최고난도

공통수학 2

정답과 풀이

01 Ⅰ. 도형의 방정식
점과 직선

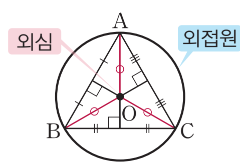
001

점 $P(a,\ b)$가 삼각형 ABC의 외심이므로
$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$
$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(a-2)^2+(b-1)^2=(a-6)^2+(b-1)^2$
$8a=32 \qquad \therefore a=4$
$\overline{BP}=\overline{CP}$에서 $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$이므로
$(a-6)^2+(b-1)^2=(a-4)^2+(b-5)^2$
$4+b^2-2b+1=b^2-10b+25$ ← $a=4$를 대입
$8b=20 \qquad \therefore b=\dfrac{5}{2}$
$\therefore ab=4\times\dfrac{5}{2}=10$

답 ③

참고 삼각형의 외심

삼각형의 외심은 세 변의 수직이등분선의 교점이고, 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 외접원의 반지름으로 그 길이가 모두 같다.

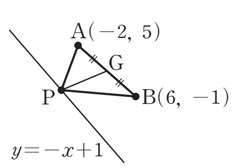


002

$P(a,\ -a+1)$이라 하면 → 점 P는 직선 $y=-x+1$ 위의 점이다.
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$
$=\{a-(-2)\}^2+\{(-a+1)-5\}^2+(a-6)^2$
$\qquad +\{(-a+1)-(-1)\}^2$
$=(a+2)^2+(a+4)^2+(a-6)^2+(a-2)^2$
$=4a^2-4a+60$
$=4\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+59$
따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $a=\dfrac{1}{2}$에서 최솟값 59를 갖는다.

답 59

다른 풀이



선분 AB의 중점을 G라 하면 점 G의 좌표는
$\left(\dfrac{-2+6}{2},\ \dfrac{5+(-1)}{2}\right)$, 즉 $(2,\ 2)$
이고, 삼각형 PAB에서
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2(\overline{PG}^2+\overline{AG}^2)$
$\qquad\qquad\quad =2(\overline{PG}^2+25)$
이므로 선분 PG의 길이가 최소일 때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$이 최솟값을 갖는다.
선분 PG의 길이의 최솟값은 점 $G(2,\ 2)$와 직선 $y=-x+1$, 즉 $x+y-1=0$ 사이의 거리와 같으므로
$\dfrac{|2+2-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$
$\therefore \overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2(\overline{PG}^2+25)\geq 2\times\left(\dfrac{9}{2}+25\right)=59$

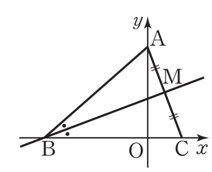
따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 59이다.

003

$\overline{AB}=\dfrac{3}{2}\overline{OA}$에서 $\overline{AB}^2=\dfrac{9}{4}\overline{OA}^2$
$\therefore (a-6)^2+(b-8)^2=\dfrac{9}{4}\times(6^2+8^2)=225 \qquad \cdots\cdots ㉠$
삼각형 OAB에서 $\angle A=90°$이므로
$\overline{OB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AB}^2$
$a^2+b^2=100+(a-6)^2+(b-8)^2$
$\therefore 3a+4b=50 \qquad \cdots\cdots ㉡$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6,\ b=17\ (\because b>0)$
$\therefore a+b=-6+17=11$

답 11

004

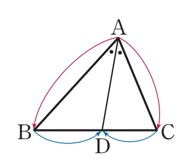


선분 AC의 중점을 M이라 하면 삼각형의 각의 이등분선의 성질에 의하여 참고
$\overline{BA}:\overline{BC}=\overline{AM}:\overline{CM}$
이때 $\overline{AM}=\overline{CM}$이므로 $\overline{BA}=\overline{BC}$
$\overline{BA}=\sqrt{(-3-0)^2+(0-a)^2}=\sqrt{9+a^2}$,
$\overline{BC}=1-(-3)=4$
이므로 $\sqrt{9+a^2}=4$
위의 등식의 양변을 제곱하면
$9+a^2=16,\ a^2=7$
$\therefore a=\sqrt{7}\ (\because a>0)$

답 ③

참고 각의 이등분선의 성질

삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하면
$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$



005

점 A를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선이 변 BC와 만나는 점이 D이므로 점 D는 변 BC의 중점이다.
$\overline{BC}=\sqrt{6^2+8^2}=10$이므로
$\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=5$
삼각형 ABC에서 중선 정리에 의하여
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2)$
$9^2+7^2=2(\overline{AD}^2+5^2)$
$2\overline{AD}^2=80,\ \overline{AD}^2=40$
$\therefore \overline{AD}=2\sqrt{10}$

답 $2\sqrt{10}$

006

선분 AB를 $k:(1-k)$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{k\times(-5)+(1-k)\times 3}{k+(1-k)}, \dfrac{k\times 4+(1-k)\times(-2)}{k+(1-k)}\right)$

즉, $(-8k+3, 6k-2)$

이 점이 제2사분면 위에 있으려면

$-8k+3<0, 6k-2>0$

$\therefore \dfrac{3}{8}<k<1$ ($\because 0<k<1$)

답 $\dfrac{3}{8}<k<1$

007

삼각형 BOC와 삼각형 OAC의 넓이의 비가 2 : 1이므로

→ 두 삼각형의 높이가 같으므로 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

$\overline{OB} : \overline{OA}=2:1$

따라서 점 O는 선분 BA를 2 : 1로 내분하는 점이다.

선분 BA를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times3+1\times a}{2+1}, \dfrac{2\times1+1\times b}{2+1}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{6+a}{3}, \dfrac{2+b}{3}\right)$

이 점이 원점이므로

$\dfrac{6+a}{3}=0, \dfrac{2+b}{3}=0 \quad \therefore a=-6, b=-2$

$\therefore a+b=-6+(-2)=-8$

답 ①

008

마름모의 성질에 의하여 선분 OC의 중점과 선분 AB의 중점이 일치하므로 참고

$\dfrac{0+6}{2}=\dfrac{p+q}{2}$에서 $p+q=6$ …… ㉠

$\dfrac{0+6}{2}=\dfrac{4+r}{2}$에서 $r=2$

또, 선분 OC와 선분 AB가 서로 수직이므로

$\dfrac{6-0}{6-0}\times\dfrac{2-4}{q-p}=-1$

$\dfrac{-2}{q-p}=-1 \quad \therefore q-p=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=2, q=4$

$\therefore p+q+r=2+4+2=8$

답 8

참고 마름모의 뜻과 성질

(1) 네 변의 길이가 모두 같다.

(2) 두 대각선은 서로를 수직이등분한다.

009

세 점 D, E, F에 대하여

$D\left(\dfrac{3\times(-4)+1\times2}{3+1}, \dfrac{3\times3+1\times7}{3+1}\right)$, 즉 $D\left(-\dfrac{5}{2}, 4\right)$

$E\left(\dfrac{3\times8+1\times(-4)}{3+1}, \dfrac{3\times(-1)+1\times3}{3+1}\right)$, 즉 $E(5, 0)$

$F\left(\dfrac{3\times2+1\times8}{3+1}, \dfrac{3\times7+1\times(-1)}{3+1}\right)$, 즉 $F\left(\dfrac{7}{2}, 5\right)$

따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{-\frac{5}{2}+5+\frac{7}{2}}{3}, \dfrac{4+0+5}{3}\right)$, 즉 $(2, 3)$

답 $(2, 3)$

다른 풀이 확장

삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표와 같으므로

$\left(\dfrac{2+(-4)+8}{3}, \dfrac{7+3+(-1)}{3}\right)$, 즉 $(2, 3)$

010

세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형을 만들 수 없으므로 세 점은 한 직선 위의 점이다.

즉, 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\dfrac{k-3-(-2)}{-3-(-3k-3)}=\dfrac{2-(-2)}{-2k-2-(-3k-3)}$

$\dfrac{k-1}{3k}=\dfrac{4}{k+1}$, $(k-1)(k+1)=12k$

$k^2-12k-1=0$

→ 이차방정식 $k^2-12k-1=0$의 판별식을 D라 하면 $\dfrac{D}{4}=(-6)^2-(-1)=37>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은 12이다.

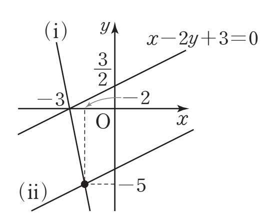
답 12

011

$mx-y+2m-5=0$에서

$(x+2)m-(y+5)=0$ …… ㉠

직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, -5)$를 지난다.



(i) 직선 ㉠이 점 $(-3, 0)$을 지날 때

$-m-5=0 \quad \therefore m=-5$

(ii) 직선 ㉠이 직선 $x-2y+3=0$과 평행할 때

$x-2y+3=0$에서 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

$mx-y+2m-5=0$에서 $y=mx+2m-5$

두 직선의 기울기가 같아야 하므로 $m=\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $-5<m<\dfrac{1}{2}$

따라서 정수 m은 $-4, -3, -2, -1, 0$의 5개이다.

답 5

012

두 직선 $x-y+1=0$, $2x+y-7=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x-y+1)+k(2x+y-7)=0$ (단, k는 실수이다.) …… ㉠
이 직선이 점 $(6,\ 1)$을 지나므로
$6+6k=0 \qquad \therefore k=-1$
$k=-1$을 ㉠에 대입하면
$x-y+1-(2x+y-7)=0$
$\therefore x+2y-8=0$
따라서 $A(8,\ 0)$, $B(0,\ 4)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 8\times 4=16$

답 ③

다른 풀이

$x-y+1=0$, $2x+y-7=0$을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=3$
즉, 두 직선의 교점은 점 $(2,\ 3)$이므로 두 점 $(2,\ 3)$, $(6,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-3=\frac{1-3}{6-2}(x-2)$
$\therefore y=-\frac{1}{2}x+4$
따라서 $A(8,\ 0)$, $B(0,\ 4)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 8\times 4=16$

013

직선 $3x+ay-5=0$이 직선 $(a-2)x+5y+1=0$과 평행하므로
$\frac{3}{a-2}=\frac{a}{5}\neq\frac{-5}{1}$
$a^2-2a=15$, $a^2-2a-15=0$
$(a+3)(a-5)=0 \qquad \therefore a=-3$ 또는 $a=5$ …… ㉠
직선 $3x+ay-5=0$이 직선 $ax-(a-2)y+2=0$과 수직이므로
$3a-a(a-2)=0$
$a^2-5a=0$, $a(a-5)=0$
$\therefore a=0$ 또는 $a=5$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $a=5$

답 5

014

조건 (가)에서 직선 CD의 기울기가 음수이므로
$\frac{q-p}{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\frac{q-p}{2\sqrt{2}}<0 \qquad \therefore q-p<0$
조건 (나)에서 $\overline{AB}=\overline{CD}$이므로
$3=\sqrt{(3\sqrt{2}-\sqrt{2})^2+(q-p)^2}$
위의 등식의 양변을 제곱하면
$9=8+(q-p)^2$, $(q-p)^2=1$
이때 $q-p<0$이므로 $q-p=-1$ …… ㉠
또, $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로 직선 AD의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같다.
$\frac{q-1}{3\sqrt{2}-0}=\frac{p-4}{\sqrt{2}-0}$, $q-1=3(p-4)$
$\therefore 3p-q=11$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=5$, $q=4$
$\therefore p+q=5+4=9$

답 9

015

직선 $y=-x+5$의 기울기가 -1이므로 직선 AH의 기울기는 1이다.
즉, 직선 AH는 기울기가 1이고 점 $A(6,\ 3)$을 지나므로 그 방정식은
$y-3=x-6$
$\therefore y=x-3$
$y=-x+5$, $y=x-3$을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=1$
점 H는 두 직선 $y=-x+5$, $y=x-3$의 교점이다.
따라서 $H(4,\ 1)$이므로 $a=4$, $b=1$
$\therefore a+b=4+1=5$

답 5

016

$\overline{OB}=\sqrt{(7a)^2+a^2}=5\sqrt{2}a$
두 점 $O(0,\ 0)$, $B(7a,\ a)$를 지나는 직선의 방정식은
$y=\frac{1}{7}x$
$\therefore x-7y=0$
점 $A(2a,\ 6a)$와 직선 $x-7y=0$ 사이의 거리를 d라 하면
$d=\frac{|2a-7\times 6a|}{\sqrt{1^2+(-7)^2}}=4\sqrt{2}a$
이므로 삼각형 OAB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times d=\frac{1}{2}\times 5\sqrt{2}a\times 4\sqrt{2}a=20a^2$
삼각형 OAB의 넓이가 세 자리 자연수가 되려면
$100\leq 20a^2<1000$, $5\leq a^2<50$
$\therefore \sqrt{5}\leq a<5\sqrt{2}$
따라서 구하는 자연수 a는 3, 4, 5, 6, 7의 5개이다.

답 ②

017

원의 반지름의 길이를 r라 하면 $\overline{BD}=2r$이므로
$\overline{DC}=\sqrt{2}r \qquad \therefore r=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{DC}$
두 직선 $3x-2y+6=0$, $3x-2y-2=0$은 서로 평행하므로 선분 DC의 길이는 두 직선 사이의 거리와 같다.
즉, 선분 DC의 길이는 직선 $3x-2y-2=0$ 위의 점 $(0,\ -1)$과 직선 $3x-2y+6=0$ 사이의 거리와 같으므로
$\overline{DC}=\frac{|3\times 0-2\times(-1)+6|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{8}{\sqrt{13}}$
따라서 $r=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{8}{\sqrt{13}}=\frac{8}{\sqrt{26}}$이므로
$S=\pi\times\left(\frac{8}{\sqrt{26}}\right)^2=\frac{32}{13}\pi \qquad \therefore \frac{13}{\pi}S=32$

답 32

018

$P(x,\ y)$라 하면 점 P는 두 직선 $x+2y-4=0$, $2x-y+1=0$으로부터 같은 거리에 있으므로
$\frac{|x+2y-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2x-y+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$
$x+2y-4=\pm(2x-y+1)$
$\therefore x-3y+5=0$ 또는 $3x+y-3=0$

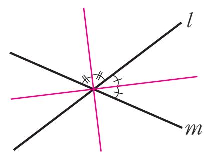
따라서 $a=-3$, $b=3$, $c=-3$이므로

$abc=-3\times3\times(-3)=27$

답 27

참고

두 직선 l, m으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는 두 직선 l, m이 이루는 각의 이등분선이다.



019

$\overline{AB}=4-(-2)=6$

$\overline{BC}=9-1=8$

$\overline{CA}=\sqrt{\{4-(-2)\}^2+(1-9)^2}=10$

선분 BC가 $\angle B$의 이등분선이므로

$\overline{BA}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{CD}=6:8=3:4$

따라서 점 D는 선분 AC를 $3:4$로 내분하는 점이므로

$\overline{AD}=10\times\frac{3}{7}=\frac{30}{7}$

$\overline{CD}=10\times\frac{4}{7}=\frac{40}{7}$

$\frac{30}{7}$, $\frac{40}{7}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 49인 이차방정식은

$49\left(x-\frac{30}{7}\right)\left(x-\frac{40}{7}\right)=0$, $49x^2-490x+1200=0$

따라서 $p=-490$, $q=1200$이므로

$p+q=-490+1200=710$

답 710

020

이차방정식 $x^2-2(a+b)x+(a-b)^2+3ab-7a-2b-9=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+b)\}^2-\{(a-b)^2+3ab-7a-2b-9\}=0$

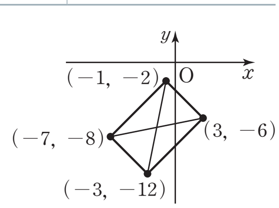
$ab+7a+2b+9=0$, $a(b+7)+2(b+7)=5$

$(a+2)(b+7)=5$

이때 a, b는 정수이므로

$a+2$	$b+7$	(a, b)
1	5	$(-1, -2)$
5	1	$(3, -6)$
-1	-5	$(-3, -12)$
-5	-1	$(-7, -8)$

즉, 조건을 만족시키는 점 (a, b)를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



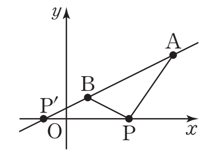
따라서 두 대각선의 길이의 곱은

$\sqrt{\{-3-(-1)\}^2+\{-12-(-2)\}^2}$
$\times\sqrt{\{3-(-7)\}^2+\{-6-(-8)\}^2}$
$=2\sqrt{26}\times2\sqrt{26}$
$=104$

답 104

021

오른쪽 그림과 같이 직선 AB와 x축의 교점을 P′이라 하자.



x축 위의 점 P에 대하여

(i) 점 P가 점 P′에 위치하지 않을 때

삼각형 ABP에 대하여

$\overline{AP}<\overline{AB}+\overline{BP}$이므로 → 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크다.

$\overline{AP}-\overline{BP}<\overline{AB}$

$\overline{BP}<\overline{AB}+\overline{AP}$이므로 $-\overline{AB}<\overline{AP}-\overline{BP}$

$-\overline{AB}<\overline{AP}-\overline{BP}<\overline{AB}$에서

$|\overline{AP}-\overline{BP}|<\overline{AB}$

(ii) 점 P가 점 P′에 위치할 때

$|\overline{AP}-\overline{BP}|=|\overline{AP'}-\overline{BP'}|=|\overline{AB}|=\overline{AB}$

(i), (ii)에서 $|\overline{AP}-\overline{BP}|\le\overline{AB}$

따라서 $|\overline{AP}-\overline{BP}|$의 최댓값은 선분 AB의 길이와 같다.

두 점 A(5, 3), B(1, 1)을 지나는 직선 AB의 방정식은

$y-3=\frac{1-3}{1-5}(x-5)$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

즉, 점 P의 좌표는 $(-1, 0)$이므로

$a=-1$, $b=0$

또, $\overline{AB}=\sqrt{(1-5)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{5}$이므로

$M=2\sqrt{5}$

$\therefore a+b+M^2=-1+0+(2\sqrt{5})^2=19$

답 19

022

$x+5y+2=0$에서 $y=-\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}$

$y=\frac{1}{5}(x^2-2x-8)$, $y=-\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}$를 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=0$ 또는 $x=3$, $y=-1$

$A(-2, 0)$, $B(3, -1)$이라 하고 직선 $x=1$ 위를 움직이는 점 C의 좌표를 $(1, k)$라 하면

$\overline{AB}^2=\{3-(-2)\}^2+(-1-0)^2=26$

$\overline{BC}^2=(1-3)^2+\{k-(-1)\}^2$
$=k^2+2k+5$

$\overline{CA}^2=(-2-1)^2+(0-k)^2$
$=k^2+9$

이때 삼각형 ABC가 이등변삼각형이 되는 경우는 다음과 같다.

(i) $\overline{AB}=\overline{BC}$인 경우

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로 $26=k^2+2k+5$

$k^2+2k-21=0$

이를 만족시키는 정수 k의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $\overline{BC}=\overline{CA}$인 경우

$\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로 $k^2+2k+5=k^2+9$

$2k=4$ $\therefore k=2$

(iii) $\overline{CA}=\overline{AB}$인 경우

$\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$이므로 $k^2+9=26$

$k^2=17$

이를 만족시키는 정수 k의 값은 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에서 $k=2$

답 2

023

세 변 AB, BC, CA의 수직이등분선의 교점 P는 삼각형 ABC의 외심이므로

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

삼각형 ABC의 외심 P가 변 BC 위에 있으므로 삼각형 ABC는 선분 BC를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

즉, $\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$

이때 $\overline{PA}=\sqrt{(-3-2)^2+\{4-(-1)\}^2}=5\sqrt{2}$이고 점 P는 빗변 BC의 중점이므로

$\overline{BC}=2\overline{PB}=2\overline{PA}=10\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2=200$

답 ①

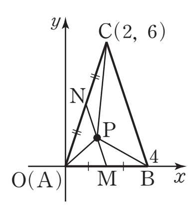
024

$\triangle PBC:(\triangle PAB+\triangle PCA)=1:1$에서

$\triangle PBC=\triangle PAB+\triangle PCA$

$\therefore \triangle PBC=\frac{1}{2}\triangle ABC$

이때 점 P가 삼각형 ABC의 내부의 점이므로 오른쪽 그림과 같이 점 P는 두 선분 AB, CA의 각 중점을 이은 선분 위에 있다.



두 선분 AB, CA의 중점을 각각 M, N이라 하면 M(2, 0), N(1, 3) 다른풀이

따라서 점 P가 그리는 도형의 길이는 선분 MN의 길이와 같으므로

$\overline{MN}=\sqrt{(1-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$

답 $\sqrt{10}$

다른풀이

점 P가 그리는 도형의 길이는 선분 MN의 길이와 같으므로 중점 연결 정리에 의하여

$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{(2-4)^2+(6-0)^2}=\sqrt{10}$

025

수직선 위에서 $\sqrt{3}$을 나타내는 점을 A, $\sqrt{7}$을 나타내는 점을 B라 하면 자연수 m에 대하여

$\frac{m\sqrt{3}+\sqrt{7}}{1+m}$

은 선분 AB를 $1:m$으로 내분하는 점의 좌표이다.

이때 수직선에서 선분 AB를 $1:m$으로 내분하는 점은 m의 값이 커질수록 왼쪽에 위치하므로 m의 값이 커질수록 $\frac{m\sqrt{3}+\sqrt{7}}{1+m}$의 값이 작아진다.

① $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$ ② $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2+1}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{3+1}$

④ $\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{7}}{4+1}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}+\sqrt{7}}{5+1}$

따라서 가장 작은 수는 ⑤이다.

답 ⑤

026

$\overline{AB}=\sqrt{(-5-0)^2+\{9-(-3)\}^2}=13$,

$\overline{AD}=\overline{AC}=\sqrt{(4-0)^2+\{0-(-3)\}^2}=5$

$\overline{BD}=\overline{AB}-\overline{AD}=13-5=8$ 다른풀이

이고 $\triangle BAP \backsim \triangle BDC$ (AA닮음)이므로

DC∥AP이므로
∠BAP=∠BDC (동위각), ∠B는 공통

$\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{BP}:\overline{BC}=13:8$

$\therefore \overline{BC}:\overline{CP}=8:(13-8)=8:5$

따라서 점 C가 선분 BP를 $8:5$로 내분하므로

$\frac{8\times a+5\times(-5)}{8+5}=4$, $\frac{8\times b+5\times 9}{8+5}=0$

따라서 $a=\frac{77}{8}$, $b=-\frac{45}{8}$이므로

$8(a-b)=8\times\frac{122}{8}=122$

답 122

다른풀이

점 D는 선분 AB를 $5:8$로 내분하는 점이므로

$D\left(\frac{5\times(-5)+8\times 0}{5+8}, \frac{5\times 9+8\times(-3)}{5+8}\right)$, 즉 $D\left(-\frac{25}{13}, \frac{21}{13}\right)$

이때 직선 DC의 기울기는 $\frac{0-\frac{21}{13}}{4-\left(-\frac{25}{13}\right)}=-\frac{3}{11}$이고, 두 직선 DC와 AP가 서로 평행하므로 직선 AP의 기울기도 $-\frac{3}{11}$이다.

직선 AP는 점 A를 지나므로 그 방정식은

$y=-\frac{3}{11}x-3$

한편, 직선 BC의 방정식은

$y-0=\frac{0-9}{4-(-5)}(x-4)$

$\therefore y=-x+4$

$y=-\frac{3}{11}x-3$, $y=-x+4$를 연립하여 풀면

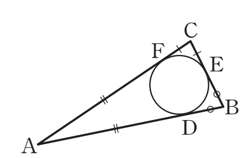
$x=\frac{77}{8}$, $y=-\frac{45}{8}$ $\therefore P\left(\frac{77}{8}, -\frac{45}{8}\right)$

따라서 $a=\frac{77}{8}$, $b=-\frac{45}{8}$이므로

$8(a-b)=8\times\frac{122}{8}=122$

027

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 내접원이 선분 BC와 만나는 점을 E, 선분 CA와 만나는 점을 F라 하자.



$\overline{CA}=\overline{AF}+\overline{FC}$, $\overline{CB}=\overline{BE}+\overline{EC}$이고

$\overline{FC}=\overline{EC}$이므로 $\overline{CA}-\overline{CB}=6$에서 $\overline{AF}-\overline{BE}=6$

이때 $\overline{AF}=\overline{AD}$, $\overline{BE}=\overline{BD}$이므로

$\overline{AD}-\overline{BD}=6$ …… ㉠

한편, $\overline{AB}=\sqrt{(9-1)^2+(8-2)^2}=10$이므로

$\overline{AD}+\overline{BD}=10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\overline{AD}=8$, $\overline{BD}=2$

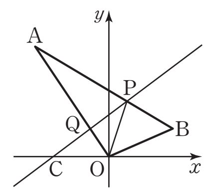
따라서 점 D는 선분 AB를 $8:2$, 즉 $4:1$로 내분하는 점이므로

$a=4$, $b=1$

$\therefore a+b=4+1=5$

답 5

028



오른쪽 그림과 같이 직선 PC와 선분 AO가 만나는 점을 Q, 삼각형 AOB의 넓이를 S라 하자.
점 P가 선분 AB를 2 : 1로 내분하므로 삼각형 AOP의 넓이는 $\frac{2}{3}S$이고, 직선 PC가 삼각형 AOB의 넓이를 이등분하므로 삼각형 AQP의 넓이는 $\frac{1}{2}S$이다.
즉, 삼각형 QOP의 넓이는

$\frac{2}{3}S-\frac{1}{2}S=\frac{1}{6}S$

∴ $\overline{AQ}:\overline{QO}=\triangle AQP:\triangle QOP=\frac{1}{2}S:\frac{1}{6}S=3:1$

점 Q의 좌표는 ← 점 Q는 선분 AO를 3 : 1로 내분하는 점이다.

$\left(\frac{3\times0+1\times(-8)}{3+1}, \frac{3\times0+1\times a}{3+1}\right)$, 즉 $\left(-2, \frac{a}{4}\right)$

점 P의 좌표는 ← 점 P는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이다.

$\left(\frac{2\times7+1\times(-8)}{2+1}, \frac{2\times3+1\times a}{2+1}\right)$, 즉 $\left(2, \frac{a+6}{3}\right)$

직선 CP의 방정식은

$y-0=\frac{\frac{a+6}{3}-0}{2-(-6)}\{x-(-6)\}$

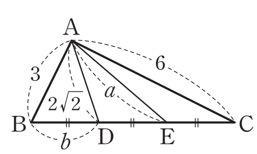
∴ $y=\frac{a+6}{24}(x+6)$

이때 점 Q가 직선 CP 위의 점이므로

$\frac{a}{4}=\frac{a+6}{24}\times(-2+6)$ ∴ $a=12$

답 ④

029



오른쪽 그림과 같이 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점을 E라 하고,
$\overline{AE}=a$, $\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}=b$라 하자.
삼각형 ABE에서 중선 정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{AE}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2)$

$3^2+a^2=2\{(2\sqrt{2})^2+b^2\}$ ∴ $a^2-2b^2=7$ …… ㉠

삼각형 ADC에서 중선 정리에 의하여

$\overline{AD}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AE}^2+\overline{DE}^2)$

$(2\sqrt{2})^2+6^2=2(a^2+b^2)$ ∴ $a^2+b^2=22$ …… ㉡

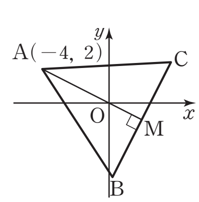
㉡−㉠을 하면 $3b^2=15$

$b^2=5$ ∴ $b=\sqrt{5}$ ($\because b>0$)

∴ $\overline{BC}=3b=3\sqrt{5}$

답 $3\sqrt{5}$

030



원점 O(0, 0)과 점 A(−4, 2) 사이의 거리는

$\overline{OA}=\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$

선분 AO의 연장선이 선분 BC와 만나는 점을 M이라 하면 점 O가 정삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{OM}=\sqrt{5}$

$\overline{AM}=\frac{3}{2}\overline{OA}=3\sqrt{5}$

정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{2}a=3\sqrt{5}$ ∴ $a=2\sqrt{15}$

따라서 정삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{15})^2=15\sqrt{3}$

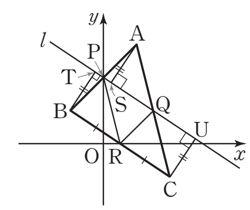
답 $15\sqrt{3}$

참고

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이와 넓이는

(높이)$=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, (넓이)$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

031

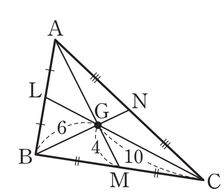


오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 S, T, U라 하자.
△APS≡△BPT (RHA 합동)이므로
$\overline{AP}=\overline{BP}$
또, △AQS≡△CQU (ASA 합동)이므로
$\overline{AQ}=\overline{CQ}$
즉, 세 점 P, Q, R는 각각 세 변 AB, CA, BC의 중점이므로 삼각형 PRQ의 무게중심의 좌표는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표와 같다.
따라서 삼각형 PRQ의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{1+(-1)+2}{3}, \frac{3+1+(-1)}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$

답 $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$

032



삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면 세 변 AM, BN, CL의 교점이 G이므로

$\overline{BG}=\frac{2}{3}\overline{BN}=\frac{2}{3}\times9=6$

$\overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{CL}=\frac{2}{3}\times15=10$

$\overline{GM}=\frac{1}{3}\overline{AM}=\frac{1}{3}\times12=4$

삼각형 GBC에서 중선 정리에 의하여

$\overline{BG}^2+\overline{CG}^2=2(\overline{GM}^2+\overline{BM}^2)$

$6^2+10^2=2(4^2+\overline{BM}^2)$

$\overline{BM}^2=52$ ∴ $\overline{BM}=2\sqrt{13}$

∴ $\overline{BC}=2\overline{BM}=4\sqrt{13}$

답 $4\sqrt{13}$

033

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 사각형 ABDC의 두 대각선의 교점이다. 참고
두 점 A, D를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$

$\therefore y=-\frac{5}{3}x+5$ …… ㉠

두 점 B, C를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{6}+\frac{y}{2}=1$

$\therefore y=-\frac{1}{3}x+2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{9}{4}$, $y=\frac{5}{4}$

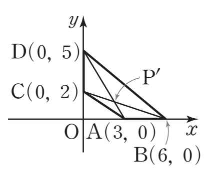
따라서 $a=\frac{9}{4}$, $b=\frac{5}{4}$이므로

$a-b=\frac{9}{4}-\frac{5}{4}=1$

답 ④

참고

오른쪽 그림과 같이 사각형 ABDC의 두 대각선 AD, BC의 교점을 P′이라 하면



$\overline{PA}+\overline{PD}\ge\overline{P'A}+\overline{P'D}=\overline{AD}$

$\overline{PB}+\overline{PC}\ge\overline{P'B}+\overline{P'C}=\overline{BC}$

따라서 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 사각형 ABDC의 두 대각선의 교점이다.

034

D$(0, a)$, E$(b, 0)$ $(0<a<8,\ b>0)$이라 하면 색칠한 두 부분의 넓이의 합은

$\frac{1}{2}\times(8-a)\times8+\frac{1}{2}\times a\times b=32-4a+\frac{1}{2}ab$

사다리꼴 ODBC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(8+a)\times8=32+4a$

색칠한 두 부분의 넓이의 합이 사다리꼴 ODBC의 넓이와 같으므로

$32-4a+\frac{1}{2}ab=32+4a$

$ab-16a=0$, $a(b-16)=0$

$\therefore b=16$ ($\because 0<a<8$)

따라서 B$(-8, 8)$, E$(16, 0)$이므로 직선 BE의 방정식은

$y-0=\frac{0-8}{16-(-8)}(x-16)$

$\therefore x+3y-16=0$

답 ②

035

직선 $3x+2y-12=0$과 x축, y축의 교점을 각각 A, B라 하면

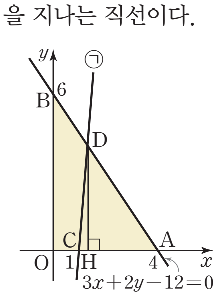
A$(4, 0)$, B$(0, 6)$

$(k+11)x-y-11-k=0$을 k에 대하여 정리하면

$(x-1)k+11x-y-11=0$ …… ㉠

직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 0)$을 지나는 직선이다.

오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 x축과 만나는 점을 C, 직선 $3x+2y-12=0$과 만나는 점을 D라 하고, 점 D에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times4\times6=12$

이고 직선 ㉠에 의하여 넓이가 이등분되므로

$\triangle DCA=\frac{1}{2}\times\overline{CA}\times\overline{DH}=6$

$\therefore \overline{DH}=4$

D$(a, 4)$라 하면 점 D는 직선 $3x+2y-12=0$ 위의 점이므로

$3a+8-12=0$ $\quad\therefore a=\frac{4}{3}$

$\therefore$ D$\left(\frac{4}{3}, 4\right)$

이때 점 D는 직선 ㉠ 위의 점이므로

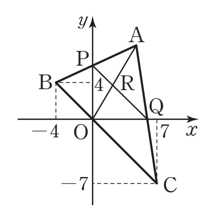
$\frac{1}{3}k+\frac{44}{3}-4-11=0$

$\therefore k=1$

답 1

036

다음 그림과 같이 두 선분 AO, PQ가 만나는 점을 R라 하자.



직선 BC가 직선 PQ와 평행하려면 $\triangle APR\backsim\triangle ABO$ (AA닮음), $\triangle ARQ\backsim\triangle AOC$ (AA닮음)이어야 한다.

즉, $\overline{BO}=4\sqrt{2}$, $\overline{OC}=7\sqrt{2}$이므로 점 A는 선분 PQ를 $4:7$로 내분하는 점과 원점을 지나는 직선 위의 점이어야 한다.

이때 직선 BC의 기울기는 -1이고, 직선 BC와 평행한 직선 PQ의 기울기도 -1이므로 P$(0, a)$라 하면 Q$(a, 0)$이다.

선분 PQ를 $4:7$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{4\times a+7\times0}{4+7}, \frac{4\times0+7\times a}{4+7}\right)$, 즉 $\left(\frac{4}{11}a, \frac{7}{11}a\right)$

이므로 점 A가 나타내는 도형은 직선 $7x-4y=0$ 위에 있다.

따라서 $\alpha=7$, $\beta=0$이므로

$\alpha+\beta=7$

답 7

037

세 직선의 교점의 개수가 2가 되려면 세 직선 중 두 직선이 평행해야 한다.

$x-y+2=0$ …… ㉠

$3x+ay-6=0$ …… ㉡

$(a+1)x-2y+4=0$ …… ㉢

(i) 두 직선 ㉠, ㉡이 평행할 때

$\frac{1}{3}=\frac{-1}{a}\ne\frac{2}{-6}$에서 $a=-3$

$a=-3$이면 직선 ㉢, 즉 $x+y-2=0$은 두 직선 ㉠, ㉡과 평행하지 않으므로 조건을 만족시킨다.

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 평행할 때

$\frac{3}{a+1}=\frac{a}{-2}\ne\frac{-6}{4}$에서 $a^2+a+6=0$

이 이차방정식을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(iii) 두 직선 ㉠, ㉢이 평행할 때

$$\frac{1}{a+1}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{2}{4}$$

이때 $\frac{-1}{-2}=\frac{2}{4}$이므로 두 직선 ㉠, ㉢은 평행하지 않다.

(ⅰ)~(ⅲ)에서 $a=-3$

답 -3

038

직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선의 방정식은

$y-(-3)=m(x-2)$

$\therefore y=mx-2m-3$

직선 l과 이차함수 $y=2x^2$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$\mathrm{P}(\alpha,\ 2\alpha^2)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ 2\beta^2)$

두 직선 OP, OQ의 기울기는 각각

$\frac{2\alpha^2-0}{\alpha-0}=2\alpha$, $\frac{2\beta^2-0}{\beta-0}=2\beta$

이고, 두 직선 OP, OQ가 수직이므로

$2\alpha\times2\beta=-1\qquad\therefore \alpha\beta=-\frac{1}{4}$ …… ㉠

또, α, β는 이차방정식 $2x^2=mx-2m-3$, 즉

$2x^2-mx+2m+3=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=\frac{2m+3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{1}{4}=\frac{2m+3}{2}$

$\therefore m=-\frac{7}{4}$

답 $-\frac{7}{4}$

039

직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$에 수직인 직선 l은 기울기가 2이고 원점을 지나므로 직선 l의 방정식은

$y=2x$

또, 직선 AB의 기울기는 $\frac{3-5}{6-2}=-\frac{1}{2}$이므로 직선 PQ는 직선 AB와 평행하다.

따라서 $\triangle\mathrm{OPQ}\backsim\triangle\mathrm{OAB}$ (AA닮음)이고

$(\triangle\mathrm{OPQ}$의 넓이$):(\square\mathrm{APQB}$의 넓이$)=3:7$이므로

$(\triangle\mathrm{OPQ}$의 넓이$):(\triangle\mathrm{OAB}$의 넓이$)=3:10$

직선 AB의 방정식은 $y-5=-\frac{1}{2}(x-2)$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+6$이고

직선 l의 방정식은 $y=2x$이므로

$-\frac{1}{2}x+6=2x$에서 $x=\frac{12}{5}$

$\therefore \mathrm{S}\left(\frac{12}{5},\ \frac{24}{5}\right)$

즉,

$$\overline{\mathrm{AS}}=\sqrt{\left(\frac{12}{5}-2\right)^2+\left(\frac{24}{5}-5\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\overline{\mathrm{BS}}=\sqrt{\left(\frac{12}{5}-6\right)^2+\left(\frac{24}{5}-3\right)^2}=\frac{9\sqrt{5}}{5}$$

이므로 $\overline{\mathrm{AS}}:\overline{\mathrm{BS}}=1:9$

따라서 $\overline{\mathrm{PR}}:\overline{\mathrm{QR}}=1:9$이므로 $\triangle\mathrm{ORP}=3S$라 하면

$S_1=7S$, $S_2=27S$

$\therefore S_1:S_2=7:27$

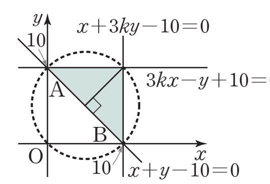
답 ④

040

두 직선 $x+3ky-10=0$, $3kx-y+10=0$은

$1\times3k+3k\times(-1)=0$이므로 수직이다.

이때 직선 $x+3ky-10=0$은 점 $(10,\ 0)$을 항상 지나고, 직선 $3kx-y+10=0$은 점 $(0,\ 10)$을 항상 지나므로 이를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 $\mathrm{A}(0,\ 10)$, $\mathrm{B}(10,\ 0)$이라 하면 세 직선으로 둘러싸인 부분은 빗변의 길이가

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}$

인 직각삼각형이고, 이 직각삼각형의 넓이가 최대이려면 선분 AB를 밑변으로 할 때 높이가 최대이어야 한다.

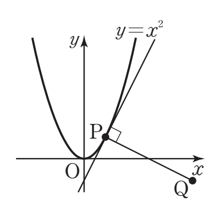
즉, 직각삼각형의 높이가 직각삼각형의 세 꼭짓점을 지나는 원의 반지름의 길이인 $5\sqrt{2}$이어야 하므로 구하는 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times10\sqrt{2}\times5\sqrt{2}=50$

답 50

041

다음 그림과 같이 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$, $\mathrm{Q}(5,\ -1)$이라 하면 점 P는 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점이다.



이때 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(a-5)^2+\{a^2-(-1)\}^2}$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=(a-5)^2+(a^2+1)^2$

따라서 선분 PQ의 길이가 최소일 때, $(a-5)^2+(a^2+1)^2$이 최솟값을 갖는다.

선분 PQ의 길이가 최소일 때, 점 P에서의 이차함수 $y=x^2$의 그래프의 접선과 직선 PQ는 서로 수직이다.

점 P에서의 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y-a^2=m(x-a)$

$\therefore y=mx-am+a^2$

이차방정식 $x^2=mx-am+a^2$, 즉 $x^2-mx-a^2+ma=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-m)^2-4(-a^2+ma)=0$

$m^2-4am+4a^2=0$, $(m-2a)^2=0$

$\therefore m=2a$

한편, 직선 PQ의 기울기가 $\dfrac{a^2+1}{a-5}$이므로

$$\frac{a^2+1}{a-5}\times 2a=-1$$

$2a(a^2+1)=-a+5,\ 2a^3+3a-5=0$

$(a-1)(2a^2+2a+5)=0$

이때 a는 실수이므로 $a=1$ $\to 2a^2+2a+5=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}>0$

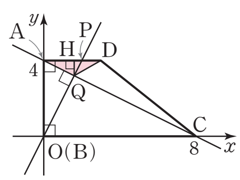
따라서 구하는 최솟값은

$(-4)^2+2^2=20$

답 20

042

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이고



A(0, 4), C(8, 0)

이때 직선 AC의 방정식은

$$\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1$$

$\therefore y=-\dfrac{1}{2}x+4$ ······ ㉠

직선 BP의 기울기는 2이고 점 B(0, 0)을 지나므로 직선 BP의 방정식은 $\to$ 두 직선 AC, BP는 수직이다.

$y=2x$ ······ ㉡

D$(t, 4)$라 하면 점 P는 선분 AD를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times t+1\times 0}{2+1}, \dfrac{2\times 4+1\times 4}{2+1}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{2}{3}t, 4\right)$

점 P는 직선 BP 위의 점이므로

$4=2\times\dfrac{2}{3}t \qquad \therefore t=3$

$\therefore$ D(3, 4)

한편, ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\dfrac{8}{5}$, $y=\dfrac{16}{5}$이므로 두 직선 AC, BP의 교점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{16}{5}\right)$

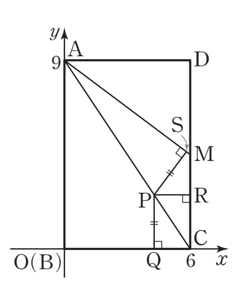
점 Q에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 AQD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{QH}=\frac{1}{2}\times 3\times\left(4-\frac{16}{5}\right)=\frac{6}{5}$$

답 ①

043

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이고



A(0, 9), C(6, 0), D(6, 9)

점 M은 선분 DC의 중점이므로

M$\left(6, \dfrac{9}{2}\right)$

직선 AC의 방정식은

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{9}=1$$

$\therefore y=-\dfrac{3}{2}x+9$

직선 AM의 방정식은

$$y-9=\frac{\frac{9}{2}-9}{6-0}x$$

$\therefore 3x+4y-36=0$

P(a, b) $(0<a<6,\ 0<b<9)$라 하면 점 P는 직선 AC 위의 점이므로

$b=-\dfrac{3}{2}a+9$ ······ ㉠

$\overline{PQ}=\overline{PS}$에서

$b=\dfrac{|3a+4b-36|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|3a+4b-36|}{5}$ ······ ㉡

$\to$ 점 P와 직선 $3x+4y-36=0$ 사이의 거리

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$-\dfrac{15}{2}a+45=3a$ ($\because a>0$)

$\therefore a=\dfrac{30}{7}$

$\therefore \overline{PR}=6-a=6-\dfrac{30}{7}=\dfrac{12}{7}$

답 $\dfrac{12}{7}$

044

P$(a, 0)$ $(-2<a<2)$이라 하면 직선 $y=x-2$와 평행하고 점 P를 지나는 직선 PR의 방정식은

$y=x-a$

점 R는 두 직선

$y=x-a,\ y=3x+6$

의 교점이므로 $x-a=3x+6$에서

$x=-\dfrac{a}{2}-3$

따라서 R$\left(-\dfrac{a}{2}-3, -\dfrac{3a}{2}-3\right)$이므로

$$\begin{aligned}\overline{PR}&=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}-3-a\right)^2+\left(-\frac{3a}{2}-3\right)^2}\\&=\sqrt{2\left(-\frac{3a}{2}-3\right)^2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}|-3a-6|\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}(3a+6)\ (\because -2<a<2)\end{aligned}$$

한편, 점 P와 직선 $y=x-2$, 즉 $x-y-2=0$ 사이의 거리는

$$\begin{aligned}\overline{PQ}&=\frac{|a-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\\&=\frac{2-a}{\sqrt{2}}\ (\because -2<a<2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle PQR&=\frac{1}{2}\times\overline{PR}\times\overline{PQ}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}(3a+6)\times\frac{2-a}{\sqrt{2}}\\&=\frac{12-3a^2}{4}\end{aligned}$$

따라서 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값은 $a=0$일 때 3이므로 점 P의 x좌표의 값은 0이다.

답 0

045

두 직선 l_1, l_2가 평행하므로 l_2: $x-2y+a=0$ $(a>0)$이라 하면

$\mathrm{C}(-a,\ 0)$, $\mathrm{D}\left(0,\ \dfrac{a}{2}\right)$

$\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -1)$이므로

$$\square\mathrm{ADCB}=\triangle\mathrm{ADC}+\triangle\mathrm{ACB}$$
$$=\frac{1}{2}\times(a+2)\times\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\times(a+2)\times1$$
$$=\frac{a^2}{4}+a+1$$

즉, $\dfrac{a^2}{4}+a+1=25$이므로

$a^2+4a-96=0$, $(a+12)(a-8)=0$

$\therefore a=8$ $(\because a>0)$

따라서 두 직선 l_1과 l_2 사이의 거리는 직선 l_1 위의 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$과 직선 l_2: $x-2y+8=0$ 사이의 거리와 같으므로

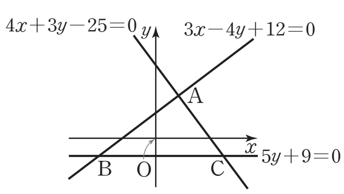
$$d=\frac{|2+8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$$

$\therefore d^2=20$

답 20

046

세 직선 $3x-4y+12=0$, $4x+3y-25=0$, $5y+9=0$을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



(i) ∠ABC를 이등분하는 직선의 방정식

∠ABC를 이등분하는 직선 위의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 점 P에서 두 직선 $3x-4y+12=0$, $5y+9=0$에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3x-4y+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\left|y-\left(-\frac{9}{5}\right)\right|$$

$|3x-4y+12|=|5y+9|$

$3x-4y+12=\pm(5y+9)$

이때 삼각형 ABC의 내각인 ∠ABC를 이등분하는 직선은 기울기가 양수이므로

$y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$

(ii) ∠BCA를 이등분하는 직선의 방정식

∠BCA를 이등분하는 직선 위의 점을 $\mathrm{P}'(x,\ y)$라 하면 점 P′에서 두 직선 $4x+3y-25=0$, $5y+9=0$에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|4x+3y-25|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\left|y-\left(-\frac{9}{5}\right)\right|$$

$|4x+3y-25|=|5y+9|$

$4x+3y-25=\pm(5y+9)$

이때 삼각형 ABC의 내각인 ∠BCA를 이등분하는 직선은 기울기가 음수이므로

$y=-\dfrac{1}{2}x+2$

(i), (ii)에서 구한 두 직선 $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$, $y=-\dfrac{1}{2}x+2$의 교점의 좌표는 주어진 세 직선으로 둘러싸인 삼각형의 내심의 좌표 $(a,\ b)$와 같다. 참고

$y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$, $y=-\dfrac{1}{2}x+2$를 연립하여 풀면

$x=2$, $y=1$

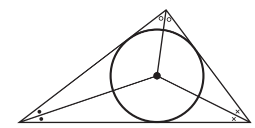
따라서 $a=2$, $b=1$이므로

$a+b=2+1=3$

답 3

참고

삼각형의 내심은 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이므로 두 내각의 이등분선의 교점을 구하면 된다.



047

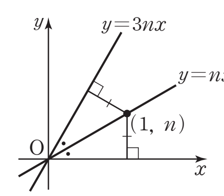
l_1: $mx-y=0$에서 $y=mx$

l_2: $nx-y=0$에서 $y=nx$

직선 l_1의 기울기는 직선 l_2의 기울기의 3배이므로

$m=3n$ …… ㉠

오른쪽 그림에서 직선 $y=nx$ 위의 점 $(1,\ n)$이 x축과 직선 $y=3nx$, 즉 $3nx-y=0$에 이르는 거리가 같으므로



$$n=\frac{|3n-n|}{\sqrt{(3n)^2+(-1)^2}}$$

$n\sqrt{9n^2+1}=2n$, $\sqrt{9n^2+1}=2$ $(\because n>0)$

위의 등식의 양변을 제곱하면

$9n^2+1=4$ $\quad\therefore n^2=\dfrac{1}{3}$

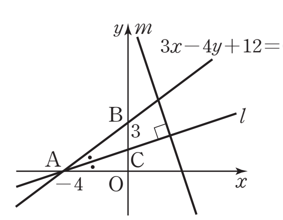
㉠에서 $m^2=9n^2=9\times\dfrac{1}{3}=3$이므로

$m^2n^2=3\times\dfrac{1}{3}=1$

답 1

048

오른쪽 그림과 같이 직선 $3x-4y+12=0$이 x축과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라 하면



$\mathrm{A}(-4,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 3)$

직선 l과 y축의 교점을 C라 하면

직선 l이 ∠BAO의 이등분선이므로

$\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{CO}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AO}}=5:4$

$\therefore \mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{4}{3}\right)$ $\quad 3\times\dfrac{4}{5+4}=\dfrac{4}{3}$

직선 l은 x절편이 -4, y절편이 $\dfrac{4}{3}$이므로 직선 l의 방정식은

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{\frac{4}{3}}=1$$

$\therefore y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$

이때 직선 l과 제1사분면에서 수직으로 만나는 직선 m의 기울기는 -3이므로 직선 m의 방정식을 $y=-3x+k$ (k는 상수)라 하자.
원점과 직선 $y=-3x+k$, 즉 $3x-y-k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$$\frac{|-k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

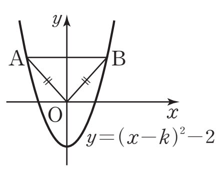
$|k|=10 \qquad \therefore k=\pm 10$
이때 두 직선 l, m이 제1사분면에서 만나므로
$k>0$
$\therefore k=10$
따라서 직선 m의 방정식은
$y=-3x+10$

답 ③

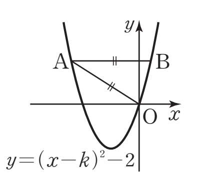
049

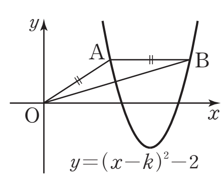
일등급의 메모장

삼각형 ABC가 이등변삼각형이 되는 경우
(i) $\overline{OA}=\overline{OB}$

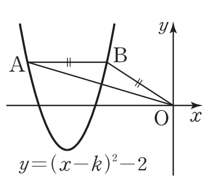


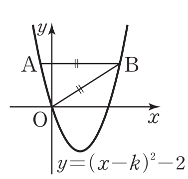
(ii) $\overline{OA}=\overline{AB}$



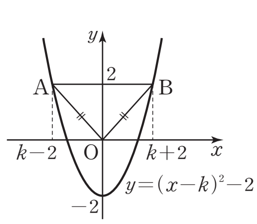


(iii) $\overline{OB}=\overline{AB}$

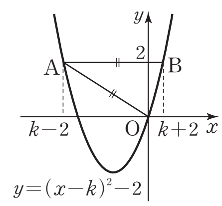


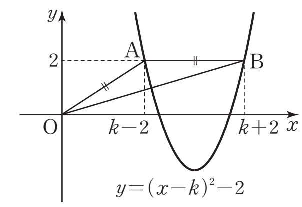


함수 $y=(x-k)^2-2$의 그래프와 직선 $y=2$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만나는 점의 x좌표는 $(x-k)^2-2=2$에서
$(x-k)^2=4$, $x-k=\pm 2$
$\therefore x=k-2$ 또는 $x=k+2$
이때 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작으므로
$A(k-2,\ 2)$, $B(k+2,\ 2)$
(i) $\overline{OA}=\overline{OB}$인 경우

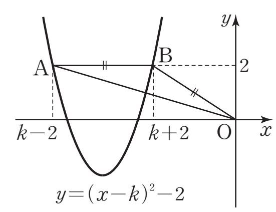


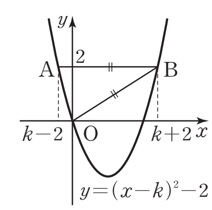
$\overline{OA}^2=\overline{OB}^2$이므로
$(k-2)^2+2^2=(k+2)^2+2^2$
$8k=0 \qquad \therefore k=0$
(ii) $\overline{OA}=\overline{AB}$인 경우





$\overline{OA}^2=\overline{AB}^2$이므로
$(k-2)^2+2^2=\{(k+2)-(k-2)\}^2$
$k^2-4k-8=0$
$\therefore k=2-2\sqrt{3}$ 또는 $k=2+2\sqrt{3}$
(iii) $\overline{OB}=\overline{AB}$인 경우





$\overline{OB}^2=\overline{AB}^2$이므로
$(k+2)^2+2^2=\{(k+2)-(k-2)\}^2$
$k^2+4k-8=0$
$\therefore k=-2-2\sqrt{3}$ 또는 $k=-2+2\sqrt{3}$
(i)~(iii)에서 $n=5$, $M=2+2\sqrt{3}$이므로
$n+M=5+(2+2\sqrt{3})=7+2\sqrt{3}$

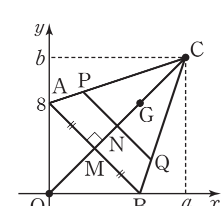
답 ②

050

일등급의 메모장

$\overline{AC}=\overline{BC}$ ➡ 점 C는 선분 AB의 수직이등분선 위의 점

$\overline{AC}=\overline{BC}$인 이등변삼각형 ABC에서 직선 CM은 선분 AB의 수직이등분선이다.
$B(t,\ 0)$이라 하면 선분 AB의 중점은
$M\left(\frac{t}{2},\ 4\right)$이고 직선 AB의 기울기는
$\frac{-8}{t}$이다.



즉, 직선 CM의 기울기는 $\frac{t}{8}$이므로 직선 CM의 방정식은

$$y-4=\frac{t}{8}\left(x-\frac{t}{2}\right) \qquad \therefore y=\frac{t}{8}x-\frac{t^2}{16}+4$$

이 직선이 원점 $O(0,\ 0)$을 지나므로
$-\frac{t^2}{16}+4=0$, $t^2=64$
$\therefore t=\pm 8$
$t=-8$일 때, 제1사분면 위의 점 C에 대하여 $\overline{AC}\neq\overline{BC}$
즉, $t=8$이므로 직선 CM의 방정식은 $y=x$
이 직선이 점 $C(a,\ b)$를 지나므로 $a=b$
이때 두 점 P, Q는 두 선분 AC, BC를 각각 $1:3$으로 내분하는

점이므로 직선 PQ는 직선 AB와 평행하다.
또, 두 점 P, Q의 중점을 N이라 하면 점 N은 선분 MC를 $1:3$으로 내분하는 점이고, 삼각형 CPQ의 무게중심 G는 선분 CN을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{MN}:\overline{NG}:\overline{GC}=1:1:2$

$\therefore \overline{MC}=2\overline{GC}=2\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

이때 $M(4,\ 4)$, $C(a,\ a)$이므로

$\overline{MC}=\sqrt{(a-4)^2+(a-4)^2}$

$=\sqrt{2}|a-4|$

즉, $\sqrt{2}|a-4|=8\sqrt{2}$이므로

$|a-4|=8$, $a-4=\pm8$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=12$

이때 $a>0$이므로 $a=12$, $b=12$

$\therefore a+b=12+12=24$

답 24

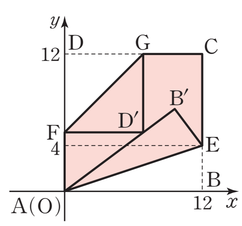
051

일등급의 메모장

(1) $\overline{BB'}\perp\overline{AE}$

(2) 선분 BB′의 중점은 직선 AE 위의 점이다.

오른쪽 그림과 같이 직선 AB를 x축으로 하고, 직선 AD를 y축으로 하면 점 A는 원점이고 $B(12,\ 0)$, $E(12,\ 4)$



점 $B'(p,\ q)$라 하면 직선 BB′의 기울기는 $\dfrac{q}{p-12}$이고, 직선 BB′과 직선 AE는 수직이므로 참고

$\dfrac{q}{p-12}\times\dfrac{1}{3}=-1$

$\therefore q=-3p+36$ ...... ㉠

또, 선분 BB′의 중점 $\left(\dfrac{12+p}{2},\ \dfrac{q}{2}\right)$가 직선 AE, 즉 직선 $y=\dfrac{1}{3}x$ 위의 점이므로

$\dfrac{q}{2}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{12+p}{2}$

$\therefore q=\dfrac{1}{3}p+4$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=\dfrac{48}{5}$, $q=\dfrac{36}{5}$

따라서 직선 AB′의 기울기는 $\dfrac{q}{p}=\dfrac{3}{4}$이므로 직선 AB′의 방정식은

$y=\dfrac{3}{4}x$

선분 FG와 선분 AC가 평행하므로 직선 DD′은 직선 AC와 수직이고, 점 D′은 직선 BD 위의 점이다.

즉, 점 D′은 직선 AB′과 직선 BD의 교점이므로 $y=\dfrac{3}{4}x$, $y=12-x$를 연립하면

$\dfrac{3}{4}x=12-x$ $\quad\therefore x=\dfrac{48}{7}$

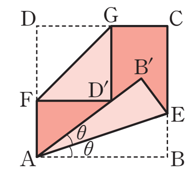
따라서 $\overline{DG}=\overline{FD'}=\dfrac{48}{7}$이므로 $a=7$, $b=48$

$\therefore a+b=7+48=55$

답 55

참고 확장

$\angle EAB=\angle EAB'=\theta$라 하면 직선 AE와 직선 AB′의 기울기가 각각 $\tan\theta$, $\tan2\theta$이다.
따라서 탄젠트의 배각의 공식을 이용하여 직선 AB′의 기울기를 구할 수 있다.



직선 AE의 기울기는

$\tan\theta=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$

이므로 직선 AB′의 기울기는

$\tan2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{3}{4}$

052

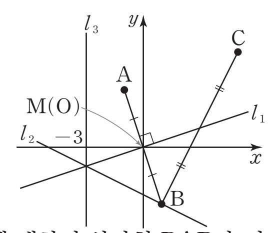
일등급의 메모장

삼각형 PAB가 이등변삼각형

➡ $\overline{PM}\perp\overline{AB}$

➡ 직선 l_1은 직선 AB의 수직이등분선

조건 ㈎에 의하여 직선 l_1과 직선 AB의 교점을 M이라 하면 $\overline{MA}=\overline{MB}$이므로 점 M은 선분 AB의 중점이다.



점 M의 좌표는

$\left(\dfrac{-1+1}{2},\ \dfrac{3+(-3)}{2}\right)$, 즉 $(0,\ 0)$

직선 l_1 위의 M이 아닌 임의의 점 P에 대하여 삼각형 PAB가 이등변삼각형이므로 선분 PM과 선분 AB는 서로 수직이다.
즉, 직선 l_1은 직선 AB의 수직이등분선이다.

이때 직선 AB의 기울기가 $\dfrac{-3-3}{1-(-1)}=-3$이므로 직선 l_1의 기울기는 $\dfrac{1}{3}$이다.

직선 l_1이 점 $M(0,\ 0)$을 지나므로 직선 l_1의 방정식은

$y=\dfrac{1}{3}x$

한편, 조건 ㈐에서 점 $(-3,\ 2)$를 지나고 y축에 평행한 직선 l_3의 방정식은

$x=-3$

따라서 두 직선 l_1과 l_3의 교점의 좌표는 $(-3,\ -1)$이다.
조건 ㈏에서 직선 l_2 위의 모든 점 Q에 대하여 $\overline{QB}\neq\overline{QC}$이므로 점 Q는 직선 BC의 수직이등분선 위의 점이 될 수 없다.
즉, 직선 l_2와 직선 BC의 수직이등분선의 교점이 없으므로 두 직선은 서로 평행하다.

직선 BC의 기울기가 $\dfrac{5-(-3)}{5-1}=2$이므로 직선 BC의 수직이등분선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이고, 직선 l_2의 기울기도 $-\dfrac{1}{2}$이다.

이때 세 직선 l_1, l_2, l_3이 한 점에서 만나므로 직선 l_2가 두 직선 l_1, l_3의 교점 $(-3,\ -1)$을 지난다.
즉, 직선 l_2의 방정식은

$y-(-1)=-\dfrac{1}{2}\{x-(-3)\}$ $\quad\therefore x+2y+5=0$

따라서 $a=1$, $b=2$이므로

$a+b=1+2=3$

답 3

다른 풀이

조건 (가)에서 직선 l_1 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$이므로

$\sqrt{\{x-(-1)\}^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-1)^2+\{y-(-3)\}^2}$

위의 등식의 양변을 제곱하여 식을 정리하면 $x-3y=0$

즉, 직선 l_1의 방정식은

$y=\frac{1}{3}x$

한편, 조건 (다)에서 점 $(-3,\ 2)$를 지나고 y축에 평행한 직선 l_3의 방정식은

$x=-3$

따라서 두 직선 l_1과 l_3의 교점의 좌표는 $(-3,\ -1)$이다.

조건 (나)에서 직선 l_2 위의 모든 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{QB}}\neq\overline{\mathrm{QC}}$이므로 점 Q는 직선 BC의 수직이등분선 위의 점이 될 수 없다.

즉, 직선 l_2는 직선 BC의 수직이등분선과 교점이 없으므로 두 직선은 서로 평행하다.

직선 BC의 기울기가 $\frac{5-(-3)}{5-1}=2$이므로 직선 BC의 수직이등분선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이고, 직선 l_2의 기울기도 $-\frac{1}{2}$이다.

이때 세 직선 l_1, l_2, l_3이 한 점에서 만나므로 직선 l_2가 두 직선 l_1, l_3의 교점 $(-3,\ -1)$을 지난다.

즉, 직선 l_2의 방정식은

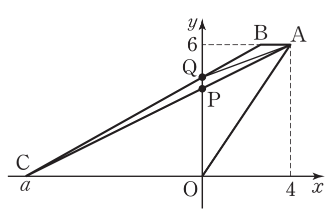
$y-(-1)=-\frac{1}{2}\{x-(-3)\}$ $\quad\therefore x+2y+5=0$

따라서 $a=1$, $b=2$이므로

$a+b=1+2=3$

053

일등급의 메모장



점 P는 선분 CA를 $2:1$로 내분하는 점 ➡ y좌표는 4

점 Q는 선분 CB를 $3:1$로 내분하는 점 ➡ y좌표는 $\frac{9}{2}$

삼각형 OPC의 넓이가 삼각형 OAP의 넓이의 2배이므로

$\overline{\mathrm{CP}}:\overline{\mathrm{PA}}=2:1$

점 P는 선분 CA를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\mathrm{P}\left(\frac{2\times4+1\times a}{2+1},\ \frac{2\times6+1\times0}{2+1}\right)$, 즉 $\mathrm{P}\left(\frac{a+8}{3},\ 4\right)$

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$\square\mathrm{PABQ}=\triangle\mathrm{PQC}=\frac{1}{2}S$

이때 삼각형 ACQ에서 $\overline{\mathrm{CP}}:\overline{\mathrm{PA}}=2:1$이므로

$\triangle\mathrm{APQ}=\frac{1}{2}\triangle\mathrm{PQC}=\frac{1}{4}S$ $\quad$ $\triangle\mathrm{PQC}:\triangle\mathrm{APQ}=2:1$

또, 삼각형 ABC에서

$\triangle\mathrm{ACQ}=\triangle\mathrm{PQC}+\triangle\mathrm{APQ}$

$=\frac{1}{2}S+\frac{1}{4}S$

$=\frac{3}{4}S$

$\triangle\mathrm{ABQ}=\triangle\mathrm{ABC}-\triangle\mathrm{ACQ}$

$=S-\frac{3}{4}S$

$=\frac{1}{4}S$

이므로 $\overline{\mathrm{CQ}}:\overline{\mathrm{QB}}=3:1$이고 점 Q는 선분 CB를 $3:1$로 내분하는 점이다.

$\overline{\mathrm{AB}}/\!/\overline{\mathrm{OC}}$이므로 점 B의 좌표를 $(b,\ 6)$이라 하면

$\mathrm{Q}\left(\frac{3\times b+1\times a}{3+1},\ \frac{3\times6+1\times0}{3+1}\right)$, 즉 $\mathrm{Q}\left(\frac{a+3b}{4},\ \frac{9}{2}\right)$ 다른 풀이

이때 세 점 O, P, Q가 한 직선 위의 점이므로 직선 OP의 기울기와 직선 OQ의 기울기가 서로 같다.

즉, $\dfrac{4}{\frac{a+8}{3}}=\dfrac{\frac{9}{2}}{\frac{a+3b}{4}}$에서 $a=6b-24$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\left(\frac{a+3b}{4}-\frac{a+8}{3}\right)^2+\left(\frac{9}{2}-4\right)^2$

$=\left(\frac{3b-8}{12}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

따라서 선분 PQ의 길이는 $b=\frac{8}{3}$에서 최솟값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

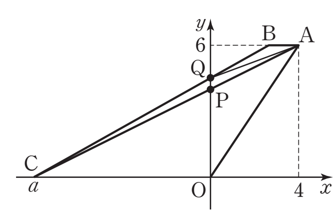
답 $\frac{1}{2}$

다른 풀이

두 점 $\mathrm{P}\left(\frac{a+8}{3},\ 4\right)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{a+3b}{4},\ \frac{9}{2}\right)$에 대하여

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\left(\frac{a+3b}{4}-\frac{a+8}{3}\right)^2+\left(\frac{9}{2}-4\right)^2$

이므로 $\frac{a+3b}{4}=\frac{a+8}{3}$일 때, 즉 두 점 P, Q의 x좌표가 같을 때 선분 PQ의 길이가 최소가 된다.



따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은

$\frac{9}{2}-4=\frac{1}{2}$

054

일등급의 메모장

$l_1\perp l_2$

➡ 삼각형 ABC의 외접원의 지름은 선분 BC이다.

➡ 세 점 A, M, Q가 한 직선 위에 있다.

➡ 네 점 A, M, Q, P가 한 직선 위에 있다.

$2x+y+2=0$, $x-2y-4=0$을 연립하여 풀면 $x=0$, $y=-2$이므로 두 직선 l_1, l_2의 교점 A는

$\mathrm{A}(0,\ -2)$

직선 l_1이 x축과 만나는 점은 $\mathrm{B}(-1,\ 0)$

직선 l_2가 x축과 만나는 점은 $\mathrm{C}(4,\ 0)$

ㄱ. 두 직선 l_1, l_2의 기울기가 각각 -2, $\frac{1}{2}$이고 두 직선의 기울기

의 곱이 -1이므로 두 직선 l_1, l_2는 서로 수직이다. (참)

ㄴ. 조건 (가)에서 점 Q가 삼각형 PBC의 무게중심이므로 삼각형 PBC의 넓이는 삼각형 QBC의 넓이의 3배이다. 다른풀이

조건 (나)에서 삼각형 PBC의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 3배이므로 두 삼각형 QBC, ABC의 넓이는 서로 같다.

두 삼각형 QBC, ABC에서 선분 BC가 공통이므로 점 Q와 직선 BC 사이의 거리는 점 A와 직선 BC 사이의 거리인 2이다.

즉, 점 Q의 y좌표는 2 또는 -2이다.

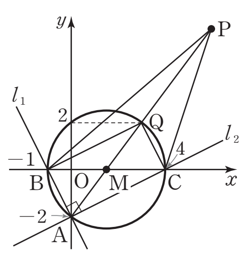
제1사분면에 있는 점 P에 대하여 세 점 P, B, C의 x좌표의 합과 y좌표의 합은 모두 양수이므로 점 Q도 제1사분면에 있는 점이다.

따라서 점 Q의 y좌표는 2이다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이므로 삼각형 ABC의 외접원의 지름은 선분 BC이다.

선분 BC의 중점을 M이라 하면 점 M은 외접원의 중심이고

$\mathrm{M}\left(\frac{-1+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$, 즉 $\mathrm{M}\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ …… ㉠



점 A의 y좌표는 -2, 점 Q의 y좌표는 2이고, 점 Q는 제1사분면에 있으므로 두 점 A, Q는 점 M에 대하여 서로 대칭이다.

따라서 세 점 A, M, Q는 한 직선 위에 있다.

이때 점 Q는 삼각형 PBC의 무게중심이므로 세 점 M, Q, P도 한 직선 위에 있다.

따라서 네 점 A, M, Q, P는 모두 한 직선 위에 있다.

$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{MQ}}$이고 $\overline{\mathrm{MQ}}:\overline{\mathrm{QP}}=1:2$이므로

$\overline{\mathrm{AM}}:\overline{\mathrm{MP}}=1:3$

점 M은 선분 AP를 $1:3$으로 내분하는 점이므로

$\mathrm{P}(a, b)$ $(a>0, b>0)$라 하면

$\mathrm{M}\left(\frac{1\times a+3\times 0}{1+3}, \frac{1\times b+3\times(-2)}{1+3}\right)$, 즉 $\mathrm{M}\left(\frac{a}{4}, \frac{b-6}{4}\right)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{3}{2}=\frac{a}{4}$, $0=\frac{b-6}{4}$

$\therefore a=6, b=6$

따라서 점 P의 x좌표와 y좌표의 합은

$6+6=12$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

다른풀이 확장

ㄴ. 세 점 $\mathrm{A}(0, -2)$, $\mathrm{B}(-1, 0)$, $\mathrm{C}(4, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\times 5\times 2=5$

따라서 조건 (나)에서 삼각형 PBC의 넓이는 15이다.

$\mathrm{P}(a, b)$ $(a>0, b>0)$라 하고 점 P에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 PBC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\times 5\times b=\frac{5}{2}b$

즉, $\frac{5}{2}b=15$에서 $b=6$

$\therefore \mathrm{P}(a, 6)$

이때 삼각형 PBC의 무게중심 Q의 좌표는

$\left(\frac{a+(-1)+4}{3}, \frac{6+0+0}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{a}{3}+1, 2\right)$

따라서 점 Q의 y좌표는 2이다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이므로 삼각형 ABC의 외접원의 지름은 선분 BC이다.

원의 중심은 선분 BC의 중점을 M이라 하면

$\mathrm{M}\left(\frac{-1+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$, 즉 $\mathrm{M}\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}=\frac{5}{2}$이므로 삼각형 ABC의 외접원의 방정식은

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}$

점 Q가 이 원 위의 점이고 ㄴ에서 $\mathrm{Q}\left(\frac{a}{3}+1, 2\right)$이므로

$\left(\frac{a}{3}+1-\frac{3}{2}\right)^2+2^2=\frac{25}{4}$, $\left(\frac{a}{3}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

$\frac{a}{3}-\frac{1}{2}=\pm\frac{3}{2}$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=6$

이때 $a>0$이므로 $a=6$이고, 점 P의 좌표는 $(6, 6)$이다.

따라서 점 P의 x좌표와 y좌표의 합은

$6+6=12$ (거짓)

I. 도형의 방정식

02 원의 방정식

001

선분 PQ를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$(1,\ 2)$ 참고

이므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$

이 원이 점 $\mathrm{P}(-2,\ 1)$을 지나므로

$(-2-1)^2+(1-2)^2=r^2$

$\therefore\ r^2=10$

따라서 주어진 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2)^2=10$

이 원이 점 $(2,\ k)$를 지나므로

$(2-1)^2+(k-2)^2=10$

$k^2-4k-5=0,\ (k+1)(k-5)=0$

$\therefore\ k=5\ (\because\ k>0)$

답 5

참고

선분 PQ를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times10+3\times(-2)}{1+3},\ \dfrac{1\times5+3\times1}{1+3}\right)$

002

원의 중심의 좌표는

$(1,\ 1)$ 참고

원의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(4+2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{13}$

이므로 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-1)^2=13$

ㄱ. 원의 중심의 좌표는 $(1,\ 1)$이다. (거짓)

ㄴ. 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$이므로 넓이는

$\pi\times(\sqrt{13})^2=13\pi$ (참)

ㄷ. $(4-1)^2+(3-1)^2=13$이므로 점 $(4,\ 3)$을 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

참고

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+4}{2},\ \dfrac{3-1}{2}\right)$

다른 풀이

두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 3)$, $\mathrm{B}(4,\ -1)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은

$(x+2)(x-4)+(y-3)(y+1)=0$ 참고

$x^2-2x-8+y^2-2y-3=0$

$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=13$

ㄱ. 원의 중심의 좌표는 $(1,\ 1)$이다. (거짓)

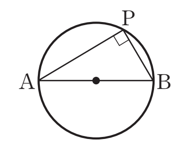
ㄴ. 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$이므로 넓이는

$\pi\times(\sqrt{13})^2=13\pi$ (참)

ㄷ. $(4-1)^2+(3-1)^2=13$이므로 점 $(4,\ 3)$을 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

참고



두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원 위의 임의의 한 점을

$\mathrm{P}(x,\ y)\ (x\neq x_1,\ x\neq x_2)$라 하면

$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$이므로

$\dfrac{y-y_1}{x-x_1}\times\dfrac{y-y_2}{x-x_2}=-1$

$(y-y_1)(y-y_2)=-(x-x_1)(x-x_2)$

$\therefore\ (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

003

$y=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$

이므로 그래프의 꼭짓점 A의 좌표는

$(2,\ a-4)$

$x^2+y^2+bx+4y-17=0$에서

$\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2+(y+2)^2=21+\dfrac{b^2}{4}$

이므로 원의 중심의 좌표는

$\left(-\dfrac{b}{2},\ -2\right)$

점 A와 원의 중심이 일치하므로

$2=-\dfrac{b}{2},\ a-4=-2$

따라서 $a=2,\ b=-4$이므로

$a+b=2+(-4)=-2$

답 ①

004

점 $(2a,\ a)$가 원 $x^2+y^2=5$의 내부에 있으려면 원의 중심 $(0,\ 0)$과 점 $(2a,\ a)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{5}$보다 작아야 하므로

$\sqrt{(2a)^2+a^2}<\sqrt{5}$

$5a^2<5,\ a^2<1$

$\therefore\ -1<a<1$ …… ㉠

점 $(2a,\ a)$가 원 $\overbrace{x^2+y^2+2x-1=0}^{(x+1)^2+y^2=2}$의 외부에 있으려면 원의 중심 $(-1,\ 0)$과 점 $(2a,\ a)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{2}$보다 커야 하므로

$\sqrt{(2a+1)^2+a^2}>\sqrt{2}$

$5a^2+4a-1>0,\ (a+1)(5a-1)>0$

$\therefore\ a<-1$ 또는 $a>\dfrac{1}{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 a의 값의 범위는

$\dfrac{1}{5}<a<1$

답 $\dfrac{1}{5}<a<1$

참고

점 $\mathrm{P}(p,\ q)$와 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$에 대하여

(1) 점 P가 원의 내부의 점이면

$(p-a)^2+(q-b)^2<r^2$

(2) 점 P가 원의 외부의 점이면
$(p-a)^2+(q-b)^2>r^2$

005

$x^2+y^2+4x-6y+m^2-10m+21=0$에서
$(x+2)^2+(y-3)^2=-m^2+10m-8$
이 방정식이 원을 나타내려면
$-m^2+10m-8>0$
$(m-5)^2<17$
$\therefore 5-\sqrt{17}<m<5+\sqrt{17}$
이때 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 넓이는 πr^2이므로 원의 넓이가 최대이려면 r^2의 값이 최대이어야 한다.
$r^2=-m^2+10m-8$
$\quad=-(m-5)^2+17$
이므로 $5-\sqrt{17}<m<5+\sqrt{17}$일 때, r^2은 $m=5$에서 최댓값 17을 갖는다.
따라서 원의 넓이의 최댓값은 17π이다.

답 17π

006

원점을 지나는 원의 방정식을
$x^2+y^2+Ax+By=0$ (A, B는 상수) 참고
이라 하면 이 원이 두 점 $(-3, 0)$, $(1, 2)$를 지나므로
$9-3A=0$, $5+A+2B=0$
$\therefore A=3$, $B=-4$
따라서 원 $x^2+y^2+3x-4y=0$이 점 $(0, k)$를 지나므로
$k^2-4k=0$
$k(k-4)=0$
$\therefore k=4$ ($\because k>0$)

답 4

참고
원의 방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$에 점 $(0, 0)$의 좌표를 대입하면 $C=0$이다.

007

원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 둘레의 길이가 8π이므로
$2\pi r=8\pi$
$\therefore r=4$
또, 원이 점 $(0, -3)$에서 y축에 접하고, 제3사분면을 지나므로
원의 중심의 좌표는
$(-4, -3)$
즉, 원의 방정식은
$(x+4)^2+(y+3)^2=16$
$\therefore x^2+y^2+8x+6y+9=0$
따라서 $a=8$, $b=6$, $c=9$이므로
$a+b+c=8+6+9=23$

답 23

008

원의 중심이 제2사분면에 있고 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(-r, r)$이다.
원의 중심이 곡선 $y=x^2-x-1$ 위에 있으므로
$r=r^2+r-1$
$r^2=1$
$\therefore r=1$ ($\because r>0$)
중심이 $(-1, 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식은
$(x+1)^2+(y-1)^2=1$
$\therefore x^2+y^2+2x-2y+1=0$
따라서 $a=2$, $b=-2$, $c=1$이므로
$a+b+c=2+(-2)+1=1$

답 1

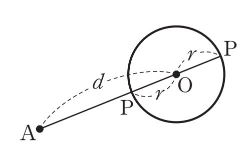
다른 풀이
원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$의 중심을 A라 하면 점 A는 제2사분면에 있고 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로 점 A는 직선 $y=-x$ 위에 있다.
또, 점 A는 곡선 $y=x^2-x-1$ 위에 있으므로
$x^2-x-1=-x$에서
$x^2=1$
$\therefore x=1$ 또는 $x=-1$
제2사분면 위의 점 A의 x좌표는 음수이므로
$A(-1, 1)$
즉, 주어진 원의 방정식은
$(x+1)^2+(y-1)^2=1$
$\therefore x^2+y^2+2x-2y+1=0$
따라서 $a=2$, $b=-2$, $c=1$이므로
$a+b+c=2+(-2)+1=1$

009

$x^2+y^2+8x-2y-3=0$에서
$(x+4)^2+(y-1)^2=20$
점 $A(3, 5)$와 원의 중심 $(-4, 1)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(3+4)^2+(5-1)^2}=\sqrt{65}$
이때 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로
$M=\sqrt{65}+2\sqrt{5}$
$m=\sqrt{65}-2\sqrt{5}$ 참고
$\therefore Mm=(\sqrt{65}+2\sqrt{5})(\sqrt{65}-2\sqrt{5})=45$

답 45

참고
점 A가 반지름의 길이가 r인 원의 중심 O에서 d만큼 떨어져 있을 때, 점 A와 원 위의 점 P 사이의 거리의 최댓값과 최솟값은
최댓값: $d+r$, 최솟값: $d-r$



010

$x^2+y^2-4x-6y+5=0$에서

$(x-2)^2+(y-3)^2=8$
원 위의 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면
$(a-2)^2+(b-3)^2=8$
이므로 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{A}(2,\ -5)$의 중점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면
$x=\dfrac{a+2}{2}$, $y=\dfrac{b-5}{2}$에서
$a=2x-2$, $b=2y+5$이므로
이를 $(a-2)^2+(b-3)^2=8$에 대입하면
$(2x-4)^2+(2y+2)^2=8$
즉, $(x-2)^2+(y+1)^2=2$
따라서 점 Q가 나타내는 도형은 중심이 $(2,\ -1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 넓이는
$\pi\times(\sqrt{2})^2=2\pi$

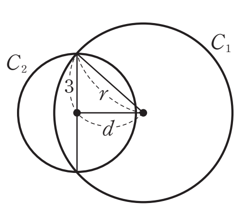
답 ②

011

원 C_1이 원 C_2의 둘레를 이등분하려면 두 원의 공통인 현이 원 C_2의 지름이어야 한다.
두 원의 공통인 현의 방정식은 다른풀이
$x^2+y^2+ax+2y+a-(x^2+y^2-4x+8y+11)=0$
$\therefore\ (a+4)x-6y+(a-11)=0$
C_2: $x^2+y^2-4x+8y+11=0$에서
$(x-2)^2+(y+4)^2=9$
직선 $(a+4)x-6y+(a-11)=0$이 원 C_2의 중심 $(2,\ -4)$를 지나야 하므로
$2(a+4)+24+(a-11)=0$
$3a=-21$
$\therefore\ a=-7$

답 -7

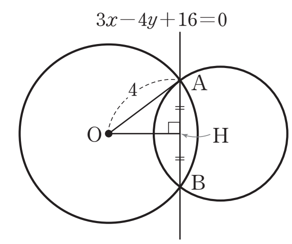
다른풀이
C_1: $x^2+y^2+ax+2y+a=0$에서
$\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+(y+1)^2=\dfrac{a^2}{4}-a+1$
C_2: $x^2+y^2-4x+8y+11=0$에서
$(x-2)^2+(y+4)^2=9$
한편, 다음 그림과 같이 두 원 C_1, C_2의 중심 사이의 거리를 d, 원 C_1의 반지름의 길이를 r라 하면



$9+d^2=r^2$ …… ㉠
이때 원 C_1의 중심 $\left(-\dfrac{a}{2},\ -1\right)$과 원 C_2의 중심 $(2,\ -4)$ 사이의 거리는
$d=\sqrt{\left(2+\dfrac{a}{2}\right)^2+(-4+1)^2}$
$=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+2a+13}$
이므로 ㉠에서
$9+\left(\dfrac{a^2}{4}+2a+13\right)=\dfrac{a^2}{4}-a+1$
$3a=-21$
$\therefore\ a=-7$

012

두 원의 교점 A, B를 지나는 직선의 방정식은
$(x^2+y^2-16)-(x^2+y^2+6x-8y+16)=0$
$\therefore\ 3x-4y+16=0$
다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2-16=0$의 중심 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{|16|}{\sqrt{3^2+4^2}}$
$=\dfrac{16}{5}$
이때 직각삼각형 AOH에서
$\overline{\mathrm{AO}}=4$, $\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{16}{5}$
이므로
$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{4^2-\left(\dfrac{16}{5}\right)^2}$
$=\dfrac{12}{5}$
$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}$
$=\dfrac{24}{5}$

답 ④

013

$(x+4)^2+(y-1)^2=10$에서
$x^2+y^2+8x-2y+7=0$
$(x-2)^2+(y+2)^2=25$에서
$x^2+y^2-4x+4y-17=0$
이므로 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2+8x-2y+7+k(x^2+y^2-4x+4y-17)=0$
(단, $k\neq-1$)
…… ㉠
이때 이 원이 점 $(3,\ 0)$을 지나므로
$40-20k=0$
$\therefore\ k=2$
$k=2$를 ㉠에 대입하여 정리하면
$x^2+y^2+2y-9=0$
$\therefore\ x^2+(y+1)^2=10$
따라서 두 원의 교점을 지나는 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 구하는 원의 넓이는 10π이다.

답 10π

014

원의 중심 $(2,\ a)$와 직선 $2x+3y-4a=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\times2+3a-4a|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|4-a|}{\sqrt{13}}$$

원의 반지름의 길이가 4이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|4-a|}{\sqrt{13}}<4$$

$\therefore\ 4-4\sqrt{13}<a<4+4\sqrt{13}$ 참고

따라서 정수 a는

$-10,\ -9,\ -8,\ \cdots,\ 18$

의 29개이다.

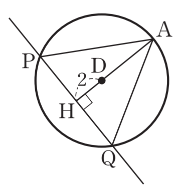
답 29

참고

$4\sqrt{13}=\sqrt{208}=14.\times\times\times$이므로

$4-4\sqrt{13}=-10.\times\times\times,\ 4+4\sqrt{13}=18.\times\times\times$

015



정삼각형 APQ의 꼭짓점 A에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 원의 중심 O는 삼각형 APQ의 무게중심이므로

$\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{OH}}=2:1$ 참고

$4:\overline{\mathrm{OH}}=2:1$ → 선분 AO는 원 $x^2+y^2=16$의 반지름의 길이이므로 4이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{OH}}=2$

즉, 원의 중심 O와 직선 $x+y-a=0$ 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|-a|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2$$

$\therefore\ a=2\sqrt{2}\ (\because\ a>0)$

답 $2\sqrt{2}$

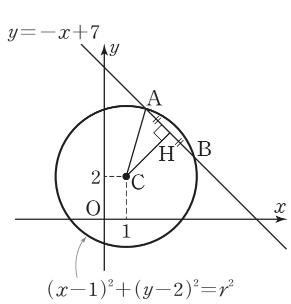
참고

원 $x^2+y^2=16$의 중심 $\mathrm{O}(0,\ 0)$은 삼각형 APQ의 외심이고, 삼각형 APQ가 정삼각형이므로 외심과 무게중심이 일치한다. 즉, 점 O는 삼각형 APQ의 무게중심이므로

$\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{OH}}=2:1$

016

다음 그림과 같이 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$의 중심을 C라 하고 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$$

$$=\frac{1}{2}\times4=2$$ 참고

선분 CH는 점 $\mathrm{C}(1,\ 2)$와 직선

$y=-x+7$, 즉 $x+y-7=0$

사이의 거리와 같으므로

$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{|1+2-7|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$=2\sqrt{2}$$

직각삼각형 ACH에서

$r^2=2^2+(2\sqrt{2})^2=12$

$\therefore\ r=2\sqrt{3}\ (\because\ r>0)$

답 $2\sqrt{3}$

참고 현의 성질

(1) 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.
또, 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.

(2) 한 원 또는 합동인 두 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다.
또, 한 원 또는 합동인 두 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

017

주어진 원의 넓이가 9π이므로 원의 반지름의 길이는 3이고, 원의 중심 $(1,\ -1)$과 직선 $y=mx+2m$, 즉 $mx-y+2m=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|m-(-1)+2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

이때 직선과 원이 접하므로

$$\frac{|3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=3$$

$|3m+1|=3\sqrt{m^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$9m^2+6m+1=9m^2+9$

$6m=8$

$\therefore\ m=\frac{4}{3}$

답 ⑤

다른 풀이

기울기가 m이고 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=3^2$에 접하는 직선의 방정식은

$y+1=m(x-1)\pm3\sqrt{m^2+1}$

즉, $y=mx-m-1\pm3\sqrt{m^2+1}$

이 직선이 $y=mx+2m$이므로

$2m=-m-1\pm3\sqrt{m^2+1}$

$3m+1=\pm3\sqrt{m^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$9m^2+6m+1=9m^2+9$

$\therefore\ m=\frac{4}{3}$

018

원 C의 중심 $(a,\ a)$와 직선 $y=2x$, 즉 $2x-y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$$\frac{|2a-a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{a}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$\therefore a=5$

원 C의 중심 $(5,\ 5)$와 직선 $y=kx$, 즉 $kx-y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$$\frac{|5k-5|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

$|5k-5|=\sqrt{10}\times\sqrt{k^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$25k^2-50k+25=10k^2+10$

$3k^2-10k+3=0$

$(3k-1)(k-3)=0$

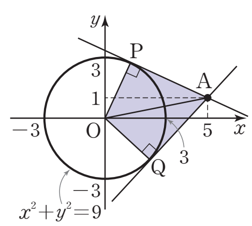
$\therefore k=\frac{1}{3}$ 또는 $k=3$

이때 $0<k<1$이므로

$k=\frac{1}{3}$

답 ③

019



$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$이고, 원의 반지름의 길이가 3이므로 직각삼각형 APO에서

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(\sqrt{26})^2-3^2}$

$=\sqrt{17}$

$\therefore \triangle\mathrm{APO}=\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{17}$

$=\frac{3\sqrt{17}}{2}$

이때

$\triangle\mathrm{APO}\equiv\triangle\mathrm{AQO}$ (RHS 합동)

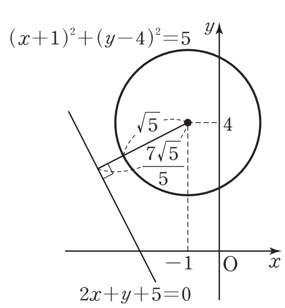
이므로 사각형 APOQ의 넓이는

$S=2\triangle\mathrm{APO}=3\sqrt{17}$

$\therefore S^2=153$

답 153

020



원의 중심 $(-1,\ 4)$와 직선 $2x+y+5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\times(-1)+4+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$$

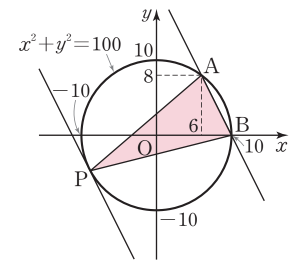
원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원 위의 점 P와 직선 $2x+y+5=0$ 사이의 거리의 최솟값은

$\frac{7\sqrt{5}}{5}-\sqrt{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

답 ②

021

삼각형 ABP의 넓이는 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행하면서 y절편이 음수일 때 최대이다.



직선 AB의 기울기가

$\frac{0-8}{10-6}=-2$

이므로 접선의 방정식은

$y=-2x\pm10\sqrt{(-2)^2+1}$

$\therefore y=-2x\pm10\sqrt{5}$

점 P를 지나는 접선의 방정식은

$y=-2x-10\sqrt{5}$

이때 $x^2+(-2x-10\sqrt{5})^2=100$에서

$x^2+8\sqrt{5}x+80=0$

$(x+4\sqrt{5})^2=0$

$\therefore x=-4\sqrt{5},\ y=-2\sqrt{5}$

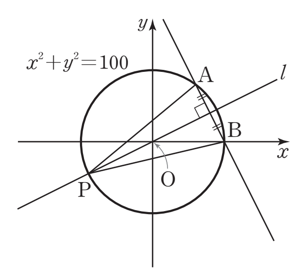
즉, $\mathrm{P}(-4\sqrt{5},\ -2\sqrt{5})$이므로

$a=-4\sqrt{5},\ b=-2\sqrt{5}$

$\therefore ab=-4\sqrt{5}\times(-2\sqrt{5})=40$

답 40

다른풀이



오른쪽 그림과 같이 원의 점 P를 한 꼭짓점으로 하고 선분 AB를 밑변으로 하는 삼각형 ABP는 ∠APB가 예각인 이등변삼각형일 때 넓이가 최대이다.

이때 점 P는 선분 AB의 수직이등분선인 직선 l과 원 $x^2+y^2=100$의 교점이다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{0-8}{10-6}=-2$이고

중점은 $\left(\frac{6+10}{2},\ \frac{8+0}{2}\right)$, 즉 $(8,\ 4)$이므로 직선 l의 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 점 $(8,\ 4)$를 지나는 직선이다.

$y=\frac{1}{2}(x-8)+4$, 즉 $y=\frac{1}{2}x$

이를 $x^2+y^2=100$에 대입하면

$x^2+\frac{1}{4}x^2=100$

$x^2=80$

$\therefore x=-4\sqrt{5}$ ($\because x<0$)

즉, $\mathrm{P}(-4\sqrt{5},\ -2\sqrt{5})$이므로

$a=-4\sqrt{5},\ b=-2\sqrt{5}$

$\therefore ab=-4\sqrt{5}\times(-2\sqrt{5})=40$

022

원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(3,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$3x+y=10$

$\therefore 3x+y-10=0$

원 $(x+2)^2+(y-3)^2=k$의 중심 $(-2, 3)$과 직선 $3x+y-10=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|-6+3-10|}{\sqrt{3^2+1^2}}$$
$$=\frac{13\sqrt{10}}{10}$$

직선 $3x+y-10=0$과 원 $(x+2)^2+(y-3)^2=k$가 접하므로

$$k=d^2=\frac{169}{10}$$

답 ③

023

접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(3, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=m(x-3)$

$\therefore mx-y-3m=0$

원 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$의 중심 $(2, -1)$과 직선 $mx-y-3m=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|2m-(-1)-3m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$$
$$=\frac{|1-m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 2이고 직선과 원이 접하므로

$\frac{|1-m|}{\sqrt{m^2+1}}=2$에서 $|1-m|=2\sqrt{m^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$3m^2+2m+3=0$

이때 두 접선의 기울기는 이 이차방정식의 두 근과 같다.

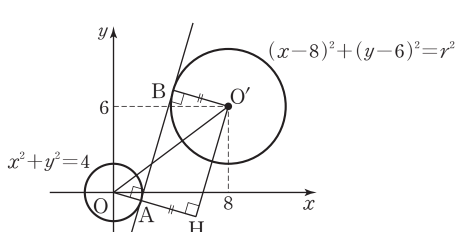
따라서 접선의 기울기의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{3}{3}=1$

답 1

024

다음 그림과 같이 원 $(x-8)^2+(y-6)^2=r^2$의 중심 O′에서 선분 OA의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OO'}=\sqrt{8^2+6^2}=10$, 주어진 두 원의 중심의 좌표는 O(0, 0), O′(8, 6)

$\overline{OH}=r+2$ ($\because r>0$)

$\overline{O'H}=\overline{AB}=8$

이므로 직각삼각형 OHO′에서

$r+2=\sqrt{10^2-8^2}$

$\therefore r=4$

답 4

025

ㄱ. $(x-1)^2+(y-4)^2=25$에 $y=0$을 대입하면

$(x-1)^2+(-4)^2=25$

$x^2-2x-8=0$

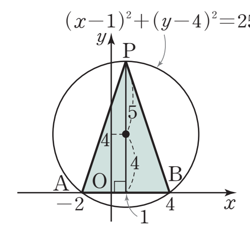
$(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

즉, 두 점 A, B의 x좌표의 합은 2이다. (거짓)

ㄴ. 삼각형 ABP의 밑변을 선분 AB로 생각하면 높이가 최대일 때 삼각형 ABP의 넓이가 최대가 된다.

높이가 최대일 때는 오른쪽 그림과 같이 점 P의 좌표가 $(1, 9)$일 때이므로 S의 최댓값은

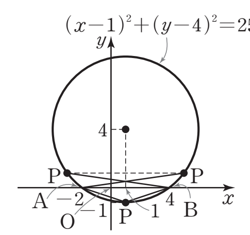


$\frac{1}{2}\times6\times9=27$ (참)

ㄷ. $S=3$일 때의 삼각형 ABP의 밑변을 선분 AB로 생각하여 높이를 h라 하면

$\frac{1}{2}\times6\times h=3$에서 $h=1$

즉, 점 P의 y좌표가 -1 또는 1이어야 하므로 이를 만족시키는 점 P의 개수는 3이다. (참)

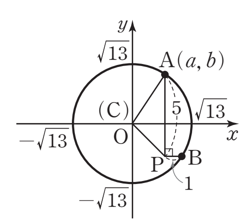


따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

026

다음 그림과 같이 원의 중심 C가 원점, 선분 AP가 y축과 평행하도록 좌표평면 위에 놓고 A(a, b)라 하면



P$(a, b-5)$, B$(a+1, b-5)$

두 점 A, B가 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=13$ …… ㉠

$(a+1)^2+(b-5)^2=13$ …… ㉡

㉡에서 $a^2+b^2+2a-10b+13=0$

이때 ㉠에서 $a^2+b^2=13$이므로

$2a-10b+26=0$, 즉 $a=5b-13$

이를 ㉠에 대입하면

$(5b-13)^2+b^2=13$

$b^2-5b+6=0$

$\therefore b=2$ 또는 $b=3$

한편 $a=5b-13$이므로

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=3$

$a=-3$, $b=2$일 때 P$(-3, -3)$

$a=2$, $b=3$일 때 P$(2, -2)$

이때 점 $(-3,\ -3)$은 원의 외부의 점이므로

$P(2,\ -2)$

$\therefore\ \overline{CP}=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

027

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{PM}^2+\overline{BM}^2)$ …… ㉠

삼각형의 중선 정리

이때 $M\left(\frac{8+16}{2},\ \frac{7+3}{2}\right)$에서 $M(12,\ 5)$이고

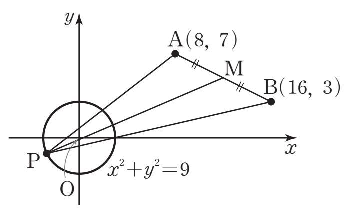
$\overline{BM}=\sqrt{(12-16)^2+(5-3)^2}=2\sqrt{5}$

이므로 ㉠에서

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{PM}^2+20)$

즉, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값은 선분 PM의 길이가 최대일 때 최댓값을 갖는다.

선분 PM의 길이가 최대인 경우는 오른쪽 그림과 같이 선분 PM이 원의 중심을 지날 때이다.



원의 반지름의 길이가 3이므로

(선분 PM의 길이의 최댓값)

$=3+\underbrace{\sqrt{12^2+5^2}}_{\overline{OM}}=16$

따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 최댓값은

$2\times(16^2+20)=552$

답 552

028

점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AH}=1$, $\overline{OH}=\sqrt{3}$이므로

$\angle AOH=30^\circ$

이때 $\triangle AOH\equiv\triangle A'OH$ (SAS 합동)이므로

$\angle A'OH=\angle A'OA-\angle AOH=30^\circ$, $\overline{OA}=\overline{OA'}$, $\overline{OH}$는 공통

$\overline{A'H}=\overline{AH}=1$

즉, $A'(-1,\ \sqrt{3})$이므로 직선 A′B의 방정식은

$y=\frac{0-\sqrt{3}}{2+1}(x-2)$

$\therefore\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$ …… ㉠

한편, $\overline{OA}=\overline{OA'}$, $\angle A'OA=60^\circ$에서 삼각형 A′OA는 정삼각형이므로 삼각형 A′OA의 외심은 삼각형 A′OA의 무게중심과 같다.

즉, 삼각형 A′OA의 외접원은 중심이 $\left(0,\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{2}{3}\overline{OH}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$인 원이므로 삼각형 A′OA의 외접원의 방정식은

$x^2+\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=1,\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ($\because\ x>0$)

따라서 $P\left(1,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$이므로

$3ab=3\times1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

답 $\sqrt{3}$

029

ㄱ. 두 직선 l_1: $2x+y+2=0$, l_2: $x-2y-4=0$에서

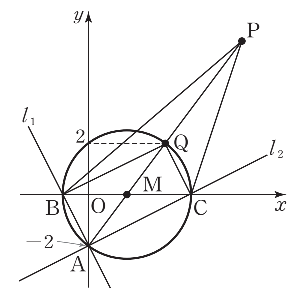
$2\times1+1\times(-2)=0$이므로 l_1, l_2는 서로 수직이다. (참)

ㄴ. 두 직선 l_1, l_2의 교점 A의 좌표는

$A(0,\ -2)$

두 직선 l_1, l_2가 x축과 만나는 두 점 B, C의 좌표는 각각

$B(-1,\ 0)$, $C(4,\ 0)$



조건 (나)에서 삼각형 PBC의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 3배이므로 두 삼각형의 밑변을 선분 BC라 하면 삼각형 PBC의 높이는 삼각형 ABC의 높이의 3배이다.

즉, 삼각형 PBC의 높이는 6이므로 제1사분면에 있는 점 P의 y좌표는 6이다.

조건 (가)에서

(점 Q의 y좌표)$=\frac{6+0+0}{3}=2$ (참)

ㄷ. $\angle BAC=90^\circ$이므로 선분 BC는 삼각형 ABC의 외접원의 지름이다.

외접원의 중심을 M이라 하면 $M\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이고, 외접원의 반지름의 길이는

$\overline{MB}=\frac{3}{2}-(-1)=\frac{5}{2}$

외접원의 방정식은

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}$

점 Q가 이 원 위의 점이고, ㄴ에서 점 Q의 y좌표가 2이므로

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+2^2=\frac{25}{4}$

$x-\frac{3}{2}=\pm\frac{3}{2}$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=3$

점 Q는 제1사분면 위의 점이므로

$x=3$

점 P의 x좌표를 a라 하면

$\frac{a+(-1)+4}{3}=3$

$\therefore\ a=6$

$P(6,\ 6)$이므로 x좌표와 y좌표의 합은 12이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

다른 풀이

ㄷ. 두 점 $B(-1,\ 0)$, $C(4,\ 0)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은 $(x+1)(x-4)+(y-0)(y-0)=0$이 원 위의 점 Q의 y좌표가 2일 때, x좌표는 3이므로

$Q(3,\ 2)$

선분 BC의 중점을 M이라 할 때, 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-1+4}{2}, \dfrac{0+0}{2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$

조건 (가)에서 점 P는 선분 MQ를 3 : 2로 외분하는 점이므로

$\left(\dfrac{3\times3-2\times\frac{3}{2}}{3-2}, \dfrac{3\times2-2\times0}{3-2}\right)$, 즉 $(6, 6)$

따라서 $P(6, 6)$이므로 x좌표와 y좌표의 합은 12이다.

030

원 C_1: $x^2+y^2=10$ 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 좌표는

$(1, 3)$, $(3, 1)$

(i) 점 P의 좌표가 $(1, 3)$일 때

점 $(1, 3)$과 원 C_2의 중심 $(6, 5)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(6-1)^2+(5-3)^2}=\sqrt{29}$

이므로

$\sqrt{29}-5\le\overline{PQ}\le\sqrt{29}+5$

$\therefore 0.\times\times\times\le\overline{PQ}\le10.\times\times\times$

선분 PQ의 길이는 자연수이므로 1, 2, 3, …, 10이 될 수 있고, 각 길이를 만족시키는 점 Q는 2개씩 존재하므로 순서쌍 (P, Q)의 개수는

$10\times2=20$

(ii) 점 P의 좌표가 $(3, 1)$일 때

점 $(3, 1)$과 원 C_2의 중심 $(6, 5)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(6-3)^2+(5-1)^2}=5$

이므로

$5-5\le\overline{PQ}\le5+5$

$\therefore 0\le\overline{PQ}\le10$

선분 PQ의 길이는 자연수이므로 1, 2, 3, …, 10이 될 수 있고, 10을 제외하고 각 길이를 만족시키는 점 Q는 2개씩 존재하므로 순서쌍 (P, Q)의 개수는 참고

$9\times2+1=19$

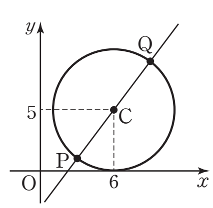
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (P, Q)의 개수는

$20+19=39$

답 39

참고

$\overline{PQ}=10$인 경우는 오른쪽 그림과 같이 직선 PQ가 원 C_2의 중심을 지나는 경우이므로 점 P의 좌표가 $(3, 1)$일 때, $\overline{PQ}=10$을 만족시키는 점 Q의 개수는 1이다.



031

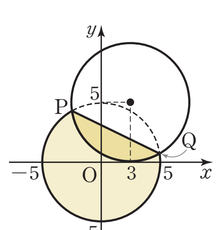
호 PQ는 오른쪽 그림과 같이 점 $(3, 0)$에서 x축에 접하고 반지름의 길이가 5인 원의 일부이므로 그 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-5)^2=25$

$\therefore x^2+y^2-6x-10y+9=0$

선분 PQ는 두 원

$x^2+y^2-25=0$,



$x^2+y^2-6x-10y+9=0$

의 공통인 현이므로 직선 PQ의 방정식은

$x^2+y^2-25-(x^2+y^2-6x-10y+9)=0$

$\therefore 3x+5y-17=0$

따라서 직선 PQ의 x절편은 $\dfrac{17}{3}$, y절편은 $\dfrac{17}{5}$이므로

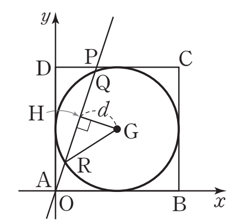
$30S=30\times\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{17}{3}\times\dfrac{17}{5}\right)$

$=289$

답 289

032

오른쪽 그림과 같이 정사각형 ABCD를 선분 AB가 x축, 선분 AD가 y축에 오도록 좌표평면 위에 놓으면 점 P가 선분 DC를 1 : 2로 내분하므로



$P(2, 6)$

직선 AP의 방정식은

$y=3x$

원의 중심을 G라 하면

$G(3, 3)$

원의 중심과 직선 $y=3x$, 즉 $3x-y=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\dfrac{|9-3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$

$=\dfrac{6}{\sqrt{10}}$

원의 반지름의 길이는 3이므로 직각삼각형 GHR에서

$\overline{HR}^2=\overline{RG}^2+\overline{HG}^2$

$=3^2-\dfrac{36}{10}$

$=\dfrac{27}{5}$

$\therefore \overline{QR}=2\overline{HR}$

$=2\times\sqrt{\dfrac{27}{5}}$

$=\dfrac{6\sqrt{15}}{5}$

답 ③

033

$\angle APB$는 호 AB에 대한 원주각이고 $\angle APB=45^\circ$이므로

$\angle ACB=90^\circ$ → 호 AB에 대한 중심각

즉, 삼각형 ABC는 $\overline{CA}=\overline{CB}$인 직각이등변삼각형이다.

세 점 A, B, P를 지나는 원의 반지름의 길이를

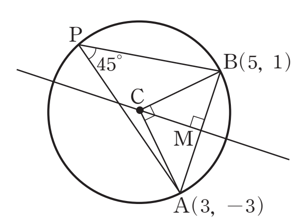
$r=\overline{CA}$

라 하면 삼각형 ABC에서

$\overline{AB}^2=\overline{CA}^2+\overline{CB}^2$

$(5-3)^2+(1+3)^2=r^2+r^2$

$r^2=10$



$\therefore r=\sqrt{10}$

선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-3+1}{2}\right)$, 즉 $(4, -1)$

직선 AB의 기울기가 $\frac{1+3}{5-3}=2$이고 직선 CM은 선분 AB의 수직이등분선이므로 직선 CM의 방정식은

$y+1=-\frac{1}{2}(x-4)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+1$

$C\left(a, -\frac{a}{2}+1\right)$이라 하면 중심이 C이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원의 방정식은

$(x-a)^2+\left(y+\frac{a}{2}-1\right)^2=10$

점 A$(3, -3)$이 원 위의 점이므로

$(3-a)^2+\left(-3+\frac{a}{2}-1\right)^2=10$

$5a^2-40a+60=0$, $a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0$

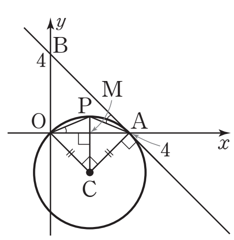
$\therefore a=2$ 또는 $a=6$

즉, C$(2, 0)$ 또는 C$(6, -2)$이다.

따라서 $k=0$ 또는 $k=2$이므로 모든 k의 값의 합은 2이다.

답 2

034



삼각형 OAB의 내부에 있고 ∠AOP=∠BAP를 만족시키는 점 P는 오른쪽 그림과 같이 점 O를 지나고 직선 AB와 점 A에서 접하는 원 위의 점이다. 참고

이 원의 중심을 C라 하면

∠OAC=∠BAC−∠BAO

$=90°-45°=45°$

∠AOC=∠OAC=45°

한편, 선분 OA의 중점을 M이라 하면 $\overline{OA}\perp\overline{CM}$이므로

$\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OA}=2$

$\overline{CM}=\overline{OM}=2$

$\therefore$ C$(2, -2)$

원의 반지름의 길이는

$\overline{OC}=\sqrt{2^2+(-2)^2}$

$=2\sqrt{2}$

점 P의 y좌표는 ∠PCO=∠PCA=45°일 때 최대이므로 구하는 최댓값은 $2\sqrt{2}-2$이다.

따라서 $a=2$, $b=-2$이므로

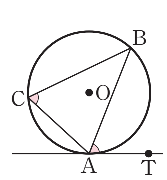
$ab=2\times(-2)=-4$

답 -4

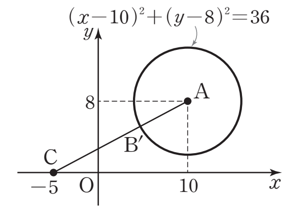
참고 원의 접선과 현이 이루는 각

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.

➡ ∠BAT=∠BCA



035



선분 AB의 길이가 6이므로

$\sqrt{(a-10)^2+(b-8)^2}=6$

$(a-10)^2+(b-8)^2=36$

즉, 점 B는 원 $(x-10)^2+(y-8)^2=36$ 위의 점이다.

점 C$(-5, 0)$이라 하면

$a^2+b^2+10a+25=(a+5)^2+b^2=\overline{CB}^2$

이므로 $a^2+b^2+10a+25$는 선분 CB의 길이가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

선분 CA와 원 $(x-10)^2+(y-8)^2=36$의 교점을 B′이라 하면 선분 CA의 길이의 최솟값은 선분 CB′의 길이와 같다.

$\therefore \overline{CB'}=\overline{CA}-\overline{AB'}$

$=\sqrt{(10+5)^2+8^2}-6$ → 원의 반지름의 길이

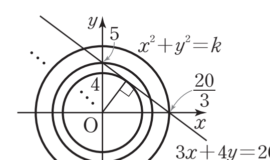
$=17-6=11$

따라서 $a^2+b^2+10a+25$의 최솟값은

$11^2=121$

답 ④

036



원 $x^2+y^2=k$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $3x+4y=20$, 즉 $3x+4y-20=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-20|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$

이므로 $k=16$일 때, 원과 직선은 제1사분면의 한 점에서 만난다. → 원과 직선이 접한다.

또, 직선 $3x+4y=20$은 두 점 $(0, 5)$, $\left(\frac{20}{3}, 0\right)$을 지나므로 원과 직선은 $k=5^2=25$일 때 제1사분면에서 한 점에서 만나고

$k=\left(\frac{20}{3}\right)^2=\frac{400}{9}=44.\times\times\times$일 때 제1사분면에서 만나지 않는다.

(i) $k=1, 2, 3, \cdots, 15$일 때
원과 직선은 만나지 않으므로
$C(k)=0$

(ii) $k=16$일 때
원과 직선이 제1사분면의 한 점에서 만나므로
$C(k)=1$

(iii) $k=17, 18, 19, \cdots, 24$일 때
원과 직선이 제1사분면의 두 점에서 만나므로
$C(k)=2$

(iv) $k=25, 26, 27, \cdots, 44$일 때
원과 직선이 제1사분면의 한 점에서 만나므로
$C(k)=1$

(v) $k=45, 46, \cdots, 100$일 때
원과 직선은 제1사분면에서 만나지 않으므로
$C(k)=0$

(i)~(v)에서

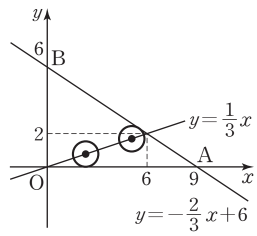
$C(1)+C(2)+C(3)+\cdots+C(100)$

$=1+2\times8+20=37$

답 37

037

원 $(x-3a)^2+(y-a)^2=\frac{1}{9}$의 중심을 C라 하면 C$(3a,\ a)$이므로



점 C는 직선 $y=\frac{1}{3}x$ 위에 있다.

두 직선 $y=\frac{1}{3}x$, $y=-\frac{2}{3}x+6$의 교점의 좌표는 $(6,\ 2)$이므로 주어진 원이 삼각형 AOB의 경계 또는 내부에 있으려면 $0<3a<6$, 즉 $0<a<2$이어야 한다.

이때 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{3}$이므로 원이 x축에 접하도록 하는 a의 값은 $\frac{1}{3}$이다.

원과 직선 $y=-\frac{2}{3}x+6$, 즉 $2x+3y-18=0$이 접하려면 참고

$$\frac{|2\times 3a+3\times a-18|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{|9a-18|}{\sqrt{13}}=\frac{1}{3},\ |9a-18|=\frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$9a-18=\pm\frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$\therefore\ a=2-\frac{\sqrt{13}}{27}\ (\because\ 0<a<2)$$

따라서 $\frac{1}{3}\le a\le 2-\frac{\sqrt{13}}{27}$이므로

$$M=2-\frac{\sqrt{13}}{27},\ m=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ M+m=\frac{7}{3}-\frac{\sqrt{13}}{27}$$

답 ③

참고

원의 중심 C$(3a,\ a)$와 직선 $y=-\frac{2}{3}x+6$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\frac{1}{3}$과 같다.

038

점 C$(a,\ b)$는 이차함수 $y=x^2-6x+7$의 그래프 위의 점이므로

$b=a^2-6a+7$

이것을 $2a-b+16>0$에 대입하면

$2a-(a^2-6a+7)+16>0$

$-a^2+8a+9>0$ …… ㉠

$(a+1)(a-9)<0$

$\therefore\ -1<a<9$

이차함수 $y=x^2-6x+7$의 그래프 위의 점 C$(a,\ a^2-6a+7)$을 중심으로 하는 원이 직선 $y=2x+16$, 즉 $2x-y+16=0$에 접하므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$r=\frac{|2a-(a^2-6a+7)+16|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{|-a^2+8a+9|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{-a^2+8a+9}{\sqrt{5}}\ (\because\ ㉠)$$

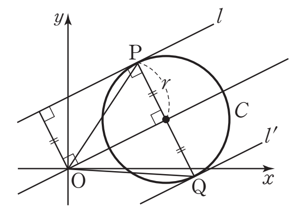
$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}(a-4)^2+5\sqrt{5}\ (-1<a<9)$$

따라서 반지름의 길이 r는 $a=4$일 때 최댓값 $5\sqrt{5}$를 가지므로 원의 넓이의 최댓값은

$\pi\times(5\sqrt{5})^2=125\pi$

답 125π

039



오른쪽 그림과 같이 삼각형 OPQ가 정삼각형이고 선분 PQ는 원 C의 지름이므로 원점을 지나고 두 직선 l, l'과 평행한 직선을 그으면 이 직선은 원의 중심을 지난다.

원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 원점과 직선

l: $\sqrt{2}x-2y+\sqrt{6}=0$ 사이의 거리가 r와 같으므로

$$r=\frac{|\sqrt{6}|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-2)^2}}=1$$

원점 O를 지나고 직선 l과 평행한 직선의 방정식은

$\sqrt{2}x-2y=0$

이고, 직선 l이 원의 중심을 지나므로 원의 중심의 좌표를 $(\sqrt{2}k,\ k)$ $(k>0)$라 하자.

정삼각형 OPQ에 대하여 점 O에서 선분 PQ의 중점까지의 거리는 $\sqrt{3}r$, 즉 $\sqrt{3}$이어야 하므로

$\sqrt{(\sqrt{2}k)^2+k^2}=\sqrt{3}$

$\sqrt{3k^2}=\sqrt{3}$, $k^2=1$

$\therefore\ k=1\ (\because\ k>0)$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(\sqrt{2},\ 1)$이므로 원 C의 방정식은

$(x-\sqrt{2})^2+(y-1)^2=1$

답 ②

040

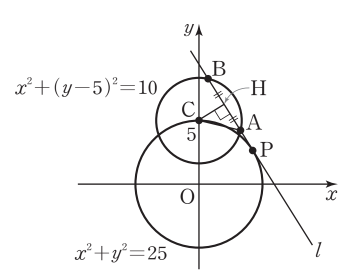
점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$ $(x_1>0,\ y_1>0)$이라 하면 점 P가 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점이므로

$x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}=25$ …… ㉠

접선 l의 방정식은

$x_1x+y_1y=25$

다음 그림과 같이 원 $x^2+(y-5)^2=10$의 중심을 C라 하고, 점 C$(0,\ 5)$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 점 H라 하자.



$\overline{\text{AH}}=\frac{1}{2}\overline{\text{AB}}=\frac{1}{2}\times 6=3$이고 원 $x^2+(y-5)^2=10$의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이므로 직각삼각형 CAH에서

$\overline{\text{CH}}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-3^2}=1$

이때 선분 CH의 길이는 원 $x^2+(y-5)^2=10$의 중심 $(0,\ 5)$와 직선 l: $x_1x+y_1y-25=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|5y_1-25|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=1$, $\dfrac{|5y_1-25|}{5}=1$ ($\because$ ㉠)

$|5y_1-25|=5$, $5y_1-25=\pm5$

$\therefore y_1=4$ ($\because 0<y_1<5$)

$x_1^2+y_1^2=25$에서 $x_1=3$ ($\because 0<x_1<5$)

따라서 직선 l의 방정식은 $3x+4y=25$, 즉 $3x+4y-25=0$이므로

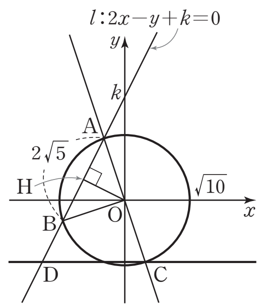
$a=3$, $b=4$

$\therefore ab=3\times4=12$

답 12

041

직선 l의 방정식을 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ $(k>0)$이라 하고 원점 O에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{5}$

$\overline{OA}=\sqrt{10}$이므로 직각삼각형 AHO에서

$\overline{OH}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}$

선분 OH는 원점 O와 직선 l 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$\therefore k=5$ ($\because k>0$)

두 점 A, B는 직선 l: $2x-y+5=0$이 원 $x^2+y^2=10$과 만나는 점이므로

$y=2x+5$에서 $x^2+(2x+5)^2=10$

$x^2+4x+3=0$, $(x+1)(x+3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-3$

즉, 두 점 A, B의 좌표는 각각 A$(-1, 3)$, B$(-3, -1)$이고 점 C는 점 A와 원점에 대하여 대칭이므로

C$(1, -3)$

점 C를 지나고 x축과 평행한 직선이 직선 l과 만나는 점 D의 좌표는 D$(-4, -3)$

따라서 $a=-4$, $b=-3$이므로

$a+b=-4+(-3)=-7$

답 ③

042

직선 AB의 기울기가 $\dfrac{3}{4}$이고 두 직선 CD, EF는 각각 직선 AB와 수직이므로 두 직선 CD, EF의 기울기는 모두 $-\dfrac{4}{3}$이다.

기울기가 $-\dfrac{4}{3}$인 접선의 방정식을 $y=-\dfrac{4}{3}x+k$ (k는 상수)라 하면 원의 중심 $(4, 3)$과 직선 $y=-\dfrac{4}{3}x+k$, 즉 $4x+3y-3k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|16+9-3k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|25-3k|}{5}$

원의 반지름의 길이가 $\dfrac{6}{5}$이고 원과 직선이 접하므로

$\dfrac{|25-3k|}{5}=\dfrac{6}{5}$

$|25-3k|=6$

$\therefore k=\dfrac{19}{3}$ 또는 $k=\dfrac{31}{3}$

따라서 $\text{C}\left(\dfrac{19}{4}, 0\right)$, $\text{D}\left(0, \dfrac{19}{3}\right)$, $\text{E}\left(\dfrac{31}{4}, 0\right)$, $\text{F}\left(0, \dfrac{31}{3}\right)$이므로

$\square\text{CEFD}=\triangle\text{FDE}-\triangle\text{DOC}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{31}{4}\times\dfrac{31}{3}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{19}{4}\times\dfrac{19}{3}$

$=25$

답 25

043

원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 (x_n, y_n)에서의 접선의 방정식은

$x_nx+y_ny=1$

이 직선이 점 $(0, n)$을 지나므로

$ny_n=1$

$\therefore y_n=\dfrac{1}{n}$

또, 점 (x_n, y_n)은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 $x_n^2+y_n^2=1$에 위의 식을 대입하면

$x_n^2=1-\left(\dfrac{1}{n}\right)^2$

$=\dfrac{n^2-1}{n^2}$

이므로

$\dfrac{x_n^2}{y_n}=\dfrac{n^2-1}{n}$

$=\dfrac{(n-1)(n+1)}{n}$

$\therefore \left(\dfrac{x_2}{\sqrt{y_2}}\times\dfrac{x_3}{\sqrt{y_3}}\times\dfrac{x_4}{\sqrt{y_4}}\times\dfrac{x_5}{\sqrt{y_5}}\right)^2$

$=\dfrac{x_2^2}{y_2}\times\dfrac{x_3^2}{y_3}\times\dfrac{x_4^2}{y_4}\times\dfrac{x_5^2}{y_5}$

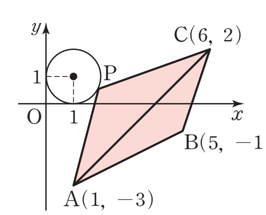
$=\dfrac{1\times3}{2}\times\dfrac{2\times4}{3}\times\dfrac{3\times5}{4}\times\dfrac{4\times6}{5}$

$=72$

답 72

044

사각형 ABCP의 넓이는 오른쪽 그림과 같이 삼각형 APC와 삼각형 ABC의 넓이의 합으로 구할 수 있다.



직선 AC의 방정식은

$y+3=\dfrac{2+3}{6-1}$

$\therefore x-y-4=0$

직선 $x-y-4=0$과 점 B$(5, -1)$ 사이의 거리는

$\dfrac{|5-(-1)-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

이고, $\overline{AC}=\sqrt{(6-1)^2+(2+3)^2}=5\sqrt{2}$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times5\sqrt{2}\times\sqrt{2}=5$ 다른 풀이

삼각형 ABC의 넓이가 5로 일정하므로 사각형 ABCP의 넓이가 최소일 때는 삼각형 APC의 넓이가 최소, 즉 점 P와 선분 AC 사이의 거리가 최소일 때이다.

$\dfrac{|1-1-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}-1=2\sqrt{2}-1$

원의 중심 $(1,\ 1)$과 직선 $x-y-4=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1-1-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$

이고 원의 반지름의 길이가 1이므로 점 P와 선분 AC 사이의 거리의 최솟값은

$2\sqrt{2}-1$

따라서 사각형 ABCP의 넓이의 최솟값은

$\dfrac{1}{2}\times 5\sqrt{2}\times(2\sqrt{2}-1)+5=15-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$이므로

$a=15,\ b=-\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ a-2b=15-2\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)=20$

답 20

다른 풀이

사선 공식을 사용하면 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}|-1+10-18-(-15-6+2)|=5 \rightarrow \dfrac{1}{2}\left|\begin{matrix} 1 & 5 & 6 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & -3 \end{matrix}\right|$

삼각형 ABC의 넓이가 5로 일정하므로 사각형 ABCP의 넓이가 최소일 때는 삼각형 APC의 넓이가 최소일 때이고, 이는 점 P와 선분 AC 사이의 거리가 최소일 때가 된다.

원의 중심 $(1,\ 1)$과 직선 $x-y-4=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1-1-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$

이므로 점 P와 선분 AC 사이의 거리의 최솟값은

$2\sqrt{2}-1$

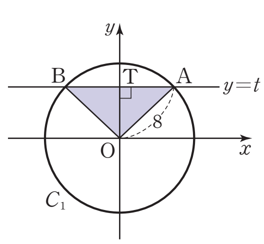
사각형 ABCP의 넓이의 최솟값은

$\dfrac{1}{2}\times 5\sqrt{2}\times(2\sqrt{2}-1)+5=15-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

따라서 $a=15,\ b=-\dfrac{5}{2}$이므로

$a-2b=15-2\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)=20$

045



직선 $y=t$와 y축의 교점을 T라 하면 직각삼각형 OAT에서

$\overline{\mathrm{OA}}=8,\ \overline{\mathrm{OT}}=t$이므로

$\overline{\mathrm{TA}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OT}}^2}=\sqrt{64-t^2}$

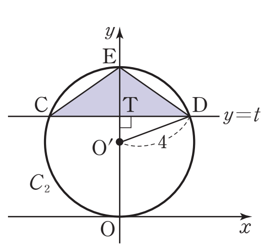
$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{TA}}=2\sqrt{64-t^2}$

이때 $\overline{\mathrm{OT}}=t$이므로 삼각형 OAB의 넓이 $S_1(t)$는

$S_1(t)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OT}}$

$=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{64-t^2}\times t$

$=t\sqrt{64-t^2}$



또, 원 C_2의 중심을 O′이라 하면 직각삼각형 O′DT에서

$\overline{\mathrm{O'D}}=4,\ \overline{\mathrm{O'T}}=|t-4|$이므로

$\overline{\mathrm{TD}}=\sqrt{\overline{\mathrm{O'D}}^2+\overline{\mathrm{O'T}}^2}$

$=\sqrt{4^2-(t-4)^2}$

$=\sqrt{8t-t^2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CD}}=2\overline{\mathrm{TD}}=2\sqrt{8t-t^2}$

이때 $\overline{\mathrm{ET}}=8-t$이므로 삼각형 ECD의 넓이 $S_2(t)$는

$S_2(t)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{ET}}$

$=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{8t-t^2}\times(8-t)$

$=(8-t)\sqrt{8t-t^2}$

$(8-t)S_1(t)=\sqrt{10}\times tS_2(t)$이므로

$(8-t)\times t\sqrt{64-t^2}=\sqrt{10}\times t(8-t)\sqrt{8t-t^2}$

$\rightarrow$ $0<t<8$이므로 양변을 $t(8-t)$로 나누면

$\sqrt{64-t^2}=\sqrt{10}\times\sqrt{8t-t^2}$

$64-t^2=10(8t-t^2)$

$9t^2-80t+64=0$

$(9t-8)(t-8)=0$

$\therefore\ t=\dfrac{8}{9}\ (\because\ 0<t<8)$

답 ⑤

다른 풀이

(i) $x^2+y^2=64$에 $y=t$를 대입하면

$x^2+t^2=64$

$x^2=64-t^2$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{64-t^2}$

즉, $\mathrm{A}(\sqrt{64-t^2},\ t)$, $\mathrm{B}(-\sqrt{64-t^2},\ t)$이므로

$S_1(t)=\dfrac{1}{2}\times|\sqrt{64-t^2}+\sqrt{64-t^2}|\times t$

$=t\sqrt{64-t^2}$

(ii) $x^2+(y-4)^2=16$에 $y=t$를 대입하면

$x^2+(t-4)^2=16$

$x^2=16-(t-4)^2$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{8t-t^2}$

즉, $\mathrm{C}(-\sqrt{8t-t^2},\ t)$, $\mathrm{D}(\sqrt{8t-t^2},\ t)$이므로

$S_2(t)=\dfrac{1}{2}\times|-\sqrt{8t-t^2}-\sqrt{8t-t^2}|\times(8-t)$

$=(8-t)\sqrt{8t-t^2}$

(i), (ii)에서

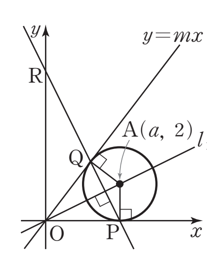
$(8-t)\times t\sqrt{64-t^2}=\sqrt{10}\times t(8-t)\sqrt{8t-t^2}$

$9t^2-80t+64=0$

$(9t-8)(t-8)=0$

$\therefore\ t=\dfrac{8}{9}\ (\because\ 0<t<8)$

046



원의 중심을 A라 하고, 점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면 점 A의 좌표는 $(a,\ 2)$, 원점 O와 점 A를 지나는 직선을 l_1이라 하면 직선 l_1의 방정식은 다른 풀이

$y=\dfrac{2}{a}x$

직선 PQ는 점 $\mathrm{P}(a,\ 0)$을 지나고 직선 l_1과 수직이므로 직선 PQ의 기울기는 $-\dfrac{a}{2}$이고

직선 PQ의 방정식은

$y=-\dfrac{a}{2}(x-a)$

직선 PQ가 y축과 만나는 점 R의 좌표는

$\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$

삼각형 ROP의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\times a\times\frac{a^2}{2}=16$, $a^3=64$

$\therefore a=4$

즉, 점 A의 좌표는 $(4,\ 2)$이고 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$\frac{|4m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

$|4m-2|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$3m^2-4m=0$

$m(3m-4)=0$

$\therefore m=\frac{4}{3}$ $(\because m>0)$

$\therefore 60m=60\times\frac{4}{3}=80$

답 80

다른 풀이

삼각형 ROP의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\times a\times\overline{RO}=16$

$\therefore \overline{RO}=\frac{32}{a}$

$\angle ROP=\angle OPA=90^\circ$
$\angle PRO=\angle AOP$
$=90^\circ-\angle RPO$ $(\because \overline{OA}\perp\overline{PR})$

한편, $\triangle ROP\backsim\triangle OPA$ (AA 닮음)

이므로 $\overline{RO}:\overline{OP}=\overline{OP}:\overline{PA}$에서

$\frac{32}{a}:a=a:2$

$\frac{64}{a}=a^2$

$\therefore a=4$

따라서 점 A의 좌표는 $(4,\ 2)$이고 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

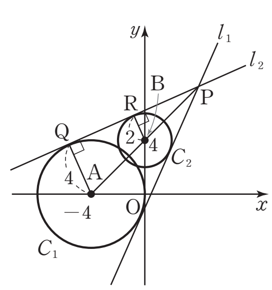
$\frac{|4m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

$|4m-2|=2\sqrt{m^2+1}$

$\therefore m=\frac{4}{3}$ $(\because m>0)$

$\therefore 60m=60\times\frac{4}{3}=80$

047



원 C_1의 중심을 A라 하면 $A(-4,\ 0)$

원 C_2의 중심을 B라 하면

$B(0,\ 4)$ → $\triangle PAQ\backsim\triangle PBR$ (AA 닮음)

이때 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$이므로 점 B는 선분 AP의 중점이다. 참고

즉, $\frac{-4+a}{2}=0$, $\frac{0+b}{2}=4$이므로

$a=4$, $b=8$

$\therefore P(4,\ 8)$

점 P에서 원 C_1에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y=m(x-4)+8$

$\therefore mx-y-4m+8=0$

직선 $mx-y-4m+8=0$과 점 A 사이의 거리가 4이므로

$\frac{|-4m-4m+8|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=4$

$|18-8m|=4\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$3m^2-8m+3=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 직선 l_1, l_2의 기울기의 곱은 $c=\frac{3}{3}=1$

$\therefore a+b+c=4+8+1=13$

답 13

참고

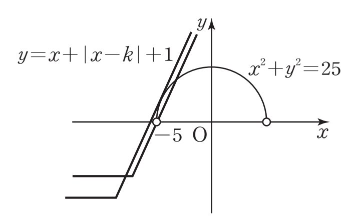
두 점 A, B에서 직선 l_2에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하면 두 삼각형 APQ, BPR가 서로 닮음이므로

$\overline{PA}:\overline{PB}=\overline{AQ}:\overline{BR}=2:1$

048

$y=x+|x-k|+1$에서 $y=\begin{cases}k+1 & (x<k)\\ 2x-k+1 & (x\ge k)\end{cases}$

(i) 주어진 두 도형이 다음 그림과 같은 경우



직선 $y=2x-k+1$, 즉 $2x-y-(k-1)=0$이 도형 $x^2+y^2=25$ $(y>0)$에 접할 때

→ 원의 중심: $(0,\ 0)$, 반지름의 길이: 5

$\frac{|-(k-1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=5$에서

$|k-1|=5\sqrt{5}$

$k-1=\pm5\sqrt{5}$

$k=1-5\sqrt{5}$ $(\because k+1<0)$

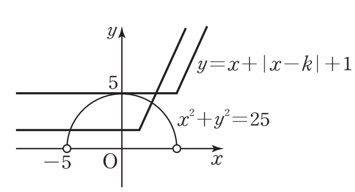
직선 $y=2x-k+1$이 점 $(-5,\ 0)$을 지날 때

$0=2\times(-5)-k+1$

$\therefore k=-9$

즉, 주어진 두 도형이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는 $1-5\sqrt{5}<k<-9$

(ii) 주어진 두 도형이 다음 그림과 같은 경우



직선 $y=k+1$이 $(-5,\ 0)$을 지날 때, $k=-1$

직선 $y=k+1$이 $(0,\ 5)$를 지날 때, $k=4$

즉, 주어진 두 도형이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는 $-1<k<4$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 범위는

$1-5\sqrt{5}<k<-9$ 또는 $-1<k<4$

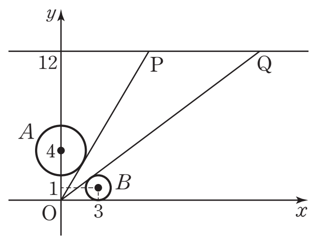
이므로 $a=1-5\sqrt{5}$, $b=-9$, $c=-1$, $d=4$

$\therefore a+b+c+d=1-5\sqrt{5}+(-9)+(-1)+4$
$=-5-5\sqrt{5}$

답 ①

049

감시소에서 오토바이를 관측할 수 있는 때는 오토바이가 다음 그림의 두 지점 P, Q 사이를 지날 때이다.



원 A의 접선의 방정식을 $y=mx$라 하면 원 A와 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$이 접하므로

$\frac{4}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

$\therefore m=\sqrt{3}$ ($\because m>0$)

이때 접선 $y=\sqrt{3}x$와 직선 $y=12$의 교점의 x좌표는 $4\sqrt{3}$이다.

원 B의 접선의 방정식을 $y=nx$라 하면 원 B와 직선 $y=nx$, 즉 $nx-y=0$이 접하므로

$\frac{|3n-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$

$8n^2-6n=0$

$\therefore n=\frac{3}{4}$ ($\because n>0$)

이때 접선 $y=\frac{3}{4}x$와 직선 $y=12$의 교점의 x좌표는 16이다.

따라서 오토바이를 관측할 수 있는 위치인 두 지점 P, Q 사이의 거리는 $(16-4\sqrt{3})$ km이므로 오토바이를 관측할 수 있는 시간은 $(16-4\sqrt{3})\div 0.5=32-8\sqrt{3}$(분)

답 ②

050

점 O(0, 0)을 지나는 원 C의 방정식을

$x^2+y^2+px+qy=0$ (p, q는 상수)이라 하면 이 원이 두 점 A(8, −6), B(6, −2)를 지나므로

$8p-6q+100=0$

$6p-2q+40=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$p=-2$, $q=14$

즉, 원 C의 방정식은

$x^2+y^2-2x+14y=0$

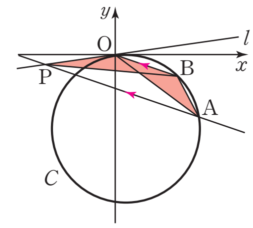
$\therefore (x-1)^2+(y+7)^2=50$

접선 l의 방정식은

$(0-1)(x-1)+(0+7)(y+7)=50$

$\therefore x-7y=0$ …… ㉠

두 삼각형 OAB와 OPB의 넓이가 같으려면 직선 OB와 직선 AP가 평행해야 한다. 다른 풀이



이때 직선 OB의 기울기가 $-\frac{1}{3}$이므로

직선 AP는 기울기가 $-\frac{1}{3}$이고

점 (8, −6)을 지나는 직선이다.

즉, 직선 AP의 방정식은

$y+6=-\frac{1}{3}(x-8)$

$\therefore x+3y+10=0$ …… ㉡

이때 점 P는 접선 l과 직선 AP의 교점이므로 ㉠, ㉡을 연립하여 점 P의 좌표를 구하면 $x=-7$, $y=-1$

즉, P(−7, −1)

따라서 $a=-7$, $b=-1$이므로

$a^2+b^2=49+1=50$

답 50

다른 풀이

두 삼각형 OAB와 OPB의 넓이가 같으려면 직선 OB와 두 점 A, P 사이의 거리가 같아야 한다.

직선 OB의 방정식은

$y=-\frac{1}{3}x$

$\therefore x+3y=0$

즉, 직선 OB와 점 A(8, −6) 사이의 거리는

$\frac{|8-18|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$

한편, 점 P(a, b)가 직선 $x-7y=0$ 위에 있으므로

$a-7b=0$에서 $a=7b$

$\therefore$ P($7b$, b)

즉, 직선 OB와 점 P($7b$, b) 사이의 거리는

$\frac{|7b+3b|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}|b|$

따라서 $\sqrt{10}=\sqrt{10}|b|$이므로

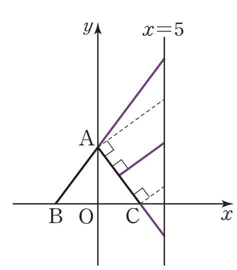
$b=-1$ ($\because b<0$)

이때 $a=7b$에서 $a=-7$

$\therefore a^2+b^2=49+1=50$

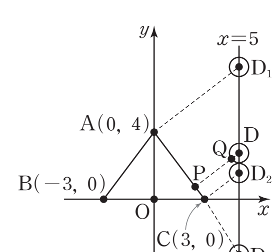
051

일등급의 메모장



원 $(x-5)^2+(y-a)^2=\frac{1}{9}$의 중심은 $(5, a)$이므로 직선 $x=5$ 위의 점과 삼각형 ABC 위의 점 사이의 거리가 주어졌을 때, 다음과 같이 나누어 조사한다.

① 점 $(5, a)$와 점 A 사이의 거리
② 점 $(5, a)$와 직선 AC 사이의 거리
③ 점 $(5, a)$와 점 C 사이의 거리



직선 $x=5$ 위의 점 중에서 직선 AC에 내린 수선의 발이 점 A와 점 C가 되는 점을 각각 점 D_1, D_2라 하고, 원 $(x-5)^2+(y-a)^2=\frac{1}{9}$의 중심을 점 D(5, a)라 하자.

직선 AC의 기울기가 $-\frac{4}{3}$이므로

직선 AC와 수직인 직선 AD_1의 기울기는 $\frac{3}{4}$이고 직선 AD_1의 방정식은

$y-4=\frac{3}{4}x$

$\therefore y=\frac{3}{4}x+4$

$y=\frac{3}{4}x+4$와 $x=5$를 연립하여 두 직선의 교점 D_1의 좌표를 구하면

$D_1\left(5,\ \frac{31}{4}\right)$

같은 방법으로 점 D_2의 좌표를 구하면

직선 CD_2의 방정식은 $y=\frac{3}{4}(x-3)$, 즉 $y=\frac{3}{4}x-\frac{9}{4}$이므로 $y=\frac{3}{4}x-\frac{9}{4}$와 $x=5$를 연립하여 푼다.

$D_2\left(5,\ \frac{3}{2}\right)$

(i) $a\ge\frac{31}{4}$일 때

선분 PQ의 길이의 최솟값은 점 A$(0,\ 4)$와 원의 중심 D$(5,\ a)$ 사이의 거리에서 원의 반지름의 길이 $\frac{1}{3}$을 뺀 값이므로

$\sqrt{5^2+(a-4)^2}-\frac{1}{3}>5-\frac{1}{3}=\frac{14}{3}$ $(\because (a-4)^2>0)$

따라서 선분 PQ의 최솟값이 3이 될 수 없다.

(ii) $\frac{3}{2}\le a<\frac{31}{4}$일 때

선분 PQ의 길이의 최솟값은 직선 AC와 원의 중심 D$(5,\ a)$ 사이의 거리에서 원의 반지름의 길이 $\frac{1}{3}$을 뺀 값이다.

이때 직선 $\underbrace{4x+3y-12=0}_{\text{직선 AC}}$과 원의 중심 D$(5,\ a)$ 사이의 거리는

$\overline{\text{PD}}=\frac{|20+3a-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|3a+8|}{5}$

이므로

$\frac{|3a+8|}{5}-\frac{1}{3}=3$에서 $|3a+8|=\frac{50}{3}$

$3a+8=\pm\frac{50}{3}$

$\therefore a=\frac{26}{9}\ \left(\because \frac{3}{2}\le a<\frac{31}{4}\right)$

(iii) $a<\frac{3}{2}$일 때

선분 PQ의 길이의 최솟값은 점 C$(3,\ 0)$과 원의 중심 D$(5,\ a)$ 사이의 거리에서 원의 반지름의 길이 $\frac{1}{3}$을 뺀 값이므로

$\sqrt{(5-3)^2+a^2}-\frac{1}{3}=3$, $\sqrt{4+a^2}=\frac{10}{3}$

$a^2=\frac{64}{9}$

$\therefore a=-\frac{8}{3}\ \left(\because a<\frac{3}{2}\right)$

(i)~(iii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

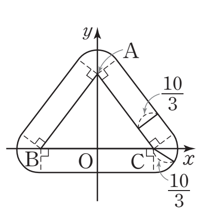
$\frac{26}{9}+\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{2}{9}$

답 $\frac{2}{9}$

참고

원의 중심과 삼각형 ABC 위의 점의 거리가 $\frac{10}{3}$이 되는 위치를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

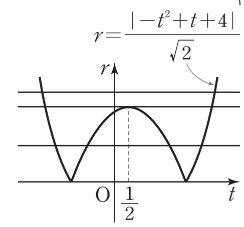
이 중 직선 $x=5$ 위에 해당되는 점은 2개가 있으며 1개는 직선 AC와의 거리를 이용하여 위치를 정할 수 있고, 남은 1개는 점 C와의 거리를 이용하여 위치를 정할 수 있다.



052

일등급의 메모장

이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점 $(t,\ t^2)$과 직선 $x-y+4=0$ 사이의 거리는 $\frac{|-t^2+t+4|}{\sqrt{2}}$이므로 원의 반지름의 길이 r가 $r=\frac{|-t^2+t+4|}{\sqrt{2}}$일 때 원이 직선과 접한다.



그래프에서 접하는 원이 3개 이상이 되기 위해서는 $t=\frac{1}{2}$일 때 $r=\frac{17\sqrt{2}}{8}$이고 $0<r\le\frac{17\sqrt{2}}{8}$일 때 접하는 원이 3개 이상이다.

확장

이차함수 $y=x^2$의 그래프에 접하고 직선 $y=x+4$에 평행한 직선을 $y=x+k$ (k는 상수)라 하자.

$y=x^2$와 $y=x+k$를 연립하면

$x^2=x+k$, 즉 $x^2-x-k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1+4k=0$

$\therefore k=-\frac{1}{4}$

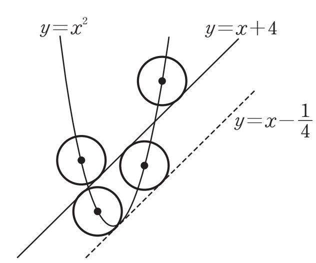
두 직선 $y=x+4$, $y=x-\frac{1}{4}$ 사이의 거리를 d라 할 때, d는 직선 $y=x+4$ 위의 점 $(0,\ 4)$와 직선 $y=x-\frac{1}{4}$, 즉 $x-y-\frac{1}{4}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$d=\frac{\left|-4-\frac{1}{4}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$

$=\frac{17\sqrt{2}}{8}$

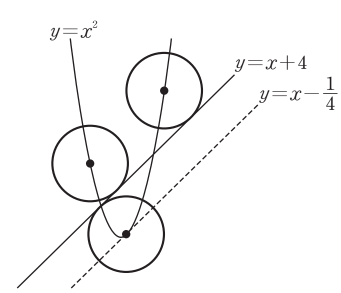
(i) $0<r<d$일 때

다음 그림과 같이 직선 $y=x+4$에 접하는 원의 개수는 4이다.



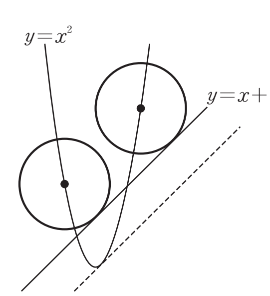
(ii) $r=d$일 때

다음 그림과 같이 직선 $y=x+4$에 접하는 원의 개수는 3이다.



(iii) $r>d$일 때

다음 그림과 같이 직선 $y=x+4$에 접하는 원의 개수는 2이므로 조건에 맞지 않는다.



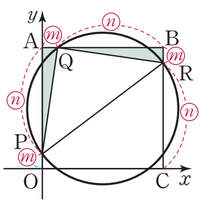
(i)~(iii)에서 조건을 만족시키는 실수 r의 값의 범위는

$0<r\le d$, 즉 $0<r\le\dfrac{17\sqrt{2}}{8}$이다.

답 $0<r\le\dfrac{17\sqrt{2}}{8}$

053

일등급의 메모장



$\triangle AQP\equiv\triangle BRQ$ (SAS 합동)

ㄱ. $m=n$일 때, 점 P는 선분 OA의 중점이므로 점 P의 좌표는 $(0, 2)$이다. (참)

ㄴ. 세 점 P, Q, R의 좌표는 각각

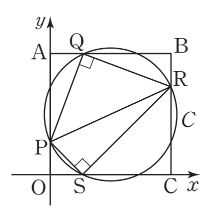
$\mathrm{P}\left(0, \dfrac{4m}{m+n}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{4m}{m+n}, 4\right)$, $\mathrm{R}\left(4, \dfrac{4n}{m+n}\right)$

이므로 직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{n}{m}$이고, 직선 QR의 기울기는

$-\dfrac{m}{n}$이다.

직선 PQ와 직선 QR의 기울기의 곱이 -1이므로 두 직선은 서로 수직이다.

즉, 선분 PR는 오른쪽 그림과 같이 원 C의 지름이다.



$\mathrm{S}\left(\dfrac{4m}{m+n}, 0\right)$이라 하면 직선 PS의 기울기는 -1이고, 직선 SR의 기울기는 1이다.

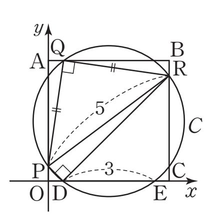
직선 PS와 직선 SR의 기울기의 곱은

$-1\times1=-1$

따라서 두 직선은 서로 수직이다.

즉, 점 $\left(\dfrac{4m}{m+n}, 0\right)$은 선분 PR를 지름으로 하는 원 C 위의 점이다. (참)

ㄷ. 선분 PR를 지름으로 하고 중심의 좌표가 $(2, 2)$인 원 C가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을



$\mathrm{D}\left(\dfrac{4m}{m+n}, 0\right)$, $\mathrm{E}\left(\dfrac{4n}{m+n}, 0\right)$

이라 하면 다른 풀이

$\overline{\mathrm{DE}}=\left|\dfrac{4(n-m)}{m+n}\right|=3$

$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{(4-0)^2+\left(\dfrac{4n}{m+n}-\dfrac{4m}{m+n}\right)^2}$

$=\sqrt{4^2+\left\{\dfrac{4(n-m)}{m+n}\right\}^2}=5$

삼각형 PQR는 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$인 직각이등변삼각형이므로

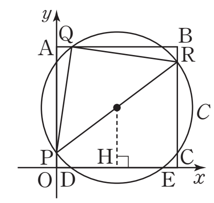
$\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

다른 풀이

원의 중심에서 x축에 내린 수선의 발 H$(2, 0)$에 대하여



$\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OH}}-\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{OH}}-\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{DE}}$

$=2-\dfrac{1}{2}\times3=\dfrac{1}{2}$

즉, $\dfrac{4m}{m+n}=\dfrac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{2}, 4\right)$

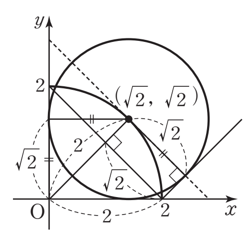
$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}-0\right)^2+\left(4-\dfrac{1}{2}\right)^2}$

$=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ (참)

054

일등급의 메모장

$0<t<2$일 때 원 C_t가 직선 $x-y-2=0$에 접할 때 교점이 3개이다. 이때 t의 값을 기하적인 성질을 이용해서 구할 수 있다.

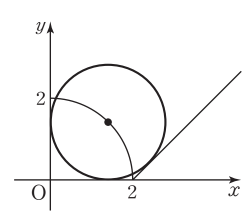


$x\ge0$, $y\ge0$이므로 점 P는 $0\le x\le2$에서 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이며 $x\ge2$에서 직선 $y=x-2$ 위의 점이다.

도형 D와 원 C_t의 교점이 3개일 때는 다음과 같다.

(i) $0<t<2$일 때

ⓐ 다음 그림과 같이 원 C_t가 직선 $x-y-2=0$에 접할 때 교점이 3개이다.



원 C_t가 y축에 접하므로 반지름의 길이가 t이고 중심이 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로 원 C_t의 중심의 좌표는 $(t, \sqrt{4-t^2})$이다.

원의 중심과 직선 $x-y-2=0$ 사이의 거리를 d_1이라 하면

$d_1=\dfrac{|t-\sqrt{4-t^2}-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$

$=\dfrac{-t+2+\sqrt{4-t^2}}{\sqrt{2}}$ ($\because 0<t<2$)

원 C_t가 직선 $x-y-2=0$에 접하므로 $d_1=t$에서

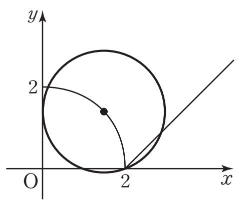
$\dfrac{-t+2+\sqrt{4-t^2}}{\sqrt{2}}=t$

$(1+\sqrt{2})t-2=\sqrt{4-t^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$t\{(4+2\sqrt{2})t-4(1+\sqrt{2})\}=0$
$2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})t-4(1+\sqrt{2})=0$ ($\because$ $t>0$)
$t=\sqrt{2}$

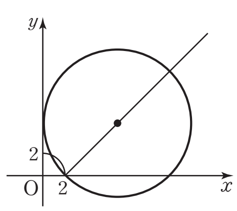
ⓑ 다음 그림과 같이 원 C_t가 점 (2, 0)을 지날 때 교점이 3개이다.



원의 중심 $(t, \sqrt{4-t^2})$과 점 (2, 0) 사이의 거리를 d_2라 하면
$d_2=\sqrt{(t-2)^2+(4-t^2)}$
$=\sqrt{-4t+8}$
원 C_t가 점 (2, 0)을 지나므로 $d_2=t$에서
$\sqrt{-4t+8}=t$
$-4t+8=t^2$, $t^2+4t-8=0$
$\therefore$ $t=-2+2\sqrt{3}$ ($\because$ $t>0$)

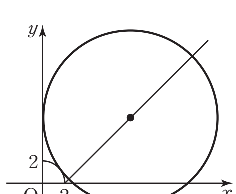
(ii) $t\geq2$일 때

ⓐ 다음 그림과 같이 원 C_t가 점 (2, 0)을 지날 때 교점이 3개이다.



원 C_t가 y축에 접하므로 반지름의 길이가 t이고 중심이 직선 $x-y-2=0$ 위의 점이므로 C_t의 중심의 좌표는 $(t, t-2)$이다.
C_t의 중심 $(t, t-2)$와 점 (2, 0) 사이의 거리를 d_3이라 하면
$d_3=\sqrt{(t-2)^2+(t-2)^2}$
$=\sqrt{2}(t-2)$
원 C_t가 점 (2, 0)을 지나므로 $d_3=t$에서
$\sqrt{2}(t-2)=t$
$(\sqrt{2}-1)t=2\sqrt{2}$
$\therefore$ $t=4+2\sqrt{2}$

ⓑ 다음 그림과 같이 원 C_t가 원 $x^2+y^2=4$와 제1사분면에서 접할 때 교점이 3개이다.



두 원이 접할 때 두 원의 중심 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같고, 두 원의 중심의 좌표는 각각 (0, 0), $(t, t-2)$이고 반지름의 길이가 각각 2, t인 원이므로
$\sqrt{t^2+(t-2)^2}=2+t$, $t^2-8t=0$
$\therefore$ $t=8$ ($\because$ $t>0$)

(i), (ii)에서 가능한 모든 t의 값의 합은 $10+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$이므로
$p=10$, $q=3$, $r=2$
$\therefore$ $pqr=10\times3\times2=60$

답 60

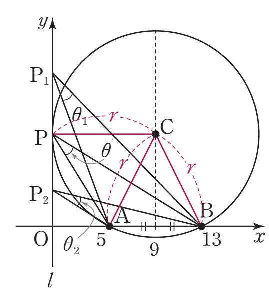
055

일등급의 메모장

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

확장

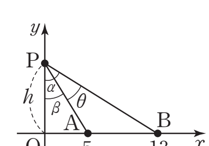
점 H가 원점, 직선 l을 y축이 되도록 좌표평면 위에 놓으면 두 점 A, B의 좌표는 각각
(5, 0), (13, 0)
두 점 A, B를 지나고 y축에 접하는 원의 중심을 점 C, 반지름의 길이를 r라 하자.
다음 그림과 같이 점 P의 y좌표가 원과 직선 l의 교점의 y좌표보다 크거나 작으면 점 P는 원 밖의 점이므로 ∠APB의 크기를 비교하면 $\theta_1<\theta$, $\theta_2<\theta$이다.



∠APB의 크기가 최대가 될 때, 점 P는 원과 y축의 접점이다.
$\overline{CA}=\overline{CB}=r$이므로 점 C는 선분 AB의 수직이등분선 위의 점이고 x좌표는 $\frac{5+13}{2}=9$이다.
또, 원이 y축에 접하므로 $r=9$이다.
즉, 원의 중심의 좌표를 $(9, h)$라 하면 $\overline{CA}=9$이므로
$\sqrt{(9-5)^2+(h-0)^2}=9$
$h^2=65$
$\therefore$ $h=\sqrt{65}$ ($\because$ $h>0$)
따라서 구하는 선분 HP의 길이는 $\sqrt{65}$이다.

답 $\sqrt{65}$

다른 풀이 확장



오른쪽 그림과 같이 ∠OPB$=\alpha$, ∠OPA$=\beta$, ∠APB$=\theta$, $\overline{OP}=h$라 하자.
이때 θ의 값이 최대이면 $\tan\theta$의 값도 최대이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$$
$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{\frac{13}{h}-\frac{5}{h}}{1+\frac{13}{h}\times\frac{5}{h}}$$
$$=\frac{8}{h+\frac{65}{h}}$$

이때 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$h+\frac{65}{h}\ge 2\sqrt{h\times\frac{65}{h}}=2\sqrt{65}$이므로

$\tan\theta=\frac{8}{h+\frac{65}{h}}\le\frac{8}{2\sqrt{h\times\frac{65}{h}}}=\frac{8}{2\sqrt{65}}=\frac{4}{\sqrt{65}}$

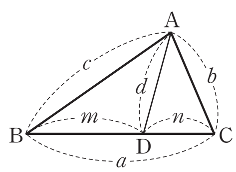
따라서 $\tan\theta$의 최댓값은 $h=\frac{65}{h}$, 즉 $h=\sqrt{65}$일 때 가지므로 구하는 선분 HP의 길이는 $\sqrt{65}$이다.

056

일등급의 메모장

스튜어트 정리

삼각형 ABC의 변 BC 위의 점 D에 대하여 세 변 BC, CA, AB의 길이를 각각 a, b, c라 하고 $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$의 길이를 각각 m, n, d라 하면 다음이 성립한다.



$b^2m+c^2n=a(d^2+mn)$ 확장

원의 중심을 $\mathrm{A}(a, b)$라 하자.

점 A와 직선 l_1: $y=mx$, 즉 $mx-y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|ma-b|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|ma-b|}{\sqrt{m^2+1}}$

점 A와 직선 l_2: $y=\frac{1}{m}x$, 즉 $x-my=0$ 사이의 거리는

$\frac{|a-mb|}{\sqrt{1+(-m)^2}}=\frac{|a-mb|}{\sqrt{1+m^2}}$

$\frac{|ma-b|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|a-mb|}{\sqrt{1+m^2}}$이므로

$|ma-b|=|a-mb|$ ($\because \sqrt{1+m^2}>0$)

$ma-b=\pm(a-mb)$

$\therefore a=b$ 또는 $a=-b$

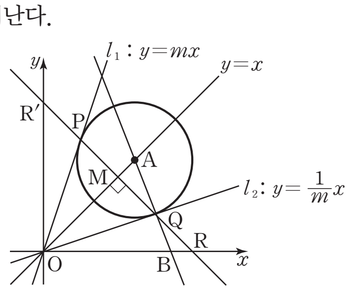
원의 중심 A가 제1사분면에 있으므로 $a=b$

따라서 직선 OA의 방정식은 $y=x$이다.

삼각형 OPQ가 $\overline{OP}=\overline{OQ}$인 이등변삼각형이므로 선분 PQ의 수직이등분선은 점 O를 지나고, 현의 성질에 의하여 선분 PQ의 수직이등분선은 원의 중심 A를 지난다.

즉, 직선 $y=x$는 선분 PQ의 수직이등분선이다.

직선 PQ의 기울기는 -1이므로 직선 PQ가 y축과 만나는 점을 R′이라 하면 두 삼각형 OPR′, OQR에서



$\overline{OR}=\overline{OR'}$

$\angle OR'P=\angle ORQ=45°$

삼각형 OPQ가 이등변삼각형이므로

$\angle OPQ=\angle OQP$에서 $\angle OPR'=\angle OQR$

$\therefore \triangle OPR'\equiv\triangle OQR$ (ASA 합동)

즉, $\overline{QR}=\overline{PR'}$

또, 삼각형 OPQ의 넓이가 삼각형 OQR의 넓이의 2배이므로

$\overline{PQ}=2\overline{QR}=2\overline{R'P}$이고, 선분 PQ의 중점을 M이라 하면

$\overline{R'P}=\overline{PM}$

$\overline{OR'}=a$라 하면 삼각형 ORM이 직각이등변삼각형이므로

$\overline{OM}=\frac{a}{\sqrt{2}}$

$\overline{PM}=\frac{1}{2}\overline{R'M}=\frac{a}{2\sqrt{2}}$

삼각형 R′OM에서 삼각형의 중선 정리에 의하여 참고

$\overline{OR'}^2+\overline{OM}^2=2(\overline{OP}^2+\overline{PM}^2)$

$a^2+\frac{a^2}{2}=2\left(10+\frac{a^2}{8}\right)$, $a^2=16$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

$\mathrm{R'}(0, 4)$, $\mathrm{R}(4, 0)$이므로 $\overline{R'R}$를 $1:3$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{1\times4+3\times0}{1+3}, \frac{1\times0+3\times4}{1+3}\right)$, 즉 $(1, 3)$

이고, 선분 R′R를 $3:1$로 내분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{3\times4+1\times0}{3+1}, \frac{3\times0+1\times4}{3+1}\right)$, 즉 $(3, 1)$

직선 l_1의 기울기는 $m=\frac{3-0}{1-0}=3$이고, 직선 l_2의 기울기는

$\frac{1}{m}=\frac{1}{3}$이다.

직선 BQ는 원의 중심 A를 지나고 원의 접선 l_2와 수직이므로 기울기가 -3이다.

즉, 점 $\mathrm{Q}(3, 1)$을 지나는 직선 BQ의 방정식은

$y-1=-3(x-3)$

$\therefore y=-3x+10$

x축과 직선 BQ의 교점 B의 x좌표는

$0=-3x+10$에서 $x=\frac{10}{3}$이므로

$\overline{BR}=4-\frac{10}{3}=\frac{2}{3}$

따라서 삼각형 BQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times1=\frac{1}{3}$

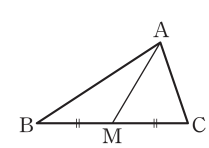
답 $\frac{1}{3}$

참고

중선 정리

삼각형 ABC의 변 BC의 중점을 M이라 하면 다음 등식이 성립한다.

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$



다른 풀이 확장

두 직선 $y=mx$, $y=\frac{1}{m}x$가 $y=x$에 대하여 대칭이고 두 직선에 각각 접하는 점 P, Q에서 원의 중심 A까지의 거리가 같으므로 점 A는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

두 점 P, Q의 중점을 M이라 할 때, 현 PQ의 수직이등분선은 원의 중심 A와 중점 M을 지나므로 직선 PQ는 직선 AM과 수직이다.

y축과 만나는 점을 R′으로 하는 직선 PQ를 $x+y-k=0$이라 하면

$\overline{OR}=\overline{OR'}=k$, $\overline{RR'}=\sqrt{2}k$ …… ㉠

또, 직선 PQ는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\overline{RM}=\overline{R'M}$이고 $\overline{PM}=\overline{QM}$이므로

$\overline{RQ}=\overline{R'P}$ …… ㉡

세 점 P, Q, R가 한 직선 위에 있고 삼각형 OPQ의 넓이가 삼각형 OQR의 넓이의 두배이므로

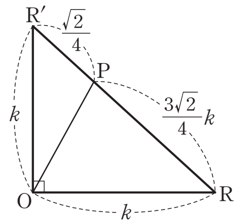
$\overline{PQ}=2\overline{QR}$ ...... ㉢

$\overline{OP}=\sqrt{10}$이고

㉠, ㉡, ㉢에서

$\overline{PR'}=\frac{\sqrt{2}}{4}k$, $\overline{PR}=\frac{3\sqrt{2}}{4}k$이므로

삼각형 ORR'는 오른쪽 그림과 같다.



스튜어트 정리에 의하여

$\overline{OR'}^2\times\overline{PR}+\overline{OR}^2\times\overline{PR'}$

$=\overline{PR'}^2\times(\overline{OP}^2+\overline{PR}\times\overline{PR'})$

$k^2\times\frac{3\sqrt{2}}{4}k+k^2\times\frac{\sqrt{2}}{4}k$

$=\sqrt{2}k\times\left\{(\sqrt{10})^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}k\right)\times\left(\frac{\sqrt{2}}{4}k\right)\right\}$

$\sqrt{2}k^3=\sqrt{2}k\left(10+\frac{3}{8}k^2\right)$

$\therefore k=4\ (k>0)$

즉, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은 $x+y-4=0$이다.

$\overline{R'Q}:\overline{QR}=3:1$이고 R'의 좌표는 $(0, 4)$, R의 좌표는 $(4, 0)$이므로 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{3\times4+1\times0}{3+1}, \frac{3\times0+1\times4}{3+1}\right)$, 즉 $(3, 1)$

두 직선 AQ, OQ는 서로 수직이므로 두 점 A, Q를 지나는 직선의 방정식은

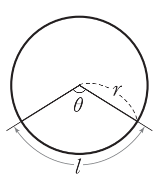
$y=-3(x-3)+1$, 즉 $y=-3x+10$

따라서 점 B의 좌표는 $\left(\frac{10}{3}, 0\right)$이므로 삼각형 BQR의 넓이는

$\underbrace{\frac{1}{2}\times\left(4-\frac{10}{3}\right)\times1}_{\frac{1}{2}\times(\overline{OR}-\overline{OB})\times(\text{점 Q의 }y\text{좌표})}=\frac{1}{3}$

057

일등급의 메모장



$l=2\pi r\times\frac{\theta}{360}$

중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은 $x^2+y^2=4$

이 원의 접선 l의 방정식을 $y=-2$라 하자.

점 P의 좌표를 $(k, -2)$라 하면 직선 OP의 방정식은

$y=-\frac{2}{k}x$

점 Q의 좌표를 (a, b)라 하면 직선 OP가 점 Q를 지나므로

$b=-\frac{2}{k}a$

$\therefore k=-\frac{2a}{b}$ ...... ㉠

$\overline{OQ}=\frac{4}{\overline{OP}}$이므로

$\sqrt{a^2+b^2}=\frac{4}{\sqrt{k^2+(-2)^2}}$

$a^2+b^2=\frac{16}{k^2+4}=\frac{16}{\left(-\frac{2a}{b}\right)^2+4}=\frac{4b^2}{a^2+b^2}$ ($\because$ ㉠)

$(a^2+b^2)^2=4b^2$

즉, $a^2+b^2=-2b$ ($\because b<0$)에서

$a^2+(b+1)^2=1$

따라서 점 Q(a, b)는 원 $x^2+(y+1)^2=1$ 위의 점이다.

$\overline{OP}=\sqrt{k^2+(-2)^2}\le4$이므로

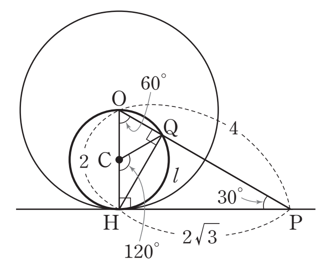
$k^2\le12$

$\therefore -2\sqrt{3}\le k\le2\sqrt{3}$

원 $x^2+(y+1)^2=1$의 중심을 C라 하고, 원점 O에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$k=2\sqrt{3}$일 때, 직각삼각형 POH에서 $\overline{HP}=2\sqrt{3}$, $\overline{OH}=2$이므로

$\angle POH=60^\circ$



즉, 원 $x^2+(y+1)^2=1$에 대하여 중심각과 원주각 사이의 관계에 의하여

$\angle QCH=120^\circ$

따라서 $0\le k\le2\sqrt{3}$일 때 점 Q가 나타내는 도형은 중심각의 크기가 120°이고 반지름의 길이가 1인 호이고, 그 길이는

$2\pi\times1\times\frac{120}{360}=\frac{2}{3}\pi$

같은 방법으로 $-2\sqrt{3}\le k\le0$일 때도 점 Q가 나타내는 도형은 중심각의 크기가 120°이고 반지름의 길이가 1인 호이고, 그 길이는

$\frac{2}{3}\pi$이다.

따라서 $-2\sqrt{3}\le k\le2\sqrt{3}$일 때 점 Q가 나타내는 도형의 길이는

$\frac{2}{3}\pi+\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$

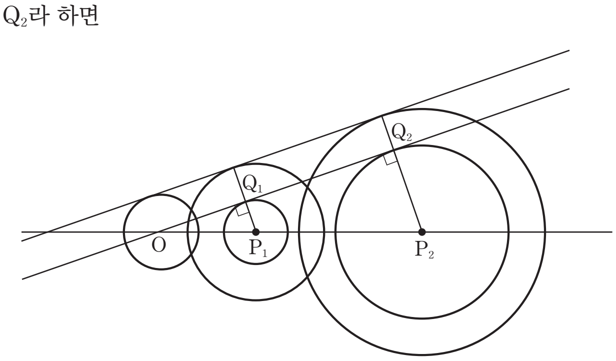
답 $\frac{4}{3}\pi$

058

일등급의 메모장

원 C_1과 원의 중심이 같고 반지름의 길이가 t인 원을 원 C_3이라 할 때, 다음 그림과 같이 t_1초 후 C_3의 중심을 P_1, t_2초 후 원 C_3의 중심을 P_2라 하자.

원점을 지나고 두 원에 각각 접하는 접선이 원과 만나는 점을 Q_1, Q_2라 하면



$\angle OQ_1P_1=\angle OQ_2P_2=90^\circ$이고, $\overline{OP_1}:\overline{P_1Q_1}=\overline{OP_2}:\overline{P_2Q_2}$이므로

$\angle P_1OQ_1=\angle P_2OQ_2$

따라서 원점을 지나고 C_3에 접하는 접선이 원 C_3과 만나는 점은 한 직선 위에 있다.

t초 후의 원 C_1의 중심을 $\mathrm{C}(a,\ b)$라 하자.

점 C는 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ 위의 점이므로 $b=\frac{1}{\sqrt{3}}a$

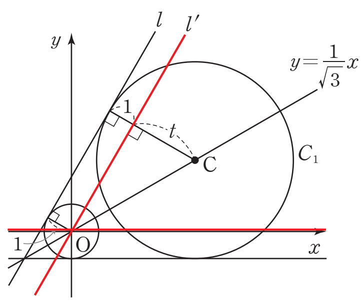
원점과 점 C까지의 거리는 $2t$이므로 $\sqrt{a^2+b^2}=2t$에서

$\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right)^2}=2t$

$\therefore\ a=\sqrt{3}t,\ b=t$

따라서 t초 후의 원 C_1는 중심이 $(\sqrt{3}t,\ t)$이고 반지름의 길이는 $t+1$이다. …… ㉠

다음 그림과 같이 초기 위치의 원 C_1과 t초 후의 원 C_1의 공통인 접선을 l: $y=mx+n$이라 할 때 직선 l과 평행하고 원점 O를 지나는 직선을 l'이라 하면 직선의 방정식은 l': $y=mx$



이때 직선 l은 원점과의 거리가 1이고 ㉠에서 직선 l과 점 C 사이의 거리가 $t+1$이므로 직선 l': $mx-y=0$과 점 $\mathrm{C}(\sqrt{3}t,\ t)$ 사이의 거리는 t이다.

따라서

$\frac{|m\times\sqrt{3}t-t|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=t$, 즉 $m(m-\sqrt{3})=0$

이때 두 직선 l, l' 사이의 거리는 1이므로

(i) $m=0$일 때

l'의 직선의 방정식은 $y=0$

따라서 l의 직선의 방정식은 $y=-1$

(ii) $m=\sqrt{3}$일 때

l'의 직선의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$

이때 l의 직선의 방정식이 $y=\sqrt{3}x+n$이면

$\sqrt{3}x-y+n=0$과 원점 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|n|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=1$, 즉 $n=2$

(i), (ii)에서 원 C_1은 두 직선 $y=\sqrt{3}x+2$와 $y=-1$에 동시에 접하며 움직인다.

원 C_1이 움직이는 영역과 원 C_2가 만나지 않도록 원의 중심 $(3,\ a)$와 두 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 1보다 커야 한다.

(iii) 직선 $y=\sqrt{3}x+2$, 즉 $\sqrt{3}x-y+2=0$과 원 C_2가 만나지 않는 경우

$\frac{|3\sqrt{3}-a+2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}>1$이므로

$|a-(2+3\sqrt{3})|>2$

$\therefore\ a>4+3\sqrt{3}$ 또는 $a<3\sqrt{3}$

이때 원 C_1이 움직이는 영역과 원 C_2가 만나지 않도록 하는 a의 값의 범위는

$a>4+3\sqrt{3}$

(iv) 직선 $y=-1$과 원 C_2가 만나지 않는 경우

$|a+1|>1$

$\therefore\ a>0$ 또는 $a<-2$

이때 원 C_1이 움직이는 영역과 원 C_2가 만나지 않도록 하는 a의 값의 범위는

$a<-2$

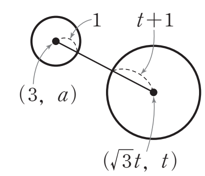
(iii), (iv)에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$a<-2$ 또는 $a>4+3\sqrt{3}$

답 $a<-2$ 또는 $a>4+3\sqrt{3}$

다른 풀이 **확장**

두 점 $(3,\ a)$, $(\sqrt{3}t,\ t)$ 사이의 거리가 두 원의 반지름의 길이의 합보다 커야 하므로



$\sqrt{(\sqrt{3}t-3)^2+(t-a)^2}>(t+1)+1$

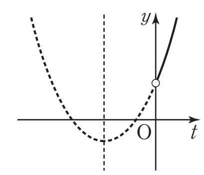
$3t^2-(2a+6\sqrt{3}+4)t+a^2+5>0$

이차방정식

$y=3t^2-(2a+6\sqrt{3}+4)t+a^2+5\ (t\geq 0)$ …… ㉡

이 모든 t에 대하여 $y>0$이므로

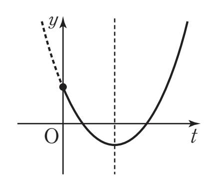
(i) $\frac{a+3\sqrt{3}+2}{3}<0$, 즉 $a<-3\sqrt{3}-2$일 때



$a^2+5>0$

$\therefore\ a<-3\sqrt{3}-2$

(ii) $\frac{a+3\sqrt{3}+2}{3}\geq 0$, 즉 $a\geq -3\sqrt{3}-2$일 때



이차방정식 ㉡의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+3\sqrt{3}+2)^2-3(a^2+5)$

$=-2(a+2)\{a-(4+3\sqrt{3})\}<0$

$\therefore\ -3\sqrt{3}-2\leq a<-2$ 또는 $a>4+3\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 $a<-2$ 또는 $a>4+3\sqrt{3}$

I. 도형의 방정식

03 도형의 이동

001

주어진 평행이동은 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -7만큼 옮기는 평행이동이므로 이 평행이동에 의하여 점 $(a,\ b)$를 평행이동하면

$(a+4,\ b-7)$

즉, $a+4=4b-1$, $b-7=a-8$이므로

$a-4b=-5$, $a-b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$

$\therefore a+b=3+2=5$

답 ⑤

002

점 $\mathrm{A}(-3,\ -2)$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점은

$\mathrm{B}(-3+a,\ -2)$

점 B가 포물선 $y=2(x+2)^2-4$ 위의 점이므로

$-2=2(-3+a+2)^2-4$

$(a-1)^2=1$, $a-1=\pm1$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

점 $\mathrm{B}(-1,\ -2)$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점은

$\mathrm{C}(-1+1,\ -2+b)$, 즉 $\mathrm{C}(0,\ -2+b)$

점 C가 포물선 $y=2(x+2)^2-4$ 위의 점이므로

$-2+b=2\times(0+2)^2-4 \qquad \therefore b=6$

$\therefore b-a=6-2=4$

답 4

003

직선 $y=mx+n$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-(-2)=m(x-3)+n \qquad \therefore y=mx-3m+n-2$

이 직선이 직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$과 수직이므로

$m\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \qquad \therefore m=2$

직선 $y=2x+n-8$이 직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$과 x축 위에서 만나므로

$\frac{8-n}{2}=2 \qquad \therefore n=4$

$\therefore mn=2\times4=8$

답 ③

다른 풀이

직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$과 x축 위의 점에서 수직으로 만나는 직선의 방정식은

$\underline{y=2(x-2)} \qquad \therefore y=2x-4$

→ 기울기가 2이고 점 (2, 0)을 지나는 직선

이 직선을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-2=2\{x-(-3)\}-4 \qquad \therefore y=2x+4$

이 직선이 $y=mx+n$과 일치하므로 $m=2$, $n=4$

$\therefore mn=2\times4=8$

004

점 $\mathrm{A}(2,\ -5)$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점은

$\mathrm{B}(2-1,\ -5+3)$, 즉 $\mathrm{B}(1,\ -2)$

직선 AB의 방정식은

$y-(-5)=\frac{-2-(-5)}{1-2}(x-2) \qquad \therefore y=-3x+1$

직선 AB를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선 l의 방정식은

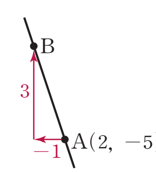
$y-2=-3(x-1)+1 \qquad \therefore y=-3x+6$

따라서 직선 l의 x절편은 2, y절편은 6이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times6=6$

답 6

다른 풀이



점 B는 점 $\mathrm{A}(2,\ -5)$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점이므로

직선 AB의 기울기는 $\frac{3}{-1}=-3$이다.

직선 AB의 방정식은

$y-(-5)=-3(x-2) \qquad \therefore y=-3x+1$

직선 AB를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선 l의 방정식은

$y-2=-3(x-1)+1 \qquad \therefore y=-3x+6$

따라서 직선 l의 x절편은 2, y절편은 6이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times6=6$

005

포물선 $y=x^2+2x$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-q=(x-p)^2+2(x-p)$

$\therefore y=x^2-2(p-1)x+p^2-2p+q$

이 포물선이 직선 $y=2x$와 서로 다른 두 점에서 만나므로 x에 대한 이차방정식 $x^2-2(p-1)x+p^2-2p+q=2x$, 즉

$x^2-2px+p^2-2p+q=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-p)^2-(p^2-2p+q)>0$

$2p-q>0 \qquad \therefore q<2p$

따라서 p, q의 값이 될 수 없는 것은 ②이다.

답 ②

006

원 $(x+1)^2+(y+2)^2=9$의 중심의 좌표는 $(-1,\ -2)$이고 반지름의 길이는 3이므로 이 원을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원 C의 중심의 좌표는

$(-1+m,\ -2+n)$이고 반지름의 길이는 3이다.
원 C의 중심이 제1사분면 위에 있고 x축과 y축에 동시에 접하려면 중심의 좌표가 $(3,\ 3)$이어야 하므로
$-1+m=3,\ -2+n=3 \quad \therefore m=4,\ n=5$
$\therefore m+n=4+5=9$

답 9

007

$x^2+y^2-6x+4y=0$에서
$(x-3)^2+(y+2)^2=13$ 참고
이 원을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원 $(x-m-3)^2+(y-n+2)^2=13$이 원 $x^2+y^2=13$과 일치한다고 하면
$-m-3=0,\ -n+2=0 \quad \therefore m=-3,\ n=2$
$x^2+y^2+4x-10y-12=0$에서
$(x+2)^2+(y-5)^2=41$
이 원을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식은
$\{x-(-3)+2\}^2+(y-2-5)^2=41 \quad \therefore (x+5)^2+(y-7)^2=41$
따라서 옮겨지는 원의 중심 $(-5,\ 7)$과 원점 사이의 거리는
$\sqrt{(-5)^2+7^2}=\sqrt{74}$

답 ④

참고
원을 평행이동하면 중심은 이동하고 반지름의 길이는 변하지 않는다.
따라서 원을 평행이동한 도형의 방정식을 구할 때는 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$의 꼴로 변형하면 편리하다.

다른 풀이
원 $x^2+y^2-6x+4y=0$, 즉 $(x-3)^2+(y+2)^2=13$의 중심은 $(3,\ -2)$이고, 원 $x^2+y^2=13$의 중심은 $(0,\ 0)$이므로 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 옮기는 평행이동이다.
따라서 같은 평행이동에 의하여 원 $x^2+y^2+4x-10y-12=0$, 즉 $(x+2)^2+(y-5)^2=41$의 중심 $(-2,\ 5)$를 옮기면 점 $(-5,\ 7)$이므로 옮겨지는 원의 중심과 원점 사이의 거리는
$\sqrt{(-5)^2+7^2}=\sqrt{74}$

008

점 $(a,\ b)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(-a,\ b)$
이 점이 제1사분면 위의 점이므로
$-a>0,\ b>0 \quad \therefore a<0,\ b>0$
점 $(ab,\ a+b)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(-(a+b),\ -ab)$
점 $(-(a+b),\ -ab)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(-(a+b),\ ab)$
$a<0,\ b>0$이고 $|a|>|b|$이므로
$-(a+b)>0,\ ab<0$
$-a>b$이므로 $a+b<0 \quad \therefore -(a+b)>0$
따라서 점 $(-(a+b),\ ab)$는 제4사분면 위의 점이다.

답 제4사분면

009

주어진 규칙에 따라 점 P_2, P_3, P_4, $\cdots$ 을 구하면
$P_1(3,\ 2) \to P_2(2,\ 3) \to P_3(2,\ -3) \to P_4(-2,\ -3)$
$\to P_5(-3,\ -2) \to P_6(-3,\ 2) \to P_7(3,\ 2) \to P_8(2,\ 3) \to \cdots$
이므로 $P_n=P_{n+6}$
이때 $50=6\times8+2$이므로 점 P_{50}의 좌표는 점 P_2의 좌표와 같다.
따라서 $P_{50}(2,\ 3)$이므로 $x_{50}=2,\ y_{50}=3$
$\therefore 10x_{50}+y_{50}=10\times2+3=23$

답 23

010

직선 $(3k+2)x+(k-4)y+14=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$(k-4)x+(3k+2)y+14=0$
이 직선이 실수 k의 값에 관계없이 항상 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=8$의 넓이를 이등분하려면 실수 k의 값에 관계없이 항상 원의 중심 $(a,\ b)$를 지나야 하므로
$(k-4)a+(3k+2)b+14=0$
$\therefore (a+3b)k+(-4a+2b+14)=0$
위의 식이 k에 대한 항등식이므로
$a+3b=0,\ -4a+2b+14=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=-1$
$\therefore ab=3\times(-1)=-3$

답 ①

011

포물선 $y=x^2-4x+k$를 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
$-y=x^2-4x+k \quad \therefore y=-x^2+4x-k$
이 포물선을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
$y=-(-x)^2+4(-x)-k$
$\therefore y=-x^2-4x-k$ 참고
이 포물선이 직선 $y=-2x+3$과 접하므로 이차방정식 $-x^2-4x-k=-2x+3$, 즉 $x^2+2x+k+3=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=1^2-(k+3)=0 \quad \therefore k=-2$

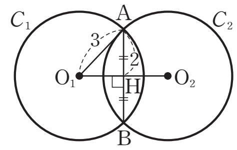
답 ②

참고
포물선 $y=x^2-4x+k$를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 것은 포물선 $y=x^2-4x+k$를 원점에 대하여 대칭이동한 것과 일치한다.

012

원 C_1의 중심 $(3,\ -1)$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(1,\ -3)$
$(1+k,\ -3)$
이므로 원 C_2는 중심이 $(1+k,\ -3)$이고 반지름의 길이가 3인 원이다.

두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하고, 두 선분 AB, O_1O_2의 교점을 H라 하면 $\overline{AH}=2$, $\overline{O_1A}=3$이므로 삼각형 AO_1H에서



$\overline{O_1H}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

$\overline{O_1O_2}=2\overline{O_1H}=2\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{(1+k-3)^2+\{-3-(-1)\}^2}=2\sqrt{5}$

위의 등식의 양변을 제곱하면

$(k-2)^2+4=20$, $(k-2)^2=16$

$k-2=\pm4$ $\quad\therefore k=6$ ($\because k>0$)

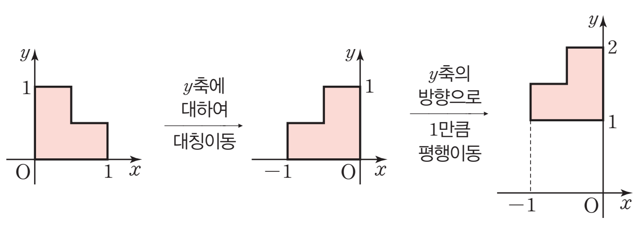
답 6

013

방정식 $f(-x, y-1)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 ④이다.

답 ④

참고



014

포물선 $y=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$의 꼭짓점의 좌표는 $(2, -3)$

포물선 $y=-x^2+8x-15=-(x-4)^2+1$의 꼭짓점의 좌표는 $(4, 1)$

두 포물선의 꼭짓점이 점 (a, b)에 대하여 대칭이므로

$a=\dfrac{2+4}{2}=3$, $b=\dfrac{-3+1}{2}=-1$

$\therefore a+b=3+(-1)=2$

답 ①

다른 풀이

$y=x^2-4x+1$에 x 대신 $2a-x$, y 대신 $2b-y$를 대입하면

$2b-y=(2a-x)^2-4(2a-x)+1$

$\therefore y=-x^2+4(a-1)x-4a^2+8a+2b-1$

이 식이 $y=-x^2+8x-15$와 일치하므로

$4(a-1)=8$, $-4a^2+8a+2b-1=-15$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

$\therefore a+b=3+(-1)=2$

015

$B(a, b)$라 하면 선분 AB의 중점 $\left(\dfrac{-2+a}{2}, \dfrac{2+b}{2}\right)$가 직선 $2x-y+1=0$ 위에 있으므로

$2\times\dfrac{-2+a}{2}-\dfrac{2+b}{2}+1=0$

$\therefore 2a-b=4$ ...... ㉠

직선 AB가 직선 $2x-y+1=0$, 즉 $y=2x+1$과 수직이므로

$\dfrac{b-2}{a-(-2)}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore a+2b=2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=0$

$\therefore B(2, 0)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$

답 2

다른 풀이

서로 수직인 선분 AB와 직선 $2x-y+1=0$의 교점을 H라 하면 점 H는 점 $A(-2, 2)$에서 직선 $2x-y+1=0$에 내린 수선의 발과 같으므로

$\overline{AH}=\dfrac{|2\times(-2)-2+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

이때 교점 H는 선분 AB의 중점과 같으므로

$\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{5}$

직선 AB는 직선 $2x-y+1=0$에 수직이고 점 A를 지나는 직선이므로 그 방정식은

$y-2=-\dfrac{1}{2}\{x-(-2)\}$

$\therefore x+2y-2=0$

원점과 직선 AB 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times d=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=2$

016

$x^2+y^2-8x+6y+16=0$에서

$(x-4)^2+(y+3)^2=9$

이 원의 중심 $(4, -3)$을 직선 $x-y-1=0$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 (p, q)이다.

두 점 $(4, -3)$, (p, q)를 이은 선분의 중점 $\left(\dfrac{4+p}{2}, \dfrac{-3+q}{2}\right)$가 직선 $x-y-1=0$ 위에 있으므로

$\dfrac{4+p}{2}-\dfrac{-3+q}{2}-1=0$ $\quad\therefore p-q=-5$ ...... ㉠

두 점 $(4, -3)$, (p, q)를 지나는 직선이 직선 $x-y-1=0$, 즉 $y=x-1$과 수직이므로

$\dfrac{q-(-3)}{p-4}=-1$ $\quad\therefore p+q=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=-2$, $q=3$

원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로 $k=9$

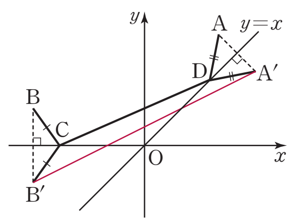
$\therefore 2p+q+k=2\times(-2)+3+9=8$

답 8

017

점 $A(2, 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 $A'(3, 2)$

점 B$(-3,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면
B′$(-3,\ -1)$



위의 그림에서 $\overline{AD}=\overline{A'D}$, $\overline{BC}=\overline{B'C}$이므로

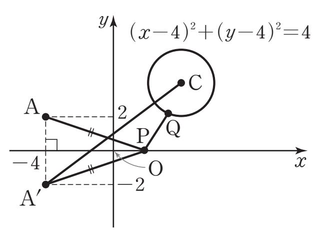
$$\begin{aligned}\overline{AD}+\overline{CD}+\overline{BC}&=\overline{A'D}+\overline{CD}+\overline{B'C}\\&\geq\overline{A'B'}\\&=\sqrt{(-3-3)^2+(-1-2)^2}\\&=3\sqrt{5}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AD}+\overline{CD}+\overline{BC}$의 최솟값은 $3\sqrt{5}$이다.

답 ④

018

점 A$(-4,\ 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면
A′$(-4,\ -2)$



$\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로
$\overline{AP}+\overline{PQ}=\overline{A'P}+\overline{PQ}\geq\overline{A'Q}$
원 $(x-4)^2+(y-4)^2=4$의 중심을 C$(4,\ 4)$라 하면 $\overline{A'Q}$는 점 Q가 $\overline{A'C}$ 위에 있을 때 최소이므로

$$\begin{aligned}\overline{A'Q}\geq\overline{A'C}-2\\&=\sqrt{\{4-(-4)\}^2+\{4-(-2)\}^2}-2\\&=10-2=8\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PQ}$의 최솟값은 8이다.

답 8

019

점 P가 원점에서 출발하여 x축의 방향으로 a번, y축의 방향으로 b번 이동하여 모두 n번을 이동하였다고 하면
P$(a,\ b)$ (단, $a+b=n$)
점 P$(a,\ b)$가 원 $(x-5)^2+(y-6)^2=18$ 위에 있으므로
$(a-5)^2+(b-6)^2=18$
a, b가 자연수이므로
$(a-5)^2=9$, $(b-6)^2=9$
$a-5=\pm3$, $b-6=\pm3$
$\therefore\ a=2$ 또는 $a=8$, $b=3$ 또는 $b=9$
따라서 n은 $a=8$, $b=9$일 때 최댓값 17을 갖는다.

답 17

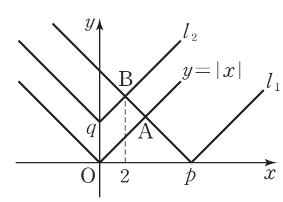
020

점 $(-1,\ 2)$를 점 $(4,\ -2)$로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.
이 평행이동에 의하여 직선 $x-y+13=0$이 옮겨지는 직선 l의 방정식은
$x-5-\{y-(-4)\}+13=0$
$\therefore\ x-y+4=0$ …… ㉠
$x^2+y^2+2ax-2y+6=0$에서
$(x+a)^2+(y-1)^2=a^2-5$
$x^2+y^2-4x-4by+15=0$에서
$(x-2)^2+(y-2b)^2=4b^2-11$
직선 ㉠이 두 원의 넓이를 동시에 이등분하므로 직선 ㉠은 두 원의 중심 $(-a,\ 1)$, $(2,\ 2b)$를 지난다.
$-a-1+4=0$에서 $a=3$
$2-2b+4=0$에서 $b=3$
$\therefore\ a+b=3+3=6$

답 ①

021

함수 $y=|x|$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프의 식은
l_1: $y=|x-p|$
함수 $y=|x|$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은
l_2: $y=|x|+q$

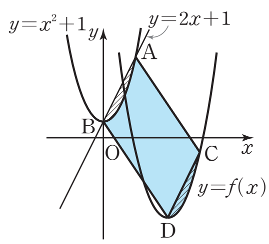


두 직선 $y=x$, $y=-(x-p)$의 교점 A의 x좌표는
$x=-(x-p)$에서 $x=\dfrac{p}{2}$
$\therefore$ A$\left(\dfrac{p}{2},\ \dfrac{p}{2}\right)$
두 직선 $y=x+q$, $y=-(x-p)$의 교점 B의 x좌표는
$x+q=-(x-p)$에서 $x=\dfrac{p-q}{2}$
$\therefore$ B$\left(\dfrac{p-q}{2},\ \dfrac{p+q}{2}\right)$
$\overline{AB}=\sqrt{2}$이므로
$\sqrt{\left(\dfrac{p-q}{2}-\dfrac{p}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p+q}{2}-\dfrac{p}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$
$\dfrac{q}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$
$\therefore\ q=2$
이때 점 B의 x좌표가 2이므로
$\dfrac{p-2}{2}=2$
$\therefore\ p=6$
$\therefore\ \dfrac{p}{q}=\dfrac{6}{2}=3$

답 3

022

다음 그림의 빗금친 두 부분의 넓이가 같으므로 두 점 A, B 사이의 포물선과 두 선분 AC, BD 및 두 점 C, D 사이의 포물선으로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이는 사각형 ABDC의 넓이와 같다.



직선 $y=2x+1$이 $y=x^2+1$의 그래프와 만나는 점의 x좌표는

$2x+1=x^2+1$에서

$x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

A$(2, 5)$, B$(0, 1)$이라 하면 두 점 A, B를 각각 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 두 점 C, D의 좌표는

C$(6, -1)$, D$(4, -5)$

이때 선분 CD는 선분 AB를 평행이동한 것이므로

$\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$

$\overline{AB}=\overline{CD}$

즉, 사각형 ABDC는 평행사변형이다.

평행사변형 ABDC의 밑변을 선분 AB로 생각하면 높이는 점 D와 직선 $y=2x+1$, 즉 $2x-y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2\times4-(-5)+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{14}{\sqrt{5}}$$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(0-2)^2+(1-5)^2}=2\sqrt{5}$이므로 구하는 넓이는

$$2\sqrt{5}\times\frac{14}{\sqrt{5}}=28$$

답 28

023

두 원 C, C'의 중심을 각각 A, A′이라 하자.

조건 (나)에서 원 C의 중심 A$(1, 0)$과 직선 $4x-3y+21=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이인 r와 같아야 하므로

$$r=\frac{|4\times1-3\times0+21|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=5$$

원 C'의 방정식은

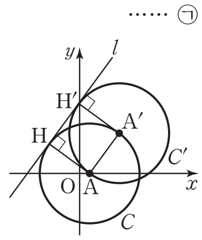
$(x-a-1)^2+(y-b)^2=25$

조건 (가)에서 원 C'이 점 A$(1, 0)$을 지나므로

$(1-a-1)^2+(0-b)^2=25$

$\therefore a^2+b^2=25$ …… ㉠

직선 $4x-3y+21=0$을 l이라 하고 두 점 A, A′에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면 $\overline{AH}=\overline{A'H'}$이고 $\overline{AH}\perp l$, $\overline{A'H'}\perp l$이므로 직선 AA′은 직선 l과 평행하다.



직선 l의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로

$$\frac{b-0}{(1+a)-1}=\frac{4}{3}$$

$\therefore b=\frac{4}{3}a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

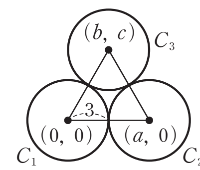
$a=3$, $b=4$ ($\because a>0$, $b>0$)

$\therefore a+b+r=3+4+5=12$

답 12

024

원 C_1의 중심이 $(0, 0)$이므로 원 C_2의 중심의 좌표는 $(a, 0)$, 원 C_3의 중심의 좌표는 (b, c)이고, 세 원 C_1, C_2, C_3의 반지름의 길이는 모두 3이다.



이때 세 원 C_1, C_2, C_3이 모두 서로 외접하므로 세 원 중 어느 두 원에 대해서도

(두 원의 중심 사이의 거리)=(두 원의 반지름의 길이의 합)

이 성립한다.

두 원 C_1, C_2가 서로 외접하므로

$|a|=6$ …… ㉠

두 원 C_2, C_3이 서로 외접하므로

$\sqrt{(b-a)^2+c^2}=6$

$\therefore (b-a)^2+c^2=36$ …… ㉡

두 원 C_3, C_1이 서로 외접하므로

$\sqrt{b^2+c^2}=6$

$\therefore b^2+c^2=36$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=6$, $b=3$, $c=\pm3\sqrt{3}$ 또는 $a=-6$, $b=-3$, $c=\pm3\sqrt{3}$

$$\therefore \left(\frac{ab}{c}\right)^2=\frac{a^2b^2}{c^2}$$

$$=\frac{36\times9}{27}=12$$

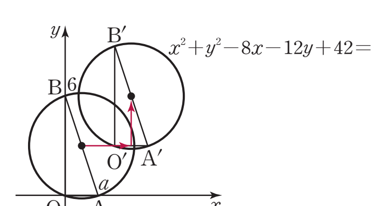
답 12

025

$x^2+y^2-8x-12y+42=0$에서

$(x-4)^2+(y-6)^2=10$ 다른 풀이

이므로 삼각형 O′A′B′의 외접원의 중심의 좌표는 $(4, 6)$이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다.



이때 삼각형 OAB가 직각삼각형이므로 삼각형 O′A′B′도 직각삼각형이고, 선분 A′B′이 외접원의 지름이므로

$\overline{A'B'}=2\sqrt{10}$

이때 $\overline{AB}=\overline{A'B'}$에서

$\sqrt{(a-0)^2+(0-6)^2}=2\sqrt{10}$

위의 등식의 양변을 제곱하면

$a^2+36=40$, $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

선분 AB의 중점이 삼각형 OAB의 외접원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right)$, 즉 $(1, 3)$

즉, x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 같은 평행이동에 의하여 점 A가 옮겨지는 점 A′의 좌표는

$(2+3, 0+3)$, 즉 $(5, 3)$

답 $(5, 3)$

다른 풀이

삼각형 OAB를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 이동하여 삼각형 O′A′B′을 얻었다고 하면 세 점 O′, A′, B′의 좌표는

$O'(p, q)$, $A'(a+p, q)$, $B'(p, 6+q)$

세 점 O′, A′, B′이 모두 삼각형 O′A′B′의 외접원 위에 있으므로

$(p-4)^2+(q-6)^2=10$

$(a+p-4)^2+(q-6)^2=10$

$(p-4)^2+(6+q-6)^2=10$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $p=3$, $q=3$ ($\because a>0$)

따라서 점 A′의 좌표는

$(5, 3)$

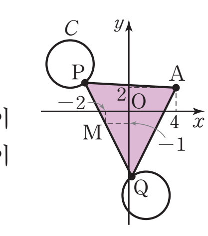
026

선분 PQ의 중점을 M이라 하면 삼각형 APQ의 무게중심이 원점 O이므로

$\overline{AO}:\overline{OM}=2:1$

즉, 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위의 점 M의 좌표는

$(-2, -1)$이다.



점 P를 점 M에 대하여 대칭이동한 점이 Q이므로 점 Q는 원 C를 점 M에 대하여 대칭이동한 원 위의 점이다.

이때 $\triangle APQ=2\triangle APM$이므로 삼각형 APM의 넓이가 최대일 때 삼각형 APQ의 넓이도 최대이고, 삼각형 APM의 넓이가 최소일 때 삼각형 APQ의 넓이도 최소이다.

원 C의 중심 $(-5, 4)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$, 즉 $x-2y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-5-2\times4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{13}{\sqrt{5}}$

원 C의 반지름의 길이는 2이므로 원 C 위의 점과 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 사이의 거리의 최댓값과 최솟값은 각각

$\frac{13}{\sqrt{5}}+2$, $\frac{13}{\sqrt{5}}-2$

이때 $\overline{AM}=\sqrt{\{4-(-2)\}^2+\{2-(-1)\}^2}=3\sqrt{5}$이므로

삼각형 APQ의 넓이의 최댓값은

$M=2\times\left\{\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times\left(\frac{13}{\sqrt{5}}+2\right)\right\}=39+6\sqrt{5}$

이고, 최솟값은

$m=2\times\left\{\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times\left(\frac{13}{\sqrt{5}}-2\right)\right\}=39-6\sqrt{5}$

$\therefore M+m=(39+6\sqrt{5})+(39-6\sqrt{5})=78$

답 78

027

직선 $3x-y+5=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$3y-x+5=0$

이 직선을 x축에 대하여 대칭이동한 직선 l의 방정식은

$-3y-x+5=0$

$\therefore x+3y-5=0$

이때 원 $(x+2k)^2+(x-k)^2=k^2$이 직선 l에 대하여 대칭이려면 원의 중심 $(-2k, k)$가 직선 l 위의 점이어야 하므로

$-2k+3k-5=0$

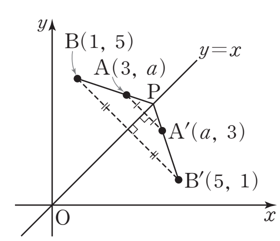
$\therefore k=5$

답 ⑤

028

두 점 $A(3, a)$, $B(1, 5)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 각각

$A'(a, 3)$, $B'(5, 1)$



두 직선 AA′, BB′은 각각 직선 $y=x$와 서로 수직이므로 두 직선 AA′, BB′은 서로 평행하다.

즉, 삼각형 PAA′과 삼각형 PBB′은 서로 닮음이다.

삼각형 PAA′과 사각형 ABB′A′의 넓이의 비가 1 : 8이므로

$\triangle PAA':\triangle PBB'=1:9$

이고, 두 삼각형 PAA′, PBB′의 닮음비는 1 : 3이다. 다른 풀이

$\therefore \overline{AA'}:\overline{BB'}=1:3$

$\overline{AA'}=\sqrt{(a-3)^2+(3-a)^2}=\sqrt{2}(a-3)$ ($\because a>3$)

$\overline{BB'}=\sqrt{(5-1)^2+(1-5)^2}=4\sqrt{2}$

따라서 $\overline{AA'}:\overline{BB'}=1:3$에서

$\sqrt{2}(a-3):4\sqrt{2}=1:3$

$3\sqrt{2}(a-3)=4\sqrt{2}$

$\therefore a=\frac{13}{3}$

답 $\frac{13}{3}$

다른 풀이

$\overline{PA}:\overline{PB}=1:3$이므로

$\overline{PA}:\overline{AB}=1:2$

즉, 점 A는 선분 PB를 1 : 2로 내분하는 점이므로 직선 $y=x$ 위

의 점 P의 좌표를 $(t,\ t)$라 하면

$\dfrac{1\times1+2\times t}{1+2}=3,\ \dfrac{1\times5+2\times t}{1+2}=a$

$\therefore\ t=4,\ a=\dfrac{13}{3}$

029

$T=\dfrac{b-c}{a-d}$는 두 점 $(d,\ c)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

이때 점 $(d,\ c)$는 점 $Q(c,\ d)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점과 같고, 점 Q가 원 $x^2+y^2-6x+8y+21=0$ 위의 점이므로 점 $(d,\ c)$는 원 $x^2+y^2-6x+8y+21=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원 위의 점이다.

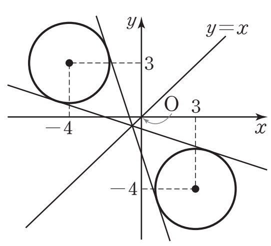
$x^2+y^2-6x+8y+21=0$에서

$(x-3)^2+(y+4)^2=4$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+4)^2+(y-3)^2=4$

두 점 $(d,\ c)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선의 기울기는 다음 그림과 같이 직선이 두 원의 중심 $(3,\ -4)$, $(-4,\ 3)$을 이은 선분의 중점 $\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$을 지나며 두 원에 동시에 접할 때 최댓값 또는 최솟값을 갖는다.



점 $\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$을 지나는 직선의 기울기를 m라 하면 이 방정식은

$y-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=m\left\{x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$

$\therefore\ 2mx-2y+m-1=0$

이 직선이 원 $(x-3)^2+(y+4)^2=4$에 접하려면 원의 중심 $(3,\ -4)$와 직선 $2mx-2y+m-1=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같아야 하므로

$\dfrac{|7m+7|}{\sqrt{(2m)^2+(-2)^2}}=2$

$|7m+7|=2\sqrt{4m^2+4}$

위의 등식의 양변을 제곱하면

$49m^2+98m+49=16m^2+16$

$33m^2+98m+33=0$

이때 T의 최댓값과 최솟값은 위의 이차방정식의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 최댓값과 최솟값의 합은 $-\dfrac{98}{33}$이다.

답 ①

030

원 $(x-5)^2+(y-5)^2=4$ 위의 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(b,\ a)$이다.

두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발 P′, Q′의 좌표는 각각

$P'(a,\ 0)$, $Q'(b,\ 0)$

$\overline{PP'}=b$, $\overline{QQ'}=a$이므로 참고

$\overline{PP'}+\overline{QQ'}=a+b$

$a+b=k\ (k>0)$라 하면

$b=-a+k$

이때 점 $(a,\ b)$는 직선 $y=-x+k$ 위에 있으므로 점 P는 원 $(x-5)^2+(y-5)^2=4$와 직선 $y=-x+k$의 교점이다.

직선과 원이 만나면서 k의 값, 즉 y절편이 최대이려면 직선과 원이 접해야 하므로 원의 중심 $(5,\ 5)$와 직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 2와 같아야 한다.

즉, $\dfrac{|5+5-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2$에서

$|10-k|=2\sqrt{2},\ 10-k=\pm2\sqrt{2}$

$\therefore\ k=10-2\sqrt{2}$ 또는 $k=10+2\sqrt{2}$

k의 값이 최대이어야 하므로

$k=10+2\sqrt{2}$

따라서 $\overline{PP'}+\overline{QQ'}$의 최댓값은 $10+2\sqrt{2}$이므로

$m=10,\ n=2$

$\therefore\ mn=10\times2=20$

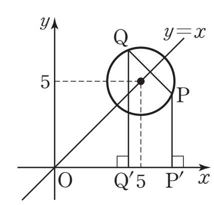
답 20

참고

원 $(x-5)^2+(y-5)^2=4$가 제1사분면에 존재하므로

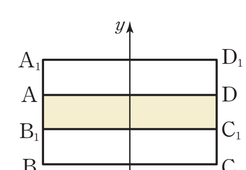
$a>0,\ b>0$

$\therefore\ \overline{PP'}=|b|=b,\ \overline{QQ'}=|a|=a$



031

네 점 A, B, C, D를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 네 점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1이라 하자.



직사각형 $A_1B_1C_1D_1$은 직사각형 ABCD를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 도형이므로 두 직사각형 ABCD, $A_1B_1C_1D_1$은 위의 그림과 같다.

이때 제1사분면 위의 점 D의 좌표를 $(a,\ b)\ (a>0,\ b>0)$라 하면

$A(-a,\ b)$, $B(-a,\ -b)$, $C(a,\ -b)$

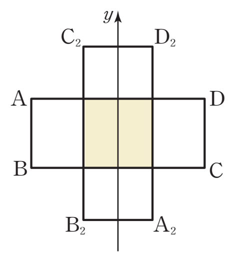
점 B_1은 점 B를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이므로

$\overline{AD}=2a,\ \overline{AB_1}=2b-2$

조건 (가)에서 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부와 직사각형 ABCD의 내부와의 공통부분의 넓이가 18이므로

$\overline{AD}\times\overline{AB_1}=2a(2b-2)=18$ …… ㉠

한편, 네 점 A, B, C, D를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 네 점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2라 하자.



직사각형 $A_2B_2C_2D_2$는 직사각형 ABCD를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형이므로 두 직사각형 ABCD, $A_2B_2C_2D_2$는 위의 그림과 같다.
조건 ㈏에서 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부와 직사각형 ABCD의 내부와의 공통부분의 넓이가 16이므로

$(2b)^2=16$

$\therefore b=2$ ($\because b>0$)

$b=2$를 ㉠에 대입하여 풀면

$a=\dfrac{9}{2}$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$\overline{AD}\times\overline{AB}=2a\times 2b=4ab$

$=4\times\dfrac{9}{2}\times 2=36$

답 ②

032

점 C의 x좌표를 a라 하면 $C(a,\ a^2)$이고 두 점 A, C가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$A(a^2,\ a)$

점 A가 함수 $y=-2x^2+3x$의 그래프 위의 점이므로

$a=-2a^4+3a^2,\ 2a^4-3a^2+a=0$

$a(a-1)(2a^2+2a-1)=0$

$\therefore a=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ ($\because a>0,\ a\neq 1$) 참고

점 D의 좌표는 $(a,\ a)$이므로 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는

$\overline{CD}=a-a^2=a(1-a)$

$=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}$

따라서 정사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$4\times\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}=4\sqrt{3}-6$

답 $4\sqrt{3}-6$

참고

$a=1$이면 두 점 A, C의 좌표가 모두 $(1,\ 1)$이므로 정사각형을 이루지 않는다.

033

원 $x^2+y^2=10$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y+3)^2=10$

이 원을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-1)^2=10$ → (y좌표)$=0$

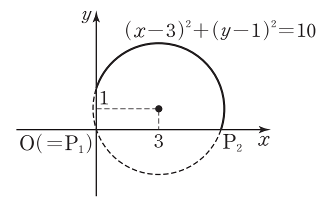
이 원이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$(x-3)^2+(0-1)^2=10$에서

$(x-3)^2=9,\ x-3=\pm 3$

$\therefore x=0$ 또는 $x=6$

$P_1(0,\ 0)$, $P_2(6,\ 0)$이라 하면 다음 그림과 같다.



제1사분면에 있는 원 위의 점 T 중에서 선분 P_1P_2와 거리가 가장 먼 점은 선분 P_1P_2와 수직이고 원의 중심 $(3,\ 1)$을 지나는 직선과 원의 교점인 $(3,\ 1+\sqrt{10})$이다.
이때의 삼각형 TP_1P_2의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 6\times(1+\sqrt{10})=3+3\sqrt{10}$

이고, $\sqrt{81}<3\sqrt{10}<\sqrt{100}$이므로

$12<3+3\sqrt{10}<13$

즉, 삼각형 TP_1P_2의 넓이가 자연수인 가장 큰 값은 12이다.

(i) 점 T의 x좌표가 3보다 클 때
조건을 만족시키는 점 T의 개수는 12이다.

(ii) 점 T의 x좌표가 0보다 크고 3보다 작을 때
원 $(x-3)^2+(y-1)^2=10$이 y축과 만나는 점의 y좌표는
→ (x좌표)$=0$
$(0-3)^2+(y-1)^2=10$에서
$(y-1)^2=1,\ y-1=\pm 1$
$\therefore y=0$ 또는 $y=2$
세 점 P_1, P_2, $(0,\ 2)$가 이루는 삼각형의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times 6\times 2=6$
즉, 삼각형 TP_1P_2의 넓이는 6보다 크고 12보다 작거나 같으므로 조건을 만족시키는 점 T의 개수는 6이다.

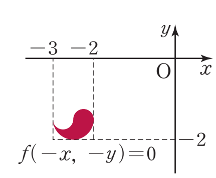
(i), (ii)에서 점 T의 개수는

$12+6=18$

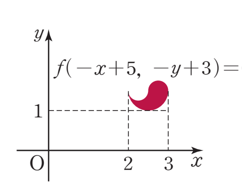
답 18

034

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x,\ -y)=0$이고 이 도형을 색칠한 모양은 다음 그림과 같다.



또, 이 도형을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(-x+5,\ -y+3)=0$이고 이 도형을 색칠한 모양은 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 $g(x, y)=0$과 같은 도형을 나타내는 방정식은 $f(-x+5, -y+3)=0$이다.

답 ④

035

$y=x^2-2x+3$

$\quad=(x-1)^2+2$ 다른 풀이

이므로 포물선 $y=x^2-2x+3$의 꼭짓점의 좌표는 $(1, 2)$이다.

포물선 $y=x^2-2x+3$을 점 $(2, a)$에 대하여 대칭이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표를 (p, q)라 하면 두 포물선의 꼭짓점이 점 $(2, a)$에 대하여 대칭이므로

$$\frac{1+p}{2}=2,\ \frac{2+q}{2}=a$$

$\therefore p=3,\ q=2a-2$

즉, 대칭이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$(3, 2a-2)$

포물선 $y=x^2-2x+3$은 아래로 볼록하므로 점 $(2, a)$에 대칭이동한 포물선은 위로 볼록하다.

이때 위로 볼록한 포물선이 x축과 만나지 않으려면 꼭짓점의 y좌표가 0보다 작아야 하므로

$2a-2<0$

$\therefore a<1$

따라서 정수 a의 최댓값은 0이다.

답 0

다른 풀이

포물선 $y=(x-1)^2+2$를 점 $(2, a)$에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$2a-y=(4-x-1)^2+2$

$\therefore y=-(x-3)^2+2a-2$

$\quad\quad=-x^2+6x+2a-11$

이 포물선이 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $-x^2+6x+2a-11=0$, 즉 $x^2-6x-2a+11=0$의 판별식을 D라 할 때

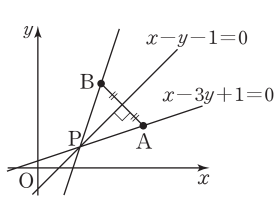
$$\frac{D}{4}=(-3)^2-(-2a+11)<0$$

$\therefore a<1$

따라서 정수 a의 최댓값은 0이다.

036

직선 $x-3y+1=0$ 위의 한 점을 $A(5, 2)$라 하면 점 A를 직선 $x-y-1=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $B(a, b)$라 하자.



선분 AB의 중점 $\left(\frac{5+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$가 직선 $x-y-1=0$ 위에 있으므로

$$\frac{5+a}{2}-\frac{2+b}{2}-1=0$$

$\therefore a-b=-1$ ...... ㉠

직선 AB가 직선 $x-y-1=0$, 즉 $y=x-1$과 수직이므로

$$\frac{b-2}{a-5}=-1$$

$\therefore a+b=7$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=4$

$\therefore B(3, 4)$

두 직선 $x-3y+1=0$, $x-y-1=0$의 교점을 P라 하면

연립하여 풀면 $x=2, y=1$

$P(2, 1)$

직선 $x-3y+1=0$을 직선 $x-y-1=0$에 대하여 대칭이동한 직선은 두 점 B, P를 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{1-4}{2-3}(x-2)$$

$\therefore 3x-y-5=0$

답 ③

다른 풀이

직선 $x-3y+1=0$을 직선 $x-y-1=0$, 즉 $y=x-1$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 참고

$(y+1)-3(x-1)+1=0\quad\quad \therefore 3x-y-5=0$

참고

기울기가 ±1인 직선에 대한 도형의 대칭이동

(1) 직선 $y=x+m$에 대한 대칭이동

$\quad f(x, y)=0 \to f(y-m, x+m)=0$

(2) 직선 $y=-x+n$에 대한 대칭이동

$\quad f(x, y)=0 \to f(-y+n, -x+n)=0$

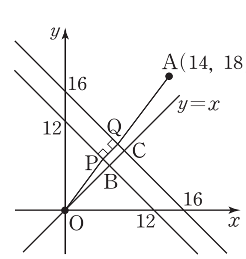
037

[그림 1]과 같이 직선 $y=x$와 도로의 두 가장자리가 만나는 점을 B, C라 하면

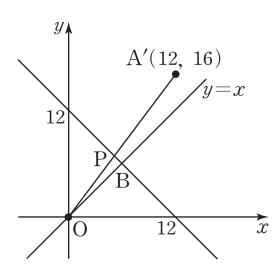
$B(6, 6)$, $C(8, 8)$

통학로와 도로의 두 가장자리가 만나는 점을 P, Q라 하자.

점 C를 점 B로 옮기는 평행이동, 즉 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $y=-x+16$과 점 A를 평행이동하면 [그림 2]와 같이 점 Q가 점 P로, 점 A가 점 $A'(12, 16)$으로 옮겨진다.



[그림 1]



[그림 2]

이때 $\overline{OP}+\overline{QA}=\overline{OP}+\overline{PA'}\geq\overline{OA'}$이고

$\overline{OA'}=\sqrt{12^2+16^2}=20$

한편, $\overline{PQ}=\overline{BC}=2\sqrt{2}$이므로

$\overline{OP}+\overline{PQ}+\overline{QA}\geq\overline{OA'}+\overline{PQ}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad=20+2\sqrt{2}$

따라서 통학로의 길이의 최솟값은 $20+2\sqrt{2}$이므로

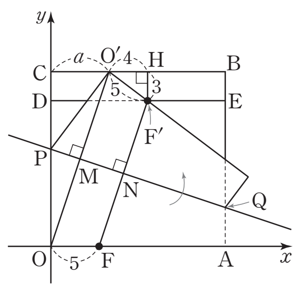
$a=20$, $b=2$

$\therefore a+b=20+2=22$

답 22

038

다음 그림과 같이 점 F′에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고, 직선 PQ와 두 선분 OO′, FF′이 만나는 점을 각각 M, N이라 하자.



$\overline{\mathrm{CO'}}=a$라 하면 $\mathrm{O'}(a,\ 18)$

두 점 D, E가 각각 두 선분 OC, AB를 $5:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{HF'}}=\frac{1}{6}\times18=3$

$\overline{\mathrm{O'F'}}=\overline{\mathrm{OF}}=5$이므로 직각삼각형 HF′O′에서

$\overline{\mathrm{O'H}}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

$\mathrm{F'}(a+4,\ 15)$이고, 두 점 M, N은 각각 두 선분 OO′, FF′의 중점이므로

$\mathrm{M}\left(\frac{a}{2},\ 9\right)$, $\mathrm{N}\left(\frac{a+9}{2},\ \frac{15}{2}\right)$

두 점 M, N은 직선 PQ 위의 점이므로 직선 PQ의 기울기는

$$\frac{\frac{15}{2}-9}{\frac{a+9}{2}-\frac{a}{2}}=-\frac{1}{3}$$

이고, 두 점 O, O′은 직선 PQ에 대하여 대칭이므로 직선 OO′의 기울기는 3이다.

즉, $\frac{18-0}{a-0}=3$에서 $a=6$

$\therefore \mathrm{M}(3,\ 9)$

따라서 직선 PQ의 방정식은

$y-9=-\frac{1}{3}(x-3)$

$\therefore y=-\frac{1}{3}x+10$

즉, $m=-\frac{1}{3}$, $n=10$이므로

$$\frac{n}{m}=\frac{10}{-\frac{1}{3}}=-30$$

답 ②

다른 풀이

직선 OO′과 직선 FF′은 직선 PQ와 서로 수직이므로 직선 OO′과 직선 FF′의 기울기는 $-\frac{1}{m}$이다.

즉, 직선 OO′의 방정식은

$y=-\frac{1}{m}x$

점 O′의 y좌표는 18이므로 점 O′의 좌표는

$(-18m,\ 18)$

점 F의 좌표는 $(5,\ 0)$이므로 직선 FF′의 방정식은

$y=-\frac{1}{m}(x-5)$

이때 점 D, E, F′의 y좌표는 15이므로 점 F′의 좌표는

$(-15m+5,\ 15)$

$\overline{\mathrm{O'F'}}=5$이므로

$\sqrt{\{-15m+5-(-18m)\}^2+(15-18)^2}=5$

위의 등식의 양변을 제곱하여 정리하면

$3m^2+10m+3=0$, $(3m+1)(m+3)=0$

$\therefore m=-\frac{1}{3}$ 또는 $m=-3$

$m=-3$이면 점 P가 선분 OC 위의 점이 아니거나 점 Q가 선분 AB 위의 점이 아니므로

$m=-\frac{1}{3}$

따라서 점 O′의 좌표는 $(6,\ 18)$이고, 선분 OO′의 중점

$\left(\frac{0+6}{2},\ \frac{0+18}{2}\right)$, 즉 $(3,\ 9)$는 직선 PQ 위의 점이므로

$y=-\frac{1}{3}x+10$에서

$9=-\frac{1}{3}\times3+n$

$\therefore n=10$

$$\therefore \frac{n}{m}=\frac{10}{-\frac{1}{3}}=-30$$

039

함수 $y=(x-2)^2+3$의 그래프 위의 서로 다른 두 점 P, Q가 직선 $y=-x+6$에 대하여 대칭이면 두 점 P, Q는 기울기가 1인 직선 위의 점이다.

기울기가 1인 직선의 방정식을 $y=x+k$ (k는 상수)라 하면 두 점 P, Q는 이 직선과 함수 $y=(x+1)^2+2$의 그래프가 만나는 점이므로

$x+k=(x-2)^2+3$에서

$x^2-5x+7-k=0$ ······ ㉠

이 이차방정식의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$

α, β는 두 점 P, Q의 x좌표이므로

$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha+k)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta+k)$

로 놓으면 두 점 P, Q의 중점 $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha+\beta+2k}{2}\right)$, 즉

$\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}+k\right)$가 직선 $y=-x+6$ 위에 있으므로

$\frac{5}{2}+k=-\frac{5}{2}+6$

$\therefore k=1$

㉠에서 $x^2-5x+6=0$이므로

$(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

따라서 $\mathrm{P}(2,\ 3)$, $\mathrm{Q}(3,\ 4)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(3-2)^2+(4-3)^2}$

$=\sqrt{2}$

답 $\sqrt{2}$

다른 풀이

함수 $y=(x-2)^2+3=x^2-4x+7$의 그래프 위의 서로 다른 두 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$라 하면

$b=a^2-4a+7$ ...... ㉠

$d=c^2-4c+7$ ...... ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$b-d=(a^2-c^2)-4(a-c)=(a-c)(a+c-4)$ ...... ㉢

두 점 P, Q는 직선 $y=-x+6$에 대하여 대칭이므로 직선 PQ가 직선 $y=-x+6$과 수직이다.

즉, $\dfrac{d-b}{c-a}=1$에서 $b-d=a-c$

㉢에서 $a-c=(a-c)(a+c-4)$

이때 $a\neq c$이므로

$a+c-4=1$

$\therefore a+c=5$

㉠$+$㉡을 하면

$b+d=a^2+c^2-4(a+c)+14=a^2+c^2-6$ ...... ㉣

선분 PQ의 중점 $\left(\dfrac{a+c}{2},\ \dfrac{b+d}{2}\right)$가 직선 $y=-x+6$ 위에 있으므로

$\dfrac{b+d}{2}=-\dfrac{a+c}{2}+6$

$\therefore b+d=7$

이것을 ㉣에 대입하면 $7=a^2+c^2-6$

$a^2+c^2=13$, $(a+c)^2-2ac=13$

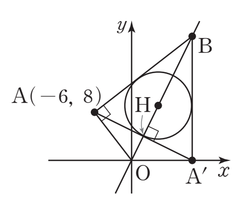
$25-2ac=13$ $\quad\therefore ac=6$

$(a-c)^2=(a+c)^2-4ac=1$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$

$=\sqrt{2(a-c)^2}=\sqrt{2}$

040



조건 ㈎에서 $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AO}}$이고

$\overline{\mathrm{AO}}=10$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{A'B}}=20$

$\therefore \overline{\mathrm{OB}}=10\sqrt{5}$

조건 ㈏에서 $\angle\mathrm{BAO}=90^\circ$이므로

선분 AA′과 직선 BO의 교점을 H라 하면 직각삼각형 BAO에서

$10\times20=10\sqrt{5}\times\overline{\mathrm{AH}}$

이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=4\sqrt{5}$

$\therefore \overline{\mathrm{AA'}}=8\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{20^2-(4\sqrt{5})^2}=8\sqrt{5}$

삼각형 AA′B의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\dfrac{1}{2}\times(20+20+8\sqrt{5})\times r=\dfrac{1}{2}\times8\sqrt{5}\times8\sqrt{5}$

$(20+4\sqrt{5})r=160$

$\therefore r=10-2\sqrt{5}$

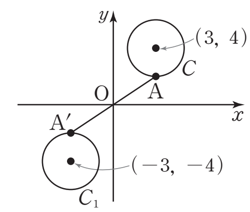
따라서 내접원의 넓이는

$\pi\times(10-2\sqrt{5})^2=(120-40\sqrt{5})\pi$

답 ④

041

ㄱ. 원 $x^2+y^2-6x-8y+21=0$, 즉 $(x-3)^2+(y-4)^2=4$를 C, 원 C를 원점에 대하여 대칭이동한 원을 C_1이라 하면 두 원 C, C_1의 중심의 좌표는 각각 $(3,\ 4)$, $(-3,\ -4)$이고, 반지름의 길이는 모두 2이다.



점 A′은 원 C_1 위의 점이므로

(두 원 C, C_1의 중심 사이의 거리)$-(2+2)$

$\leq\overline{\mathrm{AA'}}$

$\leq$(두 원의 중심 사이의 거리)$+(2+2)$

이때 두 원 C, C_1의 중심 사이의 거리는

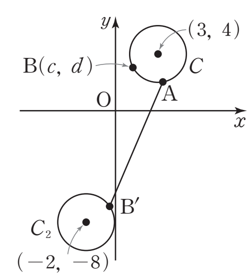
$\sqrt{(-3-3)^2+(-4-4)^2}=10$

이므로

$10-4\leq\overline{\mathrm{AA'}}\leq10+4$

$\therefore 6\leq\overline{\mathrm{AA'}}\leq14$ (참)

ㄴ. 원 C_1을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 원을 C_2라 하면 원 C_2의 중심의 좌표는 $(-2,\ -8)$이고, 반지름의 길이는 2이다.



점 B를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{B'}(-c+1,\ -d-4)$라 하면 점 B′은 원 C_2 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{(a+c-1)^2+(b+d+4)^2}$

이고

$\overline{\mathrm{AB'}}\geq$(두 원 C, C_2의 중심 사이의 거리)$-(2+2)$

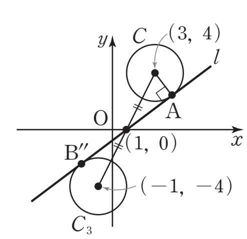
이때 두 원 C, C_2의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-2-3)^2+(-8-4)^2}=13$이므로

$\overline{\mathrm{AB'}}\geq13-4=9$

$\therefore (a+c-1)^2+(b+d+4)^2=\overline{\mathrm{AB'}}^2\geq81$ (참)

ㄷ. 원 C_1을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원을 C_3이라 하면 원 C_3의 중심의 좌표는 $(-1,\ -4)$이고, 반지름의 길이는 2이다.



점 B를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{B''}(-c+2,\ -d)$라 하면 점 B″은 원 C_3 위의 점이다.

$\frac{b+d}{a+c-2}=\frac{b-(-d)}{a-(-c+2)}$는 두 점 A, B″을 지나는 직선의 기울기이다.

따라서 위의 그림의 직선 l과 같이 두 원 C, C_3에 접할 때 최솟값을 갖는다.

접선 l은 두 원 C, C_3의 중심을 이은 선분의 중점 $(1, 0)$을 지나므로 접선 l의 기울기를 m이라 하면 직선의 방정식은

$y=m(x-1)$

$\therefore mx-y-m=0$

이때 원 C의 중심 $(3, 4)$와 직선 $mx-y-m=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|3m-4-m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$|m-2|=\sqrt{m^2+1}$

위의 등식의 양변을 제곱하면

$m^2-4m+4=m^2+1$

$\therefore m=\frac{3}{4}$

즉, $\frac{b+d}{a+c-2}$의 최솟값은 $\frac{3}{4}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

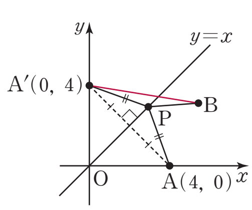
042

점 B의 좌표를 (x, y) $(x>0, y>0)$라 하자.

(i) $x \geq y$일 때

두 점 A, B가 모두 직선 $y=x$의 아래쪽에 있으므로 점 A를 직선 $y=x$에 대칭이동한 점을 A′이라 하면 A′(0, 4)이고

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$$
$$\geq \overline{A'B}$$
$$=4\sqrt{2}$$
$$\therefore x^2+(y-4)^2=32 \quad \cdots\cdots ㉠$$

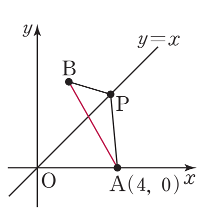


(ii) $x<y$일 때

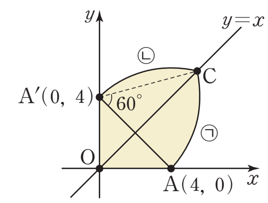
두 점 A, B가 직선 $y=x$에 대하여 서로 반대쪽에 위치하고 있으므로

$\overline{AP}+\overline{BP} \geq \overline{AB}=4\sqrt{2}$

$\therefore (x-4)^2+y^2=32 \quad \cdots\cdots ㉡$



(i), (ii)에서 두 원 ㉠, ㉡이 직선 $y=x$와 만나는 점을 C라 하면 점 B가 그리는 도형은 다음 그림의 호 AC와 호 A′C이다.



이때 두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이가 같으므로

$\overline{A'C}=\overline{AC}=\overline{A'A}=4\sqrt{2}$

즉, 삼각형 A′AC는 정삼각형이므로

$\angle CA'A=\angle A'AC=60°$

따라서 점 B가 그리는 도형과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$2\times${(부채꼴 AA′C의 넓이)−(삼각형 AA′C의 넓이)}

+(삼각형 AA′C의 넓이)+(삼각형 OAA′의 넓이)

$$=2\times\left\{\pi\times(4\sqrt{2})^2\times\frac{60}{360}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{2})^2\right\}$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}\times4^2$$

$$=\frac{32}{3}\pi-8\sqrt{3}+8$$

이므로 $a=\frac{32}{3}$, $b=-8$, $c=8$

$\therefore 3a+b+c=3\times\frac{32}{3}+(-8)+8=32$

답 32

043

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

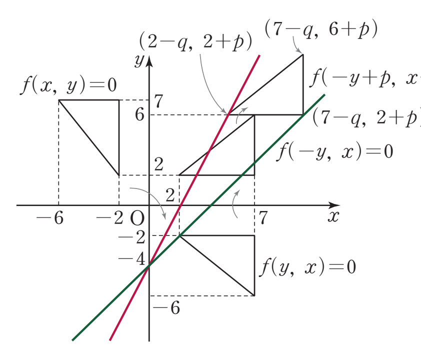
$f(y, x)=0$

방정식 $f(y, x)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(-y, x)=0$

방정식 $f(-y, x)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 $-q$만큼, y축의 방향으로 p만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(-(y-p), x-(-q))=0$, 즉 $f(-y+p, x+q)=0$



$\frac{b+4}{a}=\frac{b-(-4)}{a-0}$이므로 $\frac{b+4}{a}$는 방정식 $f(-y+p, x+q)=0$이 나타내는 도형 위의 점 (a, b)와 점 $(0, -4)$를 지나는 직선의 기울기이다.

$\frac{1}{3}\leq\frac{2(b+4)}{a}\leq2$이므로

$\frac{1}{6}\leq\frac{b+4}{a}\leq1$

위의 그림과 같이 직선의 기울기가 최대일 때는 직선이 점

$(2-q,\ 2+p)$를 지나고, 직선의 기울기가 최소일 때는 점 $(7-q,\ 2+p)$를 지나므로

$\dfrac{2+p-(-4)}{2-q-0}=1$에서

$p+q=-4$ ⋯⋯ ㉠

$\dfrac{2+p-(-4)}{7-q-0}=\dfrac{1}{6}$에서

$6p+q=-29$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$p=-5,\ q=1$

$\therefore\ p+q=-5+1=-4$

답 -4

044

$\mathrm{A}\left(t,\ -\dfrac{3}{4}t+\dfrac{7}{2}\right)$이라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=5$이고 직선 AB의 기울기가 $-\dfrac{3}{4}$이므로

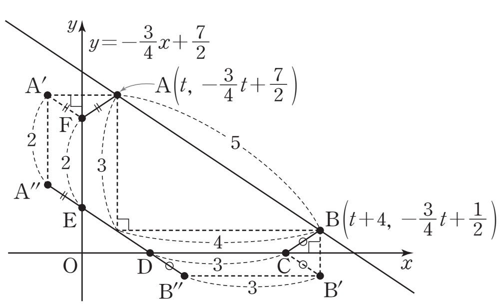
$\mathrm{B}\left(t+4,\ -\dfrac{3}{4}t+\dfrac{1}{2}\right)$

점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 A′을 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점을 A″이라 하면

$\mathrm{A}'\left(-t,\ -\dfrac{3}{4}t+\dfrac{7}{2}\right)$, $\mathrm{A}''\left(-t,\ -\dfrac{3}{4}t+\dfrac{3}{2}\right)$

또, 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′, 점 B′을 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점을 B″이라 하면

$\mathrm{B}'\left(t+4,\ \dfrac{3}{4}t-\dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{B}''\left(t+1,\ \dfrac{3}{4}t-\dfrac{1}{2}\right)$



(육각형 ABCDEF의 둘레의 길이)$=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{DE}}+\overline{\mathrm{BC}}+5+3+2$

$=\overline{\mathrm{A'F}}+\overline{\mathrm{DE}}+\overline{\mathrm{B'C}}+10$

$=\overline{\mathrm{A''E}}+\overline{\mathrm{DE}}+\overline{\mathrm{B''D}}+10$

$\geq\overline{\mathrm{A''B''}}+10$ ⋯⋯ ㉠

다른 풀이

이때

$\overline{\mathrm{A''B''}}=\sqrt{\{t+1-(-t)\}^2+\left\{\dfrac{3}{4}t-\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{3}{4}t+\dfrac{3}{2}\right)\right\}^2}$

$=\sqrt{\dfrac{25}{4}t^2-2t+5}$

$=\sqrt{\dfrac{25}{4}\left(t-\dfrac{4}{25}\right)^2+\dfrac{121}{25}}$

이므로 $\overline{\mathrm{A''B''}}$은 $t=\dfrac{4}{25}$일 때 최솟값 $\dfrac{11}{5}$을 갖는다. ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 육각형 ABCDEF의 둘레의 길이의 최솟값은

$\dfrac{11}{5}+10=\dfrac{61}{5}$

답 $\dfrac{61}{5}$

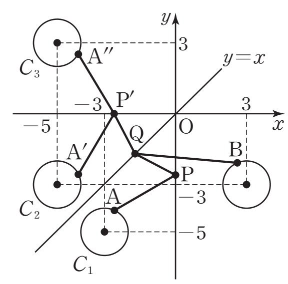
045

일등급의 메모장

(두 원 위의 점 사이의 최소 거리)

=(두 원의 중심 사이의 거리)−(두 원의 반지름의 길이의 합)

원 $(x+3)^2+(y+5)^2=1$을 C_1, 원 C_1을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원을 C_2, 원 C_2를 x축에 대하여 대칭이동한 원을 C_3이라 하자.



두 원 C_2, C_3의 중심의 좌표는 각각 $(-5,\ -3)$, $(-5,\ 3)$이고, 두 원 C_2, C_3의 반지름의 길이는 모두 1이다.

점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면 점 A′은 원 C_2 위의 점이고, 점 P′은 x축 위의 점이다.

또, 점 A′을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A″이라 하면 점 A″은 원 C_3 위의 점이다.

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A'P'}}+\overline{\mathrm{P'Q}}+\overline{\mathrm{QB}}$

$=\overline{\mathrm{A''P'}}+\overline{\mathrm{P'Q}}+\overline{\mathrm{QB}}$

$\geq\overline{\mathrm{A''B}}$

이고, 선분 A″B의 길이의 최솟값은 원 C_3의 중심 $(-5,\ 3)$과 원 $(x-3)^2+(y+3)^2=1$의 중심 $(3,\ -3)$ 사이의 거리에서 두 원의 반지름의 길이의 합을 뺀 값과 같으므로 구하는 최솟값은

$\sqrt{\{3-(-5)\}^2+(-3-3)^2}-(1+1)=8$

답 8

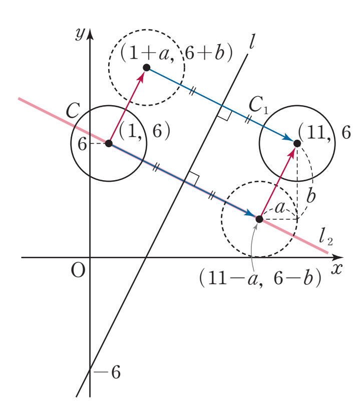
046

일등급의 메모장

점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$을 직선 $l:\ ax+by+c=0$에 대하여 대칭이동한 점 $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$는 다음 연립방정식을 만족한다.

$\dfrac{x_1-x_2}{2a}=\dfrac{y_1-y_2}{2b}=\dfrac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}$

확장



조건 ㈎에서 원 C의 중심 $(1,\ 6)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 후 직선 l에 대하여 대칭이동한 점과 점 $(1,\ 6)$을 직선 l에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점이 일치한다.
즉, 평행이동과 대칭이동의 순서를 바꾸어도 결과가 일치하므로 평행이동의 방향이 대칭축인 직선 l과 평행해야 한다. 참고

$\therefore\ m=\dfrac{b}{a}$ …… ㉠

조건 ㈏에서 원 C를 x축의 방향으로 10만큼 평행이동하면 원 C_1과 겹쳐지므로 C_1의 중심은 $(11,\ 6)$이다. 다른 풀이
따라서 원 C를 평행이동한 원의 중심 $(1+a,\ 6+b)$와 원 C_1의 중심 $(11,\ 6)$이 직선 l에 대하여 대칭이므로 두 점 $(1+a,\ 6+b)$, $(11,\ 6)$의 중점이 직선 l 위에 있다.

즉, $\dfrac{(6+b)+6}{2}=m\times\dfrac{(1+a)+11}{2}-6$이므로

$b=am+12m-24$ …… ㉡

㉠에서 $b=am$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$12m-24=0$

$\therefore\ m=2$

두 점 $(1+a,\ 6+b)$, $(11,\ 6)$을 지나는 직선은 l에 수직이므로

$\dfrac{6-(6+b)}{11-(1+a)}\times 2=-1$

$\therefore\ a+2b=10$ …… ㉢

㉠에서 $b=2a$이므로 이것을 ㉢에 대입하면

$5a=10$

$\therefore\ a=2,\ b=4$

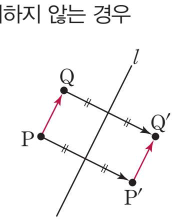
$\therefore\ m+a+b=2+2+4=8$

답 8

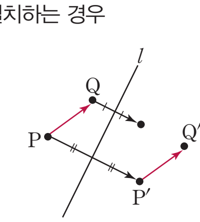
참고

점 P를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 P′, 점 P′을 평행이동한 점을 Q′, 점 P를 평행이동한 점을 Q라 하자.
평행이동의 성질에 의하여
$\overline{\mathrm{PQ}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{P'Q'}}$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{P'Q'}}$
이므로 사각형 PQQ′P′은 평행사변형이다.
점 Q를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점이 Q′이 되기 위해서는 두 점 Q와 Q′의 중점이 직선 l 위에 위치해야 한다.
즉, 직선 l이 두 선분 PP′, QQ′의 각 중점을 지나므로 직선 l은 직선 PQ와 평행하다.
따라서 평행이동과 대칭이동의 순서를 바꾸어도 결과가 일치할 때는 평행이동의 방향이 대칭축인 직선 l과 평행해야 한다.
평행이동한 후 대칭이동한 점과 대칭이동한 후 평행이동한 점이

(1) 일치하지 않는 경우



(2) 일치하는 경우



다른 풀이 확장

원 C의 중심 $(1,\ 6)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점 $(1+a,\ 6+b)$를 직선 $l:\ mx-y-6=0$에 대하여 대칭이동한 점은 원 C_1의 중심 $(11,\ 6)$이므로

$\dfrac{(1+a)-11}{2m}=\dfrac{(6+b)-6}{2\times(-1)}=\dfrac{m(1+a)-(6+b)-6}{m^2+(-1)^2}$

$\dfrac{a-10}{2m}=-\dfrac{b}{2}=\dfrac{m-12+am-b}{m^2+1}$ …… ㉣

원 C의 중심 $(1,\ 6)$을 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점이 $(11,\ 6)$이다.
따라서 원 C의 중심 $(1,\ 6)$을 직선 l에 대하여 대칭이동한 점은 $(11-a,\ 6-b)$이므로

$\dfrac{1-(11-a)}{2m}=\dfrac{6-(6-b)}{2\times(-1)}=\dfrac{m-6-6}{m^2+(-1)^2}$

$\dfrac{a-10}{2m}=-\dfrac{b}{2}=\dfrac{m-12}{m^2+1}$ …… ㉤

㉣, ㉤에서 $am-b=0$이므로

$b=am$ …… ㉥

따라서 ㉤에서 $\dfrac{a-10}{2m}=-\dfrac{am}{2}$이므로

$am^2+a-10=0$ …… ㉦

또, ㉤에서 $\dfrac{a-10}{2m}=\dfrac{m-12}{m^2+1}$이므로

$(a-10)(m^2+1)=2m(m-12)$

$am^2+a-10=2m^2-24m$

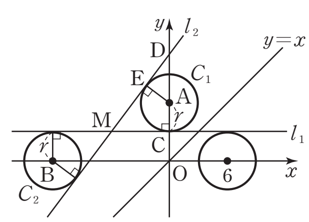
$2m(m-2)=0$ ($\because$ ㉦)

따라서 $m=2$ ($\because\ m>0$)이고 ㉦, ㉥에서 $a=2$, $b=4$이다.

$\therefore\ m+a+b=2+2+4=8$

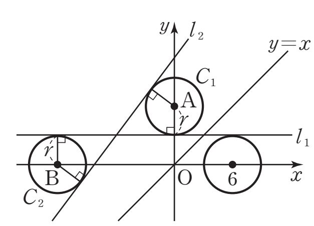
047

일등급의 메모장



△DMC∽△DAE이고 점 M은 선분 AB의 중점이다.

원 $(x-6)^2+y^2=r^2$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원을 C_1, x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 원을 C_2라 하자.



두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 A, B라 하면 $\mathrm{A}(0,\ 6)$, $\mathrm{B}(6+k,\ 0)$이고, 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이는 모두 r이다.
점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 P′, 점 Q를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점을 Q′이라 하면 점 P′은 원 C_1 위의 점이고, 점 Q′은 원 C_2 위의 점이다.
이때 두 점 $\mathrm{P'}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q'}(x_2,\ y_2)$에 대하여 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$의 값은 직선 P′Q′의 기울기와 같다.
직선 P′Q′의 기울기의 최솟값이 0이므로 원 C_2의 중심의 x좌표가 $-2r$보다 작고, 두 원 C_1, C_2는 모두 x축에 평행한 직선 l_1에 접한다.
→ $-2r$보다 크면 기울기가 음수인 접선이 존재한다.

즉, $r=6-r$에서 $r=3$

$6+k<-2r$에서 $k<-12$

또, 직선 $\mathrm{P'Q'}$의 기울기의 최댓값이 $\frac{4}{3}$이므로 두 원 C_1, C_2는 모두 기울기가 $\frac{4}{3}$인 직선 l_2에 접하고, 원 C_2의 중심의 x좌표는 직선 l_2의 x절편보다 작다. 다른 풀이

직선 l_2의 방정식을 $y=\frac{4}{3}x+n$ (n은 상수)이라 하면 직선 l_2의 y절편은 점 A의 y좌표보다 크므로 $n>6$이다.

점 $\mathrm{A}(0,\ 6)$과 직선 $y=\frac{4}{3}x+n$, 즉 $4x-3y+3n=0$ 사이의 거리는 원 C_1의 반지름의 길이 3과 같으므로

$\frac{|4\times0-3\times6+3n|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3$, $|3n-18|=15$

$3n-18=\pm15$ $\quad\therefore n=11$ ($\because n>6$)

즉, 직선 l_2의 방정식은 $4x-3y+33=0$

점 $\mathrm{B}(6+k,\ 0)$과 직선 $4x-3y+33=0$ 사이의 거리는 원 C_2의 반지름의 길이 3과 같으므로

$\frac{|4(6+k)-3\times0+33|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3$, $|4k+57|=15$

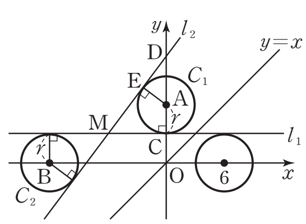
$4k+57=\pm15$ $\quad\therefore k=-18$ ($\because k<-12$)

$\therefore |r+k|=|3+(-18)|=15$

답 15

다른 풀이

직선 l_1이 y축과 만나는 점을 C, 직선 l_2가 y축과 만나는 점을 D, 직선 l_1과 직선 l_2의 교점을 M, 점 A에서 직선 l_2에 내린 수선의 발을 점 E라 하자.



직선 l_2의 기울기가 $\frac{4}{3}$이므로 삼각형 DMC에서

$\overline{\mathrm{MC}}:\overline{\mathrm{CD}}:\overline{\mathrm{DM}}=3:4:5$

이때 $\triangle\mathrm{DMC}\backsim\triangle\mathrm{DAE}$ (AA 닮음)이므로

$\angle\mathrm{DCM}=\angle\mathrm{DEA}=90°$, $\angle\mathrm{D}$는 공통

$\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{ED}}:\overline{\mathrm{DA}}=3:4:5$

즉, $\overline{\mathrm{DA}}=\frac{5}{3}\overline{\mathrm{AE}}=\frac{5}{3}\times3=5$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{DA}}+\overline{\mathrm{CA}}=5+3=8$

한편, 원 C_1과 원 C_2는 합동이고, 두 원의 공통내접선은 두 원의 중심을 이은 선분의 중점을 지나므로

$\mathrm{M}\left(0+\frac{6+k}{2},\ \frac{6}{2}+0\right)$, 즉 $\mathrm{M}\left(\frac{6+k}{2},\ 3\right)$

이때 $\overline{\mathrm{MC}}:\overline{\mathrm{CD}}=3:4$이므로

$\overline{\mathrm{MC}}:8=3:4$ $\quad\therefore \overline{\mathrm{MC}}=6$

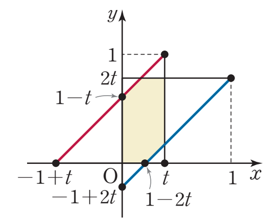
따라서 점 M의 x좌표는 -6이므로

$\frac{6+k}{2}=-6$ $\quad\therefore k=-18$

$\therefore |r+k|=|3+(-18)|=15$

048

일등급의 메모장

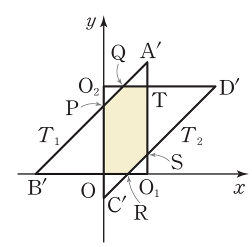


세 점 O, A, B를 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 점을 각각 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{A'}$, $\mathrm{B'}$이라 하면

$\mathrm{O_1}(t,\ 0)$, $\mathrm{A'}(t,\ 1)$, $\mathrm{B'}(-1+t,\ 0)$

세 점 O, C, D를 y축의 방향으로 $2t$만큼 평행이동한 점을 각각 $\mathrm{O_2}$, $\mathrm{C'}$, $\mathrm{D'}$이라 하면

$\mathrm{O_2}(0,\ 2t)$, $\mathrm{C'}(0,\ -1+2t)$, $\mathrm{D'}(1,\ 2t)$



두 삼각형 T_1, T_2의 내부의 공통부분이 육각형 모양이 되려면 선분 $\mathrm{A'B'}$이 두 선분 $\mathrm{O_2C'}$, $\mathrm{O_2D'}$과 점 $\mathrm{A'}$, 점 $\mathrm{B'}$이 아닌 두 점에서 만나야 한다.

또, 선분 $\mathrm{C'D'}$이 두 선분 $\mathrm{O_1B'}$, $\mathrm{O_1A'}$과 점 $\mathrm{C'}$, 점 $\mathrm{D'}$이 아닌 두 점에서 만나야 한다.

선분 $\mathrm{A'B'}$이 두 선분 $\mathrm{O_2C'}$, $\mathrm{O_2D'}$과 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 선분 $\mathrm{C'D'}$이 두 선분 $\mathrm{O_1B'}$, $\mathrm{O_1A'}$과 만나는 점을 각각 R, S라 하면

$\mathrm{P}(0,\ 1-t)$, $\mathrm{Q}(3t-1,\ 2t)$, $\mathrm{R}(1-2t,\ 0)$, $\mathrm{S}(t,\ 3t-1)$

즉, 두 삼각형 T_1, T_2의 내부의 공통부분이 육각형이 만들어지려면

(점 P의 y좌표)$<$(점 Q의 y좌표)$<$(점 $\mathrm{A'}$의 y좌표)

이어야 하므로

$1-t<2t<1$

$1-t<2t$에서 $t>\frac{1}{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$2t<1$에서 $t<\frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

또,

(점 $\mathrm{C'}$의 y좌표)$<$(점 R의 y좌표)$<$(점 S의 y좌표)

이어야 하므로

$-1+2t<0<3t-1$

$-1+2t<0$에서 $t<\frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

$0<3t-1$에서 $t>\frac{1}{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉤

㉣, ㉤에서 $\frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉥

㉢, ㉥에서 $\frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}$이므로 $a=\frac{1}{2}$

이때 두 선분 $A'O_1$, O_2D'의 교점을 T라 하고, 육각형의 넓이를 $f(t)\ \left(\frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}\right)$이라 하면

$f(t)=$(직사각형 OO_1TO_2의 넓이)

$\quad -$(삼각형 O_1SR의 넓이)$-$(삼각형 O_2PQ의 넓이)

$$=t\times 2t-2\times\frac{1}{2}\times(3t-1)^2$$
$$=-7t^2+6t-1$$
$$=-7\left(t-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{2}{7}$$

이므로 $f(t)$는 $t=\frac{3}{7}$일 때 최댓값 $M=\frac{2}{7}$를 갖는다.

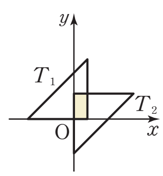
$\therefore\ a+M=\frac{1}{2}+\frac{2}{7}=\frac{11}{14}$

답 ①

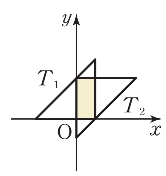
참고

양의 실수 t의 값의 범위에 따른 두 삼각형 T_1, T_2는 다음과 같다.

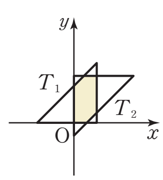
(i) $0<t<\frac{1}{3}$일 때



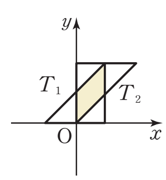
(ii) $t=\frac{1}{3}$일 때



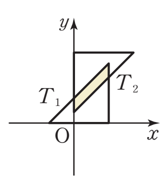
(iii) $\frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}$일 때



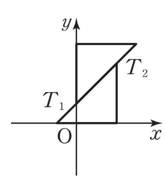
(iv) $t=\frac{1}{2}$일 때



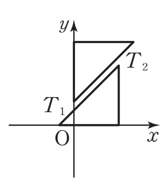
(v) $\frac{1}{2}<t<\frac{2}{3}$일 때



(vi) $t=\frac{2}{3}$일 때

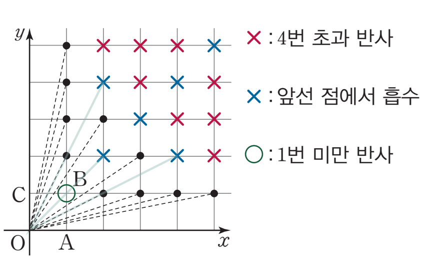


(vii) $t>\frac{2}{3}$일 때



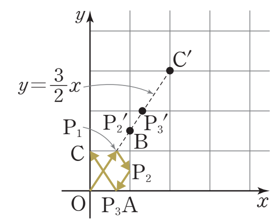
049

일등급의 메모장



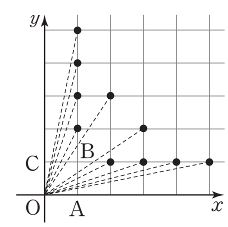
좌표평면 위에서 반사될 때마다 입사각과 반사각의 크기가 같으므로 빛을 반사시키는 대신 좌표평면을 격자 형태로 계속 이어 붙여 빛이 직진하는 것으로 바꾸어 생각할 수 있다.

예를 들어 원점에서 직선 $y=\frac{3}{2}x$를 따라 출발한 광선이 변 위의 세 점 P_1, P_2, P_3에 반사되어 C에 흡수되는 것은 원점에서 점 C'까지 이동하면서 점 P_1과 두 점 P_2, P_3의 대칭이동한 점 P_2', P_3'을 지나는 것과 같다.



위와 같이 생각하면 원점에서 출발하여 광선이 최소 한 번 이상, 네 번 이하로 변에 반사된 후 꼭짓점에 흡수되는 것은 원점과 정수로 이루어진 좌표 (a, b)를 지나는 직선이 또 다른 꼭짓점을 지나지 않고 변을 최소 한 번 이상, 최대 네 번 이하로 만나는 경우와 같다.

가능한 위치를 모두 표시하면 다음과 같이 10개이다.



따라서 기울기 m의 개수는 10이다.

답 10

050

일등급의 메모장

삼각형 ABQ에 대하여

(i) $\angle Q=90^\circ$인 경우

점 Q는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점

(ii) $\angle B=90^\circ$인 경우

점 Q는 직선 AB에 수직이고 점 B를 지나는 직선 위의 점

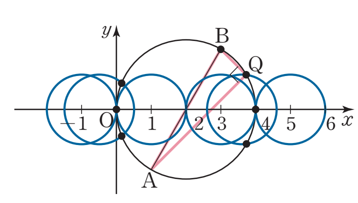
(iii) $\angle A=90^\circ$인 경우

점 Q는 직선 AB에 수직이고 점 A를 지나는 직선 위의 점

원 $x^2+y^2=1$을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원을 C_n이라 하면 원 C_n은 중심이 $(n, 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

원 C_n 위의 점 Q에 대하여 삼각형 ABQ가 직각삼각형일 때 다음과 같이 경우를 나누어 생각하자.

(i) $\angle Q=90^\circ$인 경우



선분 AB를 지름으로 하는 원을 C라 하면 점 Q는 원 C 위에 있다.

이때 두 점 $A(1, -\sqrt{3})$, $B(3, \sqrt{3})$의 중점의 좌표는 $(2, 0)$이고 $\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+\{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})\}^2}=4$이므로 원 C의 중심은 $(2, 0)$이고 반지름의 길이는 2이다.

두 원 C_n과 C의 교점 Q가 존재하려면 $\underline{1\le|n-2|\le 3}$이어야 한다.

(두 원의 반지름의 차)
≤(두 원의 중심 사이의 거리)
≤(두 원의 반지름의 합)

$1\le|n-2|$에서 $n-2\le-1$ 또는 $n-2\ge1$이므로

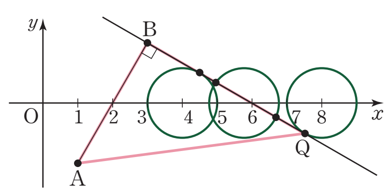
$n\le1$ 또는 $n\ge3$ ...... ㉠

$|n-2|\le3$에서 $-3\le n-2\le3$이므로

$-1\le n\le5$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $-1\le n\le1$ 또는 $3\le n\le5$

(ii) $\angle B=90^\circ$인 경우



점 Q는 직선 AB에 수직이고 점 B를 지나는 직선 위에 있다.

직선 AB의 기울기가 $\dfrac{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}{3-1}=\sqrt{3}$이므로 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다.

즉, 기울기가 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이고 점 B를 지나는 직선의 방정식은

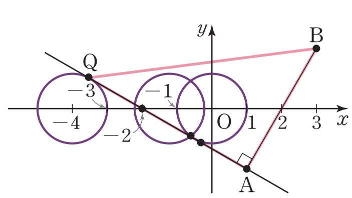
$y-\sqrt{3}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-3)$ $\therefore x+\sqrt{3}y-6=0$

원 C_n과 직선이 만나려면 원의 중심 $(n, 0)$에서 직선까지의 거리가 반지름의 길이인 1보다 작거나 같아야 하므로

$\dfrac{|n+\sqrt{3}\times0-6|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}\le1$, $|n-6|\le2$

$-2\le n-6\le2$ $\therefore 4\le n\le8$

(iii) $\angle A=90^\circ$인 경우



점 Q는 직선 AB에 수직이고 점 A를 지나는 직선 위에 있다.

직선 AB의 기울기가 $\sqrt{3}$이므로 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다.

즉, 기울기가 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이고 점 A를 지나는 직선의 방정식은

$y-(-\sqrt{3})=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$ $\therefore x+\sqrt{3}y+2=0$

원 C_n과 직선이 만나려면 원의 중심 $(n, 0)$에서 직선까지의 거리가 반지름의 길이인 1보다 작거나 같아야 하므로

$\dfrac{|n+\sqrt{3}\times0+2|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}\le1$, $|n+2|\le2$

$-2\le n+2\le2$ $\therefore -4\le n\le0$

(i)~(iii)에서 $-4\le n\le1$ 또는 $3\le n\le8$이므로 정수 n은 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 12개이다.

$\therefore N=12$

또, $n=8$일 때 점 Q는 원 $(x-8)^2+y^2=1$과 직선 $x+\sqrt{3}y-6=0$의 교점이다.

$(x-8)^2+y^2=1$과 $x+\sqrt{3}y-6=0$을 연립하면

$(x-8)^2+\left(\dfrac{6-x}{\sqrt{3}}\right)^2=1$

$4x^2-60x+225=0$

$(2x-15)^2=0$ $\therefore x=\dfrac{15}{2}$

따라서 $Q\left(\dfrac{15}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 $\underline{P\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)}$

점 Q를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore m=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore N\times m=12\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-6\sqrt{3}$

답 $-6\sqrt{3}$

051

일등급의 메모장

원에 내접하는 n각형의 넓이가 최대가 될 때는 정n각형이 될 때이다.

➡ 원 $x^2+y^2=4$ 안에 내접하는 팔각형이 정팔각형일 때 넓이가 최대

$a^2+b^2=4$를 만족시키는 점 (a, b)에 대하여

$n_1=n_2=n_3=n_4=0$일 때 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$이므로

$(a, b)\in Q$

집합 P의 원소 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$이므로 $(-a, b)\in Q$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$이므로 $(a, -b)\in Q$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$이므로 $(b, a)\in Q$

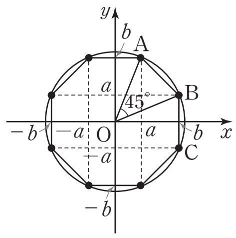
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$이므로 $(-a, -b)\in Q$

즉, (a, b)가 집합 Q의 원소일 때, 점 (a, b)를 y축에 대하여 대칭이동한 점, x축에 대하여 대칭이동한 점, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점, 원점에 대하여 대칭이동한 점도 집합 Q의 원소이다.

따라서 $A^{n_1}B^{n_2}C^{n_3}D^{n_4}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$는 위와 같은 대칭이동을 이용하여 점 (a, b)를 이동시킨 점을 의미하므로 집합 Q의 원소는

(a, b), $(a, -b)$, $(-a, b)$, $(-a, -b)$, (b, a), $(b, -a)$, $(-b, a)$, $(-b, -a)$ 다른풀이

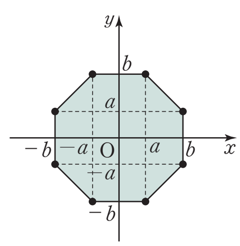
$a<b$라 할 때, 집합 Q의 원소를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



원 $x^2+y^2=4$ 안에 내접하는 팔각형은 정팔각형일 때 그 넓이가 최대이다.
따라서 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(b,\ a)$, $\mathrm{C}(b,\ -a)$라 하면
$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{8}\times360°=45°$이므로
삼각형 AOB의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\sin 45°=\sqrt{2}$
이때 팔각형의 넓이를 S라 하면
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로
$S=8\sqrt{2}$

답 $8\sqrt{2}$

다른 풀이 **확장**
$a<b$라 할 때, 집합 Q의 원소를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.
8개의 점을 이은 팔각형의 넓이를 S라 하면



$S=(2b)^2-4\times\dfrac{1}{2}(b-a)^2$
$\quad=-2a^2+2b^2+4ab$
$A=b^2-a^2$, $B=2ab$라 하면
$A^2+B^2=(a^4-2a^2b^2+b^4)+4a^2b^2$
$\qquad\quad=a^4+2a^2b^2+b^4$
$\qquad\quad=(a^2+b^2)^2$
$\qquad\quad=4^2=16$
이고
$S=-2a^2+2b^2+4ab$
$\quad=2A+2B$
이므로 코시−슈바르츠 부등식에 의하여
$(A^2+B^2)(2^2+2^2)\geq(2A+2B)^2$
$16\times8\geq(2A+2B)^2$
$\therefore\ -8\sqrt{2}\leq2A+2B\leq8\sqrt{2}$
따라서 팔각형의 넓이 S의 최댓값은 $8\sqrt{2}$이다.

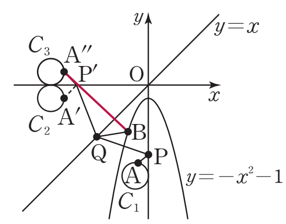
052

일등급의 메모장

좌표평면 위의 여러 선분의 길이의 합을 구할 때에는 점을 이동하여 경로를 펼친 뒤, 두 점 사이의 거리를 이용한다.
➡ $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값을 구하는 문제가 점 $(-7,\ 1)$을 중심으로 하는 원 위의 점과 점 B 사이의 거리의 최솟값을 구하는 문제로 바뀐다.

원 $(x+1)^2+(y+7)^2=1$을 C_1, 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 P′, 원 C_1을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원을 C_2라 하자.

또, 점 A′을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A″, 원 C_2를 x축에 대하여 대칭이동한 원을 C_3이라 하자.
이때 두 원 C_2, C_3의 중심을 각각 O_2, O_3이라 하면 두 점 O_2, O_3의 좌표는 각각 $(-7,\ -1)$, $(-7,\ 1)$이고, 두 원 C_2, C_3의 반지름의 길이는 모두 1이다.



$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A'P'}}+\overline{\mathrm{P'Q}}+\overline{\mathrm{QB}}$
$\qquad\qquad\qquad\quad=\overline{\mathrm{A''P'}}+\overline{\mathrm{P'Q}}+\overline{\mathrm{QB}}$
$\qquad\qquad\qquad\quad\geq\overline{\mathrm{A''B}}$
선분 A″B의 길이의 최솟값은 원 C_3의 중심 $\mathrm{O}_3(-7,\ 1)$과 이차함수 $y=-x^2-1$의 그래프 위의 점 B 사이의 최단 거리에서 원 C_3의 반지름의 길이 1을 뺀 값이다.
선분 $\mathrm{O}_3\mathrm{B}$의 길이가 최소이려면 직선 $\mathrm{O}_3\mathrm{B}$와 점 B를 지나는 이차함수 $y=-x^2-1$의 그래프의 접선이 서로 수직이어야 한다.
$\mathrm{B}(t,\ -t^2-1)$이라 하고 이차함수 $y=-x^2-1$의 그래프 위의 점 B에서의 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은
$y=m(x-t)-t^2-1$ …… ㉠
$m(x-t)-t^2-1=-x^2-1$에서
$x^2+mx-mt-t^2=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로
$D=m^2-4(-mt-t^2)=0$
$m^2+4mt+4t^2=0$, $(m+2t)^2=0$
$\therefore\ m=-2t$
직선 $\mathrm{O}_3\mathrm{B}$의 기울기는
$\dfrac{-t^2-1-1}{t-(-7)}=\dfrac{-t^2-2}{t+7}$
이고, 직선 $\mathrm{O}_3\mathrm{B}$가 접선 ㉠과 서로 수직이므로
$\dfrac{-t^2-2}{t+7}\times(-2t)=-1$ → (직선 $\mathrm{O}_3\mathrm{B}$의 기울기)$\times m=-1$
$2t^3+5t+7=0$, $(t+1)(2t^2-2t+7)=0$
$\therefore\ t=-1$
따라서 $\mathrm{B}(-1,\ -2)$이므로 선분 $\mathrm{O}_3\mathrm{B}$의 길이의 최솟값은
$\sqrt{\{-1-(-7)\}^2+(-2-1)^2}=3\sqrt{5}$
즉, 선분 A″B의 길이의 최솟값은 $3\sqrt{5}-1$이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값은 $3\sqrt{5}-1$이다.

답 $3\sqrt{5}-1$

Ⅱ. 집합과 명제

04 집합

001

①, ②, ④ 집합 A의 원소는 $\varnothing$, 0, $\{0\}$, $\{\varnothing\}$이므로
$\varnothing \in A$, $0 \in A$, $\{\varnothing\} \in A$

③ $0 \in A$이므로 $\{0\} \subset A$

⑤ $\varnothing \in A$, $0 \in A$이므로 $\{\varnothing, 0\} \subset A$이지만 $\{\varnothing, 0\}$은 집합 A의 원소가 아니므로 $\{\varnothing, 0\} \notin A$이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

002

전체집합 U의 원소 중 제곱했을 때

일의 자리의 수가 1인 원소는 1, 9

일의 자리의 수가 4인 원소는 2, 8

일의 자리의 수가 5인 원소는 5

일의 자리의 수가 6인 원소는 4, 6

일의 자리의 수가 9인 원소는 3, 7 참고 다른 풀이

(i) $n(A)=2$인 경우
$\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 7\}$, $\{4, 6\}$의 4개

(ii) $n(A)=4$인 경우
$\{1, 2, 8, 9\}$, $\{1, 3, 7, 9\}$, $\{1, 4, 6, 9\}$, $\{2, 3, 7, 8\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$, $\{3, 4, 6, 7\}$의 6개

(iii) $n(A)=6$인 경우
$\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$, $\{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$, $\{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$, $\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$의 4개

(iv) $n(A)=8$인 경우
$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$의 1개

(i)~(iv)에서 집합 A의 개수는

$4+6+4+1=15$

답 15

참고

5는 제곱하면 일의 자리의 수가 5이고, 제곱하여 일의 자리의 수가 5가 되는 5가 아닌 자연수는 전체집합 U에 존재하지 않으므로 5는 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 5는 집합 A의 원소가 될 수 없다.

다른 풀이

즉, 공집합이 아닌 집합 A의 개수는 집합
$\{\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}\}$의 진부분집합의 개수와 같으므로
$2^4-1=15$

003

$A \subset B$이고 $B \subset A$이므로 $A=B$ 다른 풀이

즉, $\{a-1, a^2\}=\{4, 3-a\}$

$a-1 \in A$이므로 $A=B$이려면 $a-1 \in B$

(i) $a-1=4$일 때, $a=5$
이때 $A=\{4, 25\}$, $B=\{4, -2\}$이므로
$A \neq B$

(ii) $a-1=3-a$일 때, $a=2$
이때 $A=\{1, 4\}$, $B=\{1, 4\}$이므로
$A=B$

(i), (ii)에서 $a=2$

답 ④

다른 풀이

$A=B$이면 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합이 서로 같아야 하므로 참고

$a-1+a^2=4+3-a$

$a^2+2a-8=0$, $(a+4)(a-2)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=2$

(i) $a=-4$일 때
$A=\{-5, 16\}$, $B=\{4, 7\}$이므로
$A \neq B$

(ii) $a=2$일 때
$A=\{1, 4\}$, $B=\{1, 4\}$이므로
$A=B$

(i), (ii)에서 $a=2$

참고

두 집합 A, B에 대하여

$A=B$

➡ 두 집합 A, B의 모든 원소가 서로 같다.

➡ 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합이 서로 같다.

004

조건 (가)에서 $A \cap \{2, 3, 4\}=\{3\}$이므로

$3 \in A$, $2 \notin A$, $4 \notin A$

이때 집합 A는 3을 반드시 원소로 갖고, 6, 7, 8을 원소로 가질 수 있으므로 가능한 집합 A에 따라 $M(A)$를 구하면 다음과 같다.

(i) $n(A)=1$일 때
$A=\{3\}$이면 $M(A)=3$

(ii) $n(A)=2$일 때
$A=\{3, 6\}$이면 $M(A)=3\times6=18$
$A=\{3, 7\}$이면 $M(A)=3\times7=21$
$A=\{3, 8\}$이면 $M(A)=3\times8=24$

(iii) $n(A)\geq3$일 때
$A=\{3, 6, 7\}$이면 $M(A)=3\times6\times7=126$
즉, $M(A)>100$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에서 $M(A)$의 최댓값은 24이다.

답 24

005

$A_{64}=\{x \mid 0<x\leq\sqrt{64}=8,\ x\text{는 짝수}\}=\{2, 4, 6, 8\}$

$A_{20}=\{x \mid 0<x\leq\sqrt{20},\ x\text{는 짝수}\}=\{2, 4\}$

이므로

$A_{64}-A_{20}=\{6, 8\}$

$X \cup (A_{64}-A_{20})=X$에서 $(A_{64}-A_{20}) \subset X$이므로 집합 X는 6, 8을 반드시 원소로 갖고, $X \cap A_{20}=\varnothing$이므로 집합 X는 2, 4를 원소로 갖지 않는다.

따라서 집합 X의 개수는
$2^{10-2-2}=2^6=64$

답 ③

006

$A^C-B^C=A^C\cap B=B-A$이므로
$B-A=\{1, 3, 6, 8\}$
$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{5, 9\}$에서
$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$
$\therefore A=(A\cup B)-(B-A)=\{2, 4, 7\}$
따라서 집합 A의 모든 원소의 합은
$2+4+7=13$

답 13

007

ㄱ. $(A\cap B)\cup(A\cap B^C)=A\cap(B\cup B^C)$
$=A\cap U=A$
ㄴ. $A-\{B\cup(A-B)\}=A-\{B\cup(A\cap B^C)\}$
$=A-\{(B\cup A)\cap(B\cup B^C)\}$
$=A-\{(B\cup A)\cap U\}$
$=A-(B\cup A)=\varnothing$
ㄷ. $(A-B^C)\cup(B\cup A^C)^C=(A\cap B)\cup(B^C\cap A)$
$=A\cap(B\cup B^C)$
$=A\cap U=A$
ㄹ. $\{A\cap(B-A)\}\cup\{(B-A)^C\cap A\}$
$=\{A\cap(B\cap A^C)\}\cup\{(B\cap A^C)^C\cap A\}$
$=\{(A\cap A^C)\cap B\}\cup\{(B^C\cup A)\cap A\}$
$=(\varnothing\cap B)\cup A$
$=\varnothing\cup A=A$
따라서 집합 A와 항상 같은 집합은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

다른 풀이

ㄱ. $(A\cap B)\cup(A\cap B^C)=(A\cap B)\cup(A-B)=A$
ㄴ. $A-\{B\cup(A-B)\}=A-\{B\cup(A\cap B^C)\}$
$=A-\{(B\cup A)\cap(B\cup B^C)\}$
$=A-\{(B\cup A)\cap U\}$
$=A-(B\cup A)=\varnothing$
ㄷ. $(A-B^C)\cup(B\cup A^C)^C=(A\cap B)\cup(B^C\cap A)$
$=(A\cap B)\cup(A-B)=A$
ㄹ. $\{A\cap(B-A)\}\cup\{(B-A)^C\cap A\}$
$=A\cap\{(B-A)\cup(B-A)^C\}$
$=A\cap U=A$
따라서 집합 A와 항상 같은 집합은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

008

$(A_{14}\cup A_{21})\subset A_p$에서 $A_{14}\subset A_p$, $A_{21}\subset A_p$
즉, p는 14와 21의 공약수이므로 p의 최댓값은 14와 21의 최대공약수인 7이다.
$B_q\subset(B_{12}\cap B_{18})$에서 $B_q\subset B_{12}$, $B_q\subset B_{18}$
즉, q는 12와 18의 공약수이므로 q의 최댓값은 12와 18의 최대공약수인 6이다.
따라서 $p+q$의 최댓값은
$7+6=13$

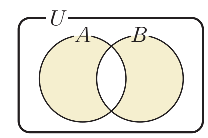
답 13

참고

자연수 k의 양의 배수의 집합을 A_k, 양의 약수의 집합을 B_k라 할 때, 자연수 l, m, n에 대하여
(1) $A_m\cap A_n=A_l$ ➡ l은 m과 n의 최소공배수
$(A_m\cup A_n)\subset A_l$ ➡ l은 m과 n의 공약수
m이 n의 배수이면 ➡ $A_m\subset A_n$
➡ $A_m\cap A_n=A_m$, $A_m\cup A_n=A_n$
(2) $B_m\cap B_n=B_l$ ➡ l은 m과 n의 최대공약수
$B_l\subset(B_m\cap B_n)$ ➡ l은 m과 n의 공약수
m이 n의 약수이면 ➡ $B_m\subset B_n$
➡ $B_m\cap B_n=B_m$, $B_m\cup B_n=B_n$

009

$(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)$
$=(A-B)\cup(B-A)$
이므로 이 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$(A-B)\cup(B-A)=\{2, 5, 9\}$이고, $n(A)=3$, $n(B)=2$이므로
$n(A\cap B)=1$
즉, $A\cap B=\{a-2\}$이어야 하고, $(a+1)\in\{(A-B)\cup(B-A)\}$이므로
$a+1=9$ $\therefore a=8$
따라서 $B=\{6, 9\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은
$6+9=15$

답 ②

참고

대칭차집합
전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A-B$와 $B-A$의 합집합
➡ $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$
$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

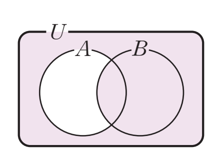
010

$n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)=50$이므로
$n(A\cap B)=n(U)-n((A\cap B)^C)$
$=64-50=14$ 다른 풀이
$\therefore n(B\cup A^C)=n((B^C\cap A)^C)$
$=n(U)-n(B^C\cap A)$
$=n(U)-n(A-B)$
$=n(U)-\{n(A)-n(A\cap B)\}$
$=64-(30-14)=48$

답 ③

다른 풀이

$B\cup A^C$을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$n(B\cup A^C)=n(U)-n(A)+n(A\cap B)$
$=64-30+14=48$



011

직업 체험을 신청한 학생의 집합을 A, 대학 탐방을 신청한 학생의 집합을 B라 하자.

직업 체험과 대학 탐방을 모두 신청한 학생은 5명이므로

$n(A\cap B)=5$

직업 체험과 대학 탐방 중 어느 것도 신청하지 않은 학생은 3명이므로

$n((A\cup B)^C)=3$

$\therefore n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$

$=31-3=28$

직업 체험을 신청한 학생 수는 대학 탐방을 신청한 학생 수의 2배이므로

$n(A)=2\times n(B)$

이때 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$28=2\times n(B)+n(B)-5$

$\therefore n(B)=11,\ n(A)=2\times 11=22$

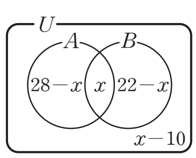
따라서 직업 체험을 신청한 학생 수는 22이다.

답 22

012

과학 동아리에 참여한 학생의 집합을 A, 음악 동아리에 참여한 학생의 집합을 B라 하자. 다른 풀이

이때 두 동아리에 모두 참여하는 학생 수 $n(A\cap B)$를 x라 하고 각 영역에 속하는 원소의 개수를 벤 다이어그램에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 $28-x\geq 0,\ x\geq 0,\ 22-x\geq 0,\ x-10\geq 0$이므로

$10\leq x\leq 22$

이 학급의 학생 중에서 두 동아리 중 한 동아리에만 참여한 학생의 집합은 $(A-B)\cup(B-A)$이므로

$n((A-B)\cup(B-A))=50-2x$

$10\leq x\leq 22$에서 $6\leq 50-2x\leq 30$

따라서 $M=30,\ m=6$이므로

$\frac{M}{m}=\frac{30}{6}=5$

답 ③

다른 풀이

$n(A)=28,\ n(B)=22$이고

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$이므로

$n((A-B)\cup(B-A))$

$=n(A\cup B)-n(A\cap B)$

$=n(A\cup B)-\{n(A)+n(B)-n(A\cup B)\}$

$=2\times n(A\cup B)-50$

즉, $n((A-B)\cup(B-A))$는 $n(A\cup B)$의 값이 최대일 때 최댓값을 갖고, $n(A\cup B)$의 값이 최소일 때 최솟값을 갖는다. 참고

$n(A\cup B)=n(U)=40$일 때, $n(A\cup B)$의 값이 최대이므로

$M=2\times 40-50=30$

$n(A\cup B)=n(A)=28$일 때, $n(A\cup B)$의 값이 최소이므로

$m=2\times 28-50=6$

$\therefore \frac{M}{m}=\frac{30}{6}=5$

참고

$n(A\cup B)$의 최대, 최소

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(A)>n(B)$이면

(1) $A\cup B=U$일 때, $n(A\cup B)$의 값이 최대이다.

(2) $B\subset A$, 즉 $A\cup B=A$일 때, $n(A\cup B)$의 값이 최소이다.

013

집합 A의 모든 원소의 합이 100이므로 집합 A에 25 이상인 원소가 적어도 2개 포함되어 있어야 한다.

전체집합 U에서 25 이상인 원소는 25, 26, 28, 29이다.

(i) 집합 A에 25 이상인 원소가 2개인 경우

25보다 작은 전체집합 U의 원소 중 가장 큰 두 원소의 합은 $22+23=45$이다.

즉, 네 원소의 합이 100이 되기 위해서는 25 이상인 두 원소의 합이 55 이상이어야 한다.

ⓐ 집합 A에 26, 29가 속한 경우

$A=\{22,\ 23,\ 26,\ 29\}$

ⓑ 집합 A에 28, 29가 속한 경우

$A=\{20,\ 23,\ 28,\ 29\}$

(ii) 집합 A에 25 이상인 원소가 3개인 경우

ⓐ 집합 A에 25, 26, 29가 속한 경우

$A=\{20,\ 25,\ 26,\ 29\}$

ⓑ 집합 A에 26, 28, 29가 속한 경우

$A=\{17,\ 26,\ 28,\ 29\}$

ⓒ 집합 A에 25, 26, 28 또는 25, 28, 29가 속한 경우

원소의 합이 100이 되기 위해서는 나머지 한 원소가 3의 배수이어야 한다.

그런데 3의 배수는 전체집합 U의 원소가 아니므로 조건을 만족시키는 집합 A가 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 구한 네 개의 집합 A에 대하여 $x_4-x_3+x_2-x_1$의 값은 각각 4, 4, 8, 10이므로 구하는 최댓값은 10이다.

답 10

014

$A\cup X=B\cup X$가 성립하려면

$(A-B)\subset X,\ (B-A)\subset X$

이어야 한다.

이때 $A-B=\{1,\ 5,\ 7\}$, $B-A=\{6\}$이므로 집합 X는 1, 5, 6, 7을 반드시 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{10-4}=64$

답 ④

015

집합 A의 원소는 두 수 $n^2-10n+25$, n^2+n+11의 곱으로 나타낼 수 있고, 100 이하의 소수이다.

이때 n^2+n+11이 1보다 큰 자연수이므로

$n^2-10n+25=1$, $n^2+n+11=p$ (p는 소수)
가 되어야 한다.
$n^2-10n+25=1$에서
$n^2-10n+24=0$, $(n-4)(n-6)=0$
$\therefore$ $n=4$ 또는 $n=6$
$n=4$일 때, $n^2+n+11=31$
$n=6$일 때, $n^2+n+11=53$
31과 53은 모두 소수이므로
$A=\{31, 53\}$
따라서 집합 A의 모든 원소의 합은
$31+53=84$

답 84

016

전체집합 U의 부분집합 중 4로 나누었을 때의 나머지가 0, 1, 2, 3인 자연수들의 집합을 각각 R_0, R_1, R_2, R_3이라 하면
$R_0=\{4, 8, 12, \cdots, 40\}$
$R_1=\{1, 5, 9, \cdots, 41\}$
$R_2=\{2, 6, 10, \cdots, 42\}$
$R_3=\{3, 7, 11, \cdots, 39\}$
집합 A의 임의의 두 원소의 합이 4의 배수가 아니려면 집합 A가 집합 R_0, R_2의 원소를 2개 이상 가질 수 없고, 집합 R_1과 R_3의 원소를 동시에 가질 수 없다.
$n(R_0)=10$, $n(R_1)=11$, $n(R_2)=11$, $n(R_3)=10$이고, 집합 A의 원소의 개수가 최대일 때는 R_1의 원소 11개, R_0의 원소 중 1개, R_2의 원소 중 1개를 원소로 가질 때이다.
따라서 $n(A)$의 최댓값은
$11+1+1=13$

답 13

017

집합 A의 원소는 $\varnothing$, 1, $\{1\}$이므로 집합 A의 부분집합은
$\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{1\}$, $\{\{1\}\}$, $\{\varnothing, 1\}$, $\{\varnothing, \{1\}\}$, $\{1, \{1\}\}$, $\{\varnothing, 1, \{1\}\}$
이때 이 부분집합들이 집합 P의 원소이다.
ㄱ. $\varnothing\in P$이므로 $\{\varnothing\}\subset P$ (참)
ㄴ. 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset P$ (참)
ㄷ. $\{\varnothing, 1, \{1\}\}\in P$이므로 $A\in P$ (참)
ㄹ. $1\notin P$이므로 $\{\varnothing, 1, A\}\not\subset P$ (거짓)
ㅁ. $n(P)=8$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

018

가장 작은 원소가 $\frac{1}{2}$인 집합은
$\left\{\frac{1}{2}\right\}$의 1개
가장 작은 원소가 $\frac{1}{2^2}$인 집합은
$\left\{\frac{1}{2^2}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}\right\}$의 2개
가장 작은 원소가 $\frac{1}{2^3}$인 집합은
$\left\{\frac{1}{2^3}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^2}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2^3}, \frac{1}{2}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}\right\}$의 2^2개
⋮
가장 작은 원소가 $\frac{1}{2^8}$인 집합은
$\left\{\frac{1}{2^7}, \frac{1}{2^6}, \frac{1}{2^5}, \cdots, \frac{1}{2}\right\}$의 부분집합과 $\left\{\frac{1}{2^8}\right\}$의 합집합인 경우이므로 2^7개
따라서 집합 A_n에 대하여 각 집합의 가장 작은 원소를 모두 더한 값은
$$\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2^2}\times2+\frac{1}{2^3}\times2^2+\cdots+\frac{1}{2^8}\times2^7$$
$$=\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{8\text{개}}$$
$$=\frac{1}{2}\times8=4$$

답 ②

019

조건 (가)에서 $1\in A$
조건 (나)에서
$1\in A$이면 $1^2-1=0\in A$
$0\in A$이면 $0^2-1=-1\in A$
$-1\in A$이면 $(-1)^2-1=0\in A$
$\therefore$ $\{-1, 0, 1\}\subset A$
조건 (다)에서 $n(A)=4$이므로
$A=\{-1, 0, 1, k\}$ (k는 -1, 0, 1이 아닌 실수)
라 하자.
조건 (나)에 의하여 $k\in A$이면 $k^2-1\in A$이어야 하므로 k^2-1의 값은 -1, 0, 1, k 중 하나이어야 한다.
(i) $k^2-1=-1$인 경우
$k^2=0$ $\quad\therefore$ $k=0$
그런데 $k\neq0$이므로 모순이다.
(ii) $k^2-1=0$인 경우
$k^2=1$ $\quad\therefore$ $k=-1$ 또는 $k=1$
그런데 $k\neq-1$, $k\neq1$이므로 모순이다.
(iii) $k^2-1=1$인 경우
$k^2=2$ $\quad\therefore$ $k=-\sqrt{2}$ 또는 $k=\sqrt{2}$
(iv) $k^2-1=k$인 경우
$k^2-k-1=0$ $\quad\therefore$ $k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 집합 A는
$\{-1, 0, 1, -\sqrt{2}\}$, $\{-1, 0, 1, \sqrt{2}\}$, $\left\{-1, 0, 1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$, $\left\{-1, 0, 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$
의 4개이다.

답 ④

020

$n(A)=3$이므로 $A=\{a, b, c\}$ ($a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$)라 하면
$B=\{ab, bc, ca\}$

조건 ㈏에서 $A=B$이므로

$a+b+c=ab+bc+ca=5$ ($\because$ 조건 ㈎)

$abc=ab\times bc\times ca=(abc)^2$

$abc=(abc)^2$에서 $abc=0$ 또는 $abc=1$

이때 $abc=0$이면 집합 A의 원소 a, b, c 중 적어도 하나는 0이고, 집합 B의 원소 ab, bc, ca 중 적어도 두 개는 0이므로 $n(A)=n(B)=3$에 모순이다.

$\therefore abc=1$

즉, $a+b+c=5$, $ab+bc+ca=5$, $abc=1$이므로 세 수 a, b, c를 세 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 t에 대한 삼차방정식은

$t^3-5t^2+5t-1=0$, $(t-1)(t^2-4t+1)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2\pm\sqrt{3}$

따라서 $A=\{2-\sqrt{3}, 1, 2+\sqrt{3}\}$이므로 집합 A의 원소 중 가장 큰 수는 $2+\sqrt{3}$이다.

답 $2+\sqrt{3}$

021

$A\subset C$, $A\cap C=\{1\}$이므로

$A=\{1\}$

$A^C\cap D=D-A=\{3, 4, 5\}$이므로

$D=\{1, 3, 4, 5\}$

$A\subset B\subset C\subset D$이므로 집합 B의 원소가 가장 많은 경우는

$B=C=D=\{1, 3, 4, 5\}$

집합 B의 원소가 가장 적은 경우는

$B=A=\{1\}$

따라서 집합 B의 부분집합의 개수의 최댓값은

$M=2^4=16$

최솟값은

$m=2$

$\therefore M+m=16+2=18$

답 18

022

$x^2-5x+6<0$에서 $(x-2)(x-3)<0$

$\therefore 2<x<3$

$x^2-14x+48\le 0$에서 $(x-6)(x-8)\le 0$

$\therefore 6\le x\le 8$

$x^2-(2a+1)x+a^2+a<0$에서

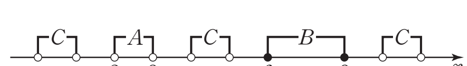
$(x-a)(x-a-1)<0$ $\qquad \therefore a<x<a+1$

$\therefore A=\{x|2<x<3\}$, $B=\{x|6\le x\le 8\}$, $C=\{x|a<x<a+1\}$

이때 세 집합 A, B, C가 모두 서로소이므로

$A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$

이를 만족시키도록 세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같으므로



$a+1\le 2$ 또는 $a\ge 3$, $a+1\le 6$ 또는 $a\ge 8$

$\therefore a\le 1$ 또는 $3\le a\le 5$ 또는 $a\ge 8$

따라서 한 자리의 자연수 a는 1, 3, 4, 5, 8, 9의 6개이다.

답 6

023

집합 A_k는 연속한 홀수를 원소로 가지므로 조건 ㈎, ㈏에서

$A_k-A_{k+1}=\{a_k, a_k+2\}$

$\therefore a_{k+1}=a_k+4$

즉, $a_2=5$이므로

$a_3=a_2+4$에서 $a_3=9$

$a_4=a_3+4$에서 $a_4=13$

$a_5=a_4+4$에서 $a_5=17$

$\therefore a_k=4k-3$

이때 $n(A_5)=10$이므로 집합 A_5의 가장 큰 원소는 35이다.

즉, $A_5\cap A_m=\varnothing$을 만족시키려면 $a_m>35$이어야 한다.

$a_k=4k-3$에서 $4k-3>35$

$\therefore k>\dfrac{19}{2}$

따라서 $A_5\cap A_m=\varnothing$을 만족시키는 자연수 m의 최솟값은 10이다.

답 10

024

$A_n=\{x|2n-1\le x\le 7n+5\}$이므로 n에 1, 2, 3, $\cdots$을 대입하면

$A_1=\{x|1\le x\le 12\}$

$A_2=\{x|3\le x\le 19\}$

$A_3=\{x|5\le x\le 26\}$

$A_4=\{x|7\le x\le 33\}$

$A_5=\{x|9\le x\le 40\}$

$A_6=\{x|11\le x\le 47\}$

$A_7=\{x|13\le x\le 54\}$

$\vdots$

이때 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_6\neq\varnothing$, $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_7=\varnothing$이므로

$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k\neq\varnothing$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 6이다.

답 ③

다른 풀이

$A_n=\{x|2n-1\le x\le 7n+5\}$이므로

$A_1=\{x|1\le x\le 12\}$

자연수 k에 대하여 $2k-1>12$이면

$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k\neq\varnothing$

$2k-1>12$에서 $k>\dfrac{13}{2}$

따라서 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k\neq\varnothing$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 6이다.

025

두 집합 A, B가 서로소이므로

$A\cap B=\varnothing$

또, 조건 ㈏에서 $n(A\cup B)=6$이므로 조건 ㈎에서

$n(A)=n(B)=3$

조건 ㈐에서

$(A\cup C)\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup C$

$=\varnothing\cup C=C$

이므로 $n(C)=8$

$C=\{n|n$은 3의 배수이거나 $n\in A\}$이므로 20 이하의 자연수 중 3의 배수 3, 6, 9, 12, 15, 18은 집합 C의 원소이고

$A\subset C$

이때 $n(A)=3$이면서 $n(C)=8$이려면 집합 A는 3의 배수가 아닌 수 2개를 반드시 원소로 가져야 하고, 3의 배수 1개를 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 A의 개수는 $A\cup B=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$의 원소에서 3의 배수가 아닌 수 2, 4, 8, 10 중 2개를 택하고, 3의 배수 6, 12 중 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_2\times{}_2C_1=6\times2=12$

답 12

026

$U=\{-4, -3, -2, \cdots, 3, 4\}$

조건 (가)에서 $A\subset B^C$이면 $A\cap B=\varnothing$

조건 (나)에서

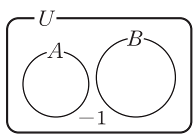
$x^3+x^2-2x-2=0$, $(x+1)(x^2-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

집합 $A^C\cap B^C$의 원소는 정수이므로 $A^C\cap B^C=\{-1\}$

$\therefore (A\cup B)^C=\{-1\}$

따라서 전체집합 U와 두 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 $A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\{-4, -3, -2, 0, 1, 2, 3, 4\}$이고 집합 A의 원소를 택하면 집합 B가 결정되므로 순서쌍 (A, B)의 개수는 집합 $A\cup B$의 부분집합의 개수에서 A 또는 B가 공집합이 되는 경우를 제외한 개수와 같다.

따라서 순서쌍 (A, B)의 개수는

$2^8-2=254$

답 254

027

$A\cap B\subset A$이므로 조건 (가)에서

$\{3, 6\}\subset A$

3, 6이 모두 a의 배수이므로

$a=1$ 또는 $a=3$

$a=1$이면 $A=U$가 되어 $B-A=\varnothing$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 $a=3$이므로

$A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

또, $A\cap B\subset B$이므로 조건 (가)에서

$\{3, 6\}\subset B$

3, 6이 모두 b의 약수이므로

$b=6$ 또는 $b=12$ 또는 $b=18$

(i) $b=6$일 때

$B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

$n(B-A)=2$

이때 $A-B=\{9, 12, 15, 18\}$이므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은

$9+12+15+18=54$

(ii) $b=12$일 때

$B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로

$n(B-A)=3$

이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $b=18$일 때

$B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$이므로

$n(B-A)=2$

이때 $A-B=\{12, 15\}$이므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은

$12+15=27$

(i)~(iii)에서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합의 최솟값은 27이다.

답 27

028

집합 $A=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$이라 하면 조건 (가)에서

$\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6}=8$

$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=48$

한편,

$B=\left\{\dfrac{x_1+k}{3}, \dfrac{x_2+k}{3}, \dfrac{x_3+k}{3}, \dfrac{x_4+k}{3}, \dfrac{x_5+k}{3}, \dfrac{x_6+k}{3}\right\}$

이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$\dfrac{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)+6k}{3}=\dfrac{48+6k}{3}=16+2k$

집합 $B-A$의 모든 원소의 합은 집합 B의 모든 원소의 합에서 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합을 뺀 것과 같으므로 조건 (나), (다)에서

$24=(16+2k)-12$

$\therefore k=10$

답 ①

029

$1\le n\le60$인 자연수 n에 대하여 $\left[\dfrac{n+2}{5}\right]$, $\left[\dfrac{n}{4}\right]$은 모두 음이 아닌 정수이므로

$\left[\dfrac{n+2}{5}\right]=\left[\dfrac{n}{4}\right]=k$ (k는 음이 아닌 정수)

라 하자.

$\left[\dfrac{n+2}{5}\right]=k$에서 $k\le\dfrac{n+2}{5}<k+1$

$\therefore 5k-2\le n<5k+3$ …… ㉠

$\left[\dfrac{n}{4}\right]=k$에서 $k\le\dfrac{n}{4}<k+1$

$\therefore 4k\le n<4k+4$ …… ㉡

이때 n은 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 자연수이다.

(i) $k\le1$인 경우

㉠, ㉡에서 $4k\le n<5k+3$ 참고

$k=0$이면 $0\le n<3$ ➡ $n=1, 2$

$k=1$이면 $4\le n<8$ ➡ $n=4, 5, 6, 7$

(ii) $k\ge2$인 경우

㉠, ㉡에서 $5k-2\le n<4k+4$ 다른풀이

$k=2$이면 $8\le n<12$ ➡ $n=8, 9, 10, 11$

$k=3$이면 $13 \le n < 16$ ➡ $n=13$, 14, 15

$k=4$이면 $18 \le n < 20$ ➡ $n=18$, 19

$k=5$이면 $23 \le n < 24$ ➡ $n=23$

$k \ge 6$이면 $5k-2 < 4k+4$가 성립하지 않으므로 이를 만족시키는 n의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 집합 A의 원소의 개수는

$2+4+4+3+2+1=16$

답 16

다른 풀이

$5k-2 \le n < 4k+4$를 만족시키는 정수 n의 개수는

$(4k+3)-(5k-2)+1=6-k$

이때 $6-k>0$이어야 하므로 k는 2, 3, 4, 5이다.

$k=2$일 때, $6-2=4$ ➡ n이 4개

$k=3$일 때, $6-3=3$ ➡ n이 3개

$k=4$일 때, $6-4=2$ ➡ n이 2개

$k=5$일 때, $6-5=1$ ➡ n이 1개

(i), (ii)에서 집합 A의 원소의 개수는

$2+4+4+3+2+1=16$

참고

$(5k-2)-4k=k-2$에서

$k-2<0$, 즉 $k<2$일 때

$5k-2<4k$

$k-2=0$, 즉 $k=2$일 때

$5k-2=4k$

$k-2>0$, 즉 $k>2$일 때

$5k-2>4k$

$(5k+3)-(4k+4)=k-1$에서

$k-1<0$, 즉 $k<1$일 때

$5k+3<4k+4$

$k-1=0$, 즉 $k=1$일 때

$5k+3=4k+4$

$k-1>0$, 즉 $k>1$일 때

$5k+3>4k+4$

따라서 ㉠, ㉡에서

$k \le 1$인 경우 $5k-2<4k$, $5k+3 \le 4k+4$이므로

$4k \le n < 5k+3$

$k \ge 2$인 경우 $4k \le 5k-2$, $4k+4 < 5k+3$이므로

$5k-2 \le n < 4k+4$

030

$A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$에서

$B \subset A$

$(X \cup B) \cap A^C = \varnothing$에서

$(X \cup B) \subset A \qquad \therefore X \subset A$

$n(X \cap B)=2$이므로 집합 X는 집합 B의 원소 중에서 2개를 원소로 갖는 집합 A의 부분집합이다.

(i) $n(X)=2$인 경우

이를 만족시키는 집합 X는

$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$ …… ㉠

이 집합을 차례대로 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6이라 하면

$S(1)+S(2)+S(3)+S(4)+S(5)+S(6)$

$=3+4+5+5+6+7=30$

(ii) $n(X)=3$인 경우

이를 만족시키는 집합 X는 ㉠의 집합에서 각각 0을 원소로 더 갖거나, 5를 원소로 더 가지므로 이 집합을 차례대로 X_7, X_8, X_9, $\cdots$, X_{18}이라 하면 참고

$S(7)+S(8)+S(9)+ \cdots +S(18)$

$=(30+0\times6)+(30+5\times6)=90$

(iii) $n(X)=4$인 경우

이를 만족시키는 집합 X는 ㉠의 집합에서 각각 0과 5를 원소로 더 가지므로 이 집합을 차례대로 X_{19}, X_{20}, X_{21}, $\cdots$, X_{24}라 하면

$S(19)+S(20)+S(21)+ \cdots +S(24)$

$=30+(0+5)\times6=60$

(i)~(iii)에서

$S(1)+S(2)+S(3)+ \cdots +S(n)$

$=30+90+60=180$

답 180

참고

㉠의 집합이 6개이므로 0을 원소로 더 갖는 집합은 6개, 5를 원소로 더 갖는 집합도 6개이다.

따라서 (ii)를 만족시키는 집합 X는 12개이다.

031

$\{(A\cap B)\cup(A-B)\}\cap B$

$=\{(A\cap B)\cup(A\cap B^C)\}\cap B$

$=\{A\cap(B\cup B^C)\}\cap B$

$=(A\cap U)\cap B$

$=A\cap B$

즉, $A\cap B=B$이므로 $B\subset A$

20을 제외한 집합 A의 모든 원소의 합은

$1+3+5+7=16<20$

이므로 $S(B)\ge20$이려면 집합 B는 집합 A의 원소 중 20을 반드시 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 B의 개수는

$2^{5-1}=16$

답 16

032

ㄱ. 집합 A_4는 4보다 작고 4와 서로소인 자연수 1, 3을 원소로 가지므로

$A_4=\{1, 3\}$ (참)

ㄴ. [반례] $k=3$이면

$A_k=A_3=\{1, 2\}$, $A_{2k}=A_6=\{1, 5\}$

이므로 $n(A_{2k})=n(A_k)$ (거짓)

ㄷ. k가 짝수이면 k는 항상 2를 약수로 가지므로 A_k의 원소들은 2와 서로소이다.

즉, A_k의 원소에 짝수는 속할 수 없으므로 항상 홀수이다. (참)

ㄹ. p가 소수이면

$A_p=\{1, 2, 3, \cdots, p-1\}$

이므로 $n(A_p)=p-1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

033

집합 B의 원소 $\frac{100}{x}$에 대하여 집합 B가 U의 부분집합이므로

$1\leq\frac{100}{x}\leq50$

$\therefore\ 2\leq x\leq100$

또, $x\in U$이므로 $1\leq x\leq50$

$\therefore\ 2\leq x\leq50$

즉, 집합 B의 원소는 2 이상 50 이하인 100의 약수이므로

$B=\{2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20,\ 25,\ 50\}$

이때 $100=2^2\times5^2$이므로 $n(A\cap B)=1$이려면

$A\cap B=\{2\}$ 또는 $A\cap B=\{5\}$ 참고

(i) $A\cap B=\{2\}$인 경우

$k=2\times p$ (p는 5의 배수가 아닌 홀수)의 꼴이어야 하므로 k의 값은

$2\times1,\ 2\times3,\ 2\times7,\ 2\times9,\ 2\times11,\ 2\times13,\ 2\times17,\ 2\times19,\ 2\times21,\ 2\times23$

의 10개

(ii) $A\cap B=\{5\}$인 경우

$k=5\times p$ (p는 5의 배수가 아닌 홀수)의 꼴이어야 하므로 k의 값은

$5\times1,\ 5\times3,\ 5\times7,\ 5\times9$

의 4개

(i), (ii)에서 자연수 k의 개수는

$10+4=14$

답 14

참고

$A\cap B$가 2 또는 5 이외의 수를 원소로 가지면 $n(A\cap B)\neq1$이다.

034

$A_k=(A_{k-2}\cap A_{k-3})-A_{k-1}$에 $k=4$를 대입하면

$A_4=(A_2\cap A_1)-A_3$ 참고

이때 집합 A_4는 집합 $A_2\cap A_1$에서 집합 A_3의 원소를 모두 제외한 집합이므로

$A_3\cap A_4=\varnothing$

$A_k=(A_{k-2}\cap A_{k-3})-A_{k-1}$에 $k=5$를 대입하면

$A_5=(A_3\cap A_2)-A_4$

이때 $(A_3\cap A_2)\subset A_3$이고 $A_3\cap A_4=\varnothing$이므로

$A_5=A_3\cap A_2,\ A_4\cap A_5=\varnothing$

$A_k=(A_{k-2}\cap A_{k-3})-A_{k-1}$에 $k=6$을 대입하면

$A_6=(A_4\cap A_3)-A_5$

$\quad=\varnothing-A_5=\varnothing$

$\quad\vdots$

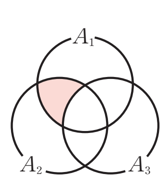
따라서 $k\geq6$일 때 $A_k=\varnothing$이므로

$n(A_{10})=0$

답 0

참고

집합 A_4를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



다른 풀이

집합 A_k는 집합 $A_{k-2}\cap A_{k-3}$에서 집합 A_{k-1}의 원소를 모두 제외한 집합이므로

$A_k\cap A_{k-1}=\varnothing$

즉, $A_k=(A_{k-2}\cap A_{k-3})-A_{k-1}$에 $k=10$을 대입하면

$A_{10}=(A_8\cap A_7)-A_9$

$\quad=\varnothing-A_9=\varnothing$

$\therefore\ n(A_{10})=0$

035

$f(m)$은 m을 원소로 갖는 집합 A_k의 개수와 같다.

k가 짝수일 때

$A_2=\{x\,|\,x$는 120의 약수$\}$,

$A_4=\{x\,|\,x$는 240의 약수$\}$,

$A_6=\{x\,|\,x$는 360의 약수$\}$,

$A_8=\{x\,|\,x$는 480의 약수$\}$

이때 $f(m)$이 최대이려면 m이 120, 240, 360, 480의 공약수이어야 하고, $1\leq m\leq60$이므로 m은 60의 약수이다. …… ㉠

k가 홀수일 때

$A_3=\{x\,|\,x$는 3의 배수$\}$,

$A_5=\{x\,|\,x$는 5의 배수$\}$,

$A_7=\{x\,|\,x$는 7의 배수$\}$

이때 $f(m)$이 최대이려면 m이 3, 5, 7의 공배수이어야 한다.

그런데 3, 5, 7의 최소공배수는 105이고, $105>60$이므로 m은 3, 5의 공배수 또는 3, 7의 공배수 또는 5, 7의 공배수이어야 한다. …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 m의 값은

15, 30, 60

이고 이때 $f(m)=6$이므로 구하는 합은

$15+30+60+6=111$

답 ①

036

합집합을 이용하여 색칠한 부분을 나타내면

$(A-B)\cup\{B-(A\cup C)\}\cup(C-B)$

$=(A-B)\cup(C-B)\cup\{B-(A\cup C)\}$

$=(A\cap B^C)\cup(C\cap B^C)\cup\{B\cap(A\cup C)^C\}$

$=\{(A\cup C)\cap B^C\}\cup\{(A\cup C)^C\cap B\}$

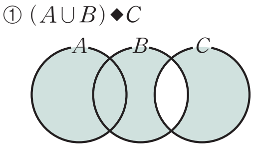
$=(A\cup C)\blacklozenge B$

답 ②

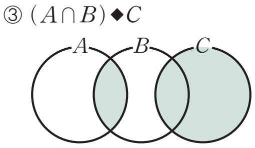
참고

주어진 보기를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

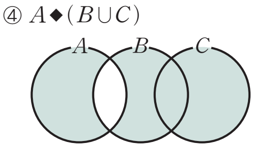
① $(A\cup B)\blacklozenge C$



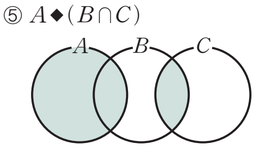
③ $(A\cap B)\blacklozenge C$



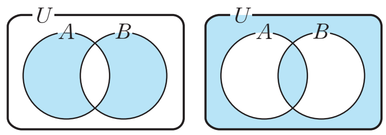
④ $A\blacklozenge(B\cup C)$

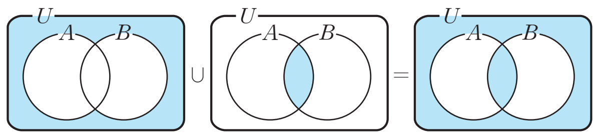


⑤ $A\blacklozenge(B\cap C)$

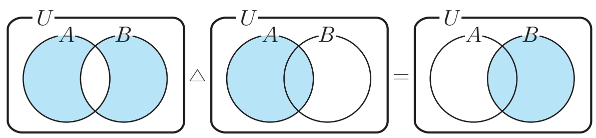


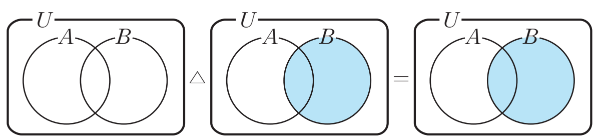
037

①

$A \triangle B$ $(A \triangle B)^C$


$A^C - B$ $B - A^C$ $A^C \triangle B$

$\therefore (A \triangle B)^C = A^C \triangle B$

②

$A \triangle B$ A $(A \triangle B) \triangle A$


$A \triangle A$ B $(A \triangle A) \triangle B$

$\therefore (A \triangle B) \triangle A = (A \triangle A) \triangle B$

③ $A \subset B$이면
$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$
$= \varnothing \cup (B - A) = B - A$

④ A, B가 서로소이면 $A - B = A$, $B - A = B$이므로
$A \triangle B = A \cup B \neq \varnothing$

⑤ $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \varnothing$이면
$A - B = \varnothing$, $B - A = \varnothing$
즉, $A \subset B$이고 $B \subset A$이므로 $A = B$
또,
$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$
$= (A \cup B) - (A \cap B) = U$
이면 $A \cup B = U$, $A \cap B = \varnothing$
$\therefore B = U - A = A^C$

답 ④

다른 풀이

① $(A \triangle B)^C = ((A - B) \cup (B - A))^C$
$= (A \cap B^C)^C \cap (B \cap A^C)^C$
$= (A^C \cup B) \cap (B^C \cup A)$
$A^C \triangle B = (A^C - B) \cup (B - A^C)$
$= (A^C \cap B^C) \cup (B \cap A)$
$= \{A^C \cup (B \cap A)\} \cap \{B^C \cup (B \cap A)\}$
$= \{(A^C \cup B) \cap (A^C \cup A)\} \cap \{(B^C \cup B) \cap (B^C \cup A)\}$
$= \{(A^C \cup B) \cap U\} \cap \{U \cap (B^C \cup A)\}$
$= (A^C \cup B) \cap (B^C \cup A)$
$\therefore (A \triangle B)^C = A^C \triangle B$

038

집합 C에서
$\{f(x)\}^3 g(x) = f(x)\{g(x)\}^3$
$\{f(x)\}^3 g(x) - f(x)\{g(x)\}^3 = 0$
$f(x)g(x)[\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2] = 0$
$f(x)g(x)\{f(x) - g(x)\}\{f(x) + g(x)\} = 0$
$\therefore f(x)g(x) = 0$ 또는 $f(x) = g(x)$ 또는 $f(x) = -g(x)$
즉, $C = A \cup B \cup \{x \mid f(x) = -g(x)\}$이므로 $A \subset B$이고
$f(x) = -g(x)$의 해가 없을 때 $n(C)$의 값이 최소이다. 주의
따라서 $n(C)$의 최솟값은 4이다.

답 ②

참고

$A = \{x \mid f(x) = g(x)\}$는 방정식 $f(x) = g(x)$를 만족시키는 해의 집합,
$B = \{x \mid f(x)g(x) = 0\}$은 방정식 $f(x)g(x) = 0$을 만족시키는 해의 집합,
$C = \{x \mid \{f(x)\}^3 g(x) = f(x)\{g(x)\}^3\}$은 방정식
$\{f(x)\}^3 g(x) = f(x)\{g(x)\}^3$을 만족시키는 해의 집합을 뜻한다.

주의

$n(A) < n(B)$이므로 $B \not\subset A$임에 주의한다.

039

$n(A) = x$ $(6 \leq x \leq 12)$라 하면
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$에서
$12 = x + n(B) - 6$
$\therefore n(B) = 18 - x$
즉, $n(A * B) = x(18 - x)$이므로
$x(18 - x) = -x^2 + 18x = -(x - 9)^2 + 81$ $(6 \leq x \leq 12)$
따라서 집합 $A * B$의 원소의 개수의 최댓값은 $x = 9$일 때 81이고, 최솟값은 $x = 6$ 또는 $x = 12$일 때 72이므로 최댓값과 최솟값의 합은
$81 + 72 = 153$

답 153

040

$(A \cup B^C) \cup (A \cap B)^C = (A \cup B^C) \cup (A^C \cup B^C)$
$= (A \cup A^C) \cup B^C$
$= U \cup B^C = U$
이므로
$U = \{1, 3, 4, 7, 10\} \cup \{1, 3, 5, 9\}$
$= \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$
$\therefore a = n(U) = 7$ 다른 풀이
$n((A \cap B)^C) = 4$이므로
$b = n(A \cap B)$
$= n(U) - n((A \cap B)^C)$
$= 7 - 4 = 3$
$n(A \cup B^C) = 5$이므로
$c = n(A^C \cap B)$
$= n(U) - n((A^C \cap B)^C)$
$= n(U) - n(A \cup B^C)$
$= 7 - 5 = 2$
$\therefore a + b + c = 7 + 3 + 2 = 12$

답 ③

다른 풀이

$(A \cup B^C) \cap (A \cap B)^C = (A \cup B^C) \cap (A^C \cup B^C)$
$= (A \cap A^C) \cup B^C$
$= \varnothing \cup B^C = B^C$

이므로

$B^C=\{1, 3, 4, 7, 10\}\cap\{1, 3, 5, 9\}=\{1, 3\}$

즉, $n(B^C)=2$이므로

$n(B)=n(U)-n(B^C)=7-2=5$

한편,

$(A\cap B)\cup(A^C\cap B)=(A\cup A^C)\cap B$

$=U\cap B=B$

이고, $A\cap B$와 $A^C\cap B$는 서로소이므로

$n(A\cap B)+n(A^C\cap B)=n(B)$

따라서 $b+c=5$이므로

$a+b+c=7+5=12$

041

$P=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

조건 ㈎에서 $n(X-P)=1$, $n(X\cup P^C)=11$ 또는

$n(X-P)=11$, $n(X\cup P^C)=1$

그런데 $(X-P)\subset X\subset(X\cup P^C)$에서

$n(X-P)\le n(X)\le n(X\cup P^C)$이므로

$n(X-P)=1$, $n(X\cup P^C)=11$

이때 $n(P^C)=n(U)-n(P)=15-6=9$이고

$n(X\cup P^C)=n(X)+n(P^C)-n(X\cap P^C)$

$=n(P^C)+n(X\cap P)$

이므로

$11=9+n(X\cap P)$

$\therefore n(X\cap P)=2$ …… ㉠

또, $n(X-P)=n(X)-n(X\cap P)$에서

$n(X)=n(X-P)+n(X\cap P)$

$=1+2=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 집합 X는 서로 다른 15 이하의 소수 2개와 15 이하의 소수가 아닌 자연수 1개를 원소로 갖는다.

즉, 15 이하의 서로 다른 소수 p_1, p_2와 소수가 아닌 15 이하의 자연수 k에 대하여 $X=\{p_1, p_2, k\}$로 나타내면 조건 ㈏에서 $M=p_1\times p_2\times k$의 양의 약수의 개수가 $16=2^4$이므로 p_1, p_2가 아닌 서로 다른 소수 p_3, p_4에 대하여

$k=p_3\times p_4$ 또는 $k={p_1}^2\times p_3$ 또는 $k={p_3}^3$

의 꼴이다.

(i) $k=p_3\times p_4$의 꼴인 경우

$k\le 15$이므로 $k=2\times3$, $k=2\times5$, $k=2\times7$, $k=3\times5$의 4가지 경우가 있다.

각각의 경우마다 k를 제외한 집합 X의 나머지 두 원소를 정하는 경우는 집합 P의 원소 중 k의 소인수가 아닌 나머지 4개의 원소 중에서 2개의 원소를 택하는 ${}_4C_2$가지가 있으므로 이때의 경우의 수는

$4\times{}_4C_2=24$

(ii) $k={p_1}^2\times p_3$의 꼴인 경우

$k\le 15$이므로 $k=2^2\times3$의 1가지 경우가 있다.

k를 제외한 집합 X의 나머지 두 원소를 정하는 경우는 집합 P의 원소 중 2와 3이 아닌 나머지 4개의 원소 중에서 1개의 원소를 택하는 ${}_4C_1$가지가 있으므로 이때의 경우의 수는

$1\times{}_4C_1=4$

(iii) $k={p_3}^3$의 꼴인 경우

$k\le 15$이므로 $k=2^3$의 1가지 경우가 있다.

k를 제외한 집합 X의 나머지 두 원소를 정하는 경우는 집합 P의 원소 중 2가 아닌 나머지 5개의 원소 중에서 2개의 원소를 택하는 ${}_5C_2$가지가 있으므로 이때의 경우의 수는

$1\times{}_5C_2=10$

(i)~(iii)에서 조건을 만족시키는 부분집합 X의 개수는

$24+4+10=38$

답 38

042

$(5, 0)\in A$이므로 $4x-3y+m=0$에서

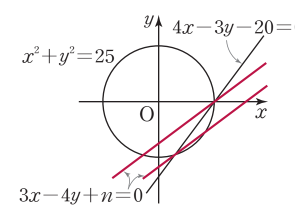
$20+m=0$ $\therefore m=-20$

집합 A는 직선 $4x-3y-20=0$과 원 $x^2+y^2=25$의 교점의 좌표의 집합이므로 $n(A)$는 이 직선과 원의 교점의 개수이다.

원 $x^2+y^2=25$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $4x-3y-20=0$ 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|-20|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=4$

$d<5$이므로 직선 $4x-3y-20=0$과 원 $x^2+y^2=25$는 다음 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만난다.



$\therefore n(A)=2$

집합 B는 직선 $3x-4y+n=0$과 원 $x^2+y^2=25$의 교점의 좌표의 집합이므로 $n(B)$는 이 직선과 원의 교점의 개수이다.

$A\cap B\ne\varnothing$이면 직선 $4x-3y-20=0$과 원 $x^2+y^2=25$의 교점을 직선 $3x-4y+n=0$이 지나므로 위의 그림에서

$n<0$

그런데 $n>0$이어야 하므로

$A\cap B=\varnothing$

즉, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$3=2+n(B)-0$

$\therefore n(B)=1$

따라서 직선 $3x-4y+n=0$과 원 $x^2+y^2=25$가 접하므로 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $3x-4y+n=0$ 사이의 거리가 5이다.

즉, $\dfrac{|n|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$이므로

$n=25$ ($\because n>0$)

답 25

043

과학 축제에 참가한 학생 전체의 집합을 U, VR 체험을 신청한 학생의 집합을 A, 드론 체험을 신청한 학생의 집합을 B, 3D 펜 체험을 신청한 학생의 집합을 C라 하면

$n(U)=240$, $n(A)=120$, $n(B)=110$, $n(A\cap B)=50$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$n(A\cup B)=120+110-50=180$

세 가지 체험 중 어느 것도 신청하지 않은 학생은 15명이므로

$n(A^C\cap B^C\cap C^C)=15$

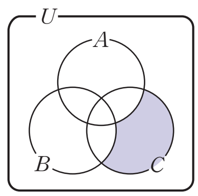
$\therefore\ n(A\cup B\cup C)=n(U)-n((A\cup B\cup C)^C)$

$=n(U)-n(A^C\cap B^C\cap C^C)$ 참고

$=240-15$

$=225$

따라서 3D 펜 체험만 신청한 학생 수는



$n(A\cup B\cup C)-n(A\cup B)$

$=225-180$

$=45$

답 45

참고 확장

드모르간의 법칙은 세 개 이상의 집합의 연산에 대해서도 성립한다.

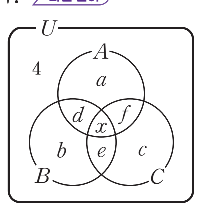
(1) $(A\cap B\cap C\cap\cdots)^C=A^C\cup B^C\cup C^C\cup\cdots$

(2) $(A\cup B\cup C\cup\cdots)^C=A^C\cap B^C\cap C^C\cap\cdots$

044

이 학교 학생 전체의 집합을 U, 축구 활동에 참여하고 싶은 학생의 집합을 A, 미술 활동에 참여하고 싶은 학생의 집합을 B, 코딩 활동에 참여하고 싶은 학생의 집합을 C라 하자. 다른 풀이

벤 다이어그램의 각 영역에 속하는 원소의 개수를 오른쪽 그림과 같이 나타내면 축구, 미술, 코딩 활동에 모두 참여하고 싶은 학생은 없으므로



$x=0$

축구 활동에 참여하고 싶은 학생은 34명이므로

$a+d+f=34$ …… ㉠

미술 활동에 참여하고 싶은 학생은 28명이므로

$b+d+e=28$ …… ㉡

코딩 활동에 참여하고 싶은 학생은 26명이므로

$c+e+f=26$ …… ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$a+b+c+2(d+e+f)=88$ …… ㉣

어느 활동에도 참여하고 싶지 않은 학생은 4명이므로

$a+b+c+d+e+f=60-4=56$ …… ㉤

㉣−㉤을 하면

$d+e+f=32$

따라서 세 가지 활동 중 두 가지 활동에만 참여하고 싶은 학생 수는 32이다.

답 32

다른 풀이

$n(U)=60,\ n(A)=34,\ n(B)=28,\ n(C)=26,$

$n((A\cup B\cup C)^C)=4,\ n(A\cap B\cap C)=0$

$n((A\cup B\cup C)^C)=4$에서

$n(A\cup B\cup C)=n(U)-n((A\cup B\cup C)^C)$

$=60-4$

$=56$

$n(A\cap B\cap C)=0$이므로 세 가지 활동 중 두 가지 활동에만 참여하고 싶은 학생 수는

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-(A\cap B)$

$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

에서

$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cup B\cup C)$

$=34+28+26-56=32$

045

이 학급 학생 전체의 집합을 U, 독서 모임 X, Y, Z를 택한 학생의 집합을 각각 A, B, C라고 하면

$n(A)=18,\ n(B)=15$

모든 학생은 서로 다른 두 가지를 반드시 선택하여 활동하기로 하였으므로 모든 학생은 X 또는 Y를 선택하였다.

즉, $U=A\cup B$이므로

$n(U)=n(A\cup B)=28$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$28=18+15-n(A\cap B)\qquad\therefore\ n(A\cap B)=5$

이때 X, Y를 동시에 선택한 학생들을 제외한 나머지 학생들은 Z를 반드시 선택하였으므로

$n(C)=n(U)-n(A\cap B)$

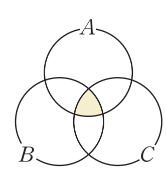
$=28-5=23$

답 ①

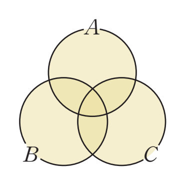
046

일등급의 메모장

$n(A)\times n(B)\times n(C)$의 값은 다음 경우에 최대이다.



$n(A\cap B\cap C)$의 값이 최대



$n(A\cup B\cup C)$의 값이 최대

$n(A\cap B\cap C)\le n(A\cap B)$에서

$0\le n(A\cap B\cap C)\le 3$

이때 $n(A\cap B\cap C)=0$이면 $n(A\cap B)=3$에서

$n(A\cap B\cap C^C)=3$이고, $n(A-C)\ge n(A\cap B\cap C^C)=3$이므로

$n(A-C)=2$를 만족시키지 않는다.

$\therefore\ n(A\cap B\cap C)\ne 0$

또, $n(A\cap B\cap C)=3$이면 $n(A\cap B)=3$에서

$n(A\cap B\cap C^C)=0$이므로 $n(A-C)=2$에서

$n(A\cap B^C\cap C^C)=2$

이때 $n(B^C\cap C^C)\ge n(A\cap B^C\cap C^C)=2$이므로 $n(B^C\cap C^C)\le 1$을 만족시키지 않는다.

$\therefore\ n(A\cap B\cap C)\ne 3$

따라서 $n(A\cap B\cap C)=2$ 또는 $n(A\cap B\cap C)=1$이고,

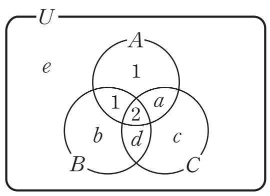
$n(A)\times n(B)\times n(C)$는 $n(A\cap B\cap C)=2$일 때 최댓값,

$n(A\cap B\cap C)=1$일 때 최솟값을 갖는다.

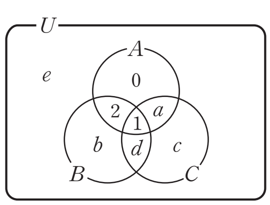
(i) $n(A\cap B\cap C)=2$일 때

$n(A\cap B)=3$에서 $n(A\cap B\cap C)=2$이므로

$n(A\cap B\cap C^C)=1$
$n(A-C)=2$에서 $n(A\cap B\cap C^C)=1$이므로
$n(A\cap B^C\cap C^C)=1$
이때 벤 다이어그램의 각 영역에 속하는 원소의 개수를 나타내면 다음 그림과 같다.



$n(A)\times n(B)\times n(C)$는 $n(A\cap B\cap C)$와 $n(A\cup B\cup C)$의 값이 최대일 때 최댓값을 가지므로
$e=0$
또, $n(B\cap C)$, $n(C\cap A)$의 값이 최대이어야 하므로
$b=c=0$
즉, $n(U)=5$에서
$a+d=1$
ⓐ $a=1$, $d=0$인 경우
$n(A)\times n(B)\times n(C)=5\times 3\times 3=45$
ⓑ $a=0$, $d=1$인 경우
$n(A)\times n(B)\times n(C)=4\times 4\times 3=48$
ⓐ, ⓑ에서 $n(A)\times n(B)\times n(C)$의 최댓값은 48이다.
(ii) $n(A\cap B\cap C)=1$일 때
$n(A\cap B)=3$에서 $n(A\cap B\cap C)=1$이므로
$n(A\cap B\cap C^C)=2$
$n(A-C)=2$에서 $n(A\cap B\cap C^C)=2$이므로
$n(A\cap B^C\cap C^C)=0$
이때 벤 다이어그램의 각 영역에 속하는 원소의 개수를 나타내면 다음 그림과 같다.



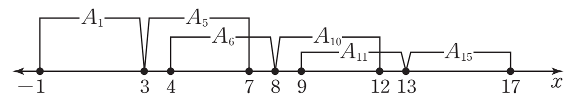
한편, $n(B^C\cap C^C)=n((B\cup C)^C)=e\le 1$이고,
$n(A)\times n(B)\times n(C)$는 $n(A\cap B\cap C)$와 $n(A\cup B\cup C)$의 값이 최소일 때 최솟값을 가지므로
$e=1$
또, $n(B\cap C)$, $n(C\cap A)$의 값이 최소이어야 하므로
$a=d=0$
즉, $n(U)=5$에서
$b+c=1$
ⓐ $b=1$, $c=0$인 경우
$n(A)\times n(B)\times n(C)=3\times 4\times 1=12$
ⓑ $b=0$, $c=1$인 경우
$n(A)\times n(B)\times n(C)=3\times 3\times 2=18$
ⓐ, ⓑ에서 $n(A)\times n(B)\times n(C)$의 최솟값은 12이다.
(i), (ii)에서 $n(A)\times n(B)\times n(C)$의 최댓값과 최솟값의 합은
$48+12=60$

답 60

047

일등급의 메모장

$n(B)$의 최솟값을 p라 하면
$k=1$일 때, $p=1$
$k=2$일 때, $p=1$
⋮
$k=6$일 때, $p=2$
⋮



$n(B)$의 값이 최소이려면 하나의 집합 A_k에 대하여 집합 B의 원소는 한 개만 포함되어야 한다. …… ㉠
$A_1=\{x\mid -1\le x\le 3\}$과 서로소가 아니려면 집합 B는 1 또는 2 또는 3을 반드시 포함해야 한다.
$n(B)$의 최솟값이 4이므로
$B=\{a, b, c, d\}$ (a, b, c, d는 자연수, $a<b<c<d$)
로 놓을 수 있다.
(i) $a=1$인 경우
A_2, A_3도 1을 원소로 갖고, $A_3=\{x\mid 1\le x\le 5\}$이므로 ㉠에서
$b>5$
이때 집합 B가 A_4와 서로소가 아니려면 $A_4=\{x\mid 2\le x\le 6\}$에서
$b=6$
A_5, A_6, A_7, A_8도 6을 원소로 갖고, $A_8=\{x\mid 6\le x\le 10\}$이므로 ㉠에서
$c>10$
이때 집합 B가 A_9와 서로소가 아니려면 $A_9=\{x\mid 7\le x\le 11\}$에서
$c=11$
A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}도 11을 원소로 갖고,
$A_{13}=\{x\mid 11\le x\le 15\}$이므로 ㉠에서
$d>15$
이때 집합 B가 A_{14}와 서로소가 아니려면 $A_{14}=\{x\mid 12\le x\le 16\}$에서
$d=16$
따라서 16을 원소로 갖는 집합은 A_{14}, A_{15}, A_{16}, A_{17}, A_{18}이므로 이때의 m의 값의 범위는
$14\le m\le 18$
(ii) $a=2$인 경우
A_2, A_3, A_4도 2를 원소로 갖고, $A_4=\{x\mid 2\le x\le 6\}$이므로 ㉠에서
$b>6$
이때 집합 B가 A_5와 서로소가 아니려면 $A_5=\{x\mid 3\le x\le 7\}$에서
$b=7$
A_6, A_7, A_8, A_9도 7을 원소로 갖고, $A_9=\{x\mid 7\le x\le 11\}$이므로 ㉠에서
$c>11$
이때 집합 B가 A_{10}과 서로소가 아니려면
$A_{10}=\{x\mid 8\le x\le 12\}$에서

$c=12$

A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}도 12를 원소로 갖고,

$A_{14}=\{x|12\le x\le 16\}$이므로 ㉠에서

$d>16$

이때 집합 B가 A_{15}와 서로소가 아니려면

$A_{15}=\{x|13\le x\le 17\}$에서

$d=17$

따라서 17을 원소로 갖는 집합은 A_{15}, A_{16}, A_{17}, A_{18}, A_{19}이므로 이때의 m의 값의 범위는

$15\le m\le 19$

(iii) $a=3$인 경우

A_2, A_3, A_4, A_5도 3을 원소로 갖고, $A_5=\{x|3\le x\le 7\}$이므로 ㉠에서

$b>7$

이때 집합 B가 A_6과 서로소가 아니려면 $A_6=\{x|4\le x\le 8\}$에서

$b=8$

A_7, A_8, A_9, A_{10}도 8을 원소로 갖고, $A_{10}=\{x|8\le x\le 12\}$이므로 ㉠에서

$c>12$

이때 집합 B가 A_{11}과 서로소가 아니려면 $A_{11}=\{x|9\le x\le 13\}$에서

$c=13$

A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}도 12를 원소로 갖고,

$A_{15}=\{x|13\le x\le 17\}$이므로 ㉠에서

$d>17$

이때 집합 B가 A_{16}과 서로소가 아니려면

$A_{16}=\{x|14\le x\le 18\}$에서

$d=18$

따라서 18을 원소로 갖는 집합은 A_{16}, A_{17}, A_{18}, A_{19}, A_{20}이므로 이때의 m의 값의 범위는

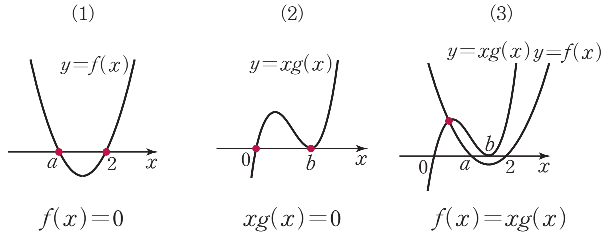
$16\le m\le 20$

(i)~(iii)에서 $14\le m\le 20$이므로 자연수 m의 개수는 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20의 7이다.

답 7

048

일등급의 메모장



((1)~(3)에서의 근의 합집합의 원소의 개수)$=n(C)$

조건 ㈎에서 $n(A)=2$이므로 이차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$2\in A$이므로 두 실근을 2, a $(a\ne 2)$라 하면

$f(x)=(x-a)(x-2)$

조건 ㈎에서 $n(B)=1$이므로 이차방정식 $g(x)=0$은 중근을 갖는다.

중근을 b라 하면

$g(x)=(x-b)^2$

집합 C에서

$\{f(x)-xg(x)\}^3=\{f(x)\}^3-\{xg(x)\}^3$

$xf(x)g(x)\{f(x)-xg(x)\}=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $f(x)=0$ 또는 $g(x)=0$ 또는 $f(x)=xg(x)$

즉,

$C=\{0\}\cup\{x|f(x)=0\}\cup\{x|g(x)=0\}\cup\{x|f(x)=xg(x)\}$

$=\{0,\ 2,\ a,\ b\}\cup\{x|f(x)=xg(x)\}$

조건 ㈎에서 $n(C)=3$이므로 $\{0,\ 2,\ a,\ b\}$의 원소가 3개 이하이어야 한다.

$\therefore$ $a=0$ 또는 $a=b$ 또는 $b=0$ 또는 $b=2$

(i) $a=0$인 경우

$f(x)=xg(x)$에서

$x(x-2)=x(x-b)^2$

$x(x-b)^2-x(x-2)=0$

$x\{x^2-(2b+1)x+b^2+2\}=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x^2-(2b+1)x+b^2+2=0$

이때 $h(x)=x^2-(2b+1)x+b^2+2$라 하고

$S=\{0,\ 2,\ b\}$, $S_h=\{x|h(x)=0\}$

이라 하면 $C=S\cup S_h$이다.

ⓐ $0\in S_h$일 때

$h(0)=b^2+2\ne 0$이므로 모순이다. ($\because$ $b^2\ge 0$)

ⓑ $2\in S_h$일 때

$h(2)=4-4b-2+b^2+2$

$=(b-2)^2=0$

$\therefore$ $b=2$

$b=2$이면 $S=\{0,\ 2\}$이고

$h(x)=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

이므로 $S_h=\{2,\ 3\}$에서

$C=S\cup S_h=\{0,\ 2,\ 3\}$

$\therefore$ $n(C)=3$

ⓒ $b\in S_h$일 때

$h(b)=b^2-b(2b+1)+b^2+2$

$=-b+2=0$

$\therefore$ $b=2$

따라서 $n(C)=3$이다. ($\because$ ⓑ)

ⓓ $S_h=\varnothing$일 때

$C=S$이고, 이차방정식 $h(x)=0$이 실근을 갖지 않는다.

이차방정식 $h(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2b+1)^2-4(b^2+2)<0$

$4b-7<0$

$\therefore$ $b<\frac{7}{4}$

조건 ㈏에서 $b\ge 0$이고, $n(C)=n(S)=3$이려면 $b\ne 0$이어야 하므로

$0<b<\frac{7}{4}$

ⓐ~ⓓ에서 $0<b<\frac{7}{4}$ 또는 $b=2$

(ii) $a=b$인 경우

$f(x)=xg(x)$에서

$(x-b)(x-2)=x(x-b)^2$

$x(x-b)^2-(x-b)(x-2)=0$
$(x-b)\{x^2-(b+1)x+2\}=0$
$\therefore$ $x=b$ 또는 $x^2-(b+1)x+2=0$
이때 $h(x)=x^2-(b+1)x+2$라 하고
$S=\{0,\ 2,\ b\}$, $S_h=\{x\mid h(x)=0\}$
이라 하면 $C=S\cup S_h$이다.
$a\neq 2$, $a=b$이므로 $b\neq 2$
ⓐ $0\in S_h$일 때
$h(0)=2\neq 0$이므로 모순이다.
ⓑ $2\in S_h$일 때
$h(2)=4-2b-2+2$
$=-2b+4=0$
즉, $b=2$이므로 모순이다.
ⓒ $b\in S_h$일 때
$h(b)=b^2-b^2-b+2$
$=-b+2=0$
즉, $b=2$이므로 모순이다.
ⓓ $S_h=\varnothing$일 때
$C=S$이고, 이차방정식 $h(x)=0$이 실근을 갖지 않는다.
이차방정식 $h(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(b+1)^2-8<0$
$b^2+2b-7<0$
$\{b-(-1-2\sqrt{2})\}\{b-(-1+2\sqrt{2})\}<0$
$\therefore$ $-1-2\sqrt{2}<b<-1+2\sqrt{2}$
조건 ㈏에서 $b\geq 0$이고, $n(C)=n(S)=3$이려면 $b\neq 0$이어야 하므로
$0<b<-1+2\sqrt{2}$
ⓐ~ⓓ에서 $0<b<-1+2\sqrt{2}$
(iii) $b=0$인 경우
$f(x)=xg(x)$에서
$(x-a)(x-2)=x^3$
$x^3-x^2+(a+2)x-2a=0$
이때 $h(x)=x^3-x^2+(a+2)x-2a$라 하고
$S=\{0,\ 2,\ a\}$, $S_h=\{x\mid h(x)=0\}$
이라 하면 $C=S\cup S_h$이다.
$a=0$인 경우는 (i)에서 보였으므로 $a\neq 0$이라 하자.
$a\neq 2$, $a\neq 0$이므로 $n(S)=3$이고, 이때 $n(C)=3$이려면
$S_h\subset S$이어야 한다.
ⓐ $0\in S_h$일 때
$h(0)=-2a\neq 0$이므로 모순이다.
ⓑ $2\in S_h$일 때
$h(2)=8-4+2a+4-2a$
$=8\neq 0$
이므로 모순이다.
ⓒ $a\in S_h$일 때
$h(a)=a^3-a^2+a^2+2a-2a$
$=a^3=0$
즉, $a=0$이므로 모순이다.
ⓓ $S_h=\varnothing$일 때
$C=S$이고, 삼차방정식 $h(x)=0$이 실근을 갖지 않아야 한다.
그러나 삼차방정식은 항상 실근을 가지므로 모순이다. 참고
ⓐ~ⓓ에서 $b\neq 0$

(iv) $b=2$인 경우
$f(x)=xg(x)$에서
$(x-a)(x-2)=x(x-2)^2$
$x(x-2)^2-(x-a)(x-2)=0$
$(x-2)(x^2-3x+a)=0$
$\therefore$ $x=2$ 또는 $x^2-3x+a=0$
이때 $h(x)=x^2-3x+a$라 하고
$S=\{0,\ 2,\ a\}$, $S_h=\{x\mid h(x)=0\}$
이라 하면 $C=S\cup S_h$이다.
$a=0$인 경우는 (i)에서 보였으므로 $a\neq 0$이라 하자.
$a\neq 2$, $a\neq 0$이므로 $n(S)=3$이고, 이때 $n(C)=3$이려면
$S_h\subset S$이어야 한다.
ⓐ $0\in S_h$일 때
$h(0)=a\neq 0$이므로 모순이다.
ⓑ $2\in S_h$일 때
$h(2)=4-6+a$
$=a-2=0$
즉, $a=2$이므로 모순이다.
ⓒ $a\in S_h$일 때
$h(a)=a^2-3a+a=a^2-2a$
$=a(a-2)=0$
즉, $a=2$ 또는 $a=0$이므로 모순이다.
ⓓ $S_h=\varnothing$일 때
$C=S$이고, 이차방정식 $h(x)=0$이 실근을 갖지 않는다.
이차방정식 $h(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$D=9-4a<0$
$\therefore$ $a>\dfrac{9}{4}$
즉, $a>\dfrac{9}{4}$인 모든 a에 대하여 $n(C)=3$이 성립한다.
ⓐ~ⓓ에서 $b=2$
(i)~(iv)에서 $-1+2\sqrt{2}>\dfrac{7}{4}$이므로
$0<b<-1+2\sqrt{2}$ 또는 $b=2$
따라서 집합 B의 원소, 즉 b의 값으로 가능한 값의 집합이
$\{x\mid 0<x<-1+2\sqrt{2}\}\cup\{2\}$이므로
$\alpha=0$, $\beta=-1+2\sqrt{2}$, $\gamma=2$
$\therefore$ $\alpha+\beta+\gamma=0+(-1+2\sqrt{2})+2=1+2\sqrt{2}$

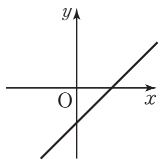
답 $1+2\sqrt{2}$

참고 확장

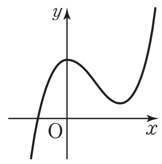
삼차방정식이 실근을 반드시 갖는 이유

삼차방정식이 허근만을 가진다고 가정하자.
서로 다른 세 허근을 z_1, z_2, z_3이라 하면 각각의 켤레복소수 또한 삼차방정식의 근이므로
$\{z_1,\ z_2,\ z_3\}=\{\overline{z_1},\ \overline{z_2},\ \overline{z_3}\}$
z_1은 허수이므로 $\overline{z_1}\neq z_1$이고, $\overline{z_1}=z_2$ 또는 $\overline{z_1}=z_3$이다.
이때 $\overline{z_1}=z_2$라 하면 $\overline{z_2}=z_1$이 성립한다.
즉, $\{z_1,\ z_2,\ z_3\}=\{z_2,\ z_1,\ \overline{z_3}\}$에서 $z_3\neq z_1$, $z_3\neq z_2$이므로 $z_3=\overline{z_3}$
이는 z_3이 허수라는 사실에 모순이다.
따라서 삼차방정식은 반드시 실근을 갖는다.
기하적으로 접근하여 생각해 보면 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수의 그래프는 일차함수의 그래프와 비슷하게 오른쪽 위를 향해 가므로 x의 값이 증가함에 따라 일부 구간을 제외하고는 함숫값이 전체적으로 증가하는 양상을 보인다.
따라서 삼차함수의 그래프는 반드시 x축을 지나게 되므로 삼차방정식의

실근이 항상 존재함을 알 수 있다.



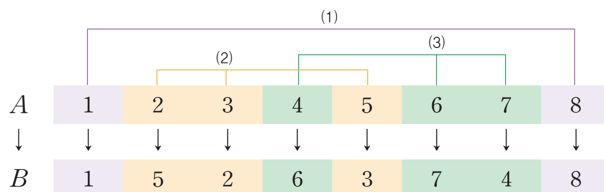
일차함수



삼차함수

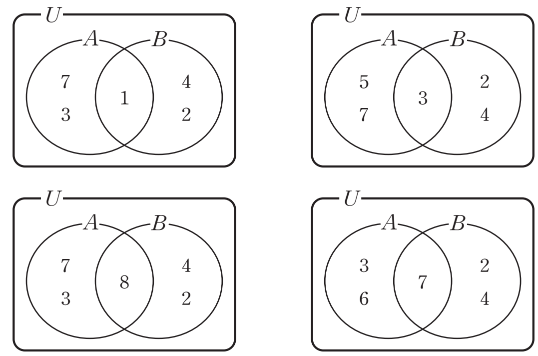
049

일등급의 메모장

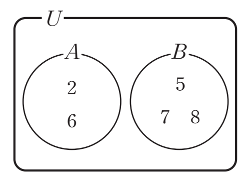


(1) $1\in A$이면 $1\in B$이므로 $1\in(A\cap B)$
또, $8\in A$이면 $8\in B$이므로 $8\in(A\cap B)$
(2) 2, 3, 5는 서로 어느 집합에 속할지 영향을 준다.
(3) 4, 6, 7은 서로 어느 집합에 속할지 영향을 준다.

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 원소 중에서 조건 (다)를 만족시키는 $a\in A$, $b\in B$를 순서쌍 (a, b)로 나타내면 다음과 같다.
$(1, 1)$, $(2, 5)$, $(3, 2)$, $(4, 6)$, $(5, 3)$, $(6, 7)$, $(7, 4)$, $(8, 8)$
즉, 1과 8은 $A-B$의 원소가 될 수는 없지만
$A\cap B$ 또는 $B-A$
의 원소가 될 수 있다. 참고
즉, $n(A-B)\le n(B-A)$이고, $n(A-B)=2$이므로
$n(B-A)\ge 2$ …… ㉠
한편, $n(A\cup B)=5$, $n(A-B)=2$에서
$n(A)+n(B)-n(A\cap B)=5$
$n(A)-n(A\cap B)=2$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$n(B)=3$
이때 $n(B-A)\le n(B)$이므로
$n(B-A)\le 3$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $2\le n(B-A)\le 3$이므로
$n(B-A)=2$ 또는 $n(B-A)=3$
따라서 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합은 $n(B-A)=2$일 때 최솟값, $n(B-A)=3$일 때 최댓값을 갖는다.
(i) $n(B-A)=2$인 경우
집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합의 최솟값을 찾기 위해 1부터 차례대로 집합 $B-A$의 원소로 택하여 생각해 보자.
ⓐ $1\in(B-A)$일 때, $n(A-B)=2$, $n(B-A)=2$를 만족시키는 두 집합 A, B가 존재하지 않으므로
$1\notin(B-A)$
ⓑ $2\in(B-A)$일 때, $3\in A$이므로
$3\notin(B-A)$
ⓒ $4\in(B-A)$일 때, $7\in A$이다.
ⓐ~ⓒ에서
$\{3, 7\}\subset A$, $B-A=\{2, 4\}$
이므로 가능한 경우는 다음 그림의 4가지이다.



따라서 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합의 최솟값은
$m=2+4=6$
(ii) $n(B-A)=3$인 경우
집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합의 최댓값을 찾기 위해 8부터 차례로 집합 $B-A$의 원소로 택하여 생각해 보자.
ⓐ $8\in(B-A)$는 가능하다.
ⓑ $7\in(B-A)$일 때, $6\in A-B$이므로
$6\notin B-A$
ⓒ $5\in(B-A)$일 때, $2\in A-B$이다.
ⓐ~ⓒ에서
$\{2, 6\}\subset A$, $B-A=\{5, 7, 8\}$
이므로 가능한 경우는 다음 그림의 1가지이다.



따라서 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합의 최댓값은
$M=5+7+8=20$
(i), (ii)에서 $M=20$, $m=6$이므로
$M+m=26$

답 ②

참고
조건 (다)에서 그 역이 항상 성립하는 것은 아니므로 $\frac{a+1}{2}\in B$ 또는 $\frac{a+8}{2}\in B$이어도 $a\notin A$일 수 있다.

050

일등급의 메모장

ㄱ. k가 최대 ➡ $a=b=0$
ㄴ. $ab=0$ ➡ $a=0$ 또는 $b=0$
➡ (전체)$-$($a\ne 0$ 그리고 $b\ne 0$)
➡ (100 이하의 자연수)$-$(6의 배수)
ㄷ. $2^a\times 3^b\le 100$ ➡ $ab\le 6$

ㄱ. $(a, b, k)\in A$일 때, $2^a\times 3^b\times k\in U$를 만족시킨다.
$2^a\times 3^b\times k$에서 k의 값이 최대가 되려면 $2^a\times 3^b$의 값이 최소가 되어야 한다.
즉, $2^0\times 3^0=1$일 때 k의 최댓값은 100 이하의 2, 3과 서로소

인 자연수 중 가장 큰 수이므로 97이다. (참)

ㄴ. 집합 $A-B_0$에 대하여 $(a,\ b,\ k)\in(A-B_0)$이라 하면 $ab\neq0$이므로

$a\geq1$, $b\geq1$

즉, $2^a\times3^b\times k$는 2의 배수이면서 3의 배수이므로 6의 배수이고, 100 이하의 자연수 중 6의 배수의 개수는 16이다.

서로 다른 6의 배수 $2^{a_1}\times3^{b_1}\times k_1$, $2^{a_2}\times3^{b_2}\times k_2$에 대하여 2, 3, k_1이 서로소이고 2, 3, k_2가 서로소이므로

$(a_1,\ b_1,\ k_1)\neq(a_2,\ b_2,\ k_2)$이다.

따라서 $2^a\times3^b\times k$가 6의 배수일 때 그 각각에 대하여 정해지는 순서쌍 $(a,\ b,\ k)$가 서로 다르므로 $n(A-B_0)$은 6의 배수의 개수인 16이다.

이때 $B_0\subset A$이므로 $n(A-B_0)=n(A)-n(B_0)$이고

$n(A)=100$이므로

$n(B_0)=100-16=84$ (참)

ㄷ. $2^a\times3^b\times k\in U$일 때, $2^a\times3^b\times k\leq100$이고 $k\geq1$이므로

$2^a\times3^b\leq100$

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$를 구하면

$(0,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(0,\ 2)$, $(0,\ 3)$, $(0,\ 4)$, $(1,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(3,\ 0)$, $(4,\ 0)$, $(5,\ 0)$, $(6,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$, $(3,\ 2)$, $(4,\ 1)$, $(5,\ 1)$, $(6,\ 1)$

이므로 $0\leq ab\leq6$

따라서 100 이하의 임의의 자연수를 $2^a\times3^b\times k$로 나타내었을 때, $0\leq ab\leq6$이므로 집합 A의 모든 원소 B_0, B_1, B_2, $\cdots$, B_6 중 한 집합에 속하게 된다.

$\therefore B_0\cup B_1\cup\cdots\cup B_6=A$

한편, $i\neq j$일 때 $B_i\cap B_j=\varnothing$이므로

$n(B_0)+n(B_1)+n(B_2)+\cdots+n(B_6)$

$=n(B_0\cup B_1\cup\cdots\cup B_6)$

$=n(A)=100$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

052

일등급의 메모장

(1) $n(S)$의 값에 따른 집합 S를 설정한다.

(2) 집합 S의 모든 원소가 조건 (나)를 만족시키는지 판단한다.

(3) 가능한 집합 S의 개수를 구한다.

조건 (가)에서 $A\in S$이고 $\varnothing\in S$이므로 $n(S)\geq2$이다.

(i) $n(S)=2$인 경우

$S=\{\varnothing,\ A\}$

이때 $\varnothing\cap A=\varnothing\in S$, $\varnothing\cup A=A\in S$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

따라서 $n(S)=2$일 때 집합 S의 개수는 1이다.

(ii) $n(S)=3$인 경우

집합 A의 $\varnothing$과 A가 아닌 부분집합 B에 대하여 $S=\{\varnothing,\ A,\ B\}$라 하자.

(i)에서 $\varnothing$과 A는 조건 (나)를 만족시키므로 $\varnothing$과 B, A와 B의 관계를 생각해 보자.

$\varnothing\cap B=\varnothing\in S$, $\varnothing\cup B=B\in S$

$A\cap B=B\in S$, $A\cup B=A\in S$

따라서 집합 $S=\{\varnothing,\ A,\ B\}$는 조건 (나)를 만족시킨다.

집합 B는 A의 부분집합 중 $\varnothing$과 A를 제외한 것이므로 그 개수는

$2^4-2=14$

따라서 $n(S)=3$일 때 집합 S의 개수는 14이다.

(iii) $n(S)=4$인 경우

집합 A의 $\varnothing$과 A가 아닌 서로 다른 두 부분집합 B, C에 대하여 $S=\{\varnothing,\ A,\ B,\ C\}$라 하자.

ⓐ $B\cap C=\varnothing$일 때

$B\in S$, $C\in S$이므로 조건 (나)에 의하여 $(B\cup C)\in S$이어야 한다.

$B\neq\varnothing$, $C\neq\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$이므로

$B\cup C\neq\varnothing$, $B\cup C\neq B$, $B\cup C\neq C$

즉, $B\cup C=A$이어야 하고, $B\cap C=\varnothing$이므로

$C=B^C$

집합 A의 $\varnothing$과 A가 아닌 부분집합의 개수는

$2^4-2=14$

이때 각각의 부분집합에 대하여 B와 B^C을 원소로 하는 집합 $\{B,\ B^C\}$의 개수는

$\dfrac{14}{2}=7$

따라서 $B\cap C=\varnothing$일 때 집합 S의 개수는 7이다.

ⓑ $B\cap C=B$ 또는 $B\cap C=C$일 때

임의의 두 집합 B, C에 대하여 $B\cap C=B$인 경우와 $B\cap C=C$인 경우는 같으므로 $B\cap C=B$라 하자.

$B\cap C=B$이면 $B\subset C$이므로 $B\cup C=C$

따라서 조건 (나)를 만족시킨다.

$n(C)=3$일 때, $n(B)=2$ 또는 $n(B)=1$이므로 두 집합 B, C를 정하는 경우의 수는

${}_4C_3\times({}_3C_2+{}_3C_1)=4\times(3+3)=24$ …… ㉠

$n(C)=2$일 때, $n(B)=1$이므로 두 집합 B, C를 정하는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_2C_1=6\times2=12$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $B\cap C=B$일 때 집합 S의 개수는

$24+12=36$

ⓐ, ⓑ에서 $n(S)=4$일 때 집합 S의 개수는

$7+36=43$

(i)~(iii)에서 구하는 집합 S의 개수는

$1+14+43=58$

답 58

05 명제

Ⅱ. 집합과 명제

001

ㄱ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
ㄴ. $n^2=3$인 자연수 n은 존재하지 않으므로 거짓인 명제이다.
ㄷ. 참인 명제이다.
ㄹ. 삼각형 ABC의 세 변의 길이에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
ㅁ. $x>2$이면 참이고 $x\le 2$이면 거짓이므로 명제가 아니다.
따라서 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ②

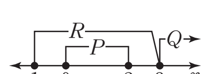
002

$x^2>x$에서
$x^2-x>0$, $x(x-1)>0$
$\therefore x<0$ 또는 $x>1$
두 조건 p, q를
p: $x>0$,
q: $x<0$ 또는 $x>1$
이라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 P, Q라 하면
$P=\{x\,|\,x>0\}$,
$Q=\{x\,|\,x<0$ 또는 $x>1\}$
이므로
$Q^C=\{x\,|\,0\le x\le 1\}$
$\therefore P\cap Q^C=\{x\,|\,0<x\le 1\}$
이때 주어진 명제 $p\longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 $P\cap Q^C$의 원소이므로 자연수 n에 대하여
$n=1$

답 1

003

세 조건 p, q, r의 진리집합을 P, Q, R라 하면
$P=\{x\,|\,0\le x\le 2\}$
$Q=\{x\,|\,x\ge 3\}$
$R=\{x\,|\,\underline{-1\le x\le 3}\}$ $|x-1|\le 2$에서 $-2\le x-1\le 2$ $\therefore -1\le x\le 3$



ㄱ. $P\subset R$이므로 명제 $p\longrightarrow r$는 참이다.
ㄴ. $Q\not\subset P$이므로 명제 $q\longrightarrow p$는 거짓이다.
ㄷ. [반례] $x=3$이면 $3\in R$이지만 $3\notin Q^C$이므로 명제 $r\longrightarrow \sim q$는 거짓이다.
따라서 참인 명제는 ㄱ이다.

답 ①

004

ㄱ. $Q\subset P$이므로 명제 $q\longrightarrow p$는 참이다.
ㄴ. $P\not\subset R$이므로 명제 $p\longrightarrow r$는 거짓이다.
ㄷ. $Q\cap R=\varnothing$이므로 $R\subset Q^C$
즉, 명제 $r\longrightarrow \sim q$는 참이다.
ㄹ. $Q\subset P$이므로 $P^C\subset Q^C$
즉, 명제 $\sim p\longrightarrow \sim q$는 참이다.
따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

다른 풀이

ㄹ. ㄱ에서 명제 $q\longrightarrow p$가 참이므로 이 명제의 대우 $\sim p\longrightarrow \sim q$도 참이다.

005

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
명제 $p\longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 $P\subset Q^C$이므로
$Q\subset P^C$
명제 $\sim p\longrightarrow q$가 참이 되려면
$P^C\subset Q$
즉, $Q\subset P^C$이고 $P^C\subset Q$이므로
$Q=P^C$
p: $2x-a=0$에서 $x=\dfrac{a}{2}$이므로
$P=\left\{\dfrac{a}{2}\right\}$
$Q=P^C$에서
$Q=\left\{x\,\middle|\,x\ne\dfrac{a}{2}\text{인 실수}\right\}$
따라서 부등식 $x^2-bx+9>0$의 해가 $x\ne\dfrac{a}{2}$인 모든 실수이므로
이차방정식 $x^2-bx+9=0$의 판별식을 D라 하면
$D=b^2-36=0$ $\quad\therefore b=6$ ($\because b>0$)
이때 q: $x^2-6x+9>0$에서 $(x-3)^2>0$이므로 $x\ne 3$
$\therefore Q=\{x\,|\,x\ne 3\text{인 실수}\}$
즉, $\dfrac{a}{2}=3$이므로 $a=6$
$\therefore a+b=6+6=12$

답 12

006

'모든 실수 x에 대하여 $ax^2+2x+4\ge 0$이어야 한다.'가 참인 명제가 되려면 이차방정식 $ax^2+2x+4\ge 0$의 판별식을 D라 할 때
$\dfrac{D}{4}=1^2-4a\le 0$ $\quad\therefore a\ge\dfrac{1}{4}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
'어떤 실수 x에 대하여 $|x|=4-a$이어야 한다.'가 참인 명제가 되려면 $4-a\ge 0$이어야 하므로
$a\le 4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $\dfrac{1}{4}\le a\le 4$이므로 자연수 a의 최댓값과 최솟값의 곱은
$4\times 1=4$

답 4

007

전체집합 $U=\{1, 2, 5, 10\}$에 대하여 주어진 명제가 참이 되려면

부분집합 A의 원소 중 적어도 하나는 소수이어야 한다.

(i) $2\in A$인 경우

집합 A의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

(ii) $5\in A$인 경우

집합 A의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

(iii) $2\in A$, $5\in A$인 경우

집합 A의 개수는

$2^{4-2}=2^2=4$

(i)~(iii)에서 집합 A의 개수는

$8+8-4=12$

답 12

다른 풀이

집합 A^C은 소수를 원소로 갖지 않는 집합이므로 집합 $\{1, 10\}$의 부분집합이다.

즉, 집합 A^C의 개수는

$2^2=4$

따라서 집합 A의 개수는

$2^4-4=16-4=12$

008

주어진 명제가 참이므로 그 대우

'$x<a$이고 $y<a$이면 $x+y<5$이다.'

도 참이다.

$x<a$, $y<a$에서 $x+y<2a$이므로

$2a\le 5 \qquad \therefore a\le\frac{5}{2}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $\frac{5}{2}$이다.

답 $\frac{5}{2}$

009

① p: $|x|=2$에서

$x=-2$ 또는 $x=2$

q: $x^2=4$에서

$x=-2$ 또는 $x=2$

즉, p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

② p: $x^3-y^3=0$에서

$(x-y)(x^2+xy+y^2)=0$

$\therefore x=y$ ($\because x^2+xy+y^2>0$)

q: $x^2-y^2=0$에서

$(x+y)(x-y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=y$

즉, p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

③ $p \longrightarrow q$: x가 정수이면 x^2도 정수이므로

$p \Longrightarrow q$

$q \longrightarrow p$: [반례] $x=\sqrt{2}$이면 x^2은 정수이지만 x는 정수가 아니다.

즉, p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

④ $p \longrightarrow q$: $x>y>0$이면 $x^2>y^2$이므로

$p \Longrightarrow q$

$q \longrightarrow p$: [반례] $x=-2$, $y=1$이면 $x^2>y^2$이지만 $x<y$이다.

즉, p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

⑤ $p \longrightarrow q$: [반례] $x=1$, $y=1$, $z=2$이면

$(x-y)(y-z)(z-x)=0$이지만 $x=y\ne z$이다.

$q \longrightarrow p$: $x=y=z$이면 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$이므로

$q \Longrightarrow p$

즉, p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

따라서 조건 p가 조건 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

010

p: $(x+1)(x+2)(x-3)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$

q: $x^2+kx+k-1=0$에서

$(x+1)(x+k-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-k+1$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{-2, -1, 3\}$, $Q=\{-1, -k+1\}$

p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $Q\subset P$이어야 한다.

이때 $-k+1\in Q$이므로 $-k+1\in P$

(i) $-k+1=-2$이면 $k=3$

(ii) $-k+1=-1$이면 $k=2$

(iii) $-k+1=3$이면 $k=-2$

(i)~(iii)에서 모든 정수 k의 값의 곱은

$3\times 2\times(-2)=-12$

답 ④

011

$\sim r \Longrightarrow \sim p$에서 $p \Longrightarrow r$

$\sim s \Longrightarrow q$에서 $\sim q \Longrightarrow s$

삼단논법에 의하여 $p \Longrightarrow r$, $\sim q \Longrightarrow s$일 때, 명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이면 명제 $p \longrightarrow s$도 참이 된다.

따라서 반드시 필요한 참인 명제는 ③이다.

답 ③

012

주어진 명제의 대우는

'n이 3의 배수가 아니면 n^2도 3의 배수가 아니다.'

이다.

음이 아닌 정수 k에 대하여

(i) $n=3k+1$이면

$n^2=(3k+1)^2$

$=9k^2+6k+1$

$=3(\boxed{(가): 3k^2+2k})+1$

즉, n^2은 3의 배수가 아니다.

(ii) $n=3k+2$이면

$n^2=(3k+2)^2$

$=9k^2+12k+4$

$=3(3k^2+4k+1)+\boxed{(나): 1}$

즉, n^2은 3의 배수가 아니다.

(i), (ii)에서 $f(k)=3k^2+2k$, $a=1$이므로

$f(a)=f(1)=3+2=5$

답 5

013

$x>3$에서 $x-3>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}4x+\frac{1}{x-3}&=4(x-3)+\frac{1}{x-3}+12\\&\ge 2\sqrt{4(x-3)\times\frac{1}{x-3}}+12\\&=2\times 2+12\\&=16\ \left(\text{단, 등호는 } 4(x-3)=\frac{1}{x-3}\text{일 때 성립한다.}\right)\end{aligned}$$

따라서 $k\ge 16$이므로 실수 k의 최솟값은 16이다.

답 ⑤

014

두 직선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 기울기가 각각 $\frac{a}{2}$, $\frac{1}{b}$이고 두 직선이 서로 평행하므로

$\frac{a}{2}=\frac{1}{b}$ $\quad\therefore ab=2$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}(a+1)(b+2)&=ab+2a+b+2\\&=4+2a+b\\&\ge 4+2\sqrt{2ab}\\&=4+2\times 2\\&=8\ (\text{단, 등호는 } 2a=b\text{일 때 성립한다.})\end{aligned}$$

따라서 $(a+1)(b+2)$의 최솟값은 8이다.

답 8

015

잔디밭의 넓이가 144 m^2이므로

$xy=144$

데크의 넓이는

$(x+2)(y+2)-xy=2(x+y)+4$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}2(x+y)+4&\ge 2\times 2\sqrt{xy}+4\\&=4\times 12+4\\&=52\ (\text{단, 등호는 } x=y=12\text{일 때 성립한다.})\end{aligned}$$

$x=y$이면 $xy=144$에서
$x=y=12$ ($\because x>0, y>0$)

따라서 $a=52$, $b=12$, $c=12$이므로

$b(a-c)=12\times(52-12)=480$

답 ①

016

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+1^2)(x^2+y^2)\ge(2x+y)^2$

이때 $x^2+y^2=a$이므로

$5a\ge(2x+y)^2$

$\therefore -\sqrt{5a}\le 2x+y\le\sqrt{5a}$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{2}=y\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $2x+y$의 최댓값은 $\sqrt{5a}$, 최솟값은 $-\sqrt{5a}$이고 최댓값과 최솟값의 차가 30이므로

$\sqrt{5a}-(-\sqrt{5a})=30$

$2\sqrt{5a}=30$, $20a=900$

$\therefore a=45$

답 45

017

$P\ne\varnothing$이므로 이차방정식 $x^2-6x+m+7=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(m+7)\ge 0$ $\qquad\therefore m\le 2$

이때 m은 자연수이므로

$m=1$ 또는 $m=2$

또, $0<|x-n|\le 5$에서 $x\ne n$이고 $n-5\le x\le n+5$이므로

$n-5\le x<n$ 또는 $n<x\le n+5$

$0<|x-n|$에서 $x\ne n$
$|x-n|\le 5$에서 $n-5\le x\le n+5$

$\therefore Q=\{x\,|\,n-5\le x<n$ 또는 $n<x\le n+5\}$

$P\cup Q=Q$이어야 하므로

$P\subset Q$

(i) $m=1$일 때

$x^2-6x+8=(x-2)(x-4)\le 0$에서

$P=\{x\,|\,2\le x\le 4\}$

이므로 $P\subset Q$이려면

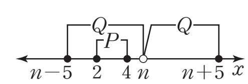
$P\subset\{x\,|\,n-5\le x<n\}$ 또는 $P\subset\{x\,|\,n<x\le n+5\}$

이어야 한다.

ⓐ $P\subset\{x\,|\,n-5\le x<n\}$일 때

$n-5\le 2$, $4<n$에서

$4<n\le 7$

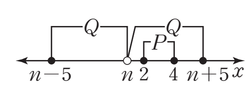


즉, $P\subset Q$가 되도록 하는 자연수 n의 값은 5, 6, 7이다.

ⓑ $P\subset\{x\,|\,n<x\le n+5\}$일 때

$n<2$, $4\le n+5$에서

$-1\le n<2$



즉, $P\subset Q$가 되도록 하는 자연수 n의 값은 1이다.

ⓐ, ⓑ에서 mn의 값은 1, 5, 6, 7이다.

(ii) $m=2$일 때

$x^2-6x+9=(x-3)^2\le 0$에서

$P=\{3\}$

이므로 $P\subset Q$이려면

$n-5\le 3<n$ 또는 $n<3\le n+5$

즉, $3<n\le 8$ 또는 $-2\le n<3$이므로 $P\subset Q$가 되도록 하는 자연수 n의 값은 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8이다.

따라서 mn의 값은 2, 4, 8, 10, 12, 14, 16이다.

(i), (ii)에서 mn의 최댓값은 16이다.

답 16

018

ㄱ. [반례] $x=\frac{1}{2}$이면 $|x|=|x-1|$이다. (거짓)

ㄴ. [반례] $x=-7$이면 $x^2+6x-7=0$이다. (거짓)

ㄷ. $n^3-n=(n-1)n(n+1)$이므로 음이 아닌 연속하는 세 정수의 곱이다.

이때 음이 아닌 연속하는 세 정수 중 하나는 0 또는 3의 배수이므로 n^3-n은 3으로 나누어떨어진다. (참)

ㄹ. 자연수 m, n에 대하여 mn이 홀수이면 m, n이 모두 홀수이므로 m^2, n^2도 모두 홀수이다.

따라서 m^2+n^2은 짝수이다. (거짓) 참고

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ㄷ

참고

(짝수)×(짝수)=(짝수), (짝수)×(홀수)=(짝수),
(홀수)×(홀수)=(홀수)이므로 두 자연수를 곱하여 홀수인 경우는 두 자연수가 홀수인 경우이다.
한편, $m=2k+1$, $n=2l+1$ (k, l은 음이 아닌 정수)로 놓으면
$m^2=(2k+1)^2=2(2k^2+2k)+1$,
$n^2=(2l+1)^2=2(2l^2+2l)+1$
이므로 m^2, n^2은 모두 홀수이고
$m^2+n^2=2(2k^2+2l^2+2k+2l+1)$
이므로 m^2+n^2은 짝수이다.

019

p: $|3x-k+2|\le5$에서

$-5\le3x-k+2\le5$ $\quad\therefore \dfrac{k-7}{3}\le x\le\dfrac{k+3}{3}$

q: $(x-2)(x-6)\le0$에서

$2\le x\le6$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\left\{x\middle|\dfrac{k-7}{3}\le x\le\dfrac{k+3}{3}\right\}$

$Q=\{x|2\le x\le6\}$

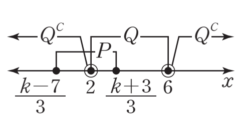
$Q^C=\{x|x<2$ 또는 $x>6\}$

두 명제 $p\longrightarrow q$, $p\longrightarrow \sim q$가 모두 거짓이 되려면

$P\cap Q\ne\varnothing$, $P\cap Q^C\ne\varnothing$

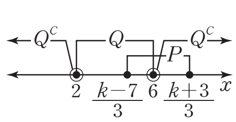
이어야 한다.

(i) $\dfrac{k-7}{3}<2$, $\dfrac{k+3}{3}\ge2$인 경우



$\therefore 3\le k<13$

(ii) $\dfrac{k-7}{3}\le6$, $\dfrac{k+3}{3}>6$인 경우



$\therefore 15<k\le25$

(i), (ii)에서 $3\le k<13$ 또는 $15<k\le25$이므로 이를 만족시키는 정수 k의 개수는

$10+10=20$

답 20

020

$x^2\le6x$에서

$x(x-6)\le0$, $0\le x\le6$

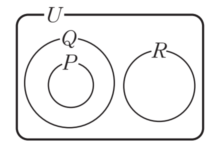
$\therefore P=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

조건 ㈎에서 $P\subset Q$

조건 ㈏에서 $Q\subset R^C$이므로 $Q\cap R=\varnothing$

조건 ㈐에서 $R\subset P^C$, 즉 $R\subset\{7, 8, 9, 10\}$

따라서 세 집합 P, Q, R의 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 다른 풀이



(i) $n(R)=0$일 때

집합 R의 개수는 ${}_4C_0=1$

$n(R^C)=10$이므로 $P\subset Q\subset R^C$을 만족시키는 집합 Q의 개수는

$2^{10-6}=2^4=16$

따라서 순서쌍 (Q, R)의 개수는

$1\times16=16$

(ii) $n(R)=1$일 때

집합 R의 개수는 ${}_4C_1=4$

$n(R^C)=9$이므로 $P\subset Q\subset R^C$을 만족시키는 집합 Q의 개수는

$2^{9-6}=2^3=8$

따라서 순서쌍 (Q, R)의 개수는

$4\times8=32$

(iii) $n(R)=2$일 때

집합 R의 개수는 ${}_4C_2=6$

$n(R^C)=8$이므로 $P\subset Q\subset R^C$을 만족시키는 집합 Q의 개수는

$2^{8-6}=2^2=4$

따라서 순서쌍 (Q, R)의 개수는

$6\times4=24$

(iv) $n(R)=3$일 때

집합 R의 개수는 ${}_4C_3=4$

$n(R^C)=7$이므로 $P\subset Q\subset R^C$을 만족시키는 집합 Q의 개수는

$2^{7-6}=2$

따라서 순서쌍 (Q, R)의 개수는

$4\times2=8$

(v) $n(R)=4$일 때

집합 R의 개수는 ${}_4C_4=1$

$n(R^C)=6$이므로 $P\subset Q\subset R^C$을 만족시키는 집합 Q의 개수는

1

따라서 순서쌍 (Q, R)의 개수는

$1\times1=1$

(i)~(v)에서 구하는 순서쌍 (Q, R)의 개수는

$16+32+24+8+1=81$

답 ①

다른 풀이

구하는 순서쌍의 개수는 집합 P의 원소를 제외한 나머지 4개의 원소가 집합 R 또는 집합 $P^C\cap Q$ 또는 집합 $Q^C\cap R^C$ 중 하나를 택하는 경우의 수와 같으므로

$3^4=81$

021

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x\le0$ 또는 $x\ge6\}$

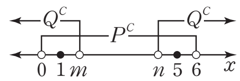
$Q=\{x|m\le x\le n\}$

명제 $\sim q\longrightarrow p$가 거짓임을 보이는 반례가 될 수 있는 값은 집합 Q^C-P, 즉 $Q^C\cap P^C$의 원소이다.

이때 두 집합 P^C, Q^C은

$P^C=\{x|0<x<6\}$,

$Q^C=\{x|x<m$ 또는 $x>n\}$



이므로 집합 $Q^C\cap P^C$의 정수인 원소가

1, 5뿐이려면

$1<m\le 2$, $4\le k<5$

답 ③

022

$f(x)=x^2-12x+n$이라 하자.

주어진 조건이 참인 명제가 되려면 $2\le x\le 7$에서 $f(x)\ge 0$을 만족시키는 실수 x가 적어도 하나 존재해야 한다. 참고

$f(x)=x^2-12x+n=(x-6)^2+n-36$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점이 $2\le x\le 7$의 범위에 존재하고

$f(2)=n-20$, $f(6)=n-36$, $f(7)=n-35$

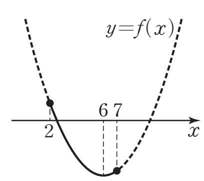
이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $n-20$을 갖는다.

따라서 $n-20\ge 0$에서 $n\ge 20$이므로 자연수 n의 최솟값은 20이다.

답 20

참고

$2\le x\le 7$에서 $f(x)\ge 0$을 만족시키는 실수 x가 적어도 하나 존재하려면 오른쪽 그림과 같이 함수 $f(x)$의 최댓값이 0 이상이어야 한다.



023

명제 (가)에서 $|x-2|<2$

$-2<x-2<2$ $\quad\therefore 0<x<4$

$\therefore A\subset\{1, 2, 3\}$

명제 (나)에서 $x\in B$인 어떤 x에 대하여 $x\in A$이므로

$A\cap B\neq\varnothing$

또, 집합 B의 모든 원소는 짝수이므로

$B\subset\{2, 4, 6\}$

이때 $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$이므로

$2\in A$, $2\in B$

집합 A는 2를 반드시 포함하고, 집합 $\{1, 2, 3\}$의 부분집합이므로 집합 A의 개수는

$2^{3-1}=4$

집합 B는 2를 반드시 포함하고, 집합 $\{2, 4, 6\}$의 부분집합이므로 집합 B의 개수는

$2^{3-1}=4$

따라서 순서쌍 (A, B)의 개수는

$4\times 4=16$

답 16

024

ㄱ. 역: $x>2$이고 $y>2$이면 $xy>x+y>4$이다.

$x>2$, $y>2$에서

$x+y>4$ …… ㉠

또, $x>2$, $y>2$에서 $x-1>1$, $y-1>1$이므로

$(x-1)(y-1)>1$, $xy-x-y+1>1$

$\therefore xy>x+y$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $xy>x+y>4$ (참)

ㄴ. 역: $x^3y<xy^3$이면 $0<x<y$이다.

[반례] $x=-1$, $y=-2$이면 $x^3y<xy^3$이지만 $0>x>y$이다. (거짓)

ㄷ. 역: $x^2-xy+y^2=0$이면 $|x|+|y|=0$이다.

$x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2=0$에서

$\left(x-\frac{y}{2}\right)^2\ge 0$, $\frac{3}{4}y^2\ge 0$

이므로

$x-\frac{y}{2}=0$, $y=0$ $\quad\therefore x=0$, $y=0$

$\therefore |x|+|y|=0$ (참)

따라서 명제의 역이 참인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

025

(i) 수진이의 말이 거짓인 경우

찬민이와 려원이의 말이 참이므로 려원이의 음료는 녹차이고 수진이의 음료는 주스가 아니다.

즉, 수진이의 음료는 아메리카노이어야 한다.

이때 수진이의 말이 거짓이면 수진이의 음료는 아메리카노가 아니므로 모순이다.

(ii) 찬민이의 말이 거짓인 경우

수진이와 려원이의 말이 참이므로 수진이의 음료는 아메리카노이다.

찬민이의 말이 거짓이면 려원이의 음료는 녹차가 아니므로 려원이의 음료는 주스이다.

따라서 찬민이의 음료는 녹차이다.

(iii) 려원이의 말이 거짓인 경우

수진이와 찬민이의 말이 참이므로 수진이의 음료는 아메리카노, 려원이의 음료는 녹차이다.

이때 려원이의 말이 거짓이면 수진이의 음료는 주스이므로 모순이다.

(i)~(iii)에서 찬민이의 말이 거짓이고 수진이, 찬민이, 려원이의 음료는 각각 아메리카노, 녹차, 주스이다.

답 ①

026

q는 p이기 위한 필요조건이므로

$P\subset Q$

$\therefore 2a+1=-2$ 또는 $b-1=-2$

p는 r이기 위한 충분조건이므로

$P\subset R$

$\therefore a-b=-2$ 또는 $ab+2=-2$

(i) $2a+1=-2$, $a-b=-2$인 경우

두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-1$

(ii) $2a+1=-2$, $ab+2=-2$인 경우
두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{8}{3}$
$\therefore a+b=-\frac{3}{2}+\frac{8}{3}=\frac{7}{6}$
(iii) $b-1=-2$, $a-b=-2$인 경우
두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-1$
$\therefore a+b=-3+(-1)=-4$
(iv) $b-1=-2$, $ab+2=-2$인 경우
두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-1$
$\therefore a+b=4+(-1)=3$
(i)~(iv)에서 $a+b$의 최솟값은 -4이다.

답 -4

027

조건 (가)에서 명제
'어떤 $x\in U$에 대하여 $\{x, x^2+1\}\subset A$이다.'
가 참이다.
따라서 집합 A는 $\{1, 2\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 10\}$, $\{4, 17\}$ 중 적어도 하나의 집합을 부분집합으로 갖는다.
이때 $1\notin A$이므로
$\{1, 2\}\not\subset A$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 조건 (나)에서 p는 q이기 위한 필요충분조건이므로
$P=Q$
(i) $\{2, 5\}\subset A$인 경우
$2\in A$이고 2가 짝수이므로 조건 (나)에서 $2\in Q$이고 $P=Q$에서
$2\in P$
이때 조건 p에서 $\frac{1}{2}\times 2=1\in A$가 되어 조건 $1\notin A$를 만족시키지 않는다.
(ii) $\{3, 10\}\subset A$인 경우
ⓐ $\frac{1}{2}\times 6=3\in A$에서 $x=6$은 조건 p를 만족시킨다.
즉, $6\in P$이고 $P=Q$에서
$6\in Q$
이때 6은 짝수이므로 $x=6$은 조건 q를 만족시킨다.
따라서 $6\in A$이므로
$\{3, 6, 10\}\subset A$
$\frac{1}{2}\times 12=6\in A$에서 $x=12$는 조건 p를 만족시킨다.
즉, $12\in P$이고 $P=Q$에서
$12\in Q$
이때 12는 짝수이므로 $x=12$는 조건 q를 만족시킨다.
따라서 $12\in A$이므로
$\{3, 6, 10, 12\}\subset A$
이때 $\frac{1}{2}\times 24=12\in A$이지만 $24>20$이므로 $x=24$는 조건 p를 만족시키지 않는다.
ⓑ $10\in A$이고 10은 짝수이므로 $x=10$은 조건 q를 만족시킨다.
즉, $10\in Q$이고 $P=Q$에서
$10\in P$
이때 $x=10$이 조건 p를 만족시킨다.
따라서 $\frac{1}{2}\times 10=5\in A$이므로
$\{3, 5, 6, 10, 12\}\subset A$
$\frac{1}{2}\times 20=10\in A$에서 $x=20$은 조건 p를 만족시킨다.
즉, $20\in P$이고 $P=Q$에서
$20\in Q$
이때 20은 짝수이므로 $x=20$은 조건 q를 만족시킨다.
따라서 $20\in A$이므로
$\{3, 5, 6, 10, 12, 20\}\subset A$
이때 $\frac{1}{2}\times 40=20\in A$이지만 $40>20$이므로 $x=40$은 조건 p를 만족시키지 않는다.
(iii) $\{4, 17\}\subset A$인 경우
$4\in A$이고 4가 짝수이므로 조건 (나)에서 $4\in Q$이고 $P=Q$에서
$4\in P$
이때 조건 p에서 $\frac{1}{2}\times 4=2\in A$
2가 짝수이므로 (i)과 마찬가지로 $1\in A$가 되어 조건 $1\notin A$를 만족시키지 않는다.
(i)~(iii)에서 $\{3, 5, 6, 10, 12, 20\}\subset A$이다.
따라서 $A=\{3, 5, 6, 10, 12, 20\}$일 때 A의 모든 원소의 합이 최소이고, 그 합은
$3+5+6+10+12+20=56$

답 ③

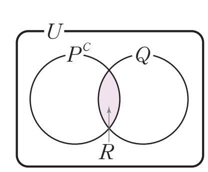
028

p: $a^2+b^2=0$에서
$a=0$이고 $b=0$
q: $|a+b|=|a|+|b|$에서
$ab\geq 0$
r: $a=-b$
ㄱ. $a=0$이고 $b=0$이면 $ab=0$이므로 $ab\geq 0$이다.
즉, $p\Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다. (참)
ㄴ. ㄱ에서 $p\Longrightarrow q$이므로 $\sim q\Longrightarrow \sim p$
즉, $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 필요조건이다. (참)
ㄷ. (q이고 r)이면 $ab\geq 0$이고 $a=-b$이므로 $a=0$이고 $b=0$
즉, (q이고 r)$\Longleftrightarrow p$이므로 (q이고 r)는 p이기 위한 필요충분조건이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

029

$R\cap Q^C=\varnothing$에서 $R\subset Q$
즉, q는 r이기 위한 필요조건이다.
또, $P\cap R=\varnothing$에서 $R\subset P^C$
즉, r는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.
한편, $(Q-R)\subset P$에서 $(Q-R)\cap P^C=\varnothing$
즉, 세 집합 P^C, Q, R 사이의 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 ($\sim p$ 그리고 q)는 r이기 위한 필요충분조건이다.



따라서 (가), (나), (다)에 들어갈 말로 알맞은 것은 각각 필요, 충분, 필요충분이다.

답 (가): 필요, (나): 충분, (다): 필요충분

030

네 집합 r, s, t, u의 진리집합을 각각 R, S, T, U라 하면

$R=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

$S=\{x \mid x^2+mx+n=0\}$

$T=\{4,\ 8\}$

$U=\{6,\ 10\}$

$T\subset R$이므로 $r \Longleftarrow t$ $\quad \therefore f(r,\ t)=-1$

$U\subset R$이므로 $u \Longrightarrow r$ $\quad \therefore f(u,\ r)=1$

$f(r,\ t)+f(s,\ t)+f(u,\ r)=0$에서

$-1+f(s,\ t)+1=0$ $\quad \therefore f(s,\ t)=0$

즉, $s \Longleftrightarrow t$이므로 $S=T$

따라서 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 두 근이 4, 8이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$4+8=-m,\ 4\times 8=n$

$\therefore m=-12,\ n=32$

$\therefore m+n=-12+32=20$

답 ②

031

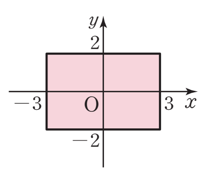
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

p: $|x|\le 3$, $|y|\le 2$에서

$-3\le x\le 3$, $-2\le y\le 2$

$\therefore P=\{(x,\ y) \mid -3\le x\le 3,\ -2\le y\le 2\}$

즉, 집합 P를 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같은 직사각형의 경계 및 내부이다.



q: $|x-a|\le 2$, $|y-b|\le 1$에서

$a-2\le x\le a+2$, $b-1\le y\le b+1$

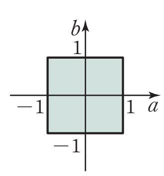
$\therefore Q=\{(x,\ y) \mid a-2\le x\le a+2,\ b-1\le y\le b+1\}$

p는 q이기 위한 필요조건이려면 $Q\subset P$이어야 하므로

$-3\le a-2$, $a+2\le 3$, $-2\le b-1$, $b+1\le 2$

$\therefore -1\le a\le 1$, $-1\le b\le 1$

따라서 점 $(a,\ b)$가 나타내는 영역은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 영역의 넓이는



$2\times 2=4$

답 4

032

$x^2+2xy+y^2-2ax+2by+c>0$에서

$x^2+2(y-a)x+y^2+2by+c>0$

x에 대한 이차방정식 $x^2+2(y-a)x+y^2+2by+c=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(y-a)^2-(y^2+2by+c)<0$

$\therefore -2(a+b)y+a^2-c<0$

이 부등식이 모든 실수 y에 대하여 성립하려면

$a+b=0,\ a^2-c<0$

$\therefore a=-b,\ a^2<c$

답 ①

033

$x^2+y^2=3$을 만족시키는 두 유리수 x, y가 존재한다고 가정하자.

$x=\dfrac{m}{M}$, $y=\dfrac{n}{N}$

(m과 M은 서로소인 정수, n과 N은 서로소인 정수)

이라 하면

$\left(\dfrac{m}{M}\right)^2+\left(\dfrac{n}{N}\right)^2=3$

양변에 N^2을 곱하면

$\dfrac{m^2N^2}{M^2}+n^2=3N^2$ $\qquad \therefore \dfrac{m^2N^2}{M^2}=3N^2-n^2$

이때 $3N^2-n^2$이 정수이므로 $\dfrac{m^2N^2}{M^2}$도 정수이고, m과 M이 서로소이므로 $N=kM$ (k는 정수)의 꼴이어야 한다.

$N=kM$을 $\dfrac{m^2N^2}{M^2}+n^2=3N^2$의 좌변에 대입하면

$(km)^2+n^2=3N^2$ …… ㉠

$km=3s+r_1,\ n=3t+r_2$

(s, t, r_1, r_2는 정수, $0\le r_1<3$, $0\le r_2<3$)

라 하면

$(km)^2+n^2=(3s+r_1)^2+(3t+r_2)^2$

$=9s^2+6sr_1+r_1{}^2+9t^2+6tr_2+r_2{}^2$

$=3(3s^2+2sr_1+3t^2+2tr_2)+r_1{}^2+r_2{}^2$

이때 ㉠에서 $(km)^2+n^2$은 3의 배수이므로

$r_1{}^2+r_2{}^2=0$

$\therefore r_1=0,\ r_2=0$

즉, 두 수 km과 n은 3의 배수이므로 ㉠에서 N은 3의 배수이다.

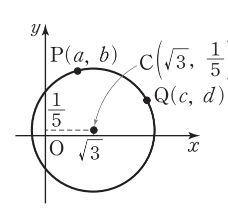
이것은 n과 N이 서로소라는 가정에 모순이다.

따라서 $x^2+y^2=3$을 만족시키는 두 유리수 x, y는 존재하지 않는다.

답 풀이 참조

034

원 위에 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ (a, b는 정수)가 아닌 다른 점 $\mathrm{Q}(c,\ d)$ (c, d는 정수)가 존재한다고 가정하자.



$\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{CQ}}$이므로

$\sqrt{(a-\sqrt{3})^2+\left(b-\dfrac{1}{5}\right)^2}=\sqrt{(c-\sqrt{3})^2+\left(d-\dfrac{1}{5}\right)^2}$

양변을 제곱하면

$(a-\sqrt{3})^2+\left(b-\dfrac{1}{5}\right)^2=(c-\sqrt{3})^2+\left(d-\dfrac{1}{5}\right)^2$

$a^2-c^2+b^2-d^2-\dfrac{2}{5}(b-d)=\boxed{\text{(가): } 2\sqrt{3}(a-c)}$ …… ㉠

㉠에서 좌변은 $\boxed{\text{(나): 유리수}}$이므로 $a-c=0$

즉, $a^2-c^2+b^2-d^2-\frac{2}{5}(b-d)=0$에서

$(a+c)(a-c)+b^2-d^2-\frac{2}{5}(b-d)=0$

$\therefore b^2-d^2-\frac{2}{5}(b-d)=0$ …… ㉡

참고

㉡에서 b, d는 정수이므로 $\boxed{(다): b-d=0}$
즉, $a=c$, $b=d$이므로 두 점 P(a, b), Q(c, d)는 서로 같은 점이다.
따라서 이 원 위의 점들 중에는 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점이 P 외에 존재하지 않는다.

답 ⑤

참고

$b^2-d^2-\frac{2}{5}(b-d)=0$에서

$(b+d)(b-d)-\frac{2}{5}(b-d)=0$

$(b-d)\left(b+d-\frac{2}{5}\right)=0$

$\therefore b-d=0$ 또는 $b+d-\frac{2}{5}=0$

035

ㄱ. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}=\frac{b(a+b)+a(a+b)-4ab}{ab(a+b)}$

$=\frac{a^2-2ab+b^2}{ab(a+b)}$

$=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}\geq 0$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$ (거짓)

ㄴ. $\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}-(a+b)=\frac{b^3+a^3-ab(a+b)}{ab}$

$=\frac{b^3+a^3-a^2b-ab^2}{ab}$

$=\frac{a^2(a-b)-b^2(a-b)}{ab}$

$=\frac{(a-b)(a^2-b^2)}{ab}$

$=\frac{(a-b)^2(a+b)}{ab}\geq 0$

$\therefore \frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}\geq a+b$ (참)

ㄷ. $a+b+c-(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$

$=\frac{1}{2}\{(a-2\sqrt{ab}+b)+(b-2\sqrt{bc}+c)+(c-2\sqrt{ca}+a)\}$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\}\geq 0$

$\therefore a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

036

$a>0$, $b>0$에 의하여 $x>0$, $y>0$이고, $x^2>0$, $y^2>0$, $ab>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy$

$=2\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)$

$=2\left(ab+\frac{4}{ab}+5\right)$

$\geq 2\left(2\sqrt{ab\times\frac{4}{ab}}+5\right)$

$=2\times(2\times2+5)$

$=18$

$\left(\text{단, 등호는 } x^2=y^2,\ ab=\frac{4}{ab}, \text{ 즉 } x=y,\ ab=2\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 18이다.

답 ④

다른 풀이

$x^2+y^2=\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{4}{a}\right)^2$

$=\left(a^2+\frac{2a}{b}+\frac{1}{b^2}\right)+\left(b^2+\frac{8b}{a}+\frac{16}{a^2}\right)$

$=\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)+\left(\frac{2a}{b}+\frac{8b}{a}\right)+\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+\frac{16}{a^2}\geq 2\sqrt{a^2\times\frac{16}{a^2}}$

$=2\times4$

$=8$ $\left(\text{단, 등호는 } a^2=\frac{16}{a^2}, \text{ 즉 } a=2\text{일 때 성립한다.}\right)$

$\frac{2a}{b}+\frac{8b}{a}=2\sqrt{\frac{2a}{b}\times\frac{8b}{a}}$

$=2\times4$

$=8$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{2a}{b}=\frac{8b}{a}, \text{ 즉 } a=2b\text{일 때 성립한다.}\right)$

$b^2+\frac{1}{b^2}=2\sqrt{b^2\times\frac{1}{b^2}}$

$=2\times1$

$=2$ $\left(\text{단, 등호는 } b^2=\frac{1}{b^2}, \text{ 즉 } b=1\text{일 때 성립한다.}\right)$

$\therefore x^2+y^2\geq 8+8+2=18$

(단, 등호는 $a=2$, $b=1$일 때 성립한다.)

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 18이다.

037

$(a-1)x^2-3x+2=x^2+(a-2)x+1$에서

$(a-2)x^2-(a+1)x+1=0$

이 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{a+1}{a-2}$

P$(\alpha, \alpha^2+(a-2)\alpha+1)$, Q$(\beta, \beta^2+(a-2)\beta+1)$이라 하면 직선 PQ의 기울기는

$\frac{\{\beta^2+(a-2)\beta+1\}-\{\alpha^2+(a-2)\alpha+1\}}{\beta-\alpha}$

$=\frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)+(a-2)(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=\alpha+\beta+a-2$

$=\frac{a+1}{a-2}+a-2=1+\frac{3}{a-2}+a-2$

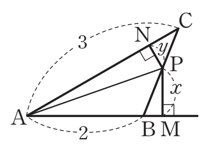
$a>2$에서 $a-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$1+\frac{3}{a-2}+a-2\geq 1+2\sqrt{\frac{3}{a-2}\times(a-2)}$$
$$=1+2\sqrt{3}$$
$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{3}{a-2}=a-2\text{일 때 성립한다.}\right)$$

따라서 직선 PQ의 기울기의 최솟값은 $1+2\sqrt{3}$이다.

답 $1+2\sqrt{3}$

038



$\overline{PM}=x$, $\overline{PN}=y$라 하면

$\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle ACP$에서

$\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{2}\times2\times x+\frac{1}{2}\times3\times y$ 참고

$\therefore\ 2x+3y=3$

$\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}=\frac{2}{x}+\frac{3}{y}$에서

$$3\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)=(2x+3y)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)$$
$$=13+\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x}$$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$13+\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x}\geq 13+2\sqrt{\frac{6x}{y}\times\frac{6y}{x}}$$
$$=13+2\times6$$
$$=25$$
$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{6x}{y}=\frac{6y}{x}\text{, 즉 } x=y\text{일 때 성립한다.}\right)$$

따라서 $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\geq\frac{25}{3}$이므로 $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}$의 최솟값은 $\frac{25}{3}$이다.

즉, $p=3$, $q=25$이므로

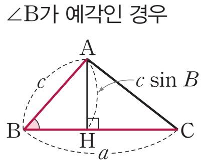
$p+q=3+25=28$

답 28

참고

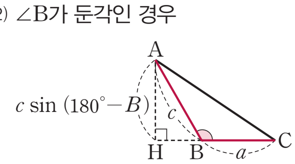
삼각형 ABC에서 두 변의 길이 a, c와 그 끼인각 $\angle B$의 크기를 알 때, 넓이 S는

(1) $\angle B$가 예각인 경우



$S=\frac{1}{2}ac\sin B$

(2) $\angle B$가 둔각인 경우



$S=\frac{1}{2}ac\sin(180^\circ-B)$

039

$a+b+c=9$에서 $a+b=9-c$

$a^2+b^2+c^2=33$에서 $a^2+b^2=33-c^2$

a, b, c가 실수이므로 코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

$2(33-c^2)\geq(9-c)^2$, $3c^2-18c+15\leq0$

$c^2-6c+5\leq0$, $(c-1)(c-5)\leq0$

$\therefore\ 1\leq c\leq5$

따라서 $M=5$, $m=1$이므로

$Mm=5\times1=5$

답 ③

다른 풀이

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$9^2=33+2(ab+bc+ca)\qquad\therefore\ ab+bc+ca=24$

$a^2\geq0$, $b^2\geq0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2\geq2|ab|$ (단, 등호는 $a^2=b^2$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.)

이때 $a^2+b^2=33-c^2$, $ab=24-bc-ca$이므로

$$33-c^2\geq2|24-bc-ca|$$
$$=2|24-c(a+b)|$$
$$=2|24-c(9-c)|$$
$$=2|c^2-9c+24|$$
$$=2(c^2-9c+24)$$

$c^2-9c+24=(c-3)^2+15>0$에서
$|c^2-9c+24|=c^2-9c+24$

즉, $33-c^2\geq2(c^2-9c+24)$에서

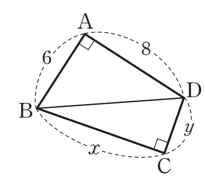
$3c^2-18c+15\leq0$, $c^2-6c+5\leq0$

$(c-1)(c-5)\leq0\qquad\therefore\ 1\leq c\leq5$

따라서 $M=5$, $m=1$이므로

$Mm=5\times1=5$

040



오른쪽 그림과 같이 선분 BD를 그으면 두 삼각형 ABD, BCD는 모두 직각삼각형이다.

삼각형 ABD에서

$\overline{BD}^2=6^2+8^2=100$

삼각형 BCD에서 $\overline{BC}=x$, $\overline{CD}=y$라 하면

$x^2+y^2=100$

x, y가 실수이므로 코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\geq(x+y)^2$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립한다.)

$2\times100\geq(x+y)^2$, $(x+y)^2\leq200$

$\therefore\ 10<x+y\leq10\sqrt{2}$ 참고

즉, $24\leq x+y+6+8\leq14+10\sqrt{2}$이므로 사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 $14+10\sqrt{2}$이다.

따라서 $a=14$, $b=10$이므로

$a+b=14+10=24$

답 24

참고

세 변의 길이가 주어졌을 때 삼각형이 될 수 있는 조건

(가장 긴 변의 길이)<(나머지 두 변의 길이의 합)

041

일등급의 메모장

삼각함수 사이의 관계

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

삼각함수의 덧셈정리

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 확장

ㄱ. $a^2>0$, $b^2>0$, $c^2>0$, $d^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$1=a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}=2|ab|$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

$\therefore -\frac{1}{2}\leq ab\leq \frac{1}{2}$

$1=c^2+d^2\geq 2\sqrt{c^2d^2}=2|cd|$

(단, 등호는 $c=d$일 때 성립한다.)

$\therefore -\frac{1}{2}\leq cd\leq \frac{1}{2}$

즉, $-1\leq ab+cd\leq 1$이므로

$|ab+cd|\leq 1$ (참)

ㄴ. $(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

$=a^2c^2-2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2$

$=a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)$

$=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$=1\times 4$

$=4$ (거짓)

ㄷ. $(a-c)^2+(b-d)^2=a^2+c^2-2ac+b^2+d^2-2bd$

$=5-2(ac+bd)$

a, b, c, d가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq (ac+bd)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{c}{a}=\frac{d}{b}\text{일 때 성립한다.}\right)$

$1\times 4\geq (ac+bd)^2$, $(ac+bd)^2\leq 4$

$-2\leq ac+bd\leq 2$, $-4\leq -2(ac+bd)\leq 4$

$1\leq 5-2(ac+bd)\leq 9$

$\therefore 1\leq (a-c)^2+(b-d)^2\leq 9$ (참)

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

다른 풀이 **확장**

ㄱ. $a^2+b^2=c^2+d^2=1$에서

$a=\cos\alpha$, $b=\sin\alpha$, $c=\cos\beta$, $d=\sin\beta$

라 하면

$ab+cd=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta$

$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)$

$=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$

$=2\sin\alpha\cos\alpha$

이므로

$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$

같은 방법으로 구하면

$\sin\beta\cos\beta=\frac{1}{2}\sin 2\beta$

또, $|\sin 2\alpha|\leq 1$, $|\sin 2\beta|\leq 1$이므로

$|ab+cd|=\frac{1}{2}|\sin 2\alpha+\sin 2\beta|$

$\leq \frac{1}{2}(|\sin 2\alpha|+|\sin 2\beta|)$

$\leq \frac{1+1}{2}$

$=1$ (참)

ㄴ. $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=4$에서

$a=\cos\alpha$, $b=\sin\alpha$, $c=2\cos\beta$, $d=2\sin\beta$

라 하면

$ac-bd=2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=2\cos(\alpha+\beta)$,

$ad+bc=2(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)=2\sin(\alpha+\beta)$

이므로

$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=4\{\cos^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)\}$

$=4\times 1$

$=4$ (거짓)

ㄷ. $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$은 두 점 (a, b), (c, d) 사이의 거리이다.

점 (a, b)는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이고, 점 (c, d)는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이므로 두 점 사이의 거리가

가장 작을 때는 $2-1=1$,

가장 클 때는 $2+1=3$

이다.

따라서 $1\leq \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\leq 3$이므로

$1\leq (a-c)^2+(b-d)^2\leq 9$ (참)

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

042

일등급의 메모장

실수 x, y에 대하여 $f(x, y)\geq 0$이면

$f(x, y)$가 최대(또는 최소) $\Longleftrightarrow$ $\{f(x, y)\}^2$이 최대(또는 최소)

$\sqrt{11-2x-6y}+\sqrt{11+2x+6y}=A$라 하면

$A^2=(11-2x-6y)+2\sqrt{11-2x-6y}\sqrt{11+2x+6y}$
$+(11+2x+6y)$

$=22+2\sqrt{(11-2x-6y)(11+2x+6y)}$

$=22+2\sqrt{121-(2x+6y)^2}$

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+6^2)(x^2+y^2)\geq (2x+6y)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{2}=\frac{y}{6}\text{일 때 성립한다.}\right)$

$40\times 1\geq (2x+6y)^2$, $(2x+6y)^2\leq 40$

$\therefore A^2=22+2\sqrt{121-(2x+6y)^2}$

$\geq 22+2\sqrt{121-40}$

$=22+18$

$=40$ ······ ㉠

즉, A의 최솟값은 $\sqrt{40}=2\sqrt{10}$이므로

$m=2\sqrt{10}$

한편, ㉠에서 등호는 $\frac{x}{2}=\frac{y}{6}$, 즉 $y=3x$일 때 성립하므로

$x^2+y^2=1$에 대입하면

$x^2+(3x)^2=1$, $10x^2=1$

$\therefore x=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$, $y=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}$ (복호동순)

즉, $x+y$는

$x=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $y=\frac{3}{\sqrt{10}}$일 때 최댓값 $\frac{4}{\sqrt{10}}$를 갖고

$x=-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $y=-\frac{3}{\sqrt{10}}$일 때 최솟값 $-\frac{4}{\sqrt{10}}$를 가지므로

$a=\frac{4}{\sqrt{10}}$, $b=-\frac{4}{\sqrt{10}}$

$\therefore m(a-b)=2\sqrt{10}\times\left\{\frac{4}{\sqrt{10}}-\left(-\frac{4}{\sqrt{10}}\right)\right\}=16$

답 16

다른 풀이

$\sqrt{11-2x-6y}+\sqrt{11+2x+6y}$

$=\sqrt{1-2x+1-6y+9}+\sqrt{1+2x+1+6y+9}$

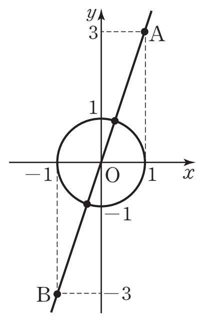
$=\sqrt{x^2-2x+1+y^2-6y+9}$

$\quad+\sqrt{x^2+2x+1+y^2+6y+9}$ ($\because x^2+y^2=1$)

$=\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2}$

즉, m의 값은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x, y)$와 두 점 $\mathrm{A}(1, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -3)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값과 같다.

이때 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 값은 오른쪽 그림과 같이 점 P가 직선 AB와 원 $x^2+y^2=1$의 교점일 때 최소이므로



$m=\overline{\mathrm{AB}}$

$\quad=\sqrt{(-1-1)^2+(-3-3)^2}$

$\quad=2\sqrt{10}$

한편, 직선 AB의 방정식은

$y-(-3)=\dfrac{-3-3}{-1-1}\{x-(-1)\}$

$\therefore y=3x$

이것을 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$x^2+(3x)^2=1$, $10x^2=1$

$\therefore x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

즉, 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$ 또는 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}, -\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$

따라서 $x+y$의 최댓값은 $\dfrac{4}{\sqrt{10}}$, 최솟값은 $-\dfrac{4}{\sqrt{10}}$이므로

$a=\dfrac{4}{\sqrt{10}}$, $b=-\dfrac{4}{\sqrt{10}}$

$\therefore m(a-b)=2\sqrt{10}\times\left\{\dfrac{4}{\sqrt{10}}-\left(-\dfrac{4}{\sqrt{10}}\right)\right\}=16$

043

일등급의 메모장

두 실수 a, b에 대하여

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab} \iff a<0,\ b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\dfrac{b}{a}} \iff a<0,\ b>0$ 또는 $a\neq0,\ b=0$

명제 $\sim q \longrightarrow p$의 역은 $p \longrightarrow \sim q$이고 이 역의 대우는 $q \longrightarrow \sim p$이다.

$\sim p$: $\dfrac{\sqrt{2-x-x^2}}{\sqrt{x^2-2x-3}}=-\sqrt{\dfrac{2-x-x^2}{x^2-2x-3}}\neq0$

에서 연립부등식 $\begin{cases} x^2-2x-3<0 \\ 2-x-x^2>0 \end{cases}$의 해가 $\sim p$의 진리집합이다.

$x^2-2x-3<0$에서

$(x+1)(x-3)<0 \qquad \therefore -1<x<3$ …… ㉠

$2-x-x^2>0$에서

$x^2+x-2<0$, $(x+2)(x-1)<0$

$\therefore -2<x<1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-1<x<1$

즉, 명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이 되려면 x에 대한 이차방정식 $x^2+(3a+1)x+a^2=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha\le\beta)$라 할 때, $-1<\alpha\le\beta<1$을 만족시켜야 한다.

$f(x)=x^2+(3a+1)x+a^2$이라 하면

$f(-1)>0$에서

$1-(3a+1)+a^2>0$, $a^2-3a>0$

$a(a-3)>0 \qquad \therefore a<0$ 또는 $a>3$ …… ㉢

$f(1)>0$에서

$1+(3a+1)+a^2>0$, $a^2+3a+2>0$

$(a+2)(a+1)>0 \qquad \therefore a<-2$ 또는 $a>-1$ …… ㉣

또, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 $x=-\dfrac{3a+1}{2}$이므로

$-1<-\dfrac{3a+1}{2}<1$에서

$-2<3a+1<2$, $-3<3a<1$

$\therefore -1<a<\dfrac{1}{3}$ …… ㉤

한편, x에 대한 이차방정식 $x^2+(3a+1)x+a^2=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\because$ q의 진리집합은 공집합이 아니다.

$D=(3a+1)^2-4a^2\ge0$

$5a^2+6a+1\ge0$, $(5a+1)(a+1)\ge0$

$\therefore a\le-1$ 또는 $a\ge-\dfrac{1}{5}$ …… ㉥

㉢, ㉣, ㉤, ㉥에서 구하는 a의 값의 범위는

$-\dfrac{1}{5}\le a<0$

답 $-\dfrac{1}{5}\le a<0$

044

일등급의 메모장

(1) $(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$

$\quad=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$\quad=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

(2) $a^3+b^3+c^3-3abc$

$\quad=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\quad=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$A=\dfrac{c(a+b)^2+a(b+c)^2+b(c+a)^2}{abc}$

$\quad=\dfrac{(a+b)^2}{ab}+\dfrac{(b+c)^2}{bc}+\dfrac{(c+a)^2}{ca}$

$\quad=\dfrac{a^2+2ab+b^2}{ab}+\dfrac{b^2+2bc+c^2}{bc}+\dfrac{c^2+2ca+a^2}{ca}$

$\quad=\dfrac{a}{b}+2+\dfrac{b}{a}+\dfrac{b}{c}+2+\dfrac{c}{b}+\dfrac{c}{a}+2+\dfrac{a}{c}$

$\quad\ge6+2\sqrt{\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{a}}+2\sqrt{\dfrac{b}{c}\times\dfrac{c}{b}}+2\sqrt{\dfrac{c}{a}\times\dfrac{a}{c}}$

$\quad=6+2+2+2$

$\quad=12$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.)

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{b}$, $\dfrac{c}{a}=\dfrac{a}{c}$에서 $a^2=b^2=c^2$이므로 $a=b=c$ ($\because a>0, b>0, c>0$)

$\therefore m_1=12$

$B=\dfrac{(a+b+c)^2(a^3+b^3+c^3)}{ab^2c^2+a^2bc^2+a^2b^2c}$

$\quad=\dfrac{(a+b+c)^2(a^3+b^3+c^3)}{(ab+bc+ca)abc}$

$\quad=\dfrac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\times\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}$

이때

$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq 0$

즉, $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$이므로

$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\geq 3$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.) …… ㉠

또,

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq 0$

즉, $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$이므로

$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\geq 3$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.) …… ㉡

㉠, ㉡에서

$B=\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\times\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\geq 3\times 3=9$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.)

$\therefore m_2=9$

즉,

$x+y+z=\frac{m_1}{m_2}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$

이고 $x>0$, $y>0$, $z>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\\&=\frac{3}{4}(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\\&=\frac{3}{4}\left(3+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\\&\geq\frac{3}{4}\left(3+2\sqrt{\frac{x}{y}\times\frac{y}{x}}+2\sqrt{\frac{y}{z}\times\frac{z}{y}}+2\sqrt{\frac{z}{x}\times\frac{x}{z}}\right)\\&=\frac{3}{4}\times(3+2+2+2)\\&=\frac{27}{4}\ \text{(단, 등호는 } x=y=z\text{일 때 성립한다.)}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{27}{4}$이다.

답 $\frac{27}{4}$

045

일등급의 메모장

$\frac{(n\text{차식})}{(2n\text{차식})}$의 꼴의 식이 $\frac{(n\text{차식})}{(n\text{차식})^2+a^2}$의 꼴로 정리되면 다음과 같이 해결한다.

➡ 실수 x와 양수 a에 대하여

$x^2+a^2\geq 2\sqrt{a^2x^2}=2a|x|$

$\frac{|x|}{x^2+a^2}\leq\frac{1}{2a}$

$\therefore -\frac{1}{2a}\leq\frac{x}{x^2+a^2}\leq\frac{1}{2a}$

(i) $y=0$일 때

$x\neq 0$이고 주어진 식의 값은 $\frac{x^2}{x^2}=1$이다.

(ii) $y\neq 0$일 때

주어진 식의 분자와 분모를 모두 y^2으로 나누면

$$\frac{x^2+y^2}{x^2+4xy+9y^2}=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+4\times\frac{x}{y}+9}$$

이때 $t=\frac{x}{y}$라 하면 t는 실수이고 위의 식은

$$\begin{aligned}\frac{t^2+1}{t^2+4t+9}&=\frac{(t+2)^2-4(t+2)+5}{(t+2)^2+5}\\&=1-\frac{4(t+2)}{(t+2)^2+5}\end{aligned}$$ …… ㉠

다른 풀이

ⓐ $t=-2$이면 ㉠에서 구하는 식의 값은 1이다.

ⓑ $t>-2$이면 $t+2>0$이고

$\frac{4(t+2)}{(t+2)^2+5}=\frac{4}{t+2+\frac{5}{t+2}}$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t+2+\frac{5}{t+2}\geq 2\sqrt{(t+2)\times\frac{5}{t+2}}=2\sqrt{5}$

$\left(\text{단, 등호는 } t+2=\frac{5}{t+2}\text{일 때 성립한다.}\right)$

㉠에서

$1-\frac{2}{\sqrt{5}}\leq 1-\frac{4(t+2)}{(t+2)^2+5}<1$

ⓒ $t<-2$이면 $-(t+2)>0$이고

$\frac{4(t+2)}{(t+2)^2+5}=\frac{-4}{-(t+2)+\left(-\frac{5}{t+2}\right)}$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$-(t+2)+\left(-\frac{5}{t+2}\right)\geq 2\sqrt{-(t+2)\times\left(-\frac{5}{t+2}\right)}=2\sqrt{5}$

$\left(\text{단, 등호는 } -(t+2)=-\frac{5}{t+2}\text{일 때 성립한다.}\right)$

㉠에서

$1<1-\frac{4(t+2)}{(t+2)^2+5}\leq 1+\frac{2}{\sqrt{5}}$

(i), (ii)에서

$1-\frac{2}{\sqrt{5}}\leq 1-\frac{4(t+2)}{(t+2)^2+(\sqrt{5})^2}\leq 1+\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore 1-\frac{2}{\sqrt{5}}\leq\frac{x^2+y^2}{x^2+4xy+9y^2}\leq 1+\frac{2}{\sqrt{5}}$

따라서 $M=1+\frac{2}{\sqrt{5}}$, $m=1-\frac{2}{\sqrt{5}}$이므로

$$\begin{aligned}10(M^2+m^2)&=10\left\{\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2\right\}\\&=10\times\frac{18}{5}=36\end{aligned}$$

답 36

다른 풀이

이때 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$(t+2)^2+5\geq 2\sqrt{5(t+2)^2}=2\sqrt{5}|t+2|$

(단, 등호는 $(t+2)^2=5$일 때 성립한다.)

이므로

$\frac{|t+2|}{(t+2)^2+5}\leq\frac{1}{2\sqrt{5}}$

$-\frac{1}{2\sqrt{5}} \le \frac{t+2}{(t+2)^2+5} \le \frac{1}{2\sqrt{5}}$

$\therefore -\frac{2}{\sqrt{5}} \le \frac{4(t+2)}{(t+2)^2+5} \le \frac{2}{\sqrt{5}}$

즉, ㉠에서

$1-\frac{2}{\sqrt{5}} \le 1-\frac{4(t+2)}{(t+2)^2+5} \le 1+\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore 1-\frac{2}{\sqrt{5}} \le \frac{x^2+y^2}{x^2+4xy+9y^2} \le 1+\frac{2}{\sqrt{5}}$

따라서 $M=1+\frac{2}{\sqrt{5}}$, $m=1-\frac{2}{\sqrt{5}}$이므로

$10(M^2+m^2)=10\left\{\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2\right\}$

$=10\times\frac{18}{5}=36$

046

일등급의 메모장

명제의 참, 거짓과 진리집합의 포함 관계를 이용하여 집합의 성질을 묻는 고난도 문항이 출제될 수 있다.

조건 (가)에서 $A\subset B^C$

조건 (나)에서 $B\subset C$

조건 (다)에서 주어진 명제의 대우는 'p이면 r이다.'이므로 $A\subset C$

(i) 조건 (나), (다)가 참이고 조건 (가)가 거짓인 경우

$A\not\subset B^C$, $B\subset C$, $A\subset C$

$A\subset C$에서 $n(A)\le n(C)$이고 $n(C)=16$이므로

$n(A)\le 16$ ······ ㉠

또, $B\subset C$이고 $n(B)=5$, $n(C)=16$이므로

$n(C-B)=n(C)-n(C\cap B)$

$=n(C)-n(B)$

$=16-5=11$

이때 $n(C-B)\le n(A)$이므로

$n(A)\ge 11$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $11\le n(A)\le 16$

이때 $A\subset C$에서 $A\cap C=A$이므로

$11\le n(A\cap C)\le 16$

(ii) 조건 (가), (다)가 참이고 조건 (나)가 거짓인 경우

$A\subset B^C$, $B\not\subset C$, $A\subset C$

$A\subset B^C$, $A\subset C$에서 $A\subset(C\cap B^C)=C-B$이고

$n(C-B)\le n(A)$이므로

$A=C-B$

한편, $B\not\subset C$에서 $B-C=B\cap C^C\ne\varnothing$이고

$n(C^C)=n(U)-n(C)=20-16=4$이므로

$1\le n(B\cap C^C)\le 4$

$B\cap C=B-(B\cap C^C)$이고 $n(B)=5$이므로

$1\le n(B\cap C)\le 4$

$A=C-B=C-(B\cap C)$이고 $n(C)=16$이므로

$12\le n(A)\le 15$

이때 $A\subset C$에서 $A\cap C=A$이므로

$12\le n(A\cap C)\le 15$

(iii) 조건 (가), (나)가 참이고 조건 (다)가 거짓인 경우

$A\subset B^C$, $B\subset C$, $A\not\subset C$

$B\subset C$이고 $n(B)=5$, $n(C)=16$이므로

$n(C-B)=n(C)-n(B)=11$

이때 $n(C-B)\le n(A)$이므로

$n(A)\ge 11$

한편, $A\subset B^C$에서 $A\cap B=\varnothing$이므로

$n(A\cap C)\le n(C-B)$, 즉 $n(A\cap C)\le 11$

또, $n(C^C)=4$이므로

$n(A\cap C^C)\le 4$

$n(A)\ge 11$이고 $n(A)=n(A\cap C)+n(A\cap C^C)$이므로

$n(A\cap C)$의 값에 따른 $n(A\cap C^C)$의 값은 다음과 같다.

ⓐ $n(A\cap C)=11$일 때

$n(A\cap C^C)$의 값으로 가능한 것은 1, 2, 3, 4이다. 참고

ⓑ $n(A\cap C)=10$일 때

$n(A\cap C^C)$의 값으로 가능한 것은 1, 2, 3, 4이다.

ⓒ $n(A\cap C)=9$일 때

$n(A\cap C^C)$의 값으로 가능한 것은 2, 3, 4이다.

ⓓ $n(A\cap C)=8$일 때

$n(A\cap C^C)$의 값으로 가능한 것은 3, 4이다.

ⓔ $n(A\cap C)=7$일 때

$n(A\cap C^C)$의 값으로 가능한 것은 4이다.

ⓕ $n(A\cap C)\le 6$일 때

$n(A\cap C^C)$의 값으로 가능한 것은 없다.

ⓐ~ⓕ에서 $7\le n(A\cap C)\le 11$

(i)~(iii)에서 $n(A\cap C)$의 값으로 가능한 것은

7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

따라서 $D=\{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$이므로 집합 D의 모든 원소의 합은

$7+8+9+10+11+12+13+14+15+16=115$

답 115

참고

$n(A\cap C^C)=0$이면 $n(A-C)=0$이므로

$A-C=\varnothing$

즉, $A\subset C$이므로 조건에 모순이다.

따라서 $n(A\cap C^C)=0$일 수 없다.

06 함수

Ⅲ. 함수와 그래프

001

$f(4)=f(1)+1$
$=1+1=2$
$f(11)=f(8)+1$
$=f(5)+2$
$=f(2)+3$
$=3+3=6$
$f(20)=f(17)+1$
$=f(14)+2$
$=f(11)+3$
$=6+3=9$
$\therefore f(4)+f(11)+f(20)=2+6+9=17$

답 17

002

집합 A의 원소 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 참고
${}_5C_2=10$
택한 2개의 원소를 한 원소로 생각하여 집합 A의 원소 4개에 집합 B의 각 원소를 대응시키는 방법의 수는
$4!=24$
따라서 구하는 함수의 개수는
$10\times24=240$

답 ④

참고
정의역의 원소는 5개, 치역의 원소는 4개이므로 정의역의 원소 중에서 2개는 같은 함숫값을 가져야 한다.
따라서 같은 함숫값을 갖는 두 원소를 먼저 택한다.

003

$f(0)=2$, $f(1)=1$, $f(2)=2$이고 $f=g$이므로
$g(0)=a+b=2$, $g(1)=b=1$, $g(2)=a+b=2$
따라서 $a=1$, $b=1$이므로
$ab=1\times1=1$

답 ④

004

$f(x)=x^2-6x+8=(x-3)^2-1$에서
정의역이 $X=\{x|x\geq a\}$인 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 $a\geq3$이어야 한다.
$a\geq3$일 때 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y|y\geq f(a)\}$이고, 이것이 집합 $Y=\{y|y\geq b\}$와 같아야 하므로
$b=f(a)=a^2-6a+8$
$\therefore 6a+b=6a+(a^2-6a+8)=a^2+8$
즉, $a\geq3$에서 a^2+8은 $a=3$일 때 최솟값 17을 가지므로 $6a+b$의 최솟값은 17이다.

답 17

005

조건 (가)에서 f는 항등함수이므로
$f(1)=1$
또, 조건 (가)에서 g는 상수함수이므로
$g(3)=g(1)$
조건 (나)에서 $f(1)+g(1)+h(1)=7$이므로
$g(1)+h(1)=7-f(1)$
$=7-1=6$
$\therefore g(3)+h(1)=g(1)+h(1)=6$

답 ⑤

다른 풀이
조건 (가)에서 f는 항등함수이므로
$f(x)=x$
또, 조건 (가)에서 g는 상수함수이므로
$g(x)=k$ (단, $k\in X$)
조건 (나)에서 $f(x)+g(x)+h(x)=7$이므로
$x+k+h(x)=7 \qquad \therefore h(x)=-x+7-k$
이때 $1\leq x\leq5$이므로
$2-k\leq -x+7-k\leq 6-k$
이고, $1\leq h(x)\leq5$이어야 하므로
$1\leq 2-k$, $6-k\leq5$
$\therefore k=1$
따라서 $g(x)=1$, $h(x)=-x+6$이므로
$g(3)+h(1)=1+5=6$

006

$g(h(3))=5$이므로
$((f\circ g)\circ h)(3)=(f\circ(g\circ h))(3)$
$=f(g(h(3)))$
$=f(5)=16$

답 16

007

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(0)=k$
$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(1+k)$
(i) $1+k<1$, 즉 $k<0$일 때
$g(1+k)=k-2$이므로
$(f\circ g)(1)+(g\circ f)(1)=k+(k-2)=2k-2$
즉, $2k-2=-8$에서
$k=-3$
이때 $k=-3$은 $k<0$을 만족시킨다.
(ii) $1+k\geq1$, 즉 $k\geq0$일 때
$g(1+k)=(1+k)^2-1=k^2+2k$이므로
$(f\circ g)(1)+(g\circ f)(1)=k+(k^2+2k)=k^2+3k$
즉, $k^2+3k=-8$에서
$k^2+3k+8=0$

이를 만족시키는 실수 k의 값은 존재하지 않는다 참고

(i), (ii)에서 $k=-3$

답 ①

참고

이차방정식 $k^2+3k+8=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\times1\times8=-23<0$

이므로 실근이 존재하지 않는다.

008

$f(1)=g(1)$이므로

$2+a=3+b \qquad \therefore b=a-1$

즉, $f(x)=2x+a$, $g(x)=3x+a-1$이므로

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)(x)&=f(3x+a-1)\\
&=2(3x+a-1)+a\\
&=6x+3a-2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(g\circ f)(x)&=g(2x+a)\\
&=3(2x+a)+a-1\\
&=6x+4a-1
\end{aligned}
$$

이때 $f\circ g=g\circ f$이므로

$6x+3a-2=6x+4a-1$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$3a-2=4a-1 \qquad \therefore a=-1,\ b=-2$

따라서 $f(x)=2x-1$, $g(x)=3x-2$이므로

$f(g(2))=f(4)=7$

답 ③

009

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\
&=f(x-4)\\
&=3(x-4)+1\\
&=3x-11
\end{aligned}
$$

이므로

$$
\begin{aligned}
(h\circ f\circ g)(x)&=(h\circ(f\circ g))(x)\\
&=h((f\circ g)(x))\\
&=h(3x-11)
\end{aligned}
$$

이때 $(h\circ f\circ g)(x)=g(x)$이므로

$h(3x-11)=x-4$

$3x-11=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t+11}{3}$

따라서 $h(t)=\dfrac{t+11}{3}-4=\dfrac{t-1}{3}$이므로

$h(-3)=-\dfrac{4}{3}$

답 $-\dfrac{4}{3}$

010

$g\circ f$가 항등함수이므로

$(g\circ f)(2)=2$에서

$g(f(2))=g(-a)=2 \qquad \therefore a^2-2a+b=2$ …… ㉠

$(g\circ f)(3)=3$에서

$g(f(3))=g(0)=3 \qquad \therefore b=3$

$b=3$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0$

$\therefore a=1$

$\therefore a+b=1+3=4$

답 4

011

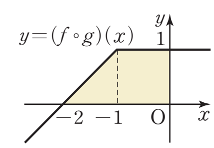
$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ 1 & (x\geq0) \end{cases}$, $g(x)=x+1$이므로

$(f\circ g)(x)=\begin{cases} g(x)+1 & (g(x)<0) \\ 1 & (g(x)\geq0) \end{cases}$

$x<-1$일 때 $g(x)<0$, $x\geq-1$일 때 $g(x)\geq0$이므로

$(f\circ g)(x)=\begin{cases} x+2 & (x<-1) \\ 1 & (x\geq-1) \end{cases}$

따라서 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$\dfrac{1}{2}\times(1+2)\times1=\dfrac{3}{2}$

답 $\dfrac{3}{2}$

012

$f(x)=\begin{cases} 2x & (0\leq x<2) \\ -2x+8 & (2\leq x\leq4) \end{cases}$이므로

$f\left(\dfrac{7}{5}\right)=2\times\dfrac{7}{5}=\dfrac{14}{5}$

$$
\begin{aligned}
f^2\left(\frac{7}{5}\right)&=(f\circ f)\left(\frac{7}{5}\right)=f\left(f\left(\frac{7}{5}\right)\right)\\
&=f\left(\frac{14}{5}\right)\\
&=-2\times\frac{14}{5}+8=\frac{12}{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^3\left(\frac{7}{5}\right)&=(f\circ f^2)\left(\frac{7}{5}\right)=f\left(f^2\left(\frac{7}{5}\right)\right)\\
&=f\left(\frac{12}{5}\right)\\
&=-2\times\frac{12}{5}+8=\frac{16}{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^4\left(\frac{7}{5}\right)&=(f\circ f^3)\left(\frac{7}{5}\right)=f\left(f^3\left(\frac{7}{5}\right)\right)\\
&=f\left(\frac{16}{5}\right)\\
&=-2\times\frac{16}{5}+8=\frac{8}{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^5\left(\frac{7}{5}\right)&=(f\circ f^4)\left(\frac{7}{5}\right)=f\left(f^4\left(\frac{7}{5}\right)\right)\\
&=f\left(\frac{8}{5}\right)\\
&=2\times\frac{8}{5}=\frac{16}{5}\\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

즉, $n\geq3$일 때 $f^n\left(\dfrac{7}{5}\right)$의 값은 n이 홀수이면 $\dfrac{16}{5}$, n이 짝수이면 $\dfrac{8}{5}$이므로

$f^{123}\left(\dfrac{7}{5}\right)=\dfrac{16}{5}$

답 ⑤

참고

일반적으로 함수 f가 주어지고 f^n의 꼴의 합성함수를 구할 때에는 f^2, f^3, f^4, …을 연속적으로 구하여 규칙성을 찾아 f^n을 추론한다.

013

$f^{-1}(3)=2$에서

$f(2)=3 \qquad \therefore 2a+b=3$ …… ㉠

$(f\circ f)(2)=5$에서

$f(f(2))=f(3)=5 \qquad \therefore 3a+b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

$\therefore f(x)=2x-1$ 다른풀이

$f^{-1}(7)=k$라 하면 $f(k)=7$이므로

$2k-1=7 \qquad \therefore k=4$

$\therefore f^{-1}(7)=4$

답 ④

다른풀이

$y=2x-1$로 놓고 x에 대하여 정리하면

$x=\dfrac{y+1}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{x+1}{2} \qquad \therefore f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{2}$ 참고

$\therefore f^{-1}(7)=4$

참고

일차함수의 역함수

일차함수 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)의 역함수는

$f^{-1}(x)=\dfrac{x-b}{a}$

014

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다.

이때 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 직선 $y=(a+7)x-1$의 기울기의 부호와 직선 $y=(-a+5)x+2a+1$의 기울기의 부호가 같아야 하므로 참고

$(a+7)(-a+5)>0$, $(a+7)(a-5)<0$

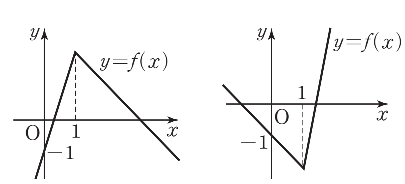
$\therefore -7<a<5$

따라서 이를 만족시키는 정수 a는 -6, -5, -4, $\cdots$, 4의 11개이다.

답 ②

참고

직선 $y=(a+7)x-1$의 기울기의 부호와 직선 $y=(-a+5)x+2a+1$의 기울기의 부호가 다르면 다음 그림과 같이 일대일대응이 되지 않으므로 역함수가 존재하지 않는다.



015

$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(1)$

$=(g^{-1}\circ f)(1)$

$=g^{-1}(f(1))$

$=g^{-1}(a+b)$ 다른풀이

즉, $g^{-1}(a+b)=m$에서

$g(m)=a+b \qquad \therefore a+b=m-4$

답 ③

다른풀이

$g(x)=x-4$에서 $g^{-1}(x)=x+4$이므로

$g^{-1}(a+b)=m$에서

$a+b+4=m$

$\therefore a+b=m-4$

016

$(f\circ f\circ f)^{-1}(d)=(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(d)$

$=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(d)))$

$f^{-1}(d)=k$라 하면

$f(k)=d \qquad \therefore k=c$

즉, $f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(d)))=f^{-1}(f^{-1}(c))$

$f^{-1}(c)=l$이라 하면

$f(l)=c \qquad \therefore l=b$

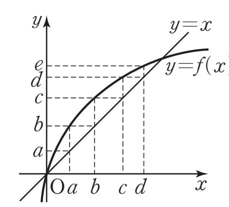
즉, $f^{-1}(f^{-1}(c))=f^{-1}(b)$

$f^{-1}(b)=m$이라 하면

$f(m)=b \qquad \therefore m=a$

$\therefore (f\circ f\circ f)^{-1}(d)=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(d)))$

$=f^{-1}(b)=a$

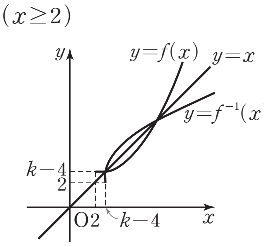


답 ①

017

$f(x)=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4 \ (x\geq 2)$

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 오른쪽 그림과 같다.



두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-4x+k=x$, 즉 $x^2-5x+k=0$이 2보다 크거나 같은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2-5x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4k>0 \qquad \therefore k<\dfrac{25}{4}$

(ii) $g(x)=x^2-5x+k$라 하면 $g(2)\geq 0$이어야 하므로

$4-10+k\geq 0 \qquad \therefore k\geq 6$

(iii) 함수 $y=x^2-5x+k$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=2$보다 오른쪽에 있어야 하므로

$-\dfrac{-5}{2}>2 \qquad \therefore k$는 모든 실수

(i)~(iii)에서 $6\le k<\frac{25}{4}$이므로 정수 k의 값은 6이다.

답 6

018

직선

$y=m(x-1)+3$ …… ㉠

은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 3)$을 지난다.

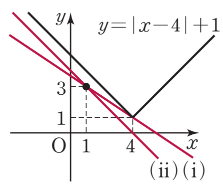
(i) 직선 ㉠이 점 $(4, 1)$을 지날 때

$m=\frac{1-3}{4-1}=-\frac{2}{3}$

(ii) 직선 ㉠이 $x<4$에서 함수

$y=|x-4|+1$의 그래프와 평행할 때

$m=-1$



(i), (ii)에서 $-1\le m<-\frac{2}{3}$

답 ③

019

정수 k에 대하여 $k\le\frac{n}{3}<k+1$ $(n\ge4)$일 때 $\left[\frac{n}{3}\right]=k$이므로

$f(n)=f(k)+1$

$33\le\frac{100}{3}<34$이므로

$f(100)=f(33)+1$

$11\le\frac{33}{3}<12$이므로

$f(33)=f(11)+1$

$3\le\frac{11}{3}<4$이므로

$f(11)=f(3)+1$

$=1+1=2$

따라서

$f(33)=f(11)+1$

$=2+1=3$

이므로

$f(100)=f(33)+1$

$=3+1=4$

답 4

020

모든 실수 x에 대하여

$f(x+1)=f(x)+2$ …… ㉠

ㄱ. ㉠에서

$f(1)=f(0)+2$

$=1+2=3$

$f(2)=f(1)+2$

$=3+2=5$

$f(3)=f(2)+2$

$=5+2=7$

$f(4)=f(3)+2$

$=7+2=9$

$f(5)=f(4)+2$

$=9+2=11$ (참)

ㄴ. ㉠에서 $f(x)=f(x+1)-2$이므로

$f(-1)=f(0)-2$

$=1-2=-1$

$f(-2)=f(-1)-2$

$=-1-2=-3$

$f(-3)=f(-2)-2$

$=-3-2=-5$ (참)

ㄷ. 모든 실수 x에 대하여

$f(x+2)=f((x+1)+1)=f(x+1)+2$

$=f(x)+2+2$

$=f(x)+4$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

021

(i) $a=0$일 때

$f(x)=bx+2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선이다.

$2\le f(0)\le50$, $2\le f(4)\le50$이어야 하므로

$2\le4b+2\le50$ $\therefore 0\le b\le12$

따라서 순서쌍 (a, b)는 13개이다.

(ii) $a>0$일 때

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+2$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 $-\frac{b}{2a}$이므로 $0\le x\le4$에서 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값도 증가한다.

$\to -\frac{b}{2a}\le4$

따라서 $f(0)\ge2$, $f(4)\le50$이어야 하므로

$16a+4b+2\le50$ $\therefore 4a+b\le12$

ⓐ $a=1$일 때

$0\le b\le8$이므로 순서쌍 (a, b)는 9개

ⓑ $a=2$일 때

$0\le b\le4$이므로 순서쌍 (a, b)는 5개

ⓒ $a=3$일 때

$b=0$이므로 순서쌍 (a, b)는 1개

ⓐ, ⓑ, ⓒ에서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$9+5+1=15$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$13+15=28$

답 ⑤

022

조건 (나)에서 $a+b=7$이므로

$a=7$, $b=0$ 참고

$n(X)=8$이고, 조건 (가)에서 $n(Y)=7$, $Y\subset X$이므로

$n(X-Y)=1$ → 0, 1, 2, …, 7 중 하나는 집합 Y의 원소가 아니고 나머지는 모두 집합 Y의 원소이다.

$X-Y=\{k\}$라 하면 함수 f는 k를 함숫값으로 갖지 않는다.

또, 조건 (다)에 의하여 최댓값 7을 함숫값으로 갖는 정의역의 원소가 2개이므로 조건 (라)에서

$f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(7)=(0+1+2+\cdots+7)-k+7$

$=35-k$

즉, $35-k=33$이므로

$k=2$

따라서 $X-Y=\{2\}$이므로 집합 $X-Y$의 모든 원소의 합은 2이다.

답 2

참고

$a<7$ 또는 $b>0$이면 $n(Y)<7$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

023

$h(x)=m(f(x), g(x))$에서
$h(1)=m(f(1), g(1))=m(f(1), 3)$
$h(2)=m(f(2), g(2))=m(f(2), 2)$
$h(3)=m(f(3), g(3))=m(f(3), 1)$
$h(4)=m(f(4), g(4))=m(f(4), 4)$
$h(3)=m(f(3), 1)$에서 $h(3)$은 $f(3)$과 1 중에서 크지 않은 수이고 1은 정의역 X의 가장 작은 원소이므로
$h(3)=1$
$h(1)=m(f(1), 3)$에서 $h(1)\le 3$
$h(2)=m(f(2), 2)$에서 $h(2)\le 2$
$h(4)=m(f(4), 4)$에서 $h(4)\le 4$
이때 함수 h가 일대일대응이므로
$h(3)=1,\ h(2)=2,\ h(1)=3,\ h(4)=4$
또,
$h(1)=m(f(1), 3)=3$에서 $f(1)\ge 3$
$h(2)=m(f(2), 2)=2$에서 $f(2)\ge 2$
$h(3)=m(f(3), 1)=1$에서 $f(3)\ge 1$
$h(4)=m(f(4), 4)=4$에서 $f(4)\ge 4$
이때 함수 f가 일대일대응이므로
$f(4)=4,\ f(1)=3,\ f(2)=2,\ f(3)=1$
$\therefore f(2)+h(4)=2+4=6$

답 6

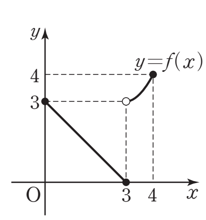
024

$g(x)=3-x,\ h(x)=a(x-3)^2+b$라 하자.
집합 $\{x\,|\,0\le x\le 3\}$에서 정의된 함수 $g(x)$의 치역이 $\{y\,|\,0\le y\le 3\}$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면 집합 $\{x\,|\,3<x\le 4\}$에서 정의된 함수 $h(x)$의 치역이 $\{y\,|\,3<y\le 4\}$이어야 한다.

(i) $a<0$일 때
함수 $h(x)$의 치역이 $\{y\,|\,h(4)\le y<h(3)\}$이므로 $f(x)$는 일대일대응이 될 수 없다.

(ii) $a=0$일 때
함수 $h(x)$가 상수함수이므로 $f(x)$는 일대일대응이 될 수 없다.

(iii) $a>0$일 때
함수 $h(x)$의 치역이 $\{y\,|\,h(3)<y\le h(4)\}$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $h(3)=3,\ h(4)=4$이어야 하므로
$b=3,\ a+b=4$
$\therefore a=1,\ b=3$

(i)~(iii)에서 $f(x)=\begin{cases} 3-x & (0\le x\le 3) \\ (x-3)^2+3 & (3<x\le 4)\end{cases}$이므로

$f\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{13}{4}$

답 ②

025

함수 $f(x)$가 상수함수이므로
$f(-1)=f(1)=f(3)=c$ (c는 상수)
라 하자.
$f(-1)=c$에서
$-k+1=c \qquad \therefore k=1-c$
$f(1)=c$에서
$1+p+q=c \qquad \therefore p+q=c-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$f(3)=c$에서
$9+3p+q=c \qquad \therefore 3p+q=c-9 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠$-$㉡을 하면
$-2p=8 \qquad \therefore p=-4$
$p=-4$를 ㉠에 대입하면
$-4+q=c-1 \qquad \therefore q=c+3$
$\therefore k+q=(1-c)+(c+3)=4$

답 ④

026

$f(-x)=-f(x)+2$에 $x=0$을 대입하면
$f(0)=-f(0)+2 \qquad \therefore f(0)=1$ 다른풀이
$f(-x)=-f(x)+2$에서 $-f(x)+2\in A$이어야 하므로
$f(x)\in\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$
$x>0$일 때, $f(x)$의 값은 각각의 x의 값에 대하여 5개씩 선택할 수 있고, $f(x)$의 값이 정해지면 $f(-x)$의 값은 $-f(x)+2$로 결정된다.
따라서 함수 f의 개수는
$1\times5\times5\times5=125$

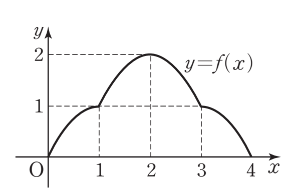
답 ④

다른풀이

$f(-x)=-f(x)+2$에서 $f(-x)+f(x)=2$
$x=-1$ 또는 $x=1$일 때 $f(-1)+f(1)=2$이므로 가능한 순서쌍 $(f(-1),\ f(1))$은
$(-1,\ 3),\ (0,\ 2),\ (1,\ 1),\ (2,\ 0),\ (3,\ -1)$
의 5개이다.
같은 방법으로 가능한 순서쌍 $(f(-2),\ f(2))$와 $(f(-3),\ f(3))$의 개수를 구하면 각각 5이다.
따라서 함수 f의 개수는
$1\times5\times5\times5=125$

027

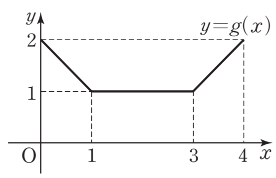
함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고, 치역은 $\{y\mid 0\le y\le 2\}$이므로 $0\le a\le 2$

$$g(x)=\frac{|x-1|+|x-3|}{2}$$
$$=\begin{cases} -x+2 & (0\le x<1) \\ 1 & (1\le x<3) \\ x-2 & (3\le x\le 4)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $g(x)=h(x)$의 해가 $1\le x\le 3$이므로

$0\le x<1$에서 $h(x)\ne -x+2$,

$1\le x\le 3$에서 $h(x)=1$,

$3<x\le 4$에서 $h(x)\ne x-2$

이때 $1\le x\le 3$에서 $(f\circ h)(x)=f(h(x))=f(1)=1$이므로

$a=1$

$\therefore a+h(1)+h(2)+h(3)=1+1+1+1=4$

답 4

028

조건 ㈏에서 $f(8)=1$이고, 조건 ㈎에서 함수 f는 일대일대응이므로 정의역의 원소 중 1, 2, …, 7에 1을 제외한 치역의 원소 2, 3, …, 8이 대응하면 된다.

조건 ㈐에서 $k\le 7$이면 $f(k)\ge k$이므로

$f(7)\ge 7$, 즉 $f(7)$의 값은 7, 8 중에서 하나의 값을 가지므로 2가지

$f(6)\ge 6$, 즉 $f(6)$의 값은 6, 7, 8 중에서 $f(7)$의 값을 제외한 나머지 두 수 중 하나의 값을 가지므로 2가지

같은 방법으로 $f(5)$, $f(4)$, $f(3)$, $f(2)$의 값을 정하는 방법은 각각 2가지이고, $f(1)$의 값을 정하는 방법은 1가지이다.

따라서 함수 f의 개수는

$2\times2\times2\times2\times2\times2\times1=64$

답 ②

029

조건 ㈎에서 함수 f의 치역의 원소의 개수가 4이고, 조건 ㈏에서 $f(1)=f(2)$이므로 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 방법의 수는 4이다.

또, $f(3)\ne f(1)$이므로 $f(3)$의 값을 정하는 방법의 수는 3이다.

조건 ㈐에서 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 모두 서로 다르므로 이 중 두 개는 $f(1)$, $f(3)$의 값을 제외한 나머지 치역의 원소이고, 한 개는 $f(1)$ 또는 $f(3)$의 값과 같아야 한다.

$f(1)$, $f(3)$의 값 중에서 하나를 택하여 치역의 원소 3개로 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 방법의 수는

$2\times 3!=12$

따라서 함수 f의 개수는

$4\times3\times12=144$

답 144

030

(i) x가 유리수일 때, $1+x$도 유리수이므로

$$\begin{aligned}h(x)&=f(x)+f(1+x)-(f\circ f)(x)\\&=f(x)+f(1+x)-f(f(x))\\&=x+(1+x)-f(x)\\&=2x+1-x\\&=x+1\end{aligned}$$

(ii) x가 무리수일 때, $1+x$도 무리수이므로

$$\begin{aligned}h(x)&=f(x)+f(1+x)-(f\circ f)(x)\\&=f(x)+f(1+x)-f(f(x))\\&=(1+x)+\{1+(1+x)\}-f(1+x)\\&=2x+3-\{1+(1+x)\}\\&=x+1\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $h(x)=x+1$

$h(k)\ge 10$에서

$k+1\ge 10$ $\quad\therefore k\ge 9$

따라서 k의 최솟값은 9이다.

답 9

031

조건 ㈐에서 함수 f가 일대일함수이므로

$f(4)+f(5)\ge 3$

조건 ㈎에서 $f(4)+f(5)=f(1)$이므로

$f(1)\ge 3$

(i) $f(1)=3$일 때

$(f\circ f)(1)=5$에서

$f(f(1))=5$ $\quad\therefore f(3)=5$

$f(4)+f(5)=3$이므로

$f(4)=1$, $f(5)=2$ 또는 $f(4)=2$ 또는 $f(5)=1$

$\therefore f(2)=4$

(ii) $f(1)=4$일 때

$(f\circ f)(1)=5$에서

$f(f(1))=5$ $\quad\therefore f(4)=5$

이때 $f(4)+f(5)=4$를 만족시키는 $f(5)$의 값이 존재하지 않는다.

(iii) $f(1)=5$일 때

$(f\circ f)(1)=5$에서

$f(f(1))=5$ $\quad\therefore f(5)=5$

이때 $f(1)=f(5)$가 되어 f는 일대일함수가 될 수 없다.

(i)~(iii)에서

$f(1)=3$, $f(2)=4$, $f(3)=5$, $f(4)=1$, $f(5)=2$

또는 $f(1)=3$, $f(2)=4$, $f(3)=5$, $f(4)=2$, $f(5)=1$

$\therefore f(2)-f(4)\times f(5)=4-1\times2=2$

답 2

032

조건 ㈎에서 $f(f(x))\le 5-x$

ㄱ. 조건 ㈎에 의하여 $f(f(4))\le 1$이므로 $f(f(4))=1$ (참)

ㄴ. (i) $f(4)=1$일 때

$f(f(4))=f(1)=1$이므로

ⓐ $f(3)=1$이면 함수 f의 치역이 $\{1, 2, 4\}$가 될 수 없으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

ⓑ $f(3)=2$이면 함수 f의 치역이 $\{1, 2, 4\}$이므로 $f(2)=4$이어야 하는데 $f(f(3))=f(2)=4>2$가 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

ⓒ $f(3)=4$이면 함수 f의 치역이 $\{1, 2, 4\}$이므로 $f(2)=2$이고, $f(f(1))=f(1)=1\le4$, $f(f(2))=f(2)=2\le3$, $f(f(3))=f(4)=1\le2$가 되어 조건을 만족시킨다.

(ii) $f(4)=2$일 때

$f(f(4))=f(2)=1$이므로

ⓐ $f(3)=1$이면 함수 f의 치역이 $\{1, 2, 4\}$이므로 $f(1)=4$이어야 하는데 $f(f(2))=f(1)=4>3$이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

ⓑ $f(3)=2$이면 함수 f의 치역이 $\{1, 2, 4\}$이므로 $f(1)=4$이어야 하는데 $f(f(2))=f(1)=4>3$이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

ⓒ $f(3)=4$일 때

$f(1)=1$이면 $f(f(1))=f(1)=1\le4$, $f(f(2))=f(1)=1\le3$, $f(f(3))=f(4)=2\le2$가 되어 조건을 만족시킨다.

또, $f(1)=2$이면 $f(f(1))=f(2)=1\le4$, $f(f(2))=f(1)=2\le3$, $f(f(3))=f(4)=2\le2$가 되어 조건을 만족시킨다.

한편, $f(1)=4$이면 $f(f(2))=f(1)=4>3$이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) $f(4)=4$일 때

$f(f(4))=f(4)=4>1$이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에서 가능한 모든 함수 f에 대하여 $f(3)=4$이다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 가능한 함수 f의 개수는 3이다. (거짓)

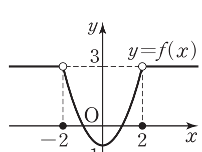
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

033

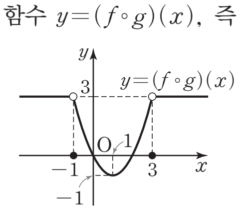
$$f(x)=\begin{cases} 3 & (|x|>2) \\ 0 & (|x|=2) \\ x^2-1 & (|x|<2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-1)$이므로 함수 $y=(f\circ g)(x)$, 즉 $y=f(x-1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 ③

다른 풀이

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases} 3 & (|x-1|>2) \\ 0 & (|x-1|=2) \\ (x-1)^2-1 & (|x-1|<2) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 3 & (x<-1 \text{ 또는 } x>3) \\ 0 & (x=-1 \text{ 또는 } x=3) \\ (x-1)^2-1 & (-1<x<3) \end{cases}$$

034

$$f(x)=\begin{cases} 5 & (x<1) \\ 2 & (x=1) \\ 4 & (1<x\le4) \\ 1 & (x>4) \end{cases}$$ 이므로

$x<1$일 때, $(f\circ f)(x)=f(5)=1$

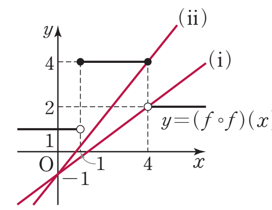
$x=1$일 때, $(f\circ f)(x)=f(2)=4$

$1<x\le4$일 때, $(f\circ f)(x)=f(4)=4$

$x>4$일 때, $(f\circ f)(x)=f(1)=2$

$$\therefore (f\circ f)(x)=\begin{cases} 1 & (x<1) \\ 4 & (1\le x\le4) \\ 2 & (x>4) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=mx-1$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0, -1)$을 지난다.



(i) 직선 $y=mx-1$이 점 $(4, 2)$를 지날 때

$2=4m-1 \qquad \therefore m=\frac{3}{4}$

(ii) 직선 $y=mx-1$이 점 $(4, 4)$를 지날 때

$4=4m-1 \qquad \therefore m=\frac{5}{4}$

(i), (ii)에서 직선 $y=mx-1$이 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 만나지 않으려면 $\frac{3}{4}\le m<\frac{5}{4}$이므로 정수 m의 값은 1이다.

답 ③

035

$3f(x)-f(g(x))=4x+1$ …… ㉠

㉠에 $x=g(x)$를 대입하면

$3f(g(x))-f(g(g(x)))=4g(x)+1$

$g\circ g=I$이므로

$3f(g(x))-f(x)=4g(x)+1$ …… ㉡

$3\times$㉠$+$㉡을 하면

$8f(x)=12x+4+4g(x)$

$8f(x)-4g(x)=12x+4$, 즉 $2f(x)-g(x)=3x+1$

$\therefore 2f(6)-g(6)=19$

답 19

036

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\{f(x)\}^2-2af(x)+4$

$f(x)=x^2-4x-5=(x-2)^2-9$

이므로 $f(x)=t$로 놓으면 $t\ge-9$

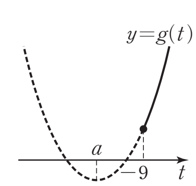
$\therefore g(t)=t^2-2at+4=(t-a)^2+4-a^2$

(i) $a<-9$일 때

$t\ge-9$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)\ge0$이려면 $g(-9)\ge0$이어야 하므로

$81+18a+4\ge0 \qquad \therefore a\ge-\frac{85}{18}$

그런데 $a<-9$이어야 하므로 이를 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.



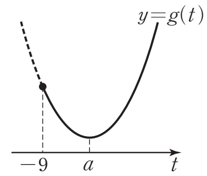
(ii) $a \geq -9$일 때

$t \geq -9$인 모든 실수 t에 대하여

$g(t) \geq 0$이려면 $g(a) \geq 0$이어야 하므로

$4-a^2 \geq 0$, $a^2 \leq 4$

$\therefore$ $-2 \leq a \leq 2$



(i), (ii)에서 $-2 \leq a \leq$이므로 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

답 ④

037

$f(x)=(x-3)^2+2$에 대하여

$(f \circ f)(x)=f(t-2f(x))$에서 $f(f(x))=f(t-2f(x))$

$\therefore f(x)=t-2f(x)$ 또는 $\dfrac{f(x)+\{t-2f(x)\}}{2}=3$ 참고

(i) $f(x)=t-2f(x)$일 때

$3f(x)=t \qquad \therefore f(x)=\dfrac{t}{3}$

(ii) $\dfrac{f(x)+\{t-2f(x)\}}{2}=3$일 때

$-f(x)+t=6 \qquad \therefore f(x)=t-6$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 두 방정식

$f(x)=\dfrac{t}{3}$ 또는 $f(x)=t-6$ …… ㉠

의 해와 같다.

방정식 $f(x)=k$ (k는 상수)는 $k<2$일 때 해가 없고, $k=2$일 때 중근, $k>2$일 때 서로 다른 두 실근을 가지므로 ㉠의 서로 다른 실근이 3개이려면

$\dfrac{t}{3}=2$, $t-6>2$ 또는 $\dfrac{t}{3}>2$, $t-6=2$

이때 $\dfrac{t}{3}=2$, $t-6>2$를 만족시키는 t의 값은 존재하지 않으므로

$\dfrac{t}{3}>2$, $t-6=2$에서 $t=8$

답 8

참고

이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$에 대하여 $f(m)=f(n)$이면

$m=n$ 또는 $\dfrac{m+n}{2}=p$

038

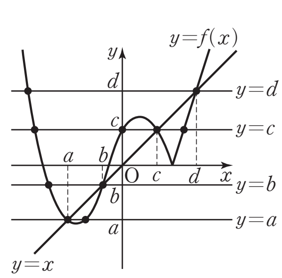
$(f \circ f)(x)=f(x)$에서 $f(f(x))=f(x)$

$f(x)=t$로 놓으면 $f(t)=t$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 차례대로 a, b, c, d라 하면

$t=a$ 또는 $t=b$ 또는 $t=c$ 또는 $t=d$

즉, $f(x)=a$ 또는 $f(x)=b$ 또는 $f(x)=c$ 또는 $f(x)=d$



위의 그림에서 방정식 $f(x)=a$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같으므로 2

같은 방법으로 구하면

방정식 $f(x)=b$의 서로 다른 실근의 개수는 2

방정식 $f(x)=c$의 서로 다른 실근의 개수는 4

방정식 $f(x)=d$의 서로 다른 실근의 개수는 2

따라서 방정식 $(f \circ f)(x)=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수는

$2+2+4+2=10$

답 ⑤

039

ㄱ. [반례] $f(x)=x$, $g(x)=x$이고 $a=-1$이면 $f(x)$, $g(x)$는 일대일함수이지만 $af(x)+g(x)=0$이므로 $af(x)+g(x)$는 일대일함수가 아니다. (거짓)

ㄴ. [반례] $f(x)=x$, $g(x)=x$이면 $f(x)$, $g(x)$는 일대일함수이지만 $f(x)g(x)=x^2$이므로 $f(x)g(x)$는 일대일함수가 아니다. (거짓)

ㄷ. 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $(f \circ g)(x_1)=(f \circ g)(x_2)$라 하면 $f(g(x_1))=f(g(x_2))$

이때 f가 일대일함수이므로 $g(x_1)=g(x_2)$

또, g가 일대일함수이므로 $x_1=x_2$

따라서 $f \circ g$는 일대일함수이다.

같은 방법으로 $g \circ f$도 일대일함수임을 보일 수 있다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ③

040

함수 f의 역함수가 존재하므로 f는 일대일대응이다.

조건 (가)에서 $f(2)=17-2f(4)$

$1 \leq f(2) \leq 6$이므로

$1 \leq 17-2f(4) \leq 6$, $-16 \leq -2f(4) \leq -11$

$\therefore \dfrac{11}{2} \leq f(4) \leq 8$

또, $1 \leq f(4) \leq 6$이므로

$f(4)=6$, $f(2)=5$

$f(4)=6$에서 $f^{-1}(6)=4$이므로 조건 (나)에서

$4-f^{-1}(3)=1 \qquad \therefore f^{-1}(3)=3$, $f(3)=3$

조건 (다)에서 $f(1)+f(5)=6$이고 $f(1)$, $f(5)$의 값으로 가능한 것은 1, 2, 4이므로

$f(1)=2$, $f(5)=4$ 또는 $f(1)=4$, $f(5)=2$

이때 조건 (라)에서 $f(1)>f(5)$이므로

$f(1)=4$, $f(5)=2$이고 $f(6)=1$

또, $f(5)=2$에서 $f^{-1}(2)=5$이므로

$f(6)+f^{-1}(2)=1+5=6$

답 6

041

ㄱ. $f(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f^{-1}(0)+f^{-1}(0)$

$\therefore f(0)=2f^{-1}(0)$ (참)

ㄴ. $f(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$에 $x=f(0)$, $y=f(0)$을 대입하면

$f(f(0)+f(0))=f^{-1}(f(0))+f^{-1}(f(0))$

$f(2f(0))=0+0=0$

$\therefore 2f(0)=f^{-1}(0)$ (참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 $f(0)=2f^{-1}(0)$, $2f(0)=f^{-1}(0)$이므로

$f(0)=2f^{-1}(0)=2\times 2f(0)=4f(0)$

$\therefore f(0)=0$, $f^{-1}(0)=0$

$f(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$에 $y=0$을 대입하면

$f(x)=f^{-1}(x)+f^{-1}(0)$

$\therefore f^{-1}(x)=f(x)-f^{-1}(0)$

또, $f(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$에 $x=0$을 대입하면

$f(y)=f^{-1}(0)+f^{-1}(y)$

$\therefore f^{-1}(y)=f(y)-f^{-1}(0)$

$\therefore f(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$

$=\{f(x)-f^{-1}(0)\}+\{f(y)-f^{-1}(0)\}$

$=f(x)+f(y)-2f^{-1}(0)$

$=f(x)+f(y)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

042

$f(5x+1-3g(x))=x$에서

$f^{-1}(x)=5x+1-3g(x)$

$f^{-1}(x)=g(x)$이므로

$g(x)=5x+1-3g(x)$ $\qquad \therefore g(x)=\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}$ 다른 풀이

방정식 $f(x)g(x-1)=0$에서

$f(x)=0$ 또는 $g(x-1)=0$

(i) $f(x)=0$인 경우

방정식 $f(x)=0$의 실근을 α라 하면 $f(\alpha)=0$이므로

$g(0)=\alpha$ $\qquad \therefore \alpha=\frac{1}{4}$

(ii) $g(x-1)=0$인 경우

$\frac{5}{4}(x-1)+\frac{1}{4}=0$ $\qquad \therefore x=\frac{4}{5}$

(i), (ii)에서 방정식 $f(x)g(x-1)=0$의 실근은 $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{5}$이므로 구하는 곱은

$\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

답 $\frac{1}{5}$

다른 풀이

$g(x)=\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}$에서 $y=\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}$로 놓고 x에 대하여 정리하면

$x=\frac{4}{5}y-\frac{1}{5}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}$

$\therefore f(x)=\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}$

$g(x-1)=\frac{5}{4}(x-1)+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}x-1$이므로

$f(x)g(x-1)=0$에서

$\left(\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{5}{4}x-1\right)=0$, $(4x-1)(5x-4)=0$

$\therefore x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=\frac{4}{5}$

따라서 모든 실근의 곱은

$\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

043

집합 T의 원소 $\overline{ab}$의 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 5개, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 십의 자리에 온 숫자를 제외한 4개이므로 집합 T의 원소의 개수는

$5\times 4=20$

이때 집합 T의 한 원소 $\overline{st}$에 대하여 $f(\overline{st})=f(\overline{ts})$이므로 집합 T의 원소 20개 중 같은 함숫값을 갖는 원소가 10쌍 있다.

또, 함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f의 정의역인 집합 X에는 $\overline{st}$, $\overline{ts}$ 중 하나만 속해야 한다. 참고

따라서 집합 T의 원소 20개 중 같은 함숫값을 갖는 원소 10쌍 각각에 대하여 2가지씩 택할 수 있으므로 집합 X의 개수는 2^{10}이다.

답 ③

참고

예를 들어 집합 T의 원소 21에 대하여 $f(21)=f(12)=12$이므로 함수 f의 역함수가 존재하려면 집합 X에는 21과 12 중 하나만 속해야 한다.

044

함수 f의 역함수가 존재하므로 f는 일대일대응이다.

조건 ㈎에서 $-2\le(f\circ f)(-1)\le 2$, $-2\le f^{-1}(-2)\le 2$이므로

$(f\circ f)(-1)=2$, $f^{-1}(-2)=2$

$\therefore f(f(-1))=2$, $f(2)=-2$

(i) $f(-1)=-1$일 때

$f(f(-1))=f(-1)=-1\neq 2$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(-1)=0$일 때

$f(f(-1))=f(0)=2$

조건 ㈏에서 $f(0)\times f(-2)\le 0$이고 $f(1)\times f(-1)\le 0$이므로

$f(-2)=-1$, $f(1)=1$

(iii) $f(-1)=1$일 때

$f(f(-1))=f(1)=2$

이때 $f(1)\times f(-1)>0$이므로 조건 ㈏를 만족시키지 않는다.

(iv) $f(-1)=2$일 때

$f(f(-1))=f(2)=-2\neq 2$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 $f(0)=2$, $f(1)=1$

$\therefore 6f(0)+5f(1)+2f(2)=12+5+(-4)=13$

답 13

045

조건 ㈎에서 함수 f의 역함수가 존재하므로 f는 일대일대응이다.

조건 ㈏에서 $f(a)=f^{-1}(a)$이므로 $f(f(a))=a$

(ⅰ) $f(a)=a$일 때

$f(b)$의 값이 될 수 있는 것은 c, d, e의 3개

$f(c)$, $f(d)$, $f(e)$의 값을 정하는 방법의 수는 a와 $f(b)$의 값을 제외한 나머지 3개를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로 $3!=6$

따라서 함수 f의 개수는

$3\times6=18$

(ⅱ) $f(a)=b$일 때

$f(f(a))=a$에서 $f(b)=a$

$f(c)$, $f(d)$, $f(e)$의 값을 정하는 방법의 수는 a, b를 제외한 나머지 3개를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로 $3!=6$

따라서 함수 f의 개수는

6

(ⅲ) $f(a)=c$일 때

$f(f(a))=a$에서 $f(c)=a$

$f(b)$의 값이 될 수 있는 것은 d, e의 2개

$f(d)$, $f(e)$의 값을 정하는 방법의 수는 a, c와 $f(b)$의 값을 제외한 나머지 2개를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$2!=2$

따라서 함수 f의 개수는

$2\times2=4$

(ⅳ) $f(a)=d$일 때

$f(f(a))=a$에서 $f(d)=a$

$f(b)$의 값이 될 수 있는 것은 c, e의 2개

$f(c)$, $f(e)$의 값을 정하는 방법의 수는 a, d와 $f(b)$의 값을 제외한 나머지 2개를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$2!=2$

따라서 함수 f의 개수는

$2\times2=4$

(ⅴ) $f(a)=e$일 때

$f(f(a))=a$에서 $f(e)=a$

$f(b)$의 값이 될 수 있는 것은 c, d의 2개

$f(c)$, $f(d)$의 값을 정하는 방법의 수는 a, e와 $f(b)$의 값을 제외한 나머지 2개를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$2!=2$

따라서 함수 f의 개수는

$2\times2=4$

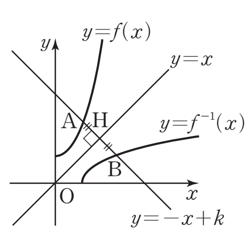
(ⅰ)~(ⅴ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$18+6+4+4+4=36$

답 ①

046

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 두 직선 $y=-x+k$, $y=x$가 서로 수직이므로 두 직선의 교점을 H라 하면



$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}$

점 A의 좌표를 $(a,\ a^2+1)$이라 하면 점 A와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{|a-(a^2+1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\left|\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right|}{\sqrt{2}}$$

따라서 선분 AH의 길이는 $a=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $\frac{3\sqrt{2}}{8}$를 가지므로 선분 AB의 길이의 최솟값은

$2\times\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

답 ⑤

047

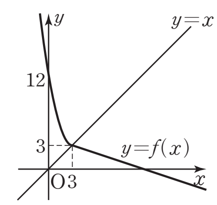
$\{x\,|\,f(x)=f^{-1}(x)\}=\{3,\ \alpha,\ \alpha+12\}$이고 $\alpha\neq3$, $\alpha+12\neq3$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수가 3이고 교점의 x좌표는 각각 3, α, $\alpha+12$이다.

$$f(x)=\begin{cases}x^2-6x+12 & (x<3)\\ k(x-3)+3 & (x\geq3)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(x-3)^2+3 & (x<3)\\ k(x-3)+3 & (x\geq3)\end{cases}$$

이때 함수 f의 역함수가 존재하므로 f는 일대일대응이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하고, $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표는 $(3,\ 3)$이다.



$\therefore\ \alpha<3$

$f(\alpha)=f^{-1}(\alpha)=\beta$라 하면 $\beta>3$이고

$f(\alpha)=\beta$에서 $f^{-1}(\beta)=\alpha$

$f^{-1}(\alpha)=\beta$에서 $f(\beta)=\alpha$

즉, $f(\beta)=f^{-1}(\beta)$에서 $x=\beta$는 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근이므로 $\beta=\alpha+12$ ($\because\ \beta>3$)

$f(\alpha)=\alpha+12$에서

$\alpha^2-6\alpha+12=\alpha+12$, $\alpha^2-7\alpha=0$

$\alpha(\alpha-7)=0\qquad\therefore\ \alpha=0,\ \beta=12$ ($\because\ \alpha<3$)

$f(\beta)=\alpha$에서

$f(12)=9k+3=0\qquad\therefore\ k=-\frac{1}{3}$

$\therefore\ 3k-\alpha=-1-0=-1$

답 -1

048

$\{f(1)-g(1)\}\{f(-1)-g(-1)\}<0$에서

$f(1)>g(1)$, $f(-1)<g(-1)$

또는 $f(1)<g(1)$, $f(-1)>g(-1)$

즉, $f(1)\neq g(1)$, $f(-1)\neq g(-1)$이고 함수 h의 역함수가 존재하면 h가 일대일대응이므로 $f(1)=g(-1)$, $f(-1)=g(1)$이어야 한다.

$f(1)=g(-1)$에서

$a-2=1-b+c\qquad\therefore\ a+b-c=3$ …… ㉠

$f(-1)=g(1)$에서

$-a-2=1+b+c\qquad\therefore\ a+b+c=-3$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2a+2b=0\qquad\therefore\ b=-a$

㉠−㉡을 하면

$-2c=6\qquad\therefore\ c=-3$

또, $-1\leq x\leq1$에서 함수 g가 일대일대응이어야 하고, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 대칭축은 직선 $x=-\frac{b}{2}$, 즉 $x=\frac{a}{2}$이므로

$\frac{a}{2} \leq -1$ 또는 $\frac{a}{2} \geq 1$ $\quad \therefore a \leq -2$ 또는 $a \geq 2$

$\therefore a^2+b^2+c^2=2a^2+9 \geq 8+9=17$

따라서 $a^2+b^2+c^2$의 최솟값은 17이다.

답 17

049

$f(x)=\begin{cases} -x(x-p) & (x<p) \\ x(x-p) & (x \geq p) \end{cases}$ 이고

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= \{f(x)\}^2-3f(x) \\ &= f(x)\{f(x)-3\}\end{aligned}$$

함수 $y=(g \circ f)(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 방정식 $(g \circ f)(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같으므로

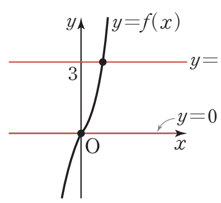
$f(x)\{f(x)-3\}=0$에서

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=3$

즉, $N(p)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=0$, $y=3$의 교점의 개수와 같다.

ㄱ. $p=0$인 경우

$f(x)=\begin{cases} -x^2 & (x<0) \\ x^2 & (x \geq 0) \end{cases}$



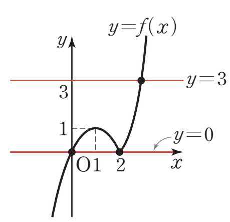
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=0$, $y=3$의 교점의 개수가 2이므로

$N(0)=2$ (참)

ㄴ. $p=2$인 경우

$f(x)=\begin{cases} -x(x-2) & (x<2) \\ x(x-2) & (x \geq 2) \end{cases}$

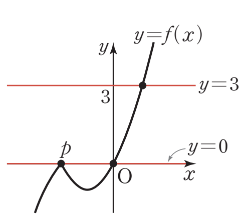


이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

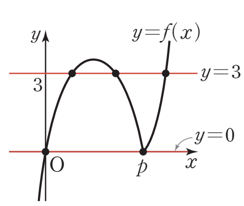
이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=0$, $y=3$의 교점의 개수가 3이므로

$N(2)=3$ (참)

ㄷ. $p<0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같고, $p>0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

이때 $p<0$이면 항상 $N(p)=3$이므로 $N(p)=5$이려면 $p>0$이어야 하고, 함수 $y=-x(x-p)$의 그래프의 꼭짓점의 y좌표가 3보다 커야 한다.

$$\begin{aligned}y &= -x(x-p) \\ &= -x^2+px \\ &= -\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p^2}{4}\end{aligned}$$

에서 $\frac{p^2}{4}>3$이어야 하므로

$p^2>12 \quad \therefore p>2\sqrt{3}\ (\because p>0)$

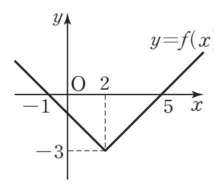
따라서 구하는 정수 p의 최솟값은 4이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

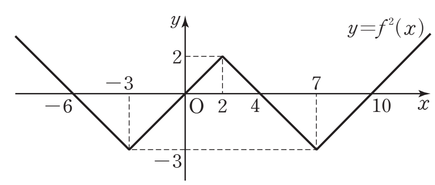
답 ②

050

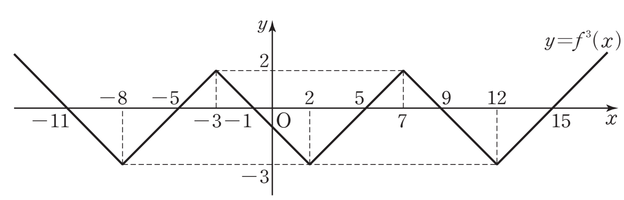
함수 $f(x)=|x-2|-3$의 그래프는 직선 $y=x$를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 다음 $y \geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프이므로 다음 그림과 같다.



함수 $y=f^2(x)=|f(x)-2|-3$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 다음 $y \geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프이므로 다음 그림과 같다.



같은 방법으로 하면 함수 $y=f^3(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$, $y=f^2(x)$, $y=f^3(x)$, $\cdots$, $y=f^n(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 차례대로

$S(1)=1 \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 3\right)=9$

$$\begin{aligned}S(2) &= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 3\right)+1 \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 2\right) \\ &= 2 \times 9+1 \times 4=22\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S(3) &= 3 \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 3\right)+2 \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 2\right) \\ &= 3 \times 9+2 \times 4=35\end{aligned}$$

$\vdots$

$$\begin{aligned}S(n) &= n \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 3\right)+(n-1) \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 2\right) \\ &= 9n+4(n-1) \\ &= 13n-4\end{aligned}$$

$S(n)=256$에서 $13n-4=256 \quad \therefore n=20$

답 20

051

일등급의 메모장

$\{f(x)-g(x)\}\{f(x)-h(x)\}=0$이면
$f(x)=g(x)$ 또는 $f(x)=h(x)$
(단, 항상 $f(x)=g(x)$이거나 항상 $f(x)=h(x)$가 아님에 주의.)

조건 (가)에서 $g(x)=-x^2+5$, $h(x)=-4x$라 하면 집합 X의 모든 원소 x에 대하여
$f(x)=g(x)$ 또는 $f(x)=h(x)$ 다른 풀이
$g(x)=h(x)$에서
$-x^2+5=-4x$, $x^2-4x-5=0$
$(x+1)(x-5)=0$ $\therefore x=-1$ ($\because 5\notin X$)
즉, $g(-1)=h(-1)=4$이므로
$f(-1)=4$
함수 $g(x)=-x^2+5$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로
$g(1)=g(-1)$
이때 $f(1)=g(1)$이면 $f(1)=g(1)=g(-1)=4$이므로 $f(x)$는 일대일함수가 아니다.
$\therefore f(1)=h(1)=-4$
$f(-3)=g(-3)$이면 $f(-3)=-4$이므로 일대일함수가 아니다.
$\therefore f(-3)=h(-3)=12$
$f(0)=h(0)$이면 $f(0)=0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
$\therefore f(0)=g(0)=5$
$f(0)=5$, $f(1)=-4$이므로 조건 (나)에서
$f(2)>0$
$g(2)=1>0$, $h(2)=-8<0$이므로
$f(2)=g(2)=1$
함수 $g(x)=-x^2+5$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로
$g(-2)=g(2)$
이때 $f(-2)=g(-2)$이면 $f(-2)=g(-2)=g(2)=1$이므로 $f(x)$는 일대일함수가 아니다.
$\therefore f(-2)=h(-2)=8$
$\therefore f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$
$=12+8+4+5+(-4)+1=26$

답 26

다른 풀이

$g(x)=-x^2+5$, $h(x)=-4x$의 함숫값을 나타내면 다음과 같으므로 $f(-1)=4$

x	-3	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	-4	1	4	5	4	1
$h(x)$	12	8		0	-4	-8

또, $f(x)$는 일대일함수이므로 $f(1)=-4$

x	-3	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	-4	1	4	5	$\cancel{4}$	1
$h(x)$	12	8		0	-4	-8

조건 (나)에 의하여 $f(0)\neq 0$이므로 $f(0)=5$이고,
$f(0)=5$이면 $f(2)>0$이어야 하므로 $f(2)=1$

x	-3	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	-4	1	4	5	$\cancel{4}$	1
$h(x)$	12	8		$\cancel{0}$	-4	$\cancel{-8}$

$f(x)$는 일대일함수이므로 $f(-2)=8$, $f(-3)=12$

x	-3	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	$\cancel{-4}$	$\cancel{1}$	4	5	$\cancel{4}$	1
$h(x)$	12	8		$\cancel{0}$	-4	$\cancel{-8}$

$\therefore f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$
$=12+8+4+5+(-4)+1=26$

052

일등급의 메모장

다항식 $f(x)$가 세 실수 a, b, c와 임의의 두 실수 x, y에 대하여
$f(x+y)=f(x)+f(y)+axy(x+y)+bxy+c$
를 만족시키면
$f(x)=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+f'(0)x-c$ 확장

조건 (가)의 양변에 $y=0$을 대입하면
$f(x)=f(x)+f(0)$ $\therefore f(0)=0$
조건 (가)의 양변에 $y=x$를 대입하면
$f(2x)=2f(x)+2x^2$
$f(x)$의 최고차항을 ax^n ($a\neq 0$, n은 자연수)이라 하면 위의 식에서
$a(2x)^n+\cdots=2ax^n+2x^2+\cdots$ …… ㉠
(i) $n=1$일 때
㉠의 좌변은 일차식이고 우변은 이차식이므로 모순이다.
(ii) $n=2$일 때
$f(x)=ax^2+bx$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하자.
㉠의 좌변의 최고차항의 계수는 $4a$, 우변의 최고차항의 계수는 $2a+2$이므로 $4a=2a+2$에서 $a=1$
$\therefore f(x)=x^2+bx$
조건 (나)에서 임의의 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+bx\geq 3x-1$, 즉 $x^2+(b-3)x+1\geq 0$이 성립하므로 이차방정식 $x^2+(b-3)x+1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(b-3)^2-4\leq 0$
$b^2-6b+5\leq 0$, $(b-1)(b-5)\leq 0$
$\therefore 1\leq b\leq 5$
(iii) $n\geq 3$일 때
㉠의 좌변의 최고차항의 계수는 $a\times 2^n$, 우변의 최고차항의 계수는 $2a$이므로 $a\times 2^n=2a$에서
$2^n=2$ $\therefore n=1$
이때 $n\geq 3$이므로 모순이다.
(i)~(iii)에서 $f(x)=x^2+bx$ $(1\leq b\leq 5)$이므로
$f(2)\times f(3)=(4+2b)(9+3b)$
$=6(b+2)(b+3)$
$=6(b^2+5b+6)$
$=6\left(b+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$
따라서 $f(2)\times f(3)$은 $b=5$일 때 최댓값 336, $b=1$일 때 최솟값 72를 가지므로 구하는 합은
$336+72=408$

답 408

다른 풀이 확장

조건 (가)에서 $f(x)=x^2+f'(0)x$

$f'(0)=k$ (k는 상수)라 하면

$f(x)=x^2+kx$

조건 ㈏에서 임의의 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+kx\geq 3x-1$, 즉 $x^2+(k-3)x+1\geq 0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+(k-3)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-3)^2-4\leq 0$

$k^2-6k+5\leq 0$, $(k-1)(k-5)\leq 0$

$\therefore 1\leq k\leq 5$

즉, $f(x)=x^2+kx$ $(1\leq k\leq 5)$이므로

$$\begin{aligned} f(2)\times f(3)&=(4+2k)(9+3k)\\ &=6(k+2)(k+3)\\ &=6(k^2+5k+6)\\ &=6\left(k+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{2} \end{aligned}$$

따라서 $f(2)\times f(3)$은 $k=5$일 때 최댓값 336, $k=1$일 때 최솟값 72를 가지므로 구하는 합은

$336+72=408$

053

일등급의 메모장

유한집합 X에서 정의된 함수 f에 대하여

$f^1=f$, $f^{n+1}=f\circ f^n$ (n은 자연수)

이라 할 때, 어떤 $x\in X$에 대하여 $f^n(x)=x$가 성립하려면

$f(x)=x$ 또는 $f(x_1)=x_2$, $f(x_2)=x_3$, $\cdots$, $f(x_n)=x_1$

을 만족시키는 서로 다른 n개의 원소 x_1, x_2, $\cdots$, x_n이 집합 X의 원소이어야 한다.

$(f\circ f)(x)=x$를 만족시키는 서로 다른 함수 f의 개수를 구해 보자.

집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여

$f(a)=a$이면 $(f\circ f)(a)=f(f(a))=f(a)=a$,

$f(a)=b$이면 $(f\circ f)(a)=f(f(a))=f(b)=a$

이어야 한다.

(i) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=x$를 만족시키는 경우의 수는

1

(ii) 집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)=b$, $f(b)=a$가 성립하고, 나머지 세 원소 x에 대하여 $f(x)=x$가 성립하는 경우

5개의 원소 중 a, b를 택하면 나머지 세 원소는 자동으로 정해지므로 경우의 수는

${}_5C_2=10$

(iii) 집합 X의 서로 다른 네 원소 a, b, c, d에 대하여 $f(a)=b$, $f(b)=a$, $f(c)=d$, $f(d)=c$가 성립하고, 나머지 한 원소 x에 대하여 $f(x)=x$가 성립하는 경우

a, b, c, d를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_4=5$

a, b, c, d를 두 묶음으로 나누는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=3$

나머지 한 원소는 자동으로 정해지므로 경우의 수는

$5\times 3=15$

(i)~(iii)에서 $a=1+10+15=26$

$(f\circ f\circ f)(x)=x$를 만족시키는 서로 다른 함수 f의 개수를 구해 보자.

집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여

$f(a)=a$이면 $(f\circ f\circ f)(a)=f(f(f(a)))=f(f(a))=f(a)=a$,

$f(a)=b$이면 $(f\circ f\circ f)(a)=f(f(f(a)))=f(f(b))=a$

이어야 한다.

그런데 $f(b)=a$이면 $f(f(b))=f(a)=b$가 되어 모순이고,

$f(b)=b$이면 $f(f(b))=f(b)=b$가 되어 모순이다.

따라서 $f(b)=c$ $(c\neq a,\ c\neq b)$이면서 $f(f(b))=f(c)=a$를 만족시키는 집합 X의 원소 c가 존재해야 한다.

(iv) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=x$를 만족시키는 경우의 수는

1

(v) 집합 X의 서로 다른 세 원소 a, b, c에 대하여 $f(a)=b$, $f(b)=c$, $f(c)=a$가 성립하고, 나머지 두 원소 x에 대하여 $f(x)=x$가 성립하는 경우

a, b, c를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_3=10$

세 원소 a, b, c의 함숫값을 정하는 경우의 수는

$2\times 1\times 1=2$

나머지 두 원소는 자동으로 정해지므로 경우의 수는

$10\times 2=20$

(iv), (v)에서 $b=1+20=21$

$\therefore a+b=26+21=47$

답 47

054

일등급의 메모장

일대일함수: 함수 f: $X\longrightarrow Y$에서 정의역 X의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$

일대일대응: '일대일함수'+'(치역)=(공역)'

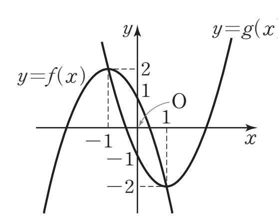
$f(x)=-x^2-2x+1$

$=-(x+1)^2+2$,

$g(x)=x^2-2x-1$

$=(x-1)^2-2$

이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

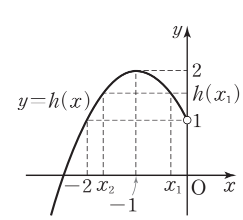


$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a)\\ g(x+b) & (x\geq a)\end{cases}$

이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 $x<a$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 같고, $x\geq a$일 때 함수 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄱ. $a=0$일 때

$x<0$에서 $h(x)=f(x)$이므로 함수 $y=h(x)$ $(x<0)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

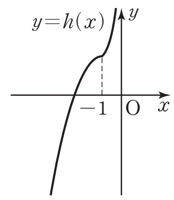


$-1<x_1<0$인 실수 x_1에 대하여 $h(x_1)=h(x_2)$이고 $-2<x_2<-1$인 실수 x_2가 존재하므로 함수 $h(x)$는 일대일대응이 아니다.

즉, $(0,\ k)\in A$를 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다. (참)

ㄴ. $a=-1$, $b=4$일 때

$h(x)=\begin{cases} -(x+1)^2+2 & (x<-1) \\ (x+3)^2-2 & (x\geq -1) \end{cases}$



이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$x_1\neq x_2$인 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $h(x_1)\neq h(x_2)$이므로 함수 $h(x)$는 일대일함수이고, 함수 $h(x)$의 치역은 실수 전체의 집합으로 공역과 같다.

따라서 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로

$(-1, 4)\in A$ (참)

ㄷ. 함수 $h(x)$가 일대일함수이려면

$x<a$에서 $h(x)=f(x)$이므로

$a\leq -1$ …… ㉠

$x\geq a$에서 $h(x)=g(x+b)$이므로

$1-b\leq a$ $\quad\therefore b\geq 1-a$ …… ㉡

→ 함수 $y=g(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 $-a$보다 작거나 같아야 한다.

또, ㉠, ㉡을 만족시키는 함수 $h(x)$가 일대일대응이 되기 위해서는 치역과 공역이 같아야 하므로

$f(a)=g(a+b)$ …… ㉢

$g(x)=(x-1)^2-2\geq -2$이므로 $f(a)\geq -2$에서

$-a^2-2a+1\geq -2$, $a^2+2a-3\leq 0$

$(a+3)(a-1)\leq 0$ $\quad\therefore -3\leq a\leq 1$ …… ㉣

㉠, ㉣에서 실수 a의 값의 범위는 $-3\leq a\leq -1$이므로 $(m, b)\in A$를 만족시키는 실수 b가 존재하도록 하는 정수 m의 값은 -3, -2, -1이다.

(i) $m=-3$일 때

㉡에서 $b\geq 4$

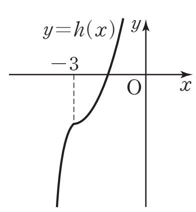
㉢에서 $f(-3)=g(-3+b)$

$-2=(-3+b)^2-2(-3+b)-1$

$b^2-8b+16=0$, $(b-4)^2=0$

$\therefore b=4$

$\therefore m+b=-3+4=1$



(ii) $m=-2$일 때

㉡에서 $b\geq 3$

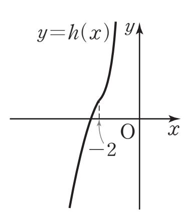
㉢에서 $f(-2)=g(-2+b)$

$1=(-2+b)^2-2(-2+b)-1$

$b^2-6b+6=0$

$\therefore b=3+\sqrt{3}$ ($\because b\geq 3$)

$\therefore m+b=-2+(3+\sqrt{3})=1+\sqrt{3}$



(iii) $m=-1$일 때

㉡에서 $b\geq 2$

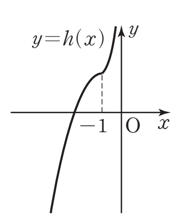
㉢에서 $f(-1)=g(-1+b)$

$2=(-1+b)^2-2(-1+b)-1$

$b^2-4b=0$, $b(b-4)=0$

$\therefore b=4$ ($\because b\geq 2$)

$\therefore m+b=-1+4=3$



(i)~(iii)에서

$\{m+b\,|\,(m, b)\in A$이고 m은 정수$\}=\{1, 1+\sqrt{3}, 3\}$

이므로 모든 원소의 합은

$1+(1+\sqrt{3})+3=5+\sqrt{3}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

055

일등급의 메모장

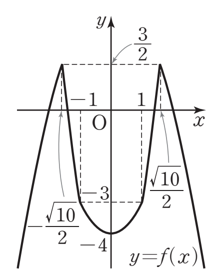
절댓값 기호를 포함한 식

➡ 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값을 경계로 구간 나누기

$f(x)=\begin{cases} -(x^2-1)+(2x^2-5) & (x^2\leq 1) \\ (x^2-1)+(2x^2-5) & \left(1<x^2\leq \frac{5}{2}\right) \\ (x^2-1)-(2x^2-5) & \left(x^2>\frac{5}{2}\right) \end{cases}$

$=\begin{cases} x^2-4 & (|x|\leq 1) \\ 3x^2-6 & \left(1<|x|\leq \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \\ -x^2+4 & \left(|x|>\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \end{cases}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 함수 $h(x)$의 치역이 $\{y\,|\,y\geq c\}$이려면 $a>0$이어야 하므로 a는 자연수이다.

또, $a\geq 2$이면 $f(x)<g(x)$이고 함수 $h(x)$의 치역이 $\{y\,|\,y\geq c\}$임에 모순이므로 $a=1$

함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $b\leq \frac{\sqrt{10}}{2}$이고 $|x|=b$일 때 $f(x)=g(x)$이어야 하므로

(i) $0<b\leq 1$일 때

$f(b)=g(b)$에서 $b^2-4=b^2-1$이므로 모순이다.

(ii) $1<b\leq \frac{\sqrt{10}}{2}$일 때

$f(b)=g(b)$에서 $3b^2-6=b^2-1$

$b^2=\frac{5}{2}$ $\quad\therefore b=\frac{\sqrt{10}}{2}$ $\left(\because 1<b\leq \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

(i), (ii)에서 $a=1$, $b=\frac{\sqrt{10}}{2}$이고, 함수 $h(x)$의 치역은 $\{y\,|\,y\geq -4\}$이므로 $c=-4$

$\therefore 3a^2+2b^2+c^2=3+5+16=24$

답 24

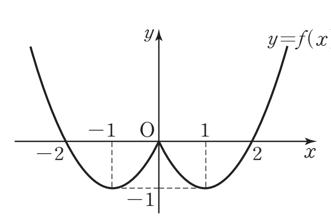
056

일등급의 메모장

같은 함수가 반복되어 나타나는 식

➡ 치환 이용 고려

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)=t$라 하면 $t\geq-1$

$f(f(x))=a\{f(x)\}^2-2$에서

$f(t)=at^2-2\ (t\geq-1)$

이때 $h(t)=at^2-2$라 하면

$f(t)=h(t)\ (t\geq-1)$

$f(t)=\begin{cases}(t+1)^2-1\ (-1\leq t<0)\\(t-1)^2-1\ (t\geq0)\end{cases}$ 이고 $f(t)=h(t)$이므로

$-1\leq t<0$일 때, $(t+1)^2-1=at^2-2$

$\therefore (a-1)t^2-2t-2=0$ …… ㉠

$t\geq0$일 때, $(t-1)^2-1=at^2-2$

$\therefore (a-1)t^2+2t-2=0$ …… ㉡

$a\neq1$일 때, 이차방정식 ㉠의 판별식을 D_1, 이차방정식 ㉡의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_1}{4}=\frac{D_2}{4}=1+2(a-1)=2a-1$

$\frac{D_1}{4}=\frac{D_2}{4}=0$에서 $a=\frac{1}{2}$

㉠에서 $-\frac{1}{2}t^2-2t-2=0$

$t^2+4t+4=0$, $(t+2)^2=0$

$\therefore t=-2$

그런데 $-1\leq t<0$이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉡에서 $-\frac{1}{2}t^2+2t-2=0$

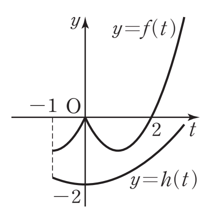
$t^2-4t+4=0$, $(t-2)^2=0$

$\therefore t=2$

(i) $a<\frac{1}{2}$일 때

오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=f(t)$, $y=h(t)$의 그래프의 교점이 존재하지 않는다.

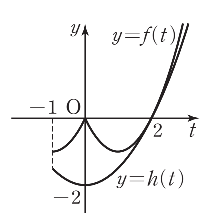
$\therefore g(a)=0$



(ii) $a=\frac{1}{2}$일 때

오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=f(t)$, $y=h(t)$의 그래프가 $t=2$인 한 점에서 만나고, 방정식 $f(x)=2$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

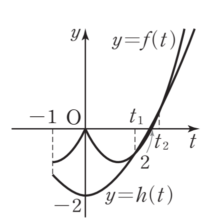
$\therefore g(a)=2$



(iii) $\frac{1}{2}<a<1$일 때

오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=f(t)$, $y=h(t)$의 그래프가 $t=t_1$, $t=t_2$ $(1<t_1<2,\ t_2>2)$인 두 점에서 만나고, 방정식 $f(x)=t_1$, $f(x)=t_2$는 각각 서로 다른 두 실근을 갖는다.

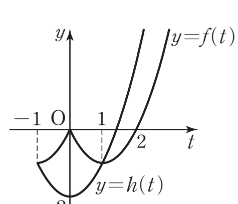
$\therefore g(a)=2+2=4$



(iv) $a=1$일 때

오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=f(t)$, $y=h(t)$의 그래프가 $t=-1$, $t=1$인 두 점에서 만나고, 방정식 $f(x)=-1$, $f(x)=1$은 각각 서로 다른 두 실근을 갖는다.

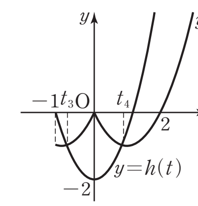
$\therefore g(a)=2+2=4$



(v) $a>1$일 때

오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=f(t)$, $y=h(t)$의 그래프가 $t=t_3$, $t=t_4$, $(-1<t_3<0,$ $0<t_4<1)$인 두 점에서 만나고, 방정식 $f(x)=t_3$은 서로 다른 네 실근, 방정식 $f(x)=t_4$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$\therefore g(a)=4+2=6$



(i)~(v)에서 $g(a)$의 치역은 $\{0,\ 2,\ 4,\ 6\}$이므로 구하는 합은

$0+2+4+6=12$

답 12

057

일등급의 메모장

$(f\circ f$의 치역$)\subset(f$의 치역$)$

주어진 조건에 의하여 함수 f의 치역의 모든 원소의 합은 3의 배수이어야 한다.

(i) f의 치역의 원소가 1개인 경우

$f\circ f$의 치역과 f의 치역이 같으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) f의 치역의 원소가 2개인 경우

ⓐ f의 치역이 $\{1,\ 2\}$일 때

f의 치역의 모든 원소의 합이 3이므로 $f\circ f$의 치역의 모든 원소의 합은 1이다.

즉, $f\circ f$의 치역은 $\{1\}$이므로 $f(1)=f(2)=1$이고 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값은 1 또는 2이어야 한다.

이때 $f(3)=f(4)=f(5)=1$인 경우를 제외해야 하므로 함수 f의 개수는

$2^3-1=7$

ⓑ f의 치역이 $\{1,\ 5\}$일 때

f의 치역의 모든 원소의 합이 6이므로 $f\circ f$의 치역의 모든 원소의 합은 2이다.

그런데 $f\circ f$의 치역은 f의 치역의 부분집합이므로 이를 만족시키는 함수 f는 존재하지 않는다.

ⓒ f의 치역이 $\{2,\ 4\}$일 때

f의 치역의 모든 원소의 합이 6이므로 $f\circ f$의 치역의 모든 원소의 합은 2이다.

즉, $f\circ f$의 치역은 $\{2\}$이고, ⓐ와 같은 방법으로 구하면 함수 f의 개수는

7

ⓓ f의 치역이 $\{4,\ 5\}$일 때

f의 치역의 모든 원소의 합이 9이므로 $f\circ f$의 치역의 모든 원소의 합은 3이고, ⓑ와 같이 이를 만족시키는 함수 f는 존재하지 않는다.

따라서 함수 f의 개수는

$7+7=14$

(iii) f의 치역의 원소가 3개인 경우

ⓐ f의 치역이 $\{1,\ 2,\ 3\}$일 때

f의 치역의 모든 원소의 합이 6이므로 $f\circ f$의 치역의 모든 원소의 합은

원소의 합은 2이다.

즉, $f\circ f$의 치역은 $\{2\}$이므로 $f(1)=f(2)=f(3)=2$이고 $f(4)=1$, $f(5)=3$ 또는 $f(4)=3$, $f(5)=1$이어야 한다.

따라서 함수 f의 개수는

2

ⓑ f의 치역이 $\{1,\ 3,\ 5\}$일 때

f의 치역의 모든 원소의 합이 9이므로 $f\circ f$의 치역의 모든 원소의 합은 3이다.

즉, $f\circ f$의 치역은 $\{3\}$이고, ⓐ와 같은 방법으로 구하면 함수 f의 개수는

2

ⓒ f의 치역이 $\{2,\ 3,\ 4\}$일 때

f의 치역의 모든 원소의 합이 9이므로 $f\circ f$의 치역의 모든 원소의 합은 3이다.

즉, $f\circ f$의 치역은 $\{3\}$이고, ⓐ와 같은 방법으로 구하면 함수 f의 개수는 2이다.

ⓓ f의 치역이 $\{3,\ 4,\ 5\}$일 때

f의 치역의 모든 원소의 합이 12이므로 $f\circ f$의 치역의 모든 원소의 합은 4이다.

즉, $f\circ f$의 치역은 $\{4\}$이고, ⓐ와 같은 방법으로 구하면 함수 f의 개수는

2

따라서 함수 f의 개수는

$2+2+2+2=8$

(iv) f의 치역의 원소가 4개인 경우

f의 치역이 $\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$이어야 하므로 f의 치역의 모든 원소의 합은 12이고, $f\circ f$의 치역의 모든 원소의 합은 4이다.

즉, $f\circ f$의 치역은 $\{4\}$이어야 하는데 이를 만족시키는 함수 f는 존재하지 않는다.

(v) f의 치역의 원소가 5개인 경우

f가 일대일대응이므로 $f\circ f$도 일대일대응이다.

즉, 두 함수의 치역이 모두 X로 같으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(v)에서 함수 f의 개수는

$14+8=22$

답 22

058

일등급의 메모장

정의역의 원소의 개수가 $n\ (n\geq 2)$일 때, 공역과 치역이 같은 함수의 개수는

(1) 공역의 원소가 2개일 때: 2^n-2

(2) 공역의 원소가 3개일 때: $3^n-{}_3C_2(2^n-2)-{}_3C_1$

함수 f, g, h의 치역의 원소의 개수를 각각 a, b, c라 하면 a, b, c는 각각 2 또는 3이어야 한다.

(i) $a=3$, $b=3$, $c=3$인 경우

모든 함수가 일대일대응이다.

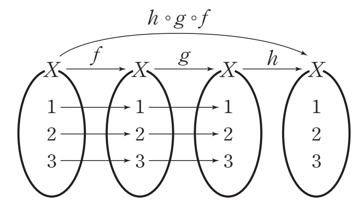
따라서 함수 $h\circ g\circ f$의 치역의 원소의 개수는 3이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=3$, $b=3$, $c=2$인 경우

함수 f, g는 일대일대응이다.

함수 f, g를 결정하는 경우의 수는 각각 $3!=6$

예를 들어 $f(1)=g(1)=1$, $f(2)=g(2)=2$, $f(3)=g(3)=3$이라 하면



함수 h를 결정하는 경우의 수는 치역의 원소 2개를 정하는 경우의 수가 ${}_3C_2=3$이고, 이를 정의역의 원소에 대응시키는 경우의 수가 $2^3-2=6$이므로 $3\times 6=18$

따라서 f, g, h를 결정하는 경우의 수는

$6\times 6\times 18=648$

(iii) $a=3$, $b=2$, $c=3$인 경우

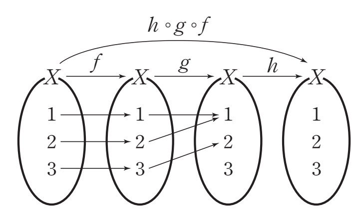
함수 f, h는 일대일대응이다.

함수 f를 결정하는 경우의 수는 $3!=6$

예를 들어 $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$이라 하면 함수 g를 결정하는 경우의 수는 (ii)에서 구한 방법과 마찬가지로

${}_3C_2\times(2^3-2)=18$

예를 들어 $g(1)=g(2)=1$, $g(3)=2$라 하면



함수 h는 일대일대응이므로 함수 $h\circ g\circ f$의 치역의 원소의 개수는 2이고, 함수 h를 결정하는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 f, g, h를 결정하는 경우의 수는

$6\times 18\times 6=648$

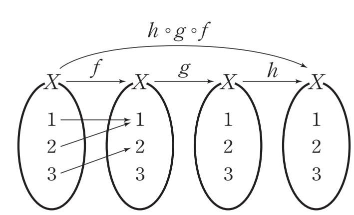
(iv) $a=2$, $b=3$, $c=3$인 경우

함수 g, h는 일대일대응이다.

함수 f를 결정하는 경우의 수는 (ii)에서 구한 방법과 마찬가지로

${}_3C_2\times(2^3-2)=18$

예를 들어 $f(1)=f(2)=1$, $f(3)=2$라 하면



함수 g, h는 일대일대응이므로 함수 $h\circ g\circ f$의 치역의 원소의 개수는 2이고, 함수 g, h를 결정하는 경우의 수는 각각 $3!=6$

따라서 f, g, h를 결정하는 경우의 수는

$18\times 6\times 6=648$

(v) $a=3$, $b=2$, $c=2$인 경우

함수 f는 일대일대응이다.

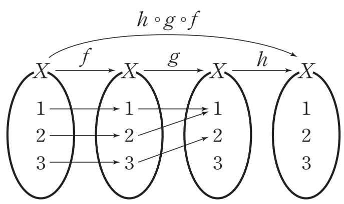
함수 f를 결정하는 경우의 수는 $3!=6$

예를 들어 $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$이라 하면 함수 g를 결

정하는 경우의 수는 (ii)에서 구한 방법과 마찬가지로

${}_3C_2\times(2^3-2)=18$

예를 들어 $g(1)=g(2)=1$, $g(3)=2$라 하면



$h(1)\neq h(2)$이어야 하고, $h(3)=h(1)$ 또는 $h(3)=h(2)$이어야 하므로 함수 h를 결정하는 경우의 수는 ${}_3P_2\times2=12$

따라서 f, g, h를 결정하는 경우의 수는

$6\times18\times12=1296$

(vi) $a=2$, $b=3$, $c=2$인 경우

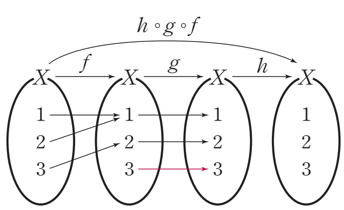
함수 g는 일대일대응이다.

함수 f를 결정하는 경우의 수는 (ii)에서 구한 방법과 마찬가지로

${}_3C_2\times(2^3-2)=18$

예를 들어 $f(1)=f(2)=1$, $f(3)=2$라 하면 함수 g를 결정하는 경우의 수는 $3!=6$

예를 들어 $g(1)=1$, $g(2)=2$, $g(3)=3$이라 하면



(v)와 같이 $h(1)\neq h(2)$이어야 하고, $h(3)=h(1)$ 또는 $h(3)=h(2)$이어야 하므로 함수 h를 결정하는 경우의 수는

${}_3P_2\times2=12$

따라서 f, g, h를 결정하는 경우의 수는

$18\times6\times12=1296$

(vii) $a=2$, $b=2$, $c=3$인 경우

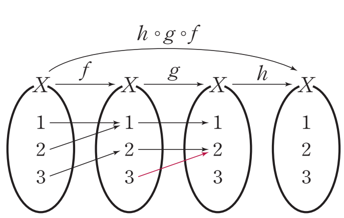
함수 h는 일대일대응이다.

함수 f를 결정하는 경우의 수는 (ii)에서 구한 방법과 마찬가지로

${}_3C_2\times(2^3-2)=18$

예를 들어 $f(1)=f(2)=1$, $f(3)=2$라 하면 (v)와 같이 $g(1)\neq g(2)$이어야 하고, $g(3)=g(1)$ 또는 $g(3)=g(2)$이어야 하므로 함수 g를 결정하는 경우의 수는 ${}_3P_2\times2=12$

예를 들어 $g(1)=1$, $g(2)=g(3)=2$라 하면



함수 h는 일대일대응이므로 함수 h를 결정하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 f, g, h를 결정하는 경우의 수는

$18\times12\times6=1296$

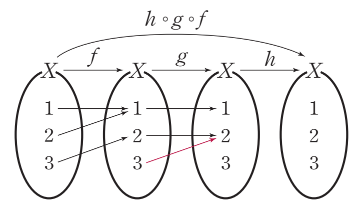
(viii) $a=2$, $b=2$, $c=2$인 경우

함수 f를 결정하는 경우의 수는 (ii)에서 구한 방법과 마찬가지로

${}_3C_2\times(2^3-2)=18$

예를 들어 $f(1)=f(2)=1$, $f(3)=2$라 하면 (v)와 같이 $g(1)\neq g(2)$이어야 하고, $g(3)=g(1)$ 또는 $g(3)=g(2)$이어야 하므로 함수 g를 결정하는 경우의 수는 ${}_3P_2\times2=12$

예를 들어 $g(1)=1$, $g(2)=g(3)=2$라 하면



(v)와 같이 $h(1)\neq h(2)$이어야 하고, $h(3)=h(1)$ 또는 $h(3)=h(2)$이어야 하므로 함수 h를 결정하는 경우의 수는

${}_3P_2\times2=12$

따라서 f, g, h를 결정하는 경우의 수는

$18\times12\times12=2592$

(i)~(viii)에서 구하는 경우의 수는

$648\times3+1296\times3+2592=8424$

답 8424

059

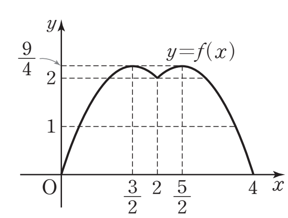
일등급의 메모장

$n\le f(x)<n+1 \Longleftrightarrow [f(x)]=n$ (단, n은 정수)

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+3x & (0\le x<2)\\ -x^2+5x-4 & (2\le x\le4)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4} & (0\le x<2)\\ -\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4} & (2\le x\le4)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(x)=0$이 되는 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=4$

$f(x)=1$이 되는 x의 값은

$0\le x<2$일 때 $-x^2+3x=1$, 즉 $x^2-3x+1=0$에서

$x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$2\le x\le4$일 때 $-x^2+5x-4=1$, 즉 $x^2-5x+5=0$에서

$x=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$

$f(x)=2$가 되는 x의 값은

$0\le x<2$일 때 $-x^2+3x=2$, 즉 $x^2-3x+2=0$에서

$(x-1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=1$

$2\le x\le4$일 때 $-x^2+5x-4=2$, 즉 $x^2-5x+6=0$에서

$(x-2)(x-3)=0 \qquad \therefore x=2$ 또는 $x=3$

즉,

$$g(x)=\begin{cases}0 & \left(0\le x<\frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } \frac{5+\sqrt{5}}{2}<x\le4\right)\\ 1 & \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\le x<1 \text{ 또는 } 3<x\le\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\\ 2 & (1\le x\le3)\end{cases}$$

이므로 $A=\{0,\ 1,\ 2\}$

또,

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & \left(0\le x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}<x\le 4\right) \\ f(x)-1 & \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\le x<1 \text{ 또는 } 3<x\le\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right) \\ f(x)-2 & (1\le x\le 3) \end{cases}$$

이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$f(2-\alpha)=f(2-\beta)-1=f(2-\gamma)-2=\dfrac{1}{4}$

이 성립하는 α, β, γ $(0<\gamma<\beta<\alpha)$에 대하여

$B=\{2-\alpha,\ 2-\beta,\ 2-\gamma,\ 2+\gamma,\ 2+\beta,\ 2+\alpha\}$

따라서 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은

$(0+1+2)$

$\quad+\{(2-\alpha)+(2-\beta)+(2-\gamma)+(2+\gamma)+(2+\beta)+(2+\alpha)\}$

$=3+12$

$=15$

답 15

060

일등급의 메모장

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=a$에 대하여 대칭이면
함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프도 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.

$f(-x)=|1-a|-x||=|1-a|x||=f(x)$

이므로

$(f\circ f)(-x)=f(f(-x))=f(f(x))=(f\circ f)(x)$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 각각 y축에 대하여 대칭이다.

$(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(1)=|1-a|$

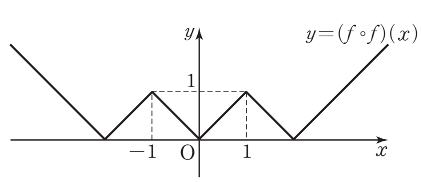
$x\ge 0$일 때

$$\begin{aligned}(f\circ f)(x)&=|1-a|1-ax||\\&=\begin{cases}|1-a(1-ax)| & \left(0\le x<\dfrac{1}{a}\right)\\ |1+a(1-ax)| & \left(x\ge\dfrac{1}{a}\right)\end{cases}\\&=\begin{cases}|a^2x-a+1| & \left(0\le x<\dfrac{1}{a}\right)\\ |a^2x-a-1| & \left(x\ge\dfrac{1}{a}\right)\end{cases}\end{aligned}$$

(i) $a=1$일 때

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases}|x| & (0\le x<1)\\ |x-2| & (x\ge 1)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



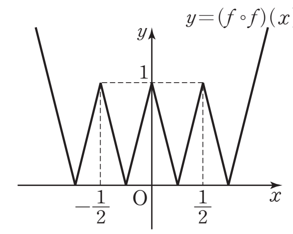
따라서 $g(t)$의 치역은 $\{0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$이므로

$h(1)=0+2+3+4+6=15$

(ii) $a=2$일 때

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases}|4x-1| & \left(0\le x<\dfrac{1}{2}\right)\\ |4x-3| & \left(x\ge\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



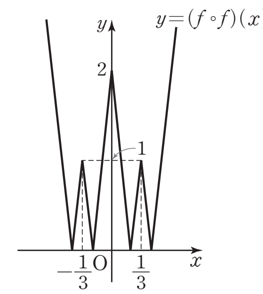
따라서 $g(t)$의 치역은 $\{0,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8\}$이므로

$h(2)=0+2+4+5+8=19$

(iii) $a=3$일 때

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases}|9x-2| & \left(0\le x<\dfrac{1}{3}\right)\\ |9x-4| & \left(x\ge\dfrac{1}{3}\right)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $g(t)$의 치역은 $\{0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8\}$이므로

$h(3)=0+2+3+4+6+8=23$

(i)~(iii)에서

$h(1)+h(2)+h(3)=15+19+23=57$

답 57

Ⅲ. 함수와 그래프

07 유리함수

001

$$\frac{(x+y)^2}{4x^2-y^2}+\frac{4}{2x-y}-\frac{x(x+y)}{y^2-4x^2}$$
$$=\frac{(x+y)^2}{4x^2-y^2}+\frac{4(2x+y)}{4x^2-y^2}+\frac{x(x+y)}{4x^2-y^2}$$
$$=\frac{x^2+2xy+y^2}{4x^2-y^2}+\frac{8x+4y}{4x^2-y^2}+\frac{x^2+xy}{4x^2-y^2}$$
$$=\frac{2x^2+(3y+8)x+y^2+4y}{4x^2-y^2}$$
$$=\frac{(x+y+4)(2x+y)}{(2x+y)(2x-y)}$$

즉, $\frac{(x+y+4)(2x+y)}{(2x+y)(2x-y)}=0$이고, $2x+y\neq0$, $2x-y\neq0$이므로

$x+y+4=0$

$\therefore x+y=-4$

답 ①

002

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{3}{(x+3)(x+6)}+\frac{4}{(x+6)(x+10)}$$ 참고
$$=\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}\right)+\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+10}\right)$$
$$=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+10}$$
$$=\frac{8}{(x+2)(x+10)}$$

$\therefore a=8$

답 8

참고

$$\frac{b-a}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}$$

003

$$\frac{1-\frac{3}{x+2}}{1+\frac{2}{x+2}}=\frac{\frac{x+2-3}{x+2}}{\frac{x+2+2}{x+2}}=\frac{x-1}{x+4}$$

즉, $\frac{x-1}{x+4}=\frac{ax+b}{x+c}$이므로

$a=1$, $b=-1$, $c=4$

$\therefore a+b+c=1+(-1)+4=4$

답 4

004

$\frac{x^2-4xy-7y^2}{x^2-4xy-4y^2}=-2$에서

$x^2-4xy-7y^2=-2(x^2-4xy-4y^2)$

$3x^2-12xy-15y^2=0$, $x^2-4xy-5y^2=0$

$(x+y)(x-5y)=0$ $\qquad\therefore x=5y$ ($\because xy>0$)

따라서

$$A=\frac{2x+3y}{x-2y}=\frac{2\times5y+3y}{5y-2y}$$
$$=\frac{13y}{3y}=\frac{13}{3}$$

이므로

$30A=30\times\frac{13}{3}=130$

답 130

005

$\frac{a}{4}=\frac{b}{3}=\frac{c}{6}=\frac{5a+2b+c}{k}=t$ $(t\neq0)$라 하면

$a=4t$, $b=3t$, $c=6t$

이므로

$$\frac{5a+2b+c}{k}=\frac{20t+6t+6t}{k}=\frac{32t}{k}$$

즉, $\frac{32t}{k}=t$이므로

$k=32$

답 32

006

함수 $y=\frac{4}{x-a}-4$ $(a>1)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은

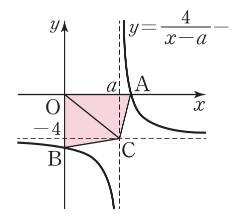
$x=a$, $y=-4$

이므로 $\mathrm{C}(a, -4)$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 각각 x축, y축과 만나는 점 A, B의 좌표는

$\mathrm{A}(a+1, 0)$, $\mathrm{B}\left(0, -\frac{4}{a}-4\right)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 사각형 OBCA는 오른쪽 그림과 같다.



사각형 OBCA의 넓이를 S라 하면

$S=\triangle\mathrm{OCA}+\triangle\mathrm{OBC}$

$$=\frac{1}{2}\times(a+1)\times4+\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{a}+4\right)\times a$$
$$=4a+4$$

즉, $4a+4=24$이므로

$a=5$

답 ⑤

007

함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $g(x)=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이라 하면

$$f(x)=\frac{3}{x-m}+n$$

이때 치역은 $\{y\,|\,y\neq n$인 실수$\}$이므로

$n=4$

또, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=-x+6$에 대하여 대칭이므로 두 점근선의 교점 $(m, 4)$가 직선 $y=-x+6$ 위의 점이다.

즉, $4=-m+6$에서 $m=2$

따라서 $f(x)=\dfrac{3}{x-2}+4$이므로

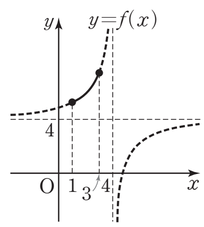
$f(-1)=\dfrac{3}{-1-2}+4=3$

답 3

008

$f(x)=\dfrac{4x-k}{x-4}=\dfrac{16-k}{x-4}+4$

(i) $16-k<0$, 즉 $k>16$일 때

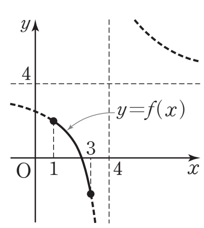


$1\le x\le 3$에서 $f(x)>4$이므로 $f(x)$의 최댓값이 2가 될 수 없다.

(ii) $16-k=0$, 즉 $k=16$일 때

$1\le x\le 3$에서 $f(x)=4$이므로 $f(x)$의 최댓값이 2가 될 수 없다.

(iii) $16-k>0$, 즉 $k<16$일 때



$1\le x\le 3$에서 $f(x)$는 $x=1$일 때 최대이므로

$f(1)=\dfrac{4-k}{-3}=2$

$\therefore k=10$

(i)~(iii)에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 2가 되도록 하는 상수 k의 값은 10이다.

답 ①

009

점 A의 좌표를 (a, b)라 하면

$b=\dfrac{3}{a-2}+4$

두 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=4$이므로

$\overline{AB}=a-2$, $\overline{AC}=b-4=\dfrac{3}{a-2}$

즉, 사각형 ABDC의 둘레의 길이는

$2\overline{AB}+2\overline{AC}=2(a-2)+\dfrac{6}{a-2}$

이때 $a-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2(a-2)+\dfrac{6}{a-2}\ge 2\sqrt{2(a-2)\times\dfrac{6}{a-2}}=4\sqrt{3}$ 참고

$\left(\text{단, 등호는 } 2(a-2)=\dfrac{6}{a-2}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 사각형 ABDC의 둘레의 길이의 최솟값은 $4\sqrt{3}$이다.

답 $4\sqrt{3}$

참고 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때,

$\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

010

$n(A\cap B)=2$이므로 함수 $y=-\dfrac{3}{x}+2$의 그래프와 직선 $y=mx+1$이 서로 다른 두 점에서 만난다.

즉, 방정식 $-\dfrac{3}{x}+2=mx+1$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$-\dfrac{3}{x}+2=mx+1$에서

$mx^2-x+3=0$ …… ㉠

$m=0$이면 방정식 ㉠의 실근이 한 개이므로

$m\ne 0$

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-12m>0$

$\therefore m<\dfrac{1}{12}$

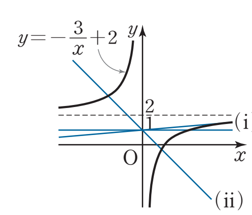
$m\ne 0$이므로 상수 m의 값의 범위는

$m<0$ 또는 $0<m<\dfrac{1}{12}$

답 $m<0$ 또는 $0<m<\dfrac{1}{12}$

참고

직선 $y=mx+1$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 1)$을 지나므로 함수 $y=-\dfrac{3}{x}+2$의 그래프와 직선 $y=mx+1$은 오른쪽 그림과 같다.



이때 $m=0$이면, 즉 직선이 x축과 평행하면 직선과 곡선이 한 점에서만 만난다.

따라서 함수 $y=-\dfrac{3}{x}+2$의 그래프와 직선 $y=mx+1$이 서로 다른 두 점에서 만나려면 m이 0보다 크고 (i)일 때의 직선의 기울기보다 작거나 (ii)와 같이 직선의 기울기가 0보다 작아야 한다.

직선이 함수 $y=-\dfrac{3}{x}+2$의 그래프에 접할 때

011

함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=1$이므로

$f(x)=\dfrac{k}{x+1}+1$ $(k<0)$

이라 하면 $f(0)=0$이므로

$k+1=0$

$\therefore k=-1$

따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{x+1}+1=\dfrac{x}{x+1}$이므로

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1}=\dfrac{x}{2x+1}$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$

$$=\frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}=\frac{x}{3x+1}$$

$\vdots$

$$f^{33}(x)=\frac{x}{33x+1}$$

$\therefore\ 100f^{33}(3)=100\times\frac{3}{33\times 3+1}=3$

답 3

012

$(f\circ g)(x)=x$에서

$g(x)=f^{-1}(x)$ 다른풀이

$y=\frac{3x+2}{x-1}$라 하고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$x=\frac{y+2}{y-3}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{x+2}{x-3}$ 참고

즉, $g(x)=\frac{x+2}{x-3}=\frac{5}{x-3}+1$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=3,\ y=1$

답 ⑤

다른풀이

두 함수 $f,\ g$가 역함수 관계이므로 그 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 두 함수의 그래프의 점근선도 직선 $y=x$에 대하여 각각 대칭이다.

$f(x)=\frac{3x+2}{x-1}=\frac{5}{x-1}+3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=1,\ y=3$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=3,\ y=1$

참고

유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0,\ c\neq 0)$의 역함수는

$y=\frac{-dx+b}{cx-a}$ → 분자의 x의 계수와 분모의 상수항의 위치를 서로 바꾼 후 두 수의 부호를 모두 바꾼다.

이를 이용하여 함수 $f(x)=\frac{3x+2}{x-1}$의 역함수 $g(x)$를 구하면

$g(x)=\frac{x+2}{x-3}$

013

$$\frac{x^9+1}{(x+1)^{10}}=\frac{a_1}{x+1}+\frac{a_2}{(x+1)^2}+\frac{a_3}{(x+1)^3}+\cdots+\frac{a_9}{(x+1)^9}$$

에서

$$\frac{x^9+1}{(x+1)^{10}}$$

$$=\frac{a_1(x+1)^9+a_2(x+1)^8+a_3(x+1)^7+\cdots+a_9(x+1)}{(x+1)^{10}}$$ 참고

$\therefore\ x^9+1=a_1(x+1)^9+a_2(x+1)^8+a_3(x+1)^7+\cdots+a_9(x+1)$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-2$를 대입하면

$(-2)^9+1=-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots-a_9$

$\therefore\ a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_9=511$

답 ③

참고

우변의 분모를 $(x+1)^9$으로 통분하면 좌변의 분모 $(x+1)^{10}$과 같지 않으므로 양변의 분자의 계수를 비교할 수 없다.

따라서 우변의 분모를 $(x+1)^{10}$으로 통분하여 분자의 계수를 비교한다.

014

$k^2+2k+1,\ 3k^2+4k+9$가 자연수이고 집합 A_k의 원소가 자연수이므로

$n(A_k)=(3k^2+4k+9)-(k^2+2k+1)+1$ 참고

$\quad=2k^2+2k+9$

또, $2k^2+1,\ 3k^2+k+1$이 자연수이고 집합 B_k의 원소가 자연수이므로

$n(B_k)=(3k^2+k+1)-(2k^2+1)$ 참고

$\quad=k^2+k$

따라서

$$f(k)=\frac{n(A_k)}{n(B_k)}=\frac{2k^2+2k+9}{k^2+k}=\frac{2(k^2+k)+9}{k^2+k}=2+\frac{9}{k(k+1)}=2+9\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(8)$

$$=\left\{2+9\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)\right\}+\left\{2+9\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right\}+\cdots+\left\{2+9\times\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)\right\}$$

$$=2\times 8+9\times\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)\right\}$$

$$=16+9\times\left(1-\frac{1}{9}\right)=24$$

답 24

참고

$a,\ b$가 자연수일 때

$a\le x\le b$를 만족시키는 자연수 x의 개수: $b-a+1$

$a<x\le b$를 만족시키는 자연수 x의 개수: $b-a$

$a<x<b$를 만족시키는 자연수 x의 개수: $b-a-1$

015

$$f(x)=\frac{1}{x(2030-x)}=\frac{1}{2030}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2030-x}\right)$$

이라 하면

$$B=\frac{1}{1\times2029}+\frac{1}{2\times2028}+\frac{1}{3\times2027}+\cdots+\frac{1}{2029\times1}$$
$$=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2029)$$
$$=\frac{1}{2030}\times\left(1+\frac{1}{2029}\right)+\frac{1}{2030}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2028}\right)$$
$$+\frac{1}{2030}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2027}\right)+\cdots+\frac{1}{2030}\times\left(\frac{1}{2029}+1\right)$$
$$=\frac{1}{2030}\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2029}\right)$$
$$+\frac{1}{2030}\times\left(\frac{1}{2029}+\frac{1}{2028}+\frac{1}{2027}+\cdots+1\right)$$
$$=\frac{1}{1015}\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2029}\right)$$
$$=\frac{1}{1015}A$$

이므로 $A=1015B$

$\therefore k=1015$

답 1015

016

$f(f(f(a)+b)+c)+d=d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a}}}=\frac{37}{15}$이고

$\frac{37}{15}=2+\frac{7}{15}=2+\cfrac{1}{\cfrac{15}{7}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7}}$

이므로 $d=2$, $c=2$이고

$b+\frac{1}{a}=7$

이때 a, b가 자연수이므로 $b+\frac{1}{a}=7$을 만족시키는 자연수 a, b의 값은

$a=1$, $b=6$

→ $a\neq1$이면 $\frac{1}{a}$은 자연수가 아니므로 $b=7-\frac{1}{a}$도 자연수가 아니다.

$\therefore a+b+c+d=1+6+2+2=11$

답 11

017

1차 광고 후 평균 판매량의 변화에 의한 광고 효익 R_1은

$R_1=\frac{(2a-a)W}{p}=\frac{aW}{p}$

2차 광고에 든 비용은

$p+\frac{x}{100}p=\left(1+\frac{x}{100}\right)p$

3차 광고에 든 비용은

$\left(1+\frac{x}{100}\right)p+\frac{x}{100}\left(1+\frac{x}{100}\right)p=\left(1+\frac{x}{100}\right)^2p$

따라서 3차 광고 후 평균 판매량의 변화에 의한 광고 효익 R_3은

$R_3=\frac{(10a-4a)W}{\left(1+\frac{x}{100}\right)^2p}=\frac{6aW}{\left(1+\frac{x}{100}\right)^2p}$

이때 $\frac{R_1}{R_3}=\frac{2}{3}$이므로 $3R_1=2R_3$에서

$\frac{3aW}{p}=\frac{12aW}{\left(1+\frac{x}{100}\right)^2p}$

$\left(1+\frac{x}{100}\right)^2=4$

$1+\frac{x}{100}=2$ ($\because x>0$)

$\therefore x=100$

답 ②

018

ㄱ. $f(x)=\frac{kx+k-4}{x+2}=\frac{k(x+1)-4}{x+2}$에서

$f(-1)=-4$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, -4)$를 지난다. (참)

ㄴ. $\frac{kx+k-4}{x+2}=0$에서 $kx+k-4=0$

$\therefore x=\frac{4-k}{k}$

x절편이 양수이려면 $\frac{4-k}{k}>0$이고 k가 자연수이므로

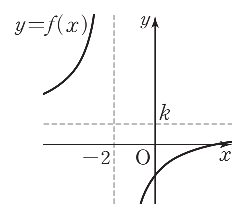
$4-k>0$에서 $k<4$

이를 만족시키는 자연수 k의 값은 1, 2, 3의 3개이다. (거짓)

ㄷ. $f(x)=\frac{kx+k-4}{x+2}$

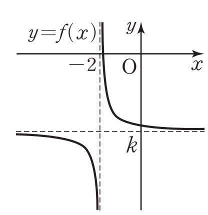
$=-\frac{k+4}{x+2}+k$

k가 자연수이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

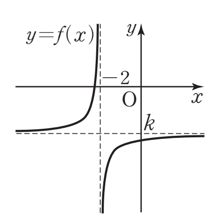


따라서 $x>-2$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가한다. (참)

ㄹ. $k<-4$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 항상 제2사분면과 제3사분면을 지난다.



$k>-4$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 항상 제2사분면과 제3사분면을 지난다.



즉, $k\neq-4$이면 그래프가 항상 제2사분면과 제3사분면을 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

019

$f_k(x)=\dfrac{kx-4k-5}{x-3}=-\dfrac{k+5}{x-3}+k$

x가 정수일 때 $f_k(x)$가 정수가 되려면 $-\dfrac{k+5}{x-3}$가 정수이어야 한다.

즉, $k+5$의 양의 약수를 d라 하면

$x-3=d$ 또는 $x-3=-d$

$\therefore N(k)=(k+5$의 양의 약수의 개수$)\times 2$

따라서 $N(k)=12$이려면 $k+5$의 양의 약수의 개수가 6이어야 한다.

양의 약수의 개수가 6인 자연수는 p^5 또는 $p^2\times q$ (p, q는 서로소인 소수)의 꼴이므로

$6\le k+5\le 65$에서

$k+5$가 p^5의 꼴인 경우는 2^5

$k+5$가 $p^2\times q$의 꼴인 경우는

$2^2\times 3$, $2^2\times 5$, $2^2\times 7$, $2^2\times 11$, $2^2\times 13$, $3^2\times 2$, $3^2\times 5$, $3^2\times 7$, $5^2\times 2$

즉, $k+5$가 될 수 있는 수는

12, 18, 20, 28, 32, 44, 45, 50, 52, 63

이므로 k의 값은

7, 13, 15, 23, 27, 39, 40, 45, 47, 58

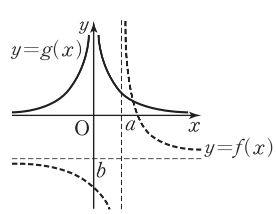
의 10개이다.

답 10

020

함수 $g(x)=|f(x+3)+2a|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 후 x축 아래에 그려진 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

이때 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(-x)$가 성립하려면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이어야 하므로 이 그래프의 점근선의 방정식은 다음 그림과 같이 $x=0$, $y=0$이어야 한다.



따라서 함수 $y=f(x+3)+2a$의 그래프의 점근선의 방정식도 $x=0$, $y=0$이어야 한다.

$f(x)=\dfrac{1}{x-a}+b$에서

$f(x+3)+2a=\dfrac{1}{x+3-a}+b+2a$

즉, 함수 $y=f(x+3)+2a$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=a-3$, $y=b+2a$

따라서 $a-3=0$, $b+2a=0$이어야 하므로

$a=3$, $b=-6$

$\therefore a^2+b^2=9+36=45$

답 45

021

$y=\dfrac{x+c}{ax+b}=\dfrac{c-\dfrac{b}{a}}{ax+b}+\dfrac{1}{a}$이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{b}{a}$, $y=\dfrac{1}{a}$

$\therefore \mathrm{P}\left(-\dfrac{b}{a},\ \dfrac{1}{a}\right)$

$y=\dfrac{x+c}{ax+b}$에 $y=0$을 대입하면

$x=-c$

$\therefore \mathrm{A}(-c,\ 0)$

$y=\dfrac{x+c}{ax+b}$에 $x=0$을 대입하면

$y=\dfrac{c}{b}$

$\therefore \mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{c}{b}\right)$

① $a>0$, $b>0$이므로 $\mathrm{P}\left(-\dfrac{b}{a},\ \dfrac{1}{a}\right)$에서

$-\dfrac{b}{a}<0$, $\dfrac{1}{a}>0$

즉, 점 P는 제2사분면에 있다. (참)

② $ac=2b$에서 $\dfrac{c}{b}=\dfrac{2}{a}$이므로 점 B의 좌표는

$\left(0,\ \dfrac{c}{b}\right)$, 즉 $\left(0,\ \dfrac{2}{a}\right)$ (참)

③ 두 점 A, B가 점 P에 대하여 대칭이면 점 P가 선분 AB의 중점이므로 참고

$\dfrac{-c+0}{2}=-\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{0+\dfrac{c}{b}}{2}=\dfrac{1}{a}$

$\therefore ac=2b$ (참)

④ 두 점 $\mathrm{A}(-c,\ 0)$, $\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{c}{b}\right)$를 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{\dfrac{c}{b}-0}{0-(-c)}=\dfrac{1}{b}$ (거짓)

⑤ 삼각형 OAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}\times c\times\dfrac{c}{b}$

$=\dfrac{c^2}{2b}$ (참)

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

참고 점에 대한 대칭이동

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면 점 $(a,\ b)$는 선분 PP'의 중점이다.

즉, $a=\dfrac{x+x'}{2}$, $b=\dfrac{y+y'}{2}$

022

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x+1}=\dfrac{-a+b}{x+1}+a$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

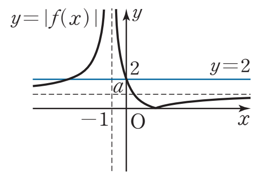
$x=-1$, $y=a$

$f(0)=-2$이므로

$b=-2$

$\therefore f(x)=\dfrac{-a-2}{x+1}+a$

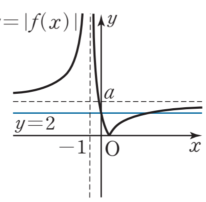
이때 a는 자연수이므로 방정식 $|f(x)|=2$의 음의 실근이 오직 한 개이려면 다음 그림과 같이 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 점근선인 직선 $y=a$가 직선 $y=2$보다 아래쪽에 있어야 한다.



즉, $a<2$이므로 $a=1$
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=1$이므로 점근선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는
$1\times1=1$

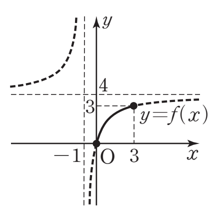
답 1

참고
$f(0)=-2$이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 점 $(0,\ 2)$를 지난다.
따라서 $a\geq2$이면 $-1<x<0$에서 $|f(x)|>2$이고, $x<-1$에서도 $|f(x)|>2$이므로 방정식 $|f(x)|=2$의 음의 실근은 존재하지 않는다.

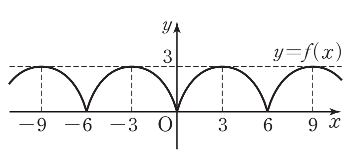


023

$0\leq x\leq3$에서
$$f(x)=\frac{4x}{x+1}=-\frac{4}{x+1}+4$$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

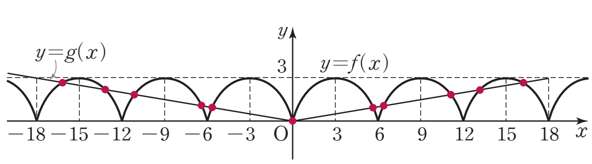


이때 조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 조건 (다)에서 $f(x)$는 주기가 6인 주기함수이므로 실수 전체의 집합에서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



한편, $g(x)=\begin{cases}-\frac{1}{6}x & (x<0)\\ \frac{1}{6}x & (x\geq0)\end{cases}$이고

$-\frac{1}{6}x=3$에서 $x=-18$, $\frac{1}{6}x=3$에서 $x=18$
이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

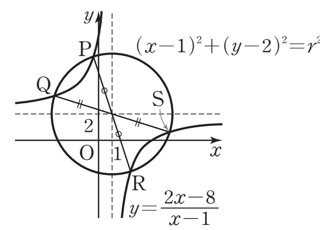


이때 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같으므로 구하는 실근의 개수는 11이다.

답 11

024

$$y=\frac{2x-8}{x-1}=-\frac{6}{x-1}+2$$
이므로 함수 $y=\frac{2x-8}{x-1}$의 그래프의 점근선의 방정식은
$x=1$, $y=2$
다음 그림과 같이 중심이 점 $(1,\ 2)$인 원과 함수 $y=\frac{2x-8}{x-1}$의 그래프가 만나는 네 점을 각각 P, Q, R, S라 하면 두 점 P, R와 두 점 Q, S는 각각 점 $(1,\ 2)$에 대하여 대칭이다.



네 점 P, Q, R, S의 y좌표를 각각 y_1, y_2, y_3, y_4라 하면
$\frac{y_1+y_3}{2}=2$, $\frac{y_2+y_4}{2}=2$
따라서 $y_1+y_3=4$, $y_2+y_4=4$이므로
$y_1+y_2+y_3+y_4=(y_1+y_3)+(y_2+y_4)=8$

답 8

025

$x\neq12$일 때,
$$f(x)=\frac{4x+12}{x-12}=\frac{60}{x-12}+4$$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(12,\ 4)$에 대하여 대칭이다.
따라서 점 $(12,\ 4)$에 대하여 대칭인 두 점을
$(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$
라 하면
$\frac{a+b}{2}=12$, $\frac{f(a)+f(b)}{2}=4$
$\therefore\ a+b=24$, $f(a)+f(b)=8$ 참고
$1+23=24$에서
$f(1)+f(23)=8$
$2+22=24$에서
$f(2)+f(22)=8$
$3+21=24$에서
$f(3)+f(21)=8$
$\vdots$
$11+13=24$에서
$f(11)+f(13)=8$
이므로
$S_{23}=f(1)+f(2)+\cdots+f(11)+f(12)+f(13)+\cdots+f(23)$
$\quad=8\times11+0=88$
$f(24)=\frac{60}{24-12}+4=9$
이므로
$S_{24}=S_{23}+f(24)=88+9=97>96$
따라서 $S_m>96$이 되도록 하는 자연수 m의 최솟값은 24이다.

답 24

참고

유리함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 교점이 (p, q)이면 0이 아닌 실수 t에 대하여 x좌표가 각각 $x=p-t$, $x=p+t$인 두 점은 점 (p, q)에 대하여 대칭이고 $f(p-t)+f(p+t)=2q$가 성립한다.

026

세 점 A, B, C는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$a=3p-2$ …… ㉠

$b+1=\dfrac{pb-2}{b-2}$ …… ㉡

$4=\dfrac{p(2b-2)-2}{2b-4}=\dfrac{pb-p-1}{b-2}$ …… ㉢

㉡에서 $p=b-1$, ㉢에서 $p=\dfrac{4b-7}{b-1}$이므로

$b-1=\dfrac{4b-7}{b-1}$

$(b-1)^2=4b-7$

$b^2-6b+8=0$

$(b-2)(b-4)=0$

$\therefore b=4\ (\because b>3)$

즉, $p=b-1$에서 $p=3$이고, ㉠에서 $a=7$이다.

$\therefore$ A$(3, 7)$, B$(4, 5)$, C$(6, 4)$

따라서

$m_1=\dfrac{5-7}{4-3}=-2$,

$m_2=\dfrac{4-5}{6-4}=-\dfrac{1}{2}$,

$m_3=\dfrac{4-7}{6-3}=-1$

이므로

$\dfrac{m_1+m_2}{m_3}\times(a+b+p)=\dfrac{-2+\left(-\frac{1}{2}\right)}{-1}\times(7+4+3)=35$

답 35

027

ㄱ. 함수 $f(x)=\left|\dfrac{k}{2x}-2\right|$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는

$\left|\dfrac{k}{2x}-2\right|=0$에서 $\dfrac{k}{2x}=2$

$\therefore x=\dfrac{k}{4}$

즉, 점 A의 좌표는 $\left(\dfrac{k}{4}, 0\right)$이다. (참)

ㄴ. 자연수 k에 대하여 점 P의 x좌표가 점 A의 x좌표보다 클 때, 점 P는 함수 $y=-\dfrac{k}{2x}+2$의 그래프 위의 점이다.

이때 직선 $y=2$는 함수 $y=-\dfrac{k}{2x}+2$의 그래프의 한 점근선이므로 점 P의 y좌표는 2보다 작다.

따라서 선분 PQ의 길이는 2보다 작다. (참)

ㄷ. 점 P의 x좌표가 k일 때, 점 P의 좌표는 $\left(k, \dfrac{3}{2}\right)$이므로 삼각형 AQP의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\left(k-\dfrac{k}{4}\right)\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{9k}{16}$

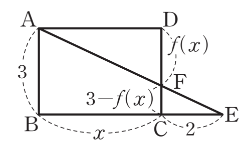
9와 16은 서로소이므로 $\dfrac{9k}{16}$가 자연수가 되려면 자연수 k는 16의 배수이어야 한다.

그러므로 자연수 k의 최솟값은 16이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

028



삼각형 ABE와 삼각형 FCE가 닮음이므로

$\overline{AB}:\overline{FC}=\overline{BE}:\overline{CE}$

$3:\{3-f(x)\}=(x+2):2$

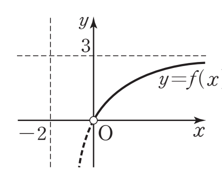
$(x+2)\{3-f(x)\}=6$

$x>0$이므로

$3-f(x)=\dfrac{6}{x+2}$

$\therefore f(x)=-\dfrac{6}{x+2}+3\ (x>0)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



답 ④

029

P$\left(a, \dfrac{k}{a}\right)$, Q$\left(a+2, \dfrac{k}{a+2}\right)$이므로 조건 (가)에서

$\dfrac{\frac{k}{a+2}-\frac{k}{a}}{(a+2)-a}=-1$

$\dfrac{k}{a+2}-\dfrac{k}{a}=-2$

$\dfrac{-2k}{a(a+2)}=-2$

$\therefore k=a(a+2)$

이때 P$(a, a+2)$, Q$(a+2, a)$이므로 조건 (나)에서 두 점 R, S의 좌표는

R$(-a, -a-2)$, S$(-a-2, -a)$ 다른 풀이

직선 PQ의 기울기는 -1이고

직선 PS의 기울기는

$\dfrac{-a-(a+2)}{(-a-2)-a}=1$,

직선 RS의 기울기는

$\dfrac{-a-(-a-2)}{(-a-2)-(-a)}=-1$,

직선 QR의 기울기는

$\dfrac{-a-2-a}{-a-(a+2)}=1$

이므로 사각형 PQRS는 직사각형이다.

이때

$\overline{PQ}=\sqrt{\{(a+2)-a\}^2+\{a-(a+2)\}^2}$

$=2\sqrt{2}$

$\overline{PS}=\sqrt{\{(-a-2)-a\}^2+\{-a-(a+2)\}^2}$

$=2\sqrt{2}(a+1)$

이고, 조건 (나)에서 사각형 PQRS의 넓이가 $8\sqrt{5}$이므로

$2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}(a+1)=8\sqrt{5}$

$\therefore a=\sqrt{5}-1$

$\therefore k=a(a+2)$

$=(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)=4$

답 ④

다른 풀이

두 점 $\mathrm{P}(a,\ a+2)$, $\mathrm{S}(-a-2,\ -a)$는 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이므로 직선 PS와 직선 $y=-x$는 서로 수직이다.

즉, 직선 PS의 기울기는 1이다.

두 점 $\mathrm{Q}(a+2,\ a)$, $\mathrm{R}(-a,\ -a-2)$도 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이므로 직선 QR와 직선 $y=-x$는 서로 수직이다.

즉, 직선 QR의 기울기는 1이다.

또, 두 점 $\mathrm{R}(-a,\ -a-2)$, $\mathrm{S}(-a-2,\ -a)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 직선 RS와 직선 $y=x$는 서로 수직이다.

즉, 직선 RS의 기울기는 -1이다.

따라서 사각형 PQRS는 직사각형이다.

이때

$\overline{PQ}=\sqrt{\{(a+2)-a\}^2+\{a-(a+2)\}^2}$

$=2\sqrt{2}$

$\overline{PS}=\sqrt{\{(-a-2)-a\}^2+\{-a-(a+2)\}^2}$

$=2\sqrt{2}(a+1)$

이고, 조건 (나)에서 사각형 PQRS의 넓이가 $8\sqrt{5}$이므로

$2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}(a+1)=8\sqrt{5}$

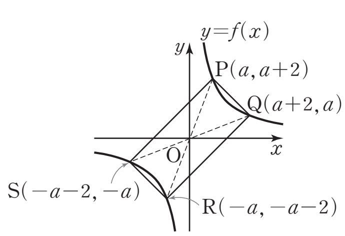
$\therefore a=\sqrt{5}-1$

$\therefore k=a(a+2)$

$=(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)=4$

참고

좌표평면 위에 네 점 P, Q, R, S를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



030

$y=\dfrac{x-3}{x-5}=\dfrac{2}{x-5}+1$이므로 함수 $y=\dfrac{x-3}{x-5}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=5$, $y=1$이고, $y=mx-5m+1=m(x-5)+1$이므로 직선 $y=mx-5m+1$은 m의 값에 관계없이 항상 두 점근선의 교점 $(5,\ 1)$을 지난다.

함수 $y=\dfrac{2}{x-5}+1$의 그래프와 직선 $y=m(x-5)+1$을 각각 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 함수 $y=\dfrac{2}{x-5}+1$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프가 되고 직선 $y=m(x-5)+1$은 직선 $y=mx$가 된다.

함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프와 직선 $y=mx$가 만나는 두 점을 각각 A′, B′이라 하고, 점 A′의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{2}{a}\right)$라 하면 두 점 A′, B′은 원점에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{B'}\left(-a,\ -\dfrac{2}{a}\right)$

$\overline{A'B'}=\overline{AB}=2\sqrt{5}$이므로

$\overline{A'B'}=\sqrt{(-a-a)^2+\left(-\dfrac{2}{a}-\dfrac{2}{a}\right)^2}=2\sqrt{5}$

$\sqrt{4a^2+\dfrac{16}{a^2}}=2\sqrt{5}$

양변을 제곱하면

$4a^2+\dfrac{16}{a^2}=20$

$\therefore a^2+\dfrac{4}{a^2}=5$ …… ㉠

두 점 A′, B′을 지나는 직선의 기울기가 m이므로

$m=\dfrac{-\dfrac{2}{a}-\dfrac{2}{a}}{-a-a}=\dfrac{2}{a^2}$에서

$a^2=\dfrac{2}{m}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{2}{m}+2m=5$

$2m^2-5m+2=0$, $(2m-1)(m-2)=0$

$\therefore m=2$ ($\because m>1$)

답 2

031

두 직선 PQ, PR가 각각 x축, y축에 수직이므로

$\angle\mathrm{QPR}=90^\circ$

삼각형 PQR의 넓이가 $\dfrac{8}{3}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{PR}=\dfrac{8}{3}$

이때 $\overline{PR}=3\overline{PQ}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{PQ}\times 3\overline{PQ}=\dfrac{8}{3}$

$\dfrac{3}{2}\overline{PQ}^2=\dfrac{8}{3}$, $\overline{PQ}^2=\dfrac{16}{9}$

$\therefore \overline{PQ}=\dfrac{4}{3}$ ($\because \overline{PQ}>0$), $\overline{PR}=4$

점 Q의 x좌표가 5이므로

$\mathrm{Q}\left(5,\ \dfrac{5n-9}{5+m}\right)$

$\overline{PQ}=\dfrac{4}{3}$에서

$5-\dfrac{5n-9}{5+m}=\dfrac{4}{3}$

$\dfrac{5n-9}{5+m}=\dfrac{11}{3}$, $11(5+m)=3(5n-9)$

$\therefore 11m-15n=-82$ …… ㉠

점 R의 y좌표가 5이므로 $\dfrac{nx-9}{x+m}=5$에서

$5(x+m)=nx-9$

$\therefore\ x=\dfrac{5m+9}{n-5}$

즉, 점 R의 좌표는 $\left(\dfrac{5m+9}{n-5},\ 5\right)$이므로

$\overline{PR}=4$에서 $5-\dfrac{5m+9}{n-5}=4$

$\dfrac{5m+9}{n-5}=1,\ 5m+9=n-5$

$\therefore\ 5m-n=-14$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=-2,\ n=4$

따라서 $f(x)=\dfrac{4x-9}{x-2}$이므로

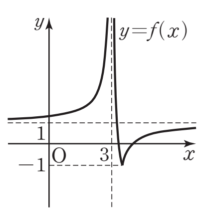
$f(m+n+1)=f(3)=3$

답 3

032

$f(x)=\left|\dfrac{2x-7}{x-3}\right|-1=\left|-\dfrac{1}{x-3}+2\right|-1$

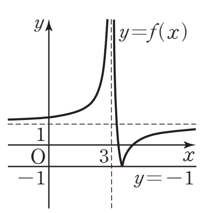
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{1}{x-3}+2$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것과 같으므로 다음 그림과 같다.



한편, 직선 $y=mx-m-1$, 즉 $y=m(x-1)-1$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ -1)$을 지난다.

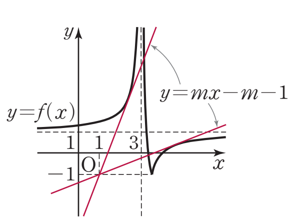
(i) $m=0$인 경우

직선 $y=mx-m-1$, 즉 $y=-1$은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 한 점에서 만난다.



(ii) $m>0$인 경우

직선 $y=mx-m-1$이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 한 점에서 만나려면 다음 그림과 같이 직선의 기울기 m의 값이 직선 $y=mx-m-1$이 $x<3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프에 접할 때의 기울기보다 작고 $x>3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프에 접할 때의 기울기보다 커야 한다.



직선 $y=mx-m-1$이 함수 $y=f(x)$의 그래프에 접할 때

$f(x)=\dfrac{2x-7}{x-3}-1$이므로 참고

$\dfrac{2x-7}{x-3}-1=mx-m-1$에서

$mx^2-2(2m+1)x+3m+7=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2m+1)^2-m(3m+7)=0$

$m^2-3m+1=0$

$\therefore\ m=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 또는 $m=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

즉, 조건을 만족시키는 m의 값의 범위는

$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<m<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 m의 값은 0, 1, 2의 3개이다.

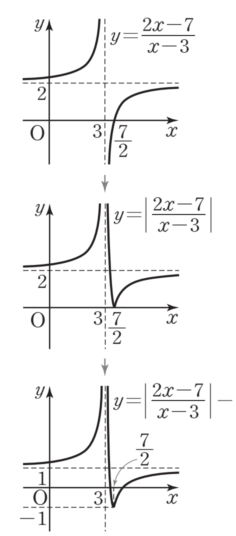
답 3

참고

함수 $f(x)=\left|\dfrac{2x-7}{x-3}\right|-1$의 그래프는 다음과 같은 순서로 그린다.

이때 $x<3$과 $x>\dfrac{7}{2}$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{2x-7}{x-3}$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것과 같으므로 직선 $y=mx-m-1$이 함수 $y=f(x)$의 그래프에 접할 때

$f(x)=\dfrac{2x-7}{x-3}-1$이다.



033

점 $P(a,\ b)$는 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프 위의 점이므로 $b=\dfrac{k}{a}$

$\therefore\ P\left(a,\ \dfrac{k}{a}\right)$

점 P와 점 Q의 x좌표가 같으므로 점 Q의 좌표는 $Q(a,\ 0)$

삼각형 OPQ의 넓이를 이용하면

$\dfrac{1}{2}\times\overline{OQ}\times\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{QH}$

이므로

$\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{k}{a}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{a^2+\dfrac{k^2}{a^2}}\times\overline{QH}$

$\therefore\ \overline{QH}=\dfrac{k}{\sqrt{a^2+\dfrac{k^2}{a^2}}}$

이때 $a^2>0,\ k^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+\dfrac{k^2}{a^2}\ge2\sqrt{a^2\times\dfrac{k^2}{a^2}}=2k$ $\left(\text{단, 등호는 } a^2=\dfrac{k^2}{a^2}\text{일 때 성립한다.}\right)$

$\overline{QH}\le\dfrac{k}{\sqrt{2k}}=\dfrac{\sqrt{2k}}{2}$

즉, 선분 QH의 길이의 최댓값은 $\frac{\sqrt{2k}}{2}$이므로

$M_k=\frac{\sqrt{2k}}{2}$

이때 등호는 $a^2=\frac{k^2}{a^2}$일 때 성립하므로 선분 QH의 길이가 최대일 때의 a의 값은

$a^4=k^2$에서

$a=\sqrt{k}$

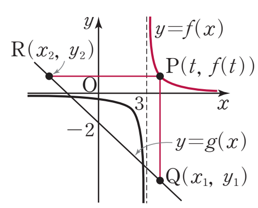
즉, $a_k=\sqrt{k}$이므로

$$\frac{M_k}{a_k}=\frac{\frac{\sqrt{2k}}{2}}{\sqrt{k}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

034

$x_1=t$에서 두 점 P, Q의 x좌표가 같으므로 직선 PQ는 x축에 수직이고, $y_2=f(t)$에서 두 점 P, R의 y좌표가 같으므로 직선 PR는 y축에 수직이다.



$\mathrm{Q}(t,\ g(t))$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=f(t)-g(t)$

$=\frac{2}{t-3}-(-t-2)$

$=\frac{2}{t-3}+t+2$

점 $\mathrm{R}(x_2,\ y_2)$가 직선 $g(x)=-x-2$ 위의 점이므로

$y_2=-x_2-2$

$y_2=f(t)$이므로

$-x_2-2=\frac{2}{t-3}$

즉, $x_2=-\frac{2}{t-3}-2$이므로

$\overline{\mathrm{PR}}=t-x_2$

$=t-\left(-\frac{2}{t-3}-2\right)$

$=\frac{2}{t-3}+t+2$ 참고

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}=2\left(\frac{2}{t-3}+t+2\right)$

이때 $t-3>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2\left(\frac{2}{t-3}+t-3+5\right)\geq 2\left(2\sqrt{\frac{2}{t-3}\times(t-3)}+5\right)$$
$$=10+4\sqrt{2}$$
$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{2}{t-3}=t-3\text{일 때 성립한다.}\right)$$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$의 최솟값은 $10+4\sqrt{2}$이다.

답 $10+4\sqrt{2}$

참고

직선 $g(x)=-x-2$의 기울기가 -1이므로 $\triangle\mathrm{PQR}$는 직각이등변삼각형이다. 즉, 선분 PR의 길이를 직접 구해 보지 않아도 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$임을 알 수 있다.

035

$g(f(x))=1$ 또는 $g(f(x))=0$이므로 방정식

$(g\circ f)(x)+(f\circ f)(x)=1$에서

$(g\circ f)(x)=1,\ (f\circ f)(x)=0$ 또는

$(g\circ f)(x)=0,\ (f\circ f)(x)=1$

이어야 한다.

$f(x)=\frac{36}{x-5}$에서

$(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$$=\frac{36}{\frac{36}{x-5}-5}$$
$$=\frac{36(x-5)}{-5x+61}$$

(i) $(g\circ f)(x)=1,\ (f\circ f)(x)=0$일 때

$(f\circ f)(x)=0$에서

$\frac{36(x-5)}{-5x+61}=0$

$\therefore\ x=5$

이때 함수 $f(x)$에서 $x\neq5$이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $(g\circ f)(x)=0,\ (f\circ f)(x)=1$일 때

$(f\circ f)(x)=1$에서

$\frac{36(x-5)}{-5x+61}=1$

$36x-180=-5x+61$

$\therefore\ x=\frac{241}{41}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=0$에서 $f(x)$는 정수의 제곱인 수가 아니어야 하고, $f\left(\frac{241}{41}\right)=41$이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $\alpha=\frac{241}{41}$이므로

$41\alpha=241$

답 241

036

$f^1(x)=f(x)$

$=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f^1(x))$

$$=1-\frac{1}{\frac{x-1}{x}}=-\frac{1}{x-1}$$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$

$$=1-\frac{1}{-\frac{1}{x-1}}=x$$

⋮

따라서 음이 아닌 정수 k에 대하여

$f^{3k+1}(x)=\frac{x-1}{x},\ f^{3k+2}(x)=-\frac{1}{x-1},\ f^{3k+3}(x)=x$

이므로

$f^{3k+1}(2)=\frac{1}{2},\ f^{3k+2}(2)=-1,\ f^{3k+3}(2)=2$

$\therefore\ a_{3k+1}=\frac{1}{2},\ a_{3k+2}=-1,\ a_{3k+3}=2$

이차방정식 $x^2-(2a_n-1)x+a_n{}^2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2a_n-1)^2-4a_n{}^2=1-4a_n$

(i) $n=3k+1$일 때

$D=1-4a_{3k+1}$

$=1-4\times\frac{1}{2}=-1<0$

즉, $g(3k+1)=0$이므로

$g(1)=g(4)=g(7)=g(10)=0$

(ii) $n=3k+2$일 때

$D=1-4a_{3k+2}$

$=1-4\times(-1)=5>0$

즉, $g(3k+2)=2$이므로

$g(2)=g(5)=g(8)=2$

(iii) $n=3k+3$일 때

$D=1-4a_{3k+3}$

$=1-4\times2=-7<0$

즉, $g(3k+3)=0$이므로

$g(3)=g(6)=g(9)=0$

(i)~(iii)에서

$g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(10)=2\times3=6$

답 6

037

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A$(a,\ 0)$, B$(0,\ b)$라 하면 두 점 $(0,\ a)$, $(b,\ 0)$은 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로 $f(0)=a$, $f(b)=0$이다.

$\frac{x+1}{2x-1}=0$에서 $x=-1$이므로

$f(0)=2\times(-1)+3=1$

$\therefore a=1$

또, $2x+3=0$에서 $x=-\frac{3}{2}$이므로

$$b=\frac{-\frac{3}{2}+1}{2\times\left(-\frac{3}{2}\right)-1}=\frac{1}{8}$$

따라서 A$(1,\ 0)$, B$\left(0,\ \frac{1}{8}\right)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{8}=\frac{1}{16}$

답 ③

다른 풀이

$f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)=2x+3$에서 $t=\frac{x+1}{2x-1}$이라 하고 x에 대하여 정리하면

$x=\frac{t+1}{2t-1}$

즉, $f(t)=2\times\frac{t+1}{2t-1}+3=\frac{8t-1}{2t-1}$이므로

$f(x)=\frac{8x-1}{2x-1}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2x-8}$

$\frac{x-1}{2x-8}=0$에서 $x=1$

$\therefore$ A$(1,\ 0)$

$f^{-1}(0)=\frac{1}{8}$이므로 B$\left(0,\ \frac{1}{8}\right)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{8}=\frac{1}{16}$

038

조건 (가)에서 $x\neq-a$인 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ f)(x)=x$이므로 함수 $f(x)$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$는 일치한다.

이때 $f(x)=\frac{-x+b}{x+a}$의 역함수는

$f^{-1}(x)=\frac{-ax+b}{x+1}$

이고, $f(x)$와 $f^{-1}(x)$가 일치하므로 $a=1$

$\therefore f(x)=\frac{-x+b}{x+1}$

한편,

$f(x)=\frac{-x+b}{x+1}=\frac{b+1}{x+1}-1$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$x=-1$, $y=-1$

즉, 두 점근선의 교점 C의 좌표는

$(-1,\ -1)$

점 C$(-1,\ -1)$과 직선 $y=x+2$, 즉 $x-y+2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-1-(-1)+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

이고, 조건 (나)에서 삼각형 ABC의 넓이가 4이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\text{AB}}\times\sqrt{2}=4$

$\therefore \overline{\text{AB}}=4\sqrt{2}$

이때 함수 $y=\frac{-x+b}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=x+2$의 두 교점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면

$\overline{\text{AB}}=\sqrt{2}|\alpha-\beta|$ 참고

이므로

$\sqrt{2}|\alpha-\beta|=4\sqrt{2}$

$\therefore |\alpha-\beta|=4$

$\frac{-x+b}{x+1}=x+2$에서

$-x+b=(x+2)(x+1)$, $-x+b=x^2+3x+2$

$\therefore x^2+4x+2-b=0$

이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=2-b$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서

$16=16-4(2-b)$

$\therefore b=2$

$\therefore a+b=1+2=3$

답 3

참고

기울기가 1인 직선 위의 두 점 사이의 거리는 두 점의 x좌표의 차에 $\sqrt{2}$를 곱한 것과 같다. 즉, 두 점 A, B는 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로 $\overline{\text{AB}}=\sqrt{2}|\alpha-\beta|$이다.

039

$f(x)=\frac{ax-5}{x-b}$에서 $f^{-1}(x)=\frac{bx-5}{x-a}$이므로

$f^{-1}(x+2)+2=\frac{b(x+2)-5}{(x+2)-a}+2$

$=\frac{(b+2)x-2a+2b-1}{x-a+2}$

조건 (가)에서 $f(x)=f^{-1}(x+2)+2$이므로

$b=a-2$ …… ㉠

$y=\dfrac{ax-5}{x-b}$에서

$y=0$일 때 $x=\dfrac{5}{a}$

$x=0$일 때

$y=\dfrac{5}{b}$

곡선 $y=\dfrac{ax-5}{x-b}$가 x축, y축과 만나는 두 점의 좌표는

$\mathrm{A}\left(\dfrac{5}{a},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{5}{b}\right)$

조건 (나)에서 $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=1:2$이므로

$\dfrac{5}{a}:\dfrac{5}{b}=1:2$

$\therefore a=2b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=2$

$\therefore a^2+b^2=16+4=20$

답 20

040

$g(x)=-\dfrac{12}{x+2}+6$, $h(x)=\dfrac{2}{5}x+k$라 하자.

$0\le x<3$에서 정의된 함수 $y=g(x)$의 치역은 $\left\{y\,\middle|\,0\le y<\dfrac{18}{5}\right\}$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면 집합 $\{x|x\ge3\}$에서 정의된 함수 $y=h(x)$의 치역이 $\left\{y\,\middle|\,y\ge\dfrac{18}{5}\right\}$이어야 한다.

이때 함수 $h(x)=\dfrac{2}{5}x+k$는 x의 값이 증가할 때 $h(x)$의 값도 증가하므로 $h(3)=\dfrac{18}{5}$이어야 한다.

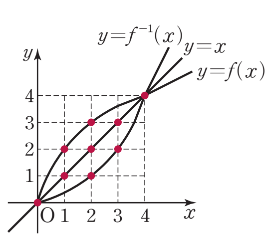
즉, $\dfrac{2}{5}\times3+k=\dfrac{18}{5}$에서 $k=\dfrac{12}{5}$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}-\dfrac{12}{x+2}+6 & (0\le x<3)\\ \dfrac{2}{5}x+\dfrac{12}{5} & (x\ge3)\end{cases}$$

x좌표가 정수인 점에서의 $f(x)$의 값을 구하면

$f(0)=0$, $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=\dfrac{18}{5}<4$, $f(4)=4$, $\cdots$

이고 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 다음 그림과 같다.



따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 영역의 경계 및 내부에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$, $(3,\ 3)$, $(4,\ 4)$의 9개이다.

답 9

041

일등급의 메모장

유리함수의 그래프의 개형을 추론할 때, 점근선의 위치를 기준으로 미지수의 범위를 나누어 해결할 수 있다.

(1) 왼쪽 점근선 $(x<a)$: $y=b$

(2) 오른쪽 점근선 $(x\ge a)$: $y=a+b$

(3) 경계점의 함숫값: $y=g(a)$

$f(x)=\dfrac{bx}{x-a}=\dfrac{ab}{x-a}+b$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=a$, $y=b$

이때 함수 $y=f(x+2a)+a$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-2a$만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=f(x+2a)+a$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=a-2a$, $y=b+a$, 즉 $x=-a$, $y=b+a$

이다.

$\{t|h(t)=1\}=\{t|-9\le t\le-8\}\cup\{t|t\ge k\}$ …… ㉠

를 만족시키는 경우를 찾아보자.

집합 $\{t|h(t)=1\}$은 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수가 1인 모든 실수 t의 값의 집합이다.

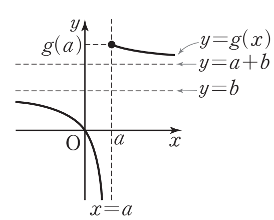
따라서 ㉠은 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수가 1이 되는 실수 t의 값의 범위는

$-9\le t\le-8$ 또는 $t\ge k$

임을 나타낸다.

(i) $b>0$인 경우

$a>0$, $b>0$, $a+b>b>0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수가 1이 되는 실수 t의 값의 범위는

$t<b$ 또는 $a+b<t\le g(a)$

이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $b<0$인 경우

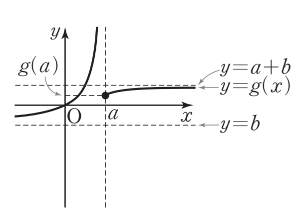
$a>0$, $b<0$이고 $b<a+b$이다.

$g(a)=f(3a)+a=\dfrac{3}{2}b+a$ …… ㉡

이므로 다음의 경우로 나누어 살펴보자.

ⓐ $b<g(a)$인 경우

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



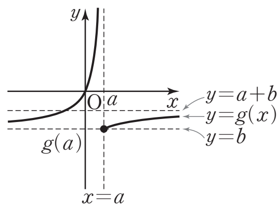
이때 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수가 1이 되는 실수 t의 값의 범위는

$b<t<g(a)$ 또는 $t \geq a+b$

이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

ⓑ $b=g(a)$인 경우

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



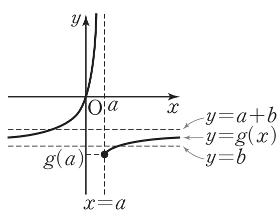
이때 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수가 1이 되는 실수 t의 값의 범위는

$t=b$ 또는 $t \geq a+b$

이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

ⓒ $b>g(a)$인 경우

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수가 1이 되는 실수 t의 값의 범위는

$g(a) \leq t \leq b$ 또는 $t \geq a+b$

이때 ㉠을 만족시키려면

$g(a)=-9$, $b=-8$, $a+b=k$

이어야 한다.

㉡에서 $g(a)=\frac{3}{2}\times(-8)+a=-12+a$이므로

$-12+a=-9 \qquad \therefore a=3$

$\therefore k=a+b=3+(-8)=-5$

(i), (ii)에서

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{-8x}{x-3} & (x<3) \\ \dfrac{-8(x+6)}{x+3}+3 & (x \geq 3) \end{cases}$$

이므로 $g(-k)=g(5)=-8$

$\therefore a\times b\times g(-k)=3\times(-8)\times(-8)=192$

답 192

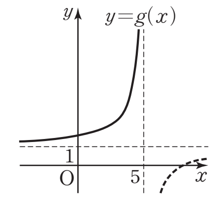
042

일등급의 메모장

함수 $g(x)$는 증가하므로 $g(t) \leq x \leq g(t+2)$에서

t의 값의 범위	최솟값 $h(t)$	최솟값의 위치
$t<1$	$f(g(t+2))$	$x=g(t+2)$
$1 \leq t<3$	6	$g(t) \leq x \leq g(t+2)$에 존재

함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $g(x)$는 $x<5$에서 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값도 증가하므로 $g(t)<g(t+2)$이다.

$t<1$일 때, $h(t)=f(g(t+2))$이므로

$g(t) \leq x \leq g(t+2)$에서 함수 $f(x)$는 $x=g(t+2)$일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $g(t) \leq x \leq g(t+2)$에서 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

$1 \leq t<3$일 때, $h(t)=6$이므로 $g(t) \leq x \leq g(t+2)$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 6으로 일정하다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 $g(t) \leq x \leq g(t+2)$에 존재하고 y좌표는 6이다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 $(a,\ 6)$이라 하면 a는 $1 \leq t<3$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t) \leq a \leq g(t+2)$이어야 하므로

$a=g(3)=2$

$f(x)=\alpha(x-2)^2+6$ (α는 상수)이라 하면

$h(-1)=7$에서

$$\begin{aligned} h(-1)&=f(g(1)) \\ &=f\left(\frac{3}{2}\right) \\ &=\frac{\alpha}{4}+6 \end{aligned}$$

이므로

$\frac{\alpha}{4}+6=7$

$\therefore \alpha=4$

따라서 $f(x)=4(x-2)^2+6$이므로

$f(5)=42$

답 42

043

일등급의 메모장

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $x=a$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식: $y=f(2a-x)$

(2) 함수 $y=f(x)$가 직선 $x=a$에 대하여 대칭

$\iff$ 정의역의 모든 x에 대하여 $f(x)=f(2a-x)$

$\iff$ 정의역의 모든 x에 대하여 $f(a+x)=f(a-x)$

조건 (가)에 의하여 $0 \leq x \leq 1$일 때

$f(x)=\dfrac{ax-1}{x-b}=\dfrac{ab-1}{x-b}+a$

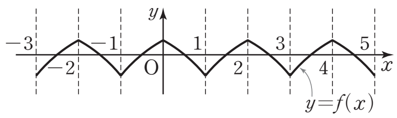
이므로 $b>1$, $ab>1$이다.

즉, $0 \leq x \leq 1$일 때 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)=\frac{1}{b}$, 최솟값은 $f(1)=\frac{a-1}{1-b}$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 조건 (나)에 의하여 직선 $x=0$에 대하여 대칭이고, 조건 (다)에 의하여 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$f(2+x)=f(2-(2+x))=f(-x)=f(x)$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



$-3\le x\le 5$에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=-\frac{1}{a}$과 만나는 점의 개수가 5이므로 $-\frac{1}{a}=f(1)$이어야 한다.

즉, $-\frac{1}{a}=\frac{a-1}{1-b}$에서

$b=a^2-a+1$ …… ㉠

또, $0\le x\le 1$일 때 $f(x)=\frac{ax-1}{x-b}=0$을 만족시키는 x의 값은 $\frac{1}{a}$이고 $f\left(\frac{2}{b+1}\right)=0$에서 $0<\frac{2}{b+1}<1$이므로

$\frac{1}{a}=\frac{2}{b+1}$

$\therefore b=2a-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=3$ $(\because b>1)$

$\therefore a+b=2+3=5$

답 5

044

일등급의 메모장

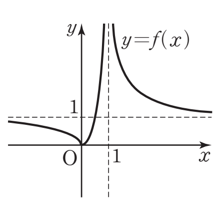
원점을 지나는 직선 $y=kx$ 위의 세 점 $\mathrm{A}(0, 0)$, $\mathrm{B}(x_1, y_1)$, $\mathrm{C}(x_2, y_2)$에 대하여

$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{|x_2-0|}{|x_1-0|}=\frac{|x_2|}{|x_1|}$

➡ 각 구간별로 방정식 $f(x)=kx$의 해만 구한 후, 비율을 계산하자.

$$f(x)=\left|\frac{x}{x-1}\right| =\begin{cases}\frac{x}{x-1} & (x\le 0 \text{ 또는 } x>1)\\ \frac{x}{1-x} & (0<x<1)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. [반례] $k=-1$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx$는 한 점에서 만난다. (거짓)

ㄴ. $f(x)=kx$에서

$\left|\frac{x}{x-1}\right|=kx$

(i) $k=0$일 때

$\left|\frac{x}{x-1}\right|=0$

$\therefore x=0$

(ii) $k\ne 0$일 때

ⓐ $x\le 0$ 또는 $x>1$이면

$\frac{x}{x-1}=kx$에서

$x=kx^2-kx$

$kx^2-(k+1)x=0$

$x\{kx-(k+1)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1+\frac{1}{k}$

ⓑ $0<x<1$이면

$\frac{x}{1-x}=kx$에서

$x=kx-kx^2$

$kx^2-(k-1)x=0$

$x\{kx-(k-1)\}=0$

$\therefore x=1-\frac{1}{k}$

ㄴ. (i), (ii)에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나려면

$1+\frac{1}{k}<0$ 또는 $1+\frac{1}{k}>1$이고 $0<1-\frac{1}{k}<1$

이어야 한다.

$1+\frac{1}{k}<0$ 또는 $1+\frac{1}{k}>1$에서

$\frac{1}{k}<-1$ 또는 $\frac{1}{k}>0$

$\therefore -1<k<0$ 또는 $k>0$ …… ㉠

$0<1-\frac{1}{k}<1$에서 $0<\frac{1}{k}<1$

$\therefore k>1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$k>1$

따라서 $k>1$일 때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점

$\mathrm{A}(0, 0)$, $\mathrm{B}\left(1-\frac{1}{k}, k-1\right)$, $\mathrm{C}\left(1+\frac{1}{k}, k+1\right)$

에서 만난다.

이때 세 점 A, B, C가 모두 직선 $y=kx$ 위에 있으므로 두 선분의 길이의 비는 x좌표의 차의 비와 같다.

$$\therefore \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{1+\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{k}} =\frac{k+1}{k-1} =1+\frac{2}{k-1}$$

이 값이 자연수가 되려면 $k-1$이 2의 약수이어야 하므로

$k-1=1$ 또는 $k-1=2$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k의 값은 2, 3의 2개이다. (참)

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx$가 제2사분면 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$에서 만나므로 점 P는 곡선

$y=\frac{x}{x-1}$ $(x<0)$

위의 점이다.

즉, $b=\frac{a}{a-1}$에서

$b(a-1)=a$

$\therefore a+b=ab$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

045

일등급의 메모장

항상 성립하는 부등식은 그래프의 위치 관계로 해석할 수 있다.

$a\le x\le b$에서 부등식 $f(x)\ge g(x)$가 항상 성립한다.

$\Longleftrightarrow a\le x\le b$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있다.

$\Longleftrightarrow a\le x\le b$에서 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프가 직선 $y=0$보다 위쪽에 있다.

조건 (가)에 의하여

$f(x)-x=ax(x-3)\ (a<0)$

이라 하면

$f(x)=ax(x-3)+x\ (a<0)$

조건 (나)에 의하여 참고

$\frac{4x}{x+1}=0$에서 $x=0$

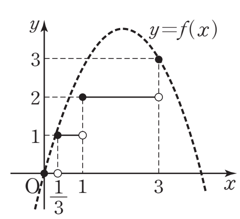
$\frac{4x}{x+1}=1$에서 $4x=x+1 \qquad \therefore x=\frac{1}{3}$

$\frac{4x}{x+1}=2$에서 $4x=2x+2 \qquad \therefore x=1$

$\frac{4x}{x+1}=3$에서 $4x=3x+3 \qquad \therefore x=3$

$$\therefore \left[\frac{4x}{x+1}\right]=\begin{cases} 0 & \left(0\le x<\frac{1}{3}\right) \\ 1 & \left(\frac{1}{3}\le x<1\right) \\ 2 & (1\le x<3) \\ 3 & (x=3) \end{cases}$$

부등식 $\left[\frac{4x}{x+1}\right]\le f(x)$가 항상 성립하도록 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다. 즉,



$f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{8}{9}a+\frac{1}{3}\ge 1$,

$f(1)=-2a+1\ge 2$

이어야 하므로

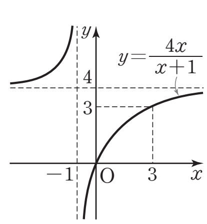
$a\le -\frac{3}{4}$

따라서 $f(1)+f(2)=(-2a+1)+(-2a+2)=-4a+3\ge 6$이므로 구하는 최솟값은 6이다.

답 6

참고

함수 $y=\frac{4x}{x+1}$, 즉 $y=-\frac{4}{x+1}+4$의 오른쪽 그림과 같으므로 $0\le x\le 3$에서 $0\le \frac{4x}{x+1}\le 3$이다. 따라서 $\left[\frac{4x}{x+1}\right]$가 될 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.



046

일등급의 메모장

(1) **유리함수와 행렬**

영행렬이 아닌 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$에 대하여

$f_A(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, $f_B(x)=\frac{px+q}{rx+s}$라 하면

① $f_{A+B}(x)=f_A(x)+f_B(x)$

② $f_{AB}(x)=(f_A\circ f_B)(x)$

③ $f_{A^n}(x)=f_A{}^n(x)\ (f^{n+1}=f\circ f^n$, n은 자연수$)$

④ $f_{A^{-1}}(x)=f_A{}^{-1}(x)$

$\left(\text{단, } A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},\ AA^{-1}=A^{-1}A=E\right)$

(2) **케일리－해밀턴 정리**

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

가 항상 성립한다. 확장

함수 $f(x)=\frac{3x-7}{x-2}$의 역함수는

$g(x)=\frac{2x-7}{x-3}$

즉,

$g^1(x)=\frac{2x-7}{x-3}$

$$g^2(x)=\frac{2\times\frac{2x-7}{x-3}-7}{\frac{2x-7}{x-3}-3}$$

$$=\frac{-3x+7}{-x+2}=\frac{3x-7}{x-2}=f(x)$$

$g^3(x)=(g\circ g^2)(x)=(g\circ f)(x)=x$

$g^4(x)=g(x)$

⋮

즉, 음이 아닌 정수 k에 대하여

$g^{3k+1}=g$, $g^{3k+2}=f$, $g^{3k+3}=I$ (I는 항등함수)

이므로

$g^{17}(a)+g^{18}(a)+g^{19}(a)$

$=g^2(a)+g^3(a)+g(a)$

$=\frac{3a-7}{a-2}+a+\frac{2a-7}{a-3}$

$=\frac{(3a-7)(a-3)+a(a-2)(a-3)+(2a-7)(a-2)}{(a-2)(a-3)}$

$=\frac{a^3-21a+35}{a^2-5a+6}=\frac{55}{6}$

$6a^3-55a^2+149a-120=0$

$(a-5)(2a-3)(3a-8)=0$

$\therefore a=\frac{3}{2}$ 또는 $a=\frac{8}{3}$ 또는 $a=5$

따라서 $M=5$, $m=\frac{3}{2}$이므로

$Mm=5\times\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$

답 $\frac{15}{2}$

다른 풀이 확장

$A=\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $f(x)=f_A(x)$라 하면

$A^{-1}=\frac{1}{3\times(-2)-(-7)\times 1}\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore g(x)=f^{-1}(x)=f_{A^{-1}}(x)$

$=\frac{-2x+7}{-x+3}=\frac{2x-7}{x-3}$

케일리—해밀턴 정리에 의하여 $(A^{-1})^2-A^{-1}+E=O$이므로

$(A^{-1}+E)\{(A^{-1})^2-A^{-1}+E\}=O$

$(A^{-1})^3+E=O$

$(A^{-1})^3=-E$ 참고

$\therefore g^3=I$ (단, I는 항등함수이다.)

또, $(A^{-1})^3=-E$에서

$(A^{-1})^2=-A$

$\therefore g^2(x)=f_{(A^{-1})^2}(x)=f_{-A}(x)$

$=\dfrac{-3x+7}{-x+2}=f(x)$

즉, 음이 아닌 정수 k에 대하여

$g^{3k+1}=g,\ g^{3k+2}=f,\ g^{3k+3}=I$ (I는 항등함수)

이므로

$g^{17}(a)+g^{18}(a)+g^{19}(a)$

$=g^2(a)+g^3(a)+g(a)$

$=\dfrac{3a-7}{a-2}+a+\dfrac{2a-7}{a-3}$

$=\dfrac{(3a-7)(a-3)+a(a-2)(a-3)+(2a-7)(a-2)}{(a-2)(a-3)}$

$=\dfrac{a^3-21a+35}{a^2-5a+6}=\dfrac{55}{6}$

$6a^3-55a^2+149a-120=0$

$(a-5)(2a-3)(3a-8)=0$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}$ 또는 $a=\dfrac{8}{3}$ 또는 $a=5$

따라서 $M=5,\ m=\dfrac{3}{2}$이므로

$Mm=5\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{15}{2}$

참고

$(A^{-6})^3=-E=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$이므로

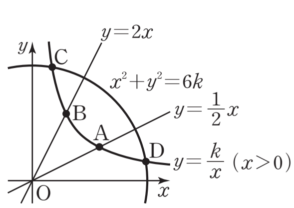
$g^3(x)=\dfrac{-1\times x+0}{0\times x-1}=x$

047

일등급의 메모장

대칭성을 이용하면 점의 좌표를 계산하는 과정을 줄일 수 있고, 외접원의 중심의 위치를 파악할 수 있다.

네 점 A, B, C, D를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$\dfrac{k}{x}=\dfrac{1}{2}x$에서

$x=\sqrt{2k}\ (\because x>0)$

이므로

$\mathrm{A}\left(\sqrt{2k},\ \dfrac{\sqrt{2k}}{2}\right)$

$\dfrac{k}{x}=2x$에서 $x=\dfrac{\sqrt{2k}}{2}\ (\because x>0)$이므로

$\mathrm{B}\left(\dfrac{\sqrt{2k}}{2},\ \sqrt{2k}\right)$

$x^2+y^2=6k$ …… ㉠

$y=\dfrac{k}{x}$에서

$xy=k$ …… ㉡

㉠$+2\times$㉡을 하면

$x^2+2xy+y^2=8k,\ (x+y)^2=8k$

$\therefore x+y=2\sqrt{2k}\ (\because x>0,\ y>0)$ …… ㉢

㉠$-2\times$㉡을 하면

$x^2-2xy+y^2=4k,\ (x-y)^2=4k$

$\therefore x-y=\pm2\sqrt{k}$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$x=(\sqrt{2}\pm1)\sqrt{k},\ y=(\sqrt{2}\mp1)\sqrt{k}$ (복호동순)

이때 점 C의 x좌표가 점 D의 x좌표보다 작으므로

$\mathrm{C}((\sqrt{2}-1)\sqrt{k},\ (\sqrt{2}+1)\sqrt{k})$,

$\mathrm{D}((\sqrt{2}+1)\sqrt{k},\ (\sqrt{2}-1)\sqrt{k})$

ㄱ. 삼각형 OAB의 넓이는

$(\sqrt{2k})^2-2\times\left(\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2k}\times\dfrac{\sqrt{2k}}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\times\left(\sqrt{2k}-\dfrac{\sqrt{2k}}{2}\right)^2=\dfrac{3k}{4}$

즉, $\dfrac{3k}{4}=3$에서 $k=4$ (참)

ㄴ. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(-\dfrac{\sqrt{2k}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2k}}{2}\right)^2}=\sqrt{k}$

$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{(2\sqrt{k})^2+(-2\sqrt{k})^2}=2\sqrt{2k}$

직선 AB의 방정식은

$y=\dfrac{\sqrt{2k}-\dfrac{\sqrt{2k}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2k}}{2}-\sqrt{2k}}(x-\sqrt{2k})+\dfrac{\sqrt{2k}}{2}$

$\therefore x+y-\dfrac{3\sqrt{2k}}{2}=0$

사각형 ABCD는 사다리꼴이고 윗변을 선분 AB, 아랫변을 선분 CD라 하면 높이는 점 C와 직선 AB 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{\left|(\sqrt{2}-1)\sqrt{k}+(\sqrt{2}+1)\sqrt{k}-\dfrac{3\sqrt{2k}}{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{k}}{2}$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{k}+2\sqrt{2k})\times\dfrac{\sqrt{k}}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}+1}{4}k$ (거짓)

ㄷ. $k=2$이면

$\mathrm{A}(2,\ 1),\ \mathrm{B}(1,\ 2),\ \mathrm{C}(2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}),\ \mathrm{D}(2+\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2})$

사각형 ABCD는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 외접원의 중심을 $\mathrm{P}(p,\ p)$, 반지름의 길이를 r라 하면 $r=\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PC}}$에서

$(p-2)^2+(p-1)^2=(p-2+\sqrt{2})^2+(p-2-\sqrt{2})^2$

$2p^2-6p+5=2p^2-8p+12$

$\therefore p=\dfrac{7}{2}$

즉,

$r^2=\overline{\mathrm{PA}}^2$

$=\left(\dfrac{7}{2}-2\right)^2+\left(\dfrac{7}{2}-1\right)^2$

$=\dfrac{9}{4}+\dfrac{25}{4}=\dfrac{17}{2}$

이므로 외접원의 넓이는 $\frac{17}{2}\pi$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

048

일등급의 메모장

(1) $f(x, y)+kg(x, y)=0$

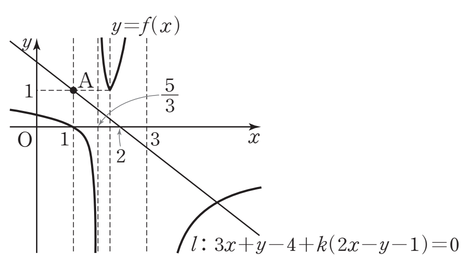
: k의 값에 관계없이 $f(x, y)=g(x, y)=0$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)에 대하여 항상 점 (a, b)를 지난다.

(2) '항상 지나는 점'이 있는 곡선 또는 직선이 주어진 경우, 그 점을 기준으로 그래프 개형이 어떻게 변하는지 살펴본다.

두 직선 $3x+y-4=0$, $2x-y-1=0$이 만나는 점을 A라 하면 점 A의 좌표는 $(1, 1)$이다.
따라서 직선 l: $3x+y-4+k(2x-y-1)=0$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $\mathrm{A}(1, 1)$을 지난다.

$$f(x)=\frac{x-1}{|x-1|-2|x-2|}=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x-3} & (x<1)\\[2mm] \dfrac{x-1}{3x-5} & (1\le x<2)\\[2mm] -\dfrac{x-1}{x-3} & (x\ge 2)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 l은 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 l이 만나는 서로 다른 점의 개수가 1이 되려면 직선 l의 기울기가 0보다 작거나 같고, 동시에 직선 l의 기울기가 점 $\mathrm{A}(1, 1)$을 지나면서 곡선 $y=\frac{x-1}{3x-5}$ $\left(1\le x<\frac{5}{3}\right)$에 접하는 직선의 기울기보다 커야 한다.

점 $\mathrm{A}(1, 1)$을 지나면서 곡선 $y=\frac{x-1}{3x-5}$ $\left(1\le x<\frac{5}{3}\right)$에 접하는 직선의 방정식을 $y=m(x-1)+1$이라 하자.

$\frac{x-1}{3x-5}=m(x-1)+1$에서

$x-1=m(3x-5)(x-1)+3x-5$

$3mx^2-2(4m-1)x+5m-4=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(4m-1)^2-3m(5m-4)=0$

$m^2+4m+1=0$

$\therefore m=-2-\sqrt{3}$ 참고

이때 $k\neq1$이면 직선 l의 기울기는 $\frac{2k+3}{k-1}$이므로

$-2-\sqrt{3}<\frac{2k+3}{k-1}\le 0$

(i) $k>1$인 경우

$\frac{2k+3}{k-1}>0$이므로 부등식의 해는 존재하지 않는다.

(ii) $k<1$인 경우

$-2-\sqrt{3}<\frac{2k+3}{k-1}$에서 $(-2-\sqrt{3})k+2+\sqrt{3}>2k+3$

$\therefore k<\frac{-7+5\sqrt{3}}{13}$ ...... ㉠

$\frac{2k+3}{k-1}\le 0$에서

$2k+3\ge 0$

$\therefore k\ge -\frac{3}{2}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$-\frac{3}{2}\le k<\frac{-7+5\sqrt{3}}{13}$

(i), (ii)에서 $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{-7+5\sqrt{3}}{13}$이므로

$b-a=\frac{-7+5\sqrt{3}}{13}-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{25+10\sqrt{3}}{26}$

따라서 $p=25$, $q=10$이므로

$p+q=25+10=35$

답 35

참고

직선 $y=m(x-1)+1$과 곡선 $y=\frac{x-1}{3x-5}$이 접할 때의 x좌표는

$x=\frac{4m-1}{3m}$이다.

이때 두 함수의 그래프는 $1\le x<\frac{5}{3}$에서 접해야 한다.

(1) $m=-2+\sqrt{3}$일 때, $x=2+\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(2) $m=-2-\sqrt{3}$일 때, $x=2-\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

06 Ⅲ. 함수와 그래프

무리함수

001

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{kx^2-(k+6)x+6}$의 값이 실수가 되려면

$kx^2-(k+6)x+6\ge0$ ······ ㉠

이어야 한다.

(i) $k=0$일 때

㉠에서 $-6x+6\ge0$ $\therefore x\le1$

즉, $x\le1$인 경우에만 성립한다.

(ii) $k\ne0$일 때

이차방정식 $kx^2-(k+6)x+6=0$의 판별식을 D라 하면

$k>0$이고 $D\le0$이어야 하므로 참고

$D=\{-(k+6)\}^2-4\times k\times6\le0$

$k^2-12k+36\le0$, $(k-6)^2\le0$

$\therefore k=6$

(i), (ii)에서 $k=6$이므로 정수 k의 개수는 1이다.

답 1

참고 이차부등식이 항상 성립할 조건

모든 실수 x에 대하여 이차부등식이 성립할 조건은 다음과 같다.

(1) $ax^2+bx+c>0 \Rightarrow a>0,\ b^2-4ac<0$

(2) $ax^2+bx+c\ge0 \Rightarrow a>0,\ b^2-4ac\le0$

(3) $ax^2+bx+c<0 \Rightarrow a<0,\ b^2-4ac<0$

(4) $ax^2+bx+c\le0 \Rightarrow a<0,\ b^2-4ac\le0$

002

$a=t^2+25$, $b=10t+7$을 주어진 식에 대입하면

$\sqrt{a+b-7}+\sqrt{a-b+7}$

$=\sqrt{(t^2+25)+(10t+7)-7}+\sqrt{(t^2+25)-(10t+7)+7}$

$=\sqrt{t^2+10t+25}+\sqrt{t^2-10t+25}$

$=\sqrt{(t+5)^2}+\sqrt{(t-5)^2}$

$=(t+5)-(t-5)$ ($\because 0<t<5$)

$=10$

답 ②

003

$x^2-4=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4$

$=a^2-2+\frac{1}{a^2}$

$=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$

$y^2-4=\left(b+\frac{1}{b}\right)^2-4$

$=b^2-2+\frac{1}{b^2}$

$=\left(b-\frac{1}{b}\right)^2$

이때 $0<a<1$, $b>1$에서 $a<\frac{1}{a}$, $b>\frac{1}{b}$이므로

$x\sqrt{y^2-4}-y\sqrt{x^2-4}$

$=\left(a+\frac{1}{a}\right)\sqrt{\left(b-\frac{1}{b}\right)^2}-\left(b+\frac{1}{b}\right)\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}$

$=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left|b-\frac{1}{b}\right|-\left(b+\frac{1}{b}\right)\left|a-\frac{1}{a}\right|$

$=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(a-\frac{1}{a}\right)$

$=\left(ab-\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{1}{ab}\right)+\left(ab-\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-\frac{1}{ab}\right)$

$=2\left(ab-\frac{1}{ab}\right)$

답 ④

004

$\sqrt{x}+\sqrt{x-5}=5$에서

$\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{x-5})(\sqrt{x}-\sqrt{x-5})}{\sqrt{x}-\sqrt{x-5}}=5$

$\frac{5}{\sqrt{x}-\sqrt{x-5}}=5$ $\therefore \sqrt{x}-\sqrt{x-5}=1$

두 식 $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}=5$, $\sqrt{x}-\sqrt{x-5}=1$을 변끼리 더하면

$2\sqrt{x}=6$, $\sqrt{x}=3$

$\therefore x=9$

$\therefore \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-5}}=\frac{3}{3-2}=3$

답 3

다른 풀이

$\sqrt{x}=a$, $\sqrt{x-5}=b$로 놓으면

$\sqrt{x}+\sqrt{x-5}=5$에서

$a+b=5$ ······ ㉠

$a^2-b^2=x-(x-5)=5$이므로

$(a+b)(a-b)=5$ $\therefore a-b=1$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-5}}=\frac{a}{a-b}=a$

$=\frac{(a+b)+(a-b)}{2}$

$=\frac{5+1}{2}=3$

005

$f(x)=\sqrt{8-2x}+1$에서

$8-2x\ge0$ $\therefore x\le4$

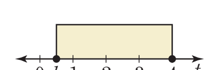
$\therefore A=\{x\,|\,x\le4\}$

$g(x)=\sqrt{3x-2}+k$에서

$g(x)\ge k$

$\therefore B=\{y\,|\,y\ge k\}$

따라서 $A\cap B=\{t\,|\,k\le t\le4\}$이고 집합 $A\cap B$에 속하는 정수의 개수가 4이므로 오른쪽 그림에서 k의 값의 범위는



$0<k\le1$

답 $0<k\le1$

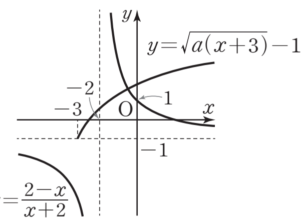
006

함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축

의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x+3)}-1\ (a>0)$

함수 $y=\sqrt{a(x+3)}-1$의 그래프가 함수 $y=\dfrac{2-x}{x+2}$, 즉 $y=\dfrac{4}{x+2}-1$의 그래프와 제2사분면에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 함수



$y=\sqrt{a(x+3)}-1$의 그래프의 y절편이 1보다 커야 하므로

$\sqrt{3a}-1>1$, $\sqrt{3a}>2$

$3a>4 \qquad \therefore a>\dfrac{4}{3}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 2이다.

답 2

007

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같으므로

$f(x)=-\sqrt{a(x-2)}+1$

이때 $f(0)=-1$이므로

$-\sqrt{-2a}+1=-1$

$\sqrt{-2a}=2$, $-2a=4$

$\therefore a=-2$

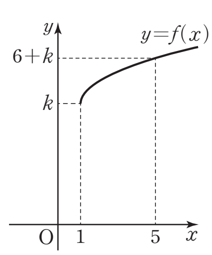
따라서 $f(x)=-\sqrt{-2(x-2)}+1$이므로

$f(-6)=-\sqrt{-2\times(-8)}+1=-3$

답 -3

008

$f(x)=3\sqrt{x-1}+k$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$1\le x\le 5$에서

$f(x)$의 최댓값은

$M=f(5)=6+k$

$f(x)$의 최솟값은

$m=f(1)=k$

이때 $M+m=38$이므로

$(6+k)+k=38 \qquad \therefore k=16$

답 16

009

$\mathrm{A}(k, \sqrt{2k})$, $\mathrm{B}(4k, 2\sqrt{2k})$, $\mathrm{C}(k, 0)$, $\mathrm{D}(4k, 0)$이고 사각형 ACDB는 넓이가 18인 사다리꼴이므로

$\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{2k}+2\sqrt{2k})\times 3k=18$

$k\sqrt{2k}=4$, $2k^3=16$

$k^3=8 \qquad \therefore k=2$

따라서 $\mathrm{A}(2, 2)$, $\mathrm{B}(8, 4)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(8-2)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{10}$

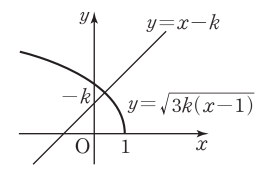
답 ②

010

$A\cap B=\varnothing$이 되려면 함수 $y=\sqrt{3k(x-1)}$의 그래프와 직선 $y=x-k$가 만나지 않아야 한다.

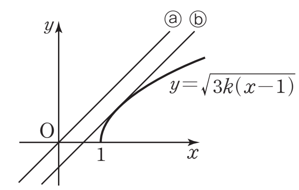
(i) $k<0$일 때

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{3k(x-1)}$의 그래프와 직선 $y=x-k$는 항상 한 점에서 만난다.



(ii) $k>0$일 때

직선 $y=x-k$가 오른쪽 그림의 두 직선 ⓐ, ⓑ 사이에 위치해야 한다.



직선 $y=x-k$가 함수 $y=\sqrt{3k(x-1)}$의 그래프에 접할 때 $x-k=\sqrt{3k(x-1)}$에서

$(x-k)^2=3k(x-1)$, $x^2-2kx+k^2=3kx-3k$

$x^2-5kx+k^2+3k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-5k)^2-4(k^2+3k)=0$

$21k^2-12k=0$, $3k(7k-4)=0$

$\therefore k=\dfrac{4}{7}\ (\because k>0)$

따라서 직선 $y=x-k$가 두 직선 ⓐ, ⓑ 사이에 위치하려면

$0<k<\dfrac{4}{7}$

(i), (ii)에서 $0<k<\dfrac{4}{7}$

답 ③

011

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(2, 4)$에서 만나므로

$f(2)=4$, $f^{-1}(2)=4$

즉, $f(2)=4$, $f(4)=2$

$f(2)=4$에서

$\sqrt{2a+b}+2=4 \qquad \therefore 2a+b=4$ …… ㉠

$f(4)=2$에서

$\sqrt{4a+b}+2=2 \qquad \therefore 4a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=8$

$\therefore f(x)=\sqrt{-2x+8}+2$

$f^{-1}(6)=k$라 하면 $f(k)=6$이므로

$\sqrt{-2k+8}+2=6$

$-2k+8=16 \qquad \therefore k=-4$

$\therefore f^{-1}(6)=-4$

답 -4

012

$f^{-1}(3)=a$에서 $f(a)=3$이므로

$\dfrac{a+2}{a-1}=3$, $a+2=3a-3$

$\therefore a=\dfrac{5}{2}$

$$(f\circ(g\circ f)^{-1})(4)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1})(4)$$
$$=g^{-1}(4)=b$$
에서 $g(b)=4$이므로
$\sqrt{3b-2}=4$, $3b-2=16$
$\therefore b=6$
$\therefore ab=\frac{5}{2}\times 6=15$

답 15

013

$\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$, $\sqrt{n+4}$가 각각 유리수가 되는 경우를 구해 보자.

(i) $\sqrt{n}$이 유리수가 되는 경우
$n=p^2$ (p는 자연수)의 꼴이어야 하고
$p^2\le 200$
이므로 가능한 p의 값은
1, 2, 3, $\cdots$, 14
따라서 $\sqrt{n}$이 유리수가 되도록 하는 n의 값은 14개이다.

(ii) $\sqrt{n+1}$이 유리수가 되는 경우
$n+1=q^2$ (q는 자연수)의 꼴이어야 하고 $n=q^2-1$에서
$1\le q^2-1\le 200$, 즉 $2\le q^2\le 201$
이므로 가능한 q의 값은
2, 3, 4, $\cdots$, 14
따라서 $\sqrt{n+1}$이 유리수가 되도록 하는 n의 값은 13개이다.

(iii) $\sqrt{n+4}$가 유리수가 되는 경우
$n+4=r^2$ (r는 자연수)의 꼴이어야 하고 $n=r^2-4$에서
$1\le r^2-4\le 200$, 즉 $5\le r^2\le 204$
이므로 가능한 r의 값은
3, 4, 5, $\cdots$, 14
따라서 $\sqrt{n+4}$가 유리수가 되도록 하는 n의 값은 12개이다.

이때 자연수의 제곱수는 1, 4, 9, 16, 25, 36, $\cdots$이고 n, $n+1$, $n+4$ 중 어느 두 수 또는 세 수가 동시에 제곱수가 되도록 하는 자연수 n의 값은 존재하지 않으므로 세 수 $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$, $\sqrt{n+4}$ 중 적어도 하나가 유리수가 되도록 하는 자연수 n의 개수는 세 수가 각각 유리수가 되도록 하는 자연수의 개수를 모두 더한 것과 같다. 참고

따라서 (i)~(iii)에서 세 수 $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$, $\sqrt{n+4}$ 중 적어도 하나가 유리수가 되도록 하는 200 이하의 자연수 n의 개수는
$14+13+12=39$
이므로 세 수 $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$, $\sqrt{n+4}$가 모두 무리수가 되도록 하는 200 이하의 자연수 n의 개수는
$200-39=161$

답 161

참고

$n=p^2$, $n+1=q^2$ (p, q는 서로 다른 자연수), 즉 $n=p^2$, $n=q^2-1$을 동시에 만족시키려면
$p^2=q^2-1$, $q^2-p^2=1$
$\therefore (q+p)(q-p)=1$
이때 $q+p\ge 3$, $q-p\ge 1$이므로 $(q+p)(q-p)=1$을 만족시키는 자연수 p, q의 값은 존재하지 않는다.
따라서 두 수 n, $n+1$이 동시에 제곱수가 되도록 하는 자연수 n의 값은 존재하지 않는다.
같은 방법으로 두 수 n, $n+4$와 $n+1$, $n+4$에 대해서도 동시에 제곱수가 되도록 하는 자연수 n의 값은 존재하지 않음을 알 수 있다.

014

$a-b=2+3\sqrt{b}$에서
$a-b-2=3\sqrt{b}$
이때 $\sqrt{b}$가 정수이어야 하므로 b는 제곱수가 되어야 한다.
따라서 b의 값이 될 수 있는 수는 1, 4, 9, 16, 25, 36이다.
$a-b-2$는 정수이므로 $\sqrt{b}$도 정수이어야 한다.
$a=b+2+3\sqrt{b}$에서

(i) $b=1$일 때
$a=1+2+3\sqrt{1}=6\le 40$

(ii) $b=4$일 때
$a=4+2+3\sqrt{4}=12\le 40$

(iii) $b=9$일 때
$a=9+2+3\sqrt{9}=20\le 40$

(iv) $b=16$일 때
$a=16+2+3\sqrt{16}=30\le 40$

(v) $b\ge 25$일 때
$a\ge 25+2+3\sqrt{25}=42>40$

(i)~(v)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는
(6, 1), (12, 4), (20, 9), (30, 16)
의 4개이다.

답 ①

015

$3a+2b=5$에서 $2b=5-3a$이므로
$$\sqrt{9-3a}+\sqrt{14-2b}=\sqrt{9-3a}+\sqrt{14-(5-3a)}$$
$$=\sqrt{9-3a}+\sqrt{9+3a}$$
$b<7$에서 $\frac{5-3a}{2}<7$이므로
$5-3a<14$ $\quad\therefore a>-3$
$\therefore -3<a<3$
$k=\sqrt{9-3a}+\sqrt{9+3a}$라 하면 $k\ge 0$이므로 k^2의 값이 최대일 때 k의 값도 최댓값을 갖는다. 다른 풀이
$$k^2=(\sqrt{9-3a}+\sqrt{9+3a})^2$$
$$=(9-3a)+(9+3a)+2\sqrt{9-3a}\sqrt{9+3a}$$
$$=18+6\sqrt{(3-a)(3+a)}$$
$$=18+6\sqrt{9-a^2}$$
따라서 k^2은 $a=0$일 때 최댓값 $18+6\sqrt{9}$, 즉 36을 가지므로 k는 최댓값 6을 갖는다.
즉, $\sqrt{9-3a}+\sqrt{14-2b}$의 최댓값은 6이다.

답 6

다른 풀이

$$\sqrt{9-3a}+\sqrt{14-2b}=\sqrt{9-3a}+\sqrt{9+3a}$$
$$\le\sqrt{2\{(9-3a)+(9+3a)\}}$$ 참고
$$=\sqrt{2\times 18}$$
$$=6$$
따라서 $\sqrt{9-3a}+\sqrt{14-2b}$의 최댓값은 6이다.

참고

음이 아닌 실수 u, v에 대하여
$(\sqrt{u}+\sqrt{v})^2=u+v+2\sqrt{uv}$
$\le u+v+(u+v)$ → 산술평균과 기하평균의 관계
$=2(u+v)$ (단, 등호는 $u=v$일 때 성립한다.)
즉, $(\sqrt{u}+\sqrt{v})^2\le 2(u+v)$이므로
$\sqrt{u}+\sqrt{v}\le\sqrt{2(u+v)}$

016

$\sqrt{17}-4=\dfrac{1}{8+a_1}$에서

$8+a_1=\dfrac{1}{\sqrt{17}-4}$

$=\dfrac{\sqrt{17}+4}{(\sqrt{17}-4)(\sqrt{17}+4)}$

$=\sqrt{17}+4$

$\therefore a_1=\sqrt{17}-4$

$a_1=\dfrac{1}{8+a_2}$, 즉 $\sqrt{17}-4=\dfrac{1}{8+a_2}$에서

$8+a_2=\dfrac{1}{\sqrt{17}-4}=\sqrt{17}+4$

$\therefore a_2=\sqrt{17}-4$

$a_2=\dfrac{1}{8+a_3}$, 즉 $\sqrt{17}-4=\dfrac{1}{8+a_3}$에서

$8+a_3=\dfrac{1}{\sqrt{17}-4}=\sqrt{17}+4$

$\therefore a_3=\sqrt{17}-4$

$\vdots$

같은 방법으로 하면 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=\sqrt{17}-4$

이므로

$a_{10}\times a_{11}=(\sqrt{17}-4)^2=33-8\sqrt{17}$

답 ④

017

$f(n)=\dfrac{1}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-1}}$

$=\dfrac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1}}{(\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-1})(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1})}$

$=\dfrac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1}}{3}$

이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(k)$

$=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}+\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{3}+\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{8}}{3}+\cdots+\dfrac{\sqrt{3k+2}-\sqrt{3k-1}}{3}$

$=\dfrac{\sqrt{3k+2}-\sqrt{2}}{3}$

$2\le\dfrac{\sqrt{3k+2}-\sqrt{2}}{3}<3$에서

$6\le\sqrt{3k+2}-\sqrt{2}<9$

$6+\sqrt{2}\le\sqrt{3k+2}<9+\sqrt{2}$

각 변을 제곱하면

$38+12\sqrt{2}\le 3k+2<83+18\sqrt{2}$

$\therefore 12+4\sqrt{2}\le k<27+6\sqrt{2}$

이때

$12+4\sqrt{2}=12+\sqrt{32}$

$=12+5.\times\times\times$

$=17.\times\times\times$

$27+6\sqrt{2}=27+\sqrt{72}$

$=27+8.\times\times\times$

$=35.\times\times\times$

이므로 자연수 k는 18, 19, 20, $\cdots$, 35의 18개이다.

답 18

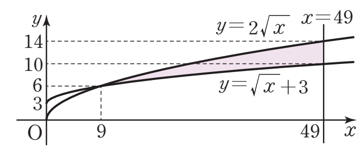
018

두 곡선 $y=\sqrt{x}+3$, $y=2\sqrt{x}$의 교점의 x좌표는 $\sqrt{x}+3=2\sqrt{x}$에서

$\sqrt{x}=3 \qquad \therefore x=9$

즉, 교점의 좌표는 $(9, 6)$이다.

또, 두 곡선 $y=\sqrt{x}+3$, $y=2\sqrt{x}$와 직선 $x=49$의 교점의 좌표는 각각 $(49, 10)$, $(49, 14)$이다. 다른풀이



$y=\sqrt{x}+3$에서

$y-3=\sqrt{x} \qquad \therefore x=(y-3)^2$

$y=2\sqrt{x}$에서

$\dfrac{y}{2}=\sqrt{x} \qquad \therefore x=\left(\dfrac{y}{2}\right)^2$

주어진 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점 (x, y)는

$\left(\dfrac{y}{2}\right)^2\le x\le(y-3)^2$ (단, $9\le x\le 49$, $6\le y\le 14$)

(i) $y=6$일 때

$9\le x\le 9$이므로 점 (x, y)는

$(9, 6)$

의 1개

(ii) $y=7$일 때

$\dfrac{49}{4}\le x\le 16$이므로 점 (x, y)는

$(13, 7)$, $(14, 7)$, $(15, 7)$, $(16, 7)$

의 4개

(iii) $y=8$일 때

$16\le x\le 25$이므로 점 (x, y)는

$(16, 8)$, $(17, 8)$, $(18, 8)$, $\cdots$, $(25, 8)$

의 10개

(iv) $y=9$일 때

$\dfrac{81}{4}\le x\le 36$이므로 점 (x, y)는

$(21, 9)$, $(22, 9)$, $(23, 9)$, $\cdots$, $(36, 9)$

의 16개

(v) $y=10$일 때

$25\le x\le 49$이므로 점 (x, y)는

$(25, 10)$, $(26, 10)$, $(27, 10)$, $\cdots$, $(49, 10)$

의 25개

(vi) $y=11$일 때

$\dfrac{121}{4}\le x\le 49$이므로 점 (x, y)는

$(31, 11)$, $(32, 11)$, $(33, 11)$, $\cdots$, $(49, 11)$

의 19개

(vii) $y=12$일 때

$36\le x\le 49$이므로 점 (x, y)는

$(36, 12)$, $(37, 12)$, $(38, 12)$, $\cdots$, $(49, 12)$

의 14개

(viii) $y=13$일 때

$\dfrac{169}{4}\le x\le 49$이므로 점 (x, y)는

$(43, 13)$, $(44, 13)$, $(45, 13)$, $\cdots$, $(49, 13)$

의 7개

(ix) $y=14$일 때

$49\le x\le 49$이므로 점 $(x,\ y)$는

$(49,\ 14)$

의 1개

(i)~(ix)에서 구하는 점의 개수는

$1+4+10+16+25+19+14+7+1=97$

답 97

다른 풀이

$9\le x\le 49$에서 곡선 $y=\sqrt{x}+3$과 x축 사이에 있는 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수는

$1\times5+7\times6+9\times7+11\times8+\underbrace{13\times9}_{36<(x좌표)\le49,\ 0<(y좌표)<10}=315$

$9\le x\le 49$에서 곡선 $y=2\sqrt{x}$ 위의 점 및 곡선과 x축 사이에 있는 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수는

$4\times6+3\times7+5\times8+4\times9+6\times10$

$+5\times11+7\times12+6\times13+1\times1\times14=412$

따라서 구하는 점의 개수는

$412-315=97$

019

$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a}+c$

이차함수의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

대칭축이 y축보다 오른쪽에 있으므로 $-\dfrac{b}{2a}>0$, 즉 $b<0$

y절편이 음수이므로 $c<0$

ㄱ. $\sqrt{(a+c)^2-4ac}=\sqrt{(a-c)^2}=|a-c|$

$a>0$, $c<0$에서 $a-c>0$이므로

$|a-c|=a-c$

$\therefore\ \sqrt{(a+c)^2-4ac}=a-c$ (참)

ㄴ. 방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=b^2-4ac>0$

$\therefore\ \sqrt{(b^2-4ac)^2}=|b^2-4ac|=b^2-4ac$ (참)

ㄷ. $\sqrt{(a-2b)^2}-\sqrt{(2b-c)^2}=|a-2b|-|2b-c|$

$a>0$, $b<0$, $c<0$에서 $a-2b>0$

그런데 $2b-c$의 부호는 알 수 없으므로 참고

$\sqrt{(a-2b)^2}-\sqrt{(2b-c)^2}=a-2b-|2b-c|$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

참고

$y=x^2-x-3$일 때 $a=1$, $b=-1$, $c=-3$이고

$|a-2b|-|2b-c|=2\ne4=a-c$

020

$y=\dfrac{cx+d}{ax+b}$

$=\dfrac{c\left(x+\dfrac{b}{a}\right)-\dfrac{bc}{a}+d}{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}$

$=\dfrac{-\dfrac{bc}{a}+d}{ax+b}+\dfrac{c}{a}$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-\dfrac{b}{a}$, $y=\dfrac{c}{a}$

이고 y축과 만나는 점의 x좌표는 $\dfrac{d}{b}$이다.

따라서 $-\dfrac{b}{a}>0$, $\dfrac{c}{a}>0$, $\dfrac{d}{b}<0$이므로

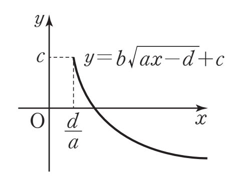
$a>0$, $b<0$, $c>0$, $d>0$ 또는 $a<0$, $b>0$, $c<0$, $d<0$

$y=b\sqrt{ax-d}+c=b\sqrt{a\left(x-\dfrac{d}{a}\right)}+c$

이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y=b\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{d}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

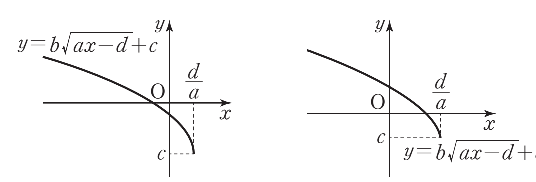
(i) $a>0$, $b<0$, $c>0$, $d>0$일 때

$b<0$, $a>0$이고 $\dfrac{d}{a}>0$, $c>0$이므로 함수 $y=b\sqrt{ax-d}+c$의 그래프는 다음 그림과 같이 제2사분면을 지나지 않는다.



(ii) $a<0$, $b>0$, $c<0$, $d<0$일 때

$b>0$, $a<0$이고 $\dfrac{d}{a}>0$, $c<0$이므로 함수 $y=b\sqrt{ax-d}+c$의 그래프는 다음 그림과 같이 제2사분면을 반드시 지난다.



(i), (ii)에서 $a>0$, $b<0$, $c>0$, $d>0$

답 ③

021

자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2}<\sqrt{n^2+2n}<\sqrt{n^2+2n+1}$이므로

$n<\sqrt{n^2+2n}<n+1$

즉, $\sqrt{n^2+2n}$의 정수 부분은 n이므로 소수 부분 $f(n)$은

$f(n)=\sqrt{n^2+2n}-n$

$\dfrac{1}{1-f(n)}=\dfrac{1}{1-(\sqrt{n^2+2n}-n)}$

$=\dfrac{1}{n+1-\sqrt{n^2+2n}}$

$=\dfrac{n+1+\sqrt{n^2+2n}}{(n+1-\sqrt{n^2+2n})(n+1+\sqrt{n^2+2n})}$

$=\dfrac{n+1+\sqrt{n^2+2n}}{(n+1)^2-(n^2+2n)}$

$=n+1+\sqrt{n^2+2n}$

$\dfrac{2n}{f(n)}=\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}-n}$

$=\dfrac{\sqrt{n^2+2n}+n}{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}$

$=\dfrac{2n(\sqrt{n^2+2n}+n)}{(n^2+2n)-n^2}$

$=\sqrt{n^2+2n}+n$

$\therefore g(n)=\dfrac{1}{1-f(n)}-\dfrac{2n}{f(n)}$

$=n+1+\sqrt{n^2+2n}-(\sqrt{n^2+2n}+n)$

$=1$

따라서

$g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(k)=1\times k=k$

이므로

$k=2028$

답 2028

022

두 별 A, B의 표면 온도를 각각 $T_{\rm A}$, $T_{\rm B}$, 반지름의 길이를 각각 $R_{\rm A}$, $R_{\rm B}$, 광도를 각각 $L_{\rm A}$, $L_{\rm B}$라 하면

$T_{\rm A}=\dfrac{1}{2}T_{\rm B}$, $R_{\rm A}=36R_{\rm B}$, $L_{\rm A}=kL_{\rm B}$

$T_{\rm A}{}^2=\dfrac{1}{R_{\rm A}}\sqrt{\dfrac{L_{\rm A}}{4\pi\sigma}}$에서

$\left(\dfrac{1}{2}T_{\rm B}\right)^2=\dfrac{1}{36R_{\rm B}}\sqrt{\dfrac{kL_{\rm B}}{4\pi\sigma}}$

$T_{\rm B}{}^2=\dfrac{\sqrt{k}}{9}\times\dfrac{1}{R_{\rm B}}\sqrt{\dfrac{L_{\rm B}}{4\pi\sigma}}$

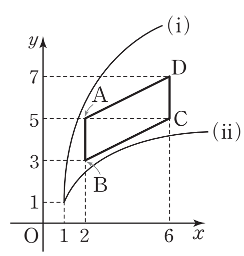
$T_{\rm B}{}^2=\dfrac{\sqrt{k}}{9}\times T_{\rm B}{}^2$, $\dfrac{\sqrt{k}}{9}=1$

$\therefore k=81$

답 ③

023

함수 $f(x)=\sqrt{a(x-1)}+1$ $(a>0)$의 그래프가 사각형 ABCD와 만나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 그래프가 선분 AD보다 위쪽에 있거나 선분 BC보다 아래쪽에 있어야 한다.



(i) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 선분 AD보다 위쪽에 있는 경우

$f(2)>5$, $f(6)>7$이어야 하므로

$\sqrt{a}+1>5$, $\sqrt{5a}+1>7$

$a>16$, $a>\dfrac{36}{5}$

$\therefore a>16$

(ii) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 선분 BC보다 아래쪽에 있는 경우

두 점 B, C를 지나는 직선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x+2$이고 직선 BC와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점이 없어야 하므로

$\dfrac{1}{2}x+2=\sqrt{a(x-1)}+1$

$x+2=2\sqrt{a(x-1)}$, $(x+1)=4a(x-1)$

$x^2+4(1-a)x+4(1+a)=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{2(1-a)\}^2-4(1+a)<0$

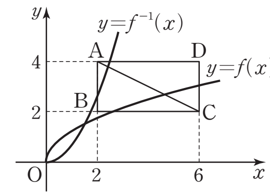
$a^2-3a<0$, $a(a-3)<0$

$\therefore 0<a<3$

(i), (ii)에서 $0<a<3$ 또는 $a>16$이므로 50 이하의 자연수 a는 1, 2, 17, 18, 19, $\cdots$, 50의 36개이다.

답 36

024



함수 $y=f(x)$의 그래프가 직사각형 ABCD와 만나려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 선분 AC와 만나야 한다.

즉, $f(2)\le4$, $f(6)\ge2$이어야 하므로

$\sqrt{2k}\le4$, $\sqrt{6k}\ge2$

$k\le8$, $k\ge\dfrac{2}{3}$

$\therefore \dfrac{2}{3}\le k\le8$ …… ㉠

$y=\sqrt{kx}$라 하면

$y^2=kx$, $x=\dfrac{y^2}{k}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{1}{k}x^2$ $(x\ge0)$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{1}{k}x^2$ $(x\ge0)$

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직사각형 ABCD와 만나려면 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 선분 AC와 만나야 한다.

즉, $f^{-1}(2)\le4$, $f^{-1}(6)\ge2$이어야 하므로

$\dfrac{4}{k}\le4$, $\dfrac{36}{k}\ge2$

$k\ge1$, $k\le18$

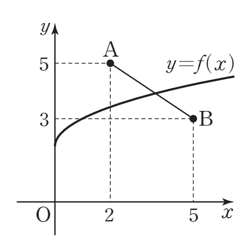
$\therefore 1\le k\le18$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $1\le k\le8$이므로 정수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 8의 8개이다.

답 8

025

$f(x)=a\sqrt{x}+b$라 하면 a, b가 자연수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프가 선분 AB와 만나려면 $f(2)\le5$, $f(5)\ge3$이어야 하므로

$\sqrt{2}a+b\le5$, $\sqrt{5}a+b\ge3$

$\therefore 3-\sqrt{5}a\le b\le5-\sqrt{2}a$

(i) $a=1$일 때

$3-\sqrt{5}\le b\le5-\sqrt{2}$이므로 자연수 b의 값은 1, 2, 3이다.

(ii) $a=2$일 때

$3-2\sqrt{5}\le b\le5-2\sqrt{2}$이므로 자연수 b의 값은 1, 2이다.

(iii) $a\ge3$일 때

$3-\sqrt{5}a\le b\le5-\sqrt{2}a$에서 $5-\sqrt{2}a<1$이므로 이를 만족시키는 자연수 b의 값은 없다.

(i)~(iii)에서 함수 $y=a\sqrt{x}+b$의 그래프가 선분 AB와 만나도록

하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$3+2=5$

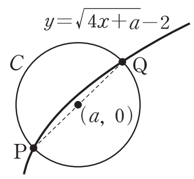
따라서 함수 $y=a\sqrt{x}+b$의 그래프가 선분 AB와 만나지 않도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$10\times10-5=95$

답 ⑤

026

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{4x+a}-2$와 원 C: $(x-a)^2+y^2=2$가 두 점 P, Q에서 만날 때, 원의 중심이 $(a, 0)$이므로 양수 t, s에 대하여 두 점 P, Q의 좌표를 각각 $(a-s, -t)$, $(a+s, t)$라 하자.



점 P는 곡선 $y=\sqrt{4x+a}-2$ 위의 점이므로

$-t=\sqrt{4(a-s)+a}-2$

$(-t+2)^2=4(a-s)+a$

$t^2-4t+4=5a-4s$ …… ㉠

점 Q도 곡선 $y=\sqrt{4x+a}-2$ 위의 점이므로

$t=\sqrt{4(a+s)+a}-2$

$(t+2)^2=4(a+s)+a$

$t^2+4t+4=5a+4s$ …… ㉡

㉡－㉠을 하면

$8t=8s$ $\quad\therefore t=s$ …… ㉢

선분 PQ는 원의 지름이므로

$\overline{PQ}=2\sqrt{2}$ $\quad\therefore \overline{PQ}^2=8$

또,

$\overline{PQ}^2=\{(a+s)-(a-s)\}^2+\{t-(-t)\}^2$

$=4s^2+4t^2$

$=8t^2$ ($\because$ ㉢)

이므로

$8t^2=8$ $\quad\therefore t=1, s=1$

이것을 ㉠에 대입하면

$1-4+4=5a-4ss$ $\quad\therefore a=1$

답 1

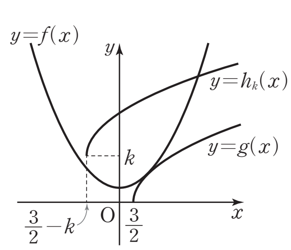
027

$h_k(x)=\sqrt{6(x+k)-9}+k$

$=\sqrt{6\left(x+k-\frac{3}{2}\right)}+k$

이므로 함수 $h_k(x)$의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\ge\frac{3}{2}-k\right\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\ge k\}$이다.

함수 $y=h_k(x)$의 그래프가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 오직 한 점에서만 만나려면 오른쪽 그림과 같이 점 $\left(\frac{3}{2}-k, k\right)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프보다 위쪽에 있어야 하므로 $f\left(\frac{3}{2}-k\right)<k$에서



$\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}-k\right)^2+\frac{3}{2}<k$, $4k^2-36k+45<0$

$(2k-3)(2k-15)<0$ $\quad\therefore \frac{3}{2}<k<\frac{15}{2}$

따라서 이를 만족시키는 자연수 k의 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6개이다.

답 6

028

두 점 $P_k(k, \sqrt{k+1})$, $Q_k(k, \sqrt{k-1})$에서

$\overline{P_kQ_k}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}$

이므로

$f(k)=\dfrac{\overline{P_kQ_k}}{\overline{P_{k+1}Q_{k+1}}}=\dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}$

$\therefore \sqrt{2}f(1)f(2)f(3)\times\cdots\times f(99)$

$=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{0}}{\sqrt{3}-\sqrt{1}}\times\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{4}-\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\times$

$\cdots\times\dfrac{\sqrt{99}-\sqrt{97}}{\sqrt{100}-\sqrt{98}}\times\dfrac{\sqrt{100}-\sqrt{98}}{\sqrt{101}-\sqrt{99}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{101}-\sqrt{99}}$

$=\sqrt{101}+3\sqrt{11}$

따라서 $m=101$, $n=11$이므로

$m+n=101+11=112$

답 ②

029

$P(m, 0)$

$f_1(x)=\sqrt{x+2}$이고, 점 A의 x좌표는 점 P의 x좌표와 같으므로

$A(m, \sqrt{m+2})$

$f_2(x)=\sqrt{2x+3}$이고, 점 B의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같으므로

$\sqrt{2x+3}=\sqrt{m+2}$에서

$2x+3=m+2$ $\quad\therefore x=\dfrac{m-1}{2}$

$\therefore B\left(\dfrac{m-1}{2}, \sqrt{m+2}\right)$

$f_3(x)=\sqrt{3x+4}$이고, 점 C의 x좌표가 $\dfrac{m-1}{2}$이므로 점 C의 y좌표는

$y=\sqrt{3\times\dfrac{m-1}{2}+4}=\sqrt{\dfrac{3m+5}{2}}$

$\therefore C\left(\dfrac{m-1}{2}, \sqrt{\dfrac{3m+5}{2}}\right)$

$f_4(x)=\sqrt{4x+5}$이고, 점 D의 y좌표는 점 C의 y좌표와 같으므로

$\sqrt{4x+5}=\sqrt{\dfrac{3m+5}{2}}$에서

$4x+5=\dfrac{3m+5}{2}$ $\quad\therefore x=\dfrac{3m-5}{8}$

$\therefore D\left(\dfrac{3m-5}{8}, \sqrt{\dfrac{3m+5}{2}}\right)$

따라서 $Q\left(\dfrac{3m-5}{8}, 0\right)$이므로

$n=\dfrac{3m-5}{8}$ → $3(m+1)=8(n+1)$이므로 $m+1$은 8의 배수이고, $n+1$은 3의 배수이다.

이때 m, n은 두 자리 자연수이므로 순서쌍 (m, n)은

$(31, 11)$, $(39, 14)$, $\cdots$

따라서 $m+n$의 최솟값은

$31+11=42$

답 42

030

점 M의 x좌표가 t이므로

$\mathrm{M}(t,\ \sqrt{t+1}+1)$

또, x축 위의 점 A의 좌표를 $(a,\ 0)$, y축 위의 점 B의 좌표를 $(0,\ b)$라 하면 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이므로 점 M은 선분 AB의 중점이다.

즉, $t=\frac{a}{2}$, $\sqrt{t+1}+1=\frac{b}{2}$이므로

$a=2t$, $b=2(\sqrt{t+1}+1)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이 $S(t)$는

$S(t)=\frac{1}{2}\times|2t|\times|2(\sqrt{t+1}+1)|$

$\quad=2|t|(\sqrt{t+1}+1)$

이므로

$S(24)=|2\times24\times(\sqrt{25}+1)|=288$

$S(8)=|2\times8\times(\sqrt{9}+1)|=64$

$\therefore\ S(24)-S(8)=288-64=224$

답 224

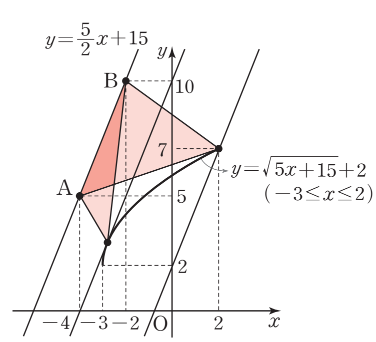
031

직선 AB의 방정식은

$y-5=\frac{10-5}{-2-(-4)}\{x-(-4)\}$, 즉 $y=\frac{5}{2}x+15$

삼각형 PAB에서 밑변을 선분 AB라 하면 높이는 곡선 $y=\sqrt{5x+15}+2$ 위의 점과 직선 AB 사이의 거리가 되므로 이 거리가 최대 또는 최소가 될 때 삼각형 PAB의 넓이도 최대 또는 최소가 된다.

다음 그림과 같이 직선 AB에 평행한 직선이 곡선에 접할 때 높이가 최소가 되고, 직선 AB에 평행한 직선이 곡선 위의 점 $(2,\ 7)$을 지날 때 높이가 최대가 됨을 알 수 있다.



직선 AB와 평행한 직선의 방정식을

$y=\frac{5}{2}x+k$ (k는 상수)

라 하자.

이 직선이 곡선과 접할 때의 k의 값을 구하면

$\frac{5}{2}x+k=\sqrt{5x+15}+2$

$\left\{\frac{5}{2}x+(k-2)\right\}^2=5x+15$

$\frac{25}{4}x^2+5(k-3)x+k^2-4k-11=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{5(k-3)\}^2-25(k^2-4k-11)=0$

$-50(k-10)=0\qquad\therefore\ k=10$

점 $\mathrm{A}(-4,\ 5)$와 직선 $y=\frac{5}{2}x+10$, 즉 $5x-2y+20=0$ 사이의 거리는

$\frac{|5\times(-4)-2\times5+20|}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}=\frac{10}{\sqrt{29}}$

선분 AB의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{-2-(-4)\}^2+(10-5)^2}=\sqrt{29}$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값 m은

$m=\frac{1}{2}\times\sqrt{29}\times\frac{10}{\sqrt{29}}=5$

또, 곡선 $y=\sqrt{5x+15}+2$ $(-3\le x\le2)$ 위의 점 $(2,\ 7)$과 직선 AB, 즉 $5x-2y+30=0$ 사이의 거리는

$\frac{|5\times2-2\times7+30|}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}=\frac{26}{\sqrt{29}}$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값 M은

$M=\frac{1}{2}\times\sqrt{29}\times\frac{26}{\sqrt{29}}=13$

$\therefore\ M-m=13-5=8$

답 8

032

점 A는 직선 $y=-x+6$과 곡선 $y=\sqrt{3x}$가 만나는 점이므로

$\sqrt{3x}=-x+6$에서

$3x=x^2-12x+36$, $x^2-15x+36=0$

$(x-3)(x-12)=0\qquad\therefore\ x=3$ 또는 $x=12$

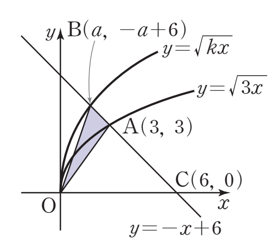
이때 점 A는 직선 $y=-x+6$ 위에 있고 제1사분면 위의 점이므로

$x>0$, $-x+6>0$

즉, $0<x<6$이므로

$\mathrm{A}(3,\ 3)$

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-x+6$이 곡선 $y=\sqrt{kx}$와 만나는 점을 $\mathrm{B}(a,\ -a+6)$, x축과 만나는 점을 $\mathrm{C}(6,\ 0)$이라 하면 삼각형 OAB의 넓이는 삼각형 OBC의 넓이에서 삼각형 OAC의 넓이를 뺀 값이므로



$3=\frac{1}{2}\times6\times(-a+6)-\frac{1}{2}\times6\times3\qquad\therefore\ a=2$

따라서 $\mathrm{B}(2,\ 4)$이고, 점 B는 $y=\sqrt{kx}$의 그래프 위의 점이므로

$4=\sqrt{2k}$, $16=2k$

$\therefore\ k=8$

답 ⑤

033

직사각형의 세로의 길이를 a $(0<a<\sqrt{3})$라 하면 직사각형의 한 모서리와 곡선 $y=\sqrt{3-x}$가 만나는 점의 y좌표가 a이다. 참고

$\sqrt{3-x}=a$에서

$3-x=a^2\qquad\therefore\ x=3-a^2$

즉, 직사각형의 가로의 길이는 $6-2a^2$이다.

따라서 직사각형의 둘레의 길이는

$$2\{a+(6-2a^2)\}=-4a^2+2a+12$$
$$=-4\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{49}{4}$$

이고, $a=\frac{1}{4}$일 때 최댓값 $l=\frac{49}{4}$를 갖는다.

이때의 직사각형의

세로의 길이는 $a=\frac{1}{4}$,

가로의 길이는 $6-2a^2=\frac{47}{8}$

이므로 직사각형의 넓이 S는

$S=\frac{1}{4}\times\frac{47}{8}=\frac{47}{32}$

$\therefore 4l-32S=49-47=2$

답 2

참고

무리식의 최대·최소를 구해야 할 때는 근호 전체나 y좌표를 새로운 문자로 치환하여 이차함수 형태로 만들어 풀면 쉽다.

034

직선 AB의 방정식을 $y=mx$ $(m>0)$, 점 B의 x좌표를 k $(k>0)$라 하면

$B(k,\ mk)$

점 A와 점 B는 원점에 대하여 대칭이므로

$A(-k,\ -mk)$

삼각형 ABC가 정삼각형이므로 직선 OC는 선분 AB의 수직이등분선이다.

즉, 직선 OC의 방정식은

$y=-\frac{1}{m}x$

점 C는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 OC의 교점이므로

$-\frac{3}{x}=-\frac{1}{m}x$에서

$x^2=3m \qquad \therefore x=\sqrt{3m}$ $(\because x>0)$

$\therefore C\left(\sqrt{3m},\ -\frac{\sqrt{3m}}{m}\right)$

삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$\overline{OC}=\sqrt{3}\,\overline{OB}$

양변을 제곱하면

$\overline{OC}^2=3\overline{OB}^2$

$3m+\frac{3}{m}=3(k^2+m^2k^2)$

$m+\frac{1}{m}=k^2+m^2k^2$

$\frac{m^2+1}{m}=k^2(1+m^2)$, $\frac{1}{m}=k^2$ $(\because m^2+1\neq 0)$

$\therefore mk^2=1$ …… ㉠

점 $B(k,\ mk)$는 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점이므로

$mk=\sqrt{k}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$k\sqrt{k}=1 \qquad \therefore k=1,\ m=1$

$\therefore B(1,\ 1)$

이때 $\overline{AB}=2\overline{OB}=2\sqrt{2}$이므로 정삼각형 ABC의 넓이 S는

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{2})^2=2\sqrt{3}$

$\therefore S^2=12$

답 12

035

함수 $y=\sqrt{6-x}+2$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

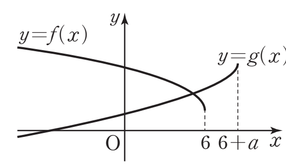
$-y=\sqrt{6-x}+2$, 즉 $y=-\sqrt{6-x}-2$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\sqrt{6-(x-a)}-2+b$, 즉 $y=-\sqrt{6+a-x}-2+b$

$\therefore g(x)=-\sqrt{6+a-x}-2+b$

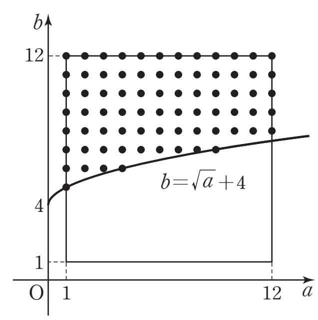
이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나려면 오른쪽 그림과 같이 $g(6)\geq f(6)$이어야 한다.



즉, $-\sqrt{a}-2+b\geq 2$에서

$b\geq\sqrt{a}+4$

이 부등식을 만족시키는 $1\leq a\leq 12$, $1\leq b\leq 12$인 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하면 다음과 같다.



(i) $a=1$일 때

$b\geq 5$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$1\times 8=8$

(ii) $1<a\leq 4$일 때

$b\geq 6$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$3\times 7=21$

(iii) $4<a\leq 9$일 때

$b\geq 7$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$5\times 6=30$

(iv) $9<a\leq 12$일 때

$b\geq 8$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$3\times 5=15$

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$8+21+30+15=74$

답 74

036

$\sqrt{x-1}=t$ $(t\geq 0)$로 놓으면

$x-1=t^2 \qquad \therefore x=t^2+1$

$y=\frac{x}{2}-k\sqrt{x-1}$이라 하면

$$y=\frac{t^2+1}{2}-kt$$
$$=\frac{1}{2}t^2-kt+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(t-k)^2+\frac{1-k^2}{2}$$

이때 $k>0$이므로 꼭짓점의 좌표 $t=k$는 $t\geq 0$에 포함된다.

따라서 함숫값 y는 $t=k$, 즉 $x=k^2+1$일 때 최솟값 $\frac{1-k^2}{2}$을 가지므로

$\frac{1-k^2}{2}=-4$, $k^2=9$

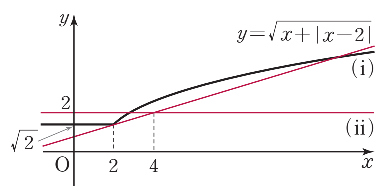
$\therefore k=3$ ($\because k>0$)
이때 $p=k^2+1=10$이므로
$k+p=3+10=13$

답 13

037

$y=\sqrt{x+|x-2|}$
$=\begin{cases} \sqrt{2} & (x<2) \\ \sqrt{2x-2} & (x\ge 2) \end{cases}$

점 $(4, 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$y=m(x-4)+2$ ······ ㉠
함수 $y=\sqrt{x+|x-2|}$의 그래프는 직선 ㉠이 다음 그림의 두 직선 (i), (ii)의 사이를 지날 때 서로 다른 세 점에서 만난다.



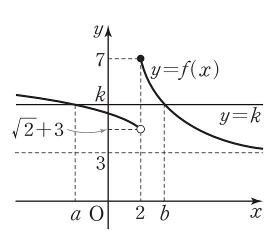
(i) 직선 ㉠이 점 $(2, \sqrt{2})$를 지날 때
$\sqrt{2}=-2m+2$ $\therefore m=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$
(ii) 직선 ㉠이 x축과 평행할 때
$m=0$
(i), (ii)에서 $0<m<1-\frac{\sqrt{2}}{2}$
따라서 $\alpha=0$, $\beta=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로
$2\beta-\alpha=2-\sqrt{2}$

답 ②

038

$f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x+4}+3 & (x<2) \\ \frac{3x+1}{x-1} & (x\ge 2) \end{cases}$
$=\begin{cases} \sqrt{-(x-4)}+3 & (x<2) \\ \frac{4}{x-1}+3 & (x\ge 2) \end{cases}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

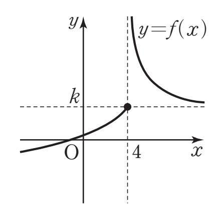


이때 $f(a)=f(b)=k$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 두 교점의 x좌표가 a, b $(a<2\le b)$이다.
$x<2$일 때 $f(x)>\sqrt{2}+3$
$x\ge 2$일 때 $f(x)\le 7$
이므로 정수 k가 될 수 있는 값은 5, 6, 7이다.
(i) $x<2$일 때
$f(a)=k$에서
$\sqrt{-a+4}+3=k$, $-a+4=(k-3)^2$
$\therefore a=4-(k-3)^2$
(ii) $x\ge 2$일 때
$f(b)=k$에서
$\frac{3b+1}{b-1}=k$, $3b+1=kb-k$
$\therefore b=\frac{k+1}{k-3}$
(i), (ii)에서
$k=5$이면 $a=0$, $b=3$
$k=6$이면 $a=-5$, $b=\frac{7}{3}$
이때 $b=\frac{7}{3}$은 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.
$k=7$이면 $a=-12$, $b=2$
따라서 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(0, 3)$, $(-12, 2)$
이므로 $b-a$의 최댓값은
$2-(-12)=14$

답 14

039

$x\le 4$에서 함수 $y=-\sqrt{a(4-x)}+k$가 정의되려면 $a>0$이어야 하고, 곡선 $y=\frac{b}{x-4}+k$의 점근선의 방정식은 $x=4$, $y=k$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$\therefore b>0$
조건 (나)에서 $f(0)=1$이므로
$-\sqrt{4a}+k=1$ $\therefore k=1+2\sqrt{a}$ ······ ㉠
$f(6)=5$이므로
$\frac{b}{2}+k=5$ $\therefore b=10-2k$
위의 식에 ㉠을 대입하면
$b=10-2(1+2\sqrt{a})=8-4\sqrt{a}$
이때 $a>0$, $b>0$이고 a, b는 정수이므로 a, b는 자연수이다.
$b=8-4\sqrt{a}$가 자연수이려면 $\sqrt{a}$도 자연수이어야 하므로
$a=1$, $b=4$, $k=3$
$\therefore a+b+k=1+4+3=8$

답 8

040

함수 $y=\sqrt{x-2}-1$의 치역은
$\{y|y\ge -1\}$
$y=\sqrt{x-2}-1$을 x에 대하여 정리하면
$(y+1)^2=x-2$, $x=(y+1)^2+2$
x와 y를 서로 바꾸면
$y=(x+1)^2+2$ $(x\ge -1)$
따라서 두 함수 $y=(x+1)^2+2$ $(x\ge -1)$, $y=\sqrt{x-2}-1$은 역함수 관계이고, 직선 PQ의 기울기가 -1이므로 점 P와 점 Q는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 다른풀이
즉, 점 P의 좌표를 (a, a^2+2a+3) $(a\ge -1)$이라 하면 점 Q의

좌표는 $(a^2+2a+3,\ a)$이다.

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\{(a^2+2a+3)-a\}^2+\{a-(a^2+2a+3)\}^2}$

$=\sqrt{2}\,|a^2+a+3|$

$=\sqrt{2}(a^2+a+3)$ $\rightarrow a^2+a+3=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0$

$=\sqrt{2}\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11\sqrt{2}}{4}$

따라서 선분 PQ의 길이는 $a\geq-1$에서 $a=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $\frac{11\sqrt{2}}{4}$를 갖는다.

답 $\frac{11\sqrt{2}}{4}$

다른 풀이 확장

선분 PQ와 직선 $y=x$의 교점을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PM}}$

즉, 선분 PM의 길이가 최소일 때 선분 PQ의 길이도 최소이다.

이때 기울기가 1이고 곡선 $y=(x+1)^2+2\ (x\geq-1)$에 접하는 직선의 방정식을

$y=x+k$ (k는 상수)

라 하면 선분 PM의 길이의 최솟값은 두 직선 $y=x$, $y=x+k$ 사이의 거리와 같다.

한편, 곡선 $y=(x+1)^2+2\ (x\geq-1)$와 직선 $y=x+k$의 교점의 x좌표는 $(x+1)^2+2=x+k$에서

$x^2+x+3-k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1-4(3-k)=0$

$4k-11=0 \qquad \therefore k=\frac{11}{4}$

따라서 직선 $y=x$ 위의 점 $(0,\ 0)$과 직선 $y=x+\frac{11}{4}$, 즉

$x-y+\frac{11}{4}=0$ 사이의 거리는

$\frac{\left|\frac{11}{4}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{11\sqrt{2}}{8}$

이므로 선분 PQ의 길이의 최솟값은

$2\times\frac{11\sqrt{2}}{8}=\frac{11\sqrt{2}}{4}$

041

$f(g(x))=f(x)$에서

$\{g(x)\}^2-2g(x)+2=x^2-2x+2$

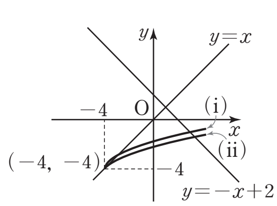
$\{g(x)\}^2-x^2-2\{g(x)-x\}=0$

$\{g(x)-x\}\{g(x)+x\}-2\{g(x)-x\}=0$

$\{g(x)-x\}\{g(x)+x-2\}=0$

$\therefore g(x)=x$ 또는 $g(x)=-x+2$

방정식 $f(g(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$와 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



(i) 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(-4,\ -4)$를 지날 때

$g(-4)=-4$에서

$-m=-4 \qquad \therefore m=4$

(ii) 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 접할 때

$\sqrt{x+4}-m=x$에서

$\sqrt{x+4}=x+m$, $x+4=x^2+2mx+m^2$

$x^2+(2m-1)x+m^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2m-1)^2-4(m^2-4)=0$

$-4m+17=0 \qquad \therefore m=\frac{17}{4}$

(i), (ii)에서 $4\leq m<\frac{17}{4}$

따라서 정수 m의 값은 4이다.

답 4

042

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$\sqrt{a}=1 \qquad \therefore a=1$

$\therefore f(x)=\sqrt{x}$

함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(5,\ 5)$를 지나므로

$\sqrt{5b}=5 \qquad \therefore b=5$

$\therefore g(x)=\sqrt{5x}$

함수 $y=h(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 4)$를 지나므로

$\sqrt{2c}=4 \qquad \therefore c=8$

$\therefore h(x)=\sqrt{8x}$

$\therefore ((f\circ g^{-1})^{-1}\circ h)(8)=(g\circ f^{-1}\circ h)(8)$

$=g(f^{-1}(h(8)))$

$=g(f^{-1}(8))$ 참고

$=g(64)$

$=8\sqrt{5}$

답 $8\sqrt{5}$

참고

$f^{-1}(8)=k$라 하면 $f(k)=8$이므로

$\sqrt{k}=8 \qquad \therefore k=64$

따라서 $f^{-1}(8)=64$이다.

043

$h(x)=\begin{cases} 2g(x) & (f(x)<g(x)) \\ 2f(x) & (f(x)\geq g(x)) \end{cases}$

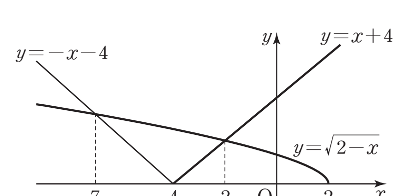
$=\begin{cases} 2|x+4| & (f(x)<g(x)) \\ 2\sqrt{2-x} & (f(x)\geq g(x)) \end{cases}$

두 함수 $f(x)=\sqrt{2-x}$, $g(x)=|x+4|$의 그래프의 교점의 x좌표는

$\sqrt{2-x}=|x+4|$에서

$2-x=(x+4)^2$, $x^2+9x+14=0$

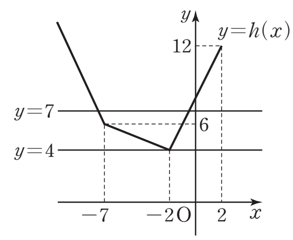
$(x+7)(x+2)=0 \qquad \therefore x=-7$ 또는 $x=-2$



따라서

$$h(x)=\begin{cases}-2x-8 & (x<-7)\\ 2\sqrt{2-x} & (-7\le x<-2)\\ 2x+8 & (-2\le x\le 2)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=4$, $y=7$은 다음 그림과 같다.



$\therefore N(4)+N(7)=1+2=3$

답 3

044

점 P의 y좌표를 a $(a\ge 0)$라 하면

$\sqrt{x-2}=a$에서 $x=a^2+2$

즉, 점 P의 좌표는 $(\boxed{(가)\ a^2+2},\ a)$이다.

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이고 두 직선 l과 $y=x$는 서로 수직이므로 두 점 P와 Q는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.

그러므로 삼각형 OPQ의 외접원의 중심을 C라 하면 점 C는 직선 $y=x$ 위에 있다.

점 C의 좌표를 $(k,\ k)$ $(k>0)$라 하면 삼각형 OPQ의 외접원의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{CO}}=\sqrt{2}k$이고, 삼각형 OPQ의 외접원의 넓이는 $2k^2\pi$이다.

삼각형 OPQ의 외접원의 넓이가 $\frac{25}{2}\pi$일 때, $2k^2\pi=\frac{25}{2}\pi$에서

$k^2=\frac{25}{4}$ $\quad\therefore k=\frac{5}{2}$ $(\because k>0)$

즉, 점 C의 좌표는 $\left(\boxed{(나)\ \frac{5}{2}},\ \boxed{(나)\ \frac{5}{2}}\right)$

$\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{CO}}$에서 $\overline{\mathrm{CP}}^2=\overline{\mathrm{CO}}^2$이므로

$$\left\{(a^2+2)-\frac{5}{2}\right\}^2+\left(a-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$a^4-5a-6=0$

$h_1(a)=a^4-5a-6$이라 하면 $h_1(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $h_1(a)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & 0 & -5 & -6\\ & & -1 & 1 & -1 & 6\\ \hline & 1 & -1 & 1 & -6 & \boxed{0}\end{array}$$

$h_1(a)=(a+1)(a^3-a^2+a-6)$

$h_2(a)=a^3-a^2+a-6$이라 하면 $h_2(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $h_2(a)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & 1 & -6\\ & & 2 & 2 & 6\\ \hline & 1 & 1 & 3 & \boxed{0}\end{array}$$

$\therefore (a+1)(a-2)(a^2+a+3)$

이때 $a\ge 0$이므로 $a=\boxed{(다)\ 2}$

따라서 점 P의 y좌표는 $\boxed{(다)\ 2}$이다.

즉, $g(a)=a^2+2$, $m=\frac{5}{2}$, $n=2$이므로

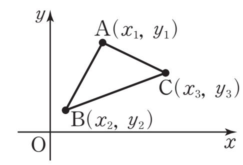
$m+g(n)=\frac{5}{2}+6=\frac{17}{2}$

답 ③

045

일등급의 메모장

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$이 주어졌을 때, 삼각형 ABC의 넓이 S는

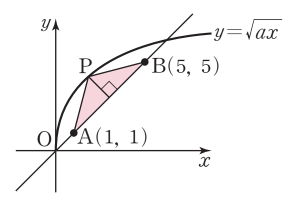


$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\left|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)\right|$$

확장

삼각형 ABP에서 선분 AB를 밑변으로 하고, 점 P와 직선 AB 사이의 거리를 높이라 하면 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABP의 높이가 최대일 때 넓이가 최대이므로 점 P는 직선 AB와 평행한 접선의 접점이다.



직선 AB의 방정식은

$y=\frac{5-1}{5-1}(x-1)+1$, 즉 $y=x$ 다른 풀이

직선 AB와 평행하고 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 $y=x+k$ (k는 상수)라 하면 $\sqrt{ax}=x+k$에서

$ax=x^2+2kx+k^2$

$x^2+(2k-a)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-a)^2-4k^2=0$

$a(a-4k)=0$ $\quad\therefore k=\frac{a}{4}$ $(\because a\ne 0)$

따라서 접선의 방정식은

$y=x+\frac{a}{4}$

접선 $y=x+\frac{a}{4}$와 직선 $y=x$는 평행하므로 접선 $y=x+\frac{a}{4}$ 위의 한 점 $\left(0,\ \frac{a}{4}\right)$와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|0-\frac{a}{4}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{a}{4\sqrt{2}}$$

또,

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(5-1)^2+(5-1)^2}=4\sqrt{2}$

이므로

삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times\frac{a}{4\sqrt{2}}=\frac{a}{2}$

답 ②

다른 풀이 확장

점 P는 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프 위의 점이므로 $\mathrm{P}\left(\frac{t^2}{a},\ t\right)$

두 점 A(1, 1), B(5, 5)는 직선 $y=x$ 위에 있으므로 이 직선 위

의 다른 두 점인 원점 O와 점 C(4, 4)에 대하여 선분 AB의 길이와 선분 OC의 길이는 같고 직선 AB와 점 P 사이의 거리는 직선 OC와 점 P 사이의 거리와 같다.
따라서 삼각형 ABP의 넓이와 삼각형 OCP의 넓이는 같다.
이때 삼각형 OCP의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 4 & \frac{t^2}{a} & 0 \\ 0 & 4 & t & 0 \end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\left|(4\times t)-\left(4\times\frac{t^2}{a}\right)\right|$$
$$=\frac{2}{a}t(a-t)$$
$$=-\frac{2}{a}\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a}{2}\ (\because 0<t<a)$$

이므로 넓이 S는 $t=\frac{a}{2}$일 때 최댓값 $\frac{a}{2}$를 갖는다.

046

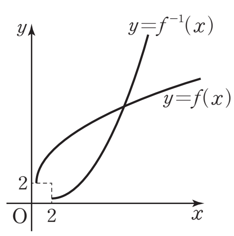
일등급의 메모장

무리함수의 그래프와 직선이 만나는 점에 대한 문제는
무리함수의 그래프와 직선이 한 점에서 만날 때(접할 때)
직선이 무리함수의 그래프의 시작점(정의역의 시작 또는 끝)을 지날 때가 중요한 경우가 많다.

함수 $f(x)=\sqrt{ax-3}+2\ \left(a\geq\frac{3}{2}\right)$에 대하여

$f^{-1}(x)=\frac{1}{a}(x-2)^2+\frac{3}{a}\ (x\geq 2)$

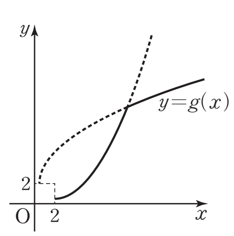
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



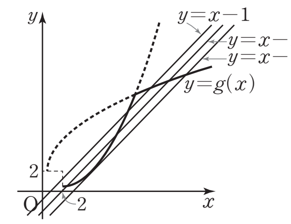
함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)<f^{-1}(x)\text{인 경우}) \\ f^{-1}(x) & (f(x)\geq f^{-1}(x)\text{인 경우}) \end{cases}$$ 는

$x\geq 2$인 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $f^{-1}(x)$ 중 크지 않은 값이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



이때 직선 $y=x-1$은 직선 $y=x-2$보다 위쪽에 있고, 직선 $y=x-3$은 직선 $y=x-2$보다 아래쪽에 있으므로
$h(1)=h(3)<h(2)$
에서 세 직선 $y=x-1$, $y=x-2$, $y=x-3$의 개형은 다음 그림과 같다. 참고



위의 그림에서 직선 $y=x-3$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하므로

$\frac{1}{a}(x-2)^2+\frac{3}{a}=x-3$에서

$(x-2)^2+3=ax-3a$, $x^2-(a+4)x+3a+7=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a+4)\}^2-4(3a+7)=0$

$a^2-4a-12=0$, $(a+2)(a-6)=0$

$\therefore a=6\ \left(\because a\geq\frac{3}{2}\right)$

$\therefore f(x)=\sqrt{6x-3}+2$, $f^{-1}(x)=\frac{1}{6}(x-2)^2+\frac{1}{2}$ 다른 풀이

한편, 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$\sqrt{6x-3}+2=x$에서 $6x-3=(x-2)^2$

$x^2-10x+7=0$ $\quad\therefore x=5+3\sqrt{2}\ (\because x\geq 2)$

따라서

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x>5+3\sqrt{2}) \\ f^{-1}(x) & (2\leq x\leq 5+3\sqrt{2}) \end{cases}$$

이므로

$g(4)=f^{-1}(4)=\frac{1}{6}\times 2^2+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$

즉, $p=6$, $q=7$이므로

$p+q=6+7=13$

답 13

참고

모든 자연수 n에 대하여 $1\leq h(n)\leq 3$이므로
$h(1)=1$이면 곡선 $y=f^{-1}(x)$ $(f(x)\geq f^{-1}(x))$가 직선 $y=x-1$과 만나지 않으므로 이 곡선은 두 직선 $y=x-2$, $y=x-3$과도 만나지 않는다.
즉, $h(1)=h(2)=h(3)=1$이므로 모순이다.
또, $h(1)=3$이면 $h(1)<h(3)$을 만족시키는 $h(3)$이 존재하지 않으므로 모순이다.
$\therefore 2=h(1)=h(3)<h(2)=3$

다른 풀이

$f(4)=2+\sqrt{21}$, $f^{-1}(4)=\frac{7}{6}$이므로

$g(4)=\frac{7}{6}\ (\because f(4)\geq f^{-1}(4))$

즉, $p=6$, $q=7$이므로

$p+q=6+7=13$

047

일등급의 메모장

$\frac{b+d}{a+c+1}$를 두 점이 지나는 직선의 기울기로 생각하여 이 두 점의 좌표를 a, b, c, d로 나타낸다.

$\dfrac{b+d}{a+c+1}=m$이라 하면

$m=\dfrac{b+d}{a+c+1}=\dfrac{d-(-b)}{c+1-(-a)}$

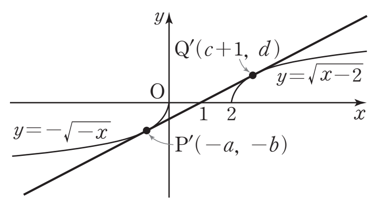
즉, m은 두 점 $(-a,\ -b)$, $(c+1,\ d)$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

두 점 $(-a,\ -b)$, $(c+1,\ d)$를 각각 P′, Q′이라 하자.

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점이므로 점 $\mathrm{P}'(-a,\ -b)$는 곡선 $y=-\sqrt{-x}$ 위의 점이고,

점 $\mathrm{Q}(c,\ d)$가 곡선 $y=\sqrt{x-1}$ 위의 점이므로 점 $\mathrm{Q}'(c+1,\ d)$는 곡선 $y=\sqrt{x-2}$ 위의 점이다.

따라서 m은 곡선 $y=-\sqrt{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}'(-a,\ -b)$와 곡선 $y=\sqrt{x-2}$ 위의 점 $\mathrm{Q}'(c+1,\ d)$를 지나는 직선의 기울기이다.



따라서 m이 최대일 때는 직선 P′Q′이 위의 그림과 같이 두 곡선 $y=\sqrt{x-2}$와 $y=-\sqrt{-x}$에 모두 접할 때이다. 다른풀이

두 곡선은 점 $(1,\ 0)$에 대하여 대칭이므로 이때의 직선 P′Q′은 점 $(1,\ 0)$을 지난다.

직선 P′Q′의 방정식을

$y=m(x-1)\ (m>0)$

이라 하면

$m(x-1)=\sqrt{x-2}$에서

$m^2(x-1)^2=x-2$

$m^2x^2-(2m^2+1)x+m^2+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2m^2+1)^2-4m^2(m^2+2)=0$

$-4m^2+1=0 \qquad \therefore\ m=\dfrac{1}{2}\ (\because\ m>0)$

따라서 직선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$이고 $M=\dfrac{1}{2}$이므로

$10M=10\times\dfrac{1}{2}=5$

답 ③

다른풀이

직선 P′Q′의 방정식을

$y=mx+n$ ($m>0$, n은 상수)

이라 하면 이 직선이 곡선 $y=-\sqrt{-x}$와 한 점에서 만나므로

$mx+n=-\sqrt{-x}$에서

$(mx+n)^2=-x$

$m^2x^2+(2mn+1)x+n^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2mn+1)^2-4m^2n^2=0$

$4mn+1=0$ …… ㉠

같은 방법으로 직선 P′Q′이 곡선 $y=\sqrt{x-2}$와 한 점에서 만나므로

$8m^2+4mn-1=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $m=\dfrac{1}{2}\ (\because\ m>0)$, $n=-\dfrac{1}{2}$

따라서 직선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$이고, $M=\dfrac{1}{2}$이므로

$10M=10\times\dfrac{1}{2}=5$

048

일등급의 메모장

임의의 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 실근의 개수가 항상 1이다.

$\Longleftrightarrow$ 함수 $f(x)$는 치역이 실수 전체의 집합인 일대일대응이다.

조건 ㈎에 의하여 함수 $f(x)$는 치역이 실수 전체의 집합인 일대일대응이다.

$a=0$이면 $t=0$일 때 조건 ㈎를 만족시키지 않으므로

$a\neq0$

$c=0$이면 $t=a$일 때 조건 ㈎를 만족시키지 않으므로

$c\neq0$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax}{x-b} & (x<b)\\ c\sqrt{x-b}+a & (x<b)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{ab}{x-b}+a & (x<b)\\ c\sqrt{x-b}+a & (x\geq b)\end{cases}$$

$ab>0$, $c<0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같고, $t<a$일 때 조건 ㈎를 만족시키지 않는다.

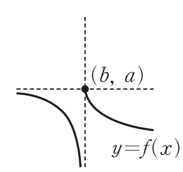
또, $ab<0$, $c>0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 2]와 같고, $t>a$일 때 조건 ㈎를 만족시키지 않는다.

즉, $ab>0$, $c>0$ 또는 $ab<0$, $c<0$이어야 한다.

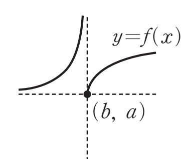
그런데 $a<b<c$이므로 $c<0$일 때 $a<0$, $b<0$, 즉 $ab>0$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 3]과 같이 $ab>0$, $c>0$이므로

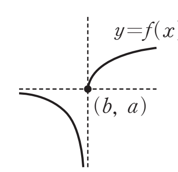
$a>0$, $b>0$, $c>0$ 또는 $a<0$, $b<0$, $c>0$



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

조건 ㈏에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 한 점 $(-5,\ -5)$에서만 만난다.

$b>0$ 또는 $b\leq-5$이면 조건 ㈏를 만족시키지 않으므로

$a<0$, $-5<b<0$

또, 점 $(-5,\ -5)$는 곡선 $y=\dfrac{ax}{x-b}\ (x<b)$ 위의 점이므로

$-5=\dfrac{-5a}{-5-b}$에서

$a+b+5=0$ …… ㉠

조건 ㈐에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{5}{12}(x-7)$은 두 점 $(-5,\ -5)$, $(7,\ 0)$에서만 만난다.

직선 $y=\dfrac{5}{12}(x-7)$의 기울기는 양수이고 곡선 $y=\dfrac{ax}{x-b}\ (x<b)$와 점 $(-5,\ -5)$에서만 만나므로 점 $(7,\ 0)$은 곡선 $y=c\sqrt{x-b}+a\ (x\geq b)$ 위의 점이다.

즉, $0=c\sqrt{7-b}+a$에서

$-a=c\sqrt{7-b}$ …… ㉡

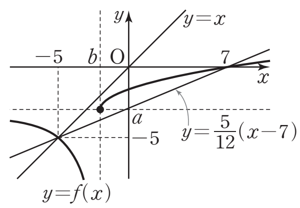
㉠을 만족시키는 정수 a, b $(a<b)$로 이루어진 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(-4,\ -1)$, $(-3,\ -2)$

이고 ㉡에서 정수 c를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는
$(-3, -2)$
이다.
따라서 $a=-3$, $b=-2$, $c=1$이므로
$abc=-3\times(-2)\times1=6$

답 6

참고

함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=x$, $y=\frac{5}{12}(x-7)$은 오른쪽 그림과 같다.

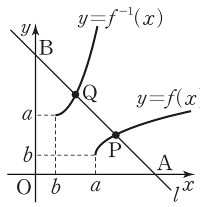


049

일등급의 메모장

(1) 높이가 같은 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.
(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

주어진 조건을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



직선 l의 방정식을 $y=-x+k$ $(k>4)$라 하면
$A(k, 0)$, $B(0, k)$
조건 (가)에서 삼각형 OAQ의 넓이가 삼각형 OBQ의 넓이의 2배이므로
$\overline{AQ}=2\overline{BQ}$ …… ㉠
직선 l은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 두 점 P, Q도 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.
즉, 선분 AP의 길이와 선분 BQ의 길이가 같으므로 ㉠에서
$\overline{PQ}=\overline{BQ}=\overline{AP}$
따라서 두 점 P, Q는 선분 AB의 삼등분점이므로
$P\left(\frac{2k}{3}, \frac{k}{3}\right)$, $Q\left(\frac{k}{3}, \frac{2k}{3}\right)$
삼각형 OPQ의 넓이는 삼각형 OAB의 넓이의 $\frac{1}{3}$이고, 조건 (나)에서 삼각형 OPQ의 넓이가 6이므로
$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times k\times k\right)=6$ $\therefore k=6$ $(\because k>4)$
$\therefore P(4, 2)$, $Q(2, 4)$
점 $P(4, 2)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로
$2=\sqrt{4-a}+b$ $\therefore (2-b)^2=4-a$ …… ㉡
또, $f(3)=1$이므로
$1=\sqrt{3-a}+b$ $\therefore (1-b)^2=3-a$ …… ㉢
㉡−㉢을 하면
$3-2b=1$ $\therefore b=1$
$b=1$을 ㉢에 대입하면 $a=3$
$\therefore a+b=3+1=4$

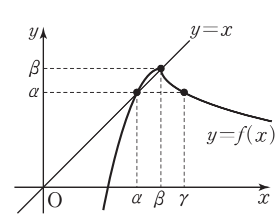
답 4

050

일등급의 메모장

조건 (가), (나)에서 α, β의 대소 관계가 주어지지 않았다.
즉, 방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 2개, $f(x)=\beta$의 실근이 1개인 경우의 풀이와 방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 1개, $f(x)=\beta$의 실근이 2개인 경우의 풀이는 동일하므로 둘 중 하나만 조사하면 된다.

조건 (가)에서
$f(x)=\alpha$ 또는 $f(x)=\beta$ …… ㉠
조건 (나)에서 $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$이고 조건 (가)에서 방정식 ㉠의 실근이 α, β, γ뿐이므로 방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 α, γ이고 방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 β뿐이거나, 방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 α뿐이고 방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 β, γ이다.
방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 α, γ이고 방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 β뿐인 경우를 살펴보자.
방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 α, γ이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\alpha$는 두 점에서 만나고 두 교점의 x좌표는 각각 α, γ이다.
또, 방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 β이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\beta$는 오직 한 점에서 만나고 이 점의 x좌표는 β이다.
이때 곡선 $y=f(x)$와 x축에 평행한 직선이 오직 한 점에서 만나려면 만나는 점의 좌표가 (a, b)이어야 하므로 점 (a, b)는 점 (β, β)와 일치한다.
$\therefore a=b=\beta$ …… ㉡
한편, $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 두 점 (α, α), (β, β)에서 만난다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)=x$에서
$-(x-a)^2+b=x$
$-(x-\beta)^2+\beta=x$ $(\because ㉡)$
$(x-\beta)(x-\beta+1)=0$ $\therefore x=\beta-1$ 또는 $x=\beta$
$\therefore \alpha=\beta-1$
$f(\alpha)=\alpha$이고 $\gamma>\beta=a$이므로
$-\sqrt{\gamma-a}+b=\alpha$
$-\sqrt{\gamma-\beta}+\beta=\beta-1$ $(\because ㉡)$
$\sqrt{\gamma-\beta}=1$ $\therefore \gamma=\beta+1$
이때 $\alpha+\beta+\gamma=15$이므로
$(\beta-1)+\beta+(\beta+1)=15$
$3\beta=15$ $\therefore \beta=5$
따라서 $\alpha=\beta-1=4$, $\gamma=\beta+1=6$이고, $a=b=5$이므로

$$f(x)=\begin{cases}-(x-5)^2+5 & (x\le5)\\ -\sqrt{x-5}+5 & (x>5)\end{cases}$$

$\therefore f(\alpha+\beta)=f(4+5)=f(9)$
$\qquad\qquad=-2+5=3$
같은 방법으로 방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 α뿐이고 방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 β, γ인 경우에도
$f(\alpha+\beta)=3$

답 ③

051

일등급의 메모장

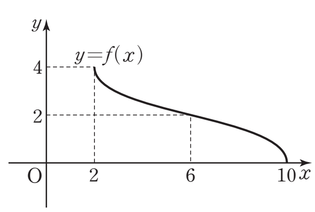
원점 O와 서로 다른 두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$에 대하여

(1) 직선 PQ의 기울기: $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

(2) 직선 OP의 기울기 : $\dfrac{y_1}{x_1}$

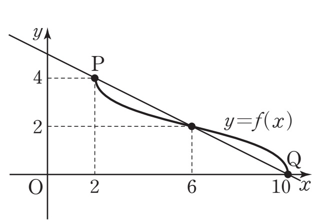
즉, x, y에 대한 유리식이 나오면 '기울기'로 해석할 수 있는지 확인해 본다.

ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



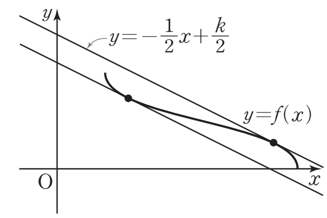
이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(6, 2)$에 대하여 대칭이다.
$x_1+x_2=12$이면
$\dfrac{x_1+x_2}{2}=6$
이므로 선분 PQ의 중점이 점 $(6, 2)$이다.
즉, $\dfrac{y_1+y_2}{2}=2$이므로
$y_1+y_2=4$ (참)

ㄴ. $2y_1-2y_2=x_2-x_1$에서
$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\dfrac{1}{2}$
이므로 직선 PQ의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이다.
그런데 직선 PQ가 곡선 $y=f(x)$와 서로 다른 세 점에서 만나려면 점 $(6, 2)$를 지나야 한다.



기울기가 $-\dfrac{1}{2}$인 직선 PQ가 점 $(6, 2)$를 지나면 위의 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 세 점 $(2, 4)$, $(6, 2)$, $(10, 0)$에서 만나므로 x_1+x_2의 최솟값은
$2+6=8$ (참)

ㄷ. $x_1+2y_1=k$ (k는 실수)라 하면 점 P는 직선 $x+2y=k$ 위의 점이고, k의 최댓값과 최솟값은 직선 $x+2y=k$, 즉
$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{k}{2}$가 곡선 $y=f(x)$에 접할 때임을 알 수 있다.



$6\le x\le 10$에서 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{k}{2}$가 곡선 $y=f(x)$에 접하면
$-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{k}{2}=\sqrt{10-x}$에서
$\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{k}{2}x+\dfrac{k^2}{4}=10-x$
$x^2-2(k-2)x+k^2-40=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=\{-(k-2)\}^2-(k^2-40)=0$
$-4k+44=0 \qquad \therefore k=11$
㉠에서 $x^2-18x+81=0$이므로
$(x-9)^2=0 \qquad \therefore x=9$
즉, 접점의 좌표는 $(9, 1)$이다.
또, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(6, 2)$에 대하여 대칭이므로 점 $(9, 1)$을 점 $(6, 2)$에 대하여 대칭이동한 점 $(3, 3)$에서 직선 $x+2y=k$가 곡선 $y=f(x)$에 접하고, 이때의 k의 값은
$k=3+2\times 3=9$
따라서 x_1+2y_1의 최댓값은 11, 최솟값은 9이므로 최댓값과 최솟값의 차는
$11-9=2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

052

일등급의 메모장

모든 실수 x에 대하여

$f(x+a)=f(x)+b \Longleftrightarrow f(x+a)-\dfrac{b}{a}(x+a)=f(x)-\dfrac{b}{a}x$

즉, $g(x)=f(x)-\dfrac{b}{a}x$라 하면 $g(x+a)=g(x)$이므로 $g(x)$는 주기가 a 이하인 함수이다.

조건 (나), (다)에 의하여 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
$x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$, 즉 $f(x)$는 증가함수이므로
$a>0$
조건 (가)에 의하여 $0\le x<1$일 때 $ax+b\ge 0$이므로
$b\ge 0$
조건 (나)에 의하여 $f(1)=f(0)+1$이므로
$\sqrt{a+b}+c=\sqrt{b}+c+1$
$\sqrt{a+b}=\sqrt{b}+1$, $a+b=b+1+2\sqrt{b}$
$\therefore a=2\sqrt{b}+1$
a가 정수이므로 $b=k^2$ (k는 음이 아닌 정수)이라 하면
$a=2k+1$
$f(0)=0$이므로
$\sqrt{b}+c=0 \qquad \therefore c=-k$
즉, $0\le x<1$일 때 $f(x)=\sqrt{(2k+1)x+k^2}-k$

조건 ㈑에서 $g(x)=f(x)-x$라 하면 $-n\le x<n$일 때 방정식

$g(x)=\frac{1}{4}$의 서로 다른 실근의 개수는 $2n$이고

$$\begin{aligned}g(x+1)&=f(x+1)-x-1\\&=f(x)-x\\&=g(x)\end{aligned}$$

이므로 임의의 정수 m에 대하여 $m\le x<m+1$일 때 방정식

$g(x)=\frac{1}{4}$의 실근의 개수가 1임을 알 수 있다.

즉, $0\le x<1$일 때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+\frac{1}{4}$은 접하므로

$\sqrt{(2k+1)x+k^2}-k=x+\frac{1}{4}$에서

$\sqrt{(2k+1)x+k^2}=x+k+\frac{1}{4}$

$(2k+1)x+k^2=x^2+\left(2k+\frac{1}{2}\right)x+k^2+\frac{1}{2}k+\frac{1}{16}$

$x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k+\frac{1}{16}=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\left(\frac{1}{2}k+\frac{1}{16}\right)=0$

$-2k=0$ $\quad\therefore k=0$

즉, $a=2k+1=1$, $b=k^2=0$, $c=-k=0$이므로

$0\le x<1$일 때 $f(x)=\sqrt{x}$

조건 ㈏에서

$f(n)=f(0)+n=n$ (n은 자연수)

이 성립하므로 참고

$$\begin{aligned}f(3a+2b+c)+f(5a+4b+3c)&=f(3)+f(5)\\&=3+5=8\end{aligned}$$

답 8

참고

조건 ㈏에 의하여

$f(1)=f(0)+1=0+1=1$

$f(2)=f(1)+1=1+1=2$

$f(3)=f(2)+1=2+1=3$

$\vdots$

이므로 자연수 n에 대하여 $f(n)=n$임을 알 수 있다.

다른 풀이

$f(0)=0$이므로 조건 ㈎에서

$\sqrt{b}+c=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, 조건 ㈎, ㈏에서 $f(x)=\sqrt{ax+b}+c$ $(0\le x<1)$이고

$f(0+1)=f(0)+1$이므로

$f(1)=1$

이때 $\sqrt{a+b}+c\ne1$이면 조건 ㈐를 만족시키지 않으므로

$\sqrt{a+b}+c=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $c=-\sqrt{b}$이므로 ㉡에서

$\sqrt{a+b}-\sqrt{b}=1$, $\sqrt{a+b}=1+\sqrt{b}$

양변을 제곱하면

$a+b=1+b+2\sqrt{b}$

$\therefore a-1=2\sqrt{b}$

즉, $a-1=-2c$에서

$c=\frac{1}{2}(1-a)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

또, $(a-1)^2=4b$에서

$a^2=2a+4b-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

$0\le x<1$에서 $h(x)=x+\frac{1}{4}$이라 하면

$$\begin{aligned}h(x+1)&=(x+1)+\frac{1}{4}\\&=\left(x+\frac{1}{4}\right)+1\\&=h(x)+1\end{aligned}$$

이므로 $0\le x<1$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=h(x)$의 교점이 k개일 때 자연수 n에 대하여 $-n\le x\le n$에서 교점은 $2kn$개이다.

이때 조건 ㈑에 의하여 $k=1$

따라서 방정식 $\sqrt{ax+b}+c=x+\frac{1}{4}$ $(0\le x<1)$은 하나의 근을 갖는다.

$\sqrt{ax+b}=x+\frac{1}{4}-c$에서

$ax+b=\left(x+\frac{1}{4}-c\right)^2$

$x^2+2\left\{\left(\frac{1}{4}-c\right)-\frac{a}{2}\right\}x+\left\{\left(\frac{1}{4}-c\right)^2-b\right\}=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\left\{\left(\frac{1}{4}-c\right)-\frac{a}{2}\right\}^2-\left\{\left(\frac{1}{4}-c\right)^2-b\right\}=0$

$\frac{1}{4}(a^2+4ac-a+4b)=0$

$a^2+4ac-a+4b=0$

$a^2+4a\times\frac{1}{2}(1-a)-a+4b=0$ ($\because$ ㉢)

$-a^2+a+4b=0$

$-(2a+4b-1)+a+4b=0$ ($\because$ ㉣)

$-a+1=0$

따라서 $a=1$, $b=0$, $c=0$이므로

$f(x)=\sqrt{x}$ $(0\le x<1)$

$$\begin{aligned}\therefore\ &f(3a+2b+c)+f(5a+4b+3c)\\&=f(3)+f(5)\ \leftarrow f(n)=f(n-1)+1=\cdots=f(0)+n=n\\&=3+5=8\end{aligned}$$

MEMO

MEMO