풍산자

반복수학 파워

공통수학 2

구성과 특징

1 **주제별 구성으로 개념 》 연산 》 유형을 동시에 연습하는 빠른 학습서**

문제 해결에 꼭 필요한 핵심 개념과 개념 기본 문제를 연습하고
유형 실전 문제를 통해 개념부터 유형까지 빠르게 학습

2 **한 권으로 핵심 유형의 기본기를 완성하는 실전 학습서**

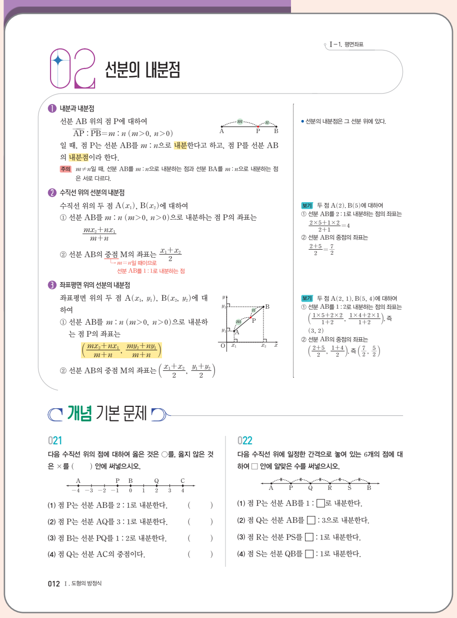
갑작스러운 난이도 상승 없는 유형 문제 구성으로
문제 해결 과정을 반복적으로 연습하여 저절로 실전 문제 해결력 향상

3 **3단계 학습으로 빈틈없이 실력을 강화하는 단계형 학습서**

[개념 적용 학습] 》 [유형 학습] 》 [중단원 유형 점검]의 3단계 학습으로
체계적인 훈련을 통해 스스로 실력 완성

개념 》 연산 》 유형을 한 번에,
실전 기본기를 빠르게 완성하는 반복 학습서

개념 적용 학습



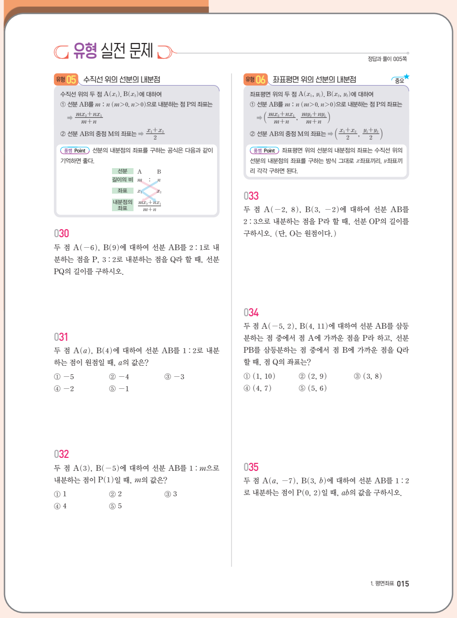
핵심 개념 정리

- 주제별 핵심 개념만을 모은 간단명료한 개념 정리
- 개념 이해를 돕는 참고, 보기, 주의 제시
- 개념을 적용하는 풍쌤 Tip 풀이 전략 제공

개념 기본 문제

- 개념을 바로 적용하는 기본 문제로 유형 학습 대비

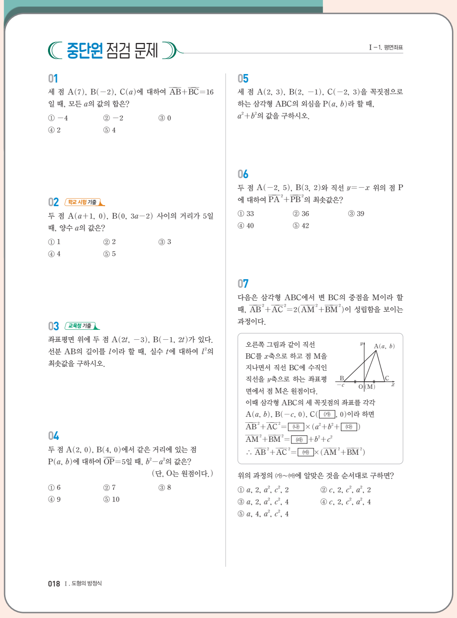
유형 학습



유형 실전 문제

- 시험 대비에 꼭 필요한 유형을 선별하여 구성
- 변형 문제를 난이도 순으로 배열하여 유형 학습에 집중한 실전 문제
- 풍쌤 Point로 유형별 핵심 전략 제공

중단원 유형 점검



중단원 점검 문제

- 중단원별 유형 문제로 학습 성취도 점검
- 출제율이 높은 학교 시험 기출 문제 수록
- 최신 경향을 반영한 교육청 기출, 평가원 기출 문제 수록
- 유형 문제 중 한 단계 발전된 실전 Plus 문제 수록

차례

I 도형의 방정식

II 집합과 명제

III 함수와 그래프

I

도형의 방정식

새로운 시각으로 보아라.

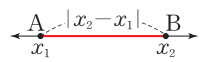
이 단원에서는 도형을 눈으로만 보지 않는다. 좌표로 옮겨서 본다. 좌표가 먼저고, 식은 그다음이다. 식은 도형을 이루는 좌표를 한 번에 묶은 것이다. 도형을 식으로 바꿀 수 있어야 계산이 가능하고, 성질도 분명해진다. 도형을 보면 식이 떠오르고, 거꾸로 식을 보고 도형을 떠올리는 법을 익혀야 한다. 새로운 도구로 도형을 표현하고, 판단하는 감각. 이 감각을 키우는 것이 이 단원의 목표다.

01 평면좌표

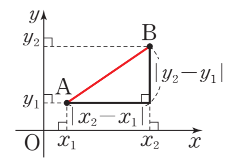
본문 008~019쪽

- 유형 ❶ 두 점 사이의 거리
- 유형 ❷ 같은 거리에 있는 점
- 유형 ❸ 선분의 길이의 제곱의 합의 최솟값
- 유형 ❹ 삼각형의 세 변의 길이와 모양
- 유형 ❺ 수직선 위의 선분의 내분점
- 유형 ❻ 좌표평면 위의 선분의 내분점
- 유형 ❼ 삼각형의 무게중심
- 유형 ❽ 선분의 중점과 사각형의 성질
- 유형 ❾ 각의 이등분선

두 점 사이의 거리



$\overline{AB}=|x_2-x_1|$



$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

선분의 내분점

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

선분	A		B
길이의 비	m	:	n
x좌표	x_1		x_2
내분점의 x좌표	$\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$		

선분	A		B
길이의 비	m	:	n
y좌표	y_1		y_2
내분점의 y좌표	$\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$		

02 직선의 방정식

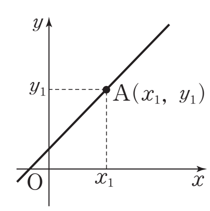
본문 020~040쪽

- 유형 ❶ 기울기와 한 점이 주어진 직선의 방정식
- 유형 ❷ 두 점을 지나는 직선의 방정식
- 유형 ❸ x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식
- 유형 ❹ 세 점이 한 직선 위에 있을 조건
- 유형 ❺ 도형의 넓이를 이등분하는 직선
- 유형 ❻ 직선의 개형
- 유형 ❼ 두 직선의 평행과 수직
- 유형 ❽ 세 직선의 위치 관계
- 유형 ❾ 선분의 수직이등분선의 방정식
- 유형 ❿ 정점을 지나는 직선의 방정식
- 유형 ⓫ 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식
- 유형 ⓬ 점과 직선 사이의 거리
- 유형 ⓭ 평행한 두 직선 사이의 거리
- 유형 ⓮ 삼각형의 넓이

직선의 방정식

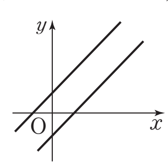
기울기가 m이고 점 $A(x_1, y_1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1)$$



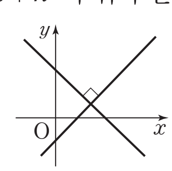
두 직선의 위치 관계

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$의 위치 관계



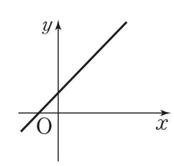
평행

$m=m'$, $n\neq n'$



수직

$mm'=-1$



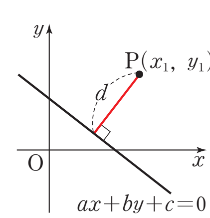
일치

$m=m'$, $n=n'$

점과 직선 사이의 거리

점 $P(x_1, y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$\boxed{d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$



03 원의 방정식

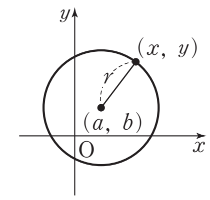
본문 041~064쪽

유형 ❶ 중심과 지나는 한 점이 주어진 원의 방정식
유형 ❷ 중심이 직선 위에 있는 원의 방정식
유형 ❸ 지름의 양 끝 점이 주어진 원의 방정식
유형 ❹ 세 점을 지나는 원의 방정식
유형 ❺ $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 나타내는 도형
유형 ❻ 좌표축에 접하는 원의 방정식
유형 ❼ 원 밖의 점과 원 위의 점 사이의 거리
유형 ❽ 점이 나타내는 도형의 방정식
유형 ❾ 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만날 때
유형 ❿ 원과 직선이 접할 때
유형 ⓫ 원과 직선이 만나지 않을 때
유형 ⓬ 현의 길이
유형 ⓭ 접선의 길이
유형 ⓮ 원 위의 점과 직선 사이의 거리
유형 ⓯ 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식
유형 ⓰ 공통인 현의 길이
유형 ⓱ 기울기가 주어진 접선의 방정식
유형 ⓲ 원 위의 점에서의 접선의 방정식
유형 ⓳ 원 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식

원의 방정식

중심이 점 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$



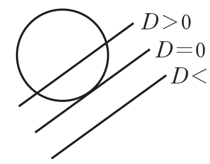
원과 직선의 위치 관계

① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $D=0$ ➡ 한점에서 만난다.(접한다.)

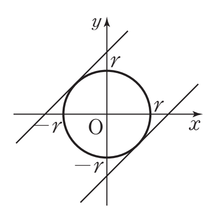
③ $D<0$ ➡ 만나지 않는다.

D: 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식



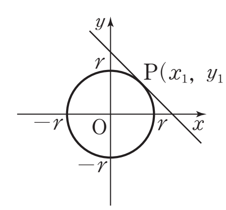
원의 접선의 방정식

① 기울기가 주어진 원의 접선



$$y=\underbrace{m}_{\text{직선의 기울기}}x\pm \overset{\text{원의 반지름}}{r}\sqrt{m^2+1}$$

② 원 위의 점에서의 접선



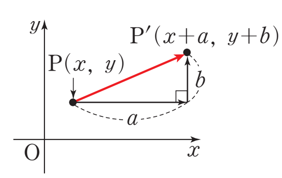
$$x_1x+y_1y=r^2$$

04 도형의 이동

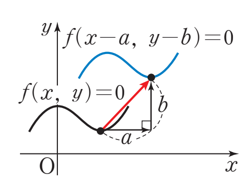
본문 065~074쪽

유형 ❶ 점의 평행이동
유형 ❷ 직선의 평행이동
유형 ❸ 포물선의 평행이동
유형 ❹ 원의 평행이동
유형 ❺ 점의 대칭이동
유형 ❻ 직선의 대칭이동
유형 ❼ 포물선의 대칭이동
유형 ❽ 원의 대칭이동
유형 ❾ 평행이동과 대칭이동
유형 ❿ 선분의 길이의 합의 최솟값

평행이동

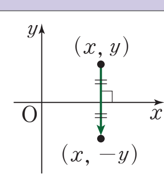
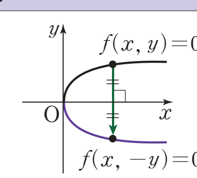


$(x,\ y)$ ➡ $(x+a,\ y+b)$



$f(x,\ y)=0$ ➡ $f(x-a,\ y-b)=0$

대칭이동

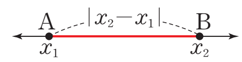
x축에 대한 대칭이동	
	
$(x, y) \rightarrow (x, -y)$	$f(x, y)=0 \rightarrow f(x, -y)=0$

01 두 점 사이의 거리

❶ 수직선 위의 두 점 사이의 거리

① 수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=|x_2-x_1|$



② 원점 O와 점 $A(x_1)$ 사이의 거리는

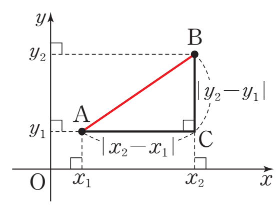
$\overline{OA}=|x_1|$

- 두 점 A, B 사이의 거리는 선분 AB의 길이와 같다.
- $\overline{AB}=|x_2-x_1|=|x_1-x_2|$

❷ 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

① 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$



② 원점 O와 점 $A(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리는

$\overline{OA}=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}$

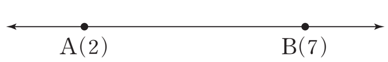
- 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$
- $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

개념 기본 문제

001

다음은 수직선 위의 두 점 사이의 거리를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1)



$\overline{AB}=|7-\boxed{2}|=\boxed{5}$

(2)

$\overline{AB}=|-2-\boxed{5}|=\boxed{7}$

002

다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.

(1) $A(16)$, $B(4)$ 12

(2) $A(1)$, $B(-6)$ 7

(3) $A(-4)$, $B(5)$ 9

(4) $O(0)$, $B(-8)$ 8

003

두 점 A, B의 좌표와 선분 AB의 길이가 다음과 같을 때, a의 값을 모두 구하시오.

(1) $A(6)$, $B(a)$, $\overline{AB}=5$ 1, 11

$\overline{AB}=|a-6|=5$이므로
$a-6=-5$ 또는 $a-6=5$
$\therefore a=1$ 또는 $a=11$

(2) $A(a)$, $B(-4)$, $\overline{AB}=6$ −10, 2

$\overline{AB}=|a+4|=6$이므로
$a+4=-6$ 또는 $a+4=6$
$\therefore a=-10$ 또는 $a=2$

(3) $A(2)$, $B(2a+3)$, $\overline{AB}=1$ −1, 0

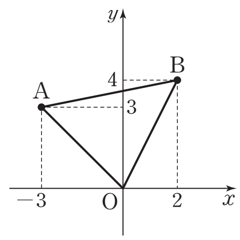
$\overline{AB}=|2a+1|=1$이므로
$2a+1=-1$ 또는 $2a+1=1$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=0$

(4) $A(3a-4)$, $B(5)$, $\overline{AB}=3$ 2, 4

$\overline{AB}=|3a-9|=3$이므로
$3a-9=-3$ 또는 $3a-9=3$
$\therefore a=2$ 또는 $a=4$

004

다음은 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.



(1) $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{(-3)^2+\boxed{3}^2}=\boxed{3\sqrt{2}}$

(2) $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{2^2+\boxed{4}^2}=\boxed{2\sqrt{5}}$

(3) $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{2-(\boxed{-3})\}^2+(4-\boxed{3})^2}=\boxed{\sqrt{26}}$

005

다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.

(1) $\mathrm{A}(2,\ 1)$, $\mathrm{B}(4,\ 5)$ $2\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4-2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

(2) $\mathrm{A}(3,\ 2)$, $\mathrm{B}(6,\ -2)$ 5

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(6-3)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{25}=5$

(3) $\mathrm{A}(-2,\ 4)$, $\mathrm{B}(10,\ -1)$ 13

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{10-(-2)\}^2+(-1-4)^2}=\sqrt{169}=13$

(4) $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(8,\ 8)$ $8\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{8^2+8^2}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$

006

두 점 A, B의 좌표와 선분 AB의 길이가 다음과 같을 때, a의 값을 모두 구하시오.

(1) $\mathrm{A}(2,\ 1)$, $\mathrm{B}(a,\ 0)$, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{17}$ $-2,\ 6$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(a-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{a^2-4a+5}=\sqrt{17}$
즉, $a^2-4a+5=17$이므로
$a^2-4a-12=0$, $(a+2)(a-6)=0$
$\therefore a=-2$ 또는 $a=6$

(2) $\mathrm{A}(-2,\ -5)$, $\mathrm{B}(0,\ a)$, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{13}$ $-8,\ -2$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{0-(-2)\}^2+\{a-(-5)\}^2}=\sqrt{a^2+10a+29}=\sqrt{13}$
즉, $a^2+10a+29=13$이므로
$a^2+10a+16=0$, $(a+8)(a+2)=0$
$\therefore a=-8$ 또는 $a=-2$

(3) $\mathrm{A}(2,\ 7)$, $\mathrm{B}(a,\ 3)$, $\overline{\mathrm{AB}}=5$ $-1,\ 5$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(a-2)^2+(3-7)^2}=\sqrt{a^2-4a+20}=5$
즉, $a^2-4a+20=25$이므로
$a^2-4a-5=0$, $(a+1)(a-5)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=5$

(4) $\mathrm{A}(3,\ -4)$, $\mathrm{B}(a,\ -1)$, $\overline{\mathrm{AB}}=3\sqrt{2}$ $0,\ 6$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(a-3)^2+\{-1-(-4)\}^2}=\sqrt{a^2-6a+18}=3\sqrt{2}$
즉, $a^2-6a+18=18$이므로
$a^2-6a=0$, $a(a-6)=0$
$\therefore a=0$ 또는 $a=6$

(5) $\mathrm{A}(-2,\ 2)$, $\mathrm{B}(a,\ a)$, $\overline{\mathrm{AB}}=8$ $-2\sqrt{7},\ 2\sqrt{7}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{a-(-2)\}^2+(a-2)^2}=\sqrt{2a^2+8}=8$
즉, $2a^2+8=64$이므로
$2a^2=56$, $a^2=28$
$\therefore a=-2\sqrt{7}$ 또는 $a=2\sqrt{7}$

(6) $\mathrm{A}(-3,\ -1)$, $\mathrm{B}(a-1,\ a)$, $\overline{\mathrm{AB}}=5$ $-5,\ 2$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{(a-1)-(-3)\}^2+\{a-(-1)\}^2}=\sqrt{2a^2+6a+5}=5$
즉, $2a^2+6a+5=25$이므로
$a^2+3a-10=0$, $(a+5)(a-2)=0$
$\therefore a=-5$ 또는 $a=2$

유형 실전 문제

유형 01 두 점 사이의 거리 중요

① 수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 사이의 거리
➡ $\overline{AB}=|x_2-x_1|$

② 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리
➡ $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

풍쌤 Point 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 주어진 미지수에 대한 방정식을 세운다.

007

두 점 $A(7)$, $B(a)$ 사이의 거리가 13일 때, 원점 O에 대하여 $\overline{OA}+\overline{OB}$의 값을 구하시오. (단, $a>0$) 27

$\overline{AB}=|a-7|=13$
즉, $a-7=-13$ 또는 $a-7=13$이므로
$a=-6$ 또는 $a=20$
양수 a의 값은 20이므로 $B(20)$
$\therefore \overline{OA}+\overline{OB}=|7|+|20|=7+20=27$

008

두 점 $A(-2, 3)$, $B(a, 7)$ 사이의 거리가 5일 때, 모든 a의 값의 합은?

✓① -4　② -2　③ 0
④ 2　⑤ 4

$\overline{AB}=\sqrt{\{a-(-2)\}^2+(7-3)^2}=\sqrt{a^2+4a+20}=5$
즉, $a^2+4a+20=25$이므로
$a^2+4a-5=0$, $(a+5)(a-1)=0$
$\therefore a=-5$ 또는 $a=1$
따라서 모든 a의 값의 합은 $-5+1=-4$

009

세 점 $A(5, 5)$, $B(1, 2)$, $C(-3, a)$에 대하여 $\overline{AB}=\overline{BC}$일 때, 양수 a의 값을 구하시오. 5

$\overline{AB}=\sqrt{(1-5)^2+(2-5)^2}=5$
$\overline{BC}=\sqrt{(-3-1)^2+(a-2)^2}=\sqrt{a^2-4a+20}$
이때 $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로 $\sqrt{a^2-4a+20}=5$
즉, $a^2-4a+20=25$이므로
$a^2-4a-5=0$, $(a+1)(a-5)=0$　$\therefore a=5$ ($\because a>0$)

010

두 점 $A(a, 3)$, $B(-5, a)$ 사이의 거리가 최소가 되도록 하는 a의 값은?

① -2　✓② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

$\overline{AB}=\sqrt{(-5-a)^2+(a-3)^2}=\sqrt{2a^2+4a+34}$
이 값이 최소가 되려면 근호 안의 식 $2a^2+4a+34$의 값이 최소가 되어야 한다.
$2a^2+4a+34=2(a^2+2a)+34=2(a+1)^2+32$
이므로 $a=-1$일 때 최솟값 32를 갖는다.
따라서 주어진 두 점 사이의 거리가 최소가 되도록 하는 a의 값은 -1이다.

유형 02 같은 거리에 있는 점 중요

두 점 A, B에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표는
$\overline{PA}=\overline{PB}$, 즉 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$임을 이용하여 구한다.

풍쌤 Point 점 P의 위치에 따라 좌표를 다음과 같이 정한다.
① 점 P가 x축 위의 점이면 $P(a, 0)$
② 점 P가 y축 위의 점이면 $P(0, a)$
③ 점 P가 직선 $y=x$ 위의 점이면 $P(a, a)$
④ 점 P가 직선 $y=mx+n$ 위의 점이면 $P(a, ma+n)$

011

두 점 $A(3, 1)$, $B(2, -4)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는?

✓① $\sqrt{26}$　② $3\sqrt{3}$　③ $2\sqrt{7}$
④ $\sqrt{29}$　⑤ $\sqrt{30}$

x축 위의 점 P의 좌표를 $(a, 0)$, y축 위의 점 Q의 좌표를 $(0, b)$라 하자.
$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로 $(a-3)^2+(-1)^2=(a-2)^2+4^2$
$2a=-10$　$\therefore a=-5$　$\therefore P(-5, 0)$
$\overline{QA}=\overline{QB}$에서 $\overline{QA}^2=\overline{QB}^2$이므로 $(-3)^2+(b-1)^2=(-2)^2+\{b-(-4)\}^2$
$10b=-10$　$\therefore b=-1$　$\therefore Q(0, -1)$
$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$

012

두 점 $A(1, -1)$, $B(7, 3)$에서 같은 거리에 있는 직선 $y=x$ 위의 점 P의 y좌표는?

① $\frac{12}{5}$　② $\frac{13}{5}$　✓③ $\frac{14}{5}$
④ 3　⑤ $\frac{16}{5}$

직선 $y=x$ 위의 점 P의 좌표를 (a, a)라 하자.
$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로
$(a-1)^2+\{a-(-1)\}^2=(a-7)^2+(a-3)^2$
$20a=56$　$\therefore a=\frac{14}{5}$
따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{14}{5}, \frac{14}{5}\right)$이므로 점 P의 y좌표는 $\frac{14}{5}$이다.

013

두 점 $A(-2, 3)$, $B(2, 5)$에서 같은 거리에 있는 직선 $y=-x-3$ 위의 점 P의 좌표를 구하시오. $(7, -10)$

직선 $y=-x-3$ 위의 점 P의 좌표를 $(a, -a-3)$이라 하자.
$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로
$\{a-(-2)\}^2+\{(-a-3)-3\}^2=(a-2)^2+\{(-a-3)-5\}^2$
$2a^2+16a+40=2a^2+12a+68$
$4a=28$　$\therefore a=7$
따라서 점 P의 좌표는 $(7, -10)$이다.

유형 03 선분의 길이의 제곱의 합의 최솟값

두 점 A, B와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 최솟값
➡ $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$을 이차식으로 나타낸 후 최솟값을 구한다.

풍쌤 Point 점 P의 위치에 따라 좌표를 정하고, 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 이차식을 만든다.

014

두 점 A$(1,\ 4)$, B$(3,\ -2)$와 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 최솟값을 구하시오. 22

x축 위의 점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하자.
$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=\{(a-1)^2+(-4)^2\}+\{(a-3)^2+2^2\}$
$=2a^2-8a+30$
$=2(a-2)^2+22$
따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$은 $a=2$일 때 최솟값 22를 갖는다.

015

두 점 A$(-2,\ 1)$, B$(-4,\ -3)$과 임의의 점 P에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값이 최소일 때, 원점과 점 P 사이의 거리를 구하시오. $\sqrt{10}$

임의의 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하자.
$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=\{(a+2)^2+(b-1)^2\}+\{(a+4)^2+(b+3)^2\}$
$=2(a+3)^2+2(b+1)^2+10$
따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값이 최소일 때 점 P의 좌표는 $(-3,\ -1)$
$\therefore\ \overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

016

세 점 A(2), B(3), C(-2)와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 최솟값은?

① 11 ② 12 ③ 13
✓④ 14 ⑤ 15

임의의 점 P의 좌표를 (a)라 하자.
$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=(a-2)^2+(a-3)^2+(a+2)^2$
$=3(a-1)^2+14$
따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은 $a=1$일 때 최솟값 14를 갖는다.

017

세 점 O$(0,\ 0)$, A$(1,\ -5)$, B$(8,\ -1)$과 임의의 점 P에 대하여 $\overline{PO}^2+\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값이 최소일 때, 점 P의 좌표를 구하시오. $(3,\ -2)$

임의의 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하자.
$\overline{PO}^2+\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=(a^2+b^2)+\{(a-1)^2+(b+5)^2\}+\{(a-8)^2+(b+1)^2\}$
$=3(a-3)^2+3(b+2)^2+52$
따라서 $\overline{PO}^2+\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값이 최소일 때 점 P의 좌표는 $(3,\ -2)$이다.

유형 04 삼각형의 세 변의 길이와 모양

삼각형의 세 변의 길이를 각각 구한 후, 세 변의 길이 사이의 관계를 파악하여 삼각형의 모양을 판단한다.

풍쌤 Point 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여
① $a=b=c$ ➡ 정삼각형
② $a=b$ (또는 $b=c$ 또는 $c=a$) ➡ 이등변삼각형
③ $a^2=b^2+c^2$ ➡ 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

018

세 점 A$(-1,\ -1)$, B$(4,\ 2)$, C$(3,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형
③ $\angle BAC=90°$인 직각삼각형
④ $\angle ABC=90°$인 직각이등변삼각형
✓⑤ $\angle ACB=90°$인 직각이등변삼각형

$\overline{AB}=\sqrt{(4+1)^2+(2+1)^2}=\sqrt{34}$
$\overline{BC}=\sqrt{(3-4)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{17}$
$\overline{CA}=\sqrt{(-1-3)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{17}$
$\therefore\ \overline{BC}=\overline{CA},\ \overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$
따라서 삼각형 ABC는 $\angle ACB=90°$인 직각이등변삼각형이다.

019

세 점 A$(3,\ 0)$, B$(1,\ a)$, C$(-1,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 정삼각형이 되도록 하는 양수 a의 값을 구하시오. $2\sqrt{3}$

삼각형 ABC가 정삼각형이려면 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$, 즉 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이어야 하므로
$(1-3)^2+a^2=(-1-1)^2+(-a)^2=(3+1)^2+0^2$
$a^2+4=16,\ a^2=12$
$\therefore\ a=2\sqrt{3}\ (\because\ a>0)$

020

세 점 A$(2,\ 3)$, B$(3,\ 4)$, C$(7,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는?

① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{6}$ ✓③ 5
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{7}$

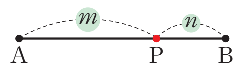
$\overline{AB}=\sqrt{(3-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{2}$
$\overline{BC}=\sqrt{(7-3)^2+(-2-4)^2}=2\sqrt{13}$
$\overline{CA}=\sqrt{(2-7)^2+(3+2)^2}=5\sqrt{2}$
$\therefore\ \overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$
따라서 삼각형 ABC는 $\angle BAC=90°$인 직각삼각형이므로 구하는 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CA}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times5\sqrt{2}=5$

02 선분의 내분점

❶ 내분과 내분점

선분 AB 위의 점 P에 대하여

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=m:n\ (m>0,\ n>0)$



일 때, 점 P는 선분 AB를 $m:n$으로 내분한다고 하고, 점 P를 선분 AB의 내분점이라 한다.

주의 $m\neq n$일 때, 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점과 선분 BA를 $m:n$으로 내분하는 점은 서로 다르다.

• 선분의 내분점은 그 선분 위에 있다.

❷ 수직선 위의 선분의 내분점

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여

① 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

② 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\dfrac{x_1+x_2}{2}$

↳ $m=n$일 때이므로 선분 AB를 1 : 1로 내분하는 점

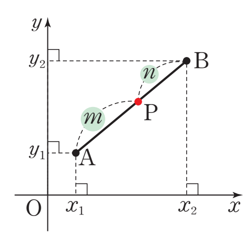
보기 두 점 A(2), B(5)에 대하여
① 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는
$\dfrac{2\times5+1\times2}{2+1}=4$
② 선분 AB의 중점의 좌표는
$\dfrac{2+5}{2}=\dfrac{7}{2}$

❸ 좌표평면 위의 선분의 내분점

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여

① 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$



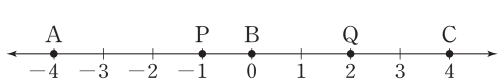
② 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

보기 두 점 A(2, 1), B(5, 4)에 대하여
① 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\dfrac{1\times5+2\times2}{1+2},\ \dfrac{1\times4+2\times1}{1+2}\right)$, 즉 (3, 2)
② 선분 AB의 중점의 좌표는
$\left(\dfrac{2+5}{2},\ \dfrac{1+4}{2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$

개념 기본 문제

021

다음 수직선 위의 점에 대하여 옳은 것은 ○를, 옳지 않은 것은 ×를 (　　) 안에 써넣으시오.



(1) 점 P는 선분 AB를 2 : 1로 내분한다. (×)

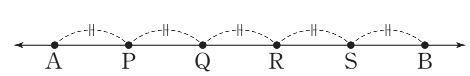
(2) 점 P는 선분 AQ를 3 : 1로 내분한다. (×)

(3) 점 B는 선분 PQ를 1 : 2로 내분한다. (○)

(4) 점 Q는 선분 AC의 중점이다. (×)

022

다음 수직선 위에 일정한 간격으로 놓여 있는 6개의 점에 대하여 □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.



(1) 점 P는 선분 AB를 1 : $\boxed{4}$로 내분한다.

(2) 점 Q는 선분 AB를 $\boxed{2}$: 3으로 내분한다.

(3) 점 R는 선분 PS를 $\boxed{2}$: 1로 내분한다.

(4) 점 S는 선분 QB를 $\boxed{2}$: 1로 내분한다.

023

다음 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 주어진 비로 내분하는 점의 좌표를 구하시오.

(1) $A(1)$, $B(10)$, $2:1$ 7

$\frac{2\times10+1\times1}{2+1}=\frac{21}{3}=7$

(2) $A(4)$, $B(-1)$, $2:3$ 2

$\frac{2\times(-1)+3\times4}{2+3}=\frac{10}{5}=2$

(3) $A(-3)$, $B(5)$, $1:3$ -1

$\frac{1\times5+3\times(-3)}{1+3}=\frac{-4}{4}=-1$

(4) $A(-1)$, $B(-15)$, $3:4$ -7

$\frac{3\times(-15)+4\times(-1)}{3+4}=\frac{-49}{7}=-7$

024

다음 두 점 A, B에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표를 구하시오.

(1) $A(2)$, $B(5)$ $\frac{7}{2}$

$\frac{2+5}{2}=\frac{7}{2}$

(2) $A(-2)$, $B(10)$ 4

$\frac{-2+10}{2}=4$

(3) $A(6)$, $B(-8)$ -1

$\frac{6+(-8)}{2}=-1$

(4) $A(-3)$, $B(-10)$ $-\frac{13}{2}$

$\frac{-3+(-10)}{2}=-\frac{13}{2}$

025

다음 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 주어진 비로 내분하는 점의 좌표를 구하시오.

(1) $A(5,\ 7)$, $B(2,\ 4)$, $1:2$ $(4,\ 6)$

$\left(\frac{1\times2+2\times5}{1+2},\ \frac{1\times4+2\times7}{1+2}\right)$, 즉 $(4,\ 6)$

(2) $A(-5,\ 3)$, $B(1,\ -3)$, $2:1$ $(-1,\ -1)$

$\left(\frac{2\times1+1\times(-5)}{2+1},\ \frac{2\times(-3)+1\times3}{2+1}\right)$, 즉 $(-1,\ -1)$

(3) $A(4,\ -2)$, $B(-4,\ 10)$, $1:3$ $(2,\ 1)$

$\left(\frac{1\times(-4)+3\times4}{1+3},\ \frac{1\times10+3\times(-2)}{1+3}\right)$, 즉 $(2,\ 1)$

(4) $A(3,\ 6)$, $B(-5,\ -2)$, $3:1$ $(-3,\ 0)$

$\left(\frac{3\times(-5)+1\times3}{3+1},\ \frac{3\times(-2)+1\times6}{3+1}\right)$, 즉 $(-3,\ 0)$

026

다음 두 점 A, B에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표를 구하시오.

(1) $A(1,\ 1)$, $B(7,\ 3)$ $(4,\ 2)$

$\left(\frac{1+7}{2},\ \frac{1+3}{2}\right)$, 즉 $(4,\ 2)$

(2) $A(-2,\ 5)$, $B(4,\ -1)$ $(1,\ 2)$

$\left(\frac{-2+4}{2},\ \frac{5+(-1)}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 2)$

(3) $A(6,\ -3)$, $B(-2,\ 11)$ $(2,\ 4)$

$\left(\frac{6+(-2)}{2},\ \frac{-3+11}{2}\right)$, 즉 $(2,\ 4)$

(4) $A(5,\ 4)$, $B(-2,\ -5)$ $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

$\left(\frac{5+(-2)}{2},\ \frac{4+(-5)}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

03 평면좌표의 활용

❶ 삼각형의 무게중심

좌표평면 위의 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

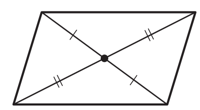
보기 세 점 $A(2, 3)$, $B(-4, 6)$, $C(-4, -6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{2+(-4)+(-4)}{3}, \frac{3+6+(-6)}{3}\right)$, 즉 $(-2, 1)$

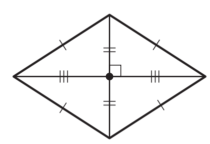
- 삼각형의 무게중심
① 삼각형의 세 중선의 교점을 무게중심이라 한다.
② 삼각형의 무게중심은 세 중선을 각 꼭짓점으로부터 각각 $2:1$로 내분한다.

❷ 선분의 중점과 사각형의 성질

① 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분한다.
➡ 두 대각선의 중점이 일치한다.



② 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분한다.
➡ 두 대각선의 중점이 일치한다.



- 평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다.
- 마름모의 네 변의 길이는 모두 같다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 005쪽

027

다음 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구하시오.

(1) $A(1, 5)$, $B(2, 6)$, $C(3, 4)$ $(2, 5)$

$\left(\frac{1+2+3}{3}, \frac{5+6+4}{3}\right)$, 즉 $(2, 5)$

(2) $A(2, -3)$, $B(4, 3)$, $C(6, -9)$ $(4, -3)$

$\left(\frac{2+4+6}{3}, \frac{-3+3+(-9)}{3}\right)$, 즉 $(4, -3)$

(3) $A(-1, 3)$, $B(-4, 5)$, $C(2, -2)$ $(-1, 2)$

$\left(\frac{-1+(-4)+2}{3}, \frac{3+5+(-2)}{3}\right)$, 즉 $(-1, 2)$

(4) $A(2, -4)$, $B(-5, 1)$, $C(0, 6)$ $(-1, 1)$

$\left(\frac{2+(-5)+0}{3}, \frac{-4+1+6}{3}\right)$, 즉 $(-1, 1)$

028

네 점 $A(6, a)$, $B(0, 4)$, $C(-2, -1)$, $D(4, -2)$를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, a의 값을 구하시오. 3

단계1. 대각선 AC의 중점의 좌표 구하기

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{6-2}{2}, \frac{a-1}{2}\right)$, 즉 $\left(2, \frac{a-1}{2}\right)$

단계2. 대각선 BD의 중점의 좌표 구하기

대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{0+4}{2}, \frac{4-2}{2}\right)$, 즉 $(2, 1)$

단계3. a의 값 구하기

$\frac{a-1}{2}=1$에서 $a-1=2$ $\therefore a=3$

029

네 점 $A(2, a)$, $B(4, 3)$, $C(b, 5)$, $D(3, 4)$를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 마름모일 때, a, b의 값을 구하시오. $a=2$, $b=5$

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+b}{2}, \frac{a+5}{2}\right)$

대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{4+3}{2}, \frac{3+4}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$

$\frac{2+b}{2}=\frac{7}{2}$, $\frac{a+5}{2}=\frac{7}{2}$에서 $a=2$, $b=5$

유형 실전 문제

정답과 풀이 005쪽

유형 05 수직선 위의 선분의 내분점

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여

① 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

➡ $\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$

② 선분 AB의 중점 M의 좌표는 ➡ $\dfrac{x_1+x_2}{2}$

풍쌤 Point 선분의 내분점의 좌표를 구하는 공식은 다음과 같이 기억하면 좋다.

선분	A		B
길이의 비	m	:	n
좌표	x_1		x_2
내분점의 좌표	$\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$		

030

두 점 $A(-6)$, $B(9)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P, $3:2$로 내분하는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오. 1

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$\dfrac{2\times9+1\times(-6)}{2+1}=\dfrac{12}{3}=4$

선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점 Q의 좌표는

$\dfrac{3\times9+2\times(-6)}{3+2}=\dfrac{15}{5}=3$

따라서 선분 PQ의 길이는 $|3-4|=1$

031

두 점 $A(a)$, $B(4)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 원점일 때, a의 값은?

① -5　② -4　③ -3

√④ -2　⑤ -1

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\dfrac{1\times4+2\times a}{1+2}=\dfrac{2a+4}{3}$

이 점이 원점과 일치하므로

$\dfrac{2a+4}{3}=0$, $2a+4=0$

$\therefore a=-2$

032

두 점 $A(3)$, $B(-5)$에 대하여 선분 AB를 $1:m$으로 내분하는 점이 $P(1)$일 때, m의 값은?

① 1　② 2　√③ 3

④ 4　⑤ 5

선분 AB를 $1:m$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$\dfrac{1\times(-5)+m\times3}{1+m}=\dfrac{3m-5}{m+1}$

이때 $P(1)$이므로

$\dfrac{3m-5}{m+1}=1$, $2m=6$

$\therefore m=3$

유형 06 좌표평면 위의 선분의 내분점 중요

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여

① 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

➡ $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

② 선분 AB의 중점 M의 좌표는 ➡ $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

풍쌤 Point 좌표평면 위의 선분의 내분점의 좌표는 수직선 위의 선분의 내분점의 좌표를 구하는 방식 그대로 x좌표끼리, y좌표끼리 각각 구하면 된다.

033

두 점 $A(-2, 8)$, $B(3, -2)$에 대하여 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점을 P라 할 때, 선분 OP의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) 4

선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times3+3\times(-2)}{2+3}, \dfrac{2\times(-2)+3\times8}{2+3}\right)$, 즉 $(0, 4)$

따라서 선분 OP의 길이는 4이다.

034

두 점 $A(-5, 2)$, $B(4, 11)$에 대하여 선분 AB를 삼등분하는 점 중에서 점 A에 가까운 점을 P라 하고, 선분 PB를 삼등분하는 점 중에서 점 B에 가까운 점을 Q라 할 때, 점 Q의 좌표는?

① $(1, 10)$　√② $(2, 9)$　③ $(3, 8)$

④ $(4, 7)$　⑤ $(5, 6)$

점 P는 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이고, 점 Q는 선분 PB를 $2:1$로 내분하는 점이다.

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times4+2\times(-5)}{1+2}, \dfrac{1\times11+2\times2}{1+2}\right)$, 즉 $(-2, 5)$

선분 PB를 $2:1$로 내분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times4+1\times(-2)}{2+1}, \dfrac{2\times11+1\times5}{2+1}\right)$, 즉 $(2, 9)$

035

두 점 $A(a, -7)$, $B(3, b)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 $P(0, 2)$일 때, ab의 값을 구하시오. -30

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times3+2\times a}{1+2}, \dfrac{1\times b+2\times(-7)}{1+2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{2a+3}{3}, \dfrac{b-14}{3}\right)$

이때 $P(0, 2)$이므로 $\dfrac{2a+3}{3}=0$, $\dfrac{b-14}{3}=2$

따라서 $a=-\dfrac{3}{2}$, $b=20$이므로 $ab=\left(-\dfrac{3}{2}\right)\times20=-30$

036

두 점 A$(7,\ -3)$, B$(a,\ b)$에 대하여 선분 AB의 중점을 M이라 하자. 선분 OM의 중점의 좌표가 $(2,\ -1)$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, O는 원점이다.)

✓① 2 ② 5 ③ 8
④ 10 ⑤ 13

선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\left(\frac{7+a}{2},\ \frac{-3+b}{2}\right)$
선분 OM의 중점의 좌표가 $(2,\ -1)$이므로
$\frac{7+a}{2}=2\times2,\ \frac{-3+b}{2}=2\times(-1)$
따라서 $a=1,\ b=-10$이므로 $a^2+b^2=1^2+(-1)^2=2$

037

두 점 A$(a,\ 0)$, B$(-6,\ 5)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점이 y축 위에 있을 때, 선분 AB의 중점의 좌표를 구하시오. $\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$

선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{3\times(-6)+2\times a}{3+2},\ \frac{3\times5+2\times0}{3+2}\right)$, 즉 $\left(\frac{2a-18}{5},\ 3\right)$
이 점이 y축 위에 있으므로 $\frac{2a-18}{5}=0$에서 $a=9$ $\quad\therefore$ A$(9,\ 0)$
따라서 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{9-6}{2},\ \frac{0+5}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$

038

두 점 A$(-2,\ 5)$, B$(6,\ 1)$에 대하여 선분 AB를 $m:1$로 내분하는 점이 직선 $y=x-2$ 위에 있을 때, 자연수 m의 값은?

① 1 ② 2 ✓③ 3
④ 4 ⑤ 5

선분 AB를 $m:1$로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{m\times6+1\times(-2)}{m+1},\ \frac{m\times1+1\times5}{m+1}\right)$, 즉 $\left(\frac{6m-2}{m+1},\ \frac{m+5}{m+1}\right)$
이 점이 직선 $y=x-2$ 위에 있으므로 $\frac{m+5}{m+1}=\frac{6m-2}{m+1}-2$
즉, $\frac{m+5}{m+1}=\frac{4m-4}{m+1}$에서 m이 자연수이므로
$m+5=4m-4,\ 3m=9$ $\quad\therefore m=3$

039

세 점 A$(-1,\ 5)$, B$(-2,\ -3)$, C$(4,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 변 BC 위의 점 D에 대하여 삼각형 ABD와 삼각형 ACD의 넓이의 비가 $2:1$일 때, 선분 AD의 길이는?

① 4 ② $3\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{5}$
④ $2\sqrt{6}$ ✓⑤ 5

삼각형 ABD와 삼각형 ACD의 밑변을 각각 $\overline{\text{BD}}$, $\overline{\text{CD}}$라 하면
$\overline{\text{BD}}:\overline{\text{CD}}=2:1$
점 D는 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는
$\left(\frac{2\times4+1\times(-2)}{2+1},\ \frac{2\times3+1\times(-3)}{2+1}\right)$, 즉 $(2,\ 1)$
따라서 선분 AD의 길이는 $\sqrt{(2+1)^2+(1-5)^2}=5$

유형 07 삼각형의 무게중심 중요

좌표평면 위의 세 점 A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$, C$(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는
➡ $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

풍쌤 Point 삼각형의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{(x\text{좌표의 합})}{3},\ \frac{(y\text{좌표의 합})}{3}\right)$으로 구한다.

040

세 점 A$(2,\ 3)$, B$(-4,\ 5)$, C$(5,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 선분 OG의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) $\sqrt{10}$

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는
$\left(\frac{2-4+5}{3},\ \frac{3+5+1}{3}\right)$, 즉 $(1,\ 3)$
따라서 선분 OG의 길이는 $\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

041

세 점 A$(5,\ 4)$, B$(1,\ a-2)$, C$(2b+1,\ -3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심이 G$(1,\ 3)$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. 8

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는
$\left(\frac{5+1+(2b+1)}{3},\ \frac{4+(a-2)-3}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{2b+7}{3},\ \frac{a-1}{3}\right)$
이때 G$(1,\ 3)$이므로 $\frac{2b+7}{3}=1,\ \frac{a-1}{3}=3$ $\quad\therefore a=10,\ b=-2$
$\therefore a+b=10+(-2)=8$

042

세 점 A$(-2,\ 6)$, B$(4,\ 2)$, C$(-8,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 세 변 BC, CA, AB의 중점을 각각 D, E, F라 할 때, 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는?

① $(-2,\ -3)$ ✓② $(-2,\ 2)$ ③ $(-2,\ -1)$
④ $(2,\ 1)$ ⑤ $(2,\ 2)$

변 BC의 중점 D의 좌표는 $(-2,\ 0)$
변 CA의 중점 E의 좌표는 $(-5,\ 2)$
변 AB의 중점 F의 좌표는 $(1,\ 4)$
따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{-2-5+1}{3},\ \frac{0+2+4}{3}\right)$, 즉 $(-2,\ 2)$

043

세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점의 좌표가 $(3,\ 5)$, 무게중심의 좌표가 $(4,\ -1)$일 때, 꼭짓점 A의 좌표를 구하시오. $(6,\ -13)$

삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A, B, C를 A$(a,\ b)$, B$(c,\ d)$, C$(e,\ f)$라 하자.
변 BC의 중점의 좌표가 $(3,\ 5)$이므로 $c+e=6,\ d+f=10$
삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{a+c+e}{3},\ \frac{b+d+f}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{a+6}{3},\ \frac{b+10}{3}\right)$
$\frac{a+6}{3}=4,\ \frac{b+10}{3}=-1$ $\quad\therefore a=6,\ b=-13$
따라서 꼭짓점 A의 좌표는 $(6,\ -13)$이다.

유형 08 선분의 중점과 사각형의 성질

① 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분한다.
② 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분한다.

풍쌤 Point 두 대각선의 중점의 좌표를 각각 구하여 서로 같음을 이용하자.

044

네 점 A$(-1, 4)$, B$(1, 1)$, C$(3, 2)$, D(a, b)를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, a^2+b^2의 값은?

① 8 ② 13 ③ 17
④ 18 ✓⑤ 26

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$, 즉 $(1, 3)$ …… ㉠
대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+a}{2}, \frac{1+b}{2}\right)$ …… ㉡
㉠, ㉡이 일치하므로 $\frac{1+a}{2}=1$, $\frac{1+b}{2}=3$
따라서 $a=1$, $b=5$이므로 $a^2+b^2=1^2+5^2=26$

045

평행사변형 ABCD의 두 꼭짓점이 A$(2, 3)$, B$(4, 1)$이고 두 대각선 AC, BD의 교점의 좌표가 $(1, 0)$일 때, 평행사변형의 나머지 두 꼭짓점 C, D의 좌표를 구하시오.
C$(0, -3)$, D$(-2, -1)$

C(a, b), D(c, d)라 하자.
대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$ $\therefore a=0, b=-3$
대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{4+c}{2}, \frac{1+d}{2}\right)$ $\therefore c=-2, d=-1$
따라서 C$(0, -3)$, D$(-2, -1)$이다.

046

네 점 A$(a, 2)$, B$(b, -2)$, C$(3, -2)$, D$(6, 2)$를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 마름모일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $ab<0$) -1

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+3}{2}, 0\right)$, 대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{b+6}{2}, 0\right)$
$\frac{a+3}{2}=\frac{b+6}{2}$ $\therefore a=b+3$ …… ㉠
$\overline{AD}^2=\overline{CD}^2$에서 $(6-a)^2+(2-2)^2=(6-3)^2+(2+2)^2$
$a^2-12a+11=0$, $(a-1)(a-11)=0$ $\therefore a=1$ 또는 $a=11$
㉠에 의하여 $a=1$, $b=-2$ ($\because ab<0$) $\therefore a+b=1+(-2)=-1$

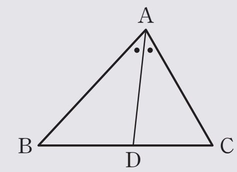
047

네 점 A$(a, 0)$, B$(b, -4)$, C$(c, -6)$, D$(4, d)$를 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점이 직선 $y=-x$ 위에 있을 때, $a+b+c+d$의 값을 구하시오. 6

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+c}{2}, -3\right)$
이 점이 직선 $y=-x$ 위에 있으므로 $-3=-\frac{a+c}{2}$
즉, $a+c=6$이므로 대각선 AC의 중점의 좌표는 $(3, -3)$이다.
대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{b+4}{2}, \frac{-4+d}{2}\right)$ $\therefore b=2, d=-2$
$\therefore a+b+c+d=(a+c)+b+d=6+2+(-2)=6$

유형 09 각의 이등분선

삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 하면
$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$
➡ 점 D는 선분 BC를 $\overline{AB}:\overline{AC}$로 내분하는 점이다.



풍쌤 Point 점 D의 좌표를 구하기 위해서 필요한 것은 $\overline{AB}:\overline{AC}$이므로 두 선분 AB, AC의 길이부터 구해 보자.

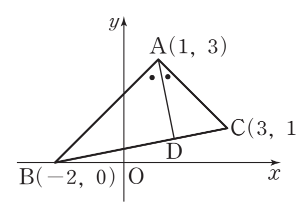
048

두 점 A$(1, 1)$, B$(3, -3)$에 대하여 ∠AOB의 이등분선과 선분 AB가 만나는 점의 좌표를 구하시오. (단, O는 원점이다.) $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

∠AOB의 이등분선과 선분 AB가 만나는 점을 P라 하자.
$\overline{AP}:\overline{BP}=\overline{OA}:\overline{OB}=\sqrt{2}:3\sqrt{2}=1:3$이므로 점 P는 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점이다.
따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{1\times3+3\times1}{1+3}, \frac{1\times(-3)+3\times1}{1+3}\right)$, 즉 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

049

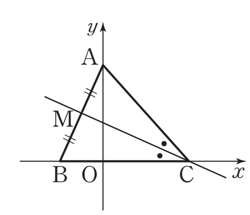
오른쪽 그림과 같이 세 점 A$(1, 3)$, B$(-2, 0)$, C$(3, 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D(a, b)라 할 때, $a+10b$의 값을 구하시오. 7



$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=3\sqrt{2}:2\sqrt{2}=3:2$
즉, 점 D는 선분 BC를 $3:2$로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는
$\left(\frac{3\times3+2\times(-2)}{3+2}, \frac{3\times1+2\times0}{3+2}\right)$, 즉 $\left(1, \frac{3}{5}\right)$
따라서 $a=1$, $b=\frac{3}{5}$이므로 $a+10b=1+10\times\frac{3}{5}=1+6=7$

050

오른쪽 그림과 같이 세 점 A$(0, a)$, B$(-2, 0)$, C$(4, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. ∠C의 이등분선이 변 AB의 중점 M을 지날 때, 점 M의 좌표는? (단, $a>0$)



① $(-1, 2)$ ✓② $(-1, \sqrt{5})$ ③ $(-1, \sqrt{6})$
④ $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{5}\right)$

삼각형 ABC는 $\overline{CA}=\overline{CB}$인 이등변삼각형이다.
$\overline{CA}^2=\overline{CB}^2$에서 $(0-4)^2+(a-0)^2=(-2-4)^2$
$a^2+16=36$, $a^2=20$ $\therefore a=2\sqrt{5}$ ($\because a>0$)
따라서 A$(0, 2\sqrt{5})$이므로 선분 AB의 중점 M의 좌표는
$\left(\frac{0-2}{2}, \frac{2\sqrt{5}+0}{2}\right)$, 즉 $(-1, \sqrt{5})$

중단원 점검 문제

01

세 점 A(7), B(−2), C(a)에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}=16$ 일 때, 모든 a의 값의 합은?

√① −4　② −2　③ 0
④ 2　⑤ 4

$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}=|-2-7|+|a-(-2)|=16$
즉, $9+|a+2|=16$이므로
$a+2=-7$ 또는 $a+2=7$
$\therefore a=-9$ 또는 $a=5$
따라서 모든 a의 값의 합은
$-9+5=-4$

02 학교 시험 기출

두 점 A($a+1$, 0), B(0, $3a-2$) 사이의 거리가 5일 때, 양수 a의 값은?

① 1　√② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{0-(a+1)\}^2+\{(3a-2)-0\}^2}=\sqrt{10a^2-10a+5}=5$
즉, $10a^2-10a+5=25$이므로
$a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$
$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

03 교육청 기출

좌표평면 위에 두 점 A($2t$, −3), B(−1, $2t$)가 있다. 선분 AB의 길이를 l이라 할 때, 실수 t에 대하여 l^2의 최솟값을 구하시오.　2

$l^2=\overline{\mathrm{AB}}^2=(-1-2t)^2+\{2t-(-3)\}^2$
$=8t^2+16t+10$
$=8(t+1)^2+2$
따라서 l^2은 $t=-1$일 때 최솟값 2를 갖는다.

04

두 점 A(2, 0), B(4, 0)에서 같은 거리에 있는 점 P(a, b)에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}=5$일 때, b^2-a^2의 값은?
(단, O는 원점이다.)

① 6　√② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$이므로
$(a-2)^2+b^2=(a-4)^2+b^2$
$4a=12$　$\therefore a=3$
$\overline{\mathrm{OP}}=5$에서 $\overline{\mathrm{OP}}^2=25$이므로
$a^2+b^2=25$, $9+b^2=25$ ($\because a=3$)
$\therefore b^2=16$
$\therefore b^2-a^2=16-9=7$

05

세 점 A(2, 3), B(2, −1), C(−2, 3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심을 P(a, b)라 할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.　1

삼각형 ABC의 외심 P에서 삼각형의 세 꼭짓점에 이르는 거리는 모두 같으므로
$\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$에서 $(a-2)^2+(b-3)^2=(a-2)^2+(b+1)^2$
$8b=8$　$\therefore b=1$
$\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$에서 $(a-2)^2+(b+1)^2=(a+2)^2+(b-3)^2$
$8a-8b=-8$, $8a-8=-8$ ($\because b=1$)　$\therefore a=0$
$\therefore a^2+b^2=0^2+1^2=1$

06

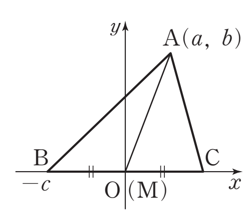
두 점 A(−2, 5), B(3, 2)와 직선 $y=-x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$의 최솟값은?

√① 33　② 36　③ 39
④ 40　⑤ 42

직선 $y=-x$ 위의 점 P의 좌표를 $(a, -a)$라 하자.
$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=\{(a+2)^2+(-a-5)^2\}+\{(a-3)^2+(-a-2)^2\}$
$=4a^2+12a+42=4\left(a+\frac{3}{2}\right)^2+33$
따라서 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$은 $a=-\frac{3}{2}$일 때 최솟값 33을 갖는다.

07

다음은 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$이 성립함을 보이는 과정이다.

> 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고 점 M을 지나면서 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면에서 점 M은 원점이다.
>
> 
>
>
> 이때 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표를 각각 A(a, b), B($-c$, 0), C((가) , 0)이라 하면
> $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=$ (나) $\times(a^2+b^2+$ (다) $)$
> $\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=$ (라) $+b^2+c^2$
> $\therefore \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=$ (마) $\times(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$

위의 과정의 (가)~(마)에 알맞은 것을 순서대로 구하면?

① a, 2, a^2, c^2, 2　√② c, 2, c^2, a^2, 2
③ a, 2, a^2, c^2, 4　④ c, 2, c^2, a^2, 4
⑤ a, 4, a^2, c^2, 4

08 실전 Plus

세 점 A, B$(-1, 2)$, C$(1, -2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 제1사분면 위의 점 A의 좌표를 구하시오. $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$

제1사분면 위의 점 A의 좌표를 (a, b)라 하면 $a>0, b>0$
$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$에서 $(a+1)^2+(b-2)^2=(-1-1)^2+(2+2)^2$
$\therefore a^2+b^2+2a-4b-15=0$ ...... ㉠
$\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$에서 $(-1-1)^2+(2+2)^2=(1-a)^2+(-2-b)^2$
$\therefore a^2+b^2-2a+4b-15=0$ ...... ㉡
㉠−㉡을 하면 $4a-8b=0$ $\therefore a=2b$ ...... ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면 $5b^2-15=0$ $\therefore b=\sqrt{3}$ ($\because b>0$) $\therefore a=2\sqrt{3}$ ($\because$ ㉢)
따라서 구하는 점 A의 좌표는 $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$이다.

09 학교 시험 기출

두 점 A$(4, 7)$, B$(-11, -8)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P, $3:2$로 내분하는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오. $\sqrt{2}$

점 P의 좌표는 $\left(\frac{2\times(-11)+1\times4}{2+1}, \frac{2\times(-8)+1\times7}{2+1}\right)$, 즉 $(-6, -3)$
점 Q의 좌표는 $\left(\frac{3\times(-11)+2\times4}{3+2}, \frac{3\times(-8)+2\times7}{3+2}\right)$, 즉 $(-5, -2)$
따라서 선분 PQ의 길이는
$\sqrt{(-5+6)^2+(-2+3)^2}=\sqrt{2}$

10 교육청 기출

좌표평면 위에 두 점 A$(0, a)$, B$(6, 0)$이 있다. 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 직선 $y=-x$ 위에 있을 때, a의 값은?

① -1 ② -2 ✓③ -3
④ -4 ⑤ -5

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{1\times6+2\times0}{1+2}, \frac{1\times0+2\times a}{1+2}\right)$, 즉 $\left(2, \frac{2a}{3}\right)$
이 점이 직선 $y=-x$ 위에 있으므로
$\frac{2a}{3}=-2$ $\therefore a=-3$

11

세 점 A$(a, 1)$, B$(b, 4)$, C$(-2, -2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심이 y축 위에 있을 때, $a+b$의 값을 구하시오. 2

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{a+b-2}{3}, \frac{1+4-2}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{a+b-2}{3}, 1\right)$
이 점이 y축 위에 있으므로 x좌표가 0이다.
따라서 $\frac{a+b-2}{3}=0$이므로 $a+b=2$

12

평행사변형 ABCD의 두 꼭짓점이 A$(3, 5)$, C$(7, -1)$이고 변 BC의 중점의 좌표가 $(3, -2)$일 때, 꼭짓점 D의 좌표는?

① $(9, 9)$ ② $(10, 8)$ ✓③ $(11, 7)$
④ $(12, 6)$ ⑤ $(13, 5)$

평행사변형 ABCD의 나머지 두 꼭짓점 B, D의 좌표를 각각 (a, b), (c, d)라 하자.
변 BC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+7}{2}, \frac{b-1}{2}\right)$이므로
$\frac{a+7}{2}=3, \frac{b-1}{2}=-2$ $\therefore$ B$(-1, -3)$
대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{3+7}{2}, \frac{5-1}{2}\right)$, 즉 $(5, 2)$
대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-1+c}{2}, \frac{-3+d}{2}\right)$
평행사변형의 두 대각선의 중점은 일치하므로
$\frac{-1+c}{2}=5, \frac{-3+d}{2}=2$ $\therefore c=11, d=7$
$\therefore$ D$(11, 7)$

13 실전 Plus

네 점 A$(a, 0)$, B$(4, -2)$, C$(6, -1)$, D$(b, 1)$을 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 마름모일 때, $a+b$의 최댓값은?

① 6 ② 8 ③ 10
✓④ 12 ⑤ 14

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+6}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{4+b}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
마름모의 두 대각선의 중점은 일치하므로
$\frac{a+6}{2}=\frac{4+b}{2}$ $\therefore b=a+2$ ...... ㉠
한편, $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$에서
$(a-4)^2+(0+2)^2=(4-6)^2+(-2+1)^2$
$a^2-8a+15=0$, $(a-3)(a-5)=0$ $\therefore a=3$ 또는 $a=5$
㉠에 의하여 $a=3$이면 $b=5$, $a=5$이면 $b=7$
따라서 $a+b=8$ 또는 $a+b=12$이므로 구하는 최댓값은 12이다.

14

세 점 A$(-1, 4)$, B$(-3, 0)$, C$(1, 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에 대하여 $\angle$A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 선분 AD의 길이를 구하시오. $\frac{2\sqrt{10}}{3}$

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=2\sqrt{5}:\sqrt{5}=2:1$
즉, 점 D는 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는
$\left(\frac{2\times1+1\times(-3)}{2+1}, \frac{2\times3+1\times0}{2+1}\right)$, 즉 $\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$
$\therefore \overline{AD}=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}+1\right)^2+(2-4)^2}=\sqrt{\frac{40}{9}}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$

01 기울기와 한 점이 주어진 직선의 방정식

① 기울기와 y절편이 주어진 직선의 방정식

기울기가 m이고 y절편이 n인 직선의 방정식은

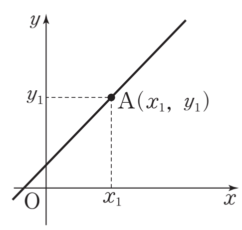
$$y=mx+n$$

보기 기울기가 -1이고 y절편이 2인 직선의 방정식은
$y=-x+2$

② 기울기와 한 점이 주어진 직선의 방정식

기울기가 m이고 점 $A(x_1, y_1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1)$$



보기 기울기가 2이고 점 $(2, 3)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-3=2(x-2)$, 즉 $y=2x-1$

참고 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ일 때,
(직선의 기울기)$=\tan\theta$

• (기울기)$=\dfrac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}$

개념 기본 문제

정답과 풀이 010쪽

001

다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 기울기가 -2이고 y절편이 1인 직선 $y=-2x+1$

(2) 기울기가 2이고 y절편이 5인 직선 $y=2x+5$

(3) 기울기가 3이고 점 $(0, 3)$을 지나는 직선 $y=3x+3$

기울기가 3이고 y절편이 3인 직선의 방정식은
$y=3x+3$

(4) 직선 $y=3x+1$과 기울기가 같고 직선 $y=-x+2$와 y절편이 같은 직선 $y=3x+2$

기울기가 3이고 y절편이 2인 직선의 방정식은
$y=3x+2$

(5) x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45°이고 y절편이 -2인 직선 $y=x-2$

기울기가 1이고 y절편이 -2인 직선의 방정식은
$y=x-2$

002

다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 기울기가 1이고 점 $(2, 3)$을 지나는 직선 $y=x+1$

$y-3=x-2$ $\quad\therefore y=x+1$

(2) 기울기가 -4이고 점 $(-1, 2)$를 지나는 직선 $y=-4x-2$

$y-2=-4\{x-(-1)\}$ $\quad\therefore y=-4x-2$

(3) 기울기가 2이고 x절편이 -3인 직선 $y=2x+6$

기울기가 2이고 점 $(-3, 0)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-0=2\{x-(-3)\}$ $\quad\therefore y=2x+6$

(4) 직선 $y=-2x$와 기울기가 같고 점 $(3, -1)$을 지나는 직선 $y=-2x+5$

기울기가 -2이고 점 $(3, -1)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-(-1)=-2(x-3)$ $\quad\therefore y=-2x+5$

(5) x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60°이고 점 $(2\sqrt{3}, 1)$을 지나는 직선 $y=\sqrt{3}x-5$

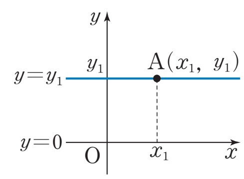
기울기가 $\sqrt{3}$이고 점 $(2\sqrt{3}, 1)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-1=\sqrt{3}(x-2\sqrt{3})$ $\quad\therefore y=\sqrt{3}x-5$

02 좌표축에 평행한 직선의 방정식

❶ x축에 평행한 직선의 방정식

점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 $\underbrace{x\text{축}}_{y=0}$에 평행한 직선의 방정식은

$$y=y_1$$

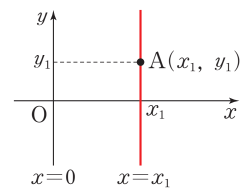


• x축에 평행한 직선은 y축에 수직이다.

❷ y축에 평행한 직선의 방정식

점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 $\underbrace{y\text{축}}_{x=0}$에 평행한 직선의 방정식은

$$x=x_1$$



• y축에 평행한 직선은 x축에 수직이다.

개념 기본 문제

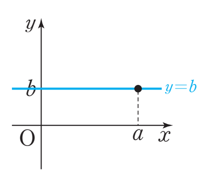
정답과 풀이 010쪽

003

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣고 주어진 직선을 좌표평면 위에 그리시오.

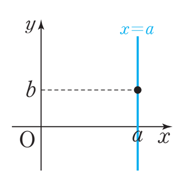
(1) 점 $(a,\ b)$를 지나고 x축에 평행한 직선

➡ 직선 위의 점의 y좌표는 모두 $\boxed{b}$로 일정하므로 이 직선의 방정식은 $y=\boxed{b}$이다.



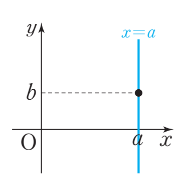
(2) 점 $(a,\ b)$를 지나고 y축에 평행한 직선

➡ 직선 위의 점의 $\boxed{x}$좌표는 모두 a로 일정하므로 이 직선의 방정식은 $x=\boxed{a}$이다.



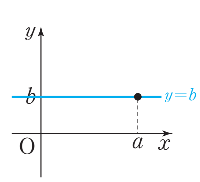
(3) 점 $(a,\ b)$를 지나고 x축에 수직인 직선

➡ 직선 위의 점의 x좌표는 모두 $\boxed{a}$로 일정하므로 이 직선의 방정식은 $x=\boxed{a}$이다.



(4) 점 $(a,\ b)$를 지나고 y축에 수직인 직선

➡ 직선 위의 점의 $\boxed{y}$좌표는 모두 b로 일정하므로 이 직선의 방정식은 $y=\boxed{b}$이다.



004

다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(2,\ 3)$을 지나고 x축에 평행한 직선 $y=3$

(2) 점 $(-1,\ 2)$를 지나고 x축에 수직인 직선 $x=-1$

(3) 점 $(3,\ -4)$를 지나고 y축에 평행한 직선 $x=3$

(4) 점 $(-1,\ -3)$을 지나고 y축에 수직인 직선 $y=-3$

(5) y절편이 5이고 x축에 평행한 직선 $y=5$

(6) x절편이 -4이고 y축에 평행한 직선 $x=-4$

03 두 점이 주어진 직선의 방정식

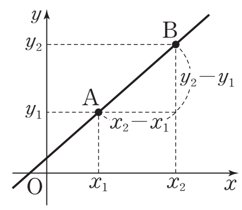
❶ 두 점을 지나는 직선의 방정식

서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

① $x_1 \neq x_2$일 때, $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

② $x_1=x_2$일 때, $x=x_1$

③ $y_1=y_2$일 때, $y=y_1$



• 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선은 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$인 직선이다.

보기 ① 두 점 $(1,\ 3)$, $(2,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\dfrac{5-3}{2-1}(x-1)$, 즉 $y=2x+1$

② 두 점 $(-1,\ 2)$, $(-1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$x=-1$

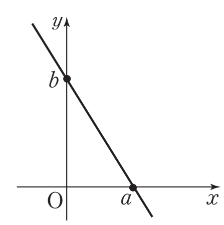
③ 두 점 $(1,\ 3)$, $(-4,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=3$

❷ x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식

x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (\text{단, } a\neq 0,\ b\neq 0)$$



• x절편이 a, y절편이 b인 직선은 두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$를 지나는 직선이다.

보기 x절편이 2, y절편이 -4인 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-4}=1$, 즉 $y=2x-4$

개념 기본 문제

정답과 풀이 011쪽

005

다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

(1) $(-1,\ 3)$, $(1,\ 5)$ $y=x+4$

$y-3=\dfrac{5-3}{1-(-1)}\{x-(-1)\}$ $\therefore y=x+4$

(2) $(2,\ -2)$, $(3,\ 1)$ $y=3x-8$

$y-(-2)=\dfrac{1-(-2)}{3-2}(x-2)$ $\therefore y=3x-8$

(3) $(-2,\ -5)$, $(-1,\ -3)$ $y=2x-1$

$y-(-5)=\dfrac{-3-(-5)}{-1-(-2)}\{x-(-2)\}$ $\therefore y=2x-1$

(4) $(3,\ 4)$, $(3,\ 5)$ $x=3$

(5) $(1,\ -2)$, $(-2,\ -2)$ $y=-2$

006

다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) x절편이 3, y절편이 -5인 직선 $y=\frac{5}{3}x-5$

$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-5}=1$ $\therefore y=\dfrac{5}{3}x-5$

(2) x절편이 -1, y절편이 -2인 직선 $y=-2x-2$

$\dfrac{x}{-1}+\dfrac{y}{-2}=1$ $\therefore y=-2x-2$

(3) 두 점 $(-2,\ 0)$, $(0,\ 6)$을 지나는 직선 $y=3x+6$

x절편이 -2, y절편이 6인 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{6}=1$ $\therefore y=3x+6$

(4) 두 점 $(4,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지나는 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$

x절편이 4, y절편이 2인 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1$ $\therefore y=-\dfrac{1}{2}x+2$

04 직선의 방정식의 활용

1 세 점이 한 직선 위에 있을 조건 → 두 점을 지나는 직선 위에 나머지 한 점이 있다.

세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이 한 직선 위에 있다.

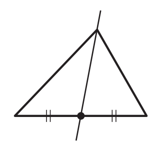
➡ (직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)=(직선 CA의 기울기)

➡ $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}$ (단, $x_1\neq x_2$, $x_2\neq x_3$, $x_3\neq x_1$)

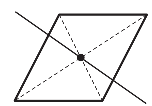
• 서로 다른 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있을 때, 이 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형은 존재하지 않는다.

2 도형의 넓이를 이등분하는 직선

① 삼각형의 한 꼭짓점을 지나면서 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선은 대변의 중점을 지난다.



② 평행사변형의 넓이를 이등분하는 직선은 평행사변형의 두 대각선의 교점을 지난다.



• 마름모, 직사각형, 정사각형도 모두 평행사변형이므로 이들의 넓이를 이등분하는 직선도 두 대각선의 교점을 지난다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 011쪽

007

다음은 세 점 $A(1, 2)$, $B(2, 4)$, $C(4, k)$가 한 직선 위에 있을 때, k의 값을 구하는 두 가지 방법이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

[방법1] 직선 AB의 기울기는 $\frac{4-2}{2-1}=2$

직선 BC의 기울기는 $\frac{k-4}{4-2}=\frac{k-4}{2}$

직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로 $\frac{k-4}{\boxed{2}}=\boxed{2}$에서 $k=\boxed{8}$이다.

[방법2] 직선 AB의 방정식은 $y=\boxed{2}x$

점 C가 직선 AB 위의 점이므로 위의 직선의 방정식에 $x=\boxed{4}$, $y=k$를 대입하면 $k=\boxed{8}$이다.

008

세 점 $A(1, 0)$, $B(3, 4)$, $C(k, 6)$이 한 직선 위에 있을 때, k의 값을 구하시오. 4

직선 AB의 기울기는 $\frac{4-0}{3-1}=2$

직선 BC의 기울기는 $\frac{6-4}{k-3}=\frac{2}{k-3}$

$\frac{2}{k-3}=2$, $k-3=1$　　$\therefore k=4$

009

다음은 세 점 $A(3, 2)$, $B(-1, 0)$, $C(5, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에 대하여 점 A를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

점 A를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선은 선분 BC의 중점을 지나므로 이 점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $(\boxed{2}, 0)$이다.

따라서 두 점 A, M을 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{0-2}{\boxed{2}-3}(x-\boxed{3})$　　$\therefore y=2x-\boxed{4}$

010

네 점 $A(3, 2)$, $B(-1, 0)$, $C(5, 0)$, $D(9, 2)$를 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD가 있다. 원점을 지나는 직선 중 평행사변형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 구하시오. $y=\frac{1}{4}x$

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{3+5}{2}, \frac{2+0}{2}\right)$, 즉 $(4, 1)$

원점을 지나는 직선의 방정식을 $y=mx$ (m은 상수)라 하면

직선 $y=mx$가 점 $(4, 1)$을 지나므로 $1=4m$　　$\therefore m=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{4}x$

05 일차방정식 $ax+by+c=0$이 나타내는 도형

❶ 일차방정식 $ax+by+c=0$

직선의 방정식은 x, y에 대한 일차방정식

$$ax+by+c=0\ (a\neq0 \text{ 또는 } b\neq0)$$

꼴로 나타낼 수 있다.

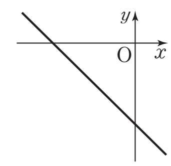
❷ 일차방정식 $ax+by+c=0$이 나타내는 도형

x, y에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$ $(a\neq0$ 또는 $b\neq0)$이 나타내는 도형은 다음과 같은 직선이다.

$a\neq0,\ b\neq0$	$a\neq0,\ b=0$	$a=0,\ b\neq0$
$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$	$x=-\frac{c}{a}$	$y=-\frac{c}{b}$
기울기가 $-\frac{a}{b}$, y절편이 $-\frac{c}{b}$인 직선	y축에 평행한 직선	x축에 평행한 직선

• $ax+by+c=0$ 꼴을 직선의 방정식의 일반형, $y=mx+n$ 꼴을 직선의 방정식의 표준형이라 한다.

• $ax+by+c=0$에서 ab, bc, ca의 값의 부호에 따라 직선의 개형을 그릴 수 있다.
예를 들어 $ab>0$, $bc>0$이면
$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}<0$이므로
오른쪽 그림과 같이 기울기와 y절편이 모두 음수인 직선이다.



개념 기본 문제

정답과 풀이 012쪽

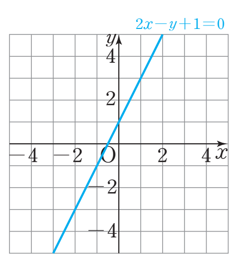
011

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣고 주어진 일차방정식이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 그리시오.

(1) 일차방정식 $2x-y+1=0$

➡ $y=\boxed{2}x+1$

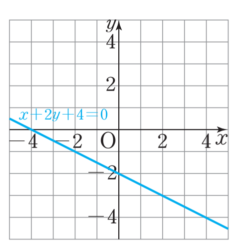
➡ 기울기가 2, y절편이 $\boxed{1}$인 직선이다.



(2) 일차방정식 $x+2y+4=0$

➡ $y=-\frac{1}{2}x-\boxed{2}$

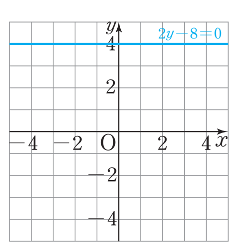
➡ 기울기가 $\boxed{-\frac{1}{2}}$, y절편이 -2인 직선이다.



(3) 일차방정식 $2y-8=0$

➡ $y=\boxed{4}$

➡ y축에 수직이고, $\boxed{x}$축에 평행한 직선이다.

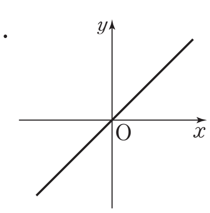


012

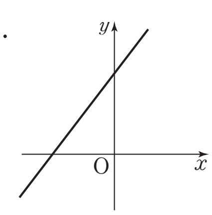
세 수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킬 때, 보기에서 직선 $ax+by+c=0$의 개형을 고르시오.

보기

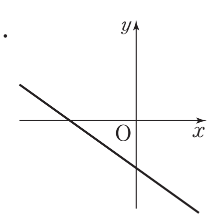
ㄱ.



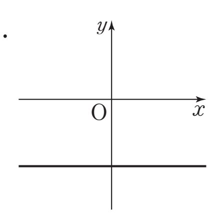
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



(1) $a>0$, $b>0$, $c>0$ ㄷ

기울기와 y절편이 모두 음수이므로 직선의 개형은 ㄷ이다.

(2) $a<0$, $b>0$, $c<0$ ㄴ

기울기와 y절편이 모두 양수이므로 직선의 개형은 ㄴ이다.

(3) $a=0$, $b>0$, $c>0$ ㄹ

x축에 평행하고 y절편이 음수이므로 직선의 개형은 ㄹ이다.

(4) $a<0$, $b>0$, $c=0$ ㄱ

기울기가 양수이고 원점을 지나므로 직선의 개형은 ㄱ이다.

유형 실전 문제

정답과 풀이 013쪽

유형 01 기울기와 한 점이 주어진 직선의 방정식 중요

① 기울기가 m이고 y절편이 n인 직선의 방정식은

$y=mx+n$

② 기울기가 m이고 점 $A(x_1, y_1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-y_1=m(x-x_1)$

풍쌤 Point 다양한 표현으로부터 기울기의 값과 지나는 점의 좌표를 정확히 찾아내어 공식에 대입한다.

013

기울기가 -2이고 점 $(2, -3)$을 지나는 직선의 방정식은?

① $y=-2x-1$ ② $y=2x-1$
③ $y=-2x+1$ ④ $y=2x+1$
⑤ $y=-2x+3$

$y-(-3)=-2(x-2)$ $\therefore y=-2x+1$

014

기울기가 3이고 점 $(5, 3)$을 지나는 직선의 x절편은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

$y-3=3(x-5)$ $\therefore y=3x-12$
따라서 구하는 x절편은 4이다.

015

직선 $y=ax+b$의 기울기가 2이고 점 $(1, 4)$가 이 직선 위의 점일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. 8

(단, a, b는 상수이다.)

직선 $y=ax+b$의 기울기가 2이므로 $a=2$
점 $(1, 4)$가 직선 $y=ax+b$, 즉 $y=2x+b$ 위의 점이므로
$4=2\times1+b$ $\therefore b=2$
$\therefore a^2+b^2=2^2+2^2=8$

016

기울기가 -3이고 x절편이 3인 직선의 y절편은?

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

기울기가 -3이고 점 $(3, 0)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-0=-3(x-3)$ $\therefore y=-3x+9$
따라서 구하는 y절편은 9이다.

017

두 점 $A(-3, 2)$, $B(5, -2)$에 대하여 선분 AB의 중점을 지나고 기울기가 2인 직선이 점 $(2, a)$를 지날 때, a의 값을 구하시오. 2

선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2-2}{2}\right)$, 즉 $(1, 0)$
점 $(1, 0)$을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은
$y-0=2(x-1)$ $\therefore y=2x-2$
이 직선이 점 $(2, a)$를 지나므로
$a=2\times2-2=2$

018

점 $(2, \sqrt{3})$을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $30°$인 직선이 점 $(5, k)$를 지날 때, k의 값은?

① $\sqrt{3}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $30°$인 직선의 기울기는 $\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$
즉, 점 $(2, \sqrt{3})$을 지나고 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$인 직선의 방정식은
$y-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$ $\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}$
이 직선이 점 $(5, k)$를 지나므로
$k=\frac{\sqrt{3}}{3}\times5+\frac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$

019

기울기가 -2이고 두 점 $(k+1, 5)$, $(-1, -3-k)$를 지나는 직선의 x절편은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

두 점 $(k+1, 5)$, $(-1, -3-k)$를 지나는 직선의 기울기가 -2이므로
$\frac{(-3-k)-5}{-1-(k+1)}=-2$, $-k-8=2k+4$
$\therefore k=-4$
즉, 기울기가 -2이고 점 $(-3, 5)$를 지나는 직선의 방정식은
$y-5=-2\{x-(-3)\}$ $\therefore y=-2x-1$
따라서 구하는 x절편은 $-\frac{1}{2}$이다.

020

직선 $2x-y+3=0$에 평행하고 점 $(3, 3)$을 지나는 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. $\frac{9}{4}$

직선 $2x-y+3=0$, 즉 $y=2x+3$에 평행한 직선의 기울기는 2이다.
즉, 기울기가 2이고 점 $(3, 3)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-3=2(x-3)$ $\therefore y=2x-3$
따라서 이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는
$\frac{1}{2}\times|-3|\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$

유형 02 두 점을 지나는 직선의 방정식

중요

서로 다른 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

① $x_1 \neq x_2$일 때, $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

② $x_1=x_2$일 때, $x=x_1$ ③ $y_1=y_2$일 때, $y=y_1$

풍쌤 Point 직선이 지나는 두 점을 이용하여 기울기만 찾으면 앞에서 다룬 직선의 방정식과 같은 문제가 된다.

021

두 점 $(1, 4)$, $(-2, -2)$를 지나는 직선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 2 ✓② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

$y-4=\frac{-2-4}{-2-1}(x-1)$ $\therefore y=2x+2$

따라서 $a=2$, $b=2$이므로 $a+b=2+2=4$

022

두 점 $(-3, -9)$, $(2, 11)$을 지나는 직선의 y절편을 구하시오. 3

$y-(-9)=\frac{11-(-9)}{2-(-3)}\{x-(-3)\}$ $\therefore y=4x+3$

따라서 구하는 y절편은 3이다.

023

점 $(1, a)$가 두 점 $(-1, 2)$, $(3, -4)$를 지나는 직선 위에 있을 때, a의 값은?

① -3 ② -2 ✓③ -1
④ 1 ⑤ 2

두 점 $(-1, 2)$, $(3, -4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{-4-2}{3-(-1)}\{x-(-1)\}$ $\therefore y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

점 $(1, a)$가 이 직선 위에 있으므로

$\therefore a=-\frac{3}{2}\times1+\frac{1}{2}=-1$

024

두 점 $(1, 5)$, $(3, a)$를 지나는 직선의 x절편이 -1일 때, a의 값을 구하시오. 10

$y-5=\frac{a-5}{3-1}(x-1)$ $\therefore y=\frac{a-5}{2}x+\frac{-a+15}{2}$

이 직선의 x절편이 -1이므로

$0=\frac{a-5}{2}\times(-1)+\frac{-a+15}{2}$

$-2a+20=0$ $\therefore a=10$

025

세 점 $A(1, 3)$, $B(-2, 3)$, $C(1, -4)$에 대하여 직선 AB의 방정식은 $y=a$, 직선 AC의 방정식은 $x=b$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
✓④ 4 ⑤ 5

직선 AB의 방정식은 $y=3$ $\therefore a=3$

직선 AC의 방정식은 $x=1$ $\therefore b=1$

$\therefore a+b=3+1=4$

026

세 점 $A(-1, -1)$, $B(2, 1)$, $C(5, -8)$에 대하여 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점을 D라 할 때, 두 점 A, D를 지나는 직선의 방정식을 구하시오. $y=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$

점 D의 좌표는 $\left(\frac{1\times5+2\times2}{1+2}, \frac{1\times(-8)+2\times1}{1+2}\right)$, 즉 $(3, -2)$

따라서 두 점 $A(-1, -1)$, $D(3, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-(-1)=\frac{-2-(-1)}{3-(-1)}\{x-(-1)\}$

$\therefore y=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$

027

두 점 $A(0, 4)$, $B(2, 6)$에 대하여 선분 AB의 중점과 점 $(-3, -3)$을 지나는 직선이 점 (a, a^2)을 지날 때, 양수 a의 값을 구하시오. 3

선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{0+2}{2}, \frac{4+6}{2}\right)$, 즉 $(1, 5)$

두 점 $(1, 5)$, $(-3, -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-5=\frac{-3-5}{-3-1}(x-1)$ $\therefore y=2x+3$

이 직선이 점 (a, a^2)을 지나므로

$a^2=2a+3$, $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

028

두 점 $(a, 2a+2)$, $(-2, 2)$를 지나는 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$일 때, 두 점 $(1, a-2)$, $(a+1, -2a)$를 지나는 직선의 y절편은?

✓① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$인 직선의 기울기는 $\tan 45°=1$

즉, 두 점 $(a, 2a+2)$, $(-2, 2)$를 지나는 직선의 기울기가 1이므로

$\frac{2-(2a+2)}{-2-a}=1$, $2a=a+2$ $\therefore a=2$

두 점 $(1, 0)$, $(3, -4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-0=\frac{-4-0}{3-1}(x-1)$ $\therefore y=-2x+2$

따라서 구하는 y절편은 2이다.

유형 03 x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식

x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (\text{단, } a\neq 0,\ b\neq 0)$$

풍쌤 Point 위의 식을 기억해 두면 두 점 $(a, 0)$, $(0, b)$를 지나는 직선의 방정식을 빠르게 구할 수 있다.

029

x절편이 3, y절편이 4인 직선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, $3a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -4 ② -1 ✓③ 0 ④ 1 ⑤ 4

x절편이 3, y절편이 4인 직선의 방정식은

$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ $\therefore y=-\frac{4}{3}x+4$

따라서 $a=-\frac{4}{3}$, $b=4$이므로 $3a+b=3\times\left(-\frac{4}{3}\right)+4=0$

030

x절편이 2, y절편이 -6인 직선이 점 $(k, k-2)$를 지날 때, k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ✓④ 2 ⑤ 3

x절편이 2, y절편이 -6인 직선의 방정식은

$\frac{x}{2}+\frac{y}{-6}=1$ $\therefore y=3x-6$

이 직선이 점 $(k, k-2)$를 지나므로

$k-2=3k-6$ $\therefore k=2$

031

직선 $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$의 x절편을 a, 직선 $\frac{x}{5}-\frac{y}{4}=1$의 y절편을 b라 할 때, 원점과 점 (a, b) 사이의 거리를 구하시오. 5

직선 $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$의 x절편은 3이므로 $a=3$

직선 $\frac{x}{5}-\frac{y}{4}=1$, 즉 $\frac{x}{5}+\frac{y}{-4}=1$의 y절편은 -4이므로 $b=-4$

따라서 원점과 점 $(3, -4)$ 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

032

x절편과 y절편의 절댓값이 같고 부호가 반대인 직선이 점 $(3, -1)$을 지날 때, 이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. 8

(단, x절편과 y절편은 0이 아니다.)

x절편을 a $(a\neq 0)$라 하면 y절편은 $-a$이므로 직선의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$ $\therefore y=x-a$

이 직선이 점 $(3, -1)$을 지나므로 $-1=3-a$ $\therefore a=4$

따라서 직선 $y=x-4$와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\times|-4|=8$

유형 04 세 점이 한 직선 위에 있을 조건 중요

세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이 한 직선 위에 있다.

$$\Rightarrow \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}\ (\text{단, } x_1\neq x_2,\ x_2\neq x_3,\ x_3\neq x_1)$$

풍쌤 Point 세 점 중 미지수가 포함되지 않은 두 점을 선택하면 기울기를 바로 구할 수 있다.

033

세 점 $A(1, 3)$, $B(3, k)$, $C(5, 7)$이 한 직선 위에 있을 때, k의 값을 구하시오. 5

직선 AC의 기울기는 $\frac{7-3}{5-1}=1$

직선 AB의 기울기는 $\frac{k-3}{3-1}=\frac{k-3}{2}$

두 직선 AC, AB의 기울기가 같으므로

$\frac{k-3}{2}=1$, $k-3=2$ $\therefore k=5$

034

세 점 $A(5, 5)$, $B(a, 3)$, $C(-4, a+3)$이 한 직선 위에 있을 때, 양수 a의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ✓④ 8 ⑤ 9

직선 AB의 기울기는 $\frac{3-5}{a-5}=-\frac{2}{a-5}$

직선 AC의 기울기는 $\frac{(a+3)-5}{-4-5}=-\frac{a-2}{9}$

두 직선 AB, AC의 기울기가 같으므로 $-\frac{2}{a-5}=-\frac{a-2}{9}$

$(a-2)(a-5)=18$, $(a+1)(a-8)=0$ $\therefore a=8$ $(\because a>0)$

035

세 점 $A(a, 4)$, $B(a+1, 9)$, $C(-a, -6)$이 한 직선 위에 있을 때, 이 직선의 방정식을 구하시오. $y=5x-1$

직선 AB의 기울기는 $\frac{9-4}{(a+1)-a}=5$

직선 AC의 기울기는 $\frac{-6-4}{-a-a}=\frac{5}{a}$

두 직선 AB, AC의 기울기가 같으므로 $5=\frac{5}{a}$ $\therefore a=1$

따라서 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $y=5x-1$

036

세 점 $A(a, 3)$, $B(1, a)$, $C(2, -3)$이 한 직선 위에 있다. 이 직선이 점 $(k, 2k-3)$을 지날 때, k의 값을 구하시오. (단, $a\neq 0$) 1

직선 AC의 기울기는 $\frac{-3-3}{2-a}=\frac{6}{a-2}$

직선 BC의 기울기는 $\frac{-3-a}{2-1}=-a-3$

두 직선 AC, BC의 기울기가 같으므로 $\frac{6}{a-2}=-a-3$ $\therefore a=-1$ $(\because a\neq 0)$

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $y=-2x+1$

이 직선이 점 $(k, 2k-3)$을 지나므로 $2k-3=-2k+1$ $\therefore k=1$

정답과 풀이 015쪽

유형 05 도형의 넓이를 이등분하는 직선

① 삼각형의 한 꼭짓점을 지나면서 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선은 대변의 중점을 지난다.

② 평행사변형의 넓이를 이등분하는 직선은 평행사변형의 두 대각선의 교점을 지난다.

풍쌤 Point 선분의 중점을 구하는 방법을 이용하여 도형의 넓이를 이등분하는 직선이 지나는 점을 찾는다.

037

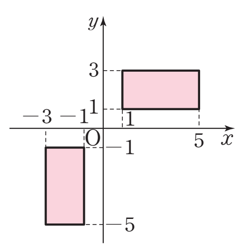
세 점 A$(-1,\ 3)$, B$(3,\ 2)$, C$(5,\ 5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에 대하여 점 B를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 구하시오.

$y=-2x+8$

점 B를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선은 선분 AC의 중점을 지난다.
이 점을 M이라 하면 점 M의 좌표는
$\left(\frac{-1+5}{2},\ \frac{3+5}{2}\right)$, 즉 $(2,\ 4)$
따라서 두 점 B, M을 지나는 직선의 방정식은
$y-2=\frac{4-2}{2-3}(x-3)$ $\quad\therefore y=-2x+8$

038

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 있는 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 y절편을 구하시오. -1



두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은
두 직사각형의 두 대각선의 교점을 모두 지난다.
제1사분면의 직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는
$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{1+3}{2}\right)$, 즉 $(3,\ 2)$
제3사분면의 직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는
$\left(\frac{-1-3}{2},\ \frac{-1-5}{2}\right)$, 즉 $(-2,\ -3)$
두 점 $(3,\ 2)$, $(-2,\ -3)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-2=\frac{-3-2}{-2-3}(x-3)$ $\quad\therefore y=x-1$
따라서 구하는 y절편은 -1이다.

039

원점을 지나는 직선 l이 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 이등분할 때, 직선 l의 기울기는?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ✓③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

원점을 지나는 직선 l의 방정식을 $y=mx\ (m\neq0)$라 하자.
직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 이등분하는 직선 l은 두 점 $(2,\ 0)$, $(0,\ 6)$의 중점을 지나야 한다.
두 점 $(2,\ 0)$, $(0,\ 6)$의 중점의 좌표는
$\left(\frac{2+0}{2},\ \frac{0+6}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 3)$
직선 l이 점 $(1,\ 3)$을 지나야 하므로
$m=3$

유형 06 직선의 개형

중요

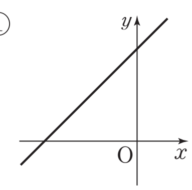
직선 $ax+by+c=0\ (b\neq0)$을 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$로 변형하여 기울기, y절편의 부호를 판단하고 직선의 개형을 그린다.

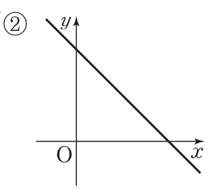
① 기울기: $-\frac{a}{b}$ ② y절편: $-\frac{c}{b}$

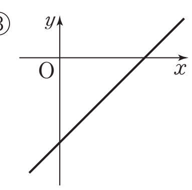
풍쌤 Point 다음을 이용하여 기울기, y절편의 부호를 판단한다.
① $ab>0$ ➡ $a>0,\ b>0$ 또는 $a<0,\ b<0$ → 부호가 일치
② $ab<0$ ➡ $a>0,\ b<0$ 또는 $a<0,\ b>0$ → 부호가 반대

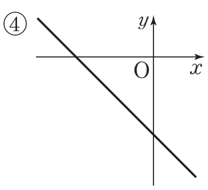
040

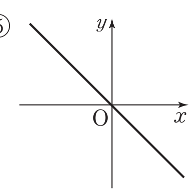
$ab>0$, $bc<0$일 때, 다음 중 직선 $ax+by+c=0$의 개형은? (단, a, b, c는 상수이다.)

①


✓②


③


④


⑤


$ab>0$에서 $-\frac{a}{b}<0$, $bc<0$에서 $-\frac{c}{b}>0$이므로 직선 $ax+by+c=0$, 즉
$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$는 기울기가 음수이고 y절편이 양수인 직선이다.

041

$ab<0$, $bc>0$일 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나지 않는 사분면을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

제2사분면

$ab<0$에서 $-\frac{a}{b}>0$, $bc>0$에서 $-\frac{c}{b}<0$이므로 직선 $ax+by+c=0$, 즉
$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$는 기울기가 양수이고 y절편이 음수인 직선이다.
따라서 직선 $ax+by+c=0$은 제2사분면을 지나지 않는다.

042

직선 $ax+by+1=0$이 제3사분면을 지나지 않을 때, 직선 $bx-ay+a=0$이 지나는 사분면을 모두 구하시오.

(단, a, b는 0이 아닌 상수이다.)

제1사분면, 제2사분면, 제3사분면

$ax+by+1=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{1}{b}$에서 $-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{1}{b}>0$이어야 하므로 $a<0$, $b<0$
이때 $\frac{b}{a}>0$이므로 직선 $bx-ay+a=0$, 즉 $y=\frac{b}{a}x+1$은 기울기가 양수이고 y절편이 1인 직선이다.
따라서 직선 $bx-ay+a=0$은 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면을 지난다.

06 두 직선의 위치 관계

1 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$의 위치 관계

① 두 직선이 평행하면 $m=m'$, $n\neq n'$ ← 기울기는 같고 y절편은 다르다.

② 두 직선이 수직이면 $mm'=-1$ ← 기울기의 곱이 -1이다.

참고 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$에 대하여
① 한 점에서 만난다. ➡ 기울기가 서로 다르다. ➡ $m\neq m'$
② 일치한다. ➡ 기울기, y절편이 각각 같다. ➡ $m=m'$, $n=n'$

2 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 위치 관계

① 두 직선이 평행하면 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

② 두 직선이 수직이면 $aa'+bb'=0$

• 두 직선의 교점이 2개 이상일 때, 두 직선은 일치한다.

• 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 일치하면 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

개념 기본 문제

정답과 풀이 016쪽

043

다음 설명 중 옳은 것은 ○를, 옳지 않은 것은 ×를 ( ) 안에 써넣으시오.

(1) 두 직선 $y=2x+1$, $y=2x+3$은 평행하다. (○)

두 직선의 기울기가 2로 같고 y절편이 다르므로 평행하다.

(2) 두 직선 $y=2x+1$, $y=\frac{1}{2}x+1$은 수직이다. (×)

두 직선의 기울기의 곱은 $2\times\frac{1}{2}=1\neq-1$이므로 두 직선은 수직이 아니다.

(3) 두 직선 $y=4x-1$, $y=4x+3$은 한 점에서 만난다. (×)

두 직선의 기울기가 4로 같고 y절편이 다르므로 평행하다. 즉, 두 직선은 만나지 않는다.

(4) 두 직선 $x+y+1=0$, $3x+3y+1=0$은 평행하다. (○)

$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\neq1$이므로 두 직선은 평행하다.

(5) 두 직선 $2x+y-1=0$, $2x-4y+3=0$은 수직이다. (○)

$2\times2+1\times(-4)=0$이므로 두 직선은 수직이다.

044

보기에서 다음 두 직선의 위치 관계로 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

보기
ㄱ. 한 점에서 만난다. ㄴ. 평행하다.
ㄷ. 일치한다. ㄹ. 수직이다.

(1) $y=3x+1$, $y=-3x+1$ ㄱ

두 직선의 기울기가 다르므로 한 점에서 만난다. 이때 두 직선의 기울기의 곱은 $3\times(-3)=-9\neq-1$이므로 수직이 아니다.

(2) $y=-2x+3$, $y=-2x+1$ ㄴ

두 직선의 기울기가 -2로 같고 y절편이 다르므로 두 직선은 평행하다.

(3) $y=x+1$, $y=-x+1$ ㄱ, ㄹ

두 직선의 기울기가 다르므로 한 점에서 만난다. 이때 두 직선의 기울기의 곱은 $1\times(-1)=-1$이므로 수직이다.

(4) $x-2y+1=0$, $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ ㄷ

$x-2y+1=0$에서 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
두 직선은 기울기와 y절편이 각각 같으므로 일치한다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 017쪽

045

보기에서 다음을 만족시키는 직선인 것만을 있는 대로 고르시오.

보기
ㄱ. $y=3x+1$　　ㄴ. $y=-3x-1$
ㄷ. $y=\frac{1}{3}x-3$　　ㄹ. $y=-\frac{1}{3}x+5$

(1) 직선 $y=-3x$와 평행한 직선　ㄴ

직선 $y=-3x$와 평행한 직선의 기울기는 -3이다.

(2) 직선 $y=-3x$와 수직인 직선　ㄷ

직선 $y=-3x$와 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면
$-3\times m=-1$, 즉 $m=\frac{1}{3}$이어야 한다.

(3) 직선 $y=-3x$와 한 점에서 만나는 직선　ㄱ, ㄷ, ㄹ

직선 $y=-3x$와 한 점에서 만나는 직선의 기울기는 -3이 아니어야 한다.

046

보기에서 다음을 만족시키는 직선인 것만을 있는 대로 고르시오.

보기
ㄱ. $4x+y+3=0$　　ㄴ. $x-4y-4=0$
ㄷ. $y=4x+4$　　ㄹ. $y=-4x+1$

ㄱ. $4x+y+3=0$에서 $y=-4x-3$, ㄴ. $x-4y-4=0$에서 $y=\frac{1}{4}x-1$

(1) 직선 $4x+y+1=0$과 평행한 직선　ㄱ, ㄹ

직선 $4x+y+1=0$, 즉 $y=-4x-1$과 평행한 직선의 기울기는 -4이다.

(2) 직선 $4x+y+1=0$과 수직인 직선　ㄴ

직선 $4x+y+1=0$, 즉 $y=-4x-1$과 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면
$-4\times m=-1$, 즉 $m=\frac{1}{4}$이어야 한다.

(3) 직선 $4x+y+1=0$과 한 점에서 만나는 직선　ㄴ, ㄷ

직선 $4x+y+1=0$, 즉 $y=-4x-1$과 한 점에서 만나는 직선의 기울기는 -4가 아니어야 한다.

047

다음 두 직선이 평행하도록 하는 상수 k의 값을 모두 구하시오.

(1) $y=2x+1$, $y=kx-3$　2

(2) $y=kx+5$, $y=(2k-3)x-2$　3

$k=2k-3$　$\therefore k=3$

(3) $x-6y+3=0$, $x+2ky-2=0$　-3

$\frac{1}{1}=\frac{-6}{2k}\neq\frac{3}{-2}$　…… ㉠
$\frac{1}{1}=\frac{-6}{2k}$에서 $k=-3$
이 값은 ㉠을 만족시키므로 구하는 상수 k의 값은 -3이다.

(4) $kx+3y+3=0$, $x+(k-2)y-7=0$　-1, 3

$\frac{k}{1}=\frac{3}{k-2}\neq\frac{3}{-7}$　…… ㉠
$\frac{k}{1}=\frac{3}{k-2}$에서 $k^2-2k-3=0$
$(k+1)(k-3)=0$　$\therefore k=-1$ 또는 $k=3$
이 값은 모두 ㉠을 만족시키므로 구하는 상수 k의 값은 -1 또는 3이다.

048

다음 두 직선이 수직이 되도록 하는 상수 k의 값을 모두 구하시오.

(1) $y=2x+3$, $y=kx-5$　$-\frac{1}{2}$

$2\times k=-1$　$\therefore k=-\frac{1}{2}$

(2) $y=-3x+1$, $y=(k-1)x-1$　$\frac{4}{3}$

$(-3)\times(k-1)=-1$, $k-1=\frac{1}{3}$　$\therefore k=\frac{4}{3}$

(3) $x-3y+2=0$, $2kx-6y+3=0$　-9

$1\times 2k+(-3)\times(-6)=0$, $2k+18=0$　$\therefore k=-9$

(4) $kx+3y-4=0$, $(k+1)x-2y+3=0$　-3, 2

$k\times(k+1)+3\times(-2)=0$
$k^2+k-6=0$, $(k+3)(k-2)=0$
$\therefore k=-3$ 또는 $k=2$

07 두 직선의 교점을 지나는 직선

❶ 정점을 지나는 직선

정해진 점

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 한 점에서 만날 때, 직선

$$(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0$$

은 실수 k의 값에 관계없이 항상 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지난다.

❷ 두 직선의 교점을 지나는 직선

한 점에서 만나는 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선 중에서 직선 $a'x+b'y+c'=0$을 제외한 직선의 방정식은

$$(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0 \ (k\text{는 실수})$$

꼴로 나타낼 수 있다.

• $A+kB=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면 항등식의 성질에 의하여 $A=0$, $B=0$이어야 한다.

• 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점의 좌표는 연립방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$의 해와 같다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 017쪽

049

다음은 직선 $x+ky-k+3=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

> $x+ky-k+3=0$에서 $(x+3)+k(y-\boxed{1})=0$
> 이 등식이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
> $x+3=0$, $y-\boxed{1}=0$, 즉 $x=-3$, $y=\boxed{1}$
> 따라서 구하는 점의 좌표는 $(-3, \boxed{1})$이다.

050

다음 직선이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구하시오.

(1) $kx+y-2k-1=0$ $(2, 1)$

$k(x-2)+(y-1)=0$

$x-2=0$, $y-1=0$ $\therefore x=2, y=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(2, 1)$

(2) $x+y+k(x-y+2)=0$ $(-1, 1)$

$x+y=0$, $x-y+2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-1, 1)$

(3) $(k+2)x-(2k+1)y+5k+1=0$ $(1, 3)$

$2x-y+1+k(x-2y+5)=0$

$2x-y+1=0$, $x-2y+5=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=3$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(1, 3)$

051

다음은 두 직선 $x-y=0$, $2x+y=3$의 교점과 점 $(2, 3)$을 지나는 직선의 방정식을 구하는 두 가지 방법이다. 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

> [방법1] 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
> $(x-y)+k(\boxed{2x+y-3})=0$ (k는 실수) …… ㉠
> 으로 나타낼 수 있다.
> 이 직선이 점 $(2, 3)$을 지나므로 $k=\dfrac{1}{4}$
> 따라서 이를 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은
> $y=\boxed{2}x-\boxed{1}$이다.
> [방법2] 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면
> $x=\boxed{1}$, $y=\boxed{1}$
> 따라서 두 점 $(2, 3)$, $(\boxed{1}, \boxed{1})$을 지나는 직선의 방정식은
> $y-3=\dfrac{\boxed{1}-3}{\boxed{1}-2}(x-2)$, 즉 $y=\boxed{2}x-\boxed{1}$이다.

052

두 직선 $x+y+1=0$, $2x+3y+1=0$의 교점과 점 $(2, -1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하시오. $y=-\frac{1}{2}x$

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x+y+1)+k(2x+3y+1)=0$ (k는 실수)

이 직선이 점 $(2, -1)$을 지나므로 $2+2k=0$ $\therefore k=-1$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $(x+y+1)-(2x+3y+1)=0$ $\therefore y=-\frac{1}{2}x$

유형 실전 문제

유형 07 두 직선의 평행과 수직 (중요)

두 직선	$y=mx+n$, $y=m'x+n'$	$ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$
평행	$m=m'$, $n\neq n'$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$
수직	$mm'=-1$	$aa'+bb'=0$

풍쌤 Point 두 직선의 기울기, y절편 사이의 관계로 접근하면 실수하지 않는다.
① 평행: 기울기는 같고 y절편은 다르다.
② 수직: 기울기의 곱이 -1이다.

053

직선 $ax+y+1=0$이 직선 $3x-2y+3=0$과 평행하고 직선 $2x+(b-1)y=0$과 수직일 때, $2a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) 1

직선 $ax+y+1=0$이 직선 $3x-2y+3=0$과 평행하므로
$\frac{a}{3}=\frac{1}{-2}\neq\frac{1}{3}$ $\therefore a=-\frac{3}{2}$
직선 $ax+y+1=0$, 즉 $3x-2y-2=0$이 직선 $2x+(b-1)y=0$과 수직이므로
$3\times2+(-2)\times(b-1)=0$, $2b=8$ $\therefore b=4$ $\therefore 2a+b=2\times\left(-\frac{3}{2}\right)+4=1$

054

두 직선 $y=kx+k$, $y=\frac{4}{k}x-k$에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $k\neq0$)

보기
ㄱ. $k=1$일 때, 두 직선은 한 점에서 만난다.
ㄴ. $k=2$일 때, 두 직선은 평행하다.
ㄷ. $k=4$일 때, 두 직선은 수직이다.

① ㄱ ② ㄴ ✓③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄷ. $k=4$일 때, 두 직선의 방정식은
$y=4x+4$, $y=x-4$
두 직선의 기울기가 다르므로 두 직선은 한 점에서 만난다.
이때 기울기의 곱이 $4\times1=4\neq-1$이므로 두 직선은 수직이 아니다.

055

직선 $x-3y+6=0$에 수직이고 점 $(3, 4)$를 지나는 직선의 방정식은?

✓① $3x+y-13=0$ ② $3x-y-13=0$
③ $3x+y+13=0$ ④ $3x-y+13=0$
⑤ $3x+3y+13=0$

직선 $x-3y+6=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+2$와 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면
$\frac{1}{3}\times m=-1$ $\therefore m=-3$
따라서 기울기가 -3이고 점 $(3, 4)$를 지나는 직선의 방정식은
$y-4=-3(x-3)$ $\therefore 3x+y-13=0$

056

점 $(-2, 3)$을 지나고 직선 $2x+y-5=0$에 평행한 직선이 점 $(3, a)$를 지날 때, a의 값은?

① -9 ✓② -7 ③ -5
④ -3 ⑤ -1

직선 $2x+y-5=0$, 즉 $y=-2x+5$에 평행한 직선의 기울기는 -2이다.
기울기가 -2이고 점 $(-2, 3)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-3=-2\{x-(-2)\}$ $\therefore y=-2x-1$
이 직선이 점 $(3, a)$를 지나므로
$a=-2\times3-1=-7$

057

두 직선 $ax-4y+2=0$, $x-(a+3)y+2=0$이 평행할 때, 상수 a의 값은?

✓① -4 ② -3 ③ -2
④ -1 ⑤ 1

$\frac{a}{1}=\frac{-4}{-(a+3)}\neq\frac{2}{2}$ …… ㉠
$\frac{a}{1}=\frac{-4}{-(a+3)}$에서 $a(a+3)=4$, $(a+4)(a-1)=0$
$\therefore a=-4$ 또는 $a=1$
이때 $a=1$이면 ㉠을 만족시키지 않으므로
$a=-4$

058

두 직선 $ax+y+3=0$, $x+by+c=0$이 점 $(-2, 1)$에서 수직으로 만날 때, $a-b+c$의 값을 구하시오. 8
(단, a, b, c는 상수이다.)

직선 $ax+y+3=0$이 점 $(-2, 1)$을 지나므로
$-2a+1+3=0$ $\therefore a=2$
두 직선 $2x+y+3=0$, $x+by+c=0$이 수직이므로
$2\times1+1\times b=0$ $\therefore b=-2$
직선 $x-2y+c=0$이 점 $(-2, 1)$을 지나므로
$-2-2+c=0$ $\therefore c=4$
$\therefore a-b+c=2-(-2)+4=8$

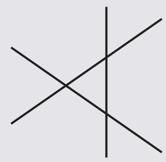
059

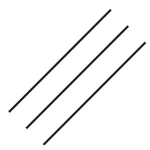
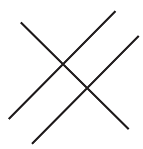
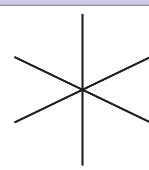
두 직선 $2x+ky-2=0$, $(k-1)x+3y+3=0$이 평행할 때의 k의 값을 a, 수직일 때의 k의 값을 b라 할 때, $a+10b$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) 7

(i) 평행할 때
$\frac{2}{k-1}=\frac{k}{3}\neq\frac{-2}{3}$ …… ㉠
$\frac{2}{k-1}=\frac{k}{3}$에서 $k(k-1)=6$, $(k+2)(k-3)=0$ $\therefore k=-2$ 또는 $k=3$
이때 $k=-2$이면 ㉠을 만족시키지 않으므로 $k=3$
(ii) 수직일 때
$2\times(k-1)+k\times3=0$에서 $5k-2=0$ $\therefore k=\frac{2}{5}$
(i), (ii)에서 $a+10b=3+10\times\frac{2}{5}=7$

유형 08 세 직선의 위치 관계

세 직선의 기울기가 모두 다르고 한 점에서 만나지 않으면 세 직선은 삼각형을 만든다.
또, 세 직선은 평면을 7개의 면으로 분할한다.



세 직선이 평행하다.	두 직선이 평행하다.	한 점에서 만난다.
		
세 직선의 기울기가 모두 같다.	두 직선의 기울기는 같고 나머지 한 직선의 기울기는 다르다.	세 직선의 기울기가 모두 다르고 두 직선의 교점을 나머지 한 직선이 지난다.
면 분할 4개	면 분할 6개	

풍쌤 Point 위치 관계를 그림으로 표현한 후, 세 직선의 기울기 사이의 관계, 교점 등을 파악한다.

060

세 직선 $y=x$, $y=-2x-1$, $y=ax+5$ 중 두 직선이 평행하도록 하는 모든 상수 a의 값의 합을 구하시오. -1

(i) 두 직선 $y=x$, $y=-2x-1$은 평행하지 않다.
(ii) 두 직선 $y=x$, $y=ax+5$가 평행할 때, $a=1$
(iii) 두 직선 $y=-2x-1$, $y=ax+5$가 평행할 때, $a=-2$
(i)~(iii)에서 모든 상수 a의 값의 합은
$1+(-2)=-1$

061

세 직선 $x+y-2=0$, $2x-ay+5=0$, $bx+3y+1=0$이 좌표평면을 네 부분으로 나눌 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) 1

세 직선이 모두 평행해야 한다.
(i) 두 직선 $x+y-2=0$, $2x-ay+5=0$이 평행하므로 $a=-2$
(ii) 두 직선 $x+y-2=0$, $bx+3y+1=0$이 평행하므로 $b=3$
(i), (ii)에서 $a+b=-2+3=1$

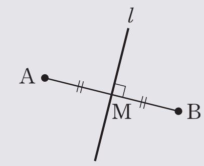
062

세 직선 $y=-x$, $y=2x-3$, $y=ax+3$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 자연수 a의 값을 구하시오. 2

(i) 세 직선 중 두 직선이 평행할 때
두 직선 $y=-x$, $y=ax+3$이 평행할 때, $a=-1$
두 직선 $y=2x-3$, $y=ax+3$이 평행할 때, $a=2$
(ii) 세 직선이 한 점에서 만날 때
$y=-x$, $y=2x-3$을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-1$
직선 $y=ax+3$이 점 $(1, -1)$을 지나야 하므로 $-1=a+3$ $\therefore a=-4$
(i), (ii)에서 자연수 a의 값은 2이다.

유형 09 선분의 수직이등분선의 방정식

선분 AB의 수직이등분선을 l이라 하면
① 직선 l은 직선 AB와 수직이다.
➡ 기울기의 곱이 -1이다.
② 직선 l은 선분 AB의 중점 M을 지난다.



풍쌤 Point 수직이등분선의 방정식은
➡ '수직'이니까 기울기를 비교하고 '이등분'이니까 중점을 찾는다.

063

두 점 $A(-1, 3)$, $B(1, 1)$에 대하여 선분 AB의 수직이등분선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) 3

직선 AB의 기울기는 $\frac{1-3}{1-(-1)}=-1$
즉, $a\times(-1)=-1$이므로 $a=1$
선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-1+1}{1}, \frac{3+1}{2}\right)$, 즉 $(0, 2)$
직선 $y=ax+b$, 즉 $y=x+b$가 점 $(0, 2)$를 지나므로 $b=2$
$\therefore a+b=1+2=3$

064

두 점 $A(5, -2)$, $B(-3, -4)$에 대하여 선분 AB의 수직이등분선이 점 $(a, 3-2a)$를 지날 때, a의 값을 구하시오. -1

직선 AB의 기울기는 $\frac{-4-(-2)}{-3-5}=\frac{1}{4}$
즉, 선분 AB의 수직이등분선의 방정식을 $y=-4x+b$ (b는 상수)로 놓을 수 있다.
선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{5-3}{2}, \frac{-2-4}{2}\right)$, 즉 $(1, -3)$
직선 $y=-4x+b$가 점 $(1, -3)$을 지나므로 $-3=-4+b$ $\therefore b=1$
따라서 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은 $y=-4x+1$
이 직선이 점 $(a, 3-2a)$를 지나므로 $3-2a=-4a+1$ $\therefore a=-1$

065

두 점 $A(-4, -1)$, $B(2, a)$에 대하여 선분 AB의 수직이등분선의 방정식이 $y=-x+b$일 때, $a+b$의 값은? (단, b는 상수이다.)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ✓⑤ 6

선분 AB의 수직이등분선의 기울기가 -1이므로 직선 AB의 기울기는 1이다.
즉, $\frac{a-(-1)}{2-(-4)}=1$에서 $a=5$
선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{-1+5}{2}\right)$, 즉 $(-1, 2)$
직선 $y=-x+b$가 점 $(-1, 2)$를 지나므로 $2=-(-1)+b$ $\therefore b=1$
$\therefore a+b=5+1=6$

유형 실전 문제

정답과 풀이 020쪽

유형 10 정점을 지나는 직선의 방정식 중요

직선 $(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0$은 실수 k의 값에 관계없이 항상 두 직선

$ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0$

의 교점을 지난다.

풍쌤 Point 실수 k가 포함된 식에서 '실수 k의 값에 관계없이'라는 표현이 나오면 $(\quad)+k(\quad)=0$ 꼴로 정리부터 하자.

066

직선 $(k+1)x-(2k+3)y+k=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 P라 할 때, 선분 OP의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① $\sqrt{10}$　② $2\sqrt{3}$　③ 4
④ $3\sqrt{2}$　⑤ $2\sqrt{5}$

$(k+1)x-(2k+3)y+k=0$에서
$(x-3y)+k(x-2y+1)=0$
$x-3y=0,\ x-2y+1=0 \quad \therefore x=-3,\ y=-1$
따라서 점 P의 좌표는 $(-3, -1)$이므로
$\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

067

직선 $(1+3k)x+(2-k)y-(8+3k)=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점과 점 $(1, 1)$을 지나는 직선의 방정식은?

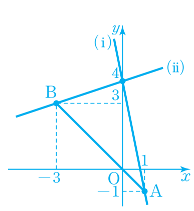
① $y=-2x-1$　② $y=2x-1$
③ $y=-2x+1$　④ $y=2x+1$
⑤ $y=-2x+3$

$(1+3k)x+(2-k)y-(8+3k)=0$에서
$(x+2y-8)+k(3x-y-3)=0$
$x+2y-8=0,\ 3x-y-3=0 \quad \therefore x=2,\ y=3$
즉, 주어진 직선이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표는 $(2, 3)$이다.
따라서 두 점 $(1, 1)$, $(2, 3)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-1=\frac{3-1}{2-1}(x-1) \quad \therefore y=2x-1$

068

직선 $x+ky-4k=0$이 두 점 $A(1, -1)$, $B(-3, 3)$을 이은 선분 AB와 한 점에서 만날 때, 정수 k의 최댓값을 구하시오.　0

$x+ky-4k=0$에서 $x+k(y-4)=0$　…… ㉠
직선 ㉠은 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 4)$를 지난다.
(i) 직선 ㉠이 점 A를 지날 때
$1-k-4k=0 \quad \therefore k=\frac{1}{5}$
(ii) 직선 ㉠이 점 B를 지날 때
$-3+3k-4k=0 \quad \therefore k=-3$



(i), (ii)에서 실수 k의 값의 범위는 $-3\le k\le\frac{1}{5}$이므로 정수 k의 최댓값은 0이다.

유형 11 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

두 직선 $A=0$, $B=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$A+kB=0$ 또는 $kA+B=0$ (k는 실수)

꼴로 나타낼 수 있다.

풍쌤 Point 다음은 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구하는 두 가지 방법이다.
[방법1] $A+kB=0$으로 놓고 주어진 조건을 이용하여 실수 k의 값을 구한다.
[방법2] 두 직선의 방정식을 연립하여 교점을 구하고 주어진 조건을 이용하여 직선의 방정식을 구한다.

069

두 직선 $x+y-1=0$, $3x-y+5=0$의 교점과 점 $(2, 5)$를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.　$x-y+3=0$

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x+y-1)+k(3x-y+5)=0$ (k는 실수)
이 직선이 점 $(2, 5)$를 지나므로 $6+6k=0 \quad \therefore k=-1$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$(x+y-1)-(3x-y+5)=0 \quad \therefore x-y+3=0$

070

두 직선 $3x+2y-3=0$, $3x+y-3=0$의 교점을 지나고 직선 $x+2y+1=0$에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)　$\frac{1}{4}$

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$3(1+k)x+(2+k)y-3(k+1)=0$ (k는 실수)　…… ㉠
직선 ㉠과 직선 $x+2y+1=0$이 평행하므로 $k=-\frac{4}{5}$
이를 ㉠에 대입하면 $x+2y-1=0$
따라서 $A(1, 0)$, $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

071

직선 $(x+y+1)+k(2x-y+3)=0$에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 실수이다.)

보기

ㄱ. 두 직선 $x+y+1=0$, $2x-y+3=0$의 교점을 지난다.
ㄴ. $k=-1$일 때, 직선의 기울기는 2이다.
ㄷ. x축에 평행한 직선이 되도록 하는 실수 k의 값이 존재한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄷ

ㄴ. $k=-1$일 때, $(x+y+1)-(2x-y+3)=0 \quad \therefore y=\frac{1}{2}x+1$
ㄷ. $(1+2k)x+(1-k)y+1+3k=0$에서
$1+2k=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{2}$

08 점과 직선 사이의 거리

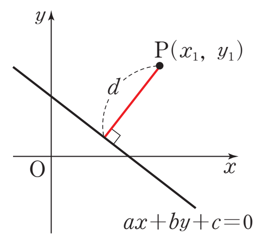
❶ 점과 직선 사이의 거리

① 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

② 원점과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



• 점과 직선 사이의 거리는 점에서 직선에 내린 수선의 발까지의 거리이다.

보기 ① 점 $(1,\ 2)$와 직선 $3x+4y-1=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|3\times1+4\times2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{10}{5}=2$

② 원점과 직선 $5x+12y-26=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|-26|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\dfrac{26}{13}=2$

개념 기본 문제

정답과 풀이 021쪽

072

다음 점 A와 직선 l 사이의 거리를 구하시오.

(1) $\mathrm{A}(3,\ 1)$, l: $x-y+2=0$ $2\sqrt{2}$

$\dfrac{|3-1+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

(2) $\mathrm{A}(-2,\ 2)$, l: $3x-2y-3=0$ $\sqrt{13}$

$\dfrac{|3\times(-2)-2\times2-3|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$

(3) $\mathrm{A}(1,\ -4)$, l: $4x-3y-1=0$ 3

$\dfrac{|4\times1-3\times(-4)-1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{15}{5}=3$

(4) $\mathrm{A}(-5,\ 0)$, l: $2x+y+5=0$ $\sqrt{5}$

$\dfrac{|2\times(-5)+0+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

(5) $\mathrm{A}(0,\ 0)$, l: $x-y+8=0$ $4\sqrt{2}$

$\dfrac{|8|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

(6) $\mathrm{A}(0,\ 0)$, l: $3x-4y-5=0$ 1

$\dfrac{|-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{5}{5}=1$

073

다음 점 A와 직선 l 사이의 거리를 구하시오.

(1) $\mathrm{A}(2,\ 4)$, l: $x=-3$ 5

직선 l은 y축에 평행한 직선이므로 점 A와 직선 l 사이의 거리는
$|2-(-3)|=5$

(2) $\mathrm{A}(3,\ -1)$, l: $y=5$ 6

직선 l은 x축에 평행한 직선이므로 점 A와 직선 l 사이의 거리는
$|5-(-1)|=6$

074

다음 점 A와 직선 l 사이의 거리가 d일 때, 상수 k의 값을 모두 구하시오.

(1) $\mathrm{A}(1,\ 1)$, l: $3x+4y+k=0$, $d=1$ $-12,\ -2$

$\dfrac{|3\times1+4\times1+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|k+7|}{5}=1$
즉, $|k+7|=5$이므로 $k=-12$ 또는 $k=-2$

(2) $\mathrm{A}(-1,\ 3)$, l: $5x-12y+k=0$, $d=2$ $15,\ 67$

$\dfrac{|5\times(-1)-12\times3+k|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\dfrac{|k-41|}{13}=2$
즉, $|k-41|=26$이므로 $k=15$ 또는 $k=67$

(3) $\mathrm{A}(2,\ -1)$, l: $2x+y+k=0$, $d=\sqrt{5}$ $-8,\ 2$

$\dfrac{|2\times2+(-1)+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|k+3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$
즉, $|k+3|=5$이므로 $k=-8$ 또는 $k=2$

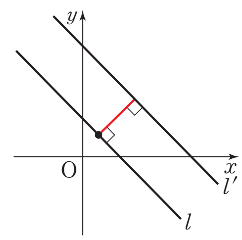
(4) $\mathrm{A}(k,\ 1)$, l: $x+y-3=0$, $d=3\sqrt{2}$ $-4,\ 8$

$\dfrac{|k+1-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|k-2|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$
즉, $|k-2|=6$이므로 $k=-4$ 또는 $k=8$

09 점과 직선 사이의 거리의 활용

❶ 평행한 두 직선 사이의 거리

평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 임의의 점과 다른 직선 l' 사이의 거리와 같다.



참고 ① x축에 평행한 두 직선 $y=a$, $y=b$ 사이의 거리는 $|a-b|$

② y축에 평행한 두 직선 $x=c$, $x=d$ 사이의 거리는 $|c-d|$

보기 평행한 두 직선 $x+y-1=0$, $x+y-2=0$ 사이의 거리는 직선 $x+y-1=0$ 위의 점 $(1,\ 0)$과 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|1+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

풍쌤 Tip 평행한 두 직선 l, l'사이의 거리를 구할 때, 직선 l 위의 한 점은 어느 점을 택해도 결과가 같으므로 계산이 간편한 점으로 택한다.

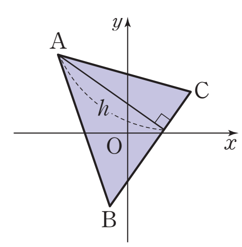
❷ 삼각형의 넓이

세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는 다음 순서로 구한다.

① 선분 BC의 길이를 구한다.

② 점 A와 직선 BC 사이의 거리 h를 구한다.

③ (삼각형 ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times h$



풍쌤 Tip 세 꼭짓점 A, B, C 중에서 직선의 방정식을 구하기 쉬운 두 꼭짓점을 이은 선분을 밑변으로 정하면 계산이 편하다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 021쪽

075

다음 평행한 두 직선 사이의 거리를 구하시오.

(1) $x-2y+3=0$, $x-2y-2=0$ $\sqrt{5}$

직선 $x-2y+3=0$ 위의 점 $(-3,\ 0)$과 직선 $x-2y-2=0$ 사이의 거리와 같으므로 $\frac{|-3-2\times0-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

(2) $3x+4y+5=0$, $3x+4y-10=0$ 3

직선 $3x+4y+5=0$ 위의 점 $(5,\ -5)$와 직선 $3x+4y-10=0$ 사이의 거리와 같으므로 $\frac{|3\times5+4\times(-5)-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{5}=3$

(3) $y=2x-1$, $y=2x+9$ $2\sqrt{5}$

직선 $y=2x-1$ 위의 점 $(0,\ -1)$과 직선 $y=2x+9$, 즉 $2x-y+9=0$ 사이의 거리와 같으므로 $\frac{|2\times0-(-1)+9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

(4) $y=x-3$, $y=x+5$ $4\sqrt{2}$

직선 $y=x-3$ 위의 점 $(3,\ 0)$과 직선 $y=x+5$, 즉 $x-y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로 $\frac{|3-0+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

076

세 점 O$(0,\ 0)$, A$(3,\ 4)$, B$(-1,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오. $\frac{7}{2}$

단계1. 선분 AB의 길이 구하기

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-1-3)^2+(1-4)^2}=5$

단계2. 점 O와 직선 AB 사이의 거리 구하기

두 점 A, B를 지나는 직선 AB의 방정식은

$y-4=\frac{1-4}{-1-3}(x-3)$ $\quad\therefore 3x-4y+7=0$

따라서 점 O와 직선 AB 사이의 거리는 $\frac{|7|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{7}{5}$

단계3. 삼각형 OAB의 넓이 구하기

삼각형 OAB의 밑변을 선분 AB라 하면 높이는 점 O와 직선 AB 사이의 거리이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times\frac{7}{5}=\frac{7}{2}$

유형 실전 문제

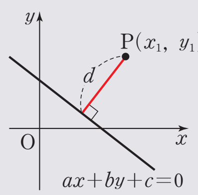
정답과 풀이 022쪽

유형 12 점과 직선 사이의 거리

중요

점 $P(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



풍쌤 Point 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하려면 직선의 방정식을 일반형으로 변형해야 한다.

이때 거리 공식은 $d=\dfrac{|(\text{좌표를 대입한 값})|}{\sqrt{(\text{계수의 제곱의 합})}}$으로 기억하자.

077

점 $(-2,\ 3)$과 직선 $4x+3y+4=0$ 사이의 거리는?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{3}{5}$ √③ 1
④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

$\dfrac{|4\times(-2)+3\times3+4|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{5}{5}=1$

078

두 점 $(-3,\ 4)$, $(1,\ -4)$를 지나는 직선과 점 $(2,\ -1)$ 사이의 거리를 구하시오. $\sqrt{5}$

두 점 $(-3, 4)$, $(1, -4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\dfrac{-4-4}{1-(-3)}\{x-(-3)\}$, $y=-2x-2$

$\therefore\ 2x+y+2=0$

따라서 점 $(2, -1)$과 직선 $2x+y+2=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|2\times2-1+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

079

점 $(4,\ 1)$과 직선 $2x+y+k=0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, 모든 상수 k의 값의 합은?

① -20 √② -18 ③ -16
④ -14 ⑤ -12

$\dfrac{|2\times4+1+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|k+9|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

즉, $|k+9|=10$에서 $k=-19$ 또는 $k=1$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은

$-19+1=-18$

080

x축 위의 점 A와 직선 $4x-3y+8=0$ 사이의 거리가 4일 때, 점 A의 좌표를 모두 구하시오. $(-7, 0)$, $(3, 0)$

x축 위의 점 A의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면

$\dfrac{|4\times a-3\times0+8|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{|4a+8|}{5}=4$

즉, $|4a+8|=20$에서 $a=-7$ 또는 $a=3$

따라서 점 A의 좌표는

$(-7, 0)$ 또는 $(3, 0)$

081

직선 $x+3y-1=0$에 수직이고 점 $(-1,\ 3)$으로부터의 거리가 $\sqrt{10}$인 직선의 방정식이 $ax-y+b=0$일 때, 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 19

직선 $x+3y-1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$에 수직인 직선의 기울기는 3이므로 구하는 직선의 방정식을 $y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$ (k는 상수)으로 놓을 수 있다.

점 $(-1, 3)$과 직선 $3x-y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\dfrac{|3\times(-1)-3+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k-6|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

즉, $|k-6|=10$에서 $k=-4$ 또는 $k=16$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $3x-y-4=0$ 또는 $3x-y+16=0$

이때 a, b가 모두 자연수이므로 $a=3$, $b=16$ $\therefore\ a+b=3+16=19$

082

점 $(0,\ a)$에서 두 직선 $x+3y+1=0$, $3x-y+2=0$에 이르는 거리가 같을 때, 양수 a의 값을 구하시오. $\frac{1}{4}$

점 $(0, a)$와 직선 $x+3y+1=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|0+3a+1|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{|3a+1|}{\sqrt{10}}$

점 $(0, a)$와 직선 $3x-y+2=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|0-a+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{|a-2|}{\sqrt{10}}$

$\dfrac{|3a+1|}{\sqrt{10}}=\dfrac{|a-2|}{\sqrt{10}}$에서 $3a+1=a-2$ 또는 $3a+1=-(a-2)$

$\therefore\ a=\frac{1}{4}$ ($\because\ a>0$)

083

두 직선 $x+2y+3=0$, $3x-2y+1=0$의 교점을 지나고 점 $(1,\ -2)$로부터의 거리가 $\sqrt{5}$인 직선의 방정식은?

① $2x-y-1=0$ ② $x-2y-1=0$
√③ $2x-y+1=0$ ④ $x-2y+1=0$
⑤ $2x+y+1=0$

두 직선 $x+2y+3=0$, $3x-2y+1=0$의 교점을 지나는 방정식은

$(x+2y+3)+k(3x-2y+1)=0$ (k는 실수)

$\therefore\ (1+3k)x+(2-2k)y+3+k=0$ ⋯⋯ ㉠

점 $(1, -2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\dfrac{|(1+3k)-2(2-2k)+3+k|}{\sqrt{(1+3k)^2+(2-2k)^2}}=\sqrt{5}$, $|8k|=\sqrt{5(13k^2-2k+5)}$

양변을 제곱하면

$64k^2=65k^2-10k+25$, $(k-5)^2=0$ $\therefore\ k=5$

이 값을 ㉠에 대입하면 $16x-8y+8=0$ $\therefore\ 2x-y+1=0$

유형 13 평행한 두 직선 사이의 거리

중요

평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 다음 순서로 구한다.
① 직선 l 위의 한 점 P를 정한다.
② 점 P와 직선 l' 사이의 거리를 구한다.

풍쌤 Point 직선 l 위의 한 점은 계산이 간편한 점으로 택한다. 특히, x축과의 교점, y축과의 교점과 같이 x좌표 또는 y좌표가 0인 점이 계산이 간편하다.

084

평행한 두 직선 $3x+2y+9=0$, $3x+2y-4=0$ 사이의 거리는?

① $\sqrt{10}$ ✓② $\sqrt{13}$ ③ 4
④ $\sqrt{19}$ ⑤ $\sqrt{22}$

직선 $3x+2y-4=0$ 위의 점 $(0, 2)$와 직선 $3x+2y+9=0$ 사이의 거리와 같으므로
$\dfrac{|3\times0+2\times2+9|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$

085

평행한 두 직선 $x-2y+k=0$, $x-2y-5=0$ 사이의 거리가 $3\sqrt{5}$일 때, 양수 k의 값을 구하시오. 10

직선 $x-2y-5=0$ 위의 점 $(5, 0)$과 직선 $x-2y+k=0$ 사이의 거리가 $3\sqrt{5}$이므로
$\dfrac{|5-2\times0+k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|k+5|}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$
즉, $|k+5|=15$에서 $k=10$ ($\because k>0$)

086

평행한 두 직선 $ax-3y-6=0$, $2x+(a+5)y+6=0$ 사이의 거리는? (단, a, b는 상수이다.)

✓① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

두 직선이 평행하므로 $\dfrac{a}{2}=\dfrac{-3}{a+5}\neq\dfrac{-6}{6}$ ······ ㉠
$\dfrac{a}{2}=\dfrac{-3}{a+5}$에서 $a(a+5)=-6$, $(a+3)(a+2)=0$
$\therefore a=-3$ ($\because$ ㉠)
$a=-3$을 두 직선의 방정식에 각각 대입하면 $x+y+2=0$, $x+y+3=0$
따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $x+y+2=0$ 위의 점 $(-2, 0)$과 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리와 같으므로
$\dfrac{|-2+0+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

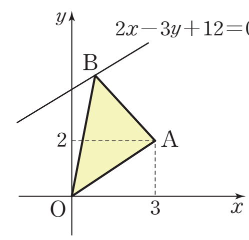
유형 14 삼각형의 넓이

세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는 다음 순서로 구한다.
① 선분 BC의 길이를 구한다. → 밑변의 길이
② 점 A와 직선 BC 사이의 거리 h를 구한다. → 높이
③ (삼각형 ABC의 넓이) $=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times h$

풍쌤 Point 필요한 것은 밑변의 길이와 높이이다. 두 점 사이의 거리 공식으로 밑변의 길이, 점과 직선 사이의 거리 공식으로 높이를 구할 수 있다.

087

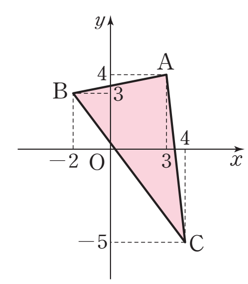
오른쪽 그림과 같이 두 점 O(0, 0), A(3, 2)와 직선 $2x-3y+12=0$ 위의 점 B를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오. 6



직선 OA와 직선 $2x-3y+12=0$은 평행하다.
삼각형 OAB의 밑변의 길이는 $\overline{OA}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$
높이는 $\dfrac{|12|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\dfrac{12\sqrt{13}}{13}$
따라서 삼각형 OAB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{13}\times\dfrac{12\sqrt{13}}{13}=6$

088

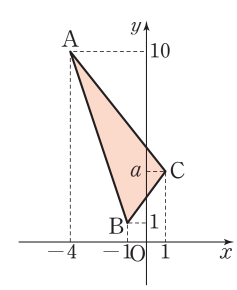
오른쪽 그림과 같이 세 점 A(3, 4), B(−2, 3), C(4, −5)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. 23



삼각형 ABC의 밑변의 길이는
$\overline{BC}=\sqrt{(4+2)^2+(-5-3)^2}=10$
직선 BC의 방정식은 $4x+3y-1=0$
높이는 $\dfrac{|4\times3+3\times4-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{23}{5}$
따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times10\times\dfrac{23}{5}=23$

089

오른쪽 그림과 같이 세 점 A(−4, 10), B(−1, 1), C(1, a)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이가 15일 때, a의 값을 구하시오. (단, $a>1$) 5



삼각형 ABC의 밑변의 길이는
$\overline{AB}=\sqrt{(-1+4)^2+(1-10)^2}=3\sqrt{10}$
직선 AB의 방정식은 $3x+y+2=0$
높이는 $\dfrac{|3\times1+a+2|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{a+5}{\sqrt{10}}$ ($\because a>1$)
삼각형 ABC의 넓이가 15이므로
$\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{10}\times\dfrac{a+5}{\sqrt{10}}=\dfrac{3(a+5)}{2}=15$ $\therefore a=5$

중단원 점검 문제

01

기울기가 -4이고 점 $(-2,\ 3)$을 지나는 직선의 x절편을 a, y절편을 b라 할 때, ab의 값을 구하시오. $\frac{25}{4}$

기울기가 -4이고 점 $(-2,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-3=-4\{x-(-2)\}$
$\therefore y=-4x-5$
이 직선의 x절편은 $-\frac{5}{4}$, y절편은 -5이므로 $a=-\frac{5}{4}$, $b=-5$
$\therefore ab=\left(-\frac{5}{4}\right)\times(-5)=\frac{25}{4}$

02

세 점 $A(1,\ 3)$, $B(-2,\ -2)$, $C(4,\ 5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 직선 CG의 방정식은?

① $y=-x-1$ ② $y=x-1$
③ $y=-x+1$ √④ $y=x+1$
⑤ $y=-x$

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는 $\left(\frac{1-2+4}{3},\ \frac{3-2+5}{3}\right)$, 즉 $(1,\ 2)$
따라서 직선 CG의 방정식은 $y-5=\frac{2-5}{1-4}(x-4)$
$\therefore y=x+1$

03 실전 Plus

네 점 $O(0,\ 0)$, $A(3,\ -2)$, $B(6,\ 2)$, $C(5,\ 5)$를 꼭짓점으로 하는 사각형 OABC의 두 대각선의 교점의 좌표를 $(p,\ q)$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. $\frac{100}{19}$

직선 OB의 방정식은 $y=\frac{2}{6}x$ $\therefore x-3y=0$ …… ㉠
직선 AC의 방정식은
$y-(-2)=\frac{5-(-2)}{5-3}(x-3)$ $\therefore 7x-2y-25=0$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{75}{19}$, $y=\frac{25}{19}$ $\therefore p=\frac{75}{19}$, $q=\frac{25}{19}$
$\therefore p+q=\frac{75}{19}+\frac{25}{19}=\frac{100}{19}$

04

점 $(4,\ 2)$를 지나는 직선의 y절편이 x절편의 2배일 때, 이 직선의 방정식은? (단, x절편은 0이 아니다.)

① $2x-y-10=0$ ② $x+2y-10=0$
√③ $2x+y-10=0$ ④ $x+2y+10=0$
⑤ $2x+y+10=0$

x절편을 $a\ (a\neq 0)$라 하면 y절편이 $2a$이므로 직선의 방정식은
$\frac{x}{a}+\frac{y}{2a}=1$
이 직선이 점 $(4,\ 2)$를 지나므로 $\frac{4}{a}+\frac{2}{2a}=1$ $\therefore a=5$
따라서 구하는 직선의 방정식은 $\frac{x}{5}+\frac{y}{10}=1$ $\therefore 2x+y-10=0$

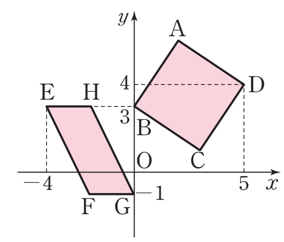
05 교육청 기출

좌표평면 위의 서로 다른 세 점 $A(-1,\ a)$, $B(1,\ 1)$, $C(a,\ -7)$이 한 직선 위에 있도록 하는 양수 a의 값은?

√① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

직선 AB의 기울기는 $\frac{1-a}{1-(-1)}=\frac{1-a}{2}$
직선 BC의 기울기는 $\frac{-7-1}{a-1}=-\frac{8}{a-1}$
두 직선 AB, BC의 기울기가 같으므로
$\frac{1-a}{2}=-\frac{8}{a-1}$, $(a-1)^2=16$ $\therefore a=5\ (\because a>0)$

06

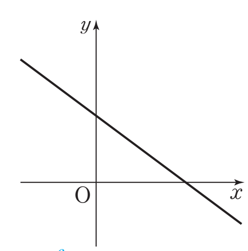


오른쪽 그림과 같이 네 점 A, $B(0,\ 3)$, C, $D(5,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD와 네 점 $E(-4,\ 3)$, F, $G(0,\ -1)$, H를 꼭짓점으로 하는 평행사변형 EFGH의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 기울기가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. 14

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{0+5}{2},\ \frac{3+4}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{7}{2}\right)$
평행사변형 EFGH의 두 대각선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{-4+0}{2},\ \frac{3-1}{2}\right)$, 즉 $(-2,\ 1)$
두 점 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{7}{2}\right)$, $(-2,\ 1)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{5}{9}$
따라서 $p=9$, $q=5$이므로 $p+q=9+5=14$

07



직선 $ax+by+c=0$이 오른쪽 그림과 같을 때, 직선 $cx+ay-b=0$이 지나지 않는 사분면을 구하시오. 제4사분면

(단, a, b, c는 상수이다.)

직선 $ax+by+c=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$에서 $-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$이므로
$ab>0$, $bc<0$, $ac<0$
직선 $cx+ay-b=0$, 즉 $y=-\frac{c}{a}x+\frac{b}{a}$에서 $-\frac{c}{a}>0$, $\frac{b}{a}>0$이므로 기울기와 y절편이 모두 양수인 직선이다.
따라서 직선 $cx+ay-b=0$은 제4사분면을 지나지 않는다.

08 학교 시험 기출

점 $(0,\ 3)$을 지나는 직선과 직선 $x+ky-3=0$이 x축에서 수직으로 만날 때, 상수 k의 값을 구하시오. -1

(단, $k\neq 0$)

직선 $x+ky-3=0$, 즉 $y=-\frac{1}{k}x+\frac{3}{k}$의 기울기가 $-\frac{1}{k}$이므로
이 직선에 수직인 직선의 기울기는 k이다.
기울기가 k이고 점 $(0,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=kx+3$
한편, 직선 $x+ky-3=0$의 x절편은 3이고, 두 직선 $x+ky-3=0$, $y=kx+3$이 x축에서 수직으로 만나므로 직선 $y=kx+3$의 x절편도 3이다.
따라서 $0=k\times 3+3$에서 $k=-1$

정답과 풀이 025쪽

09

점 $(3,\ -2)$를 지나는 직선 중 직선 $4x+y+1=0$과 만나지 않는 직선의 방정식이 $ax-y+b=0$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) 6

직선 $4x+y+1=0$, 즉 $y=-4x-1$과 만나지 않는 직선은 평행한 직선이므로 기울기가 -4이다.
점 $(3,\ -2)$를 지나고 기울기가 -4인 직선의 방정식은
$y-(-2)=-4(x-3)$, $y=-4x+10$ $\quad\therefore -4x-y+10=0$
따라서 $a=-4$, $b=10$이므로 $a+b=-4+10=6$

10

세 직선 $3x+y+3=0$, $x+2y-4=0$, $ax-2y-4=0$이 좌표평면을 여섯 부분으로 나눌 때, 모든 상수 a의 값의 합을 구하시오. -12

(i) 세 직선 중 두 직선이 평행할 때
두 직선 $3x+y+3=0$, $ax-2y-4=0$이 평행할 때, $a=-6$
두 직선 $x+2y-4=0$, $ax-2y-4=0$이 평행할 때, $a=-1$
(ii) 세 직선이 한 점에서 만날 때
$3x+y+3=0$, $x+2y-4=0$을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=3$
직선 $ax-2y-4=0$이 점 $(-2,\ 3)$을 지나야 하므로 $a=-5$
(i), (ii)에서 모든 상수 a의 값의 합은 $-6+(-5)+(-1)=-12$

11

직선 $4x-3y+12=0$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB의 수직이등분선이 점 $(-4,\ k)$를 지날 때, k의 값은?

① $\dfrac{29}{8}$ ② $\dfrac{15}{4}$ ③ $\dfrac{31}{8}$
④ 4 ⑤ $\dfrac{33}{8}$

선분 AB의 수직이등분선의 방정식을 $y=-\frac{3}{4}x+b$ (b는 상수)로 놓자.
선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(-\frac{3}{2},\ 2\right)$이고 직선 $y=-\frac{3}{4}x+b$가 이 점을 지나므로
$2=-\frac{3}{4}\times\left(-\frac{3}{2}\right)+b$ $\quad\therefore b=\frac{7}{8}$
따라서 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{8}$
이 직선이 점 $(-4,\ k)$를 지나므로 $k=-\frac{3}{4}\times(-4)+\frac{7}{8}=\frac{31}{8}$

12

직선 $(k-1)x+(2k+3)y-3k-2=0$에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 실수이다.)

보기
ㄱ. $k=2$일 때, 직선 $x+7y-8=0$과 일치한다.
ㄴ. $k=1$일 때, y축과 평행한 직선이다.
ㄷ. k의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄴ. $k=1$일 때, $5y=5$ $\quad\therefore y=1$
직선 $y=1$은 x축에 평행하고 y축에 수직인 직선이다.
ㄷ. $(-x+3y-2)+k(x+2y-3)=0$
$-x+3y-2=0$, $x+2y-3=0$ $\quad\therefore x=1$, $y=1$
즉, 주어진 직선은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

13 학교 시험 기출

두 직선 $x+y-7=0$, $3x-2y-1=0$의 교점과 점 $(-1,\ 2)$를 지나는 직선을 l이라 하자. 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 할 때, $100S$의 값은?

① 525 ② 550 ③ 575
④ 600 ⑤ 625

직선 l의 방정식을 $(x+y-7)+k(3x-2y-1)=0$ (k는 실수)
직선 l이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로 $-6-8k=0$ $\quad\therefore k=-\frac{3}{4}$
따라서 직선 l의 방정식은 $(x+y-7)-\frac{3}{4}(3x-2y-1)=0$ $\quad\therefore x-2y+5=0$
$\therefore S=\frac{1}{2}\times|-5|\times\frac{5}{2}=\frac{25}{4}$ $\quad\therefore 100S=625$

14

두 직선 $3x+y+1=0$, $mx+(m-2)y+16=0$이 평행할 때, 두 직선 사이의 거리는? (단, m은 상수이다.)

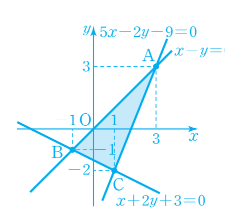
① $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ ② $\sqrt{10}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$
④ $2\sqrt{10}$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt{10}}{2}$

두 직선이 평행하므로 $\frac{3}{m}=\frac{1}{m-2}\neq\frac{1}{16}$
$\frac{3}{m}=\frac{1}{m-2}$에서 $3(m-2)=m$ $\quad\therefore m=3$
따라서 두 직선 $3x+y+1=0$, $3x+y+16=0$ 사이의 거리는 직선 $3x+y+1=0$ 위의 점 $(0,\ -1)$과 직선 $3x+y+16=0$ 사이의 거리와 같으므로
$\frac{|3\times0-1+16|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{15}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$

15 실전 Plus

세 직선 $x-y=0$, $x+2y+3=0$, $5x-2y-9=0$으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하시오. 6

두 직선 $x-y=0$, $5x-2y-9=0$의 교점을 A, 두 직선 $x-y=0$, $x+2y+3=0$의 교점을 B, 두 직선 $x+2y+3=0$, $5x-2y-9=0$의 교점을 C라 하자.
두 직선의 방정식을 각각 연립하여 풀면
A$(3,\ 3)$, B$(-1,\ -1)$, C$(1,\ -2)$
삼각형 ABC의 밑변의 길이는
$\overline{\text{AB}}=\sqrt{(-1-3)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}$
높이는 $\frac{|1-(-2)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$
따라서 구하는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times\frac{3}{\sqrt{2}}=6$



01 원의 방정식의 표준형

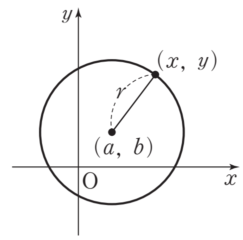
❶ 원의 방정식의 표준형

① 중심이 점 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$ ← 원의 방정식의 표준형

② 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$x^2+y^2=r^2$$



• 원

한 평면 위의 한 점으로부터 일정한 거리에 있는 모든 점으로 이루어진 도형을 원이라 한다. 이때 한 점이 원의 중심, 일정한 거리가 원의 반지름의 길이이다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 027쪽

001

다음 방정식이 나타내는 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하시오.

(1) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 중심의 좌표: $(1,\ 1)$, 반지름의 길이: 1

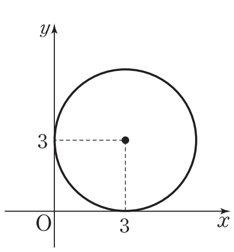
(2) $(x+1)^2+(y+2)^2=10$ 중심의 좌표: $(-1,\ -2)$, 반지름의 길이: $\sqrt{10}$

(3) $(x-1)^2+y^2=16$ 중심의 좌표: $(1,\ 0)$, 반지름의 길이: 4

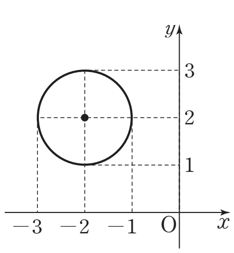
002

다음 그림과 같은 원의 방정식을 구하시오.

(1) $(x-3)^2+(y-3)^2=9$



(2) $(x+2)^2+(y+2)^2=1$



003

다음 원의 방정식을 구하시오.

(1) 중심이 점 $(3,\ 2)$이고 반지름의 길이가 4인 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=16$

(2) 중심이 점 $(-1,\ 6)$이고 반지름의 길이가 3인 원 $(x+1)^2+(y-6)^2=9$

(3) 중심이 점 $(0,\ -4)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원 $x^2+(y+4)^2=8$

004

다음 원의 방정식을 구하시오.

(1) 중심이 점 $(-1,\ 1)$이고 점 $(0,\ 1)$을 지나는 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$

단계1. 원의 중심의 좌표를 이용하여 원의 방정식 세우기

원의 반지름의 길이를 r라 하면
$(x+1)^2+(y-1)^2=r^2$

단계2. 원이 지나는 점을 이용하여 원의 방정식 구하기

이 원이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $(0+1)^2+(1-1)^2=r^2$ $\therefore r^2=1$
$\therefore (x+1)^2+(y-1)^2=1$

(2) 중심이 점 $(3,\ 0)$이고 점 $(2,\ -3)$을 지나는 원 $(x-3)^2+y^2=10$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 $(x-3)^2+y^2=r^2$
이 원이 점 $(2,\ -3)$을 지나므로 $(2-3)^2+(-3)^2=r^2$ $\therefore r^2=10$
$\therefore (x-3)^2+y^2=10$

(3) 중심이 점 $(-4,\ -2)$이고 점 $(-1,\ -4)$를 지나는 원 $(x+4)^2+(y+2)^2=13$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 $(x+4)^2+(y+2)^2=r^2$
이 원이 점 $(-1,\ -4)$를 지나므로 $(-1+4)^2+(-4+2)^2=r^2$ $\therefore r^2=13$
$\therefore (x+4)^2+(y+2)^2=13$

02 원의 방정식의 일반형

❶ 원의 방정식의 일반형

x, y에 대한 이차방정식 $\underbrace{x^2+y^2+Ax+By+C=0}_{\text{원의 방정식의 일반형}}$은

중심이 점 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$

인 원을 나타낸다. (단, $A^2+B^2-4C>0$)

참고 x, y에 대한 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$을 변형하면

$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$이므로 다음과 같다.

① $A^2+B^2-4C>0$일 때, 원의 방정식이다.

② $A^2+B^2-4C=0$일 때, 점 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$이다.

③ $A^2+B^2-4C<0$일 때, 이차방정식을 만족시키는 실수 x, y가 존재하지 않는다.

• 원의 방정식은 x^2, y^2의 계수가 서로 같고 xy항이 없는 x, y에 대한 이차방정식이다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 027쪽

005

다음 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 나타내시오.

(1) $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ $(x+1)^2+(y+1)^2=1^2$

(2) $x^2+y^2-4y-5=0$ $x^2+(y-2)^2=3^2$

006

다음 방정식이 나타내는 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하시오.

(1) $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 중심의 좌표: $(-1, 1)$, 반지름의 길이: 2

주어진 식을 변형하면 $(x+1)^2+(y-1)^2=2^2$

(2) $x^2+y^2-4x+4y+7=0$ 중심의 좌표: $(2, -2)$, 반지름의 길이: 1

주어진 식을 변형하면 $(x-2)^2+(y+2)^2=1^2$

(3) $x^2+y^2+6x+8y=0$ 중심의 좌표: $(-3, -4)$, 반지름의 길이: 5

주어진 식을 변형하면 $(x+3)^2+(y+4)^2=5^2$

(4) $x^2+y^2+16x+60=0$ 중심의 좌표: $(-8, 0)$, 반지름의 길이: 2

주어진 식을 변형하면 $(x+8)^2+y^2=2^2$

007

다음 방정식이 원을 나타내면 ○를, 원을 나타내지 않으면 ×를 ( ) 안에 써넣으시오.

(1) $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ (○)

주어진 식을 변형하면 $(x-2)^2+(y+3)^2=25$
따라서 (우변)$=25>0$이므로 주어진 방정식은 원을 나타낸다.

(2) $x^2+y^2+8x-4y+36=0$ (×)

주어진 식을 변형하면 $(x+4)^2+(y-2)^2=-16$
따라서 (우변)$=-16<0$이므로 주어진 방정식을 만족시키는 도형은 존재하지 않는다.

(3) $x^2+y^2+10x-8y+40=0$ (○)

주어진 식을 변형하면 $(x+5)^2+(y-4)^2=1$
따라서 (우변)$=1>0$이므로 주어진 방정식은 원을 나타낸다.

008

다음은 방정식 $x^2+y^2+2x+k=0$이 나타내는 도형이 원이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

> $x^2+y^2+2x+k=0$에서 $(x+\boxed{1})^2+y^2=\boxed{1-k}$
> 이 방정식이 나타내는 도형이 원이 되려면
> $\boxed{1-k}>0$ $\therefore k<\boxed{1}$

03 좌표축에 접하는 원의 방정식

1 x축 또는 y축에 접하는 원의 방정식

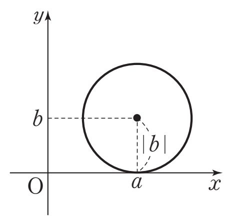
중심이 점 $(a,\ b)$이고

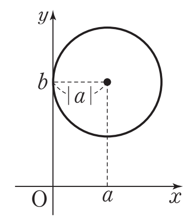
① x축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$$

② y축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$$





2 x축, y축에 동시에 접하는 원의 방정식

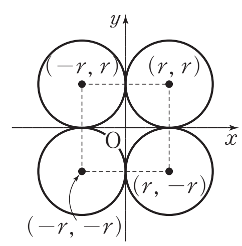
반지름의 길이가 $r\ (r>0)$이고 x축, y축에 동시에 접하는 원의 방정식은

제1사분면: $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

제2사분면: $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

제3사분면: $(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$

제4사분면: $(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$



- x축에 접할 때
(반지름의 길이) $=|$(중심의 y좌표)$|$
$=|b|$

- y축에 접할 때
(반지름의 길이) $=|$(중심의 x좌표)$|$
$=|a|$

- x축, y축에 동시에 접할 때
(반지름의 길이) $=|$(중심의 y좌표)$|$
$=|$(중심의 x좌표)$|$

개념 기본 문제

정답과 풀이 028쪽

009

다음 점을 중심으로 하고 x축에 접하는 원의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(3,\ 1)$ $(x-3)^2+(y-1)^2=1$

(2) 점 $(4,\ -2)$ $(x-4)^2+(y+2)^2=4$

(3) 점 $(-2,\ 3)$ $(x+2)^2+(y-3)^2=9$

(4) 점 $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

010

다음 점을 중심으로 하고 y축에 접하는 원의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

(2) 점 $(5,\ -4)$ $(x-5)^2+(y+4)^2=25$

(3) 점 $(-3,\ 4)$ $(x+3)^2+(y-4)^2=9$

(4) 점 $(-1,\ -3)$ $(x+1)^2+(y+3)^2=1$

011

다음 점을 중심으로 하고 x축, y축에 동시에 접하는 원의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(-2,\ 2)$ $(x+2)^2+(y-2)^2=4$

(2) 점 $(4,\ -4)$ $(x-4)^2+(y+4)^2=16$

012

원의 중심이 다음 사분면에 있고, x축, y축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 4인 원의 방정식을 구하시오.

(1) 제1사분면 $(x-4)^2+(y-4)^2=16$

(2) 제2사분면 $(x+4)^2+(y-4)^2=16$

(3) 제3사분면 $(x+4)^2+(y+4)^2=16$

(4) 제4사분면 $(x-4)^2+(y+4)^2=16$

04 점이 나타내는 도형의 방정식

1 점이 나타내는 도형의 방정식

점이 어떤 조건을 만족시키면서 움직일 때, 그 점이 나타내는 도형의 방정식은 다음 순서로 구한다.

① 조건을 만족시키는 점의 좌표를 (x, y)로 놓는다.

② 주어진 조건을 이용하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.

• 특정 조건을 만족시키는 점들이 그리는 도형을 점의 자취라 하며, 이를 방정식으로 표현한 것을 자취의 방정식이라 한다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 028쪽

013

두 점 $A(1, 1)$, $B(4, 4)$로부터의 거리의 비가 $1:2$인 점 $P(x, y)$가 나타내는 도형의 방정식을 구하려고 한다. 다음 물음에 답하시오.

(1) $\overline{PA}^2$을 x, y에 대한 식으로 나타내시오. $x^2+y^2-2x-2y+2$

$\overline{PA}^2=(x-1)^2+(y-1)^2=x^2+y^2-2x-2y+2$

(2) $\overline{PB}^2$을 x, y에 대한 식으로 나타내시오. $x^2+y^2-8x-8y+32$

$\overline{PB}^2=(x-4)^2+(y-4)^2=x^2+y^2-8x-8y+32$

(3) $\overline{PB}=k\times\overline{PA}$를 만족시키는 실수 k의 값을 구하시오. 2

$\overline{PA}:\overline{PB}=1:2$에서 $\overline{PB}=2\overline{PA}$이므로 $k=2$

(4) x, y 사이의 관계식을 구하시오. $x^2+y^2=8$

$\overline{PB}^2=4\overline{PA}^2$이므로 $x^2+y^2-8x-8y+32=4(x^2+y^2-2x-2y+2)$

$\therefore x^2+y^2=8$

014

다음은 두 점 $A(1, 3)$, $B(3, 5)$에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=12$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

> 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면
> $\overline{PA}^2=x^2+y^2-2x-6y+10$ ······ ㉠
> $\overline{PB}^2=x^2+y^2-6x-10y+34$ ······ ㉡
> ㉠, ㉡을 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=12$에 대입하면
> $2x^2+2y^2-8x-16y+44=12$
> $\therefore (x-\boxed{2})^2+(y-\boxed{4})^2=\boxed{2}^2$

015

다음 두 점에 대하여 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$인 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하시오.

(1) $A(3, 0)$, $B(6, 0)$ $(x-7)^2+y^2=4$

$\overline{AP}=2\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$이므로
점 P의 좌표를 (x, y)라 하면
$(x-3)^2+y^2=4\{(x-6)^2+y^2\}$, $x^2-14x+y^2+45=0$
$\therefore (x-7)^2+y^2=4$

(2) $A(0, 1)$, $B(0, 4)$ $x^2+(y-5)^2=4$

$\overline{AP}=2\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$이므로
점 P의 좌표를 (x, y)라 하면
$x^2+(y-1)^2=4\{x^2+(y-4)^2\}$, $x^2+y^2-10y+21=0$
$\therefore x^2+(y-5)^2=4$

016

다음은 점 $A(0, 4)$와 원 $x^2+y^2=8$ 위의 임의의 점 P를 이은 선분 AP의 중점이 나타내는 도형의 방정식을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

> 원 위의 점 P의 좌표를 (a, b), 선분 AP의 중점의 좌표를 (x, y)라 하면 $x=\dfrac{0+a}{2}$, $y=\dfrac{4+b}{2}$이다.
> 즉, $a=2x$, $b=2y-4$ ······ ㉠
> 점 P가 원 $x^2+y^2=8$ 위의 점이므로
> $a^2+b^2=8$ ······ ㉡
> ㉠을 ㉡에 대입하면
> $(2x)^2+(2y-4)^2=8$
> $\therefore x^2+(y-\boxed{2})^2=\boxed{2}$

유형 실전 문제

정답과 풀이 029쪽

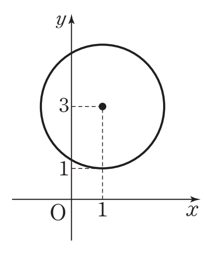
유형 01 중심과 지나는 한 점이 주어진 원의 방정식 중요

① 중심이 점 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
② 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은
$$x^2+y^2=r^2$$

풍쌤 Point 중심의 좌표를 이용하여 원의 방정식을 세우고, 지나는 한 점의 좌표를 대입하여 반지름의 길이를 구한다.

017

오른쪽 그림과 같은 원의 방정식은?



① $(x-1)^2+(y-3)^2=1$
② $(x-1)^2+(y-3)^2=4$
③ $(x-3)^2+(y-1)^2=1$
④ $(x-3)^2+(y-1)^2=4$
⑤ $(x-3)^2+(y-1)^2=9$

원의 반지름의 길이를 r라 하면
$(x-1)^2+(y-3)^2=r^2$
이 원이 점 $(1,\ 1)$를 지나므로
$(1-1)^2+(1-3)^2=r^2$ $\quad\therefore r^2=4$
$\therefore (x-1)^2+(y-3)^2=4$

018

원 $x^2+(y-3)^2=4$와 중심이 같고 점 $(2,\ 0)$을 지나는 원이 점 $(a,\ 1)$을 지날 때, 양수 a의 값을 구하시오. 3

중심이 점 $(0,\ 3)$인 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$x^2+(y-3)^2=r^2$
이 원이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로
$2^2+(0-3)^2=r^2$ $\quad\therefore r^2=13$
즉, 원 $x^2+(y-3)^2=13$이 점 $(a,\ 1)$을 지나므로
$a^2+(1-3)^2=13,\ a^2=9$
$\therefore a=3\ (\because a>0)$

019

두 직선 $2x+y=0$, $x+y-2=0$의 교점을 중심으로 하고 점 $(0,\ 2)$를 지나는 원의 넓이는?

① 2π ② 4π ③ 6π
④ 8π ⑤ 10π

$2x+y=0$, $x+y-2=0$을 연립하여 풀면
$x=-2,\ y=4$
따라서 점 $(-2,\ 4)$를 중심으로 하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면
$(x+2)^2+(y-4)^2=r^2$
이 원이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로
$(0+2)^2+(2-4)^2=r^2$ $\quad\therefore r^2=8$
따라서 구하는 원의 넓이는
$\pi r^2=8\pi$

유형 02 중심이 직선 위에 있는 원의 방정식

중심이 직선 $y=mx+n$ 위에 있고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은
$$(x-a)^2+\{y-(am+n)\}^2=r^2$$

풍쌤 Point 중심의 위치에 따라 좌표를 다음과 같이 정한다.
① 중심이 x축 위의 점이면 $(a,\ 0)$
② 중심이 y축 위의 점이면 $(0,\ b)$
③ 중심이 직선 $y=f(x)$ 위의 점이면 $(a,\ f(a))$

020

원 $x^2+y^2=9$와 반지름의 길이가 같고 중심이 x축 위에 있는 원이 점 $(2,\ 3)$을 지날 때, 이 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+y^2=9$ ② $(x+1)^2+y^2=9$
③ $(x-2)^2+y^2=9$ ④ $(x+2)^2+y^2=9$
⑤ $(x-3)^2+y^2=9$

원의 중심의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면
$(x-a)^2+y^2=9$
이 원이 점 $(2,\ 3)$을 지나므로
$(2-a)^2+3^2=9$ $\quad\therefore a=2$
$\therefore (x-2)^2+y^2=9$

021

중심이 직선 $y=-x$ 위에 있고 두 점 $(0,\ 1)$, $(7,\ 0)$을 지나는 원의 중심의 좌표가 $(a,\ b)$, 반지름의 길이가 r일 때, $a-b+r$의 값을 구하시오. 11

원의 중심 $(a,\ b)$가 직선 $y=-x$ 위에 있으므로 $b=-a$
중심이 점 $(a,\ -a)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y+a)^2=r^2$
이 원이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $2a^2+2a+1=r^2$ …… ㉠
또, 이 원이 점 $(7,\ 0)$을 지나므로 $2a^2-14a+49=r^2$ …… ㉡
㉠$-$㉡을 하면 $a=3$
$a=3$을 ㉠에 대입하면 $r^2=25$ $\quad\therefore r=5\ (\because r>0)$
또, $b=-a=-3$
$\therefore a-b+r=3-(-3)+5=11$

022

중심이 직선 $2x-y+3=0$ 위에 있고 두 점 $(1,\ 4)$, $(2,\ -1)$을 지나는 원의 둘레의 길이는?

① 6π ② $2\sqrt{10}\pi$ ③ $2\sqrt{11}\pi$
④ $4\sqrt{3}\pi$ ⑤ $2\sqrt{13}\pi$

원의 중심의 좌표를 $(a,\ 2a+3)$, 반지름의 길이를 r라 하면
$(x-a)^2+(y-2a-3)^2=r^2$
이 원이 점 $(1,\ 4)$를 지나므로 $5a^2-6a+2=r^2$ …… ㉠
또, 이 원이 점 $(2,\ -1)$을 지나므로 $5a^2+12a+20=r^2$ …… ㉡
㉡$-$㉠을 하면 $a=-1$
$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $r^2=13$ $\quad\therefore r=\sqrt{13}\ (\because r>0)$
따라서 구하는 원의 둘레의 길이는
$2\pi r=2\pi\times\sqrt{13}=2\sqrt{13}\pi$

유형 실전 문제

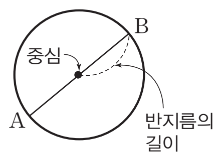
유형 03 지름의 양 끝 점이 주어진 원의 방정식

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원에 대하여

① 원의 중심 ➡ $\overline{AB}$의 중점

② 원의 반지름의 길이 ➡ $\frac{1}{2}\overline{AB}$

풍쌤 Point 그림을 그려 생각하면 간단한 문제이다. 중점의 좌표와 선분의 길이만 구하면 끝.



023

두 점 $A(3, 4)$, $B(5, 0)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-2)^2+(y-4)^2=5$
② $(x-4)^2+(y-2)^2=5$
③ $(x-2)^2+(y-4)^2=25$
④ $(x-4)^2+(y-2)^2=25$
⑤ $(x-2)^2+(y-4)^2=100$

원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{3+5}{2}, \frac{4+0}{2}\right)$, 즉 $(4, 2)$

원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\times\sqrt{(5-3)^2+(0-4)^2}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}=\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-4)^2+(y-2)^2=5$

024

다음 중 두 점 $A(-3, 3)$, $B(1, 9)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원 위의 점은?

① $(-1, 2)$ ② $(0, 5)$ ③ $(2, 4)$
④ $(3, 4)$ ⑤ $(4, -1)$

원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{3+9}{2}\right)$, 즉 $(-1, 6)$

원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\times\sqrt{(1+3)^2+(9-3)^2}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{13}=\sqrt{13}$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-6)^2=13$이므로 점 $(2, 4)$는 원 위의 점이다.

025

두 점 $A(a, b)$, $B(7, 5)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식이 $(x-4)^2+(y-1)^2=c$일 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. 23

원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{a+7}{2}, \frac{b+5}{2}\right)$

따라서 $\frac{a+7}{2}=4$, $\frac{b+5}{2}=1$이므로 $a=1$, $b=-3$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{(4-7)^2+(1-5)^2}=\sqrt{25}=5$ $\therefore c=5^2=25$

$\therefore a+b+c=1+(-3)+25=23$

유형 04 세 점을 지나는 원의 방정식

원의 중심에서 원 위의 점까지의 거리가 모두 반지름의 길이로 같음을 이용하여 원의 방정식을 구한다.

➡ 세 점 A, B, C가 한 원 위에 있을 때, 이 원의 중심을 P라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

풍쌤 Point 원의 중심을 $P(a, b)$라 하고 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$를 이용하여 a, b에 대한 연립방정식을 세운다.

026

세 점 $A(4, 3)$, $B(2, 1)$, $C(2, 7)$을 지나는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+(y-4)^2=10$
② $(x-1)^2+(y+4)^2=10$
③ $(x-1)^2+(y-4)^2=20$
④ $(x-1)^2+(y+4)^2=20$
⑤ $(x-1)^2+(y-4)^2=50$

원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서

$(a-4)^2+(b-3)^2=(a-2)^2+(b-1)^2$ $\therefore a+b=5$ …… ㉠

$\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$에서

$(a-4)^2+(b-3)^2=(a-2)^2+(b-7)^2$ $\therefore a-2b=-7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=4$

반지름의 길이는 $\overline{PA}=\sqrt{(4-1)^2+(3-4)^2}=\sqrt{10}$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y-4)^2=10$

027

세 점 $A(2, 7)$, $B(0, 3)$, $C(-2, 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는?

① 10π ② 12π ③ 15π
④ 16π ⑤ 18π

외접원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서

$(a-2)^2+(b-7)^2=a^2+(b-3)^2$ $\therefore a+2b=11$ …… ㉠

$\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$에서

$(a-2)^2+(b-7)^2=(a+2)^2+(b-3)^2$ $\therefore a+b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=6$

반지름의 길이는 $\overline{PA}=\sqrt{(2+1)^2+(7-6)^2}=\sqrt{10}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\pi r^2=\pi\times(\sqrt{10})^2=10\pi$

028

네 점 $A(-3, 3)$, $B(-2, -4)$, $C(4, 4)$, $D(k, 3)$이 한 원 위에 있을 때, 양수 k의 값을 구하시오. 5

원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서 $(a+3)^2+(b-3)^2=(a+2)^2+(b+4)^2$ $\therefore a-7b=1$ …… ㉠

$\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$에서 $(a+3)^2+(b-3)^2=(a-4)^2+(b-4)^2$ $\therefore 7a+b=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=0$

반지름의 길이는 $\overline{PA}=\sqrt{(-3-1)^2+(3-0)^2}=5$

따라서 원의 방정식은 $(x-1)^2+y^2=25$

이때 점 D가 이 원 위의 점이므로

$(k-1)^2+3^2=25$, $(k+3)(k-5)=0$ $\therefore k=5$ ($\because k>0$)

유형 05 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 나타내는 도형 중요

원의 방정식의 일반형
$x^2+y^2+Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2-4C>0)$
을 변형하면

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$$

① 중심의 좌표: $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

② 반지름의 길이: $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$

풍쌤 Point 원의 방정식의 일반형이 주어지면 일단 완전제곱 꼴로 변형해 본다.
$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

029

원 $x^2+y^2-4x+6y+9=0$의 중심의 좌표가 (a, b)이고 반지름의 길이가 r일 때, $a-b+r$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ✓⑤ 7

$x^2+y^2-4x+6y+9=0$에서 $(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)-4=0$
$\therefore (x-2)^2+(y+3)^2=4$
따라서 $a=2$, $b=-3$, $r=2$이므로 $a-b+r=2-(-3)+2=7$

030

두 원 $x^2+y^2+6y-16=0$, $x^2+y^2-2x-3=0$의 넓이의 합은?

① 18π ② 20π ③ 25π
✓④ 29π ⑤ 32π

$x^2+y^2+6y-16=0$에서 $x^2+(y+3)^2=25$
$x^2+y^2-2x-3=0$에서 $(x-1)^2+y^2=4$
따라서 구하는 두 원의 넓이의 합은
$25\pi+4\pi=29\pi$

031

원 $x^2+y^2+2x+8y-32=0$과 중심이 같고 점 $(2, -2)$를 지나는 원의 반지름의 길이는?

① $2\sqrt{3}$ ✓② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{14}$
④ $\sqrt{15}$ ⑤ 4

$x^2+y^2+2x+8y-32=0$에서 $(x+1)^2+(y+4)^2=49$
이 원과 중심이 같은 원의 반지름의 길이를 r $(r>0)$라 하면 원의 방정식은
$(x+1)^2+(y+4)^2=r^2$
이 원이 점 $(2, -2)$를 지나므로
$r^2=(2+1)^2+(-2+4)^2=13$ $\quad\therefore r=\sqrt{13}$ $(\because r>0)$

032

원 $x^2+y^2-6x+2y-a^2+5a+20=0$의 반지름의 길이가 2일 때, 양수 a의 값은?

① 5 ② 6 ✓③ 7
④ 8 ⑤ 9

$x^2+y^2-6x+2y-a^2+5a+20=0$에서 $(x-3)^2+(y+1)^2=a^2-5a-10$
이 원의 반지름의 길이가 2이므로
$\sqrt{a^2-5a-10}=2$, $a^2-5a-10=4$
$(a+2)(a-7)=0$ $\quad\therefore a=7$ $(\because a>0)$

033

원 $x^2+y^2-2x-2ay+a^2-9=0$에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. 원의 넓이는 9π이다.
ㄴ. $a=1$일 때, 점 $(2, 4)$를 지난다.
ㄷ. 원의 중심이 x축 위에 있는 경우가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ✓⑤ ㄴ, ㄷ

$x^2+y^2-2x-2ay+a^2-9=0$에서 $(x-1)^2+(y-a)^2=10$
ㄱ. 원의 넓이는 10π이다.

034

다음 중 원의 방정식이 아닌 것은?

① $x^2+y^2-2x-5=0$
② $x^2+y^2+2x+2y=0$
③ $x^2+y^2-2x+6y+1=0$
✓④ $x^2+y^2+4x-4y+8=0$
⑤ $x^2+y^2-4x+8y+19=0$

④ $x^2+y^2+4x-4y+8=0$에서 $(x+2)^2+(y-2)^2=0$
즉, 점 $(-2, 2)$를 나타내는 방정식이다.

035

방정식 $x^2+y^2-8x+2ky+2k^2+2k+1=0$이 원을 나타내도록 하는 정수 k의 개수는?

① 5 ✓② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

$x^2+y^2-8x+2ky+2k^2+2k+1=0$에서
$(x-4)^2+(y+k)^2=-k^2-2k+15$
이 방정식이 원을 나타내려면
$-k^2-2k+15>0$, $(k+5)(k-3)<0$ $\quad\therefore -5<k<3$
따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 $-4, -3, -2, \cdots, 2$의 7개이다.

유형 실전 문제

유형 06 좌표축에 접하는 원의 방정식

중요

① 중심이 점 (a, b)이고 x축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$$

② 중심이 점 (a, b)이고 y축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$$

③ 반지름의 길이가 r $(r>0)$이고 x축, y축에 동시에 접하는 원의 방정식은

$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

또는 $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

또는 $(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$

또는 $(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

풍쌤 Point 원이 좌표축에 접하는 상황을 그림으로 그려서 반지름의 길이를 유추하여 원의 방정식을 세운다.

036

중심이 점 $(3, 4)$이고 x축에 접하는 원을 C, y축에 접하는 원을 C'이라 할 때, 두 원 C, C'의 반지름의 길이의 합은?

① 6 √② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

중심이 점 $(3, 4)$이고 x축에 접하는 원 C의 반지름의 길이는 4이다.
중심이 점 $(3, 4)$이고 y축에 접하는 원 C'의 반지름의 길이는 3이다.
따라서 두 원 C, C'의 반지름의 길이의 합은
$4+3=7$

037

원 $x^2+y^2-6x+4y-k^2+2k+12=0$이 x축에 접할 때, 양수 k의 값을 구하시오. 3

$x^2+y^2-6x+4y-k^2+2k+12=0$에서
$(x-3)^2+(y+2)^2=k^2-2k+1$
이 원이 x축에 접하므로
$|-2|=\sqrt{k^2-2k+1}$, $4=k^2-2k+1$, $(k+1)(k-3)=0$
$\therefore k=3$ $(\because k>0)$

038

중심이 점 $(a, -2)$이고 y축에 접하는 원이 점 $(3, 1)$을 지날 때, a의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
√④ 3 ⑤ 5

원의 방정식은 $(x-a)^2+(y+2)^2=a^2$
이 원이 점 $(3, 1)$을 지나므로 $(3-a)^2+(1+2)^2=a^2$
$-6a+18=0$ $\therefore a=3$

039

점 $(2, 0)$에서 x축에 접하는 원이 있다. 이 원의 넓이가 9π이고 원의 중심이 제4사분면에 있을 때, 원의 방정식은?

① $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ ② $(x+2)^2+(y-3)^2=4$
√③ $(x-2)^2+(y+3)^2=9$ ④ $(x+2)^2+(y-3)^2=9$
⑤ $(x-2)^2+(y-3)^2=9$

중심의 좌표를 $(2, a)$라 하자.
원의 반지름의 길이를 r $(r>0)$라 하면 $\pi r^2=9\pi$ $\therefore r=3$
이때 이 원이 x축에 접하므로 $|a|=r=3$ $\therefore a=-3$ $(\because a<0)$
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y+3)^2=9$

040

중심이 제1사분면에 있고 점 $(1, 2)$를 지나면서 x축, y축에 동시에 접하는 원은 2개 존재한다. 이 두 원의 중심 사이의 거리를 구하시오. $4\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이를 r $(r>0)$라 하면 원의 방정식은 $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$
이 원이 점 $(1, 2)$를 지나므로
$(1-r)^2+(2-r)^2=r^2$, $(r-1)(r-5)=0$ $\therefore r=1$ 또는 $r=5$
따라서 조건을 만족시키는 두 원의 중심은 각각 점 $(1, 1)$, 점 $(5, 5)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(5-1)^2+(5-1)^2}=4\sqrt{2}$

041

원 $x^2+y^2+8x+2ay+1+b=0$이 x축, y축에 동시에 접할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $a>0$)

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 √⑤ 19

$x^2+y^2+8x+2ay+1+b=0$에서 $(x+4)^2+(y+a)^2=a^2-b+15$
이 원이 x축, y축에 동시에 접하므로 $|-4|=|a|$에서 $a=4$ $(\because a>0)$
$|-4|=\sqrt{a^2-b+15}$에서 $4=\sqrt{31-b}$
$16=31-b$ $\therefore b=15$
$\therefore a+b=4+15=19$

042

중심이 직선 $y=2x+1$ 위에 있고 x축, y축에 동시에 접하는 두 원 중 큰 원의 넓이는?

√① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π
④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

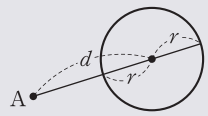
원의 중심의 좌표를 $(a, 2a+1)$이라 하자.
이 원이 x축, y축에 동시에 접하므로 $|a|=|2a+1|$에서
$a^2=(2a+1)^2$, $(a+1)(3a+1)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=-\frac{1}{3}$
즉, 조건을 만족시키는 두 원의 반지름의 길이는 각각 $|-1|=1$, $\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$이므로
구하는 큰 원의 넓이는 $\pi r^2=\pi\times1^2=\pi$

유형 07 원 밖의 점과 원 위의 점 사이의 거리

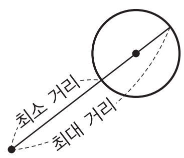
반지름의 길이가 r인 원 밖의 한 점 A와 원의 중심 사이의 거리를 d라 할 때, 점 A와 원 위의 점 사이의 거리의

① 최댓값은 $d+r$

② 최솟값은 $d-r$



풍쌤 Point 원 위의 점의 좌표가 정해져 있지 않으므로 원의 중심을 이용해야 한다. 일단 원 밖의 점과 원의 중심 사이의 거리를 구한 후에 그림을 그려 판단해 보자.



043

원점 O와 원 $(x-3)^2+(y+4)^2=9$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP의 길이의 최댓값을 구하시오. 8

원점 O와 원의 중심 $(3,\ -4)$ 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

원의 반지름의 길이가 3이므로 선분 OP의 길이의 최댓값은

$5+3=8$

044

점 $A(-2,\ -4)$와 원 $x^2+y^2-12x-4y+31=0$ 위의 점 P에 대하여 선분 AP의 길이의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① 75　② 84　③ 91　④ 96　⑤ 104

점 $A(-2,\ -4)$와 원의 중심 $(6,\ 2)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(6+2)^2+(2+4)^2}=10$

원의 반지름의 길이가 3이므로 $M=10+3=13$, $m=10-3=7$

$\therefore Mm=13\times 7=91$

045

점 $A(12,\ -5)$와 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 P 사이의 거리가 정수가 되도록 하는 점 P의 개수는?

① 20　② 22　③ 24　④ 26　⑤ 28

점 $A(12,\ -5)$와 원의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{12^2+(-5)^2}=13$

이므로 점 A와 원 위의 점 P 사이의 거리의

최댓값은 $13+5=18$, 최솟값은 $13-5=8$

이때 선분 AP의 길이가 8, 18인 경우의 점 P는 각각 1개이고, 선분 AP의 길이가 9, 10, 11, $\cdots$, 17인 경우의 점 P는 각각 2개이므로 구하는 점 P의 개수는

$1+2\times 9+1=20$

유형 08 점이 나타내는 도형의 방정식 중요

점이 나타내는 도형의 방정식은 다음 순서로 구한다.

① 조건을 만족시키는 점의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓는다.

② 주어진 조건을 이용하여 $x,\ y$ 사이의 관계식을 구한다.

풍쌤 Point 길이의 비가 조건으로 주어지는 경우에는 비례식을 이용하여 $x,\ y$ 사이의 관계식을 구한다.

046

두 점 $A(-1,\ 3)$, $B(1,\ 7)$에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=20$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 방정식은?

① $x^2+(y-5)^2=5$　② $x^2+(y-5)^2=20$

③ $(x-5)^2+y^2=5$　④ $(x-5)^2+y^2=20$

⑤ $(x-5)^2+(y-5)^2=5$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overline{PA}^2=(x+1)^2+(y-3)^2=x^2+y^2+2x-6y+10$

$\overline{PB}^2=(x-1)^2+(y-7)^2=x^2+y^2-2x-14y+50$

이를 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=20$에 대입하면

$2x^2+2y^2-20y+60=20$

$\therefore x^2+(y-5)^2=5$

047

두 점 $A(2,\ 1)$, $B(-3,\ 1)$에 대하여 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 넓이는?

① 4π　② 9π　③ 16π　④ 25π　⑤ 36π

$\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$에서 $9\overline{PA}^2=4\overline{PB}^2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overline{PA}^2=(x-2)^2+(y-1)^2=x^2+y^2-4x-2y+5$,

$\overline{PB}^2=(x+3)^2+(y-1)^2=x^2+y^2+6x-2y+10$

이므로 $9(x^2+y^2-4x-2y+5)=4(x^2+y^2+6x-2y+10)$

$5x^2+5y^2-60x-10y+5=0$　$\therefore (x-6)^2+(y-1)^2=36$

따라서 점 P가 나타내는 도형의 넓이는 $\pi r^2=36\pi$

048

점 $A(1,\ -1)$과 원 $x^2+y^2+2x-6y-2=0$ 위의 점 P에 대하여 선분 AP의 중점이 나타내는 도형의 둘레의 길이는?

① $\sqrt{3}\pi$　② $\sqrt{6}\pi$　③ 3π　④ $2\sqrt{3}\pi$　⑤ $\sqrt{15}\pi$

원 위의 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$, 선분 AP의 중점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{1+a}{2}$, $y=\dfrac{-1+b}{2}$　$\therefore a=2x-1,\ b=2y+1$　…… ㉠

$x^2+y^2+2x-6y-2=0$에서 $(x+1)^2+(y-3)^2=12$　…… ㉡

점 P가 원 ㉡ 위의 점이므로 $(a+1)^2+(b-3)^2=12$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$(2x-1+1)^2+(2y+1-3)^2=12$　$\therefore x^2+(y-1)^2=3$

따라서 선분 AP의 중점이 나타내는 도형의 둘레의 길이는

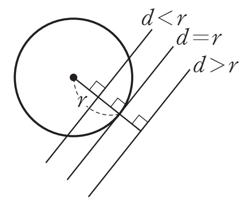
$2\pi\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}\pi$

05 원과 직선의 위치 관계

❶ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용한 위치 관계

반지름의 길이가 r인 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d라 하면 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

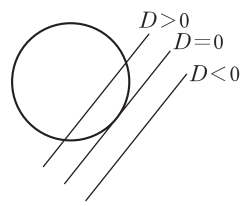
① $d<r$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $d=r$ ➡ 한 점에서 만난다. (접한다.)
③ $d>r$ ➡ 만나지 않는다.



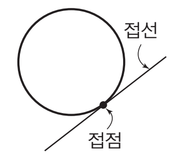
❷ 이차방정식의 판별식을 이용한 위치 관계

직선의 방정식과 원의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $D=0$ ➡ 한 점에서 만난다. (접한다.)
③ $D<0$ ➡ 만나지 않는다.



• 직선이 원과 한 점에서 만날 때, 직선이 원에 '접한다.'고 하고, 이 직선을 원의 접선, 만나는 점을 접점이라 한다.



개념 기본 문제

049

다음은 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $x+y-2=0$의 위치 관계를 조사하는 두 가지 방법이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

[방법1] 원 $x^2+y^2=9$의 중심의 좌표는 $(0,\ 0)$, 반지름의 길이는 $r=3$이다.
원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리는
$d=\dfrac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$ $\quad\therefore\ d\boxed{<}r$
따라서 원과 직선은 $\boxed{\text{서로 다른 두 점에서 만난다.}}$
[방법2] 직선의 방정식 $x+y-2=0$에서
$y=-x+2$
이를 원의 방정식 $x^2+y^2=9$에 대입하면
$2x^2-4x-5=0$
이 이차방정식의 판별식 D에 대하여
$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-2\times(-5)=14$이므로 $D\boxed{>}0$
따라서 원과 직선은 $\boxed{\text{서로 다른 두 점에서 만난다.}}$

050

원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용하여 다음 원과 직선의 위치 관계를 조사하시오.

(1) 원 $x^2+y^2=4$, 직선 $x-y+3=0$ 만나지 않는다.

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|0-0+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$
이때 원의 반지름의 길이는 2이므로 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}>2$이다.

(2) 원 $x^2+(y-3)^2=9$, 직선 $2x+y-1=0$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

원의 중심 $(0,\ 3)$과 직선 $2x+y-1=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|2\times0+3-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
이때 원의 반지름의 길이는 3이므로 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}<3$이다.

(3) 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=8$, 직선 $x+y-6=0$ 한 점에서 만난다.(접한다.)

원의 중심 $(1,\ 1)$과 직선 $x+y-6=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|1+1-6|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$
이때 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 두 값은 같다.

(4) 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=12$, 직선 $3x+y-5=0$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

원의 중심 $(-2,\ 1)$과 직선 $3x+y-5=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|3\times(-2)+1-5|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$
이때 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$이므로 $\sqrt{10}<2\sqrt{3}$이다.

051

이차방정식의 판별식을 이용하여 다음 원과 직선의 위치 관계를 조사하시오.

(1) 원 $x^2+y^2=4$, 직선 $y=2x+1$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

직선의 방정식 $y=2x+1$을 원의 방정식 $x^2+y^2=4$에 대입하면
$x^2+(2x+1)^2=4 \quad \therefore 5x^2+4x-3=0$
$\frac{D}{4}=2^2-5\times(-3)=19>0$

(2) 원 $(x-4)^2+y^2=16$, 직선 $y=x+3$ 만나지 않는다.

직선의 방정식 $y=x+3$을 원의 방정식 $(x-4)^2+y^2=16$에 대입하면
$(x-4)^2+(x+3)^2=16 \quad \therefore 2x^2-2x+9=0$
$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\times9=-17<0$

(3) 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$, 직선 $x+y+1=0$ 만나지 않는다.

직선의 방정식 $x+y+1=0$에서 $y=-x-1$을 원의 방정식 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$에 대입하면
$(x-2)^2+(-x-1-1)^2=4 \quad \therefore 2x^2+4=0$
$\frac{D}{4}=0^2-2\times4=-8<0$

(4) 원 $(x+3)^2+(y-2)^2=20$, 직선 $2x-y-2=0$ 한 점에서 만난다.(접한다.)

직선의 방정식 $2x-y-2=0$에서 $y=2x-2$를 원의 방정식 $(x+3)^2+(y-2)^2=20$에 대입하면
$(x+3)^2+(2x-2-2)^2=20 \quad \therefore 5x^2-10x+5=0$
$\frac{D}{4}=(-5)^2-5\times5=0$

052

원 $x^2+y^2=9$와 직선 $x-y+k=0$ 사이의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다. $-3\sqrt{2}<k<3\sqrt{2}$

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는
$\frac{|0-0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$
$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<3$에서 $|k|<3\sqrt{2}$이므로 $-3\sqrt{2}<k<3\sqrt{2}$

(2) 한 점에서 만난다.(접한다.) $k=-3\sqrt{2}$ 또는 $k=3\sqrt{2}$

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}=3$에서 $|k|=3\sqrt{2}$이므로 $k=-3\sqrt{2}$ 또는 $k=3\sqrt{2}$

(3) 만나지 않는다. $k<-3\sqrt{2}$ 또는 $k>3\sqrt{2}$

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}>3$에서 $|k|>3\sqrt{2}$이므로 $k<-3\sqrt{2}$ 또는 $k>3\sqrt{2}$

053

다음 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 원 $x^2+y^2=10$, 직선 $3x+y+k=0$ $-10<k<10$

원 $x^2+y^2=10$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $3x+y+k=0$ 사이의 거리는
$\frac{|3\times0+0+k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{10}}$이므로
$\frac{|k|}{\sqrt{10}}<\sqrt{10}$, $|k|<10 \quad \therefore -10<k<10$

(2) 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=20$, 직선 $x+2y+k=0$ $-17<k<3$

원 $(x-3)^2+(y-2)^2=20$의 중심 $(3, 2)$와 직선 $x+2y+k=0$ 사이의 거리는
$\frac{|3+2\times2+k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|k+7|}{\sqrt{5}}$
$\frac{|k+7|}{\sqrt{5}}<2\sqrt{5}$, $|k+7|<10$
$-10<k+7<10 \quad \therefore -17<k<3$

054

다음 원과 직선이 접하도록 하는 실수 k의 값을 모두 구하시오.

(1) 원 $x^2+y^2=8$, 직선 $x+y+k=0$ $-4, 4$

원 $x^2+y^2=8$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리는
$\frac{|0+0+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$이므로
$\frac{|k|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$, $|k|=4 \quad \therefore k=-4$ 또는 $k=4$

(2) 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$, 직선 $2x-y+k=0$ $-1, 9$

원 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$의 중심 $(-1, 2)$와 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는
$\frac{|2\times(-1)-2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k-4|}{\sqrt{5}}$이므로
$\frac{|k-4|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, $|k-4|=5 \quad \therefore k=-1$ 또는 $k=9$

055

다음 원과 직선이 만나지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 원 $x^2+y^2=13$, 직선 $2x+3y+k=0$ $k<-13$ 또는 $k>13$

원 $x^2+y^2=13$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $2x+3y+k=0$ 사이의 거리는
$\frac{|2\times0+3\times0+k|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{13}}$이므로
$\frac{|k|}{\sqrt{13}}>\sqrt{13}$, $|k|>13 \quad \therefore k<-13$ 또는 $k>13$

(2) 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=8$, 직선 $x-y+k=0$ $k<-1$ 또는 $k>7$

원 $(x+2)^2+(y-1)^2=8$의 중심 $(-2, 1)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는
$\frac{|-2-1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k-3|}{\sqrt{2}}$이므로
$\frac{|k-3|}{\sqrt{2}}>2\sqrt{2}$, $|k-3|>4$
$\therefore k<-1$ 또는 $k>7$

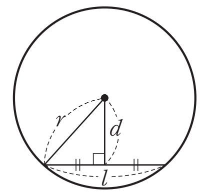
06 원과 직선의 위치 관계의 활용

❶ 현의 길이

반지름의 길이가 r인 원의 중심에서 d만큼 떨어진 현의 길이를 l이라 하면

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2=r^2-d^2 \Rightarrow l=2\sqrt{r^2-d^2}$$

└ 피타고라스 정리

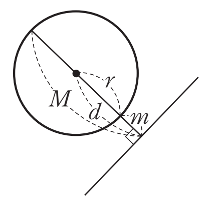


• 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 수직이등분한다. 또, 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.

❷ 원 위의 점과 직선 사이의 거리

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 할 때, 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값 M과 최솟값 m은

$$M=d+r,\ m=d-r$$



❸ 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식

서로 다른 두 점에서 만나는 두 원

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,\ x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$$

(a, b, c, a', b', c'은 상수)

의 교점을 지나는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$(x^2+y^2+ax+by+c)-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$$ ← 어느 한 원의 방정식에서 나머지 한 원의 방정식을 뺀 것이다.

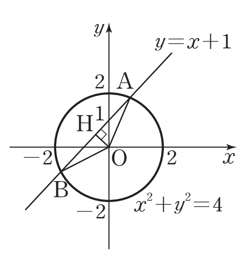
$$\Rightarrow (a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0$$

• 두 원의 교점을 지나는 직선은 두 원의 공통인 현을 포함하는 직선이다.

개념 기본 문제

056

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=x+1$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 원의 중심 O에서 직선 $y=x+1$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. $\sqrt{14}$



단계1. 선분 OA와 선분 OH의 길이 구하기

선분 OA의 길이는 $\sqrt{4}=2$

선분 OH의 길이는 $\frac{|0+0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

단계2. 피타고라스 정리를 이용하여 선분 AH의 길이 구하기

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$

단계3. 선분 AB의 길이 구하기

$\overline{AH}=\overline{BH}$이므로 $\overline{AB}=2\,\overline{AH}=2\times\frac{\sqrt{14}}{2}=\sqrt{14}$

057

다음 원과 직선이 만나는 두 점을 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.

(1) 원 $x^2+y^2=10$, 직선 $y=2x+1$ $\frac{14\sqrt{5}}{5}$

원 $x^2+y^2=10$의 중심 O(0, 0)에서 직선 $y=2x+1$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\frac{|2\times0-0+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

직각삼각형 OAH에서 $\overline{OA}=\sqrt{10}$이므로

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \overline{AB}=2\,\overline{AH}=2\times\frac{7\sqrt{5}}{5}=\frac{14\sqrt{5}}{5}$

(2) 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=16$, 직선 $x+2y-4=0$ $2\sqrt{11}$

원 $(x-1)^2+(y+1)^2=16$의 중심을 C(1, −1)이라 하고, 점 C에서 직선 $x+2y-4=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CH}=\frac{|1+2\times(-1)-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$

직각삼각형 CAH에서 $\overline{CA}=\sqrt{16}=4$이므로

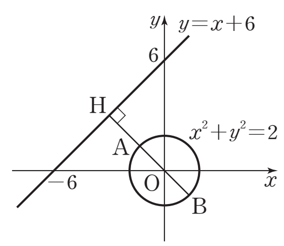
$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{4^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{11}$

$\therefore \overline{AB}=2\,\overline{AH}=2\sqrt{11}$

058

다음은 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점에서 직선 $y=x+6$에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O를 지나고 직선 $y=x+6$에 수직인 직선이 원과 만나는 점 중 직선에 가까운 점을 A, 직선에서 먼 점을 B라 하면 구하는 거리의 최댓값은 선분 BH의 길이이고, 최솟값은 선분 AH의 길이이다.



원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=x+6$, 즉 $x-y+6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0-0+6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점에서 직선 $y=x+6$에 이르는 거리의

최댓값은 $\overline{\mathrm{BH}}=\boxed{3\sqrt{2}}+\sqrt{2}=\boxed{4\sqrt{2}}$

최솟값은 $\overline{\mathrm{AH}}=\boxed{3\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\boxed{2\sqrt{2}}$

059

다음 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, M, m의 값을 구하시오.

(1) 원 $x^2+y^2=4$, 직선 $x+y+4=0$ $\quad$ $\boldsymbol{M=2\sqrt{2}+2,\ m=2\sqrt{2}-2}$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x+y+4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|0-0+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로

$M=2\sqrt{2}+2,\ m=2\sqrt{2}-2$

(2) 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=10$, 직선 $3x-y+5=0$ $\quad$ $\boldsymbol{M=\frac{11\sqrt{10}}{5},\ m=\frac{\sqrt{10}}{5}}$

원의 중심 $(2,\ -1)$과 직선 $3x-y+5=0$

사이의 거리는 $\frac{|3\times2-(-1)+5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로

$M=\frac{6\sqrt{10}}{5}+\sqrt{10}=\frac{11\sqrt{10}}{5},\ m=\frac{6\sqrt{10}}{5}-\sqrt{10}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

(3) 원 $(x+3)^2+(y-2)^2=16$, 직선 $4x-3y-17=0$ $\quad$ $\boldsymbol{M=11,\ m=3}$

원의 중심 $(-3,\ 2)$와 직선 $4x-3y-17=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4\times(-3)-3\times2-17|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=7$

이때 원의 반지름의 길이가 4이므로

$M=7+4=11,\ m=7-4=3$

060

다음 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

(1) $x^2+y^2-4=0,\ x^2+y^2-2x+2y+1=0$ $\quad$ $\boldsymbol{2x-2y-5=0}$

$(x^2+y^2-4)-(x^2+y^2-2x+2y+1)=0$

$\therefore\ 2x-2y-5=0$

(2) $x^2+y^2+2x-3=0,\ x^2+y^2-x-y=0$ $\quad$ $\boldsymbol{3x+y-3=0}$

$(x^2+y^2+2x-3)-(x^2+y^2-x-y)=0$

$\therefore\ 3x+y-3=0$

(3) $x^2+y^2-4x+2y-2=0,\ x^2+y^2-2x-y-3=0$ $\quad$ $\boldsymbol{2x-3y-1=0}$

$(x^2+y^2-4x+2y-2)-(x^2+y^2-2x-y-3)=0$

$\therefore\ 2x-3y-1=0$

(4) $(x+1)^2+(y-3)^2=4,\ x^2+(y-2)^2=9$ $\quad$ $\boldsymbol{2x-2y+11=0}$

$(x+1)^2+(y-3)^2=4$에서 $x^2+y^2+2x-6y+6=0$

$x^2+(y-2)^2=9$에서 $x^2+y^2-4y-5=0$

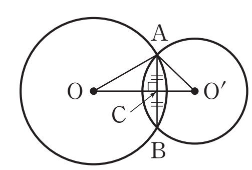
$(x^2+y^2+2x-6y+6)-(x^2+y^2-4y-5)=0$

$\therefore\ 2x-2y+11=0$

061

다음은 두 원 $x^2+y^2=9,\ x^2+y^2-3x-4y+1=0$의 공통현의 길이를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

오른쪽 그림과 같이 두 원의 중심을 각각 O, O′이라 하고, 두 원의 교점을 각각 A, B라 하자.



$\overline{\mathrm{OO'}}$과 $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점을 C라 할 때 두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2-9-(x^2+y^2-3x-4y+1)=0$

$\therefore\ \boxed{3x+4y-10=0}$ $\quad$ …… ㉠

원 $x^2+y^2=9$의 중심 $\mathrm{O}(0,\ 0)$에서 공통현 ㉠까지의 거리는

$$\overline{\mathrm{OC}}=\frac{|0+0-\boxed{10}|}{\sqrt{\boxed{3}^2+\boxed{4}^2}}=2$$

직각삼각형 OCA에서 $\overline{\mathrm{OA}}=3,\ \overline{\mathrm{OC}}=2$이므로

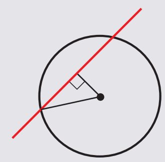
$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OC}}^2}=\boxed{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AC}}=\boxed{2\sqrt{5}}$

유형 실전 문제

유형 09 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만날 때 중요

반지름의 길이가 r인 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면
① (중심과 직선 사이의 거리)$<r$
② (연립한 이차방정식의 판별식)>0



풍쌤 Point ①과 ② 중에서 계산이 편한 방법을 선택한다. 이때 반지름의 길이가 더 길어야 두 점에서 만나고, 연립하여 얻은 이차방정식의 실근이 2개이어야 두 점에서 만난다.

062

원 $x^2+y^2+4x-6y+3=0$과 직선 $y=3x+k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 정수 k의 개수는?

① 15　② 16　③ 17
④ 18　⑤ 19

$x^2+y^2+4x-6y+3=0$에서 $(x+2)^2+(y-3)^2=10$
이 원의 중심 $(-2, 3)$과 직선 $y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$ 사이의 거리는
$\frac{|3\times(-2)-3+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|k-9|}{\sqrt{10}}$
$\frac{|k-9|}{\sqrt{10}}<\sqrt{10}$, $|k-9|<10$
$\therefore -1<k<19$
따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 $0, 1, 2, \cdots, 18$의 19개이다.

063

원 $(x-1)^2+y^2=r^2$과 직선 $x+y+3=0$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 자연수 r의 최솟값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

원 $(x-1)^2+y^2=r^2$의 중심 $(1, 0)$과 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리는
$\frac{|1+0+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$
원의 반지름의 길이가 r이므로 $r>2\sqrt{2}$
따라서 조건을 만족시키는 자연수 r의 최솟값은 3이다.

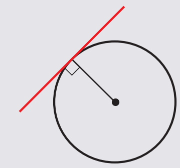
064

원 $(x+1)^2+(y+a)^2=100$과 직선 $4x-3y+a+3=0$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 정수 a의 개수를 구하시오. 33

원 $(x+1)^2+(y+a)^2=100$의 중심 $(-1, -a)$와 직선 $4x-3y+a+3=0$ 사이의 거리는
$\frac{|4\times(-1)-3\times(-a)+3|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|3a-1|}{5}$
$\frac{|3a-1|}{5}<10$, $-49<3a<51$
$\therefore -\frac{49}{3}<a<17$
따라서 정수 a는 $-16, -15, -14, -13, \cdots, 16$의 33개이다.

유형 10 원과 직선이 접할 때 중요

반지름의 길이가 r인 원과 직선이 접하려면
① (중심과 직선 사이의 거리)$=r$
② (연립한 이차방정식의 판별식)$=0$



풍쌤 Point 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이가 주어지면 ①을, 연립하기 쉬운 꼴의 이차방정식이 주어지면 ②를 이용하는 것이 편하다.

065

직선 $3x+4y-1=0$이 원 $(x-4)^2+(y-1)^2=r^2$에 접할 때, 양수 r의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

원 $(x-4)^2+(y-1)^2=r^2$의 중심 $(4, 1)$과 직선 $3x+4y-1=0$ 사이의 거리는
$\frac{|3\times4+4\times1-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{5}=3$
$\therefore r=3$

066

중심이 점 $(2, -1)$이고 직선 $y=x+k$에 접하는 원의 넓이가 8π일 때, 양수 k의 값을 구하시오. 1

원의 중심 $(2, -1)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$와 같아야 하므로
$\frac{|2-(-1)+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$, $|k+3|=4$
$\therefore k=-7$ 또는 $k=1$
따라서 양수 k의 값은 1이다.

067

중심이 점 $(-4, -5)$이고 x축에 접하는 원이 직선 $4x-3y+k=0$에 접할 때, 양수 k의 값은?

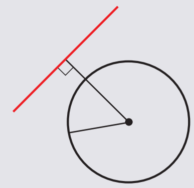
① 25　② 26　③ 27
④ 28　⑤ 29

원의 중심 $(-4, -5)$와 직선 $4x-3y+k=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 5와 같아야 하므로
$\frac{|4\times(-4)-3\times(-5)+k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=5$
$\frac{|k-1|}{5}=5$, $|k-1|=25$
$\therefore k=-24$ 또는 $k=26$
따라서 양수 k의 값은 26이다.

유형 11 원과 직선이 만나지 않을 때

중요

반지름의 길이가 r인 원과 직선이 만나지 않으려면
① (중심과 직선 사이의 거리) $>r$
② (연립한 이차방정식의 판별식) <0



풍쌤 Point ①과 ② 중에서 계산이 편한 방법을 선택한다. 이때 반지름의 길이가 더 짧아야 만나지 않고, 연립하여 얻은 이차방정식의 실근이 없어야 만나지 않는다.

068

원 $x^2+y^2=5$와 직선 $y=-2x+k$가 만나지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $-5<k<5$ ✓② $k<-5$ 또는 $k>5$
③ $-10<k<10$ ④ $k<-10$ 또는 $k>10$
⑤ $-15<k<15$

원 $x^2+y^2=5$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=-2x+k$, 즉 $2x+y-k=0$ 사이의 거리는
$\frac{|2\times0+0-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$
$\frac{|k|}{\sqrt{5}}>\sqrt{5}$, $|k|>5$ $\therefore k<-5$ 또는 $k>5$

069

원 $(x-1)^2+y^2=1$과 직선 $mx+y-3=0$이 만나지 않도록 하는 정수 m의 최댓값을 구하시오. 1

원 $(x-1)^2+y^2=1$의 중심 $(1, 0)$과 직선 $mx+y-3=0$ 사이의 거리는
$\frac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}}$
$\frac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}}>1$, $|m-3|>\sqrt{m^2+1}$, $-6m+8>0$
$\therefore m<\frac{4}{3}$
따라서 정수 m의 최댓값은 1이다.

070

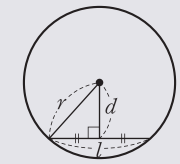
두 점 $A(-2, 1)$, $B(4, 3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이 직선 $y=3x+k$와 만나지 않도록 하는 자연수 k의 최솟값은?

① 9 ✓② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$, 즉 $(1, 2)$
원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\times\sqrt{(4+2)^2+(3-1)^2}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{10}=\sqrt{10}$
원의 중심 $(1, 2)$와 직선 $y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$ 사이의 거리는
$\frac{|3\times1-2+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|k+1|}{\sqrt{10}}$
$\frac{|k+1|}{\sqrt{10}}>\sqrt{10}$, $|k+1|>10$ $\therefore k<-11$ 또는 $k>9$
따라서 자연수 k의 최솟값은 10이다.

유형 12 현의 길이

반지름의 길이가 r인 원의 중심에서 d만큼 떨어진 현의 길이를 l이라 하면
$\left(\frac{l}{2}\right)^2=r^2-d^2$
➡ $l=2\sqrt{r^2-d^2}$



풍쌤 Point 원의 중심에서 현에 수선을 내려 직각삼각형을 만들고, 피타고라스 정리를 이용한다.

071

원 $(x-2)^2+(y+2)^2=16$과 직선 $x-2y-11=0$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 선분 AB의 길이는?

✓① $2\sqrt{11}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{13}$
④ $2\sqrt{14}$ ⑤ $2\sqrt{15}$

원 $(x-2)^2+(y+2)^2=16$의 중심을 $C(2, -2)$라 하고, 점 C에서 직선 $x-2y-11=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{CH}=\frac{|2-2\times(-2)-11|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$
$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{4^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{11}$
$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{11}$

072

원 $x^2+y^2-6x-2y+k=0$과 직선 $y=2x$가 두 점 A, B에서 만난다. 선분 AB의 길이가 4일 때, 상수 k의 값을 구하시오. 1

$x^2+y^2-6x-2y+k=0$에서 $(x-3)^2+(y-1)^2=10-k$
이 원의 중심을 $C(3, 1)$이라 하고, 점 C에서 직선 $y=2x$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{AH}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times4=2$
$\overline{CH}=\frac{|2\times3-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$
직각삼각형 CAH에서
$10-k=\overline{CH}^2+\overline{AH}^2=(\sqrt{5})^2+2^2=9$ $\therefore k=1$

073

원 $x^2+y^2+8x=0$과 직선 $x-y+2=0$의 교점을 지나는 원 중에서 그 넓이가 최소인 원의 넓이는?

① 11π ② 12π ③ 13π
✓④ 14π ⑤ 15π

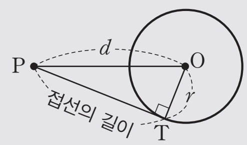
$x^2+y^2+8x=0$에서 $(x+4)^2+y^2=16$
이 원의 중심을 $C(-4, 0)$이라 하고, 점 C에서 직선 $x-y+2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{CH}=\frac{|-4-0+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$
$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{4^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{14}$
따라서 넓이가 최소인 원은 반지름이 선분 AH인 원이므로 구하는 원의 넓이는
$\pi r^2=\pi\times(\sqrt{14})^2=14\pi$

유형 실전 문제

유형 13 접선의 길이

원 밖의 한 점 P에서 원에 그은 접선의 접점을 T라 할 때, 선분 PT의 길이가 접선의 길이이다. 이때 원의 반지름의 길이가 r, $\overline{OP}=d$이면 접선의 길이는

$\overline{PT}=\sqrt{d^2-r^2}$



풍쌤 Point 삼각형 OTP가 직각삼각형이므로 접선의 길이는 피타고라스 정리를 이용하여 구한다.

074

원점 O(0, 0)에서 원 $(x-2)^2+(y-4)^2=r^2$에 그은 접선의 접점 P에 대하여 $\overline{OP}=3$일 때, 양수 r의 값은?

① 3 ② $\sqrt{10}$ √③ $\sqrt{11}$
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{13}$

원 $(x-2)^2+(y-4)^2=r^2$의 중심을 C라 하면
$\overline{OC}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$
$\overline{PC}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-3^2}=\sqrt{11}$
$\therefore r=\sqrt{11}$ ($\because r>0$)

075

점 P(5, 2)에서 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=16$에 그은 두 접선의 접점을 각각 Q, R라 할 때, $\overline{PQ}+\overline{PR}$의 값은?

① 8 ② $6\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{5}$
√④ $2\sqrt{21}$ ⑤ 10

원 $(x+1)^2+(y-1)^2=16$의 중심을 C라 하면
$\overline{PC}=\sqrt{(-1-5)^2+(1-2)^2}=\sqrt{37}$
$\overline{PQ}=\sqrt{(\sqrt{37})^2-4^2}=\sqrt{21}$
$\therefore \overline{PQ}+\overline{PR}=\sqrt{21}+\sqrt{21}=2\sqrt{21}$

076

점 P(a, 0)에서 원 $x^2+y^2+4x-4y-8=0$에 그은 접선의 접점을 Q라 하면 $\overline{PQ}=\sqrt{13}$일 때, 양수 a의 값을 구하시오. 3

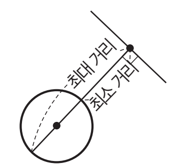
$x^2+y^2+4x-4y-8=0$에서 $(x+2)^2+(y-2)^2=16$
이 원의 중심을 C라 하면
$\overline{PC}=\sqrt{4^2+(\sqrt{13})^2}=\sqrt{29}$ ...... ㉠
한편, P(a, 0), C(-2, 2)이므로
$\overline{PC}=\sqrt{(-2-a)^2+(2-0)^2}=\sqrt{a^2+4a+8}$ ...... ㉡
㉠, ㉡에서 $\sqrt{a^2+4a+8}=\sqrt{29}$, $a^2+4a-21=0$
$(a+7)(a-3)=0$ $\therefore a=3$ ($\because a>0$)

유형 14 원 위의 점과 직선 사이의 거리 중요

원의 중심과 직선 사이의 거리가 d, 반지름의 길이가 r일 때, 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면

$M=d+r$, $m=d-r$

풍쌤 Point 원 위의 점의 좌표가 정해져 있지 않으므로 원의 중심을 이용해야 한다. 먼저 직선과 원의 중심 사이의 거리를 구한 다음, 그림을 그려서 판단해 보자.



077

원 $(x-3)^2+(y+4)^2=5$ 위의 점과 직선 $x-2y+4=0$ 사이의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하시오. 40

원 $(x-3)^2+(y+4)^2=5$의 중심 $(3, -4)$와 직선 $x-2y+4=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|3-2\times(-4)+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=3\sqrt{5}$이므로
$M=3\sqrt{5}+\sqrt{5}=4\sqrt{5}$, $m=3\sqrt{5}-\sqrt{5}=2\sqrt{5}$
$\therefore Mm=40$

078

원 $x^2+y^2=9$ 위의 점과 직선 $4x+3y+k=0$ 사이의 거리의 최댓값이 5일 때, 양수 k의 값은?

① 5 √② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

원 $x^2+y^2=9$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $4x+3y+k=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|0+0+k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|k|}{5}$
$\dfrac{|k|}{5}+3=5$, $|k|=10$ $\therefore k=10$ ($\because k>0$)

079

원 $x^2+(y-3)^2=9$ 위의 점 P와 직선 $4x+3y+20=0$ 사이의 거리가 자연수인 점 P의 개수는?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 √⑤ 12

원 $x^2+(y-3)^2=9$의 중심 $(0, 3)$과 직선 $4x+3y+20=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|4\times0+3\times3+20|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{29}{5}$
이므로 주어진 원 위의 점 P와 직선 사이의 거리를 d라 하면
$\dfrac{29}{5}-3\le d\le\dfrac{29}{5}+3$ $\therefore \dfrac{14}{5}\le d\le\dfrac{44}{5}$
따라서 자연수 d는 3, 4, 5, 6, 7, 8이고 점 P는 각각 2개씩 존재하므로 구하는 점 P의 개수는
$2\times6=12$

유형 15 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식 중요

서로 다른 두 점에서 만나는 두 원

$x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x^2+y^2+ax+by+c)-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$, 즉

$(a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0$이다.

풍쌤 Point 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은 한 원의 방정식에서 다른 한 원의 방정식을 빼서 구한다. 빼는 순서는 상관없지만 두 원이 두 점에서 만날 때에만 생긴다.

080

두 원 $x^2+y^2-2x-6=0$, $x^2+y^2+4x-2y=0$의 교점을 지나는 직선이 점 $(a,\ 2a-1)$을 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오. -4

$(x^2+y^2-2x-6)-(x^2+y^2+4x-2y)=0$

$\therefore\ 3x-y+3=0$

이 직선이 점 $(a,\ 2a-1)$을 지나므로

$3a-(2a-1)+3=0 \qquad \therefore\ a=-4$

081

두 원 $x^2+y^2+2x+2y-4=0$, $(x-2)^2+(y-a)^2=4$의 교점을 지나는 직선이 직선 $2x-3y+5=0$과 수직일 때, 상수 a의 값을 구하시오. 1

$(x-2)^2+(y-a)^2=4$에서 $x^2+y^2-4x-2ay+a^2=0$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x^2+y^2+2x+2y-4)-(x^2+y^2-4x-2ay+a^2)=0$

$\therefore\ 6x+2(1+a)y-4-a^2=0$

이 직선이 직선 $2x-3y+5=0$과 수직이므로

$6\times2+2(1+a)\times(-3)=0 \qquad \therefore\ a=1$

082

두 원 $x^2+y^2+x+y-3=0$, $x^2+y^2-3x-y-5=0$의 교점을 지나는 직선과 평행하고 점 $(2,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 2 ✓② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

$(x^2+y^2+x+y-3)-(x^2+y^2-3x-y-5)=0 \qquad \therefore\ y=-2x-1$

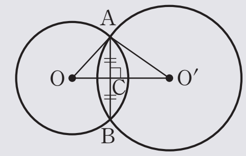
따라서 기울기가 -2이고 점 $(2,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=-2(x-2) \qquad \therefore\ y=-2x+6$

따라서 $a=-2$, $b=6$이므로 $a+b=-2+6=4$

유형 16 공통인 현의 길이

두 점 A, B에서 만나는 두 원 O, O'에 대하여 선분 AB를 두 원의 공통현이라 하고, 공통현의 길이는 다음 순서로 구한다.



① 직선 AB의 방정식을 구한다. ← 유형 15

② 선분 OC의 길이를 구한다. ← 점과 직선 사이의 거리

③ 선분 AC의 길이를 구한다. ← 피타고라스 정리

④ 선분 AB의 길이를 구한다. ← $\overline{AC}=\overline{BC}$

풍쌤 Point 유형 15에서 다룬 공통현 AB의 방정식을 이용하면 현의 길이를 구하는 방법과 동일하다.

083

두 점에서 만나는 두 원

$$x^2+(y-2)^2=4,\ x^2+(y-1)^2=3$$

의 중심을 각각 A, B라 하고 두 교점을 P, Q라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 직선 PQ의 방정식은 $x=1$이다.

ㄴ. 선분 AB의 길이는 1이다.

ㄷ. 선분 PQ의 길이는 $2\sqrt{3}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ✓⑤ ㄴ, ㄷ

ㄱ. 직선 PQ는 두 원의 교점을 지나는 직선이므로 그 방정식은

$(x^2+y^2-4y)-(x^2+y^2-2y-2)=0$

$-2y+2=0 \qquad \therefore\ y=1$

084

두 원의 중심을 각각 O(0, 0), C(3, 3)이라 하자.

두 원 $x^2+y^2=7$, $(x-3)^2+(y-3)^2=13$의 두 교점을 P, Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오. $2\sqrt{5}$

직선 PQ의 방정식은 $(x^2+y^2-7)-(x^2+y^2-6x-6y+5)=0 \qquad \therefore\ x+y-2=0$

점 C에서 직선 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{CH}=\dfrac{|3+3-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

$\overline{PH}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{5} \qquad \therefore\ \overline{PQ}=2\overline{PH}=2\sqrt{5}$

085

두 원의 중심을 각각 A(−1, 0), B(1, 2)라 하자.

두 원 $(x+1)^2+y^2=4$, $(x-1)^2+(y-2)^2=16$의 두 교점을 P, Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 구하시오. $\sqrt{7}$ (단, O는 원점이다.)

직선 PQ의 방정식은 $x+y+2=0$

점 B에서 직선 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{BH}=\dfrac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

$\overline{PH}=\sqrt{4^2-\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{2} \qquad \therefore\ \overline{PQ}=2\overline{PH}=\sqrt{14}$

삼각형 OPQ에서 높이는 $\dfrac{|0+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2} \qquad \therefore\ \triangle OPQ=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{14}\times\sqrt{2}=\sqrt{7}$

07 원의 접선의 방정식

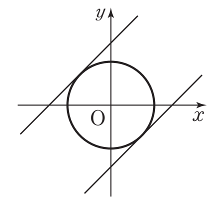
❶ 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

보기 원 $x^2+y^2=1$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은
$y=2x\pm1\times\sqrt{2^2+1}$ $\quad\therefore y=2x\pm\sqrt{5}$

• 한 원에 대하여 기울기가 같은 접선은 2개 존재한다.



❷ 원 위의 점에서의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=r^2$$

❸ 원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선의 방정식

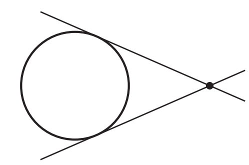
원 밖의 한 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서 원 $x^2+y^2=r^2$에 그은 접선의 방정식

[방법1] 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$로 놓고, 접선 $x_1x+y_1y=r^2$이 점 P를 지남을 이용한다.

[방법2] 접선의 기울기를 m으로 놓고, 접선 $y-b=m(x-a)$와 원의 중심 $(0,\ 0)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 r와 같음을 이용한다.

[방법3] 접선의 기울기를 m으로 놓고, 접선의 방정식 $y-b=m(x-a)$와 원의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식 D에 대하여 $D=0$임을 이용한다.

• 원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선은 2개 존재한다.



개념 기본 문제

086

다음 접선의 방정식을 구하시오.

(1) 원 $x^2+y^2=1$에 접하고 기울기가 -1인 직선 $\quad y=-x\pm\sqrt{2}$

$y=-x\pm\sqrt{(-1)^2+1}$ $\quad\therefore y=-x\pm\sqrt{2}$

(2) 원 $x^2+y^2=5$에 접하고 기울기가 2인 직선 $\quad y=2x\pm5$

$y=2x\pm\sqrt{5}\sqrt{2^2+1}$ $\quad\therefore y=2x\pm5$

(3) 원 $x^2+y^2=9$에 접하고 기울기가 -3인 직선 $\quad y=-3x\pm3\sqrt{10}$

$y=-3x\pm3\sqrt{(-3)^2+1}$ $\quad\therefore y=-3x\pm3\sqrt{10}$

(4) 원 $x^2+y^2=16$에 접하고 기울기가 -2인 직선 $\quad y=-2x\pm4\sqrt{5}$

$y=-2x\pm4\sqrt{(-2)^2+1}$ $\quad\therefore y=-2x\pm4\sqrt{5}$

087

다음 접선의 방정식을 구하시오.

(1) 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선 $\quad y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

$x+2y=5$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

(2) 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선 $\quad y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$

$x+3y=10$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$

(3) 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(-3,\ 2)$에서의 접선 $\quad y=\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}$

$-3x+2y=13$ $\quad\therefore y=\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}$

(4) 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(-3,\ -4)$에서의 접선 $\quad y=-\frac{3}{4}x-\frac{25}{4}$

$-3x-4y=25$ $\quad\therefore y=-\frac{3}{4}x-\frac{25}{4}$

088

다음은 점 $\mathrm{P}(0,\ 4)$에서 원 $x^2+y^2=2$에 그은 접선의 방정식을 구하는 세 가지 방법이다. 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

[방법1] 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=2$ ······ ㉠

㉠이 점 $\mathrm{P}(0,\ 4)$를 지나므로

$x_1\times0+y_1\times4=2 \qquad \therefore\ y_1=\frac{1}{2}$

점 $\left(x_1,\ \frac{1}{2}\right)$이 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점이므로

$x_1{}^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=2,\ x_1{}^2=\frac{7}{4} \qquad \therefore\ x_1=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

접점의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{7}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 또는 $\left(-\frac{\sqrt{7}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이므로

㉠에서 구하는 접선의 방정식은

$\frac{\sqrt{7}}{2}x+\frac{1}{2}y=2$ 또는 $-\frac{\sqrt{7}}{2}x+\frac{1}{2}y=2$

$\therefore\ y=\boxed{-\sqrt{7}x+4}$ 또는 $y=\boxed{\sqrt{7}x+4}$

[방법2] 점 $\mathrm{P}(0,\ 4)$를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx+4 \qquad \therefore\ mx-y+4=0$ ······ ㉡

원의 중심에서 접선 $mx-y+4=0$까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로

$\frac{|0-0+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\boxed{\sqrt{2}},\ \sqrt{m^2+1}=2\sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $m^2+1=8,\ m^2=7$

$\therefore\ m=\pm\sqrt{7}$

따라서 ㉡에서 구하는 접선의 방정식은

$\sqrt{7}x-y+4=0$ 또는 $-\sqrt{7}x-y+4=0$

$\therefore\ y=\sqrt{7}x+4$ 또는 $y=-\sqrt{7}x+4$

[방법3] ㉡의 직선의 방정식 $y=mx+4$를 $x^2+y^2=2$에 대입하면

$x^2+(mx+4)^2=2$

$\therefore\ (m^2+1)x^2+8mx+14=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=\boxed{0}$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(4m)^2-14(m^2+1)=0$

$m^2=7 \qquad \therefore\ m=\pm\sqrt{7}$

따라서 ㉡에서 구하는 접선의 방정식은

$y=\sqrt{7}x+4$ 또는 $y=-\sqrt{7}x+4$

089

다음 접선의 방정식을 모두 구하시오.

접점의 좌표를 $(x_1,\ x_2)$라 하자.

(1) 점 $\mathrm{P}(3,\ 0)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 접선

$2x+\sqrt{5}y=6$ 또는 $2x-\sqrt{5}y=6$

$x_1x+y_1y=4$ ······ ㉠

㉠이 점 $\mathrm{P}(3,\ 0)$을 지나므로 $x_1\times3+y_1\times0=4 \qquad \therefore\ x_1=\frac{4}{3}$

점 $\left(\frac{4}{3},\ y_1\right)$이 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$\left(\frac{4}{3}\right)^2+y_1{}^2=4 \qquad \therefore\ y_1=\pm\frac{2\sqrt{5}}{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $\frac{4}{3}x+\frac{2\sqrt{5}}{3}y=4$ 또는 $\frac{4}{3}x-\frac{2\sqrt{5}}{3}y=4$

$\therefore\ 2x+\sqrt{5}y=6$ 또는 $2x-\sqrt{5}y=6$

(2) 점 $\mathrm{P}(2,\ 0)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선

$x+\sqrt{3}y=2$ 또는 $x-\sqrt{3}y=2$

$x_1x+y_1y=1$ ······ ㉠

㉠이 점 $\mathrm{P}(2,\ 0)$을 지나므로 $x_1\times2+y_1\times0=1 \qquad \therefore\ x_1=\frac{1}{2}$

점 $\left(\frac{1}{2},\ y_1\right)$이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^2+y_1{}^2=1 \qquad \therefore\ y_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=1$ 또는 $\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=1$

$\therefore\ x+\sqrt{3}y=2$ 또는 $x-\sqrt{3}y=2$

(3) 점 $\mathrm{P}(0,\ 5)$에서 원 $x^2+y^2=9$에 그은 접선

$4x+3y=15$ 또는 $4x-3y=-15$

$x_1x+y_1y=9$ ······ ㉠

㉠이 점 $\mathrm{P}(0,\ 5)$를 지나므로

$x_1\times0+y_1\times5=9 \qquad \therefore\ y_1=\frac{9}{5}$

점 $\left(x_1,\ \frac{9}{5}\right)$가 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$x_1{}^2+\left(\frac{9}{5}\right)^2=9 \qquad \therefore\ x_1=\pm\frac{12}{5}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $\frac{12}{5}x+\frac{9}{5}y=9$ 또는 $-\frac{12}{5}x+\frac{9}{5}y=9$

$\therefore\ 4x+3y=15$ 또는 $4x-3y=-15$

(4) 점 $\mathrm{P}(0,\ -6)$에서 원 $x^2+y^2=18$에 그은 접선

$x-y=6$ 또는 $x+y=-6$

$x_1x+y_1y=18$ ······ ㉠

㉠이 점 $\mathrm{P}(0,\ -6)$을 지나므로

$x_1\times0+y_1\times(-6)=18 \qquad \therefore\ y_1=-3$

점 $(x_1,\ -3)$이 원 $x^2+y^2=18$ 위의 점이므로

$x_1{}^2+(-3)^2=18 \qquad \therefore\ x_1=\pm3$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $3x-3y=18$ 또는 $-3x-3y=18$

$\therefore\ x-y=6$ 또는 $x+y=-6$

(5) 점 $\mathrm{P}(-4,\ 2)$에서 원 $x^2+y^2=10$에 그은 접선

$3x+y=-10$ 또는 $x-3y=-10$

$x_1x+y_1y=10$ ······ ㉠

㉠이 점 $\mathrm{P}(-4,\ 2)$를 지나므로

$x_1\times(-4)+y_1\times2=10 \qquad \therefore\ y_1=2x_1+5$

점 $(x_1,\ 2x_1+5)$가 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점이므로

$x_1{}^2+(2x_1+5)^2=10,\ (x_1+1)(x_1+3)=0$

$\therefore\ x_1=-3$ 또는 $x_1=-1$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $-3x-y=10$ 또는 $-x+3y=10$

$\therefore\ 3x+y=-10$ 또는 $x-3y=-10$

유형 실전 문제

유형 17 기울기가 주어진 접선의 방정식 중요

원 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

풍쌤 Point 공식에서 m, r의 위치를 정확히 기억하고 근호 앞의 r를 빠뜨리지 않도록 주의한다.

090

원 $x^2+y^2=8$에 접하고 기울기가 -1인 직선 중 y절편이 양수인 직선의 방정식은?

① $y=-x+\sqrt{2}$ ② $y=-x+2$
③ $y=-x+2\sqrt{2}$ √④ $y=-x+4$
⑤ $y=-x+4\sqrt{2}$

$y=-x\pm2\sqrt{2}\sqrt{(-1)^2+1}$ $\quad\therefore y=-x\pm4$
따라서 y절편이 양수인 접선의 방정식은
$y=-x+4$

091

직선 $x-3y+3=0$에 수직이고 원 $x^2+y^2=10$에 접하는 직선의 방정식은?

① $y=-3x\pm\sqrt{10}$ ② $y=3x\pm\sqrt{10}$
√③ $y=-3x\pm10$ ④ $y=3x\pm10$
⑤ $y=-3x\pm10\sqrt{10}$

직선 $x-3y+3=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+1$에 수직인 직선의 기울기는 -3이므로
$y=-3x\pm\sqrt{10}\sqrt{(-3)^2+1}$
$\therefore y=-3x\pm10$

092

원 $x^2+y^2=20$에 접하고 직선 $2x-y+5=0$과 평행한 두 직선이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. 20

기울기가 2이고 원 $x^2+y^2=20$에 접하는 직선의 방정식은
$y=2x\pm2\sqrt{5}\sqrt{2^2+1}$ $\quad\therefore y=2x\pm10$
$\mathrm{A}(0,10)$, $\mathrm{B}(0,-10)$ 또는 $\mathrm{A}(0,-10)$, $\mathrm{B}(0,10)$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=10-(-10)=20$

093

원 $x^2+y^2=18$에 접하고 기울기가 m인 직선이 점 $(-1, 5)$를 지날 때, 양수 m의 값을 구하시오. 1

$y=mx\pm3\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$
이 직선이 점 $(-1,5)$를 지나므로
$5=-m\pm3\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$
$18(m^2+1)=m^2+10m+25$, $(17m+7)(m-1)=0$
$\therefore m=1$ $(\because m>0)$

유형 18 원 위의 점에서의 접선의 방정식 중요

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=r^2$$

풍쌤 Point 원의 방정식에서 x^2 대신 x_1x를, y^2 대신 y_1y를 대입하는 것으로 기억한다.

094

원 $x^2+y^2=18$ 위의 점 $(3, 3)$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. 37

(단, a, b는 상수이다.)

원 $x^2+y^2=18$ 위의 점 $(3,3)$에서의 접선의 방정식은
$3x+3y=18$ $\quad\therefore y=-x+6$
따라서 $a=-1$, $b=6$이므로 $a^2+b^2=(-1)^2+6^2=37$

095

원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(-4, 3)$에서의 접선이 점 $(a, 4a+3)$을 지날 때, a의 값은?

① 1 √② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(-4,3)$에서의 접선의 방정식은
$-4x+3y=25$ $\quad\therefore 4x-3y=-25$
이 직선이 점 $(a, 4a+3)$을 지나므로
$4a-3(4a+3)=-25$
$-8a-9=-25$, $8a=16$ $\quad\therefore a=2$

096

원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(-2, -3)$에서의 접선이 직선 $ax+2y-3=0$과 수직일 때, 상수 a의 값은?

① -5 ② -4 √③ -3
④ -2 ⑤ -1

원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(-2,-3)$에서의 접선의 방정식은
$-2x-3y=13$ $\quad\therefore 2x+3y+13=0$
이 직선이 직선 $ax+2y-3=0$과 수직이므로
$2\times a+3\times2=0$ $\quad\therefore a=-3$

097

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1, -2)$에서의 접선이 원 $x^2+y^2-12x+4y+k=0$에 접할 때, 상수 k의 값을 구하시오. 35

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1,-2)$에서의 접선의 방정식은
$x-2y=5$ $\quad\therefore x-2y-5=0$
한편, $x^2+y^2-12x+4y+k=0$에서 $(x-6)^2+(y+2)^2=40-k$
원의 중심에서 직선까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로
$\frac{|6-2\times(-2)-5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{40-k}$
$5=40-k$ $\quad\therefore k=35$

유형 19 원 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식

다음 세 가지 방법 중 하나를 이용하여 구한다.
[방법1] 접점의 좌표를 (x_1, y_1)로 놓고, 접선이 원 밖의 한 점을 지남을 이용하여 x_1, y_1의 값을 구한다.
[방법2] 접선의 기울기를 m으로 놓고, 접선과 원의 중심 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.
[방법3] 접선의 기울기를 m으로 놓고, 원과 접선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식을 이용한다.

풍쌤 Point 계산하기 편한 방법을 택하여 푼다. 원의 중심이 원점인 경우에는 [방법1]을, 원점이 아닌 경우에는 [방법2]를 이용하는 것이 가장 편리하다.

098

점 $(0,\ -3)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 두 접선 중 기울기가 양수인 접선의 방정식은?

√① $y=2\sqrt{2}x-3$　② $y=2\sqrt{2}x+3$
③ $y=2x-3$　④ $y=2x+3$
⑤ $y=\sqrt{2}x-3$

원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=1$　⋯⋯ ㉠
㉠이 점 $(0, -3)$을 지나므로 $y_1=-\frac{1}{3}$
점 $\left(x_1, -\frac{1}{3}\right)$이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 $x_1^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2=1$　$\therefore x_1=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=2\sqrt{2}x-3$

099

원점 $\text{O}(0,\ 0)$에서 원 $x^2+(y-2)^2=1$에 그은 두 접선의 기울기의 곱은?

√① -3　② -2　③ -1
④ 2　⑤ 3

원점을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $mx-y=0$
원의 중심에서 접선 $mx-y=0$까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로
$\frac{|m\times0-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$, $m^2+1=4$, $m^2=3$　$\therefore m=\pm\sqrt{3}$
따라서 기울기의 곱은 $\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})=-3$

100

점 $(1,\ 6)$에서 원 $(x+1)^2+y^2=20$에 그은 두 접선의 방정식이 $ax+by+11=0$, $cx+y-8=0$일 때, $a-b+c$의 값을 구하시오.　5

(단, $a>0$, $c>0$이고, a, b, c는 상수이다.)

점 $(1, 6)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $mx-y-m+6=0$
원의 중심에서 접선 $mx-y-m+6=0$까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로 $\frac{|m\times(-1)-0-m+6|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$
$2m^2+3m-2=0$, $(2m-1)(m+2)=0$　$\therefore m=\frac{1}{2}$ 또는 $m=-2$
따라서 접선의 방정식은 $x-2y+11=0$ 또는 $2x+y-8=0$이므로
$a=1$, $b=-2$, $c=2$　$\therefore a-b+c=1-(-2)+2=5$

101

점 $(0,\ 4)$에서 원 $x^2+(y+3)^2=1$에 그은 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 k라 할 때, k^2의 값은?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{1}{4}$
√④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{2}$

점 $(0, 4)$를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $mx-y+4=0$
원의 중심에서 접선 $mx-y+4=0$까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로
$\frac{|m\times0-(-3)+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$, $m^2=48$　$\therefore m=\pm4\sqrt{3}$
따라서 접선의 방정식은 $4\sqrt{3}x-y+4=0$ 또는 $-4\sqrt{3}x-y+4=0$
$k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $k^2=\frac{1}{3}$

102

점 $(-8,\ 0)$에서 원 $x^2+y^2=32$에 그은 두 접선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.　64

원 $x^2+y^2=32$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=32$　⋯⋯ ㉠
㉠이 점 $(-8, 0)$을 지나므로 $x_1=-4$
점 $(-4, y_1)$이 원 $x^2+y^2=32$ 위의 점이므로
$(-4)^2+y_1^2=32$　$\therefore y_1=\pm4$
접선의 방정식은 $y=x+8$ 또는 $y=-x-8$
따라서 두 접선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times|8-(-8)|\times|-8|=64$

103

점 $\text{A}(2,\ -3)$에서 원 $(x-4)^2+(y-3)^2=r^2$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 양수 r의 값을 구하시오.　$2\sqrt{5}$

점 $\text{A}(2, -3)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $mx-y-2m-3=0$
원의 중심에서 접선 $mx-y-2m-3=0$까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로 $\frac{|4m-3-2m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=r$
$r^2m^2+r^2=4m^2-24m+36$　$\therefore (r^2-4)m^2+24m+r^2-36=0$
두 접선이 서로 수직이므로 기울기의 곱은 -1이다.
$\frac{r^2-36}{r^2-4}=-1$, $r^2=20$　$\therefore r=2\sqrt{5}\ (\because r>0)$

104

원 $(x+2)^2+(y+10)^2=3$의 넓이를 이등분하는 직선 l이 원 $(x+2)^2+y^2=10$에 접할 때, 다음 중 직선 l의 방정식이 될 수 있는 것은?

① $3x-y-16=0$　② $3x-y+4=0$
③ $3x-y+16=0$　④ $3x+y+4=0$
√⑤ $3x+y+16=0$

원 $(x+2)^2+(y+10)^2=3$의 넓이를 이등분하는 직선 l은 원의 중심 $(-2, -10)$을 지난다.
$y-(-10)=m(x+2)$　$\therefore mx-y+2m-10=0$
원의 중심 $(-2, 0)$에서 접선 $mx-y+2m-10=0$까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로 $\frac{|-2m-0+2m-10|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$
$m^2=9$　$\therefore m=\pm3$
따라서 접선의 방정식은 $3x-y-4=0$ 또는 $3x+y+16=0$이므로 직선 l의 방정식이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

중단원 점검 문제

01

원 $(x-2)^2+(y+4)^2=9$와 중심이 같고 점 $(-2,\ -2)$를 지나는 원이 y축과 만나는 점의 좌표가 $(0,\ a)$일 때, a의 값은? (단, $a\neq0$)

① -10 ✓② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2

중심이 점 $(2,\ -4)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y+4)^2=r^2$
이 원이 점 $(-2,\ -2)$를 지나므로 $(-2-2)^2+(-2+4)^2=r^2$ $\quad\therefore r^2=20$
원 $(x-2)^2+(y+4)^2=20$이 y축과 만나는 점의 y좌표는 $(0-2)^2+(y+4)^2=20$
$y+4=\pm4$ $\quad\therefore y=0$ 또는 $y=-8$
$\therefore a=-8\ (\because a\neq0)$

02 학교 시험 기출

중심이 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$ 위에 있고 두 점 $(1,\ 1)$, $(0,\ 2)$를 지나는 원의 넓이는?

① π ② 4π ③ 9π
④ 16π ✓⑤ 25π

중심이 점 $(2a,\ a+3)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은
$(x-2a)^2+(y-a-3)^2=r^2$
이 원이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로 $(1-2a)^2+(1-a-3)^2=r^2$ …… ㉠
이 원이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로 $(0-2a)^2+(2-a-3)^2=r^2$ …… ㉡
㉡-㉠을 하면 $a=2$이고, 이를 ㉠에 대입하면 $r^2=5\times2^2+5=25$
따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi r^2=25\pi$

03

직선 $2x-y+8=0$이 x축, y축과 만나는 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은?

✓① $(x+2)^2+(y-4)^2=20$
② $(x+2)^2+(y+4)^2=20$
③ $(x+2)^2+(y-4)^2=10$
④ $(x+2)^2+(y+4)^2=10$
⑤ $(x+2)^2+(y-4)^2=5$

직선 $2x-y+8=0$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(-4,\ 0)$, $(0,\ 8)$이므로
$\mathrm{A}(-4,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 8)$이라 하면 원의 중심은 $\left(\frac{-4+0}{2},\ \frac{0+8}{2}\right)$, 즉 $(-2,\ 4)$
원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{(0+4)^2+(8-0)^2}=2\sqrt{5}$
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x+2)^2+(y-4)^2=20$

04

좌표평면 위의 세 점 $(0,\ 0)$, $(-4,\ 4)$, $(10,\ 10)$을 지나는 원의 중심의 좌표는?

① $(2,\ 5)$ ✓② $(3,\ 7)$ ③ $(4,\ 6)$
④ $(5,\ 9)$ ⑤ $(6,\ 6)$

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ (A, B, C는 상수)이라 하자.
이 원이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로 $C=0$이고, 이 원이 두 점 $(-4,\ 4)$, $(10,\ 10)$을 지나므로
$(-4)^2+4^2-4A+4B=0$ $\quad\therefore A-B=8$
$10^2+10^2+10A+10B=0$ $\quad\therefore A+B=-20$
두 식을 연립하여 풀면 $A=-6$, $B=-14$
따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2-6x-14y=0$, 즉 $(x-3)^2+(y-7)^2=58$
이므로 원의 중심의 좌표는 $(3,\ 7)$이다.

05

세 점 $\mathrm{P}(2,\ -1)$, $\mathrm{Q}(8,\ 3)$, $\mathrm{R}(3,\ 4)$를 지나는 원이 x축과 두 점 A, B에서 만날 때, 선분 AB의 길이는?

✓① $4\sqrt{3}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ 8
④ $6\sqrt{2}$ ⑤ 10

세 점 $\mathrm{P}(2,\ -1)$, $\mathrm{Q}(8,\ 3)$, $\mathrm{R}(3,\ 4)$를 지나는 원의 중심을 $\mathrm{C}(a,\ b)$라 하면
$\overline{\mathrm{CP}}^2=\overline{\mathrm{CQ}}^2$에서 $(a-2)^2+(b+1)^2=(a-8)^2+(b-3)^2$ $\quad\therefore 3a+2b-17=0$
$\overline{\mathrm{CQ}}^2=\overline{\mathrm{CR}}^2$에서 $(a-8)^2+(b-3)^2=(a-3)^2+(b-4)^2$ $\quad\therefore 5a-b-24=0$
두 식을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=1$
반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(5-2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{13}$
원의 방정식은 $(x-5)^2+(y-1)^2=13$이므로 x축과 만나는 점의 x좌표는
$(x-5)^2+(0-1)^2=13$에서 $x=5\pm2\sqrt{3}$ $\quad\therefore \overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{3}$

06 교육청 기출

좌표평면에서 직선 $y=2x+3$이 원

$$x^2+y^2-4x-2ay-19=0$$

의 중심을 지날 때, 상수 a의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
✓④ 7 ⑤ 8

$x^2+y^2-4x-2ay-19=0$에서
$(x-2)^2+(y-a)^2=a^2+23$
즉, 원의 중심의 좌표는 $(2,\ a)$이고, 직선 $y=2x+3$이 원의 중심을 지나므로
$a=2\times2+3=7$

07 실전 Plus

원 $x^2+y^2-4x+2y+k^2-6k+10=0$의 넓이가 최대일 때, 반지름의 길이를 구하시오. 2

$x^2+y^2-4x+2y+k^2-6k+10=0$에서
$(x-2)^2+(y+1)^2=-k^2+6k-5$
$-k^2+6k-5>0$, $(k-1)(k-5)<0$
$\therefore 1<k<5$
원의 넓이가 최대이려면 반지름의 길이가 최대이어야 하므로
$\sqrt{-k^2+6k-5}=\sqrt{-(k-3)^2+4}$에서 $k=3$일 때 최댓값은 $\sqrt{4}=2$이다.

08

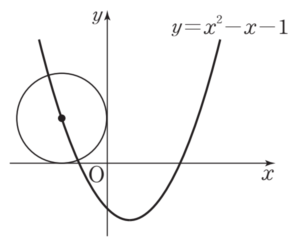
원 $x^2+y^2+4x-2ay+b=0$이 점 $(1,\ 3)$을 지나고 x축에 접할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ✓⑤ 7

$x^2+y^2+4x-2ay+b=0$에서
$(x+2)^2+(y-a)^2=a^2-b+4$
원이 x축에 접하므로 $\sqrt{a^2-b+4}=|a|$
$a^2-b+4=a^2$ $\quad\therefore b=4$
원 $(x+2)^2+(y-a)^2=a^2$이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로
$(1+2)^2+(3-a)^2=a^2$, $6a=18$ $\quad\therefore a=3$
$\therefore a+b=3+4=7$

09 교육청 기출

곡선 $y=x^2-x-1$ 위의 점 중 제2사분면에 있는 점을 중심으로 하고, x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식은 $x^2+y^2+ax+by+c=0$이다. $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) 1



원의 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 원의 중심의 좌표는 $(-r, r)$이다.
이 점이 곡선 $y=x^2-x-1$ 위에 있으므로
$r=(-r)^2-(-r)-1 \quad \therefore r=1\ (\because r>0)$
따라서 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$, 즉 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$이므로
$a=2, b=-2, c=1 \quad \therefore a+b+c=2+(-2)+1=1$

10

점 $A(a, 3)$과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P에 대하여 선분 AP의 길이의 최댓값이 7, 최솟값이 3일 때, 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오. −16

점 $A(a, 3)$의 y좌표가 3이므로 점 A는 원 밖의 점이다.
원의 중심과 점 $A(a, 3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{a^2+9}$
$\sqrt{a^2+9}+2=7$, $\sqrt{a^2+9}-2=3$에서 $a^2=16 \quad \therefore a=\pm 4$
따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 $4\times(-4)=-16$

11 실전 Plus

두 점 $A(-5, 2)$, $B(-1, 2)$로부터의 거리의 비가 $3:1$인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값을 구하시오. 3

$\overline{PA}:\overline{PB}=3:1$에서 $\overline{PA}^2=9\overline{PB}^2$이므로 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면
$x^2+y^2+10x-4y+29=9(x^2+y^2+2x-4y+5) \quad \therefore \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{9}{4}$
원 위의 점 P에서 직선 $y=2$에 내린 수선의 발을 H라 하면
삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH}=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{3}{2}=3$

12

원 $x^2+y^2-2y=0$과 직선 $mx-y-3=0$에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, m은 실수이다.)

보기

ㄱ. 원의 넓이는 π이다.
ㄴ. $m=\sqrt{15}$이면 원과 직선은 접한다.
ㄷ. 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 양의 정수 m의 최솟값은 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄷ. 원의 중심 $(0, 1)$과 직선 $mx-y-3=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이보다 작아야 하므로
$\frac{|m\times 0-1-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}<1$, $m^2>15 \quad \therefore m<-\sqrt{15}$ 또는 $m>\sqrt{15}$
이를 만족시키는 양의 정수 m의 최솟값은 4이다.

13

직선 $3x+4y-12=0$과 x축, y축에 동시에 접하고 중심이 제1사분면에 있는 두 원 중 큰 원의 넓이는?

① 4π ② 16π ③ 36π
④ 64π ⑤ 100π

원의 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 원의 방정식은 $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$
원의 중심 (r, r)와 직선 $3x+4y-12=0$ 사이의 거리는
$\frac{|3r+4r-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|7r-12|}{5}=r$, $|7r-12|=5r$
$\therefore r=6$ 또는 $r=1$
따라서 구하는 넓이는 $\pi r^2=36\pi$

14 학교 시험 기출

원 $x^2+y^2-4x+2y=0$과 직선 $2x+y+k=0$의 교점이 존재하지 않을 때, 자연수 k의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

$x^2+y^2-4x+2y=0$에서 $(x-2)^2+(y+1)^2=5$
원의 중심 $(2, -1)$과 직선 $2x+y+k=0$ 사이의 거리는
$\frac{|2\times 2-1+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|k+3|}{\sqrt{5}}$
$|k+3|>5 \quad \therefore k<-8$ 또는 $k>2$
따라서 조건을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 3이다.

15

원 $(x-1)^2+(y-2)^2=18$과 직선 $x+y+k=0$이 만나서 생기는 현의 길이가 8일 때, 모든 상수 k의 값의 합은?

① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

원 $(x-1)^2+(y-2)^2=18$의 중심을 C라 하고, 이 원과 직선 $x+y+k=0$이 만나는 두 점을 A, B라 하자.
원의 중심 $C(1, 2)$에서 직선 $x+y+k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 8=4$, $\overline{CA}=3\sqrt{2}$, $\overline{CH}=\frac{|1+2+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k+3|}{\sqrt{2}}$
직각삼각형 CAH에서 $\frac{|k+3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-4^2}=\sqrt{2}$, $k+3=\pm 2$
따라서 $k=-1$ 또는 $k=-5$이므로 구하는 상수 k의 값의 합은 $-1+(-5)=-6$

16

점 $P(5, 4)$에서 원 $x^2+y^2-6x+7=0$에 그은 두 접선의 접점을 각각 Q, R, 원의 중심을 C라 할 때, 네 점 P, Q, C, R를 꼭짓점으로 하는 사각형의 둘레의 길이를 구하시오. $8\sqrt{2}$

$x^2+y^2-6x+7=0$에서 $(x-3)^2+y^2=2$
$\overline{PC}=\sqrt{(3-5)^2+(0-4)^2}=2\sqrt{5}$
직각삼각형 PQC에서
$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PC}^2-\overline{CQ}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$
따라서 $\overline{CQ}=\overline{CR}=\sqrt{2}$, $\overline{PQ}=\overline{PR}=3\sqrt{2}$이므로 사각형 PQCR의 둘레의 길이는
$3\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+3\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

중단원 점검 문제

정답과 풀이 049쪽

17 실전 Plus

원 $x^2+y^2=4$ 위의 점과 직선 $y=mx+5$ 사이의 거리의 최댓값은? (단, m은 상수이다.)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

원의 중심과 직선 $y=mx+5$, 즉 $mx-y+5=0$ 사이의 거리는
$\frac{|0-0+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|5|}{\sqrt{m^2+1}}$
즉, 원 위의 점과 직선 $y=mx+5$ 사이의 거리의 최댓값은 $\frac{|5|}{\sqrt{m^2+1}}+2$에서
m^2+1의 값이 최소인 경우이므로 $m=0$일 때 최댓값을 갖는다.
따라서 구하는 최댓값은 $\frac{|5|}{\sqrt{0^2+1}}+2=5+2=7$

18

두 점 A$(6, 3)$, B$(0, 5)$와 원 $x^2+y^2=10$ 위의 임의의 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

① 5 ② $5\sqrt{5}$ ③ $5\sqrt{10}$
④ 25 ⑤ $25\sqrt{5}$

직선 AB의 방정식은 $y-3=\frac{5-3}{0-6}(x-6)$ $\quad\therefore x+3y-15=0$
원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $x+3y-15=0$ 사이의 거리는 $\frac{|0+0-15|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$
삼각형 PAB의 넓이가 최대일 때의 높이는 $\frac{3\sqrt{10}}{2}+\sqrt{10}=\frac{5\sqrt{10}}{2}$
$\overline{AB}=\sqrt{(0-6)^2+(5-3)^2}=2\sqrt{10}$이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은
$\frac{1}{2}\times2\sqrt{10}\times\frac{5\sqrt{10}}{2}=25$

19 실전 Plus

서로 다른 두 점에서 만나는 두 원

C_1: $x^2+y^2+2ax+2y+6=0$,
C_2: $x^2+y^2+4x+6y+10=0$

이 있다. 두 원 C_1, C_2의 교점을 지나는 직선이 원 C_2의 넓이를 이등분할 때, 상수 a의 값을 구하시오. 4

C_2: $x^2+y^2+4x+6y+10=0$에서 $(x+2)^2+(y+3)^2=3$
두 원 C_1, C_2의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x^2+y^2+2ax+2y+6)-(x^2+y^2+4x+6y+10)=0$
$\therefore (a-2)x-2y-2=0$
이 직선이 원 C_2의 넓이를 이등분하므로 원 C_2의 중심 $(-2, -3)$을 지난다.
즉, $-2(a-2)-2\times(-3)-2=0$이므로 $-2a+4+6-2=0$ $\quad\therefore a=4$

20

원 $x^2+y^2=20$에 접하면서 기울기가 m인 직선이 점 $(4, -2)$를 지날 때, m의 값을 구하시오. 2

원 $x^2+y^2=20$에 접하면서 기울기가 m인 직선의 방정식은
$y=mx\pm\sqrt{20m^2+20}$
이 직선이 점 $(4, -2)$를 지나므로
$-2=4m\pm\sqrt{20m^2+20}$, $16m^2+16m+4=20m^2+20$
$m^2-4m+4=0$, $(m-2)^2=0$ $\quad\therefore m=2$

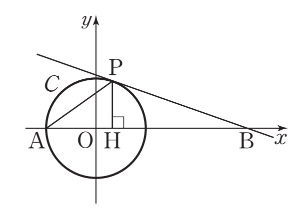
21

원 $x^2+y^2=13$ 위의 두 점 $(2, -3)$, $(-3, 2)$에서의 접선의 교점의 좌표는?

① $(-13, -13)$ ② $(-12, -12)$
③ $(13, -13)$ ④ $(12, -12)$
⑤ $(13, 13)$

점 $(2, -3)$에서의 접선의 방정식은 $2x-3y=13$
점 $(-3, 2)$에서의 접선의 방정식은 $-3x+2y=13$
연립하여 풀면
$x=-13$, $y=-13$

22 교육청 기출



오른쪽 그림과 같이 좌표평면에 원

C: $x^2+y^2=4$

와 점 A$(-2, 0)$이 있다. 원 C 위의 제1사분면 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. $2\overline{AH}=\overline{HB}$일 때, 삼각형 PAB의 넓이는?

① $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $\frac{14\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

원 C 위의 점 P의 좌표를 (x_1, y_1) $(x_1>0, y_1>0)$이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=4$
B$\left(\frac{4}{x_1}, 0\right)$, H$(x_1, 0)$이므로 $2\overline{AH}=\overline{HB}$에서 $2(x_1+2)=\frac{4}{x_1}-x_1$
$\therefore x_1=\frac{2}{3}$ $(\because x_1>0)$
점 P$\left(\frac{2}{3}, y_1\right)$이 원 C 위의 점이므로 $\left(\frac{2}{3}\right)^2+y_1^2=4$ $\quad\therefore y_1=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ $(\because y_1>0)$
$\therefore \triangle PAB=\frac{1}{2}\times(6+2)\times\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$

23 학교 시험 기출

점 P$(-2, 4)$에서 원 $x^2+y^2=2$에 그은 두 접선이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. 12

원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=2$ …… ㉠
㉠이 점 P$(-2, 4)$를 지나므로 $-2x_1+4y_1=2$ $\quad\therefore x_1=2y_1-1$
$(2y_1-1)^2+y_1^2=2$, $(5y_1+1)(y_1-1)=0$ $\quad\therefore y_1=-\frac{1}{5}$ 또는 $y_1=1$
즉, 접점의 좌표는 $\left(-\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ 또는 $(1, 1)$이므로 ㉠에서 구하는 접선의 방정식은
$y=-7x-10$ 또는 $y=-x+2$
따라서 두 접선이 y축과 만나는 두 점의 y좌표는 -10, 2이므로 구하는 선분의 길이는
$2-(-10)=12$

01 점의 평행이동

❶ 평행이동

점 또는 한 도형을 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 옮기는 것

❷ 점의 평행이동

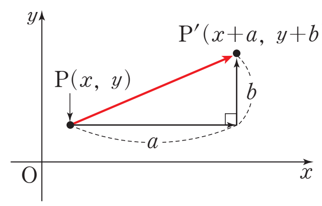
점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점 P'은

$$\mathrm{P}'(x+a,\ y+b)$$

이고, 이 평행이동을

$$(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$$

와 같이 나타낸다.



보기 점 $(1,\ 1)$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(1+1,\ 1-2)$, 즉 $(2,\ -1)$

풍쌤 Tip 평행이동한 점의 좌표는 처음 점의 좌표의 x 대신 $x+a$를, y 대신 $y+b$를 대입한 것과 같다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 051쪽

001

점 $(-2,\ 3)$을 다음과 같이 평행이동한 점의 좌표를 구하시오.

(1) x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동 $(1,\ 4)$

(2) x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동 $(-4,\ 2)$

(3) x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동 $(-3,\ 5)$

002

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+2,\ y-1)$에 의하여 다음 점이 옮겨지는 점의 좌표를 구하시오.

(1) 점 $(0,\ 0)$ $(2,\ -1)$

(2) 점 $(1,\ 3)$ $(3,\ 2)$

(3) 점 $(3,\ -2)$ $(5,\ -3)$

(4) 점 $(-5,\ -3)$ $(-3,\ -4)$

003

다음은 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 점 $(2,\ 3)$이 점 $(-1,\ 5)$로 옮겨질 때, 실수 a, b의 값을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

$(2,\ 3) \longrightarrow (2+a,\ \boxed{3}+b)$이므로

$2+a=-1,\ \boxed{3}+b=5$

$\therefore a=\boxed{-3},\ b=\boxed{2}$

004

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 점 P가 점 Q로 옮겨질 때, 실수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $\mathrm{P}(0,\ 1) \longrightarrow \mathrm{Q}(3,\ 2)$ $a=3,\ b=1$

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 점 $\mathrm{P}(0,\ 1)$이 옮겨지는 점의 좌표는 $(0+a,\ 1+b)$

$0+a=3,\ 1+b=2$ $\therefore a=3,\ b=1$

(2) $\mathrm{P}(-2,\ 3) \longrightarrow \mathrm{Q}(-1,\ 2)$ $a=1,\ b=-1$

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 점 $\mathrm{P}(-2,\ 3)$이 옮겨지는 점의 좌표는 $(-2+a,\ 3+b)$

$-2+a=-1,\ 3+b=2$ $\therefore a=1,\ b=-1$

(3) $\mathrm{P}(1,\ -5) \longrightarrow \mathrm{Q}(-2,\ -3)$ $a=-3,\ b=2$

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 점 $\mathrm{P}(1,\ -5)$가 옮겨지는 점의 좌표는 $(1+a,\ -5+b)$

$1+a=-2,\ -5+b=-3$ $\therefore a=-3,\ b=2$

02 도형의 평행이동

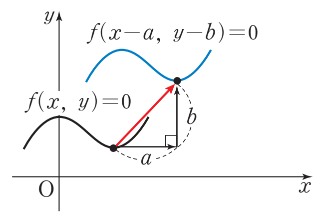
❶ 도형의 평행이동

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x-a,\ y-b)=0$$

이고, 이 평행이동을

$f(x, y)=0 \longrightarrow f(x-a, y-b)=0$과 같이 나타낸다.



보기 직선 $x+y+1=0$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 도형의 방정식은
$(x-1)+\{y-(-2)\}+1=0$, 즉 $x+y+2=0$

참고 평행이동은 위치만 옮기는 것이므로 도형의 모양이나 크기는 변하지 않는다.

• 방정식 $f(x, y)=0$은 일반적으로 좌표평면 위의 도형을 나타낸다.

풍쌤 Tip 평행이동한 도형의 방정식은 처음 도형의 방정식에 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$를 대입한 것과 같다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 051쪽

005

다음 도형을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

(1) 직선 $2x+y+1=0$ $\quad 2x+y-6=0$

$2(x-3)+(y-1)+1=0 \quad \therefore 2x+y-6=0$

(2) 포물선 $y=2x^2+1$ $\quad y=2(x-3)^2+2$

$y-1=2(x-3)^2+1 \quad \therefore y=2(x-3)^2+2$

(3) 원 $(x-1)^2+y^2=3$ $\quad (x-4)^2+(y-1)^2=3$

$(x-3-1)^2+(y-1)^2=3 \quad \therefore (x-4)^2+(y-1)^2=3$

006

평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+2, y-1)$에 의하여 다음 도형이 옮겨지는 도형의 방정식을 구하시오.

(1) 직선 $x-2y+3=0$ $\quad x-2y-1=0$

$(x-2)-2(y+1)+3=0 \quad \therefore x-2y-1=0$

(2) 포물선 $y=x^2+x+1$ $\quad y=x^2-3x+2$

$y+1=(x-2)^2+(x-2)+1 \quad \therefore y=x^2-3x+2$

(3) 원 $x^2+(y-2)^2=1$ $\quad (x-2)^2+(y-1)^2=1$

$(x-2)^2+(y+1-2)^2=1 \quad \therefore (x-2)^2+(y-1)^2=1$

007

도형 $f(x, y)=0$을 도형 $f(x-1, y-2)=0$으로 옮기는 평행이동에 의하여 다음 도형이 옮겨지는 도형의 방정식을 구하시오.

(1) 직선 $3x-y+2=0$ $\quad 3x-y+1=0$

$3(x-1)-(y-2)+2=0 \quad \therefore 3x-y+1=0$

(2) 포물선 $y=(x+2)^2+3$ $\quad y=(x+1)^2+5$

$y-2=(x-1+2)^2+3 \quad \therefore y=(x+1)^2+5$

(3) 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=4$ $\quad x^2+(y-3)^2=4$

$(x-1+1)^2+(y-2-1)^2=4 \quad \therefore x^2+(y-3)^2=4$

008

도형 $f(x, y)=0$을 도형 $f(x-a, y-b)=0$으로 옮기는 평행이동에 의하여 도형 F가 도형 F'으로 옮겨질 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오.

(1) F: $x-y-3=0$, F': $x-y+1=0$ $\quad -4$

도형 F'의 방정식은 $(x-a)-(y-b)-3=0 \quad \therefore x-y-a+b-3=0$
$-a+b-3=1 \quad \therefore a-b=-4$

(2) F: $y=(x+1)^2$, F': $y=x^2+3$ $\quad -2$

도형 F'의 방정식은 $y-b=(x-a+1)^2 \quad \therefore y=(x-a+1)^2+b$
$-a+1=0$, $b=3 \quad \therefore a=1, b=3 \quad \therefore a-b=1-3=-2$

(3) F: $(x+2)^2+(y+3)^2=2$, F': $x^2+(y+1)^2=2$ $\quad 0$

도형 F'의 방정식은 $(x-a+2)^2+(y-b+3)^2=2$
$-a+2=0$, $-b+3=1 \quad \therefore a=2, b=2 \quad \therefore a-b=2-2=0$

유형 실전 문제

정답과 풀이 052쪽

유형 01 점의 평행이동 중요

점 (x, y)를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(x+m, y+n)$

풍쌤 Point 평행이동한 점의 좌표를 구하려면 이동한 만큼 각 좌표에 더해 준다. 즉, 처음 점의 좌표에 x 대신 $x+m$을, y 대신 $y+n$을 대입한다.

009

점 $(-4, -1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-1, b)$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. 5

점 $(-4, -1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(-4+a, -1+3)$, 즉 $(a-4, 2)$
$a-4=-1$, $2=b$ $\therefore a=3, b=2$
$\therefore a+b=3+2=5$

010

점 $(2, -3)$을 점 $(5, 1)$로 옮기는 평행이동에 의하여 점 P가 점 $(-2, 1)$로 옮겨질 때, 점 P의 좌표는?

① $(-8, -4)$ ② $(-5, -5)$ √③ $(-5, -3)$
④ $(-3, -3)$ ⑤ $(-3, -1)$

점 $(2, -3)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(2+a, -3+b)$
$2+a=5$, $-3+b=1$ $\therefore a=3, b=4$
점 P의 좌표를 (c, d)라 하면 점 P를 평행이동한 점의 좌표는
$(c+3, d+4)$
$c+3=-2$, $d+4=1$ $\therefore c=-5, d=-3$
따라서 점 P의 좌표는 $(-5, -3)$이다.

011

점 $\mathrm{P}(a, a^2)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점이 직선 $y=3x+1$ 위에 있을 때, 모든 실수 a의 값의 합은?

① -3 ② -1 ③ 1
√④ 3 ⑤ 5

점 $\mathrm{P}(a, a^2)$을 평행이동한 점의 좌표는 $(a+2, a^2+3)$
이 점이 직선 $y=3x+1$ 위에 있으므로
$a^2+3=3(a+2)+1$, $(a+1)(a-4)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$
따라서 모든 실수 a의 값의 합은
$-1+4=3$

유형 02 직선의 평행이동 중요

직선 $ax+by+c=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$a(x-m)+b(y-n)+c=0$

풍쌤 Point 처음 직선의 방정식에 x 대신 $x-m$을, y 대신 $y-n$을 대입한다. 이때 직선은 평행이동해도 기울기는 변하지 않는다.

012

직선 $2x+ay+b=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선이 점 $(3, 4)$를 지날 때, 상수 a, b에 대하여 $5a+b$의 값은?

√① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

직선 $2x+ay+b=0$을 평행이동한 직선의 방정식은
$2(x-2)+a(y+1)+b=0$
$\therefore 2x+ay+a+b-4=0$
이 직선이 점 $(3, 4)$를 지나므로
$2\times3+4a+a+b-4=0$
$\therefore 5a+b=-2$

013

직선 $ax+y+1=0$을 평행이동
$(x, y) \longrightarrow (x+1, y+b)$에 의하여 옮겼더니 처음 직선과 일치하였을 때, $a+b$의 값을 구하시오. 0
(단, a는 0이 아닌 상수이다.)

직선 $ax+y+1=0$을 이 평행이동에 의하여 옮긴 직선의 방정식은
$a(x-1)+(y-b)+1=0$
$\therefore ax+y-a-b+1=0$
$-a-b+1=1$ $\therefore a+b=0$

014

직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선이 직선 $y=x+2$와 y축에서 수직으로 만날 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.
$a=-1, b=3$

직선 $y=ax+b$를 평행이동한 직선의 방정식은
$y+2=a(x-1)+b$
$\therefore y=ax-a+b-2$
직선 $y=x+2$와 수직이므로 $a=-1$
또, 직선 $y=x+2$와 y축에서 만나므로
$1+b-2=2$ $\therefore b=3$

유형 실전 문제

정답과 풀이 052쪽

유형 03 포물선의 평행이동

포물선 $y=ax^2+bx+c$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-n=a(x-m)^2+b(x-m)+c$$

풍쌤 Point 포물선은 평행이동해도 볼록한 방향과 폭이 변하지 않으므로 꼭짓점의 평행이동으로 바꾸어 생각할 수 있다.

$$\underbrace{y=a(x-p)^2+q}_{\text{꼭짓점: }(p,\ q)} \longrightarrow \underbrace{y-n=a(x-m-p)^2+q}_{\text{꼭짓점: }(p+m,\ q+n)}$$

015

포물선 $y=x^2-2x+3$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 포물선 $y=x^2-3$과 일치하였다. 이때 $a-b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
✓④ 4 ⑤ 5

포물선 $y=x^2-2x+3$, 즉 $y=(x-1)^2+2$를 평행이동한 포물선의 방정식은
$y-b=(x-a-1)^2+2$ $\quad\therefore y=(x-a-1)^2+b+2$
$-a-1=0,\ b+2=-3$ $\quad\therefore a=-1,\ b=-5$
$\therefore a-b=-1-(-5)=4$

016

포물선 $y=4x^2+3$을 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 $k+2$만큼 평행이동한 포물선의 꼭짓점이 직선 $y=2x+6$ 위에 있을 때, k의 값은?

① -2 ✓② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

포물선 $y=4x^2+3$을 평행이동한 포물선의 방정식은
$y-(k+2)=4(x-k)^2+3$
$\therefore y=4(x-k)^2+k+5$
이 포물선의 꼭짓점 $(k,\ k+5)$가 직선 $y=2x+6$ 위에 있으므로
$k+5=2k+6$ $\quad\therefore k=-1$

017

포물선 $y=(x-2)^2+a$를 포물선 $y=x^2-2x+4$로 옮기는 평행이동에 의하여 포물선 $y=x^2+2$를 옮겼더니 포물선 $y=x^2+bx+c$와 일치하였다. 이때 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오. 8

$y=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$이므로 포물선 $y=(x-2)^2+a$를 포물선 $y=x^2-2x+4$로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 $-a+3$만큼 평행이동하는 것이다.
포물선 $y=x^2+2$를 이 평행이동에 의하여 옮긴 포물선의 방정식은
$y+a-3=(x+1)^2+2$ $\quad\therefore y=x^2+2x-a+6$
이 포물선이 포물선 $y=x^2+bx+c$와 일치하므로
$2=b,\ -a+6=c$ $\quad\therefore a+c=6,\ b=2$
$\therefore a+b+c=8$

유형 04 원의 평행이동

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-m-a)^2+(y-n-b)^2=r^2$$

풍쌤 Point 원은 평행이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 원의 중심의 평행이동으로 바꾸어 생각할 수 있다.

018

원 $(x+3)^2+(y-4)^2=4$를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동하면 y축에 접할 때, 모든 정수 m의 값의 합은?

① 5 ✓② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

원 $(x+3)^2+(y-4)^2=4$를 평행이동한 원의 방정식은
$(x-m+3)^2+(y-4)^2=4$
이때 이 원이 y축에 접하므로
$|m-3|=2$ $\quad\therefore m=5$ 또는 $m=1$
따라서 모든 정수 m의 값의 합은
$5+1=6$

019

평행이동하여 원 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$과 겹쳐질 수 있는 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $x^2+y^2+6x+5=0$
ㄴ. $x^2+y^2-4x-2y+1=0$
ㄷ. $x^2+y^2+2x-4y-5=0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
✓④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

$x^2+y^2+2x-4y+1=0$에서
$(x+1)^2+(y-2)^2=4$
평행이동하여 이 원과 겹쳐지려면 반지름의 길이가 2로 같은 원이어야 한다.
ㄱ. $x^2+y^2+6x+5=0$에서 $(x+3)^2+y^2=4$
ㄴ. $x^2+y^2-4x-2y+1=0$에서 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$
ㄷ. $x^2+y^2+2x-4y-5=0$에서 $(x+1)^2+(y-2)^2=10$

020

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 원 $x^2+(y-2)^2=9$를 옮겼더니 원 $x^2+y^2-6x+2y+1=0$과 일치할 때, 상수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 0

원 $x^2+(y-2)^2=9$가 옮겨지는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b-2)^2=9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$x^2+y^2-6x+2y+1=0$에서
$(x-3)^2+(y+1)^2=9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡이 일치하므로
$-a=-3,\ -b-2=1$ $\quad\therefore a=3,\ b=-3$
$\therefore a+b=3+(-3)=0$

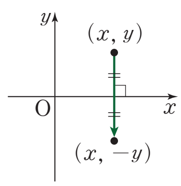
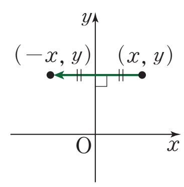
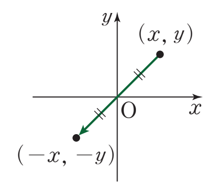
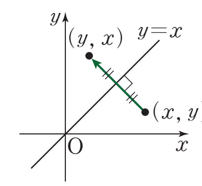
03 점의 대칭이동

❶ 대칭이동

도형을 한 점 또는 한 직선에 대하여 대칭인 도형으로 옮기는 것

❷ 점의 대칭이동

점 (x, y)를 x축, y축, 원점, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 다음과 같다.

x축에 대한 대칭이동	y축에 대한 대칭이동	원점에 대한 대칭이동	직선 $y=x$에 대한 대칭이동
			
$(x, y) \longrightarrow (x, -y)$ → y좌표의 부호가 바뀐다.	$(x, y) \longrightarrow (-x, y)$ → x좌표의 부호가 바뀐다.	$(x, y) \longrightarrow (-x, -y)$ → x좌표, y좌표의 부호가 바뀐다.	$(x, y) \longrightarrow (y, x)$ → x좌표와 y좌표가 서로 바뀐다.

보기 점 $(1, 2)$를 대칭이동한 점의 좌표는 대칭의 기준에 따라 각각 다음과 같다.
① x축: $(1, -2)$ ② y축: $(-1, 2)$ ③ 원점: $(-1, -2)$ ④ 직선 $y=x$: $(2, 1)$

개념 기본 문제

정답과 풀이 053쪽

021

다음 점 P를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 Q, y축에 대하여 대칭이동한 점을 R, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 S, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 T라 할 때, 네 점 Q, R, S, T의 좌표를 각각 구하시오.

(1) $\mathrm{P}(3, 4)$ **Q$(3, -4)$, R$(-3, 4)$, S$(-3, -4)$, T$(4, 3)$**

(2) $\mathrm{P}(2, -1)$ **Q$(2, 1)$, R$(-2, -1)$, S$(-2, 1)$, T$(-1, 2)$**

(3) $\mathrm{P}(-3, -2)$ **Q$(-3, 2)$, R$(3, -2)$, S$(3, 2)$, T$(-2, -3)$**

(4) $\mathrm{P}(-1, 5)$ **Q$(-1, -5)$, R$(1, 5)$, S$(1, -5)$, T$(5, -1)$**

022

점 $(3, -4)$를 다음과 같이 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

(1) 원점에 대하여 대칭이동한 후, y축에 대하여 대칭이동 **$(3, 4)$**

단계1. 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표 구하기

점 $(3, -4)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-3, 4)$

단계2. 단계1.에서 구한 점을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표 구하기

점 $(-3, 4)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(3, 4)$

(2) x축에 대하여 대칭이동한 후, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동 **$(4, 3)$**

점 $(3, -4)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(3, 4)$
점 $(3, 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(4, 3)$

(3) 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후, y축에 대하여 대칭이동 **$(4, 3)$**

점 $(3, -4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-4, 3)$
점 $(-4, 3)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(4, 3)$

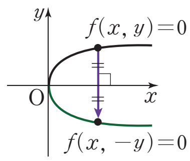
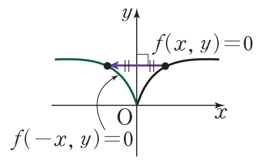
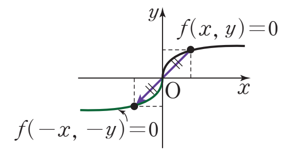
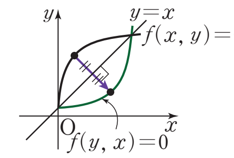
(4) 원점에 대하여 대칭이동한 후, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동 **$(4, -3)$**

점 $(3, -4)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-3, 4)$
점 $(-3, 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(4, -3)$

04 도형의 대칭이동

❶ 도형의 대칭이동

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축, y축, 원점, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 다음과 같다.

x축에 대한 대칭이동	y축에 대한 대칭이동	원점에 대한 대칭이동	직선 $y=x$에 대한 대칭이동
			
$f(x, y)=0 \longrightarrow f(x, -y)=0$ → y 대신 $-y$를 대입한다.	$f(x, y)=0 \longrightarrow f(-x, y)=0$ → x 대신 $-x$를 대입한다.	$f(x, y)=0 \longrightarrow f(-x, -y)=0$ → x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입한다.	$f(x, y)=0 \longrightarrow f(y, x)=0$ → x 대신 y, y 대신 x를 대입한다.

보기 직선 $x+y-1=0$을 x축에 대하여 대칭이동하면 y 대신 $-y$를 대입하면 되므로 구하는 방정식은
$x+(-y)-1=0$, 즉 $x-y-1=0$

개념 기본 문제

정답과 풀이 054쪽

023

직선 $2x+3y+1=0$을 다음에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하시오.

(1) x축 $\quad$ $2x-3y+1=0$

$2x+3\times(-y)+1=0$
$\therefore 2x-3y+1=0$

(2) y축 $\quad$ $2x-3y-1=0$

$2\times(-x)+3y+1=0$
$\therefore 2x-3y-1=0$

(3) 원점 $\quad$ $2x+3y-1=0$

$2\times(-x)+3\times(-y)+1=0$
$\therefore 2x+3y-1=0$

(4) 직선 $y=x$ $\quad$ $3x+2y+1=0$

$2\times y+3\times x+1=0$
$\therefore 3x+2y+1=0$

024

포물선 $y=(x-2)^2+3$을 다음에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하시오.

(1) x축 $\quad$ $y=-(x-2)^2-3$

$-y=(x-2)^2+3 \quad \therefore y=-(x-2)^2-3$

(2) y축 $\quad$ $y=(x+2)^2+3$

$y=(-x-2)^2+3 \quad \therefore y=(x+2)^2+3$

(3) 원점 $\quad$ $y=-(x+2)^2-3$

$-y=(-x-2)^2+3 \quad \therefore y=-(x+2)^2-3$

025

원 $(x+1)^2+(y-3)^2=4$를 다음에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하시오.

(1) x축 $\quad$ $(x+1)^2+(y+3)^2=4$

$(x+1)^2+(-y-3)^2=4 \quad \therefore (x+1)^2+(y+3)^2=4$

(2) y축 $\quad$ $(x-1)^2+(y-3)^2=4$

$(-x+1)^2+(y-3)^2=4 \quad \therefore (x-1)^2+(y-3)^2=4$

(3) 원점 $\quad$ $(x-1)^2+(y+3)^2=4$

$(-x+1)^2+(-y-3)^2=4 \quad \therefore (x-1)^2+(y+3)^2=4$

(4) 직선 $y=x$ $\quad$ $(x-3)^2+(y+1)^2=4$

$(y+1)^2+(x-3)^2=4 \quad \therefore (x-3)^2+(y+1)^2=4$

유형 실전 문제

정답과 풀이 054쪽

유형 05 점의 대칭이동 중요

점 $(x,\ y)$를 대칭이동한 점의 좌표는
① x축: $(x,\ -y)$ ← y좌표 부호를 반대로
② y축: $(-x,\ y)$ ← x좌표 부호를 반대로
③ 원점: $(-x,\ -y)$ ← x좌표, y좌표 부호를 반대로
④ 직선 $y=x$: $(y,\ x)$ ← x좌표, y좌표 자리 교체

풍쌤 Point 대칭이동하면서 바뀌는 것이 무엇인지 파악한다. 공식으로 외우기보다는 그림으로 파악하는 것이 실수를 줄일 수 있다.

026

점 P$(3,\ -2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 점 Q를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 R라 할 때, 점 R의 좌표는?

√① $(-3,\ -2)$ ② $(-3,\ 2)$ ③ $(-2,\ 3)$
④ $(2,\ -3)$ ⑤ $(3,\ -2)$

Q$(-3, 2)$, R$(-3, -2)$

027

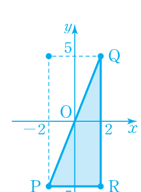
점 $(2,\ 4)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P, 점 $(2,\ -1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 직선 PQ의 기울기를 구하시오. -2

P$(2, -4)$, Q$(-1, 2)$
$\therefore \dfrac{2-(-4)}{-1-2}=-2$

028

점 $(-2,\ 5)$를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 각각 P, Q, R라 할 때, 삼각형 PRQ의 넓이를 구하시오. 20

P$(-2, -5)$, Q$(2, 5)$, R$(2, -5)$이므로
$\triangle\text{PRQ}=\dfrac{1}{2}\times|2-(-2)|\times|5-(-5)|$
$=\dfrac{1}{2}\times4\times10=20$



029

점 $(1,\ 5)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후, 원점에 대하여 대칭이동한 점과 직선 $3x+4y-6=0$ 사이의 거리를 구하시오. 5

점 $(1, 5)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(5, 1)$
점 $(5, 1)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-5, -1)$
따라서 점 $(-5, -1)$과 직선 $3x+4y-6=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|3\times(-5)+4\times(-1)-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{25}{5}=5$

유형 06 직선의 대칭이동 중요

직선 $ax+by+c=0$을 대칭이동한 직선의 방정식은
① x축: $ax-by+c=0$ ← y 대신 $-y$
② y축: $-ax+by+c=0$ ← x 대신 $-x$
③ 원점: $-ax-by+c=0$ ← x 대신 $-x$, y 대신 $-y$
④ 직선 $y=x$: $ay+bx+c=0$ ← x 대신 y, y 대신 x

풍쌤 Point 직선의 대칭이동은 점의 대칭이동과 방법이 동일하다. 대입하는 문자의 부호에 주의하여 직선의 방정식을 구한다.

030

직선 $3x+y+1=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선을 l이라 할 때, 직선 l을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은?

√① $x-3y-1=0$ ② $3x-y-1=0$
③ $x-3y+1=0$ ④ $3x-y+1=0$
⑤ $x+3y+1=0$

직선 l의 방정식은 $3x-y+1=0$
따라서 직선 l을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$x-3y-1=0$

031

점 $(1,\ -2)$를 점 $(-1,\ 2)$로 옮기는 대칭이동에 의하여 직선 $2x+y+k=0$이 옮겨지는 직선이 점 $(1,\ 4)$를 지날 때, 상수 k의 값을 구하시오. 6

점 $(1, -2)$를 점 $(-1, 2)$로 옮기는 대칭이동은 원점에 대한 대칭이동이다.
직선 $2x+y+k=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$2x+y-k=0$
이 직선이 점 $(1, 4)$를 지나므로
$2\times1+4-k=0 \quad \therefore k=6$

032

두 직선 $(2a+1)x+(b+2)y+3=0$, $(a+4)x+(b+1)y+3=0$이 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭일 때, 직선 $y=ax+b$의 x절편은?

√① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

직선 $(2a+1)x+(b+2)y+3=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$(b+2)x+(2a+1)y+3=0$
이 직선이 직선 $(a+4)x+(b+1)y+3=0$과 일치하므로
$b+2=a+4$, $2a+1=b+1$
$\therefore a=2, b=4$
따라서 직선 $y=ax+b$, 즉 $y=2x+4$의 x절편은
$0=2x+4 \quad \therefore x=-2$

유형 실전 문제

유형 07 포물선의 대칭이동

포물선 $y=ax^2+bx+c$를 대칭이동한 포물선의 방정식은

① x축: $-y=ax^2+bx+c$ ← y 대신 $-y$

② y축: $y=ax^2-bx+c$ ← x 대신 $-x$

③ 원점: $-y=ax^2-bx+c$ ← x 대신 $-x$, y 대신 $-y$

풍쌤 Point 포물선을 대칭이동하여도 포물선의 폭은 변하지 않지만 볼록한 방향이 바뀔 수 있으므로 주의한다.

033

포물선 $y=x^2+ax+b$를 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -1)$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 5　② 6　√③ 7　④ 8　⑤ 9

포물선 $y=x^2+ax+b$를 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=x^2-ax+b=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{a}{2},\ b-\frac{a^2}{4}\right)$이므로

$\frac{a}{2}=2,\ b-\frac{a^2}{4}=-1$

따라서 $a=4$, $b=3$이므로 $a+b=4+3=7$

034

포물선 $y=x^2-2ax+1$을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 꼭짓점이 직선 $y=-x+1$ 위에 있을 때, 양수 a의 값은?

√① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

포물선 $y=x^2-2ax+1$을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=-x^2+2ax-1=-(x-a)^2+a^2-1$

이 포물선의 꼭짓점이 직선 $y=-x+1$ 위에 있으므로

$a^2-1=-a+1,\ (a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$

035

포물선 $y=x^2+2ax+b$를 y축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(a-4,\ b-2)$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -3　② -1　③ 1　④ 3　√⑤ 5

포물선 $y=x^2+2ax+b$를 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=x^2-2ax+b$

원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=-x^2-2ax-b=-(x+a)^2+a^2-b$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-a,\ a^2-b)$이므로

$-a=a-4,\ a^2-b=b-2$　$\therefore a=2,\ b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$

유형 08 원의 대칭이동

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$을 대칭이동한 원의 방정식은

① x축: $(x-a)^2+(-y-b)^2=r^2$ ← y 대신 $-y$

② y축: $(-x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ← x 대신 $-x$

③ 원점: $(-x-a)^2+(-y-b)^2=r^2$ ← x 대신 $-x$, y 대신 $-y$

④ 직선 $y=x$: $(y-a)^2+(x-b)^2=r^2$ ← x 대신 y, y 대신 x

풍쌤 Point 원을 대칭이동하여도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 원의 대칭이동은 원의 중심의 대칭이동으로 바꾸어 생각할 수 있다.

036

원 $(x-2)^2+(y+2)^2=16$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 중심의 좌표가 $(a,\ b)$, 반지름의 길이는 r일 때, $a+b+r$의 값은? (단, $r>0$)

① 0　② 1　③ 2　④ 3　√⑤ 4

원 $(x-2)^2+(y+2)^2=16$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-2)^2=16$

$\therefore a=-2,\ b=2,\ r=4$

$\therefore a+b+r=-2+2+4=4$

037

중심의 좌표가 $(1,\ 3)$이고 반지름의 길이가 r인 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원이 점 $(-1,\ -1)$을 지날 때, 이 원의 넓이는?

① 4π　② 6π　√③ 8π　④ 10π　⑤ 12π

중심의 좌표가 $(1,\ 3)$이고 반지름의 길이가 r인 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y+3)^2=r^2$

이 원이 점 $(-1,\ -1)$을 지나므로 $(-1-1)^2+(-1+3)^2=r^2$　$\therefore r^2=8$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi r^2=8\pi$

038

원 $x^2+y^2-16x+12y+64=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 원을 C_1, 원 C_1을 원점에 대하여 대칭이동한 원을 C_2라 할 때, 두 원 C_1, C_2의 중심 사이의 거리는?

① 15　② 17　③ 18　√④ 20　⑤ 24

$x^2+y^2-16x+12y+64=0$에서 $(x-8)^2+(y+6)^2=36$

원 C_1의 방정식은 $(x-8)^2+(y-6)^2=36$

원 C_2의 방정식은 $(x+8)^2+(y+6)^2=36$

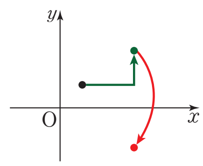
따라서 두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표는 각각 $(8,\ 6)$, $(-8,\ -6)$이므로 두 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-8-8)^2+(-6-6)^2}=\sqrt{400}=20$

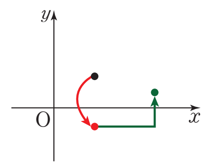
유형 09 평행이동과 대칭이동 중요

평행이동과 대칭이동을 연달아 할 때, 이동하는 순서에 주의하여 점의 좌표 또는 도형의 방정식을 구한다.

풍쌤 Point 무엇을 먼저 하느냐에 따라 결과가 달라지므로 이동 순서를 정확히 지킨다.



[평행이동 후 대칭이동]



[대칭이동 후 평행이동]

039

좌표평면 위의 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(4,\ 5)$일 때, 점 A의 좌표는?

① $(-5,\ 4)$ ② $(-3,\ 8)$ √③ $(-1,\ 9)$
④ $(1,\ 7)$ ⑤ $(3,\ 4)$

점 A의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a,\ b)$
점 $(-a,\ b)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(-a+3,\ b-4)$
$-a+3=4,\ b-4=5$ $\quad\therefore a=-1,\ b=9$

040

직선 $ax-y+1=0$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하였더니 처음 직선과 일치하였다. 이때 상수 a의 값을 구하시오. 1

직선 $ax-y+1=0$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$a(x-1)-(y+1)+1=0$ $\quad\therefore ax-y-a=0$
이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$x-ay+a=0$ $\quad\therefore a=1$

041

원 $x^2+y^2+2x=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 중심이 직선 $y=mx-1$ 위의 점일 때, 상수 m의 값은?

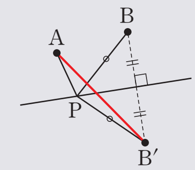
① -4 √② -3 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

원 $x^2+y^2+2x=0$, 즉 $(x+1)^2+y^2=1$을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $(x-1)^2+y^2=1$
이 원을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$
위의 원의 중심 $(-1,\ 2)$가 직선 $y=mx-1$ 위의 점이므로
$2=-m-1$ $\quad\therefore m=-3$

유형 10 선분의 길이의 합의 최솟값

두 점 A, B와 직선 l 위의 점 P에 대하여 점 B를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

$$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$$
$$\geq\overline{\mathrm{AB'}}$$



풍쌤 Point 세 점 A, P, B′이 한 직선 위에 있을 때 최솟값을 갖는다.

042

두 점 $\mathrm{A}(2,\ 5)$, $\mathrm{B}(4,\ -3)$과 y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은?

① 6 ② 8 √③ 10
④ 12 ⑤ 14

점 $\mathrm{B}(4,\ -3)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면
$\mathrm{B'}(-4,\ -3)$
$\therefore \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$
$\geq\overline{\mathrm{AB'}}$
$=\sqrt{(-4-2)^2+(-3-5)^2}$
$=10$

043

두 점 $\mathrm{A}(3,\ 4)$, $\mathrm{B}(-2,\ 1)$과 직선 $y=x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구하시오. $2\sqrt{10}$

점 $\mathrm{A}(3,\ 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면
$\mathrm{A'}(4,\ 3)$
$\therefore \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}$
$\geq\overline{\mathrm{A'B}}$
$=\sqrt{(-2-4)^2+(1-3)^2}$
$=2\sqrt{10}$

044

두 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$, $\mathrm{B}(-3,\ 2)$와 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$가 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표는?

① $(-2,\ 0)$ ② $(-1,\ 0)$ ③ $(0,\ 0)$
√④ $(1,\ 0)$ ⑤ $(2,\ 0)$

점 $\mathrm{B}(-3,\ 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 $\mathrm{B'}(-3,\ -2)$
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$가 최소가 되도록 하는 점 P는 직선 AB′과 x축의 교점이다.
직선 AB′의 방정식은
$y-1=\dfrac{-2-1}{-3-3}(x-3)$ $\quad\therefore y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$
이 직선이 x축과 만나는 점의 x좌표는 $0=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore x=1$
따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$가 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표는 $(1,\ 0)$이다.

중단원 점검 문제

01 학교 시험 기출

점 $(2,\ 3)$을 점 $(1,\ 5)$로 옮기는 평행이동

$$(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$$

에 의하여 직선 $2x+3y-3=0$이 옮겨지는 직선이 점 $(c,\ 3)$을 지날 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. 0

점 $(2, 3)$을 주어진 평행이동에 의하여 옮긴 점의 좌표는 $(2+a, 3+b)$
이 점이 점 $(1, 5)$이므로 $a=-1$, $b=2$
이 평행이동에 의하여 직선 $2x+3y-3=0$이 옮겨지는 직선의 방정식은
$2(x+1)+3(y-2)-3=0$ $\quad\therefore 2x+3y-7=0$
이 직선이 점 $(c, 3)$을 지나므로 $2c+3\times3-7=0$ $\quad\therefore c=-1$
$\therefore a+b+c=-1+2-1=0$

02

포물선 $y=x^2-6x+6$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $a+2$만큼 평행이동한 포물선의 꼭짓점이 y축 위에 있을 때, 이 포물선의 꼭짓점의 y좌표는?

✓① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

포물선 $y=x^2-6x+6$을 평행이동한 포물선의 방정식은
$y-(a+2)=(x-a)^2-6(x-a)+6$
$\therefore y=x^2-2(a+3)x+a^2+7a+8=\{x-(a+3)\}^2+a-1$
이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(a+3, a-1)$이므로 $a+3=0$에서 $a=-3$
따라서 이 포물선의 꼭짓점의 y좌표는 $a-1=-3-1=-4$

03 교육청 기출

원 $(x+1)^2+(y+2)^2=9$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원을 C라 하자. 원 C가 다음 조건을 만족시킬 때, $m+n$의 값을 구하시오.

9 (단, m, n은 상수이다.)

> (가) 원 C의 중심은 제1사분면 위에 있다.
> (나) 원 C는 x축과 y축에 동시에 접한다.

원 C의 방정식은 $(x-m+1)^2+(y-n+2)^2=9$
즉, 원 C의 중심의 좌표는 $(m-1, n-2)$이고 반지름의 길이는 3이다.
이때 조건 (가), 조건 (나)에서 원의 중심의 x좌표, y좌표가 모두 원의 반지름의 길이와 같아야 한다.
따라서 $m-1=3$, $n-2=3$이므로 $m=4$, $n=5$ $\quad\therefore m+n=9$

04

점 $(a,\ b)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점이 제3사분면 위에 있을 때, 점 $(a-b,\ ab)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점이 있는 사분면을 구하시오. 제1사분면

점 (a, b)를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a, b)$
$-a<0$, $b<0$ $\quad\therefore a>0$, $b<0$
한편, 점 $(a-b, ab)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(a-b, -ab)$
이때 $a>0$, $b<0$이므로 $a-b>0$, $-ab>0$
따라서 점 $(a-b, -ab)$는 제1사분면에 있다.

05

직선 $2x+y+k=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선과 원 $x^2+(y-3)^2=5$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 다음 중 상수 k의 값이 될 수 없는 것은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ✓⑤ -1

직선 $2x+y+k=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$x+2y+k=0$
이 직선과 원 $x^2+(y-3)^2=5$가 서로 다른 두 점에서 만나려면
$\dfrac{|0+2\times3+k|}{\sqrt{1^2+2^2}}<\sqrt{5}$
$-5<k+6<5$ $\quad\therefore -11<k<-1$

06

원 C_1: $(x-3)^2+(y+4)^2=1$에 대하여 원 C_1을 x축에 대하여 대칭이동한 원을 C_2라 하고, 원 C_1을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원을 C_3이라 하자. 세 원 C_1, C_2, C_3의 중심을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는?

① $\left(-\dfrac{4}{3},\ 1\right)$ ② $\left(-\dfrac{2}{3},\ 1\right)$ ③ $\left(\dfrac{2}{3},\ -1\right)$
✓④ $\left(\dfrac{2}{3},\ 1\right)$ ⑤ $\left(\dfrac{4}{3},\ 1\right)$

원 C_2의 방정식은 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$
원 C_3의 방정식은 $(x+4)^2+(y-3)^2=1$
따라서 세 원 C_1, C_2, C_3의 중심의 좌표는 각각 $(3, -4)$, $(3, 4)$, $(-4, 3)$이므로 이 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는
$\left(\dfrac{3+3-4}{3}, \dfrac{-4+4+3}{3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{2}{3}, 1\right)$

07 학교 시험 기출

포물선 $y=x^2-4x+3$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 포물선이 x축과 두 점 A, B에서 만날 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. 4

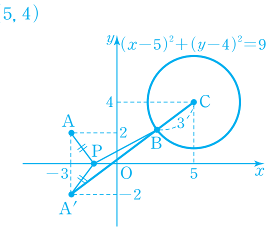
포물선 $y=x^2-4x+3$을 평행이동한 포물선의 방정식은
$y+3=(x-2)^2-4(x-2)+3$ $\quad\therefore y=x^2-8x+12$
이 포물선을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은 $y=x^2+8x+12$
위의 포물선이 x축과 만나는 점의 x좌표는
$x^2+8x+12=0$, $(x+6)(x+2)=0$ $\quad\therefore x=-6$ 또는 $x=-2$
따라서 선분 AB의 길이는 $|-2-(-6)|=4$

08 실전 Plus

점 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$와 원 $(x-5)^2+(y-4)^2=9$ 위의 점 B, x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구하시오.

7

원 $(x-5)^2+(y-4)^2=9$의 중심을 C라 하면 $\mathrm{C}(5, 4)$
점 $\mathrm{A}(-3, 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 $\mathrm{A}'(-3, -2)$
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{BC}}\ge\overline{\mathrm{A'C}}$
이때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{BC}}$의 최솟값은
$\overline{\mathrm{A'C}}=\sqrt{(5+3)^2+(4+2)^2}=10$
이때 $\overline{\mathrm{BC}}=3$으로 일정하므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}+3\ge10$
$\therefore \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}\ge7$



Ⅱ

집합과 명제

그럴듯함에 속지 마라.

이 단원에서는 답이 맞다고 끝내지 않는다. 왜 맞는지를 따진다. 중요한 건 답이 아니라 근거다. 그럴듯한 말은 통하지 않는다. 처음부터 분명한 기준을 세워 집합으로 대상을 가르고, 그 대상을 가지고 명제의 옳고 그름을 정한다. 맞다면 왜 맞는지 말할 수 있어야 하고, 틀리다면 어디서 틀렸는지 짚어야 한다. 느낌이 아니라 논리로, 생각을 끝까지 밀어붙이는 힘. 이 힘을 키우는 것이 이 단원의 목표다.

01 집합의 뜻과 포함 관계

본문 078~094쪽

- 유형 1 집합의 뜻
- 유형 2 집합과 원소 사이의 관계
- 유형 3 집합의 표현
- 유형 4 집합의 원소의 개수
- 유형 5 기호 $\in$, $\subset$의 사용
- 유형 6 부분집합
- 유형 7 집합 사이의 포함 관계를 이용하여 미지수 구하기
- 유형 8 서로 같은 집합
- 유형 9 진부분집합
- 유형 10 부분집합의 개수
- 유형 11 특정한 원소를 갖거나 갖지 않는 부분집합의 개수
- 유형 12 $A \subset X \subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수

집합과 원소

① 집합: 어떤 조건에 따라 그 대상을 분명하게 정할 수 있을 때, 그 대상들의 모임

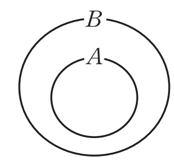
② 원소: 집합을 이루는 대상 하나하나

부분집합

두 집합 A, B에 대하여 A의 모든 원소가 B에 속할 때

➡ A를 B의 부분집합이라 한다.

➡ $\boxed{A \subset B}$



부분집합의 개수

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여

① A의 부분집합의 개수는 $\boxed{2^n}$

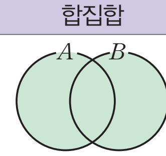
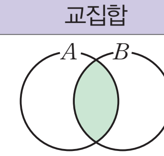
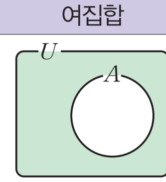
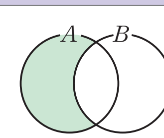
② A의 진부분집합의 개수는 $\boxed{2^n-1}$

02 집합의 연산

본문 095~109쪽

- 유형 1 합집합과 교집합
- 유형 2 서로소인 집합
- 유형 3 여집합과 차집합
- 유형 4 집합의 연산을 이용하여 미지수 구하기
- 유형 5 집합의 연산의 성질
- 유형 6 집합의 연산 법칙
- 유형 7 벤 다이어그램과 집합
- 유형 8 조건을 만족시키는 집합의 개수
- 유형 9 방정식 또는 부등식의 해의 집합의 연산
- 유형 10 원소의 개수

집합의 연산

합집합	교집합
 $A \cup B$	 $A \cap B$
여집합	**차집합**
 A^C	 $A-B$

집합의 연산 법칙

교환법칙	$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
결합법칙	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
분배법칙	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
드모르간의 법칙	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

원소의 개수

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

03 명제

본문 110~129쪽

유형 ① 명제와 조건
유형 ② 명제와 조건의 부정
유형 ③ 진리집합
유형 ④ 명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓
유형 ⑤ 명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓과 진리집합
유형 ⑥ 명제가 참이 되도록 하는 미지수 구하기
유형 ⑦ '모든'이나 '어떤'을 포함한 명제
유형 ⑧ 명제의 역과 대우
유형 ⑨ 명제의 대우를 이용하여 미지수 구하기
유형 ⑩ 삼단논법
유형 ⑪ 충분조건, 필요조건, 필요충분조건
유형 ⑫ 충분조건, 필요조건과 진리집합
유형 ⑬ 충분조건, 필요조건이 되도록 하는 미지수의 값 구하기

명제

문장, 식 ─ 참, 거짓 판별 가능 → 명제이다. ─ 참인 명제 / 거짓인 명제
문장, 식 ─ 참, 거짓 판별 불가능 → 명제가 아니다.

명제 $p \longrightarrow q$

두 조건 p, q에 대하여 명제 'p이면 q이다.'

가정 ↓ $p \longrightarrow q$ ↑ 결론

명제의 역과 대우

$p \longrightarrow q$ ← 역 → $q \longrightarrow p$

대우

$\sim p \longrightarrow \sim q$ ← 역 → $\sim q \longrightarrow \sim p$

충분조건, 필요조건

p는 q이기 위한 충분조건

$p \Longrightarrow q$

q는 p이기 위한 필요조건

04 여러 가지 증명법

본문 130~136쪽

유형 ① 대우를 이용한 증명법
유형 ② 귀류법
유형 ③ 절대부등식의 증명
유형 ④ 산술평균과 기하평균의 관계
유형 ⑤ 코시-슈바르츠의 부등식

귀류법

명제가 참임을 직접 증명하기 어려울 때
➡ 명제의 결론을 부정하여 모순이 생김을 보인다.

절대부등식

문자를 포함한 부등식에서 문자에 어떤 실수를 대입하여도 항상 성립하는 부등식

산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때,

$$\underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{산술평균}} \geq \underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{기하평균}} \text{ (단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립한다.)}$$

01 집합과 원소

1 집합과 원소

① 집합: 어떤 조건에 따라 그 대상을 분명하게 정할 수 있을 때, 그 대상들의 모임

② 원소: 집합을 이루는 대상 하나하나

보기 '안경을 쓴 학생의 모임'은 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다.
'키가 큰 학생의 모임'은 '큰'의 기준을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

• 특별한 언급이 없는 한 약수, 배수, 홀수, 짝수 등은 자연수의 범위에서 생각한다.

2 집합과 원소 사이의 관계

① a가 집합 A의 원소일 때, a는 집합 A에 속한다고 하며, 기호 $a\in A$로 나타낸다.

② b가 집합 A의 원소가 아닐 때, b는 집합 A에 속하지 않는다고 하며, 기호 $b\notin A$로 나타낸다.

• 일반적으로 집합은 알파벳 대문자 A, B, C, …로 나타내고, 원소는 알파벳 소문자 a, b, c, …로 나타낸다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 059쪽

001

다음 중 집합인 것은 ○를, 집합이 아닌 것은 ×를 (　　) 안에 써넣으시오.

(1) 5보다 작은 짝수의 모임 (○)

(2) 10에 가까운 수의 모임 (×)

(3) 두 자리 자연수의 모임 (○)

(4) 잘생긴 사람의 모임 (×)

(5) 훌륭한 과학자의 모임 (×)

002

다음 집합의 원소를 모두 구하시오.

(1) 10보다 작은 소수의 모임 2, 3, 5, 7

(2) 4로 나누었을 때의 나머지가 1인 한 자리 자연수의 모임 1, 5, 9

(3) 방정식 $(x-1)(x-2)(x-3)=0$의 해의 모임 1, 2, 3

003

30의 약수의 집합을 A라 할 때, □ 안에 기호 $\in$, $\notin$ 중 알맞은 것을 써넣으시오.

집합 A의 원소는 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30이다.

(1) $0\ \boxed{\notin}\ A$　　(2) $3\ \boxed{\in}\ A$

(3) $4\ \boxed{\notin}\ A$　　(4) $9\ \boxed{\notin}\ A$

(5) $10\ \boxed{\in}\ A$　　(6) $15\ \boxed{\in}\ A$

004

자연수 전체의 집합을 N, 정수 전체의 집합을 Z, 유리수 전체의 집합을 Q, 실수 전체의 집합을 R라 할 때, □ 안에 기호 $\in$, $\notin$ 중 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $0\ \boxed{\notin}\ N$　　(2) $1000000\ \boxed{\in}\ N$

(3) $-3\ \boxed{\in}\ Z$　　(4) $\sqrt{9}\ \boxed{\in}\ Z$

$\sqrt{9}=3$은 정수이므로 $\sqrt{9}\in Z$

(5) $3.14\ \boxed{\in}\ Q$　　(6) $\pi\ \boxed{\notin}\ Q$

$\pi=3.141592\cdots$는 무리수이므로 $\pi\notin Q$

(7) $\sqrt{-2}\ \boxed{\notin}\ R$　　(8) $\frac{1}{5}\ \boxed{\in}\ R$

$\sqrt{-2}=\sqrt{2}i$는 허수이므로 $\sqrt{-2}\notin R$

02 집합의 표현

❶ 집합의 표현

① 원소나열법: 집합에 속하는 모든 원소를 기호 { } 안에 나열하여 집합을 나타내는 방법

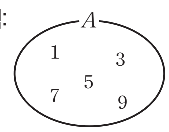
② 조건제시법: 집합에 속하는 모든 원소가 갖는 공통된 성질을 조건으로 제시하여 집합을 나타내는 방법

③ 벤 다이어그램: 집합을 나타낸 그림

보기 10보다 작은 홀수의 집합을 A라 할 때, 집합 A를 나타내는 방법은 다음과 같다.

① 원소나열법: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$　　② 조건제시법: $\{x \mid x$는 10보다 작은 홀수$\}$

③ 벤 다이어그램:



• 집합을 원소나열법으로 나타낼 때, 다음에 유의한다.
① 원소를 나열하는 순서는 생각하지 않는다.
② 같은 원소를 중복하여 쓰지 않는다.
③ 원소의 개수가 많고 원소 사이에 일정한 규칙이 있으면 '…'을 사용하여 나타낸다.

풍쌤 Tip 원소가 너무 많거나 일일이 나열하기 어려울 때는 조건제시법으로 나타내는 것이 더 편리하다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 059쪽

005

다음 집합을 원소나열법으로 나타내시오.

(1) $\{x \mid x$는 10보다 작은 짝수$\}$　$\{2, 4, 6, 8\}$

(2) $\{x \mid x$는 'dream'의 알파벳$\}$　$\{d, r, e, a, m\}$

(3) $\{x \mid x$는 20 이하의 3의 배수$\}$　$\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

(4) $\{x \mid x(x-1)(x-2)=0\}$　$\{0, 1, 2\}$

006

다음 집합을 조건제시법으로 나타내시오.

(1) $\{4, 8, 12, 16, 20\}$　$\{x \mid x$는 20 이하의 4의 양의 배수$\}$

(2) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$　$\{x \mid x$는 12의 양의 약수$\}$

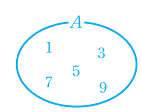
(3) $\{-7, 7\}$　$\{x \mid x^2=49\}$

(4) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$　$\{x \mid -2 \le x \le 3,\ x$는 정수$\}$

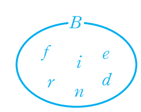
007

다음 집합을 벤 다이어그램으로 나타내시오.

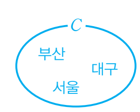
(1) $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$



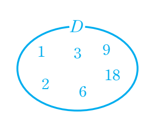
(2) $B=\{f, r, i, e, n, d\}$



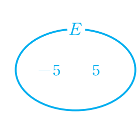
(3) $C=\{$부산, 서울, 대구$\}$



(4) $D=\{x \mid x$는 18의 약수$\}$

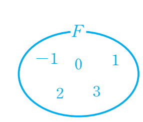


(5) $E=\{x \mid x^2=25\}$



(6) $F=\{x \mid x^2-2x-8<0,\ x$는 정수$\}$

$F=\{x \mid -2<x<4,\ x$는 정수$\}$
$=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$



03 집합의 원소의 개수

❶ 유한집합과 무한집합

① 유한집합: 원소가 유한개인 집합
② 무한집합: 원소가 무수히 많은 집합
③ 공집합: 원소가 하나도 없는 집합이며, 기호 $\varnothing$로 나타낸다.

보기 ① $\{1, 3, 5, 7, 9\}$: 유한집합 ② $\{x \mid x$는 자연수$\}$: 무한집합
③ $\{x \mid x$는 1보다 작은 자연수$\}$: 공집합 (유한집합)

• 공집합은 원소의 개수가 0이므로 유한집합이다.

❷ 집합의 원소의 개수

집합 A가 유한집합일 때, 집합 A의 원소의 개수를 기호 $n(A)$로 나타낸다.

보기 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$일 때, $n(A)=5$

주의 $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{0\}$의 원소의 개수에 주의한다.
① $n(\varnothing)=0$ ② $n(\{\varnothing\})=1$ ③ $n(\{0\})=1$

풍쌤 Tip 원소의 개수를 파악할 때는 원소나 열법으로 나타낸다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 059쪽

008

다음 집합이 유한집합인 것은 '유', 무한집합인 것은 '무'를 (　　) 안에 써넣으시오. 또, 공집합일 때는 기호 $\varnothing$을 함께 써넣으시오.

(1) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (유)

(2) $\{1, 3, 5, \cdots\}$ (무)

(3) $\{0\}$ (유)

(4) $\{x \mid x<1, x$는 자연수$\}$ (유, $\varnothing$)

$\{x \mid x<1, x$는 자연수$\}=\varnothing$이므로 공집합 (유한집합)이다.

(5) $\{x \mid x$는 3의 배수$\}$ (무)

(6) $\{x \mid x$는 두 자리 자연수$\}$ (유)

(7) $\{x \mid x^2+x-2=0\}$ (유)

$\{x \mid x^2+x-2=0\}=\{-2, 1\}$이므로 유한집합이다.

(8) $\{x \mid x^2+x+1=0, x$는 실수$\}$ (유, $\varnothing$)

$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$이므로 $x^2+x+1=0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.
따라서 공집합 (유한집합)이다.

009

다음 집합 A에 대하여 $n(A)$를 구하시오.

(1) $A=\{-1, 0, 1\}$ 3

(2) $A=\{2, 3, 4, \cdots, 9\}$ 8

(3) $A=\{\varnothing\}$ 1

$A=\{\varnothing\}$은 원소가 $\varnothing$ 하나인 집합이므로 $n(A)=1$

(4) $A=\{x \mid x$는 16의 양의 약수$\}$ 5

$A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$이므로 $n(A)=5$

(5) $A=\{x \mid x$는 15 이하의 소수$\}$ 6

$A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$이므로 $n(A)=6$

(6) $A=\{x \mid |x|\leq 3, x$는 정수$\}$ 7

$A=\{x \mid -3\leq x\leq 3, x$는 정수$\}=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$이므로 $n(A)=7$

(7) $A=\{x \mid x^2-3x-10=0\}$ 2

$A=\{-2, 5\}$이므로 $n(A)=2$

(8) $A=\{x \mid x^2-2x-15<0, x$는 정수$\}$ 7

$A=\{x \mid -3<x<5, x$는 정수$\}=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$이므로 $n(A)=7$

유형 실전 문제

정답과 풀이 060쪽

유형 01 집합의 뜻

① 대상을 분명하게 정할 수 있는 모임 ➡ 집합이다.
② 대상을 분명하게 정할 수 없는 모임 ➡ 집합이 아니다.

풍쌤 Point 객관적이고 명확한 기준을 가지고 있으면 집합이다. 특히, 집합인데 원소가 하나도 없으면 공집합이다.

010

다음 중 집합인 것은?

① 귀여운 토끼의 모임
② 아름다운 그림의 모임
③ 100에 가까운 수의 모임
④ 영어를 잘하는 학생의 모임
√⑤ 혈액형이 O형인 사람의 모임

①, ②, ③, ④ '귀여운', '아름다운', '가까운', '잘하는'이라는 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

011

다음 중 집합이 아닌 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① 1보다 큰 홀수의 모임
√② 유명한 가수의 모임
③ 10월에 태어난 사람의 모임
④ 우리 반에서 안경을 쓴 학생의 모임
√⑤ 우리 학교에서 인기가 많은 남학생의 모임

②, ⑤ '유명한', '많은'이라는 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

012

보기에서 집합인 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 3의 배수의 모임
ㄴ. 큰 자연수의 모임
ㄷ. 높은 빌딩의 모임
ㄹ. 우리 학교 여자 선생님의 모임
ㅁ. 키가 180 cm 이상인 사람의 모임
ㅂ. 제곱하여 -2가 되는 실수의 모임

① ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ　② ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ
√③ ㄱ, ㄹ, ㅁ, ㅂ　④ ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ
⑤ ㄷ, ㄹ, ㅁ, ㅂ

ㄴ, ㄷ. '큰', '높은'이라는 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
ㅂ. 제곱하여 -2가 되는 실수는 없으므로 이 모임은 공집합이다.

유형 02 집합과 원소 사이의 관계

① a가 집합 A에 속한다. ➡ $a\in A$
② b가 집합 A에 속하지 않는다. ➡ $b\notin A$

풍쌤 Point 집합 A의 원소를 모두 나열해 보면 주어진 원소가 집합 A에 속하는지 속하지 않는지 판단할 수 있다.

013

13 이하의 소수의 집합을 A라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $2\in A$　√② $3\notin A$　③ $7\in A$
④ $10\notin A$　⑤ $13\in A$

집합 A의 원소는 13 이하의 소수이므로
2, 3, 5, 7, 11, 13
② $3\in A$

014

18의 양의 약수의 집합을 A라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. ㄱ, ㄷ

보기

ㄱ. $2\in A$　ㄴ. $3\notin A$
ㄷ. $6\in A$　ㄹ. $12\in A$

집합 A의 원소는 18의 양의 약수이므로
1, 2, 3, 6, 9, 18
ㄴ. $3\in A$　ㄹ. $12\notin A$

015

20 이하의 3의 양의 배수의 집합을 A, 24의 양의 약수의 집합을 B라 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $4\in A$　② $8\in A$　√③ $8\in B$
√④ $18\notin B$　⑤ $12\notin A$

집합 A의 원소는 3, 6, 9, 12, 15, 18
집합 B의 원소는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
① $4\notin A$　② $8\notin A$　⑤ $12\in A$

016

방정식 $x^3-2x^2-3x=0$의 해의 집합을 A라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $-1\in A$　② $0\in A$　③ $1\notin A$
√④ $2\in A$　⑤ $3\in A$

$x(x+1)(x-3)=0$　$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$
즉, 집합 A의 원소는 -1, 0, 3이다.
④ $2\notin A$

017

부등식 $2x^2-7x+3\le0$의 정수인 해의 집합을 A라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $0\in A$ ② $1\in A$ ③ $2\notin A$
④ $3\notin A$ ⑤ $4\in A$

$(2x-1)(x-3)\le0$ $\therefore \frac{1}{2}\le x\le3$
즉, 집합 A의 원소는 1, 2, 3이다.
① $0\notin A$ ③ $2\in A$ ④ $3\in A$ ⑤ $4\notin A$

018

정수 전체의 집합을 Z라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $0\in Z$ ② $\sqrt{4}\in Z$ ③ $2.5\notin Z$
④ $-\frac{6}{2}\notin Z$ ⑤ $\frac{5}{3}\notin Z$

② $\sqrt{4}=2$는 정수이므로 $\sqrt{4}\in Z$
④ $-\frac{6}{2}=-3$은 정수이므로 $-\frac{6}{2}\in Z$

019

유리수 전체의 집합을 Q, 실수 전체의 집합을 R라 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $3.\dot{3}\notin Q$ ② $\pi\notin R$ ③ $i^{100}\in Q$
④ $\frac{1}{1-i}\in R$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt{9}}\notin Q$

① $3.\dot{3}=\frac{33-3}{9}=\frac{10}{3}$은 유리수이므로 $3.\dot{3}\in Q$
③ $i^{100}=(i^4)^{25}=1^{25}=1$은 유리수이므로 $i^{100}\in Q$
④ $\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$는 허수이므로 $\frac{1}{1-i}\notin R$

020

자연수 전체의 집합을 N, 정수 전체의 집합을 Z, 유리수 전체의 집합을 Q, 실수 전체의 집합을 R라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

보기

ㄱ. $0\in N$ ㄴ. $-\sqrt{36}\in Z$
ㄷ. $3.141592\in Q$ ㄹ. $i^{10}\in R$

① ㄱ, ㄴ, ㄷ ② ㄱ, ㄴ, ㄹ ③ ㄱ, ㄷ, ㄹ
④ ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

ㄹ. $i^{10}=(i^4)^2\times i^2=1^2\times(-1)=-1$은 실수이므로 $i^{10}\in R$

유형 03 집합의 표현 중요

① 원소나열법: 기호 { } 안에 모든 원소를 나열하는 방법
② 조건제시법: $\{x|x$의 조건$\}$으로 나타내는 방법
③ 벤 다이어그램: 집합을 나타낸 그림

풍쌤 Point 두 집합의 원소를 이용하여 새로운 집합을 구할 때는 표를 이용하여 빠뜨리는 원소가 없도록 주의한다.

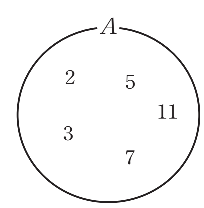
021

다음 중 집합 $\{x|x$는 14의 양의 약수$\}$와 같은 것은?

① $\{1, 14\}$ ② $\{2, 7\}$
③ $\{1, 2, 7\}$ ④ $\{1, 2, 7, 14\}$
⑤ $\{1, 2, 7, 12, 14\}$

022

집합 A를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽과 같을 때, 다음 중 집합 A와 같은 것은?



① $\{x|x$는 11의 양의 약수$\}$ $=\{1, 11\}$
② $\{x|x$는 11 이하의 홀수$\}$ $=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
③ $\{x|x$는 11 이하의 소수$\}$
④ $\{x|x$는 11 이하의 자연수$\}$ $=\{1, 2, 3, \cdots, 11\}$
⑤ $\{x|x$는 11 이하의 3의 배수$\}$ $=\{3, 6, 9\}$

023

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\{x|x$는 9 이하의 홀수$\}=\{1, 3, 5, 7, 9\}$
ㄴ. $\{x|x$는 짝수인 한 자리의 자연수$\}$
$=\{2, 4, 6, 8\}$
ㄷ. $\{x|x$는 30 미만의 6의 양의 배수$\}$
$=\{6, 12, 18, 24, 30\}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

ㄷ. $\{x|x$는 30 미만의 6의 양의 배수$\}=\{6, 12, 18, 24\}$

024

다음 집합 중 나머지 넷과 다른 하나는?

① $\{1, 3, 5, \cdots, 15\}$
② $\{x|x$는 16 미만의 홀수$\}$
√③ $\{x|x$는 17 이하의 홀수$\}$
④ $\{x|x=2n-1, n=1, 2, 3, \cdots, 8\}$
⑤ $\{x|x=2n+1, n$은 7 이하의 음이 아닌 정수$\}$

①, ②, ④, ⑤ $\{1, 3, 5, \cdots, 15\}$
③ $\{x|x$는 17 이하의 홀수$\}=\{1, 3, 5, \cdots, 17\}$

025

두 집합 $A=\{-1, 1\}$, $B=\{1, 2, 3\}$에 대하여 집합 $C=\{x|x=a+b, a\in A, b\in B\}$를 원소나열법으로 바르게 나타낸 것은?

√① $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ② $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
③ $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ ④ $\{3, 4, 5, 6, 7\}$
⑤ $\{4, 5, 6, 7, 8\}$

b \ a	-1	1
1	0	2
2	1	3
3	2	4

$C=\{0, 1, 2, 3, 4\}$

026

두 집합 $A=\{-1, 0, 1\}$, $B=\{1, 3\}$에 대하여 두 집합 C, D가

$C=\{x|x=a+b, a\in A, b\in B\}$,
$D=\{x|x=ab, a\in A, b\in B\}$

일 때, 두 집합 C, D에 공통으로 포함되는 원소의 개수를 구하시오. 3

$C=\{0, 1, 2, 3, 4\}$
$D=\{-3, -1, 0, 1, 3\}$
따라서 두 집합 C, D에 공통으로 포함되는 원소는 0, 1, 3의 3개이다.

유형 04 집합의 원소의 개수 중요

$n(A)$는 집합 A의 원소의 개수를 뜻한다.

풍쌤 Point 집합 A가 조건제시법으로 주어지면 원소나열법으로 나타낸 후, $n(A)$를 구한다.

027

두 집합 A, B에 대하여

$A=\{x|x$는 100 이하의 7의 배수$\}$,
$B=\{x|x$는 27의 양의 약수$\}$

일 때, $n(A)+n(B)$의 값을 구하시오. 18

$A=\{7, 14, 21, \cdots, 98\}$
$B=\{1, 3, 9, 27\}$
따라서 $n(A)=14$, $n(B)=4$이므로
$n(A)+n(B)=14+4=18$

028

다음 중 옳은 것은?

① $A=\varnothing$이면 $n(A)=1$
② $A=\{3\}$이면 $n(A)=3$
√③ $A=\{0, \varnothing\}$이면 $n(A)=2$
④ $A=\{x|x$는 6의 양의 약수$\}$이면 $n(A)=6$
⑤ $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{4, 5\}$이면 $n(A)<n(B)$

① $n(A)=0$
② $n(A)=1$
④ $A=\{1, 2, 3, 6\}$이면 $n(A)=4$
⑤ $n(A)=3$, $n(B)=2$ $\therefore n(A)>n(B)$

029

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $A=\{\varnothing\}$, $B=\varnothing$이면 $n(A)=n(B)$
ㄴ. $A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{3, 4\}$이면 $n(A)+n(B)=6$
ㄷ. $A=\{x|x=3k+1, k=1, 2, 3\}$이면 $n(A)=3$

① ㄱ ② ㄴ √③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

ㄱ. $n(A)=1$, $n(B)=0$이므로 $n(A)\neq n(B)$
ㄴ. $n(A)=3$, $n(B)=2$이므로 $n(A)+n(B)=5$
ㄷ. $A=\{4, 7, 10\}$이므로 $n(A)=3$

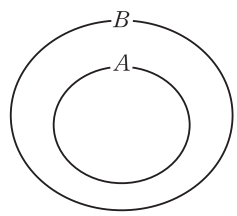
04 부분집합

❶ 부분집합

두 집합 A, B에 대하여 A의 모든 원소가 B에 속할 때, A를 B의 부분집합이라 한다.

① A가 B의 부분집합일 때, 기호 $A\subset B$로 나타낸다.

② A가 B의 부분집합이 아닐 때, 기호 $A\not\subset B$로 나타낸다.



참고 집합 $A=\{1, 2, \{1\}\}$에서 $\{1\}$은 집합 A의 원소이기도 하고 부분집합이기도 하다. 이처럼 어떤 집합이 다른 집합의 원소가 되는 경우도 있다.

❷ 부분집합의 성질

세 집합 A, B, C에 대하여

① 공집합은 모든 집합의 부분집합이다. ➡ $\varnothing\subset A$

② 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이다. ➡ $A\subset A$

③ $A\subset B$이고 $B\subset C$이면 $A\subset C$이다.

- 기호 $\subset$는 집합과 집합 사이에서 사용하는 기호이고, 기호 $\in$는 원소와 집합 사이에서 사용하는 기호이다.
- 집합 A가 집합 B의 부분집합일 때
  ➡ 집합 A는 집합 B에 포함된다.
  ➡ 집합 B는 집합 A를 포함한다.
- $A\not\subset B$이면 집합 A의 원소 중에서 집합 B의 원소가 아닌 것이 적어도 하나 있다.

개념 기본 문제

030

집합 $A=\{1, 3, 4, 6, 8, 9\}$에 대하여 □ 안에 기호 $\subset$, $\not\subset$ 중 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $\{1\}$ $\boxed{\subset}$ A

(2) $\{1, 9\}$ $\boxed{\subset}$ A

(3) $\{4, 6, 8\}$ $\boxed{\subset}$ A

(4) $\{1, 5, 9\}$ $\boxed{\not\subset}$ A

(5) $\{3, 4, 6, 7\}$ $\boxed{\not\subset}$ A

(6) $\varnothing$ $\boxed{\subset}$ A

$\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$

(7) $\{1, 3, 4, 6, 8, 9\}$ $\boxed{\subset}$ A

모든 집합은 자기 자신의 부분집합이므로
$\{1, 3, 4, 6, 8, 9\}\subset A$

031

다음 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 기호 $\subset$를 사용하여 나타내시오.

(1) $A=\{1, 2\}$, $B=\{0, 1, 2\}$ $A\subset B$

(2) $A=\{-1, 1\}$, $B=\{1\}$ $B\subset A$

(3) $A=\{x\,|\,x$는 한 자리의 자연수$\}$,
$B=\{x\,|\,x$는 10 이하의 소수인 자연수$\}$ $B\subset A$

$A=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$
$\therefore B\subset A$

(4) $A=\{x\,|\,x$는 3의 배수$\}$, $B=\{x\,|\,x$는 6의 배수$\}$ $B\subset A$

$A=\{3, 6, 9, 12, \cdots\}$, $B=\{6, 12, 18, \cdots\}$
$\therefore B\subset A$

(5) $A=\{x\,|\,x^2=16\}$, $B=\{x\,|\,x^2\le 16\}$ $A\subset B$

$A=\{-4, 4\}$, $B=\{x\,|\,-4\le x\le 4\}$
$\therefore A\subset B$

032

다음 □ 안에 기호 $\in$, $\subset$ 중 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $\varnothing$ $\boxed{\subset}$ $\{0\}$

(2) 1 $\boxed{\in}$ $\{0, 1, 2\}$

(3) $\{1\}$ $\boxed{\in}$ $\{0, \{1\}\}$

$\{1\}$은 집합 $\{0, \{1\}\}$의 원소이므로 $\{1\}\in\{0, \{1\}\}$

(4) $\{0\}$ $\boxed{\subset}$ $\{0, 1, \{1\}\}$

0이 집합 $\{0, 1, \{1\}\}$의 원소이므로 $\{0\}\subset\{0, 1, \{1\}\}$

(5) $\{0, 1\}$ $\boxed{\subset}$ $\{0, 1, \varnothing\}$

0, 1이 집합 $\{0, 1, \varnothing\}$의 원소이므로 $\{0, 1\}\subset\{0, 1, \varnothing\}$

(6) $\{1, 3, 5, 7\}$ $\boxed{\subset}$ $\{1, 3, 5, 7\}$

033

집합 $A=\{\varnothing, 0, 1, \{2\}\}$에 대하여 다음 중 옳은 것은 ○를, 옳지 않은 것은 ×를 (　　) 안에 써넣으시오.

(1) $\varnothing\subset A$ (○)

(2) $\varnothing\in A$ (○)

$\varnothing$은 집합 A의 원소이므로 $\varnothing\in A$

(3) $0\in A$ (○)

0은 집합 A의 원소이므로 $0\in A$, $\{0\}\subset A$

(4) $\{0\}\subset A$ (○)

(5) $2\in A$ (×)

$\{2\}$는 집합 A의 원소이지만 2는 집합 A의 원소가 아니므로 $2\notin A$, $\{2\}\in A$

(6) $\{2\}\subset A$ (×)

(7) $\{0, 1\}\subset A$ (○)

(8) $\{\varnothing, 0, \{2\}\}\subset A$ (○)

$\varnothing$, 0, $\{2\}$는 집합 A의 원소이므로 $\{\varnothing, 0, \{2\}\}\subset A$

034

다음 집합의 부분집합을 모두 구하시오.

(1) $\{3\}$ $\varnothing$, $\{3\}$

(2) $\{2, 5\}$ $\varnothing$, $\{2\}$, $\{5\}$, $\{2, 5\}$

(3) $\{1, 3, 5\}$ $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$, $\{1, 3, 5\}$

(4) $\{x\,|\,x$는 10 이하의 소수인 자연수$\}$ $=\{2, 3, 5, 7\}$

$\varnothing$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 5\}$, $\{3, 7\}$, $\{5, 7\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 3, 7\}$, $\{2, 5, 7\}$, $\{3, 5, 7\}$, $\{2, 3, 5, 7\}$

035

집합 $A=\{0, 1, 2, 3\}$의 부분집합 중에서 다음을 모두 구하시오.

(1) 0을 원소로 갖는 집합

$\{0\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{0, 3\}$, $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 2, 3\}$, $\{0, 1, 2, 3\}$

(2) 2, 3을 원소로 갖는 집합 $\{2, 3\}$, $\{0, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{0, 1, 2, 3\}$

(3) 1을 원소로 갖고 3을 원소로 갖지 않는 집합

$\{1\}$, $\{0, 1\}$, $\{1, 2\}$, $\{0, 1, 2\}$

단계1. 1과 3을 제외한 집합의 부분집합 구하기

$\varnothing$, $\{0\}$, $\{2\}$, $\{0, 2\}$

단계2. 단계1.에서 구한 부분집합에 각각 1을 넣은 집합 구하기

$\{1\}$, $\{0, 1\}$, $\{1, 2\}$, $\{0, 1, 2\}$

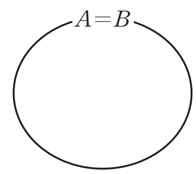
05 서로 같은 집합과 진부분집합

❶ 서로 같은 집합

두 집합 A, B에 대하여 $A\subset B$이고 $B\subset A$일 때,
A와 B는 서로 같다고 한다.

① A와 B가 서로 같은 집합일 때, 기호 $A=B$로 나타낸다.

② A와 B가 서로 같은 집합이 아닐 때, 기호 $A\neq B$로 나타낸다.



보기 $A=\{1, 3\}$, $B=\{x \mid x$는 4 이하의 홀수$\}$일 때, $A\subset B$, $B\subset A$이므로 $A=B$이다.

• 두 집합이 서로 같다는 것은 두 집합의 모든 원소가 같다는 뜻이다.

❷ 진부분집합

두 집합 A, B에 대하여 $A\subset B$이고 $A\neq B$일 때, A를 B의 진부분집합이라 한다.

참고 $A\subset B$는 A가 B의 진부분집합이거나 $A=B$임을 의미한다.

• 어떤 집합의 진부분집합은 자기 자신을 제외한 부분집합이다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 062쪽

036

다음 두 집합 A, B에 대하여 □ 안에 기호 $=$, $\neq$ 중 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $A=\{0, 1, 2, 3\}$, $B=\{3, 2, 1, 0\}$
➡ A $\boxed{=}$ B

(2) $A=\{1, 2, 3, 4, 6\}$, $B=\{x \mid x$는 6의 양의 약수$\}$
➡ A $\boxed{\neq}$ B

(3) $A=\{x \mid x$는 소수인 자연수$\}$ $=\{2, 3, 5, 7, \cdots\}$
$B=\{x \mid x$는 1보다 큰 홀수$\}$ $=\{3, 5, 7, 9, \cdots\}$
➡ A $\boxed{\neq}$ B

(4) $A=\{x \mid x^2=1\}$, $B=\{x \mid |x|=1\}$
➡ A $\boxed{=}$ B

(5) $A=\{x \mid x$는 4 이하의 짝수$\}$ $=\{2, 4\}$
$B=\{x \mid x^2-6x+8=0\}$ $=\{x \mid (x-2)(x-4)=0\}=\{2, 4\}$
➡ A $\boxed{=}$ B

037

다음 두 집합 A, B에 대하여 $A=B$일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $A=\{1, a\}$, $B=\{2, b\}$ **$a=2$, $b=1$**

(2) $A=\{1, 2, a\}$, $B=\{2, 3, b\}$ **$a=3$, $b=1$**

(3) $A=\{2, a+1\}$, $B=\{a-2, b-2\}$ **$a=4$, $b=7$**

$a+1\neq a-2$이므로 $a+1=b-2$ …… ㉠
$2=a-2$에서 $a=4$이고, ㉠에서 $4+1=b-2$ ∴ $b=7$

038

다음 집합의 진부분집합을 모두 구하시오.

(1) $\{3, 7\}$ $\varnothing$, $\{3\}$, $\{7\}$

(2) $\{2, 5, 11\}$ $\varnothing$, $\{2\}$, $\{5\}$, $\{11\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 11\}$, $\{5, 11\}$

(3) $\{x \mid x$는 8의 양의 약수$\}$ $=\{1, 2, 4, 8\}$
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{8\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 8\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 8\}$, $\{4, 8\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 8\}$, $\{1, 4, 8\}$, $\{2, 4, 8\}$

06 부분집합의 개수

❶ 부분집합의 개수

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여

① A의 부분집합의 개수는 2^n

② A의 진부분집합의 개수는 2^n-1 → (진부분집합의 개수)=(부분집합의 개수)-1

③ A의 특정한 원소 p개를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

2^{n-p} (단, $p<n$)

④ A의 특정한 원소 q개를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

2^{n-q} (단, $q<n$)

⑤ A의 특정한 원소 p개를 반드시 원소로 갖고, 원소 q개를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

2^{n-p-q} (단, $p+q<n$)

보기 집합 $A=\{1, 3, 5\}$에 대하여 $n(A)=3$이므로

① A의 부분집합의 개수는 $2^3=8$　② A의 진부분집합의 개수는 $2^3-1=7$

③ 1, 3을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는 $2^{3-2}=2$

④ 1을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 $2^{3-1}=4$

풍쌤 Tip 집합 A의 특정한 원소 p개를 반드시 원소로 갖는 부분집합은 특정한 원소 p개를 제외한 부분집합에 특정한 원소 p개를 각각 포함시키는 것으로 생각할 수 있다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 063쪽

039

다음 집합 A의 부분집합의 개수를 구하시오.

(1) $A=\{1, 3\}$ 4

(2) $A=\{4, 8, 12\}$ 8

(3) $A=\{a, b, c, d, e\}$ 32

(4) $A=\{x|x$는 24의 양의 약수$\}$ 256

$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
$\therefore 2^8=256$

(5) $A=\{x|x^2\le 15, x$는 정수$\}$ 128

$A=\{x|-\sqrt{15}\le x\le\sqrt{15}, x$는 정수$\}=\{-3, -2, -1, \cdots, 3\}$
$\therefore 2^7=128$

040

다음 집합 A의 진부분집합의 개수를 구하시오.

(1) $A=\{0, 1, 2\}$ 7

$2^3-1=8-1=7$

(2) $A=\{l, o, v, e\}$ 15

$2^4-1=16-1=15$

(3) $A=\{x|x$는 홀수인 한 자리의 자연수$\}$ 31

$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$
$\therefore 2^5-1=32-1=31$

(4) $A=\{x|5\le x\le 15, x$는 소수인 자연수$\}$ 15

$A=\{5, 7, 11, 13\}$
$\therefore 2^4-1=16-1=15$

(5) $A=\{x|x=4n-3, n$은 홀수인 한 자리의 자연수$\}$ 31

$A=\{1, 9, 17, 25, 33\}$
$\therefore 2^5-1=32-1=31$

041

다음은 집합 $\{1, 2, 3\}$의 부분집합 중에서 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

> 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합은 원소 2를 제외한 집합 $\{1, 3\}$의 부분집합에 각각 원소 $\boxed{2}$를 넣은 것과 같다.
> 따라서 구하는 부분집합의 개수는
> $2^{\boxed{3}-\boxed{1}}=\boxed{4}$

042

다음 집합의 부분집합 중에서 [ ] 안의 원소를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구하시오.

(1) $\{10, 11, 12, 13\}$ 8 [10]

$2^{4-1}=2^3=8$

(2) $\{\mathrm{s}, \mathrm{t}, \mathrm{o}, \mathrm{r}, \mathrm{y}\}$ 16 [o]

$2^{5-1}=2^4=16$

(3) $\{x \mid x$는 한 자리의 자연수$\}$ 64 [1, 3, 5]

$\{x \mid x$는 한 자리의 자연수$\}=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$
$\therefore 2^{9-3}=2^6=64$

(4) $\{x \mid x$는 12의 양의 약수$\}$ 16 [1, 12]

$\{x \mid x$는 12의 양의 약수$\}=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
$\therefore 2^{6-2}=2^4=16$

043

다음은 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중에서 2, 4를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

> 2, 4를 원소로 갖지 않는 부분집합은 원소 2, 4를 제외한 집합 $\{1, 3, 5\}$의 부분집합과 같다.
> 따라서 구하는 부분집합의 개수는
> $2^{\boxed{5}-\boxed{2}}=\boxed{8}$

044

다음 집합의 부분집합 중에서 [ ] 안의 원소를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 구하시오.

(1) $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ 16 [5]

$2^{5-1}=2^4=16$

(2) $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}, \mathrm{f}, \mathrm{g}\}$ 32 [a, b]

$2^{7-2}=2^5=32$

(3) $\{x \mid x$는 30 이하의 4의 배수$\}$ 64 [4]

$\{x \mid x$는 30 이하의 4의 배수$\}=\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$
$\therefore 2^{7-1}=2^6=64$

(4) $\{x \mid x^2-x-6\le 0$, x는 정수$\}$ 8 [0, 1, 2]

$\{x \mid x^2-x-6\le 0$, x는 정수$\}=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
$\therefore 2^{6-3}=2^3=8$

045

집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중에서 다음 조건을 만족시키는 집합의 개수를 구하시오.

(1) 짝수를 원소로 갖지 않는다. 16

짝수 2, 4, 6을 원소로 갖지 않는 집합의 개수는
$2^{7-3}=2^4=16$

(2) 1을 반드시 원소로 갖고, 6, 7을 원소로 갖지 않는다. 16

$2^{7-1-2}=2^4=16$

(3) 1, 2, 3을 반드시 원소로 갖고, 4, 5를 원소로 갖지 않는다. 4

$2^{7-3-2}=2^2=4$

046

집합 $A=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$의 부분집합 중에서 다음 조건을 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오.

(1) $-3\in X$, $3\in X$ 32

$2^{7-2}=2^5=32$

(2) $-2\notin X$, $-1\notin X$, $2\in X$ 16

$2^{7-1-2}=2^4=16$

(3) $\{0, 1, 2\}\subset X$, $-2\notin X$ 8

집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 0, 1, 2를 반드시 원소로 갖고 -2는 원소로 갖지 않는 부분집합이다.
$\therefore 2^{7-3-1}=2^3=8$

유형 실전 문제

정답과 풀이 064쪽

유형 05 기호 $\in$, $\subset$의 사용

① a가 집합 A의 원소일 때, $a\in A$와 같이 나타낸다.
② 집합 A가 집합 B의 부분집합일 때, $A\subset B$와 같이 나타낸다.

풍쌤 Point 기호 $\in$는 원소와 집합 사이에서 사용하고, 기호 $\subset$는 집합과 집합 사이에서 사용한다. 특히, 어떤 집합이 다른 집합의 원소인 경우에는 주의하여 기호로 나타낸다.

047

집합 $A=\{x\,|\,x$는 15의 양의 약수$\}$에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $5\in A$　② $30\notin A$
③ $\{3\}\subset A$　④ $\{1,\ 15\}\subset A$
✓⑤ $\{5,\ 10,\ 15\}\subset A$

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$
⑤ 10은 집합 A의 원소가 아니므로 $\{5,\ 10,\ 15\}\not\subset A$

048

두 집합 $A=\{1,\ 3,\ 5\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $1\in A$　② $2\in B$
③ $\{1\}\subset A$　✓④ $\{1,\ 2,\ 3\}\subset A$
⑤ $A\subset B$

④ 2는 집합 A의 원소가 아니므로 $\{1,\ 2,\ 3\}\not\subset A$

049

집합 $A=\{\varnothing,\ 1,\ 2,\ \{3\}\}$에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅂ

보기

ㄱ. $1\in A$　ㄴ. $3\in A$
ㄷ. $\varnothing\in A$　ㄹ. $\varnothing\subset A$
ㅁ. $\{3\}\subset A$　ㅂ. $\{1,\ 2\}\subset A$

ㄴ. 3은 집합 A의 원소가 아니므로 $3\notin A$
ㅁ. 3은 집합 A의 원소가 아니고, $\{3\}$은 집합 A의 원소이므로 $\{3\}\not\subset A$, $\{3\}\in A$

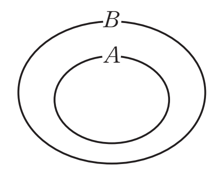
유형 06 부분집합 중요

집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속할 때, A는 B의 부분집합이다.
➡ $A\subset B$

풍쌤 Point 각 집합을 원소나열법으로 나타낸 후, 어느 집합이 어느 집합의 부분집합인지 판단한다.

050

보기에서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계가 오른쪽 벤 다이어그램과 같은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. $A=\{-1,\ 1\}$, $B=\{-1,\ 0,\ 1\}$
ㄴ. $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B=\{x\,|\,x$는 소수인 자연수$\}$
ㄷ. $A=\{x\,|\,x$는 8의 양의 약수$\}$,
　$B=\{x\,|\,x$는 16의 양의 약수$\}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄴ. $B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots\}$이므로 $A\subset B$
ㄷ. $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$이므로 $A\subset B$

051

세 집합 A, B, C가

$A=\{3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$,
$C=\{x\,|\,2<x<5,\ x$는 정수$\}$

일 때, 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $A\subset B$　✓② $A\subset C$　✓③ $B\subset C$
④ $C\subset A$　⑤ $C\subset B$

$C=\{3,\ 4\}$
$\therefore C\subset A\subset B$

052

세 집합

$A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{x\,|\,|x|=1\}$,
$C=\{x\,|\,x^2\le 1\}$

사이의 포함 관계를 나타내시오. $B\subset A\subset C$

$A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{-1,\ 1\}$, $C=\{x\,|\,-1\le x\le 1\}$이므로
$B\subset A\subset C$

유형 실전 문제

유형 07 집합 사이의 포함 관계를 이용하여 미지수 구하기

두 집합 A, B에 대하여 $A \subset B$일 때
① 집합을 원소나열법으로 나타낸 후, A, B의 원소를 비교한다.
② 원소의 조건이 부등식으로 주어지면 A, B를 수직선 위에 나타내어 포함 관계가 성립할 조건을 찾는다.

풍쌤 Point $A \subset B$이면 집합 A의 모든 원소가 집합 B의 원소임을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

053

두 집합 $A=\{3, 4, 5\}$, $B=\{x \mid x<a\}$에 대하여 $A \subset B$를 만족시키는 정수 a의 최솟값을 구하시오. 6

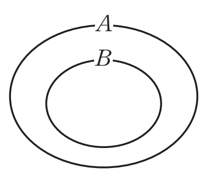
$a>5$
따라서 정수 a의 최솟값은 6이다.

054

두 집합

$A=\{-1, 1, 3a-1, 4a+1\}$,
$B=\{-1, 2\}$

사이의 포함 관계가 오른쪽 벤 다이어그램과 같을 때, 정수 a의 값을 구하시오. 1

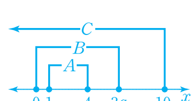


$2 \in A$이므로 $3a-1=2$ 또는 $4a+1=2$
(ⅰ) $3a-1=2$일 때, $3a=3$에서 $a=1$이고 $A=\{-1, 1, 2, 5\}$이므로 $B \subset A$
(ⅱ) $4a+1=2$일 때, $4a=1$에서 $a=\frac{1}{4}$이고 $A=\left\{-1, -\frac{1}{4}, 1, 2\right\}$이므로 $B \subset A$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=1$ 또는 $a=\frac{1}{4}$이므로 정수 a의 값은 1이다.

055

세 집합 $A=\{x \mid 1 \le x \le 4\}$, $B=\{x \mid 0 \le x \le 3a\}$, $C=\{x \mid x \le 10\}$에 대하여 $A \subset B \subset C$가 성립하도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오. 2

$A \subset B \subset C$가 성립하도록 세 집합을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$4 \le 3a \le 10 \qquad \therefore \frac{4}{3} \le a \le \frac{10}{3}$
따라서 이를 만족시키는 정수 a는 2, 3의 2개이다.

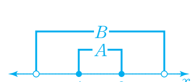


056

두 집합 $A=\{x \mid x^2+x-12 \le 0\}$, $B=\{x \mid x^2<a^2\}$에 대하여 $A \subset B$가 성립하도록 하는 자연수 a의 최솟값은?

① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　✓⑤ 5

$A=\{x \mid -4 \le x \le 3\}$, $B=\{x \mid -a<x<a\}$
$A \subset B$가 성립하도록 두 집합을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$-a<-4$, $3<a \qquad \therefore a>4$
따라서 조건을 만족시키는 자연수 a의 최솟값은 5이다.



유형 08 서로 같은 집합 중요

두 집합 A, B에 대하여 다음은 모두 $A=B$를 나타낸다.
① $A \subset B$이고 $B \subset A$
② 두 집합 A, B가 서로 같다.
③ 두 집합 A, B의 원소가 모두 같다.

풍쌤 Point 각 집합을 원소나열법으로 나타낸 후, 서로 같은 원소가 무엇인지 따져 본다.

057

두 집합 $A=\{2, 3, a^2-2\}$, $B=\{3, 7, a+b\}$에 대하여 $A=B$일 때, $a-b$의 값을 구하시오. (단, $a>0$) 4

$2 \in B$에서 $a+b=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$7 \in A$에서 $a^2-2=7$, $a^2=9 \qquad \therefore a=3$ ($\because a>0$)
이를 ㉠에 대입하면 $3+b=2 \qquad \therefore b=-1$
$\therefore a-b=3-(-1)=4$

058

두 집합 A, B에 대하여 **보기**에서 $\underbrace{A \subset B,\ B \subset A}_{A=B}$인 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{3, 1, 2\}$
ㄴ. $A=\{2, 3, 5, 7\}$,
　$B=\{x \mid x$는 소수인 한 자리의 자연수$\}$ $=\{2, 3, 5, 7\}$
ㄷ. $A=\{x \mid x^2-6x+8=0\}$,
　$B=\{x \mid x$는 5보다 작은 짝수$\}$

① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　　✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄷ. $A=\{x \mid (x-2)(x-4)=0\}=\{2, 4\}$, $B=\{2, 4\}$이므로
　$A=B$

059

두 집합

$A=\{1, 4, a, a+1, b\}$,
$B=\{x \mid x$는 12의 약수인 한 자리의 자연수$\}$

에 대하여 $\underbrace{A \subset B,\ B \subset A}_{A=B}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.) 40

$B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$
이때 A에서 $2 \in A$, $3 \in A$, $6 \in A$이고 a, $a+1$은 연속하는 자연수이므로
$a=2$, $a+1=3$, $b=6$
$\therefore a^2+b^2=2^2+6^2=40$

유형 09 진부분집합

집합 A가 집합 B의 진부분집합이다.
➡ $A \subset B$이고 $A \neq B$

풍쌤 Point 어떤 집합의 진부분집합은 자기 자신인 경우를 제외한 부분집합이다.

060

다음 중 집합 $A=\{0, 1, \varnothing\}$의 진부분집합이 아닌 것은?

① $\varnothing$　② $\{0\}$　③ $\{\varnothing\}$
④ $\{0, 1\}$　✓⑤ $\{0, 1, \varnothing\}$

061

다음 중 집합 $A=\{x \mid x^2-x-6<0,\ x$는 정수$\}$의 진부분집합을 모두 고르면? (정답 2개)

✓① $\{2\}$　② $\{-3, -2\}$　③ $\{1, 3\}$
✓④ $\{-1, 0, 1\}$　⑤ $\{-1, 0, 1, 2\}$

$A=\{x \mid -2<x<3,\ x$는 정수$\}$
$=\{-1, 0, 1, 2\}$
따라서 집합 A의 진부분집합은 ①, ④이다.

062

보기에서 집합 $A=\{1, 3, 9\}$의 진부분집합인 것만을 있는 대로 고르시오. ㄱ, ㄴ

보기

ㄱ. $\{1, 9\}$
ㄴ. $\{x \mid x$는 3의 양의 약수$\}$ $=\{1, 3\}$
ㄷ. $\{x \mid x$는 9의 양의 약수$\}$
ㄹ. $\{x \mid x$는 27의 양의 약수$\}$ $=\{1, 3, 9, 27\}$

ㄷ. $\{x \mid x$는 9의 양의 약수$\}=\{1, 3, 9\}$
이때 $\{1, 3, 9\} \subset A$이지만 $\{1, 3, 9\}=A$이므로 진부분집합이 아니다.

유형 10 부분집합의 개수 중요

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여
① 집합 A의 부분집합의 개수는 2^n
② 집합 A의 진부분집합의 개수는 2^n-1

풍쌤 Point 각 원소마다 부분집합에 포함되느냐 포함되지 않느냐의 2가지 경우가 있으므로 부분집합의 개수는 2^n이다.

063

집합 $A=\{x \mid x^2+3x-4 \leq 0,\ x$는 정수$\}$의 진부분집합의 개수를 구하시오. 63

$A=\{x \mid (x+4)(x-1) \leq 0,\ x$는 정수$\}$
$=\{x \mid -4 \leq x \leq 1,\ x$는 정수$\}$
$=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$
따라서 집합 A의 진부분집합의 개수는
$2^6-1=64-1=63$

064

다음 집합 중 부분집합의 개수가 16인 것은?

① $\{2, 3, 4\}$
② $\{x \mid x$는 12의 양의 약수$\}$ $=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
✓③ $\{x \mid x$는 10보다 작은 소수$\}$ $=\{2, 3, 5, 7\}$
④ $\{x \mid x$는 5 이하의 자연수$\}$ $=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
⑤ $\{x \mid x$는 11의 배수인 두 자리 자연수$\}$ $=\{11, 22, 33, \cdots, 99\}$

① $2^3=8$　② $2^6=64$　③ $2^4=16$
④ $2^5=32$　⑤ $2^9=512$

065

집합 $A=\{-1, 0, 1, 2\}$에 대하여 집합 B가

$$B=\{x \mid x=ab,\ a \in A,\ b \in A\}$$

일 때, 집합 B의 진부분집합의 개수를 구하시오. 63

$B=\{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$
따라서 $n(B)=6$이므로 집합 B의 진부분집합의 개수는
$2^6-1=64-1=63$

066

두 집합 A, B에 대하여 $n(A)-n(B)=1$이고 집합 B의 진부분집합의 개수가 15일 때, 집합 A의 부분집합의 개수를 구하시오. 32

$n(A)=a$, $n(B)=b$라 하면
$a-b=1$
이때 집합 B의 진부분집합의 개수가 15이므로
$2^b-1=15$에서 $2^b=16=2^4$　$\therefore b=4$
$\therefore a=5$
따라서 $n(A)=5$이므로 집합 A의 부분집합의 개수는
$2^5=32$

유형 11 특정한 원소를 갖거나 갖지 않는 부분집합의 개수

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여

① A의 특정한 원소 p개를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는 2^{n-p} (단, $p<n$)

② A의 특정한 원소 q개를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 2^{n-q} (단, $q<n$)

풍쌤 Point 특정한 원소 k개의 포함 여부에 관계없이 집합 A에서 특정한 원소 k개를 제외한 집합의 부분집합을 먼저 구한다.

067

집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 부분집합 중에서 1, 2는 반드시 원소로 갖고 3, 5는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 구하시오. 4

$2^{6-2-2}=2^2=4$

068

집합 $\{x|x$는 10 이상 35 미만의 소수$\}$의 부분집합 중에서 11은 반드시 원소로 갖고 13, 29는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 구하시오. 16

$\{x|x$는 10 이상 35 미만의 소수$\}=\{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$
따라서 구하는 부분집합의 개수는 $2^{7-1-2}=2^4=16$

069

집합 $A=\{x|x$는 30의 양의 약수$\}$에 대하여

$1\in X,\ 2\in X,\ 30\notin X$

를 모두 만족시키는 집합 A의 부분집합 X의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 √⑤ 32

$A=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
구하는 X의 개수는 1, 2를 반드시 원소로 갖고 30을 원소로 갖지 않는 집합 A의 부분집합의 개수와 같으므로
$2^{8-2-1}=2^5=32$

070

집합 $A=\{x|x$는 10 이하의 12의 양의 약수$\}$의 부분집합 중에서 짝수인 원소가 2개인 집합의 개수를 구하시오. 12

$A=\{1, 2, 3, 4, 6\}$
(i) 2, 4는 반드시 원소로 갖고 6은 원소로 갖지 않는 집합의 개수는 $2^{5-2-1}=2^2=4$
(ii) 2, 6은 반드시 원소로 갖고 4는 원소로 갖지 않는 집합의 개수는 $2^{5-2-1}=2^2=4$
(iii) 4, 6은 반드시 원소로 갖고 2는 원소로 갖지 않는 집합의 개수는 $2^{5-2-1}=2^2=4$
(i)~(iii)에서 구하는 집합의 개수는
$4+4+4=12$

유형 12 $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수 중요

$A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X는

① 집합 A를 포함한다. ② 집합 B의 부분집합이다.

➡ B의 부분집합 중에서 A의 모든 원소를 반드시 포함하는 집합

풍쌤 Point 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낸 후, 포함 관계에 따라 특정한 원소의 포함 여부를 파악하여 부분집합의 개수를 이용한다.

071

$\{1, 3, 5\}\subset X\subset\{x|x$는 한 자리의 자연수$\}$를 만족시키는 집합 X의 개수는?

① 4 ② 8 ③ 16
④ 32 √⑤ 64

$\{1, 3, 5\}\subset X\subset\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$
따라서 집합 X의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$의 부분집합 중에서 1, 3, 5를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로
$2^{9-3}=2^6=64$

072

두 집합 A, B가

$A=\{x|x$는 6의 양의 약수$\}$, $=\{1, 2, 3, 6\}$

$B=\{x|x$는 18의 양의 약수$\}$ $=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

일 때, $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오. 4

$A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수는 집합 B의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 6을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로
$2^{6-4}=2^2=4$

073

두 집합 A, B가

$A=\{2, 5, 6\}$, $B=\{x|x$는 n 이하의 자연수$\}$

일 때, $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수가 16이다. 이때 자연수 n의 값을 구하시오. 7

$n(B)=n$
집합 X의 개수는 집합 B의 부분집합 중에서 2, 5, 6을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로
$2^{n-3}=16=2^4$, $n-3=4$ $\therefore n=7$

074

두 집합 $A=\{x|x^2-3x+2\leq 0,\ x$는 정수$\}$,

$B=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{10}{n},\ x,\ n\text{은 자연수}\right\}$에 대하여

$A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오. 4

$A=\{x|1\leq x\leq 2,\ x$는 정수$\}=\{1, 2\}$
$B=\{x|x$는 10의 양의 약수$\}=\{1, 2, 5, 10\}$
따라서 $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수는 집합 B의 부분집합 중에서 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로
$2^{4-2}=2^2=4$

중단원 점검 문제

01

방정식 $x^3-2x^2-x+2=0$의 해의 집합을 A라 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $-2\in A$ √② $-1\in A$ ③ $0\in A$
④ $1\notin A$ √⑤ $2\in A$

$x^3-2x^2-x+2=0$에서
$x^2(x-2)-(x-2)=0$, $(x-2)(x^2-1)=0$
$(x+1)(x-1)(x-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$
$\therefore A=\{-1, 1, 2\}$
① $-2\notin A$ ③ $0\notin A$ ④ $1\in A$

02 학교 시험 기출

자연수 전체의 집합을 N, 정수 전체의 집합을 Z, 유리수 전체의 집합을 Q, 실수 전체의 집합을 R라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $\sqrt{9}\in N$ ② $0\in Z$ ③ $-\sqrt{4}\in Q$
④ $3.14\in Q$ √⑤ $i^{99}\in R$

⑤ $i^{99}=(i^4)^{24}\times i^3=-i$는 허수이므로 $i^{99}\notin R$

03

집합 $\{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$를 조건제시법으로 나타내면 $\{x|x<k, x$는 4의 배수$\}$이다. 자연수 k의 최댓값이 M, 최솟값이 m일 때, $M+m$의 값을 구하시오. 53

집합 $\{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$는 24 이하의 4의 배수의 집합이다.
이때 24보다 큰 4의 배수는 28이므로
$24<k\le 28$
따라서 자연수 k의 최댓값은 $M=28$, 최솟값은 $m=25$이므로
$M+m=28+25=53$

04

집합 $A=\{x|x$는 자연수$\}$에 대하여 집합 B가

$B=\{x|x=a\times 2^b,\ a\in A,\ b\in A\}$

일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $1\notin B$ ② $2\in B$ ③ $4\in B$
④ $12\in B$ √⑤ $15\in B$

집합 B의 원소는
(자연수)×(2의 거듭제곱) ······ ㉠
꼴로 나타낼 수 있는 수이다.
① 1은 ㉠ 꼴로 나타낼 수 없으므로 $1\notin B$
③ $4=1\times 2^2$ 또는 $4=2\times 2^1$으로 나타낼 수 있으므로 $4\in B$
④ $12=3\times 2^2$ 또는 $12=6\times 2^1$으로 나타낼 수 있으므로 $12\in B$
⑤ 15는 ㉠ 꼴로 나타낼 수 없으므로 $15\notin B$

05 실전 Plus

두 집합 A, B가

$A=\{x|x^2+4x+5=0,\ x$는 실수$\}$,
$B=\{x|x^2+2ax+6a=0,\ x$는 실수$\}$

일 때, $n(A)=n(B)$를 만족시키는 정수 a의 개수를 구하시오. 5

이차방정식 $x^2+4x+5=0$의 실근이 존재하지 않으므로 $n(A)=0$
이때 $n(B)=0$이려면 이 이차방정식의 실근이 존재하지 않아야 한다.
이차방정식 $x^2+2ax+6a=0$의 판별식을 D'이라 하면
$\frac{D'}{4}=a^2-6a<0$, $a(a-6)<0$ $\therefore 0<a<6$
따라서 이를 만족시키는 정수 a는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

06

집합 $A=\{\varnothing, 1, \{1\}, \{1, 2\}\}$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $2\in A$ √② $\{1\}\in A$ ③ $\{\varnothing\}\in A$
④ $\{2\}\subset A$ ⑤ $\{1, 2\}\subset A$

①, ④ 2는 집합 A의 원소가 아니므로 $2\notin A$, $\{2\}\not\subset A$
③ $\varnothing$은 집합 A의 원소이지만 $\{\varnothing\}$은 집합 A의 원소가 아니므로 $\{\varnothing\}\notin A$
⑤ $\{1, 2\}$는 집합 A의 원소이지만 2는 집합 A의 원소가 아니므로
$\{1, 2\}\in A$, $\{1, 2\}\not\subset A$

07

세 집합 A, B, C가

$A=\{-1, 0, 1\}$,
$B=\{x|x=a+b,\ a\in A,\ b\in A\}$,
$C=\{x|x=ab,\ a\in A,\ b\in A\}$

일 때, A, B, C 사이의 포함 관계로 옳은 것은?

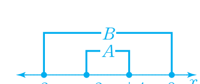
① $A=B\subset C$ ② $A\subset B=C$ ③ $A\subset C\subset B$
√④ $A=C\subset B$ ⑤ $B=C\subset A$

$B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
$C=\{-1, 0, 1\}$
따라서 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계는
$A=C\subset B$

08

두 집합 $A=\{x|-2\le x-a\le 4\}$, $B=\{x|-2\le x\le 8\}$에 대하여 $A\subset B$가 성립하도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오. 5

$A=\{x|-2\le x-a\le 4\}=\{x|a-2\le x\le a+4\}$
$A\subset B$가 성립하도록 두 집합을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$-2\le a-2$, $a+4\le 8$ $\therefore 0\le a\le 4$
따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.



09 교육청 기출

자연수 n에 대하여 자연수 전체 집합의 부분집합 A_n을 다음과 같이 정의하자.

$A_n=\{x\,|\,x$는 $\sqrt{n}$ 이하의 홀수$\}$

$A_n \subset A_{25}$를 만족시키는 n의 최댓값을 구하시오. 48

$A_{25}=\{x\,|\,x$는 $\sqrt{25}$ 이하의 홀수$\}=\{x\,|\,x$는 5 이하의 홀수$\}=\{1, 3, 5\}$
이때 $A_n \subset A_{25}$이려면 $1 \le \sqrt{n} < 7$이어야 하므로
$1 \le n < 49$
따라서 자연수 n의 최댓값은 48이다.

10 학교 시험 기출

두 집합 $A=\{x\,|\,3x^2+x+a=0\}$, $B=\left\{-1,\ b-\frac{1}{3}\right\}$에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$일 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은?

① 2 ✓② 5 ③ 8
④ 10 ⑤ 13

$A=B$이므로 이차방정식 $3x^2+x+a=0$의 해가 -1, $b-\frac{1}{3}$이다.
$x=-1$이 이차방정식의 해이므로
$3\times(-1)^2+(-1)+a=0$ $\quad \therefore a=-2$
$3x^2+x-2=0$에서 $(x+1)(3x-2)=0$ $\quad \therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{2}{3}$
즉, $b-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로 $b=1$ $\quad \therefore a^2+b^2=(-2)^2+1^2=5$

11

집합 $A=\{x\,|\,x^2-11x+18 \le 0,\ x$는 정수$\}$의 부분집합 중에서 모든 원소가 홀수로만 이루어진 집합의 개수는?

① 4 ② 8 ✓③ 16
④ 32 ⑤ 64

$A=\{x\,|\,(x-2)(x-9) \le 0,\ x$는 정수$\}=\{x\,|\,2 \le x \le 9,\ x$는 정수$\}=\{2, 3, 4, \cdots, 9\}$
이때 집합 A의 부분집합 중에서 모든 원소가 홀수로만 이루어진 집합의 개수는 집합 $\{3, 5, 7, 9\}$의 부분집합의 개수와 같으므로
$2^4=16$

12

집합 $A=\{x\,|\,x$는 24의 양의 약수$\}$에 대하여 집합 X가 $X \subset A$, $X \neq A$를 만족시킨다. 집합 X 중에서 1, 3을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수를 구하시오. 63

$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
집합 A에 대하여 집합 X가 $X \subset A$, $X \neq A$를 만족시키므로 집합 X는 집합 A의 진부분집합이다.
따라서 집합 A의 부분집합 중에서 1, 3을 반드시 원소로 갖는 진부분집합의 개수는
$2^{8-2}-1=2^6-1=63$

13

집합 $A=\{x\,|\,2x-5 \le x+5 \le 4x+4,\ x$는 정수$\}$의 부분집합 중에서 3, 4, 5, 6을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수를 a라 하고 4, 5, 6, 7, 8을 원소로 갖지 않는 집합의 개수를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. 96

$A=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{3} \le x \le 10,\ x$는 정수$\right\}$
$\quad =\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$
$\therefore a=2^{10-4}=2^6=64$, $b=2^{10-5}=2^5=32$
$\therefore a+b=64+32=96$

14 실전 Plus

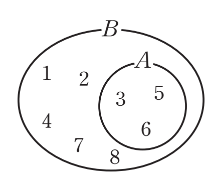
집합 $A=\{x\,|\,x \le n,\ x,\ n$은 자연수$\}$의 부분집합 중에서 2는 반드시 원소로 갖고, 1, 6은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수가 128일 때, n의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9
✓④ 10 ⑤ 11

$n(A)=n$
즉, 집합 A의 부분집합 중에서 2는 반드시 원소로 갖고, 1, 6은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는
$2^{n-1-2}=2^{n-3}=128=2^7$
따라서 $n-3=7$이므로 $n=10$

15

두 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같을 때, $A \subset X \subset B$를 만족시키는 집합 X 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는?



✓① 16 ② 32 ③ 64
④ 128 ⑤ 256

$A=\{3, 5, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$A \subset X \subset B$를 만족시키는 집합 X는 집합 B의 부분집합 중에서 3, 5, 6을 반드시 원소로 갖는 집합이다.
따라서 X 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는 집합 B의 부분집합 중에서 1, 3, 5, 6을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수이므로
$2^{8-4}=2^4=16$

16

두 집합 $A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$에 대하여 $A \subset X \subset B$, $B \not\subset X$를 만족시키는 집합 X의 개수가 255일 때, 자연수 n의 값을 구하시오. 12

집합 X는 집합 B의 진부분집합 중에서 1, 2, 3, 6을 반드시 원소로 갖는 집합이므로
$2^{n-4}-1=255$
따라서 $2^{n-4}=256=2^8$이므로
$n-4=8$ $\quad \therefore n=12$

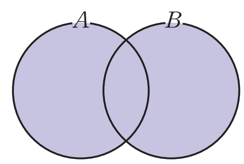
01 집합의 연산

❶ 집합의 연산

① 전체집합: 어떤 집합에 대하여 그 부분집합을 생각할 때, 처음의 집합을 전체집합이라 하고 기호 U로 나타낸다.

② 합집합: 두 집합 A, B에 대하여 A에 속하거나 B에 속하는 모든 원소로 이루어진 집합

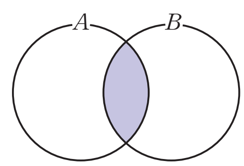
$A\cup B=\{x\,|\,x\in A$ 또는 $x\in B\}$



• '또는', '~이거나'는 합집합을, '그리고', '~이고', '~와'는 교집합을 의미한다.

③ 교집합: 두 집합 A, B에 대하여 A에도 속하고 B에도 속하는 모든 원소로 이루어진 집합

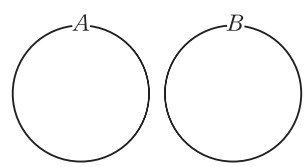
$A\cap B=\{x\,|\,x\in A$ 그리고 $x\in B\}$



④ 서로소: 두 집합 A, B에서 공통인 원소가 하나도 없을 때, 즉

$A\cap B=\varnothing$ → $n(A\cap B)=0$

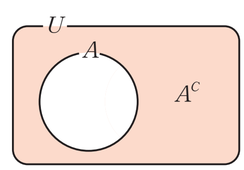
일 때, A와 B는 서로소라 한다.



• 공집합은 모든 집합과 서로소이다.

⑤ 여집합: 전체집합 U의 부분집합 A에 대하여 U의 원소 중에서 A에 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합을 U에 대한 A의 여집합이라 한다.

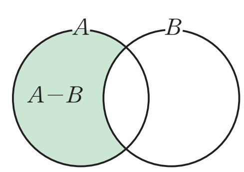
$A^C=\{x\,|\,x\in U$ 그리고 $x\notin A\}$



• A^C은 전체집합 U에 대한 집합 A의 차집합으로 생각할 수 있다.
$A^C=U-A$

⑥ 차집합: 두 집합 A, B에 대하여 A에는 속하지만 B에는 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합을 A에 대한 B의 차집합이라 한다.

$A-B=\{x\,|\,x\in A$ 그리고 $x\notin B\}$



• $A-B\neq B-A$임에 주의한다.

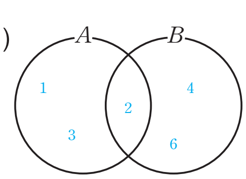
개념 기본 문제

정답과 풀이 069쪽

001

두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6\}$에 대하여 다음 벤 다이어그램을 완성하고, □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1)



(2) $A\cup B=\{1,\ \boxed{2},\ \boxed{3},\ 4,\ 6\}$

(3) $A\cap B=\{\boxed{2}\}$

002

다음 두 집합 A, B에 대하여 $A\cup B$, $A\cap B$를 각각 구하시오.

(1) $A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$, $B=\{a,\ e,\ i,\ o,\ u\}$

$A\cup B=\{a, b, c, d, e, f, i, o, u\}$, $A\cap B=\{a, e\}$

(2) $A=\{x\,|\,x$는 6 이하의 자연수$\}$, $B=\{3,\ 6,\ 9\}$

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$, $A\cap B=\{3, 6\}$

(3) $A=\{x\,|\,x$는 한 자리의 자연수$\}$, $=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$

$B=\{x\,|\,x$는 16의 양의 약수$\}$ $=\{1, 2, 4, 8, 16\}$

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16\}$, $A\cap B=\{1, 2, 4, 8\}$

개념 기본 문제

정답과 풀이 069쪽

003

다음 두 집합 A, B가 서로소인 것은 ○를, 서로소가 아닌 것은 ×를 ( ) 안에 써넣으시오.

(1) $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{4,\ 5\}$ (○)

(2) $A=\{a,\ p,\ l,\ e\}$, $B=\{c,\ l,\ h,\ t\}$ (×)

$A\cap B=\{l\}$이므로 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

(3) $A=\{x\,|\,x$는 9의 양의 약수$\}$, $=\{1,\ 3,\ 9\}$
$B=\{x\,|\,x$는 10 이하의 5의 배수$\}$ $=\{5,\ 10\}$ (○)

$A\cap B=\varnothing$이므로 두 집합 A, B는 서로소이다.

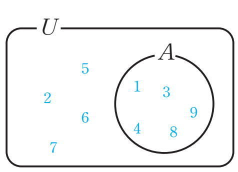
(4) $A=\{x\,|\,x^2+2x+1=0\}$,
$B=\{x\,|\,x^2+x-2\le 0,\ x$는 정수$\}$ (×)

$A=\{x\,|\,(x+1)^2=0\}=\{-1\}$
$B=\{x\,|\,(x+2)(x-1)\le 0,\ x$는 정수$\}=\{x\,|\,-2\le x\le 1,\ x$는 정수$\}$
$=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$
따라서 $A\cap B=\{-1\}$이므로 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

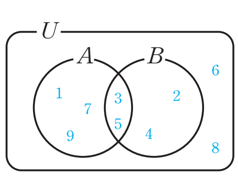
004

전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 한 자리의 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B가 다음과 같을 때, 벤 다이어그램을 완성하고 □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $A=\{1,\ 3,\ 4,\ 8,\ 9\}$
➡ $A^C=\{2,\ \boxed{5},\ \boxed{6},\ \boxed{7}\}$



(2) $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$,
$B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
➡ $A-B=\{1,\ \boxed{7},\ \boxed{9}\}$
$B-A=\{\boxed{2},\ \boxed{4}\}$



005

전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 한 자리의 자연수$\}$의 부분집합 A가 다음과 같을 때, A^C을 구하시오.

(1) $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

(2) $A=\{1,\ 3,\ 7,\ 8,\ 9\}$ $\{2,\ 4,\ 5,\ 6\}$

(3) $A=\{x\,|\,x$는 30의 약수$\}$ $\{4,\ 7,\ 8,\ 9\}$

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6\}$이므로
$A^C=\{4,\ 7,\ 8,\ 9\}$

(4) $A=\{x\,|\,x$는 3의 배수$\}$ $\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8\}$

$A=\{3,\ 6,\ 9\}$이므로
$A^C=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8\}$

006

다음 두 집합 A, B에 대하여 $A-B$, $B-A$를 각각 구하시오.

(1) $A=\{\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c},\ \mathrm{d},\ \mathrm{e},\ \mathrm{f}\}$, $B=\{\mathrm{b},\ \mathrm{c},\ \mathrm{f},\ \mathrm{g}\}$
$A-B=\{\mathrm{a},\ \mathrm{d},\ \mathrm{e}\}$, $B-A=\{\mathrm{g}\}$

(2) $A=\{1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9\}$, $B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$
$A-B=\{1,\ 4\}$, $B-A=\{12\}$

(3) $A=\{x\,|\,x$는 10 이하의 홀수인 자연수$\}$,
$B=\{x\,|\,x$는 5의 양의 약수$\}$ $A-B=\{3,\ 7,\ 9\}$, $B-A=\varnothing$

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$
$B=\{1,\ 5\}$
$\therefore A-B=\{3,\ 7,\ 9\}$, $B-A=\varnothing$

(4) $A=\{x\,|\,x$는 12 이하의 4의 배수$\}$,
$B=\{x\,|\,4\le x<10,\ x$는 자연수$\}$
$A-B=\{12\}$, $B-A=\{5,\ 6,\ 7,\ 9\}$

$A=\{4,\ 8,\ 12\}$
$B=\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$
$\therefore A-B=\{12\}$, $B-A=\{5,\ 6,\ 7,\ 9\}$

유형 실전 문제

정답과 풀이 070쪽

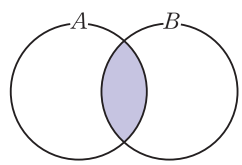
유형 01 합집합과 교집합 중요

① 합집합: $A\cup B=\{x|x\in A$ 또는 $x\in B\}$
⇒ 집합 A에 있거나 집합 B에 있는 모든 원소들의 집합
② 교집합: $A\cap B=\{x|x\in A$ 그리고 $x\in B\}$
⇒ 집합 A에도 있고 집합 B에도 있는 모든 원소들의 집합

풍쌤 Point 두 집합에 있는 모든 원소를 나열하면 합집합이 되고, 두 집합에서 공통인 원소를 모두 나열하면 교집합이 된다.

007

두 집합 $A=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $B=\{x|x$는 한 자리의 소수$\}$에 대하여 오른쪽 벤 다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합을 구하시오. $\{2,\ 3,\ 5\}$



$B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$이므로 구하는 집합은
$A\cap B=\{2,\ 3,\ 5\}$

008

세 집합 $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $C=\{x|x$는 5 이하의 홀수인 자연수$\}$에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A\cap B=\{3,\ 5\}$
② $A\cap C=\{1,\ 3,\ 5\}$
③ $B\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
√④ $(A\cap B)\cap C=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
⑤ $A\cap(B\cup C)=\{1,\ 3,\ 5\}$

④ $(A\cap B)\cap C=\{3,\ 5\}\cap\{1,\ 3,\ 5\}=\{3,\ 5\}$
⑤ $A\cap(B\cup C)=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}\cap\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}=\{1,\ 3,\ 5\}$

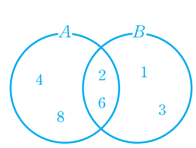
009

두 집합 A, $B=\{x|x$는 6의 양의 약수$\}$에 대하여

$$A\cap B=\{2,\ 6\},\ A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8\}$$

일 때, 집합 A의 모든 원소의 합을 구하시오. 20

$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$
따라서 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 합은
$2+4+6+8=20$



유형 02 서로소인 집합 중요

① 두 집합 A와 B는 서로소이다.
⇒ 두 집합 A, B에서 공통인 원소가 하나도 없다.
⇒ $A\cap B=\varnothing$, $n(A\cap B)=0$
② 공집합은 모든 집합과 서로소이다. ⇒ $A\cap\varnothing=\varnothing$

풍쌤 Point 두 집합을 각각 원소나열법으로 나타내거나 수직선에 표시하여 겹치는 원소나 겹치는 부분이 없는지 확인한다.

010

다음 중 집합 $\{1,\ 3,\ 5\}$와 서로소가 아닌 집합을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\varnothing$
② $\{2,\ 4\}$
√③ $\{1,\ 2,\ 3\}$
√④ $\{x|x$는 5의 양의 약수$\}$
⑤ $\{x|x$는 4의 양의 배수$\}$ $=\{4,\ 8,\ 12,\ \cdots\}$

$A=\{1,\ 3,\ 5\}$라 하자.
③ $B=\{1,\ 2,\ 3\}$일 때, $A\cap B=\{1,\ 3\}$이므로 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.
④ $B=\{x|x$는 5의 양의 약수$\}=\{1,\ 5\}$일 때,
$A\cap B=\{1,\ 5\}$이므로 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

011

다음 중 두 집합 A, B가 서로소인 것은?

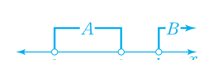
① $A=\{x|x$는 자연수$\}$, $B=\{x|x$는 정수$\}$
√② $A=\{x|x$는 12의 양의 약수$\}$,
$B=\{x|x$는 10의 양의 배수$\}$
③ $A=\{x|x^2=1\}$, $B=\{x|-1\le x\le 1\}$
④ $A=\{x|x\ge 0\}$, $B=\{x|x\le 0\}$
⑤ $A=\{x|x^2+3x+2=0\}$, $B=\{x||x|=2\}$

① $A\cap B=A\neq\varnothing$
② $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$, $B=\{10,\ 20,\ 30,\ \cdots\}$이므로 $A\cap B=\varnothing$
③ $A=\{-1,\ 1\}$에서 $A\cap B=A\neq\varnothing$
④ $A\cap B=\{0\}$
⑤ $A=\{-2,\ -1\}$, $B=\{-2,\ 2\}$이므로 $A\cap B=\{-2\}$

012

두 집합 $A=\{x|-2<x<1\}$, $B=\{x|x>k\}$가 서로소일 때, 정수 k의 최솟값을 구하시오. 1

오른쪽 그림과 같아야 하므로
$k\ge 1$
따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 1이다.



013

집합 $A=\{1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 8\}$의 부분집합 중에서 집합 $B=\{1,\ 5,\ 8\}$과 서로소인 집합의 개수를 구하시오. 4

집합 $A=\{1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 8\}$의 부분집합 중에서 집합 $B=\{1,\ 5,\ 8\}$과 서로소인 집합은 집합 $\{2,\ 6\}$의 부분집합과 같다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^2=4$

유형 03 여집합과 차집합

중요

① 여집합: $A^C=\{x|x\in U$ 그리고 $x\notin A\}$

➡ 전체집합 U의 원소 중에서 집합 A에 속하지 않는 모든 원소들의 집합

② 차집합: $A-B=\{x|x\in A$ 그리고 $x\notin B\}$

➡ 집합 A에는 속하지만 집합 B에는 속하지 않는 모든 원소들의 집합

풍쌤 Point 전체집합에서 A의 원소를 모두 지우면 A^C가 되고, A의 원소 중에서 B의 원소를 모두 지우면 $A-B$가 된다.

014

전체집합 $U=\{x|x$는 한 자리의 자연수$\}$의 두 부분집합

$A=\{x|x$는 2의 배수$\}$, $B=\{x|x$는 6의 약수$\}$

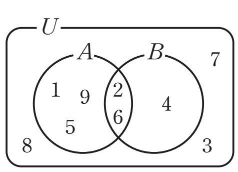
에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $A^C=\{1, 3, 5, 7\}$ ② $B^C=\{7, 8, 9\}$
③ $A-B=\{1, 3\}$ ④ $B-A=\{4, 8\}$
√⑤ $(A\cup B)^C=\{5, 7, 9\}$

$A=\{2, 4, 6, 8\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$
① $A^C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ② $B^C=\{4, 5, 7, 8, 9\}$
③ $A-B=\{4, 8\}$ ④ $B-A=\{1, 3\}$
⑤ $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$이므로 $(A\cup B)^C=\{5, 7, 9\}$

015

전체집합 U의 두 부분집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같을 때, 집합 $(A-B)^C$의 원소의 개수를 구하시오. 6



$A-B=\{1, 5, 9\}$이므로
$(A-B)^C=\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$
따라서 구하는 원소의 개수는 6이다.

016

전체집합 $U=\{x|x$는 15 이하의 홀수인 자연수$\}$의 두 부분집합

$A=\{3, 7, 11, 13\}$, $B=\{x|x$는 3의 배수$\}$

에 대하여 $(A-B)^C\cap(B-A)^C$의 모든 원소의 합은?

① 6 ② 8 √③ 9
④ 12 ⑤ 14

$U=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$
$B=\{3, 9, 15\}$에 대하여
$A-B=\{7, 11, 13\}$, $B-A=\{9, 15\}$이므로
$(A-B)^C=\{1, 3, 5, 9, 15\}$, $(B-A)^C=\{1, 3, 5, 7, 11, 13\}$
$\therefore (A-B)^C\cap(B-A)^C=\{1, 3, 5\}$
따라서 구하는 모든 원소의 합은 $1+3+5=9$

유형 04 집합의 연산을 이용하여 미지수 구하기

두 집합 A, B에 대하여 다음을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

① $a\in(A\cup B)$이면 $a\in A$ 또는 $a\in B$
② $a\in(A\cap B)$이면 $a\in A$ 그리고 $a\in B$
③ $a\in(A-B)$이면 $a\in A$ 그리고 $a\notin B$

풍쌤 Point 원소의 포함 여부를 따져서 미지수의 값을 구한 후, 그 값을 대입하여 주어진 조건을 만족시키는지 반드시 확인해 본다.

017

두 집합 $A=\{2, 3, a\}$, $B=\{1, 4, b-3\}$에 대하여 $A\cap B=\{3, 4\}$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 10

$4\in A$이므로 $a=4$
$3\in B$이므로 $b-3=3$ $\therefore b=6$
$\therefore a+b=4+6=10$

018

두 집합 $A=\{5, 7\}$, $B=\{7, a, a+2\}$에 대하여

$A\cup B=\{5, 6, 7, 8\}$

일 때, 상수 a의 값을 구하시오. 6

$6\in B$, $8\in B$
이때 $a\in B$, $(a+2)\in B$이므로
$a=6$

019

두 집합 $A=\{1, 2, a, a+1\}$, $B=\{1, 5, a+3\}$에 대하여 $A-B=\{2, 4\}$일 때, 다음 중 옳은 것은? (단, a는 상수이다.)

① $a=3$ ② $A=\{1, 2, 3, 4\}$
③ $B=\{1, 5, 6\}$ √④ $A\cap B=\{1, 5\}$
⑤ $B-A=\{5, 7\}$

$a=4$ 또는 $a+1=4$이므로 $a=4$ 또는 $a=3$
(i) $a=3$일 때, 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $a=4$일 때, $A=\{1, 2, 4, 5\}$, $B=\{1, 5, 7\}$이므로 $A-B=\{2, 4\}$, 즉 조건을 만족시킨다.
(i), (ii)에서 $a=4$, $A=\{1, 2, 4, 5\}$, $B=\{1, 5, 7\}$이므로
$A\cap B=\{1, 5\}$, $B-A=\{7\}$

020

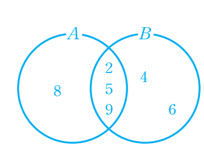
두 집합 A, B에 대하여

$B=\{2, 4, 5, 6, 9\}$,

$(A-B)\cup(B-A)=\{4, 6, 8\}$

일 때, 집합 A의 모든 원소의 합을 구하시오. 24

$A=\{2, 5, 8, 9\}$
따라서 집합 A의 모든 원소의 합은
$2+5+8+9=24$



02 집합의 연산의 성질

❶ 집합의 연산의 성질

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

① $A\cup A=A$, $A\cap A=A$　② $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$

③ $A\cup U=U$, $A\cap U=A$　④ $A\cup A^C=U$, $A\cap A^C=\varnothing$

⑤ $\varnothing^C=U$, $U^C=\varnothing$　⑥ $(A^C)^C=A$

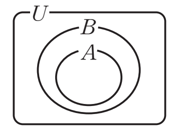
⑦ $A-B=A\cap B^C=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$

참고 집합의 연산의 성질을 이용한 여러 가지 표현

(1) $A\subset B$와 같은 표현은

① $A\cup B=B$　② $A\cap B=A$　③ $A-B=\varnothing$

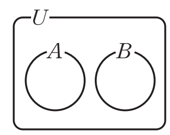
④ $A\cap B^C=\varnothing$　⑤ $B^C\subset A^C$　⑥ $B^C-A^C=\varnothing$



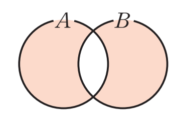
(2) $A\cap B=\varnothing$과 같은 표현은

① $A-B=A$　② $B-A=B$

③ $A\subset B^C$　④ $B\subset A^C$



• $(A\cup B)-(A\cap B)$
$=(A-B)\cup(B-A)$



개념 기본 문제

정답과 풀이 071쪽

021

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 □ 안에 기호 $=$, $\neq$ 중 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $A\cup U^C$ $\boxed{=}$ A

$A\cup U^C=A\cup\varnothing=A$

(2) $A\cap\varnothing^C$ $\boxed{\neq}$ A^C

$A\cap\varnothing^C=A\cap U=A\neq A^C$

(3) $(\varnothing^C)^C$ $\boxed{=}$ $\varnothing$

$(\varnothing^C)^C=U^C=\varnothing$

(4) $(A\cup A^C)\cap A$ $\boxed{=}$ A

$(A\cup A^C)\cap A=U\cap A=A$

(5) $U\cap(A\cup A)$ $\boxed{=}$ A

$U\cap(A\cup A)=U\cap A=A$

(6) $A-B$ $\boxed{\neq}$ $B-A$

(7) $U-(A^C)^C$ $\boxed{=}$ A^C

$U-(A^C)^C=U-A=A^C$

(8) $A\cap(A\cap B)^C$ $\boxed{=}$ $A-B$

$A\cap(A\cap B)^C=A-(A\cap B)=A-B$

022

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $B\subset A$일 때, 항상 옳은 것은 ○를, 옳지 않은 것은 ×를 (　　) 안에 써넣으시오. (단, $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$, $A\neq B$)

(1) $A\cap B^C=\varnothing$　(×)

$A\cap B^C=A-B\neq\varnothing$

(2) $A^C\subset B^C$　(○)

(3) $B-(A\cap B)=\varnothing$　(○)

$A\cap B=B$이므로 $B-(A\cap B)=\varnothing$

023

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A\cap B=\varnothing$일 때, 항상 옳은 것은 ○를, 옳지 않은 것은 ×를 (　　) 안에 써넣으시오. (단, $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$, $A\neq B$)

(1) $A-B=\varnothing$　(×)

$A-B=A\neq\varnothing$

(2) $B\subset A^C$　(○)

(3) $A-(A\cap B)=A$　(○)

$A-(A\cap B)=A-\varnothing=A$

03 집합의 연산 법칙

❶ 집합의 연산 법칙

세 집합 A, B, C에 대하여

① 교환법칙: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$

② 결합법칙: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

③ 분배법칙: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

참고 다음 두 집합에서 분배법칙은 한 집합이 다른 집합에 흡수되는 형태가 된다.

① $A\cap(A\cup B)=A$　　② $A\cup(A\cap B)=A$

• 세 집합 A, B, C에 대한 결합법칙이 성립하므로 괄호를 생략하고
$A\cup B\cup C$, $A\cap B\cap C$
로 나타내기도 한다.

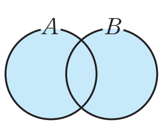
개념 기본 문제

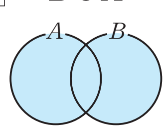
정답과 풀이 072쪽

024

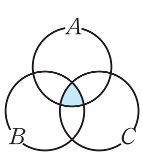
세 집합 A, B, C에 대하여 다음 집합을 벤 다이어그램에 색칠하여 나타내고, □ 안에 기호 $=$, $\neq$ 중 알맞은 것을 써넣으시오.

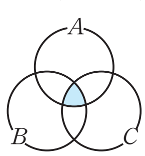
(1) $A\cup B$ $\boxed{=}$ $B\cup A$



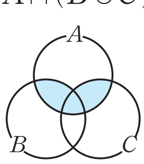


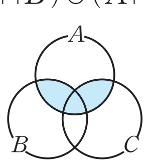
(2) $(A\cap B)\cap C$ $\boxed{=}$ $A\cap(B\cap C)$



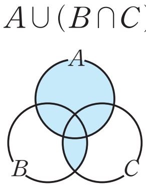


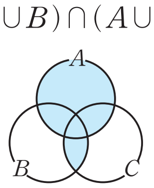
(3) $A\cap(B\cup C)$ $\boxed{=}$ $(A\cap B)\cup(A\cap C)$





(4) $A\cup(B\cap C)$ $\boxed{=}$ $(A\cup B)\cap(A\cup C)$





025

세 집합 A, B, C에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $B\cup A=\{1, 2, 3, 4\}$일 때, $A\cup B$　$\{1, 2, 3, 4\}$

(2) $A\cap B=\{3, 7\}$일 때, $B\cap A$　$\{3, 7\}$

(3) $A=\{1, 2, 3\}$, $B\cup C=\{3, 4, 5, 8\}$일 때,
$(A\cup B)\cup C$　$\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$

(4) $A=\{1, 2, 3\}$, $B\cap C=\{2, 4, 5\}$일 때,
$(A\cap B)\cap C$　$\{2\}$

(5) $A\cap B=\{4, 6\}$, $A\cap C=\{4, 7, 9\}$일 때,
$A\cap(B\cup C)$　$\{4, 6, 7, 9\}$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{4, 6\}\cup\{4, 7, 9\}=\{4, 6, 7, 9\}$

(6) $A\cup B=\{1, 2, 3, 4\}$, $A\cup C=\{3, 4, 5, 6\}$일 때,
$A\cup(B\cap C)$　$\{3, 4\}$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1, 2, 3, 4\}\cap\{3, 4, 5, 6\}=\{3, 4\}$

(7) $A\cup(A\cup B)=\{3, 4, 7, 9, 11\}$일 때, $A\cup B$
$\{3, 4, 7, 9, 11\}$

$A\cup(A\cup B)=A\cup B=\{3, 4, 7, 9, 11\}$

(8) $A\cup(A\cap B)=\{1, 2, 3\}$일 때, A　$\{1, 2, 3\}$

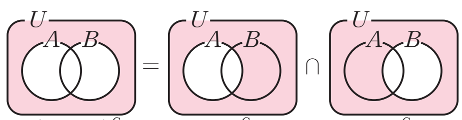
$A\cup(A\cap B)=A=\{1, 2, 3\}$

04 드모르간의 법칙

❶ 드모르간의 법칙

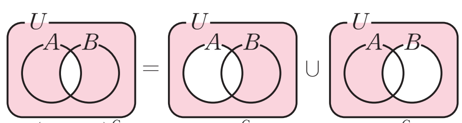
전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

① $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$



$(A\cup B)^C$ A^C B^C

② $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$



$(A\cap B)^C$ A^C B^C

풍쌤 Tip 복잡한 집합의 연산은 집합의 연산 법칙과 드모르간의 법칙을 이용하여 간단히 나타낸다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 072쪽

026

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $(A\cup B^C)^C=\boxed{A^C}\cap B$

(2) $(A^C\cap B)^C=A\boxed{\cup}B^C$

027

전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 7 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

에 대하여 다음을 구하고, □ 안에 기호 $=$, $\neq$ 중 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $A\cap B$ $\{3, 5\}$

(2) $A^C\cup B^C$ $\{1, 2, 4, 6, 7\}$

(3) $A^C\cup B^C$ $\boxed{=}$ $(A\cap B)^C$ $\{1, 2, 4, 6, 7\}$

(4) $A\cup B$ $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

(5) $A^C\cap B^C$ $\{6\}$

(6) $A^C\cap B^C$ $\boxed{=}$ $(A\cup B)^C$ $\{6\}$

028

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $A\cap(A\cup B)^C=A\cap(A^C\cap\boxed{B^C})$
$=(A\cap A^C)\cap\boxed{B^C}$
$=\boxed{\varnothing}\cap B^C$
$=\boxed{\varnothing}$

(2) $A\cap(A-B)^C=A\cap(A\cap B^C)^C$
$=A\cap(A^C\cup\boxed{B})$
$=(A\cap A^C)\boxed{\cup}(A\cap B)$
$=\varnothing\boxed{\cup}(A\cap B)$
$=A\boxed{\cap}B$

(3) $(A\cup B)\cap(B-A)^C=(A\cup B)\cap(B\cap A^C)^C$
$=(A\cup B)\cap(B^C\cup\boxed{A})$
$=(A\cup B)\cap(A\cup B^C)$
$=\boxed{A}\cup(B\cap B^C)$
$=\boxed{A}\cup\varnothing$
$=\boxed{A}$

유형 실전 문제

유형 05 집합의 연산의 성질

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

① $A\cup A=A$, $A\cap A=A$ ② $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$

③ $A\cup U=U$, $A\cap U=A$ ④ $A\cup A^C=U$, $A\cap A^C=\varnothing$

⑤ $\varnothing^C=U$, $U^C=\varnothing$ ⑥ $(A^C)^C=A$

⑦ $A-B=A\cap B^C=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$

풍쌤 Point 집합의 연산의 성질은 집합의 연산과 포함 관계에 의하여 판단할 수 있다. 바로 떠오르지 않을 때는 벤 다이어그램을 이용한다.

029

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 중 항상 옳은 것은?

① $A\cap U^C=A$ √② $(U^C)^C=U$

③ $A-B=A^C\cap B$ ④ $(A\cap A^C)\cup A=A^C$

⑤ $U-A^C=A^C$

① $A\cap U^C=A\cap\varnothing=\varnothing$
③ $A-B=A\cap B^C$
④ $(A\cap A^C)\cup A=\varnothing\cup A=A$
⑤ $U-A^C=U\cap(A^C)^C=U\cap A=A$

030

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 중 집합 $A\cap B$와 항상 같은 집합은?

① $A\cup B$ ② $A^C\cap B$ ③ $A-B$

√④ $A-B^C$ ⑤ $B-A$

③ $A-B=A\cap B^C$
④ $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$
⑤ $B-A=B\cap A^C=A^C\cap B$

031

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A\subset B$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A\cup B=B$

② $B-A^C=A$

③ $A\cap(A\cup B)=A$

④ $A\cup(A\cap B)=A$

√⑤ $(A\cup B)\cap(A\cap B)=B$

② $B-A^C=B\cap(A^C)^C=B\cap A=A$
⑤ $(A\cup B)\cap(A\cap B)=B\cap A=A$

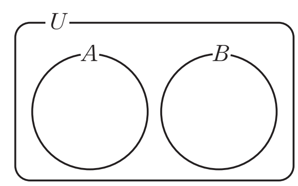
032

전체집합 $U=\{x|x$는 한 자리의 자연수$\}$의 두 부분집합 $A=\{2, 4, 6, 8\}$, $B=\{1, 2, 4, 9\}$에 대하여 집합 $(U-A^C)\cap(A\cap B^C)$의 모든 원소의 합을 구하시오. 14

$(U-A^C)\cap(A\cap B^C)=(U\cap A)\cap(A\cap B^C)=A\cap(A\cap B^C)$
$=A\cap B^C=A-B$
$\therefore (U-A^C)\cap(A\cap B^C)=A-B=\{6, 8\}$
따라서 구하는 집합의 모든 원소의 합은
$6+8=14$

033

전체집합 U의 두 부분집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같을 때, **보기**에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. ㄱ, ㄷ, ㄹ



보기

ㄱ. $A\subset B^C$ ㄴ. $B-A=\varnothing$

ㄷ. $A-B^C=\varnothing$ ㄹ. $(A\cup B)-B=A$

ㄴ. $B-A=B$
ㄷ. $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B=\varnothing$

034

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 **보기**에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $A\cup\varnothing^C=U$ ㄴ. $U\cap(A\cap A)=A^C$

ㄷ. $B-A=A^C\cap B$ ㄹ. $(A\cap A^C)\cup B=U$

ㅁ. $(A\cap\varnothing^C)\cap B=A-B^C$

① ㄱ, ㄴ, ㄷ √② ㄱ, ㄷ, ㅁ ③ ㄴ, ㄷ, ㄹ

④ ㄴ, ㄷ, ㅂ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅁ

ㄴ. $U\cap(A\cap A)=U\cap A=A$
ㄹ. $(A\cap A^C)\cup B=\varnothing\cup B=B$
ㅁ. $(A\cap\varnothing^C)\cap B=(A\cap U)\cap B=A\cap B$
$A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$
$\therefore (A\cap\varnothing^C)\cap B=A-B^C$

유형 06 집합의 연산 법칙 중요

① 교환법칙: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$
② 결합법칙: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
③ 분배법칙: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
④ 드모르간의 법칙: $(A\cup B)^{C}=A^{C}\cap B^{C}$,
$(A\cap B)^{C}=A^{C}\cup B^{C}$

풍쌤 Point

분배법칙: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

드모르간의 법칙: $(A\cup B)^{C}=A^{C}\cap B^{C}$

$(A\cap B)^{C}=A^{C}\cup B^{C}$

035

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 중 집합 $A^{C}\cap(A-B^{C})$와 항상 같은 집합은?

√① $\varnothing$　② A　③ B
④ $A-B$　⑤ $B-A$

$A^{C}\cap(A-B^{C})=A^{C}\cap\{A\cap(B^{C})^{C}\}=A^{C}\cap(A\cap B)$
$=(A^{C}\cap A)\cap B=\varnothing\cap B$
$=\varnothing$

036

전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 한 자리의 자연수$\}$의 두 부분집합
$A=\{2, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{1, 2, 5, 8\}$
에 대하여 집합 $(A\cup B)^{C}\cup B$의 원소의 개수를 구하시오. 6

$(A\cup B)^{C}\cup B=(A^{C}\cap B^{C})\cup B=(A^{C}\cup B)\cap(B^{C}\cup B)$
$=(A^{C}\cup B)\cap U=A^{C}\cup B$
$\therefore (A\cup B)^{C}\cup B=A^{C}\cup B=\{1, 4, 6, 8\}\cup\{1, 2, 5, 8\}=\{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$
따라서 구하는 원소의 개수는 6이다.

037

전체집합 U의 서로 다른 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 중 나머지 넷과 다른 하나는?

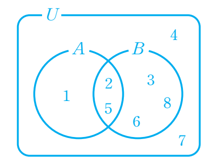
① $B^{C}-A^{C}$　② $(A^{C}\cup B)^{C}$
③ $(A^{C}\cap B^{C})^{C}\cap B^{C}$　④ $\{B\cup(A-B)\}\cap B^{C}$
√⑤ $(A\cap B)-(A^{C}\cap B^{C})^{C}$

①, ②, ③, ④ $A-B$
⑤ $(A\cap B)-(A^{C}\cap B^{C})^{C}=(A\cap B)-(A\cup B)=(A\cap B)\cap(A\cup B)^{C}$
$=(A\cap B)\cap(A^{C}\cap B^{C})=\varnothing$

038

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여
$A-B=\{1\}$, $A\cap B=\{2, 5\}$, $A^{C}\cap B^{C}=\{4, 7\}$
일 때, 집합 B의 원소의 개수를 구하시오. 5

$A^{C}\cap B^{C}=(A\cup B)^{C}=\{4, 7\}$
$\therefore B=\{2, 3, 5, 6, 8\}$
따라서 구하는 원소의 개수는 5이다.



039

전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 자연수$\}$의 두 부분집합
$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{2, 3, 6, 9, 10\}$
에 대하여 집합 $A\cap\{(A\cup B^{C})\cap(A^{C}\cup B^{C})\}$의 원소의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. 8

$A\cap\{(A\cup B^{C})\cap(A^{C}\cup B^{C})\}=A\cap\{(A\cap A^{C})\cup B^{C}\}=A\cap(\varnothing\cup B^{C})$
$=A\cap B^{C}=A-B$
$=\{1, 5, 7\}$
따라서 이 집합의 원소의 최댓값은 7, 최솟값은 1이므로 그 합은 $7+1=8$

040

전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 15 이하의 소수인 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여
$A=\{2, 5, 7, 13\}$, $A^{C}\cup B^{C}=\{2, 3, 11, 13\}$
을 만족시키는 집합 B의 개수를 구하시오. 4

$A^{C}\cup B^{C}=(A\cap B)^{C}=\{2, 3, 11, 13\}$
$A\cap B=\{5, 7\}$
따라서 집합 B는 5, 7을 반드시 원소로 갖고 2, 13은 원소로 갖지 않는 집합이므로
$\{5, 7\}$, $\{3, 5, 7\}$, $\{5, 7, 11\}$, $\{3, 5, 7, 11\}$
의 4개이다.

041

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 **보기**에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $A-(A-B)=B$
ㄴ. $(A\cap B)\cup(A^{C}\cap B)=B$
ㄷ. $A\cup(A^{C}\cup B)^{C}=A\cap B$
ㄹ. $(A^{C}-B^{C})\cup(B^{C}-A^{C})=A\cap B$

① ㄱ　√② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄹ

ㄱ. $A-(A-B)=A\cap(A\cap B^{C})^{C}=A\cap B$
ㄷ. $A\cup(A^{C}\cup B)^{C}=A$
ㄹ. $(A^{C}-B^{C})\cup(B^{C}-A^{C})=(A^{C}\cap B)\cup(B^{C}\cap A)=(B-A)\cup(A-B)$

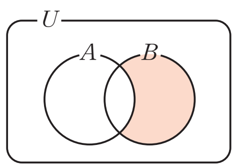
유형 07 벤 다이어그램과 집합

① 벤 다이어그램이 주어지고 집합을 찾을 때
➡ 각 집합을 벤 다이어그램으로 나타내어 주어진 벤 다이어그램과 비교한다.
② 집합이 주어지고 벤 다이어그램을 찾을 때
➡ 주어진 집합을 먼저 간단히 한 다음, 벤 다이어그램으로 나타내어 각 벤 다이어그램과 비교한다.

풍쌤 Point 집합의 연산이 복잡한 경우에는 집합의 연산 법칙과 드모르간의 법칙을 적절히 사용하여 간단한 집합으로 정리한다.

042

다음 중 오른쪽 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합과 항상 같은 집합은?

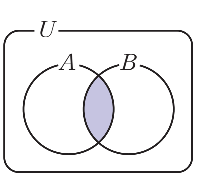


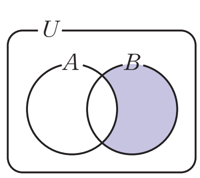
① $A\cap B$
② $A-B$
③ $B-A^C$
④ $A-(A\cap B)$
✓⑤ $(A\cup B)-A$

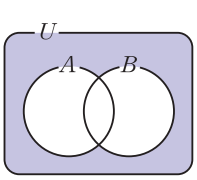
③ $B-A^C=B\cap A$

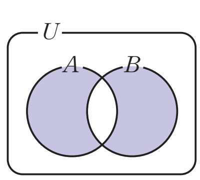
043

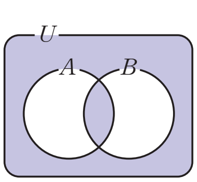
전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 중 집합 $(A^C-B^C)\cup(B\cup A^C)^C$을 벤 다이어그램으로 바르게 나타낸 것은?

①


②


③


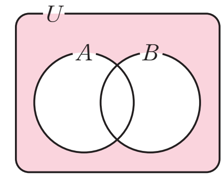
✓④


⑤


$(A^C-B^C)\cup(B\cup A^C)^C=\{A^C\cap(B^C)^C\}\cup\{B^C\cap(A^C)^C\}$
$=(A^C\cap B)\cup(B^C\cap A)$
$=(B-A)\cup(A-B)$

044

보기에서 오른쪽 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합과 항상 같은 집합인 것만을 있는 대로 고르시오. ㄴ, ㄹ



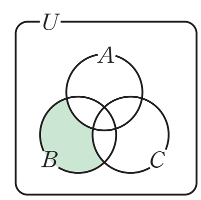
보기

ㄱ. $A^C\cup B^C$　　ㄴ. $A^C\cap B^C$
ㄷ. $(A\cap B)\cup(A-B)$　　ㄹ. $U\cap(A\cup B)^C$

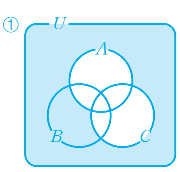
ㄱ. $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$
ㄴ. $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$
ㄹ. $U\cap(A\cup B)^C=(A\cup B)^C$

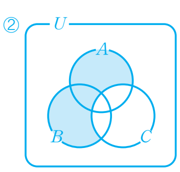
045

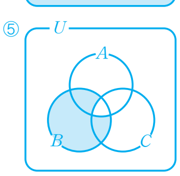
다음 중 오른쪽 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합과 항상 같은 집합을 모두 고르면? (정답 2개)



① $(A\cup C)^C$
② $(A\cup B)-C$
✓③ $B\cap(A\cup C)^C$
✓④ $A^C\cap B\cap C^C$
⑤ $(B-A)\cup(B-C)$

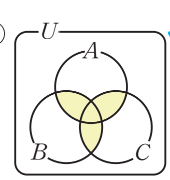
①


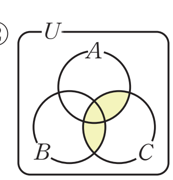
②


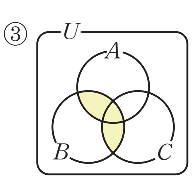
⑤


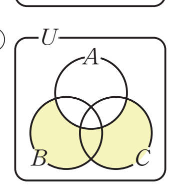
046

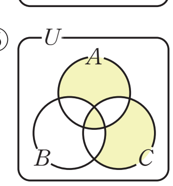
전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 다음 중 집합 $(A\cap C)\cup(B-C^C)$을 벤 다이어그램으로 바르게 나타낸 것은?

①


✓②


③


④


⑤


$(A\cap C)\cup(B-C^C)=(A\cap C)\cup\{B\cap(C^C)^C\}$
$=(A\cap C)\cup(B\cap C)$
$=(A\cup B)\cap C$

유형 08 조건을 만족시키는 집합의 개수

중요

(1) 주어진 조건으로부터 집합의 포함 관계를 찾는다.
① $A\cup X=X$ 또는 $A\cap X=A$이면 $A\subset X$
② $A\cap X=\varnothing$ 또는 $A-X=A$이면 A, X는 서로소

(2) $A\subset X\subset B$인 집합 X의 개수는 집합 B의 부분집합 중에서 집합 A의 모든 원소를 반드시 원소로 갖는 집합임을 이용하여 구한다.

풍쌤 Point 집합 X에 반드시 속해야 하는 원소, 절대 속하지 않아야 하는 원소를 구분하는 것이 핵심이다. 구분한 후에는 부분집합의 개수로 해결한다.

047

두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 4\}$에 대하여

$$A\cup X=A,\ B\cap X=B$$

를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오. 8

$B\subset X\subset A$이므로 $\{2, 4\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 4, 5\}$
따라서 집합 X의 개수는 집합 A의 부분집합 중에서 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로
$2^{5-2}=2^3=8$

048

두 집합 $A=\{x\,|\,x$는 12의 양의 약수$\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여

$$(A-B)\cup X=X,\ A\cap X=X$$

를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오. 16

$(A-B)\subset X\subset A$이므로 $\{6, 12\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
따라서 집합 X의 개수는 집합 A의 부분집합 중에서 6, 12를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로 $2^{6-2}=2^4=16$

049

두 집합 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{5, 6, 7\}$에 대하여

$$(A-B)\cup X=X,\ (B-A)\cap X=\varnothing,$$
$$(A\cup B)\cap X=X$$

를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오. 4

$(A-B)\subset X\subset(A\cup B)$이므로 $\{1, 3, 9\}\subset X\subset\{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$
한편, $(B-A)\cap X=\varnothing$에서 $B-A=\{6\}$이므로 $\{6\}\cap X=\varnothing$
$\therefore \{1, 3, 9\}\subset X\subset\{1, 3, 5, 7, 9\}$
$\therefore 2^{5-3}=2^2=4$

050

전체집합 $U=\{a, b, c, d, e, f\}$의 부분집합 X에 대하여 $\{a, b, c\}\cap X\neq\varnothing$일 때, 집합 X의 개수를 구하시오. 56

$\{a, b, c\}\cap X\neq\varnothing$에서 집합 X는 a, b, c 중 적어도 하나의 원소를 갖는 집합이다.
이때 X는 U의 부분집합 중에서 a, b, c를 원소로 갖지 않는 집합을 제외하면 된다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^6-2^{6-3}=64-8=56$

유형 09 방정식 또는 부등식의 해의 집합의 연산

① 집합 $\{x\,|\,(x$에 대한 방정식$)\}$은 방정식의 해의 집합이다.
➡ 방정식을 풀어 해를 구하고 원소나열법으로 나타낸다.
② 집합 $\{x\,|\,(x$에 대한 부등식$)\}$은 부등식의 해의 집합이다.
➡ 부등식을 풀어 해를 구하고 수직선에 나타낸다.

풍쌤 Point 해의 집합의 교집합 $(\cap)$은 공통인 해를 의미하고, 해의 집합의 합집합 $(\cup)$은 해를 모두 합친 것을 의미한다. 특히, 부등식의 해에서 등호의 포함 여부에 주의한다.

051

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$A=\{x\,|\,x^2-x-2=0\},\ B=\{x\,|\,x^2+4x+3=0\}$$

일 때, 집합 $(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)$의 모든 원소의 합을 구하시오. -1

$A=\{-1, 2\}$, $B=\{-3, -1\}$
즉, $A\cup B=\{-3, -1, 2\}$, $A\cap B=\{-1\}$이므로
$(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C=(A\cup B)-(A\cap B)=\{-3, 2\}$
따라서 구하는 집합의 모든 원소의 합은
$-3+2=-1$

052

두 집합

$$A=\{x\,|\,x^2+3x-10=0\},$$
$$B=\{x\,|\,x^2+ax+8=0\}$$

에 대하여 $A\cap B=\{2\}$일 때, 다음 중 집합 $B-A$의 원소인 것은? (단, a는 상수이다.)

① -2 ② 1 ✓③ 4
④ 5 ⑤ 8

$A=\{-5, 2\}$
$A\cap B=\{2\}$이므로 $2\in B$
$x=2$를 $x^2+ax+8=0$에 대입하면 $4+2a+8=0$ $\therefore a=-6$
$\therefore B=\{2, 4\}$
$\therefore B-A=\{2, 4\}-\{-5, 2\}=\{4\}$

053

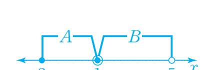
두 집합

$$A=\{x\,|\,x^2+x-2\leq 0\},\ B=\{x\,|\,x^2+ax+b<0\}$$

에 대하여 $A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\{x\,|\,-2\leq x<5\}$일 때, $b-a$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 9 ② 10 ✓③ 11
④ 12 ⑤ 13

$A=\{x\,|\,(x+2)(x-1)\leq 0\}=\{x\,|\,-2\leq x\leq 1\}$
오른쪽 그림에서



$B=\{x\,|\,1<x<5\}=\{x\,|\,(x-1)(x-5)<0\}$
$=\{x\,|\,x^2-6x+5<0\}$
따라서 $a=-6$, $b=5$이므로
$b-a=5-(-6)=11$

05 원소의 개수

❶ 원소의 개수

전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여

① $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

② $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

③ $n(A^C)=n(U)-n(A)$

④ $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=n(A\cup B)-n(B)$

보기 $n(U)=10$, $n(A)=6$, $n(B)=4$, $n(A\cap B)=2$일 때
① $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=6+4-2=8$
② $n(A^C)=n(U)-n(A)=10-6=4$
③ $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=6-2=4$

• 두 집합 A, B가 서로소, 즉 $A\cap B=\varnothing$이면 $n(A\cap B)=0$이므로 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

• $B\subset A$일 때, $A\cap B=B$이므로 $n(A-B)=n(A)-n(B)$

개념 기본 문제

정답과 풀이 076쪽

054

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$n(U)=13$, $n(A)=5$, $n(B)=7$, $n(A\cap B)=3$

일 때, 다음을 구하시오.

(1) $n(A\cup B)$ 9

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=5+7-3=9$

(2) $n(A^C)$ 8

$n(A^C)=n(U)-n(A)$
$=13-5=8$

(3) $n(B^C)$ 6

$n(B^C)=n(U)-n(B)$
$=13-7=6$

(4) $n((A\cap B)^C)$ 10

$n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$
$=13-3=10$

(5) $n(A-B)$ 2

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=5-3=2$

(6) $n(B-A)$ 4

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$
$=7-3=4$

055

$n(A)=12$, $n(B)=9$인 두 집합 A, B에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $n(A\cap B)=7$일 때, $n(A\cup B)$ 14

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=12+9-7=14$

(2) $n(A\cap B)=5$일 때, $n(A\cup B)$ 16

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=12+9-5=16$

(3) $n(A\cup B)=18$일 때, $n(A\cap B)$ 3

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=12+9-18=3$

(4) $n(A\cup B)=14$일 때, $n(A\cap B)$ 7

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=12+9-14=7$

056

전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여

$n(U)=32$, $n(A)=23$, $n(B)=17$, $n(C)=12$,
$n(A\cap B)=11$, $n(B\cap C)=9$, $n(C\cap A)=8$,
$n(A\cap B\cap C)=2$

일 때, $n(A\cup B\cup C)$를 구하시오. 26

$n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=23+17+12-11-9-8+2=26$

유형 실전 문제

유형 10 원소의 개수 중요

① $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
② $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$\qquad -n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
③ $n(A^C)=n(U)-n(A)$
④ $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=n(A\cup B)-n(B)$

풍쌤 Point 원소의 개수의 활용 문제에서는 다음을 이용하여 식을 세운다.
① A, B를 모두 ~하는 ➡ $A\cap B$
② A 또는 B를 ~하는 ➡ $A\cup B$
③ A, B를 모두 ~하지 않는 ➡ $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$
④ A, B 중 하나만 ~하는 ➡ $(A-B)\cup(B-A)$

057

두 집합 A, B에 대하여

$n(A)=12$, $n(B)=16$, $n(B-A)=10$

일 때, $n(A\cup B)$를 구하시오. 22

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=n(A)+\{n(B)-n(A\cap B)\}$
$=n(A)+n(B-A)$
$=12+10=22$

058

두 집합 A, B에 대하여

$n(A)=37$, $n(B)=29$, $n(A\cup B)=61$

일 때, $n(A\cap B^C)+n(A^C\cap B)$의 값은?

① 52 ② 54 ✓③ 56
④ 58 ⑤ 60

$n(A\cap B^C)=n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$
$=61-29=32$
$n(A^C\cap B)=n(B\cap A^C)$
$=n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)$
$=61-37=24$
$\therefore n(A\cap B^C)+n(A^C\cap B)=32+24=56$

059

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$n(U)=40$, $n(A)=19$, $n(B)=26$,
$n(A\cap B)=12$

일 때, $n(A^C\cap B^C)$를 구하시오. 7

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=19+26-12=33$
$\therefore n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$
$=40-33=7$

060

전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 50 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합

$A=\{x\,|\,x$는 짝수$\}$, $B=\{x\,|\,x$는 3의 배수$\}$

에 대하여 $n(A\cup B^C)$를 구하시오. 42

$n(A\cap B)=\{6, 12, 18, \cdots, 48\}$이고
$n(U)=50$, $n(A)=25$, $n(B)=16$, $n(A\cap B)=8$
$\therefore n(A\cup B^C)=n((A^C\cap B)^C)=n((B-A)^C)=n(U)-n(B-A)$
$=n(U)-\{n(B)-n(A\cap B)\}$
$=50-(16-8)=42$

061

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$n(U)=36$, $n(A)=28$, $n(A\cap B)=12$,
$n(A^C\cap B^C)=7$

일 때, $n(A^C-B^C)$는?

✓① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

$n(A^C-B^C)=n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$ ······ ㉠
$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)=36-7=29$
이므로
$29=28+n(B)-12$ $\quad\therefore n(B)=13$
따라서 ㉠에서 $n(A^C-B^C)=n(B)-n(A\cap B)=13-12=1$

062

은수네 학교 학생 200명을 대상으로 두 도서관 A, B를 이용한 경험을 조사하였다. A 도서관을 이용한 경험이 있는 학생이 135명, B 도서관을 이용한 경험이 있는 학생이 156명, 두 도서관 중 어느 곳도 이용한 경험이 없는 학생이 11명이었을 때, A 도서관만 이용한 경험이 있는 학생 수를 구하시오. 33

U A B $(A\cup B)^C$

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)=200-11=189$이므로
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=135+156-189=102$
A 도서관만 이용한 경험이 있는 학생의 집합은 $A-B$이므로
$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=135-102=33$

063

경은이네 반 학생 28명을 대상으로 야구와 축구 중에서 좋아하는 운동을 조사하였다. 야구를 좋아한다고 답한 학생이 16명, 축구를 좋아한다고 답한 학생이 18명이고 답을 하지 않은 학생은 없다. 경은이네 반 학생 중 야구와 축구 중 하나만 좋아한다고 답한 학생 수는?

U A B

① 16 ② 18 ③ 20
✓④ 22 ⑤ 24

$U=A\cup B$이므로
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(U)$
$=16+18-28=6$
야구와 축구 중 하나만 좋아한다고 답한 학생의 집합은 $(A-B)\cup(B-A)$이므로
$n((A-B)\cup(B-A))=\{n(A)-n(A\cap B)\}+\{n(B)-n(A\cap B)\}$
$=(16-6)+(18-6)=22$

중단원 점검 문제

01

세 집합 A, B, C에 대하여

$A=\{x|x$는 10보다 작은 홀수$\}$, $=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B=\{x|x$는 10 이하의 소수$\}$, $=\{2, 3, 5, 7\}$

$C=\{x|x$는 15의 양의 약수$\}$, $=\{1, 3, 5, 15\}$

일 때, 집합 $A\cap(B\cup C)$의 모든 원소의 합을 구하시오. 16

$A\cap(B\cup C)=\{1, 3, 5, 7, 9\}\cap\{1, 2, 3, 5, 7, 15\}=\{1, 3, 5, 7\}$
따라서 구하는 집합의 모든 원소의 합은
$1+3+5+7=16$

02 학교 시험 기출

두 집합 A, B에 대하여

$A=\{2, 3\}$, $A-B=A$,

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

일 때, 집합 B는?

① $\{4, 5, 6\}$ ② $\{1, 2, 3, 6\}$ √③ $\{1, 4, 5, 6\}$ ④ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ⑤ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A-B=A$이므로 두 집합 A, B는 서로소이다.
$\therefore B=\{1, 4, 5, 6\}$

03

전체집합 $U=\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합

$A=\{x|x=3n-2$, n은 자연수$\}$,

$B=\{x|x=4n-1$, n은 자연수$\}$

에 대하여 B^C-A^C의 모든 원소의 합은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 √⑤ 15

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$에서 $A=\{1, 4, 7, 10\}$, $B=\{3, 7\}$이므로
$A^C=\{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$, $B^C=\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$
$\therefore B^C-A^C=\{1, 4, 10\}$
따라서 구하는 집합의 모든 원소의 합은 $1+4+10=15$

04

두 집합 A, B에 대하여

$A=\{2, a+2, a^2-1\}$, $B=\{1, 3, a+3\}$,

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

일 때, 집합 A의 모든 원소의 합을 구하시오. 9

(단, a는 상수이다.)

$a+3=2$ 또는 $a+3=4$ 또는 $a+3=5$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$ 또는 $a=2$
(i) $a=-1$일 때, $A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3\}$ $\therefore A\cup B=\{0, 1, 2, 3\}$
(ii) $a=1$일 때, $A=\{0, 2, 3\}$, $B=\{1, 3, 4\}$ $\therefore A\cup B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$
(iii) $a=2$일 때, $A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{1, 3, 5\}$ $\therefore A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
따라서 집합 A의 모든 원소의 합은 $2+3+4=9$

05

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 중 항상 옳은 것은? (단, $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$, $A\neq B$)

① $(A\cap\varnothing)\cup U=A$
√② $(A\cup\varnothing^C)\cap B=B$
③ $B-(A^C)^C=A\cap B$
④ $A\cup(U\cap B)=A\cap B$
⑤ $(A\cup B)-(B-A)=A\cap B$

① $(A\cap\varnothing)\cup U=\varnothing\cup U=U$
② $(A\cup\varnothing^C)\cap B=(A\cup U)\cap B=U\cap B=B$
③ $B-(A^C)^C=B-A=B\cap A^C=A^C\cap B$
④ $A\cup(U\cap B)=A\cup B$
⑤ $(A\cup B)-(B-A)=(A\cup B)\cap(B\cap A^C)^C=(A\cup B)\cap(A\cup B^C)$
$=A\cup(B\cap B^C)=A\cup\varnothing=A$

06

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$

일 때, 다음 중 항상 옳은 것은? (단, $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$)

① $A-B=A$ ② $B-A=B$ √③ $A=B$ ④ $A\cap B=\varnothing$ ⑤ $A\cup B=U$

$A-B=\varnothing$, $B-A=\varnothing$
즉, $A\subset B$, $B\subset A$이므로 $A=B$
① $A-B=\varnothing$
② $B-A=\varnothing$
④ $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$이므로 $A\cap B=A=B\neq\varnothing$
⑤ $A\cup B=A=B$

07

전체집합 U의 서로 다른 두 부분집합 A, B에 대하여 $B\subset A$일 때, 나머지 넷과 다른 하나는?

√① $A\cup B$ ② $(A\cup B)\cap B$ ③ $(A\cap B)\cup B$ ④ $A\cap(A\cap B)$ ⑤ $(A\cup B)\cap(A\cap B)$

$B\subset A$이면 $A\cup B=A$, $A\cap B=B$
① $A\cup B=A$
②, ③, ④, ⑤ B

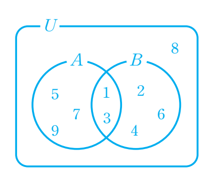
08

전체집합 $U=\{x|x$는 10 미만의 자연수$\}$의 두 부분집합

$A=\{x|x$는 홀수$\}$, $B=\{x|x$는 12의 약수$\}$

에 대하여 집합 $(A\cup B^C)\cap(A^C\cup B)$의 모든 원소의 합을 구하시오. 12

$(A\cup B^C)\cap(A^C\cup B)$
$=\{(A\cup B^C)\cap A^C\}\cup\{(A\cup B^C)\cap B\}$
$=\{(A\cap A^C)\cup(B^C\cap A^C)\}\cup\{(A\cap B)\cup(B^C\cap B)\}$
$=(A\cup B)^C\cup(A\cap B)$
$=\{8\}\cup\{1, 3\}=\{1, 3, 8\}$
따라서 구하는 집합의 모든 원소의 합은
$1+3+8=12$



09 학교 시험 기출

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 **보기**에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. ㄱ, ㄴ, ㄷ

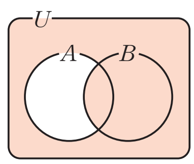
보기

ㄱ. $(A\cup B)\cap(A\cup B^C)=A$
ㄴ. $(A\cap B^C)\cap(A^C\cap B)=\varnothing$
ㄷ. $(A\cap B)\cup(A\cap B^C)=A$

ㄱ. $(A\cup B)\cap(A\cup B^C)=A\cup(B\cap B^C)=A\cup\varnothing=A$
ㄴ. $(A\cap B^C)\cap(A^C\cap B)=A\cap B^C\cap A^C\cap B$
$=(A\cap A^C)\cap(B\cap B^C)$
$=\varnothing\cap\varnothing=\varnothing$
ㄷ. $(A\cap B)\cup(A\cap B^C)=A\cap(B\cup B^C)=A\cap U=A$

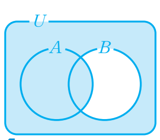
10

오른쪽 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합과 항상 같은 집합인 것은?

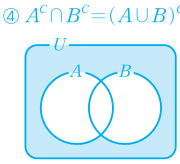


① $U-A$
② $U-B$
③ $A\cup B^C$
④ $A^C\cap B^C$
√⑤ $(A^C\cap B^C)\cup B$

③ $A\cup B^C$



④ $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$



11 교육청 기출

전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 50 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합

$A=\{x\,|\,x$는 6의 배수$\}$, $B=\{x\,|\,x$는 4의 배수$\}$

가 있다. $A\cup X=A$이고 $B\cap X=\varnothing$인 집합 X의 개수는?

① 8　　√② 16　　③ 32
④ 64　　⑤ 128

$A\cup X=A$에서 $X\subset A$, $B\cap X=\varnothing$에서 $X\subset B^C$
즉, $X\subset(A\cap B^C)$이므로 $X\subset(A-B)$
따라서 $X\subset\{6, 18, 30, 42\}$를 만족시키는 집합 X의 개수는 집합 $A-B$의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^4=16$

12

전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

$A=\{x\,|\,x$는 24의 약수$\}$, $A-(A-B^C)=A$

를 만족시키는 집합 B의 개수를 구하시오. 16

$A-(A-B^C)=A\cap\{A\cap(B^C)^C\}^C=A\cap(A\cap B)^C$
$=A\cap(A^C\cup B^C)=A\cap B^C=A$
이므로 $A\subset B^C$
따라서 $B\subset A^C$이고, $A^C=\{5, 7, 9, 10\}$이므로 집합 B의 개수는 $2^4=16$

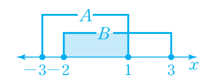
13

두 집합 $A=\{x\,|\,x^2+2x-3\le 0\}$,
$B=\{x\,|\,x^2-ax-b\le 0\}$에 대하여

$A\cap B=\{x\,|\,-2\le x\le 1\}$,
$A\cup B=\{x\,|\,-3\le x\le 3\}$

일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) 7

$A=\{x\,|\,(x+3)(x-1)\le 0\}=\{x\,|\,-3\le x\le 1\}$
$B=\{x\,|\,-2\le x\le 3\}=\{x\,|\,(x+2)(x-3)\le 0\}$
$=\{x\,|\,x^2-x-6\le 0\}$
따라서 $a=1$, $b=6$이므로 $a+b=1+6=7$



14 교육청 기출

전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 50 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합

$A=\{x\,|\,x$는 30의 약수$\}$, $B=\{x\,|\,x$는 3의 배수$\}$

에 대하여 $n(A^C\cup B)$의 값은?

① 40　　② 42　　③ 44
√④ 46　　⑤ 48

$n(U)=50$, $n(A)=8$, $n(A\cap B)=4$이므로
$n(A^C\cup B)=n((A-B)^C)$
$=n(U)-n(A-B)$
$=n(U)-\{n(A)-n(A\cap B)\}$
$=50-(8-4)=46$

15

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$n(U)=22$, $n(A)=14$, $n(B)=17$

이다. $n(A\cap B)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① 21　　② 22　　√③ 23
④ 24　　⑤ 25

$n(A)<n(B)$이므로 $A\subset B$일 때 $M=n(A)=14$
또, $A\cup B=U$일 때
$m=n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(U)$
$=14+17-22=9$
$\therefore M+m=14+9=23$

16 실전 Plus

어느 반 학생들에게 A, B 두 문제를 풀게 하였더니 A 문제를 맞힌 학생$_{A}$이 18명, B 문제를 맞힌 학생$_{B}$이 15명이고 둘 중 어느 문제도 맞히지 못한 학생$_{(A\cup B)^C}$이 6명이었다. 두 문제 A, B 중 한 문제만 맞힌 학생$_{(A-B)\cup(B-A)}$이 11명일 때, 이 반 전체 학생 수는?

① 26　　② 27　　√③ 28
④ 29　　⑤ 30

$n(A\cup B)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)=11+n(A\cap B)$ …… ㉠
$n(A\cup B)=18+15-n(A\cap B)=33-n(A\cap B)$ …… ㉡
㉠=㉡이므로 $11+n(A\cap B)=33-n(A\cap B)$
$\therefore n(A\cap B)=11$, $n(A\cup B)=11+11=22$ ($\because$ ㉠)
$\therefore n(U)=n(A\cup B)+n((A\cup B)^C)=22+6=28$

01 명제와 조건

1 명제

참 또는 거짓을 명확하게 판별할 수 있는 문장이나 식

보기 ① 2는 짝수이다. ➡ 참인 명제
② 5는 3의 배수이다. ➡ 거짓인 명제
③ 1은 작은 수이다. ➡ 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

주의 거짓인 문장이나 식도 명제이다.

2 조건

변수의 값에 따라 참, 거짓이 결정되는 문장이나 식

보기 $x+2=5$ ➡ $x=3$이면 참, $x=4$이면 거짓이므로 조건이다.

3 진리집합

전체집합 U의 원소 중에서 어떤 조건이 참이 되게 하는 모든 원소의 집합

보기 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4\}$에서 조건 'x는 홀수이다.'의 진리집합 ➡ $\{1, 3\}$

- 명제는 보통 알파벳 소문자 p, q, r, $\cdots$로 나타낸다.
- 변수 x를 포함하는 조건은 $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $\cdots$로 나타내는데 이를 간단히 각각 p, q, r, $\cdots$로 나타내기도 한다.
- 조건 p, q, r, $\cdots$의 진리집합은 보통 각각 P, Q, R, $\cdots$로 나타낸다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 080쪽

001

다음 중 명제인 것은 ○를, 명제가 아닌 것은 ×를 ( ) 안에 써넣으시오.

(1) 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이다. (○)

(2) 무궁화는 아름다운 꽃이다. (×)

(3) $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$ (○)

(4) $3x+1>x-3$ (×)

002

다음 명제의 참, 거짓을 판별하여 참인 것은 '참'을, 거짓인 것은 '거짓'을 ( ) 안에 써넣으시오.

(1) 두 홀수의 합은 홀수이다. (거짓)

(홀수)+(홀수)=(짝수)

(2) $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$ (참)

(3) $\sqrt{16}$은 무리수이다. (거짓)

$\sqrt{16}=4$, 즉 유리수이다.

(4) 두 변의 길이가 같은 삼각형은 이등변삼각형이다. (참)

003

다음 중 명제인 것은 '명'을, 조건인 것은 '조'를 ( ) 안에 써넣으시오.

(1) x는 5 이하의 자연수이다. (조)

(2) x가 짝수이면 $x+1$도 짝수이다. (명)

x가 짝수이면 $x+1$은 홀수이다. 즉, 거짓인 명제이다.

(3) $|x|\le 3$ (조)

(4) $4+5\ge 7$ (명)

004

자연수 전체의 집합에서 다음 조건의 진리집합을 구하시오.

(1) x는 30의 약수이다. $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

(2) $3\le x<9$ $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(3) $x(x+2)(x-3)(x-5)=0$ $\{3, 5\}$

(4) $x^2+x-6<0$ $\{1\}$

$(x+3)(x-2)<0$ $\therefore -3<x<2$
따라서 조건 '$x^2+x-6<0$'의 진리집합은 $\{1\}$

02 명제와 조건의 부정

❶ 명제와 조건의 부정

① 명제 또는 조건 p에 대하여 'p가 아니다.'를 p의 부정이라 하고, 기호 $\sim p$로 나타낸다. ← 명제 p의 부정 $\sim p$도 명제이다.

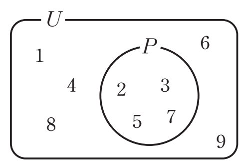
② 명제 p가 참이면 그 부정 $\sim p$는 거짓이고, 명제 p가 거짓이면 그 부정 $\sim p$는 참이다.

③ 전체집합 U에 대하여 조건 p의 진리집합을 P라 할 때, $\sim p$의 진리집합은 P^C이다.

④ 명제 또는 조건 p에 대하여 $\sim p$의 부정은 p이다.

➡ $\sim(\sim p)=p$

보기 전체집합 $U=\{x|x$는 한 자리의 자연수$\}$에 대하여
조건 'p: x는 소수이다.'의 부정은
'$\sim p$: x는 소수가 아니다.'이다.
① 조건 p의 진리집합 P는 $P=\{2, 3, 5, 7\}$
② 조건 $\sim p$의 진리집합 P^C은 $P^C=\{1, 4, 6, 8, 9\}$



• 특별한 언급이 없으면 전체집합 U는 실수 전체의 집합으로 생각한다.

❷ 조건 'p 또는 q', 'p 그리고 q'

전체집합 U에서 정의된 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 조건 'p 또는 q'와 조건 'p 그리고 q'의 진리집합과 부정은 다음과 같다.

조건	진리집합	부정
p 또는 q	$P\cup Q$	$\sim p$ 그리고 $\sim q$
p 그리고 q	$P\cap Q$	$\sim p$ 또는 $\sim q$

• ① $\sim p$ 그리고 $\sim q$의 진리집합
➡ $P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$
② $\sim p$ 또는 $\sim q$의 진리집합
➡ $P^C\cup Q^C=(P\cap Q)^C$

개념 기본 문제

정답과 풀이 080쪽

005

다음 명제의 부정을 말하시오.

(1) 2의 배수는 짝수이다. 2의 배수는 홀수이다.

(2) $\sqrt{5}$는 무리수이다. $\sqrt{5}$는 무리수가 아니다.

(3) 3은 $\sqrt{16}$보다 작다. 3은 $\sqrt{16}$보다 크거나 같다.

(4) π는 유리수가 아니다. π는 유리수이다.

(5) $3+5=8$ $3+5\neq 8$

(6) -1은 0보다 크지 않다. -1은 0보다 크다.

006

다음 조건의 부정을 말하시오.

(1) x는 소수이다. x는 소수가 아니다.

(2) $x^2=1$ $x^2\neq 1$

(3) $3x+5\neq 7$ $3x+5=7$

(4) x는 6보다 크다. x는 6보다 크지 않다.

(5) $x^2+3x+1\le 0$ $x^2+3x+1>0$

(6) x는 실수가 아니다. x는 실수이다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 081쪽

007

명제 '$\sqrt{(-2)^2}$은 무리수이다.'에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 명제의 참, 거짓을 판별하시오. 거짓

$\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$는 유리수이다.

(2) 명제의 부정을 말하시오. $\sqrt{(-2)^2}$은 무리수가 아니다.

(3) 명제의 부정의 참, 거짓을 판별하시오. 참

008

명제 '정삼각형은 이등변삼각형이다.'에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 명제의 참, 거짓을 판별하시오. 참

정삼각형의 세 변의 길이는 모두 같으므로 세 변 중 어느 두 변을 골라도 그 두 변의 길이는 서로 같다.

(2) 명제의 부정을 말하시오. 정삼각형은 이등변삼각형이 아니다.

(3) 명제의 부정의 참, 거짓을 판별하시오. 거짓

009

전체집합 $U=\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 조건의 부정의 진리집합을 구하시오.

주어진 조건의 진리집합을 P라 하자.

(1) x는 12의 약수이다. $\{5, 7, 8, 9, 10\}$

$P=\{x|x$는 12의 약수$\}=\{1, 2, 3, 4, 6\}$이므로 주어진 조건의 부정의 진리집합은
$P^C=\{5, 7, 8, 9, 10\}$

(2) $x^2-4x+3=0$ $\{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$P=\{x|(x-1)(x-3)=0\}=\{1, 3\}$이므로 주어진 조건의 부정의 진리집합은
$P^C=\{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(3) $x^2-10x+16\le 0$ $\{1, 9, 10\}$

$P=\{x|(x-2)(x-8)\le 0\}=\{x|2\le x\le 8\}=\{2, 3, 4, \cdots, 8\}$이므로 주어진 조건의 부정의 진리집합은
$P^C=\{1, 9, 10\}$

010

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같을 때, 조건 'p 또는 q'의 진리집합을 구하시오.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

(1) p: x는 짝수이다.
q: x는 6의 약수이다. $\{1, 2, 3, 4\}$

$P=\{2, 4\}$, $Q=\{1, 2, 3\}$이므로
조건 'p 또는 q'의 진리집합은 $P\cup Q=\{1, 2, 3, 4\}$

(2) p: $|x|=3$
q: $x\le 2$ $\{1, 2, 3\}$

$P=\{3\}$, $Q=\{1, 2\}$이므로
조건 'p 또는 q'의 진리집합은 $P\cup Q=\{1, 2, 3\}$

(3) p: $1<x<5$
q: $x^2-7x+10=0$ $\{2, 3, 4, 5\}$

$P=\{2, 3, 4\}$, $Q=\{2, 5\}$이므로
조건 'p 또는 q'의 진리집합은 $P\cup Q=\{2, 3, 4, 5\}$

011

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같을 때, 조건 'p 그리고 q'의 진리집합을 구하시오.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

(1) p: x는 3의 배수이다.
q: x는 6의 약수이다. $\{3, 6\}$

$P=\{3, 6\}$, $Q=\{1, 2, 3, 6\}$이므로
조건 'p 그리고 q'의 진리집합은 $P\cap Q=\{3, 6\}$

(2) p: $3\le x<5$
q: $x^2-4x+3=0$ $\{3\}$

$P=\{3, 4\}$, $Q=\{1, 3\}$이므로
조건 'p 그리고 q'의 진리집합은 $P\cap Q=\{3\}$

(3) p: $|x-2|\le 1$
q: x는 홀수이다. $\{1, 3\}$

$P=\{1, 2, 3\}$, $Q=\{1, 3, 5, 7\}$이므로
조건 'p 그리고 q'의 진리집합은 $P\cap Q=\{1, 3\}$

012

다음 조건의 부정을 말하시오.

(1) x는 소수 또는 짝수이다. x는 소수도 아니고 짝수도 아니다.

(2) $x\ne 0$ 그리고 $x\ne 1$ $x=0$ 또는 $x=1$

(3) $x\le 2$ 또는 $x>5$ $2<x\le 5$

정답과 풀이 081쪽

유형 01 명제와 조건

주어진 문장 또는 식에 대하여
① 참, 거짓을 판별할 수 있으면 명제이다.
② 참, 거짓을 판별할 수 없으면 명제가 아니다.
③ 변수의 값에 따라 참, 거짓이 달라지면 조건이다.

풍쌤 Point 문장 또는 식이 거짓이어도 명제이다. 반면, 참, 거짓이 때에 따라 달라지면 조건이다.

013

다음 중 명제가 아닌 것은?

① $5-3<10$
② 소수는 모두 홀수이다.
√③ 10000000000은 큰 수이다.
④ 4는 8의 배수이다.
⑤ 네 각의 크기가 모두 같은 사각형은 마름모이다.

① 참인 명제
② 거짓인 명제
④ 거짓인 명제
⑤ 거짓인 명제

014

다음 중 조건이 아닌 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $2x+1>0$
② $x^2-3x=0$
√③ $x^2+x-1<3+x+x^2$
④ x는 한 자리의 자연수이다.
√⑤ 실수 x에 대하여 $|x|\geq 0$이다.

③ $x^2+x-1<3+x+x^2$에서 $-1<3$이므로 참인 명제
⑤ 참인 명제

015

보기에서 명제가 아닌 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. $x^2-x-2=0$ ㄴ. $5-(x+1)=2-x$
ㄷ. $x+1=3x+5$ ㄹ. $2x+3x=6x-x$

① ㄱ, ㄴ √② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. $x=-1$ 또는 $x=2$이면 참, 그 외의 경우에는 거짓이다.
ㄴ. 거짓인 명제
ㄷ. $x=-2$이면 참, 그 외의 경우에는 거짓이다.
ㄹ. 참인 명제

유형 02 명제와 조건의 부정

① 각 조건의 부정은 다음과 같다.

p (조건)	$=$	$>$	$\geq$	$<$	$\leq$	또는	그리고
$\sim p$ (부정)	$\neq$	$\leq$	$<$	$\geq$	$>$	그리고	또는

② 명제 p가 참이면 그 부정 $\sim p$는 거짓이고, 명제 p가 거짓이면 그 부정 $\sim p$는 참이다.
③ 명제 또는 조건 p에 대하여 $\sim p$의 부정은 p이다. → $\sim(\sim p)=p$

풍쌤 Point 부등식의 부정은 수직선에 나타내어 직관적으로 판단하면 실수를 줄일 수 있다. 이때 등호의 포함 여부에 주의한다.

016

조건 '$a\in A$ 그리고 $a\in B$'의 부정을 구하시오.

$a\notin A$ 또는 $a\notin B$

017

다음 명제 중 그 부정이 참인 것은?

① $\sqrt{8}<3$
√② $\sqrt{2}$는 유리수이다.
③ 두 홀수의 곱은 홀수이다.
④ 마름모는 평행사변형이다.
⑤ 맞꼭지각의 크기는 서로 같다.

② $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다. (참)

018

두 조건 p: $x<3$, q: $x\leq 5$에 대하여 조건 'p 또는 $\sim q$'의 부정을 구하시오. $3\leq x\leq 5$

$\sim p$: $x\geq 3$이므로 조건 'p 또는 $\sim q$'의 부정 '$\sim p$ 그리고 q'는 $3\leq x\leq 5$이다.

019

실수 a, b에 대하여 **보기**에서 조건 p와 그 부정 $\sim p$가 바르게 짝 지어진 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. p: $ab\neq 0$ $\sim p$: $a=0$이고 $b=0$
ㄴ. p: $a>0$이고 $b>0$ $\sim p$: $a\leq 0$ 또는 $b\leq 0$
ㄷ. p: $ab=0$ $\sim p$: $a^2+b^2\neq 0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
√④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. p: $ab\neq 0$에서 'p: $a\neq 0$ 그리고 $b\neq 0$'이므로
$\sim p$는 $a=0$ 또는 $b=0$
ㄷ. p: $ab=0$에서 'p: $a=0$ 또는 $b=0$'이므로
$\sim p$는 $a\neq 0$ 그리고 $b\neq 0$, 즉 $a^2+b^2\neq 0$

유형 실전 문제

정답과 풀이 082쪽

유형 03 진리집합 중요

전체집합 U에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
① $\sim p$의 진리집합 ➡ P^C
② 'p 또는 q'의 진리집합 ➡ $P\cup Q$
③ 'p 그리고 q'의 진리집합 ➡ $P\cap Q$

풍쌤 Point 조건이 주어지면 우선 조건의 진리집합을 원소나열법으로 나타내거나 수직선에 나타내어 보자.

020

전체집합이 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$일 때, 다음 조건 중 진리집합이 공집합인 것은?

① x는 홀수이다. ② $|x|\ge 5$
③ $x^2=9$ ④ $x^2+x-6=0$
√⑤ $x^2-5x-6>0$

주어진 조건의 진리집합을 P라 하자.
① $P=\{1, 3, 5\}$ ② $P=\{5\}$ ③ $P=\{3\}$
④ $P=\{2\}$ ⑤ $P=\varnothing$

021

전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 20 이하의 자연수$\}$에 대하여 조건 p가 'p: $x^2-17x+42<0$'일 때, 조건 p의 진리집합의 모든 원소의 합을 구하시오. 85

조건 p의 진리집합을 P라 하면
$P=\{x\,|\,(x-3)(x-14)<0\}=\{4, 5, 6, \cdots, 13\}$
따라서 조건 p의 진리집합의 모든 원소의 합은
$4+5+6+\cdots+13=85$

022

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9\}$에 대하여 조건 p가
'p: x는 24의 약수이다.'
일 때, 조건 $\sim p$의 진리집합을 구하시오. $\{5, 7, 9\}$

조건 p의 진리집합을 P라 하면
$P=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
따라서 조건 $\sim p$의 진리집합은
$P^C=\{5, 7, 9\}$

023

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 100\}$에 대하여 두 조건 p, q가
'p: x는 4의 배수이다.', 'q: x는 6의 배수이다.'
일 때, 조건 'p 그리고 q'의 진리집합의 원소의 개수를 구하시오. 8

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
조건 'p 그리고 q'의 진리집합은
$P\cap Q=\{12, 24, 36, \cdots, 96\}$
이므로 원소의 개수는 8이다.

024

자연수 전체의 집합에서 두 조건 p, q가
'p: x는 12의 약수이다.', 'q: x는 3의 배수이다.'
일 때, 다음 조건 중 진리집합이 $\{3,\ 6,\ 12\}$인 것은?

√① p 그리고 q ② p 또는 q
③ $\sim p$ 그리고 q ④ $\sim p$ 그리고 $\sim q$
⑤ $\sim p$ 또는 $\sim q$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $Q=\{3, 6, 9, 12, 15, \cdots\}$
$\therefore \{3, 6, 12\}=P\cap Q$
따라서 진리집합이 $\{3, 6, 12\}$인 조건은 'p 그리고 q'이다.

025

실수 전체의 집합에서 두 조건
'p: $x<2$', 'q: $x\ge 7$'
의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 다음 중 조건 '$2\le x<7$'의 진리집합을 나타내는 것은?

① $P\cap Q$ ② $P\cup Q$ ③ $(P\cap Q)^C$
√④ $(P\cup Q)^C$ ⑤ $P^C\cup Q$

조건 '$2\le x<7$'의 진리집합은
$P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$

026

정수 전체의 집합에서 두 조건 p, q가
'p: $x^2+2x-15\ge 0$', 'q: $x^3-7x^2+10x=0$'
일 때, 조건 '$\sim p$ 그리고 q'의 진리집합의 모든 원소의 합을 구하시오. 2

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x\,|\,x\le -5$ 또는 $x\ge 3$, x는 정수$\}$이므로
$P^C=\{x\,|\,-5<x<3$, x는 정수$\}=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
$Q=\{0, 2, 5\}$
따라서 구하는 진리집합은 $P^C\cap Q=\{0, 2\}$이므로 모든 원소의 합은
$0+2=2$

027

전체집합 $U=\{x\,|\,|x|\le 3,\ x$는 정수$\}$에 대하여 두 조건 p, q가
'p: $x^2+2x-3\le 0$', 'q: $x^3-2x^2-x+2=0$'
일 때, 조건 '$\sim p$ 또는 $\sim q$'의 진리집합을 구하시오.
$\{-3, -2, 0, 2, 3\}$

$U=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
이때 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{-3, -2, -1, 0, 1\}$이므로 $P^C=\{2, 3\}$
$Q=\{-1, 1, 2\}$이므로 $Q^C=\{-3, -2, 0, 3\}$
따라서 구하는 진리집합은
$P^C\cup Q^C=\{-3, -2, 0, 2, 3\}$

03 명제 $p \longrightarrow q$

❶ 명제 $p \longrightarrow q$

두 조건 p, q에 대하여 명제 'p이면 q이다.'를 기호 $p \longrightarrow q$로 나타낸다.
이때 p를 가정, q를 결론이라 한다.

보기 명제 '4의 배수이면 짝수이다.'에서 가정은 '4의 배수이다.'이고 결론은 '짝수이다.'이다.

❷ 명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때

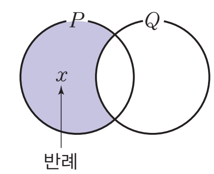
① $P \subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$는 참이고, 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 $P \subset Q$이다.

② $P \not\subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이고, 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이면 $P \not\subset Q$이다.

보기 자연수 전체의 집합에서 두 조건 'p: x는 3의 약수이다.', 'q: x는 6의 약수이다.'의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P=\{1, 3\}$, $Q=\{1, 2, 3, 6\}$이다.
① $P \subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.
② $Q \not\subset P$이므로 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이다.
이때 2, 6은 명제 $q \longrightarrow p$가 거짓임을 보이는 반례이다.

$\underset{\text{가정}}{\boldsymbol{p}} \longrightarrow \underset{\text{결론}}{\boldsymbol{q}}$

• **반례**
명제 $p \longrightarrow q$에서 가정 p는 만족시키지만 결론 q는 만족시키지 않는 예



품쌤 Tip 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보일 때는 반례가 하나라도 있음을 보이면 된다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 083쪽

028

다음 명제의 가정과 결론을 각각 말하시오.

(1) x가 4의 배수이면 x는 짝수이다.
가정: x는 4의 배수이다.
결론: x는 짝수이다.

(2) 사각형 ABCD가 직사각형이면 사각형 ABCD는 평행사변형이다.
가정: 사각형 ABCD는 직사각형이다.
결론: 사각형 ABCD는 평행사변형이다.

(3) $x=5$이면 $4x-3=17$이다.
가정: $x=5$
결론: $4x-3=17$

(4) $x>3$이면 $x>5$이다.
가정: $x>3$
결론: $x>5$

029

다음 두 조건 p, q에 대하여 명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓을 판별하시오.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

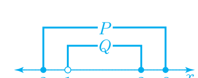
(1) p: x는 자연수이다., q: x는 정수이다. 참

$P=\{1, 2, 3, \cdots\}$, $Q=\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$
따라서 $P \subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

(2) p: $x-3=0$, q: $x^2-x-6=0$ 참

$P=\{3\}$, $Q=\{-2, 3\}$
따라서 $P \subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

(3) p: $-2 \le x \le 3$, q: $-1 < x \le 2$ 거짓



따라서 $P \not\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

(4) p: $x^2+3x+2=0$, q: $x^2+3x \le 0$ 참

$P=\{-2, -1\}$, $Q=\{x \mid -3 \le x \le 0\}$
따라서 $P \subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

030

다음 명제의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) $x=-1$이면 $2x+3=1$이다. 참

$x=-1$이면 $2x+3=2\times(-1)+3=1$

(2) 6의 배수는 12의 약수이다. 거짓

[반례] 18은 6의 배수이지만 12의 약수는 아니다.

(3) $x\geq2$, $y\geq2$이면 $x+y\geq4$이다. 참

(4) $x=2$이면 $x^2-2x-3<0$이다. 참

$x=2$이면 $x^2-2x-3=2^2-2\times2-3=-3<0$

(5) 자연수 x가 소수이면 $x+1$은 짝수이다. 거짓

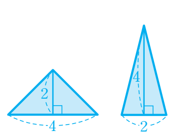
[반례] $x=2$일 때, $x+1=3$은 홀수이다.

(6) 두 수 a, b가 무리수이면 $a+b$는 무리수이다. 거짓

[반례] $a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$이면 a, b가 무리수이지만
$a+b=\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$은 유리수이다.

(7) 두 삼각형의 넓이가 서로 같으면 두 삼각형은 합동이다. 거짓

[반례]



(8) 두 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=0$이면 $xy=0$이다. 참

x, y가 실수일 때, $x^2+y^2=0$이면 $x=0$, $y=0$이므로 $xy=0$이다.

031

전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자. 명제 $p \longrightarrow q$가 참일 때, 다음 중 옳은 것은 ○를, 옳지 않은 것은 ×를 ( ) 안에 써넣으시오.

(단, $P\neq Q$, $P\neq\varnothing$, $Q\neq\varnothing$)

(1) $P\subset Q$ (○)

(2) $P\cap Q=P$ (○)

(3) $P\cup Q=P$ (×)

$P\cup Q=Q$

(4) $P\cap Q^C=\varnothing$ (○)

$P\cap Q^C=P-Q=\varnothing$

032

전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자. 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참일 때, 다음 중 옳은 것은 ○를, 옳지 않은 것은 ×를 ( ) 안에 써넣으시오.

(단, $P^C\neq Q$, $P^C\neq\varnothing$, $Q\neq\varnothing$)

(1) $P\subset Q^C$ (×)

$P^C\subset Q$이므로 $Q^C\subset P$

(2) $P\cup Q=U$ (○)

(3) $P\cap Q^C=Q$ (×)

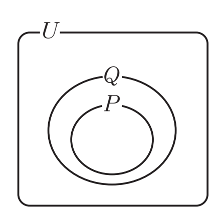
$P\cap Q^C=P-Q=Q^C$

(4) $P-Q^C=\varnothing$ (×)

$P-Q^C=P\cap(Q^C)^C=P\cap Q\neq\varnothing$ ($\because$ $P^C\neq Q$)

033

전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 두 집합 사이의 포함 관계는 오른쪽 그림과 같다. 다음 명제의 참, 거짓을 판별하시오.



(1) $p \longrightarrow q$ 참

$P\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

(2) $\sim p \longrightarrow q$ 거짓

$P^C\not\subset Q$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow q$는 거짓이다.

(3) $\sim p \longrightarrow \sim q$ 거짓

$P^C\not\subset Q^C$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$는 거짓이다.

(4) $\sim q \longrightarrow \sim p$ 참

$Q^C\subset P^C$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$는 참이다.

04 '모든'이나 '어떤'을 포함한 명제

❶ '모든'이나 '어떤'을 포함한 명제의 참, 거짓

전체집합 U에 대하여 조건 p의 진리집합을 P라 할 때

① '모든 x에 대하여 p이다.'의 참, 거짓

➡ $P=U$이면 참이고, $P\neq U$이면 거짓이다.

② '어떤 x에 대하여 p이다.'의 참, 거짓

➡ $P\neq\varnothing$이면 참이고, $P=\varnothing$이면 거짓이다.

보기 전체집합 U가 실수 전체의 집합일 때, 조건 p: $x^2=4$의 진리집합을 P라 하면 $P=\{-2, 2\}$

① '모든 x에 대하여 $x^2=4$이다.' ➡ $P\neq U$이므로 이 명제는 거짓이다.

② '어떤 x에 대하여 $x^2=4$이다.' ➡ $P\neq\varnothing$이므로 이 명제는 참이다.

❷ '모든'이나 '어떤'을 포함한 명제의 부정

① '모든 x에 대하여 p이다.'의 부정 ➡ '어떤 x에 대하여 $\sim p$이다.'

② '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정 ➡ '모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'

• 일반적으로 조건 $p(x)$는 명제가 아니지만 조건 $p(x)$ 앞에 '모든'이나 '어떤'이 붙으면 참, 거짓을 판별할 수 있는 명제가 된다.

풍쌤 Tip '모든'을 포함한 명제는 반례가 하나만 존재해도 거짓이고, '어떤'을 포함한 명제는 명제를 만족시키는 예가 하나만 존재해도 참이다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 084쪽

034

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 원소 x에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) 모든 x에 대하여 $x<5$이다. 거짓

조건 '$x<5$'의 진리집합을 P라 하면 $P=\{1, 2, 3, 4\}$

(2) 어떤 x에 대하여 $x^2-2x=0$이다. 참

조건 '$x^2-2x=0$'의 진리집합을 P라 하면 $P=\{2\}$

(3) 모든 x에 대하여 $2x+6$은 짝수이다. 참

조건 '$2x+6$은 짝수이다.'의 진리집합을 P라 하면 $P=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

(4) 어떤 x에 대하여 $3x+3\leq 0$이다. 거짓

조건 '$3x+3\leq 0$'의 진리집합을 P라 하면 $P=\varnothing$

035

다음 명제의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) 모든 실수 x에 대하여 $x^2>0$이다. 거짓

조건 '$x^2>0$'의 진리집합을 P라 하면 $P=\{x|x\neq 0\}$
따라서 $P\neq U$

(2) 어떤 실수 x에 대하여 $x^2-x+2=0$이다. 거짓

$x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이므로
조건 '$x^2-x+2=0$'의 진리집합을 P라 하면 $P=\varnothing$

(3) 모든 실수 x에 대하여 $x^2+x+1>0$이다. 참

$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로
조건 '$x^2+x+1>0$'의 진리집합을 P라 하면 $P=U$

(4) 어떤 실수 x에 대하여 $x^2+2x+1\leq 0$이다. 참

조건 '$x^2+2x+1\leq 0$'의 진리집합을 P라 하면 $P=\{-1\}$
따라서 $P\neq\varnothing$

036

다음 명제의 부정을 말하시오.

(1) 모든 정수 x에 대하여 $x^2>0$이다.

어떤 정수 x에 대하여 $x^2\leq 0$이다.

(2) 어떤 유리수 x에 대하여 $\sqrt{x}<0$이다.

모든 유리수 x에 대하여 $\sqrt{x}\geq 0$이다.

(3) 모든 실수 x에 대하여 $x^2+4x+4\geq 0$이다.

어떤 실수 x에 대하여 $x^2+4x+4<0$이다.

(4) 어떤 실수 x에 대하여 $x^2+3x-4=0$이다.

모든 실수 x에 대하여 $x^2+3x-4\neq 0$이다.

037

다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) 모든 이등변삼각형은 정삼각형이다.

어떤 이등변삼각형은 정삼각형이 아니다. (참)

(2) 어떤 실수 x에 대하여 $|x|\leq 0$이다.

모든 실수 x에 대하여 $|x|>0$이다. (거짓)

(3) 모든 실수 x에 대하여 $x^2-x<0$이다.

어떤 실수 x에 대하여 $x^2-x\geq 0$이다. (참)

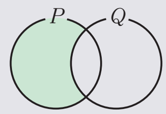
(4) 어떤 실수 x에 대하여 $x^2<0$이다.

모든 실수 x에 대하여 $x^2\geq 0$이다. (참)

유형 실전 문제

유형 04 명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 $P\cap Q^C=P-Q$의 원소이다.



풍쌤 Point 명제를 논리적으로 분석해서 참, 거짓을 판별하기 어려우면 반례를 찾아보자.

038

다음 중 참인 명제는?

① 3의 배수는 9의 배수이다. [반례] 6

② 자연수 n이 홀수이면 n^2+1도 홀수이다. [반례] $n=3$

③ ab가 양수이면 $a+b$도 양수이다. [반례] $a=-1$, $b=-2$

√④ 실수 x에 대하여 $x^3=1$이면 $x^2=1$이다.

⑤ 두 실수 a, b에 대하여 $a^2=b^2$이면 $a=b$이다. [반례] $a=2$, $b=-2$

④ 실수 x에 대하여 $x^3=1$이면 $x=1$이므로 $x^2=1$이다.
즉, 주어진 명제는 참이다.

039

두 실수 x, y에 대하여 **보기**에서 거짓인 명제인 것만을 있는 대로 고르시오. ㄱ, ㄴ

보기

ㄱ. $xy=0$이면 $x^2+y^2>0$이다. [반례] $x=0$, $y=0$

ㄴ. $x+y>0$이면 $x>0$, $y>0$이다. [반례] $x=3$, $y=-2$

ㄷ. $x^2+y^2=0$이면 $|x|+|y|=0$이다.

ㄷ. $x^2+y^2=0$이면 $x=0$, $y=0$ $\quad \therefore |x|+|y|=0$
즉, 주어진 명제는 참이다.

040

전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 다음 중 명제 $q \longrightarrow \sim p$가 거짓임을 보이는 원소가 속한 집합은?

√① $P\cap Q$ ② $P\cup Q$ ③ $P-Q$
④ $Q-P$ ⑤ $P^C\cap Q^C$

명제 $q \longrightarrow \sim p$가 거짓임을 보이는 반례는 q이면서 $\sim p$가 아닌 원소, 즉 집합 Q에는 속하면서 집합 P^C에는 속하지 않는 원소이므로 집합 $Q\cap(P^C)^C=Q\cap P=P\cap Q$의 원소이다.

041

10보다 작은 자연수 x에 대하여 명제

'$\underbrace{x\text{가 3의 배수}}_{p}$이면 $\underbrace{x>5}_{q}$이다.'

가 거짓임을 보이는 자연수 x의 값을 구하시오. 3

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P=\{3, 6, 9\}$, $Q=\{6, 7, 8, 9\}$
이때 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 $P\cap Q^C$의 원소이다.
따라서 $P\cap Q^C=P-Q=\{3\}$이므로 $x=3$

유형 05 명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓과 진리집합 중요★

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때

① $P\subset Q$ ➡ 명제 $p \longrightarrow q$가 참

② 명제 $p \longrightarrow q$가 참 ➡ $P\subset Q$

풍쌤 Point 진리집합 사이의 포함 관계를 이용하면 명제의 참, 거짓을 빠르게 판별할 수 있다. '포함 기호가 열린 방향'이 '화살표의 화살촉 방향'임을 기억하자. $P\subset Q$ / $p \rightarrow q$

042

전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자. $Q-P=\varnothing$이 성립할 때, **보기**에서 항상 참인 명제인 것만을 있는 대로 고르시오. ㄴ, ㄷ

보기

ㄱ. $p \longrightarrow \sim q$ ㄴ. $q \longrightarrow p$ ㄷ. $\sim p \longrightarrow \sim q$

$Q-P=\varnothing$이므로 $Q\subset P$
ㄱ. $P\not\subset Q^C$이므로 $p \longrightarrow \sim q$는 거짓이다.
ㄷ. $Q\subset P$에서 $P^C\subset Q^C$이므로 $\sim p \longrightarrow \sim q$는 참이다.

043

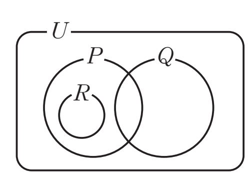
전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자. 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은? (단, $P\neq\varnothing$, $Q\neq\varnothing$)

① $P\cap Q=P$ ② $P\cup Q=P$
③ $P-Q=\varnothing$ √④ $(P\cup Q)-P=Q$
⑤ $(P\cup Q)\cap(P\cap Q)=Q$

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 $P\subset Q^C$
① $P\cap Q=\varnothing\neq P$ ② $P\cup Q\neq P$
③ $P-Q=P\neq\varnothing$ ⑤ $(P\cup Q)\cap(P\cap Q)=(P\cup Q)\cap\varnothing=\varnothing\neq Q$

044

전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 할 때, 세 집합 사이의 포함 관계는 오른쪽 그림과 같다. 다음 중 항상 참인 명제는?



① $p \longrightarrow q$ ② $p \longrightarrow r$ √③ $\sim p \longrightarrow \sim r$
④ $q \longrightarrow \sim p$ ⑤ $r \longrightarrow \sim p$

① $P\not\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.
② $P\not\subset R$이므로 명제 $p \longrightarrow r$는 거짓이다.
③ $R\subset P$에서 $P^C\subset R^C$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim r$는 참이다.
④ $Q\not\subset P^C$이므로 명제 $q \longrightarrow \sim p$는 거짓이다.
⑤ $R\not\subset P^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$는 거짓이다.

유형 06 명제가 참이 되도록 하는 미지수 구하기

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때,
명제 $p \longrightarrow q$가 참이면
➡ $P \subset Q$가 되도록 P, Q를 수직선 위에 나타내어 본다.

풍쌤 Point P, Q를 수직선 위에 나타내고 $P \subset Q$인 조건을 찾는다. 이때 등호의 포함 여부에 주의한다.

045

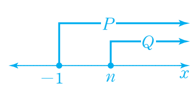
명제 '$x=k$이면 $x^2-6x+8 \le 0$이다.'가 참이 되도록 하는 모든 정수 k의 합을 구하시오. 9

$x^2-6x+8 \le 0$에서 $(x-2)(x-4) \le 0$
$\therefore 2 \le x \le 4$
즉, 명제 '$x=k$이면 $x^2-6x+8 \le 0$이다.'가 참이 되도록 하는 정수 k의 값은 2 또는 3 또는 4이다.
따라서 구하는 합은
$2+3+4=9$

046

두 조건 'p: $x+1 \ge 0$', 'q: $x \ge n$'에 대하여 명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되도록 하는 정수 n의 최솟값을 구하시오. -1

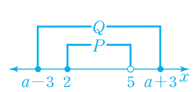
두 조건의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$Q \subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서
$n \ge -1$
따라서 정수 n의 최솟값은 -1이다.



047

명제 '$\underbrace{2 \le x < 5}_{p}$이면 $\underbrace{|x-a| \le 3}_{q}$이다.'가 참이 되도록 하는 자연수 a의 개수를 구하시오. 4

두 조건의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x \mid 2 \le x < 5\}$, $Q=\{x \mid a-3 \le x \le a+3\}$
$P \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서
$a-3 \le 2$, $5 \le a+3$
$\therefore 2 \le a \le 5$
따라서 자연수 a는 2, 3, 4, 5의 4개이다.



048

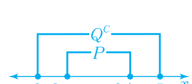
실수 x에 대하여 두 조건 p, q가

p: $|x-2| \le a$, q: $x^2-2x-15>0$

일 때, 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이 되도록 하는 양수 a의 최댓값은?

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

두 조건의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x \mid 2-a \le x \le 2+a\}$, $Q=\{x \mid x<-3$ 또는 $x>5\}$
$\therefore Q^C=\{x \mid -3 \le x \le 5\}$
$P \subset Q^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서
$-3 \le 2-a$, $2+a \le 5$
$\therefore 0<a \le 3$ ($\because a>0$)
따라서 양수 a의 최댓값은 3이다.



유형 07 '모든'이나 '어떤'을 포함한 명제 중요

전체집합 U에 대하여 조건 p의 진리집합을 P라 할 때
① '모든 x에 대하여 p이다.'
➡ $P=U$이면 참, $P \ne U$이면 거짓
➡ 부정은 '어떤 x에 대하여 $\sim p$이다.'
② '어떤 x에 대하여 p이다.'
➡ $P \ne \varnothing$이면 참, $P=\varnothing$이면 거짓
➡ 부정은 '모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'이다.

풍쌤 Point ① '모든'이 나오면 반례를 찾아보자. 반례가 하나라도 있으면 거짓이다.
② '어떤'이 나오면 성립하는 예를 찾아보자. 성립하는 예가 하나라도 있으면 참이다.

049

전체집합 $U=\{0, 1, 2, 3, 4\}$의 원소 x에 대하여 다음 중 참인 명제는?

① 모든 x에 대하여 $|x|>0$이다.
② 어떤 x에 대하여 $x^2<0$이다.
③ 모든 x에 대하여 $x-4<0$이다.
④ 어떤 x에 대하여 $|x|>x$이다.
⑤ 모든 x에 대하여 $x^2+x \ge 0$이다.

① [반례] $x=0$
② $x=0, 1, 2, 3, 4$일 때, $x^2 \ge 0$
③ [반례] $x=4$
④ $x=0, 1, 2, 3, 4$일 때, $|x|=x$

050

다음 명제 중 그 부정이 거짓인 것은?

① 어떤 실수 x에 대하여 $x^2<0$이다.
② 어떤 실수 x에 대하여 $|x|<0$이다.
③ 모든 실수 x에 대하여 $(x+1)^2 \ge 1$이다.
④ 모든 실수 x에 대하여 $|x+2| \ge 2$이다.
⑤ 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2x+3 \ne 0$이다.

⑤ 부정은 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2+2x+3=0$이다.'이다.
이때 $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2x+3 \ne 0$이다.
즉, 주어진 명제의 부정은 거짓이다.

051

명제 '모든 실수 x에 대하여 $x^2+2kx+4k+12>0$이다.'가 참이 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. 7

이차방정식 $x^2+2kx+4k+12=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=k^2-(4k+12)<0$
$k^2-4k-12<0$, $(k+2)(k-6)<0$
$\therefore -2<k<6$
따라서 정수 k는 $-1, 0, 1, \cdots, 5$의 7개이다.

05 명제의 역과 대우

❶ 명제의 역과 대우

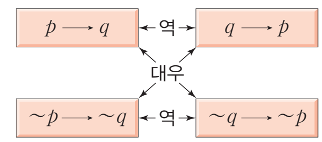
명제 $p \longrightarrow q$에서

① 역: 가정과 결론을 서로 바꾸어 놓은 명제 $q \longrightarrow p$

② 대우: 가정과 결론을 각각 부정하여 서로 바꾸어 놓은 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$

보기 명제 '$x=1$이면 $x^2+1=2$이다.'에 대하여

① 역: $x^2+1=2$이면 $x=1$이다.　　② 대우: $x^2+1\neq 2$이면 $x\neq 1$이다.



❷ 명제와 그 대우의 참, 거짓

명제와 그 대우의 참, 거짓은 항상 일치한다. 즉,

명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참

명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 거짓

이다.

참고 두 명제 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때

명제 $p \longrightarrow q$가 참 ➡ $P \subset Q$ ➡ $Q^C \subset P^C$ ➡ 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참

대우

풍쌤 Tip 명제와 그 대우는 참, 거짓이 일치하므로 명제의 참, 거짓을 판단하기 어려울 때 대우를 구하여 참, 거짓을 판단한다.

• 명제와 그 역의 참, 거짓은 일치하지 않는다. 즉, $p \longrightarrow q$가 참일 때, 그 역 $q \longrightarrow p$는 참일 수도 있고 거짓일 수도 있다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 087쪽

052

다음 명제의 역과 대우를 말하고, 각각의 참, 거짓을 판별하여 ○를 표시하시오.

(1) $x=1$이면 $x^2=1$이다.

➡ 역: $x^2=1$이면 $x=1$이다. (참, 거짓)

대우: $x^2\neq 1$이면 $x\neq 1$이다. (참, 거짓)

(2) $x>0$, $y>0$이면 $xy>0$이다.

➡ 역: $xy>0$이면 $x>0$, $y>0$이다. (참, 거짓)

대우: $xy\leq 0$이면 $x\leq 0$ 또는 $y\leq 0$이다. (참, 거짓)

(3) x가 6의 약수이면 x는 12의 약수이다.

➡ 역: x가 12의 약수이면 x는 6의 약수이다. (참, 거짓)

대우: x가 12의 약수가 아니면 x는 6의 약수가 아니다. (참, 거짓)

(4) 두 삼각형의 넓이가 같으면 두 삼각형은 합동이다.

➡ 역: 두 삼각형이 합동이면 두 삼각형의 넓이는 같다. (참, 거짓)

대우: 두 삼각형이 합동이 아니면 두 삼각형의 넓이는 같지 않다. (참, 거짓)

053

다음 중 반드시 참인 것은 ○를, 참인지 알 수 없는 것은 ×를 (　) 안에 써넣으시오.

(1) 명제 $p \longrightarrow q$가 참일 때, 명제 $q \longrightarrow p$ (×)

(2) 명제 $q \longrightarrow p$가 참일 때, 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$ (○)

(3) 명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참일 때, 명제 $\sim p \longrightarrow q$ (×)

(4) 명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참일 때, 명제 $\sim p \longrightarrow q$ (○)

06 삼단논법

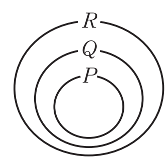
❶ 삼단논법

세 조건 p, q, r에 대하여
'두 명제 $p \longrightarrow q$와 $q \longrightarrow r$가 모두 참이면 명제 $p \longrightarrow r$도 참이다.'
라고 결론짓는 방법을 삼단논법이라 한다.

참고 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 할 때,

명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 $P \subset Q$	명제 $q \longrightarrow r$가 참이면 $Q \subset R$

$P \subset Q \subset R$에서 $P \subset R$ ➡ $p \longrightarrow r$도 참이다.



● 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 모두 참일 때에만 삼단논법으로 얻은 명제 $p \longrightarrow r$가 참이다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 087쪽

054

세 조건 p, q, r에 대하여 삼단논법을 이용하여 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 모두 참일 때,
명제 $p \longrightarrow \boxed{r}$가 참이다.

(2) 두 명제 $p \longrightarrow r$, $q \longrightarrow p$가 모두 참일 때,
명제 $\boxed{q} \longrightarrow r$가 참이다.

(3) 두 명제 $p \longrightarrow r$, $\sim q \longrightarrow \sim r$가 모두 참일 때,
명제 $p \longrightarrow \boxed{q}$가 참이다.

명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$가 참이면 그 대우 $r \longrightarrow q$도 참이다.
즉, 두 명제 $p \longrightarrow r$, $r \longrightarrow q$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow q$가 참이다.

(4) 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $r \longrightarrow q$가 모두 참일 때,
명제 $r \longrightarrow \boxed{\sim p}$가 참이다.

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이면 그 대우 $q \longrightarrow \sim p$도 참이다.
즉, 두 명제 $r \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim p$가 모두 참이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$가 참이다.

(5) 두 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$, $r \longrightarrow q$가 모두 참일 때,
명제 $\boxed{r} \longrightarrow p$가 참이다.

명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이면 그 대우 $q \longrightarrow p$도 참이다.
즉, 두 명제 $r \longrightarrow q$, $q \longrightarrow p$가 모두 참이므로 명제 $r \longrightarrow p$가 참이다.

055

세 조건 p, q, r에 대하여 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 모두 참일 때, 다음 중 반드시 참인 것은 ○를, 참인지 알 수 없는 것은 ×를 (　) 안에 써넣으시오.

(1) $\sim q \longrightarrow \sim p$ (○)

(2) $q \longrightarrow p$ (×)

(3) $p \longrightarrow r$ (○)

(4) $\sim r \longrightarrow \sim p$ (○)

(5) $\sim p \longrightarrow \sim r$ (×)

유형 실전 문제

유형 08 명제의 역과 대우 (중요)

(1) 명제 $p \longrightarrow q$에 대하여

① 역: $q \longrightarrow p$　　② 대우: $\sim q \longrightarrow \sim p$

(2) 명제와 그 대우의 참, 거짓은 일치한다.

풍쌤 Point 명제의 역이나 대우를 구할 때, 전제 조건은 변하지 않는다. '실수 x, y에 대하여'는 가정도 결론도 아닌 x, y에 대한 전제 조건이므로 이 조건은 그대로 두자.

056

두 조건 p, q에 대하여 명제 $\sim p \longrightarrow q$의 역이 참일 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $p \longrightarrow q$　② $q \longrightarrow p$
③ $\sim p \longrightarrow q$　④ $\sim q \longrightarrow p$
✓⑤ $p \longrightarrow \sim q$

명제 $\sim p \longrightarrow q$의 역이 참이므로 명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이다.
또, 명제 $q \longrightarrow \sim p$의 대우 $p \longrightarrow \sim q$도 참이다.

057

두 조건 p, q에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. ㄴ, ㄷ

보기

ㄱ. 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$는 참이다.
ㄴ. 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이면 명제 $q \longrightarrow \sim p$는 참이다.
ㄷ. 명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이면 명제 $\sim p \longrightarrow q$는 참이다.

ㄱ. 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$는 참이지만 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$의 참, 거짓은 알 수 없다.

058

명제 '$x>y$이면 $x^2>y^2$이다.'의 대우와 그것의 참, 거짓을 바르게 나타낸 것은? (단, x, y는 실수이다.)

① '$x^2>y^2$이면 $x>y$이다.' (참)
② '$x^2>y^2$이면 $x>y$이다.' (거짓)
③ '$x\le y$이면 $x^2\le y^2$이다.' (참)
✓④ '$x^2\le y^2$이면 $x\le y$이다.' (거짓)
⑤ '$x^2<y^2$이면 $x<y$이다.' (참)

명제 '$x>y$이면 $x^2>y^2$이다.'의 대우는 '$x^2\le y^2$이면 $x\le y$이다.'이다.
[반례] $x=-1$, $y=-3$이면 $x^2\le y^2$이지만 $x>y$이다.
따라서 주어진 명제의 대우는 거짓이다.

059

보기에서 대우가 참인 명제인 것만을 있는 대로 고르시오. (단, x, y는 실수이다.) ㄴ, ㄷ

보기

ㄱ. x가 8의 약수이면 x는 4의 약수이다.
ㄴ. $x>0$, $y>0$이면 $x+y>0$이다.
ㄷ. $x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다.

ㄱ. 대우: x가 4의 약수가 아니면 x는 8의 약수가 아니다. (거짓)
[반례] $x=8$이면 x는 4의 약수가 아니지만 8의 약수이다.

060

보기에서 역이 거짓인 명제인 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, x, y는 실수이다.)

보기

ㄱ. $x>y$이면 $x^2>y^2$이다.
ㄴ. $|x|>x$이면 $x<0$이다.
ㄷ. $x=0$, $y=0$이면 $xy=0$이다.
ㄹ. $x=3$이면 $x^2-2x-3=0$이다.

① ㄱ, ㄴ, ㄷ　② ㄱ, ㄴ, ㄹ　✓③ ㄱ, ㄷ, ㄹ
④ ㄴ, ㄷ, ㄹ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

ㄴ. 역: $x<0$이면 $|x|>x$이다. (참)

061

실수 x, y에 대하여 다음 중 그 역과 대우가 모두 참인 명제는?

① $x^2+y^2=0$이면 $x+y=0$이다.
② $xy<0$이면 $x>0$이고 $y<0$이다.
✓③ $|x|+|y|=0$이면 $x=y=0$이다.
④ x가 5의 배수이면 x는 10의 배수이다.
⑤ x, y 중 적어도 하나가 유리수이면 $x+y$는 유리수이다.

① 역: 거짓, 대우: 참
② 역: 참, 대우: 거짓
④ 역: 참, 대우: 거짓
⑤ 역: 거짓, 대우: 거짓

062

두 조건 p, q의 진리집합이 각각 $P=\{1, 3, a^2+1\}$, $Q=\{5, a+1\}$이고 명제 $p \longrightarrow q$의 역이 참일 때, 실수 a의 값을 구하시오. 2

명제 $p \longrightarrow q$의 역 $q \longrightarrow p$가 참이므로 $Q\subset P$
$5\in Q$이므로 $a^2+1=5$에서 $a^2=4$　$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$
(i) $a=-2$일 때, $Q\not\subset P$
(ii) $a=2$일 때, $Q\subset P$
(i), (ii)에서 $a=2$

유형 09 명제의 대우를 이용하여 미지수 구하기

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되도록 하는 미지수의 값을 구할 때,
p, q의 진리집합보다 $\sim p$, $\sim q$의 진리집합을 구하기 쉬운 경우
➡ 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이 되도록 하는 미지수를 구한다.

풍쌤 Point 주어진 명제에 $\neq$가 포함되어 있으면 대우를 이용하는 것이 훨씬 간단하다.

063

명제 '$x^2+2ax+8\neq 0$이면 $x\neq 4$이다.'가 참일 때, 상수 a의 값은?

√① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

대우 '$x=4$이면 $x^2+2ax+8=0$이다.'도 참이다.
즉, $x=4$를 $x^2+2ax+8=0$에 대입하면
$4^2+2a\times 4+8=0$, $8a=-24$
$\therefore a=-3$

064

두 실수 x, y에 대하여 명제
'$x+y\geq 10$이면 $x\geq k$ 또는 $y\geq 7$이다.'
가 참이 되도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하시오. 3

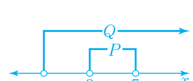
대우 '$x<k$이고 $y<7$이면 $x+y<10$이다.'가 참이 되어야 한다.
이때 $x<k$이고 $y<7$이면 $x+y<k+7$이므로
$k+7\leq 10$ $\quad\therefore k\leq 3$
따라서 실수 k의 최댓값은 3이다.

065

두 조건 p: $3<x<7$, q: $x>a$에 대하여 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참일 때, 실수 a의 최댓값은?

① 2 √② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 8

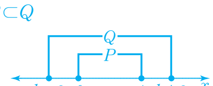
두 조건의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P=\{x|3<x<7\}$, $Q=\{x|x>a\}$
명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이면 그 대우 $p \longrightarrow q$도 참이므로
$P\subset Q$
즉, 오른쪽 그림에서
$a\leq 3$
따라서 실수 a의 최댓값은 3이다.



066

명제 '$|x-k|>3$이면 $|x-2|>2$이다.'가 참이 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. 6

대우 '$|x-2|\leq 2$이면 $|x-k|\leq 3$이다.'가 참이어야 한다.
두 조건 p: $|x-2|\leq 2$, q: $|x-k|\leq 3$의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
$P=\{x|0\leq x\leq 4\}$, $Q=\{x|k-3\leq x\leq k+3\}$ $\quad\therefore P\subset Q$
즉, 오른쪽 그림에서
$k-3\leq 0$, $4\leq k+3$ $\quad\therefore 1\leq k\leq 3$
따라서 정수 k는 1, 2, 3이므로 그 합은
$1+2+3=6$



유형 10 삼단논법 중요

세 조건 p, q, r에 대하여 두 명제 $p \longrightarrow q$와 $q \longrightarrow r$가 모두 참이면
① 삼단논법에 의하여 명제 $p \longrightarrow r$도 참이다.
② 대우에 의하여
명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$, $\sim r \longrightarrow \sim q$, $\sim r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

풍쌤 Point 두 개의 참인 명제에 삼단논법을 적용하면 새로운 참인 명제 하나가 생긴다. 또한, 대우를 이용하여 찾을 수 있는 참인 명제 3개를 빠뜨리지 않도록 주의하자.

067

세 조건 p, q, r에 대하여 두 명제
$p \longrightarrow r$, $\sim q \longrightarrow \sim r$
가 모두 참일 때, 다음 명제 중 항상 참인 것은?

① $q \longrightarrow r$ ② $r \longrightarrow p$ ③ $\sim p \longrightarrow \sim r$
√④ $\sim q \longrightarrow \sim p$ ⑤ $\sim r \longrightarrow \sim q$

두 명제 $p \longrightarrow r$, $\sim q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 각 명제의 대우 $\sim r \longrightarrow \sim p$, $r \longrightarrow q$도 모두 참이다.
또, 두 명제 $p \longrightarrow r$, $r \longrightarrow q$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $p \longrightarrow q$도 참이고, 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

068

세 조건 p, q, r에 대하여 두 명제 $r \longrightarrow \sim p$, $\sim q \longrightarrow p$가 모두 참일 때, **보기**에서 항상 참인 명제인 것만을 있는 대로 고르시오. ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅂ

보기

ㄱ. $p \longrightarrow \sim r$ ㄴ. $q \longrightarrow \sim p$ ㄷ. $r \longrightarrow q$
ㄹ. $\sim p \longrightarrow q$ ㅁ. $\sim p \longrightarrow r$ ㅂ. $\sim q \longrightarrow \sim r$

두 명제 $r \longrightarrow \sim p$, $\sim q \longrightarrow p$가 모두 참이므로 각 명제의 대우 $p \longrightarrow \sim r$, $\sim p \longrightarrow q$도 모두 참이다.
또, 두 명제 $r \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow q$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $r \longrightarrow q$도 참이고, 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

069

세 조건 p, q, r에 대하여 두 명제
$p \longrightarrow \sim r$, $\sim p \longrightarrow \sim q$
가 모두 참일 때, 다음 명제 중 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $q \longrightarrow p$ ② $q \longrightarrow \sim r$ ③ $r \longrightarrow \sim p$
④ $r \longrightarrow \sim q$ √⑤ $\sim q \longrightarrow \sim p$

두 명제 $p \longrightarrow \sim r$, $\sim p \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 각 명제의 대우 $r \longrightarrow \sim p$, $q \longrightarrow p$도 모두 참이다.
또, 두 명제 $r \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $r \longrightarrow \sim q$도 참이고, 그 대우 $q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

07 충분조건, 필요조건, 필요충분조건

1 충분조건, 필요조건, 필요충분조건

① 명제 $p \longrightarrow q$가 참일 때, 기호 $p \Longrightarrow q$로 나타내고 p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건이라 한다.

② 명제 $p \longrightarrow q$에 대하여 $p \Longrightarrow q$이고 $q \Longrightarrow p$일 때, 기호 $p \Longleftrightarrow q$로 나타내고 p는 q이기 위한 필요충분조건이라 한다.
└ q도 p이기 위한 필요충분조건이다.

참고 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓일 때, 기호 $p \not\Longrightarrow q$로 나타낸다.

2 충분조건, 필요조건과 진리집합

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때

① $P \subset Q$이면 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건이다.

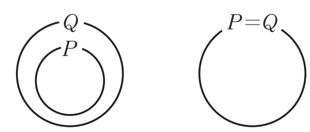
② $P=Q$이면 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

q이기 위한 충분조건

$\boldsymbol{p \Longrightarrow q}$

p이기 위한 필요조건

풍쌤 Tip 조건 p가 조건 q이기 위한 필요충분조건임을 보이려면 $p \longrightarrow q$와 $q \longrightarrow p$가 모두 참임을 보여야 한다.



$p \Rightarrow q$ $p \Leftrightarrow q$

개념 기본 문제

070

다음 두 조건 p, q에 대하여 옳은 것에 ○를 표시하고, □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오. (단, x는 실수이다.)

(1) p: $x=1$, q: $x^2=1$
① 명제 $p \longrightarrow q$는 (참, 거짓)이다.
② 명제 $q \longrightarrow p$는 (참, 거짓)이다.
③ p는 q이기 위한 $\boxed{\text{충분}}$조건이다.

(2) p: $x>0$, q: $x\ge1$
① 명제 $p \longrightarrow q$는 (참, 거짓)이다.
② 명제 $q \longrightarrow p$는 (참, 거짓)이다.
③ p는 q이기 위한 $\boxed{\text{필요}}$조건이다.

(3) p: x는 2의 배수이다., q: x는 짝수인 자연수이다.
① 명제 $p \longrightarrow q$는 (참, 거짓)이다.
② 명제 $q \longrightarrow p$는 (참, 거짓)이다.
③ p는 q이기 위한 $\boxed{\text{필요충분}}$조건이다.

071

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 다음 물음에 답하고, □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오. (단, x는 실수이다.)

(1) p: $x=2$, q: $x^2+x-6=0$
① 두 진리집합 P, Q를 각각 구하시오.
$P=\{2\}$, $Q=\{-3, 2\}$
② 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계를 구하시오.
$P\subset Q$
③ p는 q이기 위한 $\boxed{\text{충분}}$조건이다.

(2) p: x는 12의 약수이다. q: x는 6의 약수이다.
① 두 진리집합 P, Q를 각각 구하시오.
$P=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $Q=\{1, 2, 3, 6\}$
② 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계를 구하시오.
$Q\subset P$
③ p는 q이기 위한 $\boxed{\text{필요}}$조건이다.

(3) p: $2\le x\le3$, q: $x^2-5x+6\le0$
① 두 진리집합 P, Q를 각각 구하시오.
$P=\{x|2\le x\le3\}$, $Q=\{x|2\le x\le3\}$
② 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계를 구하시오.
$P=Q$
③ p는 q이기 위한 $\boxed{\text{필요충분}}$조건이다.

072

다음 두 조건 p, q에 대하여 p는 q이기 위한 어떤 조건인지 구하시오. (단, x, y는 실수이다.)

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

(1) p: $x^2=4$, q: $|x|=2$ 필요충분조건

$P=\{-2, 2\}$
$Q=\{-2, 2\}$
즉, $P=Q$이므로 $p \Longleftrightarrow q$
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

(2) p: $x=1$, q: $x^2+2x-3=0$ 충분조건

$P=\{1\}$
$Q=\{-3, 1\}$
즉, $P\subset Q$, $Q\not\subset P$이므로 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

(3) p: $xy=0$, q: $x=0$, $y=0$ 필요조건

$p \longrightarrow q$: [반례] $x=-1$, $y=0$
$q \longrightarrow p$: $x=0$, $y=0$이면 $xy=0$이다. (참)
따라서 $p \not\Longrightarrow q$이고 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

(4) p: x는 한 자리의 자연수이다.
q: x는 10 이하의 소수인 자연수이다. 필요조건

$P=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$
$Q=\{2, 3, 5, 7\}$
즉, $Q\subset P$, $P\not\subset Q$이므로 $q \Longrightarrow p$, $p \not\Longrightarrow q$
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

(5) p: x, y가 유리수이다., q: $x+y$가 유리수이다. 충분조건

$p \longrightarrow q$: x, y가 유리수이면 $x+y$는 유리수이다. (참)
$q \longrightarrow p$: [반례] $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$
따라서 $p \Longrightarrow q$이고 $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

(6) p: $x>2$, $y>2$, q: $xy>4$ 충분조건

$p \longrightarrow q$: $x>2$, $y>2$이면 $xy>4$이다. (참)
$q \longrightarrow p$: [반례] $x=-3$, $y=-5$
따라서 $p \Longrightarrow q$이고 $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

(7) p: $x\geq 0$, q: $x^2-3x+2\leq 0$ 필요조건

$P=\{x\,|\,x\geq 0\}$
$Q=\{x\,|\,1\leq x\leq 2\}$
즉, $Q\subset P$, $P\not\subset Q$이므로 $q \Longrightarrow p$, $p \not\Longrightarrow q$
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

(8) p: $|x|<5$, q: $x^2-25<0$ 필요충분조건

$P=\{x\,|\,-5<x<5\}$
$Q=\{x\,|\,-5<x<5\}$
즉, $P=Q$이므로 $p \Longleftrightarrow q$
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

073

두 조건 p: $x=1$, q: $x^2+ax-2=0$에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건일 때, 상수 a의 값을 구하시오. 1

단계1. 두 조건 p, q를 이용하여 반드시 참이 되는 명제 구하기

p가 q이기 위한 충분조건이므로 반드시 참이 되는 명제는
$p \longrightarrow q$이다.

단계2. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계 구하기

$p \Longrightarrow q$이므로 $P\subset Q$

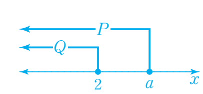
단계3. 상수 a의 값 구하기

$P=\{1\}$, $Q=\{x\,|\,x^2+ax-2=0\}$에서
$P\subset Q$이므로 $1\in Q$
즉, $x=1$을 $x^2+ax-2=0$에 대입하면
$1+a-2=0$ $\quad\therefore a=1$

074

두 조건 p: $x\leq a$, q: $x-2\leq 0$에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오. $a\geq 2$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
p가 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset P$
오른쪽 그림에서
$a\geq 2$



075

두 조건 p: $a\leq x\leq 2$, q: $x^2-3x+2\leq 0$에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건일 때, 실수 a의 값을 구하시오. 1

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
p가 q이기 위한 필요충분조건이므로
$P=Q$
$P=\{x\,|\,a\leq x\leq 2\}$
$Q=\{x\,|\,(x-1)(x-2)\leq 0\}=\{x\,|\,1\leq x\leq 2\}$
이때 $P=Q$이므로 $a=1$

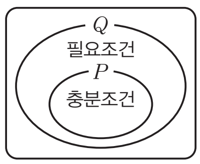
유형 실전 문제

유형 11 충분조건, 필요조건, 필요충분조건 중요

p는 q이기 위한
① $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$ ➡ 충분조건이고, 필요조건은 아니다.
② $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$ ➡ 충분조건은 아니고, 필요조건이다.
③ $p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$ ➡ $p \Longleftrightarrow q$
➡ 필요충분조건이다.

풍쌤 Point 처음 보는 용어이므로 혼동하지 않도록 잘 기억하자.
작은 진리집합은 큰 진리집합에 '충분히 들어'가므로 '충분조건'이라고 기억해도 좋다.

충분조건		필요조건
⬇		⬇
p	$\Rightarrow$	q
P	$\subset$	Q



076

실수 x에 대하여 ㈎, ㈏에 알맞은 것을 차례대로 나열한 것은?

- $\underbrace{x^2=9}_{p}$는 $\underbrace{x=3}_{q}$이기 위한 ㈎ 조건이다.
- $\underbrace{x>1}_{r}$은 $\underbrace{x^2\geq1}_{s}$이기 위한 ㈏ 조건이다.

① 충분, 필요　　② 충분, 필요충분
✓③ 필요, 충분　　④ 필요, 필요충분
⑤ 필요충분, 필요충분

• 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P=\{-3, 3\}$, $Q=\{3\}$
즉, $P\not\subset Q$, $Q\subset P$이므로 $q \Longrightarrow p$이고 $p \not\Longrightarrow q$이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이므로 $x^2=9$는 $x=3$이기 위한 필요조건이다.
• 두 조건 r, s의 진리집합을 각각 R, S라 하면
$R=\{x|x>1\}$, $S=\{x|x\leq-1$ 또는 $x\geq1\}$
즉, $R\subset S$, $S\not\subset R$이므로 $r \Longrightarrow s$이고 $s \not\Longrightarrow r$이다.
따라서 r는 s이기 위한 충분조건이므로 $x>1$은 $x^2\geq1$이기 위한 충분조건이다.

077

두 조건 p, q에 대하여 **보기**에서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것만을 있는 대로 고르시오.
ㄱ, ㄴ　(단, x, y는 실수이다.)

보기

ㄱ. p: $x-2<0$	q: $3x-4<x+6$
ㄴ. p: $x=y$	q: $x^2=y^2$
ㄷ. p: $xy>0$	q: $x>0$이고 $y>0$

ㄷ. p: $xy>0$에서 $x>0$, $y>0$ 또는 $x<0$, $y<0$
q: $x>0$이고 $y>0$
즉, $q \Longrightarrow p$이고 $p \not\Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

078

x, y가 실수일 때, 두 조건 p, q에 대하여 다음 중 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① p: $x=3$　　q: $3x^2-5x-12=0$
② p: $|x|\leq1$　　q: $-2\leq x\leq3$
③ p: $x^2=1$　　q: $x^3=x$
✓④ p: $|xy|=xy$　　q: $x>0$이고 $y>0$
✓⑤ p: $x^2+y^2>0$　　q: $xy>0$

④ p: $|xy|=xy$에서 $xy>0$　∴ $x>0$, $y>0$ 또는 $x<0$, $y<0$
즉, $q \Longrightarrow p$이고 $p \not\Longrightarrow q$
⑤ p: $x^2+y^2>0$에서 $x\neq0$ 또는 $y\neq0$
q: $xy>0$에서 $x>0$, $y>0$ 또는 $x<0$, $y<0$
즉, $q \Longrightarrow p$이고 $p \not\Longrightarrow q$

079

두 조건 p, q에 대하여 **보기**에서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것만을 있는 대로 고르시오.　ㄴ
(단, x, y는 실수이다.)

보기

ㄱ. p: $x^2=y^2$	q: $x^3=y^3$
ㄴ. p: $x^2+y^2=0$	q: $|x|+|y|=0$
ㄷ. p: $x^2+y^2>0$	q: $x+y>0$

ㄱ. p: $x=-y$ 또는 $x=y$, q: $x=y$
즉, $q \Longrightarrow p$이고 $p \not\Longrightarrow q$
ㄷ. p: $x\neq0$ 또는 $y\neq0$
즉, $q \Longrightarrow p$이고 $p \not\Longrightarrow q$

080

두 실수 x, y에 대하여 네 조건 p, q, r, s가
p: $x=0$이고 $y=0$,　q: $x+y=0$,
r: $xy=0$,　s: $x+yi=0$ $(i=\sqrt{-1})$
일 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. p는 q이기 위한 충분조건이다.
ㄴ. p는 r이기 위한 필요조건이다.
ㄷ. p는 s이기 위한 필요충분조건이다.
ㄹ. r는 s이기 위한 필요충분조건이다.

① ㄱ, ㄴ　✓② ㄱ, ㄷ　③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ　⑤ ㄷ, ㄹ

ㄴ. 명제 $p \longrightarrow r$는 참이다.
명제 $r \longrightarrow p$는 거짓이다. [반례] $x=1$, $y=0$
즉, $p \Longrightarrow r$이고 $r \not\Longrightarrow p$이므로 p는 r이기 위한 충분조건이다.
ㄹ. 명제 $r \longrightarrow s$는 거짓이다. [반례] $x=1$, $y=0$
명제 $s \longrightarrow r$는 참이다.
즉, $s \Longrightarrow r$이고 $r \not\Longrightarrow s$이므로 r는 s이기 위한 필요조건이다.

유형 12 충분조건, 필요조건과 진리집합

중요

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때,

① p는 q이기 위한 충분조건 $\Longleftrightarrow P \subset Q$

② p는 q이기 위한 필요조건 $\Longleftrightarrow Q \subset P$

③ p는 q이기 위한 필요충분조건 $\Longleftrightarrow P = Q$

풍쌤 Point 충분조건, 필요조건이라는 단어를 ⇒를 이용한 명제꼴로 바꾸고, 이를 진리집합의 포함 관계로 변형한다. 이때 화살촉이 있는 쪽이 포함 기호가 열린 쪽이라는 것을 잊지 말자.

081

전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자. p는 q이기 위한 충분조건일 때, **보기**에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. ㄷ, ㄹ

보기

ㄱ. $P^C \subset Q^C$　　ㄴ. $P \cap Q = \varnothing$

ㄷ. $P - Q^C = P$　　ㄹ. $P^C \cup Q = U$

p가 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$
ㄴ. $P \cap Q = P$
ㄷ. $P - Q^C = P \cap (Q^C)^C = P \cap Q = P$

082

전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자. p는 q이기 위한 충분조건, $\sim q$는 $\sim r$이기 위한 필요조건일 때, 세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계로 옳은 것은?

✓① $P \subset Q \subset R$　② $P \subset R \subset Q$　③ $Q \subset P \subset R$
④ $Q \subset R \subset P$　⑤ $R \subset Q \subset P$

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$
$\sim q$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이므로 $R^C \subset Q^C$　$\therefore Q \subset R$
$\therefore P \subset Q \subset R$

083

전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면 $(Q-P) \cup (R-P^C) = \varnothing$일 때, 다음 중 항상 옳은 것은? (단, $P \neq \varnothing$, $Q \neq \varnothing$, $R \neq \varnothing$)

① p는 q이기 위한 충분조건이다.
② p는 r이기 위한 필요조건이다.
✓③ q는 p이기 위한 충분조건이다.
④ p는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.
⑤ q는 $\sim r$이기 위한 필요충분조건이다.

$(Q-P) \cup (R-P^C) = \varnothing$이므로 $Q-P=\varnothing$, $R-P^C=\varnothing$
$Q-P=\varnothing$에서 $Q \subset P$
$R-P^C = R \cap (P^C)^C = R \cap P = \varnothing$
①, ③ $Q \subset P$이므로 p는 q이기 위한 필요조건, q는 p이기 위한 충분조건이다.
②, ④ $P \subset R^C$이므로 p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.
⑤ $Q \subset R^C$이므로 q는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.

유형 13 충분조건, 필요조건이 되도록 하는 미지수의 값 구하기

① 방정식으로 주어진 조건
➡ 진리집합 사이의 포함 관계를 만족시키는 미지수의 값을 구한다.

② 부등식으로 주어진 조건
➡ 진리집합 사이의 포함 관계를 만족시키도록 수직선 위에 나타내어 미지수의 값의 범위를 구한다.

풍쌤 Point 필요조건의 진리집합이 충분조건의 진리집합을 포함하도록 하는 경우를 찾는다.

084

$2x+1=5$는 $x^2-ax+b=0$이기 위한 필요충분조건일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 8

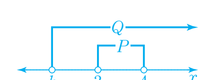
$2x+1=5$에서 $2x=4$　$\therefore x=2$
즉, $x=2$가 $x^2-ax+b=0$이기 위한 필요충분조건이다.
이때 중근 $x=2$를 해로 갖고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-2)^2=0$　$\therefore x^2-4x+4=0$
$\therefore a=4, b=4$　$\therefore a+b=8$

085

두 조건 p: $x^2-6x+8<0$, q: $x>k$에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건일 때, 실수 k의 최댓값은?

① -1　② 0　③ 1
✓④ 2　⑤ 3

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|2<x<4\}$, $Q=\{x|x>k\}$
이때 p가 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$
즉, 오른쪽 그림에서 $k \leq 2$
따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.



086

두 조건 p: $3x+a \neq 0$, q: $x^2+2x-3=0$에 대하여 p가 $\sim q$이기 위한 필요조건이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합을 구하시오. 6

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P=\left\{x \middle| x \neq -\frac{a}{3}\right\}$, $Q=\{-3, 1\}$
이때 p가 $\sim q$이기 위한 필요조건이므로 $Q^C \subset P$　$\therefore P^C \subset Q$
즉, $-\frac{a}{3}=-3$ 또는 $-\frac{a}{3}=1$이므로 $a=9$ 또는 $a=-3$
$\therefore 9+(-3)=6$

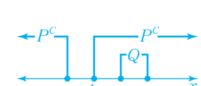
087

x가 실수일 때, 두 조건 p, q가

p: $-2<x<k$, q: $x^2-9x+18 \leq 0$

이다. $\sim p$가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 k의 최댓값을 구하시오. (단, $k>-2$) 3

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|-2<x<k\}$, $Q=\{x|3 \leq x \leq 6\}$
이때 $\sim p$가 q이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P^C$
즉, 오른쪽 그림에서 $-2<k \leq 3$
따라서 정수 k의 최댓값은 3이다.



중단원 점검 문제

01

다음 중 참인 명제는?

① 한라산은 높다.
② x는 4의 배수이다.
③ 3의 배수는 홀수이다.
√④ 두 홀수의 합은 짝수이다.
⑤ 평행사변형의 두 대각선의 길이는 서로 같다.

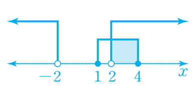
① 명제가 아니다.
② 조건
③, ⑤ 거짓인 명제

02

두 조건 p: $1 \le x \le 4$, q: $|x| \le 2$에 대하여 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 부정은?

① $1 \le x \le 2$　② $-2 \le x \le 1$
√③ $2 < x \le 4$　④ $x < -2$
⑤ $-2 \le x \le 4$

조건 '$\sim p$ 또는 q'의 부정은 'p 그리고 $\sim q$'이다.
조건 $\sim q$는 $x < -2$ 또는 $x > 2$이므로
오른쪽 그림에서 조건 'p 그리고 $\sim q$'는 $2 < x \le 4$이다.



03

전체집합 $U=\{x \mid x$는 12 이하의 소수인 자연수$\}$에 대하여 두 조건 p, q가

p: $x^3-5x^2+6x=0$, q: $2x^2-3x-2=0$

일 때, 다음 중 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합의 원소가 아닌 것은?

① 2　√② 3　③ 5
④ 7　⑤ 11

$U=\{2, 3, 5, 7, 11\}$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P=\{2, 3\}$, $Q=\{2\}$
따라서 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합은 $P^C \cup Q=\{5, 7, 11\} \cup \{2\}=\{2, 5, 7, 11\}$

04 학교 시험 기출

두 조건 p, q에 대하여 **보기**에서 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓인 것만을 있는 대로 고르시오. (단, x, y, z는 실수이다.)　ㄴ, ㄷ

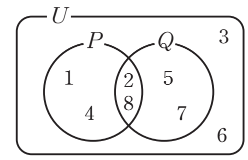
보기

ㄱ. p: $x=y$　　q: $xz=yz$
ㄴ. p: $x+y<0$　　q: $xy<0$
ㄷ. p: xy가 짝수이다.　　q: x, y가 모두 짝수이다.

ㄴ. 명제 $p \longrightarrow q$: [반례] $x=-1$, $y=-1$
ㄷ. 명제 $p \longrightarrow q$: [반례] $x=2$, $y=3$

05

전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 두 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 명제 $q \longrightarrow p$가 거짓임을 보이는 모든 원소의 합을 구하시오.　12



명제 $q \longrightarrow p$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 $Q \cap P^C=Q-P$의 원소이다.
따라서 명제 $q \longrightarrow p$가 거짓임을 보이는 모든 원소는 5, 7이므로 그 합은
$5+7=12$

06

전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자. $P \cap Q=P$, $Q \cup R=Q$가 성립할 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는?

① $p \longrightarrow q$　√② $q \longrightarrow r$　③ $r \longrightarrow q$
④ $\sim q \longrightarrow \sim p$　⑤ $\sim q \longrightarrow \sim r$

$P \cap Q=P$이므로 $P \subset Q$
$Q \cup R=Q$이므로 $R \subset Q$
②, ③ $R \subset Q$이므로 명제 $r \longrightarrow q$는 반드시 참이지만 명제 $q \longrightarrow r$의 참, 거짓은 판별할 수 없다.

07 실전 Plus

실수 x에 대하여 두 조건 p, q가

p: $|x-k| \le 1$, q: $x^2-3x-4 \le 0$

이다. 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이 되도록 하는 자연수 k의 최솟값을 구하시오.　4

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x \mid k-1 \le x \le k+1\}$, $Q=\{x \mid -1 \le x \le 4\}$
이때 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이 되려면 $P \not\subset Q$이어야 하므로 $k<0$ 또는 $k>3$
따라서 자연수 k의 최솟값은 4이다.

08

보기에서 참인 명제인 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $x^3>0$이다.
ㄴ. 어떤 실수 x에 대하여 $x^2+x \le 0$이다.
ㄷ. 어떤 실수 x에 대하여 $x^2+x=0$이다.
ㄹ. 모든 실수 x에 대하여 $|x|+x \ge 0$이다.

① ㄱ, ㄴ　② ㄱ, ㄷ　③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ　√⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. [반례] $x=-1$이면 $x^3=-1<0$이다.

09 실전 Plus

명제 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2+4x+2k-3\le 0$이다.'가 거짓이 되도록 하는 정수 k의 최솟값을 구하시오. 4

명제의 부정 '모든 실수 x에 대하여 $x^2+4x+2k-3>0$이다.'가 참이 되어야 한다.
즉, 이차방정식 $x^2+4x+2k-3=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-(2k-3)<0,\ 2k>7 \qquad \therefore k>\frac{7}{2}$
따라서 정수 k의 최솟값은 4이다.

10

보기에서 역은 참이고, 대우는 거짓인 명제만을 있는 대로 고른 것은? (단, x, y는 실수이다.)

보기

ㄱ. $x^2=y^2$이면 $x=y$이다.
ㄴ. $xy=0$이면 $x^2+y^2=0$이다.
ㄷ. $x^2=1$이면 $|x|\le 1$이다.

① ㄱ　② ㄴ　✓③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄷ. 역: $|x|\le 1$이면 $x^2=1$이다. (거짓)
[반례] $x=0$
명제: $x^2=1$이면 $|x|\le 1$이다. (참)
즉, 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

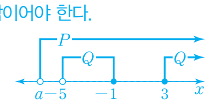
11

두 조건 p, q가

p: $x>a$, q: $-5<x\le -1$ 또는 $x\ge 3$

일 때, 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오. $a\le -5$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 그 대우 $q \longrightarrow p$가 참이어야 한다.
즉, $Q\subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서
$a\le -5$



12 학교 시험 기출

두 조건 p, q에 대하여 다음 중 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은?
(단, x, y는 실수이다.)

① p: $xy=0$　　q: $x=0$ 또는 $y=0$　필요충분조건
② p: $x+y=0$　　q: $x=0$이고 $y=0$　필요조건
✓③ p: $x>y>1$　　q: $(x-1)(y-1)>0$
④ p: $xy=|xy|$　　q: $x\ge 0$이고 $y\ge 0$　필요조건
⑤ p: $x<\frac{1}{x}$　　q: $0<x<1$　필요조건

③ 명제 $p \longrightarrow q$: (참)
명제 $q \longrightarrow p$: [반례] $x=-1$, $y=-1$
즉, $p \Longrightarrow q$이고 $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

13

세 조건 p, q, r에 대하여 두 명제 $p \longrightarrow r$, $q \longrightarrow \sim r$가 모두 참일 때, **보기**에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. ㄱ, ㄴ, ㄷ

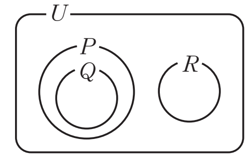
보기

ㄱ. r는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.
ㄴ. $\sim q$는 p이기 위한 필요조건이다.
ㄷ. $\sim p$는 q이기 위한 필요조건이다.

$p \Longrightarrow r$, $q \Longrightarrow \sim r$
$q \Longrightarrow \sim r$이므로 대우에 의하여 $r \Longrightarrow \sim q$
$p \Longrightarrow r$, $r \Longrightarrow \sim q$이므로 삼단논법에 의하여 $p \Longrightarrow \sim q$
$p \Longrightarrow \sim q$이므로 대우에 의하여 $q \Longrightarrow \sim p$

14

전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 할 때, 세 집합 사이의 포함 관계는 오른쪽 그림과 같다. 다음 중 항상 옳은 것은?



① p는 q이기 위한 충분조건이다.
② q는 r이기 위한 필요조건이다.
③ r는 p이기 위한 충분조건이다.
✓④ $\sim p$는 r이기 위한 필요조건이다.
⑤ $\sim q$는 r이기 위한 충분조건이다.

$Q\subset P$, $P\cap R=\varnothing$, $Q\cap R=\varnothing$
②, ⑤ $Q\cap R=\varnothing$에서 $Q\subset R^C$, $R\subset Q^C$
즉, $q \Longrightarrow \sim r$, $r \Longrightarrow \sim q$이므로 q는 $\sim r$이기 위한 충분조건이고, $\sim q$는 r이기 위한 필요조건이다.

15

세 조건 p: $x=3$, q: $(x-1)(x-a)=0$, r: $x^2+bx+c=0$에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건이고 r는 q이기 위한 필요충분조건일 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, $a\ne 1$이고, a, b, c는 상수이다.) 2

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면 $P\subset Q$이므로 $a=3$
또, $Q=R$
즉, $x^2+bx+c=x^2-4x+3$이므로 $b=-4$, $c=3$
$\therefore a+b+c=3+(-4)+3=2$

16 교육청 기출

실수 x에 대한 두 조건

p: $|x|\le n$, q: $x^2+2x-8\le 0$

에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은?

① 1　② 2　③ 3
✓④ 4　⑤ 5

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|-n\le x\le n\}$, $Q=\{x|-4\le x\le 2\}$
$Q\subset P$
$-n\le -4$, $2\le n \qquad \therefore n\ge 4$
따라서 자연수 n의 최솟값은 4이다.

01 대우를 이용한 증명법과 귀류법

1 정의와 정리

① 정의: 용어의 뜻을 명확하게 정한 문장

보기 네 각의 크기가 모두 같은 사각형을 직사각형이라 한다.

② 정리: 참인 것으로 증명된 명제 중에서 기본이 되는 것

보기 직사각형의 두 대각선의 길이가 같고 서로 다른 것을 이등분한다.

2 대우를 이용한 증명법

명제와 그 대우의 참, 거짓은 항상 일치하므로 어떤 명제가 참임을 증명할 때, 그 대우가 참임을 증명하는 방법

3 귀류법

어떤 명제가 참임을 증명할 때, 명제 또는 명제의 결론을 부정하여 가정이나 이미 알려진 사실에 모순이 생기는 것을 보임으로써 주어진 명제가 참임을 증명하는 방법

• **증명**
명제의 가정과 이미 알고 있는 성질들을 이용하여 어떤 명제가 참임을 밝히는 과정

풍쌤 Tip 어떤 명제가 참임을 직접 증명하기 어려울 때, 대우를 이용하거나 귀류법을 이용하여 증명한다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 095쪽

001

다음은 명제 '자연수 n에 대하여 n^2이 짝수이면 n도 짝수이다.'가 참임을 대우를 이용하여 증명한 것이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

| 증명 |

주어진 명제의 대우
'자연수 n에 대하여 n이 $\boxed{홀수}$이면 n^2도 $\boxed{홀수}$이다.'가 참임을 보이면 된다.
n이 홀수이면 $n=2k-\boxed{1}$ (k는 자연수)
로 나타낼 수 있으므로
$n^2=(2k-\boxed{1})^2=2(2k^2-\boxed{2k})+1$
즉, n^2도 홀수이다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

002

명제 '자연수 n에 대하여 n^2이 홀수이면 n도 홀수이다.'가 참임을 대우를 이용하여 증명하시오. 풀이 참조

주어진 명제의 대우 '자연수 n에 대하여 n이 짝수이면 n^2도 짝수이다.'가 참임을 보이면 된다.
n이 짝수이면 $n=2k$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로 $n^2=(2k)^2=4k^2=2\times 2k^2$
즉, n^2도 짝수이다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

003

다음은 명제 '$\sqrt{2}$는 무리수이다.'가 참임을 귀류법을 이용하여 증명한 것이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

| 증명 |

주어진 명제의 결론을 부정하여
$\sqrt{2}$가 $\boxed{유리수}$라고 가정하면
$\sqrt{2}=\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)
로 나타낼 수 있다. 양변을 제곱하여 정리하면
$\boxed{2}\times m^2=n^2$ …… ㉠
즉, n^2이 짝수이므로 n도 짝수이다.
$n=2k$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로
㉠에 대입하여 정리하면 $m^2=\boxed{2}\times k^2$
즉, m^2이 짝수이므로 m도 짝수이다.
따라서 m, n이 서로소인 자연수라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{2}$는 $\boxed{무리수}$이다.

004

명제 '$\sqrt{2}$가 무리수이면 $2+\sqrt{2}$도 무리수이다.'가 참임을 귀류법을 이용하여 증명하시오. 풀이 참조

주어진 명제의 결론을 부정하여 $2+\sqrt{2}$를 유리수라고 가정하면
$2+\sqrt{2}=m$ (m은 유리수)로 나타낼 수 있으므로 $\sqrt{2}=m-2$ …… ㉠
이때 $m-2=$(유리수)$-$(유리수)는 유리수이므로 ㉠에서 $\sqrt{2}$가 무리수라는 가정에 모순이다. 따라서 $\sqrt{2}$가 무리수이면 $2+\sqrt{2}$도 무리수이다.

02 절대부등식

❶ 절대부등식

문자를 포함한 부등식에서 문자에 어떤 실수를 대입하여도 항상 성립하는 부등식

보기 x가 실수일 때
① 부등식 $x^2+2>0$은 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로 절대부등식이다.
② 부등식 $x^2-1<0$은 $-1<x<1$일 때에만 성립하므로 절대부등식이 아니다.

• 절대부등식이 아닌 부등식을 '조건부등식'이라 한다.

❷ 부등식의 증명에 이용되는 실수의 성질

두 실수 a, b에 대하여
① $a>b \Longleftrightarrow a-b>0$
② $a^2\ge0$, $a^2+b^2\ge0$, $|a|\ge0$, $|a|+|b|\ge0$
③ $a^2+b^2=0 \Longleftrightarrow a=0,\ b=0$
④ $|a|\ge a$, $|a|^2=a^2$, $|ab|=|a||b|$
⑤ $a>0$, $b>0$일 때, $a>b \Longleftrightarrow a^2>b^2 \Longleftrightarrow \sqrt{a}>\sqrt{b}$
⑥ $a>0$, $b>0$일 때, $a+b>0$, $ab>0$
$a<0$, $b<0$일 때, $a+b<0$, $ab>0$

참고 등호가 포함된 부등식을 증명할 때는 특별한 말이 없더라도 등호가 성립할 조건을 찾는다.

풍쌤 Tip 부등식이 절대부등식임을 증명할 때는 그 부등식이 주어진 집합의 '모든' 원소에 대하여 '항상' 성립함을 보여야 한다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 095쪽

005

실수 x에 대하여 다음 중 절대부등식인 것은 ○를, 절대부등식이 아닌 것은 ×를 (　　) 안에 써넣으시오.

(1) $3x-5>0$ (×)

(2) $2-|x|\le2$ (○)

$2-|x|\le2$에서 $|x|\ge0$

(3) $|x+2|-1>0$ (×)

(4) $(x-3)^2\ge0$ (○)

(5) $(x+2)^2>2x$ (○)

$x^2+4x+4>2x$　　$\therefore x^2+2x+4>0$
이때 $x^2+2x+4=(x+1)^2+3$이므로 위의 부등식은 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하고, 절대부등식이다.

(6) $x^2+2x-3>0$ (×)

006

다음은 실수 a, b에 대하여 부등식 $(a+b)^2\ge ab$가 성립함을 증명한 것이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

증명

$(a+b)^2-ab=\left(a+\boxed{\frac{1}{2}b}\right)^2+\frac{3}{4}\times b^2$

이때 $\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2\ge0$, $\boxed{\frac{3}{4}}\times b^2\ge0$이므로

$(a+b)^2-ab\boxed{\ge}0$

$\therefore (a+b)^2\ge ab$

여기서 등호는 $a=b=\boxed{0}$일 때 성립한다.

007

실수 a, b에 대하여 부등식 $a^2+b^2+2\ge2a+2b$가 성립함을 증명하시오. 풀이 참조

$a^2+b^2+2-(2a+2b)=(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)=(a-1)^2+(b-1)^2$
이때 $(a-1)^2\ge0$, $(b-1)^2\ge0$이므로
$a^2+b^2+2\ge2a+2b$ (단, 등호는 $a=b=1$일 때 성립한다.)

03 여러 가지 절대부등식

1 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0,\ b>0$일 때,

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}\ (\text{단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립한다.})$$

2 코시-슈바르츠의 부등식

$a,\ b,\ x,\ y$가 실수일 때,

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \ge (ax+by)^2\ (\text{단, 등호는 } ay=bx\text{일 때 성립한다.})$$

• 두 양수 a, b에 대하여 $\frac{a+b}{2}$를 산술평균, $\sqrt{ab}$를 기하평균이라 한다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 095쪽

008

다음은 두 양수 a, b에 대하여 부등식 $a+b \ge 2\sqrt{ab}$가 성립함을 증명한 것이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

증명

$a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a})^2-2\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}+(\boxed{\sqrt{b}})^2$

$=(\sqrt{a}-\boxed{\sqrt{b}})^2 \ge 0$

$\therefore\ a+b \boxed{\ge} 2\sqrt{ab}$

여기서 등호는 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, 즉 $a=\boxed{b}$일 때 성립한다.

009

두 양수 a, b에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $a+\frac{4}{a}$의 최솟값 4

$a>0,\ \frac{4}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+\frac{4}{a} \ge \boxed{2}\sqrt{\boxed{a}\times\frac{4}{a}}=2\times\boxed{2}=4$

(단, 등호는 $a=2$일 때 성립한다.)

따라서 $a+\frac{4}{a}$의 최솟값은 4이다.

(2) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$의 최솟값 2

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}=2$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

(3) $a+b=10$일 때, ab의 최댓값 25

$a+b \ge 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

$10 \ge 2\sqrt{ab},\ \sqrt{ab} \le 5$ $\quad\therefore\ ab \le 25$

(4) $ab=9$일 때, $a+b$의 최솟값 6

$a+b \ge 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

$a+b \ge 2\sqrt{9}$ $\quad\therefore\ a+b \ge 6$

010

다음은 네 실수 a, b, x, y에 대하여 부등식 $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \ge (ax+by)^2$이 성립함을 증명한 것이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

증명

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=(a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2)$

$\quad -(a^2x^2+\boxed{2abxy}+b^2y^2)$

$=(\boxed{ay-bx})^2 \ge 0$

$\therefore\ (a^2+b^2)(x^2+y^2) \ge (ax+by)^2$

여기서 등호는 $\boxed{ay=bx}$일 때 성립한다.

011

두 실수 x, y에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $x^2+y^2=8$일 때, $x+y$의 최댓값 4

$x+y=1\times x+\boxed{1}\times y$이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)\times(x^2+y^2) \ge (1\times x+1\times y)^2$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립한다.)

즉, $2\times\boxed{8} \ge (x+y)^2$이므로

$(x+y)^2 \le \boxed{16}$ $\quad\therefore\ \boxed{-4} \le x+y \le \boxed{4}$

따라서 $x+y$의 최댓값은 4이다.

(2) $x^2+y^2=13$일 때, $3x+2y$의 최솟값 -13

$(3^2+2^2)\times(x^2+y^2) \ge (3\times x+2\times y)^2$ (단, 등호는 $2x=3y$일 때 성립한다.)

$\therefore\ -13 \le 3x+2y \le 13$

(3) $2x+y=5$일 때, x^2+y^2의 최솟값 5

$(2^2+1^2)\times(x^2+y^2) \ge (2\times x+1\times y)^2$ (단, 등호는 $x=2y$일 때 성립한다.)

$\therefore\ x^2+y^2 \ge 5$

유형 실전 문제

정답과 풀이 096쪽

유형 01 대우를 이용한 증명법 (중요)

명제 $p \longrightarrow q$가 참임을 직접 증명하기 어려울 때
➡ 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참임을 증명하면 된다.

풍쌤 Point 가정에서 결론의 방향으로 명제를 증명하기 어려울 때는 주저없이 대우를 이용한 증명법을 이용한다.

012

대우를 이용하여 명제 '자연수 n에 대하여 n^2이 3의 배수이면 n도 3의 배수이다.'가 참임을 증명하시오. 풀이 참조

주어진 명제의 대우 '자연수 n에 대하여 n이 3의 배수가 아니면 n^2도 3의 배수가 아니다.'가 참임을 보이면 된다.
n이 3의 배수가 아니면 $n=3k-1$ 또는 $n=3k-2$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있다.
(i) $n=3k-1$일 때, $n^2=3(3k^2-2k)+1$이므로 n^2은 3의 배수가 아니다.
(ii) $n=3k-2$일 때, $n^2=3(3k^2-4k+1)+1$이므로 n^2은 3의 배수가 아니다.
(i), (ii)에서 n^2은 3의 배수가 아니다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

013

대우를 이용하여 명제 '두 실수 x, y에 대하여 $x+y\geq 0$이면 $x\geq 0$ 또는 $y\geq 0$이다.'가 참임을 증명하시오. 풀이 참조

주어진 명제의 대우 '두 실수 x, y에 대하여 $x<0$이고 $y<0$이면 $x+y<0$이다.'가 참임을 보이면 된다.
두 실수가 모두 음수일 때, 이 두 수의 합도 음수이므로 $x<0$이고 $y<0$이면 $x+y<0$
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

014

다음은 명제 '두 자연수 a, b에 대하여 a^2+b^2이 짝수이면 $a+b$는 짝수이다.'가 참임을 대우를 이용하여 증명한 것이다. (가)~(마)에 알맞은 것으로 옳지 않은 것은?

증명

주어진 명제의 대우 '두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$가 $\boxed{(가)}$이면 a^2+b^2도 $\boxed{(가)}$이다.'가 참임을 보이면 된다.
(i) a가 홀수, b가 $\boxed{(나)}$일 때,
$a=2n-\boxed{(다)}$, $b=2m$ (n, m은 자연수)로 나타낼 수 있으므로
$a^2+b^2=\boxed{(라)}\times(2n^2+2m^2-2n)+1$
(ii) a가 $\boxed{(나)}$, b가 홀수일 때,
$a=2n$, $b=2m-\boxed{(다)}$ (n, m은 자연수)로 나타낼 수 있으므로
$a^2+b^2=2(2n^2+2m^2-\boxed{(마)})+1$
(i), (ii)에서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

① (가) 홀수 ② (나) 짝수 ✓③ (다) 2
④ (라) 2 ⑤ (마) $2m$

(다) 1

유형 02 귀류법 (중요)

명제가 참임을 직접 증명하기 어려울 때
➡ 명제의 결론을 부정하여 모순이 생김을 보인다.

풍쌤 Point 귀류법으로 명제 'p이면 q이다.'를 증명하는 핵심은 'q가 아니라면 p에 모순이다.'를 밝히는 것이다.

015

다음은 귀류법을 이용하여 실수 a, b에 대한 명제 '$a^2+b^2=0$이면 $a=0$이고 $b=0$이다.'가 참임을 증명한 것이다. (가)~(마)에 알맞은 것이 바르게 짝 지어진 것은?

증명

주어진 명제의 결론을 부정하여 '$a\neq 0$ $\boxed{(가)}$ $b\neq 0$'이라고 가정하자.
(i) $a\neq 0$이고 $\boxed{(나)}$일 때,
$a^2>0$, $b^2\geq 0$이므로 $a^2+b^2>\boxed{(다)}$
(ii) $\boxed{(라)}$이고 $b\neq 0$일 때,
$a^2\geq 0$, $b^2>0$이므로 $a^2+b^2>\boxed{(다)}$
(iii) $a\neq 0$이고 $b\neq 0$일 때,
$a^2>0$, $\boxed{(마)}$이므로 $a^2+b^2>\boxed{(다)}$
(i)~(iii)에서 $a^2+b^2=0$이라는 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다.

① (가) 그리고 ② (나) $b\neq 0$ ③ (다) 1
④ (라) $a\neq 0$ ✓⑤ (마) $b^2>0$

(가) 또는, (나) $b=0$, (다) 0, (라) $a=0$, (마) $b^2>0$

016

귀류법을 이용하여 실수 x, y에 대한 명제 '$xy\neq 0$이면 $x\neq 0$이고 $y\neq 0$이다.'가 참임을 증명하시오. 풀이 참조

주어진 명제의 결론을 부정하여 $x=0$ 또는 $y=0$이라고 가정하자.
(i) $x=0$이고 $y\neq 0$일 때, $xy=0$
(ii) $x\neq 0$이고 $y=0$일 때, $xy=0$
(iii) $x=0$이고 $y=0$일 때, $xy=0$
(i)~(iii)에서 $xy=0$이므로 $xy\neq 0$이라는 가정에 모순이다.
따라서 주어진 명제는 참이다.

017

귀류법을 이용하여 실수 x, y에 대한 명제 'x^2+y^2이 홀수이면 x, y 중 적어도 하나는 짝수이다.'가 참임을 증명하시오. 풀이 참조

주어진 명제의 결론을 부정하여 x, y가 모두 홀수라고 가정하자.
$x=2m-1$, $y=2n-1$ (m, n은 자연수)로 나타낼 수 있으므로
$x^2+y^2=(2m-1)^2+(2n-1)^2=4m^2-4m+1+4n^2-4n+1$
$=2(2m^2+2n^2-2m-2n+1)$
즉, x^2+y^2은 짝수이므로 x^2+y^2이 홀수라는 가정에 모순이다.
따라서 주어진 명제는 참이다.

유형 03 절대부등식의 증명

다양한 실수의 성질을 이용하여 증명한다.

➡ a, b가 실수일 때,

① $a>b \Longleftrightarrow a-b>0$ ② $a^2\ge0$, $a^2+b^2\ge0$

③ $a^2+b^2=0 \Longleftrightarrow a=0$, $b=0$ ④ $|a|^2=a^2$, $|ab|=|a||b|$

⑤ $a>0$, $b>0$일 때, $a>b \Longleftrightarrow a^2>b^2 \Longleftrightarrow \sqrt{a}>\sqrt{b}$

➡ 등호가 포함된 부등식일 때, 등호가 성립할 조건을 찾는다.

풍쌤 Point 완전제곱식으로 변형한 후, $(\text{실수})^2\ge0$을 이용하여 증명하는 경우가 많다. 또한, 근호나 절댓값 기호 등이 있으면 제곱한 식을 이용하여 증명한다.

018

다음은 실수 a, b, c에 대하여 부등식 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge0$이 성립함을 증명한 것이다. (가), (나), (다)에 알맞은 것을 구하시오. (가) $\frac{1}{2}$ (나) $b-c$ (다) c

증명

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\boxed{(가)}\times(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\times\{(a-b)^2+(\boxed{(나)})^2+(c-a)^2\}$

이때 $(a-b)^2\ge0$, $(b-c)^2\ge0$, $(c-a)^2\ge0$이므로

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge0$

여기서 등호는 $a=b=\boxed{(다)}$일 때 성립한다.

019

다음은 $x>y>0$일 때, 부등식 $\sqrt{x-y}>\sqrt{x}-\sqrt{y}$가 성립함을 증명한 것이다. (가), (나)에 알맞은 것을 구하시오.

(가) $2\sqrt{xy}$ (나) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$

증명

$x>y>0$에서 $\sqrt{x-y}>0$, $\sqrt{x}-\sqrt{y}>0$이므로

$(\sqrt{x-y})^2>(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$임을 보이면 된다. 이때

$(\sqrt{x-y})^2-(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=\boxed{(가)}-2y$

$=2\sqrt{y}(\boxed{(나)})>0$

따라서 $(\sqrt{x-y})^2>(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$이므로

$\sqrt{x-y}>\sqrt{x}-\sqrt{y}$

020

다음은 두 실수 x, y에 대하여 부등식

$|x|+|y|\ge|x+y|$

가 성립함을 증명한 것이다. (가)~(마)에 알맞은 것으로 옳지 않은 것은?

증명

$|x|+|y|>\boxed{(가)}$, $|x+y|>\boxed{(나)}$이므로

$(|x|+|y|)^2\ge|x+y|^2$임을 보이면 된다. 이때

$(|x|+|y|)^2-|x+y|^2=2(\boxed{(다)})$

이때 $|xy|-xy\ge\boxed{(라)}$이므로

$(|x|+|y|)^2-|x+y|^2=2(\boxed{(다)})\ge\boxed{(라)}$

따라서 $(|x|+|y|)^2\ge|x+y|^2$이므로

$|x|+|y|\ge|x+y|$

이고 등호는 $\boxed{(마)}\ge0$일 때 성립한다.

① (가) 0 ② (나) 0 ✓③ (다) xy

④ (라) 0 ⑤ (마) xy

(다) $|xy|-xy$

021

다음은 $x>y>0$일 때, 부등식 $\frac{x}{y+1}>\frac{y}{x+1}$가 성립함을 증명한 것이다. (가), (나)에 알맞은 식을 각각 A, B라 할 때, $A+B$를 구하시오. $2x$

증명

$\frac{x}{y+1}-\frac{y}{x+1}=\frac{(\boxed{(가)})(\boxed{(나)}+1)}{(x+1)(y+1)}$

이때 $x>y>0$이므로

$\boxed{(가)}>0$, $\boxed{(나)}+1>0$, $x+1>0$, $y+1>0$

따라서 $\frac{x}{y+1}-\frac{y}{x+1}>0$이므로 $\frac{x}{y+1}>\frac{y}{x+1}$

$A=x-y$, $B=x+y$이므로 $A+B=2x$

022

세 양수 a, b, c에 대하여 **보기**에서 절대부등식인 것만을 있는 대로 고르시오. ㄱ, ㄴ, ㄷ

보기

ㄱ. $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

ㄴ. $|a+b|>|a-b|$

ㄷ. $a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$

ㄷ. $a+b+c-(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})=\frac{1}{2}\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\}$

$\therefore a+b+c-(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})\ge0$

따라서 $a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$이고 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.

유형 04 산술평균과 기하평균의 관계 중요

$a>0$, $b>0$일 때,

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

풍쌤 Point 양수 조건과 함께 두 수의 합 또는 곱의 꼴이 등장하면 산술평균과 기하평균의 관계를 떠올린다.

023

두 양수 a, b에 대하여 $ab=12$일 때, $a+3b$의 최솟값은?

① 6 ② 12 ③ 24
④ 36 ⑤ 72

$a+3b \geq 2\sqrt{a \times 3b}=2\sqrt{3ab}$ (단, 등호는 $a=3b$일 때 성립한다.)
이때 $ab=12$이므로 위의 식에 대입하면
$a+3b \geq 2\sqrt{3 \times 12}=2 \times 6=12$
따라서 $a+3b$의 최솟값은 12이다.

024

$a>0$, $b>0$, $3a+2b=36$일 때, ab의 최댓값을 M, 그 때의 a, b의 값을 각각 A, B라 하자. $A+B+M$의 값을 구하시오. 69

$3a+2b \geq 2\sqrt{3a \times 2b}=2\sqrt{6ab}$ (단, 등호는 $3a=2b$일 때 성립한다.)
$36 \geq 2\sqrt{6ab}$ $\quad \therefore ab \leq 54$
한편, 등호는 $3a=2b$, 즉 $a=\frac{2}{3}b$일 때 성립하고 그때의 ab의 값이 54이므로
$ab=\frac{2}{3}b \times b=54$ $\quad \therefore b=9$ ($\because b>0$) $\quad \therefore a=\frac{2}{3}b=\frac{2}{3} \times 9=6$
따라서 $A=6$, $B=9$, $M=54$이므로 $A+B+M=69$

025

두 양수 x, y에 대하여 $(2x+3y)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)$의 최솟값은?

① 12 ② 18 ③ 24
④ 25 ⑤ 27

$(2x+3y)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)=4+6 \times \frac{y}{x}+6 \times \frac{x}{y}+9=13+6\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)$ …… ㉠
$\frac{y}{x}+\frac{x}{y} \geq 2\sqrt{\frac{y}{x} \times \frac{x}{y}}=2$ (단, 등호는 $\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$일 때 성립한다.)
따라서 ㉠에서 $(2x+3y)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)=13+6\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right) \geq 13+6 \times 2=25$
이므로 구하는 최솟값은 25이다.

026

$x>3$일 때, $x+\frac{4}{x-3}$의 최솟값을 m, 그 때의 x의 값을 a라 하자. $m+a$의 값을 구하시오. 12

$x>3$에서 $x-3>0$이므로
$x+\frac{4}{x-3}=x-3+\frac{4}{x-3}+3 \geq 2\sqrt{(x-3) \times \frac{4}{x-3}}+3=4+3=7$
이때 등호가 성립하는 경우는 $x-3=\frac{4}{x-3}$일 때이므로
$(x-3)^2=4$ $\quad \therefore x=5$ 또는 $x=1$
그런데 $x>3$이므로 $x=5$
따라서 $m=7$, $a=5$이므로 $m+a=12$

유형 05 코시-슈바르츠의 부등식

a, b, x, y가 실수일 때,

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

(단, 등호는 $ay=bx$일 때 성립한다.)

풍쌤 Point 실수 조건과 함께 제곱의 합의 값이 주어지면 코시-슈바르츠의 부등식을 떠올린다.

027

두 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=32$일 때, $x+y$의 최댓값은?

① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ 8
④ $8\sqrt{2}$ ⑤ 16

$(1^2+1^2)(x^2+y^2) \geq (1 \times x+1 \times y)^2$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립한다.)
즉, $2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$에서
$(x+y)^2 \leq 2 \times 32=64$ $\quad \therefore -8 \leq x+y \leq 8$
따라서 $x+y$의 최댓값은 8이다.

028

두 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=20$일 때, $2x+y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은?

① 4 ② 10 ③ 16
④ 20 ⑤ 32

$(2^2+1^2)(x^2+y^2) \geq (2 \times x+1 \times y)^2$ (단, 등호는 $x=2y$일 때 성립한다.)
즉, $5(x^2+y^2) \geq (2x+y)^2$에서
$(2x+y)^2 \leq 5 \times 20=100$ $\quad \therefore -10 \leq 2x+y \leq 10$
$\therefore M-m=10-(-10)=20$

029

두 실수 x, y에 대하여 $3x+4y=10$일 때, x^2+y^2의 최솟값은?

① 4 ② 10 ③ 20
④ 32 ⑤ 40

$(3^2+4^2)(x^2+y^2) \geq (3 \times x+4 \times y)^2$ (단, 등호는 $4x=3y$일 때 성립한다.)
즉, $25(x^2+y^2) \geq (3x+4y)^2$에서
$25(x^2+y^2) \geq 10^2$ $\quad \therefore x^2+y^2 \geq 4$
따라서 x^2+y^2의 최솟값은 4이다.

030

두 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=13$일 때, x^2+2x+y^2+3y의 최댓값을 구하시오. 26

$x^2+y^2=13$이므로
$x^2+2x+y^2+3y=2x+3y+13$
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(2^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (2 \times x+3 \times y)^2$ (단, 등호는 $3x=2y$일 때 성립한다.)
즉, $13(x^2+y^2) \geq (2x+3y)^2$에서 $(2x+3y)^2 \leq 13 \times 13$ $\quad \therefore -13 \leq 2x+3y \leq 13$
$\therefore 0 \leq 2x+3y+13 \leq 26$
따라서 구하는 최댓값은 26이다.

중단원 점검 문제

01

다음은 명제 '실수 x에 대하여 x^2이 무리수이면 x는 무리수이다.'가 참임을 증명한 것이다. (가)~(라)에 알맞은 것 중 나머지 셋과 다른 하나를 구하시오. (다)

증명

주어진 명제의 대우 '실수 x에 대하여 x가 $\boxed{(가)}$이면 x^2이 $\boxed{(나)}$이다.'가 참임을 보이면 된다.

x가 $\boxed{(가)}$이면 서로소인 두 자연수 a, b에 대하여

$x=\pm\frac{a}{b}$로 나타낼 수 있으므로 $x^2=\frac{a^2}{b^2}$

이때 두 자연수 a, b가 서로소이면 a^2, b^2도 $\boxed{(다)}$이므로 $x^2=\frac{a^2}{b^2}$도 $\boxed{(라)}$이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

(가), (나), (라) 유리수, (다) 서로소

02

귀류법을 이용하여 자연수 x, y에 대한 명제 'x, y가 서로소이면 x, y 중 적어도 하나는 홀수이다.'가 참임을 증명하시오. 풀이 참조

주어진 명제의 결론을 부정하여 x, y가 모두 짝수라고 가정하면
$x=2m$, $y=2n$ (m, n은 자연수)으로 나타낼 수 있다.
이때 x, y는 모두 2를 약수로 가지므로 x, y가 서로소라는 가정에 모순이다.
따라서 주어진 명제는 참이다.

03 학교 시험 기출

다음은 실수 x, y에 대하여 부등식 $|x-y|\ge|x|-|y|$가 성립함을 증명한 것이다. (가), (나)에 알맞은 것을 구하시오. (가) $|xy|-xy$, (나) xy

증명

(i) $|x|\ge|y|$일 때,

$|x-y|^2-(|x|-|y|)^2=2(\boxed{(가)})\ge0$이므로

$|x-y|\ge|x|-|y|$

(ii) $|x|<|y|$일 때,

$|x-y|\ge0$, $|x|-|y|<0$이므로

$|x-y|\ge|x|-|y|$

(i), (ii)에서 $|x-y|\ge|x|-|y|$

이때 등호는 $|x|\ge|y|$이고 $|xy|=\boxed{(나)}$일 때, 즉 $|x|\ge|y|$이고 $xy\ge0$일 때 성립한다.

04

두 실수 a, b에 대하여 **보기**에서 절대부등식인 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $a^2+b^2\ge ab$
ㄴ. $\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (단, $a>b$)
ㄷ. $|a|+|b|\ge|a-b|$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄷ. $(|a|+|b|)^2-|a-b|^2=2(|ab|+ab)\ge0$ ($\because$ $|ab|\ge-ab$)
즉, $(|a|+|b|)^2\ge|a-b|^2$에서
$|a|+|b|\ge|a-b|$이고 등호는 $ab\le0$일 때 성립한다.

05 실전 Plus

두 양수 x, y에 대하여 $3x+y=30$일 때, $\frac{1}{3x}+\frac{1}{y}$의 최솟값은?

✓① $\frac{2}{15}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{2}{5}$
④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

$\frac{1}{3x}+\frac{1}{y}=\frac{3x+y}{3xy}=\frac{30}{3xy}=\frac{10}{xy}$ …… ㉠
$x>0$, $y>0$이므로 $3x+y\ge2\sqrt{3xy}$ (단, 등호는 $3x=y$일 때 성립한다.)
$2\sqrt{3xy}\le30$, $\sqrt{3xy}\le15$, $3xy\le225$ 즉, $xy\le75$이므로 $\frac{1}{xy}\ge\frac{1}{75}$
따라서 ㉠에서 $\frac{1}{3x}+\frac{1}{y}=\frac{10}{xy}\ge\frac{10}{75}=\frac{2}{15}$이므로 구하는 최솟값은 $\frac{2}{15}$이다.

06 교육청 기출

두 양의 실수 a, b에 대하여 두 일차함수

$$f(x)=\frac{a}{2}x-\frac{1}{2},\ g(x)=\frac{1}{b}x+1$$

이 있다. 직선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 서로 평행할 때, $(a+1)(b+2)$의 최솟값을 구하시오. 8

$(a+1)(b+2)=ab+2a+b+2$ …… ㉠
두 직선이 서로 평행하므로 $\frac{a}{2}=\frac{1}{b}$ $\therefore$ $ab=2$ …… ㉡
$a>0$, $b>0$이므로
$2a+b\ge2\sqrt{2ab}=2\sqrt{2\times2}=4$ (단, 등호는 $2a=b$일 때 성립한다.) …… ㉢
㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 $(a+1)(b+2)\ge2+4+2=8$이므로 구하는 최솟값은 8이다.

07

두 실수 x, y에 대하여 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=\frac{5}{2}$일 때, x^2+y^2의 최솟값을 구하시오. 20

$\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}(x^2+y^2)\ge\left(\frac{1}{4}\times x+\frac{1}{2}\times y\right)^2$ (단, 등호는 $2x=y$일 때 성립한다.)
즉, $\frac{5}{16}(x^2+y^2)\ge\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{2}\right)^2$에서
$\frac{5}{16}(x^2+y^2)\ge\left(\frac{5}{2}\right)^2$ $\therefore$ $x^2+y^2\ge\frac{25}{4}\times\frac{16}{5}=20$
따라서 x^2+y^2의 최솟값은 20이다.

Ⅲ

함수와 그래프

알아도 다시 배워라.

고등학교에서는 중학교에서 배운 함수와 그래프를 다시 정의한다. 두 값 사이의 관계인 함수가 두 집합의 원소 사이의 관계가 되고, 두 값의 순서쌍을 좌표로 나타낸 그래프가 이 순서쌍을 모은 집합이 된다. 그렇다고 이전에 배운 의미가 사라지는 것은 아니다. 집합으로 더 폭넓은 개념이 된 것이다. 이제 함수의 식만 보는 게 아니라 어떤 값을 대입할지도 따져야 한다. 개념을 확장하고, 새롭게 보는 시각. 이 시각을 틔우는 것이 이 단원의 목표다.

01 함수

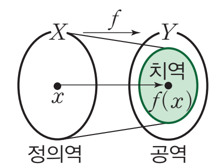
본문 140~164쪽

- 유형 ① 함수의 정의와 함수의 그래프
- 유형 ② 함숫값
- 유형 ③ 함수의 정의역, 공역, 치역
- 유형 ④ 서로 같은 함수
- 유형 ⑤ 일대일함수
- 유형 ⑥ 일대일대응
- 유형 ⑦ 항등함수와 상수함수
- 유형 ⑧ 함수의 개수
- 유형 ⑨ 합성함수의 함숫값
- 유형 ⑩ 합성함수의 성질
- 유형 ⑪ 조건을 만족시키는 함수 구하기
- 유형 ⑫ 합성함수의 추정
- 유형 ⑬ 그래프에서 합성함수의 함숫값 구하기
- 유형 ⑭ 역함수의 함숫값
- 유형 ⑮ 역함수가 존재할 조건
- 유형 ⑯ 역함수 구하기
- 유형 ⑰ 합성함수와 역함수
- 유형 ⑱ 역함수의 성질
- 유형 ⑲ 그래프를 이용하여 역함수의 함숫값 구하기
- 유형 ⑳ 역함수의 그래프의 성질

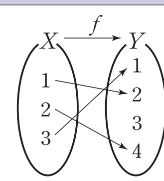
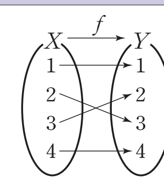
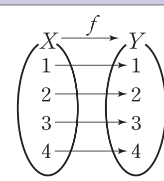
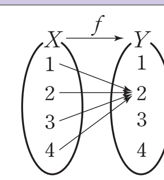
함수

공집합이 아닌 두 집합 X, Y에 대하여 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응할 때, 이 대응을 X에서 Y로의 함수라 한다.

➡ $f: X \longrightarrow Y$



여러 가지 함수

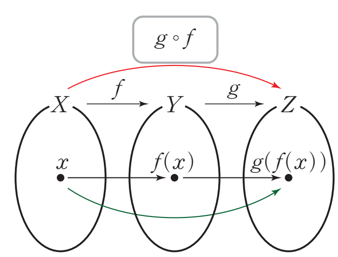
일대일함수	일대일대응
	
$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인 함수	일대일함수이고, 치역과 공역이 같은 함수
항등함수	**상수함수**
	
$f(x)=x$인 함수	$f(x)=c$ (c는 상수, $c \in Y$)인 함수

합성함수

두 함수 $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$에 대하여 집합 X의 각 원소 x에 집합 Z의 원소 $g(f(x))$를 대응시키는 함수를 f와 g의 합성함수라 한다.

➡ $g \circ f: X \longrightarrow Z$

➡ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

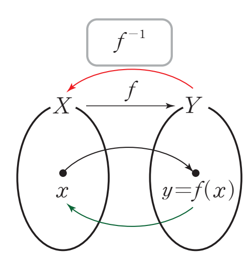


역함수

함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일 대응일 때, 집합 Y의 각 원소 y에 대하여 $f(x)=y$인 집합 X의 원소 x를 대응시키는 함수를 f의 역함수라 한다.

➡ $f^{-1}: Y \longrightarrow X$

➡ $x = f^{-1}(y)$



02 유리함수

본문 165~182쪽

유형 ❶ 유리식의 사칙연산
유형 ❷ 유리식과 항등식
유형 ❸ (분자의 차수) $\geq$ (분모의 차수)인 유리식
유형 ❹ 분모가 두 인수의 곱인 유리식
유형 ❺ 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프
유형 ❻ 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프
유형 ❼ 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프
유형 ❽ 유리함수의 그래프의 평행이동
유형 ❾ 유리함수의 그래프의 점근선
유형 ❿ 유리함수의 그래프의 대칭성
유형 ⓫ 그래프를 이용하여 유리함수의 식 구하기
유형 ⓬ 유리함수의 최대·최소
유형 ⓭ 유리함수의 역함수

유리식

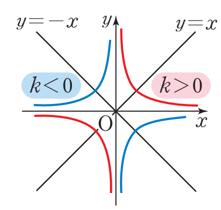
두 다항식 A, B $(B\neq0)$에 대하여 $\dfrac{A}{B}$ 꼴로 나타낸 식을 유리식이라 한다.

유리함수

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 유리식일 때, 이 함수를 유리함수라 한다.

유리함수의 그래프

유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq0)$의 그래프



① 정의역과 치역은 모두 0을 제외한 실수 전체의 집합이다.
② $k>0$이면 그래프는 제1사분면과 제3사분면에 있고, $k<0$이면 그래프는 제2사분면과 제4사분면에 있다.
③ 원점 및 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 대칭이다.
④ 점근선은 x축과 y축이다.

03 무리함수

본문 183~200쪽

유형 ❶ 무리식의 값이 실수가 되기 위한 조건
유형 ❷ 무리식의 계산
유형 ❸ 무리함수 $y=\pm\sqrt{ax}$ 의 그래프
유형 ❹ 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프
유형 ❺ 무리함수의 그래프의 평행이동
유형 ❻ 무리함수의 그래프의 대칭이동
유형 ❼ 그래프를 이용하여 무리함수의 식 구하기
유형 ❽ 무리함수의 최대·최소
유형 ❾ 무리함수의 역함수

무리식

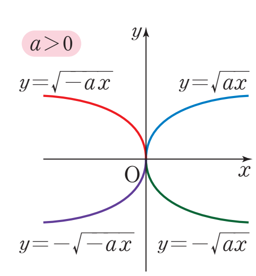
근호 안에 문자가 포함되어 있는 식 중에서 유리식으로 나타낼 수 없는 식을 무리식이라 한다.

무리함수

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 무리식일 때, 이 함수를 무리함수라 한다.

무리함수의 그래프

(1) 무리함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a\neq0)$의 그래프



① $a>0$일 때, 정의역은 $\{x\,|\,x\geq0\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\geq0\}$이다.
② $a<0$일 때, 정의역은 $\{x\,|\,x\leq0\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\geq0\}$이다.

(2) 무리함수 $y=-\sqrt{ax}$ $(a\neq0)$의 그래프
① $a>0$일 때, 정의역은 $\{x\,|\,x\geq0\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\leq0\}$이다.
② $a<0$일 때, 정의역은 $\{x\,|\,x\leq0\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\leq0\}$이다.

01 함수의 정의

1 대응

공집합이 아닌 두 집합 X, Y에 대하여 X의 원소에 Y의 원소를 짝 지어 주는 것을 X에서 Y로의 대응이라 한다. 이때 X의 원소 x에 Y의 원소 y가 짝 지어지면 x에 y가 대응한다고 하며, 기호 $x \longrightarrow y$로 나타낸다.

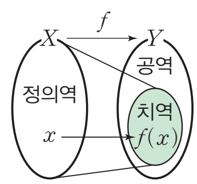
2 함수

공집합이 아닌 두 집합 X, Y에 대하여 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응할 때, 이 대응을 X에서 Y로의 함수라 한다. 이 함수를 f라 할 때, 기호 $f: X \longrightarrow Y$로 나타낸다.

① 정의역: 집합 X

② 공역: 집합 Y

③ 치역: 함숫값 전체의 집합, 즉 $\{f(x) \mid x \in X\}$



풍쌤 Tip 집합 X의 원소 중에서 대응하지 않고 남아 있는 원소가 있거나, 집합 X의 한 원소에 집합 Y의 원소가 두 개 이상 대응하는 경우는 함수가 아니다.

- 함수 $y=f(x)$의 정의역이나 공역이 주어지지 않을 때

① 정의역: 함수 $f(x)$가 정의되는 모든 실수 x의 집합

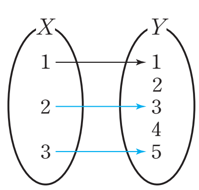
② 공역: 실수 전체의 집합

개념 기본 문제

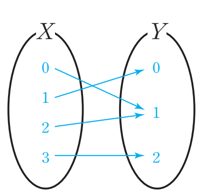
001

두 집합 X, Y에 대하여 X의 원소 x에 Y의 원소 y가 다음 관계에 의하여 대응할 때, 이 대응을 그림으로 나타내시오.

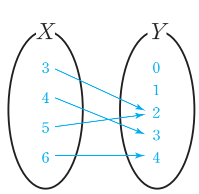
(1) $X=\{1, 2, 3\}$
$Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
$y=2x-1$



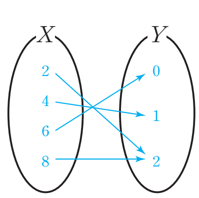
(2) $X=\{0, 1, 2, 3\}$
$Y=\{0, 1, 2\}$
$y=|x-1|$



(3) $X=\{3, 4, 5, 6\}$
$Y=\{0, 1, 2, 3, 4\}$
$y=(x$의 양의 약수의 개수$)$



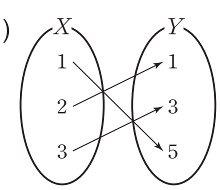
(4) $X=\{2, 4, 6, 8\}$
$Y=\{0, 1, 2\}$
$y=(x$를 3으로 나누었을 때의 나머지$)$



002

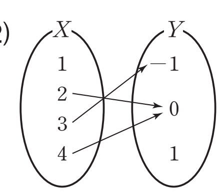
다음 대응 중 집합 X에서 집합 Y로의 함수인 것은 ○를, 함수가 아닌 것은 ×를 ( ) 안에 써넣으시오.

(1)



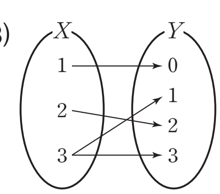
(○)

(2)



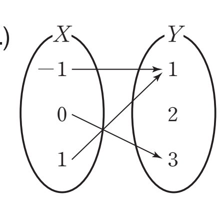
(×)

(3)



(×)

(4)



(○)

003

다음은 두 집합 $X=\{1, 3, 5\}$, $Y=\{2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 X의 원소 x에 Y의 원소 y가 $y=x+1$의 관계로 대응할 때, 이 대응이 함수인지 확인하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

> $y=x+1$
> ➡ $x=1$일 때 $y=2$, $x=3$일 때 $y=\boxed{4}$,
> $x=5$일 때 $y=\boxed{6}$
> ➡ X의 각 원소에 Y의 원소가 $\boxed{\text{하나}}$씩 대응하므로
> $\boxed{\text{함수이다.}}$

004

두 집합 $X=\{-1, 0, 1\}$, $Y=\{0, 1, 2, 3\}$에 대하여 다음 중 X에서 Y로의 함수인 것은 ○를, 함수가 아닌 것은 ×를 (　　) 안에 써넣으시오.

(1) $y=x^2+2$ (○)

(2) $y=|x-3|$ (×)

X의 원소 -1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

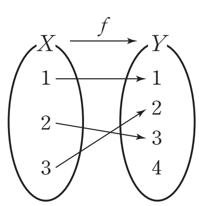
(3) $y=x^3+3x$ (×)

X의 원소 -1, 1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

005

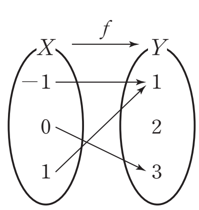
다음 함수 $f : X \longrightarrow Y$의 정의역, 공역, 치역을 구하시오.

(1)



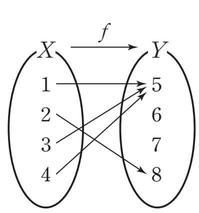
정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{1, 2, 3, 4\}$, 치역: $\{1, 2, 3\}$

(2)



정의역: $\{-1, 0, 1\}$, 공역: $\{1, 2, 3\}$, 치역: $\{1, 3\}$

(3)



정의역: $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역: $\{5, 6, 7, 8\}$, 치역: $\{5, 8\}$

006

다음 함수의 정의역이 $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역이 실수 전체의 집합일 때, 치역을 구하시오.

(1) $y=3x-2$ $\{1, 4, 7, 10\}$

(2) $y=(x-1)^2+4$ $\{4, 5, 8, 13\}$

(3) $y=|x+1|-x$ $\{1\}$

(4) $y=x^3+3x^2-2$ $\{2, 18, 52, 110\}$

007

다음 함수의 정의역과 치역을 구하시오.

(1) $y=-\frac{1}{2}x+5$ 정의역: $\{x|x$는 실수$\}$, 치역: $\{y|y$는 실수$\}$

(2) $y=x^2-2$ 정의역: $\{x|x$는 실수$\}$, 치역: $\{y|y\geq-2\}$

(3) $y=|x-2|+1$ 정의역: $\{x|x$는 실수$\}$, 치역: $\{y|y\geq1\}$

(4) $y=\frac{1}{x}$ 정의역: $\{x|x\neq0$인 실수$\}$, 치역: $\{y|y\neq0$인 실수$\}$

008

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$를 정의역으로 하는 함수 f에 대하여 $f(x)$가 다음과 같을 때, $f(2)$, $f(5)$의 값을 구하시오.

(1) $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x\geq3) \\ x^2+1 & (x<3) \end{cases}$ $f(2)=5$, $f(5)=11$

(2) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+3 & (x\text{는 짝수}) \\ x-3 & (x\text{는 홀수}) \end{cases}$ $f(2)=4$, $f(5)=2$

02 서로 같은 함수

1 서로 같은 함수

두 함수 f, g에 대하여 정의역과 공역이 각각 같고, 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$일 때, 두 함수 f와 g는 서로 같다고 하며, 기호 $f=g$로 나타낸다.

참고 서로 같은 함수는 두 함수의 함수식이 같다는 뜻이 아니라, 정의역의 모든 원소 x에 대하여 두 함수의 함숫값이 같다는 뜻이다.

• 두 함수 f, g가 서로 같지 않을 때, 기호 $f \neq g$로 나타낸다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 102쪽

009

다음은 집합 $X=\{-1, 0, 1\}$을 정의역으로 하는 두 함수 f, g가 서로 같은 함수인지 알아보는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $f(x)=x$, $g(x)=x^3$

➡ $f(-1)=g(\boxed{-1})=-1$, $f(0)=g(\boxed{0})=0$,

$f(1)=g(\boxed{1})=1$

➡ $f \boxed{=} g$

(2) $f(x)=x+1$, $g(x)=x^2+1$

➡ $f(-1)=\boxed{0}$, $f(0)=1$, $f(1)=2$

$g(-1)=\boxed{2}$, $g(0)=1$, $g(1)=2$

➡ $f \boxed{\neq} g$

010

집합 $X=\{-1, 1\}$을 정의역으로 하는 다음 두 함수 f, g가 서로 같은 함수인지 알아보시오.

(1) $f(x)=\dfrac{x+1}{2}$, $g(x)=2x+1$ 서로 같은 함수가 아니다.

$f(-1)=0$, $f(1)=1$

$g(-1)=-1$, $g(1)=3$

$\therefore f(-1)\neq g(-1)$, $f(1)\neq g(1)$

(2) $f(x)=|x|+1$, $g(x)=x^2+1$ 서로 같은 함수이다.

(3) $f(x)=2x+3$, $g(x)=x^2+2x+2$ 서로 같은 함수이다.

011

다음 두 함수 f, g가 서로 같은 함수인지 알아보시오.

(1) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$ 서로 같은 함수가 아니다.

f의 치역은 실수 전체의 집합이고, $g(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$이므로

g의 치역은 $\{y\,|\,y\geq 0\}$이다.

따라서 두 함수 f, g의 치역이 같지 않으므로 두 함수는 서로 같은 함수가 아니다.

(2) $f(x)=|x+1|$, $g(x)=\sqrt{(x+1)^2}$ 서로 같은 함수이다.

$g(x)=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|=f(x)$

(3) $f(x)=x+1$, $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 서로 같은 함수가 아니다.

$f(x)=x+1$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 1$인 실수$\}$이다. 따라서 두 함수 f, g의 정의역이 같지 않으므로 두 함수는 서로 같은 함수가 아니다.

(4) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 서로 같은 함수가 아니다.

$f(x)=\dfrac{1}{x+1}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq -1$인 실수$\}$이고, $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq -1, x\neq 1$인 실수$\}$이다. 따라서 두 함수 f, g의 정의역이 같지 않으므로 두 함수는 서로 같은 함수가 아니다.

012

집합 $X=\{1, 2\}$를 정의역으로 하는 두 함수

$f(x)=x^2+2$, $g(x)=ax+b$

에 대하여 $f=g$일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오. $a=3$, $b=0$

단계1. $f(1)$, $f(2)$, $g(1)$, $g(2)$의 값 구하기

$f(1)=1^2+2=3$, $f(2)=2^2+2=6$ …… ㉠

$g(1)=a+b$, $g(2)=2a+b$ …… ㉡

단계2. $f=g$가 되도록 하는 두 식 구하기

$f(1)=g(1)$, $f(2)=g(2)$이어야 하므로 ㉠, ㉡에서

$a+b=3$, $2a+b=6$

단계3. 상수 a, b의 값 구하기

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=0$

03 함수의 그래프

1 함수의 그래프

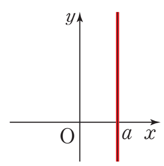
함수 $f : X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x와 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$의 순서쌍 $(x,\ f(x))$ 전체의 집합

$$\{(x,\ f(x))\,|\,x \in X\}$$

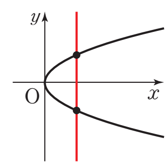
를 함수 f의 그래프라 한다.

참고 함수의 그래프는 정의역의 각 원소 a에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만난다.

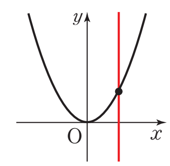
풍쌤 Tip 함수의 그래프인지 판단할 때는 y축에 평행한 직선을 그어 그래프와의 교점의 개수를 확인한다.



x의 값 a에 대응하는 y의 값이 무수히 많으므로 함수의 그래프가 아니다.
→ 교점이 무수히 많다.



어떤 x의 값에 대응하는 y의 값이 두 개이므로 함수의 그래프가 아니다.
→ 교점이 2개이다.



x의 값에 대응하는 y의 값이 오직 하나씩이므로 함수의 그래프이다.
→ 교점이 1개이다.

- 함수의 그래프를 좌표평면에 나타내면
① 정의역이 유한집합일 때, 정의역의 개수만큼의 점으로 나타난다.
② 정의역이 실수 전체의 집합일 때, 직선 또는 곡선 등 연결된 선으로 나타난다.

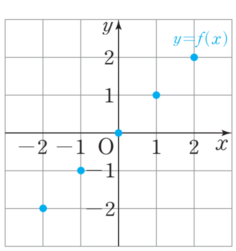
개념 기본 문제

정답과 풀이 103쪽

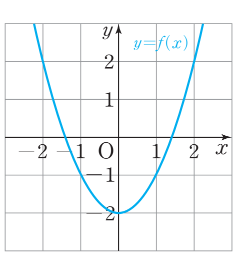
013

집합 X를 정의역으로 하는 함수 $y=f(x)$가 다음과 같을 때, 이 함수의 그래프를 좌표평면 위에 나타내시오.

(1) $X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$, $f(x)=x$



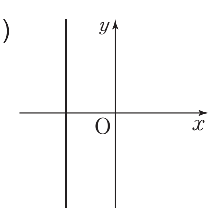
(2) $X=\{x\,|\,x\text{는 실수}\}$, $f(x)=x^2-2$



014

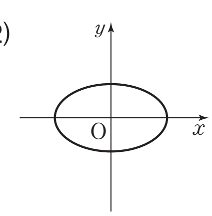
다음 중 함수의 그래프인 것은 ○를, 함수의 그래프가 아닌 것은 ×를 (　　) 안에 써넣으시오.

(1)



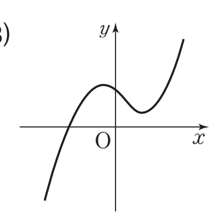
(×)

(2)



(×)

(3)



(○)

유형 실전 문제

유형 01 함수의 정의와 함수의 그래프

중요

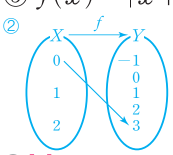
① 집합 X에서 집합 Y로의 대응 중에서 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하는 경우가 함수이다.
② 함수 f의 그래프 $\{(x,\ f(x))\,|\,x\in X\}$를 좌표평면에 나타내면 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만난다.

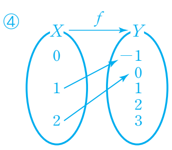
풍쌤 Point 정의역 X의 모든 원소는 딱 하나의 짝이 있어야 한다. 따라서 y축에 평행한 직선을 그었을 때 오직 한 점에서만 만나는 것이 바로 함수의 그래프이다.

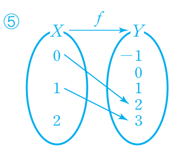
015

두 집합 $X=\{0,\ 1,\ 2\}$, $Y=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 다음 중 X에서 Y로의 함수인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

√① $f(x)=x+1$　② $f(x)=2x+3$
√③ $f(x)=x^2-1$　④ $f(x)=|x|-2$
⑤ $f(x)=|x+2|$

②


④


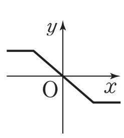
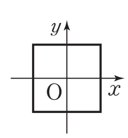
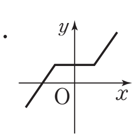
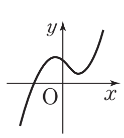
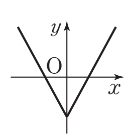
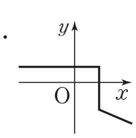
⑤


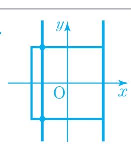
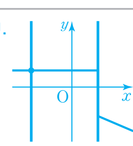
016

보기에서 함수의 그래프인 것만을 있는 대로 고르시오.

ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

보기

ㄱ.

ㄴ.

ㄷ.

ㄹ.

ㅁ.

ㅂ.


ㄴ.

ㅂ.


017

두 집합 $X=\{x\,|\,-1\le x\le 1\}$, $Y=\{y\,|\,1\le y\le 5\}$에 대하여 다음 중 X에서 Y로의 함수인 것은?

① $f(x)=-x-3$　② $f(x)=-2x+1$
③ $f(x)=x+1$　④ $f(x)=x^2-1$
√⑤ $f(x)=|x|+2$

① $-4\le f(x)\le -2$　② $-1\le f(x)\le 3$　③ $0\le f(x)\le 2$
④ $-1\le f(x)\le 0$　⑤ $2\le f(x)\le 3$

유형 02 함숫값

① 함수 $f(x)$에서 $f(k)$의 값
➡ x 대신 k를 대입한다.
② 함수 $f(ax+b)$에서 $f(k)$의 값
➡ $ax+b=k$를 만족시키는 x의 값을 구해 대입한다.

풍쌤 Point 함수의 식에 x의 값을 대입하여 계산한 것이 함숫값이다. 이때 조건을 만족시키는 x의 값을 찾는 것이 관건이다.

018

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가

$$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & (x\ge 0) \\ |x-4|+3 & (x<0) \end{cases}$$

일 때, $f(-2)+f(5)$의 값을 구하시오. 23

$f(-2)=|-2-4|+3=9$
$f(5)=3\times5-1=14$
$\therefore f(-2)+f(5)=9+14=23$

019

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가

$$f\left(\frac{x+1}{3}\right)=x^2-1$$

일 때, $f(-1)$의 값은?

① 0　② 3　③ 8
④ 11　√⑤ 15

$\frac{x+1}{3}=-1$에서 $x+1=-3$　$\therefore x=-4$
즉, $f\left(\frac{x+1}{3}\right)=x^2-1$의 양변에 $x=-4$를 대입하면
$f(-1)=(-4)^2-1=15$

020

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 집합 $Y=\{0,\ 1,\ 2\}$로의 함수 f가

$f(x)=(x^2+1$을 3으로 나누었을 때의 나머지$)$

이다. $f(2)=a$, $f(b)=1$일 때, $a+b$의 값은?

① 2　② 3　③ 4
√④ 5　⑤ 6

$x=1$일 때, $f(1)=(2$를 3으로 나누었을 때의 나머지$)=2$
$x=2$일 때, $f(2)=(5$를 3으로 나누었을 때의 나머지$)=2$
$x=3$일 때, $f(3)=(10$을 3으로 나누었을 때의 나머지$)=1$
$x=4$일 때, $f(4)=(17$을 3으로 나누었을 때의 나머지$)=2$
$\therefore a+b=2+3=5$

유형 03 함수의 정의역, 공역, 치역

함수 $f: X \longrightarrow Y$에서

정의역	공역	치역
집합 X	집합 Y	$\{f(x) \mid x \in X\}$

풍쌤 Point 치역을 구하기 위해서는 정의역의 모든 원소에 대한 함숫값을 구해 집합으로 나타낸다.

021

정의역이 $\{x \mid 2 \le x \le 5\}$, 공역이 실수 전체인 함수 $y=2x-3$의 치역은?

① $\{y \mid -1 \le x \le 5\}$　② $\{y \mid 1 \le x \le 5\}$
√③ $\{y \mid 1 \le x \le 7\}$　④ $\{y \mid 3 \le x \le 7\}$
⑤ $\{y \mid 3 \le x \le 9\}$

$2 \le x \le 5$에서 $4 \le 2x \le 10$, $1 \le 2x-3 \le 7$
$\therefore 1 \le y \le 7$

022

집합 $X=\{1, 2, 3\}$에서 실수 전체의 집합 R로의 함수 $f(x)=-2x+a$의 치역의 모든 원소의 합이 3일 때, 상수 a의 값을 구하시오. 5

$f(1)=a-2$, $f(2)=a-4$, $f(3)=a-6$
이때 치역 $\{a-2, a-4, a-6\}$의 모든 원소의 합이 3이므로
$a-2+a-4+a-6=3$
$3a=15$　$\therefore a=5$

023

두 집합 $X=\{x \mid -2 \le x \le 4\}$, $Y=\{y \mid 2 \le y \le 5\}$를 각각 정의역, 치역으로 하는 일차함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 $10a+b$의 값은? (단, $a>0$이고, a, b는 상수이다.)

① 6　② 7　√③ 8
④ 9　⑤ 10

$f(-2)=2$, $f(4)=5$가 되어야 하므로
$-2a+b=2$, $4a+b=5$
두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=3$
$\therefore 10a+b=10 \times \frac{1}{2}+3=8$

유형 04 서로 같은 함수 중요

두 함수 f, g에 대하여 $f=g$이려면 다음 두 조건을 모두 만족시켜야 한다.
① 정의역과 공역이 각각 같다.
② 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$이다.

풍쌤 Point 함수의 식만 보고 판단하지 않도록 주의한다. 함수의 식이 달라도 서로 같은 함수일 때가 있으므로 정의역의 각 원소마다 함숫값을 구하여 각각 같은지 조사한다.

024

정의역이 $X=\{-1, 0, 1\}$이고 공역이 실수 전체의 집합인 두 함수 f, g가 **보기**와 같을 때, $f=g$인 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. $f(x)=x$, $g(x)=-x$
ㄴ. $f(x)=x+3$, $g(x)=x^3+3$
ㄷ. $f(x)=x^2$, $g(x)=|x|$

① ㄴ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
√④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$
$g(-1)=1$, $g(0)=0$, $g(1)=-1$
즉, $f(-1) \ne g(-1)$, $f(0)=g(0)$, $f(1) \ne g(1)$이므로
$f \ne g$

025

정의역이 $X=\{1, 3\}$인 두 함수

$$f(x)=ax+1, \ g(x)=x^2+x+b$$

가 서로 같을 때, $a+b$의 값을 구하시오. 9
(단, a, b는 상수이다.)

$f(1)=g(1)$에서 $a+1=1+1+b$　$\therefore a-b=1$　…… ㉠
$f(3)=g(3)$에서 $3a+1=9+3+b$　$\therefore 3a-b=11$　…… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=4$　$\therefore a+b=5+4=9$

026

정의역이 $X=\{0, 1, 2\}$인 두 함수 $f(x)=|x-1|+2$, $g(x)$에 대하여 $f=g$일 때, 다음 중 $g(x)$가 될 수 있는 것은?

① $g(x)=x+1$　② $g(x)=x+3$
③ $g(x)=x^2-1$　√④ $g(x)=x^2-2x+3$
⑤ $g(x)=|x-2|+1$

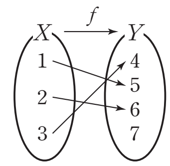
① $f(0) \ne g(0)$이므로 $f \ne g$
② $f(1) \ne g(1)$, $f(2) \ne g(2)$이므로 $f \ne g$
③ $f(0) \ne g(0)$, $f(1) \ne g(1)$이므로 $f \ne g$
④ $f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)$, $f(2)=g(2)$이므로 $f=g$
⑤ $f(2) \ne g(2)$이므로 $f \ne g$

04 여러 가지 함수

❶ 일대일함수

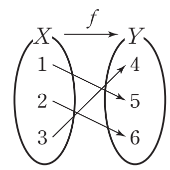
함수 $f:X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인 함수

참고 '$f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$'를 만족시키는 함수도 일대일함수이다.



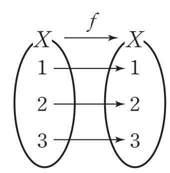
❷ 일대일대응

함수 $f:X \longrightarrow Y$가 일대일함수이고, 치역과 공역이 같은 함수



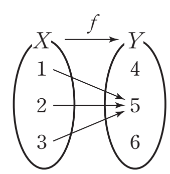
❸ 항등함수 → 항등함수는 일대일대응이다.

함수 $f:X \longrightarrow X$에서 정의역 X의 각 원소 x에 그 자신 x가 대응하는 함수, 즉 $f(x)=x$인 함수



❹ 상수함수 → 치역의 원소의 개수는 1이다.

함수 $f:X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 모든 원소 x에 공역 Y의 오직 하나의 원소 c가 대응하는 함수, 즉 $f(x)=c$ (c는 상수, $c \in Y$)인 함수



- 일대일함수의 그래프는 x축에 평행한 직선 $y=k$ (k는 치역의 원소)와 오직 한 점에서 만난다.

풍쌤 Tip 정의역의 각 원소에 공역의 서로 다른 원소가 하나씩 대응하고 공역에 남는 원소가 $\begin{cases} \text{있으면} \Rightarrow \text{일대일함수} \\ \text{없으면} \Rightarrow \text{일대일대응} \end{cases}$

- 일대일대응이면 모두 일대일함수이지만 일대일함수라 해서 모두 일대일대응인 것은 아니다.

개념 기본 문제

027

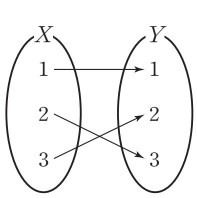
집합 X에서 집합 Y로의 함수가 다음과 같을 때, 보기에서 각 함수에 해당하는 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. 일대일함수　　ㄴ. 일대일대응

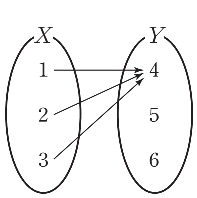
ㄷ. 항등함수　　ㄹ. 상수함수

(1)



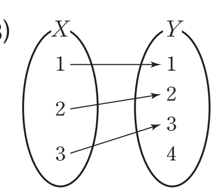
ㄱ, ㄴ

(2)



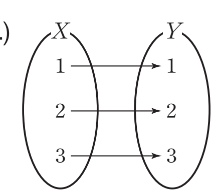
ㄹ

(3)



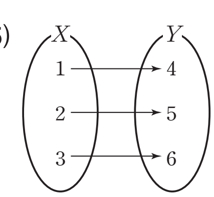
ㄱ

(4)



ㄱ, ㄴ, ㄷ

(5)

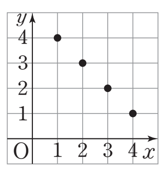


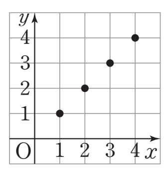
ㄱ, ㄴ

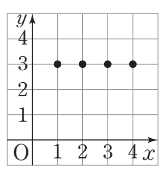
028

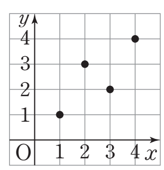
정의역과 공역이 모두 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$인 보기의 함수의 그래프 중에서 다음에 해당하는 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


ㄹ.


(1) 일대일함수 ㄱ, ㄴ, ㄹ

(2) 일대일대응 ㄱ, ㄴ, ㄹ

(3) 항등함수 ㄴ

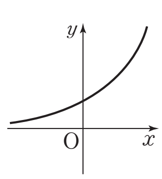
(4) 상수함수 ㄷ

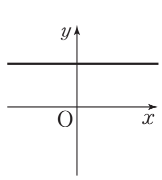
029

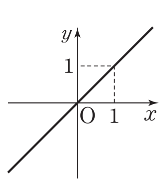
실수 전체의 집합에서 정의된 함수의 그래프가 다음과 같을 때, 보기에서 각 함수에 해당하는 것만을 있는 대로 골라 ( ) 안에 써넣으시오.

보기

ㄱ. 일대일함수　　ㄴ. 일대일대응
ㄷ. 항등함수　　ㄹ. 상수함수

(1)

(ㄱ)

(2)

(ㄹ)

(3)

(ㄱ, ㄴ, ㄷ)

030

실수 전체의 집합에서 정의된 보기의 함수 중에서 다음에 해당하는 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $y=x+3$　　ㄴ. $y=-2$
ㄷ. $y=x^2+1$　　ㄹ. $y=x$
ㅁ. $y=|x|-1$　　ㅂ. $y=-3x+1$

(1) 일대일함수 ㄱ, ㄹ, ㅂ

(2) 일대일대응 ㄱ, ㄹ, ㅂ

(3) 항등함수 ㄹ

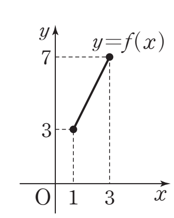
(4) 상수함수 ㄴ

031

두 집합 $X=\{x|1\le x\le 3\}$, $Y=\{y|3\le y\le 7\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=ax+b$가 일대일대응일 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $a\ne 0$)

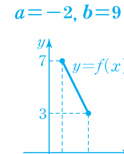
(1) 다음은 $a>0$일 때, 상수 a, b의 값을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

$a>0$이면 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가한다. 이때 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 치역과 $\boxed{공역}$이 같아야 한다.
함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(1,\ 3)$, $(3,\ 7)$을 양 끝 점으로 하는 선분이므로 $f(1)=3$, $f(3)=7$
즉, $a+b=\boxed{3}$, $3a+b=\boxed{7}$이므로 두 식을 연립하여 풀면 $a=\boxed{2}$, $b=\boxed{1}$



(2) $a<0$일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오. $a=-2$, $b=9$

오른쪽 그림에서 $f(1)=7$, $f(3)=3$
즉, $a+b=7$, $3a+b=3$이므로
두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=9$



05 여러 가지 함수의 개수

1 여러 가지 함수의 개수

두 집합 $X=\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m\}$, $Y=\{y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n\}$에 대하여 X에서 Y로의
(원소의 개수가 m) (원소의 개수가 n)

① 함수의 개수 ➡ $\underbrace{n\times n\times n\times \cdots \times n}_{m\text{개}}=n^m$

② 일대일함수의 개수 ➡ $n\times(n-1)\times(n-2)\times \cdots \times(n-m+1)$ (단, $m\le n$)

③ 일대일대응의 개수 ➡ $n\times(n-1)\times(n-2)\times \cdots \times 3\times 2\times 1$ (단, $m=n$)

④ 상수함수의 개수 ➡ n ← 공역의 원소의 개수

보기 $X=\{1, 2, 3\}$에서 $Y=\{4, 5, 6, 7, 8\}$로의 일대일함수 f의 개수는
1의 함숫값이 될 수 있는 것은 4, 5, 6, 7, 8의 5가지
2의 함숫값이 될 수 있는 것은 4, 5, 6, 7, 8 중 1의 함숫값을 제외한 4가지
3의 함숫값이 될 수 있는 것은 4, 5, 6, 7, 8 중 1, 2의 함숫값를 제외한 3가지
➡ $5\times4\times3=60$

풍쌤 Tip 정의역의 원소의 입장에서 생각하여 함숫값이 될 수 있는 경우를 찾는다.

- $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-m+1)={}_n\mathrm{P}_m$
- $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1={}_n\mathrm{P}_n=n!$

개념 기본 문제

정답과 풀이 105쪽

032
다음 두 집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수의 개수를 구하시오.

(1) $X=\{1, 2\}$, $Y=\{1, 2, 3\}$ 9

(2) $X=\{-1, 0, 1\}$, $Y=\{a, b\}$ 8

(3) $X=\{2, 4, 6\}$, $Y=\{1, 3, 5, 7\}$ 64

033
다음 두 집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 일대일함수의 개수를 구하시오.

(1) $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{1, 3, 5, 7\}$ 24

$4\times3\times2=24$

(2) $X=\{1, 3, 5, 7\}$, $Y=\{a, b, c, d, e\}$ 120

$5\times4\times3\times2=120$

(3) $X=\{3, 6, 9\}$, $Y=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$ 504

$9\times8\times7=504$

034
다음 두 집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 일대일대응의 개수를 구하시오.

(1) $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{4, 5, 6\}$ 6

$3\times2\times1=6$

(2) $X=\{0, 1, 2, 3\}$, $Y=\{1, 3, 5, 7\}$ 24

$4\times3\times2\times1=24$

(3) $X=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $Y=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ 120

$5\times4\times3\times2\times1=120$

035
다음 두 집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 상수함수의 개수를 구하시오.

(1) $X=\{1, 2\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$ 4

(2) $X=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $Y=\{3, 6, 9\}$ 3

(3) $X=\{a, b, c, d\}$, $Y=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 5

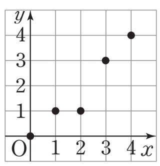
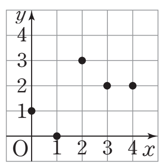
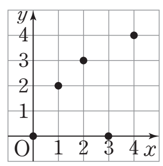
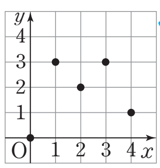
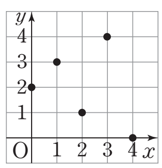
유형 05 일대일함수

정의역의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 또는 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$인 함수 f가 일대일함수이다.

풍쌤 Point x의 값이 다르면 함숫값도 다른 함수, 즉 함숫값이 같으면 x의 값도 같은 함수가 일대일함수이다.

036

다음 중 정의역이 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$인 일대일함수의 그래프는?

①

②

③

④

✓⑤


037

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f에 대하여 다음 중 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$를 만족시키는 함수는?

① $f(x)=3$　✓② $f(x)=\frac{1}{2}x$　③ $f(x)=x^2+1$
④ $f(x)=|x|$　⑤ $f(x)=(x-1)^2$

① [반례] $f(1)=f(2)$이지만 $1\neq 2$
② 일대일함수
③ [반례] $f(-1)=f(1)$이지만 $-1\neq 1$
④ [반례] $f(-1)=f(1)$이지만 $-1\neq 1$
⑤ [반례] $f(0)=f(2)$이지만 $0\neq 2$

038

두 집합 $X=\{1, 3, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f가 일대일함수이고 $f(3)=3$이다. $f(1)+f(5)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① 9　② 10　③ 11
✓④ 12　⑤ 13

$f(1)+f(5)$의 값이 최대가 되려면 $f(1)=4$, $f(5)=5$ 또는 $f(1)=5$, $f(5)=4$이어야 하므로 $M=4+5=9$
$f(1)+f(5)$의 값이 최소가 되려면 $f(1)=1$, $f(5)=2$ 또는 $f(1)=2$, $f(5)=1$이어야 하므로 $m=1+2=3$
$\therefore M+m=9+3=12$

유형 06 일대일대응

① f는 일대일함수이다.
② 치역과 공역이 서로 같다.
➡ f는 일대일대응이다.

풍쌤 Point 정의역의 각 원소에 공역의 서로 다른 원소를 하나씩 대응시킨 후, 공역에 남는 원소가 하나도 없으면 일대일대응이다.

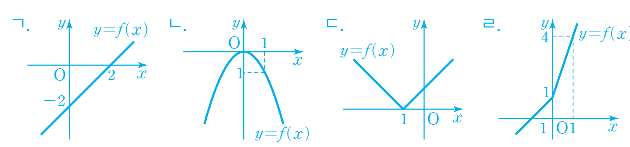
039

함수 f의 정의역과 공역이 모두 실수 전체의 집합일 때, **보기**에서 일대일대응인 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(x)=x-2$　ㄴ. $f(x)=-x^2$
ㄷ. $f(x)=|x+1|$　ㄹ. $f(x)=\begin{cases} 3x+1 & (x\geq 0) \\ x+1 & (x<0) \end{cases}$

① ㄱ, ㄷ　✓② ㄱ, ㄹ　③ ㄴ, ㄷ
④ ㄷ, ㄹ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄹ



040

두 집합 $X=\{x|-2\leq x\leq 1\}$, $Y=\{y|-a\leq y\leq a\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=-2x+b$가 일대일대응일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. -3
(단, $a>0$)

x의 계수가 -2이므로
$f(-2)=a$, $f(1)=-a$
$\therefore 4+b=a$, $-2+b=-a$
두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$
$\therefore ab=3\times(-1)=-3$

041

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+3 & (x\geq 1) \\ (5-a)x+6 & (x<1) \end{cases}$$

이 일대일대응이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오. 4

두 직선 $y=ax+3$, $y=(5-a)x+6$의 기울기의 부호가 같아야 하므로
$a(5-a)>0$, $a(a-5)<0$　$\therefore 0<a<5$
따라서 정수 a는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

유형 실전 문제

정답과 풀이 107쪽

유형 07 항등함수와 상수함수

① 항등함수: 정의역의 각 원소에 그 자신이 대응하는 함수, 즉 $f(x)=x$인 함수

② 상수함수: 정의역의 모든 원소에 공역의 오직 하나의 원소가 대응하는 함수, 즉 $f(x)=c$ (c는 상수)인 함수

풍쌤 Point 함수의 식이 $f(x)=x$ 꼴인 경우만 항등함수라고 오해하지 말자. 정의역의 각 원소에 그 자신이 대응하는 함수는 모두 항등함수이다.

042

집합 $X=\{1, 3, 5\}$에 대하여 **보기**에서 X에서 X로의 항등함수인 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(x)=$(x를 6으로 나누었을 때의 나머지)

ㄴ. $g(x)=|x|$

ㄷ. $h(x)=-x+6$

① ㄱ　② ㄷ　√③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f(1)=1$, $f(3)=3$, $f(5)=5$
ㄴ. $g(1)=1$, $g(3)=3$, $g(5)=5$
ㄷ. $h(1)=5$, $h(3)=3$, $h(5)=1$
즉, $h(x)=-x+6$은 항등함수가 아니다.

043

집합 $X=\{1, 3\}$에 대하여 X에서 X로의 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x\geq 2) \\ x^2-2x+b & (x<2) \end{cases}$$

가 상수함수일 때, 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하시오. 4

$x=1<2$이므로 $f(1)=1^2-2\times1+b=b-1$
$x=3\geq2$이므로 $f(3)=3+a$
이때 f가 상수함수이므로 $f(1)=f(3)$에서
$b-1=3+a$ $\quad\therefore b-a=4$

044

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g가 각각 항등함수, 상수함수이고 $f(2)+g(5)=3$일 때, $f(3)+g(3)$의 값을 구하시오. 4

함수 f는 항등함수이므로 $f(2)=2$, $f(3)=3$
$f(2)+g(5)=3$에서
$2+g(5)=3$ $\quad\therefore g(5)=3-2=1$
함수 g는 상수함수이므로 $g(3)=g(5)=1$
$\therefore f(3)+g(3)=3+1=4$

유형 08 함수의 개수 중요

원소의 개수가 각각 m, n인 두 집합 X, Y에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow Y$의 개수는 다음과 같다.

① 함수의 개수 ➡ $\underbrace{n\times n\times n\times \cdots \times n}_{m개}=n^m$

② 일대일함수의 개수 (단, $m\leq n$)
➡ $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-m+1)$

③ 일대일대응의 개수 (단, $m=n$)
➡ $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$

④ 상수함수의 개수 ➡ n

풍쌤 Point 공식이 기억나지 않을 때는 정의역의 각 원소에 대응할 수 있는 공역의 원소의 개수를 따져 본다.

045

두 집합 $X=\{2, 5, 7\}$, $Y=\{0, 2, 4, 6, 8\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수의 개수를 a, 일대일함수의 개수를 b, 상수함수의 개수를 c라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. 190

함수의 개수는 $a=5\times5\times5=5^3=125$
일대일함수의 개수는 $b=5\times4\times3=60$
상수함수의 개수는 $c=5$
$\therefore a+b+c=125+60+5=190$

046

두 집합 $X=\{1, 3, 5\}$, $Y=\{0, 1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow Y$ 중 $f(3)=3$을 만족시키는 일대일함수의 개수를 구하시오. 12

$f(3)=3$으로 정해져 있으므로
$f(1)$의 값으로 가능한 것은 3을 제외한 4가지
$f(5)$의 값으로 가능한 것은 3과 $f(1)$의 값을 제외한 3가지
따라서 $f(3)=3$을 만족시키는 일대일함수 f의 개수는
$4\times3=12$

047

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중 $f(1)+f(2)=5$이고 일대일대응인 함수 f의 개수는?

① 4　√② 8　③ 16　④ 32　⑤ 64

(ⅰ) $f(1)=1$, $f(2)=4$일 때,
$f(3)=2$, $f(4)=3$ 또는 $f(3)=3$, $f(4)=2$
(ⅱ) $f(1)=2$, $f(2)=3$일 때,
$f(3)=1$, $f(4)=4$ 또는 $f(3)=4$, $f(4)=1$
(ⅲ) $f(1)=3$, $f(2)=2$일 때,
$f(3)=1$, $f(4)=4$ 또는 $f(3)=4$, $f(4)=1$
(ⅳ) $f(1)=4$, $f(2)=1$일 때,
$f(3)=2$, $f(4)=3$ 또는 $f(3)=3$, $f(4)=2$
(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 함수 f의 개수는 $2+2+2+2=8$

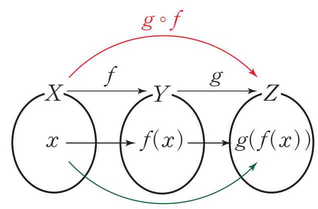
06 합성함수의 정의

❶ 합성함수의 정의

두 함수 $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$에 대하여 집합 X의 각 원소 x에 집합 Z의 원소 $g(f(x))$를 대응시키는 함수를 f와 g의 **합성함수**라 하고 기호 $g \circ f$로 나타낸다.

즉,

$$g \circ f: X \longrightarrow Z,\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

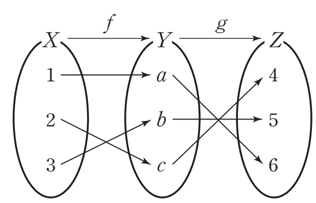


보기 두 함수 $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$가 오른쪽 그림과 같을 때

① $f(1)=a$, $g(a)=6$이므로
$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = 6$

② $f(2)=c$, $g(c)=4$이므로
$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(c) = 4$

③ $f(3)=b$, $g(b)=5$이므로
$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(b) = 5$



- 함수 f의 치역이 함수 g의 정의역에 포함될 때, 즉
  (f의 치역)$\subset$(g의 정의역)
  일 때만 합성함수 $g \circ f$가 정의된다.

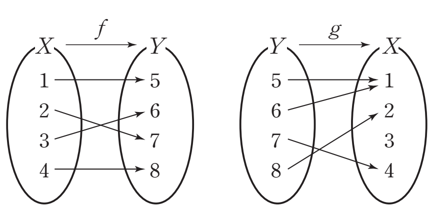
- $g(f(x))$는 $g(x)$의 x 대신 $f(x)$를 대입함을 의미한다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 107쪽

048

두 함수 $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow X$가 그림과 같을 때, 다음 값을 구하시오.



(1) $(g \circ f)(1)$ 1

(2) $(g \circ f)(2)$ 4

(3) $(g \circ f)(3)$ 1

(4) $(f \circ g)(5)$ 5

(5) $(f \circ g)(7)$ 8

(6) $(f \circ g)(8)$ 7

049

두 함수 $f(x)=2x+3$, $g(x)=x^2-2x+3$에 대하여 다음 값을 구하시오.

(1) $(g \circ f)(1)$ 18

$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(5) = 25-10+3 = 18$

(2) $(f \circ g)(1)$ 7

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 2\times2+3 = 7$

(3) $(f \circ f)(-2)$ 1

$(f \circ f)(-2) = f(f(-2)) = f(-1) = 2\times(-1)+3 = 1$

050

두 함수 $f(x)=-x+2$, $g(x)=x^2+1$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $(g \circ f)(x)$ x^2-4x+5

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-x+2) = (-x+2)^2+1 = x^2-4x+5$

(2) $(f \circ g)(x)$ $-x^2+1$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+1) = -(x^2+1)+2 = -x^2+1$

(3) $(g \circ g)(x)$ x^4+2x^2+2

$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x^2+1) = (x^2+1)^2+1 = x^4+2x^2+2$

07 합성함수의 성질

❶ 합성함수의 성질

세 함수 f, g, h에 대하여

① $g \circ f \neq f \circ g$ ← 교환법칙이 성립하지 않는다.

② $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ ← 결합법칙이 성립한다.

③ $f \circ I = I \circ f = f$ (단, I는 항등함수이다.) ← 항등함수와 합성하면 자기 자신이 된다.

• $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$에서 괄호를 생략하여 $h \circ g \circ f$로 나타낼 수 있다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 107쪽

051

두 함수 $f(x)=x+2$, $g(x)=2x^2$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $(g \circ f)(x)$를 구하시오. $2x^2+8x+8$

$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(x+2)=2(x+2)^2=2x^2+8x+8$

(2) $(f \circ g)(x)$를 구하시오. $2x^2+2$

$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(2x^2)=2x^2+2$

(3) □ 안에 기호 $=$, $\neq$ 중 알맞은 것을 써넣으시오.

$(g \circ f)(x)$ $\boxed{\neq}$ $(f \circ g)(x)$

052

세 함수 $f(x)=x+3$, $g(x)=-x-4$, $h(x)=2x+1$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $(h \circ g)(x)$를 구하시오. $-2x-7$

$(h \circ g)(x)=h(g(x))=h(-x-4)=2(-x-4)+1=-2x-7$

(2) $((h \circ g) \circ f)(x)$를 구하시오. $-2x-13$

$((h \circ g) \circ f)(x)=(h \circ g)(f(x))=(h \circ g)(x+3)$
$=-2(x+3)-7=-2x-13$

(3) $(g \circ f)(x)$를 구하시오. $-x-7$

$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(x+3)=-(x+3)-4=-x-7$

(4) $(h \circ (g \circ f))(x)$를 구하시오. $-2x-13$

$(h \circ (g \circ f))(x)=h((g \circ f)(x))=h(-x-7)$
$=2(-x-7)+1=-2x-13$

(5) □ 안에 기호 $=$, $\neq$ 중 알맞은 것을 써넣으시오.

$(h \circ g) \circ f$ $\boxed{=}$ $h \circ (g \circ f)$

053

세 함수 f, g, h에 대하여

$f(x)=2x+3$, $(h \circ g)(x)=-x+5$

일 때, 다음 값을 구하시오.

(1) $((h \circ g) \circ f)(2)$ -2

$((h \circ g) \circ f)(2)=(h \circ g)(f(2))=(h \circ g)(\boxed{7})$
$=\boxed{-7}+5=\boxed{-2}$

(2) $(h \circ g \circ f)(-1)$ 4

$(h \circ g \circ f)(-1)=((h \circ g) \circ f)(-1)=(h \circ g)(f(-1))=(h \circ g)(1)$
$=-1+5=4$

(3) $((f \circ h) \circ g)(3)$ 7

$((f \circ h) \circ g)(3)=(f \circ (h \circ g))(3)=f((h \circ g)(3))$
$=f(2)=2\times2+3=7$

054

세 함수 f, g, h에 대하여

$(f \circ g)(x)=x^2-3$, $h(x)=2x+1$

일 때, 다음 값을 구하시오.

(1) $((f \circ g) \circ h)(2)$ 22

$((f \circ g) \circ h)(2)=(f \circ g)(h(2))=(f \circ g)(5)$
$=5^2-3=22$

(2) $(h \circ f \circ g)(-1)$ -3

$(h \circ f \circ g)(-1)=(h \circ (f \circ g))(-1)=h((f \circ g)(-1))=h(-2)$
$=2\times(-2)+1=-3$

(3) $((h \circ f) \circ g)(3)$ 13

$((h \circ f) \circ g)(3)=(h \circ (f \circ g))(3)=h((f \circ g)(3))=h(6)$
$=2\times6+1=13$

유형 실전 문제

정답과 풀이 108쪽

유형 09 합성함수의 함숫값

중요

두 함수 f, g에 대하여

① $(g \circ f)(a)=g(f(a))$ ➡ $g(x)$에 x 대신 $f(a)$를 대입한다.

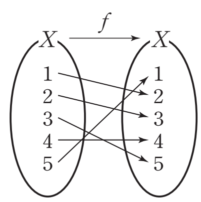
② $(f \circ g)(a)=f(g(a))$ ➡ $f(x)$에 x 대신 $g(a)$를 대입한다.

풍쌤 Point 함수의 합성 기호 ∘를 기준으로 뒤에 있는 함숫값부터 차례대로 계산한다.

$(g \circ f)(a)=g(\underbrace{f(a)}_{f(a)\text{ 먼저}})$ $(f \circ g)(a)=f(\underbrace{g(a)}_{g(a)\text{ 먼저}})$

055

함수 $f : X \longrightarrow X$가 오른쪽 그림과 같을 때, $(f \circ f \circ f)(2)$의 값은?

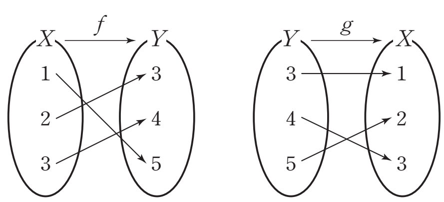


✓① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

$(f \circ f \circ f)(2)=f(f(f(2)))=f(f(3))$
$=f(5)=1$

056

두 함수 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ g)(5)+(g \circ f)(1)$의 값을 구하시오. 5



$(f \circ g)(5)=f(g(5))=f(2)=3$
$(g \circ f)(1)=g(f(1))=g(5)=2$
$\therefore (f \circ g)(5)+(g \circ f)(1)=3+2=5$

057

두 함수

$$f(x)=3x-2,\ g(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 0) \\ x^2+x+1 & (x<0) \end{cases}$$

에 대하여 $(f \circ g)(2)+(g \circ f)(-1)$의 값을 구하시오. 34

$(f \circ g)(2)=f(g(2))=f(5)=3\times5-2=13$
$(g \circ f)(-1)=g(f(-1))=g(-5)=(-5)^2+(-5)+1=21$
$\therefore (f \circ g)(2)+(g \circ f)(-1)=13+21=34$

058

두 함수 $f(x)=3x+a$, $g(x)=\begin{cases} 2x^2+1 & (x \geq 0) \\ -x^2+3 & (x<0) \end{cases}$에 대하여 $(f \circ g)(1)=7$일 때, $g(a)$의 값을 구하시오.

-1 (단, a는 상수이다.)

$(f \circ g)(1)=f(g(1))=f(3)=9+a$
이때 $(f \circ g)(1)=7$이므로
$9+a=7$ $\therefore a=-2$
$\therefore g(a)=g(-2)=-(-2)^2+3=-1$

059

두 함수 $f(x)=-x+a$, $g(x)=bx^2+1$에 대하여

$(f \circ g)(0)=1$, $(g \circ f)(3)=4$

일 때, $f(1)+g(1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ✓⑤ 5

$f(g(0))=f(1)=-1+a=1$
$\therefore a=2$, $f(x)=-x+2$
이때 $f(3)=-3+2=-1$이므로
$(g \circ f)(3)=g(f(3))=g(-1)=b+1=4$
$\therefore b=3$, $g(x)=3x^2+1$
$\therefore f(1)+g(1)=(-1+2)+(3+1)=5$

060

집합 $X=\{1, 3, 5\}$에 대하여 함수 $f : X \longrightarrow X$는 일대일대응이다. 함수 f가 $(f \circ f)(1)=3$을 만족시킬 때, $f(1)-f(3)+f(5)$의 값을 구하시오. 7

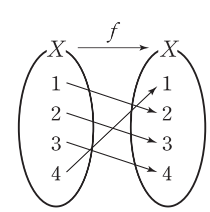
(i) $f(1)=1$일 때, $(f \circ f)(1)=f(f(1))=f(1)=3$
 이때 $f(1)=1$이라는 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $f(1)=3$일 때, $(f \circ f)(1)=f(f(1))=f(3)=3$
 이때 함수 f가 일대일대응이라는 조건을 만족시키지 않는다.
(iii) $f(1)=5$일 때, $(f \circ f)(1)=f(f(1))=f(5)=3$
 이때 함수 f는 일대일대응이므로 $f(3)=1$
(i)~(iii)에서 $f(1)-f(3)+f(5)=5-1+3=7$

061

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f : X \longrightarrow X$가 오른쪽 그림과 같다. 함수 $g : X \longrightarrow X$에 대하여

$g(4)=2$, $f \circ g=g \circ f$

일 때, $g(3)$의 값을 구하시오. 1



(i) $g(4)=2$이므로 $(f \circ g)(4)=f(g(4))=f(2)=3$
 즉, $g(f(4))=3$에서 $f(4)=1$이므로 $g(1)=3$
(ii) $g(1)=3$이므로 $(f \circ g)(1)=f(g(1))=f(3)=4$
 즉, $g(f(1))=4$에서 $f(1)=2$이므로 $g(2)=4$
(iii) $g(2)=4$이므로 $(f \circ g)(2)=f(g(2))=f(4)=1$
 즉, $g(f(2))=1$에서 $f(2)=3$이므로 $g(3)=1$

유형 실전 문제

유형 10 합성함수의 성질 중요

① 두 함수 f, g에 대하여 교환법칙이 성립하지 않으므로

$$g \circ f \neq f \circ g$$

② 세 함수 f, g, h에 대하여 결합법칙이 성립하므로

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f$$

풍쌤 Point 세 함수의 합성에서 결합법칙이 성립하므로 어느 두 함수를 먼저 합성해도 결과가 같다.

062

세 함수 f, g, h에 대하여

$$f(x)=x^2-1,\ (g \circ h)(x)=3x-4$$

일 때, $(g \circ (h \circ f))(3)+((f \circ g) \circ h)(1)$의 값은?

① 18　② 19　✓③ 20
④ 21　⑤ 22

$(g \circ (h \circ f))(3)=((g \circ h) \circ f)(3)=(g \circ h)(f(3))=(g \circ h)(8)$
$=3\times8-4=20$
$((f \circ g) \circ h)(1)=(f \circ (g \circ h))(1)=f((g \circ h)(1))=f(-1)$
$=(-1)^2-1=0$
$\therefore (g \circ (h \circ f))(3)+((f \circ g) \circ h)(1)=20+0=20$

063

세 함수 f, g, h에 대하여

$$(f \circ g)(x)=2x+3,\ h(x)=-x^2+x+5$$

일 때, $(f \circ (g \circ h))(a)=9$를 만족시키는 양수 a의 값을 구하시오. 2

$(f \circ (g \circ h))(a)=((f \circ g) \circ h)(a)=(f \circ g)(h(a))$
$=(f \circ g)(-a^2+a+5)=2(-a^2+a+5)+3$
$=-2a^2+2a+13$
$-2a^2+2a+13=9$에서
$a^2-a-2=0,\ (a+1)(a-2)=0$
$\therefore a=2\ (\because a>0)$

064

세 함수 f, g, h에 대하여

$$(f \circ g)(x)=x+3,\ (f \circ (g \circ h))(x)=-3x+1$$

일 때, $h(-2)$의 값을 구하시오. 4

$(f \circ (g \circ h))(x)=((f \circ g) \circ h)(x)=(f \circ g)(h(x))$
$=h(x)+3$
$h(x)+3=-3x+1$　　$\therefore h(x)=-3x-2$
$\therefore h(-2)=-3\times(-2)-2=4$

유형 11 조건을 만족시키는 함수 구하기

(1) 미지수를 포함한 함수 $f(x)$의 식과 합성함수 $f \circ f$에 대한 조건이 주어진 경우
➡ $(f \circ f)(x)$를 미지수를 포함한 식으로 나타낸 후 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구한다.

(2) $f \circ g=h$, 즉 $f(g(x))=h(x)$일 때
① $f(x), h(x)$가 주어진 경우
➡ $f(x)$에 x 대신 $g(x)$를 대입하여 식을 정리한다.
② $g(x), h(x)$가 주어진 경우
➡ $g(x)=t$로 놓고 $f(t)$를 구한다.

풍쌤 Point (2)의 ①은 $g(x)$를 하나의 문자로 생각하고 풀면 된다. (2)의 ②는 $g(x)=t$에서 x를 t에 대한 식으로 정리한 후, $h(x)$의 x 대신 대입하면 된다.

065

두 함수 $f(x)=-x+1,\ g(x)=3x+4$에 대하여

$$(f \circ h)(x)=g(x)$$

를 만족시키는 함수 $h(x)$는?

✓① $h(x)=-3x-3$　② $h(x)=-3x$
③ $h(x)=-3x+3$　④ $h(x)=3x-3$
⑤ $h(x)=3x+3$

$(f \circ h)(x)=f(h(x))=-h(x)+1$이므로
$-h(x)+1=3x+4$
$\therefore h(x)=-3x-3$

066

함수 $f(x)=2x+k$에 대하여 $1\le x\le5$에서 함수 $(f \circ f)(x)$의 최솟값이 10일 때, 상수 k의 값을 구하시오. 2

$(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(2x+k)=2(2x+k)+k=4x+3k$
함수 $(f \circ f)(x)=4x+3k$는 $1\le x\le5$에서 $x=1$일 때 최솟값을 갖는다.
이때 $(f \circ f)(1)=4\times1+3k=3k+4$이므로
$3k+4=10$　　$\therefore k=2$

067

두 함수 $f(x)=x-3,\ g(x)=-2x+3$에 대하여

$$(h \circ f \circ g)(x)=g(x)$$

를 만족시키는 함수 $h(x)$는?

① $h(x)=-2x$　② $h(x)=-x+3$
③ $h(x)=x-3$　④ $h(x)=x$
✓⑤ $h(x)=x+3$

$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(-2x+3)=(-2x+3)-3=-2x$
$\therefore (h \circ f \circ g)(x)=h((f \circ g)(x))=h(-2x)$
$\therefore h(-2x)=-2x+3$　…… ㉠
$-2x=t$로 놓으면 $x=-\frac{1}{2}t$이므로 ㉠에 대입하면
$h(t)=-2\times\left(-\frac{1}{2}t\right)+3=t+3$　　$\therefore h(x)=x+3$

유형 12 합성함수의 추정

함수 f에 대하여 $f^1=f$, $f^{n+1}=f\circ f^n$ (n은 자연수)일 때, $f^n(a)$의 값을 구하는 방법은 다음 두 가지이다.

[방법1] $f^2(x)$, $f^3(x)$, $f^4(x)$, $\cdots$ 를 차례대로 구하여 $f^n(x)$를 추정한 후, x 대신 a를 대입한다.

[방법2] $f(a)$, $f^2(a)$, $f^3(a)$, $\cdots$ 를 차례대로 구하여 함숫값 사이의 규칙을 찾아 $f^n(a)$의 값을 추정한다.

풍쌤 Point f^{100}이라 해서 100번 합성할 필요는 없다. 처음 몇 개의 합성함수를 구해 보면 반드시 규칙성이 보인다. 함수의 식이 필요하면 [방법1], 함숫값이 필요하면 [방법2]를 이용하자.

068

함수 $f(x)=2x$에 대하여

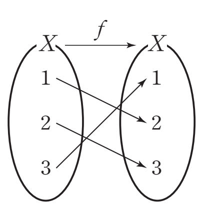
$$f^1=f,\ f^{n+1}=f\circ f^n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

일 때, $f^2(1)+f^6(1)+f^{10}(1)$의 값은?

① 18 ② 162 ③ 546
④ 912 ✓⑤ 1092

$f^1(x)=2x$
$f^2(x)=f(2x)=2\times 2x=2^2x$
$f^3(x)=f(2^2x)=2\times 2^2x=2^3x$
$\vdots$
따라서 $f^n(x)=2^nx$이므로
$f^2(1)+f^6(1)+f^{10}(1)=2^2\times 1+2^6\times 1+2^{10}\times 1=4+64+1024=1092$

069



집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에서 집합 X로의 함수 f가 오른쪽 그림과 같다. 자연수 n에 대하여

$$f^1=f,\ f^{n+1}=f\circ f^n$$

일 때, $f^{100}(1)+f^{101}(2)+f^{102}(3)$의 값을 구하시오. 6

(i) $f^n(1)$의 값은 2, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.
이때 $100=3\times 33+1$이므로 $f^{100}(1)=f^1(1)=2$
(ii) $f^n(2)$의 값은 3, 1, 2가 이 순서대로 반복된다.
이때 $101=3\times 33+2$이므로 $f^{101}(2)=f^2(2)=1$
(iii) $f^n(3)$의 값은 1, 2, 3이 이 순서대로 반복된다.
이때 $102=3\times 34$이므로 $f^{102}(3)=f^3(3)=3$
(i)~(iii)에서 $f^{100}(1)+f^{101}(2)+f^{102}(3)=2+1+3=6$

070

함수 $f(x)=5-x$에 대하여

$$f^1=f,\ f^2=f\circ f,\ f^3=f\circ f\circ f,\ \cdots$$

라 하자. 함수 $f^{2027}(a)=11$, $f^{2028}(3)=b$를 만족시키는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. -3

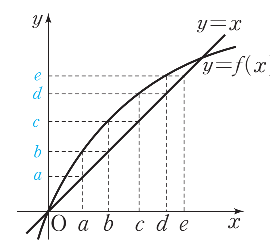
$f^1(x)=5-x$
$f^2(x)=f(5-x)=5-(5-x)=x$
$f^3(x)=f(x)=5-x$
$\vdots$
따라서 $f^n(x)=\begin{cases} 5-x & (n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots) \\ x & (n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots) \end{cases}$이므로
$f^{2027}(a)=11$에서 $5-a=11$ $\quad\therefore a=-6$
$f^{2028}(3)=b$에서 $b=3$
$\therefore a+b=-6+3=-3$

유형 13 그래프에서 합성함수의 함숫값 구하기 중요

함수 $y=f(x)$의 그래프가 세 점 $(a,\ b)$, $(b,\ c)$, $(c,\ d)$를 지나면
$f(a)=b$, $f(b)=c$, $f(c)=d$
➡ $(f\circ f\circ f)(a)=f(f(f(a)))=f(f(b))=f(c)=d$

풍쌤 Point 직선 $y=x$ 위의 점의 x좌표, y좌표가 서로 같음을 이용하여 좌표가 비어 있는 좌표축을 완성하고 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점의 좌표부터 파악하자.

071

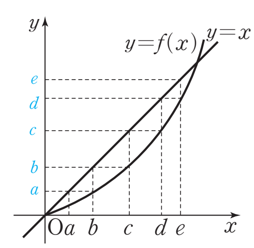


함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 오른쪽 그림과 같을 때, $(f\circ f\circ f)(a)$의 값은? (단, 모든 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)

① a ② b ③ c
✓④ d ⑤ e

$(f\circ f\circ f)(a)=f(f(f(a)))=f(f(b))=f(c)=d$

072



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 오른쪽 그림과 같을 때,

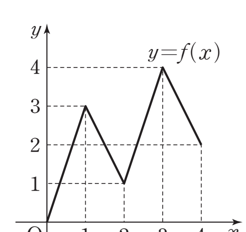
$$(f\circ f)(c)+(f\circ f\circ f)(e)$$

의 값은? (단, 모든 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)

✓① $a+b$ ② $b+c$ ③ $c+d$
④ $d+e$ ⑤ $e+a$

$(f\circ f)(c)=f(f(c))=f(b)=a$
$(f\circ f\circ f)(e)=f(f(f(e)))=f(f(d))=f(c)=b$
$\therefore (f\circ f)(c)+(f\circ f\circ f)(e)=a+b$

073



$0\le x\le 4$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때,

$$(f\circ f)(1)-(f\circ f\circ f)(3)$$

의 값을 구하시오. 3

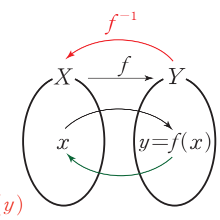
$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(3)=4$
$(f\circ f\circ f)(3)=f(f(f(3)))=f(f(4))=f(2)=1$
$\therefore (f\circ f)(1)-(f\circ f\circ f)(3)=4-1=3$

08 역함수의 정의

① 역함수의 정의

함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일대응일 때, 집합 Y의 각 원소 y에 대하여 $f(x)=y$인 집합 X의 원소 x를 대응시키는 함수를 f의 역함수라 하고, 기호 f^{-1}로 나타낸다. 즉,

$f^{-1}: Y \longrightarrow X,\ x=f^{-1}(y)$ ← $y=f(x) \Longleftrightarrow x=f^{-1}(y)$



② 역함수 구하기

일대일대응인 함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$는 다음 순서로 구한다.

① $y=f(x)$에서 x를 y에 대한 식 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 나타낸다.

② $x=f^{-1}(y)$에서 x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$로 나타낸다.

참고 $y=f(x)$에서 x와 y를 서로 바꾼 다음, y를 x에 대한 식으로 나타내어 $y=f^{-1}(x)$를 구할 수도 있다.

- 함수 $f: X \longrightarrow Y$에 대하여 역함수 f^{-1} 존재 $\Longleftrightarrow$ f가 일대일대응
- 함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여 $f(a)=b \Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$
- 함수 f의 치역이 역함수 f^{-1}의 정의역, f의 정의역이 f^{-1}의 치역이다.

보기 $y=x-1$의 역함수 구하기
x를 y에 대한 식으로 나타낸 후, x와 y를 서로 바꾼다.
$x=y+1$ ➡ $y=x+1$

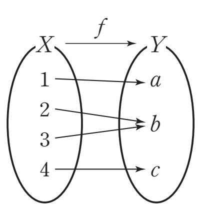
개념 기본 문제

정답과 풀이 110쪽

074

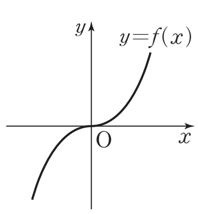
다음 함수 f에 대하여 역함수가 존재하는 것은 ○를, 존재하지 않는 것은 ×를 (　　) 안에 써넣으시오.

(1)



(×)

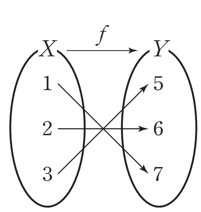
(2)



(○)

075

함수 $f: X \longrightarrow Y$가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 값을 구하시오.



(1) $f^{-1}(5)$ 　3

(2) $f^{-1}(6)$ 　2

(3) $f^{-1}(7)$ 　1

076

다음 함수 $f(x)$에 대하여 $f^{-1}(2)$의 값을 구하시오.

$f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$

(1) $f(x)=3x-4$ 　2

$f(k)=3k-4=2$에서 $k=2$ 　$\therefore f^{-1}(2)=2$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{2}x-1$ 　6

$f(k)=\frac{1}{2}k-1=2$에서 $k=6$ 　$\therefore f^{-1}(2)=6$

(3) $f(x)=-2x-5$ 　$-\frac{7}{2}$

$f(k)=-2k-5=2$에서 $k=-\frac{7}{2}$ 　$\therefore f^{-1}(2)=-\frac{7}{2}$

077

다음 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$를 구하시오.

(1) $f(x)=2x-1$ 　$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{3}x+1$ 　$f^{-1}(x)=3x-3$

(3) $f(x)=-\dfrac{2}{3}x+4$ 　$f^{-1}(x)=-\frac{3}{2}x+6$

09 역함수의 성질과 그래프

❶ 역함수의 성질

함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일대응일 때, 그 역함수 $f^{-1}: Y \longrightarrow X$에 대하여

① $(f^{-1})^{-1}=f$ ← f의 역함수의 역함수는 자기 자신이다.

② $(f^{-1} \circ f)(x)=x\ (x\in X)$, $(f\circ f^{-1})(y)=y\ (y\in Y)$

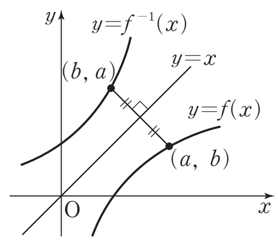
③ 함수 $g: Y \longrightarrow Z$가 일대일대응이고 그 역함수가 g^{-1}일 때,

$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

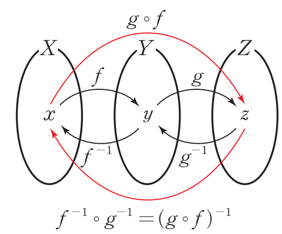
❷ 역함수의 그래프

① 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

② 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(a,\ b)$를 지나면 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(b,\ a)$를 지난다.



• 두 합성함수 $f^{-1}\circ f$와 $f\circ f^{-1}$는 정의역이 서로 다르므로 일반적으로 서로 같은 함수가 아니다.



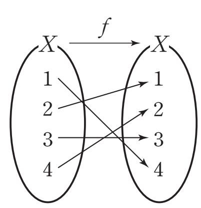
풍쌤 Tip 함수 f에 대하여 그 역함수 f^{-1}가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이 존재하면 그 교점은 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점과 같다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 111쪽

078

함수 $f: X \longrightarrow X$가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 값을 구하시오.



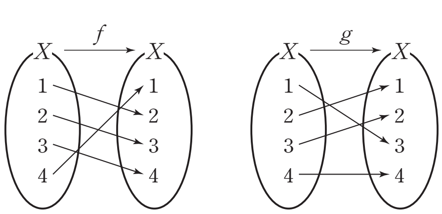
(1) $(f^{-1})^{-1}(1)$ 4

(2) $(f\circ f^{-1})(2)$ 2

(3) $(f^{-1}\circ f)(3)$ 3

079

두 함수 $f: X \longrightarrow X$, $g: X \longrightarrow X$가 그림과 같을 때, 다음 값을 구하시오.



(1) $(g\circ f)^{-1}(1)$ 1

(2) $(g\circ f)^{-1}(4)$ 3

(3) $(f\circ g)^{-1}(3)$ 3

080

두 함수 $f(x)=-x+3$, $g(x)=2x+1$에 대하여 다음 값을 구하시오.

(1) $(f\circ g^{-1})^{-1}(-3)$ 13

$(f\circ g^{-1})^{-1}(-3)=(g\circ f^{-1})(-3)=g(f^{-1}(-3))$
$f^{-1}(-3)=k$라 하면 $f(k)=-3$이므로 $-k+3=-3$ $\therefore k=6$
$\therefore (f\circ g^{-1})^{-1}(-3)=g(f^{-1}(-3))=g(6)=2\times 6+1=13$

(2) $(f^{-1}\circ g)^{-1}(-2)$ 2

$(f^{-1}\circ g)^{-1}(-2)=(g^{-1}\circ f)(-2)=g^{-1}(f(-2))=g^{-1}(5)$
$g^{-1}(5)=k$라 하면 $g(k)=5$이므로 $2k+1=5$ $\therefore k=2$
$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(-2)=g^{-1}(5)=2$

(3) $(f^{-1}\circ f\circ g)(1)$ 3

$(f^{-1}\circ f\circ g)(1)=g(1)=2+1=3$

(4) $((f\circ g)^{-1}\circ f)(3)$ 1

$((f\circ g)^{-1}\circ f)(3)=(g^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(3)$
$g^{-1}(3)=k$라 하면 $g(k)=3$이므로 $2k+1=3$ $\therefore k=1$
$\therefore ((f\circ g)^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(3)=1$

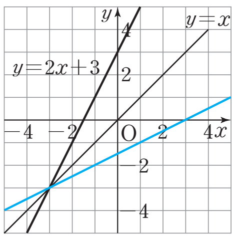
(5) $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ g)(4)$ 4

$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ g)(4)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ g)(4)=4$

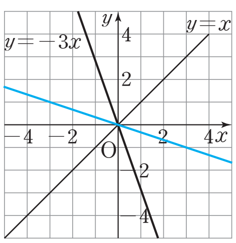
081

다음 함수의 역함수의 그래프를 직선 $y=x$를 이용하여 그리시오.

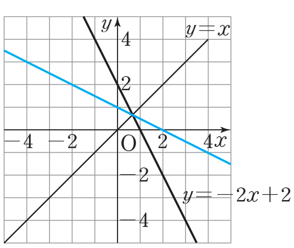
(1) $y=2x+3$



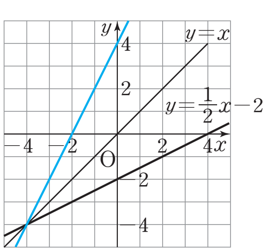
(2) $y=-3x$



(3) $y=-2x+2$

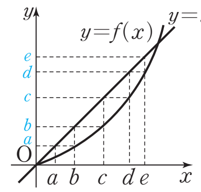


(4) $y=\frac{1}{2}x-2$



082

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 값을 구하시오. (단, 모든 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



(1) $f^{-1}(c)$ d

단계1. 점선과 y축의 교점의 y좌표 구하기

단계2. $f^{-1}(c)=k$로 놓고 k의 값 구하기

$f^{-1}(c)=k$라 하면 $f(k)=c$

그래프에서 $f(d)=c$이므로 $k=d$ $\therefore f^{-1}(c)=d$

(2) $f^{-1}(a)$ b

$f^{-1}(a)=k$라 하면 $f(k)=a$

그래프에서 $f(b)=a$이므로 $k=b$ $\therefore f^{-1}(a)=b$

(3) $(f^{-1}\circ f^{-1})(c)$ e

$(f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))=f^{-1}(d)$

이때 $f^{-1}(d)=k$라 하면 $f(k)=d$

그래프에서 $f(e)=d$이므로 $k=e$ $\therefore f^{-1}(d)=e$

(4) $(f\circ f\circ f)^{-1}(a)$ d

$(f\circ f\circ f)^{-1}(a)=(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(a)=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(a)))=f^{-1}(f^{-1}(b))$

이때 $f^{-1}(b)=k$라 하면 $f(k)=b$

그래프에서 $k=c$ $\therefore f^{-1}(b)=c$

$\therefore (f\circ f\circ f)^{-1}(a)=f^{-1}(f^{-1}(b))=f^{-1}(c)=d$

083

다음은 함수 $f(x)=2x-4$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

> 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $\boxed{y=x}$의 교점과 같다.
>
> 즉, 구하는 교점의 x좌표는
>
> $2x-4=x$에서 $x=\boxed{4}$
>
> 이때 교점은 직선 $\boxed{y=x}$ 위의 점이므로 구하는 좌표는 $(\boxed{4}, \boxed{4})$이다.

084

다음 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 구하시오.

(1) $f(x)=3x-2$ $(1, 1)$

구하는 교점의 x좌표는 $3x-2=x$에서 $2x=2$ $\therefore x=1$

이때 교점은 직선 $y=x$ 위의 점이므로 구하는 교점의 좌표는 $(1, 1)$이다.

(2) $f(x)=\frac{3}{2}x+1$ $(-2, -2)$

구하는 교점의 x좌표는 $\frac{3}{2}x+1=x$에서 $\frac{1}{2}x=-1$ $\therefore x=-2$

이때 교점은 직선 $y=x$ 위의 점이므로 구하는 교점의 좌표는 $(-2, -2)$이다.

유형 14 역함수의 함숫값

중요

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여

$$f(a)=b \Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$$

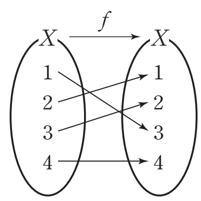
풍쌤 Point $f(a)=b$와 $f^{-1}(b)=a$는 한 세트이므로 역함수의 함수식을 구하지 않고도 얼마든지 함숫값을 구할 수 있다. 이게 바로 역함수의 함숫값의 만능 키이다.

$f(a)=b$

$f^{-1}(b)=a$

085

함수 $f: X \longrightarrow X$가 오른쪽 그림과 같을 때, $f(2)+f^{-1}(2)$의 값은?



① 2 ② 3
√③ 4 ④ 5
⑤ 6

$f(2)=1$이고 $f(3)=2$에서 $f^{-1}(2)=3$이므로
$f(2)+f^{-1}(2)=1+3=4$

086

함수 $f(x)=ax+2$에 대하여 $f^{-1}(5)=-1$일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

√① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

$f^{-1}(5)=-1$에서 $f(-1)=5$이므로
$-a+2=5$ $\therefore a=-3,\ f(x)=-3x+2$
$\therefore f(2)=-3\times2+2=-4$

087

$x\ge0$에서 정의된 함수 $f(x)=ax^2+b$에 대하여

$$f^{-1}(1)=1,\ f^{-1}(-5)=2$$

일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -15 ② -12 ③ -9
√④ -6 ⑤ -3

$f^{-1}(1)=1$에서 $f(1)=1$이므로 $a+b=1$ …… ㉠
$f^{-1}(-5)=2$에서 $f(2)=-5$이므로 $4a+b=-5$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=3$
$\therefore ab=(-2)\times3=-6$

088

정의역이 $\{x\mid x\ge1\}$인 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여

$$f(0)=2,\ f^{-1}(4)=1,\ f^{-1}(8)=2$$

일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

14

$f(0)=2$이므로 $c=2$
$f^{-1}(4)=1$에서 $f(1)=4$이므로 $a+b+2=4$ $\therefore a+b=2$ …… ㉠
$f^{-1}(8)=2$에서 $f(2)=8$이므로 $4a+2b+2=8$ $\therefore 2a+b=3$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=1$
따라서 $f(x)=x^2+x+2$이므로 $f(3)=3^2+3+2=14$

089

함수 $f(x)=\begin{cases} x+5 & (x\ge2) \\ 2x+3 & (x<2) \end{cases}$에 대하여

$f^{-1}(8)+f^{-1}(5)$의 값을 구하시오. 4

(단, a, b, c는 상수이다.)

$x\ge2$일 때, $f(x)=x+5\ge7$
$x<2$일 때, $f(x)=2x+3<7$
$f^{-1}(8)=a$라 하면 $f(a)=8\ge7$이므로
$a+5=8$ $\therefore a=3,\ f^{-1}(8)=3$
$f^{-1}(5)=b$라 하면 $f(b)=5<7$이므로
$2b+3=5,\ 2b=2$ $\therefore b=1,\ f^{-1}(5)=1$
$\therefore f^{-1}(8)+f^{-1}(5)=3+1=4$

090

두 함수 $f(x)=x+a$, $g(x)=bx-1$에 대하여

$$(g\circ f)(x)=-2x+c,\ f^{-1}(3)=5$$

일 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

① -2 √② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+a)=b(x+a)-1=bx+ab-1$
$\therefore b=-2,\ c=ab-1$
$f^{-1}(3)=5$에서 $f(5)=3$이므로 $5+a=3$ $\therefore a=-2$
$\therefore c=ab-1=-2\times(-2)-1=3$
$\therefore a+b+c=-2+(-2)+3=-1$

091

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)=3x-2$와 $g(x)$에 대하여

$$f^{-1}(x)=g(-2x+1)$$

일 때, $g(3)$의 값은?

① -3 ② $-\frac{1}{3}$ √③ $\frac{1}{3}$
④ 3 ⑤ 6

$-2x+1=3$에서 $2x=-2$ $\therefore x=-1$
$f^{-1}(x)=g(-2x+1)$의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$f^{-1}(-1)=g(3)$ …… ㉠
$f^{-1}(-1)=k$라 하면 $f(k)=-1$이므로
$3k-2=-1$ $\therefore k=\frac{1}{3},\ f^{-1}(-1)=\frac{1}{3}$
따라서 ㉠에서 $g(3)=f^{-1}(-1)=\frac{1}{3}$

유형 실전 문제

유형 15 역함수가 존재할 조건 중요★

함수 $f: X \longrightarrow Y$에 대하여

역함수 f^{-1}가 존재한다. $\Longleftrightarrow$ f가 일대일대응이다.

풍쌤 Point 역함수가 존재할 조건을 다른 말로 하면 일대일대응일 조건이다. 즉, 일대일함수이면서 공역과 치역이 같은 함수만 역함수를 갖는다.

092

보기의 함수 중 역함수가 존재하는 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 정의역과 공역은 실수 전체의 집합이다.)

보기

ㄱ. $y=x+1$　　　ㄴ. $y=x^2+1$

ㄷ. $y=|x|+1$　　　ㄹ. $y=1$

√① ㄱ　② ㄹ　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄹ　⑤ ㄷ, ㄹ

어떤 함수의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.
일대일대응인 함수의 그래프는 ㄱ뿐이므로 역함수가 존재하는 함수는 ㄱ이다.

093

두 집합 $X=\{x|1\le x\le 3\}$, $Y=\{y|-1\le y\le a\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=3x+b$의 역함수가 존재할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -2　② -1　③ 0

√④ 1　⑤ 2

함수 $f(x)=3x+b$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로
$f(1)=-1$, $f(3)=a$
$f(1)=-1$에서 $3+b=-1$　$\therefore b=-4$
즉, $f(x)=3x-4$이므로 $a=f(3)=3\times3-4=5$
$\therefore a+b=5+(-4)=1$

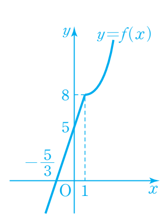
094

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} a(x-1)^2+b & (x\ge 1) \\ 3x+5 & (x<1) \end{cases}$$

의 역함수가 존재할 때, 정수 a, b에 대하여 $a+b$의 최솟값을 구하시오. (단, $a\neq 0$)　9

$x<1$일 때, $f(x)=3x+5$, 즉 $y=f(x)$의 그래프가 기울기가 양수인 직선이므로 $a>0$
$y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 8)$을 지나야 하므로 $b=8$
따라서 정수 a의 최솟값은 1이므로 $a+b$의 최솟값은
$1+8=9$



유형 16 역함수 구하기

$y=f(x)$의 역함수는 다음 순서로 구한다.
① $y=f(x)$를 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 나타낸다.
② x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$로 나타낸다.

풍쌤 Point 역함수 구하기의 핵심은 x, y를 바꿔 쓰는 것이다. 이때 함수 f의 치역이 역함수 f^{-1}의 정의역임에 주의한다.

095

함수 $f(x)=-2x+a$의 역함수가 $f^{-1}(x)=bx+1$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.　-1

$y=-2x+a$라 하고, x를 y에 대한 식으로 나타내면
$2x=-y+a$　$\therefore x=-\frac{1}{2}y+\frac{a}{2}$
x, y를 바꿔 쓰면 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{a}{2}$
이것이 $f^{-1}(x)=bx+1$과 같으므로
$-\frac{1}{2}=b$, $\frac{a}{2}=1$　$\therefore a=2$, $b=-\frac{1}{2}$
$\therefore ab=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

096

일차함수 $f(x)=ax+2$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$가 서로 같을 때, 상수 a의 값을 구하시오.　-1

$y=ax+2$라 하고, x를 y에 대한 식으로 나타내면
$ax=y-2$　$\therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{2}{a}$
x, y를 바꿔 쓰면 $y=\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}$　$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}$
이때 두 함수 $f(x)=ax+2$, $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}$가 서로 같으므로
$a=\frac{1}{a}$, $2=-\frac{2}{a}$
$2=-\frac{2}{a}$에서 $2a=-2$　$\therefore a=-1$

097

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여

$$f(2x+1)=4x-3$$

일 때, 함수 $f(x)$의 역함수는?

① $y=-2x-5$　② $y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

③ $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$　√④ $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

⑤ $y=2x+5$

$f(2x+1)=4x-3$에서 $2x+1=t$라 하면
$x=\frac{t-1}{2}$
이를 $f(2x+1)=4x-3$에 대입하면
$f(t)=4\times\frac{t-1}{2}-3=2t-5$　$\therefore f(x)=2x-5$
$y=2x-5$라 하고, x를 y에 대한 식으로 나타내면
$2x=y+5$　$\therefore x=\frac{1}{2}y+\frac{5}{2}$
x, y를 바꿔 쓰면 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

유형 17 합성함수와 역함수

두 함수 f, g의 역함수가 각각 f^{-1}, g^{-1}일 때

① $(f^{-1}\circ g)(a)=f^{-1}(g(a))$의 값을 구하는 경우

➡ $f^{-1}(g(a))=b$라 하면 $f(b)=g(a)$

② $(f\circ g^{-1})(a)=f(g^{-1}(a))$의 값을 구하는 경우

➡ $g^{-1}(a)=b$라 하면 $g(b)=a$

풍쌤 Point 합성함수에 역함수가 있을 뿐이다.
$f(a)=b \Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$를 이용하여 합성함수의 정의대로 계산한다.

098

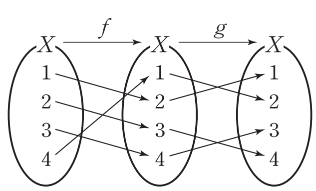
두 함수 $f(x)=x^2+x+1$, $g(x)=2x-1$에 대하여 $(f\circ g^{-1})(3)$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

$g^{-1}(3)=k$라 하면 $g(k)=3$이므로
$2k-1=3$ $\quad\therefore k=2,\ g^{-1}(3)=2$
$\therefore (f\circ g^{-1})(3)=f(g^{-1}(3))=f(2)=2^2+2+1=7$

099

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 두 함수
$f: X \longrightarrow X$, $g: X \longrightarrow X$가 다음 그림과 같을 때,
$(g\circ f^{-1})(2)+(f^{-1}\circ g)(3)$의 값을 구하시오. 5



$f(1)=2$에서 $f^{-1}(2)=1$이므로
$(g\circ f^{-1})(2)=g(f^{-1}(2))=g(1)=2$
$f(3)=4$에서 $f^{-1}(4)=3$이므로
$(f^{-1}\circ g)(3)=f^{-1}(g(3))=f^{-1}(4)=3$
$\therefore (g\circ f^{-1})(2)+(f^{-1}\circ g)(3)=2+3=5$

100

두 함수 $f(x)=-2x+1$, $g(x)=x-3$에 대하여

$$(g\circ f^{-1})(a)=-5$$

를 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오. 5

$(g\circ f^{-1})(a)=-5$에서
$g(f^{-1}(a))=-5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$f^{-1}(a)=k$라 하면 ㉠에서 $g(k)=-5$
$k-3=-5$에서 $k=-2$ $\quad\therefore f^{-1}(a)=-2$
따라서 $f(-2)=a$이므로
$a=-2\times(-2)+1=5$

유형 18 역함수의 성질

두 함수 f, g의 역함수가 각각 f^{-1}, g^{-1}일 때

① $(f^{-1})^{-1}=f$

② $(f^{-1}\circ f)(x)=x$, $(f\circ f^{-1})(y)=y$

③ $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

풍쌤 Point 역함수의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 하고 나면, 역함수의 함숫값을 구하는 문제가 된다.

101

함수 $f(x)=2x+3$에 대하여
$(f^{-1})^{-1}(2)+(f^{-1}\circ f)(4)$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

$(f^{-1})^{-1}(2)=f(2)=2\times2+3=7$
$(f^{-1}\circ f)(4)=4$
$\therefore (f^{-1})^{-1}(2)+(f^{-1}\circ f)(4)=7+4=11$

102

두 함수 $f(x)=-2x+1$, $g(x)=x-4$에 대하여

$$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)$$

의 값을 구하시오. 1

$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(2)$
$=(g^{-1}\circ f)(2)$
$=g^{-1}(f(2))$
$=g^{-1}(-3)$
$g^{-1}(-3)=k$라 하면 $g(k)=-3$이므로
$k-4=-3$ $\quad\therefore k=1,\ g^{-1}(-3)=1$

103

두 함수 $f(x)=-x+2$, $g(x)=2x+3$에 대하여 함수

$$h(x)=(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g^{-1})(x)$$

일 때, $h(a)=1$을 만족시키는 실수 a의 값을 구하시오. 5

$h(x)=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g^{-1})(x)$
$=(f^{-1}\circ g^{-1})(x)$
$=f^{-1}(g^{-1}(x))$
$h(a)=1$에서 $f^{-1}(g^{-1}(a))=1$이므로
$g^{-1}(a)=k$라 하면 $f^{-1}(k)=1$
$\therefore k=f(1)=-1+2=1$
따라서 $g^{-1}(a)=1$에서
$a=g(1)=2+3=5$

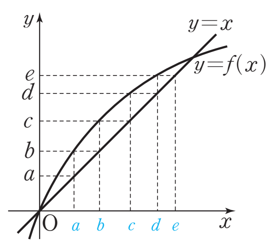
유형 19 그래프를 이용하여 역함수의 함숫값 구하기

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(a,\ b)$를 지난다.
➡ 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(b,\ a)$를 지난다.
➡ $f^{-1}(b)=a$

풍쌤 Point 직선 $y=x$ 위의 점의 x좌표, y좌표가 서로 같음을 이용하여 주어진 그래프 위의 점의 좌표를 파악한다.

104

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 오른쪽 그림과 같을 때, $(f^{-1}\circ f^{-1})(e)$의 값은? (단, 모든 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)

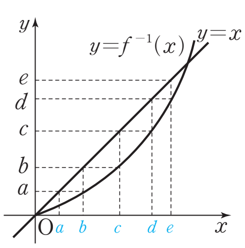


① a ② b ✓③ c
④ d ⑤ e

$f^{-1}(e)=k$라 하면 $f(k)=e$
그래프에서 $k=d$ $\quad\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(e)=f^{-1}(f^{-1}(e))=f^{-1}(d)$
$f^{-1}(d)=l$이라 하면 $f(l)=d$
그래프에서 $l=c$ $\quad\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(e)=f^{-1}(f^{-1}(e))=f^{-1}(d)=c$

105

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 오른쪽 그림과 같을 때, $(f\circ f\circ f)(a)$의 값은? (단, 모든 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)

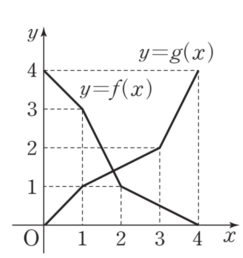


① a ② b ③ c
✓④ d ⑤ e

$f^{-1}(b)=a,\ f^{-1}(c)=b,\ f^{-1}(d)=c,\ f^{-1}(e)=d$
$\therefore f(a)=b,\ f(b)=c,\ f(c)=d,\ f(d)=e$
$\therefore (f\circ f\circ f)(a)=f(f(f(a)))=f(f(b))=f(c)=d$

106

정의역이 $\{x\,|\,0\le x\le 4\}$인 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f^{-1})(3)$의 값을 구하시오. 1



$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f^{-1})(3)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f^{-1})(3)=(g^{-1}\circ f^{-1})(3)$
$=g^{-1}(f^{-1}(3))$
이때 $f^{-1}(3)=k$라 하면 $f(k)=3$ $\quad\therefore k=1$
$g^{-1}(f^{-1}(3))=g^{-1}(1)$
이때 $g^{-1}(1)=l$이라 하면 $g(l)=1$ $\quad\therefore l=1$

유형 20 역함수의 그래프의 성질

중요

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
① 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
② 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(a,\ b)$를 지난다.
➡ 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(b,\ a)$를 지난다.
➡ $f(a)=b \Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

풍쌤 Point 역함수의 그래프 문제에서는 반드시 직선 $y=x$도 함께 생각한다. 직선 $y=x$를 이용하기 어려울 때는 $f(a)=b \Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$를 이용한다.

107

함수 $f(x)=ax+b$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 모두 점 $(3,\ -1)$을 지날 때, $f(-3)$의 값을 구하시오. (단, $a\neq0$이고, a, b는 상수이다.) 5

$f(3)=-1$, 즉 $3a+b=-1$ ······ ㉠
$f^{-1}(3)=-1$에서 $f(-1)=3$, 즉 $-a+b=3$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=2$
따라서 $f(x)=-x+2$이므로
$f(-3)=-(-3)+2=5$

108

점 $(2,\ 4)$를 지나는 일차함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$의 값을 구하시오. 7

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면
$f(2)=4$에서 $2a+b=4$ ······ ㉠
$f(4)=2$에서 $4a+b=2$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=6$
따라서 $f(x)=-x+6$이므로
$f(-1)=-(-1)+6=7$

109

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\ (x\ge0)$의 그래프와 그 역함수의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 점 사이의 거리는?

① 1 ✓② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{6}$

교점의 x좌표는
$\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}=x,\ x^2-3x+2=0,\ (x-1)(x-2)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$
따라서 두 교점의 좌표는 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$이므로 두 교점 사이의 거리는
$\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$

중단원 점검 문제

01

두 집합 $X=\{x|-1\le x\le 1\}$, $Y=\{y|0\le y\le 3\}$에 대하여 **보기**에서 X에서 Y로의 함수인 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(x)=x^2$　　ㄴ. $g(x)=2x+1$

ㄷ. $h(x)=\begin{cases} x-1 & (x\ge 0) \\ -x-1 & (x<0) \end{cases}$

√① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

ㄱ. $0\le f(x)\le 1$
ㄴ. $-1\le g(x)\le 3$
ㄷ. $-1<h(x)\le 0$

02

자연수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수 $f(x)$를

$f(x)=(x^2$을 3으로 나누었을 때의 나머지)

일 때, $f(x)$의 치역의 원소의 개수를 구하시오.　2

(i) $x=3k-2$ (k는 자연수)일 때, $x^2=3(3k^2-4k+1)+1$이므로 $f(x)=1$
(ii) $x=3k-1$ (k는 자연수)일 때, $x^2=3(3k^2-2k)+1$이므로 $f(x)=1$
(iii) $x=3k$ (k는 자연수)일 때, $x^2=9k^2=3\times 3k^2$이므로 $f(x)=0$
(i)~(iii)에서 함수 $f(x)$의 치역은 $\{0, 1\}$이므로 원소의 개수는 2이다.

03 학교 시험 기출

집합 $X=\{0, 1\}$을 정의역으로 하는 두 함수

$f(x)=|x+1|$, $g(x)=x^2+ax+b$

에 대하여 $f=g$일 때, $b-a$의 값을 구하시오.　1

(단, a, b는 상수이다.)

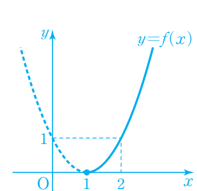
$f(0)=|0+1|=1$, $f(1)=|1+1|=2$
$g(0)=0+0+b=b$, $g(1)=1+a+b$
$f(0)=g(0)$에서 $b=1$
$f(1)=g(1)$에서 $1+a+b=2$, $1+a+1=2$　$\therefore a=0$
$\therefore b-a=1-0=1$

04

다음 중 집합 $X=\{x|x\ge 1\}$에서 집합 $Y=\{y|y$는 실수$\}$로의 함수 $f(x)=(x-1)^2$에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 일대일대응이다.
② 치역과 공역이 서로 같다.
③ 그래프는 오른쪽 아래로 향한다.
√④ $a\ge 1$, $b\ge 1$일 때, $f(a)=f(b)$이면 $a=b$이다.
⑤ 그래프는 직선 $y=k$ $(k>0)$와 두 점에서 만난다.

①, ②, ④ $a\ge 1$, $b\ge 1$일 때, $f(a)=f(b)$이면 $a=b$이므로 일대일함수이다. 그러나 치역과 공역이 같지 않으므로 일대일대응은 아니다.



05

집합 $X=\{x|x\ge a\}$에 대하여 X에서 X로의 함수

$f(x)=x^2-5x+5$

가 일대일대응이 되도록 하는 실수 a의 값을 구하시오.　5

$f(x)=x^2-5x+5=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$
$f(a)=a^2-5a+5=a$에서 $a^2-6a+5=0$
$(a-1)(a-5)=0$　$\therefore a=5$ $\left(\because a\ge\frac{5}{2}\right)$

06 교육청 기출

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 X에서 X로의 세 함수 f, g, h가 다음 조건을 만족시킨다. $g(3)+h(1)$의 값은?

(가) f는 항등함수이고 g는 상수함수이다.
(나) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여
$f(x)+g(x)+h(x)=7$
이다.

① 2　② 3　③ 4
④ 5　√⑤ 6

조건 (가)에서 $f(1)=1$
$g(x)=k$ ($k=1, 2, 3, 4, 5$)라 하면 $g(1)=g(3)=k$
조건 (나)에서 $f(1)+g(1)+h(1)=7$
$1+k+h(1)=7$　$\therefore h(1)=6-k$
$\therefore g(3)+h(1)=k+(6-k)=6$

07

집합 $X=\{0, 1, 2\}$에 대하여 X에서 X로의 세 함수 f, g, h가 각각 일대일대응, 항등함수, 상수함수이고

$f(0)=g(1)=h(2)$, $f(1)\times h(0)=g(2)$

일 때, $f(2)+g(0)+h(1)$의 값을 구하시오.　1

함수 g가 항등함수이므로 $g(0)=0$, $g(1)=1$, $g(2)=2$
$f(0)=g(1)=h(2)$에서 $f(0)=1$, $h(2)=1$
함수 h가 상수함수이므로 $h(0)=h(1)=h(2)=1$
$f(1)\times h(0)=g(2)$에서 $f(1)\times 1=2$　$\therefore f(1)=2$
함수 f가 일대일대응이므로 $f(2)=0$
$\therefore f(2)+g(0)+h(1)=0+0+1=1$

08 실전 Plus

두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 f는 X에서 Y로의 일대일함수이다. 함수 f 중에서 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)+x$의 값이 홀수가 되도록 하는 함수 f의 개수를 구하시오.　12

$f(x)+x$의 값이 홀수이려면
x가 홀수이면 $f(x)$는 짝수, x가 짝수이면 $f(x)$는 홀수이어야 한다.
(i) x가 홀수, 즉 1 또는 3일 때,
$f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2\times 1=2$
(ii) x가 짝수, 즉 2 또는 4일 때,
$f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 $3\times 2=6$
(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는
$2\times 6=12$

09

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g에 대하여

$$f(x)=-x+3,\ (g\circ f)(x)=2x-1$$

일 때, $g(3)+g(-4)$의 값을 구하시오. 12

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-x+3)=2x-1$ …… ㉠
에서 $-x+3=t$로 놓으면 $x=3-t$
이를 ㉠에 대입하면 $g(t)=2(3-t)-1=-2t+5$
따라서 $g(x)=-2x+5$이므로
$g(3)+g(-4)=-1+13=12$

10

자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & (x\text{는 짝수})\\ x+1 & (x\text{는 홀수})\end{cases}$$

이다. $f^1=f,\ f^{n+1}=f\circ f^n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때, $f^n(99)=1$을 만족시키는 n의 최솟값을 구하시오. 12

f를 한 번 합성할 때마다 x의 값이 짝수이면 2로 나누고, x의 값이 홀수이면 1을 더하면 된다.
즉, $99\to100\to50\to25\to26\to13\to14\to7\to8\to4\to2\to1\to2\to1\to2\to\cdots$
따라서 그 값이 처음으로 1이 되는 것은 $f^{12}(99)$이므로 구하는 n의 최솟값은 12이다.

11 교육청 기출

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f의 역함수가 존재하고

$$f(1)+2f(3)=12,\ f^{-1}(1)-f^{-1}(3)=2$$

일 때, $f(4)+f^{-1}(4)$의 값은?

① 5 ✓② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

$f(1)+2f(3)=12$에서 $f(1)=2,\ f(3)=5$ …… ㉠
f가 일대일대응이면 f^{-1}도 일대일대응이고 ㉠에 의하여 $f^{-1}(2)=1,\ f^{-1}(5)=3$이므로 $f^{-1}(1),\ f^{-1}(3)$은 1, 3을 제외한 함숫값을 가져야 한다.
$f^{-1}(1)-f^{-1}(3)=2$이므로 $f^{-1}(1)=4,\ f^{-1}(3)=2$
$\therefore f(4)=1,\ f(2)=3$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $f(5)=4,\ f^{-1}(4)=5$ $\therefore f(4)+f^{-1}(4)=1+5=6$

12

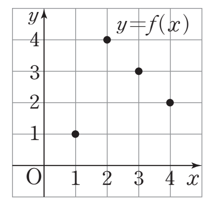
실수 전체의 집합에서 정의된 다음 함수 f 중 $f=f^{-1}$를 만족시키는 것은?

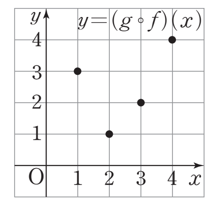
① $f(x)=-2x$ ✓② $f(x)=-x-2$
③ $f(x)=x+1$ ④ $f(x)=\dfrac{1}{2}x+2$
⑤ $f(x)=3x$

① $f^{-1}(x)=-\dfrac{1}{2}x$
② $f^{-1}(x)=-x-2$
③ $f^{-1}(x)=x-1$
④ $f^{-1}(x)=2x-4$
⑤ $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}x$

13 실전 Plus

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 X에서 X로의 두 함수 f, g가 있다. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $g(4)+(g^{-1}\circ f^{-1})(4)$의 값은?





① 3 ✓② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

$y=f(x)$의 그래프에 의하여 $f(4)=2$ $\therefore f^{-1}(4)=2$
$y=(g\circ f)(x)$의 그래프에 의하여
$g(f(1))=g(1)=3,\ g(f(2))=g(4)=1,\ g(f(3))=g(3)=2,\ g(f(4))=g(2)=4$
즉, $g^{-1}(2)=3$이므로 $(g^{-1}\circ f^{-1})(4)=g^{-1}(f^{-1}(4))=g^{-1}(2)=3$
$\therefore g(4)+(g^{-1}\circ f^{-1})(4)=1+3=4$

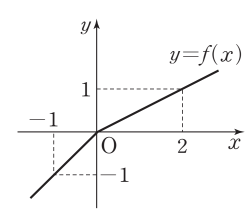
14 학교 시험 기출

두 함수 $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+5 & (x\ge2)\\ x-1 & (x<2)\end{cases}$, $g(x)=-2x+3$에 대하여 $(g^{-1}\circ(f\circ g^{-1})^{-1})(2)$의 값을 구하시오. 3

$(g^{-1}\circ(f\circ g^{-1})^{-1})(2)=(g^{-1}\circ g\circ f^{-1})(2)=f^{-1}(2)$
$f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2\ge1$이므로 $k\ge2$이고
$k^2-4k+5=2,\ k^2-4k+3=0$
$\therefore k=3\ (\because k\ge2)$

15

함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

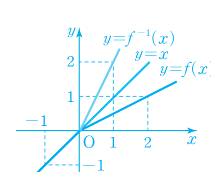


보기

ㄱ. $f^{-1}(1)=2$
ㄴ. $f(-1)=f^{-1}(-1)$
ㄷ. $f(-1)=(f\circ f)(-1)$
ㄹ. $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 점 $(2,\ 1)$ 하나뿐이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄹ ✓③ ㄱ, ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x & (x\ge0)\\ x & (x<0)\end{cases}$
ㄹ. $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $x\le0$에서 일치하므로 교점은 무수히 많다.



01 유리식의 뜻과 계산

❶ 유리식

두 다항식 A, B $(B\neq0)$에 대하여 $\dfrac{A}{B}$ 꼴로 나타낸 식을 유리식이라 한다.

특히, B가 0이 아닌 상수이면 $\dfrac{A}{B}$는 다항식이 되므로 다항식도 유리식이다.

보기 $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{2x+1}{x-3}$, $\dfrac{x+3}{2}$, x^2+x는 모두 유리식이고, 이 중에서 $\dfrac{x+3}{2}$, x^2+x는 다항식이다.

❷ 유리식의 사칙연산

네 다항식 A, B, C, D $(B\neq0,\ D\neq0)$에 대하여

① 덧셈: $\dfrac{A}{B}+\dfrac{C}{D}=\dfrac{AD+BC}{BD}$　② 뺄셈: $\dfrac{A}{B}-\dfrac{C}{D}=\dfrac{AD-BC}{BD}$

③ 곱셈: $\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$

④ 나눗셈: $\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{D}{C}=\dfrac{AD}{BC}$ (단, $C\neq0$)

❸ 복잡한 유리식의 계산

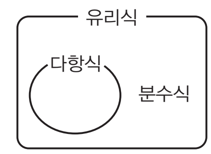
① (분자의 차수)$\geq$(분모의 차수)인 유리식

➡ 분자를 분모로 나누어 (분자의 차수)$<$(분모의 차수)가 되도록 변형한다.

② 분모가 두 인수의 곱인 유리식 ➡ 부분분수로 변형한다.

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\ (\text{단, } AB\neq0,\ A\neq B)$$

• 유리식 중에서 다항식이 아닌 유리식을 분수식이라 한다.



• 유리식의 덧셈과 곱셈에 대하여 교환법칙, 결합법칙이 성립한다.

• $\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$
$=\dfrac{1}{B-A}\times\dfrac{B-A}{AB}=\dfrac{1}{AB}$

개념 기본 문제

정답과 풀이 118쪽

001

보기에서 다음에 해당하는 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $\dfrac{3}{x}+3$　ㄴ. $\dfrac{2x-1}{3}$　ㄷ. $\dfrac{x}{x+2}$

ㄹ. $x^2+\dfrac{1}{x}$　ㅁ. $-x+1$　ㅂ. $4-\dfrac{x^2}{3}$

(1) 다항식　ㄴ, ㅁ, ㅂ

ㄴ. $\dfrac{2x-1}{3}=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}$이므로 다항식이다.

(2) 다항식이 아닌 유리식　ㄱ, ㄷ, ㄹ

002

다음 식을 계산하시오.

(1) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x+3}$　$\dfrac{3x+5}{(x-1)(x+3)}$

(2) $\dfrac{3}{2x-1}+\dfrac{1}{x+1}$　$\dfrac{5x+2}{(2x-1)(x+1)}$

(3) $\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{4}{2x+1}$　$\dfrac{2x-5}{(x+2)(2x+1)}$

$\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{4}{2x+1}=\dfrac{3(2x+1)-4(x+2)}{(x+2)(2x+1)}=\dfrac{2x-5}{(x+2)(2x+1)}$

(4) $\dfrac{2}{3x+1}-\dfrac{3}{2-x}$　$\dfrac{11x-1}{(3x+1)(x-2)}$

$\dfrac{2}{3x+1}-\dfrac{3}{2-x}=\dfrac{2(2-x)-3(3x+1)}{(3x+1)(2-x)}=\dfrac{11x-1}{(3x+1)(x-2)}$

정답과 풀이 118쪽

003

다음 식을 계산하시오.

(1) $\dfrac{x^2+x-6}{x+1}\times\dfrac{x^2-1}{x^2-9}$ $\quad\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-3}$

$$\frac{x^2+x-6}{x+1}\times\frac{x^2-1}{x^2-9}=\frac{(x+3)(x-2)}{x+1}\times\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-3)}$$
$$=\frac{(x-2)(x-1)}{x-3}$$

(2) $\dfrac{x+1}{x^2-2x-8}\times\dfrac{x^2-4x}{x^2-2x-3}$ $\quad\dfrac{x}{(x+2)(x-3)}$

$$\frac{x+1}{x^2-2x-8}\times\frac{x^2-4x}{x^2-2x-3}=\frac{x+1}{(x+2)(x-4)}\times\frac{x(x-4)}{(x+1)(x-3)}$$
$$=\frac{x}{(x+2)(x-3)}$$

(3) $\dfrac{x+2}{x^2}\div\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x}$ $\quad\dfrac{x+2}{x(x-2)}$

$$\frac{x+2}{x^2}\div\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}=\frac{x+2}{x^2}\div\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)}$$
$$=\frac{x+2}{x^2}\times\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x+2}{x(x-2)}$$

(4) $\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}\div\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x}$ $\quad\dfrac{x(x+2)}{(x-1)(x-2)}$

$$\frac{x^2-4}{x^2+x-6}\div\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x}=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-2)}\div\frac{(x-1)(x-2)}{x(x+3)}$$
$$=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-2)}\times\frac{x(x+3)}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\frac{x(x+2)}{(x-1)(x-2)}$$

004

다음 식을 계산하시오.

(1) $\dfrac{1}{x^2+3x}+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{x}$ $\quad\dfrac{-x-5}{x(x+3)}$

$$\frac{1}{x^2+3x}+\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x}=\frac{1}{x(x+3)}+\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x}$$
$$=\frac{1+x-2(x+3)}{x(x+3)}=\frac{-x-5}{x(x+3)}$$

(2) $\dfrac{x-1}{x^2-4x+3}-\dfrac{2}{x^2-x}+\dfrac{4}{x-3}$ $\quad\dfrac{5x^2-7x+6}{x(x-1)(x-3)}$

$$\frac{x-1}{x^2-4x+3}-\frac{2}{x^2-x}+\frac{4}{x-3}=\frac{x-1}{(x-1)(x-3)}-\frac{2}{x(x-1)}+\frac{4}{x-3}$$
$$=\frac{x(x-1)-2(x-3)+4x(x-1)}{x(x-1)(x-3)}$$
$$=\frac{5x^2-7x+6}{x(x-1)(x-3)}$$

(3) $\dfrac{x^2+x}{x+2}\div\dfrac{x^2}{x^2+x-2}\times\dfrac{x^2+3x}{x^2-3x+2}$ $\quad\dfrac{(x+1)(x+3)}{x-2}$

$$\frac{x^2+x}{x+2}\div\frac{x^2}{x^2+x-2}\times\frac{x^2+3x}{x^2-3x+2}$$
$$=\frac{x(x+1)}{x+2}\times\frac{(x+2)(x-1)}{x^2}\times\frac{x(x+3)}{(x-1)(x-2)}=\frac{(x+1)(x+3)}{x-2}$$

(4) $\dfrac{3}{2x-1}\times\dfrac{4x^2-1}{4x+3}-\dfrac{x^2+2x}{x^2-2x}\div\dfrac{4x+3}{x-2}$ $\quad\dfrac{5x+1}{4x+3}$

$$\frac{3}{2x-1}\times\frac{4x^2-1}{4x+3}-\frac{x^2+2x}{x^2-2x}\div\frac{4x+3}{x-2}$$
$$=\frac{3}{2x-1}\times\frac{(2x+1)(2x-1)}{4x+3}-\frac{x(x+2)}{x(x-2)}\times\frac{x-2}{4x+3}$$
$$=\frac{3(2x+1)}{4x+3}-\frac{x+2}{4x+3}=\frac{5x+1}{4x+3}$$

005

다음 식을 계산하시오.

(1) $\dfrac{2x-1}{x}+\dfrac{-2x+5}{x+1}$ $\quad\dfrac{6x-1}{x(x+1)}$

$$\frac{2x-1}{x}+\frac{-2x+5}{x+1}=\left(\boxed{2}-\frac{1}{x}\right)+\left(-2+\frac{\boxed{7}}{x+1}\right)$$
$$=-\frac{1}{x}+\frac{7}{x+1}$$
$$=\frac{\boxed{6x-1}}{x(x+1)}$$

(2) $\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+6}{x+5}$ $\quad\dfrac{4}{(x+1)(x+5)}$

$$\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+6}{x+5}=\left(1+\frac{1}{x+1}\right)-\left(1+\frac{1}{x+5}\right)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+5}$$
$$=\frac{x+5-(x+1)}{(x+1)(x+5)}=\frac{4}{(x+1)(x+5)}$$

(3) $\dfrac{3x+1}{x-1}+\dfrac{-3x+1}{x+2}$ $\quad\dfrac{11x+1}{(x-1)(x+2)}$

$$\frac{3x+1}{x-1}+\frac{-3x+1}{x+2}=\left(3+\frac{4}{x-1}\right)+\left(-3+\frac{7}{x+2}\right)=\frac{4}{x-1}+\frac{7}{x+2}$$
$$=\frac{4(x+2)+7(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{11x+1}{(x-1)(x+2)}$$

(4) $\dfrac{x^2+x+2}{x+1}-\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ $\quad\dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)}$

$$\frac{x^2+x+2}{x+1}-\frac{x^2-x+1}{x-1}=\left(x+\frac{2}{x+1}\right)-\left(x+\frac{1}{x-1}\right)=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-1}$$
$$=\frac{2(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-3}{(x+1)(x-1)}$$

006

다음 식을 부분분수로 변형하시오.

(1) $\dfrac{1}{x(x+1)}$ $\quad\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{(\boxed{x+1})-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\boxed{x+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

(2) $\dfrac{1}{x(x+2)}$ $\quad\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$$\frac{1}{x(x+2)}=\frac{1}{(x+2)-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)$$

(3) $\dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$ $\quad\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}$

$$\frac{3}{(x-1)(x+2)}=\frac{3}{(x+2)-(x-1)}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

(4) $\dfrac{8}{(2x-1)(2x+1)}$ $\quad 4\left(\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{2x+1}\right)$

$$\frac{8}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{8}{(2x+1)-(2x-1)}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)$$
$$=4\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)$$

유형 실전 문제

정답과 풀이 119쪽

유형 01 유리식의 사칙연산

네 다항식 A, B, C, D $(B\neq0, D\neq0)$에 대하여

① $\dfrac{A}{B}\pm\dfrac{C}{D}=\dfrac{AD\pm BC}{BD}$ (복호동순)

② $\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$

③ $\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{D}{C}=\dfrac{AD}{BC}$ (단, $C\neq0$)

풍쌤 Point 덧셈, 뺄셈에서는 통분을 잘하고, 곱셈, 나눗셈에서는 약분을 잘하면 수의 계산과 크게 다르지 않다.

007

$\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+x}+\dfrac{3}{x^2-2x}$을 계산하면?

① $\dfrac{3}{x(x+1)(x-2)}$ ② $\dfrac{x+3}{x(x+1)(x-2)}$

③ $\dfrac{x^2-x+7}{x(x+1)(x-2)}$ ④ $\dfrac{x^2+x+1}{x(x+1)(x-2)}$

⑤ $\dfrac{x^2+2x}{x(x+1)(x-2)}$

$\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+x}+\dfrac{3}{x^2-2x}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x(x+1)}+\dfrac{3}{x(x-2)}$

$=\dfrac{x(x-2)-2(x-2)+3(x+1)}{x(x+1)(x-2)}$

$=\dfrac{x^2-x+7}{x(x+1)(x-2)}$

008

$\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^2+x}$을 계산한 결과가 $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x(x+1)(x-2)}$일 때, $a+b+c+d$의 값을 구하시오. (단, a, b, c, d는 상수이다.) 4

$\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^2+x}=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x(x+1)}$

$=\dfrac{x(x+1)+x(x-2)-3(x-2)}{x(x+1)(x-2)}$

$=\dfrac{2x^2-4x+6}{x(x+1)(x-2)}$

따라서 $a=0$, $b=2$, $c=-4$, $d=6$이므로 $a+b+c+d=0+2-4+6=4$

009

$A\div\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+2x}\times\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+3x}=2x+1$일 때, 유리식 A를 구하시오. $\dfrac{(x+3)(x+4)}{x+2}$

(좌변)$=A\times\dfrac{x(x+2)}{(x+4)(x-1)}\times\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x(x+3)}=A\times\dfrac{(x+2)(2x+1)}{(x+3)(x+4)}$

$\therefore A=(2x+1)\times\dfrac{(x+3)(x+4)}{(x+2)(2x+1)}=\dfrac{(x+3)(x+4)}{x+2}$

유형 02 유리식과 항등식 중요

유리식으로 이루어진 항등식

➡ 양변의 분모를 같은 식으로 고친 후, 분자의 동류항의 계수를 비교한다.

풍쌤 Point 유리식으로 이루어진 항등식의 양변의 분모를 같은 식으로 고치는 핵심은 통분이다.

010

$x\neq1$, $x\neq2$인 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}=\frac{5x-7}{x^2-3x+2}$$

이 성립할 때, $10a+b$의 값을 구하시오. 23

(단, a, b는 상수이다.)

(좌변)$=\dfrac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{(a+b)x-(2a+b)}{x^2-3x+2}$

양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$a+b=5$, $2a+b=7$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

$\therefore 10a+b=23$

011

$x\neq0$, $x\neq1$, $x\neq-2$인 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-x}\times\frac{x^2+4x}{x+2}=\frac{x^2+ax+b}{x+c}$$

가 성립할 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

① 19 ② 21 ③ 23

④ 25 ⑤ 27

(좌변)$=\dfrac{(x-1)(x+3)}{x(x-1)}\times\dfrac{x(x+4)}{x+2}=\dfrac{(x+3)(x+4)}{x+2}=\dfrac{x^2+7x+12}{x+2}$

양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$a=7$, $b=12$, $c=2$

$\therefore a+b+c=7+12+2=21$

012

$x\neq1$인 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{3x^2+4x+c}{x^3-1}=\frac{ax+3}{x^2+x+1}+\frac{b}{x-1}$$

가 성립할 때, abc의 값을 구하시오. -2

(단, a, b, c는 상수이다.)

(우변)$=\dfrac{(ax+3)(x-1)+b(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x-1)}=\dfrac{(a+b)x^2+(3-a+b)x+b-3}{x^3-1}$

양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$3=a+b$ …… ㉠

$4=3-a+b$ …… ㉡

$c=b-3$ …… ㉢

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

$b=2$를 ㉢에 대입하면 $c=-1$

$\therefore abc=1\times2\times(-1)=-2$

유형 실전 문제

정답과 풀이 120쪽

유형 03 (분자의 차수)≥(분모의 차수)인 유리식

(분자의 차수)≥(분모의 차수)인 유리식
➡ 분자를 분모로 나누어 (분자의 차수)<(분모의 차수)가 되도록 변형한다.

풍쌤 Point 분자를 분모로 나누어 (몫)$+\dfrac{(\text{나머지})}{(\text{분모})}$ 꼴로 변형하여 계산한다.

013

$\dfrac{2x+5}{x+2}-\dfrac{2x^2-2x-7}{x^2-x-6}$을 계산하면?

√① $\dfrac{x-8}{(x+2)(x-3)}$ ② $\dfrac{x-7}{(x+2)(x-3)}$
③ $\dfrac{x-6}{(x+2)(x-3)}$ ④ $\dfrac{x-5}{(x+2)(x+3)}$
⑤ $\dfrac{x-4}{(x+2)(x+3)}$

$\dfrac{2x+5}{x+2}-\dfrac{2x^2-2x-7}{x^2-x-6}=\dfrac{2(x+2)+1}{x+2}-\dfrac{2(x+2)(x-3)+5}{(x+2)(x-3)}$
$=\left(2+\dfrac{1}{x+2}\right)-\left\{2+\dfrac{5}{(x+2)(x-3)}\right\}$
$=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{5}{(x+2)(x-3)}$
$=\dfrac{(x-3)-5}{(x+2)(x-3)}=\dfrac{x-8}{(x+2)(x-3)}$

014

$2x-\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{x^2}{x-1}$을 계산한 결과가 $\dfrac{f(x)}{x^2-1}$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. 4

$2x-\dfrac{(x-1)(x+1)+1}{x+1}-\dfrac{(x-1)(x+1)+1}{x-1}$
$=2x-\left(x-1+\dfrac{1}{x+1}\right)-\left(x+1+\dfrac{1}{x-1}\right)=-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$
$=\dfrac{-2x}{(x+1)(x-1)}$
따라서 $f(x)=-2x$이므로 $f(-2)=-2\times(-2)=4$

015

분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{x+1}{x}-\frac{x+3}{x+2}-\frac{x-4}{x-3}+\frac{x-6}{x-5}=\frac{ax+b}{x(x+2)(x-3)(x-5)}$$

가 성립할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 √⑤ 10

(좌변)$=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)-\left(1-\dfrac{1}{x-3}\right)+\left(1-\dfrac{1}{x-5}\right)$
$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{2}{x(x+2)}-\dfrac{2}{(x-3)(x-5)}$
$=\dfrac{2\{(x-3)(x-5)-x(x+2)\}}{x(x+2)(x-3)(x-5)}=\dfrac{-20x+30}{x(x+2)(x-3)(x-5)}$
따라서 $a=-20$, $b=30$이므로 $a+b=-20+30=10$

유형 04 분모가 두 인수의 곱인 유리식 중요★

분모가 두 인수의 곱인 유리식은 부분분수로 변형한다.
➡ $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ (단, $AB\neq0$, $A\neq B$)

풍쌤 Point 부분분수로 변형하여 계산하면 연쇄적으로 소거되어 계산이 간단해진다.

016

분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{a}{x(x+b)}$$

가 성립할 때, $a+b$의 값을 구하시오. 6
(단, a, b는 자연수이다.)

(좌변)$=\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$
$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}$
$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{(x+3)-x}{x(x+3)}$
$=\dfrac{3}{x(x+3)}$
따라서 $a=3$, $b=3$이므로 $a+b=3+3=6$

017

분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{2}{x^2+6x+8}+\frac{3}{x^2+11x+28}=\frac{a}{(x+b)(x+c)}$$

가 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. 14
(단, a, b, c는 상수이다.)

(좌변)$=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{2}{(x+2)(x+4)}+\dfrac{3}{(x+4)(x+7)}$
$=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+7}$
$=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+7}=\dfrac{6}{(x+1)(x+7)}$
따라서 $a=6$, $b=1$, $c=7$이므로 $a+b+c=6+1+7=14$

018

3보다 큰 자연수 x에 대하여

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{x(x+2)}=\frac{7}{15}$$

을 만족시키는 x의 값을 구하시오. 13

(좌변)$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)$
$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{x+2}\right)=\dfrac{x+1}{2(x+2)}$
따라서 $\dfrac{x+1}{2(x+2)}=\dfrac{7}{15}$에서 $15x+15=14x+28$
$\therefore x=13$

02 유리함수

❶ 유리함수

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 유리식일 때, 이 함수를 **유리함수**라 한다. 특히, $f(x)$가 x에 대한 다항식일 때, 이 함수를 **다항함수**라 한다.

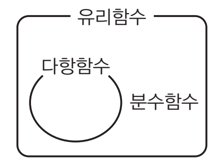
보기 $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{2x+1}{x-3}$, $y=\frac{x+3}{2}$은 모두 유리함수이고, 이 중에서 $y=\frac{x+3}{2}$은 다항함수이다.

❷ 유리함수의 정의역

다항함수가 아닌 유리함수에서 정의역이 주어지지 않을 때는 분모가 0이 되지 않도록 하는 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

보기 유리함수 $y=\frac{1}{x}$의 정의역은 $\{x \mid x\neq0$인 실수$\}$이고, 유리함수 $y=\frac{2x+1}{x-3}$의 정의역은 $\{x \mid x\neq3$인 실수$\}$이다.

• 유리함수 중에서 다항함수가 아닌 유리함수를 분수함수라 한다.



• 다항함수의 정의역은 $\{x \mid x$는 실수$\}$이다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 121쪽

019

보기에서 다음에 해당하는 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $y=1+\frac{1}{x}$ ㄴ. $y=\frac{x+3}{4}$

ㄷ. $y=\frac{1}{x^2+x}$ ㄹ. $y=3x+\frac{1}{5}$

ㅁ. $y=\frac{x^2+1}{x+1}$ ㅂ. $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$

(1) 다항함수 ㄴ, ㄹ

ㄴ. $y=\frac{x+3}{4}=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$이므로 다항함수이다.

(2) 다항함수가 아닌 유리함수 ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ

020

다음 유리함수의 정의역을 구하시오.

(1) $y=-\frac{1}{x+3}$ $\{x \mid x\neq-3$인 실수$\}$

(2) $y=\frac{x+1}{3x-1}$ $\left\{x \,\middle|\, x\neq\frac{1}{3}\text{인 실수}\right\}$

(3) $y=\frac{1-4x}{3}$ $\{x \mid x$는 실수$\}$

(4) $y=-\frac{1}{x^2}$ $\{x \mid x\neq0$인 실수$\}$

(5) $y=\frac{2x}{x^2+1}$ $\{x \mid x$는 실수$\}$

$x^2\geq0$에서 $x^2+1>0$이므로 주어진 함수의 분모가 0이 되게 하는 x는 없다.
즉, 유리함수 $y=\frac{2x}{x^2+1}$의 정의역은 $\{x \mid x$는 실수$\}$

03 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프

1 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq0)$의 그래프

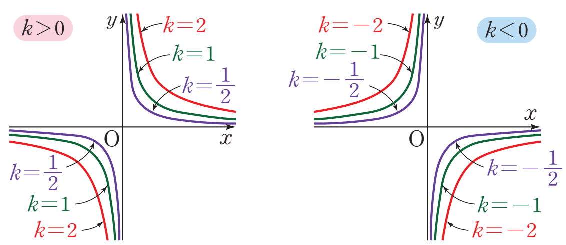
① 정의역과 치역은 모두 0을 제외한 실수 전체의 집합이다.

② $k>0$이면 그래프는 제1사분면과 제3사분면에 있고,
$k<0$이면 그래프는 제2사분면과 제4사분면에 있다.

③ 원점 및 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 대칭이다.

④ 점근선은 x축과 y축이다.

⑤ $|k|$의 값이 커질수록 그래프는 원점에서 멀어진다.



• **점근선**
곡선 위의 점이 어떤 직선에 한없이 가까워질 때, 이 직선을 그 곡선의 점근선이라 한다.

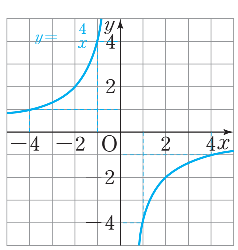
개념 기본 문제

정답과 풀이 121쪽

021

함수 $y=-\dfrac{4}{x}$에 대하여 다음 물음에 답하고, □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 좌표평면에 주어진 함수의 그래프를 그리시오.



(2) 정의역은 $\{x\,|\,\boxed{x\neq0}$인 실수$\}$이고
치역은 $\{y\,|\,\boxed{y\neq0}$인 실수$\}$이다.

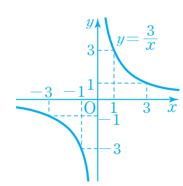
(3) 그래프가 지나는 사분면은 제$\boxed{2}$사분면과 제$\boxed{4}$사분면이다.

(4) 점근선의 방정식은 $x=\boxed{0}$, $y=\boxed{0}$이다.

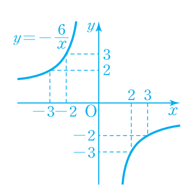
022

다음 함수의 그래프를 그리시오.

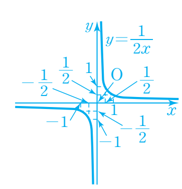
(1) $y=\dfrac{3}{x}$



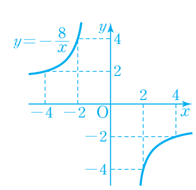
(2) $y=-\dfrac{6}{x}$



(3) $y=\dfrac{1}{2x}$



(4) $y=-\dfrac{8}{x}$

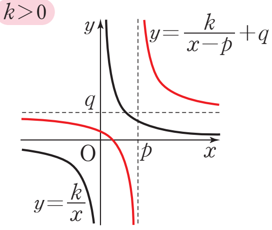


04 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프

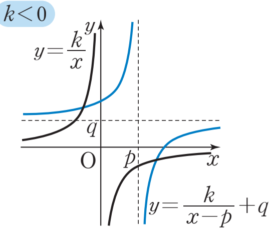
❶ 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프

① 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
② 정의역은 $\{x\,|\,x\neq p$인 실수$\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\neq q$인 실수$\}$이다.
③ 점근선은 두 직선 $x=p$, $y=q$이다.
④ 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다. → 두 점근선의 교점
⑤ 점 $(p,\ q)$를 지나고 기울기가 ±1인 두 직선에 대하여 대칭이다. → $y=(x-p)+q$, $y=-(x-p)+q$
⑥ $|k|$의 값이 커질수록 그래프는 점 $(p,\ q)$에서 멀어진다.

$k>0$



$k<0$



- 유리함수의 그래프가 평행이동한만큼 점근선도 평행이동한다.
- $|k|$의 값이 서로 같으면 p, q의 값에 관계없이 평행이동이나 대칭이동에 의하여 그 그래프가 서로 겹쳐질 수 있다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 121쪽

023

다음 함수의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식을 구하시오.

(1) $y=\dfrac{1}{x}$ $y=\dfrac{1}{x-3}+1$ [$p=3,\ q=1$]

(2) $y=\dfrac{3}{x}$ $y=\dfrac{3}{x+1}+2$ [$p=-1,\ q=2$]

(3) $y=-\dfrac{2}{x}$ $y=-\dfrac{2}{x-2}-3$ [$p=2,\ q=-3$]

(4) $y=-\dfrac{6}{x}$ $y=-\dfrac{6}{x+3}-2$ [$p=-3,\ q=-2$]

024

함수 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식이 다음과 같을 때, p, q의 값을 구하시오.

(1) $y=-\dfrac{2}{x+2}+5$ $p=-2,\ q=5$

(2) $y=-\dfrac{2}{x-3}+1$ $p=3,\ q=1$

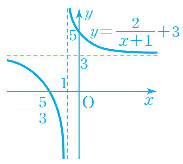
(3) $y=-\dfrac{2}{x+1}-7$ $p=-1,\ q=-7$

(4) $y=-\dfrac{2}{x-4}-3$ $p=4,\ q=-3$

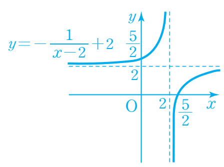
025

다음 함수의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구하시오.

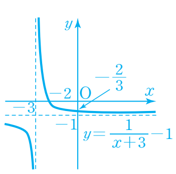
(1) $y=\dfrac{2}{x+1}+3$ 점근선의 방정식: $x=-1$, $y=3$



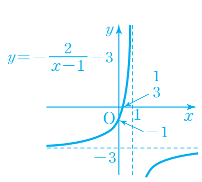
(2) $y=-\dfrac{1}{x-2}+2$ 점근선의 방정식: $x=2$, $y=2$



(3) $y=\dfrac{1}{x+3}-1$ 점근선의 방정식: $x=-3$, $y=-1$



(4) $y=-\dfrac{2}{x-1}-3$ 점근선의 방정식: $x=1$, $y=-3$



026

다음 중 함수 $y=-\dfrac{5}{x+3}-2$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은 ○를, 옳지 않은 것은 ×를 (　　) 안에 써넣으시오.

(1) $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프를 평행이동한 것이다. (×)

함수 $y=-\dfrac{5}{x+3}-2$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

(2) 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 3$인 실수$\}$이다. (×)

정의역은 $\{x\,|\,x\neq -3$인 실수$\}$이다.

(3) 치역은 $\{y\,|\,y\neq -2$인 실수$\}$이다. (○)

(4) 점근선의 방정식은 $x=-3$, $y=-2$이다. (○)

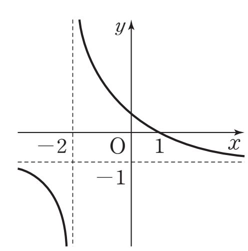
(5) 그래프는 점 $(3,\ -2)$에 대하여 대칭이다. (×)

그래프는 점 $(-3,\ -2)$에 대하여 대칭이다.

(6) 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다. (○)

027

다음은 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 k, p, q의 값을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.



주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=\boxed{-2}$, $y=-1$이므로

$p=-2$, $q=\boxed{-1}$

즉, 함수 $y=\dfrac{k}{x+\boxed{2}}-1$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{1+2}-1$

$\therefore\ k=\boxed{3}$

05 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프

❶ 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0,\ c\neq 0)$의 그래프

① 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0,\ c\neq 0)$의 그래프는
$y=\dfrac{k}{x-p}+q$ $(k\neq 0)$ 꼴로 변형하여 그린다.

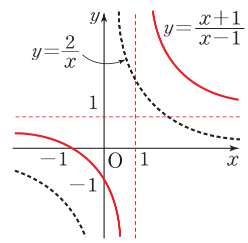
② 점근선은 두 직선 $x=-\dfrac{d}{c}$, $y=\dfrac{a}{c}$이다.

③ 점 $\left(-\dfrac{d}{c},\ \dfrac{a}{c}\right)$에 대하여 대칭이다.

보기 유리함수 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$에서

$y=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1$

즉, 유리함수 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$의 그래프는 유리함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



풍쌤 Tip $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형할 때 분자를 분모로 나누어 $\dfrac{(\text{나머지})}{(\text{분모})}+(\text{몫})$ 꼴로 나타낸다.

• 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$에서 점근선의 방정식은

① (분모)$=cx+d=0$ ➡ $x=-\dfrac{d}{c}$

② $y=$(분모, 분자의 x의 계수의 비)

➡ $y=\dfrac{a}{c}$

개념 기본 문제

정답과 풀이 122쪽

028

다음 함수를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ $(k\neq 0)$ 꼴로 변형하시오.

(1) $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ $\quad y=\dfrac{3}{x-2}+1$

$y=\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{(x-2)+3}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}+1$

(2) $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ $\quad y=\dfrac{1}{x+1}+2$

$y=\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+2$

(3) $y=\dfrac{3-x}{x+2}$ $\quad y=\dfrac{5}{x+2}-1$

$y=\dfrac{3-x}{x+2}=\dfrac{-(x+2)+5}{x+2}=\dfrac{5}{x+2}-1$

(4) $y=-\dfrac{3x+2}{x-1}$ $\quad y=-\dfrac{5}{x-1}-3$

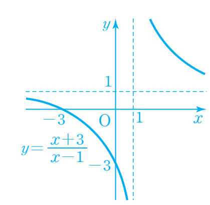
$y=-\dfrac{3x+2}{x-1}=\dfrac{-3x-2}{x-1}=\dfrac{-3(x-1)-5}{x-1}=-\dfrac{5}{x-1}-3$

029

다음 함수의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구하시오.

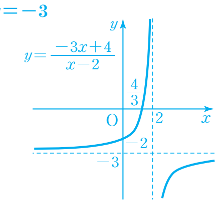
(1) $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ $\quad$ 점근선의 방정식: $x=1$, $y=1$

$y=\dfrac{x+3}{x-1}=\dfrac{(x-1)+4}{x-1}=\dfrac{4}{x-1}+1$



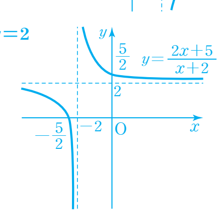
(2) $y=\dfrac{-3x+4}{x-2}$ $\quad$ 점근선의 방정식: $x=2$, $y=-3$

$y=\dfrac{-3x+4}{x-2}=\dfrac{-3(x-2)-2}{x-2}=-\dfrac{2}{x-2}-3$



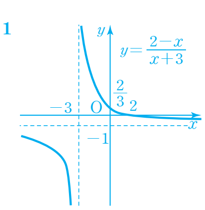
(3) $y=\dfrac{2x+5}{x+2}$ $\quad$ 점근선의 방정식: $x=-2$, $y=2$

$y=\dfrac{2x+5}{x+2}=\dfrac{2(x+2)+1}{x+2}=\dfrac{1}{x+2}+2$



(4) $y=\dfrac{2-x}{x+3}$ $\quad$ 점근선의 방정식: $x=-3$, $y=-1$

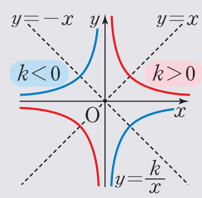
$y=\dfrac{2-x}{x+3}=\dfrac{-(x+3)+5}{x+3}=\dfrac{5}{x+3}-1$



유형 실전 문제

유형 05 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프

① 정의역과 치역은 모두 0을 제외한 실수 전체의 집합이다.
② 원점 및 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 대칭이다.
③ 점근선은 x축과 y축이다.
④ $|k|$의 값이 커질수록 그래프는 원점에서 멀어진다.



풍쌤 Point k의 값의 부호에 따라 그래프가 그려질 사분면을 정하고 그래프가 지나는 점을 이용해 그래프부터 그려 보자.

030

보기의 함수 중 그 그래프가 제1사분면, 제3사분면을 지나는 것만을 있는 대로 고르시오. ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

보기

ㄱ. $y=\frac{2}{x}$ ㄴ. $y=-\frac{3}{x}$ ㄷ. $y=\frac{1}{3x}$
ㄹ. $y=\frac{6}{x}$ ㅁ. $y=\frac{3}{4x}$ ㅂ. $y=-\frac{2}{5x}$

031

다음 중 함수 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$의 그래프에 대한 설명으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 정의역은 0이 아닌 실수 전체의 집합이다.
② 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
③ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0$, $y=0$이다.
√④ $k<0$이면 그래프는 제1사분면, 제3사분면을 지난다.
⑤ $|k|$의 값이 커질수록 그래프는 원점으로부터 멀어진다.

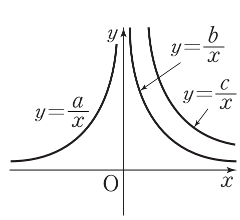
④ $k>0$이면 그래프는 제1사분면, 제3사분면을 지나고
$k<0$이면 그래프는 제2사분면, 제4사분면을 지난다.

032

오른쪽 그림은 세 유리함수

$$y=\frac{a}{x},\ y=\frac{b}{x},\ y=\frac{c}{x}$$

의 그래프의 일부를 나타낸 것이다. 세 상수 a, b, c 사이의 대소 관계로 옳은 것은?



√① $a<b<c$ ② $a<c<b$ ③ $b<a<c$
④ $c<a<b$ ⑤ $b<a<c$

$a<0$, $b>0$, $c>0$ $\therefore a<b$, $a<c$
또, $b>0$, $c>0$이고 함수 $y=\frac{c}{x}$의 그래프가 원점에서 더 멀리 떨어져 있으므로 $c>b$
$\therefore a<b<c$

유형 06 유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프

① 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
② 점근선은 두 직선 $x=p$, $y=q$이다.

풍쌤 Point 일단 점근선부터 그리자. 점근선을 좌표축으로 보고 k의 값의 부호에 따라 그래프가 그려질 사분면을 선택하면 된다.

033

함수 $y=\frac{3}{x+a}+4$의 정의역이 $\{x|x\neq-5인\ 실수\}$이고 치역이 $\{y|y\neq b인\ 실수\}$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. 20

함수 $y=\frac{3}{x+a}+4$의 정의역은 $\{x|x\neq-a인\ 실수\}$이고 치역은 $\{y|y\neq4인\ 실수\}$이므로 $a=5$, $b=4$
$\therefore ab=5\times4=20$

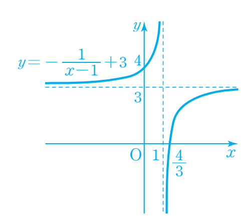
034

보기에서 함수 $y=-\frac{1}{x-1}+3$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. ㄱ, ㄷ, ㄹ

보기

ㄱ. 그래프는 점 (2, 2)를 지난다.
ㄴ. 치역은 $\{y|y\neq1인\ 실수\}$이다.
ㄷ. 직선 $y=3$은 그래프의 점근선 중 하나이다.
ㄹ. 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다.

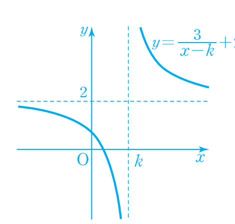
ㄴ. 정의역은 $\{x|x\neq1인\ 실수\}$,
치역은 $\{y|y\neq3인\ 실수\}$이다.



035

함수 $y=\frac{3}{x-k}+2$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않을 때, 자연수 k의 최솟값을 구하시오. 2

그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로
$y=\frac{3}{0-k}+2\geq0$, $\frac{3}{k}\leq2$
$\therefore k\geq\frac{3}{2}$ $(\because k>0)$
따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.



유형 07 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프

➡ 유리함수의 식을 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형하여 그린다.

풍쌤 Point 분자를 분모로 나누어 $\dfrac{(\text{나머지})}{(\text{분모})}+(\text{몫})$ 꼴로 변형하고, 점근선과 그래프가 지나는 사분면 등을 파악한다.

036

함수 $y=\dfrac{ax+2}{x+b}$의 정의역이 $\{x\,|\,x\neq-2$인 실수$\}$이고 치역이 $\{y\,|\,y\neq3$인 실수$\}$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 5

$y=\dfrac{ax+2}{x+b}=\dfrac{a(x+b)+2-ab}{x+b}=\dfrac{2-ab}{x+b}+a$

즉, 함수 $y=\dfrac{ax+2}{x+b}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq-b$인 실수$\}$이고

치역은 $\{y\,|\,y\neq a$인 실수$\}$이므로

$-b=-2$, $a=3$ $\quad\therefore a=3$, $b=2$

$\therefore a+b=3+2=5$

037

다음 중 함수 $y=\dfrac{5-3x}{x-2}$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

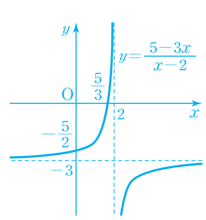
① 치역은 $\{y\,|\,y\neq2$인 실수$\}$이다.
② $x>2$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
√③ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=-3$이다.
④ 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 2이다.
√⑤ 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.

$y=\dfrac{5-3x}{x-2}=\dfrac{-3(x-2)-1}{x-2}=-\dfrac{1}{x-2}-3$

① 치역은 $\{y\,|\,y\neq-3$인 실수$\}$이다.

② $x\neq2$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

④ 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $\dfrac{5}{3}$이다.



038

함수 $y=\dfrac{-x-k+3}{x-2}$의 그래프가 모든 사분면을 지나도록 하는 자연수 k의 최솟값을 구하시오. (단, $k>1$) 4

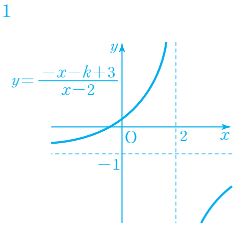
$y=\dfrac{-x-k+3}{x-2}=\dfrac{-(x-2)-k+1}{x-2}=\dfrac{-k+1}{x-2}-1$

그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$y=\dfrac{-k+3}{-2}>0$, $-k+3<0$

$\therefore k>3$

따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 4이다.



유형 08 유리함수의 그래프의 평행이동 중요

유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프

➡ 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

풍쌤 Point 유리함수의 식을 모두 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형하여 k의 값을 비교한다. 이때 k의 값이 같으면 평행이동에 의하여 두 그래프를 겹칠 수 있다.

039

함수 $y=\dfrac{2x+7}{x+3}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다. 이때 $k-m+n$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① -2 ② 2 ③ 4
√④ 6 ⑤ 8

$y=\dfrac{2x+7}{x+3}=\dfrac{2(x+3)+1}{x+3}=\dfrac{1}{x+3}+2$

이므로

$k=1$, $m=-3$, $n=2$

$\therefore k-m+n=1-(-3)+2=6$

040

함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프가 점 $(-1,\ 5)$를 지날 때, 상수 k의 값을 구하시오. 2

$y=\dfrac{k}{x-(-2)}+3 \quad\therefore y=\dfrac{k}{x+2}+3$

이 그래프가 점 $(-1,\ 5)$를 지나므로

$5=\dfrac{k}{-1+2}+3 \quad\therefore k=2$

041

함수 $y=-\dfrac{2}{x-2}+3$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지날 때, a의 값은?

√① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

$y=-\dfrac{2}{x-a-2}+3$

이 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$1=-\dfrac{2}{1-a-2}+3$

$\dfrac{2}{a+1}=-2$, $a+1=-1 \quad\therefore a=-2$

유형 실전 문제

042

함수 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 함수 $y=\frac{2x-1}{x+1}$의 그래프와 일치할 때, $m+n$의 값을 구하시오. 1

$y=\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2(x+1)-3}{x+1}=-\frac{3}{x+1}+2$
따라서 $m=-1$, $n=2$이므로
$m+n=-1+2=1$

043

함수 $y=\frac{a-2x}{x+b}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동하면 함수 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프와 일치할 때, $a+bc$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

✓① -2　② -1　③ 1
④ 2　⑤ 4

$y=\frac{a-2x}{x+b}=\frac{-2(x+b)+a+2b}{x+b}=\frac{a+2b}{x+b}-2$
즉, 함수 $y=\frac{a-2x}{x+b}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\frac{a+2b}{x-3+b}-2+c$
이 그래프가 함수 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프와 일치하므로
$a+2b=-2$, $-3+b=0$, $-2+c=0$　$\therefore a=-8$, $b=3$, $c=2$
$\therefore a+bc=-8+3\times2=-2$

044

보기의 함수 중 그 그래프가 평행이동에 의하여 함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것만을 있는 대로 고르시오. ㄱ, ㄷ, ㄹ

보기

ㄱ. $y=\frac{x+1}{x-2}$　ㄴ. $y=\frac{3x+3}{x+2}$
ㄷ. $y=\frac{-2x+9}{x-3}$　ㄹ. $y=\frac{x+7}{2x+2}$

ㄱ. $y=\frac{x+1}{x-2}=\frac{(x-2)+3}{x-2}=\frac{3}{x-2}+1$
ㄴ. $y=\frac{3x+3}{x+2}=\frac{3(x+2)-3}{x+2}=-\frac{3}{x+2}+3$
ㄷ. $y=\frac{-2x+9}{x-3}=\frac{-2(x-3)+3}{x-3}=\frac{3}{x-3}-2$
ㄹ. $y=\frac{x+7}{2x+2}=\frac{(x+1)+6}{2(x+1)}=\frac{6}{2(x+1)}+\frac{1}{2}=\frac{3}{x+1}+\frac{1}{2}$

유형 09 유리함수의 그래프의 점근선

유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프의 점근선
➡ 직선 $x=p$, 직선 $y=q$

풍쌤 Point 유리함수의 식을 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형하면 점근선이 보인다.

045

함수 $y=\frac{3x+1}{x-2}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=a$, $y=b$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -3　② -1　③ 1
④ 3　✓⑤ 5

$y=\frac{3x+1}{x-2}=\frac{3(x-2)+7}{x-2}=\frac{7}{x-2}+3$
즉, 점근선의 방정식은
$x=2$, $y=3$
따라서 $a=2$, $b=3$이므로 $a+b=2+3=5$

046

함수 $y=\frac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나고 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=-4$일 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) -3

$y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)+b-ac}{x+c}=\frac{b-ac}{x+c}+a$
즉, 점근선의 방정식은
$x=-c$, $y=a$　$\therefore a=-4$, $c=-2$
이때 함수 $y=\frac{-4x+b}{x-2}$의 그래프가 점 $(1, 1)$을 지나므로
$1=\frac{-4+b}{1-2}$　$\therefore b=3$
$\therefore a+b+c=-4+3+(-2)=-3$

047

함수 $y=\frac{2x+3}{x+a}$의 그래프의 두 점근선의 교점이 직선 $y=3x-4$ 위의 점일 때, 상수 a의 값을 구하시오. -2

$y=\frac{2x+3}{x+a}=\frac{2(x+a)+3-2a}{x+a}=\frac{3-2a}{x+a}+2$
즉, 점근선의 방정식은
$x=-a$, $y=2$
두 점근선의 교점의 좌표는 $(-a, 2)$
이 점이 직선 $y=3x-4$ 위의 점이므로
$2=3\times(-a)-4$, $3a=-6$　$\therefore a=-2$

유형 10 유리함수의 그래프의 대칭성 중요

유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프는

① 두 점근선의 교점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다.

② 점 $(p,\ q)$를 지나고 기울기가 ± 1인 두 직선 $y=(x-p)+q$, $y=-(x-p)+q$에 대하여 대칭이다.

풍쌤 Point 유리함수의 식을 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형하여 점근선의 교점의 좌표 $(p,\ q)$를 찾아보자.

048

함수 $y=\frac{ax-1}{x+1}$의 그래프가 점 $(b,\ 2)$에 대하여 대칭일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

$y=\frac{ax-1}{x+1}=\frac{a(x+1)-1-a}{x+1}=\frac{-a-1}{x+1}+a$
두 점 $(-1,\ a)$, $(b,\ 2)$가 일치하므로
$a=2$, $b=-1$ $\therefore a+b=2+(-1)=1$

049

함수 $y=\frac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 점 $(-1,\ 3)$에 대하여 대칭이고 원점을 지날 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. 4
(단, a, b, c는 상수이다.)

$y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)+b-ac}{x+c}=\frac{b-ac}{x+c}+a$
두 점 $(-c,\ a)$, $(-1,\ 3)$이 일치하므로 $a=3$, $c=1$
함수 $y=\frac{3x+b}{x+1}$의 그래프가 원점을 지나므로 $0=\frac{0+b}{0+1}$ $\therefore b=0$
$\therefore a+b+c=3+0+1=4$

050

함수 $y=\frac{-2x-3}{x+2}$의 그래프가 두 직선

$y=x+a$, $y=-x+b$

에 대하여 대칭일 때, $a-b$의 값을 구하시오. 4
(단, a, b는 상수이다.)

$y=\frac{-2x-3}{x+2}=\frac{-2(x+2)+1}{x+2}=\frac{1}{x+2}-2$
점 $(-2,\ -2)$를 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은
$y-(-2)=x-(-2)$ $\therefore y=x$
점 $(-2,\ -2)$를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은
$y-(-2)=-\{x-(-2)\}$ $\therefore y=-x-4$
따라서 $a=0$, $b=-4$이므로 $a-b=0-(-4)=4$

유형 11 그래프를 이용하여 유리함수의 식 구하기

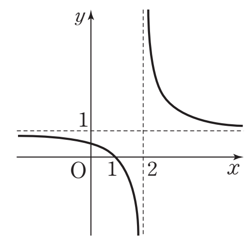
점근선의 방정식이 $x=p$, $y=q$인 유리함수의 그래프가 점 $(a,\ b)$를 지날 때

➡ 유리함수의 식을 $y=\frac{k}{x-p}+q$로 놓고 $x=a$, $y=b$를 대입하여 k의 값을 구한다.

풍쌤 Point 유리함수의 그래프에서 점근선의 방정식을 구하여 유리함수의 식을 $y=\frac{k}{x-p}+q$로 놓는다.

051

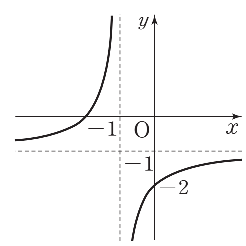
유리함수 $y=\frac{a}{x-b}+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오. 4



그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=1$이므로
$b=2$, $c=1$
즉, 함수 $y=\frac{a}{x-2}+1$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 $0=\frac{a}{1-2}+1$ $\therefore a=1$
$\therefore a+b+c=1+2+1=4$

052

유리함수 $y=\frac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, b, c에 대하여 $ab+c$의 값은?

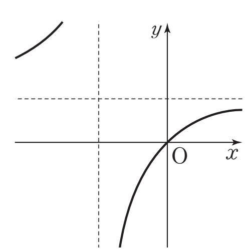


① -1 ② 1
③ 2 ④ 3
⑤ 4

$y=\frac{k}{x+1}-1\ (k<0)$로 놓으면 점 $(0,\ -2)$를 지나므로
$-2=\frac{k}{0+1}-1$ $\therefore k=-1$
$\therefore y=\frac{-1}{x+1}-1=\frac{-1-(x+1)}{x+1}=\frac{-x-2}{x+1}$
따라서 $a=-1$, $b=-2$, $c=1$이므로 $ab+c=2+1=3$

053

유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 원점을 지날 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. ㄴ, ㄷ
(단, k, p, q는 상수이다.)



보기

ㄱ. $k>q$ ㄴ. $pq<0$ ㄷ. $k=pq$

ㄱ. $k<0$, $q>0$이므로 $k<q$
ㄴ. $p<0$, $q>0$이므로 $pq<0$
ㄷ. 함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프가 원점을 지나므로
$0=\frac{k}{0-p}+q$, $\frac{k}{p}=q$ $\therefore k=pq$

08 유리함수의 최대·최소

❶ 유리함수의 최대·최소

정의역이 주어진 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq0,\ c\neq0)$의 최댓값과 최솟값은 다음 순서로 구한다.

① 유리함수의 식을 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ $(k\neq0)$ 꼴로 변형한다.

② 주어진 정의역에서 그래프를 그린다.

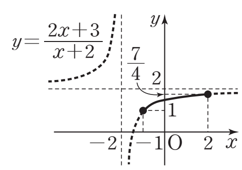
③ 최댓값, 최솟값을 각각 구한다.

보기 $-1\le x\le2$에서 유리함수 $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$의 최댓값, 최솟값을 순서에 따라 구해 보자.

① $y=\dfrac{2x+3}{x+2}=\dfrac{2(x+2)-1}{x+2}=-\dfrac{1}{x+2}+2$

② $-1\le x\le2$에서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

③ $x=2$일 때 최댓값은 $\dfrac{7}{4}$, $x=-1$일 때 최솟값은 1이다.



• **최댓값과 최솟값**
어떤 함수의 함숫값 중에서 가장 큰 값이 존재하면 그 값을 최댓값, 가장 작은 값이 존재하면 그 값을 최솟값이라 한다.

풍쌤 Tip 유리함수 $y=f(x)$의 정의역이 $\{x\,|\,a\le x\le b\}$일 때, $f(a)$, $f(b)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 126쪽

054

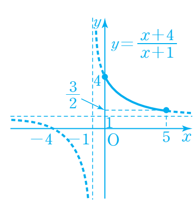
다음 함수에 대하여 주어진 x의 값의 범위에서 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $y=\dfrac{x+4}{x+1}$ $(0\le x\le5)$ 최댓값: 4, 최솟값: $\dfrac{3}{2}$

$y=\dfrac{x+4}{x+1}=\dfrac{(x+1)+3}{x+1}=\dfrac{3}{x+1}+1$

따라서 $x=0$일 때 최댓값은 $\dfrac{0+4}{0+1}=4$,

$x=5$일 때 최솟값은 $\dfrac{5+4}{5+1}=\dfrac{3}{2}$

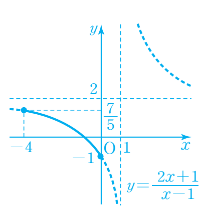


(2) $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ $(-4\le x\le0)$ 최댓값: $\dfrac{7}{5}$, 최솟값: -1

$y=\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+2$

따라서 $x=-4$일 때 최댓값은 $\dfrac{-8+1}{-4-1}=\dfrac{7}{5}$,

$x=0$일 때 최솟값은 $\dfrac{0+1}{0-1}=-1$

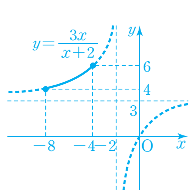


(3) $y=\dfrac{3x}{x+2}$ $(-8\le x\le-4)$ 최댓값: 6, 최솟값: 4

$y=\dfrac{3x}{x+2}=\dfrac{3(x+2)-6}{x+2}=-\dfrac{6}{x+2}+3$

따라서 $x=-4$일 때 최댓값은 $\dfrac{3\times(-4)}{-4+2}=6$,

$x=-8$일 때 최솟값은 $\dfrac{3\times(-8)}{-8+2}=4$

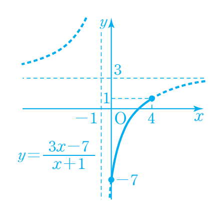


(4) $y=\dfrac{3x-7}{x+1}$ $(0\le x\le4)$ 최댓값: 1, 최솟값: -7

$y=\dfrac{3x-7}{x+1}=\dfrac{3(x+1)-10}{x+1}=-\dfrac{10}{x+1}+3$

따라서 $x=4$일 때 최댓값은 $\dfrac{3\times4-7}{4+1}=1$,

$x=0$일 때 최솟값은 $\dfrac{0-7}{0+1}=-7$



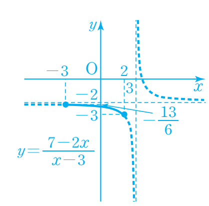
(5) $y=\dfrac{7-2x}{x-3}$ $(-3\le x\le2)$ 최댓값: $-\dfrac{13}{6}$, 최솟값: -3

$y=\dfrac{7-2x}{x-3}=\dfrac{-2(x-3)+1}{x-3}=\dfrac{1}{x-3}-2$

따라서

$x=-3$일 때 최댓값은 $\dfrac{7-2\times(-3)}{-3-3}=-\dfrac{13}{6}$,

$x=2$일 때 최솟값은 $\dfrac{7-2\times2}{2-3}=-3$

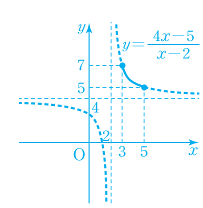


(6) $y=\dfrac{4x-5}{x-2}$ $(3\le x\le5)$ 최댓값: 7, 최솟값: 5

$y=\dfrac{4x-5}{x-2}=\dfrac{4(x-2)+3}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}+4$

따라서 $x=3$일 때 최댓값은 $\dfrac{4\times3-5}{3-2}=7$,

$x=5$일 때 최솟값은 $\dfrac{4\times5-5}{5-2}=5$



07 유리함수의 역함수

1 유리함수의 역함수

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq0,\ c\neq0)$의 역함수는 다음 순서로 구한다.

① 유리함수의 식을 변형하여 x를 y에 대한 식으로 나타낸다.

➡ $x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$

② x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구한다.

➡ $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$

보기 유리함수 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$의 역함수를 순서에 따라 구해 보자.

① $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$x=\dfrac{y-1}{y-2}$

② x와 y를 바꾸어 쓰면 구하는 역함수는

$y=\dfrac{x-1}{x-2}$

풍쌤 Tip 역함수를 구할 때, x와 y를 서로 바꾼 후 y를 x에 대한 식으로 나타내어도 된다.

• $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$에서

$y(cx+d)=ax+b$, $(cy-a)x=-dy+b$

이므로

$x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$

개념 기본 문제

정답과 풀이 127쪽

055

다음 함수의 역함수를 구하시오.

(1) $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ $\quad y=\dfrac{-x+2}{x-1}$

x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x+1)=x+2$, $xy-x=-y+2$ $\quad\therefore x=\dfrac{-y+2}{y-1}$

x와 y를 바꾸어 쓰면 구하는 역함수는 $y=\dfrac{-x+2}{x-1}$

(2) $y=\dfrac{-x-1}{x+3}$ $\quad y=\dfrac{-3x-1}{x+1}$

x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x+3)=-x-1$, $xy+x=-3y-1$ $\quad\therefore x=\dfrac{-3y-1}{y+1}$

x와 y를 바꾸어 쓰면 구하는 역함수는 $y=\dfrac{-3x-1}{x+1}$

(3) $y=\dfrac{3x-2}{x-2}$ $\quad y=\dfrac{2x-2}{x-3}$

x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x-2)=3x-2$, $xy-3x=2y-2$ $\quad\therefore x=\dfrac{2y-2}{y-3}$

x와 y를 바꾸어 쓰면 구하는 역함수는 $y=\dfrac{2x-2}{x-3}$

(4) $y=\dfrac{2-x}{x-1}$ $\quad y=\dfrac{x+2}{x+1}$

x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x-1)=2-x$, $xy+x=y+2$ $\quad\therefore x=\dfrac{y+2}{y+1}$

x와 y를 바꾸어 쓰면 구하는 역함수는 $y=\dfrac{x+2}{x+1}$

056

다음 함수 $f(x)$의 역함수가 $f^{-1}(x)$일 때, 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

(1) $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$, $f^{-1}(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ $\quad a=1,\ b=-2,\ c=-1$

$y=\dfrac{x-2}{x-1}$라 하고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x-1)=x-2$, $xy-x=y-2$ $\quad\therefore x=\dfrac{y-2}{y-1}$

x와 y를 바꾸어 쓰면 $y=\dfrac{x-2}{x-1}$

따라서 $a=1$, $b=-2$, $c=-1$

(2) $f(x)=-\dfrac{3x+4}{2x-5}$, $f^{-1}(x)=\dfrac{ax+b}{cx+3}$ $\quad a=-5,\ b=-4,\ c=2$

$y=-\dfrac{3x+4}{2x-5}$라 하고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(2x+5)=-3x-4$, $2xy+3x=-5y-4$ $\quad\therefore x=\dfrac{-5y-4}{2y+3}$

x와 y를 바꾸어 쓰면 $y=\dfrac{-5x-4}{2x+3}$

따라서 $a=-5$, $b=-4$, $c=2$

(3) $f(x)=\dfrac{4x-2}{x+2}$, $f^{-1}(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ $\quad a=-2,\ b=-2,\ c=-4$

$y=\dfrac{4x-2}{x+2}$라 하고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x+2)=4x-2$, $xy-4x=-2y-2$ $\quad\therefore x=\dfrac{-2y-2}{y-4}$

x와 y를 바꾸어 쓰면 $y=\dfrac{-2x-2}{x-4}$

따라서 $a=-2$, $b=-2$, $c=-4$

유형 실전 문제

정답과 풀이 128쪽

유형 12 유리함수의 최대·최소

유리함수 $y=f(x)$의 최댓값과 최솟값

➡ 주어진 정의역에서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리고, 최댓값, 최솟값을 각각 구한다.

풍쌤 Point 유리함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리는 것이 핵심이다. 점근선의 방정식을 정확히 구하고 주어진 정의역에서 그래프를 그려 보자.

057

$-3\le x\le 1$에서 함수 $y=-\dfrac{x+3}{x-2}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

$y=-\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{-(x-2)-5}{x-2}=-\dfrac{5}{x-2}-1$

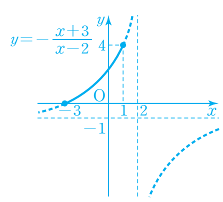
따라서 $x=1$일 때 최댓값은

$M=-\dfrac{1+3}{1-2}=4$

$x=-3$일 때 최솟값은

$m=-\dfrac{-3+3}{-3-2}=0$

$\therefore M+m=4+0=4$



058

정의역이 $\{x\,|\,-2\le x\le 1\}$인 함수 $f(x)=-\dfrac{1}{x-2}+k$의 최솟값이 $\dfrac{13}{4}$일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)　4

$f(-2)=\dfrac{13}{4}$에서

$-\dfrac{1}{-2-2}+k=\dfrac{13}{4}$　　$\therefore k=3$

따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{x-2}+3$이므로 구하는 최댓값은

$f(1)=-\dfrac{1}{1-2}+3=4$

059

정의역이 $\{x\,|\,0\le x\le a\}$인 함수 $f(x)=\dfrac{k}{x+1}+2$의 최댓값이 4, 최솟값이 $\dfrac{5}{2}$일 때, 상수 a, k에 대하여 $a+k$의 값을 구하시오. (단, $a>0$, $k>0$)　5

함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값이 4이므로

$f(0)=\dfrac{k}{0+1}+2=4$　　$\therefore k=2$

함수 $f(x)$는 $x=a$일 때 최솟값이 $\dfrac{5}{2}$이므로

$f(a)=\dfrac{2}{a+1}+2=\dfrac{5}{2}$, $a+1=4$　　$\therefore a=3$

$\therefore a+k=3+2=5$

유형 13 유리함수의 역함수

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 역함수

➡ $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$

풍쌤 Point 유리함수의 식에서 x를 y에 대한 식으로 나타낸 후, x와 y를 바꾸어 쓰면 끝.

060

함수 $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+a}$의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{-3x+b}{x-2}$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 5　② 8　③ 11　④ 14　⑤ 17

$y=\dfrac{2x+5}{x+a}$라 하고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x+a)=2x+5$, $xy-2x=-ay+5$　　$\therefore x=\dfrac{-ay+5}{y-2}$

x와 y를 바꾸어 쓰면 $y=\dfrac{-ax+5}{x-2}$

따라서 $a=3$, $b=5$이므로 $a+b=3+5=8$

061

두 함수 $f(x)=\dfrac{-3x-1}{2x+4}$, $g(x)=\dfrac{ax+b}{2x+c}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.　-2

두 함수는 서로 역함수 관계이므로 $y=\dfrac{-3x-1}{2x+4}$이라 하고 x를 y에 대한 식으로 나타내면 $y(2x+4)=-3x-1$, $2xy+3x=-4y-1$　　$\therefore x=\dfrac{-4y-1}{2y+3}$

x와 y를 바꾸어 쓰면 $y=\dfrac{-4x-1}{2x+3}$

따라서 $a=-4$, $b=-1$, $c=3$이므로 $a+b+c=-4+(-1)+3=-2$

062

함수 $f(x)=\dfrac{ax+3}{x+1}$의 그래프와 그 역함수 $f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, 상수 a의 값을 구하시오.　-1

$y=\dfrac{ax+3}{x+1}$이라 하고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x+1)=ax+3$, $xy-ax=-y+3$　　$\therefore x=\dfrac{-y+3}{y-a}$

x와 y를 바꾸어 쓰면 $y=\dfrac{-x+3}{x-a}$

$\therefore a=-1$

063

함수 $f(x)=\dfrac{-3x-7}{x+3}$의 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여 $(f^{-1}\circ f^{-1})(-2)$의 값을 구하시오.　-2

$f^{-1}(-2)=k$라 하면 $f(k)=-2$이므로

$\dfrac{-3k-7}{k+3}=-2$, $-3k-7=-2k-6$　　$\therefore k=-1$

$(f^{-1}\circ f^{-1})(-2)=f^{-1}(f^{-1}(-2))=f^{-1}(-1)$

$f^{-1}(-1)=l$이라 하면 $f(l)=-1$이므로

$\dfrac{-3l-7}{l+3}=-1$, $-3l-7=-l-3$　　$\therefore l=-2$

중단원 점검 문제

01

$\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{4}{x^4+1}$를 계산하면?

① $\dfrac{8}{x^8+x^4+1}$ ② $\dfrac{4}{x^8+x^4+1}$ ③ $\dfrac{8}{x^8-x^4+1}$

✓④ $\dfrac{8}{x^8-1}$ ⑤ $\dfrac{4}{x^4-1}$

$\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{4}{x^4+1}=\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{4}{x^4+1}$

$=\dfrac{4}{x^4-1}-\dfrac{4}{x^4+1}$

$=\dfrac{8}{x^8-1}$

02

$\dfrac{2x^2+7x+3}{x^2-x}\times\left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x+1}\right)\div\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x}$을 계산한 결과가 $\dfrac{ax^2+bx+3}{x^2+cx-4}$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① 2 ② 4 ✓③ 6

④ 8 ⑤ 10

$\dfrac{2x^2+7x+3}{x^2-x}\times\left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x+1}\right)\div\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x}$

$=\dfrac{(x+3)(2x+1)}{x(x-1)}\times\dfrac{3(x-1)}{(x-2)(x+1)}\times\dfrac{x(x+1)}{(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{3(2x+1)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{6x+3}{x^2-4}$

따라서 $a=0$, $b=6$, $c=0$이므로 $a+b+c=6$

03

분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{x+2}{x}-\frac{x+4}{x+2}-\frac{x-5}{x-3}+\frac{x-7}{x-5}=\frac{ax+b}{x(x+2)(x-3)(x+c)}$$

가 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. 15

(단, a, b, c는 상수이다.)

(좌변)$=\left(1+\dfrac{2}{x}\right)-\left(1+\dfrac{2}{x+2}\right)-\left(1-\dfrac{2}{x-3}\right)+\left(1-\dfrac{2}{x-5}\right)$

$=\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{2}{x-5}=\dfrac{4}{x(x+2)}+\dfrac{-4}{(x-3)(x-5)}$

$=\dfrac{-40x+60}{x(x+2)(x-3)(x-5)}$

따라서 $a=-40$, $b=60$, $c=-5$이므로 $a+b+c=-40+60+(-5)=15$

04 학교 시험 기출

함수 $f(x)=x^2+2x$일 때,

$$\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(10)}$$

의 값을 구하시오. $\dfrac{175}{264}$

$\dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(3)}+\cdots+\dfrac{1}{f(10)}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)$

$+\cdots+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{11}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{12}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{12}\right)=\dfrac{175}{264}$

05 실전 Plus

함수 $y=-\dfrac{k}{x}$의 그래프와 직선 $y=-x-1$의 두 교점을 각각 A, B라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=5\sqrt{2}$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. (단, $k\neq0$) 6

점 A의 x좌표를 a라 하면 $\mathrm{A}(a,\ -a-1)$, $\mathrm{B}(-a-1,\ a)$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-a-1-a)^2+\{a-(-a-1)\}^2}=|2a+1|\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=2$

따라서 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$ 또는 $\mathrm{A}(2,\ -3)$이고 점 A는 함수 $y=-\dfrac{k}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$2=-\dfrac{k}{-3}$ 또는 $-3=-\dfrac{k}{2}$ $\therefore\ k=6$

06

보기에서 함수 $f(x)=\dfrac{2}{x+3}+2$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. ㄱ, ㄹ

보기

ㄱ. 그래프는 점 $(-3,\ 2)$에 대하여 대칭이다.
ㄴ. 정의역은 $\{x\,|\,x\neq3$인 실수$\}$이다.
ㄷ. 그래프와 y축의 교점의 y좌표는 3이다.
ㄹ. 그래프는 직선 $y=-x-1$에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 정의역은 $\{x\,|\,x\neq-3$인 실수$\}$이다.

ㄷ. $f(0)=\dfrac{2}{0+3}+2=\dfrac{8}{3}$

즉, 그래프와 y축의 교점의 y좌표는 $\dfrac{8}{3}$이다.

07 학교 시험 기출

함수 $y=\dfrac{2x-k}{x-1}$의 그래프가 제3사분면을 지나도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k<2$ ✓② $k<0$ ③ $k>2$

④ $0<k<2$ ⑤ $k<0$ 또는 $k>2$

$f(x)=\dfrac{2x-k}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+2-k}{x-1}=\dfrac{2-k}{x-1}+2$

(i) $2-k<0$, 즉 $k>2$일 때, 제3사분면을 지나지 않는다.

(ii) $2-k=0$, 즉 $k=2$일 때, 제3사분면을 지나지 않는다.

(iii) $2-k>0$, 즉 $k<2$일 때, $f(0)=\dfrac{0-k}{0-1}<0$에서 $k<0$

(i)~(iii)에서 실수 k의 값의 범위는 $k<0$

08

다음 함수 중 그 그래프가 평행이동에 의하여 함수 $y=\dfrac{1}{2x}$의 그래프와 겹쳐지는 것을 모두 고르면?

(정답 2개)

✓① $y=\dfrac{1}{2x+4}$ ② $y=\dfrac{2x-3}{2x-2}$ ③ $y=\dfrac{1-2x}{2x+2}$

④ $y=\dfrac{4x-7}{2x-3}$ ✓⑤ $y=\dfrac{6x+10}{2x+3}$

① $y=\dfrac{1}{2x+4}=\dfrac{1}{2(x+2)}$

② $y=\dfrac{2x-3}{2x-2}=-\dfrac{1}{2(x-1)}+1$

③ $y=\dfrac{1-2x}{2x+2}=\dfrac{3}{2(x+1)}-1$

④ $y=\dfrac{4x-7}{2x-3}=-\dfrac{1}{2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)}+2$

⑤ $y=\dfrac{6x+10}{2x+3}=\dfrac{1}{2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}+3$

09 학교 시험 기출

원 $(x-1)^2+y^2=4$를 원 $(x+3)^2+(y-1)^2=4$로 옮기는 평행이동에 의하여 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프가 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프와 겹쳐질 때, $a-b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) 2

원 $(x-1)^2+y^2=4$를 원 $(x+3)^2+(y-1)^2=4$로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 $-3-1=-4$만큼, y축의 방향으로 $1-0=1$만큼 옮기는 것이므로

$y=-\dfrac{1}{x+4}+1=\dfrac{-1+(x+4)}{x+4}=\dfrac{x+3}{x+4}$

따라서 $a=1$, $b=3$, $c=4$이므로 $a-b+c=1-3+4=2$

10 교육청 기출

좌표평면에서 곡선 $y=\dfrac{k}{x-2}+1\ (k<0)$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고 이 곡선의 두 점근선의 교점을 C라 하자. 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하는 상수 k의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3
✓④ -2 ⑤ -1

$\mathrm{A}(-k+2,\ 0)$, $\mathrm{B}\left(0,\ -\dfrac{1}{2}k+1\right)$, $\mathrm{C}(2,\ 1)$

두 직선 AC, BC의 기울기가 서로 같아야 하므로

$\dfrac{1-0}{2-(-k+2)}=\dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}k+1\right)}{2-0}$, $\dfrac{1}{k}=\dfrac{k}{4}$, $k^2=4$ $\quad\therefore k=-2\ (\because k<0)$

11

함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 y축과 점 $(0,\ 1)$에서 만나고 점 $(-3,\ 2)$에 대하여 대칭일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오. 8

y축과 점 $(0,\ 1)$에서 만나므로 $1=\dfrac{b}{c}$ $\quad\therefore b=c$

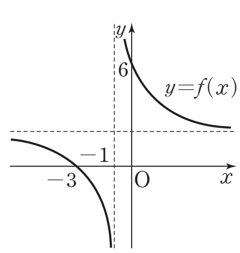
$y=\dfrac{ax+b}{x+c}=\dfrac{a(x+c)+b-ac}{x+c}=\dfrac{b-ac}{x+c}+a$

즉, 점근선의 방정식은 $x=-c$, $y=a$이므로 점 $(-c,\ a)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $a=2$, $c=3$, $b=3$이므로 $a+b+c=2+3+3=8$

12

유리함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오. 9



함수 $f(x)=\dfrac{k}{x+1}+l\ (k>0)$로 놓을 수 있다.

점 $(0,\ 6)$을 지나므로 $6=\dfrac{k}{0+1}+l$ $\quad\therefore k+l=6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

점 $(-3,\ 0)$을 지나므로 $0=\dfrac{k}{-3+1}+l$ $\quad\therefore k-2l=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $k=4$, $l=2$

$y=\dfrac{4}{x+1}+2=\dfrac{4+2(x+1)}{x+1}=\dfrac{2x+6}{x+1}$이므로 $a=2$, $b=6$, $c=1$

$\therefore a+b+c=2+6+1=9$

13

함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=-1$이고 점 $(0,\ -3)$을 지난다. $3\le x\le 6$에서 $y=f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, a, b, c는 상수이다.)

✓① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=-1$이므로

$f(x)=\dfrac{k}{x-2}-1\ (k\neq 0)$로 놓으면

점 $(0,\ -3)$을 지나므로 $-3=\dfrac{k}{0-2}-1$ $\quad\therefore k=4$

$\therefore f(x)=\dfrac{4}{x-2}-1$

즉, $3\le x\le 6$에서

$x=3$일 때 최댓값은 $\dfrac{4}{3-2}-1=3$

$x=6$일 때 최솟값은 $\dfrac{4}{6-2}-1=0$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $3+0=3$

14

함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1,\ 1)$을 지나고 $(f\circ f)(x)=x$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. -2

점 $(-1,\ 1)$을 지나므로 $1=\dfrac{-a+b}{-1-2}$ $\quad\therefore b=a-3$

$y=\dfrac{ax+b}{x-2}$라 하고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x-2)=ax+b$, $xy-ax=2y+b$

$\therefore x=\dfrac{2y+b}{y-a}$

x와 y를 바꾸어 쓰면 $y=\dfrac{2x+b}{x-a}$

따라서 $a=2$, $b=-1$이므로 $ab=2\times(-1)=-2$

15 학교 시험 기출

함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-1}$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(3,\ 4)$를 지날 때, $f(a+b+1)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) 2

$f(3)=4$에서 $\dfrac{3a+b}{3-1}=4$ $\quad\therefore 3a+b=8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f^{-1}(3)=4$에서

$f(4)=3$, 즉 $\dfrac{4a+b}{4-1}=3$ $\quad\therefore 4a+b=9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=5$

$\therefore f(x)=\dfrac{x+5}{x-1}$

따라서 $a+b+1=1+5+1=7$이므로

$f(a+b+1)=f(7)=\dfrac{7+5}{7-1}=2$

01 무리식

❶ 무리식

근호 안에 문자가 포함되어 있는 식 중에서 유리식으로 나타낼 수 없는 식을 무리식이라 한다.

보기 $\sqrt{x}$, $\sqrt{3x-1}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$은 모두 무리식이다.

❷ 무리식의 값이 실수가 되기 위한 조건

무리식의 값이 실수가 되려면 근호 안의 식의 값이 양수 또는 0이어야 하고, 분모는 0이 아니어야 한다. 따라서 무리식의 계산을 할 때는

(근호 안의 식의 값)≥ 0, (분모)$\neq 0$

이 되는 문자의 값의 범위에서만 생각한다.

보기 ① 무리식 $\sqrt{x-3}$의 값이 실수가 되려면 ➡ $x-3\geq 0$에서 $x\geq 3$

② 무리식 $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$의 값이 실수가 되려면 ➡ $x-3>0$에서 $x>3$

• $\sqrt{f(x)}$가 실수 ➡ $f(x)\geq 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$이 실수 ➡ $f(x)>0$

개념 기본 문제

정답과 풀이 133쪽

001

다음 중 무리식인 것은 ○를, 무리식이 아닌 것은 ×를 ( ) 안에 써넣으시오.

(1) $\sqrt{2x+3}$ (○)

(2) $\sqrt{3}x+1$ (×)

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{x}$ (×)

(4) $\dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$ (○)

(5) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ (○)

(6) $\dfrac{\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}$ (×)

002

다음 무리식의 값이 실수가 되도록 하는 실수 x의 값의 범위를 구하시오.

(1) $\sqrt{x-4}$ $x\geq 4$

(2) $\sqrt{2x+10}-2$ $x\geq -5$

(3) $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-4}$ $x\geq 2$

$x+3\geq 0$, $2x-4\geq 0$이므로
$x\geq -3$, $x\geq 2$ $\quad\therefore x\geq 2$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$ $x>\dfrac{3}{2}$

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{x+5}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$ $x>3$

$x+5>0$, $x-3>0$이므로
$x>-5$, $x>3$ $\quad\therefore x>3$

(6) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{4-2x}}$ $-1\leq x<2$

$x+1\geq 0$, $4-2x>0$이므로
$x\geq -1$, $x<2$ $\quad\therefore -1\leq x<2$

02 무리식의 계산

1 제곱근의 성질

두 실수 a, b에 대하여

① $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geq 0) \\ -a & (a<0)\end{cases}$ ② $(\sqrt{a})^2=a$ (단, $a\geq 0$)

③ $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ (단, $a>0$, $b>0$) ④ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (단, $a>0$, $b>0$)

2 분모의 유리화

$a>0$, $b>0$일 때,

① $\dfrac{a}{\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{b}$

② $\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$ (단, $a\neq b$)

③ $\dfrac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$ (단, $a\neq b$)

• **음수의 제곱근의 성질**

① $a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

② $a>0$, $b<0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

• **분모의 유리화**

분모에 근호가 포함되어 있는 수 또는 식의 분모, 분자에 적당한 수 또는 식을 곱하여 분모에 근호가 포함되어 있지 않도록 변형하는 것

개념 기본 문제

정답과 풀이 133쪽

003

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt{x^2}+\sqrt{(x+1)^2}$ (단, $x>0$) $2x+1$

$x+1>0$이므로

$\sqrt{x^2}+\sqrt{(x+1)^2}=x+(x+1)=2x+1$

(2) $\sqrt{x^2}+\sqrt{(2-x)^2}$ (단, $x<0$) $-2x+2$

$2-x>0$이므로

$\sqrt{x^2}+\sqrt{(2-x)^2}=-x+(2-x)=-2x+2$

(3) $\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}$ (단, $1<x<2$) 1

$x-1>0$, $x-2<0$이므로

$\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}=(x-1)+\{-(x-2)\}=1$

004

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)$ $x-4$

$(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)=(\sqrt{x})^2-2^2=x-4$

(2) $(1+\sqrt{2x+1})(1-\sqrt{2x+1})$ $-2x$

$(1+\sqrt{2x+1})(1-\sqrt{2x+1})=1-(\sqrt{2x+1})^2=1-(2x+1)=-2x$

(3) $(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3})$ $2x-2$

$(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3})=(\sqrt{3x+1})^2-(\sqrt{x+3})^2$

$=(3x+1)-(x+3)$

$=2x-2$

005

다음 식의 분모를 유리화하시오.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

$\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-1}$ $\dfrac{\sqrt{x+2}+1}{x+1}$

$\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-1}=\dfrac{\sqrt{x+2}+1}{(\sqrt{x+2}-1)(\sqrt{x+2}+1)}=\dfrac{\sqrt{x+2}+1}{(x+2)-1}=\dfrac{\sqrt{x+2}+1}{x+1}$

(3) $\dfrac{2}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x+3}}$ $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}$

$\dfrac{2}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x+3}}=\dfrac{2(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3})}$

$=\dfrac{2(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3})}{2}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}$

006

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$ $\dfrac{4}{x-4}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ $2\sqrt{x+1}$

(3) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ $\dfrac{4\sqrt{x}}{x-1}$

$\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2-(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\dfrac{4\sqrt{x}}{x-1}$

유형 실전 문제

정답과 풀이 133쪽

유형 01 무리식의 값이 실수가 되기 위한 조건

① $\sqrt{f(x)}$의 값이 실수 ➡ $f(x) \geq 0$

② $\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$의 값이 실수 ➡ $f(x) > 0$

풍쌤 Point 무리식의 값이 실수가 되려면 근호 안에는 음수가 들어갈 수 없고, 분모에는 0이 올 수 없음을 기억하자.

007

무리식 $\sqrt{3x-9}+\sqrt{5-x}$의 값이 실수가 되도록 하는 실수 x의 값의 범위는?

① $x \leq 3$ ② $3 < x < 5$
✓③ $3 \leq x \leq 5$ ④ $x < 3$ 또는 $x > 5$
⑤ $x \leq 3$ 또는 $x \geq 5$

$3x-9 \geq 0$, $5-x \geq 0$
즉, $x \geq 3$, $x \leq 5$에서 $3 \leq x \leq 5$

008

무리식 $\sqrt{x-3}+\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{15-3x}}$의 값이 실수일 때, 정수 x의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. 이때 Mm의 값을 구하시오. 12

$x-3 \geq 0$, $x-1 \geq 0$, $15-3x > 0$에서
$x \geq 3$, $x \geq 1$, $x < 5$
$\therefore 3 \leq x < 5$
$\therefore Mm = 4 \times 3 = 12$

009

무리식 $\sqrt{10+3x-x^2}$의 값이 실수가 되도록 하는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. 12

$10+3x-x^2 \geq 0$에서
$x^2-3x-10 \leq 0$, $(x+2)(x-5) \leq 0$
$\therefore -2 \leq x \leq 5$
따라서 조건을 만족시키는 정수 x의 값은 $-2, -1, 0, \cdots, 5$이므로 구하는 합은
$-2+(-1)+0+\cdots+5=12$

유형 02 무리식의 계산 중요

무리식의 계산은 제곱근의 성질과 분모의 유리화를 이용한다.

① $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

② $\dfrac{a}{\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{b}$ (단, $a>0$, $b>0$)

풍쌤 Point 분모에 근호가 포함된 수 또는 식은 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 활용하여 분모를 유리화한다.

010

$\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$를 간단히 하면 $ax+b$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 3

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})+\sqrt{x}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$$
$$=\frac{x+1-\sqrt{x}\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\sqrt{x+1}+x}{(x+1)-x}$$
$$=2x+1$$

따라서 $2x+1=ax+b$에서 $a=2$, $b=1$
$\therefore a+b=2+1=3$

011

$\dfrac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x-1}}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-1}}+\dfrac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-1}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x-1}}=ax$를 만족시키는 상수 a의 값은?

① 2 ② 4 ✓③ 8
④ 16 ⑤ 64

(좌변)
$$=\frac{(\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x-1})^2}{(\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-1})(\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x-1})}+\frac{(\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-1})^2}{(\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-1})(\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x-1})}$$
$$=\frac{4x+1-2\sqrt{4x+1}\sqrt{4x-1}+4x-1}{(4x+1)-(4x-1)}+\frac{4x+1+2\sqrt{4x+1}\sqrt{4x-1}+4x-1}{(4x+1)-(4x-1)}$$
$$=\frac{16x}{2}=8x$$
$\therefore a=8$

012

양수 n에 대하여 $f(n)=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(15)$의 값을 구하시오. 3

$$f(n)=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n}$$
$$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(15)$
$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})$
$=\sqrt{16}-\sqrt{1}=4-1=3$

03 무리함수

① 무리함수

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 무리식일 때, 이 함수를 무리함수라 한다.

보기 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{3x-1}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x}+1}$은 모두 무리함수이다.

② 무리함수의 정의역

무리함수에서 정의역이 주어지지 않을 때는 근호 안의 식의 값이 0 이상이 되도록 하는 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

보기 무리함수 $y=\sqrt{x-3}$ ➡ $x-3\geq 0$에서 $x\geq 3$ ➡ 정의역은 $\{x|x\geq 3$인 실수$\}$이다.

• 무리함수 $y=\sqrt{f(x)}$의 정의역
➡ $\{x|f(x)\geq 0\}$

개념 기본 문제

정답과 풀이 134쪽

013

다음 중 무리함수인 것은 ○를, 무리함수가 아닌 것은 ×를 (　　) 안에 써넣으시오.

(1) $y=\sqrt{2}x$ (×)

(2) $y=\sqrt{-3x}$ (○)

(3) $y=x+\sqrt{3}$ (×)

(4) $y=\sqrt{1-x^2}$ (○)

(5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ (○)

(6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$ (○)

014

다음 무리함수의 정의역을 구하시오.

(1) $y=\sqrt{x-2}$ $\{x|x\geq 2\}$

(2) $y=\sqrt{5-x}$ $\{x|x\leq 5\}$

(3) $y=-\sqrt{x+3}$ $\{x|x\geq -3\}$

(4) $y=\sqrt{3x-4}+2$ $\left\{x\middle|x\geq \frac{4}{3}\right\}$

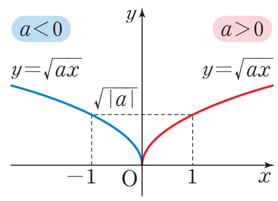
(5) $y=-\sqrt{x+5}-5$ $\{x|x\geq -5\}$

(6) $y=-\sqrt{4-2x}+6$ $\{x|x\leq 2\}$

04 무리함수 $y=\pm\sqrt{ax}$의 그래프

1 무리함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a\neq0)$의 그래프

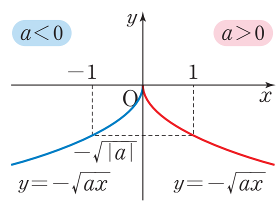
① $a>0$일 때,
정의역은 $\{x|x\geq0\}$, 치역은 $\{y|y\geq0\}$이다.
② $a<0$일 때,
정의역은 $\{x|x\leq0\}$, 치역은 $\{y|y\geq0\}$이다.



참고 무리함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프는 함수 $y=\frac{x^2}{a}$ $(x\geq0)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

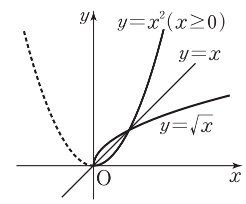
2 무리함수 $y=-\sqrt{ax}$ $(a\neq0)$의 그래프

① $a>0$일 때,
정의역은 $\{x|x\geq0\}$, 치역은 $\{y|y\leq0\}$이다.
② $a<0$일 때,
정의역은 $\{x|x\leq0\}$, 치역은 $\{y|y\leq0\}$이다.



참고 무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 대칭이동한 함수의 그래프의 식은 각각 다음과 같다.
① x축 대칭: $y=-\sqrt{ax}$ ② y축 대칭: $y=\sqrt{-ax}$ ③ 원점 대칭: $y=-\sqrt{-ax}$

- 무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 그 역함수 $y=x^2$ $(x\geq0)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



- 무리함수 $y=\pm\sqrt{ax}$ $(a\neq0)$의 그래프는 $|a|$의 값이 커질수록 x축으로부터 멀어진다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 134쪽

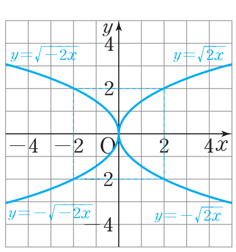
015

함수 $y=\sqrt{2x}$에 대하여 다음 물음에 답하고, □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 좌표평면에 주어진 함수의 그래프를 그리시오.

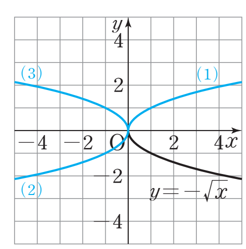
(2) 정의역은 $\{x|x\ \boxed{\geq}\ 0\}$이고 치역은 $\{y|y\ \boxed{\geq}\ 0\}$이다.

(3) 좌표평면에 주어진 함수의 그래프를 대칭이동하여 다음 세 함수
$y=\sqrt{-2x}$, $y=-\sqrt{2x}$, $y=-\sqrt{-2x}$
의 그래프를 그리시오.



016

함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 다음과 같이 대칭이동한 그래프를 좌표평면에 그리고, 그 그래프의 식을 구하시오.



(1) x축에 대하여 대칭이동 $y=\sqrt{x}$

(2) y축에 대하여 대칭이동 $y=-\sqrt{-x}$

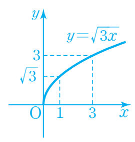
(3) 원점에 대하여 대칭이동 $y=\sqrt{-x}$

정답과 풀이 134쪽

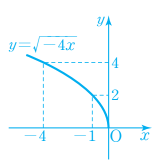
017

다음 함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구하시오.

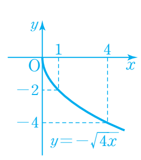
(1) $y=\sqrt{3x}$ 정의역: $\{x \mid x \geq 0\}$, 치역: $\{y \mid y \geq 0\}$



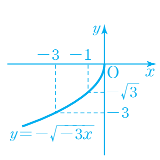
(2) $y=\sqrt{-4x}$ 정의역: $\{x \mid x \leq 0\}$, 치역: $\{y \mid y \geq 0\}$



(3) $y=-\sqrt{4x}$ 정의역: $\{x \mid x \geq 0\}$, 치역: $\{y \mid y \leq 0\}$



(4) $y=-\sqrt{-3x}$ 정의역: $\{x \mid x \leq 0\}$, 치역: $\{y \mid y \leq 0\}$



018

함수 $y=\sqrt{ax}\,(a\neq 0)$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은 ○를, 옳지 않은 것은 ×를 ( ) 안에 써넣으시오.

(1) $a>0$이면 그래프는 제1사분면을 지난다. (○)

(2) $a<0$이면 그래프는 제3사분면을 지난다. (×)

제2사분면을 지난다.

(3) $|a|$의 값이 커질수록 x축에 가까워진다. (×)

$|a|$의 값이 커질수록 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프는 x축으로부터 멀어진다.

(4) 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$이다. (×)

$a>0$이면 $\{x \mid x \geq 0\}$, $a<0$이면 $\{x \mid x \leq 0\}$이다.

(5) 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$이다. (○)

(6) 그래프는 $y=\sqrt{-ax}$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다. (×)

$y=\sqrt{ax}$의 그래프와 $y=\sqrt{-ax}$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

019

함수 $y=-\sqrt{ax}\,(a\neq 0)$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은 ○를, 옳지 않은 것은 ×를 ( ) 안에 써넣으시오.

(1) $a>0$이면 그래프는 제3사분면을 지난다. (×)

제4사분면을 지난다.

(2) $a<0$이면 그래프는 제4사분면을 지난다. (×)

제3사분면을 지난다.

(3) $a>0$이면 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$이다. (○)

(4) 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$이다. (×)

a의 값에 관계없이 치역은 $\{y \mid y \leq 0\}$이다.

(5) 그래프는 $y=-\sqrt{-ax}$의 그래프와 원점에 대하여 대칭이다. (×)

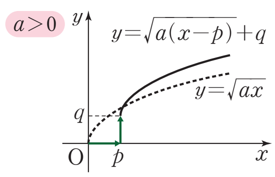
$y=-\sqrt{ax}$의 그래프와 $y=-\sqrt{-ax}$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

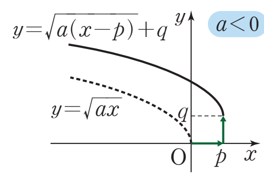
05 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프

1 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a\neq 0)$의 그래프

① 무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

② $a>0$일 때, 정의역은 $\{x|x\geq p\}$, 치역은 $\{y|y\geq q\}$이다.
$a<0$일 때, 정의역은 $\{x|x\leq p\}$, 치역은 $\{y|y\geq q\}$이다.





풍쌤 Tip 무리함수 $y=\pm\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프는 다음 순서로 그린다.
① 점 (p, q)를 시작점으로 정한다.
② $a>0$이면 오른쪽 방향으로,
$a<0$이면 왼쪽 방향으로 그린다.
③ 근호 앞이 $+$이면 위쪽으로,
근호 앞이 $-$이면 아래쪽으로 그린다.

- $|a|$의 값이 서로 같으면 p, q의 값에 관계없이 평행이동이나 대칭이동에 의하여 그 그래프가 서로 겹쳐질 수 있다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 135쪽

020

다음 함수의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식을 구하시오.

(1) $y=\sqrt{x}$ $y=\sqrt{x-3}+1$ [$p=3$, $q=1$]

(2) $y=\sqrt{-2x}$ $y=\sqrt{-2(x+1)}+2$ [$p=-1$, $q=2$]

(3) $y=-\sqrt{5x}$ $y=-\sqrt{5(x-2)}-3$ [$p=2$, $q=-3$]

(4) $y=-\sqrt{-3x}$ $y=-\sqrt{-3(x+3)}-2$ [$p=-3$, $q=-2$]

021

함수 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식이 다음과 같을 때, p, q의 값을 구하시오.

(1) $y=-\sqrt{-2(x-2)}$ $p=2$, $q=0$

(2) $y=-\sqrt{-2(x-1)}+2$ $p=1$, $q=2$

(3) $y=-\sqrt{-2(x+3)}-3$ $p=-3$, $q=-3$

(4) $y=-\sqrt{-2(x-5)}-4$ $p=5$, $q=-4$

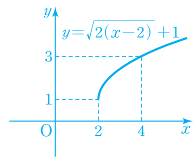
개념 기본 문제

정답과 풀이 135쪽

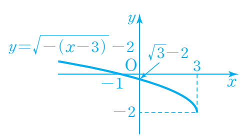
022

다음 함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구하시오.

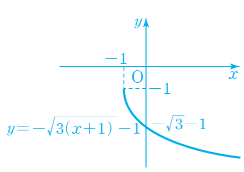
(1) $y=\sqrt{2(x-2)}+1$ 정의역: $\{x\,|\,x\geq 2\}$, 치역: $\{y\,|\,y\geq 1\}$



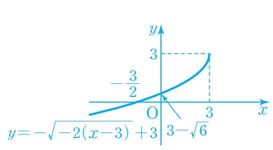
(2) $y=\sqrt{-(x-3)}-2$ 정의역: $\{x\,|\,x\leq 3\}$, 치역: $\{y\,|\,y\geq -2\}$



(3) $y=-\sqrt{3(x+1)}-1$ 정의역: $\{x\,|\,x\geq -1\}$, 치역: $\{y\,|\,y\leq -1\}$



(4) $y=-\sqrt{-2(x-3)}+3$ 정의역: $\{x\,|\,x\leq 3\}$, 치역: $\{y\,|\,y\leq 3\}$



023

다음 중 함수 $y=-\sqrt{2(x+2)}+2$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은 ○를, 옳지 않은 것은 ×를 ( ) 안에 써넣으시오.

(1) $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 평행이동한 것이다. (×)

함수 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

(2) 정의역은 $\{x\,|\,x\geq 2\}$이다. (×)

정의역은 $\{x\,|\,x\geq -2\}$이다.

(3) 치역은 $\{y\,|\,y\leq 2\}$이다. (○)

(4) 그래프는 점 $(0,\ 2)$를 지난다. (×)

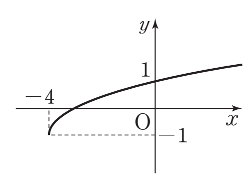
그래프는 점 $(0,\ 0)$을 지난다.

(5) 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다. (○)

그래프는 제1사분면과 제3사분면을 지나지 않는다.

024

다음은 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, p, q의 값을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.



주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 $\boxed{-4}$만큼, y축의 방향으로 $\boxed{-1}$만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식은

$y=\sqrt{a(x+4)}-1$ $\quad\therefore\ p=\boxed{-4},\ q=-1$

이 함수의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{a(0+4)}-1,\ 4=4a$

$\therefore\ a=\boxed{1}$

06 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프

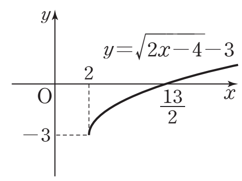
1 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a\neq0)$의 그래프

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a\neq0)$의 그래프는

$$y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a\neq0)$$

꼴로 변형하여 그린다.

보기 무리함수 $y=\sqrt{2x-4}-3$에서
$y=\sqrt{2x-4}-3=\sqrt{2(x-2)}-3$
즉, 무리함수 $y=\sqrt{2x-4}-3$의 그래프는 무리함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



• $y=\sqrt{ax+b}+c$
$=\sqrt{a\left\{x-\left(-\frac{b}{a}\right)\right\}}+c$

개념 기본 문제

정답과 풀이 136쪽

025

다음 함수를 $y=\pm\sqrt{a(x-p)}+q\ (a\neq0)$ 꼴로 변형하시오.

(1) $y=\sqrt{2x-6}+2$ $y=\sqrt{2(x-3)}+2$

(2) $y=\sqrt{2-2x}+1$ $y=\sqrt{-2(x-1)}+1$

(3) $y=-\sqrt{3x+3}-2$ $y=-\sqrt{3(x+1)}-2$

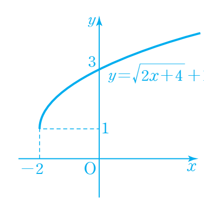
(4) $y=-\sqrt{-x+5}-3$ $y=-\sqrt{-(x-5)}-3$

026

다음 함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구하시오.

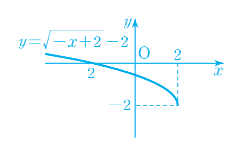
(1) $y=\sqrt{2x+4}+1$ 정의역: $\{x\,|\,x\geq-2\}$, 치역: $\{y\,|\,y\geq1\}$

$y=\sqrt{2x+4}+1=\sqrt{2(x+2)}+1$



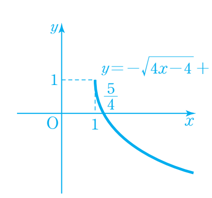
(2) $y=\sqrt{-x+2}-2$ 정의역: $\{x\,|\,x\leq2\}$, 치역: $\{y\,|\,y\geq-2\}$

$y=\sqrt{-x+2}-2=\sqrt{-(x-2)}-2$



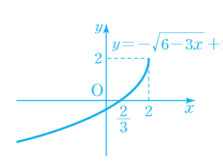
(3) $y=-\sqrt{4x-4}+1$ 정의역: $\{x\,|\,x\geq1\}$, 치역: $\{y\,|\,y\leq1\}$

$y=-\sqrt{4x-4}+1=-\sqrt{4(x-1)}+1$



(4) $y=-\sqrt{6-3x}+2$ 정의역: $\{x\,|\,x\leq2\}$, 치역: $\{y\,|\,y\leq2\}$

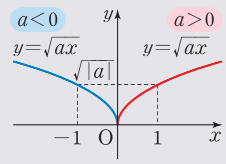
$y=-\sqrt{6-3x}+2=-\sqrt{-3(x-2)}+2$



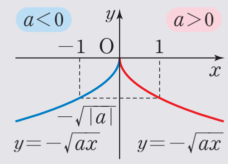
유형 실전 문제

유형 03 무리함수 $y=\pm\sqrt{ax}$의 그래프

① $y=\sqrt{ax}$의 그래프



② $y=-\sqrt{ax}$의 그래프



풍쌤 Point a의 값의 부호와 근호 앞의 부호를 따져 그래프가 원점에서 뻗어 나가는 방향을 확인하자.

027

다음 중 함수 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 정의역은 $\{x|x\le-3\}$이다.
② 치역은 $\{y|y\le0\}$이다.
③ 그래프는 제4사분면을 지난다.
④ 그래프는 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프보다 x축에 가깝다.
⑤ 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프와 원점에 대하여 대칭이다.

① 정의역은 $\{x|x\le0\}$이다. ② 치역은 $\{y|y\ge0\}$이다.
③ 그래프는 제2사분면에 그려지고 제4사분면을 지나지 않는다.
⑤ x축에 대하여 대칭이다.

028

보기에서 함수 $y=\sqrt{ax}\ (a\ne0)$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. ㄱ, ㄷ

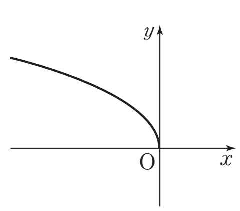
보기

ㄱ. $a<0$이면 정의역은 $\{x|x\le0\}$이다.
ㄴ. $a>0$이면 그래프는 제2사분면을 지난다.
ㄷ. 그래프는 $y=\sqrt{-ax}$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 그래프는 제1사분면에 그려지고 제2사분면을 지나지 않는다.

029

무리함수 $y=a\sqrt{bx}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 항상 옳은 것은? (단, a, b는 상수이다.)



① $a<0$ ② $b>0$
③ $a+b>0$ ④ $a-b>0$
⑤ $b-a>0$

① 치역이 $\{y|y\ge0\}$이므로 $a>0$
② 정의역이 $\{x|x\le0\}$이므로 $b<0$
③ $a>0$, $b<0$으로부터 $a+b$의 부호는 알 수 없다.
⑤ $b-a<0$

유형 04 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프
➡ 함수의 식을 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형하여 그린다.

풍쌤 Point 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$를 $y=\sqrt{a\left\{x-\left(-\frac{b}{a}\right)\right\}}+c$로 변형하여 그래프의 시작점을 찾고, a의 값의 부호와 근호 앞의 부호를 따져 그래프를 그려 본다.

030

함수 $y=-\sqrt{3-x}+2$의 정의역과 치역은?

① 정의역: $\{x|x\le3\}$, 치역: $\{y|y\le2\}$
② 정의역: $\{x|x\le3\}$, 치역: $\{y|y\ge2\}$
③ 정의역: $\{x|x\le3\}$, 치역: $\{y|y\ge-2\}$
④ 정의역: $\{x|x\ge3\}$, 치역: $\{y|y\le2\}$
⑤ 정의역: $\{x|x\ge3\}$, 치역: $\{y|y\ge2\}$

031

함수 $y=\sqrt{x-a}+3a-4$의 그래프가 점 $(a,\ a)$를 지날 때, 이 함수의 치역을 구하시오. $\{y|y\ge2\}$

그래프가 점 $(a,\ a)$를 지나므로
$a=\sqrt{a-a}+3a-4$
$\therefore a=2$
즉, 주어진 함수는 $y=\sqrt{x-2}+2$이므로
$\sqrt{x-2}\ge0$ $\therefore \sqrt{x-2}+2\ge2$
따라서 주어진 함수의 치역은 $\{y|y\ge2\}$이다.

032

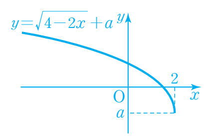
함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 정의역이 $\{x|x\le-3\}$, 치역이 $\{y|y\ge4\}$이고 그 그래프가 점 $(-5,\ 6)$을 지날 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오. -4

치역은 $\{y|y\ge4\}$이므로
$c=4$
또, $ax+b\ge0$에서 $ax\ge-b$ ⋯⋯ ㉠
이때 주어진 함수의 정의역이 $\{x|x\le-3\}$이므로 $a<0$이고 ㉠에서
$x\le-\frac{b}{a}=-3$ $\therefore b=3a$ ⋯⋯ ㉡
그래프가 점 $(-5,\ 6)$을 지나므로
$6=\sqrt{-5a+3a}+4$, $\sqrt{-2a}=2$ $\therefore a=-2,\ b=-6\ (\because ㉡)$
$\therefore a+b+c=-2+(-6)+4=-4$

033

함수 $y=\sqrt{4-2x}+a$의 그래프가 제1사분면을 지나도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오. $a>-2$

$y=\sqrt{4-2x}+a=\sqrt{-2(x-2)}+a$
그래프가 제1사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로
$y=\sqrt{4-2\times0}+a=2+a>0$
$\therefore a>-2$



034

다음 중 함수 $y=-\sqrt{3-3x}+2$의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 정의역은 $\{x|x\le1\}$이다.
② 치역은 $\{y|y\le2\}$이다.
✓③ 함수 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 평행이동한 것이다.
④ 그래프는 제4사분면을 지나지 않는다.
⑤ 그래프는 함수 $y=\sqrt{3-3x}-2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

③ $y=-\sqrt{3-3x}+2=-\sqrt{-3(x-1)}+2$
즉, 함수 $y=-\sqrt{3-3x}+2$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

035

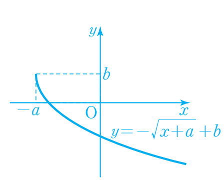
보기에서 함수 $y=-\sqrt{x+a}+b$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. ㄷ

(단, a, b는 상수이다.)

보기

ㄱ. 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 평행이동한 것이다.
ㄴ. $a>0$이면 치역은 $\{y|y\ge b\}$이다.
ㄷ. $a>0$, $b>0$이면 그래프는 제4사분면을 지난다.

ㄱ. 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.
ㄴ. a의 값에 관계없이 함수 $y=-\sqrt{x+a}+b$의 치역은 $\{y|y\le b\}$이다.
ㄷ. $a>0$, $b>0$이면 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 반드시 지난다.



유형 05 무리함수의 그래프의 평행이동

중요

무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프
➡ 무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

풍쌤 Point 무리함수의 식을 모두 $y=\pm\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형하여 a의 값과 부호, 근호 앞의 부호를 비교한다. 이때 a의 값과 부호, 근호 앞의 부호가 모두 같으면 평행이동에 의하여 두 그래프를 겹칠 수 있다.

036

함수 $y=\sqrt{2x-6}+4$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다. $a+pq$의 값을 구하시오. 14

(단, a는 상수이다.)

$y=\sqrt{2x-6}+4=\sqrt{2(x-3)}+4$이므로
$a=2$, $p=3$, $q=4$
$\therefore a+pq=2+3\times4=14$

037

함수 $y=-\sqrt{1-x}+a$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 함수 $y=-\sqrt{-x+3}+5$의 그래프와 일치할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) 5

평행이동한 그래프의 식은
$y=-\sqrt{1-(x-b)}+a+2$ $\quad\therefore y=-\sqrt{-x+b+1}+a+2$
$b+1=3$, $a+2=5$ $\quad\therefore a=3$, $b=2$
$\therefore a+b=3+2=5$

038

보기의 함수 중 그 그래프가 평행이동에 의하여 서로 겹쳐질 수 있는 함수끼리 바르게 짝 지어진 것은?

보기

ㄱ. $y=\sqrt{2x-4}+1$ ㄴ. $y=\sqrt{1-2x}-3$
ㄷ. $y=-\sqrt{2(x-3)}+1$ ㄹ. $y=\sqrt{-2x}+3$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ
✓④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

ㄱ. $y=\sqrt{2x-4}+1=\sqrt{2(x-2)}+1$
ㄴ. $y=\sqrt{1-2x}-3=\sqrt{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}-3$

유형 실전 문제

정답과 풀이 138쪽

유형 06 무리함수의 그래프의 대칭이동 중요

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를
① x축에 대하여 대칭이동 ➡ $-y=\sqrt{ax+b}+c$
② y축에 대하여 대칭이동 ➡ $y=\sqrt{-ax+b}+c$
③ 원점에 대하여 대칭이동 ➡ $-y=\sqrt{-ax+b}+c$

풍쌤 Point 도형을 대칭이동하는 방법과 동일하다.
① x축에 대하여 대칭이동 ➡ y 대신 $-y$
② y축에 대하여 대칭이동 ➡ x 대신 $-x$
③ 원점에 대하여 대칭이동 ➡ x 대신 $-x$, y 대신 $-y$

039

함수 $y=\sqrt{3x-2}+1$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프가 점 $(a,\ -2)$를 지날 때, a의 값은?

① -2 ✓② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$-y=\sqrt{-3x-2}+1$ $\therefore y=-\sqrt{-3x-2}-1$
점 $(a,\ -2)$를 지나므로
$-2=-\sqrt{-3a-2}-1$
$\sqrt{-3a-2}=1$, $-3a-2=1$, $3a=-3$
$\therefore a=-1$

040

함수 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동하면 함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프와 일치할 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a-b+c$의 값을 구하시오. 13

평행이동한 그래프의 식은
$y=-\sqrt{-3(x+3)}+1$
이 함수의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$y=-\sqrt{-3(-x+3)}+1$ $\therefore y=-\sqrt{3x-9}+1$
따라서 $a=3$, $b=-9$, $c=1$이므로 $a-b+c=3-(-9)+1=13$

041

보기의 함수 중 그 그래프가 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 함수 $y=-\sqrt{5x}$의 그래프와 겹쳐지는 것만을 있는 대로 고르시오. ㄱ, ㄴ, ㄹ

보기
ㄱ. $y=\sqrt{-5x}$ ㄴ. $y=\sqrt{5x}+1$
ㄷ. $y=-\sqrt{5-x}+5$ ㄹ. $y=-\sqrt{5x-10}+2$

ㄱ. 함수 $y=-\sqrt{5x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.
ㄴ. 함수 $y=-\sqrt{5x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 다음, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
ㄷ. 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 다음, x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.
ㄹ. 함수 $y=-\sqrt{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

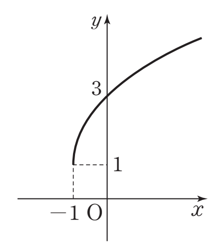
유형 07 그래프를 이용하여 무리함수의 식 구하기 중요

무리함수의 그래프가 점 $(p,\ q)$에서 시작하고, 점 $(m,\ n)$을 지날 때
➡ 무리함수의 식을 $y=\pm\sqrt{a(x-p)}+q$로 놓고 $x=m$, $y=n$을 대입하여 a의 값을 구한다.

풍쌤 Point 무리함수의 그래프에서 시작점의 좌표를 구하여 무리함수의 식을 $y=\pm\sqrt{a(x-p)}+q$로 놓는다.

042

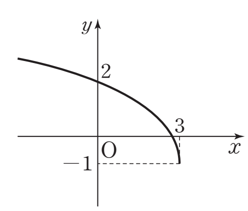
무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, p, q에 대하여 $a-pq$의 값을 구하시오. 5



주어진 함수의 식은
$y=\sqrt{a(x+1)}+1$ $\therefore p=-1$, $q=1$
점 $(0,\ 3)$을 지나므로
$3=\sqrt{a(0+1)}+1$
$\sqrt{a}=2$ $\therefore a=4$
$\therefore a-pq=4-(-1)\times1=5$

043

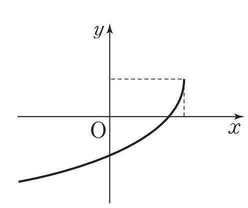
무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하시오. 27



주어진 함수의 식은 $y=\sqrt{a(x-3)}-1$
점 $(0,\ 2)$를 지나므로
$2=\sqrt{a(0-3)}-1$
$\therefore a=-3$
따라서 $y=\sqrt{-3(x-3)}-1=\sqrt{-3x+9}-1$
이므로 $b=9$, $c=-1$
$\therefore abc=-3\times9\times(-1)=27$

044

무리함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 옳지 않은 것은? (단, a, b, c는 상수이다.)



① $a<0$ ② $b>0$
③ $c>0$ ✓④ $abc>0$
⑤ $\sqrt{b}>c$

$y=-\sqrt{ax+b}+c=-\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$
점 $\left(-\frac{b}{a},\ c\right)$가 제1사분면 위의 점이므로 $-\frac{b}{a}>0$, $c>0$
또, $-\frac{b}{a}>0$에서 $ab<0$이고 $a<0$이므로 $b>0$
즉, $a<0$, $b>0$, $c>0$에서 $abc<0$

07 무리함수의 최대 · 최소

❶ 무리함수의 최대·최소

정의역이 주어진 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a\neq0)$의 최댓값과 최솟값은 다음 순서로 구한다.

① 무리함수의 식을 $y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a\neq0)$ 꼴로 변형한다.

② 주어진 정의역에서 그래프를 그린다.

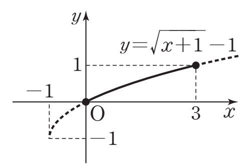
③ 최댓값, 최솟값을 각각 구한다.

보기 $0\le x\le3$에서 무리함수 $y=\sqrt{x+1}-1$의 최댓값, 최솟값을 순서에 따라 구해 보자.

① $y=\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x-(-1)}-1$

② $0\le x\le3$에서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

③ $x=3$일 때 최댓값은 1, $x=0$일 때 최솟값은 0이다.



풍쌤 Tip 무리함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}+c$의 정의역이 $\{x\,|\,p\le x\le q\}$일 때, 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.

① $a>0$일 때

➡ 최댓값: $f(q)$, 최솟값: $f(p)$

② $a<0$일 때

➡ 최댓값: $f(p)$, 최솟값: $f(q)$

개념 기본 문제

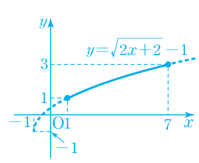
정답과 풀이 139쪽

045

다음 함수에 대하여 주어진 x의 값의 범위에서 최댓값과 최솟값을 구하시오.

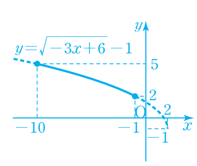
(1) $y=\sqrt{2x+2}-1\ (1\le x\le7)$ 최댓값: 3, 최솟값: 1

$y=\sqrt{2x+2}-1=\sqrt{2(x+1)}-1$
따라서 $x=7$일 때 최댓값은 3,
$x=1$일 때 최솟값은 1이다.



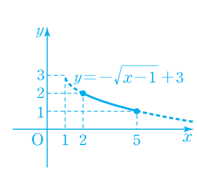
(2) $y=\sqrt{-3x+6}-1\ (-10\le x\le-1)$ 최댓값: 5, 최솟값: 2

$y=\sqrt{-3x+6}-1=\sqrt{-3(x-2)}-1$
따라서 $x=-10$일 때 최댓값은 5,
$x=-1$일 때 최솟값은 2이다.



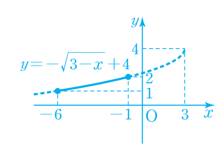
(3) $y=-\sqrt{x-1}+3\ (2\le x\le5)$ 최댓값: 2, 최솟값: 1

$x=2$일 때 최댓값은 2,
$x=5$일 때 최솟값은 1이다.



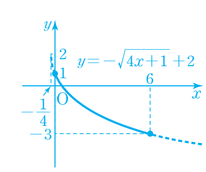
(4) $y=-\sqrt{3-x}+4\ (-6\le x\le-1)$ 최댓값: 2, 최솟값: 1

$y=-\sqrt{3-x}+4=-\sqrt{-(x-3)}+4$
따라서 $x=-1$일 때 최댓값은 2,
$x=-6$일 때 최솟값은 1이다.



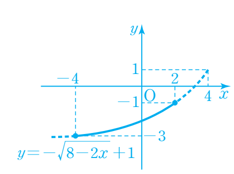
(5) $y=-\sqrt{4x+1}+2\ (0\le x\le6)$ 최댓값: 1, 최솟값: -3

$y=-\sqrt{4x+1}+2=-\sqrt{4\left(x+\frac{1}{4}\right)}+2$
따라서 $x=0$일 때 최댓값은 1,
$x=6$일 때 최솟값은 -3이다.



(6) $y=-\sqrt{8-2x}+1\ (-4\le x\le2)$ 최댓값: -1, 최솟값: -3

$y=-\sqrt{8-2x}+1=-\sqrt{-2(x-4)}+1$
따라서 $x=2$일 때 최댓값은 -1,
$x=-4$일 때 최솟값은 -3이다.



08 무리함수의 역함수

1 무리함수의 역함수

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a\neq0)$의 역함수는 다음 순서로 구한다.

① 역함수의 정의역을 구한다.

➡ 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 치역이 $\{y|y\geq c\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\geq c\}$이다.

② 무리함수의 식을 변형하여 x를 y에 대한 식으로 나타낸다.

➡ $x=\dfrac{1}{a}\{(y-c)^2-b\}$

③ x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구한다.

➡ $y=\dfrac{1}{a}\{(x-c)^2-b\}\ (x\geq c)$

주의 일반적으로 무리함수의 역함수는 이차함수의 일부이므로 무리함수의 역함수의 정의역은 반드시 따로 구해야 한다.

보기 무리함수 $y=\sqrt{x-1}+2$의 역함수를 순서에 따라 구해 보자.

① 무리함수 $y=\sqrt{x-1}+2$의 치역이 $\{y|y\geq2\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\geq2\}$이다.

② $y=\sqrt{x-1}+2$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$x=(y-2)^2+1$

③ x와 y를 바꾸어 쓰면 구하는 역함수는

$y=(x-2)^2+1\ (x\geq2)$

풍쌤 Tip 역함수를 구할 때, x와 y를 서로 바꾼 후, y를 x에 대한 식으로 나타내어도 된다.

• $y=\sqrt{ax+b}+c$에서 $\sqrt{ax+b}=y-c$의 양변을 제곱하면
$ax+b=(y-c)^2$, $ax=(y-c)^2-b$
$\therefore\ x=\dfrac{1}{a}\{(y-c)^2-b\}$

개념 기본 문제

정답과 풀이 139쪽

046

다음 함수의 역함수를 구하시오.

(1) $y=\sqrt{3-2x}$ $\quad y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}\ (x\geq0)$

역함수의 정의역은 $\{x|x\geq0\}$이다.
양변을 제곱하여 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$y^2=3-2x$, $2x=-y^2+3$ $\quad\therefore\ x=-\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}$
x와 y를 바꾸어 쓰면 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$

(2) $y=\sqrt{x+1}-3$ $\quad y=x^2+6x+8\ (x\geq-3)$

역함수의 정의역은 $\{x|x\geq-3\}$이다.
$y+3=\sqrt{x+1}$이므로 양변을 제곱하여 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$(y+3)^2=x+1$, $y^2+6y+9=x+1$ $\quad\therefore\ x=y^2+6y+8$
x와 y를 바꾸어 쓰면 $y=x^2+6x+8$

(3) $y=-\sqrt{x-1}+3$ $\quad y=x^2-6x+10\ (x\leq3)$

역함수의 정의역은 $\{x|x\leq3\}$이다.
$y-3=-\sqrt{x-1}$이므로 양변을 제곱하여 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$(y-3)^2=x-1$, $y^2-6y+9=x-1$ $\quad\therefore\ x=y^2-6y+10$
x와 y를 바꾸어 쓰면 $y=x^2-6x+10$

(4) $y=-\sqrt{-2x+1}-2$ $\quad y=-\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{3}{2}\ (x\leq-2)$

역함수의 정의역은 $\{x|x\leq-2\}$이다.
$y+2=-\sqrt{-2x+1}$이므로 양변을 제곱하여 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$(y+2)^2=-2x+1$, $y^2+4y+4=-2x+1$
$2x=-y^2-4y-3$ $\quad\therefore\ x=-\frac{1}{2}y^2-2y-\frac{3}{2}$
x와 y를 바꾸어 쓰면 $y=-\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{3}{2}$

047

다음 함수 $f(x)$의 역함수가 $f^{-1}(x)$일 때, 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

(1) $f(x)=\sqrt{x-2}+1$, $f^{-1}(x)=x^2+ax+b\ (x\geq c)$ $\quad a=-2,\ b=3,\ c=1$

$f^{-1}(x)$의 정의역은 $\{x|x\geq1\}$이고, $y=\sqrt{x-2}+1$이라 하면
$y-1=\sqrt{x-2}$이므로 양변을 제곱하여 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$(y-1)^2=x-2$, $y^2-2y+1=x-2$ $\quad\therefore\ x=y^2-2y+3$
x와 y를 서로 바꾸어 쓰면 $y=x^2-2x+3$ $\quad\therefore\ a=-2,\ b=3,\ c=1$

(2) $f(x)=-\sqrt{x-4}+1$, $f^{-1}(x)=x^2-ax+b\ (x\leq c)$ $\quad a=2,\ b=5,\ c=1$

$f^{-1}(x)$의 정의역은 $\{x|x\leq1\}$이고, $y=-\sqrt{x-4}+1$이라 하면
$y-1=-\sqrt{x-4}$이므로 양변을 제곱하여 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$(y-1)^2=x-4$, $y^2-2y+1=x-4$ $\quad\therefore\ x=y^2-2y+5$
x와 y를 서로 바꾸어 쓰면 $y=x^2-2x+5$ $\quad\therefore\ a=2,\ b=5,\ c=1$

(3) $f(x)=-\sqrt{10-2x}-1$,

$f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x^2-ax-b\ (x\leq c)$ $\quad a=1,\ b=-\frac{9}{2},\ c=-1$

$f^{-1}(x)$의 정의역은 $\{x|x\leq-1\}$이고, $y=-\sqrt{10-2x}-1$이라 하면
$y+1=-\sqrt{10-2x}$이므로 양변을 제곱하여 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$(y+1)^2=10-2x$, $y^2+2y+1=10-2x$ $\quad\therefore\ x=-\frac{1}{2}y^2-y+\frac{9}{2}$
x와 y를 서로 바꾸어 쓰면 $y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{9}{2}$ $\quad\therefore\ a=1,\ b=-\frac{9}{2},\ c=-1$

09 무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계

❶ 무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계

① 무리함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 위치 관계는 그래프를 직접 그려서 파악한다.

② 무리함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접할 때

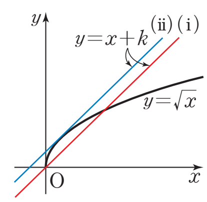
➡ 무리함수의 식과 직선의 방정식을 연립하여 만든 이차방정식 $\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$임을 이용한다.

보기 무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$에 대하여

① 직선이 (ⅱ)보다 위 ➡ 교점 0개

② 직선이 (ⅰ)보다 아래 또는 (ⅱ) ➡ 교점 1개

③ 직선이 (ⅰ) 또는 (ⅰ)과 (ⅱ) 사이 ➡ 교점 2개



풍쌤 Tip 무리함수의 그래프를 좌표평면 위에 그려 놓고 직선을 위, 아래로 평행이동하며 조건을 만족시키는 상황을 찾는다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 140쪽

048

함수 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다. $1\le k<\frac{5}{4}$

(2) 한 점에서 만난다. $k<1$ 또는 $k=\frac{5}{4}$

(3) 만나지 않는다. $k>\frac{5}{4}$

(ⅰ) 직선 $y=x+k$가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때

$k=\boxed{1}$

(ⅱ) 직선 $y=x+k$가 무리함수의 그래프에 접할 때

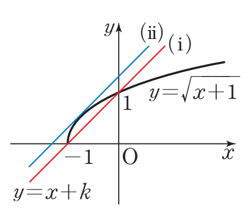
접점의 x좌표는 방정식

$\sqrt{x+1}=x+k$, 즉

$x^2+(\boxed{2k-1})x+k^2-\boxed{1}=0$의 실근이다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$k=\boxed{\frac{5}{4}}$



(1) 서로 다른 두 점에서 만날 때는 직선이 (ⅰ) 또는 (ⅰ)과 (ⅱ) 사이에 있을 때이므로 $1\le k<\boxed{\frac{5}{4}}$

(2) 한 점에서 만날 때는 직선이 (ⅰ)보다 아래 또는 (ⅱ)일 때이므로 $k<\boxed{1}$ 또는 $k=\frac{5}{4}$

(3) 만나지 않을 때는 직선이 (ⅱ)보다 위에 있을 때이므로 $k>\boxed{\frac{5}{4}}$

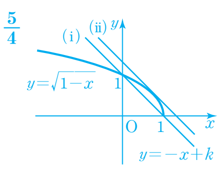
049

함수 $y=\sqrt{1-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다. $1\le k<\frac{5}{4}$

두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때는 직선이 (ⅰ) 또는 (ⅰ)과 (ⅱ)의 사이에 있을 때이므로

$1\le k<\frac{5}{4}$



(2) 한 점에서 만난다. $k<1$ 또는 $k=\frac{5}{4}$

두 그래프가 한 점에서 만날 때는 직선이 (ⅰ)보다 아래 또는 (ⅱ)일 때이므로

$k<1$ 또는 $k=\frac{5}{4}$

(3) 만나지 않는다. $k>\frac{5}{4}$

두 그래프가 만나지 않을 때는 직선이 (ⅱ)보다 위에 있을 때이므로

$k>\frac{5}{4}$

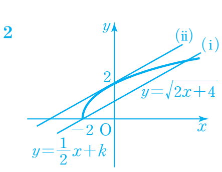
050

함수 $y=\sqrt{2x+4}$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다. $1\le k<2$

두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때는 직선이 (ⅰ) 또는 (ⅰ)과 (ⅱ)의 사이에 있을 때이므로

$1\le k<2$



(2) 한 점에서 만난다. $k<1$ 또는 $k=2$

두 그래프가 한 점에서 만날 때는 직선이 (ⅰ)보다 아래 또는 (ⅱ)일 때이므로

$k<1$ 또는 $k=2$

(3) 만나지 않는다. $k>2$

두 그래프가 만나지 않을 때는 직선이 (ⅱ)보다 위에 있을 때이므로

$k>2$

유형 실전 문제

정답과 풀이 141쪽

유형 08 무리함수의 최대·최소

무리함수 $y=f(x)$의 최댓값과 최솟값

➡ 주어진 정의역에서 $y=f(x)$의 그래프를 그리고, 최댓값, 최솟값을 각각 구한다.

풍쌤 Point $a\le x\le b$에서 무리함수 $f(x)$의 최댓값, 최솟값은 $f(a)$, $f(b)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

051

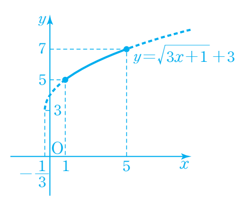
$1\le x\le 5$에서 함수 $y=\sqrt{3x+1}+3$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. 12

$y=\sqrt{3x+1}+3=\sqrt{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}+3$

$x=5$일 때 최댓값은 $M=7$

$x=1$일 때 최솟값은 $m=5$

$\therefore M+m=7+5=12$



052

$-5\le x\le 1$에서 함수 $y=-\sqrt{6-2x}+a$는 $x=b$일 때 최솟값 -3을 갖는다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -6 ② -5 ③ -4

④ -3 ⑤ -2

$y=-\sqrt{6-2x}+a=-\sqrt{-2(x-3)}+a$

$-5\le x\le 1$에서 주어진 함수는 $x=-5$일 때 최소이고 $x=1$일 때 최대이다.

$\therefore b=-5$

$x=-5$일 때 최솟값이 -3이므로

$-3=-\sqrt{6-2\times(-5)}+a$

$-3=-4+a \quad \therefore a=1$

$\therefore a+b=1+(-5)=-4$

053

$0\le x\le 6$에서 함수 $y=-\sqrt{2x+a}+5$의 최솟값이 1, 최댓값이 b일 때, $a+b$의 값을 구하시오. 7

(단, a는 상수이다.)

$y=-\sqrt{2x+a}+5=-\sqrt{2\left(x+\frac{a}{2}\right)}+5$

$0\le x\le 6$에서 주어진 함수는 $x=6$일 때 최소이고 $x=0$일 때 최대이다.

이때 주어진 함수의 최솟값이 1이므로

$1=-\sqrt{2\times 6+a}+5$

$\sqrt{a+12}=4$, $a+12=16 \quad \therefore a=4$

즉, 주어진 함수는 $y=-\sqrt{2x+4}+5$이므로 최댓값은

$b=-\sqrt{4}+5=3$

$\therefore a+b=4+3=7$

유형 09 무리함수의 역함수

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 역함수

➡ $y=\frac{1}{a}\{(x-c)^2-b\}\ (x\ge c)$

풍쌤 Point 무리함수의 역함수를 구할 때는 반드시 역함수의 정의역을 구해야 한다.

054

함수 $y=-\sqrt{2x-4}+3$의 역함수가

$$y=\frac{1}{2}x^2+ax+\frac{b}{2}\ (x\le c)$$

일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오. 13

역함수의 정의역은 $\{x\mid x\le 3\}$이다.

$y-3=-\sqrt{2x-4}$이므로 양변을 제곱하여 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$(y-3)^2=2x-4$, $y^2-6y+9=2x-4 \quad \therefore x=\frac{1}{2}y^2-3y+\frac{13}{2}$

x와 y를 바꾸어 쓰면 $y=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{13}{2}$

따라서 $a=-3$, $b=13$, $c=3$이므로 $a+b+c=-3+13+3=13$

055

두 함수

$$f(x)=\sqrt{x-3}+2,\ g(x)=x^2+ax+b\ (x\ge 2)$$

의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, $g(a+b)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 4 ② 5 ③ 6

④ 7 ⑤ 8

두 함수는 서로 역함수 관계이므로 $y=\sqrt{x-3}+2$라 하고 $y-2=\sqrt{x-3}$의 양변을 제곱하여 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$(y-2)^2=x-3$, $y^2-4y+4=x-3 \quad \therefore x=y^2-4y+7$

x와 y를 바꾸어 쓰면 $y=x^2-4x+7$

따라서 $a=-4$, $b=7$이므로

$g(a+b)=g(-4+7)=g(3)=3^2-4\times 3+7=4$

056

함수 $f(x)=\sqrt{6-2x}-3$의 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여 $f^{-1}(-1)$의 값을 구하시오. 1

$f^{-1}(-1)=a$라 하면

$f(a)=-1$

즉, $-1=\sqrt{6-2a}-3$에서

$\sqrt{6-2a}=2$, $6-2a=4$, $2a=2 \quad \therefore a=1$

$\therefore f^{-1}(-1)=1$

057

함수 $y=-\sqrt{ax+b}+5$의 그래프가 점 $(-1, 2)$를 지나고, 그 역함수의 그래프가 점 $(-1, -10)$을 지날 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 3

점 $(-1, 2)$를 지나므로 $2=-\sqrt{-a+b}+5$

$\sqrt{-a+b}=3 \quad \therefore -a+b=9 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$y=-\sqrt{ax+b}+5$의 그래프는 점 $(-10, -1)$을 지나므로 $-1=-\sqrt{-10a+b}+5$

$\sqrt{-10a+b}=6 \quad \therefore -10a+b=36 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=6$

$\therefore a+b=-3+6=3$

중단원 점검 문제

01

무리식 $\dfrac{\sqrt{2x+6}+\sqrt{2-x}}{x-1}$의 값이 실수가 되도록 하는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. -4

$2x+6\ge0$, $2-x\ge0$, $x-1\ne0$
즉, $x\ge-3$, $x\le2$, $x\ne1$에서
$-3\le x<1$ 또는 $1<x\le2$
따라서 조건을 만족시키는 정수 x의 값은 -3, -2, -1, 0, 2이므로 구하는 합은
$-3+(-2)+(-1)+0+2=-4$

02

자연수 n에 대하여 무리식 $\sqrt{n+x}+\sqrt{2n-x}$의 값이 실수가 되도록 하는 정수 x의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(10)-f(3)$의 값은?

① 19 ② 20 ✓③ 21
④ 22 ⑤ 23

$n+x\ge0$, $2n-x\ge0$
$\therefore -n\le x\le 2n$
이때 n이 자연수이므로 조건을 만족시키는 정수 x의 개수는
$f(n)=2n-(-n)+1=3n+1$
$\therefore f(10)-f(3)=(3\times10+1)-(3\times3+1)=21$

03

$\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}}=-\sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$을 만족시키는 실수 x에 대하여 $\sqrt{x^2+8x+16}-\sqrt{x^2-4x+4}$를 간단히 하면?

① 2 ② 6 ③ $2x-2$
✓④ $2x+2$ ⑤ $2x+4$

$\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}}=-\sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$이 성립하므로 $x+3\ge0$, $x-2<0$
즉, $-3\le x<2$이므로 $x+4>0$, $x-2<0$
$\therefore \sqrt{x^2+8x+16}-\sqrt{x^2-4x+4}$
$=\sqrt{(x+4)^2}-\sqrt{(x-2)^2}$
$=x+4-\{-(x-2)\}$
$=2x+2$

04 학교 시험 기출

실수 x에 대하여 $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1}$일 때,
$\dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(3)}+\cdots+\dfrac{1}{f(12)}$의 값을 구하시오. 2

$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1}}=\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x+1}}{(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1})(\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x+1})}$
$=\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{2}$
$\therefore \dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(3)}+\cdots+\dfrac{1}{f(12)}$
$=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{2}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\cdots+\dfrac{\sqrt{25}-\sqrt{23}}{2}$
$=\dfrac{\sqrt{25}-\sqrt{1}}{2}=\dfrac{5-1}{2}=2$

05

$x=2\sqrt{2}$일 때, $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}-\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}$의 값을 구하시오. 2

$\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}-\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{(x+2)-(x-2)}{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}=\dfrac{4}{\sqrt{x^2-4}}$
$=\dfrac{4}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2-4}}=\dfrac{4}{\sqrt{4}}=2$

06

다음 중 함수 $y=a\sqrt{bx}$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은? (단, a, b는 상수이고 $ab\ne0$이다.)

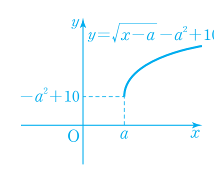
① $a>0$이면 정의역은 $\{x\,|\,x\ge0\}$이다.
② $b<0$이면 치역은 $\{y\,|\,y\le0\}$이다.
③ 그래프는 함수 $y=a\sqrt{-bx}$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.
④ $a>0$, $b>0$이면 그래프는 제2사분면을 지난다.
✓⑤ $ab<0$이면 그래프는 제2사분면 또는 제4사분면을 지난다.

① a의 값에 관계없이 $b>0$일 때 정의역은 $\{x\,|\,x\ge0\}$이다.
② b의 값에 관계없이 $a<0$일 때 치역은 $\{y\,|\,y\le0\}$이다.
③ y축에 대하여 대칭이다.
④ 제1사분면을 지난다.
⑤ $ab<0$일 때, $a>0$, $b<0$ 또는 $a<0$, $b>0$이므로 그래프는 제2사분면 또는 제4사분면을 지난다.

07 실전 Plus

정의역이 $\{x\,|\,x\ge a\}$인 함수 $y=\sqrt{x-a}-a^2+10$의 그래프가 오직 하나의 사분면을 지나도록 하는 정수 a의 최댓값을 구하시오. 3

그래프가 오직 하나의 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $a\ge0$, $-a^2+10\ge0$
$-a^2+10\ge0$에서 $a^2\le10$ $\therefore -\sqrt{10}\le a\le\sqrt{10}$
$\therefore 0\le a\le\sqrt{10}$
따라서 정수 a의 최댓값은 3이다.

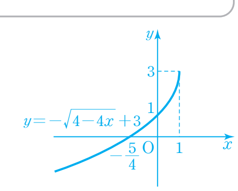


08

보기에서 함수 $y=-\sqrt{4-4x}+3$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. ㄱ, ㄷ, ㄹ

보기
ㄱ. 정의역은 $\{x\,|\,x\le1\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\le3\}$이다.
ㄴ. 그래프는 제4사분면을 지난다.
ㄷ. 그래프는 점 $(-3,\ -1)$을 지난다.
ㄹ. 그래프는 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 함수 $y=\sqrt{4x}$의 그래프와 겹쳐질 수 있다.

ㄴ. $y=-\sqrt{4-4x}+3=-\sqrt{-4(x-1)}+3$
즉, 이 함수의 그래프는 제4사분면을 지나지 않는다.
ㄹ. 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$-y=-\sqrt{4+4x}+3$ $\therefore y=\sqrt{4x+4}-3$
이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\sqrt{4(x-1)+4}-3+3$ $\therefore y=\sqrt{4x}$



09

함수 $y=\sqrt{a(3-x)}+2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면 함수 $y=\sqrt{-3x}-1$의 그래프와 일치할 때, $a-p-q$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) 9

평행이동한 그래프의 식은 $y=\sqrt{-a(x-p-3)}+2+q$
이 함수의 그래프가 함수 $y=\sqrt{-3x}-1$의 그래프와 일치하므로
$-a=-3,\ -p-3=0,\ 2+q=-1$
따라서 $a=3,\ p=-3,\ q=-3$이므로 $a-p-q=3-(-3)-(-3)=9$

10 학교 시험 기출

함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 함수 $y=\sqrt{-2x+6}+c$의 그래프와 일치할 때, 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하시오. 24

$y=\sqrt{-a(x-b)}+4 \qquad \therefore\ y=\sqrt{-ax+ab}+4$
이 함수의 그래프가 함수 $y=\sqrt{-2x+6}+c$의 그래프와 일치하므로
$-a=-2,\ ab=6,\ 4=c$
따라서 $a=2,\ b=3,\ c=4$이므로 $abc=2\times3\times4=24$

11

다음 함수 중 그 그래프가 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 함수 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프와 겹쳐지지 않는 것은?

① $y=\sqrt{-2x}$ ② $y=-\sqrt{2x+4}$
③ $y=-\sqrt{2-x}+1$ ④ $y=\sqrt{2x-6}+2$
⑤ $y=\sqrt{2-2x}-3$

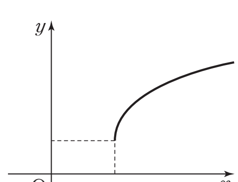
① 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.
② $y=-\sqrt{2x+4}=-\sqrt{2(x+2)}$
③ $y=-\sqrt{2-x}+1=-\sqrt{-(x-2)}+1$
④ $y=\sqrt{2x-6}+2=\sqrt{2(x-3)}+2$
⑤ $y=\sqrt{2-2x}-3=\sqrt{-2(x-1)}-3$

12

무리함수 $y=\sqrt{x-a}+b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 무리함수

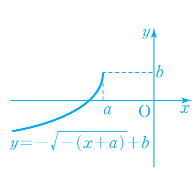
$$y=-\sqrt{-(x+a)}+b$$

의 그래프가 지나지 않는 사분면을 모두 고른 것은? (단, a, b는 상수이다.)



① 제1사분면 ② 제3사분면 ③ 제1, 3사분면
④ 제1, 4사분면 ⑤ 제3, 4사분면

$y=\sqrt{x-a}+b$의 그래프에서
$a>0,\ b>0$
이때 함수 $y=-\sqrt{-(x+a)}+b$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 제1, 4사분면을 지나지 않는다.

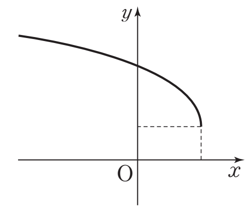


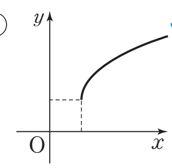
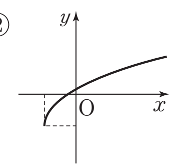
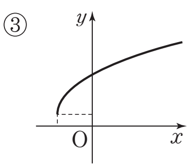
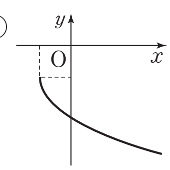
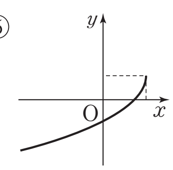
13 실전 Plus

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 무리함수

$$y=\sqrt{cx+b}+a$$

의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은? (단, a, b, c는 상수이다.)



①

②

③

④

⑤


$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+c$의 그래프에서 $a<0,\ -\dfrac{b}{a}>0,\ c>0$이므로
$a<0,\ b>0,\ c>0$
$y=\sqrt{cx+b}+a=\sqrt{c\left(x+\dfrac{b}{c}\right)}+a$

14 교육청 기출

$-5\le x\le -1$에서 함수 $f(x)=\sqrt{-ax+1}\ (a>0)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오. 3

$f(x)=\sqrt{-ax+1}=\sqrt{-a\left(x-\dfrac{1}{a}\right)}$
따라서 $-5\le x\le -1$에서 함수 $f(x)$는 $x=-5$일 때 최댓값이 4이므로
$f(-5)=4$에서 $\sqrt{5a+1}=4$
$5a+1=16,\ 5a=15 \qquad \therefore\ a=3$

15

두 함수 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{2}+1$, $g(x)$에 대하여 $(f\circ g)(x)=x$일 때, $(g\circ g)(2)$의 값을 구하시오. 102

두 함수 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{2}+1$, $g(x)$는 서로 역함수 관계이다.
이때 $g(2)=k$라 하면 $f(k)=\dfrac{\sqrt{k-2}}{2}+1=2 \qquad \therefore\ k=6$
즉, $g(2)=6$이므로 $(g\circ g)(2)=g(g(2))=g(6)$
$g(6)=l$이라 하면 $f(l)=\dfrac{\sqrt{l-2}}{2}+1=6,\ \dfrac{\sqrt{l-2}}{2}=5 \qquad \therefore\ l=102$

16

함수 $f(x)=\sqrt{ax+2}+b\ (b<5)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 점 $(1, 2)$에서 만날 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. 3

(단, a, b는 상수이다.)

$f(1)=2,\ g(1)=2$이므로 $f(1)=2,\ f(2)=1$
$f(1)=2$이므로 $\sqrt{a+2}+b=2$
$\sqrt{a+2}=2-b \qquad \therefore\ a=(2-b)^2-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$f(2)=1$이므로 $\sqrt{2a+2}+b=1$
$\sqrt{2a+2}=1-b \qquad \therefore\ a=\dfrac{(1-b)^2-2}{2} \qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $(2-b)^2-2=\dfrac{(1-b)^2-2}{2}$
$2(b^2-4b+2)=b^2-2b-1 \qquad \therefore\ b=1\ (\because\ b<5),\ a=-1\ (\because$ ㉠$)$
따라서 $f(x)=\sqrt{-x+2}+1$이므로 $f(-2)=\sqrt{-(-2)+2}+1=2+1=3$