풍산자
반복수학
파워

공통수학 1

구성과 특징

1

주제별 구성으로 개념 》 연산 》 유형을 동시에 연습하는 빠른 학습서

문제 해결에 꼭 필요한 핵심 개념과 개념 기본 문제를 연습하고
유형 실전 문제를 통해 개념부터 유형까지 빠르게 학습

2

한 권으로 핵심 유형의 기본기를 완성하는 실전 학습서

갑작스러운 난이도 상승 없는 유형 문제 구성으로
문제 해결 과정을 반복적으로 연습하여 저절로 실전 문제 해결력 향상

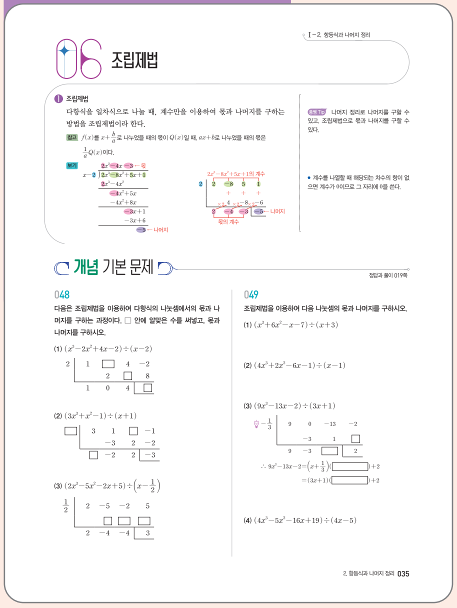
3

3단계 학습으로 빈틈없이 실력을 강화하는 단계형 학습서

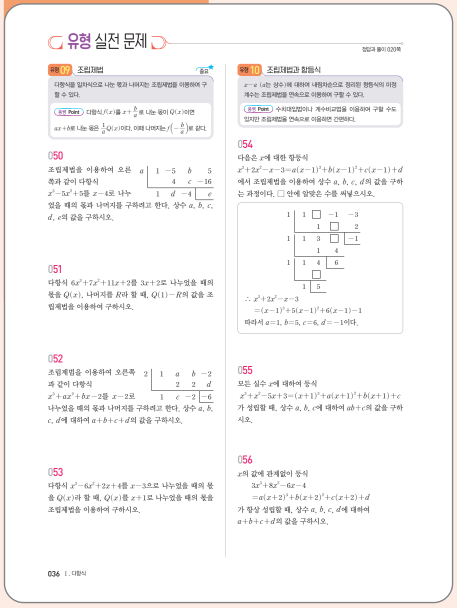
[개념 적용 학습] 》 [유형 학습] 》 [중단원 유형 점검]의 3단계 학습으로
체계적인 훈련을 통해 스스로 실력 완성

개념 》 연산 》 유형을 한 번에,
실전 기본기를 빠르게 완성하는 반복 학습서

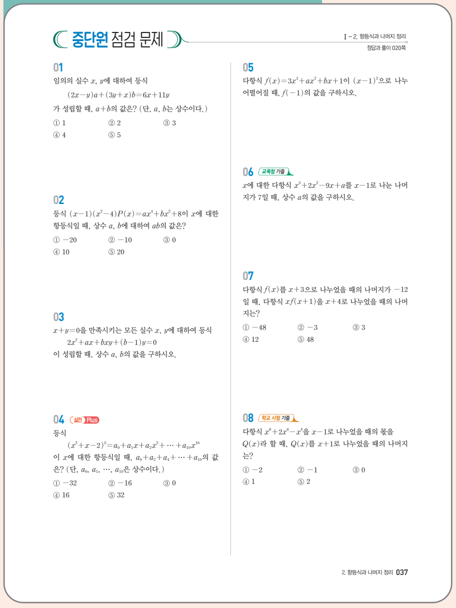
개념 적용 학습



유형 학습



중단원 유형 점검



핵심 개념 정리

- 주제별 핵심 개념만을 모은 간단명료한 개념 정리
- 개념 이해를 돕는 참고, 보기, 주의 제시
- 개념을 적용하는 풍쌤 Tip 풀이 전략 제공

개념 기본 문제

- 개념을 바로 적용하는 기본 문제로 유형 학습 대비

유형 실전 문제

- 시험 대비에 꼭 필요한 유형을 선별하여 구성
- 변형 문제를 난이도 순으로 배열하여 유형 학습에 집중한 실전 문제
- 풍쌤 Point로 유형별 핵심 전략 제공

중단원 점검 문제

- 중단원별 유형 문제로 학습 성취도 점검
- 출제율이 높은 학교 시험 기출 문제 수록
- 최신 경향을 반영한 교육청 기출, 평가원 기출 문제 수록
- 유형 문제 중 한 단계 발전된 실전 Plus 문제 수록

차례

Ⅰ 다항식

Ⅱ 방정식과 부등식

Ⅲ 경우의 수

Ⅳ 행렬

I

다항식

식의 구조를 꿰뚫어라.

다항식은 중학교 때부터 배운 내용이다. 고등학교에서는 복잡한 다항식이 본격적으로 나오기 시작한다. 기본은 연산이지만 단순한 계산을 넘어서 다항식 자체를 도구로 보는 눈이 필요하다. 겉보기에 계산 위주로 보여도 식의 구조를 파악하는 것이 핵심이다. 식의 구조를 파악하고, 패턴을 읽는 힘. 이 힘을 기르는 것이 이 단원의 목표다.

01 다항식의 연산

본문 008~025쪽

유형① 다항식의 정리
유형② 다항식의 덧셈과 뺄셈
유형③ 다항식의 곱셈
유형④ 다항식의 전개식에서 특정 항의 계수
유형⑤ 곱셈 공식—기본
유형⑥ 곱셈 공식—치환
유형⑦ 곱셈 공식의 변형—$a^n \pm b^n$
유형⑧ 곱셈 공식의 변형—$x^n \pm \frac{1}{x^n}$
유형⑨ 곱셈 공식의 변형—$a^n \pm b^n \pm c^n$
유형⑩ 다항식의 나눗셈—기본
유형⑪ 다항식의 나눗셈—$A=BQ+R$

다항식의 덧셈과 뺄셈

동류항 끼리 모아서 정리한다.
└문자와 차수가 같은 항

곱셈 공식

① $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
② $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
③ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
④ $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$
⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$
⑥ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

다항식의 나눗셈

각 다항식을 내림차순으로 정리한 후 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

$$
\begin{array}{r|r l}
 & 3x^2-3x+2 & \leftarrow \text{몫} \\
\cline{2-2}
x-2 & 3x^3-9x^2+8x+5 & \\
\uparrow\ \ & 3x^3-6x^2 & \\
\cline{2-2}
\text{나누는 식} & -3x^2+8x & \\
 & -3x^2+6x & \\
\cline{2-2}
 & 2x+5 & \\
 & 2x-4 & \\
\cline{2-2}
 & \text{나머지} \rightarrow 9 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad 3x^3-8x^2+6x+2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{나누는 식}}}{(x-2)}\underset{\substack{\uparrow \\ \text{몫}}}{(3x^2-3x+2)}+\underset{\substack{\uparrow \\ \text{나머지}}}{9}$$

02 항등식과 나머지정리

본문 026~038쪽

유형① 미정계수법—계수비교법
유형② 미정계수법—수치대입법
유형③ 항등식의 계수의 합
유형④ 다항식의 나눗셈과 항등식
유형⑤ 나머지 정리
—일차식으로 나누었을 때의 나머지
유형⑥ 나머지 정리
—이차식으로 나누었을 때의 나머지
유형⑦ 인수 정리
—일차식으로 나누어떨어지는 경우

항등식

문자를 포함하는 등식에서 그 문자에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하는 등식

항등식의 성질

$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

미정계수법

항등식의 뜻과 성질을 이용하여 주어진 등식에서 미지의 계수를 정하는 방법을 미정계수법이라 한다.

① 계수비교법: 양변의 동류항의 계수를 비교하여 미정계수를 정하는 방법
② 수치대입법: 문자에 적당한 수를 대입하여 미정계수를 정하는 방법

- 유형 ⑧ 인수 정리
  —이차식으로 나누어떨어지는 경우
- 유형 ⑨ 조립제법
- 유형 ⑩ 조립제법과 항등식

계수비교법	수치대입법
$a=2$ $2x+4=ax+b$ $b=4$	$2x+4=ax+b$ ① $x=0$ 대입 → $b=4$ $\therefore 2x+4=ax+4$ ② $x=1$ 대입 → $a=2$

나머지정리

다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지 ➡ $\boxed{f(a)}$

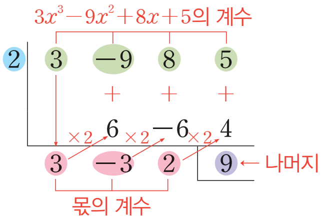
인수 정리

다항식 $f(x)$에서 $\boxed{f(a)=0}$이면 $f(x)$는 일차식 $\boxed{x-a}$로 나누어떨어진다.

조립제법

$$\begin{array}{rr}
 & 3x^2-3x+2 \leftarrow \text{몫}\\
x-2 & \big)\overline{3x^3-9x^2+8x+5}\\
 & \underline{3x^3-6x^2}\\
 & -3x^2+8x\\
 & \underline{-3x^2+6x}\\
 & 2x+5\\
 & \underline{2x-4}\\
 & 9 \leftarrow \text{나머지}
\end{array}$$

➡



03 인수분해

본문 039~052쪽

- 유형 ① 인수분해—기본
- 유형 ② 인수분해—치환
- 유형 ③ 완전제곱식을 포함한 다항식의 인수분해
- 유형 ④ x^4+ax^2+b 꼴의 인수분해
- 유형 ⑤ 문자가 여러 개인 다항식의 인수분해
- 유형 ⑥ 인수 정리를 이용한 고차식의 인수분해
- 유형 ⑦ 인수분해의 활용

인수분해 공식

① $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

② $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

③ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

치환을 이용한 인수분해

$$\begin{aligned}
(x^2+4x-2)(x^2+4x+1)-18&=(t-2)(t+1)-18\\
&=t^2-t-20\\
&=(t+4)(t-5)\\
&=(x^2+4x+4)(x^2+4x-5)\\
&=(x+2)^2(x+5)(x-1)
\end{aligned}$$

01 다항식의 정리

❶ 다항식의 정리

① 내림차순: 한 문자에 대하여 차수가 높은 항부터 낮은 항의 순서로 나타내는 것

② 오름차순: 한 문자에 대하여 차수가 낮은 항부터 높은 항의 순서로 나타내는 것

보기 x에 대한 내림차순 ➡ x^3+x^2-2 x에 대한 오름차순 ➡ $-2+x^2+x^3$

참고 한 개 이상의 합으로 이루어진 식은 다항식, 하나의 항으로만 이루어진 식은 단항식이라 한다.

❷ 다항식의 덧셈과 뺄셈

① 덧셈: 괄호를 풀고, 동류항끼리 모아서 정리한다.

참고 $A+(B-C)=A+B-C$

② 뺄셈: 괄호를 풀고, 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어 더한다.

참고 $A-(B-C)=A-B+C$

❸ 다항식의 덧셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

① 교환법칙: $A+B=B+A$

② 결합법칙: $(A+B)+C=A+(B+C)$

• 다항식에 대한 용어

① 항: 다항식을 이루는 각각의 단항식

② 동류항: 문자와 차수가 같은 항

③ 상수항: 특정한 문자를 포함하지 않는 항

④ 항의 차수: 항에 곱해진 문자의 개수

⑤ 다항식의 차수: 다항식에서 차수가 가장 큰 항의 차수

⑥ 계수: 각각의 항에서 특정한 문자를 제외한 나머지 부분

풍쌤 Tip 한 문자에 대하여 내림차순이나 오름차순으로 정리할 때, 기준이 되는 문자를 제외한 나머지 문자는 상수로 생각한다.

개념 기본 문제

001

다항식 x^3-2x^2-x+9에 대하여 옳은 것은 ○를, 옳지 않은 것은 ×를 ( ) 안에 써넣으시오.

(1) 항은 모두 4개이다. (○)

(2) 다항식의 차수는 4이다. (×)

(3) x의 계수는 -1이다. (○)

(4) x^3의 계수는 3이다. (×)

(5) $-2x^2$과 $-x$는 동류항이다. (×)

(6) 상수항은 9이다. (○)

002

다항식 $2x^5+4y^4+3x^2y^2-7x+6y+4$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) x에 대한 다항식의 차수 **5**

x에 대한 최고차항은 $2x^5$이므로 차수는 5이다.

(2) y에 대한 다항식의 차수 **4**

y에 대한 최고차항은 $4y^4$이므로 차수는 4이다.

(3) x에 대한 일차항의 계수 **-7**

x에 대한 일차항은 $-7x$이므로 계수는 -7이다.

(4) y에 대한 이차항의 계수 **$3x^2$**

y에 대한 이차항은 $3x^2y^2$이므로 계수는 $3x^2$이다.

(5) x에 대한 상수항 **$4y^4+6y+4$**

x에 대한 상수항은 $4y^4+6y+4$이다.

(6) y에 대한 상수항 **$2x^5-7x+4$**

y에 대한 상수항은 $2x^5-7x+4$이다.

003

다항식 $x^3y^3+6xy^2-x^3y+3y^2-xy+4y+3$을 다음과 같이 정리하시오.

(1) x에 대한 내림차순 $\mathbf{(y^3-y)x^3+(6y^2-y)x+(3y^2+4y+3)}$

$$\begin{aligned}&x^3y^3+6xy^2-x^3y+3y^2-xy+4y+3\\&=(x^3y^3-x^3y)+(6xy^2-xy)+3y^2+4y+3\\&=(y^3-y)x^3+(6y^2-y)x+(3y^2+4y+3)\end{aligned}$$

(2) x에 대한 오름차순 $\mathbf{(3y^2+4y+3)+(6y^2-y)x+(y^3-y)x^3}$

$$\begin{aligned}&x^3y^3+6xy^2-x^3y+3y^2-xy+4y+3\\&=3y^2+4y+3+(6xy^2-xy)+(x^3y^3-x^3y)\\&=(3y^2+4y+3)+(6y^2-y)x+(y^3-y)x^3\end{aligned}$$

(3) y에 대한 내림차순 $\mathbf{x^3y^3+(6x+3)y^2+(-x^3-x+4)y+3}$

$$\begin{aligned}&x^3y^3+6xy^2-x^3y+3y^2-xy+4y+3\\&=x^3y^3+(6xy^2+3y^2)+(-x^3y-xy+4y)+3\\&=x^3y^3+(6x+3)y^2+(-x^3-x+4)y+3\end{aligned}$$

(4) y에 대한 오름차순 $\mathbf{3+(-x^3-x+4)y+(6x+3)y^2+x^3y^3}$

$$\begin{aligned}&x^3y^3+6xy^2-x^3y+3y^2-xy+4y+3\\&=3+(-x^3y-xy+4y)+(6xy^2+3y^2)+x^3y^3\\&=3+(-x^3-x+4)y+(6x+3)y^2+x^3y^3\end{aligned}$$

004

다음을 계산하시오.

(1) $(4x^3-2x^2+3)+(x^3+3x^2-2)$ $\mathbf{5x^3+x^2+1}$

(2) $(-3y^4+5y^3-y^2)+(y^4+2y^2+4)$ $\mathbf{-2y^4+5y^3+y^2+4}$

(3) $(y^2+3xy-x^2)+(2x^2-6y^2-5xy)$ $\mathbf{x^2-2xy-5y^2}$

005

다음을 계산하시오.

(1) $(3x^2-4x+7)-(x^2+x-2)$ $\mathbf{2x^2-5x+9}$

(2) $(b^4+2b^3-4b)-(2b^4-3b^3+b)$ $\mathbf{-b^4+5b^3-5b}$

(3) $(5a^3+3ab^2-ab)-(ab^2+2ab-a^3)$ $\mathbf{6a^3+2ab^2-3ab}$

006

두 다항식 $A=4x^2-x+1$, $B=-x^2+3x-2$에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $A+B$ $\mathbf{3x^2+2x-1}$

$$\begin{aligned}A+B&=(4x^2-x+1)+(-x^2+3x-2)\\&=4x^2-x+1-x^2+3x-2\\&=4x^2-x^2-x+3x+1-2\\&=3x^2+2x-1\end{aligned}$$

(2) $A-B$ $\mathbf{5x^2-4x+3}$

$$\begin{aligned}A-B&=(4x^2-x+1)-(-x^2+3x-2)\\&=4x^2-x+1+x^2-3x+2\\&=4x^2+x^2-x-3x+1+2\\&=5x^2-4x+3\end{aligned}$$

(3) $3A-2B$ $\mathbf{14x^2-9x+7}$

$$\begin{aligned}3A-2B&=3(4x^2-x+1)-2(-x^2+3x-2)\\&=12x^2-3x+3+2x^2-6x+4\\&=12x^2+2x^2-3x-6x+3+4\\&=14x^2-9x+7\end{aligned}$$

007

세 다항식 $A=-4x^2-2xy+y^2$, $B=x^2-6xy-3y^2$, $C=x^2+y^2$에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $A+B+C$ $\mathbf{-2x^2-8xy-y^2}$

$$\begin{aligned}&A+B+C\\&=(-4x^2-2xy+y^2)+(x^2-6xy-3y^2)+(x^2+y^2)\\&=-4x^2+x^2+x^2-2xy-6xy+y^2-3y^2+y^2\\&=-2x^2-8xy-y^2\end{aligned}$$

(2) $A-B-C$ $\mathbf{-6x^2+4xy+3y^2}$

$$\begin{aligned}A-B-C&=(-4x^2-2xy+y^2)-(x^2-6xy-3y^2)-(x^2+y^2)\\&=-4x^2-2xy+y^2-x^2+6xy+3y^2-x^2-y^2\\&=-4x^2-x^2-x^2-2xy+6xy+y^2+3y^2-y^2\\&=-6x^2+4xy+3y^2\end{aligned}$$

(3) $2A+B-(2B-C)$ $\mathbf{-8x^2+2xy+6y^2}$

$$\begin{aligned}2A+B-(2B-C)&=2A+B-2B+C\\&=2A-B+C\\&=2(-4x^2-2xy+y^2)-(x^2-6xy-3y^2)+(x^2+y^2)\\&=-8x^2-4xy+2y^2-x^2+6xy+3y^2+x^2+y^2\\&=-8x^2-x^2+x^2-4xy+6xy+2y^2+3y^2+y^2\\&=-8x^2+2xy+6y^2\end{aligned}$$

유형 실전 문제

정답과 풀이 003쪽

유형 01 다항식의 정리

내림차순으로 정리할 때는 차수가 높은 항부터 나타내고, 오름차순으로 정리할 때는 차수가 낮은 항부터 나타낸다.

풍쌤 Point 다항식이 여러 개의 문자를 포함할 때, 어떤 문자를 기준으로 정리하는지 주의 깊게 살핀다.

008

다음 중 다항식을 x에 대한 내림차순으로 정리한 것은?

① $3-x+x^2$　② x^3-x+x^2

③ $-x^5+x^6+x^2-4$　[✓ ④ $2x^6-x^4$]

⑤ $8x+4x^2-2$

x에 대한 내림차순으로 정리하면

① x^2-x+3

② x^3+x^2-x

③ $x^6-x^5+x^2-4$

⑤ $4x^2+8x-2$

009

보기에서 y에 대한 오름차순으로 정리한 다항식만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $2y^2-y+8$　ㄴ. $y-y^2+4y^4$

ㄷ. $x^2+xy+x^2y^2$　ㄹ. $x^2y^2-xy+x^2+4$

① ㄱ, ㄴ　② ㄱ, ㄷ　[✓ ③ ㄴ, ㄷ]

④ ㄴ, ㄹ　⑤ ㄷ, ㄹ

y에 대한 오름차순으로 정리하면

ㄱ. $8-y+2y^2$

ㄹ. $x^2+4-xy+x^2y^2$

010

보기에서 다항식을 [　] 안의 문자에 대한 내림차순으로 정리한 것만을 있는 대로 고르시오.　ㄱ, ㄴ, ㄷ

보기

ㄱ. $x^6-x^4y^4+x^2y+xy^2$　[x]

ㄴ. $x^2y^3-xy^2+x^4y-2+x^4$　[y]

ㄷ. $(a^2+a)b+a^6+a^4+1$　[b]

ㄹ. $x^2yz^3+y^2-xz^2+z+x$　[z]

[　] 안의 문자에 대한 내림차순으로 정리하면

ㄹ. $x^2yz^3-xz^2+z+x+y^2$

유형 02 다항식의 덧셈과 뺄셈

뺄셈이 포함되어 있으면 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾼 후, 동류항끼리 모아서 계산한다.

풍쌤 Point 계산하는 식이 복잡한 경우, 주어진 식을 먼저 간단히 정리한 후 다항식을 대입하여 계산한다.

011

두 다항식 $A=3x^3+xy-2y^2$, $B=-x^3-4xy+2y^2$에 대하여 $(3A+B)-(A-2B)$를 계산하시오.

$3x^3-10xy+2y^2$

$$(3A+B)-(A-2B)=2A+3B$$
$$=2(3x^3+xy-2y^2)+3(-x^3-4xy+2y^2)$$
$$=3x^3-10xy+2y^2$$

012

세 다항식 $A=5x^4-3x^2+3$, $B=2x^2+2x-1$, $C=2x^4-3x$에 대하여 $(A-3B)-2(-2B+C)$를 계산한 식에서 x^2의 계수와 상수항의 합은?

① -2　② -1　③ 0

[✓ ④ 1]　⑤ 2

$$(A-3B)-2(-2B+C)=A+B-2C$$
$$=(5x^4-3x^2+3)+(2x^2+2x-1)-2(2x^4-3x)$$
$$=x^4-x^2+8x+2$$

따라서 x^2의 계수는 -1, 상수항은 2이므로 그 합은 $-1+2=1$

013

두 다항식 $A=-y^2-3y-5$, $B=3y^2-y+4$에 대하여 $X+A=2B$를 만족시키는 다항식 X를 구하시오.

$7y^2+y+13$

$$X=-A+2B$$
$$=-(-y^2-3y-5)+2(3y^2-y+4)$$
$$=7y^2+y+13$$

014

두 다항식 A, B에 대하여

$$A+B=-x^2+5xy-3,\ A-B=-x^2-xy-9$$

일 때, $2A+B$를 계산하면?

[✓ ① $-2x^2+7xy-9$]　② $-x^2-4xy+3$

③ $x^2+2xy-3$　④ $2x^2-7xy+9$

⑤ $2x^2+xy+15$

$A+B=-x^2+5xy-3$ …… ㉠, $A-B=-x^2-xy-9$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $2A=-2x^2+4xy-12$

$\therefore\ A=-x^2+2xy-6$

㉠에 $A=-x^2+2xy-6$을 대입하여 정리하면

$B=(-x^2+5xy-3)-(-x^2+2xy-6)=3xy+3$

$\therefore\ 2A+B=2(-x^2+2xy-6)+(3xy+3)=-2x^2+7xy-9$

02 다항식의 곱셈

① 다항식의 곱셈

다항식의 곱셈은 지수법칙과 분배법칙을 이용하여 식을 전개한 다음 동류항끼리 모아서 정리한다.

보기 $(x+2)(x^2+x-1)=x(x^2+x-1)+2(x^2+x-1)$
$=x^3+x^2-x+2x^2+2x-2$
$=x^3+3x^2+x-2$

② 다항식의 곱셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

① 교환법칙: $AB=BA$
② 결합법칙: $(AB)C=A(BC)$
③ 분배법칙: $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

참고 $(AB)C$와 $A(BC)$는 괄호 없이 ABC로 나타낼 수 있다.

- **지수법칙**
m, n이 자연수일 때, $x^m x^n=x^{m+n}$

- 괄호를 풀어 하나의 다항식으로 나타내는 것을 전개라 하고, 전개하여 얻은 다항식을 전개식이라 한다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 003쪽

015

다음 식을 전개하시오.

(1) $x(x^3-2x+2)$ $\boldsymbol{x^4-2x^2+2x}$

(2) $(x^2+x)(x+1)$ $\boldsymbol{x^3+2x^2+x}$

(3) $(a-1)(3a^2-2a+1)$ $\boldsymbol{3a^3-5a^2+3a-1}$

(4) $(x+4)(2x^2-x-3)$ $\boldsymbol{2x^3+7x^2-7x-12}$

016

다음 식을 전개하시오.

(1) $(a^2-a+2b^2)ab$ $\boldsymbol{a^3b-a^2b+2ab^3}$

$(a^2-a+2b^2)ab=a^3b-a^2b+2ab^3$

(2) $(2x-y)(x^2-2xy+3y^2)$ $\boldsymbol{2x^3-5x^2y+8xy^2-3y^3}$

$(2x-y)(x^2-2xy+3y^2)=2x^3-4x^2y+6xy^2-x^2y+2xy^2-3y^3$
$=2x^3-5x^2y+8xy^2-3y^3$

(3) $(3a+2b)(2a^2+4b-b^2)$ $\boldsymbol{6a^3+4a^2b-3ab^2+12ab-2b^3+8b^2}$

$(3a+2b)(2a^2+4b-b^2)=6a^3+12ab-3ab^2+4a^2b+8b^2-2b^3$
$=6a^3+4a^2b-3ab^2+12ab-2b^3+8b^2$

(4) $(x+2y)(x-y)(4x+y)$ $\boldsymbol{4x^3+5x^2y-7xy^2-2y^3}$

$(x+2y)(x-y)(4x+y)=(x^2+xy-2y^2)(4x+y)$
$=4x^3+5x^2y-7xy^2-2y^3$

017

다음 전개식에서 [ ] 안의 항의 계수를 구하시오.

(1) $(x-2)(x^2-x+5)$ [x] $\mathbf{7}$

$(x-2)(x^2-x+5)=x^3-x^2+5x-2x^2+2x-10$
$=x^3-3x^2+7x-10$

(2) $(a-3b)(2a^2+3ab-b)$ [a^2b] $\mathbf{-3}$

$(a-3b)(2a^2+3ab-b)=2a^3+3a^2b-ab-6a^2b-9ab^2+3b^2$
$=2a^3-3a^2b-9ab^2-ab+3b^2$

018

다음 전개식에서 [ ] 안의 항의 계수를 구하시오.

(1) $(y^2+4y+2)(3y^2-y-1)$ [y^3] $\mathbf{11}$

단계1. y^3의 항 전개하기

$y^2\times(-y)+4y\times 3y^2=-y^3+12y^3=11y^3$

단계2. y^3의 계수 구하기

$11y^3$에서 y^3의 계수는 11이다.

(2) $(x^2-xy+6y^2)(x^2-3xy-y^2)$ [x^2y^2] 8

$x^2\times(-y^2)+(-xy)\times(-3xy)+6y^2\times x^2$
$=-x^2y^2+3x^2y^2+6x^2y^2=8x^2y^2$

03 곱셈 공식

❶ 곱셈 공식 (1)

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

② $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

③ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

④ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

❷ 곱셈 공식 (2)

① $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

② $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

③ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

④ $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$,
$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

⑥ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

- 곱셈 공식 (1)은 중학교에서 학습한 내용이다.

풍쌤 Tip $(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2$, $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)$이므로 $(a+b)^2$의 곱셈 공식을 이용하여 전개하면 ①, ②를 얻을 수 있다.

개념 기본 문제

019

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $(2x+1)^2=(2x)^2+2\times\boxed{2x}\times\boxed{1}+1^2$
$=4x^2+\boxed{4x}+1$

(2) $(3x+2)(3x-2)=(\boxed{3x})^2-2^2$
$=\boxed{9x^2}-4$

(3) $(x-1)(x+4)=x^2+(\boxed{-1}+\boxed{4})x+(-1)\times4$
$=x^2+\boxed{3x}-4$

(4) $(2x+3)(3x+1)=6x^2+(2+9)x+\boxed{3}\times\boxed{1}$
$=6x^2+11x+\boxed{3}$

020

곱셈 공식을 이용하여 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x-4)^2$ $x^2-8x+16$

(2) $(2a+3)^2$ $4a^2+12a+9$

(3) $(y+5)(y-5)$ y^2-25

(4) $(3a-2b)(3a+2b)$ $9a^2-4b^2$

(5) $(x-1)(x-3)$ x^2-4x+3

(6) $(y+2)(y-6)$ $y^2-4y-12$

(7) $(3a-1)(a+4)$ $3a^2+11a-4$

(8) $(5x+2)(2x+3)$ $10x^2+19x+6$

021

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $(a+b-c)^2$

$=a^2+b^2+(\boxed{-c})^2+2\times a\times b+2\times b\times(-c)$
$+2\times(-c)\times a$

$=a^2+b^2+\boxed{c^2}+2ab-2bc-2ca$

(2) $(x+4)^3=x^3+3\times x^2\times 4+3\times x\times\boxed{4}^2+4^3$

$=x^3+12x^2+\boxed{48x}+64$

(3) $(2x-1)^3$

$=(2x)^3-3\times(\boxed{2x})^2\times 1+3\times 2x\times 1^2-1^3$

$=8x^3-\boxed{12x^2}+6x-1$

(4) $(x+3)(x^2-3x+9)=(x+3)(x^2-x\times\boxed{3}+3^2)$

$=x^3+\boxed{3}^3$

$=x^3+\boxed{27}$

022

곱셈 공식을 이용하여 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a-b-c)^2$ $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

(2) $(a+b-1)^2$ $a^2+b^2+2ab-2a-2b+1$

(3) $(x+3y+z)^2$ $x^2+9y^2+z^2+6xy+6yz+2zx$

(4) $(2a-b+4c)^2$ $4a^2+b^2+16c^2-4ab-8bc+16ca$

023

곱셈 공식을 이용하여 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x-1)^3$ x^3-3x^2+3x-1

(2) $(a+3)^3$ $a^3+9a^2+27a+27$

(3) $(y-2)^3$ $y^3-6y^2+12y-8$

(4) $(3x+1)^3$ $27x^3+27x^2+9x+1$

$(3x+1)^3=(3x)^3+3\times(3x)^2\times 1+3\times 3x\times 1^2+1^3$
$=27x^3+27x^2+9x+1$

(5) $(1-2a)^3$ $1-6a+12a^2-8a^3$

$(1-2a)^3=1^3-3\times 1^2\times 2a+3\times 1\times(2a)^2-(2a)^3$
$=1-6a+12a^2-8a^3$

(6) $(5x-4y)^3$ $125x^3-300x^2y+240xy^2-64y^3$

$(5x-4y)^3=(5x)^3-3\times(5x)^2\times 4y+3\times 5x\times(4y)^2-(4y)^3$
$=125x^3-300x^2y+240xy^2-64y^3$

024

곱셈 공식을 이용하여 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+2)(x^2-2x+4)$ x^3+8

(2) $(a-1)(a^2+a+1)$ a^3-1

(3) $(y-6)(y^2+6y+36)$ y^3-216

(4) $(3a+1)(9a^2-3a+1)$ $27a^3+1$

$(3a+1)(9a^2-3a+1)=(3a+1)\{(3a)^2-3a\times 1+1^2\}$
$=27a^3+1$

(5) $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$ a^3-8b^3

$(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)=(a-2b)\{a^2+a\times 2b+(2b)^2\}$
$=a^3-8b^3$

(6) $(5x-2y)(25x^2+10xy+4y^2)$ $125x^3-8y^3$

$(5x-2y)(25x^2+10xy+4y^2)$
$=(5x-2y)\{(5x)^2+5x\times 2y+(2y)^2\}$
$=125x^3-8y^3$

개념 기본 문제

정답과 풀이 005쪽

025

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $(x+1)(x+2)(x+3)$

$=x^3+(1+2+3)x^2+(1\times2+2\times\boxed{3}+\boxed{3}\times1)x+1\times2\times3$

$=x^3+6x^2+\boxed{11x}+6$

(2) $(x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y+1)$

$=(x+y+1)(x^2+y^2+1^2-x\times y-y\times\boxed{1}-\boxed{1}\times x)$

$=x^3+y^3-\boxed{3xy}+1$

(3) $(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

$=(x^2+x\times\boxed{2}+2^2)(x^2-x\times2+2^2)$

$=x^4+x^2\times\boxed{2}^2+2^4$

$=x^4+\boxed{4x^2}+16$

026

곱셈 공식을 이용하여 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+2)(x+3)(x+4)$ $x^3+9x^2+26x+24$

$(x+2)(x+3)(x+4)$
$=x^3+(2+3+4)x^2+(2\times3+3\times4+4\times2)x+2\times3\times4$
$=x^3+9x^2+26x+24$

(2) $(y-1)(y-4)(y-5)$ $y^3-10y^2+29y-20$

$(y-1)(y-4)(y-5)$
$=y^3-(1+4+5)y^2+(1\times4+4\times5+5\times1)y-1\times4\times5$
$=y^3-10y^2+29y-20$

(3) $(a+3)(a-5)(a+7)$ $a^3+5a^2-29a-105$

$(a+3)(a-5)(a+7)$
$=a^3+\{3+(-5)+7\}a^2+\{3\times(-5)+(-5)\times7+7\times3\}a+3\times(-5)\times7$
$=a^3+5a^2-29a-105$

(4) $(x-1)(x+2)(x+4)$ x^3+5x^2+2x-8

$(x-1)(x+2)(x+4)$
$=x^3+\{(-1)+2+4\}x^2+\{(-1)\times2+2\times4+4\times(-1)\}x+(-1)\times2\times4$
$=x^3+5x^2+2x-8$

(5) $(x-2)(x-4)(x+8)$ $x^3+2x^2-40x+64$

$(x-2)(x-4)(x+8)$
$=x^3-\{2+4+(-8)\}x^2+\{2\times4+4\times(-8)+(-8)\times2\}x-2\times4\times(-8)$
$=x^3+2x^2-40x+64$

(6) $(y+5)(y-3)(y-1)$ $y^3+y^2-17y+15$

$(y+5)(y-3)(y-1)$
$=y^3-\{(-5)+3+1\}y^2+\{(-5)\times3+3\times1+1\times(-5)\}y-(-5)\times3\times1$
$=y^3+y^2-17y+15$

027

곱셈 공식을 이용하여 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+y+3)(x^2+y^2+9-xy-3x-3y)$

$x^3+y^3-9xy+27$

(2) $(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$

$a^3+b^3-c^3+3abc$

(3) $(2a-b+1)(4a^2+b^2+2ab-2a+b+1)$

$8a^3-b^3+6ab+1$

$(2a-b+1)(4a^2+b^2+2ab-2a+b+1)$
$=(2a-b+1)\{(2a)^2+(-b)^2+1^2-2a\times(-b)-(-b)\times1-1\times2a\}$
$=(2a)^3+(-b)^3+1^3-3\times2a\times(-b)\times1$
$=8a^3-b^3+6ab+1$

(4) $(a-3b-2)(a^2+9b^2+3ab+2a-6b+4)$

$a^3-27b^3-18ab-8$

$(a-3b-2)(a^2+9b^2+3ab+2a-6b+4)$
$=(a-3b-2)\{a^2+(-3b)^2+(-2)^2-a\times(-3b)-(-3b)\times(-2)-(-2)\times a\}$
$=a^3+(-3b)^3+(-2)^3-3\times a\times(-3b)\times(-2)$
$=a^3-27b^3-18ab-8$

028

다음 식을 전개하시오.

(1) $(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$ x^4+9x^2+81

(2) $(4y^2+2y+1)(4y^2-2y+1)$ $16y^4+4y^2+1$

(3) $(x^2+5xy+25y^2)(x^2-5xy+25y^2)$ $x^4+25x^2y^2+625y^4$

$(x^2+5xy+25y^2)(x^2-5xy+25y^2)$
$=\{x^2+x\times5y+(5y)^2\}\{x^2-x\times5y+(5y)^2\}$
$=x^4+25x^2y^2+625y^4$

(4) $(9a^2+12ab+16b^2)(9a^2-12ab+16b^2)$

$81a^4+144a^2b^2+256b^4$

$(9a^2+12ab+16b^2)(9a^2-12ab+16b^2)$
$=\{(3a)^2+3a\times4b+(4b)^2\}\{(3a)^2-3a\times4b+(4b)^2\}$
$=81a^4+144a^2b^2+256b^4$

유형 실전 문제

정답과 풀이 006쪽

유형 03 다항식의 곱셈

다항식의 곱셈은 지수법칙과 분배법칙을 이용하여 식을 전개한 후 동류항끼리 계산한다.

풍쌤 Point 다항식의 곱셈에서도 수의 곱셈에서와 같이 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립한다.

029

다항식 $(x-y+2)(2x+3y-1)$을 전개하면?

① $2x^2+3x-3y^2+7y-2$
② $2x^2+xy-3y^2+7y-2$
③ $2x^2+xy+3x-3y^2-2$
④ $2x^2+xy+3x-3y^2+7y$
[✓ ⑤ $2x^2+xy+3x-3y^2+7y-2$]

$(x-y+2)(2x+3y-1)$
$=x(2x+3y-1)-y(2x+3y-1)+2(2x+3y-1)$
$=2x^2+3xy-x-2xy-3y^2+y+4x+6y-2$
$=2x^2+xy+3x-3y^2+7y-2$

030

$(2a^2+3ab-5)-(a-2b)(a+b+4)$를 계산하시오.

$\boldsymbol{a^2+4ab-4a+2b^2+8b-5}$

$(2a^2+3ab-5)-(a-2b)(a+b+4)$
$=(2a^2+3ab-5)-\{a(a+b+4)-2b(a+b+4)\}$
$=(2a^2+3ab-5)-(a^2+ab+4a-2ab-2b^2-8b)$
$=(2a^2+3ab-5)-(a^2-ab-2b^2+4a-8b)$
$=a^2+4ab-4a+2b^2+8b-5$

031

세 다항식

$$A=x^2+xy,\ B=x^3-2xy+y^2,\ C=x-y+4$$

에 대하여 $AC-B$를 계산하면?

[✓ ① $4x^2-xy^2+6xy-y^2$]
② $4x^2-x^2y+6xy+y^2$
③ $4x^2+2x^2y+2xy-y^2$
④ $2x^3+4x^2-xy^2+4xy+y^2$
⑤ $2x^3+4x^2+2x^2y+2xy+y^2$

$AC-B=(x^2+xy)(x-y+4)-(x^3-2xy+y^2)$
$=x^2(x-y+4)+xy(x-y+4)-(x^3-2xy+y^2)$
$=x^3-x^2y+4x^2+x^2y-xy^2+4xy-(x^3-2xy+y^2)$
$=4x^2-xy^2+6xy-y^2$

유형 04 다항식의 전개식에서 특정 항의 계수

중요★

각 다항식에서 특정 항이 나타나는 부분을 선택하여 곱한 후 계수를 구한다.

풍쌤 Point 주어진 식을 전부 전개하지 않고 특정 항이 나타나는 경우만 찾아서 전개하면 간편하다.

032

다항식 $(4x+3y)(2x^2-3y+6)$의 전개식에서 xy의 계수는?

① -24　② -18　[✓ ③ -12]
④ 12　⑤ 18

전개식에서 xy항은 $4x\times(-3y)=-12xy$
따라서 xy의 계수는 -12이다.

033

다항식 $(x^3+x^2-2)(3x^2+2x-5)$의 전개식에서 x^4의 계수를 a, x의 계수를 b라 할 때, $a+b$의 값은?

[✓ ① 1]　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

x^4항은 $x^3\times2x+x^2\times3x^2=5x^4$　$\therefore a=5$
x항은 $-2\times2x=-4x$　$\therefore b=-4$
$\therefore a+b=5+(-4)=1$

034

다항식 $(2x-y)(x^2+kxy+7y^2)$의 전개식에서 xy^2의 계수가 6일 때, 상수 k의 값을 구하시오.　8

xy^2항은 $2x\times7y^2+(-y)\times kxy=(14-k)xy^2$
이때 xy^2의 계수가 6이므로 $14-k=6$　$\therefore k=8$

035

다항식 $(x-3)(x^4-x^3+ax^2-2x)$의 전개식에서 x^3의 계수와 x의 계수가 같을 때, 상수 a의 값은?

① 2　[✓ ② 3]　③ 4
④ 5　⑤ 6

x^3항은 $x\times ax^2+(-3)\times(-x^3)=(a+3)x^3$
x항은 $-3\times(-2x)=6x$
x^3의 계수와 x의 계수가 같으므로 $a+3=6$　$\therefore a=3$

유형 실전 문제

유형 05 곱셈 공식 – 기본

중요

① $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

② $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

③ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

④ $(x+a)(x+b)(x+c)$

$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

$(x-a)(x-b)(x-c)$

$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=a^3+b^3+c^3-3abc$

⑥ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

풍쌤 Point 먼저 어떤 곱셈 공식을 이용해야 하는지 파악한다. 식의 값을 구할 때는 곱셈 공식을 이용하여 식을 전개한 후 주어진 값을 대입한다.

036

$(2x-3y+2z)^2=ax^2+9y^2+bz^2+cxy-12yz+dzx$ 일 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b-c-d$의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9

✓④ 12 ⑤ 15

$(2x-3y+2z)^2=(2x)^2+(-3y)^2+(2z)^2+2\times 2x\times(-3y)$

$+2\times(-3y)\times 2z+2\times 2z\times 2x$

$=4x^2+9y^2+4z^2-12xy-12yz+8zx$

따라서 $a=4$, $b=4$, $c=-12$, $d=8$이므로

$a+b-c-d=4+4-(-12)-8=12$

037

$(x+2y-3)(x^2+4y^2-2xy+3x+6y+9)$의 전개식에서 xy의 계수와 상수항의 합은?

✓① -9 ② -3 ③ 3

④ 9 ⑤ 15

$(x+2y-3)(x^2+4y^2-2xy+3x+6y+9)$

$=(x+2y-3)(x^2+4y^2+9-2xy+6y+3x)$

$=x^3+8y^3-27+18xy$

따라서 xy의 계수는 18, 상수항은 -27이므로 그 합은

$18+(-27)=-9$

038

다항식 $(x+2)^2(x-1)^2$을 전개하시오. $x^4+2x^3-3x^2-4x+4$

$(x+2)^2(x-1)^2=\{(x+2)(x-1)\}^2$

$=(x^2+x-2)^2$

$=x^4+x^2+4+2x^3-4x-4x^2$

$=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$

039

다항식 $(3x+1)(3x-1)(9x^2+3x+1)(9x^2-3x+1)$을 전개하면?

① $27x^3-1$ ② $27x^3+1$ ✓③ $729x^6-1$

④ $729x^6+1$ ⑤ $2187x^6-1$

$(3x+1)(3x-1)(9x^2+3x+1)(9x^2-3x+1)$

$=\{(3x+1)(9x^2-3x+1)\}\{(3x-1)(9x^2+3x+1)\}$

$=(27x^3+1)(27x^3-1)$

$=729x^6-1$

040

$x=\sqrt{2}$일 때, $(2+x)^3+(2-x)^3$의 값을 구하시오. 40

$(2+x)^3+(2-x)^3$

$=(8+12x+6x^2+x^3)+(8-12x+6x^2-x^3)$

$=16+12x^2$

$=16+12\times(\sqrt{2})^2=40$

041

$(x+ay)^3=x^3-6x^2y+bxy^2-cy^3$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① 17 ✓② 18 ③ 19

④ 20 ⑤ 21

$(x+ay)^3=x^3+3ax^2y+3a^2xy^2+a^3y^3$

이때 x^2y의 계수가 -6이므로

$3a=-6$ $\therefore a=-2$

$b=3a^2=3\times(-2)^2=12$

$-c=a^3=(-2)^3=-8$ $\therefore c=8$

$\therefore a+b+c=-2+12+8=18$

042

$(x+a)(x+1)(x+b)$의 전개식에서 x^2의 계수가 2, 상수항이 -6일 때, x의 계수를 구하시오. -5

(단, a, b는 상수이다.)

$(x+a)(x+1)(x+b)=x^3+(a+1+b)x^2+(a+b+ab)x+ab$

이때 $a+1+b=2$, $ab=-6$이므로

$a+b=1$, $ab=-6$

따라서 x의 계수는 $a+b+ab=1+(-6)=-5$

유형 06 곱셈 공식 – 치환

공통부분을 한 문자로 놓고 전개한 후 원래의 식을 대입한다.

풍쌤 Point (일차식)×(일차식)×(일차식)×(일차식) 꼴은 공통부분이 생기도록 일차식을 두 개씩 짝 지어 전개한 후 치환한다.

043

다항식 $(x^2+2x-1)(x^2+2x+1)$을 전개하시오.

$x^4+4x^3+4x^2-1$

$X=x^2+2x$로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2+2x-1)(x^2+2x+1)&=(X-1)(X+1)\\&=X^2-1\\&=(x^2+2x)^2-1\\&=x^4+4x^3+4x^2-1\end{aligned}$$

044

다항식 $(x^2+xy-3y^2)(x^2-2xy-3y^2)$를 전개하면?

① $x^4-x^3y-8x^2y^2+3xy^3-9y^4$

[✓ ② $x^4-x^3y-8x^2y^2+3xy^3+9y^4$]

③ $x^4-x^3y+2x^2y^2+3xy^3+9y^4$

④ $x^4-x^3y+8x^2y^2+3xy^3-9y^4$

⑤ $x^4-x^3y+8x^2y^2+3xy^3+9y^4$

$X=x^2-3y^2$으로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2+xy-3y^2)(x^2-2xy-3y^2)&=(X+xy)(X-2xy)\\&=X^2-xyX-2x^2y^2\\&=(x^2-3y^2)^2-xy(x^2-3y^2)-2x^2y^2\\&=x^4-6x^2y^2+9y^4-x^3y+3xy^3-2x^2y^2\\&=x^4-x^3y-8x^2y^2+3xy^3+9y^4\end{aligned}$$

045

다항식 $(x^3-x^2-x-1)(x^3-x^2+x-1)$을 전개하시오.

$x^6-2x^5+x^4-2x^3+x^2+1$

$X=x^3-x^2-1$로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^3-x^2-x-1)(x^3-x^2+x-1)&=(X-x)(X+x)\\&=X^2-x^2\\&=(x^3-x^2-1)^2-x^2\\&=(x^6+x^4+1-2x^5+2x^2-2x^3)-x^2\\&=x^6-2x^5+x^4-2x^3+x^2+1\end{aligned}$$

046

다항식 $(x-y-z)(x+y+z)$를 전개하면?

[✓ ① $x^2-y^2-z^2-2yz$]

② $x^2-y^2-z^2+2yz$

③ $x^2-y^2+z^2-2yz$

④ $x^2+y^2-z^2+2yz$

⑤ $x^2+y^2+z^2+2yz$

$X=y+z$로 놓으면

$$\begin{aligned}(x-y-z)(x+y+z)&=(x-X)(x+X)\\&=x^2-X^2\\&=x^2-(y+z)^2\\&=x^2-(y^2+2yz+z^2)\\&=x^2-y^2-z^2-2yz\end{aligned}$$

047

다항식 $(x-4)(x-1)(x-2)(x+1)$을 전개하면?

① $x^4-6x^3-7x^2+6x-8$

② $x^4-6x^3+7x^2-6x-8$

[✓ ③ $x^4-6x^3+7x^2+6x-8$]

④ $x^4+6x^3-7x^2+6x-8$

⑤ $x^4+6x^3+7x^2-6x-8$

$$\begin{aligned}(x-4)(x-1)(x-2)(x+1)&=\{(x-4)(x+1)\}\{(x-1)(x-2)\}\\&=(x^2-3x-4)(x^2-3x+2)\end{aligned}$$

$X=x^2-3x$로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2-3x-4)(x^2-3x+2)&=(X-4)(X+2)\\&=X^2-2X-8\\&=(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8\\&=x^4-6x^3+7x^2+6x-8\end{aligned}$$

048

다항식 $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)$를 전개하면

$$x^4+ax^3-13x^2+bx+24$$

일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① 12 ② 14 [✓ ③ 16]

④ 18 ⑤ 20

$$\begin{aligned}(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)&=\{(x-3)(x+4)\}\{(x-1)(x+2)\}\\&=(x^2+x-12)(x^2+x-2)\end{aligned}$$

$X=x^2+x$로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2+x-12)(x^2+x-2)&=(X-12)(X-2)\\&=X^2-14X+24\\&=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24\\&=x^4+2x^3-13x^2-14x+24\end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=-14$이므로 $a-b=2-(-14)=16$

04 곱셈 공식의 변형

❶ 곱셈 공식의 변형 (1)

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

② $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$, $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

③ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

④ $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

⑤ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4$, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$

❷ 곱셈 공식의 변형 (2)

① $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

② $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

- 곱셈 공식의 변형은 곱셈 공식에서 일부 항을 적당히 이항하여 얻은 것이다.
- ④의 식은 ①의 식에 a 대신 x, b 대신 $\frac{1}{x}$을 대입한 것이다.

개념 기본 문제

049

다음은 $a+b=1$, $ab=4$일 때, a^2+b^2의 값을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

$a+b=1$, $ab=4$이므로
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서
$a^2+b^2=1^2-2\times\boxed{4}$
$=1-\boxed{8}=\boxed{-7}$

050

다음과 같은 조건이 주어질 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

(1) $a+b=2$, $ab=-2$ 8

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=2^2-2\times(-2)=8$

(2) $a-b=-3$, $ab=1$ 11

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=(-3)^2+2\times1=11$

051

다음을 구하시오.

(1) $a-b=-6$, $ab=3$일 때, $(a+b)^2$의 값 48

$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab=(-6)^2+4\times3=48$

(2) $x+y=5$, $xy=2$일 때, $(x-y)^2$의 값 17

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=5^2-4\times2=17$

052

다음과 같은 조건이 주어질 때, a^3+b^3의 값을 구하시오.

(1) $a+b=3$, $ab=2$ 9

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=3^3-3\times2\times3=9$

(2) $a+b=-2$, $ab=-4$ -32

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=(-2)^3-3\times(-4)\times(-2)=-32$

053

다음과 같은 조건이 주어질 때, x^3-y^3의 값을 구하시오.

(1) $x-y=-1,\ xy=7$ -22

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)=(-1)^3+3\times7\times(-1)=-22$

(2) $x-y=4,\ xy=-2$ 40

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)=4^3+3\times(-2)\times4=40$

054

다음과 같은 조건이 주어질 때, $x^2+\dfrac{1}{x^2}$의 값을 구하시오.

(1) $x+\dfrac{1}{x}=6$ 34

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=6^2-2=34$

(2) $x-\dfrac{1}{x}=-1$ 3

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=(-1)^2+2=3$

055

다음을 구하시오.

(1) $x-\dfrac{1}{x}=8$일 때, $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2$의 값 68

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+4=8^2+4=68$

(2) $x+\dfrac{1}{x}=-9$일 때, $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2$의 값 77

$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4=(-9)^2-4=77$

056

다음과 같은 조건이 주어질 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오.

(1) $a+b+c=-5,\ ab+bc+ca=3$ 19

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=(-5)^2-2\times3=19\end{aligned}$$

(2) $a+b+c=1,\ ab+bc+ca=-2$ 5

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=1^2-2\times(-2)=5\end{aligned}$$

057

다음과 같은 조건이 주어질 때, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하시오.

(1) $a+b+c=4,\ ab+bc+ca=7,\ abc=-2$ -26

단계1. 곱셈 공식을 이용하여 $a^2+b^2+c^2$의 값 구하기

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=4^2-2\times7=2\end{aligned}$$

단계2. 곱셈 공식을 이용하여 $a^3+b^3+c^3$의 값 구하기

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc\\&=4\times(2-7)+3\times(-2)=-26\end{aligned}$$

(2) $a+b+c=-1,\ a^2+b^2+c^2=11,\ abc=8$ 8

단계1. 곱셈 공식을 이용하여 $ab+bc+ca$의 값 구하기

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$11=(-1)^2-2(ab+bc+ca)$

$2(ab+bc+ca)=1-11=-10$

$\therefore\ ab+bc+ca=-5$

단계2. 곱셈 공식을 이용하여 $a^3+b^3+c^3$의 값 구하기

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc\\&=(-1)\times\{11-(-5)\}+3\times8=8\end{aligned}$$

유형 실전 문제

유형 07 곱셈 공식의 변형 — $a^n \pm b^n$

중요★

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$
② $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
③ $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

풍쌤 Point 주어진 조건을 살핀 후 조건에 맞는 곱셈 공식 또는 그 변형을 이용한다.

058

$a+b=4$, $a^2+b^2=8$일 때, a^2-ab+b^2의 값은?

① -2 ② 0 ③ 2
✓④ 4 ⑤ 6

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서
$8=4^2-2ab$ $\therefore ab=4$
$\therefore a^2-ab+b^2=(a^2+b^2)-ab=8-4=4$

059

$x-y=2\sqrt{2}$, $x^2+y^2=12$일 때, x^3-y^3의 값은?

① $27\sqrt{2}$ ✓② $28\sqrt{2}$ ③ $29\sqrt{2}$
④ $30\sqrt{2}$ ⑤ $31\sqrt{2}$

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$에서
$12=(2\sqrt{2})^2+2xy$ $\therefore xy=2$
$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=(2\sqrt{2})^3+3\times2\times2\sqrt{2}=28\sqrt{2}$

060

$x+y=3$, $x^3+y^3=18$일 때, $(x-y)^2$의 값을 구하시오.

5

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서
$18=3^3-3xy\times3$ $\therefore xy=1$
$\therefore (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=3^2-4\times1=5$

061

$a=\sqrt{6}-3$, $b=\sqrt{6}+3$일 때, a^3-b^3의 값은?

✓① -162 ② -81 ③ 0
④ 81 ⑤ 162

$a-b=(\sqrt{6}-3)-(\sqrt{6}+3)=-6$
$ab=(\sqrt{6}-3)(\sqrt{6}+3)=(\sqrt{6})^2-3^2=-3$
$\therefore a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=(-6)^3+3\times(-3)\times(-6)=-162$

062

$a+b=2$, $ab=-4$일 때, $a^3-a^2+b^3-b^2$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ✓⑤ 20

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=2^3-3\times(-4)\times2=32$
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$=2^2-2\times(-4)=12$
$\therefore a^3-a^2+b^3-b^2=(a^3+b^3)-(a^2+b^2)$
$=32-12=20$

063

$x+y=1$, $x^2+y^2=5$일 때, x^6+y^6의 값은?

① 55 ② 60 ✓③ 65
④ 70 ⑤ 75

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서
$5=1^2-2xy$ $\therefore xy=-2$
$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=1^3-3\times(-2)\times1=7$
$\therefore x^6+y^6=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3$
$=(x^3+y^3)^2-2(xy)^3$
$=7^2-2\times(-2)^3=65$

유형 08 곱셈 공식의 변형 $-\ x^n \pm \frac{1}{x^n}$

① $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

② $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

③ $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

풍쌤 Point $x^n+\frac{1}{x^n}$ 꼴이 나타나지 않을 때는 주어진 조건식의 양변을 x로 나누어 $x+\frac{1}{x}$의 값을 찾는다. (단, $x\neq0$)

064

$x+\frac{1}{x}=4$일 때, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값을 구하시오. 52

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4^3-3\times4=52$

065

$x^2+\frac{1}{x^2}=6$일 때, $x^3-\frac{1}{x^3}$의 값은? (단, $x>1$)

① 12　② 13　✓③ 14
④ 15　⑤ 16

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$에서 $6=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

$\therefore x-\frac{1}{x}=2\ (\because x>1)$

$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)=2^3+3\times2=14$

066

$x^2+3x+1=0$일 때, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값은?

① -24　✓② -18　③ -12
④ 12　⑤ 18

$x\neq0$이므로 $x^2+3x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x+3+\frac{1}{x}=0$　　$\therefore x+\frac{1}{x}=-3$

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=(-3)^3-3\times(-3)=-18$

067

$x^2-x-1=0$일 때, $x^2+x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$의 값을 구하시오. 4

$x\neq0$이므로 $x^2-x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-1-\frac{1}{x}=0$　　$\therefore x-\frac{1}{x}=1$

$\therefore x^2+x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2+\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=1^2+2+1=4$

유형 09 곱셈 공식의 변형 $-\ a^n \pm b^n \pm c^n$

① $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

② $a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

풍쌤 Point 주어진 조건을 살핀 후 조건에 맞는 곱셈 공식 또는 그 변형을 이용한다.

068

$2a+b+4c=8$, $2ab+4bc+8ca=13$일 때, $4a^2+b^2+16c^2$의 값은?

① 32　② 34　③ 36
✓④ 38　⑤ 40

$(2a+b+4c)^2=4a^2+b^2+16c^2+2(2ab+4bc+8ca)$이므로

$4a^2+b^2+16c^2=(2a+b+4c)^2-2(2ab+4bc+8ca)$

$=8^2-2\times13=38$

069

$a^2+b^2+c^2=10$, $ab+bc+ca=3$, $abc=2$일 때, $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$의 값은? (단, a, b, c는 양수이다.)

① 1　✓② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$10=(a+b+c)^2-2\times3$, $(a+b+c)^2=16$

$\therefore a+b+c=4$ ($\because a$, b, c는 양수)

$\therefore \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{4}{2}=2$

070

$a+b+c=-3$, $a^2+b^2+c^2=15$, $a^3+b^3+c^3=-9$일 때, abc의 값을 구하시오. 15

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$15=(-3)^2-2(ab+bc+ca)$　　$\therefore ab+bc+ca=-3$

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$에서

$-9=(-3)\times\{15-(-3)\}+3abc$　　$\therefore abc=15$

071

$a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=14$일 때, $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$의 값을 구하시오. 50

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$14=6^2-2(ab+bc+ca)$　　$\therefore ab+bc+ca=11$

$\therefore (a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)$

$=2\times14+2\times11=50$

05 다항식의 나눗셈

① 다항식의 나눗셈

(다항식)÷(다항식)은 각 다항식을 내림차순으로 정리한 후 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

② 다항식의 나눗셈에 대한 등식

다항식 A를 다항식 B $(B\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 $A=BQ+R$와 같이 나타낼 수 있다. 이때 R는 상수이거나 R의 차수는 B의 차수보다 낮다.

B가 일차식일 때, R는 상수이다.

이때 $R=0$이면 A는 B로 나누어떨어진다고 한다.

참고 다항식의 나눗셈은 자연수의 나눗셈과 다르게 나머지가 음수인 경우도 있다.

보기 $(2x^2-3x+2)\div(x+1)$은 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{array}{r} 2x-5 \\ x+1\,\overline{)\,2x^2-3x+2} \\ \underline{2x^2+2x} \\ -5x+2 \\ \underline{-5x-5} \\ 7 \end{array}$$

➡ 몫이 $2x-5$, 나머지가 7이므로
$2x^2-3x+2=(x+1)(2x-5)+7$

개념 기본 문제

정답과 풀이 009쪽

072

다음은 다항식 x^3+x+15를 $x+3$으로 나누는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣고, 몫과 나머지를 구하시오.

몫: $x^2-3x+10$, 나머지: -15

$$\begin{array}{r} x^2-\boxed{3x}+\boxed{10} \\ x+3\,\overline{)\,x^3+x+15} \\ \underline{x^3+3x^2} \\ -3x^2+x \\ \underline{-3x^2-\boxed{9x}} \\ 10x+15 \\ \underline{10x+30} \\ -15 \end{array}$$

073

다음은 다항식 x^3-3x^2+5를 x^2+x+2로 나누는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣고, 몫과 나머지를 구하시오.

몫: $x-4$, 나머지: $2x+13$

$$\begin{array}{r} x-\boxed{4} \\ x^2+x+2\,\overline{)\,x^3-3x^2+5} \\ \underline{x^3+x^2+2x} \\ -4x^2-2x+5 \\ \underline{\boxed{-4x^2-4x-8}} \\ \boxed{2x+13} \end{array}$$

074

다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(x^2+3x+7)\div(x-2)$ 몫: $x+5$, 나머지: 17

(2) $(2x^3+3x^2-10x+7)\div(2x-1)$ 몫: x^2+2x-4, 나머지: 3

(3) $(4x^4-x^2-x+9)\div(2x^2-x+3)$ 몫: $2x^2+x-3$, 나머지: $-7x+18$

075

다음 두 다항식 A, B에 대하여 A를 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 할 때, $A=BQ+R$ 꼴로 나타내시오.

(1) $A=x^2+x-16$, $B=x+4$
$x^2+x-16=(x+4)(x-3)-4$

(2) $A=6x^2-x-5$, $B=3x-5$
$6x^2-x-5=(3x-5)(2x+3)+10$

(3) $A=x^3-4x^2+2x+2$, $B=x^2-1$
$x^3-4x^2+2x+2=(x^2-1)(x-4)+3x-2$

(4) $A=9x^3-3x^2+x+5$, $B=3x^2+x-2$
$9x^3-3x^2+x+5=(3x^2+x-2)(3x-2)+9x+1$

유형 실전 문제

정답과 풀이 010쪽

유형 10 다항식의 나눗셈 – 기본

다항식의 나눗셈은 각 다항식을 내림차순으로 정리한 후 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

풍쌤 Point 다항식의 나눗셈은 나머지가 상수가 되거나 나머지의 차수가 나누는 식의 차수보다 작아질 때까지 계산한다.

076

다음은 다항식 $5x^4+8x^3-3x^2+2x-3$을 $x+2$로 나누는 과정이다. 상수 a, b, c, d, e, f에 대하여 $a+b+c+d+e+f$의 값은?

$$\begin{array}{r}
5x^3-2x^2+x \\
x+2\,\big)\overline{5x^4+8x^3-3x^2+2x-3} \\
5x^4+10x^3 \qquad\qquad\qquad \\
\hline
ax^3-3x^2 \qquad\qquad \\
ax^3+bx^2 \qquad\qquad \\
\hline
cx^2+2x \qquad \\
cx^2+dx \qquad \\
\hline
ex+f
\end{array}$$

① -9 ✓② -6 ③ -3
④ 6 ⑤ 9

$a=-2$, $b=-4$, $c=1$, $d=2$, $e=0$, $f=-3$이므로
$a+b+c+d+e+f=-2+(-4)+1+2+0+(-3)=-6$

077

다항식 $4x^3+7x^2+7x$를 $4x+3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 할 때, $Q(1)+R$의 값을 구하시오. **0**

오른쪽 나눗셈에서
$Q(x)=x^2+x+1$, $R=-3$이므로
$Q(1)+R=3+(-3)=0$

$$\begin{array}{r}
x^2+x+1 \\
4x+3\,\big)\overline{4x^3+7x^2+7x} \\
4x^3+3x^2 \qquad \\
\hline
4x^2+7x \\
4x^2+3x \\
\hline
4x \\
4x+3 \\
\hline
-3
\end{array}$$

078

다항식 $2x^4+11x^3-10x^2+3x+1$을 $2x^2-x$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. $\mathbf{x+1}$

오른쪽 나눗셈에서 나머지는 $x+1$이다.

$$\begin{array}{r}
x^2+6x-2 \\
2x^2-x\,\big)\overline{2x^4+11x^3-10x^2+3x+1} \\
2x^4-x^3 \qquad\qquad\qquad \\
\hline
12x^3-10x^2 \qquad\qquad \\
12x^3-6x^2 \qquad\qquad \\
\hline
-4x^2+3x \qquad \\
-4x^2+2x \qquad \\
\hline
x+1
\end{array}$$

유형 11 다항식의 나눗셈 – $A=BQ+R$ 중요

다항식 A를 다항식 $B\,(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 $A=BQ+R$와 같이 나타낼 수 있다.

풍쌤 Point $A=BQ+R$에서 R는 상수이거나 (R의 차수)$<$(B의 차수)임을 명심하자.

079

다항식 $f(x)$를 $3x^2+x-4$로 나누었을 때의 몫이 $2x-3$이고 나머지가 $10x-1$일 때, $f(x)$를 구하시오. $\mathbf{6x^3-7x^2-x+11}$

$$\begin{aligned}
f(x)&=(3x^2+x-4)(2x-3)+10x-1 \\
&=(6x^3-9x^2+2x^2-3x-8x+12)+10x-1 \\
&=6x^3-7x^2-x+11
\end{aligned}$$

080

다항식 $3x^3-8x^2+4x+5$를 다항식 A로 나누었을 때의 몫은 x^2-2x-1이고 나머지는 $3x+3$이다. 다항식 A를 구하시오. $\mathbf{3x-2}$

$3x^3-8x^2+4x+5=A(x^2-2x-1)+3x+3$
$A(x^2-2x-1)=3x^3-8x^2+x+2$
오른쪽 나눗셈의 몫이 A이므로
$A=3x-2$

$$\begin{array}{r}
3x-2 \qquad \\
x^2-2x-1\,\big)\overline{3x^3-8x^2+x+2} \\
3x^3-6x^2-3x \qquad \\
\hline
-2x^2+4x+2 \\
-2x^2+4x+2 \\
\hline
0
\end{array}$$

081

다항식 $P(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 몫이 x^2-4x+6이고 나머지가 5이다. 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하시오. **몫: $x^2-7x+12$, 나머지: -1**

$$\begin{aligned}
P(x)&=(x-5)(x^2-4x+6)+5 \\
&=x^3-9x^2+26x-25
\end{aligned}$$

오른쪽 나눗셈에서 몫은 $x^2-7x+12$,
나머지는 -1이다.

$$\begin{array}{r}
x^2-7x+12 \\
x-2\,\big)\overline{x^3-9x^2+26x-25} \\
x^3-2x^2 \qquad\qquad \\
\hline
-7x^2+26x \qquad \\
-7x^2+14x \qquad \\
\hline
12x-25 \\
12x-24 \\
\hline
-1
\end{array}$$

082

다항식 $f(x)$를 $3x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 할 때, $f(x)$를 $x-\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 차례대로 나열한 것은?

① $\frac{1}{3}Q(x)$, $\frac{1}{3}R$ ② $\frac{1}{3}Q(x)$, $3R$
③ $3Q(x)$, $\frac{1}{3}R$ ✓④ $3Q(x)$, R
⑤ $3Q(x)$, $3R$

$f(x)=(3x-1)Q(x)+R=\left(x-\frac{1}{3}\right)\times3Q(x)+R$

따라서 다항식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫은 $3Q(x)$, 나머지는 R이다.

중단원 점검 문제

01

두 다항식 A, B에 대하여

$$A+B=-x^2-2x+5,\ 2A-3B=-7x^2-9x+15$$

일 때, $3A+2B$를 계산하시오. $-4x^2-7x+16$

$A+B=-x^2-2x+5$ …… ㉠
$2A-3B=-7x^2-9x+15$ …… ㉡
$2\times$㉠$-$㉡을 하면 $5B=5x^2+5x-5$ $\quad\therefore B=x^2+x-1$
이것을 ㉠에 대입하면 $A+(x^2+x-1)=-x^2-2x+5$
$\therefore A=-2x^2-3x+6$
$\therefore 3A+2B=3(-2x^2-3x+6)+2(x^2+x-1)$
$=-4x^2-7x+16$

02

두 다항식 A, B에 대하여 $[A, B]$를

$$[A,\ B]=A-2B+x^2+y^2$$

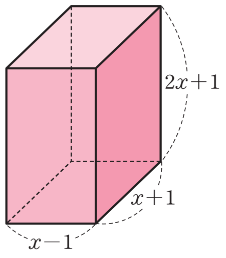
이라 할 때, $[x^2-y^2,\ -y^2+x]$를 계산하면?

① x^2+y^2
② x^2-x+2y^2
③ $2x^2+y^2$
[✓ ④ $2x^2-2x+2y^2$]
⑤ $2x^2-2x+4y^2$

$[x^2-y^2,\ -y^2+x]=(x^2-y^2)-2(-y^2+x)+x^2+y^2$
$=x^2-y^2+2y^2-2x+x^2+y^2$
$=2x^2-2x+2y^2$

03 교육청 기출

세 모서리의 길이가 $x-1$, $x+1$, $2x+1$인 직육면체의 겉넓이는? (단, $x>1$)



① $8x^2+4x-2$
② $8x^2+6x+2$
[✓ ③ $10x^2+4x-2$]
④ $10x^2+6x+2$
⑤ $12x^2+8x-2$

구하는 겉넓이는
$2(x-1)(x+1)+2(x+1)(2x+1)+2(x-1)(2x+1)$
$=2\{(x^2-1)+(2x^2+3x+1)+(2x^2-x-1)\}$
$=2(5x^2+2x-1)$
$=10x^2+4x-2$

04

다항식 $(x^2+axy+y)(x^3+bxy+y^2)$의 전개식에서 xy^2의 계수가 x^3y의 계수와 x^2y^2의 계수의 합과 같을 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

[✓ ① -2]
② -1
③ 0
④ 1
⑤ 2

xy^2항은 $y\times bxy=bxy^2$
x^3y항은 $x^2\times bxy+y\times x^3=(b+1)x^3y$
x^2y^2항은 $x^2\times y^2+axy\times bxy=(ab+1)x^2y^2$
이때 xy^2의 계수가 x^3y의 계수와 x^2y^2의 계수의 합과 같으므로
$b=(b+1)+(ab+1)$ $\quad\therefore ab=-2$

05 실전 Plus

다항식 $(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{10})^2$의 전개식에서 x^3의 계수와 x^7의 계수의 합을 구하시오. 12

$(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{10})^2$
$=(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{10})(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{10})$이므로
x^3항은 $1\times x^3+x\times x^2+x^2\times x+x^3\times 1=4x^3$
x^7항은 $1\times x^7+x\times x^6+x^2\times x^5+\cdots+x^7\times 1=8x^7$
따라서 x^3의 계수와 x^7의 계수의 합은 $4+8=12$

06

$(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)-(a-b)(a^2+ab+b^2)$을 계산하면?

① $7a^3-b^3$
② $7a^3+b^3$
[✓ ③ $7a^3+2b^3$]
④ $9a^3+b^3$
⑤ $9a^3+2b^3$

$(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)-(a-b)(a^2+ab+b^2)=(8a^3+b^3)-(a^3-b^3)$
$=7a^3+2b^3$

07 학교 시험 기출

다항식 $(ax+2y-b)^2$을 전개하면 $16x^2+4y^2+16xy+cx-20y+d$일 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하시오. -6

$(ax+2y-b)^2=a^2x^2+4y^2+b^2+4axy-4by-2abx$
xy의 계수가 16이므로 $a=4$
y의 계수가 -20이므로 $b=5$
$ab=20$, $b^2=25$이므로 $c=-2ab=-40$, $d=b^2=25$
$\therefore a+b+c+d=4+5+(-40)+25=-6$

08

다음 등식을 만족시키는 상수 a, b, c에 대하여 $a-b+c$의 값을 구하시오. **241**

$$(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)(x^4-4x^2+16)$$
$$=ax^8+bx^4+c$$

$$\begin{aligned}(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)(x^4-4x^2+16)&=(x^4+4x^2+16)(x^4-4x^2+16)\\&=(x^2)^4+(x^2)^2\times4^2+4^4\\&=x^8+16x^4+256\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=16$, $c=256$이므로

$a-b+c=1-16+256=241$

09 실전 Plus

$x=\sqrt{3}$, $y=\sqrt{2}$일 때,

$$\{(2x+y)-(x+2y)\}^3+3(2x+y)(x+2y)(x-y)$$

의 값은?

① $4\sqrt{2}$　② $9\sqrt{3}$　③ $2\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

④ $4\sqrt{2}+4\sqrt{3}$　✓⑤ $4\sqrt{2}+9\sqrt{3}$

$X=2x+y$, $Y=x+2y$로 놓으면

$\{(2x+y)-(x+2y)\}^3+3(2x+y)(x+2y)(x-y)$

$=(X-Y)^3+3XY(X-Y)=X^3-Y^3$

$=(2x+y)^3-(x+2y)^3=7x^3+6x^2y-6xy^2-7y^3$

$=7\times(\sqrt{3})^3+6\times(\sqrt{3})^2\times\sqrt{2}-6\times\sqrt{3}\times(\sqrt{2})^2-7\times(\sqrt{2})^3=4\sqrt{2}+9\sqrt{3}$

10

$x+y=2$, $xy=-3$일 때, $\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}$의 값을 구하시오. $-\dfrac{4}{3}$

(단, $x>y$)

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

$\quad=2^2-4\times(-3)=16$

$\therefore x-y=4$ ($\because x>y$)

$\therefore \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-y}{xy}=\dfrac{4}{-3}=-\dfrac{4}{3}$

11 학교 시험 기출

$x^2-5x-1=0$일 때, $x^3-\dfrac{1}{x^3}$의 값은?

① 60　② 80　③ 100

④ 120　✓⑤ 140

$x\neq0$이므로 $x^2-5x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-5-\dfrac{1}{x}=0$　　$\therefore x-\dfrac{1}{x}=5$

$\therefore x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=5^3+3\times5=140$

12

$a+b+c=-4$, $abc=2$, $\dfrac{c}{ab}+\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}=6$일 때, $ab+bc+ca$의 값은?

① 1　✓② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

$\dfrac{c}{ab}+\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}=6$이므로

$a^2+b^2+c^2=6abc=12$

이때 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$12=(-4)^2-2(ab+bc+ca)$　　$\therefore ab+bc+ca=2$

13

$\dfrac{106\times(105^2-105+1)-1}{104\times106+1}$을 계산하시오. **105**

$x=105$로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{106\times(105^2-105+1)-1}{104\times106+1}&=\frac{(x+1)(x^2-x+1)-1}{(x-1)(x+1)+1}=\frac{(x^3+1)-1}{(x^2-1)+1}\\&=\frac{x^3}{x^2}=x=105\end{aligned}$$

14 교육청 기출

다항식 $x^4+2x^3+11x-4$를 x^2+2x+3으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, $R(x)$라 하자. $Q(2)+R(1)$의 값을 구하시오. **23**

오른쪽 나눗셈에서

$Q(x)=x^2-3$, $R(x)=17x+5$

$\therefore Q(2)+R(1)=1+22=23$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2\qquad\quad -3 \\ \hline
x^2+2x+3 & x^4+2x^3\qquad\quad +11x-4 \\
 & x^4+2x^3+3x^2 \\ \hline
 & \qquad\quad -3x^2+11x-4 \\
 & \qquad\quad -3x^2-\ \ 6x-9 \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad 17x+5
\end{array}$$

15

다항식 x^3+x^2-7x+a가 x^2-2x-1로 나누어떨어질 때, 상수 a의 값은?

① -6　✓② -3　③ 0

④ 3　⑤ 6

오른쪽 나눗셈에서 나머지는 0이므로

$a+3=0$　　$\therefore a=-3$

$$\begin{array}{r|l}
 & x\quad +3 \\ \hline
x^2-2x-1 & x^3+\ \ x^2-7x+a \\
 & x^3-2x^2-\ \ x \\ \hline
 & \qquad 3x^2-6x+a \\
 & \qquad 3x^2-6x-3 \\ \hline
 & \qquad\qquad\quad a+3
\end{array}$$

01 항등식

❶ 항등식

문자를 포함하는 등식에서 그 문자에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하는 등식

❷ 항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=0$, $b=0$, $c=0$이다.
또, $a=0$, $b=0$, $c=0$이면 $ax^2+bx+c=0$은 x에 대한 항등식이다.

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.
또, $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이면 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$은 x에 대한 항등식이다.

- 다항식의 곱셈 공식은 모두 항등식이다.

보기 $2x-2=2(x-1)$은 항등식이다.

- **x에 대한 항등식의 여러 가지 표현**

① 모든 x에 대하여 성립한다.
② 임의의 x에 대하여 성립한다.
③ 어떤 x의 값에 대해서도 항상 성립한다.
④ x의 값에 관계없이 항상 성립한다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 013쪽

001

다음 등식이 x에 대한 항등식인 것은 ○를, 항등식이 아닌 것은 ×를 (　　) 안에 써넣으시오.

(1) $x+1=0$ (×)

등식이 $x=-1$일 때만 성립하므로 항등식이 아니다.

(2) $4x-2=-2+4x$ (○)

(3) $x+5=x-1$ (×)

(4) $(x+3)(x-3)=x^2-9$ (○)

(5) $2x^2+5x-2=(2x+1)(x-2)$ (×)

우변을 전개하여 나타내면 $2x^2+5x-2=2x^2-3x-2$이므로 항등식이 아니다.

(6) $x^2=8$ (×)

등식이 $x=\pm2\sqrt{2}$일 때만 성립하므로 항등식이 아니다.

002

보기에서 x에 대한 항등식인 것만을 있는 대로 고르시오.

ㄴ, ㄷ, ㄹ

보기

ㄱ. $x-3=2x+1$
ㄴ. $3x+6=3(x+1)+3$
ㄷ. $x^2-7x+4=x(x-7)+4$
ㄹ. $(x-1)^2+x-1=x^2-x$

003

다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $(a-1)x+b=0$　　$a=1$, $b=0$

(2) $4x^2-7x=ax^2-bx$　　$a=4$, $b=7$

004

다음 등식이 x, y에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

(1) $ax+(b-2)y+c=-3x+6$　　$a=-3$, $b=2$, $c=6$

항등식의 성질에 의하여 $a=-3$, $b-2=0$, $c=6$이므로
$a=-3$, $b=2$, $c=6$

(2) $2(x+2y)^2-5xy-3y^2=ax^2+bxy+cy^2$

$a=2$, $b=3$, $c=5$

좌변을 전개하여 나타내면
$2x^2+3xy+5y^2=ax^2+bxy+cy^2$
이므로 $a=2$, $b=3$, $c=5$

02 미정계수법

❶ 미정계수법

항등식의 뜻과 성질을 이용하여 주어진 등식에서 미지의 계수를 정하는 방법을 미정계수법이라 한다.

① 계수비교법: 양변의 동류항의 계수를 비교하여 미정계수를 정하는 방법

참고 계수비교법은 양변의 동류항의 계수가 서로 같다는 항등식의 성질을 이용한다.

② 수치대입법: 문자에 적당한 수를 대입하여 미정계수를 정하는 방법

참고 수치대입법은 문자에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립한다는 항등식의 뜻을 이용한다.

풍쌤 Tip 미정계수를 정할 때는 계수비교법과 수치대입법 중 계산이 간단한 방법을 이용한다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 013쪽

005

다음은 등식 $a(x-1)+bx+2=4x+3$이 x에 대한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b의 값을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

[방법1] 계수비교법

주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$ax-a+bx+2=4x+3$

$(a+b)x-a+2=4x+3$

양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$\boxed{a+b}=4$, $-a+2=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\boxed{-1}$, $b=\boxed{5}$

[방법2] 수치대입법

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-a+2=3$이므로 $a=-1$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$b+2=\boxed{7}$이므로 $b=\boxed{5}$

006

다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 계수비교법을 이용하여 상수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $(2-a)x-4=x+b$ $\boldsymbol{a=1, b=-4}$

$2-a=1$, $-4=b$ $\therefore$ $a=1$, $b=-4$

(2) $(x+3)(x-5)=x^2+(a+1)x+b-13$ $\boldsymbol{a=-3, b=-2}$

$x^2-2x-15=x^2+(a+1)x+b-13$

$-2=a+1$, $-15=b-13$ $\therefore$ $a=-3$, $b=-2$

007

다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 수치대입법을 이용하여 상수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $a(x-1)-b(x+2)=11x+7$ $\boldsymbol{a=5, b=-6}$

등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $-3b=18$ $\therefore$ $b=-6$

등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면 $-3a=-15$ $\therefore$ $a=5$

(2) $(x-3)(x+4)=x^2+ax+b$ $\boldsymbol{a=1, b=-12}$

등식의 양변에 $x=3$을 대입하면 $3a+b=-9$ …… ㉠

등식의 양변에 $x=-4$를 대입하면 $4a-b=16$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-12$

008

다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

(1) $3x^2-x+8=ax(x+1)+bx+c$ $\boldsymbol{a=3, b=-4, c=8}$

등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $8=c$

등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $12=-b+c$ $\therefore$ $b=-4$

등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $10=2a+b+c$ $\therefore$ $a=3$

(2) $(a+c)x^2-(b-c)x+c-4=0$ $\boldsymbol{a=-4, b=4, c=4}$

양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면 $a+c=0$, $b-c=0$, $c-4=0$

$\therefore$ $a=-4$, $b=4$, $c=4$

(3) $a(x-2)^2+b(x-2)+cx=-x^2+2x-6$ $\boldsymbol{a=-1, b=1, c=-3}$

등식의 양변에 $x=2$를 대입하면 $2c=-6$이므로 $c=-3$

등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $a-b+c=-5$ $\therefore$ $a-b=-2$ …… ㉠

등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $4a-2b=-6$ $\therefore$ $2a-b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

03 다항식의 나눗셈과 항등식

① 다항식의 나눗셈과 항등식

다항식 A를 다항식 B $(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 $A=BQ+R$ (R는 상수 또는 (R의 차수)$<$(B의 차수))는 x에 대한 항등식이다.

보기 x^2+5x+3을 $x+2$로 나눈 몫이 $x+3$, 나머지가 -3이므로 $x^2+5x+3=(x+2)(x+3)-3$은 x에 대한 항등식이다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 014쪽

009

다음 두 다항식 A, B에 대하여 A를 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 할 때, 계수비교법을 이용하여 상수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $A=x^3+6x^2+ax+12$, $B=x+b$,
$Q=x^2+5x+10$, $R=2$ **$a=15$, $b=1$**

단계1. 다항식의 나눗셈을 $A=BQ+R$ 꼴로 나타내기

$x^3+6x^2+ax+12=(x+b)(x^2+5x+10)+2$
$=x^3+(b+5)x^2+(5b+10)x+10b+2$ …… ㉠

단계2. 계수비교법을 이용하여 a, b의 값 구하기

㉠은 x에 대한 항등식이므로
$6=b+5$, $a=5b+10$, $12=10b+2$
$\therefore\ a=15$, $b=1$

(2) $A=2x^3+10x^2+11x+a$, $B=x+3$,
$Q=2x^2+bx-1$, $R=-4$ **$a=-7$, $b=4$**

$2x^3+10x^2+11x+a=(x+3)(2x^2+bx-1)-4$
$=2x^3+(b+6)x^2+(-1+3b)x-7$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 $10=b+6$, $11=-1+3b$, $a=-7$
$\therefore\ a=-7$, $b=4$

(3) $A=x^4-x^3-x^2-3x-6$, $B=x^2+a$,
$Q=x^2-x-3$, $R=bx$ **$a=2$, $b=-1$**

$x^4-x^3-x^2-3x-6=(x^2+a)(x^2-x-3)+bx$
$=x^4-x^3+(-3+a)x^2+(-a+b)x-3a$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 $-1=-3+a$, $-3=-a+b$, $-6=-3a$
$\therefore\ a=2$, $b=-1$

(4) $A=ax^4-7x^3-11x^2+12x-1$, $B=2x^2-x-5$,
$Q=bx^2-2x+1$, $R=3x+4$ **$a=6$, $b=3$**

$ax^4-7x^3-11x^2+12x-1=(2x^2-x-5)(bx^2-2x+1)+3x+4$
$=2bx^4+(-4-b)x^3+(4-5b)x^2+12x-1$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 $a=2b$, $-7=-4-b$, $-11=4-5b$
$\therefore\ a=6$, $b=3$

010

다음 두 다항식 A, B에 대하여 A를 B로 나누었을 때의 나머지를 R라 할 때, 수치대입법을 이용하여 상수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $A=x^3+4x^2+ax+b$, $B=(x+3)(x-1)$,
$R=-2$ **$a=1$, $b=-8$**

단계1. 몫이 Q일 때, 다항식의 나눗셈을 $A=BQ+R$ 꼴로 나타내기

$x^3+4x^2+ax+b=(x+3)(x-1)Q-2$ …… ㉠

단계2. 수치대입법을 이용하여 a, b의 값 구하기

㉠의 양변에 $x=-3$, $x=1$을 각각 대입하면
$9-3a+b=-2$ $\therefore\ 3a-b=11$ …… ㉡
$5+a+b=-2$ $\therefore\ a+b=-7$ …… ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-8$

(2) $A=ax^3-10x^2+3x+b$, $B=x(x-3)$,
$R=7$ **$a=3$, $b=7$**

$ax^3-10x^2+3x+b=x(x-3)Q+7$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=0$, $x=3$을 각각 대입하면 $b=7$ …… ㉡
$27a-81+b=7$ $\therefore\ 27a+b=88$ …… ㉢
㉡을 ㉢에 대입하여 풀면 $a=3$, $b=7$

(3) $A=x^4+ax^3+bx^2+x+3$, $B=x^2-1$,
$R=2x+8$ **$a=1$, $b=4$**

$x^4+ax^3+bx^2+x+3=(x+1)(x-1)Q+2x+8$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면
$-a+b+3=6$ $\therefore\ a-b=-3$ …… ㉡
$a+b+5=10$ $\therefore\ a+b=5$ …… ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=4$

(4) $A=2x^4+4x^3+ax^2-7x-6$, $B=x^2+2x$,
$R=-x+b$ **$a=-3$, $b=-6$**

$2x^4+4x^3+ax^2-7x-6=x(x+2)Q-x+b$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=0$, $x=-2$를 각각 대입하면 $-6=b$ …… ㉡
$4a+8=2+b$ $\therefore\ 4a-b=-6$ …… ㉢
㉡을 ㉢에 대입하여 풀면 $a=-3$, $b=-6$

유형 실전 문제

정답과 풀이 015쪽

유형 01 미정계수법 – 계수비교법

중요

식을 전개하여 내림차순으로 정리한 후 양변의 동류항의 계수를 비교한다.

풍쌤 Point 계수비교법은 식이 간단하여 전개하기 쉬울 때 사용한다.

011

등식 $a(2x^2+x-2)+b(x+1)+c=6x^2-x+1$이 x에 대한 항등식일 때, $a+b+c$의 값은?

(단, a, b, c는 상수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 [✓ ⑤ 10]

$2ax^2+(a+b)x+(-2a+b+c)=6x^2-x+1$
양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면
$2a=6$, $a+b=-1$, $-2a+b+c=1$
따라서 $a=3$, $b=-4$, $c=11$이므로 $a+b+c=3+(-4)+11=10$

012

모든 실수 x에 대하여 등식

$$ax^3+bx^2+cx+d=(x-1)^2(2x+1)$$

이 성립할 때, $a+b-c-d$의 값을 구하시오. -2

(단, a, b, c, d는 상수이다.)

$ax^3+bx^2+cx+d=2x^3-3x^2+1$
양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면
$a=2$, $b=-3$, $c=0$, $d=1$
$\therefore a+b-c-d=2+(-3)-0-1=-2$

013

등식 $(2k-4)x+(k+5)y+14=0$이 k에 대한 항등식일 때, $y-x$의 값은? (단, x, y는 상수이다.)

① -6 [✓ ② -3] ③ 0
④ 3 ⑤ 6

$(2x+y)k+(-4x+5y+14)=0$
이 등식이 k에 대한 항등식이므로
$2x+y=0$, $-4x+5y+14=0$ $\therefore x=1$, $y=-2$
$\therefore y-x=-2-1=-3$

014

다항식 $P(x)$에 대하여 등식

$$4x^3+3x^2+ax+b=(4x^2-x-4)P(x)+5x-6$$

이 x에 대한 항등식일 때, $a+b$의 값을 구하시오. -10

(단, a, b는 상수이다.)

좌변이 삼차식이고 삼차항의 계수가 4이므로 $P(x)=x+k$ (k는 상수)로 놓으면
$4x^3+3x^2+ax+b=(4x^2-x-4)(x+k)+5x-6$
$=4x^3+(-1+4k)x^2+(-4-k+5)x-4k-6$
양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면
$3=-1+4k$, $a=-4-k+5$, $b=-4k-6$
이때 $k=1$이므로 $a=0$, $b=-10$ $\therefore a+b=-10$

유형 02 미정계수법 – 수치대입법

중요

괄호 안을 0으로 만드는 값처럼 계산이 간단해지는 수를 미정계수의 개수만큼 대입한다.

풍쌤 Point 수치대입법은 식이 전개하기 어렵거나 적당한 수를 대입하여 간단해질 때 사용한다.

015

등식 $3x^2+x-6=a(x+1)^2+b(x+1)+c$가 x의 값에 관계없이 항상 성립할 때, abc의 값을 구하시오. 60

(단, a, b, c는 상수이다.)

주어진 식의 양변에 $x=-1$, $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면
$-4=c$
$-6=a+b-4$ …… ㉠
$-2=4a+2b-4$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-5$
$\therefore abc=3\times(-5)\times(-4)=60$

016

다항식 $f(x)$에 대하여 등식

$$(x^2-x-2)f(x)=ax^3+x^2+bx-6$$

이 x에 대한 항등식일 때, $a-b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① 7 ② 8 [✓ ③ 9]
④ 10 ⑤ 11

$(x+1)(x-2)f(x)=ax^3+x^2+bx-6$
위의 식의 양변에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면
$0=-a-b-5$ …… ㉠
$0=8a+2b-2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-7$
$\therefore a-b=2-(-7)=9$

017

임의의 실수 x에 대하여 등식

$$x^3+ax^2-9x+b=(x-1)(x-3)(cx+3)$$

이 성립할 때, $a+bc$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 [✓ ⑤ 8]

우변의 삼차항의 계수는 1이므로 $c=1$
즉, $x^3+ax^2-9x+b=(x-1)(x-3)(x+3)$
양변에 $x=1$, $x=3$을 각각 대입하면
$a+b-8=0$ …… ㉠
$9a+b=0$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=-1$, $b=9$
$\therefore a+bc=-1+9\times1=8$

유형 실전 문제

정답과 풀이 016쪽

유형 03 항등식의 계수의 합

$(x+a)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 꼴의 항등식
➡ 양변에 적당한 수를 대입하여 계수에 대한 식을 세운다.

풍쌤 Point 식이 복잡해 보이지만 그래 봤자 항등식. 적당한 수를 대입하면 간단해진다. 식의 값을 구하려면 어떤 수를 대입해야 할지 생각해 본다.

018

등식

$$(x-1)^8=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_8x^8$$

이 x에 대한 항등식일 때, $a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8$의 값은? (단, a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_8은 상수이다.)

① -256
② -1
✓③ 0
④ 1
⑤ 256

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=0$

019

모든 실수 x에 대하여 등식

$$(x^2+x-2)^3=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_6x^6$$

이 성립할 때, $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6$의 값을 구하시오. (단, a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_6은 상수이다.) -8

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6=(-2)^3=-8$

020

등식

$$(2x^2-3x-7)^5=a_0+a_1(x-2)+a_2(x-2)^2+\cdots+a_{10}(x-2)^{10}$$

이 x에 대한 항등식일 때, $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$의 값은? (단, a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_{10}은 상수이다.)

① 2
② 4
③ 8
④ 16
✓⑤ 32

주어진 등식의 양변에 $x=3$을 대입하면
$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=2^5=32$

유형 04 다항식의 나눗셈과 항등식

다항식 A를 다항식 B $(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 할 때, $A=BQ+R$는 항등식이므로 계수비교법 또는 수치대입법을 이용하여 미정계수를 구한다.

풍쌤 Point 미정계수법은 다음과 같이 구분하여 사용한다.
B가 인수분해될 때 ➡ 수치대입법
B가 인수분해되지 않을 때 ➡ 계수비교법

021

다항식 x^3-2x^2-8x+5를 x^2+ax+b로 나누었을 때의 몫이 $x+2$이고 나머지가 $-2x+1$일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오. $\boldsymbol{a=-4,\ b=2}$

$x^3-2x^2-8x+5=(x^2+ax+b)(x+2)-2x+1$
$\qquad\qquad=x^3+(a+2)x^2+(b+2a-2)x+2b+1$
양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면
$-2=a+2$, $-8=b+2a-2$, $5=2b+1$ $\quad\therefore a=-4$, $b=2$

022

다항식 x^3+ax^2+2x-7을 x^2-2x+1로 나누었을 때의 나머지가 $3x+b$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① 6
✓② 8
③ 10
④ 12
⑤ 14

몫을 $x+k$ (k는 상수)라 하면
$x^3+ax^2+2x-7=(x^2-2x+1)(x+k)+3x+b=(x-1)^2(x+k)+3x+b$
양변에 $x=1$, $x=0$, $x=-1$을 각각 대입하면
$a-4=3+b$, $-7=k+b$, $a-10=4(k-1)-3+b$이므로
$a=-1$, $b=-8$, $k=1$ $\quad\therefore ab=-1\times(-8)=8$

023

다항식 $x^3-6x^2+ax-10$이 x^2-4x+b로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 $a-2b$의 값은?

① 0
② 1
③ 2
✓④ 3
⑤ 4

몫을 $x+k$ (k는 상수)라 하면
$x^3-6x^2+ax-10=(x^2-4x+b)(x+k)=x^3+(-4+k)x^2+(b-4k)x+bk$
양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면
$-6=-4+k$, $a=b-4k$, $-10=bk$이므로
$k=-2$, $a=13$, $b=5$ $\quad\therefore a-2b=13-10=3$

024

다항식 $-2x^3+5x^2+ax+b$가 x^2-x-2로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. -5

몫을 $-2x+k$ (k는 상수)라 하면
$-2x^3+5x^2+ax+b=(x^2-x-2)(-2x+k)=(x+1)(x-2)(-2x+k)$
양변에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면
$-a+b+7=0$, $4+2a+b=0$이므로
$a=1$, $b=-6$ $\quad\therefore a+b=1+(-6)=-5$

04 나머지 정리

❶ 나머지 정리

① 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$R=f(\alpha)$ ← $x-\alpha=0$을 만족시키는 x의 값 대입

② 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax-b$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$R=f\left(\dfrac{b}{a}\right)$ ← $ax-b=0$을 만족시키는 x의 값 대입

- 다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지는 상수이다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 016쪽

025

다음 두 다항식 A, B에 대하여 A를 B로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

(1) $A=x^2+2x-2$, $B=x-1$ 1

$f(x)=x^2+2x-2$로 놓으면 $f(1)=1^2+2\times1-2=1$

(2) $A=x^3-x^2+5x+1$, $B=x+2$ -21

$f(x)=x^3-x^2+5x+1$로 놓으면

$f(-2)=(-2)^3-(-2)^2+5\times(-2)+1=-21$

(3) $A=2x^3-4x^2-8x+3$, $B=x+1$ 5

$f(x)=2x^3-4x^2-8x+3$으로 놓으면

$f(-1)=2\times(-1)^3-4\times(-1)^2-8\times(-1)+3=5$

026

다음 두 다항식 A, B에 대하여 A를 B로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

(1) $A=x^2-6x+4$, $B=3x-1$ $\dfrac{19}{9}$

$f(x)=x^2-6x+4$로 놓으면

$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2-6\times\dfrac{1}{3}+4=\dfrac{19}{9}$

(2) $A=8x^2+2x-6$, $B=4x+3$ -3

$f(x)=8x^2+2x-6$으로 놓으면

$f\left(-\dfrac{3}{4}\right)=8\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2+2\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)-6=-3$

(3) $A=x^3+x-10$, $B=2x-5$ $\dfrac{65}{8}$

$f(x)=x^3+x-10$으로 놓으면

$f\left(\dfrac{5}{2}\right)=\left(\dfrac{5}{2}\right)^3+\dfrac{5}{2}-10=\dfrac{65}{8}$

027

다음 두 다항식 A, B에 대하여 A를 B로 나누었을 때의 나머지를 R라 할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

(1) $A=x^2+4x+a$, $B=x+1$, $R=1$ 4

$f(x)=x^2+4x+a$로 놓으면

$f(-1)=(-1)^2+4\times(-1)+a=1$ $\quad\therefore a=4$

(2) $A=3x^3+ax^2-x$, $B=x-2$, $R=14$ -2

$f(x)=3x^3+ax^2-x$로 놓으면

$f(2)=3\times2^3+a\times2^2-2=14$ $\quad\therefore a=-2$

(3) $A=4x^2+ax+5$, $B=2x-1$, $R=3$ -6

$f(x)=4x^2+ax+5$로 놓으면

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}a+5=3$ $\quad\therefore a=-6$

(4) $A=ax^3+x^2-3x-2$, $B=3x+2$, $R=-4$ 15

$f(x)=ax^3+x^2-3x-2$로 놓으면

$f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=a\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2-3\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)-2=-4$ $\quad\therefore a=15$

028

다음은 다항식 $2x^3+ax^2+bx+4$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 4이고, $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 16일 때, 상수 a, b의 값을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+4$로 놓으면

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$f(\boxed{1})=a+b+6=4$에서 $a+b=-2$ …… ㉠

$f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 16이므로

$f(\boxed{-3})=9a-3b-50=16$에서 $3a-b=22$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\boxed{5}$, $b=\boxed{-7}$

유형 실전 문제

정답과 풀이 017쪽

유형 05 나머지 정리 – 일차식으로 나누었을 때의 나머지 중요★

① 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지 ➡ $f(\alpha)$

② 다항식 $f(x)$를 $ax-b$로 나누었을 때의 나머지 ➡ $f\left(\frac{b}{a}\right)$

풍쌤 Point 나머지 정리는 나누는 식이 일차식일 때만 사용할 수 있다.

029

다항식 $\underbrace{x^3+2x^2+5x-2}_{f(x)}$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 a, $2x+1$로 나누었을 때의 나머지가 b일 때, ab의 값을 구하시오. -99

$a=f(2)=2^3+2\times2^2+5\times2-2=24$

$b=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+5\times\left(-\frac{1}{2}\right)-2=-\frac{33}{8}$

$\therefore\ ab=24\times\left(-\frac{33}{8}\right)=-99$

030

다항식 x^3+ax+1을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지와 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 같을 때, 상수 a의 값을 구하시오. -7

$f(x)=x^3+ax+1$로 놓으면

$f(1)=a+2,\ f(-3)=-3a-26$

$f(1)=f(-3)$에서 $a+2=-3a-26$ $\quad\therefore\ a=-7$

031

다항식 $f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지가 6일 때, 다항식 $f(3x-2)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는?

① $\frac{1}{3}$ ② 1 ③ 3

✓④ 6 ⑤ 9

$f(4)=6$이므로 구하는 나머지는 $f(3\times2-2)=f(4)=6$

032

다항식 $f(x)$를 $3x+4$로 나누었을 때의 나머지가 -1이고, 다항식 $g(x)$를 $3x+4$로 나누었을 때의 나머지가 $\frac{1}{2}$일 때, 다항식 $f(x)-2g(x)$를 $3x+4$로 나누었을 때의 나머지는?

① -3 ② $-\frac{5}{2}$ ✓③ -2

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$f\left(-\frac{4}{3}\right)=-1,\ g\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2}$이므로 구하는 나머지는

$f\left(-\frac{4}{3}\right)-2g\left(-\frac{4}{3}\right)=-1-2\times\frac{1}{2}=-2$

유형 06 나머지 정리 – 이차식으로 나누었을 때의 나머지 중요★

다항식 $f(x)$를 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 일차 이하의 다항식이므로 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓고 항등식을 세운다.

풍쌤 Point $f(x)$를 $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누었을 때의 나머지는 나눗셈에 대한 항등식에서 $f(\alpha)$, $f(\beta)$의 값을 이용하여 구한다.

033

다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 2이고, $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 -3일 때, $f(x)$를 $(x+1)(x+2)$로 나누었을 때의 나머지는?

① $2x-3$ ② $2x+3$ ③ $-5x+7$

④ $5x-7$ ✓⑤ $5x+7$

$f(-1)=2,\ f(-2)=-3$이고, $f(x)$를 $(x+1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x+1)(x+2)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=-1$, $x=-2$를 각각 대입하면

$f(-1)=-a+b=2,\ f(-2)=-2a+b=-3$ $\quad\therefore\ a=5,\ b=7$

따라서 구하는 나머지는 $5x+7$이다.

034

다항식 $2x^2+ax+b$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 나머지가 $3x-3$일 때, 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6

④ 7 ✓⑤ 8

주어진 나눗셈의 몫을 $Q(x)$라 하면

$2x^2+ax+b=(x^2-4x+3)Q(x)+3x-3$

$=(x-1)(x-3)Q(x)+3x-3$

양변에 $x=1$, $x=3$을 각각 대입하면

$2+a+b=0,\ 18+3a+b=6$ $\quad\therefore\ a=-5,\ b=3$

$\therefore\ b-a=3-(-5)=8$

035

다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지는 8이고, $(x+2)(x+3)$으로 나누었을 때의 나머지는 $-2x+6$일 때, $f(x)$를 $(x-1)(x+3)$으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. $-x+9$

$f(1)=8,\ f(-3)=12$

$f(x)$를 $(x-1)(x+3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)(x+3)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=1$, $x=-3$을 대입하면

$f(1)=a+b=8,\ f(-3)=-3a+b=12$ $\quad\therefore\ a=-1,\ b=9$

따라서 구하는 나머지는 $-x+9$이다.

05 인수 정리

① 인수 정리

다항식 $f(x)$에 대하여

① $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

② $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $f(\alpha)=0$이다.

참고 $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$이면 다항식 $f(x)$는 일차식 $ax+b$로 나누어떨어진다.

또, 다항식 $f(x)$가 일차식 $ax+b$로 나누어떨어지면 $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$이다.

(단, a, b는 상수이다.)

- **$f(\alpha)=0$의 여러 가지 표현**

① 다항식 $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 갖는다.

② $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$로 인수분해할 수 있다. (단, $Q(x)$는 다항식이다.)

③ 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지가 0이다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 018쪽

036

다음 일차식이 다항식 $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$의 인수인 것은 ○를, 인수가 아닌 것은 ×를 (　　) 안에 써넣으시오.

(1) $x-1$ (○)

$f(1)=1^3-2\times1^2-5\times1+6=0$이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다.

(2) $x-2$ (×)

$f(2)=2^3-2\times2^2-5\times2+6=-4\neq0$이므로 $x-2$는 $f(x)$의 인수가 아니다.

(3) $x-3$ (○)

$f(3)=3^3-2\times3^2-5\times3+6=0$이므로 $x-3$은 $f(x)$의 인수이다.

037

다항식 $f(x)=6x^3-7x^2-x+2$가 다음 일차식으로 나누어떨어지면 ○를, 나누어떨어지지 않으면 ×를 (　　) 안에 써넣으시오.

(1) $x+1$ (×)

$f(-1)=6\times(-1)^3-7\times(-1)^2-(-1)+2=-10\neq0$

(2) $2x+1$ (○)

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=6\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3-7\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)+2=0$

(3) $3x+2$ (×)

$f\left(-\frac{2}{3}\right)=6\times\left(-\frac{2}{3}\right)^3-7\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-\left(-\frac{2}{3}\right)+2=-\frac{20}{9}\neq0$

038

다음 다항식 $f(x)$가 일차식 A를 인수로 가질 때, 상수 a의 값을 구하시오.

(1) $f(x)=x^2+ax-28$, $A=x-4$ 　3

$f(4)=4^2+4a-28=0$ 　$\therefore a=3$

(2) $f(x)=2x^2+2x+a$, $A=x+2$ 　-4

$f(-2)=2\times(-2)^2+2\times(-2)+a=0$ 　$\therefore a=-4$

(3) $f(x)=ax^3+15x^2+8x-3$, $A=x+3$ 　4

$f(-3)=a\times(-3)^3+15\times(-3)^2+8\times(-3)-3=0$ 　$\therefore a=4$

(4) $f(x)=x^4-ax^3-3x^2+2ax+4$, $A=x+1$ 　2

$f(-1)=(-1)^4-a\times(-1)^3-3\times(-1)^2+2a\times(-1)+4=0$ 　$\therefore a=2$

039

다음 다항식 $f(x)$가 일차식 A로 나누어떨어질 때, 상수 a의 값을 구하시오.

(1) $f(x)=x^3+2x-a$, $A=x-1$ 　3

$f(1)=1^3+2\times1-a=0$ 　$\therefore a=3$

(2) $f(x)=ax^3+2x^2-x+5$, $A=x+1$ 　8

$f(-1)=a\times(-1)^3+2\times(-1)^2-(-1)+5=0$ 　$\therefore a=8$

(3) $f(x)=3x^3+ax^2+2x+8$, $A=x+2$ 　5

$f(-2)=3\times(-2)^3+a\times(-2)^2+2\times(-2)+8=0$ 　$\therefore a=5$

(4) $f(x)=2x^3-5x^2+ax+6$, $A=2x-1$ 　-10

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3-5\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}a+6=0$ 　$\therefore a=-10$

유형 실전 문제

정답과 풀이 018쪽

유형 07 인수 정리 – 일차식으로 나누어떨어지는 경우 중요

① 다항식 $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.
⇒ $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 갖는다. ⇒ $f(\alpha)=0$
② 다항식 $f(x)$가 일차식 $ax+b$로 나누어떨어진다.
⇒ $f(x)$는 $ax+b$를 인수로 갖는다. ⇒ $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$

풍쌤 Point 인수 정리란 한 다항식이 일차식으로 나누어떨어질 때, 그 일차식을 인수로 갖는다는 뜻이다.

040

다항식 $2x^3-x^2-(2k+1)x-k$가 $x+2$를 인수로 가질 때, 상수 k의 값은?

① 4
② 5
✓③ 6
④ 7
⑤ 8

$f(x)=2x^3-x^2-(2k+1)x-k$로 놓으면 인수 정리에 의하여 $f(-2)=0$이므로
$f(-2)=2\times(-2)^3-(-2)^2-(2k+1)\times(-2)-k=3k-18=0$
$\therefore k=6$

041

다항식 x^3+ax^2+bx+4가 $x-1$, $x+1$로 각각 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 $2a-3b$의 값은?

① -7
✓② -5
③ -3
④ -1
⑤ 1

$f(x)=x^3+ax^2+bx+4$로 놓으면 인수 정리에 의하여 $f(1)=0$, $f(-1)=0$이므로
$f(1)=1+a+b+4=0$, $f(-1)=-1+a-b+4=0$
$\therefore a=-4,\ b=-1$
$\therefore 2a-3b=2\times(-4)-3\times(-1)=-5$

042

다항식 x^3+ax+b가 $x-1$, $x+3$으로 각각 나누어떨어질 때, 다항식 ax^3+bx^2+3x-2를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) 8

$f(x)=x^3+ax+b$로 놓으면 인수 정리에 의하여 $f(1)=0$, $f(-3)=0$이므로
$f(1)=1+a+b=0$, $f(-3)=-27-3a+b=0$ $\therefore a=-7,\ b=6$
$\therefore ax^3+bx^2+3x-2=-7x^3+6x^2+3x-2$
$g(x)=-7x^3+6x^2+3x-2$로 놓으면 구하는 나머지는
$g(-1)=-7\times(-1)^3+6\times(-1)^2+3\times(-1)-2=8$

043

다항식 $f(x)=ax^3-x^2+bx+1$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 9이고, 다항식 $f(x+2)$가 $x+1$로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 $a-2b$의 값을 구하시오. 6

$f(2)=8a+2b-3=9$ ······ ㉠
$f(x+2)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로
$f(-1+2)=f(1)=0$ $\therefore a=-b$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-2$
$\therefore a-2b=2-2\times(-2)=6$

유형 08 인수 정리 – 이차식으로 나누어떨어지는 경우 중요

다항식 $f(x)$가 $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누어떨어진다.
⇒ $f(x)$는 $x-\alpha$, $x-\beta$를 인수로 갖는다.
⇒ $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

풍쌤 Point $f(x)$가 $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누어떨어지면 $x-\alpha$, $x-\beta$로 각각 나누어떨어진다.

044

다항식 x^3+3x^2+ax+b가 $(x+1)(x-1)$로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은?

① 2
② 5
③ 8
✓④ 10
⑤ 13

$f(x)=x^3+3x^2+ax+b$로 놓으면 $f(x)$는 $x+1$과 $x-1$로 각각 나누어떨어지므로
$f(-1)=2-a+b=0$, $f(1)=4+a+b=0$ $\therefore a=-1,\ b=-3$
$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+(-3)^2=10$

045

다항식 $x^3+ax^2-13x+b$가 x^2-3x+2로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 구하시오. **$a=2$, $b=10$**

$f(x)=x^3+ax^2-13x+b$로 놓으면 $f(x)$는 x^2-3x+2, 즉 $(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지므로
$f(1)=-12+a+b=0$, $f(2)=-18+4a+b=0$ $\therefore a=2,\ b=10$

046

다항식 $f(x)=ax^3+bx^2-8x-3$이 x^2-2x-3으로 나누어떨어질 때, $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. -15

$f(x)$는 x^2-2x-3, 즉 $(x+1)(x-3)$으로 나누어떨어지므로
$f(-1)=-a+b+5=0$, $f(3)=27a+9b-27=0$ $\therefore a=2,\ b=-3$
따라서 $f(x)=2x^3-3x^2-8x-3$이므로
$f(-2)=2\times(-2)^3-3\times(-2)^2-8\times(-2)-3=-15$

047

다항식 x^3+ax^2-bx+8이 x^2-6x+8로 나누어떨어질 때, 다항식 bx^3+3x-a를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는?

① 5
✓② 6
③ 7
④ 8
⑤ 9

$f(x)=x^3+ax^2-bx+8$로 놓으면 $f(x)$는 x^2-6x+8, 즉 $(x-2)(x-4)$로 나누어떨어지므로
$f(2)=4a-2b+16=0$, $f(4)=72+16a-4b=0$ $\therefore a=-5,\ b=-2$
$\therefore bx^3+3x-a=-2x^3+3x+5$
$g(x)=-2x^3+3x+5$로 놓으면 구하는 나머지는
$g(1)=-2+3+5=6$

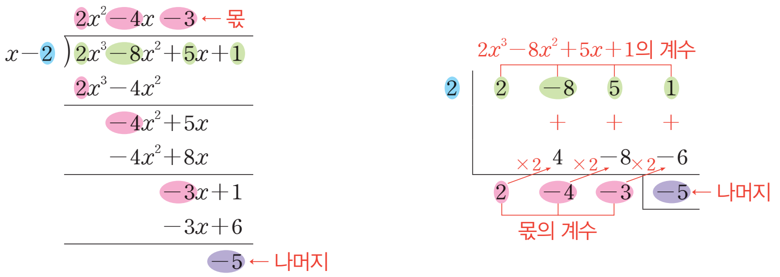
06 조립제법

① 조립제법

다항식을 일차식으로 나눌 때, 계수만을 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법을 조립제법이라 한다.

참고 $f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$일 때, $ax+b$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{a}Q(x)$이다.

보기



풍쌤 Tip 나머지 정리로 나머지를 구할 수 있고, 조립제법으로 몫과 나머지를 구할 수 있다.

- 계수를 나열할 때 해당되는 차수의 항이 없으면 계수가 0이므로 그 자리에 0을 쓴다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 019쪽

048

다음은 조립제법을 이용하여 다항식의 나눗셈에서의 몫과 나머지를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣고, 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(x^3-2x^2+4x-2)\div(x-2)$ 몫: x^2+4, 나머지: 6

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & \boxed{-2} & 4 & -2 \\ & & 2 & \boxed{0} & 8 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & \boxed{6} \end{array}$$

(2) $(3x^3+x^2-1)\div(x+1)$ 몫: $3x^2-2x+2$, 나머지: -3

$$\begin{array}{c|cccc} \boxed{-1} & 3 & 1 & \boxed{0} & -1 \\ & & -3 & 2 & -2 \\ \hline & \boxed{3} & -2 & 2 & -3 \end{array}$$

(3) $(2x^3-5x^2-2x+5)\div\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 몫: $2x^2-4x-4$, 나머지: 3

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 2 & -5 & -2 & 5 \\ & & \boxed{1} & \boxed{-2} & \boxed{-2} \\ \hline & 2 & -4 & -4 & 3 \end{array}$$

049

조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(x^3+6x^2-x-7)\div(x+3)$ 몫: $x^2+3x-10$, 나머지: 23

(2) $(4x^3+2x^2-6x-1)\div(x-1)$ 몫: $4x^2+6x$, 나머지: -1

(3) $(9x^3-13x-2)\div(3x+1)$ 몫: $3x^2-x-4$, 나머지: 2

$$\begin{array}{c|cccc} -\frac{1}{3} & 9 & 0 & -13 & -2 \\ & & -3 & 1 & \boxed{4} \\ \hline & 9 & -3 & \boxed{-12} & 2 \end{array}$$

$\therefore 9x^3-13x-2=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(\boxed{9x^2-3x-12}\right)+2$

$=(3x+1)\left(\boxed{3x^2-x-4}\right)+2$

(4) $(4x^3-5x^2-16x+19)\div(4x-5)$ 몫: x^2-4, 나머지: -1

$4x^3-5x^2-16x+19=\left(x-\frac{5}{4}\right)(4x^2-16)-1=(4x-5)(x^2-4)-1$

따라서 구하는 몫은 x^2-4, 나머지는 -1이다.

유형 실전 문제

정답과 풀이 020쪽

유형 09 조립제법

중요

다항식을 일차식으로 나눈 몫과 나머지는 조립제법을 이용하여 구할 수 있다.

풍쌤 Point 다항식 $f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나눈 몫이 $Q(x)$이면 $ax+b$로 나눈 몫은 $\frac{1}{a}Q(x)$이다. 이때 나머지는 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$로 같다.

050

조립제법을 이용하여 오른쪽과 같이 다항식 x^3-5x^2+5를 $x-4$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하려고 한다. 상수 a, b, c, d, e의 값을 구하시오. $a=4,\ b=0,\ c=-4,\ d=-1,\ e=-11$

$$\begin{array}{c|cccc} a & 1 & -5 & b & 5 \\ & & 4 & c & -16 \\ \hline & 1 & d & -4 & \boxed{e} \end{array}$$

오른쪽 조립제법에서

$a=4,\ b=0,\ c=-4,\ d=-1,\ e=-11$

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & -5 & 0 & 5 \\ & & 4 & -4 & -16 \\ \hline & 1 & -1 & -4 & \boxed{-11} \end{array}$$

051

다항식 $6x^3+7x^2+11x+2$를 $3x+2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 할 때, $Q(1)-R$의 값을 조립제법을 이용하여 구하시오. 10

$6x^3+7x^2+11x+2=\left(x+\frac{2}{3}\right)(6x^2+3x+9)-4$

$=(3x+2)(2x^2+x+3)-4$

$\therefore Q(x)=2x^2+x+3,\ R=-4$

$\therefore Q(1)-R=6-(-4)=10$

$$\begin{array}{c|cccc} -\frac{2}{3} & 6 & 7 & 11 & 2 \\ & & -4 & -2 & -6 \\ \hline & 6 & 3 & 9 & \boxed{-4} \end{array}$$

052

조립제법을 이용하여 오른쪽과 같이 다항식 x^3+ax^2+bx-2를 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하려고 한다. 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하시오. -8

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & a & b & -2 \\ & & 2 & 2 & d \\ \hline & 1 & c & -2 & \boxed{-6} \end{array}$$

오른쪽 조립제법에서

$2a+4=2,\ 2a+b+4=-2$

따라서 $a=-1,\ b=-4$이므로

$c=a+2=1,\ d=4a+2b+8=-4$

$\therefore a+b+c+d=-1+(-4)+1+(-4)=-8$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & a & b & -2 \\ & & 2 & 2a+4 & 4a+2b+8 \\ \hline & 1 & a+2 & 2a+b+4 & \boxed{4a+2b+6} \end{array}$$

053

다항식 x^3-6x^2+2x+4를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 조립제법을 이용하여 구하시오. $x-4$

오른쪽 조립제법에서

$Q(x)=x^2-3x-7$이므로 $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 구하면 $x-4$이다.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -6 & 2 & 4 \\ & & 3 & -9 & -21 \\ \hline -1 & 1 & -3 & -7 & \boxed{-17} \\ & & -1 & 4 & \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{-3} & \end{array}$$

유형 10 조립제법과 항등식

$x-a$ (a는 상수)에 대하여 내림차순으로 정리된 항등식의 미정계수는 조립제법을 연속으로 이용하여 구할 수 있다.

풍쌤 Point 수치대입법이나 계수비교법을 이용하여 구할 수도 있지만 조립제법을 연속으로 이용하면 간편하다.

054

다음은 x에 대한 항등식

$$x^3+2x^2-x-3=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$$

에서 조립제법을 이용하여 상수 a, b, c, d의 값을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & \boxed{2} & -1 & -3 \\ & & 1 & \boxed{3} & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 & \boxed{2} & \boxed{-1} \\ & & 1 & 4 & \\ \hline 1 & 1 & 4 & \boxed{6} & \\ & & \boxed{1} & & \\ \hline & 1 & \boxed{5} & & \end{array}$$

$\therefore x^3+2x^2-x-3$

$=(x-1)^3+5(x-1)^2+6(x-1)-1$

따라서 $a=1,\ b=5,\ c=6,\ d=-1$이다.

055

모든 실수 x에 대하여 등식

$$x^3+x^2-5x+3=(x+1)^3+a(x+1)^2+b(x+1)+c$$

가 성립할 때, 상수 a, b, c에 대하여 $ab+c$의 값을 구하시오. 16

$x^3+x^2-5x+3=(x+1)^3-2(x+1)^2-4(x+1)+8$

따라서 $a=-2,\ b=-4,\ c=8$이므로

$ab+c=-2\times(-4)+8=16$

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & 1 & -5 & 3 \\ & & -1 & 0 & 5 \\ \hline -1 & 1 & 0 & -5 & \boxed{8} \\ & & -1 & 1 & \\ \hline -1 & 1 & -1 & \boxed{-4} & \\ & & -1 & & \\ \hline & 1 & \boxed{-2} & & \end{array}$$

056

x의 값에 관계없이 등식

$$3x^3+8x^2-6x-4$$
$$=a(x+2)^3+b(x+2)^2+c(x+2)+d$$

가 항상 성립할 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하시오. 7

$3x^3+8x^2-6x-4$

$=3(x+2)^3-10(x+2)^2-2(x+2)+16$

$\therefore a=3,\ b=-10,\ c=-2,\ d=16$

$\therefore a+b+c+d=3+(-10)+(-2)+16=7$

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 3 & 8 & -6 & -4 \\ & & -6 & -4 & 20 \\ \hline -2 & 3 & 2 & -10 & \boxed{16} \\ & & -6 & 8 & \\ \hline -2 & 3 & -4 & \boxed{-2} & \\ & & -6 & & \\ \hline & 3 & \boxed{-10} & & \end{array}$$

중단원 점검 문제

01

임의의 실수 x, y에 대하여 등식

$$(2x-y)a+(3y+x)b=6x+11y$$

가 성립할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　✓⑤ 5

주어진 등식의 좌변을 x, y에 대하여 정리하면
$(2a+b)x+(-a+3b)y=6x+11y$
위의 등식이 x, y에 대한 항등식이므로
$2a+b=6$, $-a+3b=11$　　$\therefore a=1, b=4$
$\therefore a+b=1+4=5$

02

등식 $(x-1)(x^2-4)P(x)=ax^4+bx^2+8$이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

✓① -20　　② -10　　③ 0
④ 10　　⑤ 20

주어진 식의 양변에 $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면
$0=a+b+8$　　…… ㉠
$0=16a+4b+8$　　…… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-10$
$\therefore ab=2\times(-10)=-20$

03

$x+y=0$을 만족시키는 모든 실수 x, y에 대하여 등식

$$2x^2+ax+bxy+(b-1)y=0$$

이 성립할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.　**$a=1$, $b=2$**

$x+y=0$에서 $y=-x$이므로 주어진 등식의 좌변에 대입하면
$2x^2+ax-bx^2-(b-1)x=0$, $(2-b)x^2+(a-b+1)x=0$
위의 등식이 x에 대한 항등식이므로
$2-b=0$, $a-b+1=0$　　$\therefore a=1, b=2$

04 실전 Plus

등식

$$(x^2+x-2)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$$

이 x에 대한 항등식일 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}$의 값은? (단, a_0, a_1, $\cdots$, a_{10}은 상수이다.)

① -32　　✓② -16　　③ 0
④ 16　　⑤ 32

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=0$　　…… ㉠
주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10}=(-2)^5=-32$　　…… ㉡
㉠+㉡을 하면 $2a_0+2a_2+2a_4+\cdots+2a_{10}=0+(-32)=-32$
$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}=-16$

05

다항식 $f(x)=3x^3+ax^2+bx+1$이 $(x-1)^2$으로 나누어떨어질 때, $f(-1)$의 값을 구하시오.　-8

몫을 $3x+k$ (k는 상수)라 하면
$3x^3+ax^2+bx+1=(x-1)^2(3x+k)$
$\qquad=3x^3+(-6+k)x^2+(3-2k)x+k$
양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면
$a=-6+k$, $b=3-2k$, $1=k$　　$\therefore a=-5, b=1$
$\therefore f(x)=3x^3-5x^2+x+1$
$\therefore f(-1)=3\times(-1)^3-5\times(-1)^2+(-1)+1=-8$

06 교육청 기출

x에 대한 다항식 x^3+2x^2-9x+a를 $x-1$로 나눈 나머지가 7일 때, 상수 a의 값을 구하시오.　13

$f(x)=x^3+2x^2-9x+a$로 놓으면 나머지 정리에 의하여
$f(1)=1+2-9+a=7$　　$\therefore a=13$

07

다항식 $f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 -12일 때, 다항식 $xf(x+1)$을 $x+4$로 나누었을 때의 나머지는?

① -48　　② -3　　③ 3
④ 12　　✓⑤ 48

$f(-3)=-12$이므로 구하는 나머지는
$-4f(-4+1)=-4f(-3)=-4\times(-12)=48$

08 학교 시험 기출

다항식 $x^8+2x^6-x^4$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는?

① -2　　② -1　　✓③ 0
④ 1　　⑤ 2

$x^8+2x^6-x^4$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면
$x^8+2x^6-x^4=(x-1)Q(x)+R$　　…… ㉠
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $R=2$
$Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(-1)$이므로 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$(-1)^8+2\times(-1)^6-(-1)^4=-2Q(-1)+R$　　$\therefore Q(-1)=0$

중단원 점검 문제

정답과 풀이 021쪽

09 학교 시험 기출

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 2이고, $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -1이다. $(x^2+1)f(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 나머지는?

① $-3x-1$　② $-3x+1$　③ $x+3$

✓④ $3x+1$　⑤ $3x+3$

$(x^2+1)f(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 $(x^2+1)f(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$

$f(1)=2$, $f(-2)=-1$이므로 양변에 $x=1$, $x=-2$를 각각 대입하면

$2f(1)=a+b=4$, $5f(-2)=-2a+b=-5$　$\therefore a=3, b=1$

따라서 구하는 나머지는 $3x+1$이다.

10 실전 Plus

$3^{10}+3^{13}$을 4로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.　0

$x=3$이라 하면 $3^{10}+3^{13}=x^{10}+x^{13}$

$x^{10}+x^{13}$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$x^{10}+x^{13}=(x+1)Q(x)+R$　…… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $R=(-1)^{10}+(-1)^{13}=0$

따라서 $3^{10}+3^{13}$을 4로 나누었을 때의 나머지는 0이다.

11

다항식 $f(x)=3x^3+ax^2+bx+6$이 $x-1$, $x+3$으로 각각 나누어떨어질 때, $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)　20

$f(1)=3+a+b+6=0$　…… ㉠

$f(-3)=3\times(-3)^3+a\times(-3)^2+b\times(-3)+6=0$　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-13$

$\therefore f(x)=3x^3+4x^2-13x+6$

$\therefore f(2)=3\times2^3+4\times2^2-13\times2+6=20$

12 실전 Plus

삼차항의 계수가 1인 삼차식 $f(x)$에 대하여 $f(1)=f(2)=f(3)=-1$일 때, $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.　-25

$f(1)=f(2)=f(3)=-1$에서 $f(1)+1=0$, $f(2)+1=0$, $f(3)+1=0$이므로 $f(x)+1$은 $x-1$, $x-2$, $x-3$을 인수로 갖는다.

이때 $f(x)$는 삼차항의 계수가 1인 삼차식이므로

$f(x)+1=(x-1)(x-2)(x-3)$　$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)-1$

$\therefore f(-1)=-2\times(-3)\times(-4)-1=-25$

13

다항식 $f(x)=ax^3+x^2-8x+b$가 x^2-4를 인수로 가질 때, $f(x)$를 x^2+3으로 나눈 나머지를 구하시오.　$-14x-7$

$f(x)$는 x^2-4, 즉 $(x+2)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$f(2)=8a-12+b=0$, $f(-2)=-8a+20+b=0$

$\therefore a=2, b=-4$

$\therefore f(x)=2x^3+x^2-8x-4$

오른쪽 나눗셈에서 구하는 나머지는 $-14x-7$이다.

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x\ +1 \\ \hline
x^2+3 & 2x^3+x^2-\ 8x-4 \\
 & 2x^3\qquad+\ 6x \\ \hline
 & \qquad x^2-14x-4 \\
 & \qquad x^2\qquad\ +3 \\ \hline
 & \qquad\quad -14x-7
\end{array}$$

14

다항식 $5x^3-3x^2+ax-4$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$이고 나머지가 4일 때, $Q(1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)　15

$Q(x)=5x^2+2x+a+2$

나머지는 $a-2=4$에서 $a=6$

따라서 $Q(x)=5x^2+2x+8$이므로 $Q(1)=15$

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 5 & -3 & a & -4 \\
 & & 5 & 2 & a+2 \\ \hline
 & 5 & 2 & a+2 & \boxed{a-2}
\end{array}$$

15 교육청 기출

다음은 사차다항식 $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$를 조립제법을 이용하여 $\underbrace{x-2\text{로 나눈 몫}}_{Q_1(x)}$과 나머지를 구하고, 그 몫을 다시 $x-2$로 나눈 몫과 나머지를 구하는 과정의 일부이다.

$$\begin{array}{c|ccccc}
2 & 1 & a & b & c & d \\
 & & \square & \square & \square & \square \\ \hline
2 & 1 & \square & \square & \square & \boxed{1} \\
 & & \square & \square & \square & \\ \hline
 & 1 & 2 & -8 & \boxed{5} &
\end{array}$$

$P(3)$의 값은? (단, a, b, c, d는 상수이다.)

✓① 13　② 16　③ 19

④ 22　⑤ 25

$Q_1(x)=(x-2)(x^2+2x-8)+5$이므로 $P(x)=(x-2)Q_1(x)+1$에 대입하면

$P(x)=(x-2)^2(x^2+2x-8)+5x-9$　$\therefore P(3)=13$

16

다음은 등식

$$\begin{aligned}&2x^3+4x^2+px+q\\&=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d\end{aligned}$$

가 x에 대한 항등식일 때, 조립제법을 이용하여 상수 p, q, a, b, c, d의 값을 구하는 과정이다.

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 2 & 4 & p & q \\
 & & 2 & 6 & 3 \\ \hline
1 & 2 & 6 & 3 & \boxed{7}=d \\
 & & 2 & 8 & \\ \hline
1 & 2 & 8 & \boxed{11}=c & \\
 & & 2 & & \\ \hline
 & a=2 & \boxed{10}=b & &
\end{array}$$

$a+b-c+d-(p+q)$의 값을 구하시오.　7

주어진 조립제법에서 $p+6=3$, $q+3=7$이므로 $p=-3$, $q=4$

$\therefore 2x^3+4x^2-3x+4=2(x-1)^3+10(x-1)^2+11(x-1)+7$

$\therefore a+b-c+d-(p+q)=2+10-11+7-(-3+4)=7$

01 인수분해

❶ 인수분해 공식 (1)

① $ma+mb=m(a+b)$

② $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

③ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

④ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

⑤ $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

❷ 인수분해 공식 (2)

① $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

② $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$, $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

③ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

④ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

⑤ $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

참고 인수분해 공식은 곱셈 공식의 좌변과 우변을 바꾸어 놓은 것이다.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)\ \underset{\text{인수분해}}{\overset{\text{곱셈 공식}}{\rightleftarrows}}\ a^3+b^3$$

- **인수분해**
하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것

- 인수분해 공식 (1)은 중학교에서 학습한 내용이다.

풍쌤 Tip 일반적으로 다항식의 계수의 범위를 유리수로 생각하여 더 이상 인수분해할 수 없을 때까지 인수분해한다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 023쪽

001

다음 식을 인수분해하시오.

(1) a^2b-ab^3 $ab(a-b^2)$

(2) $4x^2y+8xy^2-2xy$ $2xy(2x+4y-1)$

(3) $xy(x-y)+x(y-x)$ $x(x-y)(y-1)$

$xy(x-y)+x(y-x)=xy(x-y)-x(x-y)=x(x-y)(y-1)$

002

다음 식을 인수분해하시오.

(1) y^2-6y+9 $(y-3)^2$

(2) $4x^2-4x+1$ $(2x-1)^2$

(3) $25a^2+30ab+9b^2$ $(5a+3b)^2$

003

다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^2-9 $(x+3)(x-3)$

(2) y^2-36 $(y+6)(y-6)$

(3) $100a^2-49b^2$ $(10a+7b)(10a-7b)$

004

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $a^2-8a+15$ $(a-3)(a-5)$

(2) $2y^2-3y-2$ $(2y+1)(y-2)$

(3) $6x^2+5xy-6y^2$ $(3x-2y)(2x+3y)$

개념 기본 문제

005

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2zx$ $(x+y-z)^2$

(2) $a^2+b^2+1+2ab+2b+2a$ $(a+b+1)^2$

(3) $9x^2+y^2+z^2-6xy-2yz+6zx$ $(3x-y+z)^2$

$9x^2+y^2+z^2-6xy-2yz+6zx$

$=(3x)^2+(-y)^2+z^2+2\times 3x\times(\boxed{-y})+2\times(\boxed{-y})\times z$

$+2\times z\times 3x$

$=(3x-\boxed{y}+z)^2$

(4) $x^2+4y^2+25z^2+4xy-20yz-10zx$ $(x+2y-5z)^2$

$x^2+4y^2+25z^2+4xy-20yz-10zx$

$=x^2+(2y)^2+(-5z)^2+2\times x\times 2y+2\times 2y\times(-5z)+2\times(-5z)\times x$

$=(x+2y-5z)^2$

(5) $4a^2+b^2-4ab+12a-6b+9$ $(2a-b+3)^2$

$4a^2+b^2-4ab+12a-6b+9$

$=4a^2+b^2+9-4ab-6b+12a$

$=(2a)^2+(-b)^2+3^2+2\times 2a\times(-b)+2\times(-b)\times 3+2\times 3\times 2a$

$=(2a-b+3)^2$

(6) $x^2+9y^2-6xy-12x+36y+36$ $(x-3y-6)^2$

$x^2+9y^2-6xy-12x+36y+36$

$=x^2+9y^2+36-6xy+36y-12x$

$=x^2+(-3y)^2+(-6)^2+2\times x\times(-3y)$

$+2\times(-3y)\times(-6)+2\times(-6)\times x$

$=(x-3y-6)^2$

006

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $a^3+6a^2+12a+8$ $(a+2)^3$

(2) x^3-3x^2+3x-1 $(x-1)^3$

(3) $8x^3+12x^2+6x+1$ $(2x+1)^3$

$8x^3+12x^2+6x+1$

$=(2x)^3+3\times(2x)^2\times 1+3\times 2x\times 1^2+1^3$

$=(2x+1)^3$

(4) $27y^3-54y^2+36y-8$ $(3y-2)^3$

$27y^3-54y^2+36y-8$

$=(3y)^3-3\times(\boxed{3y})^2\times 2+3\times\boxed{3y}\times 2^2-2^3$

$=(\boxed{3y}-2)^3$

(5) $x^3-12x^2y+48xy^2-64y^3$ $(x-4y)^3$

$x^3-12x^2y+48xy^2-64y^3$

$=x^3-3\times x^2\times 4y+3\times x\times(4y)^2-(4y)^3$

$=(x-4y)^3$

(6) $8x^3+60x^2y+150xy^2+125y^3$ $(2x+5y)^3$

$8x^3+60x^2y+150xy^2+125y^3$

$=(2x)^3+3\times(2x)^2\times 5y+3\times 2x\times(5y)^2+(5y)^3$

$=(2x+5y)^3$

007

다음 식을 인수분해하시오.

(1) a^3+27 $(a+3)(a^2-3a+9)$

(2) x^3-8 $(x-2)(x^2+2x+4)$

(3) $64x^3+1$ $(4x+1)(16x^2-4x+1)$

$64x^3+1=(\boxed{4x})^3+1^3$

$=(4x+1)\{(\boxed{4x})^2-4x\times1+1^2\}$

$=(4x+1)(\boxed{16x^2}-4x+1)$

(4) $27a^3-b^3$ $(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)$

$27a^3-b^3=(3a)^3-b^3$

$=(3a-b)\{(3a)^2+3a\times b+b^2\}$

$=(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)$

(5) $8x^3-125y^3$ $(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2)$

$8x^3-125y^3=(2x)^3-(5y)^3$

$=(2x-5y)\{(2x)^2+2x\times5y+(5y)^2\}$

$=(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2)$

(6) $27a^3+64b^3$ $(3a+4b)(9a^2-12ab+16b^2)$

$27a^3+64b^3=(3a)^3+(4b)^3$

$=(3a+4b)\{(3a)^2-3a\times4b+(4b)^2\}$

$=(3a+4b)(9a^2-12ab+16b^2)$

008

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $a^3-b^3-c^3-3abc$ $(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ca)$

$a^3-b^3-c^3-3abc$

$=a^3+(-b)^3+(-c)^3-3\times a\times(-b)\times(-c)$

$=(a-b-c)\{a^2+(-b)^2+(\boxed{-c})^2-a\times(-b)$

$-(-b)\times(-c)-(-c)\times a\}$

$=(a-b-c)(a^2+b^2+\boxed{c^2}+ab-bc+ca)$

(2) $x^3-y^3+8+6xy$ $(x-y+2)(x^2+y^2+4+xy-2x+2y)$

$x^3-y^3+8+6xy$

$=x^3+(-y)^3+2^3-3\times x\times(-y)\times2$

$=(x-y+2)\{x^2+(-y)^2+2^2-x\times(-y)-(-y)\times2-2\times x\}$

$=(x-y+2)(x^2+y^2+4+xy-2x+2y)$

(3) $27x^3+8y^3-8z^3+36xyz$ $(3x+2y-2z)(9x^2+4y^2+4z^2-6xy+4yz+6zx)$

$27x^3+8y^3-8z^3+36xyz$

$=(3x)^3+(2y)^3+(-2z)^3-3\times3x\times2y\times(-2z)$

$=(3x+2y-2z)\{(3x)^2+(2y)^2+(-2z)^2-3x\times2y-2y\times(-2z)$

$-(-2z)\times3x\}$

$=(3x+2y-2z)(9x^2+4y^2+4z^2-6xy+4yz+6zx)$

009

다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^4+16x^2+256 $(x^2+4x+16)(x^2-4x+16)$

$x^4+16x^2+256=x^4+x^2\times4^2+4^4$

$=(x^2+x\times4+4^2)(x^2-x\times4+4^2)$

$=(x^2+\boxed{4x}+16)(x^2-\boxed{4x}+16)$

(2) y^4+4y^2+16 $(y^2+2y+4)(y^2-2y+4)$

$y^4+4y^2+16=y^4+y^2\times2^2+2^4$

$=(y^2+y\times2+2^2)(y^2-y\times2+2^2)$

$=(y^2+2y+4)(y^2-2y+4)$

(3) $81a^4+9a^2b^2+b^4$ $(9a^2+3ab+b^2)(9a^2-3ab+b^2)$

$81a^4+9a^2b^2+b^4=(3a)^4+(3a)^2\times b^2+b^4$

$=\{(3a)^2+3a\times b+b^2\}\{(3a)^2-3a\times b+b^2\}$

$=(9a^2+3ab+b^2)(9a^2-3ab+b^2)$

02 치환을 이용한 인수분해

❶ 공통부분이 있는 다항식의 인수분해

① 공통부분을 X로 치환하여 인수분해한다.

② X에 원래의 공통부분을 대입하여 더 이상 인수분해할 수 없을 때까지 인수분해한다.

보기 $(x+1)^2-3(x+1)+2=X^2-3X+2=(X-1)(X-2)=x(x-1)$

└ $x+1=X$로 치환한다. └ $X=x+1$을 대입한다.

❷ x^4+ax^2+b (a, b는 상수) 꼴의 인수분해 — 치환하여 인수분해되는 경우

① $x^2=X$로 치환하여 X^2+aX+b를 인수분해한다.

② 인수분해한 식에 $X=x^2$을 대입하여 더 이상 인수분해할 수 없을 때까지 인수분해한다.

보기 $x^4+4x^2+3=X^2+4X+3=(X+1)(X+3)=(x^2+1)(x^2+3)$

└ $x^2=X$로 치환한다. └ $X=x^2$을 대입한다.

- X^2+aX+b가 인수분해되지 않는 경우는 43쪽에서 학습한다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 024쪽

010

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $(x^2-2x+4)(x^2-2x-6)+21$ $\quad(x+1)(x-3)(x-1)^2$

$$\begin{aligned}(x^2-2x+4)(x^2-2x-6)+21&=(X+4)(X-6)+21\\&=(X-3)(X+1)\\&=(x^2-2x-3)(x^2-2x+1)\\&=(x+1)(x-3)(x-1)^2\end{aligned}$$

(2) $(x^2+3x+10)(x^2+3x-1)+28$ $\quad(x^2+3x+3)(x^2+3x+6)$

$$\begin{aligned}(x^2+3x+10)(x^2+3x-1)+28&=(X+10)(X-1)+28\\&=(X+3)(X+6)\\&=(x^2+3x+3)(x^2+3x+6)\end{aligned}$$

(3) $(2x^2+2x-1)(x^2+x-1)-3$ $\quad(2x^2+2x+1)(x+2)(x-1)$

$$\begin{aligned}(2x^2+2x-1)(x^2+x-1)-3&=(2X-1)(X-1)-3\\&=(2X+1)(X-2)\\&=(2x^2+2x+1)(x^2+x-2)\\&=(2x^2+2x+1)(x+2)(x-1)\end{aligned}$$

(4) $(x^2+6x)^2-2(x^2+6x)-35$ $\quad(x+1)(x+5)(x+7)(x-1)$

$$\begin{aligned}(x^2+6x)^2-2(x^2+6x)-35&=X^2-2X-35\\&=(X+5)(X-7)\\&=(x^2+6x+5)(x^2+6x-7)\\&=(x+1)(x+5)(x+7)(x-1)\end{aligned}$$

(5) $(x^2-4x)^2-14x^2+56x+24$ $\quad(x^2-4x-2)(x+2)(x-6)$

$$\begin{aligned}(x^2-4x)^2-14x^2+56x+24&=X^2-14X+24\\&=(X-2)(X-12)\\&=(x^2-4x-2)(x^2-4x-12)\\&=(x^2-4x-2)(x+2)(x-6)\end{aligned}$$

011

다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^4-10x^2+9 $\quad(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

$$\begin{aligned}x^4-10x^2+9&=X^2-10X+9\\&=(X-1)(X-9)\\&=(x^2-1)(x^2-9)\\&=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)\end{aligned}$$

(2) x^4-21x^2-100 $\quad(x^2+4)(x+5)(x-5)$

$$\begin{aligned}x^4-21x^2-100&=X^2-21X-100\\&=(X+4)(X-25)\\&=(x^2+4)(x^2-25)\\&=(x^2+4)(x+5)(x-5)\end{aligned}$$

(3) x^4-2x^2-8 $\quad(x^2+2)(x+2)(x-2)$

$$\begin{aligned}x^4-2x^2-8&=X^2-2X-8\\&=(X+2)(X-4)\\&=(x^2+2)(x^2-4)\\&=(x^2+2)(x+2)(x-2)\end{aligned}$$

(4) x^4+5x^2+6 $\quad(x^2+2)(x^2+3)$

$$\begin{aligned}x^4+5x^2+6&=X^2+5X+6\\&=(X+2)(X+3)\\&=(x^2+2)(x^2+3)\end{aligned}$$

03 합차 공식을 이용한 인수분해

❶ 완전제곱식을 포함한 다항식의 인수분해

① 3개의 항을 묶어 완전제곱식으로 나타낼 수 있는지 확인한다.

② 3개의 항을 완전제곱식으로 나타낸 후, 남은 항을 제곱 꼴로 나타내고 $(\quad)^2-(\quad)^2$ 꼴로 변형하여 합차 공식을 이용한다.

보기 $x^2-y^2+4y-4=x^2-(y^2-4y+4)=x^2-(y-2)^2=(x+y-2)(x-y+2)$

❷ x^4+ax^2+b (a, b는 상수) 꼴의 인수분해 — 치환하여 인수분해되지 않는 경우

① $x^2=X$로 치환하여 X^2+aX+b를 인수분해할 수 없음을 확인한다.

② ax^2을 적당히 나누어 $(\quad)^2-(\quad)^2$ 꼴로 변형한 후 합차 공식을 이용한다.

보기 $x^4+2x^2+9=(x^4+6x^2+9)-4x^2=(x^2+3)^2-(2x)^2=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

- X^2+aX+b가 인수분해되는 경우는 42쪽에서 학습하였다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 025쪽

012

다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^2-y^2-2y-1 $\quad(x+y+1)(x-y-1)$

$$\begin{aligned}x^2-y^2-2y-1&=x^2-(y^2+2y+1)\\&=x^2-(y+1)^2\\&=(x+y+1)(x-y-1)\end{aligned}$$

(2) x^2-y^2+6x+9 $\quad(x+y+3)(x-y+3)$

$$\begin{aligned}x^2-y^2+6x+9&=(x^2+6x+9)-y^2\\&=(x+3)^2-y^2\\&=(x+y+3)(x-y+3)\end{aligned}$$

(3) $4x^2-y^2+10y-25$ $\quad(2x+y-5)(2x-y+5)$

$$\begin{aligned}4x^2-y^2+10y-25&=4x^2-(y^2-10y+25)\\&=(2x)^2-(y-5)^2\\&=(2x+y-5)(2x-y+5)\end{aligned}$$

(4) $16x^2+9y^2+24xy-1$ $\quad(4x+3y+1)(4x+3y-1)$

$$\begin{aligned}16x^2+9y^2+24xy-1&=(16x^2+24xy+9y^2)-1\\&=(4x+3y)^2-1^2\\&=(4x+3y+1)(4x+3y-1)\end{aligned}$$

013

다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^4-3x^2+1 $\quad(x^2+x-1)(x^2-x-1)$

$$\begin{aligned}x^4-3x^2+1&=(x^4-2x^2+1)-x^2\\&=(x^2-1)^2-x^2\\&=(x^2+x-1)(x^2-x-1)\end{aligned}$$

(2) x^4-13x^2+4 $\quad(x^2+3x-2)(x^2-3x-2)$

$$\begin{aligned}x^4-13x^2+4&=(x^4-4x^2+4)-9x^2\\&=(x^2-2)^2-(3x)^2\\&=(x^2+3x-2)(x^2-3x-2)\end{aligned}$$

(3) x^4+2x^2+9 $\quad(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

$$\begin{aligned}x^4+2x^2+9&=(x^4+6x^2+9)-4x^2\\&=(x^2+3)^2-(2x)^2\\&=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)\end{aligned}$$

(4) x^4-14x^2+25 $\quad(x^2+2x-5)(x^2-2x-5)$

$$\begin{aligned}x^4-14x^2+25&=(x^4-10x^2+25)-4x^2\\&=(x^2-5)^2-(2x)^2\\&=(x^2+2x-5)(x^2-2x-5)\end{aligned}$$

유형 실전 문제

유형 01 인수분해 – 기본

중요

① $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$
② $a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$ (복호동순)
③ $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$ (복호동순)
④ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
⑤ $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

풍쌤 Point 인수분해의 기본은 공통인수로 묶어내기. 공통인수가 있으면 먼저 묶어서 정리한다.

014

보기에서 다항식 $(a+b)(2a+b)-(3b-a)(a+b)$의 인수인 것만을 있는 대로 고르시오. ㄱ, ㅂ

보기

ㄱ. $a+b$ ㄴ. $a-b$ ㄷ. $3a+b$
ㄹ. $3a-b$ ㅁ. $3a+2b$ ㅂ. $3a-2b$

$(a+b)(2a+b)-(3b-a)(a+b)=(a+b)\{(2a+b)-(3b-a)\}$
$=(a+b)(3a-2b)$

015

다음 중 옳지 않은 것은?

① $x^2-6x+9=(x-3)^2$
② $16a^2-4=4(2a+1)(2a-1)$
[✓ ③ $4x^2+10xy+25y^2=(2x+5y)^2$]
④ $b^2-8b+12=(b-2)(b-6)$
⑤ $6a^2-ab-2b^2=(2a+b)(3a-2b)$

③ $4x^2+10xy+25y^2$은 인수분해되지 않는다.

016

다항식 $x^2+4y^2-4xy+6x-12y+9$를 인수분해하면 $(x+ay+b)^2$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 1

$x^2+4y^2-4xy+6x-12y+9$
$=x^2+(-2y)^2+3^2+2\times x\times(-2y)+2\times(-2y)\times3+2\times3\times x=(x-2y+3)^2$
따라서 $a=-2$, $b=3$이므로 $a+b=-2+3=1$

017

다음 중 다항식 $27x^3-54x^2+36x-8$의 인수인 것은?

① $3x-1$ [✓ ② $3x-2$] ③ $3x+2$
④ $9x-4$ ⑤ $9x+4$

$27x^3-54x^2+36x-8=(3x)^3-3\times(3x)^2\times2+3\times3x\times2^2-2^3$
$=(3x-2)^3$

018

다음 중 다항식 $64x^3-y^3$의 인수인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

[✓ ① $4x-y$] ② $4x+y$
③ $16x^2+y^2$ ④ $16x^2-4xy+y^2$
[✓ ⑤ $16x^2+4xy+y^2$]

$64x^3-y^3=(4x)^3-y^3$
$=(4x-y)\{(4x)^2+4x\times y+y^2\}$
$=(4x-y)(16x^2+4xy+y^2)$

019

다항식 $(2x-y)^3+125y^3$을 인수분해하면?

① $(x+2y)(2x^2-7xy+25y^2)$
② $(x+2y)(4x^2-14xy+31y^2)$
③ $2(x-2y)(4x^2+14xy+31y^2)$
④ $2(x+2y)(2x^2-7xy+25y^2)$
[✓ ⑤ $2(x+2y)(4x^2-14xy+31y^2)$]

$(2x-y)^3+125y^3=(2x-y)^3+(5y)^3$
$=\{(2x-y)+5y\}\{(2x-y)^2-(2x-y)\times5y+(5y)^2\}$
$=2(x+2y)(4x^2-14xy+31y^2)$

020

다항식 $ax^2+4y^2+bxy+2x+2y+c$가 다항식 $8x^3+8y^3+12xy-1$의 인수일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a-b+c$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 [✓ ⑤ 9]

$8x^3+8y^3+12xy-1=(2x)^3+(2y)^3+(-1)^3-3\times2x\times2y\times(-1)$
$=(2x+2y-1)(4x^2+4y^2-4xy+2x+2y+1)$
따라서 $a=4$, $b=-4$, $c=1$이므로 $a-b+c=4-(-4)+1=9$

021

다항식

$$(x+y)^2(x-y)(x^2+y^2)+(xy+y^2)(x^2y+2y^3)$$

을 인수분해하시오. $\boldsymbol{(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)}$

$(x+y)^2(x-y)(x^2+y^2)+(xy+y^2)(x^2y+2y^3)$
$=(x+y)(x^2-y^2)(x^2+y^2)+y(x+y)(x^2y+2y^3)$
$=(x+y)(x^4-y^4)+(x+y)(x^2y^2+2y^4)$
$=(x+y)(x^4+x^2y^2+y^4)$
$=(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

유형 02 인수분해 – 치환

중요★

공통부분이 있는 다항식은 다음과 같은 순서로 인수분해한다.

① 공통부분을 X로 치환한 후 인수분해한다.

② ①의 식에서 치환한 문자에 원래의 공통부분을 대입하여 더 이상 인수분해할 수 없을 때까지 인수분해한다.

풍쌤 Point $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+k$ 꼴의 인수분해는 공통부분이 생기도록 일차식을 두 개씩 묶어 전개한 후, 공통부분을 치환하여 인수분해한다.

022

다항식 $(x^2-x-2)(x^2-x-5)-4$를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2-x+c)$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

[✓ ① -2]　② -1　③ 0

④ 1　⑤ 2

$x^2-x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X-2)(X-5)-4=X^2-7X+6$

$=(X-1)(X-6)=(x^2-x-1)(x^2-x-6)$

$=(x^2-x-1)(x+2)(x-3)$

따라서 $a=2$, $b=-3$, $c=-1$ 또는 $a=-3$, $b=2$, $c=-1$이므로

$a+b+c=-2$

023

다음 중 다항식 $(x^2+6x)(x^2+6x+3)-40$의 인수인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $x-2$　② $x-4$　[✓ ③ $x+2$]

④ x^2+6x-8　[✓ ⑤ x^2+6x-5]

$x^2+6x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=X(X+3)-40=X^2+3X-40$

$=(X-5)(X+8)=(x^2+6x-5)(x^2+6x+8)$

$=(x^2+6x-5)(x+2)(x+4)$

024

다항식 $(a-b-4)(a-b+2)+5$를 인수분해하면?

① $(a-b-1)(a-b-3)$

[✓ ② $(a-b+1)(a-b-3)$]

③ $(a-b+1)(a-b+3)$

④ $(a-b+1)(a+b-3)$

⑤ $(a+b+1)(a+b-3)$

$a-b=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X-4)(X+2)+5=X^2-2X-3$

$=(X+1)(X-3)=(a-b+1)(a-b-3)$

025

다음 중 다항식 $(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24$의 인수가 아닌 것은?

① $x-2$　② $x-1$　[✓ ③ $x+1$]

④ $x+3$　⑤ $x+4$

$x^2+2x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=X^2-11X+24=(X-3)(X-8)$

$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)=(x+3)(x-1)(x+4)(x-2)$

026

다항식 $(x^2-3x)^2+9x^2-27x+20$이 x^2의 계수가 1인 두 이차식의 곱으로 인수분해될 때, 두 이차식의 합을 구하시오. $2x^2-6x+9$

$x^2-3x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=X^2+9X+20=(X+4)(X+5)$

$=(x^2-3x+4)(x^2-3x+5)$

따라서 두 이차식은 x^2-3x+4, x^2-3x+5이므로 그 합은

$(x^2-3x+4)+(x^2-3x+5)=2x^2-6x+9$

027

다항식 $(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)-14$를 인수분해하면?

[✓ ① $(x^2-2x-10)(x^2-2x-1)$]

② $(x^2-2x-10)(x-1)^2$

③ $(x^2-2x+3)(x^2-2x+8)$

④ $(x^2+2x+3)(x^2+2x+8)$

⑤ $(x^2+2x+10)(x^2+2x-1)$

$(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)-14$

$=\{(x+1)(x-3)\}\{(x+2)(x-4)\}-14$

$=(x^2-2x-3)(x^2-2x-8)-14$

$x^2-2x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X-3)(X-8)-14=X^2-11X+24-14$

$=X^2-11X+10=(X-10)(X-1)$

$=(x^2-2x-10)(x^2-2x-1)$

유형 실전 문제

정답과 풀이 026쪽

유형 03 완전제곱식을 포함한 다항식의 인수분해

완전제곱식을 포함한 다항식은 3개의 항을 묶어 완전제곱식으로 나타낸 후 합차 공식을 이용하여 인수분해한다.

풍쌤 Point 합차 공식을 이용해야 하므로 두 개의 완전제곱식이 생기도록 식을 정리한다.

028

다항식 $x^2-4xy+4y^2-64$를 인수분해하면 $(ax+by+8)(x-2y+c)$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

✓① -9 ② -6 ③ -3

④ 0 ⑤ 3

(주어진 식)$=(x^2-4xy+4y^2)-64$

$=(x-2y)^2-8^2$

$=(x-2y+8)(x-2y-8)$

따라서 $a=1$, $b=-2$, $c=-8$이므로

$a+b+c=1+(-2)+(-8)=-9$

029

보기에서 다항식 $x^2-9y^2+14x+49$의 인수인 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $x+3y+7$ ㄴ. $x+3y-7$

ㄷ. $x-3y+7$ ㄹ. $x-3y-7$

① ㄱ, ㄴ ✓② ㄱ, ㄷ ③ ㄱ, ㄹ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄷ, ㄹ

(주어진 식)$=(x^2+14x+49)-9y^2$

$=(x+7)^2-(3y)^2$

$=(x+3y+7)(x-3y+7)$

030

다항식 $4x^2-y^2+4x+4y-3$을 인수분해한 것은?

① $(2x-y-1)(2x+y+3)$

② $(2x-y+1)(2x+y-3)$

✓③ $(2x+y-1)(2x-y+3)$

④ $(2x+y+1)(2x-y-3)$

⑤ $(2x+y+1)(2x-y+3)$

(주어진 식)$=(4x^2+4x+1)-(y^2-4y+4)$

$=(2x+1)^2-(y-2)^2$

$=(2x+y-1)(2x-y+3)$

유형 04 x^4+ax^2+b 꼴의 인수분해

① $x^2=X$로 치환하여 X^2+aX+b를 인수분해한다.

② ①의 식이 인수분해되지 않으면 ax^2을 적당히 나누어 합차 공식을 이용한다.

풍쌤 Point 치환하여 인수분해되지 않는 경우는 $x^4+(a+k)x^2+b-kx^2$ 꼴에서 $x^4+(a+k)x^2+b$가 완전제곱식이 되도록 k의 값을 정한다.

031

다항식 x^4-7x^2-18이 $(x+a)(x-a)(x^2+b)$로 인수분해될 때, 양수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

5

$x^2=X$로 놓으면

(주어진 식)$=X^2-7X-18=(X+2)(X-9)$

$=(x^2+2)(x^2-9)=(x+3)(x-3)(x^2+2)$

따라서 $a=3$, $b=2$이므로 $a+b=3+2=5$

032

다항식 x^4-9x^2+16을 인수분해하면 x^2의 계수가 1인 두 이차식의 곱으로 인수분해될 때, 두 이차식의 합은?

✓① $2x^2-8$ ② $2x^2+8$

③ $2x^2-2x-8$ ④ $2x^2+2x-8$

⑤ $4x^2-16$

(주어진 식)$=(x^4-8x^2+16)-x^2=(x^2-4)^2-x^2$

$=(x^2+x-4)(x^2-x-4)$

따라서 두 이차식은 x^2+x-4, x^2-x-4이므로 그 합은

$(x^2+x-4)+(x^2-x-4)=2x^2-8$

033

다항식 x^4+4를 인수분해하면

$(x^2-2x+2)(x^2+ax+b)$

일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

✓④ 4 ⑤ 5

(주어진 식)$=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

따라서 $a=2$, $b=2$이므로 $ab=2\times2=4$

034

다음 중 다항식 x^4-20x^2+64의 인수가 아닌 것은?

① $x+2$ ② $x+4$ ③ x^2-4

✓④ x^2+4 ⑤ x^2+6x+8

$x^2=X$로 놓으면

(주어진 식)$=X^2-20X+64=(X-4)(X-16)$

$=(x^2-4)(x^2-16)=(x+2)(x-2)(x+4)(x-4)$

③ $x^2-4=(x+2)(x-2)$

⑤ $x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$

04 복잡한 식의 인수분해

❶ 문자가 여러 개인 다항식의 인수분해

① 문자의 차수가 다른 경우

차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

② 문자의 차수가 같은 경우

어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

풍쌤 Tip 어떤 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해해도 그 결과는 같지만 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 정리하는 것이 더 계산하기 쉽다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 027쪽

035

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^2+xy-3x-y+2$ $\mathbf{(x-1)(x+y-2)}$

$$\begin{aligned} x^2+xy-3x-y+2&=xy-y+x^2-3x+2\\ &=(x-1)y+(x-1)(x-2)\\ &=(x-1)(\boxed{x+y-2}) \end{aligned}$$

(2) $2a^2-ab+4a-3b-6$ $\mathbf{(a+3)(2a-b-2)}$

b에 대한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} 2a^2-ab+4a-3b-6&=-ab-3b+2a^2+4a-6\\ &=-(a+3)b+2(a+3)(a-1)\\ &=(a+3)(2a-b-2) \end{aligned}$$

(3) $x^2-xy-4x+5y-5$ $\mathbf{(x-5)(x-y+1)}$

y에 대한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} x^2-xy-4x+5y-5&=-xy+5y+x^2-4x-5\\ &=-(x-5)y+(x-5)(x+1)\\ &=(x-5)(x-y+1) \end{aligned}$$

(4) $x^2y+x^2+2xy+2x-y-1$ $\mathbf{(x^2+2x-1)(y+1)}$

y에 대한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} x^2y+x^2+2xy+2x-y-1&=x^2y+2xy-y+x^2+2x-1\\ &=(x^2+2x-1)y+(x^2+2x-1)\\ &=(x^2+2x-1)(y+1) \end{aligned}$$

(5) $2x^2y-6x^2-2xy+6x+3y-9$ $\mathbf{(2x^2-2x+3)(y-3)}$

y에 대한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} 2x^2y-6x^2-2xy+6x+3y-9&=2x^2y-2xy+3y-6x^2+6x-9\\ &=(2x^2-2x+3)y-3(2x^2-2x+3)\\ &=(2x^2-2x+3)(y-3) \end{aligned}$$

(6) $-2y^3+3xy^2-2y^2+3xy+6x-4y$ $\mathbf{(3x-2y)(y^2+y+2)}$

x에 대한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} -2y^3+3xy^2-2y^2+3xy+6x-4y&=3xy^2+3xy+6x-2y^3-2y^2-4y\\ &=3x(y^2+y+2)-2y(y^2+y+2)\\ &=(3x-2y)(y^2+y+2) \end{aligned}$$

036

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^2-y^2-3x+y+2$ $\mathbf{(x+y-2)(x-y-1)}$

x에 대한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} x^2-y^2-3x+y+2&=x^2-3x-y^2+y+2\\ &=x^2-3x-(y^2-y-2)\\ &=x^2-3x-(y-2)(y+1)\\ &=(x+y-2)(x-y-1) \end{aligned}$$

(2) $a^2-2b^2+ab-4a-11b-5$ $\mathbf{(a+2b+1)(a-b-5)}$

a에 대한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} a^2-2b^2+ab-4a-11b-5&=a^2+ab-4a-2b^2-11b-5\\ &=a^2+(ab-4a)-(2b^2+11b+5)\\ &=a^2+(b-4)a-(2b+1)(b+5)\\ &=(a+2b+1)(a-b-5) \end{aligned}$$

(3) $3x^2-2y^2+5xy-10x+8y-8$ $\mathbf{(3x-y+2)(x+2y-4)}$

x에 대한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} 3x^2-2y^2+5xy-10x+8y-8&=3x^2+5xy-10x-2y^2+8y-8\\ &=3x^2+5(y-2)x-2(y-2)^2\\ &=(3x-y+2)(x+2y-4) \end{aligned}$$

(4) $4a^2-2b^2+2ab-8a-5b+3$ $\mathbf{(2a-b-3)(2a+2b-1)}$

a에 대한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} 4a^2-2b^2+2ab-8a-5b+3&=4a^2+2ab-8a-2b^2-5b+3\\ &=4a^2+(2b-8)a-(2b-1)(b+3)\\ &=(2a-b-3)(2a+2b-1) \end{aligned}$$

(5) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

$\mathbf{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

a에 대한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)&=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2\\ &=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)\\ &=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\ &=-(a-b)(b-c)(c-a) \end{aligned}$$

(6) $a^2(b-c)+a(b^2+c^2)-bc(b-c)-2abc$

$\mathbf{-(a+b)(b-c)(c-a)}$

a에 대한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} &a^2(b-c)+a(b^2+c^2)-bc(b-c)-2abc\\ &=(b-c)a^2+(b-c)^2a-bc(b-c)\\ &=(b-c)\{a^2+(b-c)a-bc\}\\ &=-(a+b)(b-c)(c-a) \end{aligned}$$

05 인수 정리를 이용한 고차식의 인수분해

❶ 인수 정리를 이용한 고차식의 인수분해

① 다항식 $f(x)$에서 $f(a)=0$을 만족시키는 상수 a의 값을 찾는다.

② 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$를 구한 후 $f(x)=(x-a)Q(x)$로 나타낸다.

③ $Q(x)$가 더 이상 인수분해되지 않을 때까지 인수분해한다.

풍쌤 Tip $Q(x)$가 삼차 이상인 경우 조립제법을 이용하여 ①, ②의 과정을 반복한다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 027쪽

037

다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^3-x^2-4x+4 $(x-1)(x+2)(x-2)$

$f(x)=x^3-x^2-4x+4$로 놓으면
$f(1)=0$이므로
$f(x)=(x-1)(x^2-4)$
$=(x-1)(x+2)(x-2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & -4 & 4 \\ & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

(2) $x^3+3x^2-13x-15$ $(x+1)(x-3)(x+5)$

$f(x)=x^3+3x^2-13x-15$로 놓으면
$f(-1)=0$이므로
$f(x)=(x+1)(x^2+2x-15)$
$=(x+1)(x-3)(x+5)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & -13 & -15 \\ & & -1 & -2 & 15 \\ \hline & 1 & 2 & -15 & \boxed{0} \end{array}$$

(3) $x^3+4x^2-3x-18$ $(x-2)(x+3)^2$

$f(x)=x^3+4x^2-3x-18$로 놓으면
$f(2)=0$이므로
$f(x)=(x-2)(x^2+6x+9)$
$=(x-2)(x+3)^2$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 4 & -3 & -18 \\ & & 2 & 12 & 18 \\ \hline & 1 & 6 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

(4) $2x^3-8x^2+5x+1$ $(x-1)(2x^2-6x-1)$

$f(x)=2x^3-8x^2+5x+1$로 놓으면
$f(1)=0$이므로
$f(x)=(x-1)(2x^2-6x-1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -8 & 5 & 1 \\ & & 2 & -6 & -1 \\ \hline & 2 & -6 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

(5) $2x^3+3x^2+4x-3$ $(2x-1)(x^2+2x+3)$

$f(x)=2x^3+3x^2+4x-3$으로 놓으면
$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로
$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+4x+6)$
$=(2x-1)(x^2+2x+3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & 3 & 4 & -3 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 2 & 4 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

038

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^4-4x^3+3x^2+4x-4$ $(x-1)(x+1)(x-2)^2$

$f(x)=x^4-4x^3+3x^2+4x-4$로 놓으면
$f(1)=0$이므로
$f(x)=(x-1)(x^3-3x^2+4)$
$=(x-1)(x+1)(x-2)^2$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -4 & 3 & 4 & -4 \\ & & 1 & -3 & 0 & 4 \\ \hline -1 & 1 & -3 & 0 & 4 & \boxed{0} \\ & & -1 & 4 & -4 & \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} & \end{array}$$

(2) $x^4-8x^3+7x^2+36x-36$ $(x-1)(x+2)(x-3)(x-6)$

$f(x)=x^4-8x^3+7x^2+36x-36$
으로 놓으면
$f(1)=0$이므로
$f(x)=(x-1)(x^3-7x^2+36)$
$=(x-1)(x+2)(x-3)(x-6)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -8 & 7 & 36 & -36 \\ & & 1 & -7 & 0 & 36 \\ \hline -2 & 1 & -7 & 0 & 36 & \boxed{0} \\ & & -2 & 18 & -36 & \\ \hline & 1 & -9 & 18 & \boxed{0} & \end{array}$$

(3) $x^4+2x^3-2x^2-5x-2$ $(x+1)(x+2)(x^2-x-1)$

$f(x)=x^4+2x^3-2x^2-5x-2$로 놓으면
$f(-1)=0$이므로
$f(x)=(x+1)(x^3+x^2-3x-2)$
$=(x+1)(x+2)(x^2-x-1)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 2 & -2 & -5 & -2 \\ & & -1 & -1 & 3 & 2 \\ \hline -2 & 1 & 1 & -3 & -2 & \boxed{0} \\ & & -2 & 2 & 2 & \\ \hline & 1 & -1 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

(4) $x^4+6x^3-54x-81$ $(x-3)(x+3)^3$

$f(x)=x^4+6x^3-54x-81$로 놓으면
$f(3)=0$이므로
$f(x)=(x-3)(x^3+9x^2+27x+27)$
$=(x-3)(x+3)^3$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 1 & 6 & 0 & -54 & -81 \\ & & 3 & 27 & 81 & 81 \\ \hline & 1 & 9 & 27 & 27 & \boxed{0} \end{array}$$

(5) $4x^4-8x^3-7x^2+x+1$ $(2x+1)^2(x^2-3x+1)$

$f(x)=4x^4-8x^3-7x^2+x+1$
로 놓으면 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$
$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(4x^3-10x^2-2x+2)$
$=(2x+1)(2x^3-5x^2-x+1)$
$=(2x+1)^2(x^2-3x+1)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -\frac{1}{2} & 4 & -8 & -7 & 1 & 1 \\ & & -2 & 5 & 1 & -1 \\ \hline & 4 & -10 & -2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 2 & -5 & -1 & 1 \\ & & -1 & 3 & -1 \\ \hline & 2 & -6 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

유형 05 문자가 여러 개인 다항식의 인수분해

① 문자의 차수가 다르면 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

② 문자의 차수가 같으면 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

풍쌤 Point 모든 문자의 차수가 같으면 임의로 한 문자를 택하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

039

다항식 $4x^2+2xy-13x-6y+3$을 인수분해하면 $(x+a)(bx+cy+d)$일 때, $a+b+c+d$의 값을 구하시오. (단, a, b, c, d는 상수이다.) **2**

$4x^2+2xy-13x-6y+3=2xy-6y+4x^2-13x+3$
$=2(x-3)y+(x-3)(4x-1)$
$=(x-3)(4x+2y-1)$
$\therefore\ a+b+c+d=-3+4+2+(-1)=2$

040

보기에서 다항식 $x^2-2y^2+xy-4x-8y$의 인수인 것만을 있는 대로 고르시오. **ㄱ, ㄹ**

보기

ㄱ. $x+2y$ ㄴ. $x-2y$

ㄷ. $x+y+4$ ㄹ. $x-y-4$

$x^2-2y^2+xy-4x-8y=x^2+(y-4)x-(2y^2+8y)$
$=x^2+\{2y-(y+4)\}x+2y\times\{-(y+4)\}$
$=(x+2y)(x-y-4)$

041

다항식 $x^2-3y^2+2xy-2x+6y-3$이 x의 계수가 1인 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 두 일차식의 합을 구하시오. **$2x+2y-2$**

$x^2-3y^2+2xy-2x+6y-3=x^2+2(y-1)x-3(y-1)^2$
$=(x+3y-3)(x-y+1)$
따라서 두 일차식의 합은 $(x+3y-3)+(x-y+1)=2x+2y-2$

042

다음 중 다항식 $a^2b+a^2c-ab^2+ac^2-b^2c-bc^2$의 인수인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

✓① $a-b$ ② $a+b$ ③ $b-c$
✓④ $b+c$ ⑤ $c-a$

$a^2b+a^2c-ab^2+ac^2-b^2c-bc^2=(b+c)a^2-(b^2-c^2)a-bc(b+c)$
$=(b+c)a^2-(b+c)(b-c)a-bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2-(b-c)a-bc\}$
$=(b+c)(a-b)(a+c)$

유형 06 인수 정리를 이용한 고차식의 인수분해 중요

다항식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 상수 α의 값을 구한 후 인수 정리를 이용하여 인수분해한다.

풍쌤 Point α의 값을 구할 때는 다항식 $f(x)$의 상수항의 약수를 먼저 살펴본다.

043

다항식 $x^3-3x^2-10x+24$를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오. **-3**

$f(x)=x^3-3x^2-10x+24$로 놓으면 $f(2)=0$이므로
$f(x)=(x-2)(x^2-x-12)$
$=(x-2)(x+3)(x-4)$
$\therefore\ a+b+c=-2+3+(-4)=-3$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -3 & -10 & 24 \\ & & 2 & -2 & -24 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & 0 \end{array}$$

044

다항식 $x^3+ax+30$이 $(x-1)(x+b)(x+c)$로 인수분해될 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오. **-30**

$f(x)=x^3+ax+30$으로 놓으면 $f(1)=0$이므로 $1+a+30=0$ $\therefore\ a=-31$
$\therefore\ f(x)=x^3-31x+30$
$f(x)=(x-1)(x^2+x-30)$
$=(x-1)(x-5)(x+6)$
$\therefore\ a+b+c=-31+(-5)+6=-30$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -31 & 30 \\ & & 1 & 1 & -30 \\ \hline & 1 & 1 & -30 & 0 \end{array}$$

045

다음 중 다항식 $x^4-3x^3-12x^2+20x+48$의 인수가 <u>아닌</u> 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $x-4$ ② $x-3$ ✓③ $x-2$
④ $x+2$ ✓⑤ $x+3$

$f(x)=x^4-3x^3-12x^2+20x+48$로 놓으면 $f(-2)=0$이므로
$f(x)=(x+2)(x^3-5x^2-2x+24)$
$=(x+2)(x+2)(x^2-7x+12)$
$=(x+2)^2(x-3)(x-4)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & -3 & -12 & 20 & 48 \\ & & -2 & 10 & 4 & -48 \\ \hline -2 & 1 & -5 & -2 & 24 & 0 \\ & & -2 & 14 & -24 & \\ \hline & 1 & -7 & 12 & 0 & \end{array}$$

046

다항식 $f(x)=3x^4-11x^3+3x^2+11x-6$이 $3x-2$를 인수로 가질 때, $f(x)$를 인수분해하시오.

$f(x)=(3x-2)(x-1)(x+1)(x-3)$

$f(x)=\left(x-\frac{2}{3}\right)(3x^3-9x^2-3x+9)$
$=(3x-2)(x^3-3x^2-x+3)$
$=(3x-2)(x-1)(x^2-2x-3)$
$=(3x-2)(x-1)(x+1)(x-3)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{2}{3} & 3 & -11 & 3 & 11 & -6 \\ & & 2 & -6 & -2 & 6 \\ \hline & 3 & -9 & -3 & 9 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ & & 1 & -2 & -3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

유형 실전 문제

유형 07 인수분해의 활용

중요

① 식의 값을 구할 때는 곱셈 공식과 인수분해 공식을 이용하여 식을 변형한 후 주어진 값을 대입한다.
② 복잡한 수를 계산할 때는 수를 문자로 치환한 후 인수분해하여 계산한다.

풍쌤 Point 삼각형의 모양을 판단하는 문제는 세 변의 길이 a, b, c에 대한 등식에서 인수분해를 이용하여 다음과 같이 a, b, c 사이의 관계를 파악한다.

① $a=b=c$이면 정삼각형
② $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$이면 이등변삼각형
③ $c^2=a^2+b^2$이면 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

047

$a-b=3$, $ab=1$일 때, a^3-b^3의 값은?

① 12 ② 18 ③ 24
④ 30 [✓ ⑤ 36]

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$=(a-b)\{(a^2+b^2)+ab\}$
$=(a-b)\{(a-b)^2+3ab\}$
$=3\times(3^2+3\times1)=36$

048

$x=2-\sqrt{3}$, $y=2+\sqrt{3}$일 때, $x^2y-xy^2+2x-2y$의 값을 구하시오. $-6\sqrt{3}$

$x-y=(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$
$xy=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2=1$
$\therefore\ x^2y-xy^2+2x-2y=xy(x-y)+2(x-y)$
$=(x-y)(xy+2)$
$=-2\sqrt{3}\times3=-6\sqrt{3}$

049

$(19^3+3\times19^2+3\times19+1)+(19^2-9^2)$의 값은?

① 8120 ② 8200 [✓ ③ 8280]
④ 8360 ⑤ 8440

$19=x$로 놓으면
$(19^3+3\times19^2+3\times19+1)+(19^2-9^2)$
$=(x^3+3x^2+3x+1)+(x^2-9^2)$
$=(x+1)^3+(x+9)(x-9)$
$=(19+1)^3+(19+9)\times(19-9)$
$=20^3+28\times10=8280$

050

$\dfrac{11^4+11^2+1}{11^3-1}$의 값은?

① 11 [✓ ② 11.1] ③ 11.2
④ 11.3 ⑤ 11.4

$11=x$로 놓으면

$$\frac{11^4+11^2+1}{11^3-1}=\frac{x^4+x^2+1}{x^3-1}$$
$$=\frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{x^2-x+1}{x-1}$$
$$=\frac{11^2-11+1}{11-1}=11.1$$

051

$f(x)=x^3-3x-2$일 때, $f(99)$의 값을 구하시오.

970000

$f(x)=x^3-3x-2$에서 $f(-1)=0$이므로
$f(x)=(x+1)(x^2-x-2)$
$=(x+1)(x-2)(x+1)$
$=(x+1)^2(x-2)$
$\therefore\ f(99)=100^2\times97=970000$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

052

삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여

$$a^3+c^3+a^2c-ab^2+ac^2-b^2c=0$$

이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $a=b$인 이등변삼각형
③ $c=a$인 이등변삼각형
④ 빗변의 길이가 a인 직각삼각형
[✓ ⑤ 빗변의 길이가 b인 직각삼각형]

좌변을 b에 대하여 내림차순으로 정리하면
$a^3+c^3+a^2c-ab^2+ac^2-b^2c$
$=-(a+c)b^2+a^3+a^2c+ac^2+c^3$
$=-(a+c)b^2+a^2(a+c)+c^2(a+c)$
$=(a+c)(a^2-b^2+c^2)$
이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a+c>0$
즉, $a^2-b^2+c^2=0$이므로 $b^2=a^2+c^2$
따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.

중단원 점검 문제

01

다음 중 옳지 않은 것은?

① $a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca=(a-b+2c)^2$

② $x^3-9x^2+27x-27=(x-3)^3$

③ $64a^3+8b^3=8(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$

✓④ $x^3-27y^3-9xy-1$
$=(x-3y+1)(x^2+9y^2+3xy+x-3y+1)$

⑤ $16x^4+36x^2y^2+81y^4$
$=(4x^2+6xy+9y^2)(4x^2-6xy+9y^2)$

④ $x^3-27y^3-9xy-1$
$=x^3-27y^3-1-9xy$
$=x^3+(-3y)^3+(-1)^3-3\times x\times(-3y)\times(-1)$
$=(x-3y-1)(x^2+9y^2+1+3xy-3y+x)$

02 학교 시험 기출

다항식 x^4+2x^3-x-2를 인수분해하시오.

$\mathbf{(x+2)(x-1)(x^2+x+1)}$

$x^4+2x^3-x-2=x^3(x+2)-(x+2)$
$=(x+2)(x^3-1)$
$=(x+2)(x-1)(x^2+x+1)$

03

부피가 $8a^3-60a^2+150a-125$인 정육면체의 한 모서리의 길이는? (단, $a>5$)

① $a-5$　② $2a-3$　✓③ $2a-5$
④ $2a+3$　⑤ $2a+5$

$8a^3-60a^2+150a-125$
$=(2a)^3-3\times(2a)^2\times5+3\times2a\times5^2-5^3$
$=(2a-5)^3$
따라서 정육면체의 한 모서리의 길이는 $2a-5$이다.

04

다항식 $x^8+16x^4y^2+256y^4$을 인수분해한 것은?

① $(x^2+4xy+16y^2)(x^2-4xy+16y^2)$

② $(x^2+4x^2y+16y^2)(x^2-4x^2y+16y^2)$

③ $(x^4+4xy+16y^2)(x^4-4xy+16y^2)$

✓④ $(x^4+4x^2y+16y^2)(x^4-4x^2y+16y^2)$

⑤ $(x^4+4x^2y^2+16y^2)(x^4-4x^2y^2+16y^2)$

$x^8+16x^4y^2+256y^4$
$=(x^2)^4+(x^2)^2\times(4y)^2+(4y)^4$
$=\{(x^2)^2+x^2\times4y+(4y)^2\}\{(x^2)^2-x^2\times4y+(4y)^2\}$
$=(x^4+4x^2y+16y^2)(x^4-4x^2y+16y^2)$

05 교육청 기출

다항식 $(x^2+x)(x^2+x+1)-6$이 $(x+2)(x-1)(x^2+ax+b)$로 인수분해될 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
✓④ 4　⑤ 5

$x^2+x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=X(X+1)-6$
$=X^2+X-6$
$=(X+3)(X-2)$
$=(x^2+x+3)(x^2+x-2)$
$=(x+2)(x-1)(x^2+x+3)$
따라서 $a=1$, $b=3$이므로 $a+b=1+3=4$

06

다항식 $(x^2-3x)^2-2x^2+6x-8$이 x의 계수가 1인 네 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 네 일차식의 합을 구하시오.　$\mathbf{4x-6}$

$x^2-3x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=X^2-2X-8$
$=(X-4)(X+2)$
$=(x^2-3x-4)(x^2-3x+2)$
$=(x+1)(x-4)(x-1)(x-2)$
따라서 네 일차식은 $x+1$, $x-4$, $x-1$, $x-2$이므로 그 합은
$(x+1)+(x-4)+(x-1)+(x-2)=4x-6$

07 실전 Plus

다항식 $x(x+4)(x-2)(x-6)+k$가 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해될 때, 상수 k의 값은?

① 100　② 121　✓③ 144
④ 169　⑤ 196

$x(x+4)(x-2)(x-6)+k=\{x(x-2)\}\{(x+4)(x-6)\}+k$
$=(x^2-2x)(x^2-2x-24)+k$
$x^2-2x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=X(X-24)+k=X^2-24X+k$
이 식이 완전제곱식이 되려면
$k=\left(-\frac{24}{2}\right)^2=144$

08

다음 중 다항식 $4x^2+49y^2+28xy-9$의 인수인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $2x-7y-3$　② $2x-7y+3$
③ $2x+7y$　✓④ $2x+7y-3$
✓⑤ $2x+7y+3$

$4x^2+49y^2+28xy-9=(4x^2+28xy+49y^2)-9$
$=(2x+7y)^2-3^2$
$=(2x+7y+3)(2x+7y-3)$

중단원 점검 문제

정답과 풀이 031쪽

09

다항식 $81a^4+4b^4$을 인수분해하면 $(9a^2+pab+qb^2)(9a^2-pab+qb^2)$일 때, 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오. 8

$$81a^4+4b^4=81a^4+36a^2b^2+4b^4-36a^2b^2$$
$$=(9a^2+2b^2)^2-(6ab)^2$$
$$=(9a^2+6ab+2b^2)(9a^2-6ab+2b^2)$$

따라서 $p=6$, $q=2$이므로 $p+q=6+2=8$

10

보기에서 다항식 $x^3+x^2y-x^2z+2y^2+2xy-2yz$의 인수인 것만을 있는 대로 고르시오. ㄴ, ㄷ

보기

ㄱ. $x+y+z$　　ㄴ. $x+y-z$

ㄷ. x^2+2y　　ㄹ. $2x^2+y$

z에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^3+x^2y-x^2z+2y^2+2xy-2yz=(-x^2z-2yz)+(x^3+2xy)+(x^2y+2y^2)$$
$$=-(x^2+2y)z+(x^2+2y)x+(x^2+2y)y$$
$$=(x^2+2y)(x+y-z)$$

11

다항식 $2x^4+5x^3-2x^2+x-6$을 인수분해하면?

① $(x-1)(x-3)(2x^2+x+2)$

② $(x-1)(x+3)(2x^2-x-2)$

✓③ $(x-1)(x+3)(2x^2+x+2)$

④ $(x+1)(x-3)(2x^2+x+2)$

⑤ $(2x-1)(x+3)(x^2+x+1)$

$f(x)=2x^4+5x^3-2x^2+x-6$으로 놓으면 $f(1)=0$, $f(-3)=0$이므로 오른쪽 조립제법에서

$f(x)=(x-1)(x+3)(2x^2+x+2)$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 2 & 5 & -2 & 1 & -6 \\
 & & 2 & 7 & 5 & 6 \\
\hline
-3 & 2 & 7 & 5 & 6 & \boxed{0} \\
 & & -6 & -3 & -6 & \\
\hline
 & 2 & 1 & 2 & \boxed{0} &
\end{array}$$

12

다항식 $f(x)=x^4+3x^3-4x^2+kx-4$가 $x+1$을 인수로 가질 때, 상수 k의 값을 구하고 $f(x)$를 인수분해하시오. $\boldsymbol{k=-10, f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+4x+2)}$

$f(x)$가 $x+1$을 인수로 가지므로

$f(-1)=0$에서 $1-3-4-k-4=0$

$\therefore k=-10$

$$\therefore f(x)=(x+1)(x^3+2x^2-6x-4)$$
$$=(x+1)(x-2)(x^2+4x+2)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & 3 & -4 & -10 & -4 \\
 & & -1 & -2 & 6 & 4 \\
\hline
2 & 1 & 2 & -6 & -4 & \boxed{0} \\
 & & 2 & 8 & 4 & \\
\hline
 & 1 & 4 & 2 & \boxed{0} &
\end{array}$$

13

$x+y=5$, $xy=3$일 때, $x^4+x^2y^2+y^4$의 값은?

① 330　② 338　③ 344

✓④ 352　⑤ 360

$$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$
$$=\{(x^2+2xy+y^2)-xy\}\{(x^2+2xy+y^2)-3xy\}$$
$$=\{(x+y)^2-xy\}\{(x+y)^2-3xy\}$$
$$=(5^2-3)\times(5^2-3\times3)=352$$

14 교육청 기출

$\dfrac{2026^3+1}{2025^2+2026}$의 값은?

① 2024　② 2025　③ 2026

✓④ 2027　⑤ 2028

$2026=x$로 놓으면

$$\frac{2026^3+1}{2025^2+2026}=\frac{x^3+1}{(x-1)^2+x}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$=x+1=2026+1=2027$$

15 실전 Plus

$\sqrt{14\times16\times18\times20+16}$의 값은?

✓① 284　② 294　③ 304

④ 314　⑤ 324

$15=x$, $x^2+4x=X$로 놓으면

$$14\times16\times18\times20+16=\{(x+1)(x+3)\}\{(x+5)(x-1)\}+16$$
$$=(x^2+4x+3)(x^2+4x-5)+16$$
$$=(X+3)(X-5)+16=X^2-2X+1=(X-1)^2$$
$$=(x^2+4x-1)^2=(15^2+4\times15-1)^2=284^2$$

$\therefore \sqrt{14\times16\times18\times20}=284$

16

삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a=b$인 이등변삼각형

② $b=c$인 이등변삼각형

✓③ 정삼각형

④ 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

⑤ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

$\therefore \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

이때 $a+b+c>0$이므로 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$에서

$a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$　$\therefore a=b=c$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 정삼각형이다.

Ⅱ

방정식과 부등식

숨어 있는 해를 찾아라.

이 단원에서는 ‘문제 해결의 기술’을 배운다. 수학적으로 사고하는 방법을 익히는 시작점. 처음에는 복잡해 보여도 하다 보면 금방 감이 온다. 계산도 중요하지만 해석이 더 중요하다. 조건을 보고 식을 세우고, 그 안에 숨은 의미를 꿰뚫는 내공. 이 내공을 단련하는 것이 이 단원의 목표다.

미리보는 Ⅱ 방정식과 부등식

01 복소수

본문 056~069쪽

유형❶ 복소수의 뜻
유형❷ 복소수가 서로 같을 조건
유형❸ 복소수의 사칙연산
유형❹ 복소수가 실수 또는 순허수가 될 조건
유형❺ 복소수가 주어질 때의 식의 값
유형❻ 켤레복소수의 계산
유형❼ 켤레복소수의 성질을 이용한 식의 값
유형❽ 등식을 만족시키는 복소수
유형❾ 음수의 제곱근
유형❿ i의 거듭제곱

복소수

$\boxed{\text{허수단위 } i}$ ➡ $i^2=-1$, $i=\sqrt{-1}$

① 복소수

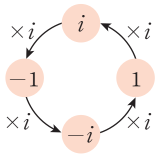
$\underbrace{1}_{\text{실수 부분}}+\underbrace{2i}_{\text{허수 부분}}$

② 켤레복소수

$\overline{3+2i}=3-2i$

③ i의 거듭제곱

i, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$,
$i^5=i$, $i^6=-1$, $i^7=-i$, $i^8=1$,
…



02 이차방정식

본문 070~083쪽

유형❶ 이차방정식의 풀이
유형❷ 이차방정식의 근의 판별
유형❸ 이차식이 완전제곱식이 될 조건
유형❹ 이차방정식의 근과 계수의 관계
유형❺ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한 식의 값
유형❻ 두 근에 대한 조건이 주어진 이차방정식
유형❼ 두 수를 근으로 하는 이차방정식
유형❽ 이차식의 인수분해
유형❾ 이차방정식의 켤레근

이차방정식의 근의 판별

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$에 대하여

① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 실근
② $D=0$ ➡ 중근
실근
③ $D<0$ ➡ 서로 다른 두 허근 — 허근

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

03 이차방정식과 이차함수

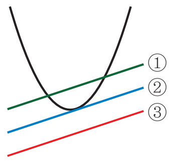
본문 084~098쪽

유형❶ 이차함수의 그래프와 x축의 교점
유형❷ 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계
유형❸ 이차함수의 그래프와 직선의 교점
유형❹ 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계
유형❺ 이차함수의 최대·최소
유형❻ 제한된 범위에서의 이차함수의 최대·최소
유형❼ 이차함수의 최대·최소의 활용

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수의 식과 직선의 방정식을 연립한 이차방정식의 판별식 D에 대하여

① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $D=0$ ➡ 한점에서 만난다.(접한다.)
③ $D<0$ ➡ 만나지 않는다.



04 여러 가지 방정식

본문 099~118쪽

- 유형 ① 삼차방정식과 사차방정식의 풀이
- 유형 ② 공통부분이 있는 사차방정식
- 유형 ③ $x^4+ax^2+b=0$ 꼴의 방정식
- 유형 ④ 좌우 대칭 꼴의 방정식
- 유형 ⑤ 근이 주어진 삼·사차방정식
- 유형 ⑥ 근에 대한 조건이 주어진 삼차방정식
- 유형 ⑦ 삼차방정식의 근과 계수의 관계
- 유형 ⑧ 세 수를 근으로 하는 삼차방정식
- 유형 ⑨ 삼차방정식의 켤레근
- 유형 ⑩ 방정식 $x^3=\pm1$의 허근
- 유형 ⑪ 연립이차방정식(1)
- 유형 ⑫ 연립이차방정식(2)
- 유형 ⑬ 대칭식으로 이루어진 연립이차방정식
- 유형 ⑭ 부정방정식

삼차방정식과 사차방정식의 풀이

➡ $\boxed{\text{인수 정리}}$와 $\boxed{\text{조립제법}}$을 이용하여 인수분해한다.

➡ 공통부분이 있으면 하나의 문자로 $\boxed{\text{치환}}$한다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

연립이차방정식

① $\begin{cases}(\text{일차식})=0\\(\text{이차식})=0\end{cases}$	일차방정식을 이차방정식에 대입하여 푼다.
② $\begin{cases}(\text{이차식})=0\\(\text{이차식})=0\end{cases}$	인수분해를 이용하여 ①의 꼴로 변형한 후 푼다.

05 일차부등식과 연립일차부등식

본문 119~127쪽

- 유형 ① 연립일차부등식
- 유형 ② $A<B<C$ 꼴의 부등식
- 유형 ③ 해가 주어진 연립일차부등식
- 유형 ④ 해의 조건이 주어진 연립일차부등식
- 유형 ⑤ 절댓값 기호를 포함한 일차부등식

연립일차부등식의 풀이

각 부등식의 해를 구한 후 수직선 위에 나타내어 $\boxed{\text{공통부분}}$을 찾는다.

절댓값 기호를 포함한 일차부등식

$a>0$일 때 ➡ $|x|<a$이면 $-a<x<a$

➡ $|x|>a$이면 $x<-a$ 또는 $x>a$

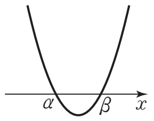
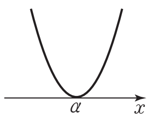
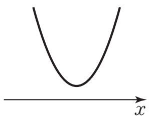
06 이차부등식과 연립이차부등식

본문 128~142쪽

- 유형 ① 이차부등식의 풀이
- 유형 ② 해가 주어진 이차부등식
- 유형 ③ 정수해의 조건이 주어진 이차부등식
- 유형 ④ 근의 조건이 주어진 이차부등식
- 유형 ⑤ 이차부등식과 두 그래프의 위치관계
- 유형 ⑥ 제한된 범위에서 항상 성립하는 이차부등식
- 유형 ⑦ 연립이차부등식
- 유형 ⑧ 해가 주어진 연립이차부등식
- 유형 ⑨ 절댓값 기호를 포함한 이차부등식

이차함수의 그래프와 이차부등식의 해

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 판별식을 D, 두 실근을 α, β $(\alpha\le\beta)$라 할 때, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 이차부등식 $\boxed{ax^2+bx+c>0}$의 해는 다음과 같다.

판별식 D	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$의 그래프			
$ax^2+bx+c>0$의 해	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\ne\alpha$인 모든 실수	모든 실수

01 복소수

❶ 허수단위

제곱하여 -1이 되는 수를 i라 하고, 이를 허수단위라 한다. 즉,

$i^2=-1$, $i=\sqrt{-1}$

❷ 복소수

두 실수 a, b에 대하여 $a+bi$ 꼴로 나타내는 수를 복소수라 하고, a를 실수부분, b를 허수부분이라 한다.

❸ 허수

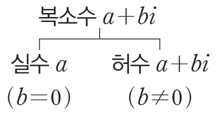
실수가 아닌 복소수 $a+bi$ $(b\neq0)$를 허수라 한다.

참고 ① 실수 a는 $a=a+0i$로 나타낼 수 있으므로 실수도 복소수이다.
② 실수부분이 0인 허수 bi $(b\neq0)$를 순허수라 한다.

보기 $2-i$의 실수부분은 2, 허수부분은 -1이다.

- **복소수의 분류**

실수 a, b에 대하여



개념 기본 문제

정답과 풀이 033쪽

001

다음 복소수의 실수부분과 허수부분을 구하시오.

(1) $3+i$ 실수부분: 3, 허수부분: 1

(2) $7i-2$ 실수부분: -2, 허수부분: 7

(3) $-3i$ 실수부분: 0, 허수부분: -3

(4) 15 실수부분: 15, 허수부분: 0

002

다음 복소수의 실수부분과 허수부분을 구하시오.

(1) $\sqrt{2}+2i$ 실수부분: $\sqrt{2}$, 허수부분: 2

(2) $\sqrt{10}i-5$ 실수부분: -5, 허수부분: $\sqrt{10}$

(3) i^2 실수부분: -1, 허수부분: 0

(4) $\dfrac{1+3i}{3}$ 실수부분: $\dfrac{1}{3}$, 허수부분: 1

003

다음 수가 실수이면 '실수'를, 허수이면 '허수'를 (　　) 안에 써넣으시오.

(1) $\sqrt{5}+1$ (실수)

(2) $1-\sqrt{2}i$ (허수)

(3) $-1+i^2$ (실수)

(4) $\dfrac{\sqrt{3}i+\sqrt{6}}{2}$ (허수)

004

보기에서 다음 수를 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $-8-7i$　　ㄴ. $3i$　　ㄷ. π
ㄹ. $4-i^2$　　ㅁ. $\sqrt{(-1)^2}$　　ㅂ. $\sqrt{-1}$

(1) 실수 ㄷ, ㄹ, ㅁ

(2) 허수 ㄱ, ㄴ, ㅂ

(3) 순허수 ㄴ, ㅂ

02 복소수가 서로 같을 조건과 켤레복소수

❶ 복소수가 서로 같을 조건

두 복소수 $a+bi$, $c+di$ (a, b, c, d는 실수)에 대하여

① $a+bi=c+di$이면 $a=c$, $b=d$이다.

② $a+bi=0$이면 $a=0$, $b=0$이다.

보기 a, b가 실수일 때, $a+bi=1-5i$이면 $a=1$, $b=-5$

❷ 켤레복소수

복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 허수부분의 부호를 바꾼 복소수 $a-bi$를 $a+bi$의 켤레복소수라 하고, 기호 $\overline{a+bi}$로 나타낸다. 즉,

$$\overline{a+bi}=a-bi$$

참고 a, b가 실수일 때, $\overline{a-bi}=a+bi$이므로 두 복소수 $a+bi$와 $a-bi$는 서로 켤레복소수이다.

보기 $\overline{-4+i}=-4-i$

개념 기본 문제

정답과 풀이 033쪽

005

다음 등식을 만족시키는 실수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $a+bi=6+4i$ $a=6$, $b=4$

(2) $8i-2=a+bi$ $a=-2$, $b=8$

(3) $a+bi=-5$ $a=-5$, $b=0$

(4) $3+bi=a-i$ $a=3$, $b=-1$

006

다음 등식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오.

(1) $(x+2)+(y-3)i=3-4i$ $x=1$, $y=-1$

$x+2=3$, $y-3=-4$이므로 $x=1$, $y=-1$

(2) $(3x+4)+(-y-2)i=2i-5$ $x=-3$, $y=-4$

$3x+4=-5$, $-y-2=2$이므로 $x=-3$, $y=-4$

(3) $(x+y)+(2x-y)i=7-i$ $x=2$, $y=5$

$x+y=7$, $2x-y=-1$이므로 두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=5$

(4) $(x+2y+1)+i=2+(3x+3y-5)i$ $x=3$, $y=-1$

$x+2y+1=2$, $3x+3y-5=1$이므로 두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=-1$

007

다음 복소수의 켤레복소수를 구하시오.

(1) $2+i$ $2-i$

(2) $3i-3$ $-3i-3$

(3) $\sqrt{3}-4$ $\sqrt{3}-4$

(4) $2i$ $-2i$

008

다음 등식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오.

(1) $\overline{x+yi}=10+20i$ $x=10$, $y=-20$

$\overline{x+yi}=x-yi=10+20i$ $\therefore x=10$, $y=-20$

(2) $\overline{x-yi}=-1-6i$ $x=-1$, $y=-6$

$\overline{x-yi}=x+yi=-1-6i$ $\therefore x=-1$, $y=-6$

(3) $x-3i=\overline{-2+yi}$ $x=-2$, $y=3$

$x-3i=\overline{-2+yi}=-2-yi$ $\therefore x=-2$, $y=3$

(4) $(y-x)+11i=\overline{4+(x-2y)i}$ $x=3$, $y=7$

$(y-x)+11i=\overline{4+(x-2y)i}=4-(x-2y)i$

$y-x=4$, $x-2y=-11$이므로 두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=7$

유형 실전 문제

정답과 풀이 034쪽

유형 01 복소수의 뜻

복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)에서 a는 실수부분, b는 허수부분이다.

풍쌤 Point

$$\text{복소수 } a+bi \begin{cases} \text{실수 } a & (b=0) \\ \text{허수} \begin{cases} \text{순허수 } bi & (a=0,\ b\neq 0) \\ \text{순허수가 아닌 허수 } a+bi & (a\neq 0,\ b\neq 0) \end{cases} \end{cases}$$

009

다음 중 옳은 것은?

① $7-8i$에서 허수부분은 8이다.

② $\dfrac{4+2i}{8}$에서 실수부분은 4이다.

③ 0은 복소수가 아니다.

④ $-2i$의 실수부분은 0, 허수부분은 $-2i$이다.

✓⑤ $\sqrt{5}i$는 복소수이다.

① $7-8i$에서 허수부분은 -8이다.
② $\frac{4+2i}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i$에서 실수부분은 $\frac{1}{2}$이다.
③ 0은 복소수이다.
④ $-2i$의 실수부분은 0, 허수부분은 -2이다.

010

오른쪽과 같이 복소수를 실수와 실수가 아닌 복소수 ㈎로 분류할 때, 다음 복소수 중에서 ㈎에 해당하는 수의 개수를 구하시오. 2

$$\text{복소수} \begin{cases} \text{실수} \\ \boxed{\text{㈎}} \end{cases}$$

5	0	i	$-i^2$	$1+i$

㈎에 해당하는 수는 허수이다.
5, 0, $-i^2=-(-1)=1$은 실수, i, $1+i$는 허수이므로 ㈎에 해당하는 수의 개수는 2이다.

011

$\sqrt{5}(1-\sqrt{5}i)$의 허수부분을 a, $\dfrac{2+3i}{4}$의 실수부분을 b라 할 때, $a+2b$의 값은?

① -6 ✓② -4 ③ -2
④ 0 ⑤ 2

$\sqrt{5}(1-\sqrt{5}i)=\sqrt{5}-5i$의 허수부분은 -5이므로 $a=-5$
$\frac{2+3i}{4}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i$의 실수부분은 $\frac{1}{2}$이므로 $b=\frac{1}{2}$
$\therefore a+2b=-5+2\times\frac{1}{2}=-4$

유형 02 복소수가 서로 같을 조건

중요★

두 복소수에서 실수부분과 허수부분이 각각 서로 같을 때, 두 복소수는 서로 같다고 한다.

풍쌤 Point 반드시 실수부분이 앞에, 허수부분이 뒤에 주어지지는 않으므로 실수부분과 허수부분을 정확히 구분하여 파악한다.

012

등식 $(x+3)+(x-2y+9)i=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?

① -2 ② -1 ✓③ 0
④ 1 ⑤ 2

$(x+3)+(x-2y+9)i=0$에서 $x+3=0$, $x-2y+9=0$
$x+3=0$에서 $x=-3$
$x-2y+9=0$에 $x=-3$을 대입하면 $-2y+6=0$
$\therefore y=3$
$\therefore x+y=-3+3=0$

013

등식 $\overline{(3x-y+2)+(-x+y+4)i}=3-7i$를 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오. $x=2$, $y=5$

$(3x-y+2)-(-x+y+4)i=3-7i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$3x-y+2=3$에서 $3x-y=1$ …… ㉠
$-x+y+4=7$에서 $x-y=-3$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$x=2$, $y=5$

014

등식 $(2-i)x+(i-3)y=5i-11$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?

✓① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

$(2x-3y)+(y-x)i=-11+5i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$2x-3y=-11$, $y-x=5$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=-4$, $y=1$
$\therefore x+y=-4+1=-3$

03 복소수의 사칙연산

❶ 복소수의 덧셈과 뺄셈

a, b, c, d가 실수일 때,

① 덧셈: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

② 뺄셈: $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

풍쌤 Tip 복소수의 덧셈과 뺄셈은 허수단위 i를 문자처럼 생각하여 다항식의 덧셈과 뺄셈에서와 같은 방법으로 계산한다.

❷ 복소수의 곱셈

a, b, c, d가 실수일 때,

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

❸ 복소수의 나눗셈

a, b, c, d가 실수이고 $c+di\neq 0$일 때,

$$\frac{a+bi}{c+di}=\underbrace{\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}}_{\text{분모의 켤레복소수를 분자, 분모에 곱한다.}}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

풍쌤 Tip 복소수의 나눗셈은 무리수에서 분모를 유리화하는 것과 같은 방법으로 계산한다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 034쪽

015

다음을 계산하시오.

(1) $(3+2i)+(1+i)$ $4+3i$

(2) $(6-5i)+(-2+4i)$ $4-i$

(3) $(8i-1)+(3i+7)$ $6+11i$

(4) $(-9-11i)+(-4i-5)$ $-14-15i$

(5) $-6+(2i-7)$ $-13+2i$

(6) $12i+(3-9i)$ $3+3i$

016

다음을 계산하시오.

(1) $(5+2i)-(6-3i)$ $-1+5i$

(2) $(-3+i)-(-1+7i)$ $-2-6i$

(3) $(6i+4)-(2i-1)$ $5+4i$

(4) $(-7-8i)-(-3i-10)$ $3-5i$

(5) $-i-(-10+10i)$ $10-11i$

(6) $(\sqrt{2}i-1)-(-4+2\sqrt{2}i)$ $3-\sqrt{2}i$

개념 기본 문제

정답과 풀이 035쪽

017

다음을 계산하시오.

(1) $(1+i)(2+i)$ $\mathbf{1+3i}$

$(1+i)(2+i)=2+i+2i+i^2=1+3i$

(2) $(2+2i)(5-3i)$ $\mathbf{16+4i}$

$(2+2i)(5-3i)=10-6i+10i-6i^2=16+4i$

(3) $(4-i)(3-7i)$ $\mathbf{5-31i}$

$(4-i)(3-7i)=12-28i-3i+7i^2=5-31i$

(4) $(i-1)^2$ $\mathbf{-2i}$

$(i-1)^2=(-1+i)(-1+i)=1-i-i+i^2=-2i$

(5) $(2-i)(2+i)$ $\mathbf{5}$

$(2-i)(2+i)=4+2i-2i-i^2=5$

(6) $(6-5i)(-6-5i)$ $\mathbf{-61}$

$(6-5i)(-6-5i)=-36-30i+30i+25i^2=-61$

018

다음을 $a+bi$ (a, b는 실수) 꼴로 나타내시오.

(1) $\dfrac{2}{1+i}$ $\mathbf{1-i}$

$\dfrac{2}{1+i}=\dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2(1-i)}{2}=1-i$

(2) $\dfrac{5}{4-3i}$ $\mathbf{\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i}$

$\dfrac{5}{4-3i}=\dfrac{5(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\dfrac{5(4+3i)}{25}=\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$

(3) $\dfrac{i}{2+2i}$ $\mathbf{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i}$

$\dfrac{i}{2+2i}=\dfrac{i(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}=\dfrac{2i+2}{8}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}i$

(4) $\dfrac{10i}{1-2i}$ $\mathbf{-4+2i}$

$\dfrac{10i}{1-2i}=\dfrac{10i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\dfrac{-20+10i}{5}=-4+2i$

(5) $\dfrac{5-3i}{2i+4}$ $\mathbf{\frac{7}{10}-\frac{11}{10}i}$

$\dfrac{5-3i}{2i+4}=\dfrac{(5-3i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}=\dfrac{14-22i}{20}=\dfrac{7}{10}-\dfrac{11}{10}i$

(6) $\dfrac{2+\sqrt{2}i}{2-\sqrt{2}i}$ $\mathbf{\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}i}$

$\dfrac{2+\sqrt{2}i}{2-\sqrt{2}i}=\dfrac{(2+\sqrt{2}i)^2}{(2-\sqrt{2}i)(2+\sqrt{2}i)}=\dfrac{2+4\sqrt{2}i}{6}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i$

019

두 복소수 $z_1=1-i$, $z_2=3+2i$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) z_1+z_2 $\mathbf{4+i}$

$z_1+z_2=(1-i)+(3+2i)=4+i$

(2) z_1z_2 $\mathbf{5-i}$

$z_1z_2=(1-i)(3+2i)=3+2i-3i-2i^2=5-i$

(3) $\dfrac{z_1}{z_2}$ $\mathbf{\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i}$

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{1-i}{3+2i}=\dfrac{(1-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{(3-2)+(-2-3)i}{3^2-(2i)^2}=\dfrac{1}{13}-\dfrac{5}{13}i$

(4) $\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}$ $\mathbf{\frac{19}{26}+\frac{9}{26}i}$

$\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{z_1+z_2}{z_1z_2}=\dfrac{4+i}{5-i}=\dfrac{(4+i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}$

$=\dfrac{(20-1)+(4+5)i}{5^2-i^2}=\dfrac{19}{26}+\dfrac{9}{26}i$

020

다음 등식을 만족시키는 실수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $(5+3i)(a-2i)=41+bi$ $\mathbf{a=7,\ b=11}$

단계1. 등식의 좌변을 간단히 하기

$(5+3i)(a-2i)=5a-10i+3ai-6i^2$

$=(5a+6)+(3a-10)i$

단계2. 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 a, b의 값 구하기

$(5a+6)+(3a-10)i=41+bi$에서

$5a+6=41$, $3a-10=b$

$\therefore a=7$, $b=11$

(2) $\dfrac{a+5i}{i}=b-4i$ $\mathbf{a=4,\ b=5}$

$\dfrac{a+5i}{i}=\dfrac{(a+5i)i}{i^2}=\dfrac{ai-5}{-1}=5-ai$

$5-ai=b-4i$에서 $a=4$, $b=5$

(3) $\dfrac{a}{1+i}+\dfrac{b}{1-i}=5+i$ $\mathbf{a=4,\ b=6}$

$\dfrac{a}{1+i}+\dfrac{b}{1-i}=\dfrac{a(1-i)}{(1+i)(1-i)}+\dfrac{b(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{-a+b}{2}i$

$\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{-a+b}{2}i=5+i$에서 $\dfrac{a+b}{2}=5$, $\dfrac{-a+b}{2}=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=6$

04 켤레복소수의 성질

❶ 켤레복소수의 성질 (1)

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)의 켤레복소수를 $\bar{z}$라 하면

① $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ ← 실수

② $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$ ← 순허수

③ $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ ← 실수

❷ 켤레복소수의 성질 (2)

두 복소수 z_1, z_2의 켤레복소수를 각각 $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$라 하면

① $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

② $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq0$)

- 복소수 z와 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여
① $\overline{(\bar{z})}=z$
② z가 실수이면 $z=\bar{z}$
③ z가 순허수이면 $z=-\bar{z}$

- 복소수와 그 켤레복소수의 합과 곱은 항상 실수이다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 036쪽

021

복소수 $z=4-2i$에 대하여 다음을 구하시오.

(단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

(1) $\bar{z}$ $4+2i$

(2) $z+\bar{z}$ 8

(3) $z\bar{z}$ 20

022

복소수 $z=-1+5i$에 대하여 다음을 구하시오.

(단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

(1) $\bar{z}$ $-1-5i$

(2) $z+\bar{z}$ -2

(3) $z\bar{z}$ 26

023

두 복소수 $z_1=1+3i$, $z_2=2-i$에 대하여 다음을 구하시오.

(단, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$는 각각 z_1, z_2의 켤레복소수이다.)

(1) $\overline{z_1+z_2}$ $3-2i$

(2) $\overline{z_1}+\overline{z_2}$ $3-2i$

(3) $\overline{z_1z_2}$ $5-5i$

(4) $\overline{z_1}\times\overline{z_2}$ $5-5i$

024

두 복소수 $\alpha=2i-3$, $\beta=5-4i$에 대하여 다음을 구하시오.

(단, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

(1) $\bar{\alpha}+\bar{\beta}$ $2+2i$

$\alpha+\beta=2-2i$이므로 $\bar{\alpha}+\bar{\beta}=\overline{\alpha+\beta}=\overline{2-2i}=2+2i$

(2) $\bar{\alpha}-\bar{\beta}$ $-8-6i$

$\alpha-\beta=-8+6i$이므로 $\bar{\alpha}-\bar{\beta}=\overline{\alpha-\beta}=\overline{-8+6i}=-8-6i$

(3) $\alpha\bar{\alpha}+\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}$ 8

$$\alpha\bar{\alpha}+\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}=\alpha(\bar{\alpha}+\bar{\beta})+\beta(\bar{\alpha}+\bar{\beta})=(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$$
$$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})=(2-2i)(2+2i)=8$$

(4) $\alpha\bar{\alpha}-\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta}$ 100

$$\alpha\bar{\alpha}-\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta}=\bar{\alpha}(\alpha-\beta)-\bar{\beta}(\alpha-\beta)=(\bar{\alpha}-\bar{\beta})(\alpha-\beta)$$
$$=(\overline{\alpha-\beta})(\alpha-\beta)=(-8-6i)(-8+6i)=100$$

유형 실전 문제

유형 03 복소수의 사칙연산

복소수의 사칙연산은 허수단위 i를 문자처럼 생각하여 계산한다.

풍쌤 Point 복소수의 곱셈에서는 $i^2=-1$임을 이용하여 실수부분과 허수부분을 정리하고, 복소수의 나눗셈에서는 분모의 켤레복소수를 분자, 분모에 곱하여 계산한다.

025

$3(4-3i)-(-6+2i)+2(i-5)$를 계산하시오. $8-9i$

$3(4-3i)-(-6+2i)+2(i-5)$
$=12-9i+6-2i+2i-10$
$=(12+6-10)+(-9i-2i+2i)$
$=8-9i$

026

$(\sqrt{5}-i)^2+(\sqrt{5}+i)^2$의 값은?

① 4　② $2\sqrt{5}$　✓③ 8
④ $4\sqrt{5}$　⑤ 10

$(\sqrt{5}-i)^2+(\sqrt{5}+i)^2$
$=(\sqrt{5}-i)(\sqrt{5}-i)+(\sqrt{5}+i)(\sqrt{5}+i)$
$=\{(5-1)+(-\sqrt{5}-\sqrt{5})i\}+\{(5-1)+(\sqrt{5}+\sqrt{5})i\}$
$=(4-2\sqrt{5}i)+(4+2\sqrt{5}i)=8$

027

$(4i-1)(-i+3)-\dfrac{2+3i}{2-i}$를 $a+bi$ 꼴로 나타낼 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 실수이다.)

① $\dfrac{57}{5}$　② $\dfrac{58}{5}$　③ $\dfrac{59}{5}$
④ 12　✓⑤ $\dfrac{61}{5}$

$$(4i-1)(-i+3)-\frac{2+3i}{2-i}=1+13i-\frac{(4-3)+(2+6)i}{2^2-i^2}$$
$$=1+13i-\frac{1+8i}{5}$$
$$=\frac{4}{5}+\frac{57}{5}i$$

$\therefore a+b=\dfrac{4}{5}+\dfrac{57}{5}=\dfrac{61}{5}$

028

$\alpha=\dfrac{1+2i}{1-2i}$일 때, $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$의 값을 구하시오. $-\dfrac{6}{5}$

$$\alpha=\frac{1+2i}{1-2i}=\frac{(1+2i)^2}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{1+4i-4}{1^2-(2i)^2}=\frac{-3+4i}{5}$$
$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1-2i}{1+2i}=\frac{(1-2i)^2}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{1-4i-4}{1^2-(2i)^2}=\frac{-3-4i}{5}$$
$$\therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=\frac{-3+4i}{5}+\frac{-3-4i}{5}=-\frac{6}{5}$$

유형 04 복소수가 실수 또는 순허수가 될 조건 중요★

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여
① z가 실수: $b=0$
② z가 순허수: $a=0$, $b\neq0$

풍쌤 Point ① z^2이 양의 실수가 되려면 z가 0이 아닌 실수이어야 한다. ➡ $a\neq0$, $b=0$
② z^2이 음의 실수가 되려면 z가 순허수이어야 한다.
➡ $a=0$, $b\neq0$

029

복소수 $a(8-3i)+4(-2+2i)$가 실수가 되도록 하는 실수 a의 값은?

① $\dfrac{5}{3}$　② 2　③ $\dfrac{7}{3}$
✓④ $\dfrac{8}{3}$　⑤ 3

$a(8-3i)+4(-2+2i)=8a-3ai-8+8i$
$=(8a-8)-(3a-8)i$
이 복소수가 실수가 되려면 허수부분이 0이어야 한다.
즉, $3a-8=0$에서 $a=\dfrac{8}{3}$

030

복소수 $x^2+(2+i)x-3(1-i)$가 순허수가 되도록 하는 실수 x의 값을 구하시오. 1

$x^2+(2+i)x-3(1-i)=(x^2+2x-3)+(x+3)i$
순허수가 되려면 실수부분은 0이고 허수부분은 0이 아니어야 한다. 즉,
$x^2+2x-3=0$, $x+3\neq0$
$x^2+2x-3=0$에서 $(x+3)(x-1)=0$　$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$
$x+3\neq0$에서 $x\neq-3$이므로 $x=1$

031

복소수 $z=(12-5i)-(4+i)a$에 대하여 z^2이 양의 실수가 되도록 하는 실수 a의 값은?

✓① -5　② -3　③ -1
④ 1　⑤ 3

$z=(12-5i)-(4+i)a=(12-4a)+(-5-a)i$
z^2이 양의 실수가 되려면 z는 0이 아닌 실수이어야 한다.
즉, $12-4a\neq0$, $-5-a=0$이므로 $a=-5$

032

복소수 $z=2a^2i+(1-5i)a-2(3-i)$에 대하여 z^2이 음의 실수가 되도록 하는 실수 a의 값을 구하시오. 6

$z=2a^2i+a-5ai-6+2i=(a-6)+(2a^2-5a+2)i$
z^2이 음의 실수가 되려면 z는 순허수이어야 하므로
$a-6=0$, $2a^2-5a+2\neq0$
$a-6=0$에서 $a=6$　…… ㉠
$2a^2-5a+2\neq0$에서 $(2a-1)(a-2)\neq0$　$\therefore a\neq\dfrac{1}{2}$이고 $a\neq2$　…… ㉡
㉠, ㉡에서 $a=6$

유형 05 복소수가 주어질 때의 식의 값

주어진 식을 정리한 후 복소수를 대입하여 식의 값을 구한다.

풍쌤 Point 복소수 $x=a+bi$ (a, b는 실수)에 대한 이차식의 값을 구할 때는 복소수를 $x-a=bi$ 꼴로 변형한 후, 양변을 제곱하여 x에 대한 이차식을 만들어 본다.

033

$\alpha=2-3i$, $\beta=1+2i$일 때, $\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}$의 값을 구하시오.

$-\dfrac{3}{65}+\dfrac{41}{65}i$

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}=\frac{(1+2i)-(2-3i)}{(2-3i)(1+2i)}$$
$$=\frac{-1+5i}{8+i}=\frac{(-1+5i)(8-i)}{(8+i)(8-i)}$$
$$=-\frac{3}{65}+\frac{41}{65}i$$

034

$x=2i-4$, $y=-1-5i$일 때, x^2+y^2의 값은?

✓① $-12-6i$
② $-6-6i$
③ $6+6i$
④ $12+6i$
⑤ $12+12i$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=\{(2i-4)+(-1-5i)\}^2-2(2i-4)(-1-5i)$
$=(-5-3i)^2-2\{(4+10)+(-2+20)i\}$
$=(25+30i-9)-2(14+18i)$
$=16+30i-28-36i$
$=-12-6i$

035

$x=1+3i$일 때, x^2-2x+8의 값은?

① -3
✓② -2
③ -1
④ 0
⑤ 1

$x=1+3i$에서 $x-1=3i$
양변을 제곱하면
$x^2-2x+1=-9$ $\quad\therefore x^2-2x+10=0$
$\therefore x^2-2x+8=(x^2-2x+10)-2$
$=0-2=-2$

036

$z=\dfrac{29}{5-2i}$일 때, $2z^2-20z+60$의 값은?

✓① 2
② 4
③ 6
④ 8
⑤ 10

$z=\dfrac{29}{5-2i}=\dfrac{29(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)}=\dfrac{29(5+2i)}{29}=5+2i$에서
$z-5=2i$
양변을 제곱하면
$z^2-10z+25=-4$ $\quad\therefore z^2-10z+29=0$
$\therefore 2z^2-20z+60=2(z^2-10z+29)+2=2$

유형 06 켤레복소수의 계산

중요

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)의 켤레복소수 $\overline{z}$는
$\overline{z}=a-bi$

풍쌤 Point 켤레복소수는 허수부분의 부호가 반대이다. 실수부분과 허수부분을 정확히 파악하여 켤레복소수를 구한다.

037

복소수 $(3x-4)+(2x-y+3)i$의 켤레복소수가 $2+6i$일 때, 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?

① 11
② 12
③ 13
④ 14
✓⑤ 15

$(3x-4)+(2x-y+3)i=\overline{2+6i}=2-6i$이므로
$3x-4=2$에서 $3x=6$ $\quad\therefore x=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$2x-y+3=-6$에서 $2x-y=-9$
위의 식에 ㉠을 대입하면 $y=13$
$\therefore x+y=2+13=15$

038

$z_1=-7+3i$, $z_2=i+5$일 때, $(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$의 값을 구하시오. (단, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$는 각각 z_1, z_2의 켤레복소수이다.)

20

$z_1+z_2=-2+4i$, $\overline{z_1}+\overline{z_2}=-2-4i$
$\therefore (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=(-2+4i)(-2-4i)=4-(-16)=20$

039

$z=3-i$일 때, $\dfrac{z+1}{\overline{z}}$의 허수부분은?

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① $-\dfrac{11}{10}$
✓② $-\dfrac{7}{10}$
③ 0
④ $\dfrac{7}{10}$
⑤ $\dfrac{11}{10}$

$$\frac{z+1}{\overline{z}}=\frac{(3-i)+1}{3+i}=\frac{4-i}{3+i}=\frac{(4-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{11-7i}{10}=\frac{11}{10}-\frac{7}{10}i$$

따라서 $\dfrac{z+1}{\overline{z}}$의 허수부분은 $-\dfrac{7}{10}$이다.

040

복소수 $z=\dfrac{5}{2i+1}$에 대하여 $z^2-\overline{z}^2$의 값을 구하시오.

$-8i$ (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

$z=\dfrac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{5(1-2i)}{5}=1-2i$
$\therefore z^2-\overline{z}^2=(1-2i)^2-(1+2i)^2=-8i$

유형 실전 문제

정답과 풀이 039쪽

유형 07 켤레복소수의 성질을 이용한 식의 값

두 복소수 z_1, z_2의 켤레복소수를 $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$에 대하여

① $\overline{(\overline{z_1})}=z_1$

② $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

③ $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq 0$)

풍쌤 Point 켤레복소수를 포함하는 식의 값을 구할 때는 켤레복소수의 성질을 이용하여 먼저 식을 간단히 한 후 주어진 복소수를 대입한다.

041

$\alpha=-3-6i$, $\beta=9+4i$일 때, $\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}$의 값은? (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

① 32 ② 36 [✓ ③ 40]

④ 44 ⑤ 48

$\alpha+\beta=(-3-6i)+(9+4i)=6-2i$이므로

$\therefore\ \alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}=\alpha(\overline{\alpha}+\overline{\beta})+\beta(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$

$=(6-2i)(6+2i)$

$=36-(-4)=40$

042

두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha-\beta=4i+8$일 때, $\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}$의 값은?

(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

① 40 ② 50 ③ 60

④ 70 [✓ ⑤ 80]

$\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}=\alpha(\overline{\alpha}-\overline{\beta})-\beta(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$

$=(4i+8)(-4i+8)$

$=64-(-16)=80$

043

두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha\beta=1$, $\alpha+\frac{1}{\overline{\alpha}}=4$일 때, $\frac{1}{\beta}+\overline{\beta}$의 값은? (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

① $-4i$ ② $4i$ ③ 1

④ 2 [✓ ⑤ 4]

$\alpha\beta=1$에서 $\alpha=\frac{1}{\beta}$

$\alpha\beta=1$에서 $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\times\overline{\beta}=1$이므로 $\frac{1}{\overline{\alpha}}=\overline{\beta}$

$\therefore\ \frac{1}{\beta}+\overline{\beta}=\alpha+\frac{1}{\overline{\alpha}}=4$

유형 08 등식을 만족시키는 복소수

중요

복소수 z를 포함하는 등식이 주어질 때, $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 주어진 등식에 대입한 후, 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

풍쌤 Point 복소수가 서로 같으려면 실수부분과 허수부분이 각각 같아야 한다.

044

$z+\overline{z}=4$, $z\overline{z}=29$를 만족시키는 복소수 z를 모두 구하시오. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.) $2\pm5i$

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

$z+\overline{z}=4$에서 $(a+bi)+(a-bi)=2a=4$ $\therefore\ a=2$

$z\overline{z}=29$에서 $(2+bi)(2-bi)=29$

$2^2+b^2=29$, $b^2=25$ $\therefore\ b=\pm5$

따라서 구하는 복소수 z는 $2\pm5i$이다.

045

$iz+3\overline{z}=-7-13i$를 만족시키는 복소수 z는?

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① $-1-4i$ [✓ ② $-1+4i$] ③ $1-4i$

④ $1-2i$ ⑤ $1+4i$

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

$iz+3\overline{z}=-7-13i$에서

$(a+bi)i+3(a-bi)=-7-13i$, $(3a-b)+(a-3b)i=-7-13i$

$3a-b=-7$, $a-3b=-13$ $\therefore\ a=-1$, $b=4$

따라서 구하는 복소수 z는 $-1+4i$이다.

046

복소수 z에 대하여 $\overline{z-zi}=2+8i$일 때, $z+\overline{z}$의 값은?

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 6 ② 8 [✓ ③ 10]

④ 12 ⑤ 14

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

$\overline{z-zi}=(a+b)+(a-b)i=2+8i$

이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=2$, $a-b=8$ $\therefore\ a=5$, $b=-3$

$\therefore\ z+\overline{z}=(5-3i)+(5+3i)=10$

047

$(5+2i)z+(3-i)\overline{z}=4i-25$를 만족시키는 복소수 z에 대하여 $z\overline{z}$의 값을 구하시오. 13

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

$(5+2i)(a+bi)+(3-i)(a-bi)=-25+4i$

$(8a-3b)+(a+2b)i=-25+4i$

$8a-3b=-25$, $a+2b=4$ $\therefore\ a=-2$, $b=3$

$\therefore\ z\overline{z}=(-2+3i)(-2-3i)=4-(-9)=13$

05 음수의 제곱근

❶ 음수의 제곱근

$a>0$일 때,

① $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$

② $-a$의 제곱근은 $\sqrt{a}i$와 $-\sqrt{a}i$이다. ← $(\sqrt{a}i)^2=a\times i^2=-a$, $(-\sqrt{a}i)^2=a\times i^2=-a$

참고 $\sqrt{a}i$와 $-\sqrt{a}i$를 간단히 $\pm\sqrt{a}i$로 나타내기도 한다.

보기 ① $\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$

② -2의 제곱근은 $\sqrt{2}i$와 $-\sqrt{2}i$이다.

❷ 음수의 제곱근의 성질

① $a<0$, $b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

② $a>0$, $b<0$이면 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

참고 ① $a<0$, $b<0$인 경우를 제외하면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

② $a>0$, $b<0$인 경우를 제외하면 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (단, $b\neq 0$)

- 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여
  ① $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ ➡ $a<0$, $b<0$
  ② $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ ➡ $a>0$, $b<0$

개념 기본 문제

정답과 풀이 040쪽

048

다음 수를 허수단위 i를 사용하여 나타내시오.

(1) $\sqrt{-2}$ $\sqrt{2}i$

(2) $\sqrt{-9}$ $3i$

(3) $\sqrt{-12}$ $2\sqrt{3}i$

(4) $-\sqrt{-45}$ $-3\sqrt{5}i$

049

다음 수의 제곱근을 구하시오.

(1) -6 $\pm\sqrt{6}i$

(2) -32 $\pm4\sqrt{2}i$

(3) -49 $\pm7i$

(4) $-\dfrac{8}{25}$ $\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{5}i$

050

다음을 $a+bi$ (a, b는 실수) 꼴로 나타내시오.

(1) $\sqrt{-3}+\sqrt{-27}$ $4\sqrt{3}i$

$\sqrt{-3}+\sqrt{-27}=\sqrt{3}i+3\sqrt{3}i=4\sqrt{3}i$

(2) $\sqrt{-8}-\sqrt{-18}$ $-\sqrt{2}i$

$\sqrt{-8}-\sqrt{-18}=2\sqrt{2}i-3\sqrt{2}i=-\sqrt{2}i$

(3) $\sqrt{-2}\sqrt{-7}$ $-\sqrt{14}$

$\sqrt{-2}\sqrt{-7}=\sqrt{2}i\times\sqrt{7}i=-\sqrt{14}$

(4) $\dfrac{\sqrt{65}}{\sqrt{-5}}$ $-\sqrt{13}i$

$\dfrac{\sqrt{65}}{\sqrt{-5}}=\dfrac{\sqrt{65}}{\sqrt{5}i}=\dfrac{\sqrt{65}i}{\sqrt{5}i^2}=-\sqrt{13}i$

(5) $\sqrt{-5}\sqrt{3}+\sqrt{-5}\sqrt{-3}$ $\sqrt{15}i-\sqrt{15}$

$\sqrt{-5}\sqrt{3}+\sqrt{-5}\sqrt{-3}=\sqrt{5}i\times\sqrt{3}+\sqrt{5}i\times\sqrt{3}i=\sqrt{15}i-\sqrt{15}$

(6) $\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{-21}}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{-3}}-\dfrac{\sqrt{-21}}{\sqrt{-3}}$ $2\sqrt{7}i$

$$\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{-21}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{-3}}-\frac{\sqrt{-21}}{\sqrt{-3}}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{21}i}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}i}-\frac{\sqrt{21}i}{\sqrt{3}i}$$
$$=\sqrt{7}+\sqrt{7}i-(-\sqrt{7}i)-\sqrt{7}=2\sqrt{7}i$$

06 i의 거듭제곱

❶ i의 거듭제곱

① i의 거듭제곱인 i^n (n은 자연수)의 값을 차례대로 구하면

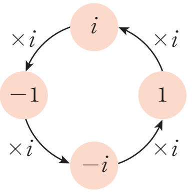
$$i,\ -1,\ -i,\ 1,\ i,\ -1,\ -i,\ 1,\ \cdots$$

과 같이 i, -1, $-i$, 1이 반복되어 나타난다.

② i의 거듭제곱은 다음과 같은 규칙을 갖는다.

$$i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i,\ i^{4k+4}=1$$

(단, k는 음이 아닌 정수이다.)



참고 ① $i+i^2+i^3+i^4=i+(-1)+(-i)+1=0$

② $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=\frac{1}{i}+\frac{1}{-1}+\frac{1}{-i}+\frac{1}{1}=0$

보기 $i^5=i^4\times i=i$
$i^6=i^4\times i^2=i^2=-1$
$i^7=i^4\times i^3=i^3=-i$
$i^8=(i^4)^2=1$
$\vdots$
$i^{15}=(i^4)^3\times i^3=i^3=-i$

개념 기본 문제

정답과 풀이 040쪽

051

다음을 계산하시오.

(1) i^{20} 1

(2) $(-i)^{67}$ i

(3) i^{102} -1

(4) i^{289} i

052

다음을 계산하시오.

(1) $i^{10}+i^{11}+i^{12}+i^{13}$ 0

(2) $i+i^2+i^3+\cdots+i^{50}$ $i-1$

(3) $\frac{1}{i^{20}}+\frac{1}{i^{21}}+\frac{1}{i^{22}}$ $-i$

(4) $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{100}}$ 0

053

다음을 계산하시오.

(1) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8$ 1

단계1. $\frac{1+i}{1-i}$를 간단히 하기

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i-1}{1^2-i^2}=\frac{2i}{2}=i$

단계2. 주어진 수 계산하기

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8=i^8=(i^4)^2=1$

(2) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^9$ $-i$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i-1}{1^2-i^2}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^9=(-i)^9=-i^9=-(i^4)^2\times i=-i$

(3) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{22}$ $-i$

단계1. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2$을 간단히 하기

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{(1+i)^2}{2}=\frac{1+2i-1}{2}=\frac{2i}{2}=i$

단계2. 주어진 수 계산하기

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{22}=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{11}=i^{11}=(i^4)^2\times i^3=-i$

(4) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{60}$ -1

$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{(1-i)^2}{2}=\frac{1-2i-1}{2}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{60}=\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{30}=(-i)^{30}=i^{30}=(i^4)^7\times i^2=-1$

유형 실전 문제

정답과 풀이 041쪽

유형 09 음수의 제곱근

① $a<0$, $b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

② $a>0$, $b<0$이면 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

풍쌤 Point 음수의 제곱근은 허수단위 i를 사용하여 나타낸다.
➡ $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$ (단, $a>0$)

054

$\sqrt{2}\sqrt{-8}+\sqrt{-18}\sqrt{-2}+\dfrac{\sqrt{-4}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{-16}}=a+bi$일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

✓① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

$$\sqrt{2}\sqrt{-8}+\sqrt{-18}\sqrt{-2}+\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{-16}}=\sqrt{2}\times2\sqrt{2}i+3\sqrt{2}i\times\sqrt{2}i+\frac{2i}{\sqrt{2}}+\frac{4\sqrt{2}}{4i}$$
$$=4i-6+\sqrt{2}i-\sqrt{2}i=-6+4i$$

$\therefore\ a+b=-6+4=-2$

055

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. ㄱ, ㄹ

보기

ㄱ. $\sqrt{5}\sqrt{-4}=2\sqrt{-5}$
ㄴ. $\sqrt{-9}\sqrt{-16}=12$
ㄷ. $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{-5}}=-2$
ㄹ. $\dfrac{\sqrt{-24}}{\sqrt{-6}}=2$

ㄱ. $\sqrt{5}\sqrt{-4}=\sqrt{5}\times2i=2\sqrt{5}i=2\sqrt{-5}$
ㄴ. $\sqrt{-9}\sqrt{-16}=3i\times4i=-12$
ㄷ. $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{-5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}i}=\dfrac{2i}{i^2}=-2i$
ㄹ. $\dfrac{\sqrt{-24}}{\sqrt{-6}}=\dfrac{2\sqrt{6}i}{\sqrt{6}i}=2$

056

복소수 $z=\sqrt{-6}\sqrt{-3}-\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-6}}$에 대하여 $z\overline{z}$의 값은?
(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ✓⑤ 20

$z=\sqrt{6}i\times\sqrt{3}i-\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}i}=-3\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

$\therefore\ z\overline{z}=(-3\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(-3\sqrt{2}-\sqrt{2}i)=18-(-2)=20$

유형 10 i의 거듭제곱

중요

음이 아닌 정수 k에 대하여
$i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=i^2=-1$, $i^{4k+3}=i^3=-i$, $i^{4k+4}=i^4=1$

풍쌤 Point i^n (n은 자연수)의 값은 n을 4로 나누었을 때의 나머지에 따라 정해진다. 즉, n을 4로 나누었을 때의 나머지가 같으면 그 값이 서로 같다.

057

$1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{150}$을 간단히 하면?

① -1 ② 1 ③ $-i$
✓④ i ⑤ $1+i$

$1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{150}$
$=(1+i+i^2+i^3)+(i^4+i^5+i^6+i^7)+\cdots+(i^{144}+i^{145}+i^{146}+i^{147})+i^{148}+i^{149}+i^{150}$
$=(1+i+i^2+i^3)+i^4(1+i+i^2+i^3)+\cdots+i^{144}(1+i+i^2+i^3)+i^{148}(1+i+i^2)$
$=1+i+i^2=i$

058

$z=1+\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\cdots+\dfrac{1}{i^{25}}$일 때, $z+\overline{z}$의 값을 구하시오. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.) 2

$$z=\left(1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}\right)+\left(\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{i^{20}}+\frac{1}{i^{21}}+\frac{1}{i^{22}}+\frac{1}{i^{23}}\right)+\frac{1}{i^{24}}+\frac{1}{i^{25}}$$
$$=1+\frac{1}{i}=1-i$$

$\therefore\ z+\overline{z}=(1-i)+(1+i)=2$

059

$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{10}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{10}$을 간단히 하면?

✓① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

$\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+2i-1}{1^2-i^2}=\dfrac{2i}{2}=i$

$\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-2i-1}{1^2-i^2}=\dfrac{-2i}{2}=-i$

$\therefore\ \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{10}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{10}=i^{10}+(-i)^{10}=i^2+i^2=-2$

060

$z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$일 때, $z^2+z^4+z^6+z^8+z^{10}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ $-i$
✓④ i ⑤ $1+i$

$z^2=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1+2i-1}{2}=\dfrac{2i}{2}=i$

$\therefore\ z^2+z^4+z^6+z^8+z^{10}=i+i^2+i^3+i^4+i^5=i^5=i$

중단원 점검 문제

01

교육청 기출

두 실수 a, b에 대하여

$$a+4+bi=b+(2-i)i$$

일 때, $a+b$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3　② -1　✓③ 1
④ 3　⑤ 5

$a+4+bi=b+(2-i)i$에서
$(a+4)+bi=b+2i+1=(b+1)+2i$
이므로
$a+4=b+1$, $b=2$
따라서 $a=-1$, $b=2$이므로 $a+b=-1+2=1$

02

학교 시험 기출

$\dfrac{25}{3+4i}-\dfrac{20}{4-2i}=a+bi$일 때, 실수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　✓⑤ 5

$$\frac{25}{3+4i}-\frac{20}{4-2i}=\frac{25(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}-\frac{20(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}$$
$$=\frac{25(3-4i)}{3^2-(4i)^2}-\frac{20(4+2i)}{4^2-(2i)^2}$$
$$=(3-4i)-(4+2i)$$
$$=-1-6i$$

따라서 $a=-1$, $b=-6$이므로 $a-b=-1-(-6)=5$

03

복소수 $z_1=(-3-3i)^2$, $z_2=\dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}$에 대하여 z_1z_2의 실수부분을 a, 허수부분을 b라 할 때, $\sqrt{2}a+b$의 값을 구하시오.　-18

$z_1=(-3-3i)^2=9+18i-9=18i$

$$z_2=\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}=\frac{(\sqrt{2}+i)^2}{(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)}=\frac{2+2\sqrt{2}i-1}{(\sqrt{2})^2-i^2}=\frac{1+2\sqrt{2}i}{3}$$

$$\therefore\ z_1z_2=18i\times\frac{1+2\sqrt{2}i}{3}=6i(1+2\sqrt{2}i)=-12\sqrt{2}+6i$$

따라서 $a=-12\sqrt{2}$, $b=6$이므로 $\sqrt{2}a+b=-24+6=-18$

04

복소수 x, y에 대하여

$$x☆y=x+2y-xy$$

로 정의할 때, $(-1+2i)☆(3-i)$를 구하시오.　$6-7i$

$(-1+2i)☆(3-i)$
$=(-1+2i)+2(3-i)-(-1+2i)(3-i)$
$=(-1+2i)+(6-2i)-\{(-3+2)+(1+6)i\}$
$=(-1+2i)+(6-2i)-(-1+7i)$
$=6-7i$

05

복소수 $z=3+i$에 대하여 $z^2+2z+ai=b+3i$일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 8　✓② 9　③ 10
④ 11　⑤ 12

$z^2+2z+ai=(3+i)^2+2(3+i)+ai$
$\quad=14+(a+8)i$
$\quad=b+3i$
$a+8=3$, $b=14$
따라서 $a=-5$, $b=14$이므로 $a+b=-5+14=9$

06

복소수 $z=a(a+1)-2(2-i)a-4$에 대하여 z^2이 실수가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

① -2　② -1　③ 1
④ 2　✓⑤ 3

$z=(a^2-3a-4)+2ai$
z^2이 실수가 되려면 z는 실수 또는 순허수이어야 한다.
즉, $a^2-3a-4=0$ 또는 $2a=0$
(ⅰ) $a^2-3a-4=0$에서 $a=-1$ 또는 $a=4$
(ⅱ) $2a=0$에서 $a=0$
(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 실수 a의 값의 합은 $-1+4+0=3$

07

$x=\dfrac{-1+\sqrt{7}i}{4}$일 때, $4x^3+2x^2+2x+8$의 값은?

① 4　② 5　③ 6
④ 7　✓⑤ 8

$x=\dfrac{-1+\sqrt{7}i}{4}$에서 $4x+1=\sqrt{7}i$
양변을 제곱하면
$16x^2+8x+1=-7$　　$\therefore\ 2x^2+x+1=0$
$\therefore\ 4x^3+2x^2+2x+8=2x(2x^2+x+1)+8=2x\times0+8=8$

08

복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $z+\overline{z}$는 실수이다.
② $z-\overline{z}$는 허수이다.
✓③ $z^2-\overline{z}^2$은 실수이다.
④ z가 순허수이면 $\overline{z}$도 순허수이다.
⑤ z가 실수이면 $z=\overline{z}$이다.

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$
③ $z^2-\overline{z}^2=(z+\overline{z})(z-\overline{z})=2a\times2bi=4abi$
이므로 허수이다.

09 학교 시험 기출

$x=5-2i$, $y=5+2i$일 때, $x^3y+x^2+y^2+xy^3$의 값은?

① 1250　✓② 1260　③ 1270

④ 1280　⑤ 1290

$x+y=(5-2i)+(5+2i)=10$

$xy=(5-2i)(5+2i)=5^2-(2i)^2=25+4=29$

$$\begin{aligned}\therefore\ x^3y+x^2+y^2+xy^3&=(x^3y+xy^3)+(x^2+y^2)\\&=(x^2+y^2)(xy+1)\\&=\{(x+y)^2-2xy\}(xy+1)\\&=(10^2-2\times29)\times(29+1)\\&=42\times30=1260\end{aligned}$$

10

다음 중 $z=\overline{z}$를 만족시키는 복소수 z는?

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

✓① 1　② $-i$　③ i

④ $1-i$　⑤ $1+i$

$z=\overline{z}$이면 z는 실수이므로 이를 만족시키는 것은 ①이다.

11

두 복소수 z_1, z_2에 대하여

$$\overline{z_1}+\overline{z_2}=-4-3i,\ \overline{z_1}\times\overline{z_2}=8-6i$$

일 때, $(z_1-3)(z_2-3)$의 값은?

(단, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$는 각각 z_1, z_2의 켤레복소수이다.)

① $13-3i$　② $13+15i$　③ $29-6i$

✓④ $29-3i$　⑤ $29+15i$

$z_1+z_2=-4+3i$, $z_1z_2=8+6i$

$$\begin{aligned}\therefore\ (z_1-3)(z_2-3)&=z_1z_2-3(z_1+z_2)+9\\&=(8+6i)-3(-4+3i)+9\\&=(8+6i)+(12-9i)+9\\&=29-3i\end{aligned}$$

12

복소수 z가 $2(\overline{z}-z)+3(z+\overline{z})=12-8i$를 만족시킬 때, $z\overline{z}$의 값을 구하시오. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

8

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$$\begin{aligned}2(\overline{z}-z)+3(z+\overline{z})&=2\{a-bi-(a+bi)\}+3(a+bi+a-bi)\\&=-4bi+6a\\&=12-8i\end{aligned}$$

이므로 $a=2$, $b=2$

$\therefore\ z\overline{z}=(2+2i)(2-2i)=4+4=8$

13 교육청 기출

a가 음수일 때, $\dfrac{\sqrt{-4a}}{\sqrt{a}\sqrt{-4}}-\dfrac{\sqrt{-32}\sqrt{4a}}{\sqrt{2}\sqrt{-a}}$의 값을 구하시오.

7

양수 b에 대하여 $a=-b$라 하면

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{-4a}}{\sqrt{a}\sqrt{-4}}-\frac{\sqrt{-32}\sqrt{4a}}{\sqrt{2}\sqrt{-a}}&=\frac{\sqrt{4b}}{\sqrt{-b}\sqrt{-4}}-\frac{\sqrt{-32}\sqrt{-4b}}{\sqrt{2}\sqrt{b}}\\&=\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{b}i\times2i}-\frac{4\sqrt{2}i\times2\sqrt{b}i}{\sqrt{2}\sqrt{b}}\\&=-\frac{2\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}+\frac{4\sqrt{2}\times2\sqrt{b}}{\sqrt{2}\sqrt{b}}\\&=-1+8=7\end{aligned}$$

14 실전 Plus

$0<a<1$일 때,

$$\sqrt{a-1}\sqrt{a-1}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-a}}+\frac{\sqrt{2-a}}{\sqrt{2-a}}+\frac{\sqrt{a}\sqrt{-a}}{a}$$

를 간단히 하면?

① $-a-2$　② $-a+2$　✓③ a

④ $a-2$　⑤ $a+2$

$a-1<0$, $-a<0$, $2-a>0$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\sqrt{a-1}\sqrt{a-1}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-a}}+\frac{\sqrt{2-a}}{\sqrt{2-a}}+\frac{\sqrt{a}\sqrt{-a}}{a}\\&=-\sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{\frac{a}{-a}}+\sqrt{\frac{2-a}{2-a}}+\sqrt{\frac{-a^2}{a^2}}\\&=-(1-a)-i+1+i\\&=a\end{aligned}$$

15

자연수 n에 대하여 $f(n)=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n$일 때,

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$의 값은?

① -1　② 0　✓③ $-1+i$

④ i　⑤ $1+i$

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i-1}{1^2-i^2}=\frac{2i}{2}=i$$

이므로

$f(n)=i^n$

$$\begin{aligned}\therefore\ &f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)\\&=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+i^8(i+i^2)\\&=i+i^2=-1+i\end{aligned}$$

16 실전 Plus

$i+2i^2+3i^3+\cdots+30i^{30}=a+bi$일 때, 실수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하시오.　31

$$\begin{aligned}&i+2i^2+3i^3+\cdots+30i^{30}\\&=(i+2i^2+3i^3+4i^4)+(5i^5+6i^6+7i^7+8i^8)+\cdots\\&\qquad+(25i^{25}+26i^{26}+27i^{27}+28i^{28})+29i^{29}+30i^{30}\\&=(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)+29i-30\\&=7(2-2i)+29i-30\\&=-16+15i\end{aligned}$$

따라서 $a=-16$, $b=15$이므로 $b-a=15-(-16)=31$

01 이차방정식의 근

① 이차방정식의 근

계수가 실수인 이차방정식은 복소수의 범위에서 반드시 근을 갖는다. 이때 실수인 근을 **실근**, 허수인 근을 **허근**이라 한다.

보기 이차방정식 $x^2+1=0$은 실수의 범위에서는 근을 갖지 않지만 복소수의 범위에서는 $x=\pm i$를 근으로 갖는다.

② 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이

x에 대한 이차방정식이 $(ax-b)(cx-d)=0$ 꼴로 인수분해되면 이 이차방정식의 근은 $x=\frac{b}{a}$ 또는 $x=\frac{d}{c}$이다.

보기 $x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$이므로 이 방정식의 근은 $x=1$ 또는 $x=2$이다.

③ 근의 공식을 이용한 이차방정식의 풀이

x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

보기 $x^2+3x+1=0$의 근은 $x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

참고 x에 대한 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 근은

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

- $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$) 꼴로 나타낼 수 있는 방정식을 x에 대한 이차방정식이라 한다.
- 특별한 언급이 없으면 이차방정식의 계수는 실수이고, 근은 복소수의 범위에서 구한다.

개념 기본 문제

001

인수분해를 이용하여 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2-5x+6=0$ $x=2$ 또는 $x=3$

(2) $x^2-2x-15=0$ $x=-3$ 또는 $x=5$

(3) $x^2-8x+16=0$ $x=4$

(4) $x^2+11x+30=0$ $x=-6$ 또는 $x=-5$

(5) $2x^2+3x-2=0$ $x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

(6) $6x^2-5x-6=0$ $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

002

근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2+x-3=0$ $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

(2) $x^2-x+4=0$ $x=\frac{1\pm\sqrt{15}i}{2}$

(3) $x^2+5x+7=0$ $x=\frac{-5\pm\sqrt{3}i}{2}$

(4) $x^2-3x-2=0$ $x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

(5) $2x^2+x+5=0$ $x=\frac{-1\pm\sqrt{39}i}{4}$

(6) $3x^2-3x+1=0$ $x=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{6}$

003

근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2+2x-2=0$ $x=-1\pm\sqrt{3}$

(2) $x^2+4x+6=0$ $x=-2\pm\sqrt{2}i$

(3) $x^2-2x-1=0$ $x=1\pm\sqrt{2}$

(4) $x^2+6x+3=0$ $x=-3\pm\sqrt{6}$

(5) $2x^2-2x+5=0$ $x=\frac{1\pm3i}{2}$

(6) $4x^2+2x-1=0$ $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

004

다음 이차방정식을 풀고, 그 근이 실근인지 허근인지 말하시오.

(1) $x^2-3x+6=0$ $x=\frac{3\pm\sqrt{15}i}{2}$, 허근

$x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times6}}{2\times1}=\frac{3\pm\sqrt{-15}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{15}i}{2}$

따라서 주어진 방정식의 근은 허근이다.

(2) $x^2-4x+2=0$ $x=2\pm\sqrt{2}$, 실근

$x^2-2\times2x+2=0$에서

$x=2\pm\sqrt{(-2)^2-1\times2}=2\pm\sqrt{2}$

따라서 주어진 방정식의 근은 실근이다.

(3) $x^2+2x-4=0$ $x=-1\pm\sqrt{5}$, 실근

$x^2+2\times x-4=0$에서

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\times(-4)}=-1\pm\sqrt{5}$

따라서 주어진 방정식의 근은 실근이다.

(4) $2x^2+5x+7=0$ $x=\frac{-5\pm\sqrt{31}i}{4}$, 허근

$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times2\times7}}{2\times2}=\frac{-5\pm\sqrt{-31}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{31}i}{4}$

따라서 주어진 방정식의 근은 허근이다.

(5) $5x^2+6x+4=0$ $x=\frac{-3\pm\sqrt{11}i}{5}$, 허근

$5x^2+2\times3x+4=0$에서

$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-5\times4}}{5}=\frac{-3\pm\sqrt{-11}}{5}=\frac{-3\pm\sqrt{11}i}{5}$

따라서 주어진 방정식의 근은 허근이다.

(6) $6x^2+x+1=0$ $x=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{12}$, 허근

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times6\times1}}{2\times6}=\frac{-1\pm\sqrt{-23}}{12}=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{12}$

따라서 주어진 방정식의 근은 허근이다.

005

이차방정식의 한 근이 다음과 같을 때, 다른 한 근을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

(1) $x^2-3x+4a=0,\ x=8$ $x=-5$

단계1. $x=8$을 이차방정식에 대입하기

이차방정식 $x^2-3x+4a=0$에 $x=8$을 대입하면

$a=-10$

단계2. 다른 한 근 구하기

$x^2-3x-40=0$에서 $(x+5)(x-8)=0$ $\therefore x=-5$ 또는 $x=8$

따라서 다른 한 근은 $x=-5$이다.

(2) $x^2-ax-14=0,\ x=-2$ $x=7$

이차방정식 $x^2-ax-14=0$에 $x=-2$를 대입하면 $a=5$

$x^2-5x-14=0$에서 $(x+2)(x-7)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=7$

따라서 다른 한 근은 $x=7$이다.

(3) $6x^2+ax-10=0,\ x=\frac{2}{3}$ $x=-\frac{5}{2}$

이차방정식 $6x^2+ax-10=0$에 $x=\frac{2}{3}$를 대입하면 $a=11$

$6x^2+11x-10=0$에서 $(2x+5)(3x-2)=0$ $\therefore x=-\frac{5}{2}$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

따라서 다른 한 근은 $x=-\frac{5}{2}$이다.

유형 실전 문제

정답과 풀이 045쪽

유형 01 이차방정식의 풀이

이차방정식을 (x에 대한 이차식)$=0$ 꼴로 변형한 후 인수분해 또는 근의 공식을 이용하여 해를 구한다.

풍쌤 Point 한 근이 주어지는 경우에는 주어진 근을 이차방정식에 대입하여 미정계수를 구한다.

006

이차방정식 $x^2-2x-35=0$의 두 근이 α, β일 때, $|\alpha-\beta|$의 값은?

① 11 [✓ ② 12] ③ 13
④ 14 ⑤ 15

$x^2-2x-35=0$에서 $(x+5)(x-7)=0$이므로
$x=-5$ 또는 $x=7$
$\therefore\ |\alpha-\beta|=|-5-7|=12$

007

이차방정식 $3x^2-2x-2=0$의 두 근이 α, β일 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값은?

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{14}{9}$
④ $\frac{7}{3}$ [✓ ⑤ $\frac{28}{9}$]

$3x^2-2\times x-2=0$에서
$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-3\times(-2)}}{3}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$
$\therefore\ (\alpha-\beta)^2=\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}-\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)^2$
$=\left(\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)^2=\frac{28}{9}$

008

다음 두 이차방정식의 공통인 해를 구하시오. $x=3$

$$2x^2-5x-3=0,\ x^2+4x-21=0$$

$2x^2-5x-3=0$에서 $(2x+1)(x-3)=0$이므로
$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$
$x^2+4x-21=0$에서 $(x+7)(x-3)=0$이므로
$x=-7$ 또는 $x=3$
따라서 공통인 해는 $x=3$이다.

009

이차방정식 $3(x^2+5x)=8x-3x^2+3$을 풀면?

① $x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{3}$
② $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-\frac{1}{3}$
[✓ ③ $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$]
④ $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$
⑤ $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=3$

$3(x^2+5x)=8x-3x^2+3$에서
$3x^2+15x=8x-3x^2+3$
$6x^2+7x-3=0$
$(2x+3)(3x-1)=0$
$\therefore\ x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

010

이차방정식 $2x^2+4x+3=0$의 해가 $x=\frac{a\pm\sqrt{b}i}{2}$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 유리수이다.)

① -2 ② -1 [✓ ③ 0]
④ 1 ⑤ 2

$2x^2+2\times 2x+3=0$에서
$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-2\times3}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-2}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{2}i}{2}$
따라서 $a=-2$, $b=2$이므로 $a+b=-2+2=0$

011

이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 한 근이 $1-\sqrt{2}$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. -1

이차방정식 $x^2-2x+k=0$에 $x=1-\sqrt{2}$를 대입하면
$(1-\sqrt{2})^2-2(1-\sqrt{2})+k=0$, $(3-2\sqrt{2})-2+2\sqrt{2}+k=0$
$1+k=0$ $\therefore\ k=-1$

012

이차방정식 $x^2-5x+a=0$의 해가 $x=\frac{b\pm\sqrt{17}}{2}$일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+3=0$을 푸시오. $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$
(단, a, b는 유리수이다.)

$x^2-5x+a=0$에서
$x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times a}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4a}}{2}$
즉, $b=5$, $25-4a=17$이므로 $a=2$, $b=5$
따라서 이차방정식 $ax^2+bx+3=0$은 $2x^2+5x+3=0$이므로
$(2x+3)(x+1)=0$
$\therefore\ x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

02 이차방정식의 판별식

1 이차방정식의 판별식

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에 대하여 $D=b^2-4ac$를 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 **판별식**이라 한다.

2 이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac$라 할 때,

① $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② $D=0$이면 중근 (서로 같은 두 실근)을 갖는다.

$D\geq 0$이면 실근을 갖는다.

③ $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

참고 이차방정식이 서로 다른 두 실근, 중근, 서로 다른 두 허근을 가지면 각각 $D>0$, $D=0$, $D<0$이다.

보기

이차방정식	판별식 D	근
$2x^2+x-3=0$	$D=1^2-4\times2\times(-3)=25>0$	서로 다른 두 실근
$4x^2-12x+9=0$	$\frac{D}{4}=(-6)^2-4\times9=0$	중근
$3x^2-7x+5=0$	$D=(-7)^2-4\times3\times5=-11<0$	서로 다른 두 허근

- 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$에서 판별식 D 대신 $\frac{D}{4}=b'^2-ac$를 이용할 수 있다.

풍쌤 Tip 판별식은 이차방정식의 계수가 실수일 때만 이용할 수 있다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 045쪽

013

다음 이차방정식의 근을 판별하시오.

(1) $x^2+3x+1=0$ 서로 다른 두 실근

(2) $x^2+2x+7=0$ 서로 다른 두 허근

(3) $x^2-8x+4=0$ 서로 다른 두 실근

(4) $x^2-5x-6=0$ 서로 다른 두 실근

(5) $x^2+6x+9=0$ 중근

(6) $3x^2+2x-3=0$ 서로 다른 두 실근

(7) $4x^2-4x+1=0$ 중근

(8) $2x^2-5x+5=0$ 서로 다른 두 허근

(9) $5x^2-x+4=0$ 서로 다른 두 허근

(10) $4x^2-8x-5=0$ 서로 다른 두 실근

개념 기본 문제

정답과 풀이 046쪽

014

이차방정식 $x^2-2x+k-1=0$이 다음과 같은 근을 갖도록 하는 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 실근 $\boldsymbol{k<2}$

이차방정식 $x^2-2x+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times(k-1)=-k+2$

서로 다른 두 실근을 가지려면 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$-k+2>0 \qquad \therefore k<2$

(2) 중근 $\boldsymbol{k=2}$

중근을 가지려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$-k+2=0 \qquad \therefore k=2$

(3) 서로 다른 두 허근 $\boldsymbol{k>2}$

서로 다른 두 허근을 가지려면 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$-k+2<0 \qquad \therefore k>2$

015

다음 x에 대한 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) $x^2+2x+k=0$ $\boldsymbol{k<1}$

이차방정식 $x^2+2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-1\times k=-k+1$

이때 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$-k+1>0 \qquad \therefore k<1$

(2) $x^2-3x-(k+2)=0$ $\boldsymbol{k>-\frac{17}{4}}$

이차방정식 $x^2-3x-(k+2)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times1\times\{-(k+2)\}=4k+17$

이때 $D>0$이어야 하므로

$4k+17>0 \qquad \therefore k>-\frac{17}{4}$

(3) $x^2+2(k-3)x+k^2-3=0$ $\boldsymbol{k<2}$

이차방정식 $x^2+2(k-3)x+k^2-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-3)^2-1\times(k^2-3)=-6k+12$

이때 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$-6k+12>0 \qquad \therefore k<2$

(4) $kx^2+x-1=0$ $\boldsymbol{-\frac{1}{4}<k<0}$ **또는** $\boldsymbol{k>0}$

이차방정식 $kx^2+x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times k\times(-1)=4k+1$

이때 $D>0$이어야 하므로

$4k+1>0 \qquad \therefore k>-\frac{1}{4}$

따라서 $k\neq0$이므로 $-\frac{1}{4}<k<0$ 또는 $k>0$

016

다음 x에 대한 이차방정식이 중근을 갖도록 하는 실수 k의 값을 구하시오.

(1) $x^2-12x-2k=0$ $\boldsymbol{-18}$

이차방정식 $x^2-12x-2k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-1\times(-2k)=2k+36$

이때 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로 $2k+36=0 \qquad \therefore k=-18$

(2) $x^2+5x+k+5=0$ $\boldsymbol{\frac{5}{4}}$

이차방정식 $x^2+5x+k+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4\times1\times(k+5)=-4k+5$

이때 $D=0$이어야 하므로 $-4k+5=0 \qquad \therefore k=\frac{5}{4}$

(3) $4x^2+2kx+k-1=0$ $\boldsymbol{2}$

이차방정식 $4x^2+2kx+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-4(k-1)=k^2-4k+4$

이때 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로 $k^2-4k+4=0$, $(k-2)^2=0 \qquad \therefore k=2$

(4) $(k+2)x^2+2kx+k-3=0$ $\boldsymbol{-6}$

이차방정식 $(k+2)x^2+2kx+k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(k+2)(k-3)=k+6$

이때 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로 $k+6=0 \qquad \therefore k=-6$

017

다음 x에 대한 이차방정식이 서로 다른 두 허근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) $x^2-x+3k-2=0$ $\boldsymbol{k>\frac{3}{4}}$

이차방정식 $x^2-x+3k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times(3k-2)=-12k+9$

이때 $D<0$이어야 하므로 $-12k+9<0 \qquad \therefore k>\frac{3}{4}$

(2) $2x^2+(k+1)x+\frac{k^2-1}{8}=0$ $\boldsymbol{k<-1}$

이차방정식 $2x^2+(k+1)x+\frac{k^2-1}{8}=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+1)^2-4\times2\times\frac{k^2-1}{8}=2k+2$

이때 $D<0$이어야 하므로 $2k+2<0 \qquad \therefore k<-1$

(3) $x^2+(2k-1)x+k(k+1)=0$ $\boldsymbol{k>\frac{1}{8}}$

이차방정식 $x^2+(2k-1)x+k(k+1)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4\times1\times k(k+1)=-8k+1$

이때 $D<0$이어야 하므로 $-8k+1<0 \qquad \therefore k>\frac{1}{8}$

(4) $(k+1)x^2-4x+5=0$ $\boldsymbol{k>-\frac{1}{5}}$

이차방정식 $(k+1)x^2-4x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(k+1)\times5=-5k-1$

이때 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로 $-5k-1<0 \qquad \therefore k>-\frac{1}{5}$

유형 실전 문제

정답과 풀이 047쪽

유형 02 이차방정식의 근의 판별

중요

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면
① 서로 다른 두 실근을 갖는다. ➡ $D>0$
② 중근을 갖는다. ➡ $D=0$
③ 서로 다른 두 허근을 갖는다. ➡ $D<0$

풍쌤 Point 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$에서 판별식 D 대신 $\frac{D}{4}=b'^2-ac$를 이용할 수 있다.

018

보기에서 허근을 갖는 이차방정식인 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $x^2-7x+2=0$
ㄴ. $x^2+2x-5=0$
ㄷ. $4x^2-20x+25=0$
ㄹ. $7x^2+5x+1=0$

① ㄷ
[✓ ② ㄹ]
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ
⑤ ㄷ, ㄹ

ㄱ. $D=(-7)^2-4\times1\times2=41>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄴ. $\frac{D}{4}=1^2-1\times(-5)=6>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. $\frac{D}{4}=(-10)^2-4\times25=0$이므로 중근을 갖는다.
ㄹ. $D=5^2-4\times7\times1=-3<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

019

이차방정식 $x^2-6x+6-3k=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 k의 최솟값을 구하시오. **0**

판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times(6-3k)=3k+3$
이때 $D>0$이어야 하므로 $3k+3>0$　　$\therefore k>-1$
따라서 정수 k의 최솟값은 0이다.

020

이차방정식 $x^2+(2k+1)x+k^2+5=0$이 실근을 갖지 않도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. **4**

판별식을 D라 하면 $D=(2k+1)^2-4\times1\times(k^2+5)=4k-19$
실근을 갖지 않으려면 $D<0$이어야 하므로 $4k-19<0$　　$\therefore k<\frac{19}{4}=4.75$
따라서 이를 만족시키는 자연수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

021

이차방정식 $x^2-2x+k=0$은 실근을 갖고, 이차방정식 $x^2+2kx+4k+5=0$은 중근을 갖도록 하는 실수 k의 값을 구하시오. **−1**

이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 판별식을 D_1이라 하면 $\frac{D_1}{4}\geq0$이어야 하므로
$-k+1\geq0$　　$\therefore k\leq1$　　…… ㉠
또, 이차방정식 $x^2+2kx+4k+5=0$의 판별식을 D_2라 하면 $\frac{D_2}{4}=0$이어야 하므로
$k^2-4k-5=0$, $(k+1)(k-5)=0$　　$\therefore k=-1$ 또는 $k=5$　　…… ㉡
㉠, ㉡에서 $k=-1$

유형 03 이차식이 완전제곱식이 될 조건

계수가 실수인 이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식이면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 갖는다.

풍쌤 Point 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 가지면 이 이차방정식의 판별식 $D=b^2-4ac$에 대하여 $D=0$이다.

022

x에 대한 이차식 $x^2+x-2k-1$이 완전제곱식일 때, 실수 k의 값은?

[✓ ① $-\frac{5}{8}$]
② $-\frac{1}{8}$
③ 0
④ $\frac{1}{8}$
⑤ $\frac{5}{8}$

이차방정식 $x^2+x-2k-1=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=1^2-4\times1\times(-2k-1)=0$
$8k+5=0$　　$\therefore k=-\frac{5}{8}$

023

x에 대한 이차식 $3kx^2-2kx+1$이 완전제곱식이 되도록 하는 실수 k의 값은?

① 1
② 2
[✓ ③ 3]
④ 4
⑤ 5

이차방정식 $3kx^2-2kx+1=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-k)^2-3k\times1=0$
$k^2-3k=0$, $k(k-3)=0$
$\therefore k=0$ 또는 $k=3$
이때 $k\neq0$이므로 구하는 실수 k의 값은 3이다.

024

x에 대한 이차식 $x^2+2(a+k)x+k^2+4k+a^2$이 실수 k의 값에 관계없이 완전제곱식이 될 때, 상수 a의 값은?

[✓ ① 2]
② $\frac{5}{2}$
③ 3
④ $\frac{7}{2}$
⑤ 4

이차방정식 $x^2+2(a+k)x+k^2+4k+a^2=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(a+k)^2-1\times(k^2+4k+a^2)=0$
$2ak-4k=0$, $2k(a-2)=0$
이 등식이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로 $a=2$

03 이차방정식의 근과 계수의 관계

❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

① $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ ←두 근의 합

② $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ ←두 근의 곱

보기 이차방정식 $x^2+2x-3=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{1}=-2$, $\alpha\beta=\dfrac{-3}{1}=-3$

❷ 두 수를 근으로 하는 이차방정식

두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

참고 x^2-(두 근의 합)$x+$(두 근의 곱)$=0$과 같이 생각할 수 있다.

보기 두 수 -2, 1을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x+2)(x-1)=0$, 즉 $x^2+x-2=0$

풍쌤 Tip 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면 두 근을 직접 구하지 않고 두 근의 합과 곱을 구할 수 있다.

개념 기본 문제

025

다음 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 구하시오.

(1) $x^2+x-1=0$ 두 근의 합: -1, 두 근의 곱: -1

(2) $x^2-5x+4=0$ 두 근의 합: 5, 두 근의 곱: 4

(3) $x^2+6x-2=0$ 두 근의 합: -6, 두 근의 곱: -2

(4) $x^2+10x+13=0$ 두 근의 합: -10, 두 근의 곱: 13

(5) $x^2-21x-40=0$ 두 근의 합: 21, 두 근의 곱: -40

(6) $2x^2-x+6=0$ 두 근의 합: $\frac{1}{2}$, 두 근의 곱: 3

(7) $3x^2+2x-1=0$ 두 근의 합: $-\frac{2}{3}$, 두 근의 곱: $-\frac{1}{3}$

(8) $6x^2-3x-2=0$ 두 근의 합: $\frac{1}{2}$, 두 근의 곱: $-\frac{1}{3}$

(9) $8x^2+5x+16=0$ 두 근의 합: $-\frac{5}{8}$, 두 근의 곱: 2

(10) $9x^2-4x+2=0$ 두 근의 합: $\frac{4}{9}$, 두 근의 곱: $\frac{2}{9}$

026

이차방정식 $x^2-x-4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\alpha+\beta$ $\quad \mathbf{1}$

(2) $\alpha\beta$ $\quad \mathbf{-4}$

(3) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ $\quad -\dfrac{1}{4}$

(4) $\alpha^2+\beta^2$ $\quad \mathbf{9}$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\times(-4)=9$

(5) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$ $\quad -\dfrac{9}{4}$

$\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{9}{-4}=-\dfrac{9}{4}$

(6) $|\alpha-\beta|$ $\quad \sqrt{17}$

$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{1^2-4\times(-4)}=\sqrt{17}$

027

이차방정식 $x^2+3x-6=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\alpha+\beta$ $\quad \mathbf{-3}$

(2) $\alpha\beta$ $\quad \mathbf{-6}$

(3) $\alpha^2+\beta^2$ $\quad \mathbf{21}$

(4) $(\alpha-1)(\beta-1)$ $\quad \mathbf{-2}$

$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-\alpha-\beta+1=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=-6-(-3)+1=-2$

(5) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$ $\quad -\dfrac{7}{2}$

$\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{21}{-6}=-\dfrac{7}{2}$

(6) $\alpha^3+\beta^3$ $\quad \mathbf{-81}$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-3)^3-3\times(-6)\times(-3)$
$=-27-54=-81$

028

다음 두 수를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

(1) $2,\ 4$ $\quad x^2-6x+8=0$

(2) $-3,\ 8$ $\quad x^2-5x-24=0$

(3) $-1,\ -6$ $\quad x^2+7x+6=0$

(4) $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{2}$ $\quad x^2-3x+\dfrac{5}{4}=0$

두 수의 합이 3, 곱이 $\dfrac{5}{4}$이므로 구하는 이차방정식은
$x^2-3x+\dfrac{5}{4}=0$

(5) $1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}$ $\quad x^2-2x-2=0$

두 수의 합이 2, 곱이 -2이므로 구하는 이차방정식은
$x^2-2x-2=0$

(6) $-2+3i,\ -2-3i$ $\quad x^2+4x+13=0$

두 수의 합이 -4, 곱이 13이므로 구하는 이차방정식은
$x^2+4x+13=0$

029

이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

$\alpha+\beta=-\dfrac{-2}{1}=2$, $\alpha\beta=\dfrac{5}{1}=5$

(1) $-\alpha,\ -\beta$ $\quad x^2+2x+5=0$

$-\alpha+(-\beta)=-(\alpha+\beta)=-2$
$-\alpha\times(-\beta)=\alpha\beta=5$
따라서 구하는 이차방정식은 $x^2+2x+5=0$

(2) $\alpha-3,\ \beta-3$ $\quad x^2+4x+8=0$

$(\alpha-3)+(\beta-3)=(\alpha+\beta)-6=-4$
$(\alpha-3)\times(\beta-3)=\alpha\beta-3\alpha-3\beta+9=\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9=8$
따라서 구하는 이차방정식은 $x^2+4x+8=0$

(3) $\dfrac{1}{\alpha},\ \dfrac{1}{\beta}$ $\quad x^2-\dfrac{2}{5}x+\dfrac{1}{5}=0$

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{2}{5}$, $\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{5}$
따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-\dfrac{2}{5}x+\dfrac{1}{5}=0$

(4) $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ $\quad x^2-7x+10=0$

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=2+5=7$
$(\alpha+\beta)\times\alpha\beta=2\times5=10$
따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-7x+10=0$

04 이차방정식의 켤레근

① 이차방정식의 켤레근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서

① 계수 a, b, c가 유리수일 때, 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다. (단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

무리수 부호 반대

허수부분 부호 반대

② 계수 a, b, c가 실수일 때, 한 근이 $p+qi$이면 다른 한 근은 $p-qi$이다. (단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

보기 ① 이차방정식의 계수가 모두 유리수일 때, 한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.
② 이차방정식의 계수가 모두 실수일 때, 한 근이 $2+3i$이면 다른 한 근은 $2-3i$이다.

• 켤레근

$p+q\sqrt{m}$과 $p-q\sqrt{m}$, $p+qi$와 $p-qi$를 각각 켤레근이라 한다. (단, $q\neq0$)

풍쌤 Tip 계수가 모두 유리수라는 조건이 없는 이차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$일 때, 다른 한 근이 반드시 $p-q\sqrt{m}$이 되는 것은 아니므로 계수의 조건에 주의한다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 049쪽

030

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 다음과 같을 때, 다른 한 근과 유리수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $2+\sqrt{3}$ **$2-\sqrt{3}$, $a=4$, $b=1$**

단계1. 다른 한 근 구하기

계수가 유리수이고 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

단계2. 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값 구하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 a, 두 근의 곱은 b이므로
$a=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$
$b=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$

(2) $-1+\sqrt{2}$ **$-1-\sqrt{2}$, $a=-2$, $b=-1$**

계수가 유리수이고 한 근이 $-1+\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $-1-\sqrt{2}$이다.
이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
두 근의 합은 $a=(-1+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})=-2$
두 근의 곱은 $b=(-1+\sqrt{2})(-1-\sqrt{2})=-1$

(3) $4-\sqrt{5}$ **$4+\sqrt{5}$, $a=8$, $b=11$**

계수가 유리수이고 한 근이 $4-\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $4+\sqrt{5}$이다.
이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
두 근의 합은 $a=(4-\sqrt{5})+(4+\sqrt{5})=8$
두 근의 곱은 $b=(4-\sqrt{5})(4+\sqrt{5})=11$

(4) $\sqrt{10}+6$ **$-\sqrt{10}+6$, $a=12$, $b=26$**

계수가 유리수이고 한 근이 $\sqrt{10}+6$이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{10}+6$이다.
이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
두 근의 합은 $a=(\sqrt{10}+6)+(-\sqrt{10}+6)=12$
두 근의 곱은 $b=(\sqrt{10}+6)(-\sqrt{10}+6)=26$

031

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 다음과 같을 때, 다른 한 근과 실수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $1+i$ **$1-i$, $a=-2$, $b=2$**

단계1. 다른 한 근 구하기

계수가 실수이고 한 근이 $1+i$이므로 다른 한 근은 $1-i$이다.

단계2. 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값 구하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-a$, 두 근의 곱은 b이므로
$-a=(1+i)+(1-i)=2 \quad \therefore a=-2$
$b=(1+i)(1-i)=2$

(2) $3-4i$ **$3+4i$, $a=-6$, $b=25$**

계수가 실수이고 한 근이 $3-4i$이므로 다른 한 근은 $3+4i$이다.
이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
두 근의 합은 $-a=(3-4i)+(3+4i) \quad \therefore a=-6$
두 근의 곱은 $b=(3-4i)(3+4i)=25$

(3) $2i-2$ **$-2i-2$, $a=4$, $b=8$**

계수가 실수이고 한 근이 $2i-2$이므로 다른 한 근은 $-2i-2$이다.
이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
두 근의 합은 $-a=(2i-2)+(-2i-2) \quad \therefore a=4$
두 근의 곱은 $b=(2i-2)(-2i-2)=8$

(4) $-3i-1$ **$3i-1$, $a=2$, $b=10$**

계수가 실수이고 한 근이 $-3i-1$이므로 다른 한 근은 $3i-1$이다.
이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
두 근의 합은 $-a=(-3i-1)+(3i-1) \quad \therefore a=2$
두 근의 곱은 $b=(-3i-1)(3i-1)=10$

유형 실전 문제

정답과 풀이 050쪽

유형 04 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

풍쌤 Point (두 근의 합)$=-\frac{b}{a}$, (두 근의 곱)$=\frac{c}{a}$

032

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 1, -3일 때, 이차방정식 $ax^2+(a+b)x+b=0$의 두 근의 합은? (단, a, b는 상수이다.)

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0

✓④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+(-3)=-a$ $\therefore a=2$

$1\times(-3)=b$ $\therefore b=-3$

따라서 이차방정식 $ax^2+(a+b)x+b=0$, 즉 $2x^2-x-3=0$의 두 근의 합은

$-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}$

033

이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 두 근이 α, β이고, 이차방정식 $x^2+bx-8=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

✓① -6 ② -4 ③ -2

④ 0 ⑤ 2

이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=a$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+bx-8=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-b$, $(\alpha+\beta)\alpha\beta=-8$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2+a=-b$, $2a=-8$ $\therefore a=-4$, $b=2$

$\therefore a-b=-4-2=-6$

034

이차방정식 $x^2+(1-k)x+k^2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta+\alpha\beta=5$를 만족시키는 양수 k의 값을 구하시오. 2

이차방정식 $x^2+(1-k)x+k^2=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=-(1-k)=k-1$, $\alpha\beta=k^2$

$\alpha+\beta+\alpha\beta=5$에서 $(k+3)(k-2)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=2$

따라서 양수 k의 값은 2이다.

유형 05 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한 식의 값

중요★

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근 α, β에 대하여

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$이므로 이를 이용하여 식의 값을 구한다.

풍쌤 Point α, β가 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근이면

$a\alpha^2+b\alpha+c=0$, $a\beta^2+b\beta+c=0$

035

이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$의 값을 구하시오. 14

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=1$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^3\beta+\alpha\beta^3&=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)\\&=\alpha\beta\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}\\&=1\times(4^2-2\times1)=14\end{aligned}$$

036

이차방정식 $x^2-12x+9=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$의 값은?

① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{15}$ ✓③ $3\sqrt{2}$

④ $\sqrt{21}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

$\alpha+\beta=12$, $\alpha\beta=9$

이때 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$에서 $\alpha>0$, $\beta>0$이므로

$$\begin{aligned}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2&=\alpha+2\times\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}+\beta\\&=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}\\&=12+2\times3=18\end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=3\sqrt{2}$ $(\therefore \sqrt{\alpha}>0, \sqrt{\beta}>0)$

037

이차방정식 $x^2+3x-2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)$의 값을 구하시오. 19

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-2$

α, β가 이차방정식 $x^2+3x-2=0$의 근이므로 $\alpha^2+3\alpha-2=0$, $\beta^2+3\beta-2=0$

$$\begin{aligned}\therefore (\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)&=\{(\alpha^2+3\alpha-2)-2\alpha+3\}\{(\beta^2+3\beta-2)-2\beta+3\}\\&=(-2\alpha+3)(-2\beta+3)\\&=4\alpha\beta-6(\alpha+\beta)+9\\&=4\times(-2)-6\times(-3)+9=19\end{aligned}$$

038

이차방정식 $x^2-2x-5=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^3-2\alpha^2-3\alpha\beta+5\beta$의 값은?

① 21 ✓② 25 ③ 29

④ 33 ⑤ 37

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-5$

α가 이차방정식 $x^2-2x-5=0$의 근이므로

$\alpha^2-2\alpha-5=0$ $\therefore \alpha^2-2\alpha=5$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^3-2\alpha^2-3\alpha\beta+5\beta&=\alpha(\alpha^2-2\alpha)-3\alpha\beta+5\beta\\&=5\alpha+5\beta-3\alpha\beta\\&=5(\alpha+\beta)-3\alpha\beta\\&=5\times2-3\times(-5)=25\end{aligned}$$

유형 실전 문제

유형 06 두 근에 대한 조건이 주어진 이차방정식

이차방정식의 두 근에 대한 조건이 주어지면 두 근을 다음과 같이 놓고 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

① 두 근의 비가 $m:n$ ➡ $m\alpha,\ n\alpha\ (\alpha\neq0)$
② 한 근이 다른 근의 k배 ➡ $\alpha,\ k\alpha\ (\alpha\neq0)$
③ 두 근의 차가 k ➡ $\alpha,\ \alpha+k$
④ 두 근이 연속인 정수 ➡ $\alpha,\ \alpha+1$ (α는 정수)
⑤ 두 근의 절댓값이 같고 부호가 다름 ➡ $\alpha,\ -\alpha\ (\alpha\neq0)$

풍쌤 Point ③, ④에서 다음을 이용할 수도 있다.
③ 두 근의 차가 k ➡ $\alpha,\ \alpha-k$
④ 두 근이 연속인 정수 ➡ $\alpha,\ \alpha-1$

039

이차방정식 $x^2-15x+k=0$의 두 근의 비가 $2:3$일 때, 실수 k의 값은?

① 30
② 36
③ 42
④ 48
✓⑤ 54

두 근을 $2\alpha,\ 3\alpha\ (\alpha\neq0)$로 놓으면
$2\alpha+3\alpha=15$ ⋯⋯ ㉠, $2\alpha\times3\alpha=k$ ⋯⋯ ㉡
㉠에서 $5\alpha=15$ $\therefore\ \alpha=3$
㉡에서 $k=6\alpha^2=6\times9=54$

040

이차방정식 $x^2-(2k-6)x+k^2-1=0$의 두 근의 차가 4일 때, 실수 k의 값을 구하시오. **1**

두 근을 $\alpha,\ \alpha+4$로 놓으면
$\alpha+(\alpha+4)=2k-6$ ⋯⋯ ㉠, $\alpha(\alpha+4)=k^2-1$ ⋯⋯ ㉡
㉠에서 $2\alpha+4=2k-6$ $\therefore\ \alpha=k-5$
이것을 ㉡에 대입하면 $(k-5)(k-1)=k^2-1$ $\therefore\ k=1$

041

이차방정식 $x^2+(2k-1)x-4k=0$의 두 근이 연속하는 자연수일 때, 실수 k의 값을 구하시오. **-3**

두 근을 $\alpha,\ \alpha+1$ (α는 자연수)로 놓으면
$\alpha+(\alpha+1)=-(2k-1)$ ⋯⋯ ㉠, $\alpha(\alpha+1)=-4k$ ⋯⋯ ㉡
㉠에서 $2\alpha+1=-2k+1$ $\therefore\ \alpha=-k$
이것을 ㉡에 대입하면 $-k(-k+1)=-4k$ $\therefore\ k=0$ 또는 $k=-3$
이때 $\alpha=-k$이고 α는 자연수이므로 구하는 실수 k의 값은 -3이다.

042

x에 대한 이차방정식 $x^2+(k^2+k-6)x+k-1=0$의 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다를 때, 실수 k의 값을 구하시오. **-3**

두 근을 $\alpha,\ -\alpha(\alpha\neq0)$로 놓으면
$\alpha+(-\alpha)=-(k^2+k-6)$ ⋯⋯ ㉠, $\alpha\times(-\alpha)=k-1$ ⋯⋯ ㉡
㉠에서 $k^2+k-6=0,\ (k+3)(k-2)=0$ $\therefore\ k=-3$ 또는 $k=2$ ⋯⋯ ㉢
㉡에서 $-\alpha^2<0$이므로 $k-1<0$ $\therefore\ k<1$ ⋯⋯ ㉣
㉢, ㉣에서 $k=-3$

유형 07 두 수를 근으로 하는 이차방정식

중요★

두 수 $\alpha,\ \beta$를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식
➡ $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

풍쌤 Point 두 수 $\alpha,\ \beta$를 근으로 하고 x^2의 계수가 a인 이차방정식 ➡ $a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$

043

이차방정식 $x^2-4x-6=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $2\alpha+1,\ 2\beta+1$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오. **$x^2-10x-15=0$**

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=-6$
$(2\alpha+1)+(2\beta+1)=2(\alpha+\beta)+2=2\times4+2=10$
$(2\alpha+1)(2\beta+1)=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1$
$=4\times(-6)+2\times4+1=-15$
따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-10x-15=0$

044

이차방정식 $x^2+5x-2=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식은 $2x^2+ax+b=0$이다. 이때 $a-b$의 값은? (단, $a,\ b$는 실수이다.)

✓① -4
② -2
③ 0
④ 2
⑤ 4

$\alpha+\beta=-5,\ \alpha\beta=-2$
$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2},\ \frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}$
이므로 구하는 이차방정식은 $x^2-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}=0$ $\therefore\ 2x^2-5x-1=0$
따라서 $a=-5,\ b=-1$이므로 $a-b=-5-(-1)=-4$

045

이차방정식 $3x^2+x-6=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $1-\frac{1}{\alpha},\ 1-\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 6인 이차방정식은?

① $6x^2-11x+1=0$
✓② $6x^2-11x+2=0$
③ $6x^2+2x-11=0$
④ $6x^2+2x+11=0$
⑤ $6x^2+11x+2=0$

$\alpha+\beta=-\frac{1}{3},\ \alpha\beta=-\frac{6}{3}=-2$

$$\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)+\left(1-\frac{1}{\beta}\right)=2-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=2-\frac{-\frac{1}{3}}{-2}=\frac{11}{6}$$

$$\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)=1-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}=1-\frac{-\frac{1}{3}}{-2}+\frac{1}{-2}=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 이차방정식은
$6\left(x^2-\frac{11}{6}x+\frac{1}{3}\right)=0$ $\therefore\ 6x^2-11x+2=0$

유형 08 이차식의 인수분해

이차식 ax^2+bx+c를 인수분해할 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근 α, β를 이용한다.

➡ $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

풍쌤 Point x에 대한 이차식이 쉽게 인수분해되지 않으면 근의 공식을 이용한다. 계수가 실수인 이차식은 복소수의 범위에서 두 일차식의 곱으로 나타낼 수 있음을 기억하자.

046

이차식 x^2+2x+7을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-1-2\sqrt{2}i)(x-1+2\sqrt{2}i)$
② $(x-1-\sqrt{6}i)(x-1+\sqrt{6}i)$
③ $(x+1-6i)(x+1+6i)$
④ $(x+1-2\sqrt{2}i)(x+1+2\sqrt{2}i)$
✓⑤ $(x+1-\sqrt{6}i)(x+1+\sqrt{6}i)$

이차방정식 $x^2+2x+7=0$에서
$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\times7}=-1\pm\sqrt{6}i$
이므로
$x^2+2x+7=\{x-(-1+\sqrt{6}i)\}\{x-(-1-\sqrt{6}i)\}$
$=(x+1-\sqrt{6}i)(x+1+\sqrt{6}i)$

047

이차식 $x^2-5x+10$을 복소수 범위에서 인수분해하면 $\left(x-\dfrac{a+\sqrt{b}i}{2}\right)\left(x-\dfrac{a-\sqrt{b}i}{2}\right)$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 20

이차방정식 $x^2-5x+10=0$에서
$x=\dfrac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times10}}{2}=\dfrac{5\pm\sqrt{15}i}{2}$이므로
$x^2-5x+10=\left(x-\dfrac{5+\sqrt{15}i}{2}\right)\left(x-\dfrac{5-\sqrt{15}i}{2}\right)$
따라서 $a=5$, $b=15$이므로 $a+b=5+15=20$

048

다음 중에서 이차식 $x^2+6x+16$의 인수인 것은?

① $x-3$
② $x+3-\sqrt{7}$
③ $x+3$
④ $x-3+\sqrt{7}i$
✓⑤ $x+3-\sqrt{7}i$

이차방정식 $x^2+6x+16=0$에서
$x=-3\pm\sqrt{3^2-1\times16}=-3\pm\sqrt{7}i$이므로
$x^2+6x+16=\{x-(-3+\sqrt{7}i)\}\{x-(-3-\sqrt{7}i)\}$
$=(x+3-\sqrt{7}i)(x+3+\sqrt{7}i)$

유형 09 이차방정식의 켤레근

중요★

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서

① 계수 a, b, c가 유리수일 때, 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다.
(단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

② 계수 a, b, c가 실수일 때, 한 근이 $p+qi$이면 다른 한 근은 $p-qi$이다. (단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

풍쌤 Point 켤레근을 이용할 때는 이차방정식의 계수가 모두 유리수 또는 실수라는 조건이 주어져 있는지 확인한다.

049

이차방정식 $x^2-ax-b=0$의 한 근이 $-6-2i$일 때, 실수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오. 28

계수가 모두 실수이므로 다른 한 근은 $-6+2i$이다.
$(-6-2i)+(-6+2i)=a$ $\therefore a=-12$
$(-6-2i)(-6+2i)=-b$, $40=-b$ $\therefore b=-40$
$\therefore a-b=-12-(-40)=28$

050

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ✓⑤ 4

$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=-1+\sqrt{3}$
계수가 모두 유리수이므로 다른 한 근은 $-1-\sqrt{3}$이다.
$(-1+\sqrt{3})+(-1-\sqrt{3})=-a$, $(-1+\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})=b$ $\therefore a=2$, $b=-2$
$\therefore a-b=2-(-2)=4$

051

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $i-2$일 때, 이차방정식 $ax^2+2x+b=0$을 푸시오. (단, a, b는 실수이다.)

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{19}i}{4}$

계수가 모두 실수이므로 다른 한 근은 $-i-2$이다.
$(i-2)+(-i-2)=-a$, $(i-2)(-i-2)=b$ $\therefore a=4$, $b=5$
따라서 이차방정식 $ax^2+2x+b=0$, 즉 $4x^2+2x+5=0$을 풀면
$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times5}}{4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{19}i}{4}$

052

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 $3-\sqrt{5}$일 때, 이차방정식 $x^2+bx+a-b=0$의 두 근을 α, β라 하자. 이때 $\alpha^3+\beta^3$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)

-40

계수가 모두 유리수이므로 다른 한 근은 $3+\sqrt{5}$이다.
$(3-\sqrt{5})+(3+\sqrt{5})=a$ $\therefore a=6$
$(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})=b$ $\therefore b=4$
따라서 이차방정식 $x^2+bx+a-b=0$, 즉 $x^2+4x+2=0$의 두 근이 α, β이므로
$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-4)^3-3\times2\times(-4)=-40$

중단원 점검 문제

01

이차방정식 $x^2-6x+13=0$의 해가 $x=a\pm bi$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① -2　② -1　③ 0

[✓ ④ 1]　⑤ 2

$x=3\pm\sqrt{(-3)^2-1\times13}=3\pm2i$

따라서 $a=3$, $b=2$이므로 $a-b=3-2=1$

02

이차방정식 $3x^2+5x+k=0$의 한 근이 $\frac{1}{3}$일 때, 다른 한 근은?

① -3　[✓ ② -2]　③ -1

④ 0　⑤ 1

이차방정식 $3x^2+5x+k=0$의 한 근이 $\frac{1}{3}$이므로

$3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+5\times\frac{1}{3}+k=0$, $2+k=0$　$\therefore k=-2$

따라서 주어진 이차방정식은 $3x^2+5x-2=0$이므로

$(x+2)(3x-1)=0$　$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

따라서 다른 한 근은 -2이다.

03

어떤 정사각형의 가로의 길이는 2 cm 늘이고, 세로의 길이는 2 cm 줄여서 새로운 직사각형을 만들었다. 만든 직사각형의 넓이가 처음 정사각형의 넓이의 $\frac{3}{4}$일 때, 처음 정사각형의 한 변의 길이를 구하시오.　**4 cm**

처음 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면

새로 만든 직사각형의 넓이가 처음 정사각형의 넓이의 $\frac{3}{4}$이므로

$(x+2)(x-2)=\frac{3}{4}x^2$, $4x^2-16=3x^2$

$x^2-16=0$, $(x+4)(x-4)=0$　$\therefore x=4$ ($\because x>2$)

따라서 처음 정사각형의 한 변의 길이는 4 cm이다.

04 학교 시험 기출

x에 대한 이차방정식 $x^2+(2k-6)x+k^2-3=0$이 허근을 갖지 않도록 하는 정수 k의 최댓값은?

① 0　② 1　[✓ ③ 2]

④ 3　⑤ 4

이차방정식 $x^2+(2k-6)x+k^2-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-3)^2-(k^2-3)=-6k+12$

$\frac{D}{4}\geq0$, $-6k+12\geq0$　$\therefore k\leq2$

따라서 정수 k의 최댓값은 2이다.

05

$k<1$일 때, x에 대한 이차방정식

$x^2+2(k-2)x+k^2-2k+2=0$의 근을 판별하시오.

서로 다른 두 실근

이차방정식 $x^2+2(k-2)x+k^2-2k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2-2k+2)=-2k+2$

이때 $k<1$이므로 $\frac{D}{4}>0$

따라서 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

06

x에 대한 이차식 $2x^2-4kx+k+3$이 완전제곱식이 되도록 하는 실수 k의 값의 합은?

① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ 0

[✓ ④ $\frac{1}{2}$]　⑤ 1

이차방정식 $2x^2-4kx+k+3=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-2(k+3)=0$, $2(k+1)(2k-3)=0$　$\therefore k=-1$ 또는 $k=\frac{3}{2}$

따라서 구하는 실수 k의 값의 합은 $-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

07 실전 Plus

x에 대한 이차방정식 $x^2+2ax+b^2-c^2=0$이 중근을 가질 때, a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인가? (단, a, b, c는 양수이다.)

① 정삼각형

② $b=c$인 이등변삼각형

[✓ ③ 빗변의 길이가 b인 직각삼각형]

④ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

⑤ 둔각삼각형

이차방정식 $x^2+2ax+b^2-c^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(b^2-c^2)=0$　$\therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.

08 교육청 기출

이차방정식 $x^2-3x+5=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha\beta$의 값은?

① 5　② $\frac{15}{2}$　[✓ ③ 10]

④ $\frac{25}{2}$　⑤ 15

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=5$

$\therefore \alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha\beta=\alpha\beta(\alpha+\beta-1)$

$=5\times(3-1)=10$

09

이차방정식 $x^2-2x-6=0$의 두 근을 α, β라 할 때,

$\dfrac{\alpha}{\beta^2-\beta-6}+\dfrac{\beta}{\alpha^2-\alpha-6}$의 값을 구하시오. $-\dfrac{8}{3}$

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-6$

α, β가 이차방정식 $x^2-2x-6=0$의 근이므로

$\alpha^2-\alpha-6=\alpha$, $\beta^2-\beta-6=\beta$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta^2-\beta-6}+\frac{\beta}{\alpha^2-\alpha-6}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{2^2-2\times(-6)}{-6}=-\frac{8}{3}$$

10

이차방정식 $x^2-(m-1)x+3m=0$의 두 근 α, β에 대하여 $\alpha^2+\beta^2=10$일 때, 양수 m의 값을 구하시오. 9

$\alpha+\beta=m-1$, $\alpha\beta=3m$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(m-1)^2-2\times3m=10$

$m^2-8m-9=0$, $(m+1)(m-9)=0$

$\therefore\ m=-1$ 또는 $m=9$

따라서 양수 m의 값은 9이다.

11 학교 시험 기출

이차방정식 $x^2+ax-b=0$의 두 근이 -5, 2일 때, 이차방정식 $bx^2+3x+2a=0$의 두 근의 곱은?

(단, a, b는 상수이다.)

① $-\dfrac{2}{5}$　② $-\dfrac{1}{5}$　③ $\dfrac{1}{5}$

④ $\dfrac{2}{5}$　✓⑤ $\dfrac{3}{5}$

두 근이 -5, 2이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(-5+2)x+(-5)\times2=0$

$\therefore\ x^2+3x-10=0$

따라서 $a=3$, $b=10$이므로 이차방정식 $bx^2+3x+2a=0$, 즉 $10x^2+3x+6=0$의 두 근의 곱은 $\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

12

이차방정식 $x^2-x-3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $-\dfrac{\alpha}{\beta}$, $-\dfrac{\beta}{\alpha}$를 두 근으로 하는 이차방정식은 $3x^2+ax+b=0$이다. 이때 $a+b$의 값은?

(단, a, b는 실수이다.)

① -5　✓② -4　③ -3

④ -2　⑤ -1

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-3$

$$-\frac{\alpha}{\beta}+\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=-\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=-\frac{1^2-2\times(-3)}{-3}=\frac{7}{3}$$

$$-\frac{\alpha}{\beta}\times\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=1$$

이므로 구하는 이차방정식은 $x^2-\dfrac{7}{3}x+1=0$　$\therefore\ 3x^2-7x+3=0$

따라서 $a=-7$, $b=3$이므로 $a+b=-7+3=-4$

13

연주와 상현이가 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 푸는데, 연주는 x의 계수를 잘못 보고 풀어 두 근 1, 3을 얻었고, 상현이는 상수항을 잘못 보고 풀어 두 근 $-1\pm\sqrt{2}$를 얻었다. 처음 이차방정식을 구하시오. $x^2+2x+3=0$

처음 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$이라 하자.

연주는 상수항을 바르게 보고 풀었으므로 $b=1\times3=3$

상현이는 x의 계수를 바르게 보고 풀었으므로

$-a=(-1+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})=-2$　$\therefore\ a=2$

따라서 처음 이차방정식은 $x^2+2x+3=0$이다.

14 실전 Plus

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-7$, $\alpha\beta=4$

일 때, 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 곱은?

① $\dfrac{9}{4}$　② $\dfrac{5}{2}$　③ $\dfrac{11}{4}$

✓④ 3　⑤ $\dfrac{13}{4}$

이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근은 $2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$

$\therefore\ x=\dfrac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\beta-1}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha-1}{2}\times\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}{4}=\frac{4-(-7)+1}{4}=3$$

15

이차식 $\dfrac{1}{2}x^2+x+3$을 복소수 범위에서 인수분해하면 $\dfrac{1}{2}(x+a+\sqrt{b}i)(x+a-\sqrt{b}i)$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 6

이차방정식 $\dfrac{1}{2}x^2+x+3=0$, 즉 $x^2+2x+6=0$에 대하여

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\times6}=-1\pm\sqrt{5}i$

$$\frac{1}{2}x^2+x+3=\frac{1}{2}(x^2+2x+6)=\frac{1}{2}(x+1-\sqrt{5}i)(x+1+\sqrt{5}i)$$

따라서 $a=1$, $b=5$이므로 $a+b=1+5=6$

16 교육청 기출

계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 $2-3i$이고 다른 한 근을 α라 하자. 두 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{1}{\alpha}=a+bi$일 때, $a+b$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-\dfrac{5}{13}$　② $-\dfrac{4}{13}$　③ $-\dfrac{3}{13}$

④ $-\dfrac{2}{13}$　✓⑤ $-\dfrac{1}{13}$

계수가 모두 실수이므로 다른 한 근은 $\alpha=2+3i$

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{2+3i}=\frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$$

따라서 $a=\dfrac{2}{13}$, $b=-\dfrac{3}{13}$이므로

$$a+b=\frac{2}{13}+\left(-\frac{3}{13}\right)=-\frac{1}{13}$$

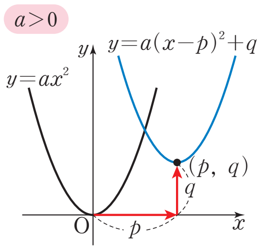
01 이차함수의 그래프

① 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

① 꼭짓점의 좌표: $(p,\ q)$

② 축의 방정식: $x=p$



- $y=a(x-p)^2+q$ 꼴을 표준형이라 한다.

② 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는

$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ 꼴로 고칠 수 있으므로 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{2a}$만큼, y축의 방향으로 $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$만큼 평행이동한 것이다.

참고 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$, 축의 방정식은 $x=-\dfrac{b}{2a}$이다.

- $y=ax^2+bx+c$ 꼴을 일반형이라 한다.

풍쌤 Tip $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 $y=a(x-○)^2+△$ 꼴로 변형하여 그린다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 055쪽

001

이차함수 $f(x)=x^2-4x+5$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $y=f(x)$를 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하시오.

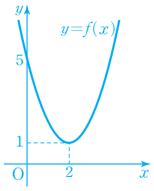
$y=(x-2)^2+1$

(2) $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

$(2,\ 1)$

(3) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식을 구하시오. $x=2$

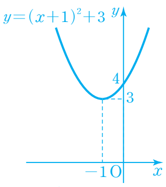
(4) $y=f(x)$의 그래프를 그리시오.



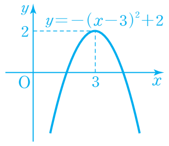
002

다음 이차함수의 그래프를 그리시오.

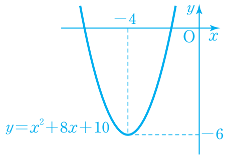
(1) $y=(x+1)^2+3$



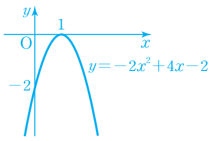
(2) $y=-(x-3)^2+2$



(3) $y=x^2+8x+10$



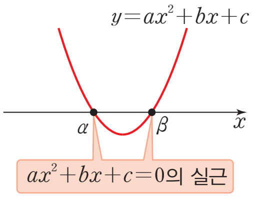
(4) $y=-2x^2+4x-2$



02 이차함수의 그래프와 x축의 교점

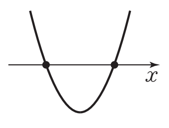
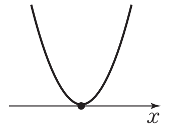
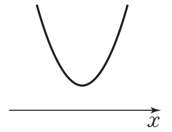
① 이차함수의 그래프와 x축의 교점

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근과 같다.



② 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$의 값의 부호에 따라 다음과 같이 결정된다.

판별식 D	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$의 그래프 $(a>0)$			
$y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	만나지 않는다.

- 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근의 개수와 같다.

풍쌤 Tip $D\geq0$이면 이차함수의 그래프가 x축과 만난다.

- **$ax^2+bx+c=0$의 근의 판별**

$ax^2+bx+c=0$의 판별식이 D일 때,
① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 실근
② $D=0$ ➡ 중근
③ $D<0$ ➡ 서로 다른 두 허근

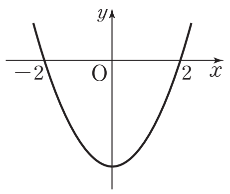
개념 기본 문제

정답과 풀이 055쪽

003

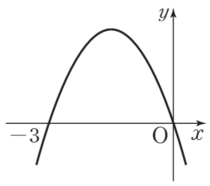
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 다음과 같을 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해를 구하시오.

(1)



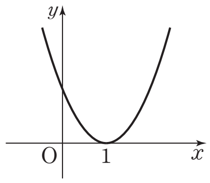
$x=-2$ 또는 $x=2$

(2)



$x=-3$ 또는 $x=0$

(3)



$x=1$

004

다음 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 좌표를 모두 구하시오.

(1) $y=x^2-4x+3$ $(1, 0), (3, 0)$

(2) $y=x^2-3x-28$ $(-4, 0), (7, 0)$

(3) $y=x^2-x+6$ 없다.

(4) $y=4x^2+4x+1$ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

(5) $y=3x^2+2x-2$ $\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}, 0\right), \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}, 0\right)$

(6) $y=-2x^2-8x-4$ $(-2-\sqrt{2}, 0), (-2+\sqrt{2}, 0)$

개념 기본 문제

정답과 풀이 056쪽

005

다음 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구하시오.

(1) $y=x^2+2x-3$ 2

(2) $y=x^2-12x+36$ 1

(3) $y=-2x^2+5x-1$ 2

(4) $y=4x^2-x+3$ 0

006

다음 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 말하시오.

(1) $y=x^2-3x+1$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $y=x^2+8x+16$ 한 점에서 만난다.(접한다.)

(3) $y=-2x^2+x-5$ 만나지 않는다.

(4) $y=-x^2-4x+9$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

007

이차함수 $y=x^2-x+k$의 그래프와 x축의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다. $\boldsymbol{k<\frac{1}{4}}$

이차방정식 $x^2-x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times k=-4k+1$

주어진 이차함수의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로

$-4k+1>0 \quad \therefore k<\frac{1}{4}$

(2) 한 점에서 만난다. $\boldsymbol{k=\frac{1}{4}}$

주어진 이차함수의 그래프와 x축이 한 점에서 만나려면 $D=0$이어야 하므로

$-4k+1=0 \quad \therefore k=\frac{1}{4}$

(3) 만나지 않는다. $\boldsymbol{k>\frac{1}{4}}$

주어진 이차함수의 그래프와 x축이 만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로

$-4k+1<0 \quad \therefore k>\frac{1}{4}$

008

이차함수 $y=4x^2-4kx+k^2+k-3$의 그래프와 x축의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다. $\boldsymbol{k<3}$

이차방정식 $4x^2-4kx+k^2+k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-4(k^2+k-3)=-4k+12$

주어진 이차함수의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$-4k+12>0 \quad \therefore k<3$

(2) 한 점에서 만난다. $\boldsymbol{k=3}$

주어진 이차함수의 그래프와 x축이 한 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$-4k+12=0 \quad \therefore k=3$

(3) 만나지 않는다. $\boldsymbol{k>3}$

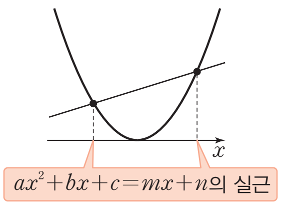
주어진 이차함수의 그래프와 x축이 만나지 않으려면 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$-4k+12<0 \quad \therefore k>3$

03 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

❶ 이차함수의 그래프와 직선의 교점

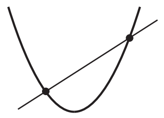
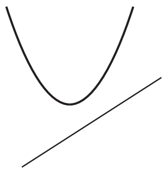
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는 두 식을 연립한 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$의 실근과 같다.



- 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

❷ 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 다음과 같이 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+(c-n)=0$의 판별식 $D=(b-m)^2-4a(c-n)$의 값의 부호에 따라 결정된다.

판별식 D	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계 $(a>0,\ m>0)$	 서로 다른 두 점에서 만난다.	 한 점에서 만난다. (접한다.)	 만나지 않는다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 056쪽

009

다음 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x좌표를 모두 구하시오.

(1) $y=x^2-5x+8$, $y=2x-4$　**3, 4**

이차방정식 $x^2-5x+8=2x-4$에서
$x^2-7x+12=0$, $(x-3)(x-4)=0$　$\therefore x=3$ 또는 $x=4$
따라서 교점의 x좌표는 3, 4이다.

(2) $y=x^2+2x-5$, $y=-x+5$　**-5, 2**

이차방정식 $x^2+2x-5=-x+5$에서
$x^2+3x-10=0$, $(x+5)(x-2)=0$　$\therefore x=-5$ 또는 $x=2$
따라서 교점의 x좌표는 -5, 2이다.

(3) $y=-3x^2-x+2$, $y=4x$　**-2, $\frac{1}{3}$**

이차방정식 $-3x^2-x+2=4x$에서
$3x^2+5x-2=0$, $(x+2)(3x-1)=0$　$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{3}$
따라서 교점의 x좌표는 -2, $\frac{1}{3}$이다.

(4) $y=4x^2+3x$, $y=-3x-\frac{9}{4}$　**$-\frac{3}{4}$**

이차방정식 $4x^2+3x=-3x-\frac{9}{4}$에서 $4x^2+6x+\frac{9}{4}=0$
$16x^2+24x+9=0$, $(4x+3)^2=0$　$\therefore x=-\frac{3}{4}$
따라서 교점의 x좌표는 $-\frac{3}{4}$이다.

010

다음 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수를 구하시오.

(1) $y=x^2-2x+6$, $y=-4x+5$　**1**

이차방정식 $x^2-2x+6=-4x+5$, 즉 $x^2+2x+1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1^2-1\times1=0$
이므로 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 1이다.

(2) $y=-x^2+x-3$, $y=5x-6$　**2**

이차방정식 $-x^2+x-3=5x-6$, 즉 $x^2+4x-3=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-1\times(-3)=7>0$
이므로 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 2이다.

(3) $y=2x^2+1$, $y=-x-2$　**0**

이차방정식 $2x^2+1=-x-2$, 즉 $2x^2+x+3=0$의 판별식을 D라 하면
$D=1^2-4\times2\times3=-23<0$
이므로 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 0이다.

(4) $y=5x^2-4x-2$, $y=x-3$　**2**

이차방정식 $5x^2-4x-2=x-3$, 즉 $5x^2-5x+1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-5)^2-4\times5\times1=5>0$
이므로 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 2이다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 057쪽

011

다음 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 말하시오.

(1) $y=x^2-4x+1,\ y=x-5$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

이차방정식 $x^2-4x+1=x-5$, 즉 $x^2-5x+6=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-5)^2-4\times1\times6=1>0$
이므로 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $y=-x^2+x-6,\ y=2x+1$ 만나지 않는다.

이차방정식 $-x^2+x-6=2x+1$, 즉 $x^2+x+7=0$의 판별식을 D라 하면
$D=1^2-4\times1\times7=-27<0$
이므로 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

(3) $y=x^2+3,\ y=-4x-1$ 한 점에서 만난다.(접한다.)

이차방정식 $x^2+3=-4x-1$, 즉 $x^2+4x+4=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-1\times4=0$
이므로 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다.(접한다.)

(4) $y=2x^2-5x+1,\ y=-x-6$ 만나지 않는다.

이차방정식 $2x^2-5x+1=-x-6$, 즉 $2x^2-4x+7=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-2\times7=-10<0$
이므로 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

012

이차함수 $y=x^2-2x+2$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다. $k>-\frac{1}{4}$

이차방정식 $x^2-2x+2=x+k$, 즉 $x^2-3x+2-k=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-3)^2-4\times1\times(2-k)=4k+1$
서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로
$4k+1>0 \qquad \therefore k>-\frac{1}{4}$

(2) 한 점에서 만난다. $k=-\frac{1}{4}$

한 점에서 만나려면 $D=0$이어야 하므로
$4k+1=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{4}$

(3) 만나지 않는다. $k<-\frac{1}{4}$

만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로
$4k+1<0 \qquad \therefore k<-\frac{1}{4}$

013

이차함수 $y=-x^2+6x-k$의 그래프와 직선 $y=4x-2$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다. $k<3$

이차방정식 $-x^2+6x-k=4x-2$, 즉 $x^2-2x+k-2=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times(k-2)=-k+3$
서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로
$-k+3>0 \qquad \therefore k<3$

(2) 한 점에서 만난다. $k=3$

한 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로
$-k+3=0 \qquad \therefore k=3$

(3) 만나지 않는다. $k>3$

만나지 않으려면 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로
$-k+3<0 \qquad \therefore k>3$

014

이차함수 $y=x^2+4x+k^2$의 그래프와 직선 $y=2kx$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다. $k<1$

이차방정식 $x^2+4x+k^2=2kx$, 즉 $x^2+2(2-k)x+k^2=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(2-k)^2-1\times k^2=-4k+4$
서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로
$-4k+4>0 \qquad \therefore k<1$

(2) 한 점에서 만난다. $k=1$

한 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로
$-4k+4=0 \qquad \therefore k=1$

(3) 만나지 않는다. $k>1$

만나지 않으려면 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로
$-4k+4<0 \qquad \therefore k>1$

유형 실전 문제

정답과 풀이 058쪽

유형 01 이차함수의 그래프와 x축의 교점

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근과 같다.

풍쌤 Point 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근이 α, β일 때,
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

015

이차함수 $y=x^2-3x-40$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는?

① 10 ② 11 ③ 12
✓④ 13 ⑤ 14

이차방정식 $x^2-3x-40=0$에서 $(x+5)(x-8)=0$ $\quad\therefore x=-5$ 또는 $x=8$
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 $(-5, 0)$, $(8, 0)$이므로 두 점 사이의 거리는
$8-(-5)=13$

016

이차함수 $y=-x^2+4x-1$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 α, β일 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ✓⑤ 12

이차방정식 $-x^2+4x-1=0$, 즉 $x^2-4x+1=0$의 두 실근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=1$
$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4^2-4\times1=12$

017

이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 2, 6일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 7 ✓② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, 6이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$2+6=-\frac{a}{2}$, $2\times6=\frac{b}{2}$
따라서 $a=-16$, $b=24$이므로 $a+b=-16+24=8$

018

이차함수 $y=x^2+ax+4a$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 4, b일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. 4

이차방정식 $x^2+ax+4a=0$의 두 근이 4, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$4+b=-a$, $4\times b=4a$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-2$
$\therefore ab=-2\times(-2)=4$

유형 02 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계 중요

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 D를 이용하여 구한다.

풍쌤 Point D의 값의 부호에 따라
① $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $D=0$이면 한 점에서 만난다. (접한다.)
③ $D<0$이면 만나지 않는다.

019

이차함수 $y=x^2+2x+k-1$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 자연수 k의 개수는?

✓① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

이차방정식 $x^2+2x+k-1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1^2-1\times(k-1)=-k+2>0$ $\quad\therefore k<2$
따라서 자연수 k는 1의 1개이다.

020

이차함수 $y=x^2+(k+3)x+k+3$의 그래프가 x축과 접할 때, 양수 k의 값을 구하시오. 1

이차방정식 $x^2+(k+3)x+k+3=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(k+3)^2-4\times1\times(k+3)=k^2+2k-3=0$
$(k+3)(k-1)=0$ $\quad\therefore k=-3$ 또는 $k=1$
따라서 양수 k의 값은 1이다.

021

이차함수 $y=x^2+2kx+k^2-2k-6$의 그래프가 x축과 만나도록 하는 정수 k의 최솟값은?

① -4 ✓② -3 ③ -2
④ -1 ⑤ 0

이차방정식 $x^2+2kx+k^2-2k-6=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=k^2-1\times(k^2-2k-6)=2k+6\geq0$ $\quad\therefore k\geq-3$
따라서 정수 k의 최솟값은 -3이다.

022

이차함수 $y=kx^2-4x+2$의 그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k<-2$ ② $k>-2$ ③ $k<2$
✓④ $k>2$ ⑤ $0<k<2$

이차방정식 $kx^2-4x+2=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-k\times2=-2k+4<0$ $\quad\therefore k>2$

유형 실전 문제

유형 03 이차함수의 그래프와 직선의 교점 중요★

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$의 실근과 같다.

풍쌤 Point 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+(c-n)=0$의 두 실근이 α, β일 때,

$\alpha+\beta=-\frac{b-m}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c-n}{a}$

023

이차함수 $y=x^2+kx-5$의 그래프와 직선 $y=3x+2$가 만나는 두 점의 x좌표의 합이 4일 때, 상수 k의 값을 구하시오. -1

이차함수 $y=x^2+kx-5$의 그래프와 직선 $y=3x+2$가 만나는 점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+kx-5=3x+2$, 즉 $x^2+(k-3)x-7=0$의 실근이다.
이때 두 근의 합이 4이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-(k-3)=4$ $\quad\therefore k=-1$

024

이차함수 $y=-x^2+ax+1$의 그래프와 직선 $y=-x+b$의 두 교점의 x좌표가 -3, -2일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2
② -1
③ 0
✓④ 1
⑤ 2

이차방정식 $-x^2+ax+1=-x+b$, 즉 $x^2-(a+1)x+b-1=0$의 두 근이 -3, -2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-3+(-2)=a+1$, $-3\times(-2)=b-1$
따라서 $a=-6$, $b=7$이므로 $a+b=-6+7=1$

025

이차함수 $y=3x^2-x-a$의 그래프와 직선 $y=bx-4$의 두 교점 중 한 점의 x좌표가 $\sqrt{3}+1$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① 2
② 3
③ 4
✓④ 5
⑤ 6

이차방정식 $3x^2-x-a=bx-4$, 즉 $3x^2-(b+1)x-a+4=0$의 계수가 유리수이고 한 근이 $\sqrt{3}+1$이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{3}+1$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-\frac{-(b+1)}{3}=(\sqrt{3}+1)+(-\sqrt{3}+1)=2$, $\frac{-a+4}{3}=(\sqrt{3}+1)(-\sqrt{3}+1)=-2$
따라서 $a=10$, $b=5$이므로 $a-b=10-5=5$

유형 04 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 중요★

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+(c-n)=0$의 판별식 D를 이용하여 구한다.

풍쌤 Point D의 값의 부호에 따라
① $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $D=0$이면 한 점에서 만난다. (접한다.)
③ $D<0$이면 만나지 않는다.

026

이차함수 $y=x^2+3x+2k+1$의 그래프와 직선 $y=x+3$이 만나지 않도록 하는 정수 k의 최솟값은?

① 1
✓② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

이차방정식 $x^2+3x+2k+1=x+3$, 즉 $x^2+2x+2k-2=0$이 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1^2-1\times(2k-2)=-2k+3<0$ $\quad\therefore k>\frac{3}{2}$
따라서 정수 k의 최솟값은 2이다.

027

이차함수 $y=-x^2-2kx+7$의 그래프와 직선 $y=-2x+k^2$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오. $k<4$

이차방정식 $-x^2-2kx+7=-2x+k^2$, 즉 $x^2+2(k-1)x+k^2-7=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(k-1)^2-1\times(k^2-7)=-2k+8>0$ $\quad\therefore k<4$

028

이차함수 $y=2x^2-x+4$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+2b$의 값을 구하시오. 8

직선의 기울기가 1이므로 $a=1$이고, 이차방정식 $2x^2-x+4=x+b$, 즉 $2x^2-2x+4-b=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\times(4-b)=2b-7=0$ $\quad\therefore b=\frac{7}{2}$
$\therefore a+2b=1+2\times\frac{7}{2}=8$

029

이차함수 $y=2kx^2-5x-1$의 그래프와 직선 $y=3x-6$이 적어도 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하시오. $\frac{8}{5}$

이차방정식 $2kx^2-5x-1=3x-6$, 즉 $2kx^2-8x+5=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-4)^2-2k\times5=-10k+16\geq0$ $\quad\therefore k\leq\frac{8}{5}$
따라서 실수 k의 최댓값은 $\frac{8}{5}$이다.

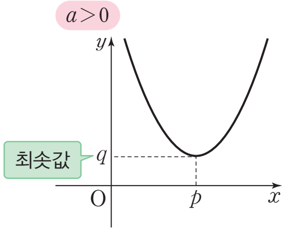
04 이차함수의 최대·최소

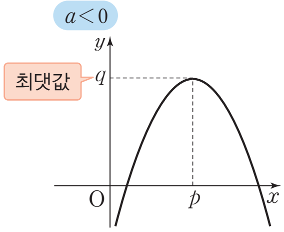
❶ 이차함수의 최대·최소

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는

① $a>0$이면 $x=p$에서 최솟값 q를 갖고, 최댓값은 없다.

② $a<0$이면 $x=p$에서 최댓값 q를 갖고, 최솟값은 없다.





- x의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수는 꼭짓점에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다.

풍쌤 Tip 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최댓값과 최솟값은 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 구한다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 059쪽

030

다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $y=(x+1)^2-2$ 최댓값: 없다., 최솟값: -2

(2) $y=-3(x-2)^2+5$ 최댓값: 5, 최솟값: 없다.

(3) $y=-x^2-5$ 최댓값: -5, 최솟값: 없다.

(4) $y=2x^2+12x+21$ 최댓값: 없다., 최솟값: 3

(5) $y=-3x^2+12x$ 최댓값: 12, 최솟값: 없다.

(6) $y=-4x^2-4x-1$ 최댓값: 0, 최솟값: 없다.

031

다음을 구하시오.

(1) 이차함수 $y=x^2-2x+k$의 최솟값이 1일 때, 실수 k의 값 **2**

$y=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1$

$k-1=1$에서 $k=2$

(2) 이차함수 $y=-x^2+8x-k$의 최댓값이 -6일 때, 실수 k의 값 **22**

$y=-x^2+8x-k=-(x-4)^2-k+16$

$-k+16=-6$에서 $k=22$

(3) 이차함수 $y=2x^2+4kx+5$의 최솟값이 3일 때, 실수 k의 값 **−1 또는 1**

$y=2x^2+4kx+5=2(x+k)^2-2k^2+5$

$-2k^2+5=3$에서 $k^2=1$ $\therefore$ $k=-1$ 또는 $k=1$

032

다음을 구하시오.

(1) 이차함수 $y=x^2+ax+b$가 $x=-2$에서 최솟값 4를 가질 때, 상수 a, b의 값 **$a=4$, $b=8$**

$x^2+ax+b=(x+2)^2+4=x^2+4x+8$

따라서 계수비교법에 의하여 $a=4$, $b=8$

(2) 이차함수 $y=-x^2+ax-b$가 $x=-3$에서 최댓값 3을 가질 때, 상수 a, b의 값 **$a=-6$, $b=6$**

$-x^2+ax-b=-(x+3)^2+3=-x^2-6x-6$

따라서 계수비교법에 의하여 $a=-6$, $b=6$

(3) 이차함수 $y=-4x^2-2ax+4b$가 $x=1$에서 최댓값 8을 가질 때, 상수 a, b의 값 **$a=-4$, $b=1$**

$-4x^2-2ax+4b=-4(x-1)^2+8=-4x^2+8x+4$

따라서 계수비교법에 의하여 $-2a=8$, $4b=4$

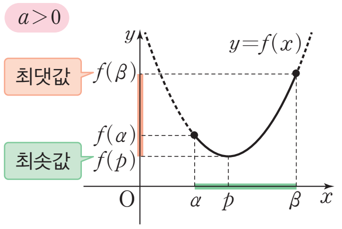
$\therefore$ $a=-4$, $b=1$

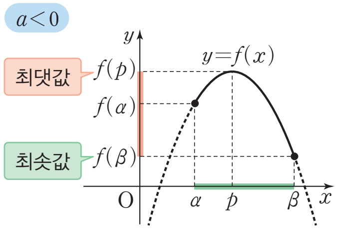
05 제한된 범위에서의 이차함수의 최대·최소

1 제한된 범위에서의 이차함수의 최대·최소

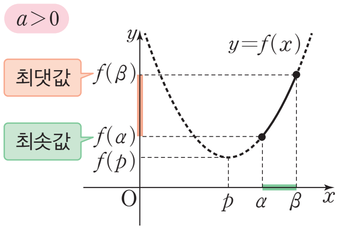
x의 값의 범위가 $\alpha \le x \le \beta$일 때, 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려서 확인한다.

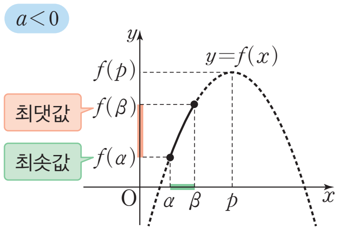
① $\alpha \le p \le \beta$이면 $f(p)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다. ←꼭짓점의 x좌표 p가 x의 값의 범위에 속한다.





② $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$이면 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다. ←꼭짓점의 x좌표 p가 x의 값의 범위에 속하지 않는다.





풍쌤 Tip 제한된 범위에서 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 때는 꼭짓점이 범위에 속하는지 먼저 확인한다.

개념 기본 문제

033

x의 값의 범위가 다음과 같을 때, 이차함수 $f(x)=x^2-2x+3$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $-2 \le x \le -1$ 최댓값: 11, 최솟값: 6

(2) $0 \le x \le 1$ 최댓값: 3, 최솟값: 2

(3) $0 \le x \le 2$ 최댓값: 3, 최솟값: 2

(4) $2 \le x \le 4$ 최댓값: 11, 최솟값: 3

034

x의 값의 범위가 다음과 같을 때, 이차함수 $f(x)=-x^2-4x+2$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $-4 \le x \le -3$ 최댓값: 5, 최솟값: 2

(2) $-3 \le x \le 0$ 최댓값: 6, 최솟값: 2

(3) $0 \le x \le 2$ 최댓값: 2, 최솟값: -10

(4) $1 \le x \le 3$ 최댓값: -3, 최솟값: -19

035

다음 주어진 범위에서 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $f(x)=x^2+6x-1\ (-5\le x\le -2)$

최댓값: -6, 최솟값: -10

(2) $f(x)=-x^2-2x\ (0\le x\le 1)$ **최댓값: 0, 최솟값: -3**

(3) $f(x)=x^2+4x+2\ (-1\le x\le 0)$ **최댓값: 2, 최솟값: -1**

(4) $f(x)=-x^2+8x-16\ (2\le x\le 5)$ **최댓값: 0, 최솟값: -4**

(5) $f(x)=2x^2-4x-6\ (0\le x\le 2)$ **최댓값: -6, 최솟값: -8**

$f(x)=2(x-1)^2-8$에서 꼭짓점의 x좌표 1이 $0\le x\le 2$에 포함되므로
$f(0)=-6,\ f(1)=-8,\ f(2)=-6$
따라서 $x=0$, $x=2$에서 최댓값 -6, $x=1$에서 최솟값 -8을 갖는다.

(6) $f(x)=-3x^2+18x-20\ (2\le x\le 3)$ **최댓값: 7, 최솟값: 4**

$f(x)=-3(x-3)^2+7$에서 꼭짓점의 x좌표 3이 $2\le x\le 3$에 포함되므로
$f(2)=4,\ f(3)=7$
따라서 $x=3$에서 최댓값 7, $x=2$에서 최솟값 4를 갖는다.

(7) $f(x)=-4x^2-2x+2\ \left(-\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{4}\right)$

최댓값: $\frac{9}{4}$, 최솟값: $\frac{5}{4}$

$f(x)=-4\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{4}$에서 꼭짓점의 x좌표 $-\frac{1}{4}$이 $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{4}$에 포함되므로 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=2,\ f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4},\ f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{4}$
따라서 $x=-\frac{1}{4}$에서 최댓값 $\frac{9}{4}$, $x=\frac{1}{4}$에서 최솟값 $\frac{5}{4}$를 갖는다.

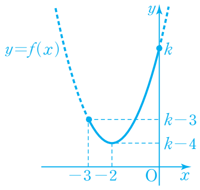
(8) $f(x)=5x^2-6x\ (1\le x\le 2)$ **최댓값: 8, 최솟값: -1**

$f(x)=5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{9}{5}$에서 꼭짓점의 x좌표 $\frac{3}{5}$이 $1\le x\le 2$에 포함되지 않으므로
$f(1)=-1,\ f(2)=8$
따라서 $x=2$에서 최댓값 8, $x=1$에서 최솟값 -1을 갖는다.

036

$-3\le x\le 0$에서 이차함수 $f(x)=x^2+4x+k$의 최솟값이 1일 때, 실수 k의 값을 구하시오. **5**

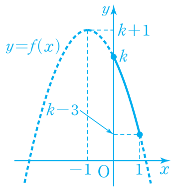
$f(x)=x^2+4x+k=(x+2)^2+k-4$
이므로 $-3\le x\le 0$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이때 꼭짓점의 x좌표 -2가 $-3\le x\le 0$에 포함되므로 최솟값은
$f(-2)=k-4=1\qquad \therefore k=5$



037

$0\le x\le 1$에서 이차함수 $f(x)=-x^2-2x+k$의 최댓값이 4일 때, 실수 k의 값을 구하시오. **4**

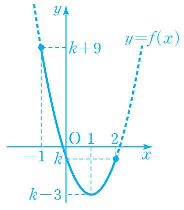
$f(x)=-x^2-2x+k=-(x+1)^2+k+1$
이므로 $0\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이때 꼭짓점의 x좌표 -1이 $0\le x\le 1$에 포함되지 않으므로 최댓값은
$f(0)=k=4$



038

$-1\le x\le 2$에서 이차함수 $f(x)=3x^2-6x+k$의 최솟값이 -4일 때, 실수 k의 값을 구하시오. **-1**

$f(x)=3x^2-6x+k=3(x-1)^2+k-3$
이므로 $-1\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이때 꼭짓점의 x좌표 1이 $-1\le x\le 2$에 포함되므로 최솟값은
$f(1)=k-3=-4\qquad \therefore k=-1$



08 이차함수의 최대·최소의 활용

① 이차함수의 최대·최소의 활용

이차함수의 최대·최소의 활용 문제는 다음 순서로 푼다.

① 변수 x를 정하고, 주어진 조건을 이용하여 x에 대한 이차함수의 식을 세운다.

② x의 값의 범위를 구한다.

③ ②의 범위에서 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

풍쌤 Tip 변수 x가 시간, 길이 등을 나타내면 $x>0$이다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 062쪽

039

지면으로부터 초속 30 m로 똑바로 위로 쏘아 올린 물 로켓의 x초 후의 높이 y m는 $y=30x-5x^2$이라 한다. 이 물 로켓이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이를 구하시오.

45 m

$y=30x-5x^2=-5(x-3)^2+45$

따라서 $x=3$일 때 최댓값이 45이므로 물 로켓이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이는 45 m이다.

040

지면으로부터 2 m의 높이에서 초속 20 m로 똑바로 위로 쏘아 올린 공의 x초 후의 지면으로부터의 높이 y m는 $y=-5x^2+20x+2$라 한다. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이와 그때까지 걸린 시간을 구하시오.

22 m, 2초

$y=-5x^2+20x+2=-5(x-2)^2+22$

따라서 $x=2$일 때 최댓값이 22이므로 공이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이는 22 m이고, 걸린 시간은 2초이다.

041

길이가 52 cm인 끈으로 직사각형을 만들 때, 직사각형의 최대 넓이를 구하시오. 169 cm²

직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면

$2x+2y=52 \qquad \therefore x+y=26$

$y=26-x$이므로 $x>0$, $y>0$에서 $0<x<26$

직사각형의 넓이를 S cm²라 하면

$S=xy=x(26-x)=-x^2+26x=-(x-13)^2+169$

따라서 $x=13$일 때 최댓값 169를 가지므로 직사각형의 최대 넓이는 169 cm²이다.

042

오른쪽 그림과 같이 담장 옆의 직사각형 모양의 텃밭에 길이가 12 m인 철망으로 울타리를 만들려고 한다. 이때 텃밭의 최대 넓이를 구하시오. (단, 담장에는 철망을 사용하지 않고, 철망의 두께는 생각하지 않는다.) 18 m²

텃밭의 세로의 길이를 x m, 가로의 길이를 y m라 하면

$2x+y=12$

$y=12-2x$이므로 $x>0$, $y>0$에서 $0<x<6$

텃밭의 넓이를 S m²라 하면

$S=xy=x(12-2x)=-2x^2+12x=-2(x-3)^2+18$

따라서 $x=3$일 때 최댓값 18을 가지므로 텃밭의 최대 넓이는 18 m²이다.

유형 실전 문제

정답과 풀이 062쪽

유형 05 이차함수의 최대·최소

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는

① $a>0$이면 $x=p$에서 최솟값 q를 갖고, 최댓값은 없다.

② $a<0$이면 $x=p$에서 최댓값 q를 갖고, 최솟값은 없다.

풍쌤 Point x의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수의 최댓값 또는 최솟값은 항상 꼭짓점에서 찾을 수 있다.

043

다음 이차함수 중에서 최솟값이 가장 큰 것은?

√① $y=\frac{1}{2}x^2+x+4$　　② $y=x^2-4x+3$

③ $y=x^2+3$　　④ $y=x^2+2x$

⑤ $y=2x^2+8x-1$

① $y=\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{7}{2}$이므로 최솟값은 $\frac{7}{2}$이다.

② $y=(x-2)^2-1$이므로 최솟값은 -1이다.

③ 최솟값은 3이다.

④ $y=(x+1)^2-1$이므로 최솟값은 -1이다.

⑤ $y=2(x+2)^2-9$이므로 최솟값은 -9이다.

044

이차함수 $f(x)=-x^2-2kx+k-k^2$의 최댓값이 5일 때, $f(-4)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)　4

$f(x)=-x^2-2kx+k-k^2=-(x+k)^2+k$

이때 최댓값이 5이므로 $k=5$

따라서 $f(x)=-(x+5)^2+5$이므로

$f(-4)=-1^2+5=4$

045

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -2, 6일 때, 이차함수 $y=-x^2+ax+b$의 최댓값은? (단, a, b는 실수이다.)

√① -8　　② -4　　③ 0

④ 4　　⑤ 8

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -2, 6이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+6=-a$, $-2\times6=b$

$\therefore a=-4$, $b=-12$

따라서 $y=-x^2-4x-12=-(x+2)^2-8$이므로 최댓값은 -8이다.

046

이차함수 $y=2x^2+12x+6$의 최솟값과 이차함수 $y=-3x^2+6x+k-8$의 최댓값이 같을 때, 실수 k의 값을 구하시오.　-7

$y=2x^2+12x+6=2(x+3)^2-12$이므로 최솟값은 -12이다.

$y=-3x^2+6x+k-8=-3(x-1)^2+k-5$이므로 최댓값은 $k-5$이다.

따라서 $-12=k-5$이므로 $k=-7$

유형 06 제한된 범위에서의 이차함수의 최대·최소

중요

x의 값의 범위가 $\alpha\le x\le\beta$일 때, 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는

① $\alpha\le p\le\beta$이면 $f(p)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

② $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$이면 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

풍쌤 Point $\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값을 구할 때, $x=p$가 주어진 범위에 포함되는지 포함되지 않는지 먼저 살핀다.

047

$-1\le x\le2$에서 이차함수 $f(x)=x^2-2x+2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

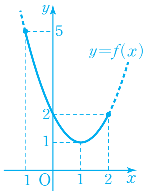
① 2　　② 3　　√③ 4

④ 5　　⑤ 6

$f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

꼭짓점의 x좌표 1이 $-1\le x\le2$에 포함되므로 $x=-1$에서 최댓값 5, $x=1$에서 최솟값 1을 갖는다.

따라서 $M=5$, $m=1$이므로 $M-m=5-1=4$



048

$-2\le x\le0$에서 이차함수 $f(x)=x^2+8x+k$의 최솟값이 -2일 때, $f(x)$의 최댓값은? (단, k는 상수이다.)

① 4　　② 6　　③ 8

√④ 10　　⑤ 12

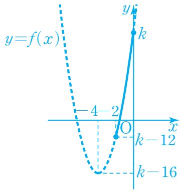
$f(x)=x^2+8x+k=(x+4)^2+k-16$

꼭짓점의 x좌표 -4가 $-2\le x\le0$에 포함되지 않으므로 최솟값은

$f(-2)=k-12=-2$　　$\therefore k=10$

따라서 $f(x)$의 최댓값은

$f(0)=k=10$



049

$-1\le x\le3$에서 이차함수 $f(x)=-x^2+4x+k$의 최댓값과 최솟값의 합이 -3일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

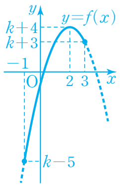
-1

$f(x)=-x^2+4x+k=-(x-2)^2+k+4$

꼭짓점의 x좌표 2가 $-1\le x\le3$에 포함되므로 $x=2$에서 최댓값 $k+4$, $x=-1$에서 최솟값 $k-5$를 갖는다. 즉,

$(k+4)+(k-5)=-3$, $2k-1=-3$

$\therefore k=-1$



유형 실전 문제

정답과 풀이 063쪽

050

$-5\leq x\leq -2$에서 이차함수 $f(x)=-x^2-6x+k$의 최댓값과 최솟값의 차는? (단, k는 실수이다.)

① 3 [✓ ② 4] ③ 5
④ 6 ⑤ 7

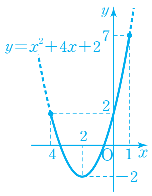
$f(x)=-x^2-6x+k=-(x+3)^2+k+9$
꼭짓점의 x좌표 -3이 $-5\leq x\leq -2$에 포함되므로
$x=-3$에서 최댓값 $k+9$, $x=-5$에서 최솟값 $k+5$를 갖는다.
따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 차는
$k+9-(k+5)=4$

051

이차함수 $y=x^2+4x+k$의 최솟값이 -2일 때, $-k-2\leq x\leq k-1$에서 이 이차함수의 최댓값은?

① 5 ② 6 [✓ ③ 7]
④ 8 ⑤ 9

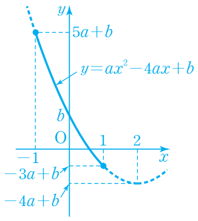
$y=x^2+4x+k=(x+2)^2+k-4$
이때 최솟값이 -2이므로
$k-4=-2$ $\therefore k=2$
따라서 $-4\leq x\leq 1$일 때, $y=x^2+4x+2$는 $x=1$에서 최댓값 7을 갖는다.



052

$-1\leq x\leq 1$에서 이차함수 $y=ax^2-4ax+b$의 최댓값이 $\frac{7}{2}$, 최솟값이 $-\frac{1}{2}$일 때, 실수 a, b에 대하여 $2a-b$의 값을 구하시오. (단, $a>0$) **0**

$y=ax^2-4ax+b=a(x-2)^2-4a+b$
$x=-1$에서 최댓값 $5a+b$, $x=1$에서 최솟값 $-3a+b$를 가지므로
$5a+b=\frac{7}{2}$, $-3a+b=-\frac{1}{2}$ $\therefore a=\frac{1}{2}$, $b=1$
$\therefore 2a-b=2\times\frac{1}{2}-1=0$

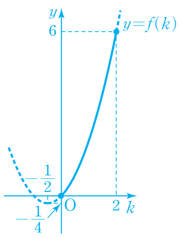


053

이차함수 $y=2x^2+4kx+3k^2+k$의 최솟값을 $f(k)$라 할 때, $0\leq k\leq 2$에서 $f(k)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 4 ② 5 [✓ ③ 6]
④ 7 ⑤ 8

$y=2x^2+4kx+3k^2+k=2(x+k)^2+k^2+k$
이므로 최솟값은 $x=-k$일 때 k^2+k이다.
$\therefore f(k)=k^2+k=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$
$0\leq k\leq 2$일 때, $f(k)$는 $k=2$에서 최댓값 6, $k=0$에서 최솟값 0을 갖는다.
따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은
$6+0=6$



유형 07 이차함수의 최대·최소의 활용

중요

이차함수의 최대·최소의 활용 문제는 다음 순서로 푼다.
① 변수 x를 정해 x에 대한 이차함수의 식을 세운 후, x의 값의 범위를 구한다.
② x의 값의 범위에서 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

풍쌤 Point 주어진 상황에서 어떤 조건을 변수 x로 놓느냐에 따라 보다 간단히 문제를 해결할 수 있다.

054

어느 가수의 공연 관람권의 가격을 x만 원, 일주일 동안의 공연 이익을 y만 원이라 하면 $y=-6x^2+96x+360$인 관계가 성립한다고 한다. 일주일 동안의 공연 이익이 최대가 되도록 할 때, 관람권의 가격을 얼마로 정해야 하는가?

① 7만 원 [✓ ② 8만 원] ③ 9만 원
④ 10만 원 ⑤ 11만 원

$y=-6x^2+96x+360=-6(x-8)^2+744$
따라서 최댓값은 $x=8$일 때 744이므로 일주일 동안의 공연 이익이 최대가 되도록 하려면 관람권의 가격을 8만 원으로 정해야 한다.

055

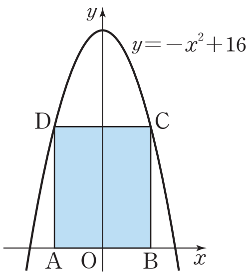
둘레의 길이가 36인 부채꼴의 넓이의 최댓값은?

① 36 ② 49 ③ 64
[✓ ④ 81] ⑤ 100

반지름의 길이를 x, 부채꼴의 넓이를 S라 하면
$S=\frac{1}{2}x(36-2x)=-x^2+18x=-(x-9)^2+81$
따라서 $x=9$일 때 최댓값이 81이므로 부채꼴의 넓이의 최댓값은 81이다.

056

오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD에서 두 꼭짓점 A, B는 x축 위에 있고, 두 꼭짓점 C, D는 이차함수 $y=-x^2+16$의 그래프 위에 있다. 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값을 구하시오. **34** (단, 점 C는 제1사분면 위에 있다.)



점 B의 좌표를 $(a, 0)$ $(0<a<4)$이라 하면
$\overline{\mathrm{AB}}=2a$, $\overline{\mathrm{BC}}=-a^2+16$
직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 l이라 하면
$l=2(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}})=2(2a-a^2+16)=-2(a-1)^2+34$
따라서 $a=1$일 때 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 34이다.

중단원 점검 문제

01

이차함수 $y=x^2+ax-b$의 그래프가 x축과 두 점 $(-3,\ 0)$, $(5,\ 0)$에서 만날 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 10　② 11　③ 12

✓④ 13　⑤ 14

이차방정식 $x^2+ax-b=0$의 두 근이 -3, 5이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+5=-a$, $-3\times5=-b$

따라서 $a=-2$, $b=15$이므로

$a+b=-2+15=13$

02

학교 시험 기출

이차함수 $f(x)=-x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표의 합이 6, 곱이 -8일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. 13

이차함수 $f(x)=-x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표의 합이 6, 곱이 -8이므로 이차방정식 $-x^2+ax+b=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{a}{-1}=6$, $\frac{b}{-1}=-8$　　$\therefore a=6,\ b=8$

따라서 $f(x)=-x^2+6x+8$이므로

$f(1)=-1+6+8=13$

03

이차함수 $y=2x^2+(2k-1)x+k^2-k$의 그래프가 x축에 접할 때, 모든 실수 k의 값의 곱은?

① $-\frac{1}{2}$　✓② $-\frac{1}{4}$　③ 0

④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{2}$

이차방정식 $2x^2+(2k-1)x+k^2-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4\times2\times(k^2-k)=-4k^2+4k+1=0$, 즉

$4k^2-4k-1=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 곱은 $-\frac{1}{4}$이다.

04

이차함수 $y=x^2+2x+2k+3$의 그래프와 x축의 교점이 존재하지 않도록 하는 정수 k의 최솟값은?

① -2　② -1　✓③ 0

④ 1　⑤ 2

이차방정식 $x^2+2x+2k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-1\times(2k+3)=-2k-2<0$　　$\therefore k>-1$

따라서 정수 k의 최솟값은 0이다.

05

이차함수 $y=x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=-x-k$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 점 A의 x좌표가 -1일 때, 점 B의 x좌표는? (단, k는 실수이다.)

① -1　② 0　③ 1

④ 2　✓⑤ 3

이차함수 $y=x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=-x-k$가 만나는 점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-3x+1=-x-k$, 즉 $x^2-2x+k+1=0$의 실근이다.

이때 한 근이 -1이므로 $1+2+k+1=0$　　$\therefore k=-4$

즉, $x^2-2x-3=0$이므로 $(x+1)(x-3)=0$　　$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 점 B의 x좌표는 3이다.

06

실전 Plus

이차함수 $y=-x^2+kx-2$의 그래프와 직선 $y=x-4$의 두 교점의 x좌표의 차가 3일 때, 모든 상수 k의 값의 합은?

① 1　✓② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

이차방정식 $x^2-(k-1)x-2=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k-1$, $\alpha\beta=-2$

$|\alpha-\beta|=3$의 양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=9$, $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9$

$(k-1)^2-4\times(-2)=9$　　$\therefore k=0$ 또는 $k=2$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 $0+2=2$

07

교육청 기출

두 양수 m, n에 대하여 직선 $y=mx+2$가 두 이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2+5$, $y=x^2+4x+n$의 그래프에 동시에 접할 때, $m+n$의 값은?

① 4　✓② 5　③ 6

④ 7　⑤ 8

이차방정식 $\frac{1}{3}x^2+5=mx+2$, 즉 $x^2-3mx+9=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-3m)^2-4\times1\times9=0$　　$\therefore m=2\ (\because m>0)$

이차방정식 $x^2+4x+n=2x+2$, 즉 $x^2+2x+n-2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=1^2-1\times(n-2)=0$　　$\therefore n=3$

$\therefore m+n=2+3=5$

08

이차함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프에 접하고 직선 $y=2x+1$에 평행한 직선의 y절편을 구하시오. -6

구하는 직선의 방정식을 $y=2x+n$ (n은 상수)이라 하면 이차방정식 $x^2-4x+3=2x+n$, 즉 $x^2-6x+3-n=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times(3-n)=n+6=0$　　$\therefore n=-6$

따라서 구하는 직선의 y절편은 -6이다.

중단원 점검 문제

09 **교육청 기출**

이차함수 $y=x^2-2x+9$의 최솟값은?

① 4　② 5　③ 6
④ 7　✓⑤ 8

$y=x^2-2x+9=(x-1)^2+8$
이므로 최솟값은 8이다.

10 **학교 시험 기출**

이차함수 $y=-x^2+ax+b$가 $x=2$에서 최댓값 5를 가질 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① 2　② 3　✓③ 4
④ 5　⑤ 6

이차함수의 최댓값이 $x=2$일 때 5이고, x^2의 계수가 -1이므로
$y=-(x-2)^2+5=-x^2+4x+1$
따라서 $a=4$, $b=1$이므로 $ab=4\times1=4$

11

이차함수 $y=-2x^2+4kx+6k$의 최댓값을 $f(k)$라 할 때, $f(k)$의 최솟값은? (단, k는 실수이다.)

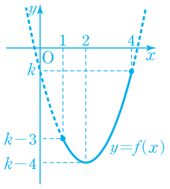
✓① $-\dfrac{9}{2}$　② -4　③ $-\dfrac{7}{2}$
④ -3　⑤ $-\dfrac{5}{2}$

$y=-2x^2+4kx+6k$
$\quad=-2(x-k)^2+2k^2+6k$
이므로 $x=k$에서 최댓값 $2k^2+6k$를 갖는다.
$\therefore f(k)=2k^2+6k=2\left(k+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{2}$
따라서 $f(k)$는 $k=-\dfrac{3}{2}$에서 최솟값 $-\dfrac{9}{2}$를 갖는다.

12

$1\le x\le4$에서 이차함수 $f(x)=x^2-4x+k$의 최댓값이 -1일 때, $f(x)$의 최솟값을 구하시오.

-5　(단, k는 상수이다.)

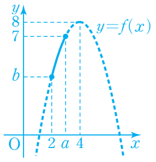


$f(x)=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4$
함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 k를 갖고, 최댓값이 -1이므로
$k=-1$
$x=2$에서 최솟값 $k-4$를 가지므로 구하는 최솟값은
$k-4=-1-4=-5$

13

$2\le x\le a$에서 이차함수 $f(x)=-x^2+8x-8$의 최댓값이 7이고 최솟값이 b일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 4　② 5　③ 6
✓④ 7　⑤ 8

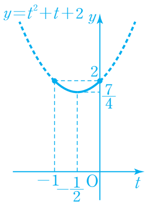


$f(x)=-x^2+8x-8=-(x-4)^2+8$에서
$f(4)=8$이므로 $a<4$
$2\le x\le a$에서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최댓값 7을 가지므로
$-a^2+8a-8=7$　　$\therefore a=3$ ($\because a<4$)
$x=2$에서 최솟값 b를 가지므로 $b=-4+16-8=4$
$\therefore a+b=3+4=7$

14 **실전 Plus**

$0\le x\le1$에서 함수 $y=(x^2-1)^2+(x^2-1)+2$의 최솟값은?

① $\dfrac{3}{4}$　② 1　③ $\dfrac{5}{4}$
④ $\dfrac{3}{2}$　✓⑤ $\dfrac{7}{4}$



$x^2-1=t$로 놓으면 $t=x^2-1$은 $x=1$에서 최댓값 0, $x=0$에서 최솟값 -1을 가지므로 구하는 최솟값은 $-1\le t\le0$에서 함수 $y=t^2+t+2$의 최솟값과 같다.
$y=t^2+t+2=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$이므로 $-1\le t\le0$일 때,
$t=-\dfrac{1}{2}$에서 최솟값 $\dfrac{7}{4}$을 갖는다.

15

지면으로부터 60 cm의 높이에서 초속 50 cm로 똑바로 위로 쏘아 올린 물체의 x초 후의 지면으로부터의 높이 y cm는 $y=-5x^2+50x+60$이라 한다. 이 물체를 쏘아 올린 후 1초부터 4초까지 이 물체가 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이를 구하시오.　**180 cm**

$y=-5x^2+50x+60=-5(x-5)^2+185$
따라서 $1\le x\le4$일 때 $x=4$에서 최댓값 180을 가지므로 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이는 180 cm이다.

16

가로의 길이가 9, 세로의 길이가 13인 직사각형에서 가로의 길이는 x만큼 늘리고, 세로의 길이는 x만큼 줄여서 새로운 직사각형을 만들 때, 새로운 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하시오. (단, $x>0$)　**121**

새로운 직사각형의 가로의 길이는 $9+x$, 세로의 길이는 $13-x$이다. (단, $0<x<13$)
새로운 직사각형의 넓이를 S라 하면
$S=(9+x)(13-x)=-x^2+4x+117=-(x-2)^2+121$
따라서 $0<x<13$일 때 $x=2$에서 최댓값 121을 가지므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 121이다.

01 삼차방정식과 사차방정식의 풀이

① 삼차방정식과 사차방정식

다항식 $f(x)$가 x에 대한 삼차식, 사차식일 때, 방정식 $f(x)=0$을 각각 x에 대한 삼차방정식, 사차방정식이라 한다.

② 인수분해를 이용한 삼·사차방정식의 풀이

방정식 $f(x)=0$을 인수분해한 후 다음을 이용하여 방정식을 푼다.

$ABC=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$ 또는 $C=0$이다.

$ABCD=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$ 또는 $C=0$ 또는 $D=0$이다.

- 일반적으로 복소수의 범위에서 삼차방정식은 3개의 근을 갖고, 사차방정식은 4개의 근을 갖는다.

③ 인수 정리를 이용한 삼·사차방정식의 풀이

① 방정식 $f(x)=0$에서 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 상수 α의 값을 찾는다.

② 조립제법을 이용하여 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ 꼴로 인수분해한 후 방정식을 푼다.

- 인수 정리에 의하여 $f(\alpha)=0$이면 다항식 $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 갖는다.

풍쌤 Tip α의 값을 찾을 때는 $f(x)$의 상수항의 약수부터 먼저 살펴본다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 066쪽

001

인수분해 공식을 이용하여 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^3+1=0$ $x=-1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(2) $x^3-8=0$ $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore$ $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

(3) $x^3+x^2-6x=0$ $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

$x(x+3)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

(4) $x^4-9x^2=0$ $x=-3$ 또는 $x=0$ (중근) 또는 $x=3$

$x^2(x+3)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=0$ (중근) 또는 $x=3$

(5) $81x^4-1=0$ $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=\pm\frac{1}{3}i$

$(9x^2+1)(3x+1)(3x-1)=0$

$\therefore$ $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=\pm\frac{1}{3}i$

(6) $x^4+x^3-x-1=0$ $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$(x-1)(x^2+x+1)(x+1)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

002

인수 정리를 이용하여 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^3+3x^2-4=0$ $x=-2$ (중근) 또는 $x=1$

$(x-1)(x+2)^2=0$

$\therefore$ $x=-2$ (중근) 또는 $x=1$

(2) $x^3-4x^2+x+6=0$ $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

$(x+1)(x-2)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

(3) $x^3-5x^2+5x-1=0$ $x=1$ 또는 $x=2\pm\sqrt{3}$

$(x-1)(x^2-4x+1)=0$

$\therefore$ $x=1$ 또는 $x=2\pm\sqrt{3}$

(4) $x^4+x^3-7x^2-4x+12=0$ $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

$(x-2)(x+2)(x^2+x-3)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

(5) $2x^4+9x^3+9x^2-x-3=0$ $x=-3$ 또는 $x=-1$ (중근) 또는 $x=\frac{1}{2}$

$(x+1)^2(2x-1)(x+3)=0$

$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=-1$ (중근) 또는 $x=\frac{1}{2}$

(6) $3x^4+4x^3+4x^2-8x-3=0$ $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

$(x-1)(3x+1)(x^2+2x+3)=0$

$\therefore$ $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

02 여러 가지 사차방정식의 풀이

❶ 공통부분이 있는 사차방정식

공통부분을 한 문자로 치환한 후 인수분해하여 방정식을 푼다.

❷ $x^4+ax^2+b=0$ 꼴의 방정식

① $x^2=X$로 치환한 후 이차방정식 $X^2+aX+b=0$을 인수분해하여 푼다.

② $X^2+aX+b=0$을 인수분해할 수 없는 경우에는 ax^2을 적당히 나누어 $(\quad)^2-(\quad)^2=0$ 꼴로 변형한 후, 합차 공식으로 인수분해하여 방정식을 푼다.

• 복이차방정식

$x^4+ax^2+b=0$과 같이 차수가 짝수인 항과 상수항으로만 이루어진 방정식

(단, a, b는 상수이다.)

개념 기본 문제

정답과 풀이 067쪽

003

다음 방정식을 푸시오.

(1) $(x^2+3x)(x^2+3x+1)-2=0$ **$x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$**

$(x^2+3x+2)(x^2+3x-1)=0$
$(x+1)(x+2)(x^2+3x-1)=0$
$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

(2) $(x^2-x+6)(x^2-x-2)+15=0$ **$x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$**

$(x^2-x+1)(x^2-x+3)=0$
$\therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$

(3) $(x^2+2x)^2-x^2-2x-12=0$ **$x=-1\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{5}$**

$(x^2+2x+3)(x^2+2x-4)=0$
$\therefore\ x=-1\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{5}$

(4) $(x^2-6x-1)^2-36=0$ **$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=5$ 또는 $x=7$**

$(x^2-6x+5)(x^2-6x-7)=0$
$(x-1)(x-5)(x+1)(x-7)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=5$ 또는 $x=7$

(5) $(x^2-5x)^2+5x^2-25x-6=0$ **$x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\frac{5\pm\sqrt{29}}{2}$**

$(x^2-5x+6)(x^2-5x-1)=0$
$(x-2)(x-3)(x^2-5x-1)=0$
$\therefore\ x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\frac{5\pm\sqrt{29}}{2}$

004

다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^4-13x^2+36=0$ **$x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$**

$(x^2-4)(x^2-9)=0$
$(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)=0$
$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

(2) $x^4+4x^2-5=0$ **$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\pm\sqrt{5}i$**

$(x^2+5)(x^2-1)=0$
$(x^2+5)(x+1)(x-1)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\pm\sqrt{5}i$

(3) $x^4+9x^2+14=0$ **$x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{7}i$**

$(x^2+2)(x^2+7)=0$
$\therefore\ x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{7}i$

005

다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^4+3x^2+4=0$ **$x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$**

$(x^2+2)^2-x^2=0$, $(x^2+x+2)(x^2-x+2)=0$
$\therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

(2) $x^4-7x^2+1=0$ **$x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$**

$(x^2+1)-(3x)^2=0$, $(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)=0$
$\therefore\ x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(3) $x^4-14x^2+25=0$ **$x=-1\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{6}$**

$(x^2-5)^2-(2x)^2=0$, $(x^2+2x-5)(x^2-2x-5)=0$
$\therefore\ x=-1\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{6}$

유형 실전 문제

정답과 풀이 068쪽

유형 01 삼차방정식과 사차방정식의 풀이

중요

① 인수분해 공식을 이용하여 인수분해한 후 방정식을 푼다.
② 인수분해 공식을 이용하기 어려울 때는 인수 정리를 이용하여 인수분해한 후 방정식을 푼다.

풍쌤 Point 삼·사차방정식의 풀이는 인수분해 공식을 이용하든 인수 정리를 이용하든 인수분해를 어떻게 하느냐가 핵심이다.

006

삼차방정식 $x^3+2x^2+x+2=0$의 실근은?

[✓ ① -2] ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

$x^2(x+2)+(x+2)=0$
$(x^2+1)(x+2)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=\pm i$
따라서 주어진 방정식의 실근은 -2이다.

007

삼차방정식 $x^3-2x^2+2x+5=0$의 해가 $x=a$ 또는 $x=\dfrac{b\pm\sqrt{c}i}{2}$일 때, 유리수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오. 13

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면
$(x+1)(x^2-3x+5)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{11}i}{2}$
$\therefore a+b+c=-1+3+11=13$

008

사차방정식 $x^4-x^3-6x^2+14x-12=0$의 모든 실근의 합은?

① -3 ② -2 [✓ ③ -1]
④ 0 ⑤ 1

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면
$(x-2)(x+3)(x^2-2x+2)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm i$
즉, 모든 실근의 합은 $-3+2=-1$

009

사차방정식 $2x^4-x^3+4x^2-8x+3=0$의 서로 다른 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① -10 [✓ ② -5] ③ 1
④ 5 ⑤ 10

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면
$(x-1)(2x-1)(x^2+x+3)=0$
따라서 α, β는 이차방정식 $x^2+x+3=0$의 서로 다른 두 허근이므로
$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=3$
$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\times3=-5$

유형 02 공통부분이 있는 사차방정식

공통부분을 한 문자로 치환하여 그 문자에 대한 방정식으로 변형한 후 인수분해하여 푼다.

풍쌤 Point 공통부분이 바로 나타나지 않으면 공통부분이 생기도록 식을 변형한다.

010

방정식 $(x^2-3x-1)^2=9$의 모든 양의 근의 합은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 [✓ ⑤ 7]

$x^2-3x=X$로 놓으면
$X^2-2X-8=0$, $(X+2)(X-4)=0$
$X=x^2-3x$를 대입하면
$(x^2-3x+2)(x^2-3x-4)=0$
$(x-1)(x-2)(x+1)(x-4)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$
따라서 모든 양의 근의 합은 $1+2+4=7$

011

방정식 $(x^2-2x-4)(x^2-2x-5)-12=0$의 가장 큰 근을 구하시오. 4

$x^2-2x=X$로 놓으면
$X^2-9X+8=0$, $(X-1)(X-8)=0$
$X=x^2-2x$를 대입하면
$(x^2-2x-1)(x^2-2x-8)=0$
$(x^2-2x-1)(x+2)(x-4)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$
따라서 가장 큰 근은 4이다.

012

방정식 $(x^2+4x-10)(x^2+4x+4)-32=0$의 음수인 근은?

① -7 [✓ ② -6] ③ -5
④ -4 ⑤ -3

$x^2+4x=X$로 놓으면
$X^2-6X-72=0$, $(X+6)(X-12)=0$
$X=x^2+4x$를 대입하면
$(x^2+4x+6)(x^2+4x-12)=0$
$(x^2+4x+6)(x+6)(x-2)=0$
$\therefore x=-6$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{2}i$
따라서 음수인 근은 -6이다.

유형 실전 문제

유형 03 $x^4+ax^2+b=0$ 꼴의 방정식

중요★

① $x^2=X$로 치환한 후, 인수분해하여 방정식을 푼다.
② 인수분해되지 않으면 ax^2을 적당히 나누어 합차 공식을 이용하여 방정식을 푼다.

풍쌤 Point 인수분해되지 않을 때, $x^4+(a+k)x^2+b-kx^2$ 꼴에서 $x^4+(a+k)x^2+b$가 완전제곱식이 되도록 k의 값을 정한다.

013

사차방정식 $x^4+4x^2-32=0$의 모든 실근의 곱은?

① -10　② -8　③ -6
✓④ -4　⑤ -2

$x^2=X$로 놓으면 $(X+8)(X-4)=0$
$X=x^2$을 대입하면
$(x^2+8)(x^2-4)=0$, $(x^2+8)(x+2)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\pm 2\sqrt{2}i$
따라서 모든 실근의 곱은 $-2\times 2=-4$

014

사차방정식 $x^4+10x^2+9=0$의 네 근을 a, b, c, d라 할 때, $a^2+b^2+c^2+d^2$의 값은?

✓① -20　② -16　③ 0
④ 16　⑤ 20

$x^2=X$로 놓으면 $(X+1)(X+9)=0$
$X=x^2$을 대입하면 $(x^2+1)(x^2+9)=0$
$\therefore\ x=\pm i$ 또는 $x=\pm 3i$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2+d^2=i^2+(-i)^2+(3i)^2+(-3i)^2$
$=-1+(-1)+(-9)+(-9)=-20$

015

사차방정식 $x^4+2x^2+9=0$의 근이 $x=a\pm\sqrt{b}i$ 또는 $x=-a\pm\sqrt{b}i$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.　3

$(x^4+6x^2+9)-4x^2=0$, $(x^2+3)^2-(2x)^2=0$
$(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)=0$
$\therefore\ x=-1\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}i$
따라서 $a=1$, $b=2$이므로 $a+b=1+2=3$

016

사차방정식 $x^4-20x^2+4=0$의 모든 양의 근의 합을 구하시오.　$2\sqrt{6}$

$(x^4-4x^2+4)-16x^2=0$
$(x^2-2)^2-(4x)^2=0$, $(x^2+4x-2)(x^2-4x-2)=0$
$\therefore\ x=-2\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=2\pm\sqrt{6}$
따라서 양의 근은 $-2+\sqrt{6}$, $2+\sqrt{6}$이므로 그 합은
$(-2+\sqrt{6})+(2+\sqrt{6})=2\sqrt{6}$

유형 04 좌우 대칭 꼴의 방정식

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0\ (a\neq 0)$ 꼴의 방정식은 양변을 x^2으로 나눈 후 $x+\dfrac{1}{x}=X$로 치환하여 푼다.

풍쌤 Point $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$과 같이 중앙에 있는 항을 기준으로 각 항의 계수가 서로 대칭인 방정식을 상반방정식이라 한다.

017

사차방정식 $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$을 푸시오.

$\boldsymbol{x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$

양변을 x^2으로 나누면 $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+5=0$
$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+3=0$
$x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면 $(X-1)(X-3)=0$
$\therefore\ X=1$ 또는 $X=3$
(i) $X=1$일 때, $x^2-x+1=0$　$\therefore\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$
(ii) $X=3$일 때, $x^2-3x+1=0$　$\therefore\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

018

사차방정식 $x^4+3x^3-8x^2+3x+1=0$의 가장 큰 근을 구하시오.　**1**

양변을 x^2으로 나누면 $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-8=0$
$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-10=0$
$x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면 $(X+5)(X-2)=0$
$\therefore\ X=-5$ 또는 $X=2$
(i) $X=-5$일 때, $x^2+5x+1=0$　$\therefore\ x=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$
(ii) $X=2$일 때, $x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$　$\therefore\ x=1$
따라서 가장 큰 근은 1이다.

019

사차방정식 $x^4+5x^3+6x^2+5x+1=0$의 모든 실근의 합은?

① -5　✓② -4　③ -3
④ -2　⑤ -1

양변을 x^2으로 나누면 $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+6=0$
$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+4=0$
$x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면 $(X+1)(X+4)=0$
$\therefore\ X=-1$ 또는 $X=-4$
(i) $X=-1$일 때, $x^2+x+1=0$　$\therefore\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$
(ii) $X=-4$일 때, $x^2+4x+1=0$　$\therefore\ x=-2\pm\sqrt{3}$
따라서 모든 실근의 합은
$(-2-\sqrt{3})+(-2+\sqrt{3})=-4$

유형 05 근이 주어진 삼·사차방정식

중요

방정식의 근이 주어지면 주어진 근을 방정식에 대입하여 미정계수를 구한다.

풍쌤 Point 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 α ➡ $f(\alpha)=0$

020

삼차방정식 $x^3-4x^2+ax+10=0$의 한 근이 1일 때, 나머지 두 근의 합은? (단, a는 상수이다.)

① 0　② 1　③ 2

[✓ ④ 3]　⑤ 4

$x=1$을 대입하여 풀면 $a=-7$이므로

$x^3-4x^2-7x+10=0$

$(x-1)(x+2)(x-5)=0$　$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=5$

따라서 나머지 두 근의 합은 $-2+5=3$

021

삼차방정식 $x^3+ax^2-(3a+b)x-2b-2=0$의 두 근이 -1, 3일 때, 나머지 한 근을 구하시오.　-4

(단, a, b는 상수이다.)

$x=-1$을 대입하면 $-1+a+(3a+b)-2b-2=0$　$\therefore 4a-b=3$　…… ㉠

$x=3$을 대입하면 $27+9a-3(3a+b)-2b-2=0$　$\therefore b=5$　…… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=2$이므로

$x^3+2x^2-11x-12=0$

$(x+1)(x+4)(x-3)=0$　$\therefore x=-4$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 나머지 한 근은 -4이다.

022

사차방정식 $x^4+ax^3+bx-16=0$의 두 근이 1, 2일 때, 나머지 두 근의 곱은? (단, a, b는 상수이다.)

[✓ ① -8]　② -6　③ -4

④ -2　⑤ 0

$x=1$을 대입하면 $1+a+b-16=0$　$\therefore a+b=15$　…… ㉠

$x=2$를 대입하면 $16+8a+2b-16=0$, $8a+2b=0$　$\therefore b=-4a$　…… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=-5$, $b=20$이므로

$x^4-5x^3+20x-16=0$, $(x-1)(x-2)(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

따라서 나머지 두 근은 -2, 4이므로 그 곱은 $-2\times4=-8$

023

사차방정식 $x^4+ax^3-ax^2-7x-6=0$의 한 근이 2일 때, 나머지 세 근 중 두 허근의 합을 구하시오.　-2

(단, a는 상수이다.)

$x=2$를 대입하여 풀면 $a=1$

$x^4+x^3-x^2-7x-6=0$에서 $(x-2)(x+1)(x^2+2x+3)=0$이므로 구하는 두 허근은 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 두 허근의 합은 -2이다.

유형 06 근에 대한 조건이 주어진 삼차방정식

중요

주어진 삼차방정식을 $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)=0$ (α는 실수) 꼴로 변형한 후 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 이용한다.

풍쌤 Point $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 삼차방정식의 근의 조건에 따라 다음을 이용한다.

① 세 실근을 갖는다. ➡ $D\geq0$

② 한 개의 실근과 두 개의 허근을 갖는다. ➡ $D<0$

③ 중근을 갖는다. ➡ $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ 또는 $D=0$

024

삼차방정식 $\underset{f(x)}{\underline{x^3+3x^2+(k+2)x+k}}=0$이 세 실근을 가질 때, 정수 k의 최댓값은?

① -1　② 0　[✓ ③ 1]

④ 2　⑤ 3

$f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$f(x)=(x+1)(x^2+2x+k)$

이때 이차방정식 $x^2+2x+k=0$의 판별식을 D라 하면 $f(x)=0$의 모든 근이 실근이므로

$\frac{D}{4}=1^2-1\times k=-k+1\geq0$　$\therefore k\leq1$

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다.

025

삼차방정식

$$\overset{f(x)}{\overline{x^3+(2k-1)x^2+(k^2-k+2)x-k^2-k-2}}=0$$

이 한 실근과 서로 다른 두 허근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k<-2$　[✓ ② $k>-2$]　③ $k\leq-2$

④ $k\geq-2$　⑤ $-2<k<0$

$f(1)=1+(2k-1)+(k^2-k+2)-k^2-k-2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$f(x)=(x-1)(x^2+2kx+k^2+k+2)$

이때 $f(x)=0$이 한 실근과 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+2kx+k^2+k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-1\times(k^2+k+2)=-k-2<0$　$\therefore k>-2$

026

삼차방정식 $\overset{f(x)}{\overline{x^3-4x^2+(a+4)x-2a}}=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

① -2　② -1　③ 0

[✓ ④ 1]　⑤ 2

$f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$f(x)=(x-2)(x^2-2x+a)$

이때 $(x-2)(x^2-2x+a)=0$이 중근을 갖는 경우는 다음 두 가지이다.

(i) $x^2-2x+a=0$이 중근을 가질 때, 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-a=-a+1=0$　$\therefore a=1$

(ii) $x^2-2x+a=0$의 한 근이 2일 때, $4-4+a=0$　$\therefore a=0$

(i), (ii)에서 구하는 실수 a의 값의 합은 $1+0=1$

03 삼차방정식의 근과 계수의 관계

① 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

① $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$ ← 세 근의 합

② $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$ ← 두 근끼리의 곱의 합

③ $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$ ← 세 근의 곱

② 세 수를 근으로 하는 삼차방정식

α, β, γ를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$$

즉, $x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$

참고 x^3-(세 근의 합)x^2+(두 근끼리의 곱의 합)$x-$(세 근의 곱)$=0$과 같이 생각할 수 있다.

보기 $2x^3+10x^2-x+6=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{10}{2}=-5$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{6}{2}=-3$

개념 기본 문제

027

다음 삼차방정식의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$의 값을 구하시오.

(1) $x^3+5x^2-4x+6=0$

$\alpha+\beta+\gamma=-5$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4$, $\alpha\beta\gamma=-6$

(2) $3x^3+x^2-2x+9=0$

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{1}{3}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\frac{2}{3}$, $\alpha\beta\gamma=-3$

(3) $2x^3-4x^2+6x+7=0$

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{7}{2}$

(4) $4x^3-10x^2-5x-8=0$

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{5}{2}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\frac{5}{4}$, $\alpha\beta\gamma=2$

(5) $x^3-6x^2+3x=0$ $\alpha+\beta+\gamma=6$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=0$

(6) $x^3-8x-2=0$ $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-8$, $\alpha\beta\gamma=2$

(7) $6x^3+x^2-3=0$ $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{1}{6}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, $\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}$

(8) $8x^3+40=0$ $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, $\alpha\beta\gamma=-5$

028

삼차방정식 $x^3+2x^2-x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\alpha+\beta+\gamma$ -2

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ -1

(3) $\alpha\beta\gamma$ -1

(4) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$ -3

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$
$=-1+(-1)+(-2)+1=-3$

(5) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$ 1

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-1}{-1}=1$

(6) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ 6

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=(-2)^2-2\times(-1)=6$

029

삼차방정식 $x^3-4x^2-2x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\alpha+\beta+\gamma$ 4

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ -2

(3) $\alpha\beta\gamma$ 1

(4) $(\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-2)$ 13

$(\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-2)=\alpha\beta\gamma-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+4(\alpha+\beta+\gamma)-8$
$=1-2\times(-2)+4\times4-8=13$

(5) $\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}$ 4

$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{4}{1}=4$

(6) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$ -9

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(4-\gamma)(4-\alpha)(4-\beta)$
$=-\{\alpha\beta\gamma-4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+16(\alpha+\beta+\gamma)-64\}$
$=-\{1-4\times(-2)+16\times4-64\}=-9$

030

다음 세 수를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하시오.

(1) $1,\ 3,\ 5$ $x^3-9x^2+23x-15=0$

주어진 세 수를 α, β, γ라 하면
$\alpha+\beta+\gamma=9$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=23$, $\alpha\beta\gamma=15$

(2) $-2,\ -1,\ 4$ $x^3-x^2-10x-8=0$

주어진 세 수를 α, β, γ라 하면
$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-10$, $\alpha\beta\gamma=8$

(3) $1,\ 0,\ -3$ $x^3+2x^2-3x=0$

주어진 세 수를 α, β, γ라 하면
$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$, $\alpha\beta\gamma=0$

(4) $\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}$ $x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{12}=0$

주어진 세 수를 α, β, γ라 하면
$\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{3}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\frac{1}{4}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{1}{12}$

(5) $2,\ \sqrt{5},\ -\sqrt{5}$ $x^3-2x^2-5x+10=0$

주어진 세 수를 α, β, γ라 하면
$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5$, $\alpha\beta\gamma=-10$

(6) $-1,\ -1+3i,\ -1-3i$ $x^3+3x^2+12x+10=0$

주어진 세 수를 α, β, γ라 하면
$\alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=12$, $\alpha\beta\gamma=-10$

031

삼차방정식 $x^3+3x^2+2x-2=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, 다음을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하시오.

$\alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=2$

(1) $-\alpha,\ -\beta,\ -\gamma$ $x^3-3x^2+2x+2=0$

$-\alpha+(-\beta)+(-\gamma)=-(\alpha+\beta+\gamma)=3$
$-\alpha\times(-\beta)+(-\beta)\times(-\gamma)+(-\gamma)\times(-\alpha)=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$
$-\alpha\times(-\beta)\times(-\gamma)=-\alpha\beta\gamma=-2$

(2) $\alpha-1,\ \beta-1,\ \gamma-1$ $x^3+6x^2+11x+4=0$
$(\alpha-1)+(\beta-1)+(\gamma-1)=(\alpha+\beta+\gamma)-3=-6$
$(\alpha-1)\times(\beta-1)+(\beta-1)\times(\gamma-1)+(\gamma-1)\times(\alpha-1)$
$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2(\alpha+\beta+\gamma)+3=11$
$(\alpha-1)\times(\beta-1)\times(\gamma-1)=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1=-4$

(3) $\dfrac{1}{\alpha},\ \dfrac{1}{\beta},\ \dfrac{1}{\gamma}$ $x^3-x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=0$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=1$, $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{3}{2}$
$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{2}$

(4) $\alpha\beta,\ \beta\gamma,\ \gamma\alpha$ $x^3-2x^2-6x-4=0$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$
$\alpha\beta\times\beta\gamma+\beta\gamma\times\gamma\alpha+\gamma\alpha\times\alpha\beta=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=2\times(-3)=-6$
$\alpha\beta\times\beta\gamma\times\gamma\alpha=(\alpha\beta\gamma)^2=2^2=4$

04 삼차방정식의 켤레근

❶ 삼차방정식의 켤레근

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$에서

① 계수 a, b, c, d가 유리수일 때, 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다. (단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

참고 삼차방정식의 계수가 모두 유리수일 때, 삼차방정식의 두 근이 서로 켤레근이면 나머지 한 근은 유리수이다.

② 계수 a, b, c, d가 실수일 때, 한 근이 $p+qi$이면 다른 한 근은 $p-qi$이다. (단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

참고 삼차방정식의 계수가 모두 실수일 때, 삼차방정식의 두 근이 서로 켤레근이면 나머지 한 근은 실수이다.

- 켤레근은 항상 쌍으로 존재하는 근이다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 074쪽

032

삼차방정식 $x^3-ax^2+bx+1=0$의 한 근이 다음과 같을 때, 유리수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $\sqrt{2}$ $\boldsymbol{a=\frac{1}{2},\ b=-2}$

나머지 한 근을 α라 하면 $a=\alpha+\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=\alpha$

$b=\alpha\times\sqrt{2}+\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})+(-\sqrt{2})\times\alpha=-2$

$-1=\alpha\times\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-2\alpha$

$\alpha=\frac{1}{2}$이므로 $a=\frac{1}{2}$, $b=-2$

(2) $-\sqrt{6}$ $\boldsymbol{a=\frac{1}{6},\ b=-6}$

나머지 한 근을 α라 하면 $a=\alpha+(-\sqrt{6})+\sqrt{6}=\alpha$

$b=\alpha\times(-\sqrt{6})+(-\sqrt{6})\times\sqrt{6}+\sqrt{6}\times\alpha=-6$

$-1=\alpha\times(-\sqrt{6})\times\sqrt{6}=-6\alpha$

$\alpha=\frac{1}{6}$이므로 $a=\frac{1}{6}$, $b=-6$

(3) $1+\sqrt{5}$ $\boldsymbol{a=\frac{9}{4},\ b=-\frac{7}{2}}$

나머지 한 근을 α라 하면 $a=\alpha+(1+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})=\alpha+2$

$b=\alpha\times(1+\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})\times(1-\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})\times\alpha\ \ =2\alpha-4$

$-1=\alpha\times(1+\sqrt{5})\times(1-\sqrt{5})=-4\alpha$

$\alpha=\frac{1}{4}$이므로 $a=\frac{9}{4}$, $b=-\frac{7}{2}$

(4) $-1-\sqrt{3}$ $\boldsymbol{a=-\frac{3}{2},\ b=-3}$

나머지 한 근을 α라 하면 $a=\alpha+(-1-\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})=\alpha-2$

$b=\alpha\times(-1-\sqrt{3})+(-1-\sqrt{3})\times(-1+\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})\times\alpha=-2\alpha-2$

$-1=\alpha\times(-1-\sqrt{3})\times(-1+\sqrt{3})=-2\alpha$

$\alpha=\frac{1}{2}$이므로 $a=-\frac{3}{2}$, $b=-3$

(5) $\sqrt{3}-2$ $\boldsymbol{a=-5,\ b=5}$

나머지 한 근을 α라 하면 $a=\alpha+(\sqrt{3}-2)+(-\sqrt{3}-2)=\alpha-4$

$b=\alpha\times(\sqrt{3}-2)+(\sqrt{3}-2)\times(-\sqrt{3}-2)+(-\sqrt{3}-2)\times\alpha=-4\alpha+1$

$-1=\alpha\times(\sqrt{3}-2)\times(-\sqrt{3}-2)=\alpha$

$\alpha=-1$이므로 $a=-5$, $b=5$

033

삼차방정식 $x^3-x^2+ax+b=0$의 한 근이 다음과 같을 때, 실수 a, b의 값을 구하시오.

(1) i $\boldsymbol{a=1,\ b=-1}$

나머지 한 근을 α라 하면 $1=\alpha+i+(-i)=\alpha$

$a=\alpha\times i+i\times(-i)+(-i)\times\alpha=1$

$-b=\alpha\times i\times(-i)=\alpha$

$\alpha=1$이므로 $a=1$, $b=-1$

(2) $-4i$ $\boldsymbol{a=16,\ b=-16}$

나머지 한 근을 α라 하면 $1=\alpha+(-4i)+4i=\alpha$

$a=\alpha\times(-4i)+(-4i)\times4i+4i\times\alpha=16$

$-b=\alpha\times(-4i)\times4i=16\alpha$

$\alpha=1$이므로 $a=16$, $b=-16$

(3) $3+i$ $\boldsymbol{a=-20,\ b=50}$

나머지 한 근을 α라 하면 $1=\alpha+(3+i)+(3-i)=\alpha+6$

$a=\alpha\times(3+i)+(3+i)\times(3-i)+(3-i)\times\alpha=6\alpha+10$

$-b=\alpha\times(3+i)\times(3-i)=10\alpha$

$\alpha=-5$이므로 $a=-20$, $b=50$

(4) $-1-2i$ $\boldsymbol{a=-1,\ b=-15}$

나머지 한 근을 α라 하면 $1=\alpha+(-1-2i)+(-1+2i)=\alpha-2$

$a=\alpha\times(-1-2i)+(-1-2i)\times(-1+2i)+(-1+2i)\times\alpha=-2\alpha+5$

$-b=\alpha\times(-1-2i)\times(-1+2i)=5\alpha$

$\alpha=3$이므로 $a=-1$, $b=-15$

(5) $-2+\sqrt{3}i$ $\boldsymbol{a=-13,\ b=-35}$

나머지 한 근을 α라 하면 $1=\alpha+(-2+\sqrt{3}i)+(-2-\sqrt{3}i)=\alpha-4$

$a=\alpha\times(-2+\sqrt{3}i)+(-2+\sqrt{3}i)\times(-2-\sqrt{3}i)+(-2-\sqrt{3}i)\times\alpha$

$=-4\alpha+7$

$-b=\alpha\times(-2+\sqrt{3}i)\times(-2-\sqrt{3}i)=7\alpha$

$\alpha=5$이므로 $a=-13$, $b=-35$

05 방정식 $x^3=\pm1$의 허근

① 방정식 $x^3=1$의 허근의 성질

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 하면 (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① $\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

② $\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

③ $\omega^2=\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}$

참고 $\omega^2=\underset{\omega^3=1}{\underbrace{\dfrac{\omega^3}{\omega}=\dfrac{1}{\omega}}}\overset{}{}\underset{\omega\overline{\omega}=1}{\underbrace{=\overline{\omega}}}$

- $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$ 이므로 ω, $\overline{\omega}$는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이다.

② 방정식 $x^3=-1$의 허근의 성질

방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라 하면 (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① $\omega^3=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$

② $\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

③ $\omega^2=-\overline{\omega}=-\dfrac{1}{\omega}$

참고 $\omega^2=\underset{\omega^3=-1}{\underbrace{\dfrac{\omega^3}{\omega}=-\dfrac{1}{\omega}}}\underset{\omega\overline{\omega}=1}{\underbrace{=-\overline{\omega}}}$

- $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$ 이므로 ω, $\overline{\omega}$는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 근이다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 075쪽

034

방정식 $x^3=1$의 허근을 ω라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.
(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

(1) ω^6 1

$\omega^3=1$이므로
$\omega^6=(\omega^3)^{\boxed{2}}=\boxed{1}^2=\boxed{1}$

(2) $\omega+\dfrac{1}{\omega}$ -1

$\omega^2+\omega+1=0$이므로
$\omega+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{\boxed{-\omega}}{\omega}=\boxed{-1}$

(3) $\omega^{10}+\omega^8+1$ 0

$$\begin{aligned}\omega^{10}+\omega^8+1&=(\omega^3)^3\times\omega+(\omega^3)^2\times\omega^2+1\\&=\omega+\omega^2+1\\&=\omega^2+\omega+1=0\end{aligned}$$

035

방정식 $x^3=-1$의 허근을 ω라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

(1) ω^9 1

$\omega^9=(\omega^3)^3=(-1)^3=-1$

(2) $\omega^2-\omega$ -1

$\omega^2-\omega+1=0$이므로 $\omega^2-\omega=-1$

(3) $\omega+\overline{\omega}+1$ 2

$\omega+\overline{\omega}=1$이므로 $\omega+\overline{\omega}+1=1+1=2$

(4) $2\omega^5-2\omega^4+2\omega^3+4$ 4

$$\begin{aligned}2\omega^5-2\omega^4+2\omega^3+4&=2(\omega^5-\omega^4+\omega^3)+4=2(\omega^3\times\omega^2-\omega^3\times\omega+\omega^3)+4\\&=2(-\omega^2+\omega-1)+4=-2(\omega^2-\omega+1)+4=4\end{aligned}$$

(5) $\dfrac{\omega^2}{\overline{\omega}}$ -1

$\dfrac{\omega^2}{\overline{\omega}}=\dfrac{\omega^2}{-\omega^2}=-1$

(6) $\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}$ -1

$\omega^2-\omega+1=0$이고 $\dfrac{1}{\omega^2}=-\omega$이므로
$\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\omega^2-\omega=-1$

유형 실전 문제

유형 07 삼차방정식의 근과 계수의 관계

중요★

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

풍쌤 Point (세 근의 합)$=-\frac{b}{a}$

(두 근끼리의 곱의 합)$=\frac{c}{a}$

(세 근의 곱)$=-\frac{d}{a}$

036

삼차방정식 $x^3-2x^2+6x+4=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)$의 값은?

① 27 ② 28 ③ 29

④ 30 ✓⑤ 31

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=6$, $\alpha\beta\gamma=-4$

$\therefore (3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)=27-9(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=27-9\times2+3\times6-(-4)=31$

037

삼차방정식 $x^3-3x-5=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때,

$\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta^2}$의 값을 구하시오. $\frac{3}{5}$

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$, $\alpha\beta\gamma=5$

$\therefore \frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta^2}=\frac{-\gamma}{\gamma^2}+\frac{-\alpha}{\alpha^2}+\frac{-\beta}{\beta^2}=-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}$

$=-\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{-3}{5}=\frac{3}{5}$

038

삼차방정식 $x^3+x^2+kx-2=0$의 세 근을 α, β, γ라 하자. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=7$일 때, 상수 k의 값은?

① -5 ✓② -3 ③ -1

④ 1 ⑤ 3

$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=k$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=(-1)^2-2k$

즉, $7=1-2k$이므로 $2k=-6$ $\therefore k=-3$

039

삼차방정식 $x^3-4x^2+ax+b=0$의 세 근의 비가 $1:1:2$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 3

세 근을 α, α, 2α $(\alpha\neq0)$라 하면 $4=\alpha+\alpha+2\alpha=4\alpha$ $\therefore \alpha=1$

따라서 세 근은 1, 1, 2이므로 $a=1\times1+1\times2+2\times1=5$

$-b=1\times1\times2=2$ $\therefore b=-2$

$\therefore a+b=5+(-2)=3$

유형 08 세 수를 근으로 하는 삼차방정식

α, β, γ를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$

풍쌤 Point α, β, γ를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 a인 삼차방정식은

$a\{x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma\}=0$

040

삼차방정식 $x^3+5x^2-3x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha+2$, $\beta+2$, $\gamma+2$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은?

✓① $x^3-x^2-11x+19=0$

② $x^3-x^2+11x-19=0$

③ $x^3+x^2-11x+19=0$

④ $x^3+x^2-6x+10=0$

⑤ $x^3+x^2+6x-10=0$

$(\alpha+2)+(\beta+2)+(\gamma+2)=(\alpha+\beta+\gamma)+6=-5+6=1$

$(\alpha+2)\times(\beta+2)+(\beta+2)\times(\gamma+2)+(\gamma+2)\times(\alpha+2)$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+4(\alpha+\beta+\gamma)+12=-3+4\times(-5)+12=-11$

$(\alpha+2)\times(\beta+2)\times(\gamma+2)=\alpha\beta\gamma+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+4(\alpha+\beta+\gamma)+8$

$=-1+2\times(-3)+4\times(-5)+8=-19$

따라서 구하는 삼차방정식은 $x^3-x^2-11x+19=0$이다.

041

삼차방정식 $x^3+2x-8=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하시오. $x^3+2x+8=0$

$(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=2(\alpha+\beta+\gamma)=0$

$(\alpha+\beta)\times(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)\times(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)\times(\alpha+\beta)$

$=-\gamma\times(-\alpha)+(-\alpha)\times(-\beta)+(-\beta)\times(-\gamma)=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$

$(\alpha+\beta)\times(\beta+\gamma)\times(\gamma+\alpha)=-\gamma\times(-\alpha)\times(-\beta)=-\alpha\beta\gamma=-8$

따라서 구하는 삼차방정식은 $x^3+2x+8=0$이다.

042

삼차방정식 $2x^3+4x^2-x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 2인 삼차방정식은 $2x^3+ax^2+bx+c=0$이다. 이때 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

✓① -4 ② -2 ③ 0

④ 2 ⑤ 4

$-\alpha+(-\beta)+(-\gamma)=-(\alpha+\beta+\gamma)=2$

$-\alpha\times(-\beta)+(-\beta)\times(-\gamma)+(-\gamma)\times(-\alpha)=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\frac{1}{2}$

$-\alpha\times(-\beta)\times(-\gamma)=-\alpha\beta\gamma=-\frac{1}{2}$

따라서 구하는 삼차방정식은 $2\left(x^3-2x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)=0$, 즉

$2x^3-4x^2-x+1=0$이므로

$a+b+c=-4+(-1)+1=-4$

정답과 풀이 076쪽

유형 09 삼차방정식의 켤레근

중요

① 계수가 모두 유리수인 삼차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다. ← 무리수 부분의 부호가 반대

(단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

② 계수가 모두 실수인 삼차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 다른 한 근은 $p-qi$이다. ← 허수부분의 부호가 반대

(단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

풍쌤 Point 켤레근을 이용할 때는 반드시 모든 계수가 유리수 또는 실수인지 확인한다.

043

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 두 근이 2, $1+\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b, c에 대하여 $a+b-c$의 값은?

① -5 ② -4 ✓③ -3
④ -2 ⑤ -1

계수가 모두 유리수이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.

$-a=2+(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=4 \qquad \therefore a=-4$

$b=2\times(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})\times(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\times2$

$=2+2\sqrt{2}+(-1)+2-2\sqrt{2}=3$

$-c=2\times(1+\sqrt{2})\times(1-\sqrt{2})=-2 \qquad \therefore c=2$

$\therefore a+b-c=-4+3-2=-3$

044

삼차방정식 $x^3+ax^2+10x-6=0$의 두 근이 b, $\sqrt{6}-2$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① -2 ② 2 ③ 6
✓④ 10 ⑤ 14

계수가 모두 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{6}-2$이다.

$-a=b+(\sqrt{6}-2)+(-\sqrt{6}-2)=b-4 \qquad \therefore a=4-b$ …… ㉠

$10=b\times(\sqrt{6}-2)+(\sqrt{6}-2)\times(-\sqrt{6}-2)+(-\sqrt{6}-2)\times b=-4b-2$ …… ㉡

$6=b\times(\sqrt{6}-2)\times(-\sqrt{6}-2)=-2b$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $b=-3$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $a=4-(-3)=7$

$\therefore a-b=7-(-3)=10$

045

삼차방정식 $x^3+ax^2-9x+b=0$의 한 근이 $-1+\sqrt{2}i$일 때, 이 방정식의 실근은? (단, a, b는 실수이다.)

① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ✓⑤ 6

계수가 모두 실수이므로 다른 한 근은 $-1-\sqrt{2}i$이다.

나머지 한 근을 α라 하면

$-9=\alpha\times(-1+\sqrt{2}i)+(-1+\sqrt{2}i)\times(-1-\sqrt{2}i)+(-1-\sqrt{2}i)\times\alpha$

$=-2\alpha+3$

$-2\alpha=-12 \qquad \therefore \alpha=6$

유형 10 방정식 $x^3=\pm1$의 허근

방정식 $x^3=\pm1$의 한 허근을 ω라 하면

① $\omega^3=\pm1$, $\omega^2\pm\omega+1=0$ (복호동순)

② $\omega+\overline{\omega}=\mp1$, $\omega\overline{\omega}=1$ (복호동순)

③ $\omega^2=\pm\overline{\omega}=\pm\dfrac{1}{\omega}$ (복호동순)

풍쌤 Point ω의 거듭제곱이 주어지면 $\omega^3=\pm1$을 이용하여 식을 간단히 한 후 식의 값을 구한다.

046

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때,

$\dfrac{1}{\omega-1}+\dfrac{1}{\overline{\omega}-1}$의 값을 구하시오. -1

(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \dfrac{1}{\omega-1}+\dfrac{1}{\overline{\omega}-1}=\dfrac{\overline{\omega}-1+\omega-1}{(\omega-1)(\overline{\omega}-1)}=\dfrac{(\omega+\overline{\omega})-2}{\omega\overline{\omega}-(\omega+\overline{\omega})+1}=\dfrac{-1-2}{1-(-1)+1}=-1$

047

방정식 $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때,

$\omega^2+\omega+\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}$의 값은?

① -2 ② -1 ✓③ 0
④ 1 ⑤ 2

$\omega^3=-1$, $\omega\neq0$이므로 $\omega^3=-1$의 양변을 각각 ω, ω^2으로 나누면

$\omega^2=-\dfrac{1}{\omega}$, $\omega=-\dfrac{1}{\omega^2}$

$\therefore \omega^2+\omega+\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}=-\dfrac{1}{\omega}-\dfrac{1}{\omega^2}+\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}=0$

048

방정식 $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때,

$\omega+\omega^2+\cdots+\omega^5$의 값은?

① -3 ② -2 ✓③ -1
④ 0 ⑤ 1

ω는 $x^3=1$, $x^2+x+1=0$의 근이므로 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore \omega+\omega^2+\cdots+\omega^5=\omega(1+\omega+\omega^2)+\omega^3\times\omega+\omega^3\times\omega^2$

$=\omega+\omega^2=-1$

049

방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라 할 때,

$\omega^{30}+2\omega^{20}+\omega^{10}=a\omega+b$를 만족시키는 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 0

ω는 $x^3=-1$, $x^2-x+1=0$의 근이므로 $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$\therefore \omega^{30}+2\omega^{20}+\omega^{10}=(\omega^3)^{10}+2(\omega^3)^6\times\omega^2+(\omega^3)^3\times\omega=2\omega^2-\omega+1$

$=2(\omega^2-\omega+1)+\omega-1=\omega-1$

$\therefore a+b=1+(-1)=0$

08 연립이차방정식

① 연립이차방정식

미지수가 2개인 연립방정식에서 차수가 가장 높은 방정식이 이차방정식인 연립방정식을 연립이차방정식이라 한다.

② $\begin{cases} (\text{일차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases}$ 꼴의 연립이차방정식의 풀이

일차방정식을 한 문자에 대하여 정리한 후 이차방정식에 대입하여 푼다.

③ $\begin{cases} (\text{이차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases}$ 꼴의 연립이차방정식의 풀이

① 두 이차방정식 중에서 인수분해되는 식을 찾아 두 일차식의 곱으로 인수분해한다.

② ①의 두 일차방정식을 다른 이차방정식과 각각 연립하여 $\begin{cases} (\text{일차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases}$ 꼴의 연립방정식으로 바꾸어 푼다.

④ x, y에 대한 대칭식인 연립이차방정식의 풀이

① $x+y=a$, $xy=b$로 놓고, x, y에 대한 연립방정식을 a, b에 대한 연립방정식으로 변형한다.

② ①의 연립방정식을 풀어 a, b의 값을 각각 구한다.

③ x, y를 두 근으로 갖는 t에 대한 이차방정식 $t^2-at+b=0$을 이용하여 x, y의 값을 각각 구한다.

- **x, y에 대한 대칭식**
  x, y를 바꾸어 대입해도 변하지 않는 식

- 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 x, y는 $t^2-at+b=0$의 두 근이다.

개념 기본 문제

050

다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} y=x-1 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면 $x^2+(x-1)^2=5$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y=2 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2-y^2=8 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+2$를 ㉡에 대입하면 $x^2-(-x+2)^2=8$ $\quad\therefore x=3$

$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-y=-3 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2+xy=2 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{7}{2} \end{cases}$

㉠에서 $y=x+3$을 ㉡에 대입하면 $x^2+x(x+3)=2$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{7}{2} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} y=-x-2 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 3xy-y^2=2 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면 $3x\times(-x-2)-(-x-2)^2=2$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$ $\quad\therefore \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} y=2x-1 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ y^2-3x^2=-3 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면 $(2x-1)^2-3x^2=-3$ $\quad\therefore x=2$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} 2x+y=0 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2+xy-2y^2=-18 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=2\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-2\sqrt{2} \end{cases}$

㉠에서 $y=-2x$를 ㉡에 대입하면 $x^2+x\times(-2x)-2\times(-2x)^2=-18$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

$\therefore \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=2\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-2\sqrt{2} \end{cases}$

051

다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$

$\begin{cases} x=\sqrt{10} \\ y=\sqrt{10} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{10} \\ y=-\sqrt{10} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$

$x^2-3xy+2y^2=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x-y)(x-2y)=0 \qquad \therefore x=y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=y$를 $x^2+y^2=20$에 대입하면

$y^2+y^2=20,\ 2y^2=20,\ y^2=10 \qquad \therefore y=\pm\sqrt{10}$

이것을 $x=y$에 대입하면

$y=\sqrt{10}$일 때 $x=\sqrt{10}$, $y=-\sqrt{10}$일 때 $x=-\sqrt{10}$

(ii) $x=2y$를 $x^2+y^2=20$에 대입하면

$(\boxed{2y})^2+y^2=20,\ 5y^2=20,\ y^2=4 \qquad \therefore y=\pm 2$

이것을 $x=2y$에 대입하면

$y=2$일 때 $x=4$, $y=-2$일 때 $x=\boxed{-4}$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{10} \\ y=\sqrt{10} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{10} \\ y=\boxed{-\sqrt{10}} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=\boxed{-2} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+2y^2=33 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2xy-3y^2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$\begin{cases} x=-\sqrt{11} \\ y=\sqrt{11} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{11} \\ y=-\sqrt{11} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

㉡에서 $(x+y)(x-3y)=0 \qquad \therefore x=-y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=-y$를 ㉠에 대입하여 풀면 $x=\mp\sqrt{11}$, $y=\pm\sqrt{11}$ (복호동순)

(ii) $x=3y$를 ㉠에 대입하여 풀면 $x=\pm 3\sqrt{3}$, $y=\pm\sqrt{3}$ (복호동순)

(3) $\begin{cases} x^2-4y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3xy-y^2=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$\begin{cases} x=-4i \\ y=2i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4i \\ y=-2i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \\ y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \\ y=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

㉠에서 $(x+2y)(x-2y)=0 \qquad \therefore x=-2y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=-2y$를 ㉡에 대입하여 풀면 $x=\mp 4i$, $y=\pm 2i$ (복호동순)

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하여 풀면 $x=\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, $y=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (복호동순)

(4) $\begin{cases} 3x^2-y^2=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$\begin{cases} x=0 \\ y=i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=-i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

㉡에서 $x(x-y)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=y$

(i) $x=0$을 ㉠에 대입하여 풀면 $x=0$, $y=\pm i$ (복호동순)

(ii) $x=y$를 ㉠에 대입하여 풀면 $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (복호동순)

052

다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

$x+y=5$, $xy=4$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은 $t^2-5t+4=0$으로 놓을 수 있다.

$t^2-5t+4=0$에서 $(t-1)(t-4)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=\boxed{4}$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\boxed{4} \\ y=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y=-4 \\ xy=-12 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x=-6 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-6 \end{cases}$

x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은

$t^2+4t-12=0$, $(t+6)(t-2)=0$

$\therefore t=-6$ 또는 $t=2$

(3) $\begin{cases} xy=2 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

$x+y=a$, $xy=b$로 놓으면 $a^2=9$이므로

$a=3$, $b=2$ 또는 $a=-3$, $b=2$

(i) $a=3$, $b=2$일 때

x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은

$t^2-3t+2=0$, $(t-1)(t-2)=0 \qquad \therefore t=1$ 또는 $t=2$

(ii) $a=-3$, $b=2$일 때

x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은

$t^2+3t+2=0$, $(t+2)(t+1)=0 \qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=-1$

(4) $\begin{cases} xy=-6 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$

$x+y=a$, $xy=b$로 놓으면 $a^2=1$이므로

$a=1$, $b=-6$ 또는 $a=-1$, $b=-6$

(i) $a=1$, $b=-6$일 때

x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은

$t^2-t-6=0$, $(t+2)(t-3)=0 \qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=3$

(ii) $a=-1$, $b=-6$일 때

x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은

$t^2+t-6=0$, $(t+3)(t-2)=0 \qquad \therefore t=-3$ 또는 $t=2$

07 부정방정식

❶ 부정방정식

방정식의 개수가 미지수의 개수보다 적을 때 해가 무수히 많아 그 해를 정할 수 없는 방정식을 부정방정식이라 한다.

❷ 부정방정식의 풀이

① 정수 조건이 주어진 부정방정식은 (일차식)×(일차식)=(정수) 꼴로 변형하여 푼다.

② 실수 조건이 주어진 부정방정식은 실수 A, B에 대하여 $A^2+B^2=0$이면 $A=0$, $B=0$임을 이용한다.

- 부정방정식은 정수 조건이나 실수 조건 등에 따라 해가 유한개로 확정된다.

보기 방정식 $x+y=3$의 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 …

➡ 방정식의 개수가 미지수의 개수보다 적으므로 해가 무수히 많다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 080쪽

053

다음 방정식을 만족시키는 정수 x, y의 값을 구하시오.

(1) $xy-3y-5=0$ $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

$xy-3y-5=0$에서

$(x-3)y=5$

$1 \quad 5$ ➡ $x-3=1$, $y=5$일 때, $x=4$, $y=5$

$5 \quad 1$ ➡ $x-3=5$, $y=1$일 때, $x=8$, $y=1$

$-1 \quad -5$ ➡ $x-3=-1$, $y=-5$일 때, $x=2$, $y=-5$

$-5 \quad -1$ ➡ $x-3=\boxed{-5}$, $y=-1$일 때, $x=\boxed{-2}$, $y=-1$

따라서 정수 x, y의 값은

$\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\boxed{8} \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=\boxed{-1} \end{cases}$

(2) $xy-4x+y-3=0$ $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$

$xy-4x+y-3=0$에서 $x(y-4)+(y-4)=-1$

$(x+1)(y-4)=-1$

(3) $xy+6x-2y-10=0$

$\begin{cases} x=3 \\ y=-8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=-5 \end{cases}$

$xy+6x-2y-10=0$에서 $x(y+6)-2(y+6)=-2$

$(x-2)(y+6)=-2$

(4) $xy+2x-25=0$ $\begin{cases} x=1 \\ y=23 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=25 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=-27 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-25 \\ y=-3 \end{cases}$

$xy+2x-25=0$에서 $x(y+2)=25$

054

다음 방정식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오.

(1) $x^2+y^2-2x-4y+5=0$ $x=1$, $y=2$

$x^2+y^2-2x-4y+5=0$에서

$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)=0$

$(x-1)^2+(\boxed{y-2})^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$x-1=0$, $y-2=\boxed{0}$

$\therefore x=1$, $y=\boxed{2}$

(2) $x^2+y^2+6x+9=0$ $x=-3$, $y=0$

$(x^2+6x+9)+y^2=0$에서 $(x+3)^2+y^2=0$

이때 x, y가 실수이므로 $x=-3$, $y=0$

(3) $x^2+4y^2+10x-12y+34=0$ $x=-5$, $y=\frac{3}{2}$

$(x^2+10x+25)+(4y^2-12y+9)=0$에서 $(x+5)^2+(2y-3)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로 $x=-5$, $y=\frac{3}{2}$

(4) $2x^2+y^2+2xy+2x-2y+5=0$ $x=-2$, $y=3$

$y^2+2(x-1)y+2x^2+2x+5=0$에서

$y^2+2(x-1)y+(x^2-2x+1)+(x^2+4x+4)=0$

$(x+y-1)^2+(x+2)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로 $x+y-1=0$, $x+2=0$

$\therefore x=-2$, $y=3$

유형 실전 문제

정답과 풀이 081쪽

유형 11 연립이차방정식 − $\begin{cases} (\text{일차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases}$

중요★

일차방정식을 한 문자에 대하여 정리한 후 이차방정식에 대입하여 푼다.

풍쌤 Point 연립방정식 $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$의 근이 연립방정식 $\begin{cases} C=0 \\ D=0 \end{cases}$을 만족시키면 연립방정식 $\begin{cases} A=0 \\ C=0 \end{cases}$, $\begin{cases} A=0 \\ D=0 \end{cases}$도 만족시킨다.

055

연립방정식 $\begin{cases} x+y=5 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2+y^2=53 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$을 만족시키는 x, y에 대하여 $|x-y|$의 값은?

① 5　② 6　③ 7

④ 8　[✓ ⑤ 9]

㉠에서 $y=-x+5$를 ㉡에 대입하면

$x^2+(-x+5)^2=53$, $(x+2)(x-7)=0$　$\therefore x=-2$ 또는 $x=7$

따라서 $\begin{cases} x=-2 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=7 \\ y=-2 \end{cases}$이므로 $|x-y|=9$

056

연립방정식 $\begin{cases} y=2x+2 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2+xy=1 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$의 정수인 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은?

[✓ ① −1]　② 0　③ 1

④ 2　⑤ 3

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2+x(2x+2)=1$, $(x+1)(3x-1)=0$　$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

이것을 각각 ㉠에 대입하면 $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{8}{3} \end{cases}$

$\therefore \alpha+\beta=-1+0=-1$

057

연립방정식 $\begin{cases} x^2-2y^2=2 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x-y=-3 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 최솟값을 구하시오.　-17

㉡에서 $y=x+3$을 ㉠에 대입하면

$x^2-2(x+3)^2=2$, $(x+10)(x+2)=0$　$\therefore x=-10$ 또는 $x=-2$

$\therefore \begin{cases} x=-10 \\ y=-7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$

따라서 $\alpha+\beta$의 최솟값은 -17이다.

058

연립방정식 $\begin{cases} x-y=a \\ xy-2y^2=b \end{cases}$의 한 근이 $x=3$, $y=4$일 때, 나머지 한 근은? (단, a, b는 상수이다.)

① $x=6$, $y=5$　② $x=-6$, $y=5$

③ $x=6$, $y=-5$　[✓ ④ $x=-6$, $y=-5$]

⑤ $x=-5$, $y=-6$

연립방정식에 $x=3$, $y=4$를 대입하면

$a=3-4=-1$, $b=3\times4-2\times4^2=-20$

$\begin{cases} x-y=-1 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ xy-2y^2=-20 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉠에서 $y=x+1$　$\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x(x+1)-2(x+1)^2=-20$

$(x+6)(x-3)=0$　$\therefore x=-6$ 또는 $x=3$

이것을 ㉢에 대입하면 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$

따라서 나머지 한 근은 $x=-6$, $y=-5$이다.

059

연립방정식 $\begin{cases} x+y=-4 \\ ax-y=-6 \end{cases}$의 근이 연립방정식 $\begin{cases} x^2-xy+y^2=31 \\ 2x-3y=b \end{cases}$를 만족시킬 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 최댓값은?

① 2　② 4　[✓ ③ 6]

④ 8　⑤ 10

주어진 두 연립방정식의 근은 $\begin{cases} x+y=-4 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2-xy+y^2=31 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$의 근과 같다.

㉠에서 $y=-x-4$를 ㉡에 대입하면 $x^2-x(-x-4)+(-x-4)^2=31$

$(x+5)(x-1)=0$　$\therefore x=-5$ 또는 $x=1$

$\therefore \begin{cases} x=-5 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-5 \end{cases}$

(ⅰ) $x=-5$, $y=1$일 때, $ax-y=-6$, $2x-3y=b$에 대입하면

$-5a-1=-6$, $-10-3=b$　$\therefore a=1$, $b=-13$

(ⅱ) $x=1$, $y=-5$일 때, $ax-y=-6$, $2x-3y=b$에 대입하면

$a+5=-6$, $2+15=b$　$\therefore a=-11$, $b=17$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a+b$의 최댓값은 $-11+17=6$

060

연립방정식 $\begin{cases} x-2y=-4 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2-y^2=k & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$가 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 실수 k의 값을 구하시오.　$-\frac{16}{3}$

㉠에서 $x=2y-4$를 ㉡에 대입하면

$(2y-4)^2-y^2=k$, $3y^2-16y+16-k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-8)^2-3\times(16-k)=3k+16$

이때 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$3k+16=0$　$\therefore k=-\frac{16}{3}$

유형 실전 문제

유형 12 연립이차방정식 – $\begin{cases}(\text{이차식})=0\\(\text{이차식})=0\end{cases}$

중요★

한 이차식을 인수분해하여 얻은 두 일차방정식을 다른 이차방정식에 각각 대입하여 푼다.

풍쌤 Point 두 이차방정식 중에서 보통 상수항이 없는 이차방정식을 인수분해한다.

061

연립방정식 $\begin{cases}x^2+2xy+y^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\x^2+y^2=8 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$의 해가

$\begin{cases}x=a\\y=b\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=c\\y=d\end{cases}$일 때, $a-b+c-d$의 값은?

① -4 ② -2 ✓③ 0

④ 2 ⑤ 4

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x+y)^2=0$ $\therefore x=-y$

이것을 ㉡에 대입하면 $2y^2=8$ $\therefore y=\pm2$

연립방정식의 해는 $\begin{cases}x=-2\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases}$이므로

$a-b+c-d=-2-2+2-(-2)=0$

062

연립방정식 $\begin{cases}x^2-xy=9 & \cdots\cdots ㉠\\4x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값은?

✓① -45 ② -30 ③ -15

④ 0 ⑤ 15

㉡의 좌변을 인수분해하면 $(2x+y)(2x-y)=0$ $\therefore y=-2x$ 또는 $y=2x$

(i) $y=-2x$를 ㉠에 대입하면 $x^2-x\times(-2x)=9$ $\therefore x=\pm\sqrt{3}$

$\therefore \begin{cases}x=\sqrt{3}\\y=-2\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\y=2\sqrt{3}\end{cases}$

(ii) $y=2x$를 ㉠에 대입하면 $x^2-x\times2x=9$, $x^2=-9$ $\therefore x=\pm3i$

$\therefore \begin{cases}x=3i\\y=6i\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-3i\\y=-6i\end{cases}$

(i), (ii)에서 $\alpha^2+\beta^2=3+12=15$ 또는 $\alpha^2+\beta^2=-9+(-36)=-45$

따라서 $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값은 -45이다.

063

연립방정식 $\begin{cases}x^2-4xy+3y^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\y^2+3xy=64 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$를 만족시키는 정수 x, y에 대하여 xy의 값을 구하시오. **16**

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x-y)(x-3y)=0$ $\therefore x=y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면 $y^2+3y\times y=64$ $\therefore y=\pm4$

$\therefore \begin{cases}x=4\\y=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-4\\y=-4\end{cases}$

(ii) $x=3y$를 ㉡에 대입하면 $y^2+3\times3y\times y=64$ $\therefore y=\pm\frac{4\sqrt{10}}{5}$

$\therefore \begin{cases}x=\frac{12\sqrt{10}}{5}\\y=\frac{4\sqrt{10}}{5}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\frac{12\sqrt{10}}{5}\\y=-\frac{4\sqrt{10}}{5}\end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 정수 x, y는 $x=4$, $y=4$ 또는 $x=-4$, $y=-4$이므로 $xy=16$

064

연립방정식 $\begin{cases}3x^2+2xy-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\x^2+xy-2y^2=-14 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$를 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2

④ 3 ✓⑤ 4

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(3x-y)(x+y)=0$ $\therefore y=3x$ 또는 $x=-y$

(i) $y=3x$를 ㉡에 대입하면 $x^2+x\times3x-2\times(3x)^2=-14$ $\therefore x=\pm1$

$\therefore \begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}$

(ii) $x=-y$를 ㉡에 대입하면 $(-y)^2+(-y)\times y-2y^2=-14$ $\therefore y=\pm\sqrt{7}$

$\therefore \begin{cases}x=-\sqrt{7}\\y=\sqrt{7}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\sqrt{7}\\y=-\sqrt{7}\end{cases}$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는 4개이므로 순서쌍 (x, y)의 개수는 4이다.

065

연립방정식 $\begin{cases}x^2+2y^2=12 & \cdots\cdots ㉠\\x^2-2y^2=-xy & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+2y$의 최댓값은?

① 3 ✓② 6 ③ 9

④ 12 ⑤ 15

㉡에서 $x^2+xy-2y^2=0$, $(x-y)(x+2y)=0$ $\therefore x=y$ 또는 $x=-2y$

(i) $x=y$를 ㉠에 대입하면 $y^2+2y^2=12$ $\therefore y=\pm2$

$\therefore \begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=-2\end{cases}$

(ii) $x=-2y$를 ㉠에 대입하면 $(-2y)^2+2y^2=12$ $\therefore y=\pm\sqrt{2}$

$\therefore \begin{cases}x=-2\sqrt{2}\\y=\sqrt{2}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\sqrt{2}\\y=-\sqrt{2}\end{cases}$

(i), (ii)에서 $x=2$, $y=2$일 때, $x+2y=6$
$x=-2$, $y=-2$일 때, $x+2y=-6$
$x=-2\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$일 때, $x+2y=0$
$x=2\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$일 때, $x+2y=0$

따라서 $x+2y$의 최댓값은 6이다.

066

각 자리의 숫자의 제곱의 합이 5이고, 십의 자리의 숫자의 제곱은 일의 자리의 숫자의 제곱의 4배인 두 자리의 자연수를 구하시오. **21**

십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면

$\begin{cases}x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉠\\x^2=4y^2 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉡에서 $x^2-4y^2=0$, $(x+2y)(x-2y)=0$ $\therefore x=-2y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=-2y$를 ㉠에 대입하면 $(-2y)^2+y^2=5$ $\therefore y=\pm1$

$\therefore \begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$

(ii) $x=2y$를 ㉠에 대입하면 $(2y)^2+y^2=5$ $\therefore y=\pm1$

$\therefore \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$

(i), (ii)에서 x, y는 자연수이어야 하므로 구하는 두 자리의 자연수는 21이다.

유형 13 대칭식으로 이루어진 연립이차방정식

x, y에 대한 대칭식인 연립이차방정식은 다음 순서로 푼다.

① $x+y=a$, $xy=b$로 놓고 주어진 연립방정식을 a, b에 대한 연립방정식으로 변형하여 푼다.

② x, y가 이차방정식 $t^2-at+b=0$의 두 근임을 이용하여 x, y의 값을 각각 구한다.

풍쌤 Point 주어진 연립방정식에서 x^2+y^2 꼴 등이 포함된 경우에는 곱셈 공식을 이용하여 $x+y=a$, $xy=b$에 대한 식으로 변형한다.

067

연립방정식 $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=-24 \end{cases}$를 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)를 모두 구하시오. $(-8, 3)$, $(3, -8)$

x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은

$t^2+5t-24=0$에서 $(t+8)(t-3)=0$

$\therefore t=-8$ 또는 $t=3$

따라서 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=-8 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-8 \end{cases}$이므로 순서쌍 (x, y)는 $(-8, 3)$, $(3, -8)$이다.

068

연립방정식 $\begin{cases} x+y=7 \\ xy-2(x+y)=-2 \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $x-y$의 최댓값은?

✓① 1　　② 2　　③ 3

④ 4　　⑤ 5

$x+y=a$, $xy=b$로 놓으면 $\begin{cases} a=7 & \cdots\cdots ㉠ \\ b-2a=-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면 $b-14=-2$　　$\therefore b=12$

x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은

$t^2-7t+12=0$에서 $(t-3)(t-4)=0$　　$\therefore t=3$ 또는 $t=4$

따라서 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$이므로 $x-y$의 최댓값은 $4-3=1$

069

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x+y+xy=-1 \end{cases}$을 만족시키는 x, y에 대하여 $|x-y|$의 최솟값은?

① 1　　✓② 2　　③ 3

④ 4　　⑤ 5

$x+y=a$, $xy=b$로 놓으면 $\begin{cases} a^2-2b=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ a+b=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $a=-b-1$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=-4$, $b=3$ 또는 $a=2$, $b=-3$

x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은

(i) $a=-4$, $b=3$일 때, $t^2+4t+3=0$에서 $t=-3$ 또는 $t=-1$

(ii) $a=2$, $b=-3$일 때, $t^2-2t-3=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=3$

(i), (ii)에서 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

따라서 $|x-y|$의 최솟값은 $|-3-(-1)|=|-1-(-3)|=2$

유형 14 부정방정식

① 정수 조건: (일차식)×(일차식)=(정수) 꼴로 변형하여 푼다.

② 실수 조건: 실수 A, B에 대하여 $A^2+B^2=0$이면 $A=0$, $B=0$임을 이용한다.

풍쌤 Point 실수 조건이 주어진 부정방정식에서 $A^2+B^2=0$ 꼴로 정리되지 않는 경우에는 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후, 이차방정식의 판별식 D에 대하여 $D\geq 0$임을 이용한다.

070

방정식 $xy-5x+y+2=0$을 만족시키는 정수 x, y에 대하여 $x+y$의 최댓값은?

① 2　　② 4　　③ 6

④ 8　　✓⑤ 10

$x(y-5)+(y-5)=-7$에서 $(x+1)(y-5)=-7$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=12 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-8 \\ y=6 \end{cases}$

따라서 $x+y$의 최댓값은 $x=-2$, $y=12$ 또는 $x=6$, $y=4$일 때 10이다.

071

방정식 $xy+3x-4y-21=0$을 만족시키는 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하시오. 6

$x(y+3)-4(y+3)=9$에서 $(x-4)(y+3)=9$

$\therefore \begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=7 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=13 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-12 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-4 \end{cases}$

따라서 순서쌍 (x, y)의 개수는 6이다.

072

방정식 $5x^2+4y^2+4xy-4x+1=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x-y$의 값은?

① 0　　② $\frac{1}{4}$　　③ $\frac{1}{2}$

✓④ $\frac{3}{4}$　　⑤ 1

$(4x^2-4x+1)+(x^2+4xy+4y^2)=0$에서 $(2x-1)^2+(x+2y)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로 $2x-1=0$, $x+2y=0$

즉, $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{4}$　　$\therefore x-y=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$

073

방정식 $x^2+2y^2+2xy+4x+2y+5=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하시오. -2

$x^2+2(y+2)x+2y^2+2y+5=0$　　$\cdots\cdots$ ㉠

x가 실수이므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(y+2)^2-(2y^2+2y+5)=-y^2+2y-1\geq 0$에서 $(y-1)^2\leq 0$

이때 y는 실수이므로 $y=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $x^2+6x+9=0$, $(x+3)^2=0$　　$\therefore x=-3$

$\therefore x+y=-3+1=-2$

중단원 점검 문제

01

사차방정식 $x^4-27x^2=0$을 푸시오.

$x=-3\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3\sqrt{3}$

$x^2(x^2-27)=0$에서 $x^2(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})=0$이므로
$x=-3\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3\sqrt{3}$

02

삼차방정식 $x^3-4x^2-7x+10=0$의 실근 중에서 가장 작은 근은?

① -3 ✓② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면
$(x-1)(x^2-3x-10)=0$, $(x-1)(x+2)(x-5)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=5$
따라서 가장 작은 근은 -2이다.

03

방정식 $(x^2+x)^2-8(x^2+x-3)-12=0$의 모든 양의 근의 합은?

✓① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

$x^2+x=X$로 놓으면
$X^2-8X+12=0$, $(X-2)(X-6)=0$
$X=x^2+x$를 대입하면
$(x^2+x-2)(x^2+x-6)=0$, $(x+2)(x-1)(x+3)(x-2)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$
따라서 모든 양의 근의 합은 $1+2=3$

04 학교 시험 기출

방정식 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-8=0$의 모든 근의 곱은?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ✓⑤ 16

$\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}-8=0$
$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-8=0$
$x^2-5x=X$로 놓으면
$X^2+10X+16=0$, $(X+8)(X+2)=0$ $\therefore X=-8$ 또는 $X=-2$
$X=-8$일 때, $x^2-5x+8=0$이므로 두 근의 곱은 8
$X=-2$일 때, $x^2-5x+2=0$이므로 두 근의 곱은 2
따라서 모든 근의 곱은 $8\times2=16$

05

사차방정식 $x^4-26x^2+25=0$의 모든 음의 근의 합은?

① -8 ② -7 ✓③ -6
④ -5 ⑤ -4

$x^2=X$로 놓으면
$X^2-26X+25=0$, $(X-1)(X-25)=0$
$X=x^2$을 대입하면
$(x^2-1)(x^2-25)=0$, $(x+1)(x-1)(x+5)(x-5)=0$
$\therefore x=-5$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=5$
따라서 모든 음의 근의 합은 $-5+(-1)=-6$

06

사차방정식 $x^4-10x^2+16=0$의 네 근을 a, b, c, d라 할 때, $ab+cd$의 값은? (단, $a<b<c<d$)

① 5 ② 6 ③ 7
✓④ 8 ⑤ 9

$x^2=X$로 놓으면
$X^2-10X+16=0$, $(X-2)(X-8)=0$
$X=x^2$을 대입하면
$(x^2-2)(x^2-8)=0$, $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})=0$
$\therefore x=-2\sqrt{2}$ 또는 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$ 또는 $x=2\sqrt{2}$
$\therefore ab+cd=-2\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})+\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4+4=8$

07

사차방정식 $x^4-2x^3-6x^2-2x+1=0$의 근이 $x=a$ 또는 $x=b\pm\sqrt{c}$일 때, $a-b-c$의 값을 구하시오. -6

(단, a, b, c는 0이 아닌 유리수이다.)

양변을 x^2으로 나누면 $x^2-2x-6-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-8=0$
$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면 $X^2-2X-8=0$ $\therefore X=-2$ 또는 $X=4$
(i) $X=-2$일 때, $x+\frac{1}{x}=-2$, $(x+1)^2=0$ $\therefore x=-1$
(ii) $X=4$일 때, $x+\frac{1}{x}=4$, $x^2-4x+1=0$ $\therefore x=2\pm\sqrt{3}$
$\therefore a-b-c=-1-2-3=-6$

08 실전 Plus

사차방정식 $3x^4-8x^3+3x^2-8x+3=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

✓① $-\frac{17}{9}$ ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{13}{9}$
④ $-\frac{11}{9}$ ⑤ -1

양변을 x^2으로 나누면 $3x^2-8x+3-\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}=0$, $3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-8\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$
$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면 $3X^2-8X-3=0$ $\therefore X=-\frac{1}{3}$ 또는 $X=3$
(i) $X=-\frac{1}{3}$일 때, $3x^2+x+3=0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.
(ii) $X=3$일 때, $x^2-3x+1=0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(i), (ii)에서 α, β는 이차방정식 $3x^2+x+3=0$의 두 근이므로
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\frac{1}{3}\right)^2-2\times1=-\frac{17}{9}$

09

교육청 기출

x에 대한 삼차방정식

$$\overbrace{x^3-(2a+1)x^2+(a+1)^2x-(a^2+1)}^{f(x)}=0$$

의 서로 다른 두 허근을 α, β라 하자. $\alpha+\beta=8$일 때, $\alpha\beta$의 값은? (단, a는 실수이다.)

① 16 [✓ ② 17] ③ 18

④ 19 ⑤ 20

$f(x)=(x-1)(x^2-2ax+a^2+1)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2-2ax+a^2+1)=0$이므로 α, β는 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+1=0$의 서로 다른 두 허근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a=8$ $\quad\therefore a=4$

$\therefore \alpha\beta=a^2+1=16+1=17$

10

사차방정식 $x^4-(2a+3)x^2+2(a-1)x+4a=0$이 실근만을 가질 때, 실수 a의 최솟값을 구하시오. $-\frac{1}{8}$

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면 주어진 방정식은

$(x+1)(x-1)(x^2+x-2a)=0$

이차방정식 $x^2+x-2a=0$이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times1\times(-2a)=8a+1\geq0$ $\quad\therefore a\geq-\frac{1}{8}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $-\frac{1}{8}$이다.

11

방정식 $(x+1)(x-2)(x-4)=7$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$의 값은?

① 19 ② 20 [✓ ③ 21]

④ 22 ⑤ 23

$x^3-5x^2+2x+1=0$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=5$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=5^2-2\times2=21$

12

학교 시험 기출

삼차방정식 $x^3-16x^2+4ax-12b=0$의 세 근의 비가 $1:3:4$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 23 ② 24 ③ 25

④ 26 [✓ ⑤ 27]

세 근을 α, 3α, 4α $(\alpha\neq0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$16=\alpha+3\alpha+4\alpha=8\alpha$ $\quad\therefore \alpha=2$

따라서 세 근은 2, 6, 8이므로

$4a=2\times6+6\times8+8\times2=76$ $\quad\therefore a=19$

$12b=2\times6\times8=96$ $\quad\therefore b=8$

$\therefore a+b=19+8=27$

13

실전 Plus

x^3의 계수가 1인 삼차식 $f(x)$에 대하여 $f(1)=f(2)=f(3)=1$이 성립할 때, 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱을 구하시오. 5

1, 2, 3을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(1+2+3)x^2+(1\times2+2\times3+3\times1)x-1\times2\times3=0$

$\therefore x^3-6x^2+11x-6=0$

즉, $f(x)-1=x^3-6x^2+11x-6$이므로

$f(x)=x^3-6x^2+11x-5$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 5이다.

14

교육청 기출

삼차방정식 $x^3+2x-3=0$의 한 허근을 $a+bi$라 할 때, a^2b^2의 값은? (단, a, b는 실수이고, $i=\sqrt{-1}$이다.)

[✓ ① $\frac{11}{16}$] ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{13}{16}$

④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{15}{16}$

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면 $(x-1)(x^2+x+3)=0$이므로 허근 $a+bi$는 이차방정식 $x^2+x+3=0$의 근이다.

다른 한 근은 $a-bi$이므로 $-1=(a+bi)+(a-bi)=2a$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$

$3=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$에서 $\left(-\frac{1}{2}\right)^2+b^2=3$, $b^2=\frac{11}{4}$

$\therefore a^2b^2=\frac{1}{4}\times\frac{11}{4}=\frac{11}{16}$

15

방정식 $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\frac{1}{\omega^{20}+\omega^{10}}$의 값을 구하시오. -1

$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 $x^3=1$, $x^2+x+1=0$의 근이므로 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$$\therefore \frac{1}{\omega^{20}+\omega^{10}}=\frac{1}{(\omega^3)^6\times\omega^2+(\omega^3)^3\times\omega}=\frac{1}{\omega^2+\omega}=\frac{1}{-1}=-1$$

16

방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^3+\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2+\omega+\frac{1}{\omega}$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0

④ 1 [✓ ⑤ 3]

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

따라서 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로 $\omega^2-\omega+1=0$

이때 $\omega\neq0$이므로 위의 식의 양변을 ω로 나누면

$\omega-1+\frac{1}{\omega}=0$ $\quad\therefore \omega+\frac{1}{\omega}=1$

$\therefore \left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^3+\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2+\omega+\frac{1}{\omega}=1^3+1^2+1=3$

중단원 점검 문제

17

어떤 정육면체의 밑면의 가로, 세로의 길이를 각각 2, 4씩 늘이고, 높이를 2만큼 줄여서 직육면체를 만들었더니 부피가 35가 되었다. 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는?

✓① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x라 하면
$(x+2)(x+4)(x-2)=35$, $x^3+4x^2-4x-51=0$
조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면 $(x-3)(x^2+7x+17)=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=\frac{-7\pm\sqrt{19}i}{2}$
이때 x는 실수이어야 하므로 구하는 모서리의 길이는 3이다.

18 교육청 기출

연립방정식 $\begin{cases} x-y=-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x^2+y^2=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.　3

㉠에서 $y=x+5$　$\cdots\cdots$ ㉢
㉢을 ㉡에 대입하면 $4x^2+(x+5)^2=20$, $x^2+2x+1=0$
$(x+1)^2=0$　$\therefore x=-1$
이것을 ㉢에 대입하면 $\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$
따라서 $\alpha=-1$, $\beta=4$이므로 $\alpha+\beta=-1+4=3$

19 실전 Plus

연립방정식 $\begin{cases} 2x-y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2y=a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$가 실근을 갖도록 하는 실수 a의 최솟값은?

① -11　✓② -10　③ -9
④ -8　⑤ -7

㉠에서 $y=2x-3$을 ㉡에 대입하면
$x^2+2(2x-3)=a$, $x^2+4x-a-6=0$
주어진 연립방정식이 실근을 가지려면 위의 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-1\times(-a-6)=a+10\geq 0$　$\therefore a\geq -10$

20

각 자리의 숫자의 제곱의 합이 58인 두 자리의 자연수가 있다. 일의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자를 바꾼 수가 처음 수보다 36만큼 클 때, 처음 수를 구하시오.　37

처음 두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면
$\begin{cases} x^2+y^2=58 & \cdots\cdots ㉠ \\ 10y+x=10x+y+36 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉡에서 $y=x+4$이므로 ㉠에 대입하면 $x^2+(x+4)^2=58$, $2x^2+8x-42=0$
$(x+7)(x-3)=0$　$\therefore x=-7$ 또는 $x=3$
$\therefore \begin{cases} x=-7 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases}$
이때 x, y는 자연수이므로 구하는 처음 수는 37이다.

21 학교 시험 기출

연립방정식 $\begin{cases} x^2+xy-3y^2=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-4xy+3y^2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 xy의 값은?

① -4　② $-\frac{4}{3}$　③ 0
✓④ $\frac{4}{3}$　⑤ 4

㉡의 좌변을 인수분해하면 $(x-y)(x-3y)=0$　$\therefore x=y$ 또는 $x=3y$
(i) $x=y$를 ㉠에 대입하여 풀면 $\begin{cases} x=2i \\ y=2i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2i \\ y=-2i \end{cases}$
(ii) $x=3y$를 ㉠에 대입하여 풀면 $\begin{cases} x=2 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases}$
이때 x, y는 실수이므로 $x=2$, $y=\frac{2}{3}$ 또는 $x=-2$, $y=-\frac{2}{3}$　$\therefore xy=\frac{4}{3}$

22

두 이차방정식 $x^2+kx-3=0$, $x^2+(k-2)x+1=0$이 오직 하나의 공통근을 가질 때, 상수 k의 값은?

① $-\frac{5}{2}$　② -2　③ $-\frac{3}{2}$
④ -1　✓⑤ $-\frac{1}{2}$

두 이차방정식의 공통근을 α라 하면 $\begin{cases} \alpha^2+k\alpha-3=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+(k-2)\alpha+1=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠$-$㉡을 하면 $2\alpha-4=0$　$\therefore \alpha=2$
이것을 ㉠에 대입하면 $2^2+2k-3=0$, $2k+1=0$　$\therefore k=-\frac{1}{2}$

23

$x+y=a$, $xy=b$로 놓으면 $\begin{cases} a^2-b=7 & \cdots\cdots ㉠ \\ ab=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠을 ㉡에 대입하여 풀면 $a=-2$ 또는 $a=-1$ 또는 $a=3$

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ x^2y+xy^2=6 \end{cases}$을 만족시키는 정수 x, y에 대하여 $x-y$의 최댓값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　✓⑤ 5

x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은
(i) $a=-2$, $b=-3$일 때, $t^2+2t-3=0$　$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$
(ii) $a=-1$, $b=-6$일 때, $t^2+t-6=0$　$\therefore t=-3$ 또는 $t=2$
(iii) $a=3$, $b=2$일 때, $t^2-3t+2=0$　$\therefore t=1$ 또는 $t=2$
(i)~(iii)에서 $x-y$의 최댓값은 $x=2$, $y=-3$일 때 5이다.

24

방정식 $x^2-xy+x-y+4=0$을 만족시키는 정수 x, y에 대하여 $x+y$의 최솟값을 구하시오.　-11

$(x+1)x-(x+1)y=-4$, $(x+1)(x-y)=-4$
$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-6 \end{cases}$
따라서 $x+y$의 최솟값은 $x=-5$, $y=-6$일 때 -11이다.

01 부등식 기본

① 부등식의 기본 성질

세 실수 a, b, c에 대하여

① $a>b$, $b>c$이면 $a>c$

② $a>b$이면 $a+c>b+c$, $a-c>b-c$

③ $a>b$, $c>0$이면 $ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

④ $a>b$, $c<0$이면 $ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

② 일차부등식의 풀이

부등식 $ax>b$의 해는

① $a>0$일 때, $x>\frac{b}{a}$

② $a<0$일 때, $x<\frac{b}{a}$

③ $a=0$일 때, $\begin{cases} b\geq 0\text{이면 해는 없다.(불능)} \\ b<0\text{이면 해는 모든 실수이다.(부정)} \end{cases}$

- 부등식의 양변에 곱하거나 나누는 수가 음수이면 부등호의 방향이 바뀐다.

- **일차부등식**

모든 항을 좌변으로 이항하여 정리했을 때, 좌변이 x에 대한 일차식인 부등식

보기 일차부등식 $3x<9$의 해는 $x<3$

개념 기본 문제

정답과 풀이 089쪽

001

$a<0<b$일 때, 다음 □ 안에 알맞은 부등호를 써넣으시오.

(1) $a-1\boxed{<}b-1$

(2) $3a\boxed{<}3b$

(3) $-\frac{a}{2}\boxed{>}-\frac{b}{2}$

(4) $-\frac{5}{8}a+10\boxed{>}-\frac{5}{8}b+10$

(5) $2a\boxed{<}a+b$

(6) $a-b\boxed{<}0$

(7) $ab\boxed{<}b^2$

(8) $1\boxed{>}\frac{b}{a}$

002

다음 부등식을 푸시오.

(1) $x-2\geq 4x+7$ $x\leq -3$

(2) $2(2x+1)+3>3x-5$ $x>-10$

(3) $x+\frac{-x+3}{2}<\frac{3x}{4}-\frac{3}{2}$ $x>12$

003

다음 x에 대한 부등식을 푸시오.

(1) $ax>3$ $a>0$일 때 $x>\frac{3}{a}$, $a<0$일 때 $x<\frac{3}{a}$, $a=0$일 때 해는 없다.

(2) $a(-x+5)-6\leq a-2$
$a>0$일 때 $x\geq\frac{4a-4}{a}$, $a<0$일 때 $x\leq\frac{4a-4}{a}$, $a=0$일 때 해는 모든 실수

(3) $a(x-a)+2\geq x+a$
$a>1$일 때 $x\geq a+2$, $a<1$일 때 $x\leq a+2$, $a=1$일 때 해는 모든 실수

02 연립일차부등식

❶ 연립부등식

① 연립부등식: 두 개 이상의 부등식을 한 쌍으로 묶어서 나타낸 것

② 연립일차부등식: 각각의 부등식이 일차부등식인 연립부등식

③ 연립부등식의 해: 각 부등식의 공통인 해

❷ 연립일차부등식의 풀이

① 각 부등식의 해를 구한 후 수직선 위에 함께 나타낸다.

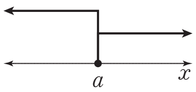
② 공통부분을 찾아 연립부등식의 해를 구한다.

❸ $A<B<C$ 꼴의 일차부등식

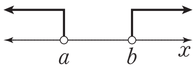
$A<B<C$ 꼴의 부등식은 $\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$ 꼴의 연립부등식으로 바꾸어 푼다.

❹ 특수한 해를 갖는 연립일차부등식

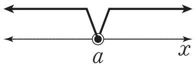
① 해가 한 개인 경우: $\begin{cases}x\le a\\x\ge a\end{cases}$ ➡ $x=a$



② 해가 없는 경우: (ⅰ) $\begin{cases}x<a\\x>b\end{cases}$ $(a<b)$ ➡ 해는 없다.



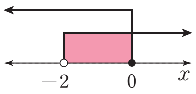
(ⅱ) $\begin{cases}x\le a\\x>a\end{cases}$ ➡ 해는 없다.



- 연립부등식의 해는 각 부등식을 동시에 만족시키는 미지수의 값 또는 범위이다.

보기 $\begin{cases}x>-2\\x\le 0\end{cases}$의 해

➡



➡ $-2<x\le 0$

풍쌤 Tip 부등식의 해를 수직선 위에 나타낼 때는 경계의 수를 포함하는지 잘 살핀다.

- $a<b$일 때,
$\begin{cases}x<a\\x>b\end{cases}$, $\begin{cases}x\le a\\x>b\end{cases}$, $\begin{cases}x<a\\x\ge b\end{cases}$, $\begin{cases}x\le a\\x\ge b\end{cases}$
의 해는 없다.

- $\begin{cases}x\le a\\x>a\end{cases}$, $\begin{cases}x<a\\x\ge a\end{cases}$, $\begin{cases}x<a\\x>a\end{cases}$의 해는 없다.

개념 기본 문제

004

다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases}x+3\le 5\\x-1>-4\end{cases}$ $-3<x\le 2$

(2) $\begin{cases}-x>0\\3x-2<1\end{cases}$ $x<0$

(3) $\begin{cases}2x\ge x-2\\4\ge x-1\end{cases}$ $-2\le x\le 5$

(4) $\begin{cases}-3x+2>-2x+3\\x-4<3x+8\end{cases}$ $-6<x<-1$

(5) $\begin{cases}4(x+1)-7>2(x-2)+7\\0.1x\ge 0.7\end{cases}$ $x\ge 7$

(6) $\begin{cases}\dfrac{1-x}{5}\le 1\\\dfrac{x-6}{2}\le -1\end{cases}$ $-4\le x\le 4$

$\frac{1-x}{5}\le 1$에서 $1-x\le 5$ $\therefore x\ge -4$

$\frac{x-6}{2}\le -1$에서 $x-6\le -2$ $\therefore x\le 4$

(7) $\begin{cases}0.2x-0.5\le x-1.3\\\dfrac{x}{5}\le 0.6\end{cases}$ $1\le x\le 3$

$0.2x-0.5\le x-1.3$에서 $-8x\le -8$ $\therefore x\ge 1$

$\frac{x}{5}\le 0.6$에서 $x\le 3$

(8) $\begin{cases}0.4-\dfrac{x}{2}>0.6x+\dfrac{2}{5}\\0.2(x+1)\ge -\left(\dfrac{2x}{5}+4.6\right)\end{cases}$ $-8\le x<0$

$0.4-\frac{x}{2}>0.6x+\frac{2}{5}$에서 $4-5x>6x+4$ $\therefore x<0$

$0.2(x+1)\ge -\left(\frac{2x}{5}+4.6\right)$에서 $x+1\ge -2x-23$ $\therefore x\ge -8$

005

다음 부등식을 푸시오.

(1) $-6 \le x-4 < 0$ $-2 \le x < 4$

(2) $11 < -3x+2 < 23$ $-7 < x < -3$

(3) $3x-1 \le 2x \le 4$ $x \le 1$

(4) $-5 \le -x < x-6$ $3 < x \le 5$

$$\begin{cases} -5 \le -x & \cdots\cdots ㉠ \\ -x < x-6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x \le 5$

㉡에서 $-2x < -6$ $\therefore x > 3$

(5) $x-7 < 4x+5 < 7x+8$ $x > -1$

$$\begin{cases} x-7 < 4x+5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+5 < 7x+8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $-3x < 12$ $\therefore x > -4$

㉡에서 $-3x < 3$ $\therefore x > -1$

(6) $-7x-5 \le -5x-3 \le -6x+3$ $-1 \le x \le 6$

$$\begin{cases} -7x-5 \le -5x-3 & \cdots\cdots ㉠ \\ -5x-3 \le -6x+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $-2x \le 2$ $\therefore x \ge -1$

㉡에서 $x \le 6$

006

다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x < 2 \\ x > 5 \end{cases}$ 해는 없다.

(2) $\begin{cases} x \ge 1 \\ x \le 1 \end{cases}$ $x=1$

(3) $\begin{cases} x < 4 \\ x \ge 4 \end{cases}$ 해는 없다.

(4) $\begin{cases} 2x-5 \ge -x+4 & \cdots\cdots ㉠ \\ -(x+5) \ge 1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 해는 없다.

$$\begin{cases} 2x-5 \ge -x+4 & \cdots\cdots ㉠ \\ -(x+5) \ge 1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $3x \ge 9$ $\therefore x \ge 3$

㉡에서 $-x-5 \ge 1$, $-x \ge 6$ $\therefore x \le -6$

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 연립부등식의 해는 없다.

(5) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4} > \dfrac{2x+3}{12} & \cdots\cdots ㉠ \\ 6(x+1) \ge 7x+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 해는 없다.

㉠에서 $6x+3 > 2x+3$, $4x > 0$ $\therefore x > 0$

㉡에서 $6x+6 \ge 7x+6$, $-x \ge 0$ $\therefore x \le 0$

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 연립부등식의 해는 없다.

(6) $\begin{cases} 0.6x+1.2 \le \dfrac{2}{5}x + \dfrac{3}{5} & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{-2-x}{7} \le \dfrac{2x+8}{14} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ $x=-3$

㉠에서 $3x+6 \le 2x+3$ $\therefore x \le -3$

㉡에서 $-4-2x \le 2x+8$, $-4x \le 12$ $\therefore x \ge -3$

㉠, ㉡의 공통부분은 $x=-3$이므로 연립부등식의 해는 $x=-3$

유형 실전 문제

유형 01 연립일차부등식

중요

연립일차부등식은 다음 순서로 푼다.
① 각 부등식의 해를 구한다.
② ①의 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾는다.

풍쌤 Point 해를 수직선 위에 나타내었을 때 공통부분이 없으면 연립일차부등식의 해는 없다.

007

연립부등식 $\begin{cases} 2x-2\le -x & \cdots\cdots ㉠ \\ x+1\le 7x+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 해가 $a\le x\le b$일 때, $a+b$의 값은?

① $-\frac{1}{3}$ ✓② $-\frac{1}{6}$ ③ 0
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

㉠에서 $3x\le 2$ $\therefore x\le \frac{2}{3}$
㉡에서 $-6x\le 5$ $\therefore x\ge -\frac{5}{6}$
따라서 연립부등식의 해는 $-\frac{5}{6}\le x\le \frac{2}{3}$이므로
$a+b=-\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$

008

연립부등식 $\begin{cases} 4(x+2)>2(x+3)+10 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-20<-2-x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 를 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
✓④ 4 ⑤ 5

㉠에서 $4x+8>2x+16$, $2x>8$ $\therefore x>4$
㉡에서 $2x<18$ $\therefore x<9$
따라서 연립부등식의 해는 $4<x<9$이므로 정수 x는 5, 6, 7, 8의 4개이다.

009

연립부등식 $\begin{cases} \frac{x-3}{2}\le x-0.5 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{3x+6}{9}<\frac{4x+2}{6} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 를 만족시키는 정수 x의 최솟값은?

① 0 ② 1 ✓③ 2
④ 3 ⑤ 4

㉠에서 $x-3\le 2x-1$, $-x\le 2$ $\therefore x\ge -2$
㉡에서 $6x+12<12x+6$, $-6x<-6$ $\therefore x>1$
따라서 연립부등식의 해는 $x>1$이므로 정수 x의 최솟값은 2이다.

010

다음 연립부등식 중 해가 없는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\begin{cases} x<1 \\ x>0 \end{cases}$ ✓② $\begin{cases} x\le 0 \\ x>0 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x\le 1 \\ x>-1 \end{cases}$
✓④ $\begin{cases} x<0 \\ x>1 \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} x\le -2 \\ x\ge -2 \end{cases}$

주어진 연립부등식의 해는
① $0<x<1$
③ $-1<x\le 1$
⑤ $x=-2$

011

연립부등식 $\begin{cases} x-0.8>0.2x+\frac{4}{5} & \cdots\cdots ㉠ \\ -2x>x+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 해는?

① $x<-1$ ② $x>2$ ③ $-1<x<2$
④ $x=2$ ✓⑤ 해는 없다.

㉠에서 $10x-8>2x+8$, $8x>16$ $\therefore x>2$
㉡에서 $-3x>3$ $\therefore x<-1$
따라서 연립부등식의 해는 없다.

012

연립부등식 $\begin{cases} \frac{3}{4}x+0.5\ge 0.2(5x-1.25) & \cdots\cdots ㉠ \\ -2\left(x+\frac{1}{2}\right)\le \frac{x-17}{2} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 해가 $x=k$일 때, k의 값을 구하시오. 3

㉠에서 $15x+10\ge 20x-5$, $-5x\ge -15$ $\therefore x\le 3$
㉡에서 $-4\left(x+\frac{1}{2}\right)\le x-17$, $-4x-2\le x-17$ $\therefore x\ge 3$
따라서 연립부등식의 해는 $x=3$이므로 $k=3$

013

승희가 이기면 2점을 얻고 지면 1점을 잃는 게임을 한다. 12번 게임을 한 후 얻은 점수가 15점 이하이고 이긴 횟수가 더 많을 때, 승희가 이긴 횟수의 최댓값은? (단, 비기는 경우는 없다.)

① 6 ② 7 ③ 8
✓④ 9 ⑤ 10

이긴 횟수를 x로 놓으면 진 횟수는 $12-x$이므로
$\begin{cases} x>12-x & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-(12-x)\le 15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $2x>12$ $\therefore x>6$
㉡에서 $3x-12\le 15$, $3x\le 27$ $\therefore x\le 9$
따라서 연립부등식의 해는 $6<x\le 9$이므로 x, 즉 이긴 횟수의 최댓값은 9이다.

유형 02 $A<B<C$ 꼴의 부등식

$A<B<C$ 꼴의 부등식은 $\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$ 꼴로 바꾸어 푼다.

풍쌤 Point $\begin{cases}A<B\\A<C\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}A<C\\B<C\end{cases}$ 꼴로 바꾸어 풀지 않도록 주의한다.

014

부등식 $\overbrace{-2x\le x-3}^{㉠}\underbrace{\le -x+7}_{㉡}$의 해가 $a\le x\le b$일 때, $b-a$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
✓④ 4 ⑤ 5

㉠에서 $-3x\le -3$ ∴ $x\ge 1$
㉡에서 $2x\le 10$ ∴ $x\le 5$
따라서 주어진 부등식의 해는 $1\le x\le 5$이므로
$b-a=5-1=4$

015

부등식 $\overbrace{4(x-1)<2(x+1)}^{㉠}\underbrace{<3(x+2)-1}_{㉡}$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오. 5

㉠에서 $4x-4<2x+2$, $2x<6$ ∴ $x<3$
㉡에서 $2x+2<3x+5$, $-x<3$ ∴ $x>-3$
따라서 연립부등식의 해는 $-3<x<3$이므로 정수 x는 $-2, -1, 0, 1, 2$의 5개이다.

016

다음 중 부등식 $\overbrace{x-3<\frac{x-2}{2}}^{㉠}\underbrace{\le\frac{3x-4}{4}}_{㉡}$의 해가 아닌 것은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ✓⑤ 4

㉠에서 $2x-6<x-2$ ∴ $x<4$
㉡에서 $2x-4\le 3x-4$, $-x\le 0$ ∴ $x\ge 0$
따라서 연립부등식의 해는 $0\le x<4$이므로 해가 아닌 것은 ⑤이다.

017

부등식 $\overbrace{\frac{5x-1}{10}\le 0.2x+\frac{1}{2}}^{㉠}\underbrace{<0.95x-1}_{㉡}$을 풀면?

① $x\le 2$ ② $x>2$ ③ $x<2$
④ $x=2$ ✓⑤ 해는 없다.

㉠에서 $5x-1\le 2x+5$, $3x\le 6$ ∴ $x\le 2$
㉡에서 $20x+50<95x-100$, $-75x<-150$ ∴ $x>2$
따라서 연립부등식의 해는 없다.

유형 03 해가 주어진 연립일차부등식

중요

각 일차부등식의 해를 구한 후 주어진 해와 비교하여 미정계수의 값을 구한다.

풍쌤 Point 부등호의 방향에 유의하여 주어진 연립부등식의 해와 비교한다.

018

연립부등식 $\begin{cases}x+a<2 & \cdots\cdots ㉠\\-x+6<2x & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$의 해가 $2<x<5$일 때, 상수 a의 값은?

✓① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

㉠에서 $x<2-a$
㉡에서 $-3x<-6$ ∴ $x>2$
연립부등식의 해가 $2<x<5$이므로
$2-a=5$ ∴ $a=-3$

019

연립부등식 $\begin{cases}2x-a\le 4x+1 & \cdots\cdots ㉠\\3(x-1)+2>4(x+1)-3 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$의 해가 $-3\le x<-2$일 때, 상수 a의 값은?

① 3 ② 4 ✓③ 5
④ 6 ⑤ 7

㉠에서 $-2x\le a+1$ ∴ $x\ge -\frac{a+1}{2}$
㉡에서 $3x-1>4x+1$, $-x>2$ ∴ $x<-2$
연립부등식의 해가 $-3\le x<-2$이므로
$-\frac{a+1}{2}=-3$, $a+1=6$ ∴ $a=5$

020

연립부등식 $\begin{cases}2(3x-1)\ge 3x+2a & \cdots\cdots ㉠\\x-4<-(x-6) & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$의 해가 $-4\le x<b$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -4 ✓② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

㉠에서 $6x-2\ge 3x+2a$, $3x\ge 2a+2$ ∴ $x\ge\frac{2a+2}{3}$
㉡에서 $x-4<-x+6$, $2x<10$ ∴ $x<5$
연립부등식의 해가 $-4\le x<b$이므로 $\frac{2a+2}{3}=-4$, $b=5$
따라서 $a=-7$, $b=5$이므로
$a+b=-7+5=-2$

유형 실전 문제

정답과 풀이 093쪽

021

연립부등식 $\begin{cases} x-3\le\dfrac{x}{3}+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 0.1(x-a)\le\dfrac{1}{2}(x-1)+0.5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 해가

$x=6$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. -24

㉠에서 $3x-9\le x+3$, $2x\le12$ $\quad\therefore x\le6$

㉡에서 $x-a\le5(x-1)+5$, $x-a\le5x$

$-4x\le a$ $\quad\therefore x\ge-\dfrac{a}{4}$

연립부등식의 해가 $x=6$이므로

$-\dfrac{a}{4}=6$ $\quad\therefore a=-24$

022

부등식 $x-a<-2x+4<2x+b$의 해가 $3<x<7$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① 9 ② 13 ③ 17

④ 21 [✓ ⑤ 25]

$\begin{cases} x-a<-2x+4 & \cdots\cdots ㉠ \\ -2x+4<2x+b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $3x<a+4$ $\quad\therefore x<\dfrac{a+4}{3}$

㉡에서 $-4x<b-4$ $\quad\therefore x>-\dfrac{b-4}{4}$

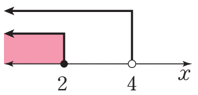
연립부등식의 해가 $3<x<7$이므로

$-\dfrac{b-4}{4}=3$, $\dfrac{a+4}{3}=7$ $\quad\therefore a=17$, $b=-8$

$\therefore a-b=17-(-8)=25$

023

연립부등식 $\begin{cases} x-a\le8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+b<x-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?



① 27 ② 36 ③ 45

[✓ ④ 54] ⑤ 63

㉠에서 $x\le a+8$

㉡에서 $2x<-b-1$ $\quad\therefore x<-\dfrac{b+1}{2}$

이때 주어진 수직선에서 각 부등식의 해가 $x\le2$, $x<4$이므로

$a+8=2$, $-\dfrac{b+1}{2}=4$ $\quad\therefore a=-6$, $b=-9$

$\therefore ab=-6\times(-9)=54$

유형 04 해의 조건이 주어진 연립일차부등식

중요

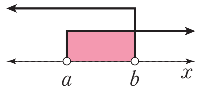
주어진 조건을 만족시키는 해를 수직선 위에 나타내고 미정계수의 값의 범위를 구한다.

① 해를 갖는다. ➡ 공통부분이 있다.

② 해를 갖지 않는다. ➡ 공통부분이 없다.

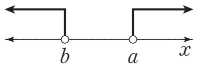
풍쌤 Point 연립부등식 $\begin{cases} x>a \\ x<b \end{cases}$가

① 해를 갖는다. ➡



➡ $a<b$

② 해를 갖지 않는다. ➡



➡ $b\le a$

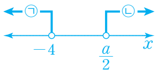
024

연립부등식 $\begin{cases} 4x<3x-4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x>a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 해가 존재하지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오. $a\ge-8$

㉠에서 $x<-4$, ㉡에서 $x>\dfrac{a}{2}$

연립부등식의 해가 존재하지 않아야 하므로

$\dfrac{a}{2}\ge-4$ $\quad\therefore a\ge-8$



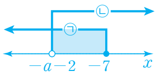
025

연립부등식 $\begin{cases} -2(x+1)\ge-x+5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+a>-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 가 해를 가질 때, 정수 a의 최솟값을 구하시오. 6

㉠에서 $x\le-7$, ㉡에서 $x>-a-2$

연립부등식이 해를 가지므로 $-a-2<-7$ $\quad\therefore a>5$

따라서 정수 a의 최솟값은 6이다.



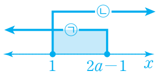
026

부등식 $\overbrace{2(x-a)\le \rlap{$\underbrace{}_{㉡}$}x-1}^{㉠}\le3(x-2)+3$이 해를 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오. $a\ge1$

㉠에서 $x\le2a-1$, ㉡에서 $x\ge1$

연립부등식이 해를 가져야 하므로

$2a-1\ge1$, $2a\ge2$ $\quad\therefore a\ge1$



027

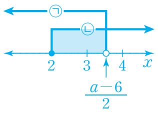
연립부등식 $\begin{cases} 3(x+2)<x+a & \cdots\cdots ㉠ \\ x-1\ge-4x+9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 를 만족시키는 정수 x의 개수가 2가 되도록 하는 정수 a의 값을 모두 구하시오. 13, 14

㉠에서 $x<\dfrac{a-6}{2}$, ㉡에서 $x\ge2$

연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이므로

$3<\dfrac{a-6}{2}\le4$, $6<a-6\le8$ $\quad\therefore 12<a\le14$

따라서 정수 a의 값은 13, 14이다.



03

절댓값 기호를 포함한 일차부등식

❶ $|x|<a$ 또는 $|x|>a$의 풀이

$a>0$일 때,

① $|x|<a$의 해는 $-a<x<a$

② $|x|>a$의 해는 $x<-a$ 또는 $x>a$

❷ 절댓값 기호를 포함한 일차부등식의 풀이

① 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 절댓값 기호를 없앤다.

$$|x-a|=\begin{cases} x-a & (x\geq a) \\ -(x-a) & (x<a) \end{cases}$$

② ①의 각 범위에서 절댓값 기호를 없앤 부등식을 풀고, 해당 범위와의 공통부분을 찾아 해를 구한다.

③ ②에서 구한 해를 모두 합친 x의 값의 범위를 구한다.

- $b>0$일 때,

① $|x-a|<b$

➡ $-b<x-a<b$

② $|x-a|>b$

➡ $x-a<-b$ 또는 $x-a>b$

풍쌤 Tip 각 범위에서 해를 구할 때 반드시 해당 범위와의 공통부분을 구해야 한다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 094쪽

028

다음 부등식을 푸시오.

(1) $|x|>5$ $x<-5$ 또는 $x>5$

(2) $|2x|\leq 8$ $-4\leq x\leq 4$

(3) $|x-1|<10$ $-9<x<11$

(4) $|3x-4|\geq 2$ $x\leq\frac{2}{3}$ 또는 $x\geq 2$

(5) $|5-2x|<9$ $-2<x<7$

029

부등식 $|x-2|>3x+1$을 푸시오. $x<\frac{1}{4}$

단계1. $x<2$일 때, 부등식의 해 구하기

$|x-2|=-(x-2)$이므로 $-(x-2)>3x+1$에서 $x<\frac{1}{4}$

이때 $x<2$이므로 $x<\frac{1}{4}$

단계2. $x\geq 2$일 때, 부등식의 해 구하기

$|x-2|=x-2$이므로 $x-2>3x+1$에서 $x<-\frac{3}{2}$

이때 $x\geq 2$이므로 해는 없다.

단계3. 부등식의 해 구하기

각 범위에서 구한 해를 모두 합친 부등식의 해는 $x<\frac{1}{4}$

030

부등식 $|x|+|x-1|\leq 11$을 푸시오. $-5\leq x\leq 6$

단계1. $x<0$일 때, 부등식의 해 구하기

$|x|=-x$, $|x-1|=-(x-1)$이므로 $-x-(x-1)\leq 11$에서 $x\geq -5$

이때 $x<0$이므로 $-5\leq x<0$

단계2. $0\leq x<1$일 때, 부등식의 해 구하기

$|x|=x$, $|x-1|=-(x-1)$이므로 $x-(x-1)\leq 11$에서 $1\leq 11$

따라서 항상 성립하므로 $0\leq x<1$

단계3. $x\geq 1$일 때, 부등식의 해 구하기

$|x|=x$, $|x-1|=x-1$이므로 $x+(x-1)\leq 11$에서 $x\leq 6$

이때 $x\geq 1$이므로 $1\leq x\leq 6$

단계4. 부등식의 해 구하기

각 범위에서 구한 해를 모두 합친 부등식의 해는 $-5\leq x\leq 6$

유형 실전 문제

정답과 풀이 094쪽

유형 05 절댓값 기호를 포함한 일차부등식

$b>0$일 때,
$|x-a|<b$의 해 ➡ $-b<x-a<b$
$|x-a|>b$의 해 ➡ $x-a<-b$ 또는 $x-a>b$

풍쌤 Point ① $|ax+b|<cx+d$ 꼴의 부등식은 $x=-\frac{b}{a}$를 기준으로 범위를 나누어 푼다.
➡ (i) $x<-\frac{b}{a}$ (ii) $x\geq-\frac{b}{a}$
② $|x-a|+|x-b|<c$ $(a<b)$ 꼴의 부등식은 $x=a$, $x=b$를 기준으로 범위를 나누어 푼다.
➡ (i) $x<a$ (ii) $a\leq x<b$ (iii) $x\geq b$

031

부등식 $|x+5|<9$를 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 15 ② 16 ✓③ 17
④ 18 ⑤ 19

$|x+5|<9$에서 $-9<x+5<9$
$\therefore$ $-14<x<4$
따라서 정수 x는 $-13, -12, -11, \cdots, 3$의 17개이다.

032

부등식 $|1-2x|\geq3$의 해가 $x\leq a$ 또는 $x\geq b$일 때, ab의 값은?

✓① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

$|1-2x|\geq3$에서 $1-2x\leq-3$ 또는 $1-2x\geq3$
$\therefore$ $x\geq2$ 또는 $x\leq-1$
따라서 $a=-1$, $b=2$이므로
$ab=-1\times2=-2$

033

x에 대한 부등식 $|3x-2|\leq a-4$를 만족시키는 실수 x의 최댓값이 2가 되도록 하는 a의 값은?
(단, $a\geq5$인 자연수이다.)

① 5 ② 6 ③ 7
✓④ 8 ⑤ 9

$|3x-2|\leq a-4$에서 $-a+4\leq3x-2\leq a-4$
$\therefore$ $\frac{-a+6}{3}\leq x\leq\frac{a-2}{3}$
이때 x의 최댓값은 $\frac{a-2}{3}$이므로
$\frac{a-2}{3}=2$, $a-2=6$ $\therefore$ $a=8$

034

부등식 $|-x+4|\leq2x+8$의 해는?

✓① $x\geq-\frac{4}{3}$ ② $x>-\frac{4}{3}$ ③ $x\leq-\frac{4}{3}$
④ $x\geq\frac{4}{3}$ ⑤ $0<x\leq\frac{4}{3}$

(i) $x<4$일 때, $-x+4\leq2x+8$에서 $x\geq-\frac{4}{3}$ $\therefore$ $-\frac{4}{3}\leq x<4$
(ii) $x\geq4$일 때, $-(-x+4)\leq2x+8$에서 $x\geq-12$ $\therefore$ $x\geq4$
(i), (ii)에서 $x\geq-\frac{4}{3}$

035

부등식 $x-|4x-2|>-1$의 해가 $a<x<b$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ✓② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{7}{5}$
④ $\frac{8}{5}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

(i) $x<\frac{1}{2}$일 때, $x+(4x-2)>-1$에서 $x>\frac{1}{5}$ $\therefore$ $\frac{1}{5}<x<\frac{1}{2}$
(ii) $x\geq\frac{1}{2}$일 때, $x-(4x-2)>-1$에서 $x<1$ $\therefore$ $\frac{1}{2}\leq x<1$
(i), (ii)에서 구하는 해는 $\frac{1}{5}<x<1$이므로
$a+b=\frac{1}{5}+1=\frac{6}{5}$

036

부등식 $|x+3|+|x-6|\leq15$를 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. 24

(i) $x<-3$일 때, $-(x+3)-(x-6)\leq15$에서 $x\geq-6$ $\therefore$ $-6\leq x<-3$
(ii) $-3\leq x<6$일 때, $(x+3)-(x-6)\leq15$에서 $9\leq15$이므로 항상 성립한다.
$\therefore$ $-3\leq x<6$
(iii) $x\geq6$일 때, $(x+3)+(x-6)\leq15$에서 $x\leq9$ $\therefore$ $6\leq x\leq9$
(i)~(iii)에서 구하는 해는 $-6\leq x\leq9$이므로 정수 x의 값의 합은
$-6+(-5)+(-4)+\cdots+6+7+8+9=7+8+9=24$

037

부등식 $2|x|>|x+2|-1$의 해가 $x<a$ 또는 $x>b$일 때, $2b-3a$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
✓④ 3 ⑤ 4

(i) $x<-2$일 때, $-2x>-x-3$에서 $x<3$ $\therefore$ $x<-2$
(ii) $-2\leq x<0$일 때, $-2x>x+1$에서 $x<-\frac{1}{3}$ $\therefore$ $-2\leq x<-\frac{1}{3}$
(iii) $x\geq0$일 때, $2x>x+1$에서 $x>1$ $\therefore$ $x>1$
(i)~(iii)에서 구하는 해는 $x<-\frac{1}{3}$ 또는 $x>1$이므로
$2b-3a=2\times1-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=3$

중단원 점검 문제

정답과 풀이 095쪽

01

두 일차부등식 $2(x+1)\le x+4$와 $-x-k\ge 1$의 해가 서로 같을 때, 상수 k의 값은?

✓① -3　② -1　③ 0

④ 1　⑤ 3

$2(x+1)\le x+4$에서 $2x+2\le x+4$　$\therefore\ x\le 2$

$-x-k\ge 1$에서 $-x\ge k+1$　$\therefore\ x\le -k-1$

두 일차부등식의 해가 서로 같으므로

$-k-1=2,\ -k=3$　$\therefore\ k=-3$

02 교육청 기출

연립부등식 $\begin{cases} 2x\le x+11 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+5<4x-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$를 만족시키는 모든 정수 x의 개수를 구하시오.　9

㉠에서 $x\le 11$

㉡에서 $-3x<-7$　$\therefore\ x>\frac{7}{3}$

따라서 연립부등식의 해는 $\frac{7}{3}<x\le 11$이므로 정수 x는 3, 4, 5, ⋯, 11의 9개이다.

03

부등식 $-x-4<-2x+3\le 3x+8$을 만족시키는 정수 x의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 2　② 3　③ 4

✓④ 5　⑤ 6

$\begin{cases} -x-4<-2x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ -2x+3\le 3x+8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x<7$

㉡에서 $-5x\le 5$　$\therefore\ x\ge -1$

따라서 연립부등식의 해는 $-1\le x<7$이므로 정수 x의 최댓값은 6, 최솟값은 -1이다.

즉, 최댓값과 최솟값의 합은 $6+(-1)=5$

04

연속하는 세 자연수의 합이 21보다 크거나 같고 24보다 작을 때, 세 수 중 가장 큰 수를 구하시오.　8

연속하는 세 수를 $x-1,\ x,\ x+1$로 놓으면

$21\le(x-1)+x+(x+1)<24$

$21\le 3x<24$　$\therefore\ 7\le x<8$

이때 x는 자연수이므로 $x=7$

따라서 연속하는 세 수는 6, 7, 8이므로 가장 큰 수는 8이다.

05 학교 시험 기출

연립부등식 $\begin{cases} 0.7-0.6x\le\frac{x}{5}+\frac{1}{10} & \cdots\cdots ㉠ \\ -(x-2)\ge x-a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해가 $b\le x\le 6$일 때, 상수 $a,\ b$에 대하여 ab의 값을 구하시오.　$\frac{15}{2}$

㉠에서 $7-6x\le 2x+1,\ -8x\le -6$　$\therefore\ x\ge\frac{3}{4}$

㉡에서 $-x+2\ge x-a,\ -2x\ge -a-2$　$\therefore\ x\le\frac{a+2}{2}$

연립부등식의 해가 $b\le x\le 6$이므로

$\frac{a+2}{2}=6,\ b=\frac{3}{4}$　$\therefore\ a=10,\ b=\frac{3}{4}$

$\therefore\ ab=10\times\frac{3}{4}=\frac{15}{2}$

06 실전 Plus

연립부등식 $\begin{cases} 3x-1<x+7 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-k\ge 1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 5가 되도록 하는 정수 k의 값은?

① 0　✓② 1　③ 2

④ 3　⑤ 4

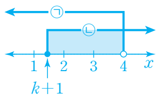
㉠에서 $2x<8$　$\therefore\ x<4$

㉡에서 $x\ge k+1$

연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값의 합이 5이므로

$1<k+1\le 2$　$\therefore\ 0<k\le 1$

따라서 정수 k의 값은 1이다.



07

x에 대한 부등식 $|x+4|\le k-3$을 만족시키는 모든 정수 x의 개수가 7이 되도록 하는 자연수 k의 값은?

① 4　② 5　✓③ 6

④ 7　⑤ 8

$|x+4|\le k-3$에서 $-k+3\le x+4\le k-3$

$\therefore\ -k-1\le x\le k-7$

부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 7이고 $-k-1,\ k-7$은 정수이므로

$(k-7)-(-k-1)+1=7$

$2k-5=7,\ 2k=12$　$\therefore\ k=6$

08

부등식 $|2x-4|+|x+1|>6$을 푸시오.　$x<-1$ 또는 $x>3$

(ⅰ) $x<-1$일 때, $-(2x-4)-(x+1)>6$에서 $x<-1$　$\therefore\ x<-1$

(ⅱ) $-1\le x<2$일 때, $-(2x-4)+(x+1)>6$에서 $x<-1$이므로 해는 없다.

(ⅲ) $x\ge 2$일 때, $(2x-4)+(x+1)>6$에서 $x>3$　$\therefore\ x>3$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 해는 $x<-1$ 또는 $x>3$

01 부등식과 함수의 그래프

❶ 부등식 $f(x)>0$의 해

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이다.

참고 부등식 $f(x)\geq 0$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있거나 x축과 만나는 x의 값의 범위이다.

❷ 부등식 $f(x)>g(x)$의 해

함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이다.

참고 부등식 $f(x)\geq g(x)$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 두 함수의 그래프가 만나는 x의 값의 범위이다.

- **부등식 $f(x)<0$의 해**
함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이다.

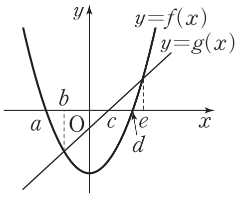
- **부등식 $f(x)<g(x)$의 해**
함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 097쪽

001

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 부등식의 해를 구하시오.



(1) $f(x)>0$ **$x<a$ 또는 $x>d$**

$f(x)>0$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로
$x<a$ 또는 $x>d$

(2) $g(x)<0$ **$x<c$**

$g(x)<0$의 해는 직선 $y=g(x)$가 x축보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로
$x<c$

(3) $f(x)>g(x)$ **$x<b$ 또는 $x>e$**

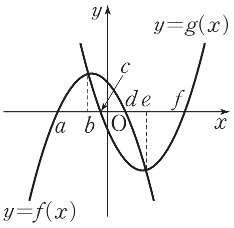
이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로
$x<b$ 또는 $x>e$

(4) $f(x)\leq g(x)$ **$b\leq x\leq e$**

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 아래쪽에 있거나 두 함수의 그래프가 만나는 x의 값의 범위이므로
$b\leq x\leq e$

002

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 부등식의 해를 구하시오.



(1) $f(x)\geq 0$ **$a\leq x\leq d$**

$f(x)\geq 0$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있거나 x축과 만나는 x의 값의 범위이므로
$a\leq x\leq d$

(2) $g(x)\leq 0$ **$c\leq x\leq f$**

$g(x)\leq 0$의 해는 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있거나 x축과 만나는 x의 값의 범위이므로
$c\leq x\leq f$

(3) $f(x)\geq g(x)$ **$b\leq x\leq e$**

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 이차함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 두 함수의 그래프가 만나는 x의 값의 범위이므로
$b\leq x\leq e$

(4) $f(x)g(x)>0$ **$a<x<c$ 또는 $d<x<f$**

(ⅰ) $f(x)>0$, $g(x)>0$일 때
$f(x)>0$에서 $a<x<d$, $g(x)>0$에서 $x<c$ 또는 $x>f$
따라서 해의 공통부분을 구하면 $a<x<c$
(ⅱ) $f(x)<0$, $g(x)<0$일 때
$f(x)<0$에서 $x<a$ 또는 $x>d$, $g(x)<0$에서 $c<x<f$
따라서 해의 공통부분을 구하면 $d<x<f$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a<x<c$ 또는 $d<x<f$이다.

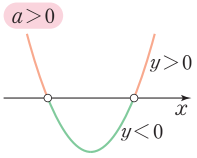
02 이차부등식과 이차함수의 관계

① **이차부등식**

부등식에서 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하였을 때, 좌변이 미지수 x에 대한 이차식으로 나타내어지는 부등식을 x에 대한 이차부등식이라 한다.

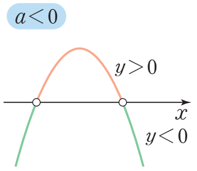
② $ax^2+bx+c>0$**의 해**

이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서 $y>0$인 x의 값의 범위, 즉 함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.



③ $ax^2+bx+c<0$**의 해**

이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서 $y<0$인 x의 값의 범위, 즉 함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.



- $ax^2+bx+c\geq0$**의 해**

이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서 $y\geq0$인 x의 값의 범위, 즉 함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있거나 x축과 만나는 부분의 x의 값의 범위이다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 097쪽

003

다음 부등식 중에서 이차부등식인 것은 ○를, 이차부등식이 아닌 것은 ×를 (   ) 안에 써넣으시오.

(1) $x^2-4x\geq x-x^2$ (○)

모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면 $2x^2-5x\geq0$이므로 이차부등식이다.

(2) $x(3x-2)>1+3x^2$ (×)

모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면 $-2x-1>0$이므로 이차부등식이 아니다.

(3) $x+6\geq x(x+1)$ (○)

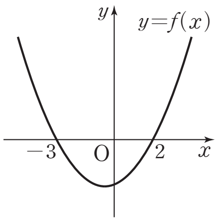
모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면 $-x^2+6\geq0$이므로 이차부등식이다.

(4) $x+x^2>9-x^2+x^3$ (×)

모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면 $-x^3+2x^2+x-9>0$이므로 이차부등식이 아니다.

004

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 이차부등식의 해를 구하시오.



(1) $f(x)>0$ $x<-3$ 또는 $x>2$

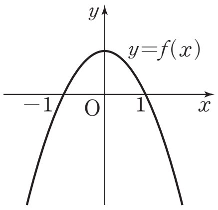
이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로
$x<-3$ 또는 $x>2$

(2) $f(x)\leq0$ $-3\leq x\leq2$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있거나 x축과 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로
$-3\leq x\leq2$

005

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 이차부등식의 해를 구하시오.



(1) $f(x)>0$ $-1<x<1$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로
$-1<x<1$

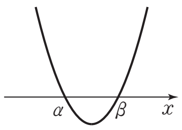
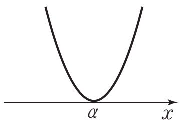
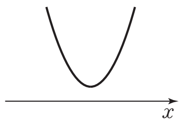
(2) $f(x)\leq0$ $x\leq-1$ 또는 $x\geq1$

이차함수 $y=f(x)$의그래프가 x축보다 아래쪽에 있거나 x축과 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로
$x\leq-1$ 또는 $x\geq1$

03 이차부등식의 해

① 이차부등식의 해

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 판별식을 D, 두 실근을 α, β $(\alpha\le\beta)$라 할 때, 이차부등식의 해는 다음과 같다.

판별식 D	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$의 해	서로 다른 두 실근 α, β	중근 α	서로 다른 두 허근
$y=ax^2+bx+c$의 그래프			
$ax^2+bx+c>0$의 해	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\ne\alpha$인 모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c\ge0$의 해	$x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta$	모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c<0$의 해	$\alpha<x<\beta$	없다.	없다.
$ax^2+bx+c\le0$의 해	$\alpha\le x\le\beta$	$x=\alpha$	없다.

풍쌤 Tip 이차부등식의 x^2의 계수가 음수이면 부등식의 양변에 -1을 곱하여 x^2의 계수가 양수가 되도록 고쳐서 푼다. 이때 부등호의 방향이 바뀌는 것에 주의한다.

- $D>0$일 때,

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha<\beta)$
이므로
① $a(x-\alpha)(x-\beta)>0$의 해는
$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$
② $a(x-\alpha)(x-\beta)<0$의 해는
$\alpha<x<\beta$

개념 기본 문제

정답과 풀이 097쪽

006

다음 부등식을 푸시오.

(1) $x^2-2x-8<0$ $-2<x<4$

(2) $x^2+10x+21>0$ $x<-7$ 또는 $x>-3$

(3) $2x^2+x-1\le0$ $-1\le x\le\frac{1}{2}$

(4) $x^2-x-1>0$ $x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\left\{x-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}\left\{x-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}>0$ $\therefore x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(5) $x^2-2x-5\ge0$ $x\le1-\sqrt{6}$ 또는 $x\ge1+\sqrt{6}$

$\{x-(1-\sqrt{6})\}\{x-(1+\sqrt{6})\}\ge0$ $\therefore x\le1-\sqrt{6}$ 또는 $x\ge1+\sqrt{6}$

(6) $x^2+3x>3$ $x<\frac{-3-\sqrt{21}}{2}$ 또는 $x>\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$

$\left\{x-\left(\frac{-3-\sqrt{21}}{2}\right)\right\}\left\{x-\left(\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right)\right\}>0$
$\therefore x<\frac{-3-\sqrt{21}}{2}$ 또는 $x>\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$

007

다음 부등식을 푸시오.

(1) $x^2+2x+1\le0$ $x=-1$

$(x+1)^2\le0$
따라서 해는 $x=-1$이다.

(2) $x^2-8x+16<0$ 해는 없다.

$(x-4)^2<0$
따라서 해는 없다.

(3) $x^2-10x+25>0$ $x\ne5$인 모든 실수

$(x-5)^2>0$
따라서 해는 $x\ne5$인 모든 실수이다.

008

다음 부등식을 푸시오.

(1) $x^2+2x+4\ge0$ 해는 모든 실수

$(x+1)^2+3\ge0$
따라서 해는 모든 실수이다.

(2) $3x^2+6x+5>0$ 해는 모든 실수

$3(x+1)^2+2>0$
따라서 해는 모든 실수이다.

(3) $x^2+10\le5x$ 해는 없다.

$\left(x^2-5x+\frac{25}{4}\right)+\frac{15}{4}\le0$에서 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\le0$
따라서 해는 없다.

유형 실전 문제

정답과 풀이 098쪽

유형 01 이차부등식의 풀이

중요★

이차방정식 $f(x)=0$의 판별식 D에 대하여 이차부등식 $f(x)>0$의 해는

① $D>0$이면 인수분해 또는 근의 공식을 이용하여 구한다.

② $D\leq 0$이면 완전제곱식이 포함된 꼴로 변형하여 구한다.

풍쌤 Point 이차부등식의 해는

① $D<0$이면 모든 실수이거나 해가 없는 경우 두 가지이다.

② $D=0$이면 등호가 있는 경우와 없는 경우에 따라 해가 달라지므로 등호가 있는지 잘 살핀다.

009

이차부등식 $x^2-12x+32>0$의 해가 $x<a$ 또는 $x>b$일 때, $2a-b$의 값은?

① -4　② -2　✓③ 0

④ 2　⑤ 4

$x^2-12x+32>0$에서 $(x-4)(x-8)>0$

$\therefore\ x<4$ 또는 $x>8$

따라서 $a=4$, $b=8$이므로

$2a-b=4\times 2-8=0$

010

이차부등식 $x^2+3x-10\leq 0$을 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 5　② 6　③ 7

✓④ 8　⑤ 9

$x^2+3x-10\leq 0$에서 $(x+5)(x-2)\leq 0$

$\therefore\ -5\leq x\leq 2$

따라서 정수 x는 -5, -4, -3, $\cdots$, 2의 8개이다.

011

이차부등식 $x^2-2x-15>0$의 해와 부등식 $|x-a|>b$의 해가 서로 같을 때, 양수 a, b에 대하여 $2a-b$의 값은?

① -4　✓② -2　③ 0

④ 2　⑤ 4

$x^2-2x-15>0$에서 $(x+3)(x-5)>0$　$\therefore\ x<-3$ 또는 $x>5$

한편, $|x-a|>b$에서 $x<a-b$ 또는 $x>a+b$

따라서 $a-b=-3$, $a+b=5$를 연립하여 풀면 $a=1$, $b=4$

$\therefore\ 2a-b=2\times 1-4=-2$

012

이차부등식 $(x+1)(x-2)<4-6x$를 만족시키는 정수 x의 최솟값은?

① -8　② -7　③ -6

✓④ -5　⑤ -4

$(x+1)(x-2)<4-6x$에서 $x^2+5x-6<0$

$(x+6)(x-1)<0$　$\therefore\ -6<x<1$

따라서 정수 x의 최솟값은 -5이다.

013

이차부등식 $10x(x+1)+3\geq x^2+4x+2$를 풀면?

① $x\leq -\frac{1}{3}$　② $x\geq -\frac{1}{3}$

③ $x=-\frac{1}{3}$　✓④ 모든 실수

⑤ $x\neq -\frac{1}{3}$인 모든 실수

$10x(x+1)+3\geq x^2+4x+2$에서

$10x^2+10x+3\geq x^2+4x+2$

$9x^2+6x+1\geq 0$, $(3x+1)^2\geq 0$

따라서 해는 모든 실수이다.

014

다음 이차부등식 중에서 해가 존재하지 않는 것은?

① $x^2\geq 0$　② $x^2-14x+49\leq 0$

③ $x^2-x-2>0$　④ $x^2+8x+20\geq 0$

✓⑤ $2x^2+2x+3\leq 0$

① 해는 모든 실수이다.

② $(x-7)^2\leq 0$　$\therefore\ x=7$

③ $(x+1)(x-2)>0$　$\therefore\ x<-1$ 또는 $x>2$

④ $(x+4)^2+4\geq 0$이므로 해는 모든 실수이다.

⑤ $2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}\leq 0$이므로 해는 없다.

015

둘레의 길이가 12인 직사각형의 넓이가 8 이상일 때, 이 직사각형의 가로의 길이의 최솟값을 구하시오.　2

직사각형의 가로의 길이를 x라 하면 세로의 길이는 $6-x$ $(0<x<6)$이므로

$x(6-x)\geq 8$, $x^2-6x+8\leq 0$

$(x-2)(x-4)\leq 0$　$\therefore\ 2\leq x\leq 4$

따라서 직사각형의 가로의 길이의 최솟값은 2이다.

04 이차부등식의 해의 조건

❶ 해가 주어진 이차부등식

① 해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

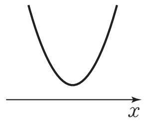
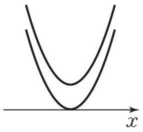
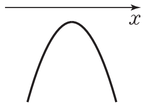
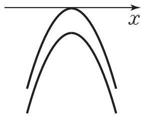
$(x-\alpha)(x-\beta)<0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta<0$

② 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-\alpha)(x-\beta)>0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta>0$

❷ 이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 이차부등식이 항상 성립할 조건은 다음과 같다.

$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\ge0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\le0$
			
그래프가 항상 x축 위쪽에 있다. ➡ $a>0$, $D<0$	그래프가 x축에 접하거나 위쪽에 있다. ➡ $a>0$, $D\le0$	그래프가 항상 x축 아래쪽에 있다. ➡ $a<0$, $D<0$	그래프가 x축에 접하거나 아래쪽에 있다. ➡ $a<0$, $D\le0$

참고 이차부등식의 해가 없을 조건은 이차부등식이 항상 성립할 조건으로 바꾸어 생각한다.
$ax^2+bx+c>0$의 해가 없다. ➡ $ax^2+bx+c\le0$이 항상 성립한다.
$ax^2+bx+c\ge0$의 해가 없다. ➡ $ax^2+bx+c<0$이 항상 성립한다.

- x^2의 계수가 -1인 이차부등식은 양변에 -1을 곱한다.

① 해가 $\alpha<x<\beta$일 때
➡ $-(x-\alpha)(x-\beta)>0$
➡ $-x^2+(\alpha+\beta)x-\alpha\beta>0$
② 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$일 때
➡ $-(x-\alpha)(x-\beta)<0$
➡ $-x^2+(\alpha+\beta)x-\alpha\beta<0$

풍쌤 Tip x^2의 계수가 a인 이차부등식은 x^2의 계수가 1인 이차부등식을 구한 후, 양변에 a를 곱한다. 이때 $a<0$이면 부등호의 방향이 바뀌므로 주의한다.

개념 기본 문제

016

이차부등식의 해가 다음과 같고 x^2의 계수가 1인 이차부등식을 구하시오.

(1) $1\le x\le2$ **$x^2-3x+2\le0$**

$(x-1)(x-2)\le0$

(2) $x<-3$ 또는 $x>6$ **$x^2-3x-18>0$**

$(x+3)(x-6)>0$

(3) $-2<x<8$ **$x^2-6x-16<0$**

$(x+2)(x-8)<0$

(4) $x\le4$ 또는 $x\ge7$ **$x^2-11x+28\ge0$**

$(x-4)(x-7)\ge0$

017

이차부등식과 그 해가 다음과 같을 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $x^2-ax+b<0$의 해 $2<x<5$ **$a=7$, $b=10$**

$(x-2)(x-5)<0$ ∴ $x^2-7x+10<0$
이 부등식이 $x^2-ax+b<0$과 같으므로 $a=7$, $b=10$

(2) $x^2+ax-8>0$의 해 $x<b$ 또는 $x>4$ **$a=-2$, $b=-2$**

$(x-b)(x-4)>0$ ∴ $x^2-(b+4)x+4b>0$
이 부등식이 $x^2+ax-8>0$과 같으므로 $a=-b-4$, $4b=-8$
∴ $a=-2$, $b=-2$

(3) $ax^2-8x+b\ge0$의 해 $x\le1$ 또는 $x\ge3$ **$a=2$, $b=6$**

$a>0$이므로 $a(x-1)(x-3)\ge0$, $ax^2-4ax+3a\ge0$
이 부등식이 $ax^2-8x+b\ge0$과 같으므로 $-4a=-8$, $b=3a$
∴ $a=2$, $b=6$

(4) $ax^2+bx+14\le0$의 해 $x\le-7$ 또는 $x\ge2$ **$a=-1$, $b=-5$**

$a<0$이므로 $a(x+7)(x-2)\le0$ ∴ $ax^2+5ax-14a\le0$
이 부등식이 $ax^2+bx+14\le0$과 같으므로 $5a=b$, $-14a=14$
∴ $a=-1$, $b=-5$

018

다음 x에 대한 이차부등식이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) $x^2+4x+k\geq 0$ **$k\geq 4$**

이차방정식 $x^2+4x+k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-k\leq 0,\ 4-k\leq 0$
$\therefore\ k\geq 4$

(2) $-x^2-2x+k-3<0$ **$k<2$**

이차방정식 $-x^2-2x+k-3=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-1)\times(k-3)<0$
$1+(k-3)<0 \qquad \therefore\ k<2$

(3) $x^2+kx+3>0$ **$-2\sqrt{3}<k<2\sqrt{3}$**

이차방정식 $x^2+kx+3=0$의 판별식을 D라 하면
$D=k^2-4\times 3<0,\ k^2<12$
$\therefore\ -2\sqrt{3}<k<2\sqrt{3}$

(4) $kx^2-6x-2\leq 0$ **$k\leq -\frac{9}{2}$**

$k<0$이고, 이차방정식 $kx^2-6x-2=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-3)^2-k\times(-2)\leq 0,\ 9+2k\leq 0 \qquad \therefore\ k\leq -\frac{9}{2}$
따라서 $k<0,\ k\leq -\frac{9}{2}$이므로 공통부분은 $k\leq -\frac{9}{2}$이다.

019

다음 x에 대한 이차부등식의 해가 존재하지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) $x^2-2x-k<0$ **$k\leq -1$**

모든 실수 x에 대하여 $x^2-2x-k\geq 0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2x-k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-k)\leq 0,\ 1+k\leq 0$
$\therefore\ k\leq -1$

(2) $3x^2-x+2k\leq 0$ **$k>\frac{1}{24}$**

모든 실수 x에 대하여 $3x^2-x+2k>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2-x+2k=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-4\times 3\times 2k<0,\ 1-24k<0$
$\therefore\ k>\frac{1}{24}$

(3) $-x^2+4kx+2k\geq 0$ **$-\frac{1}{2}<k<0$**

모든 실수 x에 대하여 $-x^2+4kx+2k<0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $-x^2+4kx+2k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(2k)^2-(-1)\times 2k<0,\ 4k^2+2k<0$
$2k(2k+1)<0 \qquad \therefore\ -\frac{1}{2}<k<0$

(4) $kx^2+2(k-3)x+4<0$ **$1\leq k\leq 9$**

이차부등식의 해가 없으므로 $k>0$
이차방정식 $kx^2+2(k-3)x+4=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(k-3)^2-k\times 4\leq 0,\ (k-1)(k-9)\leq 0 \qquad \therefore\ 1\leq k\leq 9$
따라서 $k>0,\ 1\leq k\leq 9$이므로 공통부분은 $1\leq k\leq 9$이다.

020

다음과 같이 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 주어질 때, $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위를 구하시오.

(1) $f(x)=x^2-2x-3,\ g(x)=2x+2$ **$x<-1$ 또는 $x>5$**

$x^2-2x-3>2x+2$에서
$x^2-4x-5>0,\ (x+1)(x-5)>0$
$\therefore\ x<-1$ 또는 $x>5$

(2) $f(x)=-x^2+4x+30,\ g(x)=x-10$ **$-5<x<8$**

$-x^2+4x+30>x-10$에서
$x^2-3x-40<0,\ (x+5)(x-8)<0$
$\therefore\ -5<x<8$

(3) $f(x)=-2x^2+x+1,\ g(x)=-x^2-4x+7$ **$2<x<3$**

$-2x^2+x+1>-x^2-4x+7$에서
$x^2-5x+6<0,\ (x-2)(x-3)<0$
$\therefore\ 2<x<3$

(4) $f(x)=3x^2-2x,\ g(x)=2x^2-1$ **$x\neq 1$인 모든 실수**

$3x^2-2x>2x^2-1$에서
$x^2-2x+1>0,\ (x-1)^2>0$
따라서 구하는 x의 값의 범위는 $x\neq 1$인 모든 실수이다.

021

이차함수 $y=x^2+2kx+5$의 그래프가 직선 $y=2x-k$보다 항상 위쪽에 있도록 하는 상수 k의 값의 범위를 구하시오. **$-1<k<4$**

$x^2+2kx+5>2x-k$에서 $x^2+2(k-1)x+k+5>0$
이차방정식 $x^2+2(k-1)x+k+5=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k+5)<0$
$k^2-3k-4<0,\ (k+1)(k-4)<0 \qquad \therefore\ -1<k<4$

022

이차함수 $y=-2x^2+x-1$의 그래프가 직선 $y=kx+1$보다 항상 아래쪽에 있도록 하는 상수 k의 값의 범위를 구하시오. **$-3<k<5$**

$-2x^2+x-1<kx+1$에서 $2x^2+(k-1)x+2>0$
이차방정식 $2x^2+(k-1)x+2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(k-1)^2-4\times 2\times 2<0$
$k^2-2k-15<0,\ (k+3)(k-5)<0$
$\therefore\ -3<k<5$

유형 실전 문제

유형 02 해가 주어진 이차부등식

중요★

① 해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식
➡ $(x-\alpha)(x-\beta)<0$

② 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식
➡ $(x-\alpha)(x-\beta)>0$

풍쌤 Point 이차부등식의 x^2의 계수가 a일 때, x^2의 계수가 1인 이차부등식을 만든 후 주어진 부등식과 부등호의 방향이 일치하도록 a의 부호를 정한다.

023

이차부등식 $x^2+ax-b\le0$의 해가 $-7\le x\le-3$일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

✓① -11　② -6　③ 1
④ 6　⑤ 11

해가 $-7\le x\le-3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+7)(x+3)\le0$　$\therefore x^2+10x+21\le0$
$\therefore a+b=10+(-21)=-11$

024

이차부등식 $x^2-ax+b>0$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>3$일 때, 이차부등식 $ax^2+bx+1<0$의 해를 구하시오. $\frac{1}{2}<x<1$　(단, a, b는 실수이다.)

해가 $x<-1$ 또는 $x>3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+1)(x-3)>0$　$\therefore x^2-2x-3>0$
따라서 $a=2$, $b=-3$이므로 이차부등식 $ax^2+bx+1<0$은
$2x^2-3x+1<0$, $(2x-1)(x-1)<0$　$\therefore \frac{1}{2}<x<1$

025

이차부등식 $2x^2+2kx+k\le0$의 해가 $x=-1$뿐일 때, 실수 k의 값은?

① -2　② -1　③ 1
✓④ 2　⑤ 3

해가 $x=-1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+1)^2\le0$　$\therefore x^2+2x+1\le0$
위의 부등식의 양변에 2를 곱하면
$2x^2+4x+2\le0$　$\therefore k=2$

026

이차부등식 $ax^2-6x+24>0$의 해가 $-4<x<b$일 때, 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하시오. 5

$a<0$이므로 해가 $-4<x<b$이고 x^2의 계수가 a인 이차부등식은
$a(x+4)(x-b)>0$　$\therefore ax^2-a(b-4)x-4ab>0$
이 부등식이 $ax^2-6x+24>0$과 같으므로
$-ab+4a=-6$, $-4ab=24$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=2$
$\therefore b-a=2-(-3)=5$

유형 03 정수해의 조건이 주어진 이차부등식

이차부등식의 정수해가 n개일 때, 해의 공통부분이 n개의 정수를 포함하도록 수직선 위에 나타내어 미정계수를 결정한다.

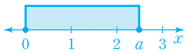
풍쌤 Point 해의 조건이 주어진 연립일차부등식과 비슷하지만 조금 더 복잡하다. 수직선 위에서 정수해가 n개가 되는 미정계수의 값의 범위를 살펴본다.

027

이차부등식 $x^2-ax\le0$을 만족시키는 정수 x의 개수가 3이 되도록 하는 양수 a의 값의 범위는?

① $2<a<3$　✓② $2\le a<3$　③ $2\le a\le3$
④ $3\le a<4$　⑤ $3<a\le4$

$x^2-ax\le0$에서 $x(x-a)\le0$
$\therefore 0\le x\le a$ ($\because$ a는 양수)　…… ㉠
㉠을 만족시키는 정수 x가 3개이므로
$2\le a<3$

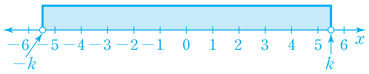


028

이차부등식 $x^2<k^2$을 만족시키는 정수 x의 개수가 11일 때, 자연수 k의 값은?

① 2　② 3　③ 4
④ 5　✓⑤ 6

$x^2-k^2<0$, $(x+k)(x-k)<0$
$k>0$이므로 $-k<x<k$　…… ㉠
㉠을 만족시키는 정수 x가 11개이므로

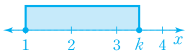


$\therefore 5<k\le6$
따라서 자연수 k의 값은 6이다.

029

이차부등식 $x^2-(k+1)x+k\le0$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 6일 때, 1보다 큰 양수 k의 값의 범위를 구하시오. $3\le k<4$

$(x-1)(x-k)\le0$
$\therefore 1\le x\le k$ ($\because$ $k>1$)　…… ㉠
㉠을 만족시키는 정수 x의 값의 합이 6이므로
$3\le k<4$



유형 04 근의 조건이 주어진 이차부등식

중요★

이차부등식이 '모든 실수에 대하여 성립한다.', '해를 갖는다.', '오직 하나의 해를 갖는다.', '해를 갖지 않는다.'와 같은 조건이 주어지면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 이용한다.

풍쌤 Point 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 다음 이차부등식이 성립할 조건은

① $ax^2+bx+c>0$ ➡ $a>0$, $D<0$

② $ax^2+bx+c\geq0$ ➡ $a>0$, $D\leq0$

③ $ax^2+bx+c<0$ ➡ $a<0$, $D<0$

④ $ax^2+bx+c\leq0$ ➡ $a<0$, $D\leq0$

030

이차부등식 $x^2+2kx+5k>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 하는 정수 k의 최댓값은?

① 3 ✓② 4 ③ 5

④ 6 ⑤ 7

이차방정식 $x^2+2kx+5k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-5k<0$, $k(k-5)<0$

$\therefore\ 0<k<5$

따라서 정수 k의 최댓값은 4이다.

031

이차부등식 $x^2-x+2k\leq0$이 해를 갖지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $k>a$일 때, $16a$의 값은?

① 1 ✓② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-x+2k>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-x+2k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times2k<0$

$1-8k<0$ $\quad\therefore\ k>\frac{1}{8}$

따라서 $a=\frac{1}{8}$이므로 $16a=16\times\frac{1}{8}=2$

032

이차부등식 $k(x^2-1)\geq-5-4x$가 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 하는 정수 k의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2

④ 3 ✓⑤ 4

$k(x^2-1)\geq-5-4x$에서 $kx^2+4x-k+5\geq0$

이 이차부등식이 항상 성립하려면 $k>0$이고, 이차방정식 $kx^2+4x-k+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-k(-k+5)\leq0$

$k^2-5k+4\leq0$, $(k-1)(k-4)\leq0$ $\quad\therefore\ 1\leq k\leq4$

따라서 $k>0$, $1\leq k\leq4$의 공통부분은 $1\leq k\leq4$이므로 정수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

033

이차부등식 $x^2-(2a-6)x+4<0$이 해를 갖도록 하는 자연수 a의 최솟값을 구하시오. 6

이차방정식 $x^2-(2a-6)x+4=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-3)\}^2-1\times4>0$

$a^2-6a+5>0$, $(a-1)(a-5)>0$ $\quad\therefore\ a<1$ 또는 $a>5$

따라서 자연수 a의 최솟값은 6이다.

034

이차부등식 $-x^2-4kx+4k-15\geq0$이 해를 갖도록 하는 정수 a의 값의 범위는?

✓① $k\leq-\frac{5}{2}$ 또는 $k\geq\frac{3}{2}$ ② $k<-\frac{5}{2}$ 또는 $k>\frac{3}{2}$

③ $k\leq-\frac{3}{2}$ 또는 $k\geq\frac{5}{2}$ ④ $k<-\frac{3}{2}$ 또는 $k>\frac{5}{2}$

⑤ $-\frac{5}{2}\leq k\leq\frac{3}{2}$

이차방정식 $-x^2-4kx+4k-15=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-(-1)\times(4k-15)\geq0$

$4k^2+4k-15\geq0$, $(2k+5)(2k-3)\geq0$

$\therefore\ k\leq-\frac{5}{2}$ 또는 $k\geq\frac{3}{2}$

035

이차부등식 $3x^2+kx+3\leq0$이 오직 하나의 해를 가질 때, 실수 k의 값의 합은?

① -3 ② -1 ✓③ 0

④ 1 ⑤ 3

이차방정식 $3x^2+kx+3=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\times3\times3=0$, $k^2-36=0$

$(k+6)(k-6)=0$ $\quad\therefore\ k=-6$ 또는 $k=6$

따라서 실수 k의 값의 합은 $-6+6=0$

036

이차부등식 $kx^2-6kx+8k-7\geq0$이 오직 하나의 해를 가질 때, 실수 k의 값을 구하시오. -7

$k<0$이고, 이차방정식 $kx^2-6kx+8k-7=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3k)^2-k(8k-7)=0$

$k^2+7k=0$, $k(k+7)=0$ $\quad\therefore\ k=-7$ 또는 $k=0$

이때 $k<0$이므로 $k=-7$이다.

유형 실전 문제

정답과 풀이 102쪽

유형 05 이차부등식과 두 그래프의 위치 관계

중요

① 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있다. ➡ $f(x)>g(x)$

② 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있다. ➡ $f(x)<g(x)$

풍쌤 Point 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 이차함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 아래쪽에 있다는 조건이 주어지면 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식을 이용하여 미정계수를 결정한다.

037

이차함수 $y=x^2+6x-3$의 그래프가 이차함수 $y=4x^2-8x+5$의 그래프보다 위쪽에 있도록 하는 정수 x의 개수를 구하시오. 3

$x^2+6x-3>4x^2-8x+5$에서 $3x^2-14x+8<0$ $\quad\therefore \frac{2}{3}<x<4$

따라서 정수 x는 1, 2, 3의 3개이다.

038

이차함수 $y=-x^2+x+2$의 그래프가 직선 $y=3x+k$보다 항상 아래쪽에 있도록 하는 정수 k의 최솟값을 구하시오. 4

$x^2+2x+k-2>0$이므로 이차방정식 $x^2+2x+k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(k-2)<0,\ -k+3<0 \quad\therefore k>3$

따라서 정수 k의 최솟값은 4이다.

039

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 직선 $y=-x+6$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위가 $x<-2$ 또는 $x>1$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 4

$x^2+ax+b>-x+6$에서 $x^2+(a+1)x+b-6>0$

해가 $x<-2$ 또는 $x>1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $x^2+x-2>0$

따라서 $a+1=1$, $b-6=-2$이므로 $a=0$, $b=4$ $\quad\therefore a+b=4$

040

이차함수 $y=ax^2+19x+b$의 그래프가 직선 $y=3x+21$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위가 $x<3$ 또는 $x>5$일 때, 상수 a, b에 대하여 $2a-b$의 값을 구하시오. 5

$ax^2+19x+b<3x+21$에서 $ax^2+16x+b-21<0$

$a<0$이므로 해가 $x<3$ 또는 $x>5$이고 x^2의 계수가 a인 이차부등식은

$ax^2-8ax+15a<0$

따라서 $16=-8a$, $b-21=15a$이므로 $a=-2$, $b=-9$

$\therefore 2a-b=2\times(-2)-(-9)=5$

유형 06 제한된 범위에서 항상 성립하는 이차부등식

① $\alpha\le x\le\beta$에서 이차부등식 $f(x)>0$이 항상 성립한다.
➡ $\alpha\le x\le\beta$에서 $(f(x)$의 최솟값$)>0$

② $\alpha\le x\le\beta$에서 이차부등식 $f(x)<0$이 항상 성립한다.
➡ $\alpha\le x\le\beta$에서 $(f(x)$의 최댓값$)<0$

풍쌤 Point 제한된 범위에서의 이차함수의 최대·최소를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 식을 세운다.

041

$0\le x\le 2$에서 이차부등식 $x^2-2x+k>0$이 항상 성립하도록 하는 상수 k의 값의 범위는?

✓① $k>1$　② $k\ge1$　③ $k>2$
④ $k\ge2$　⑤ $k>3$

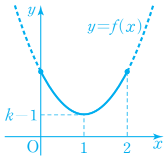
$f(x)=x^2-2x+k$라 하면

$f(x)=(x-1)^2+k-1$

$0\le x\le 2$에서 $f(x)>0$이 항상 성립하려면

$f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $k-1$을 가지므로

$k-1>0 \quad\therefore k>1$



042

$-1\le x\le 1$에서 이차부등식 $-x^2+6x-k\le0$이 항상 성립하도록 하는 상수 k의 최솟값은?

① 3　② 4　✓③ 5
④ 6　⑤ 7

$f(x)=-x^2+6x-k$라 하면

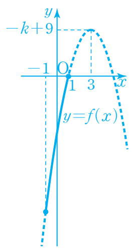
$f(x)=-(x-3)^2-k+9$

$-1\le x\le 1$에서 $f(x)\le0$이 항상 성립하려면

$f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 $-k+5$를 가지므로

$-k+5\le0 \quad\therefore k\ge5$

따라서 k의 최솟값은 5이다.



043

$-2\le x\le 3$에서 이차부등식 $x^2-3x+1\le x-a$가 항상 성립할 때, 정수 a의 최솟값은?

✓① -13　② -9　③ -5
④ -1　⑤ 3

$x^2-3x+1\le x-a$에서 $x^2-4x+a+1\le0$

$f(x)=x^2-4x+a+1$이라 하면

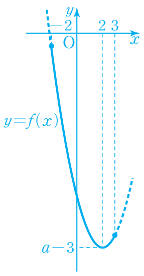
$f(x)=(x-2)^2+a-3$

$-2\le x\le 3$에서 $f(x)\le0$이 항상 성립하려면

$f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 $a+13$을 가지므로

$a+13\le0 \quad\therefore a\le-13$

따라서 정수 a의 최댓값은 -13이다.



05 연립이차부등식

❶ 연립이차부등식

연립부등식을 이루는 부등식 중에서 차수가 가장 높은 부등식이 이차부등식일 때, 이 연립부등식을 연립이차부등식이라 한다.

❷ 연립이차부등식의 풀이

① 각 부등식의 해를 구한다.

② ①의 해를 수직선 위에 함께 나타낸다.

③ 공통부분을 찾아 연립부등식의 해를 구한다.

- $f(x)<g(x)<h(x)$ 꼴의 부등식

연립부등식 $\begin{cases} f(x)<g(x) \\ g(x)<h(x) \end{cases}$ 꼴로 고쳐서 푼다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 103쪽

044

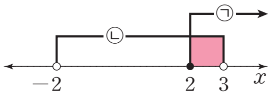
다음은 연립부등식 $\begin{cases} 3x-4\geq 2 \\ x^2-x-6<0 \end{cases}$ 을 푸는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

$3x-4\geq 2$에서 $x\geq \boxed{2}$ …… ㉠

$x^2-x-6<0$에서 $(x+2)(x-3)<0$이므로

$\boxed{-2}<x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $\boxed{2}\leq x<3$

045

다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x^2+6>7x & \cdots\cdots ㉠ \\ -x+4>1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ $x<1$

㉠에서 $x<1$ 또는 $x>6$, ㉡에서 $x<3$

따라서 연립부등식의 해는 $x<1$

(2) $\begin{cases} x(x+4)>5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x<5x+2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ $x>1$

㉠에서 $x<-5$ 또는 $x>1$, ㉡에서 $x>-1$

따라서 연립부등식의 해는 $x>1$

(3) $\begin{cases} -x^2+6x\geq 5x-2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 9x-4>5x+8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 해는 없다.

㉠에서 $-1\leq x\leq 2$, ㉡에서 $x>3$

따라서 연립부등식의 해는 없다.

046

다음은 연립부등식 $\begin{cases} x^2+4x-5>0 \\ x^2+x-6\leq 0 \end{cases}$ 을 푸는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

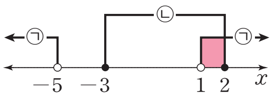
$x^2+4x-5>0$에서 $(x+5)(x-1)>0$이므로

$x<\boxed{-5}$ 또는 $x>1$ …… ㉠

$x^2+x-6\leq 0$에서 $(x+3)(x-2)\leq 0$이므로

$-3\leq x\leq \boxed{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $1<x\leq \boxed{2}$

047

다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x^2-1\leq 3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-6x\leq -3x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ $0\leq x\leq 2$

㉠에서 $-2\leq x\leq 2$, ㉡에서 $0\leq x\leq 3$

따라서 연립부등식의 해는 $0\leq x\leq 2$

(2) $\begin{cases} x^2\leq 5x & \cdots\cdots ㉠ \\ x(x-4)>2x^2+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 해는 없다.

㉠에서 $0\leq x\leq 5$, ㉡에서 $-3<x<-1$

따라서 연립부등식의 해는 없다.

(3) $\begin{cases} x^2>3x+4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-6x+7\geq x^2+2x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ $x<-1$ 또는 $x\geq 7$

㉠에서 $x<-1$ 또는 $x>4$, ㉡에서 $x\leq 1$ 또는 $x\geq 7$

따라서 연립부등식의 해는 $x<-1$ 또는 $x\geq 7$

개념 기본 문제

048

다음 부등식을 푸시오.

(1) $\overset{\text{㉠}}{\overline{x^2-2x-6\le -x}}\underset{\text{㉡}}{\underline{\le -1}}$ $1\le x\le 3$

㉠에서 $x^2-x-6\le 0$, $(x+2)(x-3)\le 0$
$\therefore\ -2\le x\le 3$
㉡에서 $x\ge 1$
따라서 연립부등식의 해는 $1\le x\le 3$

(2) $20<\overset{\text{㉠}}{\overline{2x+8}}\underset{\text{㉡}}{\underline{\le 8x-x^2}}$ 해는 없다.

㉠에서 $-2x<-12$ $\therefore\ x>6$
㉡에서 $x^2-6x+8\le 0$, $(x-2)(x-4)\le 0$
$\therefore\ 2\le x\le 4$
따라서 연립부등식의 해는 없다.

(3) $\overset{\text{㉠}}{\overline{x^2+4x+6<3}}\underset{\text{㉡}}{\underline{\le -3x+6}}$ $-3<x<-1$

㉠에서 $x^2+4x+3<0$, $(x+3)(x+1)<0$
$\therefore\ -3<x<-1$
㉡에서 $3x\le 3$ $\therefore\ x\le 1$
따라서 연립부등식의 해는 $-3<x<-1$

(4) $\overset{\text{㉠}}{\overline{-x^2+5x+10\le x+5}}\underset{\text{㉡}}{\underline{<x^2-5x+13}}$ $x\le -1$ 또는 $x\ge 5$

㉠에서 $x^2-4x-5\ge 0$, $(x+1)(x-5)\ge 0$
$\therefore\ x\le -1$ 또는 $x\ge 5$
㉡에서 $x^2-6x+8>0$, $(x-2)(x-4)>0$
$\therefore\ x<2$ 또는 $x>4$
따라서 연립부등식의 해는 $x\le -1$ 또는 $x\ge 5$

(5) $\overset{\text{㉠}}{\overline{6<x^2-x}}\underset{\text{㉡}}{\underline{\le 16-x}}$ $-4\le x<-2$ 또는 $3<x\le 4$

㉠에서 $x^2-x-6>0$, $(x+2)(x-3)>0$
$\therefore\ x<-2$ 또는 $x>3$
㉡에서 $x^2-16\le 0$, $(x+4)(x-4)\le 0$
$\therefore\ -4\le x\le 4$
따라서 연립부등식의 해는 $-4\le x<-2$ 또는 $3<x\le 4$

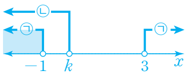
(6) $\overset{\text{㉠}}{\overline{3x(x-1)-7<2x^2-x+1}}\underset{\text{㉡}}{\underline{<x^2-2x+7}}$ $-2<x<2$

㉠에서 $x^2-2x-8<0$, $(x+2)(x-4)<0$
$\therefore\ -2<x<4$
㉡에서 $x^2+x-6<0$, $(x+3)(x-2)<0$
$\therefore\ -3<x<2$
따라서 연립부등식의 해는 $-2<x<2$

049

연립부등식 $\begin{cases}(x+1)(x-3)>0 & \cdots\cdots\ \text{㉠}\\ x<k & \cdots\cdots\ \text{㉡}\end{cases}$의 해가 $x<-1$일 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오. $-1\le k\le 3$

㉠에서 $x<-1$ 또는 $x>3$
㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $x<-1$이 되도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면

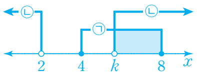


따라서 실수 k의 값의 범위는 $-1\le k\le 3$이다.

050

연립부등식 $\begin{cases}x^2-12x+32\le 0 & \cdots\cdots\ \text{㉠}\\ (x-2)(x-k)>0 & \cdots\cdots\ \text{㉡}\end{cases}$의 해가 $k<x\le 8$일 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오. (단, $k>2$) $4\le k<8$

㉠에서 $(x-4)(x-8)\le 0$
$\therefore\ 4\le x\le 8$
㉡에서 $x<2$ 또는 $x>k$ ($\because\ k>2$)
㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $k<x\le 8$이 되도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면

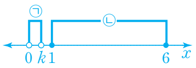


$\therefore\ 4\le k<8$

051

연립부등식 $\begin{cases}x^2-kx<0 & \cdots\cdots\ \text{㉠}\\ x^2-7x+6\le 0 & \cdots\cdots\ \text{㉡}\end{cases}$의 해가 없을 때, 양수 k의 값의 범위를 구하시오. $0<k\le 1$

㉠에서 $x(x-k)<0$ $\therefore\ 0<x<k$ ($\because\ k>0$)
㉡에서 $(x-1)(x-6)\le 0$ $\therefore\ 1\le x\le 6$
㉠, ㉡의 해의 공통부분이 없도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면



$\therefore\ 0<k\le 1$

유형 실전 문제

정답과 풀이 105쪽

유형 07 연립이차부등식

중요★

연립이차부등식은 다음 순서로 푼다.

① 각 부등식의 해를 구한다.

② 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾는다.

풍쌤 Point $A<B<C$ 꼴의 부등식을 $\begin{cases}A<B\\A<C\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}A<C\\B<C\end{cases}$ 꼴로 바꾸어 풀지 않도록 주의한다.

052

연립부등식 $\begin{cases}-x+5\ge 4 & \cdots\cdots \text{㉠}\\x^2+3x-10<0 & \cdots\cdots \text{㉡}\end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4

④ 5 ✓⑤ 6

㉠에서 $x\le 1$

㉡에서 $(x+5)(x-2)<0$ ∴ $-5<x<2$

따라서 연립부등식의 해는 $-5<x\le 1$이므로 정수 x는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1$의 6개이다.

053

연립부등식 $\begin{cases}x^2-3x\le 18 & \cdots\cdots \text{㉠}\\2(x-2)>x-10 & \cdots\cdots \text{㉡}\end{cases}$ 을 만족시키는 실수 x의 최댓값과 최솟값의 합은?

✓① 3 ② 4 ③ 5

④ 6 ⑤ 7

㉠에서 $x^2-3x-18\le 0$, $(x+3)(x-6)\le 0$ ∴ $-3\le x\le 6$

㉡에서 $2x-4>x-10$ ∴ $x>-6$

따라서 연립부등식의 해는 $-3\le x\le 6$이다.

즉, 최댓값은 6, 최솟값은 -3이므로 그 합은 $6+(-3)=3$

054

연립부등식 $\begin{cases}x^2+x-2\le 0 & \cdots\cdots \text{㉠}\\x^2<4x & \cdots\cdots \text{㉡}\end{cases}$ 의 해가 $\alpha<x\le\beta$일 때, $2\beta-\alpha$의 값을 구하시오. 2

㉠에서 $(x+2)(x-1)\le 0$ ∴ $-2\le x\le 1$

㉡에서 $x^2-4x<0$, $x(x-4)<0$ ∴ $0<x<4$

따라서 연립부등식의 해는 $0<x\le 1$이므로 $\alpha=0$, $\beta=1$

∴ $2\beta-\alpha=2\times 1-0=2$

055

연립부등식 $\begin{cases}x^2>2x+3 & \cdots\cdots \text{㉠}\\2x^2-5x+10\ge x^2+6x-8 & \cdots\cdots \text{㉡}\end{cases}$ 을 만족시키는 양수 x의 최솟값은?

① 5 ② 6 ③ 7

④ 8 ✓⑤ 9

㉠에서 $x^2-2x-3>0$, $(x+1)(x-3)>0$

∴ $x<-1$ 또는 $x>3$

㉡에서 $x^2-11x+18\ge 0$, $(x-2)(x-9)\ge 0$

∴ $x\le 2$ 또는 $x\ge 9$

따라서 연립부등식의 해는 $x<-1$ 또는 $x\ge 9$이므로 양수 x의 최솟값은 9이다.

056

부등식 $\overbrace{x+3\le 2x+1}^{\text{㉠}}\underbrace{{}\le x^2+7x+5}_{\text{㉡}}$를 만족시키는 실수 x의 최솟값은?

✓① 2 ② 3 ③ 4

④ 5 ⑤ 6

㉠에서 $-x\le -2$ ∴ $x\ge 2$

㉡에서 $x^2+5x+4\ge 0$, $(x+4)(x+1)\ge 0$

∴ $x\le -4$ 또는 $x\ge -1$

따라서 연립부등식의 해는 $x\ge 2$이므로 실수 x의 최솟값은 2이다.

057

부등식

$$\overbrace{3x^2-8x-13<x^2+6x+3}^{\text{㉠}}\underbrace{{}<2x^2-2x+18}_{\text{㉡}}$$

의 해가 아닌 것은?

① 0 ② 1 ③ 2

✓④ 4 ⑤ 6

㉠에서 $2x^2-14x-16<0$, $x^2-7x-8<0$

$(x+1)(x-8)<0$ ∴ $-1<x<8$

㉡에서 $x^2-8x+15>0$, $(x-3)(x-5)>0$

∴ $x<3$ 또는 $x>5$

따라서 연립부등식의 해는 $-1<x<3$ 또는 $5<x<8$

058

세로의 길이가 가로의 길이보다 긴 직사각형 모양의 밭의 둘레의 길이가 16 m이다. 세로의 길이가 x m일 때, 이 밭의 넓이가 12 m^2 이상 15 m^2 이하가 되도록 하는 x의 값의 범위를 구하시오. $5\le x\le 6$

밭의 가로의 길이는 $(8-x)$ m이므로

$x>0$, $8-x>0$, $x>8-x$ ∴ $4<x<8$ ⋯⋯ ㉠

밭의 넓이가 12 m^{2}이상 15 m^{2}이하이므로

$12\le x(8-x)\le 15$

$12\le x(8-x)$ ∴ $2\le x\le 6$ ⋯⋯ ㉡

$x(8-x)\le 15$ ∴ $x\le 3$ 또는 $x\ge 5$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $5\le x\le 6$

유형 실전 문제

정답과 풀이 106쪽

유형 08 해가 주어진 연립이차부등식

중요

각 부등식의 해의 공통부분과 주어진 해가 일치하도록 수직선 위에 나타내어 미정계수를 결정한다.

풍쌤 Point 공통부분과 주어진 해가 일치할 때 등호가 성립하는지 주의 깊게 살핀다.

059

연립부등식 $\begin{cases} x-k\le 0 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2+2x-8<0 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$ 의 해가 $-4<x<2$일 때, 실수 k의 값은?

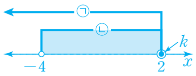
① 0　② 1　✓③ 2

④ 3　⑤ 4

㉠에서 $x\le k$

㉡에서 $(x+4)(x-2)<0$　$\therefore -4<x<2$

㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $-4<x<2$가 되도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면



$k=2$

060

연립부등식 $\begin{cases} x^2-(k-3)x-3k\le 0 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2-x-2\le 0 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$ 의 해가 $-1\le x\le k$가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은?

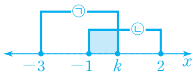
① -2　② -1　③ 0

④ 1　✓⑤ 2

㉠에서 $(x+3)(x-k)\le 0$

㉡에서 $(x+1)(x-2)\le 0$　$\therefore -1\le x\le 2$

㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $-1\le x\le k$가 되도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면



$-1\le k\le 2$

따라서 정수 k는 $-1, 0, 1, 2$이고, 그 합은 $-1+0+1+2=2$

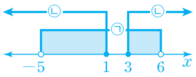
061

연립부등식 $\begin{cases} x^2-x+a<0 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2-4x+b\ge 0 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$ 의 해가 $-5<x\le 1$ 또는 $3\le x<6$이 되도록 하는 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값은?

① 21　② 24　③ 27

④ 30　✓⑤ 33

㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $-5<x\le 1$ 또는 $3\le x<6$이 되도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면



㉠의 해는 $-5<x<6$이어야 하므로

$(x+5)(x-6)<0$, $x^2-x-30<0$　$\therefore a=-30$

또, ㉡의 해는 $x\le 1$ 또는 $x\ge 3$이어야 하므로

$(x-1)(x-3)\ge 0$, $x^2-4x+3\ge 0$　$\therefore b=3$

$\therefore b-a=3-(-30)=33$

유형 09 절댓값 기호를 포함한 이차부등식

양수 k에 대하여

① $|f(x)|<k$ ➡ $-k<f(x)<k$

② $|f(x)|>k$ ➡ $f(x)<-k$ 또는 $f(x)>k$

풍쌤 Point 절댓값 기호를 포함한 이차부등식은 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 값을 기준으로 범위를 나누어 푼다.

062

부등식 $|x^2-2x|\ge 3$의 해가 $x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은?

✓① 2　② 3　③ 4

④ 5　⑤ 6

$|x^2-2x|\ge 3$에서 $x^2-2x\le -3$ 또는 $x^2-2x\ge 3$

(i) $x^2-2x\le -3$일 때, $x^2-2x+3\le 0$, $(x-1)^2+2\le 0$
　이므로 해는 없다.

(ii) $x^2-2x\ge 3$일 때, $x^2-2x-3\ge 0$, $(x+1)(x-3)\ge 0$
　$\therefore x\le -1$ 또는 $x\ge 3$

(i), (ii)에서 부등식의 해는 $x\le -1$ 또는 $x\ge 3$이므로 $\alpha=-1$, $\beta=3$

$\therefore \alpha+\beta=-1+3=2$

063

부등식 $x^2-2x-3<3|x-1|$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.　7

(i) $x<1$일 때, $x^2-2x-3<-3(x-1)$
　$x^2+x-6<0$, $(x+3)(x-2)<0$　$\therefore -3<x<2$
　그런데 $x<1$이므로 $-3<x<1$

(ii) $x\ge 1$일 때, $x^2-2x-3<3(x-1)$
　$x^2-5x<0$, $x(x-5)<0$　$\therefore 0<x<5$
　그런데 $x\ge 1$이므로 $1\le x<5$

(i), (ii)에서 부등식의 해는 $-3<x<5$

따라서 정수 x는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$의 7개이다.

064

연립부등식 $\begin{cases} (x+2)(x+4)\ge 15 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2+|x|-6<0 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 값은?

✓① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

㉠에서 $x^2+6x-7\ge 0$, $(x+7)(x-1)\ge 0$　$\therefore x\le -7$ 또는 $x\ge 1$

㉡에서

(i) $x<0$일 때, $x^2-x-6<0$, $(x+2)(x-3)<0$　$\therefore -2<x<3$
　그런데 $x<0$이므로 $-2<x<0$

(ii) $x\ge 0$일 때, $x^2+x-6<0$, $(x+3)(x-2)<0$　$\therefore -3<x<2$
　그런데 $x\ge 0$이므로 $0\le x<2$

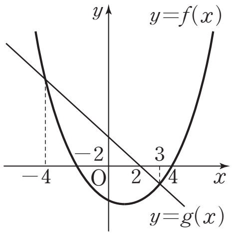
(i), (ii)에서 부등식의 해는 $-2<x<2$

따라서 연립부등식의 해는 $1\le x<2$이므로 정수 x의 값은 1이다.

중단원 점검 문제

01

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 부등식 $f(x)\le g(x)$의 해가 아닌 것은?



① -4　② -2
③ 0　④ 2
✓⑤ 4

$f(x)\le g(x)$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 아래쪽에 있거나 두 함수의 그래프가 만나는 x의 값의 범위이므로
$-4\le x\le 3$
따라서 해가 아닌 것은 ⑤이다.

02 학교 시험 기출

이차부등식 $(x+1)(x+2)\le 20$의 해가 $\alpha\le x\le\beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값은?

① 5　② 7　✓③ 9
④ 11　⑤ 13

$(x+1)(x+2)\le 20$에서 $x^2+3x+2\le 20$, $x^2+3x-18\le 0$
$(x+6)(x-3)\le 0$　$\therefore -6\le x\le 3$
따라서 $\alpha=-6$, $\beta=3$이므로 $\beta-\alpha=3-(-6)=9$

03

다음 부등식 중 이차부등식 $x^2-2x-8<0$과 해가 같은 것은?

① $|x-2|<1$　✓② $|x-1|<3$　③ $|x+1|<2$
④ $|x+2|<3$　⑤ $|x+3|<1$

$x^2-2x-8<0$에서 $(x+2)(x-4)<0$　$\therefore -2<x<4$
① $-1<x-2<1$　$\therefore 1<x<3$　② $-3<x-1<3$　$\therefore -2<x<4$
③ $-2<x+1<2$　$\therefore -3<x<1$　④ $-3<x+2<3$　$\therefore -5<x<1$
⑤ $-1<x+3<1$　$\therefore -4<x<-2$
따라서 해가 같은 것은 ②이다.

04

지면으로부터 초속 30 m로 똑바로 위로 쏘아 올린 물로켓의 t초 후의 높이를 y m라 하면 $y=-5t^2+30t$인 관계가 성립한다고 한다. 물 로켓의 높이가 40 m 이상인 시간은 몇 초 동안인지 구하시오.　2초

$-5t^2+30t\ge 40$에서 $5t^2-30t+40\le 0$, $5(t-2)(t-4)\le 0$
$\therefore 2\le t\le 4$
따라서 물 로켓의 높이가 40 m 이상인 시간은 2초부터 4초까지 2초 동안이다.

05

이차부등식 $x^2+ax+b\le 0$의 해가 $x=2$일 때, $bx^2+ax-3>0$의 해는? (단, a, b는 상수이다.)

① $x<-\frac{3}{2}$ 또는 $x>\frac{1}{2}$　② $-\frac{3}{2}\le x\le\frac{1}{2}$
✓③ $x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>\frac{3}{2}$　④ $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$
⑤ $x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>\frac{3}{2}$

해가 $x=2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-2)^2\le 0$　$\therefore x^2-4x+4\le 0$
따라서 $a=-4$, $b=4$이므로 $bx^2+ax-3>0$에서
$4x^2-4x-3>0$, $(2x+1)(2x-3)>0$
$\therefore x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>\frac{3}{2}$

06

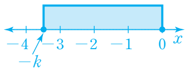
이차부등식 $f(x)\le 0$의 해가 $-3\le x\le 2$일 때, $f(-x)>0$을 만족시키는 자연수 x의 최솟값을 구하시오.　4

$f(x)=a(x+3)(x-2)$ $(a>0)$라 하면
$f(-x)=a(-x+3)(-x-2)$
$=a(x-3)(x+2)$
따라서 $f(-x)>0$에서 $a(x-3)(x+2)>0$　$\therefore x<-2$ 또는 $x>3$
따라서 자연수 x의 최솟값은 4이다.

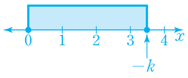
07 실전 Plus

이차부등식 $x^2+kx\le 0$을 만족시키는 정수 x가 4개일 때, 모든 정수 k의 값의 곱은?

① -10　✓② -9　③ -8
④ -7　⑤ -6



(i) $-k<0$, 즉 $k>0$일 때 이차부등식의 해는
$-k\le x\le 0$이므로 정수 x가 4개이려면
$-4<-k\le -3$　$\therefore 3\le k<4$
(ii) $-k=0$, 즉 $k=0$일 때 정수 x가 4개인 조건을 만족시키지 않는다.



(iii) $-k>0$, 즉 $k<0$일 때 이차부등식의 해는
$0\le x\le -k$이므로 정수 x가 4개이려면
$3\le -k<4$　$\therefore -4<k\le -3$
(i)~(iii)에서 정수 k의 값은 3, -3이므로 그 곱은 $3\times(-3)=-9$

08

이차부등식 $kx^2-8x+k+6>0$이 해를 갖지 않도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하시오.　-8

모든 실수 x에 대하여 $kx^2-8x+k+6\le 0$이 성립해야 하므로 $k<0$
이차방정식 $kx^2-8x+k+6=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-4)^2-k(k+6)\le 0$
$-k^2-6k+16\le 0$, $k^2+6k-16\ge 0$
$(k+8)(k-2)\ge 0$　$\therefore k\le -8$ 또는 $k\ge 2$
이때 $k<0$이어야 하므로 $k\le -8$
따라서 실수 k의 최댓값은 -8이다.

중단원 점검 문제

정답과 풀이 108쪽

09 교육청 기출

모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$$x^2+(m+2)x+2m+1>0$$

이 성립하도록 하는 모든 정수 m의 값은 합은?

① 3 ② 4 ③ 5

✓④ 6 ⑤ 7

이차방정식 $x^2+(m+2)x+2m+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(m+2)^2-4\times1\times(2m+1)<0$

$m^2-4m<0$, $m(m-4)<0$

$\therefore 0<m<4$

따라서 정수 m은 1, 2, 3이므로 그 합은 $1+2+3=6$

10

이차함수 $y=6x^2-6x+8$의 그래프가 직선 $y=4x+24$보다 아래쪽에 있는 모든 정수 x의 값의 합은?

① -3 ② -1 ③ 0

④ 1 ✓⑤ 3

$6x^2-6x+8<4x+24$에서

$6x^2-10x-16<0$, $2(x+1)(3x-8)<0$

$\therefore -1<x<\frac{8}{3}$

따라서 정수 x는 0, 1, 2이므로 그 합은 $0+1+2=3$

11 실전 Plus

두 이차함수 $f(x)=x^2-3x+k$, $g(x)=-x^2+x-3$에 대하여 $-2\le x\le2$에서 부등식 $f(x)\ge g(x)$가 항상 성립할 때, 실수 k의 최솟값을 구하시오. -1

$x^2-3x+k\ge-x^2+x-3$에서 $2x^2-4x+k+3\ge0$

$h(x)=2x^2-4x+k+3$이라 하면 $h(x)=2(x-1)^2+k+1$

$-2\le x\le2$에서 $h(x)\ge0$이 항상 성립하려면

$h(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $k+1$을 가지므로

$k+1\ge0$ $\therefore k\ge-1$

따라서 k의 최솟값은 -1이다.

12 교육청 기출

연립부등식 $\begin{cases} x^2-3x-18\le0 \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2-8x+15\ge0 \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은?

① 7 ② 8 ③ 9

④ 10 ✓⑤ 11

㉠에서 $(x+3)(x-6)\le0$ $\therefore -3\le x\le6$

㉡에서 $(x-3)(x-5)\ge0$ $\therefore x\le3$ 또는 $x\ge5$

따라서 연립부등식의 해는 $-3\le x\le3$ 또는 $5\le x\le6$

즉, 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 6이므로 그 합은

$-3+(-2)+(-1)+0+1+2+3+5+6=11$

13

부등식 $\overbrace{11x-10<\underbrace{x^2+4x}_{}}^{\text{㉠}}\underbrace{<3x+12}_{\text{㉡}}$의 해가 이차부등식 $x^2+ax+b<0$의 해와 같을 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① 8 ② 9 ✓③ 10

④ 11 ⑤ 12

㉠에서 $x^2-7x+10>0$, $(x-2)(x-5)>0$ $\therefore x<2$ 또는 $x>5$

㉡에서 $x^2+x-12<0$, $(x+4)(x-3)<0$ $\therefore -4<x<3$

따라서 연립부등식의 해는 $-4<x<2$이다.

해가 $-4<x<2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+4)(x-2)<0$, $x^2+2x-8<0$

즉, $a=2$, $b=-8$이므로 $a-b=2-(-8)=10$

14

정육면체의 밑면의 가로의 길이는 4 cm 늘이고, 높이는 2 cm 줄여서 만든 직육면체의 부피가 원래의 정육면체의 부피보다 작을 때, 원래의 정육면체의 한 모서리의 길이는? (단, 정육면체의 모서리의 길이는 자연수이다.)

✓① 3 cm ② 4 cm ③ 5 cm

④ 6 cm ⑤ 7 cm

정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라 하면 새로 만든 직육면체의 밑면의 가로의 길이는 $(x+4)$ cm, 높이는 $(x-2)$ cm이므로

$x>0$, $x+4>0$, $x-2>0$ $\therefore x>2$ ······ ㉠

또, 직육면체의 부피가 정육면체의 부피보다 작아야 하므로

$x(x+4)(x-2)<x^3$, $2x(x-4)<0$ $\therefore 0<x<4$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2<x<4$이므로 원래의 정육면체의 한 모서리의 길이는 3 cm이다.

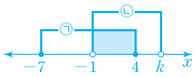
15 학교 시험 기출

부등식 $\overbrace{2x^2+4x-28\le x^2+x}^{\text{㉠}}\underbrace{<k(x+1)}_{\text{㉡}}$의 해가 $-1<x\le4$일 때, 정수 k의 최솟값을 구하시오. 5

㉠에서 $x^2+3x-28\le0$, $(x+7)(x-4)\le0$ $\therefore -7\le x\le4$

㉡에서 $x^2-(k-1)x-k<0$, $(x+1)(x-k)<0$

㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $-1<x\le4$가 되도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면



$k>4$

따라서 정수 k의 최솟값은 5이다.

16

연립부등식 $\begin{cases} 2|x|-x^2>0 \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2+2x\le3 \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$의 해가 $\alpha<x<0$ 또는 $0<x\le\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값은?

✓① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

㉠에서

(ⅰ) $x<0$일 때, $-2x-x^2>0$, $x(x+2)<0$ $\therefore -2<x<0$

(ⅱ) $x\ge0$일 때, $2x-x^2>0$, $x(x-2)<0$ $\therefore 0<x<2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 해는 $-2<x<0$ 또는 $0<x<2$

㉡에서 $x^2+2x-3\le0$, $(x+3)(x-1)\le0$ $\therefore -3\le x\le1$

따라서 연립부등식의 해는 $-2<x<0$ 또는 $0<x\le1$

$\therefore \alpha\beta=-2\times1=-2$

Ⅲ

경우의 수

함부로 세지 마라.

이 단원의 핵심은 많이 세는 것이 아니다. 제대로 세는 것이다. 아무 기준 없이 세기 시작하면 반드시 놓치는 경우가 생긴다. 기준을 정해 상황을 적절히 나누어야 모든 경우가 한눈에 보인다. 순서가 바뀌면 다른 경우인지, 조건이 달라지면 다시 세야 하는지부터 따져야 한다. 손이 아니라 머리로, 기준을 세우고 정리하는 기술. 이 기술을 갈고 닦는 것이 이 단원의 목표다.

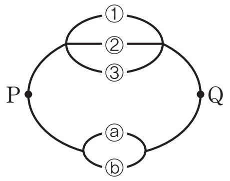
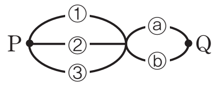
미리보는 Ⅲ 경우의 수

01 경우의 수와 순열

본문 145~159쪽

- 유형 ① 합의 법칙
- 유형 ② 방정식과 부등식의 해의 개수
- 유형 ③ 곱의 법칙
- 유형 ④ 약수의 개수
- 유형 ⑤ 도로망에서의 경우의 수
- 유형 ⑥ 색칠하는 방법의 수
- 유형 ⑦ $_{n}\mathrm{P}_{r}$의 계산
- 유형 ⑧ 순열의 수
- 유형 ⑨ 이웃하는 순열의 수
- 유형 ⑩ 이웃하지 않는 순열의 수
- 유형 ⑪ 위치가 고정된 경우의 순열의 수
- 유형 ⑫ 교대로 서는 경우의 순열의 수
- 유형 ⑬ '적어도'의 조건이 있는 순열의 수
- 유형 ⑭ 자연수의 개수
- 유형 ⑮ 사전식으로 배열하는 순열의 수

합의 법칙과 곱의 법칙

합의 법칙	곱의 법칙
	
점 P에서 점 Q로 가는 경우는 ①, ②, ③, ⓐ, ⓑ ↓ $\boxed{3+2=5}$	점 P에서 점 Q로 가는 경우는 ① → ⓐ, ① → ⓑ ② → ⓐ, ② → ⓑ ③ → ⓐ, ③ → ⓑ ↓ $\boxed{3\times2=6}$

순열

서로 다른 n개에서 r $(0<r\leq n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것

➡ n개에서 r개를 택하는 $\boxed{\text{순열}}$

$_{n}\mathrm{P}_{r}$

서로 다른 것의 개수 (n)

택하는 것의 개수 (r)

02 조합

본문 160~168쪽

- 유형 ① $_{n}\mathrm{C}_{r}$의 계산
- 유형 ② 조합의 수
- 유형 ③ 특정한 것을 포함하거나 제외하는 조합의 수
- 유형 ④ '적어도'의 조건이 있는 조합의 수
- 유형 ⑤ 뽑아서 나열하는 경우의 수
- 유형 ⑥ 직선의 개수
- 유형 ⑦ 삼각형과 사각형의 개수
- 유형 ⑧ 분할과 분배

조합

서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r $(0<r\leq n)$개를 택하는 것

➡ n개에서 r개를 택하는 $\boxed{\text{조합}}$

$_{n}\mathrm{C}_{r}$

서로 다른 것의 개수 (n)

택하는 것의 개수 (r)

순열과 조합의 비교

순열	조합
서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우	서로 다른 n개에서 r개를 택하는 경우
$_{n}\mathrm{P}_{r}=\dfrac{n!}{(n-r)!}$	$_{n}\mathrm{C}_{r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
순서를 생각함	순서를 생각하지 않음

01 경우의 수

❶ 사건과 경우의 수

① 사건: 동일한 조건에서 반복할 수 있는 실험이나 관찰에 의하여 나타나는 결과

② 경우의 수: 사건이 일어나는 경우의 가짓수

보기 한 개의 주사위를 던질 때, 2의 배수의 눈이 나오는 경우는 2, 4, 6이고, 경우의 수는 3이다.
└사건

풍쌤 Tip 경우의 수를 구할 때, 사건이 일어나는 모든 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타낸 수형도를 이용하면 편리하다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 110쪽

001

1부터 8까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 8장의 카드 중에서 한 장의 카드를 뽑을 때, 다음을 구하시오.

(1) 나올 수 있는 모든 경우의 수 8

(2) 짝수가 적혀 있는 카드를 뽑는 경우의 수 4

(3) 3의 배수가 적혀 있는 카드를 뽑는 경우의 수 2

(4) 8의 약수가 적혀 있는 카드를 뽑는 경우의 수 4

002

서로 다른 세 개의 동전을 동시에 던질 때, 다음을 구하시오.

(1) 나올 수 있는 모든 경우의 수 8

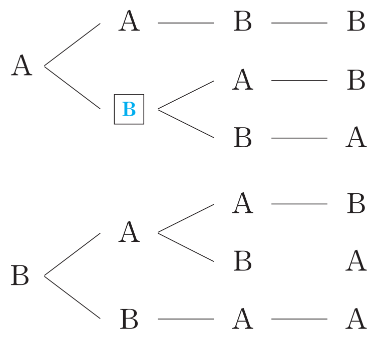
(2) 앞면이 한 개 나오는 경우의 수 3

(3) 앞면이 두 개 나오는 경우의 수 3

(4) 전부 같은 면이 나오는 경우의 수 2

003

4개의 문자 A, A, B, B를 일렬로 나열하는 경우의 수를 수형도를 이용하여 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.



따라서 구하는 경우의 수는 $\boxed{6}$이다.

004

수형도를 이용하여 다음을 구하시오.

(1) 3개의 숫자 1, 3, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수 6

(2) 3개의 문자 ㉮, ㉯, ㉰를 일렬로 나열하는 경우의 수 3

(3) 4개의 문자 A, A, B, C를 일렬로 나열하는 경우의 수 12

(4) 4명의 학생 A, B, C, D를 일렬로 세울 때, D를 맨 마지막에 세우는 경우의 수 6

02 합의 법칙과 곱의 법칙

① 합의 법칙

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A가 일어나는 경우의 수를 m, 사건 B가 일어나는 경우의 수를 n이라 하면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

참고 합의 법칙은 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않는 셋 이상의 사건에 대해서도 성립한다.

보기 3종류의 강아지 인형과 3종류의 곰 인형 중에서 하나를 택하는 경우의 수는
$3+3=6$

② 곱의 법칙

사건 A가 일어나는 경우의 수가 m, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m\times n$이다.

참고 곱의 법칙은 동시에 일어나는 셋 이상의 사건에 대해서도 성립하며, 두 사건이 잇달아 일어나는 경우에도 성립한다.

보기 6종류의 티셔츠와 5종류의 바지를 짝지어 입는 경우의 수는
$6\times5=30$

풍쌤 Tip '또는', '이거나' ➡ 합의 법칙
'이고', '동시에' ➡ 곱의 법칙

개념 기본 문제

정답과 풀이 110쪽

005

1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 뽑을 때, 다음을 구하시오.

(1) 3의 배수 또는 8의 약수가 적혀 있는 공을 뽑는 경우의 수 7

$3+4=7$

(2) 짝수 또는 5의 약수가 적혀 있는 공을 뽑는 경우의 수 6

$4+2=6$

(3) 소수 또는 4의 배수가 적혀 있는 공을 뽑는 경우의 수 6

$4+2=6$

006

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 다음을 구하시오.

(1) 첫 번째는 짝수의 눈이 나오고, 두 번째는 홀수의 눈이 나오는 경우의 수 9

$3\times3=9$

(2) 첫 번째는 3의 약수의 눈이 나오고, 두 번째는 4 이상의 눈이 나오는 경우의 수 6

$2\times3=6$

(3) 모두 소수의 눈이 나오는 경우의 수 9

$3\times3=9$

007

다음을 구하시오.

(1) 4종류의 사탕과 6종류의 초콜릿 중에서 하나를 택하는 경우의 수 10

$4+6=10$

(2) 5종류의 모자와 3종류의 양말 중에서 각각 하나씩 택하는 경우의 수 15

$5\times3=15$

(3) 10명의 남학생과 7명의 여학생이 있는 모임에서 한 명의 대표를 뽑는 경우의 수 17

$10+7=17$

(4) 서로 다른 국어책 2권, 수학책 4권, 영어책 4권 중에서 각각 한 권씩 구매하는 경우의 수 32

$2\times4\times4=32$

(5) 세 자리의 자연수에서 백의 자리의 숫자는 홀수, 십의 자리의 숫자는 2의 배수, 일의 자리의 숫자는 9의 약수인 경우의 수 60

$5\times4\times3=60$

유형 실전 문제

정답과 풀이 111쪽

유형 01 합의 법칙

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A가 일어나는 경우의 수를 m, 사건 B가 일어나는 경우의 수를 n이라 하면

(사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수)$=m+n$

풍쌤 Point 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수가 l이면
(사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수)$=m+n-l$

008

1부터 30까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 30장의 카드 중에서 한 장의 카드를 뽑을 때, 5의 배수 또는 6의 배수가 적혀 있는 카드를 뽑는 경우의 수는?

① 8　② 9　[✓ ③ 10]
④ 11　⑤ 12

$6+5-1=10$

009

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우의 수를 구하시오.　9

(i) 눈의 수의 합이 4인 경우: $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3가지
(ii) 눈의 수의 합이 8인 경우: $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$의 5가지
(iii) 눈의 수의 합이 12인 경우: $(6, 6)$의 1가지
(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는 $3+5+1=9$

010

3개의 숫자 1, 2, 3 중에서 서로 다른 2개를 택하여 만들 수 있는 두 자리의 자연수 중에서 홀수의 개수는?

[✓ ① 4]　② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

(i) 일의 자리의 숫자가 1인 경우: 21, 31의 2가지
(ii) 일의 자리의 숫자가 3인 경우: 13, 23의 2가지
(i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는 $2+2=4$

011

1부터 50까지의 자연수 중에서 3 또는 5로 나누어떨어지는 자연수의 개수를 구하시오.　23

$16+10-3=23$

유형 02 방정식과 부등식의 해의 개수

중요

① 방정식 $ax+by+cz=d$ (a, b, c, d는 상수)를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수
➡ x, y, z 중 계수의 절댓값이 큰 것부터 수를 대입한다.

② 부등식 $ax+by\le c$ (a, b, c는 상수)를 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수
➡ x, y 중 계수의 절댓값이 큰 것부터 수를 대입한다.

풍쌤 Point 미지수가 자연수인지 음이 아닌 정수인지에 따라 순서쌍의 개수가 달라지므로 미지수의 조건에 주의한다.

012

방정식 $2x+y=7$을 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하시오.　3

방정식 $2x+y=7$을 만족시키는 순서쌍 (x, y)는
$(1, 5)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$의 3개이다.

013

방정식 $x+y+3z=15$를 만족시키는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는?

① 22　② 23　③ 24
④ 25　[✓ ⑤ 26]

(i) $z=1$일 때, $(1, 11, 1)$, $(2, 10, 1)$, $(3, 9, 1)$, $(4, 8, 1)$, $(5, 7, 1)$, $(6, 6, 1)$, $(7, 5, 1)$, $(8, 4, 1)$, $(9, 3, 1)$, $(10, 2, 1)$, $(11, 1, 1)$의 11개이다.
(ii) $z=2$일 때, $(1, 8, 2)$, $(2, 7, 2)$, $(3, 6, 2)$, $(4, 5, 2)$, $(5, 4, 2)$, $(6, 3, 2)$, $(7, 2, 2)$, $(8, 1, 2)$의 8개이다.
(iii) $z=3$일 때, $(1, 5, 3)$, $(2, 4, 3)$, $(3, 3, 3)$, $(4, 2, 3)$, $(5, 1, 3)$의 5개이다.
(iv) $z=4$일 때, $(1, 2, 4)$, $(2, 1, 4)$의 2개이다.
(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 $11+8+5+2=26$

014

부등식 $4x+y\le 10$을 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하시오.　8

(i) $x=1$일 때, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$의 6개이다.
(ii) $x=2$일 때, $(2, 1)$, $(2, 2)$의 2개이다.
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는 $6+2=8$

015

한 개의 가격이 $\overset{x\text{개}}{\text{500원}}$, $\overset{y\text{개}}{\text{1000원}}$, $\overset{z\text{개}}{\text{2000원}}$인 세 종류의 과자를 5000원어치 사는 경우의 수를 구하시오.　12

(단, 사지 않는 과자가 있을 수도 있다.)

$500x+1000y+2000z=5000$
$\therefore\ x+2y+4z=10$ (단, x, y, z는 음이 아닌 정수이다.)
(i) $z=0$일 때, 순서쌍 (x, y, z)는 6개이다.
(ii) $z=1$일 때, 순서쌍 (x, y, z)는 4개이다.
(iii) $z=2$일 때, 순서쌍 (x, y, z)는 2개이다.
(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는 $6+4+2=12$

유형 실전 문제

유형 03 곱의 법칙

사건 A가 일어나는 경우의 수가 m, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면

(두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수)$=m\times n$

풍쌤 Point 다항식 A, B의 각 항의 문자가 모두 다를 때, AB의 전개식의 항의 개수는

(A의 항의 개수)$\times$(B의 항의 개수)

016

1부터 7까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 7개의 공이 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 뽑는 시행을 2번 할 때, 두 번째로 뽑은 공에 적혀 있는 수가 4의 약수인 경우의 수는?

(단, 뽑은 공은 다시 주머니에 집어넣는다.)

① 14 [✓ ② 21] ③ 28

④ 35 ⑤ 42

$7\times3=21$

017

한 개의 주사위를 잇달아 3번 던질 때, 나오는 눈의 수의 곱이 홀수인 경우의 수를 구하시오. 27

$3\times3\times3=27$

018

$(a+b+c)(x+y)(p+q)$를 전개할 때 나타나는 서로 다른 항의 개수를 구하시오. 12

$3\times2\times2=12$

019

각 자리의 숫자의 합이 짝수인 두 자리의 자연수의 개수는?

① 25 ② 30 ③ 35

④ 40 [✓ ⑤ 45]

(ⅰ) 십의 자리의 숫자가 짝수, 일의 자리의 숫자가 0 또는 짝수인 경우의 수는
$4\times5=20$

(ⅱ) 십의 자리의 숫자가 홀수, 일의 자리의 숫자가 홀수인 경우의 수는
$5\times5=25$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수의 개수는 $20+25=45$

유형 04 약수의 개수

중요

자연수 N이

$N=x^py^qz^r$ (x, y, z는 서로 다른 소수, p, q, r는 자연수)꼴로 소인수분해될 때, N의 양의 약수의 개수는

$(p+1)(q+1)(r+1)$

풍쌤 Point 두 자연수 M, N의 양의 공약수의 개수는 M, N의 최대공약수의 양의 약수의 개수와 같다.

020

36의 양의 약수의 개수를 a, 280의 양의 약수의 개수를 b라 할 때, $b-a$의 값을 구하시오. 7

$36=2^2\times3^2$이므로 $a=(2+1)\times(2+1)=9$

$280=2^3\times5\times7$이므로 $b=(3+1)\times(1+1)\times(1+1)=16$

$\therefore b-a=16-9=7$

021

$2\times k$의 양의 약수의 개수가 8일 때, 다음 중 k의 값이 될 수 없는 것은?

[✓ ① 10] ② 15 ③ 33

④ 35 ⑤ 55

① $2\times10=2^2\times5$의 약수의 개수는
$(2+1)\times(1+1)=6$

022

378과 945의 양의 공약수의 개수는?

① 4 ② 6 [✓ ③ 8]

④ 10 ⑤ 12

$378=2\times3^3\times7$, $945=3^3\times5\times7$이므로 378과 945의 최대공약수는
$3^3\times7$

따라서 구하는 양의 공약수의 개수는 $3^3\times7$의 양의 약수의 개수와 같으므로
$(3+1)\times(1+1)=8$

023

6^n의 양의 약수의 개수가 49일 때, 자연수 n의 값을 구하시오. 6

$6^n=(2\times3)^n=2^n\times3^n$이므로 6^n의 양의 약수의 개수는

$(n+1)(n+1)=(n+1)^2$

이때 $(n+1)^2=49$이므로 $n+1=\pm7$

따라서 n은 자연수이므로 $n=6$

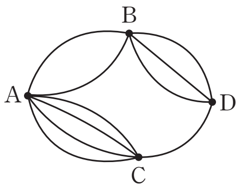
유형 05 도로망에서의 경우의 수

도로망에서의 경우의 수는 다음을 이용하여 구한다.
① 동시에 갈 수 없는 길 ➡ 합의 법칙
② 이어서 갈 수 있는 길 ➡ 곱의 법칙

풍쌤 Point 도로망에서 특정 지점을 지나가야 하는지 확인하고 경로를 찾는다.

024

오른쪽 그림과 같이 네 지점 A, B, C, D를 연결하는 도로망이 있다. 같은 지점을 두 번 이상 지나지 않고 A 지점에서 D 지점까지 가는 경우의 수는?

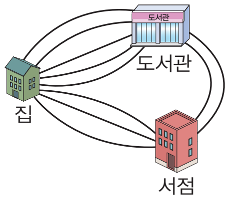


① 9 [✓ ② 10] ③ 11
④ 12 ⑤ 13

(i) A → B → D로 가는 경우의 수는 $2\times3=6$
(ii) A → C → D로 가는 경우의 수는 $4\times1=4$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $6+4=10$

025

오른쪽 그림과 같이 집, 도서관, 서점을 연결하는 도로망이 있다. 집에서 출발하여 도서관과 서점을 한 번씩 거쳐 집으로 돌아오는 경우의 수는?

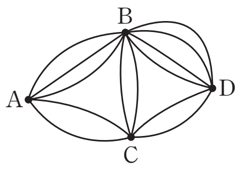


① 40 ② 45 ③ 50
④ 55 [✓ ⑤ 60]

(i) 집 → 도서관 → 서점 → 집으로 가는 경우의 수는 $5\times2\times3=30$
(ii) 집 → 서점 → 도서관 → 집으로 가는 경우의 수는 $3\times2\times5=30$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $30+30=60$

026

오른쪽 그림과 같이 네 지점 A, B, C, D를 연결하는 도로망이 있다. 같은 지점을 두 번 이상 지나지 않고 A 지점에서 D 지점까지 가는 경우의 수를 구하시오. 44



(i) A → B → D로 가는 경우의 수는 $3\times4=12$
(ii) A → C → D로 가는 경우의 수는 $2\times2=4$
(iii) A → B → C → D로 가는 경우의 수는 $3\times2\times2=12$
(iv) A → C → B → D로 가는 경우의 수는 $2\times2\times4=16$
(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는 $12+4+12+16=44$

유형 06 색칠하는 방법의 수

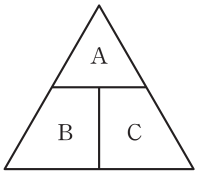
중요

도형의 나누어진 영역을 색칠하는 경우의 수는 먼저 인접한 영역이 가장 많은 영역을 색칠하는 경우의 수를 찾은 후, 각 영역을 칠하는 경우의 수를 구하여 곱의 법칙을 이용한다.

풍쌤 Point 인접하지 않아 서로 같은 색을 칠할 수 있는 영역은
(i) 같은 색을 칠하는 경우 (ii) 다른 색을 칠하는 경우
로 나누어 생각한다.

027

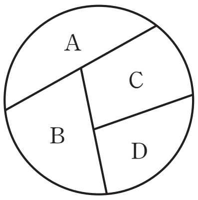
오른쪽 그림의 3개의 영역을 서로 다른 3가지 색으로 칠하려고 한다. A, B, C의 영역에 서로 다른 색으로 칠하는 경우의 수를 구하시오. 6
(단, 한 영역에는 한 가지 색만 칠한다.)



$3\times2\times1=6$

028

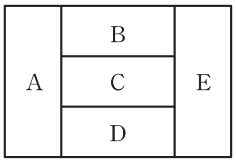
오른쪽 그림의 4개의 영역을 서로 다른 4가지 색으로 칠하려고 한다. A, B, C, D의 영역에 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 인접한 영역은 서로 다른 색으로 칠하는 경우의 수를 구하시오. 48
(단, 한 영역에는 한 가지 색만 칠한다.)



$4\times3\times2\times2=48$

029

오른쪽 그림의 5개의 영역을 서로 다른 5가지 색으로 칠하려고 한다. A, B, C, D, E의 영역에 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 인접한 영역은 서로 다른 색으로 칠하는 경우의 수는? (단, 한 영역에는 한 가지 색만 칠한다.)



① 240 ② 300 ③ 360
[✓ ④ 420] ⑤ 480

(i) A와 E에 같은 색을 칠하는 경우의 수는 $5\times4\times1\times3\times3=180$
(ii) A와 E에 다른 색을 칠하는 경우의 수는 $5\times4\times3\times2\times2=240$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $180+240=420$

03 순열

① 순열

서로 다른 n개에서 r $(0<r\le n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라 하고, 이 순열의 수를 기호 ${}_n\mathrm{P}_r$로 나타낸다.

② 계승

1부터 n까지의 자연수를 차례대로 곱한 것을 계승이라 하며, 기호 $n!$로 나타낸다.

참고 $n!$은 ‘n의 계승’ 또는 ‘n factorial’이라 읽는다.

③ 순열의 수

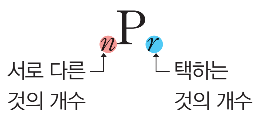
서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수는

$${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)\text{(단, }0<r\le n)$$

① ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

② ${}_n\mathrm{P}_n=n!$, $0!=1$, ${}_n\mathrm{P}_0=1$

- 순열의 수



보기 $3!=3\times2\times1=6$

보기 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 순열의 수는
${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$

개념 기본 문제

030

다음을 기호로 나타내시오.

(1) 서로 다른 5개에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수 ${}_5\mathrm{P}_2$

(2) 서로 다른 10개에서 6개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수 ${}_{10}\mathrm{P}_6$

(3) 서로 다른 8개에서 7개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수 ${}_8\mathrm{P}_7$

(4) 4명의 학생 중에서 3명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수 ${}_4\mathrm{P}_3$

(5) 서로 다른 6개의 스티커 중에서 4개를 택하여 일렬로 붙이는 경우의 수 ${}_6\mathrm{P}_4$

(6) 15명의 학생 중에서 회장, 부회장을 각각 한 명씩 뽑는 경우의 수 ${}_{15}\mathrm{P}_2$

031

다음 값을 구하시오.

(1) ${}_6\mathrm{P}_2$ 30

(2) ${}_{10}\mathrm{P}_4$ 5040

(3) ${}_8\mathrm{P}_1$ 8

(4) ${}_5\mathrm{P}_5$ 120

032

다음 값을 구하시오.

(1) $2!$ 2

(2) $0!$ 1

(3) $6!$ 720

(4) ${}_{12}\mathrm{P}_0$ 1

033

다음을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오.

(1) ${}_{n}\mathrm{P}_{3}=210$ **7**

$n(n-1)(n-2)=7\times6\times5$이므로 $n=7$

(2) ${}_{n}\mathrm{P}_{1}=9$ **9**

${}_{n}\mathrm{P}_{1}=9$에서 $n=9$

(3) ${}_{n}\mathrm{P}_{n}=6$ **3**

$n(n-1)\times\cdots\times1=3\times2\times1$이므로 $n=3$

(4) ${}_{n}\mathrm{P}_{2}\times2!=60$ **6**

${}_{n}\mathrm{P}_{2}=30$이므로 $n(n-1)=6\times5$ $\quad\therefore n=6$

(5) $5\times{}_{n}\mathrm{P}_{4}=8400$ **8**

${}_{n}\mathrm{P}_{4}=1680$이므로 $n(n-1)(n-2)(n-3)=8\times7\times6\times5$ $\quad\therefore n=8$

(6) ${}_{n}\mathrm{P}_{2}=12n$ **13**

$n(n-1)=12n$
이때 $n\geq2$이므로 $n-1=12$ $\quad\therefore n=13$

(7) ${}_{n}\mathrm{P}_{5}=24\times{}_{n}\mathrm{P}_{2}$ **6**

$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=24n(n-1)$
이때 $n\geq5$이므로
$(n-2)(n-3)(n-4)=24$
$(n-2)(n-3)(n-4)=4\times3\times2$ $\quad\therefore n=6$

(8) ${}_{n}\mathrm{P}_{2}=6n+18$ **9**

$n(n-1)=6n+18$, $n^2-7n-18=0$
$(n+2)(n-9)=0$
이때 $n\geq2$이므로 $n=9$

034

다음을 만족시키는 자연수 r의 값을 구하시오.

(1) ${}_{4}\mathrm{P}_{r}=12$ **2**

${}_{4}\mathrm{P}_{r}=12=4\times3$이므로 $r=2$

(2) ${}_{11}\mathrm{P}_{r}=990$ **3**

${}_{11}\mathrm{P}_{r}=990=11\times10\times9$이므로 $r=3$

(3) ${}_{5}\mathrm{P}_{r}=60$ **3**

${}_{5}\mathrm{P}_{r}=60=5\times4\times3$이므로 $r=3$

(4) ${}_{r}\mathrm{P}_{r}=24$ **4**

$r(r-1)\times\cdots\times1=4\times3\times2\times1$이므로 $r=4$

(5) $3\times{}_{7}\mathrm{P}_{r}=7560$ **5**

${}_{7}\mathrm{P}_{r}=2520=7\times6\times5\times4\times3$이므로 $r=5$

(6) $4!\times{}_{4}\mathrm{P}_{r}=96$ **1**

${}_{4}\mathrm{P}_{r}=4$ $\quad\therefore r=1$

(7) ${}_{6}\mathrm{P}_{r}\times{}_{6}\mathrm{P}_{3}=3600$ **2**

${}_{6}\mathrm{P}_{r}=30=6\times5$ $\quad\therefore r=2$

(8) ${}_{8}\mathrm{P}_{r}=84\times{}_{5}\mathrm{P}_{2}$ **4**

${}_{8}\mathrm{P}_{r}=84\times20=8\times7\times6\times5$ $\quad\therefore r=4$

개념 기본 문제

정답과 풀이 114쪽

035

다음을 구하시오.

(1) 서로 다른 7개의 색 중에서 2개를 택하여 차례대로 칠하는 경우의 수 42

${}_7P_2=7\times6=42$

(2) 10명의 학생 중에서 3명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수 720

${}_{10}P_3=10\times9\times8=720$

(3) 5개의 문자 A, B, C, D, E를 일렬로 나열하는 경우의 수 120

$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

(4) 1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 9장의 카드 중에서 4장을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수 3024

${}_9P_4=9\times8\times7\times6=3024$

(5) star에 있는 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수 24

$4!=4\times3\times2\times1=24$

(6) 오디션 참가자 6명의 순서를 정하는 경우의 수 720

$6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$

(7) 4개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 2개의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 두 자리의 자연수의 개수 12

${}_4P_2=4\times3=12$

(8) 동아리 회원 12명 중에서 회장, 부회장, 총무를 각각 한 명씩 선출하는 경우의 수 1320

${}_{12}P_3=12\times11\times10=1320$

036

다음을 구하시오.

(1) A, B, C, D의 4명의 학생을 일렬로 세울 때, A, B가 서로 이웃하도록 세우는 경우의 수 12

단계1. A, B를 묶어 일렬로 세우는 경우의 수 구하기

$3!=6$

단계2. A, B의 자리를 바꾸는 경우의 수 구하기

$2!=2$

단계3. 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수 구하기

$6\times2=12$

(2) 남학생 4명과 여학생 3명을 일렬로 세울 때, 남학생 4명끼리 이웃하여 세우는 경우의 수 576

$4!\times4!=576$

(3) 서로 다른 마카롱 3개와 컵케이크 3개를 일렬로 나열할 때, 컵케이크끼리 이웃하여 나열하는 경우의 수 144

$4!\times3!=144$

037

다음을 구하시오.

(1) A, B, C, D의 4명의 학생을 일렬로 세울 때, A, B가 서로 이웃하지 않도록 세우는 경우의 수 12

단계1. C, D를 일렬로 세우는 경우의 수 구하기

$2!=2$

단계2. C, D 사이와 양 끝 자리에 A, B를 세우는 경우의 수 구하기

${}_3P_2=6$

단계3. 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수 구하기

$2\times6=12$

(2) 남학생 3명과 여학생 4명을 일렬로 세울 때, 남학생끼리 이웃하지 않도록 세우는 경우의 수 1440

$4!\times{}_5P_3=1440$

(3) 1학년 학생 5명과 2학년 학생 5명을 일렬로 세울 때, 1학년 학생끼리 이웃하지 않도록 세우는 경우의 수 86400

$5!\times{}_6P_5=86400$

유형 실전 문제

정답과 풀이 115쪽

유형 07 ${}_nP_r$의 계산

서로 다른 n개에서 r $(0<r\le n)$개를 택하는 순열의 수
➡ ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$

풍쌤 Point ① ${}_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)
② ${}_nP_n=n!$, $0!=1$, ${}_nP_0=1$

038

$4!+{}_5P_3$의 값을 구하시오. 84

$4!+{}_5P_3=24+60=84$

039

등식 ${}_nP_3=12\times{}_{n-1}P_2$를 만족시키는 자연수 n의 값은?

① 8
② 9
③ 10
④ 11
[✓ ⑤ 12]

$n(n-1)(n-2)=12(n-1)(n-2)$
이때 $n\ge3$이므로 $n=12$

040

${}_{2n}P_2 : {}_nP_3=3 : 2$를 만족시키는 자연수 n의 값은?

[✓ ① 5]
② 6
③ 7
④ 8
⑤ 9

$3\times{}_nP_3=2\times{}_{2n}P_2$이므로 $3n(n-1)(n-2)=2\times2n(2n-1)$
이때 $n\ge3$이므로
$3(n-1)(n-2)=4(2n-1)$, $3n^2-17n+10=0$
$(3n-2)(n-5)=0$ ∴ $n=5$ ($\because n\ge3$)

041

등식 ${}_{n+1}P_2-2\times{}_nP_1=56$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오. 8

$(n+1)n-2n=56$
이때 $n\ge1$이므로
$n^2-n-56=0$, $(n+7)(n-8)=0$
∴ $n=8$ ($\because n\ge1$)

유형 08 순열의 수

① 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열 ➡ ${}_nP_r$
② 서로 다른 n개를 일렬로 나열 ➡ $n!$

풍쌤 Point 일렬로 나열하거나 순서를 생각하여 뽑는 경우의 수는 순열의 수를 이용하여 구한다.

042

3명의 학생이 서로 다른 11개의 과자 중에서 각각 하나씩 구매하는 경우의 수는?

① 970
② 980
[✓ ③ 990]
④ 1000
⑤ 1010

${}_{11}P_3=990$

043

7명의 학생 중에서 발표할 4명을 뽑아 순서를 정하는 경우의 수는?

① 810
② 820
③ 830
[✓ ④ 840]
⑤ 850

${}_7P_4=840$

044

회원 수가 n명인 모임에서 회장 1명과 부회장 1명을 뽑는 경우의 수가 272일 때, n의 값을 구하시오. 17

${}_nP_2=272$이므로
$n(n-1)=17\times16$
∴ $n=17$

유형 실전 문제

유형 09 이웃하는 순열의 수 중요

이웃하는 것이 있는 순열의 수는 다음 순서로 구한다.

① 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.

② 묶음 안에서 이웃하는 것끼리 자리를 바꾸는 경우의 수를 구한다.

③ ①, ②에서 구한 경우의 수를 곱한다.

풍쌤 Point (이웃하는 것을 묶어 일렬로 나열하는 경우의 수)
×(묶음 안에서 자리를 바꾸는 경우의 수)

045

5개의 문자 A, B, C, D, E를 일렬로 나열할 때, A, B가 이웃하는 경우의 수는?

① 24　② 30　③ 36

④ 42　✓⑤ 48

$4!\times2!=48$

046

중학생 3명과 고등학생 2명을 일렬로 세울 때, 중학생끼리 이웃하는 경우의 수는?

① 32　② 34　✓③ 36

④ 38　⑤ 40

$3!\times3!=36$

047

서로 다른 소설책 4권과 문제집 3권을 책꽂이에 꽂을 때, 소설책은 소설책끼리, 문제집은 문제집끼리 이웃하는 경우의 수를 구하시오. 288

$2!\times4!\times3!=288$

048

사진 촬영을 위해 배구 선수 2명과 농구 선수 n명을 일렬로 세우려고 한다. 배구 선수끼리 이웃하는 경우의 수가 240일 때, n의 값은?

① 3　✓② 4　③ 5

④ 6　⑤ 7

$(n+1)!\times2=240$이므로

$(n+1)!=120=5\times4\times3\times2\times1$

$n+1=5$　　$\therefore n=4$

유형 10 이웃하지 않는 순열의 수

이웃하지 않는 것이 있는 순열의 수는 다음 순서로 구한다.

① 이웃해도 되는 것을 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.

② 이웃해도 되는 것의 사이사이와 양 끝에 이웃하지 않는 것을 나열하는 경우의 수를 구한다.

③ ①, ②에서 구한 경우의 수를 곱한다.

풍쌤 Point (이웃해도 되는 것을 일렬로 나열하는 경우의 수)
×(사이사이와 양 끝에 이웃하지 않는 것을 나열하는 경우의 수)

049

서로 다른 파란색 나무 블록 5개와 노란색 나무 블록 3개를 일렬로 놓을 때, 노란색 나무 블록끼리 이웃하지 않는 경우의 수는?

✓① 14400　② 14500　③ 14600

④ 14700　⑤ 14800

V㉺V㉺V㉺V㉺V㉺V

파란색 나무 블록 5개를 일렬로 놓은 후, 그 사이사이와 양 끝의 6개의 자리에 노란색 나무 블록 3개를 놓으면 되므로 구하는 경우의 수는

$5!\times{}_6P_3=120$

050

어떤 놀이기구에 탑승하기 위해 학생 4명과 선생님 2명이 일렬로 설 때, 선생님끼리 이웃하지 않는 경우의 수는?

① 420　② 440　③ 460

✓④ 480　⑤ 500

V(학)V(학)V(학)V(학)V

학생 4명이 일렬로 선 후, 그 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 선생님 2명이 서면 되므로 구하는 경우의 수는

$4!\times{}_5P_2=480$

051

BAGEL에 있는 5개의 문자를 일렬로 나열할 때, 모음끼리 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수는?

① 60　✓② 72　③ 84

④ 96　⑤ 108

V㉶V㉶V㉶V

3개의 자음 B, G, L을 일렬로 나열한 후, 그 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 2개의 모음 A, E를 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$3!\times{}_4P_2=72$

유형 11 위치가 고정된 경우의 순열의 수

중요★

위치가 고정된 것을 먼저 배치한 후, 나머지를 나열한다.

풍쌤 Point 위치가 고정된 것들끼리 자리를 바꿀 수 있는지도 살핀다.

052

6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6을 일렬로 나열할 때, 숫자 3이 세 번째 자리에 오고 숫자 6이 맨 뒤에 오는 경우의 수는?

① 8 ② 12 ③ 16
④ 20 [✓ ⑤ 24]

세 번째 자리에 숫자 3을 놓고, 맨 끝에 숫자 6을 놓은 후 나머지 숫자 4개를 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는
$4!=24$

053

남학생 3명과 여학생 5명을 일렬로 세울 때, 양 끝에 여학생이 서는 경우의 수를 구하시오. 14400

여학생 중 2명을 양 끝에 세우는 경우의 수는
${}_5P_2=20$
양 끝에 선 여학생을 제외한 나머지 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$6!=720$
따라서 구하는 경우의 수는 $20\times720=14400$

054

MONDAY에 있는 6개의 문자를 일렬로 나열할 때, 모음이 짝수 번째 자리에 오도록 하는 경우의 수는?

① 81 ② 100 ③ 121
[✓ ④ 144] ⑤ 169

2개의 모음 O, A를 2, 4, 6번째 자리 중에서 두 자리에 나열하는 경우의 수는
${}_3P_2=6$
나머지 네 자리에 4개의 자음 M, N, D, Y를 나열하는 경우의 수는
$4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는 $6\times24=144$

055

지윤이가 색칠 놀이를 하는데, 빨간색과 초록색이 포함된 서로 다른 7개의 색을 택하여 순서대로 칠하려고 한다. 이때 빨간색과 초록색 사이에 2개의 색을 칠하도록 순서를 정하는 경우의 수를 구하시오. 960

빨간색과 초록색을 제외한 5개의 색 중에서 2개를 택하여 빨간색과 초록색 사이에 칠하는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$
빨간색과 초록색과 그 사이에 칠할 2개의 색을 한 묶음으로 생각하여 4개의 색을 순서대로 칠하는 경우의 수는 $4!=24$
빨간색과 초록색의 순서를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는 $20\times24\times2=960$

유형 12 교대로 서는 경우의 순열의 수

구성원의 수가 n인 두 집단의 구성원을 각각 ○, ●로 나타내면
○●○● ⋯ ○● 또는 ●○●○ ⋯ ●○
와 같이 교대로 설 수 있으므로 교대로 서는 경우의 수는
$n!\times n!+n!\times n!$

풍쌤 Point 구성원의 수가 각각 n, $n-1$인 두 집단의 구성원이 교대로 서는 경우의 수는
$n!\times(n-1)!$

056

어른 3명과 어린이 3명이 교대로 서는 경우의 수는?

① 60 ② 66 [✓ ③ 72]
④ 78 ⑤ 84

어른을 ○, 어린이를 ●로 나타내면 ○●○●○● 또는 ●○●○●○
와 같이 설 수 있으므로 구하는 경우의 수는
$3!\times3!+3!\times3!=72$

057

special에 있는 7개의 문자를 일렬로 나열할 때, 자음과 모음이 교대로 오도록 나열하는 경우의 수는?

① 138 [✓ ② 144] ③ 150
④ 156 ⑤ 162

자음을 ○, 모음을 ●로 나타내면 ○●○●○●○
와 같이 나열할 수 있으므로 구하는 경우의 수는
$4!\times3!=24\times6=144$

058

1부터 8까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 8장의 카드를 일렬로 나열할 때, 짝수가 적혀 있는 카드와 홀수가 적혀 있는 카드가 교대로 놓이도록 나열하는 경우의 수는?

[✓ ① 1152] ② 1154 ③ 1156
④ 1158 ⑤ 1160

짝수가 적혀 있는 카드를 ○, 홀수가 적혀 있는 카드를 ●로 나타내면
○●○●○●○● 또는 ●○●○●○●○
와 같이 나열할 수 있으므로 구하는 경우의 수는
$4!\times4!+4!\times4!=1152$

유형 실전 문제

유형 13 '적어도'의 조건이 있는 순열의 수

중요★

사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수
➡ (모든 경우의 수) − (사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

풍쌤 Point '적어도'라는 말이 포함되지 않더라도, 사건 A가 일어나지 않는 경우의 수가 더 적은 경우에는 이와 같이 구하면 편리하다.

059

서로 다른 빵 4개와 음료수 3개 중에서 2개를 골라 정윤이와 도현이에게 1개씩 나누어 줄 때, 적어도 한 명은 음료수를 받는 경우의 수는?

① 12 ② 16 ③ 24
[✓ ④ 30] ⑤ 36

7개의 빵과 음료수 중에서 2개를 골라 정윤이와 도현이에게 1개씩 나누어 주는 경우의 수는
${}_7P_2=42$
정윤이와 도현이가 모두 빵을 받는 경우의 수는
${}_4P_2=12$
따라서 구하는 경우의 수는 $42-12=30$

060

around에 있는 6개의 문자를 일렬로 나열할 때, 적어도 한쪽 끝에 모음이 오도록 하는 경우의 수는?

① 568 ② 572 [✓ ③ 576]
④ 580 ⑤ 584

6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$6!=720$
자음은 r, n, d의 3개이므로 양 끝에 모두 자음이 오도록 하는 경우의 수는
${}_3P_2\times4!=6\times24=144$
따라서 구하는 경우의 수는 $720-144=576$

061

서로 다른 장식품 2개와 액세서리 3개를 일렬로 진열할 때, 적어도 2개의 액세서리가 이웃하도록 하는 경우의 수는?

① 60 ② 72 ③ 84
④ 96 [✓ ⑤ 108]

5개의 물건을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$5!=120$
액세서리가 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는 장식품 2개의 사이와 양 끝에 나열하는 경우의 수와 같으므로
$2!\times3!=2\times6=12$
따라서 구하는 경우의 수는 $120-12=108$

유형 14 자연수의 개수

중요★

주어진 조건을 만족시키는 기준이 되는 자리에 숫자를 먼저 나열한 후, 나머지 자리에 숫자를 나열한다.

풍쌤 Point 자연수를 만들 때, 맨 앞자리에는 0이 올 수 없음에 주의한다.

062

3개의 숫자 1, 2, 3을 모두 이용하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수 중에서 홀수의 개수는?

① 3 [✓ ② 4] ③ 5
④ 6 ⑤ 7

일의 자리에는 1, 3의 2개의 숫자가 올 수 있고, 백의 자리와 십의 자리에는 일의 자리에 온 숫자를 제외한 나머지 2개의 숫자가 올 수 있다.
따라서 구하는 자연수의 개수는 $2\times2!=2\times2=4$

063

4개의 숫자 0, 1, 2, 3을 모두 이용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는?

[✓ ① 18] ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

천의 자리에는 0을 제외한 3개의 숫자가 올 수 있고, 나머지 세 자리에는 천의 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자가 올 수 있다.
따라서 구하는 자연수의 개수는 $3\times3!=3\times6=18$

064

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 3개의 숫자를 이용하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수 중 짝수의 개수는?

① 20 ② 22 [✓ ③ 24]
④ 28 ⑤ 30

일의 자리에는 2, 4의 2개의 숫자가 올 수 있고, 백의 자리와 십의 자리에는 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개가 올 수 있다.
따라서 구하는 자연수의 개수는
$2\times{}_4P_2=2\times12=24$

065

5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 4개의 숫자를 이용하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 천의 자리의 숫자는 짝수이고, 십의 자리의 숫자는 홀수인 자연수의 개수를 구하시오. 24

천의 자리에는 2, 4의 2개의 숫자, 십의 자리에는 1, 3의 2개의 숫자가 올 수 있고, 나머지 두 자리에는 남은 3개의 숫자 중에서 2개가 올 수 있다.
따라서 구하는 자연수의 개수는 $2\times2\times{}_3P_2=2\times2\times6=24$

066

5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 이용하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수 중 짝수의 개수는?

① 6　② 12　③ 18
④ 24　[✓ ⑤ 30]

(i) □□0 꼴의 자연수의 개수는
$1\times{}_4P_2=1\times12=12$
(ii) □□2, □□4 꼴의 자연수의 개수는
$2\times{}_3P_1\times{}_3P_1=2\times3\times3=18$
(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는 $12+18=30$

067

6개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 4개의 숫자를 이용하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 5의 배수의 개수는?

① 76　② 84　③ 92
④ 100　[✓ ⑤ 108]

(i) □□□0 꼴의 자연수의 개수는
$1\times{}_5P_3=1\times60=60$
(ii) □□□5 꼴의 자연수의 개수는
$1\times{}_4P_1\times{}_4P_2=1\times4\times12=48$
(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는 $60+48=108$

유형 15 사전식으로 배열하는 순열의 수

기준이 되는 문자 또는 숫자를 먼저 나열한 후, 나머지 자리에 남은 문자 또는 숫자를 나열하는 경우의 수를 구한다.

풍쌤 Point 어떤 문자열이나 자연수가 몇 번째 순서인지 구하거나 n번째의 문자열 또는 자연수를 구하는 문제가 출제된다.

068

4개의 문자 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ을 모두 한 번씩 사용하여 사전식으로 배열할 때, ㄴㄹㄷㄱ은 몇 번째에 오는가?

① 9번째　② 10번째　③ 11번째
[✓ ④ 12번째]　⑤ 13번째

ㄱ으로 시작하는 문자열에서 ㄴㄷ으로 시작하는 문자열까지의 개수는
$3!+2!+2!=10$
ㄴㄹ로 시작하는 문자열은 ㄴㄹㄱㄷ, ㄴㄹㄷㄱ이므로 ㄴㄹㄷㄱ은 12번째에 온다.

069

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 모두 한 번씩 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수를 작은 수부터 차례대로 나열할 때, 41325는 몇 번째에 오는지 구하시오. **75번째**

1□□□□ 꼴의 자연수에서 3□□□□ 꼴의 자연수까지의 개수는
$4!+4!+4!=72$
4□□□□ 꼴의 자연수를 차례대로 나열하면 41235, 41253, 41325이다.
따라서 41325는 75번째에 온다.

070

4개의 문자 A, B, C, D를 모두 한 번씩 사용하여 사전식으로 배열할 때, 17번째에 오는 문자열을 구하시오. **CDAB**

A로 시작하는 문자열에서 C로 시작하는 문자열까지의 개수는
$3!+3!+3!=18$
즉, 17번째에 오는 문자열은 C로 시작하는 문자열 중에서 뒤에서 두 번째이므로 C로 시작하는 문자열을 뒤에서부터 나열하면 CDBA, CDAB이다.
따라서 17번째에 오는 문자열은 CDAB이다.

071

5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4를 모두 한 번씩 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수를 작은 수부터 차례대로 나열할 때, 60번째에 오는 수는?

① 32401　[✓ ② 32410]　③ 34012
④ 34021　⑤ 34102

1□□□□ 꼴의 자연수에서 32□□□ 꼴의 자연수까지의 개수는
$4!+4!+3!+3!=60$
즉, 60번째에 오는 자연수는 32□□□ 꼴의 자연수 중에서 가장 큰 것이다.
따라서 구하는 수는 32410이다.

중단원 점검 문제

01

한 개의 주사위를 2번 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 곱이 6인 경우의 수는?

① 2　② 3　✓③ 4
④ 5　⑤ 6

두 눈의 수의 곱이 6인 경우는 (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)의 4가지이다.

02

두 자리의 자연수 중에서 각 자리의 숫자의 합이 7의 배수인 자연수의 개수는?

✓① 11　② 12　③ 13
④ 14　⑤ 15

(ⅰ) 각 자리의 숫자의 합이 7인 자연수는
16, 25, 34, 43, 52, 61의 6가지
(ⅱ) 각 자리의 숫자의 합이 14인 자연수는
59, 68, 77, 86, 95의 5가지
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수의 개수는 $6+5=11$

03 실전 Plus

한 자리의 자연수 a, b에 대하여 이차함수 $y=x^2-2ax+b$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. 65

이차방정식 $x^2-2ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-b>0$　　$\therefore a^2>b$

(ⅰ) $a=1$일 때, 순서쌍 (a, b)는 없다.
(ⅱ) $a=2$일 때, 순서쌍 (a, b)는 (2, 1), (2, 2), (2, 3)의 3개이다.
(ⅲ) $a=3$일 때, 순서쌍 (a, b)는 (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8)의 8개이다.
(ⅳ) $4\le a\le 9$일 때, a의 각 값에 따라 순서쌍 (a, b)는 9개이다.
(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는 $3+8+6\times9=65$

04

$(a+b+1)(x+y)^2$을 전개할 때 나타나는 서로 다른 항의 개수를 구하시오. 9

$(a+b+1)(x+y)^2=(a+b+1)(x^2+2xy+y^2)$
따라서 구하는 항의 개수는 $3\times3=9$

05

180과 630의 양의 공약수의 개수를 구하시오. 12

$180=2^2\times3^2\times5$, $630=2\times3^2\times5\times7$이므로 180과 630의 최대공약수는
$2\times3^2\times5$
따라서 구하는 양의 공약수의 개수는 $2\times3^2\times5$의 양의 약수의 개수와 같으므로
$(1+1)\times(2+1)\times(1+1)=12$

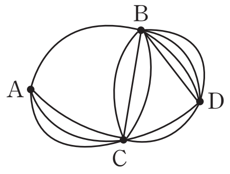
06

1000원짜리 지폐 1장, 500원짜리 동전 3개, 100원짜리 동전 4개가 있다. 이 돈의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 방법의 수를 a, 지불할 수 있는 금액의 수를 b라 할 때, $a-b$의 값을 구하시오. 10

(단, 0원을 지불하는 경우는 제외한다.)

$a=2\times4\times5-1=39$
1000원짜리 지폐 1장을 500원짜리 동전 2개로 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 5개, 100원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 방법의 수와 같다.
$\therefore b=6\times5-1=29$
$\therefore a-b=39-29=10$

07 학교 시험 기출

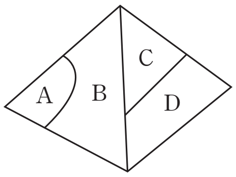


오른쪽 그림과 같이 네 지점 A, B, C, D를 연결하는 도로망이 있다. 같은 지점을 두 번 이상 지나지 않고 A 지점에서 D 지점으로 갔다가 다시 A 지점으로 돌아오는 경우의 수는?

① 32　② 36　③ 40
④ 44　✓⑤ 48

(ⅰ) A → B → D → C → A로 가는 경우의 수는
$1\times4\times2\times3=24$
(ⅱ) A → C → D → B → A로 가는 경우의 수는
$3\times2\times4\times1=24$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $24+24=48$

08



오른쪽 그림의 4개의 영역을 서로 다른 4가지 색으로 칠하려고 한다. A, B, C, D의 영역에 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 인접한 영역은 서로 다른 색으로 칠하는 경우의 수는? (단, 한 영역에는 한 가지 색만 칠한다.)

① 56　② 60　③ 64
④ 68　✓⑤ 72

B에 칠할 수 있는 색은 4가지
C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지
A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지
D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 구하는 경우의 수는 $4\times3\times3\times2=72$

09

1학년 학생 2명과 2학년 학생 4명이 있다. 각각 학년별로 일렬로 세우는 경우의 수는?

① 44　② 46　[✓ ③ 48]
④ 50　⑤ 52

1학년 학생 2명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $2!=2$
2학년 학생 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는 $2\times24=48$

10 학교 시험 기출

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 일렬로 나열할 때, 홀수끼리 이웃하는 경우의 수를 구하시오. 36

홀수 1, 3, 5를 한 묶음으로 생각하여 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$
홀수 3개가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는 $6\times6=36$

11 교육청 기출

1학년 학생 2명과 2학년 학생 4명이 있다. 이 6명의 학생이 일렬로 나열된 6개의 의자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 앉는 경우의 수는?

> (가) 1학년 학생끼리는 이웃하지 않는다.
> (나) 양 끝에 있는 의자에는 모두 2학년 학생이 앉는다.

① 96　② 120　[✓ ③ 144]
④ 168　⑤ 192

주어진 조건을 만족시키려면 2학년 학생 사이사이에 1학년 학생을 앉히면 된다.

②V②V②V②

2학년 학생이 일렬로 앉는 경우의 수는 $4!=24$
2학년 학생 사이사이 3개의 의자에 1학년 학생이 앉는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$
따라서 구하는 경우의 수는 $24\times6=144$

12 실전 Plus

5개의 문자 A, B, C, D, E를 일렬로 나열할 때, A, B는 이웃하고 C, D는 이웃하지 않도록 하는 경우의 수는?

[✓ ① 24]　② 28　③ 32
④ 36　⑤ 40

C, D를 제외한 후 A, B를 한 묶음 F로 생각하여 E, F 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $2!=2$
묶음 F 안에서 A, B의 순서를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
일렬로 나열한 2개의 문자 E, F 사이와 양 끝의 3개의 자리에 C, D를 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$
따라서 구하는 경우의 수는 $2\times2\times6=24$

13

정윤이와 민우를 포함한 6명의 학생이 이어달리기 순서를 정하려고 할 때, 정윤이와 민우 사이에 3명의 학생이 달리도록 순서를 정하는 경우의 수는?

[✓ ① 96]　② 98　③ 100
④ 102　⑤ 104

정윤이와 민우를 제외한 4명의 학생 중에서 3명을 택하여 정윤이와 민우 사이에 배정하는 경우의 수는 ${}_4P_3=24$
정윤이와 민우와 그 사이에 있는 3명을 한 묶음으로 생각하여 2명의 순서를 정하는 경우의 수는 $2!=2$
정윤이와 민우가 순서를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는 $24\times2\times2=96$

14

NATURE에 있는 6개의 문자를 일렬로 나열할 때, 자음 중에서 적어도 2개가 이웃하도록 나열하는 경우의 수는?

① 572　② 573　③ 574
④ 575　[✓ ⑤ 576]

6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $6!=720$
모음 A, U, E를 나열한 후, 모음 A, U, E의 사이사이와 양 끝 4개의 자리에 3개의 자음을 나열하는 경우의 수는
${}_4P_3\times3!=24\times6=144$
따라서 구하는 경우의 수는 $720-144=576$

15

4개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 3개의 숫자를 이용하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수 중에서 3의 배수의 개수는?

① 6　② 8　③ 10
[✓ ④ 12]　⑤ 14

1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 3개를 택하여 그 합이 3의 배수가 되는 경우는
(1, 2, 3), (2, 3, 4)
이때 각 경우에서 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는
$3!=6$
따라서 구하는 자연수의 개수는 $2\times6=12$

16

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 모두 한 번씩 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수 중에서 35000보다 작은 자연수의 개수를 구하시오. 66

1□□□□ 꼴의 자연수의 개수는 $4!=24$
2□□□□ 꼴의 자연수의 개수는 $4!=24$
31□□□ 꼴의 자연수의 개수는 $3!=6$
32□□□ 꼴의 자연수의 개수는 $3!=6$
34□□□ 꼴의 자연수의 개수는 $3!=6$
따라서 35000보다 작은 자연수의 개수는
$24+24+6+6+6=66$

01 조합

① 조합

서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r $(0<r\le n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 이 조합의 수를 기호 ${}_nC_r$로 나타낸다.

② 조합의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는

$$ {}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\ (\text{단, } 0\le r\le n)$$

참고 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 ${}_nC_r$이고, 그 각각에 대하여 r개를 한 줄로 나열하는 경우의 수는 $r!$이므로 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수 ${}_nP_r$에 대하여

$${}_nC_r\times r!={}_nP_r,\ \text{즉 } {}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}$$

① ${}_nC_0=1,\ {}_nC_n=1$

② ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$)

참고 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 n개에서 뽑히지 않은 $(n-r)$개를 택하는 조합의 수와 같다.

- 조합의 수

$${}_nC_r$$

서로 다른 것의 개수 (n)
택하는 것의 개수 (r)

보기 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 조합의 수는

$${}_5C_2=\frac{{}_5P_2}{2!}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

풍쌤 Tip 서로 다른 n개에서 r개를 택할 때, 순서를 생각하면 순열, 순서를 생각하지 않으면 조합을 이용한다.

개념 기본 문제

001

다음을 기호로 나타내시오.

(1) 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 경우의 수 ${}_3C_2$

(2) 서로 다른 9개에서 5개를 택하는 경우의 수 ${}_9C_5$

(3) 서로 다른 20개에서 17개를 택하는 경우의 수 ${}_{20}C_{17}$

(4) 서로 다른 과일 6개에서 3개를 택하는 경우의 수 ${}_6C_3$

(5) 12명의 학생 중에서 2명의 대표를 선출하는 경우의 수 ${}_{12}C_2$

(6) 5개의 문자 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ에서 5개를 택하는 경우의 수 ${}_5C_5$

002

다음 값을 구하시오.

(1) ${}_7C_3$ 35

(2) ${}_{13}C_0$ 1

(3) ${}_{25}C_{25}$ 1

(4) ${}_8C_4$ 70

(5) ${}_{11}C_9$ 55

(6) ${}_{50}C_{49}$ 50

003

다음을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오.

(1) ${}_{n}\mathrm{C}_{2}=66$ **12**

$\frac{n(n-1)}{2\times1}=66$이므로

$n(n-1)=12\times11$ $\therefore n=12$

(2) ${}_{n}\mathrm{C}_{3}=84$ **9**

$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=84$이므로

$n(n-1)(n-2)=9\times8\times7$ $\therefore n=9$

(3) ${}_{n}\mathrm{C}_{4}=15$ **6**

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}=15$이므로

$n(n-1)(n-2)(n-3)=6\times5\times4\times3$ $\therefore n=6$

(4) ${}_{n}\mathrm{C}_{1}={}_{n}\mathrm{C}_{3}$ **4**

${}_{n}\mathrm{C}_{1}={}_{n}\mathrm{C}_{n-1}$이므로 ${}_{n}\mathrm{C}_{n-1}={}_{n}\mathrm{C}_{3}$에서

$n-1=3$ $\therefore n=4$

(5) ${}_{n}\mathrm{C}_{5}={}_{n}\mathrm{C}_{2}$ **7**

${}_{n}\mathrm{C}_{5}={}_{n}\mathrm{C}_{n-5}$이므로 ${}_{n}\mathrm{C}_{n-5}={}_{n}\mathrm{C}_{2}$에서

$n-5=2$ $\therefore n=7$

(6) ${}_{n}\mathrm{C}_{6}={}_{n}\mathrm{C}_{9}$ **15**

${}_{n}\mathrm{C}_{6}={}_{n}\mathrm{C}_{n-6}$이므로 ${}_{n}\mathrm{C}_{n-6}={}_{n}\mathrm{C}_{9}$에서

$n-6=9$ $\therefore n=15$

(7) ${}_{n+2}\mathrm{C}_{n+1}=24$ **22**

${}_{n+2}\mathrm{C}_{n+1}={}_{n+2}\mathrm{C}_{1}$이므로 ${}_{n+2}\mathrm{C}_{1}=24$에서

$n+2=24$ $\therefore n=22$

(8) ${}_{n+1}\mathrm{C}_{n-1}=36$ **8**

${}_{n+1}\mathrm{C}_{n-1}={}_{n+1}\mathrm{C}_{2}$이므로 ${}_{n+1}\mathrm{C}_{2}=36$에서

$\frac{(n+1)n}{2\times1}=36$, $(n+1)n=9\times8$

$\therefore n=8$

004

다음을 만족시키는 자연수 r의 값을 모두 구하시오.

(1) ${}_{16}\mathrm{C}_{r}={}_{16}\mathrm{C}_{6}$ (단, $r\neq6$) **10**

${}_{16}\mathrm{C}_{6}={}_{16}\mathrm{C}_{10}$이므로 $r=10$

(2) ${}_{9}\mathrm{C}_{4}={}_{9}\mathrm{C}_{r}$ (단, $r\neq4$) **5**

${}_{9}\mathrm{C}_{4}={}_{9}\mathrm{C}_{5}$이므로 $r=5$

(3) ${}_{4}\mathrm{C}_{4}={}_{8}\mathrm{C}_{r}$ **8**

$r>0$이고, ${}_{4}\mathrm{C}_{4}=1={}_{8}\mathrm{C}_{8}$이므로 $r=8$

(4) ${}_{7}\mathrm{C}_{r}=7$ **1, 6**

${}_{7}\mathrm{C}_{r}=7=\frac{7}{1}$이므로 $r=1$

또, ${}_{7}\mathrm{C}_{1}={}_{7}\mathrm{C}_{6}$이므로 $r=6$

(5) ${}_{20}\mathrm{C}_{r}=190$ **2, 18**

${}_{20}\mathrm{C}_{r}=190=\frac{20\times19}{2\times1}$이므로 $r=2$

또, ${}_{20}\mathrm{C}_{2}={}_{20}\mathrm{C}_{18}$이므로 $r=18$

(6) ${}_{10}\mathrm{C}_{r}={}_{10}\mathrm{C}_{r-2}$ **6**

${}_{10}\mathrm{C}_{r}={}_{10}\mathrm{C}_{10-r}$이므로 ${}_{10}\mathrm{C}_{10-r}={}_{10}\mathrm{C}_{r-2}$에서

$10-r=r-2$, $2r=12$ $\therefore r=6$

(7) ${}_{17}\mathrm{C}_{r-9}={}_{17}\mathrm{C}_{r}$ **13**

${}_{17}\mathrm{C}_{r}={}_{17}\mathrm{C}_{17-r}$이므로 ${}_{17}\mathrm{C}_{r-9}={}_{17}\mathrm{C}_{17-r}$에서

$r-9=17-r$, $2r=26$ $\therefore r=13$

(8) ${}_{18}\mathrm{C}_{r+1}={}_{18}\mathrm{C}_{r-5}$ **11**

${}_{18}\mathrm{C}_{r+1}={}_{18}\mathrm{C}_{17-r}$이므로 ${}_{18}\mathrm{C}_{17-r}={}_{18}\mathrm{C}_{r-5}$에서

$17-r=r-5$, $2r=22$ $\therefore r=11$

개념 기본 문제

정답과 풀이 121쪽

005

다음을 구하시오.

(1) 1부터 9까지의 자연수 중에서 3개를 택하는 경우의 수 84

$_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

(2) 5명의 학생 중에서 당번 1명을 택하는 경우의 수 5

$_5C_1=5$

(3) basket에 있는 6개의 문자 중에서 4개를 택하는 경우의 수 15

$_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

(4) 서로 다른 4송이의 꽃 중에서 3송이를 택하는 경우의 수 4

$_4C_3={}_4C_1=4$

(5) 서로 다른 10개의 초콜릿 중에서 6개를 택하는 경우의 수 210

$_{10}C_6={}_{10}C_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

(6) 서로 다른 19개의 학용품 중에서 16개를 구매하는 경우의 수 969

$_{19}C_{16}={}_{19}C_3=\frac{19\times18\times17}{3\times2\times1}=969$

006

다음을 구하시오.

(1) 서로 다른 빨간색 공 6개와 파란색 공 4개 중에서 빨간색 공 1개와 파란색 공 1개를 택하는 경우의 수 24

단계1. 빨간색 공 1개를 택하는 경우의 수 구하기

$_6C_1=6$

단계2. 파란색 공 1개를 택하는 경우의 수 구하기

$_4C_1=4$

단계3. 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수 구하기

$6\times4=24$

(2) 서로 다른 박물관 5곳과 미술관 3곳 중에서 박물관 2곳과 미술관 1곳을 택하는 경우의 수 30

$_5C_2\times{}_3C_1=30$

(3) 1부터 10까지의 자연수 중에서 홀수 2개와 짝수 3개를 택하는 경우의 수 100

$_5C_2\times{}_5C_3=100$

007

다음을 구하시오.

(1) 남학생 3명, 여학생 4명 중에서 2명을 뽑을 때, 뽑힌 학생의 성별이 모두 같은 경우의 수 9

단계1. 남학생을 2명 뽑는 경우의 수 구하기

$_3C_2={}_3C_1=3$

단계2. 여학생을 2명 뽑는 경우의 수 구하기

$_4C_2=6$

단계3. 합의 법칙을 이용하여 경우의 수 구하기

$3+6=9$

(2) 혈액형이 A형인 사람 5명과 B형인 사람 6명 중에서 3명을 뽑을 때, 뽑힌 사람의 혈액형이 모두 같은 경우의 수 30

$_5C_3+{}_6C_3={}_5C_2+{}_6C_3=30$

(3) 축구 선수 11명, 야구 선수 9명 중에서 4명을 뽑을 때, 뽑힌 선수의 운동 종목이 모두 같은 경우의 수 456

$_{11}C_4+{}_9C_4=456$

008

7개의 문자 A, B, C, D, E, F, G 중에서 4개의 문자를 뽑을 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) A를 반드시 포함하여 뽑는 경우의 수 20

단계1. A를 미리 뽑아 놓기

구하는 경우의 수는 A를 미리 뽑아 놓고 나머지 6개 중에서 3개를 뽑는 경우의 수와 같다.

단계2. 경우의 수 구하기

$_6C_3=20$

(2) D, E를 반드시 포함하여 뽑는 경우의 수 10

$_5C_2=10$

(3) A, C, E를 반드시 포함하여 뽑는 경우의 수 4

$_4C_1=4$

(4) B를 포함하지 않는 경우의 수 15

단계1. B를 제외하기

B를 제외한 나머지 6개 중에서 4개를 뽑는 경우의 수와 같다.

단계2. 경우의 수 구하기

$_6C_4={}_6C_2=15$

(5) C, F를 포함하지 않는 경우의 수 5

$_5C_4={}_5C_1=5$

(6) E, F, G를 포함하지 않는 경우의 수 1

$_4C_4=1$

유형 실전 문제

정답과 풀이 122쪽

유형 01 ${}_n\mathrm{C}_r$의 계산

서로 다른 n개에서 $r\ (0\le r\le n)$개를 택하는 조합의 수

$$\Rightarrow {}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

풍쌤 Point ① ${}_n\mathrm{C}_0=1,\ {}_n\mathrm{C}_n=1$ ② ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$

009

등식 ${}_{12}\mathrm{C}_{2r}={}_{12}\mathrm{C}_{r-3}$을 만족시키는 자연수 r의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4

[✓ ④ 5] ⑤ 6

${}_{12}\mathrm{C}_{2r}={}_{12}\mathrm{C}_{12-2r}$이므로 ${}_{12}\mathrm{C}_{12-2r}={}_{12}\mathrm{C}_{r-3}$에서

$12-2r=r-3,\ 3r=15 \quad \therefore r=5$

010

등식 ${}_{30}\mathrm{C}_{n^2}={}_{30}\mathrm{C}_{2n+8}$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오. 4

(i) $n^2=2n+8$에서 $n^2-2n-8=0,\ (n+2)(n-4)=0$

이때 n은 자연수이므로 $n=4$

(ii) $30-n^2=2n+8$에서 $n^2+2n-22=0$

이때 n은 자연수이므로 이 식을 만족시키는 n의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $n=4$

011

${}_n\mathrm{C}_r=21,\ {}_n\mathrm{P}_r=42$를 만족시키는 자연수 $n,\ r$에 대하여 $n-r$의 값은?

① 4 [✓ ② 5] ③ 6

④ 7 ⑤ 8

${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}$이므로 $21=\dfrac{42}{r!} \quad \therefore r=2$

즉, ${}_n\mathrm{C}_2=21$이므로 $\dfrac{n(n-1)}{2\times1}=21 \quad \therefore n=7$

$\therefore n-r=7-2=5$

012

등식 ${}_{n+1}\mathrm{P}_2-{}_n\mathrm{C}_{n-2}=44$를 만족시키는 자연수 n의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7

[✓ ④ 8] ⑤ 9

${}_n\mathrm{C}_{n-2}={}_n\mathrm{C}_2$이므로 ${}_{n+1}\mathrm{P}_2-{}_n\mathrm{C}_{n-2}=44$에서

${}_{n+1}\mathrm{P}_2-{}_n\mathrm{C}_2=44,\ (n+1)n-\dfrac{n(n-1)}{2\times1}=44$

$2n(n+1)-n(n-1)=88,\ (n+11)(n-8)=0$

이때 n은 자연수이므로 $n=8$

유형 02 조합의 수

중요★

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 경우의 수 $\Rightarrow {}_n\mathrm{C}_r$

풍쌤 Point 순서를 생각하지 않고 뽑는 경우의 수는 조합의 수를 이용하여 구한다.

013

학생 10명 중에서 논술 대회에 참가할 1명과 수학 경시대회에 참가할 2명을 뽑는 경우의 수는?

(단, 학생은 한 대회에만 참가한다.)

① 320 ② 340 [✓ ③ 360]

④ 380 ⑤ 400

${}_{10}\mathrm{C}_1\times{}_9\mathrm{C}_2=360$

014

1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 9장의 카드 중에서 2장의 카드를 동시에 뽑을 때, 카드에 적혀 있는 두 수의 곱이 홀수가 되는 경우의 수는?

[✓ ① 10] ② 11 ③ 12

④ 13 ⑤ 14

두 수의 곱이 홀수가 되려면 두 수 모두 홀수이어야 한다.

홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개이므로 구하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2=10$

015

서로 다른 색연필 5자루와 사인펜 7자루 중에서 3자루를 택하여 사용하려고 한다. 3자루 모두 같은 종류의 필기구를 택하는 경우의 수를 구하시오. 45

색연필 5자루 중에서 3자루를 택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

사인펜 7자루 중에서 3자루를 택하는 경우의 수는

${}_7\mathrm{C}_3=35$

따라서 구하는 경우의 수는 $10+35=45$

016

어떤 모임에 참여한 모든 사람이 다른 사람과 한 번씩 악수하였더니 전체 악수 횟수가 120이었을 때, 모임에 참여한 사람은 몇 명인지 구하시오. 16명

(단, 같은 상대와 2번 이상 악수한 사람은 없다.)

모임에 참여한 사람이 n명이라 하면 전체 악수 횟수는 n명 중에서 2명을 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_n\mathrm{C}_2=\dfrac{n(n-1)}{2\times1}=120,\ n(n-1)=16\times15 \quad \therefore n=16$

따라서 모임에 참여한 사람은 16명이다.

유형 실전 문제

유형 03 특정한 것을 포함하거나 제외하는 조합의 수

중요

① 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 포함하여 r개를 뽑는 경우의 수는 $(n-k)$개에서 $(r-k)$개를 뽑는 조합의 수와 같다.

② 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 제외하고 r개를 뽑는 경우의 수는 $(n-k)$개에서 r개를 뽑는 조합의 수와 같다.

풍쌤 Point 서로 다른 n개에서 r개를 뽑을 때

① 특정한 k개를 포함하여 뽑는 경우의 수 ➡ ${}_{n-k}C_{r-k}$

② 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 제외하고 뽑는 경우의 수 ➡ ${}_{n-k}C_r$

017

candy에 있는 5개의 문자 중에서 3개를 뽑을 때, a를 반드시 포함하여 뽑는 경우의 수는?

① 5 [✓ ② 6] ③ 7

④ 8 ⑤ 9

a를 제외한 4개의 문자 중에서 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_2=6$

018

1부터 10까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 10개의 공 중에서 4개의 공을 뽑을 때, 소수가 적힌 공은 뽑히지 않는 경우의 수를 구하시오. 15

2, 3, 5, 7이 적혀 있는 공을 제외한 6개의 공 중에서 4개의 공을 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_4={}_6C_2=15$

019

연정이와 지수를 포함한 9명 중에서 4명을 택하려고 할 때, 연정이는 반드시 뽑히고 지수는 뽑히지 않는 경우의 수는?

① 23 ② 26 ③ 29

④ 32 [✓ ⑤ 35]

연정이와 지수를 제외한 7명 중에서 3명을 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_7C_3=35$

020

빨간색과 노란색을 포함한 서로 다른 10가지의 색 중에서 5가지의 색을 택할 때, 빨간색과 노란색 중에서 한 가지의 색만 택하는 경우의 수를 구하시오. 140

(ⅰ) 빨간색은 택하고 노란색은 택하지 않는 경우의 수는 ${}_8C_4=70$

(ⅱ) 빨간색은 택하지 않고 노란색은 택하는 경우의 수는 ${}_8C_4=70$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $70+70=140$

유형 04 '적어도'의 조건이 있는 조합의 수

사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수

$=$(모든 경우의 수)$-$(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

풍쌤 Point '적어도'라는 말이 포함되지 않더라도, 사건 A가 일어나지 않는 경우의 수가 더 적은 경우에는 이와 같이 구하면 편리하다.

021

서로 다른 흰 공 5개와 검은색 공 4개 중에서 3개의 공을 뽑을 때, 검은색 공을 적어도 1개 포함하여 뽑는 경우의 수는?

① 66 ② 70 [✓ ③ 74]

④ 78 ⑤ 82

9개의 공 중에서 3개의 공을 뽑는 경우의 수는

${}_9C_3=84$

흰 공 5개 중에서 3개의 공을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는 $84-10=74$

022

1부터 10까지의 자연수 중에서 4개의 숫자를 택할 때, 홀수와 짝수가 적어도 1개씩 포함되도록 택하는 경우의 수는?

[✓ ① 200] ② 205 ③ 210

④ 215 ⑤ 220

10개의 숫자 중에서 4개의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_{10}C_4=210$

5개의 홀수 중에서 4개의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_5C_4={}_5C_1=5$

5개의 짝수 중에서 4개의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_5C_4={}_5C_1=5$

따라서 구하는 경우의 수는 $210-(5+5)=200$

023

8명이 참여한 어떤 일일 수업에서 임의로 2명을 뽑을 때, 적어도 1명은 남자인 경우의 수가 27이다. 이 일일 수업에 참여한 남자의 수는?

① 3 ② 4 ③ 5

[✓ ④ 6] ⑤ 7

남자가 n명 참여했다고 하면 ${}_8C_2-{}_{8-n}C_2=27$이므로

$28-\frac{(8-n)(7-n)}{2\times1}=27,\ n^2-15n+54=0$

$(n-6)(n-9)=0\qquad \therefore\ n=6\ (\because\ 0<n\le8)$

따라서 수업에 참여한 남자의 수는 6이다.

유형 05 뽑아서 나열하는 경우의 수

중요★

서로 다른 n개에서 r개를 뽑아 나열하는 경우의 수는 다음 순서로 구한다.

① n개에서 r개를 뽑는다. ← 조합

② 뽑은 r개를 일렬로 나열한다. ← 순열

③ ①, ②에서 구한 경우의 수를 곱한다.

풍쌤 Point 서로 다른 n개에서 r개를 뽑아 나열하는 경우의 수 ➡ ${}_nC_r \times r!$

024

서로 다른 시집 3권과 수필 2권 중에서 시집 2권, 수필 1권을 택하여 책장에 일렬로 꽂는 경우의 수를 구하시오.

36

${}_3C_2 \times {}_2C_1 \times 3! = 36$

025

reason에 있는 6개의 문자 중에서 모음 2개와 자음 2개를 뽑아 만들 수 있는 문자열의 개수는?

① 208 ② 210 ③ 212

④ 214 ✓⑤ 216

${}_3C_2 \times {}_3C_2 \times 4! = 216$

026

1부터 8까지의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 3의 배수인 숫자는 포함하지 않는 자연수의 개수는?

① 100 ② 110 ✓③ 120

④ 130 ⑤ 140

3의 배수인 3, 6을 제외한 6개의 숫자 중에서 3개의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_3 = 20$

3개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $20 \times 6 = 120$

027

현진이와 주형이를 포함한 9명 중에서 4명을 뽑아 일렬로 세울 때, 현진이와 주형이가 반드시 포함되고 서로 이웃하도록 세우는 경우의 수는?

① 244 ② 246 ③ 248

④ 250 ✓⑤ 252

현진이와 주형이를 제외한 7명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_7C_2 = 21$

현진이와 주형이를 한 묶음으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3! = 6$

현진이와 주형이가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는 $21 \times 6 \times 2 = 252$

유형 06 직선의 개수

어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 서로 다른 n개의 점으로 만들 수 있는 직선의 개수 ➡ ${}_nC_2$

풍쌤 Point 일직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선은 1개뿐이다.

028

한 평면 위에 있는 서로 다른 5개의 점 중에서 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않을 때, 주어진 점을 이어서 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는?

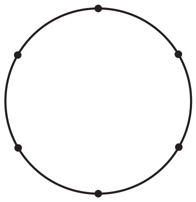
① 9 ✓② 10 ③ 11

④ 12 ⑤ 13

${}_5C_2 = 10$

029

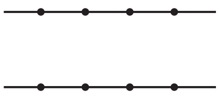
오른쪽 그림과 같이 원 위에 6개의 점이 있을 때, 주어진 점을 이어서 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수를 구하시오. 15



${}_6C_2 = 15$

030

오른쪽 그림과 같이 평행한 두 직선 위에 8개의 점이 있을 때, 주어진 점을 이어서 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는?



① 15 ② 16 ③ 17

✓④ 18 ⑤ 19

평행한 두 직선 위의 점을 하나씩 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는 ${}_4C_1 \times {}_4C_1 = 4 \times 4 = 16$

또, 일직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선은 각각 1개씩 존재한다.

따라서 구하는 직선의 개수는 $16 + 2 = 18$

유형 실전 문제

정답과 풀이 124쪽

유형 07 삼각형과 사각형의 개수

중요

어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 서로 다른 n개의 점에 대하여

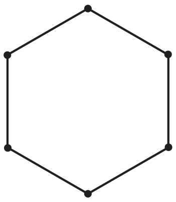
① 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수 ➡ ${}_nC_3$

② 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 개수 ➡ ${}_nC_4$

풍쌤 Point 일직선 위에 있는 3개의 점으로 만들 수 있는 삼각형은 없다.

031

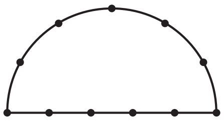
오른쪽 그림과 같이 정육각형 위에 6개의 점이 있을 때, 이 중에서 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수를 구하시오. 20



${}_6C_3=20$

032

오른쪽 그림과 같이 반원 위에 11개의 점이 있을 때, 이 중에서 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수를 구하시오. 145



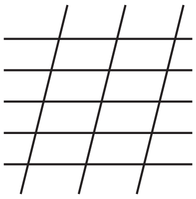
11개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는 ${}_{11}C_3=165$

일직선 위에 있는 6개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는 ${}_6C_3=20$

따라서 구하는 삼각형의 개수는 $165-20=145$

033

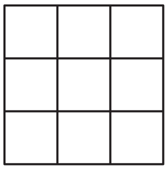
오른쪽 그림과 같이 5개의 평행한 직선과 3개의 평행한 직선이 서로 만날 때, 이 평행선으로 만들 수 있는 평행사변형의 개수를 구하시오. 30



${}_5C_2\times{}_3C_2=10\times3=30$

034

오른쪽 그림과 같이 9개의 정사각형을 이어 붙인 도형에서 직사각형의 개수는?



① 28　　② 32

[✓ ③ 36]　　④ 40

⑤ 44

${}_4C_2\times{}_4C_2=6\times6=36$

유형 08 분할과 분배

① 서로 다른 n개를 p개, q개, r개 $(p+q+r=n)$의 3묶음으로 분할하는 경우의 수는

(ⅰ) p, q, r가 모두 다른 수인 경우 ➡ ${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_rC_r$

(ⅱ) p, q, r 중에서 어느 두 수가 같은 경우

➡ ${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_rC_r\times\frac{1}{2!}$

(ⅲ) p, q, r가 모두 같은 수인 경우

➡ ${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_rC_r\times\frac{1}{3!}$

② n묶음으로 분할하여 n명에게 분배하는 경우의 수는

(n묶음으로 분할하는 경우의 수)$\times n!$

풍쌤 Point 서로 다른 것을 몇 개의 묶음으로 나누는 것을 분할이라 하고, 분할된 묶음을 일렬로 나열하는 것을 분배라 한다.

035

9명의 학생을 2명, 3명, 4명의 3개의 조로 나누는 경우의 수를 구하시오. 1260

${}_9C_2\times{}_7C_3\times{}_4C_4=36\times35\times1=1260$

036

서로 다른 5개의 과자를 똑같은 상자 3개에 빈 상자가 없도록 나누어 담는 경우의 수는?

① 20　　[✓ ② 25]　　③ 30

④ 35　　⑤ 40

(ⅰ) 1개, 1개, 3개로 나누어 담는 경우의 수는

${}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=5\times4\times1\times\frac{1}{2}=10$

(ⅱ) 1개, 2개, 2개로 나누어 담는 경우의 수는

${}_5C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=5\times6\times1\times\frac{1}{2}=15$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $10+15=25$

037

8명의 학생이 2명씩 4개의 조로 나뉘어 서로 다른 4개의 과목을 공부하는 경우의 수는?

① 2480　　② 2500　　[✓ ③ 2520]

④ 2540　　⑤ 2560

8명의 학생을 2명, 2명, 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는

${}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{4!}=28\times15\times6\times1\times\frac{1}{24}=105$

4개의 조가 4개의 과목을 배정받는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는 $105\times24=2520$

중단원 점검 문제

01

교육청 기출

${}_{5}C_{3}\times 3!$의 값은?

① 15　② 30　③ 45
[✓ ④ 60]　⑤ 75

${}_{5}C_{3}\times 3!={}_{5}C_{2}\times 3!=10\times 6=60$

02

다음은 ${}_{n}C_{r}={}_{n-1}C_{r}+{}_{n-1}C_{r-1}$ $(1\le r<n)$임을 보이는 과정이다.

$$\begin{aligned}
&{}_{n-1}C_{r}+{}_{n-1}C_{r-1}\\
&=\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}\\
&=\frac{(n-r)\times(n-1)!}{r!(n-r)!}+\frac{\boxed{(가)}\times(n-1)!}{r!(n-r)!}\\
&=\frac{(n-1)!}{r!(\boxed{(나)})!}\times\{(n-r)+\boxed{(가)}\}\\
&=\frac{\boxed{(다)}\times(n-1)!}{r!(n-r)!}\\
&={}_{n}C_{r}
\end{aligned}$$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$r-1$	$n-r$	$n-1$
②	$r-1$	n	n
③	r	$n-r$	$n-1$
[✓ ④]	r	$n-r$	n
⑤	r	n	n

03

학교 시험 기출

1부터 15까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 15개의 공이 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 두 수의 합이 홀수인 경우의 수를 구하시오. 56

두 수의 합이 홀수가 되려면 홀수가 적혀 있는 공 1개와 짝수가 적혀 있는 공 1개를 꺼내야 하므로 구하는 경우의 수는
${}_{8}C_{1}\times{}_{7}C_{1}=8\times 7=56$

04

자연수 a, b에 대하여 부등식 $1\le a<b<11$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는?

① 25　② 30　③ 35
④ 40　[✓ ⑤ 45]

$1\le a<b<11$을 만족시키는 자연수 a, b는 1부터 10까지의 10개의 자연수 중에서 서로 다른 2개를 뽑아 크기가 작은 것을 a, 큰 것을 b로 정하면 된다.
따라서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는
${}_{10}C_{2}=45$

05

교육청 기출

9개의 숫자 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1을 0끼리는 어느 것도 이웃하지 않도록 일렬로 나열하여 만들 수 있는 아홉 자리의 자연수의 개수는?

① 12　② 14　③ 16
④ 18　[✓ ⑤ 20]

첫 번째 자리에는 0이 올 수 없으므로 0끼리 어느 것도 이웃하지 않도록 나열하려면
1□1□1□1□1□1□
와 같이 놓고, 6개의 □ 중에서 0이 들어갈 3개를 택하면 된다.
따라서 구하는 자연수의 개수는
${}_{6}C_{3}=20$

06

어느 식당에서 제육덮밥, 돈가스, 김치볶음밥을 포함한 8가지의 음식을 판매하고 있다. 이 식당에서 4가지의 음식을 주문할 때, 제육덮밥은 주문하지 않고, 돈가스, 김치볶음밥은 반드시 주문하는 경우의 수를 구하시오. 10

구하는 경우의 수는 제육덮밥, 돈가스, 김치볶음밥을 제외한 5가지 음식 중에서 2가지의 음식을 주문하는 경우의 수와 같으므로
${}_{5}C_{2}=10$

07

1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 6장의 카드 중에서 2장의 카드를 동시에 뽑을 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 수 중에서 가장 작은 수가 2 이하인 경우의 수는?

① 7　② 8　[✓ ③ 9]
④ 10　⑤ 11

(ⅰ) 가장 작은 수가 1인 경우의 수는 1이 적혀 있는 카드를 제외한 5장의 카드 중에서 1장의 카드를 뽑는 경우의 수와 같으므로
${}_{5}C_{1}=5$
(ⅱ) 가장 작은 수가 2인 경우의 수는 1, 2가 적혀 있는 카드를 제외한 4장의 카드 중에서 1장의 카드를 뽑는 경우의 수와 같으므로
${}_{4}C_{1}=4$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $5+4=9$

중단원 점검 문제

정답과 풀이 125쪽

08

중학생 4명과 고등학생 6명으로 이루어진 모임에서 대표 3명을 뽑을 때, 중학생과 고등학생이 적어도 1명씩 포함되도록 뽑는 경우의 수는?

① 94　✓② 96　③ 98

④ 100　⑤ 102

10명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}C_3=120$
중학생 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_3={}_4C_1=4$
고등학생 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_3=20$
따라서 구하는 경우의 수는 $120-(4+20)=96$

09

서로 다른 노트 3권, 연필 5자루, 지우개 4개 중에서 4개를 택할 때, 연필이 적어도 2자루 포함되도록 하는 경우의 수는?

✓① 425　② 430　③ 435

④ 440　⑤ 445

12개의 학용품 중에서 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_{12}C_4=495$
(ⅰ) 연필이 1자루도 포함되지 않는 경우의 수는 ${}_7C_4={}_7C_3=35$
(ⅱ) 연필이 1자루 포함되는 경우의 수는 ${}_7C_3=35$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $495-(35+35)=425$

10 학교 시험 기출

blazing에 있는 7개의 문자 중에서 4개를 택하여 일렬로 나열할 때, 모음이 모두 포함되도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. **240**

모음 a, i를 제외한 5개의 문자 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$
4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는 $10\times24=240$

11

1부터 7까지의 자연수 중에서 짝수 2개와 홀수 2개를 택하여 일렬로 나열할 때, 짝수끼리 이웃하지 않는 경우의 수는?

① 204　② 208　③ 212

✓④ 216　⑤ 220

짝수 2, 4, 6 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2={}_3C_1=3$
홀수 1, 3, 5, 7 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$
짝수끼리 이웃하지 않으려면 홀수를 나열한 후, 홀수 사이와 양 끝의 3개의 자리에 짝수를 나열하면 되므로 그 경우의 수는
$2!\times{}_3P_2=2\times6=12$
따라서 구하는 경우의 수는 $3\times6\times12=216$

12 실전 Plus

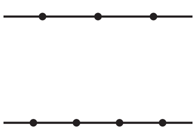
대각선의 개수가 44인 다각형의 꼭짓점의 개수는?

① 9　② 10　✓③ 11

④ 12　⑤ 13

구하는 다각형의 꼭짓점의 개수를 n $(n\geq3)$이라 하면
${}_nC_2-n=\frac{n(n-1)}{2\times1}-n=44$
$n^2-3n-88=0$, $(n+8)(n-11)=0$
이때 $n\geq3$이므로 $n=11$

13



오른쪽 그림과 같이 평행한 두 직선 위에 있는 7개의 점 중에서 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는?

① 26　② 28　✓③ 30

④ 32　⑤ 34

7개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_7C_3=35$
위쪽 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_3=1$
아래쪽 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_3={}_4C_1=4$
따라서 구하는 삼각형의 개수는 $35-(1+4)=30$

14

서로 다른 빨간색 공 5개와 파란색 공 3개를 4개씩 두 개의 똑같은 주머니에 나누어 담으려고 한다. 각 주머니에 적어도 한 개의 파란색 공이 들어 있도록 나누어 담는 경우의 수를 구하시오. **30**

8개의 공을 4개, 4개로 나누어 담는 경우의 수는 ${}_8C_4\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}=35$
한 주머니에 파란색 공 3개를 전부 담는 경우의 수는 빨간색 공을 1개, 4개로 나누는 경우의 수와 같으므로
${}_5C_1\times{}_4C_4=5$
따라서 구하는 경우의 수는 $35-5=30$

15

서로 다른 6권의 책을 3명의 학생에게 나누어 줄 때, 한 사람이 적어도 한 권의 책을 갖도록 나누어 주는 경우의 수는?

① 510　② 520　③ 530

✓④ 540　⑤ 550

(ⅰ) 1권, 1권, 4권으로 나누는 경우의 수는 ${}_6C_1\times{}_5C_1\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}=15$
(ⅱ) 1권, 2권, 3권으로 나누는 경우의 수는 ${}_6C_1\times{}_5C_2\times{}_3C_3=60$
(ⅲ) 2권, 2권, 2권으로 나누는 경우의 수는 ${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=15$
(ⅰ)~(ⅲ)에서 6권의 책을 3묶음으로 나누는 경우의 수는 $15+60+15=90$
이때 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는 $90\times6=540$

Ⅳ

행렬

계산의 관점을 바꾸어라.

행렬은 하나씩 계산하는 방식에서 벗어나는 도구다. 하나의 식이나 하나의 값이 아니라, 여러 정보를 한 번에 다루는 방식이다. 겉으로는 단순히 수를 배열한 것처럼 보이지만, 핵심은 배열이 아니라 그 의미다. 계산 자체보다 계산이 가능한지, 순서가 맞는지 판단하는 것이 더 중요하다. 흩어진 값을 한 번에 묶어, 한눈에 전체를 보는 시각. 이 시각을 틔우는 것이 이 단원의 목표다.

01 행렬과 그 연산

본문 171~192쪽

행렬의 뜻

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{제1열} & \text{제2열} & \text{제3열}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{제1행}\\ \text{제2행}\end{array} & \begin{pmatrix}3 & 1 & 7\\ 5 & 6 & \boxed{2}\end{pmatrix} \leftarrow (2,\ 3)\text{성분}\end{array} \Rightarrow \underset{\text{행의 개수}}{2}\times\underset{\text{열의 개수}}{3}\ \text{행렬}$$

① m개의 행과 n개의 열로 이루어진 행렬 ➡ $\boxed{m\times n}$ 행렬

② 제i행과 제j열이 만나는 위치에 있는 성분 ➡ $\boxed{(i,\ j)}$ 성분

행렬의 덧셈과 뺄셈, 실수배

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$와 실수 k에 대하여

덧셈	뺄셈
$\boxed{A+B}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}$	$\boxed{A-B}=\begin{pmatrix}a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12}\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}\end{pmatrix}$

실수배
$\boxed{kA}=k\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12}\\ ka_{21} & ka_{22}\end{pmatrix}$

행렬의 곱셈

행렬 A의 열의 개수와 행렬 B의 행의 개수가 같을 때에만 두 행렬의 곱셈 AB가 정의된다.

➡ $(m\times l$ 행렬$)\times(l\times n$ 행렬$)=(m\times n$ 행렬$)$

$$\begin{array}{c}\text{제1행}\\ \text{제2행}\end{array}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{제1열} & \text{제2열}\end{array}\\ \begin{pmatrix}x & u\\ y & v\end{pmatrix}\end{array}=\left(\begin{array}{c|c}1\text{행}\times1\text{열} & 1\text{행}\times2\text{열}\\ \hline 2\text{행}\times1\text{열} & 2\text{행}\times2\text{열}\end{array}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}ax+by & au+bv\\ cx+dy & cu+dv\end{pmatrix}$$

행렬의 거듭제곱

정사각행렬 A와 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$A^2=AA,\ A^3=A^2A,\ \cdots,\ A^{n+1}=A^nA$$

단위행렬

왼쪽 위에서 오른쪽 아래로 내려가는 대각선 위의 성분은 모두 1이고, 그 외의 성분은 모두 0인 정사각행렬을 $\boxed{\text{단위행렬}}$이라 한다.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

01 행렬의 뜻

❶ 행렬의 뜻

① 행렬: 여러 개의 수 또는 문자를 직사각형 모양으로 배열하여 괄호로 묶은 것

② 행렬의 성분: 행렬을 이루는 각각의 수 또는 문자

③ 행: 행렬에서 성분을 가로로 배열한 줄

④ 열: 행렬에서 성분을 세로로 배열한 줄

⑤ $m\times n$ 행렬: m개의 행과 n개의 열로 이루어진 행렬

⑥ 정사각행렬: 행의 개수와 열의 개수가 같은 행렬

$$\overset{\substack{\text{행의 개수}\\ \downarrow}}{m}\times\underset{\substack{\uparrow\\ \text{열의 개수}}}{n}\ \text{행렬}$$

- 행렬은 보통 알파벳 대문자 $A, B, C, \cdots$를 사용하여 나타내고, 성분은 알파벳 소문자 $a, b, c, \cdots$를 사용하여 나타낸다.

보기

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{제1열} & \text{제2열} & \text{제3열}\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{array}\\ \begin{array}{c}\text{제1행}\rightarrow\\ \text{제2행}\rightarrow\end{array} & \begin{pmatrix}-3 & 0 & 2\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

- $n\times n$ 행렬을 n차 정사각행렬이라 한다.

❷ 행렬의 (i, j) 성분

행렬 A에서 제i행과 제j열이 만나는 위치에 있는 성분을 행렬 A의 (i, j) 성분이라 하고, 기호 a_{ij}로 나타낸다.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}\phantom{a_{11}} & & \text{제}j\text{열} & \end{array}\\ \text{제}i\text{행} & \begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots\\ \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots\\ \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}\end{array}$$

- 행렬 A를 $A=(a_{ij})$로 나타내기도 한다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 127쪽

001

행렬 $\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 행의 개수 2

(2) 열의 개수 2

(3) 제1행의 모든 성분의 합 −2

(4) 제2열의 모든 성분의 합 3

002

행렬 $\begin{pmatrix}5 & 6\\ -3 & 2\\ -1 & -4\end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 행의 개수 3

(2) 열의 개수 2

(3) 제3행의 모든 성분의 합 −5

(4) 제2열의 모든 성분의 합 4

003

다음 행렬의 꼴을 말하시오.

(1) $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ 2×1 행렬

(2) $\begin{pmatrix}-1 & 3 & 6 & 5\end{pmatrix}$ 1×4 행렬

(3) $\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 2 & 1\\ 1 & 2\\ -9 & 7\end{pmatrix}$ 4×2 행렬

(4) $\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 5 & 6\\ 2 & -4 & -8\end{pmatrix}$ 3×3 행렬

개념 기본 문제

정답과 풀이 127쪽

004

보기에서 정사각행렬인 것을 있는 대로 고르시오. ㄴ

보기

ㄱ. $\begin{pmatrix} -5 & -5 \end{pmatrix}$

ㄴ. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

ㄷ. $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}$

ㄹ. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

005

행렬 $\begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $(1,\ 1)$ 성분 9

(2) $(2,\ 1)$ 성분 6

(3) a_{12} -8

(4) a_{22} -4

006

행렬 $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $a_{12}+a_{13}$ 3

$a_{12}=1,\ a_{13}=2$
$\therefore\ a_{12}+a_{13}=1+2=3$

(2) $a_{11}+a_{23}$ 0

$a_{11}=-3,\ a_{23}=3$
$\therefore\ a_{11}+a_{23}=-3+3=0$

(3) $a_{33}-a_{21}$ 6

$a_{33}=6,\ a_{21}=0$
$\therefore\ a_{33}-a_{21}=6-0=6$

(4) $a_{22}-a_{32}$ -4

$a_{22}=-5,\ a_{32}=-1$
$\therefore\ a_{22}-a_{32}=-5-(-1)=-4$

007

행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij}가 다음과 같을 때, 행렬 A를 구하시오.

(1) $a_{ij}=i-j+2$ (단, $i=1,\ 2,\ j=1,\ 2$) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$a_{11}=1-1+2=2,\ a_{12}=1-2+2=1,$
$a_{21}=2-1+2=3,\ a_{22}=2-2+2=2$

(2) $a_{ij}=3i+2j-4$ (단, $i=1,\ 2,\ 3,\ j=1,\ 2$) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

$a_{11}=3\times1+2\times1-4=1,\ a_{12}=3\times1+2\times2-4=3,$
$a_{21}=3\times2+2\times1-4=4,\ a_{22}=3\times2+2\times2-4=6,$
$a_{31}=3\times3+2\times1-4=7,\ a_{32}=3\times3+2\times2-4=9$

(3) $a_{ij}=i^2-j^2$ (단, $i=1,\ 2,\ j=1,\ 2,\ 3$) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

$a_{11}=1^2-1^2=0,\ a_{12}=1^2-2^2=-3,\ a_{13}=1^2-3^2=-8,$
$a_{21}=2^2-1^2=3,\ a_{22}=2^2-2^2=0,\ a_{23}=2^2-3^2=-5$

(4) $a_{ij}=\begin{cases} 1 & (i\le j) \\ -1 & (i>j) \end{cases}$ (단, $i=1,\ 2,\ 3,\ j=1$) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$a_{11}=1,\ a_{21}=a_{31}=-1$

(5) $a_{ij}=\begin{cases} i+j & (i=j) \\ i-j & (i\ne j) \end{cases}$ (단, $i=1,\ 2,\ 3,\ j=1,\ 2,\ 3$) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$a_{11}=1+1=2,\ a_{12}=1-2=-1,\ a_{13}=1-3=-2,$
$a_{21}=2-1=1,\ a_{22}=2+2=4,\ a_{23}=2-3=-1,$
$a_{31}=3-1=2,\ a_{32}=3-2=1,\ a_{33}=3+3=6$

(6) $a_{ij}=\begin{cases} (-1)^{i+j} & (i>j) \\ 2^i & (i=j) \\ (-1)^{j-i} & (i<j) \end{cases}$ (단, $i=1,\ 2,\ j=1,\ 2,\ 3$) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

$a_{11}=2^1=2,\ a_{12}=(-1)^{2-1}=-1,\ a_{13}=(-1)^{3-1}=1,$
$a_{21}=(-1)^{2+1}=-1,\ a_{22}=2^2=4,\ a_{23}=(-1)^{3-2}=-1$

02 행렬이 서로 같을 조건

❶ 행렬이 서로 같을 조건

두 행렬 A, B가 같은 꼴이고 대응하는 성분이 각각 같을 때, 두 행렬 A, B는 서로 같다고 하며, 기호 $A=B$로 나타낸다.

즉, 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여

① $A=B$이면 $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$

② $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$이면 $A=B$

- 두 행렬 A, B의 행의 개수와 열의 개수가 각각 같을 때, 두 행렬을 같은 꼴이라 한다.
- 두 행렬 A, B가 서로 같지 않을 때, 기호 $A\neq B$로 나타낸다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 128쪽

008

다음 두 행렬이 같은 꼴이면 ○를, 같은 꼴이 아니면 ×를 (　　) 안에 써넣으시오.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ (×)

(2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (○)

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -6 & -10 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$ (×)

(4) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 99 & 15 \\ 7 & 87 \\ 56 & 11 \end{pmatrix}$ (○)

(5) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (×)

(6) $\begin{pmatrix} -7 & -3 & -2 \\ -8 & 1 & 3 \\ -9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ (○)

009

다음 등식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오.

(1) $\begin{pmatrix} x+3 & y-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix}$ **$x=-5$, $y=5$**

$x+3=-2$, $y-1=4$에서 $x=-5$, $y=5$

(2) $\begin{pmatrix} x-y \\ 2x-3y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ **$x=4$, $y=1$**

$x-y=3$, $2x-3y=5$에서 $x=4$, $y=1$

(3) $\begin{pmatrix} x+3 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & y+2 \end{pmatrix}$ **$x=-1$, $y=2$**

$x+3=2$, $4=y+2$에서 $x=-1$, $y=2$

(4) $\begin{pmatrix} x-2y & 2x+y & 3y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & x-6 \end{pmatrix}$ **$x=0$, $y=-2$**

$x-2y=4$, $2x+y=-2$를 연립하여 풀면 $x=0$, $y=-2$

010

다음 등식을 만족시키는 실수 x, y, z의 값을 구하시오.

(1) $\begin{pmatrix} x-4 & 0 \\ 3 & z+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ y+1 & 5 \end{pmatrix}$ **$x=1$, $y=2$, $z=3$**

$x-4=-3$, $3=y+1$, $z+2=5$에서 $x=1$, $y=2$, $z=3$

(2) $\begin{pmatrix} x-3y & y+2 \\ 2x+z & y-z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}$ **$x=-6$, $y=-2$, $z=2$**

$x-3y=0$, $y+2=0$, $2x+z=-10$, $y-z=-4$에서 $x=-6$, $y=-2$, $z=2$

(3) $\begin{pmatrix} x+y & x-2z \\ 5 & 2y-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ z+4 & 3y+z \end{pmatrix}$ **$x=3$, $y=-4$, $z=1$**

$x+y=-1$, $x-2z=1$, $5=z+4$, $2y-3=3y+z$에서 $x=3$, $y=-4$, $z=1$

(4) $\begin{pmatrix} -x & -2 \\ x+2z & z-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & z+1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **$x=5$, $y=-5$, $z=-3$**

$-x=y$, $-2=z+1$, $x+2z=-1$, $z-y=2$에서 $x=5$, $y=-5$, $z=-3$

유형 실전 문제

유형 01 행렬의 뜻

① $m\times n$ 행렬: m개의 행과 n개의 열로 이루어진 행렬

② 행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분: 행렬 A에서 제i행과 제j열이 만나는 위치에 있는 성분 ➡ a_{ij}

풍쌤 Point 행의 개수
↓
$m\times n$ 행렬
↑
열의 개수

011

행렬 $A=\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$의 $(i,\ j)$ 성분을 a_{ij}라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① 일차 정사각행렬이다. 이차 정사각행렬이다.
② $(2,\ 1)$ 성분은 -2이다. $(2,\ 1)$ 성분은 4이다.
③ $a_{11}+a_{12}=2$ $8+(-2)=6$
✓④ 제2열의 모든 성분의 합은 4이다. $-2+6=4$
⑤ $i=j$를 만족시키는 성분은 6이다. $a_{11}=8,\ a_{22}=6$

012

다음 중 2×1 행렬은?

① $(1\quad 0)$ 1×2 행렬
② $(-4\quad -2\quad 1)$ 1×3 행렬
✓③ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2×1 행렬
④ $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ 3×1 행렬
⑤ $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 9 & -11 \end{pmatrix}$ 2×2 행렬

013

행렬 $(i,\ j)$의 성분을 a_{ij}라 할 때, 다음 **보기**에서 $a_{12}+a_{21}=8$을 만족시키는 행렬을 있는 대로 고르시오.

ㄱ, ㄷ, ㄹ

보기

ㄱ. $\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

ㄴ. $\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 7 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

ㄷ. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

ㄹ. $\begin{pmatrix} -1 & 11 & -3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

ㄱ. $a_{12}+a_{21}=7+1=8$
ㄴ. $a_{12}+a_{21}=-1+7=6$
ㄷ. $a_{12}+a_{21}=6+2=8$
ㄹ. $a_{12}+a_{21}=11+(-3)=8$

유형 02 성분에 대한 조건이 주어진 행렬

중요★

행렬 $A=(a_{ij})$의 성분 a_{ij}가 식으로 주어질 때, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ j=1,\ 2,\ \cdots$를 대입하여 행렬의 각 성분을 구한다.

풍쌤 Point $m\times n$ 행렬에서 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$이다.

014

행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij}가

$$a_{ij}=2i-ij+j^2\ (i=1,\ 2,\ 3,\ j=1,\ 2)$$

일 때, 행렬 A를 구하시오. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

$a_{11}=2\times1-1\times1+1^2=2,\ a_{12}=2\times1-1\times2+2^2=4,$
$a_{21}=2\times2-2\times1+1^2=3,\ a_{22}=2\times2-2\times2+2^2=4,$
$a_{31}=2\times3-3\times1+1^2=4,\ a_{32}=2\times3-3\times2+2^2=4$

015

이차 정사각행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij}가 $a_{ij}=\dfrac{i-j}{ij}$일 때, 행렬 A의 모든 성분의 합은?

① -1
② $-\dfrac{1}{2}$
✓③ 0
④ $\dfrac{1}{2}$
⑤ 1

$a_{11}=\dfrac{1-1}{1\times1}=0,\ a_{12}=\dfrac{1-2}{1\times2}=-\dfrac{1}{2},\ a_{21}=\dfrac{2-1}{2\times1}=\dfrac{1}{2},\ a_{22}=\dfrac{2-2}{2\times2}=0$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 $0+\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}+0=0$

016

이차 정사각행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij}가 $a_{ij}=-a_{ji}$일 때, 다음 중 행렬 A가 될 수 있는 것은?

✓① $\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$
② $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
③ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$
⑤ $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

(ⅰ) $i=j$일 때
$a_{11}=-a_{11},\ a_{22}=-a_{22}$이므로 $a_{11}=0,\ a_{22}=0$
(ⅱ) $i\neq j$일 때
$a_{12}=-a_{21}$
따라서 (ⅰ), (ⅱ)를 만족시키는 것은 ①이다.

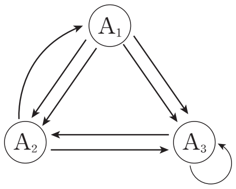
017

오른쪽 그림은 세 도시 A_1, A_2, A_3 사이의 도로망을 나타낸 것이다. 행렬 A의 (i, j) 성분 a_{ij}를

$a_{ij}=$(A_i 지점에서 A_j 지점으로 가는 길의 개수)

로 정의할 때, 행렬 A를 구하시오.

(단, 화살표 방향으로만 통행할 수 있다.)



$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$a_{11}=0$, $a_{12}=2$, $a_{13}=2$, $a_{21}=1$, $a_{22}=0$, $a_{23}=1$, $a_{31}=0$, $a_{32}=1$, $a_{33}=1$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

018

2×4 행렬 A의 (i, j) 성분 a_{ij}가

$$a_{ij}=\begin{cases} i^2+j \ (i>j) \\ j^2-i \ (i\le j) \end{cases}$$

일 때, 행렬 A의 제2행의 모든 성분의 합은?

① 26 ✓② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

$a_{21}=2^2+1=5$, $a_{22}=2^2-2=2$, $a_{23}=3^2-2=7$, $a_{24}=4^2-2=14$
따라서 행렬 A의 제2행의 모든 성분의 합은
$5+2+7+14=28$

019

삼차 정사각행렬 A의 (i, j) 성분 a_{ij}가

$$a_{ij}=\begin{cases} 3i-2j \ (i<j) \\ i+j \quad (i=j) \\ i^2-2j \ (i>j) \end{cases}$$

일 때, 행렬 A의 모든 성분의 합은?

✓① 22 ② 23 ③ 24
④ 25 ⑤ 26

$a_{11}=1+1=2$, $a_{12}=3\times1-2\times2=-1$, $a_{13}=3\times1-2\times3=-3$,
$a_{21}=2^2-2\times1=2$, $a_{22}=2+2=4$, $a_{23}=3\times2-2\times3=0$,
$a_{31}=3^2-2\times1=7$, $a_{32}=3^2-2\times2=5$, $a_{33}=3+3=6$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은
$2+(-1)+(-3)+2+4+0+7+5+6=22$

유형 03 행렬이 서로 같을 조건

중요

같은 꼴인 두 행렬 A, B에 대하여 $A=B$이면 두 행렬의 대응하는 성분이 서로 같다.

풍쌤 Point

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}=b_{11},\ a_{12}=b_{12} \\ a_{21}=b_{21},\ a_{22}=b_{22} \end{cases}$

020

등식 $\begin{pmatrix} 3 & 2x-3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & y+4 \end{pmatrix}$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 x^2-y^2의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ✓⑤ 8

$2x-3=3$에서 $2x=6$ $\therefore x=3$
$5=y+4$에서 $y=1$
$\therefore x^2-y^2=3^2-1^2=8$

021

등식 $\begin{pmatrix} 2x-y & y+z \\ y^2-y+5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & y^2 \end{pmatrix}$을 만족시키는 실수 x, y, z에 대하여 $x+y-z$의 값을 구하시오. -3

$2x-y=5$, $y+z=3$, $y^2-y+5=7$, $1=y^2$
$\therefore x+y-z=2+(-1)-4=-3$

022

등식 $\begin{pmatrix} ab & -6 \\ 1 & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & a+b \\ 1 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$이 성립할 때, 상수 x의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 28 ② 30 ✓③ 32
④ 34 ⑤ 36

$ab=2$, $a+b=-6$이므로
$x=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$=(-6)^2-2\times2=32$

023

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} y & -6 \\ xy & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x+3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 $A=B$일 때, x^3-y^3의 값을 구하시오. -18

$y=x+3$에서 $x-y=-3$
$xy=-1$
$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=(-3)^3+3\times(-1)\times(-3)=-18$

03 행렬의 덧셈과 뺄셈

① 행렬의 덧셈과 뺄셈

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix},\ A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix}$$

② 영행렬

행렬의 성분이 모두 0인 행렬을 영행렬이라 하고, 기호 O로 나타낸다.

참고 같은 꼴의 행렬 A와 영행렬 O에 대하여
$A+O=O+A=A$, $A+(-A)=(-A)+A=O$

③ 행렬의 덧셈에 대한 성질

같은 꼴의 세 행렬 A, B, C에 대하여

① 교환법칙: $A+B=B+A$

② 결합법칙: $(A+B)+C=A+(B+C)$

- 행렬의 덧셈과 뺄셈은 두 행렬이 같은 꼴일 때에만 정의된다.

풍쌤 Tip 영행렬은 각 행렬의 꼴에 하나씩 있다.

- 행렬 A의 모든 성분의 부호를 바꾼 것을 성분으로 하는 행렬을 기호 $-A$로 나타낸다.

개념 기본 문제

024

다음을 계산하시오.

(1) $(1\ \ 4\ \ -5)+(2\ \ -3\ \ 6)$ $(3\ \ 1\ \ 1)$

(2) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -6 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 0 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 12 & -11 & -10 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -7 & -2 & 9 \\ 6 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 & -13 & -1 \\ 9 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

025

다음을 계산하시오.

(1) $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(2) $(-2\ \ 0\ \ -1)-(6\ \ -3\ \ 1)$ $(-8\ \ 3\ \ -2)$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & -8 \\ 1 & 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -8 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 10 & -3 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & -7 & 5 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 4 & -7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 12 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 10 & -19 \\ -14 & -5 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 7 \\ 5 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \\ -11 & 7 & -9 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 1 & -5 & -8 \\ 5 & -6 & 13 \end{pmatrix}$

026

세 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 5 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 0 & 6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 10 & -1\end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $A+C$ $\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 15 & 1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & -3\\ 5 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 10 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 15 & 1\end{pmatrix}$

(2) $C-B$ $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 10 & -7\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 10 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 10 & -7\end{pmatrix}$

(3) $A-B+C$ $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 15 & -5\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & -3\\ 5 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 0 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 10 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 15 & -5\end{pmatrix}$

(4) $C-A-B$ $\begin{pmatrix}1 & 8\\ 5 & -9\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 10 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -3\\ 5 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 5 & -9\end{pmatrix}$

027

세 행렬

$$A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 6\\ 7 & -8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-6 & -4\\ 1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -9 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}$$

에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $A+B$ $\begin{pmatrix}-5 & -9\\ 3 & 9\\ 9 & -6\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 6\\ 7 & -8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & -4\\ 1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -9\\ 3 & 9\\ 9 & -6\end{pmatrix}$

(2) $B+A$ $\begin{pmatrix}-5 & -9\\ 3 & 9\\ 9 & -6\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-6 & -4\\ 1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 6\\ 7 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -9\\ 3 & 9\\ 9 & -6\end{pmatrix}$

(3) $(A+B)+C$ $\begin{pmatrix}-5 & -8\\ -6 & 9\\ 9 & 4\end{pmatrix}$

$A+B=\begin{pmatrix}-5 & -9\\ 3 & 9\\ 9 & -6\end{pmatrix}$이므로 $\begin{pmatrix}-5 & -9\\ 3 & 9\\ 9 & -6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -9 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -8\\ -6 & 9\\ 9 & 4\end{pmatrix}$

(4) $A+(B+C)$ $\begin{pmatrix}-5 & -8\\ -6 & 9\\ 9 & 4\end{pmatrix}$

$B+C=\begin{pmatrix}-6 & -4\\ 1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -9 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -3\\ -8 & 3\\ 2 & 12\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 6\\ 7 & -8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & -3\\ -8 & 3\\ 2 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -8\\ -6 & 9\\ 9 & 4\end{pmatrix}$

028

행렬 $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 7\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(단, O는 영행렬이다.)

(1) $A+O$ $\begin{pmatrix}-2 & 3 & 7\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$

(2) $O+A$ $\begin{pmatrix}-2 & 3 & 7\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$

(3) $A+(-A)$ $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

(4) $(-A)+A$ $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

029

다음 등식을 만족시키는 행렬 X를 구하시오.

(1) $X-\begin{pmatrix}-2\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}3\\ 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}4 & 3 & -1\end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix}2 & -7 & 9\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-2 & -10 & 10\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}2 & -7 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -10 & 10\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}-X=\begin{pmatrix}-9 & 6\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}10 & -8\\ 5 & -3\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-9 & 6\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -8\\ 5 & -3\end{pmatrix}$

(4) $X+\begin{pmatrix}8 & 1\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -4 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-4 & -7\\ -4 & 7\end{pmatrix}$

$X+\begin{pmatrix}8 & 1\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -6\\ -4 & 3\end{pmatrix}$

$\therefore\ X=\begin{pmatrix}4 & -6\\ -4 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8 & 1\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -7\\ -4 & 7\end{pmatrix}$

04 행렬의 실수배

① 행렬의 실수배

행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$와 실수 k에 대하여

$$kA=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

② 행렬의 실수배의 성질

같은 꼴의 두 행렬 A, B와 두 실수 k, l에 대하여

① $1\times A=A$, $(-1)\times A=-A$

② $0\times A=O$, $k\times O=O$ (단, O는 영행렬이다.)

③ $(kl)A=k(lA)$

④ $(k+l)A=kA+lA$, $k(A+B)=kA+kB$

- 행렬 kA는 행렬 A의 각 성분을 k배한 행렬이다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 131쪽

030

다음을 계산하시오.

(1) $3\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

(2) $4(-2 \quad -1 \quad 5)$ $(-8 \quad -4 \quad 20)$

(3) $-2\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 25 & 10 \\ -15 & -5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

(5) $-0.3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -0.3 & -0.9 \\ 0.6 & 1.2 \\ -1.5 & 0.3 \end{pmatrix}$

(6) $0\begin{pmatrix} -7 & -6 & 5 & -4 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

031

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $2A$ $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}$

(2) $-3B$ $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -15 \end{pmatrix}$

(3) $A+2B$ $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}$

(4) $4A-5B$ $\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -24 & -9 \end{pmatrix}$

(5) $\frac{1}{2}(A-B)$ $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(6) $5A-2(A+B)$ $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -18 & 2 \end{pmatrix}$

$5A-2A-2B=3A-2B=3\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -18 & 2 \end{pmatrix}$

유형 실전 문제

정답과 풀이 132쪽

유형 04 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배

중요

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여

$A\pm B=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} \end{pmatrix}$, $kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$

풍쌤 Point 덧셈, 뺄셈, 실수배가 섞여 있는 식은 실수배를 먼저 계산한 후 앞에서부터 차례대로 계산한다.

032

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $2A+3B$의 모든 성분의 합을 구하시오. -8

$2A+3B=2\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -9 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$1+(-9)=-8$

033

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $3(A+B)-2(2A-B)$의 $(1, 2)$ 성분은?

① 9　② 10　③ 11

✓④ 12　⑤ 13

$3(A+B)-2(2A-B)=-A+5B$

$=-\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 31 & 12 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 $(1, 2)$ 성분은 12이다.

034

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ k & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $A-2B=\begin{pmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$일 때, 실수 k의 값은?

① 1　② 2　✓③ 3

④ 4　⑤ 5

$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ k & 3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -12 \\ k-2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$k-2=1$　$\therefore k=3$

035

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} k & 1 \\ 2k & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $3A+B$의 $(2, 1)$ 성분이 2일 때, 행렬 $A+B$의 $(1, 1)$ 성분은?

✓① $-\frac{7}{3}$　② -2　③ $-\frac{5}{3}$

④ $-\frac{4}{3}$　⑤ -1

$3A+B=3\begin{pmatrix} k & 1 \\ 2k & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3k-3 & 9 \\ 6k-2 & -10 \end{pmatrix}$

이때 $(2, 1)$ 성분은 $6k-2=2$이므로 $k=\frac{2}{3}$

$\therefore A+B=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{4}{3} & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 7 \\ -\frac{2}{3} & -2 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A+B$의 $(1, 1)$ 성분은 $-\frac{7}{3}$이다.

036

등식 $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & x \\ -6 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ y & 7 \end{pmatrix}$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?

① -5　✓② -3　③ -1

④ 1　⑤ 3

$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & x \\ -6 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -4-\frac{1}{2}x \\ 11 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ y & 7 \end{pmatrix}$

$-4-\frac{1}{2}x=3$, $11=y$이므로 $x=-14$, $y=11$

$\therefore x+y=-14+11=-3$

037

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$에 대하여 $X-B=2(A+B)$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은?

① 15　② 18　③ 21

④ 24　✓⑤ 27

$X-B=2(A+B)$에서

$X=2A+3B=2\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 14 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$18+14+(-4)+(-1)=27$

유형 실전 문제

정답과 풀이 133쪽

038

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & -3\\1 & 2\end{pmatrix}$에 대하여 $3(A+X)=2(A-B)+X$를 만족시키는 행렬 X의 (1, 2) 성분과 (2, 1) 성분의 합을 구하시오. **0**

$3A+3X=2A-2B+X$

$2X=-A-2B$

$\therefore X=-\frac{1}{2}A-B=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & -3\\1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & \frac{3}{2}\\-\frac{3}{2} & -3\end{pmatrix}$

$\therefore \frac{3}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)=0$

039

세 행렬

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 3\\5 & 6\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -5\\-7 & -8\end{pmatrix}$$

에 대하여 $xA+yB=C$가 성립할 때, 실수 x, y에 대하여 $x-y$의 값은?

[✓ ① 3]　② 4　③ 5

④ 6　⑤ 7

$x\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0 & 3\\5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -5\\-7 & -8\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x & -x+3y\\-x+5y & -x+6y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -5\\-7 & -8\end{pmatrix}$

$x=2$, $-x+3y=-5$, $-x+5y=-7$, $-x+6y=-8$이므로

$x=2$, $y=-1$

$\therefore x-y=2-(-1)=3$

040

세 행렬

$$A=\begin{pmatrix}3 & 6\\9 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-4 & -2\\k & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-9 & 0\\3 & 3\end{pmatrix}$$

에 대하여 $xA+yB=C$가 성립하도록 하는 실수 x, y가 존재할 때, 실수 k의 값은?

[✓ ① -2]　② -1　③ 0

④ 1　⑤ 2

$x\begin{pmatrix}3 & 6\\9 & -3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-4 & -2\\k & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 0\\3 & 3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3x-4y & 6x-2y\\9x+ky & -3x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 0\\3 & 3\end{pmatrix}$

$3x-4y=-9$, $6x-2y=0$, $9x+ky=3$, $-3x+2y=3$이므로

$x=1$, $y=3$, $k=-2$

유형 05 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배 – 연립

두 행렬 A, B에 대한 두 등식이 주어진 경우, A, B에 대한 연립방정식으로 생각하여 푼다.

풍쌤 Point 연립방정식과 마찬가지로 A 또는 B를 소거하여 행렬 A, B를 각각 구한다.

041

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여

$$\underbrace{A+B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\0 & -3\end{pmatrix}}_{㉠},\ \underbrace{A-B=\begin{pmatrix}5 & 3\\-2 & -1\end{pmatrix}}_{㉡}$$

을 만족시킬 때, 행렬 B의 모든 성분의 합은?

① -6　[✓ ② -3]　③ 0

④ 3　⑤ 6

㉠－㉡을 하면

$2B=\begin{pmatrix}-6 & 0\\2 & -2\end{pmatrix}$　$\therefore B=\begin{pmatrix}-3 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 B의 모든 성분의 합은

$-3+0+1+(-1)=-3$

042

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}-3 & -9\\-7 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & -2\\-16 & 20\end{pmatrix}$에 대하여 $\underbrace{2X+Y=A}_{㉠}$, $\underbrace{X-2Y=B}_{㉡}$를 만족시키는 행렬 X, Y가 존재할 때, 행렬 $3X-Y$의 (2, 1) 성분을 구하시오. **-23**

㉠+㉡을 하면

$3X-Y=\begin{pmatrix}-7 & -11\\-23 & 25\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $3X-Y$의 (2, 1) 성분은 -23이다.

043

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여

$$\underbrace{A+2B=\begin{pmatrix}7 & 2\\-4 & -10\end{pmatrix}}_{㉠},\ \underbrace{A-B=\begin{pmatrix}-2 & 2\\-4 & 8\end{pmatrix}}_{㉡}$$

을 만족시킬 때, 행렬 $A+B$는?

① $\begin{pmatrix}-2 & 2\\-4 & 8\end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix}2 & 2\\4 & 8\end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix}4 & -2\\-4 & -4\end{pmatrix}$

[✓ ④ $\begin{pmatrix}4 & 2\\-4 & -4\end{pmatrix}$]　⑤ $\begin{pmatrix}4 & 2\\4 & 4\end{pmatrix}$

㉠－㉡을 하면

$3B=\begin{pmatrix}9 & 0\\0 & -18\end{pmatrix}$　$\therefore B=\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -6\end{pmatrix}$

$\therefore A+B=(A+2B)-B=\begin{pmatrix}7 & 2\\-4 & -10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\-4 & -4\end{pmatrix}$

05 행렬의 곱셈

❶ 행렬의 곱셈

① 행렬 A의 제i행의 성분과 행렬 B의 제j열의 성분을 각각 차례대로 곱하여 더한 것을 $(i,\ j)$ 성분으로 하는 행렬을 A와 B의 곱이라 하고, 기호 AB로 나타낸다.

참고 $(m\times \underbrace{l\ \text{행렬})\times(l}_{\text{같다}}\times n\ \text{행렬})=m\times n\ \text{행렬}$

② 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

❷ 행렬의 거듭제곱

정사각행렬 A와 2 이상의 자연수 m, n에 대하여

① $A^2=AA$, $A^3=A^2A$, $\cdots$, $A^{n+1}=A^nA$

② $A^mA^n=A^{m+n}$, $(A^m)^n=A^{mn}$

- 행렬 A의 열의 개수와 행렬 B의 행의 개수가 같을 때에만 두 행렬의 곱셈 AB가 정의된다.
- 행렬 A가 정사각행렬일 때에만 행렬의 거듭제곱이 정의된다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 134쪽

044

다음 행렬의 곱셈이 정의되는 것은 ○를, 정의되지 않는 것은 ×를 (　　) 안에 써넣으시오.

앞 행렬의 열의 개수와 뒤 행렬의 행의 개수가 같으면 곱셈이 정의된다.

(1) $(5\ \ -2)\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ (○)

(2) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}(-2\ \ 4\ \ 6)$ (○)

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}(10\ \ -2)$ (×)

(4) $(0\ \ 0)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (○)

(5) $\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ (×)

045

보기에서 행렬 AB가 2×2 행렬인 것을 있는 대로 고르시오.

ㄱ, ㄴ, ㄹ

보기

ㄱ. $A=\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$, $B=(5\ \ -5)$

ㄴ. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

ㄷ. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

ㄹ. $A=\begin{pmatrix} 4 & -4 & 12 \\ -12 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

046

다음은 행렬의 곱셈을 하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times1+\boxed{2}\times(-1) \\ \boxed{-3}\times1+1\times(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ \boxed{-4} \end{pmatrix}$$

개념 기본 문제

047

다음을 계산하시오.

(1) $\begin{pmatrix}-1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-7\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -5\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}6 & -10\\-3 & 5\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}2 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}-6 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3\\-5 & 1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}10 & -20\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}2 & -3\\4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-1 & -5\\9 & 1\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}-7 & 6\\5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\2 & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}19 & 0\\-7 & 0\end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix}3 & 4\\-1 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\3 & 5\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}12 & 17\\-18 & -29\end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix}-2 & 1\\4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -5\\2 & -2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-8 & 8\\26 & -26\end{pmatrix}$

048

다음 등식이 성립하도록 하는 실수 x, y, z의 값을 구하시오.

(1) $\begin{pmatrix}x & 3\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & z\\3 & -3\end{pmatrix}$ $x=-1,\ y=1,\ z=5$

$\begin{pmatrix}x+3y & -2x+3\\2+y & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & z\\3 & -3\end{pmatrix}$

$x+3y=2$, $-2x+3=z$, $2+y=3$에서 $x=-1$, $y=1$, $z=5$

(2) $\begin{pmatrix}x & 4\\-1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & y\\0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & z\\-5 & -7\end{pmatrix}$ $x=2,\ y=1,\ z=10$

$\begin{pmatrix}5x & xy+8\\-5 & -y-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & z\\-5 & -7\end{pmatrix}$

$5x=10$, $xy+8=z$, $-y-6=-7$에서 $x=2$, $y=1$, $z=10$

(3) $\begin{pmatrix}-4 & -6\\x & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & 2\\-1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -2\\12 & z\end{pmatrix}$ $x=3,\ y=3,\ z=9$

$\begin{pmatrix}-4y+6 & -2\\xy+3 & 2x+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -2\\12 & z\end{pmatrix}$

$-4y+6=-6$, $xy+3=12$, $2x+3=z$에서 $x=3$, $y=3$, $z=9$

(4) $\begin{pmatrix}0 & 2\\x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 1\\0 & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -14\\-24 & -22\end{pmatrix}$ $x=6,\ y=4,\ z=-7$

$\begin{pmatrix}0 & 2z\\-4x & x+yz\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -14\\-24 & -22\end{pmatrix}$

$2z=-14$, $-4x=-24$, $x+yz=-22$에서 $x=6$, $y=4$, $z=-7$

049

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) A^2 $\begin{pmatrix}-1 & -2\\4 & -1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\4 & -1\end{pmatrix}$

(2) A^3 $\begin{pmatrix}-5 & -1\\2 & -5\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-1 & -2\\4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -1\\2 & -5\end{pmatrix}$

(3) A^4 $\begin{pmatrix}-7 & 4\\-8 & -7\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-5 & -1\\2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 4\\-8 & -7\end{pmatrix}$

08 행렬의 곱셈의 성질

❶ 행렬의 곱셈의 성질

합과 곱이 정의되는 세 행렬 A, B, C에 대하여

① 교환법칙이 성립하지 않는다. ← 두 행렬 A, B에 대하여 일반적으로 $AB \neq BA$이다.

② 결합법칙: $(AB)C = A(BC)$

③ 분배법칙: $A(B+C) = AB+AC$, $(A+B)C = AC+BC$

④ $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ (단, k는 실수이다.)

풍쌤 Tip 행렬의 곱셈에서는 교환법칙이 성립하지 않으므로 곱하는 순서에 유의하여 계산한다.

❷ 단위행렬

왼쪽 위에서 오른쪽 아래로 내려가는 대각선 위의 성분은 모두 1이고, 그 외의 성분은 모두 0인 n차 정사각행렬을 n차 단위행렬이라 하고, 기호 E로 나타낸다.

참고 정사각행렬 A와 같은 꼴인 단위행렬 E에 대하여
$AE = EA = A$, $E^n = E$ (단, n은 자연수이다.)

보기 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$은 각각 이차, 삼차 단위행렬이다.

개념 기본 문제

정답과 풀이 136쪽

050

다음 두 행렬 A, B에 대하여 AB와 BA를 구하시오.

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} -3 & -15 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

051

세 행렬 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $(AB)C$ $\begin{pmatrix} -4 & 15 \\ 2 & 24 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$이므로 $(AB)C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 15 \\ 2 & 24 \end{pmatrix}$

(2) $A(BC)$ $\begin{pmatrix} -4 & 15 \\ 2 & 24 \end{pmatrix}$

$BC = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$이므로 $A(BC) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 15 \\ 2 & 24 \end{pmatrix}$

052

세 행렬

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $A(B+C)$ $\begin{pmatrix} -20 & -10 \\ 26 & 18 \end{pmatrix}$

$A(B+C) = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -10 \\ 26 & 18 \end{pmatrix}$

(2) $AB+AC$ $\begin{pmatrix} -20 & -10 \\ 26 & 18 \end{pmatrix}$

$AB+AC = \begin{pmatrix} -10 & -25 \\ -2 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 15 \\ 28 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -10 \\ 26 & 18 \end{pmatrix}$

053

두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) AE $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

(2) EA $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

(3) E^2 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) E^4 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

유형 실전 문제

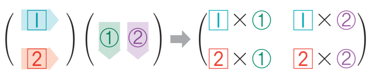
유형 06 행렬의 곱셈

중요

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

풍쌤 Point



054

세 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $C=(2 \quad -4)$에 대하여 다음 중 행렬의 곱이 정의되지 않는 것은?

(정답 2개)

① AB
✓② AC
✓③ BA
④ BC
⑤ CB

행렬 A는 2×2 행렬, 행렬 B는 2×1 행렬, 행렬 C는 1×2 행렬이다.
따라서 행렬의 곱이 정의되지 않는 것은 AC, BA이다.

055

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $BA-AB$의 $(1,\ 2)$ 성분은?

① 6
② 8
③ 10
✓④ 12
⑤ 14

$AB=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$

$\therefore BA-AB=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -12 & -3 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 $(1,\ 2)$ 성분은 12이다.

056

네 행렬 $A=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D=(2 \quad -1)$에 대하여 행렬 $AB+2CD$의 모든 성분의 합을 구하시오. 12

$AB+2CD=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}(2 \quad -1)$

$=\begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 12 & -13 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 24 & -19 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은 $4+3+24+(-19)=12$

057

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} x & 2 \\ y & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2y & -2 \\ -2 & x \end{pmatrix}$에 대하여 $AB=O$가 성립할 때, 양수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하시오. (단, O는 영행렬이다.) 3

$AB=\begin{pmatrix} 2xy-4 & 0 \\ 2y^2-8 & -2y+4x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$2y^2-8=0$, $-2y+4x=0$

$\therefore x=1,\ y=2$

$\therefore x+y=1+2=3$

058

등식 $\begin{pmatrix} x^2 & 4 \\ x & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ y \end{pmatrix}$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $y-x$의 값을 구하시오. 6

$\begin{pmatrix} x^2 & 4 \\ x & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2+4x \\ -2x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ y \end{pmatrix}$

$x^2+4x=-4$, $-2x=y$

$\therefore x=-2,\ y=4$

$\therefore y-x=4-(-2)=6$

059

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & k \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$에 대하여 $AB=BA$가 성립하도록 하는 상수 k의 값은?

✓① -8
② -6
③ -4
④ -2
⑤ 0

$AB=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & k \\ 4 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & k-14 \\ 11 & k+21 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} -1 & k \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+k & 2+3k \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$

$AB=BA$이므로 $-9=-1+k$, $k-14=2+3k$, $k+21=13$

$\therefore k=-8$

060

두 이차 정사각행렬 A, B의 $(i,\ j)$ 성분을 각각 a_{ij}, b_{ij}라 하면

$$a_{ij}=i+j-2,\ b_{ij}=2i-j$$

일 때, 행렬 BA의 모든 성분의 합은?

① 8
② 9
✓③ 10
④ 11
⑤ 12

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 BA의 모든 성분의 합은 $0+1+2+7=10$

유형 07 행렬의 거듭제곱

중요★

정사각행렬 A와 2 이상의 자연수 m, n에 대하여
① $A^2=AA$, $A^{n+1}=A^nA$
② $A^mA^n=A^{m+n}$, $(A^m)^n=A^{mn}$

풍쌤 Point A^n을 추정할 때는 A^2, A^3, A^4, …을 차례대로 계산하여 각 성분의 규칙을 찾는다.

061

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^2+B^2의 모든 성분의 합은?

① 2　② 3　✓③ 4
④ 5　⑤ 6

$A^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\1 & -2\end{pmatrix}$

$B^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}$

$\therefore A^2+B^2=\begin{pmatrix}-1 & -2\\1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^2+B^2의 모든 성분의 합은 $1+(-1)+3+1=4$

062

행렬 $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\1 & k\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^2의 $(1,\ 2)$ 성분이 2일 때, 행렬 A^2의 $(2,\ 2)$ 성분은?

① 3　② 4　③ 5
④ 6　✓⑤ 7

$A^2=\begin{pmatrix}2 & -2\\1 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2\\1 & k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2k-4\\k+2 & k^2-2\end{pmatrix}$

이때 행렬 A^2의 $(1,\ 2)$ 성분이 2이므로
$-2k-4=2$, $-2k=6$　$\therefore k=-3$
따라서 행렬 A^2의 $(2,\ 2)$ 성분은
$k^2-2=(-3)^2-2=7$

063

두 행렬 A, B에 대하여

$$\underset{㉠}{\underline{A+B=\begin{pmatrix}0 & 4\\1 & 4\end{pmatrix}}},\ \underset{㉡}{\underline{A-2B=\begin{pmatrix}-3 & 4\\-5 & -5\end{pmatrix}}}$$

일 때, 행렬 A^2+B^2을 구하시오.　$\begin{pmatrix}\mathbf{-2} & \mathbf{0}\\\mathbf{8} & \mathbf{6}\end{pmatrix}$

㉠－㉡을 하면 $3B=\begin{pmatrix}0 & 4\\1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 4\\-5 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\6 & 9\end{pmatrix}$

$\therefore B=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{pmatrix}$

㉠에 대입하면 $A=\begin{pmatrix}0 & 4\\1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 4\\-1 & 1\end{pmatrix}$

따라서 $A^2+B^2=\begin{pmatrix}-3 & 0\\0 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\8 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\8 & 6\end{pmatrix}$

064

행렬 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\a & b\end{pmatrix}$에 대하여 $A^2=O$일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, O는 영행렬이다.)

✓① -6　② -4　③ -2
④ 0　⑤ 2

$A^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+4 & b+2\\2a+ab & a+b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

$a+4=0$, $b+2=0$, $2a+ab=0$, $a+b^2=0$
$\therefore a=-4$, $b=-2$
$\therefore a+b=-4+(-2)=-6$

065

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^{10}의 $(1,\ 2)$ 성분은?

① 9　✓② 10　③ 11
④ 12　⑤ 13

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{pmatrix}$

⋮

따라서 $A^n=\begin{pmatrix}1 & n\\0 & 1\end{pmatrix}$이므로 A^{10}의 $(1,\ 2)$ 성분은 10이다.

066

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^8의 모든 성분의 합을 구하시오.　**-14**

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\-4 & 1\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\-6 & 1\end{pmatrix}$, $A^4=\begin{pmatrix}1 & 0\\-8 & 1\end{pmatrix}$, …, $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\-2n & 1\end{pmatrix}$

따라서 $A^8=\begin{pmatrix}1 & 0\\-16 & 1\end{pmatrix}$이므로 행렬 A^8의 모든 성분의 합은
$1+0+(-16)+1=-14$

067

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$에 대하여 $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 32\end{pmatrix}$를 만족시키는 자연수 n의 값은?

① 4　✓② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}$, …, $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2^n\end{pmatrix}$

$2^n=32$이므로 $n=5$

유형 실전 문제

유형 08 행렬의 곱셈의 실생활 활용

주어진 조건을 행렬로 나타내고, 행렬의 곱에서 각 성분이 의미하는 것을 파악한다.

풍쌤 Point 구하는 것을 먼저 식으로 나타낸 후 행렬의 곱에서 일치하는 성분을 찾는다.

068

[표 1]은 민희와 형진이가 각각 구입한 쿠키와 사탕의 개수이고, [표 2]는 쿠키 1개와 사탕 1개의 가격을 나타낸 것이다.

(단위: 개)

	쿠키	사탕
민희	2	2
형진	1	4

[표 1]

(단위: 원)

	가격
쿠키	2000
사탕	600

[표 2]

민희와 형진이가 쿠키와 사탕을 구입하기 위해 지불한 비용이 각각 5200원, 4400원일 때, 이것을 행렬의 곱으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2000 \\ 600 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5200 \\ c \end{pmatrix}$$

이때 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.

4406

민희와 형진이가 지불한 비용이 각각 5200원, 4400원이므로 $c=4400$

$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2000 \\ 600 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2000a+1200 \\ 2000+600b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5200 \\ 4400 \end{pmatrix}$

$2000a+1200=5200$, $2000+600b=4400$ $\quad\therefore a=2,\ b=4$

$\therefore a+b+c=2+4+4400=4406$

069

두 미술관 A, B의 성인과 학생의 관람료가 오른쪽 표와 같다. 다음 중 성인 4명과 학생 10명이 함께 미술관에 갈 때, 미술관 A, B의 관람료로 지불해야 하는 금액을 나타낸 것은?

(단위: 원)

	미술관 A	미술관 B
성인	10000	5000
학생	6000	4000

① $\begin{pmatrix} 10000 & 5000 \\ 6000 & 4000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 10000 & 5000 \\ 6000 & 4000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$

✓③ $\begin{pmatrix} 10000 & 6000 \\ 5000 & 4000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 10000 & 6000 \\ 5000 & 4000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix} 10000 & 4000 \\ 6000 & 5000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

미술관 A에 갈 때, 관람료로 지불해야 하는 금액은 $10000\times4+6000\times10$

미술관 B에 갈 때, 관람료로 지불해야 하는 금액은 $5000\times4+4000\times10$

따라서 $\begin{pmatrix} 10000\times4+6000\times10 \\ 5000\times4+4000\times10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10000 & 6000 \\ 5000 & 4000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

070

어느 서점에서 3월과 4월에 판매한 수학책과 국어책의 권수가 오른쪽 표와 같다. 수학책과 국어책의 한 권당 가격이 각각 p원, q원일 때, 세 행렬 A, B, C를

(단위: 권)

	수학책	국어책
3월	a	b
4월	c	d

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$$

라 하면 3월의 수학책과 국어책의 판매 금액의 총합은 x원이다. 다음 중 x의 값과 같은 것은?

✓① 행렬 AB의 $(1,\ 1)$ 성분

② 행렬 AB의 $(2,\ 1)$ 성분

③ 행렬 BC의 $(1,\ 1)$ 성분

④ 행렬 CA의 $(1,\ 1)$ 성분

⑤ 행렬 CA의 $(2,\ 1)$ 성분

3월의 수학책과 국어책의 판매 금액의 총합은 $(ap+bq)$원이다. $\quad\therefore x=ap+bq$

$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ap+bq \\ cp+dq \end{pmatrix}$이므로 행렬 AB의 $(1,\ 1)$ 성분이다.

071

한 종류의 노트와 한 종류의 펜을 섞어 학용품 세트 A, B를 만들려고 한다. 문구점과 대형 서점에서 판매하는 노트 1개와 펜 1개의 가격은 [표 1]과 같고, 학용품 세트 A, B에 들어가는 노트와 펜의 개수는 [표 2]와 같다.

(단위: 원)

	노트	펜
문구점	800	600
대형 서점	700	500

[표 1]

(단위: 개)

	세트 A	세트 B
노트	3	4
펜	2	1

[표 2]

$A=\begin{pmatrix} 800 & 600 \\ 700 & 500 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$이라 할 때, 행렬 AB의 $(2,\ 2)$ 성분이 나타내는 것은?

① 문구점에서 구매하여 학용품 세트 A를 만들 때 지불하는 금액

② 문구점에서 구매하여 학용품 세트 B를 만들 때 지불하는 금액

③ 대형 서점에서 구매하여 학용품 세트 A를 만들 때 지불하는 금액

✓④ 대형 서점에서 구매하여 학용품 세트 B를 만들 때 지불하는 금액

⑤ 학용품 세트 A, B에 들어가는 노트를 문구점에서 구매할 때 지불하는 금액

$AB=\begin{pmatrix} 800\times3+600\times2 & 800\times4+600\times1 \\ 700\times3+500\times2 & 700\times4+500\times1 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 AB에서 $(2,\ 2)$ 성분은 대형 서점에서 구매하여 학용품 세트 B를 만들 때 지불하는 금액과 같다.

정답과 풀이 138쪽

유형 09 행렬의 곱셈의 성질

중요

합과 곱이 정의되는 세 행렬 A, B, C에 대하여

① 교환법칙이 성립하지 않는다.

② $(AB)C=A(BC)$

③ $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

풍쌤 Point 일반적으로 $AB\neq BA$이므로

① $(A\pm B)^2=A^2\pm AB\pm BA+B^2$ (복호동순)

② $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$

072

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^2-AB의 모든 성분의 합은?

[✓ ① -2]　② -1　③ 0

④ 1　⑤ 2

$A^2-AB=A(A-B)=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -15 & 12 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은 $-15+12+5+(-4)=-2$

073

세 행렬

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

에 대하여 행렬 $ACA+BCA$를 구하시오. $\begin{pmatrix} 6 & 30 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$

$ACA+BCA=(A+B)CA=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 30 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$

074

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A^2-AB+BA-B^2$의 $(2,\ 1)$ 성분을 구하시오. 20

$A^2-AB+BA-B^2=(A+B)(A-B)$

$=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -23 & 0 \\ 20 & -27 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 $(2,\ 1)$ 성분은 20이다.

075

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},\ A^2+B^2=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$$

일 때, 행렬 $AB+BA$의 모든 성분을 구하시오. 11

$AB+BA=(A+B)^2-(A^2+B^2)$

$=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은 $8+(-3)+(-5)+11=11$

유형 10 행렬의 곱셈의 성질 – $AB=BA$가 성립할 때

두 행렬 A, B에 대하여 다음과 같은 조건이 주어지면 $AB=BA$를 만족시킨다.

① $(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$ (복호동순)

② $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

풍쌤 Point 행렬의 곱셈에서 $AB=BA$가 성립하면 곱셈 공식을 적용할 수 있다.

076

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 $AB=BA$일 때, 실수 k의 값은?

① -1　② 0　③ 1

[✓ ④ 2]　⑤ 3

$AB=BA$에서 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} k & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & k+1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$3=k+1$　　$\therefore k=2$

077

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$이 성립할 때, 실수 a의 값은?

① -5　② -4　③ -3

④ -2　[✓ ⑤ -1]

$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$에서 $AB=BA$

$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & a \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ a-1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3a-3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$-6=3a-3$, $a-1=-2$　　$\therefore a=-1$

078

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여 $AB=BA$이고

$$A+B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ A-2B=\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

일 때, 행렬 $A^2-AB-2B^2$의 모든 성분의 합은?

① 30　[✓ ② 33]　③ 36

④ 39　⑤ 42

$AB=BA$이므로

$A^2-AB-2B^2=(A+B)(A-2B)$

$=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 18 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은 $-9+18+18+6=33$

유형 실전 문제

유형 11 단위행렬의 성질

중요

정사각행렬 A와 같은 꼴인 단위행렬 E에 대하여

$AE=EA=A,\ E^n=E$

풍쌤 Point $AE=EA$이므로 다음 곱셈 공식이 성립한다.

① $(A\pm E)^2=A^2\pm 2AE+E$ (복호동순)

② $(A+E)(A-E)=A^2-E$

079

이차 정사각행렬 A에 대하여 $A^2=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 6 & 2\end{pmatrix}$일 때, 행렬 $(A+E)(A-E)$를 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.) $\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{6} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$

$(A+E)(A-E)=A^2-E=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 6 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 6 & 1\end{pmatrix}$

080

행렬 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$에 대하여 $(A-2E)^2=xA+yE$가 성립하도록 하는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.) **1**

$A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$이므로

$(A-2E)^2=A^2-4A+4E=-4A+5E$

$\therefore x+y=-4+5=1$

081

이차 정사각행렬 A의 모든 성분의 합이 -2일 때, 행렬 $(A+E)^2-A(A-E)$의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이다.)

① -8 [✓ ② -4] ③ 0

④ 4 ⑤ 8

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$라 하면 $a+b+c+d=-2$

$(A+E)^2-A(A-E)=3A+E=\begin{pmatrix}3a+1 & 3b\\ 3c & 3d+1\end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$(3a+1)+3b+3c+(3d+1)=3(a+b+c+d)+2=-4$

082

이차 정사각행렬 A에 대하여

$$(2A+E)^2=(2A+3E)(2A-3E)$$

가 성립할 때, 행렬 A의 모든 성분의 합을 구하시오. **−5** (단, E는 단위행렬이다.)

$4A^2+4A+E=4A^2-9E,\ 4A=-10E$

$\therefore A=-\frac{5}{2}E=-\frac{5}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & 0\\ 0 & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 $-\frac{5}{2}+\left(-\frac{5}{2}\right)=-5$

유형 12 행렬의 거듭제곱 – $A^n=E$일 때

중요

정사각행렬 A에 대하여 $A^n=E$를 만족시키는 자연수 n을 찾아 A의 거듭제곱을 간단히 나타낸다.

풍쌤 Point $A^n=-E$를 만족시키는 자연수 n이 존재하는 경우 $A^{2n}=E$이므로 이를 이용할 수 있다.

083

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A^{10}+A^{11}$의 모든 성분의 합을 구하시오. **2**

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$이므로 $A^{10}=(A^2)^5=E^5=E,\ A^{11}=A^{10}A=EA=A$

$\therefore A^{10}+A^{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은 2이다.

084

행렬 $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$에 대하여 $A^n=E$를 만족시키는 가장 작은 자연수 n의 값을 구하시오. **4** (단, E는 단위행렬이다.)

$A^2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E$

$\therefore A^4=(-E)^2=E$

따라서 $A^n=E$를 만족시키는 가장 작은 자연수 n의 값은 4이다.

085

행렬 $A=\begin{pmatrix}2 & -7\\ 1 & -3\end{pmatrix}$에 대하여 다음 중 행렬 A^n이 될 수 <u>없는</u> 것은? (정답 2개)

① $\begin{pmatrix}-3 & 7\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ [✓ ② $\begin{pmatrix}-2 & 7\\ -1 & 3\end{pmatrix}$] ③ $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix}2 & -7\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ [✓ ⑤ $\begin{pmatrix}3 & -7\\ 1 & -2\end{pmatrix}$]

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-3 & 7\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -7\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$

따라서 A^n은 $A=\begin{pmatrix}2 & -7\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix}-3 & 7\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$이 반복되어 나타난다.

086

행렬 $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$에 대하여 다음 중 행렬 $A+A^2+A^3+\cdots+A^8$과 같은 행렬은?

① $-A$ ② A ③ $-A^2-A$

[✓ ④ A^2+A] ⑤ A^2+A+E

$A^3=A^2A=-E,\ A^4=A^3A=-EA=-A$

$A^5=A^4A=(-A)A=-A^2,\ A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$

$\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^8=A+A^2+(-E)+(-A)+(-A^2)+E+A+A^2$

$=A^2+A$

유형 13 행렬의 곱셈의 변형

이차 정사각행렬 A에 대하여 $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$

➡ $A\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p+r \\ q+s \end{pmatrix}$

풍쌤 Point

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=m\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+n\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

➡ $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=mA\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+nA\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=m\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}+n\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} mp+nr \\ mq+ns \end{pmatrix}$

087

이차 정사각행렬 A에 대하여

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

이 성립할 때, 행렬 $A\begin{pmatrix} a+1 \\ b-1 \end{pmatrix}$과 같은 행렬은?

① $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ✓③ $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} a+1 \\ b-1 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

088

이차 정사각행렬 A에 대하여

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

이 성립할 때, 행렬 $A\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$을 구하시오. $\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$

두 실수 m, n에 대하여 $m\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}+n\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$이라 하면

$2m+4n=-4$, $-2m+n=-6$ $\therefore m=2, n=-2$

$\therefore A\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}=A\left\{2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}=2A\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}-2A\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$

089

이차 정사각행렬 A에 대하여

$$A\begin{pmatrix} 2a \\ -3b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} a \\ 6b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

일 때, 행렬 $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$의 모든 성분의 합을 구하시오. 1

$A\begin{pmatrix} 2a \\ -3b \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} a \\ 6b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 2a+a \\ -3b+6b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+8 \\ 0-6 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 3a \\ 3b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\therefore A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은 $3+(-2)=1$

유형 14 케일리－해밀턴 정리

이차 정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$가 성립하고, 이를 케일리－해밀턴 정리라 한다.

풍쌤 Point $A^2=(a+d)A-(ad-bc)E$이므로 이를 이용하여 A^2, A^3, ⋯, A^n을 $pA+qE$ (p, q는 실수) 꼴로 간단히 나타낼 수 있다.

090

행렬 $A=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$이 $A^2+xA+yE=O$를 만족시킬 때, 실수 x, y에 대하여 $x-y$의 값은?

(단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

① 9 ② 10 ③ 11

④ 12 ✓⑤ 13

$A^2-(-4+1)A+(-4\times1-2\times3)E=O$

$\therefore A^2+3A-10E=O$

$\therefore x-y=3-(-10)=13$

091

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$이 $A^3=xA+yE$를 만족시킬 때, 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?

(단, E는 단위행렬이다.)

① -2 ② -1 ③ 0

✓④ 1 ⑤ 2

$A^2-4A+3E=O$ $\therefore A^2=4A-3E$

$\therefore A^3=A^2A=(4A-3E)A$

$=4A^2-3A=4(4A-3E)-3A$

$=13A-12E$

$\therefore x+y=13+(-12)=1$

092

행렬 $A=\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$가 $A^3-A^2-4E=xA+yE$를 만족시킬 때, 실수 x, y에 대하여 $y-x$의 값을 구하시오.

30 (단, E는 단위행렬이다.)

$A^2+4A+9E=O$ $\therefore A^2=-4A-9E$

$\therefore A^3-A^2-4E=A^2A-A^2-4E=(-4A-9E)A-A^2-4E$

$=-5A^2-9A-4E=-5(-4A-9E)-9A-4E$

$=11A+41E$

$\therefore y-x=41-11=30$

중단원 점검 문제

01

행렬 $\begin{pmatrix} 5 & x-2 \\ 2x & -3 \\ 6 & -x-4 \end{pmatrix}$에서 제1열의 모든 성분의 합과 제3행의 모든 성분의 합이 같을 때, 실수 x의 값을 구하시오. -3

제1열의 모든 성분의 합은 $5+2x+6=2x+11$
제3행의 모든 성분의 합은 $6+(-x-4)=-x+2$
주어진 조건에 의하여 $2x+11=-x+2$, $3x=-9$ $\therefore x=-3$

02

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$의 $(i,\ j)$ 성분을 a_{ij}라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $a_{32}=1$
ㄴ. 삼차 정사각행렬이다.
ㄷ. 제2행의 모든 성분의 합은 3이다.
ㄹ. $i>j$를 만족시키는 성분 a_{ij}의 합은 -2이다.

① ㄷ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄹ

ㄱ. $(3, 2)$ 성분은 $a_{32}=1$이다.
ㄷ. 제2행의 모든 성분의 합은 $0+2+3=5$
ㄹ. $i>j$를 만족시키는 성분 a_{ij}의 합은 $a_{21}+a_{31}+a_{32}=0+(-3)+1=-2$

03

이차 정사각행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij}가

$$a_{ij}=(20\text{ 이하인 } i+j\text{의 배수의 개수})$$

일 때, 행렬 A의 모든 성분의 합을 구하시오. 27

$A=\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은 $10+6+6+5=27$

04 학교 시험 기출

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ ab & a+b \end{pmatrix}$에 대하여 $A=B$일 때, $\dfrac{x+y}{xy}$의 값은?

① 6 ② $\dfrac{19}{3}$ ③ $\dfrac{20}{3}$
✓④ 7 ⑤ $\dfrac{22}{3}$

$x=a^2$, $y=b^2$, $1=ab$, $-3=a+b$이므로
$x+y=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(-3)^2-2\times1=7$
$xy=a^2\times b^2=(ab)^2=1$
$\therefore \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{7}{1}=7$

05

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $2(A+B)+3\left(B-\dfrac{1}{3}A\right)$를 구하시오. $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 23 & -14 \end{pmatrix}$

$$2(A+B)+3\left(B-\tfrac{1}{3}A\right)=(2A+2B)+(3B-A)=A+5B$$
$$=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 23 & -14 \end{pmatrix}$$

06 교육청 기출

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$에 대하여 $pA-B=q\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. 6

(단, p와 q는 상수이다.)

$pA-B=p\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4p-8 & 3p-2 \\ 3p-2 & 4p-8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & q \\ q & 0 \end{pmatrix}$
$4p-8=0$, $3p-2=q$
연립하여 풀면 $p=2$, $q=4$ $\therefore p+q=2+4=6$

07

세 행렬

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

에 대하여 $xA+yB=C$가 성립할 때, 실수 x, y에 대하여 $x-y$의 값을 구하시오. 1

$x\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$에서
$4x-2y=-2$, $-2x=4$, $x+y=-5$, $3x-y=-3$
연립하여 풀면 $x=-2$, $y=-3$ $\therefore x-y=-2-(-3)=1$

08 실전 Plus

두 이차 정사각행렬 A, B의 $(i,\ j)$ 성분을 각각 a_{ij}, b_{ij}라 하면

$$\overbrace{a_{ij}=-i+j+1}^{A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}},\ \overbrace{b_{ij}=i^j-j^i}^{B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

이다. $2X-Y=A$, $X+Y=B$를 만족시키는 행렬 X, Y에 대하여 행렬 $6X-3Y$의 $(1,\ 2)$ 성분과 $(2,\ 1)$ 성분의 합은?

① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ✓⑤ 6

$2X-Y=A$, $X+Y=B$ $\therefore X=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$\therefore 6X-3Y=6\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

따라서 $(1, 2)$ 성분과 $(2, 1)$ 성분의 합은 $6+0=6$

09

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여

$$\frac{1}{2}A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ A+B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & -5\end{pmatrix}$$

일 때, 행렬 $AB+BA$의 모든 성분의 합은?

① 18　　② 20　　③ 22

✓④ 24　　⑤ 26

$A=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -4 & -5\end{pmatrix}$

$\therefore\ AB+BA=\begin{pmatrix}6 & 16\\ 10 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & -20\\ -2 & 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 8 & 20\end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은 $0+(-4)+8+20=24$

10

이차방정식 $x^2+4x-9=0$의 두 근을 α, β라 할 때,

행렬 $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \beta & 0\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합을 구하시오.　25

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=-9$

$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \beta & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta^2 & 0\\ \alpha\beta & 0\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은

$\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=(-4)^2-(-9)=25$

11 교육청 기출

두 이차 정사각행렬 A, B의 $(i,\ j)$ 성분을 각각 a_{ij}, b_{ij}라 할 때,

$a_{ij}=i+2j\ (i=1,\ 2,\ j=1,\ 2)$,

$b_{ij}=ij\ (i=1,\ 2,\ j=1,\ 2)$

이다. 행렬 AB의 $(2,\ 1)$ 성분은?

① 4　　② 7　　③ 10

④ 13　　✓⑤ 16

$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 26\\ 16 & 32\end{pmatrix}$ 이므로 $(2,\ 1)$ 성분은 16이다.

12

행렬 $A=\begin{pmatrix}-1 & a\\ 0 & b\end{pmatrix}$가 $A^2=A+2E$를 만족시킬 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오.　1

(단, $b<0$이고, E는 단위행렬이다.)

$A^2=A+2E$에서 $\begin{pmatrix}1 & ab-a\\ 0 & b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & a\\ 0 & b\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$ab-a=a$, $b^2=b+2$이므로

$b^2-b-2=0$, $(b+1)(b-2)=0$　　$\therefore\ b=-1\ (\because\ b<0)$

$ab-a=a$에 대입하면 $-2a=a$　　$\therefore\ a=0$

$\therefore\ a-b=0-(-1)=1$

13

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix}$에 대하여 다음 중 행렬 $E+A+A^2$과 같은 행렬은? (단, E는 단위행렬이다.)

① $-A$　　② O　　✓③ E

④ A　　⑤ $A+E$

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=-A$이므로

$E+A+A^2=E+A+(-A)=E$

14 학교 시험 기출

$A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -n & 1\end{pmatrix}$

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$에 대하여

$E-A+A^2-A^3+A^4$을 간단히 하면?

(단, E는 단위행렬이다.)

① $-A^2$　　② $-A$　　③ E

④ A　　✓⑤ A^2

$$E-A+A^2-A^3+A^4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=A^2$$

15 실전 Plus

장미와 국화를 섞어 두 종류의 꽃다발 A, B를 만들려고 한다. [표 1]은 꽃다발 하나에 포함되어 있는 장미와 국화의 개수이고, [표 2]는 장미와 국화의 한 송이당 가격을 나타낸 것이다. 다음 중 꽃다발 A를 10개, 꽃다발 B를 15개 만드는 데 필요한 금액을 나타낸 것은?

(단위: 송이)

	장미	국화
A	3	4
B	5	2

[표 1]

(단위: 원)

	가격
장미	1000
국화	700

[표 2]

① $(10\ \ 15)\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}700\\ 1000\end{pmatrix}$

✓② $(10\ \ 15)\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1000\\ 700\end{pmatrix}$

③ $(10\ \ 15)\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1000\\ 700\end{pmatrix}$

④ $(1000\ \ 700)\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\ 15\end{pmatrix}$

⑤ $(1000\ \ 700)\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\ 10\end{pmatrix}$

꽃다발 A, B를 만드는 데 필요한 금액을 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix}3\times1000+4\times700\\ 5\times1000+2\times700\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1000\\ 700\end{pmatrix}$이므로 구하는 금액을 행렬로 나타내면

$(10\ \ 15)\begin{pmatrix}\text{꽃다발 A를 만드는 데 필요한 금액}\\ \text{꽃다발 B를 만드는 데 필요한 금액}\end{pmatrix}=(10\ \ 15)\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1000\\ 700\end{pmatrix}$

중단원 점검 문제

정답과 풀이 143쪽

16

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & -2\end{pmatrix}$에 대하여 $X+AB^2=ABA$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합을 구하시오. -36

$X=ABA-AB^2=AB(A-B)$

$=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & -2\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & -2\end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -6\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -8\\ -3 & -24\end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은 $-1+(-8)+(-3)+(-24)=-36$

17

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x & y\\ -2 & -1\end{pmatrix}$에 대하여

$$(A+2B)^2=A^2+4AB+4B^2$$

이 성립할 때, 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?

✓① -3　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 3

$A^2+2AB+2BA+4B^2=A^2+4AB+4B^2$

$AB+BA=2AB$　　$\therefore AB=BA$

즉, $\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -4 & 3\end{pmatrix}$에서

$-3x-4=-3x-4y$, $-3y-2=2x+3y$, $-4x-6=10$, $-4y-3=-7$

따라서 $x=-4$, $y=1$이므로 $x+y=-4+1=-3$

18

행렬 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $(A-E)(A^2+A+E)$를 구하시오. $\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 0 & 7\end{pmatrix}$

(단, E는 단위행렬이다.)

$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 8\end{pmatrix}$

$\therefore (A-E)(A^2+A+E)=A^3-E=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 0 & 7\end{pmatrix}$

19

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$에 대하여 $A^{11}=3^kA$일 때, 자연수 k의 값은?

① 2　② 3　③ 4
✓④ 5　⑤ 6

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=3E$이므로

$A^{11}=(A^2)^5A=(3E)^5A=3^5E^5A=3^5EA=3^5A$

$\therefore k=5$

20 실전 Plus

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여

$$A+B=O,\ AB=2E$$

일 때, $A^8+B^{10}=kE$를 만족시키는 실수 k의 값을 구하시오. (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) -16

$A+B=O$에서 $A=-B$

$AB=2E$에 $A=-B$를 대입하면 $B^2=-2E$

같은 방법으로 $AB=2E$에 $B=-A$를 대입하면 $A^2=-2E$

$\therefore A^8+B^{10}=(A^2)^4+(B^2)^5=(-2E)^4+(-2E)^5=16E-32E=-16E$

$\therefore k=-16$

21

이차 정사각행렬 A에 대하여

$$A^2=A+3E,\ A\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}$$

가 성립할 때, 행렬 $A^2\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$와 같은 행렬은?

① $\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix}6\\ -4\end{pmatrix}$
✓④ $\begin{pmatrix}6\\ -2\end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix}6\\ 6\end{pmatrix}$

$A^2=A+3E$이므로

$A^2\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}=(A+3E)\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}+3E\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\ -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ -2\end{pmatrix}$

22 학교 시험 기출

행렬 $A=\begin{pmatrix}4 & -5\\ -2 & 3\end{pmatrix}$에 대하여 다음 중 행렬 $A^3-7A^2+4A+3E$와 같은 것은?

(단, E는 단위행렬이다.)

① $2A+2E$　✓② $2A+3E$　③ $2A+4E$
④ $4A+2E$　⑤ $4A+3E$

케일리－해밀턴 정리에 의하여

$A^2-(4+3)A+\{4\times3-(-5)\times(-2)\}E=O$

$\therefore A^2-7A+2E=O$

$\therefore A^3-7A^2+4A+3E=A(A^2-7A+2E)+2A+3E=2A+3E$

23 실전 Plus

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $E+A+A^2+A^3+\cdots+A^7$의 모든 성분의 합을 구하시오. 3

케일리－해밀턴 정리에 의하여 $A^2-A+E=O$

양변에 $A+E$를 곱하면 $A^3+E=O$　　$\therefore A^3=-E$

$\therefore E+A+A^2+A^3+\cdots+A^7=E+A+A^2+A^3(E+A+A^2)+A^6(E+A)$

$=E+A+A^2-E(E+A+A^2)+E(E+A)$

$=E+A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은 $2+1+(-1)+1=3$