{EI}$임을 밝힌 경우	30 %
(iii) $\triangle ADE$의 둘레의 길이를 구한 경우	40 %

11 다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD의 네 내각의 이등분선의 교점을 각각 E, F, G, H라고 할 때, □EFGH는 어떤 사각형인지 찾으려고 한다. 풀이 과정과 답을 쓰시오. 직사각형

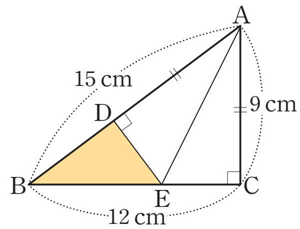


풀이 $\angle BAD+\angle ADC=180^\circ$이므로 $\angle FAD+\angle ADF=90^\circ$이다.
$\triangle ADF$에서 $\angle AFD=180^\circ-90^\circ=90^\circ$이다.
같은 방법으로 $\angle FGH=\angle GHE=\angle HEF=90^\circ$
따라서 □EFGH는 직사각형이다.

채점 기준	배점 비율
(i) $\angle AFD$의 크기를 구한 경우	60 %
(ii) FGH, $\angle GHE$, $\angle HEF$의 크기를 모두 구한 경우	30 %
(iii) □EFGH는 직사각형임을 밝힌 경우	10 %

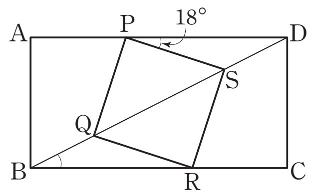
사고력 문제

12 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC의 변 BC 위의 점 E에서 변 AB에 내린 수선의 발을 D라고 하면 $\overline{AC}=\overline{AD}$이다.
$\overline{AB}=15$ cm, $\overline{BC}=12$ cm, $\overline{CA}=9$ cm일 때, $\triangle BED$의 넓이를 구하시오. $\frac{27}{2}$ **cm²**



풀이 $\triangle ADE\equiv\triangle ACE$(RHS 합동)이므로 $\overline{DE}=a$ cm라고 하면 $\overline{CE}=a$ cm이다.
$\triangle ABC=\triangle ABE+\triangle AEC$이므로
$\frac{1}{2}\times12\times9=\frac{1}{2}\times15\times a+\frac{1}{2}\times a\times9$, $12a=54$, $a=\frac{9}{2}$이다.
$\overline{AD}=\overline{AC}=9$ cm이므로 $\overline{BD}=\overline{AB}-\overline{AD}=15-9=6$(cm)이다.
따라서 $\triangle BED=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{DE}=\frac{1}{2}\times6\times\frac{9}{2}=\frac{27}{2}$(cm²)이다.

13 다음 그림에서 □ABCD는 직사각형, □PQRS는 정사각형이다. 대각선 BD가 점 Q, S를 각각 지나고 $\angle DPS=18^\circ$일 때, $\angle QBR$의 크기를 구하시오. 27°



풀이 □PQRS는 정사각형이므로 $\angle PSQ=45^\circ$이다.
또, $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$이므로 $\angle PDS=\angle RBQ$(엇각)이다.
$\triangle PSD$에서 삼각형의 외각의 성질에 의하여
$\angle DPS+\angle PDS=\angle PSQ$이다.
따라서 $18^\circ+\angle PDS=45^\circ$이므로 $\angle PDS=27^\circ$이고,
$\angle RBQ=\angle PDS=27^\circ$이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/akX1jwJMlnbhlzHW

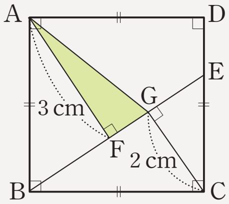
마무리 평가

자신의 학습 태도를 스스로 점검해 보자.

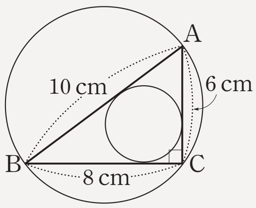
이 단원을 공부하면서 알게 된 것을 써 보자.	이 단원을 공부하면서 어려웠던 점을 쓰고 복습 계획을 세워 보자.

삼각형과 사각형의 성질을 정당화하여 체계적으로 생각하고, 친구를 논리적으로 설득했다.	
자신의 생각을 수학적으로 표현하고, 다른 사람의 생각을 이해하려고 노력했다.	
이 단원의 학습에 적극적이고 자신감 있게 참여했다.	
잘 이해하지 못한 내용은 친구나 선생님의 도움을 받아 확실하게 알도록 노력했다.	

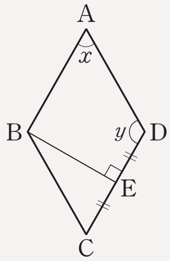
1 오른쪽 그림과 같이 정사각형 ABCD에서 꼭짓점 B를 지나는 직선과 $\overline{CD}$의 교점을 E라고 하자. 두 꼭짓점 A, C에서 $\overline{BE}$에 내린 수선의 발을 각각 F, G라고 하면 $\overline{AF}=3$ cm, $\overline{CG}=2$ cm이다. 이때 삼각형 AFG의 넓이를 구하시오.



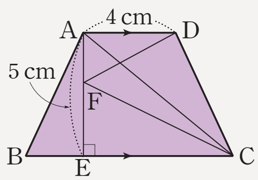
2 오른쪽 그림과 같이 세 변의 길이가 각각 6 cm, 8 cm, 10 cm인 직각삼각형 ABC에서 외접원과 내접원의 반지름의 길이의 합을 구하시오.



3 오른쪽 그림과 같이 마름모 ABCD의 꼭짓점 B에서 변 CD에 내린 수선의 발을 E라 하고 $\overline{CE}=\overline{ED}$일 때, $\angle y-\angle x$의 크기를 구하시오.



4 다음 그림과 같이 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$인 등변사다리꼴 ABCD의 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 E라고 하자. $\overline{AD}=4$ cm, $\overline{AE}=5$ cm이고 $\overline{AE}$ 위의 한 점 F에 대하여 $\triangle ADF=4\text{ cm}^2$, $\triangle AFC=7\text{ cm}^2$일 때, 사다리꼴 ABCD의 넓이를 구하시오.



VII 도형의 닮음

단원 이야기

사진이나 지도를 확대하거나 축소하는 것과 같이 모양은 그대로 유지하면서 크기만 변화시키는 경우를 쉽게 찾아볼 수 있다. 이처럼 닮음은 일상생활에서 자주 사용되고 이를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

이 단원에서는 닮은 도형의 의미와 그 성질을 이해하고, 이를 이용하여 삼각형의 무게중심과 피타고라스 정리에 대해 배운다.

배운 내용

초5~6
- 합동과 대칭

중1
- 기본 도형
- 작도와 합동
- 평면도형의 성질
- 입체도형의 성질

이어질 내용

중3
- 삼각비

이것만은 알고 가기

초 5~6 비례식 잘함 보통 모름

1 다음 비례식을 만족시키는 x의 값을 구하시오.

(1) $1:3=x:12$ **4** (2) $x:10=3:4$ $\frac{15}{2}$

(3) $\frac{4}{5}:0.7=16:x$ **14** (4) $0.4:\frac{7}{15}=x:14$ **12**

풀이 (1) $3x=12$, $x=4$ (2) $4x=30$, $x=\frac{15}{2}$

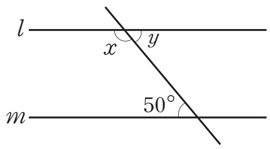
(3) $\frac{4}{5}x=\frac{56}{5}$, $x=14$ (4) $\frac{7}{15}x=\frac{28}{5}$, $x=12$

• $a:b=c:d$일 때, $ad=bc$이다.

중 1 평행선의 성질 잘함 보통 모름

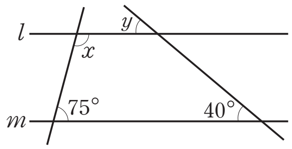
2 다음 그림에서 $l /\!/ m$일 때, $\angle x$, $\angle y$의 크기를 각각 구하시오.

(1)



$\angle x=130°$, $\angle y=50°$

(2)



$\angle x=105°$, $\angle y=40°$

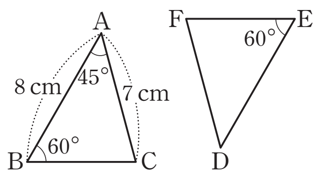
풀이 (1) $l /\!/ m$이므로 엇각의 크기가 같다.
따라서 $\angle y=50°$이고, $\angle x=150°-50°=130°$이다.
(2) $l /\!/ m$이므로 동위각의 크기가 같다.
따라서 $\angle y=40°$이고, $\angle x=180°-75°=105°$이다.

• 평행한 두 직선이 다른 한 직선과 만날 때, 동위각의 크기는 서로 같다.

• 평행한 두 직선이 다른 한 직선과 만날 때, 엇각의 크기는 서로 같다.

중 1 삼각형의 합동 조건 잘함 보통 모름

3 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$일 때, 다음을 구하시오.



(1) $\overline{DE}$의 길이 **8 cm**

(2) $\angle F$의 크기 **75°**

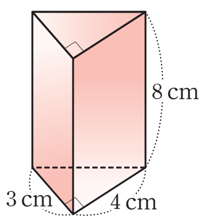
풀이 (1) $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$이므로 변 AB와 변 DE가 대응된다. 따라서 $\overline{DE}=\overline{AB}=8$ cm이다.
(2) $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$이므로 $\angle C$와 $\angle F$가 대응된다.
$\angle C=180°-(60°+45°)=75°$이므로 $\angle F=75°$이다.

• 두 삼각형은 다음의 각 경우에 서로 합동이다.
① 세 대응변의 길이가 각각 같다.
② 두 대응변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같다.
③ 한 대응변의 길이가 같고, 그 양 끝 각의 크기가 각각 같다.

중 1 입체도형의 부피 잘함 보통 모름

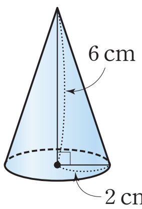
4 다음 기둥과 뿔의 부피를 구하시오.

(1)



$48\ cm^3$

(2)



$8\pi\ cm^3$

풀이 (1) $\frac{1}{2}\times3\times4\times8=48(cm^3)$ (2) $\frac{1}{3}\times4\pi\times6=8\pi(cm^3)$

• (기둥의 부피) $=$ (밑넓이) $\times$ (높이)

• (뿔의 부피) $=\frac{1}{3}\times$ (밑넓이) $\times$ (높이)

01 닮은 도형

이 단원에서 배우는 용어와 기호

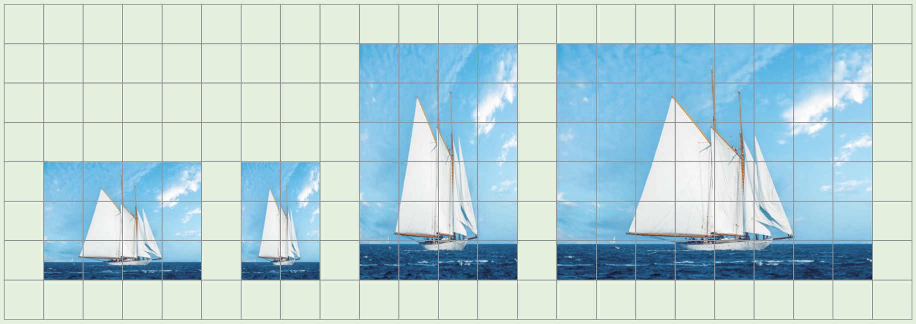
닮음, 닮음비, ∽

[학습 목표] 도형의 닮음의 뜻과 닮은 도형의 성질을 이해하고, 닮음비를 구할 수 있다.

도형의 닮음은 무엇일까?

생각 펼치기

다음은 공학 도구를 이용하여 원본 사진의 가로 또는 세로의 길이를 변형한 것이다. 물음에 답해 보자.



〈원본〉 (가) (나) (다)

1. (가), (나), (다)는 원본 사진을 각각 어떻게 변형한 것인지 말해 보자. 풀이 참조

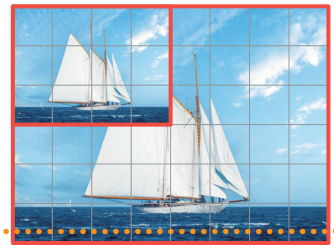
2. (가), (나), (다) 중 원본 사진과 크기는 다르지만 모양이 같은 것을 말해 보자. 풀이 참조

풀이 1. (가)는 원본 사진을 가로의 길이만 $\frac{1}{2}$배로 축소한 것이고, (나)는 세로의 길이만 2배로 확대한 것이다. (다)는 가로와 세로의 길이 모두 2배로 확대한 것이다.

2. 원본 사진과 모양이 같은 것은 직사각형의 가로와 세로를 같은 비율로 확대한 (다)이다.

닮음

생각 펼치기에서 원본 사진의 가로와 세로의 길이를 각각 2배로 확대하면 (다)와 합동이고, (다)의 가로와 세로의 길이를 각각 $\frac{1}{2}$배로 축소하면 원본 사진과 합동이다.



이와 같이 한 도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소한 도형이 다른 도형과 합동일 때, 이 두 도형은 서로 **닮음**인 관계에 있다고 한다.

또, 닮음인 관계에 있는 두 도형을 서로 닮은 도형이라고 한다.

모양과 크기가 같아 한 도형을 다른 도형에 포개었을 때, 완전히 겹쳐지는 두 도형은 서로 합동이다.

개념 쏙

닮은 도형: 닮음인 관계에 있는 두 도형

1 다음 중에서 두 도형이 항상 서로 닮은 도형인 것을 모두 찾으시오. (1), (4)

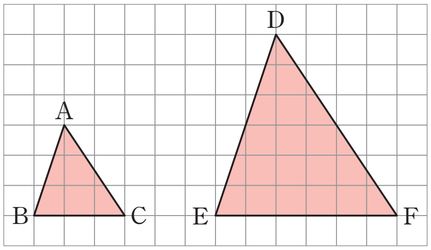
(1) 두 정사각형 (2) 두 마름모

(3) 두 이등변삼각형 (4) 두 원

풀이 정삼각형은 한 변의 길이에 의해 크기가 결정이 되고 그 모양은 모두 같다. 또, 원은 반지름의 길이에 의해 크기가 결정되고 그 모양은 모두 같다. 따라서 두 정삼각형, 두 원은 항상 서로 닮은 도형이다.

Tip 삼각형을 2배로 확대한다는 것은 일정한 비율을 유지하는 것이므로 세 각의 크기가 변하지 않도록 확대하는 것이다.

다음 그림에서 △ABC를 2배로 확대한 것은 △DEF와 합동이므로 △ABC와 △DEF는 서로 닮은 도형이다.



이때 두 삼각형에서 점 A와 점 D, 점 B와 점 E, 점 C와 점 F는 각각 대응하는 꼭짓점이고, $\overline{AB}$와 $\overline{DE}$, $\overline{BC}$와 $\overline{EF}$, $\overline{CA}$와 $\overline{FD}$는 각각 대응하는 변이다. 또, ∠A와 ∠D, ∠B와 ∠E, ∠C와 ∠F는 각각 대응하는 각이다.

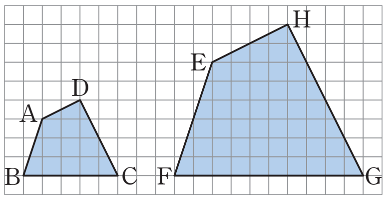
닮음 기호 ∽는 닮음을 뜻하는 영어 Similar의 첫 글자 S를 옆으로 뉘어서 쓴 것이다.

△ABC와 △DEF가 서로 닮은 도형일 때, 이것을 기호

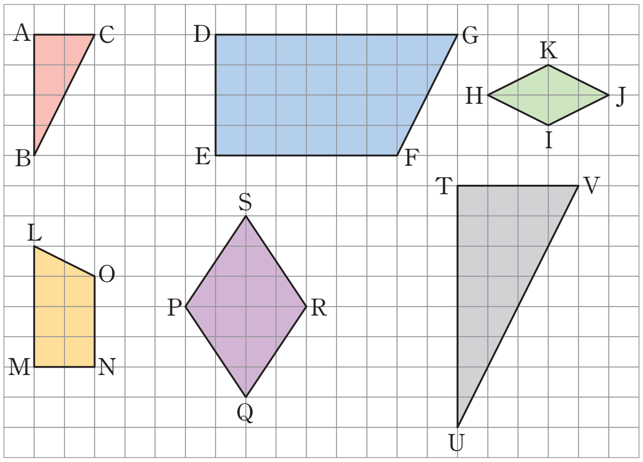
△ABC ∽ △DEF

로 나타낸다. 이때 두 도형의 꼭짓점은 대응하는 순서대로 쓴다.

확인하기 오른쪽 그림의 두 사각형은 서로 닮은 도형이다. 이를 기호로 나타내면 □ABCD ∽ $\boxed{\text{□EFGH}}$이고, $\overline{CD}$와 대응하는 변은 $\boxed{\overline{GH}}$이며, ∠B와 대응하는 각은 $\boxed{∠F}$이다.



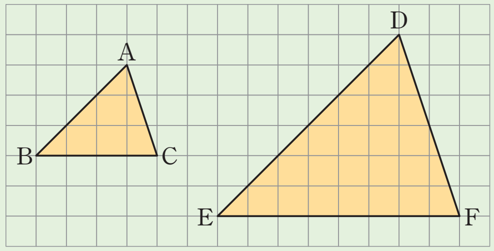
2 다음 그림에서 서로 닮은 도형을 모두 찾아 기호 ∽를 사용하여 나타내시오. △ABC∽△TUV, □DEFG∽□MNOL



닮은 도형에는 어떤 성질이 있을까?

생각 펼치기

오른쪽 그림에서 $\triangle DEF$는 $\triangle ABC$를 2배로 확대하여 그린 것이다. 다음 물음에 답해 보자.



1. $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$에서 대응하는 변의 길이의 비를 각각 비교해 보자.
$\overline{AB}:\overline{DE}=1:2$, $\overline{BC}:\overline{EF}=1:2$, $\overline{CA}:\overline{FD}=1:2$

2. $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$에서 대응하는 각의 크기를 각각 비교해 보자. $\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$

평면도형에서 닮음의 성질

생각 펼치기에서 $\triangle DEF$는 $\triangle ABC$를 2배로 확대한 것이므로

$$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$$

이다. 이때 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$에서

$$\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{EF}=\overline{CA}:\overline{FD}=1:2$$

이므로 대응하는 변의 길이의 비가 일정하다는 것을 알 수 있다. 또,

$$\angle A=\angle D,\ \angle B=\angle E,\ \angle C=\angle F$$

이므로 대응하는 각의 크기가 각각 같다는 것을 알 수 있다.

일반적으로 서로 닮은 두 평면도형에는 다음과 같은 성질이 있다.

평면도형에서 닮음의 성질

서로 닮은 두 평면도형에서

1. 대응하는 변의 길이의 비는 일정하다.

2. 대응하는 각의 크기는 각각 같다.

서로 닮은 두 평면도형에서 대응하는 변의 길이의 비를 **닮음비**라고 한다. 예를 들어 **생각 펼치기**의 그림에서 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 닮음비는 $1:2$이다.

수학 호기심

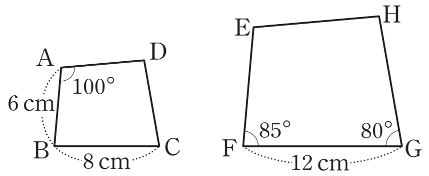
서로 합동인 두 도형의 닮음비는 얼마일까?

풀이
서로 합동인 두 도형의 닮음비는 $1:1$이다.

개념 쏙

서로 닮은 두 평면도형에서 닮음비: 대응하는 변의 길이의 비

3 오른쪽 그림에서 $\square ABCD \backsim \square EFGH$일 때, 다음을 구하시오.



(1) $\square ABCD$와 $\square EFGH$의 닮음비 $2:3$

(2) $\overline{EF}$의 길이 9 cm

(3) $\angle H$의 크기 95°

풀이 (1) $\square ABCD$와 $\square EFGH$에서 변 BC와 변 FG가 대응하고, $\overline{BC}:\overline{FG}=8:12=2:3$이므로 닮음비는 $2:3$이다.
(2) $\overline{AB}:\overline{EF}=2:3$이고, $\overline{AB}=6$ cm이므로 $\overline{EF}=9$ cm이다.
(3) $\angle E=\angle A=100^\circ$이므로, $\angle H=360^\circ-(100^\circ+85^\circ+80^\circ)=95^\circ$이다.

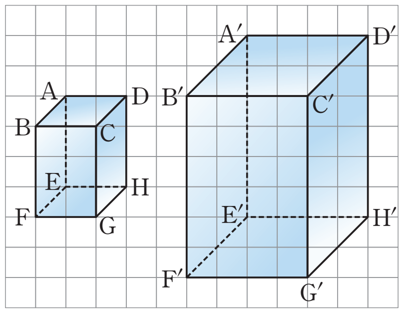
입체도형에서 닮음의 성질

Tip 입체도형의 닮음은 한 입체도형을 일정한 비율로 확대하거나 축소한 것이 다른 입체도형과 모양과 크기가 똑같을 때 이므로 입체도형의 닮음은 평면도형의 닮음과 연관이 있다.

평면도형과 마찬가지로 입체도형에서도 닮음을 생각할 수 있다.

한 입체도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소한 도형이 다른 입체도형과 모양과 크기가 같을 때, 이 두 입체도형은 서로 닮음인 관계에 있다고 한다. 또, 닮음인 관계에 있는 두 입체도형을 서로 닮은 도형이라고 한다.

오른쪽 그림에서 직육면체 (나)는 직육면체 (가)의 각 모서리의 길이를 2배로 확대한 것이므로 두 직육면체는 서로 닮은 도형이다.



(가) (나)

이때 두 직육면체에서

$$\overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{BC}:\overline{B'C'}=\cdots$$
$$=1:2$$

이므로 대응하는 모서리의 길이의 비는 일정함을 알 수 있다. 또,

$$\square ABCD \backsim \square A'B'C'D',\ \square ABFE \backsim \square A'B'F'E',\ \cdots$$

이므로 대응하는 면은 서로 닮은 도형임을 알 수 있다.

개념 쏙

평면도형의 닮음과 같은 방법으로 입체도형의 닮음을 생각한다. 입체도형을 2배로 확대한다는 것은 일정한 비율을 유지하면서 2배로 확대한 것이다.

일반적으로 서로 닮은 두 입체도형에는 다음과 같은 성질이 있다.

입체도형에서 닮음의 성질

서로 닮은 두 입체도형에서

1. 대응하는 모서리의 길이의 비는 일정하다.

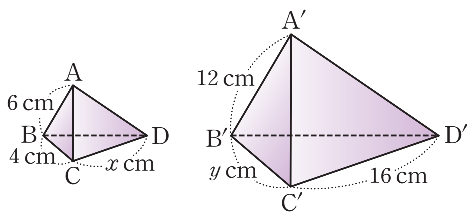
2. 대응하는 면은 서로 닮은 도형이다.

개념 쏙

서로 닮은 두 입체도형에서 닮음비: 대응하는 모서리의 길이의 비

서로 닮은 두 입체도형에서 대응하는 모서리의 길이의 비를 닮음비라고 한다. 예를 들어 위의 그림에서 직육면체 (가)와 직육면체 (나)의 닮음비는 $1:2$이다.

4 **오른쪽 그림에서 두 사면체는 서로 닮은 도형이고, $\triangle ABC$와 $\triangle A'B'C'$이 서로 대응하는 면이다. 다음을 구하시오.**



(1) 두 사면체의 닮음비 $1:2$

(2) 모서리 BD에 대응하는 모서리 모서리 B′D′

(3) x, y의 값 $x=8$, $y=8$

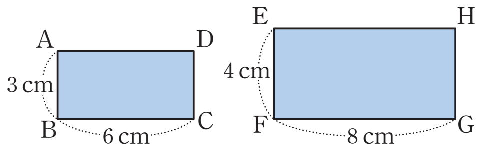
풀이 (1) $\triangle ABC$와 $\triangle A'B'C'$에서 변 AB와 변 A′B′이 대응한다. 따라서 두 사면체의 닮음비는 $1:2$이다.
(2) 모서리 BD에 대응하는 모서리는 모서리 B′D′이다.
(3) $\overline{CD}:\overline{C'D'}=1:2=x:16$이므로 $x=8$이고, $\overline{BC}:\overline{B'C'}=1:2=4:y$이므로 $y=8$이다. 따라서 $x=8$, $y=8$이다.

닮음비와 넓이의 비 사이에는 어떤 관계가 있을까?

서로 닮은 도형의 넓이의 비

서로 닮은 두 평면도형에서 닮음비와 넓이의 비 사이의 관계를 알아보자.

오른쪽 그림에서 두 직사각형은 서로 닮은 도형이고, 닮음비가 3 : 4이다.



두 직사각형의 넓이는 각각

$$\square\mathrm{ABCD}=6\times3=18(\mathrm{cm}^2),$$

$$\square\mathrm{EFGH}=8\times4=32(\mathrm{cm}^2)$$

이므로 두 직사각형의 넓이의 비는

$$\square\mathrm{ABCD}:\square\mathrm{EFGH}=18:32=9:16=3^2:4^2$$

이다. 따라서 두 직사각형의 닮음비가 3 : 4일 때, 넓이의 비는 $3^2:4^2$임을 알 수 있다.

□ABCD는 사각형 ABCD의 넓이를 나타내기도 한다.

개념 쏙

닮음비가 $m:n$이면 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다.

일반적으로 서로 닮은 두 평면도형에서는 다음이 성립한다.

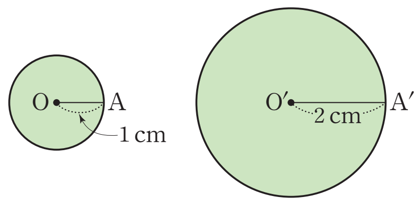
서로 닮은 도형의 넓이의 비

두 평면도형의 닮음비가 $m:n$일 때, 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다.

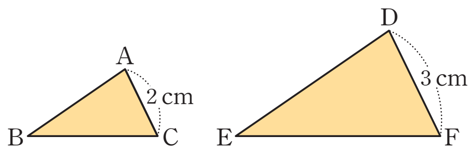
확인하기

두 원의 닮음비는 두 원의 반지름의 길이의 비와 같다.

오른쪽 그림에서 두 원은 서로 닮은 도형이고, 닮음비는 $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{O'A'}}=\boxed{1}:\boxed{2}$이다. 또, 두 원의 넓이는 각각 $\pi\ \mathrm{cm}^2$, $4\pi\ \mathrm{cm}^2$이므로 넓이의 비는 $\boxed{1}:\boxed{4}$이다.



5 다음 그림에서 △ABC와 △DEF는 서로 닮은 도형이고, $\overline{\mathrm{AC}}=2$ cm, $\overline{\mathrm{DF}}=3$ cm이다. △ABC의 넓이가 16 cm^2일 때, △DEF의 넓이를 구하시오. 36 cm^2



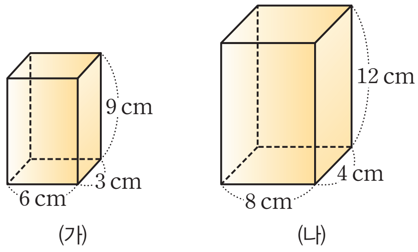
풀이 △ABC와 △DEF의 닮음비는 2 : 3이므로 두 삼각형의 넓이의 비는 $2^2:3^2=4:9$이다.
△ABC=16 cm^2이므로 4 : 9=16 : △DEF이다. 따라서 △DEF=36 cm^2이다.

닮음비와 부피의 비 사이에는 어떤 관계가 있을까?

서로 닮은 도형의 부피의 비

서로 닮은 두 입체도형에서 닮음비와 부피의 비 사이의 관계를 알아보자.

오른쪽 그림에서 두 직육면체는 서로 닮은 도형이고, 닮음비가 $3:4$이다.



두 직육면체의 부피는 각각

$$\begin{aligned}((\text{가})\text{의 부피}) &= 6\times 3\times 9\\ &= 162(\text{cm}^3),\\ ((\text{나})\text{의 부피}) &= 8\times 4\times 12\\ &= 384(\text{cm}^3)\end{aligned}$$

이므로 두 직육면체의 부피의 비는

$$((\text{가})\text{의 부피}) : ((\text{나})\text{의 부피}) = 162 : 384 = 27 : 64 = 3^3 : 4^3$$

이다. 따라서 두 직육면체의 닮음비가 $3:4$일 때, 부피의 비는 $3^3:4^3$임을 알 수 있다.

개념 쏙

닮음비가 $m:n$이면 부피의 비는 $m^3:n^3$이다.

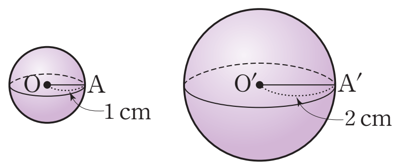
일반적으로 서로 닮은 두 입체도형에서는 다음이 성립한다.

서로 닮은 도형의 부피의 비

두 입체도형의 닮음비가 $m:n$일 때, 부피의 비는 $m^3:n^3$이다.

Tip 두 구는 항상 서로 닮은 도형이다.

6 오른쪽 그림과 같은 두 구에 대하여 다음을 구하시오.



(1) 두 구의 닮음비 **1 : 2**

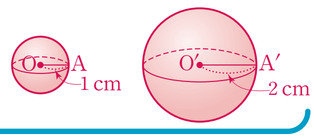
(2) 두 구의 부피의 비 **1 : 8**

풀이 (1) 두 구의 반지름의 비가 $1:2$이므로 닮음비는 $1:2$이다.
(2) 두 구의 닮음비가 $1:2$이므로 두 구의 부피의 비는 $1^3:2^3=1:8$이다.

생각 더 나아가기 (추론, 의사소통)

구체적인 도형을 이용하여 이안이의 말이 옳은지 확인해 보고, 옳지 않은 경우에는 예를 들어 그 이유를 설명해 보자. 풀이 참조

풀이 이안이의 말은 옳지 않다. 예를 들어 다음과 같은 두 구의 닮음비는 $1:2$이다. 그런데 두 구의 겉넓이는 각각 $4\pi\ \text{cm}^2$, $16\pi\ \text{cm}^2$이므로 겉넓이의 비는 $1:2$가 아니다.



스스로 점검하기

1

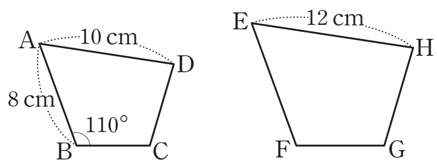
다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 서로 닮은 두 평면도형에서 대응하는 변의 $\boxed{\text{길이의 비}}$ 은/는 일정하고, 대응하는 각의 크기는 각각 $\boxed{\text{같다}}$.

(2) 두 입체도형의 닮음비가 $m : n$일 때, 부피의 비는 $\boxed{m^3} : \boxed{n^3}$이다.

2

아래 그림에서 □ABCD∽□EFGH일 때, 다음을 구하시오.



(1) □ABCD와 □EFGH의 닮음비 5 : 6

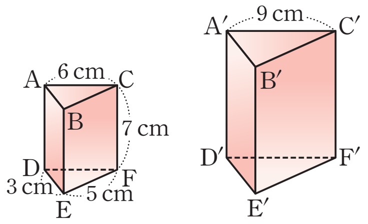
(2) $\overline{EF}$의 길이 $\frac{48}{5}$ cm

(3) ∠F의 크기 110°

풀이 (1) 변 AD와 변 EH가 대응하고, $\overline{AD} : \overline{EH} = 10 : 12 = 5 : 6$이므로 닮음비는 5 : 6이다.
(2) 변 AB와 변 EF가 대응하고 $\overline{AB} : \overline{EF} = 5 : 6$, $\overline{AB} = 8$ cm이므로 $\overline{EF} = \frac{48}{5}$ cm이다.
(3) ∠B와 ∠F가 대응하고 ∠B=110°이므로 ∠F=110°이다.

3

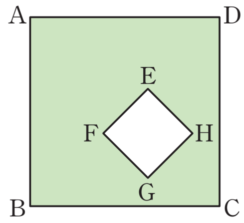
다음 그림에서 두 삼각기둥은 서로 닮은 도형이고, △ABC와 △A′B′C′이 서로 대응하는 면이다. $\overline{E'F'}$의 길이를 구하시오. $\frac{15}{2}$ cm



풀이 두 삼각기둥의 닮음비는 2 : 3이고, $\overline{EF} = 5$ cm이므로 $\overline{E'F'} = 10$ cm이다.

4

오른쪽 그림과 같이 정사각형 ABCD의 내부에 정사각형 EFGH가 있다. 두 정사각형의 한 변의 길이의 비가 3 : 1일 때, □EFGH와 색칠한 부분의 넓이의 비를 구하시오. 1 : 8



풀이 □ABCD와 □EFGH의 닮음비가 3 : 1이므로 넓이의 비는 9 : 1이다. 따라서 □EFGH와 색칠한 부분의 넓이의 비는 1 : (9−1)=1 : 8이다.

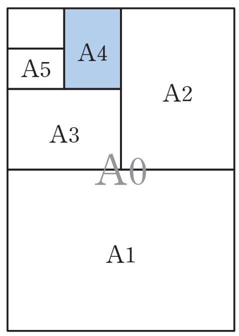
5

다문화 인식 개선 캠페인에 참가한 영후는 각 나라의 문화가 담긴 장식품을 만들어 판매하기로 했다. 영후가 만든 원뿔 모양의 두 장식품은 서로 닮은 도형이고 밑면의 반지름의 길이의 비가 2 : 5일 때, 겉넓이의 비를 구하시오. 4 : 25

풀이 두 장식품의 밑면의 반지름의 길이의 비는 2 : 5이므로 밑면의 넓이의 비는 4 : 25이다. 또한, 두 장식품의 옆넓이의 비도 4 : 25이므로 겉넓이의 비는 4 : 25이다.

6 실생활 추론

오른쪽 그림과 같이 A0 용지를 반으로 접을 때마다 생기는 사각형 모양의 용지를 각각 A1, A2, A3, A4, A5, … 라고 한다. 각각의 용지들이 서로 닮은 도형일 때, A0 용지와 A4 용지의 닮음비를 구하시오. 4 : 1



풀이 A0 용지의 가로의 길이를 x라고 하면 A4 용지의 가로의 길이는 $\frac{x}{4}$이다.
따라서 A0 용지와 A4 용지의 닮음비는
$x : \frac{x}{4} = 4 : 1$이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/0x5gmFEaTL1SneZ7

자기 평가				
	도형의 닮음의 뜻과 닮은 도형의 성질을 이해하고, 닮음비를 구할 수 있다.			
	흥미와 관심을 가지고 일상생활에서 닮은 도형의 성질을 탐구할 수 있다.			

02 삼각형의 닮음 조건

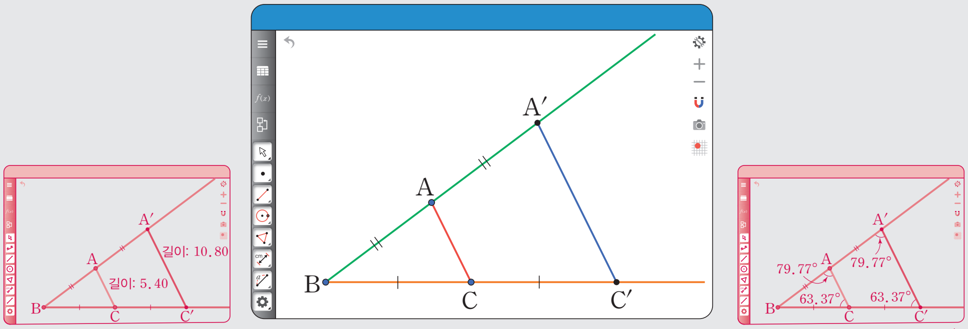
[학습 목표] 삼각형의 닮음 조건을 이해하고, 이를 이용하여 두 삼각형이 닮음인지 판별할 수 있다.

삼각형의 닮음 조건은 무엇일까?

생각 펼치기

공학 도구

다음 그림은 알지오매스를 이용하여 $\triangle ABC$를 그린 뒤, $\angle B$의 크기는 그대로 유지하고 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$의 길이가 각각 2배가 되도록 $\overline{A'B}$, $\overline{BC'}$을 그려서 두 점 A'과 C'을 연결한 것이다. 물음에 답해 보자.



1. [길이]를 눌러 $\overline{CA}$, $\overline{C'A'}$의 길이를 각각 구하고, 두 선분의 길이를 서로 비교해 보자.

|예시| $\overline{CA}=5.40$, $\overline{C'A'}=10.80$이고, $\overline{C'A'}$의 길이가 $\overline{CA}$의 길이의 2배이다.

2. [각도]를 눌러 $\triangle ABC$와 $\triangle A'BC'$에서 $\angle A$와 $\angle A'$, $\angle C$와 $\angle C'$의 크기를 각각 구하고, 그 각의 크기를 서로 비교해 보자.

|예시| $\angle A=79.77°$, $\angle A'=79.77°$, $\angle C=63.37°$, $\angle C'=63.37°$이고 $\angle A=\angle A'$, $\angle C=\angle C'$이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/C8Fqu8ZzrlCNYoW7

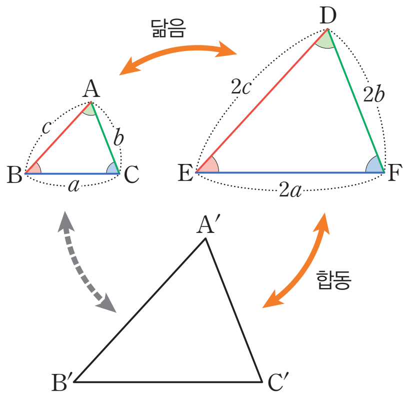
삼각형의 닮음 조건

생각 펼치기 에서 $\triangle ABC$와 $\triangle A'BC'$은 두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 $1:2$로 서로 같고, 그 끼인각의 크기가 같다. 이때 나머지 한 쌍의 대응하는 변인 $\overline{CA}$, $\overline{C'A'}$의 길이의 비도 $1:2$이고, 다른 두 쌍의 대응하는 각의 크기도 $\angle A=\angle A'$, $\angle C=\angle C'$으로 같다. 즉, $\triangle ABC$를 2배로 확대하면 $\triangle A'BC'$과 합동이 되므로 $\triangle ABC$와 $\triangle A'BC'$은 서로 닮은 도형이다.

일반적으로 두 삼각형에서 세 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고, 세 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같으면 두 삼각형은 서로 닮은 도형이다. 그러나 두 삼각형에서 세 쌍의 대응하는 변의 길이의 비와 세 쌍의 대응하는 각의 크기를 모두 비교하지 않더라도 두 삼각형이 서로 닮은 도형임을 확인할 수 있는 경우가 있다.

이제 두 삼각형이 어떤 조건을 만족시킬 때 서로 닮은 도형이 되는지 알아보자.

오른쪽 그림은 닮음비가 $1:2$인 $\triangle$ABC와 $\triangle$DEF이다.
다음에 주어진 조건을 만족시키는 $\triangle$A$'$B$'$C$'$이 $\triangle$DEF와 합동임을 보이면 $\triangle$ABC와 $\triangle$A$'$B$'$C$'$이 서로 닮은 도형인지 확인할 수 있다.

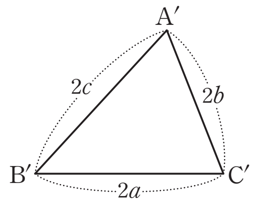


■ 세 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같은 경우

오른쪽 그림의 $\triangle$A$'$B$'$C$'$은 $\triangle$ABC의 세 변의 길이를 각각 2배로 확대하여 그린 삼각형이다. 이때 $\triangle$A$'$B$'$C$'$과 $\triangle$DEF에서 대응하는 세 변의 길이가 각각 같으므로

$$\triangle \mathrm{A'B'C'} \equiv \triangle \mathrm{DEF}$$

이다. 따라서 $\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{A'B'C'}$이다.

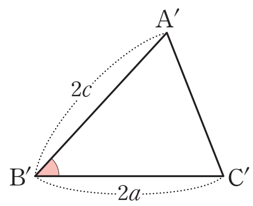


■ 두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고, 그 끼인각의 크기가 같은 경우

오른쪽 그림의 $\triangle$A$'$B$'$C$'$은 $\triangle$ABC의 두 변의 길이를 각각 2배로 확대하고, 그 끼인각의 크기가 같도록 그린 삼각형이다. 이때 $\triangle$A$'$B$'$C$'$과 $\triangle$DEF에서 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같으므로

$$\triangle \mathrm{A'B'C'} \equiv \triangle \mathrm{DEF}$$

이다. 따라서 $\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{A'B'C'}$이다.

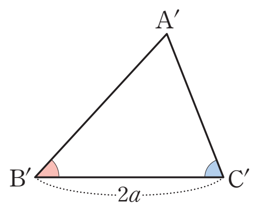


■ 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같은 경우

오른쪽 그림의 $\triangle$A$'$B$'$C$'$은 $\triangle$ABC의 한 변의 길이를 2배로 확대하고, 그 양 끝 각의 크기가 각각 같도록 그린 삼각형이다. 이때 $\triangle$A$'$B$'$C$'$과 $\triangle$DEF에서 대응하는 한 변의 길이가 같고, 그 양 끝 각의 크기가 각각 같으므로

$$\triangle \mathrm{A'B'C'} \equiv \triangle \mathrm{DEF}$$

이다. 따라서 $\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{A'B'C'}$이다.



삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°로 일정하기 때문에 두 삼각형에서 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같으면 나머지 한 각의 크기도 같아진다. 따라서 대응하는 한 변의 길이의 비와 관계없이 모양이 같으므로 두 삼각형은 서로 닮은 도형이다.

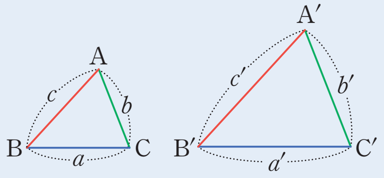
이상을 정리하면 다음과 같다. 이것을 **삼각형의 닮음 조건**이라고 한다.

삼각형의 닮음 조건

두 삼각형은 다음의 각 경우에 서로 닮음이다.

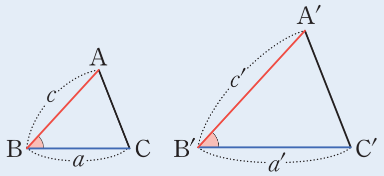
1. 세 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같을 때

$$a : a' = b : b' = c : c'$$



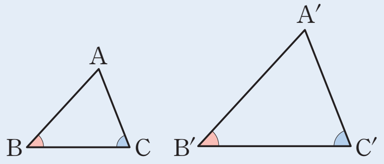
2. 두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때

$$a : a' = c : c',\ \angle B = \angle B'$$



3. 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같을 때

$$\angle B = \angle B',\ \angle C = \angle C'$$



Side(변)와 Angle(각)의 첫 글자를 이용하여 삼각형의 닮음 조건을 간단히

1. SSS 닮음

2. SAS 닮음

3. AA 닮음

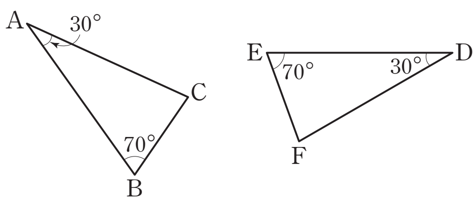
으로 나타내기도 한다.

확인하기

오른쪽 그림과 같은 두 삼각형에서

$\angle A = \angle D$, $\angle B =$ $\boxed{\angle E}$ 이다. 따라서 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같으므로

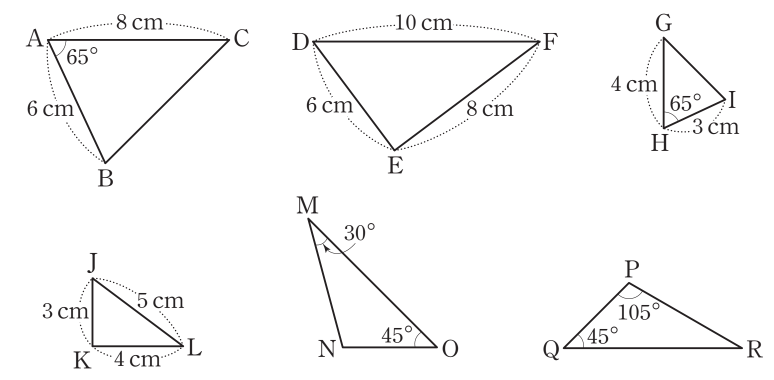
$\triangle ABC \backsim$ $\boxed{\triangle DEF}$ 이다.



Tip 두 삼각형이 서로 닮음인지 알아볼 때, 각의 크기가 주어지지 않은 경우는 세 쌍의 변의 길이를 비교하고, 각의 크기가 한 개만 주어진 경우는 그 각을 끼인각으로 하는 두 쌍의 변의 길이를 비교한다. 또, 각의 크기가 두 개만 주어진 경우는 나머지 한 내각의 크기를 구하여 세 쌍의 크기를 비교한다.

1 다음 중에서 서로 닮은 삼각형을 모두 찾아 기호 ∽를 사용하여 나타내고, 이때 사용한 닮음 조건을 각각 말하시오.

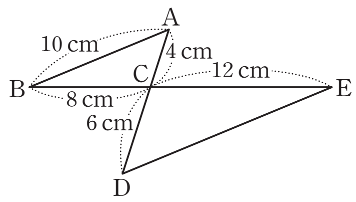
△ABC∽△HIG, 두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고, 그 끼인각의 크기가 같다.
△DEF∽△JKL, 세 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같다.
△MNO∽△RPQ, 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같다.



풀이 △ABC와 △HIG에서 $\overline{AB} : \overline{HI} = \overline{AC} : \overline{HG} = 2 : 1$, $\angle BAC = \angle IHG = 65°$이므로 두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고, 그 끼인각의 크기가 같다. 따라서 △ABC∽△HIG이다. △DEF와 △JKL에서 $\overline{DE} : \overline{JK} = \overline{EF} : \overline{KL} = \overline{DF} : \overline{JL} = 1 : 2$이므로 세 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같다. 따라서 △DEF∽△JKL이다. △MNO와 △RPQ에서 $\angle NMO = \angle PRQ = 35°$, $\angle MON = \angle RQP = 45°$이므로 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같다. 따라서 △MNO∽△RPQ이다.

함께 해 보기 1

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$와 $\overline{BE}$의 교점을 C라고 할 때, $\triangle ABC$와 닮은 삼각형을 찾아 기호 $\backsim$를 사용하여 나타내고, $\overline{DE}$의 길이를 구하시오.



풀이 $\triangle ABC$와 $\triangle DEC$에서

$\overline{AC} : \overline{DC} = \overline{BC} : \overline{EC} = 2 : 3$,

$\angle ACB = \angle DCE$ (맞꼭지각)

이다. 따라서 두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고, 그 끼인각의 크기가 같으므로

$\triangle ABC \backsim \triangle DEC$

이다. 이때 $\overline{AC} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{DE}$이므로

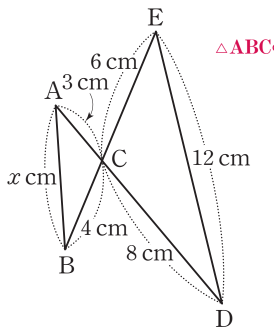
$2 : 3 = 10 : \overline{DE}$이다. 즉, $\overline{DE} = 15$ cm이다.

답 $\triangle ABC \backsim \triangle DEC$, $\overline{DE} = 15$ cm

Tip 맞꼭지각, 공통인 각을 이용한다.

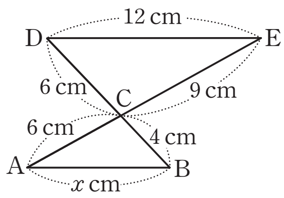
2 다음 그림에서 서로 닮은 삼각형을 찾아 기호 $\backsim$를 사용하여 나타내고, x의 값을 구하시오.

(1)



$\triangle ABC \backsim \triangle EDC$, 6

(2)



$\triangle ABC \backsim \triangle EDC$, 8

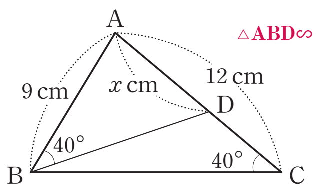
풀이 (1) $\triangle ABC$와 $\triangle EDC$에서
$\overline{AC} : \overline{EC} = \overline{BC} : \overline{DC} = 1 : 2$이고
$\angle ACB = \angle ECD$(맞꼭지각)이므로
$\triangle ABC \backsim \triangle EDC$(SAS 닮음)이다.
두 삼각형의 닮음비는 $1 : 2$이므로
$1 : 2 = x : 12$이다. 즉, $x = 6$이다.

(2) $\triangle ABC$와 $\triangle EDC$에서
$\overline{AC} : \overline{EC} = \overline{BC} : \overline{DC} = 2 : 3$이고
$\angle ACB = \angle ECD$(맞꼭지각)이므로
$\triangle ABC \backsim \triangle EDC$(SAS 닮음)이다.
두 삼각형의 닮음비는 $2 : 3$이므로
$2 : 3 = x : 12$이다. 즉, $x = 8$이다.

Tip 삼각형의 닮음 조건을 이용하여 닮은 도형인 두 삼각형을 찾고, 닮음비를 이용하여 변의 길이를 구한다.

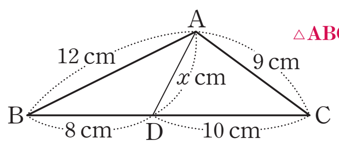
3 다음 그림에서 서로 닮은 삼각형을 찾아 기호 $\backsim$를 사용하여 나타내고, x의 값을 구하시오.

(1)



$\triangle ABD \backsim \triangle ACB$, $\frac{27}{4}$

(2)



$\triangle ABC \backsim \triangle DBA$, 6

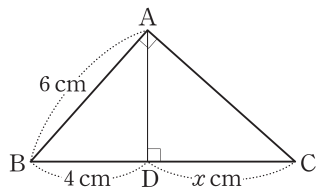
풀이 (1) $\triangle ABD$와 $\triangle ACB$에서 $\angle ABD = \angle ACB = 40°$,
$\angle A$는 공통이므로 $\triangle ABD \backsim \triangle ACB$(AA 닮음)
이다. 두 삼각형의 닮음비는 $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 4$이므로
$3 : 4 = x : 9$이다. 즉, $x = \frac{27}{4}$이다.

(2) $\triangle ABD$와 $\triangle CBA$에서 $\overline{AB} : \overline{CB} = \overline{BD} : \overline{BA} = 2 : 3$,
$\angle B$는 공통이므로 $\triangle ABD \backsim \triangle CBA$(SAS 닮음)이다.
두 삼각형의 닮음비는 $\overline{BD} : \overline{BA} = 2 : 3$이므로
$\overline{AD} : \overline{CA} = 2 : 3 = x : 9$이다. 즉, $x = 6$이다.

함께 해 보기 2

Tip 직각삼각형의 꼭짓점에서 빗변에 수선을 내렸을 때, 생기는 모든 직각삼각형은 서로 닮은 도형이다.

오른쪽 그림과 같이 $\angle A=90^{\circ}$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 빗변 BC에 내린 수선의 발을 D라고 할 때, x의 값을 구하시오.



풀이 $\triangle ABC$와 $\triangle DBA$에서

$\angle BAC=\angle BDA=90^{\circ}$,

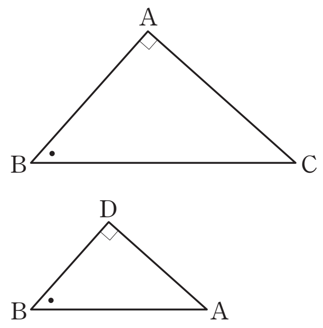
$\angle B$는 공통

이다. 따라서 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같으므로

$\triangle ABC \backsim \triangle DBA$

이다. 이때 $\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{BC}:\overline{BA}$이므로

$6:4=(4+x):6$이다. 즉, $x=5$이다.

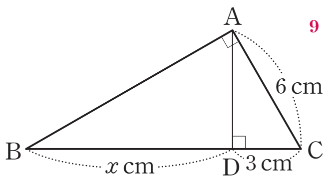


답 5

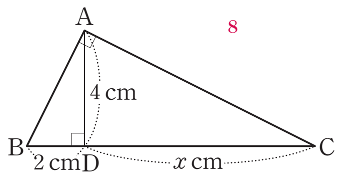
4

다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

(1)



(2)

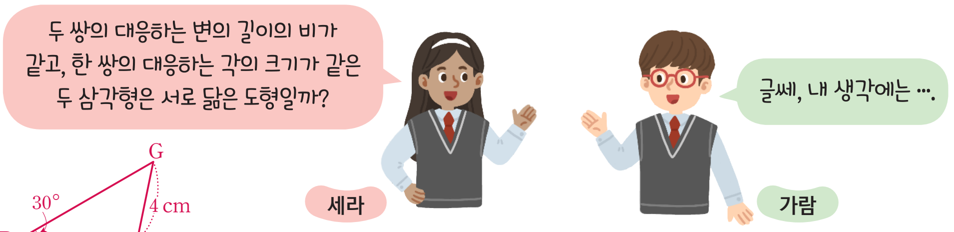


풀이 (1) $\triangle ABC$와 $\triangle DAC$에서
$\angle BAC=\angle ADC=90^{\circ}$, $\angle C$는 공통이므로
$\triangle ABC \backsim \triangle DAC$(AA 닮음)이다.
이때 $\overline{AC}:\overline{DC}=\overline{BC}:\overline{AC}$에서
$6:3=(x+3):6$이다. 즉, $x=9$이다.

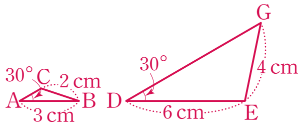
(2) $\triangle DBA$와 $\triangle DAC$에서
$\angle ADB=\angle CDA=90^{\circ}$,
$\angle ABD=90^{\circ}-\angle BAD=\angle CAD$이므로
$\triangle DBA \backsim \triangle DAC$(AA 닮음)이다.
이때 $\overline{BD}:\overline{AD}=\overline{AD}:\overline{CD}$에서 $2:4=4:x$이다.
즉, $x=8$이다.

생각 더 나아가기 추론 의사소통

다음은 세라와 가람이가 삼각형의 닮음에 대하여 대화하는 모습이다. 대화를 읽고, 세라의 질문에 대한 가람이의 답과 그 이유를 친구와 이야기해 보자. 풀이 참조



풀이



세라의 의견은 옳지 않다. 예를 들어 위의 그림과 같은 $\triangle ABC$와 $\triangle DEG$에서 두 쌍의 변의 길이의 비는 $3:6=2:4=1:2$로 같지만 끼인각이 아닌 다른 한 각의 크기가 같아 두 삼각형 $\triangle ABC$와 $\triangle DEG$가 서로 닮음이 아님을 알 수 있다.

스스로 점검하기

1

다음 □ 안에 알맞은 말을 써넣으시오.

두 삼각형은 다음의 각 경우에 서로 닮음이다.

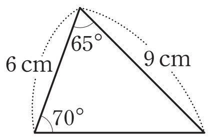
(1) 세 쌍의 대응하는 $\boxed{\text{변}}$의 길이의 비가 같을 때

(2) 두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고,
그 $\boxed{\text{끼인각}}$의 크기가 같을 때

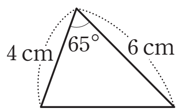
(3) 두 쌍의 대응하는 $\boxed{\text{각}}$의 크기가 각각 같을 때

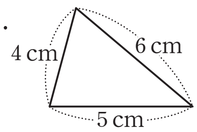
2

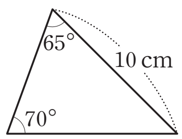
다음 보기 중에서 오른쪽 그림과 같은 삼각형과 서로 닮은 삼각형을 모두 고르시오. ㄱ, ㄷ

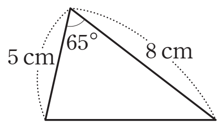


보기

ㄱ.


ㄴ.


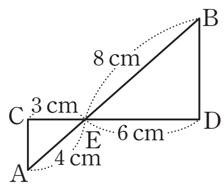
ㄷ.


ㄹ.


풀이 ㄱ. 두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비는 $3:2$로 같고, 그 끼인각의 크기가 65°로 같으므로 서로 닮음이다.
ㄷ. 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 같으므로 서로 닮음이다.
따라서 그림과 서로 닮은 삼각형은 ㄱ, ㄷ이다.

3

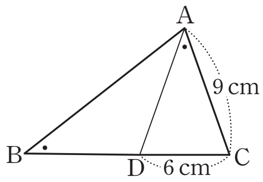
오른쪽 그림에서 $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$의 교점을 E라고 할 때, 서로 닮은 삼각형을 찾아 기호 ∽를 사용하여 나타내고, 이때 사용한 닮음 조건을 말하시오. $\triangle AEC \backsim \triangle BED$, 두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고, 그 끼인각의 크기가 같다.



풀이 $\triangle AEC$와 $\triangle BED$에서 $\overline{EC}:\overline{ED}=\overline{EA}:\overline{EB}=1:2$이고,
$\angle AEC=\angle BED$(맞꼭지각)이므로 $\triangle AEC \backsim \triangle BED$(SAS 닮음)이다.

4

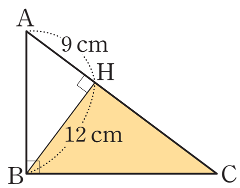
오른쪽 그림에서
$\overline{AC}=9$ cm, $\overline{CD}=6$ cm,
$\angle ABD=\angle CAD$일 때,
$\overline{BD}$의 길이를 구하시오. $\frac{15}{2}$ cm



풀이 $\triangle ABC$와 $\triangle DAC$에서
$\angle ABC=\angle DAC$, $\angle C$는 공통이므로
$\triangle ABC \backsim \triangle DAC$(AA 닮음)이다.
두 삼각형의 닮음비는 $\overline{AC}:\overline{DC}=9:6=3:2$이므로
$\overline{BD}=x$라고 하면, $3:2=(x+6):9$이다.
따라서 $\overline{BD}=\frac{15}{2}$ cm이다.

5

오른쪽 그림과 같이 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{BH}\perp\overline{AC}$일 때, $\triangle BCH$의 넓이를 구하시오. 96 cm^2

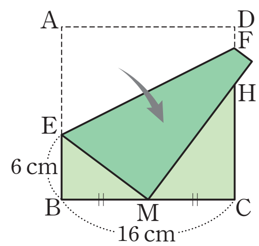


풀이 $\triangle ABH$와 $\triangle BCH$에서
$\angle AHB=\angle BHC=90^\circ$, $\angle HAB=90^\circ-\angle ABH=\angle HBC$이므로
$\triangle ABH \backsim \triangle BCH$(AA 닮음)이다.
$\overline{AH}:\overline{BH}=\overline{BH}:\overline{CH}$에서
$9:12=12:\overline{CH}$, $\overline{CH}=16$ cm이다.
따라서 $\triangle BCH$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times16\times12=96(\text{cm}^2)$이다.

6 사고력 UP

추론

오른쪽 그림과 같은 정사각형 모양의 종이 ABCD를 $\overline{EF}$를 접는 선으로 하여 꼭짓점 A가 $\overline{BC}$의 중점 M에 오도록 접었을 때, $\overline{CH}$의 길이를 구하시오. $\frac{32}{3}$ cm



풀이 $\triangle EBM$과 $\triangle MCH$에서
$\angle BEM+\angle EMB=90^\circ$,
$\angle EMH=90^\circ$, $\angle EMB+\angle CMH=90^\circ$이므로
$\angle BEM=\angle CMH$이다. 따라서
$\triangle BEM \backsim \triangle CMH$(AA 닮음)이고,
두 삼각형의 닮음비는
$\overline{BE}:\overline{CM}=6:8=3:4$이다.
$3:4=\overline{BM}:\overline{CH}=8:\overline{CH}$이므로
$\overline{CH}=\frac{32}{3}$ cm이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/wjC2kacbPMNtNPEY

자기 평가	
	삼각형의 닮음 조건을 이해하고, 이를 이용하여 두 삼각형이 닮음인지 판별할 수 있다.
	삼각형의 닮음 조건의 유용성을 알 수 있다.

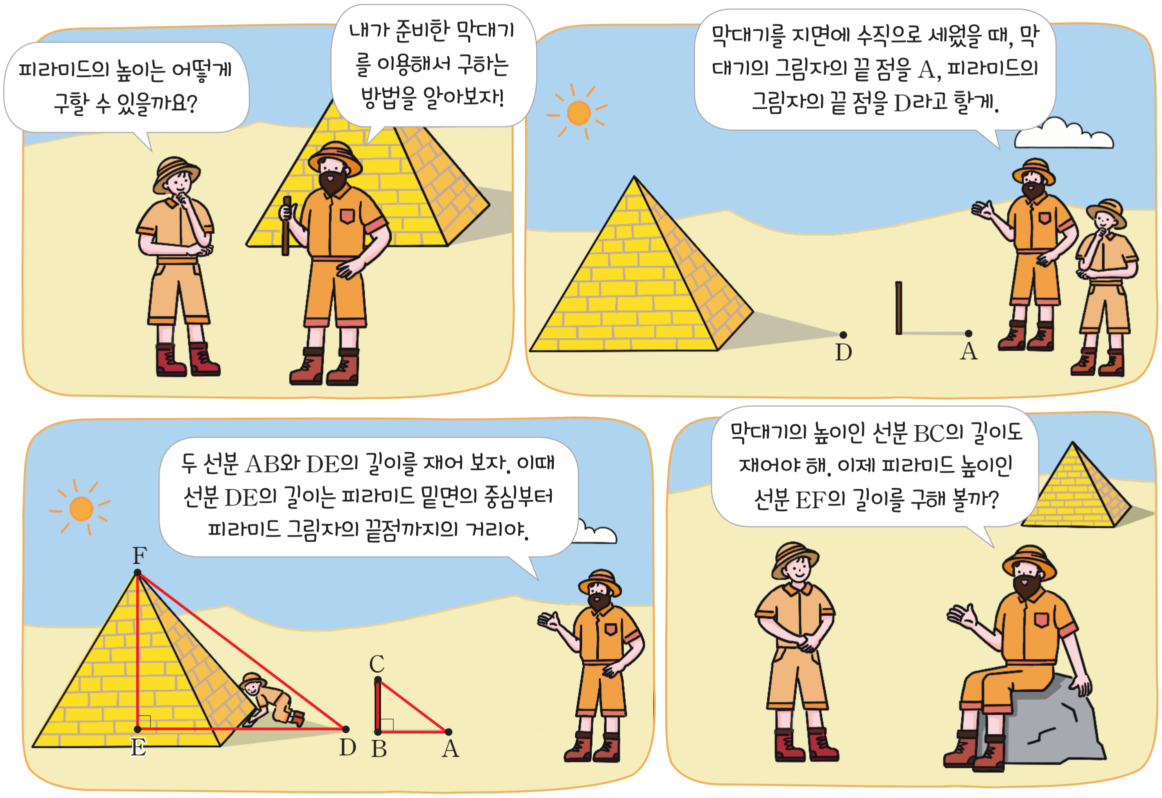
수학으로 세상 보기

삼각형의 닮음을 이용하여 높이 구하기

문제 해결 추론 의사소통 연결

고대 그리스의 수학자 탈레스(Thales, B.C. 624?~B.C. 546?)는 삼각형의 닮음을 이용하여 지팡이와 그림자의 길이로 피라미드의 높이를 알아냈다는 이야기가 전해진다.

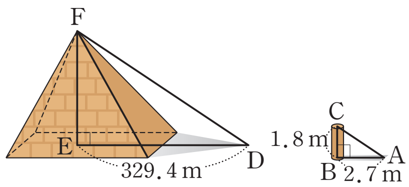
다음 만화를 통해 막대기와 그림자의 길이로 피라미드의 높이를 구하는 방법을 확인해 보고, 물음에 답해 보자.



1 위의 만화에서 서로 닮은 삼각형을 찾고, 닮음인 이유를 이야기해 보자. 풀이 참조

풀이 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$에서 $\angle ABC=\angle DEF=90^\circ$이고, $\angle CAB=\angle FDE$이므로 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$(AA 닮음)이다.

2 길이가 1.8 m인 막대기의 그림자의 길이가 2.7 m이고, 피라미드 밑면의 중심부터 피라미드 그림자의 끝점까지의 거리가 329.4 m일 때, 피라미드의 높이를 구해 보자. 219.6 m



풀이 1에 의해 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$이고, $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 닮음비는 $2.7 : 329.4=1 : 122$이다. 피라미드의 높이를 x m라고 하면 $1 : 122=1.8 : x$이므로 $x=219.6$이다. 따라서 피라미드의 높이는 219.6 m이다.

3 막대기와 그림자의 길이를 활용하여 우리 학교에 있는 운동 기구의 높이를 구해 보자. 풀이 참조

풀이 |예시| 길이가 15 cm인 막대기의 그림자의 길이가 20 cm이고 뜀틀의 중심부터 뜀틀 그림자의 끝점까지의 거리가 160 cm일 때, 뜀틀의 높이를 x cm라고 하자. 삼각형의 닮음을 이용하면 $20 : 160=15 : x$, $x=120$이다. 따라서 뜀틀의 높이는 120 cm이다.

03 평행선 사이의 선분의 길이의 비

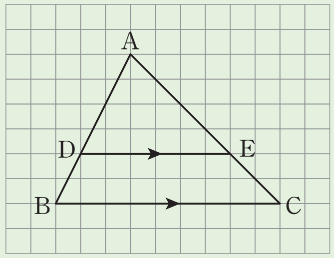
[학습 목표] 평행선 사이의 선분의 길이의 비를 구할 수 있다.

삼각형과 평행선이 만나서 생기는 선분의 길이의 비는 어떻게 될까?

생각 펼치기

오른쪽 그림은 모눈종이에 $\triangle ABC$를 나타낸 것이다. $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$가 되도록 $\overline{DE}$를 그렸을 때, $\overline{AB} : \overline{AD}$, $\overline{AC} : \overline{AE}$, $\overline{BC} : \overline{DE}$를 각각 구하고 서로 비교해 보자.

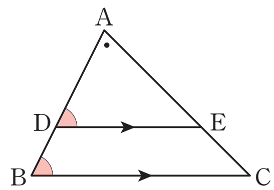
$\overline{AB} : \overline{AD}=3:2$, $\overline{AC} : \overline{AE}=3:2$, $\overline{BC} : \overline{DE}=3:2$로 서로 같다.



삼각형에서 평행선 사이의 선분의 길이의 비 (1)

생각 펼치기의 $\triangle ABC$에서 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$일 때, $\overline{AB} : \overline{AD}=\overline{AC} : \overline{AE}=\overline{BC} : \overline{DE}$임을 알 수 있다. 삼각형의 한 변에 평행한 직선이 다른 두 변과 만나서 생기는 선분과 삼각형의 변의 길이 사이에 어떤 관계가 있는지 증명을 통해 확인해 보자.

오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$에서 변 BC와 평행한 직선이 두 변 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라고 하자.



▶ **두 삼각형이 닮음임을 보이기**

$\triangle ABC$와 $\triangle ADE$에서 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$이므로

$\angle ABC = \angle ADE$ (동위각),

$\angle A$는 공통

이다. 따라서 대응하는 두 쌍의 각의 크기가 각각 같으므로 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$이다.

▶ **두 삼각형의 선분의 길이의 비 구하기**

$\triangle ABC$와 $\triangle ADE$는 닮음이고, 서로 닮은 두 삼각형의 대응하는 변의 길이의 비는 모두 같으므로

$$\overline{AB} : \overline{AD}=\overline{AC} : \overline{AE}=\overline{BC} : \overline{DE}$$

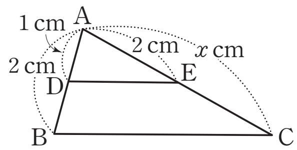
가 성립한다.

확인하기

오른쪽 그림에서 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$일 때,

$\overline{AB} : \overline{AD}=\overline{AC} : \overline{AE}$이므로 $2:1=x:2$,

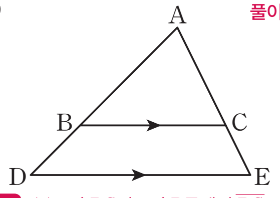
$x=\boxed{4}$이다.



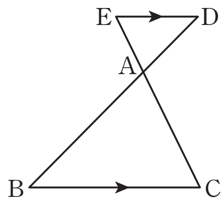
Tip 연장선을 그어 엇각의 성질을 이용한다.

1 다음 그림의 $\triangle$ABC에서 변 BC에 평행한 직선이 두 변 AB, AC의 연장선과 만나는 점을 각각 D, E라고 할 때, $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}=\overline{BC}:\overline{DE}$임을 증명하시오.

(1) 풀이 참조



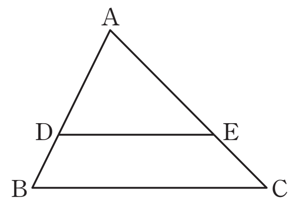
(2) 풀이 참조



풀이 (1) $\triangle$ABC와 $\triangle$ADE에서 $\overline{BC}/\!/\overline{DE}$이다.
$\angle$A는 공통, $\angle$ABC$=\angle$ADE이므로
$\triangle$ABC$\backsim\triangle$ADE(AA닮음)이다. 따라서
$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}=\overline{BC}:\overline{DE}$이다.

(2) $\triangle$ABC와 $\triangle$ADE에서 $\overline{BC}/\!/\overline{DE}$이다.
$\angle$BAC$=\angle$DAE, $\angle$ABC$=\angle$ADE이므로
$\triangle$ABC$\backsim\triangle$ADE(AA닮음)이다.
따라서 $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}=\overline{BC}:\overline{DE}$이다.

2 오른쪽 그림의 $\triangle$ABC에서 두 변 AB, AC 위에 각각 점 D, E가 있고 $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}$일 때, $\overline{BC}/\!/\overline{DE}$임을 증명하시오. 풀이 참조

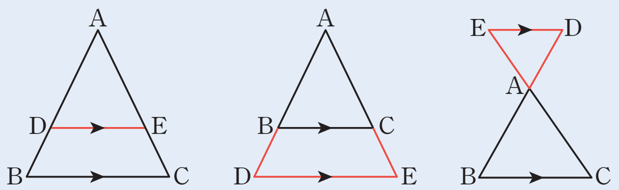


풀이 $\triangle$ABC와 $\triangle$ADE에서 $\angle$A는 공통, $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}$이므로
$\triangle$ABC$\backsim\triangle$ADE(SAS 닮음)이다. 따라서 $\angle$ABC$=\angle$ADE이고,
동위각의 크기가 같으므로 $\overline{BC}/\!/\overline{DE}$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

삼각형에서 평행선 사이의 선분의 길이의 비(1)

$\triangle$ABC에서 한 직선이 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 또는 그 연장선과 만나는 점을 각각 D, E라고 할 때, 다음이 성립한다.

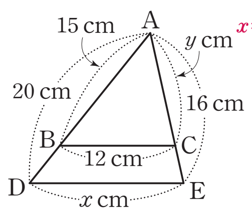


1. $\overline{BC}/\!/\overline{DE}$이면 $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}=\overline{BC}:\overline{DE}$이다.

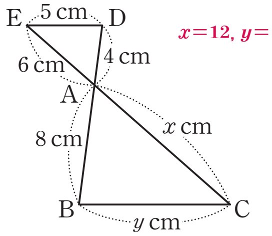
2. $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}$이면 $\overline{BC}/\!/\overline{DE}$이다.

3 다음 그림에서 $\overline{BC}/\!/\overline{DE}$일 때, x, y의 값을 각각 구하시오.

(1) $x=16$, $y=12$



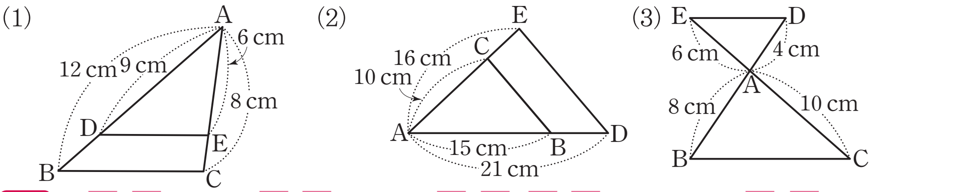
(2) $x=12$, $y=10$



풀이 (1) $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{BC}:\overline{DE}$이므로
$15:20=12:x$, $x=16$이다.
또한, $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}$이므로
$15:20=y:16$, $y=12$이다.

(2) $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}$이므로
$8:4=x:6$, $x=12$이다.
또한, $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{BC}:\overline{DE}$이므로
$8:4=y:5$, $y=10$이다.

4 다음 그림에서 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$인 것을 찾으시오. (1)



풀이 (1) $\overline{AB} : \overline{AD} = 12 : 9$이고 $\overline{AC} : \overline{AE} = 8 : 6$이므로 $\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AC} : \overline{AE} = 4 : 3$이다. 따라서 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$이다.

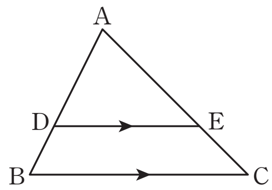
(2) $\overline{AB} : \overline{AD} = 15 : 21 = 5 : 7$이고 $\overline{AC} : \overline{AE} = 10 : 16 = 5 : 8$이므로 $\overline{AB} : \overline{AD} \neq \overline{AC} : \overline{AE}$이다. 따라서 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$이 성립하지 않는다.

(3) $\overline{AB} : \overline{AD} = 8 : 4 = 2 : 1$이고 $\overline{AC} : \overline{AE} = 10 : 6 = 5 : 3$이므로 $\overline{AB} : \overline{AD} \neq \overline{AC} : \overline{AE}$이다. 따라서 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$이 성립하지 않는다.

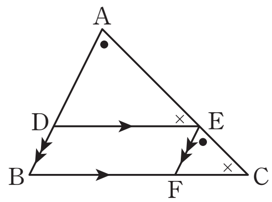
따라서 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$인 것은 (1)이다.

삼각형에서 평행선 사이의 선분의 길이의 비 (2)

이제 오른쪽 그림과 같이 △ABC에서 변 BC에 평행한 직선이 두 변 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라고 할 때, $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$임을 증명을 통해 확인해 보자.



오른쪽 그림과 같이 점 E를 지나고 $\overline{AB}$에 평행한 직선이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 F라고 하자.



▶ **두 삼각형이 닮음임을 보이기**

△ADE와 △EFC에서 $\overline{AB} /\!/ \overline{EF}$, $\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$이므로

$\angle EAD = \angle CEF$ (동위각),

$\angle AED = \angle ECF$ (동위각)

이다. 따라서 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같으므로

△ADE∽△EFC

이다. 닮음인 두 삼각형에서 대응하는 변의 길이의 비는 모두 같으므로

$\overline{AD} : \overline{EF} = \overline{AE} : \overline{EC}$이다.

▶ **삼각형에서 선분의 길이의 비 구하기**

□DBFE는 평행사변형이므로 $\overline{DB} = \overline{EF}$이다.

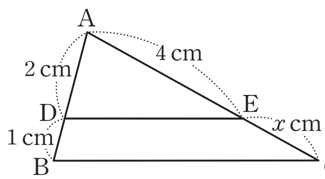
즉, $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$가 성립한다.

확인하기

오른쪽 그림에서 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$일 때,

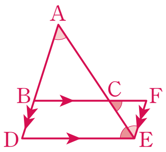
$\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$이므로 $2 : 1 = 4 : x$,

$x = \boxed{2}$이다.



풀이

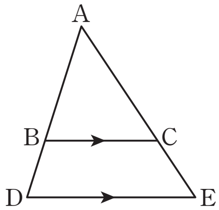
(1) 다음 그림과 같이 점 E를 지나고 변 AB에 평행한 직선이 변 BC의 연장선과 만나는 점을 F라고 하자. $\triangle$ADE와 $\triangle$EFC에서 $\angle$DAE$=\angle$FEC, $\angle$DEA$=\angle$FCE 이므로 $\triangle$ADE$\backsim\triangle$EFC(AA 닮음)이다. 따라서 $\overline{AD}:\overline{EF}=\overline{AE}:\overline{EC}$이다. 이때 □BDEF는 평행사변형이고 $\overline{EF}=\overline{DB}$이므로 $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$이다.



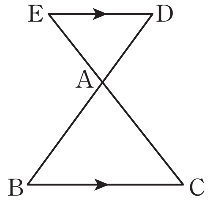
Tip 연장선을 그어 엇각의 성질을 이용한다.

5 다음 그림의 $\triangle$ABC에서 변 BC에 평행한 직선이 두 변 AB, AC의 연장선과 만나는 점을 각각 D, E라고 할 때, $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$임을 증명하시오. 풀이 참조

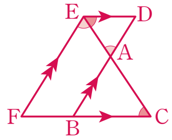
(1)



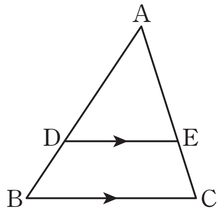
(2)



(2) 오른쪽 그림과 같이 점 E를 지나고 변 AB에 평행한 직선이 변 BC의 연장선과 만나는 점을 F라고 하자. $\triangle$ADE와 $\triangle$EFC에서 $\angle$DAE$=\angle$FEC, $\angle$DEA$=\angle$FCE이므로 $\triangle$ADE$\backsim\triangle\angle$EFC(AA 닮음)이다. 따라서 $\overline{AD}:\overline{EF}=\overline{AE}:\overline{EC}$이다. 이때 □BDEF는 평행사변형이고 $\overline{EF}=\overline{DB}$이므로 $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$이다.



이제 오른쪽 그림과 같이 $\triangle$ABC에서 두 변 AB, AC 위에 각각 위치한 두 점 D, E에 대해, $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$이면 $\overline{BC}/\!/\overline{DE}$임을 증명을 통해 확인해 보자.



▶ 각 선분의 길이의 비 확인하기

$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$이면 $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{EC}}{\overline{AE}}$이므로 $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{AD}}+1=\dfrac{\overline{EC}}{\overline{AE}}+1$이다.

즉, $\dfrac{\overline{DB}+\overline{AD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{EC}+\overline{AE}}{\overline{AE}}$이므로 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$이다.

▶ 두 선분이 평행함을 보이기

$\triangle$ABC에서 $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}$이므로 삼각형에서 평행선 사이의 선분의 길이의 비에 의해

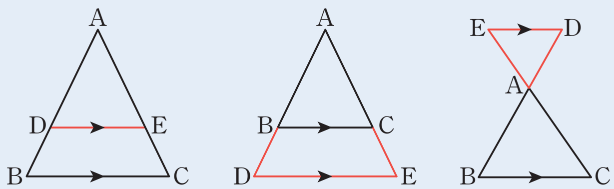
$$\overline{BC}/\!/\overline{DE}$$

가 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

삼각형에서 평행선 사이의 선분의 길이의 비(2)

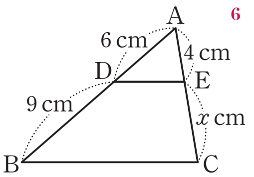
$\triangle$ABC에서 한 직선이 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 또는 그 연장선과 만나는 점을 각각 D, E라고 할 때, 다음이 성립한다.



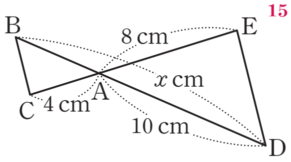
1. $\overline{BC}/\!/\overline{DE}$이면 $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$이다.

2. $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$이면 $\overline{BC}/\!/\overline{DE}$이다.

6 **다음 그림에서 $\overline{BC}/\!/\overline{DE}$일 때, x의 값을 구하시오.**

(1) 

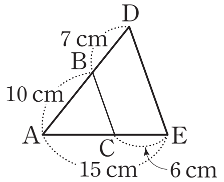
6

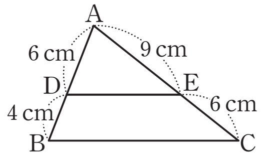
(2) 

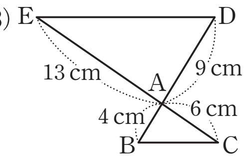
15

풀이 (1) $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$이므로 $6:9=4:x$, $x=6$이다.
(2) $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$이므로 $10:x=8:12$, $x=15$이다.

7 **다음 그림에서 $\overline{BC}/\!/\overline{DE}$인 것을 찾으시오.** (2)

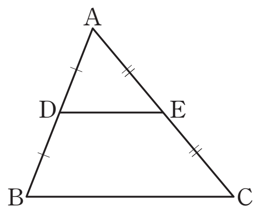
(1) 

(2) 

(3) 

풀이 (1) $\overline{AD}:\overline{DB}=17:7$, $\overline{AE}:\overline{EC}=15:6=5:2$이다. 즉, $\overline{AD}:\overline{DB}\neq\overline{AE}:\overline{EC}$이므로 $\overline{BC}/\!/\overline{DE}$이 성립하지 않는다.
(2) $\overline{AD}:\overline{DB}=6:4=3:2$, $\overline{AE}:\overline{EC}=9:6=3:2$이다. 즉, $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$이므로 $\overline{BC}/\!/\overline{DE}$이다.
(3) $\overline{AD}:\overline{DB}=9:13$ $\overline{AE}:\overline{EC}=13:19$이다. 즉, $\overline{AD}:\overline{DB}\neq\overline{AE}:\overline{EC}$이므로 $\overline{BC}/\!/\overline{DE}$이 성립하지 않는다.
따라서 $\overline{BC}/\!/\overline{DE}$인 것은 (2)이다.

삼각형의 한 변의 길이와 다른 두 변의 중점을 연결한 선분의 길이 사이에 어떤 관계가 있는지 알아보자.



오른쪽 그림과 같이 △ABC의 두 변 AB, AC의 중점을 각각 D, E라고 하자.

△ADE와 △ABC에서

$$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}=1:1$$

이므로 $\overline{DE}/\!/\overline{BC}$이다.

또한, △ABC와 △ADE의 닮음비가 $2:1$이므로

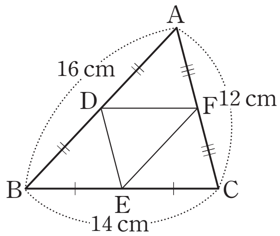
$$\overline{BC}:\overline{DE}=2:1$$

이다. 따라서 $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$이다.

즉, △ABC에서 두 변 AB와 AC의 중점을 연결한 선분 DE와 나머지 한 변 BC 사이에 $\overline{DE}/\!/\overline{BC}$이고 $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$인 관계가 성립한다.

이와 같은 성질을 삼각형의 중점 연결정리라고 한다.

8 **오른쪽 그림과 같이 △ABC의 세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 D, E, F라고 할 때, △DEF의 둘레의 길이를 구하시오.** 21 cm

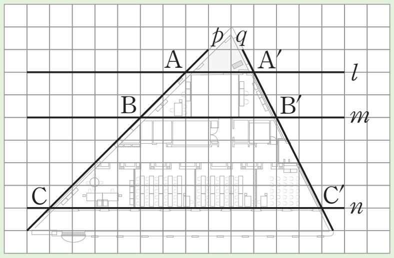


풀이 삼각형의 세 변의 중점을 각각 연결하였으므로,
$\overline{DF}=\frac{1}{2}\overline{BC}=7(\text{cm})$, $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AC}=6(\text{cm})$, $\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AB}=8(\text{cm})$이다.
따라서 △DEF의 둘레의 길이는 $7+6+8=21(\text{cm})$이다.

평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비에는 어떤 성질이 있을까?

생각 펼치기

다음 그림은 어떤 건물의 평면도 위에 복도와 벽면을 따라 직선을 그린 것이다. 평행한 세 직선 l, m, n과 다른 두 직선 p, q의 교점을 각각 A, B, C, A′, B′, C′이라고 할 때, $\overline{AB} : \overline{BC}$와 $\overline{A'B'} : \overline{B'C'}$을 구하고 그 결과를 비교해 보자. $\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2$, $\overline{A'B'} : \overline{B'C'} = 1 : 2$로 서로 같다.



평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비

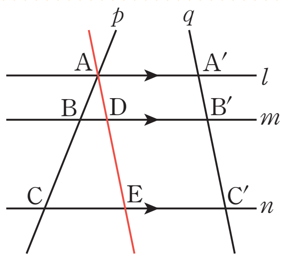
생각 펼치기에서 $l /\!/ m /\!/ n$일 때, $\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2$이고 $\overline{A'B'} : \overline{B'C'} = 1 : 2$이므로 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{B'C'}$임을 알 수 있다.

세 개의 평행선이 다른 두 직선과 만날 때, 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비가 일정함을 증명을 통해 확인해 보자.

개념 쏙

$l /\!/ m /\!/ n$이면
$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{B'C'}$

오른쪽 그림과 같이 평행한 세 직선 l, m, n과 다른 두 직선 p, q의 교점을 각각 A, B, C, A′, B′, C′이라고 하자.



▶ **삼각형에서 평행선 사이의 선분의 길이의 비 구하기**

점 A를 지나고 직선 q와 평행한 직선을 그어 두 직선 m, n과 만나는 점을 각각 D, E라고 하자.

△ACE에서 $\overline{BD} /\!/ \overline{CE}$이므로

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{DE}$$

이다.

▶ **평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비가 일정함을 보이기**

□ADB′A′과 □DEC′B′이 평행사변형이므로

$$\overline{AD} = \overline{A'B'},\ \overline{DE} = \overline{B'C'}$$

이다. 즉, $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{B'C'}$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

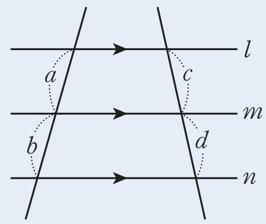
평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비

세 개의 평행선이 다른 두 직선과 만날 때, 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비는 같다.

즉, 오른쪽 그림에서 $l \mathbin{/\!/} m \mathbin{/\!/} n$이면

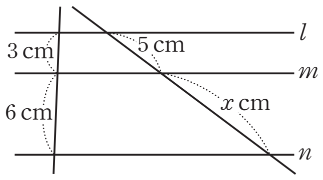
$$a : b = c : d$$

이다.

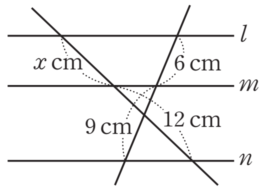


9 다음 그림에서 $l \mathbin{/\!/} m \mathbin{/\!/} n$일 때, x의 값을 구하시오.

(1) 10



(2) 8

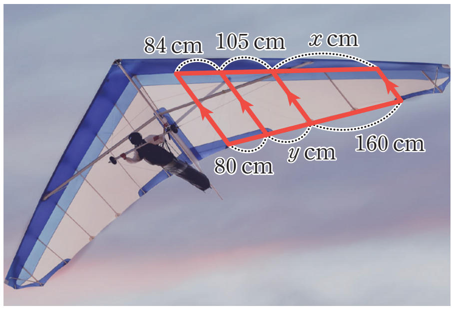


풀이 (1) $3:6=5:x$, $x=10$이다.

(2) $x:12=6:9$, $x=8$이다.

10 오른쪽 그림은 어느 행글라이더의 날개에 평행하게 설치된 배튼 사이의 선분의 길이를 나타낸 것이다. x, y의 값을 각각 구하시오.

$x=168$, $y=100$



배튼은 행글라이더 날개의 천을 고정하기 위해 날개를 가로질러 넣는 막대이다. 이는 비행 중 조종사의 몸을 지지하고, 날개의 모양을 조절하여 비행 방향과 속도를 제어한다.

Tip 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비에 대한 성질은 주어진 평행선의 개수와는 관계없이 항상 성립한다.

풀이 행글라이더의 배튼이 서로 평행하므로

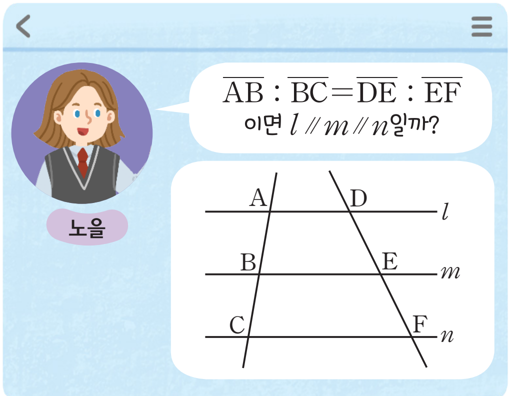
$84:105=80:y$, $y=100$이다.

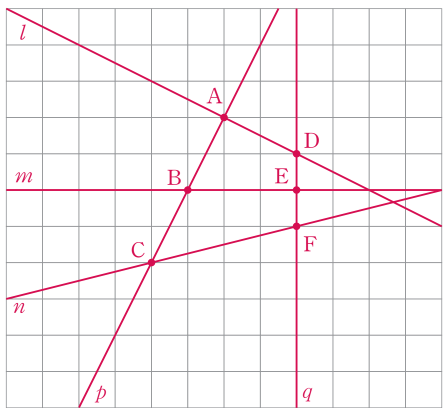
$105:x=100:160$, $x=168$이다.

생각 더 나아가기

문제 해결 · 추론

다음 노을이의 질문에 대하여 오른쪽 모눈종이를 이용하여 답해 보자. 풀이 참조



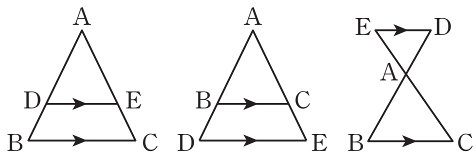


풀이 위의 그림과 같이 직선 p와 세 직선 l, m, n이 만나는 점을 각각 A, B, C라 하고, 직선 q와 세 직선 l, m, n이 만나는 점을 각각 D, E, F라고 하자.
이때 $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{EF}$이지만 세 직선 l, m, n은 서로 평행하지 않다.

스스로 점검하기

1

다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$일 때, □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

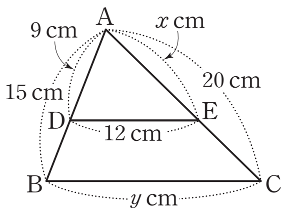


(1) $\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AC} : \boxed{\overline{AE}} = \overline{BC} : \boxed{\overline{DE}}$

(2) $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \boxed{\overline{EC}}$

2

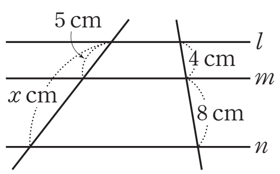
오른쪽 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$일 때, x, y의 값을 각각 구하시오. $x=12$, $y=20$



풀이 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$이므로 $\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AC} : \overline{AE}$이고 $15 : 9 = 20 : x$, $x=12$이다.
또, $\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{BC} : \overline{DE}$이고 $15 : 9 = y : 12$, $y=20$이다.
따라서 $x=12$, $y=20$이다.

3

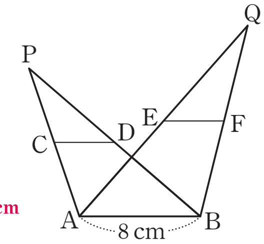
다음 그림에서 $l /\!/ m /\!/ n$일 때, x의 값을 구하시오. 15



풀이 $l /\!/ m /\!/ n$이므로 $5 : (x-5) = 4 : 8$, $x=15$이다.

4

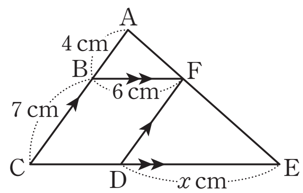
오른쪽 그림에서 두 점 C, D는 각각 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$의 중점이고, 두 점 E, F는 각각 $\overline{QA}$, $\overline{QB}$의 중점이다. $\overline{AB}=8$ cm일 때, $\overline{CD}+\overline{EF}$의 길이를 구하시오. 8 cm



풀이 두 점 C, D는 각각 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$의 중점이고,
두 점 E, F는 각각 $\overline{QA}$, $\overline{QB}$의 중점이므로
$\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{AB}=4$(cm), $\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AB}=4$(cm)이다.
따라서 $\overline{CD}+\overline{EF}=8$(cm)이다.

5

오른쪽 그림에서 $\overline{AC} /\!/ \overline{FD}$, $\overline{CE} /\!/ \overline{BF}$이고, $\overline{AB}=4$ cm, $\overline{BC}=7$ cm, $\overline{BF}=6$ cm일 때, x의 값을 구하시오. $\frac{21}{2}$

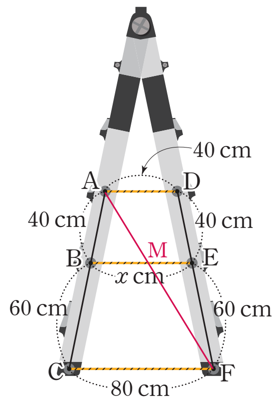


풀이 $\overline{AC} /\!/ \overline{FD}$, $\overline{CE} /\!/ \overline{BF}$이므로 BCDF는 평행사변형이고,
$\overline{BF}=\overline{CD}=6$ cm이다. 또, $\overline{CE} /\!/ \overline{BF}$이므로
$\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{CE} : \overline{BF}$에서 $11 : 4 = (6+x) : 6$, $x=\frac{21}{2}$이다.

6 실생활

추론

오른쪽 그림과 같이 접이식 사다리를 고정하기 위해 안전 고리를 선분 AD, BE, CF와 같이 연결하였다.
$\overline{AD} /\!/ \overline{BE} /\!/ \overline{CF}$일 때, x의 값을 구하시오. 56



풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AF}$와 $\overline{BE}$의 교점을 M이라고 하자. $\triangle ACF$에서
$\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{CF} : \overline{BM}$이므로
$100 : 40 = 80 : \overline{BM}$, $\overline{BM}=32$ cm이다.
$\triangle ADF$에서 $\overline{DF} : \overline{EF} = \overline{AD} : \overline{ME}$
이므로 $100 : 60 = 40 : \overline{ME}$, $\overline{ME}=24$ cm이다.
따라서 $\overline{BE}=\overline{BM}+\overline{ME}=32+24=56$(cm)이므로
$x=56$이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/XY2oi4YLVwvsebGR

자기 평가	
	평행선 사이의 선분의 길이의 비를 구할 수 있다.
	구체적인 사물을 이용하여 평행선 사이의 선분의 길이의 비를 탐구하고 추측할 수 있다.

04 삼각형의 무게중심

이 단원에서 배우는 용어와 기호

중선, 무게중심

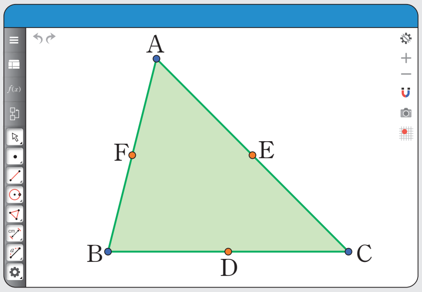
[학습 목표] 삼각형의 무게중심의 성질을 이해하고 정당화할 수 있다.

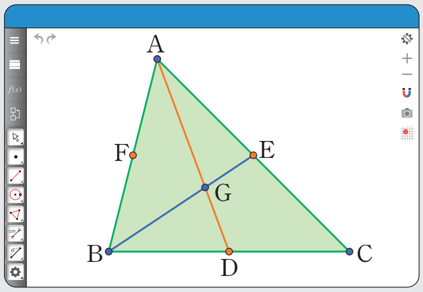
삼각형의 무게중심은 무엇일까?

생각 펼치기

공학 도구

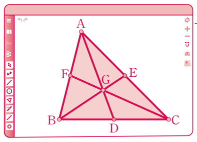
알지오매스를 이용하여 다음 단계에 따라 삼각형을 그려 보고, 물음에 답해 보자.





① 다각형 을 눌러 삼각형 ABC를 그리고, 중점 을 눌러 세 변 BC, AC, AB의 중점 D, E, F를 각각 나타낸다.

② 선분 을 눌러 두 선분 AD, BE를 그린 뒤, 교점 을 눌러 두 선분의 교점 G를 찾는다.

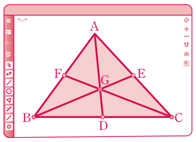


https://code.jihak.co.kr/qr/Ucf8pdNlplvh5CcH

1. 선분 을 눌러 선분 CF를 그린 뒤, 선분 CF가 점 G를 지나는지 말해 보자. 점 G를 지난다.

2. 꼭짓점 A를 움직여서 삼각형의 모양을 변화시켜 보고, 1의 결과가 변하는지 말해 보자.
꼭짓점 A를 움직여서 삼각형의 모양을 변화시켜도 선분 CF는 항상 점 G를 지난다.

삼각형의 무게중심

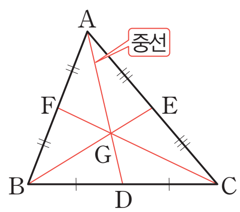


생각 펼치기에서 꼭짓점 C와 변 AB의 중점 F를 연결하면 이 선분은 점 G를 지나고, 이것은 삼각형의 모양에 관계없이 항상 성립함을 알 수 있다. 따라서 삼각형의 세 꼭짓점에서 대변의 중점을 각각 이은 세 선분은 한 점에서 만나는 것을 알 수 있다.

개념 쏙

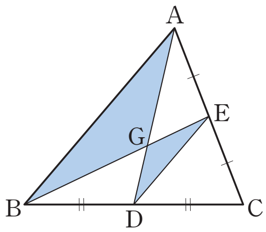
중선: 삼각형의 한 꼭짓점과 그 대변의 중점을 이은 선분

오른쪽 그림과 같이 삼각형의 한 꼭짓점과 그 대변의 중점을 이은 선분을 **중선**이라고 한다. $\triangle ABC$에서 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$는 중선이다. 즉, 한 삼각형에는 3개의 중선이 있다.



이제 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만나는 것을 증명을 통해 확인해 보자.

오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$의 두 중선 AD, BE의 교점을 G라고 하자.



▶ 닮음인 두 삼각형에서 닮음비 찾기

두 점 D, E는 각각 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$의 중점이므로

$$\overline{DE} /\!/ \overline{AB},\ \overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AB}$$

이다. 따라서 $\triangle GAB \backsim \triangle GDE$이고, 닮음비는 $2:1$이므로

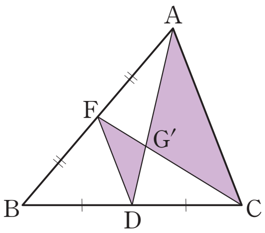
$$\overline{AG}:\overline{GD}=\overline{BG}:\overline{GE}=2:1$$

이다.

같은 방법으로 $\triangle ABC$의 두 중선 AD, CF의 교점을 G'이라고 하면 $\triangle G'AC \backsim \triangle G'DF$이고

$$\overline{AG'}:\overline{G'D}=\overline{CG'}:\overline{G'F}=2:1$$

이다.



▶ 두 점이 일치함을 보이기

점 G와 점 G'은 모두 중선 AD를 꼭짓점 A로부터 그 길이가 $2:1$이 되도록 나누는 점이므로 점 G와 점 G'은 일치한다.

즉, $\triangle ABC$의 세 중선은 한 점 G에서 만나고, 이 점은 세 중선의 길이를 각 꼭짓점으로부터 각각 $2:1$로 나눈다.

개념 쏙

무게중심: 삼각형의 세 중선이 만나는 점

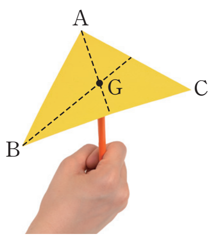
이와 같이 삼각형의 세 중선이 만나는 점을 그 삼각형의 **무게중심**이라고 한다.

개념 쏙

삼각형의 세 중선에 의해 삼각형의 넓이는 6등분된다.

$\triangle GAF=\triangle GBF=\triangle GBD=\triangle GCD=\triangle GCE=\triangle GAE=\frac{1}{6}\triangle ABC$

두꺼운 종이로 삼각형을 만들어 연필 끝에 무게중심이 오도록 올려놓으면 균형을 유지한다. 즉, 삼각형의 무게중심은 균형을 이루는 점이다.



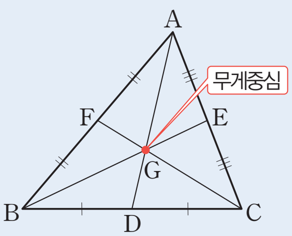
이상을 정리하면 다음과 같다.

삼각형의 무게중심

삼각형의 세 중선은 한 점(무게중심)에서 만나고, 이 점은 세 중선의 길이를 각 꼭짓점으로부터 각각 $2:1$로 나눈다. 즉, 오른쪽 $\triangle ABC$에서

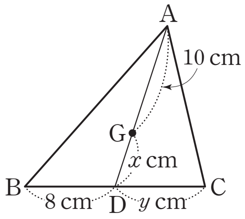
$$\overline{AG}:\overline{GD}=\overline{BG}:\overline{GE}=\overline{CG}:\overline{GF}=2:1$$

이다.



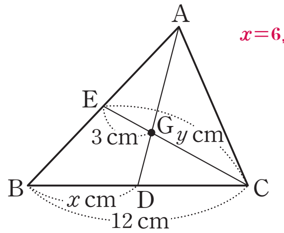
1 다음 그림에서 점 G가 $\triangle ABC$의 무게중심일 때, x, y의 값을 각각 구하시오.

(1)



$x=5$, $y=8$

(2)

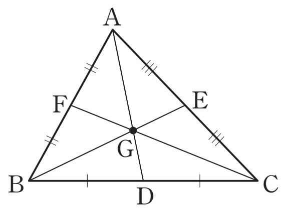


$x=6$, $y=9$

풀이 (1) $\overline{AD}$는 $\triangle ABC$의 무게중심 G를 지나므로 중선이다. 따라서 $y=8$이다.
점 G는 $\overline{AD}$를 $2:1$로 나누므로 $10:x=2:1$, $x=5$이다.
(2) $\overline{AD}$는 $\triangle ABC$의 무게중심 G를 지나므로 중선이다. 따라서 $x=6$이다.
점 G는 $\overline{CE}$를 $2:1$로 나누므로 $(y-3):3=2:1$, $y=9$이다.

Tip 삼각형은 세 꼭짓점과 무게중심을 연결한 세 선분에 의하여 그 넓이가 삼등분된다.

2 오른쪽 그림에서 점 G가 $\triangle ABC$의 무게중심이고, $\triangle ABC$의 넓이가 48 cm^2일 때, 다음 삼각형의 넓이를 구하시오.

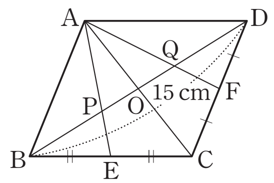


(1) $\triangle ABD$ 24 cm^2

(2) $\triangle GBD$ 8 cm^2

풀이 (1) 삼각형의 중선은 삼각형의 넓이를 이등분하므로
$\triangle ABD=\frac{1}{2}\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 48=24(\text{cm}^2)$
(2) $\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$이므로 $\triangle GBD=\frac{1}{3}\triangle ABD=\frac{1}{3}\times 24=8(\text{cm}^2)$

3 오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$의 중점을 각각 E, F라 하고, $\overline{BD}$가 $\overline{AE}$, $\overline{AC}$, $\overline{AF}$와 만나는 점을 각각 P, O, Q라고 하자. 다음 물음에 답하시오.



(1) 점 P가 $\triangle ABC$의 무게중심임을 증명하시오. 풀이 참조

(2) $\overline{BD}=15\text{ cm}$일 때, $\overline{PQ}$의 길이를 구하시오. 5 cm

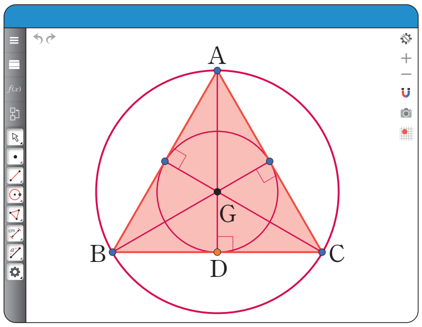
풀이 (1) 평행사변형은 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{BO}$는 $\triangle ABC$의 중선이다.
즉, 점 P는 $\triangle ABC$의 중선 $\overline{AE}$와 $\overline{BO}$의 교점이므로 $\triangle ABC$의 무게중심이다.
(2) 점 P는 $\triangle ABC$의 무게중심이고, 점 Q가 $\triangle ACD$의 무게중심이므로
$\overline{PO}=\frac{1}{3}\overline{BO}$, $\overline{QO}=\frac{1}{3}\overline{OD}$이다. 따라서
$\overline{PQ}=\overline{PO}+\overline{QO}=\frac{1}{3}\overline{BO}+\frac{1}{3}\overline{OD}=\frac{1}{3}\overline{BD}=\frac{1}{3}\times 15=5(\text{cm})$이다.

생각 더 나아가기

추론 정보처리

공학 도구

오른쪽 그림에서 $\triangle ABC$가 정삼각형일 때, 다음 물음에 답해 보자.



(1) 정삼각형 ABC의 외심, 내심, 무게중심의 위치가 어떻게 나타날지 말해 보자. 풀이 참조

(2) 알지오매스를 이용하여 정삼각형의 외심, 내심, 무게중심을 그려 보고, 그 위치를 확인해 보자. 풀이 참조

https://code.jihak.co.kr/qr/DeCKEgCgaOVANRkF

풀이 (1) 정삼각형은 세 변의 길이가 모두 같으므로 모든 꼭짓점이 꼭지각인 이등변삼각형이다. 따라서 한 꼭짓점에서 그은 각의 이등분선은 밑변을 수직이등분하므로 외심, 내심, 무게중심이 모두 일치한다.
(2) 알지오매스를 이용하여 정삼각형의 외심과 내심을 나타내면 무게중심과 일치한다. 위의 그림처럼 무게중심 G를 중심으로 하고 꼭짓점 A를 지나는 원을 그리면 $\triangle ABC$의 외접원이 되고, 점 G를 중심으로 하고 $\overline{BC}$의 중점 D를 지나는 원을 그리면 $\triangle ABC$의 내접원이 된다.

스스로 점검하기

1

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

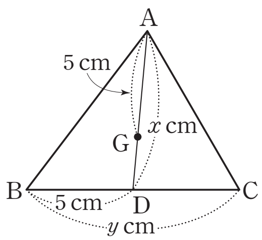
(1) 삼각형의 세 중선이 만나는 점을 그 삼각형의

$\boxed{\text{무게중심}}$(이)라고 한다.

(2) 무게중심은 세 중선의 길이를 각 꼭짓점으로부터 각각

$\boxed{2}$: $\boxed{1}$(으)로 나눈다.

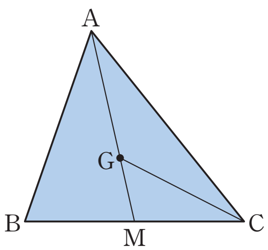
2



오른쪽 그림에서 점 G가 △ABC의 무게중심일 때, x, y의 값을 각각 구하시오. $x=\frac{15}{2}$, $y=10$

풀이 $\overline{AD}$는 △ABC의 무게중심 G를 지나므로 중선이고, $y=10$이다.
점 G는 $\overline{AD}$를 $2:1$로 나누므로
$5:x-5=2:1$, $x=\frac{15}{2}$ cm이다.

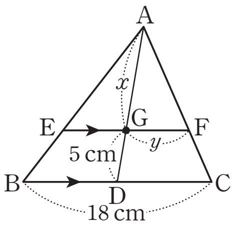
3



오른쪽 그림에서 점 G가 △ABC의 무게중심이고, △GMC의 넓이가 4 cm^2일 때, △ABC의 넓이를 구하시오. 24 cm^2

풀이 $\overline{AG}:\overline{GM}=2:1$이므로
$\triangle AMC=3\times\triangle GMC=3\times4=12(\text{cm}^2)$이고,
$\overline{BM}:\overline{CM}=1:1$이므로
$\triangle ABC=2\times\triangle AMC=2\times12=24(\text{cm}^2)$이다.

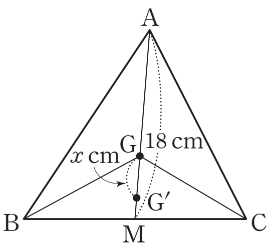
4



오른쪽 그림에서 점 G가 △ABC의 무게중심이고, $\overline{BC}/\!/\overline{EF}$이다. $\overline{GD}=5$ cm, $\overline{BC}=18$ cm일 때, x, y의 값을 각각 구하시오. $x=10$, $y=6$

풀이 점 G는 $\overline{AD}$를 $2:1$로 나누므로
$x:5=2:1$, $x=10$이다.
$\overline{AD}$는 중선이므로 $\overline{CD}=9$ cm이고,
$\overline{AD}:\overline{AG}=\overline{CD}:\overline{FG}$이므로 $3:2=9:y$, $y=6$이다.

5

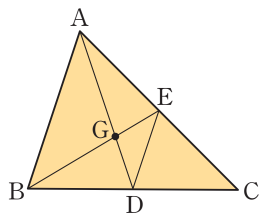


오른쪽 그림에서 두 점 G, G′이 각각 △ABC와 △GBC의 무게중심이고, $\overline{AM}=18$ cm일 때, x의 값을 구하시오. 4

풀이 △ABC의 무게중심 G는 $\overline{AM}$을 $2:1$로 나누므로
$\overline{GM}=\frac{1}{3}\overline{AM}=\frac{1}{3}\times18=6(\text{cm})$이고,
△GBC의 무게중심 G′은 $\overline{GM}$을 $2:1$로 나누므로
$\overline{GG'}=\frac{2}{3}\overline{GM}=\frac{2}{3}\times6=4(\text{cm})$이다.

6 사고력 UP

추론



오른쪽 그림에서 점 G가 △ABC의 무게중심이고, △GDE의 넓이가 4 cm^2일 때, △ABC의 넓이를 구하시오. 48 cm^2

풀이 △ABG와 △DEG에서 점 G는 △ABC의 무게중심이므로
$\overline{AG}:\overline{DG}=\overline{BG}:\overline{EG}$, $\angle AGB=\angle DGE$이다.
$\triangle ABG \backsim \triangle DEG$(SAS 닮음)이고
닮음비는 $2:1$이다. 이때 두 삼각형의
넓이의 비는 $4:1$이므로 $\triangle ABG=16$ cm^2이다.
$\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$이므로 $\triangle GBD=8$ cm^2이다.
점 D는 $\overline{BC}$의 중점이므로
△ABC의 넓이는 $2\times(16+8)=48(\text{cm}^2)$이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/Jamz7Liz5Yx2R8Zk

자기 평가	
삼각형의 무게중심의 성질을 이해하고 정당화할 수 있다.	
삼각형의 무게중심의 성질을 구체적인 도형이나 공학 도구를 이용하여 살펴보고 흥미를 갖는다.	

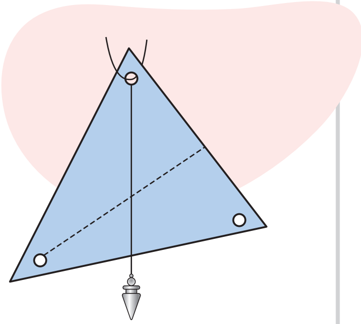
수학으로 세상 보기

무게중심을 이용하여 팽이 만들기

연결 정보처리

지구에 있는 모든 물체는 지구가 물체를 당기는 힘인 중력의 영향을 받는다. 이때 물체의 각 부분에 작용하는 중력들이 모이는 작용점을 무게중심이라고 하는데, 무게중심을 잘 유지하면 균형을 잡고 서 있을 수 있다. 주변에서 볼 수 있는 아슬아슬하게 세워진 돌탑들이 바로 무게중심을 찾아 균형을 잡도록 세운 예이다.

무게중심을 기준으로 물체가 균형을 이루는 성질을 이용하면 실험을 통해서도 무게중심을 찾을 수 있다. 삼각형의 한 꼭짓점에 실을 매단 뒤 자연스럽게 삼각형을 늘어뜨리면 늘어뜨린 선을 기준으로 삼각형은 균형을 이루게 된다. 이때 무게중심은 실을 따라 그린 선 위에 있게 된다. 다른 꼭짓점에서도 이를 반복하면 삼각형은 선을 기준으로 균형을 이루며 무게중심은 새롭게 그린 선 위에도 존재한다. 여기서 두 선의 교점은 무게중심이 된다.



다음 순서에 따라 삼각형 팽이를 만들어 보자. [준비물: 두꺼운 종이, 가위, 자, 필기구, 팽이 심, 실, 무게 추]

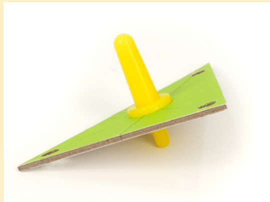
1 두꺼운 종이에 적당한 크기의 삼각형을 그리고 잘라 낸다.

2 한 꼭짓점에 무게 추가 달린 실을 매단 뒤, 실을 잡고 들어올려 실이 지나는 선을 삼각형에 그린다.

3 다른 꼭짓점에서 실을 매단 뒤, 실을 잡고 들어올려 실이 지나는 다른 선을 그려 두 선의 교점을 찾는다.

4 삼각형의 무게중심을 그려 보고, **3**에서 찾은 두 선분의 교점과 일치하는지 확인한다.

5 무게중심에 팽이 심을 꽂아 팽이를 완성한다.



(출처: 김성아, 「수학적 증명에서의 물리적 논증: 삼각형의 무게중심」)

05 피타고라스 정리

이 단원에서 배우는 용어와 기호

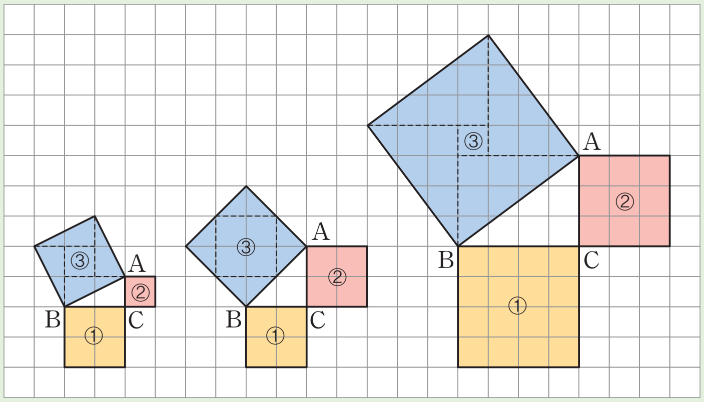
피타고라스 정리

[학습 목표] 피타고라스 정리를 이해하고 정당화할 수 있다.

직각삼각형의 세 변의 길이 사이에는 어떤 관계가 있을까?

생각 펼치기

다음은 한 눈금의 길이가 1인 모눈종이 위에 $\angle C=90^{\circ}$인 직각삼각형 ABC와 그 세 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형 ①, ②, ③을 그린 것이다. 물음에 답해 보자.



〈그림 1〉 〈그림 2〉 〈그림 3〉

1. 위의 그림에서 정사각형 ①, ②, ③의 넓이를 각각 구하여 표를 완성해 보자.

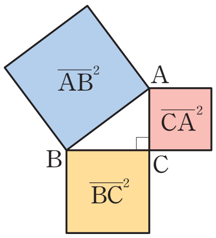
	①의 넓이	②의 넓이	③의 넓이
〈그림 1〉	4	1	5
〈그림 2〉	4	4	8
〈그림 3〉	16	9	25

2. 세 정사각형 ①, ②, ③의 넓이 사이에는 어떤 관계가 성립하는지 말해 보자. ①의 넓이와 ②의 넓이의 합은 ③의 넓이와 같다.

개념 쏙

직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 제곱의 합은 빗변의 길이의 제곱과 같다.

피타고라스 정리



생각 펼치기에서 직각삼각형의 직각을 낀 두 변을 각각 한 변으로 하는 두 정사각형의 넓이의 합과 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 서로 같다는 것을 알 수 있다.

즉, 세 정사각형 ①, ②, ③의 넓이는 각각 $\overline{BC}^2$, $\overline{CA}^2$, $\overline{AB}^2$이므로

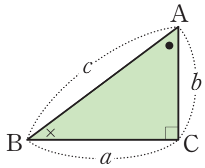
$$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$$

이 성립함을 알 수 있다.

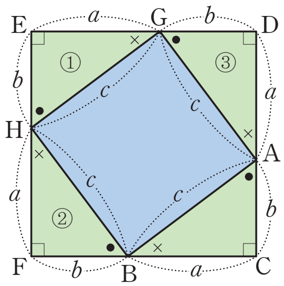
이제 $\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC에서 직각을 낀 두 변 BC, CA의 길이를 각각 a, b라 하고 빗변 AB의 길이를 c라 고 할 때,

$$a^2+b^2=c^2$$

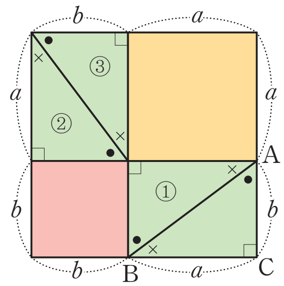
이 성립하는지 증명을 통해 확인해 보자.



위의 직각삼각형 ABC와 합동인 3개의 직각삼각형을 이용하여 한 변의 길이가 $a+b$인 정사각형을 다음 그림과 같이 2가지 방법으로 만들어 보자.



〈그림 4〉



〈그림 5〉

▶ □AGHB가 정사각형임을 보이기

〈그림 4〉에서 □AGHB는 한 변의 길이가 c인 마름모이다. 그런데 $\angle HBF+\angle ABC=90°$이므로 $\angle ABH=90°$이다. 한 내각의 크기가 90°인 마름모는 정사각형이므로 □AGHB는 한 변의 길이가 c인 정사각형이다.

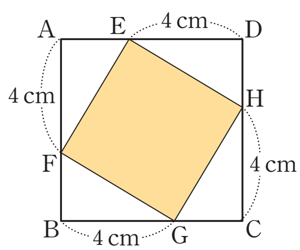
▶ $a^2+b^2=c^2$임을 보이기

〈그림 4〉에서 세 개의 직각삼각형 ①, ②, ③을 옮겨 붙이면 〈그림 5〉를 만들 수 있다. 두 그림을 비교해 보면 〈그림 4〉의 한 변의 길이가 c인 정사각형의 넓이는 c^2이고, 이는 〈그림 5〉의 한 변의 길이가 각각 a, b인 두 정사각형의 넓이의 합인 a^2+b^2과 같으므로 $a^2+b^2=c^2$임을 알 수 있다.

즉, 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 제곱의 합은 빗변의 길이의 제곱과 같다.

Tip 합동인 직각삼각형을 찾아 피타고라스 정리를 이용한다.

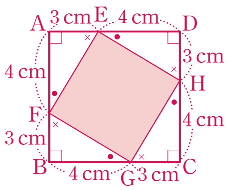
1 오른쪽 그림에서 □ABCD는 한 변의 길이가 7 cm인 정사각형이고, $\overline{AF}=\overline{BG}=\overline{CH}=\overline{DE}=4$ cm이다. □EFGH의 넓이를 구하시오. $25\ \text{cm}^2$



풀이 오른쪽 그림과 같이 네 개의 직각삼각형 △AFE, △BGF, △CHG, △DEH는 합동이므로 □EFGH는 정사각형이다. 피타고라스 정리에 의하여

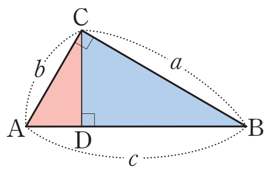
$\overline{EF}^2=\overline{EA}^2+\overline{AF}^2=3^2+4^2=25$이므로

□EFGH는 $25\ \text{cm}^2$이다.



이번에는 닮음을 이용하여 앞에서 확인한 직각삼각형의 성질이 성립함을 증명을 통해 확인해 보자.

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 점 C에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 D라고 하자.



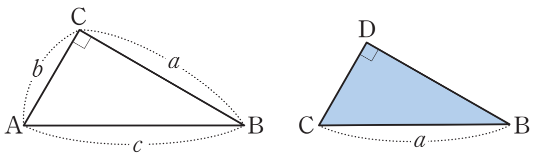
▶ **닮음인 두 삼각형에서 대응하는 변의 길이의 비 확인하기**

△ABC와 △CBD에서

∠B는 공통,

∠ACB=∠CDB=90°

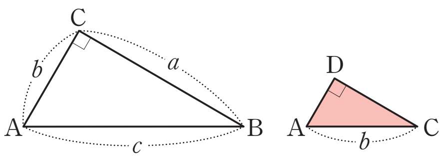
이므로 △ABC∽△CBD이다.



따라서 $c : a = a : \overline{\mathrm{DB}}$이므로

$$a^2 = c \times \overline{\mathrm{DB}} \qquad \cdots\cdots ①$$

같은 방법으로 △ABC와 △ACD에서



$c : b = b : \overline{\mathrm{AD}}$이므로

$$b^2 = c \times \overline{\mathrm{AD}} \qquad \cdots\cdots ②$$

▶ **$a^2+b^2=c^2$임을 보이기**

①, ②를 변끼리 더하면

$$a^2+b^2 = c \times \overline{\mathrm{DB}} + c \times \overline{\mathrm{AD}} = c \times (\overline{\mathrm{DB}} + \overline{\mathrm{AD}})$$

이고, $\overline{\mathrm{DB}}+\overline{\mathrm{AD}}=c$이므로 $a^2+b^2=c^2$이다.

즉, 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 제곱의 합은 빗변의 길이의 제곱과 같다.

이와 같은 직각삼각형의 성질을 **피타고라스 정리**라고 한다.

피타고라스(Pythagoras, B.C. 569?~B.C. 475?)는 고대 그리스의 수학자로, 피타고라스 정리를 수학적으로 증명했다고 알려져 있다.
(출처: 김화영, 『교과서를 만든 수학자들』)

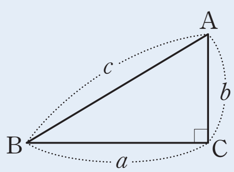
이상을 정리하면 다음과 같다.

피타고라스 정리

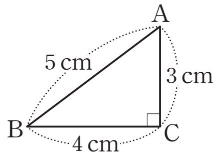
직각삼각형 ABC에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고, 빗변의 길이를 c라고 하면

$$a^2+b^2=c^2$$

이다.



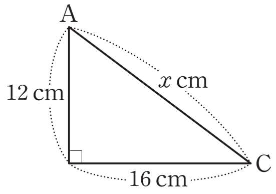
확인하기 오른쪽 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이는 각각 4 cm, 3 cm이고 빗변의 길이는 $\boxed{5}$ cm이므로 $4^2+\boxed{3}^2=\boxed{5}^2$이다.



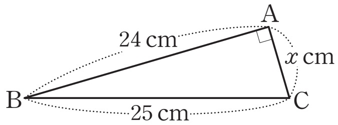
함께 해 보기 1

다음 직각삼각형에서 x의 값을 구하시오.

(1)



(2)



풀이 (1) 피타고라스 정리에 의하여

$$x^2=16^2+12^2=256+144=400$$

이다. 제곱하여 400이 되는 양수는 20이므로 $x=20$이다.

(2) 피타고라스 정리에 의하여

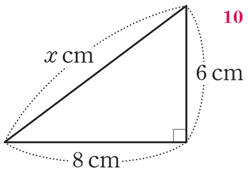
$$24^2+x^2=25^2,\ x^2=25^2-24^2=625-576=49$$

이다. 제곱하여 49가 되는 양수는 7이므로 $x=7$이다.

답 (1) 20 (2) 7

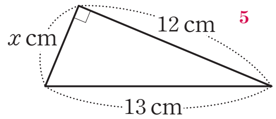
2 다음 직각삼각형에서 x의 값을 구하시오.

(1)



10

(2)

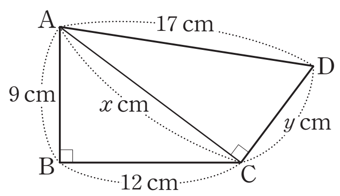


5

풀이 (1) 피타고라스 정리에 의하여 $6^2+8^2=x^2$, $x^2=100$이다. 제곱하여 100이 되는 양수는 10이므로 $x=10$이다.
(2) 피타고라스 정리에 의하여 $13^2=x^2+12^2$, $x^2=25$이다. 제곱하여 25가 되는 양수는 5이므로 $x=5$이다.

3 오른쪽 그림에서 x, y의 값을 각각 구하시오. $x=15$, $y=8$

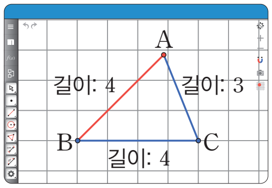
풀이 피타고라스 정리에 의하여 $9^2+12^2=x^2$, $x^2=225$이다. 제곱하여 225가 되는 양수는 15이므로 $x=15$이다.
피타고라스 정리에 의하여 $17^2=15^2+y^2$, $y^2=64$이다. 제곱하여 64가 되는 양수는 8이므로 $y=8$이다.



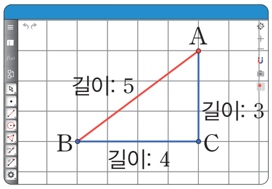
직각삼각형이 되는 조건

삼각형의 세 변의 길이가 주어졌을 때, 이 삼각형이 직각삼각형이 되는지 알아보자.

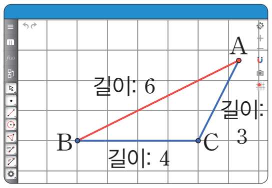
다음 그림은 알지오매스를 이용하여 $\triangle \mathrm{ABC}$의 $\overline{\mathrm{AC}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$로 고정한 뒤, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이만 4, 5, 6으로 변화시키면서 그린 것이다.



〈그림 6〉



〈그림 7〉



〈그림 8〉

위의 삼각형에서 $\overline{\mathrm{BC}}^2$, $\overline{\mathrm{AC}}^2$, $\overline{\mathrm{AB}}^2$의 값을 각각 구하면 다음 표와 같다.

	$\overline{\mathrm{BC}}^2$	$\overline{\mathrm{AC}}^2$	$\overline{\mathrm{AB}}^2$
〈그림 6〉	16	9	16
〈그림 7〉	16	9	25
〈그림 8〉	16	9	36

이때 $\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2$이 성립하는 삼각형은 〈그림 7〉이고, 이 삼각형은 $\angle \mathrm{C}=90^\circ$인 직각삼각형임을 알 수 있다. 즉, $\overline{\mathrm{BC}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=3$, $\overline{\mathrm{AB}}=5$일 때, $\triangle \mathrm{ABC}$는 직각삼각형이 된다.

일반적으로 $\triangle \mathrm{ABC}$의 세 변의 길이를 각각 a, b, c라고 할 때,

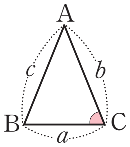
$$a^2+b^2=c^2$$

이면 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형임이 알려져 있다.

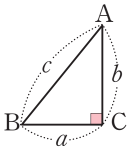
개념 쏙

세 변의 길이가 각각 a, b, c인 $\triangle \mathrm{ABC}$에서 가장 긴 변의 길이가 c일 때,

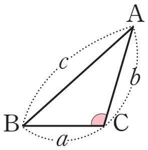
① $c^2<a^2+b^2$일 때, $\angle \mathrm{C}<90^\circ$



② $c^2=a^2+b^2$일 때, $\angle \mathrm{C}=90^\circ$



③ $c^2>a^2+b^2$일 때, $\angle \mathrm{C}>90^\circ$



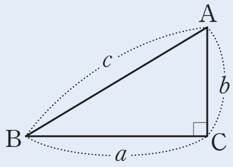
이상을 정리하면 다음과 같다.

직각삼각형이 되는 조건

세 변의 길이가 각각 a, b, c인 $\triangle \mathrm{ABC}$에서

$$a^2+b^2=c^2$$

이면 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.



4 세 변의 길이가 각각 다음과 같은 삼각형 중에서 직각삼각형인 것을 모두 찾으시오. (2), (3)

(1) 2 cm, 3 cm, 4 cm (2) 9 cm, 12 cm, 15 cm

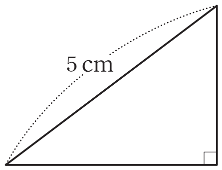
(3) 6 cm, 8 cm, 10 cm (4) 10 cm, 13 cm, 17 cm

풀이 (1) $2^2+3^2 \neq 4^2$이므로 이 삼각형은 직각삼각형이 아니다.
(2) $9^2+12^2=15^2$이므로 이 삼각형은 직각삼각형이다.
(3) $6^2+8^2=10^2$이므로 이 삼각형은 직각삼각형이다.
(4) $10^2+13^2 \neq 17^2$이므로 이 삼각형은 직각삼각형이 아니다.
따라서 직각삼각형인 것은 (2), (3)이다.

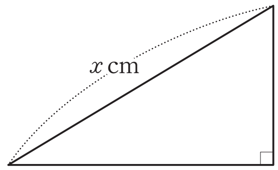
Tip 삼각형의 두 변의 길이를 알 때, 직각삼각형이 되는 조건을 이용하여 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있다.

5 세 변의 길이가 각각 3 cm, 5 cm, x cm인 삼각형이 직각삼각형이 된다고 할 때, x^2의 값을 구하려고 한다. 다음 각 경우에서 x^2의 값을 구하시오.

(1) 빗변의 길이가 5 cm인 경우 **16**

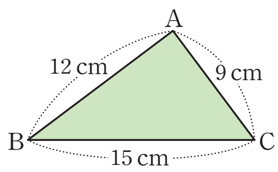


(2) 빗변의 길이가 x cm인 경우 **34**



풀이 (1) $3^2+x^2=5^2$에서 $x^2=16$이다.
(2) $3^2+5^2=x^2$에서 $x^2=34$이다.

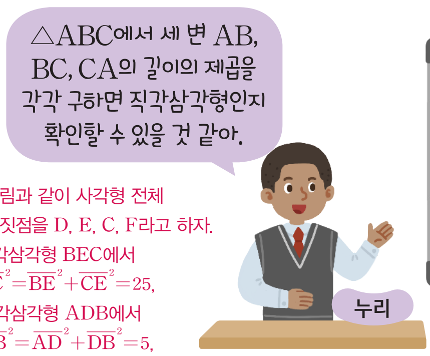
6 오른쪽 그림과 같은 △ABC의 넓이를 구하고, 그 방법을 설명해 보자. **54 cm²**

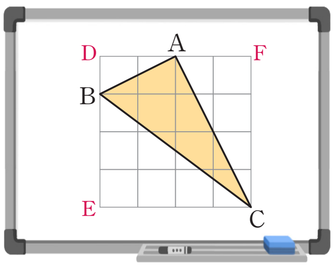


풀이 삼각형의 세 변의 길이가 9 cm, 12 cm, 15 cm이므로
$9^2+12^2=15^2$이 성립한다. 즉, △ABC는 빗변의 길이가 15 cm인 직각삼각형이다. 따라서 △ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 12\times 9=54(\text{cm}^2)$이다.

생각 더 나아가기 　문제 해결 　추론

다음은 정사각형 모양의 모눈 위에 놓인 △ABC에 대하여 누리와 지우가 대화하는 모습이다. 대화를 읽고, 누리와 지우의 방법을 이용하여 △ABC가 직각삼각형이 되는지 각각 확인해 보자. 풀이 참조





풀이 오른쪽 그림과 같이 사각형 전체 모눈의 꼭짓점을 D, E, C, F라고 하자.
누리 : 직각삼각형 BEC에서
$\overline{BC}^2=\overline{BE}^2+\overline{CE}^2=25$,
직각삼각형 ADB에서
$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{DB}^2=5$,
직각삼각형 AFC에서
$\overline{AC}^2=\overline{AF}^2+\overline{CF}^2=20$이다.
이때 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$이 성립하므로
△ABC는 ∠BAC=90°인 직각삼각형이다.

지우 : △ADB와 △CFA에서
∠D=∠F=90°, $\overline{AD}:\overline{CF}=\overline{DB}:\overline{FA}=1:2$이므로 △ADB∽△CFA이다.
∠BAC=180°−∠BAD−∠CAF=180°−∠BAD−∠ABD=90°이므로
△ABC는 ∠BAC=90°인 직각삼각형이다.

스스로 점검하기

1

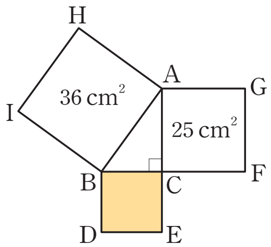
다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 직각삼각형 ABC에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고, 빗변의 길이를 c라고 하면 $\boxed{a^2+b^2=c^2}$이다.

(2) 세 변의 길이가 각각 a, b, c인 △ABC에서 $a^2+b^2=c^2$이면 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 $\boxed{\text{직각삼각형}}$이다.

2

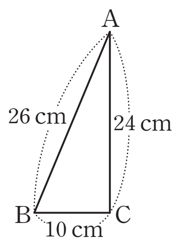
다음 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 세 개의 정사각형이 있다. □HIBA의 넓이가 36 cm², □ACFG의 넓이가 25 cm²일 때, □BDEC의 넓이를 구하시오. **11 cm²**



풀이 피타고라스 정리에 의하여
(□AHIB의 넓이)=(□BDEC의 넓이)+(□ACFG의 넓이)이다.
즉, 36=□BDEC+25, □BDEC=11 cm²

3

오른쪽 그림과 같은 △ABC에서 ∠C의 크기를 구하시오. **90°**



풀이 $10^2+24^2=26^2$이므로 △ABC는 빗변의 길이가 26 cm인 직각삼각형이다.
따라서 ∠C=90°이다.

4

세 변의 길이가 다음과 같은 삼각형 중에서 직각삼각형인 것을 찾으시오. (3)

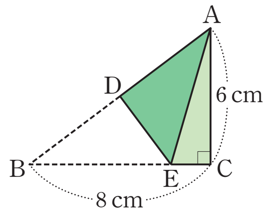
(1) 4, 5, 8　　(2) 7, 9, 11

(3) 5, 12, 13　　(4) 5, 7, 11

풀이 (1) $4^2+5^2\neq8^2$이므로 이 삼각형은 직각삼각형이 아니다.
(2) $7^2+9^2\neq11^2$이므로 이 삼각형은 직각삼각형이 아니다.
(3) $5^2+12^2=13^2$이므로 이 삼각형은 직각삼각형이다.
(4) $5^2+7^2\neq11^2$이므로 이 삼각형은 직각삼각형이 아니다.
따라서 직각삼각형인 것은 (3)이다.

5

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$=6 cm, $\overline{BC}$=8 cm인 종이로 된 직각삼각형 ABC에서 꼭짓점 B가 꼭짓점 A에 오도록 접었을 때, 접힌 $\overline{DE}$의 길이를 구하시오. $\frac{15}{4}$ **cm**

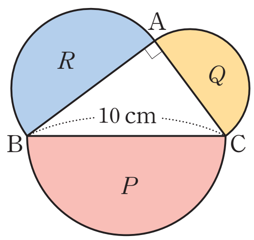


풀이 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{AB}^2=6^2+8^2=100$, $\overline{AB}$=10 cm이고,
종이를 접었으므로 $\overline{BD}=\frac{1}{2}\overline{AB}$=5 cm이다.
△BDE∽△BCA이므로 $\overline{BD}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{AC}$, $5:8=\overline{DE}:6$,
따라서 $\overline{DE}=\frac{15}{4}$ cm이다.

6 사고력 UP

추론

다음 그림과 같이 ∠A=90°이고, $\overline{BC}$=10 cm인 직각삼각형 ABC의 각 변을 지름으로 하는 세 반원 P, Q, R의 넓이의 합을 구하시오. **25π cm²**



풀이 (반원 P의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2\times\pi=\frac{\overline{BC}^2}{8}\pi$
(반원 Q의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2\times\pi=\frac{\overline{AC}^2}{8}\pi$
(반원 R의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2\times\pi=\frac{\overline{AB}^2}{8}\pi$
이다.

△ABC는 직각삼각형이므로 $\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이고,
세 반원의 넓이의 합은
$\frac{\overline{BC}^2}{8}\pi+\frac{\overline{AC}^2}{8}\pi+\frac{\overline{AB}^2}{8}\pi=\frac{\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}^2}{8}\pi$
$=\frac{\overline{BC}^2+\overline{BC}^2}{8}\pi=\frac{200}{8}\pi=25\pi(\text{cm}^2)$이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/7ROndRTsrEQ03e9a

자기 평가	
피타고라스 정리를 이해하고 정당화할 수 있다.	
피타고라스 정리를 이용하여 다양한 문제를 해결할 수 있다.	

수학으로 세상 보기

역사 속의 다양한 피타고라스 정리

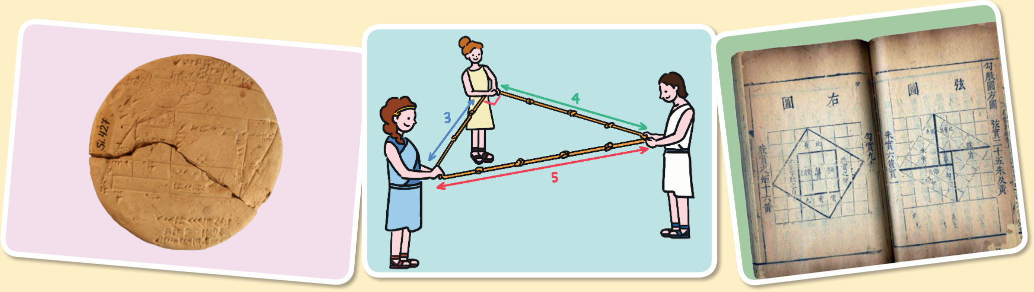
의사소통 연결

피타고라스 정리와 그에 대한 증명은 기원전부터 시작하여 다양한 문화권에서 나타났는데, 현재까지 알려진 피타고라스 정리의 증명은 400개가 넘는다고 한다.

다음 글을 통해 역사 속에 다양하게 나타난 피타고라스 정리를 알아보고, 물음에 답해 보자.

1 고대에 나타난 피타고라스 정리

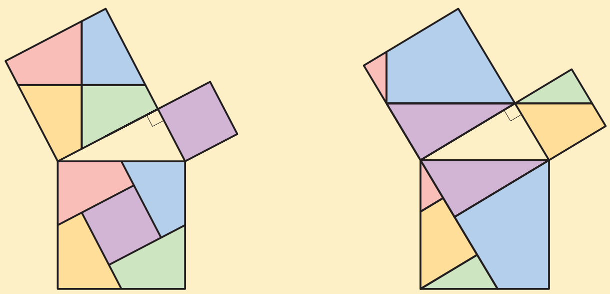
약 3700년 전쯤 만들어진 메소포타미아 지방의 점토판에서는 직각삼각형이 연결된 구조와 더불어 경작지의 측량에 대한 내용이 담겨 있다. 이집트에서는 세 변의 길이의 비가 3 : 4 : 5인 삼각형을 로프로 만들어서 사용했다고 전해지며, 기원전 10세기 중국에서 사용된 수학책인 주비산경에는 같은 내용을 바둑판무늬의 그림 한 장으로 표현하고 있다.



(출처: 조선멤버스, 2020)

2 그림으로 증명하는 피타고라스 정리

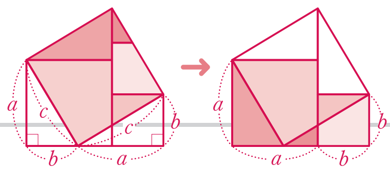
20세기 이후에는 도형을 절단하여 퍼즐처럼 맞춰 증명하는 방법들도 나타나면서 많은 사람들이 피타고라스 정리의 다양한 증명법을 소개하였다. 다음은 이러한 증명법을 보여 주는 그림이다.



(출처: 이민근 외 1인, 『(올댓) 피타고라스 정리』)

3 피타고라스 정리의 다양한 증명법을 찾아보고, 친구와 이야기해 보자.

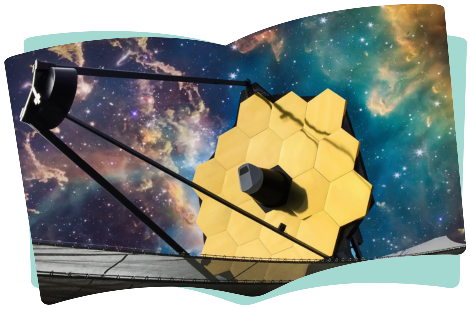
풀이 |예시| 다음 그림의 왼쪽 정사각형의 넓이는 c^2이고 정사각형의 조각들을 옮겨 만든 오른쪽의 그림에서 정사각형들의 넓이는 각각 a^2과 b^2이므로 $a^2+b^2=c^2$이다.



수학으로⁺ 탐험하기

종이를 등분하는 다양한 종이접기

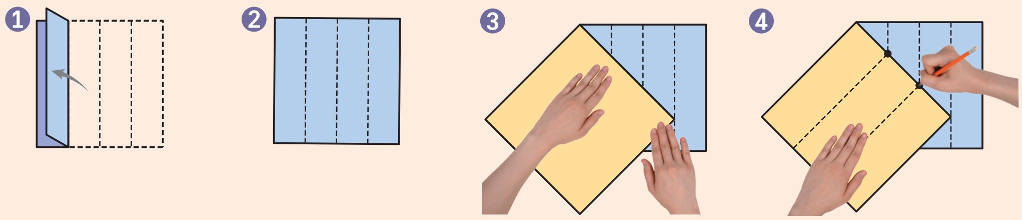
종이접기는 현대에 이르러 예술 분야를 비롯하여 인공위성의 태양 전지판, 제임스 웹 우주 망원경처럼 과학과 공학의 영역에서도 다양하게 활용되고 있다. 이런 종이접기 작품을 만드는 것은 종이를 등분하는 것에서부터 시작된다. 종이를 한 방향으로 접어 나가면 2등분, 4등분, 8등분은 쉽게 할 수 있지만 3등분, 5등분, 7등분은 어렵다. 도형의 닮음을 이용하여 종이를 3등분, 5등분, 7등분으로 접는 방법을 탐구해 보자.



제임스 웹 우주 망원경

1 다음 종이접기 방법에 따라 종이 두 장으로 색종이를 3등분해 보고, 물음에 답해 보자.

[준비물: 색종이, 연필]



❶ 종이를 반으로 접고, 같은 방향으로 다시 한 번 더 반으로 접는다.

❷ 접은 종이를 펴면 4등분된 종이가 만들어진다.

❸ 다른 한 색종이의 한 변의 양 끝 점을 위쪽 꼭짓점과 3번째 접은 선 위에 맞춰 놓는다.

❹ 4등분된 종이의 접은 선과 색종이의 한 변이 만나는 점을 모두 표시하고 그 점을 중심으로 종이를 접으면 색종이는 3등분된다.

(1) 닮음을 이용하여 색종이가 3등분되는 이유를 설명해 보자.

풀이 ❶, ❷와 같이 종이를 반으로 접는 과정을 2번 반복하여 4등분된 종이의 접은 선들은 모두 서로 평행하다. ❹에서 색종이에 표시된 점들은 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비에 의하여 점들 사이의 거리가 모두 같으므로 색종이의 한 변을 3등분한다.

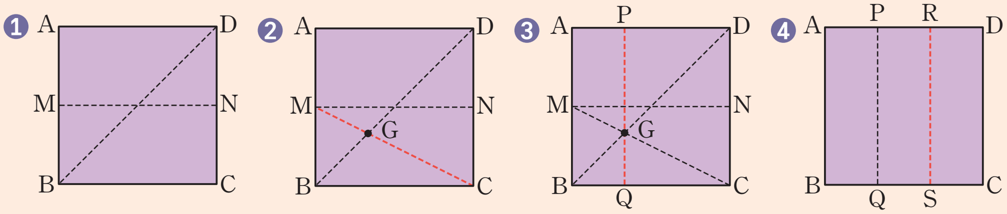
(2) 이와 같은 방법을 이용하여 색종이의 한 변을 7등분할 수 있는 방법에 대하여 친구와 이야기해 보자.

풀이 ❶, ❷와 같이 종이를 반으로 접는 과정을 3번 반복하여 8등분된 종이를 만든다. ❸과 같이 다른 한 색종이의 한 변의 양 끝 점을 위쪽 꼭짓점과 7번째 접은 선 위에 맞춰 놓는다. ❹와 같이 8등분된 종이의 접은 선과 색종이의 한 변이 만나는 점을 모두 표시하면 색종이의 한 변은 7등분된다.

추론 · 의사소통 · 연결

2

다음 종이접기 방법에 따라 종이 한 장으로 색종이를 3등분해 보고, 물음에 답해 보자. [준비물: 색종이]



❶ 종이를 반으로 접었다 편 후 점 A와 점 C가 만나도록 대각선으로 접었다 편다.

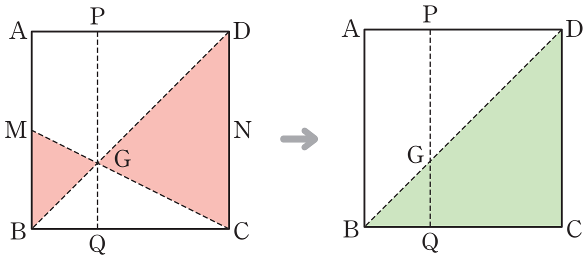
❷ $\overline{CM}$을 접는 선으로 하여 접었다 편다.

❸ $\overline{BD}$와 $\overline{CM}$의 교점 G를 지나고 AB에 평행한 $\overline{PQ}$를 접는 선으로 하여 접었다 편다.

❹ $\overline{DC}$가 $\overline{PQ}$와 겹치도록 접었다 편다.

(출처: 남호영 외 2인, 『종이접기 속에 숨겨진 수학』, 서보억 외 2인, 『학교 수학과 작도 교육』)

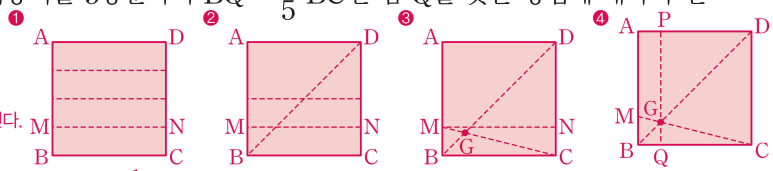
(1) ❸에서 색종이를 접었다 폈을 때 생기는 닮음인 두 삼각형을 보고, $\overline{BQ}=\frac{1}{3}\overline{BC}$임을 설명해 보자.



풀이 △BMG와 △DCG에서 ∠BMG=∠DCG, ∠MBG=∠CDG이므로 △BMG∽△DCG(AA 닮음)이다.
이때 $\overline{BM}:\overline{DC}=\overline{BG}:\overline{DG}=1:2$이다. 또, △BCD에서 $\overline{GQ}\,/\!/\,\overline{DC}$이므로
$\overline{BG}:\overline{GD}=\overline{BQ}:\overline{QC}=1:2$이다. 따라서 $\overline{BQ}=\frac{1}{3}\overline{BC}$이다.

(2) 이와 같은 방법을 이용하여 색종이를 5등분하여 $\overline{BQ}=\frac{1}{5}\overline{BC}$인 점 Q를 찾는 방법에 대하여 친구와 이야기해 보자.

풀이



❶ 종이를 반으로 2번 접었다 펴서 4등분한다.
❷ 점 A와 점 C가 만나도록 종이를 대각선으로 접었다 편다.
❸ $\overline{CM}$을 접는 선으로 하여 접었다 편다.
❹ $\overline{BD}$와 $\overline{CM}$의 교점 G를 지나고 $\overline{AB}$와 평행한 $\overline{PQ}$를 접었다 펴면 $\overline{BQ}=\frac{1}{5}\overline{BC}$이다. 위의 방법에 따라 색종이를 접어 △BMG와 △DCG의 닮음비가 1 : 4가 되면 $\overline{BQ}:\overline{QC}=1:4$이므로 $\overline{BQ}=\frac{1}{5}\overline{BC}$인 점 Q를 찾을 수 있다.

상호 평가표

평가 내용		자기 평가	친구 평가
내용	종이접기를 이용하여 색종이를 등분할 수 있다.		
	닮음을 이용하여 종이접기로 색종이를 등분하는 과정을 설명할 수 있다.		
태도	종이접기를 이용하여 색종이를 등분하는 과정을 적극적으로 탐구했다.		

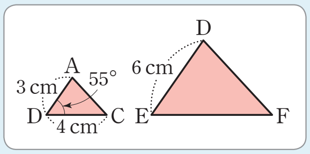
스스로 마무리하기

생각 완성하기

각 단원의 내용을 정리하여 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

01 닮은 도형

• 닮은 도형

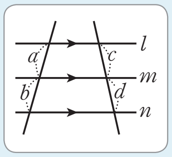


닮음비 ➜ $3:6=1:2$

$\overline{EF}=\boxed{8}$ cm, $\angle E=\boxed{55}°$

03 평행선 사이의 선분의 길이의 비

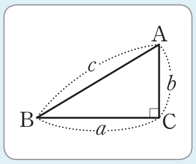
• 평행선 사이의 선분의 길이의 비



$l /\!/ m /\!/ n$이면 $a:b=\boxed{c}:\boxed{d}$

05 피타고라스 정리

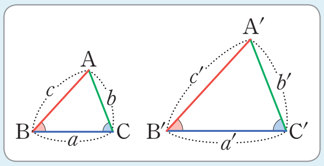
• 피타고라스 정리



$a^2+b^2=\boxed{c^2}$

02 삼각형의 닮음 조건

• 삼각형의 닮음 조건



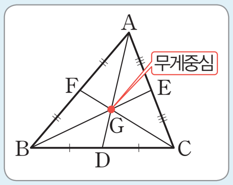
① 세 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같을 때

② 두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때

③ $\boxed{\text{두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같을 때}}$

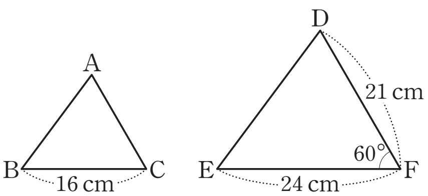
04 삼각형의 무게중심

• 삼각형의 무게중심



---

1 아래 그림에서 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$일 때, 다음을 구하시오.



(1) $\overline{AC}$의 길이 14 cm

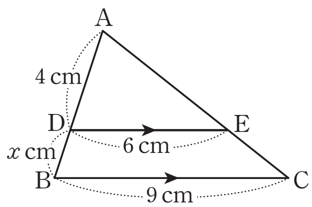
(2) $\angle C$의 크기 60°

풀이 (1) $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 닮음비는 $\overline{BC}:\overline{EF}=16:24=2:3$이다.
$\overline{AC}:\overline{DF}=\overline{AC}:21=2:3$이므로 $\overline{AC}=14$ cm이다.
(2) $\angle C=\angle F=60°$이다.

2 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 두 통조림통 (가)와 (나)는 서로 닮은 도형이고, 높이의 비는 $3:5$이다. (가)의 부피가 54 cm^3일 때, (나)의 부피를 구하시오. 250 cm^3

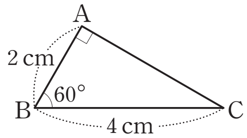
풀이 통조림통 (가)와 (나)의 닮음비는 $3:5$이므로 두 통조림통의 부피의 비는 $3^3:5^3=27:125$이다. (가)의 부피가 54 cm^3이므로 $27:125=54:250$이 되어 (나)의 부피는 250 cm^3이다.

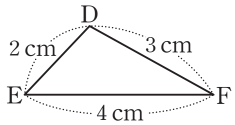
3 다음 그림에서 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$일 때, x의 값을 구하시오. 2

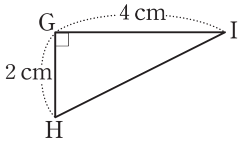


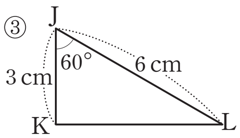
풀이 $\triangle ABC$에서 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$이므로
$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{BC}:\overline{DE}$, $(x+4):4=9:6$, $x=2$이다.

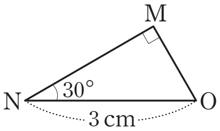
4 다음 중에서 오른쪽 그림과 같은 $\triangle ABC$와 닮음인 것을 모두 고르면? ③, ④

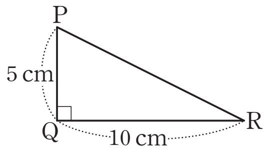


① 

② 

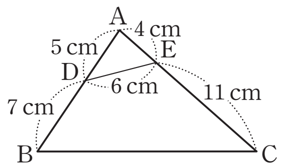
③ 

④ 

⑤ 

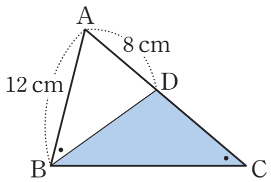
풀이 ③ $\overline{AB}:\overline{KJ}=\overline{BC}:\overline{JL}=2:3$이고, 그 끼인각의 크기가 $60°$로 같으므로 $\triangle ABC \backsim \triangle KJL$(SAS 닮음)이다.
④ $\angle BAC=\angle OMN=90°$이고, $\angle BCA=\angle ONM=30°$이므로 $\triangle ABC \backsim \triangle MON$(AA 닮음)이다.

5 다음 그림과 같은 $\triangle ABC$에서 $\overline{BC}$의 길이를 구하시오. **18 cm**



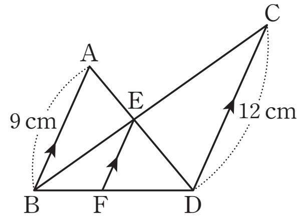
풀이 $\triangle ADE$와 $\triangle ACB$에서 $\overline{AD}:\overline{AC}=\overline{AE}:\overline{AB}=1:3$, $\angle A$는 공통이므로 $\triangle ADE \backsim \triangle ACB$(SAS 닮음)이다.
따라서 $\overline{ED}:\overline{BC}=6:\overline{BC}=1:3$이므로 $\overline{BC}=18$ cm이다.

6 오른쪽 그림과 같은 $\triangle ABC$에서 $\angle ABD=\angle C$이고, $\overline{AB}=12$ cm, $\overline{AD}=8$ cm이다. $\triangle ABD$의 넓이가 36 cm^2일 때, $\triangle BCD$의 넓이를 구하시오. **45 cm^2**



풀이 $\triangle ABC$와 $\triangle ADB$에서 $\angle ABD=\angle ACB$이고 $\angle A$는 공통이므로 $\triangle ABC \backsim \triangle ADB$(AA 닮음)이다.
$\triangle ABC$와 $\triangle ADB$의 닮음비는 $\overline{AB}:\overline{AD}=3:2$이므로 넓이의 비는 $9:4$이다. 즉,
$(\triangle ABD+\triangle BCD):\triangle ABD=(36+\triangle BCD):36=9:4$이므로 $\triangle BCD$의 넓이는 45 cm^2이다.

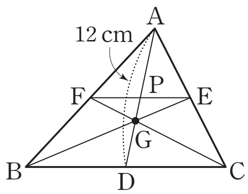
7 다음 그림에서 $\overline{AB}/\!/\overline{EF}/\!/\overline{CD}$일 때, $\overline{EF}$의 길이는? ④



① 5 cm ② 6 cm ③ 7 cm
④ $\dfrac{36}{7}$ cm ⑤ $\dfrac{54}{7}$ cm

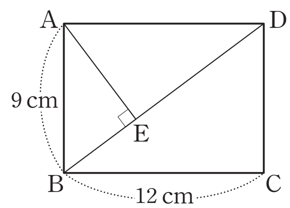
풀이 $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이므로 $\angle ABE=\angle DCE$(엇각)이고, $\angle AEB=\angle DEC$(맞꼭지각)이다. 따라서 $\triangle ABE \backsim \triangle DCE$(AA 닮음)이고 닮음비는 $3:4$이다.
또, $\triangle ABD$에서 $\overline{AB}/\!/\overline{EF}$이므로
$\overline{AD}:\overline{ED}=\overline{AB}:\overline{EF}=7:4$에서 $7:4=9:\overline{EF}$, $\overline{EF}=\dfrac{36}{7}$ cm이다.

8 오른쪽 그림에서 점 G가 $\triangle ABC$의 무게중심이고, $\overline{AD}=12$ cm일 때, $\overline{PG}$의 길이를 구하시오. **2 cm**



풀이 $\triangle ABC$의 무게중심 G는 중선 $\overline{AD}$를 꼭짓점으로부터 그 길이를 $2:1$로 나누므로, $\overline{GD}=\dfrac{1}{3}\overline{AD}=4$ cm이다.
$\overline{EF}/\!/\overline{BC}$이므로 $\angle DCG=\angle PFG$(엇각), $\angle DGC=\angle PGF$(맞꼭지각)이다. 따라서 $\triangle DCG \backsim \triangle PFG$(AA 닮음)이고 닮음비는 $2:1$이다.
$\overline{PG}:\overline{GD}=\overline{PG}:4=2:1$, $\overline{PG}=2$ cm이다.

9 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 12 cm, 9 cm인 직사각형 ABCD의 꼭짓점 A에서 대각선 BD에 내린 수선의 발을 E라고 할 때, $\overline{AE}$의 길이를 구하시오. **$\dfrac{36}{5}$ cm**

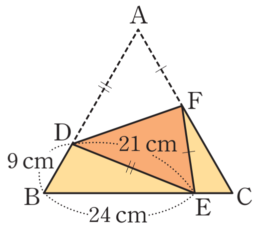


풀이 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로 $\angle ADB=\angle CBD$, $\overline{AB}/\!/\overline{DC}$이므로 $\angle ABD=\angle CDB$이다. $\angle ABC=90°$이므로 $\angle BAE=90°-\angle ABE=\angle DBC$이다.
따라서 $\triangle ABE \backsim \triangle BDC$(AA 닮음)이다.
피타고라스 정리에 의하여 $\overline{BD}^2=12^2+9^2=225$, $\overline{BD}=15$이므로 $\triangle ABE$와 $\triangle BDC$의 닮음비는 $\overline{AB}:\overline{BD}=9:15=3:5$이다. $\overline{AE}:\overline{BC}=\overline{AE}:12=3:5$이므로 $\overline{AE}=\dfrac{36}{5}$ cm이다.

스스로 마무리하기

서술형 문제

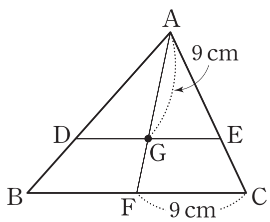
10 오른쪽 그림과 같이 정삼각형 모양의 색종이를 점 A가 $\overline{BC}$ 위의 점 E 위에 오도록 접었을 때, $\overline{AF}$의 길이를 구하려고 한다. 풀이 과정과 답을 쓰시오. **14 cm**



풀이 $\triangle BDE$와 $\triangle CEF$에서 $\angle BDE+\angle BED=120^\circ$
$\angle CEF+\angle CFE=120^\circ$, $\angle BED+\angle CEF=120^\circ$,
이므로 $\angle BED=\angle CFE$, $\angle DBE=\angle ECF=60^\circ$이다.
따라서 $\triangle BDE \backsim \triangle CEF$(AA 닮음)이다.
$\triangle ABC$는 정삼각형이고 $\overline{AD}=\overline{DE}=21$ cm이므로 한 변의 길이는 30 cm이다. 또한, $\overline{CE}=30-24=6$(cm)이고, $9:6=21:\overline{EF}$이므로 $\overline{EF}=14$ cm이다. 따라서 $\overline{AF}=\overline{EF}=14$ cm이다.

채점 기준	배점 비율
(i) $\triangle BDE \backsim \triangle CEF$임을 구한 경우	60 %
(ii) $\triangle BDE$와 $\triangle CEF$의 닮음비를 구한 경우	30 %
(iii) $\overline{AF}$의 길이를 구한 경우	10 %

11 다음 그림에서 점 G는 $\triangle ABC$의 무게중심이고, $\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$이다. $\overline{AG}=9$ cm, $\overline{FC}=9$ cm일 때, $\overline{DG}$의 길이를 구하려고 한다. 풀이 과정과 답을 쓰시오. **6 cm**



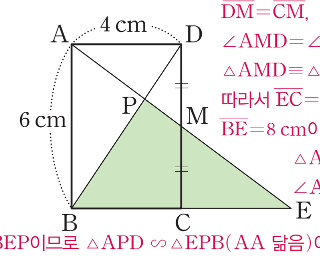
풀이 $\overline{BC}$의 중점이 점 F이므로 $\overline{BF}=\overline{CF}=9$ cm이다.
$\overline{AF}$는 중선이고, 점 G는 $\triangle ABC$의 무게중심이므로
$\overline{AG}:\overline{GF}=2:1$이다.
$\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$이므로 $\triangle ABF$에서 $\overline{AF}:\overline{AG}=\overline{BF}:\overline{DG}$이고,
$3:2=9:\overline{DG}$이다. 따라서 $\overline{DG}=6$ cm이다.

채점 기준	배점 비율
(i) $\overline{AG}:\overline{GF}=2:1$을 이용한 경우	40 %
(ii) $\overline{AF}:\overline{AG}=\overline{BF}:\overline{DG}=3:2$를 구한 경우	40 %
(iii) $\overline{DG}$의 길이를 구한 경우	20 %

사고력 문제

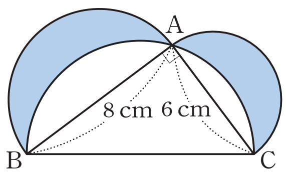
12 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD에서 $\overline{AD}=4$ cm, $\overline{AB}=6$ cm이고, 점 M은 $\overline{DC}$의 중점이다. $\overline{BC}$의 연장선과 $\overline{AM}$의 연장선이 만나는 점을 E, $\overline{AM}$과 $\overline{BD}$의 교점을 P라고 할 때, $\triangle PBE$의 넓이를 구하시오. **16 cm²**

풀이 $\triangle AMD$와 $\triangle EMC$에서
$\angle ADM=\angle ECM=90^\circ$,
$\overline{DM}=\overline{CM}$,
$\angle AMD=\angle EMC$(맞꼭지각)이므로
$\triangle AMD \equiv \triangle EMC$(ASA 합동)이다.
따라서 $\overline{EC}=\overline{AD}=4$ cm이고,
$\overline{BE}=8$ cm이다.



$\triangle APD$와 $\triangle EPB$에서
$\angle ADP=\angle EBP$,
$\angle DAP=\angle BEP$이므로 $\triangle APD \backsim \triangle EPB$(AA 닮음)이다.
이때 $\triangle APD$와 $\triangle EPB$의 닮음비는 $\overline{AD}:\overline{EB}=1:2$이므로
높이의 비도 $1:2$이다. 따라서 $\triangle PBE$의 높이는 $6\times\frac{2}{3}=4$(cm)이고
$\triangle PBE$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times8\times4=16$(cm²)이다.

13 다음 그림은 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형 ABC의 세 변을 각각 지름으로 하는 세 반원을 그린 것이다. 색칠한 부분의 넓이를 구하시오. **24 cm²**



풀이 (색칠한 부분의 넓이)=(지름이 $\overline{AB}$인 반원의 넓이)
+(지름이 $\overline{AC}$인 반원의 넓이)+($\triangle ABC$의 넓이)
−(지름이 $\overline{BC}$인 반원의 넓이)이다.
이때 지름이 $\overline{AB}$인 반원의 넓이와 지름이 $\overline{AC}$인
반원의 넓이의 합은 피타고라스 정리에 의해 지름이
$\overline{BC}$인 반원의 넓이와 같으므로
(색칠한 부분의 넓이)=($\triangle ABC$의 넓이)이다.
따라서 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times8\times6=24$(cm²)이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/erpKxrlleAjS5ZHu

마무리 평가

자신의 학습 태도를 스스로 점검해 보자.

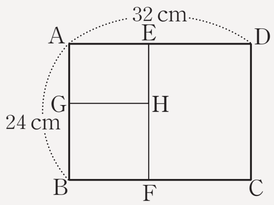
이 단원을 공부하면서 알게 된 것을 써 보자.	이 단원을 공부하면서 어려웠던 점을 쓰고 복습 계획을 세워 보자.

도형의 닮음과 피타고라스 정리를 정당화하여 체계적으로 생각하고, 친구를 논리적으로 설득했다.	
자신의 생각을 수학적으로 표현하고, 다른 사람의 생각을 이해하려고 노력했다.	
잘 이해하지 못한 내용은 친구나 선생님의 도움을 받아 확실하게 알도록 노력했다.	
수업 준비를 잘하고 수업 시간에 성실하게 참여했다.	

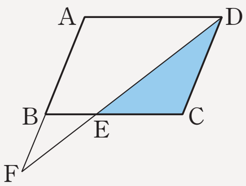
교과서 문제 뛰어넘기

| 정답과 해설 326쪽 |

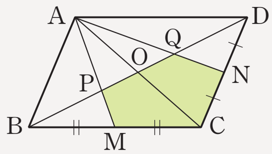
1 오른쪽 그림과 같은 직사각형 ABCD에서 □ABCD∽□DEFC∽□AGHE가 되도록 $\overline{EF}$, $\overline{GH}$를 그었다. $\overline{AE}+\overline{EH}$의 값을 구하시오.



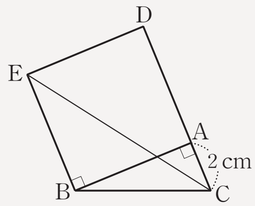
2 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD에서 ∠D의 이등분선과 $\overline{BC}$, $\overline{AB}$의 연장선과의 교점을 각각 E, F라고 하자. $\overline{AB}=6$ cm, $\overline{AD}=9$ cm이고 △BFE의 넓이가 4 cm^{2}일 때, △ECD의 넓이를 구하시오.



3 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD에서 두 점 M, N은 각각 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$의 중점이고, 점 P와 Q는 각각 $\overline{BD}$와 $\overline{AM}$, $\overline{AN}$과의 교점이다. 평행사변형 ABCD의 넓이가 36 cm^{2}일 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하시오.



4 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 변 AB를 한 변으로 하는 정사각형 ADEB가 있다. △EBC의 넓이가 16 cm^{2}이고, $\overline{AC}=2$ cm일 때, $\overline{BC}$의 길이를 구하시오.



VIII
확률

단원 이야기

일상생활에서 어떤 일이 일어날 가능성을 확률로 나타내는 경우를 쉽게 찾아볼 수 있다. 예를 들어 스포츠 경기에서 이길 확률을 구할 수도 있고, 비가 올 확률을 구할 수도 있다. 이와 같이 확률을 이용하면 불확실한 미래를 예측하여 합리적인 판단을 내릴 수 있다.

이 단원에서는 확률의 의미를 이해하고, 확률을 구하는 방법을 배운다.

| 배운 내용 |

초5~6
- 가능성
- 비와 비율

중1
- 도수분포표와 상대도수

| 이어질 내용 |

고1
- 합의 법칙과 곱의 법칙
- 순열
- 조합

이것만은 알고 가기

초 5~6 비와 비율 　잘함 보통 모름

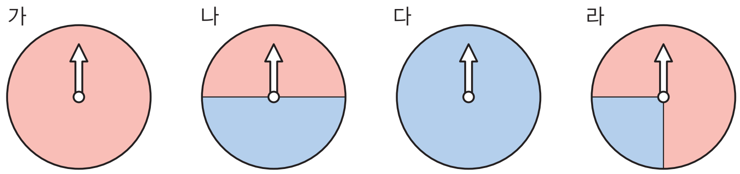
1 승연이가 고리 던지기 체험에서 10번을 던져 7번을 성공시켰다. 승연이의 고리 던지기 성공 비율을 구하시오. $\frac{7}{10}$

풀이 10번을 던져 7번을 성공시켰으므로 기준량은 10, 비교하는 양은 7이다. 따라서 승연이의 고리 던지기 성공 비율은 $\frac{7}{10}$이다.

• (비율)
=(비교하는 양)÷(기준량)
$=\frac{(\text{비교하는 양})}{(\text{기준량})}$

초 5~6 가능성 　잘함 보통 모름

2 새롬이가 다음 회전판을 돌렸을 때, 회전판의 화살이 빨간색을 가리킬 가능성이 낮은 것부터 순서대로 나열하시오. 다, 나, 라, 가



풀이 화살이 빨간색을 가리킬 가능성이 낮으려면 빨간색으로 칠해진 부분이 작아야 하므로 빨간색을 가리킬 가능성이 낮은 것부터 순서대로 나열하면 다, 나, 라, 가이다.

• 어떤 상황에서 특정한 일이 일어나길 기대할 수 있는 정도를 가능성이라고 한다.

초 5~6 가능성 　잘함 보통 모름

3 다음 상황에 대한 가능성을 수로 나타내시오.

(1) 검은색 공만 들어 있는 주머니에서 공 한 개를 꺼낼 때, 꺼낸 공이 검은색일 가능성 1

(2) 동전 한 개를 던질 때, 앞면이 나올 가능성 $\frac{1}{2}$

풀이 (1) 주머니에는 검은색 공만 들어있으므로 공을 꺼내면 항상 검은색이 나온다. 따라서 꺼낸 공이 검은색일 가능성은 1이다.
(2) 동전 한 개를 던질 때 나오는 경우는 앞면, 뒷면의 두 가지이므로 앞면이 나올 가능성은 $\frac{1}{2}$이다.

• 어떤 일이 일어날 가능성이 '불가능하다.'이면 0, '반반이다.'이면 $\frac{1}{2}$, '확실하다.'이면 1로 나타낼 수 있다.

불가능하다. 반반이다. 확실하다.
0 　$\frac{1}{2}$ 　1

중 1 도수분포표와 상대도수 　잘함 보통 모름

4 다음은 어느 지역에 사는 학생 20명의 통학 시간을 조사하여 나타낸 상대도수의 분포표이다. A, B, C에 알맞은 값을 각각 구하시오. A: 0.15, B: 0.25, C: 1

통학 시간

계급(분)	도수(명)	상대도수
0이상 ~ 5미만	4	0.2
5 ~ 10	3	A
10 ~ 15	8	0.4
15 ~ 20	5	B
합계	20	C

풀이 계급이 5 이상 10 미만인 구간의 상대도수 $A=\frac{3}{20}=0.15$이다.
계급이 15 이상 20 미만인 구간의 상대도수 $B=\frac{5}{20}=0.25$이다.
C는 상대도수의 전체의 합이므로 1이다.

• 도수의 총합에 대한 각 계급의 도수의 비율을 그 계급의 상대도수라고 한다.
(어떤 계급의 상대도수)
$=\frac{(\text{그 계급의 도수})}{(\text{도수의 총합})}$

01 경우의 수

이 단원에서 배우는 용어와 기호

사건

[학습 목표] 경우의 수를 구할 수 있다.

사건과 경우의 수는 무엇일까?

생각 펼치기

오른쪽 그림과 같은 주사위를 한 번 던질 때, 다음 물음에 답해 보자.

1. 나올 수 있는 모든 경우를 구해 보자. 1, 2, 3, 4, 5, 6

2. 홀수의 눈이 나오는 경우는 모두 몇 가지인지 구해 보자. 3가지

풀이 1. 주사위를 한 번 던질 때, 나올 수 있는 모든 경우는 1, 2, 3, 4, 5, 6이다.
2. 주사위를 한 번 던질 때, 홀수의 눈이 나오는 경우는 1, 3, 5의 3가지이다.

경우의 수

생각 펼치기에서 주사위를 한 번 던질 때, 나올 수 있는 모든 경우는 ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅이다. 또, 홀수의 눈이 나오는 경우는 ⚀, ⚂, ⚄이므로 모두 3가지이다.

개념 쏙

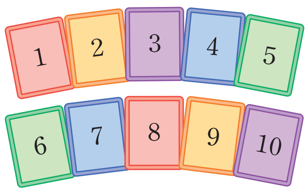
사건이 일어나는 가짓수를 그 사건의 경우의 수라고 한다. 경우의 수를 구할 때에는 모든 경우를 빠짐없이 생각하고, 같은 경우를 중복하여 생각하지 않도록 주의한다.

주사위를 한 번 던질 때, '홀수의 눈이 나온다.'와 같이 동일한 조건에서 여러 번 반복할 수 있는 실험이나 관찰에 의하여 나타나는 결과를 **사건**이라고 한다. 그리고 사건이 일어나는 가짓수를 그 사건의 경우의 수라고 한다.

확인하기 주사위를 한 번 던질 때, 사건, 경우, 경우의 수는 다음과 같다.

사건	경우	경우의 수
소수의 눈이 나온다.	⚁, ⚂, ⚄	3
2 이하의 눈이 나온다.	⚀, ⚁	2

1 1부터 10까지의 자연수가 각각 적힌 10장의 카드 중에서 한 장을 뽑을 때, 다음 사건이 일어나는 경우의 수를 구하시오.



(1) 6의 약수가 적힌 카드가 나온다. 4

(2) 3의 배수가 적힌 카드가 나온다. 3

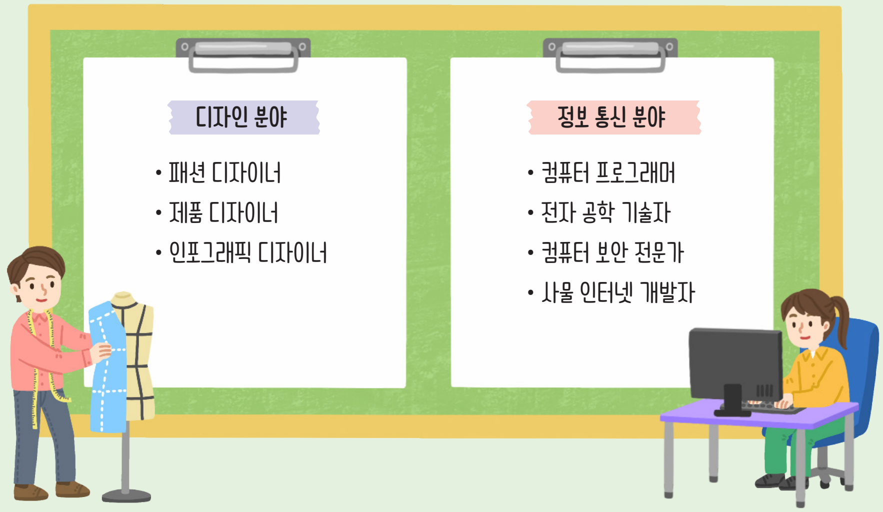
풀이 (1) 10장의 카드 중에서 한 장을 뽑을 때, 6의 약수가 나오는 경우는 1, 2, 3, 6이므로 경우의 수는 4이다.
(2) 10장의 카드 중에서 한 장을 뽑을 때, 3의 배수가 나오는 경우는 3, 6, 9이므로 경우의 수는 3이다.

사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 어떻게 구할까?

생각 펼치기

진로 교육

나연이는 학교 직업 체험으로 디자인 분야 또는 정보 통신 분야 직업 중에서 한 가지를 신청하려고 한다. 다음 물음에 답해 보자.



1. 디자인 분야 직업 중에서 한 가지를 선택하는 경우의 수를 구해 보자. 3

2. 정보 통신 분야 직업 중에서 한 가지를 선택하는 경우의 수를 구해 보자. 4

3. 디자인 분야 또는 정보 통신 분야 직업 중에서 한 가지를 선택하는 경우의 수를 구해 보자. 7

풀이 1. 3가지의 디자인 분야 직업 중에서 한 가지를 선택하는 경우의 수는 3이다.
2. 4가지의 정보 통신 분야 직업 중에서 한 가지를 선택하는 경우의 수는 4이다.
3. 3가지의 디자인 분야와 4가지의 정보 통신 분야 직업 중에서 한 가지를 선택하는 경우의 수는 $3+4=7$이다.

사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수

생각 펼치기에서 나연이가 디자인 분야 직업 중에서 한 가지를 선택하는 경우의 수는 3이고, 정보 통신 분야 직업 중에서 한 가지를 선택하는 경우의 수는 4이다. 그런데 디자인 분야와 정보 통신 분야를 동시에 선택할 수 없으므로 디자인 분야 또는 정보 통신 분야 직업 중에서 한 가지를 선택하는 경우의 수는

$$3+4=7$$

이다.

개념 쏙

사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때의 각 사건이 일어나는 경우의 수의 합으로 구할 수 있다.

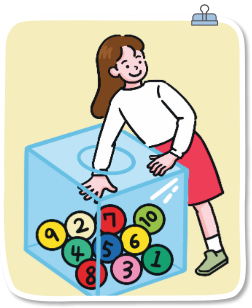
일반적으로 사건 A와 사건 B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 다음과 같다.

$$(\text{사건 } A \text{ 또는 사건 } B\text{가 일어나는 경우의 수})=m+n$$

2 성호는 유기 동물 입양 센터에서 고양이 3마리와 강아지 2마리 중에서 한 마리를 입양하려고 한다. 고양이 또는 강아지 중에서 한 마리를 입양하는 경우의 수를 구하시오. 5

풀이 유기 동물 입양 센터의 고양이는 3마리이고, 강아지는 2마리이다. 이때 두 사건은 동시에 일어나지 않으므로 구하는 모든 경우의 수는 $3+2=5$이다.

3 상자 속에 1부터 10까지의 자연수가 각각 적힌 10개의 공이 들어 있다. 이 상자에서 한 개의 공을 꺼낼 때, 3의 배수 또는 7의 배수가 적힌 공이 나오는 경우의 수를 구하시오. 4



풀이 상자에서 한 개의 공을 꺼낼 때, 3의 배수가 나오는 경우의 수는 3, 6, 9의 3가지이고, 7의 배수가 나오는 경우의 수는 7의 1가지이다. 이때 두 사건은 동시에 일어나지 않으므로 구하는 모든 경우의 수는 $3+1=4$이다.

함께 해 보기 1 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 6 또는 9인 경우의 수를 구하시오.

Tip 주사위 두 개가 서로 다르므로 $(1,\ 5)$와 $(5,\ 1)$은 다른 경우이다.

풀이 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수를 각각 x, y라고 하자. 나오는 두 눈의 수의 합이 6인 경우는 $x+y=6$이고 순서쌍 $(x,\ y)$로 나타내면

$(1,\ 5)$, $(2,\ 4)$, $(3,\ 3)$, $(4,\ 2)$, $(5,\ 1)$

이므로 나오는 두 눈의 수의 합이 6인 경우의 수는 5이다.

나오는 두 눈의 수의 합이 9인 경우는 $x+y=9$이고 순서쌍 $(x,\ y)$로 나타내면

$(3,\ 6)$, $(4,\ 5)$, $(5,\ 4)$, $(6,\ 3)$

이므로 나오는 두 눈의 수의 합이 9인 경우의 수는 4이다.

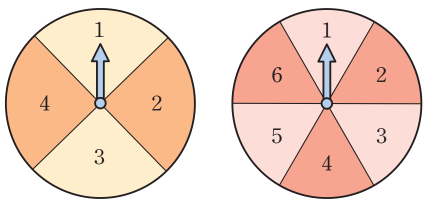
이때 두 눈의 수의 합이 6이면서 동시에 9일 수는 없으므로 구하는 경우의 수는

$5+4=9$

이다.

답 9

4 오른쪽 그림과 같이 4등분, 6등분된 서로 다른 두 회전판에 1부터 4까지의 자연수와 1부터 6까지의 자연수가 각각 적혀 있다. 두 회전판이 각각 돌다가 멈출 때, 두 회전판의 각 화살이 가리키는 자연수의 합이 4 또는 7인 경우의 수를 구하시오. (단, 화살이 경계선에 놓이는 경우는 생각하지 않는다.) 7



풀이 각 화살이 가리키는 자연수의 합이 4인 경우를 순서쌍으로 나타내면 $(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$이므로 경우의 수는 3이다.
또, 각 화살이 가리키는 자연수의 합이 7인 경우를 순서쌍으로 나타내면 $(1,\ 6)$, $(2,\ 5)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$이므로 경우의 수는 4이다. 이때 두 사건은 동시에 일어나지 않으므로 구하는 모든 경우의 수는 $3+4=7$이다.

사건 A와 사건 B가 동시에 일어나는 경우의 수는 어떻게 구할까?

생각 펼치기

수빈이는 현장 체험 학습을 가기 위해 모자와 신발을 고르던 중 마음에 드는 모자 3개와 신발 2켤레를 찾았다. 다음 물음에 답해 보자.

1. 모자 한 개를 선택하는 경우의 수를 구해 보자. 3

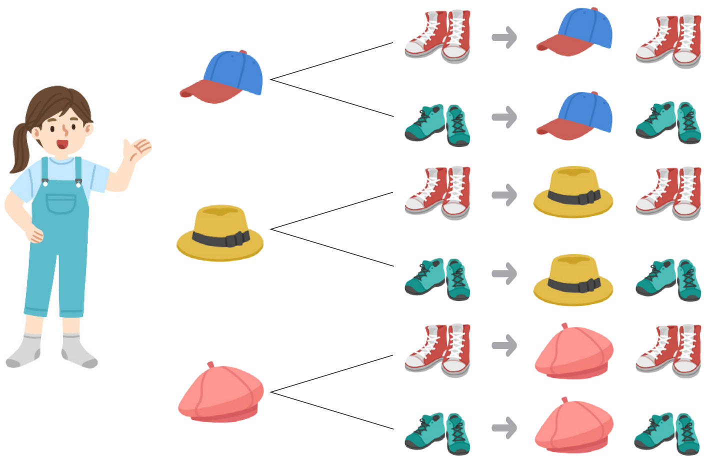
2. 신발 한 켤레를 선택하는 경우의 수를 구해 보자. 2

3. 모자 한 개와 신발 한 켤레를 짝 지어 선택하는 경우의 수를 구해 보자. 6

풀이 1. 3가지의 모자 중에서 한 개를 선택하는 경우의 수는 3이다.
2. 2가지의 신발 중에서 한 켤레를 선택하는 경우의 수는 2이다.
3. 3가지의 모자 중에서 한 개, 2가지의 신발 중에서 한 켤레를 짝 지어 선택하는 경우의 수는 $3\times2=6$이다.

사건 A와 사건 B가 동시에 일어나는 경우의 수

생각 펼치기에서 3가지의 모자 각각에 대하여 2가지의 신발 중에서 한 켤레를 선택할 수 있으므로 모자 한 개와 신발 한 켤레를 짝 지어 선택하는 경우는 다음과 같다.



Tip 두 사건이 동시에 일어나는 경우의 수를 구할 때, 순서쌍, 수형도, 표 등을 이용하면 각 경우를 체계적으로 분류할 수 있다.

이와 같이 모자 한 개를 선택하는 경우의 수는 3이고, 그 각각의 경우에 대하여 신발 한 켤레를 선택하는 경우의 수는 2이다. 따라서 모자 한 개와 신발 한 켤레를 짝 지어 선택하는 경우의 수는

$$3\times2=6$$

이다.

개념 쏙

두 사건 A, B가 동시에 일어난다는 것은 두 사건 A, B가 '연달아', '함께', '동시에' 일어난다는 것을 의미한다.

일반적으로 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면 사건 A와 사건 B가 동시에 일어나는 경우의 수는 다음과 같다.

$$(\text{사건 } A\text{와 사건 } B\text{가 동시에 일어나는 경우의 수})=m\times n$$

함께 해 보기 2 동전 한 개와 주사위 한 개를 동시에 던질 때, 일어나는 모든 경우의 수를 구하시오.

풀이 동전 한 개를 던질 때, 나오는 면은 앞면과 뒷면이므로 경우의 수는 2이고, 그 각각의 경우에 대하여 주사위 한 개를 던질 때 나오는 눈은 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 경우의 수는 6이다.

앞면
- 1 → (앞면, 1)
- 2 → (앞면, 2)
- 3 → (앞면, 3)
- 4 → (앞면, 4)
- 5 → (앞면, 5)
- 6 → (앞면, 6)

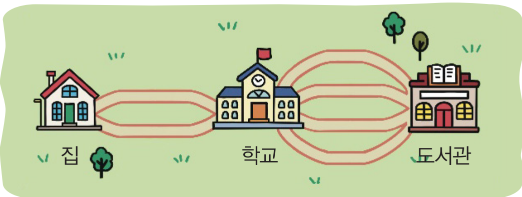
뒷면
- 1 → (뒷면, 1)
- 2 → (뒷면, 2)
- 3 → (뒷면, 3)
- 4 → (뒷면, 4)
- 5 → (뒷면, 5)
- 6 → (뒷면, 6)

따라서 동전 한 개와 주사위 한 개를 동시에 던질 때, 일어나는 경우의 수는 $2\times6=12$이다.

답 12

5 윤아네 집에서 학교까지 가는 길은 2가지이고, 학교에서 도서관까지 가는 길은 4가지이다. 윤아가 집에서 출발하여 학교를 거쳐 도서관까지 가는 모든 경우의 수를 구하시오. 8

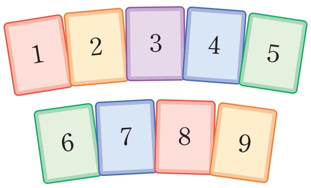
(단, 같은 지점은 두 번 이상 지나지 않는다.)



풀이 윤아네 집에서 학교를 거쳐 도서관까지 가는 모든 경우의 수는 윤아네 집에서 학교까지 가는 2가지 경우 각각에 대하여 학교에서 도서관까지 가는 4가지이므로 $2\times4=8$이다.

생각 더 나아가기 문제 해결 · 연결 · 의사소통

다음은 노을이와 누리가 1부터 9까지의 자연수가 각각 적힌 9장의 카드 중 한 장을 뽑아 나오는 수가 경우의 수가 되는 상황을 만들면서 나눈 대화이다. 누리의 말을 완성해 보고, 친구와 이야기해 보자. 풀이 참조



나는 숫자 5를 뽑았어. 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수가 5인 경우는 버스 노선이 3가지, 지하철 노선이 2가지 있을 때 버스 또는 지하철을 타는 경우야.

나는 숫자 8을 뽑았어. 두 사건 A와 B가 동시에 일어나는 경우의 수가 8인 경우는….

풀이 | 예시 | 누리: 나는 숫자 8을 뽑았어. 두 사건 A와 B가 동시에 일어나는 경우의 수가 8이 되는 경우는 어느 분식집 메뉴에 떡볶이 2종류와 김밥 4종류가 있을 때, 떡볶이와 김밥을 각각 한 가지씩 주문하는 경우야.

스스로 점검하기

1

다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 사건 A와 사건 B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면

(사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수)

$=\boxed{m+n}$

이다.

(2) 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면

(사건 A와 사건 B가 동시에 일어나는 경우의 수)

$=\boxed{m\times n}$

이다.

2

1부터 10까지의 자연수가 각각 적힌 구슬 10개가 들어 있다. 상자에서 한 개의 구슬을 꺼낼 때, 4의 약수가 적힌 구슬이 나오는 경우의 수를 구하시오. 3

풀이 상자에서 한 개의 구슬을 꺼낼 때, 4의 약수가 적힌 구슬이 나오는 경우는 1, 2, 4이므로 경우의 수는 3이다.

3

민재가 방과 후 학교 프로그램을 수강하려고 한다. 운동 4강좌, 만들기 3강좌 중에서 한 가지를 선택하여 수강하는 경우의 수를 구하시오. (단, 모든 강좌는 각각 서로 다르다.) 7

풀이 방과 후 학교 프로그램에서 운동은 4강좌, 만들기는 3강좌이다. 이때 두 사건은 동시에 일어나지 않으므로 구하는 모든 경우의 수는 $4+3=7$이다.

4

가영이네 반 학생들은 제주도 수학여행을 계획하는데, 폭포 코스로 엉또 폭포와 정방 폭포 중에서 한 곳을, 동굴 코스로 미천굴, 만장굴, 협재굴 중에서 한 곳을 선택하여 코스에 넣기로 하였다. 가영이네 반 학생들이 폭포 코스 중 한 곳을 구경한 다음, 동굴 코스 중 한 곳을 구경하도록 코스를 정하는 경우의 수를 구하시오. 6

풀이 폭포 코스 중 한 곳을 구경한 다음 동굴 코스 중 한 곳을 구경하는 경우의 수는 폭포 코스 2가지 경우 각각에 대하여 동굴 코스 3가지이므로 $2\times3=6$이다.

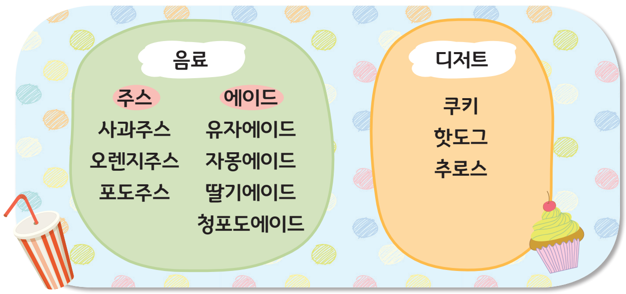
5

동아리 회장과 부회장을 뽑는 선거에 선형, 유석, 예은, 수정이가 후보에 올랐다. 4명의 학생 중에서 동아리 회장 1명, 부회장 1명을 뽑는 경우의 수를 구하시오. 12

풀이 4명의 학생 중 회장을 뽑는 경우의 수는 4가지이고, 부회장과 회장은 동시에 할 수 없으므로 부회장을 뽑는 경우의 수는 3가지이다. 따라서 동아리 회장과 부회장을 각각 1명씩 뽑는 경우의 수는 $4\times3=12$이다.

6 실생활   문제 해결

놀이공원에 간 하늘이가 아래의 메뉴판을 보고 음식을 주문하려고 할 때, 다음 물음에 답하시오.



(1) 주스 또는 에이드 중에서 한 가지를 골라 주문하는 경우의 수를 구하시오. 7

(2) 음료와 디저트를 각각 한 가지씩 골라 주문하는 경우의 수를 구하시오. 21

풀이 (1) 주스를 고르는 경우의 수는 3, 에이드를 고르는 경우의 수는 4이므로 주스 또는 에이드 중에서 한 가지를 골라 주문하는 경우의 수는 $3+4=7$이다.

(2) 음료를 고르는 경우의 수는 7, 디저트를 고르는 경우의 수는 3이므로 음료와 디저트를 각각 한 가지씩 골라 주문하는 경우의 수는 $7\times3=21$이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/TVf2JUUku9asJkPZ

자기 평가	
	경우의 수를 구할 수 있다.
	경우의 수를 이용하여 일상생활에서 나타나는 여러 가지 상황을 표현할 수 있다.

02 확률의 뜻과 성질

이 단원에서 배우는 용어와 기호

확률

[학습 목표] 확률의 개념과 그 기본 성질을 이해한다.

확률은 무엇일까?

생각 펼치기

다음과 같이 주사위 한 개를 여러 번 반복하여 던지는 실험을 해 보고, 물음에 답해 보자.

1. 각자 주사위 한 개를 50번씩 던져서 6의 눈이 나온 횟수와 그 상대도수를 구해 보자. 풀이 참조

2. 여러 명의 실험 결과를 모아 다음 표를 완성해 보자.

주사위를 던진 횟수(회)	50	100	200	400
6의 눈이 나온 횟수(회)	5	19	36	66
상대도수	0.1	0.19	0.18	0.165

3. **2**의 실험 결과를 이용하여 주사위를 던진 횟수가 많아질수록 6의 눈이 나온 횟수의 상대도수는 어떤 값에 가까워질지 추측해 보자. $\frac{1}{6}$

풀이 1. |예시| 주사위 한 개를 50번 던져서 6의 눈이 나온 횟수가 5라고 할 때, 그 상대도수는 $\frac{5}{50}=0.1$이다.

2. |예시| $\frac{5}{50}=\frac{1}{10}=0.1$, $\frac{19}{100}=0.19$, $\frac{36}{200}=\frac{9}{50}=0.18$, $\frac{66}{400}=\frac{33}{200}=0.165$

3. 주사위를 던진 횟수가 많아질수록 6의 눈이 나온 횟수의 상대도수는 $\frac{1}{6}$에 가까워진다.

Tip
(상대도수)
$=\frac{\text{(앞면이 나온 횟수)}}{\text{(던진 횟수)}}$

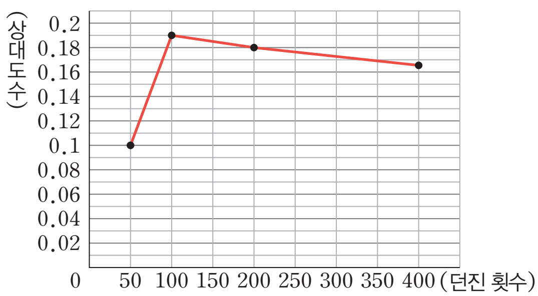
https://code.jihak.co.kr/qr/ZGkj9wg5rM88mRYm

확률

생각 펼치기 의 주사위 던지기 실험 결과의 한 예를 표로 나타내면 다음과 같다.

주사위를 던진 횟수(회)	50	100	200	400
6의 눈이 나온 횟수(회)	5	19	36	66
상대도수	0.1	0.19	0.18	0.165

위의 표를 보고, 상대도수의 분포를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



위의 상대도수의 분포를 나타낸 그래프에서 주사위를 던진 횟수가 많아질수록 6의 눈이 나온 횟수의 상대도수는 일정한 값 $\frac{1}{6}$에 가까워짐을 알 수 있다.

베르누이(Bernoulli, J., 1654~1705)는 확률론의 연구에 크게 기여했다.
(출처: 고상숙 외 1인, 『청소년을 위한 서양수학사』)

이와 같이 모든 경우가 일어날 가능성이 같은 실험이나 관찰을 여러 번 반복할 때, 어떤 사건 A가 일어나는 상대도수가 일정한 값에 가까워지면 이 일정한 값은 일어날 수 있는 모든 경우의 수에 대한 사건 A가 일어나는 경우의 수의 비율과 같다.

예를 들어 주사위 한 개를 던질 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 6이고, 6의 눈이 나오는 경우의 수는 1이다. 따라서 주사위 한 개를 여러 번 던질 때, 던진 횟수가 많아질수록 6의 눈이 나오는 횟수의 상대도수는 $\frac{1}{6}$에 가까워진다.

1 ← 6의 눈이 나오는 경우의 수
6 ← 나올 수 있는 모든 경우의 수

일반적으로 각 경우가 일어날 가능성이 같은 어떤 실험이나 관찰에서, 일어날 수 있는 모든 경우의 수에 대한 사건 A가 일어나는 경우의 수의 비율을 사건 A가 일어날 **확률**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

어떤 실험이나 관찰에서 각 경우가 일어날 가능성이 같다고 할 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수가 n이고, 사건 A가 일어나는 경우의 수가 a이면 사건 A가 일어날 확률 p는

$$p=\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{모든 경우의 수})}=\frac{a}{n}$$

확률은 주로 확률을 뜻하는 영어 단어 probability의 첫 글자 p를 사용하여 나타낸다.

확인하기 한 개의 동전을 던질 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 $\boxed{2}$이고, 앞면이 나오는 경우의 수는 $\boxed{1}$이므로 앞면이 나올 확률은 $\boxed{\frac{1}{2}}$이다.

Tip 동전의 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$이라는 것은 동전을 10회 던지면 그 중 5회는 반드시 앞면이 나온다는 의미가 아니다. 동전의 앞면이 나올 확률은 한 개의 동전을 던질 때 일어날 수 있는 앞면 또는 뒷면이 나오는 2가지 경우 중 앞면이 나오는 경우 1가지의 비율을 의미한다.

1 1부터 9까지의 자연수가 각각 적힌 모양과 크기가 같은 공 9개가 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼낼 때, 홀수가 적힌 공이 나올 확률을 구하시오. $\frac{5}{9}$

풀이 일어날 수 있는 모든 경우는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 9가지이고, 홀수가 나오는 경우는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지이다. 따라서 홀수가 적힌 공이 나올 확률은 $\frac{5}{9}$이다.

2 주스 선물 세트 상자에 포도주스가 3병, 사과주스가 3병, 오렌지주스가 4병 들어 있다. 이 상자에서 주스 한 병을 임의로 꺼낼 때, 사과주스가 나올 확률을 구하시오. $\frac{3}{10}$

풀이 일어날 수 있는 모든 경우는 포도주스 3병, 사과주스 3병, 오렌지주스 4병으로 10가지이고, 그중 사과주스가 나오는 경우는 3가지이므로 구하는 확률은 $\frac{3}{10}$이다.

함께 해 보기 1 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 8일 확률을 구하시오.

풀이 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수를 각각 x, y라고 하자. 이때 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$이다. 또한, 나오는 두 눈의 수의 합이 8인 경우는 $x+y=8$이고, 순서쌍 (x, y)로 나타내면

$(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$

이므로 두 눈의 수의 합이 8인 경우의 수는 5이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{5}{36}$이다.

답 $\frac{5}{36}$

Tip 확률을 구하는 순서
❶ 모든 경우의 수를 구한다. ➡ n
❷ 사건 A가 일어나는 경우의 수를 구한다. ➡ a
❸ (사건 A가 일어날 확률) $=\frac{a}{n}$

3 100원짜리 동전 한 개와 500원짜리 동전 한 개를 동시에 던질 때, 둘 중 한 개만 앞면이 나올 확률을 구하시오. $\frac{1}{2}$

풀이 100원짜리 동전 한 개와 500원짜리 동전 한 개를 동시에 던질 때, 일어날 수 있는 모든 경우는 $2\times2=4$(가지)이고, 둘 중 한 개만 앞면이 나오는 경우는 (앞면, 뒷면), (뒷면, 앞면)의 2가지이다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$이다.

500원 \ 100원	앞면	뒷면
앞면	(앞면, 앞면)	(앞면, 뒷면)
뒷면	(뒷면, 앞면)	(뒷면, 뒷면)

4 인영이와 상원이가 가위바위보를 한 번 할 때, 상원이가 이길 확률을 구하시오. $\frac{1}{3}$

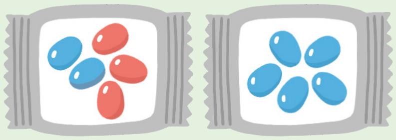
풀이 인영이와 상원이가 가위바위보 게임을 한 번 할 때 일어날 수 있는 모든 경우는 $3\times3=9$(가지)이고, 상원이가 이기는 경우는 (가위, 바위), (바위, 보), (보, 가위)의 3가지이다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$이다.

인영 \ 상원	가위	바위	보
가위	(가위, 가위)	(가위, 바위)	(가위, 보)
바위	(바위, 가위)	(바위, 바위)	(바위, 보)
보	(보, 가위)	(보, 바위)	(보, 보)

확률에는 어떤 성질이 있을까?

생각 펼치기

오른쪽 그림의 A 봉지에는 빨간색 초콜릿 3개와 파란색 초콜릿 2개가 들어 있고, B 봉지에는 파란색 초콜릿만 5개 들어 있다고 할 때, 다음 물음에 답해 보자.



A 봉지　　B 봉지

1. A 봉지에서 초콜릿 한 개를 임의로 꺼낼 때, 빨간색 초콜릿이 나올 확률과 파란색 초콜릿이 나올 확률을 각각 구해 보자. 빨간색 초콜릿이 나올 확률: $\frac{3}{5}$, 파란색 초콜릿이 나올 확률: $\frac{2}{5}$

2. B 봉지에서 초콜릿 한 개를 임의로 꺼낼 때, 빨간색 초콜릿이 나올 확률과 파란색 초콜릿이 나올 확률을 각각 구해 보자. 빨간색 초콜릿이 나올 확률: 0, 파란색 초콜릿이 나올 확률: 1

풀이 1. 일어날 수 있는 모든 경우는 빨간색 초콜릿 3개, 파란색 초콜릿 2개로 5가지이다. A 봉지에서 초콜릿 한 개를 임의로 꺼낼 때, 빨간색 초콜릿이 나올 확률은 $\frac{3}{5}$, 파란색 초콜릿이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$이다.
2. 일어날 수 있는 모든 경우는 파란색 초콜릿 5개로 5가지이다. B봉지에서 초콜릿 한 개를 임의로 꺼낼 때, 빨간색 초콜릿이 나올 확률은 $\frac{0}{5}=0$, 파란색 초콜릿이 나올 확률은 $\frac{5}{5}=1$이다.

생각 펼치기의 A 봉지에 들어 있는 5개의 초콜릿 중에서 빨간색이 3개, 파란색이 2개이므로 A 봉지에서 초콜릿 한 개를 꺼낼 때, 빨간색 초콜릿이 나올 확률은 $\frac{3}{5}$이고, 파란색 초콜릿이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$이다.

개념 쏙

B 봉지에서 빨간색 초콜릿이 나올 사건은 절대로 일어나지 않을 사건이고, 파란색 초콜릿이 나올 사건은 반드시 일어날 사건이다.

또, B 봉지에 들어 있는 5개의 초콜릿은 모두 파란색이므로 B 봉지에서 초콜릿 한 개를 꺼낼 때, 빨간색 초콜릿이 나올 확률은

$$\frac{0}{5}=0$$

이고, 파란색 초콜릿이 나올 확률은

$$\frac{5}{5}=1$$

이다.

일반적으로 어떤 실험이나 관찰에서 각 경우가 일어날 가능성이 같다고 할 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수가 n, 어떤 사건 A가 일어나는 경우의 수가 a이면

$$0\le a\le n$$

이다. 따라서 사건 A가 일어날 확률을 p라고 하면 $p=\frac{a}{n}$이므로

$$0\le p\le 1$$

이다. 특히, 절대로 일어나지 않을 사건의 확률은 0이고, 반드시 일어날 사건의 확률은 1이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

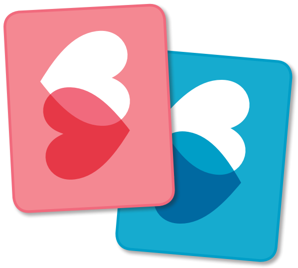
확률의 성질 (1)

1. 어떤 사건이 일어날 확률을 p라고 하면 $0 \le p \le 1$이다.

2. 절대로 일어나지 않을 사건의 확률은 0이다.

3. 반드시 일어날 사건의 확률은 1이다.

5 어느 게임 카드 한 벌에 모양과 크기가 같은 빨간색 카드 26장과 파란색 카드 28장이 들어 있다. 여기서 카드 한 장을 임의로 꺼낼 때, 다음 물음에 답하시오.



(1) 빨간색 카드를 꺼낼 확률을 구하시오. $\frac{13}{27}$

(2) 빨간색 카드 또는 파란색 카드를 꺼낼 확률을 구하시오. 1

(3) 노란색 카드를 꺼낼 확률을 구하시오. 0

풀이 (1) 일어날 수 있는 모든 경우는 빨간색 카드 26장, 파란색 카드 28장으로 54가지이고, 그중 빨간색 카드를 꺼내는 경우는 26가지이므로 구하는 확률은 $\frac{26}{54}=\frac{13}{27}$이다.

(2) 카드의 색상이 빨간색 또는 파란색이므로 빨간색 카드 또는 파란색 카드를 꺼내는 경우는 54가지이다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{54}{54}=1$이다.

(3) 노란색 카드는 없으므로 노란색 카드를 꺼내는 경우는 0가지이다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{0}{54}=0$이다.

어떤 사건이 일어나지 않을 확률을 어떻게 구할까?

생각 펼치기

환경·지속 가능발전 교육

재희네 반 학생 25명 중에서 환경 동아리 학생은 6명으로, 점심시간마다 플라스틱과 일반 쓰레기를 구분해서 버리도록 안내하는 활동을 하고 있다. 재희네 반 학생 중에서 한 명을 임의로 뽑을 때, 다음 물음에 답해 보자.

1. 이 학생이 환경 동아리 학생일 확률을 구해 보자. $\frac{6}{25}$

2. 이 학생이 환경 동아리 학생이 아닐 확률을 구해 보자. $\frac{19}{25}$

풀이 1. 전체 25명의 학생 중에서 환경 동아리 학생은 6명이므로 재희네 반 학생 중에서 한 명을 임의로 뽑을 때, 이 학생이 환경 동아리 학생일 확률은 $\frac{6}{25}$이다.
2. 전체 25명의 학생 중에서 환경 동아리가 아닌 학생은 $25-6=19$(명)이므로 재희네 반 학생 중에서 한 명을 임의로 뽑을 때, 이 학생이 환경 동아리 학생이 아닐 확률은 $\frac{19}{25}$이다.

생각 펼치기에서 재희네 반 학생 25명 중 환경 동아리 학생은 6명이므로 재희네 반 학생 중에서 한 명을 임의로 뽑을 때, 이 학생이 환경 동아리 학생일 확률은 $\frac{6}{25}$이다. 이때 환경 동아리 학생이 아닌 학생은 $25-6=19$(명)이므로 환경 동아리 학생이 아닐 확률은 $\frac{19}{25}$이다. 즉,

$$\begin{aligned}(\text{환경 동아리 학생이 아닐 확률}) &= \frac{19}{25} \\ &= 1-\frac{6}{25} \\ &= 1-(\text{환경 동아리 학생일 확률})\end{aligned}$$

이다.

개념 쏙

모든 경우의 수를 n, 사건 A가 일어나는 경우의 수를 a라고 하면 사건 A가 일어나지 않는 경우의 수는 $n-a$이다. 따라서
(사건 A가 일어나지 않을 확률)
$=\frac{n-a}{n}=1-\frac{a}{n}$
이다. 즉, 사건 A가 일어날 확률을 p라고 하면 $p=\frac{a}{n}$이므로
(사건 A가 일어나지 않을 확률)
$=1-p$
이다.

개념 쏙

사건 A가 일어날 확률과 사건 A가 일어나지 않을 확률의 합은 1이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

확률의 성질 (2)

사건 A가 일어날 확률을 p라고 하면

$$(\text{사건 } A\text{가 일어나지 않을 확률})=1-p$$

함께 해 보기 2

서로 다른 동전 두 개를 동시에 던질 때, 적어도 하나는 앞면이 나올 확률을 구하시오.

풀이 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던질 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수는

$$2\times2=4$$

이다. 적어도 하나는 앞면이 나오는 사건은 모두 뒷면이 나오는 경우를 제외한 사건이고, 모두 뒷면이 나오는 경우를 순서쌍으로 나타내면

(뒷면, 뒷면)

이므로 경우의 수는 1이다.

즉, 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던질 때, 모두 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 구하는 확률은

$$1-(\text{모두 뒷면이 나올 확률})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

이다.

답 $\frac{3}{4}$

6 두 사람이 가위바위보를 한 번 할 때, 승부가 날 확률을 구하시오. $\frac{2}{3}$

풀이 두 사람이 가위바위보를 한 번 할 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 9이다. 이때 승부가 나지 않는 경우는 비기는 경우의 3가지이므로 승부가 나지 않을 확률은 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$이다.

따라서 (승부가 날 확률)$=1-$(승부가 나지 않을 확률)$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이다.

생각 더 나아가기 문제 해결 의사소통

다음은 세라와 다온이가 서로 다른 주사위 두 개를 동시에 던질 때, 나온 두 눈의 수의 합이 4 이상일 확률을 구하는 방법을 각각 얘기한 것이다. 누구의 방법이 더 편리한지 친구와 이야기해 보자. 풀이 참조

세라: 두 눈의 수의 합이 4 이상인 경우의 수를 모두 찾아서 확률을 구했어.

다온: 두 눈의 수의 합이 3 이하인 경우의 수를 모두 찾아서 확률을 구했어.

풀이

서로 다른 주사위를 각각 A, B라고 하자.

세라: 두 눈의 수의 합이 4 이상인 경우를 표로 정리하면 다음 표의 색칠한 부분과 같다.

B \ A	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

두 눈의 수의 합이 4 이상인 경우의 수는 33이므로 두 눈의 수의 합이 4 이상일 확률은 $\frac{33}{36}=\frac{11}{12}$이다.

다온: 두 눈의 수의 합이 3 이하인 경우는 (1, 1), (1, 2), (2, 1)뿐이므로 두 눈의 수의 합이 3 이하일 확률은 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$이다.

따라서 두 눈의 수의 합이 4 이상일 확률은 $1-$(두 눈의 수의 합이 3 이하일 확률)과 같으므로 $1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$이다.

세라의 방법은 사건의 경우가 너무 많아 헤아리기 불편한 반면, 다온이의 방법은 사건의 경우가 3가지뿐이므로 헤아리기 편리하다.

스스로 점검하기

1

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 어떤 실험이나 관찰에서 각 경우가 일어날 가능성이 같다고 할 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수가 n이고, 사건 A가 일어나는 경우의 수가 a이면 사건 A가 일어날 확률 p는 $\boxed{\frac{a}{n}}$이다.

(2) 어떤 사건이 일어날 확률을 p라고 하면 $\boxed{0} \le p \le \boxed{1}$이다.

(3) 사건 A가 일어날 확률을 p라고 하면 사건 A가 일어나지 않을 확률은 $\boxed{1-p}$이다.

2

빨간 공 2개, 파란 공 3개, 노란 공 5개가 들어 있는 상자에서 한 개의 공을 임의로 꺼낼 때, 파란 공이 나올 확률을 구하시오. $\frac{3}{10}$

풀이 상자에서 한 개의 공을 임의로 꺼낼 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 10이고 파란 공이 나오는 경우의 수는 3이므로 구하는 확률은 $\frac{3}{10}$이다.

3

주사위 한 개를 던질 때, 다음 확률을 구하시오.

(1) 6의 약수의 눈이 나올 확률 $\frac{2}{3}$

(2) 음수의 눈이 나올 확률 0

(3) 자연수의 눈이 나올 확률 1

풀이 (1) 주사위 한 개를 던질 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 6이고, 6의 약수의 눈이 나오는 경우는 1, 2, 3, 6이므로 경우의 수는 4이다. 따라서 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이다.

(2) 주사위 한 개를 던질 때, 음수의 눈이 나오는 경우는 없으므로 음수의 눈이 나올 확률은 0이다.

(3) 주사위 한 개를 던질 때 나온 눈의 수는 모두 자연수이므로 자연수의 눈이 나올 확률은 1이다.

4

다음은 인선이네 반 학생 25명의 혈액형을 조사하여 표로 나타낸 것이다. 인선이네 반 학생 중에서 한 명을 임의로 뽑을 때, 그 학생의 혈액형이 O형일 확률을 구하시오. $\frac{6}{25}$

혈액형	A	B	AB	O	합계
학생 수(명)	7	7	5	6	25

풀이 인선이네 반 학생 중에서 한 명을 임의로 뽑을 때 일어날 수 있는 모든 경우는 A형 7명, B형 7명, AB형 5명, O형 6명으로 경우의 수는 25이고, 혈액형이 O형인 경우의 수는 6이므로 구하는 확률은 $\frac{6}{25}$이다.

5

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 곱이 짝수일 확률을 구하시오. $\frac{3}{4}$

풀이 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$이다. 두 눈의 곱이 홀수인 경우는 (1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)로 9가지이므로 두 눈의 곱이 홀수일 확률은 $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$이다. 따라서

(두 눈의 곱이 짝수일 확률)

$=1-$(두 눈의 곱이 홀수일 확률)

$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

이다.

6 사고력 UP

추론

흰 공과 검은 공을 합하여 21개가 들어 있는 상자에서 한 개의 공을 임의로 꺼낼 때, 흰 공이 나올 확률은 $\frac{4}{7}$이다. 이 상자 안에 들어 있는 검은 공의 개수를 구하시오. 9

풀이 상자에서 한 개의 공을 임의로 꺼낼 때, 흰 공이 나올 확률이 $\frac{4}{7}=\frac{12}{21}$이므로 흰 공은 12개 들어 있다. 따라서 상자 안에 들어 있는 검은 공의 개수는 $21-12=9$이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/wnfODXJkdiAUa4Wq

자기 평가	
확률의 개념과 그 기본 성질을 이해한다.	
확률을 바탕으로 비판적으로 사고하는 태도를 가진다.	

수학으로 세상 보기

경우의 수를 이용하여 확률을 구하려면?

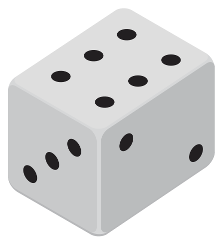
문제 해결 추론

경우의 수를 이용하여 확률을 구하면 실험이나 관찰을 하지 않고도 어떤 사건이 일어날 가능성을 예측할 수 있다. 그러나 경우의 수를 이용하여 확률을 구하기 위해서는 꼭 필요한 조건이 있다.

다음 두 학생의 대화를 읽고, 어떤 조건이 필요한지 알아보자.

일반적으로 주사위를 던져서 1의 눈이 나올 확률은 나올 수 있는 모든 경우의 수에 대한 1의 눈이 나오는 경우의 수의 비율인 $\frac{1}{6}$과 같다. 이는 일반적으로 주사위를 던져서 1, 2, 3, 4, 5, 6의 눈이 나올 가능성이 모두 같다고 할 수 있기 때문이다. 경우의 수를 이용하여 확률을 구하는 것은 어떤 실험이나 관찰에서 각 경우가 일어날 가능성이 같다고 할 때에만 가능하다. 만약 주사위의 모양이 달라진다면 어떻게 될까?

위 만화의 오른쪽 그림과 같은 직육면체 모양의 주사위는 모든 면의 넓이가 같지 않으므로 1, 2, 3, 4, 5, 6의 눈이 나올 가능성이 모두 같다고 할 수 없다. 따라서 이러한 모양의 주사위를 던져서 1의 눈이 나올 확률은 경우의 수를 이용하여 구할 수 없고, 실제로 여러 번 반복해서 던져서 1의 눈이 나오는 횟수의 상대도수가 어느 값에 가까워지는지를 확인해야 한다.



수학에서 확률은 어떤 실험이나 관찰에서 각 경우가 일어날 가능성이 같을 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수에 대한 사건이 일어나는 경우의 수의 비율로 정의된다. 따라서 경우의 수를 이용하여 확률을 구하려면 주어진 실험이나 관찰에서 각 경우가 일어날 가능성이 같다고 할 수 있는지를 먼저 살펴보아야 한다.

03 확률의 계산

[학습 목표] 확률을 구할 수 있다.

사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률은 어떻게 구할까?

생각 펼치기

민주시민 교육

어느 중학교는 학생들의 안전을 위해 복도와 계단 등에 폐쇄 회로 TV(CCTV)를 설치하는 안건에 대해 세 학급의 학생 64명에게 설문을 실시하여 다음 표와 같은 결과를 얻었다. 세 학급의 학생 중에서 한 명을 임의로 선택할 때, 다음 물음에 답해 보자.

의견	적극 찬성	찬성	보통	반대	적극 반대	합계
학생 수(명)	10	23	13	13	5	64

1. 적극 찬성으로 답한 학생이 선택될 확률과 찬성으로 답한 학생이 선택될 확률을 각각 구해 보자. 적극 찬성으로 답한 학생일 확률: $\frac{5}{32}$, 찬성으로 답한 학생일 확률: $\frac{23}{64}$

2. 적극 찬성 또는 찬성으로 답한 학생이 선택될 확률을 구해 보자. $\frac{33}{64}$

풀이 1. 전체 64명 중에서 적극 찬성으로 답한 학생은 10명이므로 한 명을 임의로 선택할 때, 그 사람이 적극 찬성으로 답한 학생일 확률은 $\frac{10}{64}=\frac{5}{32}$이다. 또, 찬성으로 답한 학생은 33명이므로 찬성으로 답한 학생일 확률은 $\frac{23}{64}$이다.
2. 적극 찬성 또는 찬성으로 답한 학생은 $10+23=33$(명)이다. 따라서 한 명을 임의로 선택할 때, 그 사람이 적극 찬성 또는 찬성으로 답한 학생일 확률은 $\frac{33}{64}$이다.

사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률

생각 펼치기에서 적극 찬성으로 답한 학생이 선택될 확률은 $\frac{10}{64}$, 찬성으로 답한 학생이 선택될 확률은 $\frac{23}{64}$이다.

이때 적극 찬성으로 답한 학생이 선택될 사건과 찬성으로 답한 학생이 선택될 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 적극 찬성 또는 찬성으로 답한 학생이 선택될 사건의 경우의 수는

$$10+23=33$$

이다.

따라서 적극 찬성 또는 찬성으로 답한 학생이 선택될 확률은 $\frac{33}{64}$이고, 이 확률은 적극 찬성으로 답한 학생이 선택될 확률인 $\frac{10}{64}$과 찬성으로 답한 학생이 선택될 확률인 $\frac{23}{64}$의 합과 같다. 즉, 적극 찬성 또는 찬성으로 답한 학생이 선택될 확률은

$$\frac{10}{64}+\frac{23}{64}=\frac{33}{64}$$

이다.

개념 쏙

모든 경우의 수를 n, 사건 A가 일어나는 경우의 수를 a, 사건 B가 일어나는 경우의 수를 b라고 하면, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $a+b$이므로 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률은

$\frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}$이다.

즉, 각 사건이 일어날 확률의 합과 같다.

일반적으로 같은 조건의 실험이나 관찰에서 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A가 일어날 확률을 p, 사건 B가 일어날 확률을 q라고 하면 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률은 다음과 같다.

$$(\text{사건 } A \text{ 또는 사건 } B\text{가 일어날 확률})=p+q$$

함께 해 보기 1 **서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 7 또는 8일 확률을 구하시오.**

풀이 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 두 눈의 수를 각각 x, y라고 하자.

이때 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$이다.

나오는 두 눈의 수의 합이 7인 경우는 $x+y=7$이고, 순서쌍 (x, y)로 나타내면

$(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$

이므로 경우의 수는 6이고, 두 눈의 수의 합이 7일 확률은 $\frac{6}{36}$이다.

또, 나오는 두 눈의 수의 합이 8인 경우는 $x+y=8$이고, 순서쌍 (x, y)로 나타내면

$(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$

이므로 경우의 수는 5이고, 두 눈의 수의 합이 8일 확률은 $\frac{5}{36}$이다.

두 사건은 동시에 일어나지 않으므로 구하는 확률은

$$\frac{6}{36}+\frac{5}{36}=\frac{11}{36}$$

이다.

답 $\frac{11}{36}$

1 **다음은 서영이네 반 학생들이 가장 좋아하는 스포츠 경기 종목이 무엇인지 한 가지씩 응답한 결과를 조사하여 나타낸 표이다. 서영이네 반 학생 중에서 한 명을 임의로 선택할 때, 그 학생이 가장 좋아하는 스포츠 경기 종목이 축구 또는 피구일 확률을 구하시오.** $\frac{14}{25}$

경기 종목	축구	발야구	농구	피구	합계
학생 수(명)	8	6	5	6	25

풀이 서영이네 반 학생 25명 중에서 축구를 가장 좋아하는 학생은 8명이므로 축구를 가장 좋아하는 학생이 선택될 확률은 $\frac{8}{25}$이다. 또, 피구를 가장 좋아하는 학생은 6명이므로 피구를 가장 좋아하는 학생이 선택될 확률은 $\frac{6}{25}$이다. 축구를 가장 좋아하는 학생이 선택될 사건과 피구를 가장 좋아하는 학생이 선택될 사건은 동시에 일어나지 않으므로 구하는 확률은 $\frac{8}{25}+\frac{6}{25}=\frac{14}{25}$이다.

2 **각 면에 1부터 12까지의 자연수가 각각 적힌 정십이면체 모양의 주사위를 한 번 던질 때, 나오는 눈의 수가 4의 배수 또는 소수일 확률을 구하시오.** $\frac{2}{3}$

풀이 정십이면체 모양의 주사위를 던졌을 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는 12이다. 4의 배수가 나오는 경우는 4, 8, 12의 3가지이므로 나오는 눈의 수가 4의 배수일 확률은 $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$이다. 또, 소수가 나오는 경우는 2, 3, 5, 7, 11의 5가지이므로 나오는 눈의 수가 소수일 확률은 $\frac{5}{12}$이다. 4의 배수의 눈이 나오는 사건과 소수의 눈이 나오는 사건은 동시에 일어나지 않으므로 구하는 확률은 $\frac{3}{12}+\frac{5}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$이다.

사건 A와 사건 B가 동시에 일어날 확률은 어떻게 구할까?

생각 펼치기

진로 교육

민영이네 학교에서는 진로 체험의 날에 제과 제빵 프로그램 3종류와 공예 프로그램 2종류를 운영한다고 한다. 민영이가 이 중에서 제과 제빵 프로그램과 공예 프로그램을 각각 한 개씩 임의로 선택하려고 할 때, 다음 물음에 답해 보자.

1. 민영이가 선택할 수 있는 모든 경우의 수를 구해 보자. 6

2. 민영이가 쿠키 만들기와 가죽 공예를 선택할 확률을 구해 보자. $\frac{1}{6}$

풀이 1. 제과 제빵 프로그램 3종류와 공예 프로그램 2종류 중에서 각각 한 개씩 선택할 수 있는 모든 경우의 수는 $3\times2=6$이다.
2. 제과 제빵 프로그램 중에서 쿠키 만들기를, 공예 프로그램 중에서 가죽 공예를 동시에 선택하는 경우의 수는 1이므로 쿠키 만들기와 가죽 공예를 선택할 확률은 $\frac{1}{6}$이다.

사건 A와 사건 B가 동시에 일어날 확률

생각 펼치기에서 민영이가 제과 제빵 프로그램 중에서 한 개를 선택하는 경우의 수는 3이고, 그 각각에 대하여 공예 프로그램 중에서 한 개를 선택하는 경우의 수는 2이므로 선택할 수 있는 모든 경우의 수는 $3\times2=6$이다.

이때 제과 제빵 프로그램 중에서 쿠키 만들기를 선택하고, 동시에 공예 프로그램 중에서 가죽 공예를 선택하는 경우의 수는 1이므로 민영이가 쿠키 만들기와 가죽 공예를 선택할 확률은 $\frac{1}{6}$이다. 이 확률은 제과 제빵 프로그램에서 쿠키 만들기를 선택할 확률 $\frac{1}{3}$과 공예 프로그램에서 가죽 공예를 선택할 확률 $\frac{1}{2}$의 곱과 같다. 즉,

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

이다.

카르다노(Cardano, G., 1501～1576)는 이탈리아의 수학자로, 확률을 활용하여 게임에서 이기는 방법을 연구했다. (출처: 김화영, 『교과서를 만든 수학자들』)

개념 쏙

두 사건 A, B가 일어나는 모든 경우의 수를 각각 m, n이라 하고 사건 A가 일어나는 경우의 수를 a, 사건 B가 일어나는 경우의 수를 b라고 하면, 사건 A와 사건 B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $a\times b$이므로 사건 A와 사건 B가 동시에 일어날 확률은 $\frac{a\times b}{m\times n}=\frac{a}{m}\times\frac{b}{n}$이다. 즉, 각 사건이 일어날 확률의 곱과 같다.

일반적으로 같은 조건의 실험이나 관찰에서 두 사건 A, B가 서로 영향을 끼치지 않을 때, 사건 A가 일어날 확률을 p, 사건 B가 일어날 확률을 q라고 하면 사건 A와 사건 B가 동시에 일어날 확률은 다음과 같다.

$$(\text{사건 } A\text{와 사건 } B\text{가 동시에 일어날 확률})=p\times q$$

함께 해 보기 2 한 개의 동전과 한 개의 주사위를 동시에 던질 때, 동전은 뒷면이 나오고 주사위는 5 이상의 눈이 나올 확률을 구하시오.

풀이 한 개의 동전을 던질 때, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

또, 한 개의 주사위를 던질 때, 5 이상의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다.

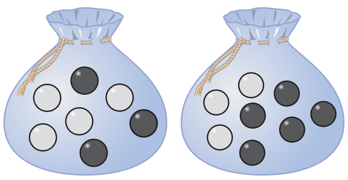
두 사건은 서로 영향을 끼치지 않으므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

이다.

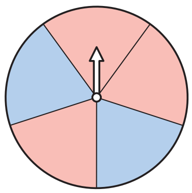
답 $\frac{1}{6}$

3 오른쪽 그림과 같이 한 주머니에는 흰 공 4개와 검은 공 3개가 들어 있고, 다른 한 주머니에는 흰 공 3개와 검은 공 5개가 들어 있다. 두 주머니에서 각각 공을 한 개씩 임의로 꺼낼 때, 두 공이 모두 흰 공일 확률을 구하시오. $\frac{3}{14}$



풀이 왼쪽 주머니에 들어 있는 공 7개 중에서 흰 공은 4개이므로 왼쪽 주머니에서 흰 공이 나올 확률은 $\frac{4}{7}$이다. 또, 오른쪽 주머니에 들어 있는 공 8개 중에서 흰 공은 3개이므로 오른쪽 주머니에서 흰 공이 나올 확률은 $\frac{3}{8}$이다. 두 주머니에서 각각 공을 한 개씩 꺼내는 사건은 서로 영향을 끼치지 않으므로 구하는 확률은 $\frac{4}{7}\times\frac{3}{8}=\frac{12}{56}=\frac{3}{14}$이다.

4 오른쪽 그림과 같이 5등분된 회전판에 빨간색과 파란색이 색칠되어 있다. 회전판을 두 번 돌릴 때, 첫 번째는 화살이 빨간색을 가리키고, 두 번째는 파란색을 가리킬 확률을 구하시오. (단, 화살이 경계선을 가리키는 경우는 생각하지 않는다.) $\frac{6}{25}$



풀이 5등분된 회전판을 첫 번째 돌릴 때, 화살이 빨간색을 가리키는 경우는 3가지이므로 화살이 빨간색을 가리킬 확률은 $\frac{3}{5}$이다. 또, 회전판을 두 번째 돌릴 때, 화살이 파란색을 가리키는 경우는 2가지이므로 화살이 파란색을 가리킬 확률은 $\frac{2}{5}$이다. 회전판을 두 번 돌릴 때 첫 번째 사건과 두 번째 사건은 서로 영향을 끼치지 않으므로 구하는 확률은 $\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$이다.

생각 더 나아가기 문제 해결 · 추론

다음은 가람이가 주사위 한 개를 던질 때, 나오는 눈의 수가 소수 또는 홀수일 확률을 구하기 위해 작성한 풀이 과정이다. 가람이의 풀이가 적절한지 판단해 보고, 틀린 부분이 있으면 바르게 고쳐 보자. 풀이 참조

소수일 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이고, 홀수일 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이다.
따라서 소수 또는 홀수일 확률은 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$이다.

풀이 가람이의 풀이는 적절하지 않다. 주사위 한 개를 던질 때 나오는 눈의 수가 소수일 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 홀수일 확률은 $\frac{1}{2}$이지만 소수인 동시에 홀수인 3, 5가 나올 확률이 중복되므로 3, 5가 나올 확률인 $\frac{1}{3}$을 빼야 한다. 즉, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이다.

스스로 점검하기

1

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 같은 조건의 실험이나 관찰에서 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A가 일어날 확률을 p, 사건 B가 일어날 확률을 q라고 하면

(사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률)$=$ $\boxed{p+q}$

이다.

(2) 같은 조건의 실험이나 관찰에서 두 사건 A, B가 서로 영향을 끼치지 않을 때, 사건 A가 일어날 확률을 p, 사건 B가 일어날 확률을 q라고 하면

(사건 A와 사건 B가 동시에 일어날 확률)$=$ $\boxed{p\times q}$

이다.

2

다음 그림은 어느 해 8월의 달력이다. 이 달력에서 하루를 임의로 선택할 때, 화요일 또는 금요일을 선택할 확률을 구하시오. $\frac{9}{31}$

8월

일	월	화	수	목	금	토
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

풀이 8월의 31일 중에서 화요일은 5번 있으므로 화요일을 택할 확률은 $\frac{5}{31}$이고, 금요일은 4번 있으므로 금요일을 택할 확률은 $\frac{4}{31}$이다. 화요일을 택하는 사건과 금요일을 택하는 사건은 동시에 일어나지 않으므로 구하는 확률은 $\frac{5}{31}+\frac{4}{31}=\frac{9}{31}$이다.

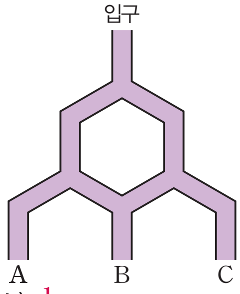
3

1부터 20까지의 자연수가 각각 적힌 카드 20장이 있다. 이 중에서 한 장의 카드를 임의로 뽑을 때, 4의 배수 또는 9의 배수가 적힌 카드가 나올 확률을 구하시오. $\frac{7}{20}$

풀이 20장의 카드 중에서 한 장의 카드를 임의로 뽑을 때 4의 배수인 경우는 4, 8, 12, 16, 20의 5가지이므로 4의 배수가 적힌 카드가 나올 확률은 $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$이고, 9의 배수인 경우는 9, 18의 2가지이므로 9의 배수가 적힌 카드가 나올 확률은 $\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$이다. 4의 배수가 적힌 카드가 나올 사건과 9의 배수가 적힌 카드가 나올 사건은 동시에 일어나지 않으므로 구하는 확률은 $\frac{5}{20}+\frac{2}{20}=\frac{7}{20}$이다.

4

오른쪽 그림과 같은 장치의 입구에 공을 넣으면 공이 아래로 내려가서 A, B, C 중 어느 한 곳으로 나온다고 한다. 입구에 공 한 개를 넣을 때, 그 공이 C로 나올 확률을 구하시오. (단, 갈림길에서 공이 양쪽으로 지나갈 확률은 각각 같다.) $\frac{1}{4}$



풀이 입구에 공 한 개를 넣을 때 그 공이 C로 나오는 경우는 첫 번째 갈림길에서 오른쪽으로 떨어지고, 두 번째 갈림길에서도 오른쪽으로 떨어지는 것의 한 가지뿐이다.
첫 번째 갈림길에서 공이 오른쪽으로 떨어질 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 두 번째 갈림길에서 공이 오른쪽으로 떨어질 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 첫 번째 갈림길에서 공이 오른쪽으로 떨어질 사건과 두 번째 갈림길에서 공이 오른쪽으로 떨어질 사건은 서로 영향을 끼치지 않으므로 구하는 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이다.

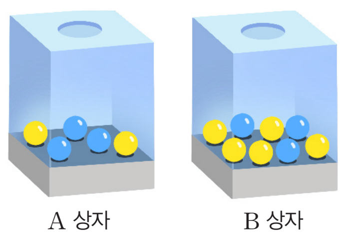
5

12개의 제비 중에서 당첨 제비가 4개 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 제비 한 개를 임의로 뽑아 결과를 확인하고 다시 넣은 후, 또 한 개의 제비를 임의로 뽑는다고 한다. 첫 번째에는 당첨되지 않고 두 번째에는 당첨될 확률을 구하시오. $\frac{2}{9}$

풀이 12개의 제비 중 당첨 제비가 4개 들어 있으므로 첫 번째에 당첨되지 않을 확률은 $1-\frac{4}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$이고, 두 번째에 당첨될 확률은 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$이다.
첫 번째에 당첨되지 않을 사건과 두 번째에 당첨될 사건은 서로 영향을 끼치지 않으므로 구하는 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$이다.

6 사고력 UP 추론

A 상자에는 노란 공 2개와 파란 공 3개가 들어 있고, B 상자에는 노란 공 5개와 파란 공 3개가 들어 있다. 두 상자에서 각각 공을 한 개씩 임의로 꺼낼 때, 꺼낸 공 중에서 적어도 하나는 파란 공일 확률을 구하시오. $\frac{3}{4}$



풀이 (두 상자에서 각각 공을 한 개씩 임의로 꺼낼 때 꺼낸 공 중에서 적어도 하나는 파란 공일 확률)$=1-$(두 상자에서 각각 공을 한 개씩 임의로 꺼낼 때 꺼낸 공이 모두 노란 공일 확률)
$=1-\frac{2}{5}\times\frac{5}{8}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

https://code.jihak.co.kr/qr/NLPZltlbClEhsF9Q

자기 평가	
확률을 구할 수 있다.	
확률을 통해 체계적으로 생각하여 합리적인 의사 결정을 할 수 있다.	

수학으로⁺ 탐험하기

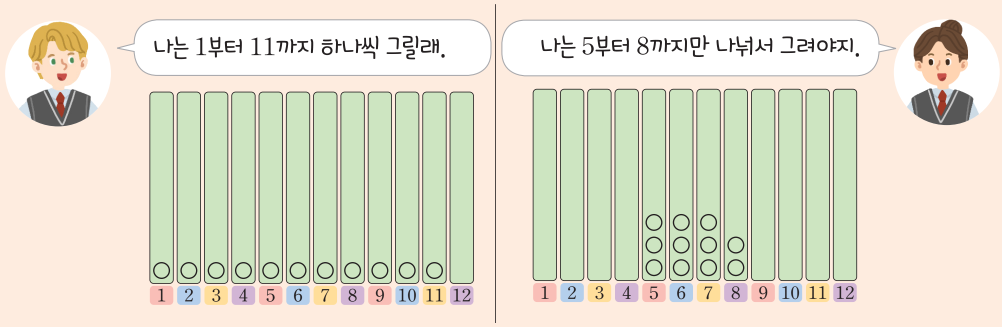
게임에 숨겨진 확률

확률은 17세기부터 페르마(Fermat, P., 1601~1665), 파스칼(Pascal, B., 1623~1662)과 같은 수학자들에 의해 연구되기 시작했다. 이들은 게임에서 이기기 위해 경우의 수를 이용하여 확률을 계산하려고 노력했는데, 이는 오늘날 전문적인 확률 이론으로 발전하여 우리 사회의 다양한 분야에서 여러 가지 현상을 예측하는 데 활용되고 있다.

● 다음 규칙에 따라 게임을 해 보고, 물음에 답해 보자. [준비물: 필기구, 게임판, 주사위 2개]

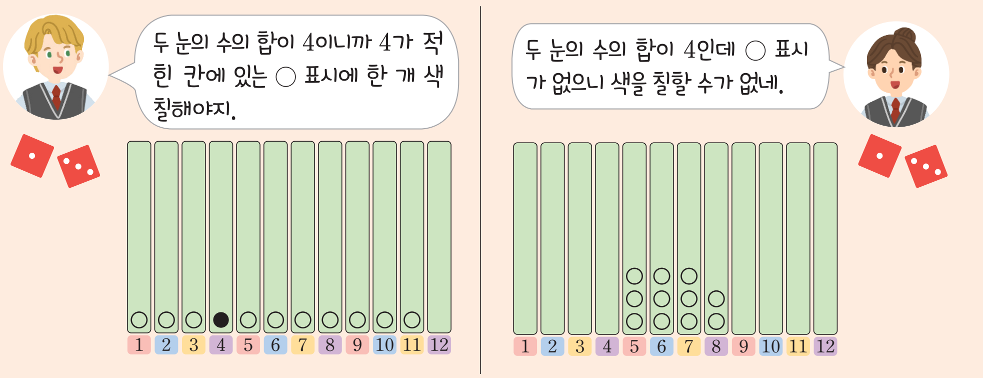
① 1부터 12까지의 수가 적힌 12개의 칸으로 구성된 게임판에 11개의 ○ 표시를 적당히 나누어 그린다. 각 칸에는 여러 개의 ○ 표시를 중복하여 그릴 수도 있고, 한 개도 그리지 않을 수도 있다.

예



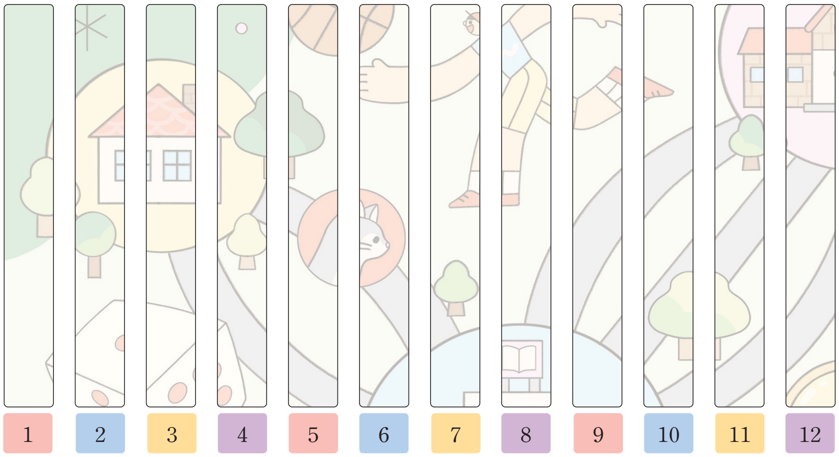
② 친구와 한 번씩 번갈아가며 2개의 주사위를 동시에 던져서 나온 두 눈의 수의 합을 구한다. 이때 그 합에 해당하는 수가 적힌 칸에 ○ 표시가 그려져 있으면 그중 한 개에 색칠하고, ○ 표시가 그려져 있지 않으면 색칠하지 않는다.

예



③ ②의 과정을 총 18회 반복한다. 단, 그 전에 ○ 표시를 모두 색칠한 사람이 있으면 게임을 종료한다.

④ 자신의 ○ 표시에 더 많이 색칠한 사람이 승리한다.



1 친구와 함께 실제로 게임을 해 보고, 친구의 게임판과 내 게임판에 그려진 ○ 표시의 배치를 서로 비교해 보자.

풀이 |예시| 나는 7 이상의 수가 적힌 칸에 더 많은 ○ 표시를 그린 반면, 친구는 다양한 칸에 고르게 ○ 표시를 그렸다.

2 확률을 이용하여 ○ 표시에 색칠될 가능성이 가장 높은 칸과 가능성이 가장 낮은 칸을 말해 보자.

풀이 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 두 눈의 수의 합에 따른 확률은 오른쪽과 같다. 두 눈의 수의 합이 7일 확률은 $\frac{6}{36}$으로 가장 크므로 7이 적힌 칸에 있는 ○ 표시에 색칠될 가능성이 가장 높고, 두 눈의 수의 합이 1일 확률은 0이므로 1이 적힌 칸에 있는 ○ 표시에 색칠될 가능성이 가장 낮다.

눈의 수의 합	1	2	3	4	5	6
확률	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$
눈의 수의 합	7	8	9	10	11	12
확률	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

3 게임에서 이긴 친구들의 ○ 표시의 배치에는 어떤 특징이 있는지 말해 보고, 게임에서 유리하도록 게임판에 ○ 표시를 그리는 방법에 대하여 말해 보자.

풀이 |예시| 게임에서 이긴 친구들의 게임판은 색칠될 가능성이 가장 높은 7을 비롯하여 6과 8, 5와 9가 적힌 칸에 ○ 표시가 많다. 따라서 색칠될 가능성이 높은 수가 적힌 칸에 ○ 표시를 많이 그리는 것이 유리하다.

| 상호 평가표 |

	평가 내용	자기 평가	친구 평가
내용	확률을 이용하여 색칠될 가능성이 가장 높은 칸과 가장 낮은 칸을 찾을 수 있다.		
내용	게임에서 유리하도록 게임판에 ○ 표시를 그리는 방법을 설명할 수 있다.		
태도	공정한 자세를 가지고 게임 활동에 적극적으로 참여했다.		

스스로 마무리하기

생각 완성하기

● 각 단원의 내용을 정리하여 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

01 경우의 수

• 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수
(초콜릿 3개와 사탕 4개 중에서 한 가지를 선택하는 경우의 수)$=3+4=7$

• 사건 A와 사건 B가 동시에 일어나는 경우의 수
(모자 3개와 신발 2켤레 중에서 모자 1개와 신발 1켤레를 짝 지어 선택하는 경우의 수)
$=\boxed{3}\times\boxed{2}=6$

02 확률의 뜻과 성질

• 확률
(주사위 한 개를 던져 6의 눈이 나올 확률)$=\frac{1}{6}$

• 확률의 성질
(주사위 한 개를 던져 6의 눈이 나오지 않을 확률)
$=1-$(6의 눈이 나올 확률)
$=1-\boxed{\frac{1}{6}}=\boxed{\frac{5}{6}}$

03 확률의 계산

• 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률
(주사위 한 개를 던져 3 또는 4의 눈이 나올 확률)
$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

• 사건 A와 사건 B가 동시에 일어날 확률
(동전 두 개를 동시에 던져 모두 앞면이 나올 확률)
$=\boxed{\frac{1}{2}}\times\boxed{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$

●○○

1 어느 식당에서는 다음과 같이 4종류의 한식과 3종류의 분식을 판매하고 있다. 이 중에서 한 가지를 주문하는 경우의 수를 구하시오. 7

풀이 한식 메뉴는 4가지이므로 한식을 주문하는 경우의 수는 4이고, 분식 메뉴는 3가지이므로 분식을 주문하는 경우의 수는 3이다. 이 중에서 한 가지를 주문할 때, 한식과 분식을 동시에 주문할 수는 없으므로 구하는 경우의 수는 $4+3=7$이다.

●○○

2 서커스 공연장에서 회전목마까지 가는 길은 3가지이고, 회전목마에서 대관람차까지 가는 길은 2가지이다. 길을 따라 서커스 공연장에서 회전목마를 지나 대관람차까지 가는 경우의 수를 구하시오. 6

(단, 같은 지점은 두 번 이상 지나지 않는다.)

풀이 서커스 공연장에서 회전목마로 가는 길을 선택하는 경우의 수는 3이고, 그 각각에 대하여 회전목마에서 대관람차로 가는 길을 선택하는 경우의 수는 2이다. 따라서 구하는 경우의 수는 $3\times2=6$이다.

●○○

3 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던질 때, 앞면이 1개 나오는 경우의 수를 구하시오. 2

풀이 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던질 때 앞면이 1개 나오는 경우는 (앞면, 뒷면), (뒷면, 앞면)의 2가지이다. 따라서 구하는 경우의 수는 2이다.

4 다음 그림과 같이 시내에 3개의 돌로 된 징검다리가 있다. 한 걸음에 한 칸 또는 두 칸씩 뛸 때, 시내를 건널 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 뒤돌아갈 수 있는 경우는 제외한다.) 5

풀이 시내의 징검다리를 건너는 방법을 한 걸음에 한 칸 뛰는 것을 1로, 두 칸 뛰는 것을 2로 하여 모두 나타내면 $1-1-1-1$, $1-1-2$, $1-2-1$, $2-1-1$, $2-2$이므로 구하는 경우의 수는 5이다.

5 사건 A가 일어날 확률을 p라고 할 때, 다음 보기 중에서 옳은 것을 모두 고르시오. ㄴ, ㄷ

보기

ㄱ. p의 값의 범위는 $0<p<1$이다.

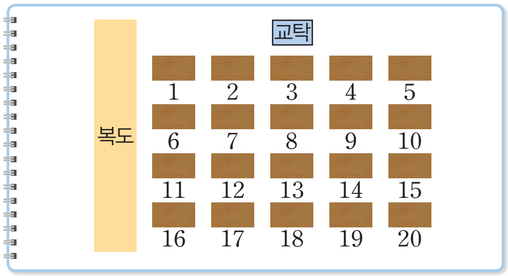
ㄴ. 사건 A가 반드시 일어나는 사건일 때, $p=1$이다.

ㄷ. 사건 A가 절대로 일어나지 않는 사건일 때, $p=0$이다.

ㄹ. 사건 A가 일어나지 않을 확률은 $p-1$이다.

풀이 ㄱ. p의 값의 범위는 $0\le p\le 1$이다.
ㄹ. 사건 A가 일어나지 않을 확률은 $1-p$이다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

6 전체 학생 수가 20명인 영진이네 반은 1부터 20까지의 자연수가 각각 적힌 제비를 뽑아서 다음 그림과 같이 자리를 정한다. 이때 영진이가 복도 쪽 자리에 앉게 될 확률을 구하시오. $\frac{1}{5}$



풀이 자리는 모두 20개이므로 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 20이다. 복도 쪽 자리는 4개이므로 영진이가 복도 쪽 자리에 앉게 되는 경우의 수는 4이다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$이다.

7 서로 다른 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던질 때, 두 눈의 수의 차가 4일 확률을 구하시오. $\frac{1}{9}$

풀이 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$이다. 주사위의 두 눈의 수의 차가 4인 경우는 (1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)의 4가지이므로 구하는 확률은 $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$이다.

8 축구 선수 A, B가 페널티 킥을 성공할 확률이 각각 0.8, 0.7이다. 두 선수가 페널티 킥을 한 번씩 찰 때, 적어도 한 명은 성공할 확률을 구하시오. 0.94 또는 $\frac{47}{50}$

풀이 두 축구 선수가 페널티 킥을 실패할 확률은 각각 0.2, 0.3이다. 두 선수가 페널티 킥을 찰 때 서로 영향을 끼치지 않으므로 두 축구 선수 모두 페널티 킥을 실패할 확률은 $0.2\times0.3=0.06$이다.
(적어도 한 명은 페널티 킥을 성공할 확률)
$=1-$(두 축구 선수 모두 페널티 킥을 실패할 확률)
이므로, 구하는 확률은 $1-0.06=0.94$이다.

9 1부터 5까지의 자연수가 각각 적힌 5장의 카드 중에서 2장을 동시에 뽑아 두 자리의 자연수를 만들 때, 그 수가 50보다 작을 확률을 구하시오. $\frac{4}{5}$

풀이 일어날 수 있는 모든 경우는 12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54의 20가지이다. 두 자리의 자연수가 50 이상인 경우는 4가지이므로 그 수가 50 이상일 확률은 $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$이다. (두 자리의 자연수가 50보다 작을 확률)
$=1-$(두 자리의 자연수가 50 이상일 확률)이므로 구하는 확률은 $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$이다.

10 오른쪽은 예진이네 반 학생 25명의 한 달 용돈을 조사하여 나타낸 도수분포표이다. 이 반에서 한 명을 임의로 뽑을 때, 이 학생의 한 달 용돈이 3만 원 이상일 확률을 구하시오. $\frac{2}{5}$

한 달 용돈

용돈(만 원)	학생 수(명)
$0^{이상}$ ~ $1^{미만}$	2
1 ~ 2	3
2 ~ 3	10
3 ~ 4	7
4 ~ 5	3
합계	25

풀이 학생 25명 중에서 한 달 용돈이 3만 원 이상인 학생은 10명이다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$이다.

스스로 마무리하기

서술형 문제

11 오른쪽 그림은 어느 연극 입장권에 표시된 좌석 번호이다. 좌석 번호의 열은 A부터 I까지 9개의 문자가 사용되고, 번호는 1부터 14까지 14개의 숫자가 사용된다고 할 때, 이 입장권의 좌석 번호로 가능한 모든 경우의 수를 구하려고 한다. 풀이 과정과 답을 쓰시오. 126

풀이 열의 빈칸에 들어갈 수 있는 문자의 경우의 수는 9이고, 번호의 빈칸에 들어갈 수 있는 숫자의 경우의 수는 14이다. 열의 빈칸에 문자가 들어가는 사건과 번호의 빈칸에 숫자가 들어가는 사건이 동시에 일어나는 경우의 수는 $9\times14=126$이다.

채점 기준	배점 비율
(i) 각 열과 번호로 가능한 경우의 수를 각각 모두 구한 경우	40 %
(ii) 좌석 번호로 가능한 모든 경우의 수를 구한 경우	60 %

12 각 면에 -1, -1, -1, 1, 1, 2가 각각 적힌 정육면체 모양의 주사위를 두 번 던져서 나온 눈의 수의 합이 0이 될 확률을 구하려고 한다. 풀이 과정과 답을 쓰시오. $\frac{1}{3}$

풀이 주사위를 던졌을 때 -1이 나올 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, 1이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다. 이때 -1, 1이 차례대로 나올 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$이고, 1, -1이 차례대로 나올 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$이다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$이다.

채점 기준	배점 비율
(i) -1, 1이 차례대로 나올 확률을 구한 경우	40 %
(ii) 1, -1이 차례대로 나올 확률을 구한 경우	40 %
(iii) 나온 수의 합이 0일 확률을 구한 경우	20 %

사고력 문제

13 두 주머니 A, B에 자연수가 하나씩 적힌 카드들이 각각 들어 있다. 주머니 A, B에서 임의로 한 장씩 뽑은 카드에 적힌 수를 각각 a, b라고 할 때, a가 홀수일 확률은 $\frac{3}{7}$, b가 짝수일 확률은 $\frac{2}{3}$라고 한다. 다음 물음에 답하시오.

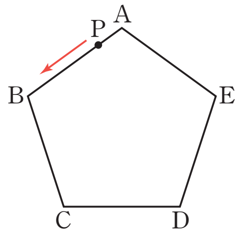
(1) $a+b$가 짝수일 확률을 구하시오. $\frac{11}{21}$

(2) ab가 짝수일 확률을 구하시오. $\frac{6}{7}$

풀이 (1) $a+b$가 짝수인 경우는 a, b가 모두 홀수인 경우 또는 a, b가 모두 짝수인 경우이다. a, b가 모두 홀수일 확률은 $\frac{3}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{7}$이다. a, b가 모두 짝수일 확률은 $\frac{4}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{21}$이다. 따라서 $a+b$가 짝수일 확률은 $\frac{1}{7}+\frac{8}{21}=\frac{11}{21}$이다.

(2) ab가 짝수일 확률은 ab가 홀수가 아닐 확률과 같다. 이때 ab가 홀수일 확률은 a, b가 모두 홀수일 확률이므로 $\frac{3}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{7}$이다.
따라서 (ab가 짝수일 확률)$=$(ab가 홀수가 아닐 확률)
$=1-$(ab가 홀수일 확률)$=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$이다.

14 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정오각형 ABCDE에서 점 P가 꼭짓점 A를 출발하여 변을 따라 반시계 방향으로 이동한다. 주사위 한 개를 두 번 던져서 나온 눈의 수의 합만큼 점 P가 이동할 때, 점 P가 꼭짓점 E에 도착할 확률을 구하시오. $\frac{7}{36}$



풀이 점 P가 꼭짓점 E까지 이동하려면 두 눈의 수의 합이 4 또는 9가 되어야 한다. 주사위 한 개를 두 번 던질 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$이다. 두 눈의 수의 합이 4인 경우를 순서쌍으로 나타내면 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지이므로 그 확률은 $\frac{3}{36}$이다. 또, 두 눈의 수의 합이 9인 경우를 순서쌍으로 나타내면 (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)의 4가지이므로 그 확률은 $\frac{4}{36}$이다.
따라서 점 P가 꼭짓점 E에 도착할 확률은 $\frac{3}{36}+\frac{4}{36}=\frac{7}{36}$이다.

https://code.jihak.co.kr/qr/GnU6KC4cRCiPi7FW

마무리 평가

자신의 학습 태도를 스스로 점검해 보자.

이 단원을 공부하면서 알게 된 것을 써 보자.	이 단원을 공부하면서 어려웠던 점을 쓰고 복습 계획을 세워 보자.

나의 삶과 연계된 확률에 대한 흥미와 관심이 생겼다.	
자신의 생각을 수학적으로 표현하고, 다른 사람의 생각을 이해하려고 노력했다.	
이 단원의 학습에 적극적이고 자신감 있게 참여했다.	
문제를 풀 때 끈기 있게 도전했다.	

| 정답과 해설 327쪽 |

1 0, 1, 2, 3, 4가 각각 적힌 5장의 카드 중에서 3장을 뽑아 세 자리의 자연수를 만들 때, 123보다 큰 수의 개수를 구하시오.

2 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 차가 1보다 클 확률을 구하시오.

3 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수를 각각 a, b라고 하자. 이때 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(a, 0)$, $\mathrm{B}(a, b)$로 이루어진 삼각형 OAB의 넓이가 6일 확률을 구하시오.

4 A, B 두 팀이 경기를 하는데 먼저 4승을 한 팀이 우승한다고 한다. 현재 A팀이 2승 1패로 앞서고 있고 각 팀이 한 게임에서 이길 확률은 서로 같다고 할 때, B팀이 우승할 확률을 구하시오.

(단, 비기는 경우는 없다.)

실전 대비 문제

01 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① 유한소수 중에는 유리수가 아닌 것도 있다.

② 모든 순환소수는 유한소수로 나타낼 수 있다.

③ 순환소수로 나타낼 수 있는 수는 모두 유리수이다.

④ 기약분수는 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있다.

⑤ 기약분수의 분모가 15의 배수이면 그 분수는 유한소수로 나타낼 수 있다.

02 다음 중 순환마디를 옳게 나타낸 것은?

① $0.7444\cdots \Rightarrow 44$

② $0.636363\cdots \Rightarrow 63$

③ $0.28707070\cdots \Rightarrow 707070$

④ $0.1594594594\cdots \Rightarrow 1594$

⑤ $2.482714827148271\cdots \Rightarrow 248271$

03 다음 중 순환소수의 표현으로 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $1.234123412341\cdots=\dot{1}.23\dot{4}$

② $-0.437437437\cdots=-0.\dot{4}\dot{3}\dot{7}$

③ $0.404040\cdots=0.\dot{4}\dot{0}$

④ $2.415415415\cdots=2.\dot{4}1\dot{5}$

⑤ $0.3656565\cdots=0.36\dot{5}\dot{6}$

04 다음 중 순환소수 $x=1.3222\cdots$에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 순환마디는 32이다.

② x를 $1.3\dot{2}\dot{2}$로 나타낼 수 있다.

③ 10의 거듭제곱을 이용해 변끼리 빼어 계산하면 x는 $\frac{13}{9}$이다.

④ x는 유리수이다.

⑤ $100x-x$의 값은 정수이다.

05 다음 보기 중에서 유한소수로 나타낼 수 있는 것을 모두 고르시오.

보기

ㄱ. $\frac{5}{45}$　　ㄴ. $\frac{14}{35}$

ㄷ. $\frac{63}{2\times3^2\times7}$　　ㄹ. $\frac{84}{2^3\times3\times7^2}$

ㅁ. $\frac{121}{2^2\times5\times11}$　　ㅂ. $\frac{30}{2^4\times3\times5}$

06 다음은 순환소수 $0.1\dot{2}\dot{3}$을 분수로 나타내는 과정이다. $A\sim E$ 안에 알맞은 수로 옳지 <u>않은</u> 것은?

$x=0.1232323\cdots$ …… ①

①의 양변에 $\boxed{A}$을 곱하면

$\boxed{A}x=1.232323\cdots$ …… ②

①의 양변에 $\boxed{B}$을 곱하면

$\boxed{B}x=123.232323\cdots$ …… ③

③에서 ②를 변끼리 빼면

$\boxed{C}x=\boxed{D}$, $x=\boxed{E}$

따라서 $0.1\dot{2}\dot{3}=\boxed{E}$이다.

① $A=10$　② $B=100$　③ $C=990$

④ $D=122$　⑤ $E=\frac{61}{495}$

07 분수 $\frac{11}{280}\times n$을 소수로 나타내면 유한소수가 된다고 한다. 이때 가장 작은 자연수 n의 값은?

① 2 ② 5 ③ 7
④ 11 ⑤ 14

08 다음 중 옳은 것은?

① $0.8\dot{3}=\frac{83}{90}$ ② $1.\dot{3}=\frac{13}{9}$
③ $0.\dot{6}2\dot{1}=\frac{23}{37}$ ④ $6.0\dot{7}=\frac{60}{9}$
⑤ $0.3=\frac{1}{3}$

09 $0.\dot{6}=\frac{a}{3}$, $0.\dot{1}=\frac{1}{b}$이라고 할 때, $a+b$의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

10 다음 순환소수를 x라 하고 분수로 나타낼 때, 사용할 수 있는 식을 찾아 각각 연결하시오.

(1) $0.\dot{5}\dot{3}$ • • ㄱ. $1000x-x$
(2) $0.\dot{7}1\dot{3}$ • • ㄴ. $100x-10x$
(3) $4.1\dot{5}$ • • ㄷ. $100x-x$

11 어떤 수 A에 $0.\dot{3}$을 곱해야 할 것을 잘못하여 0.3을 곱하였더니 바르게 계산한 것보다 0.03만큼 작게 나왔다. 이때 A의 값은?

① 0.3 ② 0.5 ③ 0.6
④ 0.9 ⑤ $1.\dot{3}$

12 $\frac{8}{13}$의 소수점 아래 99번째 자리의 숫자를 구하시오.

13 분수 $\frac{5}{13}$를 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 첫째 자리의 숫자부터 20번째 자리의 숫자까지의 합을 구하시오.

14 분수 $\frac{4}{7}$를 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 100번째 자리까지의 숫자 중 1이 나오는 횟수는?

① 16회 ② 17회 ③ 18회
④ 19회 ⑤ 20회

15 두 분수 $\frac{1}{5}$과 $\frac{2}{3}$ 사이의 정수가 아닌 유리수 중 분모가 15이고, 유한소수로 나타낼 수 있는 모든 분수의 개수는?

① 1　　② 2　　③ 3

④ 4　　⑤ 5

16 다음 보기 중에서 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르시오.

보기

ㄱ. 순환소수 중에는 유리수가 아닌 것도 있다.

ㄴ. 순환소수 중에는 분모, 분자가 정수인(분모가 0이 아닌) 분수로 나타낼 수 없는 것도 있다.

ㄷ. 유리수끼리 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈(0으로 나누는 것은 제외)을 하면 그 결과는 유리수이다.

ㄹ. 모든 유리수는 유한소수로 나타낼 수 있다.

ㅁ. 유리수 중에서 정수 또는 유한소수로 나타낼 수 없는 것은 모두 순환소수로 나타낼 수 있다.

17 순환소수 $0.2\dot{3}$에 어떤 자연수를 곱하여 유한소수가 되게 하려고 한다. 어떤 자연수가 될 수 <u>없는</u> 수는?

① 2　　② 3　　③ 9

④ 12　　⑤ 18

18 x에 대한 일차방정식 $28x-2=5a$의 해를 소수로 나타내면 유한소수가 된다. 이때 가장 작은 자연수 a의 값을 구하시오.

19 $0.1\dot{6}$과 0.6 사이의 분수 중에서 분모가 30이고 유한소수로 나타낼 수 있는 것은 모두 몇 개인가?

① 1　　② 2　　③ 3

④ 4　　⑤ 5

20 어떤 기약분수를 순환소수로 나타내는데 서진이는 분모를 잘못 보아서 $0.8\dot{3}$이 되었고, 훈식이는 분자를 잘못 보아서 $0.3\dot{8}$이 되었다. 처음 기약분수를 소수로 나타내시오.

서술형 문제

21 두 분수 $\frac{9}{280}$, $\frac{7}{352}$에 어떤 자연수 a를 곱하여 소수로 나타내면 두 수 모두 유한소수가 될 때, 이를 만족시키는 a의 값 중 가장 작은 수를 구하시오.

22 두 분수 $\frac{17}{204}$과 $\frac{7}{110}$에 어떤 자연수 N을 곱하면 두 분수 모두 유한소수로 나타낼 수 있다고 할 때, 100보다 작은 자연수 N의 값을 모두 구하시오.

23 순환소수 $1.8\dot{3}$에 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 곱해야 할 가장 작은 자연수를 구하시오.

24 분수 $\frac{45}{37}$를 소수로 나타내었을 때, 소수점 아래 30번째 자리의 숫자를 a, 순환소수 $0.00\dot{2}34812\dot{7}$의 소수점 아래 32번째 자리의 숫자를 b라고 하자. 이때 $a+b$의 값을 구하시오.

25 두 분수 $\frac{32}{120}$, $\frac{9}{2^3\times3\times5^2\times7}$에 어떤 자연수 x를 곱하면 모두 유한소수로 나타낼 수 있다. 이를 만족시키는 두 자리의 자연수 x를 모두 구하시오.

01 다음 중 옳은 것은?

① $a^2 \times a^3 = a^6$
② $a^{12} \div a^4 = a^8$
③ $(a^3)^2 = a^5$
④ $(ab)^4 = ab^4$
⑤ $\left(\frac{1}{b^3}\right)^2 = \frac{1}{b^5}$

02 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $x^2 \times x^3 = x^5$
② $x^3 \div x^4 = \frac{1}{x}$
③ $x^2 \div x^2 = 0$
④ $\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^4 = \frac{x^{12}}{y^8}$
⑤ $\left(-\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{8}$

03 다음 $\square$ 안의 수가 나머지 넷과 <u>다른</u> 하나는?

① $a^{\square} \times a^4 = a^7$
② $a^3 \div a^6 = \frac{1}{a^{\square}}$
③ $\left(\frac{a^2}{b}\right)^3 = \frac{a^6}{b^{\square}}$
④ $a^3 \times (-a)^4 \div a^{\square} = a^4$
⑤ $(a^{\square})^4 \div a^6 = a^2$

04 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(x^3)^5 \times (x^2)^3 \div (x^4)^3$
(2) $x^6 \div x^2 \times x^3 \div x$

05 $a^x b \times (a^2 b^y)^3 = a^7 b^{10}$일 때, $x+y$의 값은?

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

06 다음 중 옳은 것은?

① $2ab \times 5a = 10ab$
② $-27a^3b \div (-9a) = 3a^3b$
③ $-8x \times (-2y^3) = -16xy^3$
④ $(-5a^3b^4)^2 \div 5ab^5 = 5a^5b^3$
⑤ $(-2x)^2 \times 5x^3y = -10x^5y$

07 다음 계산 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 구하시오.

$$\boxed{\frac{3}{5}x^2y^2} \xrightarrow{\times\frac{8}{3}x^3y} \boxed{(가)} \xrightarrow{\div(-4x^4y)^2} \boxed{(나)}$$

08 $3(x^2+2x+4)-(4x^2-3x+5)$를 계산하면?

① $-x^2+9x+7$　② $-x^2+15x+7$
③ $-x^2+5x+7$　④ $-x^2+5x+17$
⑤ $-x^2+3x+17$

09 $4a^2+a-1-(a^2-3a-5)$를 계산하였을 때, a^2의 계수를 m, 상수항을 n이라고 하자. 이때 mn의 값을 구하시오.

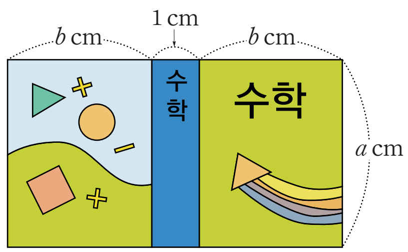
10 식 $5x^2-2x+7$에 어떤 식을 더해야 할 것을 잘못하여 빼었더니 $2x^2-x$가 되었다. 이때 바르게 계산한 식은?

① $3x^2-3x-7$　② $3x^2-3x+7$
③ $8x^2-x+14$　④ $8x^2-5x$
⑤ $8x^2-3x+14$

11 다음 식을 계산하였을 때, x의 계수와 상수항의 합을 구하시오.

$$4x^2-[2x+2-\{x^2+1-(x^2+x)\}]$$

12 다음 그림과 같이 책의 겉표지를 만들려고 할 때, 겉표지 전체의 넓이를 다항식으로 나타내면?



① ab^2 cm^2　② $(ab+a)$ cm^2
③ $(2ab+1)$ cm^2　④ $(a+2b)$ cm^2
⑤ $(2ab+a)$ cm^2

13 $x-y=5$일 때, $3^y \div 3^x$의 값을 구하시오.

14 $16^{3x-2}=2^{x+4}$을 만족시키는 x의 값을 구하시오.

15 $x=3$, $y=-1$일 때, $(x^2y+2xy^2)\div(-y)$의 값을 구하시오.

16 $a=-3$, $b=5$일 때, 다음 식의 값은?

$$\frac{4a^2+2ab}{2a}-\frac{6b^2+9ab}{3b}$$

① 0 ② -1 ③ -2
④ -3 ⑤ -4

17 $(10x^2-15xy)\div 5x+(21y^2-35xy)\div(-7y)$를 간단히 하면?

① $7x-6y$ ② $7x$
③ $-3x-6y$ ④ $x-5y$
⑤ $5x-y$

18 $(3x^2-9xy)\div 3x+(12xy-\square)\div(-4y)=-2x-2y$일 때, $\square$ 안에 알맞은 식을 구하시오.

19 자연수 n에 대하여 다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 각각 A, B라고 할 때, $A+B$의 값은?

$$2^n\times 3^n=\boxed{A}^n$$
$$5^{n+2}=5^n\times\boxed{B}$$

① 30 ② 31 ③ 32
④ 33 ⑤ 34

20 $a=3^2$일 때, $\left(\frac{1}{81}\right)^5$을 a를 사용하여 $\frac{1}{a^{\square}}$로 나타낼 수 있다. $\square$ 안에 들어갈 자연수를 구하시오.

21 $2^{12}\times5^8$이 n자리의 자연수일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 자연수 a, k에 대하여 $2^{12}\times5^8$을 $a\times10^k$의 꼴로 나타낼 때, a의 최솟값과 그때의 k의 값을 구하시오.

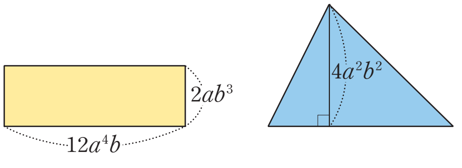
(2) n의 값을 구하시오.

22 $A=(-2x^3y)^3\times\left(\frac{3}{2}x^3y^2\right)^2$,

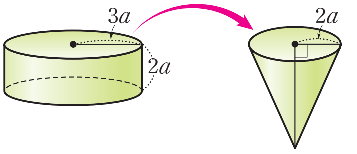
$B=(4xy^3)^2\times\left(-\frac{3}{2}x^5y\right)^3$일 때,

$\frac{B}{A}$의 값을 구하시오.

23 다음 그림과 같은 직사각형과 삼각형의 넓이가 서로 같을 때, 삼각형의 밑변의 길이를 구하시오.



24 다음 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 $3a$, 높이가 $2a$인 원기둥 모양의 그릇에 가득 들어 있는 물을 밑면의 반지름의 길이가 $2a$인 원뿔 모양의 그릇에 부었더니 물이 넘치지 않고 가득 찼다. 이때 원뿔 모양의 그릇의 높이를 구하시오.



25 두께가 1 mm인 직사각형 모양의 종이를 반으로 접는 과정을 반복하여 두께 12.8 cm가 되도록 하려면 종이를 몇 번 접어야 하는지 구하시오. (단, 접힌 종이 사이의 공간은 생각하지 않는다.)

01 다음 문장을 부등식으로 나타내시오.

(1) x의 3배에 4를 더한 값은 6 이하이다.

(2) 한 개에 a원인 사과 4개의 값은 5500원보다 비싸다.

(3) 길이가 x cm인 끈에서 7 cm만큼 잘라 내고 남은 끈의 길이는 9 cm보다 짧다.

02 $a<b$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $5a>5b$

② $a-3<b-3$

③ $\frac{2}{3}a-1>\frac{2}{3}b-1$

④ $-2a+5<-2b+5$

⑤ $\frac{9-7a}{-2}>\frac{9-7b}{-2}$

03 다음 중 일차부등식인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $2x+1>5$

② $1-x\geq-(x-1)$

③ $x^2-4\leq5$

④ $xy\leq1$

⑤ $3x>x-1$

04 다음 중 일차부등식인 것은 ○표, 아닌 것은 ×표 하시오.

(1) $x-2\leq5-2x$ (   )

(2) $x(x-3)\geq x$ (   )

(3) $x+5<x+10$ (   )

(4) $2x^2+2x\leq x(2x-1)+4$ (   )

05 x의 값이 4 이하의 자연수일 때, 다음 일차부등식을 푸시오.

(1) $3x-2>1$

(2) $x-1\leq2x-3$

06 다음 부등식 중 [ ] 안의 수가 해인 것은?

① $2x+5>7$ [1]

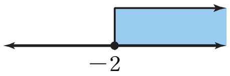
② $3x>x+1$ [-1]

③ $6-2x\geq3$ [2]

④ $3x+1\leq10$ [3]

⑤ $-3x+4\leq-2$ [-2]

07 다음 중 오른쪽 그림의 수직선에 나타낸 것과 같은 해를 갖는 부등식은?



① $\frac{1}{2}x+1\geq0$ ② $-2x+4\leq0$

③ $\frac{3}{2}+\frac{1}{4}x>-x$ ④ $x-1\leq3x-3$

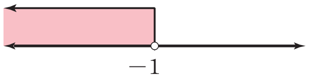
⑤ $x+8>-2(x-1)$

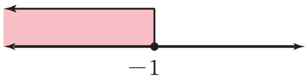
08 부등식 $3-(x-4)>4x+12$의 해가 $x<a$일 때, 상수 a의 값은?

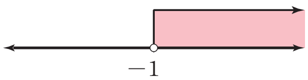
① -1 ② 1 ③ 2

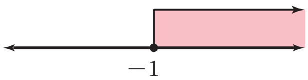
④ 3 ⑤ 4

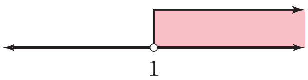
09 부등식 $4x+7\geq2x+5$의 해를 수직선 위에 바르게 나타낸 것은?

①


②


③


④


⑤


10 일차부등식 $\frac{x}{3}+3\geq\frac{8x-3}{5}$을 만족시키는 자연수 x의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

11 부등식 $2.1x-0.6\geq3.6+0.7x$를 풀면?

① $x\geq-3$ ② $x\leq-3$

③ $x\geq3$ ④ $x\leq3$

⑤ $x\geq4$

12 다음 일차부등식을 푸시오.

(1) $4(x-2)\geq12-4x$

(2) $-0.5x+1.5\leq0.1x-0.3$

(3) $\frac{3}{5}x>-\frac{1}{3}x+\frac{2}{15}$

13 일차부등식 $\frac{5}{4}(x-a) \leq \frac{5}{2}x+5$의 해가 $x \geq 3$일 때, 상수 a의 값은?

① -6 ② -7 ③ -8
④ -9 ⑤ -10

14 일차부등식 $\frac{x-3}{6} > \frac{3x-7}{5}$을 만족시키는 x의 값 중 가장 큰 정수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

15 $-5 < x \leq 6$이고 $A=7-\frac{1}{3}x$일 때, A의 값의 범위를 구하시오.

16 일차부등식 $8(2x+8) < 7(x+a)$의 해가 $x < -4$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

17 두 일차부등식 $0.3(x-1)+0.2 \geq -0.2(1-2x)$, $\frac{2x+a}{3} \leq 2-x$의 해가 같을 때, 상수 a의 값은?

① -5 ② -1 ③ $\frac{1}{5}$
④ 1 ⑤ 5

18 현재 형의 예금액은 10000원이고, 동생의 예금액은 30000원이다. 다음 달부터 매달 형은 4000원씩, 동생은 3000원씩 예금하려고 할 때, 형의 예금액이 동생의 예금액보다 많아지는 것은 몇 개월 후부터인가?

① 19개월 후 ② 20개월 후
③ 21개월 후 ④ 22개월 후
⑤ 23개월 후

19 연속된 세 자연수의 합이 37보다 클 때, 합이 가장 작은 세 자연수 중 가장 작은 자연수는?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

서술형 문제

20 두 일차부등식 $0.3x-2.1\le 1.2x+0.6$, $\frac{1}{3}x-2a\le\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$의 해가 서로 같을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

21 모자는 1개에 6000원, 손수건은 1장에 1200원에 판매하는 할인점이 있다. 모자와 손수건을 합하여 10개를 사고, 전체 가격이 54000원 이하가 되게 하려고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 모자의 개수를 x라고 할 때, 이를 부등식으로 나타내시오.

(2) 모자는 최대 몇 개까지 살 수 있는지 구하시오.

22 성훈이네 반 학생들이 식물원 견학을 가게 되었다. 입장료는 학생 1인당 5000원인데 30명 이상의 단체는 1인당 4000원이라고 한다. 30명 미만의 단체는 최소한 몇 명 이상일 때, 단체 입장권을 사는 것이 유리한지 구하시오. (단, 30명 미만이어도 30명의 단체 입장권을 살 수 있다.)

23 환호는 제주 올레길을 걷는데, 갈 때는 시속 4 km로, 올 때는 같은 길을 시속 3 km로 걸어서 1시간 45분 이내로 돌아오려고 한다. 이때 환호는 최대 몇 km 지점까지 갔다 올 수 있는지 구하시오.

01 다음 중 미지수가 2개인 일차방정식을 모두 고르면? (정답 2개)

① $x^2=4$

② $x+y=5$

③ $x+3=8$

④ $y+3=7$

⑤ $x-2y+5=0$

02 x, y가 자연수일 때, 일차방정식 $2x+3y=12$를 만족시키는 순서쌍 (x, y)는 모두 몇 개인가?

① 1개 ② 2개 ③ 3개

④ 4개 ⑤ 5개

03 일차방정식 $2x+y+a=0$의 한 해가 $(3, -2)$일 때, 상수 a의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3

④ 1 ⑤ 2

04 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+2y=-5 \\ x-y=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-4y=-7 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y=x+5 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$

05 다음 연립방정식을 식의 대입을 이용하여 풀고자 한다. ㉠의 y를 x에 대한 식으로 나타낸 것은?

$$\begin{cases} x-y=3 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 4x-3y=14 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$$

① $y=-x-3$ ② $y=-x+3$

③ $y=x-3$ ④ $y=x+3$

⑤ $y=-3x$

06 다음 연립방정식 중 $x=1$, $y=2$를 해로 갖는 것은?

① $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x+y=0 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ y=x+1 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=11 \end{cases}$

07 연립방정식 $\begin{cases} 2x+3y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+2y=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$을 두 식의 합이나 차를 이용하여 풀 때, y를 없애는 식으로 적당한 것은?

① ㉠$\times 5-$㉡$\times 2$

② ㉠$\times 3-$㉡$\times 2$

③ ㉠$\times 2-$㉡$\times 3$

④ ㉠$\times 3+$㉡$\times 2$

⑤ ㉠$\times 2+$㉡$\times 3$

08 연립방정식 $\begin{cases} y=2x-1 \\ x+ay=8 \end{cases}$을 만족시키는 x의 값이 2일 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4

④ 5 ⑤ 6

09 순서쌍 $(-1, 5)$, $(a, 2)$가 일차방정식 $x+by=9$의 해일 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 상수)

10 연립방정식 $\begin{cases} ax-by=-2 \\ ax+by=6 \end{cases}$의 해가 $x=2$, $y=-1$일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

11 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 0.4x+0.5y=0.9 \\ 0.2x-0.3y=-0.1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-y=-1 \\ \dfrac{x}{4}+y=4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{3}{4}x-\dfrac{2}{3}y=\dfrac{5}{12} \\ 0.3x-y=-0.2 \end{cases}$

12 연립방정식 $\begin{cases} \dfrac{1}{3}(x-y)+2y=-7 \\ x-0.5(3x-2y)=-7 \end{cases}$의 해가 (a, b)일 때, $a+b$의 값은?

① -9 ② -1 ③ 1

④ 3 ⑤ 9

13 연립방정식 $\begin{cases} 0.3(x+y)-0.1y=1.9 \\ \frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y=5 \end{cases}$ 의 해는?

① $(1,\ 2)$ ② $(1,\ 3)$ ③ $(3,\ 1)$
④ $(3,\ 5)$ ⑤ $(5,\ 3)$

14 연립방정식 $\begin{cases} ax-by=7 \\ 3ax+by=-3 \end{cases}$ 의 해가 $(1,\ 3)$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

15 다음 두 연립방정식의 해가 같을 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

$$\begin{cases} ax-by=-6 \\ 2x+7y=34 \end{cases},\ \begin{cases} x-3y=-9 \\ 6x+ay=10 \end{cases}$$

16 두 자리의 자연수가 있다. 각 자리의 숫자의 합은 7이고, 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 서로 바꾼 수는 처음 수보다 27만큼 크다. 처음 수를 구하시오.

17 CD에 어떤 가수의 곡이 7곡 녹음되었다. 이 CD는 1곡당 연주 시간이 4분짜리인 곡과 5분짜리인 곡들로 이루어져 있고, 곡과 곡 사이에는 10초씩 쉰다. 첫 곡부터 마지막 곡까지 듣는 데 31분이 걸릴 때, 연주 시간이 4분짜리인 곡은 몇 곡인가?

① 1곡 ② 2곡 ③ 3곡
④ 4곡 ⑤ 5곡

18 어느 고궁의 입장료는 어른이 500원, 어린이가 300원이다. 어느 날 입장권은 모두 200장이 팔렸고, 입장료의 합계는 81000원이었다. 이 날 입장한 어른과 어린이는 각각 몇 명인지 구하시오.

19 3 %의 소금물과 8 %의 소금물을 섞어서 6 %의 소금물 400 g을 만들려고 한다. 이때 3 %의 소금물과 8 %의 소금물을 각각 몇 g씩 섞으면 되는지 구하시오.

서술형 문제

20 연립방정식 $\begin{cases} -ax+by=8 \\ bx-ay=-2 \end{cases}$의 해를 구하는데 잘못 하여 a, b를 바꾸어 놓고 풀었더니 $x=-2$, $y=-1$이었다. 처음 연립방정식의 해를 구하시오. (단, a, b는 상수)

21 민서와 태훈이가 같이 일을 하면 8일이 걸리는 일을 민서가 혼자 4일을 일한 후, 나머지는 태훈이가 혼자 10일을 일하여 끝마쳤다. 이때 민서가 혼자서 이 일을 하려면 며칠 동안 일을 해야 하는지 구하시오.

22 어느 학교의 작년 전체 학생 수는 1000명이었다. 금년에는 작년에 비해 여학생 수는 5 % 증가하고 남학생 수는 2 % 감소하여, 전체 학생 수가 1022명이 되었다. 금년의 여학생 수와 남학생 수를 각각 구하시오.

23 은영이가 학교에 가기 위해 8시에 집을 나섰다. 시속 2 km로 천천히 걷다가 10분 동안 문구점 앞에서 구경을 했더니 학교에 늦을 것 같아 그때부터 시속 6 km로 뛰어 학교에 8시 40분에 도착하였다. 집에서 학교까지의 거리가 2 km일 때, 은영이가 뛰어간 거리를 구하시오.

01 다음 중 y가 x의 함수가 아닌 것은?

① 절댓값이 자연수 x인 수 y

② 시속 5 km의 속력으로 x시간 동안 걸어간 거리는 y km이다.

③ 100원짜리 지우개 1개와 300원짜리 연필 x자루의 가격의 합은 y원이다.

④ 반지름의 길이가 x cm인 원의 둘레의 길이는 y cm이다.

⑤ 가로, 세로의 길이가 각각 5 cm, $(x+2)$ cm인 직사각형의 넓이는 y cm^{2}이다.

02 다음 중 일차함수인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $y=3$ ② $y=-3x$

③ $y=x^2-2x-1$ ④ $y=\frac{x-4}{4}$

⑤ $y=\frac{1}{x}-2$

03 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x+2$에 대하여 $f(-3)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1

④ 2 ⑤ 3

04 일차함수 $y=-3x+5$의 그래프와 평행하고, 점 $(1, 4)$를 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식은?

① $y=-3x+4$ ② $y=-3x+7$

③ $y=-3x+13$ ④ $y=3x+1$

⑤ $y=3x+7$

05 일차함수 $y=ax+2$의 그래프의 x절편이 $\frac{2}{3}$일 때, 상수 a의 값은?

① -3 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0

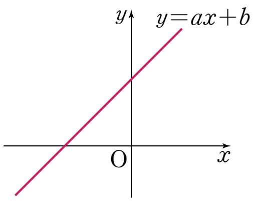
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

06 일차함수 $y=-\frac{2}{3}x-6$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

① 27 ② 38 ③ 46

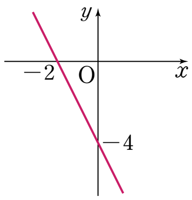
④ 52 ⑤ 60

07 오른쪽 그림은 일차함수 $y=ax+b$의 그래프이다. 이때 일차함수 $y=-bx-ab$의 그래프가 지나지 <u>않는</u> 사분면은? (단, a, b는 상수)



① 제1사분면　② 제2사분면
③ 제3사분면　④ 제4사분면
⑤ 없다.

08 다음 중 오른쪽 그림의 일차함수의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은?

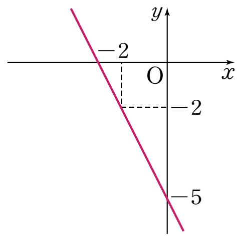


① 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.
② x절편은 2이다.
③ 일차함수 $y=2x$의 그래프와 서로 평행하다.
④ $y=x+1$의 그래프보다 y축에 더 가깝다.
⑤ 점 $(-3,\ 3)$을 지난다.

09 좌표평면 위의 세 점 $(-1,\ a)$, $(2,\ 2)$, $(4,\ -2)$가 한 직선 위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

10 두 점 $(-2,\ 11)$, $(2,\ -5)$를 지나는 직선을 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프가 점 $\left(\frac{3}{4},\ k\right)$를 지날 때, k의 값을 구하시오.

11 오른쪽 그림과 같은 일차함수의 그래프의 x절편은?

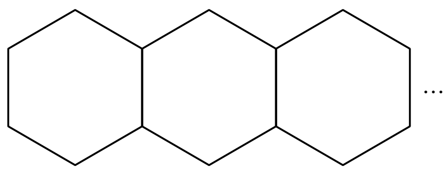


① $-\frac{10}{3}$　② -3
③ $-\frac{7}{3}$　④ -2
⑤ $-\frac{2}{3}$

12 길이가 15 cm인 용수철의 끝에 매단 물건의 무게가 2 g씩 늘어날 때마다 용수철의 길이가 1 cm씩 늘어난다고 한다. x g의 물건을 달 때의 용수철의 길이를 y cm라고 할 때, x와 y 사이의 관계식은?

① $y=x$　② $y=x+15$
③ $y=\frac{1}{5}x+15$　④ $y=\frac{1}{5}x$
⑤ $y=\frac{1}{2}x+15$

13 다음 그림과 같이 길이가 같은 선분을 그려서 여러 개의 정육각형을 그리려고 한다. x개의 정육각형을 그릴 때, 필요한 선분의 개수를 y라고 하면 102개의 정육각형을 그릴 때 필요한 선분의 개수는?



① 499　② 501　③ 506
④ 511　⑤ 516

14 예지는 둘레의 길이가 2400 m인 호수의 둘레를 분속 50 m로 한 바퀴 걸으려고 한다. 예지가 출발한 지 x분 후의 남은 거리를 y m라고 할 때, 출발한 지 25분 후의 남은 거리는?

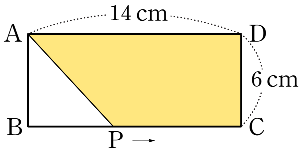
① 1150 m ② 1000 m ③ 900 m
④ 750 m ⑤ 600 m

15 360 L의 물이 들어 있는 물통에서 5분마다 4.5 L씩의 일정한 속력으로 물이 새어 나가고 있다. 새어 나가기 시작한 지 x분 후에 남아 있는 물의 양을 y L라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

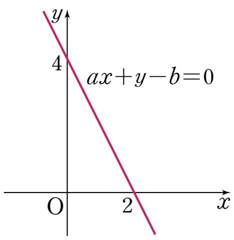
(1) x와 y 사이의 관계식을 구하시오.

(2) 물통에서 물이 다 새어 나갈 때까지 몇 분이 걸리는지 구하시오.

16 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD에서 점 P가 점 B를 출발하여 점 C까지 변 BC 위를 초속 2 cm로 움직이고 있다. 점 P가 출발한 지 x초 후의 사다리꼴 APCD의 넓이를 y cm^{2}라고 할 때, 사다리꼴 APCD의 넓이가 60 cm^{2}가 되는 것은 출발한 지 몇 초 후인지 구하시오.



17 일차방정식 $ax+y-b=0$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?



① -4 ② -2
③ 0 ④ 2
⑤ 4

18 일차방정식 $ax-by=1$의 그래프가 두 점 $(-3, -2)$, $(1, 0)$을 지날 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 3

19 다음 중 일차방정식 $2x-8=0$의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 점 $(4, 0)$을 지난다.
② 일차방정식 $x=5$의 그래프와 서로 평행하다.
③ x축에 평행하다.
④ 그래프 위의 모든 점의 x좌표가 항상 4이다.
⑤ 직선의 방정식 $x=4$의 그래프와 일치한다.

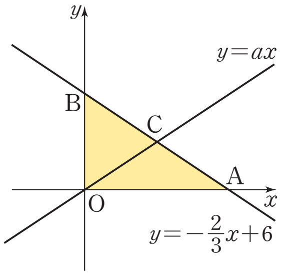
20 다음 세 직선이 한 점에서 만날 때, 상수 a의 값을 구하시오.

$x-y=6$, $3x+4y=4$, $2x+ay=2$

서술형 문제

21 일차함수 $y=\frac{3}{5}x+1$의 그래프를 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프가 점 $(5,\ 1)$을 지날 때, n의 값을 구하시오.

22 오른쪽 그림에서 직선 $y=-\frac{2}{3}x+6$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라고 하자. $\triangle$BOA의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 $y=ax$라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.



(1) $\triangle$BOA의 넓이를 구하시오.

(2) $C(t,\ at)$라고 할 때, t의 값을 구하시오.

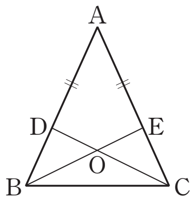
(3) 상수 a의 값을 구하시오.

23 서울에서 외할머니 댁까지의 거리는 350 km이다. 서울에서 출발한 호영이네 가족이 시속 60 km로 일정하게 외할머니 댁을 향하여 갈 때, 외할머니 댁에 도착하는 데 걸리는 시간은 얼마인지 구하시오.

24 일차함수 $y=ax+2$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 6일 때, 상수 a의 값을 모두 구하시오.

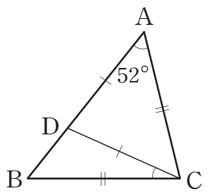
25 두 일차방정식 $2x+ay+b=0$, $4x-5y-5=0$의 그래프의 교점이 무수히 많을 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

01 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AD}=\overline{AE}$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

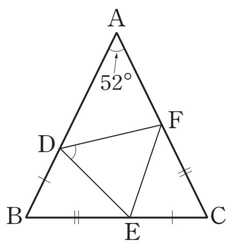


① $\overline{DB}=\overline{EC}$ ② $\overline{BE}=\overline{CD}$
③ $\angle BDC=\angle AEB$ ④ $\triangle ABE\equiv\triangle ACD$
⑤ $\angle OBC=\angle OCB$

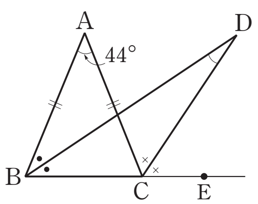
02 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CA}=\overline{CB}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\overline{DA}=\overline{DC}$이고 $\angle DAC=52^\circ$일 때, $\angle DCB$의 크기를 구하시오.



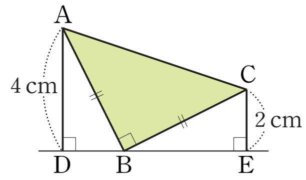
03 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 위에 $\overline{DB}=\overline{EC}$, $\overline{BE}=\overline{CF}$가 되도록 세 점 D, E, F를 잡을 때, $\angle FDE$의 크기를 구하시오.



04 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\angle B$의 이등분선과 $\angle C$의 외각의 이등분선의 교점을 D라고 하자. $\angle A=44^\circ$일 때, $\angle D$의 크기를 구하시오.

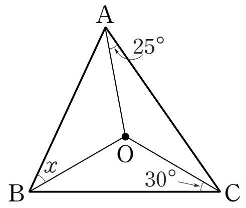


05 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형 ABC의 두 꼭짓점 A, C에서 꼭짓점 B를 지나는 직선에 내린 수선의 발을 각각 D, E라고 하자. $\overline{AD}=4$ cm, $\overline{CE}=2$ cm일 때, $\triangle ABC$의 넓이는?



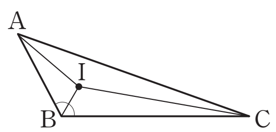
① 10 cm^2 ② 12 cm^2 ③ 15 cm^2
④ 16 cm^2 ⑤ 20 cm^2

06 오른쪽 그림에서 점 O가 $\triangle ABC$의 외심일 때, $\angle x$의 크기는?



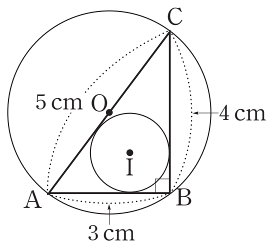
① 25° ② 30°
③ 32° ④ 35°
⑤ 40°

07 다음 그림에서 점 I는 $\triangle ABC$의 내심이다. $\angle AIB : \angle BIC=10 : 11$, $\angle BIC : \angle CIA=11 : 15$일 때, $\angle ABC$의 크기는?



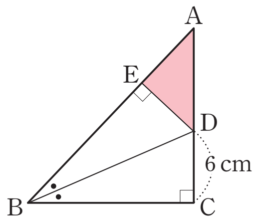
① 100° ② 110° ③ 120°
④ 130° ⑤ 140°

08 오른쪽 그림에서 두 점 O와 I는 각각 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC의 외심과 내심이다. $\overline{AB}=3$ cm, $\overline{BC}=4$ cm, $\overline{CA}=5$ cm일 때, △ABC의 외접원의 넓이와 내접원의 넓이의 차는?

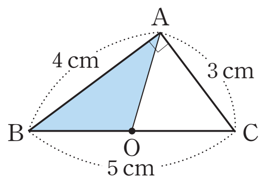


① $\frac{21}{4}\pi$ cm^2 ② $\frac{27}{4}\pi$ cm^2
③ $\frac{33}{4}\pi$ cm^2 ④ $\frac{19}{2}\pi$ cm^2
⑤ $\frac{21}{2}\pi$ cm^2

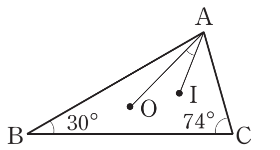
09 오른쪽 그림과 같이 $\angle C=90^\circ$인 직각이등변 삼각형 ABC에서 ∠B의 이등분선과 $\overline{AC}$의 교점을 D, 점 D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 E라고 하자. $\overline{CD}=6$ cm일 때, △AED의 넓이를 구하시오.



10 다음 그림에서 점 O가 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형 ABC의 외심일 때, △ABO의 넓이를 구하시오.



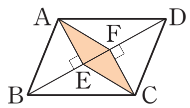
11 다음 그림에서 두 점 O와 I는 각각 △ABC의 외심과 내심이다. $\angle B=30^\circ$, $\angle C=74^\circ$일 때, ∠OAI의 크기를 구하시오.

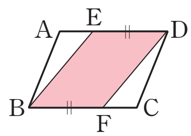


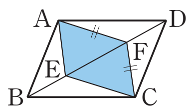
12 다음 중 사각형이 평행사변형이 되기 위한 조건이 아닌 것은?

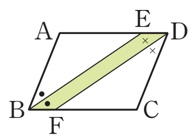
① 두 쌍의 대변이 각각 평행하다.
② 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.
③ 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.
④ 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.
⑤ 한 쌍의 대변이 평행하고 다른 한 쌍의 대변의 길이가 같다.

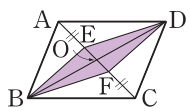
13 다음 그림의 □ABCD가 평행사변형일 때, 색칠한 사각형이 평행사변형이 아닌 것은?

①


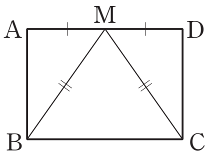
②


③


④


⑤


14 오른쪽 그림의 평행사변형 ABCD에서 $\overline{AD}$의 중점 M에 대하여 △MBC가 $\overline{MB}=\overline{MC}$인 이등변삼각형이 될 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

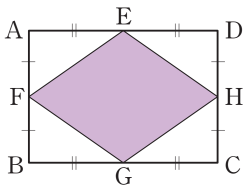


① $\angle ABC=90°$　② $\overline{AC}=\overline{BD}$

③ $\overline{AC}\perp\overline{BD}$　④ $\angle A=\angle D$

⑤ $\angle ABM=\angle DCM$

15 오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD의 네 변의 중점을 각각 E, F, G, H라고 할 때, 다음 보기 중에서 □EFGH에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르시오.



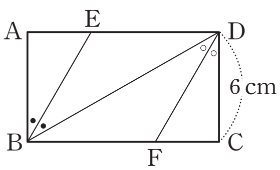
보기

ㄱ. $\overline{EF}\perp\overline{FG}$　ㄴ. $\overline{EG}\perp\overline{FH}$

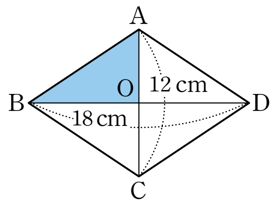
ㄷ. $\overline{EG}=\overline{FH}$　ㄹ. $\angle EFH=\angle EHF$

ㅁ. $\angle EFH=\angle GFH$

16 오른쪽 그림의 직사각형 ABCD에서 $\angle ABD$, $\angle CDB$의 이등분선이 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$와 만나는 점을 각각 E, F라고 하자. $\overline{DC}=6$ cm이고 □EBFD가 마름모일 때, $\overline{BD}$의 길이를 구하시오.



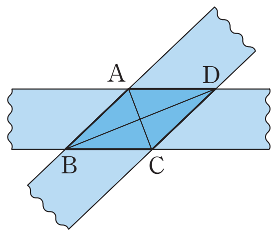
17 다음 그림에서 □ABCD가 마름모일 때, △ABO의 넓이는?



① 24 cm^2　② 27 cm^2　③ 30 cm^2

④ 33 cm^2　⑤ 36 cm^2

18 다음 그림과 같이 폭이 같은 2개의 종이테이프를 겹쳤을 때, 겹쳐진 부분에 생긴 사각형 ABCD의 넓이가 48 cm^2이다. $\overline{AC}=8$ cm일 때, $\overline{BD}$의 길이를 구하시오.



19 다음 중 □ABCD가 정사각형이 되는 것은?

① $\overline{AB}/\!/\overline{DC}$, $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$, $\angle A=90°$

② $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$, $\overline{AC}=\overline{BD}$

③ $\overline{AB}=\overline{DC}$, $\overline{AB}/\!/\overline{DC}$, $\overline{AC}\perp\overline{BD}$

④ $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$, $\overline{AC}\perp\overline{BD}$

⑤ $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$, $\angle B=\angle C$

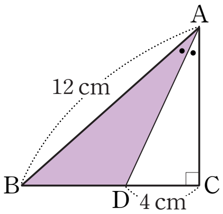
20 다음 중 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하는 사각형의 개수를 x, 두 대각선의 길이가 서로 같은 사각형의 개수를 y, 두 대각선이 서로 수직으로 만나는 사각형의 개수를 z라고 할 때, $x-y+z$의 값은?

사다리꼴	평행사변형	직사각형
마름모	정사각형	등변사다리꼴

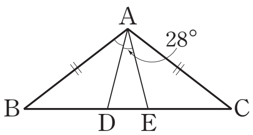
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

서술형 문제

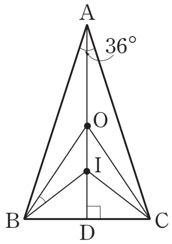
21 오른쪽 그림과 같이 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 $\overline{BC}$의 교점을 D라고 하자. $\overline{AB}=12$ cm, $\overline{DC}=4$ cm일 때, $\triangle ABD$의 넓이를 구하시오.



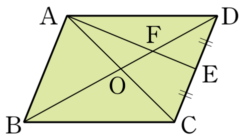
22 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이다. $\overline{BA}=\overline{BE}$, $\overline{CA}=\overline{CD}$, $\angle DAE=28^\circ$일 때, $\angle BAD$의 크기를 구하시오.



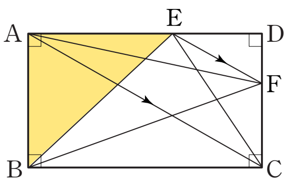
23 오른쪽 그림에서 두 점 O와 I는 각각 $\triangle ABC$의 외심과 내심이다. $\angle BAC=36^\circ$일 때, $\angle OBI$의 크기를 구하시오.



24 오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 점 O는 두 대각선의 교점이다. $\overline{CD}$의 중점을 E, $\overline{AE}$와 $\overline{BD}$의 교점을 F라고 하자. $\triangle FAO=10\text{ cm}^2$, $\triangle FDE=10\text{ cm}^2$일 때, □ABCD의 넓이를 구하시오.



25 다음 그림에서 직사각형 ABCD의 넓이는 48 cm^2이다. $\overline{AD}$ 위의 점 E와 $\overline{DC}$ 위의 점 F에 대하여 $\overline{AC}/\!/\overline{EF}$, $\overline{DF}:\overline{FC}=3:5$일 때, $\triangle ABE$의 넓이를 구하시오.

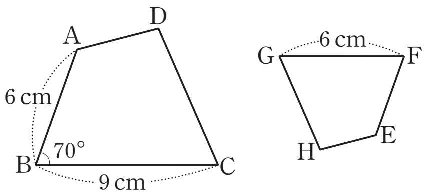


01 다음 보기 중 항상 닮음인 도형의 개수는?

> **보기**
> ㄱ. 두 정삼각형　　　ㄴ. 두 정팔각형
> ㄷ. 두 원　　　　　　ㄹ. 두 구
> ㅁ. 두 직육면체　　　ㅂ. 두 원기둥

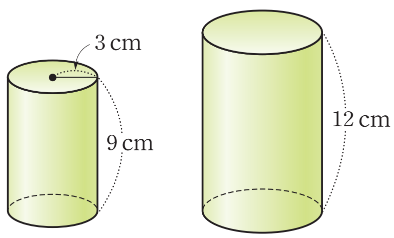
① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

02 다음 그림에서 □ABCD∽□EFGH일 때, $\overline{EF}$의 길이와 ∠F의 크기를 차례로 나열한 것은?



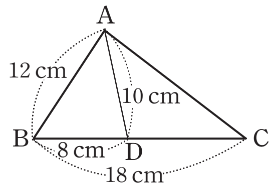
① 4 cm, 60°　　② 4 cm, 70°
③ 5 cm, 60°　　④ 5 cm, 70°
⑤ 6 cm, 70°

03 다음 그림에서 두 원기둥이 서로 닮은 도형일 때, 큰 원기둥의 밑면의 둘레의 길이는?



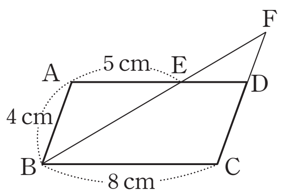
① 8π cm　　② 9π cm　　③ 10π cm
④ 12π cm　　⑤ 16π cm

04 오른쪽 그림에서 $\overline{AC}$의 길이는?

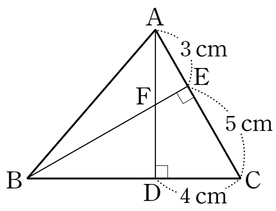


① 11 cm
② 12 cm
③ 13 cm
④ 14 cm
⑤ 15 cm

05 다음 그림의 평행사변형 ABCD에서 점 B를 지나는 직선이 $\overline{AD}$와 만나는 점을 E, $\overline{CD}$의 연장선과 만나는 점을 F라고 하자. $\overline{AB}=4$ cm, $\overline{BC}=8$ cm, $\overline{AE}=5$ cm일 때, $\overline{DF}$의 길이를 구하시오.

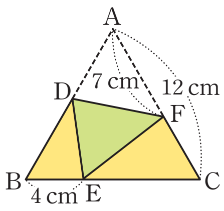


06 오른쪽 그림과 같이 △ABC의 두 점 A, B에서 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 각각 D, E라고 하자.
$\overline{AE}=3$ cm, $\overline{CE}=5$ cm, $\overline{CD}=4$ cm일 때, $\overline{BD}$의 길이는?



① 5.5 cm　　② 6 cm　　③ 6.5 cm
④ 7 cm　　⑤ 7.5 cm

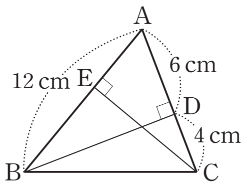
07 오른쪽 그림은 정삼각형 ABC의 꼭짓점 A가 변 BC 위의 점 E에 오도록 접은 것이다. 다음 물음에 답하시오.



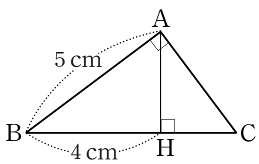
(1) $\triangle$EFC와 서로 닮은 삼각형을 찾아 기호로 나타내시오.

(2) $\overline{\text{DB}}$의 길이를 구하시오.

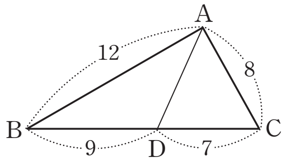
08 다음 그림과 같이 $\triangle$ABC의 두 점 B, C에서 변 AC, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E라고 할 때, $\overline{\text{BE}}$의 길이를 구하시오.



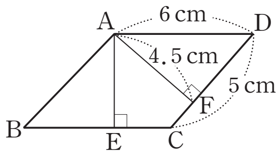
09 다음 그림과 같이 $\angle$A$=90^\circ$인 직각삼각형 ABC의 점 A에서 $\overline{\text{BC}}$에 내린 수선의 발을 H라고 하자. $\overline{\text{AB}}=5$ cm, $\overline{\text{BH}}=4$ cm일 때, $\overline{\text{CH}}$의 길이를 구하시오.



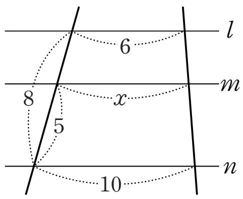
10 다음 그림과 같이 $\triangle$ABC에서 $\overline{\text{AB}}=12$, $\overline{\text{BD}}=9$, $\overline{\text{AC}}=8$, $\overline{\text{DC}}=7$일 때, $\overline{\text{AD}}$의 길이를 구하시오.



11 다음 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 점 A에서 $\overline{\text{BC}}$와 $\overline{\text{CD}}$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라고 하자. $\overline{\text{AD}}=6$ cm, $\overline{\text{CD}}=5$ cm, $\overline{\text{AF}}=4.5$ cm일 때, $\overline{\text{AE}}$의 길이를 구하시오.

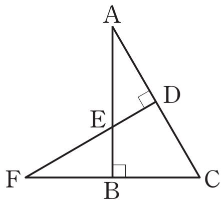


12 오른쪽 그림에서 $l \,/\!/\, m \,/\!/\, n$일 때, x의 값은?



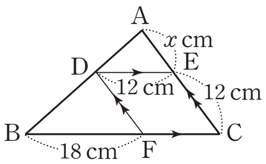
① $\dfrac{13}{2}$ ② 7 ③ $\dfrac{22}{3}$ ④ $\dfrac{15}{2}$ ⑤ 8

13 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC$와 서로 닮음인 삼각형의 개수는?



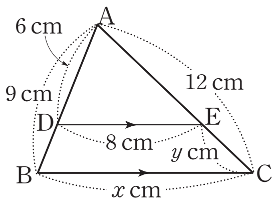
① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

14 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$에서 $\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$, $\overline{DF} /\!/ \overline{AC}$일 때, x의 값은?

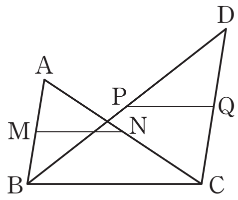


① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

15 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$일 때, $x+y$의 값을 구하시오.



16 오른쪽 그림과 같이 네 점 M, N, P, Q가 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$의 중점일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

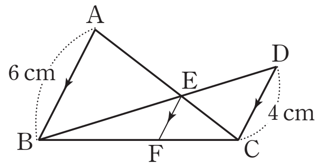


① $\overline{MN} /\!/ \overline{PQ}$　② $\overline{BC}=\overline{PQ}$

③ $\overline{MN}=\overline{PQ}$　④ $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

⑤ $\overline{PQ}+\overline{MN}=\overline{BC}$

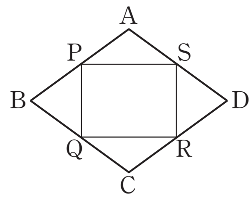
17 다음 그림에서 $\overline{AB} /\!/ \overline{EF} /\!/ \overline{DC}$이고, $\overline{AB}=6$ cm, $\overline{DC}=4$ cm일 때, $\overline{EF}$의 길이는?



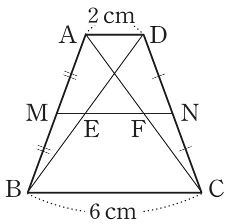
① 2 cm　② $\frac{12}{5}$ cm　③ 3 cm

④ $\frac{17}{5}$ cm　⑤ 4 cm

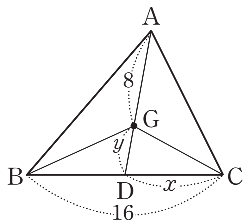
18 오른쪽 그림과 같이 마름모 ABCD에서 네 점 P, Q, R, S는 각 변의 중점이다. □PQRS의 둘레의 길이가 12 cm일 때, □ABCD의 두 대각선의 길이의 합을 구하시오.



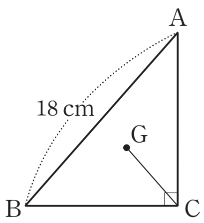
19 오른쪽 그림과 같이 사다리꼴 ABCD에서 두 점 M, N은 각각 $\overline{AB}$, $\overline{DC}$의 중점이다. $\overline{AD}=2$ cm, $\overline{BC}=6$ cm일 때, $\overline{EF}$의 길이를 구하시오.



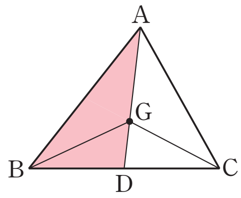
20 오른쪽 그림에서 점 G가 △ABC의 무게중심일 때, x, y의 값을 각각 구하시오.



21 오른쪽 그림에서 점 G는 ∠C=90°인 직각삼각형 ABC의 무게중심이다. $\overline{AB}=18$ cm일 때, $\overline{CG}$의 길이를 구하시오.

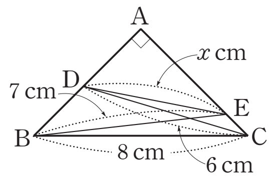


22 오른쪽 그림에서 점 G는 △ABC의 무게중심이다. △GBC의 넓이가 24 cm^{2}일 때, △ABD의 넓이는?



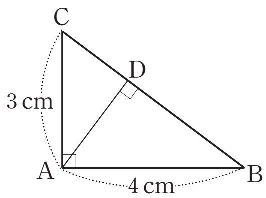
① 30 cm^2 ② 36 cm^2 ③ 42 cm^2
④ 48 cm^2 ⑤ 54 cm^2

23 오른쪽 그림과 같이 ∠A=90°인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{BE}=7$ cm, $\overline{CD}=6$ cm, $\overline{BC}=8$ cm일 때, x^2의 값은?

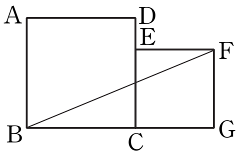


① 19 ② 20 ③ 21
④ 22 ⑤ 23

24 다음 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$이다. $\overline{AB}=4$ cm, $\overline{AC}=3$ cm일 때, $\overline{AD}$의 길이를 구하시오.

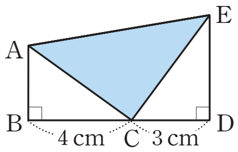


25 다음 그림과 같이 넓이가 각각 $49\ \text{cm}^2$, $25\ \text{cm}^2$인 두 정사각형 ABCD, ECGF를 붙여 놓았다. 이때 $\overline{\text{BF}}$의 길이는?

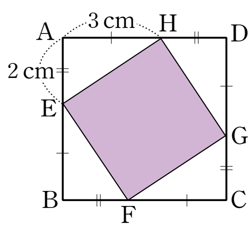


① 11 cm　② 12 cm　③ 13 cm
④ 14 cm　⑤ 15 cm

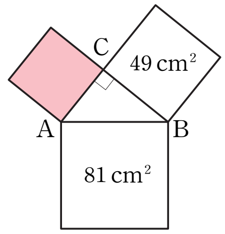
26 오른쪽 그림에서 △ABC와 △CDE는 서로 합동이고, 세 점 B, C, D는 일직선 위에 있다. $\overline{\text{BC}}=4\ \text{cm}$, $\overline{\text{CD}}=3\ \text{cm}$일 때, △ACE의 넓이를 구하시오.



27 다음 그림의 정사각형 ABCD에서
$\overline{\text{AE}}=\overline{\text{BF}}=\overline{\text{CG}}=\overline{\text{DH}}=2\ \text{cm}$,
$\overline{\text{AH}}=\overline{\text{BE}}=\overline{\text{CF}}=\overline{\text{DG}}=3\ \text{cm}$일 때, □EFGH의 넓이를 구하시오.

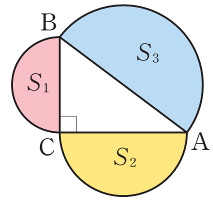


28 오른쪽 그림은 $\angle\text{C}=90^\circ$인 직각삼각형 ABC의 세 변을 각각 한 변으로 하는 세 정사각형을 그린 것이다. 두 정사각형의 넓이가 각각 $81\ \text{cm}^2$, $49\ \text{cm}^2$일 때, $\overline{\text{AC}}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는?

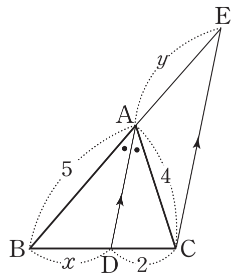


① $32\ \text{cm}^2$　② $34\ \text{cm}^2$　③ $36\ \text{cm}^2$
④ $38\ \text{cm}^2$　⑤ $40\ \text{cm}^2$

29 다음 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 각 변을 지름으로 하는 반원의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라고 하자. $\overline{\text{AB}}=10\ \text{cm}$일 때, S_1+S_2의 값을 구하시오.

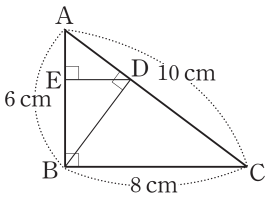


30 오른쪽 그림의 △ABC에서 $\overline{\text{AD}}$는 ∠A의 이등분선이다. 점 C를 지나고 $\overline{\text{AD}}$에 평행한 직선과 $\overline{\text{BA}}$의 연장선의 교점을 E라고 할 때, $x+y$의 값을 구하시오.

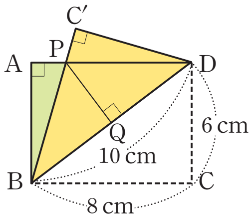


서술형 문제

31 다음 그림과 같이 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 점 D는 점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발이고, 점 E는 점 D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발이다. 이때 $\overline{BE}$의 길이를 구하시오.



32 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD를 대각선 BD를 접는 선으로 하여 접었다. $\overline{AD}$와 $\overline{BC'}$의 교점 P에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 Q라고 할 때, 물음에 답하시오.

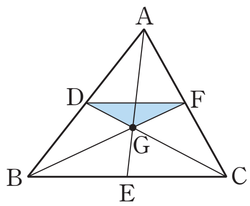


(1) $\overline{BQ}$의 길이를 구하시오.

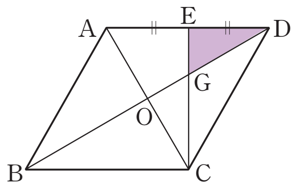
(2) $\triangle PBQ \backsim \triangle DBC'$임을 설명하시오.

(3) $\overline{PQ}$의 길이를 구하시오.

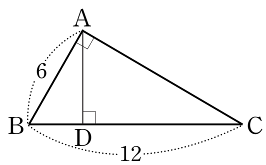
33 다음 그림에서 점 G는 $\triangle ABC$의 무게중심이다. $\triangle ABC$의 넓이가 $120\ cm^2$일 때, $\triangle DGF$의 넓이를 구하시오.



34 오른쪽 그림의 평행사변형 ABCD에서 점 E는 $\overline{AD}$의 중점이고, 점 G는 $\overline{BD}$와 $\overline{CE}$의 교점이다. □ABCD의 넓이가 $60\ cm^2$일 때, $\triangle GDE$의 넓이를 구하시오.



35 오른쪽 그림과 같이 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형 ABC의 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 D라고 하자. $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=12$일 때, $\overline{AD}^2$의 값을 구하시오.



01 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 두 눈의 수의 차가 4 또는 5가 되는 경우의 수는?

① 5 ② 6 ③ 7

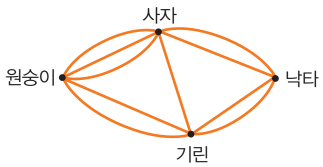
④ 8 ⑤ 9

02 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 첫 번째에 나온 눈의 수를 a, 두 번째에 나온 눈의 수를 b라고 하자. 방정식 $2a+3b=24$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

03 다음은 어느 동물원의 안내도이다. 원숭이 우리에서 낙타 우리까지 가는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 사자 우리와 기린 우리를 모두 거칠 때에는 사자 우리를 먼저 가기로 한다.)



04 서로 다른 동전 네 개를 동시에 던졌을 때, 앞면이 2개, 뒷면이 2개 나오는 경우의 수는?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 6

05 서로 다른 두 개의 주사위 A, B를 던져서 나온 눈의 수를 각각 a, b라고 할 때, $10a+b$가 4의 배수가 되는 경우의 수를 구하시오.

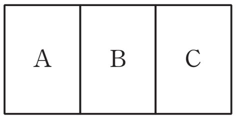
06 1, 2, 3, 4, 5가 각각 적힌 5장의 카드 중에서 2장을 뽑아 두 자리의 자연수를 만들 때, 홀수의 개수는?

① 4 ② 6 ③ 8

④ 10 ⑤ 12

07 상자 속에 1부터 25까지의 자연수가 각각 적힌 25개의 구슬이 들어 있다. 이 상자에서 한 개의 구슬을 꺼낼 때, 5의 배수 또는 6의 배수가 적힌 구슬이 나오는 경우의 수를 구하시오.

08 오른쪽 그림과 같이 세 개의 영역 A, B, C에 빨강, 파랑, 노랑, 초록의 4가지 색을 이용하여 칠하려고 한다. 같은 색을 여러 번 사용할 수 있으나, 이웃한 부분은 서로 다른 색을 칠하는 경우의 수는?



① 12 ② 16 ③ 24

④ 36 ⑤ 48

09 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 3 이상이 될 경우의 수는?

① 28 ② 30 ③ 31 ④ 33 ⑤ 35

10 현석, 경민, 서진이가 수학 시간에 배운 확률에 대해 이야기하고 있다. 다음 중에서 바르게 말한 학생을 모두 고른 것은?

> **현석:** 1에서 20까지의 수가 각각 적힌 20장의 제비 중에서 한 장을 임의로 뽑을 때, 20 이하의 수가 적힌 제비를 뽑을 확률은 1이야.
> **경민:** 2개의 불량품이 섞여 있는 100개의 제품 중에서 한 개를 임의로 택할 때, 불량품이 나오지 않을 확률은 $\frac{4}{5}$야.
> **서진:** 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 두 눈의 수의 합이 1이 될 확률은 0보다 커.

① 현석 ② 경민 ③ 현석, 경민 ④ 경민, 서진 ⑤ 현석, 경민, 서진

11 1부터 20까지의 자연수가 각각 적힌 20장의 카드 중에서 한 장의 카드를 임의로 뽑을 때, 5의 배수 또는 7의 배수가 적힌 카드를 뽑을 확률은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{7}{20}$ ⑤ $\frac{9}{20}$

12 다음은 나영이네 반 학생들이 발야구, 피구, 농구, 축구 중 가장 좋아하는 한 종목을 선택하여 만든 표이다. 반 학생 중 한 명을 임의로 뽑았을 때, 그 학생이 농구를 선택했을 확률은?

종목	발야구	피구	농구	축구
학생 수(명)	5	7	8	10

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

13 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 첫 번째에 나온 눈의 수를 x, 두 번째에 나온 눈의 수를 y라고 하자. 이때 $\frac{x}{y}\geq 2$일 확률은?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

14 어느 지역 체육 대회에서 참가자 400명에게 경품권을 임의로 나누어 주었다. 추첨을 통해 오른쪽 표와 같이 상품을 나누어 준다고 할 때, 경품권을 받은 사람이 상품을 받을 확률은?

상품 내역	
1등	1명
2등	4명
3등	10명
4등	15명
5등	30명

① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{7}{40}$ ③ $\frac{9}{50}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

15 오른쪽 그림과 같이 크기가 같은 16개의 정사각형으로 이루어진 표적이 있다. 화살을 연속해서 두 번 쏠 때, 첫 번째에는 소수, 두 번째에는 15의 약수가 적힌 부분을 맞힐 확률은? (단, 화살이 경계선을 맞히거나 표적을 빗나가는 경우는 생각하지 않는다.)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

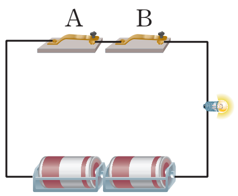
① $\frac{3}{32}$ ② $\frac{7}{64}$ ③ $\frac{1}{8}$
④ $\frac{5}{32}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

16 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나온 두 눈의 수의 합이 6의 배수가 아닐 확률은?

① $\frac{5}{36}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

17 상자 속에 빨간 구슬 5개와 파란 구슬 3개가 들어 있다. 이 상자에서 구슬을 1개씩 임의로 두 번 꺼낼 때, 첫 번째에는 파란 구슬이 나오고, 두 번째에는 빨간 구슬이 나올 확률을 구하시오. (단, 꺼낸 구슬은 다시 넣는다.)

18 다음 그림과 같은 전기 회로에서 두 스위치 A, B가 닫힐 확률이 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$일 때, 전구에 불이 들어오지 않을 확률은? (단, 스위치가 모두 닫힐 때 전류가 흐른다.)



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$
④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

19 영미와 민규가 오목을 둘 때, 영미가 이길 확률이 $\frac{2}{3}$이다. 두 학생이 오목을 두 게임 둘 때, 영미가 한 번만 이길 확률은? (단, 비기는 경우는 없다.)

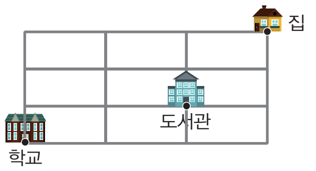
① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

20 A 주머니에는 빨간색 구슬이 5개, 파란색 구슬이 3개가 들어 있고, B 주머니에는 빨간색 구슬이 3개, 파란색 구슬이 5개 들어 있다. 재석이가 A, B 두 주머니에서 각각 한 개의 구슬을 임의로 꺼낼 때, 빨간색 구슬이 적어도 한 개 나올 확률은?

① $\frac{15}{64}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{5}{8}$
④ $\frac{49}{64}$ ⑤ $\frac{55}{64}$

서술형 문제

21 다음 그림과 같은 도로에서 형빈이는 학교에서 출발하여 도서관을 거쳐 집으로 가려고 한다. 최단 거리로 가는 방법은 모두 몇 가지인지 구하시오.



22 영민이는 국어 시험에서 4개의 보기 중 정답 한 개를 고르는 객관식 문제 2개를 풀지 못하였다. 영민이가 이 2문제의 답을 임의로 하나를 선택하여 제출하였을 때, 적어도 한 문제는 맞힐 확률을 구하시오.

23 주머니 A에는 모양과 크기가 같은 노란 공 4개와 파란 공 5개가 들어 있고, 주머니 B에는 모양과 크기가 같은 빨간 공 5개와 파란 공 3개가 들어 있다. 다음 물음에 답하시오.

(1) 주머니 A에서 공을 한 개 꺼낼 때, 파란 공을 꺼낼 확률을 구하시오.

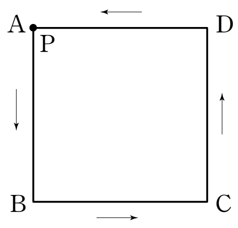
(2) 주머니 B에서 공을 한 개 꺼낼 때, 파란 공을 꺼낼 확률을 구하시오.

(3) 두 주머니 A, B에서 공을 각각 한 개씩 꺼낼 때, 두 공이 모두 파란 공일 확률을 구하시오.

24 상자 안에 빨간 구슬 5개, 파란 구슬 4개가 들어 있다. 승준이와 지호가 순서대로 구슬을 한 개씩 임의로 꺼낼 때, 지호가 파란 구슬을 꺼낼 확률을 구하시오.

(단, 꺼낸 구슬은 다시 넣지 않는다.)

25 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 점 P는 점 A를 출발하여 주사위를 던져서 나온 눈의 수만큼 화살표 방향으로 각 꼭짓점 위를 이동한다고 한다. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 점 P가 첫 번째는 점 A에, 두 번째는 점 C에 놓일 확률을 구하시오.



실전 테스트 1회

| 정답과 해설 351쪽 |

01 다음 중 유한소수로 나타낼 수 있는 것은?

① $\frac{5}{7}$ ② $\frac{26}{18}$ ③ $\frac{20}{9}$

④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{9}{2\times5\times3}$

02 다음 중 순환소수의 표현이 옳은 것은?

① $0.352352352\cdots=0.\dot{3}5\dot{2}$

② $0.1333\cdots=0.1\dot{3}\dot{3}$

③ $0.321321321\cdots=0.32\dot{1}$

④ $0.030303\cdots=0.0\dot{3}$

⑤ $1.432143214321\cdots=1.\dot{4}\dot{3}\dot{2}\dot{1}$

03 다음 중 보기에 대한 설명으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

보기

ㄱ. $\frac{6}{9}$ ㄴ. $\frac{21}{2^3\times3\times5^2}$

ㄷ. $0.6\dot{5}$ ㄹ. 3.141592

ㅁ. $\pi+1$

ㅂ. $0.313311333111333311111\cdots$

① ㄱ은 순환소수이다.

② ㄴ은 유한소수로 나타낼 수 있다.

③ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ은 유리수이다.

④ ㅁ은 순환소수가 아닌 무한소수이다.

⑤ ㅂ은 순환소수이다.

04 다음 중 유한소수로 나타낼 수 <u>없는</u> 것은?

① $\frac{9}{30}$ ② $\frac{14}{35}$

③ $\frac{12}{48}$ ④ $\frac{6}{2^2\times3\times5\times7}$

⑤ $\frac{45}{2^2\times3\times5^2}$

05 다음은 순환소수 $1.2\dot{7}\dot{3}$을 분수로 나타내는 과정이다. ㉠~㉤에 들어갈 수로 알맞은 것은?

> $1.2\dot{7}\dot{3}$을 x라고 하면
>
> $x=1.2737373\cdots$ ⋯⋯ ①
>
> ①의 양변에 $\boxed{㉠}$, $\boxed{㉡}$을 각각 곱하면
>
> $\boxed{㉠}x=1273.737373\cdots$ ⋯⋯ ②
>
> $\boxed{㉡}x=12.737373\cdots$ ⋯⋯ ③
>
> ②에서 ③을 변끼리 빼면
>
> $\boxed{㉢}x=\boxed{㉣}$, $x=\frac{\boxed{㉣}}{\boxed{㉢}}$
>
> 이다. 따라서 $1.2\dot{7}\dot{3}=\boxed{㉤}$이다.

① ㉠: 100 ② ㉡: 10 ③ ㉢: 90

④ ㉣: 1146 ⑤ ㉤: $\frac{1261}{90}$

06 어떤 기약분수를 순환소수로 나타내는데 슬기는 분모를 잘못 보아 $1.2\dot{5}$로 나타냈고, 동수는 분자를 잘못 보아 $0.\dot{1}\dot{5}$로 나타냈다. 처음의 기약분수를 소수로 바르게 나타내시오. (단, 잘못 본 분수도 기약분수이다.)

07 분수 $\frac{a}{140}$를 소수로 나타내면 유한소수가 되고, 기약분수로 나타내면 $\frac{13}{b}$이 된다. a, b가 100 이하의 자연수일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

08 다음 중 옳은 것은?

① $a^2 \times a^3 = a^6$
② $a^7 \div a^2 = a^5$
③ $y^2 \div y^2 = 0$
④ $(a^2)^4 = a^6$
⑤ $(ab)^3 = ab^3$

09 다음 중 옳은 것은?

① $x^2 + x^3 = x^5$
② $a^2 \times a^4 = a^8$
③ $x^4 \times y^3 \times x = x^4 \times y^3$
④ $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4 = \frac{a^{12}}{b^8}$ (단, $b \neq 0$)
⑤ $\left(-\frac{y}{x^2}\right)^3 = \frac{y^3}{x^6}$ (단, $x \neq 0$)

10 $(x^2y^a)^4 = x^by^{12}$일 때, 자연수 a, b의 값을 각각 구하시오.

11 $(2x^2+5x-10)-(-5x^2+x-2)$를 간단히 하였을 때, 각 항의 계수와 상수항의 합을 구하시오.

12 $(ax^2-4xy+b)\times(-2x) = -4x^3+cx^2y-16x$ 일 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.

13 $50^{30} \times 4^{16} \times 7$은 m자리의 수이고, 각 자리의 숫자의 합은 n이다. 이때 $m-3n$의 값을 구하시오.

14 다음 보기 중 일차부등식을 모두 고르면?

보기
ㄱ. $\frac{5}{x}+2=0$
ㄴ. $-x+1<3-2x$
ㄷ. $x^2-x-1<0$
ㄹ. $2(x-3)\le 1+2x$
ㅁ. $y-1<2y$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄴ, ㅁ
④ ㄷ, ㅁ ⑤ ㄴ, ㄹ, ㅁ

15 $a>b$일 때, 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $3a+1>3b+1$
② $\frac{a-1}{3}>\frac{b-1}{3}$
③ $\frac{a}{3}-1<\frac{b}{3}-1$
④ $-\frac{a}{3}-1<-\frac{b}{3}-1$
⑤ $-3a+1>-3b+1$

16 다음 일차부등식을 풀고, 그 해를 수직선 위에 나타내시오.

(1) $x-1>-2$
(2) $x+14\ge -4x-1$

17 x가 자연수일 때, 부등식 $7+3x\le x+15$를 만족시키는 x의 값이 아닌 것은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

18 두 일차부등식 $x-2>2a$, $\frac{1}{2}x-1>\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$의 해가 서로 같을 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

19 민정이는 두 번의 수학 시험에서 83점과 78점을 받았다. 다음 수학 시험에서 몇 점 이상을 받아야 수학 점수의 평균이 85점 이상이 되겠는가?

① 88점 ② 91점
③ 92점 ④ 94점
⑤ 95점

[20~24] 다음 문제를 읽고, 식과 답을 서술하시오.

20 분수 $\frac{10}{27}$을 순환소수로 나타냈을 때, 소수점 아래 37번째 자리의 숫자를 구하시오.

21 다음은 서하와 한준이의 대화이다. 물음에 답하시오.

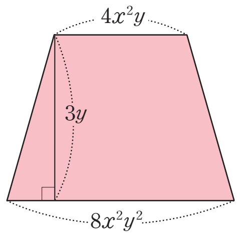
> 한준: 서하야, 기약분수를 소수로 나타내는 문제 잘 풀었어?
> 서하: 나는 분모를 잘못 봐서 $0.1\dot{8}$이 나왔어.
> 한준: 나는 분자를 잘못 봐서 $0.\dot{8}\dot{1}$이 나왔는데!
> 서하: 과연 처음 기약분수는 무엇이었을까?

(1) 서하와 한준이가 잘못 본 기약분수를 각각 구하시오.

(2) 처음에 주어진 기약분수를 소수로 나타내시오.

22 지구와 태양 사이의 거리는 약 1.6×10^8 km이고, 태양의 빛은 1초에 3.2×10^5 km를 간다고 할 때, 지구에서 사람이 보는 태양의 빛은 몇 초 전에 태양을 출발한 것이라고 할 수 있는지 구하시오.

23 다음 그림과 같이 윗변의 길이가 $4x^2y$, 아랫변의 길이가 $8x^2y^2$, 높이가 $3y$인 사다리꼴의 넓이를 구하시오.



24 현재 언니의 통장에는 60000원, 동생의 통장에는 40000원이 예금되어 있다. 다음 달부터 매달 언니는 5000원씩, 동생은 7000원씩 예금할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) x개월 후 동생이 예금한 돈이 언니가 예금한 돈보다 많아진다고 할 때, 이를 부등식으로 나타내시오.

(2) 몇 개월 후부터 동생이 예금한 돈이 언니가 예금한 돈보다 많아지는지 구하시오.

실전 테스트 2회

| 정답과 해설 353쪽 |

01 x, y가 자연수일 때, 다음 일차방정식을 푸시오.

(1) $x+3y=8$

(2) $5x+y=20$

02 연립방정식 $\begin{cases} ax+y=8 \\ x-by=5 \end{cases}$ 의 해가 $(3, 2)$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

03 다음 연립방정식 중 $x=-1$, $y=2$가 해인 것은?

① $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-2y=3 \end{cases}$

② $\begin{cases} x-y=-2 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$

③ $\begin{cases} x+4y=7 \\ 2x-5y=1 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x-y=4 \\ x-2y=-5 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} x+y=1 \\ -3x+4y=11 \end{cases}$

04 연립방정식 $\begin{cases} 2x-3y=4 \\ ax+5y=-14 \end{cases}$ 에서 x의 값이 -1일 때, 상수 a의 값은?

① -24 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 14

05 연립방정식 $\begin{cases} 2x-5y=-7 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-2y=-5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 를 두 식의 합이나 차를 이용하여 풀 때, x를 없애는 식으로 적당한 것은?

① ㉠$\times 2+$㉡$\times 5$ ② ㉠$\times 3+$㉡$\times 2$

③ ㉠$\times 2-$㉡$\times 5$ ④ ㉠$\times 3-$㉡$\times 2$

⑤ ㉠$\times 2-$㉡$\times 3$

06 현재 삼촌과 동생의 나이의 합은 28살이고, 3년 뒤 삼촌의 나이는 동생의 나이의 2배보다 4살이 더 많다고 한다. 현재 동생의 나이는?

① 4살 ② 5살 ③ 7살 ④ 8살 ⑤ 9살

07 다음 일차함수의 그래프 중 평행이동하였을 때, 일차함수 $y=-\frac{1}{2}x+3$의 그래프와 포개어지는 것은?

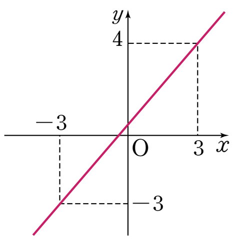
① $y=\frac{1}{2}x$　② $y=-x+2$
③ $y=-\frac{1}{2}x-3$　④ $y=-2x+3$
⑤ $y=\frac{1}{3}x+3$

08 일차함수 $y=-2x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프는 점 $(2,\ k)$를 지난다. 이때 k의 값을 구하시오.

09 점 $(0,\ -3)$을 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은?

① $x=3$　② $y=3$
③ $y=2x-3$　④ $4y+12=0$
⑤ $4x+12=0$

10 오른쪽 그림의 직선과 평행하고, y절편이 -3인 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.



11 다음 중 일차함수 $y=-3x+9$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 원점을 지나는 직선이다.
② x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
③ 제3사분면을 지나지 않는다.
④ x절편은 9이다.
⑤ $y=-2x$의 그래프를 평행이동한 것이다.

12 일차함수 $y=\frac{2}{3}x-1$의 그래프와 평행하고, 일차함수 $y=-2(x-1)$의 그래프를 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프와 y축 위에서 만나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.

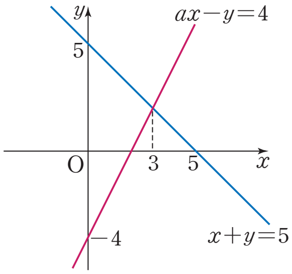
13 50 L들이 물통에 20 L의 물이 들어 있다. 한 쪽에서는 10분에 30 L씩 물을 넣고, 다른 한 쪽에서는 10분에 20 L씩 물을 뺀다면, 몇 분 후에 물통을 가득 채울 수 있겠는가?

① 10분 후　② 20분 후　③ 30분 후
④ 40분 후　⑤ 50분 후

14 알콜 램프로 물을 데우면 물의 온도가 1분에 2 ℃씩 올라가고, 불을 끄고 식히면 3분에 5 ℃씩 내려간다. 25 ℃의 물을 75 ℃까지 데웠다가 식혀서 60 ℃로 만드는 데 몇 분이 걸리겠는가?

① 33분 ② 34분 ③ 35분
④ 36분 ⑤ 37분

15 오른쪽은 연립방정식 $\begin{cases} x+y=5 \\ ax-y=4 \end{cases}$ 의 해를 그래프로 나타낸 것이다. 이때 상수 a의 값은?



① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

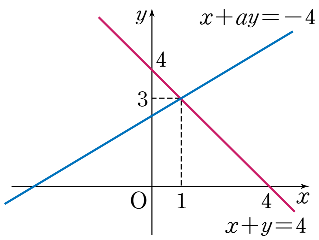
16 다음 중 일차방정식 $x-3y=1$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 기울기는 3이다.
② x절편은 $-\frac{1}{3}$이다.
③ y절편은 1이다.
④ 점 $(4,\ -3)$을 지난다.
⑤ 일차함수 $y=\frac{1}{3}x$의 그래프와 서로 평행하다.

17 일차방정식 $5x-y-3=0$의 그래프가 점 $(a,\ 7)$을 지날 때, a의 값을 구하시오.

18 직선 $y=-2x+3$ 위의 점 $(-3,\ k)$를 지나고 y축에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

19 오른쪽 그림은 연립방정식 $\begin{cases} x+y=4 \\ x+ay=-4 \end{cases}$ 의 해를 그래프로 나타낸 것이다. 이때 상수 a의 값은?



① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ -1
④ 0 ⑤ $\frac{1}{3}$

20 두 일차방정식 $ax+y=2$, $3y-2x=3$의 그래프의 교점이 존재하지 않을 때, 상수 a의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{2}{3}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[21~25] 다음 문제를 읽고, 식과 답을 서술하시오.

21 어느 농장에서 토끼와 닭을 기르고 있는데 그 머리의 수의 합은 80개이고, 다리의 수의 합은 230개이다. 농장에서 기르는 토끼가 x마리, 닭이 y마리라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 토끼와 닭의 머리의 수의 합에 대한 일차방정식을 세우시오.

(2) 토끼와 닭의 다리의 수의 합에 대한 일차방정식을 세우시오.

(3) 위의 두 일차방정식을 이용하여 연립방정식을 세우고, 그 해를 구하시오.

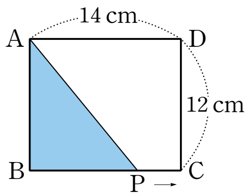
(4) 이 농장에서 기르는 토끼와 닭은 각각 몇 마리인지 구하시오.

22 10 L의 물이 들어 있는 물통에 5분마다 7.5 L씩 물을 채우면 x분 후에 y L가 된다고 한다. 다음 물음에 답하시오.

(1) x와 y 사이의 관계식을 구하시오.

(2) 물의 양이 58 L가 되는 것은 물을 넣기 시작한 지 몇 분 후인지 구하시오.

23 오른쪽 그림과 같은 직사각형 ABCD에서 점 P가 점 B를 출발하여 점 C까지 변 BC 위를 초속 0.5 cm로 움직이고 있다. x초 후의 $\triangle$ABP의 넓이를 y cm^{2}라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

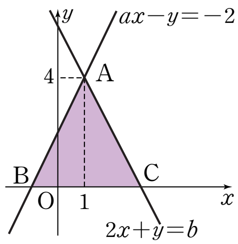


(1) x와 y 사이의 관계식을 구하시오.

(2) $\triangle$ABP의 넓이가 60 cm^{2}가 될 때는 출발한 지 몇 초 후인지 구하시오.

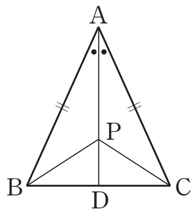
24 두 일차방정식 $x-y+1=0$, $x+2y-5=0$의 그래프의 교점을 지나고, 일차방정식 $3x+2y-1=0$의 그래프에 평행한 직선의 방정식을 $ax+by-7=0$이라고 하자. 이때 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

25 두 직선 $ax-y=-2$, $2x+y=b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 두 직선과 x축으로 둘러싸인 $\triangle$ABC의 넓이를 구하시오. (단, a, b는 상수)



| 정답과 해설 355쪽 |

01 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 $\overline{BC}$의 교점을 D라고 하자. $\overline{AD}$ 위의 한 점 P에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 3개)

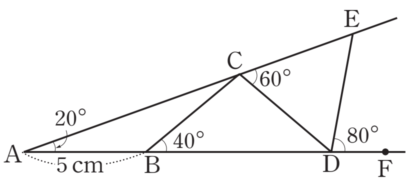


① $\overline{AP}=\overline{CP}$　② $\overline{BD}=\overline{CD}$

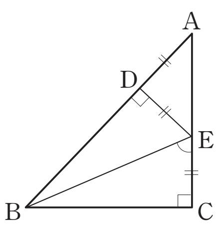
③ $\angle PBD=\angle PCD$　④ $\triangle PAB\equiv\triangle PBC$

⑤ $\angle BPD=\angle CPD$

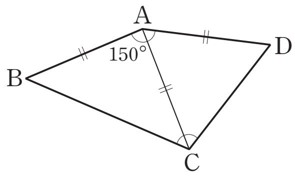
02 다음 그림에서 $\overline{AB}=5$ cm이고, $\angle CAB=20°$, $\angle CBD=40°$, $\angle DCE=60°$, $\angle EDF=80°$일 때, $\overline{ED}$의 길이를 구하시오.



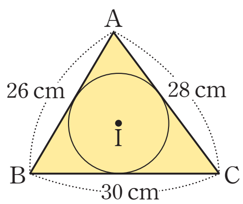
03 오른쪽 그림과 같이 $\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle EDB=90°$이고 $\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EC}$일 때, $\angle BEC$의 크기를 구하시오.



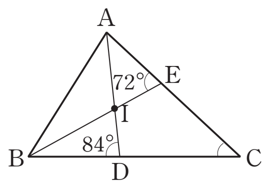
04 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}$이고 $\angle BAD=150°$일 때, $\angle BCD$의 크기를 구하시오.



05 오른쪽 그림에서 점 I는 $\triangle ABC$의 내심이다. $\overline{AB}=26$ cm, $\overline{BC}=30$ cm, $\overline{CA}=28$ cm이고 $\triangle ABC$의 넓이가 336 cm^2일 때, 내접원의 반지름의 길이를 구하시오.



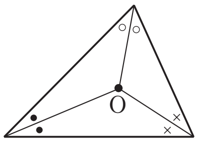
06 오른쪽 그림에서 점 I는 $\triangle ABC$의 내심이고, $\overline{AI}$의 연장선과 $\overline{BI}$의 연장선이 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$와 만나는 점을 각각 D, E라고 하자. $\angle ADB=84°$, $\angle AEB=72°$일 때, $\angle C$의 크기는?

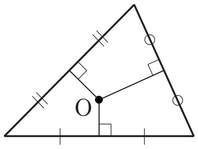


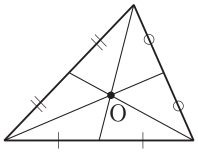
① 38°　② 40°　③ 42°

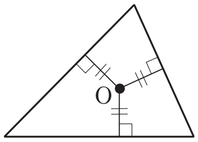
④ 44°　⑤ 46°

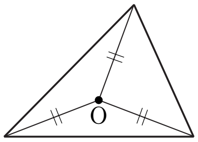
07 다음 중 삼각형의 외심 O를 바르게 나타낸 것을 모두 고르면? (정답 2개)

①


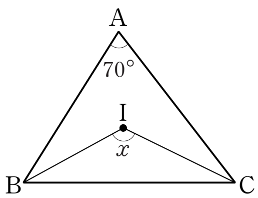
②


③


④


⑤


08 오른쪽 그림에서 점 I가 △ABC의 내심일 때, ∠x의 크기는?

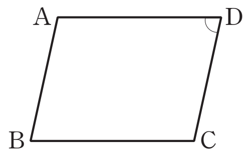


① 105° ② 110°
③ 120° ④ 125°
⑤ 140°

09 다음 중 □ABCD가 평행사변형이 되는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

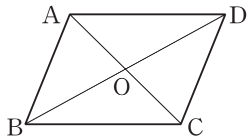
① $\overline{AB} /\!/ \overline{DC}$, $\overline{AD}=\overline{BC}=5$ cm
② $\overline{AD}=\overline{BC}=5$ cm, $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$
③ $\overline{AB}=\overline{BC}=5$ cm, $\overline{AD}=\overline{CD}=6$ cm
④ $\angle A=130°$, $\angle B=50°$, $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$
⑤ $\angle A+\angle B=180°$, $\overline{AB} /\!/ \overline{DC}$

10 오른쪽 그림의 평행사변형 ABCD에서 ∠A : ∠B=5 : 4일 때, ∠D의 크기는?



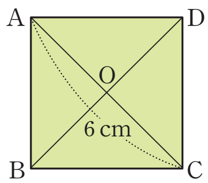
① 65° ② 70° ③ 75°
④ 80° ⑤ 85°

11 오른쪽 그림의 평행사변형 ABCD에서 점 O가 두 대각선의 교점일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

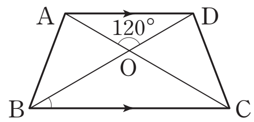


① $\overline{AD}=\overline{BC}$
② $\overline{BO}=\overline{DO}$
③ ∠BAD=∠DCB
④ ∠ADB=∠CDB
⑤ △ADO≡△CBO

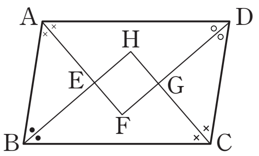
12 오른쪽 그림과 같이 정사각형 ABCD에서 두 대각선의 교점을 O라고 하자. $\overline{AC}=6$ cm일 때, 정사각형 ABCD의 넓이를 구하시오.



13 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$인 등변사다리꼴 ABCD에서 두 대각선의 교점을 O라고 하자. ∠AOD=120°일 때, ∠OBC의 크기를 구하시오.



14 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD에서 네 내각의 이등분선의 교점을 각각 E, F, G, H라고 할 때, 다음 보기 중에서 □EFGH에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르시오.



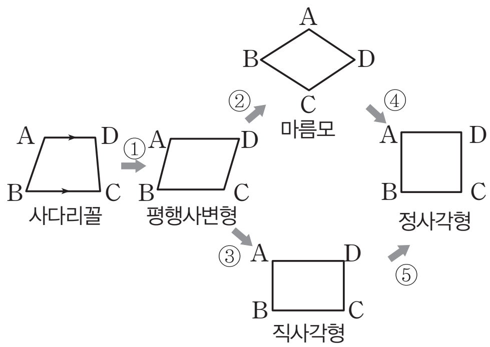
보기

ㄱ. $\overline{EF}=\overline{EH}$　　ㄴ. $\overline{EG}=\overline{FH}$
ㄷ. $\overline{EG}\perp\overline{FH}$　　ㄹ. $\angle H=90°$
ㅁ. $\angle HEG=\angle FEG$

15 다음은 사각형과 그 사각형의 각 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 짝지은 것이다. 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① 평행사변형 — 평행사변형
② 직사각형 — 직사각형
③ 직사각형 — 등변사다리꼴
④ 마름모 — 마름모
⑤ 정사각형 — 정사각형

16 다음 그림에서 □ABCD가 화살표 방향으로 변할 때, 필요한 조건 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 3개)



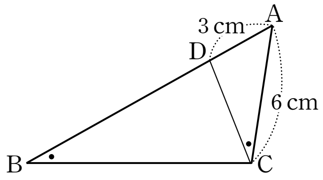
① $\overline{AB}/\!/\overline{DC}$　② $\angle A=\angle D$　③ $\overline{AB}=\overline{BC}$
④ $\angle A=\angle D$　⑤ $\overline{AB}=\overline{BC}$

17 다음 보기 중에서 항상 닮은 도형인 것을 모두 고르시오.

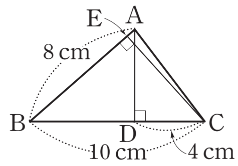
보기

ㄱ. 두 직사각형　　ㄴ. 두 정사각형
ㄷ. 두 평행사변형　　ㄹ. 두 마름모
ㅁ. 두 원뿔　　ㅂ. 두 직각이등변삼각형

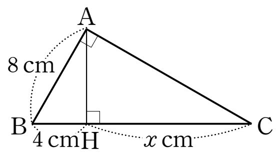
18 다음 그림의 △ABC에서 ∠B=∠ACD일 때, $\overline{BD}$의 길이를 구하시오.



19 오른쪽 그림과 같이 △ABC의 두 점 A, C에서 $\overline{BC}$, $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 각각 D, E라고 할 때, $\overline{BE}$의 길이를 구하시오.



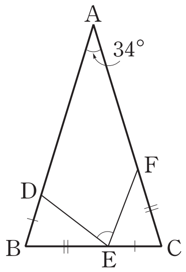
20 오른쪽 그림과 같이 ∠A=90°인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$, $\overline{AB}=8$ cm, $\overline{BH}=4$ cm, $\overline{CH}=x$ cm일 때, x의 값은?



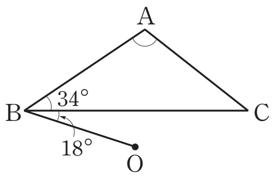
① 8　② 9　③ 10
④ 11　⑤ 12

[21~25] 다음 문제를 읽고, 식과 답을 서술하시오.

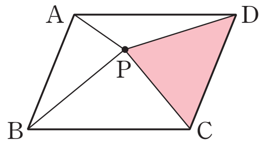
21 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC$는 $\angle A=34°$이고 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이다. $\overline{BD}=\overline{CE}$, $\overline{BE}=\overline{CF}$가 되도록 세 점 D, E, F를 각각 잡을 때, $\angle DEF$의 크기를 구하시오.



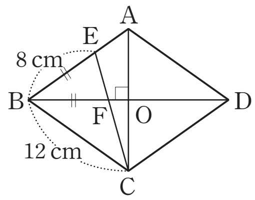
22 다음 그림에서 점 O는 $\triangle ABC$의 외심이다. $\angle ABC=34°$, $\angle OBC=18°$일 때, $\angle A$의 크기를 구하시오.



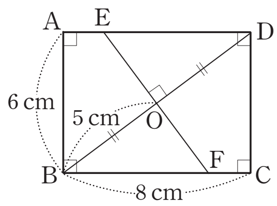
23 오른쪽 그림과 같이 넓이가 $40\ cm^2$인 평행사변형 ABCD의 내부에 있는 한 점 P에 대하여 $\triangle PAB=8\ cm^2$이다. 이때 $\triangle PCD$의 넓이를 구하시오.



24 오른쪽 그림의 마름모 ABCD에서 두 대각선의 교점을 O라고 하자. $\overline{BE}=\overline{BF}=8$ cm, $\overline{BC}=12$ cm일 때, $\overline{BD}$의 길이를 구하시오.



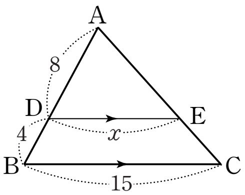
25 다음 그림의 직사각형 ABCD에서 $\overline{EF}$가 대각선 BD의 수직이등분선일 때, $\overline{AE}$의 길이를 구하시오.



실전 테스트 4회

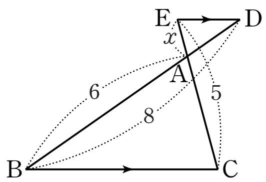
| 정답과 해설 358쪽 |

01 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$일 때, x의 값은?



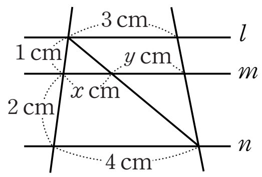
① $\dfrac{25}{3}$　② $\dfrac{17}{2}$　③ 10　④ $\dfrac{32}{3}$　⑤ 12

02 오른쪽 그림에서 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$일 때, x의 값은?



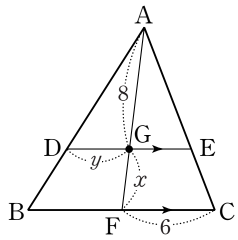
① $\dfrac{2}{3}$　② $\dfrac{7}{6}$　③ $\dfrac{5}{4}$　④ $\dfrac{4}{3}$　⑤ $\dfrac{3}{2}$

03 오른쪽 그림에서 $l /\!/ m /\!/ n$일 때, $x+y$의 값은?



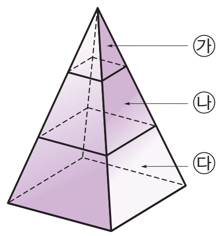
① $\dfrac{7}{3}$　② $\dfrac{8}{3}$　③ 3　④ $\dfrac{10}{3}$　⑤ $\dfrac{11}{3}$

04 오른쪽 그림에서 점 G가 $\triangle ABC$의 무게중심이고 $\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$일 때, $x+y$의 값은?

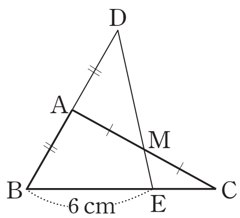


① 8　② $\dfrac{25}{3}$　③ $\dfrac{17}{2}$　④ 9　⑤ $\dfrac{28}{3}$

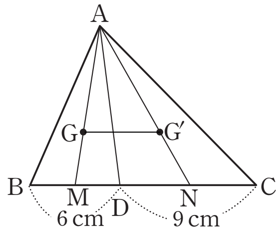
05 오른쪽 그림과 같이 정사각뿔을 밑면에 평행한 두 평면으로 잘라 높이를 삼등분할 때, 입체도형 ㉮, ㉯의 부피의 비를 구하시오.



06 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{BA}$의 연장선 위에 $\overline{BA}=\overline{AD}$가 되도록 점 D를 잡고, 점 D에서 $\overline{AC}$의 중점 M을 지나는 직선을 그어 $\overline{BC}$와 만나는 점을 E라 고 하자. $\overline{BE}=6$ cm일 때, $\overline{CE}$의 길이를 구하시오.

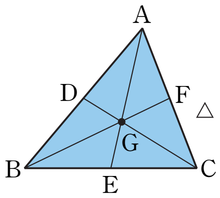


07 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$에서 점 G와 G′은 각각 $\triangle ABD$와 $\triangle ADC$의 무게중심이다. $\overline{BD}=6$ cm, $\overline{CD}=9$ cm일 때, $\overline{GG'}$의 길이는?



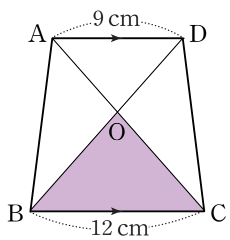
① 3 cm ② 4 cm ③ 5 cm
④ 6cm ⑤ 7 cm

08 오른쪽 그림에서 점 G가 $\triangle ABC$의 무게중심이고 $\triangle ADG$의 넓이가 5 cm^2일 때, $\triangle ABC$의 넓이는?



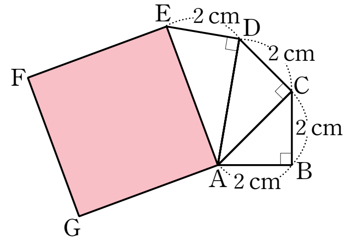
① 25 cm^2 ② 27 cm^2
③ 28 cm^2 ④ 30 cm^2
⑤ 32 cm^2

09 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$∥$\overline{BC}$인 사다리꼴에서 $\overline{AD}=9$ cm, $\overline{BC}=12$ cm이고, 두 대각선의 교점을 O라고 하자. $\triangle AOD$의 넓이가 36 cm^2일 때, $\triangle COB$의 넓이는?

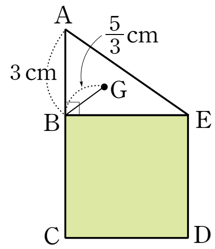


① 48 cm^2 ② 52 cm^2 ③ 56 cm^2
④ 60 cm^2 ⑤ 64 cm^2

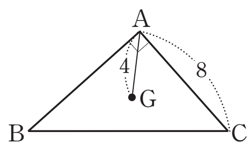
10 다음 그림에서 정사각형 AEFG의 넓이를 구하시오.



11 오른쪽 그림에서 점 G는 직각삼각형 ABE의 무게중심이고 $\overline{AB}=3$ cm, $\overline{BG}=\frac{5}{3}$ cm일 때, 정사각형 BCDE의 넓이를 구하시오.



12 오른쪽 그림과 같이 $\angle A=90°$인 직각삼각형 ABC에서 점 G는 $\triangle ABC$의 무게중심이다. $\overline{AC}=8$, $\overline{AG}=4$일 때, $\overline{AB}^2$의 값을 구하시오.



13 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나온 두 눈의 수의 곱이 3 또는 6이 되는 경우의 수는?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

14 대한, 민국, 만세 세 사람이 가위바위보를 한 번 할 때, 비기는 경우의 수는?

① 3　② 6　③ 9
④ 12　⑤ 15

15 4명의 학생 A, B, C, D가 서로 한 번씩 탁구 시합을 할 때, 모두 몇 번의 시합이 이루어지는가?

① 6번　② 8번　③ 9번
④ 10번　⑤ 12번

16 빨간 구슬과 파란 구슬을 합하여 36개가 들어 있는 주머니에서 한 개의 구슬을 임의로 꺼낼 때, 빨간 구슬이 나올 확률은 $\frac{7}{12}$이다. 이 주머니 안에 들어 있는 파란 구슬의 개수를 구하시오.

17 빨간 공 5개와 파란 공 x개가 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼낼 때, 빨간 공이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이다. 이때 x의 값은?

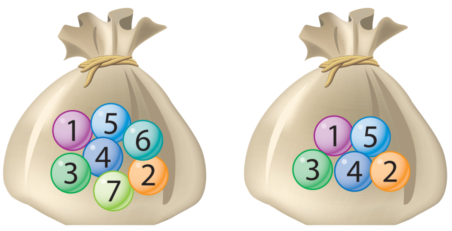
① 7　② 8　③ 9
④ 10　⑤ 11

18 한 개의 주사위를 두 번 던져서 첫 번째에 나온 눈의 수를 a, 두 번째에 나온 눈의 수를 b라고 할 때, 다음 중 확률이 가장 큰 것은?

① ab가 짝수일 확률
② ab가 홀수일 확률
③ $a+b$가 짝수일 확률
④ $a+b$가 홀수일 확률
⑤ a와 b가 모두 짝수일 확률

19 당첨 제비 5개를 포함하여 25개의 제비가 들어 있는 상자에서 제비 2개를 연속하여 임의로 꺼낼 때, 적어도 한 개는 당첨 제비가 나올 확률을 구하시오.
(단, 꺼낸 제비는 다시 넣지 않는다.)

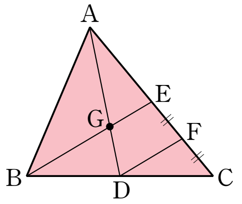
20 아래 그림과 같이 A 주머니에는 1부터 7까지의 자연수가 각각 적힌 구슬 7개가 들어 있고, B 주머니에는 1부터 5까지의 자연수가 각각 적힌 구슬 5개가 들어 있다. 두 주머니에서 각각 한 개의 구슬을 임의로 꺼낼 때, A 주머니에서는 짝수가 적힌 구슬이, B 주머니에서는 소수가 적힌 구슬이 나올 확률을 구하시오.



[A 주머니]　[B 주머니]

[21~25] 다음 문제를 읽고, 식과 답을 서술하시오.

21 오른쪽 그림에서 점 G는 △ABC의 무게중심이다. △ABC$=48\text{ cm}^2$이고 $\overline{\text{EC}}$의 중점을 점 F라고 할 때, 다음을 구하시오.

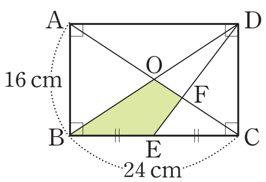


(1) △EBC와 △FDC의 넓이의 비

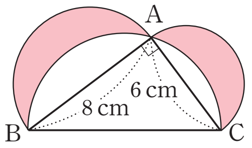
(2) △AGE의 넓이

(3) □GDFE의 넓이

22 다음 그림의 직사각형 ABCD에서 $\overline{\text{BC}}$의 중점을 E, $\overline{\text{AC}}$와 $\overline{\text{DE}}$의 교점을 F, 두 대각선의 교점을 O라고 하자. 이때 □OBEF의 넓이를 구하시오.



23 다음 그림과 같이 $\overline{\text{AB}}=8\text{ cm}$, $\overline{\text{AC}}=6\text{ cm}$인 직각삼각형 ABC의 각 변을 지름으로 하는 세 반원을 그렸을 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하시오.



24 한 개의 주사위를 두 번 던져서 첫 번째에 나온 눈의 수를 x, 두 번째에 나온 눈의 수를 y라고 할 때, $2x+y<9$일 경우를 모두 말하고, 그 경우의 수를 구하시오.

25 이긴 사람만 한 판에 1점을 얻는 게임이 있다. 각 판에서 수빈이가 동현이를 이길 확률은 $\frac{3}{4}$이고 먼저 2점을 얻는 사람이 승리한다고 할 때, 이 게임에서 수빈이가 승리할 확률을 구하시오. (단, 비기는 경우는 없다.)