풍산자 반복수학 파워

정답과 풀이

공통수학 1

I 다항식

I-1 | 다항식의 연산 008~023쪽

001 답 (1) ○ (2) × (3) ○ (4) × (5) × (6) ○

(1) 항은 x^3, $-2x^2$, $-x$, 9의 4개이다.
(2) 차수가 가장 높은 항의 차수는 3이므로 다항식의 차수는 3이다.
(3) $-x$에서 x의 계수는 -1이다.
(4) x^3에서 x^3의 계수는 1이다.
(5) $-2x^2$의 차수는 2이고, $-x$의 차수는 1이다.
따라서 문자는 같으나 차수가 다르므로 동류항이 아니다.
(6) 상수항은 문자를 포함하지 않는 항이므로 9이다.

002 답 (1) 5 (2) 4 (3) -7 (4) $3x^2$ (5) $4y^4+6y+4$ (6) $2x^5-7x+4$

(1) x에 대한 최고차항은 $2x^5$이므로 차수는 5이다.
(2) y에 대한 최고차항은 $4y^4$이므로 차수는 4이다.
(3) x에 대한 일차항은 $-7x$이므로 계수는 -7이다.
(4) y에 대한 이차항은 $3x^2y^2$이므로 계수는 $3x^2$이다.
(5) x에 대한 상수항은 $4y^4+6y+4$이다.
(6) y에 대한 상수항은 $2x^5-7x+4$이다.

003 답 (1) $(y^3-y)x^3+(6y^2-y)x+(3y^2+4y+3)$
(2) $(3y^2+4y+3)+(6y^2-y)x+(y^3-y)x^3$
(3) $x^3y^3+(6x+3)y^2+(-x^3-x+4)y+3$
(4) $3+(-x^3-x+4)y+(6x+3)y^2+x^3y^3$

(1) $x^3y^3+6xy^2-x^3y+3y^2-xy+4y+3$
$=(x^3y^3-x^3y)+(6xy^2-xy)+3y^2+4y+3$
$=(y^3-y)x^3+(6y^2-y)x+(3y^2+4y+3)$
(2) $x^3y^3+6xy^2-x^3y+3y^2-xy+4y+3$
$=3y^2+4y+3+(6xy^2-xy)+(x^3y^3-x^3y)$
$=(3y^2+4y+3)+(6y^2-y)x+(y^3-y)x^3$
(3) $x^3y^3+6xy^2-x^3y+3y^2-xy+4y+3$
$=x^3y^3+(6xy^2+3y^2)+(-x^3y-xy+4y)+3$
$=x^3y^3+(6x+3)y^2+(-x^3-x+4)y+3$
(4) $x^3y^3+6xy^2-x^3y+3y^2-xy+4y+3$
$=3+(-x^3y-xy+4y)+(6xy^2+3y^2)+x^3y^3$
$=3+(-x^3-x+4)y+(6x+3)y^2+x^3y^3$

004 답 (1) $5x^3+x^2+1$
(2) $-2y^4+5y^3+y^2+4$
(3) $x^2-2xy-5y^2$

(1) $(4x^3-2x^2+3)+(x^3+3x^2-2)$
$=4x^3-2x^2+3+x^3+3x^2-2$
$=4x^3+x^3-2x^2+3x^2+3-2$
$=5x^3+x^2+1$
(2) $(-3y^4+5y^3-y^2)+(y^4+2y^2+4)$
$=-3y^4+5y^3-y^2+y^4+2y^2+4$
$=-3y^4+y^4+5y^3-y^2+2y^2+4$
$=-2y^4+5y^3+y^2+4$
(3) $(y^2+3xy-x^2)+(2x^2-6y^2-5xy)$
$=y^2+3xy-x^2+2x^2-6y^2-5xy$
$=-x^2+2x^2+3xy-5xy+y^2-6y^2$
$=x^2-2xy-5y^2$

005 답 (1) $2x^2-5x+9$
(2) $-b^4+5b^3-5b$
(3) $6a^3+2ab^2-3ab$

(1) $(3x^2-4x+7)-(x^2+x-2)$
$=3x^2-4x+7-x^2-x+2$
$=3x^2-x^2-4x-x+7+2$
$=2x^2-5x+9$
(2) $(b^4+2b^3-4b)-(2b^4-3b^3+b)$
$=b^4+2b^3-4b-2b^4+3b^3-b$
$=b^4-2b^4+2b^3+3b^3-4b-b$
$=-b^4+5b^3-5b$
(3) $(5a^3+3ab^2-ab)-(ab^2+2ab-a^3)$
$=5a^3+3ab^2-ab-ab^2-2ab+a^3$
$=5a^3+a^3+3ab^2-ab^2-ab-2ab$
$=6a^3+2ab^2-3ab$

006 답 (1) $3x^2+2x-1$
(2) $5x^2-4x+3$
(3) $14x^2-9x+7$

(1) $A+B=(4x^2-x+1)+(-x^2+3x-2)$
$=4x^2-x+1-x^2+3x-2$
$=4x^2-x^2-x+3x+1-2$
$=3x^2+2x-1$
(2) $A-B=(4x^2-x+1)-(-x^2+3x-2)$
$=4x^2-x+1+x^2-3x+2$
$=4x^2+x^2-x-3x+1+2$
$=5x^2-4x+3$
(3) $3A-2B=3(4x^2-x+1)-2(-x^2+3x-2)$
$=12x^2-3x+3+2x^2-6x+4$
$=12x^2+2x^2-3x-6x+3+4$
$=14x^2-9x+7$

007 답 (1) $-2x^2-8xy-y^2$
(2) $-6x^2+4xy+3y^2$
(3) $-8x^2+2xy+6y^2$

(1) $A+B+C$
$=(-4x^2-2xy+y^2)+(x^2-6xy-3y^2)+(x^2+y^2)$
$=-4x^2+x^2+x^2-2xy-6xy+y^2-3y^2+y^2$
$=-2x^2-8xy-y^2$

(2) $A-B-C$
$=(-4x^2-2xy+y^2)-(x^2-6xy-3y^2)-(x^2+y^2)$
$=-4x^2-2xy+y^2-x^2+6xy+3y^2-x^2-y^2$
$=-4x^2-x^2-x^2-2xy+6xy+y^2+3y^2-y^2$
$=-6x^2+4xy+3y^2$

(3) $2A+B-(2B-C)$
$=2A+B-2B+C$
$=2A-B+C$
$=2(-4x^2-2xy+y^2)-(x^2-6xy-3y^2)+(x^2+y^2)$
$=-8x^2-4xy+2y^2-x^2+6xy+3y^2+x^2+y^2$
$=-8x^2-x^2+x^2-4xy+6xy+2y^2+3y^2+y^2$
$=-8x^2+2xy+6y^2$

008 답 ④

x에 대한 내림차순으로 정리하면 다음과 같다.

① x^2-x+3 ② x^3+x^2-x
③ $x^6-x^5+x^2-4$ ④ $2x^6-x^4$
⑤ $4x^2+8x-2$

따라서 x에 대한 내림차순으로 정리한 것은 ④이다.

009 답 ③

y에 대한 오름차순으로 정리하면 다음과 같다.

ㄱ. $8-y+2y^2$
ㄴ. $y-y^2+4y^4$
ㄷ. $x^2+xy+x^2y^2$
ㄹ. $x^2+4-xy+x^2y^2$

따라서 y에 대한 오름차순으로 정리한 것은 ㄴ, ㄷ이다.

참고 ㄹ. $4+x^2-xy+x^2y^2$과 같이 정리할 수도 있다.

010 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

[ ] 안의 문자에 대한 내림차순으로 정리하면 다음과 같다.

ㄱ. $x^6-x^4y^4+x^2y+xy^2$
ㄴ. $x^2y^3-xy^2+x^4y-2+x^4$
ㄷ. $(a^2+a)b+a^6+a^4+1$
ㄹ. $x^2yz^3-xz^2+z+x+y^2$

따라서 바르게 정리한 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 3개이다.

참고 ㄴ. $x^2y^3-xy^2+x^4y+x^4-2$와 같이 정리할 수도 있다.

011 답 $3x^3-10xy+2y^2$

$(3A+B)-(A-2B)$
$=3A+B-A+2B=2A+3B$
$=2(3x^3+xy-2y^2)+3(-x^3-4xy+2y^2)$
$=6x^3+2xy-4y^2-3x^3-12xy+6y^2$
$=6x^3-3x^3+2xy-12xy-4y^2+6y^2$
$=3x^3-10xy+2y^2$

012 답 ④

$(A-3B)-2(-2B+C)$
$=A-3B+4B-2C$
$=A+B-2C$
$=(5x^4-3x^2+3)+(2x^2+2x-1)-2(2x^4-3x)$
$=5x^4-3x^2+3+2x^2+2x-1-4x^4+6x$
$=5x^4-4x^4-3x^2+2x^2+2x+6x+3-1$
$=x^4-x^2+8x+2$

따라서 x^2의 계수는 -1, 상수항은 2이므로 그 합은
$-1+2=1$

013 답 $7y^2+y+13$

$X+A=2B$에서
$X=2B-A=-A+2B$
$=-(-y^2-3y-5)+2(3y^2-y+4)$
$=y^2+3y+5+6y^2-2y+8$
$=y^2+6y^2+3y-2y+5+8$
$=7y^2+y+13$

014 답 ①

$A+B=-x^2+5xy-3$ …… ㉠
$A-B=-x^2-xy-9$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면
$2A=(-x^2+5xy-3)+(-x^2-xy-9)$
$=-x^2-x^2+5xy-xy-3-9$
$=-2x^2+4xy-12$
$\therefore A=-x^2+2xy-6$

㉠에 $A=-x^2+2xy-6$을 대입하면
$-x^2+2xy-6+B=-x^2+5xy-3$
$\therefore B=(-x^2+5xy-3)-(-x^2+2xy-6)$
$=-x^2+5xy-3+x^2-2xy+6$
$=-x^2+x^2+5xy-2xy-3+6$
$=3xy+3$
$\therefore 2A+B=2(-x^2+2xy-6)+(3xy+3)$
$=-2x^2+4xy-12+3xy+3$
$=-2x^2+4xy+3xy-12+3$
$=-2x^2+7xy-9$

015 답 (1) x^4-2x^2+2x (2) x^3+2x^2+x (3) $3a^3-5a^2+3a-1$ (4) $2x^3+7x^2-7x-12$

(1) $x(x^3-2x+2)=x^4-2x^2+2x$

(2) $(x^2+x)(x+1)=x^2(x+1)+x(x+1)$
$=x^3+x^2+x^2+x$
$=x^3+2x^2+x$

(3) $(a-1)(3a^2-2a+1)=a(3a^2-2a+1)-(3a^2-2a+1)$
$=3a^3-2a^2+a-3a^2+2a-1$
$=3a^3-5a^2+3a-1$

(4) $(x+4)(2x^2-x-3)=x(2x^2-x-3)+4(2x^2-x-3)$
$=2x^3-x^2-3x+8x^2-4x-12$
$=2x^3+7x^2-7x-12$

016

답 (1) $a^3b-a^2b+2ab^3$
(2) $2x^3-5x^2y+8xy^2-3y^3$
(3) $6a^3+4a^2b-3ab^2+12ab-2b^3+8b^2$
(4) $4x^3+5x^2y-7xy^2-2y^3$

(1) $(a^2-a+2b^2)ab=a^3b-a^2b+2ab^3$
(2) $(2x-y)(x^2-2xy+3y^2)$
$=2x(x^2-2xy+3y^2)-y(x^2-2xy+3y^2)$
$=2x^3-4x^2y+6xy^2-x^2y+2xy^2-3y^3$
$=2x^3-5x^2y+8xy^2-3y^3$
(3) $(3a+2b)(2a^2+4b-b^2)$
$=3a(2a^2+4b-b^2)+2b(2a^2+4b-b^2)$
$=6a^3+12ab-3ab^2+4a^2b+8b^2-2b^3$
$=6a^3+4a^2b-3ab^2+12ab-2b^3+8b^2$
(4) $(x+2y)(x-y)(4x+y)$
$=(x^2+xy-2y^2)(4x+y)$
$=x^2(4x+y)+xy(4x+y)-2y^2(4x+y)$
$=4x^3+x^2y+4x^2y+xy^2-8xy^2-2y^3$
$=4x^3+5x^2y-7xy^2-2y^3$

017

답 (1) 7 (2) -3

(1) $(x-2)(x^2-x+5)=x(x^2-x+5)-2(x^2-x+5)$
$=x^3-x^2+5x-2x^2+2x-10$
$=x^3-3x^2+7x-10$
따라서 x의 계수는 7이다.
(2) $(a-3b)(2a^2+3ab-b)$
$=a(2a^2+3ab-b)-3b(2a^2+3ab-b)$
$=2a^3+3a^2b-ab-6a^2b-9ab^2+3b^2$
$=2a^3-3a^2b-9ab^2-ab+3b^2$
따라서 a^2b의 계수는 -3이다.

018

답 (1) 11 (2) 8

(1) 단계1. y^3의 항 전개하기
$(y^2+4y+2)(3y^2-y-1)$을 전개했을 때 y^3의 항이 나타나는 부분만 계산하면
$y^2\times(-y)+4y\times3y^2=-y^3+12y^3=11y^3$
단계2. y^3의 계수 구하기
$11y^3$에서 y^3의 계수는 11이다.
(2) $(x^2-xy+6y^2)(x^2-3xy-y^2)$을 전개했을 때 x^2y^2의 항이 나타나는 부분만 계산하면
$x^2\times(-y^2)+(-xy)\times(-3xy)+6y^2\times x^2$
$=-x^2y^2+3x^2y^2+6x^2y^2=8x^2y^2$
따라서 x^2y^2의 계수는 8이다.

019

답 (1) $2x$, 1, $4x$ (2) $3x$, $9x^2$
(3) -1, 4, $3x$ (4) 3, 1, 3

(1) $(2x+1)^2=(2x)^2+2\times\boxed{2x}\times\boxed{1}+1^2$
$=4x^2+\boxed{4x}+1$
(2) $(3x+2)(3x-2)=(\boxed{3x})^2-2^2$
$=\boxed{9x^2}-4$
(3) $(x-1)(x+4)=x^2+(\boxed{-1}+\boxed{4})x+(-1)\times4$
$=x^2+\boxed{3x}-4$
(4) $(2x+3)(3x+1)=6x^2+(2+9)x+\boxed{3}\times\boxed{1}$
$=6x^2+11x+\boxed{3}$

020

답 (1) $x^2-8x+16$ (2) $4a^2+12a+9$
(3) y^2-25 (4) $9a^2-4b^2$
(5) x^2-4x+3 (6) $y^2-4y-12$
(7) $3a^2+11a-4$ (8) $10x^2+19x+6$

(1) $(x-4)^2=x^2-8x+16$
(2) $(2a+3)^2=4a^2+12a+9$
(3) $(y+5)(y-5)=y^2-25$
(4) $(3a-2b)(3a+2b)=9a^2-4b^2$
(5) $(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$
(6) $(y+2)(y-6)=y^2-4y-12$
(7) $(3a-1)(a+4)=3a^2+11a-4$
(8) $(5x+2)(2x+3)=10x^2+19x+6$

021

답 (1) $-c$, c^2 (2) 4, $48x$
(3) $2x$, $12x^2$ (4) 3, 3, 27

(1) $(a+b-c)^2$
$=a^2+b^2+(\boxed{-c})^2+2\times a\times b+2\times b\times(-c)$
$+2\times(-c)\times a$
$=a^2+b^2+\boxed{c^2}+2ab-2bc-2ca$
(2) $(x+4)^3=x^3+3\times x^2\times4+3\times x\times\boxed{4}^2+4^3$
$=x^3+12x^2+\boxed{48x}+64$
(3) $(2x-1)^3=(2x)^3-3\times(\boxed{2x})^2\times1+3\times2x\times1^2-1^3$
$=8x^3-\boxed{12x^2}+6x-1$
(4) $(x+3)(x^2-3x+9)=(x+3)(x^2-x\times\boxed{3}+3^2)$
$=x^3+\boxed{3}^3$
$=x^3+\boxed{27}$

022

답 (1) $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$
(2) $a^2+b^2+2ab-2a-2b+1$
(3) $x^2+9y^2+z^2+6xy+6yz+2zx$
(4) $4a^2+b^2+16c^2-4ab-8bc+16ca$

(1) $(a-b-c)^2$
$=a^2+(-b)^2+(-c)^2+2\times a\times(-b)+2\times(-b)\times(-c)$
$+2\times(-c)\times a$
$=a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$
(2) $(a+b-1)^2$
$=a^2+b^2+(-1)^2+2\times a\times b+2\times b\times(-1)+2\times(-1)\times a$
$=a^2+b^2+2ab-2a-2b+1$
(3) $(x+3y+z)^2$
$=x^2+(3y)^2+z^2+2\times x\times3y+2\times3y\times z+2\times z\times x$
$=x^2+9y^2+z^2+6xy+6yz+2zx$

(4) $(2a-b+4c)^2$

$=(2a)^2+(-b)^2+(4c)^2+2\times2a\times(-b)+2\times(-b)\times4c+2\times4c\times2a$

$=4a^2+b^2+16c^2-4ab-8bc+16ca$

023 답 (1) x^3-3x^2+3x-1
(2) $a^3+9a^2+27a+27$
(3) $y^3-6y^2+12y-8$
(4) $27x^3+27x^2+9x+1$
(5) $1-6a+12a^2-8a^3$
(6) $125x^3-300x^2y+240xy^2-64y^3$

(1) $(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$

(2) $(a+3)^3=a^3+9a^2+27a+27$

(3) $(y-2)^3=y^3-6y^2+12y-8$

(4) $(3x+1)^3=(3x)^3+3\times(3x)^2\times1+3\times3x\times1^2+1^3$
$=27x^3+27x^2+9x+1$

(5) $(1-2a)^3=1^3-3\times1^2\times2a+3\times1\times(2a)^2-(2a)^3$
$=1-6a+12a^2-8a^3$

(6) $(5x-4y)^3=(5x)^3-3\times(5x)^2\times4y+3\times5x\times(4y)^2-(4y)^3$
$=125x^3-300x^2y+240xy^2-64y^3$

024 답 (1) x^3+8 (2) a^3-1
(3) y^3-216 (4) $27a^3+1$
(5) a^3-8b^3 (6) $125x^3-8y^3$

(1) $(x+2)(x^2-2x+4)=(x+2)(x^2-x\times2+2^2)$
$=x^3+8$

(2) $(a-1)(a^2+a+1)=(a-1)(a^2+a\times1+1^2)$
$=a^3-1$

(3) $(y-6)(y^2+6y+36)=(y-6)(y^2+y\times6+6^2)$
$=y^3-216$

(4) $(3a+1)(9a^2-3a+1)=(3a+1)\{(3a)^2-3a\times1+1^2\}$
$=27a^3+1$

(5) $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)=(a-2b)\{a^2+a\times2b+(2b)^2\}$
$=a^3-8b^3$

(6) $(5x-2y)(25x^2+10xy+4y^2)$
$=(5x-2y)\{(5x)^2+5x\times2y+(2y)^2\}$
$=125x^3-8y^3$

025 답 (1) 3, 3, $11x$ (2) 1, 1, $3xy$
(3) 2, 2, $4x^2$

(1) $(x+1)(x+2)(x+3)$
$=x^3+(1+2+3)x^2+(1\times2+2\times\boxed{3}+\boxed{3}\times1)x+1\times2\times3$
$=x^3+6x^2+\boxed{11x}+6$

(2) $(x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y+1)$
$=(x+y+1)(x^2+y^2+1^2-x\times y-y\times\boxed{1}-\boxed{1}\times x)$
$=x^3+y^3-\boxed{3xy}+1$

(3) $(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
$=(x^2+x\times\boxed{2}+2^2)(x^2-x\times2+2^2)$
$=x^4+x^2\times\boxed{2}^2+2^4$
$=x^4+\boxed{4x^2}+16$

026 답 (1) $x^3+9x^2+26x+24$
(2) $y^3-10y^2+29y-20$
(3) $a^3+5a^2-29a-105$
(4) x^3+5x^2+2x-8
(5) $x^3+2x^2-40x+64$
(6) $y^3+y^2-17y+15$

(1) $(x+2)(x+3)(x+4)$
$=x^3+(2+3+4)x^2+(2\times3+3\times4+4\times2)x+2\times3\times4$
$=x^3+9x^2+26x+24$

(2) $(y-1)(y-4)(y-5)$
$=y^3-(1+4+5)y^2+(1\times4+4\times5+5\times1)y-1\times4\times5$
$=y^3-10y^2+29y-20$

(3) $(a+3)(a-5)(a+7)$
$=(a+3)\{a+(-5)\}(a+7)$
$=a^3+\{3+(-5)+7\}a^2+\{3\times(-5)+(-5)\times7+7\times3\}a+3\times(-5)\times7$
$=a^3+5a^2-29a-105$

(4) $(x-1)(x+2)(x+4)$
$=\{x+(-1)\}(x+2)(x+4)$
$=x^3+\{(-1)+2+4\}x^2+\{(-1)\times2+2\times4+4\times(-1)\}x+(-1)\times2\times4$
$=x^3+5x^2+2x-8$

(5) $(x-2)(x-4)(x+8)$
$=(x-2)(x-4)\{x-(-8)\}$
$=x^3-\{2+4+(-8)\}x^2+\{2\times4+4\times(-8)+(-8)\times2\}x-2\times4\times(-8)$
$=x^3+2x^2-40x+64$

(6) $(y+5)(y-3)(y-1)$
$=\{y-(-5)\}(y-3)(y-1)$
$=y^3-\{(-5)+3+1\}y^2+\{(-5)\times3+3\times1+1\times(-5)\}y-(-5)\times3\times1$
$=y^3+y^2-17y+15$

027 답 (1) $x^3+y^3-9xy+27$
(2) $a^3+b^3-c^3+3abc$
(3) $8a^3-b^3+6ab+1$
(4) $a^3-27b^3-18ab-8$

(1) $(x+y+3)(x^2+y^2+9-xy-3x-3y)$
$=(x+y+3)(x^2+y^2+3^2-x\times y-y\times3-3\times x)$
$=x^3+y^3+3^3-3\times x\times y\times3$
$=x^3+y^3-9xy+27$

(2) $(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$
$=(a+b-c)\{a^2+b^2+(-c)^2-a\times b-b\times(-c)-(-c)\times a\}$
$=a^3+b^3+(-c)^3-3\times a\times b\times(-c)$
$=a^3+b^3-c^3+3abc$

(3) $(2a-b+1)(4a^2+b^2+2ab-2a+b+1)$
$=(2a-b+1)\{(2a)^2+(-b)^2+1^2-2a\times(-b)$
$-(-b)\times1-1\times2a\}$
$=(2a)^3+(-b)^3+1^3-3\times2a\times(-b)\times1$
$=8a^3-b^3+6ab+1$
(4) $(a-3b-2)(a^2+9b^2+3ab+2a-6b+4)$
$=(a-3b-2)\{a^2+(-3b)^2+(-2)^2-a\times(-3b)$
$-(-3b)\times(-2)-(-2)\times a\}$
$=a^3+(-3b)^3+(-2)^3-3\times a\times(-3b)\times(-2)$
$=a^3-27b^3-18ab-8$

028 답 (1) x^4+9x^2+81
(2) $16y^4+4y^2+1$
(3) $x^4+25x^2y^2+625y^4$
(4) $81a^4+144a^2b^2+256b^4$

(1) $(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$
$=(x^2+x\times3+3^2)(x^2-x\times3+3^2)$
$=x^4+9x^2+81$
(2) $(4y^2+2y+1)(4y^2-2y+1)$
$=\{(2y)^2+2y\times1+1^2\}\{(2y)^2-2y\times1+1^2\}$
$=16y^4+4y^2+1$
(3) $(x^2+5xy+25y^2)(x^2-5xy+25y^2)$
$=\{x^2+x\times5y+(5y)^2\}\{x^2-x\times5y+(5y)^2\}$
$=x^4+25x^2y^2+625y^4$
(4) $(9a^2+12ab+16b^2)(9a^2-12ab+16b^2)$
$=\{(3a)^2+3a\times4b+(4b)^2\}\{(3a)^2-3a\times4b+(4b)^2\}$
$=81a^4+144a^2b^2+256b^4$

029 답 ⑤
$(x-y+2)(2x+3y-1)$
$=x(2x+3y-1)-y(2x+3y-1)+2(2x+3y-1)$
$=2x^2+3xy-x-2xy-3y^2+y+4x+6y-2$
$=2x^2+xy+3x-3y^2+7y-2$

030 답 $a^2+4ab-4a+2b^2+8b-5$
$(2a^2+3ab-5)-(a-2b)(a+b+4)$
$=(2a^2+3ab-5)-\{a(a+b+4)-2b(a+b+4)\}$
$=(2a^2+3ab-5)-(a^2+ab+4a-2ab-2b^2-8b)$
$=(2a^2+3ab-5)-(a^2-ab-2b^2+4a-8b)$
$=2a^2+3ab-5-a^2+ab+2b^2-4a+8b$
$=a^2+4ab-4a+2b^2+8b-5$

031 답 ①
$AC-B$
$=(x^2+xy)(x-y+4)-(x^3-2xy+y^2)$
$=x^2(x-y+4)+xy(x-y+4)-(x^3-2xy+y^2)$
$=x^3-x^2y+4x^2+x^2y-xy^2+4xy-(x^3-2xy+y^2)$
$=x^3+4x^2-xy^2+4xy-x^3+2xy-y^2$
$=4x^2-xy^2+6xy-y^2$

032 답 ③
$(4x+3y)(2x^2-3y+6)$의 전개식에서 xy항은
$4x\times(-3y)=-12xy$
따라서 xy의 계수는 -12이다.

다른 풀이
$(4x+3y)(2x^2-3y+6)$
$=4x(2x^2-3y+6)+3y(2x^2-3y+6)$
$=8x^3-12xy+24x+6x^2y-9y^2+18y$
$=8x^3+6x^2y-12xy+24x-9y^2+18y$
따라서 xy의 계수는 -12이다.

033 답 ①
$(x^3+x^2-2)(3x^2+2x-5)$의 전개식에서 x^4항은
$x^3\times2x+x^2\times3x^2=5x^4$
$\therefore\ a=5$
x항은
$-2\times2x=-4x\qquad\therefore\ b=-4$
$\therefore\ a+b=5+(-4)=1$

034 답 8
$(2x-y)(x^2+kxy+7y^2)$의 전개식에서 xy^2항은
$2x\times7y^2+(-y)\times kxy=(14-k)xy^2$
이때 xy^2의 계수가 6이므로
$14-k=6\qquad\therefore\ k=8$

035 답 ②
$(x-3)(x^4-x^3+ax^2-2x)$의 전개식에서 x^3항은
$x\times ax^2+(-3)\times(-x^3)=(a+3)x^3$
x항은
$-3\times(-2x)=6x$
이때 x^3의 계수와 x의 계수가 같으므로
$a+3=6\qquad\therefore\ a=3$

036 답 ④
$(2x-3y+2z)^2$
$=(2x)^2+(-3y)^2+(2z)^2+2\times2x\times(-3y)+2\times(-3y)\times2z$
$+2\times2z\times2x$
$=4x^2+9y^2+4z^2-12xy-12yz+8zx$
따라서 $a=4$, $b=4$, $c=-12$, $d=8$이므로
$a+b-c-d=4+4-(-12)-8=12$

037 답 ①
$(x+2y-3)(x^2+4y^2-2xy+3x+6y+9)$
$=(x+2y-3)(x^2+4y^2+9-2xy+6y+3x)$
$=x^3+8y^3-27+18xy$
따라서 xy의 계수는 18, 상수항은 -27이므로 그 합은
$18+(-27)=-9$

038 답 $x^4+2x^3-3x^2-4x+4$

$(x+2)^2(x-1)^2=\{(x+2)(x-1)\}^2$
$=(x^2+x-2)^2$
$=x^4+x^2+4+2x^3-4x-4x^2$
$=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$

039 답 ③

$(3x+1)(3x-1)(9x^2+3x+1)(9x^2-3x+1)$
$=\{(3x+1)(9x^2-3x+1)\}\{(3x-1)(9x^2+3x+1)\}$
$=(27x^3+1)(27x^3-1)$
$=729x^6-1$

040 답 40

$(2+x)^3+(2-x)^3$
$=(8+12x+6x^2+x^3)+(8-12x+6x^2-x^3)$
$=16+12x^2$
$=16+12\times(\sqrt{2})^2=40$

041 답 ②

$(x+ay)^3=x^3+3ax^2y+3a^2xy^2+a^3y^3$
이때 x^2y의 계수가 -6이므로
$-6=3a \quad \therefore a=-2$
xy^2의 계수가 b이므로 $b=3a^2=3\times(-2)^2=12$
y^3의 계수가 $-c$이므로
$-c=a^3=(-2)^3=-8 \quad \therefore c=8$
$\therefore a+b+c=-2+12+8=18$

042 답 -5

$(x+a)(x+1)(x+b)$
$=x^3+(a+1+b)x^2+(a+b+ab)x+ab$
이때 $a+1+b=2$, $ab=-6$이므로 $a+b=1$, $ab=-6$
따라서 x의 계수는
$a+b+ab=1+(-6)=-5$

043 답 $x^4+4x^3+4x^2-1$

$X=x^2+2x$로 놓으면
$(x^2+2x-1)(x^2+2x+1)=(X-1)(X+1)$
$=X^2-1$
$=(x^2+2x)^2-1$
$=x^4+4x^3+4x^2-1$

044 답 ②

$X=x^2-3y^2$으로 놓으면
$(x^2+xy-3y^2)(x^2-2xy-3y^2)$
$=(X+xy)(X-2xy)$
$=X^2-xyX-2x^2y^2$
$=(x^2-3y^2)^2-xy(x^2-3y^2)-2x^2y^2$
$=x^4-6x^2y^2+9y^4-x^3y+3xy^3-2x^2y^2$
$=x^4-x^3y-8x^2y^2+3xy^3+9y^4$

045 답 $x^6-2x^5+x^4-2x^3+x^2+1$

$X=x^3-x^2-1$로 놓으면
$(x^3-x^2-x-1)(x^3-x^2+x-1)$
$=(X-x)(X+x)$
$=X^2-x^2$
$=(x^3-x^2-1)^2-x^2$
$=(x^6+x^4+1-2x^5+2x^2-2x^3)-x^2$
$=x^6-2x^5+x^4-2x^3+x^2+1$

046 답 ①

$X=y+z$로 놓으면
$(x-y-z)(x+y+z)=\{x-(y+z)\}(x+y+z)$
$=(x-X)(x+X)$
$=x^2-X^2$
$=x^2-(y+z)^2$
$=x^2-(y^2+2yz+z^2)$
$=x^2-y^2-z^2-2yz$

047 답 ③

$(x-4)(x-1)(x-2)(x+1)$
$=\{(x-4)(x+1)\}\{(x-1)(x-2)\}$
$=(x^2-3x-4)(x^2-3x+2)$
$X=x^2-3x$로 놓으면
$(x^2-3x-4)(x^2-3x+2)=(X-4)(X+2)$
$=X^2-2X-8$
$=(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8$
$=x^4-6x^3+9x^2-2x^2+6x-8$
$=x^4-6x^3+7x^2+6x-8$

048 답 ③

$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)$
$=\{(x-3)(x+4)\}\{(x-1)(x+2)\}$
$=(x^2+x-12)(x^2+x-2)$
$X=x^2+x$로 놓으면
$(x^2+x-12)(x^2+x-2)=(X-12)(X-2)$
$=X^2-14X+24$
$=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$
$=x^4+2x^3+x^2-14x^2-14x+24$
$=x^4+2x^3-13x^2-14x+24$
따라서 $a=2$, $b=-14$이므로
$a-b=2-(-14)=16$

049 답 4, 8, -7

$a+b=1$, $ab=4$이므로 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서
$a^2+b^2=1^2-2\times\boxed{4}$
$=1-\boxed{8}=\boxed{-7}$

050 답 (1) 8 (2) 11

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=2^2-2\times(-2)=8$
(2) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=(-3)^2+2\times1=11$

051 답 (1) 48 (2) 17

(1) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab=(-6)^2+4\times3=48$

(2) $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=5^2-4\times2=17$

052 답 (1) 9 (2) -32

(1) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=3^3-3\times2\times3=9$

(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=(-2)^3-3\times(-4)\times(-2)=-32$

053 답 (1) -22 (2) 40

(1) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=(-1)^3+3\times7\times(-1)=-22$

(2) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=4^3+3\times(-2)\times4=40$

054 답 (1) 34 (2) 3

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

$=6^2-2=34$

(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$

$=(-1)^2+2=3$

055 답 (1) 68 (2) 77

(1) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+4$

$=8^2+4=68$

(2) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4$

$=(-9)^2-4=77$

056 답 (1) 19 (2) 5

(1) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=(-5)^2-2\times3=19$

(2) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=1^2-2\times(-2)=5$

057 답 (1) -26 (2) 8

(1) 단계1. 곱셈 공식을 이용하여 $a^2+b^2+c^2$의 값 구하기

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=4^2-2\times7=2$

단계2. 곱셈 공식을 이용하여 $a^3+b^3+c^3$의 값 구하기

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=4\times(2-7)+3\times(-2)=-26$

(2) 단계1. 곱셈 공식을 이용하여 $ab+bc+ca$의 값 구하기

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$11=(-1)^2-2(ab+bc+ca)$

$2(ab+bc+ca)=1-11=-10$

$\therefore\ ab+bc+ca=-5$

단계2. 곱셈 공식을 이용하여 $a^3+b^3+c^3$의 값 구하기

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=(-1)\times\{11-(-5)\}+3\times8=8$

058 답 ④

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$8=4^2-2ab,\ 2ab=8\qquad\therefore\ ab=4$

$\therefore\ a^2-ab+b^2=(a^2+b^2)-ab=8-4=4$

059 답 ②

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$에서

$12=(2\sqrt{2})^2+2xy,\ 2xy=4\qquad\therefore\ xy=2$

$\therefore\ x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=(2\sqrt{2})^3+3\times2\times2\sqrt{2}=28\sqrt{2}$

060 답 5

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$18=3^3-3xy\times3,\ 9xy=9\qquad\therefore\ xy=1$

$\therefore\ (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=3^2-4\times1=5$

061 답 ①

$a=\sqrt{6}-3,\ b=\sqrt{6}+3$에서

$a-b=(\sqrt{6}-3)-(\sqrt{6}+3)=-6$

$ab=(\sqrt{6}-3)(\sqrt{6}+3)=(\sqrt{6})^2-3^2=-3$

$\therefore\ a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=(-6)^3+3\times(-3)\times(-6)=-162$

062 답 ⑤

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=2^3-3\times(-4)\times2=32$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=2^2-2\times(-4)=12$

$\therefore\ a^3-a^2+b^3-b^2=(a^3+b^3)-(a^2+b^2)$

$=32-12=20$

063 답 ③

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$5=1^2-2xy,\ 2xy=-4\qquad\therefore\ xy=-2$

따라서

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=1^3-3\times(-2)\times1=7$

이므로

$x^6+y^6=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3$

$=(x^3+y^3)^2-2(xy)^3$

$=7^2-2\times(-2)^3=65$

다른 풀이

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$5=1^2-2xy\qquad\therefore\ xy=-2$

$\therefore\ x^6+y^6=(x^2+y^2)^3-3x^2y^2(x^2+y^2)$
$\qquad\qquad =5^3-3\times(-2)^2\times5$
$\qquad\qquad =65$

064 답 52

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$
$\qquad\quad =4^3-3\times4=52$

065 답 ③

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$에서

$6=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$, $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=4$

$\therefore\ x-\dfrac{1}{x}=2$ ($\because\ x>1$)

$\therefore\ x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$
$\qquad\qquad =2^3+3\times2=14$

066 답 ②

$x\neq0$이므로 $x^2+3x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x+3+\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore\ x+\dfrac{1}{x}=-3$

$\therefore\ x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$
$\qquad\qquad =(-3)^3-3\times(-3)=-18$

참고 $x=0$일 때, $x^2+3x+1=1\neq0$이므로 $x\neq0$이다.

067 답 4

$x\neq0$이므로 $x^2-x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-1-\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore\ x-\dfrac{1}{x}=1$

$\therefore\ x^2+x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$
$\qquad\qquad =\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2+\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$
$\qquad\qquad =1^2+2+1=4$

068 답 ④

$(2a+b+4c)^2=4a^2+b^2+16c^2+2(2ab+4bc+8ca)$이므로

$4a^2+b^2+16c^2=(2a+b+4c)^2-2(2ab+4bc+8ca)$
$\qquad\qquad =8^2-2\times13=38$

069 답 ②

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$10=(a+b+c)^2-2\times3$

$(a+b+c)^2=16$

$\therefore\ a+b+c=4$ ($\because\ a, b, c$는 양수)

$\therefore\ \dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}=\dfrac{a+b+c}{abc}=\dfrac{4}{2}=2$

070 답 15

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$15=(-3)^2-2(ab+bc+ca)$

$2(ab+bc+ca)=-6 \qquad \therefore\ ab+bc+ca=-3$

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
에서

$-9=(-3)\times\{15-(-3)\}+3abc$

$3abc=45 \qquad \therefore\ abc=15$

071 답 50

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$14=6^2-2(ab+bc+ca)$

$2(ab+bc+ca)=22 \qquad \therefore\ ab+bc+ca=11$

$\therefore\ (a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$
$\quad =a^2+2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+c^2+2ca+a^2$
$\quad =2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)$
$\quad =2\times14+2\times11=50$

072 답 $3x$, 10, $9x$, 몫: $x^2-3x+10$, 나머지: -15

$$\begin{array}{rl}
 & x^2-\boxed{3x}+\boxed{10} \\
x+3\,\big) & x^3 \qquad\quad + \ \ x \ +15 \\
 & x^3+3x^2 \\ \hline
 & \quad -3x^2 \ + \ x \\
 & \quad -3x^2 \ - \boxed{9x} \\ \hline
 & \qquad\qquad 10x \ +15 \\
 & \qquad\qquad 10x \ +30 \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad -15
\end{array}$$

따라서 몫은 $x^2-3x+10$, 나머지는 -15이다.

주의 다항식의 나눗셈에서 두 다항식을 내림차순으로 정리할 때, 계수가 0인 항의 자리는 비워 두고 차수를 맞추어 계산한다.

073 답 4, $-4x^2-4x-8$, $2x+13$, 몫: $x-4$, 나머지: $2x+13$

$$\begin{array}{rl}
 & x-\boxed{4} \\
x^2+x+2\,\big) & x^3-3x^2 \qquad +5 \\
 & x^3+\ x^2+2x \\ \hline
 & \quad -4x^2-2x+5 \\
 & \boxed{\quad -4x^2-4x-8} \\ \hline
 & \qquad\quad \boxed{2x+13}
\end{array}$$

074 답 (1) 몫: $x+5$, 나머지: 17
(2) 몫: x^2+2x-4, 나머지: 3
(3) 몫: $2x^2+x-3$, 나머지: $-7x+18$

(1)
$$\begin{array}{rl}
 & x \ +5 \\
x-2\,\big) & x^2+3x+\ 7 \\
 & x^2-2x \\ \hline
 & \qquad 5x+\ 7 \\
 & \qquad 5x-10 \\ \hline
 & \qquad\qquad 17
\end{array}$$

따라서 몫은 $x+5$, 나머지는 17이다.

(2)

$$\begin{array}{r} x^2+2x-4 \\ 2x-1\,\overline{)\,2x^3+3x^2-10x+7} \\ \underline{2x^3-x^2} \\ 4x^2-10x \\ \underline{4x^2-2x} \\ -8x+7 \\ \underline{-8x+4} \\ 3 \end{array}$$

따라서 몫은 x^2+2x-4, 나머지는 3이다.

(3)

$$\begin{array}{r} 2x^2+x-3 \\ 2x^2-x+3\,\overline{)\,4x^4-x^2-x+9} \\ \underline{4x^4-2x^3+6x^2} \\ 2x^3-7x^2-x \\ \underline{2x^3-x^2+3x} \\ -6x^2-4x+9 \\ \underline{-6x^2+3x-9} \\ -7x+18 \end{array}$$

따라서 몫은 $2x^2+x-3$, 나머지는 $-7x+18$이다.

075 답 (1) $x^2+x-16=(x+4)(x-3)-4$

(2) $6x^2-x-5=(3x-5)(2x+3)+10$

(3) $x^3-4x^2+2x+2=(x^2-1)(x-4)+3x-2$

(4) $9x^3-3x^2+x+5=(3x^2+x-2)(3x-2)+9x+1$

(1)

$$\begin{array}{r} x-3 \\ x+4\,\overline{)\,x^2+x-16} \\ \underline{x^2+4x} \\ -3x-16 \\ \underline{-3x-12} \\ -4 \end{array}$$

따라서 $Q=x-3$, $R=-4$이므로

$x^2+x-16=(x+4)(x-3)-4$

(2)

$$\begin{array}{r} 2x+3 \\ 3x-5\,\overline{)\,6x^2-x-5} \\ \underline{6x^2-10x} \\ 9x-5 \\ \underline{9x-15} \\ 10 \end{array}$$

따라서 $Q=2x+3$, $R=10$이므로

$6x^2-x-5=(3x-5)(2x+3)+10$

(3)

$$\begin{array}{r} x-4 \\ x^2-1\,\overline{)\,x^3-4x^2+2x+2} \\ \underline{x^3-x} \\ -4x^2+3x+2 \\ \underline{-4x^2+4} \\ 3x-2 \end{array}$$

따라서 $Q=x-4$, $R=3x-2$이므로

$x^3-4x^2+2x+2=(x^2-1)(x-4)+3x-2$

(4)

$$\begin{array}{r} 3x-2 \\ 3x^2+x-2\,\overline{)\,9x^3-3x^2+x+5} \\ \underline{9x^3+3x^2-6x} \\ -6x^2+7x+5 \\ \underline{-6x^2-2x+4} \\ 9x+1 \end{array}$$

따라서 $Q=3x-2$, $R=9x+1$이므로

$9x^3-3x^2+x+5=(3x^2+x-2)(3x-2)+9x+1$

076 답 ②

$$\begin{array}{r} 5x^3-2x^2+x \\ x+2\,\overline{)\,5x^4+8x^3-3x^2+2x-3} \\ \underline{5x^4+10x^3} \\ -2x^3-3x^2 \\ \underline{-2x^3-4x^2} \\ x^2+2x \\ \underline{x^2+2x} \\ -3 \end{array}$$

따라서 $a=-2$, $b=-4$, $c=1$, $d=2$, $e=0$, $f=-3$이므로

$a+b+c+d+e+f=-2+(-4)+1+2+0+(-3)=-6$

077 답 0

$$\begin{array}{r} x^2+x+1 \\ 4x+3\,\overline{)\,4x^3+7x^2+7x} \\ \underline{4x^3+3x^2} \\ 4x^2+7x \\ \underline{4x^2+3x} \\ 4x \\ \underline{4x+3} \\ -3 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=x^2+x+1$, $R=-3$이므로

$Q(1)+R=3+(-3)=0$

078 답 $x+1$

$$\begin{array}{r} x^2+6x-2 \\ 2x^2-x\,\overline{)\,2x^4+11x^3-10x^2+3x+1} \\ \underline{2x^4-x^3} \\ 12x^3-10x^2 \\ \underline{12x^3-6x^2} \\ -4x^2+3x+1 \\ \underline{-4x^2+2x} \\ x+1 \end{array}$$

따라서 나머지는 $x+1$이다.

079 답 $6x^3-7x^2-x+11$

$f(x)$를 $3x^2+x-4$로 나눈 몫이 $2x-3$, 나머지가 $10x-1$이므로

$f(x)=(3x^2+x-4)(2x-3)+10x-1$

$=(6x^3-9x^2+2x^2-3x-8x+12)+10x-1$

$=6x^3-7x^2-x+11$

080 답 $3x-2$

$3x^3-8x^2+4x+5=A(x^2-2x-1)+3x+3$이므로

$A(x^2-2x-1)=3x^3-8x^2+4x+5-(3x+3)$

$=3x^3-8x^2+x+2$

$\therefore A=(3x^3-8x^2+x+2)\div(x^2-2x-1)$

$$\begin{array}{r|l} & 3x\ -2 \\ \cline{2-2} x^2-2x-1 & 3x^3-8x^2+\ x+2 \\ & 3x^3-6x^2-3x \\ \cline{2-2} & \quad -2x^2+4x+2 \\ & \quad -2x^2+4x+2 \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

$\therefore A=3x-2$

081 답 몫: $x^2-7x+12$, 나머지: -1

$P(x)=(x-5)(x^2-4x+6)+5$

$=x^3-4x^2+6x-5x^2+20x-30+5$

$=x^3-9x^2+26x-25$

다항식 $P(x)=x^3-9x^2+26x-25$를 $x-2$로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & x^2-7x+12 \\ \cline{2-2} x-2 & x^3-9x^2+26x-25 \\ & x^3-2x^2 \\ \cline{2-2} & \quad -7x^2+26x \\ & \quad -7x^2+14x \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad 12x-25 \\ & \qquad\qquad 12x-24 \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad\qquad -1 \end{array}$$

따라서 몫은 $x^2-7x+12$, 나머지는 -1이다.

082 답 ④

$f(x)=(3x-1)Q(x)+R$

$=\left(x-\frac{1}{3}\right)\times 3Q(x)+R$

따라서 다항식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫은 $3Q(x)$, 나머지는 R이다.

풍쌤 비법 몫과 나머지의 변형

다항식 $P(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이면

$P(x)=(ax+b)Q(x)+R$

$=\left(x+\frac{b}{a}\right)\times aQ(x)+R$

이므로 $P(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫은 $aQ(x)$, 나머지는 R이다.

중단원 점검 문제

Ⅰ-1 | 다항식의 연산 024~025쪽

01 답 $-4x^2-7x+16$

$A+B=-x^2-2x+5$ ⋯⋯ ㉠

$2A-3B=-7x^2-9x+15$ ⋯⋯ ㉡

$2\times$㉠$-$㉡을 하면

$5B=5x^2+5x-5$ $\quad\therefore B=x^2+x-1$

이것을 ㉠에 대입하면

$A+(x^2+x-1)=-x^2-2x+5$

$\therefore A=-x^2-2x+5-(x^2+x-1)$

$=-2x^2-3x+6$

$\therefore 3A+2B=3(-2x^2-3x+6)+2(x^2+x-1)$

$=-6x^2-9x+18+2x^2+2x-2$

$=-4x^2-7x+16$

02 답 ④

$[x^2-y^2,\ -y^2+x]=(x^2-y^2)-2(-y^2+x)+x^2+y^2$

$=x^2-y^2+2y^2-2x+x^2+y^2$

$=2x^2-2x+2y^2$

03 답 ③

주어진 직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 각각 $x-1$, $x+1$, $2x+1$이므로 구하는 겉넓이는

$2(x-1)(x+1)+2(x+1)(2x+1)+2(x-1)(2x+1)$

$=2\{(x-1)(x+1)+(x+1)(2x+1)+(x-1)(2x+1)\}$

$=2\{(x^2-1)+(2x^2+3x+1)+(2x^2-x-1)\}$

$=2(5x^2+2x-1)$

$=10x^2+4x-2$

04 답 ①

$(x^2+axy+y)(x^3+bxy+y^2)$의 전개식에서

xy^2항은 $y\times bxy=bxy^2$

x^3y항은 $x^2\times bxy+y\times x^3=(b+1)x^3y$

x^2y^2항은 $x^2\times y^2+axy\times bxy=(ab+1)x^2y^2$

이때 xy^2의 계수가 x^3y의 계수와 x^2y^2의 계수의 합과 같으므로

$b=(b+1)+(ab+1)$

$\therefore ab=-2$

05 답 12

$(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{10})^2$

$=(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{10})(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{10})$

이므로 전개식에서 x^3항은

$1\times x^3+x\times x^2+x^2\times x+x^3\times 1=4x^3$

x^7항은

$1\times x^7+x\times x^6+x^2\times x^5+\cdots+x^7\times 1=8x^7$

따라서 x^3의 계수와 x^7의 계수의 합은

$4+8=12$

참고 각 항이 나타나는 경우를 찾아 필요한 부분만 전개한 후 계수를 구한다.
주어진 다항식에서 x^3항과 x^7항이 나타나는 경우는 다음과 같다.
① x^3항이 나타나는 경우: (x^3항)×(상수항), (x^2항)×(x항),
(x항)×(x^2항), (상수항)×(x^3항)
② x^7항이 나타나는 경우: (x^7항)×(상수항), (x^6항)×(x항),
(x^5항)×(x^2항), (x^4항)×(x^3항), (x^3항)×(x^4항), (x^2항)×(x^5항),
(x항)×(x^6항), (상수항)×(x^7항)

06 답 ③

$(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)-(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$=(8a^3+b^3)-(a^3-b^3)$
$=7a^3+2b^3$

07 답 -6

$(ax+2y-b)^2=a^2x^2+4y^2+b^2+4axy-4by-2abx$
이때 xy의 계수가 16이므로
$4a=16 \qquad \therefore a=4$
또, y의 계수가 -20이므로
$-4b=-20 \qquad \therefore b=5$
즉, $ab=20$, $b^2=25$이므로
$c=-2ab=-40$, $d=b^2=25$
$\therefore a+b+c+d=4+5+(-40)+25=-6$

08 답 241

$(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)(x^4-4x^2+16)$
$=(x^4+x^2\times4+4^2)(x^4-4x^2+16)$
$=(x^4+4x^2+16)(x^4-4x^2+16)$
$=\{(x^2)^2+x^2\times4+4^2\}\{(x^2)^2-x^2\times4+4^2\}$
$=(x^2)^4+(x^2)^2\times4^2+4^4$
$=x^8+16x^4+256$
따라서 $a=1$, $b=16$, $c=256$이므로
$a-b+c=1-16+256=241$

다른 풀이
$X=x^2+4$로 놓으면
$(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)(x^4-4x^2+16)$
$=(X+2x)(X-2x)(x^4-4x^2+16)$
$=(X^2-4x^2)(x^4-4x^2+16)$
$=\{(x^2+4)^2-4x^2\}(x^4-4x^2+16)$
$=\{(x^4+8x^2+16)-4x^2\}(x^4-4x^2+16)$
$=(x^4+4x^2+16)(x^4-4x^2+16)$
$Y=x^4+16$으로 놓으면
$(x^4+4x^2+16)(x^4-4x^2+16)=(Y+4x^2)(Y-4x^2)$
$=Y^2-16x^4$
$=(x^4+16)^2-16x^4$
$=(x^8+32x^4+256)-16x^4$
$=x^8+16x^4+256$
따라서 $a=1$, $b=16$, $c=256$이므로
$a-b+c=1-16+256=241$

09 답 ⑤

$X=2x+y$, $Y=x+2y$로 놓으면
$\{(2x+y)-(x+2y)\}^3+3(2x+y)(x+2y)(x-y)$
$=\{(2x+y)-(x+2y)\}^3$
$\quad+3(2x+y)(x+2y)\times\{(2x+y)-(x+2y)\}$
$=(X-Y)^3+3XY(X-Y)$
$=X^3-Y^3$
$=(2x+y)^3-(x+2y)^3$
$=(8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3)-(x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3)$
$=7x^3+6x^2y-6xy^2-7y^3$
$=7\times(\sqrt{3})^3+6\times(\sqrt{3})^2\times\sqrt{2}-6\times\sqrt{3}\times(\sqrt{2})^2-7\times(\sqrt{2})^3$
$=21\sqrt{3}+18\sqrt{2}-12\sqrt{3}-14\sqrt{2}=4\sqrt{2}+9\sqrt{3}$

다른 풀이
$\{(2x+y)-(x+2y)\}^3+3(2x+y)(x+2y)(x-y)$
$=(x-y)^3+3(2x+y)(x+2y)(x-y)$
$=(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)+3(2x^3+3x^2y-3xy^2-2y^3)$
$=7x^3+6x^2y-6xy^2-7y^3$
$=7\times(\sqrt{3})^3+6\times(\sqrt{3})^2\times\sqrt{2}-6\times\sqrt{3}\times(\sqrt{2})^2-7\times(\sqrt{2})^3$
$=21\sqrt{3}+18\sqrt{2}-12\sqrt{3}-14\sqrt{2}=4\sqrt{2}+9\sqrt{3}$

10 답 $-\frac{4}{3}$

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$
$=2^2-4\times(-3)=16$
$\therefore x-y=4$ ($\because x>y$)
$\therefore \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{x-y}{xy}=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}$

11 답 ⑤

$x\neq0$이므로 $x^2-5x-1=0$의 양변을 x로 나누면
$x-5-\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\frac{1}{x}=5$
$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$
$=5^3+3\times5=140$

12 답 ②

$\frac{c}{ab}+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}=\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}=6$이므로
$a^2+b^2+c^2=6abc=12$
이때 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서
$12=(-4)^2-2(ab+bc+ca)$
$2(ab+bc+ca)=4$
$\therefore ab+bc+ca=2$

13 답 105

$x=105$로 놓으면
$\frac{106\times(105^2-105+1)-1}{104\times106+1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)-1}{(x-1)(x+1)+1}$
$=\frac{(x^3+1)-1}{(x^2-1)+1}=\frac{x^3}{x^2}$
$=x=105$

풍쌤 비법 곱셈 공식을 이용한 수의 계산

반복되는 수를 x로 치환하여 x에 대한 다항식으로 변형한 후 곱셈 공식을 이용하여 식을 간단히 정리한다.

14 답 23

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-3 \\
\hline
x^2+2x+3 & x^4+2x^3 \qquad +11x-4 \\
 & x^4+2x^3+3x^2 \\
\hline
 & \quad -3x^2+11x-4 \\
 & \quad -3x^2-\ 6x-9 \\
\hline
 & \qquad\qquad 17x+5
\end{array}
$$

따라서 $Q(x)=x^2-3$, $R(x)=17x+5$이므로

$Q(2)+R(1)=1+22=23$

15 답 ②

$$
\begin{array}{r|l}
 & x\ +3 \\
\hline
x^2-2x-1 & x^3+\ x^2-7x+a \\
 & x^3-2x^2-\ x \\
\hline
 & \quad 3x^2-6x+a \\
 & \quad 3x^2-6x-3 \\
\hline
 & \qquad\qquad a+3
\end{array}
$$

이때 나머지는 0이므로

$a+3=0 \qquad \therefore a=-3$

Ⅰ-2 | 항등식과 나머지 정리

026~036쪽

001 답 (1) × (2) ○ (3) × (4) ○ (5) × (6) ×

(1) 등식이 $x=-1$일 때만 성립하므로 항등식이 아니다.

(2) 좌변의 식과 우변의 식이 같으므로 항등식이다.

(3) 좌변의 식과 우변의 식이 같지 않으므로 항등식이 아니다.

(4) 좌변을 전개하여 나타내면 $x^2-9=x^2-9$이므로 항등식이다.

(5) 우변을 전개하여 나타내면

$2x^2+5x-2=2x^2-3x-2$이므로 항등식이 아니다.

(6) 등식이 $x=\pm2\sqrt{2}$일 때만 성립하므로 항등식이 아니다.

002 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. 등식이 $x=-4$일 때만 성립하므로 항등식이 아니다.

ㄴ. 우변을 전개하여 나타내면 $3x+6=3x+6$이므로 항등식이다.

ㄷ. 우변을 전개하여 나타내면 $x^2-7x+4=x^2-7x+4$이므로 항등식이다.

ㄹ. 좌변을 전개하여 나타내면 $x^2-x=x^2-x$이므로 항등식이다.

따라서 항등식인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

003 답 (1) $a=1$, $b=0$ (2) $a=4$, $b=7$

(1) 항등식의 성질에 의하여 $a-1=0$, $b=0$이므로

$a=1$, $b=0$

(2) 항등식의 성질에 의하여 $4=a$, $-7=-b$이므로

$a=4$, $b=7$

004 답 (1) $a=-3$, $b=2$, $c=6$ (2) $a=2$, $b=3$, $c=5$

(1) 항등식의 성질에 의하여 $a=-3$, $b-2=0$, $c=6$이므로

$a=-3$, $b=2$, $c=6$

(2) 좌변을 전개하여 나타내면

$2x^2+3xy+5y^2=ax^2+bxy+cy^2$

이므로 항등식의 성질에 의하여

$a=2$, $b=3$, $c=5$

005 답 풀이 참조

[방법1] 계수비교법

주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$ax-a+bx+2=4x+3$

$(a+b)x-a+2=4x+3$

양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$\boxed{a+b}=4$, $-a+2=3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=\boxed{-1}$, $b=\boxed{5}$

[방법2] 수치대입법

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-a+2=3$이므로 $a=-1$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$b+2=\boxed{7}$이므로 $b=\boxed{5}$

006 답 (1) $a=1$, $b=-4$　　(2) $a=-3$, $b=-2$

(1) 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$2-a=1$, $-4=b$

$\therefore a=1$, $b=-4$

(2) 좌변을 전개하여 나타내면

$x^2-2x-15=x^2+(a+1)x+b-13$

양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$-2=a+1$, $-15=b-13$

$\therefore a=-3$, $b=-2$

007 답 (1) $a=5$, $b=-6$　　(2) $a=1$, $b=-12$

(1) 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$-3b=18$　　$\therefore b=-6$

등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$-3a=-15$　　$\therefore a=5$

(2) 등식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$0=9+3a+b$　　$\therefore 3a+b=-9$　　...... ㉠

등식의 양변에 $x=-4$를 대입하면

$0=16-4a+b$　　$\therefore 4a-b=16$　　...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-12$

참고 수치대입법을 이용할 때는 미정계수의 개수만큼 서로 다른 값을 문자에 대입한다.

008 답 (1) $a=3$, $b=-4$, $c=8$
(2) $a=-4$, $b=4$, $c=4$
(3) $a=-1$, $b=1$, $c=-3$

(1) 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$8=c$

등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$12=-b+c$　　$\therefore b=-4$

등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$10=2a+b+c$　　$\therefore a=3$

(2) 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$a+c=0$, $b-c=0$, $c-4=0$

$\therefore a=-4$, $b=4$, $c=4$

(3) 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2c=-6$이므로 $c=-3$

등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a-b+c=-5$　　$\therefore a-b=-2$　　...... ㉠

등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$4a-2b=-6$　　$\therefore 2a-b=-3$　　...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=1$

다른 풀이

(1) 우변을 전개하여 나타내면

$3x^2-x+8=ax^2+(a+b)x+c$

양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$3=a$, $-1=a+b$, $8=c$

$\therefore a=3$, $b=-4$, $c=8$

(2) 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$c-4=0$　　$\therefore c=4$

등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$(a+c)-(b-c)+(c-4)=0$

$a-b+3c-4=0$　　$\therefore a-b=-8$　　...... ㉠

등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(a+c)+(b-c)+(c-4)=0$

$a+b+c-4=0$　　$\therefore a+b=0$　　...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=4$

(3) 좌변을 전개하여 나타내면

$ax^2+(-4a+b+c)x+4a-2b=-x^2+2x-6$

양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$a=-1$, $-4a+b+c=2$, $4a-2b=-6$

$\therefore a=-1$, $b=1$, $c=-3$

009 답 (1) $a=15$, $b=1$　　(2) $a=-7$, $b=4$
(3) $a=2$, $b=-1$　　(4) $a=6$, $b=3$

(1) **단계1.** 다항식의 나눗셈을 $A=BQ+R$ 꼴로 나타내기

주어진 나눗셈을 $A=BQ+R$ 꼴로 나타내고, 우변을 전개하면

$x^3+6x^2+ax+12$

$=(x+b)(x^2+5x+10)+2$

$=(x^3+5x^2+10x)+(bx^2+5bx+10b)+2$

$=x^3+(b+5)x^2+(5b+10)x+10b+2$　　...... ㉠

단계2. 계수비교법을 이용하여 상수 a, b의 값 구하기

㉠은 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$6=b+5$, $a=5b+10$, $12=10b+2$

$\therefore a=15$, $b=1$

(2) 주어진 나눗셈을 $A=BQ+R$ 꼴로 나타내고, 우변을 전개하면

$2x^3+10x^2+11x+a$

$=(x+3)(2x^2+bx-1)-4$

$=(2x^3+bx^2-x)+(6x^2+3bx-3)-4$

$=2x^3+(b+6)x^2+(-1+3b)x-7$　　...... ㉠

㉠은 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$10=b+6$, $11=-1+3b$, $a=-7$

$\therefore a=-7$, $b=4$

(3) 주어진 나눗셈을 $A=BQ+R$ 꼴로 나타내고, 우변을 전개하면

$x^4-x^3-x^2-3x-6$

$=(x^2+a)(x^2-x-3)+bx$

$=(x^4-x^3-3x^2)+(ax^2-ax-3a)+bx$

$=x^4-x^3+(-3+a)x^2+(-a+b)x-3a$　　...... ㉠

㉠은 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$-1=-3+a$, $-3=-a+b$, $-6=-3a$

$\therefore a=2$, $b=-1$

(4) 주어진 나눗셈을 $A=BQ+R$ 꼴로 나타내고, 우변을 전개하면

$ax^4-7x^3-11x^2+12x-1$

$=(2x^2-x-5)(bx^2-2x+1)+3x+4$

$=(2bx^4-4x^3+2x^2)+(-bx^3+2x^2-x)$

$\qquad+(-5bx^2+10x-5)+3x+4$

$=2bx^4+(-4-b)x^3+(4-5b)x^2+12x-1$ …… ㉠

㉠은 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$a=2b,\ -7=-4-b,\ -11=4-5b$

$\therefore\ a=6,\ b=3$

010 답 (1) $a=1,\ b=-8$ (2) $a=3,\ b=7$ (3) $a=1,\ b=4$ (4) $a=-3,\ b=-6$

(1) **단계1.** 몫이 Q일 때, 다항식의 나눗셈을 $A=BQ+R$ 꼴로 나타내기

다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q라 하고, 주어진 나눗셈을 $A=BQ+R$ 꼴로 나타내면

$x^3+4x^2+ax+b=(x+3)(x-1)Q-2$ …… ㉠

단계2. 수치대입법을 이용하여 상수 a, b의 값 구하기

㉠의 양변에 $x=-3$, $x=1$을 각각 대입하면

$9-3a+b=-2\qquad\therefore\ 3a-b=11$ …… ㉡

$5+a+b=-2\qquad\therefore\ a+b=-7$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-8$

(2) 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q라 하고, 주어진 나눗셈을 $A=BQ+R$ 꼴로 나타내면

$ax^3-10x^2+3x+b=x(x-3)Q+7$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $x=3$을 각각 대입하면

$b=7$ …… ㉡

$27a-81+b=7\qquad\therefore\ 27a+b=88$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하여 풀면

$a=3,\ b=7$

(3) 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q라 하고, 주어진 나눗셈을 $A=BQ+R$ 꼴로 나타내면

$x^4+ax^3+bx^2+x+3=(x^2-1)Q+2x+8$

$\qquad=(x+1)(x-1)Q+2x+8$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$-a+b+3=6\qquad\therefore\ a-b=-3$ …… ㉡

$a+b+5=10\qquad\therefore\ a+b=5$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=4$

(4) 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q라 하고, 주어진 나눗셈을 $A=BQ+R$ 꼴로 나타내면

$2x^4+4x^3+ax^2-7x-6=(x^2+2x)Q-x+b$

$\qquad=x(x+2)Q-x+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $x=-2$를 각각 대입하면

$-6=b$ …… ㉡

$4a+8=2+b\qquad\therefore\ 4a-b=-6$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하여 풀면

$a=-3,\ b=-6$

011 답 ⑤

좌변을 전개하여 나타내면

$2ax^2+(a+b)x+(-2a+b+c)=6x^2-x+1$

양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$2a=6,\ a+b=-1,\ -2a+b+c=1$

따라서 $a=3,\ b=-4,\ c=11$이므로

$a+b+c=3+(-4)+11=10$

012 답 -2

주어진 식의 우변을 전개하면

$(x-1)^2(2x+1)=(x^2-2x+1)(2x+1)$

$\qquad=(2x^3-4x^2+2x)+(x^2-2x+1)$

$\qquad=2x^3-3x^2+1$

이므로 주어진 식은

$ax^3+bx^2+cx+d=2x^3-3x^2+1$

양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$a=2,\ b=-3,\ c=0,\ d=1$

$\therefore\ a+b-c-d=2+(-3)-0-1=-2$

참고 수치대입법으로 풀 수도 있지만, 구해야 하는 미정계수가 4개이므로 계수비교법이 더 간단하다.

013 답 ②

주어진 등식의 좌변을 k에 대하여 정리하면

$(2x+y)k+(-4x+5y+14)=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$2x+y=0,\ -4x+5y+14=0$

두 식을 연립하여 풀면

$x=1,\ y=-2$

$\therefore\ y-x=-2-1=-3$

014 답 -10

좌변이 삼차식이고 삼차항의 계수가 4이므로

$P(x)=x+k$ (k는 상수)로 놓으면

$4x^3+3x^2+ax+b$

$=(4x^2-x-4)(x+k)+5x-6$

$=(4x^3-x^2-4x)+(4kx^2-kx-4k)+5x-6$

$=4x^3+(-1+4k)x^2+(-4-k+5)x-4k-6$

위의 식의 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$3=-1+4k,\ a=-4-k+5,\ b=-4k-6$

$3=-1+4k$에서 $k=1$이므로

$a=0,\ b=-10$

$\therefore\ a+b=0+(-10)=-10$

015 답 60

주어진 식의 양변에 $x=-1$, $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면

$-4=c$

$-6=a+b-4\qquad\therefore\ a+b=-2$ …… ㉠

$-2=4a+2b-4\qquad\therefore\ 2a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-5$

$\therefore abc=3\times(-5)\times(-4)=60$

016 답 ③

$(x^2-x-2)f(x)=ax^3+x^2+bx-6$에서

$(x+1)(x-2)f(x)=ax^3+x^2+bx-6$

위의 식의 양변에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면

$0=-a-b-5 \quad \therefore a+b=-5$ …… ㉠

$0=8a+2b-2 \quad \therefore 4a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-7$

$\therefore a-b=2-(-7)=9$

017 답 ⑤

주어진 등식은 항등식이므로 우변의 삼차항의 계수는 1이다.

$\therefore c=1$

즉, 주어진 등식은

$x^3+ax^2-9x+b=(x-1)(x-3)(x+3)$

위의 식의 양변에 $x=1$, $x=3$을 각각 대입하면

$a+b-8=0 \quad \therefore a+b=8$ …… ㉠

$9a+b=0 \quad \therefore b=-9a$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 풀면

$a=-1$, $b=9$

$\therefore a+bc=-1+9\times1=8$

018 답 ③

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=0$

019 답 -8

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6=(-2)^3=-8$

020 답 ⑤

주어진 등식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=2^5=32$

021 답 $a=-4$, $b=2$

주어진 조건을 식으로 나타내면

x^3-2x^2-8x+5

$=(x^2+ax+b)(x+2)-2x+1$

$=(x^3+ax^2+bx)+(2x^2+2ax+2b)-2x+1$

$=x^3+(a+2)x^2+(b+2a-2)x+2b+1$

위의 식의 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$-2=a+2$, $-8=b+2a-2$, $5=2b+1$

$\therefore a=-4$, $b=2$

022 답 ②

x^3+ax^2+2x-7을 x^2-2x+1로 나누었을 때의 몫을 $x+k$ (k는 상수)라 하면

$x^3+ax^2+2x-7=(x^2-2x+1)(x+k)+3x+b$

$=(x-1)^2(x+k)+3x+b$

위의 식의 양변에 $x=1$, $x=0$, $x=-1$을 각각 대입하면

$a-4=3+b \quad \therefore a-b=7$ …… ㉠

$-7=k+b \quad \therefore k=-7-b$ …… ㉡

$a-10=4(k-1)-3+b \quad \therefore 4k-a+b=-3$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하여 정리하면 $a+3b=-25$ …… ㉣

㉠, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-8$

한편, ㉡에서 $k=1$

$\therefore ab=-1\times(-8)=8$

참고 주어진 다항식이 삼차식이므로 우변의 삼차항의 계수가 1이 되도록 몫을 $x+k$ (k는 상수)로 놓을 수 있다.

023 답 ④

$x^3-6x^2+ax-10$을 x^2-4x+b로 나누었을 때의 몫을 $x+k$ (k는 상수)라 하면

$x^3-6x^2+ax-10=(x^2-4x+b)(x+k)$

$=(x^3-4x^2+bx)+(kx^2-4kx+bk)$

$=x^3+(-4+k)x^2+(b-4k)x+bk$

위의 식의 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$-6=-4+k$, $a=b-4k$, $-10=bk$

따라서 $k=-2$, $a=13$, $b=5$이므로 $a-2b=13-10=3$

024 답 -5

$-2x^3+5x^2+ax+b$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 $-2x+k$ (k는 상수)라 하면

$-2x^3+5x^2+ax+b=(x^2-x-2)(-2x+k)$

$=(x+1)(x-2)(-2x+k)$

위의 식의 양변에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면

$-a+b+7=0 \quad \therefore a-b=7$ …… ㉠

$4+2a+b=0 \quad \therefore 2a+b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-6$

$\therefore a+b=1+(-6)=-5$

025 답 (1) 1 (2) -21 (3) 5

(1) $f(x)=x^2+2x-2$로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f(1)=1^2+2\times1-2=1$

(2) $f(x)=x^3-x^2+5x+1$로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f(-2)=(-2)^3-(-2)^2+5\times(-2)+1=-21$

(3) $f(x)=2x^3-4x^2-8x+3$으로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f(-1)=2\times(-1)^3-4\times(-1)^2-8\times(-1)+3=5$

026 답 (1) $\frac{19}{9}$ (2) -3 (3) $\frac{65}{8}$

(1) $f(x)=x^2-6x+4$로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2-6\times\frac{1}{3}+4=\frac{19}{9}$

(2) $f(x)=8x^2+2x-6$으로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$$f\left(-\frac{3}{4}\right)=8\times\left(-\frac{3}{4}\right)^2+2\times\left(-\frac{3}{4}\right)-6=-3$$

(3) $f(x)=x^3+x-10$으로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)^3+\frac{5}{2}-10=\frac{65}{8}$$

027 답 (1) 4 (2) -2 (3) -6 (4) 15

(1) $f(x)=x^2+4x+a$로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f(-1)=(-1)^2+4\times(-1)+a=1$

$-3+a=1 \quad \therefore a=4$

(2) $f(x)=3x^3+ax^2-x$로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f(2)=3\times2^3+a\times2^2-2=14$

$22+4a=14 \quad \therefore a=-2$

(3) $f(x)=4x^2+ax+5$로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}a+5=3$$

$\frac{1}{2}a+6=3 \quad \therefore a=-6$

(4) $f(x)=ax^3+x^2-3x-2$로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$$f\left(-\frac{2}{3}\right)=a\times\left(-\frac{2}{3}\right)^3+\left(-\frac{2}{3}\right)^2-3\times\left(-\frac{2}{3}\right)-2$$
$$=-4$$

$-\frac{8}{27}a+\frac{4}{9}=-4,\ -\frac{8}{27}a=-\frac{40}{9}$

$\therefore a=15$

028 답 1, -3, 5, -7

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+4$로 놓으면

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$f(\boxed{1})=a+b+6=4$에서 $a+b=-2$ …… ㉠

$f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 16이므로

$f(\boxed{-3})=9a-3b-50=16$에서 $3a-b=22$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\boxed{5}$, $b=\boxed{-7}$

029 답 -99

$f(x)=x^3+2x^2+5x-2$로 놓으면

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$a=f(2)=2^3+2\times2^2+5\times2-2=24$

$f(x)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$$b=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+5\times\left(-\frac{1}{2}\right)-2=-\frac{33}{8}$$

$\therefore ab=24\times\left(-\frac{33}{8}\right)=-99$

030 답 -7

$f(x)=x^3+ax+1$로 놓으면

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1)=a+2$

$f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(-3)=-3a-26$

이때 $x-1$로 나누었을 때의 나머지와 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 같으므로 $f(1)=f(-3)$에서

$a+2=-3a-26,\ 4a=-28$

$\therefore a=-7$

031 답 ④

$f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지가 6이므로

$f(4)=6$

따라서 $f(3x-2)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(3\times2-2)=f(4)=6$

풍쌤 비법

다항식 $f(x)$에 대하여 다항식 $f(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지는 $f(a\alpha+b)$이다.

032 답 ③

$f(x)$를 $3x+4$로 나누었을 때의 나머지가 -1이므로

$$f\left(-\frac{4}{3}\right)=-1$$

$g(x)$를 $3x+4$로 나누었을 때의 나머지가 $\frac{1}{2}$이므로

$$g\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

따라서 $f(x)-2g(x)$를 $3x+4$로 나누었을 때의 나머지는

$$f\left(-\frac{4}{3}\right)-2g\left(-\frac{4}{3}\right)=-1-2\times\frac{1}{2}=-2$$

033 답 ⑤

$f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 2이므로

$f(-1)=2$

$f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 -3이므로

$f(-2)=-3$

$f(x)$를 $(x+1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x+1)(x+2)Q(x)+ax+b$

위의 등식의 양변에 $x=-1$, $x=-2$를 각각 대입하면

$f(-1)=-a+b=2$ …… ㉠

$f(-2)=-2a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=5$, $b=7$

따라서 구하는 나머지는 $5x+7$이다.

034 답 ⑤

$2x^2+ax+b$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$2x^2+ax+b=(x^2-4x+3)Q(x)+3x-3$$
$$=(x-1)(x-3)Q(x)+3x-3$$

위의 등식의 양변에 $x=1$, $x=3$을 각각 대입하면

$2+a+b=0 \quad \therefore a+b=-2$ …… ㉠

$18+3a+b=6 \quad \therefore 3a+b=-12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5$, $b=3$

$\therefore b-a=3-(-5)=8$

035 답 $-x+9$

$f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$f(x)=(x-1)(x-2)Q_1(x)+8$ …… ㉠

$f(x)$를 $(x+2)(x+3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$f(x)=(x+2)(x+3)Q_2(x)-2x+6$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=8$

㉡의 양변에 $x=-3$을 대입하면 $f(-3)=12$

$f(x)$를 $(x-1)(x+3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)(x+3)Q(x)+ax+b$

위의 등식의 양변에 $x=1$, $x=-3$을 대입하면

$f(1)=a+b=8$ …… ㉢

$f(-3)=-3a+b=12$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=9$

따라서 구하는 나머지는 $-x+9$이다.

036 답 (1) ○ (2) × (3) ○

(1) $f(1)=1^3-2\times1^2-5\times1+6=0$이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다.

(2) $f(2)=2^3-2\times2^2-5\times2+6=-4\neq0$이므로 $x-2$는 $f(x)$의 인수가 아니다.

(3) $f(3)=3^3-2\times3^2-5\times3+6=0$이므로 $x-3$은 $f(x)$의 인수이다.

037 답 (1) × (2) ○ (3) ×

(1) $f(-1)=6\times(-1)^3-7\times(-1)^2-(-1)+2$

$=-10\neq0$

이므로 다항식 $f(x)$는 $x+1$로 나누어떨어지지 않는다.

(2) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=6\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3-7\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)+2=0$

이므로 다항식 $f(x)$는 $2x+1$로 나누어떨어진다.

(3) $f\left(-\frac{2}{3}\right)=6\times\left(-\frac{2}{3}\right)^3-7\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-\left(-\frac{2}{3}\right)+2$

$=-\frac{20}{9}\neq0$

이므로 다항식 $f(x)$는 $3x+2$로 나누어떨어지지 않는다.

038 답 (1) 3 (2) -4 (3) 4 (4) 2

(1) 인수 정리에 의하여 $f(4)=0$이므로

$f(4)=4^2+4a-28=0$, $4a=12$

$\therefore a=3$

(2) 인수 정리에 의하여 $f(-2)=0$이므로

$f(-2)=2\times(-2)^2+2\times(-2)+a=0$

$a+4=0$ $\therefore a=-4$

(3) 인수 정리에 의하여 $f(-3)=0$이므로

$f(-3)=a\times(-3)^3+15\times(-3)^2+8\times(-3)-3=0$

$-27a+108=0$ $\therefore a=4$

(4) 인수 정리에 의하여 $f(-1)=0$이므로

$f(-1)=(-1)^4-a\times(-1)^3-3\times(-1)^2+2a\times(-1)+4$

$=0$

$-a+2=0$ $\therefore a=2$

039 답 (1) 3 (2) 8 (3) 5 (4) -10

(1) 인수 정리에 의하여 $f(1)=0$이므로

$f(1)=1^3+2\times1-a=0$, $3-a=0$

$\therefore a=3$

(2) 인수 정리에 의하여 $f(-1)=0$이므로

$f(-1)=a\times(-1)^3+2\times(-1)^2-(-1)+5=0$

$-a+8=0$ $\therefore a=8$

(3) 인수 정리에 의하여 $f(-2)=0$이므로

$f(-2)=3\times(-2)^3+a\times(-2)^2+2\times(-2)+8=0$

$4a=20$ $\therefore a=5$

(4) 인수 정리에 의하여 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3-5\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}a+6=0$

$\frac{1}{2}a=-5$ $\therefore a=-10$

040 답 ③

$f(x)=2x^3-x^2-(2k+1)x-k$로 놓으면 인수 정리에 의하여

$f(-2)=0$이므로

$f(-2)=2\times(-2)^3-(-2)^2-(2k+1)\times(-2)-k$

$=3k-18=0$

$\therefore k=6$

041 답 ②

$f(x)=x^3+ax^2+bx+4$로 놓으면 인수 정리에 의하여

$f(1)=0$, $f(-1)=0$이므로

$f(1)=1+a+b+4=0$ $\therefore a+b=-5$ …… ㉠

$f(-1)=-1+a-b+4=0$ $\therefore a-b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=-1$

$\therefore 2a-3b=2\times(-4)-3\times(-1)=-5$

042 답 8

$f(x)=x^3+ax+b$로 놓으면 인수 정리에 의하여

$f(1)=0$, $f(-3)=0$이므로

$f(1)=1+a+b=0$ $\therefore a+b=-1$ …… ㉠

$f(-3)=-27-3a+b=0$ $\therefore 3a-b=-27$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-7$, $b=6$

$\therefore ax^3+bx^2+3x-2=-7x^3+6x^2+3x-2$

$g(x)=-7x^3+6x^2+3x-2$로 놓으면 $g(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$g(-1)=-7\times(-1)^3+6\times(-1)^2+3\times(-1)-2=8$

043 답 6

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2)=8a+2b-3=9 \quad \therefore 4a+b=6$ …… ㉠

$f(x+2)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로 인수 정리에 의하여

$f(-1+2)=f(1)=0$

$a+b=0 \quad \therefore a=-b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-2$

$\therefore a-2b=2-2\times(-2)=6$

044 답 ④

$f(x)=x^3+3x^2+ax+b$로 놓으면 $f(x)$는 $(x+1)(x-1)$로 나누어떨어지므로 $x+1$과 $x-1$로 각각 나누어떨어진다.

$f(-1)=2-a+b=0 \quad \therefore a-b=2$ …… ㉠

$f(1)=4+a+b=0 \quad \therefore a+b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=-3$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+(-3)^2=10$

045 답 $a=2,\ b=10$

$f(x)=x^3+ax^2-13x+b$로 놓으면 $f(x)$는 x^2-3x+2, 즉 $(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지므로 $x-1$과 $x-2$로 각각 나누어떨어진다.

$f(1)=-12+a+b=0 \quad \therefore a+b=12$ …… ㉠

$f(2)=-18+4a+b=0 \quad \therefore 4a+b=18$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=10$

046 답 -15

$f(x)$는 x^2-2x-3, 즉 $(x+1)(x-3)$으로 나누어떨어지므로 $x+1$과 $x-3$으로 각각 나누어떨어진다.

$f(-1)=-a+b+5=0 \quad \therefore a-b=5$ …… ㉠

$f(3)=27a+9b-27=0 \quad \therefore 3a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-3$

따라서 $f(x)=2x^3-3x^2-8x-3$이므로 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-2)=2\times(-2)^3-3\times(-2)^2-8\times(-2)-3=-15$

047 답 ②

$f(x)=x^3+ax^2-bx+8$로 놓으면 $f(x)$는 x^2-6x+8, 즉 $(x-2)(x-4)$로 나누어떨어지므로 $x-2$, $x-4$로 각각 나누어떨어진다.

$f(2)=4a-2b+16=0 \quad \therefore 2a-b=-8$ …… ㉠

$f(4)=72+16a-4b=0 \quad \therefore 4a-b=-18$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5,\ b=-2$

$\therefore bx^3+3x-a=-2x^3+3x+5$

$g(x)=-2x^3+3x+5$로 놓으면 $g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$g(1)=-2+3+5=6$

048 답 (1) $-2,\ 0,\ 6$, 몫: x^2+4, 나머지: 6

(2) $-1,\ 0,\ 3$, 몫: $3x^2-2x+2$, 나머지: -3

(3) $1,\ -2,\ -2$, 몫: $2x^2-4x-4$, 나머지: 3

(1)
$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & \boxed{-2} & 4 & -2 \\
 & & 2 & \boxed{0} & 8 \\
\hline
 & 1 & 0 & 4 & \boxed{6}
\end{array}$$

따라서 몫은 x^2+4, 나머지는 6이다.

(2)
$$\begin{array}{r|rrrr}
\boxed{-1} & 3 & 1 & \boxed{0} & -1 \\
 & & -3 & 2 & -2 \\
\hline
 & \boxed{3} & -2 & 2 & -3
\end{array}$$

따라서 몫은 $3x^2-2x+2$, 나머지는 -3이다.

(3)
$$\begin{array}{r|rrrr}
\frac{1}{2} & 2 & -5 & -2 & 5 \\
 & & \boxed{1} & \boxed{-2} & \boxed{-2} \\
\hline
 & 2 & -4 & -4 & 3
\end{array}$$

따라서 몫은 $2x^2-4x-4$, 나머지는 3이다.

049 답 (1) 몫: $x^2+3x-10$, 나머지: 23

(2) 몫: $4x^2+6x$, 나머지: -1

(3) 몫: $3x^2-x-4$, 나머지: 2

(4) 몫: x^2-4, 나머지: -1

(1)
$$\begin{array}{r|rrrr}
-3 & 1 & 6 & -1 & -7 \\
 & & -3 & -9 & 30 \\
\hline
 & 1 & 3 & -10 & 23
\end{array}$$

따라서 몫은 $x^2+3x-10$, 나머지는 23이다.

(2)
$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 4 & 2 & -6 & -1 \\
 & & 4 & 6 & 0 \\
\hline
 & 4 & 6 & 0 & -1
\end{array}$$

따라서 몫은 $4x^2+6x$, 나머지는 -1이다.

(3)
$$\begin{array}{r|rrrr}
-\frac{1}{3} & 9 & 0 & -13 & -2 \\
 & & -3 & 1 & \boxed{4} \\
\hline
 & 9 & -3 & \boxed{-12} & 2
\end{array}$$

$\therefore 9x^3-13x-2=\left(x+\frac{1}{3}\right)(\boxed{9x^2-3x-12})+2$

$=(3x+1)(\boxed{3x^2-x-4})+2$

따라서 구하는 몫은 $3x^2-x-4$, 나머지는 2이다.

(4)
$$\begin{array}{r|rrrr}
\frac{5}{4} & 4 & -5 & -16 & 19 \\
 & & 5 & 0 & -20 \\
\hline
 & 4 & 0 & -16 & -1
\end{array}$$

$\therefore\ 4x^3-5x^2-16x+19=\left(x-\frac{5}{4}\right)(4x^2-16)-1$

$=(4x-5)(x^2-4)-1$

따라서 구하는 몫은 x^2-4, 나머지는 -1이다.

050 답 $a=4$, $b=0$, $c=-4$, $d=-1$, $e=-11$

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & -5 & 0 & 5 \\ & & 4 & -4 & -16 \\ \hline & 1 & -1 & -4 & -11 \end{array}$$

$\therefore\ a=4$, $b=0$, $c=-4$, $d=-1$, $e=-11$

051 답 10

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{2}{3} & 6 & 7 & 11 & 2 \\ & & -4 & -2 & -6 \\ \hline & 6 & 3 & 9 & -4 \end{array}$$

$\therefore\ 6x^3+7x^2+11x+2=\left(x+\frac{2}{3}\right)(6x^2+3x+9)-4$

$=(3x+2)(2x^2+x+3)-4$

따라서 $Q(x)=2x^2+x+3$, $R=-4$이므로

$Q(1)-R=6-(-4)=10$

052 답 -8

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & a & b & -2 \\ & & 2 & 2a+4 & 4a+2b+8 \\ \hline & 1 & a+2 & 2a+b+4 & 4a+2b+6 \end{array}$$

이때 주어진 조립제법에서

$2a+4=2$, $2a+b+4=-2$, $4a+2b+6=-6$

따라서 $a=-1$, $b=-4$이므로

$c=a+2=1$, $d=4a+2b+8=-4$

$\therefore\ a+b+c+d=-1+(-4)+1+(-4)=-8$

053 답 $x-4$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -6 & 2 & 4 \\ & & 3 & -9 & -21 \\ \hline & 1 & -3 & -7 & -17 \end{array}$$

즉, $Q(x)=x^2-3x-7$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 구하면 $x-4$이다.

$$\begin{array}{r|rrr} -1 & 1 & -3 & -7 \\ & & -1 & 4 \\ \hline & 1 & -4 & -3 \end{array}$$

참고 다음과 같이 연속으로 나타낼 수도 있다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -6 & 2 & 4 \\ & & 3 & -9 & -21 \\ \hline -1 & 1 & -3 & -7 & -17 \\ & & -1 & 4 & \\ \hline & 1 & -4 & -3 & \end{array}$$

054 답 2, 3, 2, 1

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & \boxed{2} & -1 & -3 \\ & & 1 & \boxed{3} & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 & \boxed{2} & -1 \\ & & 1 & 4 & \\ \hline 1 & 1 & 4 & 6 & \\ & & \boxed{1} & & \\ \hline & 1 & 5 & & \end{array}$$

055 답 16

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 1 & -5 & 3 \\ & & -1 & 0 & 5 \\ \hline -1 & 1 & 0 & -5 & 8 \\ & & -1 & 1 & \\ \hline -1 & 1 & -1 & -4 & \\ & & -1 & & \\ \hline & 1 & -2 & & \end{array}$$

$\therefore\ x^3+x^2-5x+3=(x+1)^3-2(x+1)^2-4(x+1)+8$

따라서 $a=-2$, $b=-4$, $c=8$이므로

$ab+c=-2\times(-4)+8=16$

056 답 7

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 3 & 8 & -6 & -4 \\ & & -6 & -4 & 20 \\ \hline -2 & 3 & 2 & -10 & 16 \\ & & -6 & 8 & \\ \hline -2 & 3 & -4 & -2 & \\ & & -6 & & \\ \hline & 3 & -10 & & \end{array}$$

$\therefore\ 3x^3+8x^2-6x-4=3(x+2)^3-10(x+2)^2-2(x+2)+16$

따라서 $a=3$, $b=-10$, $c=-2$, $d=16$이므로

$a+b+c+d=3+(-10)+(-2)+16=7$

중단원 점검 문제

Ⅰ-2 | 항등식과 나머지 정리

037~038쪽

01 답 ⑤

주어진 등식의 좌변을 x, y에 대하여 정리하면

$(2a+b)x+(-a+3b)y=6x+11y$

위의 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$2a+b=6$, $-a+3b=11$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=4$

$\therefore\ a+b=1+4=5$

풍쌤 비법 **x, y에 대한 항등식**

어떤 등식이 모든 실수 x, y에 대하여 성립하면 x, y에 대한 항등식이다.
➡ $(\quad)x+(\quad)y=ax+by$ 또는 $(\quad)x+(\quad)y=0$ 꼴로 식을 정리한다.

02 답 ①

주어진 식의 양변에 $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면

$0=a+b+8 \qquad \therefore\ a+b=-8$ ...... ㉠

$0=16a+4b+8 \qquad \therefore\ 4a+b=-2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-10$

$\therefore\ ab=2\times(-10)=-20$

참고 우변이 사차식이므로 $P(x)$는 일차식이지만, $P(x)=cx+d$로 놓고 전개하면 미정계수가 많아진다. 이와 같은 경우에는 수치대입법을 이용하여 구하는 것이 더 편리하다.

03 답 $a=1,\ b=2$

$x+y=0$에서 $y=-x$이므로 이것을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$2x^2+ax-bx^2-(b-1)x=0$

$(2-b)x^2+(a-b+1)x=0$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2-b=0,\ a-b+1=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=2$

04 답 ②

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=0$ ...... ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10}=(-2)^5=-32$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$2a_0+2a_2+2a_4+\cdots+2a_{10}=0+(-32)=-32$

$\therefore\ a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}=-16$

05 답 -8

$3x^3+ax^2+bx+1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $3x+k$ (k는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}3x^3+ax^2+bx+1&=(x-1)^2(3x+k)\\&=3x(x-1)^2+k(x-1)^2\\&=3x(x^2-2x+1)+k(x^2-2x+1)\\&=(3x^3-6x^2+3x)+(kx^2-2kx+k)\\&=3x^3+(-6+k)x^2+(3-2k)x+k\end{aligned}$$

위의 식의 양변의 동류항의 계수를 서로 비교하면

$a=-6+k,\ b=3-2k,\ 1=k$

$\therefore\ a=-5,\ b=1$

따라서 $f(x)=3x^3-5x^2+x+1$이므로

$$\begin{aligned}f(-1)&=3\times(-1)^3-5\times(-1)^2+(-1)+1\\&=-3-5=-8\end{aligned}$$

06 답 13

$f(x)=x^3+2x^2-9x+a$로 놓으면 나머지 정리에 의하여

$f(1)=1+2-9+a=7$

$-6+a=7 \qquad \therefore\ a=13$

07 답 ⑤

$f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 -12이므로

$f(-3)=-12$

따라서 $xf(x+1)$을 $x+4$로 나누었을 때의 나머지는

$-4f(-4+1)=-4f(-3)=-4\times(-12)=48$

08 답 ③

$x^8+2x^6-x^4$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$x^8+2x^6-x^4=(x-1)Q(x)+R$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $R=2$

한편, $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(-1)$이므로

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^8+2\times(-1)^6-(-1)^4=-2Q(-1)+R$

$-2Q(-1)+2=2$

$\therefore\ Q(-1)=0$

09 답 ④

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 2이므로

$f(1)=2$

$f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 -1이므로

$f(-2)=-1$

$(x^2+1)f(x)$를 x^2+x-2, 즉 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$(x^2+1)f(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$

위의 등식의 양변에 $x=1$, $x=-2$를 각각 대입하면

$2f(1)=a+b \qquad \therefore\ a+b=4$ ...... ㉠

$5f(-2)=-2a+b \qquad \therefore\ -2a+b=-5$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=1$

따라서 구하는 나머지는 $3x+1$이다.

10 답 0

$x=3$이라 하면 $3^{10}+3^{13}=x^{10}+x^{13}$

즉, 구하는 나머지는 $x^{10}+x^{13}$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지와 같다.

$x^{10}+x^{13}$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$x^{10}+x^{13}=(x+1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$R=(-1)^{10}+(-1)^{13}=0$

따라서 $3^{10}+3^{13}$을 4로 나누었을 때의 나머지는 0이다.

11 답 20

인수 정리에 의하여 $f(1)=0$, $f(-3)=0$이므로

$f(1)=3+a+b+6=0 \quad \therefore a+b=-9$ …… ㉠

$f(-3)=3\times(-3)^3+a\times(-3)^2+b\times(-3)+6=0$

$-75+9a-3b=0 \quad \therefore 3a-b=25$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=-13$

따라서 $f(x)=3x^3+4x^2-13x+6$이므로 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2)=3\times 2^3+4\times 2^2-13\times 2+6=20$

12 답 -25

$f(1)=f(2)=f(3)=-1$에서

$f(1)+1=0$, $f(2)+1=0$, $f(3)+1=0$

즉, $f(x)+1$은 $x-1$, $x-2$, $x-3$을 인수로 갖는다.

이때 $f(x)$는 삼차항의 계수가 1인 삼차식이므로

$f(x)+1=(x-1)(x-2)(x-3)$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)-1$

따라서 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-1)=-2\times(-3)\times(-4)-1=-25$

풍쌤 비법

삼차항의 계수가 a인 삼차식 $f(x)$에 대하여

$f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=k$ (k는 상수)이면 $f(x)-k$는 $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$를 인수로 가지므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)-k$

13 답 $-14x-7$

$f(x)$는 x^2-4, 즉 $(x+2)(x-2)$로 나누어떨어지므로 $x+2$와 $x-2$로 각각 나누어떨어진다.

$f(2)=8a-12+b=0 \quad \therefore 8a+b=12$ …… ㉠

$f(-2)=-8a+20+b=0 \quad \therefore 8a-b=20$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-4$

$\therefore f(x)=2x^3+x^2-8x-4$

$$\begin{array}{r l}
 & 2x+1 \\ \cline{2-2}
x^2+3 & \big)\, 2x^3+x^2-8x-4 \\
 & 2x^3 \qquad +6x \\ \cline{2-2}
 & x^2-14x-4 \\
 & x^2 \qquad +3 \\ \cline{2-2}
 & -14x-7
\end{array}$$

따라서 $f(x)$를 x^2+3으로 나눈 나머지는 $-14x-7$이다.

주의 $f(x)$를 x^2+3으로 나눌 때, x^2+3은 인수분해되지 않고 일차식이 아니므로 나머지 정리를 이용할 수 없다.

14 답 15

1	5	-3	a	-4
		5	2	$a+2$
	5	2	$a+2$	$a-2$

즉, $5x^3-3x^2+ax-4$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이

$Q(x)=5x^2+2x+a+2$, 나머지가 $a-2$이므로

$a-2=4 \quad \therefore a=6$

따라서 $Q(x)=5x^2+2x+8$이므로

$Q(1)=5+2+8=15$

15 답 ①

$P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$P(x)=(x-2)Q_1(x)+1$ …… ㉠

한편, 주어진 조립제법에서 $Q_1(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 x^2+2x-8, 나머지가 5이므로

$Q_1(x)=(x-2)(x^2+2x-8)+5$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$P(x)=(x-2)\{(x-2)(x^2+2x-8)+5\}+1$

$=(x-2)^2(x^2+2x-8)+5(x-2)+1$

$=(x-2)^2(x^2+2x-8)+5x-9$

$\therefore P(3)=1^2\times(3^2+2\times3-8)+5\times3-9=13$

다른 풀이

맨 아래에서부터 조립제법을 거꾸로 적용하면 다음과 같다.

2	1	$\boxed{-2}$	$\boxed{-12}$	$\boxed{45}$	$\boxed{-41}$
		$\boxed{2}$	$\boxed{0}$	-24	42
2	1	$\boxed{0}$	$\boxed{-12}$	$\boxed{21}$	1
		$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	$\boxed{-16}$	
	1	2	-8	5	

따라서 $P(x)=x^4-2x^3-12x^2+45x-41$이므로

$P(3)=3^4-2\times3^3-12\times3^2+45\times3-41=13$

16 답 7

주어진 조립제법에서 $p+6=3$, $q+3=7$이므로

$p=-3$, $q=4$

$\therefore 2x^3+4x^2-3x+4=2(x-1)^3+10(x-1)^2+11(x-1)+7$

따라서 $a=2$, $b=10$, $c=11$, $d=7$이므로

$a+b-c+d-(p+q)=2+10-11+7-(-3+4)=7$

Ⅰ-3 | 인수분해 039~050쪽

001 답 (1) $ab(a-b^2)$
(2) $2xy(2x+4y-1)$
(3) $x(x-y)(y-1)$

(1) $a^2b-ab^3=ab(a-b^2)$
(2) $4x^2y+8xy^2-2xy=2xy(2x+4y-1)$
(3) $xy(x-y)+x(y-x)=xy(x-y)-x(x-y)$
$=(x-y)(xy-x)$
$=x(x-y)(y-1)$

002 답 (1) $(y-3)^2$ (2) $(2x-1)^2$ (3) $(5a+3b)^2$

(1) $y^2-6y+9=y^2-2\times y\times 3+3^2=(y-3)^2$
(2) $4x^2-4x+1=(2x)^2-2\times 2x\times 1+1^2=(2x-1)^2$
(3) $25a^2+30ab+9b^2=(5a)^2+2\times 5a\times 3b+(3b)^2=(5a+3b)^2$

003 답 (1) $(x+3)(x-3)$
(2) $(y+6)(y-6)$
(3) $(10a+7b)(10a-7b)$

(1) $x^2-9=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$
(2) $y^2-36=y^2-6^2=(y+6)(y-6)$
(3) $100a^2-49b^2=(10a)^2-(7b)^2=(10a+7b)(10a-7b)$

004 답 (1) $(a-3)(a-5)$
(2) $(2y+1)(y-2)$
(3) $(3x-2y)(2x+3y)$

(1) $a^2-8a+15=a^2+(-3-5)a+(-3)\times(-5)$
$=(a-3)(a-5)$
(2) $2y^2-3y-2$
$=2\times 1\times y^2+\{2\times(-2)+1\times 1\}y+1\times(-2)$
$=(2y+1)(y-2)$
(3) $6x^2+5xy-6y^2$
$=3\times 2\times x^2+\{3\times 3+(-2)\times 2\}xy+(-2y)\times 3y$
$=(3x-2y)(2x+3y)$

005 답 (1) $(x+y-z)^2$ (2) $(a+b+1)^2$
(3) $(3x-y+z)^2$ (4) $(x+2y-5z)^2$
(5) $(2a-b+3)^2$ (6) $(x-3y-6)^2$

(1) $x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2zx$
$=x^2+y^2+(-z)^2+2\times x\times y+2\times y\times(-z)+2\times(-z)\times x$
$=(x+y-z)^2$
(2) $a^2+b^2+1+2ab+2b+2a$
$=a^2+b^2+1^2+2\times a\times b+2\times b\times 1+2\times 1\times a$
$=(a+b+1)^2$
(3) $9x^2+y^2+z^2-6xy-2yz+6zx$
$=(3x)^2+(-y)^2+z^2+2\times 3x\times(\boxed{-y})+2\times(\boxed{-y})\times z$
$+2\times z\times 3x$
$=(3x-\boxed{y}+z)^2$
(4) $x^2+4y^2+25z^2+4xy-20yz-10zx$
$=x^2+(2y)^2+(-5z)^2+2\times x\times 2y+2\times 2y\times(-5z)$
$+2\times(-5z)\times x$
$=(x+2y-5z)^2$
(5) $4a^2+b^2-4ab+12a-6b+9$
$=4a^2+b^2+9-4ab-6b+12a$
$=(2a)^2+(-b)^2+3^2+2\times 2a\times(-b)+2\times(-b)\times 3$
$+2\times 3\times 2a$
$=(2a-b+3)^2$
(6) $x^2+9y^2-6xy-12x+36y+36$
$=x^2+9y^2+36-6xy+36y-12x$
$=x^2+(-3y)^2+(-6)^2+2\times x\times(-3y)$
$+2\times(-3y)\times(-6)+2\times(-6)\times x$
$=(x-3y-6)^2$

006 답 (1) $(a+2)^3$ (2) $(x-1)^3$
(3) $(2x+1)^3$ (4) $(3y-2)^3$
(5) $(x-4y)^3$ (6) $(2x+5y)^3$

(1) $a^3+6a^2+12a+8=a^3+3\times a^2\times 2+3\times a\times 2^2+2^3$
$=(a+2)^3$
(2) $x^3-3x^2+3x-1=x^3-3\times x^2\times 1+3\times x\times 1^2-1^3$
$=(x-1)^3$
(3) $8x^3+12x^2+6x+1$
$=(2x)^3+3\times(2x)^2\times 1+3\times 2x\times 1^2+1^3$
$=(2x+1)^3$
(4) $27y^3-54y^2+36y-8$
$=(3y)^3-3\times(\boxed{3y})^2\times 2+3\times\boxed{3y}\times 2^2-2^3$
$=(\boxed{3y}-2)^3$
(5) $x^3-12x^2y+48xy^2-64y^3$
$=x^3-3\times x^2\times 4y+3\times x\times(4y)^2-(4y)^3$
$=(x-4y)^3$
(6) $8x^3+60x^2y+150xy^2+125y^3$
$=(2x)^3+3\times(2x)^2\times 5y+3\times 2x\times(5y)^2+(5y)^3$
$=(2x+5y)^3$

007 답 (1) $(a+3)(a^2-3a+9)$
(2) $(x-2)(x^2+2x+4)$
(3) $(4x+1)(16x^2-4x+1)$
(4) $(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)$
(5) $(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2)$
(6) $(3a+4b)(9a^2-12ab+16b^2)$

(1) $a^3+27=a^3+3^3$
$=(a+3)(a^2-a\times 3+3^2)$
$=(a+3)(a^2-3a+9)$
(2) $x^3-8=x^3-2^3$
$=(x-2)(x^2+x\times 2+2^2)$
$=(x-2)(x^2+2x+4)$
(3) $64x^3+1=(\boxed{4x})^3+1^3$
$=(4x+1)\{(\boxed{4x})^2-4x\times 1+1^2\}$
$=(4x+1)(\boxed{16x^2}-4x+1)$

(4) $27a^3-b^3=(3a)^3-b^3$
$=(3a-b)\{(3a)^2+3a\times b+b^2\}$
$=(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)$
(5) $8x^3-125y^3=(2x)^3-(5y)^3$
$=(2x-5y)\{(2x)^2+2x\times 5y+(5y)^2\}$
$=(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2)$
(6) $27a^3+64b^3=(3a)^3+(4b)^3$
$=(3a+4b)\{(3a)^2-3a\times 4b+(4b)^2\}$
$=(3a+4b)(9a^2-12ab+16b^2)$

008 답 (1) $(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ca)$
(2) $(x-y+2)(x^2+y^2+4+xy-2x+2y)$
(3) $(3x+2y-2z)(9x^2+4y^2+4z^2-6xy+4yz+6zx)$

(1) $a^3-b^3-c^3-3abc$
$=a^3+(-b)^3+(-c)^3-3\times a\times(-b)\times(-c)$
$=(a-b-c)\{a^2+(-b)^2+(\boxed{-c})^2-a\times(-b)$
$-(-b)\times(-c)-(-c)\times a\}$
$=(a-b-c)(a^2+b^2+\boxed{c^2}+ab-bc+ca)$
(2) $x^3-y^3+8+6xy$
$=x^3+(-y)^3+2^3-3\times x\times(-y)\times 2$
$=(x-y+2)\{x^2+(-y)^2+2^2-x\times(-y)-(-y)\times 2$
$-2\times x\}$
$=(x-y+2)(x^2+y^2+4+xy-2x+2y)$
(3) $27x^3+8y^3-8z^3+36xyz$
$=(3x)^3+(2y)^3+(-2z)^3-3\times 3x\times 2y\times(-2z)$
$=(3x+2y-2z)\{(3x)^2+(2y)^2+(-2z)^2-3x\times 2y$
$-2y\times(-2z)-(-2z)\times 3x\}$
$=(3x+2y-2z)(9x^2+4y^2+4z^2-6xy+4yz+6zx)$

009 답 (1) $(x^2+4x+16)(x^2-4x+16)$
(2) $(y^2+2y+4)(y^2-2y+4)$
(3) $(9a^2+3ab+b^2)(9a^2-3ab+b^2)$

(1) $x^4+16x^2+256=x^4+x^2\times 4^2+4^4$
$=(x^2+x\times 4+4^2)(x^2-x\times 4+4^2)$
$=(x^2+\boxed{4x}+16)(x^2-\boxed{4x}+16)$
(2) $y^4+4y^2+16=y^4+y^2\times 2^2+2^4$
$=(y^2+y\times 2+2^2)(y^2-y\times 2+2^2)$
$=(y^2+2y+4)(y^2-2y+4)$
(3) $81a^4+9a^2b^2+b^4$
$=(3a)^4+(3a)^2\times b^2+b^4$
$=\{(3a)^2+3a\times b+b^2\}\{(3a)^2-3a\times b+b^2\}$
$=(9a^2+3ab+b^2)(9a^2-3ab+b^2)$

010 답 (1) $(x+1)(x-3)(x-1)^2$
(2) $(x^2+3x+3)(x^2+3x+6)$
(3) $(2x^2+2x+1)(x+2)(x-1)$
(4) $(x+1)(x+5)(x+7)(x-1)$
(5) $(x^2-4x-2)(x+2)(x-6)$

(1) $x^2-2x=X$로 놓으면
$(x^2-2x+4)(x^2-2x-6)+21$
$=(X+4)(X-6)+21$
$=X^2-2X-3=(X-3)(X+1)$
$=(x^2-2x-3)(x^2-2x+1)\leftarrow X=x^2-2x$
$=(x+1)(x-3)(x-1)^2$
(2) $x^2+3x=X$로 놓으면
$(x^2+3x+10)(x^2+3x-1)+28$
$=(X+10)(X-1)+28$
$=X^2+9X+18=(X+3)(X+6)$
$=(x^2+3x+3)(x^2+3x+6)\leftarrow X=x^2+3x$
(3) $(2x^2+2x-1)(x^2+x-1)-3$
$=\{2(x^2+x)-1\}(x^2+x-1)-3$
$x^2+x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(2X-1)(X-1)-3=2X^2-3X-2$
$=(2X+1)(X-2)$
$=(2x^2+2x+1)(x^2+x-2)\leftarrow X=x^2+x$
$=(2x^2+2x+1)(x+2)(x-1)$
(4) $x^2+6x=X$로 놓으면
$(x^2+6x)^2-2(x^2+6x)-35$
$=X^2-2X-35=(X+5)(X-7)$
$=(x^2+6x+5)(x^2+6x-7)\leftarrow X=x^2+6x$
$=(x+1)(x+5)(x+7)(x-1)$
(5) $(x^2-4x)^2-14x^2+56x+24$
$=(x^2-4x)^2-14(x^2-4x)+24$
$x^2-4x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=X^2-14X+24=(X-2)(X-12)$
$=(x^2-4x-2)(x^2-4x-12)\leftarrow X=x^2-4x$
$=(x^2-4x-2)(x+2)(x-6)$

011 답 (1) $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$
(2) $(x^2+4)(x+5)(x-5)$
(3) $(x^2+2)(x+2)(x-2)$
(4) $(x^2+2)(x^2+3)$

(1) $x^2=X$로 놓으면
$x^4-10x^2+9=X^2-10X+9$
$=(X-1)(X-9)$
$=(x^2-1)(x^2-9)\leftarrow X=x^2$
$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$
(2) $x^2=X$로 놓으면
$x^4-21x^2-100=X^2-21X-100$
$=(X+4)(X-25)$
$=(x^2+4)(x^2-25)\leftarrow X=x^2$
$=(x^2+4)(x+5)(x-5)$
(3) $x^2=X$로 놓으면
$x^4-2x^2-8=X^2-2X-8$
$=(X+2)(X-4)$
$=(x^2+2)(x^2-4)\leftarrow X=x^2$
$=(x^2+2)(x+2)(x-2)$

(4) $x^2=X$로 놓으면

$x^4+5x^2+6=X^2+5X+6$

$=(X+2)(X+3)$

$=(x^2+2)(x^2+3) \leftarrow X=x^2$

012 답 (1) $(x+y+1)(x-y-1)$

(2) $(x+y+3)(x-y+3)$

(3) $(2x+y-5)(2x-y+5)$

(4) $(4x+3y+1)(4x+3y-1)$

(1) $x^2-y^2-2y-1=x^2-(y^2+2y+1)$

$=x^2-(y+1)^2$

$=(x+y+1)(x-y-1)$

(2) $x^2-y^2+6x+9=(x^2+6x+9)-y^2$

$=(x+3)^2-y^2$

$=(x+y+3)(x-y+3)$

(3) $4x^2-y^2+10y-25=4x^2-(y^2-10y+25)$

$=(2x)^2-(y-5)^2$

$=(2x+y-5)(2x-y+5)$

(4) $16x^2+9y^2+24xy-1=(16x^2+24xy+9y^2)-1$

$=(4x+3y)^2-1^2$

$=(4x+3y+1)(4x+3y-1)$

013 답 (1) $(x^2+x-1)(x^2-x-1)$

(2) $(x^2+3x-2)(x^2-3x-2)$

(3) $(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

(4) $(x^2+2x-5)(x^2-2x-5)$

(1) $x^4-3x^2+1=(x^4-2x^2+1)-x^2$

$=(x^2-1)^2-x^2$

$=(x^2+x-1)(x^2-x-1)$

(2) $x^4-13x^2+4=(x^4-4x^2+4)-9x^2$

$=(x^2-2)^2-(3x)^2$

$=(x^2+3x-2)(x^2-3x-2)$

(3) $x^4+2x^2+9=(x^4+6x^2+9)-4x^2$

$=(x^2+3)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

(4) $x^4-14x^2+25=(x^4-10x^2+25)-4x^2$

$=(x^2-5)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x-5)(x^2-2x-5)$

014 답 ㄱ, ㅂ

$(a+b)(2a+b)-(3b-a)(a+b)$

$=(a+b)\{(2a+b)-(3b-a)\}$

$=(a+b)(3a-2b)$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ㄱ, ㅂ이다.

015 답 ③

① $x^2-6x+9=(x-3)^2$

② $16a^2-4=4(4a^2-1)=4(2a+1)(2a-1)$

③ $4x^2+10xy+25y^2$은 인수분해되지 않는다.

④ $b^2-8b+12=(b-2)(b-6)$

⑤ $6a^2-ab-2b^2=(2a+b)(3a-2b)$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

016 답 1

$x^2+4y^2-4xy+6x-12y+9$

$=x^2+4y^2+9-4xy-12y+6x$

$=x^2+(-2y)^2+3^2+2\times x\times(-2y)+2\times(-2y)\times 3$
$+2\times 3\times x$

$=(x-2y+3)^2$

따라서 $a=-2$, $b=3$이므로

$a+b=-2+3=1$

017 답 ②

$27x^3-54x^2+36x-8=(3x)^3-3\times(3x)^2\times 2+3\times 3x\times 2^2-2^3$

$=(3x-2)^3$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ②이다.

018 답 ①, ⑤

$64x^3-y^3=(4x)^3-y^3$

$=(4x-y)\{(4x)^2+4x\times y+y^2\}$

$=(4x-y)(16x^2+4xy+y^2)$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ①, ⑤이다.

019 답 ⑤

$(2x-y)^3+125y^3$

$=(2x-y)^3+(5y)^3$

$=\{(2x-y)+5y\}\{(2x-y)^2-(2x-y)\times 5y+(5y)^2\}$

$=(2x+4y)\{(4x^2-4xy+y^2)-(10xy-5y^2)+25y^2\}$

$=2(x+2y)(4x^2-14xy+31y^2)$

020 답 ⑤

$8x^3+8y^3+12xy-1$

$=(2x)^3+(2y)^3+(-1)^3-3\times 2x\times 2y\times(-1)$

$=(2x+2y-1)\{(2x)^2+(2y)^2+(-1)^2-2x\times 2y-2y\times(-1)$
$-(-1)\times 2x\}$

$=(2x+2y-1)(4x^2+4y^2-4xy+2x+2y+1)$

따라서

$ax^2+4y^2+bxy+2x+2y+c=4x^2+4y^2-4xy+2x+2y+1$

이므로

$a=4$, $b=-4$, $c=1$

$\therefore a-b+c=4-(-4)+1=9$

021 답 $(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$(x+y)^2(x-y)(x^2+y^2)+(xy+y^2)(x^2y+2y^3)$

$=(x+y)(x^2-y^2)(x^2+y^2)+y(x+y)(x^2y+2y^3)$

$=(x+y)(x^4-y^4)+(x+y)(x^2y^2+2y^4)$

$=(x+y)(x^4+x^2y^2+y^4)$

$=(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

022 답 ①

$x^2-x=X$로 놓으면

$$
\begin{aligned}
(x^2-x-2)(x^2-x-5)-4&=(X-2)(X-5)-4\\
&=X^2-7X+6\\
&=(X-1)(X-6)\\
X=x^2-x \rightarrow &=(x^2-x-1)(x^2-x-6)\\
&=(x^2-x-1)(x+2)(x-3)
\end{aligned}
$$

따라서 $a=2$, $b=-3$, $c=-1$ 또는 $a=-3$, $b=2$, $c=-1$이므로

$a+b+c=2+(-3)+(-1)=-2$

023 답 ③, ⑤

$x^2+6x=X$로 놓으면

$$
\begin{aligned}
(x^2+6x)(x^2+6x+3)-40&=X(X+3)-40\\
&=X^2+3X-40\\
&=(X-5)(X+8)\\
X=x^2+6x \rightarrow &=(x^2+6x-5)(x^2+6x+8)\\
&=(x^2+6x-5)(x+2)(x+4)
\end{aligned}
$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ③, ⑤이다.

024 답 ②

$a-b=X$로 놓으면

$$
\begin{aligned}
(a-b-4)(a-b+2)+5&=(X-4)(X+2)+5\\
&=X^2-2X-3\\
&=(X+1)(X-3)\\
X=a-b \rightarrow &=(a-b+1)(a-b-3)
\end{aligned}
$$

025 답 ③

$x^2+2x=X$로 놓으면

$$
\begin{aligned}
(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24&=X^2-11X+24\\
&=(X-3)(X-8)\\
X=x^2+2x \rightarrow &=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)\\
&=(x+3)(x-1)(x+4)(x-2)
\end{aligned}
$$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ③이다.

026 답 $2x^2-6x+9$

$x^2-3x=X$로 놓으면

$$
\begin{aligned}
(x^2-3x)^2+9x^2-27x+20&=(x^2-3x)^2+9(x^2-3x)+20\\
&=X^2+9X+20\\
&=(X+4)(X+5)\\
X=x^2-3x \rightarrow &=(x^2-3x+4)(x^2-3x+5)
\end{aligned}
$$

따라서 두 이차식은 x^2-3x+4, x^2-3x+5이므로 그 합은

$(x^2-3x+4)+(x^2-3x+5)=2x^2-6x+9$

027 답 ①

$$
\begin{aligned}
&(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)-14\\
&=\{(x+1)(x-3)\}\{(x+2)(x-4)\}-14\\
&=(x^2-2x-3)(x^2-2x-8)-14
\end{aligned}
$$

$x^2-2x=X$로 놓으면

$$
\begin{aligned}
(\text{주어진 식})&=(X-3)(X-8)-14\\
&=X^2-11X+24-14\\
&=X^2-11X+10\\
&=(X-10)(X-1)\\
&=(x^2-2x-10)(x^2-2x-1) \leftarrow X=x^2-2x
\end{aligned}
$$

028 답 ①

$$
\begin{aligned}
x^2-4xy+4y^2-64&=(x^2-4xy+4y^2)-64\\
&=(x-2y)^2-8^2\\
&=(x-2y+8)(x-2y-8)
\end{aligned}
$$

따라서 $a=1$, $b=-2$, $c=-8$이므로

$a+b+c=1+(-2)+(-8)=-9$

029 답 ②

$$
\begin{aligned}
x^2-9y^2+14x+49&=(x^2+14x+49)-9y^2\\
&=(x+7)^2-(3y)^2\\
&=(x+3y+7)(x-3y+7)
\end{aligned}
$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

030 답 ③

$$
\begin{aligned}
4x^2-y^2+4x+4y-3&=(4x^2+4x+1)-(y^2-4y+4)\\
&=(2x+1)^2-(y-2)^2\\
&=(2x+y-1)(2x-y+3)
\end{aligned}
$$

031 답 5

$x^2=X$로 놓으면

$$
\begin{aligned}
x^4-7x^2-18&=X^2-7X-18\\
&=(X+2)(X-9)\\
&=(x^2+2)(x^2-9) \leftarrow X=x^2\\
&=(x+3)(x-3)(x^2+2)
\end{aligned}
$$

따라서 $a=3$, $b=2$이므로 $a+b=3+2=5$

032 답 ①

$$
\begin{aligned}
x^4-9x^2+16&=(x^4-8x^2+16)-x^2\\
&=(x^2-4)^2-x^2\\
&=(x^2+x-4)(x^2-x-4)
\end{aligned}
$$

따라서 두 이차식은 x^2+x-4, x^2-x-4이므로 그 합은

$(x^2+x-4)+(x^2-x-4)=2x^2-8$

033 답 ④

$$
\begin{aligned}
x^4+4&=(x^4+4x^2+4)-4x^2\\
&=(x^2+2)^2-(2x)^2\\
&=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)
\end{aligned}
$$

따라서 $a=2$, $b=2$이므로 $ab=2\times2=4$

034 답 ④

$x^2=X$로 놓으면

$$
\begin{aligned}
x^4-20x^2+64&=X^2-20X+64=(X-4)(X-16)\\
&=(x^2-4)(x^2-16) \leftarrow X=x^2\\
&=(x+2)(x-2)(x+4)(x-4)
\end{aligned}
$$

③ $x^2-4=(x+2)(x-2)$
⑤ $x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$
따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ④이다.

주의 다항식 x^4-20x^2+64의 인수는 $x+2$, $x-2$, $x+4$, $x-4$뿐만 아니라 일차식끼리 곱한 이차식, 삼차식, 사차식이 될 수도 있으므로 인수를 구할 때는 모든 경우를 따져 본다.

035 답 (1) $(x-1)(x+y-2)$
(2) $(a+3)(2a-b-2)$
(3) $(x-5)(x-y+1)$
(4) $(x^2+2x-1)(y+1)$
(5) $(2x^2-2x+3)(y-3)$
(6) $(3x-2y)(y^2+y+2)$

(1) y에 대한 내림차순으로 정리하면
$$x^2+xy-3x-y+2=xy-y+x^2-3x+2$$
$$=(x-1)y+(x-1)(x-2)$$
$$=(x-1)(\boxed{x+y-2})$$
(2) b에 대한 내림차순으로 정리하면
$$2a^2-ab+4a-3b-6=-ab-3b+2a^2+4a-6$$
$$=-(a+3)b+2(a+3)(a-1)$$
$$=(a+3)(2a-b-2)$$
(3) y에 대한 내림차순으로 정리하면
$$x^2-xy-4x+5y-5=-xy+5y+x^2-4x-5$$
$$=-(x-5)y+(x-5)(x+1)$$
$$=(x-5)(x-y+1)$$
(4) y에 대한 내림차순으로 정리하면
$$x^2y+x^2+2xy+2x-y-1=x^2y+2xy-y+x^2+2x-1$$
$$=(x^2+2x-1)y+(x^2+2x-1)$$
$$=(x^2+2x-1)(y+1)$$
(5) y에 대한 내림차순으로 정리하면
$$2x^2y-6x^2-2xy+6x+3y-9$$
$$=2x^2y-2xy+3y-6x^2+6x-9$$
$$=(2x^2-2x+3)y-3(2x^2-2x+3)$$
$$=(2x^2-2x+3)(y-3)$$
(6) x에 대한 내림차순으로 정리하면
$$-2y^3+3xy^2-2y^2+3xy+6x-4y$$
$$=3xy^2+3xy+6x-2y^3-2y^2-4y$$
$$=3x(y^2+y+2)-2y(y^2+y+2)$$
$$=(3x-2y)(y^2+y+2)$$

036 답 (1) $(x+y-2)(x-y-1)$
(2) $(a+2b+1)(a-b-5)$
(3) $(3x-y+2)(x+2y-4)$
(4) $(2a-b-3)(2a+2b-1)$
(5) $-(a-b)(b-c)(c-a)$
(6) $-(a+b)(b-c)(c-a)$

(1) x에 대한 내림차순으로 정리하면
$$x^2-y^2-3x+y+2$$
$$=x^2-3x-y^2+y+2$$
$$=x^2-3x-(y^2-y-2)$$
$$=x^2-3x-(y-2)(y+1)$$
$$=x^2+\{(y-2)-(y+1)\}x+(y-2)\times\{-(y+1)\}$$
$$=(x+y-2)(x-y-1)$$
(2) a에 대한 내림차순으로 정리하면
$$a^2-2b^2+ab-4a-11b-5$$
$$=a^2+ab-4a-2b^2-11b-5$$
$$=a^2+(ab-4a)-(2b^2+11b+5)$$
$$=a^2+(b-4)a-(2b+1)(b+5)$$
$$=a^2+\{(2b+1)-(b+5)\}a+(2b+1)\times\{-(b+5)\}$$
$$=(a+2b+1)(a-b-5)$$
(3) x에 대한 내림차순으로 정리하면
$$3x^2-2y^2+5xy-10x+8y-8$$
$$=3x^2+5xy-10x-2y^2+8y-8$$
$$=3x^2+5(y-2)x-2(y-2)^2$$
$$=3\times1\times x^2+\{3\times2(y-2)-(y-2)\}x$$
$$+\{-(y-2)\}\times2(y-2)$$
$$=(3x-y+2)(x+2y-4)$$
(4) a에 대한 내림차순으로 정리하면
$$4a^2-2b^2+2ab-8a-5b+3$$
$$=4a^2+2ab-8a-2b^2-5b+3$$
$$=4a^2+(2ab-8a)-(2b^2+5b-3)$$
$$=4a^2+(2b-8)a-(2b-1)(b+3)$$
$$=2\times2\times a^2+\{2(2b-1)-2(b+3)\}a$$
$$+\{-(b+3)\}\times(2b-1)$$
$$=(2a-b-3)(2a+2b-1)$$
(5) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$
$$=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2$$
위의 식을 a에 대한 내림차순으로 정리하면
$$a^2b-ca^2-ab^2+c^2a+b^2c-bc^2$$
$$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$$
$$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$$
$$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$$
$$=(b-c)(a-b)(a-c)$$
$$=-(a-b)(b-c)(c-a)$$
(6) a에 대한 내림차순으로 정리하면
$$a^2(b-c)+a(b^2+c^2)-bc(b-c)-2abc$$
$$=(b-c)a^2+(b^2+c^2-2bc)a-bc(b-c)$$
$$=(b-c)a^2+(b-c)^2a-bc(b-c)$$
$$=(b-c)\{a^2+(b-c)a-bc\}$$
$$=(b-c)(a+b)(a-c)$$
$$=-(a+b)(b-c)(c-a)$$

037 답 (1) $(x-1)(x+2)(x-2)$
(2) $(x+1)(x-3)(x+5)$

(3) $(x-2)(x+3)^2$
(4) $(x-1)(2x^2-6x-1)$
(5) $(2x-1)(x^2+2x+3)$

(1) $f(x)=x^3-x^2-4x+4$로 놓으면
$f(1)=1-1-4+4=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & -4 & 4 \\ & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2-4)=(x-1)(x+2)(x-2)$

(2) $f(x)=x^3+3x^2-13x-15$로 놓으면
$f(-1)=-1+3+13-15=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & -13 & -15 \\ & & -1 & -2 & 15 \\ \hline & 1 & 2 & -15 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x^2+2x-15)=(x+1)(x-3)(x+5)$

(3) $f(x)=x^3+4x^2-3x-18$로 놓으면
$f(2)=8+16-6-18=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 4 & -3 & -18 \\ & & 2 & 12 & 18 \\ \hline & 1 & 6 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-2)(x^2+6x+9)=(x-2)(x+3)^2$

(4) $f(x)=2x^3-8x^2+5x+1$로 놓으면
$f(1)=2-8+5+1=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -8 & 5 & 1 \\ & & 2 & -6 & -1 \\ \hline & 2 & -6 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(2x^2-6x-1)$

(5) $f(x)=2x^3+3x^2+4x-3$으로 놓으면
$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+2-3=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & 3 & 4 & -3 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 2 & 4 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+4x+6)$
$=(2x-1)(x^2+2x+3)$

풍쌤 비법

다항식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값은 다음 순서로 찾는다.
$\pm1 \Rightarrow \pm$(상수항의 약수) $\Rightarrow \pm\dfrac{(\text{상수항의 약수})}{(\text{최고차항의 계수의 약수})}$

038 답 (1) $(x-1)(x+1)(x-2)^2$
(2) $(x-1)(x+2)(x-3)(x-6)$
(3) $(x+1)(x+2)(x^2-x-1)$
(4) $(x-3)(x+3)^3$
(5) $(2x+1)^2(x^2-3x+1)$

(1) $f(x)=x^4-4x^3+3x^2+4x-4$로 놓으면
$f(1)=1-4+3+4-4=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -4 & 3 & 4 & -4 \\ & & 1 & -3 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & -3 & 0 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^3-3x^2+4)$
$g(x)=x^3-3x^2+4$로 놓으면
$g(-1)=-1-3+4=0$
조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore g(x)=(x+1)(x^2-4x+4)$
$=(x+1)(x-2)^2$
$\therefore f(x)=(x-1)(x+1)(x-2)^2$

(2) $f(x)=x^4-8x^3+7x^2+36x-36$으로 놓으면
$f(1)=1-8+7+36-36=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -8 & 7 & 36 & -36 \\ & & 1 & -7 & 0 & 36 \\ \hline & 1 & -7 & 0 & 36 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^3-7x^2+36)$
$g(x)=x^3-7x^2+36$으로 놓으면
$g(-2)=-8-28+36=0$
조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -7 & 0 & 36 \\ & & -2 & 18 & -36 \\ \hline & 1 & -9 & 18 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore g(x)=(x+2)(x^2-9x+18)$
$=(x+2)(x-3)(x-6)$
$\therefore f(x)=(x-1)(x+2)(x-3)(x-6)$

(3) $f(x)=x^4+2x^3-2x^2-5x-2$로 놓으면
$f(-1)=1-2-2+5-2=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 2 & -2 & -5 & -2 \\ & & -1 & -1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & -3 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x^3+x^2-3x-2)$
$g(x)=x^3+x^2-3x-2$로 놓으면
$g(-2)=-8+4+6-2=0$

조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

-2	1	1	-3	-2
		-2	2	2
	1	-1	-1	0

$\therefore\ g(x)=(x+2)(x^2-x-1)$

$\therefore\ f(x)=(x+1)(x+2)(x^2-x-1)$

(4) $f(x)=x^4+6x^3-54x-81$로 놓으면

$f(3)=81+162-162-81=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

3	1	6	0	-54	-81
		3	27	81	81
	1	9	27	27	0

$\therefore\ f(x)=(x-3)(x^3+9x^2+27x+27)$

$=(x-3)(x^3+3\times x^2\times 3+3\times x\times 3^2+3^3)$

$=(x-3)(x+3)^3$

(5) $f(x)=4x^4-8x^3-7x^2+x+1$로 놓으면

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+1-\frac{7}{4}-\frac{1}{2}+1=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$-\frac{1}{2}$	4	-8	-7	1	1
		-2	5	1	-1
	4	-10	-2	2	0

$\therefore\ f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(4x^3-10x^2-2x+2)$

$=(2x+1)(2x^3-5x^2-x+1)$

$g(x)=2x^3-5x^2-x+1$로 놓으면

$g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}+\frac{1}{2}+1=0$

조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

$-\frac{1}{2}$	2	-5	-1	1
		-1	3	-1
	2	-6	2	0

$\therefore\ g(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-6x+2)$

$=(2x+1)(x^2-3x+1)$

$\therefore\ f(x)=(2x+1)^2(x^2-3x+1)$

039 답 2

주어진 식을 y에 대한 내림차순으로 정리하면

$4x^2+2xy-13x-6y+3=2xy-6y+4x^2-13x+3$

$=2(x-3)y+(x-3)(4x-1)$

$=(x-3)(4x+2y-1)$

따라서 $a=-3$, $b=4$, $c=2$, $d=-1$이므로

$a+b+c+d=-3+4+2+(-1)=2$

040 답 ㄱ, ㄹ

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2-2y^2+xy-4x-8y$

$=x^2+xy-4x-2y^2-8y$

$=x^2+(y-4)x-(2y^2+8y)$

$=x^2+(y-4)x-2y(y+4)$

$=x^2+\{2y-(y+4)\}x+2y\times\{-(y+4)\}$

$=(x+2y)(x-y-4)$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

041 답 $2x+2y-2$

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2-3y^2+2xy-2x+6y-3$

$=x^2+2xy-2x-3y^2+6y-3$

$=x^2+(2xy-2x)-(3y^2-6y+3)$

$=x^2+2(y-1)x-3(y-1)^2$

$=x^2+\{3(y-1)-(y-1)\}x+3(y-1)\times\{-(y-1)\}$

$=(x+3y-3)(x-y+1)$

따라서 두 일차식은 $x+3y-3$, $x-y+1$이므로 그 합은

$(x+3y-3)+(x-y+1)=2x+2y-2$

042 답 ①, ④

주어진 식을 a에 대한 내림차순으로 정리하면

$a^2b+a^2c-ab^2+ac^2-b^2c-bc^2$

$=(b+c)a^2-(b^2-c^2)a-bc(b+c)$

$=(b+c)a^2-(b+c)(b-c)a-bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2-(b-c)a-bc\}$

$=(b+c)(a-b)(a+c)$

따라서 보기 중에서 주어진 식의 인수인 것은 ①, ④이다.

043 답 -3

$f(x)=x^3-3x^2-10x+24$로 놓으면

$f(2)=8-12-20+24=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	1	-3	-10	24
		2	-2	-24
	1	-1	-12	0

$\therefore\ f(x)=(x-2)(x^2-x-12)$

$=(x-2)(x+3)(x-4)$

$\therefore\ a+b+c=-2+3+(-4)=-3$

044 답 -30

$f(x)=x^3+ax+30$으로 놓으면

$f(x)=(x-1)(x+b)(x+c)$에서 $f(1)=0$이므로

$1+a+30=0\qquad\therefore\ a=-31$

$\therefore\ f(x)=x^3-31x+30$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	0	-31	30
		1	1	-30
	1	1	-30	0

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+x-30)$

$\quad\quad =(x-1)(x-5)(x+6)$

$\therefore a+b+c=-31+(-5)+6=-30$

045 답 ③, ⑤

$f(x)=x^4-3x^3-12x^2+20x+48$로 놓으면

$f(-2)=16+24-48-40+48=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & -3 & -12 & 20 & 48 \\ & & -2 & 10 & 4 & -48 \\ \hline & 1 & -5 & -2 & 24 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+2)(x^3-5x^2-2x+24)$

$g(x)=x^3-5x^2-2x+24$로 놓으면

$g(-2)=-8-20+4+24=0$

조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -5 & -2 & 24 \\ & & -2 & 14 & -24 \\ \hline & 1 & -7 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore g(x)=(x+2)(x^2-7x+12)=(x+2)(x-3)(x-4)$

$\therefore f(x)=(x+2)^2(x-3)(x-4)$

즉, 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ③, ⑤이다.

046 답 $f(x)=(3x-2)(x-1)(x+1)(x-3)$

다항식 $f(x)$가 $3x-2$를 인수로 가지므로

$f\left(\frac{2}{3}\right)=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{2}{3} & 3 & -11 & 3 & 11 & -6 \\ & & 2 & -6 & -2 & 6 \\ \hline & 3 & -9 & -3 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=\left(x-\frac{2}{3}\right)(3x^3-9x^2-3x+9)$

$\quad\quad =(3x-2)(x^3-3x^2-x+3)$

$g(x)=x^3-3x^2-x+3$으로 놓으면

$g(1)=1-3-1+3=0$

조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ & & 1 & -2 & -3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore g(x)=(x-1)(x^2-2x-3)=(x-1)(x+1)(x-3)$

$\therefore f(x)=(3x-2)(x-1)(x+1)(x-3)$

047 답 ⑤

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\quad =(a-b)\{(a^2+b^2)+ab\}$

$\quad =(a-b)\{(a-b)^2+3ab\}$

$\quad =3\times(3^2+3\times1)=36$

다른 풀이

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$\quad =3^3+3\times1\times3$

$\quad =27+9=36$

048 답 $-6\sqrt{3}$

$x-y=(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$

$xy=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2=1$

$\therefore x^2y-xy^2+2x-2y=xy(x-y)+2(x-y)$

$\quad\quad =(x-y)(xy+2)$

$\quad\quad =-2\sqrt{3}\times3=-6\sqrt{3}$

049 답 ③

$19=x$로 놓으면

$(19^3+3\times19^2+3\times19+1)+(19^2-9^2)$

$=(x^3+3x^2+3x+1)+(x^2-9^2)$

$=(x+1)^3+(x+9)(x-9)$

$=(19+1)^3+(19+9)\times(19-9)$

$=20^3+28\times10$

$=8000+280=8280$

050 답 ②

$11=x$로 놓으면

$$\frac{11^4+11^2+1}{11^3-1}=\frac{x^4+x^2+1}{x^3-1}$$

$$=\frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{x^2-x+1}{x-1}$$

$$=\frac{11^2-11+1}{11-1}$$

$$=\frac{111}{10}=11.1$$

051 답 970000

$f(x)=x^3-3x-2$에서

$f(-1)=-1+3-2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x^2-x-2)$

$\quad\quad =(x+1)(x-2)(x+1)$

$\quad\quad =(x+1)^2(x-2)$

$\therefore f(99)=100^2\times97$

$\quad\quad =10000\times97=970000$

052 답 ⑤

주어진 식의 좌변을 b에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^3+c^3+a^2c-ab^2+ac^2-b^2c$
$=-(a+c)b^2+a^3+a^2c+ac^2+c^3$
$=-(a+c)b^2+a^2(a+c)+c^2(a+c)$
$=(a+c)(a^2-b^2+c^2)$
이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a+c>0$
즉, $a^2-b^2+c^2=0$이므로 $b^2=a^2+c^2$
따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.

중단원 점검 문제

Ⅰ-3 | 인수분해

051~052쪽

01 답 ④

① $a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca$
$=a^2+(-b)^2+(2c)^2+2\times a\times(-b)+2\times(-b)\times 2c+2\times 2c\times a$
$=(a-b+2c)^2$
② $x^3-9x^2+27x-27=x^3-3\times x^2\times 3+3\times x\times 3^2-3^3$
$=(x-3)^3$
③ $64a^3+8b^3=8(8a^3+b^3)=8\{(2a)^3+b^3\}$
$=8(2a+b)\{(2a)^2-2a\times b+b^2\}$
$=8(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$
④ $x^3-27y^3-9xy-1$
$=x^3-27y^3-1-9xy$
$=x^3+(-3y)^3+(-1)^3-3\times x\times(-3y)\times(-1)$
$=(x-3y-1)\{x^2+(-3y)^2+(-1)^2-x\times(-3y)-(-3y)\times(-1)-(-1)\times x\}$
$=(x-3y-1)(x^2+9y^2+1+3xy-3y+x)$
$=(x-3y-1)(x^2+9y^2+3xy+x-3y+1)$
⑤ $16x^4+36x^2y^2+81y^4$
$=(2x)^4+(2x)^2\times(3y)^2+(3y)^4$
$=\{(2x)^2+2x\times 3y+(3y)^2\}\{(2x)^2-2x\times 3y+(3y)^2\}$
$=(4x^2+6xy+9y^2)(4x^2-6xy+9y^2)$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

02 답 $(x+2)(x-1)(x^2+x+1)$

$x^4+2x^3-x-2=x^3(x+2)-(x+2)$
$=(x+2)(x^3-1)$
$=(x+2)(x-1)(x^2+x+1)$

03 답 ③

$8a^3-60a^2+150a-125$
$=(2a)^3-3\times(2a)^2\times 5+3\times 2a\times 5^2-5^3$
$=(2a-5)^3$
따라서 정육면체의 한 모서리의 길이는 $2a-5$이다.

04 답 ④

$x^8+16x^4y^2+256y^4$
$=(x^2)^4+(x^2)^2\times(4y)^2+(4y)^4$
$=\{(x^2)^2+x^2\times 4y+(4y)^2\}\{(x^2)^2-x^2\times 4y+(4y)^2\}$
$=(x^4+4x^2y+16y^2)(x^4-4x^2y+16y^2)$
따라서 주어진 식을 인수분해한 것은 ④이다.

05 답 ④

$x^2+x=X$로 놓으면
$(x^2+x)(x^2+x+1)-6=X(X+1)-6$
$=X^2+X-6$
$=(X+3)(X-2)$
$X=x^2+x \rightarrow =(x^2+x+3)(x^2+x-2)$
$=(x+2)(x-1)(x^2+x+3)$
따라서 $a=1$, $b=3$이므로
$a+b=1+3=4$

06 답 $4x-6$

$x^2-3x=X$로 놓으면
$(x^2-3x)^2-2x^2+6x-8=(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8$
$=X^2-2X-8$
$=(X-4)(X+2)$
$X=x^2-3x \rightarrow =(x^2-3x-4)(x^2-3x+2)$
$=(x+1)(x-4)(x-1)(x-2)$
따라서 네 일차식은 $x+1$, $x-4$, $x-1$, $x-2$이므로 그 합은
$(x+1)+(x-4)+(x-1)+(x-2)=4x-6$

07 답 ③

$x(x+4)(x-2)(x-6)+k$
$=\{x(x-2)\}\{(x+4)(x-6)\}+k$
$=(x^2-2x)(x^2-2x-24)+k$
$x^2-2x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=X(X-24)+k=X^2-24X+k$
이 식이 완전제곱식이 되려면
$k=\left(-\frac{24}{2}\right)^2=144$

참고 x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 완전제곱식이 되려면
$c=\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ (단, a, b, c는 상수이다.)

08 답 ④, ⑤

$4x^2+49y^2+28xy-9=(4x^2+28xy+49y^2)-9$
$=(2x+7y)^2-3^2$
$=(2x+7y+3)(2x+7y-3)$
따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④, ⑤이다.

09 답 8

$81a^4+4b^4=81a^4+36a^2b^2+4b^4-36a^2b^2$
$=(9a^2+2b^2)^2-(6ab)^2$
$=(9a^2+6ab+2b^2)(9a^2-6ab+2b^2)$
따라서 $p=6$, $q=2$이므로
$p+q=6+2=8$

10 답 ㄴ, ㄷ

z에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^3+x^2y-x^2z+2y^2+2xy-2yz$

$=-x^2z-2yz+x^3+x^2y+2y^2+2xy$

$=(-x^2z-2yz)+(x^3+2xy)+(x^2y+2y^2)$

$=-(x^2+2y)z+(x^2+2y)x+(x^2+2y)y$

$=(x^2+2y)(x+y-z)$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

참고 차수가 가장 낮은 문자의 항으로 묶은 것과 공통부분이 생기도록 나머지 항을 묶는다.

11 답 ③

$f(x)=2x^4+5x^3-2x^2+x-6$으로 놓으면

$f(1)=2+5-2+1-6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	2	5	−2	1	−6
		2	7	5	6
	2	7	5	6	0

$\therefore f(x)=(x-1)(2x^3+7x^2+5x+6)$

$g(x)=2x^3+7x^2+5x+6$으로 놓으면

$g(-3)=-54+63-15+6=0$

조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

−3	2	7	5	6
		−6	−3	−6
	2	1	2	0

$\therefore g(x)=(x+3)(2x^2+x+2)$

$\therefore f(x)=(x-1)(x+3)(2x^2+x+2)$

12 답 $k=-10$, $f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+4x+2)$

$f(x)$가 $x+1$을 인수로 가지므로 $f(-1)=0$에서

$1-3-4-k-4=0$, $-10-k=0$

$\therefore k=-10$

따라서 $f(x)=x^4+3x^3-4x^2-10x-4$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

−1	1	3	−4	−10	−4
		−1	−2	6	4
	1	2	−6	−4	0

$\therefore f(x)=(x+1)(x^3+2x^2-6x-4)$

$g(x)=x^3+2x^2-6x-4$로 놓으면

$g(2)=8+8-12-4=0$

조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

2	1	2	−6	−4
		2	8	4
	1	4	2	0

$\therefore g(x)=(x-2)(x^2+4x+2)$

$\therefore f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+4x+2)$

13 답 ④

$x^4+x^2y^2+y^4$

$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$=\{(x^2+2xy+y^2)-xy\}\{(x^2+2xy+y^2)-3xy\}$

$=\{(x+y)^2-xy\}\{(x+y)^2-3xy\}$

$=(5^2-3)\times(5^2-3\times3)$

$=22\times16=352$

14 답 ④

$2026=x$로 놓으면

$$\frac{2026^3+1}{2025^2+2026}=\frac{x^3+1}{(x-1)^2+x}$$

$$=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$

$$=x+1$$

$$=2026+1=2027$$

15 답 ①

$15=x$로 놓으면

$14\times16\times18\times20+16$

$=(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)+16$

$=\{(x+1)(x+3)\}\{(x+5)(x-1)\}+16$

$=(x^2+4x+3)(x^2+4x-5)+16$

$x^2+4x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X+3)(X-5)+16$

$=X^2-2X+1$

$=(X-1)^2$

$=(x^2+4x-1)^2 \leftarrow X=x^2+4x$

$=(15^2+4\times15-1)^2$

$=(225+60-1)^2=284^2$

$\therefore \sqrt{14\times16\times18\times20+16}=\sqrt{284^2}=284$

16 답 ③

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$에서 좌변을 인수분해하면

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)$

$+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$\therefore \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$a+b+c>0$

즉, $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$이므로

$a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$

$\therefore a=b=c$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 정삼각형이다.

Ⅱ 방정식과 부등식

Ⅱ-1 | 복소수 056~067쪽

001 답 (1) 실수부분: 3, 허수부분: 1
(2) 실수부분: -2, 허수부분: 7
(3) 실수부분: 0, 허수부분: -3
(4) 실수부분: 15, 허수부분: 0

(1) $3+i$의 실수부분은 3, 허수부분은 1이다.
(2) $7i-2=-2+7i$이므로 실수부분은 -2, 허수부분은 7이다.
(3) $-3i$의 실수부분은 0, 허수부분은 -3이다.
(4) 15의 실수부분은 15, 허수부분은 0이다.

002 답 (1) 실수부분: $\sqrt{2}$, 허수부분: 2
(2) 실수부분: -5, 허수부분: $\sqrt{10}$
(3) 실수부분: -1, 허수부분: 0
(4) 실수부분: $\frac{1}{3}$, 허수부분: 1

(1) $\sqrt{2}+2i$의 실수부분은 $\sqrt{2}$, 허수부분은 2이다.
(2) $\sqrt{10}i-5=-5+\sqrt{10}i$이므로 실수부분은 -5, 허수부분은 $\sqrt{10}$이다.
(3) $i^2=-1$이므로 실수부분은 -1, 허수부분은 0이다.
(4) $\frac{1+3i}{3}=\frac{1}{3}+i$이므로 실수부분은 $\frac{1}{3}$, 허수부분은 1이다.

003 답 (1) 실수 (2) 허수 (3) 실수 (4) 허수

(1) $\sqrt{5}+1$은 실수부분이 $\sqrt{5}+1$, 허수부분이 0인 실수이다.
(2) $1-\sqrt{2}i$는 실수부분이 1, 허수부분이 $-\sqrt{2}$인 허수이다.
(3) $-1+i^2=-1+(-1)=-2$이므로 실수부분이 -2, 허수부분이 0인 실수이다.
(4) $\frac{\sqrt{3}i+\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$이므로 실수부분이 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 허수부분이 $\frac{\sqrt{3}}{2}$인 허수이다.

004 답 (1) ㄷ, ㄹ, ㅁ (2) ㄱ, ㄴ, ㅂ (3) ㄴ, ㅂ

ㄱ. $-8-7i$는 실수부분이 -8, 허수부분이 -7인 순허수가 아닌 허수이다.
ㄴ. $3i$는 실수부분이 0, 허수부분이 3인 순허수이다.
ㄷ. π는 실수부분이 π, 허수부분이 0인 실수이다.
ㄹ. $4-i^2=4-(-1)=5$이므로 실수부분이 5, 허수부분이 0인 실수이다.
ㅁ. $\sqrt{(-1)^2}=1$이므로 실수부분이 1, 허수부분이 0인 실수이다.
ㅂ. $\sqrt{-1}=i$이므로 실수부분이 0, 허수부분이 1인 순허수이다.
따라서 실수는 ㄷ, ㄹ, ㅁ, 허수는 ㄱ, ㄴ, ㅂ, 순허수는 ㄴ, ㅂ이다.

주의 순허수 역시 허수이므로 허수는 ㄱ뿐이라고 생각하지 않도록 주의한다.

005 답 (1) $a=6$, $b=4$ (2) $a=-2$, $b=8$
(3) $a=-5$, $b=0$ (4) $a=3$, $b=-1$

(1) 두 복소수 $a+bi$, $6+4i$의 실수부분과 허수부분이 각각 같아야 하므로
$a=6$, $b=4$
(2) 두 복소수 $8i-2$, $a+bi$의 실수부분과 허수부분이 각각 같아야 하므로
$a=-2$, $b=8$
(3) 두 복소수 $a+bi$, -5의 실수부분과 허수부분이 각각 같아야 하므로
$a=-5$, $b=0$
(4) 두 복소수 $3+bi$, $a-i$의 실수부분과 허수부분이 각각 같아야 하므로
$a=3$, $b=-1$

006 답 (1) $x=1$, $y=-1$ (2) $x=-3$, $y=-4$
(3) $x=2$, $y=5$ (4) $x=3$, $y=-1$

(1) $x+2=3$, $y-3=-4$이므로
$x=1$, $y=-1$
(2) $3x+4=-5$, $-y-2=2$이므로
$x=-3$, $y=-4$
(3) $x+y=7$, $2x-y=-1$이므로 두 식을 연립하여 풀면
$x=2$, $y=5$
(4) $x+2y+1=2$에서 $x+2y=1$ …… ㉠
$3x+3y-5=1$에서 $3x+3y=6$
$\therefore x+y=2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$x=3$, $y=-1$

007 답 (1) $2-i$ (2) $-3i-3$
(3) $\sqrt{3}-4$ (4) $-2i$

(1) $2+i$의 켤레복소수는 $2-i$이다.
(2) $3i-3=-3+3i$의 켤레복소수는 $-3i-3$이다.
(3) $\sqrt{3}-4$의 켤레복소수는 $\sqrt{3}-4$이다.
(4) $2i$의 켤레복소수는 $-2i$이다.

풍쌤 비법
① 실수 a의 켤레복소수는 a이다.
② 순허수 bi의 켤레복소수는 $-bi$이다.

008 답 (1) $x=10$, $y=-20$ (2) $x=-1$, $y=-6$
(3) $x=-2$, $y=3$ (4) $x=3$, $y=7$

(1) $\overline{x+yi}=x-yi$이므로
$x-yi=10+20i$
$\therefore x=10$, $y=-20$

(2) $\overline{x-yi}=x+yi$이므로

$x+yi=-1-6i$

$\therefore x=-1, y=-6$

(3) $\overline{-2+yi}=-2-yi$이므로

$x-3i=-2-yi$

$\therefore x=-2, y=3$

(4) $\overline{4+(x-2y)i}=4-(x-2y)i$이므로

$(y-x)+11i=4-(x-2y)i$

즉, $y-x=4$, $x-2y=-11$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$x=3, y=7$

009 답 ⑤

① $7-8i$에서 허수부분은 -8이다.

② $\frac{4+2i}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i$에서 실수부분은 $\frac{1}{2}$이다.

③ 0은 복소수이다.

④ $-2i$의 실수부분은 0, 허수부분은 -2이다.

⑤ $\sqrt{5}i$는 순허수이므로 복소수이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

010 답 2

㈎에 해당하는 수는 허수이다.

$5, 0, -i^2=-(-1)=1$은 실수, i, $1+i$는 허수이므로 ㈎에 해당하는 수의 개수는 2이다.

011 답 ②

$\sqrt{5}(1-\sqrt{5}i)=\sqrt{5}-5i$의 실수부분은 $\sqrt{5}$, 허수부분은 -5이므로

$a=-5$

$\frac{2+3i}{4}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i$의 실수부분은 $\frac{1}{2}$, 허수부분은 $\frac{3}{4}$이므로

$b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+2b=-5+2\times\frac{1}{2}=-5+1=-4$

012 답 ③

$(x+3)+(x-2y+9)i=0$에서

$x+3=0, x-2y+9=0$

$x+3=0$에서 $x=-3$

$x-2y+9=0$에 $x=-3$을 대입하면

$-3-2y+9=0, -2y+6=0$

$\therefore y=3$

$\therefore x+y=-3+3=0$

풍쌤 비법 복소수가 서로 같을 조건

(실수부분)+(허수부분)$i=0$이면 (실수부분)$=0$, (허수부분)$=0$

013 답 $x=2, y=5$

$\overline{(3x-y+2)+(-x+y+4)i}=(3x-y+2)-(-x+y+4)i$

이므로

$(3x-y+2)-(-x+y+4)i=3-7i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3x-y+2=3$에서 $3x-y=1$ …… ㉠

$-x+y+4=7$에서 $x-y=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=2, y=5$

다른 풀이

$\overline{(3x-y+2)+(-x+y+4)i}=3-7i$에서

$(3x-y+2)+(-x+y+4)i=\overline{3-7i}=3+7i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3x-y+2=3$에서 $3x-y=1$ …… ㉠

$-x+y+4=7$에서 $x-y=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=2, y=5$

014 답 ①

$(2-i)x+(i-3)y=5i-11$에서

$2x-xi+yi-3y=5i-11$

$(2x-3y)+(y-x)i=-11+5i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x-3y=-11, y-x=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-4, y=1$

$\therefore x+y=-4+1=-3$

015 답 (1) $4+3i$ (2) $4-i$ (3) $6+11i$ (4) $-14-15i$ (5) $-13+2i$ (6) $3+3i$

(1) $(3+2i)+(1+i)=(3+1)+(2i+i)$
$=(3+1)+(2+1)i$
$=4+3i$

(2) $(6-5i)+(-2+4i)=(6-2)+(-5i+4i)$
$=(6-2)+(-5+4)i$
$=4-i$

(3) $(8i-1)+(3i+7)=(-1+7)+(8i+3i)$
$=(-1+7)+(8+3)i$
$=6+11i$

(4) $(-9-11i)+(-4i-5)=(-9-5)+(-11i-4i)$
$=(-9-5)+(-11-4)i$
$=-14-15i$

(5) $-6+(2i-7)=(-6-7)+2i$
$=-13+2i$

(6) $12i+(3-9i)=3+(12i-9i)$
$=3+(12-9)i$
$=3+3i$

016 답 (1) $-1+5i$ (2) $-2-6i$ (3) $5+4i$ (4) $3-5i$ (5) $10-11i$ (6) $3-\sqrt{2}i$

(1) $(5+2i)-(6-3i)=(5-6)+(2i+3i)$
$=(5-6)+(2+3)i$
$=-1+5i$

(2) $(-3+i)-(-1+7i)=(-3+1)+(i-7i)$
$=(-3+1)+(1-7)i$
$=-2-6i$

(3) $(6i+4)-(2i-1)=(4+1)+(6i-2i)$
$=(4+1)+(6-2)i$
$=5+4i$

(4) $(-7-8i)-(-3i-10)=(-7+10)+(-8i+3i)$
$=(-7+10)+(-8+3)i$
$=3-5i$

(5) $-i-(-10+10i)=10+(-i-10i)$
$=10+(-1-10)i$
$=10-11i$

(6) $(\sqrt{2}i-1)-(-4+2\sqrt{2}i)=(-1+4)+(\sqrt{2}i-2\sqrt{2}i)$
$=(-1+4)+(\sqrt{2}-2\sqrt{2})i$
$=3-\sqrt{2}i$

017

답 (1) $1+3i$ (2) $16+4i$ (3) $5-31i$ (4) $-2i$ (5) 5 (6) -61

(1) $(1+i)(2+i)=2+i+2i+i^2$
$=(2-1)+(1+2)i$
$=1+3i$

(2) $(2+2i)(5-3i)=10-6i+10i-6i^2$
$=(10+6)+(-6+10)i$
$=16+4i$

(3) $(4-i)(3-7i)=12-28i-3i+7i^2$
$=(12-7)+(-28-3)i$
$=5-31i$

(4) $(i-1)^2=(-1+i)(-1+i)$
$=1-i-i+i^2$
$=(1-1)+(-1-1)i$
$=-2i$

(5) $(2-i)(2+i)=4+2i-2i-i^2$
$=(4+1)+(2-2)i$
$=5$

(6) $(6-5i)(-6-5i)=-36-30i+30i+25i^2$
$=(-36-25)+(-30+30)i$
$=-61$

다른 풀이

(4) $(i-1)^2=i^2-2\times i\times 1+1^2$
$=-1-2i+1=-2i$

(5) $(2-i)(2+i)=2^2-i^2$
$=4-(-1)=5$

(6) $(6-5i)(-6-5i)=(-5i+6)(-5i-6)$
$=(-5i)^2-6^2$
$=-25-36=-61$

018

답 (1) $1-i$ (2) $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$ (3) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$ (4) $-4+2i$ (5) $\frac{7}{10}-\frac{11}{10}i$ (6) $\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}i$

(1) $\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}$
$=\frac{2(1-i)}{1^2-i^2}$
$=\frac{2(1-i)}{2}=1-i$

(2) $\frac{5}{4-3i}=\frac{5(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}$
$=\frac{5(4+3i)}{4^2-(3i)^2}$
$=\frac{5(4+3i)}{25}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$

(3) $\frac{i}{2+2i}=\frac{i(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}$
$=\frac{2i-2i^2}{2^2-(2i)^2}$
$=\frac{2i+2}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$

(4) $\frac{10i}{1-2i}=\frac{10i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$
$=\frac{10i+20i^2}{1^2-(2i)^2}$
$=\frac{-20+10i}{5}=-4+2i$

(5) $\frac{5-3i}{2i+4}=\frac{(5-3i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}$
$=\frac{(20-6)+(-10-12)i}{4^2-(2i)^2}$
$=\frac{14-22i}{20}=\frac{7}{10}-\frac{11}{10}i$

(6) $\frac{2+\sqrt{2}i}{2-\sqrt{2}i}=\frac{(2+\sqrt{2}i)^2}{(2-\sqrt{2}i)(2+\sqrt{2}i)}$
$=\frac{4+4\sqrt{2}i-2}{2^2-(\sqrt{2}i)^2}$
$=\frac{2+4\sqrt{2}i}{6}=\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}i$

019

답 (1) $4+i$ (2) $5-i$ (3) $\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i$ (4) $\frac{19}{26}+\frac{9}{26}i$

(1) $z_1+z_2=(1-i)+(3+2i)$
$=(1+3)+(-1+2)i=4+i$

(2) $z_1z_2=(1-i)(3+2i)$
$=3+2i-3i-2i^2$
$=(3+2)+(2-3)i=5-i$

(3) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1-i}{3+2i}=\frac{(1-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$
$=\frac{(3-2)+(-2-3)i}{3^2-(2i)^2}$
$=\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i$

(4) $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}=\frac{4+i}{5-i}$ ← (1)에서 $z_1+z_2=4+i$ (2)에서 $z_1z_2=5-i$

$=\frac{(4+i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}$

$=\frac{(20-1)+(4+5)i}{5^2-i^2}$

$=\frac{19+9i}{26}$

$=\frac{19}{26}+\frac{9}{26}i$

다른 풀이

(4) $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{1}{1-i}+\frac{1}{3+2i}$

$=\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}+\frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)}$

$=\frac{1+i}{1^2-i^2}+\frac{3-2i}{3^2-(2i)^2}$

$=\frac{1+i}{2}+\frac{3-2i}{13}$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{13}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{13}\right)i$

$=\frac{19}{26}+\frac{9}{26}i$

020

답 (1) $a=7$, $b=11$
(2) $a=4$, $b=5$
(3) $a=4$, $b=6$

(1) 단계1. 등식의 좌변을 간단히 하기

$(5+3i)(a-2i)=5a-10i+3ai-6i^2$

$=(5a+6)+(3a-10)i$

단계2. 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 a, b의 값 구하기

$(5a+6)+(3a-10)i=41+bi$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$5a+6=41$, $3a-10=b$

$\therefore a=7$, $b=11$

(2) $\frac{a+5i}{i}=\frac{(a+5i)i}{i^2}=\frac{ai+5i^2}{-1}=\frac{ai-5}{-1}=5-ai$

$5-ai=b-4i$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=4$, $b=5$

(3) $\frac{a}{1+i}+\frac{b}{1-i}=\frac{a(1-i)}{(1+i)(1-i)}+\frac{b(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$=\frac{a-ai}{1^2-i^2}+\frac{b+bi}{1^2-i^2}$

$=\frac{a-ai}{2}+\frac{b+bi}{2}$

$=\frac{a+b}{2}+\frac{-a+b}{2}i$

$\frac{a+b}{2}+\frac{-a+b}{2}i=5+i$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\frac{a+b}{2}=5$, $\frac{-a+b}{2}=1$

$a+b=10$, $-a+b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=6$

021

답 (1) $4+2i$ (2) 8 (3) 20

(1) $\overline{z}=\overline{4-2i}=4+2i$

(2) $z+\overline{z}=(4-2i)+(4+2i)=8$

(3) $z\overline{z}=(4-2i)(4+2i)$

$=4^2-(2i)^2$

$=16-(-4)=20$

022

답 (1) $-1-5i$ (2) -2 (3) 26

(1) $\overline{z}=\overline{-1+5i}=-1-5i$

(2) $z+\overline{z}=(-1+5i)+(-1-5i)=-2$

(3) $z\overline{z}=(-1+5i)(-1-5i)$

$=(-1)^2-(5i)^2$

$=1-(-25)=26$

023

답 (1) $3-2i$ (2) $3-2i$
(3) $5-5i$ (4) $5-5i$

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{(1+3i)+(2-i)}$

$=\overline{3+2i}=3-2i$

(2) $\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{1+3i}+\overline{2-i}$

$=(1-3i)+(2+i)$

$=3-2i$

(3) $\overline{z_1z_2}=\overline{(1+3i)(2-i)}$

$=\overline{2-i+6i-3i^2}$

$=\overline{(2+3)+(-1+6)i}$

$=\overline{5+5i}=5-5i$

(4) $\overline{z_1}\times\overline{z_2}=\overline{1+3i}\times\overline{2-i}$

$=(1-3i)(2+i)$

$=2+i-6i-3i^2$

$=(2+3)+(1-6)i$

$=5-5i$

024

답 (1) $2+2i$ (2) $-8-6i$
(3) 8 (4) 100

(1) $\alpha+\beta=(2i-3)+(5-4i)=2-2i$이므로

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{\alpha+\beta}=\overline{2-2i}=2+2i$

(2) $\alpha-\beta=(2i-3)-(5-4i)=-8+6i$이므로

$\overline{\alpha}-\overline{\beta}=\overline{\alpha-\beta}=\overline{-8+6i}=-8-6i$

(3) (1)에서 $\alpha+\beta=2-2i$, $\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{\alpha+\beta}=2+2i$이므로

$\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}=\alpha(\overline{\alpha}+\overline{\beta})+\beta(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$

$=(2-2i)(2+2i)$

$=2^2-(2i)^2$

$=4-(-4)=8$

(4) (2)에서 $\alpha-\beta=-8+6i$, $\overline{\alpha}-\overline{\beta}=\overline{\alpha-\beta}=-8-6i$이므로

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}&=\overline{\alpha}(\alpha-\beta)-\overline{\beta}(\alpha-\beta)\\&=(\overline{\alpha}-\overline{\beta})(\alpha-\beta)\\&=(\overline{\alpha-\beta})(\alpha-\beta)\\&=(-8-6i)(-8+6i)\\&=(-8)^2-(6i)^2\\&=64-(-36)=100\end{aligned}$$

025 답 $8-9i$

$$\begin{aligned}&3(4-3i)-(-6+2i)+2(i-5)\\&=12-9i+6-2i+2i-10\\&=(12+6-10)+(-9i-2i+2i)\\&=8-9i\end{aligned}$$

026 답 ③

$$\begin{aligned}&(\sqrt{5}-i)^2+(\sqrt{5}+i)^2\\&=(\sqrt{5}-i)(\sqrt{5}-i)+(\sqrt{5}+i)(\sqrt{5}+i)\\&=\{(5-1)+(-\sqrt{5}-\sqrt{5})i\}+\{(5-1)+(\sqrt{5}+\sqrt{5})i\}\\&=(4-2\sqrt{5}i)+(4+2\sqrt{5}i)=8\end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}(\sqrt{5}-i)^2+(\sqrt{5}+i)^2&=(5-2\sqrt{5}i-1)+(5+2\sqrt{5}i-1)\\&=(4-2\sqrt{5}i)+(4+2\sqrt{5}i)=8\end{aligned}$$

027 답 ⑤

$$\begin{aligned}&(4i-1)(-i+3)-\frac{2+3i}{2-i}\\&=\{(4-3)+(12+1)i\}-\frac{(2+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}\\&=1+13i-\frac{(4-3)+(2+6)i}{2^2-i^2}\\&=1+13i-\frac{1+8i}{5}\\&=\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(13-\frac{8}{5}\right)i\\&=\frac{4}{5}+\frac{57}{5}i\end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{4}{5}$, $b=\frac{57}{5}$이므로

$a+b=\frac{4}{5}+\frac{57}{5}=\frac{61}{5}$

028 답 $-\frac{6}{5}$

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{1+2i}{1-2i}=\frac{(1+2i)^2}{(1-2i)(1+2i)}\\&=\frac{1+4i-4}{1^2-(2i)^2}=\frac{-3+4i}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}&=\frac{1-2i}{1+2i}=\frac{(1-2i)^2}{(1+2i)(1-2i)}\\&=\frac{1-4i-4}{1^2-(2i)^2}=\frac{-3-4i}{5}\end{aligned}$$

$\therefore\ \alpha+\frac{1}{\alpha}=\frac{-3+4i}{5}+\frac{-3-4i}{5}=-\frac{6}{5}$

다른 풀이

$\alpha=\frac{-3+4i}{5}$이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}&=\frac{5}{-3+4i}=\frac{5(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}\\&=\frac{5(-3-4i)}{(-3)^2-(4i)^2}=\frac{5(-3-4i)}{25}\\&=\frac{-3-4i}{5}\end{aligned}$$

$\therefore\ \alpha+\frac{1}{\alpha}=\frac{-3+4i}{5}+\frac{-3-4i}{5}=-\frac{6}{5}$

029 답 ④

$$\begin{aligned}a(8-3i)+4(-2+2i)&=8a-3ai-8+8i\\&=(8a-8)-(3a-8)i\end{aligned}$$

이 복소수가 실수가 되려면 허수부분이 0이어야 한다.

즉, $3a-8=0$에서 $a=\frac{8}{3}$

030 답 1

$$\begin{aligned}x^2+(2+i)x-3(1-i)&=x^2+2x+ix-3+3i\\&=(x^2+2x-3)+(x+3)i\end{aligned}$$

이 복소수가 순허수가 되려면 실수부분은 0이고 허수부분은 0이 아니어야 한다. 즉,

$x^2+2x-3=0$, $x+3\neq0$

$x^2+2x-3=0$에서 $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=1$ ...... ㉠

$x+3\neq0$에서 $x\neq-3$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $x=1$

참고 실수부분이 0이고 허수부분이 0이면 0이 되므로 실수이다. 즉, 허수부분이 0이 아니라는 조건이 반드시 필요하다.

031 답 ①

$$\begin{aligned}z&=(12-5i)-(4+i)a\\&=12-5i-4a-ai\\&=(12-4a)+(-5-a)i\end{aligned}$$

z^2이 양의 실수가 되려면 z는 0이 아닌 실수이어야 한다.

즉, $12-4a\neq0$, $-5-a=0$이므로

$a=-5$

032 답 6

$$\begin{aligned}z&=2a^2i+(1-5i)a-2(3-i)\\&=2a^2i+a-5ai-6+2i\\&=(a-6)+(2a^2-5a+2)i\end{aligned}$$

z^2이 음의 실수가 되려면 z는 순허수이어야 하므로 실수부분은 0이고 허수부분은 0이 아니어야 한다. 즉,

$a-6=0$, $2a^2-5a+2\neq0$

$a-6=0$에서 $a=6$ ...... ㉠

$2a^2-5a+2\neq0$에서
$(2a-1)(a-2)\neq0$
$\therefore\ a\neq\frac{1}{2}$이고 $a\neq2$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $a=6$

033 답 $-\frac{3}{65}+\frac{41}{65}i$

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}=\frac{(1+2i)-(2-3i)}{(2-3i)(1+2i)}$$
$$=\frac{(1-2)+(2i+3i)}{(2+6)+(4-3)i}=\frac{-1+5i}{8+i}$$
$$=\frac{(-1+5i)(8-i)}{(8+i)(8-i)}$$
$$=\frac{(-8+5)+(1+40)i}{8^2-i^2}$$
$$=\frac{-3+41i}{65}$$
$$=-\frac{3}{65}+\frac{41}{65}i$$

다른 풀이

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=\frac{1}{2-3i}-\frac{1}{1+2i}$$
$$=\frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)}-\frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}$$
$$=\frac{2+3i}{2^2-(3i)^2}-\frac{1-2i}{1^2-(2i)^2}$$
$$=\frac{2+3i}{13}-\frac{1-2i}{5}$$
$$=\left(\frac{2}{13}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{3}{13}+\frac{2}{5}\right)i$$
$$=-\frac{3}{65}+\frac{41}{65}i$$

034 답 ①

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$
$$=\{(2i-4)+(-1-5i)\}^2-2(2i-4)(-1-5i)$$
$$=(-5-3i)^2-2\{(10+4)+(-2+20)i\}$$
$$=(25+30i-9)-2(14+18i)$$
$$=16+30i-28-36i$$
$$=-12-6i$$

035 답 ②

$x=1+3i$에서 $x-1=3i$
양변을 제곱하면
$x^2-2x+1=-9$ $\quad\therefore\ x^2-2x+10=0$
$\therefore\ x^2-2x+8=(x^2-2x+10)-2$
$=0-2=-2$

다른 풀이

$$x^2-2x+8=(1+3i)^2-2(1+3i)+8$$
$$=(1+6i-9)-2-6i+8$$
$$=-2$$

풍쌤 비법 복소수가 주어질 때의 식의 값

$x=a+bi$ (a, b는 실수)가 주어질 때, x에 대한 이차식의 값은 다음 순서로 구할 수 있다.
① $x-a=bi$ 꼴로 변형한 후 양변을 제곱한다.
② 주어진 식을 ①의 이차식이 포함된 식으로 변형하여 값을 구한다.

036 답 ①

$$z=\frac{29}{5-2i}=\frac{29(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)}$$
$$=\frac{29(5+2i)}{5^2-(2i)^2}=\frac{29(5+2i)}{29}$$
$$=5+2i$$

$z-5=2i$의 양변을 제곱하면
$z^2-10z+25=-4$ $\quad\therefore\ z^2-10z+29=0$
$\therefore\ 2z^2-20z+60=2(z^2-10z+29)+2$
$=2\times0+2=2$

037 답 ⑤

$(3x-4)+(2x-y+3)i=\overline{2+6i}=2-6i$
이므로
$3x-4=2$, $2x-y+3=-6$
$3x-4=2$에서 $3x=6$ $\quad\therefore\ x=2$ …… ㉠
$2x-y+3=-6$에서
$2x-y=-9$
위의 식에 ㉠을 대입하면 $y=13$
$\therefore\ x+y=2+13=15$

참고 $\overline{(3x-4)+(2x-y+3)i}=(3x-4)-(2x-y+3)i=2+6i$임을 이용하여 식을 세울 수도 있다.

038 답 20

$z_1+z_2=(-7+3i)+(i+5)=-2+4i$
$\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}=\overline{-2+4i}=-2-4i$
$\therefore\ (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=(-2+4i)(-2-4i)$
$=(-2)^2-(4i)^2$
$=4-(-16)=20$

참고 $\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{-7+3i}+\overline{i+5}$
$=(-7-3i)+(-i+5)$
$=-2-4i$
와 같이 계산할 수도 있다.

039 답 ②

$\overline{z}=\overline{3-i}=3+i$이므로

$$\frac{z+1}{\overline{z}}=\frac{(3-i)+1}{3+i}=\frac{4-i}{3+i}$$
$$=\frac{(4-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{(12-1)+(-4-3)i}{3^2-i^2}$$
$$=\frac{11-7i}{10}=\frac{11}{10}-\frac{7}{10}i$$

따라서 $\frac{z+1}{z}$의 허수부분은 $-\frac{7}{10}$이다.

040 답 $-8i$

$z=\frac{5}{2i+1}=\frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$

$=\frac{5(1-2i)}{1^2-(2i)^2}=\frac{5(1-2i)}{5}$

$=1-2i$

이므로

$\overline{z}=1+2i$

$\therefore\ z^2-\overline{z}^2=(1-2i)^2-(1+2i)^2$

$=(1-4i-4)-(1+4i-4)=-8i$

다른 풀이

$z=1-2i$, $\overline{z}=1+2i$이므로

$z^2-\overline{z}^2=(z+\overline{z})(z-\overline{z})$

$=\{(-2i+1)+(2i+1)\}\{(-2i+1)-(2i+1)\}$

$=2\times(-4i)=-8i$

041 답 ③

$\alpha+\beta=(-3-6i)+(9+4i)=6-2i$이므로

$\overline{\alpha+\beta}=6+2i$

$\therefore\ \alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}=\alpha(\overline{\alpha}+\overline{\beta})+\beta(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$

$=(6-2i)(6+2i)$

$=6^2-(2i)^2$

$=36-(-4)=40$

042 답 ⑤

$\alpha-\beta=4i+8$이므로 $\overline{\alpha-\beta}=-4i+8$

$\therefore\ \alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}=\alpha(\overline{\alpha}-\overline{\beta})-\beta(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$

$=(4i+8)(-4i+8)$

$=8^2-(4i)^2$

$=64-(-16)=80$

043 답 ⑤

$\alpha\beta=1$에서 $\alpha=\frac{1}{\beta}$

또, 켤레복소수의 성질에 의하여

$\alpha\beta=1$에서 $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\times\overline{\beta}=1$이므로 $\frac{1}{\overline{\alpha}}=\overline{\beta}$

$\therefore\ \frac{1}{\beta}+\overline{\beta}=\alpha+\frac{1}{\overline{\alpha}}=4$

044 답 $2\pm5i$

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

$\overline{z}=a-bi$

$z+\overline{z}=4$에서 $(a+bi)+(a-bi)=2a=4$

$\therefore\ a=2$

$z\overline{z}=29$에서 $(2+bi)(2-bi)=29$

$2^2+b^2=29$, $b^2=25$

$\therefore\ b=\pm5$

따라서 구하는 복소수 z는 $2\pm5i$이다.

045 답 ②

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

$\overline{z}=a-bi$

$iz+3\overline{z}=-7-13i$에서

$(a+bi)i+3(a-bi)=-7-13i$

$ai-b+3a-3bi=-7-13i$

$(3a-b)+(a-3b)i=-7-13i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3a-b=-7$, $a-3b=-13$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=4$

따라서 구하는 복소수 z는 $-1+4i$이다.

046 답 ③

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

$z-zi=(a+bi)-(a+bi)i$

$=(a+bi)-ai+b$

$=(a+b)-(a-b)i$

이때

$\overline{z-zi}=(a+b)+(a-b)i=2+8i$

이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=2$, $a-b=8$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=5$, $b=-3$

따라서 $z=5-3i$, $\overline{z}=5+3i$이므로

$z+\overline{z}=(5-3i)+(5+3i)=10$

047 답 13

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

$\overline{z}=a-bi$

$(5+2i)z+(3-i)\overline{z}=4i-25$에서

$(5+2i)(a+bi)+(3-i)(a-bi)=-25+4i$

$(5a-2b)+(2a+5b)i+(3a-b)+(-a-3b)i=-25+4i$

$(8a-3b)+(a+2b)i=-25+4i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$8a-3b=-25$, $a+2b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=3$

따라서 $z=-2+3i$, $\overline{z}=-2-3i$이므로

$z\bar{z}=(-2+3i)(-2-3i)=(-2)^2-(3i)^2$
$=4-(-9)=13$

048

답 (1) $\sqrt{2}i$ (2) $3i$ (3) $2\sqrt{3}i$ (4) $-3\sqrt{5}i$

(1) $\sqrt{-2}=\sqrt{2}i$

(2) $\sqrt{-9}=\sqrt{9}i=3i$

(3) $\sqrt{-12}=\sqrt{12}i=2\sqrt{3}i$

(4) $-\sqrt{-45}=-\sqrt{45}i=-3\sqrt{5}i$

049

답 (1) $\pm\sqrt{6}i$ (2) $\pm4\sqrt{2}i$ (3) $\pm7i$ (4) $\pm\frac{2\sqrt{2}}{5}i$

(1) -6의 제곱근은 $\pm\sqrt{6}i$

(2) -32의 제곱근은 $\pm\sqrt{32}i=\pm4\sqrt{2}i$

(3) -49의 제곱근은 $\pm\sqrt{49}i=\pm7i$

(4) $-\frac{8}{25}$의 제곱근은 $\pm\sqrt{\frac{8}{25}}i=\pm\frac{2\sqrt{2}}{5}i$

050

답 (1) $4\sqrt{3}i$ (2) $-\sqrt{2}i$ (3) $-\sqrt{14}$ (4) $-\sqrt{13}i$ (5) $\sqrt{15}i-\sqrt{15}$ (6) $2\sqrt{7}i$

(1) $\sqrt{-3}+\sqrt{-27}=\sqrt{3}i+3\sqrt{3}i=4\sqrt{3}i$

(2) $\sqrt{-8}-\sqrt{-18}=2\sqrt{2}i-3\sqrt{2}i=-\sqrt{2}i$

(3) $\sqrt{-2}\sqrt{-7}=\sqrt{2}i\times\sqrt{7}i=-\sqrt{14}$

(4) $\frac{\sqrt{65}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{65}}{\sqrt{5}i}=\frac{\sqrt{65}i}{\sqrt{5}i^2}=-\sqrt{13}i$

(5) $\sqrt{-5}\sqrt{3}+\sqrt{-5}\sqrt{-3}=\sqrt{5}i\times\sqrt{3}+\sqrt{5}i\times\sqrt{3}i$
$=\sqrt{15}i-\sqrt{15}$

(6) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{-21}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{-3}}-\frac{\sqrt{-21}}{\sqrt{-3}}$
$=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{21}i}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}i}-\frac{\sqrt{21}i}{\sqrt{3}i}$
$=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{21}i}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{21}i}{\sqrt{3}i^2}-\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}$
$=\sqrt{7}+\sqrt{7}i-(-\sqrt{7}i)-\sqrt{7}=2\sqrt{7}i$

051

답 (1) 1 (2) i (3) -1 (4) i

(1) $i^{20}=(i^4)^5=1$

(2) $(-i)^{67}=-i^{67}=-(i^4)^{16}\times i^3=-i^3=-1\times(-i)=i$

(3) $i^{102}=(i^4)^{25}\times i^2=i^2=-1$

(4) $i^{289}=(i^4)^{72}\times i=i$

052

답 (1) 0 (2) $i-1$ (3) $-i$ (4) 0

(1) $i^{10}+i^{11}+i^{12}+i^{13}=i^2+i^3+i^4+i=0$

(2) $i+i^2+i^3+\cdots+i^{50}$
$=(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)+\cdots$
$+(i^{45}+i^{46}+i^{47}+i^{48})+i^{49}+i^{50}$
$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots$
$+i^{44}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{48}\times i+i^{48}\times i^2$
$=i+i^2=i-1$

(3) $\frac{1}{i^{20}}+\frac{1}{i^{21}}+\frac{1}{i^{22}}=\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}$
$=1+\frac{i}{i^2}-1=-i$

(4) $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{100}}$
$=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\left(\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}\right)+\cdots$
$+\left(\frac{1}{i^{97}}+\frac{1}{i^{98}}+\frac{1}{i^{99}}+\frac{1}{i^{100}}\right)$
$=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\cdots$
$+\frac{1}{i^{96}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)$
$=0$

053

답 (1) 1 (2) $-i$ (3) $-i$ (4) -1

(1) 단계1. $\frac{1+i}{1-i}$을 간단히 하기

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i-1}{1^2-i^2}=\frac{2i}{2}=i$

단계2. 주어진 수 계산하기

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8=i^8=(i^4)^2=1$

(2) $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i-1}{1^2-i^2}$
$=\frac{-2i}{2}=-i$

이므로

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^9=(-i)^9=-i^9=-(i^4)^2\times i=-i$

(3) 단계1. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2$을 간단히 하기

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{(1+i)^2}{2}=\frac{1+2i-1}{2}=\frac{2i}{2}=i$

단계2. 주어진 수 계산하기

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{22}=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{11}=i^{11}=(i^4)^2\times i^3$
$=i^3=-i$

(4) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{(1-i)^2}{2}=\frac{1-2i-1}{2}$
$=\frac{-2i}{2}=-i$

이므로

$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{60}=\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{30}=(-i)^{30}=i^{30}$
$=(i^4)^7\times i^2=i^2=-1$

다른 풀이

(1) $z=\frac{1+i}{1-i}$로 놓으면

$z^2=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2=\frac{1+2i-1}{1-2i-1}=\frac{2i}{-2i}=-1$

주어진 식을 정리하면

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8=z^8=(z^2)^4=(-1)^4=1$

(2) $z=\dfrac{1-i}{1+i}$로 놓으면

$$z^2=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2=\frac{1-2i-1}{1+2i-1}=\frac{-2i}{2i}=-1$$

주어진 식을 정리하면

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^9=z^9=(z^2)^4\times z$$
$$=(-1)^4\times z=z$$
$$=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{1-2i-1}{1^2-i^2}$$
$$=\frac{-2i}{2}=-i$$

풍쌤 비법 복소수의 거듭제곱

복소수 z^n (n은 자연수)의 값을 구할 때는 먼저 z를 간단히 한 다음, $i^{4m+k}=i^k$ (m, k는 자연수)를 이용한다.

054 답 ①

$$\sqrt{2}\sqrt{-8}+\sqrt{-18}\sqrt{-2}+\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{-16}}$$
$$=\sqrt{2}\times2\sqrt{2}i+3\sqrt{2}i\times\sqrt{2}i+\frac{2i}{\sqrt{2}}+\frac{4\sqrt{2}}{4i}$$
$$=4i-6+\sqrt{2}i+\frac{\sqrt{2}i}{i^2}$$
$$=4i-6+\sqrt{2}i-\sqrt{2}i$$
$$=-6+4i$$

따라서 $a=-6$, $b=4$이므로

$a+b=-6+4=-2$

055 답 ㄱ, ㄹ

ㄱ. $\sqrt{5}\sqrt{-4}=\sqrt{5}\times2i=2\sqrt{5}i=2\sqrt{-5}$

ㄴ. $\sqrt{-9}\sqrt{-16}=3i\times4i=-12$

ㄷ. $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{-5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}i}=\dfrac{2i}{i^2}=-2i$

ㄹ. $\dfrac{\sqrt{-24}}{\sqrt{-6}}=\dfrac{2\sqrt{6}i}{\sqrt{6}i}=2$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

056 답 ⑤

$$z=\sqrt{-6}\sqrt{-3}-\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-6}}$$
$$=\sqrt{6}i\times\sqrt{3}i-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}i}$$
$$=-3\sqrt{2}-\frac{2i}{\sqrt{2}i^2}$$
$$=-3\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

따라서 $\overline{z}=-3\sqrt{2}-\sqrt{2}i$이므로

$$z\overline{z}=(-3\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(-3\sqrt{2}-\sqrt{2}i)$$
$$=(-3\sqrt{2})^2-(\sqrt{2}i)^2$$
$$=18-(-2)=20$$

057 답 ④

$$1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{150}$$
$$=(1+i+i^2+i^3)+(i^4+i^5+i^6+i^7)+\cdots+(i^{144}+i^{145}+i^{146}+i^{147})+i^{148}+i^{149}+i^{150}$$
$$=(1+i+i^2+i^3)+i^4(1+i+i^2+i^3)+\cdots+i^{144}(1+i+i^2+i^3)+i^{148}(1+i+i^2)$$
$$=1+i+i^2=i$$

058 답 2

$$z=1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{25}}$$
$$=\left(1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}\right)+\left(\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{i^{20}}+\frac{1}{i^{21}}+\frac{1}{i^{22}}+\frac{1}{i^{23}}\right)+\frac{1}{i^{24}}+\frac{1}{i^{25}}$$
$$=\left(1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}\right)+\frac{1}{i^4}\left(1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}\right)+\cdots+\frac{1}{i^{20}}\left(1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}\right)+\frac{1}{i^{24}}\left(1+\frac{1}{i}\right)$$
$$=1+\frac{1}{i}=1-i$$

따라서 $\overline{z}=1+i$이므로

$z+\overline{z}=(1-i)+(1+i)=2$

059 답 ①

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i-1}{1^2-i^2}=\frac{2i}{2}=i$$
$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i-1}{1^2-i^2}=\frac{-2i}{2}=-i$$
$$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}=i^{10}+(-i)^{10}$$
$$=i^2+i^2=-2$$

060 답 ④

$$z^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1+2i-1}{2}=\frac{2i}{2}=i$$
$$\therefore z^2+z^4+z^6+z^8+z^{10}=i+i^2+i^3+i^4+i^5$$
$$=i^5=i$$

중단원 점검 문제

Ⅱ-1 | 복소수 068~069쪽

01 답 ③

$a+4+bi=b+(2-i)i$에서

$$(a+4)+bi=b+2i+1$$
$$=(b+1)+2i$$

이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+4=b+1$, $b=2$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로

$a+b=-1+2=1$

02 답 ⑤

$$\frac{25}{3+4i}-\frac{20}{4-2i}=\frac{25(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}-\frac{20(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}$$
$$=\frac{25(3-4i)}{3^2-(4i)^2}-\frac{20(4+2i)}{4^2-(2i)^2}$$
$$=(3-4i)-(4+2i)$$
$$=-1-6i$$

따라서 $a=-1$, $b=-6$이므로

$a-b=-1-(-6)=5$

03 답 -18

$z_1=(-3-3i)^2=9+18i-9=18i$

$$z_2=\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}=\frac{(\sqrt{2}+i)^2}{(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)}$$
$$=\frac{2+2\sqrt{2}i-1}{(\sqrt{2})^2-i^2}=\frac{1+2\sqrt{2}i}{3}$$

$$\therefore z_1z_2=18i\times\frac{1+2\sqrt{2}i}{3}$$
$$=6i(1+2\sqrt{2}i)$$
$$=-12\sqrt{2}+6i$$

따라서 $a=-12\sqrt{2}$, $b=6$이므로

$\sqrt{2}a+b=-24+6=-18$

04 답 $6-7i$

$(-1+2i)☆(3-i)$

$=(-1+2i)+2(3-i)-(-1+2i)(3-i)$

$=(-1+2i)+(6-2i)-\{(-3+2)+(1+6)i\}$

$=(-1+2i)+(6-2i)-(-1+7i)$

$=6-7i$

05 답 ②

$$z^2+2z+ai=(3+i)^2+2(3+i)+ai$$
$$=(9+6i-1)+(6+2i)+ai$$
$$=14+(a+8)i$$
$$=b+3i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+8=3$, $b=14$

따라서 $a=-5$, $b=14$이므로

$a+b=-5+14=9$

06 답 ⑤

$z=a(a+1)-2(2-i)a-4$

$=a^2+a-4a+2ai-4$

$=(a^2-3a-4)+2ai$

z^2이 실수가 되려면 z는 실수 또는 순허수이어야 한다.

즉, $a^2-3a-4=0$ 또는 $2a=0$

(ⅰ) $a^2-3a-4=0$에서 $(a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$

(ⅱ) $2a=0$에서 $a=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$-1+4+0=3$

07 답 ⑤

$x=\frac{-1+\sqrt{7}i}{4}$에서 $4x+1=\sqrt{7}i$

양변을 제곱하면

$16x^2+8x+1=-7$, $16x^2+8x+8=0$

$\therefore 2x^2+x+1=0$

$$\therefore 4x^3+2x^2+2x+8=2x(2x^2+x+1)+8$$
$$=2x\times0+8=8$$

08 답 ③

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

① $z+\overline{z}=2a$이므로 실수이다.

② $z-\overline{z}=2bi$이므로 허수이다.

③ $z^2-\overline{z}^2=(z+\overline{z})(z-\overline{z})=2a\times2bi=4abi$

따라서 허수이다.

④ z가 순허수이면 $a=0$이므로 $z=bi$

따라서 $\overline{z}=-bi$이므로 순허수이다.

⑤ z가 실수이면 $b=0$이므로 $z=a$

따라서 $\overline{z}=a$이므로 $z=\overline{z}$이다.

풍쌤 비법

$z=a+bi$의 켤레복소수는 $\overline{z}=a-bi$이므로

① $z+\overline{z}=2a$ ← 실수 ② $z\overline{z}=a^2+b^2$ ← 실수

09 답 ②

$x+y=(5-2i)+(5+2i)=10$

$xy=(5-2i)(5+2i)=5^2-(2i)^2=25+4=29$

$$\therefore x^3y+x^2+y^2+xy^3=(x^3y+xy^3)+(x^2+y^2)$$
$$=(x^2+y^2)xy+(x^2+y^2)$$
$$=(x^2+y^2)(xy+1)$$
$$=\{(x+y)^2-2xy\}(xy+1)$$
$$=(10^2-2\times29)\times(29+1)$$
$$=42\times30=1260$$

10 답 ①

$z=\overline{z}$이면 z는 실수이므로 이를 만족시키는 것은 ①이다.

11 답 ④

$\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}=-4-3i$이므로

$z_1+z_2=-4+3i$

$\overline{z_1}\times\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}=8-6i$이므로

$z_1z_2=8+6i$

$\therefore (z_1-3)(z_2-3)=z_1z_2-3(z_1+z_2)+9$
$=(8+6i)-3(-4+3i)+9$
$=(8+6i)+(12-9i)+9$
$=29-3i$

12 답 8

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$2(\overline{z}-z)+3(z+\overline{z})=2\{a-bi-(a+bi)\}+3(a+bi+a-bi)$
$=-4bi+6a$
$=12-8i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$6a=12$, $-4b=-8$

이므로 $a=2$, $b=2$

따라서 $z=2+2i$, $\overline{z}=2-2i$이므로

$z\overline{z}=(2+2i)(2-2i)$
$=2^2-(2i)^2$
$=4+4=8$

13 답 7

a가 음수이므로 양수 b에 대하여 $a=-b$라 하면

$$\frac{\sqrt{-4a}}{\sqrt{a}\sqrt{-4}}-\frac{\sqrt{-32}\sqrt{4a}}{\sqrt{2}\sqrt{-a}}=\frac{\sqrt{4b}}{\sqrt{-b}\sqrt{-4}}-\frac{\sqrt{-32}\sqrt{-4b}}{\sqrt{2}\sqrt{b}}$$
$$=\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{b}i\times 2i}-\frac{4\sqrt{2}i\times 2\sqrt{b}i}{\sqrt{2}\sqrt{b}}$$
$$=-\frac{2\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}+\frac{4\sqrt{2}\times 2\sqrt{b}}{\sqrt{2}\sqrt{b}}$$
$$=-1+8=7$$

14 답 ③

$0<a<1$이므로

$a-1<0$, $-a<0$, $2-a>0$

$$\therefore \sqrt{a-1}\sqrt{a-1}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-a}}+\frac{\sqrt{2-a}}{\sqrt{2-a}}+\frac{\sqrt{a}\sqrt{-a}}{a}$$
$$=-\sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{\frac{a}{-a}}+\sqrt{\frac{2-a}{2-a}}+\sqrt{\frac{-a^2}{a^2}}$$
$$=-(1-a)-i+1+i$$
$$=a$$

다른 풀이

$$\sqrt{a-1}\sqrt{a-1}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-a}}+\frac{\sqrt{2-a}}{\sqrt{2-a}}+\frac{\sqrt{a}\sqrt{-a}}{a}$$
$$=\sqrt{1-a}i\times\sqrt{1-a}i+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}i}+1+\frac{\sqrt{a}\times\sqrt{a}i}{a}$$
$$=-\sqrt{(1-a)^2}+\frac{1}{i}+1+\frac{ai}{a}$$
$$=-(1-a)-i+1+i$$
$$=a$$

15 답 ③

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i-1}{1^2-i^2}=\frac{2i}{2}=i$$

이므로

$f(n)=i^n$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$
$=i+i^2+i^3+\cdots+i^{10}$
$=(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)+i^9+i^{10}$
$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+i^8(i+i^2)$
$=i+i^2=-1+i$

16 답 31

$i+2i^2+3i^3+\cdots+30i^{30}$
$=(i+2i^2+3i^3+4i^4)+(5i^5+6i^6+7i^7+8i^8)+\cdots$
$+(25i^{25}+26i^{26}+27i^{27}+28i^{28})+29i^{29}+30i^{30}$
$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)+\cdots$
$+(25i-26-27i+28)+29i-30$
$=(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)+29i-30$
$=7(2-2i)+29i-30$
$=14-14i+29i-30$
$=-16+15i$

따라서 $a=-16$, $b=15$이므로

$b-a=15-(-16)=31$

001 답 (1) $x=2$ 또는 $x=3$
(2) $x=-3$ 또는 $x=5$
(3) $x=4$
(4) $x=-6$ 또는 $x=-5$
(5) $x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{2}$
(6) $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

(1) $x^2-5x+6=0$에서 $(x-2)(x-3)=0$이므로
$x=2$ 또는 $x=3$
(2) $x^2-2x-15=0$에서 $(x+3)(x-5)=0$이므로
$x=-3$ 또는 $x=5$
(3) $x^2-8x+16=0$에서 $(x-4)^2=0$이므로
$x=4$
(4) $x^2+11x+30=0$에서 $(x+6)(x+5)=0$이므로
$x=-6$ 또는 $x=-5$
(5) $2x^2+3x-2=0$에서 $(x+2)(2x-1)=0$이므로
$x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{2}$
(6) $6x^2-5x-6=0$에서 $(3x+2)(2x-3)=0$이므로
$x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

002 답 (1) $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ (2) $x=\frac{1\pm\sqrt{15}i}{2}$
(3) $x=\frac{-5\pm\sqrt{3}i}{2}$ (4) $x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$
(5) $x=\frac{-1\pm\sqrt{39}i}{4}$ (6) $x=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{6}$

(1) $x^2+x-3=0$에서
$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-3)}}{2\times1}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$
(2) $x^2-x+4=0$에서
$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times4}}{2\times1}=\frac{1\pm\sqrt{-15}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{15}i}{2}$
(3) $x^2+5x+7=0$에서
$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times7}}{2\times1}=\frac{-5\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{3}i}{2}$
(4) $x^2-3x-2=0$에서
$x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$
(5) $2x^2+x+5=0$에서
$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times2\times5}}{2\times2}=\frac{-1\pm\sqrt{-39}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{39}i}{4}$
(6) $3x^2-3x+1=0$에서
$x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times3\times1}}{2\times3}=\frac{3\pm\sqrt{-3}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{6}$

003 답 (1) $x=-1\pm\sqrt{3}$ (2) $x=-2\pm\sqrt{2}i$
(3) $x=1\pm\sqrt{2}$ (4) $x=-3\pm\sqrt{6}$
(5) $x=\frac{1\pm3i}{2}$ (6) $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

(1) $x^2+2\times x-2=0$에서
$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\times(-2)}=-1\pm\sqrt{3}$
(2) $x^2+2\times2x+6=0$에서
$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\times6}=-2\pm\sqrt{-2}=-2\pm\sqrt{2}i$
(3) $x^2-2\times x-1=0$에서
$x=1\pm\sqrt{(-1)^2-1\times(-1)}=1\pm\sqrt{2}$
(4) $x^2+2\times3x+3=0$에서
$x=-3\pm\sqrt{3^2-1\times3}=-3\pm\sqrt{6}$
(5) $2x^2-2\times x+5=0$에서
$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-2\times5}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-9}}{2}=\frac{1\pm3i}{2}$
(6) $4x^2+2\times x-1=0$에서
$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times(-1)}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

004 답 (1) $x=\frac{3\pm\sqrt{15}i}{2}$, 허근
(2) $x=2\pm\sqrt{2}$, 실근
(3) $x=-1\pm\sqrt{5}$, 실근
(4) $x=\frac{-5\pm\sqrt{31}i}{4}$, 허근
(5) $x=\frac{-3\pm\sqrt{11}i}{5}$, 허근
(6) $x=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{12}$, 허근

(1) $x^2-3x+6=0$에서
$x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times6}}{2\times1}=\frac{3\pm\sqrt{-15}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{15}i}{2}$
따라서 주어진 방정식의 근은 허근이다.
(2) $x^2-2\times2x+2=0$에서
$x=2\pm\sqrt{(-2)^2-1\times2}=2\pm\sqrt{2}$
따라서 주어진 방정식의 근은 실근이다.
(3) $x^2+2\times x-4=0$에서
$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\times(-4)}=-1\pm\sqrt{5}$
따라서 주어진 방정식의 근은 실근이다.
(4) $2x^2+5x+7=0$에서
$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times2\times7}}{2\times2}=\frac{-5\pm\sqrt{-31}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{31}i}{4}$
따라서 주어진 방정식의 근은 허근이다.
(5) $5x^2+2\times3x+4=0$에서
$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-5\times4}}{5}=\frac{-3\pm\sqrt{-11}}{5}=\frac{-3\pm\sqrt{11}i}{5}$
따라서 주어진 방정식의 근은 허근이다.
(6) $6x^2+x+1=0$에서
$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times6\times1}}{2\times6}=\frac{-1\pm\sqrt{-23}}{12}=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{12}$
따라서 주어진 방정식의 근은 허근이다.

005 답 (1) $x=-5$ (2) $x=7$ (3) $x=-\frac{5}{2}$

(1) 단계1. $x=8$을 이차방정식에 대입하기
이차방정식 $x^2-3x+4a=0$의 한 근이 8이므로 이 방정식에
$x=8$을 대입하면

$64-24+4a=0$, $4a=-40$ $\therefore a=-10$

단계2. 다른 한 근 구하기

주어진 이차방정식은 $x^2-3x-40=0$이므로

$(x+5)(x-8)=0$ $\therefore x=-5$ 또는 $x=8$

따라서 다른 한 근은 $x=-5$이다.

(2) 이차방정식 $x^2-ax-14=0$의 한 근이 -2이므로 이 방정식에 $x=-2$를 대입하면

$4+2a-14=0$, $2a=10$ $\therefore a=5$

주어진 이차방정식은 $x^2-5x-14=0$이므로

$(x+2)(x-7)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=7$

따라서 다른 한 근은 $x=7$이다.

(3) 이차방정식 $6x^2+ax-10=0$의 한 근이 $\frac{2}{3}$이므로 이 방정식에 $x=\frac{2}{3}$를 대입하면

$6\times\frac{4}{9}+\frac{2}{3}a-10=0$, $\frac{2}{3}a=\frac{22}{3}$ $\therefore a=11$

주어진 이차방정식은 $6x^2+11x-10=0$이므로

$(2x+5)(3x-2)=0$ $\therefore x=-\frac{5}{2}$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

따라서 다른 한 근은 $x=-\frac{5}{2}$이다.

006 답 ②

$x^2-2x-35=0$에서 $(x+5)(x-7)=0$이므로

$x=-5$ 또는 $x=7$

$\therefore |\alpha-\beta|=|-5-7|=12$

참고 $\alpha=7$, $\beta=-5$라 하면

$|\alpha-\beta|=|7-(-5)|=12$

007 답 ⑤

$3x^2-2\times x-2=0$에서

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-3\times(-2)}}{3}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$$

$$\therefore (\alpha-\beta)^2=\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}-\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)^2=\frac{28}{9}$$

008 답 $x=3$

$2x^2-5x-3=0$에서 $(2x+1)(x-3)=0$이므로

$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$

$x^2+4x-21=0$에서 $(x+7)(x-3)=0$이므로

$x=-7$ 또는 $x=3$

따라서 공통인 해는 $x=3$이다.

009 답 ③

$3(x^2+5x)=8x-3x^2+3$에서

$3x^2+15x=8x-3x^2+3$, $6x^2+7x-3=0$

$(2x+3)(3x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

010 답 ③

$2x^2+2\times 2x+3=0$에서

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-2\times 3}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-2}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{2}i}{2}$$

따라서 $a=-2$, $b=2$이므로

$a+b=-2+2=0$

011 답 -1

이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 이 방정식에 $x=1-\sqrt{2}$를 대입하면

$(1-\sqrt{2})^2-2(1-\sqrt{2})+k=0$

$(3-2\sqrt{2})-2+2\sqrt{2}+k=0$

$1+k=0$

$\therefore k=-1$

012 답 $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

$x^2-5x+a=0$에서

$$x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times a}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4a}}{2}$$

즉, $b=5$, $25-4a=17$이므로

$a=2$, $b=5$

따라서 이차방정식 $ax^2+bx+3=0$은 $2x^2+5x+3=0$이므로

$(2x+3)(x+1)=0$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

013 답 (1) 서로 다른 두 실근 (2) 서로 다른 두 허근 (3) 서로 다른 두 실근 (4) 서로 다른 두 실근 (5) 중근 (6) 서로 다른 두 실근 (7) 중근 (8) 서로 다른 두 허근 (9) 서로 다른 두 허근 (10) 서로 다른 두 실근

(1) $x^2+3x+1=0$에서

$D=3^2-4\times1\times1=5>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $x^2+2\times x+7=0$에서

$\frac{D}{4}=1^2-1\times7=-6<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(3) $x^2-2\times 4x+4=0$에서

$\frac{D}{4}=(-4)^2-1\times4=12>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(4) $x^2-5x-6=0$에서

$D=(-5)^2-4\times1\times(-6)=49>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(5) $x^2+2\times 3x+9=0$에서

$\frac{D}{4}=3^2-1\times9=0$

이므로 중근을 갖는다.

(6) $3x^2+2\times x-3=0$에서

$\frac{D}{4}=1^2-3\times(-3)=10>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(7) $4x^2-2\times 2x+1=0$에서

$\frac{D}{4}=(-2)^2-4\times 1=0$

이므로 중근을 갖는다.

(8) $2x^2-5x+5=0$에서

$D=(-5)^2-4\times 2\times 5=-15<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(9) $5x^2-x+4=0$에서

$D=(-1)^2-4\times 5\times 4=-79<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(10) $4x^2-2\times 4x-5=0$에서

$\frac{D}{4}=(-4)^2-4\times(-5)=36>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

풍쌤 비법

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 x^2의 계수와 상수항의 부호가 다르면, 즉 $ac<0$이면 $D=b^2-4ac>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

014 답 (1) $k<2$ (2) $k=2$ (3) $k>2$

이차방정식 $x^2-2x+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times(k-1)=-k+2$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$-k+2>0 \quad \therefore k<2$

(2) 중근을 가지려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$-k+2=0 \quad \therefore k=2$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$-k+2<0 \quad \therefore k>2$

015 답 (1) $k<1$ (2) $k>-\frac{17}{4}$ (3) $k<2$ (4) $-\frac{1}{4}<k<0$ 또는 $k>0$

(1) 이차방정식 $x^2+2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-1\times k=-k+1$

이때 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$-k+1>0 \quad \therefore k<1$

(2) 이차방정식 $x^2-3x-(k+2)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times 1\times\{-(k+2)\}=4k+17$

이때 $D>0$이어야 하므로

$4k+17>0 \quad \therefore k>-\frac{17}{4}$

(3) 이차방정식 $x^2+2(k-3)x+k^2-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-3)^2-1\times(k^2-3)=-6k+12$

이때 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$-6k+12>0 \quad \therefore k<2$

(4) 주어진 방정식은 이차방정식이므로

$k\neq 0$

이차방정식 $kx^2+x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times k\times(-1)=4k+1$

이때 $D>0$이어야 하므로

$4k+1>0 \quad \therefore k>-\frac{1}{4}$

따라서 $k\neq 0$이므로 $-\frac{1}{4}<k<0$ 또는 $k>0$

016 답 (1) -18 (2) $\frac{5}{4}$ (3) 2 (4) -6

(1) 이차방정식 $x^2-12x-2k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-1\times(-2k)=2k+36$

이때 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$2k+36=0 \quad \therefore k=-18$

(2) 이차방정식 $x^2+5x+k+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4\times 1\times(k+5)=-4k+5$

이때 $D=0$이어야 하므로

$-4k+5=0 \quad \therefore k=\frac{5}{4}$

(3) 이차방정식 $4x^2+2kx+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-4(k-1)=k^2-4k+4$

이때 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$k^2-4k+4=0,\ (k-2)^2=0 \quad \therefore k=2$

(4) 주어진 방정식은 이차방정식이므로

$k+2\neq 0 \quad \therefore k\neq -2$

이차방정식 $(k+2)x^2+2kx+k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(k+2)(k-3)=k+6$

이때 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$k+6=0 \quad \therefore k=-6$

참고 (4)에서 $k=-6$이므로 $k\neq -2$를 만족시킨다.

017 답 (1) $k>\frac{3}{4}$ (2) $k<-1$ (3) $k>\frac{1}{8}$ (4) $k>-\frac{1}{5}$

(1) 이차방정식 $x^2-x+3k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times 1\times(3k-2)=-12k+9$

이때 $D<0$이어야 하므로

$-12k+9<0 \quad \therefore k>\frac{3}{4}$

(2) 이차방정식 $2x^2+(k+1)x+\frac{k^2-1}{8}=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+1)^2-4\times 2\times\frac{k^2-1}{8}=2k+2$

이때 $D<0$이어야 하므로

$2k+2<0 \quad \therefore k<-1$

(3) 이차방정식 $x^2+(2k-1)x+k(k+1)=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(2k-1)^2-4\times1\times k(k+1)=-8k+1$
이때 $D<0$이어야 하므로
$-8k+1<0 \qquad \therefore k>\frac{1}{8}$

(4) 주어진 방정식은 이차방정식이므로
$k+1\neq0 \qquad \therefore k\neq-1$
이차방정식 $(k+1)x^2-4x+5=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-(k+1)\times5=-5k-1$
이때 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로
$-5k-1<0 \qquad \therefore k>-\frac{1}{5}$

참고 (4)에서 $k>-\frac{1}{5}$이므로 $k\neq-1$을 만족시킨다.

018 답 ②

이차방정식의 판별식을 D라 하자.
ㄱ. $D=(-7)^2-4\times1\times2=41>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄴ. $\frac{D}{4}=1^2-1\times(-5)=6>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. $\frac{D}{4}=(-10)^2-4\times25=0$이므로 중근을 갖는다.
ㄹ. $D=5^2-4\times7\times1=-3<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.
따라서 허근을 갖는 이차방정식은 ㄹ이다.

019 답 0

이차방정식 $x^2-6x+6-3k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times(6-3k)=3k+3$
이때 $D>0$이어야 하므로
$3k+3>0 \qquad \therefore k>-1$
따라서 정수 k의 최솟값은 0이다.

020 답 4

이차방정식 $x^2+(2k+1)x+k^2+5=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(2k+1)^2-4\times1\times(k^2+5)=4k-19$
실근을 갖지 않으려면 허근을 가져야 하므로 $D<0$이어야 한다.
즉, $4k-19<0$에서 $k<\frac{19}{4}=4.75$
따라서 이를 만족시키는 자연수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

021 답 -1

이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-1\times k=-k+1$
이때 $\frac{D_1}{4}\geq0$이어야 하므로
$-k+1\geq0 \qquad \therefore k\leq1$ …… ㉠
또, 이차방정식 $x^2+2kx+4k+5=0$의 판별식을 D_2라 하면
$\frac{D_2}{4}=k^2-1\times(4k+5)=k^2-4k-5$
이때 $\frac{D_2}{4}=0$이어야 하므로
$k^2-4k-5=0,\ (k+1)(k-5)=0$
$\therefore k=-1$ 또는 $k=5$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $k=-1$

022 답 ①

x에 대한 이차식 $x^2+x-2k-1$이 완전제곱식이면 이차방정식 $x^2+x-2k-1=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=1^2-4\times1\times(-2k-1)=0$
$8k+5=0 \qquad \therefore k=-\frac{5}{8}$

풍쌤 비법 이차식이 완전제곱식이 될 조건

> x에 대한 이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식이다.
> ➡ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 갖는다.
> ➡ $D=b^2-4ac=0$

023 답 ③

x에 대한 이차식 $3kx^2-2kx+1$이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $3kx^2-2kx+1=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-k)^2-3k\times1=0$
$k^2-3k=0,\ k(k-3)=0$
$\therefore k=0$ 또는 $k=3$
이때 $k\neq0$이므로 구하는 실수 k의 값은 3이다.

참고 주어진 식은 x에 대한 이차식이므로 $k\neq0$이어야 한다.

024 답 ①

x에 대한 이차식 $x^2+2(a+k)x+k^2+4k+a^2$이 완전제곱식이면 이차방정식 $x^2+2(a+k)x+k^2+4k+a^2=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(a+k)^2-1\times(k^2+4k+a^2)=0$
$2ak-4k=0,\ 2k(a-2)=0$
이 등식이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$a=2$

025 답

(1) 두 근의 합: -1, 두 근의 곱: -1
(2) 두 근의 합: 5, 두 근의 곱: 4
(3) 두 근의 합: -6, 두 근의 곱: -2
(4) 두 근의 합: -10, 두 근의 곱: 13
(5) 두 근의 합: 21, 두 근의 곱: -40
(6) 두 근의 합: $\frac{1}{2}$, 두 근의 곱: 3
(7) 두 근의 합: $-\frac{2}{3}$, 두 근의 곱: $-\frac{1}{3}$
(8) 두 근의 합: $\frac{1}{2}$, 두 근의 곱: $-\frac{1}{3}$

(9) 두 근의 합: $-\frac{5}{8}$, 두 근의 곱: 2

(10) 두 근의 합: $\frac{4}{9}$, 두 근의 곱: $\frac{2}{9}$

(1) 이차방정식 $x^2+x-1=0$에서

두 근의 합은 $-\frac{1}{1}=-1$

두 근의 곱은 $\frac{-1}{1}=-1$

(2) 이차방정식 $x^2-5x+4=0$에서

두 근의 합은 $-\frac{-5}{1}=5$

두 근의 곱은 $\frac{4}{1}=4$

(3) 이차방정식 $x^2+6x-2=0$에서

두 근의 합은 $-\frac{6}{1}=-6$

두 근의 곱은 $\frac{-2}{1}=-2$

(4) 이차방정식 $x^2+10x+13=0$에서

두 근의 합은 $-\frac{10}{1}=-10$

두 근의 곱은 $\frac{13}{1}=13$

(5) 이차방정식 $x^2-21x-40=0$에서

두 근의 합은 $-\frac{-21}{1}=21$

두 근의 곱은 $\frac{-40}{1}=-40$

(6) 이차방정식 $2x^2-x+6=0$에서

두 근의 합은 $-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}$

두 근의 곱은 $\frac{6}{2}=3$

(7) 이차방정식 $3x^2+2x-1=0$에서

두 근의 합은 $-\frac{2}{3}$

두 근의 곱은 $\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3}$

(8) 이차방정식 $6x^2-3x-2=0$에서

두 근의 합은 $-\frac{-3}{6}=\frac{1}{2}$

두 근의 곱은 $\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$

(9) 이차방정식 $8x^2+5x+16=0$에서

두 근의 합은 $-\frac{5}{8}$

두 근의 곱은 $\frac{16}{8}=2$

(10) 이차방정식 $9x^2-4x+2=0$에서

두 근의 합은 $-\frac{-4}{9}=\frac{4}{9}$

두 근의 곱은 $\frac{2}{9}$

026

답 (1) 1 (2) -4 (3) $-\frac{1}{4}$ (4) 9 (5) $-\frac{9}{4}$ (6) $\sqrt{17}$

(1) $\alpha+\beta=-\frac{-1}{1}=1$

(2) $\alpha\beta=\frac{-4}{1}=-4$

(3) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{-4}=-\frac{1}{4}$

(4) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=1^2-2\times(-4)$
$=1+8=9$

(5) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{9}{-4}=-\frac{9}{4}$

(6) $|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$
$=\sqrt{1^2-4\times(-4)}=\sqrt{17}$

027

답 (1) -3 (2) -6 (3) 21 (4) -2 (5) $-\frac{7}{2}$ (6) -81

(1) $\alpha+\beta=-\frac{3}{1}=-3$

(2) $\alpha\beta=\frac{-6}{1}=-6$

(3) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=(-3)^2-2\times(-6)$
$=9+12=21$

(4) $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-\alpha-\beta+1$
$=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$
$=-6-(-3)+1=-2$

(5) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{21}{-6}=-\frac{7}{2}$

(6) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(-3)^3-3\times(-6)\times(-3)$
$=-27-54=-81$

028

답 (1) $x^2-6x+8=0$
(2) $x^2-5x-24=0$
(3) $x^2+7x+6=0$
(4) $x^2-3x+\frac{5}{4}=0$
(5) $x^2-2x-2=0$
(6) $x^2+4x+13=0$

(1) 두 수의 합이 6, 곱이 8이므로 구하는 이차방정식은
$x^2-6x+8=0$

(2) 두 수의 합이 5, 곱이 -24이므로 구하는 이차방정식은
$x^2-5x-24=0$

(3) 두 수의 합이 -7, 곱이 6이므로 구하는 이차방정식은

$x^2+7x+6=0$

(4) 두 수의 합이 3, 곱이 $\frac{5}{4}$이므로 구하는 이차방정식은

$x^2-3x+\frac{5}{4}=0$

(5) 두 수의 합이 2, 곱이 -2이므로 구하는 이차방정식은

$x^2-2x-2=0$

(6) 두 수의 합이 -4, 곱이 13이므로 구하는 이차방정식은

$x^2+4x+13=0$

029

답 (1) $x^2+2x+5=0$
(2) $x^2+4x+8=0$
(3) $x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}=0$
(4) $x^2-7x+10=0$

이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=-\frac{-2}{1}=2$, $\alpha\beta=\frac{5}{1}=5$

(1) $-\alpha$, $-\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은

두 근의 합이

$-\alpha+(-\beta)=-(\alpha+\beta)=-2$

두 근의 곱이

$-\alpha\times(-\beta)=\alpha\beta=5$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2+2x+5=0$

(2) $\alpha-3$, $\beta-3$을 두 근으로 하는 이차방정식은

두 근의 합이

$(\alpha-3)+(\beta-3)=(\alpha+\beta)-6$
$=2-6=-4$

두 근의 곱이

$(\alpha-3)\times(\beta-3)=\alpha\beta-3\alpha-3\beta+9$
$=\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9$
$=5-3\times2+9=8$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2+4x+8=0$

(3) $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식은

두 근의 합이

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2}{5}$

두 근의 곱이

$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}=0$

(4) $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은

두 근의 합이

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=2+5=7$

두 근의 곱이

$(\alpha+\beta)\times\alpha\beta=2\times5=10$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2-7x+10=0$

030

답 (1) $2-\sqrt{3}$, $a=4$, $b=1$
(2) $-1-\sqrt{2}$, $a=-2$, $b=-1$
(3) $4+\sqrt{5}$, $a=8$, $b=11$
(4) $-\sqrt{10}+6$, $a=12$, $b=26$

(1) 단계1. 다른 한 근 구하기

계수가 유리수이고 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

단계2. 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값 구하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 a, 두 근의 곱은 b이므로

$a=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

$b=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$

(2) 계수가 유리수이고 한 근이 $-1+\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $-1-\sqrt{2}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 a, 두 근의 곱은 b이므로

$a=(-1+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})=-2$

$b=(-1+\sqrt{2})(-1-\sqrt{2})=-1$

(3) 계수가 유리수이고 한 근이 $4-\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $4+\sqrt{5}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 a, 두 근의 곱은 b이므로

$a=(4-\sqrt{5})+(4+\sqrt{5})=8$

$b=(4-\sqrt{5})(4+\sqrt{5})=11$

(4) 계수가 유리수이고 한 근이 $\sqrt{10}+6$이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{10}+6$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 a, 두 근의 곱은 b이므로

$a=(\sqrt{10}+6)+(-\sqrt{10}+6)=12$

$b=(\sqrt{10}+6)(-\sqrt{10}+6)=26$

031

답 (1) $1-i$, $a=-2$, $b=2$
(2) $3+4i$, $a=-6$, $b=25$
(3) $-2i-2$, $a=4$, $b=8$
(4) $3i-1$, $a=2$, $b=10$

(1) 단계1. 다른 한 근 구하기

계수가 실수이고 한 근이 $1+i$이므로 다른 한 근은 $1-i$이다.

단계2. 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값 구하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-a$, 두 근의 곱은 b이므로

$-a=(1+i)+(1-i)=2$ $\quad\therefore a=-2$

$b=(1+i)(1-i)=2$

(2) 계수가 실수이고 한 근이 $3-4i$이므로 다른 한 근은 $3+4i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-a$, 두 근의 곱은 b이므로

$-a=(3-4i)+(3+4i)$　　$\therefore a=-6$

$b=(3-4i)(3+4i)=25$

(3) 계수가 실수이고 한 근이 $2i-2$이므로 다른 한 근은 $-2i-2$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-a$, 두 근의 곱은 b이므로

$-a=(2i-2)+(-2i-2)$　　$\therefore a=4$

$b=(2i-2)(-2i-2)=8$

(4) 계수가 실수이고 한 근이 $-3i-1$이므로 다른 한 근은 $3i-1$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-a$, 두 근의 곱은 b이므로

$-a=(-3i-1)+(3i-1)$　　$\therefore a=2$

$b=(-3i-1)(3i-1)=10$

032 답 ④

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 1, -3이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+(-3)=-a$　　$\therefore a=2$

$1\times(-3)=b$　　$\therefore b=-3$

따라서 이차방정식 $ax^2+(a+b)x+b=0$, 즉 $2x^2-x-3=0$의 두 근의 합은

$-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}$

033 답 ①

이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=a$　　…… ㉠

이차방정식 $x^2+bx-8=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-b$, $(\alpha+\beta)\alpha\beta=-8$　　…… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2+a=-b$, $2a=-8$　　$\therefore a=-4$, $b=2$

$\therefore a-b=-4-2=-6$

034 답 2

이차방정식 $x^2+(1-k)x+k^2=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-(1-k)=k-1$

$\alpha\beta=k^2$

$\alpha+\beta+\alpha\beta=5$에서 $(k-1)+k^2=5$

$k^2+k-6=0$, $(k+3)(k-2)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=2$

따라서 양수 k의 값은 2이다.

035 답 14

이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=1$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^3\beta+\alpha\beta^3&=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)\\&=\alpha\beta\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}\\&=1\times(4^2-2\times1)=14\end{aligned}$$

036 답 ③

이차방정식 $x^2-12x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-1\times9=27>0$　　…… ㉠

이므로 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=12$, $\alpha\beta=9$　　…… ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이므로

$\alpha>0$, $\beta>0$

$$\begin{aligned}\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2&=\alpha+2\times\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}+\beta\\&=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}\\&=12+2\times3=18\end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=3\sqrt{2}$ ($\because \sqrt{\alpha}>0$, $\sqrt{\beta}>0$)

037 답 19

이차방정식 $x^2+3x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-2$

또, α, β가 이차방정식 $x^2+3x-2=0$의 근이므로

$\alpha^2+3\alpha-2=0$, $\beta^2+3\beta-2=0$

$$\begin{aligned}\therefore &(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)\\&=\{(\alpha^2+3\alpha-2)-2\alpha+3\}\{(\beta^2+3\beta-2)-2\beta+3\}\\&=(-2\alpha+3)(-2\beta+3)\\&=4\alpha\beta-6\alpha-6\beta+9\\&=4\alpha\beta-6(\alpha+\beta)+9\\&=4\times(-2)-6\times(-3)+9=19\end{aligned}$$

038 답 ②

이차방정식 $x^2-2x-5=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-5$

또, α가 이차방정식 $x^2-2x-5=0$의 근이므로

$\alpha^2-2\alpha-5=0$　　$\therefore \alpha^2-2\alpha=5$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^3-2\alpha^2-3\alpha\beta+5\beta&=\alpha(\alpha^2-2\alpha)-3\alpha\beta+5\beta\\&=5\alpha+5\beta-3\alpha\beta\\&=5(\alpha+\beta)-3\alpha\beta\\&=5\times2-3\times(-5)=25\end{aligned}$$

039 답 ⑤

이차방정식 $x^2-15x+k=0$의 두 근의 비가 2 : 3이므로 두 근을 2α, 3α ($\alpha\neq0$)로 놓으면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+3\alpha=15$ …… ㉠

$2\alpha\times3\alpha=k$ …… ㉡

㉠에서 $5\alpha=15$ $\therefore \alpha=3$

㉡에서 $k=6\alpha^2=6\times9=54$

040 답 1

이차방정식 $x^2-(2k-6)x+k^2-1=0$의 두 근의 차가 4이므로 두 근을 α, $\alpha+4$로 놓으면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+4)=2k-6$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+4)=k^2-1$ …… ㉡

㉠에서 $2\alpha+4=2k-6$, $2\alpha=2k-10$

$\therefore \alpha=k-5$

이것을 ㉡에 대입하면

$(k-5)(k-1)=k^2-1$, $k^2-6k+5=k^2-1$

$-6k=-6$ $\therefore k=1$

041 답 −3

이차방정식 $x^2+(2k-1)x-4k=0$의 두 근이 연속하는 자연수이므로 두 근을 α, $\alpha+1$ (α는 자연수)로 놓으면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=-(2k-1)$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+1)=-4k$ …… ㉡

㉠에서 $2\alpha+1=-2k+1$, $2\alpha=-2k$

$\therefore \alpha=-k$

이것을 ㉡에 대입하면

$-k(-k+1)=-4k$, $k^2-k=-4k$

$k^2+3k=0$, $k(k+3)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=-3$

이때 $\alpha=-k$이고 α는 자연수이므로 $k\neq0$

따라서 구하는 실수 k의 값은 -3이다.

042 답 −3

이차방정식 $x^2+(k^2+k-6)x+k-1=0$의 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르므로 두 근을 α, $-\alpha$ $(\alpha\neq0)$로 놓으면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-\alpha)=-(k^2+k-6)$ …… ㉠

$\alpha\times(-\alpha)=k-1$ …… ㉡

㉠에서 $k^2+k-6=0$

$(k+3)(k-2)=0$ $\therefore k=-3$ 또는 $k=2$ …… ㉢

㉡에서 $-\alpha^2<0$이므로

$k-1<0$ $\therefore k<1$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $k=-3$

043 답 $x^2-10x-15=0$

이차방정식 $x^2-4x-6=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-6$

$2\alpha+1$, $2\beta+1$을 두 근으로 하는 이차방정식은

두 근의 합이

$(2\alpha+1)+(2\beta+1)=2(\alpha+\beta)+2=2\times4+2=10$

두 근의 곱이

$$(2\alpha+1)(2\beta+1)=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1$$
$$=4\times(-6)+2\times4+1=-15$$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2-10x-15=0$

044 답 ①

이차방정식 $x^2+5x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=-2$

$\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식은

두 근의 합이

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2}$$

두 근의 곱이

$$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$x^2-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}=0$$

$\therefore 2x^2-5x-1=0$

즉, $a=-5$, $b=-1$이므로

$a-b=-5-(-1)=-4$

045 답 ②

이차방정식 $3x^2+x-6=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{1}{3},\ \alpha\beta=-\frac{6}{3}=-2$$

$1-\frac{1}{\alpha}$, $1-\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식은

두 근의 합이

$$\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)+\left(1-\frac{1}{\beta}\right)=2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$
$$=2-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$
$$=2-\frac{-\frac{1}{3}}{-2}$$
$$=2-\frac{1}{6}=\frac{11}{6}$$

두 근의 곱이

$$\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)=1-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+\frac{1}{\alpha\beta}$$
$$=1-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}$$
$$=1-\frac{-\frac{1}{3}}{-2}+\frac{1}{-2}$$
$$=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 이차방정식은

$6\left(x^2-\frac{11}{6}x+\frac{1}{3}\right)=0$

$\therefore 6x^2-11x+2=0$

046 답 ⑤

이차방정식 $x^2+2x+7=0$에서

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\times7}=-1\pm\sqrt{6}i$

이므로

$x^2+2x+7=\{x-(-1+\sqrt{6}i)\}\{x-(-1-\sqrt{6}i)\}$

$=(x+1-\sqrt{6}i)(x+1+\sqrt{6}i)$

047 답 20

이차방정식 $x^2-5x+10=0$에서

$x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times10}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{15}i}{2}$

이므로

$x^2-5x+10=\left(x-\frac{5+\sqrt{15}i}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{15}i}{2}\right)$

따라서 $a=5$, $b=15$이므로

$a+b=5+15=20$

048 답 ⑤

이차방정식 $x^2+6x+16=0$에서

$x=-3\pm\sqrt{3^2-1\times16}=-3\pm\sqrt{7}i$

이므로

$x^2+6x+16=\{x-(-3+\sqrt{7}i)\}\{x-(-3-\sqrt{7}i)\}$

$=(x+3-\sqrt{7}i)(x+3+\sqrt{7}i)$

따라서 이차식 $x^2+6x+16$의 인수인 것은 ⑤이다.

049 답 28

이차방정식 $x^2-ax-b=0$의 한 근이 $-6-2i$이고 계수가 모두 실수이므로 다른 한 근은 $-6+2i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-6-2i)+(-6+2i)=a \quad \therefore a=-12$

$(-6-2i)(-6+2i)=-b$, $40=-b \quad \therefore b=-40$

$\therefore a-b=-12-(-40)=28$

050 답 ⑤

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이

$\frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=-1+\sqrt{3}$

이고 계수가 모두 유리수이므로 다른 한 근은 $-1-\sqrt{3}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1+\sqrt{3})+(-1-\sqrt{3})=-a$, $-2=-a \quad \therefore a=2$

$(-1+\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})=b \quad \therefore b=-2$

$\therefore a-b=2-(-2)=4$

051 답 $x=\frac{-1\pm\sqrt{19}i}{4}$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $i-2$이고 계수가 모두 실수이므로 다른 한 근은 $-i-2$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(i-2)+(-i-2)=-a$, $-4=-a \quad \therefore a=4$

$(i-2)(-i-2)=b \quad \therefore b=5$

따라서 이차방정식 $ax^2+2x+b=0$, 즉 $4x^2+2x+5=0$을 풀면

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times5}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{19}i}{4}$

052 답 -40

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 $3-\sqrt{5}$이고 계수가 모두 유리수이므로 다른 한 근은 $3+\sqrt{5}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3-\sqrt{5})+(3+\sqrt{5})=a \quad \therefore a=6$

$(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})=b \quad \therefore b=4$

따라서 이차방정식 $x^2+bx+a-b=0$, 즉 $x^2+4x+2=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=2$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-4)^3-3\times2\times(-4)$

$=-64+24=-40$

중단원 점검 문제

Ⅱ-2 | 이차방정식 082~083쪽

01 답 ④

$x^2-6x+13=0$에서

$x=3\pm\sqrt{(-3)^2-1\times13}=3\pm2i$

따라서 $a=3$, $b=2$이므로

$a-b=3-2=1$

02 답 ②

이차방정식 $3x^2+5x+k=0$의 한 근이 $\frac{1}{3}$이므로

$3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+5\times\frac{1}{3}+k=0$, $2+k=0$

$\therefore k=-2$

따라서 주어진 이차방정식은 $3x^2+5x-2=0$이므로

$(x+2)(3x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

따라서 다른 한 근은 -2이다.

03 답 4 cm

처음 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 정사각형의 넓이는 x^2 cm^2

새로 만든 직사각형의 가로의 길이는 $(x+2)$ cm, 세로의 길이는 $(x-2)$ cm이므로 직사각형의 넓이는

$(x+2)(x-2)$ cm^2

이때 직사각형의 넓이가 처음 정사각형의 넓이의 $\frac{3}{4}$이므로

$(x+2)(x-2)=\frac{3}{4}x^2$, $4x^2-16=3x^2$

$x^2-16=0$, $(x+4)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=4$ $(\because x>2)$

따라서 처음 정사각형의 한 변의 길이는 4 cm이다.

04 답 ③

이차방정식 $x^2+(2k-6)x+k^2-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-3)^2-(k^2-3)=-6k+12$

허근을 갖지 않으려면 실근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}\geq 0$, $-6k+12\geq 0$

$\therefore k\leq 2$

따라서 정수 k의 최댓값은 2이다.

05 답 서로 다른 두 실근

이차방정식 $x^2+2(k-2)x+k^2-2k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2-2k+2)=-2k+2$

이때 $k<1$이므로 $\frac{D}{4}>0$

따라서 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

06 답 ④

x에 대한 이차식 $2x^2-4kx+k+3$이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $2x^2-4kx+k+3=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-2(k+3)=0$

$4k^2-2k-6=0$, $2(k+1)(2k-3)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=\frac{3}{2}$

따라서 구하는 실수 k의 값의 합은

$-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

다른 풀이

판별식 D에 대하여 $\frac{D}{4}=4k^2-2k-6=0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 실수 k의 값의 합은

$-\frac{-2}{4}=\frac{1}{2}$

07 답 ③

이차방정식 $x^2+2ax+b^2-c^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(b^2-c^2)=0$

$a^2-b^2+c^2=0$

$\therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.

08 답 ③

이차방정식 $x^2-3x+5=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=5$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha\beta&=\alpha\beta(\alpha+\beta-1)\\&=5\times(3-1)=10\end{aligned}$$

09 답 $-\frac{8}{3}$

이차방정식 $x^2-2x-6=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-6$

또, α, β가 이차방정식 $x^2-2x-6=0$의 근이므로

$\alpha^2-2\alpha-6=0$, $\beta^2-2\beta-6=0$

$\therefore \alpha^2-\alpha-6=\alpha$, $\beta^2-\beta-6=\beta$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\alpha}{\beta^2-\beta-6}+\frac{\beta}{\alpha^2-\alpha-6}&=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\\&=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\\&=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}\\&=\frac{2^2-2\times(-6)}{-6}\\&=\frac{16}{-6}=-\frac{8}{3}\end{aligned}$$

10 답 9

이차방정식 $x^2-(m-1)x+3m=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m-1$, $\alpha\beta=3m$

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=(m-1)^2-2\times 3m\\&=m^2-8m+1\end{aligned}$$

이때 $\alpha^2+\beta^2=10$이므로

$m^2-8m+1=10$, $m^2-8m-9=0$

$(m+1)(m-9)=0$

$\therefore m=-1$ 또는 $m=9$

따라서 양수 m의 값은 9이다.

11 답 ⑤

두 근이 -5, 2이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(-5+2)x+(-5)\times 2=0$

$\therefore x^2+3x-10=0$

따라서 $a=3$, $b=10$이므로 이차방정식 $bx^2+3x+2a=0$, 즉 $10x^2+3x+6=0$의 두 근의 곱은

$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

12 답 ②

이차방정식 $x^2-x-3=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-3$

$-\frac{\alpha}{\beta}$, $-\frac{\beta}{\alpha}$를 두 근으로 하는 이차방정식은

두 근의 합이

$$-\frac{\alpha}{\beta}+\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=-\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=-\frac{1^2-2\times(-3)}{-3}=\frac{7}{3}$$

두 근의 곱이

$$-\frac{\alpha}{\beta}\times\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=1$$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2-\frac{7}{3}x+1=0$

$\therefore 3x^2-7x+3=0$

즉, $a=-7$, $b=3$이므로

$a+b=-7+3=-4$

13 답 $x^2+2x+3=0$

처음 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$이라 하자.

연주는 상수항을 바르게 보고 풀었으므로

$b=1\times3=3$

상현이는 x의 계수를 바르게 보고 풀었으므로

$-a=(-1+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})=-2$

$\therefore a=2$

따라서 처음 이차방정식은

$x^2+2x+3=0$

14 답 ④

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근은

$2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta-1}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha-1}{2}\times\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}{4}=\frac{4-(-7)+1}{4}=\frac{12}{4}=3$$

풍쌤 비법 **이차방정식 $f(ax+b)=0$의 두 근**

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이면 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 이차방정식 $f(ax+b)=0$ $(a\neq0)$의 두 근은

$ax+b=\alpha$ 또는 $ax+b=\beta$에서

$x=\frac{\alpha-b}{a}$ 또는 $x=\frac{\beta-b}{a}$

15 답 6

이차방정식 $\frac{1}{2}x^2+x+3=0$, 즉 $x^2+2x+6=0$에 대하여

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\times6}=-1\pm\sqrt{5}i$

이므로

$$\frac{1}{2}x^2+x+3=\frac{1}{2}(x^2+2x+6)=\frac{1}{2}\{x-(-1+\sqrt{5}i)\}\{x-(-1-\sqrt{5}i)\}=\frac{1}{2}(x+1-\sqrt{5}i)(x+1+\sqrt{5}i)$$

따라서 $a=1$, $b=5$이므로

$a+b=1+5=6$

16 답 ⑤

이차방정식의 한 근이 $2-3i$이고 계수가 모두 실수이므로 다른 한 근은 $\alpha=2+3i$이다.

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{2+3i}=\frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{2-3i}{2^2-(3i)^2}=\frac{2-3i}{13}=\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$$

따라서 $a=\frac{2}{13}$, $b=-\frac{3}{13}$이므로

$a+b=\frac{2}{13}+\left(-\frac{3}{13}\right)=-\frac{1}{13}$

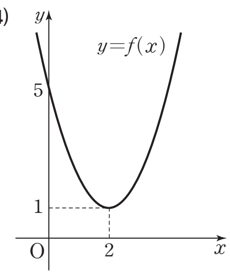
001 답 (1) $y=(x-2)^2+1$ (2) $(2,\ 1)$
(3) $x=2$ (4) 풀이 참조

(1) $f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

(2) $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 1)$이다.

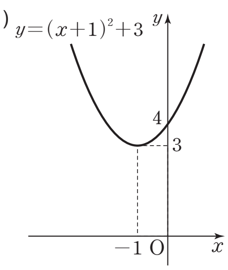
(3) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=2$

(4)

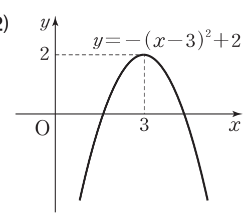


002 답 풀이 참조

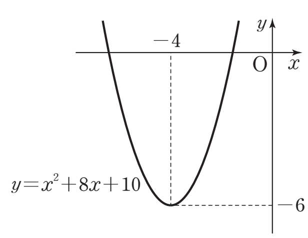
(1)



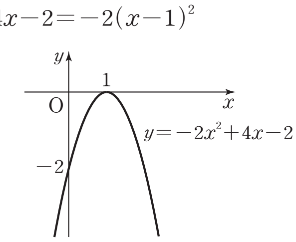
(2)



(3) $y=x^2+8x+10=(x+4)^2-6$



(4) $y=-2x^2+4x-2=-2(x-1)^2$



003 답 (1) $x=-2$ 또는 $x=2$
(2) $x=-3$ 또는 $x=0$
(3) $x=1$

(1) 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 $-2,\ 2$이므로 이차방정식의 해는 $x=-2$ 또는 $x=2$이다.

(2) 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 $-3,\ 0$이므로 이차방정식의 해는 $x=-3$ 또는 $x=0$이다.

(3) 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 1이므로 이차방정식의 해는 $x=1$이다.

004 답 (1) $(1,\ 0),\ (3,\ 0)$
(2) $(-4,\ 0),\ (7,\ 0)$
(3) 없다.
(4) $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$
(5) $\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3},\ 0\right),\ \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3},\ 0\right)$
(6) $(-2-\sqrt{2},\ 0),\ (-2+\sqrt{2},\ 0)$

(1) 이차함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-4x+3=0$의 실근이다.
$x^2-4x+3=0$에서
$(x-1)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=3$
따라서 교점의 좌표는
$(1,\ 0),\ (3,\ 0)$

(2) 이차함수 $y=x^2-3x-28$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-3x-28=0$의 실근이다.
$x^2-3x-28=0$에서
$(x+4)(x-7)=0$ $\quad\therefore x=-4$ 또는 $x=7$
따라서 교점의 좌표는
$(-4,\ 0),\ (7,\ 0)$

(3) 이차함수 $y=x^2-x+6$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-x+6=0$의 실근이다.
근의 공식에 의하여
$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times6}}{2\times1}=\frac{1\pm\sqrt{23}i}{2}$$
따라서 이차방정식 $x^2-x+6=0$이 허근을 가지므로 교점은 없다.

(4) 이차함수 $y=4x^2+4x+1$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $4x^2+4x+1=0$의 실근이다.
$4x^2+4x+1=0$에서
$(2x+1)^2=0$ $\quad\therefore x=-\frac{1}{2}$
따라서 교점의 좌표는
$\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$

(5) 이차함수 $y=3x^2+2x-2$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $3x^2+2x-2=0$의 실근이다.
근의 공식에 의하여
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-3\times(-2)}}{3}=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$$
따라서 교점의 좌표는
$\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3},\ 0\right),\ \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3},\ 0\right)$

(6) 이차함수 $y=-2x^2-8x-4$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $-2x^2-8x-4=0$, 즉 $x^2+4x+2=0$의 실근이다.

근의 공식에 의하여

$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\times 2}=-2\pm\sqrt{2}$

따라서 교점의 좌표는

$(-2-\sqrt{2},\ 0)$, $(-2+\sqrt{2},\ 0)$

005 답 (1) 2 (2) 1 (3) 2 (4) 0

(1) 이차방정식 $x^2+2x-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-1\times(-3)=4>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 2이다.

(2) 이차방정식 $x^2-12x+36=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-1\times 36=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 1이다.

(3) 이차방정식 $-2x^2+5x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4\times(-2)\times(-1)=17>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 2이다.

(4) 이차방정식 $4x^2-x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times 4\times 3=-47<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 0이다.

006 답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 한 점에서 만난다.(접한다.)
(3) 만나지 않는다.
(4) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(1) 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times 1\times 1=5>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 이차방정식 $x^2+8x+16=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-1\times 16=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축은 한 점에서 만난다.(접한다.)

(3) 이차방정식 $-2x^2+x-5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times(-2)\times(-5)=-39<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축은 만나지 않는다.

(4) 이차방정식 $-x^2-4x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-1)\times 9=13>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축은 서로 다른 두 점에서 만난다.

참고 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 $a<0$인 경우에도 $a>0$인 경우와 동일하게 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 D의 값의 부호에 따라 결정된다.

007 답 (1) $k<\frac{1}{4}$ (2) $k=\frac{1}{4}$ (3) $k>\frac{1}{4}$

이차방정식 $x^2-x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times 1\times k=-4k+1$

(1) 주어진 이차함수의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로

$-4k+1>0\quad \therefore k<\frac{1}{4}$

(2) 주어진 이차함수의 그래프와 x축이 한 점에서 만나려면 $D=0$이어야 하므로

$-4k+1=0\quad \therefore k=\frac{1}{4}$

(3) 주어진 이차함수의 그래프와 x축이 만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로

$-4k+1<0\quad \therefore k>\frac{1}{4}$

008 답 (1) $k<3$ (2) $k=3$ (3) $k>3$

이차방정식 $4x^2-4kx+k^2+k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-4(k^2+k-3)=-4k+12$

(1) 주어진 이차함수의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$-4k+12>0\quad \therefore k<3$

(2) 주어진 이차함수의 그래프와 x축이 한 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$-4k+12=0\quad \therefore k=3$

(3) 주어진 이차함수의 그래프와 x축이 만나지 않으려면 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$-4k+12<0\quad \therefore k>3$

009 답 (1) 3, 4 (2) -5, 2 (3) -2, $\frac{1}{3}$ (4) $-\frac{3}{4}$

(1) 이차함수 $y=x^2-5x+8$의 그래프와 직선 $y=2x-4$의 교점의 x좌표는 두 식을 연립한 이차방정식 $x^2-5x+8=2x-4$의 실근이다.

$x^2-5x+8=2x-4$에서

$x^2-7x+12=0$, $(x-3)(x-4)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=4$

따라서 교점의 x좌표는 3, 4이다.

(2) 이차함수 $y=x^2+2x-5$의 그래프와 직선 $y=-x+5$의 교점의 x좌표는 두 식을 연립한 이차방정식 $x^2+2x-5=-x+5$의 실근이다.

$x^2+2x-5=-x+5$에서

$x^2+3x-10=0$, $(x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=2$

따라서 교점의 x좌표는 -5, 2이다.

(3) 이차함수 $y=-3x^2-x+2$의 그래프와 직선 $y=4x$의 교점의

x좌표는 두 식을 연립한 이차방정식 $-3x^2-x+2=4x$의 실근이다.

$-3x^2-x+2=4x$에서

$3x^2+5x-2=0$, $(x+2)(3x-1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

따라서 교점의 x좌표는 -2, $\frac{1}{3}$이다.

(4) 이차함수 $y=4x^2+3x$의 그래프와 직선 $y=-3x-\frac{9}{4}$의 교점의 x좌표는 두 식을 연립한 이차방정식

$4x^2+3x=-3x-\frac{9}{4}$의 실근이다.

$4x^2+3x=-3x-\frac{9}{4}$에서

$4x^2+6x+\frac{9}{4}=0$, $16x^2+24x+9=0$

$(4x+3)^2=0 \qquad \therefore\ x=-\frac{3}{4}$

따라서 교점의 x좌표는 $-\frac{3}{4}$이다.

010

답 (1) 1 (2) 2 (3) 0 (4) 2

(1) 이차함수 $y=x^2-2x+6$과 직선 $y=-4x+5$에 대하여 두 식을 연립한 이차방정식 $x^2-2x+6=-4x+5$, 즉 $x^2+2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-1\times1=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 1이다.

(2) 이차함수 $y=-x^2+x-3$과 직선 $y=5x-6$에 대하여 두 식을 연립한 이차방정식 $-x^2+x-3=5x-6$, 즉 $x^2+4x-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\times(-3)=7>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 2이다.

(3) 이차함수 $y=2x^2+1$과 직선 $y=-x-2$에 대하여 두 식을 연립한 이차방정식 $2x^2+1=-x-2$, 즉 $2x^2+x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times2\times3=-23<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 0이다.

(4) 이차함수 $y=5x^2-4x-2$와 직선 $y=x-3$에 대하여 두 식을 연립한 이차방정식 $5x^2-4x-2=x-3$, 즉 $5x^2-5x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\times5\times1=5>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 2이다.

011

답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 만나지 않는다.
(3) 한 점에서 만난다.(접한다.)
(4) 만나지 않는다.

(1) 이차방정식 $x^2-4x+1=x-5$, 즉 $x^2-5x+6=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\times1\times6=1>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 이차방정식 $-x^2+x-6=2x+1$, 즉 $x^2+x+7=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times1\times7=-27<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

(3) 이차방정식 $x^2+3=-4x-1$, 즉 $x^2+4x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\times4=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다.(접한다.)

(4) 이차방정식 $2x^2-5x+1=-x-6$, 즉 $2x^2-4x+7=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2\times7=-10<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

012

답 (1) $k>-\frac{1}{4}$ (2) $k=-\frac{1}{4}$ (3) $k<-\frac{1}{4}$

이차함수 $y=x^2-2x+2$와 직선 $y=x+k$에 대하여 두 식을 연립한 이차방정식 $x^2-2x+2=x+k$, 즉 $x^2-3x+2-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times1\times(2-k)=4k+1$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로

$4k+1>0 \qquad \therefore\ k>-\frac{1}{4}$

(2) 한 점에서 만나려면 $D=0$이어야 하므로

$4k+1=0 \qquad \therefore\ k=-\frac{1}{4}$

(3) 만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로

$4k+1<0 \qquad \therefore\ k<-\frac{1}{4}$

013

답 (1) $k<3$ (2) $k=3$ (3) $k>3$

이차함수 $y=-x^2+6x-k$와 직선 $y=4x-2$에 대하여 두 식을 연립한 이차방정식 $-x^2+6x-k=4x-2$,

즉 $x^2-2x+k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times(k-2)=-k+3$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$-k+3>0 \qquad \therefore\ k<3$

(2) 한 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$-k+3=0 \qquad \therefore\ k=3$

(3) 만나지 않으려면 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$-k+3<0 \qquad \therefore\ k>3$

014 답 (1) $k<1$ (2) $k=1$ (3) $k>1$

이차함수 $y=x^2+4x+k^2$과 직선 $y=2kx$에 대하여 두 식을 연립한 이차방정식 $x^2+4x+k^2=2kx$, 즉 $x^2+2(2-k)x+k^2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(2-k)^2-1\times k^2=-4k+4$$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$-4k+4>0 \quad \therefore k<1$

(2) 한 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$-4k+4=0 \quad \therefore k=1$

(3) 만나지 않으려면 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$-4k+4<0 \quad \therefore k>1$

015 답 ④

이차함수 $y=x^2-3x-40$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-3x-40=0$의 실근이다.

$x^2-3x-40=0$에서

$(x+5)(x-8)=0 \quad \therefore x=-5$ 또는 $x=8$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 $(-5, 0)$, $(8, 0)$이므로 두 점 사이의 거리는

$8-(-5)=13$

016 답 ⑤

이차함수 $y=-x^2+4x-1$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 α, β이므로 α, β는 이차방정식 $-x^2+4x-1=0$, 즉 $x^2-4x+1=0$의 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=1$

이므로

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=4^2-4\times1=12$$

017 답 ②

이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 2, 6이므로 2, 6은 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+6=-\frac{a}{2}$, $2\times6=\frac{b}{2}$

따라서 $a=-16$, $b=24$이므로

$a+b=-16+24=8$

018 답 4

이차함수 $y=x^2+ax+4a$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 4, b이므로 4, b는 이차방정식 $x^2+ax+4a=0$의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$4+b=-a \quad \therefore a+b=-4$ …… ㉠

$4\times b=4a \quad \therefore a=b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-2$

$\therefore ab=-2\times(-2)=4$

019 답 ①

이차방정식 $x^2+2x+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1^2-1\times(k-1)=-k+2$$

이때 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$-k+2>0 \quad \therefore k<2$

따라서 자연수 k는 1의 1개이다.

020 답 1

이차방정식 $x^2+(k+3)x+k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+3)^2-4\times1\times(k+3)=k^2+2k-3$

이때 $D=0$이어야 하므로

$k^2+2k-3=0$, $(k+3)(k-1)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=1$

따라서 양수 k의 값은 1이다.

021 답 ②

이차방정식 $x^2+2kx+k^2-2k-6=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-1\times(k^2-2k-6)=2k+6$$

이때 $\frac{D}{4}\geq0$이어야 하므로

$2k+6\geq0 \quad \therefore k\geq-3$

따라서 정수 k의 최솟값은 -3이다.

풍쌤 비법

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축이 만나거나 만나지 않는다는 조건이 주어지면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$에 대하여 다음을 이용한다.

① x축과 만난다. ➡ $D\geq0$

② x축과 만나지 않는다. ➡ $D<0$

022 답 ④

이차방정식 $kx^2-4x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-k\times2=-2k+4$$

이때 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$-2k+4<0 \quad \therefore k>2$

023 답 -1

이차함수 $y=x^2+kx-5$의 그래프와 직선 $y=3x+2$가 만나는 두 점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+kx-5=3x+2$, 즉 $x^2+(k-3)x-7=0$의 두 실근이다.

이때 두 근의 합이 4이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-(k-3)=4 \quad \therefore k=-1$

024 답 ④

이차방정식 $-x^2+ax+1=-x+b$, 즉

$x^2-(a+1)x+b-1=0$의 두 근이 -3, -2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+(-2)=a+1$, $-3\times(-2)=b-1$

따라서 $a=-6$, $b=7$이므로

$a+b=-6+7=1$

025 답 ④

이차방정식 $3x^2-x-a=bx-4$, 즉 $3x^2-(b+1)x-a+4=0$의 계수가 유리수이고 한 근이 $\sqrt{3}+1$이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{3}+1$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\dfrac{-(b+1)}{3}=(\sqrt{3}+1)+(-\sqrt{3}+1)=2$,

$\dfrac{-a+4}{3}=(\sqrt{3}+1)(-\sqrt{3}+1)=-2$

따라서 $a=10$, $b=5$이므로

$a-b=10-5=5$

참고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 계수 a, b, c가 유리수일 때, 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다.

(단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

026 답 ②

이차함수 $y=x^2+3x+2k+1$의 그래프와 직선 $y=x+3$이 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+3x+2k+1=x+3$, 즉

$x^2+2x+2k-2=0$이 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+2x+2k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1^2-1\times(2k-2)=-2k+3$

이때 $\dfrac{D}{4}<0$이어야 하므로

$-2k+3<0$ $\quad\therefore k>\dfrac{3}{2}$

따라서 정수 k의 최솟값은 2이다.

027 답 $k<4$

이차함수 $y=-x^2-2kx+7$의 그래프와 직선 $y=-2x+k^2$이 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식

$-x^2-2kx+7=-2x+k^2$, 즉 $x^2+2(k-1)x+k^2-7=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+2(k-1)x+k^2-7=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-1\times(k^2-7)=-2k+8$

이때 $\dfrac{D}{4}>0$이어야 하므로

$-2k+8>0$ $\quad\therefore k<4$

028 답 8

직선의 기울기가 1이므로 $a=1$

직선 $y=x+b$가 이차함수 $y=2x^2-x+4$에 접해야 하므로 이차방정식 $2x^2-x+4=x+b$, 즉 $2x^2-2x+4-b=0$이 중근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2-2x+4-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-2\times(4-b)=2b-7$

이때 $\dfrac{D}{4}=0$이어야 하므로

$2b-7=0$ $\quad\therefore b=\dfrac{7}{2}$

$\therefore a+2b=1+2\times\dfrac{7}{2}=8$

029 답 $\dfrac{8}{5}$

이차함수 $y=2kx^2-5x-1$의 그래프와 직선 $y=3x-6$이 적어도 한 점에서 만나려면 이차방정식 $2kx^2-5x-1=3x-6$, 즉 $2kx^2-8x+5=0$이 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $2kx^2-8x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-4)^2-2k\times5=-10k+16$

이때 $\dfrac{D}{4}\geq0$이어야 하므로

$-10k+16\geq0$ $\quad\therefore k\leq\dfrac{8}{5}$

따라서 실수 k의 최댓값은 $\dfrac{8}{5}$이다.

030 답 (1) 최댓값: 없다., 최솟값: -2

(2) 최댓값: 5, 최솟값: 없다.

(3) 최댓값: -5, 최솟값: 없다.

(4) 최댓값: 없다., 최솟값: 3

(5) 최댓값: 12, 최솟값: 없다.

(6) 최댓값: 0, 최솟값: 없다.

(1) $y=(x+1)^2-2$에서 최솟값은 -2, 최댓값은 없다.

(2) $y=-3(x-2)^2+5$에서 최댓값은 5, 최솟값은 없다.

(3) $y=-x^2-5$에서 최댓값은 -5, 최솟값은 없다.

(4) $y=2x^2+12x+21=2(x+3)^2+3$

따라서 최솟값은 3, 최댓값은 없다.

(5) $y=-3x^2+12x=-3(x-2)^2+12$

따라서 최댓값은 12, 최솟값은 없다.

(6) $y=-4x^2-4x-1=-4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$

따라서 최댓값은 0, 최솟값은 없다.

풍쌤 비법 이차함수의 최대·최소

x의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은 꼭짓점에서 찾을 수 있다.

① $a>0$이면 ∪ 꼴의 그래프

➡ $x=p$에서 최솟값 q (최댓값은 없다.)

② $a<0$이면 ∩ 꼴의 그래프

➡ $x=p$에서 최댓값 q (최솟값은 없다.)

031 답 (1) 2 (2) 22 (3) -1 또는 1

(1) $y=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1$

이때 최솟값이 1이므로

$k-1=1$ $\therefore k=2$

(2) $y=-x^2+8x-k=-(x-4)^2-k+16$

이때 최댓값이 -6이므로

$-k+16=-6$ $\therefore k=22$

(3) $y=2x^2+4kx+5=2(x+k)^2-2k^2+5$

이때 최솟값이 3이므로

$-2k^2+5=3$, $k^2=1$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=1$

032 답 (1) $a=4$, $b=8$

(2) $a=-6$, $b=6$

(3) $a=-4$, $b=1$

(1) 이차함수 $y=x^2+ax+b$는 꼭짓점에서 최솟값을 가지므로

$y=(x+2)^2+4$와 같이 나타낼 수 있다. 즉,

$x^2+ax+b=(x+2)^2+4$

$=x^2+4x+8$

따라서 계수비교법에 의하여

$a=4$, $b=8$

(2) 이차함수 $y=-x^2+ax-b$는 꼭짓점에서 최댓값을 가지므로

$y=-(x+3)^2+3$과 같이 나타낼 수 있다. 즉,

$-x^2+ax-b=-(x+3)^2+3$

$=-x^2-6x-6$

따라서 계수비교법에 의하여

$a=-6$, $b=6$

(3) 이차함수 $y=-4x^2-2ax+4b$는 꼭짓점에서 최댓값을 가지므로 $y=-4(x-1)^2+8$과 같이 나타낼 수 있다. 즉,

$-4x^2-2ax+4b=-4(x-1)^2+8$

$=-4x^2+8x+4$

따라서 계수비교법에 의하여

$-2a=8$, $4b=4$

$\therefore a=-4$, $b=1$

033 답 (1) 최댓값: 11, 최솟값: 6

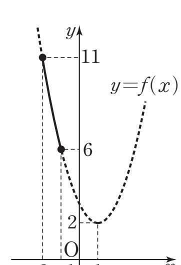
(2) 최댓값: 3, 최솟값: 2

(3) 최댓값: 3, 최솟값: 2

(4) 최댓값: 11, 최솟값: 3

$f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$

(1) $-2\le x\le -1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

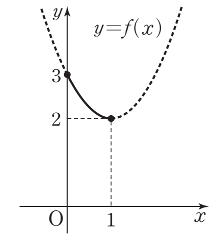


꼭짓점의 x좌표 1이 $-2\le x\le -1$에 포함되지 않으므로

$f(-2)=11$, $f(-1)=6$

따라서 $x=-2$에서 최댓값 11, $x=-1$에서 최솟값 6을 갖는다.

(2) $0\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

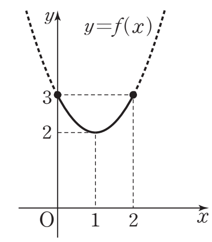


꼭짓점의 x좌표 1이 $0\le x\le 1$에 포함되므로

$f(0)=3$, $f(1)=2$

따라서 $x=0$에서 최댓값 3, $x=1$에서 최솟값 2을 갖는다.

(3) $0\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

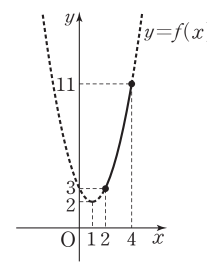


꼭짓점의 x좌표 1이 $0\le x\le 2$에 포함되므로

$f(0)=3$, $f(1)=2$, $f(2)=3$

따라서 $x=0$, $x=2$에서 최댓값 3, $x=1$에서 최솟값 2를 갖는다.

(4) $2\le x\le 4$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



꼭짓점의 x좌표 1이 $2\le x\le 4$에 포함되지 않으므로

$f(2)=3$, $f(4)=11$

따라서 $x=4$에서 최댓값 11, $x=2$에서 최솟값 3을 갖는다.

풍쌤 비법 제한된 범위에서의 이차함수의 최대·최소

x의 값의 범위에 제한이 있을 때, 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ $(\alpha\le x\le\beta)$의 최댓값과 최솟값은 그래프를 그려서 꼭짓점의 위치를 확인한다.

① 꼭짓점이 범위 안에 있는 경우

➡ 꼭짓점과 한 끝점에서 최댓값, 최솟값을 갖는다.

② 꼭짓점이 범위 안에 없는 경우

➡ 양 끝점에서 최댓값, 최솟값을 갖는다.

034 답 (1) 최댓값: 5, 최솟값: 2

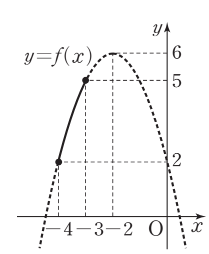
(2) 최댓값: 6, 최솟값: 2

(3) 최댓값: 2, 최솟값: -10

(4) 최댓값: -3, 최솟값: -19

$f(x)=-x^2-4x+2=-(x+2)^2+6$

(1) $-4\le x\le -3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

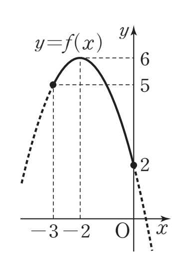


꼭짓점의 x좌표 -2가 $-4\le x\le -3$에 포함되지 않으므로

$f(-4)=2$, $f(-3)=5$

따라서 $x=-3$에서 최댓값 5, $x=-4$에서 최솟값 2를 갖는다.

(2) $-3\le x\le 0$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

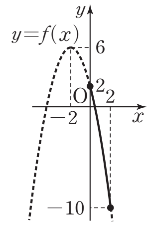


꼭짓점의 x좌표 -2가 $-3\le x\le 0$에 포함되므로

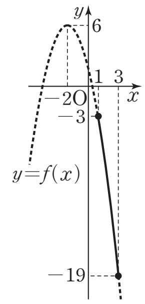
$f(-3)=5$, $f(-2)=6$, $f(0)=2$

따라서 $x=-2$에서 최댓값 6, $x=0$에서 최솟값 2를 갖는다.

(3) $0\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
꼭짓점의 x좌표 -2가 $0\le x\le 2$에 포함되지 않으므로
$f(0)=2$, $f(2)=-10$
따라서 $x=0$에서 최댓값 2, $x=2$에서 최솟값 -10을 갖는다.

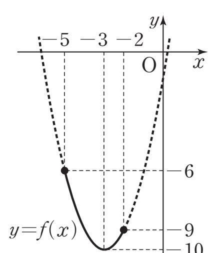


(4) $1\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
꼭짓점의 x좌표 -2가 $1\le x\le 3$에 포함되지 않으므로
$f(1)=-3$, $f(3)=-19$
따라서 $x=1$에서 최댓값 -3, $x=3$에서 최솟값 -19를 갖는다.

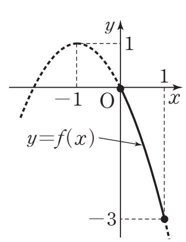


035 답 (1) 최댓값: -6, 최솟값: -10
(2) 최댓값: 0, 최솟값: -3
(3) 최댓값: 2, 최솟값: -1
(4) 최댓값: 0, 최솟값: -4
(5) 최댓값: -6, 최솟값: -8
(6) 최댓값: 7, 최솟값: 4
(7) 최댓값: $\frac{9}{4}$, 최솟값: $\frac{5}{4}$
(8) 최댓값: 8, 최솟값: -1

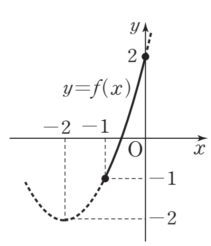
(1) $f(x)=x^2+6x-1$
$=(x+3)^2-10$
이므로 $-5\le x\le -2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
꼭짓점의 x좌표 -3이 $-5\le x\le -2$에 포함되므로
$f(-5)=-6$, $f(-3)=-10$, $f(-2)=-9$
따라서 $x=-5$에서 최댓값 -6, $x=-3$에서 최솟값 -10을 갖는다.



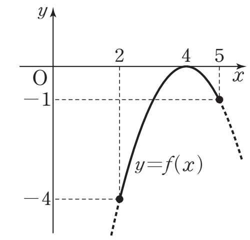
(2) $f(x)=-x^2-2x$
$=-(x+1)^2+1$
이므로 $0\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
꼭짓점의 x좌표 -1이 $0\le x\le 1$에 포함되지 않으므로
$f(0)=0$, $f(1)=-3$
따라서 $x=0$에서 최댓값 0, $x=1$에서 최솟값 -3을 갖는다.



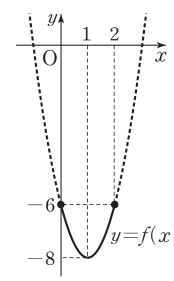
(3) $f(x)=x^2+4x+2$
$=(x+2)^2-2$
이므로 $-1\le x\le 0$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
꼭짓점의 x좌표 -2가 $-1\le x\le 0$에 포함되지 않으므로
$f(-1)=-1$, $f(0)=2$
따라서 $x=0$에서 최댓값 2, $x=-1$에서 최솟값 -1을 갖는다.



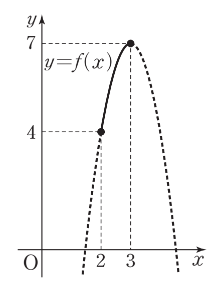
(4) $f(x)=-x^2+8x-16$
$=-(x-4)^2$
이므로 $2\le x\le 5$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
꼭짓점의 x좌표 4가 $2\le x\le 5$에 포함되므로
$f(2)=-4$, $f(4)=0$, $f(5)=-1$
따라서 $x=4$에서 최댓값 0, $x=2$에서 최솟값 -4를 갖는다.



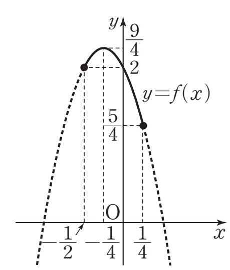
(5) $f(x)=2x^2-4x-6$
$=2(x-1)^2-8$
이므로 $0\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
꼭짓점의 x좌표 1이 $0\le x\le 2$에 포함되므로
$f(0)=-6$, $f(1)=-8$, $f(2)=-6$
따라서 $x=0$, $x=2$에서 최댓값 -6, $x=1$에서 최솟값 -8을 갖는다.



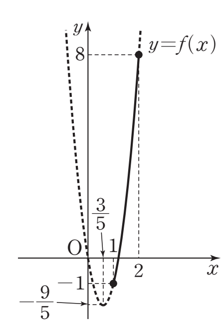
(6) $f(x)=-3x^2+18x-20$
$=-3(x-3)^2+7$
이므로 $2\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
꼭짓점의 x좌표 3이 $2\le x\le 3$에 포함되므로
$f(2)=4$, $f(3)=7$
따라서 $x=3$에서 최댓값 7, $x=2$에서 최솟값 4를 갖는다.



(7) $f(x)=-4x^2-2x+2$
$=-4\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{4}$
이므로 $-\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{4}$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
꼭짓점의 x좌표 $-\frac{1}{4}$이 $-\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{4}$에 포함되므로
$f\left(-\frac{1}{2}\right)=2$, $f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4}$, $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{4}$
따라서 $x=-\frac{1}{4}$에서 최댓값 $\frac{9}{4}$, $x=\frac{1}{4}$에서 최솟값 $\frac{5}{4}$를 갖는다.



(8) $f(x)=5x^2-6x$
$=5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{9}{5}$
이므로 $1\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
꼭짓점의 x좌표 $\frac{3}{5}$이 $1\le x\le 2$에 포함되지 않으므로
$f(1)=-1$, $f(2)=8$
따라서 $x=2$에서 최댓값 8, $x=1$에서 최솟값 -1을 갖는다.

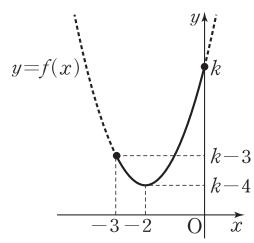


036 답 5

$f(x)=x^2+4x+k$

$=(x+2)^2+k-4$

이므로 $-3\le x\le 0$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 꼭짓점의 x좌표 -2가 $-3\le x\le 0$에 포함되므로 최솟값은

$f(-2)=k-4=1$

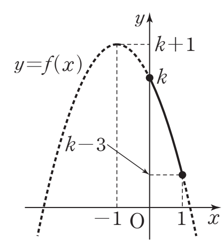
$\therefore k=5$

037 답 4

$f(x)=-x^2-2x+k$

$=-(x+1)^2+k+1$

이므로 $0\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 꼭짓점의 x좌표 -1이 $0\le x\le 1$에 포함되지 않으므로 최댓값은

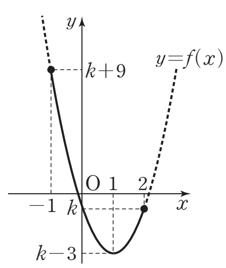
$f(0)=k=4$

038 답 -1

$f(x)=3x^2-6x+k$

$=3(x-1)^2+k-3$

이므로 $-1\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 꼭짓점의 x좌표 1이 $-1\le x\le 2$에 포함되므로 최솟값은

$f(1)=k-3=-4$

$\therefore k=-1$

039 답 45 m

$y=30x-5x^2=-5(x-3)^2+45$

따라서 $x=3$일 때 최댓값이 45이므로 물 로켓이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이는 45 m이다.

040 답 22 m, 2초

$y=-5x^2+20x+2=-5(x-2)^2+22$

따라서 $x=2$일 때 최댓값이 22이므로 공이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이는 22 m이고, 걸린 시간은 2초이다.

041 답 169 cm^2

직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면

$2x+2y=52 \qquad \therefore x+y=26$

$y=26-x$이므로 $x>0$, $y>0$에서 $0<x<26$

직사각형의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=xy=x(26-x)$

$=-x^2+26x$

$=-(x-13)^2+169$

따라서 $x=13$일 때 최댓값 169를 가지므로 직사각형의 최대 넓이는 169 cm^{2}이다.

042 답 18 m^2

텃밭의 세로의 길이를 x m, 가로의 길이를 y m라 하면

$2x+y=12$

$y=12-2x$이므로 $x>0$, $y>0$에서 $0<x<6$

텃밭의 넓이를 S m^{2}라 하면

$S=xy=x(12-2x)$

$=-2x^2+12x$

$=-2(x-3)^2+18$

따라서 $x=3$일 때 최댓값 18을 가지므로 텃밭의 최대 넓이는 18 m^{2}이다.

043 답 ①

① $y=\frac{1}{2}x^2+x+4=\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{7}{2}$이므로 최솟값은 $\frac{7}{2}$이다.

② $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$이므로 최솟값은 -1이다.

③ $y=x^2+3$의 최솟값은 3이다.

④ $y=x^2+2x=(x+1)^2-1$이므로 최솟값은 -1이다.

⑤ $y=2x^2+8x-1=2(x+2)^2-9$이므로 최솟값은 -9이다.

따라서 최솟값이 가장 큰 것은 ①이다.

044 답 4

$f(x)=-x^2-2kx+k-k^2$

$=-(x+k)^2+k$

이때 최댓값이 5이므로 $k=5$

따라서 $f(x)=-(x+5)^2+5$이므로

$f(-4)=-1^2+5=4$

045 답 ①

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -2, 6이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+6=-a \qquad \therefore a=-4$

$-2\times 6=b \qquad \therefore b=-12$

따라서 이차함수 $y=-x^2+ax+b$에서

$y=-x^2-4x-12=-(x+2)^2-8$

이므로 최댓값은 -8이다.

046 답 -7

$y=2x^2+12x+6=2(x+3)^2-12$

이므로 최솟값은 -12이다.

$y=-3x^2+6x+k-8=-3(x-1)^2+k-5$

이므로 최댓값은 $k-5$이다.

따라서 $-12=k-5$이므로

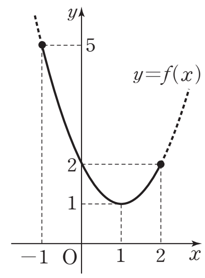
$k=-7$

047 답 ③

$f(x)=x^2-2x+2$

$\quad=(x-1)^2+1$

이므로 $-1\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 꼭짓점의 x좌표 1이 $-1\le x\le 2$에 포함되므로 $x=-1$에서 최댓값 5, $x=1$에서 최솟값 1을 갖는다.

$\therefore M=5,\ m=1$

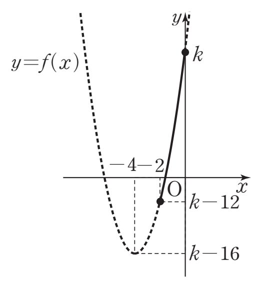
$\therefore M-m=5-1=4$

048 답 ④

$f(x)=x^2+8x+k$

$\quad=(x+4)^2+k-16$

이므로 $-2\le x\le 0$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 꼭짓점의 x좌표 -4가 $-2\le x\le 0$에 포함되지 않으므로 최솟값은

$f(-2)=k-12=-2 \qquad \therefore k=10$

따라서 $f(x)$의 최댓값은

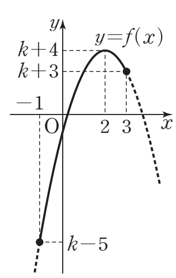
$f(0)=k=10$

049 답 -1

$f(x)=-x^2+4x+k$

$\quad=-(x-2)^2+k+4$

이므로 $-1\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 꼭짓점의 x좌표 2가 $-1\le x\le 3$에 포함되므로 $x=2$에서 최댓값 $k+4$, $x=-1$에서 최솟값 $k-5$를 갖는다. 즉,

$(k+4)+(k-5)=-3,\ 2k-1=-3$

$\therefore k=-1$

050 답 ②

$f(x)=-x^2-6x+k$

$\quad=-(x+3)^2+k+9$

꼭짓점의 x좌표 -3이 $-5\le x\le -2$에 포함되므로 $x=-3$에서 최댓값 $k+9$, $x=-5$에서 최솟값 $k+5$를 갖는다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 차는

$k+9-(k+5)=4$

051 답 ③

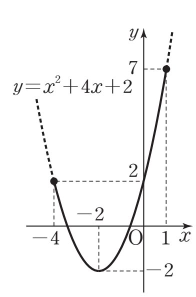
$y=x^2+4x+k$

$\quad=(x+2)^2+k-4$

이때 최솟값이 -2이므로

$k-4=-2 \qquad \therefore k=2$

따라서 $-4\le x\le 1$에서 $y=x^2+4x+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=1$에서 최댓값 7을 갖는다.

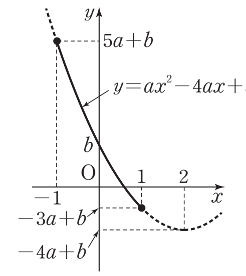


052 답 0

$y=ax^2-4ax+b$

$\quad=a(x-2)^2-4a+b$

이므로 $-1\le x\le 1$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=-1$에서 최댓값 $5a+b$, $x=1$에서 최솟값 $-3a+b$를 가지므로

$5a+b=\dfrac{7}{2},\ -3a+b=-\dfrac{1}{2}$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=\dfrac{1}{2},\ b=1$

$\therefore 2a-b=2\times\dfrac{1}{2}-1=0$

053 답 ③

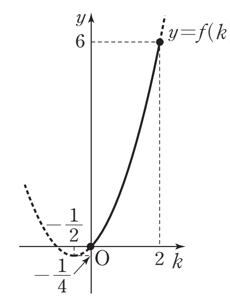
$y=2x^2+4kx+3k^2+k$

$\quad=2(x+k)^2+k^2+k$

이므로 최솟값은 $x=-k$일 때 k^2+k이다.

$\therefore f(k)=k^2+k=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

$0\le k\le 2$에서 $y=f(k)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $k=2$에서 최댓값 6, $k=0$에서 최솟값 0을 갖는다.



따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$6+0=6$

054 답 ②

$y=-6x^2+96x+360$

$\quad=-6(x-8)^2+744$

따라서 최댓값은 $x=8$일 때 744이므로 일주일 동안의 공연 이익이 최대가 되도록 하려면 관람권의 가격을 8만 원으로 정해야 한다.

055 답 ④

반지름의 길이를 x라 하면 부채꼴의 호의 길이는

$36-2x$ (단, $0<x<18$)

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}x(36-2x)$

$\quad=-x^2+18x$

$\quad=-(x-9)^2+81$

따라서 $x=9$일 때 최댓값이 81이므로 부채꼴의 넓이의 최댓값은 81이다.

참고 반지름의 길이가 r, 호의 길이가 l인 부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}rl$

056 답 34

$-x^2+16=0$에서

$x^2-16=0$, $(x+4)(x-4)=0$

$\therefore$ $x=-4$ 또는 $x=4$

즉, 이차함수 $y=-x^2+16$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 -4, 4이다.

점 B의 좌표를 $(a, 0)$ $(0<a<4)$이라 하면

$A(-a, 0)$, $C(a, -a^2+16)$

$\therefore$ $\overline{AB}=2a$, $\overline{BC}=-a^2+16$

직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 l이라 하면

$l=2(\overline{AB}+\overline{BC})$

$=2(2a-a^2+16)$

$=-2a^2+4a+32$

$=-2(a-1)^2+34$

이때 $0<a<4$이므로 $a=1$에서 최댓값 34를 갖는다.

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 34이다.

중단원 점검 문제

Ⅱ-3 | 이차방정식과 이차함수 097~098쪽

01 답 ④

이차함수 $y=x^2+ax-b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -3, 5이므로 -3, 5는 이차방정식 $x^2+ax-b=0$의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+5=-a$, $-3\times5=-b$

따라서 $a=-2$, $b=15$이므로

$a+b=-2+15=13$

02 답 13

이차함수 $f(x)=-x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표의 합이 6, 곱이 -8이므로 이차방정식 $-x^2+ax+b=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\dfrac{a}{-1}=6$, $\dfrac{b}{-1}=-8$

$\therefore$ $a=6$, $b=8$

따라서 $f(x)=-x^2+6x+8$이므로

$f(1)=-1+6+8=13$

03 답 ②

이차방정식 $2x^2+(2k-1)x+k^2-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4\times2\times(k^2-k)$

$=4k^2-4k+1-8k^2+8k$

$=-4k^2+4k+1$

이때 $D=0$이어야 하므로

$-4k^2+4k+1=0$, 즉 $4k^2-4k-1=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 곱은 $-\dfrac{1}{4}$이다.

04 답 ③

이차방정식 $x^2+2x+2k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1^2-1\times(2k+3)=-2k-2$

이때 $\dfrac{D}{4}<0$이어야 하므로

$-2k-2<0$ $\qquad\therefore$ $k>-1$

따라서 정수 k의 최솟값은 0이다.

05 답 ⑤

이차함수 $y=x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=-x-k$가 만나는 점의 x좌표는 이차방정식

$x^2-3x+1=-x-k$, 즉 $x^2-2x+k+1=0$의 실근이다.

이때 한 근이 -1이므로 $x^2-2x+k+1=0$에 $x=-1$을 대입하면

$1+2+k+1=0$ $\qquad\therefore$ $k=-4$

이차방정식 $x^2-2x+k+1=0$, 즉 $x^2-2x-3=0$에서

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 점 B의 x좌표는 3이다.

06 답 ②

이차함수 $y=-x^2+kx-2$의 그래프와 직선 $y=x-4$가 만나는 점의 x좌표는 이차방정식 $-x^2+kx-2=x-4$, 즉

$x^2-(k-1)x-2=0$의 두 근이다.

이차방정식 $x^2-(k-1)x-2=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k-1$, $\alpha\beta=-2$ …… ㉠

이때 두 교점의 x좌표의 차가 3이므로

$|\alpha-\beta|=3$

위의 식의 양변을 제곱하면

$(\alpha-\beta)^2=9$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$(k-1)^2-4\times(-2)=9$

$k^2-2k=0$, $k(k-2)=0$

$\therefore$ $k=0$ 또는 $k=2$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은

$0+2=2$

07 답 ②

직선 $y=mx+2$가 이차함수 $y=\dfrac{1}{3}x^2+5$에 접하므로 이차방정식

$\dfrac{1}{3}x^2+5=mx+2$, 즉 $x^2-3mx+9=0$이 중근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-3mx+9=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=(-3m)^2-4\times1\times9=9m^2-36$
이때 $D_1=0$이어야 하므로
$9m^2-36=0$, $m^2-4=0$
$(m+2)(m-2)=0$
$\therefore m=2$ ($\because$ m은 양수)
따라서 주어진 직선은 $y=2x+2$이다.
또, 직선 $y=2x+2$가 이차함수 $y=x^2+4x+n$에 접하므로 이차방정식 $x^2+4x+n=2x+2$, 즉 $x^2+2x+n-2=0$이 중근을 가져야 한다.
이차방정식 $x^2+2x+n-2=0$의 판별식을 D_2라 하면
$\frac{D_2}{4}=1^2-1\times(n-2)=-n+3$
이때 $\frac{D_2}{4}=0$이어야 하므로
$-n+3=0$ $\quad\therefore n=3$
$\therefore m+n=2+3=5$

08 답 -6

직선 $y=2x+1$에 평행하므로 구하는 직선의 방정식을 $y=2x+n$ (n은 상수)이라 하면
이차방정식 $x^2-4x+3=2x+n$, 즉 $x^2-6x+3-n=0$이 중근을 가져야 한다.
이차방정식 $x^2-6x+3-n=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times(3-n)=n+6$
이때 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로
$n+6=0$ $\quad\therefore n=-6$
따라서 구하는 직선의 y절편은 -6이다.

09 답 ⑤

$y=x^2-2x+9=(x-1)^2+8$
이므로 최솟값은 8이다.

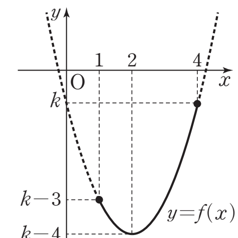
10 답 ③

최댓값이 $x=2$일 때 5이고, x^2의 계수가 -1이므로
$y=-(x-2)^2+5=-x^2+4x+1$
따라서 $a=4$, $b=1$이므로
$ab=4\times1=4$

11 답 ①

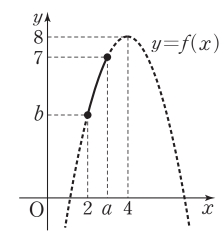
$y=-2x^2+4kx+6k$
$\quad=-2(x-k)^2+2k^2+6k$
이므로 $x=k$에서 최댓값 $2k^2+6k$를 갖는다.
$\therefore f(k)=2k^2+6k$
$\qquad=2\left(k+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}$
따라서 $f(k)$는 $k=-\frac{3}{2}$에서 최솟값 $-\frac{9}{2}$를 갖는다.

12 답 -5



$f(x)=x^2-4x+k$
$\quad=(x-2)^2+k-4$
이므로 $1\le x\le4$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
$x=4$에서 최댓값 k를 갖고, 최댓값이 -1이므로
$k=-1$
$x=2$에서 최솟값 $k-4$를 가지므로 구하는 최솟값은
$k-4=-1-4=-5$

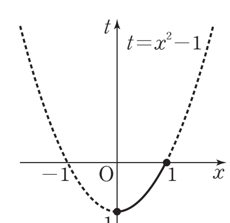
13 답 ④



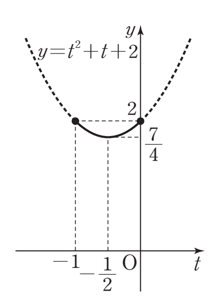
$f(x)=-x^2+8x-8$
$\quad=-(x-4)^2+8$
에서 $f(4)=8$이므로 $a<4$
따라서 $2\le x\le a$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최댓값 7을 가지므로
$-a^2+8a-8=7$, $a^2-8a+15=0$
$(a-3)(a-5)=0$
$\therefore a=3$ ($\because a<4$)
또, $x=2$에서 최솟값 b를 가지므로
$b=-4+16-8=4$
$\therefore a+b=3+4=7$

참고 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 8을 갖는다. 그런데 $2\le x\le a$에서 최댓값이 8이 아니므로 꼭짓점의 x좌표가 $2\le x\le a$에 포함되지 않아야 한다. 즉, $a<4$이어야 한다.

14 답 ⑤



$y=(x^2-1)^2+(x^2-1)+2$에서
$x^2-1=t$로 놓으면 $t=x^2-1$은 $0\le x\le1$에서 오른쪽 그림과 같으므로
$x=1$에서 최댓값 0, $x=0$에서 최솟값 -1을 갖는다.
$\therefore -1\le t\le0$
즉, 구하는 최솟값은 $-1\le t\le0$에서 함수 $y=t^2+t+2$의 최솟값과 같다.
이때 주어진 함수는



$y=t^2+t+2$
$\quad=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\,(-1\le t\le0)$
이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 함수 $y=t^2+t+2$는 $t=-\frac{1}{2}$에서 최솟값 $\frac{7}{4}$을 갖는다.

풍쌤 비법

공통부분이 있는 함수의 최대·최소는 공통부분을 t로 치환한 후 t의 값의 범위에서 t에 대한 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

15 답 180 cm

$y=-5x^2+50x+60$

$\quad=-5(x-5)^2+185$

따라서 $1\le x\le 4$일 때 $x=4$에서 최댓값 180을 가지므로 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이는 180 cm이다.

16 답 121

직사각형의 가로의 길이는 9, 세로의 길이는 13이므로 새로운 직사각형의 가로의 길이는 $9+x$, 세로의 길이는 $13-x$이다.

(단, $0<x<13$)

새로운 직사각형의 넓이를 S라 하면

$S=(9+x)(13-x)$

$\quad=-x^2+4x+117$

$\quad=-(x-2)^2+121$

따라서 $0<x<13$일 때 $x=2$에서 최댓값 121을 가지므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 121이다.

Ⅱ-4 | 여러 가지 방정식 099~115쪽

001 답

(1) $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(2) $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

(3) $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

(4) $x=-3$ 또는 $x=0$ (중근) 또는 $x=3$

(5) $x=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=\pm\dfrac{1}{3}i$

(6) $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(1) $x^3+1=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(2) $x^3-8=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

(3) $x^3+x^2-6x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^2+x-6)=0$, $x(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

(4) $x^4-9x^2=0$의 좌변을 인수분해하면

$x^2(x^2-9)=0$, $x^2(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=0$ (중근) 또는 $x=3$

(5) $81x^4-1=0$의 좌변을 인수분해하면

$(9x^2)^2-1^2=0$, $(9x^2+1)(9x^2-1)=0$

$(9x^2+1)(3x+1)(3x-1)=0$

$\therefore x=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=\pm\dfrac{1}{3}i$

(6) $x^4+x^3-x-1=0$의 좌변을 인수분해하면

$x^3(x+1)-(x+1)=0$

$(x^3-1)(x+1)=0$

$(x-1)(x^2+x+1)(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

002 답

(1) $x=-2$ (중근) 또는 $x=1$

(2) $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

(3) $x=1$ 또는 $x=2\pm\sqrt{3}$

(4) $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

(5) $x=-3$ 또는 $x=-1$ (중근) 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

(6) $x=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

(1) $f(x)=x^3+3x^2-4$로 놓으면

$f(1)=1+3-4=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ & & 1 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+4x+4)$
$\quad=(x-1)(x+2)^2$
따라서 주어진 방정식은
$(x-1)(x+2)^2=0$
$\therefore$ $x=-2$ (중근) 또는 $x=1$

(2) $f(x)=x^3-4x^2+x+6$으로 놓으면
$f(-1)=-1-4-1+6=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2-5x+6)$
$\quad=(x+1)(x-2)(x-3)$
따라서 주어진 방정식은
$(x+1)(x-2)(x-3)=0$
$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

(3) $f(x)=x^3-5x^2+5x-1$로 놓으면
$f(1)=1-5+5-1=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & 5 & -1 \\ & & 1 & -4 & 1 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-4x+1)$
따라서 주어진 방정식은
$(x-1)(x^2-4x+1)=0$
$\therefore$ $x=1$ 또는 $x=2\pm\sqrt{3}$

(4) $f(x)=x^4+x^3-7x^2-4x+12$로 놓으면
$f(2)=16+8-28-8+12=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 1 & -7 & -4 & 12 \\ & & 2 & 6 & -2 & -12 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^3+3x^2-x-6)$
이때 $g(x)=x^3+3x^2-x-6$으로 놓으면
$g(-2)=-8+12+2-6=0$
조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 3 & -1 & -6 \\ & & -2 & -2 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$g(x)=(x+2)(x^2+x-3)$
따라서 주어진 방정식은
$(x-2)(x+2)(x^2+x-3)=0$
$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

(5) $f(x)=2x^4+9x^3+9x^2-x-3$으로 놓으면
$f(-1)=2-9+9+1-3=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & 9 & 9 & -1 & -3 \\ & & -2 & -7 & -2 & 3 \\ \hline & 2 & 7 & 2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(2x^3+7x^2+2x-3)$
이때 $g(x)=2x^3+7x^2+2x-3$으로 놓으면
$g(-1)=-2+7-2-3=0$
조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 7 & 2 & -3 \\ & & -2 & -5 & 3 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$g(x)=(x+1)(2x^2+5x-3)$
$\quad=(x+1)(2x-1)(x+3)$
따라서 주어진 방정식은
$(x+1)^2(2x-1)(x+3)=0$
$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=-1$ (중근) 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

(6) $f(x)=3x^4+4x^3+4x^2-8x-3$으로 놓으면
$f(1)=3+4+4-8-3=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 3 & 4 & 4 & -8 & -3 \\ & & 3 & 7 & 11 & 3 \\ \hline & 3 & 7 & 11 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(3x^3+7x^2+11x+3)$
이때 $g(x)=3x^3+7x^2+11x+3$으로 놓으면
$g\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{9}+\dfrac{7}{9}-\dfrac{11}{3}+3=0$
조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{3} & 3 & 7 & 11 & 3 \\ & & -1 & -2 & -3 \\ \hline & 3 & 6 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

$g(x)=\left(x+\dfrac{1}{3}\right)(3x^2+6x+9)$
$\quad=(3x+1)(x^2+2x+3)$
따라서 주어진 방정식은
$(x-1)(3x+1)(x^2+2x+3)=0$
$\therefore$ $x=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

풍쌤 비법

$f(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 다음 순서로 찾는다.
$\pm1 \Rightarrow \pm$(상수항의 약수) $\Rightarrow \pm\dfrac{\text{(상수항의 약수)}}{\text{(최고차항의 계수의 약수)}}$

003 답 (1) $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$
(2) $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$
(3) $x=-1\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{5}$
(4) $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=5$ 또는 $x=7$
(5) $x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{29}}{2}$

(1) $(x^2+3x)(x^2+3x+1)-2=0$에서 $x^2+3x=X$로 놓으면
$X(X+1)-2=0$, $X^2+X-2=0$
$(X+2)(X-1)=0$
위의 식에 $X=x^2+3x$를 대입하면
$(x^2+3x+2)(x^2+3x-1)=0$
$(x+1)(x+2)(x^2+3x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

(2) $(x^2-x+6)(x^2-x-2)+15=0$에서 $x^2-x=X$로 놓으면
$(X+6)(X-2)+15=0$, $X^2+4X+3=0$
$(X+1)(X+3)=0$
위의 식에 $X=x^2-x$를 대입하면
$(x^2-x+1)(x^2-x+3)=0$
$\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$

(3) $(x^2+2x)-x^2-2x-12=0$에서 $x^2+2x=X$로 놓으면
$X^2-X-12=0$, $(X+3)(X-4)=0$
위의 식에 $X=x^2+2x$를 대입하면
$(x^2+2x+3)(x^2+2x-4)=0$
$\therefore x=-1\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{5}$

(4) $(x^2-6x-1)^2-36=0$에서 $x^2-6x=X$로 놓으면
$(X-1)^2-36=0$, $X^2-2X-35=0$
$(X+5)(X-7)=0$
위의 식에 $X=x^2-6x$를 대입하면
$(x^2-6x+5)(x^2-6x-7)=0$
$(x-1)(x-5)(x+1)(x-7)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=5$ 또는 $x=7$

(5) $(x^2-5x)^2+5x^2-25x-6=0$에서 $x^2-5x=X$로 놓으면
$X^2+5X-6=0$, $(X+6)(X-1)=0$
위의 식에 $X=x^2-5x$를 대입하면
$(x^2-5x+6)(x^2-5x-1)=0$
$(x-2)(x-3)(x^2-5x-1)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\frac{5\pm\sqrt{29}}{2}$

004 답 (1) $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$
(2) $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\pm\sqrt{5}i$
(3) $x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{7}i$

(1) $x^4-13x^2+36=0$에서 $x^2=X$로 놓으면
$X^2-13X+36=0$, $(X-4)(X-9)=0$
위의 식에 $X=x^2$을 대입하면
$(x^2-4)(x^2-9)=0$
$(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

(2) $x^4+4x^2-5=0$에서 $x^2=X$로 놓으면
$X^2+4X-5=0$, $(X+5)(X-1)=0$
위의 식에 $X=x^2$을 대입하면
$(x^2+5)(x^2-1)=0$
$(x^2+5)(x+1)(x-1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\pm\sqrt{5}i$

(3) $x^4+9x^2+14=0$에서 $x^2=X$로 놓으면
$X^2+9X+14=0$, $(X+2)(X+7)=0$
위의 식에 $X=x^2$을 대입하면
$(x^2+2)(x^2+7)=0$
$\therefore x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{7}i$

005 답 (1) $x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$
(2) $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$
(3) $x=-1\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{6}$

(1) $x^4+3x^2+4=0$에서
$(x^4+4x^2+4)-x^2=0$, $(x^2+2)^2-x^2=0$
$(x^2+x+2)(x^2-x+2)=0$
$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

(2) $x^4-7x^2+1=0$에서
$(x^4+2x^2+1)-9x^2=0$, $(x^2+1)^2-(3x)^2=0$
$(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)=0$
$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(3) $x^4-14x^2+25=0$에서
$(x^4-10x^2+25)-4x^2=0$, $(x^2-5)^2-(2x)^2=0$
$(x^2+2x-5)(x^2-2x-5)=0$
$\therefore x=-1\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{6}$

006 답 ①
$x^3+2x^2+x+2=0$에서
$x^2(x+2)+(x+2)=0$, $(x^2+1)(x+2)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=\pm i$
따라서 주어진 방정식의 실근은 -2이다.

007 답 13
$f(x)=x^3-2x^2+2x+5$로 놓으면
$f(-1)=-1-2-2+5=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2 & 2 & 5 \\ & & -1 & 3 & -5 \\ \hline & 1 & -3 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2-3x+5)$
따라서 주어진 방정식은
$(x+1)(x^2-3x+5)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{11}i}{2}$
즉, $a=-1$, $b=3$, $c=11$이므로
$a+b+c=-1+3+11=13$

008 답 ③
$f(x)=x^4-x^3-6x^2+14x-12$로 놓으면
$f(2)=16-8-24+28-12=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -1 & -6 & 14 & -12 \\ & & 2 & 2 & -8 & 12 \\ \hline & 1 & 1 & -4 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^3+x^2-4x+6)$

이때 $g(x)=x^3+x^2-4x+6$으로 놓으면

$g(-3)=-27+9+12+6=0$

조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 1 & -4 & 6 \\ & & -3 & 6 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$g(x)=(x+3)(x^2-2x+2)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-2)(x+3)(x^2-2x+2)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm i$

즉, 모든 실근의 합은

$-3+2=-1$

009 답 ②

$f(x)=2x^4-x^3+4x^2-8x+3$으로 놓으면

$f(1)=2-1+4-8+3=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & -1 & 4 & -8 & 3 \\ & & 2 & 1 & 5 & -3 \\ \hline & 2 & 1 & 5 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(2x^3+x^2+5x-3)$

이때 $g(x)=2x^3+x^2+5x-3$으로 놓으면

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{5}{2}-3=0$

조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & 1 & 5 & -3 \\ & & 1 & 1 & 3 \\ \hline & 2 & 2 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$g(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x+6)$

$\quad=(2x-1)(x^2+x+3)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(2x-1)(x^2+x+3)=0$이므로 α, β는 이차방정식 $x^2+x+3=0$의 서로 다른 두 허근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=3$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$\quad=(-1)^2-2\times3=-5$

참고 이차방정식 $x^2+x+3=0$의 판별식 D에 대하여 $D=1^2-4\times1\times3=-11<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

010 답 ⑤

$(x^2-3x-1)^2=9$에서 $x^2-3x=X$로 놓으면

$(X-1)^2=9$, $X^2-2X-8=0$

$(X+2)(X-4)=0$

위의 식에 $X=x^2-3x$를 대입하면

$(x^2-3x+2)(x^2-3x-4)=0$

$(x-1)(x-2)(x+1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

따라서 모든 양의 근의 합은

$1+2+4=7$

참고 $x^2-3x-1=t$로 놓고 풀 수도 있다.

011 답 4

$(x^2-2x-4)(x^2-2x-5)-12=0$에서

$x^2-2x=X$로 놓으면

$(X-4)(X-5)-12=0$, $X^2-9X+8=0$

$(X-1)(X-8)=0$

위의 식에 $X=x^2-2x$를 대입하면

$(x^2-2x-1)(x^2-2x-8)=0$

$(x^2-2x-1)(x+2)(x-4)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

따라서 가장 큰 근은 4이다.

012 답 ②

$(x^2+4x-10)(x^2+4x+4)-32=0$에서

$x^2+4x=X$로 놓으면

$(X-10)(X+4)-32=0$, $X^2-6X-72=0$

$(X+6)(X-12)=0$

위의 식에 $X=x^2+4x$를 대입하면

$(x^2+4x+6)(x^2+4x-12)=0$

$(x^2+4x+6)(x+6)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-6$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{2}i$

따라서 음수인 근은 -6이다.

013 답 ④

$x^4+4x^2-32=0$에서 $x^2=X$로 놓으면

$X^2+4X-32=0$, $(X+8)(X-4)=0$

위의 식에 $X=x^2$을 대입하면

$(x^2+8)(x^2-4)=0$

$(x^2+8)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\pm2\sqrt{2}i$

따라서 모든 실근의 곱은

$-2\times2=-4$

014 답 ①

$x^4+10x^2+9=0$에서 $x^2=X$로 놓으면

$X^2+10X+9=0$, $(X+1)(X+9)=0$

위의 식에 $X=x^2$을 대입하면

$(x^2+1)(x^2+9)=0$

따라서 $x=\pm i$ 또는 $x=\pm3i$이므로

$a^2+b^2+c^2+d^2=i^2+(-i)^2+(3i)^2+(-3i)^2$

$\quad=-1+(-1)+(-9)+(-9)=-20$

015 답 3

$x^4+2x^2+9=0$에서

$(x^4+6x^2+9)-4x^2=0$, $(x^2+3)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)=0$

$\therefore\ x=-1\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}i$

따라서 $a=1$, $b=2$이므로

$a+b=1+2=3$

016 답 $2\sqrt{6}$

$x^4-20x^2+4=0$에서

$(x^4-4x^2+4)-16x^2=0$, $(x^2-2)^2-(4x)^2=0$

$(x^2+4x-2)(x^2-4x-2)=0$

$\therefore\ x=-2\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=2\pm\sqrt{6}$

따라서 양의 근은 $-2+\sqrt{6}$, $2+\sqrt{6}$이므로 그 합은

$(-2+\sqrt{6})+(2+\sqrt{6})=2\sqrt{6}$

017 답 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-4x+5-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+5=0$

이때 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$이므로

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+3=0$

$x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2-4X+3=0$, $(X-1)(X-3)=0$

$\therefore\ X=1$ 또는 $X=3$

(i) $X=1$일 때

$x+\dfrac{1}{x}=1$, $x^2-x+1=0$

$\therefore\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ii) $X=3$일 때

$x+\dfrac{1}{x}=3$, $x^2-3x+1=0$

$\therefore\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

참고 주어진 방정식에 $x=0$을 대입하면 성립하지 않으므로 $x\neq0$이다.

018 답 1

$x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+3x-8+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-8=0$

이때 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$이므로

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-10=0$

$x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+3X-10=0$, $(X+5)(X-2)=0$

$\therefore\ X=-5$ 또는 $X=2$

(i) $X=-5$일 때

$x+\dfrac{1}{x}=-5$, $x^2+5x+1=0$

$\therefore\ x=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

(ii) $X=2$일 때

$x+\dfrac{1}{x}=2$, $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$

따라서 가장 큰 근은 1이다.

019 답 ②

$x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+5x+6+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+6=0$

이때 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$이므로

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+4=0$

$x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+5X+4=0$, $(X+1)(X+4)=0$

$\therefore\ X=-1$ 또는 $X=-4$

(i) $X=-1$일 때

$x+\dfrac{1}{x}=-1$, $x^2+x+1=0$

$\therefore\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ii) $X=-4$일 때

$x+\dfrac{1}{x}=-4$, $x^2+4x+1=0$

$\therefore\ x=-2\pm\sqrt{3}$

따라서 모든 실근의 합은

$(-2-\sqrt{3})+(-2+\sqrt{3})=-4$

다른 풀이

(i) 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=1^2-4\times1\times1=-3<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) 이차방정식 $x^2+4x+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=2^2-1\times1=3>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 구하는 실근의 합은 이차방정식 $x^2+4x+1=0$의 두 실근의 합과 같으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -4이다.

020 답 ④

$x=1$을 $x^3-4x^2+ax+10=0$에 대입하면

$1-4+a+10=0$ $\quad\therefore\ a=-7$

$\therefore\ x^3-4x^2-7x+10=0$

$f(x)=x^3-4x^2-7x+10$으로 놓으면

$f(1)=1-4-7+10=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & -7 & 10 \\ & & 1 & -3 & -10 \\ \hline & 1 & -3 & -10 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-3x-10)$

$\quad=(x-1)(x+2)(x-5)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x+2)(x-5)=0$이므로

$x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=5$

따라서 나머지 두 근의 합은

$-2+5=3$

021 답 -4

$x=-1$을 $x^3+ax^2-(3a+b)x-2b-2=0$에 대입하면

$-1+a+(3a+b)-2b-2=0$

$\therefore 4a-b=3$ …… ㉠

$x=3$을 $x^3+ax^2-(3a+b)x-2b-2=0$에 대입하면

$27+9a-3(3a+b)-2b-2=0$

$-5b+25=0 \qquad \therefore b=5$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$4a-5=3,\ 4a=8 \qquad \therefore a=2$

$\therefore x^3+2x^2-11x-12=0$

$f(x)=x^3+2x^2-11x-12$로 놓으면

$f(-1)=-1+2+11-12=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -11 & -12 \\ & & -1 & -1 & 12 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2+x-12)$

$\quad=(x+1)(x+4)(x-3)$

즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x+4)(x-3)=0$이므로

$x=-4$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 나머지 한 근은 -4이다.

022 답 ①

$x=1$을 $x^4+ax^3+bx-16=0$에 대입하면

$1+a+b-16=0 \qquad \therefore a+b=15$ …… ㉠

$x=2$를 $x^4+ax^3+bx-16=0$에 대입하면

$16+8a+2b-16=0,\ 8a+2b=0$

$\therefore b=-4a$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a+(-4a)=15,\ -3a=15$

$\therefore a=-5$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=20$

$\therefore x^4-5x^3+20x-16=0$

$f(x)=x^4-5x^3+20x-16$으로 놓으면

$f(1)=1-5+20-16=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -5 & 0 & 20 & -16 \\ & & 1 & -4 & -4 & 16 \\ \hline & 1 & -4 & -4 & 16 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^3-4x^2-4x+16)$

이때 $g(x)=x^3-4x^2-4x+16$으로 놓으면

$g(2)=8-16-8+16=0$

조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & -4 & 16 \\ & & 2 & -4 & -16 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & \boxed{0} \end{array}$$

$g(x)=(x-2)(x^2-2x-8)$

$\quad=(x-2)(x+2)(x-4)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x-2)(x+2)(x-4)=0$이므로

$x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

따라서 나머지 두 근은 -2, 4이므로 그 곱은

$-2\times4=-8$

참고 사차방정식 $x^4-5x^3+20x-16=0$의 두 근이 1, 2이고 $x^4-5x^3+20x-16=(x-1)(x^3-4x^2-4x+16)$이므로 삼차방정식 $x^3-4x^2-4x+16=0$의 한 근이 2이다.

023 답 -2

$x=2$를 $x^4+ax^3-ax^2-7x-6=0$에 대입하면

$16+8a-4a-14-6=0,\ 4a-4=0 \qquad \therefore a=1$

$\therefore x^4+x^3-x^2-7x-6=0$

$f(x)=x^4+x^3-x^2-7x-6$으로 놓으면

$f(2)=16+8-4-14-6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 1 & -1 & -7 & -6 \\ & & 2 & 6 & 10 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 5 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^3+3x^2+5x+3)$

이때 $g(x)=x^3+3x^2+5x+3$으로 놓으면

$g(-1)=-1+3-5+3=0$

조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ & & -1 & -2 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$g(x)=(x+1)(x^2+2x+3)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-2)(x+1)(x^2+2x+3)=0$이므로 구하는 두 허근은 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 두 허근의 합은 -2이다.

024 답 ③

$f(x)=x^3+3x^2+(k+2)x+k$로 놓으면

$f(-1)=-1+3-(k+2)+k=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	3	$k+2$	k
		-1	-2	$-k$
	1	2	k	0

$f(x)=(x+1)(x^2+2x+k)$

이때 $f(x)=0$의 모든 근이 실근이므로 이차방정식 $x^2+2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-1\times k=-k+1\geq 0$

$\therefore\ k\leq 1$

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다.

025 답 ②

$f(x)=x^3+(2k-1)x^2+(k^2-k+2)x-k^2-k-2$로 놓으면

$f(1)=1+(2k-1)+(k^2-k+2)-k^2-k-2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	$2k-1$	k^2-k+2	$-k^2-k-2$
		1	$2k$	k^2+k+2
	1	$2k$	k^2+k+2	0

$f(x)=(x-1)(x^2+2kx+k^2+k+2)$

이때 $f(x)=0$이 한 실근과 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+2kx+k^2+k+2=0$은 허근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-1\times(k^2+k+2)=-k-2<0$

$\therefore\ k>-2$

026 답 ④

$f(x)=x^3-4x^2+(a+4)x-2a$로 놓으면

$f(2)=8-16+2(a+4)-2a=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	1	-4	$a+4$	$-2a$
		2	-4	$2a$
	1	-2	a	0

$f(x)=(x-2)(x^2-2x+a)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2-2x+a)=0$이므로

$(x-2)(x^2-2x+a)=0$이 중근을 갖는 경우는 다음 두 가지이다.

(i) $x^2-2x+a=0$이 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-a=-a+1=0$

$\therefore\ a=1$

(ii) $x^2-2x+a=0$의 한 근이 2인 경우

$x=2$를 $x^2-2x+a=0$에 대입하면

$4-4+a=0\qquad\therefore\ a=0$

(i), (ii)에서 구하는 실수 a의 값은 1, 0이므로 그 합은

$1+0=1$

풍쌤 비법 삼차방정식의 근

삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근은 다음 중 하나의 경우에 해당한다.

① 서로 다른 세 실근

② 한 실근과 중근 (서로 같은 두 실근)

③ 삼중근 (서로 같은 세 실근)

④ 한 실근과 두 허근

027 답 (1) $\alpha+\beta+\gamma=-5$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4$, $\alpha\beta\gamma=-6$

(2) $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{1}{3}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\frac{2}{3}$, $\alpha\beta\gamma=-3$

(3) $\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{7}{2}$

(4) $\alpha+\beta+\gamma=\frac{5}{2}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\frac{5}{4}$, $\alpha\beta\gamma=2$

(5) $\alpha+\beta+\gamma=6$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=0$

(6) $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-8$, $\alpha\beta\gamma=2$

(7) $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{1}{6}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, $\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}$

(8) $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, $\alpha\beta\gamma=-5$

(1) 삼차방정식 $x^3+5x^2-4x+6=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{5}{1}=-5$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{-4}{1}=-4$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{6}{1}=-6$

(2) 삼차방정식 $3x^3+x^2-2x+9=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{1}{3}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{9}{3}=-3$

(3) 삼차방정식 $2x^3-4x^2+6x+7=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{-4}{2}=2$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{6}{2}=3$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{7}{2}$

(4) 삼차방정식 $4x^3-10x^2-5x-8=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{-10}{4}=\frac{5}{2}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{-5}{4}=-\frac{5}{4}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{-8}{4}=2$

(5) 삼차방정식 $x^3-6x^2+3x=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{-6}{1}=6$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{3}{1}=3$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{0}{1}=0$

(6) 삼차방정식 $x^3-8x-2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{0}{1}=0$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{-8}{1}=-8$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{-2}{1}=2$

(7) 삼차방정식 $6x^3+x^2-3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{1}{6}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{0}{6}=0$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{-3}{6}=\frac{1}{2}$

(8) 삼차방정식 $8x^3+40=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{0}{8}=0$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{0}{8}=0$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{40}{8}=-5$

028 답 (1) -2 (2) -1 (3) -1 (4) -3 (5) 1 (6) 6

(1) $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{2}{1}=-2$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{-1}{1}=-1$

(3) $\alpha\beta\gamma=-\frac{1}{1}=-1$

(4) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

$=(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)(\gamma+1)$

$=\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma+\alpha\beta+\alpha+\beta+1$

$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$

$=-1+(-1)+(-2)+1=-3$

(5) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}$

$=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$

$=\frac{-1}{-1}=1$

(6) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(-2)^2-2\times(-1)$

$=4+2=6$

029 답 (1) 4 (2) -2 (3) 1 (4) 13 (5) 4 (6) -9

(1) $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{-4}{1}=4$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{-2}{1}=-2$

(3) $\alpha\beta\gamma=-\frac{-1}{1}=1$

(4) $(\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-2)$

$=(\alpha\beta-2\alpha-2\beta+4)(\gamma-2)$

$=\alpha\beta\gamma-2\alpha\gamma-2\beta\gamma+4\gamma-2\alpha\beta+4\alpha+4\beta-8$

$=\alpha\beta\gamma-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+4(\alpha+\beta+\gamma)-8$

$=1-2\times(-2)+4\times4-8=13$

(5) $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}$

$=\frac{4}{1}=4$

(6) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(4-\gamma)(4-\alpha)(4-\beta)$

$=-(\alpha-4)(\beta-4)(\gamma-4)$

$=-(\alpha\beta-4\alpha-4\beta+16)(\gamma-4)$

$=-(\alpha\beta\gamma-4\alpha\gamma-4\beta\gamma+16\gamma-4\alpha\beta+16\alpha+16\beta-64)$

$=-\{\alpha\beta\gamma-4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+16(\alpha+\beta+\gamma)-64\}$

$=-\{1-4\times(-2)+16\times4-64\}=-9$

030 답 (1) $x^3-9x^2+23x-15=0$

(2) $x^3-x^2-10x-8=0$

(3) $x^3+2x^2-3x=0$

(4) $x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{12}=0$

(5) $x^3-2x^2-5x+10=0$

(6) $x^3+3x^2+12x+10=0$

(1) 주어진 세 수를 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=1+3+5=9$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1\times3+3\times5+5\times1$

$=3+15+5=23$

$\alpha\beta\gamma=1\times3\times5=15$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3-9x^2+23x-15=0$

(2) 주어진 세 수를 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-2+(-1)+4=1$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2\times(-1)+(-1)\times4+4\times(-2)$

$=2+(-4)+(-8)=-10$

$\alpha\beta\gamma=-2\times(-1)\times4=8$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3-x^2-10x-8=0$

(3) 주어진 세 수를 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=1+0+(-3)=-2$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1\times0+0\times(-3)+(-3)\times1=-3$

$\alpha\beta\gamma=1\times0\times(-3)=0$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3+2x^2-3x=0$

(4) 주어진 세 수를 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{4}$

$\alpha\beta\gamma=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{12}=0$

(5) 주어진 세 수를 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=2+\sqrt{5}+(-\sqrt{5})=2$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2\times\sqrt{5}+\sqrt{5}\times(-\sqrt{5})+(-\sqrt{5})\times 2$

$=2\sqrt{5}+(-5)+(-2\sqrt{5})=-5$

$\alpha\beta\gamma=2\times\sqrt{5}\times(-\sqrt{5})=-10$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3-2x^2-5x+10=0$

(6) 주어진 세 수를 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-1+(-1+3i)+(-1-3i)=-3$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1\times(-1+3i)+(-1+3i)(-1-3i)+(-1-3i)\times(-1)$

$=(1-3i)+10+(1+3i)=12$

$\alpha\beta\gamma=-1\times(-1+3i)\times(-1-3i)=-10$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3+3x^2+12x+10=0$

031

답 (1) $x^3-3x^2+2x+2=0$

(2) $x^3+6x^2+11x+4=0$

(3) $x^3-x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=0$

(4) $x^3-2x^2-6x-4=0$

삼차방정식 $x^3+3x^2+2x-2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{3}{1}=-3$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{2}{1}=2$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{-2}{1}=2$

(1) $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$를 세 근으로 하는 삼차방정식의 세 근의 합은

$-\alpha+(-\beta)+(-\gamma)=-(\alpha+\beta+\gamma)=3$

두 근끼리의 곱의 합은

$-\alpha\times(-\beta)+(-\beta)\times(-\gamma)+(-\gamma)\times(-\alpha)$

$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$

세 근의 곱은

$-\alpha\times(-\beta)\times(-\gamma)=-\alpha\beta\gamma=-2$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3-3x^2+2x+2=0$

(2) $\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$을 세 근으로 하는 삼차방정식의 세 근의 합은

$(\alpha-1)+(\beta-1)+(\gamma-1)=(\alpha+\beta+\gamma)-3$

$=-3-3=-6$

두 근끼리의 곱의 합은

$(\alpha-1)\times(\beta-1)+(\beta-1)\times(\gamma-1)+(\gamma-1)\times(\alpha-1)$

$=(\alpha\beta-\alpha-\beta+1)+(\beta\gamma-\beta-\gamma+1)+(\gamma\alpha-\gamma-\alpha+1)$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2(\alpha+\beta+\gamma)+3$

$=2-2\times(-3)+3$

$=2+6+3=11$

세 근의 곱은

$(\alpha-1)\times(\beta-1)\times(\gamma-1)$

$=(\alpha\beta-\alpha-\beta+1)(\gamma-1)$

$=\alpha\beta\gamma-\alpha\gamma-\beta\gamma+\gamma-\alpha\beta+\alpha+\beta-1$

$=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1$

$=2-2+(-3)-1=-4$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3+6x^2+11x+4=0$

(3) $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 삼차방정식의 세 근의 합은

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}$

$=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$

$=\frac{2}{2}=1$

두 근끼리의 곱의 합은

$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}$

세 근의 곱은

$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3-x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=0$

(4) $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$를 세 근으로 하는 삼차방정식의 세 근의 합은

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$

두 근끼리의 곱의 합은

$\alpha\beta\times\beta\gamma+\beta\gamma\times\gamma\alpha+\gamma\alpha\times\alpha\beta=\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma$

$=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

$=2\times(-3)=-6$

세 근의 곱은

$\alpha\beta\times\beta\gamma\times\gamma\alpha=(\alpha\beta\gamma)^2=2^2=4$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3-2x^2-6x-4=0$

032

답 (1) $a=\frac{1}{2}$, $b=-2$　(2) $a=\frac{1}{6}$, $b=-6$

(3) $a=\frac{9}{4}$, $b=-\frac{7}{2}$　(4) $a=-\frac{3}{2}$, $b=-3$

(5) $a=-5$, $b=5$

(1) 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{2}$이다.

이때 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=\alpha+\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=\alpha$ …… ㉠

$b=\alpha\times\sqrt{2}+\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})+(-\sqrt{2})\times\alpha=-2$ …… ㉡

$-1=\alpha\times\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-2\alpha$ …… ㉢

㉡에서 $b=-2$, ㉢에서 $\alpha=\frac{1}{2}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$a=\frac{1}{2}$

(2) 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $-\sqrt{6}$이므로 다른 한 근은 $\sqrt{6}$이다.

이때 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=\alpha+(-\sqrt{6})+\sqrt{6}=\alpha$ ...... ㉠

$b=\alpha\times(-\sqrt{6})+(-\sqrt{6})\times\sqrt{6}+\sqrt{6}\times\alpha=-6$ ...... ㉡

$-1=\alpha\times(-\sqrt{6})\times\sqrt{6}=-6\alpha$ ...... ㉢

㉡에서 $b=-6$, ㉢에서 $\alpha=\frac{1}{6}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$a=\frac{1}{6}$

(3) 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $1+\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{5}$이다.

이때 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=\alpha+(1+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})=\alpha+2$ ...... ㉠

$b=\alpha\times(1+\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})\times(1-\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})\times\alpha$

$=2\alpha-4$ ...... ㉡

$-1=\alpha\times(1+\sqrt{5})\times(1-\sqrt{5})=-4\alpha$ ...... ㉢

㉢에서 $\alpha=\frac{1}{4}$이므로 이것을 ㉠, ㉡에 대입하면

$a=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$, $b=2\times\frac{1}{4}-4=-\frac{7}{2}$

(4) 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $-1-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $-1+\sqrt{3}$이다.

이때 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=\alpha+(-1-\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})=\alpha-2$ ...... ㉠

$b=\alpha\times(-1-\sqrt{3})+(-1-\sqrt{3})\times(-1+\sqrt{3})$
$+(-1+\sqrt{3})\times\alpha$

$=-2\alpha-2$ ...... ㉡

$-1=\alpha\times(-1-\sqrt{3})\times(-1+\sqrt{3})=-2\alpha$ ...... ㉢

㉢에서 $\alpha=\frac{1}{2}$이므로 이것을 ㉠, ㉡에 대입하면

$a=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$, $b=-2\times\frac{1}{2}-2=-3$

(5) 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $\sqrt{3}-2$이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{3}-2$이다.

이때 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=\alpha+(\sqrt{3}-2)+(-\sqrt{3}-2)=\alpha-4$ ...... ㉠

$b=\alpha\times(\sqrt{3}-2)+(\sqrt{3}-2)\times(-\sqrt{3}-2)+(-\sqrt{3}-2)\times\alpha$

$=-4\alpha+1$ ...... ㉡

$-1=\alpha\times(\sqrt{3}-2)\times(-\sqrt{3}-2)=\alpha$ ...... ㉢

㉢에서 $\alpha=-1$이므로 이것을 ㉠, ㉡에 대입하면

$a=-1-4=-5$, $b=-4\times(-1)+1=5$

033 답 (1) $a=1$, $b=-1$ (2) $a=16$, $b=-16$ (3) $a=-20$, $b=50$ (4) $a=-1$, $b=-15$ (5) $a=-13$, $b=-35$

(1) 계수가 모두 실수이고 한 근이 i이므로 다른 한 근은 $-i$이다.

이때 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1=\alpha+i+(-i)=\alpha$ ...... ㉠

$a=\alpha\times i+i\times(-i)+(-i)\times\alpha=1$ ...... ㉡

$-b=\alpha\times i\times(-i)=\alpha$ ...... ㉢

㉠에서 $\alpha=1$이므로 ㉢에 대입하면 $b=-1$, ㉡에서 $a=1$이다.

(2) 계수가 모두 실수이고 한 근이 $-4i$이므로 다른 한 근은 $4i$이다.

이때 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1=\alpha+(-4i)+4i=\alpha$ ...... ㉠

$a=\alpha\times(-4i)+(-4i)\times4i+4i\times\alpha=16$ ...... ㉡

$-b=\alpha\times(-4i)\times4i=16\alpha$ ...... ㉢

㉠에서 $\alpha=1$이므로 ㉢에 대입하면 $b=-16$, ㉡에서 $a=16$이다.

(3) 계수가 모두 실수이고 한 근이 $3+i$이므로 다른 한 근은 $3-i$이다.

이때 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1=\alpha+(3+i)+(3-i)=\alpha+6$ ...... ㉠

$a=\alpha\times(3+i)+(3+i)\times(3-i)+(3-i)\times\alpha$

$=6\alpha+10$ ...... ㉡

$-b=\alpha\times(3+i)\times(3-i)=10\alpha$ ...... ㉢

㉠에서 $\alpha=-5$이므로 ㉡에 대입하면 $a=-20$, ㉢에 대입하면 $b=50$이다.

(4) 계수가 모두 실수이고 한 근이 $-1-2i$이므로 다른 한 근은 $-1+2i$이다.

이때 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1=\alpha+(-1-2i)+(-1+2i)=\alpha-2$ ...... ㉠

$a=\alpha\times(-1-2i)+(-1-2i)\times(-1+2i)+(-1+2i)\times\alpha$

$=-2\alpha+5$ ...... ㉡

$-b=\alpha\times(-1-2i)\times(-1+2i)=5\alpha$ ...... ㉢

㉠에서 $\alpha=3$이므로 ㉡에 대입하면 $a=-1$, ㉢에 대입하면 $b=-15$이다.

(5) 계수가 모두 실수이고 한 근이 $-2+\sqrt{3}i$이므로 다른 한 근은 $-2-\sqrt{3}i$이다.

이때 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1=\alpha+(-2+\sqrt{3}i)+(-2-\sqrt{3}i)=\alpha-4$ ...... ㉠

$a=\alpha\times(-2+\sqrt{3}i)+(-2+\sqrt{3}i)\times(-2-\sqrt{3}i)$
$+(-2-\sqrt{3}i)\times\alpha$

$=-4\alpha+7$ ...... ㉡

$-b=\alpha\times(-2+\sqrt{3}i)\times(-2-\sqrt{3}i)=7\alpha$ ...... ㉢

㉠에서 $\alpha=5$이므로 ㉡에 대입하면 $a=-13$, ㉢에 대입하면 $b=-35$이다.

034 답 (1) 1 (2) -1 (3) 0

(1) $\omega^3=1$이므로

$\omega^6=(\omega^3)^{\boxed{2}}=\boxed{1}^2=\boxed{1}$

(2) $\omega^2+\omega+1=0$이므로

$\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{\boxed{-\omega}}{\omega}=\boxed{-1}$

(3) $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이므로

$$\begin{aligned}\omega^{10}+\omega^8+1&=(\omega^3)^3\times\omega+(\omega^3)^2\times\omega^2+1\\&=\omega+\omega^2+1\\&=\omega^2+\omega+1=0\end{aligned}$$

035 답 (1) 1 (2) -1 (3) 2 (4) 4 (5) -1 (6) -1

(1) $\omega^9=(\omega^3)^3=(-1)^3=-1$

(2) $\omega^2-\omega+1=0$이므로 $\omega^2-\omega=-1$

(3) $\omega+\overline{\omega}=1$이므로

$\omega+\overline{\omega}+1=1+1=2$

(4) $$\begin{aligned}2\omega^5-2\omega^4+2\omega^3+4&=2(\omega^5-\omega^4+\omega^3)+4\\&=2(\omega^3\times\omega^2-\omega^3\times\omega+\omega^3)+4\\&=2(-\omega^2+\omega-1)+4\\&=-2(\omega^2-\omega+1)+4\\&=0+4=4\end{aligned}$$

(5) $\dfrac{\omega^2}{\overline{\omega}}=\dfrac{\omega^2}{-\omega^2}=-1$

(6) $\omega^2-\omega+1=0$이고

$\omega^2=-\dfrac{1}{\omega}$에서 $\dfrac{1}{\omega^2}=-\omega$이므로

$\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\omega^2-\omega=-1$

036 답 ⑤

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=6$, $\alpha\beta\gamma=-4$

$$\begin{aligned}\therefore\ &(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)\\&=27-9(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma\\&=27-9\times2+3\times6-(-4)\\&=31\end{aligned}$$

037 답 $\dfrac{3}{5}$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$, $\alpha\beta\gamma=5$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta^2}&=\frac{-\gamma}{\gamma^2}+\frac{-\alpha}{\alpha^2}+\frac{-\beta}{\beta^2}\\&=-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\\&=-\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\\&=-\frac{-3}{5}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

038 답 ②

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=k$

$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\&=(-1)^2-2k\end{aligned}$$

즉, $7=1-2k$이므로

$2k=-6$ $\quad\therefore k=-3$

039 답 3

삼차방정식 $x^3-4x^2+ax+b=0$의 세 근을 α, α, 2α $(\alpha\neq0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$4=\alpha+\alpha+2\alpha=4\alpha$ $\quad\therefore \alpha=1$

따라서 세 근은 1, 1, 2이므로

$a=1\times1+1\times2+2\times1=5$

$-b=1\times1\times2=2$ $\quad\therefore b=-2$

$\therefore a+b=5+(-2)=3$

040 답 ①

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-5$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$, $\alpha\beta\gamma=-1$

$\alpha+2$, $\beta+2$, $\gamma+2$를 세 근으로 하는 삼차방정식의 세 근의 합은

$$\begin{aligned}(\alpha+2)+(\beta+2)+(\gamma+2)&=(\alpha+\beta+\gamma)+6\\&=-5+6=1\end{aligned}$$

두 근끼리의 곱의 합은

$$\begin{aligned}&(\alpha+2)\times(\beta+2)+(\beta+2)\times(\gamma+2)+(\gamma+2)\times(\alpha+2)\\&=(\alpha\beta+2\alpha+2\beta+4)+(\beta\gamma+2\beta+2\gamma+4)+(\gamma\alpha+2\gamma+2\alpha+4)\\&=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+4(\alpha+\beta+\gamma)+12\\&=-3+4\times(-5)+12\\&=-11\end{aligned}$$

세 근의 곱은

$$\begin{aligned}&(\alpha+2)\times(\beta+2)\times(\gamma+2)\\&=\alpha\beta\gamma+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+4(\alpha+\beta+\gamma)+8\\&=-1+2\times(-3)+4\times(-5)+8\\&=-19\end{aligned}$$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3-x^2-11x+19=0$

041 답 $x^3+2x+8=0$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=8$

$\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$를 세 근으로 하는 삼차방정식의 세 근의 합은

$(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=2(\alpha+\beta+\gamma)=0$

두 근끼리의 곱의 합은

$$\begin{aligned}&(\alpha+\beta)\times(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)\times(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)\times(\alpha+\beta)\\&=-\gamma\times(-\alpha)+(-\alpha)\times(-\beta)+(-\beta)\times(-\gamma)\\&=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2\end{aligned}$$

세 근의 곱은

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\times(\beta+\gamma)\times(\gamma+\alpha)&=-\gamma\times(-\alpha)\times(-\beta)\\&=-\alpha\beta\gamma\\&=-8\end{aligned}$$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3+2x+8=0$

042 답 ①

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\dfrac{1}{2}$, $\alpha\beta\gamma=\dfrac{1}{2}$

$-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$를 세 근으로 하는 삼차방정식의 세 근의 합은
$-\alpha+(-\beta)+(-\gamma)=-(\alpha+\beta+\gamma)=2$
두 근끼리의 곱의 합은
$-\alpha\times(-\beta)+(-\beta)\times(-\gamma)+(-\gamma)\times(-\alpha)$
$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\frac{1}{2}$
세 근의 곱은
$-\alpha\times(-\beta)\times(-\gamma)=-\alpha\beta\gamma=-\frac{1}{2}$
이때 구하는 삼차방정식은
$2\left(x^3-2x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)=0$
$\therefore\ 2x^3-4x^2-x+1=0$
따라서 $a=-4$, $b=-1$, $c=1$이므로
$a+b+c=-4+(-1)+1=-4$

043 답 ③

계수가 모두 유리수이고 한 근이 $1+\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.
따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-a=2+(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=4 \qquad \therefore\ a=-4$
$b=2\times(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})\times(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\times2$
$=2+2\sqrt{2}+(-1)+2-2\sqrt{2}=3$
$-c=2\times(1+\sqrt{2})\times(1-\sqrt{2})=-2 \qquad \therefore\ c=2$
$\therefore\ a+b-c=-4+3-2=-3$

044 답 ④

계수가 모두 유리수이고 한 근이 $\sqrt{6}-2$이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{6}-2$이다.
따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-a=b+(\sqrt{6}-2)+(-\sqrt{6}-2)=b-4$
$\therefore\ a=4-b$ …… ㉠
$10=b\times(\sqrt{6}-2)+(\sqrt{6}-2)\times(-\sqrt{6}-2)+(-\sqrt{6}-2)\times b$
$=-4b-2$ …… ㉡
$6=b\times(\sqrt{6}-2)\times(-\sqrt{6}-2)=-2b$ …… ㉢
㉡, ㉢에서 $b=-3$이므로 이것을 ㉠에 대입하면
$a=4-(-3)=7$
$\therefore\ a-b=7-(-3)=10$
참고 ㉡, ㉢ 중 하나만 구하여 이용해도 된다.

045 답 ⑤

계수가 모두 실수이고 한 근이 $-1+\sqrt{2}i$이므로 다른 한 근은 $-1-\sqrt{2}i$이다.
이때 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-9=\alpha\times(-1+\sqrt{2}i)+(-1+\sqrt{2}i)\times(-1-\sqrt{2}i)+(-1-\sqrt{2}i)\times\alpha$
$=-2\alpha+3$
$-2\alpha=-12 \qquad \therefore\ \alpha=6$

참고 $-a=6+(-1+\sqrt{2}i)+(-1-\sqrt{2}i)=4 \qquad \therefore\ a=-4$
$-b=6\times(-1+\sqrt{2}i)\times(-1-\sqrt{2}i)=18 \qquad \therefore\ b=-18$
따라서 주어진 삼차방정식은 $x^3-4x^2-9x-18=0$이다.

046 답 -1

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$
$(x-1)(x^2+x+1)=0$
이때 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$
$\therefore\ \frac{1}{\omega-1}+\frac{1}{\overline{\omega}-1}=\frac{\overline{\omega}-1+\omega-1}{(\omega-1)(\overline{\omega}-1)}$
$=\frac{(\omega+\overline{\omega})-2}{\omega\overline{\omega}-(\omega+\overline{\omega})+1}$
$=\frac{-1-2}{1-(-1)+1}=-1$

047 답 ③

ω는 $x^3+1=0$, 즉 $x^3=-1$의 한 허근이므로
$\omega^3=-1$
이때 $\omega\neq0$이므로 $\omega^3=-1$의 양변을 각각 ω, ω^2으로 나누면
$\omega^2=-\frac{1}{\omega}$, $\omega=-\frac{1}{\omega^2}$
$\therefore\ \omega^2+\omega+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}=-\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}=0$

048 답 ③

$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$
이때 ω는 $x^3=1$, $x^2+x+1=0$의 근이므로
$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$
$\therefore\ \omega+\omega^2+\cdots+\omega^5=\omega(1+\omega+\omega^2)+\omega^3\times\omega+\omega^3\times\omega^2$
$=\omega+\omega^2$
$=-1$

049 답 0

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$
$(x+1)(x^2-x+1)=0$
이때 ω는 $x^3=-1$, $x^2-x+1=0$의 근이므로
$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$
$\therefore\ \omega^{30}+2\omega^{20}+\omega^{10}=(\omega^3)^{10}+2(\omega^3)^6\times\omega^2+(\omega^3)^3\times\omega$
$=(-1)^{10}+2\omega^2\times(-1)^6+(-1)^3\times\omega$
$=2\omega^2-\omega+1$
$=2(\omega^2-\omega+1)+\omega-1$
$=\omega-1$
따라서 $a=1$, $b=-1$이므로
$a+b=1+(-1)=0$

050 답 (1) $\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{7}{2} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=2\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-2\sqrt{2} \end{cases}$

(1) $\begin{cases} y=x-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x-1)^2=5,\ 2x^2-2x-4=0$

$x^2-x-2=0,\ (x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

이것을 각각 ㉠에 대입하면

$\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-(-x+2)^2=8,\ 4x-4=8$

$\therefore\ x=3$

이것을 ㉢에 대입하면 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-y=-3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x+3$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+x(x+3)=2,\ 2x^2+3x-2=0$

$(x+2)(2x-1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

이것을 각각 ㉢에 대입하면

$\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{7}{2} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} y=-x-2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3xy-y^2=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$3x(-x-2)-(-x-2)^2=2$

$-3x^2-6x-x^2-4x-4=2$

$4x^2+10x+6=0,\ (2x+3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-\dfrac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

이것을 각각 ㉠에 대입하면

$\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} y=2x-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ y^2-3x^2=-3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$(2x-1)^2-3x^2=-3$

$x^2-4x+4=0,\ (x-2)^2=0 \qquad \therefore\ x=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} 2x+y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy-2y^2=-18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-2x$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+x\times(-2x)-2\times(-2x)^2=-18$

$-9x^2=-18,\ x^2=2$

$\therefore\ x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

이것을 각각 ㉢에 대입하면

$\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=2\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-2\sqrt{2} \end{cases}$

051 답 (1) $\begin{cases} x=\sqrt{10} \\ y=\sqrt{10} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{10} \\ y=-\sqrt{10} \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=-\sqrt{11} \\ y=\sqrt{11} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{11} \\ y=-\sqrt{11} \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=3\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=-4i \\ y=2i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4i \\ y=-2i \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \\ y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \\ y=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=0 \\ y=i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=-i \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

(1) $x^2-3xy+2y^2=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x-y)(x-2y)=0 \qquad \therefore\ x=y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=y$를 $x^2+y^2=20$에 대입하면

$y^2+y^2=20,\ 2y^2=20,\ y^2=10 \qquad \therefore\ y=\pm\sqrt{10}$

이것을 $x=y$에 대입하면

$y=\sqrt{10}$일 때 $x=\sqrt{10}$, $y=-\sqrt{10}$일 때 $x=-\sqrt{10}$

(ii) $x=2y$를 $x^2+y^2=20$에 대입하면

$(\boxed{2y})^2+y^2=20,\ 5y^2=20,\ y^2=4 \qquad \therefore\ y=\pm2$

이것을 $x=2y$에 대입하면

$y=2$일 때 $x=4$, $y=-2$일 때 $x=\boxed{-4}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{10} \\ y=\sqrt{10} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{10} \\ y=\boxed{-\sqrt{10}} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=\boxed{-2} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+2y^2=33 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2xy-3y^2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡의 좌변을 인수분해하면

$(x+y)(x-3y)=0 \qquad \therefore x=-y$ 또는 $x=3y$

(ⅰ) $x=-y$를 ㉠에 대입하면

$(-y)^2+2y^2=33$, $3y^2=33$, $y^2=11 \qquad \therefore y=\pm\sqrt{11}$

이것을 $x=-y$에 대입하면

$y=\sqrt{11}$일 때 $x=-\sqrt{11}$, $y=-\sqrt{11}$일 때 $x=\sqrt{11}$

(ⅱ) $x=3y$를 ㉠에 대입하면

$(3y)^2+2y^2=33$, $11y^2=33$, $y^2=3 \qquad \therefore y=\pm\sqrt{3}$

이것을 $x=3y$에 대입하면

$y=\sqrt{3}$일 때 $x=3\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}$일 때 $x=-3\sqrt{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-\sqrt{11} \\ y=\sqrt{11} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{11} \\ y=-\sqrt{11} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=-3\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2-4y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3xy-y^2=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면

$(x+2y)(x-2y)=0 \qquad \therefore x=-2y$ 또는 $x=2y$

(ⅰ) $x=-2y$를 ㉡에 대입하면

$(-2y)^2+3y\times(-2y)-y^2=12$

$-3y^2=12$, $y^2=-4 \qquad \therefore y=\pm 2i$

이것을 $x=-2y$에 대입하면

$y=2i$일 때 $x=-4i$, $y=-2i$일 때 $x=4i$

(ⅱ) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$(2y)^2+3y\times 2y-y^2=12$

$9y^2=12$, $y^2=\frac{4}{3} \qquad \therefore y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

이것을 $x=2y$에 대입하면

$y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$일 때 $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$일 때 $x=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-4i \\ y=2i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4i \\ y=-2i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\frac{4\sqrt{3}}{3} \\ y=\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{4\sqrt{3}}{3} \\ y=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 3x^2-y^2=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡의 좌변을 인수분해하면

$x(x-y)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=y$

(ⅰ) $x=0$을 ㉠에 대입하면

$-y^2=1$, $y^2=-1 \qquad \therefore y=\pm i$

따라서 $y=i$일 때 $x=0$, $y=-i$일 때 $x=0$이다.

(ⅱ) $x=y$를 ㉠에 대입하면

$3y^2-y^2=1$, $2y^2=1$, $y^2=\frac{1}{2}$

$\therefore y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

이것을 $x=y$에 대입하면

$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=0 \\ y=i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=-i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

052 답 (1) $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=-6 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$

(1) $x+y=5$, $xy=4$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은 $t^2-5t+4=0$으로 놓을 수 있다.

$t^2-5t+4=0$에서 $(t-1)(t-4)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=\boxed{4}$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\boxed{4} \\ y=1 \end{cases}$

(2) $x+y=-4$, $xy=-12$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은 $t^2+4t-12=0$으로 놓을 수 있다.

$t^2+4t-12=0$에서 $(t+6)(t-2)=0$

$\therefore t=-6$ 또는 $t=2$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-6 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} xy=2 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$에서 $x+y=a$, $xy=b$로 놓으면

$\begin{cases} b=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ a^2-2b=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면 $a^2=9$에서 $a=\pm 3$이므로

$a=3$, $b=2$ 또는 $a=-3$, $b=2$

(ⅰ) $a=3$, $b=2$일 때

$x+y=3$, $xy=2$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은 $t^2-3t+2=0$으로 놓을 수 있다.

$t^2-3t+2=0$에서 $(t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

(ⅱ) $a=-3$, $b=2$일 때

$x+y=-3$, $xy=2$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은 $t^2+3t+2=0$으로 놓을 수 있다.

$t^2+3t+2=0$에서 $(t+2)(t+1)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=-1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$

(4) $\begin{cases}xy=-6\\x^2+y^2=13\end{cases}$에서 $x+y=a$, $xy=b$로 놓으면

$\begin{cases}b=-6 & \cdots\cdots ㉠\\a^2-2b=13 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면 $a^2=1$에서 $a=\pm1$이므로

$a=1$, $b=-6$ 또는 $a=-1$, $b=-6$

(ⅰ) $a=1$, $b=-6$일 때

$x+y=1$, $xy=-6$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은 $t^2-t-6=0$으로 놓을 수 있다.

$t^2-t-6=0$에서 $(t+2)(t-3)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=3$

(ⅱ) $a=-1$, $b=-6$일 때

$x+y=-1$, $xy=-6$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은 $t^2+t-6=0$으로 놓을 수 있다.

$t^2+t-6=0$에서 $(t+3)(t-2)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=-2\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$

053

답 **(1)** $\begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=8\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=-5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=0\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=5\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=3\\y=-8\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=-4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\y=-7\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=0\\y=-5\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=1\\y=23\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=25\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=-27\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-5\\y=-7\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-25\\y=-3\end{cases}$

(1) $xy-3y-5=0$에서

$(x-3)y=5$

$1\quad 5$ ➡ $x-3=1$, $y=5$일 때, $x=4$, $y=5$

$5\quad 1$ ➡ $x-3=5$, $y=1$일 때, $x=8$, $y=1$

$-1\quad -5$ ➡ $x-3=-1$, $y=-5$일 때, $x=2$, $y=-5$

$-5\quad -1$ ➡ $x-3=\boxed{-5}$, $y=-1$일 때, $x=\boxed{-2}$, $y=-1$

$\therefore \begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\boxed{8}\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=-5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=\boxed{-1}\end{cases}$

(2) $xy-4x+y-3=0$에서

$x(y-4)+(y-4)=-1$

$(x+1)(y-4)=-1$

$1\quad -1$ ➡ $x+1=1$, $y-4=-1$일 때, $x=0$ 또는 $y=3$

$-1\quad 1$ ➡ $x+1=-1$, $y-4=1$일 때, $x=-2$ 또는 $y=5$

$\therefore \begin{cases}x=0\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=5\end{cases}$

(3) $xy+6x-2y-10=0$에서

$x(y+6)-2(y+6)=-2$

$(x-2)(y+6)=-2$

$1\quad -2$ ➡ $x-2=1$, $y+6=-2$일 때, $x=3$, $y=-8$

$-1\quad 2$ ➡ $x-2=-1$, $y+6=2$일 때, $x=1$, $y=-4$

$2\quad -1$ ➡ $x-2=2$, $y+6=-1$일 때, $x=4$, $y=-7$

$-2\quad 1$ ➡ $x-2=-2$, $y+6=1$일 때, $x=0$, $y=-5$

$\therefore \begin{cases}x=3\\y=-8\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=-4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\y=-7\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=0\\y=-5\end{cases}$

(4) $xy+2x-25=0$에서

$x(y+2)=25$

$1\quad 25$ ➡ $x=1$, $y+2=25$일 때, $x=1$, $y=23$

$5\quad 5$ ➡ $x=5$, $y+2=5$일 때, $x=5$, $y=3$

$25\quad 1$ ➡ $x=25$, $y+2=1$일 때, $x=25$, $y=-1$

$-1\quad -25$ ➡ $x=-1$, $y+2=-25$일 때,
$x=-1$, $y=-27$

$-5\quad -5$ ➡ $x=-5$, $y+2=-5$일 때, $x=-5$, $y=-7$

$-25\quad -1$ ➡ $x=-25$, $y+2=-1$일 때,
$x=-25$, $y=-3$

$\therefore \begin{cases}x=1\\y=23\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=25\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=-27\end{cases}$

또는 $\begin{cases}x=-5\\y=-7\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-25\\y=-3\end{cases}$

054

답 **(1)** $x=1$, $y=2$ **(2)** $x=-3$, $y=0$

(3) $x=-5$, $y=\dfrac{3}{2}$ **(4)** $x=-2$, $y=3$

(1) $x^2+y^2-2x-4y+5=0$에서

$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)=0$

$(x-1)^2+(\boxed{y-2})^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$x-1=0$, $y-2=\boxed{0}$

$\therefore x=1$, $y=\boxed{2}$

(2) $x^2+y^2+6x+9=0$에서

$(x^2+6x+9)+y^2=0$, $(x+3)^2+y^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$x+3=0$, $y=0$

$\therefore x=-3,\ y=0$

(3) $x^2+4y^2+10x-12y+34=0$에서

$(x^2+10x+25)+(4y^2-12y+9)=0$

$(x+5)^2+(2y-3)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$x+5=0,\ 2y-3=0$

$\therefore x=-5,\ y=\frac{3}{2}$

(4) $2x^2+y^2+2xy+2x-2y+5=0$을 y에 대한 내림차순으로 정리하면

$y^2+2(x-1)y+2x^2+2x+5=0$

$y^2+2(x-1)y+(x^2-2x+1)+(x^2+4x+4)=0$

$\{y^2+2(x-1)y+(x-1)^2\}+(x^2+4x+4)=0$

$(x+y-1)^2+(x+2)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$x+y-1=0,\ x+2=0$

$\therefore x=-2,\ y=3$

055 답 ⑤

$\begin{cases} x+y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=53 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+5$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(-x+5)^2=53$

$2x^2-10x-28=0,\ x^2-5x-14=0$

$(x+2)(x-7)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=7$

이것을 각각 ㉢에 대입하면

$\begin{cases} x=-2 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=7 \\ y=-2 \end{cases}$

$\therefore |x-y|=9$

056 답 ①

$\begin{cases} y=2x+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2+x(2x+2)=1,\ 3x^2+2x-1=0$

$(x+1)(3x-1)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

이것을 각각 ㉠에 대입하면

$\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{8}{3} \end{cases}$

이때 정수인 해는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$이므로 $\alpha=-1,\ \beta=0$

$\therefore \alpha+\beta=-1+0=-1$

057 답 -17

$\begin{cases} x^2-2y^2=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-y=-3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=x+3$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2-2(x+3)^2=2,\ -x^2-12x-18=2$

$x^2+12x+20=0,\ (x+10)(x+2)=0$

$\therefore x=-10$ 또는 $x=-2$

이것을 각각 ㉢에 대입하면

$\begin{cases} x=-10 \\ y=-7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$

따라서 $\alpha+\beta$의 최솟값은 -17이다.

058 답 ④

연립방정식 $\begin{cases} x-y=a \\ xy-2y^2=b \end{cases}$에 $x=3,\ y=4$를 대입하면

$a=3-4=-1,\ b=3\times4-2\times4^2=-20$

$\begin{cases} x-y=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy-2y^2=-20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x+1$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x(x+1)-2(x+1)^2=-20,\ -x^2-3x-2=-20$

$x^2+3x-18=0,\ (x+6)(x-3)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=3$

이것을 ㉢에 대입하면

$\begin{cases} x=-6 \\ y=-5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$

따라서 나머지 한 근은 $x=-6,\ y=-5$이다.

059 답 ③

주어진 두 연립방정식의 근은 연립방정식

$\begin{cases} x+y=-4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+y^2=31 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 근과 같다.

㉠에서 $y=-x-4$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-x(-x-4)+(-x-4)^2=31,\ 3x^2+12x-15=0$

$x^2+4x-5=0,\ (x+5)(x-1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=1$

이것을 ㉢에 대입하면

$\begin{cases} x=-5 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-5 \end{cases}$

(i) $x=-5,\ y=1$일 때

$ax-y=-6,\ 2x-3y=b$에 각각 $x=-5,\ y=1$을 대입하면

$-5a-1=-6,\ -10-3=b$

$\therefore a=1,\ b=-13$

(ii) $x=1,\ y=-5$일 때

$ax-y=-6,\ 2x-3y=b$에 각각 $x=1,\ y=-5$를 대입하면

$a+5=-6,\ 2+15=b$

$\therefore a=-11,\ b=17$

(i), (ii)에서 $a+b$의 최댓값은

$-11+17=6$

060 답 $-\frac{16}{3}$

$\begin{cases} x-2y=-4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y-4$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(2y-4)^2-y^2=k,\ 3y^2-16y+16-k=0$

오직 한 쌍의 해를 가지려면 위의 이차방정식이 중근을 가져야 한다.

$3y^2-16y+16-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-8)^2-3\times(16-k)=3k+16$

이때 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$3k+16=0 \qquad \therefore k=-\frac{16}{3}$

061 답 ③

$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면

$(x+y)^2=0 \qquad \therefore x=-y$

이것을 ㉡에 대입하면

$(-y)^2+y^2=8,\ 2y^2=8$

$y^2=4 \qquad \therefore y=\pm 2$

$x=-y$이므로 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$

따라서 $a=-2,\ b=2,\ c=2,\ d=-2$이므로

$a-b+c-d=-2-2+2-(-2)=0$

참고 $a=2,\ b=-2,\ c=-2,\ d=2$라 해도 $a-b+c-d=0$이다.

062 답 ①

$\begin{cases} x^2-xy=9 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡의 좌변을 인수분해하면

$(2x+y)(2x-y)=0$

$\therefore y=-2x$ 또는 $y=2x$

(i) $y=-2x$일 때

$y=-2x$를 ㉠에 대입하면

$x^2-x\times(-2x)=9,\ 3x^2=9$

$x^2=3 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{3}$

$y=-2x$이므로

$\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-2\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=2\sqrt{3} \end{cases}$

(ii) $y=2x$일 때

$y=2x$를 ㉠에 대입하면

$x^2-x\times 2x=9,\ -x^2=9$

$x^2=-9 \qquad \therefore x=\pm 3i$

$y=2x$이므로

$\begin{cases} x=3i \\ y=6i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3i \\ y=-6i \end{cases}$

(i), (ii)에서 $\alpha^2+\beta^2$의 값은

$\alpha^2+\beta^2=3+12=15$ 또는 $\alpha^2+\beta^2=-9+(-36)=-45$

따라서 $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값은 -45이다.

063 답 16

$\begin{cases} x^2-4xy+3y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ y^2+3xy=64 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면

$(x-y)(x-3y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=y$일 때

$x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+3y\times y=64,\ 4y^2=64$

$y^2=16 \qquad \therefore y=\pm 4$

$x=y$이므로

$\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-4 \end{cases}$

(ii) $x=3y$일 때

$x=3y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+3\times 3y\times y=64,\ 10y^2=64$

$y^2=\frac{32}{5} \qquad \therefore y=\pm\frac{4\sqrt{10}}{5}$

$x=3y$이므로

$\begin{cases} x=\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ y=\frac{4\sqrt{10}}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ y=-\frac{4\sqrt{10}}{5} \end{cases}$

(i), (ii)에서 연립방정식을 만족시키는 정수 $x,\ y$는

$x=4,\ y=4$ 또는 $x=-4,\ y=-4$이므로

$xy=16$

064 답 ⑤

$\begin{cases} 3x^2+2xy-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy-2y^2=-14 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면

$(3x-y)(x+y)=0$

$\therefore y=3x$ 또는 $x=-y$

(i) $y=3x$일 때

$y=3x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x\times 3x-2\times(3x)^2=-14$

$-14x^2=-14,\ x^2=1$

$\therefore x=\pm 1$

$y=3x$이므로

$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$

(ii) $x=-y$일 때

$x=-y$를 ㉡에 대입하면

$(-y)^2+(-y)\times y-2y^2=-14$

$-2y^2=-14,\ y^2=7$

$\therefore y=\pm\sqrt{7}$

$x=-y$이므로

$\begin{cases} x=-\sqrt{7} \\ y=\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases}$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는 4개이므로 순서쌍 (x, y)의 개수는 4이다.

065 답 ②

$\begin{cases} x^2+2y^2=12 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2y^2=-xy & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서

$x^2+xy-2y^2=0$, $(x-y)(x+2y)=0$

$\therefore$ $x=y$ 또는 $x=-2y$

(i) $x=y$일 때

$x=y$를 ㉠에 대입하면

$y^2+2y^2=12$, $3y^2=12$

$y^2=4$ $\quad\therefore$ $y=\pm 2$

$x=y$이므로

$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$

(ii) $x=-2y$일 때

$x=-2y$를 ㉠에 대입하면

$(-2y)^2+2y^2=12$, $6y^2=12$

$y^2=2$ $\quad\therefore$ $y=\pm\sqrt{2}$

$x=-2y$이므로

$\begin{cases} x=-2\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$

(i), (ii)에서 $x+2y$의 값은

$x=2$, $y=2$일 때, $x+2y=2+4=6$

$x=-2$, $y=-2$일 때, $x+2y=-2+(-4)=-6$

$x=-2\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$일 때, $x+2y=-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=0$

$x=2\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$일 때, $x+2y=2\sqrt{2}+(-2\sqrt{2})=0$

따라서 $x+2y$의 최댓값은 6이다.

066 답 21

십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2=4y^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서

$x^2-4y^2=0$, $(x+2y)(x-2y)=0$

$\therefore$ $x=-2y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=-2y$일 때

$x=-2y$를 ㉠에 대입하면

$(-2y)^2+y^2=5$, $5y^2=5$

$y^2=1$ $\quad\therefore$ $y=\pm 1$

$x=-2y$이므로

$\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

(ii) $x=2y$일 때

$x=2y$를 ㉠에 대입하면

$(2y)^2+y^2=5$, $5y^2=5$

$y^2=1$ $\quad\therefore$ $y=\pm 1$

$x=2y$이므로

$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

(i), (ii)에서 x, y는 자연수이어야 하므로

$x=2$, $y=1$

따라서 구하는 두 자리의 자연수는 21이다.

풍쌤 비법 **연립방정식의 활용**

연립방정식의 활용 문제는 다음 순서로 푼다.
① 구하는 것을 미지수 x, y로 놓는다.
② 주어진 조건에 따라 연립방정식을 세운다.
③ 연립방정식을 풀어 해를 구하고, 그 해가 조건에 맞는지 확인한다.

067 답 $(-8, 3)$, $(3, -8)$

$x+y=-5$, $xy=-24$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은 $t^2+5t-24=0$으로 놓을 수 있다.

$t^2+5t-24=0$에서

$(t+8)(t-3)=0$ $\quad\therefore$ $t=-8$ 또는 $t=3$

따라서 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=-8 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-8 \end{cases}$ 이므로

순서쌍 (x, y)는 $(-8, 3)$, $(3, -8)$이다.

068 답 ①

$x+y=a$, $xy=b$로 놓으면

$\begin{cases} a=7 & \cdots\cdots ㉠ \\ b-2a=-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$b-14=-2$ $\quad\therefore$ $b=12$

$x+y=7$, $xy=12$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은 $t^2-7t+12=0$으로 놓을 수 있다.

$t^2-7t+12=0$에서

$(t-3)(t-4)=0$ $\quad\therefore$ $t=3$ 또는 $t=4$

따라서 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ 이므로

$x-y$의 최댓값은 $4-3=1$

069 답 ②

$x+y=a$, $xy=b$로 놓으면

$\begin{cases} a^2-2b=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ a+b=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $a=-b-1$을 ㉠에 대입하면

$(-b-1)^2-2b=10$, $b^2=9$ $\quad\therefore$ $b=\pm 3$

$a=-b-1$이므로

$a=-4$, $b=3$ 또는 $a=2$, $b=-3$

(i) $a=-4$, $b=3$일 때

$x+y=-4$, $xy=3$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은 $t^2+4t+3=0$으로 놓을 수 있다.

$t^2+4t+3=0$에서

$(t+3)(t+1)=0 \qquad \therefore t=-3$ 또는 $t=-1$

(ii) $a=2$, $b=-3$일 때

$x+y=2$, $xy=-3$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은 $t^2-2t-3=0$으로 놓을 수 있다.

$t^2-2t-3=0$에서

$(t+1)(t-3)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=3$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

따라서 $|x-y|$의 최솟값은

$|-3-(-1)|=|-1-(-3)|=2$

070 답 ⑤

$xy-5x+y+2=0$에서

$x(y-5)+(y-5)=-7$

$(x+1)(y-5)=-7$

1 -7 ➡ $x+1=1$, $y-5=-7$이므로 $x=0$, $y=-2$

-1 7 ➡ $x+1=-1$, $y-5=7$이므로 $x=-2$, $y=12$

7 -1 ➡ $x+1=7$, $y-5=-1$이므로 $x=6$, $y=4$

-7 1 ➡ $x+1=-7$, $y-5=1$이므로 $x=-8$, $y=6$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=12 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-8 \\ y=6 \end{cases}$

따라서 $x+y$의 최댓값은 $x=-2$, $y=12$ 또는 $x=6$, $y=4$일 때 10이다.

071 답 6

$xy+3x-4y-21=0$에서

$x(y+3)-4(y+3)=9$

$(x-4)(y+3)=9$

1 9 ➡ $x-4=1$, $y+3=9$이므로 $x=5$, $y=6$

3 3 ➡ $x-4=3$, $y+3=3$이므로 $x=7$, $y=0$

9 1 ➡ $x-4=9$, $y+3=1$이므로 $x=13$, $y=-2$

-1 -9 ➡ $x-4=-1$, $y+3=-9$이므로 $x=3$, $y=-12$

-3 -3 ➡ $x-4=-3$, $y+3=-3$이므로 $x=1$, $y=-6$

-9 -1 ➡ $x-4=-9$, $y+3=-1$이므로 $x=-5$, $y=-4$

$\therefore \begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=7 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=13 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=3 \\ y=-12 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-4 \end{cases}$

따라서 순서쌍 (x, y)의 개수는 6이다.

072 답 ④

$5x^2+4y^2+4xy-4x+1=0$에서

$(4x^2-4x+1)+(x^2+4xy+4y^2)=0$

$(2x-1)^2+(x+2y)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$2x-1=0$, $x+2y=0$

즉, $x=\frac{1}{2}$이므로 $x+2y=0$에 대입하면

$x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{4}$

$\therefore x-y=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$

073 답 -2

$x^2+2y^2+2xy+4x+2y+5=0$을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2+2(y+2)x+2y^2+2y+5=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

x가 실수이므로 x에 대한 이차방정식 ㉠은 실근을 갖는다.

㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(y+2)^2-(2y^2+2y+5)$

$=-y^2+2y-1$

이때 $\frac{D}{4}\geq 0$이어야 하므로

$-y^2+2y-1\geq 0$, $y^2-2y+1\leq 0$

$(y-1)^2\leq 0$

이때 y는 실수이므로

$y-1=0 \qquad \therefore y=1$

$y=1$을 ㉠에 대입하면

$x^2+6x+9=0$, $(x+3)^2=0$

$\therefore x=-3$

$\therefore x+y=-3+1=-2$

중단원 점검 문제

Ⅱ-4 | 여러 가지 방정식 116~118쪽

01 답 $x=-3\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3\sqrt{3}$

$x^4-27x^2=0$의 좌변을 인수분해하면

$x^2(x^2-27)=0$, $x^2(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})=0$

$\therefore x=-3\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3\sqrt{3}$

02 답 ②

$f(x)=x^3-4x^2-7x+10$으로 놓으면

$f(1)=1-4-7+10=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & -7 & 10 \\ & & 1 & -3 & -10 \\ \hline & 1 & -3 & -10 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-3x-10)$

$=(x-1)(x+2)(x-5)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x+2)(x-5)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=5$

따라서 가장 작은 근은 -2이다.

03 답 ①

$(x^2+x)^2-8(x^2+x-3)-12=0$에서 $x^2+x=X$로 놓으면

$X^2-8(X-3)-12=0$

$X^2-8X+12=0$, $(X-2)(X-6)=0$

위의 식에 $X=x^2+x$를 대입하면

$(x^2+x-2)(x^2+x-6)=0$

$(x+2)(x-1)(x+3)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 모든 양의 근의 합은

$1+2=3$

04 답 ⑤

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-8=0$에서

$\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}-8=0$

$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-8=0$

$x^2-5x=X$로 놓으면

$(X+4)(X+6)-8=0$

$X^2+10X+16=0$, $(X+8)(X+2)=0$

$\therefore$ $X=-8$ 또는 $X=-2$

$X=-8$일 때 $x^2-5x=-8$, 즉 $x^2-5x+8=0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 8이다.

$X=-2$일 때 $x^2-5x=-2$, 즉 $x^2-5x+2=0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 2이다.

따라서 모든 근의 곱은

$8\times 2=16$

참고 $x^2-5x+2=0$의 근은 $x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$, $x^2-5x+8=0$의 근은 $x=\frac{5\pm\sqrt{7}i}{2}$이므로 근을 구하여 곱을 구하기보다는 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하는 것이 더 간편하다.

풍쌤 비법 $(\quad)(\quad)(\quad)(\quad)-k=0$ (k는 상수) 꼴의 사차방정식

일차식의 곱을 공통부분이 생기도록 두 개씩 짝지어 전개한 후 공통부분을 치환하여 푼다.

05 답 ③

$x^4-26x^2+25=0$에서 $x^2=X$로 놓으면

$X^2-26X+25=0$, $(X-1)(X-25)=0$

위의 식에 $X=x^2$을 대입하면

$(x^2-1)(x^2-25)=0$

$(x+1)(x-1)(x+5)(x-5)=0$

$\therefore$ $x=-5$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=5$

따라서 모든 음의 근의 합은

$-5+(-1)=-6$

06 답 ④

$x^4-10x^2+16=0$에서 $x^2=X$로 놓으면

$X^2-10X+16=0$, $(X-2)(X-8)=0$

위의 식에 $X=x^2$을 대입하면

$(x^2-2)(x^2-8)=0$

$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})=0$

$\therefore$ $x=-2\sqrt{2}$ 또는 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$ 또는 $x=2\sqrt{2}$

따라서 $a=-2\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$, $c=\sqrt{2}$, $d=2\sqrt{2}$이므로

$ab+cd=-2\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})+\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}$

$=4+4=8$

07 답 -6

$x\neq 0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-2x-6-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$

이때 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$이므로

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-8=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2-2X-8=0$, $(X+2)(X-4)=0$

$\therefore$ $X=-2$ 또는 $X=4$

(i) $X=-2$일 때

$x+\frac{1}{x}=-2$, $x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2=0$ $\quad\therefore$ $x=-1$

(ii) $X=4$일 때

$x+\frac{1}{x}=4$, $x^2-4x+1=0$

$\therefore$ $x=2\pm\sqrt{3}$

따라서 $a=-1$, $b=2$, $c=3$이므로

$a-b-c=-1-2-3=-6$

08 답 ①

$x\neq 0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$3x^2-8x+3-\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}=0$

$3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$

이때 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$이므로

$3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-8\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$3X^2-8X-3=0$, $(3X+1)(X-3)=0$

$\therefore$ $X=-\frac{1}{3}$ 또는 $X=3$

(i) $X=-\frac{1}{3}$일 때

$x+\frac{1}{x}=-\frac{1}{3}$, $3x^2+x+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=1^2-4\times 3\times 3=-35<0$ ← 두 허근

(ii) $X=3$일 때

$x+\dfrac{1}{x}=3$, $x^2-3x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-3)^2-4\times1\times1=5>0$ ← 두 실근

(i), (ii)에서 α, β는 이차방정식 $3x^2+x+3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{1}{3}$, $\alpha\beta=1$

$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=\left(-\frac{1}{3}\right)^2-2\times1\\&=-\frac{17}{9}\end{aligned}$$

09 답 ②

$f(x)=x^3-(2a+1)x^2+(a+1)^2x-(a^2+1)$로 놓으면

$f(1)=1-(2a+1)+(a+1)^2-(a^2+1)=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -(2a+1) & (a+1)^2 & -(a^2+1) \\ & & 1 & -2a & a^2+1 \\ \hline & 1 & -2a & a^2+1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-2ax+a^2+1)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2-2ax+a^2+1)=0$이므로 α, β는 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+1=0$의 서로 다른 두 허근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a=8$ $\quad\therefore\ a=4$

$\therefore\ \alpha\beta=a^2+1=16+1=17$

10 답 $-\dfrac{1}{8}$

$f(x)=x^4-(2a+3)x^2+2(a-1)x+4a$라 하면

$f(-1)=1-(2a+3)-2(a-1)+4a=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & -(2a+3) & 2(a-1) & 4a \\ & & -1 & 1 & 2a+2 & -4a \\ \hline & 1 & -1 & -2a-2 & 4a & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)\{x^3-x^2-(2a+2)x+4a\}$

이때 $g(x)=x^3-x^2-(2a+2)x+4a$로 놓으면

$g(2)=8-4-(4a+4)+4a=0$

조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & -(2a+2) & 4a \\ & & 2 & 2 & -4a \\ \hline & 1 & 1 & -2a & \boxed{0} \end{array}$$

$g(x)=(x-2)(x^2+x-2a)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x-1)(x^2+x-2a)=0$

이때 이차방정식 $x^2+x-2a=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times1\times(-2a)=8a+1\ge0$

$8a+1\ge0$ $\quad\therefore\ a\ge-\dfrac{1}{8}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $-\dfrac{1}{8}$이다.

11 답 ③

$(x+1)(x-2)(x-4)=7$에서

$x^3-5x^2+2x+1=0$

따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=5$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$

$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\&=5^2-2\times2\\&=21\end{aligned}$$

12 답 ⑤

$x^3-16x^2+4ax-12b=0$의 세 근을 α, 3α, 4α $(\alpha\neq0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$16=\alpha+3\alpha+4\alpha=8\alpha$ $\quad\therefore\ \alpha=2$

따라서 세 근은 2, 6, 8이므로

$4a=2\times6+6\times8+8\times2=76$ $\quad\therefore\ a=19$

$12b=2\times6\times8=96$ $\quad\therefore\ b=8$

$\therefore\ a+b=19+8=27$

13 답 5

$f(1)=f(2)=f(3)=1$에서

$f(1)-1=f(2)-1=f(3)-1=0$

따라서 삼차방정식 $f(x)-1=0$의 세 근이 1, 2, 3이다.

1, 2, 3을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(1+2+3)x^2+(1\times2+2\times3+3\times1)x-1\times2\times3=0$

$\therefore\ x^3-6x^2+11x-6=0$

즉, $f(x)-1=x^3-6x^2+11x-6$이므로

$f(x)=x^3-6x^2+11x-5$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 5이다.

14 답 ①

$f(x)=x^3+2x-3$으로 놓으면

$f(1)=1+2-3=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ & & 1 & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+x+3)$

따라서 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+x+3)=0$이므로 허근 $a+bi$는 이차방정식 $x^2+x+3=0$의 근이다.

이때 $a+bi$가 근이면 다른 한 근은 $a-bi$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1=(a+bi)+(a-bi)=2a$ $\quad\therefore\ a=-\dfrac{1}{2}$

$3=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+b^2=3$, $b^2=\dfrac{11}{4}$

$\therefore\ a^2b^2=\frac{1}{4}\times\frac{11}{4}=\frac{11}{16}$

참고 $x^2+x+3=0$에서 $x=\frac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$

허근 $a+bi$는 이차방정식 $x^2+x+3=0$의 근이므로

$a=-\frac{1}{2},\ b=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}$

$\therefore\ a^2b^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\pm\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2$

$=\frac{1}{4}\times\frac{11}{4}=\frac{11}{16}$

15 답 -1

$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 ω는 $x^3=1$, $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore\ \frac{1}{\omega^{20}+\omega^{10}}=\frac{1}{(\omega^3)^6\times\omega^2+(\omega^3)^3\times\omega}$

$=\frac{1}{\omega^2+\omega}$

$=\frac{1}{-1}=-1$

16 답 ⑤

$x^3=-1$에서

$x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

이때 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^2-\omega+1=0$

한편, $\omega\neq0$이므로 위의 식의 양변을 ω로 나누면

$\omega-1+\frac{1}{\omega}=0\qquad\therefore\ \omega+\frac{1}{\omega}=1$

$\therefore\ \left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^3+\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2+\omega+\frac{1}{\omega}$

$=1^3+1^2+1=3$

17 답 ①

처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x라 하면

$(x+2)(x+4)(x-2)=35$

$x^3+4x^2-4x-51=0$

$f(x)=x^3+4x^2-4x-51$로 놓으면

$f(3)=27+36-12-51=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

3	1	4	-4	-51
		3	21	51
	1	7	17	0

$f(x)=(x-3)(x^2+7x+17)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-3)(x^2+7x+17)=0$

$\therefore\ x=3$ 또는 $x=\frac{-7\pm\sqrt{19}i}{2}$

이때 x는 실수이어야 하므로 구하는 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 3이다.

18 답 3

$\begin{cases}x-y=-5 & \cdots\cdots ㉠\\ 4x^2+y^2=20 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=x+5$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$4x^2+(x+5)^2=20$, $5x^2+10x+5=0$

$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$

$\therefore\ x=-1$

이것을 ㉢에 대입하면 $\begin{cases}x=-1\\ y=4\end{cases}$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=4$이므로

$\alpha+\beta=-1+4=3$

19 답 ②

$\begin{cases}2x-y=3 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+2y=a & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=2x-3$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+2(2x-3)=a$, $x^2+4x-a-6=0$

주어진 연립방정식이 실근을 가지려면 위의 이차방정식이 실근을 가져야 한다.

$x^2+4x-a-6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\times(-a-6)=a+10\geq0$

$a+10\geq0\qquad\therefore\ a\geq-10$

20 답 37

처음 두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면

$\begin{cases}x^2+y^2=58 & \cdots\cdots ㉠\\ 10y+x=10x+y+36 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉡에서 $9x-9y=-36\qquad\therefore\ y=x+4$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(x+4)^2=58$, $2x^2+8x-42=0$

$x^2+4x-21=0$, $(x+7)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-7$ 또는 $x=3$

이것을 ㉢에 대입하면

$\begin{cases}x=-7\\ y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\ y=7\end{cases}$

이때 x, y는 자연수이므로 $x=3$, $y=7$

따라서 구하는 처음 수는 37이다.

21 답 ④

$\begin{cases}x^2+xy-3y^2=4 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-4xy+3y^2=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉡의 좌변을 인수분해하면

$x^2-4xy+3y^2=0$, $(x-y)(x-3y)=0$

$\therefore\ x=y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=y$일 때

$x=y$를 ㉠에 대입하면

$y^2+y\times y-3y^2=4$, $-y^2=4$

$y^2=-4$ $\therefore y=\pm 2i$

$x=y$이므로

$\begin{cases} x=2i \\ y=2i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2i \\ y=-2i \end{cases}$

(ii) $x=3y$일 때

$x=3y$를 ㉠에 대입하면

$(3y)^2+3y\times y-3y^2=4$, $9y^2=4$

$y^2=\frac{4}{9}$ $\therefore y=\pm\frac{2}{3}$

$x=3y$이므로

$\begin{cases} x=2 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases}$

이때 x, y는 실수이므로

$x=2$, $y=\frac{2}{3}$ 또는 $x=-2$, $y=-\frac{2}{3}$

$\therefore xy=\frac{4}{3}$

22 답 ⑤

두 이차방정식의 공통근을 α라 하자.

$\begin{cases} \alpha^2+k\alpha-3=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+(k-2)\alpha+1=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $2\alpha-4=0$ $\therefore \alpha=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$2^2+2k-3=0$, $2k+1=0$

$\therefore k=-\frac{1}{2}$

풍쌤 비법 공통근을 갖는 방정식

두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 공통근을 α라 하면 두 방정식을 연립한 방정식도 α를 근으로 가지므로 두 방정식을 연립하여 최고차항 또는 상수항을 소거한 후 α의 값을 구한다.
이때 얻은 α의 값 중에는 공통근이 아닌 근도 포함되므로 α가 $f(\alpha)=0$, $g(\alpha)=0$을 만족시키는지 확인한다.

23 답 ⑤

$\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ x^2y+xy^2=6 \end{cases}$에서 $\begin{cases} (x+y)^2-xy=7 \\ xy(x+y)=6 \end{cases}$

$x+y=a$, $xy=b$로 놓으면

$\begin{cases} a^2-b=7 & \cdots\cdots ㉠ \\ ab=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $b=a^2-7$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$a(a^2-7)=6$, $a^3-7a-6=0$

$f(a)=a^3-7a-6$으로 놓으면

$f(-1)=-1+7-6=0$

조립제법을 이용하여 $f(a)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -7 & -6 \\ & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(a)=(a+1)(a^2-a-6)$

$\quad=(a+1)(a+2)(a-3)$

즉, $(a+1)(a+2)(a-3)=0$이므로

$a=-2$ 또는 $a=-1$ 또는 $a=3$

이것을 각각 ㉢에 대입하면

$\begin{cases} a=-2 \\ b=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=-1 \\ b=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$

(i) $a=-2$, $b=-3$일 때

$x+y=-2$, $xy=-3$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은

$t^2+2t-3=0$, $(t+3)(t-1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

(ii) $a=-1$, $b=-6$일 때

$x+y=-1$, $xy=-6$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은

$t^2+t-6=0$, $(t+3)(t-2)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=2$

(iii) $a=3$, $b=2$일 때

$x+y=3$, $xy=2$이므로 x, y를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은

$t^2-3t+2=0$, $(t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

(i)~(iii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

따라서 $x-y$의 최댓값은 $x=2$, $y=-3$일 때

$x-y=2-(-3)=5$

24 답 -11

$x^2-xy+x-y+4=0$에서

$(x+1)x-(x+1)y=-4$

$(x+1)(x-y)=-4$

$1 \quad -4 \Rightarrow x+1=1$, $x-y=-4$이므로 $x=0$, $y=4$

$-1 \quad 4 \Rightarrow x+1=-1$, $x-y=4$이므로 $x=-2$, $y=-6$

$2 \quad -2 \Rightarrow x+1=2$, $x-y=-2$이므로 $x=1$, $y=3$

$-2 \quad 2 \Rightarrow x+1=-2$, $x-y=2$이므로 $x=-3$, $y=-5$

$4 \quad -1 \Rightarrow x+1=4$, $x-y=-1$이므로 $x=3$, $y=4$

$-4 \quad 1 \Rightarrow x+1=-4$, $x-y=1$이므로 $x=-5$, $y=-6$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-6 \end{cases}$

따라서 $x+y$의 최솟값은 $x=-5$, $y=-6$일 때

$x+y=-5+(-6)=-11$

Ⅱ-5 | 일차부등식과 연립일차부등식 119~126쪽

001 답 (1) $<$ (2) $<$ (3) $>$ (4) $>$
(5) $<$ (6) $<$ (7) $<$ (8) $>$

$a<0<b$에서 $a<0$, $b>0$, $a<b$이므로

(1) $a<b$의 양변에서 1을 빼면 $a-1<b-1$

(2) $a<b$의 양변에 3을 곱하면 $3a<3b$

(3) $a<b$의 양변을 -2로 나누면 $-\frac{a}{2}>-\frac{b}{2}$

(4) $a<b$의 양변에 $-\frac{5}{8}$를 곱하면 $-\frac{5}{8}a>-\frac{5}{8}b$

이 부등식의 양변에 10을 더하면

$-\frac{5}{8}a+10>-\frac{5}{8}b+10$

(5) $a<b$의 양변에 a를 더하면 $2a<a+b$

(6) $a<b$의 양변에서 b를 빼면 $a-b<0$

(7) $b>0$이므로 $a<b$의 양변에 b를 곱하면 $ab<b^2$

(8) $a<0$이므로 $a<b$의 양변을 a로 나누면 $1>\frac{b}{a}$

002 답 (1) $x\le-3$ (2) $x>-10$ (3) $x>12$

(1) $x-2\ge4x+7$에서

$-3x\ge9$ $\quad\therefore x\le-3$

(2) $2(2x+1)+3>3x-5$에서

$4x+5>3x-5$ $\quad\therefore x>-10$

(3) $x+\frac{-x+3}{2}<\frac{3x}{4}-\frac{3}{2}$의 양변에 4를 곱하면

$4x+2(-x+3)<3x-6$

$2x+6<3x-6$, $-x<-12$

$\therefore x>12$

003 답 (1) $a>0$일 때 $x>\frac{3}{a}$,
$a<0$일 때 $x<\frac{3}{a}$,
$a=0$일 때 해는 없다.
(2) $a>0$일 때 $x\ge\frac{4a-4}{a}$,
$a<0$일 때 $x\le\frac{4a-4}{a}$,
$a=0$일 때 해는 모든 실수
(3) $a>1$일 때 $x\ge a+2$,
$a<1$일 때 $x\le a+2$,
$a=1$일 때 해는 모든 실수

(1) $ax>3$에서

(i) $a>0$일 때, $x>\frac{3}{a}$

(ii) $a<0$일 때, $x<\frac{3}{a}$

(iii) $a=0$일 때, $0>3$이므로 해는 없다.

(2) $a(-x+5)-6\le a-2$에서

$-ax+5a-6\le a-2$, $-ax\le-4a+4$

$\therefore ax\ge4a-4$

(i) $a>0$일 때, $x\ge\frac{4a-4}{a}$

(ii) $a<0$일 때, $x\le\frac{4a-4}{a}$

(iii) $a=0$일 때, $0\ge-4$이므로 해는 모든 실수이다.

(3) $a(x-a)+2\ge x+a$에서

$ax-a^2+2\ge x+a$, $ax-x\ge a^2+a-2$

$\therefore (a-1)x\ge(a+2)(a-1)$

(i) $a>1$일 때, $x\ge a+2$

(ii) $a<1$일 때, $x\le a+2$

(iii) $a=1$일 때, $0\ge0$이므로 해는 모든 실수이다.

풍쌤 비법 부등식 $ax>b$의 해

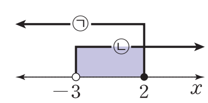
x에 대한 계수가 미정계수로 주어진 $ax>b$ 꼴의 부등식은 a의 값에 따라 해가 달라지므로 a의 값의 범위를 $a>0$, $a<0$, $a=0$인 경우로 나누어 푼다.

004 답 (1) $-3<x\le2$ (2) $x<0$
(3) $-2\le x\le5$ (4) $-6<x<-1$
(5) $x\ge7$ (6) $-4\le x\le4$
(7) $1\le x\le3$ (8) $-8\le x<0$

(1) $x+3\le5$에서 $x\le2$ …… ㉠

$x-1>-4$에서 $x>-3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면

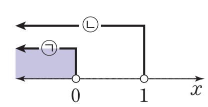


따라서 연립부등식의 해는 $-3<x\le2$

(2) $-x>0$에서 $x<0$ …… ㉠

$3x-2<1$에서 $3x<3$ $\quad\therefore x<1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면

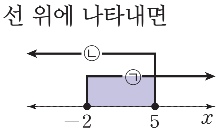


따라서 연립부등식의 해는 $x<0$

(3) $2x\ge x-2$에서 $x\ge-2$ …… ㉠

$4\ge x-1$에서 $x\le5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면

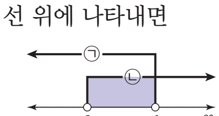


따라서 연립부등식의 해는 $-2\le x\le5$

(4) $-3x+2>-2x+3$에서 $-x>1$ $\quad\therefore x<-1$ …… ㉠

$x-4<3x+8$에서 $-2x<12$ $\quad\therefore x>-6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



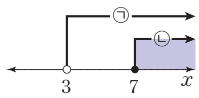
따라서 연립부등식의 해는 $-6<x<-1$

(5) $4(x+1)-7>2(x-2)+7$에서

$4x-3>2x+3$, $2x>6$ $\quad\therefore x>3$ …… ㉠

$0.1x\ge0.7$에서 $x\ge7$ …… ㉡

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면

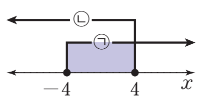


따라서 연립부등식의 해는 $x\geq 7$

(6) $\frac{1-x}{5}\leq 1$에서 $1-x\leq 5$, $-x\leq 4$ $\quad\therefore x\geq -4$ …… ㉠

$\frac{x-6}{2}\leq -1$에서 $x-6\leq -2$ $\quad\therefore x\leq 4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



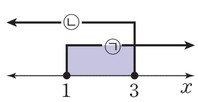
따라서 연립부등식의 해는 $-4\leq x\leq 4$

(7) $0.2x-0.5\leq x-1.3$에서

$2x-5\leq 10x-13$, $-8x\leq -8$ $\quad\therefore x\geq 1$ …… ㉠

$\frac{x}{5}\leq 0.6$에서 $x\leq 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $1\leq x\leq 3$

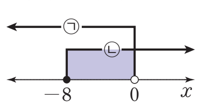
(8) $0.4-\frac{x}{2}>0.6x+\frac{2}{5}$에서

$4-5x>6x+4$, $-11x>0$ $\quad\therefore x<0$ …… ㉠

$0.2(x+1)\geq -\left(\frac{2x}{5}+4.6\right)$에서

$x+1\geq -2x-23$, $3x\geq -24$ $\quad\therefore x\geq -8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면

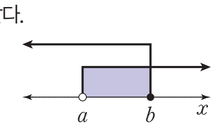


따라서 연립부등식의 해는 $-8\leq x<0$

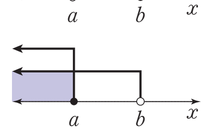
풍쌤 비법 **연립일차부등식의 해**

$a<b$일 때, 연립일차부등식의 해는 다음과 같다.

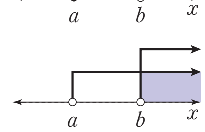
① $\begin{cases} x>a \\ x\leq b \end{cases}$의 해 ➡ $a<x\leq b$



② $\begin{cases} x\leq a \\ x<b \end{cases}$의 해 ➡ $x\leq a$



③ $\begin{cases} x>a \\ x>b \end{cases}$의 해 ➡ $x>b$



005 답 (1) $-2\leq x<4$ (2) $-7<x<-3$
(3) $x\leq 1$ (4) $3<x\leq 5$
(5) $x>-1$ (6) $-1\leq x\leq 6$

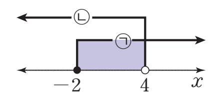
(1) 주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$\begin{cases} -6\leq x-4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-4<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-x\leq 2$ $\quad\therefore x\geq -2$

㉡에서 $x<4$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 주어진 부등식의 해는 $-2\leq x<4$

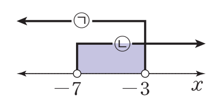
(2) 주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$\begin{cases} 11<-3x+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ -3x+2<23 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $3x<-9$ $\quad\therefore x<-3$

㉡에서 $-3x<21$ $\quad\therefore x>-7$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 주어진 부등식의 해는 $-7<x<-3$

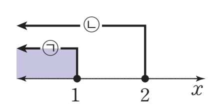
(3) 주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$\begin{cases} 3x-1\leq 2x & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x\leq 4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\leq 1$

㉡에서 $x\leq 2$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 주어진 부등식의 해는 $x\leq 1$

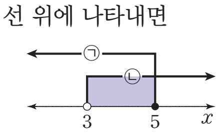
(4) 주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$\begin{cases} -5\leq -x & \cdots\cdots ㉠ \\ -x<x-6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\leq 5$

㉡에서 $-2x<-6$ $\quad\therefore x>3$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 주어진 부등식의 해는 $3<x\leq 5$

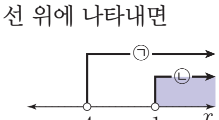
(5) 주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$\begin{cases} x-7<4x+5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+5<7x+8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-3x<12$ $\quad\therefore x>-4$

㉡에서 $-3x<3$ $\quad\therefore x>-1$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 주어진 부등식의 해는 $x>-1$

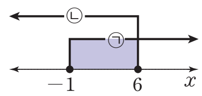
(6) 주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$\begin{cases} -7x-5\leq -5x-3 & \cdots\cdots ㉠ \\ -5x-3\leq -6x+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-2x\leq 2$ $\quad\therefore x\geq -1$

㉡에서 $x \le 6$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면

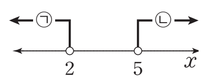


따라서 주어진 부등식의 해는 $-1 \le x \le 6$

006 답 (1) 해는 없다. (2) $x=1$ (3) 해는 없다. (4) 해는 없다. (5) 해는 없다. (6) $x=-3$

(1) $\begin{cases} x<2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x>5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

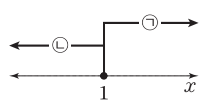
㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면



㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 연립부등식의 해는 없다.

(2) $\begin{cases} x \ge 1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x \le 1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

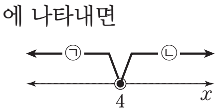
㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면



㉠, ㉡의 공통부분은 $x=1$이므로 연립부등식의 해는 $x=1$

(3) $\begin{cases} x<4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x \ge 4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면



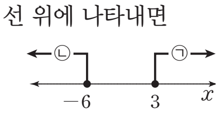
㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 연립부등식의 해는 없다.

(4) $\begin{cases} 2x-5 \ge -x+4 & \cdots\cdots ㉠ \\ -(x+5) \ge 1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $3x \ge 9$ $\quad\therefore x \ge 3$

㉡에서 $-x-5 \ge 1,\ -x \ge 6$ $\quad\therefore x \le -6$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



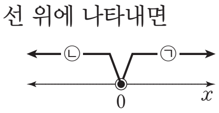
㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 연립부등식의 해는 없다.

(5) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}>\dfrac{2x+3}{12} & \cdots\cdots ㉠ \\ 6(x+1) \ge 7x+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $6x+3>2x+3,\ 4x>0$ $\quad\therefore x>0$

㉡에서 $6x+6 \ge 7x+6,\ -x \ge 0$ $\quad\therefore x \le 0$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



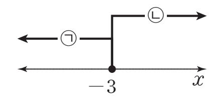
㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 연립부등식의 해는 없다.

(6) $\begin{cases} 0.6x+1.2 \le \dfrac{2}{5}x+\dfrac{3}{5} & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{-2-x}{7} \le \dfrac{2x+8}{14} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $3x+6 \le 2x+3$ $\quad\therefore x \le -3$

㉡에서 $-4-2x \le 2x+8,\ -4x \le 12$ $\quad\therefore x \ge -3$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



㉠, ㉡의 공통부분은 $x=-3$이므로 연립부등식의 해는 $x=-3$

풍쌤 비법 특수한 해를 갖는 연립일차부등식

연립일차부등식에서 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내었을 때, 공통부분이 한 점인 경우 한 개의 해를 갖고, 공통부분이 없는 경우 해가 없다.

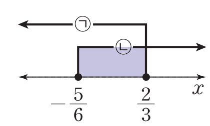
007 답 ②

$\begin{cases} 2x-2 \le -x & \cdots\cdots ㉠ \\ x+1 \le 7x+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $3x \le 2$ $\quad\therefore x \le \dfrac{2}{3}$

㉡에서 $-6x \le 5$ $\quad\therefore x \ge -\dfrac{5}{6}$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $-\dfrac{5}{6} \le x \le \dfrac{2}{3}$이므로

$a=-\dfrac{5}{6},\ b=\dfrac{2}{3}$

$\therefore a+b=-\dfrac{5}{6}+\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{6}$

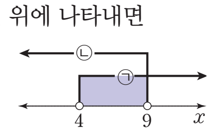
008 답 ④

$\begin{cases} 4(x+2)>2(x+3)+10 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-20<-2-x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $4x+8>2x+16,\ 2x>8$ $\quad\therefore x>4$

㉡에서 $2x<18$ $\quad\therefore x<9$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $4<x<9$이므로 정수 x는 5, 6, 7, 8의 4개이다.

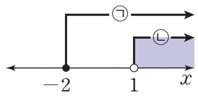
009 답 ③

$\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} \le x-0.5 & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{3x+6}{9}<\dfrac{4x+2}{6} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x-3 \le 2x-1,\ -x \le 2$ $\quad\therefore x \ge -2$

㉡에서 $6x+12<12x+6,\ -6x<-6$ $\quad\therefore x>1$

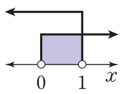
㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



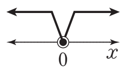
따라서 연립부등식의 해는 $x>1$이므로 정수 x의 최솟값은 2이다.

010 답 ②, ④

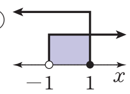
주어진 연립부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.

① 

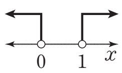
$\therefore\ 0<x<1$

② 

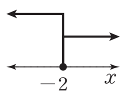
해는 없다

③ 

$\therefore\ -1<x\le 1$

④ 

해는 없다

⑤ 

$\therefore\ x=-2$

따라서 해가 없는 것은 ②, ④이다.

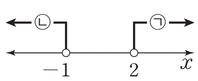
011 답 ⑤

$$\begin{cases} x-0.8>0.2x+\dfrac{4}{5} & \cdots\cdots ㉠ \\ -2x>x+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $10x-8>2x+8,\ 8x>16$ $\quad\therefore\ x>2$

㉡에서 $-3x>3$ $\quad\therefore\ x<-1$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 없다.

012 답 3

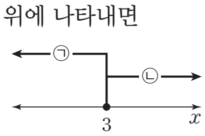
$$\begin{cases} \dfrac{3}{4}x+0.5\ge 0.2(5x-1.25) & \cdots\cdots ㉠ \\ -2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\le\dfrac{x-17}{2} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $15x+10\ge 20x-5,\ -5x\ge -15$ $\quad\therefore\ x\le 3$

㉡에서 $-4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\le x-17,\ -4x-2\le x-17$

$-5x\le -15$ $\quad\therefore\ x\ge 3$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $x=3$이므로 $k=3$이다.

013 답 ④

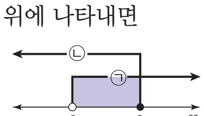
이긴 횟수를 x로 놓으면 진 횟수는 $12-x$이므로

$$\begin{cases} x>12-x & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-(12-x)\le 15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $2x>12$ $\quad\therefore\ x>6$

㉡에서 $3x-12\le 15,\ 3x\le 27$ $\quad\therefore\ x\le 9$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $6<x\le 9$이므로 x의 최댓값은 9이다.

즉, 이긴 횟수의 최댓값은 9이다.

풍쌤 비법 **연립일차부등식의 활용**

> 연립일차부등식의 활용 문제는 다음 순서로 푼다.
> ① 구하는 것을 미지수 x로 놓는다.
> ② 주어진 조건에 따라 연립부등식을 세운다.
> ③ 연립부등식을 풀어 해를 구하고, 그 해가 조건에 맞는지 확인한다.

014 답 ④

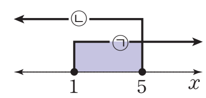
주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$$\begin{cases} -2x\le x-3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-3\le -x+7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $-3x\le -3$ $\quad\therefore\ x\ge 1$

㉡에서 $2x\le 10$ $\quad\therefore\ x\le 5$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 주어진 부등식의 해는 $1\le x\le 5$이므로

$a=1,\ b=5$

$\therefore\ b-a=5-1=4$

015 답 5

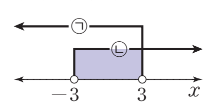
주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$$\begin{cases} 4(x-1)<2(x+1) & \cdots\cdots ㉠ \\ 2(x+1)<3(x+2)-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $4x-4<2x+2,\ 2x<6$ $\quad\therefore\ x<3$

㉡에서 $2x+2<3x+5,\ -x<3$ $\quad\therefore\ x>-3$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $-3<x<3$이므로 정수 x는

$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$의 5개이다.

016 답 ⑤

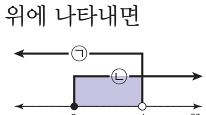
주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$$\begin{cases} x-3<\dfrac{x-2}{2} & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{x-2}{2}\le\dfrac{3x-4}{4} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $2x-6<x-2$ $\quad\therefore\ x<4$

㉡에서 $2x-4\le 3x-4,\ -x\le 0$ $\quad\therefore\ x\ge 0$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $0\le x<4$이므로 해가 아닌 것은 ⑤이다.

017 답 ⑤

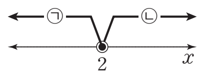
주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$$\begin{cases} \dfrac{5x-1}{10} \le 0.2x+\dfrac{1}{2} & \cdots\cdots ㉠ \\ 0.2x+\dfrac{1}{2} < 0.95x-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $5x-1 \le 2x+5,\ 3x \le 6 \qquad \therefore x \le 2$

㉡에서 $20x+50 < 95x-100,\ -75x < -150 \qquad \therefore x > 2$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 없다.

018 답 ①

$$\begin{cases} x+a<2 & \cdots\cdots ㉠ \\ -x+6<2x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x<2-a$

㉡에서 $-3x<-6 \qquad \therefore x>2$

연립부등식의 해가 $2<x<5$이므로

$2-a=5 \qquad \therefore a=-3$

019 답 ③

$$\begin{cases} 2x-a \le 4x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3(x-1)+2>4(x+1)-3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $-2x \le a+1 \qquad \therefore x \ge -\dfrac{a+1}{2}$

㉡에서 $3x-1>4x+1,\ -x>2 \qquad \therefore x<-2$

연립부등식의 해가 $-3 \le x < -2$이므로

$-\dfrac{a+1}{2}=-3,\ a+1=6 \qquad \therefore a=5$

020 답 ②

$$\begin{cases} 2(3x-1) \ge 3x+2a & \cdots\cdots ㉠ \\ x-4<-(x-6) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $6x-2 \ge 3x+2a,\ 3x \ge 2a+2 \qquad \therefore x \ge \dfrac{2a+2}{3}$

㉡에서 $x-4<-x+6,\ 2x<10 \qquad \therefore x<5$

연립부등식의 해가 $-4 \le x < b$이므로

$\dfrac{2a+2}{3}=-4,\ b=5$

따라서 $a=-7,\ b=5$이므로

$a+b=-7+5=-2$

021 답 -24

$$\begin{cases} x-3 \le \dfrac{x}{3}+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 0.1(x-a) \le \dfrac{1}{2}(x-1)+0.5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $3x-9 \le x+3,\ 2x \le 12 \qquad \therefore x \le 6$

㉡에서 $x-a \le 5(x-1)+5,\ x-a \le 5x$

$-4x \le a \qquad \therefore x \ge -\dfrac{a}{4}$

연립부등식의 해가 $x=6$이므로

$-\dfrac{a}{4}=6 \qquad \therefore a=-24$

022 답 ⑤

주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$$\begin{cases} x-a<-2x+4 & \cdots\cdots ㉠ \\ -2x+4<2x+b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $3x<a+4 \qquad \therefore x<\dfrac{a+4}{3}$

㉡에서 $-4x<b-4 \qquad \therefore x>-\dfrac{b-4}{4}$

연립부등식의 해가 $3<x<7$이므로

$-\dfrac{b-4}{4}=3,\ \dfrac{a+4}{3}=7$

$\therefore a=17,\ b=-8$

$\therefore a-b=17-(-8)=25$

023 답 ④

$$\begin{cases} x-a \le 8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+b<x-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x \le a+8$

㉡에서 $2x<-b-1 \qquad \therefore x<-\dfrac{b+1}{2}$

이때 주어진 수직선에서 각 부등식의 해가 $x \le 2,\ x<4$이므로

$a+8=2,\ -\dfrac{b+1}{2}=4$

$\therefore a=-6,\ b=-9$

$\therefore ab=-6\times(-9)=54$

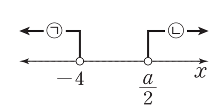
024 답 $a \ge -8$

$$\begin{cases} 4x<3x-4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x>a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x<-4$

㉡에서 $x>\dfrac{a}{2}$

연립부등식의 해가 존재하지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\dfrac{a}{2} \ge -4 \qquad \therefore a \ge -8$

참고 $\dfrac{a}{2}=-4$, 즉 $a=-8$이면 각 연립부등식의 해가 $x<-4,\ x>-4$이므로 이 경우에도 해가 존재하지 않는다. 따라서 부등식의 등호가 성립한다.

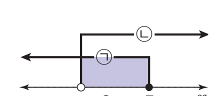
025 답 6

$$\begin{cases} -2(x+1) \ge -x+5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+a>-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $-2x-2 \ge -x+5,\ -x \ge 7 \qquad \therefore x \le -7$

㉡에서 $x>-a-2$

연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-a-2<-7,\ -a<-5$

$\therefore a>5$

따라서 정수 a의 최솟값은 6이다.

026 답 $a \geq 1$

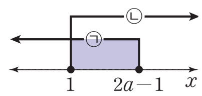
주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$$\begin{cases} 2(x-a) \leq x-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-1 \leq 3(x-2)+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $2x-2a \leq x-1 \quad \therefore x \leq 2a-1$

㉡에서 $x-1 \leq 3x-3$, $-2x \leq -2 \quad \therefore x \geq 1$

연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$2a-1 \geq 1$, $2a \geq 2 \quad \therefore a \geq 1$

참고 $2a-1=1$, 즉 $a=1$이면 각 연립부등식의 해가 $x \leq 1$, $x \geq 1$이므로 이 경우에는 해가 $x=1$이다. 따라서 부등식의 등호가 성립한다.

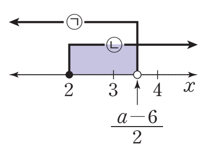
027 답 13, 14

$$\begin{cases} 3(x+2) < x+a & \cdots\cdots ㉠ \\ x-1 \geq -4x+9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $3x+6 < x+a$, $2x < a-6 \quad \therefore x < \dfrac{a-6}{2}$

㉡에서 $5x \geq 10 \quad \therefore x \geq 2$

연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$3 < \dfrac{a-6}{2} \leq 4$, $6 < a-6 \leq 8$

$\therefore 12 < a \leq 14$

따라서 정수 a의 값은 13, 14이다.

028 답 (1) $x < -5$ 또는 $x > 5$
(2) $-4 \leq x \leq 4$
(3) $-9 < x < 11$
(4) $x \leq \dfrac{2}{3}$ 또는 $x \geq 2$
(5) $-2 < x < 7$

(1) $|x| > 5$에서 $x < -5$ 또는 $x > 5$

(2) $|2x| \leq 8$에서

$-8 \leq 2x \leq 8 \quad \therefore -4 \leq x \leq 4$

(3) $|x-1| < 10$에서

$-10 < x-1 < 10 \quad \therefore -9 < x < 11$

(4) $|3x-4| \geq 2$에서

$3x-4 \leq -2$ 또는 $3x-4 \geq 2$

$3x \leq 2$ 또는 $3x \geq 6$

$\therefore x \leq \dfrac{2}{3}$ 또는 $x \geq 2$

(5) $|5-2x| < 9$에서

$-9 < 5-2x < 9$, $-14 < -2x < 4$

$\therefore -2 < x < 7$

029 답 $x < \dfrac{1}{4}$

$x=2$일 때, 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이므로 $x=2$를 기준으로 범위를 나누어 생각한다.

단계1. $x<2$일 때, 부등식의 해 구하기

$x<2$일 때, $|x-2| = -(x-2)$이므로

$-(x-2) > 3x+1$에서

$4x < 1 \quad \therefore x < \dfrac{1}{4}$

이때 $x<2$이므로 $x < \dfrac{1}{4}$

단계2. $x \geq 2$일 때, 부등식의 해 구하기

$x \geq 2$일 때, $|x-2| = x-2$이므로

$x-2 > 3x+1$에서

$2x < -3 \quad \therefore x < -\dfrac{3}{2}$

이때 $x \geq 2$이므로 해는 없다.

단계3. 부등식의 해 구하기

각 범위에서 구한 해를 모두 합친 부등식의 해는

$x < \dfrac{1}{4}$

030 답 $-5 \leq x \leq 6$

$x=0$, $x=1$일 때 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이므로 $x=0$, $x=1$을 기준으로 범위를 나누어 생각한다.

단계1. $x<0$일 때, 부등식의 해 구하기

$x<0$일 때, $|x| = -x$, $|x-1| = -(x-1)$이므로

$-x-(x-1) \leq 11$에서

$-2x+1 \leq 11$, $-2x \leq 10 \quad \therefore x \geq -5$

이때 $x<0$이므로 $-5 \leq x < 0$

단계2. $0 \leq x < 1$일 때, 부등식의 해 구하기

$0 \leq x < 1$일 때, $|x| = x$, $|x-1| = -(x-1)$이므로

$x-(x-1) \leq 11$에서 $1 \leq 11$이므로 항상 성립한다.

$\therefore 0 \leq x < 1$

단계3. $x \geq 1$일 때, 부등식의 해 구하기

$x \geq 1$일 때, $|x| = x$, $|x-1| = x-1$이므로

$x+(x-1) \leq 11$에서

$2x-1 \leq 11$, $2x \leq 12 \quad \therefore x \leq 6$

이때 $x \geq 1$이므로 $1 \leq x \leq 6$

단계4. 부등식의 해 구하기

각 범위에서 구한 해를 모두 합친 부등식의 해는

$-5 \leq x \leq 6$

031 답 ③

$|x+5| < 9$에서

$-9 < x+5 < 9 \quad \therefore -14 < x < 4$

따라서 정수 x는 $-13, -12, -11, \cdots, 3$의 17개이다.

032 답 ①

$|1-2x| \geq 3$에서

$1-2x \leq -3$ 또는 $1-2x \geq 3$

$-2x \leq -4$ 또는 $-2x \geq 2$

$\therefore x \geq 2$ 또는 $x \leq -1$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로

$ab = -1 \times 2 = -2$

033 답 ④

$|3x-2| \leq a-4$에서

$-a+4 \leq 3x-2 \leq a-4$, $-a+6 \leq 3x \leq a-2$

$\therefore \dfrac{-a+6}{3} \le x \le \dfrac{a-2}{3}$

이때 x의 최댓값은 $\dfrac{a-2}{3}$이므로

$\dfrac{a-2}{3}=2$, $a-2=6$ $\quad \therefore a=8$

034 답 ①

$x=4$를 기준으로 범위를 나눈다.

(i) $x<4$일 때

$-x+4 \le 2x+8$에서

$-3x \le 4 \quad \therefore x \ge -\dfrac{4}{3}$

그런데 $x<4$이므로 $-\dfrac{4}{3} \le x < 4$

(ii) $x \ge 4$일 때

$-(-x+4) \le 2x+8$에서

$x-4 \le 2x+8$, $-x \le 12 \quad \therefore x \ge -12$

그런데 $x \ge 4$이므로 $x \ge 4$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $x \ge -\dfrac{4}{3}$

035 답 ②

$4x-2=0$, 즉 $x=\dfrac{1}{2}$을 기준으로 범위를 나눈다.

(i) $x<\dfrac{1}{2}$일 때

$x+(4x-2)>-1$에서

$5x-2>-1$, $5x>1 \quad \therefore x>\dfrac{1}{5}$

그런데 $x<\dfrac{1}{2}$이므로 $\dfrac{1}{5}<x<\dfrac{1}{2}$

(ii) $x \ge \dfrac{1}{2}$일 때

$x-(4x-2)>-1$에서

$-3x+2>-1$, $-3x>-3 \quad \therefore x<1$

그런데 $x \ge \dfrac{1}{2}$이므로 $\dfrac{1}{2} \le x < 1$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $\dfrac{1}{5}<x<1$이므로

$a=\dfrac{1}{5}$, $b=1$

$\therefore a+b=\dfrac{1}{5}+1=\dfrac{6}{5}$

036 답 24

$x=-3$, $x=6$을 기준으로 범위를 나누어 생각한다.

(i) $x<-3$일 때

$-(x+3)-(x-6) \le 15$에서

$-2x+3 \le 15$, $-2x \le 12 \quad \therefore x \ge -6$

그런데 $x<-3$이므로 $-6 \le x < -3$

(ii) $-3 \le x < 6$일 때

$(x+3)-(x-6) \le 15$에서 $9 \le 15$이므로 항상 성립한다.

$\therefore -3 \le x < 6$

(iii) $x \ge 6$일 때

$(x+3)+(x-6) \le 15$에서

$2x-3 \le 15$, $2x \le 18 \quad \therefore x \le 9$

그런데 $x \ge 6$이므로 $6 \le x \le 9$

(i)~(iii)에서 구하는 해는 $-6 \le x \le 9$이므로 정수 x의 값의 합은

$-6+(-5)+(-4)+\cdots+6+7+8+9=7+8+9=24$

037 답 ④

$x=0$, $x=-2$를 기준으로 범위를 나누어 생각한다.

(i) $x<-2$일 때

$2\times(-x)>-(x+2)-1$에서

$-2x>-x-3$, $-x>-3 \quad \therefore x<3$

그런데 $x<-2$이므로 $x<-2$

(ii) $-2 \le x < 0$일 때

$2\times(-x)>(x+2)-1$에서

$-2x>x+1$, $-3x>1 \quad \therefore x<-\dfrac{1}{3}$

그런데 $-2 \le x < 0$이므로 $-2 \le x < -\dfrac{1}{3}$

(iii) $x \ge 0$일 때

$2x>(x+2)-1$에서

$2x>x+1 \quad \therefore x>1$

그런데 $x \ge 0$이므로 $x>1$

(i)~(iii)에서 구하는 해는 $x<-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x>1$이므로

$a=-\dfrac{1}{3}$, $b=1$

$\therefore 2b-3a=2\times1-3\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=3$

중단원 점검 문제

Ⅱ-5 | 일차부등식과 연립일차부등식 127쪽

01 답 ①

$2(x+1) \le x+4$에서

$2x+2 \le x+4 \quad \therefore x \le 2$

$-x-k \ge 1$에서

$-x \ge k+1 \quad \therefore x \le -k-1$

두 일차부등식의 해가 서로 같으므로

$-k-1=2$, $-k=3$

$\therefore k=-3$

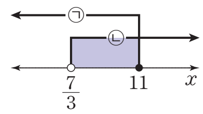
02 답 9

$$\begin{cases} 2x \le x+11 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+5<4x-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x \le 11$

㉡에서 $-3x<-7 \quad \therefore x>\dfrac{7}{3}$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $\frac{7}{3}<x\le 11$이므로 정수 x는 3, 4, 5, …, 11의 9개이다.

03 답 ④

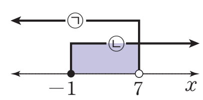
주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$$\begin{cases} -x-4<-2x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ -2x+3\le 3x+8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x<7$

㉡에서 $-5x\le 5$　　$\therefore x\ge -1$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $-1\le x<7$이므로 정수 x의 최댓값은 6, 최솟값은 -1이다.

즉, 최댓값과 최솟값의 합은

$6+(-1)=5$

04 답 8

연속하는 세 수를 $x-1$, x, $x+1$로 놓으면

$21\le (x-1)+x+(x+1)<24$

$21\le 3x<24$　　$\therefore 7\le x<8$

이때 x는 자연수이므로 $x=7$

따라서 연속하는 세 수는 6, 7, 8이므로 가장 큰 수는 8이다.

05 답 $\frac{15}{2}$

$$\begin{cases} 0.7-0.6x\le \frac{x}{5}+\frac{1}{10} & \cdots\cdots ㉠ \\ -(x-2)\ge x-a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $7-6x\le 2x+1$, $-8x\le -6$

$\therefore x\ge \frac{3}{4}$

㉡에서 $-x+2\ge x-a$, $-2x\ge -a-2$

$\therefore x\le \frac{a+2}{2}$

연립부등식의 해가 $b\le x\le 6$이므로

$\frac{a+2}{2}=6$, $b=\frac{3}{4}$

따라서 $a=10$, $b=\frac{3}{4}$이므로

$ab=10\times\frac{3}{4}=\frac{15}{2}$

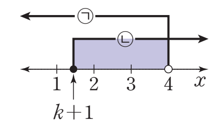
06 답 ②

$$\begin{cases} 3x-1<x+7 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-k\ge 1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $2x<8$　　$\therefore x<4$

㉡에서 $x\ge k+1$

연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값의 합이 5이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$1<k+1\le 2$　　$\therefore 0<k\le 1$

따라서 정수 k의 값은 1이다.

07 답 ③

$|x+4|\le k-3$에서

$-k+3\le x+4\le k-3$

$\therefore -k-1\le x\le k-7$

부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 7이고 $-k-1$, $k-7$은 정수이므로

$(k-7)-(-k-1)+1=7$

$2k-5=7$, $2k=12$　　$\therefore k=6$

08 답 $x<-1$ 또는 $x>3$

$x=2$, $x=-1$을 기준으로 범위를 나누어 생각한다.

(i) $x<-1$일 때

$-(2x-4)-(x+1)>6$에서

$-2x+4-x-1>6$, $-3x>3$　　$\therefore x<-1$

이때 $x<-1$이므로 $x<-1$

(ii) $-1\le x<2$일 때

$-(2x-4)+(x+1)>6$에서

$-2x+4+x+1>6$, $-x>1$　　$\therefore x<-1$

이때 $-1\le x<2$이므로 해는 없다.

(iii) $x\ge 2$일 때

$(2x-4)+(x+1)>6$, $3x>9$　　$\therefore x>3$

이때 $x\ge 2$이므로 $x>3$

(i)~(iii)에서 구하는 해는 $x<-1$ 또는 $x>3$

001 답 (1) $x<a$ 또는 $x>d$
(2) $x<c$
(3) $x<b$ 또는 $x>e$
(4) $b\leq x\leq e$

(1) $f(x)>0$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로
$x<a$ 또는 $x>d$

(2) $g(x)<0$의 해는 직선 $y=g(x)$가 x축보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로
$x<c$

(3) $f(x)>g(x)$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로
$x<b$ 또는 $x>e$

(4) $f(x)\leq g(x)$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 아래쪽에 있거나 두 함수의 그래프가 만나는 x의 값의 범위이므로
$b\leq x\leq e$

002 답 (1) $a\leq x\leq d$
(2) $c\leq x\leq f$
(3) $b\leq x\leq e$
(4) $a<x<c$ 또는 $d<x<f$

(1) $f(x)\geq 0$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있거나 x축과 만나는 x의 값의 범위이므로
$a\leq x\leq d$

(2) $g(x)\leq 0$의 해는 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있거나 x축과 만나는 x의 값의 범위이므로
$c\leq x\leq f$

(3) $f(x)\geq g(x)$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 이차함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 두 함수의 그래프가 만나는 x의 값의 범위이므로
$b\leq x\leq e$

(4) $f(x)g(x)>0$의 해는 $f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위이다.
(ⅰ) $f(x)>0$, $g(x)>0$일 때
$f(x)>0$에서 $a<x<d$
$g(x)>0$에서 $x<c$ 또는 $x>f$
따라서 해의 공통부분을 구하면 $a<x<c$
(ⅱ) $f(x)<0$, $g(x)<0$일 때
$f(x)<0$에서 $x<a$ 또는 $x>d$
$g(x)<0$에서 $c<x<f$
따라서 해의 공통부분을 구하면 $d<x<f$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a<x<c$ 또는 $d<x<f$이다.

003 답 (1) ○ (2) × (3) ○ (4) ×

(1) 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면
$2x^2-5x\geq 0$
따라서 이차부등식이다.

(2) 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면
$-2x-1>0$
따라서 이차부등식이 아니다.

(3) 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면
$-x^2+6\geq 0$
따라서 이차부등식이다.

(4) 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면
$-x^3+2x^2+x-9>0$
따라서 이차부등식이 아니다.

004 답 (1) $x<-3$ 또는 $x>2$ (2) $-3\leq x\leq 2$

(1) $f(x)>0$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y>0$인 x의 값의 범위, 즉 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로
$x<-3$ 또는 $x>2$

(2) $f(x)\leq 0$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\leq 0$인 x의 값의 범위, 즉 그래프가 x축보다 아래쪽에 있거나 x축과 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로
$-3\leq x\leq 2$

005 답 (1) $-1<x<1$ (2) $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$

(1) $f(x)>0$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y>0$인 x의 값의 범위, 즉 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로
$-1<x<1$

(2) $f(x)\leq 0$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\leq 0$인 x의 값의 범위, 즉 그래프가 x축보다 아래쪽에 있거나 x축과 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로
$x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$

006 답 (1) $-2<x<4$
(2) $x<-7$ 또는 $x>-3$
(3) $-1\leq x\leq \frac{1}{2}$
(4) $x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
(5) $x\leq 1-\sqrt{6}$ 또는 $x\geq 1+\sqrt{6}$
(6) $x<\frac{-3-\sqrt{21}}{2}$ 또는 $x>\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$

(1) $x^2-2x-8<0$에서
$(x+2)(x-4)<0$ $\therefore -2<x<4$

(2) $x^2+10x+21>0$에서
$(x+7)(x+3)>0$ $\therefore x<-7$ 또는 $x>-3$

(3) $2x^2+x-1\leq 0$에서
$(x+1)(2x-1)\leq 0$ $\therefore -1\leq x\leq \frac{1}{2}$

(4) 이차방정식 $x^2-x-1=0$의 근이 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$이므로

$x^2-x-1>0$의 해는

$\left\{x-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}\left\{x-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}>0$

$\therefore\ x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(5) 이차방정식 $x^2-2x-5=0$의 근이 $x=1\pm\sqrt{6}$이므로

$x^2-2x-5\geq0$의 해는

$\{x-(1-\sqrt{6})\}\{x-(1+\sqrt{6})\}\geq0$

$\therefore\ x\leq1-\sqrt{6}$ 또는 $x\geq1+\sqrt{6}$

(6) $x^2+3x>3$에서 $x^2+3x-3>0$

이차방정식 $x^2+3x-3=0$의 근이 $x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$이므로

$x^2+3x-3>0$의 해는

$\left\{x-\left(\frac{-3-\sqrt{21}}{2}\right)\right\}\left\{x-\left(\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right)\right\}>0$

$\therefore\ x<\frac{-3-\sqrt{21}}{2}$ 또는 $x>\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$

007 답 (1) $x=-1$

(2) 해는 없다.

(3) $x\neq5$인 모든 실수

(1) $x^2+2x+1\leq0$에서 $(x+1)^2\leq0$

따라서 해는 $x=-1$이다.

(2) $x^2-8x+16<0$에서 $(x-4)^2<0$

따라서 해는 없다.

(3) $x^2-10x+25>0$에서 $(x-5)^2>0$

따라서 해는 $x\neq5$인 모든 실수이다.

008 답 (1) 해는 모든 실수

(2) 해는 모든 실수

(3) 해는 없다.

(1) $x^2+2x+4\geq0$에서

$(x^2+2x+1)+3\geq0,\ (x+1)^2+3\geq0$

따라서 해는 모든 실수이다.

(2) $3x^2+6x+5>0$에서

$3(x^2+2x+1)+2>0,\ 3(x+1)^2+2>0$

따라서 해는 모든 실수이다.

(3) $x^2+10\leq5x$에서

$x^2-5x+10\leq0,\ \left(x^2-5x+\frac{25}{4}\right)+\frac{15}{4}\leq0$

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\leq0$

따라서 해는 없다.

009 답 ③

$x^2-12x+32>0$에서

$(x-4)(x-8)>0\qquad\therefore\ x<4$ 또는 $x>8$

따라서 $a=4,\ b=8$이므로

$2a-b=4\times2-8=0$

010 답 ④

$x^2+3x-10\leq0$에서

$(x+5)(x-2)\leq0\qquad\therefore\ -5\leq x\leq2$

따라서 정수 x는 $-5,\ -4,\ -3,\ \cdots,\ 2$의 8개이다.

011 답 ②

$x^2-2x-15>0$에서

$(x+3)(x-5)>0\qquad\therefore\ x<-3$ 또는 $x>5$

한편, $|x-a|>b$에서

$x-a<-b$ 또는 $x-a>b$

$\therefore\ x<a-b$ 또는 $x>a+b$

따라서 $a-b=-3,\ a+b=5$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=4$

$\therefore\ 2a-b=2\times1-4=-2$

012 답 ④

$(x+1)(x-2)<4-6x$에서

$x^2-x-2<-6x+4,\ x^2+5x-6<0$

$(x+6)(x-1)<0\qquad\therefore\ -6<x<1$

따라서 정수 x의 최솟값은 -5이다.

013 답 ④

$10x(x+1)+3\geq x^2+4x+2$에서

$10x^2+10x+3\geq x^2+4x+2,\ 9x^2+6x+1\geq0$

$(3x+1)^2\geq0$

따라서 해는 모든 실수이다.

014 답 ⑤

① $x^2\geq0$에서 해는 모든 실수이다.

② $x^2-14x+49\leq0$에서

$(x-7)^2\leq0\qquad\therefore\ x=7$

③ $x^2-x-2>0$에서 $(x+1)(x-2)>0$

$\therefore\ x<-1$ 또는 $x>2$

④ $x^2+8x+20\geq0$에서 $(x+4)^2+4\geq0$이므로 해는 모든 실수이다.

⑤ $2x^2+2x+3\leq0$에서 $2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}\leq0$이므로 해는 없다.

따라서 해가 존재하지 않는 것은 ⑤이다.

015 답 2

직사각형의 가로의 길이를 x라 하면 세로의 길이는

$6-x\ (0<x<6)$이므로

$x(6-x)\geq8,\ x^2-6x+8\leq0$

$(x-2)(x-4) \le 0 \qquad \therefore 2 \le x \le 4$
따라서 직사각형의 가로의 길이의 최솟값은 2이다.

016 답 (1) $x^2-3x+2 \le 0$ (2) $x^2-3x-18>0$ (3) $x^2-6x-16<0$ (4) $x^2-11x+28 \ge 0$

(1) 해가 $1 \le x \le 2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-1)(x-2) \le 0$
$\therefore x^2-3x+2 \le 0$
(2) 해가 $x<-3$ 또는 $x>6$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+3)(x-6)>0$
$\therefore x^2-3x-18>0$
(3) 해가 $-2<x<8$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+2)(x-8)<0$
$\therefore x^2-6x-16<0$
(4) 해가 $x \le 4$ 또는 $x \ge 7$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-4)(x-7) \ge 0$
$\therefore x^2-11x+28 \ge 0$

017 답 (1) $a=7,\ b=10$ (2) $a=-2,\ b=-2$ (3) $a=2,\ b=6$ (4) $a=-1,\ b=-5$

(1) 해가 $2<x<5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-2)(x-5)<0$
$\therefore x^2-7x+10<0$
이 부등식이 $x^2-ax+b<0$과 같으므로
$a=7,\ b=10$
(2) 해가 $x<b$ 또는 $x>4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-b)(x-4)>0$
$\therefore x^2-(b+4)x+4b>0$
이 부등식이 $x^2+ax-8>0$과 같으므로
$a=-b-4,\ 4b=-8$
$\therefore a=-2,\ b=-2$
(3) $ax^2-8x+b \ge 0$의 해가 $x \le 1$ 또는 $x \ge 3$이므로 $a>0$이다.
해가 $x \le 1$ 또는 $x \ge 3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-1)(x-3) \ge 0$
$\therefore x^2-4x+3 \ge 0$
양변에 a를 곱하면
$ax^2-4ax+3a \ge 0 \ (\because a>0)$
이 부등식이 $ax^2-8x+b \ge 0$과 같으므로
$-4a=-8,\ b=3a$
$\therefore a=2,\ b=6$
(4) $ax^2+bx+14 \le 0$의 해가 $x \le -7$ 또는 $x \ge 2$이므로 $a<0$이다.
해가 $x \le -7$ 또는 $x \ge 2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+7)(x-2) \ge 0$
$\therefore x^2+5x-14 \ge 0$
양변에 a를 곱하면
$ax^2+5ax-14a \le 0 \ (\because a<0)$
앞의 부등식이 $ax^2+bx+14 \le 0$과 같으므로
$5a=b,\ -14a=14$
$\therefore a=-1,\ b=-5$

018 답 (1) $k \ge 4$ (2) $k<2$ (3) $-2\sqrt{3}<k<2\sqrt{3}$ (4) $k \le -\frac{9}{2}$

(1) 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+4x+k \ge 0$이 성립하려면 이차함수 $y=x^2+4x+k$의 그래프가 항상 x축 위쪽에 있거나 x축과 접해야 한다.
따라서 이차방정식 $x^2+4x+k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-k \le 0$
$4-k \le 0 \qquad \therefore k \ge 4$
(2) 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $-x^2-2x+k-3<0$이 성립하려면 이차함수 $y=-x^2-2x+k-3$의 그래프가 항상 x축 아래쪽에 있어야 한다.
따라서 이차방정식 $-x^2-2x+k-3=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-1)\times(k-3)<0$
$1+(k-3)<0 \qquad \therefore k<2$
(3) 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+kx+3>0$이 성립하려면 이차함수 $y=x^2+kx+3$의 그래프가 항상 x축 위쪽에 있어야 한다.
따라서 이차방정식 $x^2+kx+3=0$의 판별식을 D라 하면
$D=k^2-4\times3<0$
$k^2<12 \qquad \therefore -2\sqrt{3}<k<2\sqrt{3}$
(4) 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $kx^2-6x-2 \le 0$이 성립하려면 이차함수 $y=kx^2-6x-2$의 그래프가 항상 x축 아래쪽에 있거나 x축과 접해야 한다.
따라서 $k<0$이고, 이차방정식 $kx^2-6x-2=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-3)^2-k\times(-2) \le 0$
$9+2k \le 0 \qquad \therefore k \le -\frac{9}{2}$
따라서 $k<0$, $k \le -\frac{9}{2}$이므로 공통부분은 $k \le -\frac{9}{2}$이다.

019 답 (1) $k \le -1$ (2) $k>\frac{1}{24}$ (3) $-\frac{1}{2}<k<0$ (4) $1 \le k \le 9$

(1) 이차부등식 $x^2-2x-k<0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2x-k \ge 0$이 성립해야 한다.
따라서 이차방정식 $x^2-2x-k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-k) \le 0$
$1+k \le 0 \qquad \therefore k \le -1$
(2) 이차부등식 $3x^2-x+2k \le 0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $3x^2-x+2k>0$이 성립해야 한다.
따라서 이차방정식 $3x^2-x+2k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times3\times2k<0$

$1-24k<0 \qquad \therefore k>\frac{1}{24}$

(3) 이차부등식 $-x^2+4kx+2k\ge0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $-x^2+4kx+2k<0$이 성립해야 한다.

따라서 이차방정식 $-x^2+4kx+2k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-(-1)\times2k<0$

$4k^2+2k<0,\ 2k(2k+1)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<k<0$

(4) 이차부등식 $kx^2+2(k-3)x+4<0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $kx^2+2(k-3)x+4\ge0$이 성립해야 한다.

따라서 $k>0$이고, 이차방정식 $kx^2+2(k-3)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-3)^2-k\times4\le0$

$k^2-10k+9\le0,\ (k-1)(k-9)\le0$

$\therefore 1\le k\le9$

따라서 $k>0$, $1\le k\le9$이므로 공통부분은 $1\le k\le9$이다.

020

답 (1) $x<-1$ 또는 $x>5$ (2) $-5<x<8$ (3) $2<x<3$ (4) $x\ne1$인 모든 실수

(1) $x^2-2x-3>2x+2$에서

$x^2-4x-5>0,\ (x+1)(x-5)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>5$

(2) $-x^2+4x+30>x-10$에서

$x^2-3x-40<0,\ (x+5)(x-8)<0$

$\therefore -5<x<8$

(3) $-2x^2+x+1>-x^2-4x+7$에서

$x^2-5x+6<0,\ (x-2)(x-3)<0$

$\therefore 2<x<3$

(4) $3x^2-2x>2x^2-1$에서

$x^2-2x+1>0,\ (x-1)^2>0$

따라서 구하는 x의 값의 범위는 $x\ne1$인 모든 실수이다.

풍쌤 비법 두 함수의 그래프와 부등식

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

① 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위는 부등식 $f(x)>g(x)$의 해와 같다.

② 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위는 부등식 $f(x)<g(x)$의 해와 같다.

021

답 $-1<k<4$

이차함수 $y=x^2+2kx+5$의 그래프가 직선 $y=2x-k$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2kx+5>2x-k$, 즉 $x^2+2(k-1)x+k+5>0$이 성립해야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+k+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k+5)<0$

$k^2-3k-4<0,\ (k+1)(k-4)<0$

$\therefore -1<k<4$

022

답 $-3<k<5$

이차함수 $y=-2x^2+x-1$의 그래프가 직선 $y=kx+1$보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여

$-2x^2+x-1<kx+1$, 즉 $2x^2+(k-1)x+2>0$이 성립해야 한다.

따라서 이차방정식 $2x^2+(k-1)x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-1)^2-4\times2\times2<0$

$k^2-2k-15<0,\ (k+3)(k-5)<0$

$\therefore -3<k<5$

023

답 ①

해가 $-7\le x\le-3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+7)(x+3)\le0 \qquad \therefore x^2+10x+21\le0$

따라서 $a=10$, $b=-21$이므로

$a+b=10+(-21)=-11$

024

답 $\frac{1}{2}<x<1$

해가 $x<-1$ 또는 $x>3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-3)>0 \qquad \therefore x^2-2x-3>0$

이때 $a=2$, $b=-3$이므로 이차부등식 $ax^2+bx+1<0$은

$2x^2-3x+1<0,\ (2x-1)(x-1)<0$

$\therefore \frac{1}{2}<x<1$

025

답 ④

해가 $x=-1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)^2\le0 \qquad \therefore x^2+2x+1\le0$

위의 부등식의 양변에 2를 곱하면

$2x^2+4x+2\le0$

이 부등식이 $2x^2+2kx+k\le0$과 같으므로

$2k=4 \qquad \therefore k=2$

풍쌤 비법

해가 $x=a$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-a)^2\le0$

026

답 5

$ax^2-6x+24>0$의 해가 $-4<x<b$이므로 $a<0$이다.

해가 $-4<x<b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+4)(x-b)<0 \qquad \therefore x^2-(b-4)x-4b<0$

양변에 a를 곱하면

$ax^2-a(b-4)x-4ab>0$ ($\because$ $a<0$)

이 부등식이 $ax^2-6x+24>0$과 같으므로

$-ab+4a=-6$, $-4ab=24$

즉, $ab=-6$이므로 이것을 $-ab+4a=-6$에 대입하면

$a=-3$, $b=2$

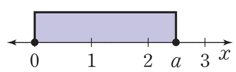
$\therefore$ $b-a=2-(-3)=5$

027 답 ②

$x^2-ax\le 0$에서 $x(x-a)\le 0$ …… ㉠

$\therefore$ $0\le x\le a$ ($\because$ a는 양수)

㉠을 만족시키는 정수 x가 3개이므로 오른쪽 그림에서



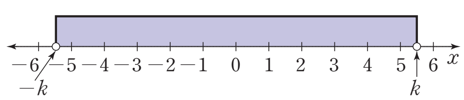
$2\le a<3$

028 답 ⑤

$x^2<k^2$에서

$x^2-k^2<0$, $(x+k)(x-k)<0$

$k>0$이므로 $-k<x<k$ …… ㉠



㉠을 만족시키는 정수 x가 11개이므로 위의 그림에서

$5<k\le 6$

따라서 자연수 k의 값은 6이다.

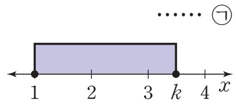
029 답 $3\le k<4$

$x^2-(k+1)x+k\le 0$에서

$(x-1)(x-k)\le 0$

$\therefore$ $1\le x\le k$ ($\because$ $k>1$) …… ㉠

㉠을 만족시키는 정수 x의 값의 합이 6이므로 오른쪽 그림에서



$3\le k<4$

030 답 ②

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2kx+5k>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+2kx+5k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-5k<0$, $k(k-5)<0$

$\therefore$ $0<k<5$

따라서 정수 k의 최댓값은 4이다.

031 답 ②

이차부등식 $x^2-x+2k\le 0$이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-x+2k>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-x+2k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times 1\times 2k<0$

$1-8k<0$ $\therefore$ $k>\frac{1}{8}$

따라서 $a=\frac{1}{8}$이므로

$16a=16\times\frac{1}{8}=2$

032 답 ⑤

$k(x^2-1)\ge -5-4x$에서 $kx^2+4x-k+5\ge 0$

이 이차부등식이 항상 성립하려면

$k>0$

이차방정식 $kx^2+4x-k+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-k(-k+5)\le 0$

$k^2-5k+4\le 0$, $(k-1)(k-4)\le 0$

$\therefore$ $1\le k\le 4$

따라서 $k>0$, $1\le k\le 4$의 공통부분은 $1\le k\le 4$이므로 정수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

033 답 6

이차부등식 $x^2-(2a-6)x+4<0$이 해를 가지려면 이차방정식 $x^2-(2a-6)x+4=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-(2a-6)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

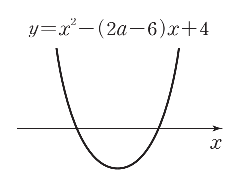
$\frac{D}{4}=\{-(a-3)\}^2-1\times 4>0$

$a^2-6a+5>0$, $(a-1)(a-5)>0$

$\therefore$ $a<1$ 또는 $a>5$

따라서 자연수 a의 최솟값은 6이다.

참고 이차부등식 $x^2-(2a-6)x+4<0$이 해를 가지려면 이차함수 $y=x^2-(2a-6)x+4$에서 $y<0$인 부분이 존재해야 한다.
즉, 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $D>0$이어야 한다.



034 답 ①

이차부등식 $-x^2-4kx+4k-15\ge 0$이 해를 가지려면 이차방정식 $-x^2-4kx+4k-15=0$이 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $-x^2-4kx+4k-15=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-(-1)\times(4k-15)\ge 0$

$4k^2+4k-15\ge 0$, $(2k+5)(2k-3)\ge 0$

$\therefore$ $k\le -\frac{5}{2}$ 또는 $k\ge\frac{3}{2}$

035 답 ③

이차부등식 $3x^2+kx+3\le 0$이 오직 하나의 해를 가지려면 이차방정식 $3x^2+kx+3=0$이 중근을 가져야 한다.

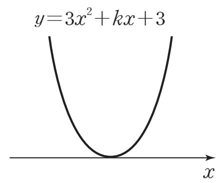
이차방정식 $3x^2+kx+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\times 3\times 3=0$, $k^2-36=0$

$(k+6)(k-6)=0$

$\therefore k=-6$ 또는 $k=6$
따라서 실수 k의 값의 합은
$-6+6=0$

참고 이차부등식 $3x^2+kx+3\le 0$이 오직 하나의 해를 가지려면 이차함수 $y=3x^2+kx+3$의 그래프가 x축에 접해야 한다.
즉, 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $D=0$이어야 한다.



036 답 -7

이차부등식 $kx^2-6kx+8k-7\ge 0$이 오직 하나의 해를 가지려면 $k<0$이고, 이차방정식 $kx^2-6kx+8k-7=0$이 중근을 가져야 한다.
이차방정식 $kx^2-6kx+8k-7=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-3k)^2-k(8k-7)=0$$

$k^2+7k=0$, $k(k+7)=0$
$\therefore k=-7$ 또는 $k=0$
이때 $k<0$이므로 $k=-7$

037 답 3

이차함수 $y=x^2+6x-3$의 그래프가 이차함수 $y=4x^2-8x+5$의 그래프보다 위쪽에 있으므로
$x^2+6x-3>4x^2-8x+5$에서
$3x^2-14x+8<0$, $(3x-2)(x-4)<0$

$$\therefore \frac{2}{3}<x<4$$

따라서 정수 x는 1, 2, 3의 3개이다.

038 답 4

이차함수 $y=-x^2+x+2$의 그래프가 직선 $y=3x+k$보다 항상 아래쪽에 있으려면 $-x^2+x+2<3x+k$, 즉 $x^2+2x+k-2>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2+2x+k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1^2-(k-2)<0$$

$-k+3<0$ $\quad\therefore k>3$
따라서 정수 k의 최솟값은 4이다.

039 답 4

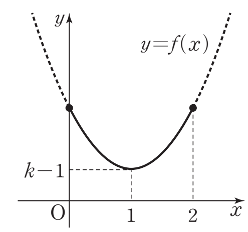
$x^2+ax+b>-x+6$에서
$x^2+(a+1)x+b-6>0$
한편, 해가 $x<-2$ 또는 $x>1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+2)(x-1)>0$ $\quad\therefore x^2+x-2>0$
따라서 $a+1=1$, $b-6=-2$이므로
$a=0$, $b=4$
$\therefore a+b=0+4=4$

040 답 5

$ax^2+19x+b<3x+21$에서
$ax^2+16x+b-21<0$
이때 해가 $x<3$ 또는 $x>5$이므로 $a<0$이다.
해가 $x<3$ 또는 $x>5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-3)(x-5)>0$ $\quad\therefore x^2-8x+15>0$
양변에 a를 곱하면
$ax^2-8ax+15a<0$ ($\because a<0$)
따라서 $16=-8a$, $b-21=15a$이므로
$a=-2$, $b=-9$
$\therefore 2a-b=2\times(-2)-(-9)=5$

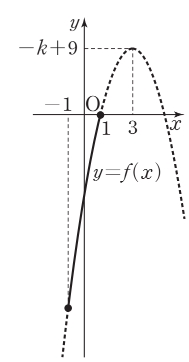
041 답 ①

$f(x)=x^2-2x+k$라 하면
$f(x)=(x-1)^2+k-1$
$0\le x\le 2$에서 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.
$0\le x\le 2$에서 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $k-1$을 가지므로
$k-1>0$ $\quad\therefore k>1$



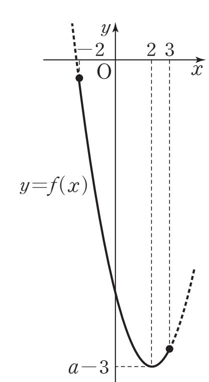
042 답 ③

$f(x)=-x^2+6x-k$라 하면
$f(x)=-(x-3)^2-k+9$
$-1\le x\le 1$에서 $f(x)\le 0$이 항상 성립하려면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.
$-1\le x\le 1$에서 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 $-k+5$를 가지므로
$-k+5\le 0$ $\quad\therefore k\ge 5$
따라서 k의 최솟값은 5이다.



043 답 ①

$x^2-3x+1\le x-a$에서 $x^2-4x+a+1\le 0$
$f(x)=x^2-4x+a+1$이라 하면
$f(x)=(x-2)^2+a-3$
$-2\le x\le 3$에서 $f(x)\le 0$이 항상 성립하려면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.
$-2\le x\le 3$에서 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 $a+13$을 가지므로
$a+13\le 0$ $\quad\therefore a\le -13$
따라서 정수 a의 최댓값은 -13이다.



참고 $f(x) \le 0$이 성립해야 하므로 $f(x)$의 최솟값이 아닌 최댓값을 이용해야 한다.

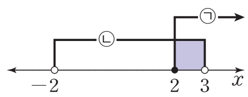
044 답 2, -2, 2

$3x-4 \ge 2$에서 $x \ge \boxed{2}$ …… ㉠

$x^2-x-6<0$에서 $(x+2)(x-3)<0$이므로

$\boxed{-2}<x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $\boxed{2} \le x<3$

045 답 (1) $x<1$ (2) $x>1$ (3) 해는 없다.

(1) $\begin{cases} x^2+6>7x & \cdots\cdots ㉠ \\ -x+4>1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서

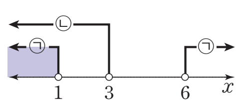
$x^2-7x+6>0$, $(x-1)(x-6)>0$

$\therefore$ $x<1$ 또는 $x>6$

㉡에서

$-x>-3$ $\therefore$ $x<3$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $x<1$

(2) $\begin{cases} x(x+4)>5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x<5x+2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서

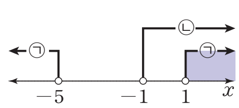
$x^2+4x-5>0$, $(x+5)(x-1)>0$

$\therefore$ $x<-5$ 또는 $x>1$

㉡에서

$-2x<2$ $\therefore$ $x>-1$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $x>1$

(3) $\begin{cases} -x^2+6x \ge 5x-2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 9x-4>5x+8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서

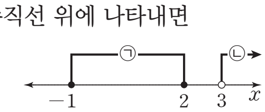
$x^2-x-2 \le 0$, $(x+1)(x-2) \le 0$

$\therefore$ $-1 \le x \le 2$

㉡에서

$4x>12$ $\therefore$ $x>3$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 없다.

046 답 -5, 2, 2

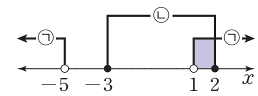
$x^2+4x-5>0$에서 $(x+5)(x-1)>0$이므로

$x<\boxed{-5}$ 또는 $x>1$ …… ㉠

$x^2+x-6 \le 0$에서 $(x+3)(x-2) \le 0$이므로

$-3 \le x \le \boxed{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $1<x \le \boxed{2}$

047 답 (1) $0 \le x \le 2$ (2) 해는 없다. (3) $x<-1$ 또는 $x \ge 7$

(1) $\begin{cases} x^2-1 \le 3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-6x \le -3x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서

$x^2-4 \le 0$, $(x+2)(x-2) \le 0$

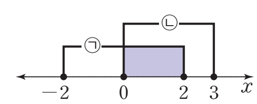
$\therefore$ $-2 \le x \le 2$

㉡에서

$x^2-3x \le 0$, $x(x-3) \le 0$

$\therefore$ $0 \le x \le 3$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $0 \le x \le 2$

(2) $\begin{cases} x^2 \le 5x & \cdots\cdots ㉠ \\ x(x-4)>2x^2+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서

$x^2-5x \le 0$, $x(x-5) \le 0$

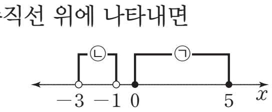
$\therefore$ $0 \le x \le 5$

㉡에서

$x^2+4x+3<0$, $(x+3)(x+1)<0$

$\therefore$ $-3<x<-1$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 없다.

(3) $\begin{cases} x^2>3x+4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-6x+7 \ge x^2+2x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서

$x^2-3x-4>0$, $(x+1)(x-4)>0$

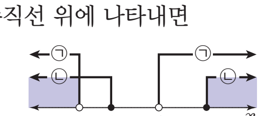
$\therefore$ $x<-1$ 또는 $x>4$

㉡에서

$x^2-8x+7 \ge 0$, $(x-1)(x-7) \ge 0$

$\therefore$ $x \le 1$ 또는 $x \ge 7$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $x<-1$ 또는 $x \ge 7$

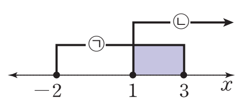
따라서 연립부등식의 해는 $x<-1$ 또는 $x\geq 7$

048 답 (1) $1\leq x\leq 3$
(2) 해는 없다.
(3) $-3<x<-1$
(4) $x\leq -1$ 또는 $x\geq 5$
(5) $-4\leq x<-2$ 또는 $3<x\leq 4$
(6) $-2<x<2$

(1) 주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$$\begin{cases} x^2-2x-6\leq -x & \cdots\cdots ㉠ \\ -x\leq -1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서
$x^2-x-6\leq 0$, $(x+2)(x-3)\leq 0$
$\therefore -2\leq x\leq 3$
㉡에서 $x\geq 1$
㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면

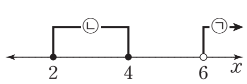


따라서 연립부등식의 해는 $1\leq x\leq 3$

(2) 주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$$\begin{cases} 20<2x+8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+8\leq 8x-x^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서
$-2x<-12$ $\quad\therefore x>6$
㉡에서
$x^2-6x+8\leq 0$, $(x-2)(x-4)\leq 0$
$\therefore 2\leq x\leq 4$
㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면

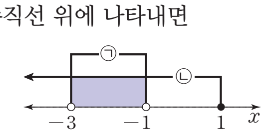


따라서 연립부등식의 해는 없다.

(3) 주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$$\begin{cases} x^2+4x+6<3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3\leq -3x+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서
$x^2+4x+3<0$, $(x+3)(x+1)<0$
$\therefore -3<x<-1$
㉡에서
$3x\leq 3$ $\quad\therefore x\leq 1$
㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면

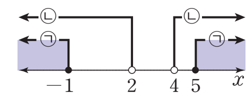


따라서 연립부등식의 해는 $-3<x<-1$

(4) 주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$$\begin{cases} -x^2+5x+10\leq x+5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+5<x^2-5x+13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서
$x^2-4x-5\geq 0$, $(x+1)(x-5)\geq 0$
$\therefore x\leq -1$ 또는 $x\geq 5$
㉡에서
$x^2-6x+8>0$, $(x-2)(x-4)>0$
$\therefore x<2$ 또는 $x>4$
㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면

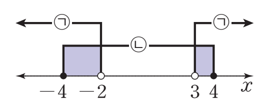


따라서 연립부등식의 해는 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 5$

(5) 주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$$\begin{cases} 6<x^2-x & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-x\leq 16-x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서
$x^2-x-6>0$, $(x+2)(x-3)>0$
$\therefore x<-2$ 또는 $x>3$
㉡에서
$x^2-16\leq 0$, $(x+4)(x-4)\leq 0$
$\therefore -4\leq x\leq 4$
㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면

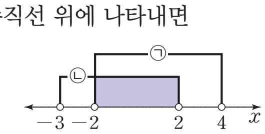


따라서 연립부등식의 해는 $-4\leq x<-2$ 또는 $3<x\leq 4$

(6) 주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$$\begin{cases} 3x(x-1)-7<2x^2-x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-x+1<x^2-2x+7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서
$3x^2-3x-7<2x^2-x+1$
$x^2-2x-8<0$, $(x+2)(x-4)<0$
$\therefore -2<x<4$
㉡에서
$x^2+x-6<0$, $(x+3)(x-2)<0$
$\therefore -3<x<2$
㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $-2<x<2$

풍쌤 비법 **연립이차부등식**

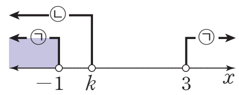
$A<B<C$ 꼴의 이차부등식은 다음 순서로 푼다.
① $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 꼴로 나타낸다.
② 각 부등식의 해를 구한다.
③ 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾는다.

049 답 $-1\leq k\leq 3$

$$\begin{cases} (x+1)(x-3)>0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x<k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x<-1$ 또는 $x>3$

㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $x<-1$이 되도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 실수 k의 값의 범위는 $-1\le k\le 3$이다.

050 답 $4\le k<8$

$$\begin{cases} x^2-12x+32\le 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-2)(x-k)>0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

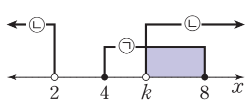
㉠에서

$(x-4)(x-8)\le 0 \qquad \therefore\ 4\le x\le 8$

㉡에서

$x<2$ 또는 $x>k$ $(\because\ k>2)$

㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $k<x\le 8$이 되도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면



$\therefore\ 4\le k<8$

참고 $k=8$이면 연립부등식의 해는 존재하지 않는다.

051 답 $0<k\le 1$

$$\begin{cases} x^2-kx<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-7x+6\le 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

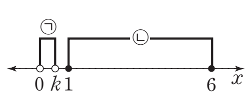
㉠에서

$x(x-k)<0 \qquad \therefore\ 0<x<k$ $(\because\ k>0)$

㉡에서

$(x-1)(x-6)\le 0 \qquad \therefore\ 1\le x\le 6$

㉠, ㉡의 해의 공통부분이 없도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면



$\therefore\ 0<k\le 1$

052 답 ⑤

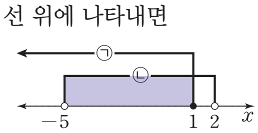
$$\begin{cases} -x+5\ge 4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3x-10<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x\le 1$

㉡에서

$(x+5)(x-2)<0 \qquad \therefore\ -5<x<2$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $-5<x\le 1$이므로 정수 x는 -4, -3, -2, -1, 0, 1의 6개이다.

053 답 ①

$$\begin{cases} x^2-3x\le 18 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2(x-2)>x-10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서

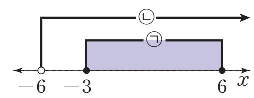
$x^2-3x-18\le 0$, $(x+3)(x-6)\le 0$

$\therefore\ -3\le x\le 6$

㉡에서

$2x-4>x-10 \qquad \therefore\ x>-6$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $-3\le x\le 6$이다.

즉, 최댓값은 6, 최솟값은 -3이므로 그 합은

$6+(-3)=3$

054 답 2

$$\begin{cases} x^2+x-2\le 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2<4x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

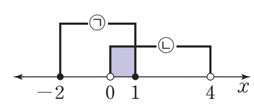
㉠에서

$(x+2)(x-1)\le 0 \qquad \therefore\ -2\le x\le 1$

㉡에서

$x^2-4x<0$, $x(x-4)<0 \qquad \therefore\ 0<x<4$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $0<x\le 1$이므로

$\alpha=0$, $\beta=1$

$\therefore\ 2\beta-\alpha=2\times 1-0=2$

055 답 ⑤

$$\begin{cases} x^2>2x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-5x+10\ge x^2+6x-8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서

$x^2-2x-3>0$, $(x+1)(x-3)>0$

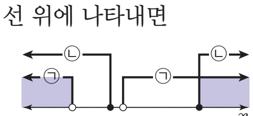
$\therefore\ x<-1$ 또는 $x>3$

㉡에서

$x^2-11x+18\ge 0$

$(x-2)(x-9)\ge 0 \qquad \therefore\ x\le 2$ 또는 $x\ge 9$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $x<-1$ 또는 $x\ge 9$이므로 양수 x의 최솟값은 9이다.

056 답 ①

주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$$\begin{cases} x+3\le 2x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+1\le x^2+7x+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서

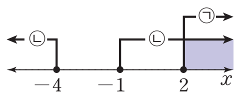
$-x\le -2 \qquad \therefore\ x\ge 2$

㉡에서

$x^2+5x+4\ge 0,\ (x+4)(x+1)\ge 0$

$\therefore\ x\le -4$ 또는 $x\ge -1$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $x\ge 2$이므로 실수 x의 최솟값은 2이다.

057 답 ④

주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$$\begin{cases} 3x^2-8x-13<x^2+6x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+6x+3<2x^2-2x+18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서

$2x^2-14x-16<0,\ x^2-7x-8<0$

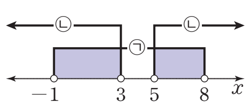
$(x+1)(x-8)<0 \qquad \therefore\ -1<x<8$

㉡에서

$x^2-8x+15>0,\ (x-3)(x-5)>0$

$\therefore\ x<3$ 또는 $x>5$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는

$-1<x<3$ 또는 $5<x<8$

058 답 $5\le x\le 6$

밭의 세로의 길이는 x m이므로 가로의 길이는

$(8-x)$ m

$x>0,\ 8-x>0,\ x>8-x$에서

$4<x<8 \qquad \cdots\cdots ㉠$

밭의 넓이는 $x(8-x)\ \mathrm{m}^2$이고 밭의 넓이가 $12\ \mathrm{m}^2$ 이상 $15\ \mathrm{m}^2$ 이하이므로

$12\le x(8-x)\le 15$

$12\le x(8-x)$에서

$x^2-8x+12\le 0,\ (x-2)(x-6)\le 0$

$\therefore\ 2\le x\le 6 \qquad \cdots\cdots ㉡$

$x(8-x)\le 15$에서

$x^2-8x+15\ge 0,\ (x-3)(x-5)\ge 0$

$\therefore\ x\le 3$ 또는 $x\ge 5 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$5\le x\le 6$

059 답 ③

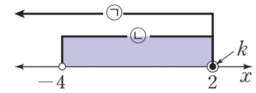
$$\begin{cases} x-k\le 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2x-8<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x\le k$

㉡에서

$(x+4)(x-2)<0 \qquad \therefore\ -4<x<2$

㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $-4<x<2$가 되도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면



즉, ㉠의 해는 $x\le 2$이어야 하므로 $k=2$

060 답 ⑤

$$\begin{cases} x^2-(k-3)x-3k\le 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-x-2\le 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

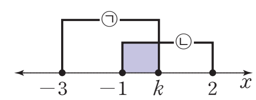
㉠에서

$(x+3)(x-k)\le 0$

㉡에서

$(x+1)(x-2)\le 0 \qquad \therefore\ -1\le x\le 2$

㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $-1\le x\le k$가 되도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 $-1\le k\le 2$이므로 정수 k는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$이고 그 합은

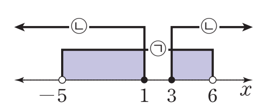
$-1+0+1+2=2$

참고 해의 공통부분이 $-1\le x\le k$가 되려면 $k>-3$, 즉 ㉠의 해가 $-3\le x\le k$이어야 한다.

061 답 ⑤

$$\begin{cases} x^2-x+a<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-4x+b\ge 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $-5<x\le 1$ 또는 $3\le x<6$이 되도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면



즉, ㉠의 해는 $-5<x<6$이어야 하므로 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+5)(x-6)<0 \qquad \therefore\ x^2-x-30<0$

이 부등식이 ㉠과 같으므로 $a=-30$

또, ㉡의 해는 $x\le 1$ 또는 $x\ge 3$이어야 하므로 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-3)\ge 0 \qquad \therefore\ x^2-4x+3\ge 0$

이 부등식이 ㉡과 같으므로 $b=3$

$\therefore\ b-a=3-(-30)=33$

062 답 ①

$|x^2-2x|\ge 3$에서

$x^2-2x\le -3$ 또는 $x^2-2x\ge 3$

(i) $x^2-2x\le -3$일 때

$x^2-2x+3\le 0,\ (x-1)^2+2\le 0$

따라서 해는 없다.

(ii) $x^2-2x\ge 3$일 때

$x^2-2x-3\ge 0,\ (x+1)(x-3)\ge 0$

$\therefore\ x \le -1$ 또는 $x \ge 3$

(i), (ii)에서 부등식의 해는 $x \le -1$ 또는 $x \ge 3$이므로

$\alpha = -1,\ \beta = 3$

$\therefore\ \alpha + \beta = -1 + 3 = 2$

063 답 7

$x^2 - 2x - 3 < 3|x-1|$에서

(i) $x < 1$일 때

$x^2 - 2x - 3 < -3(x-1),\ x^2 + x - 6 < 0$

$(x+3)(x-2) < 0 \qquad \therefore\ -3 < x < 2$

그런데 $x < 1$이므로 $-3 < x < 1$

(ii) $x \ge 1$일 때

$x^2 - 2x - 3 < 3(x-1),\ x^2 - 5x < 0$

$x(x-5) < 0 \qquad \therefore\ 0 < x < 5$

그런데 $x \ge 1$이므로 $1 \le x < 5$

(i), (ii)에서 부등식의 해는 $-3 < x < 5$

따라서 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 7개이다.

064 답 ①

$$\begin{cases} (x+2)(x+4) \ge 15 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2 + |x| - 6 < 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서

$x^2 + 6x + 8 \ge 15,\ x^2 + 6x - 7 \ge 0$

$(x+7)(x-1) \ge 0 \qquad \therefore\ x \le -7$ 또는 $x \ge 1$

㉡에서

(i) $x < 0$일 때

$x^2 - x - 6 < 0,\ (x+2)(x-3) < 0$

$\therefore\ -2 < x < 3$

그런데 $x < 0$이므로 $-2 < x < 0$

(ii) $x \ge 0$일 때

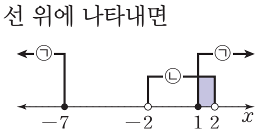
$x^2 + x - 6 < 0,\ (x+3)(x-2) < 0$

$\therefore\ -3 < x < 2$

그런데 $x \ge 0$이므로 $0 \le x < 2$

(i), (ii)에서 부등식의 해는 $-2 < x < 2$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $1 \le x < 2$이므로 정수 x의 값은 1이다.

중단원 점검 문제

Ⅱ-6 | 이차부등식과 연립이차부등식 141~142쪽

01 답 ⑤

$f(x) \le g(x)$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 아래쪽에 있거나 두 함수의 그래프가 만나는 x의 값의 범위이므로

$-4 \le x \le 3$

따라서 해가 아닌 것은 ⑤이다.

02 답 ③

$(x+1)(x+2) \le 20$에서

$x^2 + 3x + 2 \le 20,\ x^2 + 3x - 18 \le 0$

$(x+6)(x-3) \le 0 \qquad \therefore\ -6 \le x \le 3$

따라서 $\alpha = -6,\ \beta = 3$이므로

$\beta - \alpha = 3 - (-6) = 9$

03 답 ②

$x^2 - 2x - 8 < 0$에서

$(x+2)(x-4) < 0 \qquad \therefore\ -2 < x < 4$

① $|x-2| < 1$에서 $-1 < x-2 < 1$

$\therefore\ 1 < x < 3$

② $|x-1| < 3$에서 $-3 < x-1 < 3$

$\therefore\ -2 < x < 4$

③ $|x+1| < 2$에서 $-2 < x+1 < 2$

$\therefore\ -3 < x < 1$

④ $|x+2| < 3$에서 $-3 < x+2 < 3$

$\therefore\ -5 < x < 1$

⑤ $|x+3| < 1$에서 $-1 < x+3 < 1$

$\therefore\ -4 < x < -2$

따라서 $x^2 - 2x - 8 < 0$과 해가 같은 것은 ②이다.

04 답 2초

$-5t^2 + 30t \ge 40$에서 $5t^2 - 30t + 40 \le 0$

$5(t-2)(t-4) \le 0 \qquad \therefore\ 2 \le t \le 4$

따라서 물 로켓의 높이가 40 m 이상인 시간은 2초부터 4초까지 2초 동안이다.

05 답 ③

해가 $x=2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-2)^2 \le 0 \qquad \therefore\ x^2 - 4x + 4 \le 0$

따라서 $a = -4,\ b = 4$이므로 $bx^2 + ax - 3 > 0$에서

$4x^2 - 4x - 3 > 0,\ (2x+1)(2x-3) > 0$

$\therefore\ x < -\dfrac{1}{2}$ 또는 $x > \dfrac{3}{2}$

06 답 4

$f(x) \le 0$의 해가 $-3 \le x \le 2$이므로

$f(x) = a(x+3)(x-2)\ (a>0)$라 하면

$f(-x) = a(-x+3)(-x-2)$

$\qquad = a(x-3)(x+2)$

따라서 $f(-x)>0$에서

$a(x-3)(x+2)>0$

$\therefore$ $x<-2$ 또는 $x>3$

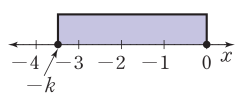
따라서 자연수 x의 최솟값은 4이다.

07 답 ②

$x^2+kx\le 0$에서 $x(x+k)\le 0$

(i) $-k<0$, 즉 $k>0$일 때 이차부등식의 해는 $-k\le x\le 0$이다.

이때 정수 x가 4개이므로 다음 그림에서 $-4<-k\le -3$



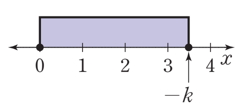
$\therefore$ $3\le k<4$

따라서 정수 k의 값은 3이다.

(ii) $-k=0$, 즉 $k=0$일 때 이차부등식의 해는 $x=0$이므로 정수 x가 4개인 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $-k>0$, 즉 $k<0$일 때 이차부등식의 해는 $0\le x\le -k$이다.

이때 정수 x가 4개이므로 다음 그림에서 $3\le -k<4$



$\therefore$ $-4<k\le -3$

따라서 정수 k의 값은 -3이다.

(i)~(iii)에서 정수 k의 값은 3, -3이므로 그 곱은

$3\times(-3)=-9$

08 답 -8

이차부등식 $kx^2-8x+k+6>0$이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $kx^2-8x+k+6\le 0$이 성립해야 한다.

따라서 $k<0$이고, 이차방정식 $kx^2-8x+k+6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-k(k+6)\le 0$

$-k^2-6k+16\le 0$, $k^2+6k-16\ge 0$

$(k+8)(k-2)\ge 0$ $\quad\therefore$ $k\le -8$ 또는 $k\ge 2$

이때 $k<0$이어야 하므로 $k\le -8$

따라서 실수 k의 최댓값은 -8이다.

09 답 ④

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+(m+2)x+2m+1>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+(m+2)x+2m+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(m+2)^2-4\times 1\times(2m+1)<0$

$m^2-4m<0$, $m(m-4)<0$

$\therefore$ $0<m<4$

따라서 정수 m은 1, 2, 3이므로 그 합은

$1+2+3=6$

10 답 ⑤

이차함수 $y=6x^2-6x+8$의 그래프가 직선 $y=4x+24$보다 아래쪽에 있으므로

$6x^2-6x+8<4x+24$

$6x^2-10x-16<0$, $2(x+1)(3x-8)<0$

$\therefore$ $-1<x<\frac{8}{3}$

따라서 정수 x는 0, 1, 2이므로 그 합은

$0+1+2=3$

11 답 -1

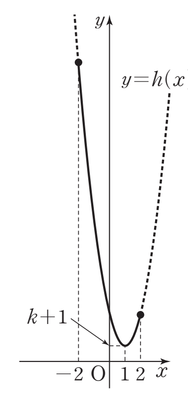
$x^2-3x+k\ge -x^2+x-3$에서

$2x^2-4x+k+3\ge 0$

$h(x)=2x^2-4x+k+3$이라 하면

$h(x)=2(x-1)^2+k+1$

$-2\le x\le 2$에서 $h(x)\ge 0$이 항상 성립하려면 이차함수 $y=h(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$-2\le x\le 2$에서 $h(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $k+1$을 가지므로

$k+1\ge 0$ $\quad\therefore$ $k\ge -1$

따라서 k의 최솟값은 -1이다.

12 답 ⑤

$\begin{cases} x^2-3x-18\le 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-8x+15\ge 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

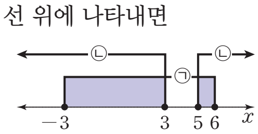
㉠에서 $(x+3)(x-6)\le 0$

$\therefore$ $-3\le x\le 6$

㉡에서 $(x-3)(x-5)\ge 0$

$\therefore$ $x\le 3$ 또는 $x\ge 5$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는

$-3\le x\le 3$ 또는 $5\le x\le 6$

즉, 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 6이므로 그 합은

$-3+(-2)+(-1)+0+1+2+3+5+6=11$

13 답 ③

주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$\begin{cases} 11x-10<x^2+4x & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+4x<3x+12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서

$x^2-7x+10>0$, $(x-2)(x-5)>0$

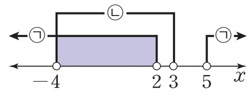
$\therefore$ $x<2$ 또는 $x>5$

㉡에서

$x^2+x-12<0$, $(x+4)(x-3)<0$

$\therefore\ -4<x<3$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는 $-4<x<2$

해가 $-4<x<2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+4)(x-2)<0 \qquad \therefore\ x^2+2x-8<0$

즉, $a=2$, $b=-8$이므로

$a-b=2-(-8)=10$

참고 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 해가 -4, 2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=-4+2 \qquad \therefore\ a=2$

$b=-4\times2=-8$

14 답 ①

정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라 하면 새로 만든 직육면체의 밑면의 가로의 길이는 $(x+4)$ cm, 높이는 $(x-2)$ cm이므로

$x>0$, $x+4>0$, $x-2>0$

$\therefore\ x>2$ …… ㉠

또, 직육면체의 부피가 정육면체의 부피보다 작아야 하므로

$x(x+4)(x-2)<x^3$, $x^3+2x^2-8x<x^3$

$2x^2-8x<0$, $2x(x-4)<0$

$\therefore\ 0<x<4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2<x<4$

이때 x는 자연수이므로 원래의 정육면체의 한 모서리의 길이는 3 cm이다.

15 답 5

주어진 부등식을 연립부등식으로 나타내면

$$\begin{cases} 2x^2+4x-28\le x^2+x & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+x<k(x+1) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서

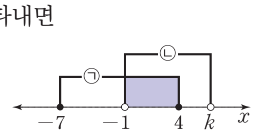
$x^2+3x-28\le0$, $(x+7)(x-4)\le0$

$\therefore\ -7\le x\le4$

㉡에서

$x^2-(k-1)x-k<0$, $(x+1)(x-k)<0$

㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $-1<x\le4$가 되도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 $k>4$이어야 하므로 정수 k의 최솟값은 5이다.

참고 $k=4$이면 연립부등식의 해가 $-1<x<4$이므로 $k>4$이어야 한다.

16 답 ①

$$\begin{cases} 2|x|-x^2>0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2x\le3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서

(ⅰ) $x<0$일 때

$-2x-x^2>0$, $x(x+2)<0$

$\therefore\ -2<x<0$

그런데 $x<0$이므로 $-2<x<0$

(ⅱ) $x\ge0$일 때

$2x-x^2>0$, $x(x-2)<0$

$\therefore\ 0<x<2$

그런데 $x\ge0$이므로 $0<x<2$

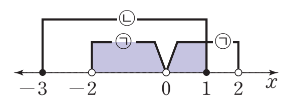
(ⅰ), (ⅱ)에서 해는 $-2<x<0$ 또는 $0<x<2$

㉡에서

$x^2+2x-3\le0$, $(x+3)(x-1)\le0$

$\therefore\ -3\le x\le1$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



따라서 연립부등식의 해는

$-2<x<0$ 또는 $0<x\le1$이므로

$\alpha=-2$, $\beta=1$

$\therefore\ \alpha\beta=-2\times1=-2$

Ⅲ 경우의 수

Ⅲ-1 | 경우의 수와 순열 145~157쪽

001 답 (1) 8 (2) 4 (3) 2 (4) 4

(1) 나올 수 있는 모든 경우는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이므로 경우의 수는 8이다.

(2) 짝수가 적혀 있는 카드를 뽑는 경우는 2, 4, 6, 8이므로 경우의 수는 4이다.

(3) 3의 배수가 적혀 있는 카드를 뽑는 경우는 3, 6이므로 경우의 수는 2이다.

(4) 8의 약수가 적혀 있는 카드를 뽑는 경우는 1, 2, 4, 8이므로 경우의 수는 4이다.

002 답 (1) 8 (2) 3 (3) 3 (4) 2

앞면이 나오는 것을 H, 뒷면이 나오는 것을 T라 하자.

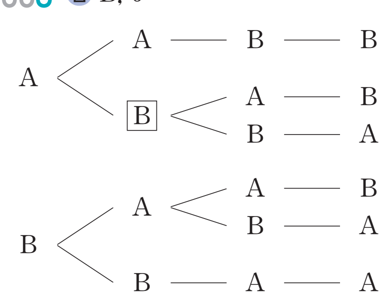
(1) 나올 수 있는 모든 경우는
(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (T, H, H),
(H, T, T), (T, H, T), (T, T, H), (T, T, T)
이므로 경우의 수는 8이다.

(2) 앞면이 한 개 나오는 경우는
(H, T, T), (T, H, T), (T, T, H)
이므로 경우의 수는 3이다.

(3) 앞면이 두 개 나오는 경우는
(H, H, T), (H, T, H), (T, H, H)
이므로 경우의 수는 3이다.

(4) 전부 같은 면이 나오는 경우는
(H, H, H), (T, T, T)
이므로 경우의 수는 2이다.

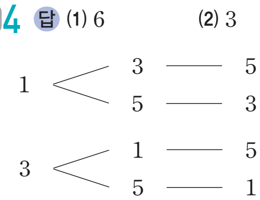
003 답 B, 6

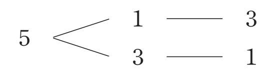


따라서 구하는 경우의 수는 $\boxed{6}$이다.

004 답 (1) 6 (2) 3 (3) 12 (4) 6

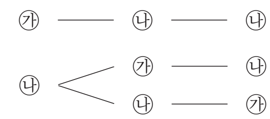
(1)





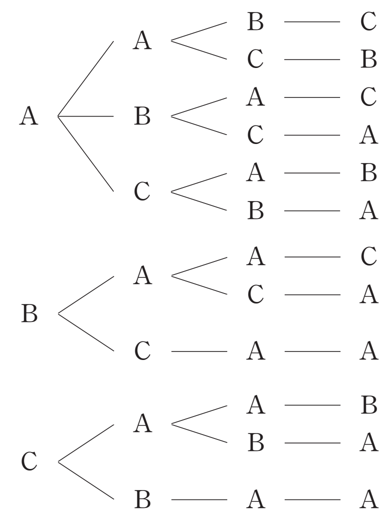
따라서 구하는 경우의 수는 6이다.

(2)



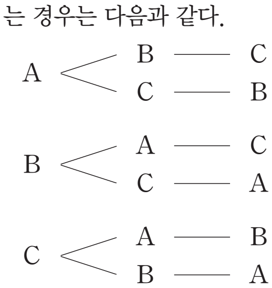
따라서 구하는 경우의 수는 3이다.

(3)



따라서 구하는 경우의 수는 12이다.

(4) D를 맨 마지막에 세우고 나머지 3명의 학생 A, B, C를 세우는 경우는 다음과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 6이다.

005 답 (1) 7 (2) 6 (3) 6

(1) 3의 배수가 적혀 있는 공을 뽑는 경우는
3, 6, 9의 3가지
8의 약수가 적혀 있는 공을 뽑는 경우는
1, 2, 4, 8의 4가지
따라서 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$3+4=7$

(2) 짝수가 적혀 있는 공을 뽑는 경우는
2, 4, 6, 8의 4가지
5의 약수가 적혀 있는 공을 뽑는 경우는
1, 5의 2가지
따라서 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$4+2=6$

(3) 소수가 적혀 있는 공을 뽑는 경우는
2, 3, 5, 7의 4가지
4의 배수가 적혀 있는 공을 뽑는 경우는
4, 8의 2가지

따라서 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$4+2=6$

006 답 (1) 9 (2) 6 (3) 9

(1) 짝수의 눈이 나오는 경우는 2, 4, 6의 3가지

홀수의 눈이 나오는 경우는 1, 3, 5의 3가지

따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$3\times3=9$

(2) 3의 약수의 눈이 나오는 경우는 1, 3의 2가지

4 이상의 눈이 나오는 경우는 4, 5, 6의 3가지

따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$2\times3=6$

(3) 소수의 눈이 나오는 경우는 2, 3, 5의 3가지

따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$3\times3=9$

007 답 (1) 10 (2) 15 (3) 17 (4) 32 (5) 60

(1) 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$4+6=10$

(2) 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$5\times3=15$

(3) 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$10+7=17$

(4) 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$2\times4\times4=32$

(5) 백의 자리의 숫자가 홀수인 경우는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지

십의 자리의 숫자가 2의 배수인 경우는 2, 4, 6, 8의 4가지

일의 자리의 숫자가 9의 약수인 경우는 1, 3, 9의 3가지

따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$5\times4\times3=60$

008 답 ③

5의 배수가 적혀 있는 카드를 뽑는 경우는

5, 10, 15, 20, 25, 30의 6가지

6의 배수가 적혀 있는 카드를 뽑는 경우는

6, 12, 18, 24, 30의 5가지

5와 6의 공배수는 30의 1가지

따라서 구하는 경우의 수는

$6+5-1=10$

009 답 9

(i) 눈의 수의 합이 4인 경우

(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지

(ii) 눈의 수의 합이 8인 경우

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지

(iii) 눈의 수의 합이 12인 경우

(6, 6)의 1가지

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$3+5+1=9$

010 답 ①

(i) 일의 자리의 숫자가 1인 경우

21, 31의 2가지

(ii) 일의 자리의 숫자가 3인 경우

13, 23의 2가지

(i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는

$2+2=4$

다른 풀이

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 1, 3의 2가지

십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 일의 자리의 숫자를 제외한 2가지

따라서 구하는 홀수의 개수는

$2\times2=4$

011 답 23

3으로 나누어떨어지는 수는

3, 6, 9, ⋯, 48의 16개

5로 나누어떨어지는 수는

5, 10, 15, ⋯, 50의 10개

3과 5의 최소공배수 15로 나누어떨어지는 수는

15, 30, 45의 3개

따라서 구하는 자연수의 개수는

$16+10-3=23$

참고 3으로 나누어떨어지는 수는 3의 배수이고, 5로 나누어떨어지는 수는 5의 배수이다.

012 답 3

방정식 $2x+y=7$에서 x, y의 계수 중 x의 계수의 절댓값이 크므로 x의 값을 기준으로 경우를 나누어 생각한다.

$2x<7$에서 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$ ($\because$ x는 자연수)

(i) $x=1$일 때

$2+y=7$ $\quad\therefore y=5$

따라서 순서쌍 (x, y)는 $(1, 5)$의 1개이다.

(ii) $x=2$일 때

$4+y=7$ $\quad\therefore y=3$

따라서 순서쌍 (x, y)는 $(2, 3)$의 1개이다.

(iii) $x=3$일 때

$6+y=7$ $\quad\therefore y=1$

따라서 순서쌍 (x, y)는 $(3, 1)$의 1개이다.

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$1+1+1=3$

013 답 ⑤

방정식 $x+y+3z=15$에서 x, y, z의 계수 중 z의 계수의 절댓값이 가장 크므로 z의 값을 기준으로 경우를 나누어 생각한다.

$3z<15$에서 $z=1$ 또는 $z=2$ 또는 $z=3$ 또는 $z=4$ ($\because$ z는 자연수)

(i) $z=1$일 때

$x+y+3=15$ $\quad\therefore x+y=12$

따라서 순서쌍 (x, y, z)는 $(1, 11, 1)$, $(2, 10, 1)$, $(3, 9, 1)$, $(4, 8, 1)$, $(5, 7, 1)$, $(6, 6, 1)$, $(7, 5, 1)$, $(8, 4, 1)$, $(9, 3, 1)$, $(10, 2, 1)$, $(11, 1, 1)$의 11개이다.

(ii) $z=2$일 때

$x+y+6=15 \quad \therefore x+y=9$

따라서 순서쌍 (x, y, z)는 $(1, 8, 2)$, $(2, 7, 2)$, $(3, 6, 2)$, $(4, 5, 2)$, $(5, 4, 2)$, $(6, 3, 2)$, $(7, 2, 2)$, $(8, 1, 2)$의 8개이다.

(iii) $z=3$일 때

$x+y+9=15 \quad \therefore x+y=6$

따라서 순서쌍 (x, y, z)는 $(1, 5, 3)$, $(2, 4, 3)$, $(3, 3, 3)$, $(4, 2, 3)$, $(5, 1, 3)$의 5개이다.

(iv) $z=4$일 때

$x+y+12=15 \quad \therefore x+y=3$

따라서 순서쌍 (x, y, z)는 $(1, 2, 4)$, $(2, 1, 4)$의 2개이다.

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$11+8+5+2=26$

014 답 8

부등식 $4x+y\le10$에서 x, y의 계수 중 x의 계수의 절댓값이 크므로 x의 값을 기준으로 경우를 나누어 생각한다.

$4x<10$에서 $x=1$ 또는 $x=2$ ($\because$ x는 자연수)

(i) $x=1$일 때

$4+y\le10 \quad \therefore y\le6$

따라서 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$의 6개이다.

(ii) $x=2$일 때

$8+y\le10 \quad \therefore y\le2$

따라서 순서쌍 (x, y)는 $(2, 1)$, $(2, 2)$의 2개이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$6+2=8$

다른 풀이

$4x+y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$의 1개이다.

$4x+y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 2)$의 1개이다.

$4x+y=7$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 3)$의 1개이다.

$4x+y=8$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 4)$의 1개이다.

$4x+y=9$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 5)$, $(2, 1)$의 2개이다.

$4x+y=10$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 6)$, $(2, 2)$의 2개이다.

따라서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$1+1+1+1+2+2=8$

참고 부등식 $ax+by\le c$ (a, b, c는 상수)를 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수는 $ax+by=d$ 꼴의 방정식을 만든 후, 이 방정식의 해의 개수로 구할 수도 있다.

015 답 12

500원, 1000원, 2000원짜리 과자를 각각 x개, y개, z개 산다고 하면

$500x+1000y+2000z=5000$

$\therefore x+2y+4z=10$ (단, x, y, z는 음이 아닌 정수이다.)

이 방정식에서 x, y, z의 계수 중 z의 계수의 절댓값이 가장 크므로 z의 값을 기준으로 경우를 나누어 생각한다.

$4z<10$에서 $z=0$ 또는 $z=1$ 또는 $z=2$ ($\because$ z는 자연수)

(i) $z=0$일 때

$x+2y=10$이므로 순서쌍 (x, y, z)는 $(10, 0, 0)$, $(8, 1, 0)$, $(6, 2, 0)$, $(4, 3, 0)$, $(2, 4, 0)$, $(0, 5, 0)$의 6개이다.

(ii) $z=1$일 때

$x+2y+4=10 \quad \therefore x+2y=6$

따라서 순서쌍 (x, y, z)는 $(6, 0, 1)$, $(4, 1, 1)$, $(2, 2, 1)$, $(0, 3, 1)$의 4개이다.

(iii) $z=2$일 때

$x+2y+8=10 \quad \therefore x+2y=2$

따라서 순서쌍 (x, y, z)는 $(2, 0, 2)$, $(0, 1, 2)$의 2개이다.

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$6+4+2=12$

016 답 ②

첫 번째로 뽑은 공에 적혀 있는 수가 될 수 있는 것은

1, 2, 3, $\cdots$, 7의 7가지

두 번째로 뽑은 공에 적혀 있는 수가 4의 약수인 경우는

1, 2, 4의 3가지

따라서 구하는 경우의 수는

$7\times3=21$

017 답 27

나오는 눈의 수가 3번 모두 홀수이어야 한다.

홀수의 눈은 1, 3, 5의 3개이므로 구하는 경우의 수는

$3\times3\times3=27$

018 답 12

$(a+b+c)(x+y)(p+q)$에서 a, b, c에 먼저 곱해지는 항이 각각 x, y의 2개이고, 그 각각에 대하여 곱해지는 항이 각각 p, q의 2개이므로 구하는 항의 개수는

$3\times2\times2=12$

019 답 ⑤

(i) 십의 자리의 숫자가 짝수, 일의 자리의 숫자가 0 또는 짝수인 경우의 수는

$4\times5=20$

(ii) 십의 자리의 숫자가 홀수, 일의 자리의 숫자가 홀수인 경우의 수는

$5\times5=25$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$20+25=45$

020 답 7

$36=2^2\times3^2$이므로 36의 양의 약수의 개수는

$(2+1)\times(2+1)=9 \quad \therefore a=9$

$280=2^3\times5\times7$이므로 280의 양의 약수의 개수는

$(3+1)\times(1+1)\times(1+1)=16 \quad \therefore b=16$

$\therefore b-a=16-9=7$

021 답 ①

① $2\times10=2^2\times5$의 양의 약수의 개수는

$(2+1)\times(1+1)=6$

② $2\times15=2\times3\times5$의 양의 약수의 개수는

$(1+1)\times(1+1)\times(1+1)=8$

③ $2\times33=2\times3\times11$의 양의 약수의 개수는

$(1+1)\times(1+1)\times(1+1)=8$

④ $2\times35=2\times5\times7$의 양의 약수의 개수는

$(1+1)\times(1+1)\times(1+1)=8$

⑤ $2\times55=2\times5\times11$의 양의 약수의 개수는

$(1+1)\times(1+1)\times(1+1)=8$

따라서 k의 값이 될 수 없는 것은 10이다.

022 답 ③

$378=2\times3^3\times7$, $945=3^3\times5\times7$이므로 378과 945의 최대공약수는 $3^3\times7$이다.

따라서 구하는 양의 공약수의 개수는 $3^3\times7$의 양의 약수의 개수와 같으므로

$(3+1)\times(1+1)=8$

023 답 6

$6^n=(2\times3)^n=2^n\times3^n$이므로 6^n의 양의 약수의 개수는

$(n+1)(n+1)=(n+1)^2$

이때 $(n+1)^2=49$이므로

$n+1=\pm7$

따라서 n은 자연수이므로 $n=6$

024 답 ②

(i) A → B → D로 가는 경우의 수

$2\times3=6$

(ii) A → C → D로 가는 경우의 수

$4\times1=4$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6+4=10$

025 답 ⑤

(i) 집 → 도서관 → 서점 → 집으로 가는 경우의 수

$5\times2\times3=30$

(ii) 집 → 서점 → 도서관 → 집으로 가는 경우의 수

$3\times2\times5=30$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$30+30=60$

026 답 44

(i) A → B → D로 가는 경우의 수

$3\times4=12$

(ii) A → C → D로 가는 경우의 수

$2\times2=4$

(iii) A → B → C → D로 가는 경우의 수

$3\times2\times2=12$

(iv) A → C → B → D로 가는 경우의 수

$2\times2\times4=16$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$12+4+12+16=44$

027 답 6

A에 칠할 수 있는 색은 3가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 2가지

C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 1가지

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times2\times1=6$

028 답 48

B에 칠할 수 있는 색은 4가지

A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지

C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지

D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times3\times2\times2=48$

참고 B와 C가 이웃하는 영역의 수가 같으므로 C부터 색을 칠하는 경우의 수를 구해도 결과는 같다.

다른 풀이

(i) A와 D에 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지

D에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같으므로 1가지

B에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한 3가지

C에 칠할 수 있는 색은 A, B, D에 칠한 색을 제외한 2가지

$\therefore\ 4\times1\times3\times2=24$

(ii) A와 D에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지

D에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지

B에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한 2가지

C에 칠할 수 있는 색은 A, B, D에 칠한 색을 제외한 1가지

$\therefore\ 4\times3\times2\times1=24$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$24+24=48$

029 답 ④

(i) A와 E에 같은 색을 칠하는 경우

C에 칠할 수 있는 색은 5가지

A에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 4가지

E에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같으므로 1가지

B에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지

D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지

$\therefore\ 5\times4\times1\times3\times3=180$

(ii) A와 E에 다른 색을 칠하는 경우

C에 칠할 수 있는 색은 5가지

A에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 4가지

E에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지

B에 칠할 수 있는 색은 A, C, E에 칠한 색을 제외한 2가지

D에 칠할 수 있는 색은 A, C, E에 칠한 색을 제외한 2가지

$\therefore\ 5\times4\times3\times2\times2=240$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$180+240=420$

다른 풀이

(i) 모두 다른 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times4\times3\times2\times1=120$

(ii) A와 E에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times4\times3\times2=120$

(iii) B와 D에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times4\times3\times2=120$

(iv) A와 E, B와 D에 각각 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times4\times3=60$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$120+120+120+60=420$

030

답 (1) ${}_5P_2$ (2) ${}_{10}P_6$ (3) ${}_8P_7$ (4) ${}_4P_3$ (5) ${}_6P_4$ (6) ${}_{15}P_2$

(1) 서로 다른 5개에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_5P_2$

(2) 서로 다른 10개에서 6개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_{10}P_6$

(3) 서로 다른 8개에서 7개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_8P_7$

(4) 4명의 학생 중에서 3명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_4P_3$

(5) 서로 다른 6개의 스티커 중에서 4개를 택하여 일렬로 붙이는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_6P_4$

(6) 15명의 학생 중에서 회장, 부회장을 각각 한 명씩 뽑는 경우의 수는 서로 다른 15개에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_{15}P_2$

031

답 (1) 30 (2) 5040 (3) 8 (4) 120

(1) ${}_6P_2=6\times5=30$

(2) ${}_{10}P_4=10\times9\times8\times7=5040$

(3) ${}_8P_1=8$

(4) ${}_5P_5=5\times4\times3\times2\times1=120$

032

답 (1) 2 (2) 1 (3) 720 (4) 1

(1) $2!=2\times1=2$

(2) $0!=1$

(3) $6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$

(4) ${}_{12}P_0=1$

033

답 (1) 7 (2) 9 (3) 3 (4) 6 (5) 8 (6) 13 (7) 6 (8) 9

(1) ${}_nP_3=210$에서 $n(n-1)(n-2)=7\times6\times5$이므로 $n=7$

(2) ${}_nP_1=9$에서 $n=9$

(3) ${}_nP_n=6$에서 $n(n-1)\times\cdots\times1=3\times2\times1$이므로 $n=3$

(4) ${}_nP_2\times2!=60$에서 ${}_nP_2=30$

이때 $n(n-1)=6\times5$이므로 $n=6$

(5) $5\times{}_nP_4=8400$에서 ${}_nP_4=1680$

이때 $n(n-1)(n-2)(n-3)=8\times7\times6\times5$이므로

$n=8$

(6) ${}_nP_2=12n$에서 $n(n-1)=12n$

이때 $n\geq2$이므로 $n-1=12$ $\quad\therefore\ n=13$

(7) ${}_nP_5=24\times{}_nP_2$에서

$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=24n(n-1)$

이때 $n\geq5$이므로

$(n-2)(n-3)(n-4)=24$

$(n-2)(n-3)(n-4)=4\times3\times2$

$\therefore\ n=6$

(8) ${}_nP_2=6n+18$에서

$n(n-1)=6n+18,\ n^2-7n-18=0$

$(n+2)(n-9)=0$

이때 $n\geq2$이므로 $n=9$

034

답 (1) 2 (2) 3 (3) 3 (4) 4 (5) 5 (6) 1 (7) 2 (8) 4

(1) ${}_4P_r=12=4\times3$이므로 $r=2$

(2) ${}_{11}P_r=990=11\times10\times9$이므로 $r=3$

(3) ${}_5P_r=60=5\times4\times3$이므로 $r=3$

(4) ${}_rP_r=24$에서 $r(r-1)\times\cdots\times1=4\times3\times2\times1$

$\therefore\ r=4$

(5) $3\times{}_7P_r=7560$에서 ${}_7P_r=2520=7\times6\times5\times4\times3$

$\therefore\ r=5$

(6) $4!\times{}_4P_r=96$에서 $4!=4\times3\times2\times1=24$이므로

${}_4P_r=4$ $\quad\therefore\ r=1$

(7) ${}_6P_r\times{}_6P_3=3600$에서 ${}_6P_3=6\times5\times4=120$이므로

${}_6P_r=30=6\times5$ $\quad\therefore\ r=2$

(8) ${}_8P_r=84\times{}_5P_2$에서 ${}_5P_2=5\times4=20$이므로

${}_8P_r=84\times20=8\times7\times6\times5$ $\quad\therefore\ r=4$

035

답 (1) 42 (2) 720 (3) 120 (4) 3024 (5) 24 (6) 720 (7) 12 (8) 1320

(1) 서로 다른 7개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_7P_2=7\times6=42$

(2) 서로 다른 10개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_{10}P_3=10\times9\times8=720$

(3) 서로 다른 5개에서 5개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

(4) 서로 다른 9개에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_9P_4=9\times8\times7\times6=3024$

(5) 서로 다른 4개에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$4!=4\times3\times2\times1=24$

(6) 서로 다른 6개에서 6개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$

(7) 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$_4P_2=4\times3=12$

(8) 서로 다른 12개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$_{12}P_3=12\times11\times10=1320$

036 답 (1) 12 (2) 576 (3) 144

(1) **단계1.** A, B를 묶어 일렬로 세우는 경우의 수 구하기

A, B를 한 묶음으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=6$

단계2. A, B의 자리를 바꾸는 경우의 수 구하기

A, B의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

단계3. 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수 구하기

구하는 경우의 수는

$6\times2=12$

(2) 남학생 4명을 한 묶음으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

남학생 4명의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times24=576$

(3) 컵케이크 3개를 한 묶음으로 생각하여 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

컵케이크 3개의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times6=144$

037 답 (1) 12 (2) 1440 (3) 86400

(1) **단계1.** C, D를 일렬로 세우는 경우의 수 구하기

C, D를 일렬로 세우는 경우의 수는

$2!=2$

단계2. C, D 사이와 양 끝 자리에 A, B를 세우는 경우의 수 구하기

∨C∨D∨

C, D의 사이와 양 끝의 3개의 자리에 A, B를 세우는 경우의 수는

$_3P_2=6$

단계3. 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수 구하기

구하는 경우의 수는

$2\times6=12$

(2) 여학생 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

∨여∨여∨여∨여∨

여학생의 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 남학생 3명을 세우는 경우의 수는

$_5P_3=60$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times60=1440$

(3) 2학년 학생 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$5!=120$

∨2∨2∨2∨2∨2∨

2학년 학생의 사이사이와 양 끝의 6개의 자리에 1학년 학생 5명을 세우는 경우의 수는

$_6P_5=720$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times720=86400$

038 답 84

$4!+{}_5P_3=4\times3\times2\times1+5\times4\times3$

$=24+60=84$

039 답 ⑤

$_nP_3=12\times{}_{n-1}P_2$에서

$n(n-1)(n-2)=12(n-1)(n-2)$

$\therefore n=12\ (\because n\geq3)$

040 답 ①

$_{2n}P_2 : {}_nP_3=3:2$에서 $3\times{}_nP_3=2\times{}_{2n}P_2$

$3n(n-1)(n-2)=2\times2n(2n-1)$

이때 $n\geq3$이므로

$3(n-1)(n-2)=4(2n-1)$

$3n^2-9n+6=8n-4$, $3n^2-17n+10=0$

$(3n-2)(n-5)=0$

$\therefore n=5\ (\because n\geq3)$

041 답 8

$_{n+1}P_2-2\times{}_nP_1=56$에서

$(n+1)n-2n=56$

이때 $n\geq1$이므로

$n^2-n-56=0$, $(n+7)(n-8)=0$

$\therefore n=8\ (\because n\geq1)$

042 답 ③

서로 다른 11개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$_{11}P_3=990$

043 답 ④

서로 다른 7개에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$_7P_4=840$

044 답 17

$_nP_2=272$이므로

$n(n-1)=17\times16$

$\therefore n=17$

045 답 ⑤

A, B를 한 묶음으로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times 2=48$

046 답 ③

중학생을 한 묶음으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=6$

중학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times 6=36$

047 답 288

소설책과 문제집을 각각 한 묶음으로 생각하여 2권의 책을 책꽂이에 꽂는 경우의 수는

$2!=2$

소설책 4권이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$4!=24$

문제집 3권이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times 24\times 6=288$

048 답 ②

배구 선수를 한 묶음으로 생각하여 $(n+1)$명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$(n+1)!$

배구 선수 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 $(n+1)!\times 2=240$이므로

$(n+1)!=120=5\times 4\times 3\times 2\times 1$

$n+1=5 \qquad \therefore n=4$

049 답 ①

파란색 나무 블록 5개를 일렬로 놓는 경우의 수는

$5!=120$

∨파∨파∨파∨파∨파∨

파란색 나무 블록의 사이사이와 양 끝의 6개의 자리에 노란색 나무 블록 3개를 놓는 경우의 수는

${}_6P_3=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times 120=14400$

050 답 ④

학생 4명이 일렬로 서는 경우의 수는

$4!=24$

∨학∨학∨학∨학∨

학생의 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 선생님 2명이 서는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times 20=480$

051 답 ②

3개의 자음 B, G, L을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

∨자∨자∨자∨

자음의 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 2개의 모음 A, E를 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times 12=72$

052 답 ⑤

세 번째 자리에 숫자 3을 놓고, 맨 끝에 숫자 6을 놓은 후 나머지 숫자 4개를 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$4!=24$

053 답 14400

여학생 중 2명을 양 끝에 세우는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

양 끝에 선 여학생을 제외한 나머지 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$6!=720$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\times 720=14400$

054 답 ④

2개의 모음 O, A를 2, 4, 6번째 자리 중에서 두 자리에 나열하는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

나머지 네 자리에 4개의 자음 M, N, D, Y를 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times 24=144$

055 답 960

빨간색과 초록색을 제외한 5개의 색 중에서 2개를 택하여 빨간색과 초록색 사이에 칠하는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

빨간색과 초록색과 그 사이에 칠할 2개의 색을 한 묶음으로 생각하여 4개의 색을 순서대로 칠하는 경우의 수는

$4!=24$

빨간색과 초록색의 순서를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\times24\times2=960$

056 답 ③

어른을 ○, 어린이를 ●로 나타내면

○●○●○● 또는 ●○●○●○

와 같이 설 수 있으므로 구하는 경우의 수는

$$3!\times3!+3!\times3!=6\times6+6\times6$$
$$=36+36=72$$

057 답 ②

자음은 s, p, c, l의 4개이고, 모음은 e, i, a의 3개이다.

자음을 ○, 모음을 ●로 나타내면

○●○●○●○

와 같이 나열할 수 있으므로 구하는 경우의 수는

$4!\times3!=24\times6=144$

058 답 ①

짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이고, 홀수는 1, 3, 5, 7의 4개이다.

짝수가 적혀 있는 카드를 ○, 홀수가 적혀 있는 카드를 ●로 나타내면

○●○●○●○● 또는 ●○●○●○●○

와 같이 나열할 수 있으므로 구하는 경우의 수는

$$4!\times4!+4!\times4!=24\times24+24\times24$$
$$=576+576=1152$$

059 답 ④

7개의 빵과 음료수 중에서 2개를 골라 정윤이와 도현이에게 1개씩 나누어 주는 경우의 수는

${}_7P_2=42$

정윤이와 도현이가 모두 빵을 받는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$42-12=30$

060 답 ③

6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

자음은 r, n, d의 3개이므로 양 끝에 모두 자음이 오도록 하는 경우의 수는

${}_3P_2\times4!=6\times24=144$

따라서 구하는 경우의 수는

$720-144=576$

061 답 ⑤

5개의 물건을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

액세서리가 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는 장식품 2개의 사이와 양 끝에 나열하는 경우의 수와 같으므로

∨장∨장∨

$2!\times3!=2\times6=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-12=108$

062 답 ②

일의 자리에는 1, 3의 2개의 숫자가 올 수 있고, 백의 자리와 십의 자리에는 일의 자리에 온 숫자를 제외한 나머지 2개의 숫자가 올 수 있으므로 구하는 자연수의 개수는

$2\times2!=2\times2=4$

063 답 ①

천의 자리에는 0을 제외한 3개의 숫자가 올 수 있고, 나머지 세 자리에는 천의 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자가 올 수 있으므로 구하는 자연수의 개수는

$3\times3!=3\times6=18$

064 답 ③

일의 자리에는 2, 4의 2개의 숫자가 올 수 있고, 백의 자리와 십의 자리에는 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개가 올 수 있으므로 구하는 자연수의 개수는

$2\times{}_4P_2=2\times12=24$

065 답 24

천의 자리에는 2, 4의 2개의 숫자가 올 수 있고, 십의 자리에는 1, 3의 2개의 숫자가 올 수 있다. 또, 나머지 두 자리에는 남은 3개의 숫자 중에서 2개가 올 수 있으므로 구하는 자연수의 개수는

$2\times2\times{}_3P_2=2\times2\times6=24$

066 답 ⑤

(ⅰ) □□0 꼴

일의 자리의 숫자가 0이면 나머지 두 자리에는 4개의 숫자 중에서 2개가 올 수 있으므로 구하는 자연수의 개수는

$1\times{}_4P_2=1\times12=12$

(ⅱ) □□2, □□4 꼴

일의 자리의 숫자가 2 또는 4이면 백의 자리에는 0과 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자가 올 수 있고, 십의 자리에는 백의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자가 올 수 있으므로 구하는 자연수의 개수는

$2\times{}_3P_1\times{}_3P_1=2\times3\times3=18$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수의 개수는

$12+18=30$

067 답 ⑤

(ⅰ) □□□0 꼴

일의 자리의 숫자가 0이면 나머지 세 자리에는 5개의 숫자 중에서 3개가 올 수 있으므로 구하는 자연수의 개수는

$1\times{}_5P_3=1\times60=60$

(ⅱ) □□□5 꼴

일의 자리의 숫자가 5이면 천의 자리에는 0을 제외한 4개의 숫자가 올 수 있고, 나머지 두 자리에는 천의 자리와 일의 자

리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자가 올 수 있으므로 구하는 자연수의 개수는

$1 \times {}_4P_1 \times {}_4P_2 = 1 \times 4 \times 12 = 48$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수의 개수는

$60+48=108$

068 답 ④

ㄱ으로 시작하는 문자열의 개수는

$3!=6$

ㄴㄱ으로 시작하는 문자열의 개수는

$2!=2$

ㄴㄷ으로 시작하는 문자열의 개수는

$2!=2$

따라서 ㄱ으로 시작하는 문자열에서 ㄴㄷ으로 시작하는 문자열까지의 개수는

$6+2+2=10$

ㄴㄹ로 시작하는 문자열은 ㄴㄹㄱㄷ, ㄴㄹㄷㄱ이므로 ㄴㄹㄷㄱ은 12번째에 온다.

069 답 75번째

1□□□□ 꼴의 자연수의 개수는

$4!=24$

2□□□□ 꼴의 자연수의 개수는

$4!=24$

3□□□□ 꼴의 자연수의 개수는

$4!=24$

따라서 1□□□□ 꼴의 자연수에서 3□□□□ 꼴의 자연수까지의 개수는

$24+24+24=72$

4□□□□ 꼴의 자연수를 차례대로 나열하면 41235, 41253, 41325이므로 41325는 75번째에 온다.

070 답 CDAB

A로 시작하는 문자열의 개수는

$3!=6$

B로 시작하는 문자열의 개수는

$3!=6$

C로 시작하는 문자열의 개수는

$3!=6$

따라서 A로 시작하는 문자열에서 C로 시작하는 문자열까지의 개수는

$6+6+6=18$

즉, 17번째에 오는 문자열은 C로 시작하는 문자열 중에서 뒤에서 두 번째이다.

C로 시작하는 문자열을 뒤에서부터 나열하면 CDBA, CDAB이므로 17번째에 오는 문자열은 CDAB이다.

다른 풀이

A로 시작하는 문자열의 개수는

$3!=6$

B로 시작하는 문자열의 개수는

$3!=6$

CA로 시작하는 문자열의 개수는

$2!=2$

CB로 시작하는 문자열의 개수는

$2!=2$

따라서 A로 시작하는 문자열에서 CB로 시작하는 문자열까지의 개수는

$6+6+2+2=16$

즉, 17번째에 오는 문자열은 CD로 시작하는 문자열 중에서 첫 번째이므로 CDAB이다.

071 답 ②

1□□□□ 꼴의 자연수의 개수는

$4!=24$

2□□□□ 꼴의 자연수의 개수는

$4!=24$

31□□□ 꼴의 자연수의 개수는

$3!=6$

32□□□ 꼴의 자연수의 개수는

$3!=6$

따라서 1□□□□ 꼴의 자연수에서 32□□□ 꼴의 자연수까지의 개수는

$24+24+6+6=60$

즉, 60번째에 오는 자연수는 32□□□ 꼴의 자연수 중에서 가장 큰 것이므로 32410이다.

중단원 점검 문제

Ⅲ-1 | 경우의 수와 순열 158~159쪽

01 답 ③

두 눈의 수의 곱이 6인 경우는 (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)의 4가지이다.

02 답 ①

(ⅰ) 각 자리의 숫자의 합이 7인 자연수는

16, 25, 34, 43, 52, 61의 6가지

(ⅱ) 각 자리의 숫자의 합이 14인 자연수는

59, 68, 77, 86, 95의 5가지

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수의 개수는

$6+5=11$

03 답 65

이차함수 $y=x^2-2ax+b$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-2ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-2ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-b>0 \qquad \therefore a^2>b$

(i) $a=1$일 때, 순서쌍 (a, b)는 없다.

(ii) $a=2$일 때, 순서쌍 (a, b)는 $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$의 3개이다.

(iii) $a=3$일 때, 순서쌍 (a, b)는 $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(3, 6)$, $(3, 7)$, $(3, 8)$의 8개이다.

(iv) $4\le a\le 9$일 때, a의 각 값에 따라 순서쌍 (a, b)는 9개이다.

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$3+8+6\times9=65$

04 답 9

$(a+b+1)(x+y)^2=(a+b+1)(x^2+2xy+y^2)$에서 a, b, 1에 곱해지는 항이 각각 x^2, $2xy$, y^2의 3개이므로 구하는 항의 개수는

$3\times3=9$

05 답 12

$180=2^2\times3^2\times5$, $630=2\times3^2\times5\times7$이므로 180과 630의 최대공약수는 $2\times3^2\times5$이다.

따라서 구하는 양의 공약수의 개수는 $2\times3^2\times5$의 양의 약수의 개수와 같으므로

$(1+1)\times(2+1)\times(1+1)=12$

06 답 10

1000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 방법은

0장, 1장의 2가지

500원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

100원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로

$a=2\times4\times5-1=39$

1000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 1000원

500원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 500원, 1000원, 1500원

100원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 100원, 200원, 300원, 400원

그런데 1000원이 중복되므로 1000원짜리 지폐 1장을 500원짜리 동전 2개로 생각하면 구하는 금액의 수는 500원짜리 동전 5개, 100원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 방법의 수와 같다.

500원짜리 동전 5개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개, 5개의 6가지

100원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로

$b=6\times5-1=29$

$\therefore a-b=39-29=10$

풍쌤 비법 지불 방법과 지불 금액의 수

(1) 지불 방법의 수
각각의 화폐로 지불할 수 있는 방법의 수를 구한 후, 곱의 법칙을 이용한다. 이때 a원 짜리 동전 n개로 지불할 수 있는 방법의 수는 $n+1$이다.

(2) 지불 금액의 수
① 중복되는 금액이 없으면 지불 방법의 수와 같다.
② 중복되는 금액이 있으면 큰 단위의 화폐를 작은 단위의 화폐로 바꿔서 생각해 본다.

07 답 ⑤

(i) A → B → D → C → A로 가는 경우의 수

$1\times4\times2\times3=24$

(ii) A → C → D → B → A로 가는 경우의 수

$3\times2\times4\times1=24$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$24+24=48$

참고 A → B → C → D와 같이 B, C를 모두 거쳐서 D 지점으로 가면 같은 지점을 두 번 이상 지나지 않고 A 지점으로 돌아올 수 없다.

08 답 ⑤

B에 칠할 수 있는 색은 4가지

C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지

A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지

D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times3\times3\times2=72$

다른 풀이

(i) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우

A, C에 칠할 수 있는 색은 4가지

B에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지

D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지

$\therefore 4\times3\times2=24$

(ii) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지

C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지

B에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지

D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지

$\therefore 4\times3\times2\times2=48$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$24+48=72$

09 답 ③

1학년 학생 2명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$2!=2$

2학년 학생 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times24=48$

10 답 36

홀수 1, 3, 5를 한 묶음으로 생각하여 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

홀수 3개가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times6=36$

11 답 ③

주어진 조건을 만족시키려면 2학년 학생 사이사이에 1학년 학생을 앉히면 된다.

2 ∨ 2 ∨ 2 ∨ 2

2학년 학생이 일렬로 앉는 경우의 수는

$4!=24$

2학년 학생 사이사이 3개의 의자에 1학년 학생이 앉는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times6=144$

12 답 ①

C, D를 제외한 후 A, B를 한 묶음 F로 생각하여 E, F 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

묶음 F 안에서 A, B의 순서를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

일렬로 나열한 2개의 문자 E, F 사이와 양 끝의 3개의 자리에 C, D를 나열하는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times2\times6=24$

13 답 ①

정윤이와 민우를 제외한 4명의 학생 중에서 3명을 택하여 정윤이와 민우 사이에 배정하는 경우의 수는

${}_4P_3=24$

정윤이와 민우와 그 사이에 있는 3명을 한 묶음으로 생각하여 2명의 순서를 정하는 경우의 수는

$2!=2$

정윤이와 민우가 순서를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times2\times2=96$

14 답 ⑤

6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

∨ 모 ∨ 모 ∨ 모 ∨

자음은 N, T, R의 3개이므로 어떤 2개도 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는 3개의 모음 A, U, E의 사이사이와 양 끝 4개의 자리에 3개의 자음을 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_4P_3\times3!=24\times6=144$

따라서 구하는 경우의 수는

$720-144=576$

15 답 ④

3의 배수가 되려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이면 되므로 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 3개를 택하여 그 합이 3의 배수가 되는 경우는

$(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$

이때 각 경우에서 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$3!=6$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$2\times6=12$

16 답 66

1□□□□ 꼴의 자연수의 개수는

$4!=24$

2□□□□ 꼴의 자연수의 개수는

$4!=24$

31□□□ 꼴의 자연수의 개수는

$3!=6$

32□□□ 꼴의 자연수의 개수는

$3!=6$

34□□□ 꼴의 자연수의 개수는

$3!=6$

따라서 35000보다 작은 자연수의 개수는

$24+24+6+6+6=66$

다른 풀이

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 모두 한 번씩 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$5!=120$

35□□□ 꼴의 자연수의 개수는

$3!=6$

4□□□□ 꼴의 자연수의 개수는

$4!=24$

5□□□□ 꼴의 자연수의 개수는

$4!=24$

따라서 35000보다 큰 자연수의 개수는

$6+24+24=54$

이므로 35000보다 작은 자연수의 개수는

$120-54=66$

001 답 (1) ${}_3C_2$ (2) ${}_9C_5$ (3) ${}_{20}C_{17}$
(4) ${}_6C_3$ (5) ${}_{12}C_2$ (6) ${}_5C_5$

(1) 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2$
(2) 서로 다른 9개에서 5개를 택하는 경우의 수는 ${}_9C_5$
(3) 서로 다른 20개에서 17개를 택하는 경우의 수는 ${}_{20}C_{17}$
(4) 서로 다른 과일 6개에서 3개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_6C_3$
(5) 12명의 학생 중에서 2명의 대표를 선출하는 경우의 수는 서로 다른 12개에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_{12}C_2$
(6) 5개의 문자 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ에서 5개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 5개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_5C_5$

002 답 (1) 35 (2) 1 (3) 1
(4) 70 (5) 55 (6) 50

(1) ${}_7C_3=\dfrac{{}_7P_3}{3!}=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$
(2) ${}_{13}C_0=1$
(3) ${}_{25}C_{25}=1$
(4) ${}_8C_4=\dfrac{{}_8P_4}{4!}=\dfrac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$
(5) ${}_{11}C_9={}_{11}C_2=\dfrac{{}_{11}P_2}{2!}=\dfrac{11\times10}{2\times1}=55$
(6) ${}_{50}C_{49}={}_{50}C_1=\dfrac{{}_{50}P_1}{1!}=50$

풍쌤 비법 조합의 수의 성질

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 서로 다른 n개에서 뽑히지 않을 $(n-r)$개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$가 성립한다.
${}_nC_r$의 값을 구할 때, $r>n-r$인 경우에는 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$를 이용하는 것이 더 편리하다.

003 답 (1) 12 (2) 9 (3) 6 (4) 4
(5) 7 (6) 15 (7) 22 (8) 8

(1) ${}_nC_2=66$에서 $\dfrac{n(n-1)}{2\times1}=66$이므로
$n(n-1)=12\times11$ $\therefore n=12$
(2) ${}_nC_3=84$에서 $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=84$이므로
$n(n-1)(n-2)=9\times8\times7$ $\therefore n=9$
(3) ${}_nC_4=15$에서 $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}=15$이므로
$n(n-1)(n-2)(n-3)=6\times5\times4\times3$
$\therefore n=6$
(4) ${}_nC_1={}_nC_{n-1}$이므로 ${}_nC_{n-1}={}_nC_3$에서
$n-1=3$ $\therefore n=4$
(5) ${}_nC_5={}_nC_{n-5}$이므로 ${}_nC_{n-5}={}_nC_2$에서
$n-5=2$ $\therefore n=7$
(6) ${}_nC_6={}_nC_{n-6}$이므로 ${}_nC_{n-6}={}_nC_9$에서
$n-6=9$ $\therefore n=15$
(7) ${}_{n+2}C_{n+1}={}_{n+2}C_1$이므로 ${}_{n+2}C_1=24$에서
$n+2=24$ $\therefore n=22$
(8) ${}_{n+1}C_{n-1}={}_{n+1}C_2$이므로 ${}_{n+1}C_2=36$에서
$\dfrac{(n+1)n}{2\times1}=36$, $(n+1)n=9\times8$
$\therefore n=8$

004 답 (1) 10 (2) 5 (3) 8 (4) 1, 6
(5) 2, 18 (6) 6 (7) 13 (8) 11

(1) ${}_{16}C_6={}_{16}C_{10}$이므로 $r=10$
(2) ${}_9C_4={}_9C_5$이므로 $r=5$
(3) $r>0$이고, ${}_4C_4=1={}_8C_8$이므로 $r=8$
(4) ${}_7C_r=7=\dfrac{7}{1}$이므로 $r=1$
또, ${}_7C_1={}_7C_6$이므로 $r=6$
(5) ${}_{20}C_r=190=\dfrac{20\times19}{2\times1}$이므로 $r=2$
또, ${}_{20}C_2={}_{20}C_{18}$이므로 $r=18$
(6) ${}_{10}C_r={}_{10}C_{10-r}$이므로 ${}_{10}C_{10-r}={}_{10}C_{r-2}$에서
$10-r=r-2$, $2r=12$ $\therefore r=6$
(7) ${}_{17}C_r={}_{17}C_{17-r}$이므로 ${}_{17}C_{r-9}={}_{17}C_{17-r}$에서
$r-9=17-r$, $2r=26$ $\therefore r=13$
(8) ${}_{18}C_{r+1}={}_{18}C_{17-r}$이므로 ${}_{18}C_{17-r}={}_{18}C_{r-5}$에서
$17-r=r-5$, $2r=22$ $\therefore r=11$

005 답 (1) 84 (2) 5 (3) 15
(4) 4 (5) 210 (6) 969

(1) 서로 다른 9개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로
${}_9C_3=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$
(2) 서로 다른 5개에서 1개를 택하는 조합의 수와 같으므로
${}_5C_1=5$
(3) 서로 다른 6개에서 4개를 택하는 조합의 수와 같으므로
${}_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$
(4) 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로
${}_4C_3={}_4C_1=4$
(5) 서로 다른 10개에서 6개를 택하는 조합의 수와 같으므로
${}_{10}C_6={}_{10}C_4=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$
(6) 서로 다른 19개에서 16개를 택하는 조합의 수와 같으므로
${}_{19}C_{16}={}_{19}C_3=\dfrac{19\times18\times17}{3\times2\times1}=969$

006 답 (1) 24 (2) 30 (3) 100

(1) **단계1.** 빨간색 공 1개를 택하는 경우의 수 구하기
빨간색 공 6개 중에서 1개를 택하는 경우의 수는
${}_6C_1=6$
단계2. 파란색 공 1개를 택하는 경우의 수 구하기
파란색 공 4개 중에서 1개를 택하는 경우의 수는
${}_4C_1=4$

단계3. 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수 구하기

구하는 경우의 수는

$6\times4=24$

(2) 박물관 5곳 중에서 2곳을 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

미술관 3곳 중에서 1곳을 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times3=30$

(3) 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개이고, 짝수는 2, 4, 6, 8, 10의 5개이다.

홀수 5개 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

짝수 5개 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times10=100$

007 답 (1) 9 (2) 30 (3) 456

(1) **단계1.** 남학생을 2명 뽑는 경우의 수 구하기

남학생 3명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

단계2. 여학생을 2명 뽑는 경우의 수 구하기

여학생 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

단계3. 합의 법칙을 이용하여 경우의 수 구하기

구하는 경우의 수는

$3+6=9$

참고 남학생 중에서 2명을 뽑는 사건과 여학생 중에서 2명을 뽑는 사건은 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙을 이용한다.

(2) 혈액형이 A형인 사람 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

혈액형이 B형인 사람 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$10+20=30$

(3) 축구 선수 11명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_{11}C_4=330$

야구 선수 9명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_9C_4=126$

따라서 구하는 경우의 수는

$330+126=456$

008 답 (1) 20 (2) 10 (3) 4 (4) 15 (5) 5 (6) 1

(1) **단계1.** A를 미리 뽑아 놓기

구하는 경우의 수는 A를 미리 뽑아 놓고 나머지 6개 중에서 3개를 뽑는 경우의 수와 같다.

단계2. 경우의 수 구하기

구하는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

(2) D, E를 미리 뽑아 놓고 나머지 5개 중에서 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_2=10$

(3) A, C, E를 미리 뽑아 놓고 나머지 4개 중에서 1개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_1=4$

(4) **단계1.** B를 제외하기

B를 제외한 나머지 6개 중에서 4개를 뽑는 경우의 수와 같다.

단계2. 경우의 수 구하기

구하는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

(5) C, F를 제외한 나머지 5개 중에서 4개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_4={}_5C_1=5$

(6) E, F, G를 제외한 나머지 4개 중에서 4개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_4=1$

009 답 ④

${}_{12}C_{2r}={}_{12}C_{12-2r}$이므로 ${}_{12}C_{12-2r}={}_{12}C_{r-3}$에서

$12-2r=r-3,\ 3r=15 \qquad \therefore r=5$

010 답 4

${}_{30}C_{n^2}={}_{30}C_{30-n^2}$이므로 ${}_{30}C_{n^2}={}_{30}C_{2n+8}$에서

$n^2=2n+8$ 또는 $30-n^2=2n+8$

(i) $n^2=2n+8$에서 $n^2-2n-8=0$

$(n+2)(n-4)=0$

이때 n은 자연수이므로 $n=4$

(ii) $30-n^2=2n+8$에서

$n^2+2n-22=0$

이때 n은 자연수이므로 이 식을 만족시키는 n의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $n=4$

011 답 ②

${}_nC_r=\dfrac{{}_nP_r}{r!}$이므로 $21=\dfrac{42}{r!}$

$r!=2 \qquad \therefore r=2$

즉, ${}_nC_2=21$이므로 $\dfrac{n(n-1)}{2\times1}=21$

$n(n-1)=7\times6 \qquad \therefore n=7$

$\therefore n-r=7-2=5$

012 답 ④

${}_nC_{n-2}={}_nC_2$이므로 ${}_{n+1}P_2-{}_nC_{n-2}=44$에서

${}_{n+1}P_2-{}_nC_2=44,\ (n+1)n-\dfrac{n(n-1)}{2\times1}=44$

$2n(n+1)-n(n-1)=88$, $n^2+3n-88=0$

$(n+11)(n-8)=0$

이때 n은 자연수이므로 $n=8$

013 답 ③

10명 중에서 논술 대회에 참가할 1명을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_1=10$

나머지 9명 중에서 수학 경시 대회에 참가할 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_9C_2=36$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times36=360$

014 답 ①

두 수의 곱이 홀수가 되려면 두 수 모두 홀수이어야 한다.

홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개이므로 구하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

015 답 45

색연필 5자루 중에서 3자루를 택하는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

사인펜 7자루 중에서 3자루를 택하는 경우의 수는

${}_7C_3=35$

따라서 구하는 경우의 수는

$10+35=45$

016 답 16명

모임에 참여한 사람이 n명이라 하면 전체 악수 횟수는 n명 중에서 2명을 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2\times1}=120$

$n(n-1)=16\times15$

$\therefore\ n=16$

따라서 모임에 참여한 사람은 16명이다.

017 답 ②

구하는 경우의 수는 a를 제외한 4개의 문자 중에서 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_2=6$

018 답 15

구하는 경우의 수는 2, 3, 5, 7이 적혀 있는 공을 제외한 6개의 공 중에서 4개의 공을 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_4={}_6C_2=15$

019 답 ⑤

구하는 경우의 수는 연정이와 지수를 제외한 7명 중에서 3명을 택하는 경우의 수와 같으므로

연정이는 미리 뽑은 것으로 생각한다.

${}_7C_3=35$

020 답 140

(i) 빨간색은 택하고 노란색은 택하지 않는 경우의 수

빨간색과 노란색을 제외한 8가지의 색 중에서 4가지의 색을 택하는 경우의 수와 같으므로

빨간색은 미리 뽑은 것으로 생각한다.

${}_8C_4=70$

(ii) 빨간색은 택하지 않고 노란색은 택하는 경우의 수

(i)과 같은 방법으로 구하면 이 경우의 수는 70

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$70+70=140$

021 답 ③

9개의 공 중에서 3개의 공을 뽑는 경우의 수는

${}_9C_3=84$

흰 공 5개 중에서 3개의 공을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$84-10=74$

참고 '적어도 1개 포함한다.'는 '1개 이상을 포함한다.'는 뜻이다. 이때 전체 경우의 수에서 검은색 공을 하나도 포함하지 않는 경우의 수를 빼면 편리하다.

022 답 ①

10개의 숫자 중에서 4개의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_{10}C_4=210$

5개의 홀수 중에서 4개의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_5C_4={}_5C_1=5$

5개의 짝수 중에서 4개의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_5C_4={}_5C_1=5$

따라서 구하는 경우의 수는

$210-(5+5)=200$

023 답 ④

남자가 n명 참여했다고 하면 여자는 $8-n$명이므로 주어진 조건에 의하여

${}_8C_2-{}_{8-n}C_2=27$

$28-\dfrac{(8-n)(7-n)}{2\times1}=27$, $\dfrac{(8-n)(7-n)}{2}=1$

$n^2-15n+56=2$, $n^2-15n+54=0$

$(n-6)(n-9)=0$ $\quad\therefore\ n=6\ (\because\ 0<n\le8)$

따라서 수업에 참여한 남자의 수는 6이다.

024 답 36

서로 다른 시집 3권 중에서 시집 2권을 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

서로 다른 수필 2권 중에서 수필 1권을 택하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

3권의 책을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times2\times6=36$

풍쌤 비법 뽑아서 나열하는 경우의 수

> 서로 다른 n개 중에서 r개를 뽑아 나열하는 경우의 수는
> ${}_{n}C_{r}\times r!$, 즉 ${}_{n}P_{r}$이다.
> 또, 서로 다른 m개 중에서 r개, n개 중에서 s개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_{m}C_{r}\times{}_{n}C_{s}\times(r+s)!$이다.

025 답 ⑤

3개의 모음 e, a, o 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

${}_{3}C_{2}={}_{3}C_{1}=3$

3개의 자음 r, s, n 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

${}_{3}C_{2}={}_{3}C_{1}=3$

4개의 문자를 일렬로 나열하여 만들 수 있는 문자열의 개수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times3\times24=216$

026 답 ③

3의 배수인 3, 6을 제외한 6개의 숫자 중에서 3개의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_{6}C_{3}=20$

3개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$20\times6=120$

027 답 ⑤

현진이와 주형이를 제외한 7명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_{7}C_{2}=21$

현진이와 주형이를 한 묶음으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=6$

현진이와 주형이가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$21\times6\times2=252$

028 답 ②

5개의 점 중에서 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는

${}_{5}C_{2}=10$

029 답 15

원 위의 6개의 점은 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는

${}_{6}C_{2}=15$

030 답 ④

평행한 두 직선 위의 점을 하나씩 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는

${}_{4}C_{1}\times{}_{4}C_{1}=4\times4=16$

또, 일직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선은 각각 1개씩 존재한다.

따라서 구하는 직선의 개수는

$16+2=18$

다른 풀이

8개의 점 중에서 2개의 점을 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는

${}_{8}C_{2}=28$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개의 점을 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는

${}_{4}C_{2}=6$

따라서 구하는 직선의 개수는

$28-2\times6+2=18$

031 답 20

정육각형 위의 6개의 점은 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 구하는 삼각형의 개수는

${}_{6}C_{3}=20$

032 답 145

11개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_{11}C_{3}=165$

일직선 위에 있는 6개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_{6}C_{3}=20$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$165-20=145$

033 답 30

가로 방향의 직선 5개 중에서 2개, 세로 방향의 직선 3개 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 결정된다.

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

${}_{5}C_{2}\times{}_{3}C_{2}=10\times3=30$

034 답 ③

가로 방향의 선분 4개 중에서 2개, 세로 방향의 선분 4개 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 결정된다.

따라서 구하는 직사각형의 개수는

${}_{4}C_{2}\times{}_{4}C_{2}=6\times6=36$

035 답 1260

9명에서 2명을 뽑고, 나머지 7명에서 3명을 뽑고, 나머지 4명에서 4명을 뽑는다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_{9}C_{2}\times{}_{7}C_{3}\times{}_{4}C_{4}=36\times35\times1=1260$

036 답 ②

(i) 1개, 1개, 3개로 나누어 담는 경우의 수는

$${}_{5}C_{1}\times{}_{4}C_{1}\times{}_{3}C_{3}\times\frac{1}{2!}=5\times4\times1\times\frac{1}{2}=10$$

(ii) 1개, 2개, 2개로 나누어 담는 경우의 수는

$${}_5C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=5\times6\times1\times\frac{1}{2}=15$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$10+15=25$

037 답 ③

8명의 학생을 2명, 2명, 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{4!}=28\times15\times6\times1\times\frac{1}{24}=105$$

4개의 조가 4개의 과목을 배정받는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$105\times24=2520$

중단원 점검 문제

Ⅲ-2 | 조합 167~168쪽

01 답 ④

${}_5C_3\times3!={}_5C_2\times3!=10\times6=60$

02 답 ④

$${}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$$
$$=\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$
$$=\frac{(n-r)\times(n-1)!}{r!(n-r)!}+\frac{\boxed{r}\times(n-1)!}{r!(n-r)!}$$
$$=\frac{(n-1)!}{r!\boxed{(n-r)}!}\times\{(n-r)+\boxed{r}\}$$
$$=\frac{\boxed{n}\times(n-1)!}{r!(n-r)!}$$
$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$
$$={}_nC_r$$

∴ (가): r, (나): $n-r$, (다): n

03 답 56

두 수의 합이 홀수가 되려면 홀수가 적혀 있는 공 1개와 짝수가 적혀 있는 공 1개를 꺼내야 한다.

홀수는 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15의 8개, 짝수는 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14의 7개이므로 구하는 경우의 수는

${}_8C_1\times{}_7C_1=8\times7=56$

04 답 ⑤

$1\le a<b<11$을 만족시키는 자연수 a, b는 1부터 10까지의 10개의 자연수 중에서 서로 다른 2개를 뽑아 크기가 작은 것을 a, 큰 것을 b로 정하면 된다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

${}_{10}C_2=45$

05 답 ⑤

첫 번째 자리에는 0이 올 수 없으므로 0끼리 어느 것도 이웃하지 않도록 나열하려면

1□1□1□1□1□1□

와 같이 놓고, 6개의 □ 중에서 0이 들어갈 3개를 택하면 된다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

${}_6C_3=20$

참고 6개의 □에 들어갈 0이 모두 같은 수이므로 순서를 생각하지 않아도 된다. 즉, 순열이 아니라 조합으로 경우의 수를 구해야 한다.

06 답 10

구하는 경우의 수는 제육덮밥, 돈가스, 김치볶음밥을 제외한 5가지 음식 중에서 2가지의 음식을 주문하는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_2=10$

참고 제육덮밥은 주문하지 않으므로 제육덮밥을 제외한 7가지의 음식 중에서 4가지의 음식을 주문해야 한다. 이때 돈가스와 김치볶음밥은 반드시 주문해야 하므로 돈가스와 김치볶음밥을 미리 주문하고 남은 5가지의 음식 중에서 2가지의 음식을 주문하는 경우와 같다.

07 답 ③

(i) 가장 작은 수가 1인 경우의 수는 1이 적혀 있는 카드를 제외한 5장의 카드 중에서 1장의 카드를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_1=5$

(ii) 가장 작은 수가 2인 경우의 수는 1, 2가 적혀 있는 카드를 제외한 4장의 카드 중에서 1장의 카드를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_1=4$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$5+4=9$

참고 (ii)에서 1이 적혀 있는 카드를 제외하지 않으면 가장 작은 수가 1이 될 수도 있다.

08 답 ②

10명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_3=120$

중학생 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

고등학생 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-(4+20)=96$

09 답 ①

12개의 학용품 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

${}_{12}C_4=495$

(i) 연필이 1자루도 포함되지 않는 경우의 수는 노트 3권, 지우개 4개 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_7C_4={}_7C_3=35$

(ii) 연필이 1자루 포함되는 경우의 수는 노트 3권, 지우개 4개 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_7C_3=35$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$495-(35+35)=425$

10 답 240

모음 a, i를 제외한 5개의 문자 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times24=240$

11 답 ④

짝수 2, 4, 6 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

홀수 1, 3, 5, 7 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

∨ 홀 ∨ 홀 ∨

짝수끼리 이웃하지 않으려면 홀수를 나열한 후, 홀수 사이와 양 끝의 3개의 자리에 짝수를 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$2!\times{}_3P_2=2\times6=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times6\times12=216$

12 답 ③

n각형의 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점 중 2개를 택하여 만들 수 있는 선분의 개수에서 변의 개수를 뺀 것과 같다.

따라서 구하는 다각형의 꼭짓점의 개수를 n $(n\geq3)$이라 하면

${}_nC_2-n=\dfrac{n(n-1)}{2\times1}-n=44$

$n^2-3n=88$, $n^2-3n-88=0$

$(n+8)(n-11)=0\qquad\therefore n=11\ (\because n\geq3)$

즉, 다각형의 꼭짓점의 개수는 11이다.

13 답 ③

7개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_7C_3=35$

위쪽 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_3=1$

아래쪽 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$35-(1+4)=30$

다른 풀이

(i) 삼각형의 밑변이 위쪽 직선에 놓여 있는 경우

위쪽 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

아래쪽 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

따라서 이때의 삼각형의 개수는

$3\times4=12$

(ii) 삼각형의 밑변이 아래쪽 직선에 놓여 있는 경우

위쪽 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

아래쪽 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

따라서 이때의 삼각형의 개수는

$3\times6=18$

(i), (ii)에서 구하는 삼각형의 개수는

$12+18=30$

14 답 30

8개의 공을 4개, 4개로 나누어 담는 경우의 수는

${}_8C_4\times{}_4C_4\times\dfrac{1}{2!}=70\times1\times\dfrac{1}{2}=35$

한 주머니에 파란색 공 3개를 전부 담는 경우의 수는 빨간색 공을 1개, 4개로 나누는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_1\times{}_4C_4=5\times1=5$

따라서 구하는 경우의 수는

$35-5=30$

15 답 ④

(i) 6권의 책을 1권, 1권, 4권으로 나누는 경우의 수는

${}_6C_1\times{}_5C_1\times{}_4C_4\times\dfrac{1}{2!}=6\times5\times1\times\dfrac{1}{2}=15$

(ii) 6권의 책을 1권, 2권, 3권으로 나누는 경우의 수는

${}_6C_1\times{}_5C_2\times{}_3C_3=6\times10\times1=60$

(iii) 6권의 책을 2권, 2권, 2권으로 나누는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\dfrac{1}{3!}=15\times6\times1\times\dfrac{1}{6}=15$

(i)~(iii)에서 6권의 책을 3묶음으로 나누는 경우의 수는

$15+60+15=90$

이때 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$90\times6=540$

Ⅳ 행렬

Ⅳ-1 | 행렬과 그 연산 171~189쪽

001 답 (1) 2 (2) 2 (3) -2 (4) 3

(1) 2×2 행렬이므로 행의 개수는 2이다.

(2) 2×2 행렬이므로 열의 개수는 2이다.

(3) 제1행은 $\begin{pmatrix}-2 & 0\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은

$-2+0=-2$

(4) 제2열은 $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은

$0+3=3$

002 답 (1) 3 (2) 2 (3) -5 (4) 4

(1) 3×2 행렬이므로 행의 개수는 3이다.

(2) 3×2 행렬이므로 열의 개수는 2이다.

(3) 제3행은 $\begin{pmatrix}-1 & -4\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은

$-1+(-4)=-5$

(4) 제2열은 $\begin{pmatrix}6\\2\\-4\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은

$6+2+(-4)=4$

003 답 (1) 2×1 행렬 (2) 1×4 행렬 (3) 4×2 행렬 (4) 3×3 행렬

(1) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$은 2×1 행렬이다.

(2) $\begin{pmatrix}-1 & 3 & 6 & 5\end{pmatrix}$는 1×4 행렬이다.

(3) $\begin{pmatrix}-4 & -3\\2 & 1\\1 & 2\\-9 & 7\end{pmatrix}$은 4×2 행렬이다.

(4) $\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\1 & 5 & 6\\2 & -4 & -8\end{pmatrix}$은 3×3 행렬이다.

004 답 ㄴ

ㄱ. $\begin{pmatrix}-5 & -5\end{pmatrix}$는 1×2 행렬이다.

ㄴ. $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$은 2×2 행렬이므로 이차 정사각행렬이다.

ㄷ. $\begin{pmatrix}6 & -3 & 0\\2 & -7 & -1\end{pmatrix}$은 2×3 행렬이다.

ㄹ. $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$는 4×3 행렬이다.

따라서 정사각행렬은 ㄴ이다.

005 답 (1) 9 (2) 6 (3) -8 (4) -4

(1) $(1,\ 1)$ 성분은 제1행과 제1열이 만나는 위치에 있는 성분이므로 9이다.

(2) $(2,\ 1)$ 성분은 제2행과 제1열이 만나는 위치에 있는 성분이므로 6이다.

(3) a_{12}, 즉 $(1,\ 2)$ 성분은 제1행과 제2열이 만나는 위치에 있는 성분이므로 -8이다.

(4) a_{22}, 즉 $(2,\ 2)$ 성분은 제2행과 제2열이 만나는 위치에 있는 성분이므로 -4이다.

006 답 (1) 3 (2) 0 (3) 6 (4) -4

(1) $a_{12}=1$, $a_{13}=2$이므로

$a_{12}+a_{13}=1+2=3$

(2) $a_{11}=-3$, $a_{23}=3$이므로

$a_{11}+a_{23}=-3+3=0$

(3) $a_{33}=6$, $a_{21}=0$이므로

$a_{33}-a_{21}=6-0=6$

(4) $a_{22}=-5$, $a_{32}=-1$이므로

$a_{22}-a_{32}=-5-(-1)=-4$

007 답 (1) $\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1 & 3\\4 & 6\\7 & 9\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}0 & -3 & -8\\3 & 0 & -5\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\1 & 4 & -1\\2 & 1 & 6\end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\-1 & 4 & -1\end{pmatrix}$

(1) $a_{11}=1-1+2=2$, $a_{12}=1-2+2=1$,

$a_{21}=2-1+2=3$, $a_{22}=2-2+2=2$

$\therefore A=\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}$

(2) $a_{11}=3\times1+2\times1-4=1$, $a_{12}=3\times1+2\times2-4=3$,

$a_{21}=3\times2+2\times1-4=4$, $a_{22}=3\times2+2\times2-4=6$,

$a_{31}=3\times3+2\times1-4=7$, $a_{32}=3\times3+2\times2-4=9$

$\therefore A=\begin{pmatrix}1 & 3\\4 & 6\\7 & 9\end{pmatrix}$

(3) $a_{11}=1^2-1^2=0$, $a_{12}=1^2-2^2=-3$, $a_{13}=1^2-3^2=-8$,

$a_{21}=2^2-1^2=3$, $a_{22}=2^2-2^2=0$, $a_{23}=2^2-3^2=-5$

$\therefore A=\begin{pmatrix}0 & -3 & -8\\3 & 0 & -5\end{pmatrix}$

(4) $a_{11}=1$, $a_{21}=a_{31}=-1$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(5) $a_{11}=1+1=2$, $a_{12}=1-2=-1$, $a_{13}=1-3=-2$,

$a_{21}=2-1=1$, $a_{22}=2+2=4$, $a_{23}=2-3=-1$,

$a_{31}=3-1=2$, $a_{32}=3-2=1$, $a_{33}=3+3=6$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

(6) $a_{11}=2^1=2$, $a_{12}=(-1)^{2-1}=-1$, $a_{13}=(-1)^{3-1}=1$,

$a_{21}=(-1)^{2+1}=-1$, $a_{22}=2^2=4$, $a_{23}=(-1)^{3-2}=-1$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

008 답 (1) × (2) ○ (3) × (4) ○ (5) × (6) ○

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$은 2×1 행렬, $(1\ \ 0)$은 1×2 행렬이므로 같은 꼴이 아니다.

(2) $(-1\ \ 0\ \ 6)$은 1×3 행렬, $(6\ \ 0\ \ -1)$은 1×3 행렬이므로 같은 꼴이다.

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -6 & -10 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$는 2×3 행렬, $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$은 2×2 행렬이므로 같은 꼴이 아니다.

(4) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$은 3×2 행렬, $\begin{pmatrix} 99 & 15 \\ 7 & 87 \\ 56 & 11 \end{pmatrix}$은 3×2 행렬이므로 같은 꼴이다.

(5) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$은 2×2 행렬, $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$는 3×3 행렬이므로 같은 꼴이 아니다.

(6) $\begin{pmatrix} -7 & -3 & -2 \\ -8 & 1 & 3 \\ -9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$은 3×3 행렬, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$은 3×3 행렬이므로 같은 꼴이다.

009 답 (1) $x=-5$, $y=5$ (2) $x=4$, $y=1$ (3) $x=-1$, $y=2$ (4) $x=0$, $y=-2$

(1) $x+3=-2$, $y-1=4$에서

$x=-5$, $y=5$

(2) $x-y=3$, $2x-3y=5$에서

$x=4$, $y=1$

(3) $x+3=2$, $4=y+2$에서

$x=-1$, $y=2$

(4) $x-2y=4$, $2x+y=-2$, $3y=x-6$에서

$x-2y=4$, $2x+y=-2$를 연립하여 풀면

$x=0$, $y=-2$

참고 (4) $x-2y=4$, $3y=x-6$ 또는 $2x+y=-2$, $3y=x-6$을 연립하여 풀어도 해는 같다.

010 답 (1) $x=1$, $y=2$, $z=3$
(2) $x=-6$, $y=-2$, $z=2$
(3) $x=3$, $y=-4$, $z=1$
(4) $x=5$, $y=-5$, $z=-3$

(1) $x-4=-3$, $3=y+1$, $z+2=5$에서

$x=1$, $y=2$, $z=3$

(2) $x-3y=0$ …… ㉠

$y+2=0$ …… ㉡

$2x+z=-10$ …… ㉢

$y-z=-4$ …… ㉣

㉡에서 $y=-2$

㉠에 $y=-2$를 대입하면 $x=-6$

㉣에 $y=-2$를 대입하면 $z=2$

(3) $x+y=-1$ …… ㉠

$x-2z=1$ …… ㉡

$5=z+4$ …… ㉢

$2y-3=3y+z$ …… ㉣

㉢에서 $z=1$

㉡에 $z=1$을 대입하면 $x=3$

㉠에 $x=3$을 대입하면 $y=-4$

(4) $-x=y$ …… ㉠

$-2=z+1$ …… ㉡

$x+2z=-1$ …… ㉢

$z-y=2$ …… ㉣

㉡에서 $z=-3$

㉢에 $z=-3$을 대입하면 $x=5$

㉠에 $x=5$를 대입하면 $y=-5$

011 답 ④

① 이차 정사각행렬이다.

② (2, 1) 성분은 4이다.

③ $a_{11}+a_{12}=8+(-2)=6$

④ 제2열의 모든 성분은 -2, 6이므로 그 합은 4이다.

⑤ $i=j$를 만족시키는 성분은 $a_{11}=8$, $a_{22}=6$이다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

012 답 ③

① 1×2 행렬

② 1×3 행렬

③ 2×1 행렬

④ 3×1 행렬

⑤ 2×2 행렬

따라서 2×1 행렬은 ③이다.

013 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. $a_{12}+a_{21}=7+1=8$

ㄴ. $a_{12}+a_{21}=-1+7=6$

ㄷ. $a_{12}+a_{21}=6+2=8$

ㄹ. $a_{12}+a_{21}=11+(-3)=8$

따라서 $a_{12}+a_{21}=8$을 만족시키는 행렬은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

014 답 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

$a_{11}=2\times1-1\times1+1^2=2$, $a_{12}=2\times1-1\times2+2^2=4$,

$a_{21}=2\times2-2\times1+1^2=3$, $a_{22}=2\times2-2\times2+2^2=4$,

$a_{31}=2\times3-3\times1+1^2=4$, $a_{32}=2\times3-3\times2+2^2=4$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

015 답 ③

$a_{11}=\dfrac{1-1}{1\times1}=0$, $a_{12}=\dfrac{1-2}{1\times2}=-\dfrac{1}{2}$,

$a_{21}=\dfrac{2-1}{2\times1}=\dfrac{1}{2}$, $a_{22}=\dfrac{2-2}{2\times2}=0$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$0+\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}+0=0$

016 답 ①

(i) $i=j$일 때

$a_{11}=-a_{11}$, $a_{22}=-a_{22}$이므로

$a_{11}=0$, $a_{22}=0$

(ii) $i\neq j$일 때

$a_{12}=-a_{21}$

따라서 (i), (ii)를 만족시키는 것은 ①이다.

참고 상수 k에 대하여 $\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$ 꼴이어야 한다.

017 답 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$a_{11}=0$, $a_{12}=2$, $a_{13}=2$,

$a_{21}=1$, $a_{22}=0$, $a_{23}=1$,

$a_{31}=0$, $a_{32}=1$, $a_{33}=1$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

참고 A_1, A_2, A_3 사이의 도로망이므로 $i=1, 2, 3$, $j=1, 2, 3$이다.

018 답 ②

$a_{21}=2^2+1=5$, $a_{22}=2^2-2=2$,

$a_{23}=3^2-2=7$, $a_{24}=4^2-2=14$

따라서 행렬 A의 제2행의 모든 성분의 합은

$5+2+7+14=28$

참고 $a_{11}=1^2-1=0$, $a_{12}=2^2-1=3$, $a_{13}=3^2-1=8$, $a_{14}=4^2-1=15$이므로

$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 15 \\ 5 & 2 & 7 & 14 \end{pmatrix}$

019 답 ①

$a_{11}=1+1=2$, $a_{12}=3\times1-2\times2=-1$, $a_{13}=3\times1-2\times3=-3$,

$a_{21}=2^2-2\times1=2$, $a_{22}=2+2=4$, $a_{23}=3\times2-2\times3=0$,

$a_{31}=3^2-2\times1=7$, $a_{32}=3^2-2\times2=5$, $a_{33}=3+3=6$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$2+(-1)+(-3)+2+4+0+7+5+6=22$

020 답 ⑤

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x-3=3$에서 $2x=6$ $\quad\therefore x=3$

$5=y+4$에서 $y=1$

$\therefore x^2-y^2=3^2-1^2=8$

021 답 -3

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x-y=5$ …… ㉠

$y+z=3$ …… ㉡

$y^2-y+5=7$ …… ㉢

$1=y^2$ …… ㉣

㉢에서 $y^2-y-2=0$, $(y+1)(y-2)=0$

이때 ㉣에서 $y=\pm1$이므로

㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 y의 값은 -1이다.

㉠에 $y=-1$을 대입하면 $x=2$

㉡에 $y=-1$을 대입하면 $z=4$

$\therefore x+y-z=2+(-1)-4=-3$

022 답 ③

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$ab=2$, $a+b=-6$

$x=a^2+b^2$

$=(a+b)^2-2ab$

$=(-6)^2-2\times2=32$

023 답 -18

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$y=x+3$에서 $x-y=-3$

$xy=-1$

$\therefore\ x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=(-3)^3+3\times(-1)\times(-3)=-18$

참고 곱셈 공식의 변형에 의하여

① $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

② $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

024 답 (1) $\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}3 & 6\\-1 & 12\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}5 & -3\\-7 & 0\\5 & -5\end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\5 & 1 & 8\end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix}5 & -13 & -1\\9 & -3 & 0\\0 & 9 & 3\end{pmatrix}$

(1) $\begin{pmatrix}1 & 4 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2 & 4-3 & -5+6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+2\\1-2\\1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}0 & 7\\-2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -1\\1 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+3 & 7-1\\-2+1 & 3+9\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3 & 6\\-1 & 12\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}-4 & 4\\-1 & 1\\3 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & -7\\-6 & -1\\2 & -2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-4+9 & 4-7\\-1-6 & 1-1\\3+2 & -3-2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}5 & -3\\-7 & 0\\5 & -5\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}2 & 3 & 6\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -1 & -5\\4 & 2 & 8\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2+2 & 3-1 & 6-5\\1+4 & -1+2 & 0+8\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\5 & 1 & 8\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}12 & -11 & -10\\3 & 0 & 0\\-1 & 8 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7 & -2 & 9\\6 & -3 & 0\\1 & 1 & -6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}12-7 & -11-2 & -10+9\\3+6 & 0-3 & 0+0\\-1+1 & 8+1 & 9-6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}5 & -13 & -1\\9 & -3 & 0\\0 & 9 & 3\end{pmatrix}$

025 답 (1) $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-8 & 3 & -2\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}-3 & -4\\4 & 1\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}10 & -3 & 5 & -10\\0 & 2 & -7 & 5\end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix}9 & -5\\10 & -19\\-14 & -5\end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix}-3 & -1 & 5\\1 & -5 & -8\\5 & -6 & 13\end{pmatrix}$

(1) $\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7-5\\-1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & -3 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2-6 & 0+3 & -1-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-8 & 3 & -2\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 5\\-3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-4 & 1-5\\1+3 & -1+2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-3 & -4\\4 & 1\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}2 & -4 & 6 & -8\\1 & 3 & -7 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-8 & -1 & 1 & 2\\1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2+8 & -4+1 & 6-1 & -8-2\\1-1 & 3-1 & -7-0 & 5-0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}10 & -3 & 5 & -10\\0 & 2 & -7 & 5\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}9 & -5\\4 & -7\\-1 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\-6 & 12\\13 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9-0 & -5-0\\4+6 & -7-12\\-1-13 & -3-2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}9 & -5\\10 & -19\\-14 & -5\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}-1 & -3 & 7\\5 & 1 & 0\\-6 & 1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\4 & 6 & 8\\-11 & 7 & -9\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1-2 & -3+2 & 7-2\\5-4 & 1-6 & 0-8\\-6+11 & 1-7 & 4+9\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 5\\1 & -5 & -8\\5 & -6 & 13\end{pmatrix}$

026 답 (1) $\begin{pmatrix}-1 & 5\\15 & 1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}2 & 5\\10 & -7\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}3 & 2\\15 & -5\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}1 & 8\\5 & -9\end{pmatrix}$

(1) $A+C=\begin{pmatrix}1 & -3\\5 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 8\\10 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5\\15 & 1\end{pmatrix}$

(2) $C-B=\begin{pmatrix}-2 & 8\\10 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & 3\\0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\10 & -7\end{pmatrix}$

(3) $A-B+C=\begin{pmatrix}1 & -3\\5 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & 3\\0 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 8\\10 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3 & 2\\15 & -5\end{pmatrix}$

(4) $C-A-B=\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$

027 답 (1) $\begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 3 & 9 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 3 & 9 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -5 & -8 \\ -6 & 9 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -5 & -8 \\ -6 & 9 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$

(1) $A+B=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 3 & 9 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$

(2) $B+A=\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 3 & 9 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$

(3) $A+B=\begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 3 & 9 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$이므로

$(A+B)+C=\begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 3 & 9 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -5 & -8 \\ -6 & 9 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $B+C=\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -8 & 3 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$

이므로

$A+(B+C)=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -8 & 3 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -5 & -8 \\ -6 & 9 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$

028 답 (1) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1) $A+O=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

(2) $O+A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

(3) $A+(-A)=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -3 & -7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $(-A)+A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

참고 행렬 A와 영행렬 O에 대하여
① $A+O=O+A=A$
② $A+(-A)=(-A)+A=O$

029 답 (1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (2) $(-2 \quad -10 \quad 10)$

(3) $\begin{pmatrix} 10 & -8 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -4 & -7 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

(1) $X-\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$에서

$X=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) $(4 \quad 3 \quad -1)+X=(2 \quad -7 \quad 9)$에서

$X=(2 \quad -7 \quad 9)-(4 \quad 3 \quad -1)$

$=(-2 \quad -10 \quad 10)$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}-X=\begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$에서

$X=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 10 & -8 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

(4) $X+\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$에서

$X+\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore X=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -4 & -7 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

030 답 (1) $\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$ (2) $(-8 \quad -4 \quad 20)$

(3) $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} -0.3 & -0.9 \\ 0.6 & 1.2 \\ -1.5 & 0.3 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1) $3\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times3 \\ 3\times(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

(2) $4(-2 \quad -1 \quad 5)=(4\times(-2) \quad 4\times(-1) \quad 4\times5)$

$=(-8 \quad -4 \quad 20)$

(3) $-2\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\times(-3) & -2\times1 \\ -2\times2 & -2\times(-1) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 25 & 10 \\ -15 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5}\times 25 & \frac{1}{5}\times 10 \\ \frac{1}{5}\times(-15) & \frac{1}{5}\times(-5) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

(5) $-0.3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0.3\times 1 & -0.3\times 3 \\ -0.3\times(-2) & -0.3\times(-4) \\ -0.3\times 5 & -0.3\times(-1) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -0.3 & -0.9 \\ 0.6 & 1.2 \\ -1.5 & 0.3 \end{pmatrix}$

(6) $0\begin{pmatrix} -7 & -6 & 5 & -4 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0\times(-7) & 0\times(-6) & 0\times 5 & 0\times(-4) \\ 0\times 3 & 0\times 2 & 0\times(-2) & 0\times 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

031 답 (1) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -15 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -24 & -9 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -18 & 2 \end{pmatrix}$

(1) $2A=2\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}$

(2) $-3B=-3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -15 \end{pmatrix}$

(3) $A+2B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}$

(4) $4A-5B=4\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}-5\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 12 & 8 \\ -24 & 16 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -24 & -9 \end{pmatrix}$

(5) $\frac{1}{2}(A-B)=\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(6) $5A-2(A+B)=5A-2A-2B=3A-2B$

$=3\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -18 & 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -18 & 2 \end{pmatrix}$

다른 풀이

(5) $A-B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$이므로

$\frac{1}{2}(A-B)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

032 답 -8

$2A+3B=2\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ -12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -9 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$1+(-9)=-8$

033 답 ④

$3(A+B)-2(2A-B)=3A+3B-4A+2B=-A+5B$

$=-\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 35 & 10 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 31 & 12 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 $(1, 2)$ 성분은 12이다.

034 답 ③

$A-2B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ k & 3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ k & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -7 & -12 \\ k-2 & 1 \end{pmatrix}$

즉, $\begin{pmatrix} -7 & -12 \\ k-2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이므로

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$k-2=1 \qquad \therefore k=3$

035 답 ①

$3A+B=3\begin{pmatrix} k & 1 \\ 2k & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3k & 3 \\ 6k & -12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3k-3 & 9 \\ 6k-2 & -10 \end{pmatrix}$

이때 (2, 1) 성분은 $6k-2=2$이므로

$6k=4 \qquad \therefore k=\frac{2}{3}$

즉, $A=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{4}{3} & -4 \end{pmatrix}$이므로

$$A+B=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{4}{3} & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 7 \\ -\frac{2}{3} & -2 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A+B$의 (1, 1) 성분은 $-\frac{7}{3}$이다.

036 답 ②

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & x \\ -6 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2}x \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -4 & -4-\frac{1}{2}x \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$$

즉, $\begin{pmatrix} -4 & -4-\frac{1}{2}x \\ 11 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ y & 7 \end{pmatrix}$이므로

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-4-\frac{1}{2}x=3$, $11=y$이므로

$x=-14$, $y=11$

$\therefore x+y=-14+11=-3$

037 답 ⑤

$X-B=2(A+B)$에서

$X-B=2A+2B$

$\therefore X=2A+3B$

$$=2\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -12 & 2 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 30 & 12 \\ -12 & -15 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 18 & 14 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$18+14+(-4)+(-1)=27$

038 답 0

$3(A+X)=2(A-B)+X$에서

$3A+3X=2A-2B+X$, $2X=-A-2B$

$\therefore X=-\frac{1}{2}A-B$

$$=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix}$$

이때 행렬 X의 (1, 2) 성분은 $\frac{3}{2}$, (2, 1) 성분은 $-\frac{3}{2}$이므로

$\frac{3}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)=0$

039 답 ①

$xA+yB=C$에서

$$x\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & -x \\ -x & -x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3y \\ 5y & 6y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & -x+3y \\ -x+5y & -x+6y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x=2$, $-x+3y=-5$, $-x+5y=-7$, $-x+6y=-8$

$x=2$를 $-x+3y=-5$에 대입하여 풀면

$y=-1$

$\therefore x-y=2-(-1)=3$

040 답 ①

$xA+yB=C$에서

$$x\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x & 6x \\ 9x & -3x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4y & -2y \\ ky & 2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x-4y & 6x-2y \\ 9x+ky & -3x+2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$3x-4y=-9$ …… ㉠

$6x-2y=0$ …… ㉡

$9x+ky=3$ …… ㉢

$-3x+2y=3$ …… ㉣

㉡에서 $3x=y$

㉠에 $y=3x$를 대입하면

$3x-12x=-9$

$-9x=-9 \qquad \therefore x=1$

$x=1$을 ㉣에 대입하면

$-3+2y=3$

$2y=6 \qquad \therefore y=3$

㉢에 $x=1$, $y=3$을 대입하면

$9+3k=3$

$3k=-6 \qquad \therefore k=-2$

041 답 ②

$A+B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ …… ㉠

$A-B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$2B=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \therefore B=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 B의 모든 성분의 합은

$-3+0+1+(-1)=-3$

참고 ㉠+㉡을 하면

$2A=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad \therefore A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

042 답 −23

$2X+Y=\begin{pmatrix} -3 & -9 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ …… ㉠

$X-2Y=\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -16 & 20 \end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$3X-Y=\begin{pmatrix} -7 & -11 \\ -23 & 25 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $3X-Y$의 $(2,\ 1)$ 성분은 -23이다.

043 답 ④

$A+2B=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$ …… ㉠

$A-B=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$3B=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$ $\quad \therefore B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

$\therefore A+B=(A+2B)-B$

$=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

다른 풀이

$B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$을 $A-B=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$에 대입하면

$A-\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

044 답 (1) ○ (2) ○ (3) × (4) ○ (5) ×

(1) $A=(5\ \ -2)$, $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$이라 하면

(행렬 A의 열의 개수)$=2$

(행렬 B의 행의 개수)$=2$

이므로 두 행렬의 곱셈 $(5\ \ -2)\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$이 정의된다.

(2) $A=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B=(-2\ \ 4\ \ 6)$이라 하면

(행렬 A의 열의 개수)$=1$

(행렬 B의 행의 개수)$=1$

이므로 두 행렬의 곱셈 $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}(-2\ \ 4\ \ 6)$이 정의된다.

(3) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=(10\ \ -2)$라 하면

(행렬 A의 열의 개수)$=2$

(행렬 B의 행의 개수)$=1$

이므로 두 행렬의 곱셈 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}(10\ \ -2)$가 정의되지 않는다.

(4) $A=(0\ \ 0)$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이라 하면

(행렬 A의 열의 개수)$=2$

(행렬 B의 행의 개수)$=2$

이므로 두 행렬의 곱셈 $(0\ \ 0)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이 정의된다.

(5) $A=\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$이라 하면

(행렬 A의 열의 개수)$=1$

(행렬 B의 행의 개수)$=2$

이므로 두 행렬의 곱셈 $\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$이 정의되지 않는다.

045 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

ㄱ. 행렬 A는 2×1 행렬, 행렬 B는 1×2 행렬이므로 행렬 AB는 2×2 행렬이다.

ㄴ. 행렬 A는 2×2 행렬, 행렬 B는 2×2 행렬이므로 행렬 AB는 2×2 행렬이다.

ㄷ. 행렬 A는 2×2 행렬, 행렬 B는 2×3 행렬이므로 행렬 AB는 2×3 행렬이다.

ㄹ. 행렬 A는 2×3 행렬, 행렬 B는 3×2 행렬이므로 행렬 AB는 2×2 행렬이다.

따라서 행렬 AB가 2×2 행렬인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

046 답 2, −3, −4

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times1+\boxed{2}\times(-1) \\ \boxed{-3}\times1+1\times(-1) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 \\ \boxed{-4} \end{pmatrix}$

047 답 (1) (-7) (2) $\begin{pmatrix} 6 & -10 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ (4) $(10\ \ -20)$

(5) $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 19 & 0 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 12 & 17 \\ -18 & -29 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 26 & -26 \end{pmatrix}$

(1) $(-1 \quad -3)\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=(-1\times4+(-3)\times1)=(-7)$

(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}(3 \quad -5)=\begin{pmatrix} 2\times3 & 2\times(-5) \\ -1\times3 & -1\times(-5) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 6 & -10 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times4+0\times(-1) \\ 2\times4+1\times(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

(4) $(-6 \quad -2)\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

$=(-6\times0+(-2)\times(-5) \quad -6\times3+(-2)\times1)$

$=(10 \quad -20)$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2\times1+(-3)\times1 & 2\times(-1)+(-3)\times1 \\ 4\times1+5\times1 & 4\times(-1)+5\times1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -7\times(-1)+6\times2 & -7\times0+6\times0 \\ 5\times(-1)+(-1)\times2 & 5\times0+(-1)\times0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 19 & 0 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3\times0+4\times3 & 3\times(-1)+4\times5 \\ -1\times0+(-6)\times3 & -1\times(-1)+(-6)\times5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 12 & 17 \\ -18 & -29 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2\times5+1\times2 & -2\times(-5)+1\times(-2) \\ 4\times5+3\times2 & 4\times(-5)+3\times(-2) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 26 & -26 \end{pmatrix}$

048

답 (1) $x=-1,\ y=1,\ z=5$
(2) $x=2,\ y=1,\ z=10$
(3) $x=3,\ y=3,\ z=9$
(4) $x=6,\ y=4,\ z=-7$

(1) $\begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ y & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+3y & -2x+3 \\ 2+y & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & z \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x+3y=2$ …… ㉠

$-2x+3=z$ …… ㉡

$2+y=3$ …… ㉢

㉢에서 $y=1$

㉠에 $y=1$을 대입하면 $x=-1$

㉡에 $x=-1$을 대입하면 $z=5$

(2) $\begin{pmatrix} x & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & y \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5x & xy+8 \\ -5 & -y-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & z \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$5x=10$ …… ㉠

$xy+8=z$ …… ㉡

$-y-6=-7$ …… ㉢

㉠에서 $x=2$

㉢에서 $-y=-1$ $\quad\therefore y=1$

㉡에 $x=2,\ y=1$을 대입하면 $z=10$

(3) $\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ x & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4y+6 & -2 \\ xy+3 & 2x+3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 12 & z \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-4y+6=-6$ …… ㉠

$xy+3=12$ …… ㉡

$2x+3=z$ …… ㉢

㉠에서 $-4y=-12$ $\quad\therefore y=3$

㉡에 $y=3$을 대입하면

$3x+3=12$ $\quad\therefore x=3$

㉢에 $x=3$을 대입하면 $z=9$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2z \\ -4x & x+yz \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -14 \\ -24 & -22 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2z=-14$ …… ㉠

$-4x=-24$ …… ㉡

$x+yz=-22$ …… ㉢

㉠에서 $z=-7$

㉡에서 $x=6$

㉢에 $x=6,\ z=-7$을 대입하면

$6-7y=-22,\ 7y=28$ $\quad\therefore y=4$

049

답 (1) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$
(3) $\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}$

(1) $A^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

(3) $A^4=A^3A=\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}$

다른 풀이

(3) $A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 4\\ -8 & -7\end{pmatrix}$

050 답 (1) $AB=\begin{pmatrix}-3 & -15\\ 0 & 6\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}5 & -4\\ -2 & -2\end{pmatrix}$

(2) $AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(1) $AB=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -15\\ 0 & 6\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -4\\ -2 & -2\end{pmatrix}$

(2) $AB=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

051 답 (1) $\begin{pmatrix}-4 & 15\\ 2 & 24\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-4 & 15\\ 2 & 24\end{pmatrix}$

(1) $AB=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 10 & 8\end{pmatrix}$이므로

$(AB)C=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 10 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 15\\ 2 & 24\end{pmatrix}$

(2) $BC=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 6\end{pmatrix}$이므로

$A(BC)=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 15\\ 2 & 24\end{pmatrix}$

052 답 (1) $\begin{pmatrix}-20 & -10\\ 26 & 18\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-20 & -10\\ 26 & 18\end{pmatrix}$

(1) $B+C=\begin{pmatrix}0 & -5\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$이므로

$A(B+C)=\begin{pmatrix}5 & 10\\ -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20 & -10\\ 26 & 18\end{pmatrix}$

(2) $AB=\begin{pmatrix}5 & 10\\ -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -5\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & -25\\ -2 & 20\end{pmatrix}$,

$AC=\begin{pmatrix}5 & 10\\ -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 15\\ 28 & -2\end{pmatrix}$이므로

$AB+AC=\begin{pmatrix}-10 & -25\\ -2 & 20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10 & 15\\ 28 & -2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-20 & -10\\ 26 & 18\end{pmatrix}$

053 답 (1) $\begin{pmatrix}2 & -2\\ 4 & 6\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}2 & -2\\ 4 & 6\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(1) $AE=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 4 & 6\end{pmatrix}$

(2) $EA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2\\ 4 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 4 & 6\end{pmatrix}$

(3) $E^2=EE=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(4) $E^4=(E^2)^2=E^2=E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

참고 단위행렬 E와 자연수 n에 대하여

$E^2=E^3=\cdots=E^n=E$

054 답 ②, ③

행렬 A는 2×2 행렬, 행렬 B는 2×1 행렬, 행렬 C는 1×2 행렬이다.

따라서 행렬의 곱이 정의되지 않는 것은 AC, BA이다.

055 답 ④

$AB=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -9\\ 6 & 10\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -6 & 7\end{pmatrix}$

$\therefore BA-AB=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -6 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5 & -9\\ 6 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 12\\ -12 & -3\end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 $(1, 2)$ 성분은 12이다.

056 답 12

$AB+2CD=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 6 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}3\\ 3\end{pmatrix}(2 \quad -1)$

$=\begin{pmatrix}-8 & 9\\ 12 & -13\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}6 & -3\\ 6 & -3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-8 & 9\\ 12 & -13\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12 & -6\\ 12 & -6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 24 & -19\end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$4+3+24+(-19)=12$

참고 행렬 C는 2×1 행렬이고 행렬 D는 1×2 행렬이므로 행렬 CD는 2×2 행렬이다.

057 답 3

$AB=\begin{pmatrix}x & 2\\ y & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2y & -2\\ -2 & x\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2xy-4 & 0\\ 2y^2-8 & -2y+4x\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2y^2-8=0$ …… ㉠

$-2y+4x=0$ …… ㉡

㉠에서 $y^2=4$ $\quad \therefore y=2\ (\because y>0)$

㉡에 $y=2$를 대입하면

$-4+4x=0$ $\quad \therefore x=1$

$\therefore x+y=1+2=3$

풍쌤 비법 행렬의 곱셈의 성질

행렬의 곱셈에서는 '$AB=O$이면 $A=O$ 또는 $B=O$'가 성립하지 않는다.

예를 들어 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$에 대하여

$AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$이므로 $AB=O$이지만 $A\neq O$,

$B\neq O$이다.

따라서 $AB=O$가 조건으로 주어지면 곱셈을 계산하여 두 행렬이 서로 같음을 이용한다.

058 답 6

$\begin{pmatrix}x^2 & 4\\x & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+4x\\-2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\y\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+4x=-4$ ...... ㉠

$-2x=y$ ...... ㉡

㉠에서 $x^2+4x+4=0$, $(x+2)^2=0$ $\quad \therefore x=-2$

㉡에 $x=-2$를 대입하면 $y=4$

$\therefore y-x=4-(-2)=6$

059 답 ①

$AB=\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & k\\4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & k-14\\11 & k+21\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}-1 & k\\4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+k & 2+3k\\11 & 13\end{pmatrix}$

$AB=BA$이므로

$-9=-1+k$, $k-14=2+3k$, $k+21=13$

$\therefore k=-8$

060 답 ③

$a_{11}=1+1-2=0$, $a_{12}=1+2-2=1$,

$a_{21}=2+1-2=1$, $a_{22}=2+2-2=2$

$\therefore A=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$

$b_{11}=2\times1-1=1$, $b_{12}=2\times1-2=0$,

$b_{21}=2\times2-1=3$, $b_{22}=2\times2-2=2$

$\therefore B=\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 2\end{pmatrix}$

$\therefore BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 7\end{pmatrix}$

따라서 행렬 BA의 모든 성분의 합은

$0+1+2+7=10$

061 답 ③

$A^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\1 & -2\end{pmatrix}$

$B^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}$

$\therefore A^2+B^2=\begin{pmatrix}-1 & -2\\1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^2+B^2의 모든 성분의 합은

$1+(-1)+3+1=4$

062 답 ⑤

$A^2=\begin{pmatrix}2 & -2\\1 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2\\1 & k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2k-4\\k+2 & k^2-2\end{pmatrix}$

이때 행렬 A^2의 $(1, 2)$ 성분이 2이므로

$-2k-4=2$, $-2k=6$ $\quad \therefore k=-3$

따라서 행렬 A^2의 $(2, 2)$ 성분은

$k^2-2=(-3)^2-2=7$

063 답 $\begin{pmatrix}-2 & 0\\8 & 6\end{pmatrix}$

$A+B=\begin{pmatrix}0 & 4\\1 & 4\end{pmatrix}$ ...... ㉠

$A-2B=\begin{pmatrix}-3 & 4\\-5 & -5\end{pmatrix}$ ...... ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$3B=\begin{pmatrix}0 & 4\\1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 4\\-5 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\6 & 9\end{pmatrix}$

$\therefore B=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{pmatrix}$

㉠에 $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{pmatrix}$을 대입하면

$A+\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4\\1 & 4\end{pmatrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix}0 & 4\\1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 4\\-1 & 1\end{pmatrix}$

따라서

$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 4\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 4\\-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 0\\0 & -3\end{pmatrix}$,

$B^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\8 & 9\end{pmatrix}$이므로

$A^2+B^2=\begin{pmatrix}-3 & 0\\0 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\8 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\8 & 6\end{pmatrix}$

064 답 ①

$A^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+4 & b+2\\2a+ab & a+b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a+4=0$, $b+2=0$, $2a+ab=0$, $a+b^2=0$

$\therefore\ a=-4,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=-4+(-2)=-6$

065 답 ②

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$$

$\vdots$

따라서 $A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$이므로 A^{10}의 $(1,\ 2)$ 성분은 10이다.

066 답 -14

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-4&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-6&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&0\\-6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-8&1\end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A^n=\begin{pmatrix}1&0\\-2n&1\end{pmatrix}$$

따라서 $A^8=\begin{pmatrix}1&0\\-16&1\end{pmatrix}$이므로 행렬 A^8의 모든 성분의 합은

$1+0+(-16)+1=-14$

067 답 ②

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&8\end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}$$

따라서 $\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&32\end{pmatrix}$에서 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2^n=32\qquad\therefore\ n=5$

068 답 4406

민희와 형진이가 지불한 비용이 각각 5200원, 4400원이므로

$\begin{pmatrix}5200\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5200\\4400\end{pmatrix}\qquad\therefore\ c=4400$

또, $\begin{pmatrix}a&2\\1&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2000\\600\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2000a+1200\\2000+600b\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix}2000a+1200\\2000+600b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5200\\4400\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2000a+1200=5200,\ 2000+600b=4400$

$\therefore\ a=2,\ b=4$

$\therefore\ a+b+c=2+4+4400=4406$

069 답 ③

미술관 A에 갈 때, 관람료로 지불해야 하는 금액은

$10000\times4+6000\times10$

미술관 B에 갈 때, 관람료로 지불해야 하는 금액은

$5000\times4+4000\times10$

따라서 성인 4명과 학생 10명이 두 미술관 A, B에서 각각 관람료로 지불해야 하는 금액을 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix}\text{미술관 A의 관람료}\\\text{미술관 B의 관람료}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10000\times4+6000\times10\\5000\times4+4000\times10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10000&6000\\5000&4000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix}$$

070 답 ①

3월의 수학책 판매 금액은 ap원, 국어책 판매 금액은 bq원이므로 3월의 수학책과 국어책의 판매 금액의 총합은 $(ap+bq)$원이다.

$\therefore\ x=ap+bq$

이때

$$AB=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ap+bq\\cp+dq\end{pmatrix}$$

이므로 구하는 것은 행렬 AB의 $(1,\ 1)$ 성분이다.

071 답 ④

$$AB=\begin{pmatrix}800&600\\700&500\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}800\times3+600\times2&800\times4+600\times1\\700\times3+500\times2&700\times4+500\times1\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 AB에서 $(2,\ 2)$ 성분은 대형 서점에서 구매하여 학용품 세트 B를 만들 때 지불하는 금액과 같다.

072 답 ①

$$\begin{aligned}A^2-AB&=A(A-B)\\&=\begin{pmatrix}3&6\\-1&-2\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}3&6\\-1&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&-2\\1&0\end{pmatrix}\right\}\\&=\begin{pmatrix}3&6\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&8\\-2&-2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-15&12\\5&-4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$-15+12+5+(-4)=-2$

다른 풀이

$$A^2=\begin{pmatrix}3&6\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&6\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6\\-1&-2\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}3&6\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&-6\\-6&2\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A^2-AB=\begin{pmatrix}3&6\\-1&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}18&-6\\-6&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15&12\\5&-4\end{pmatrix}$$

073 답 $\begin{pmatrix} 6 & 30 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$

$A+B=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$CA=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\therefore ACA+BCA=(A+B)CA$

$=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 6 & 30 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$

074 답 20

$A^2-AB+BA-B^2$

$=A(A-B)+B(A-B)$

$=(A+B)(A-B)$

$=\left\{\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right\}\left\{\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -23 & 0 \\ 20 & -27 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 $(2, 1)$ 성분은 20이다.

075 답 11

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$이므로

$AB+BA=(A+B)^2-(A^2+B^2)$

$=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$8+(-3)+(-5)+11=11$

076 답 ④

$AB=BA$에서

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} k & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & k+1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$3=k+1 \qquad \therefore k=2$

077 답 ⑤

$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$에서

$A^2-AB-BA+B^2=A^2-2AB+B^2$

$\therefore AB=BA$

즉,

$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & a \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ a-1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3a-3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-6=3a-3,\ a-1=-2$

$\therefore a=-1$

078 답 ②

$AB=BA$이므로

$A^2-AB-2B^2=(A+B)(A-2B)$

$=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -9 & 18 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$-9+18+18+6=33$

079 답 $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

$(A+E)(A-E)=A^2-E$

$=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

080 답 1

$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$이므로

$(A-2E)^2=A^2-4A+4E$

$=-4A+5E$

따라서 $x=-4,\ y=5$이므로

$x+y=-4+5=1$

081 답 ②

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면 $a+b+c+d=-2$

$(A+E)^2-A(A-E)=(A^2+2A+E)-(A^2-A)$

$=3A+E$

$=3\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3a+1 & 3b \\ 3c & 3d+1 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬 모든 성분의 합은

$(3a+1)+3b+3c+(3d+1)=3(a+b+c+d)+2$

$=3\times(-2)+2=-4$

082 답 -5

$(2A+E)^2=(2A+3E)(2A-3E)$에서

$4A^2+4A+E=4A^2-9E$, $4A=-10E$

$\therefore A=-\frac{5}{2}E=-\frac{5}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}&0\\0&-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$-\frac{5}{2}+\left(-\frac{5}{2}\right)=-5$

083 답 2

$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$이므로

$A^{10}=(A^2)^5=E^5=E$

$A^{11}=A^{10}A=EA=A$

$\therefore A^{10}+A^{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은 2이다.

084 답 4

$A^2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$

$\therefore A^4=(-E)^2=E$

따라서 $A^n=E$를 만족시키는 가장 작은 자연수 n의 값은 4이다.

085 답 ②, ⑤

$A^2=\begin{pmatrix}2&-7\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-7\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&7\\-1&2\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-3&7\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-7\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$

따라서 A^n은 A, A^2, E가 반복되므로

$\begin{pmatrix}2&-7\\1&-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-3&7\\-1&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$이 나타날 수 있다.

즉, 행렬 A^n이 될 수 없는 것은 ②, ④이다.

086 답 ④

$A^2=\begin{pmatrix}-1&-1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1\\3&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A$

$=\begin{pmatrix}-2&-1\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\3&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$

$A^4=A^3A=-EA=-A$

$A^5=A^4A=(-A)A=-A^2$

$A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$

$\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^8$

$=A+A^2+(-E)+(-A)+(-A^2)+E+A+A^2$

$=A^2+A$

087 답 ③

$A\begin{pmatrix}a+1\\b-1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

088 답 $\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}$

두 실수 m, n에 대하여 $m\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$이라 하면

$\begin{pmatrix}2m+4n\\-2m+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2m+4n=-4$, $-2m+n=-6$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=2$, $n=-2$

따라서 $2\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}=A\left\{2\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right\}$

$=2A\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}-2A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

$=2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-10\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}$

089 답 1

$A\begin{pmatrix}2a\\-3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}a\\6b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}$을 변끼리 더하면

$A\begin{pmatrix}2a\\-3b\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}a\\6b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}2a+a\\-3b+6b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+8\\0-6\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}3a\\3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix}$

$3A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ $\quad\therefore A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은

$3+(-2)=1$

090 답 ⑤

케일리－해밀턴 정리에 의하여

$A^2-(-4+1)A+(-4\times1-2\times3)E=O$

$\therefore A^2+3A-10E=O$

따라서 $x=3$, $y=-10$이므로

$x-y=3-(-10)=13$

다른 풀이

$A^2=\begin{pmatrix}-4&2\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&2\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22&-6\\-9&7\end{pmatrix}$이므로

$$A^2+xA+yE=\begin{pmatrix} 22 & -6 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}+x\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 22-4x+y & -6+2x \\ -9+3x & 7+x+y \end{pmatrix}$$

이때 $\begin{pmatrix} 22-4x+y & -6+2x \\ -9+3x & 7+x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$22-4x+y=0$, $-6+2x=0$, $-9+3x=0$, $7+x+y=0$

$-6+2x=0$에서 $2x=6$ $\quad \therefore x=3$

$7+x+y=0$에 $x=3$을 대입하면

$10+y=0$ $\quad \therefore y=-10$

$\therefore x-y=3-(-10)=13$

091 답 ④

케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-(1+3)A+\{1\times3-0\times(-1)\}E=O$

$A^2-4A+3E=O$ $\quad \therefore A^2=4A-3E$

$$\therefore A^3=A^2A=(4A-3E)A$$
$$=4A^2-3A$$
$$=4(4A-3E)-3A$$
$$=13A-12E$$

따라서 $x=13$, $y=-12$이므로

$x+y=13+(-12)=1$

092 답 30

케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-(-6+2)A+\{-6\times2-(-3)\times7\}E=O$

$A^2+4A+9E=O$ $\quad \therefore A^2=-4A-9E$

$$\therefore A^3-A^2-4E=A^2A-A^2-4E$$
$$=(-4A-9E)A-A^2-4E$$
$$=-5A^2-9A-4E$$
$$=-5(-4A-9E)-9A-4E$$
$$=11A+41E$$

따라서 $x=11$, $y=41$이므로

$y-x=41-11=30$

중단원 점검 문제

Ⅳ-1 | 행렬과 그 연산 190~192쪽

01 답 -3

제1열의 모든 성분의 합은

$5+2x+6=2x+11$

제3행의 모든 성분의 합은

$6+(-x-4)=-x+2$

주어진 조건에 의하여

$2x+11=-x+2$, $3x=-9$

$\therefore x=-3$

02 답 ⑤

ㄱ. 행렬 A의 $(3, 2)$ 성분은 $a_{32}=1$이다.

ㄴ. 3×3 행렬이므로 삼차 정사각행렬이다.

ㄷ. 제2행의 모든 성분의 합은 $0+2+3=5$

ㄹ. $i>j$를 만족시키는 성분 a_{ij}의 합은

$\quad a_{21}+a_{31}+a_{32}=0+(-3)+1=-2$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

03 답 27

$a_{11}=(20$ 이하인 2의 배수의 개수$)=10$

$a_{12}=(20$ 이하인 3의 배수의 개수$)=6$

$a_{21}=(20$ 이하인 3의 배수의 개수$)=6$

$a_{22}=(20$ 이하인 4의 배수의 개수$)=5$

따라서 행렬 $A=\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은

$10+6+6+5=27$

04 답 ④

$\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ ab & a+b \end{pmatrix}$

에서 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x=a^2$, $y=b^2$, $1=ab$, $-3=a+b$이므로

$$x+y=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$
$$=(-3)^2-2\times1=7$$

$xy=a^2\times b^2=(ab)^2=1$

$\therefore \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{7}{1}=7$

05 답 $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 23 & -14 \end{pmatrix}$

$$2(A+B)+3\left(B-\frac{1}{3}A\right)=(2A+2B)+(3B-A)$$
$$=A+5B$$
$$=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 23 & -14 \end{pmatrix}$$

06 답 6

$pA-B=p\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4p-8 & 3p-2 \\ 3p-2 & 4p-8 \end{pmatrix}$

$q\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & q \\ q & 0 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$4p-8=0$, $3p-2=q$

두 식을 연립하여 풀면

$p=2,\ q=4$

$\therefore\ p+q=2+4=6$

07 답 1

$xA+yB=C$에서

$$x\begin{pmatrix}4 & -2\\1 & 3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\-5 & -3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4x-2y & -2x\\x+y & 3x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\-5 & -3\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$4x-2y=-2,\ -2x=4,\ x+y=-5,\ 3x-y=-3$

위의 식을 연립하여 풀면

$x=-2,\ y=-3$

$\therefore\ x-y=-2-(-3)=1$

08 답 ⑤

$a_{11}=-1+1+1=1,\ a_{12}=-1+2+1=2,$

$a_{21}=-2+1+1=0,\ a_{22}=-2+2+1=1$

$$\therefore\ A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$b_{11}=1^1-1^1=1-1=0,\ b_{12}=1^2-2^1=1-2=-1,$

$b_{21}=2^1-1^2=2-1=1,\ b_{22}=2^2-2^2=4-4=0$

$$\therefore\ B=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$2X-Y=A,\ X+Y=B$를 변끼리 더하면

$$3X=A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ X=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

이것을 $X+Y=B$에 대입하면

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}+Y=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ Y=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{4}{3}\\\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ 6X-3Y&=6\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{4}{3}\\\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & -4\\2 & -1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3 & 6\\0 & 3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 $(1,\ 2)$ 성분은 6, $(2,\ 1)$ 성분은 0이므로 그 합은

$6+0=6$

09 답 ④

$\frac{1}{2}A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\1 & 0\end{pmatrix}$에서 $A=\begin{pmatrix}-2 & -4\\2 & 0\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix}-2 & -4\\2 & 0\end{pmatrix}+B=\begin{pmatrix}3 & -2\\-2 & -5\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ B=\begin{pmatrix}3 & -2\\-2 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & -4\\2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\-4 & -5\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ AB+BA&=\begin{pmatrix}-2 & -4\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2\\-4 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 2\\-4 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -4\\2 & 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}6 & 16\\10 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & -20\\-2 & 16\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0 & -4\\8 & 20\end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$0+(-4)+8+20=24$

10 답 25

$\alpha,\ \beta$가 이차방정식 $x^2+4x-9=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4,\ \alpha\beta=-9$

한편,

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\\beta & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta^2 & 0\\\alpha\beta & 0\end{pmatrix}$$

이므로 모든 성분의 합은

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta&=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\\&=(-4)^2-(-9)=25\end{aligned}$$

11 답 ⑤

$a_{11}=1+2\times1=3,\ a_{12}=1+2\times2=5,$

$a_{21}=2+2\times1=4,\ a_{22}=2+2\times2=6$

$$\therefore\ A=\begin{pmatrix}3 & 5\\4 & 6\end{pmatrix}$$

$b_{11}=1\times1=1,\ b_{12}=1\times2=2,$

$b_{21}=2\times1=2,\ b_{22}=2\times2=4$

$$\therefore\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}$$

따라서

$$AB=\begin{pmatrix}3 & 5\\4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 26\\16 & 32\end{pmatrix}$$

이므로 $(2,\ 1)$ 성분은 16이다.

참고 행렬 AB의 $(2,\ 1)$ 성분은

$a_{21}\times b_{11}+a_{22}\times b_{21}=4\times1+6\times2=4+12=16$

12 답 1

$A^2=\begin{pmatrix}-1 & a\\0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & a\\0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & ab-a\\0 & b^2\end{pmatrix}$이므로

$A^2=A+2E$에서

$$\begin{pmatrix}1 & ab-a\\0 & b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & a\\0 & b\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & ab-a\\0 & b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a\\0 & b+2\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$ab-a=a$ …… ㉠

$b^2=b+2$ …… ㉡

㉡에서 $b^2-b-2=0$, $(b+1)(b-2)=0$

$\therefore b=-1$ ($\because b<0$)

이것을 ㉠에 대입하면 $-2a=a$ $\therefore a=0$

$\therefore a-b=0-(-1)=1$

풍쌤 비법 케일리-해밀턴 정리

케일리-해밀턴 정리에서 $A^2-pA+qE=O$ (p, q는 실수)를 만족시키는 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $A=kE$ (k는 실수) 꼴이면 $a+d=p$, $ad-bc=q$가 항상 성립하는 것은 아니다.

예를 들어 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2-3A+2E=O$가 성립하지만 $a+d=4$, $ad-bc=4$이므로 케일리-해밀턴 정리를 거꾸로 하는 것은 성립하지 않는다.

따라서 이와 같은 문제는 케일리-해밀턴 정리를 이용할 수 없으므로 행렬이 서로 같음을 이용한다.

13 답 ③

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=-A\text{이므로}$$

$E+A+A^2=E+A+(-A)=E$

14 답 ⑤

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore E-A+A^2-A^3+A^4$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=A^2$$

15 답 ②

꽃다발 A를 만드는 데 필요한 금액은

$3\times1000+4\times700$ (원)

꽃다발 B를 만드는 데 필요한 금액은

$5\times1000+2\times700$ (원)

이므로 꽃다발 A, B를 만드는 데 필요한 금액을 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} 3\times1000+4\times700 \\ 5\times1000+2\times700 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1000 \\ 700 \end{pmatrix}$$

이때 꽃다발 A를 10개, 꽃다발 B를 15개 만드는 데 필요한 금액은

$10\times$(꽃다발 A를 만드는 데 필요한 금액)

$+15\times$(꽃다발 B를 만드는 데 필요한 금액)

이므로 이 금액을 행렬로 나타내면

$$(10\quad 15)\begin{pmatrix} \text{꽃다발 A를 만드는 데 필요한 금액} \\ \text{꽃다발 B를 만드는 데 필요한 금액} \end{pmatrix}$$

$$=(10\quad 15)\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1000 \\ 700 \end{pmatrix}$$

참고 다음과 같이 다른 행렬로 나타낼 수도 있다.

꽃다발 A를 10개, 꽃다발 B를 15개 만드는 데 필요한 장미의 개수는

$10\times3+15\times5$

꽃다발 A를 10개, 꽃다발 B를 15개 만드는 데 필요한 국화의 개수는

$10\times4+15\times2$

이므로 필요한 장미와 국화의 총 개수는

$$\begin{pmatrix} 10\times3+15\times5 \\ 10\times4+15\times2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

이때 꽃다발 A를 10개, 꽃다발 B를 15개 만드는 데 필요한 금액은

$1000\times$(장미의 개수)$+700\times$(국화의 개수)

이므로 이 금액을 행렬로 나타내면

$$(1000\quad 700)\begin{pmatrix} \text{장미의 개수} \\ \text{국화의 개수} \end{pmatrix}=(1000\quad 700)\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

16 답 -36

$X+AB^2=ABA$에서

$X=ABA-AB^2=AB(A-B)$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & -8 \\ -3 & -24 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$-1+(-8)+(-3)+(-24)=-36$

17 답 ①

$(A+2B)^2=A^2+4AB+4B^2$에서

$A^2+2AB+2BA+4B^2=A^2+4AB+4B^2$

$AB+BA=2AB$

$\therefore AB=BA$

즉,

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3x-4 & -3y-2 \\ -4x-6 & -4y-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3x-4y & 2x+3y \\ 10 & -7 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-3x-4=-3x-4y$, $-3y-2=2x+3y$,

$-4x-6=10$, $-4y-3=-7$

따라서 $x=-4$, $y=1$이므로

$x+y=-4+1=-3$

18 답 $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\text{이므로}$$

$(A-E)(A^2+A+E)=A^3-E$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 0 & 7\end{pmatrix}$$

19 답 ④

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=3E$이므로

$A^{11}=(A^2)^5A=(3E)^5A=3^5E^5A=3^5EA=3^5A$

$\therefore\ k=5$

20 답 -16

$A+B=O$에서 $A=-B$

$AB=2E$에 $A=-B$를 대입하면

$B^2=-2E$

같은 방법으로 $AB=2E$에 $B=-A$를 대입하면

$A^2=-2E$

$\therefore\ A^8+B^{10}=(A^2)^4+(B^2)^5$

$=(-2E)^4+(-2E)^5$

$=16E-32E$

$=-16E$

$\therefore\ k=-16$

21 답 ④

$A^2=A+3E$이므로

$A^2\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}=(A+3E)\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$

$=A\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}+3E\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\ -6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}6\\ -2\end{pmatrix}$

22 답 ②

케일리－해밀턴 정리에 의하여

$A^2-(4+3)A+\{4\times3-(-5)\times(-2)\}E=O$

$\therefore\ A^2-7A+2E=O$

$\therefore\ A^3-7A^2+4A+3E=A(A^2-7A+2E)+2A+3E$

$=2A+3E$

참고 $A^2-7A+2E=O$에서 $A^2=7A-2E$이므로 이 식을 주어진 식에 대입하여 구해도 된다. 즉,

$A^3-7A^2+4A+3E=A(7A-2E)-7(7A-2E)+4A+3E$

$=7A^2-2A-49A+14E+4A+3E$

$=7A^2-47A+17E$

$=7(7A-2E)-47A+17E$

$=2A+3E$

23 답 3

케일리－해밀턴 정리에 의하여

$A^2-(1+0)A+\{1\times0-1\times(-1)\}=O$

$\therefore\ A^2-A+E=O$

위의 식의 양변에 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E)=O,\ A^3+E=O$

$\therefore\ A^3=-E$

$\therefore\ E+A+A^2+A^3+\cdots+A^7$

$=E+A+A^2+A^3(E+A+A^2)+A^6(E+A)$

$=E+A+A^2-E(E+A+A^2)+E(E+A)$

$=E+A+A^2-(E+A+A^2)+E+A$

$=E+A$

$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$2+1+(-1)+1=3$

다른 풀이

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E$

$\therefore\ E+A+A^2+A^3+\cdots+A^7$

$=E+A+A^2+(-E)+(-A)+(-A^2)+(-E)^2$

$+(-E)^2A$

$=E+A$

$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$2+1+(-1)+1=3$