

공통수학 1

정답과 풀이

01

I. 다항식 다항식의 연산과 나머지 정리

001

$$A+2B=x^2+3xy-2y^2 \quad \dots \textcircled{A}$$

$$A-B=-2x^2+3xy+y^2 \quad \dots \textcircled{B}$$

①-②을 하면

$$3B=3x^2-3y^2 \quad \therefore B=x^2-y^2$$

①에서

$$A=-2x^2+3xy+y^2+B$$

$$=-2x^2+3xy+y^2+(x^2-y^2)$$

$$=-x^2+3xy$$

$$\therefore A+B=(-x^2+3xy)+(x^2-y^2)$$

$$=3xy-y^2$$

답 ⑤

002

$$(1+2x+3x^2+\dots+10x^9)^2$$

$$=(1+2x+3x^2+\dots+10x^9)(1+2x+3x^2+\dots+10x^9)$$

이므로 x^4 항은

$$1 \times 5x^4 + 2x \times 4x^3 + 3x^2 \times 3x^2 + 4x^3 \times 2x + 5x^4 \times 1 \quad \text{참고}$$

$$=5x^4 + 8x^4 + 9x^4 + 8x^4 + 5x^4$$

$$=35x^4$$

따라서 x^4 의 계수는 35이다.

답 ⑤

참고

다항식의 전개식에서 특정한 항의 계수를 구할 때에는 원하는 항이 나올 수 있는 부분만 계산하여 구한다.

003

$$(3-2a)^3=X, (3+2a)^3=Y \text{로 놓으면}$$

$$\{(3-2a)^3-(3+2a)^3\}^2 - \{(3-2a)^3+(3+2a)^3\}^2 \quad \text{주의}$$

$$=(X-Y)^2-(X+Y)^2$$

$$=X^2-2XY+Y^2-X^2-2XY-Y^2$$

$$=-4XY$$

$$=-4(3-2a)^3(3+2a)^3$$

$$=-4(9-4a^2)^3$$

$$=-4(9-8)^3 (\because a=\sqrt{2})$$

$$=-4$$

답 -4

주의

처음부터 $(3-2a)^3, (3+2a)^3$ 을 전개하지 말고 이들을 문자로 치환하여 간단히 한 후, 식의 값을 구한다.

004

$$a^5+b^5+a^3b^2+a^2b^3=a^3(a^2+b^2)+b^3(a^2+b^2)$$

$$=(a^2+b^2)(a^3+b^3)$$

002 정답과 풀이

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

$$=1-2 \times (-1)$$

$$=3$$

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

$$=-1-3 \times (-1) \times (-1)$$

$$=-4$$

$$\therefore a^5+b^5+a^3b^2+a^2b^3=3 \times (-4)=-12$$

답 ③

005

$x^2+3x+1=0$ 에서 $x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면
 $\rightarrow x=0$ 이면 $0+0+1=0$ 이므로 등식이 성립하지 않는다.

$$x+3+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=-3$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

$$=(-3)^2-2$$

$$=7$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=(-3)^3-3 \times (-3)$$

$$=-18$$

$$\therefore x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=7 \times (-18) - (-3)$$

$$=-123$$

답 -123

006

$\overline{AB}=c, \overline{BC}=a, \overline{CA}=b$ 라 하면 삼각형

ABC의 둘레의 길이가 5이므로

$$a+b+c=5 \quad \therefore a+b=5-c$$

삼각형 ABC의 넓이에서

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}c \quad \therefore ab=c$$

$\angle C=90^\circ$ 이므로 피타고라스 정리에 의하여

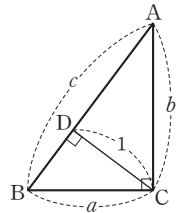
$$a^2+b^2=c^2$$

이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 이므로

$$c^2=(5-c)^2-2c, c^2=25-12c+c^2$$

$$12c=25 \quad \therefore c=\frac{25}{12}$$

답 $\frac{25}{12}$



007

$$\frac{3x+by-3}{ax+4y-1}=k \quad (k \text{는 상수}) \text{로 놓으면}$$

$$3x+by-3=kax+4ky-k$$

$$(3-ka)x+(b-4k)y+k-3=0$$

위의 식이 x, y 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$3-ka=0, b-4k=0, k-3=0$$

$$k-3=0 \text{에서 } k=3$$

$$3-ka=0 \text{에서 } a=1$$

$$b-4k=0 \text{에서 } b=12$$

$\therefore a^2 + b^2 = 1 + 144 = 145$

답 145

다른 풀이

$\frac{3x+by-3}{ax+4y-1} = k$ (k 는 상수)로 놓으면
 $k = \frac{3}{a} = \frac{b}{4} = \frac{-3}{-1} = \frac{3x+by-3}{ax+4y-1}$ 이므로
 $a=1, b=12$
 $\therefore a^2 + b^2 = 1 + 144 = 145$

참고

가비의 리

$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c} = \frac{p+q+r}{a+b+c} = \frac{px+qy+rz}{ax+by+cz}$
 (단, $a+b+c \neq 0, ax+by+cz \neq 0$)

008

$a(x-1) + b(x+1) + c(x-1)(x+1) = 3x^2 + x + 2$ ㉠
 ㉠에 $x=1$ 을 대입하면
 $2b=6 \quad \therefore b=3$
 ㉠에 $x=-1$ 을 대입하면
 $-2a=4 \quad \therefore a=-2$
 ㉠에 $x=0$ 을 대입하면
 $-a+b-c=2 \quad \therefore c=3$
 $\therefore a+b+c = -2+3+3=4$

답 4

다른 풀이

주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면
 $a(x-1) + b(x+1) + c(x-1)(x+1)$
 $= ax - a + bx + b + cx^2 - c$
 $= cx^2 + (a+b)x - a + b - c$
 $\therefore cx^2 + (a+b)x - a + b - c = 3x^2 + x + 2$
 양변의 계수를 비교하면
 $c=3, a+b=1, -a+b-c=2$
 $\therefore a=-2, b=3, c=3$
 $\therefore a+b+c = -2+3+3=4$

009

$(x^2-x+1)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$ ㉠
 ㉠에 $x=1$ 을 대입하면
 $1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$ ㉡
 ㉠에 $x=-1$ 을 대입하면
 $243 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{10}$ ㉢
 ㉡-㉢을 하면
 $-242 = 2a_1 + 2a_3 + 2a_5 + 2a_7 + 2a_9$
 $\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = -121$

답 -121

참고

- 다음은 모두 x 에 대한 항등식임을 뜻한다.
- (1) x 의 값에 관계없이 항상 성립한다.
 - (2) 모든 x 에 대하여 성립한다.
 - (3) 어떤 x 에 대해서도 항상 성립한다.

010

다항식 $P(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 4이므로
 $P(x) = (x+2)Q(x) + 4$
 다항식 $Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면
 $Q(x) = (x-1)Q_1(x) - 1$
 $\therefore P(x) = (x+2)\{(x-1)Q_1(x) - 1\} + 4$
 $= (x-1)(x+2)Q_1(x) - (x+2) + 4$
 $= (x-1)(x+2)Q_1(x) - x + 2$
 따라서 $P(x)$ 를 $(x-1)(x+2)$ 로 나누었을 때의 나머지는 $-x+2$ 이므로 $R(x) = -x+2$ 에서
 $R(-1) = 1+2=3$

답 3

011

$f(x)$ 가 삼차다항식이므로 $f(x)+1$ 을 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $ax+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면
 $f(x)+1 = (x-2)^2(ax+b)$ ㉠
 $f(x)-2$ 는 $x^2-1 = (x+1)(x-1)$ 로 나누어떨어지지므로
 $f(-1)-2=0, f(1)-2=0$
 $\therefore f(-1)=2, f(1)=2$
 ㉠에 $x=-1$ 을 대입하면
 $f(-1)+1=9(-a+b) \quad \therefore -3a+3b=1$ ㉡
 ㉠에 $x=1$ 을 대입하면
 $f(1)+1=a+b \quad \therefore a+b=3$ ㉢
 ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
 $a = \frac{4}{3}, b = \frac{5}{3}$
 $\therefore f(x)+1 = (x-2)^2\left(\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}\right)$
 즉, $f(3)+1 = \frac{17}{3}$ 에서 $f(3) = \frac{14}{3}$
 따라서 $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $\frac{14}{3}$ 이다.

답 $\frac{14}{3}$

012

다항식 $P(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 1이므로
 $P(x) = (x-2)Q(x) + 1$
 $Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 몫이 x^2+2x-8 이고 나머지가 5이므로
 $Q(x) = (x-2)(x^2+2x-8) + 5$
 따라서 $P(x) = (x-2)^2(x^2+2x-8) + 5(x-2) + 1$ 이므로
 $P(3) = 7+5+1=13$

답 13

013

$(x^2+xy-2y^2) \ominus (2x^2-3xy-y^2)$
 $= 2(x^2+xy-2y^2) - 3(2x^2-3xy-y^2)$
 $= 2x^2+2xy-4y^2-6x^2+9xy+3y^2$
 $= -4x^2+11xy-y^2$

$$\begin{aligned} \therefore \{ & (x^2+xy-2y^2) \odot (2x^2-3xy-y^2) \} \star (x^2+2xy+3y^2) \\ & = (-4x^2+11xy-y^2) \star (x^2+2xy+3y^2) \\ & = (-4x^2+11xy-y^2) + 2(x^2+2xy+3y^2) \\ & = -4x^2+11xy-y^2+2x^2+4xy+6y^2 \\ & = -2x^2+15xy+5y^2 \end{aligned}$$

따라서 xy 의 계수는 15이다.

답 15

014

$\overline{BO}=P$, $\overline{AB}=Q$ 라 하면
 $\overline{AD}=2P$, $\overline{OC}=P$, $\overline{CD}=Q$

조건 (가)에서

$$\overline{AD} + \overline{CD} = 3x + y + 4$$

이므로

$$2P + Q = 3x + y + 4 \quad \dots \textcircled{A}$$

조건 (나)에서

$$\overline{AB} - \overline{BO} + \overline{CD} = x + 2y + 3$$

이므로

$$2Q - P = x + 2y + 3 \quad \dots \textcircled{B}$$

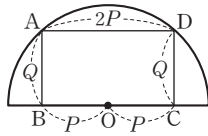
①, ②를 연립하여 풀면

$$P = x + 1, Q = x + y + 2$$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$$2P \times Q = 2(x+1)(x+y+2)$$

답 ⑤



015

조건 (나)에 의하여 $f(x+1) = x^2(x+a)$ (a 는 상수)라 하면

$$f(2) = 1 + a$$

조건 (가)에 의하여

$$1 + a = 3 \quad \therefore a = 2$$

즉, $f(x+1) = x^2(x+2)$ 이므로

$$f(x) = (x-1)^2(x+1) = (x^2-1)(x-1)$$

$\hookrightarrow f(x+1) = x^2(x+2)$ 에서 x 대신 $x-1$ 을 대입한다.

따라서 $f(x)$ 를 x^2-1 로 나누었을 때의 몫은 $x-1$, 나머지는 0이므로

$$p=1, q=-1, r=0$$

$$\therefore p+q+r=1+(-1)+0=0$$

답 0

016

$P(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 몫과 나머지를

$ax+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)

라 하면

$$P(x) = (x-2)^2(ax+b) + ax+b$$

$$P(2) = 4 \text{이므로 } 2a+b=4$$

$$\therefore b=4-2a$$

$$\begin{aligned} \therefore P(x) &= (x-2)^2(ax+4-2a) + ax+4-2a \\ &= (x-2)^2\{a(x-2)+4\} + a(x-2)+4 \\ &= a(x-2)^3 + 4(x-2)^2 + a(x-2)+4 \end{aligned}$$

즉, $R(x) = 4(x-2)^2 + a(x-2) + 4$ 이고, $R(0) = R(1)$ 이므로

$$16 - 2a + 4 = 4 - a + 4$$

$$\therefore a = 12, b = -20$$

따라서 $P(x) = (x-2)^2(12x-20) + 12x-20$ 이므로

$$P(1) = 12 - 20 + 12 - 20 = -16$$

답 -16

017

조건 (가)에 의하여

$$(x-2)(y-2)(2z-2) = 0$$

$$2xyz - 2xy - 4zx + 4x - 4yz + 4y + 8z - 8 = 0$$

$$2xyz - 2(xy + 2yz + 2zx) + 4(x + y + 2z) - 8 = 0$$

조건 (나)에 의하여

$$2xyz - 2 \times 2(x + y + 2z) + 4(x + y + 2z) - 8 = 0$$

$$\therefore xyz = 4$$

답 ①

018

$$\{P(x)\}^2 = (x^2 - 4x - 5)Q(x) + 36$$

$$= (x+1)(x-5)Q(x) + 36 \quad \dots \textcircled{A}$$

이므로

$$\{P(-1)\}^2 = 36 \text{ 또는 } \{P(5)\}^2 = 36$$

$$\therefore P(-1) = \pm 6 \text{ 또는 } P(5) = \pm 6$$

$P(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면 $P(0) \neq P(4)$ 이므로 이차함수 $y = P(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x = 2$ 가 될 수 없다.

즉, $P(-1) \neq P(5)$ 이므로

$$P(-1) = 6, P(5) = -6 \text{ 또는 } P(-1) = -6, P(5) = 6$$

(i) $P(-1) = 6, P(5) = -6$ 일 때

$$P(-1) = 1 - a + b = 6$$

$$\therefore a - b = -5 \quad \dots \textcircled{B}$$

$$P(5) = 25 + 5a + b = -6$$

$$\therefore 5a + b = -31 \quad \dots \textcircled{C}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = -6, b = -1$$

$$\therefore P(x) = x^2 - 6x - 1$$

이것을 ①에 대입하면

$$(x^2 - 6x - 1)^2 = (x+1)(x-5)Q(x) + 36$$

이때

$$(x^2 - 6x - 1)^2 - 36 = (x^2 - 6x - 1 + 6)(x^2 - 6x - 1 - 6)$$

$$= (x^2 - 6x + 5)(x^2 - 6x - 7)$$

$$= (x-1)(x-5)(x+1)(x-7)$$

이므로

$$(x^2 - 6x - 1)^2 = (x+1)(x-5)(x-1)(x-7) + 36$$

즉, $Q(x) = (x-1)(x-7) = x^2 - 8x + 7$ 이므로

$$Q(-1) = 16$$

(ii) $P(-1) = -6, P(5) = 6$ 일 때

$$P(-1) = 1 - a + b = -6$$

$$\therefore a - b = 7 \quad \dots \textcircled{D}$$

$$P(5) = 25 + 5a + b = 6$$

$$\therefore 5a + b = -19 \quad \dots \textcircled{E}$$

③, ④를 연립하여 풀면

$$a = -2, b = -9$$

$$\therefore P(x) = x^2 - 2x - 9$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$(x^2 - 2x - 9)^2 = (x+1)(x-5)Q(x) + 36$$

이때

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x - 9)^2 - 36 &= (x^2 - 2x - 9 + 6)(x^2 - 2x - 9 - 6) \\ &= (x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x - 15) \\ &= (x+1)(x-3)(x+3)(x-5) \end{aligned}$$

이므로

$$(x^2 - 2x - 9)^2 = (x+1)(x-5)(x+3)(x-3) + 36$$

즉, $Q(x) = (x-3)(x+3) = x^2 - 9$ 이므로

$$Q(-1) = -8$$

(i), (ii)에서 모든 $Q(-1)$ 의 값의 합은

$$16 + (-8) = 8$$

답 8

019

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) &= a^2 + b^2 + c^2 - (ab+bc+ca) \\ &= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) \\ &= \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2) \\ &= \frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} \geq 0 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립한다.)

$$\therefore (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

$$ab+bc+ca = 12 \text{이므로}$$

$$(a+b+c)^2 \geq 36$$

$$\therefore a+b+c \geq 6 \quad (\because a > 0, b > 0, c > 0)$$

따라서 $a+b+c$ 의 최솟값은 6이다.

답 2

020

$$a^2 + b^2 = (3+2\sqrt{2}) + (3-2\sqrt{2}) = 6$$

$$a^2 - b^2 = (3+2\sqrt{2}) - (3-2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$

$$a^2 b^2 = (3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 1$$

$$\therefore ab = 1 \quad (\because a > 0, b > 0)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$= 6 + 2$$

$$= 8$$

이므로

$$a+b = 2\sqrt{2} \quad (\because a > 0, b > 0)$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2 b^2$$

$$= 6^2 - 2 \times 1$$

$$= 34$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$= (2\sqrt{2})^3 - 6\sqrt{2}$$

$$= 10\sqrt{2}$$

$$a^5 + b^5 = (a^2 + b^2)(a^3 + b^3) - a^2 b^2(a+b)$$

$$= 6 \times 10\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$$

$$= 58\sqrt{2}$$

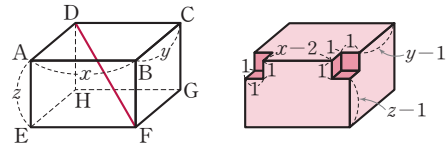
$$\begin{aligned} \therefore \frac{a^8 - b^8}{a^5 + b^5} &= \frac{(a^4 + b^4)(a^4 - b^4)}{a^5 + b^5} \\ &= \frac{(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}{a^5 + b^5} \\ &= \frac{34 \times 6 \times 4\sqrt{2}}{58\sqrt{2}} \\ &= \frac{408}{29} \end{aligned}$$

따라서 $p=29, q=408$ 이므로

$$p+q = 29 + 408 = 437$$

답 437

021



[그림 1]

[그림 2]

[그림 1]의 직육면체에서 $\overline{AB}=x, \overline{BC}=y, \overline{AE}=z$ 라 하면

[그림 2]의 입체도형의 모든 모서리의 길이의 합이 92이므로

$$\begin{aligned} \{3x + (x-2) + 6\} + \{2y + 2(y-1) + 6\} + \{2z + 2(z-1) + 6\} &= 92 \\ (4x+4) + (4y+4) + (4z+4) &= 92 \end{aligned}$$

$$\therefore x+y+z = 20$$

[그림 2]의 입체도형의 겉넓이가 144이므로

$$2xy + 2yz + 2zx = 144$$

$$\therefore xy + yz + zx = 72$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)$$

$$= 400 - 2 \times 72$$

$$= 256$$

$$\therefore \overline{DF} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{256} = 16$$

답 16

022

직사각형 IOHP에서 두 대각선의 길이는 같으므로

$$\overline{IH} = \overline{OP} = 4$$

$\overline{PH}=x, \overline{PI}=y$ 라 하면 직각삼각형 PIH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$x^2 + y^2 = 16$$

삼각형 PIH에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 내접원의

넓이가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\pi r^2 = \frac{\pi}{4} \quad \therefore r = \frac{1}{2} \quad (\because r > 0) \quad \text{[다른 풀이]}$$

삼각형 PIH의 넓이는

$$\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}r(x+y+4)$$

이므로 [참고]

$$xy = \frac{1}{2}(x+y+4), \quad x+y+4 = 2xy$$

$$\therefore x+y = 2(xy-2)$$

..... ㉠

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \text{이므로}$$

$$16 = \{2(xy-2)\}^2 - 2xy$$

$$16=4(xy)^2-18xy+16, \quad xy(2xy-9)=0$$

이때 $xy \neq 0$ 이므로 $2xy-9=0$

$$\therefore xy = \frac{9}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

①을 ①에 대입하면

$$x+y=2 \times \left(\frac{9}{2}-2\right)=5$$

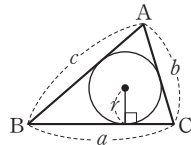
$$\begin{aligned} \therefore \overline{PH}^3 + \overline{PI}^3 &= x^3 + y^3 \\ &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= 5^3 - 3 \times \frac{9}{2} \times 5 \\ &= \frac{115}{2} \end{aligned}$$

답 ②

참고

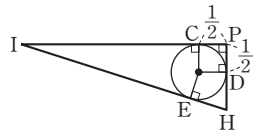
삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면 삼각형 ABC의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$



다른 풀이

직각삼각형 PIH의 내심에서 세 변 IP, PH, HI에 내린 수선의 발을 각각 C, D, E라 하면 원의 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$ 이므로



$$\overline{CP} = \overline{PD} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \overline{HD} = x - \frac{1}{2}, \quad \overline{IC} = y - \frac{1}{2}$$

$\overline{IC} = \overline{IE}, \overline{HD} = \overline{HE}$ 이고 $\overline{IH} = \overline{IE} + \overline{HE}$ 이므로
 \hookrightarrow 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같다.

$$4 = \left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right) \quad \therefore x + y = 5$$

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \text{이므로}$$

$$16 = 25 - 2xy \quad \therefore xy = \frac{9}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PH}^3 + \overline{PI}^3 &= x^3 + y^3 \\ &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= 5^3 - 3 \times \frac{9}{2} \times 5 \\ &= \frac{115}{2} \end{aligned}$$

023

$$P_1(x) = x+1, \quad P_2(x) = (x+1)(x+2),$$

$$P_3(x) = (x+1)(x+2)(x+3) \text{이므로}$$

$$2x^3 + 3x^2 = a + bP_1(x) + cP_2(x) + dP_3(x) \text{에서}$$

$$\begin{aligned} 2x^3 + 3x^2 &= a + b(x+1) + c(x+1)(x+2) \\ &\quad + d(x+1)(x+2)(x+3) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

①에 $x = -1$ 을 대입하면

$$a = 1$$

①에 $x = -2$ 를 대입하면

$$-16 + 12 = a - b \quad \therefore b = 5$$

①에 $x = -3$ 을 대입하면

$$-54 + 27 = a - 2b + 2c \quad \therefore c = -9$$

①에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 = a + b + 2c + 6d \quad \therefore d = 2$$

$$\therefore a + b + c + d = 1 + 5 - 9 + 2 = -1$$

답 -1

024

$f(x)$ 를 $x^2 + 4x + 3$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 4x + 3)Q(x) + ax + b \\ &= (x+1)(x+3)Q(x) + ax + b \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서

$$f(x-1) = f(x) - x^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

②에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(-1) = f(0) - 0 = 2 \quad (\because f(0) = 2)$$

②에 $x = -1$ 을 대입하면

$$f(-2) = f(-1) - 1 = 2 - 1 = 1$$

②에 $x = -2$ 를 대입하면

$$f(-3) = f(-2) - 4 = 1 - 4 = -3$$

①에 $x = -1$ 을 대입하면

$$f(-1) = -a + b = 2 \quad \dots \textcircled{3}$$

①에 $x = -3$ 을 대입하면

$$f(-3) = -3a + b = -3 \quad \dots \textcircled{4}$$

③, ④을 연립하여 풀면

$$a = \frac{5}{2}, \quad b = \frac{9}{2}$$

따라서 구하는 나머지는 $\frac{5}{2}x + \frac{9}{2}$ 이다.

답 ④

025

$$x^{2n} + 1 = a_{2n}(x-1)^{2n} + a_{2n-1}(x-1)^{2n-1} + \dots + a_1(x-1) + a_0 \quad \dots \textcircled{1}$$

①에 $x=3$ 을 대입하면

$$3^{2n} + 1 = 2^{2n}a_{2n} + 2^{2n-1}a_{2n-1} + \dots + 2^2a_2 + 2a_1 + a_0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①에 $x = -1$ 을 대입하면

$$2 = 2^{2n}a_{2n} - 2^{2n-1}a_{2n-1} + \dots + 2^2a_2 - 2a_1 + a_0 \quad \dots \textcircled{3}$$

②+③을 하면

$$3^{2n} + 3 = 2^{2n+1}a_{2n} + 2^{2n-1}a_{2n-2} + \dots + 2^3a_2 + 2a_0$$

$$2a_0 + 2^3a_2 + 2^5a_4 + \dots + 2^{2n+1}a_{2n} = 3^{2n} + 3$$

이므로

$$3^{2n} + 3 = 3^{2n} + 3$$

$$2n = 20 \quad \therefore n = 10$$

답 10

026

$$f\left(x + \frac{1}{x} - 3\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} - 5$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5$$

$$x + \frac{1}{x} - 3 = t \text{로 놓으면 } x + \frac{1}{x} = t + 3$$

즉,

$$\begin{aligned}
 f(t) &= (t+3)^3 - 3(t+3) - 5 \\
 &= t^3 + 9t^2 + 27t + 27 - 3t - 9 - 5 \\
 &= t^3 + 9t^2 + 24t + 13
 \end{aligned}$$

이므로

$$f(x) = x^3 + 9x^2 + 24x + 13$$

따라서 $f(x)$ 의 모든 계수와 상수항의 합은

$$1 + 9 + 24 + 13 = 47$$

답 47

다른 풀이

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ 이라 하면 $f(x)$ 의 모든 계수와 상수항의 합은

$$f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{참고}$$

$$\begin{aligned}
 f\left(x + \frac{1}{x} - 3\right) &= x^3 + \frac{1}{x^3} - 5 \\
 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5
 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } x + \frac{1}{x} - 3 = 1 \text{에서 } x + \frac{1}{x} = 4$$

$$\therefore f(1) = 4^3 - 3 \times 4 - 5 = 47$$

따라서 $f(x)$ 의 모든 계수와 상수항의 합은 47이다.

참고

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ 의 모든 계수와 상수항의 합 $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 의 값은 $f(1)$ 의 값과 같다.

027

$x^3 + ax^2 + bx - 2$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$ 이고 나머지가 1이므로

$$x^3 + ax^2 + bx - 2 = (x-1)Q(x) + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$(x^2 + a)Q(x+2)$ 가 $x+2$ 로 나누어떨어지므로

$$(4+a)Q(0) = 0$$

이때 $Q(0) \neq 0$ 이므로

$$4+a=0 \quad \therefore a=-4 \quad \rightarrow \textcircled{2} \text{에 } x=0 \text{을 대입하면 } Q(0)=3 \neq 0$$

$\textcircled{1}$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$1+a+b-2=1 \quad \therefore b=6$$

$$\therefore x^3 - 4x^2 + 6x - 2 = (x-1)Q(x) + 1$$

위의 식에 $x=2$ 를 대입하면

$$8 - 16 + 12 - 2 = Q(2) + 1$$

$$\therefore Q(2) = 1$$

답 ①

028

조건 (가)에서 $f(x)$ 를 x^3-1 로 나누었을 때의 몫이 $x-2$ 이므로

$$f(x) = (x^3-1)(x-2) + ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{는 상수})$$

로 놓으면

$$f(x) = (x-1)(x^2+x+1)(x-2) + ax^2 + bx + c$$

조건 (나)에 의하여

$$f(x) = (x-1)(x^2+x+1)(x-2) + a(x^2+x+1) + x - 3$$

조건 (다)에 의하여 $f(-1) = 6$ 이므로

$$6 + a - 4 = 6 \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore f(x) = (x-1)(x^2+x+1)(x-2) + 4(x^2+x+1) + x - 3$$

따라서 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(2) = 28 + 2 - 3 = 27$$

답 27

029

$f(x)$ 를 $(x-1)^2(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x-1)^2(x-2)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $2x-1$ 이므로

$$f(x) = (x-1)^2(x-2)Q(x) + a(x-1)^2 + 2x - 1$$

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 5이므로

$$f(2) = a + 4 - 1 = 5 \quad \therefore a = 2$$

$$f(x) = (x-1)^2(x-2)Q(x) + 2(x-1)^2 + 2x - 1$$

$$\therefore f(x+1) = x^2(x-1)Q(x+1) + 2x^2 + 2(x+1) - 1$$

$$= x^2(x-1)Q(x+1) + 2x^2 + 2x + 1$$

따라서 $f(x+1)$ 을 $x^2(x-1)$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$R(x) = 2x^2 + 2x + 1 \text{이므로}$$

$$R(1) = 5$$

답 5

030

$f(x)$ 는 이차다항식, $g(x)$ 는 일차다항식이고 조건 (가)에서 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 이 중근 2를 가지므로

$$f(x) - g(x) = a(x-2)^2 \quad (a \neq 0) \quad \dots \textcircled{1}$$

으로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여

$$f(-1) = 5, g(-1) = -4$$

$\textcircled{1}$ 에 $x = -1$ 을 대입하면

$$f(-1) - g(-1) = 9a$$

$$9 = 9a \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore f(x) - g(x) = (x-2)^2$$

따라서 다항식 $f(x) - g(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$f(3) - g(3) = (3-2)^2 = 1$$

답 1

031

$x^{100} - 1$ 을 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$x^{100} - 1 = (x-1)^2Q(x) + ax + b$$

위의 식에 $x=1$ 을 대입하면

$$a + b = 0 \quad \therefore b = -a$$

$$\therefore x^{100} - 1 = (x-1)^2Q(x) + ax - a$$

$$= (x-1)^2Q(x) + a(x-1)$$

한편, $x^{100} - 1 = (x-1)(x^{99} + x^{98} + \dots + x + 1)$ 이므로

$$\rightarrow \text{자연수 } n \text{에 대하여 } x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

$$(x-1)(x^{99} + x^{98} + \dots + x + 1) = (x-1)^2Q(x) + a(x-1)$$

$$\therefore x^{99} + x^{98} + \dots + x + 1 = (x-1)Q(x) + a$$

위의 식에 $x=1$ 을 대입하면

$$a = 100$$

$$\therefore R(x) = 100(x-1)$$

따라서 $R(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는
 $R(2)=100$

답 ③

032

$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=x^4-1$ 이므로

$f(x)=x^3+x^2+x+1$ 이라 하면

$$x^4-1=(x-1)f(x)$$

$$\therefore x^4=(x-1)f(x)+1$$

$$x^{2026}=(x^4)^{506} \times x^2 \text{이므로}$$

$$x^{2026}=\{(x-1)f(x)+1\}^{506} \times x^2$$

이때 $\{(x-1)f(x)+1\}^{506}=f(x)g(x)+1$ ($g(x)$ 는 다항식)의 꼴이므로

$$x^{2026}-1=\{(x-1)f(x)+1\}^{506} \times x^2-1$$

$$=\{f(x)g(x)+1\} \times x^2-1$$

$$=f(x)\{g(x)x^2\}+x^2-1$$

따라서 $R(x)=x^2-1$ 이므로

$$R(20)=400-1=399$$

답 399

033

$P(x)=x^2+ax+b$, $Q(x)=-2x+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$P(x-1)-Q(x-1)$$

$$=\{(x-1)^2+a(x-1)+b\}-\{-2(x-1)+c\}$$

$$=(x-1)\{(x-1)+a+2\}+(b-c)$$

$$=(x-1)(x+a+1)+(b-c)$$

조건 (가)에 의하여

$$b-c=0 \quad \therefore b=c$$

$$\therefore P(x)-Q(x)=x^2+(a+2)x$$

조건 (나)에 의하여 $x^2+(a+2)x=0$ 이 중근을 가져야 하므로

$$\left(\frac{a+2}{2}\right)^2=0 \quad \therefore a=-2 \quad \text{참고}$$

$$\therefore P(x)+Q(x)=x^2-4x+2b$$

조건 (다)에 의하여

$$5+2b=7 \quad \therefore b=c=1$$

따라서 $P(x)=x^2-2x+1$, $Q(x)=-2x+1$ 이므로

$$P(3)+Q(2)=(9-6+1)+(-4+1)=1$$

답 1

참고

이차방정식 $x^2+bx+c=0$ 이 중근을 가질 조건은 $c=\left(\frac{b}{2}\right)^2$

034

조건 (나)에 의하여

$$\{f(x+1)\}^2=(x^2+6)(x+2)(x-2)+25$$

$$=(x^2+6)(x^2-4)+25$$

$$=x^4+2x^2+1$$

$$=(x^2+1)^2 \quad \text{참고}$$

조건 (가)에 의하여

$$f(x+1)=x^2+1$$

$$\therefore f(x)=(x-1)^2+1=x^2-2x+2$$

008 정답과 풀이

$f(x+a)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$R(a)=f(-1+a)$$

$$=(-1+a)^2-2(-1+a)+2$$

$$=a^2-4a+5$$

$$\therefore R(1)=1-4+5=2$$

답 2

참고

x^4+2x^2+1 에서 $x^2=A$ 로 놓으면

$$x^4+2x^2+1=A^2+2A+1$$

$$=(A+1)^2$$

$$=(x^2+1)^2$$

다른 풀이

$x+1=t$ 로 놓으면 $x=t-1$ 이므로 조건 (나)에서

$$\{f(t)\}^2-25=\{(t-1)^2+6\}\{(t-1)+2\}\{(t-1)-2\}$$

$$\{f(t)+5\}\{f(t)-5\}=(t^2-2t+7)(t+1)(t-3)$$

$$=(t^2-2t+7)(t^2-2t-3)$$

$$=\{(t^2-2t+2)+5\}\{(t^2-2t+2)-5\}$$

$$\therefore f(x)=x^2-2x+2$$

$f(x+a)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$R(a)=f(-1+a)$$

$$=(-1+a)^2-2(-1+a)+2$$

$$=a^2-4a+5$$

$$\therefore R(1)=1-4+5=2$$

035

$Q(x)=x^2+mx+n$ (m, n 은 상수)으로 놓으면

↳ 사차식이 이차식으로 나누어떨어지면 몫은 이차식이다.

$$x^4+ax+b=(x-2)^2(x^2+mx+n) \quad \dots \text{㉠}$$

㉠에 $x=2$ 를 대입하면

$$16+2a+b=0 \quad \therefore 2a+b=-16 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠에 $x=0$ 을 대입하면

$$b=4n \quad \dots \text{㉢}$$

㉠에 $x=1$ 을 대입하면

$$1+a+b=1+m+n \quad \therefore a+b=m+n \quad \dots \text{㉣}$$

㉠에 $x=-1$ 을 대입하면

$$1-a+b=9(1-m+n) \quad \therefore a-b=9m-9n-8 \quad \dots \text{㉤}$$

$2 \times \text{㉢} - \text{㉡}$ 을 하면

$$b=2m+2n+16 \quad \therefore m-n=-8 \quad (\because \text{㉢}) \quad \dots \text{㉥}$$

$\text{㉢} - \text{㉤}$ 을 하면

$$2b=-8m+10n+8 \quad \therefore 4m-n=4 \quad (\because \text{㉢}) \quad \dots \text{㉦}$$

$\text{㉤}, \text{㉦}$ 을 연립하여 풀면

$$m=4, n=12$$

따라서 $a=-32, b=48, Q(x)=x^2+4x+12$ 이므로

$$a+b+Q(2)=-32+48+24=40$$

답 40

036

$f(x)$ 의 차수를 n 이라 하면 좌변의 차수는 $2n$, 우변의 차수는 $n+3$ 이므로

$$2n=n+3 \quad \therefore n=3$$

따라서 $f(x)$ 는 삼차다항식이다.

$f(x^2-1)=x^3f(x)+x^2-x$ ㉠
 ㉠에 $x=0$ 을 대입하면
 $f(-1)=0$
 ㉠에 $x=-1$ 을 대입하면
 $f(0)=-f(-1)+2 \quad \therefore f(0)=2$
 ㉠에 $x=1$ 을 대입하면
 $f(0)=f(1) \quad \therefore f(1)=2$
 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)로 놓으면
 $f(0)=2$ 이므로 $c=2$
 $f(-1)=0$ 이므로
 $-1+a-b+c=0$
 $\therefore a-b=-1$ ㉡
 $f(1)=2$ 이므로
 $1+a+b+c=2$
 $\therefore a+b=-1$ ㉢
 ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
 $a=-1, b=0$
 $\therefore f(x)=x^3-x^2+2$
 따라서 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는
 $f(2)=8-4+2=6$

답 6

037

$f(-1)-4=-1, f(-2)-4=-2, f(-3)-4=-3$ 이므로
 $f(-1)-4+1=0, f(-2)-4+2=0, f(-3)-4+3=0$
 따라서 $f(x)-4-x$ 는 $x+1, x+2, x+3$ 을 인수로 가지므로
 $f(x)-4-x=(x+1)(x+2)(x+3)(x+k)$ (k 는 상수)
 로 놓을 수 있다.
 $f(0)=-2$ 이므로
 $f(0)-4=6k \quad \therefore k=-1$
 $\therefore f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x-1)+x+4$
 $= (x^2-1)(x+2)(x+3)+x+4$
 따라서 $Q(x)=(x+2)(x+3), R(x)=x+4$ 이므로
 $Q(1)+R(2)=12+6=18$

답 18

038

$f(x)$ 를 $x+4, x^2+16$ 으로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x), Q_2(x)$
 라 하면 조건 ㉠에 의하여
 $f(x)=(x+4)Q_1(x)+3p^2$
 $= (x^2+16)Q_2(x)+3p^2$
 이므로
 $f(x)=(x+4)(x^2+16)(x+a)+3p^2$ (a 는 상수)
 이라 하면 조건 ㉡에서
 $f(-1)=f(1)$
 $3 \times 17 \times (-1+a)+3p^2=5 \times 17 \times (1+a)+3p^2$
 $3a-3=5a+5 \quad \therefore a=-4$
 $\therefore f(x)=(x+4)(x^2+16)(x-4)+3p^2$
 $= (x^2+16)(x^2-16)+3p^2$
 조건 ㉢에 의하여 $f(\sqrt{p})=0$ 이므로
 $(p+16)(p-16)+3p^2=0$

$p^2-64=0, (p+8)(p-8)=0$
 $\therefore p=8$ ($\because p>0$)

답 8

039

조건 ㉠에 의하여 $f(x)$ 를 x^3-1 로 나누었을 때의 몫과 나머지를
 $Q(x)$ 라 하면
 $f(x)=(x^3-1)Q(x)+Q(x)$
 $= (x-1)(x^2+x+1)Q(x)+Q(x)$
 $\therefore f(x)-x=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+Q(x)-x$
 조건 ㉡에서 $f(x)-x$ 는 x^2+x+1 로 나누어떨어지므로
 $Q(x)-x=0$ 또는 $Q(x)-x=a(x^2+x+1)$ (단, $a \neq 0$)
 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 72이므로
 $f(2)=7Q(2)+Q(2)=8Q(2)=72$
 $\therefore Q(2)=9$ ㉠
 (i) $Q(x)-x=0$ 일 때
 $Q(x)=x$
 $Q(2)=2$ 이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.
 (ii) $Q(x)-x=a(x^2+x+1)$ 일 때
 $Q(x)=a(x^2+x+1)+x$
 $Q(2)=7a+2=9 \quad \therefore a=1$
 $\therefore Q(x)=(x^2+x+1)+x=x^2+2x+1$
 (i), (ii)에서 $Q(x)=x^2+2x+1$ 이므로
 $f(x)=(x^3-1)(x^2+2x+1)+x^2+2x+1$
 $= x^3(x+1)^2$
 $\therefore f(1)=4$

답 1

040

조립제법에 의하여

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccc} 4 & 2 & k \\ & 2 & 2 \end{array} \right. \frac{1}{2} \\
 \hline
 \frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccc} 4 & 4 & k+2 \\ & 2 & 3 \end{array} \right. \frac{1}{2}k+1 \\
 \hline
 \frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccc} 4 & 6 & k+5 \\ & 2 & 2 \end{array} \right. \\
 \hline
 4 \left| \begin{array}{c} 8 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$4x^3+2x^2+kx+\frac{1}{2}$
 $= 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(k+5)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}k+\frac{3}{2}$
 $= \frac{1}{2}(2x-1)^3+2(2x-1)^2+\frac{k+5}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}k+\frac{3}{2}$
 따라서 $a=\frac{1}{2}, b=2, 3=\frac{k+5}{2}, c=\frac{1}{2}k+\frac{3}{2}$ 이므로
 $3=\frac{k+5}{2}$ 에서 $k=1$
 $c=\frac{1}{2}k+\frac{3}{2}$ 에서 $c=2$
 $\therefore abck=\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 1=2$

답 2

041

조립제법에 의하여

$$\begin{array}{r} 1 \quad | \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \\ \quad \quad | \quad \quad 1 \quad 3 \quad 4 \\ 1 \quad | \quad 1 \quad 3 \quad 4 \quad | \quad 7 \\ \quad \quad | \quad \quad 1 \quad 4 \\ 1 \quad | \quad 1 \quad 4 \quad | \quad 8 \\ \quad \quad | \quad \quad 1 \\ 1 \quad | \quad 1 \quad | \quad 5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 2x^2 + x + 3 \\ &= (x-1)^3 + 5(x-1)^2 + 8(x-1) + 7 \\ \therefore f(101) &= 100^3 + 5 \times 100^2 + 8 \times 100 + 7 = 1050807 \end{aligned}$$

따라서 $f(101)$ 의 값의 각 자리의 숫자의 합은
 $1+5+8+7=21$

답 21

다른 풀이

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 2x^2 + x + 3 \text{에서} \\ f(x+1) &= (x+1)^3 + 2(x+1)^2 + (x+1) + 3 = x^3 + 5x^2 + 8x + 7 \end{aligned}$$

위의 식의 양변에 $x=100$ 을 대입하면
 $f(101) = 100^3 + 5 \times 100^2 + 8 \times 100 + 7 = 1050807$
 따라서 $f(101)$ 의 값의 각 자리의 숫자의 합은
 $1+5+8+7=21$

042

일등급의 메모장

두 다항함수 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 와 0이 아닌 실수 k 에 대하여

$$\begin{aligned} f_1(x) \times f_2(x) &= f_2(x) \times f_1(x) \\ &= -f_1(x) \times \{-f_2(x)\} \\ &= \frac{1}{k} f_1(x) \times k f_2(x) \\ &= \dots \end{aligned}$$

두 다항식 $g(x)$ 와 $h(x)$ 가 각각 x 에 대한 일차다항식, 이차다항식이므로

$$\begin{aligned} g(x) &= px + q \quad (p, q \text{는 상수, } p \neq 0), \\ h(x) &= ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{는 상수, } a \neq 0) \end{aligned}$$

라 하면

$$\begin{aligned} (x^2-1)^2 + (px+q)^2 &= (ax^2+bx+c)^2 \\ x^4 + (p^2-2)x^2 + 2pqx + q^2 + 1 \\ &= a^2x^4 + 2abx^3 + (2ac+b^2)x^2 + 2bcx + c^2 \end{aligned}$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$\begin{aligned} a^2 &= 1, \quad 2ab = 0, \quad 2ac + b^2 = p^2 - 2, \quad 2bc = 2pq, \quad c^2 = q^2 + 1 \\ a^2 = 1 \text{에서 } a &= -1 \text{ 또는 } a = 1 \end{aligned}$$

$$2ab = 0 \text{에서 } b = 0 \quad (\because a \neq 0)$$

$$2bc = 2pq \text{에서 } q = 0 \quad (\because b = 0, p \neq 0)$$

$$c^2 = q^2 + 1 \text{에서 } c = -1 \text{ 또는 } c = 1 \quad (\because q = 0)$$

$$2ac + b^2 = p^2 - 2 \text{에서 } p^2 = 2ac + 2 \quad (\because b = 0)$$

(i) $a=1, c=1$ 인 경우

$$\textcircled{1} \text{에서 } p^2 = 4 \text{이므로 } p = -2 \text{ 또는 } p = 2$$

$$\therefore g(x) = -2x, \quad h(x) = x^2 + 1$$

..... ㉠

$$\text{또는 } g(x) = 2x, \quad h(x) = x^2 + 1$$

(ii) $a=1, c=-1$ 인 경우

$$\textcircled{1} \text{에서 } p^2 = 0 \text{이므로 } p = 0$$

그런데 $p \neq 0$ 이므로 모순이다.

(iii) $a=-1, c=1$ 인 경우

$$\textcircled{1} \text{에서 } p^2 = 0 \text{이므로 } p = 0$$

그런데 $p \neq 0$ 이므로 모순이다.

(iv) $a=-1, c=-1$ 인 경우

$$\textcircled{1} \text{에서 } p^2 = 4 \text{이므로 } p = -2 \text{ 또는 } p = 2$$

$$\therefore g(x) = -2x, \quad h(x) = -x^2 - 1$$

$$\text{또는 } g(x) = 2x, \quad h(x) = -x^2 - 1$$

(i)~(iv)에서 $g(x) = \pm 2x, h(x) = \pm(x^2+1)$ 이므로 모든 $g(2)+h(2)$ 의 값의 곱은

$$\begin{aligned} (4+5) \times \{4+(-5)\} \times (-4+5) \times \{-4+(-5)\} \\ = 9 \times (-1) \times 1 \times (-9) \\ = 81 \end{aligned}$$

답 81

다른 풀이

$$\begin{aligned} \{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 &= \{h(x)\}^2 \text{에서} \\ \{f(x)\}^2 &= \{h(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 \\ &= \{h(x)+g(x)\} \{h(x)-g(x)\} \end{aligned}$$

이때

$$\{f(x)\}^2 = (x^2-1)^2 = (x+1)^2(x-1)^2$$

이고 $h(x)$ 는 이차다항식, $g(x)$ 는 일차다항식이므로

$h(x)-g(x)$ 와 $h(x)+g(x)$ 의 최고차항이 같다.

$$h(x)+g(x) = \pm(x+1)^2, \quad h(x)-g(x) = \pm(x-1)^2 \quad (\text{복호동순})$$

또는

$$h(x)+g(x) = \pm(x-1)^2, \quad h(x)-g(x) = \pm(x+1)^2 \quad (\text{복호동순})$$

(i) $h(x)+g(x) = (x+1)^2, h(x)-g(x) = (x-1)^2$ 인 경우

$$g(x) = 2x, \quad h(x) = x^2 + 1 \text{이므로}$$

$$g(2) + h(2) = 4 + 5 = 9$$

(ii) $h(x)+g(x) = -(x+1)^2, h(x)-g(x) = -(x-1)^2$ 인 경우

$$g(x) = -2x, \quad h(x) = -x^2 - 1 \text{이므로}$$

$$g(2) + h(2) = -4 - 5 = -9$$

(iii) $h(x)+g(x) = (x-1)^2, h(x)-g(x) = (x+1)^2$ 인 경우

$$g(x) = -2x, \quad h(x) = x^2 + 1 \text{이므로}$$

$$g(2) + h(2) = -4 + 5 = 1$$

(iv) $h(x)+g(x) = -(x-1)^2, h(x)-g(x) = -(x+1)^2$ 인 경우

$$g(x) = 2x, \quad h(x) = -x^2 - 1 \text{이므로}$$

$$g(2) + h(2) = 4 - 5 = -1$$

(i)~(iv)에서 모든 $g(2)+h(2)$ 의 값의 곱은

$$9 \times (-9) \times 1 \times (-1) = 81$$

043

일등급의 메모장

다항식의 나누셈

다항식 A 를 다항식 B ($B \neq 0$)로 나누었을 때의 몫을 Q , 나머지를 R 라 하면

$$(Q \text{의 차수}) = (A \text{의 차수}) - (B \text{의 차수})$$

$$(R \text{의 차수}) < (B \text{의 차수})$$

조건 (가)에 의하여

$$f(x) = g(x) \{g(x) + 3x^3\} + g(x) + 3x^3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나누었을 때의 나머지는 $g(x)$ 의 차수보다 낮아야 하므로 $g(x) + 3x^3$ 의 차수는 $g(x)$ 보다 낮다.

따라서 $g(x)$ 는 $-3x^3$ 을 반드시 포함하는 삼차식이다.

이때 조건 (나)에서 $g(x)$ 를 $g(x) + 3x^3$ 으로 나누었을 때의 몫이 이차식이라면 $g(x) + 3x^3$ 이 일차식이어야 한다.

따라서 $g(x) + 3x^3 = ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)로 놓으면

$$g(x) = -3x^3 + ax + b \quad \dots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

$$f(x) = (-3x^3 + ax + b)(ax + b) + ax + b$$

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 4이므로

$$a = -\frac{4}{3} \quad \text{[다른풀이]}$$

$$\therefore f(1) = b^2 - \frac{14}{3}b + \frac{40}{9}, g(1) = b - \frac{13}{3}$$

이때 조건 (다)에서 $f(1) + g(1) = -1$ 이므로

$$f(1) + g(1) = b^2 - \frac{11}{3}b + \frac{1}{9} = -1$$

$$9b^2 - 33b + 10 = 0, (3b - 1)(3b - 10) = 0$$

$g(0) > 1$ 에서 $b > 1$ 이므로

$$b = \frac{10}{3}$$

$$\text{따라서 } g(x) = -3x^3 - \frac{4}{3}x + \frac{10}{3} \text{이므로}$$

$$g(-1) = \frac{23}{3}$$

$$\therefore 3g(-1) = 3 \times \frac{23}{3} = 23$$

답 23

[다른풀이]

$$\textcircled{1} \text{에서 } f(x) + g(x) = g(x) \{g(x) + 3x^3\} + 2g(x) + 3x^3$$

위의 식에 $x=1$ 을 대입하면 조건 (다)에 의하여

$$-1 = \{g(1)\}^2 + 5g(1) + 3$$

$$\{g(1)\}^2 + 5g(1) + 4 = 0, \{g(1) + 1\} \{g(1) + 4\} = 0$$

$$\therefore g(1) = -1 \text{ 또는 } g(1) = -4$$

$$\text{이때 } \textcircled{2} \text{에서 } g(x) = -3x^3 - \frac{4}{3}x + b \text{이므로}$$

$$g(1) = -3 - \frac{4}{3} + b = b - \frac{13}{3}$$

$g(0) > 1$ 에서 $b > 1$ 이므로

$$g(1) = b - \frac{13}{3} = -1 \quad \therefore b = \frac{10}{3}$$

$$\text{따라서 } g(x) = -3x^3 - \frac{4}{3}x + \frac{10}{3} \text{이므로}$$

$$g(-1) = \frac{23}{3}$$

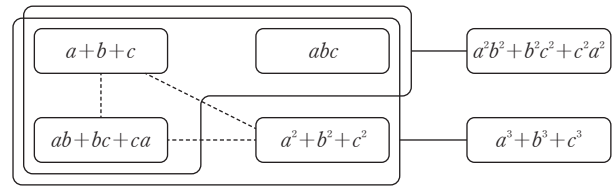
$$\therefore 3g(-1) = 3 \times \frac{23}{3} = 23$$

044

일등급의 메모장

$a+b+c, ab+bc+ca, a^2+b^2+c^2$ 중 두 값을 알면 다른 두 값을 알 수 있고

abc 의 값을 알면 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ 과 $a^3+b^3+c^3$ 의 값을 알 수 있다.



$$(x^3+y^3+z^3)(x^4+y^4+z^4)$$

$$= x^7+y^7+z^7+x^3y^3(x+y)+y^3z^3(y+z)+z^3x^3(z+x)$$

$$\therefore x^7+y^7+z^7 = (x^3+y^3+z^3)(x^4+y^4+z^4)$$

$$-x^3y^3(x+y) - y^3z^3(y+z) - z^3x^3(z+x)$$

$$x+y+z=2, x^2+y^2+z^2=6, xyz=-2 \text{이므로}$$

$$(i) x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) \text{에서}$$

$$6 = 2^2 - 2(xy+yz+zx)$$

$$\therefore xy+yz+zx = -1$$

$$\therefore x^3+y^3+z^3$$

$$= (x+y+z) \{x^2+y^2+z^2 - (xy+yz+zx)\} + 3xyz$$

$$= 2 \times \{6 - (-1)\} + 3 \times (-2)$$

$$= 8$$

$$(ii) (xy+yz+zx)^2 = (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2$$

$$+ 2\{(xy)(yz) + (yz)(zx) + (zx)(xy)\}$$

$$= x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x+y+z)$$

에서

$$(-1)^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2 \times (-2) \times 2$$

$$\therefore x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 9$$

$$\therefore x^4+y^4+z^4 = (x^2+y^2+z^2)^2 - 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$

$$= 6^2 - 2 \times 9$$

$$= 18$$

$$(iii) x+y=2-z, y+z=2-x, z+x=2-y \text{이므로}$$

$$x^3y^3(x+y) + y^3z^3(y+z) + z^3x^3(z+x)$$

$$= x^3y^3(2-z) + y^3z^3(2-x) + z^3x^3(2-y)$$

$$= 2(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3) - xyz(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$

이때

$$(xy)^3 + (yz)^3 + (zx)^3 - 3(xy)(yz)(zx)$$

$$= (xy+yz+zx) \times \{(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2$$

$$- (xy)(yz) - (yz)(zx) - (zx)(xy)\}$$

$$= (xy+yz+zx) \{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - xyz(x+y+z)\}$$

$$= -1 \times \{9 - (-2) \times 2\}$$

$$= -13$$

이므로

$$x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 - 3(xyz)^2 = -13$$

$$x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 = -13 + 3 \times (-2)^2 = -1$$

$$\therefore x^3y^3(x+y) + y^3z^3(y+z) + z^3x^3(z+x)$$

$$= 2 \times (-1) - (-2) \times 9$$

$$= 16$$

(i)~(iii)에서

$$x^7+y^7+z^7 = 8 \times 18 - 16 = 128$$

답 128

[다른풀이] 확장

$x+y+z=p, xy+yz+zx=q, xyz=r$ 이라 하고

$a^n = x^n + y^n + z^n$ (n 은 자연수)이라 하면

$$a_1 = p = 2$$

$$a_2 = p^2 - 2q \text{에서 } a_2 = 6, p = 2 \text{이므로}$$

$$q = -1$$

$$a_3 = p^3 - 3pq + 3r$$

$$= 2^3 - 3 \times 2 \times (-1) + 3 \times (-2)$$

$$= 8$$

자연수 n 에 대하여

$$a_{n+3} = pa_{n+2} - qa_{n+1} + ra_n$$

$$= 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n$$

이므로

$$a_4 = 2a_3 + a_2 - 2a_1$$

$$= 2 \times 8 + 6 - 2 \times 2$$

$$= 18$$

$$a_5 = 2a_4 + a_3 - 2a_2$$

$$= 2 \times 18 + 8 - 2 \times 6$$

$$= 32$$

$$a_6 = 2a_5 + a_4 - 2a_3$$

$$= 2 \times 32 + 18 - 2 \times 8$$

$$= 66$$

$$a_7 = 2a_6 + a_5 - 2a_4$$

$$= 2 \times 66 + 32 - 2 \times 18$$

$$= 128$$

$$\therefore x^7 + y^7 + z^7 = 128$$

참고 **확장**

뉴턴 항등식

$$p = x + y + z, q = xy + yz + zx, r = xyz \text{라 하고}$$

$$a_n = x^n + y^n + z^n \text{ (} n \text{은 자연수)}$$

이러 할 때 다음이 성립한다.

$$a_{n+3} = pa_{n+2} - qa_{n+1} + ra_n \text{ (단, } a_1 = p, a_2 = p^2 - 2q, a_3 = p^3 - 3pq + 3r)$$

다른 풀이

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$$

에서

$$6 = 4 - 2(xy + yz + zx)$$

$$\therefore xy + yz + zx = -1$$

따라서 $x + y + z = 2, xy + yz + zx = -1, xyz = -2$ 이므로 x, y, z 를 세 근으로 하는 삼차방정식을 $P(t) = 0$ 라 하면 **참고**

$$P(t) = t^3 - 2t^2 - t + 2$$

t^7 을 다항식 $P(t) = t^3 - 2t^2 - t + 2$ 로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} t^4 + 2t^3 + 5t^2 + 10t + 21 \\ t^3 - 2t^2 - t + 2 \overline{) t^7} \\ \underline{t^7 - 2t^6 - t^5 + 2t^4} \\ 2t^6 + t^5 - 2t^4 \\ \underline{2t^6 - 4t^5 - 2t^4 + 4t^3} \\ 5t^5 - 4t^3 \\ \underline{5t^5 - 10t^4 - 5t^3 + 10t^2} \\ 10t^4 + t^3 - 10t^2 \\ \underline{10t^4 - 20t^3 - 10t^2 + 20t} \\ 21t^3 - 20t \\ \underline{21t^3 - 42t^2 - 21t + 42} \\ 42t^2 + t - 42 \end{array}$$

$$\therefore t^7 = P(t)(t^4 + 2t^3 + 5t^2 + 10t + 21) + 42t^2 + t - 42 \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 x, y, z 는 $P(t) = 0$ 의 세 근이므로

$$P(x) = P(y) = P(z) = 0$$

㉠에 $t = x$ 를 대입하면

$$x^7 = 42x^2 + x - 42 \quad \dots \textcircled{2}$$

㉡에 $t = y$ 를 대입하면

$$y^7 = 42y^2 + y - 42 \quad \dots \textcircled{3}$$

㉢에 $t = z$ 를 대입하면

$$z^7 = 42z^2 + z - 42 \quad \dots \textcircled{4}$$

㉡+㉢+㉣을 하면

$$x^7 + y^7 + z^7 = 42(x^2 + y^2 + z^2) + x + y + z - 42 \times 3$$

$$= 42 \times 6 + 2 - 126$$

$$= 128$$

참고 **확장**

삼차방정식의 작성

α, β, γ 를 세 근으로 하고 x^3 의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$$

045

일등급의 메모장

로피탈 정리

함수 $f(x), g(x)$ 가 $x = a$ 를 포함하는 구간에서 미분가능하고,

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 의 극한값이 존재하면 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ 또는 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

테일러 정리와 다항식

다항식 $f(x)$ 를 $x = a$ 에 대하여 테일러 전개하면 다음과 같다.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

여기서 $f^{(k)}(a)$ 는 f 의 k 계 도함수에 $x = a$ 를 대입한 것이다. **확장**

$$ax^5 + bx + 1 = (ax + b)Q_1(x) + R_1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$ax^6 + bx + 1 = (ax + b)Q_2(x) + R_2 \quad \dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡에 $x = -\frac{b}{a}$ 를 각각 대입하면

$$R_1 = -\frac{b^5}{a^4} - \frac{b^2}{a} + 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$R_2 = \frac{b^6}{a^5} - \frac{b^2}{a} + 1 \quad \dots \textcircled{4}$$

$R_1 = R_2$ 이므로

$$-\frac{b^5}{a^4} - \frac{b^2}{a} + 1 = \frac{b^6}{a^5} - \frac{b^2}{a} + 1, -\frac{b^5}{a^4} = \frac{b^6}{a^5}$$

양변에 a^5 를 곱하면

$$-ab^5 = b^6, b^6 + ab^5 = 0, b^5(b + a) = 0$$

$ab \neq 0$ 이므로 $b \neq 0$

$$\therefore b = -a$$

㉢, ㉣에 $b = -a$ 를 각각 대입하면

$$R_1 = R_2 = 1 \quad \text{[다른 풀이]}$$

㉠에 $b = -a, R_1 = 1$ 을 대입하면

$$ax^5 - ax + 1 = a(x-1)Q_1(x) + 1$$

$$ax(x^4 - 1) = a(x-1)Q_1(x) \quad \text{참고}$$

$$\therefore Q_1(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$$

㉡에 $b = -a, R_2 = 1$ 을 대입하면

$$ax^6 - ax + 1 = a(x-1)Q_2(x) + 1$$

$$ax(x^5-1)=a(x-1)Q_2(x)$$

$$\therefore Q_2(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x$$

$$\therefore \frac{Q_1(2)}{Q_2(1)}=\frac{30}{5}=6$$

답 6

참고

$$x^{n+1}-x=x(x^n-1)$$

$$=x(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1)$$

$$=(x-1)(x^n+x^{n-1}+\dots+x)$$

다른 풀이 확장

$$ax^5-ax+1=a(x-1)Q_1(x)+1,$$

$$ax^6-ax+1=a(x-1)Q_2(x)+1$$

이므로

$$Q_1(x)=\frac{x^5-x}{x-1}, Q_2(x)=\frac{x^6-x}{x-1}$$

$Q_2(x)=\frac{x^6-x}{x-1}$ 에 $x=1$ 을 대입하면 $\frac{0}{0}$ 의 꼴이므로 로피탈 정리에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} Q_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6-x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^5-1}{1} = 5$$

이때 ㉠에서 $Q_2(x)$ 는 연속함수이므로

$$Q_2(1)=5$$

한편, $f_1(x)=x^5-x$ 라 하면

$$f_1(x)=x^5-x \text{에서 } f_1(1)=0$$

$$f_1'(x)=5x^4-1 \text{에서 } f_1'(1)=4$$

$$f_1''(x)=20x^3 \text{에서 } f_1''(1)=20$$

$$f_1'''(x)=60x^2 \text{에서 } f_1'''(1)=60$$

$$f_1^{(4)}(x)=120x \text{에서 } f_1^{(4)}(1)=120$$

$$f_1^{(5)}(x)=120 \text{에서 } f_1^{(5)}(1)=120$$

이를 이용하여 함수 $f_1(x)$ 를 $x=1$ 에 대하여 테일러 전개하면

$$f_1(x) = \frac{4}{1!}(x-1) + \frac{20}{2!}(x-1)^2 + \frac{60}{3!}(x-1)^3$$

$$+ \frac{120}{4!}(x-1)^4 + \frac{120}{5!}(x-1)^5$$

$Q_1(x)=\frac{f_1(x)}{x-1}$ 이므로 위의 식의 양변을 $x-1$ 로 나누면

$$Q_1(x)=4+10(x-1)+10(x-1)^2+5(x-1)^3+(x-1)^4$$

$$\therefore Q_1(2)=30$$

$$\therefore \frac{Q_1(2)}{Q_2(1)}=\frac{30}{5}=6$$

046

일등급의 메모장

$$f(x)=(x-3)Q_2(x)+f(3)$$

↓ $x=2$ 를 대입

$$f(2)=-Q_2(2)+f(3)$$

↓ 조건 ㉠

$$f(2)=0$$

↓

$f(x)$ 는 $x-2$ 를 인수로 갖는다.

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지를 R_1 이라 하면

$$f(x)=(x-2)Q_1(x)+R_1 \quad \dots \text{㉠}$$

$f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지를 R_2 라 하면

$$f(x)=(x-3)Q_2(x)+R_2 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠에 $x=3$ 을 대입하면 조건 ㉠에 의하여

$$R_2=f(3)=Q_2(2)$$

즉, $f(x)=(x-3)Q_2(x)+Q_2(2)$ 이므로 $x=2$ 를 대입하면

$$f(2)=-Q_2(2)+Q_2(2)=0$$

㉡에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(2)=R_2=0$$

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 이차다항식이므로

$$Q_1(x)=2x+a \quad (a \text{는 상수})$$

라 하면

$$f(x)=(x-2)(2x+a)$$

따라서 $Q_1(2)=4+a$, $Q_2(2)=f(3)=6+a$ 이므로 조건 ㉠에 의하여

$$Q_1(2)+Q_2(2)=(4+a)+(6+a)$$

$$=2a+10$$

$$=18$$

이므로 $a=4$

따라서 $f(x)=2(x-2)(x+2)$ 이므로

$$f(7)=2 \times 5 \times 9=90$$

답 90

047

일등급의 메모장

다항식 $P(x)$ 가 $(x-a)^2$ 으로 나누어떨어지면

$$P(a)=0, P'(a)=0$$

확장

조건 ㉠에서

$$P(x)=2x^4-6x^3+11x^2-10x+4-\{Q(x)\}^2$$

조건 ㉡에 의하여

$$Q(x)=ax^2+bx+c \quad (a, b, c \text{는 상수}, a>0)$$

로 놓으면 $\{Q(x)\}^2$ 의 최고차항이 a^2x^4 이므로

$$2-a^2=1 \quad (\because \text{조건 ㉡})$$

$a>0$ 이므로 $a=1$

즉, $Q(x)=x^2+bx+c$ 다른 풀이

$$\therefore P(x)=2x^4-6x^3+11x^2-10x+4-\{Q(x)\}^2$$

$$=2x^4-6x^3+11x^2-10x+4-(x^2+bx+c)^2$$

$$=x^4-(6+2b)x^3+(11-b^2-2c)x^2$$

$$-(10+2bc)x+(4-c^2)$$

$\dots \text{㉢}$

조건 ㉢에 의하여

$$P(x)=(x-1)^2(x^2+mx+n) \quad (m, n \text{은 상수})$$

으로 놓으면

$$P(x)=x^4+(m-2)x^3+(-2m+n+1)x^2+(m-2n)x+n$$

$\dots \text{㉣}$

㉢과 ㉣의 동류항의 계수를 비교하면

$$m-2=-(6+2b), \quad -2m+n+1=11-b^2-2c,$$

$$m-2n=-(10+2bc), \quad n=4-c^2$$

$$m-2=-(6+2b) \text{에서 } m=-4-2b$$

$$m-2n=-(10+2bc) \text{에 } m=-4-2b, n=4-c^2 \text{을 대입하면}$$

$$(-4-2b)-2(4-c^2)=-10+2bc$$

$$c^2+bc-b-1=0, \quad (c-1)(c+b+1)=0$$

$$\therefore c=1 \text{ 또는 } b+c=-1$$

(i) $c=1$ 일 때

$$n=4-1=3$$

$$-2m+n+1=11-b^2-2c \text{이므로}$$

$$-2m+4=9-b^2$$

$$\text{이때 } m=-4-2b \text{이므로}$$

$$b^2+4b+3=0, (b+1)(b+3)=0$$

$$\therefore b=-1 \text{ 또는 } b=-3$$

$$\text{즉, } b=-1, c=1 \text{ 또는 } b=-3, c=1$$

(ii) $b+c=-1$ 일 때

$$-2m+n+1=11-b^2-2c \text{이므로 } n=4-c^2, m=-4-2b \text{를}$$

대입하면

$$13-c^2+4b=11-b^2-2c$$

위의 식에 $c=-1-b$ 를 대입하면 $12=13$ 이므로 $b+c=-1$ 을

만족시키는 b, c 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $b=-1, c=1$ 또는 $b=-3, c=1$

$$b=-1, c=1 \text{ 일 때, } Q(x)=x^2-x+1 \text{ 이므로 } Q(2)=3$$

이때 조건 (㉞)에 의하여 $Q(2)<0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$b=-3, c=1 \text{ 일 때, } Q(x)=x^2-3x+1 \text{ 이므로 } Q(2)=-1$$

$$\text{따라서 } P(x)=x^4-4x+3, Q(2)=-1 \text{ 이므로}$$

$$P(3)+Q(2)=(81-12+3)+(-1)=71$$

답 71

다른 풀이 확장

$2x^4-6x^3+11x^2-10x+4-P(x)=\{Q(x)\}^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$8x^3-18x^2+22x-10-P'(x)=2Q(x)Q'(x)$$

위의 식에 $x=1$ 을 대입하면

$$2-P'(1)=2Q(1)Q'(1) \quad \dots \textcircled{\ominus}$$

$P(x)$ 는 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지므로

$$P(x)=(x-1)^2(x^2+mx+n) \quad (m, n \text{은 상수})$$

으로 놓으면

$$P'(x)=2(x-1)(x^2+mx+n)+(x-1)^2(2x+m)$$

$$\therefore P'(1)=0$$

$$\text{따라서 } \textcircled{\ominus} \text{에서 } Q(1)Q'(1)=1 \quad \dots \textcircled{\omin�}$$

한편, 조건 (㉞)의 식에 $x=1$ 을 대입하면

$$1-P(1)=\{Q(1)\}^2$$

조건 (㉞)에 의하여 $P(1)=0$ 이므로

$$Q(1)=\pm 1$$

(i) $Q(1)=1$ 일 때

$$\textcircled{\omin�} \text{에서 } Q'(1)=1$$

$$Q'(x)=2x+b \text{이므로}$$

$$2+b=1 \quad \therefore b=-1$$

$$Q(1)=1-1+c=1 \text{에서 } c=1$$

$$\therefore Q(x)=x^2-x+1$$

즉, $Q(2)=3$ 이고 이는 조건 (㉞)를 만족시키지 않는다.

(ii) $Q(1)=-1$ 일 때

$$\textcircled{\omin�} \text{에서 } Q'(1)=-1$$

$$Q'(x)=2x+b \text{이므로}$$

$$2+b=-1 \quad \therefore b=-3$$

$$Q(1)=1-3+c=-1 \text{에서 } c=1$$

$$\therefore Q(x)=x^2-3x+1$$

즉, $Q(2)=-1$ 이고 이는 조건 (㉞)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서

$$P(x)=x^4-4x+3, Q(2)=-1$$

$$\therefore P(3)+Q(2)=(81-12+3)+(-1)=71$$

048

일등급의 메모장

점 F에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 할 때, 삼각형 BFI는 $\angle FBI=60^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$(1) \overline{FI}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{FB}, \overline{AI}=a-\overline{BI}$$

$$(2) \overline{AF}^2=\overline{FI}^2+\overline{AI}^2$$

정사각뿔 O-ABCD의 부피는

$$\frac{1}{3} \times a^2 \times \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{6} a^3$$

정사각뿔 O-EFGH의 부피는

$$\frac{1}{3} \times b^2 \times \sqrt{b^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{6} b^3$$

두 정사각뿔 O-ABCD, O-EFGH의 부피의 합이 $6\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{\sqrt{2}}{6}(a^3+b^3)=6\sqrt{2} \quad \therefore a^3+b^3=36$$

점 F에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼각형 BFI는 $\angle FBI=60^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{FI}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{FB}=\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)$$

$$\overline{AI}=a-\overline{BI}=a-\frac{1}{2}\overline{FB}$$

$$=a-\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}(a+b)$$

삼각형 FAI는 직각삼각형이므로

$$\overline{AF}^2=\overline{FI}^2+\overline{AI}^2$$

$$=\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)\right]^2+\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2$$

$$=\frac{3}{4}(a^2-2ab+b^2)+\frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2)$$

$$=a^2-ab+b^2$$

$$=9$$

이때 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 에서

$$a^3+b^3=(a+b) \times 9=36$$

$$\therefore a+b=4$$

$$a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab \text{에서}$$

$$a^2-ab+b^2=16-3ab=9$$

$$\therefore ab=\frac{7}{3}$$

$$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab \text{에서}$$

$$(a-b)^2=4^2-4 \times \frac{7}{3}=\frac{20}{3}$$

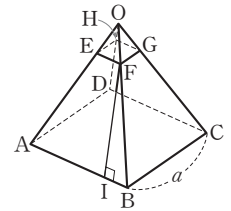
$$\therefore a-b=\frac{2\sqrt{15}}{3}$$

$$\square ABFE=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}b^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2-b^2)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(a+b)(a-b)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 \times \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

$$=2\sqrt{5}$$



또, $\square ABCD = a^2$, $\square EFGH = b^2$ 이므로 구하는 길넓이는

$$a^2 + b^2 + 4 \times 2\sqrt{5} = (a+b)^2 - 2ab + 8\sqrt{5}$$

$$= 16 - \frac{14}{3} + 8\sqrt{5}$$

$$= \frac{34}{3} + 8\sqrt{5}$$

따라서 $p = \frac{34}{3}$, $q = 8$ 이므로

$$3p + q = 3 \times \frac{34}{3} + 8 = 42$$

답 42

참고 확장

코사인법칙을 이용하여 선분 AF의 길이를 표현하는 방법

$$\overline{AF}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OF}^2 - 2\overline{OA} \times \overline{OF} \times \cos 60^\circ$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab \times \frac{1}{2}$$

$$= a^2 + b^2 - ab$$

049

일등급의 메모장

(1) $f(x) - g(x)$ 의 빠른 형태 결정

$$f(-1) - g(-1) = 0$$



$f(x) - g(x)$ 는 $x+1$ 을 인수로 갖는다.



$$f(x) - g(x) = k(x+1) \quad (k \text{는 상수})$$

(2) $f(x) + g(x)$ 의 빠른 형태 결정

$$f(x) + g(x) \text{는}$$

$(x-2)(x-3)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ 를 인수로 갖고,

$P_1(x)$, $P_2(x)$ 는 $x+1$ 을 인수로 갖는다.



$f(x) + g(x)$ 는 $(x+1)(x-2)(x-3)$ 을 인수로 갖는다.



$$f(x) + g(x) = 2(x+1)(x-2)(x-3)$$

조건 ㉞에서 $f(x) + g(x)$ 는 $x^2 - 5x + 6$, 즉 $(x-2)(x-3)$ 으로 나누어떨어지므로 $f(x) + g(x)$ 는 $x-2$, $x-3$ 을 각각 인수로 갖는다.

$f(-1) - g(-1) = 0$ 이므로 $f(x) - g(x)$ 는 $x+1$ 을 인수로 가지고, 조건 ㉞에서 $P_1(x)$, $P_2(x)$ 는 $f(x) - g(x)$ 로 나누어떨어지므로 $P_1(x)$, $P_2(x)$ 도 $x+1$ 을 인수로 갖는다.

조건 ㉞에서 $f(x) + g(x)$ 는 $P_1(x)$, $P_2(x)$ 로 나누어떨어지므로 $f(x) + g(x)$ 도 $x+1$ 을 인수로 갖는다.

즉, $f(x) + g(x)$ 는 $x+1$, $x-2$, $x-3$ 을 각각 인수로 갖는다.

$f(x)$, $g(x)$ 가 각각 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로

$f(x) + g(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 삼차식이다.

$$\therefore f(x) + g(x) = 2(x+1)(x-2)(x-3) \quad \dots \textcircled{7}$$

한편, $f(x)$, $g(x)$ 가 각각 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로

$f(x) - g(x)$ 는 이차 이하의 다항식이다.

(i) $f(x) - g(x)$ 가 이차식인 경우

$f(x) - g(x)$ 의 이차항의 계수를 a ($a \neq 0$)라 하자.

$P_1(x)$, $P_2(x)$ 가 $f(x) - g(x)$ 로 나누어떨어지고

$P_1(x)$, $P_2(x)$ 가 각각 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로

$$P_1(x) = P_2(x) = \frac{1}{a} \{f(x) - g(x)\}$$

가 되어 $P_1(x)$, $P_2(x)$ 가 서로 다른 이차식이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x) - g(x)$ 가 일차식인 경우

$$f(x) - g(x) = b(x+1) \quad (b \text{는 상수}, b \neq 0) \quad \dots \textcircled{8}$$

이라 하고 ㉞+㉞을 하면

$$2f(x) = 2(x+1)(x-2)(x-3) + b(x+1)$$

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x-3) + \frac{b}{2}(x+1)$$

따라서 $f(1) = 4 + b = 6$ 에서 $b = 2$

㉞-㉞을 하면

$$2g(x) = 2(x+1)(x-2)(x-3) - 2(x+1)$$

$$\therefore g(x) = (x+1)(x-2)(x-3) - (x+1)$$

(iii) $f(x) - g(x)$ 가 상수인 경우

$f(x) - g(x) = c$ (c 는 상수)라 하면 $f(-1) - g(-1) = 0$ 이므로 $c = 0$

$$\therefore f(x) - g(x) = 0$$

즉, $f(x) = g(x)$ 가 되어 $f(x)$, $g(x)$ 가 서로 다른 삼차식이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에서 $g(x) = (x+1)(x-2)(x-3) - (x+1)$

$$\therefore g(-2) = -1 \times (-4) \times (-5) - (-1) = -19$$

답 -19

02

I. 다항식 인수분해

001

$|a, b, c| - |b, c, -a| - |c, b, a|$
 $= (a-b)(b-c) - (b-c)\{c-(-a)\} - (c-b)(b-a)$
 $= (b-c)\{(a-b) - (c+a) + (b-a)\}$
 $= -(b-c)(a+c)$
 따라서 주어진 식의 인수인 것은 ②이다.

답 ②

002

$(x^2+x)(x^2+5x+6) - 8$
 $= x(x+1)(x+2)(x+3) - 8$
 $= \{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\} - 8$
 $= (x^2+3x)(x^2+3x+2) - 8$ \rightarrow 상수항의 합이 3이 되도록 둘씩 짝 짓는다.
 $x^2+3x = X$ 로 놓으면

$(x^2+3x)(x^2+3x+2) - 8 = X(X+2) - 8$
 $= X^2 + 2X - 8$
 $= (X+4)(X-2)$
 $= (x^2+3x+4)(x^2+3x-2)$

- (i) $f(x) = x^2 + 3x + 4$, $g(x) = x^2 + 3x - 2$ 일 때
 $f(0) = 4$, $g(1) = 2$ 이므로
 $f(0) + g(1) = 4 + 2 = 6$
- (ii) $f(x) = x^2 + 3x - 2$, $g(x) = x^2 + 3x + 4$ 일 때
 $f(0) = -2$, $g(1) = 8$ 이므로
 $f(0) + g(1) = -2 + 8 = 6$
- (i), (ii)에서 $f(0) + g(1) = 6$

답 6

003

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + k$
 $= \{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\} + k$
 $= (x^2-5x+4)(x^2-5x+6) + k$ \rightarrow 상수항의 합이 -5가 되도록 $\left[\begin{matrix} \text{다른 풀이} \\ \text{둘씩 짝 짓는다.} \end{matrix} \right]$
 $x^2-5x = X$ 로 놓으면
 $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6) + k = (X+4)(X+6) + k$
 $= X^2 + 10X + 24 + k$

주어진 식이 완전제곱식이 되어야 하므로

$24 + k = \left(\frac{10}{2}\right)^2$ $\left[\begin{matrix} \text{참고} \\ \text{참고} \end{matrix} \right]$
 $\therefore k = 1$
 $X^2 + 10X + 25 = (X+5)^2$
 $= (x^2-5x+5)^2$

이므로 $a = -5$, $b = 5$
 $\therefore a + b + k = -5 + 5 + 1 = 1$

답 1

다른 풀이

$x^2 - 5x + 4 = X$ 로 놓으면

$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6) + k = X(X+2) + k$
 $= X^2 + 2X + k$

주어진 식이 완전제곱식이 되어야 하므로

$k = 1$
 $X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$
 $= (x^2-5x+5)^2$

이므로 $a = -5$, $b = 5$
 $\therefore a + b + k = -5 + 5 + 1 = 1$

참고

$x^2 + ax + b$ 가 완전제곱식이 되기 위한 조건은
 $b = \left(\frac{a}{2}\right)^2$

004

$x^4 + 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4) - x^2y^2$
 $= (x^2 + 2y^2)^2 - (xy)^2$
 $= (x^2 + xy + 2y^2)(x^2 - xy + 2y^2)$

따라서 $a = 1$, $b = 2$ 이므로

$a + b = 1 + 2 = 3$

답 3

005

$x^2 + 4xy + 3y^2 + ax + y - 2 = x^2 + (4y+a)x + 3y^2 + y - 2$
 $= x^2 + (4y+a)x + (3y-2)(y+1)$

이 다항식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되므로

$(3y-2) + (y+1) = 4y + a$ 이어야 한다.

즉, $a = -1$ 이므로

$x^2 + (4y-1)x + (3y-2)(y+1) = (x+3y-2)(x+y+1)$

따라서 $p = 3$, $q = -2$, $r = 1$, $s = 1$ 이므로

$a + pq + rs = -1 + (-6) + 1 = -6$

답 -6

006

$f(x)$ 가 일차식이므로 $f(x) = ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$x^3 - x^2 + 2f(x) = x^3 - x^2 + 2(ax + b)$
 $= x^3 - x^2 + 2ax + 2b$

$x^3 - x^2 + 2ax + 2b$ 가 $x-1$ 을 인수로 가지므로

$1 - 1 + 2a + 2b = 0$

$\therefore b = -a$ ㉠

$\therefore x^3 - x^2 + 2ax + 2b = x^3 - x^2 + 2ax - 2a$

$g(x) = x^3 - x^2 + 2ax - 2a$ 라 하면 $g(1) = 0$ 이므로 조립제법을 이

용하여 $g(x)$ 를 인수분해하면

1	1	-1	2a	-2a
		1	0	2a
	1	0	2a	0

$g(x) = (x-1)(x^2 + 2a)$

$= (x-1)(x-m)(x-n)$

$= (x-1)\{x^2 - (m+n)x + mn\}$

이므로 $x^2 + 2a = x^2 - (m+n)x + mn$ 에서

$m + n = 0$, $mn = 2a$

이때 $mn = -2$ 이므로
 $2a = -2$
 $\therefore a = -1, b = 1$ ($\because \textcircled{1}$)
 따라서 $f(x) = -x + 1$ 이므로
 $f(2) = -2 + 1 = -1$

답 -1

다른 풀이

$$x^3 - x^2 + 2f(x) = (x-1)(x-m)(x-n)$$

$$= x^3 - (m+n+1)x^2 + (m+n+mn)x - mn$$

이므로
 $-1 = -(m+n+1)$
 $\therefore m+n = 0$

또, $mn = -2$ 이므로
 $x^3 - x^2 + 2f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$
 따라서 $f(x) = -x + 1$ 이므로
 $f(2) = -2 + 1 = -1$

007

$a+b = 3+2\sqrt{2}$ $\textcircled{1}$
 $b+c = 3-2\sqrt{2}$ $\textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면 $a-c = 4\sqrt{2}$
 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면 $a+2b+c = 6$
 $a^3 + (2b-c)a^2 - (4bc+c^2)a + 2bc^2 + c^3$ 을 b 에 대하여 내림차순으로 정리하면
 $a^3 + (2b-c)a^2 - (4bc+c^2)a + 2bc^2 + c^3$
 $= (2a^2 - 4ac + 2c^2)b + a^3 - a^2c - ac^2 + c^3$
 $= 2b(a^2 - 2ac + c^2) + a^2(a-c) - c^2(a-c)$
 $= 2b(a-c)^2 + (a-c)(a^2 - c^2)$
 $= 2b(a-c)^2 + (a-c)^2(a+c)$
 $= (a-c)^2(a+2b+c)$
 $= (4\sqrt{2})^2 \times 6 = 192$

답 192

008

$a^2b + 4ab + a^2 + 4a + 4b + 4$ 를 b 에 대하여 내림차순으로 정리하면
 $a^2b + 4ab + a^2 + 4a + 4b + 4 = (a^2 + 4a + 4)b + a^2 + 4a + 4$
 $= (a+2)^2(b+1)$
 $= 605$
 $= 5 \times 11^2$

이때 a, b 는 자연수이므로
 $a+2 = 11, b+1 = 5$
 $\therefore a = 9, b = 4$
 $\therefore ab = 9 \times 4 = 36$

답 4

009

$11 = x$ 로 놓으면
 $11^3 + 11^2 + 17 = 11^3 + 11^2 + 11 + 6$
 $= x^3 + x^2 + x + 6$

$f(x) = x^3 + x^2 + x + 6$ 이라 하면 $f(-2) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ & & -2 & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}$$

$f(x) = (x+2)(x^2 - x + 3)$ 이므로
 $11^3 + 11^2 + 17 = (11+2)(11^2 - 11 + 3)$
 $= 13 \times 113$

따라서 $a = 13, b = 113$ 또는 $a = 113, b = 13$ 이므로
 $\therefore a + b = 13 + 113 = 126$

답 126

010

$$N = \frac{10^{12} - 1}{10^4 - 1} = \frac{(10^4)^3 - 1}{10^4 - 1}$$

$$= \frac{(10^4 - 1)(10^8 + 10^4 + 1)}{10^4 - 1}$$

$$= 10^8 + 10^4 + 1$$

$$= 100010001$$

따라서 N 은 9자리의 자연수이고 각 자리의 숫자의 합은
 $1 + 1 + 1 = 3$ 이므로
 $m = 9, n = 3$
 $\therefore m + n = 9 + 3 = 12$

답 12

011

$$n^4 - 6n^3 + 9n^2 - 9 = n^2(n^2 - 6n + 9) - 9$$

$$= n^2(n-3)^2 - 9$$

$$= \{n(n-3)\}^2 - 3^2$$

$$= \{n(n-3) + 3\} \{n(n-3) - 3\}$$

$$= (n^2 - 3n + 3)(n^2 - 3n - 3)$$

$n^4 - 6n^3 + 9n^2 - 9$ 가 소수가 되려면 $n^2 - 3n - 3 = 1$ 이어야 하므로
 $n^2 - 3n - 4 = 0, (n+1)(n-4) = 0$ $\rightarrow n^2 - 3n - 3 < n^2 - 3n + 3$
 $\therefore n = 4$ ($\because n$ 은 자연수)

$(n^2 - 3n + 3)(n^2 - 3n - 3)$ 에 $n = 4$ 를 대입하면
 $7 \times 1 = 7$

따라서 $p = 4, q = 7$ 이므로
 $p + q = 4 + 7 = 11$

답 11

012

$$\{f(x)\}^3 + \{g(x)\}^3$$

$$= \{f(x) + g(x)\} [\{f(x)\}^2 - f(x)g(x) + \{g(x)\}^2]$$

$$= \{(x^2 + x) + (x^2 - 2x - 1)\} [\{f(x)\}^2 - f(x)g(x) + \{g(x)\}^2]$$

$$= (2x^2 - x - 1) [\{f(x)\}^2 - f(x)g(x) + \{g(x)\}^2]$$

$\{f(x)\}^3 + \{g(x)\}^3 = (2x^2 - x - 1)h(x)$ 에서
 $h(x) = \{f(x)\}^2 - f(x)g(x) + \{g(x)\}^2$
 따라서 $h(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$\begin{aligned}
 h(1) &= \{f(1)\}^2 - f(1)g(1) + \{g(1)\}^2 \\
 &= 2^2 - 2 \times (-2) + (-2)^2 \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

답 ⑤

013

$x^2 - 3x - k = (x+a)(x-b)$ (a, b 는 자연수)라 하면
 $x^2 - 3x - k = x^2 + (a-b)x - ab$
 $\therefore a-b = -3, ab = k$
 $a-b = -3$ 인 자연수 a, b 의 값은 다음 표와 같다.

a	1	2	3	4	...	20	21	...
b	4	5	6	7	...	23	24	...
ab	4	10	18	28	...	460	504	...

이때 $k = ab \leq 500$ 이어야 하므로 구하는 자연수 k 의 개수는 20이다.

답 ③

014

(i) 0이 아닌 네 정수 a, b, c, d 에 대하여

$$x^4 + kx^2 + 169 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

의 꼴로 인수분해될 때

$$\begin{aligned}
 x^4 + kx^2 + 169 &= x^4 + 26x^2 + 169 - 26x^2 + kx^2 \\
 &= (x^2 + 13)^2 - (26 - k)x^2
 \end{aligned}$$

이때 k 는 자연수이고 $26 - k$ 는 제곱수이어야 하므로 $26 - k$ 의 값으로 가능한 것은 1, 4, 9, 16, 25

따라서 자연수 k 는 1, 10, 17, 22, 25의 5개이다.

(ii) $m \leq n$ 인 두 자연수 m, n 에 대하여

$$x^4 + kx^2 + 169 = (x^2 + m)(x^2 + n)$$

의 꼴로 인수분해될 때

$$m + n = k, mn = 169$$

따라서 $m=1, n=169$ 또는 $m=13, n=13$ 이므로 자연수 k 는 26, 170의 2개이다.

(i), (ii)에서 자연수 k 의 개수는

$$5 + 2 = 7$$

답 7

015

$$n^4 + n^2 - 2$$

$$= (n^2 - 1)(n^2 + 2)$$

$$= (n+1)(n-1)(n^2 + 2)$$

$$= (n+1)(n^3 - n^2 + 2n - 2)$$

$$= (n+1)\{(n-3)(n^2 + 2n + 8) + 22\}$$

$$= (n+1)(n-3)(n^2 + 2n + 8) + 22(n+1) \quad \dots \textcircled{1}$$

$(n+1)(n-3)(n^2 + 2n + 8)$ 은 $(n+1)(n-3)$ 의 배수이므로 $\textcircled{1}$

이 $(n+1)(n-3)$ 의 배수가 되려면 $22(n+1)$ 도 $(n+1)(n-3)$ 의 배수이어야 한다. 다른 풀이

따라서 $22(n+1) = k(n+1)(n-3)$ (k 는 자연수)이라 하면

$$22 = k(n-3)$$

이때 자연수 n 의 값이 최대가 되려면 자연수 k 의 값은 최소이어야 한다.

018 정답과 풀이

즉, $k=1$ 일 때, $n-3=22$ 에서 n 의 최댓값은 25이다.

답 25

다른 풀이

$n-3$ 이 22의 양의 약수이어야 하므로

$n-3=1$ 또는 $n-3=2$ 또는 $n-3=11$ 또는 $n-3=22$

$\therefore n=4$ 또는 $n=5$ 또는 $n=14$ 또는 $n=25$

따라서 n 의 최댓값은 25이다.

016

(주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x(a^3x^3 + b^3y^3) + y(a^3x^3 + b^3y^3)}{x+y} \\
 &\quad + \frac{x(3a^2bx^2y + 3a^2bxy^2) + y(3ab^2x^2y + 3ab^2xy^2)}{x+y}
 \end{aligned}$$

위의 식에서

$$\begin{aligned}
 &\frac{x(a^3x^3 + b^3y^3) + y(a^3x^3 + b^3y^3)}{x+y} \\
 &= \frac{(x+y)(a^3x^3 + b^3y^3)}{x+y} \\
 &= a^3x^3 + b^3y^3 \\
 &\frac{x(3a^2bx^2y + 3a^2bxy^2) + y(3ab^2x^2y + 3ab^2xy^2)}{x+y} \\
 &= \frac{(3a^2bx^3y + 3a^2bx^2y^2) + (3ab^2x^2y^2 + 3ab^2xy^3)}{x+y} \\
 &= \frac{3abxy(ax^2 + axy + bxy + by^2)}{x+y} \\
 &= \frac{3abxy\{ax(x+y) + by(x+y)\}}{x+y} \\
 &= \frac{3abxy(ax+by)(x+y)}{x+y} \\
 &= 3abxy(ax+by)
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 (\text{주어진 식}) &= a^3x^3 + b^3y^3 + 3abxy(ax+by) \\
 &= (ax+by)^3
 \end{aligned}$$

답 ④

다른 풀이

$a^3x^3 + b^3y^3 = M, 3abxy = N$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned}
 (\text{주어진 식}) &= \frac{xM + yM}{x+y} + \frac{x(axN + ayN) + y(bxN + byN)}{x+y} \\
 &= \frac{(x+y)M}{x+y} + \frac{(ax^2 + axy + bxy + by^2)N}{x+y} \\
 &= M + \frac{(ax+by)(x+y)N}{x+y} \\
 &= M + (ax+by)N \\
 &= a^3x^3 + b^3y^3 + 3abxy(ax+by) \\
 &= (ax+by)^3
 \end{aligned}$$

017

주어진 18개의 정육면체와 직육면체의 부피의 합을 V 라 하면

$$\begin{aligned}
 V &= 2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3 \\
 &= 2(a^3 + b^3) + 7ab(a+b) \\
 &= 2(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 7ab(a+b) \\
 &= (a+b)\{2(a^2 - ab + b^2) + 7ab\} \\
 &= (a+b)(2a^2 + 5ab + 2b^2) \\
 &= (a+b)(2a+b)(a+2b)
 \end{aligned}$$

$a+b < 2a+b$, $a+b < a+2b$ 이므로 $a+b$, $2a+b$, $a+2b$ 중에서 $a+b$ 가 가장 작은 수이다.

또, $280 = 2^3 \times 5 \times 7$ 이므로

$a+b=4$ 또는 $a+b=5$

(i) $a+b=4$ 인 경우 $\hookrightarrow a \neq b$ 이므로 $a+b \geq 1+2=3$

$a=1, b=3$ 또는 $a=3, b=1$

이때 $(a+b)(2a+b)(a+2b) \neq 280$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+b=5$ 인 경우

$a=1, b=4$ 또는 $a=2, b=3$ 또는 $a=3, b=2$

또는 $a=4, b=1$

㉠ $a=1, b=4$ 또는 $a=4, b=1$ 일 때

$(a+b)(2a+b)(a+2b) \neq 280$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

㉡ $a=2, b=3$ 또는 $a=3, b=2$ 일 때

$(a+b)(2a+b)(a+2b) = 280$ 이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 만들어진 직육면체의 세 모서리의 길이는 5, 7, 8

이므로 대각선의 길이는

$$l = \sqrt{5^2 + 7^2 + 8^2} = \sqrt{138}$$

$\therefore l^2 = 138$

답 138

018

$x^4 + 4ax^3 + bx^2 + 4ax + 1$ 참고

$$= x^2 \left(x^2 + 4ax + b + \frac{4a}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$= x^2 \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 4a \left(x + \frac{1}{x} \right) + b \right\}$$

$$= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 4a \left(x + \frac{1}{x} \right) + b - 2 \right\} \quad \dots \textcircled{1}$$

\therefore ㉠에 $a=1, b=6$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 4 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 4 \right\} &= x^2 \left(x + \frac{1}{x} + 2 \right)^2 \\ &= (x^2 + 2x + 1)^2 \\ &= (x+1)^4 \end{aligned}$$

$\therefore N(1, 6) = 1$ (참)

\therefore ㉡에 $a=k, b=2$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 4k \left(x + \frac{1}{x} \right) \right\} &= x^2 \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(x + \frac{1}{x} + 4k \right) \\ &= (x^2 + 1)(x^2 + 4kx + 1) \end{aligned}$$

정수 k 에 대하여 $x^2 + 4kx + 1$ 은 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 일차식의 곱으로 인수분해되지 않으므로

$N(k, 2) = 2$ 를 만족시키는 정수 k 의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

\therefore ㉢에 $b=4a^2+2$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 4a \left(x + \frac{1}{x} \right) + 4a^2 \right\} &= x^2 \left(x + \frac{1}{x} + 2a \right)^2 \\ &= (x^2 + 2ax + 1)^2 \end{aligned}$$

$N(a, b) = 1$ 을 만족시키려면 $x^2 + 2ax + 1$ 이 완전제곱식이어야 하므로

$$a^2 = 1$$

$\therefore a = -1$ 또는 $a = 1$

따라서 모든 a 의 값의 곱은

$$-1 \times 1 = -1 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

참고

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$ 의 꼴의 식의 인수분해

x^2 으로 묶어 낸 후, $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$ 임을 이용하여

$x + \frac{1}{x}$ 또는 $x - \frac{1}{x}$ 에 대한 이차식으로 정리하여 인수분해한다.

019

$f(2) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & a-2 & a^2-2a & -2a^2 \\ & & 2 & 2a & 2a^2 \\ \hline & 1 & a & a^2 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x-2)(x^2 + ax + a^2)$$

$g(2) = 8 + 2b + a^2 \neq 0$ 이므로 $g(x)$ 는 $x-2$ 를 인수로 갖지 않는다.

$\hookrightarrow 2b \geq 0, a^2 > 0$ 이므로 $g(2) = 8 + 2b + a^2 > 0$

따라서

$$g(x) = (x+k)(x^2 + ax + a^2) \quad (k \text{는 상수})$$

이라 하면

$$x^3 + bx^2 - bx + a^2 = x^3 + (a+k)x^2 + (a^2 + ak)x + a^2k$$

위의 식의 양변의 계수를 비교하면

$$b = a+k, -b = a^2 + ak, a^2 = a^2k$$

$$a^2 = a^2k \text{에서 } a \neq 0 \text{이므로 } k = 1$$

따라서 $b = a+1, -b = a^2 + a$ 이므로

$$-a-1 = a^2 + a, a^2 + 2a + 1 = 0$$

$$(a+1)^2 = 0$$

$$\therefore a = -1, b = 0$$

즉, $h(x) = -x^3 + x^2 - 2$ 이고 $h(-1) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $h(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ & & 1 & -2 & 2 \\ \hline & -1 & 2 & -2 & 0 \end{array}$$

$$h(x) = (x+1)(-x^2 + 2x - 2)$$

$$= -(x+1)(x^2 - 2x + 2)$$

따라서 $h(x)$ 의 인수인 것은 ㉣이다.

답 ㉣

020

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} \{P(x) + Q(x)\}^3 - 3P(x)Q(x)\{P(x) + Q(x)\} \\ = 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 + 16 \end{aligned}$$

조건 (가)에서 $P(x) + Q(x) = 4$ 이므로

$$64 - 3P(x)Q(x) \times 4 = 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 + 16$$

$$\therefore P(x)Q(x) = -x^4 - 2x^3 - x^2 + 4 \quad \text{[다른 풀이]}$$

$f(x) = -x^4 - 2x^3 - x^2 + 4$ 라 하면 $f(1) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 4 \\ & & -1 & -3 & -4 & -4 \\ \hline & -1 & -3 & -4 & -4 & 0 \end{array}$$

$f(x) = (x-1)(-x^3-3x^2-4x-4)$
 $g(x) = -x^3-3x^2-4x-4$ 라 하면 $g(-2) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $g(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & -1 & -3 & -4 & -4 \\ & & 2 & 2 & 4 \\ \hline & -1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$g(x) = (x+2)(-x^2-x-2)$
 $\therefore P(x)Q(x) = (x-1)(x+2)(-x^2-x-2)$
 $= -(x-1)(x+2)(x^2+x+2)$
 $= -(x^2+x-2)(x^2+x+2)$

이때 $P(x)+Q(x)=4$ 이고 $P(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이므로

$P(x) = -x^2-x+2, Q(x) = x^2+x+2$
 $\therefore P(2)+Q(3) = -4+14=10$

답 10

다른 풀이

$P(x)+Q(x)=4$ 이므로
 $P(x) = ax^2+bx+c$ ($a < 0$)라 하면
 $Q(x) = 4-(ax^2+bx+c)$
 $P(x)Q(x) = (ax^2+bx+c)\{4-(ax^2+bx+c)\}$
 $= (ax^2+bx+c)(-ax^2-bx+4-c)$
 $= -a^2x^4-2abx^3+(4a-2ac-b^2)x^2+2b(2-c)x+c(4-c)$
 $P(x)Q(x) = -x^4-2x^3-x^2+4$ 이므로 양변의 계수를 비교하면
 $-a^2 = -1$ 에서 $a = -1$ ($\because a < 0$)
 $-2ab = -2$ 에서 $b = -1$ ($\because a = -1$)
 $4a-2ac-b^2 = -1$ 에서 $c = 2$ ($\because a = -1, b = -1$)
따라서 $P(x) = -x^2-x+2, Q(x) = x^2+x+2$ 이므로
 $P(2)+Q(3) = -4+14=10$

021

$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$
 $= (a+b+c)(ab+bc) + (a+b+c)ca - abc$
 $= (a+b+c)(ab+bc) + (a+c)ca$
 $= b(a+b+c)(a+c) + (a+c)ca$
 $= (a+c)(ab+b^2+bc+ca)$
 $= (a+c)\{(a+b)b + (a+b)c\}$
 $= (a+c)(a+b)(b+c)$

이때 $a > b > c \geq 1$ 이므로 $c \geq 1, b \geq 2, a \geq 3$
 $\therefore a+b > a+c > b+c \geq 3$

$\hookrightarrow b=2, c=1$ 일 때, $b+c=3$

$168 = 2^3 \times 3 \times 7$ 이므로 $(a+b)(a+c)(b+c)$ 는
 $7 \times 6 \times 4$ 또는 $8 \times 7 \times 3$ 또는 $14 \times 4 \times 3$

(i) $a+b=7, a+c=6, b+c=4$ 인 경우

$2(a+b+c) = 17$
 $\therefore a+b+c = \frac{17}{2}$

그런데 a, b, c 는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+b=8, a+c=7, b+c=3$ 인 경우

$2(a+b+c) = 18$
 $\therefore a+b+c = 9$
 $\therefore a=6, b=2, c=1$

(iii) $a+b=14, a+c=4, b+c=3$ 인 경우

$2(a+b+c) = 21$
 $\therefore a+b+c = \frac{21}{2}$

그런데 a, b, c 는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에서

$a=6, b=2, c=1$
 $\therefore a^2+b^2+c^2 = 36+4+1=41$

답 5

022

$a^3+b^3+c^3=41+3abc$ 이므로
 $a^3+b^3+c^3-3abc=41$
 $\therefore (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=41$
이때 41은 소수이고 $a+b+c \geq 3$ 이므로
 $\hookrightarrow a, b, c$ 가 자연수이므로 $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$

$a+b+c=41, a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=1$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=1$ 에서

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=1$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2$

이때 $a \geq b \geq c$ 이므로

$(a-b)^2=0, (b-c)^2=1, (c-a)^2=1$

또는 $(a-b)^2=1, (b-c)^2=0, (c-a)^2=1$

(i) $(a-b)^2=0, (b-c)^2=1, (c-a)^2=1$ 인 경우

$a=b=c+1$

$a+b+c=3c+2=41$ 이므로

$c=13$

$\therefore a=14, b=14, c=13$

(ii) $(a-b)^2=1, (b-c)^2=0, (c-a)^2=1$ 인 경우

$b=c=a-1$

$a+b+c=3a-2=41$ 이므로

$a = \frac{43}{3}$

그런데 a 는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=14, b=14, c=13$ 이므로

$a+b-c=14+14-13=15$

답 15

023

$c^3 = a^2 + 4a + 6ab + 9b^2 + 12b + 4$
 $= a^2 + 6ab + 9b^2 + 4a + 12b + 4$
 $= (a+3b)^2 + 4(a+3b) + 4$
 $= (a+3b+2)^2$

a, b 가 10보다 작은 자연수이므로

$a+3b+2 \geq 6$

$\hookrightarrow a=1, b=1$ 일 때, $a+3b+2=6$

$\therefore c^3 \geq 36$

$\hookrightarrow c$ 는 자연수이므로 $c \geq 4$

$c^3 = (a+3b+2)^2$ 에서 $c^3 = c^2 \times c$ 가 제곱수이므로 c 는 제곱수이어야 한다.

또, c 가 10보다 작은 자연수이므로

$c=2^2$ 또는 $c=3^2$

(i) $c=2^2$ 일 때

$$c^3=2^6=(2^3)^2=(a+3b+2)^2 \text{이므로}$$

$$a+3b+2=8$$

$$\therefore a+3b=6$$

a, b 가 자연수이므로

$$a=3, b=1$$

$$\therefore a+b+c=3+1+2^2=8$$

(ii) $c=3^2$ 일 때

$$c^3=3^6=(3^3)^2=(a+3b+2)^2 \text{이므로}$$

$$a+3b+2=27$$

$$\therefore a+3b=25$$

a, b 가 자연수이므로

$$a=1, b=8 \text{ 또는 } a=4, b=7 \text{ 또는 } a=7, b=6$$

ⓐ $a=1, b=8$ 이면

$$a+b+c=1+8+3^2=18$$

ⓑ $a=4, b=7$ 이면

$$a+b+c=4+7+3^2=20$$

ⓒ $a=7, b=6$ 이면

$$a+b+c=7+6+3^2=22$$

(i), (ii)에서 $a+b+c$ 의 최댓값은 22이다.

답 22

024

$$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$$

$$=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2$$

$$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$$

$$=(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)$$

$$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$$

$$=(b-c)(a-b)(a-c)$$

$$=(a-b)(b-c)(a-c)$$

$a>b>c$ 이므로 $a-b, b-c, a-c$ 는 모두 자연수이고

$a-c>a-b, a-c>b-c$ 이므로 $a-b, b-c, a-c$ 중에서 $a-c$

가 가장 큰 수이다.

또, $84=2^2 \times 3 \times 7$ 이고 $(a-b)+(b-c)=a-c$ 이므로

$(a-b)(b-c)(c-a)$ 는

$$3 \times 4 \times 7 \quad \text{참고}$$

(i) $a-b=3, b-c=4, a-c=7$ 인 경우

$a=8, b=5, c=1$ 일 때, $a+b+c$ 는 최솟값 14를 갖는다.

↳ a 의 값이 작을수록 $a+b+c$ 는 최솟값을 갖는다.

(ii) $a-b=4, b-c=3, a-c=7$ 인 경우

$a=8, b=4, c=1$ 일 때, $a+b+c$ 는 최솟값 13을 갖는다.

(i), (ii)에서 $a+b+c$ 의 최솟값은 13이다.

답 13

참고

$84=1 \times 2 \times 42=1 \times 3 \times 28=\dots=2 \times 6 \times 7=3 \times 4 \times 7$ 이고 84의 세 인 수 중에서 가장 큰 수가 나머지 두 수의 합과 같은 경우는 $3 \times 4 \times 7$ 이다.

025

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

..... ㉠

한편, $(a+b)c^3-(a^2+ab+b^2)c^2+a^2b^2=0$ 에서

$$(a+b)c^3-(a^2+ab+b^2)c^2+a^2b^2$$

$$=ac^3+bc^3-a^2c^2-abc^2-b^2c^2+a^2b^2$$

$$=(b^2-c^2)a^2+(c^3-bc^2)a+bc^3-b^2c^2$$

$$=(b-c)(b+c)a^2-(b-c)c^2a-(b-c)bc^2$$

$$=(b-c)\{(b+c)a^2-c^2a-bc^2\}$$

$$=(b-c)(ba^2+ca^2-c^2a-bc^2)$$

$$=(b-c)\{(a^2-c^2)b+ca^2-c^2a\}$$

$$=(b-c)\{(a-c)(a+c)b+(a-c)ca\}$$

$$=(b-c)(a-c)\{(a+c)b+ca\}$$

$$=(b-c)(a-c)(ab+bc+ca)$$

$$=0$$

이때 a, b, c 는 자연수이므로 $ab+bc+ca \neq 0$

$\therefore a=c$ 또는 $b=c$

(i) $a=c$ 인 경우

㉠에서

$$(b+2c)(b-c)^2=20=20 \times 1^2=5 \times 2^2$$

ⓐ $b+2c=20, b-c=\pm 1$ 일 때

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$b=\frac{22}{3}, c=\frac{19}{3} \text{ 또는 } b=6, c=7$$

그런데 b, c 는 자연수이므로

$$a=7, b=6, c=7$$

$$\therefore a+b+c$$

$$=7+6+7=20$$

ⓑ $b+2c=5, b-c=\pm 2$ 일 때

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$b=3, c=1 \text{ 또는 } b=\frac{1}{3}, c=\frac{7}{3}$$

그런데 b, c 는 자연수이므로

$$a=1, b=3, c=1$$

$$\therefore a+b+c$$

$$=1+3+1=5$$

(ii) $b=c$ 인 경우

㉠에서

$$(a+2c)(a-c)^2=20=20 \times 1^2=5 \times 2^2$$

ⓐ $a+2c=20, a-c=\pm 1$ 일 때

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=\frac{22}{3}, c=\frac{19}{3} \text{ 또는 } a=6, c=7$$

그런데 a, c 는 자연수이므로

$$a=6, b=7, c=7$$

$$\therefore a+b+c$$

$$=6+7+7=20$$

ⓑ $a+2c=5, a-c=\pm 2$ 일 때

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=3, c=1 \text{ 또는 } a=\frac{1}{3}, c=\frac{7}{3}$$

그런데 a, c 는 자연수이므로

$$a=3, b=1, c=1$$

$$\therefore a+b+c$$

$$=3+1+1=5$$

(i), (ii)에서 $a+b+c$ 의 최댓값은 20이다.

답 20

026

$$\begin{aligned}
 & a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) \\
 &= a^3(b-c) + b^3c - b^3a + c^3a - c^3b \\
 &= a^3(b-c) - (b^3 - c^3)a + bc(b^2 - c^2) \\
 &= a^3(b-c) - (b-c)(b^2 + bc + c^2)a + bc(b+c)(b-c) \\
 &= (b-c)\{a^3 - (b^2 + bc + c^2)a + bc(b+c)\} \\
 &= (b-c)(a^3 - ab^2 - abc - ac^2 + b^2c + bc^2) \\
 &= (b-c)\{a(a^2 - b^2) - bc(a-b) - c^2(a-b)\} \\
 &= (b-c)\{a(a+b)(a-b) - bc(a-b) - c^2(a-b)\} \\
 &= (b-c)(a-b)\{a(a+b) - bc - c^2\} \\
 &= (b-c)(a-b)(a^2 + ab - bc - c^2) \\
 &= (b-c)(a-b)\{(a^2 - c^2) + b(a-c)\} \\
 &= (b-c)(a-b)\{(a+c)(a-c) + b(a-c)\} \\
 &= (a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c) \quad \text{참고}
 \end{aligned}$$

a, b, c 는 자연수이고 $1 \leq c < b < a \leq 9$ 이므로 $a-b, b-c, a-c$ 는 모두 자연수이다.

또, $a-c > a-b, a-c > b-c$ 이므로 $a-b, b-c, a-c$ 중에서 $a-c$ 가 가장 큰 수이다.

한편, $96 = 2^5 \times 3$ 이고, $(a-b) + (b-c) = a-c$ 이므로 $a-c$ 의 값은 2 또는 3 또는 4 또는 6 또는 8

(i) $a-c=2$ 인 경우

$$a-b = b-c = 1, a+b+c = 2^4 \times 3 = 48$$

이때 $1 \leq c < b < a \leq 9$ 이므로 $a+b+c \leq 24$ 에 모순이다.

(ii) $a-c=3$ 인 경우

$$(a-b)(b-c) = 1 \times 2, a+b+c = 2^4 = 16$$

③ $a-b=1, b-c=2, a-c=3$ 일 때

$$\begin{aligned}
 & a=c+3, b=c+2 \\
 & a+b+c = 3c+5 = 16 \text{이므로} \\
 & c = \frac{11}{3}
 \end{aligned}$$

그런데 c 는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

④ $a-b=2, b-c=1, a-c=3$ 일 때

$$\begin{aligned}
 & a=c+3, b=c+1 \\
 & a+b+c = 3c+4 = 16 \text{이므로} \\
 & c=4 \\
 & \therefore a=7, b=5, c=4
 \end{aligned}$$

(iii) $a-c=4$ 인 경우

$$(a-b)(b-c) = 1 \times 3, a+b+c = 2^3 = 8$$

또는 $a-b = b-c = 2, a+b+c = 2 \times 3 = 6$

⑤ $a-b=1, b-c=3, a-c=4$ 일 때

$$\begin{aligned}
 & a=c+4, b=c+3 \\
 & a+b+c = 3c+7 = 8 \text{이므로} \\
 & c = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

그런데 c 는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

⑥ $a-b=3, b-c=1, a-c=4$ 일 때

$$\begin{aligned}
 & a=c+4, b=c+1 \\
 & a+b+c = 3c+5 = 8 \text{이므로} \\
 & c=1 \\
 & \therefore a=5, b=2, c=1
 \end{aligned}$$

⑦ $a-b = b-c = 2, a-c = 4$ 일 때

$$\begin{aligned}
 & a=c+4, b=c+2 \\
 & a+b+c = 3c+6 = 6 \text{이므로}
 \end{aligned}$$

$$c=0$$

그런데 c 는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $a-c=6$ 인 경우

$$(a-b)(b-c) = 2 \times 4, a+b+c = 2$$

⑧ $a-b=2, b-c=4, a-c=6$ 일 때

$$\begin{aligned}
 & a=c+6, b=c+4 \\
 & a+b+c = 3c+10 = 2 \text{이므로} \\
 & c = -\frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

그런데 c 는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

⑨ $a-b=4, b-c=2, a-c=6$ 일 때

$$\begin{aligned}
 & a=c+6, b=c+2 \\
 & a+b+c = 3c+8 = 2 \text{이므로} \\
 & c = -2
 \end{aligned}$$

그런데 c 는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(v) $a-c=8$ 인 경우

$$(a-b)(b-c) = 2 \times 6, a+b+c = 1$$

이때 $1 \leq c < b < a \leq 9$ 이므로 $a+b+c \geq 6$ 에 모순이다.

(i)~(v)에서 $a=7, b=5, c=4$ 또는 $a=5, b=2, c=1$ 이므로 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 는 $(7, 5, 4), (5, 2, 1)$ 의 2개이다.

답 2

참고

$$\begin{aligned}
 & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \\
 &= ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) \\
 &= (a-b)(b-c)(a-c) \\
 & a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) \\
 &= (a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)
 \end{aligned}$$

두 다항식 모두 $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ 일 때 0이므로 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 를 인수로 갖는다.

027

$$\begin{aligned}
 N &= x^4 - 16x^2 - 32x - 16 \\
 &= x^4 - 16(x^2 + 2x + 1) \\
 &= (x^2)^2 - \{4(x+1)\}^2 \\
 &= (x^2 + 4x + 4)(x^2 - 4x - 4)
 \end{aligned}$$

$|N|$ 이 소수가 되려면

$$x^2 + 4x + 4 = \pm 1, x^2 - 4x - 4 = (\text{소수})$$

또는 $x^2 + 4x + 4 = (\text{소수}), x^2 - 4x - 4 = \pm 1$

이어야 한다.

(i) $x^2 + 4x + 4 = \pm 1, x^2 - 4x - 4 = (\text{소수})$ 인 경우

① $x^2 + 4x + 4 = 1$ 일 때

$$\begin{aligned}
 & x^2 + 4x + 3 = 0, (x+1)(x+3) = 0 \\
 & \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = -3
 \end{aligned}$$

$x = -1$ 이면 $x^2 - 4x - 4 = 1$ 에서 $|N| = 1$ 이므로 소수가 아니다.

$x = -3$ 이면 $x^2 - 4x - 4 = 17$ 에서 $|N| = 17$ 이므로 소수이다.

② $x^2 + 4x + 4 = -1$ 일 때

$x^2 + 4x + 5 = 0$ 이므로 좌변이 정수의 범위에서 인수분해되지 않는다.

즉, 조건을 만족시키는 정수 x 의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $x^2+4x+4=(\text{소수}), x^2-4x-4=\pm 1$ 인 경우

㉠ $x^2-4x-4=1$ 일 때

$$x^2-4x-5=0, (x+1)(x-5)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=5$$

$x=-1$ 이면 $x^2+4x+4=1$ 에서 $|N|=1$ 이므로 소수가 아니다.

$x=5$ 이면 $x^2+4x+4=49$ 에서 $|N|=49$ 이므로 소수가 아니다.

㉡ $x^2-4x-4=-1$ 일 때

$x^2-4x-3=0$ 이므로 좌변이 정수의 범위에서 인수분해되지 않는다.

즉, 조건을 만족시키는 정수 x 의 값이 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 소수 $|N|$ 의 값은 17이다.

답 17

028

조건 (가)에서

$$a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-2abc(a+b+c)=0$$

$$a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$-\{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\}=0$$

$$(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(ab+bc+ca)^2=0$$

$$(a^2+b^2+c^2)^2-(ab+bc+ca)^2=0$$

$$(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$$

이때 $a>0, b>0, c>0$ 이므로

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca>0$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0 \text{이므로}$$

$$a-b=0, b-c=0, c-a=0$$

$$\therefore a=b=c \quad \text{참고} \quad \begin{array}{l} \hookrightarrow \text{임의의 실수 } A, B, C \text{에 대하여} \\ A^2+B^2+C^2=0 \text{이면 } A=B=C=0 \end{array}$$

즉, 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

$$\text{조건 (나)에서 } (a-2)(a^2+2a+4)=0$$

이때 $a>0$ 이므로 $a=2$

따라서 조건을 만족시키는 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로 그 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$$

답 $\sqrt{3}$

참고

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c ($a \leq b \leq c$)일 때

(1) $a=b \rightarrow$ 이등변삼각형

(2) $a=b=c \rightarrow$ 정삼각형

(3) $a^2+b^2=c^2 \rightarrow$ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형

(4) $a^2+b^2>c^2 \rightarrow$ 예각삼각형

(5) $a^2+b^2<c^2 \rightarrow$ 둔각삼각형

029

$$c^4-a^4-b^4-2a^2b^2=c^4-(a^4+2a^2b^2+b^4)$$

$$=(c^2)^2-(a^2+b^2)^2$$

$$=\{c^2-(a^2+b^2)\}\{c^2+(a^2+b^2)\}$$

$$=(c^2-a^2-b^2)(a^2+b^2+c^2)$$

$$c^2-a^2-b^2-2ab=c^2-(a^2+2ab+b^2)$$

$$=c^2-(a+b)^2$$

$$=(c-a-b)(c+a+b)$$

이므로

$$(c^2-a^2-b^2)(a^2+b^2+c^2)(c-a-b)(c+a+b)=0$$

이때 $a^2+b^2+c^2>0, a+b>c, c+a+b>0$ 이므로

$$c^2-a^2-b^2=0$$

$$\therefore c^2=a^2+b^2$$

따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

$$a+b=12, \sqrt{a^2+b^2}=3\sqrt{10} \text{이므로}$$

$$ab=\frac{1}{2}\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\}$$

$$=\frac{1}{2} \times (144-90)$$

$$=27$$

$$\text{따라서 } S=\frac{1}{2} \times 27=\frac{27}{2} \text{이므로}$$

$$2S=27$$

답 27

030

$20=x$ 로 놓으면

$$21 \times 22 \times 23 \times 24 + 1 = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1$$

$$= \{(x+1)(x+4)\} \{(x+2)(x+3)\} + 1$$

$$= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) + 1$$

$x^2+5x=X$ 로 놓으면

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1=(X+4)(X+6)+1$$

$$=X^2+10X+25$$

$$=(X+5)^2$$

$$=(x^2+5x+5)^2$$

$$=505^2$$

$$\therefore \sqrt{21 \times 22 \times 23 \times 24 + 1} = \sqrt{505^2}$$

$$=505=5 \times 101$$

따라서 구하는 양의 약수의 개수는

$$(1+1) \times (1+1) = 4$$

답 4

031

$12=x$ 로 놓으면

$$12^4-2 \times 12^3-7 \times 12^2+20 \times 12-12=x^4-2x^3-7x^2+20x-12$$

$$f(x)=x^4-2x^3-7x^2+20x-12 \text{라 하면 } f(1)=0 \text{이므로 조립제}$$

법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -2 & -7 & 20 & -12 \\ & & 1 & -1 & -8 & 12 \\ \hline & 1 & -1 & -8 & 12 & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x^3-x^2-8x+12)$$

$$g(x)=x^3-x^2-8x+12 \text{라 하면 } g(2)=0 \text{이므로 조립제법을 이용}$$

하여 $g(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & -8 & 12 \\ & & 2 & 2 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 g(x) &= (x-2)(x^2+x-6) \\
 &= (x-2)(x-2)(x+3) \\
 &= (x-2)^2(x+3) \\
 \therefore x^4-2x^3-7x^2+20x-12 &= (x+3)(x-1)(x-2)^2
 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 12^4-2 \times 12^3-7 \times 12^2+20 \times 12-12 \\
 = 15 \times 11 \times 10^2 \\
 = 2^2 \times 3 \times 5^3 \times 11
 \end{aligned}$$

이므로

$$(주어진 식) = \sqrt{\frac{2^2 \times 3 \times 5^3 \times 11}{n}}$$

위의 식이 자연수가 되려면 근호 안의 식이 (자연수)²의 꼴이 되어야 하므로 자연수 n 은

$3 \times 5 \times 11, 2^2 \times 3 \times 5 \times 11, 3 \times 5^3 \times 11, 2^2 \times 3 \times 5^3 \times 11$ 의 4개이다.

답 4

032

$f(n) = n^4 + 3n^3 + 5n^2 + 9n - 18$ 이라 하면 $f(1) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(n)$ 을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 1 & 1 & 3 & 5 & 9 & -18 \\
 & & 1 & 4 & 9 & 18 \\
 \hline
 & 1 & 4 & 9 & 18 & 0
 \end{array}$$

$$f(n) = (n-1)(n^3 + 4n^2 + 9n + 18)$$

$g(n) = n^3 + 4n^2 + 9n + 18$ 이라 하면 $g(-3) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $g(n)$ 을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -3 & 1 & 4 & 9 & 18 \\
 & & -3 & -3 & -18 \\
 \hline
 & 1 & 1 & 6 & 0
 \end{array}$$

$$g(n) = (n+3)(n^2 + n + 6)$$

$$\therefore n^4 + 3n^3 + 5n^2 + 9n - 18 = (n-1)(n+3)(n^2 + n + 6)$$

$h(n) = n^3 + 3n^2 - n - 3$ 이라 하면

$$\begin{aligned}
 h(n) &= n^3 + 3n^2 - n - 3 \\
 &= n^2(n+3) - (n+3) \\
 &= (n+3)(n^2-1) \\
 &= (n+3)(n+1)(n-1) \quad \text{참고}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{n^4 + 3n^3 + 5n^2 + 9n - 18}{n^3 + 3n^2 - n - 3} \\
 &= \frac{(n+3)(n-1)(n^2+n+6)}{(n+3)(n+1)(n-1)} \\
 &= \frac{n^2+n+6}{n+1} \\
 &= \frac{n(n+1)+6}{n+1} \\
 &= n + \frac{6}{n+1}
 \end{aligned}$$

따라서 $n + \frac{6}{n+1}$ 이 자연수가 되려면 $n+1$ 이 6의 양의 약수이어야 한다.

이때 n 은 $n > 1$ 인 자연수이므로

$$n+1 > 2$$

즉, $n+1=3$ 또는 $n+1=6$ 이므로

$$n=2 \text{ 또는 } n=5$$

024 정답과 풀이

따라서 구하는 합은

$$2+5=7$$

답 7

참고

$h(n) = n^3 + 3n^2 - n - 3$ 이라 하면 $h(1) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $h(n)$ 을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
 1 & 1 & 3 & -1 & -3 \\
 & & 1 & 4 & 3 \\
 \hline
 & 1 & 4 & 3 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 h(n) &= (n-1)(n^2+4n+3) \\
 &= (n-1)(n+1)(n+3)
 \end{aligned}$$

033

$x+y=2, xy=-1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 x^2+y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \\
 &= 4+2=6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^4+y^4 &= (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 \\
 &= 36-2=34
 \end{aligned}$$

$$ax^5+bx^4=1 \quad \dots \text{㉠}$$

$$ay^5+by^4=1 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠의 양변에 y^4 을 곱하면

$$ax^5y^4+bx^4y^4=y^4, x^4y^4(ax+b)=y^4$$

$$xy=-1 \text{이므로 } ax+b=y^4 \quad \dots \text{㉢}$$

㉡의 양변에 x^4 을 곱하면

$$ax^4y^5+bx^4y^4=x^4, x^4y^4(ay+b)=x^4$$

$$xy=-1 \text{이므로 } ay+b=x^4 \quad \dots \text{㉣}$$

㉢-㉣을 하면

$$\begin{aligned}
 a(x-y) &= -(x^4-y^4) \\
 &= -(x^2+y^2)(x^2-y^2) \\
 &= -(x^2+y^2)(x+y)(x-y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &= -(x^2+y^2)(x+y) \\
 &= -6 \times 2 = -12
 \end{aligned}$$

㉢+㉣을 하면

$$\begin{aligned}
 a(x+y)+2b &= x^4+y^4 \\
 -12 \times 2 + 2b &= 34 \quad \therefore b=29
 \end{aligned}$$

$$\therefore a+b = -12+29=17$$

답 3

034

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

이므로

$$17-3 \times 4 = 5(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=1 \quad \dots \text{㉠}$$

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$

이므로 ㉠에서

$$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=1$$

$$5^2-3(ab+bc+ca)=1$$

$$\therefore ab+bc+ca=8$$

한편, $a+b+c=5$ 에서

$$a+b=5-c, b+c=5-a, c+a=5-b$$

$$\begin{aligned} &\therefore (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \\ &= (5-2c)(5-2a)(5-2b) \\ &= 125 - 50(a+b+c) + 20(ab+bc+ca) - 8abc \\ &= 125 - 50 \times 5 + 20 \times 8 - 8 \times 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

답 3

035

조건 (가)에서 $x^3 - 3yz = y^3 - 3zx$ 이므로

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 - 3yz + 3zx &= 0 \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2) + 3z(x-y) &= 0 \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3z) &= 0 \end{aligned}$$

이때 $x \neq y$ 이므로

$$x^2 + xy + y^2 + 3z = 0 \quad \dots \textcircled{A}$$

또, $y^3 - 3zx = z^3 - 3xy$ 에서

$$\begin{aligned} y^3 - z^3 - 3zx + 3xy &= 0 \\ (y-z)(y^2 + yz + z^2) + 3x(y-z) &= 0 \\ (y-z)(y^2 + yz + z^2 + 3x) &= 0 \end{aligned}$$

이때 $y \neq z$ 이므로

$$y^2 + yz + z^2 + 3x = 0 \quad \dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} - \textcircled{B}$ 을 하면

$$\begin{aligned} x^2 + xy + 3z - yz - z^2 - 3x &= 0 \\ (x^2 - z^2) + (xy - yz) + 3z - 3x &= 0 \\ (x+z)(x-z) + y(x-z) - 3(x-z) &= 0 \\ (x-z)(x+y+z-3) &= 0 \end{aligned}$$

이때 $x \neq z$ 이므로

$$x+y+z-3=0$$

$$\therefore x+y+z=3$$

조건 (나)에서 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$ 이므로

$$\frac{xy+yz+zx}{xyz} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore xy+yz+zx = \frac{2}{3}xyz$$

$$\begin{aligned} \therefore x^2 + y^2 + z^2 &= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) \\ &= 9 - \frac{4}{3}xyz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 6xyz \\ &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 6xyz \\ &= 3\left(9 - \frac{4}{3}xyz - \frac{2}{3}xyz\right) + 6xyz \\ &= 27 \end{aligned}$$

답 27

036

일등급의 메모장

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - z^3 + 3xyz &= x^3 + y^3 + (-z)^3 - 3xy(-z) \\ (x+y-z)^3 - x^3 - y^3 + z^3 &= \{x+y+(-z)\}^3 - x^3 - y^3 - (-z)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^3 + y^3 - z^3 + 3xyz \\ &= x^3 + y^3 + (-z)^3 - 3xy(-z) \\ &= (x+y-z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy + yz + zx) \\ &= \frac{1}{2}(x+y-z)\{(x-y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2\} \\ g(x, y, z) &= (x+y-z)^3 - x^3 - y^3 + z^3 \\ &= (x+y-z)^3 - \{x^3 + y^3 + (-z)^3\} \\ &= (x+y-z)^3 \\ &\quad - \{(x+y-z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy + yz + zx) - 3xyz\} \\ &= (x+y-z)\{(x+y-z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2 - xy + yz + zx)\} \\ &\quad + 3xyz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (x+y-z)(3xy - 3yz - 3zx) + 3xyz \\ &= 3x^2y + 3xy^2 - 3y^2z + 3yz^2 + 3z^2x - 3zx^2 - 6xyz \\ &= 3\{(y-z)x^2 + (y^2 - 2yz + z^2)x - (y-z)yz\} \\ &= 3\{(y-z)x^2 + (y-z)^2x - (y-z)yz\} \\ &= 3(y-z)\{x^2 + (y-z)x - yz\} \\ &= 3(x+y)(y-z)(x-z) \end{aligned}$$

$X = a-b+c, Y = a+b-c, Z = a-b-c$ 라 하자.

조건 (가)에서 $f(X, Y, Z) = 56$ 이므로

$$\frac{1}{2}(X+Y-Z)\{(X-Y)^2 + (Y+Z)^2 + (Z+X)^2\} = 56$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)\{(2c-2b)^2 + (2a-2c)^2 + (2a-2b)^2\} = 56$$

$$4(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 56$$

$$\therefore (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 14 \quad \dots \textcircled{A}$$

조건 (나)에서 $g(X, Y, Z) = 72$ 이므로

$$3(X+Y)(Y-Z)(X-Z) = 72$$

$$24abc = 72 \quad \therefore abc = 3 \quad \dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= 14 + 3 \times 3 \\ &= 23 \end{aligned}$$

답 23

037

일등급의 메모장

인수 정리

(1) 다항식 $f(x)$ 가 $x-a$ 로 나누어떨어지면 $f(a) = 0$

(2) $f(a) = 0$ 이면 다항식 $f(x)$ 는 $x-a$ 로 나누어떨어진다.

다항식 $P(x)$ 를 일차식 $x-a$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$a \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & 0 & -250 & 0 & b \\ & a & a^2 & a^3 - 250a & a^4 - 250a^2 \\ \hline 1 & a & a^2 - 250 & a^3 - 250a & b + a^4 - 250a^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\therefore Q(x) = x^3 + ax^2 + (a^2 - 250)x + a^3 - 250a,$$

$$R = b + a^4 - 250a^2$$

$P(x)$ 가 $x-a$ 를 인수로 가지므로 $R=0$ 에서 $b = a^2(250 - a^2)$

이때 b 가 자연수이므로 $250 - a^2 > 0$ 이고 가능한 a 의 값은

1, 2, 3, ..., 15

한편, $Q(-a)=0$ 에서

$$-a \begin{array}{|ccc|c} 1 & a & a^2-250 & a^3-250a \\ & -a & 0 & -a^3+250a \\ \hline 1 & 0 & a^2-250 & 0 \end{array}$$

즉, $Q(x)=(x+a)(x^2+a^2-250)$ 이므로

$$P(x)=(x-a)(x+a)(x^2+a^2-250)$$

$P(x)$ 가 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 세 개의 다항식의 곱으로 인수분해되려면

$$a^2-250 \neq -k^2 \quad (k \text{는 정수})$$

이어야 하므로

$$250=5^2+15^2=9^2+13^2$$

에서 a 의 값으로 가능한 것은 1부터 15까지의 자연수 중에서 5, 9, 13, 15를 제외한 11개이다. **참고**

답 11

참고

$$a=5 \text{이면 } a^2-250=5^2-(5^2+15^2)=-15^2$$

같은 방법으로 a 의 값이 9, 13, 15인 경우도 $a^2-250=-k^2$ (k 는 정수)의 꼴이 되므로 조건을 만족시키지 않는다.

038

일등급의 메모장

$4x^4-ax^2+25$ 가 $x+a$ 를 인수로 가지면 $x-a$ 도 인수로 가지므로 (이차식) \times (이차식)의 꼴을 조사한다.

$4x^4-ax^2+25$ 가 계수와 상수항이 모두 정수인 두 개 이상의 서로 다른 다항식의 곱으로 인수분해되어야 하므로 $4x^4-ax^2+25=(2x^2+mx+n)(2x^2+rx+s)$ 또는 $(x^2+mx+n)(4x^2+rx+s)$ 의 꼴로 인수분해되어야 한다. (단, m, n, r, s 는 정수이다.)

(i) $(2x^2+mx+n)(2x^2+rx+s)$ 의 꼴로 인수분해되는 경우

$$\begin{aligned} 4x^4-ax^2+25 &= (2x^2+mx+n)(2x^2+rx+s) \\ &= 4x^4+2(m+r)x^3+(mr+2n+2s)x^2+(ms+nr)x+ns \end{aligned}$$

$$\text{에서 } m+r=0, mr+2n+2s=-a, ms+nr=0, ns=25$$

$$r=-m \text{ 을 } ms+nr=0 \text{ 에 대입하면}$$

$$m(s-n)=0$$

$$\therefore m=0 \text{ 또는 } s=n$$

③ $m=0, s \neq n$ 일 때 $\rightarrow m=r=0$ 일 때 $s=n$ 이면 $4x^4-ax^2+25$ 는 $(2x^2+n)^2$ 의 꼴로 인수분해된다.

$$r=0 \text{ 이므로 } mr+2n+2s=-a \text{ 에서}$$

$$a=-2(n+s)$$

a 는 자연수이므로 $n+s < 0$ 이고, $ns=25$ 이므로

$$n=-1, s=-25 \text{ 또는 } n=-25, s=-1$$

따라서 이를 만족시키는 a 의 값은

$$52$$

④ $m \neq 0, s=n$ 일 때

$$r=-m \text{ 이므로 } mr+2n+2s=-a \text{ 에서}$$

$$a=m^2-4n$$

$$ns=n^2=25 \text{ 이므로}$$

$$n=-5 \text{ 또는 } n=5$$

$$\therefore a=m^2+20 \text{ 또는 } a=m^2-20$$

$$a=m^2+20 \text{ 이면 } 1 \leq a \leq 150 \text{ 이므로}$$

$$1 \leq m^2+20 \leq 150$$

$$\therefore 0 < m^2 \leq 130 \quad (\because m \neq 0)$$

따라서 이를 만족시키는 a 의 값은

$$21, 24, 29, 36, 45, 56, 69, 84, 101, 120, 141$$

$$a=m^2-20 \text{ 이면 } 1 \leq a \leq 150 \text{ 이므로}$$

$$1 \leq m^2-20 \leq 150$$

$$\therefore 21 \leq m^2 \leq 170$$

따라서 이를 만족시키는 a 의 값은

$$5, 16, 29, 44, 61, 80, 101, 124, 149$$

(ii) $(x^2+mx+n)(4x^2+rx+s)$ 의 꼴로 인수분해되는 경우

$$\begin{aligned} 4x^4-ax^2+25 &= (x^2+mx+n)(4x^2+rx+s) \\ &= 4x^4+(r+4m)x^3+(mr+4n+s)x^2+(ms+nr)x+ns \end{aligned}$$

$$\text{에서 } r+4m=0, mr+4n+s=-a, ms+nr=0, ns=25$$

$$r=-4m \text{ 을 } ms+nr=0 \text{ 에 대입하면}$$

$$m(s-4n)=0$$

$$\therefore m=0 \text{ 또는 } s=4n$$

㉠ $m=0, s \neq 4n$ 일 때

$$r=0 \text{ 이므로 } mr+4n+s=-a \text{ 에서}$$

$$a=-(4n+s)$$

a 는 자연수이므로 $4n+s < 0$ 이고, $ns=25$ 이므로

$$n=-1, s=-25 \text{ 또는 } n=-5, s=-5$$

$$\text{또는 } n=-25, s=-1$$

따라서 이를 만족시키는 a 의 값은

$$25, 29, 101$$

㉡ $m \neq 0, s=4n$ 일 때

$$r=-4m \text{ 이므로 } mr+4n+s=-a \text{ 에서}$$

$$a=4m^2-8n$$

$$ns=4n^2=25 \text{ 이므로}$$

$$n=-\frac{5}{2} \text{ 또는 } n=\frac{5}{2}$$

n 은 정수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 a 의 값은 **참고**

$$5, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 44, 45, 52, 56, 61, 69, 80, 84, 101, 120, 124, 141, 149$$

따라서 구하는 a 의 개수는 20이다.

답 20

참고

$a+20=p^2, a-20=q^2$ 을 동시에 만족시키는 a 의 값을 찾아 (ii)-㉠.

(ii)-㉡에서 중복되는 a 의 값을 빠르게 찾을 수 있다.

두 식의 차를 구하면

$$p^2-q^2=40, (p-q)(p+q)=40$$

두 수 $p-q, p+q$ 의 합과 차를 구하면

$$(p-q)+(p+q)=2p, (p+q)-(p-q)=2q$$

즉, 두 수의 합과 차가 짝수이고, 두 수의 곱이 짝수이므로 $p+q, p-q$ 는 모두 짝수이다.

따라서 $(p-q)(p+q)=40$ 을 만족시키는 경우는

$$(p-q)(p+q)=2 \times 20, (p-q)(p+q)=4 \times 10$$

$$\therefore p=11, q=9 \text{ 또는 } p=7, q=3$$

따라서 $a=29$ 또는 $a=101$ 이므로 중복된 값을 빠르게 찾을 수 있다.

039

일등급의 매모장

$n, n+1, n+2, \dots, n+5$ (n 은 자연수) 중에서
(두 수의 합) = $k \Rightarrow n+(n+1) \leq k$

오른쪽 그림과 같이 각 꼭짓점에 적힌 수를 각각 a, b, c, d, e, f 라 하면 각 면에 적힌 수는

$abc, acd, ade, aeb,$
 fbc, fcd, fde, feb

$$\begin{aligned} \therefore abc+acd+ade+aeb \\ + fbc+fcd+fde+feb \\ &= a(bc+cd+de+eb)+f(bc+cd+de+eb) \\ &= (a+f)(bc+cd+de+eb) \\ &= (a+f)\{b(c+e)+d(c+e)\} \\ &= (a+f)(b+d)(c+e) \end{aligned}$$

꼭짓점에 적힌 6개의 수는 연속하는 자연수이므로
 $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ (n 은 자연수)
라 하면

$$(a+f)+(b+d)+(c+e)=6n+15$$

$$X=a+f, Y=b+d, Z=c+e$$

라 하면

$$XYZ=2025=3^4 \times 5^2, X+Y+Z=6n+15$$

$X+Y+Z=6n+15=3(2n+5)$ 이므로 $X+Y+Z$ 는 3의 배수
이어야 한다.

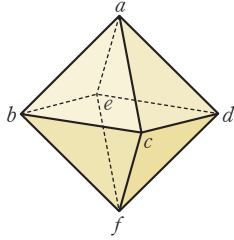
$X \leq Y \leq Z$ 라 하자.

(i) $X=3$ 인 경우 참고

- ㉠ $Y=3, Z=225$ 일 때
 $X+Y+Z=231$ 이므로 3의 배수이다.
 $6n+15=231$ 에서 $n=36$
이때 꼭짓점에 적힌 두 수의 합으로 3을 만들 수 없으므로
조건을 만족시키지 않는다.
- ㉡ $Y=5, Z=135$ 일 때
 $X+Y+Z=143$ 이므로 3의 배수가 아니다.
- ㉢ $Y=9, Z=75$ 일 때
 $X+Y+Z=87$ 이므로 3의 배수이다.
 $6n+15=87$ 에서 $n=12$
이때 꼭짓점에 적힌 두 수의 합으로 3을 만들 수 없으므로
조건을 만족시키지 않는다.
- ㉣ $Y=15, Z=45$ 일 때
 $X+Y+Z=63$ 이므로 3의 배수이다.
 $6n+15=63$ 에서 $n=8$
이때 꼭짓점에 적힌 두 수의 합으로 3을 만들 수 없으므로
조건을 만족시키지 않는다.
- ㉤ $Y=25, Z=27$ 일 때
 $X+Y+Z=55$ 이므로 3의 배수가 아니다.

(ii) $X=5$ 인 경우

- ㉠ $Y=5, Z=81$ 일 때
 $X+Y+Z=91$ 이므로 3의 배수가 아니다.
- ㉡ $Y=9, Z=45$ 일 때
 $X+Y+Z=59$ 이므로 3의 배수가 아니다.
- ㉢ $Y=15, Z=27$ 일 때



$X+Y+Z=47$ 이므로 3의 배수가 아니다.

(iii) $X=9$ 인 경우

- ㉠ $Y=9, Z=25$ 일 때
 $X+Y+Z=43$ 이므로 3의 배수가 아니다.
 - ㉡ $Y=15, Z=15$ 일 때
 $X+Y+Z=39$ 이므로 3의 배수이다.
 $6n+15=39$ 에서 $n=4$
이때 각 꼭짓점에 적힌 수는 4, 5, 6, 7, 8, 9이므로 꼭짓점
에 적힌 두 수의 합으로 9를 만들 수 있다.
- (i)~(iii)에서 여섯 개의 꼭짓점에 적힌 자연수 중 가장 큰 수는 9이다.

답 9

참고

두 수를 뽑아 합이 3 또는 5가 될 수 없음을 빠르게 알아낼 수 있다.

- (1) 두 수를 뽑아 합이 3이 되려면 가장 작은 두 수의 합이
 $n+(n+1) \leq 3$
 $\therefore n \leq 1$
즉, $X=3$ 이 되려면 연속하는 자연수는 $n=1$ 로 시작해야 하는데 1, 2,
3, 4, 5, 6은 조건을 만족시키지 않는다.
- (2) 두 수를 뽑아 합이 5가 되려면 가장 작은 두 수의 합이
 $n+(n+1) \leq 5$
 $\therefore n \leq 2$
즉, $X=5$ 가 되려면 연속하는 자연수는 $n=1$ 또는 $n=2$ 로 시작해야
하는데 2, 3, 4, 5, 6, 7은 조건을 만족시키지 않는다.

03

II. 방정식과 부등식 복소수

001

$$a = \frac{5}{1-2i} = \frac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = 1+2i,$$

$$b = \frac{5}{1+2i} = \frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = 1-2i$$

이므로

$$a+b=(1+2i)+(1-2i)=2,$$

$$ab=(1+2i)(1-2i)=5$$

이때

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=2^2-2 \times 5=-6$$

이므로

$$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+b^2)^2-a^2b^2=(-6)^2-5^2=11$$

답 ③

002

$$z=3k(1+i)-6(1+3i)+k^2i=(3k-6)+(k^2+3k-18)i$$

이므로 z^2 이 실수가 되려면 (실수부분)=0 또는 (허수부분)=0이어야 한다.

$$\text{즉, } 3k-6=0 \text{ 또는 } k^2+3k-18=0 \rightarrow (k+6)(k-3)=0$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$2+(-6)+3=-1$$

답 -1

003

$$\{m(1+3i)+n(1-i)\}^2=-16<0 \text{이므로 복소수}$$

$$m(1+3i)+n(1-i)=(m+n)+(3m-n)i$$

는 순허수이다.

$$\text{즉, } m+n=0, 3m-n \neq 0 \text{이므로 } m=-n, 3m \neq n$$

$$\text{이때 } \{(3m-n)i\}^2=-16 \text{에서 } (3m-n)^2=16$$

$$\therefore 3m-n=-4 \text{ 또는 } 3m-n=4$$

(i) $3m-n=-4$ 에 $m=-n$ 을 대입하면

$$-4n=-4 \quad \therefore n=1$$

$$\therefore n=1, m=-1$$

(ii) $3m-n=4$ 에 $m=-n$ 을 대입하면

$$-4n=4 \quad \therefore n=-1$$

$$\therefore n=-1, m=1$$

(i), (ii)에서 $m^2+n^2=1+1=2$

답 2

004

$$\frac{5a}{3-ai} = \frac{5a(3+ai)}{(3-ai)(3+ai)} = \frac{15a+5a^2i}{9+a^2}$$

$$= \frac{15a}{9+a^2} + \frac{5a^2}{9+a^2}i$$

a, x, y 가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

028 정답과 풀이

$$x = \frac{15a}{9+a^2}, y = \frac{5a^2}{9+a^2}$$

위의 식을 $3x-y=4$ 에 대입하면

$$3 \times \frac{15a}{9+a^2} - \frac{5a^2}{9+a^2} = 4, \frac{45a-5a^2}{9+a^2} = 4$$

$$a^2-5a+4=0, (a-1)(a-4)=0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=4$$

따라서 실수 a 의 값의 합은

$$1+4=5$$

답 ①

005

$f(x)$ 를 x^2+1 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^5-ax^4+bx+1=(x^2+1)Q(x) \quad \text{[다른 풀이]}$$

위의 식에 $x=i$ 를 대입하면

$$i^5-ai^4+bi+1=0$$

$$(-a+1)+(1+b)i=0$$

a, b 가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$-a+1=0, 1+b=0$$

따라서 $a=1, b=-1$ 이므로

$$a-b=1-(-1)=2$$

답 2

[다른 풀이]

위의 식에 $x=-i$ 를 대입하면

$$(-i)^5-a(-i)^4+b(-i)+1=0$$

$$(-a+1)-(1+b)i=0$$

a, b 가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$-a+1=0, -1-b=0$$

따라서 $a=1, b=-1$ 이므로

$$a-b=1-(-1)=2$$

006

이차방정식 $x^2-6x+11=0$ 의 서로 다른 두 근이 $x=3 \pm \sqrt{2}i$ 이므로 $\alpha=3+\sqrt{2}i, \beta=3-\sqrt{2}i$ 라 하면 $\beta=\bar{\alpha}$ 이고, $\alpha=\bar{\beta}$ 이다.

$$\alpha+\beta=(3+\sqrt{2}i)+(3-\sqrt{2}i)=6,$$

$$\alpha\beta=(3+\sqrt{2}i)(3-\sqrt{2}i)=11$$

이므로

$$11\left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} + \frac{\bar{\beta}}{\beta}\right) = 11\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right) = 11 \times \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$= 11 \times \frac{36-22}{11} = 14$$

답 14

007

$$1-z^2 \text{이 실수이므로 } 1-z^2 = \overline{1-z^2}$$

$$1-z^2 = 1-\bar{z}^2, z^2-\bar{z}^2=0$$

$$(z+\bar{z})(z-\bar{z})=0$$

이때 z 는 허수이므로 $z \neq \bar{z}$

$$\therefore z+\bar{z}=0$$

따라서 항상 옳은 것은 ②이다.

답 ②

참고

③ z 가 허수이므로 $z=a+bi$ (a, b 는 실수, $b \neq 0$)라 하면
 $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2>0$

008

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$ 이므로

$$\begin{aligned} 2z-i-3zi &= 2\bar{z}-i-3zi \\ &= 2(a-bi)+i-3(a+bi)i \\ &= (2a+3b)+(1-3a-2b)i \end{aligned}$$

$2z-i-3zi=7-7i$ 에서

$$(2a+3b)+(1-3a-2b)i=7-7i$$

a, b 가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2a+3b=7, 1-3a-2b=-7$$

$$\therefore a=2, b=1$$

즉, $z=2+i$ 이므로 $z-2=i$

양변을 제곱하여 정리하면 $z^2-4z+5=0$

$$\therefore z^3-4z^2+6z-2=z(z^2-4z+5)+z-2=i$$

답 ③

009

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i,$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = i$$

이므로

$$\begin{aligned} f(n) &= \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2n} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n} = (-i)^{2n} + i^{4n} \\ &= (-1)^n + 1^n \end{aligned}$$

n 이 홀수일 때, $f(n)=(-1)^n+1^n=-1+1=0$

n 이 짝수일 때, $f(n)=(-1)^n+1^n=1+1=2$

$$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(100)=2 \times 50=100$$

답 100

010

a 가 음수이므로 $a=-b$ ($b>0$)라 하면

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{-4a}}{\sqrt{a}\sqrt{-4}} - \frac{\sqrt{-32}\sqrt{4a}}{\sqrt{2}\sqrt{-a}} &= \frac{\sqrt{4b}}{\sqrt{-b}\sqrt{-4}} - \frac{\sqrt{-32}\sqrt{-4b}}{\sqrt{2}\sqrt{b}} \\ &= \frac{\sqrt{4b}}{\sqrt{b}i\sqrt{4}i} - \frac{\sqrt{32}i\sqrt{4b}i}{\sqrt{2}\sqrt{b}} \\ &= -\frac{\sqrt{4b}}{\sqrt{4b}} + \frac{\sqrt{128b}}{\sqrt{2b}} \\ &= -1+8=7 \end{aligned}$$

다른 풀이

$a<0, -4<0$ 이므로 $\sqrt{a}\sqrt{-4}=-\sqrt{-4a}$

$-32<0, 4a<0$ 이므로 $\sqrt{-32}\sqrt{4a}=-\sqrt{-128a}$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\sqrt{-4a}}{\sqrt{a}\sqrt{-4}} - \frac{\sqrt{-32}\sqrt{4a}}{\sqrt{2}\sqrt{-a}} &= \frac{\sqrt{-4a}}{-\sqrt{-4a}} - \frac{-\sqrt{-128a}}{\sqrt{-2a}} \\ &= -1 + \sqrt{\frac{-128a}{-2a}} \\ &= -1+8=7 \end{aligned}$$

011

0이 아닌 세 실수 a, b, c 에 대하여 $\sqrt{b}\sqrt{c}=-\sqrt{bc}$ 이므로 $b<0, c<0$ 이고, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 이므로 $a>0$

ㄱ. $-a<0, -b>0$ 이므로

$$\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{ab} \text{ (참)}$$

ㄴ. $b<0, c<0$ 이므로

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{c}{b}} \text{ (거짓)}$$

ㄷ. $a>0, -c>0$ 이므로

$$\frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{-c}{a}} \text{ (거짓)}$$

ㄹ. $a>0, c^2>0$ 이므로

$$\sqrt{ac^2}=\sqrt{a}\sqrt{c^2}=\sqrt{a} \times |c|=-c\sqrt{a} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

012

$x^2 \neq 4, y^2 \neq 4$ 에서

$x \neq -2, x \neq 2$ 이고 $y \neq -2, y \neq 2$

$\sqrt{x-2}\sqrt{y-2}=-\sqrt{(x-2)(y-2)}$ 에서

$x-2<0, y-2<0$ ($\because \ominus$)

$\therefore x<2, y<2$

$\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{y+2}}=-\sqrt{\frac{x+2}{y+2}}$ 에서

$x+2>0, y+2<0$ ($\because \omin�$)

$\therefore x>-2, y<-2$

$\omin�, \omin�$ 에서 $-2<x<2, y<-2$ 이므로 정수 x, y 의 최댓값은 각각 1, -3이다.

따라서 $x+y$ 의 최댓값은

$$1+(-3)=-2$$

답 -2

013

$z=a+bi$ (a, b 는 실수, $a \neq 0$)라 하면

$$z^2=a^2-b^2+2abi$$

$$z^3=z^2z=a(a^2-3b^2)+b(3a^2-b^2)i$$

$$z^3=-8i \text{에서 } a(a^2-3b^2)+b(3a^2-b^2)i=-8i$$

a, b 가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a(a^2-3b^2)=0, b(3a^2-b^2)=-8$$

$$a(a^2-3b^2)=0 \text{에서 } a^2-3b^2=0 \text{ (}\because a \neq 0\text{)}$$

$$\therefore a^2=3b^2$$

$a^2=3b^2$ 을 $b(3a^2-b^2)=-8$ 에 대입하여 정리하면

$$b^3=-1 \quad \therefore b=-1 \text{ (}\because b \text{는 실수)}$$

$b=-1$ 을 $a^2=3b^2$ 에 대입하면

$$a^2=3, \text{ 즉 } a=\sqrt{3} \text{ 또는 } a=-\sqrt{3}$$

따라서

$$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=3+1=4,$$

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$$

이므로 구하는 값은

$$4+(2a)^2=4+4 \times 3=16$$

답 16

014

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하자.

복소수 z 에 대하여 z^4 이 음의 실수가 되려면 z^2 이 순허수이어야 하므로

$$z^2 = a^2 - b^2 + 2abi \text{에서 } a^2 - b^2 = 0, 2ab \neq 0$$

따라서 $a + b = 0$ 또는 $a - b = 0$ 이고, $a \neq 0, b \neq 0$ 이다.

이때

$$z = (x^2 - 3x - 4) + (2x^2 + 5x + 3)i \\ = (x+1)(x-4) + (x+1)(2x+3)i$$

$a \neq 0, b \neq 0$ 이므로

$$(x+1)(x-4) \neq 0, (x+1)(2x+3) \neq 0 \text{에서}$$

$$x \neq -1, x \neq 4, x \neq -\frac{3}{2}$$

(i) $a + b = 0$ 인 경우

$$a + b = (x+1)(x-4) + (x+1)(2x+3) \\ = (x+1)(3x-1) = 0$$

$$\text{에서 } x+1=0 \text{ 또는 } 3x-1=0$$

$$\text{이때 } x \neq -1 \text{이므로 } x = \frac{1}{3}$$

(ii) $a - b = 0$ 인 경우

$$a - b = (x+1)(x-4) - (x+1)(2x+3) \\ = -(x+1)(x+7) = 0$$

$$\text{에서 } x+1=0 \text{ 또는 } x+7=0$$

$$\text{이때 } x \neq -1 \text{이므로 } x = -7$$

(i), (ii)에서 실수 x 의 값은 $x = \frac{1}{3}$ 또는 $x = -7$ 이므로 모든 x 의

값의 곱은

$$\frac{1}{3} \times (-7) = -\frac{7}{3}$$

답 ①

다른 풀이

복소수 z 에 대하여 z^4 이 음의 실수가 되려면 z^2 이 순허수이어야 하므로

$$z^2 = (x^2 - 3x - 4)^2 + 2(x^2 - 3x - 4)(2x^2 + 5x + 3)i \\ - (2x^2 + 5x + 3)^2 \\ = (x+1)^2(x-4)^2 + 2(x+1)^2(x-4)(2x+3)i \\ - (x+1)^2(2x+3)^2 \\ = -(x+1)^2(x+7)(3x-1) + 2(x+1)^2(x-4)(2x+3)i$$

에서

$$-(x+1)^2(x+7)(3x-1) = 0 \quad \dots \text{㉠}$$

$$2(x+1)^2(x-4)(2x+3) \neq 0 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠에서 $x+1=0$ 또는 $x+7=0$ 또는 $3x-1=0$ 이므로

$$x = -1 \text{ 또는 } x = -7 \text{ 또는 } x = \frac{1}{3} \quad \dots \text{㉢}$$

㉡에서 $x+1 \neq 0, x-4 \neq 0, 2x+3 \neq 0$ 이므로

$$x \neq -1, x \neq 4, x \neq -\frac{3}{2} \quad \dots \text{㉣}$$

㉢, ㉣에 의하여 $x = -7$ 또는 $x = \frac{1}{3}$ 이므로 모든 x 의 값의 곱은

$$-7 \times \frac{1}{3} = -\frac{7}{3}$$

015

이차방정식 $(i-3)x^2 + (k^2+2i)x - 3i = 0$ 의 실근을 $x = a$ 라 하면

030 정답과 풀이

$$(i-3)a^2 + (k^2+2i)a - 3i = 0$$

$$(ak^2 - 3a^2) + (a^2 + 2a - 3)i = 0$$

a, k 가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$ak^2 - 3a^2 = 0, a^2 + 2a - 3 = 0$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0 \text{에서 } (a+3)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 1$$

(i) $a = -3$ 일 때

$$ak^2 - 3a^2 = 0 \text{에서 } -3k^2 = 27 \quad \therefore k^2 = -9$$

k 는 실수이므로 조건을 만족시키는 k 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a = 1$ 일 때

$$ak^2 - 3a^2 = 0 \text{에서 } k^2 = 3 \quad \therefore k = \sqrt{3} (\because k > 0)$$

(i), (ii)에서 양수 k 의 값은 $\sqrt{3}$ 이다.

답 ②

주의

허수는 대소를 비교할 수 없으므로 이차방정식의 계수가 복소수일 때에는 판별식을 이용하여 근을 판별할 수 없음에 주의한다.

016

$$z^2 = (3a - bi)^2 = (9a^2 - b^2) - 6abi$$

조건 (가)에서 z^2 은 순허수이므로

$$9a^2 - b^2 = 0 \quad \dots \text{㉠}$$

또, z^2 의 허수부분이 양수이어야 하므로

$$-6ab > 0, ab < 0 \quad \therefore b < 0 (\because a > 0)$$

조건 (나)에서 $z\bar{z} = 36$ 이므로

$$9a^2 + b^2 = 36 \quad \dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하면 } a^2 = 2, b^2 = 18$$

$$\therefore a = \sqrt{2}, b = -3\sqrt{2} (\because a > 0, b < 0)$$

따라서 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$ 은

$$(x - \sqrt{2})(x + 3\sqrt{2}) = 0, \text{ 즉 } x^2 + 2\sqrt{2}x - 6 = 0$$

$$\text{이므로 } p = 2\sqrt{2}, q = -6$$

$$\therefore p^2 + q^2 = 8 + 36 = 44$$

답 44

017

10개의 수 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 중에서 1, -3, $i, -i$ 의 개수를 각각 a, b, c, d (a, b, c, d 는 음이 아닌 정수)라 하면

$$a + b + c + d = 10 \quad \dots \text{㉠}$$

이때 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = -4 + 2i$ 에서

$$a \times 1 + b \times (-3) + c \times i + d \times (-i) = -4 + 2i$$

$$(a - 3b) + (c - d)i = -4 + 2i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a - 3b = -4 \quad \therefore a = 3b - 4 \quad \dots \text{㉡}$$

$$c - d = 2 \quad \therefore c = d + 2 \quad \dots \text{㉢}$$

$$\text{㉡, ㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면 } d = 6 - 2b$$

이때 b 와 d 는 음이 아닌 정수이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (b, d) 는 $(0, 6), (1, 4), (2, 2), (3, 0)$ 이다.

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{10}^2 = S$ 라 하면

$$S = a \times 1^2 + b \times (-3)^2 + c \times i^2 + d \times (-i)^2$$

$$= a + 9b - c - d \quad \text{[다른 풀이]}$$

순서쌍 (b, d) 가

(i) $(0, 6)$ 인 경우

$a = -4, c = 8$ 이므로 a 가 음이 아닌 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $(1, 4)$ 인 경우

$a = -1, c = 6$ 이므로 a 가 음이 아닌 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $(2, 2)$ 인 경우

$a = 2, c = 4$ 이므로 $S = 14$

(iv) $(3, 0)$ 인 경우

$a = 5, c = 2$ 이므로 $S = 30$

(i)~(iv)에서 구하는 최댓값은 30이다.

답 30

다른 풀이

$S = a + 9b - c - d$ 에 ①, ②, ③을 대입하여 정리하면

$$S = 16b - 18$$

이때 a, b, c, d 는 음이 아닌 정수이므로

$$a = 3b - 4 \geq 0 \text{에서 } b \geq \frac{4}{3}$$

$$b \geq 0$$

$$d = 6 - 2b \geq 0 \text{에서 } b \leq 3$$

$$c = d + 2 = (6 - 2b) + 2 = 8 - 2b \geq 0 \text{에서 } b \leq 4$$

$$\therefore \frac{4}{3} \leq b \leq 3$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 b 의 값은 2, 3이므로 S 는 $b = 3$ 일 때 최댓값 $16 \times 3 - 18 = 30$ 을 갖는다.

018

$z \neq 0$ 이므로 $z^2 - iz + 1 = 0$ 의 양변을 z 로 나누면 $z + \frac{1}{z} = i$

$$az^3 + az^2 + bz - 1 + \frac{b}{z} + \frac{a}{z^2} + \frac{a}{z^3} = 0 \text{에서}$$

$$a\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + a\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + b\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

이때

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 = i^2 - 2 = -3,$$

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right) = i^3 - 3i = -4i$$

이므로 이를 ①에 대입하면

$$-4ai - 3a + bi - 1 = 0, \quad (-3a - 1) + (b - 4a)i = 0$$

a, b 가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$-3a - 1 = 0, \quad b - 4a = 0 \quad \therefore a = -\frac{1}{3}, \quad b = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore b - a = -\frac{4}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$$

답 -1

019

(i) $P(1) > 0$ 일 때

$\sqrt{P(1)}$ 은 실수이고, $\sqrt{-P(1)}$ 은 허수이므로

$\sqrt{P(1)} + \sqrt{-P(1)} - \sqrt{P(0)-4}$ 의 값이 실수가 되려면

$\sqrt{-P(1)} - \sqrt{P(0)-4}$ 의 값이 실수이어야 한다.

이때 $\sqrt{-P(1)}, \sqrt{P(0)-4}$ 는 각각 실수부분이 0인 허수이므로

$\sqrt{-P(1)} - \sqrt{P(0)-4} = 0$ 에서

$$\sqrt{-P(1)} = \sqrt{P(0)-4}, \quad -P(1) = P(0) - 4$$

$$-(8-2a) = 3-a \quad \therefore a = \frac{11}{3}$$

따라서 $P(x) = x^2 - \frac{11}{3}x + \frac{10}{3}$ 이므로

$$P(-4) = 34$$

(ii) $P(1) < 0$ 일 때

$\sqrt{-P(1)}$ 은 실수이고, $\sqrt{P(1)}$ 은 허수이므로

$\sqrt{P(1)} + \sqrt{-P(1)} - \sqrt{P(0)-4}$ 의 값이 실수가 되려면

$\sqrt{P(1)} - \sqrt{P(0)-4}$ 의 값이 실수이어야 한다.

이때 $\sqrt{P(1)}, \sqrt{P(0)-4}$ 는 각각 실수부분이 0인 허수이므로

$\sqrt{P(1)} - \sqrt{P(0)-4} = 0$ 에서

$$\sqrt{P(1)} = \sqrt{P(0)-4}, \quad P(1) = P(0) - 4$$

$$8-2a = 3-a \quad \therefore a = 5$$

따라서 $P(x) = x^2 - 5x + 2$ 이므로

$$P(-4) = 38$$

(iii) $P(1) = 0$ 일 때

$$P(1) = 8 - 2a = 0 \text{이므로 } a = 4$$

따라서 $P(x) = x^2 - 4x + 3$ 이므로

$$\sqrt{P(1)} + \sqrt{-P(1)} - \sqrt{P(0)-4} = -\sqrt{-1} = -i$$

가 되어 실수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에서 모든 $P(-4)$ 의 값의 합은

$$34 + 38 = 72$$

답 ④

다른 풀이

먼저 $P(1), P(0)$ 의 값을 구해도 된다.

즉, $P(1) = 8 - 2a, P(0) = 7 - a$ 이므로

$\sqrt{8-2a} + \sqrt{2a-8} - \sqrt{3-a}$ 의 값이 실수이어야 한다.

(i) $8-2a > 0$, 즉 $a < 4$ 일 때

$\sqrt{2a-8}$ 은 허수이므로 $\sqrt{2a-8} - \sqrt{3-a} = 0$ 에서

$$\sqrt{2a-8} = \sqrt{3-a}, \quad 2a-8 = 3-a$$

$$\therefore a = \frac{11}{3}$$

$$\therefore P(-4) = 3a + 23 = 34$$

(ii) $8-2a < 0$, 즉 $a > 4$ 일 때

$\sqrt{8-2a}$ 는 허수이므로 $\sqrt{8-2a} - \sqrt{3-a} = 0$ 에서

$$\sqrt{8-2a} = \sqrt{3-a}, \quad 8-2a = 3-a$$

$$\therefore a = 5$$

$$\therefore P(-4) = 3a + 23 = 38$$

(iii) $8-2a = 0$, 즉 $a = 4$ 일 때

$\sqrt{8-2a} + \sqrt{2a-8} - \sqrt{3-a} = -i$ 이므로 실수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에서 모든 $P(-4)$ 의 값의 합은

$$34 + 38 = 72$$

020

ㄱ. $\bar{a} = -\beta$ 이므로

$$a\beta = a \times (-\bar{a}) = -a\bar{a}$$

이때 $a\bar{a}$ 는 실수이므로 $a\beta$ 는 실수이다.

ㄴ. $a = a + bi$ (a, b 는 0이 아닌 실수)라 하면 $\bar{a} = a - bi$ 이므로

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \alpha - \bar{\alpha} \\ &= (\alpha + bi) - (\alpha - bi) \\ &= 2bi \end{aligned}$$

$b \neq 0$ 이므로 $\alpha + \beta$ 는 순허수이다.

ㄷ. $z = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$ 라 하면

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \overline{\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \\ &= \frac{-\alpha}{-\beta} + \frac{-\beta}{-\alpha} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

즉, $z = \bar{z}$ 이므로 $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ 는 실수이다.

따라서 실수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

021

$$\begin{aligned} z &= (x^2 - 6x + 8) + (x^2 - 2x - 3)i \\ &= (x-2)(x-4) + (x+1)(x-3)i \end{aligned}$$

$z \neq \bar{z}$ 이려면 z 는 허수이어야 하므로

$$(x+1)(x-3) \neq 0 \quad \therefore x \neq -1, x \neq 3$$

$$\therefore m \neq -1, m \neq 3$$

$z = m$, 즉 z 가 실수이려면

$$(x+1)(x-3) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

$$\therefore n = -1 \text{ 또는 } n = 3$$

(i) $n = -1$ 일 때

$m = 15$ 이므로 주어진 조건을 모두 만족시킨다.

(ii) $n = 3$ 일 때

$m = -1$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $m = 15, n = -1$ 이므로

$$mn = 15 \times (-1) = -15$$

답 -15

022

$$z + z^2 = a + bi + (a + bi)^2 = (a^2 + a - b^2) + b(1 + 2a)i$$

이때 $z + z^2$ 이 실수이고, $b \neq 0$ 이므로

$$1 + 2a = 0 \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore z = -\frac{1}{2} + bi$$

ㄱ. $z + z^2$ 이 실수이므로 $\overline{z + z^2}$ 도 실수이다. (참)

$$\therefore z - \bar{z} = \left(-\frac{1}{2} + bi\right) - \left(-\frac{1}{2} - bi\right) = 2bi \text{이므로 } z - \bar{z} \text{는 실수가}$$

아니다. (거짓)

$$\therefore z + \bar{z} = \left(-\frac{1}{2} + bi\right) + \left(-\frac{1}{2} - bi\right) = -1 \text{ (참)}$$

$$\therefore z\bar{z} = \left(-\frac{1}{2} + bi\right)\left(-\frac{1}{2} - bi\right) = \frac{1}{4} + b^2$$

이때 $b \neq 0$ 이므로

$$\frac{1}{4} + b^2 > \frac{1}{4} \quad \therefore z\bar{z} > \frac{1}{4} \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㉔

023

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

조건 (㉔)에서

$$z + \bar{z} = 2a > 0 \quad \therefore a > 0$$

조건 (㉔)에서

$$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 5 - 12i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 & \dots \textcircled{㉔} \\ 2ab = -12 & \dots \textcircled{㉔} \end{cases}$$

㉔에서 $b = -\frac{6}{a}$ 이므로 이것을 ㉔에 대입하면

$$a^2 - \frac{36}{a^2} = 5$$

$a^2 \neq 0$ 이므로 위의 식의 양변에 a^2 을 곱하면

$$a^4 - 5a^2 - 36 = 0, (a^2 - 9)(a^2 + 4) = 0$$

a 는 실수이므로 $a^2 = 9$

따라서 $a = 3$ ($\because a > 0$), $b = -2$ 이므로

$$z = 3 - 2i \text{ (다른 풀이)}$$

한편, $z^2 = 5 - 12i$ 에서 $z^2 - 5 = -12i$ 이므로 양변을 제곱하면

$$z^4 - 10z^2 + 25 = -144$$

$$z^4 - 10z^2 + 169 = 0$$

$$\therefore z^3 - 10z - 3 + \frac{182}{z} = \frac{(z^4 - 10z^2 + 169) + 13}{z} - 3$$

$$= \frac{13}{z} - 3 = \frac{13}{3 - 2i} - 3$$

$$= \frac{13(3 + 2i)}{13} - 3$$

$$= 2i$$

$$\therefore a = 2$$

답 2

다른 풀이

$$z = 3 - 2i \text{에서 } z - 3 = -2i$$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$z^2 - 6z + 13 = 0$$

$$\therefore z^3 - 10z - 3 + \frac{182}{z}$$

$$= z(z^2 - 6z + 13) + 6z^2 - 23z - 3 + \frac{182}{z}$$

$$= 6(z^2 - 6z + 13) + 13z - 81 + \frac{182}{z}$$

$$= \frac{13z^2 - 81z + 182}{z}$$

$$= \frac{13(z^2 - 6z + 13) - 3z + 13}{z}$$

$$= \frac{13}{z} - 3 = \frac{13}{3 - 2i} - 3$$

$$= \frac{13(3 + 2i)}{13} - 3$$

$$= 2i$$

$$\therefore a = 2$$

024

$z = a + bi$ (a, b 는 실수, $b > 0$)라 하면 $(z + \bar{z})i = 2i$ 에서

$$(a + bi + a - bi)i = 2i$$

$$2ai = 2i \quad \therefore a = 1$$

한편,

$$z - \frac{1}{z} = 1 + bi - \frac{1}{1+bi} = \frac{b^2}{1+b^2} + \frac{2b+b^3}{1+b^2}i$$

의 실수부분이 $\frac{4}{5}$ 이므로

$$\frac{b^2}{1+b^2} = \frac{4}{5}, 5b^2 = 4 + 4b^2$$

$$b^2 = 4 \quad \therefore b = 2 (\because b > 0) \quad \text{[다른 풀이]}$$

즉, $z = 1 + 2i$ 이므로

$$(z-i)(\overline{z-i}) = (1+i)(1-i) = 2$$

답 2

[다른 풀이]

$$\begin{aligned} \therefore (z-i)(\overline{z-i}) &= (z-i)(\overline{z-i}) \\ &= (z-i)(\overline{z}+i) \\ &= z\overline{z} + (z-\overline{z})i + 1 \\ &= (a^2+b^2) - 2b + 1 \\ &= 5 - 4 + 1 = 2 \end{aligned}$$

025

$$z^3 + \overline{z}^3 = 0 \text{에서 } (z+\overline{z})(z^2 - z\overline{z} + \overline{z}^2) = 0$$

$$(z+\overline{z})\{(z+\overline{z})^2 - 3z\overline{z}\} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

이때

$$z = (2+i)a - i = 2a + (a-1)i$$

이므로

$$z + \overline{z} = 4a, z\overline{z} = (2a)^2 + (a-1)^2 = 5a^2 - 2a + 1$$

이를 ①에 대입하면

$$4a\{(4a)^2 - 3(5a^2 - 2a + 1)\} = 0 \quad \rightarrow \text{(판별식)} > 0 \text{이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.}$$

$$4a(a^2 + 6a - 3) = 0 \quad \therefore a = 0 \text{ 또는 } a^2 + 6a - 3 = 0$$

$$\text{즉, } a = 0 \text{ 또는 } a = -3 + 2\sqrt{3} \text{ 또는 } a = -3 - 2\sqrt{3}$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$0 + (-3 + 2\sqrt{3}) + (-3 - 2\sqrt{3}) = -6$$

답 -6

026

$z + \overline{z} = 1, z\overline{z} = 1$ 이므로 z, \overline{z} 는 이차방정식

$$x^2 - x + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

의 두 근이다.

이차방정식 ①의 양변에 $x+1$ 을 곱하면

$$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0, x^3 + 1 = 0$$

$$\therefore x^3 = -1 \quad \text{[다른 풀이]}$$

따라서 $z^3 = -1, \overline{z}^3 = -1$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{\overline{z}}{z^2} + \frac{\overline{z}^2}{z} + \frac{\overline{z}^3}{z^3} - \frac{\overline{z}^4}{z^2} - \frac{\overline{z}^5}{z} - \frac{\overline{z}^6}{z^3} \\ = \frac{\overline{z}}{z^2} + \frac{\overline{z}^2}{z} + \frac{-1}{-1} + \frac{\overline{z}}{z^2} + \frac{\overline{z}^2}{z} - \frac{1}{-1} \\ = 2\left(\frac{\overline{z}}{z^2} + \frac{\overline{z}^2}{z} + 1\right) \\ = 2\left(\frac{\overline{z}\overline{z}}{z^3} + \frac{z^2\overline{z}^2}{z^3} + 1\right) \\ = 2\left(\frac{1}{-1} + \frac{1}{-1} + 1\right) = -2 \end{aligned}$$

답 -2

[다른 풀이]

$$z^3 = -1, \overline{z}^3 = -1 \text{이고, } z\overline{z} = 1 \text{에서 } \overline{z} = \frac{1}{z} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{z}}{z^2} + \frac{\overline{z}^2}{z} + \frac{\overline{z}^3}{z^3} - \frac{\overline{z}^4}{z^2} - \frac{\overline{z}^5}{z} - \frac{\overline{z}^6}{z^3} \\ = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^9} \\ = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^9} \\ = -1 + (-1) - 1 - (-1) = -2 \end{aligned}$$

027

$$z = (1+i)x - (5+i) = (x-5) + (x-1)i$$

$$z^2 = (x-5)^2 - (x-1)^2 + 2(x-5)(x-1)i$$

$$= -8(x-3) + 2(x-5)(x-1)i \quad \dots \textcircled{1}$$

z^4 이 양의 실수가 되려면 z^2 은 0이 아닌 실수이어야 하므로 ①에서

$$2(x-5)(x-1) = 0 \quad \therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 5$$

$$-8(x-3) \neq 0 \quad \therefore x \neq 3$$

따라서 조건을 만족시키는 x 의 값은 $x = 1$ 또는 $x = 5$

$$\therefore a = 1 + 5 = 6$$

한편, z^4 이 음의 실수가 되려면 z^2 은 순허수이어야 하므로 ①에서

$$-8(x-3) = 0 \quad \therefore x = 3$$

$$2(x-5)(x-1) \neq 0 \quad \therefore x \neq 1, x \neq 5$$

따라서 조건을 만족시키는 x 의 값은 3 $\therefore b = 3$

$$\therefore a + b = 6 + 3 = 9$$

답 9

028

$$\neg. z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{에서}$$

$$z^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore z^3 = z^2 z = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \times \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = 1 \text{ (참)}$$

나. $z^3 = 1$ 이므로

$$z^4 + z^5 = z^3 z + z^3 z^2 = z + z^2$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -1 \text{ (참)}$$

다. $z^n + z^{2n} + z^{3n} + z^{4n} + z^{5n}$

$$= z^n + (z^n)^2 + (z^n)^3 + (z^n)^4 + (z^n)^5 \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 \neg 에 의하여 z^n 은 $z, z^2, 1$ 의 순서대로 반복된다. [참고]

(i) $n = 3k - 2$ (k 는 자연수)일 때

$$z^n = z \text{이므로 ①에서}$$

$$\begin{aligned} z^n + z^{2n} + z^{3n} + z^{4n} + z^{5n} &= z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 \\ &= -1 + 1 + (-1) (\because z + z^2 = -1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

즉, 조건을 만족시키는 100 이하의 자연수 n 은 1, 4, 7, ..., 100의 34개이다.

(ii) $n = 3k - 1$ (k 는 자연수)일 때

$$z^n = z^2 \text{이므로 ①에서}$$

$$\begin{aligned} z^n + z^{2n} + z^{3n} + z^{4n} + z^{5n} \\ = z^2 + z^4 + z^6 + z^8 + z^{10} \\ = z^2 + z + 1 + z^2 + z \\ = -1 + 1 + (-1) = -1 \end{aligned}$$

$$= -1 + 1 + (-1) = -1$$

즉, 조건을 만족시키는 100 이하의 자연수 n 은 2, 5, 8, ..., 98의 33개이다.

(iii) $n=3k$ (k 는 자연수)일 때

$z^n=1$ 이므로 ㉠에서

$$z^n + z^{2n} + z^{3n} + z^{4n} + z^{5n} = 1+1+1+1+1=5$$

즉, 조건을 만족시키는 자연수 n 은 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에서 구하는 자연수 n 의 개수는

$$34+33=67 \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

참고

ㄱ에 의하여 k 가 자연수일 때

$$z = z^4 = z^7 = \dots = z^{3k-2} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$z^2 = z^5 = z^8 = \dots = z^{3k-1} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$z^3 = z^6 = z^9 = \dots = z^{3k} = 1$$

029

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \text{에서}$$

$$z^2 = \frac{1}{2} \times (-2i) = -i$$

$$z^3 = z^2 z = -iz$$

$$z^4 = (z^2)^2 = (-i)^2 = -1$$

$$z^5 = z^4 z = -z$$

$$z^6 = z^4 z^2 = -1 \times (-i) = i$$

$$z^7 = z^6 z = iz$$

$$z^8 = (z^4)^2 = (-1)^2 = 1$$

이므로 $z + z^2 + z^3 + \dots + z^8 = 0$

$$\begin{aligned} \therefore z + z^2 + z^3 + \dots + z^{2026} \\ = (z + z^2 + \dots + z^8) + \dots + z^{2016}(z + z^2 + \dots + z^8) \\ + z^{2025} + z^{2026} \end{aligned}$$

$$= z^{2025} + z^{2026}$$

$$= (z^8)^{253} \times z + (z^8)^{253} \times z^2$$

$$= z + z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)i$$

따라서 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ 이므로

$$a + b = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = -1$$

답 -1

030

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \text{에서}$$

$$z^2 = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$z^3 = z^2 z = -i \times \frac{1-i}{\sqrt{2}} = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$z^4 = (z^2)^2 = (-i)^2 = -1$$

$$z^5 = z^4 z = -\frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{i-1}{\sqrt{2}}$$

$$z^6 = z^4 z^2 = -1 \times (-i) = i$$

$$z^7 = z^6 z = i \times \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$z^8 = (z^4)^2 = (-1)^2 = 1$$

034 정답과 풀이

이므로 자연수 k 에 대하여

$$z = z^9 = \dots = z^{8k-7} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$z^2 = z^{10} = \dots = z^{8k-6} = -i$$

$$z^3 = z^{11} = \dots = z^{8k-5} = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$z^4 = z^{12} = \dots = z^{8k-4} = -1$$

$$z^5 = z^{13} = \dots = z^{8k-3} = \frac{i-1}{\sqrt{2}}$$

$$z^6 = z^{14} = \dots = z^{8k-2} = i$$

$$z^7 = z^{15} = \dots = z^{8k-1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$z^8 = z^{16} = \dots = z^{8k} = 1$$

이때 $z^n + \bar{z}^n = z^n + (\bar{z}^n) > 0$ 이므로 z^n 의 실수부분이 양수이어야 한다.

즉, 자연수 k 에 대하여

$$n = 8k-7 \text{ 또는 } n = 8k-1 \text{ 또는 } n = 8k$$

이어야 하므로 100 이하의 자연수 n 의 개수는

$$13+12+12=37$$

답 37

031

$$z = \frac{\sqrt{3}i-1}{2} \text{에서 } (2z+1)^2 = (\sqrt{3}i)^2$$

$$z^2 + z + 1 = 0, (z-1)(z^2+z+1) = 0$$

$$\therefore z^3 = 1$$

(i) $n=3k-2$ (k 는 자연수)일 때

$$z^n = z^{3k-2} = z, z^{2n} = z^{6k-4} = z^2 \text{이므로}$$

$$f(n) = \frac{1+z^n}{z^{2n}} = \frac{1+z}{z^2} = \frac{1+z}{-(1+z)} = -1$$

(ii) $n=3k-1$ (k 는 자연수)일 때

$$z^n = z^{3k-1} = z^2, z^{2n} = z^{6k-2} = z \text{이므로}$$

$$f(n) = \frac{1+z^n}{z^{2n}} = \frac{1+z^2}{z} = \frac{-z}{z} = -1$$

(iii) $n=3k$ (k 는 자연수)일 때

$$z^n = z^{3k} = 1, z^{2n} = z^{6k} = 1 \text{이므로}$$

$$f(n) = \frac{1+z^n}{z^{2n}} = \frac{1+1}{1} = 2$$

(i)~(iii)에서

$$f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(10)$$

$$= (-1) \times 4 + (-1) \times 3 + 2 \times 3$$

$$= -1$$

답 -1

032

$$z = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \text{라 하면}$$

$$z^2 = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = -i$$

$$z^3 = z^2 z = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$

$$z^4 = (z^2)^2 = (-i)^2 = -1$$

$$z^5 = z^4 z = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

$$z^6 = z^4 z^2 = i$$

$$z^7 = z^6 z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$z^8 = (z^4)^2 = 1$$

이므로 자연수 k 에 대하여

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{8k-7} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{8k-6} = -i,$$

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{8k-5} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{8k-4} = -1,$$

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{8k-3} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{8k-2} = i,$$

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{8k-1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{8k} = 1$$

한편, i^n 의 값은 $i, -1, -i, 1$ 의 순서대로 반복되므로 자연수 l 에 대하여

$$i^{4l-3} = i, i^{4l-2} = -1, i^{4l-1} = -i, i^{4l} = 1$$

이때 $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^m - i^n = 2$ 가 성립하려면 $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^m = 1, i^n = -1$ 이어

야 하므로

$$m = 8k, n = 4l - 2$$

따라서 40 이하의 두 자연수 m, n 에 대하여 $m+n$ 은 $m=40, n=38$ 일 때 최댓값 78을 갖는다.

☐ 78

033

자연수 k 에 대하여

$$i^n = \begin{cases} i & (n=4k-3 \text{ 일 때}) \\ -1 & (n=4k-2 \text{ 일 때}) \\ -i & (n=4k-1 \text{ 일 때}) \\ 1 & (n=4k \text{ 일 때}) \end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{i^n} \\ &= -i + 1 + i - 1 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{i^n} \\ &= \begin{cases} -i & (n=4k-3 \text{ 일 때}) \\ 1-i & (n=4k-2 \text{ 일 때}) \\ 1 & (n=4k-1 \text{ 일 때}) \\ 0 & (n=4k \text{ 일 때}) \end{cases} \end{aligned}$$

따라서 주어진 등식을 만족시키는 n 의 값은 자연수 k 에 대하여 $n=4k-2$ 일 때이다.

$$0 < 4k-2 \leq 200, 2 < 4k \leq 202$$

$$\therefore \frac{1}{2} < k \leq \frac{101}{2}$$

즉, 자연수 k 는 1, 2, 3, ..., 50이므로 조건을 만족시키는 자연수 n 은 2, 6, 10, ..., 198의 50개이다.

☐ 50

034

50 이하의 두 자연수 m, n 에 대하여

$$\left\{ i^n + \left(\frac{1}{i}\right)^{2m} \right\}^m = \{i^n + (-i)^{2m}\}^m = \{i^n + (-1)^n\}^m$$

이므로

$$f(n) = i^n + (-1)^n \text{이라 하자.}$$

(i) $n=4k-3$ (k 는 자연수)일 때

$$i^{4k-3} = i, (-1)^{4k-3} = -1 \text{이므로}$$

$$f(n) = i - 1$$

$$\{f(n)\}^2 = (i-1)^2 = -2i$$

$$\{f(n)\}^3 = \{f(n)\}^2 \times f(n) = -2i(i-1) = 2+2i$$

$$\{f(n)\}^4 = [\{f(n)\}^2]^2 = (-2i)^2 = -4$$

이때

$$\{f(n)\}^4 = -4, \{f(n)\}^8 = 16, \{f(n)\}^{12} = -64, \dots$$

이므로 $\{f(n)\}^4$ 을 홀수 번 거듭제곱한 꼴인 경우에 $\{f(n)\}^m$ 의 값은 음의 실수가 될 수 있다.

즉, $\{f(n)\}^m$ 의 값이 음의 실수가 되도록 하는 50 이하의 자연수 m 은 4, 12, 20, 28, 36, 44의 6개이고, 50 이하의 자연수 n 은 1, 5, 9, ..., 49의 13개이다.

따라서 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$6 \times 13 = 78$$

(ii) $n=4k-2$ (k 는 자연수)일 때

$$i^{4k-2} = -1, (-1)^{4k-2} = 1 \text{이므로}$$

$$f(n) = -1 + 1 = 0$$

따라서 $\{f(n)\}^m$ 의 값이 음의 실수가 되도록 하는 순서쌍 (m, n) 은 존재하지 않는다.

(iii) $n=4k-1$ (k 는 자연수)일 때

$$i^{4k-1} = -i, (-1)^{4k-1} = -1 \text{이므로}$$

$$f(n) = -i - 1$$

$$\{f(n)\}^2 = (-i-1)^2 = 2i$$

$$\{f(n)\}^3 = \{f(n)\}^2 \times f(n) = 2i(-i-1) = 2-2i$$

$$\{f(n)\}^4 = [\{f(n)\}^2]^2 = (2i)^2 = -4$$

즉, (i)의 경우와 마찬가지로 $\{f(n)\}^m$ 의 값이 음의 실수가 되도록 하는 50 이하의 자연수 m 은 4, 12, 20, 28, 36, 44의 6개이고, 50 이하의 자연수 n 은 3, 7, 11, ..., 47의 12개이다.

따라서 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$6 \times 12 = 72$$

(iv) $n=4k$ (k 는 자연수)일 때

$$i^{4k} = 1, (-1)^{4k} = 1 \text{이므로}$$

$$f(n) = 1 + 1 = 2$$

따라서 $\{f(n)\}^m$ 의 값이 음의 실수가 되도록 하는 순서쌍 (m, n) 은 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$78 + 72 = 150$$

☐ 150

035

$\sqrt{x}\sqrt{x+5} = -\sqrt{x^2+5x}$ 가 성립하려면 $x < 0, x+5 < 0$ 또는 $x+5=0$ 이어야 하므로

$$x \leq -5 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x-3}} = -\sqrt{\frac{x+8}{x-3}} \text{이 성립하려면 } x+8 > 0, x-3 < 0 \text{ 또는}$$

$x+8=0, x-3 \neq 0$ 이어야 하므로

$$-8 \leq x < 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$-8 \leq x \leq -5$$

이므로 정수 x 는 $-8, -7, -6, -5$ 이다.

$$\therefore M = -5, m = -8$$

주어진 복소수 z 에 $M = -5$, $m = -8$ 을 대입하면

$$z = \sqrt{-4} + \sqrt{-4} + \frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}$$

$$= 2i + 2i + 2 = 2 + 4i$$

따라서 $z - 2 = 4i$ 이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$$z^2 - 4z + 20 = 0$$

$$\therefore z^3 - 2z^2 + 12z + 50 = (z+2)(z^2 - 4z + 20) + 10 = 10$$

답 10

036

$abcd = -36$ 이므로 a, b, c, d 는 모두 0이 아닌 실수이다.

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{에서 } a < 0, b < 0,$$

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}} = -\sqrt{\frac{c}{d}} \text{에서 } c > 0, d < 0$$

이므로 $ab > 0, cd < 0$

$$\therefore \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\sqrt{d} = (\sqrt{a}\sqrt{b})(\sqrt{c}\sqrt{d})$$

$$= (-\sqrt{ab})(\sqrt{cd})$$

$$= -\sqrt{abcd}$$

$$= -\sqrt{-32} = -4\sqrt{2}i$$

답 $-4\sqrt{2}i$

037

일등급의 메모장

$a\bar{a} = \beta\bar{\beta} = \gamma\bar{\gamma} = k$ 일 때,

$$(a\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)(\overline{a\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}) = k(a + \beta + \gamma)(\overline{a + \beta + \gamma})$$

$a\bar{a} = \beta\bar{\beta} = \gamma\bar{\gamma} = 4$ 에서

$$\bar{a} = \frac{4}{a}, \bar{\beta} = \frac{4}{\beta}, \bar{\gamma} = \frac{4}{\gamma}$$

$a + \beta + \gamma = 2i$ 에서

$$\overline{a + \beta + \gamma} = \bar{2i}, \bar{a} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = -2i$$

$$\frac{4}{a} + \frac{4}{\beta} + \frac{4}{\gamma} = -2i, 4 \times \frac{a\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{a\beta\gamma} = -2i$$

$$\text{즉, } a\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -\frac{i}{2}a\beta\gamma \text{이므로}$$

$$(a\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)(\overline{a\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha})$$

$$= \left(-\frac{i}{2}a\beta\gamma\right)\left(-\frac{i}{2}a\beta\gamma\right)$$

$$= \left(-\frac{i}{2}\right)\left(-\frac{i}{2}\right) \times a\bar{a} \times \beta\bar{\beta} \times \gamma\bar{\gamma}$$

$$= \frac{1}{4} \times 4 \times 4 \times 4 = 16$$

답 16

참고

복소수 $z = a + bi$ 에 대하여

$$\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

위의 식을 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 과 같이 표현하기도 한다.

다른 풀이

$a\bar{a} = \beta\bar{\beta} = \gamma\bar{\gamma} = 4$ 에서

$$\frac{1}{a} = \frac{\bar{a}}{4}, \frac{1}{\beta} = \frac{\bar{\beta}}{4}, \frac{1}{\gamma} = \frac{\bar{\gamma}}{4}$$

$f(z) = z\bar{z}$ 라 하면

$$f(\bar{z}) = f(z), f(kz) = k^2f(z) \text{ (} k \text{는 실수)}$$

036 정답과 풀이

이고 두 복소수 z_1, z_2 에 대하여

$$f(z_1 z_2) = f(z_1) \times f(z_2)$$

가 성립한다.

$$\therefore f(a\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = f\left(a\beta\gamma\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\right)$$

$$= f(a) \times f(\beta) \times f(\gamma) \times f\left(\frac{\bar{a}}{4} + \frac{\bar{\beta}}{4} + \frac{\bar{\gamma}}{4}\right)$$

$$= 4 \times 4 \times 4 \times \frac{1}{4^2} \times f(\overline{a + \beta + \gamma})$$

$$= 4f(a + \beta + \gamma)$$

$$= 4f(2i) = 4 \times 2i \times 2i$$

$$= 16$$

038

일등급의 메모장

$z^8 = 1$ 이므로

$$z^m + z^{2m} + z^{3m} + z^{4m} + z^{5m} + z^{6m} + z^{7m} = -1$$

을 만족시키려면 m 은 8의 배수가 아니어야 한다.

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{에서}$$

$$z^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{2}(1+i)^2 = \frac{1}{2} \times 2i = i$$

$$z^3 = z^2 z = i \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z^4 = (z^2)^2 = i^2 = -1$$

$$z^5 = z^4 z = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z^6 = z^4 z^2 = -i$$

$$z^7 = z^6 z = -i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z^8 = (z^4)^2 = (-1)^2 = 1 \text{ (다른 풀이)}$$

이므로 자연수 k 에 대하여

$$z = z^9 = \dots = z^{8k-7} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z^2 = z^{10} = \dots = z^{8k-6} = i$$

$$z^3 = z^{11} = \dots = z^{8k-5} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z^4 = z^{12} = \dots = z^{8k-4} = -1$$

$$z^5 = z^{13} = \dots = z^{8k-3} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z^6 = z^{14} = \dots = z^{8k-2} = -i$$

$$z^7 = z^{15} = \dots = z^{8k-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z^8 = z^{16} = \dots = z^{8k} = 1$$

(i) $m = 8k - 7$ 일 때

$$z^m = z^{8k-7} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z^{2m} = z^{8(2k-1)-6} = i$$

$$z^{3m} = z^{8(3k-2)-5} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z^{4m} = z^{8(4k-3)-4} = -1$$

$$z^{5m} = z^{8(5k-4)-3} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z^{6m} = z^{8(6k-5)-2} = -i$$

$$z^{7m} = z^{8(7k-6)-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

이므로

$$z^m + z^{2m} + z^{3m} + z^{4m} + z^{5m} + z^{6m} + z^{7m} = -1$$

즉, 조건을 만족시키는 150 이하의 자연수 m 은 1, 9, 17, ..., 145의 19개이다.

(ii) $m=8k-6, \dots, m=8k-1$ 일 때

(i)과 같은 방법으로 구하면 $m=8k-6, \dots, m=8k-2$ 일 때 각각 19개이고, $m=8k-1$ 일 때 18개이다.

(iii) $m=8k$ 일 때

$$z^m = z^{2m} = z^{3m} = z^{4m} = z^{5m} = z^{6m} = z^{7m} = 1$$

이므로

$$z^m + z^{2m} + z^{3m} + z^{4m} + z^{5m} + z^{6m} + z^{7m} = 7$$

즉, 조건을 만족시키는 150 이하의 자연수 m 은 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에서 구하는 자연수 m 의 개수는

$$19 \times 6 + 18 = 132$$

답 132

다른 풀이

$$\begin{aligned} -1 &= z^m + z^{2m} + z^{3m} + \dots + z^{7m} \\ &= z^m(1 + z^m + z^{2m} + \dots + z^{6m}) \end{aligned}$$

에서 양변에 $1 - z^m$ ($1 - z^m \neq 0$)을 곱하면

$$\begin{aligned} -(1 - z^m) &= z^m(1 - z^m)(1 + z^m + z^{2m} + \dots + z^{6m}) \\ &= z^m(1 - z^{7m}) \\ &= z^m - z^{8m} \end{aligned}$$

즉, $z^{8m} = 1$

이때 $z^8 = 1$ 이므로 $1 - z^m \neq 0$ 인 모든 m 에 대하여 주어진 등식을 만족한다.

$1 - z^m = 0$ 을 만족하는 m 은 8의 배수이고 150 이하의 8의 배수는 18개이므로 구하는 모든 자연수 m 의 개수는

$$150 - 18 = 132$$

039

일등급의 대모장

$$\left\{ i^m + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^n \right\}^2 = 2i \Rightarrow i^m + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^n = \pm(1+i)$$

이때 i^m 의 값으로 가능한 것은

i 또는 -1 또는 $-i$ 또는 1

따라서 $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^n$ 또한 순허수나 실수이어야 한다.

$$\left\{ i^m + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^n \right\}^2 = 2i \text{가 성립하려면}$$

$$i^m + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^n = 1+i \text{ 또는 } i^m + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^n = -(1+i)$$

이어야 한다.

이때 $z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ 라 하면

$$z^2 = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^2 = -i$$

$$z^3 = z^2 z = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$

$$z^4 = (z^2)^2 = (-i)^2 = -1$$

$$z^5 = z^4 z = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

$$z^6 = z^4 z^2 = i$$

$$z^7 = z^6 z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$z^8 = (z^4)^2 = 1$$

이므로 자연수 k 에 대하여

$$z^{8k-7} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, z^{8k-6} = -i, z^{8k-5} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, z^{8k-4} = -1,$$

$$z^{8k-3} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, z^{8k-2} = i, z^{8k-1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, z^{8k} = 1$$

(i) $i^m + z^n = 1+i$ 인 경우

① $i^m = 1, z^n = i$ 일 때

$i^m = 1$ 이므로

$$m = 4, 8, 12, \dots, 48$$

$$z^n = i \text{이므로 } n = 8k - 2$$

$$\therefore n = 6, 14, 22, \dots, 46$$

이때 $m+n$ 은 $m=48, n=46$ 일 때 최댓값 94를 갖는다.

② $i^m = i, z^n = 1$ 일 때

$i^m = i$ 이므로

$$m = 1, 5, 9, \dots, 49$$

$$z^n = 1 \text{이므로 } n = 8k$$

$$\therefore n = 8, 16, 24, \dots, 48$$

이때 $m+n$ 은 $m=49, n=48$ 일 때 최댓값 97을 갖는다.

(ii) $i^m + z^n = -1-i$ 인 경우

① $i^m = -1, z^n = -i$ 일 때

$i^m = -1$ 이므로

$$m = 2, 6, 10, \dots, 50$$

$$z^n = -i \text{이므로 } n = 8k - 6$$

$$\therefore n = 2, 10, 18, \dots, 50$$

이때 $m+n$ 은 $m=50, n=50$ 일 때 최댓값 100을 갖는다.

② $i^m = -i, z^n = -1$ 일 때

$i^m = -i$ 이므로

$$m = 3, 7, 11, \dots, 47$$

$$z^n = -1 \text{이므로 } n = 8k - 4$$

$$\therefore n = 4, 12, 20, \dots, 44$$

이때 $m+n$ 은 $m=47, n=44$ 일 때 최댓값 91을 갖는다.

(i), (ii)에서 구하는 $m+n$ 의 최댓값은 100이다.

답 100

참고 확장

복소수의 극형식을 이용하여 빠르게 주기를 찾아낼 수 있다.

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \text{라 하면}$$

$$z^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

⋮

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

이때 $i = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ$ 에서

$$i^4 = \cos(4 \times 90^\circ) + i \sin(4 \times 90^\circ) = 1$$

이므로 i^m 의 값은 4개씩 반복되고,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i = \cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ) \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^8 &= \cos\{8 \times (-45^\circ)\} + i \sin\{8 \times (-45^\circ)\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

이므로 $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^n$ 의 값은 8개씩 반복된다.

일등급의 매모장

어떤 복소수 a 가 실수일 조건은 $a = \bar{a}$ 이므로 $z + \frac{1}{z}$ 이 실수이면

$$z + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}$$

$$z - \bar{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}}$$

$$(z - \bar{z})\left(1 - \frac{1}{z\bar{z}}\right) = 0$$

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$$

$$\therefore f(z) = (a^2 + b^2) - i(2bi) = a^2 + b^2 + 2b$$

이때

$$iz = i(a + bi) = -b + ai$$

이므로

$$f(iz) = a^2 + b^2 + 2a$$

조건 (가)에서

$$f(z) + f(iz) = (a^2 + b^2 + 2b) + (a^2 + b^2 + 2a) = 8$$

$$\therefore a^2 + b^2 + a + b = 4$$

..... ㉠

다른 풀이

조건 (나)에 의하여

$$z + \frac{1}{z} = (a + bi) + \frac{1}{a + bi}$$

$$= (a + bi) + \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

$$= \left(a + \frac{a}{a^2 + b^2}\right) + \left(b - \frac{b}{a^2 + b^2}\right)i$$

의 허수부분이 0이므로

$$b - \frac{b}{a^2 + b^2} = 0, \quad b\left(1 - \frac{1}{a^2 + b^2}\right) = 0$$

$$\therefore b = 0 \text{ 또는 } a^2 + b^2 = 1$$

(i) $b = 0$ 인 경우

㉠에 $b = 0$ 을 대입하면

$$a^2 + a = 4, \quad a^2 + a - 4 = 0$$

$$\therefore a = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

즉, $z = a$ 이므로

$$z^2 = a^2 = 4 - a = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

(ii) $a^2 + b^2 = 1$ 인 경우

㉠에 $a^2 + b^2 = 1$ 을 대입하면

$$a + b = 3 \quad \therefore b = 3 - a$$

이것을 $a^2 + b^2 = 1$ 에 대입하면

$$a^2 + (3 - a)^2 = 1, \quad 2a^2 - 6a + 8 = 0$$

$$a^2 - 3a + 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = -7 < 0$$

이므로 실수 a 의 값이 존재하지 않는다.

즉, 조건을 만족시키는 z 는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 가능한 모든 z^2 의 값의 곱은

$$\frac{9 + \sqrt{17}}{2} \times \frac{9 - \sqrt{17}}{2} = 16$$

다른 풀이

조건 (나)에서 $z + \frac{1}{z}$ 이 실수이므로

$$z + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}$$

$$z - \bar{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}}$$

$$(z - \bar{z}) - \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}} = 0$$

$$(z - \bar{z})\left(1 - \frac{1}{z\bar{z}}\right) = 0$$

$$\therefore z = \bar{z} \text{ 또는 } z\bar{z} = 1$$

(i) $z = \bar{z}$ 인 경우

$b = 0$ 이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$$a^2 + a = 4, \quad a^2 + a - 4 = 0$$

$$\therefore a = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

즉, $z = a$ 이므로

$$z^2 = a^2 = 4 - a = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

(ii) $z\bar{z} = 1$ 인 경우

$a^2 + b^2 = 1$ 이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$$a + b = 3 \quad \therefore b = 3 - a$$

이것을 $a^2 + b^2 = 1$ 에 대입하면

$$a^2 + (3 - a)^2 = 1, \quad 2a^2 - 6a + 8 = 0$$

$$a^2 - 3a + 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = -7 < 0$$

이므로 실수 a 의 값이 존재하지 않는다.

즉, 조건을 만족시키는 z 는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 가능한 모든 z^2 의 값의 곱은

$$\frac{9 + \sqrt{17}}{2} \times \frac{9 - \sqrt{17}}{2} = 16$$

041

일등급의 매모장

$$N_1^2 = (\sqrt{a_1}\sqrt{a_5}\sqrt{a_9} \cdots \sqrt{a_{97}})^2$$

$$a_n \ (n=1, 2, \dots, 100) \text{의 값이 } 1 \text{ 또는 } -1 \text{이므로 } \sqrt{a_n} \text{의 값은 } 1 \text{ 또는 } i$$

P_1 에서 -1 이 k_1 개 있다고 가정하면 $P_1 = (-1)^{k_1}$

$$N_1 \text{에서 } i \text{가 } k_1 \text{개 있으므로 } N_1 = i^{k_1}$$

$$N_1^2 = (i^{k_1})^2 = (i^2)^{k_1} = (-1)^{k_1} = P_1$$

$$P_1 = a_1 a_5 a_9 \cdots a_{97}, \quad P_2 = a_2 a_6 a_{10} \cdots a_{98},$$

$$P_3 = a_3 a_7 a_{11} \cdots a_{99}, \quad P_4 = a_4 a_8 a_{12} \cdots a_{100},$$

$$N_1 = \sqrt{a_1}\sqrt{a_5}\sqrt{a_9} \cdots \sqrt{a_{97}}, \quad N_2 = \sqrt{a_2}\sqrt{a_6}\sqrt{a_{10}} \cdots \sqrt{a_{98}},$$

$$N_3 = \sqrt{a_3}\sqrt{a_7}\sqrt{a_{11}} \cdots \sqrt{a_{99}}, \quad N_4 = \sqrt{a_4}\sqrt{a_8}\sqrt{a_{12}} \cdots \sqrt{a_{100}}$$

이라 하자. 다른 풀이

(i) P_1 은 25개 항의 곱이고, 이 25개의 항 중 -1 인 항의 개수를

k_1 이라 하면

$$P_1 = 1^{25-k_1} \times (-1)^{k_1} = (-1)^{k_1} = -1$$

즉, k_1 은 홀수이므로

$$N_1 = (\sqrt{1})^{25-k_1} (\sqrt{-1})^{k_1} = i^{k_1}$$

에서 N_1 의 값은 i 또는 $-i$ 이다.

(ii) P_2 는 25개 항의 곱이고, 이 25개의 항 중 -1 인 항의 개수를 k_2 라 하면

$$P_2 = 1^{25-k_2} \times (-1)^{k_2} = (-1)^{k_2} = 1$$

즉, k_2 는 짝수이므로

$$N_2 = (\sqrt{1})^{25-k_2} (\sqrt{-1})^{k_2} = i^{k_2}$$

에서 N_2 의 값은 1 또는 -1 이다.

(iii) (ii)와 같은 방법으로 구하면 N_3 의 값은 1 또는 -1 이다.

(iv) (i)과 같은 방법으로 구하면 N_4 의 값은 i 또는 $-i$ 이다.

(i)~(iv)에서 가능한 $N_1 N_4$ 의 값은 $i \times i$, $i \times (-i)$, $-i \times i$, $-i \times (-i)$ 에서 1 또는 -1

또, 가능한 $N_2 N_3$ 의 값은 1×1 , $1 \times (-1)$, -1×1 , $-1 \times (-1)$ 에서 1 또는 -1

따라서 구하는 값 $\frac{N_1 N_4}{N_2 N_3}$ 는 1 또는 -1 이다.

답 -1, 1

다른 풀이

$$E = \frac{N_1 N_4}{N_2 N_3} \text{라 하면}$$

$$E^2 = \frac{N_1^2 N_4^2}{N_2^2 N_3^2} = \frac{P_1 P_4}{P_2 P_3} = \frac{-1 \times (-1)}{1 \times 1} = 1$$

$\therefore E = 1$ 또는 $E = -1$

따라서 구하는 값은 1 또는 -1 이다.

042

일등급의 메모장

$a\beta\gamma = k$ 라 하면

$$x^3 - kx^2 + x - k = 0, (x^2 + 1)(x - k) = 0$$

\Rightarrow 세 근 a, β, γ 는 $-i, i, k$

$$\begin{aligned} f(a+\beta-\gamma) &= (a+\beta-\gamma)(\overline{a+\beta-\gamma}) \\ &= (a+\beta-\gamma)(\overline{a+\beta-\gamma}) \\ &= a\overline{a} + \beta\overline{\beta} + \gamma\overline{\gamma} + a\overline{\beta} - a\overline{\gamma} + \beta\overline{\alpha} - \beta\overline{\gamma} - \gamma\overline{\alpha} - \gamma\overline{\beta} \\ &= f(a) + f(\beta) + f(\gamma) + (a\overline{\beta} + \overline{a\beta}) \\ &\quad - (\beta\overline{\gamma} + \overline{\beta\gamma}) - (\gamma\overline{\alpha} + \overline{\gamma\alpha}) \end{aligned}$$

같은 방법으로 구하면

$$f(\beta+\gamma-\alpha) = f(a) + f(\beta) + f(\gamma) - (a\overline{\beta} + \overline{a\beta}) + (\beta\overline{\gamma} + \overline{\beta\gamma}) - (\gamma\overline{\alpha} + \overline{\gamma\alpha})$$

$$f(\gamma+\alpha-\beta) = f(a) + f(\beta) + f(\gamma) - (a\overline{\beta} + \overline{a\beta}) - (\beta\overline{\gamma} + \overline{\beta\gamma}) + (\gamma\overline{\alpha} + \overline{\gamma\alpha})$$

이므로

$$\begin{aligned} f(a+\beta-\gamma) + f(\beta+\gamma-\alpha) + f(\gamma+\alpha-\beta) \\ = 3\{f(a) + f(\beta) + f(\gamma)\} \\ - \{(a\overline{\beta} + \overline{a\beta}) + (\beta\overline{\gamma} + \overline{\beta\gamma}) + (\gamma\overline{\alpha} + \overline{\gamma\alpha})\} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

조건 (가)에서 $f(a) = 1, f(\beta) = 1, f(\gamma) = 1$ 이므로

$$f(a) + f(\beta) + f(\gamma) = 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

또, $a\overline{a} = 1$ 이므로 $\overline{a} = \frac{1}{a}$

같은 방법으로 구하면 $\overline{\beta} = \frac{1}{\beta}, \overline{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$

한편, 조건 (나)에서 $a + \beta + \gamma = a\beta\gamma$ 이므로

$$\begin{aligned} a + \beta + \gamma &= a\beta\gamma, \overline{a} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} = \overline{a\beta\gamma} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} &= \frac{1}{a} \times \frac{1}{\beta} \times \frac{1}{\gamma}, \frac{a\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{a\beta\gamma} = \frac{1}{a\beta\gamma} \end{aligned}$$

$\therefore a\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1$ **다른 풀이**

$$\begin{aligned} (a\overline{\beta} + \overline{a\beta}) + (\beta\overline{\gamma} + \overline{\beta\gamma}) + (\gamma\overline{\alpha} + \overline{\gamma\alpha}) \\ = \left(\frac{a}{\beta} + \frac{\beta}{a}\right) + \left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}\right) + \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}\right) \\ = \frac{a^2\beta + a^2\gamma + \beta^2\gamma + \beta^2\alpha + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta}{a\beta\gamma} \\ = \frac{(a+\beta+\gamma)(a\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) - 3a\beta\gamma}{a\beta\gamma} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } (a\overline{\beta} + \overline{a\beta}) + (\beta\overline{\gamma} + \overline{\beta\gamma}) + (\gamma\overline{\alpha} + \overline{\gamma\alpha}) = -2 \quad \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$ 에 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} f(a+\beta-\gamma) + f(\beta+\gamma-\alpha) + f(\gamma+\alpha-\beta) \\ = 3 \times 3 - (-2) \\ = 11 \end{aligned}$$

답 11

다른 풀이

세 복소수 a, β, γ 를 근으로 하는 삼차방정식은

$$(x-a)(x-\beta)(x-\gamma) = 0$$

$$x^3 - (a+\beta+\gamma)x^2 + (a\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - a\beta\gamma = 0$$

$$x^3 - a\beta\gamma x^2 + x - a\beta\gamma = 0$$

$a\beta\gamma = k$ 라 하면

$$(x^2+1)(x-k) = 0$$

위의 방정식의 세 근은 $-i, i, k$ 이므로 $a = -i, \beta = i, \gamma = k$ 라 할 때

$$\begin{aligned} (a\overline{\beta} + \overline{a\beta}) + (\beta\overline{\gamma} + \overline{\beta\gamma}) + (\gamma\overline{\alpha} + \overline{\gamma\alpha}) \\ = \left(\frac{a}{\beta} + \frac{\beta}{a}\right) + \left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}\right) + \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}\right) \\ = \left(\frac{-i}{i} + \frac{i}{-i}\right) + \left(\frac{i}{k} + \frac{k}{i}\right) + \left(\frac{k}{-i} + \frac{-i}{k}\right) \\ = -2 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } (a\overline{\beta} + \overline{a\beta}) + (\beta\overline{\gamma} + \overline{\beta\gamma}) + (\gamma\overline{\alpha} + \overline{\gamma\alpha}) = -2 \quad \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1}$ 에 $\textcircled{2}, \textcircled{4}$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} f(a+\beta-\gamma) + f(\beta+\gamma-\alpha) + f(\gamma+\alpha-\beta) \\ = 3 \times 3 - (-2) \\ = 11 \end{aligned}$$

참고

$\left(\frac{a}{\beta} + \frac{\beta}{a}\right) + \left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}\right) + \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}\right)$ 의 대칭성에 의하여 세 근 a, β, γ 가 $-i, i, k$ 일 때, 이들의 순서와 관계없이 식의 값은 동일하다.

001

방정식 $|2x^2 - x - 4 - (x+3)k| = 8$ 의 한 근이 k 가 되려면

$$|2k^2 - k - 4 - (k+3)k| = 8, |k^2 - 4k - 4| = 8$$

$$\therefore k^2 - 4k - 4 = -8 \text{ 또는 } k^2 - 4k - 4 = 8$$

(i) $k^2 - 4k - 4 = -8$ 일 때

$$k^2 - 4k + 4 = 0, (k-2)^2 = 0$$

$$\therefore k = 2$$

(ii) $k^2 - 4k - 4 = 8$ 일 때

$$k^2 - 4k - 12 = 0, (k+2)(k-6) = 0$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 6$$

(i), (ii)에서 모든 상수 k 의 값의 곱은

$$2 \times (-2) \times 6 = -24$$

답 ①

002

이차방정식 $x^2 - 4x - 2 = 0$ 의 근이 α 이므로 $\alpha^2 - 4\alpha - 2 = 0$ 에서

$$\alpha^2 - 4\alpha = 2$$

$$\therefore (\alpha^2 - 3\alpha - 5)(\alpha^2 - 5\alpha + 1) = (\alpha^2 - 4\alpha + \alpha - 5)(\alpha^2 - 4\alpha - \alpha + 1)$$

$$= -(a-3)^2$$

$$= -(a^2 - 6a + 9)$$

$$= -(a^2 - 4a) + 2a - 9$$

$$= 2a - 11$$

이차방정식 $x^2 - 4x - 2 = 0$ 의 양수인 근 α 는 $\alpha = 2 + \sqrt{6}$ 이므로

$$2a - 11 = 2(2 + \sqrt{6}) - 11 = -7 + 2\sqrt{6}$$

따라서 $a = -7, b = 2$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 49 + 4 = 53$$

답 ③

003

이차방정식 $x^2 + 2(2k-a)x + 8-k=0$ 이 실근을 가져야 하므로

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2k-a)^2 - (8-k) \geq 0$$

$$(2k-a)^2 + k - 8 \geq 0 \quad \text{[다른 풀이]}$$

이때 a, k 는 실수이므로 $(2k-a)^2 \geq 0$

즉, $(2k-a)^2 + k - 8 \geq 0$ 이 모든 실수 a 에 대하여 항상 성립하려면 $k-8 \geq 0$, 즉 $k \geq 8$ 이어야 한다.

따라서 실수 k 의 최솟값은 8이다.

답 8

[다른 풀이]

$f(a) = (2k-a)^2 + k - 8$ 이라 하면 a 에 대한 이차함수 $f(a)$ 는

$a = 2k$ 일 때 최솟값 $k-8$ 을 갖는다.

이때 a 의 값에 관계없이 $(2k-a)^2 + k - 8 \geq 0$ 이 항상 성립해야 하므로 $f(a)$ 의 최솟값 ≥ 0 이어야 한다.

즉, $k-8 \geq 0$ 이므로 $k \geq 8$

따라서 실수 k 의 최솟값은 8이다.

004

이차방정식 $x^2 - 4(k+a)x + 4k^2 - 2k + b = 0$ 이 항상 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-2(k+a)\}^2 - (4k^2 - 2k + b) = 0$$

$$(8a+2)k + (4a^2 - b) = 0$$

위의 식이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$8a+2=0, 4a^2-b=0$$

따라서 $a = -\frac{1}{4}, b = \frac{1}{4}$ 이므로

$$16ab = 16 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{4} = -1$$

답 ②

005

이차식 $(a-1)x^2 + 2(a+2)x - ka$ 가 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $(a-1)x^2 + 2(a+2)x - ka = 0$ 이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (a+2)^2 + ka(a-1) = 0$$

$$(k+1)a^2 + (4-k)a + 4 = 0$$

위의 식을 만족시키는 실수 a 의 값이 오직 하나뿐이므로

(i) $k+1=0$, 즉 $k=-1$ 일 때

$$5a+4=0 \quad \therefore a = -\frac{4}{5}$$

즉, $k=-1$ 일 때, a 의 값은 한 개 존재한다.

(ii) $k+1 \neq 0$, 즉 $k \neq -1$ 일 때

이차방정식 $(k+1)a^2 + (4-k)a + 4 = 0$ 이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = (4-k)^2 - 16(k+1) = 0$$

$$k^2 - 24k = 0, k(k-24) = 0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=24$$

(i), (ii)에서 실수 k 의 값은 $-1, 0, 24$ 이므로 실수 k 의 값의 합은 $-1+0+24=23$

답 23

006

주어진 이차식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2 + (y+1)x + ky^2 + 13y - 6$$

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (y+1)x + ky^2 + 13y - 6 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$x = \frac{-(y+1) \pm \sqrt{D_1}}{2}$$

이고

$$D_1 = (y+1)^2 - 4(ky^2 + 13y - 6)$$

$$= (1-4k)y^2 - 50y + 25$$

이므로 주어진 이차식이 x, y 에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 D_1 이 완전제곱식이어야 한다.

따라서 y 에 대한 이차방정식 $(1-4k)y^2 - 50y + 25 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (-25)^2 - 25(1-4k) = 0$$

$$1-4k=25 \quad \therefore k=-6$$

답 -6

참고

x, y 에 대한 이차식 A 가 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때에는 다음의 순서로 해결한다.

- (1) 이차식 A 를 x (또는 y)에 대한 내림차순으로 정리한다.
- (2) x (또는 y)에 대한 이차방정식 $A=0$ 의 판별식 D 가 완전제곱식이어야 한다.
- (3) $D=0$ 은 y (또는 x)에 대한 이차방정식이고 판별식이 0이어야 한다.

007

이차방정식 $2x^2-5x+k=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{k}{2}$$

이때

$$\begin{aligned} & (4\alpha-k)(\alpha-2) + (4\beta-k)(\beta-2) \\ &= 4\alpha^2 - (k+8)\alpha + 2k + 4\beta^2 - (k+8)\beta + 2k \\ &= 4(\alpha^2 + \beta^2) - (k+8)(\alpha + \beta) + 4k \\ &= 4\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\} - (k+8)(\alpha + \beta) + 4k \\ &= 4\left(\frac{25}{4} - k\right) - \frac{5}{2}(k+8) + 4k \\ &= 5 - \frac{5}{2}k \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 5 - \frac{5}{2}k = -15 \text{이므로}$$

$$\frac{5}{2}k = 20 \quad \therefore k = 8$$

답 ④

다른 풀이

이차방정식 $2x^2-5x+k=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$2\alpha^2 - 5\alpha + k = 0 \quad \therefore 2\alpha^2 + k = 5\alpha$$

$$2\beta^2 - 5\beta + k = 0 \quad \therefore 2\beta^2 + k = 5\beta$$

또, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore & (4\alpha-k)(\alpha-2) + (4\beta-k)(\beta-2) \\ &= 4\alpha^2 + 2k - (k+8)\alpha + 4\beta^2 + 2k - (k+8)\beta \\ &= 2(2\alpha^2 + k) - (k+8)\alpha + 2(2\beta^2 + k) - (k+8)\beta \\ &= 10\alpha - (k+8)\alpha + 10\beta - (k+8)\beta \\ &= 10(\alpha + \beta) - (k+8)(\alpha + \beta) \\ &= (\alpha + \beta)(2-k) \\ &= \frac{5}{2}(2-k) \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{5}{2}(2-k) = -15 \text{이므로}$$

$$2-k = -6 \quad \therefore k = 8$$

008

이차방정식 $x^2+2x+k=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha^2 + 2\alpha + k = 0, \quad \beta^2 + 2\beta + k = 0$$

또, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2, \quad \alpha\beta = k$$

$$\begin{aligned} \therefore & \frac{1}{\alpha^2 + 3\alpha + k} + \frac{1}{\beta^2 + 3\beta + k} \\ &= \frac{1}{(\alpha^2 + 2\alpha + k) + \alpha} + \frac{1}{(\beta^2 + 2\beta + k) + \beta} \\ &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \\ &= -\frac{2}{k} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } -\frac{2}{k} = -\frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$k = 3$$

답 3

009

이차방정식 $x^2-2ax+a^2-4a+28=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - (a^2 - 4a + 28) > 0$$

$$4a - 28 > 0 \quad \therefore a > 7$$

또, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2a$$

따라서 a 는 $a > 7$ 인 자연수이므로 $a = 8$ 일 때 $\alpha + \beta$ 의 최솟값은 16이다.

답 ①

010

이차방정식 $x^2+mx+n=0$ 의 두 실근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -m, \quad \alpha\beta = n$$

$$\alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = 0 \text{에서 } (\alpha-1)(\beta-1) = 0$$

$$\therefore \alpha = 1 \text{ 또는 } \beta = 1 \quad \dots \text{ ㉠}$$

$$(\alpha^2-4)(\beta^2+2) = 0 \text{에서 } \alpha, \beta \text{는 실수이므로}$$

$$\alpha^2 = 4 \quad (\because \beta^2 + 2 > 0)$$

$$\therefore \alpha = -2 \text{ 또는 } \alpha = 2 \quad \dots \text{ ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } \beta = 1$$

$$\text{이때 } \alpha\beta = n < 0 \text{이므로 } \alpha = -2$$

$$\text{따라서 } -m = \alpha + \beta = -1 \text{이므로}$$

$$m = 1$$

답 ③

011

이차방정식 $x^2+(2k-3)x+2k^2-2=0$ 의 두 근을

$$\alpha, \alpha+1 \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq -1)$$

이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (\alpha+1) = 3-2k, \quad \alpha(\alpha+1) = 2k^2-2$$

$$\alpha + (\alpha+1) = 3-2k \text{에서}$$

$$\alpha = 1-k \quad \dots \text{ ㉠}$$

$$\text{㉠을 } \alpha(\alpha+1) = 2k^2-2 \text{에 대입하면}$$

$$(1-k)(2-k) = 2k^2-2$$

$$k^2+3k-4=0, \quad (k+4)(k-1)=0$$

$$\therefore k = -4 \text{ 또는 } k = 1$$

(i) $k=-4$ 일 때

㉠에서 $a=5$ 이므로 두 근은 5, 6이다.

(ii) $k=1$ 일 때

㉠에서 $a=0$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 실수 k 의 값은 -4 이다.

답 -4

012

$P(\alpha)=5\alpha-2$, $P(\beta)=5\beta-2$ 이므로 이차방정식

$P(x)-(5x-2)=0$ 은 α , β 를 두 근으로 갖는다.

즉, 이차식 $P(x)-5x+2$ 는 $x-\alpha$, $x-\beta$ 를 인수로 가지므로

$$P(x)-5x+2=(x-\alpha)(x-\beta)$$

이때 $x^2-7x+5=(x-\alpha)(x-\beta)$ 이므로

$$P(x)-5x+2=x^2-7x+5$$

$$\therefore P(x)=x^2-2x+3$$

$$\therefore P(5)=25-10+3=18$$

답 ②

013

이차방정식 $f(3x-1)=0$ 의 두 근을 α , β 라 하면

$$f(3x-1)=3x^2-8x+6$$
이므로 α , β 는 이차방정식

$$3x^2-8x+6=0$$
의 두 근이다.

이차방정식 $3x^2-8x+6=0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+\beta=\frac{8}{3}, a\beta=2$$

α , β 가 이차방정식 $f(3x-1)=0$ 의 두 근이므로

$$f(3\alpha-1)=0, f(3\beta-1)=0$$

따라서 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 $3\alpha-1$, $3\beta-1$ 이므로 두 근의 곱은

$$\begin{aligned} (3\alpha-1)(3\beta-1) &= 9\alpha\beta - 3(\alpha+\beta) + 1 \\ &= 9 \times 2 - 3 \times \frac{8}{3} + 1 = 11 \end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이

$f(3x-1)=3x^2-8x+6$ 에서 $3x-1=t$ 로 놓으면 $x=\frac{t+1}{3}$ 이므로

$$f(t)=3 \times \left(\frac{t+1}{3}\right)^2 - 8 \times \frac{t+1}{3} + 6$$

$$= \frac{1}{3}t^2 - 2t + \frac{11}{3}$$

따라서 이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{11}{3}=0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 11이다.

014

이차방정식 $x^2+ax+b-1=0$ 의 두 근이 -3 , α 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-3+\alpha=-a, -3\alpha=b-1$$

$$\therefore a=-\alpha+3, b=-3\alpha+1 \quad \dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2-4ax+b=0$ 의 두 근이 5, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$5+\beta=4a, 5\beta=b$$

$$\therefore a=\frac{\beta+5}{4}, b=5\beta \quad \dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡에서

$$-a+3=\frac{\beta+5}{4}, -3\alpha+1=5\beta$$

$$\therefore 4a+\beta=7, 3\alpha+5\beta=1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, \beta=-1$

이때 α, β 를 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은 $(x-2)(x+1)=0$, 즉 $x^2-x-2=0$

따라서 $p=-1, q=-2$ 이므로

$$pq=-1 \times (-2)=2$$

답 ④

다른 풀이

이차방정식 $x^2+ax+b-1=0$ 의 한 근이 -3 이므로 $x=-3$ 을 대입하면

$$9-3a+b-1=0 \quad \therefore 3a-b=8 \quad \dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2-4ax+b=0$ 의 한 근이 5이므로 $x=5$ 를 대입하면

$$25-20a+b=0 \quad \therefore 20a-b=25 \quad \dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=-5$

$a=1, b=-5$ 를 $x^2+ax+b-1=0$ 에 대입하면

$$x^2+x-6=0, (x+3)(x-2)=0$$

따라서 $x=-3$ 또는 $x=2$ 이므로

$$a=2$$

$a=1, b=-5$ 를 $x^2-4ax+b=0$ 에 대입하면

$$x^2-4x-5=0, (x+1)(x-5)=0$$

따라서 $x=-1$ 또는 $x=5$ 이므로

$$b=-1$$

이때 α, β 를 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은 $(x-2)(x+1)=0$, 즉 $x^2-x-2=0$

따라서 $p=-1, q=-2$ 이므로

$$pq=-1 \times (-2)=2$$

015

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 계수가 모두 실수이므로 한 근이

$$\frac{4}{1-i}=2+2i$$
이면 다른 한 근은 $2-2i$ 이다.

이때 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(2+2i)+(2-2i)=-a \quad \therefore a=-4$$

$$(2+2i)(2-2i)=b \quad \therefore b=8$$

$a+b=4, a-b=-12$ 를 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 2인 이차방정식은

$$2(x-4)(x+12)=0, \text{ 즉 } 2x^2+16x-96=0$$

따라서 $c=16, d=-96$ 이므로

$$c+d=16+(-96)=-80$$

답 -80

016

이차방정식 $x^2-px+p+19=0$ 에서 p 는 실수이므로 한 허근을

$a=a+2i$ (a 는 실수)라 하면 다른 한 근은 $\bar{a}=a-2i$ 이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$p=a+\bar{a}=(a+2i)+(a-2i)=2a \quad \dots \textcircled{1}$$

$$p+19=a\bar{a}=(a+2i)(a-2i)=a^2+4 \quad \dots \textcircled{C}$$

㉠에서 $a=\frac{p}{2}$ 이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$$p+19=\frac{p^2}{4}+4, \quad p^2-4p-60=0$$

$$(p+6)(p-10)=0 \quad \therefore p=-6 \text{ 또는 } p=10$$

따라서 구하는 양의 실수 p 의 값은 10이다.

답 10

017

이차방정식 $x^2-4x+5=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-5<0$$

이므로 α 는 허근이고, 이차방정식 $x^2-4x+5=0$ 의 계수가 모두 실수이므로 두 근은 $\alpha, \bar{\alpha}$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\bar{\alpha}=4, \quad \alpha\bar{\alpha}=5$$

이때

$$\begin{aligned} z+\bar{z} &= \frac{3\alpha+1}{\alpha} + \frac{3\bar{\alpha}+1}{\bar{\alpha}} \\ &= \frac{\bar{\alpha}(3\alpha+1)+\alpha(3\bar{\alpha}+1)}{\alpha\bar{\alpha}} \\ &= \frac{6\alpha\bar{\alpha}+(\alpha+\bar{\alpha})}{\alpha\bar{\alpha}} \\ &= \frac{30+4}{5} = \frac{34}{5} \end{aligned}$$

이므로

$$5(z+\bar{z})=5 \times \frac{34}{5}=34$$

답 2

다른 풀이

이차방정식 $x^2-4x+5=0$ 의 근이 $x=2\pm i$ 이므로 $a=2+i$ 라 하면

$$z=\frac{3(2+i)+1}{2+i}=\frac{7+3i}{2+i}=\frac{17-i}{5}$$

따라서

$$z+\bar{z}=\frac{17-i}{5}+\frac{17+i}{5}=\frac{34}{5}$$

이므로

$$5(z+\bar{z})=5 \times \frac{34}{5}=34$$

018

원의 지름 AB를 빗변으로 하는 삼각형 PAB는 $\angle APB=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$\overline{PA}=a, \overline{PB}=b$ ($a>0, b>0$)라 하면 삼각형 PAB에서

$$a^2+b^2=100 \quad \dots \textcircled{1}$$

또, 삼각형 PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{PA} \times \overline{PB} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PC}$$

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 10 \times 4 \quad \therefore ab=40$$

이때 ㉠에서

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 100 + 80 = 180$$

$$\therefore a+b = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \quad (\because a+b>0)$$

따라서 두 선분 PA, PB의 길이를 두 근으로 하고 최고차항의 계

수가 1인 이차방정식은 $x^2-6\sqrt{5}x+40=0$ 이므로

$$p=-6\sqrt{5}, \quad q=40$$

$$\therefore p^2+q=180+40=220$$

답 220

019

$[x]=n$ (n 은 정수)이라 하자.

(i) $n \leq x < n + \frac{1}{2}$ 일 때

$$2n \leq 2x < 2n+1 \text{ 이므로}$$

$$[2x]=2n$$

$$\text{즉, } (2n)^2-14n-7=0 \text{ 에서}$$

$$4n^2-14n-7=0 \quad \therefore n=\frac{7 \pm \sqrt{77}}{4}$$

그런데 n 은 정수이므로 해가 없다.

(ii) $n + \frac{1}{2} \leq x < n+1$ 일 때

$$2n+1 \leq 2x < 2n+2 \text{ 이므로}$$

$$[2x]=2n+1$$

$$\text{즉, } (2n+1)^2-14n-7=0 \text{ 에서}$$

$$2n^2-5n-3=0, \quad (2n+1)(n-3)=0$$

$$\therefore n=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } n=3$$

그런데 n 은 정수이므로 $n=3$

(i), (ii)에서 $\frac{7}{2} \leq x < 4$ 이므로 구하는 최솟값은 $\frac{7}{2}$ 이다.

답 $\frac{7}{2}$

참고

정수 n 에 대하여 $n \leq x < n+10$ 이면 $[x]=n$

020

이차방정식 $ax^2+\sqrt{2}bx+c=0$ 의 한 근이 $1+\sqrt{2}$ 이므로

$$a(1+\sqrt{2})^2+\sqrt{2}b(1+\sqrt{2})+c=0$$

$$\therefore (3a+2b+c)+(2a+b)\sqrt{2}=0$$

이때 a, b, c 는 유리수이므로

$$3a+2b+c=0, \quad 2a+b=0$$

$$\therefore b=-2a, \quad c=-3a-2b=a$$

이차방정식 $ax^2-2\sqrt{2}ax+a=0$ 에서 $a \neq 0$ 이므로 양변을 a 로 나누면

$$x^2-2\sqrt{2}x+1=0 \quad \therefore x=\sqrt{2} \pm 1$$

따라서 $\beta=\sqrt{2}-1$ 이므로

$$a-\frac{1}{\beta}=1+\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}=0$$

답 3

다른 풀이

$$a=1+\sqrt{2} \text{ 에서 } a-\sqrt{2}=1$$

$$(a-\sqrt{2})^2=1^2 \quad \therefore a^2-2\sqrt{2}a+1=0$$

즉, α 가 이차방정식 $a(x^2-2\sqrt{2}x+1)=0$ 의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2\sqrt{2}$$

따라서 $\beta=2\sqrt{2}-\alpha=\sqrt{2}-1$ 이므로

$$a-\frac{1}{\beta}=1+\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}=0$$

다른 풀이

$t = \sqrt{2}x$ 라 하면 $x = \frac{t}{\sqrt{2}}$ 이므로 주어진 이차방정식은

$$\frac{a}{2}t^2 + bt + c = 0, \text{ 즉 } at^2 + 2bt + 2c = 0$$

이 방정식의 한 근이 $t = \sqrt{2}(1 + \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2}$ 이고 계수가 모두 유리수이므로 다른 한 근은 $t = 2 - \sqrt{2}$ 이다.

따라서 주어진 방정식의 다른 한 근은

$$\beta = \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

$$\therefore a - \frac{1}{\beta} = 1 + \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 0$$

021

x 에 대한 이차방정식 $x(x-6) + a(3x+a) = 0$, 즉 $x^2 + (3a-6)x + a^2 = 0$ 의 한 허근이 a 이므로 $x=a$ 를 대입하면 $a^2 + (3a-6)a + a^2 = 0$
 $\therefore a^2 + a^2 + (3a-6)a = 0$
 이때 a 는 허수이고 a^2 는 실수이므로 위의 등식이 성립하려면 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $3a-6=0 \quad \therefore a=2$
 따라서 주어진 이차방정식은 $x^2 + 4 = 0$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 4이다.

답 4

다른 풀이

허수 a 에 대하여 a^2 이 실수이려면 a 는 순허수이어야 하므로 $a = bi$ (b 는 0이 아닌 실수)라 하자.
 이때 계수가 실수인 이차방정식 $x^2 + (3a-6)x + a^2 = 0$ 의 한 근이 bi 이면 다른 한 근은 $-bi$ 이다.
 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $bi + (-bi) = -(3a-6) \quad \therefore a=2$
 따라서 주어진 이차방정식은 $x^2 + 4 = 0$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 4이다.

022

$\overline{AP} = x$ 라 하면 $\triangle ABD \sim \triangle PBO$ (AA 닮음)이므로 $\overline{AB} : \overline{PB} = \overline{AD} : \overline{PO}$
 $6 : (6-x) = 8 : \overline{PO}$
 $\therefore \overline{PO} = \frac{4}{3}(6-x) = 8 - \frac{4}{3}x$
 사각형 APOS의 넓이는 $\overline{AP} \times \overline{PO} = x(8 - \frac{4}{3}x) = 8x - \frac{4}{3}x^2$
 한편, $\overline{OR} = \overline{PR} - \overline{PO} = 8 - (8 - \frac{4}{3}x) = \frac{4}{3}x$, $\overline{OQ} = \overline{PB} = 6-x$
 이므로 사각형 OQCR의 넓이는 $\overline{OR} \times \overline{OQ} = \frac{4}{3}x(6-x) = 8x - \frac{4}{3}x^2$
 두 사각형 APOS, OQCR의 넓이의 합이 18이므로 $(8x - \frac{4}{3}x^2) + (8x - \frac{4}{3}x^2) = 18$

044 정답과 풀이

$$4x^2 - 24x + 27 = 0, (2x-3)(2x-9) = 0$$

$$\therefore x = \frac{3}{2} \text{ 또는 } x = \frac{9}{2}$$

이때 $\overline{AP} > \overline{PB}$ 에서 $x > 6-x$, 즉 $x > 3$ 이므로

$$x = \frac{9}{2}$$

따라서 선분 AP의 길이는 $\frac{9}{2}$ 이다.

답 ④

다른 풀이

$\overline{AP} = x, \overline{QC} = y$ 라 하면 $\overline{PB} = 6-x, \overline{BQ} = 8-y$
 이때 두 사각형 APOS, OQCR의 넓이의 합이 18이므로 $(8-y)x + y(6-x) = 18$
 $8x + 6y - 2xy = 18 \quad \therefore 4x + 3y - xy = 9 \quad \dots \textcircled{1}$
 한편, 삼각형 BCD에서 $\overline{BC} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$
 이고, 두 삼각형 BQO, ORD에서 $\overline{BO} = \sqrt{\overline{BQ}^2 + \overline{OQ}^2}$
 $\overline{OD} = \sqrt{\overline{OR}^2 + \overline{DR}^2}$
 이때 $\overline{BO} + \overline{OD} = \overline{BD}$ 이므로 $\sqrt{\overline{BQ}^2 + \overline{OQ}^2} + \sqrt{\overline{OR}^2 + \overline{DR}^2} = \overline{BD}$
 $\sqrt{(6-x)^2 + (8-y)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} = 10$
 $\sqrt{(6-x)^2 + (8-y)^2} = 10 - \sqrt{x^2 + y^2}$
 위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $3x + 4y = 5\sqrt{x^2 + y^2}$
 위의 식의 양변을 한 번 더 제곱하여 정리하면 $16x^2 - 24xy + 9y^2 = 0$
 $(4x-3y)^2 = 0 \quad \therefore x = \frac{3}{4}y \quad \dots \textcircled{2}$
 ①에 ②을 대입하면 $4 \times \frac{3}{4}y + 3y - \frac{3}{4}y \times y = 9$
 $y^2 - 8y + 12 = 0, (y-2)(y-6) = 0$
 $\therefore y = 2 \text{ 또는 } y = 6$
 즉, $x = \frac{3}{2}, y = 2$ 또는 $x = \frac{9}{2}, y = 6$
 이때 $\overline{AP} > \overline{PB}$ 에서 $x > 6-x$, 즉 $x > 3$ 이므로 $x = \frac{9}{2}$
 따라서 선분 AP의 길이는 $\frac{9}{2}$ 이다.

023

방정식 $(n-2)x^2 - 4x + 2 = 0$ 에서
 (i) $n=2$ 일 때 $-4x + 2 = 0$ 이므로 $x = \frac{1}{2}$
 $\therefore f(2) = 1$
 (ii) $n \neq 2$ 일 때 이차방정식 $(n-2)x^2 - 4x + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $\frac{D}{4} = (-2)^2 - 2(n-2) = 8 - 2n$
 $n=0$ 이면 $\frac{D}{4} = 8 > 0$ 이므로

$$f(0)=2$$

$$n=4\text{이면 } \frac{D}{4}=0\text{이므로}$$

$$f(4)=1$$

$$n=6\text{이면 } \frac{D}{4}=-4<0\text{이므로}$$

$$f(6)=0$$

$$n=8\text{이면 } \frac{D}{4}=-8<0\text{이므로}$$

$$f(8)=0$$

(i), (ii)에서

$$f(0)+f(2)+f(4)+f(6)+f(8)=2+1+1+0+0=4$$

답 4

024

이차방정식 $x^2+2nx+n^2+3n-45=0$ 이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=n^2-(n^2+3n-45)\geq 0$$

$$-3n+45\geq 0 \quad \therefore n\leq 15$$

한편, 음이 아닌 정수 k 에 대하여

$$i^{4k+1}=i, i^{4k+2}=-1, i^{4k+3}=-i, i^{4k+4}=1$$

이므로 i^n 의 값이 음의 실수가 되려면 $n=4k+2$ 의 꼴이어야 한다.

이때 $n\leq 15$ 이므로 n 은 2, 6, 10, 14의 4개이다.

답 4

025

$$\{P(x)+2\}^2=(x-a)(x-2a)+4\text{에서}$$

$$\{P(x)+2\}^2=x^2-3ax+2a^2+4$$

이때 $x^2-3ax+2a^2+4$ 가 완전제곱식이어야 하므로 x 에 대한 이차방정식 $x^2-3ax+2a^2+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=(-3a)^2-4(2a^2+4)=0$$

$$a^2-16=0, (a+4)(a-4)=0$$

$$\therefore a=-4 \text{ 또는 } a=4$$

(i) $a=-4$ 일 때

$$\{P(x)+2\}^2=x^2+12x+36=(x+6)^2\text{이므로}$$

$$P(x)+2=\pm(x+6)$$

$$\therefore P(x)=x+4 \text{ 또는 } P(x)=-x-8$$

$$\therefore P(1)=5 \text{ 또는 } P(1)=-9$$

(ii) $a=4$ 일 때

$$\{P(x)+2\}^2=x^2-12x+36=(x-6)^2\text{이므로}$$

$$P(x)+2=\pm(x-6)$$

$$\therefore P(x)=x-8 \text{ 또는 } P(x)=-x+4$$

$$\therefore P(1)=-7 \text{ 또는 } P(1)=3$$

(i), (ii)에서 구하는 합은

$$5+(-9)+(-7)+3=-8$$

답 2

다른 풀이

$\{P(x)+2\}^2=(x-a)(x-2a)+4$ 에서 우변이 x 에 대한 이차식 이므로 다항식 $P(x)$ 는 일차식이다.

$P(x)=bx+c$ (b, c 는 상수, $b\neq 0$)라 하면

$$\{(bx+c)+2\}^2=b^2x^2+2b(c+2)x+(c+2)^2\text{이므로}$$

$$b^2x^2+2b(c+2)x+(c+2)^2=x^2-3ax+2a^2+4$$

위의 등식은 x 에 대한 항등식이므로

$$b^2=1, 2b(c+2)=-3a, (c+2)^2=2a^2+4$$

$$b^2=1\text{에서 } b=\pm 1$$

(i) $b=-1$ 일 때

$$2b(c+2)=-3a\text{에서 } c+2=\frac{3}{2}a$$

이것을 $(c+2)^2=2a^2+4$ 에 대입하여 정리하면

$$a=\pm 4$$

즉, $c+2=\pm 6$ 이므로

$$c=4 \text{ 또는 } c=-8$$

따라서 $P(x)=-x+4$ 또는 $P(x)=-x-8$ 이므로

$$P(1)=3 \text{ 또는 } P(1)=-9$$

(ii) $b=1$ 일 때

$$2b(c+2)=-3a\text{에서 } c+2=-\frac{3}{2}a$$

이것을 $(c+2)^2=2a^2+4$ 에 대입하여 정리하면

$$a=\pm 4$$

즉, $c+2=\mp 6$ 이므로

$$c=-8 \text{ 또는 } c=4$$

따라서 $P(x)=x-8$ 또는 $P(x)=x+4$ 이므로

$$P(1)=-7 \text{ 또는 } P(1)=5$$

(i), (ii)에서 구하는 합은

$$3+(-9)+(-7)+5=-8$$

026

이차방정식 $x^2-2(m+1)x+8m-7=0$ 에서

$$x=m+1\pm\sqrt{(m+1)^2-(8m-7)}$$

$$=m+1\pm\sqrt{m^2-6m+8}$$

주어진 이차방정식의 두 근이 모두 정수가 되려면 m^2-6m+8 이 제곱수이거나 0이어야 한다.

이때 m 이 정수이고 $m^2-6m+8=(m-3)^2-1$ 이므로

$$m^2-6m+8=0\text{이어야 한다.}$$

$$(m-2)(m-4)=0 \quad \therefore m=2 \text{ 또는 } m=4$$

따라서 구하는 합은

$$2+4=6$$

답 6

다른 풀이

이차방정식 $x^2-2(m+1)x+8m-7=0$ 의 두 정수인 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2m+2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta=8m-7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\text{에서 } m=\frac{1}{2}(\alpha+\beta-2)$$

이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\alpha\beta=4\alpha+4\beta-15, \alpha\beta-4\alpha-4\beta+15=0$$

$$\alpha(\beta-4)-4(\beta-4)=1 \quad \therefore (\alpha-4)(\beta-4)=1$$

이때 α, β 는 정수이므로

$$\alpha-4=-1, \beta-4=-1 \text{ 또는 } \alpha-4=1, \beta-4=1$$

$$\therefore \alpha=3, \beta=3 \text{ 또는 } \alpha=5, \beta=5$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서 m 의 값은 2, 4이므로 구하는 합은

$$2+4=6$$

027

이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 이 서로 다른 두 실근 α, β 를 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (-a)^2 - 4b > 0$$

$$\therefore a^2 - 4b > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

또, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = a, \alpha\beta = b$

이차방정식 $x^2 - 4ax + 2b^2 - 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근 α^2, β^2 을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (-2a)^2 - (2b^2 - 4) > 0$$

$$\therefore 4a^2 - 2b^2 + 4 > 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

또, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha^2 + \beta^2 = 4a, \alpha^2\beta^2 = 2b^2 - 4$

이때 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ 이므로

$$4a = a^2 - 2b \quad \therefore a^2 - 4a - 2b = 0$$

또, $\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$ 이므로

$$2b^2 - 4 = b^2, b^2 = 4$$

$$\therefore b = -2 \text{ 또는 } b = 2$$

(i) $b = -2$ 일 때
 $a^2 - 4a - 2b = 0$ 에서
 $a^2 - 4a + 4 = 0, (a - 2)^2 = 0$
 $\therefore a = 2$

이 값은 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 만족시킨다.

(ii) $b = 2$ 일 때
 $a^2 - 4a - 2b = 0$ 에서
 $a^2 - 4a - 4 = 0 \quad \therefore a = 2 \pm 2\sqrt{2}$
 $a = 2 + 2\sqrt{2}$ 이면 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 만족시킨다.
 $a = 2 - 2\sqrt{2}$ 이면 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 실수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(2, -2), (2 + 2\sqrt{2}, 2)$ 의 2개이다.

답 2

028

이차방정식 $x^2 + 2(a+2b)x + a^2 + 4b^2 + 3ab - 4a + 2b + 25 = 0$ 이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a+2b)^2 - (a^2 + 4b^2 + 3ab - 4a + 2b + 25) = 0$$

$$ab + 4a - 2b - 25 = 0$$

$$a(b+4) - 2(b+4) = 17$$

$$\therefore (a-2)(b+4) = 17 \quad \dots \textcircled{1}$$

한편, $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 에서
 $a < 0, b < 0$ 또는 $a = 0$ 또는 $b = 0$

(i) $a < 0, b < 0$ 일 때
 $a - 2 < -2, b + 4 < 4$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서
 $a - 2 = -17, b + 4 = -1$
 $\therefore a = -15, b = -5$

(ii) $a = 0$ 일 때
 $b = -\frac{25}{2}$ 이므로 a, b 가 정수라는 조건에 모순이다.

(iii) $b = 0$ 일 때
 $b = \frac{25}{4}$ 이므로 a, b 가 정수라는 조건에 모순이다.

(i)~(iii)에서 $a = -15, b = -5$
 $\therefore b - a = -5 - (-15) = 10$

답 10

029

이차방정식 $2x^2 + 4x + 5 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = \frac{5}{2}$$

$\frac{\alpha}{2\alpha-1}, \frac{\beta}{2\beta-1}$ 를 두 근으로 하고, x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$\begin{aligned} \text{(두 근의 합)} &= \frac{\alpha}{2\alpha-1} + \frac{\beta}{2\beta-1} \\ &= \frac{\alpha(2\beta-1) + \beta(2\alpha-1)}{(2\alpha-1)(2\beta-1)} \\ &= \frac{4\alpha\beta - (\alpha + \beta)}{4\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 1} \\ &= \frac{10 + 2}{10 + 4 + 1} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(두 근의 곱)} &= \frac{\alpha}{2\alpha-1} \times \frac{\beta}{2\beta-1} \\ &= \frac{\alpha\beta}{4\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 1} \\ &= \frac{\frac{5}{2}}{15} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

이므로 $x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{6} = 0$ 에서

$$30x^2 - 24x + 5 = 0$$

따라서 $a = 30, b = -24$ 이므로
 $a + b = 30 + (-24) = 6$

답 6

030

이차방정식 $x^2 - 2kx + k + 10 = 0$ 의 두 실근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2k, \alpha\beta = k + 10$$

이때 $\alpha\beta > 0$ 에서 $k + 10 > 0$ 이므로
 $k > -10$

한편, α, β 의 차가 20이므로

$$|\alpha - \beta| = 20$$

양변을 제곱하면

$$(\alpha - \beta)^2 = 400$$

이때 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로

$$400 = (2k)^2 - 4(k + 10)$$

$$k^2 - k - 110 = 0, (k + 10)(k - 11) = 0$$

$$\therefore k = -10 \text{ 또는 } k = 11$$

이때 $k > -10$ 이므로 $k = 11$

답 11

031

$|x^2 + 2x + 1 - k| = 4$ 에서

$$x^2 + 2x + 1 - k = 4 \text{ 또는 } x^2 + 2x + 1 - k = -4$$

$$\therefore x^2 + 2x - 3 - k = 0 \text{ 또는 } x^2 + 2x + 5 - k = 0$$

이때 방정식 $|x^2 + 2x + 1 - k| = 4$ 가 서로 다른 네 실근을 가지지

로 두 이차방정식 $x^2+2x-3-k=0$, $x^2+2x+5-k=0$ 은 각각 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

위의 두 이차방정식의 판별식을 각각 D_1 , D_2 라 하면

$$\frac{D_1}{4}=1^2-(-3-k)>0 \quad \therefore k>-4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{D_2}{4}=1^2-(5-k)>0 \quad \therefore k>4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 에서 $k>4$

$|x^2+2x+1-k|=4$ 의 네 실근의 곱이 9이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(-3-k)(5-k)=9, \quad k^2-2k-24=0$$

$$(k+4)(k-6)=0 \quad \therefore k=-4 \text{ 또는 } k=6$$

이때 $k>4$ 이므로 $k=6$

답 6

032

이차방정식 $f(x)=6-x$, 즉 $f(x)+x-6=0$ 에서

$$P(x)=f(x)+x-6$$

이라 하면 조건 (㉠)에서

$$P(\alpha)=f(\alpha)+\alpha-6=\alpha+\beta-4=0$$

$$P(\beta)=f(\beta)+\beta-6=\alpha+\beta-4=0 \quad (\because \alpha+\beta=4)$$

따라서 방정식 $P(x)=0$, 즉 $f(x)+x-6=0$ 의 두 근이 α , β 이므로 두 근의 합은

$$\alpha+\beta=4$$

답 4

033

이차방정식 $x^2-4\sqrt{3}x+k=0$ 의 두 실근이 α , β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4\sqrt{3}, \quad \alpha\beta=k \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$8-|\alpha|=|\beta|$, 즉 $|\alpha|+|\beta|=8$ 의 양변을 제곱하면

$$\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2=64$$

$$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=64$$

$\textcircled{㉠}$ 을 위의 식에 대입하면

$$(4\sqrt{3})^2-2k+2|k|=64 \quad \therefore k-|k|=-8$$

(i) $k \geq 0$ 일 때

$$k-k=-8, \text{ 즉 } 0=-8 \text{이므로 실수 } k \text{의 값이 존재하지 않는다.}$$

(ii) $k < 0$ 일 때

$$k+k=-8 \text{이므로 } k=-4$$

(i), (ii)에서 $k=-4$

답 -4

034

이차방정식 $px^2-10x+q=0$ 의 두 근이 서로 다른 소수이므로 두 근의 합은 자연수이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합이 $\frac{10}{p}$ 이므로 p 는 10의 약수인 1, 2, 5, 10이다.

(i) $p=1$ 일 때

$$(\text{두 근의 합})=\frac{10}{p}=10 \text{이고, 합이 10인 서로 다른 두 소수는}$$

3, 7이므로 두 근은 3, 7이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$q=3 \times 7=21$$

(ii) $p=2$ 일 때

(두 근의 합) $=\frac{10}{p}=5$ 이고, 합이 5인 서로 다른 두 소수는 2, 3이므로 두 근은 2, 3이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{q}{2}=2 \times 3 \quad \therefore q=12$$

(iii) $p=5$ 일 때

(두 근의 합) $=\frac{10}{p}=2$ 이므로 합이 2인 서로 다른 두 소수는 존재하지 않는다.

(iv) $p=10$ 일 때

(두 근의 합) $=\frac{10}{p}=1$ 이므로 합이 1인 서로 다른 두 소수는 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 q 의 최솟값은 12이다.

답 4

035

$|x|^2=x^2$ 이므로 주어진 식은

$$|x|^2-4(k+1)|x|+4k^2+2k+10=0$$

$|x|=t$ ($t \geq 0$)로 놓으면

$$t^2-4(k+1)t+4k^2+2k+10=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

t 에 대한 이차방정식 $\textcircled{㉠}$ 의 두 실근을 α , β 라 하면 $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$

(i) 이차방정식 $\textcircled{㉠}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-2(k+1)\}^2-(4k^2+2k+10) \geq 0$$

$$6k-6 \geq 0 \quad \therefore k \geq 1$$

(ii) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4(k+1) \geq 0 \quad \therefore k \geq -1$$

(iii) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta=4k^2+2k+10=4\left(k+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{39}{4} \geq \frac{39}{4}$$

이므로 k 는 모든 실수이다.

(i)~(iii)에서 $k \geq 1$ 이므로 k 의 최솟값은 1이다.

답 1

036

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)라 하자.

이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=a^2-4b > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$b=4$$

이때 $x^2+ax+4=-x+1$, 즉 $x^2+(a+1)x+3=0$ 의 두 근을 α , β 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-(a+1), \quad \alpha\beta=3$$

이때 $|\alpha-\beta|=2$ 이므로 양변을 제곱하면

$$(\alpha-\beta)^2=4$$

이때 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로
 $4 = \{-(\alpha + 1)\}^2 - 12$
 $(\alpha + 1)^2 = 16, \alpha + 1 = \pm 4$
 $\therefore \alpha = 3$ 또는 $\alpha = -5$
 ㉠에 의하여 $\alpha^2 - 16 > 0$, 즉 $\alpha < -4$ 또는 $\alpha > 4$ 이므로
 $\alpha = -5$
 따라서 $f(x) = x^2 - 5x + 4$ 이므로
 $f(6) = 36 - 30 + 4 = 10$

답 ②

037

이차방정식 $x^2 - ax - \frac{1}{4}b = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = -\frac{1}{4}b$$

$$\therefore (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = a^2 + b$$

이때 $|\alpha - \beta| < 5$ 에서 $(\alpha - \beta)^2 < 25$ 이므로
 $a^2 + b < 25$

(i) $a = 1$ 일 때

$b < 24$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는
 $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 23)$
 의 23개

(ii) $a = 2$ 일 때

$b < 21$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는
 $(2, 1), (2, 2), \dots, (2, 20)$
 의 20개

(iii) $a = 3$ 일 때

$b < 16$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는
 $(3, 1), (3, 2), \dots, (3, 15)$
 의 15개

(iv) $a = 4$ 일 때

$b < 9$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는
 $(4, 1), (4, 2), \dots, (4, 8)$
 의 8개

(i)~(iv)에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$23 + 20 + 15 + 8 = 66$$

답 66

038

조건 (㉠)에서 양의 약수가 3개인 자연수는 소수의 제곱인 수이고,
 조건 (㉡)에서 $\alpha \leq 100, \beta \leq 100$ 이므로 α, β 가 될 수 있는 수는

$$2^2, 3^2, 5^2, 7^2, \text{ 즉 } 4, 9, 25, 49$$

한편, 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a = \alpha + \beta, b = \alpha\beta$$

조건 (㉡)에서 a, b 는 100 이하의 서로 다른 자연수이므로

(i) $a = 4 + 9 = 13, b = 4 \times 9 = 36$ 일 때

$$a + b = 13 + 36 = 49$$

(ii) $a = 4 + 25 = 29, b = 4 \times 25 = 100$ 일 때

$$a + b = 29 + 100 = 129$$

048 정답과 풀이

(i), (ii)에서 $a + b$ 의 최댓값은 129이다.

답 129

참고

어떤 자연수 n 이

(1) 2개의 양의 약수를 갖는다. $\Rightarrow n$ 은 소수

(2) 3개의 양의 약수를 갖는다. $\Rightarrow n$ 은 소수의 제곱인 수

039

이차방정식 $x^2 + 2kx + 5x - 6 = 0$, 즉 $x^2 + (2k + 5)x - 6 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -(2k + 5) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta = -6 \quad \dots \textcircled{2}$$

이때 $\alpha + \beta < 0, \alpha\beta < 0$ 이고 $|\alpha| > |\beta|$ 이므로 $\alpha < 0 < \beta$ 참고

두 수 α, β 의 절댓값의 비가 3 : 2이므로

$$\alpha = -3a, \beta = 2a \quad (a > 0)$$

로 놓을 수 있다.

$$\textcircled{2} \text{에서 } -3a \times 2a = -6$$

$$a^2 = 1 \quad \therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$$

따라서 $\alpha = -3, \beta = 2$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$-3 + 2 = -(2k + 5) \quad \therefore k = -2$$

$$\therefore k(\alpha - \beta)^2 = -2 \times (-3 - 2)^2 = -50$$

답 -50

참고

$\alpha + \beta < 0, \alpha\beta < 0$ 이므로 α, β 는 부호가 반대이고 절댓값이 큰 수가 음수이다.

이때 두 수 α, β 의 절댓값의 비가 3 : 2, 즉 $|\alpha| > |\beta|$ 이므로 $\alpha < 0 < \beta$ 임을 알 수 있다.

040

이차방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \beta^2 + \beta + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -1$$

$$\therefore \alpha + 1 = -\beta, \beta + 1 = -\alpha$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\alpha^2 - \beta = 0, \beta^2 - \alpha = 0$$

$$\therefore \alpha^2 = \beta, \beta^2 = \alpha$$

$$\alpha + \beta = -1 \text{에서 } -\alpha = \beta + 1$$

$$\text{즉, } f(\alpha^2) = -\alpha \text{에서}$$

$$f(\beta) = \beta + 1 \quad \therefore f(\beta) - \beta - 1 = 0$$

$$\alpha + \beta = -1 \text{에서 } -\beta = \alpha + 1$$

$$\text{즉, } f(\beta^2) = -\beta \text{에서}$$

$$f(\alpha) = \alpha + 1 \quad \therefore f(\alpha) - \alpha - 1 = 0$$

즉, 이차방정식 $f(x) - x - 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이고 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x) - x - 1 = (x - \alpha)(x - \beta)$ 에서

$$f(x) - x - 1 = x^2 + x + 1$$

따라서 $f(x) = x^2 + 2x + 2$ 이므로

$$f(-2) = 4 - 4 + 2 = 2$$

답 ③

다른풀이

이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1$$

이때 $f(x) = x^2 + px + q$ (p, q 는 상수)라 하면

$$f(\alpha^2) = -\alpha, f(\beta^2) = -\beta$$

이므로

$$\alpha^4 + p\alpha^2 + q = -\alpha, \beta^4 + p\beta^2 + q = -\beta \quad \dots \textcircled{7}$$

⑦의 두 식을 더하면

$$\alpha^4 + \beta^4 + p(\alpha^2 + \beta^2) + 2q = -(\alpha + \beta)$$

이때

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = -1,$$

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = -1$$

이므로

$$-1 - p + 2q = 1 \quad \therefore p - 2q = -2 \quad \dots \textcircled{8}$$

⑦의 두 식을 빼면

$$\alpha^4 - \beta^4 + p(\alpha^2 - \beta^2) = -(\alpha - \beta)$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \beta^2) + p(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta) = 0$$

$$2(\alpha - \beta) - p(\alpha - \beta) = 0 \quad \therefore (2 - p)(\alpha - \beta) = 0$$

이때 $\alpha - \beta \neq 0$ 이므로

$$2 - p = 0 \quad \therefore p = 2$$

$p = 2$ 를 ⑧에 대입하면 $q = 2$

따라서 $f(x) = x^2 + 2x + 2$ 이므로

$$f(-2) = 4 - 4 + 2 = 2$$

041

이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 서로 다른 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = 4$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) = a^2 - 8 + 2a = 0$$

$$(a + 4)(a - 2) = 0 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0) \quad \text{[다른풀이]}$$

이차방정식 $x^2 - 2x + 4 = 0$ 의 한 근이 α 이므로

$$\alpha^2 - 2\alpha + 4 = 0$$

양변에 $\alpha + 2$ 를 곱하면

$$(\alpha + 2)(\alpha^2 - 2\alpha + 4) = 0$$

$$\alpha^3 + 8 = 0 \quad \therefore \alpha^3 = -8$$

같은 방법으로 구하면 $\beta^3 = -8$

$n = 1$ 일 때

$$\alpha + \beta = 2$$

$n = 2$ 일 때

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = -4$$

$n = 3$ 일 때

$$\alpha^3 + \beta^3 = -8 + (-8) = -16$$

$n = 4$ 일 때

$$\alpha^4 + \beta^4 = \alpha^3 \times \alpha + \beta^3 \times \beta = -8(\alpha + \beta) = -16$$

$n = 5$ 일 때

$$\alpha^5 + \beta^5 = \alpha^3 \times \alpha^2 + \beta^3 \times \beta^2 = -8(\alpha^2 + \beta^2) = 32$$

$n = 6$ 일 때

$$\alpha^6 + \beta^6 = (\alpha^3)^2 + (\beta^3)^2 = 64 + 64 = 128$$

$n = 7$ 일 때

$$\alpha^7 + \beta^7 = (\alpha^3)^2 \times \alpha + (\beta^3)^2 \times \beta = 64(\alpha + \beta) = 128$$

따라서 $\alpha^6 + \beta^6 > 0, (\alpha^6 + \beta^6) - (\alpha^7 + \beta^7) = 0$, 즉

$$(\alpha^6 - \alpha^7) + (\beta^6 - \beta^7) = 0$$

이므로 자연수 n 의 최솟값은 6이다.

답 6

다른풀이

이차방정식 $x^2 - 2x + 4 = 0$ 에서 $x = 1 \pm \sqrt{3}i$

이때 $\alpha = 1 - \sqrt{3}i, \beta = 1 + \sqrt{3}i$ 로 놓으면 조건 (나)에서

$$\begin{aligned} (\alpha^n - \alpha^{n+1}) + (\beta^n - \beta^{n+1}) &= \alpha^n(1 - \alpha) + \beta^n(1 - \beta) \\ &= \alpha^n \times \sqrt{3}i + \beta^n \times (-\sqrt{3}i) \\ &= \sqrt{3}i(\alpha^n - \beta^n) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha^n = \beta^n$$

한편,

$$\alpha^2 = -2 - 2\sqrt{3}i, \alpha^3 = -8, \alpha^4 = -8 + 8\sqrt{3}i,$$

$$\alpha^5 = 16 + 16\sqrt{3}i, \alpha^6 = 64, \dots$$

$$\beta^2 = -2 + 2\sqrt{3}i, \beta^3 = -8, \beta^4 = -8 - 8\sqrt{3}i,$$

$$\beta^5 = 16 - 16\sqrt{3}i, \beta^6 = 64, \dots$$

따라서 $\alpha^6 + \beta^6 = 64 + 64 = 128$ 이므로 조건 (가)에서 $\alpha^n + \beta^n > 0$ 과 조건 (나)에서 $\alpha^n = \beta^n$ 을 모두 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 6이다.

042

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근 α, β 에 대하여 $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 3$

이므로

$$f(x) = a(x^2 + x + 3) \quad (a \text{는 상수}, a \neq 0)$$

이라 하자.

$$\begin{aligned} f(2x-5) + 10 &= a\{(2x-5)^2 + (2x-5) + 3\} + 10 \\ &= a(4x^2 - 18x + 23) + 10 \\ &= 4ax^2 - 18ax + 23a + 10 \end{aligned}$$

이고, 이차방정식 $f(2x-5) + 10 = 0$ 의 두 근의 곱이 $\frac{9}{2}$ 이므로 이

차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{23a + 10}{4a} = \frac{9}{2}, 23a + 10 = 18a$$

$$\therefore a = -2$$

따라서 $f(x) = -2(x^2 + x + 3)$ 이므로

$$f(1) = -2 \times (1 + 1 + 3) = -10$$

답 ①

043

이차방정식 $x^2 + 8x + 2n = 0$ 의 판별식을 D 라 하자.

(i) z 가 실수일 때

$z = \bar{z}$ 이므로 $x^2 + 8x + 2n$ 이 $(x - z)^2$ 의 꼴로 인수분해된다.

따라서 이차방정식 $x^2 + 8x + 2n = 0$ 은 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = 4^2 - 2n = 0 \quad \therefore n = 8$$

(ii) z 가 허수일 때

계수가 실수이므로 이차방정식 $x^2 + 8x + 2n = 0$ 의 한 근이 z 이면 켈레근인 \bar{z} 도 한 근이다.

따라서 $x^2 + 8x + 2n = 0$ 은 서로 다른 두 허근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = 4^2 - 2n < 0 \quad \therefore n > 8$$

(i), (ii)에서 $n \geq 8$ 이므로 조건을 만족시키는 30 이하의 자연수 n 은 8, 9, 10, ..., 30의 23개이다.

답 23

044

이차방정식 $f(x)=0$ 의 계수가 실수이고 서로 다른 두 허근 α, β 를 가지므로 $\alpha=a+bi$ (a, b 는 실수, $b \neq 0$)라 하면 $\beta=a-bi$ 이다.

이때 $2\alpha+\beta^2=2$ 에서

$$2(a+bi)+(a-bi)^2=2$$

$$(a^2-b^2+2a)+(2b-2ab)i=2$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2-b^2+2a=2, 2b-2ab=0$$

$$2b-2ab=0, \text{ 즉 } 2b(1-a)=0 \text{에서 } b \neq 0 \text{이므로}$$

$$a=1$$

이것을 $a^2-b^2+2a=2$ 에 대입하면

$$1-b^2+2=2, b^2=1$$

$$\therefore b=-1 \text{ 또는 } b=1$$

즉, $\alpha=1-i, \beta=1+i$ 또는 $\alpha=1+i, \beta=1-i$ 이므로

$$\alpha+\beta=2, \alpha\beta=2$$

따라서 $f(x)=x^2-2x+2$ 이므로

$$f(7)=49-14+2=37$$

답 ⑤

045

이차식 $P(x)$ 는 $x-2-i$ 를 인수로 가지므로

$$P(2+i)=0$$

이차방정식 $P(x)=0$ 의 한 근이 $2+i$ 이고 모든 항의 계수가 실수이므로 다른 한 근은 $2-i$ 이다.

이때 $(2+i)+(2-i)=4, (2+i)(2-i)=5$ 이므로

$$P(x)=a(x^2-4x+5)=ax^2-4ax+5a$$

이차방정식 $P(x)+10x=0$, 즉 $ax^2+(-4a+10)x+5a=0$ 의 두 근의 합이 2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{-4a+10}{a}=2, 4a-10=2a$$

$$\therefore a=5$$

즉, $P(x)=5x^2-20x+25$ 이므로 $P\left(\frac{x}{5}\right)=0$ 에서

$$\frac{1}{5}x^2-4x+25=0$$

따라서 구하는 이차방정식의 두 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 125이다.

답 125

046

계수가 실수인 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 α, β 이고 조건 (가)에서 α 는 허근이므로

$$\alpha=\bar{\beta}, \bar{\alpha}=\beta$$

..... ㉠

한편, $\frac{\alpha^4}{\beta^2}=\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)^2$ 이고 조건 (나)에서 $\frac{\alpha^2}{\beta}$ 이 실수이므로

다른 풀이

050 정답과 풀이

$$\frac{\alpha^2}{\beta}=\overline{\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)}=\overline{\frac{\alpha^2}{\beta}}=\frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}}=\frac{\beta^2}{\alpha} \quad (\because \text{㉠})$$

즉, $\alpha^3=\beta^3$ 이므로

$$\left(\frac{-2\alpha}{\beta}\right)^6=2^6\left(\frac{\alpha^3}{\beta^3}\right)^2=2^6 \times 1=64$$

답 64

다른 풀이

$\alpha=p+qi$ (p, q 는 실수, $q \neq 0$)로 놓으면 $\beta=p-qi$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{\beta} &= \frac{(p+qi)^2}{p-qi} \\ &= \frac{(p+qi)^3}{(p-qi)(p+qi)} \\ &= \frac{p^3+3p^2qi-3pq^2-q^3i}{p^2+q^2} \\ &= \frac{p^3-3pq^2+q(3p^2-q^2)i}{p^2+q^2} \end{aligned}$$

즉, $\frac{\alpha^2}{\beta}$ 이 실수이려면 $3p^2-q^2=0$ 이어야 하므로

$$q=\pm\sqrt{3}p$$

(i) $q=-\sqrt{3}p$ 인 경우

$$\alpha=(1-\sqrt{3}i)p, \beta=(1+\sqrt{3}i)p \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{-2\alpha}{\beta}\right)^6 &= \left\{ \frac{-2(1-\sqrt{3}i)p}{(1+\sqrt{3}i)p} \right\}^6 \\ &= \left\{ \frac{-2(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} \right\}^6 \\ &= (1+\sqrt{3}i)^6 \\ &= \{(1+\sqrt{3}i)^3\}^2 \\ &= (-8)^2=64 \end{aligned}$$

(ii) $q=\sqrt{3}p$ 인 경우

$$\alpha=(1+\sqrt{3}i)p, \beta=(1-\sqrt{3}i)p \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{-2\alpha}{\beta}\right)^6 &= \left\{ \frac{-2(1+\sqrt{3}i)p}{(1-\sqrt{3}i)p} \right\}^6 \\ &= \left\{ \frac{-2(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} \right\}^6 \\ &= (1-\sqrt{3}i)^6 \\ &= \{(1-\sqrt{3}i)^3\}^2 \\ &= (-8)^2=64 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $\left(\frac{-2\alpha}{\beta}\right)^6=64$

047

이차방정식 $x^2-6x+4=0$ 의 두 실근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=6, \alpha\beta=4 \quad \text{다른 풀이}$$

직각삼각형 ABC에서

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta} \\ &= \sqrt{6^2-2 \times 4} = 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

이때 직각삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\alpha\beta = \frac{1}{2}r(\alpha+\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})$$

$$\frac{1}{2} \times 4 = \frac{1}{2}r(6+2\sqrt{7})$$

$$\therefore r = \frac{4}{6+2\sqrt{7}} = 3-\sqrt{7}$$

즉, 이차방정식 $3x^2+ax+b=0$ 에서 a, b 는 유리수이므로 $3-\sqrt{7}$ 이 근이면 다른 한 근은 $3+\sqrt{7}$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{a}{3}=(3-\sqrt{7})+(3+\sqrt{7}) \quad \therefore a=-18$$

$$\frac{b}{3}=(3-\sqrt{7})\times(3+\sqrt{7}) \quad \therefore b=6$$

$$\therefore b-a=6-(-18)=24$$

답 24

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 내심을 I라 하고, 점 I에서 세 변 AB, BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R라 하자.

내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\overline{PB}=\overline{QB}=r \text{이므로}$$

$$\overline{CR}=\overline{CQ}=\overline{BC}-\overline{QB}=\beta-r$$

$$\overline{AR}=\overline{AP}=\overline{AB}-\overline{PB}=\alpha-r$$

또, 삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ 이므로 $\overline{AC}=\overline{AR}+\overline{CR}$ 에서

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=(\alpha-r)+(\beta-r)=\alpha+\beta-2r$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$\alpha^2+\beta^2=\alpha^2+\beta^2+4r^2+2\alpha\beta-4\alpha r-4\beta r$$

$$4r^2-4(\alpha+\beta)r+2\alpha\beta=0$$

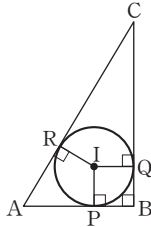
이때 $\alpha+\beta=6, \alpha\beta=4$ 이므로

$$4r^2-24r+8=0, r^2-6r+2=0$$

$$\therefore 3r^2-18r+6=0$$

따라서 $a=-18, b=6$ 이므로

$$b-a=6-(-18)=24$$



048

일등삼각의 대모장

두 정사각형의 대각선이 모두 한 점 O에서 만나고, 대각선 FH가 변 AB를 이등분한다.

$$\Rightarrow \overline{FH} \perp \overline{AB}$$

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 E에서 변 AD에 내린 수선의 발을 L이라 하고 $\overline{JL}=x$ ($x>0$)라 하자.

삼각형 EJI는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{EL}=x$ 이고 삼각형 EJI의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2x \times x = x^2$$

$\overline{AJ}=1-x$ 이므로 삼각형 AKJ의 넓이는

$$\frac{(1-x)^2}{2}$$

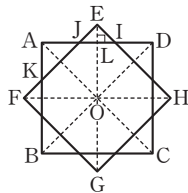
삼각형 AKJ의 넓이가 삼각형 EJI의 넓이의 $\frac{3}{2}$ 배이므로

$$\frac{(1-x)^2}{2} = \frac{3}{2}x^2, 2x^2+2x-1=0$$

$$\therefore x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \quad (\because x>0)$$

$$\overline{OE} = \overline{OL} + \overline{EL} = 1 + \frac{-1+\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}k$$

$$\therefore k = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$



따라서 $p=\frac{1}{4}, q=\frac{1}{4}$ 이므로

$$100(p+q) = 100 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 50$$

답 50

049

일등삼각의 대모장

a 의 값으로 가능한 것을 먼저 찾고 각 경우에 대하여 조건을 만족시키는 b 의 값을 찾는 것이 편리하다.

이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=a, \alpha\beta=b$$

$1 < \alpha < \beta \leq 11$ 이라 하면 $1+2 \leq \alpha \leq 10+11$, 즉 $3 \leq a \leq 21$ 이고, a 를 6으로 나누었을 때의 나머지가 1이므로 a 가 될 수 있는 값은 7, 13, 19

또, b 를 8로 나누었을 때의 나머지가 2이므로

$$b=8k+2 \quad (\text{단, } k \text{는 음이 아닌 정수})$$

..... ㉠

(i) $a=7$, 즉 $\alpha+\beta=7$ 일 때

조건을 만족시키는 순서쌍 (α, β) 는

$$(1, 6), (2, 5), (3, 4)$$

㉠ $\alpha=1, \beta=6$ 이면 $b=1 \times 6 = 6 = 8 \times 0 + 6$ 이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

㉠ $\alpha=2, \beta=5$ 이면 $b=2 \times 5 = 10 = 8 \times 1 + 2$ 이므로 ㉠을 만족시킨다.

$$\therefore a+b=7+10=17$$

㉠ $\alpha=3, \beta=4$ 이면 $b=3 \times 4 = 12 = 8 \times 1 + 4$ 이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=13$, 즉 $\alpha+\beta=13$ 일 때

조건을 만족시키는 순서쌍 (α, β) 는

$$(2, 11), (3, 10), (4, 9), (5, 8), (6, 7)$$

㉠ $\alpha=2, \beta=11$ 이면 $b=2 \times 11 = 22 = 8 \times 2 + 6$ 이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

㉠ $\alpha=3, \beta=10$ 이면 $b=3 \times 10 = 30 = 8 \times 3 + 6$ 이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

㉠ $\alpha=4, \beta=9$ 이면 $b=4 \times 9 = 36 = 8 \times 4 + 4$ 이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

㉠ $\alpha=5, \beta=8$ 이면 $b=5 \times 8 = 40 = 8 \times 5 + 0$ 이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

㉠ $\alpha=6, \beta=7$ 이면 $b=6 \times 7 = 42 = 8 \times 5 + 2$ 이므로 ㉠을 만족시킨다.

$$\therefore a+b=13+42=55$$

(iii) $a=19$, 즉 $\alpha+\beta=19$ 일 때

조건을 만족시키는 순서쌍 (α, β) 는

$$(8, 11), (9, 10)$$

㉠ $\alpha=8, \beta=11$ 이면 $b=8 \times 11 = 88 = 8 \times 11 + 0$ 이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

㉠ $\alpha=9, \beta=10$ 이면 $b=9 \times 10 = 90 = 8 \times 11 + 2$ 이므로 ㉠을 만족시킨다.

$$\therefore a+b=19+90=109$$

(i)~(iii)에서 $a+b$ 가 될 수 있는 값은 17, 55, 109이므로

$M=109, m=17$
 $\therefore M+m=109+17=126$

답 126

050

일등급의 메모장

계수가 실수인 이차방정식의 허근을 z 라 할 때, $z^3=m$ (m 은 실수)이라 하면 $\bar{z}^3=\bar{z}^3=m$ 이므로
 $z^3-\bar{z}^3=(z-\bar{z})(z^2+z\bar{z}+\bar{z}^2)=0$
 $\therefore z^2+z\bar{z}+\bar{z}^2=0$ ($\because z \neq \bar{z}$)
 즉, z^3 이 실수가 되기 위한 조건은 다음과 같다.
 (단, z 는 순허수가 아니다.)

z^3 이 실수 $\iff z^2+z\bar{z}+\bar{z}^2=0$
 $\iff (z+\bar{z})^2-z\bar{z}=0$
 $\iff (z+\bar{z})^2=z\bar{z}$

따라서 이차방정식의 두 근의 (합)²= (곱)이다.

$\beta = \frac{1}{\alpha}$ 이라 하자. 다른 풀이

이차방정식 $x^2-kpx+p+2=0$ 의 계수가 실수이므로 허근 β 를 가지면 $\bar{\beta}$ 도 근이다.

$\beta = a+bi$ (a, b 는 실수, $b \neq 0$)라 하면 $\bar{\beta} = a-bi$ 이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\beta + \bar{\beta} = 2a = kp$ ㉠

$\beta\bar{\beta} = a^2 + b^2 = p+2$ ㉡

$\frac{1}{\alpha^3}$, 즉 β^3 이 실수하려면 허수부분이 0이어야 하므로

$\beta^3 = (a+bi)^3$
 $= a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i$
 $= (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$

에서

$3a^2b - b^3 = 0, b(3a^2 - b^2) = 0$

이때 $b \neq 0$ 이므로 $b^2 = 3a^2$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$4a^2 = p+2$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$(kp)^2 = p+2 \quad \therefore k^2p^2 - p - 2 = 0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 조건을 만족시키는 모든 실수 p 의 값의 합은 $\frac{1}{k^2}$ 이다.

즉, $\frac{1}{k^2} = 3$ 에서

$k^2 = \frac{1}{3} \quad \therefore k = \frac{\sqrt{3}}{3} (\because k > 0)$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

다른 풀이

이차방정식 $x^2-kpx+p+2=0$ 이 허근 β 를 가질 때, $\frac{1}{\alpha^3}$, 즉 β^3 이

실수이므로 $\beta^3 = m$ (m 은 실수)에서

$\bar{\beta}^3 = \bar{m}$

$\beta^3 - \bar{\beta}^3 = (\beta - \bar{\beta})(\beta^2 + \beta\bar{\beta} + \bar{\beta}^2) = 0$

$\therefore \beta^2 + \beta\bar{\beta} + \bar{\beta}^2 = 0 (\because \beta \neq \bar{\beta})$

즉, $(\beta + \bar{\beta})^2 - \beta\bar{\beta} = 0$ 에서 $(\beta + \bar{\beta})^2 = \beta\bar{\beta}$ 이므로 이차방정식의 근

052 정답과 풀이

과 계수의 관계에 의하여

$(kp)^2 = p+2 \quad \therefore k^2p^2 - p - 2 = 0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 조건을 만족시키는 모든 실수 p 의 값의 합은 $\frac{1}{k^2}$ 이다.

즉, $\frac{1}{k^2} = 3$ 에서

$k^2 = \frac{1}{3} \quad \therefore k = \frac{\sqrt{3}}{3} (\because k > 0)$

051

일등급의 메모장

복소수 z 에 대하여 $a = z+m, \beta = z+ni$ (m, n 은 실수)라 하면

$\bar{a} = \bar{z} + \bar{m} = \bar{z} + m$

$\bar{\beta} = \bar{z} + \bar{ni} = \bar{z} - ni$

$z = p+qi$ (p, q 는 실수)라 하자.

조건 (가)에서 $z-2 = p-2+qi$ 가 이차방정식 $x^2-mx+5=0$ 의 한 허근이므로 $q \neq 0$ 이고, 다른 한 근은 $\bar{z}-2 = p-2-qi$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2(p-2) = m$ ㉠

$(p-2)^2 + q^2 = 5$ ㉡

조건 (나)에서 $z-2i = p+(q-2)i$ 가 이차방정식 $x^2-nx+5=0$ 의 한 허근이므로 $q \neq 2$ 이고, 다른 한 근은 $\bar{z}-2i = p-(q-2)i$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2p = n$ ㉢

$p^2 + (q-2)^2 = 5$ ㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $p=q$

이것을 ㉡에 대입하면 $(p-2)^2 + p^2 = 5$

$\therefore m^2 + n^2 = 4(p-2)^2 + 4p^2 (\because ㉠, ㉢)$

$= 4\{(p-2)^2 + p^2\}$

$= 4 \times 5 = 20$

답 20

052

일등급의 메모장

어떤 양의 실수 M 에 대하여 $0 < k < M$ 을 만족시키는 정수 k 가 N 개

$\rightarrow N < M \leq N+1$

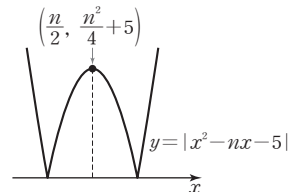
$|x^2-nx-5| = \left| \left(x - \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n^2}{4} - 5 \right|$

이므로 함수 $y = |x^2-nx-5|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 방정식 $|x^2-nx-5| = k$

가 서로 다른 네 실근을 가지려면

$0 < k < \frac{n^2}{4} + 5$



이어야 한다. 다른 풀이

(i) n 이 짝수일 때

$n = 2m$ (m 은 자연수)이라 하면

$\frac{n^2}{4} + 5 = m^2 + 5$

즉, $0 < k < m^2 + 5$ 를 만족시키는 정수 k 의 개수는 $m^2 + 4$ 이므로

$$f(n) = \frac{n^2}{4} + 4$$

$$\frac{n^2}{4} + 4 = 2n + 1 \text{에서}$$

$$n^2 - 8n + 12 = 0, (n-2)(n-6) = 0$$

$$\therefore n=2 \text{ 또는 } n=6$$

(ii) n 이 홀수일 때

$n = 2m - 1$ (m 은 자연수)이라 하면

$$\frac{n^2}{4} + 5 = (m^2 - m + 5) + \frac{1}{4}$$

즉, $0 < k < (m^2 - m + 5) + \frac{1}{4}$ 을 만족시키는 정수 k 의 개수는

$m^2 - m + 5$ 이므로

$$f(n) = \frac{n^2 - 1}{4} + 5$$

$$\frac{n^2 - 1}{4} + 5 = 2n + 1 \text{에서}$$

$$n^2 - 8n + 15 = 0, (n-3)(n-5) = 0$$

$$\therefore n=3 \text{ 또는 } n=5$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 자연수 n 의 값은 2, 3, 5, 6이므로 구하는 합은

$$2 + 3 + 5 + 6 = 16$$

답 16

다른 풀이 확장

$f(n) = 2n + 1$ 이어야 하므로

$$2n + 1 < \frac{n^2}{4} + 5 \leq 2n + 5$$

$$2n + 1 < \frac{n^2}{4} + 5 \text{에서}$$

$$n^2 - 8n + 16 > 0, (n-4)^2 > 0$$

$$\therefore n \neq 4 \text{인 모든 자연수} \quad \dots \text{㉠}$$

$$\frac{n^2}{4} + 5 \leq 2n + 5 \text{에서}$$

$$n^2 - 8n + 12 \leq 0, (n-2)(n-6) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq n \leq 6 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 만족시키는 자연수 n 의 값은 2, 3, 5, 6이므로 구하는 합은 $2 + 3 + 5 + 6 = 16$

053

일등급의 대모장

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

이때 x 의 값이 정수이려면 적어도 근호 안의 값이 어떤 정수의 제곱이어야 한다.

주어진 방정식에 $x=1$ 을 대입하면

$$(k+a)^2 - (2k^2 + k + 2) + k^2 - ak + b = 0$$

$$(a-1)k + a^2 + b - 2 = 0$$

이 식이 k 에 대한 항등식이므로

$$a-1=0, a^2+b-2=0$$

$$\therefore a=1, b=1$$

$a=1, b=1$ 을 주어진 방정식에 대입하면

$$(k+1)^2 x^2 - (2k^2 + k + 2)x + k^2 - k + 1 = 0 \quad (\text{단, } k \neq -1)$$

이 이차방정식의 두 근이 1, α 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1 \times \alpha = \frac{k^2 - k + 1}{(k+1)^2}$$

이때 자연수 n 에 대하여 $n = \frac{1}{\alpha}$ ($n \geq 2$)이라 하면

$$n = \frac{1}{\alpha} = \frac{(k+1)^2}{k^2 - k + 1} = \frac{k^2 + 2k + 1}{k^2 - k + 1} \quad \begin{matrix} \rightarrow n=1 \text{이면 } \alpha=1 \text{ 이므로} \\ \alpha \neq 1 \text{ 이라는 조건에 모순} \end{matrix}$$

$$n(k^2 - k + 1) = k^2 + 2k + 1$$

$$(n-1)k^2 - (n+2)k + n - 1 = 0 \quad \dots \text{㉠}$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (n+2)^2 - 4(n-1)^2 = -3n^2 + 12n = 3n(4-n)$$

이때 k 의 값이 정수이려면 D 의 값은 어떤 정수의 제곱이어야 한다.

(i) $n=2$ 일 때

$$D = 3 \times 2 \times 2 = 12 \text{이므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$

(ii) $n=3$ 일 때

$$D = 3 \times 3 \times 1 = 9 = 3^2$$

$n=3$ 을 ㉠에 대입하면

$$2k^2 - 5k + 2 = 0, (2k-1)(k-2) = 0$$

$$\therefore k=2 \quad (\because k \text{는 정수})$$

(iii) $n=4$ 일 때

$$D = 3 \times 4 \times 0 = 0 = 0^2$$

$n=4$ 를 ㉠에 대입하면

$$3k^2 - 6k + 3 = 0, 3(k-1)^2 = 0$$

$$\therefore k=1$$

(iv) $n \geq 5$ 일 때

$D < 0$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 $\frac{1}{\alpha}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 정수 k 의 값은 1, 2

이므로 구하는 합은

$$1 + 2 = 3$$

답 3

001

세 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$ 의 최고차항의 계수의 절댓값이 같으므로 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a ($a>0$)라 하면

$$f(x)=a(x+3)(x+1), g(x)=a(x+1)(x-2),$$

$$h(x)=-a(x+1)(x-3)$$

$$f(x)+h(x)=g(x), \text{ 즉 } f(x)+h(x)-g(x)=0 \text{에서}$$

$$f(x)+h(x)-g(x)=a(x+1)\{(x+3)-(x-3)-(x-2)\}$$

$$=a(x+1)(-x+8)$$

$$=-a(x+1)(x-8)$$

방정식 $f(x)+h(x)-g(x)=0$, 즉 $-a(x+1)(x-8)=0$ 의 해는

$$x=-1 \text{ 또는 } x=8$$

따라서 모든 근의 합은

$$-1+8=7$$

답 7

002

주어진 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 두 점 $(2, 0)$, $(6, 0)$ 에서 만나므로

$$f(x)=a(x-2)(x-6) \quad (a<0)$$

이러 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(4, 2)$ 이므로

$$2=a \times 2 \times (-2) \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)(x-6)$$

$$=-\frac{1}{2}x^2+4x-6$$

이때 $2f(|x-t|)=3$, 즉 $|x-t|^2-8|x-t|+15=0$ 에서

$$(|x-t|-3)(|x-t|-5)=0$$

$$\therefore |x-t|=3 \text{ 또는 } |x-t|=5$$

$$|x-t|=3 \text{에서 } x=t \pm 3$$

$$|x-t|=5 \text{에서 } x=t \pm 5$$

따라서 모든 실근의 제곱의 합은

$$(t+3)^2+(t-3)^2+(t+5)^2+(t-5)^2=4t^2+68$$

이므로

$$4t^2+68=264, t^2=49$$

$$\therefore t=7 \quad (\because t>0)$$

답 7

003

조건 (가)에서 $f(0)=7$ 이므로

$$a \times (-b) \times (-1)=7$$

$$\therefore ab=7$$

이때 a, b 는 자연수이므로

$$a=1, b=7 \text{ 또는 } a=7, b=1$$

(i) $a=1, b=7$ 인 경우

$f(x)=(x-1)(x-7)$ 에서 $1<x<7$ 일 때 $f(x)<0$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a=7, b=1$ 인 경우

$f(x)=7(x-1)^2$ 에서 $x>1$ 일 때 $f(x)>0$ 이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=7, b=1$

따라서 $f(x)=7(x-1)^2$ 이므로 $f(k)=14$ 에서

$$7(k-1)^2=14, k-1=\pm\sqrt{2}$$

$$\therefore k=1+\sqrt{2} \quad (\because k>0)$$

답 2

004

두 이차함수

$$y=-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{9}{2},$$

$$y=\frac{1}{2}(x^2-1)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

에서 두 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 각각 $(2, \frac{9}{2})$,

$(0, -\frac{1}{2})$ 이고, 두 이차함수의 그래프가 만나는 점의 x 좌표는

$$-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} \text{에서}$$

$$x^2-2x-3=0, (x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

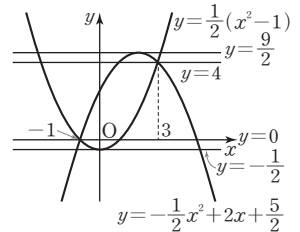
즉, 두 이차함수의 그래프의 교점의 좌표는 $(-1, 0)$, $(3, 4)$ 이다.

따라서 직선 $y=k$ 가 두 이차함수의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 경우는 오른쪽 그림과 같으므로 실수 k 의 값이 될 수 있는 수는

$$-\frac{1}{2}, 0, 4, \frac{9}{2}$$

즉, 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-\frac{1}{2}+0+4+\frac{9}{2}=8$$



답 8

005

이차함수 $y=x^2-5x+6$ 의 그래프와 직선 $y=3x+a$ 가 만나는 두 점의 x 좌표가 모두 양수이려면

(i) 이차함수 $y=x^2-5x+6$ 의 그래프와 직선 $y=3x+a$ 가 y 축과 만나는 경우

이차함수 $y=x^2-5x+6$ 의 그래프와 y 축의 교점의 좌표는

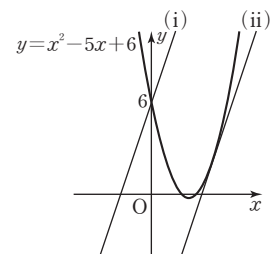
$(0, 6)$ 이므로 직선 $y=3x+a$ 가

점 $(0, 6)$ 을 지날 때

$$a=6$$

(ii) 이차함수 $y=x^2-5x+6$ 의 그래프와 직선 $y=3x+a$ 가 접하는 경우

이차방정식 $x^2-5x+6=3x+a$, 즉 $x^2-8x+6-a=0$ 의 판별식을 D 라 하면



$$\frac{D}{4} = (-4)^2 - (6-a) = 0$$

$$\therefore a = -10$$

(i), (ii)에서 이차함수 $y = x^2 - 5x + 6$ 의 그래프와 직선 $y = 3x + a$ 가 만나는 두 점 A, B의 x 좌표가 모두 양수이려면 $-10 < a < 6$ 이어야 한다.

따라서 정수 a 의 개수는 $-9, -8, -7, \dots, 5$ 의 15이다.

답 15

006

조건 (가)에서 $f(x) - g(x) = 3x(x-2) + 3$, $g(x) = 12x + a$ (a 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \{f(x) - g(x)\} + 2g(x) \\ &= 3x(x-2) + 3 + 24x + 2a \\ &= 3x^2 + 18x + 2a + 3 \end{aligned}$$

조건 (나)에서 이차방정식 $f(x) + g(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9^2 - 3(2a+3) = 0$$

$$\therefore a = 12$$

따라서

$$g(x) = 12x + 12,$$

$$f(x) = 3x(x-2) + 3 + (12x+12) = 3x^2 + 6x + 15$$

이므로

$$f(3) = 27 + 18 + 15 = 60$$

답 5

다른 풀이

$f(x) = 3x^2 + ax + b$, $g(x) = 12x + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면 조건 (가)에서

$$f(0) - g(0) = 3 \text{이므로}$$

$$b - c = 3 \quad \dots \text{㉠}$$

$$f(2) - g(2) = 3 \text{이므로}$$

$$2a + b - c = 15 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 6$$

조건 (나)에서 $f(x) + g(x) = 0$, 즉 $3x^2 + 18x + b + c = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9^2 - 3(b+c) = 0$$

$$\therefore b+c = 27 \quad \dots \text{㉢}$$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$$b = 15, c = 12$$

따라서 $f(x) = 3x^2 + 6x + 15$ 이므로

$$f(3) = 27 + 18 + 15 = 60$$

007

이차함수 $y = ax^2$ ($a > 0$)의 그래프와 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 5$ 가 만나는

점의 x 좌표 α, β 는 이차방정식 $ax^2 = -\frac{1}{2}x + 5$, 즉

$2ax^2 + x - 10 = 0$ 의 두 실근과 같으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{1}{2a}, \alpha\beta = \frac{-10}{2a} = -\frac{5}{a} \quad \text{[다른 풀이]}$$

한편, $\overline{H_2B} = \beta - \alpha$, 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 5$ 의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로

$$-\frac{\overline{AH_2}}{\overline{H_2B}} = -\frac{\overline{AH_2}}{\beta - \alpha} = -\frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\beta - \alpha = 2\overline{AH_2}$$

$$= 2 \times \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$$

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{이므로}$$

$$\left(\frac{9}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2a}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{5}{a}\right)$$

$$81a^2 - 80a - 1 = 0, (81a+1)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore \alpha\beta = -5$$

답 -5

다른 풀이

한편, 두 점 A, B의 좌표는 각각

$$\left(\alpha, -\frac{1}{2}\alpha + 5\right), \left(\beta, -\frac{1}{2}\beta + 5\right)$$

이고, $\overline{AH_2} = \frac{9}{4}$ 에서 $\overline{AH_2} = \overline{AH_1} - \overline{H_1H_2}$ 이므로

$$\frac{9}{4} = \left(-\frac{1}{2}\alpha + 5\right) - \left(-\frac{1}{2}\beta + 5\right)$$

$$\therefore \alpha - \beta = -\frac{9}{2}$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{이므로}$$

$$\left(-\frac{9}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2a}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{5}{a}\right)$$

$$81a^2 - 80a - 1 = 0, (81a+1)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore \alpha\beta = -5$$

008

이차함수 $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$ 의 그래프와 직선 $y = x + k$ 가 한 점

A에서만 만나므로 이차방정식 $-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = x + k$, 즉

$$x^2 + 4x + 2k - 8 = 0$$
은 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 2^2 - (2k-8) = 0$$

$$\therefore k = 6$$

$k = 6$ 을 이차방정식 $x^2 + 4x + 2k - 8 = 0$ 에 대입하면

$$x^2 + 4x + 4 = 0, (x+2)^2 = 0$$

$$\therefore x = -2$$

즉, 점 A의 좌표는 $(-2, 4)$

이고, 점 A에서 변 BC에 내

린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = 4$$

$$\text{이차함수 } y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$$

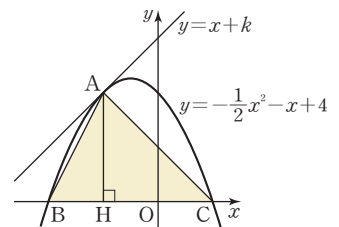
의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표는 이차방정식

$$-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0, \text{ 즉 } x^2 + 2x - 8 = 0 \text{에서}$$

$$(x+4)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 $B(-4, 0), C(2, 0)$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는



$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$

답 12

009

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 이차함수 $f(x) = (x-p)^2 + 2q + 1$ 에 대하여

(i) $p=1$ 일 때

$$M = f(-2) = 2q + 10, m = f(1) = 2q + 1 \text{ 이므로}$$

$$2q + 10 \leq 26, 2q + 1 \geq 6$$

$$\therefore \frac{5}{2} \leq q \leq 8$$

따라서 자연수 q 는 3, 4, 5, 6, 7, 8의 6개이다.

(ii) $p=2$ 일 때

$$M = f(-2) = 2q + 17, m = f(2) = 2q + 1 \text{ 이므로}$$

$$2q + 17 \leq 26, 2q + 1 \geq 6$$

$$\therefore \frac{5}{2} \leq q \leq \frac{9}{2}$$

따라서 자연수 q 는 3, 4의 2개이다.

(iii) $p \geq 3$ 일 때

$$M = f(-2) = (p+2)^2 + 2q + 1,$$

$$m = f(2) = (p-2)^2 + 2q + 1$$

이므로

$$(p+2)^2 + 2q + 1 \leq 26, (p-2)^2 + 2q + 1 \geq 6$$

위의 부등식을 동시에 만족시키는 자연수 p, q 의 값은 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에서 모든 순서쌍 (p, q) 의 개수는

$$6 + 2 = 8$$

답 8

010

조건 (가)에 의하여 $-3 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 최댓값을 갖고, $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 -1 이므로

$$f(x) = -(x+1)^2 + q \quad (q \text{는 상수})$$

라 하자.

$-3 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값을 가지므로 조건 (나)에서 $f(2) = -5$

$$-(2+1)^2 + q = -5$$

$$\therefore q = 4$$

따라서 $f(x) = -(x+1)^2 + 4 = -x^2 - 2x + 3$ 이므로

$$b^2 - a = -2, a - 2b + 1 = 3$$

$a - 2b + 1 = 3$ 에서 $a = 2b + 2$ 이므로 이것을 $b^2 - a = -2$ 에 대입하면

$$b^2 - (2b + 2) = -2$$

$$b^2 - 2b = 0, b(b-2) = 0$$

$$\therefore b = 0 \text{ 또는 } b = 2$$

이때 $ab \neq 0$ 에서 $a = 6, b = 2$ 이므로

$$a + b = 6 + 2 = 8$$

답 8

011

$$f(x) = -x^2 + 4x + k + 3 = -(x-2)^2 + k + 7$$

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2, k+7)$ 이고,

직선 $y = 2x + 3$ 은 점 $(2, 7)$ 을 지난다.

이때 k 는 양수이므로

$$f(2) = k + 7 > 7$$

이 되어 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + 3$ 은 오른쪽 그림과 같다.

$a < 2 < \beta$ 이므로 $a \leq x \leq \beta$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(2)$ 이고 최솟값은 $f(a)$ 이다.

$$f(2) = k + 7 = 10 \text{에서}$$

$$k = 3$$

이차함수 $f(x) = -x^2 + 4x + 6$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + 3$ 의 교점의 x 좌표는 $-x^2 + 4x + 6 = 2x + 3$ 에서

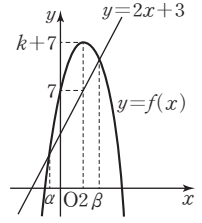
$$x^2 - 2x - 3 = 0, (x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

이때 $a < \beta$ 이므로 $a = -1, \beta = 3$

따라서 $-1 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

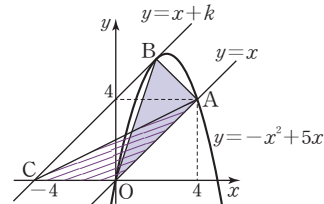
$$f(-1) = -1 - 4 + 6 = 1$$



답 ①

012

삼각형 OAB의 넓이는 다음 그림과 같이 직선 OA와 평행한 직선이 점 B에서 이차함수 $y = -x^2 + 5x$ 의 그래프와 접할 때 최댓값을 갖는다.



직선 OA의 방정식은 $y = x$ 이므로 점 B를 지나고 직선 OA에 평행한 직선의 방정식을 $y = x + k$ (k 는 상수)라 하면 이차방정식 $-x^2 + 5x = x + k$, 즉 $x^2 - 4x + k = 0$ 이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - k = 0$$

$$\therefore k = 4$$

따라서 접선의 방정식은 $y = x + 4$ 이다.

이 접선의 x 절편은 -4 이므로 이 접선이 x 축과 만나는 점을

$C(-4, 0)$ 이라 하면 삼각형 OAB와 삼각형 OAC의 넓이가 같으므로 구하는 넓이의 최댓값은 $\rightarrow \overline{AO} \parallel \overline{BC}$ 이므로 선분 OA를 밑변으로 할 때 두 삼각형 OAB, OAC의 높이는 같다.

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

답 8

013

두 이차함수 $y = (x-2)^2 - 1, y = -\frac{1}{3}(x-2)^2 + k$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=2$ 로 같으므로 두 이차함수의 그래프의 교점을 각각 A, B라 하면 두 점 A, B는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이다.

이때 두 점 사이의 거리가 6이므로 두 점 A, B의 x 좌표는 각각

$$2 - \frac{6}{2} = -1, 2 + \frac{6}{2} = 5$$

즉, $x = -1$ 일 때 두 이차함수의 함수값이 같으므로

$$(-3)^2 - 1 = -\frac{1}{3} \times (-3)^2 + k$$

$$\therefore k = 11$$

따라서 두 이차함수 $y = (x-2)^2 - 1$, $y = -\frac{1}{3}(x-2)^2 + 11$ 의 꼭짓점의 좌표는 각각 $(2, -1)$, $(2, 11)$ 이므로 이 두 점 사이의 거리는

$$11 - (-1) = 12$$

답 12

014

직선 $y = n$ 이 이차함수 $y = x^2 - 6x + 9$ 의 그래프와 만나는 점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 - 6x + 9 = n$ 의 실근과 같다.

$$x^2 - 6x + 9 = n \text{에서 } (x-3)^2 = n$$

$$\therefore x = 3 \pm \sqrt{n}$$

이때 $\alpha = 3 - \sqrt{n}$, $\beta = 3 + \sqrt{n}$ 이라 하면

(i) $1 \leq n \leq 9$ 일 때

$\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ 이므로

$$\frac{|\alpha| + |\beta|}{2} = \frac{(3 - \sqrt{n}) + (3 + \sqrt{n})}{2} = 3$$

따라서 $\frac{|\alpha| + |\beta|}{2}$ 의 값이 자연수가 되는 n 의 값은

1, 2, 3, ..., 9

의 9개이다.

(ii) $9 < n \leq 50$ 일 때

$\alpha < 0$, $\beta > 0$ 이므로

$$\frac{|\alpha| + |\beta|}{2} = \frac{-(3 - \sqrt{n}) + (3 + \sqrt{n})}{2} = \sqrt{n}$$

따라서 $\frac{|\alpha| + |\beta|}{2}$ 의 값이 자연수가 되는 n 의 값은

$4^2, 5^2, 6^2, 7^2$

의 4개이다.

(i), (ii)에서 구하는 자연수 n 의 개수는

$$9 + 4 = 13$$

답 13

015

이차함수 $y = ax^2 + 2bx + 2 - a$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않거나 오직 한 점에서만 만나려면 이차방정식 $ax^2 + 2bx + 2 - a = 0$ 이 중근을 갖거나 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = b^2 - a(2 - a) \leq 0$$

$$a^2 - 2a + b^2 \leq 0$$

$$\therefore (a-1)^2 + b^2 \leq 1 \quad \text{[다른 풀이]}$$

이때 $b^2 \leq 1$ 이므로

$$b = -1 \text{ 또는 } b = 0 \text{ 또는 } b = 1$$

(i) $b = -1$ 또는 $b = 1$ 일 때

$$(a-1)^2 \leq 0 \text{이므로}$$

$$a = 1$$

따라서 가능한 정수 a, b 의 값은

$$a = 1, b = -1 \text{ 또는 } a = 1, b = 1$$

이므로 $a+b$ 의 값은 0 또는 2이다.

(ii) $b = 0$ 일 때

$$(a-1)^2 \leq 1 \text{이므로}$$

$$a = 0 \text{ 또는 } a = 1 \text{ 또는 } a = 2$$

이때 $a \neq 0$ 이어야 하므로

$$a = 1 \text{ 또는 } a = 2$$

따라서 가능한 정수 a, b 의 값은

$$a = 1, b = 0 \text{ 또는 } a = 2, b = 0$$

이므로 $a+b$ 의 값은 1 또는 2이다.

(i), (ii)에서 가능한 $a+b$ 의 값은 0, 1, 2의 3개이다.

답 3

[다른 풀이]

$(a-1)^2 + b^2 \leq 1$ 에서 $(a-1)^2 \leq 1$ 이므로

$$a = 0 \text{ 또는 } a = 1 \text{ 또는 } a = 2$$

이때 $a \neq 0$ 이므로

$$a = 1 \text{ 또는 } a = 2$$

(i) $a = 1$ 일 때

$$b^2 \leq 1 \text{이므로}$$

$$b = -1 \text{ 또는 } b = 0 \text{ 또는 } b = 1$$

즉, 가능한 정수 a, b 의 값은

$$a = 1, b = -1 \text{ 또는 } a = 1, b = 0 \text{ 또는 } a = 1, b = 1$$

이므로 $a+b$ 의 값은 0 또는 1 또는 2이다.

(ii) $a = 2$ 일 때

$$b^2 \leq 0 \text{이므로}$$

$$b = 0$$

즉, 가능한 정수 a, b 의 값은

$$a = 2, b = 0$$

이므로 $a+b$ 의 값은 2이다.

(i), (ii)에서 가능한 $a+b$ 의 값은 0, 1, 2의 3개이다.

016

p, q 는 음이 아닌 정수이므로 $p^2 + q^2 = 5$ 에서

$$p = 1, q = 2 \text{ 또는 } p = 2, q = 1$$

이차방정식 $f(x) = 0$, 즉 $x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 4 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (-a)^2 - (a^2 + 2a - 4)$$

$$= -2a + 4$$

이차방정식 $g(x) = 0$, 즉 $3x^2 - 4x + a = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (-2)^2 - 3a$$

$$= 4 - 3a$$

(i) $p = 1, q = 2$ 일 때

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 접하므로

$$\frac{D_1}{4} = -2a + 4 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$\frac{D_2}{4} = 4 - 3a > 0$$

$$\therefore a < \frac{4}{3}$$

두 조건을 모두 만족시키는 실수 a 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $p = 2, q = 1$ 일 때

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$\frac{D_1}{4} = -2a + 4 > 0$$

$$\therefore a < 2$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 x 축과 접하므로

$$\frac{D_2}{4} = 4 - 3a = 0$$

$$\therefore a = \frac{4}{3}$$

두 조건을 모두 만족시키는 실수 a 의 값은 $\frac{4}{3}$ 이다.

(i), (ii)에서 실수 a 의 값은 $\frac{4}{3}$ 이다.

답 $\frac{4}{3}$

017

$f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = -x^2 + cx + d$ 에서

$$f(x) - g(x) = 2x^2 + (a-c)x + b-d$$

ㄱ. 함수 $f(x) = x^2 + ax + b$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = a^2 - 4b < 0 \text{ (거짓)}$$

ㄴ. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x) - g(x) = 0$, 즉

$$2x^2 + (a-c)x + b-d = 0 \text{의 판별식을 } D_2 \text{라 하면}$$

$$D_2 = (a-c)^2 - 8(b-d) > 0 \text{ (참)}$$

ㄷ. 주어진 그래프에서 $f(1) > g(1)$ 이므로

$$f(1) - g(1) > 0$$

$$1 + a + b - (-1 + c + d) > 0$$

$$\therefore a - c + b - d > -2 \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ①

018

두 함수 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ 과 $g(x) = x - 1$ 의 그래프의 교점의 x 좌표를 α , β 라 하면 α , β 는 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = x - 1$, 즉 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면 α , β 는 이차방정식 $h(x) = 0$ 의 두 실근이므로 방정식 $h(k-4x) = 0$ 의 두 실근은 $k-4x = \alpha$,

$$k-4x = \beta \text{에서}$$

$$x = \frac{k-\alpha}{4} \text{ 또는 } x = \frac{k-\beta}{4}$$

이때 두 실근의 곱이 $\frac{7}{8}$ 이므로

$$\frac{k-\alpha}{4} \times \frac{k-\beta}{4} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{k^2 - (\alpha + \beta)k + \alpha\beta}{16} = \frac{7}{8}$$

①을 위의 식에 대입하면

$$\frac{k^2 - 4k + 2}{16} = \frac{7}{8}$$

$$k^2 - 4k + 2 = 14$$

$$\therefore k^2 - 4k - 12 = 0$$

따라서 k 에 대한 이차방정식 $k^2 - 4k - 12 = 0$ 에서 근과 계수의 관

058 정답과 풀이

계에 의하여 모든 상수 k 의 값의 합은 4이다.

답 4

019

조건 (가)에서 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \leq f(1)$ 이므로 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$ 이고, $a < 0$ 이어야 한다.

조건 (나)에서 $a = -2$ ($\because a < 0$)

따라서 $f(x) = -2(x-1)^2 + k$ (k 는 상수)라 하면 조건 (다)에서

$$f(-1) = -5 \text{이므로}$$

$$-8 + k = -5 \quad \therefore k = 3$$

$$\therefore f(x) = -2(x-1)^2 + 3$$

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x+b$ 가 만나야 하므로 이차방정식 $-2(x-1)^2 + 3 = x+b$, 즉 $2x^2 - 3x + b - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-3)^2 - 8(b-1) \geq 0$$

$$\therefore b \leq \frac{17}{8}$$

따라서 정수 b 의 최댓값은 2이다.

답 2

020

자연수 n 에 대하여 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 n 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수 $y=f(x)$ 는

$$f(x) = (x-n)^2 + 2$$

이차방정식 $(x-n)^2 + 2 = (n+3)x$, 즉

$$x^2 - 3(n+1)x + n^2 + 2 = 0 \text{의 판별식을 } D_1 \text{이라 하면}$$

$$D_1 = \{-3(n+1)\}^2 - 4(n^2 + 2)$$

$$= 5n^2 + 18n + 1 > 0$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=(n+3)x$ 는 서로 다른 두 점에서 만난다.

$$\therefore a = 2$$

또, 이차방정식 $(x-n)^2 + 2 = x - \frac{3n-1}{2}$, 즉

$$x^2 - (2n+1)x + n^2 + \frac{3}{2}n + \frac{3}{2} = 0 \text{의 판별식을 } D_2 \text{라 하면}$$

$$D_2 = \{-(2n+1)\}^2 - 4\left(n^2 + \frac{3}{2}n + \frac{3}{2}\right)$$

$$= -2n - 5 < 0$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x - \frac{3n-1}{2}$ 은 만나지 않는다.

$$\therefore b = 0$$

$$\therefore a - b = 2 - 0 = 2$$

답 2

021

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 최고차항의 계수의 절댓값이 같으므로 조건 (가)에서 이차함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 최고차항의 계수는 각각 -1 , 1 이다.

또, 조건 (가)에서 방정식 $f(x)-g(x)=0$, 즉 $f(x)=g(x)$ 의 근이 $x=-2$ 또는 $x=2$ 이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 두 점 A, B의 x 좌표는 각각 -2 , 2 이다.

이때 직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\therefore f(2)-f(-2)=2$$

조건 (나)에서 $\rightarrow f(2)=g(2)$

$$f(-2)+g(2)=f(-2)+f(2)=2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$f(2)=2, f(-2)=0$$

즉,

$$f(x)=-(x+2)(x-a) \quad (a \text{는 상수})$$

라 하면 $f(2)=2$ 이므로

$$-4(2-a)=2 \quad \therefore a=\frac{5}{2}$$

$$\therefore f(x)=-(x+2)\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

또,

$$g(x)=(x+2)(x-b) \quad (b \text{는 상수})$$

라 하면 $g(2)=2$ 이므로

$$4(2-b)=2 \quad \therefore b=\frac{3}{2}$$

$$\therefore g(x)=(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore f(0)g(0)=5 \times (-3)=-15$$

답 -15

022

이차방정식 $2x^2-3x+a=x+2$, 즉 $2x^2-4x+a-2=0$ 의 두 실근이 α, β 이므로 이차함수 $f(x)=2x^2-3x+a$ 의 그래프와 직선 $y=x+2$ 는 두 점 $A(\alpha, \alpha+2)$, $B(\beta, \beta+2)$ 에서 만난다.

이때 직선 $y=x+2$ 의 기울기는 1이므로 삼각형 ABC는 $\angle C=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이다.

즉, $\overline{AC}=\overline{BC}=\beta-\alpha$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (\beta-\alpha) \times (\beta-\alpha)=18$$

$$(\beta-\alpha)^2=36$$

$$\therefore \beta-\alpha=6 \quad (\because \alpha < \beta) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이차방정식 $2x^2-4x+a-2=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$ $\dots\dots \textcircled{8}$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$\alpha=-2, \beta=4$$

이때 이차방정식의 두 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2 \times 4 = \frac{a-2}{2} \quad \therefore a=-14$$

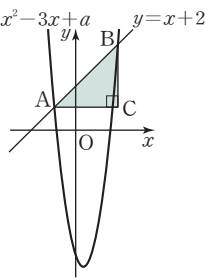
따라서 $f(x)=2x^2-3x-14$ 이므로 $f(k)=6$ 에서

$$2k^2-3k-14=6, 2k^2-3k-20=0$$

$$(2k+5)(k-4)=0$$

$$\therefore k=4 \quad (\because k > 0)$$

답 4



다른 풀이

이차방정식 $2x^2-3x+a=x+2$, 즉 $2x^2-4x+a-2=0$ 의 두 실근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2, \alpha\beta=\frac{a-2}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$A(\alpha, \alpha+2)$, $B(\beta, \beta+2)$, $C(\beta, \alpha+2)$ 에서

$$\overline{AC}=\beta-\alpha,$$

$$\overline{BC}=(\beta+2)-(\alpha+2)=\beta-\alpha$$

이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (\beta-\alpha) \times (\beta-\alpha)=18$$

$$\therefore (\beta-\alpha)^2=36 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ 이므로 $\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 대입하면

$$36=2^2-4 \times \frac{a-2}{2}$$

$$\therefore a=-14$$

따라서 $f(x)=2x^2-3x-14$ 이므로 $f(k)=6$ 에서

$$2k^2-3k-14=6, 2k^2-3k-20=0$$

$$(2k+5)(k-4)=0$$

$$\therefore k=4 \quad (\because k > 0)$$

023

조건 (가)에서 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-4$ 가 접하므로 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 y 좌표는 -4 이고, 이차방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, β 라 하면

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ 이고 $f(3x-1)=0$ 에서

$$(3x-1-\alpha)(3x-1-\beta)=0$$

$$\therefore x=\frac{\alpha+1}{3} \quad \text{또는} \quad x=\frac{\beta+1}{3}$$

조건 (나)에서 방정식 $f(3x-1)=0$ 의 서로 다른 두 실근의 합이 -2 이므로

$$\frac{\alpha+1}{3} + \frac{\beta+1}{3} = -2$$

$$\therefore \alpha+\beta=-8$$

이때 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=-4 \text{이므로 } y=f(x) \text{의 그래프의 꼭짓점의 } x \text{좌표는}$$

-4 이다.

따라서 $f(x)=(x+4)^2-4$ 이므로

$$f(-5)=1-4=-3$$

답 ③

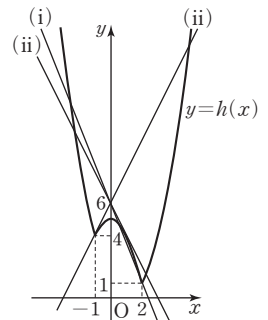
024

$$h(-1)=g(-1)=4,$$

$$h(2)=g(2)=1 \text{이고 } f(-1)=4,$$

$f(2)=1$ 이므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 직선 $y=ax+6$ 은 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 6)$ 을 지나므로 이 직선과 함수 $y=h(x)$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3인 경우는 다음과 같다.



(i) 직선 $y=ax+6$ 이 점 $(2, 1)$ 을 지날 때

$$1=2a+6$$

$$\therefore a=-\frac{5}{2}$$

(ii) 직선 $y=ax+6$ 이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에 접할 때

이차방정식 $-x^2+5=ax+6$, 즉 $x^2+ax+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=a^2-4=0$$

$$\therefore a=\pm 2$$

㉓ $a=2$ 일 때

이차방정식 $x^2+2x+1=0$, 즉 $(x+1)^2=0$ 에서

$$x=-1$$

그런데 $x=-1$ 일 때 직선 $y=2x+6$ 은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에 접하는 동시에 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 만나므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만난다.

㉔ $a=-2$ 일 때

직선 $y=-2x+6$ 과 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만난다.

(i), (ii)에서 $N(a)=3$ 을 만족시키는 실수 a 의 개수는

$$-\frac{5}{2}, -2$$

의 2이다.

답 2

025

조건 (가)에서

$$f(x)g(x)=(x+2)(x-2)(x+4)(x-4)$$

조건 (나)에서 방정식 $f(x)=0$ 의 두 실근이

$$a, a+6$$

이므로 $f(x)=0$ 의 두 실근의 차가 6임을 알 수 있다.

(i) $f(x)=a(x+2)(x-4)$, $g(x)=\frac{1}{a}(x+4)(x-2)$ ($a \neq 0$)인

경우

방정식 $f(x)-g(x)=0$ 에서

$$a(x+2)(x-4)-\frac{1}{a}(x+4)(x-2)=0,$$

$$a^2(x^2-2x-8)-(x^2+2x-8)=0$$

$$\therefore (a^2-1)x^2-2(a^2+1)x-8(a^2-1)=0$$

이 방정식이 서로 다른 두 정수 m, n 을 근으로 가지므로

$a^2-1 \neq 0$, 즉 $a \neq \pm 1$ 이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$m+n=\frac{2(a^2+1)}{a^2-1}, mn=-8$$

두 정수 m, n 에 대하여 $mn=-8$ 인 경우를 순서쌍 (m, n) 으로 나타내면

$$(1, -8), (2, -4), (4, -2), (8, -1),$$

$$(-8, 1), (-4, 2), (-2, 4), (-1, 8)$$

㉓ (m, n) 이 $(1, -8)$ 또는 $(-8, 1)$ 일 때

$$m+n=\frac{2(a^2+1)}{a^2-1}=-7$$

$$2(a^2+1)=-7(a^2-1)$$

$$a^2=\frac{5}{9}$$

$$\therefore a=\pm\sqrt{\frac{5}{9}}$$

즉, 방정식 $f(x)-g(x)=0$ 은

$$x=-8, x=1$$

을 근으로 갖는다.

㉔ (m, n) 이 $(2, -4)$ 또는 $(-4, 2)$ 일 때

$$m+n=\frac{2(a^2+1)}{a^2-1}=-2$$

$$2(a^2+1)=-2(a^2-1)$$

$$a^2=0$$

$$\therefore a=0$$

이때 $a \neq 0$ 이므로 방정식 $f(x)-g(x)=0$ 은

$$x=-4, x=2$$

를 근으로 가질 수 없다.

㉕ (m, n) 이 $(4, -2)$ 또는 $(-2, 4)$ 일 때

$$m+n=\frac{2(a^2+1)}{a^2-1}=2$$

$$2(a^2+1)=2(a^2-1)$$

$$\therefore -2 \neq 2$$

즉, 조건을 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않으므로 방정식

$f(x)-g(x)=0$ 은

$$x=-2, x=4$$

를 근으로 가질 수 없다.

㉖ (m, n) 이 $(8, -1)$ 또는 $(-1, 8)$ 일 때

$$m+n=\frac{2(a^2+1)}{a^2-1}=7$$

$$2(a^2+1)=7(a^2-1)$$

$$a^2=\frac{9}{5}$$

$$\therefore a=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$$

즉, 방정식 $f(x)-g(x)=0$ 은

$$x=-1, x=8$$

을 근으로 갖는다.

㉓~㉖에서 순서쌍 (m, n) 은

$$(1, -8), (-8, 1), (8, -1), (-1, 8)$$

(ii) $f(x)=a(x+4)(x-2)$, $g(x)=\frac{1}{a}(x+2)(x-4)$ ($a \neq 0$)인

경우

방정식 $f(x)-g(x)=0$ 에서

$$a(x+4)(x-2)-\frac{1}{a}(x+2)(x-4)=0$$

$$\therefore (a^2-1)x^2+2(a^2+1)x-8(a^2-1)=0$$

이 방정식이 서로 다른 두 정수 m, n 을 근으로 가지므로

$a^2-1 \neq 0$, 즉 $a \neq \pm 1$ 이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$m+n=-\frac{2(a^2+1)}{a^2-1}, mn=-8$$

(i)과 같은 방법으로 구하면 순서쌍 (m, n) 은

$$(1, -8), (-8, 1), (8, -1), (-1, 8)$$

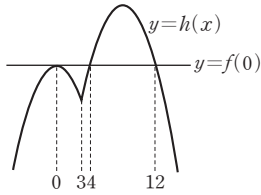
(i), (ii)에서 $m+n$ 의 최댓값은

$$8+(-1)=-1+8=7$$

답 7

026

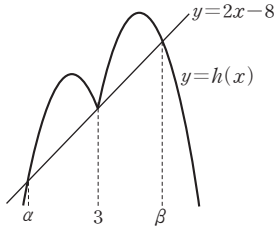
$f(3)=g(3)$ 과 조건 (가)에 의하여 함수 $y=h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다. 다른 풀이



즉, $f(0)=k$ (k 는 상수)라 하면 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 a 이므로

$$f(x)=ax^2+k, g(x)=a(x-4)(x-12)+k$$

한편, 조건 ④에 의하여 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2x-8$ 의 개형은 다음 그림과 같다.



이차방정식 $f(x)=2x-8$ 의 두 실근은 a , 3이고, 이차방정식 $g(x)=2x-8$ 의 두 실근은 3, β 이다.

이차방정식 $f(x)=2x-8$, 즉 $ax^2-2x+k+8=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+3=\frac{2}{a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $g(x)=2x-8$, 즉

$$ax^2-(16a+2)x+48a+k+8=0$$

$$3+\beta=\frac{16a+2}{a}=16+\frac{2}{a} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $a+\beta+6=16+\frac{4}{a}$ 이고 $a+\beta=6$ 이므로

$$\frac{4}{a}=-4$$

$$\therefore a=-1$$

$x=3$, $a=-1$ 을 $ax^2-2x+k+8=0$ 에 대입하여 풀면

$$k=7$$

따라서 $f(x)=-x^2+7$, $g(x)=-x^2+16x-41$ 이므로

$$h(-2)+h(5)=f(-2)+g(5) \\ =3+14=17$$

답 ③

다른 풀이

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=0$ 이므로

$$f(x)=ax^2+b \quad (b \text{는 상수})$$

라 하자.

또, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{4+12}{2}=8$ 이므로

$$g(x)=a(x-8)^2+c \\ =ax^2-16ax+64a+c \quad (c \text{는 상수})$$

라 하자.

이때 $f(3)=g(3)$ 이므로

$$9a+b=25a+c$$

$$\therefore c=-16a+b$$

한편, 이차방정식 $f(x)=2x-8$, 즉 $ax^2-2x+8+b=0$ 의 두 실근은 a , 3이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+3=\frac{2}{a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 이차방정식 $g(x)=2x-8$, 즉

$ax^2-(16a+2)x+48a+b+8=0$ 의 두 실근이 3, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$3+\beta=16+\frac{2}{a} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $a+\beta+6=16+\frac{4}{a}$ 이고 $a+\beta=6$ 이므로

$$\frac{4}{a}=-4$$

$$\therefore a=-1$$

이때 두 함수 $f(x)=ax^2+b$, $g(x)=ax^2-16ax+64a+c$ 의 그래프가 점 $(3, -2)$ 를 지나므로

$$9a+b=-2, 25a+c=-2$$

위의 식에 $a=-1$ 을 대입하여 풀면

$$b=7, c=23$$

따라서 $f(x)=-x^2+7$, $g(x)=-(x-8)^2+23$ 이므로

$$h(-2)+h(5)=f(-2)+g(5) \\ =3+14=17$$

027

$4 \leq x \leq 6$ 에서 이차함수 $y=x^2-4ax+4a^2+2b=(x-2a)^2+2b$ 는

(i) $2a < 4$, 즉 $a < 2$ 일 때

$x=4$ 에서 최솟값을 가지므로

$$(4-2a)^2+2b=8$$

$$\therefore b=-2(a-2)^2+4$$

(ii) $4 \leq 2a < 6$, 즉 $2 \leq a < 3$ 일 때

$x=2a$ 에서 최솟값을 가지므로

$$2b=8$$

$$\therefore b=4$$

(iii) $2a \geq 6$, 즉 $a \geq 3$ 일 때

$x=6$ 에서 최솟값을 가지므로

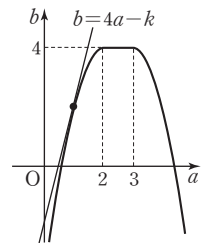
$$(6-2a)^2+2b=8$$

$$\therefore b=-2(a-3)^2+4$$

(i)~(iii)에서

$$b = \begin{cases} -2(a-2)^2+4 & (a < 2) \\ 4 & (2 \leq a < 3) \\ -2(a-3)^2+4 & (a \geq 3) \end{cases}$$

이때 $4a-b=k$ (k 는 상수)라 하면 오른쪽 그림과 같이 직선 $b=4a-k$ 가 이차함수 $b=-2(a-2)^2+4$ ($a < 2$)의 그래프에 접할 때 $-k$ 는 최댓값, 즉 k 는 최솟값을 갖는다.



이차방정식 $-2(a-2)^2+4=4a-k$, 즉 $2a^2-4a+4-k=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-2(4-k)=0$$

$$\therefore k=2$$

따라서 $4a-b$ 의 최솟값은 2이다.

답 2

028

두 점 A, B는 이차함수 $y=x^2+6x+5$ 의 그래프와 x 축의 교점이

므로 $x^2+6x+5=0$ 에서
 $(x+5)(x+1)=0 \quad \therefore x=-5$ 또는 $x=-1$
 $\therefore A(-5, 0), B(-1, 0)$
 또, 점 C는 이차함수 $y=x^2+6x+5$ 의 그래프와 y 축의 교점이므로 $C(0, 5)$
 이때 점 $P(a, b)$ 가 점 $A(-5, 0)$ 에서 점 $C(0, 5)$ 까지 움직이므로 $-5 \leq a \leq 0$ 이고, 이차함수 $y=x^2+6x+5$ 의 그래프 위의 점이므로
 $b=a^2+6a+5$
 $\therefore 2a+b+10=2a+(a^2+6a+5)+10$
 $=a^2+8a+15$
 $=(a+4)^2-1$
 따라서 $2a+b+10$ 은 $-5 \leq a \leq 0$ 에서 $a=-4$ 일 때 최솟값 -1 , $a=0$ 일 때 최댓값 15 를 가지므로 최댓값과 최솟값의 차는
 $15-(-1)=16$

답 16

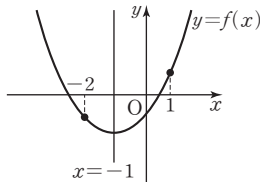
029

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축에 접하므로 이차방정식 $f(x)=0$ 은 중근을 갖는다.
 즉, 이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D=(-a)^2-4b=0$
 $\therefore b=\frac{a^2}{4}$
 $\therefore f(x)=x^2-ax+\frac{a^2}{4}=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$
 따라서 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{a}{2}$ 이고,
 $-a < \frac{a}{2} < a$ 이므로 조건 (나)에 의하여 $-a \leq x \leq a$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=-a$ 일 때 최댓값 72 를 갖는다.
 즉, $f(-a)=72$ 에서
 $\frac{9}{4}a^2=72 \quad \therefore a=4\sqrt{2} (\because a > 0)$
 따라서 $f(x)=(x-2\sqrt{2})^2$ 이므로
 $f(\sqrt{2})=2$

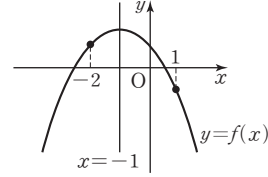
답 2

030

조건 (가)의 $f(-2)=f(0)$ 에서 이차함수 $f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{-2+0}{2}=-1$ 이므로
 $f(x)=a(x+1)^2+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하자.
 이때 $f(-2) \neq f(1)$ 이고, 조건 (나)에서 $|f(1)| > 0$ 이므로
 $f(-2) < 0$
 $\therefore f(-2)+f(1)=0$
 (i) $a > 0$ 일 때



$f(-2)+f(1)=0$ 에서
 $(a+b)+(4a+b)=0$
 $\therefore 5a+2b=0 \quad \dots \textcircled{7}$
 (ii) $a < 0$ 일 때



$f(-2) > 0$ 이므로 $f(-2) < 0$ 에 모순이다.
 (i), (ii)에서 $f(x)=a(x+1)^2+b$ ($a > 0$)
 즉, $-4 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최댓값 27 을 가지므로
 $f(3)=16a+b=27 \quad \dots \textcircled{8}$
 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면
 $a=2, b=-5$
 따라서 $f(x)=2(x+1)^2-5$ 이므로
 $f(2)=18-5=13$

답 13

031

$0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값과 $0 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 m 으로 같으므로
 $0 < p \leq 3, q=m$
 $\therefore f(x)=(x-p)^2+m$ **다른 풀이**
 (i) $0 < p \leq \frac{3}{2}$ 일 때
 조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최댓값 $m+4$ 를 가지므로
 $f(3)=m+4$
 $(3-p)^2+m=m+4, (3-p)^2=4$
 $\therefore p=1 (\because 0 < p \leq \frac{3}{2})$
 $\therefore f(x)=(x-1)^2+m$
 또, 조건 (나)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=5$ 일 때 최댓값 $4m$ 을 가지므로
 $f(5)=4m$
 $16+m=4m$
 $\therefore m=\frac{16}{3}$
 그런데 m 은 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.
 (ii) $\frac{3}{2} < p \leq \frac{5}{2}$ 일 때
 조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최댓값 $m+4$ 를 가지므로
 $f(0)=m+4$
 $p^2+m=m+4, p^2=4$
 $\therefore p=2 (\because \frac{3}{2} < p \leq \frac{5}{2})$
 $\therefore f(x)=(x-2)^2+m$
 또, 조건 (나)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=5$ 일 때 최댓값 $4m$ 을 가지므로
 $f(5)=4m$
 $9+m=4m$
 $\therefore m=3$
 (iii) $\frac{5}{2} < p \leq 3$ 일 때

조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최댓값 $m+4$ 를 가지므로
 $f(0)=m+4$
 $p^2+m=m+4, p^2=4$
 그런데 $\frac{5}{2} < p \leq 3$ 이므로 조건을 만족시키는 p 의 값이 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에서 $f(x)=(x-2)^2+3$ 이므로
 $f(10)=64+3=67$

답 67

다른 풀이

조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은
 $f(0)=p^2+m$ 또는 $f(3)=(3-p)^2+m$
 이때 $p^2+m=m+4$ 이면 $p=2$ ($\because p>0$)
 또, $(3-p)^2+m=m+4$ 이면 $p=1$ ($\because 0 < p \leq 3$)
 조건 (나)에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은
 $f(0)=p^2+m$ 또는 $f(5)=(5-p)^2+m$
 이때 $p^2+m=4m$ 이면 조건 (가)에 의하여

$p=2$ 일 때 $m=\frac{4}{3}$,

$p=1$ 일 때 $m=\frac{1}{3}$

이므로 m 이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

또, $(5-p)^2+m=4m$ 이면 조건 (가)에 의하여

$p=2$ 일 때 $m=3$,

$p=1$ 일 때 $m=\frac{16}{3}$

m 은 자연수이므로 $m=3, p=2$

따라서 $f(x)=(x-2)^2+3$ 이므로

$f(10)=64+3=67$

032

이차함수 $f(x)=a(x-b)^2$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=b$ 이므로

(i) $0 < b < 4$ 일 때

$4 \leq x \leq 6$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=6$ 일 때 최댓값을 갖고, $x=4$ 일 때 최솟값을 가지므로

$$\begin{aligned} h(4) &= f(6) - f(4) \\ &= a(6-b)^2 - a(4-b)^2 \\ &= 4a(5-b) \end{aligned}$$

즉, $4a(5-b)=a$ 이므로

$4(5-b)=1$

$\therefore b = \frac{19}{4}$

그런데 $0 < b < 4$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $4 \leq b < 5$ 일 때

$4 \leq x \leq 6$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=6$ 일 때 최댓값을 갖고, $x=b$ 일 때 최솟값을 가지므로

$$\begin{aligned} h(4) &= f(6) - f(b) \\ &= a(6-b)^2 \end{aligned}$$

즉, $a(6-b)^2=a$ 이므로

$(6-b)^2=1$

$\therefore b=5$ 또는 $b=7$

그런데 $4 \leq b < 5$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $5 \leq b < 6$ 일 때

$4 \leq x \leq 6$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 일 때 최댓값을 갖고, $x=b$ 일 때 최솟값을 가지므로

$$\begin{aligned} h(4) &= f(4) - f(b) \\ &= a(4-b)^2 \end{aligned}$$

즉, $a(4-b)^2=a$ 이므로

$(4-b)^2=1$

$\therefore b=3$ 또는 $b=5$

이때 $5 \leq b < 6$ 이므로 $b=5$

(iv) $b \geq 6$ 일 때

$4 \leq x \leq 6$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 일 때 최댓값을 갖고, $x=6$ 일 때 최솟값을 가지므로

$$\begin{aligned} h(4) &= f(4) - f(6) \\ &= a(4-b)^2 - a(6-b)^2 \\ &= 4a(b-5) \end{aligned}$$

즉, $4a(b-5)=a$ 이므로

$4(b-5)=1$

$\therefore b = \frac{21}{4}$

그런데 $b \geq 6$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 $b=5$

$\therefore f(x)=a(x-5)^2$

이때 $3 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최댓값을 갖고 $x=5$ 일 때 최솟값을 갖는다.

또, $5 \leq x \leq 7$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=7$ 일 때 최댓값을 갖고 $x=5$ 일 때 최솟값을 갖는다.

$$\begin{aligned} \therefore h(3)+h(5) &= f(3)-f(5)+f(7)-f(5) \\ &= f(3)+f(7) \quad (\because f(5)=0) \\ &= 4a+4a \\ &= 8a \end{aligned}$$

즉, $8a=24$ 이므로

$a=3$

$\therefore ab=3 \times 5=15$

답 15

033

이차함수 $f(x)=-(x-p)^2+q$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 (p, q) 이다.

ㄱ. $p = \frac{7}{2}$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{7}{2}$ 에서 최댓값 q 를 가지므로

$q=8$ (참)

ㄴ. $p \geq 4$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 최댓값 $-(4-p)^2+q$ 를 가지므로

$-(4-p)^2+q=8$

$\therefore q=p^2-8p+24$ (거짓)

ㄷ. (i) $p < 2$ 일 때

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 $-(2-p)^2+q$ 를 가지므로

$-(2-p)^2+q=8$

$\therefore q=p^2-4p+12$

$p+q=p^2-3p+12$

$= \left(p - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{39}{4}$

즉, $p+q$ 는 $p = \frac{3}{2}$ 에서 최솟값 $\frac{39}{4}$ 를 갖는다.

(ii) $2 \leq p < 4$ 일 때

함수 $f(x)$ 는 $x=p$ 에서 최댓값 q 를 가지므로

$$q=8$$

즉, $10 \leq p+q < 12$ 이므로 $p+q$ 는 $p=2$ 에서 최솟값 10을 갖는다.

(iii) $p \geq 4$ 일 때

$$q=p^2-8p+24 \text{이므로 } (\because \curvearrowright)$$

$$p+q=p^2-7p+24$$

$$=\left(p-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{47}{4}$$

즉, $p+q$ 는 $p=4$ 에서 최솟값 12를 갖는다.

(i)~(iii)에서 $p+q$ 의 최솟값은 $\frac{39}{4}$ 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㉓

034

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 선분 AC에

내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle ABC \sim \triangle APH$ (AA 닮음)

이때 $\overline{PH}=x$ ($0 < x < 2$)라 하면

$$\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{PH} : \overline{AH} \text{이므로}$$

$$2 : 2\sqrt{2} = x : \overline{AH}$$

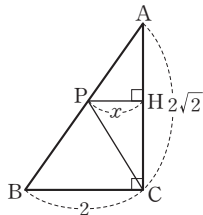
$$\therefore \overline{AH} = \sqrt{2}x$$

$$\overline{HC} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2}x = \sqrt{2}(2-x) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 &= x^2 + (\sqrt{2}x)^2 + x^2 + \{\sqrt{2}(2-x)\}^2 \\ &= 6x^2 - 8x + 8 \\ &= 6\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{16}{3} \end{aligned}$$

따라서 $\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2$ 은 $x = \frac{2}{3}$ 일 때 최솟값 $\frac{16}{3}$ 을 갖는다.

답 $\frac{16}{3}$



035

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \leq f(2)$ 이므로

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x=2$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점을 $A(2-a, 0)$, $B(2+a, 0)$ ($a > 0$)이라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x-2+a)(x-2-a) \\ &= -(x-2)^2 + a^2 \end{aligned}$$

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점 $(2, a^2)$ 과 점 $B(2+a, 0)$ 을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{0-a^2}{2+a-2} = -a$ 이므로 기울기가 $-a$ 이

고, 점 $A(2-a, 0)$ 을 지나는 직선 l 의 방정식은

$$y = -a\{x - (2-a)\} = -ax - a^2 + 2a$$

이 직선과 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표는

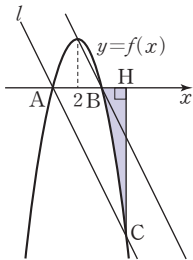
$$-ax - a^2 + 2a = -(x-2)^2 + a^2 \text{에서}$$

$$x^2 - (a+4)x - 2a^2 + 2a + 4 = 0$$

$$(x+a-2)(x-2a-2) = 0$$

$$\therefore x = 2-a \text{ 또는 } x = 2a+2$$

$$\therefore C(2a+2, -3a^2)$$



이때 $H(2a+2, 0)$ 이므로

$$\overline{BH} = 2a+2 - (2+a) = a$$

따라서 삼각형 BCH의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BH} \times \overline{CH} = \frac{1}{2} \times a \times 3a^2 = \frac{3}{2}a^3$$

즉, $\frac{3}{2}a^3 = 12$ 이므로

$$a^3 = 8$$

$$\therefore a = 2$$

따라서 $f(x) = -(x-2)^2 + 4$ 이므로 구하는 최댓값은 4이다.

답 4

036

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x-1$ 이 만나는 점의 x 좌

표는 방정식 $-x^2+9x-8=x-1$ 에서

$$x^2-8x+7=0, (x-1)(x-7)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=7$$

또,

$$f(x) = -x^2+9x-8$$

$$= -\left(x-\frac{9}{2}\right)^2 + \frac{49}{4}$$

이므로 그래프의 축의 방정식은 $x = \frac{9}{2}$ 이다.

한편, $A(t, t-1)$, $B(t, -t^2+9t-8)$ 이므로

$$\overline{AB} = -t^2+9t-8 - (t-1)$$

$$= -t^2+8t-7$$

(i) $1 < t < \frac{9}{2}$ 일 때

$$\overline{BC} = 2\left(\frac{9}{2}-t\right)$$

$$= 9-2t$$

이므로 직사각형 ABCD의 둘레

의 길이는

$$2\{(-t^2+8t-7) + (9-2t)\}$$

$$= -2(t-3)^2 + 22$$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레

의 길이는 $t=3$ 에서 최댓값 22를 갖는다.

(ii) $\frac{9}{2} < t < 7$ 일 때

$$\overline{BC} = 2\left(t-\frac{9}{2}\right)$$

$$= 2t-9$$

이므로 직사각형 ABCD의 둘레

의 길이는

$$2\{(-t^2+8t-7) + (2t-9)\}$$

$$= -2(t-5)^2 + 18$$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레

의 길이는 $t=5$ 에서 최댓값 18을 갖는다.

(i), (ii)에서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 22이다.

답 22

참고

각 구간에 따라 직사각형 ABCD를 그려 보면 $1 < t < \frac{9}{2}$ 일 때의 직사각형

이 $\frac{9}{2} < t < 7$ 일 때의 직사각형보다 크다는 것을 알 수 있으므로 $1 < t < \frac{9}{2}$

일 때의 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값만 구해도 된다.

037

두 점 A, B는 직선 $y=4a$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 만나는 점이므로 $4a=ax^2$ 에서

$$x^2=4 \quad \therefore x=\pm 2$$

$$\therefore A(-2, 4a), B(2, 4a)$$

두 점 C, D는 직선 $y=ax$ 와 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점이므로

$ax=-a(x-a)^2+a^2$ 에서 양변을

$a(a \neq 0)$ 로 나누어 정리하면

$$x^2-(2a-1)x+a(a-1)=0$$

$$(x-a+1)(x-a)=0 \quad \therefore x=a-1 \text{ 또는 } x=a$$

$$\therefore C(a-1, a^2-a), D(a, a^2) \quad \text{[다른풀이]}$$

한편, 직선 $y=4a$ 와 직선 $y=ax$ 가 만나는 점을 E라 하면 $4a=ax$ 에서

$$x=4$$

즉, E(4, 4a)이므로

$$\overline{AE}=4-(-2)=6,$$

$$\overline{BE}=4-2=2$$

삼각형 ACE의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times \{4a-(a^2-a)\} = -3a^2+15a$$

삼각형 BDE의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times (4a-a^2) = -a^2+4a$$

따라서 사각형 ACDB의 넓이는

$$\begin{aligned} -3a^2+15a - (-a^2+4a) &= -2a^2+11a \\ &= -2\left(a-\frac{11}{4}\right)^2 + \frac{121}{8} \end{aligned}$$

이므로 $2 < a < 4$ 에서 $a=\frac{11}{4}$ 일 때 최댓값 $M=\frac{121}{8}$ 을 갖는다.

$$\therefore 8 \times M = 8 \times \frac{121}{8} = 121$$

[답] 121

038

함수 $h_1(x)$ 의 이차항의 계수는 1이므로 조건 (가)에 의하여

$$h_1(x)=(x-a)^2 \quad (a \text{는 상수})$$

이라 하자.

함수 $h_2(x)$ 의 이차항의 계수는 -1 이므로 조건 (나)에 의하여

$$h_1(x)-h_2(x)=2(x-1)^2+2$$

$$\begin{aligned} \therefore h_2(x) &= (x-a)^2 - 2(x-1)^2 - 2 \\ &= -x^2 + 2(2-a)x + a^2 - 4 \end{aligned}$$

함수 $y=h_2(x)$ 의 그래프도 x 축에 접하므로 방정식 $h_2(x)=0$ 의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = (2-a)^2 - (-1) \times (a^2-4) = 0$$

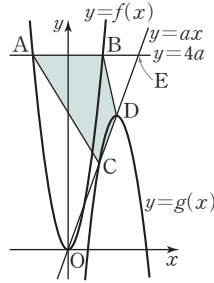
$$2a^2-4a=0, \quad 2a(a-2)=0$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=2$$

(i) $a=0$ 인 경우

$$\begin{aligned} h_1(x) &= f(x) + g(x) \\ &= x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2(x) &= f(x) - g(x-2) \\ &= -x^2 + 4x - 4 \end{aligned}$$



(ii) $a=2$ 인 경우

$$\begin{aligned} h_1(x) &= f(x) + g(x) \\ &= x^2 - 4x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2(x) &= f(x) - g(x-2) \\ &= -x^2 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned} h_1(x) - h_2(x) &= g(x) + g(x-2) \\ &= 2x^2 - 4x + 4 \end{aligned}$$

$g(x)$ 는 이차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$g(x)=x^2+px+q$ (p, q 는 상수)라 하면

$$g(x)+g(x-2)=2x^2+(2p-4)x-2p+2q+4 \text{이므로}$$

$$2p-4=-4, \quad -2p+2q+4=4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$p=0, \quad q=0$$

$$\therefore g(x)=x^2$$

(i)에서 $f(x)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 일차함수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii)에서

$$f(x)=-4x+4$$

$$\therefore f(-2)+g(2)=12+4=16$$

[답] 16

[다른풀이]

함수 $h_1(x)$ 의 최고차항의 계수가 1, 함수 $h_2(x)$ 의 최고차항의 계수가 -1 이므로

$$\begin{aligned} h_1(x) &= f(x) + g(x) \\ &= (x-m)^2 \quad (m \text{은 상수}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2(x) &= f(x) - g(x-2) \\ &= -(x-n)^2 \quad (n \text{은 상수}) \end{aligned}$$

으로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned} h_1(x) - h_2(x) &= g(x) + g(x-2) \\ &= (x-m)^2 + (x-n)^2 \\ &= 2(x-1)^2 + 2 \quad (\because \text{조건 (가)}) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2x^2 - 2(m+n)x + m^2 + n^2 = 2x^2 - 4x + 4 \text{이므로}$$

$$-2(m+n) = -4, \quad m^2 + n^2 = 4$$

$$\therefore m=0, n=2 \text{ 또는 } m=2, n=0$$

(i) $m=0, n=2$ 인 경우

$$\begin{aligned} h_1(x) &= f(x) + g(x) \\ &= x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2(x) &= f(x) - g(x-2) \\ &= -x^2 + 4x - 4 \end{aligned}$$

(ii) $m=2, n=0$ 인 경우

$$\begin{aligned} h_1(x) &= f(x) + g(x) \\ &= x^2 - 4x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2(x) &= f(x) - g(x-2) \\ &= -x^2 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned} h_1(x) - h_2(x) &= g(x) + g(x-2) \\ &= 2x^2 - 4x + 4 \end{aligned}$$

$g(x)$ 는 이차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$g(x)=x^2+px+q$ (p, q 는 상수)라 하면

$$g(x)+g(x-2)=2x^2+(2p-4)x-2p+2q+4 \text{이므로}$$

$$2p-4=-4, \quad -2p+2q+4=4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $p=0, q=0$

$$\therefore g(x)=x^2$$

(i)에서 $f(x)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 일차함수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$$(ii)에서 f(x) = -4x + 4$$

$$\therefore f(-2) + g(2) = 12 + 4 = 16$$

039

조건 (가)에서 $f(0)=f(4)$ 이므로 이차함수 $f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x=2$ 이다.

이때

$$f(x) = a(x-2)^2 + b \quad (a, b \text{는 상수}, a \neq 0)$$

라 하자.

$$\text{방정식 } |f(x)| + f(0) = 0 \text{에서}$$

$$|f(x)| = -f(0)$$

$|f(x)| \geq 0$ 이므로 $-f(0) \geq 0$, 즉 $f(0) \leq 0$ 이어야 실근이 존재한다. ㉠

$$\text{방정식 } |f(x)| = -f(0) \text{에서}$$

$$f(x) = -f(0) \text{ 또는 } f(x) = f(0)$$

$f(x) = f(0)$ 에 $x=0$ 을 대입하면 $f(0) = f(0)$ 으로 성립하고,

$x=4$ 를 대입하면 조건 (가)에 의하여 성립하므로 이차방정식

$$f(x) = f(0) \text{의 해는}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=4$$

조건 (나)에서 방정식 $|f(x)| + f(0) = 0$ 의 총 실근의 개수가 3이므로 나머지 이차방정식 $f(x) = -f(0)$ 은 중근을 가져야 한다.

이차함수의 그래프가 상수함수의 그래프와 한 점에서만 만나려면 그 점은 반드시 꼭짓점이어야 하므로

$$b = -f(0)$$

즉, $f(x) = a(x-2)^2 - f(0)$ 이므로 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0) = 4a - f(0)$$

$$\therefore f(0) = 2a$$

$$\text{㉠에서 } f(0) = 2a \leq 0 \text{이므로 } a \leq 0$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $a < 0$

따라서 $-3 \leq x \leq 7$ 에서 함수 $f(x) = a(x-2)^2 - 2a$ 는 $x = -3$ 또는 $x = 7$ 일 때 최솟값 -69 를 갖는다.

$$\text{즉, } f(-3) = f(7) = -69 \text{에서}$$

$$25a - 2a = -69$$

$$\therefore a = -3$$

따라서 $f(x) = -3(x-2)^2 + 6$ 이므로

$$f(-1) = -27 + 6 = -21$$

답 -21

040

일등급의 메모장

이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프와 직선 $y = mx + n$ 이 만나는 두 점을 A, B라 하면

$$(\text{선분 AB의 중점과 축 사이의 거리}) = \frac{m}{2a}$$

조건 (가)에 의하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 (p, kp) 라 하면

066 정답과 풀이

$$f(x) = 2(x-p)^2 + kp \quad \text{[다른 풀이]} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

조건 (나)에 의하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표가

$$\frac{1}{2}(a + \beta - 2) \text{이므로 ㉠에서}$$

$$p = \frac{1}{2}(a + \beta - 2) \quad \dots\dots \text{㉡}$$

이때 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = kx + 10$ 의 서로 다른 두 교점의 x 좌표가 각각 α, β 이므로 방정식 $f(x) = kx + 10$ 의 서로 다른 두 실근이 α, β 이다.

$$f(x) - (kx + 10) = 2(x-p)^2 + kp - (kx + 10)$$

$$= 2x^2 - (4p+k)x + 2p^2 + kp - 10$$

방정식 $2x^2 - (4p+k)x + 2p^2 + kp - 10 = 0$ 에서 이차방정식의 근

과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 2p + \frac{k}{2}$ 이므로 이 식에 ㉡을 대

입하면

$$\alpha + \beta = \alpha + \beta - 2 + \frac{k}{2}$$

$$\therefore k = 4$$

따라서

$$\alpha + \beta = 2p + 2,$$

$$\alpha\beta = p^2 + 2p - 5$$

이므로

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= (2p + 2)^2 - 4(p^2 + 2p - 5)$$

$$= 4p^2 + 8p + 4 - 4p^2 - 8p + 20$$

$$= 24$$

답 24

[다른 풀이]

조건 (나)에서 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선

$$x = \frac{1}{2}(a + \beta - 2) = \frac{\alpha + \beta}{2} - 1$$

에 대하여 대칭이다.

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = kx + 10$ 의 서로 다른 두 교점의 x 좌표가 각각 α, β 이므로

$$\frac{\alpha + \beta}{2} - \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - 1 \right) = \frac{k}{2 \times 2}$$

$$1 = \frac{k}{4}$$

$$\therefore k = 4$$

방정식 $f(x) = 4x + 10$ 에서

$$2(x-p)^2 + 4p = 4x + 10$$

$$\therefore x^2 - (2p+2)x + p^2 + 2p - 5 = 0$$

위의 이차방정식의 두 실근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2p + 2, \quad \alpha\beta = p^2 + 2p - 5$$

$$\therefore (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= (2p + 2)^2 - 4(p^2 + 2p - 5)$$

$$= 4p^2 + 8p + 4 - 4p^2 - 8p + 20$$

$$= 24$$

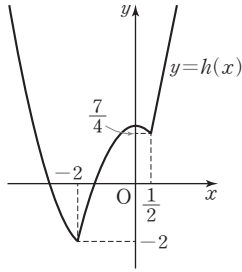
041

일등급의 메모장

이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수의 변화

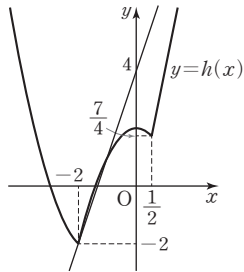
→ 접할 때와 경계점 확인

함수 $h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq \frac{1}{2}) \\ g(x) & (-2 < x < \frac{1}{2}) \end{cases}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



직선 $y = mx + 4$ 의 y 절편은 4이므로 y 절편이 4인 직선의 기울기를 변화시키며 그래프를 그려 보면 직선 $y = mx + 4$ 와 함수 $y = h(x)$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $y = mx + 4$ 가 점 $(-2, -2)$ 를 지나는 경우



$$\begin{aligned} -2 &= -2m + 4 \text{에서} \\ m &= 3 \end{aligned}$$

(ii) 직선 $y = mx + 4$ 가 함수 $y = g(x)$ ($-2 < x < \frac{1}{2}$)의 그래프에

접하는 경우

$$-x^2 + 2 = mx + 4 \text{에서}$$

$$x^2 + mx + 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = m^2 - 4 \times 2 = 0$$

$$\therefore m = \pm 2\sqrt{2}$$

㉠ $m = 2\sqrt{2}$ 일 때

$$-x^2 + 2 = 2\sqrt{2}x + 4 \text{에서}$$

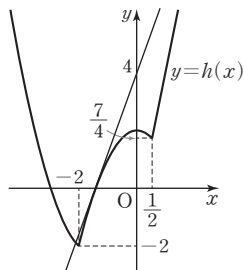
$$x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = 0, (x + \sqrt{2})^2 = 0$$

$$\therefore x = -\sqrt{2}$$

즉, 접점의 좌표는 $(-\sqrt{2}, 0)$ 이다.

따라서 직선 $y = 2\sqrt{2}x + 4$ 와 함수 $y = h(x)$ 의 그래프는

$(-\sqrt{2}, 0)$ 및 서로 다른 두 점에서 만난다.



㉡ $m = -2\sqrt{2}$ 일 때

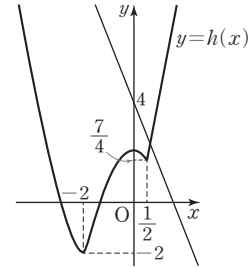
$$-x^2 + 2 = -2\sqrt{2}x + 4 \text{에서}$$

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0, (x - \sqrt{2})^2 = 0$$

$$\therefore x = \sqrt{2}$$

그런데 $-2 < x < \frac{1}{2}$ 이므로 접점이 없다.

따라서 직선 $y = -2\sqrt{2}x + 4$ 와 함수 $y = h(x)$ 의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다.



(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 m 의 값은 $3, 2\sqrt{2}$ 이므로

$$S = 3 \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\therefore S^2 = 72$$

답 72

참고

경계점을 지날 때, 직선 $y = mx + 4$ 가 함수 $y = h(x)$ 의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만나려면 함수 $y = g(x)$ ($-2 < x < \frac{1}{2}$)의 그래프와 한 점에서 만나야 한다.

(1) 직선 $y = mx + 4$ 가 점 $(-2, -2)$ 를 지나는 경우, 즉 (i)의 경우

방정식 $-x^2 + 2 = 3x + 4$ 를 풀면 $x = -2$ 또는 $x = -1$ 이므로 직선

$y = 3x + 4$ 는 $x = -1$ 인 점에서 함수 $y = g(x)$ ($-2 < x < \frac{1}{2}$)의 그래프와 만난다.

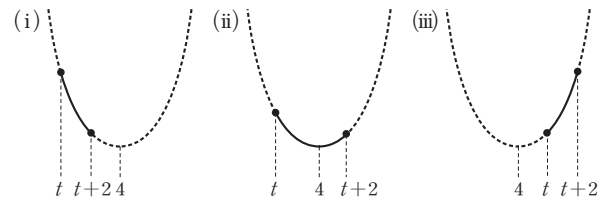
(2) 직선 $y = mx + 4$ 가 점 $(\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$ 을 지나는 경우, 즉 $m = -\frac{9}{2}$ 인 경우

방정식 $-x^2 + 2 = -\frac{9}{2}x + 4$ 를 풀면 $x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = 4$ 이므로 직선

$y = -\frac{9}{2}x + 4$ 는 함수 $y = g(x)$ ($-2 < x < \frac{1}{2}$)의 그래프와 만나지 않는다.

042

일등급의 매모장



함수 $f(x) = x^2 - 8x + k = (x - 4)^2 + k - 16$ 이므로 그래프는 아래로 볼록하고 축의 방정식은 $x = 4$ 이다.

(i) $t + 2 < 4$, 즉 $t < 2$ 일 때

함수 $f(x)$ 는 $x = t + 2$ 에서 최솟값을 가지므로

$$g(t) = f(t + 2)$$

(ii) $t \leq 4 \leq t + 2$, 즉 $2 \leq t \leq 4$ 일 때

함수 $f(x)$ 는 $x = 4$ 에서 최솟값을 가지므로

$$g(t) = f(4)$$

(iii) $t > 4$ 일 때

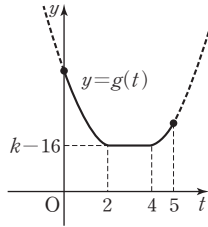
함수 $f(x)$ 는 $x = t$ 에서 최솟값을 가지므로

$$g(t) = f(t)$$

(i)~(iii)에서

$$g(t) = \begin{cases} f(t+2) & (t < 2) \\ f(4) & (2 \leq t \leq 4) \\ f(t) & (t > 4) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (t-2)^2 + k - 16 & (t < 2) \\ k - 16 & (2 \leq t \leq 4) \\ (t-4)^2 + k - 16 & (t > 4) \end{cases}$$



이므로 $0 \leq t \leq 5$ 에서 함수 $g(t)$ 는 $t=0$ 일 때 최댓값 $k-12$ 를 갖는다.

즉, $k-12=31$ 이므로 $k=43$

따라서 $f(x)=x^2-8x+43$ 이므로

$$f(7)=49-56+43=36$$

답 36

043

일등급의 매모장

$x \neq 0$ 인 모든 실수에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 가 성립하므로 $x < 0$ 일 때의 $f(x)$ 의 그래프와 $x > 0$ 일 때의 $f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

확장

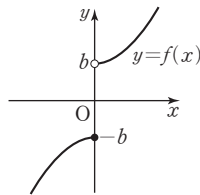
$$y = -x^2 + 2ax - b = -(x-a)^2 + a^2 - b,$$

$$y = x^2 + 2ax + b = (x+a)^2 - a^2 + b$$

이므로 두 함수의 그래프의 꼭짓점은 각각 $(a, a^2 - b)$,

$(-a, -a^2 + b)$ 이고 원점에 대하여 대칭이다.

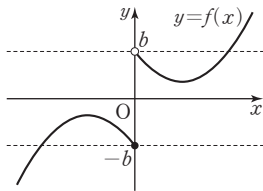
(i) $a \geq 0$ 일 때



x 에 대한 방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t 가 존재하지 않으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

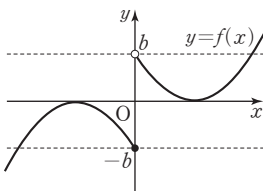
(ii) $a < 0$ 일 때

㉠ $-a^2 + b > 0$ 인 경우



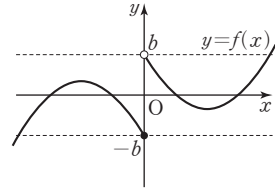
x 에 대한 방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t 가 무수히 많이 존재하므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

㉡ $-a^2 + b = 0$ 인 경우



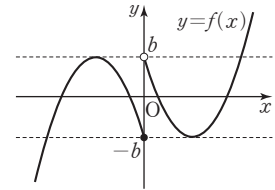
x 에 대한 방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t 가 무수히 많이 존재하므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

㉢ $-b < -a^2 + b < 0$ 인 경우



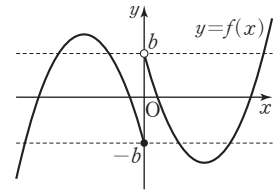
x 에 대한 방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t 가 무수히 많이 존재하므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

㉣ $-a^2 + b = -b$ 인 경우



x 에 대한 방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t 는 b 하나만 존재하므로 조건 (가)를 만족시킨다.

㉤ $-a^2 + b < -b$ 인 경우



x 에 대한 방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t 는 2개 존재하므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $-a^2 + b = -b$ 이므로

$$b = \frac{a^2}{2} \quad \dots \text{㉠}$$

조건 (나)에서 $f(0)f(1) \geq 0$, $f(-1)f(0) \geq 0$ 이어야 한다.

이때 $f(0) < 0$ 이므로 $f(1) \leq 0$, $f(-1) \leq 0$ 이어야 하고

$f(-1) = -f(1)$ 이므로 $f(1) = 0$ 이어야 한다.

$f(1) = 1 + 2a + b = 0$ 에서

$$b = -2a - 1 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\frac{a^2}{2} = -2a - 1, \quad a^2 + 4a + 2 = 0$$

$$\therefore a = -2 \pm \sqrt{2}$$

$x > 0$ 일 때, $f(x) = x^2 + 2ax + b = x^2 + 2ax - 2a - 1$ 이므로 방정식 $x^2 + 2ax - 2a - 1 = 0$, 즉 $(x-1)(x+2a+1) = 0$ 의 두 근은 1, $-2a-1$ 이다.

$a = -2 - \sqrt{2}$, 즉 $-2a-1 = 3 + 2\sqrt{2}$ 이면

$5 < 3 + 2\sqrt{2} < 6$ 이고 $x > 0$ 에서

$f(x) = (x-1)\{x - (3 + 2\sqrt{2})\}$ 이므로

$$f(5) = (5-1) \times \{5 - (3 + 2\sqrt{2})\} < 0$$

$$f(6) = (6-1) \times \{6 - (3 + 2\sqrt{2})\} > 0$$

따라서 $f(5)f(6) < 0$ 이 되어 조건 (4)를 만족시키지 않는다.
 $a = -2 + \sqrt{2}$, 즉 $-2a - 1 = 3 - 2\sqrt{2}$ 이면 $0 < 3 - 2\sqrt{2} < 1$ 이고
 $x > 0$ 에서 $f(x) = (x-1)\{x - (3-2\sqrt{2})\}$ 이므로 $f(x) > 0$ 을 만
 족시키는 양수 x 의 값의 범위는

$$0 < x < 3 - 2\sqrt{2} \text{ 또는 } x > 1$$

따라서 $k > 1$ 인 모든 정수 k 에 대하여 $f(k) > 0$, $f(k+1) > 0$ 이므
 로 $f(k)f(k+1) > 0$ 이다.

또, $f(1) = 0$ 이므로

$k = 0$ 이면

$$f(k)f(k+1) = f(0)f(1) = 0$$

$k = 1$ 이면

$$f(k)f(k+1) = f(1)f(2) = 0$$

한편, $x < 0$ 에서 $f(x) = -(x+1)\{x + (3-2\sqrt{2})\}$ 이므로

$f(x) < 0$ 을 만족시키는 음수 x 의 값의 범위는

$$x < -1 \text{ 또는 } -3 + 2\sqrt{2} < x < 0$$

따라서 $k+1 < -1$, 즉 $k < -2$ 인 모든 정수 k 에 대하여 $f(k) < 0$,

$f(k+1) < 0$ 이므로 $f(k)f(k+1) > 0$ 이다.

또, $f(-1) = 0$ 이므로

$k = -1$ 이면

$$f(k)f(k+1) = f(-1)f(0) = 0$$

$k = -2$ 이면

$$f(k)f(k+1) = f(-2)f(-1) = 0$$

그러므로 $a = -2 + \sqrt{2}$ 일 때 모든 정수 k 에 대하여

$f(k)f(k+1) \geq 0$ 이므로 조건을 만족시킨다.

$$\therefore f(3) = 9 + 6a + b = 9 + 6a + (-2a - 1)$$

$$= 4a + 8$$

$$= 4(-2 + \sqrt{2}) + 8 = 4\sqrt{2}$$

따라서 $p = 0$, $q = 4$ 이므로

$$p^2 + q^2 = 0 + 16 = 16$$

답 16

044

일등급의 메모장

조건 (가) \Rightarrow 함수 $y = f(x)$ 의 그래프: 아래로 볼록,
 함수 $y = g(x)$ 의 그래프: 위로 볼록,
 두 함수의 그래프의 축의 방정식: $x = 1$

조건 (가)에서 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록하고 이
 차함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하다.

또, 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 모두 $x = 1$
 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1, f(1))$, 함수
 $y = g(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1, g(1))$ 이다.

조건 (나)에서 $f(1)$ 이 정수이므로 $g(1)$ 도 정수이고, 두 함수
 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 꼭짓점 사이의 거리가 6이므로
 $g(1) = f(1) + 6$

(i) $0 \leq p < 1$ 인 경우

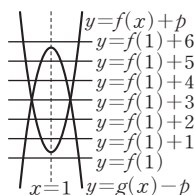
$$k = f(1) + 1 \text{ 또는 } k = f(1) + 2 \text{ 또는}$$

$$k = f(1) + 3 \text{ 또는 } k = f(1) + 4 \text{ 또는}$$

$$k = f(1) + 5 \text{ 일 때, 두 방정식}$$

$f(x) + p = k$, $g(x) - p = k$ 의 서로 다
 른 실근의 개수가 각각 2로 서로 같다.

$k \leq f(1)$, $k \geq f(1) + 6$ 일 때, 두 방정



식 $f(x) + p = k$, $g(x) - p = k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 다
 르다.

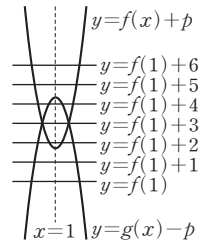
(ii) $1 \leq p < 2$ 인 경우

$$k = f(1) + 2 \text{ 또는 } k = f(1) + 3 \text{ 또는}$$

$$k = f(1) + 4 \text{ 일 때, 두 방정식}$$

$f(x) + p = k$, $g(x) - p = k$ 의 서로 다
 른 실근의 개수가 각각 2로 서로 같다.

$k \leq f(1) + 1$, $k \geq f(1) + 5$ 일 때, 두 방
 정식 $f(x) + p = k$, $g(x) - p = k$ 의 서
 로 다른 실근의 개수는 다르다.



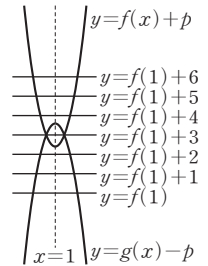
(iii) $2 \leq p < 3$ 인 경우

$$k = f(1) + 3 \text{ 일 때, 두 방정식}$$

$f(x) + p = k$, $g(x) - p = k$ 의 서로 다
 른 실근의 개수가 각각 2로 서로 같다.

$$k \neq f(1) + 3 \text{ 일 때, 두 방정식}$$

$f(x) + p = k$, $g(x) - p = k$ 의 서로 다
 른 실근의 개수는 다르다.



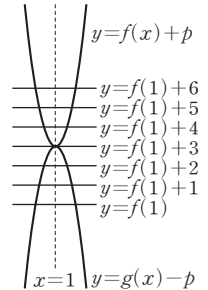
(iv) $p = 3$ 인 경우

$$k = f(1) + 3 \text{ 일 때, 두 방정식}$$

$f(x) + p = k$, $g(x) - p = k$ 의 서로 다
 른 실근의 개수가 각각 1로 서로 같다.

$$k \neq f(1) + 3 \text{ 일 때, 두 방정식}$$

$f(x) + p = k$, $g(x) - p = k$ 의 서로 다
 른 실근의 개수는 다르다.



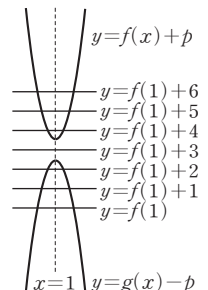
(v) $3 < p \leq 4$ 인 경우

$$k = f(1) + 3 \text{ 일 때, 두 방정식}$$

$f(x) + p = k$, $g(x) - p = k$ 의 서로 다
 른 실근의 개수가 각각 0으로 서로 같다.

$$k \neq f(1) + 3 \text{ 일 때, 두 방정식}$$

$f(x) + p = k$, $g(x) - p = k$ 의 서로 다
 른 실근의 개수는 다르다.



(vi) $p > 4$ 인 경우

모든 실수 x 에 대하여 $g(x) - p < f(x) + p$ 이므로

$$g(1) - p < k < f(1) + p \text{ 인 정수 } k \text{에 대하여 두 방정식}$$

$f(x) + p = k$, $g(x) - p = k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 같다.
 이때 정수 k 의 개수는 3 이상이다.

(vii) $p < 0$ 인 경우

$g(1) - p - \{f(1) + p\} > 6$ 이므로 $f(1) + p < k < g(1) - p$ 인
 정수 k 에 대하여 두 방정식 $f(x) + p = k$, $g(x) - p = k$ 의 서로
 다른 실근의 개수가 같다.

이때 정수 k 의 개수는 7 이상이다.

(i)~(vii)에서 두 방정식 $f(x) + p = k$, $g(x) - p = k$ 의 서로 다른
 실근의 개수가 같게 되도록 하는 정수 k 의 개수가 1일 때의 실수
 p 의 값의 범위는 $2 \leq p \leq 4$ 이므로

$$M = 4, m = 2$$

$$\therefore M + m = 4 + 2 = 6$$

답 6

045

일등급의 매모장

$$f(x)g(x) + af(x) + bg(x) = \{f(x) + b\} \{g(x) + a\} - ab$$

주어진 식에서

$$f(x)g(x) - 7f(x) + 2g(x) - 14 = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$$

$$f(x)\{g(x) - 7\} + 2\{g(x) - 7\} = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$$

$$\{f(x) + 2\} \{g(x) - 7\} = (x-2)(x^2+4) \quad \begin{matrix} \rightarrow x^2(x-2) + 4(x-2) \\ = (x-2)(x^2+4) \end{matrix}$$

$f(x)$ 는 일차식, $g(x)$ 는 이차식이고 계수와 상수항이 모두 정수 이므로

(i) $f(x) + 2 = x - 2$, $g(x) - 7 = x^2 + 4$ 인 경우

$$f(x) = x - 4, g(x) = x^2 + 11$$

방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 에서

$$x^2 - x + 15 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (-1)^2 - 4 \times 15 = -59 < 0$$

이므로 실근을 갖지 않는다.

(ii) $f(x) + 2 = -(x-2)$, $g(x) - 7 = -(x^2+4)$ 인 경우

$$f(x) = -x, g(x) = -x^2 + 3$$

방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 에서

$$x^2 - x - 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = (-1)^2 - 4 \times (-3) = 13 > 0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 α, β 는 이차방정식 $x^2 - x - 3 = 0$ 의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -3$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= 1^2 - 2 \times (-3) = 7$$

답 7

046

일등급의 매모장

방정식 $\{x - f(x)\} \{x - g(x)\} = 0$ 의 서로 다른 실근이 하나뿐이라는 것은 두 이차함수의 그래프가 직선 $y = x$ 와 오직 한 점에서 만난다는 뜻이다.

조건 (가)에서 방정식 $x^2 - \{f(x) + g(x)\}x + f(x)g(x) = 0$, 즉 $\{x - f(x)\} \{x - g(x)\} = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 직선 $y = x$ 와 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 서로 다른 교점의 개수이다.

이때 $\{x - f(x)\} \{x - g(x)\} = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1이므로

직선 $y = x$ 와 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수가 1이고,

직선 $y = x$ 와 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수가 0

또는 직선 $y = x$ 와 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수가 0이고,

직선 $y = x$ 와 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수가 1

또는 직선 $y = x$ 와 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수가 1이고,

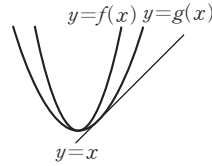
직선 $y = x$ 와 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수가 1이며 그 교점이 같은 경우가 존재한다.

조건 (나)에서 방정식 $k^2 - \{f(x) + g(x)\}k + f(x)g(x) = 0$, 즉

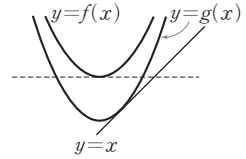
$\{k - f(x)\} \{k - g(x)\} = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 직선 $y = k$ 와 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 서로 다른 교점의 개수이다.

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq g(x)$ 이고 $f(x) = g(x)$ 가 x 에 대한 항등식인 경우는 조건 (나)를 만족시키지 않으므로 함수의 그래프의 위치 관계를 나타내는 그림은 다음과 같다.

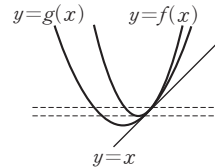
(i) $f(x)$ 의 최고차항의 계수와 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 모두 양수인 경우



[그림 1]



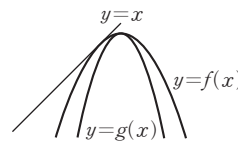
[그림 2]



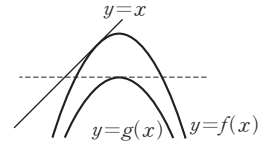
[그림 3]

방정식 $x^2 - \{f(x) + g(x)\}x + f(x)g(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 k 의 개수가 2 이하이므로 조건을 만족시키지 않는다.

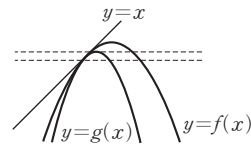
(ii) $f(x)$ 의 최고차항의 계수와 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 모두 음수인 경우



[그림 4]



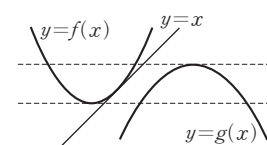
[그림 5]



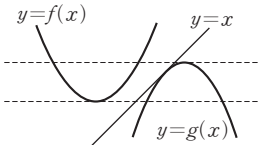
[그림 6]

방정식 $x^2 - \{f(x) + g(x)\}x + f(x)g(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 k 의 개수가 2 이하이므로 조건을 만족시키지 않는다.

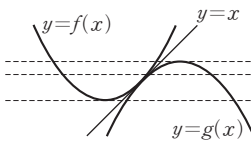
(iii) $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 양수, $g(x)$ 의 최고차항의 계수는 음수인 경우



[그림 7]



[그림 8]



[그림 9]

모든 조건을 만족시키는 그래프의 개형은 [그림 9]의 경우가

유일하다.

(i)~(iii)에서 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=2$ 와 $y=x$ 의 교점에서 접한다.

즉, $f(2)=g(2)=2$ 이므로

$$f(x)=a(x-2)^2+x,$$

$$g(x)=b(x-2)^2+x \quad (a>0, b<0)$$

라 하자.

이때 조건 (ii)에서 $f(x)$ 의 최솟값이 0, $g(x)$ 의 최댓값이 3이므로

$$f(x)=ax^2+(1-4a)x+4a$$

$$=a\left[x-\left(2-\frac{1}{2a}\right)\right]^2+2-\frac{1}{4a}$$

에서

$$2-\frac{1}{4a}=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{8}$$

$$g(x)=bx^2+(1-4b)x+4b$$

$$=b\left[x-\left(2-\frac{1}{2b}\right)\right]^2+2-\frac{1}{4b}$$

에서

$$2-\frac{1}{4b}=3$$

$$\therefore b=-\frac{1}{4}$$

따라서

$$f(x)=\frac{1}{8}(x-2)^2+x, \quad g(x)=-\frac{1}{4}(x-2)^2+x$$

이므로

$$f(18)+g(6)=50+2=52$$

답 52

047

일등급의 메모장

$$\{f(x)-g(x)\}\{f(x)-h(x)\}=\frac{1}{16}(x-\alpha)^n(x-\beta)^{4-n}$$

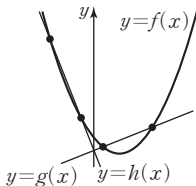
→ 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 직선 $y=g(x)$, $y=h(x)$ 와 만나는 모든 교점의 x 좌표가 오직 α 와 β 뿐이다.

주어진 조건에 의하여 두 방정식 $f(x)-g(x)=0$, $f(x)-h(x)=0$ 이 모두 실근을 갖고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 두 직선 $y=g(x)$, $y=h(x)$ 의 교점의 x 좌표가 2개이어야 한다.

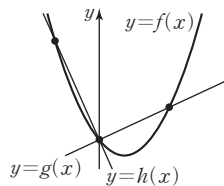
(i) $f(x)-g(x)=0$ 과 $f(x)-h(x)=0$ 이 모두 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

$f(x)-g(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근을 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)라 하고, $f(x)-h(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근을 x_3, x_4 ($x_3 < x_4$)라 하면 네 수 x_1, x_2, x_3, x_4 의 대소 관계에 따른 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.

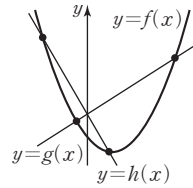
Ⓐ $x_3 < x_4 < x_1 < x_2$



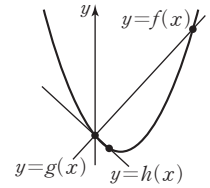
Ⓑ $x_3 < x_1 = x_4 < x_2$



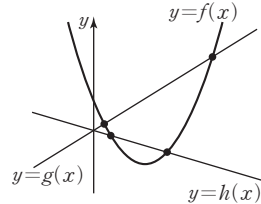
Ⓒ $x_3 < x_1 < x_4 < x_2$



Ⓓ $x_1 = x_3 < x_4 < x_2$



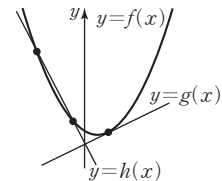
Ⓔ $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$



Ⓐ~Ⓔ인 경우 모두 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)-g(x)=0$ 이 중근, $f(x)-h(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

$f(x)-g(x)=0$ 의 중근을 x_1 이라 하고, $f(x)-h(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근을 x_2, x_3 ($x_2 < x_3$)이라 하면 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



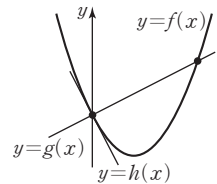
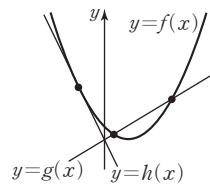
$x_2 < x_3 < x_1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $f(x)-g(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근, $f(x)-h(x)=0$ 이 중근을 갖는 경우

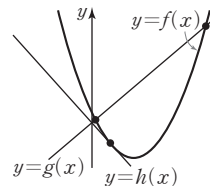
$f(x)-g(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근을 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)라 하고, $f(x)-h(x)=0$ 의 중근을 x_3 이라 하면 세 수 x_1, x_2, x_3 의 대소 관계에 따른 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.

Ⓐ $x_3 < x_1 < x_2$

Ⓑ $x_1 = x_3 < x_2$



Ⓒ $x_1 < x_3 < x_2$



Ⓐ, Ⓒ인 경우는 조건을 만족시키지 않는다.

Ⓑ $x_1 = x_3 < x_2$ 인 경우

$$\{f(x)-g(x)\}\{f(x)-h(x)\}=\frac{1}{16}(x-x_1)^3(x-x_2)$$

$$x_1 = x_3$$

이때 $g(x)=bx+7$, $h(x)=-\frac{1}{b}x+7$ 이므로 두 직선 모두

(0, 7)을 지난다.

따라서 $x_1 = x_3 = 0$ 이므로 $a = 0$ 이고

$f(0) = g(0) = 7$ 이므로 $a = 3$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{4}(x-4)^2 + 3$$

$f(x) - h(x) = 0$ 에서

$$\frac{1}{4}(x-4)^2 + 3 + \frac{1}{b}x - 7 = 0$$

$$\frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1}{b} - 2\right)x = 0$$

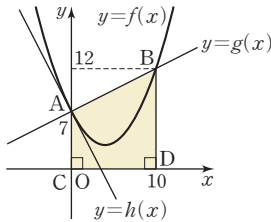
이 이차방정식은 중근 $x = 0$ 을 가지므로 $b = \frac{1}{2}$

따라서

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{4}(x-4)^2 + 3 - \frac{1}{2}x - 7 = \frac{1}{4}x(x-10)$$

이므로 $x_2 = 10, \beta = 10$

$\therefore A(0, 7), B(10, 12), C(0, 0), D(10, 0)$

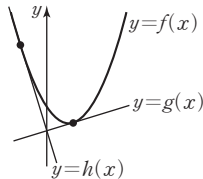


따라서 사각형 ACDB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (7+12) \times 10 = 95$$

(iv) $f(x) - g(x) = 0, f(x) - h(x) = 0$ 이 모두 중근을 갖는 경우

$f(x) - g(x) = 0$ 의 중근을 $x_1, f(x) - h(x) = 0$ 의 중근을 x_2 라 하면 세 함수 $y=f(x), y=g(x), y=h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



$x_2 < x_1$ 이므로

$$\{f(x) - g(x)\} \{f(x) - h(x)\} = \frac{1}{16}(x-x_1)^2(x-x_2)^2$$

$f(x) - g(x) = 0$ 에서

$$\frac{1}{4}(x-4)^2 + a - bx - 7 = 0$$

$$\frac{1}{4}x^2 - (b+2)x + a - 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (b+2)^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times (a-3)$$

$$= b^2 + 4b - a + 7 = 0$$

..... ㉠

$f(x) - h(x) = 0$ 에서

$$\frac{1}{4}(x-4)^2 + a + \frac{1}{b}x - 7 = 0$$

$$\frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1}{b} - 2\right)x + a - 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = \left(\frac{1}{b} - 2\right)^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times (a-3)$$

$$= \frac{1}{b^2} - \frac{4}{b} - a + 7 = 0$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 8, b = -2 + \sqrt{5} (\because b > 0) \quad \text{참고}$$

따라서

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{4}x^2 - \sqrt{5}x + 5 = \frac{1}{4}(x - 2\sqrt{5})^2$$

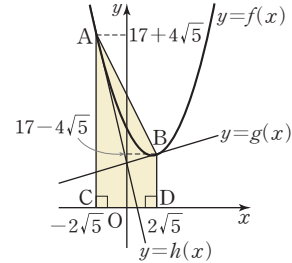
이므로 $x_1 = 2\sqrt{5}, \beta = 2\sqrt{5}$

$$f(x) - h(x) = \frac{1}{4}x^2 + \sqrt{5}x + 5 = \frac{1}{4}(x + 2\sqrt{5})^2$$

이므로 $x_2 = -2\sqrt{5}, \alpha = -2\sqrt{5}$

$\therefore A(-2\sqrt{5}, 17+4\sqrt{5}), B(2\sqrt{5}, 17-4\sqrt{5}),$

$C(-2\sqrt{5}, 0), D(2\sqrt{5}, 0)$



따라서 사각형 ACDB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (17+4\sqrt{5}+17-4\sqrt{5}) \times 4\sqrt{5} = 68\sqrt{5}$$

(i)~(iv)에서 $M = 68\sqrt{5}, m = 95$ 이므로

$$M + m = 95 + 68\sqrt{5}$$

즉, $p = 95, q = 68$ 이므로

$$p + q = 95 + 68 = 163$$

답 163

참고

㉠, ㉡에서 $b^2 + 4b = \frac{1}{b^2} - \frac{4}{b}$ 이므로

$$b^2 - \frac{1}{b^2} + 4\left(b + \frac{1}{b}\right) = 0, \left(b - \frac{1}{b} + 4\right)\left(b + \frac{1}{b}\right) = 0$$

$$(b^2 + 4b - 1)(b^2 + 1) = 0$$

$$b^2 + 4b - 1 = 0 (\because b^2 + 1 > 0)$$

$$\therefore b = -2 + \sqrt{5} (\because b > 0)$$

이것을 ㉡에 대입하면

$$(\sqrt{5})^2 - a + 3 = 0$$

$$\therefore a = 8$$



001

$x^3 - 4x^2 - x + a = 0$ 의 한 근이 1이므로
 $1 - 4 - 1 + a = 0 \quad \therefore a = 4$
 $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$ 에서 $x^2(x-4) - (x-4) = 0$
 $(x^2-1)(x-4) = 0, (x+1)(x-1)(x-4) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 4$
따라서 $a = -1, \beta = 4$ 또는 $a = 4, \beta = -1$ 이므로
 $|a| + |\beta| = |-1| + |4| = 5$

답 ①

002

$P(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 2x - 8$ 이라 하면
 $P(1) = 1 + 4 + 5 - 2 - 8 = 0,$
 $P(-2) = 16 - 32 + 20 + 4 - 8 = 0$
조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 4 & 5 & -2 & -8 \\ & & 1 & 5 & 10 & 8 \\ -2 & 1 & 5 & 10 & 8 & 0 \\ & & -2 & -6 & -8 & \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & \end{array}$$

$\therefore P(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 2x - 8$
 $= (x-1)(x+2)(x^2+3x+4)$

$P(x) = 0$ 에서
 $x = 1$ 또는 $x = -2$ 또는 $x^2 + 3x + 4 = 0$
이때 이차방정식 $x^2 + 3x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = 3^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7 < 0$
이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
따라서 $P(x) = 0$ 의 두 실근 α, β 는 1, -2이고, 두 허근 γ, δ 는
이차방정식 $x^2 + 3x + 4 = 0$ 의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의
관계에 의하여
 $\gamma + \delta = -3, \gamma\delta = 4$
 $\therefore \gamma^2 + \delta^2 = (\gamma + \delta)^2 - 2\gamma\delta$
 $= (-3)^2 - 2 \times 4 = 1$
 $\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1^2 + (-2)^2 + 1 = 6$

답 6

003

$x(x-1)(x-2)(x-3) - 35 = 0$ 에서
 $\{x(x-3)\} \{(x-1)(x-2)\} - 35 = 0$
 $(x^2-3x)(x^2-3x+2) - 35 = 0$ → 공통부분이 생기도록 2개씩 짝을 지어 곱한다.
 $x^2 - 3x = X$ 로 놓으면
 $X(X+2) - 35 = 0, X^2 + 2X - 35 = 0$
 $(X+7)(X-5) = 0 \quad \therefore X = -7$ 또는 $X = 5$
(i) $X = -7$ 일 때
 $x^2 - 3x = -7, \text{ 즉 } x^2 - 3x + 7 = 0$ 이고 이 이차방정식의 판별식

을 D_1 이라 하면
 $D_1 = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 7 = -19 < 0$
이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X = 5$ 일 때
 $x^2 - 3x = 5, \text{ 즉 } x^2 - 3x - 5 = 0$ 이고 이 이차방정식의 판별식을
 D_2 라 하면
 $D_2 = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 29 > 0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 허근은 이차방정식 $x^2 - 3x + 7 = 0$ 의
근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 허근의
곱은 7이다.

답 7

004

$x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면
 $x^2 + 3x - 2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ → $x=0$ 이면 방정식이 성립하지 않으므로 $x \neq 0$ 이다.
 $x^2 + \frac{1}{x^2} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$
 $\xrightarrow{x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}$
 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$
 $x + \frac{1}{x} = X$ 로 놓으면
 $X^2 + 3X - 4 = 0, (X+4)(X-1) = 0$
 $\therefore X = -4$ 또는 $X = 1$

(i) $X = -4$ 일 때
 $x + \frac{1}{x} = -4, \text{ 즉 } x^2 + 4x + 1 = 0$ 이고 이 이차방정식의 판별식
을 D_1 이라 하면
 $\frac{D_1}{4} = 2^2 - 1 \times 1 = 3 > 0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(ii) $X = 1$ 일 때
 $x + \frac{1}{x} = 1, \text{ 즉 } x^2 - x + 1 = 0$ 이고 이 이차방정식의 판별식을
 D_2 라 하면
 $D_2 = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$
이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.
(i), (ii)에서 a 는 이차방정식 $x^2 + 4x + 1 = 0, \text{ 즉 방정식}$
 $x + \frac{1}{x} = -4$ 의 한 근이므로
 $a + \frac{1}{a} = -4$

답 -4

005

$x^2 = X$ 로 놓으면 주어진 방정식은
 $X^2 - (a+1)X + 2a - 4 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$
주어진 사차방정식이 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을
가지려면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 부호의 두 실근을 가져야 한
다. **참고**
즉, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $2a - 4 < 0 \quad \therefore a < 2$

답 ④

참고

사차방정식의 실근과 허근

사차방정식 $ax^4+bx^2+c=0$ (a, b, c 는 상수)이 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 갖도록 하려면 $x^2=X$ 라 할 때, X 에 대한 이차방정식 $aX^2+bX+c=0$ 이 양의 실근과 음의 실근을 각각 하나씩 가져야 한다.

이 이차방정식의 양의 실근을 α , 음의 실근을 $-\beta$ (α, β 는 양의 실수)라 하면

$x^2=\alpha$ 에서 $x=\pm\sqrt{\alpha}$ (서로 다른 두 실근)

$x^2=-\beta$ 에서 $x=\pm\sqrt{\beta}i$ (서로 다른 두 허근)

이므로 주어진 사차방정식은 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 갖는다.

006

$P(1)=P(2)=P(3)=-1$ 에서

$P(1)+1=P(2)+1=P(3)+1=0$

이므로 방정식 $P(x)+1=0$ 의 세 근은

1, 2, 3

이때 1, 2, 3을 세 근으로 하고 x^3 의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(1+2+3)x^2+(1\times 2+2\times 3+3\times 1)x-1\times 2\times 3=0$

$\therefore x^3-6x^2+11x-6=0$

즉, $P(x)+1=x^3-6x^2+11x-6$ 이므로

$P(x)=x^3-6x^2+11x-7$

$\therefore P(-1)=-1-6-11-7=-25$

답 -25

007

$x^3=1$ 에서 $x^3-1=0$

$\therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$

따라서 ω 는 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이므로

$\omega^2+\omega+1=0, \omega^3=1$

이때

$f(1)=\frac{\omega^2}{\omega+1}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}=-1,$

$f(2)=\frac{\omega^4}{\omega^2+1}=\frac{\omega}{-\omega}=-1,$

$f(3)=\frac{\omega^6}{\omega^3+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2},$

$f(4)=\frac{\omega^8}{\omega^4+1}=\frac{\omega^2}{\omega+1}=f(1),$

$f(5)=\frac{\omega^{10}}{\omega^5+1}=\frac{\omega}{\omega^2+1}=\frac{\omega}{-\omega}=f(2),$

$f(6)=\frac{\omega^{12}}{\omega^6+1}=\frac{1}{1+1}=f(3),$

\vdots

이므로

$f(1)=f(4)=f(7)=f(10)=-1,$

$f(2)=f(5)=f(8)=f(11)=-1,$

$f(3)=f(6)=f(9)=f(12)=\frac{1}{2}$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(12)$

$=\left\{-1+(-1)+\frac{1}{2}\right\}\times 4=-6$

답 -6

008

$\begin{cases} x+y+xy=26 & \dots \text{㉠} \\ x^2y+xy^2=160 & \dots \text{㉡} \end{cases}$

$x+y=u, xy=v$ 로 놓으면

㉠에서 $u+v=26$

$\therefore v=-u+26$ ㉢

㉡에서 $xy(x+y)=160$ 이므로

$uv=160$ ㉣

㉢을 ㉣에 대입하면

$u(-u+26)=160, u^2-26u+160=0$

$(u-10)(u-16)=0 \quad \therefore u=10 \text{ 또는 } u=16$

이것을 ㉢에 대입하면 $\begin{cases} u=10 & \text{또는} & u=16 \\ v=16 & & v=10 \end{cases}$

(i) $u=10, v=16$ 일 때

$x+y=10, xy=16$ 에서 x, y 는 t 에 대한 이차방정식

$t^2-10t+16=0$ 의 두 근이므로

$(t-2)(t-8)=0 \quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=8$

$\therefore \begin{cases} x=2 & \text{또는} & x=8 \\ y=8 & & y=2 \end{cases}$

(ii) $u=16, v=10$ 일 때

$x+y=16, xy=10$ 에서 x, y 는 t 에 대한 이차방정식

$t^2-16t+10=0$ 의 두 근이므로

$t=8\pm 3\sqrt{6}$

$\therefore \begin{cases} x=8+3\sqrt{6} & \text{또는} & x=8-3\sqrt{6} \\ y=8-3\sqrt{6} & & y=8+3\sqrt{6} \end{cases}$

그런데 x, y 는 정수이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 해는 $\begin{cases} x=2 & \text{또는} & x=8 \\ y=8 & & y=2 \end{cases}$ 이므로

$x^2+y^2=2^2+8^2=68$

답 68

009

$\begin{cases} 2x+y=1 & \dots \text{㉠} \\ x^2-ky=-6 & \dots \text{㉡} \end{cases}$

㉠에서 $y=-2x+1$ ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면 $x^2-k(-2x+1)=-6$

$\therefore x^2+2kx-k+6=0$ ㉣

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이차방정식 ㉣이 중근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉣의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(-k+6)=0$

$k^2+k-6=0, (k+3)(k-2)=0$

$\therefore k=-3 \text{ 또는 } k=2$

그런데 k 는 양수이므로 $k=2$

답 ②

010

$\overline{AB}=x, \overline{BC}=y$ 라 하면 선분 AC 는 원의 지름이므로

$\begin{cases} 2(x+y)=20 & \dots \text{㉠} \\ x^2+y^2=8^2 & \dots \text{㉡} \end{cases}$

답 -6

㉠에서 $y=10-x$

㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2+(10-x)^2=64$

$2x^2-20x+100=64, x^2-10x+18=0$

$\therefore x=5\pm\sqrt{7}$

이것을 ㉡에 대입하면

$x=5+\sqrt{7}, y=5-\sqrt{7}$ 또는 $x=5-\sqrt{7}, y=5+\sqrt{7}$

그런데 $x < y$ 이므로 $x=5-\sqrt{7}, y=5+\sqrt{7}$

$\therefore \overline{AB}-\overline{BC}=(5-\sqrt{7})-(5+\sqrt{7})=-2\sqrt{7}$

..... ㉢

011

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$ 에서 $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{4}$

$4(x+y)=xy, xy-4x-4y=0$

$x(y-4)-4(y-4)=16, (x-4)(y-4)=16$

이때 x, y 가 자연수이므로 $x-4, y-4$ 는 정수이고,

$x-4 \geq -3, y-4 \geq -3$ 이다.

(i) $x-4=1, y-4=16$ 일 때

$x=5, y=20 \quad \therefore xy=5 \times 20=100$

(ii) $x-4=2, y-4=8$ 일 때

$x=6, y=12 \quad \therefore xy=6 \times 12=72$

(iii) $x-4=4, y-4=4$ 일 때

$x=8, y=8 \quad \therefore xy=8 \times 8=64$

(iv) $x-4=8, y-4=2$ 일 때

$x=12, y=6 \quad \therefore xy=12 \times 6=72$

(v) $x-4=16, y-4=1$ 일 때

$x=20, y=5 \quad \therefore xy=20 \times 5=100$

(i)~(v)에서 xy 의 최댓값은 100이다.

답 $-2\sqrt{7}$

답 100

012

$4x^2-4xy+2y^2+8y+16=0$ 에서

$(4x^2-4xy+y^2)+(y^2+8y+16)=0$

$\therefore (2x-y)^2+(y+4)^2=0$

이때 x, y 가 실수이므로

$2x-y=0, y+4=0 \quad \therefore x=-2, y=-4$

$\therefore x+y=-2+(-4)=-6$

답 -6

다른 풀이

$4x^2-4xy+2y^2+8y+16=0$ 에서

$2x^2-2yx+(y^2+4y+8)=0$

..... ㉠

x 가 실수이므로 x 에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4}=(-y)^2-2(y^2+4y+8) \geq 0$

$-y^2-8y-16 \geq 0, y^2+8y+16 \leq 0$

$\therefore (y+4)^2 \leq 0$

이때 y 가 실수이므로 $y+4=0 \quad \therefore y=-4$

이것을 ㉠에 대입하면 $2x^2+8x+8=0$

$x^2+4x+4=0, (x+2)^2=0$

$\therefore x=-2$

$\therefore x+y=-2+(-4)=-6$

013

$(x^2-3x+2)(x^2+7x+12)=50$ 에서

$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)=50$

$\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}=50$

$(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)=50$

$x^2+2x=X$ 로 놓으면

$(X-3)(X-8)=50, X^2-11X-26=0$

$(X+2)(X-13)=0 \quad \therefore X=-2$ 또는 $X=13$

(i) $X=-2$ 일 때

$x^2+2x=-2$, 즉 $x^2+2x+2=0$ 이고 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$\frac{D_1}{4}=1^2-1 \times 2=-1 < 0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=13$ 일 때

$x^2+2x=13$, 즉 $x^2+2x-13=0$ 이고 이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$\frac{D_2}{4}=1^2-1 \times (-13)=14 > 0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 ω 는 이차방정식 $x^2+2x+2=0$ 의 한 허근이므로

$\omega^2+2\omega+2=0 \quad \therefore \omega^2+2\omega=-2$

답 -2

014

$x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a^2-b^2)^2=0$ 에서

$x^4-2(a^2+b^2)x^2+\{(a+b)(a-b)\}^2=0$

$x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a+b)^2(a-b)^2=0$

$\{x^2-(a+b)^2\}\{x^2-(a-b)^2\}=0$

$\{x+(a+b)\}\{x-(a+b)\}\{x+(a-b)\}\{x-(a-b)\}=0$

$\therefore x=-(a+b)$ 또는 $x=a+b$

또는 $x=-(a-b)$ 또는 $x=a-b$

이때 네 근의 곱이 25이므로

$(a+b)^2(a-b)^2=25$

이고, a, b 는 $a > b$ 인 두 자연수이므로

$(a+b)^2=25, (a-b)^2=1$

$\therefore a+b=5, a-b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3, b=2$

$\therefore ab=3 \times 2=6$

답 6

다른 풀이

주어진 사차방정식의 네 근의 곱이 25이므로 사차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a^2-b^2)^2=25, a^2-b^2=5 (\because a > b > 0)$

$\therefore (a+b)(a-b)=5$

이때 a, b 는 $a > b$ 인 두 자연수이므로

$a+b=5, a-b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3, b=2$

$\therefore ab=3 \times 2=6$

참고

n 차 방정식의 근과 계수의 관계

n 차 방정식 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ 에서

$$\begin{aligned} (\text{모든 근의 합}) &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ (\text{두 근끼리의 곱의 합}) &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ (\text{세 근끼리의 곱의 합}) &= -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ &\vdots \\ (\text{모든 근의 곱}) &= (-1)^n \times \frac{a_0}{a_n} \end{aligned}$$

015

$P(x) = x^3 - (a^2 + a - 1)x^2 - a(a - 3)x + 4a$ 라 하면

$$P(-1) = -1 - a^2 - a + 1 + a^2 - 3a + 4a = 0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -a^2 - a + 1 & -a^2 + 3a & 4a \\ & & -1 & a^2 + a & -4a \\ \hline & 1 & -a^2 - a & 4a & 0 \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (x+1)\{x^2 - a(a+1)x + 4a\}$$

$$P(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x^2 - a(a+1)x + 4a = 0$$

즉, $x = -1$ 은 주어진 삼차방정식의 한 실근이다.

(i) $a = -1$ 인 경우

$$-1 \times \gamma = -4 \text{에서 } \gamma = 4 \text{이므로 } -1 < \beta < 4 \text{이다.}$$

이차방정식 $x^2 - a(a+1)x + 4a = 0$ 의 두 근이 $\beta, 4$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$4\beta = 4a \quad \therefore \beta = a$$

삼차방정식 $x^3 - (a^2 + a - 1)x^2 - a(a - 3)x + 4a = 0$ 의 세 근이 $-1, a, 4$ 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1 + a + 4 = a^2 + a - 1, \quad a^2 = 4$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 2$$

㉓ $a = -2$ 일 때

$$\beta = -2 \text{이므로 } -1 < \beta < 4 \text{를 만족시키지 않는다.}$$

㉔ $a = 2$ 일 때

$$\beta = 2 \text{이므로 } -1 < \beta < 4 \text{를 만족시킨다.}$$

㉓, ㉔에서 $a = 2$

(ii) $\beta = -1$ 인 경우

이차방정식 $x^2 - a(a+1)x + 4a = 0$ 의 두 근이 α, γ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\gamma = 4a = -4 \quad \therefore a = -1$$

$$a = -1 \text{을 } x^2 - a(a+1)x + 4a = 0 \text{에 대입하면}$$

$$x^2 - 4 = 0, \quad x^2 = 4$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\text{이때 } \alpha < \beta < \gamma \text{이므로 } \alpha = -2, \gamma = 2$$

(iii) $\gamma = -1$ 인 경우

$\alpha \times (-1) = -4$ 에서 $\alpha = 4$ 이므로 $\alpha < \beta < \gamma$ 를 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에서 $a = 2$ 또는 $a = -1$ 이므로 구하는 합은

$$2 + (-1) = 1$$

답 ①

016

$$\begin{aligned} n^4 - 3n^2 + 1 &= (n^4 - 2n^2 + 1) - n^2 = (n^2 - 1)^2 - n^2 \\ &= (n^2 - n - 1)(n^2 + n - 1) \end{aligned} \quad \text{[다른 풀이]}$$

이때 $n^4 - 3n^2 + 1$ 의 값이 소수이므로

$$n^2 - n - 1 = 1 \text{ 또는 } n^2 + n - 1 = 1$$

(i) $n^2 - n - 1 = 1$ 일 때

$$n^2 - n - 2 = 0, \quad (n+1)(n-2) = 0$$

$$\therefore n = 2 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

(ii) $n^2 + n - 1 = 1$ 일 때

$$n^2 + n - 2 = 0, \quad (n+2)(n-1) = 0$$

$$\therefore n = 1 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

그런데 $n = 1$ 이면 $n^4 - 3n^2 + 1$ 의 값이 -1 이므로 소수가 아니다.

(i), (ii)에서 자연수 n 의 값은 2이고, 그때의 $n^4 - 3n^2 + 1$ 의 값은 5이므로

$$a = 2, \quad b = 5$$

$$\therefore a + b = 2 + 5 = 7$$

답 7

[다른 풀이]

$n^4 - 3n^2 + 1$ 의 값이 소수이고 $n^2 + n - 1 \geq 1$,

$$n^2 - n - 1 < n^2 + n - 1 \text{이므로}$$

$$n^2 - n - 1 = 1, \quad n^2 - n - 2 = 0$$

$$(n+1)(n-2) = 0 \quad \therefore n = 2 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

$$\therefore a = 2$$

$n = 2$ 일 때, $n^4 - 3n^2 + 1$ 의 값은 5이므로 $b = 5$

$$\therefore a + b = 2 + 5 = 7$$

017

$P(x) = x^3 + nx^2 + (9 - 2n^2)x - 9n$ 이라 하면

$$P(n) = n^3 + n^3 + 9n - 2n^3 - 9n = 0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} n & 1 & n & 9 - 2n^2 & -9n \\ & & n & 2n^2 & 9n \\ \hline & 1 & 2n & 9 & 0 \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (x-n)(x^2 + 2nx + 9)$$

$P(x) = 0$ 에서

$$x = n \text{ 또는 } x^2 + 2nx + 9 = 0$$

..... ㉠

[다른 풀이]

(i) $n = 2$ 일 때

㉠에 대입하면

$$x = 2 \text{ 또는 } x^2 + 4x + 9 = 0$$

$$x^2 + 4x + 9 = 0 \text{에서 } x = -2 \pm \sqrt{5}i$$

즉, 서로 다른 실근은 $x = 2$ 의 1개이므로

$$f(2) = 1$$

(ii) $n = 3$ 일 때

㉠에 대입하면

$$x = 3 \text{ 또는 } x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \text{에서 } (x+3)^2 = 0 \quad \therefore x = -3$$

즉, 서로 다른 실근은 $x = 3, x = -3$ 의 2개이므로

$$f(3) = 2$$

(iii) $n = 4$ 일 때

㉠에 대입하면

$$x = 4 \text{ 또는 } x^2 + 8x + 9 = 0$$

$$x^2 + 8x + 9 = 0 \text{에서 } x = -4 \pm \sqrt{7}$$

즉, 서로 다른 실근은 $x=4, x=-4\pm\sqrt{7}$ 의 3개이므로

$$f(4)=3$$

(i)~(iii)에서

$$f(2)+f(3)+f(4)=1+2+3=6$$

답 6

다른 풀이

이차방정식 $x^2+2nx+9=0$ 에 $x=n$ 을 대입하면

$$n^2+2n^2+9=3n^2+9>0$$

즉, 이차방정식 $x^2+2nx+9=0$ 은 $x=n$ 을 근으로 갖지 않으므로

주어진 삼차방정식의 서로 다른 근은 $x=n$ 과 이차방정식

$x^2+2nx+9=0$ 의 서로 다른 근이다.

따라서 이차방정식 $x^2+2nx+9=0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 k 라 하면 주어진 삼차방정식의 서로 다른 실근의 개수는 $k+1$ 이다.

이차방정식 $x^2+2nx+9=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=n^2-9$$

(i) $n=1$ 또는 $n=2$ 일 때

$$\frac{D}{4}<0\text{이므로 이차방정식 }x^2+2nx+9=0\text{의 서로 다른 실근}$$

의 개수는 0이다.

$$\therefore f(2)=0+1=1$$

(ii) $n=3$ 일 때

$$\frac{D}{4}=0\text{이므로 이차방정식 }x^2+2nx+9=0\text{의 서로 다른 실근}$$

의 개수는 1이다.

$$\therefore f(3)=1+1=2$$

(iii) $n\geq 4$ 일 때

$$\frac{D}{4}>0\text{이므로 이차방정식 }x^2+2nx+9=0\text{의 서로 다른 실근}$$

의 개수는 2이다.

$$\therefore f(4)=2+1=3$$

(i)~(iii)에서

$$f(2)+f(3)+f(4)=1+2+3=6$$

018

$$x^4+(2a+1)x^3+(3a+2)x^2+(a+2)x=0\text{에서}$$

$$x\{x^3+(2a+1)x^2+(3a+2)x+a+2\}=0$$

$$P(x)=x^3+(2a+1)x^2+(3a+2)x+a+2\text{라 하면}$$

$$P(-1)=-1+2a+1-3a-2+a+2=0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2a+1 & 3a+2 & a+2 \\ & & -1 & -2a & -a-2 \\ \hline & 1 & 2a & a+2 & 0 \end{array}$$

$$\therefore P(x)=(x+1)(x^2+2ax+a+2)$$

즉, 주어진 방정식은

$$x(x+1)(x^2+2ax+a+2)=0$$

위의 사차방정식의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되기 위해서는 한 개의 중근을 가져야 한다.

(i) $x=0$ 을 중근으로 갖는 경우

$$x=0\text{이 이차방정식 }x^2+2ax+a+2=0\text{의 근이므로}$$

$$0^2+2a\times 0+a+2=0$$

$$\therefore a=-2$$

$$\text{사차방정식 }x(x+1)(x^2-4x)=0, \text{ 즉}$$

$$x^2(x+1)(x-4)=0\text{의 서로 다른 세 실근은}$$

$$x=-1, x=0 \text{ (중근)}, x=4$$

(ii) $x=-1$ 을 중근으로 갖는 경우

$$x=-1\text{이 이차방정식 }x^2+2ax+a+2=0\text{의 근이므로}$$

$$(-1)^2+2a\times(-1)+a+2=0$$

$$\therefore a=3$$

$$\text{사차방정식 }x(x+1)(x^2+6x+5)=0, \text{ 즉}$$

$$x(x+5)(x+1)^2=0\text{의 서로 다른 세 실근은}$$

$$x=-5, x=-1 \text{ (중근)}, x=0$$

(iii) $x\neq 0, x\neq -1$ 인 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$ 이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-(a+2)=0$$

$$a^2-a-2=0, (a+1)(a-2)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=2$$

㉑ $a=-1$ 일 때

$$\text{사차방정식 }x(x+1)(x^2-2x+1)=0, \text{ 즉}$$

$$x(x+1)(x-1)^2=0\text{의 서로 다른 세 실근은}$$

$$x=-1, x=0, x=1 \text{ (중근)}$$

㉒ $a=2$ 일 때

$$\text{사차방정식 }x(x+1)(x^2+4x+4)=0, \text{ 즉}$$

$$x(x+1)(x+2)^2=0\text{의 서로 다른 세 실근은}$$

$$x=-2 \text{ (중근)}, x=-1, x=0$$

(i)~(iii)에서 실수 a 의 값은 $-2, -1, 2, 3$ 이므로 구하는 곱은

$$-2\times(-1)\times 2\times 3=12$$

답 12

019

$$P(x)=x^3-10x^2+(a+16)x-2a\text{라 하면}$$

$$P(2)=8-40+2a+32-2a=0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -10 & a+16 & -2a \\ & & 2 & -16 & 2a \\ \hline & 1 & -8 & a & 0 \end{array}$$

$$\therefore P(x)=(x-2)(x^2-8x+a)$$

즉, 주어진 삼차방정식은 $(x-2)(x^2-8x+a)=0$ 이고, 세 근이 이등변삼각형의 세 변의 길이이므로 이 삼차방정식은 중근을 가져야 한다.

(i) $x^2-8x+a=0$ 이 $x=2$ 를 근으로 가질 때

$$4-16+a=0$$

$$\therefore a=12$$

$$\text{이때 }x^2-8x+12=0\text{에서 } (x-2)(x-6)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=6$$

즉, 세 변의 길이는 2, 2, 6이고 $6>2+2$ 이므로 삼각형을 만들 수 없다.

(ii) $x^2-8x+a=0$ 이 중근을 가질 때

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-4)^2-a=0$$

$$\therefore a=16$$

이때 $x^2 - 8x + 16 = 0$ 에서 $(x-4)^2 = 0$

$\therefore x = 4$

즉, 세 변의 길이는 2, 4, 4이고, $4 < 2 + 4$ 이므로 삼각형을 만들 수 있다.

(i), (ii)에서 이등변삼각형의 세 변의 길이는 2, 4, 4

이므로 구하는 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$



답 ③

다른 풀이

이등변삼각형의 세 변의 길이를 α, α, β 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \alpha + \beta = 10 \quad \therefore 2\alpha + \beta = 10 \quad \dots \textcircled{㉠}$

$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha = \alpha + 16 \quad \therefore \alpha^2 + 2\alpha\beta = \alpha + 16 \quad \dots \textcircled{㉡}$

$\alpha \times \alpha \times \beta = 2\alpha \quad \therefore \alpha^2\beta = 2\alpha \quad \dots \textcircled{㉢}$

$\textcircled{㉠}$ 에서 $\beta = 10 - 2\alpha \quad \dots \textcircled{㉣}$

$\textcircled{㉢}$ 을 $\textcircled{㉣}$ 에 대입하면

$\alpha^2 + 2\alpha(10 - 2\alpha) = \alpha + 16$

$\therefore \alpha = -3\alpha^2 + 20\alpha - 16 \quad \dots \textcircled{㉤}$

$\textcircled{㉤}$, $\textcircled{㉣}$ 을 $\textcircled{㉢}$ 에 대입하면

$\alpha^2(10 - 2\alpha) = 2(-3\alpha^2 + 20\alpha - 16)$

$2\alpha^3 - 16\alpha^2 + 40\alpha - 32 = 0$

$\alpha^3 - 8\alpha^2 + 20\alpha - 16 = 0$

$p(\alpha) = \alpha^3 - 8\alpha^2 + 20\alpha - 16$ 이라 하면

$p(2) = 8 - 32 + 40 - 16 = 0$

조립제법을 이용하여 $p(\alpha)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 1 & -8 & 20 & -16 \\ & & 2 & -12 & 16 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & 0 \end{array}$$

$\therefore p(\alpha) = (\alpha - 2)(\alpha^2 - 6\alpha + 8)$

$= (\alpha - 2)^2(\alpha - 4)$

$p(\alpha) = 0$ 에서 $\alpha = 2$ 또는 $\alpha = 4$

(i) $\alpha = 2$ 일 때

$\beta = 6$ ($\because \textcircled{㉣}$)

즉, 세 변의 길이는 2, 2, 6이고, $6 > 2 + 2$ 이므로 삼각형을 만들 수 없다.

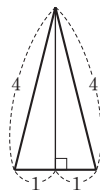
(ii) $\alpha = 4$ 일 때

$\beta = 2$ ($\because \textcircled{㉣}$)

즉, 세 변의 길이는 4, 4, 2이고, $4 < 2 + 4$ 이므로 삼각형을 만들 수 있다.

(i), (ii)에서 이등변삼각형의 세 변의 길이는 4, 4, 2

이므로 구하는 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$



참고

삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계

삼각형의 세 변의 길이에 대하여

(가장 긴 변의 길이) < (나머지 두 변의 길이의 합)

이 성립해야 한다.

020

삼차방정식 $x^3 + 3x^2 + kx + 5 = 0$ 의 정수인 세 근을 α, β, γ

($\alpha \leq \beta \leq \gamma$)라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta + \gamma = -3, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = k, \alpha\beta\gamma = -5$

이때 $\alpha\beta\gamma = -5$ 를 만족시키는 정수 α, β, γ 의 순서쌍 (α, β, γ)

는 $(-5, -1, -1), (-1, 1, 5), (-5, 1, 1)$ 이고, 이 중에서

$\alpha + \beta + \gamma = -3$ 을 만족시키는 순서쌍 (α, β, γ)는 $(-5, 1, 1)$ 이

다.

따라서 $\alpha = -5, \beta = 1, \gamma = 1$ 이므로

$k = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$

$= -5 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times (-5) = -9$

답 -9

021

삼차방정식 $2x^3 + ax^2 + (a^2 - 4a)x - b = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{a}{2}, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{a^2 - 4a}{2}, \alpha\beta\gamma = \frac{b}{2}$

또, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 도 주어진 삼차방정식의 세 근이므로 삼차방정식

의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} \times \frac{1}{\gamma} = \frac{b}{2}, \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = \frac{b}{2} \quad \therefore \alpha\beta\gamma = \frac{2}{b}$

즉, $\frac{b}{2} = \frac{2}{b}$ 이므로 $b^2 = 4 \quad \therefore b = 2$ ($\because b$ 는 자연수)

$\therefore \alpha\beta\gamma = 1$

또, $\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta} \times \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \times \frac{1}{\alpha} = \frac{a^2 - 4a}{2}$ 에서

$\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{a^2 - 4a}{2}, \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{a^2 - 4a}{2}$

즉, $-\frac{a}{2} = \frac{a^2 - 4a}{2}$ 이므로

$-a = a^2 - 4a$

$a^2 - 3a = 0, a(a - 3) = 0$

$\therefore a = 3$ ($\because a$ 는 자연수)

따라서 주어진 방정식은 $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ 라 하면

$P(1) = 2 + 3 - 3 - 2 = 0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 3 & -3 & -2 \\ & & 2 & 5 & 2 \\ \hline & 2 & 5 & 2 & 0 \end{array}$$

$\therefore P(x) = (x - 1)(2x^2 + 5x + 2)$

$= (x - 1)(2x + 1)(x + 2)$

즉, 주어진 방정식은 $(x - 1)(2x + 1)(x + 2) = 0$ 이므로

$x = -2$ 또는 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = 1$

따라서 $\alpha = -2, \beta = -\frac{1}{2}, \gamma = 1$ 이므로

$\alpha\beta + \gamma = -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 2$

답 2

다른 풀이

a 가 삼차방정식 $2x^3 + ax^2 + (a^2 - 4a)x - b = 0$ 의 한 근이므로

$$2a^3+aa^2+(a^2-4a)a-b=0$$

$a \neq 0$ 이므로 위의 식의 양변을 a^3 으로 나누면

$$2 + \frac{a}{a} + \frac{a^2-4a}{a^2} - \frac{b}{a^3} = 0$$

$$-b \times \frac{1}{a^3} + (a^2-4a) \times \frac{1}{a^2} + a \times \frac{1}{a} + 2 = 0$$

즉, $\frac{1}{a}$ 은 삼차방정식 $-bx^3+(a^2-4a)x^2+ax+2=0$ 의 한 근이다.

마찬가지로 $\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 도 삼차방정식

$$-bx^3+(a^2-4a)x^2+ax+2=0$$
의 한 근이다.

이때 두 삼차방정식 $2x^3+ax^2+(a^2-4a)x-b=0$,

$-bx^3+(a^2-4a)x^2+ax+2=0$ 은 서로 같은 근을 가지므로 계수의 비가 같다.

$$\text{즉, } \frac{2}{-b} = \frac{a}{a^2-4a} = \frac{a^2-4a}{a} = \frac{-b}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{2}{-b} = \frac{-b}{2} \text{에서 } b^2=4$$

$$\therefore b=2 \text{ (}\because b \text{는 자연수)}$$

$$\frac{a^2-4a}{a} = -1 \text{에서 } a^2-4a = -a$$

$$a^2-3a=0, a(a-3)=0$$

$$\therefore a=3 \text{ (}\because a \text{는 자연수)}$$

따라서 주어진 방정식은

$$2x^3+3x^2-3x-2=0$$

$$P(x)=2x^3+3x^2-3x-2 \text{라 하면}$$

$$P(1)=2+3-3-2=0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 3 & -3 & -2 \\ & & 2 & 5 & 2 \\ \hline & 2 & 5 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\therefore P(x)=(x-1)(2x^2+5x+2) \\ = (x-1)(2x+1)(x+2)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(2x+1)(x+2)=0$ 이므로

$$x=-2 \text{ 또는 } x=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=1$$

따라서 $a=-2, \beta=-\frac{1}{2}, \gamma=1$ 이므로

$$a\beta+\gamma=-2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 2$$

022

삼차방정식 $f(-x)=0$ 의 서로 다른 세 실근이 $-ab, -bc, -ca$ 이므로 삼차방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 세 실근은 ab, bc, ca 이다.

따라서 $a+b+c=ab+bc+ca$ 이므로

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \\ = (a+b+c)^2-2(a+b+c) \\ = 15$$

$$(a+b+c)^2-2(a+b+c)-15=0$$

$$(a+b+c+3)(a+b+c-5)=0$$

$$\therefore a+b+c=-3 \text{ 또는 } a+b+c=5$$

그런데 a, b, c 는 양수이므로

$$a+b+c=5$$

또, $abc=(abc)^2$ 이므로

$$abc=1 \text{ (}\because abc>0\text{)}$$

$$\therefore (a+b)(b+c)(c+a)$$

$$=(5-c)(5-a)(5-b)$$

$$=125-25(a+b+c)+5(ab+bc+ca)-abc$$

$$=125-25 \times 5 + 5 \times 5 - 1$$

$$=24$$

답 24

023

삼차방정식 $P(x)=0$ 의 한 실근을 α , 서로 다른 두 허근을 β, γ 라

하면 삼차방정식 $P(3x-1)=0$ 의 세 근은 $\frac{\alpha+1}{3}, \frac{\beta+1}{3}, \frac{\gamma+1}{3}$

이다.

조건 (가)에 의하여 $\beta\gamma=5$

$$\text{조건 (나)에 의하여 } \frac{\alpha+1}{3}=0, \frac{\beta+1}{3} + \frac{\gamma+1}{3}=2$$

$$\therefore \alpha=-1, \beta+\gamma=4$$

따라서 α, β, γ 를 세 근으로 하고 x^3 의 계수가 1인 삼차방정식은

$$(x+1)(x^2-4x+5)=0$$

즉, $P(x)=(x+1)(x^2-4x+5)=x^3-3x^2+x+5$ 이므로

$$a=-3, b=1, c=5$$

$$\therefore a+b+c=-3+1+5=3$$

답 ①

024

두 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$,

$x^3-(a+6)x^2+(4a+b+12)x-(4a+2b+c+8)=0$ 의 근이 두

두 α, β, γ 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+\beta+\gamma=-a=a+6 \quad \therefore a=-3$$

$$\therefore a+\beta+\gamma=3$$

$$a\beta\gamma=-c=4a+2b+c+8=2b+c-4 \quad \therefore b+c=2 \text{ [다른 풀이]}$$

$$\therefore x^3+ax^2+bx+c=x^3-3x^2+bx+2-b$$

$P(x)=x^3-3x^2+bx+2-b$ 라 하면

$$P(1)=1-3+b+2-b=0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & b & 2-b \\ & & 1 & -2 & b-2 \\ \hline & 1 & -2 & b-2 & 0 \end{array}$$

$$\therefore P(x)=(x-1)(x^2-2x+b-2)$$

$\alpha=1, x^2-2x+b-2=0$ 의 두 근을 β, γ 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\beta+\gamma=2, \beta\gamma=b-2$$

$$\therefore (a+\beta)\gamma^2+(\beta+\gamma)\alpha^2+(\gamma+\alpha)\beta^2$$

$$=(3-\gamma)\gamma^2+2\alpha^2+(3-\beta)\beta^2$$

$$=-\{(\beta^3+\gamma^3)+3(\beta^2+\gamma^2)+2\}$$

$$=-\{(\beta+\gamma)^3-3\beta\gamma(\beta+\gamma)\}+3\{(\beta+\gamma)^2-2\beta\gamma\}+2$$

$$=-\{8-6(b-2)\}+3\{4-2(b-2)\}+2$$

$$=6$$

답 6

다른 풀이

$$\begin{aligned} \alpha, \beta, \gamma \text{가 삼차방정식 } x^3+ax^2+bx+c=0, \text{ 즉} \\ x^3-3x^2+bx+c=0 \text{의 세 근이므로} \\ \alpha^3-3\alpha^2+b\alpha+c=0 \quad \therefore (3-\alpha)\alpha^2=b\alpha+c \\ \beta^3-3\beta^2+b\beta+c=0 \quad \therefore (3-\beta)\beta^2=b\beta+c \\ \gamma^3-3\gamma^2+b\gamma+c=0 \quad \therefore (3-\gamma)\gamma^2=b\gamma+c \\ \therefore (\alpha+\beta)\gamma^2+(\beta+\gamma)\alpha^2+(\gamma+\alpha)\beta^2 \\ = (3-\gamma)\gamma^2+(3-\alpha)\alpha^2+(3-\beta)\beta^2 \\ = b\gamma+c+b\alpha+c+b\beta+c \\ = b(\alpha+\beta+\gamma)+3c \\ = 3b+3c=3(b+c)=6 \end{aligned}$$

025

α, β, γ 가 모두 실수이면 $(2\alpha+2\beta-\gamma)^2=-81$ 을 만족시키지 않으므로 적어도 하나는 허수이고, 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 이 허근을 갖는다.
 이때 a, b 가 실수이므로 이 이차방정식의 한 근을 $p+qi$ (p, q 는 실수, $q \neq 0$)라 하면 다른 한 근은 $p-qi$ 이고, 이 두 근의 합은 실수이므로 $\gamma=1$ 이면 $(2\alpha+2\beta-\gamma)^2=-81$ 을 만족시키지 않는다.
 $\therefore \alpha=1$ 또는 $\beta=1$

- (i) $\alpha=1$ 일 때
 $\beta=p+qi, \gamma=p-qi$ 라 하면
 $2\alpha+2\beta-\gamma=2+2(p+qi)-(p-qi)$
 $=2+p+3qi$
 $(2\alpha+2\beta-\gamma)^2=-81$ 이므로
 $(2+p+3qi)^2=-81$
 $(2+p)^2-9q^2+6(2+p)qi=-81$
 $(2+p)^2-9q^2=-81$
 $2+p=0 \quad \therefore p=-2, q=\pm 3$
 $\therefore \beta=-2+3i, \gamma=-2-3i$ 또는 $\beta=-2-3i, \gamma=-2+3i$
- (ii) $\beta=1$ 일 때
 (i)과 같은 방법으로 구하면
 $\alpha=-2+3i, \gamma=-2-3i$ 또는 $\alpha=-2-3i, \gamma=-2+3i$
- (i), (ii)에서
 $(2+\alpha)(2+\beta)(2+\gamma)=3 \times 3i \times (-3i)=27$

답 27

026

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 의 한 근이 $x=1-\sqrt{3}$ 이고, 계수가 모두 유리수이므로 $x=1+\sqrt{3}$ 도 근이다.
 나머지 한 근을 k (k 는 유리수)라 하면
 $x^3+ax^2+bx+c=\{x-(1-\sqrt{3})\}\{x-(1+\sqrt{3})\}(x-k)$
 $=(x^2-2x-2)(x-k)$
 $=x^3-(k+2)x^2+(2k-2)x+2k$
 즉, $a=-k-2, b=2k-2, c=2k$ 이므로
 $a^2+b^2+c^2=(-k-2)^2+(2k-2)^2+(2k)^2$
 $=9k^2-4k+8$
 $=9\left(k-\frac{2}{9}\right)^2+\frac{68}{9}$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{68}{9}$ 이다.

답 68/9

참고

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 에 대하여 a, b, c, d 가 유리수일 때, $x=p+\sqrt{q}$ 가 이 방정식의 근이면 $x=p-\sqrt{q}$ 도 이 방정식의 근이고 $x=p-\sqrt{q}$ 가 이 방정식의 근이면 $x=p+\sqrt{q}$ 도 이 방정식의 근이다.
 (단, p 는 유리수, \sqrt{q} 는 무리수이다.)

027

$a=p+qi$ (p, q 는 실수, $q \neq 0$)라 하면
 $a^2=(p+qi)^2=p^2-q^2+2pqi$
 이때 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $p+qi$ 가 근이면 $p-qi$ 도 근이다.
 즉, $a^2=p-qi$ 이므로
 $p^2-q^2+2pqi=p-qi$
 $p^2-q^2+2pqi=p-qi$
 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $p^2-q^2=p, 2pq=-q$
 $\therefore p=-\frac{1}{2} (\because q \neq 0), q=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ **다른 풀이**
 즉, 주어진 삼차방정식의 두 허근은 $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 이므로 나머지 한 실근을 β 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \beta = 5$
 $-1 + \beta = 5$
 $\therefore \beta = 6$
 따라서
 $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \times \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \times 6$
 $+ 6 \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = a,$
 $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \times \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \times 6 = -b$
 이므로 $a=-5, b=-6$
 $\therefore ab=-5 \times (-6)=30$

답 30

다른 풀이

두 근이 $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은
 $x^2+x+1=0$
 주어진 삼차방정식의 한 실근을 β 라 하면
 $x^3-5x^2+ax+b=(x-\beta)(x^2+x+1)$
 $=x^3+(1-\beta)x^2+(1-\beta)x-\beta$
 따라서 $-5=1-\beta, a=1-\beta, b=-\beta$ 이므로
 $\beta=6, a=-5, b=-6$
 $\therefore ab=-5 \times (-6)=30$

028

$P(x)=x^3-x^2-x-2$ 라 하면
 $P(2)=8-4-2-2=0$
 조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$2 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & -2 \\ & & 2 & 2 & 2 \\ & & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right.$$

$$\therefore P(x) = (x-2)(x^2+x+1)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2+x+1)=0$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x^2+x+1=0$$

이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=1^2-4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$$

에서 삼차방정식 $(x-2)(x^2+x+1)=0$ 의 한 허근 ω 는 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 근이므로

$$\omega^2+\omega+1=0$$

위의 등식의 양변에 $\omega-1$ 을 곱하면

$$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$$

$$\omega^3-1=0 \quad \therefore \omega^3=1$$

$$\begin{aligned} \therefore (\omega^4+1)(\omega^5+1)(\omega^6+1) &= (\omega^3 \times \omega + 1)(\omega^3 \times \omega^2 + 1)\{(\omega^3)^2 + 1\} \\ &= (\omega+1) \times (\omega^2+1) \times (1+1) \\ &= (-\omega^2) \times (-\omega) \times 2 \\ &= 2\omega^3 \\ &= 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

답 2

029

방정식 $P(x)=0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로

$$\alpha^3-8=0, \beta^3-8=0, \gamma^3-8=0$$

$$\therefore \alpha^3=8, \beta^3=8, \gamma^3=8$$

한편, $P(x)=0$ 에서 $x^3-8=0$

$$(x-2)(x^2+2x+4)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x^2+2x+4=0$$

이때 $\alpha=2$ 라 하면 β, γ 는 이차방정식 $x^2+2x+4=0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\beta+\gamma=-2, \beta\gamma=4$$

따라서

$$Q(\alpha) = 2^3+2-9=1,$$

$$Q(\beta) = \beta^3+\beta-9$$

$$= 8+\beta-9 = \beta-1,$$

$$Q(\gamma) = \gamma^3+\gamma-9$$

$$= 8+\gamma-9 = \gamma-1$$

이므로

$$Q(\alpha)Q(\beta)Q(\gamma) = 1 \times (\beta-1)(\gamma-1)$$

$$= \beta\gamma - (\beta+\gamma) + 1$$

$$= 4 - (-2) + 1 = 7$$

답 5

다른 풀이

방정식 $P(x)=0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로

$$P(\alpha) = P(\beta) = P(\gamma) = 0$$

$$\therefore P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

한편,

$$Q(x) = x^3+x-9 = (x^3-8) + x-1$$

$$= P(x) + x-1$$

이므로

$$Q(\alpha) = P(\alpha) + \alpha - 1 = \alpha - 1,$$

$$Q(\beta) = P(\beta) + \beta - 1 = \beta - 1,$$

$$Q(\gamma) = P(\gamma) + \gamma - 1 = \gamma - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore Q(\alpha)Q(\beta)Q(\gamma) &= (\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1) \\ &= -(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) \\ &= -P(1) \\ &= -(1^3-8) = 7 \end{aligned}$$

030

계수가 실수인 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이므로 $\bar{\omega}$ 도 이 이차방정식의 근이다.

$$\therefore x^2+x+1 = (x-\omega)(x-\bar{\omega}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x^2+x+1=0$ 의 양변에 $x-1$ 을 곱하면

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\therefore x^3-1=0$$

이때 $\omega, \bar{\omega}$ 는 $x^3-1=0$ 을 만족시키므로

$$\omega^3=1, \bar{\omega}^3=1$$

$$P(1)=1, P(2)=8, P(\omega)=1, P(\bar{\omega})=1 \text{ 이므로}$$

$$P(1)-1^3=0, P(2)-2^3=0, P(\omega)-\omega^3=0, P(\bar{\omega})-\bar{\omega}^3=0$$

즉, 사차방정식 $P(x)-x^3=0$ 은 x^4 의 계수가 1이고 1, 2, $\omega, \bar{\omega}$ 를 네 근으로 갖는다.

$$\begin{aligned} \therefore P(x)-x^3 &= (x-1)(x-2)(x-\omega)(x-\bar{\omega}) \\ &= (x-1)(x-2)(x^2+x+1) \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

따라서 $P(x) = (x-1)(x-2)(x^2+x+1) + x^3$ 이므로

$$P(-1) = -2 \times (-3) \times 1 + (-1) = 5$$

답 5

031

오른쪽 그림과 같이 반원의 중심을 O 라 하고 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\begin{aligned} \overline{BE}^2 &= (2+r)^2 - r^2 \\ &= 4(r+1) \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC 와 삼각형 OBE 에서

$$\angle ACB = \angle OEB = 90^\circ, \angle B \text{는 공통}$$

이므로 $\triangle ABC \sim \triangle OBE$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{AC} : \overline{OE} = \overline{BC} : \overline{BE}$ 이므로

$$6 : r = (2r+2) : \overline{BE}$$

$$\overline{BE} = \frac{r(r+1)}{3}$$

$$\therefore \overline{BE}^2 = \frac{r^2(r+1)^2}{9} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 4(r+1) = \frac{r^2(r+1)^2}{9}$$

$r+1 > 0$ 이므로 양변을 $r+1$ 로 나누면

$$4 = \frac{r^2(r+1)}{9}$$

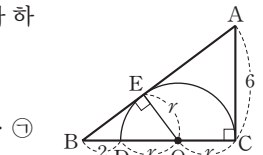
$$\therefore r^3+r^2-36=0$$

$$P(r) = r^3+r^2-36 \text{ 이라 하면}$$

$$P(3) = 27+9-36=0$$

조립제법을 이용하여 $P(r)$ 를 인수분해하면

$$3 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & -36 \\ & & 3 & 12 & 36 \\ & & 1 & 4 & 12 & 0 \end{array} \right.$$



∴ $P(r) = (r-3)(r^2+4r+12)$
 $P(r)=0$ 에서 $r=3$ (∵ $r^2+4r+12>0$)
 ∴ $\overline{CD} = 2r = 6$

답 6

032

(i) $x \geq y$ 일 때

$\langle x, y \rangle = x$ 이므로 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} x-y+2=2x & \dots \text{㉠} \\ x^2-xy+y^2=3x+16 & \dots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $y = -x+2$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$x^2 - x(-x+2) + (-x+2)^2 = 3x+16$$

$$3x^2 - 9x - 12 = 0, x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x+1)(x-4) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 4$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$x = -1, y = 3 \text{ 또는 } x = 4, y = -2$$

그런데 $x \geq y$ 이므로 $x = 4, y = -2$

(ii) $x < y$ 일 때

$\langle x, y \rangle = -y$ 이므로 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} x-y+2=-2y & \dots \text{㉢} \\ x^2-xy+y^2=-3y+16 & \dots \text{㉣} \end{cases}$$

㉢에서 $x = -y-2$

㉣을 ㉢에 대입하면

$$(-y-2)^2 - (-y-2)y + y^2 = -3y+16$$

$$3y^2 + 9y - 12 = 0, y^2 + 3y - 4 = 0$$

$$(y+4)(y-1) = 0 \quad \therefore y = -4 \text{ 또는 } y = 1$$

이것을 ㉢에 대입하면

$$x = 2, y = -4 \text{ 또는 } x = -3, y = 1$$

그런데 $x < y$ 이므로

$$x = -3, y = 1$$

(i), (ii)에서 순서쌍 (x, y) 는 $(4, -2), (-3, 1)$

$$\therefore \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = -8 + (-3) = -11$$

답 -11

033

$$\begin{cases} |x-y|=3 & \dots \text{㉠} \\ x^2+2y^2=18 & \dots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $x-y = -3$ 또는 $x-y = 3$

$$\therefore y = x+3 \text{ 또는 } y = x-3$$

(i) $y = x+3$ 일 때

이것을 ㉡에 대입하면

$$x^2 + 2(x+3)^2 = 18, 3x^2 + 12x = 0$$

$$3x(x+4) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = -4$$

즉, $x=0$ 일 때 $y=3$ 이고, $x=-4$ 일 때 $y=-1$ 이므로

$$(0, 3), (-4, -1)$$

(ii) $y = x-3$ 일 때

이것을 ㉡에 대입하면

$$x^2 + 2(x-3)^2 = 18, 3x^2 - 12x = 0$$

$$3x(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 4$$

즉, $x=0$ 일 때 $y=-3$ 이고, $x=4$ 일 때 $y=1$ 이므로

$$(0, -3), (4, 1)$$

(i), (ii)에서 네 점 $(0, 3), (-4, -1),$

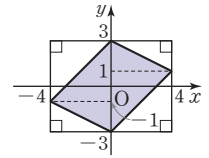
$(0, -3), (4, 1)$ 을 꼭짓점으로 하는 사각

형은 오른쪽 그림과 같으므로 이 사각형의

넓이는

$$8 \times 6 - 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4\right) - 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 2\right)$$

$$= 48 - 16 - 8 = 24$$



답 5

034

$x+y=u, xy=v$ (u, v 는 실수)로 놓으면

$$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = u^2 - 2v,$$

$$x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = u^3 - 3uv$$

이므로 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2 - v = 3 & \dots \text{㉠} \\ u^3 - 3uv + 2u^2 - 4v - 3u = 0 & \dots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $v = u^2 - 3$ 이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$$u^3 - 3u(u^2 - 3) + 2u^2 - 4(u^2 - 3) - 3u = 0$$

$$2u^3 + 2u^2 - 6u - 12 = 0$$

$$u^3 + u^2 - 3u - 6 = 0$$

$$P(u) = u^3 + u^2 - 3u - 6 \text{이라 하면}$$

$$P(2) = 8 + 4 - 6 - 6 = 0$$

조립제법을 이용하여 $P(u)$ 를 인수분해하면

$$2 \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -6 \\ & 2 & 6 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\therefore P(u) = (u-2)(u^2+3u+3)$$

$P(u)=0$ 에서

$$(u-2)(u^2+3u+3) = 0$$

$$\therefore u = 2 \text{ 또는 } u^2+3u+3 = \left(u+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

$u=2$ 를 ㉠에 대입하면 $v=1$

따라서 $x+y=2, xy=1$ 이므로 x, y 는 t 에 대한 이차방정식

$$t^2 - 2t + 1 = 0, \text{ 즉 } (t-1)^2 = 0 \text{의 두 근이므로}$$

$$t = 1 \text{ (중근)}$$

$$\therefore x = y = 1$$

따라서 $a=b=1$ 이므로

$$3a+2b = 3+2=5$$

답 5

035

오른쪽 그림과 같이 변 BC, 변 C'D'의 연

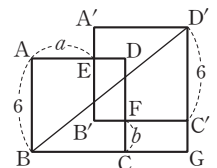
장선의 교점을 G라 하면

$$\overline{BG}^2 + \overline{D'G}^2 = \overline{BD'}^2$$

이때

$$\overline{ED} = 6-a, \overline{D'F} = 6-b,$$

$$\overline{BG} = 6+a, \overline{D'G} = 6+b$$



이므로

$$\begin{cases} 2\{(6-a)+(6-b)\}=12 & \dots \textcircled{7} \\ (6+a)^2+(6+b)^2=164 & \dots \textcircled{8} \end{cases}$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } b=6-a \quad \dots \textcircled{9}$$

$$\textcircled{9} \text{을 } \textcircled{8} \text{에 대입하면 } (6+a)^2+(12-a)^2=164$$

$$2a^2-12a+16=0, a^2-6a+8=0$$

$$(a-2)(a-4)=0$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } a=4$$

이것을 $\textcircled{9}$ 에 대입하면

$$a=2, b=4 \text{ 또는 } a=4, b=2$$

그런데 $a > b$ 이므로

$$a=4, b=2$$

$$\therefore 10a+b=10 \times 4+2=42$$

답 42

036

오른쪽 그림과 같이 두 원 O_1, O_2 의 중심을 각각 O_1, O_2 라 하고, 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2 라 하자.

두 원의 넓이의 합이 52π 이므로

$$\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = 52\pi$$

$$\therefore r_1^2 + r_2^2 = 52 \quad \dots \textcircled{1}$$

점 O_1 에서 변 CD 에 내린 수선과 점 O_2 에서 변 BC 에 내린 수선의 교점을 P 라 하면

$$\overline{O_1P} = 18 - (r_1 + r_2), \overline{O_2P} = 16 - (r_1 + r_2)$$

이므로 직각삼각형 O_1PO_2 에서

$$(r_1 + r_2)^2 = \{18 - (r_1 + r_2)\}^2 + \{16 - (r_1 + r_2)\}^2$$

$r_1 + r_2 = X$ 로 놓으면

$$X^2 = (18 - X)^2 + (16 - X)^2$$

$$X^2 - 68X + 580 = 0$$

$$(X - 10)(X - 58) = 0$$

$$\therefore X = 10 \text{ 또는 } X = 58$$

$$\therefore r_1 + r_2 = 10 \text{ 또는 } r_1 + r_2 = 58$$

그런데 $r_1 + r_2 < 16$ 이므로 $r_1 + r_2 = 10$

$$\therefore r_2 = 10 - r_1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$r_1^2 + (10 - r_1)^2 = 52, 2r_1^2 - 20r_1 + 48 = 0$$

$$r_1^2 - 10r_1 + 24 = 0, (r_1 - 4)(r_1 - 6) = 0$$

$$\therefore r_1 = 4 \text{ 또는 } r_1 = 6$$

이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$r_1 = 4, r_2 = 6 \text{ 또는 } r_1 = 6, r_2 = 4$$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 차는

$$6 - 4 = 2$$

답 2

037

두 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0, x^2 + bx + a = 0$ 의 공통인 근을 a 라 하면

$$a^2 + aa + b = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a^2 + ba + a = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$(a-b)a - (a-b) = 0, (a-b)(a-1) = 0$$

$$\therefore a=b \text{ 또는 } a=1$$

이때 $a=b$ 이면 두 이차방정식이 일치하므로 공통이 아닌 두 근의 비가 1 : 4가 아니다.

$$\therefore a=1 \quad \text{[다른 풀이]}$$

$a=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$1 + a + b = 0$$

$$\therefore b = -a - 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ 을 두 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0, x^2 + bx + a = 0$ 에 대입하면

$$x^2 + ax - a - 1 = 0, x^2 + (-a-1)x + a = 0$$

$$x^2 + ax - a - 1 = 0 \text{에서 } (x-1)(x+a+1) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=-a-1$$

$$x^2 + (-a-1)x + a = 0 \text{에서 } (x-1)(x-a) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=a$$

이때 $(-a-1) : a = 1 : 4$ 이므로

$$a = 4(-a-1), 5a = -4$$

$$\therefore a = -\frac{4}{5}$$

$$\text{이것을 } \textcircled{3} \text{에 대입하면 } b = -\frac{1}{5}$$

$$\therefore 5(a^2 - b^2) = 5 \times \left\{ \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2 \right\} = 3$$

답 3

[다른 풀이]

두 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0, x^2 + bx + a = 0$ 의 공통이 아닌 두 근의 비가 1 : 4이므로 한 근을 k ($k \neq 0$)라 하면 다른 한 근은 $4k$ 이다.

이때 k 는 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 근이고, $4k$ 는 이차방정식 $x^2 + bx + a = 0$ 의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1 + k = -a, k = b \quad \dots \textcircled{4}$$

$$1 + 4k = -b, 4k = a \quad \dots \textcircled{5}$$

$\textcircled{4}, \textcircled{5}$ 에서 $1 + k = -4k$ 이므로

$$5k = -1 \quad \therefore k = -\frac{1}{5}$$

$$\text{따라서 } a = -\frac{4}{5}, b = -\frac{1}{5} \text{이므로}$$

$$5(a^2 - b^2) = 5 \times \left\{ \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2 \right\} = 3$$

038

$\sqrt{x^2 + 6x + 21}$ 의 값을 k (k 는 0 이상의 정수)라 하면

$$x^2 + 6x + 21 = k^2, (x+3)^2 + 12 = k^2$$

$$k^2 - (x+3)^2 = 12 \quad \therefore (k+x+3)(k-x-3) = 12$$

이때 $k+x+3, k-x-3$ 은 정수이므로 모두 12의 약수이고

$(k+x+3) + (k-x-3) = 2k$ 이므로 $(k+x+3) + (k-x-3)$ 의 값이 짝수이어야 한다.

(i) $k+x+3 = -2, k-x-3 = -6$ 일 때

두 식을 연립하여 풀면

$$x = -1, k = -4$$

그런데 k 는 0 이상의 정수이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k+x+3=-6, k-x-3=-2$ 일 때

두 식을 연립하여 풀면

$$x=-5, k=-4$$

그런데 k 는 0 이상의 정수이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $k+x+3=2, k-x-3=6$ 일 때

두 식을 연립하여 풀면

$$x=-5, k=4$$

(iv) $k+x+3=6, k-x-3=2$ 일 때

두 식을 연립하여 풀면

$$x=-1, k=4$$

(i)~(iv)에서 $x=-1$ 또는 $x=-5$ 이므로 정수 x 의 값의 합은

$$-1+(-5)=-6$$

답 -6

039

이차방정식 $x^2-mx+m+6=0$ 의 두 근을 α, β (α, β 는 정수)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=m \quad \dots \textcircled{A}$$

$$\alpha\beta=m+6 \quad \dots \textcircled{B}$$

①을 ②에 대입하면

$$\alpha\beta=\alpha+\beta+6, \alpha\beta-\alpha-\beta=6$$

$$\alpha(\beta-1)-(\beta-1)=7$$

$$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=7$$

이때 $\alpha-1, \beta-1$ 은 정수이므로

(i) $\alpha-1=-7, \beta-1=-1$ 일 때

$$\alpha=-6, \beta=0$$

$$\therefore m=-6$$

(ii) $\alpha-1=-1, \beta-1=-7$ 일 때

$$\alpha=0, \beta=-6$$

$$\therefore m=-6$$

(iii) $\alpha-1=1, \beta-1=7$ 일 때

$$\alpha=2, \beta=8$$

$$\therefore m=10$$

(iv) $\alpha-1=7, \beta-1=1$ 일 때

$$\alpha=8, \beta=2$$

$$\therefore m=10$$

(i)~(iv)에서 $m=-6$ 또는 $m=10$ 이므로 구하는 합은

$$-6+10=4$$

답 ②

040

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+b+c=-k$$

$$P(x)=x^3+kx^2+2x+3-k \text{라 하면}$$

$$P(-1)=-1+k-2+3-k=0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

084 정답과 풀이

$$-1 \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & k & 2 & 3-k \\ & -1 & -k+1 & k-3 \\ \hline 1 & k-1 & -k+3 & 0 \end{array} \right.$$

$$\therefore P(x)=(x+1)\{x^2+(k-1)x+3-k\}$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x+1)\{x^2+(k-1)x+3-k\}=0$$

이차방정식 $x^2+(k-1)x+3-k=0$ 의 두 근을 α, β ($\alpha<\beta$)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=1-k, \alpha\beta=3-k$$

위의 두 식을 연립하면

$$\alpha\beta-(\alpha+\beta)=2, (\alpha-1)(\beta-1)=3$$

이때 α, β ($\alpha<\beta$)는 정수이므로

$$\alpha-1=-3, \beta-1=-1 \text{ 또는 } \alpha-1=1, \beta-1=3$$

$$\therefore \alpha=-2, \beta=0 \text{ 또는 } \alpha=2, \beta=4$$

즉, 순서쌍 (a, b, c) 는 $(-2, -1, 0)$ 또는 $(-1, 2, 4)$

(i) $(a, b, c)=(-2, -1, 0)$ 일 때

$$-k=-2+(-1)+0$$

$$\therefore k=3$$

(ii) $(a, b, c)=(-1, 2, 4)$ 일 때

$$-k=-1+2+4$$

$$\therefore k=-5$$

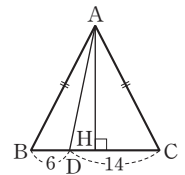
(i), (ii)에서 실수 k 의 값은 $-5, 3$ 이므로 구하는 합은

$$-5+3=-2$$

답 -2

041

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로



$$\overline{BH}=\overline{CH}=\frac{1}{2}\times(6+14)=10$$

$$\therefore \overline{DH}=\overline{10}-6=4$$

$\overline{AH}=x, \overline{AB}=a, \overline{AD}=b$ 라 하면 두 직각삼각형 ABH, ADH에서

$$a^2=x^2+10^2, b^2=x^2+4^2$$

위의 두 식을 연립하면

$$a^2-b^2=84$$

$$\therefore (a+b)(a-b)=84$$

이때 a, b 는 자연수이고, $a>10, b>4$ 이므로 $a+b>14$

(i) $a+b=21, a-b=4$ 일 때

두 식을 연립하여 풀면

$$a=\frac{25}{2}, b=\frac{17}{2}$$

그런데 a, b 는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+b=28, a-b=3$ 일 때

두 식을 연립하여 풀면

$$a=\frac{31}{2}, b=\frac{25}{2}$$

그런데 a, b 는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a+b=42, a-b=2$ 일 때

두 식을 연립하여 풀면

$$a=22, b=20$$

(iv) $a+b=84, a-b=1$ 일 때

두 식을 연립하여 풀면

$$a = \frac{85}{2}, b = \frac{83}{2}$$

그런데 a, b 는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 $a=22, b=20$ 이므로 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $22+20+22=64$

답 64

042

$x^2y^2 + x^2 + 4y^2 - 6xy + 1 = 0$ 에서

$$(x^2y^2 - 2xy + 1) + (x^2 - 4xy + 4y^2) = 0$$

$$\therefore (xy-1)^2 + (x-2y)^2 = 0$$

이때 x, y 는 실수이므로

$$xy-1=0, x-2y=0$$

$$\therefore xy=1, x=2y$$

$x=2y$ 를 $xy=1$ 에 대입하면

$$2y^2=1 \quad \therefore y^2=\frac{1}{2}$$

이때 $x=2y$ 에서

$$x^2=4y^2=4 \times \frac{1}{2}=2$$

$$\therefore x^2+y^2=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

043

일등급의 메모장

방정식 $f(f(x))=x$ 의 실근이 되려면 $f(x)=x$ 를 만족시키거나 $f(p)=q, f(q)=p$ 를 만족시키는 두 실수 p, q 가 존재한다.

$$f(f(x))=x \text{에서 } f(f(x))-x=0$$

$$f(f(x))-x=(x^2+ax+b)^2+a(x^2+ax+b)+b-x$$

방정식 $f(f(x))-x=0$ 의 해가 1, 3이므로

$$f(f(1))-1=0 \text{에서}$$

$$(1+a+b)^2+a(1+a+b)+b-1=0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f(f(3))-3=0 \text{에서}$$

$$(9+3a+b)^2+a(9+3a+b)+b-3=0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}-\textcircled{1}$ 을 하면

$$(2a+8)(4a+2b+10)+a(2a+8)-2=0$$

$$(a+4)(5a+2b+10)=1$$

이때 a, b 가 정수이므로 $a+4, 5a+2b+10$ 도 정수이다.

(i) $a+4=1, 5a+2b+10=1$ 일 때

$$a+4=1 \text{에서}$$

$$a=-3$$

$$5a+2b+10=1 \text{에서}$$

$$b=3$$

$$\therefore f(x)=x^2-3x+3$$

즉,

$$\begin{aligned} f(f(x))-x &= (x^2-3x+3)^2-3(x^2-3x+3)+3-x \\ &= x^4-6x^3+12x^2-10x+3 \\ &= (x-1)^3(x-3) \end{aligned}$$

이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

$$\therefore f(a+b)=f(0)=3$$

(ii) $a+4=-1, 5a+2b+10=-1$ 일 때

$$a+4=-1 \text{에서}$$

$$a=-5$$

$$5a+2b+10=-1 \text{에서}$$

$$b=7$$

$$\therefore f(x)=x^2-5x+7$$

즉,

$$\begin{aligned} f(f(x))-x &= (x^2-5x+7)^2-5(x^2-5x+7)+7-x \\ &= x^4-10x^3+34x^2-46x+21 \\ &= (x-1)(x-3)(x^2-6x+7) \end{aligned}$$

이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서

$$f(a+b)=3$$

답 3

다른 풀이

다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(f(x))=x$ 의 실근은 $f(x)=x$ 를 만족시키거나 $f(p)=q, f(q)=p$ 를 만족시키는 두 실수 p, q 가 존재한다. **참고**

(i) $f(1)=1, f(3)=3$ 일 때

함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x)-x=(x-1)(x-3)$$

$$\therefore f(x)=(x-1)(x-3)+x$$

$$=x^2-3x+3$$

따라서

$$\begin{aligned} f(f(x))-x &= (x^2-3x+3)^2-3(x^2-3x+3)+3-x \\ &= (x-1)^3(x-3) \end{aligned}$$

이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

$$\therefore f(a+b)=f(0)=3$$

(ii) $f(3)=1, f(1)=3$ 일 때

함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x)=(x-1)(x-3)+4-x=x^2-5x+7$$

따라서

$$\begin{aligned} f(f(x))-x &= (x^2-5x+7)^2-5(x^2-5x+7)+7-x \\ &= (x-1)(x-3)(x^2-6x+7) \end{aligned}$$

이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서

$$f(a+b)=3$$

참고

(1) 방정식 $f(x)=x$ 의 한 실근을 a 라 하면 $f(a)=a$

다항식 $f(f(x))-x$ 에 $x=a$ 를 대입하면

$$f(f(a))-a=f(a)-a=a-a=0$$

따라서 $f(f(x))-x$ 는 $x=a$ 로 나누어떨어진다.

이것은 $f(x)-x=0$ 을 만족시키는 모든 근에 대하여 성립하므로 다항식 $f(f(x))-x$ 는 $f(x)-x$ 로 나누어떨어진다.

즉, 다항식 $Q(x)$ 에 대하여

$$f(f(x))-x=\{f(x)-x\}Q(x)$$

(2) 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(p)=q, f(q)=p$ 를 만족시키는 두 실수 p, q 가 존재할 때, 방정식 $f(f(x))=x$ 에

$$x=p \text{를 대입하면 } f(f(p))=f(q)=p$$

$$x=q \text{를 대입하면 } f(f(q))=f(p)=q$$

가 성립한다.

044

일등급의 매모장

$$x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = 0$$

↳ 허근 ω_i 를 대입하면 0이다. (단, $i=1, 2, 3, 4$)

$$\Rightarrow \underbrace{(\omega_1^4 + \omega_1^2 + 1 + 4\omega_4)}_0 \times \underbrace{(\omega_2^4 + \dots + 3\omega_3)}_0 \times \dots$$

$$x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) \\ = (x+1)(x-1)(x^4 + x^2 + 1)$$

이므로 네 허근 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ 는 방정식 $x^4 + x^2 + 1 = 0$ 의 근이다.

즉, $\omega_i^4 + \omega_i^2 + 1 = 0$ ($i=1, 2, 3, 4$)이므로

$$\omega_1^4 + \omega_1^2 + 4\omega_4 + 1 = 4\omega_4$$

$$\omega_2^4 + \omega_2^2 + 3\omega_3 + 1 = 3\omega_3,$$

$$\omega_3^4 + \omega_3^2 + 2\omega_2 + 1 = 2\omega_2$$

$$\omega_4^4 + \omega_4^2 + \omega_1 + 1 = \omega_1$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = 4\omega_4 \times 3\omega_3 \times 2\omega_2 \times \omega_1 = 24\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4$$

이때

$$x^4 + x^2 + 1 = (x - \omega_1)(x - \omega_2)(x - \omega_3)(x - \omega_4)$$

이므로 위의 식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4 = 1$$

따라서 구하는 값은

$$24 \times 1 = 24$$

답 24

045

일등급의 매모장

사차방정식의 근과 계수의 관계

사차방정식 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ 의 네 근 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a},$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -\frac{d}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a}$$

확장

등변사다리꼴 S 의 네 변의 길이를 $\alpha, \beta, \beta, 2\alpha$ ($\alpha > 0, \beta > 0$)라 하자.

주어진 사차방정식의 최고차항의 계수가 1이고 네 실근이 $\alpha, \beta, \beta, 2\alpha$ 이므로 **다른 풀이**

$$(x - \alpha)(x - 2\alpha)(x - \beta)^2 = 0$$

위의 식을 전개하면

$$(x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2)(x^2 - 2\beta x + \beta^2)$$

$$= x^4 - (3\alpha + 2\beta)x^3 + (2\alpha^2 + 6\alpha\beta + \beta^2)x^2 \\ - (4\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2)x + 2\alpha^2\beta^2$$

이때 주어진 사차방정식이

$$x^4 - (2a+1)x^3 + (a^3+1)x^2 - (3a+1)x + 2 = 0$$

이므로 계수를 비교해 보면

$$3\alpha + 2\beta = 2a + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$4\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 = 3a + 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$2\alpha^2\beta^2 = 2 \quad \dots \textcircled{3}$$

086 정답과 풀이

㉔에서 $\alpha\beta = 1$ ($\because \alpha > 0, \beta > 0$)

㉔에서 $\alpha\beta(4\alpha + 3\beta) = 3a + 1$

$$\therefore 4\alpha + 3\beta = 3a + 1$$

이것을 ㉑과 연립하여 풀면

$$\alpha = 1, \beta = a - 1$$

그런데 $\alpha\beta = 1$ 이므로

$$a - 1 = 1$$

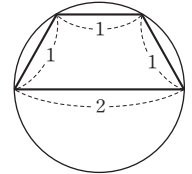
$$\therefore a = 2, \beta = 1$$

따라서 등변사다리꼴 S 의 네 변의 길이는 1, 1, 1, 2이므로 이 등변사다리꼴은 지름이 2인

원에 내접한다. **참고**

즉, $A = \pi \times 1^2 = \pi$ 이므로

$$A \times a = \pi \times 2 = 2\pi$$



답 2π

참고

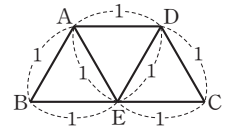
오른쪽 그림과 같이 변 BC 의 중점을 E 라 하

고 선분 AE , 선분 DE 를 그으면 사각형

$ABED$ 와 $AECD$ 는 평행사변형이므로

$$\overline{AE} = \overline{DC} = 1, \overline{DE} = \overline{AB} = 1$$

즉, $\overline{AE} = \overline{BE} = \overline{CE} = \overline{DE}$ 이므로 점 E 는 등변사다리꼴 $ABCD$ 의 외접원의 중심이고 변 BC 는 외접원의 지름임을 알 수 있다.



다른 풀이 확장

사차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \beta + 2\alpha = 2a + 1 \text{에서}$$

$$3\alpha + 2\beta = 2a + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta^2 + 2\alpha^2\beta + 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 = 3a + 1 \text{에서}$$

$$4\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 = 3a + 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$2\alpha^2\beta^2 = 2 \text{에서}$$

$$\alpha\beta = 1 \quad (\because \alpha > 0, \beta > 0)$$

$\alpha\beta = 1$ 을 ㉑에 대입하면

$$4\alpha + 3\beta = 3a + 1$$

이것을 ㉒과 연립하여 풀면

$$\alpha = 1, \beta = a - 1$$

그런데 $\alpha\beta = 1$ 이므로

$$a - 1 = 1$$

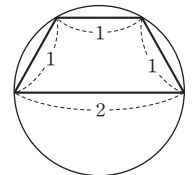
$$\therefore a = 2, \beta = 1$$

따라서 등변사다리꼴 S 의 네 변의 길이는 1, 1, 1, 2이므로 이 등변사다리꼴은 지름이 2인

원에 내접한다.

즉, $A = \pi \times 1^2 = \pi$ 이므로

$$A \times a = \pi \times 2 = 2\pi$$



046

일등급의 매모장

세 실수 a, b, c 에 대하여 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 가 성립하면

$$a + b + c = 0 \text{ 또는 } a = b = c$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \text{에서}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0$$

$\therefore a+b+c=0$ 또는 $a=b=c$

(i) $a+b+c=0$ 일 때

$b = -a - c$ 이므로 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서

$ax^2 - (a+c)x + c = 0$

$(x-1)(ax-c) = 0$

$\therefore x=1$ 또는 $x = \frac{c}{a} \rightarrow ax^2 + bx + c = 0$ 이 이차방정식이므로 $a \neq 0$

즉, $\alpha = 1, \beta = \frac{c}{a}$ 또는 $\alpha = \frac{c}{a}, \beta = 1$ 이므로

$\alpha^2 + \beta^2 = 1 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 > 0$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=b=c$ 일 때

$ax^2 + bx + c = 0$ 에서

$ax^2 + ax + a = 0$

$\therefore x^2 + x + 1 = 0$

즉, 이 이차방정식의 두 근 α, β 는 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1$

이므로

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = -1$

따라서 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \beta^2 + \beta + 1 = 0$ 이므로

$\alpha^3 = \beta^3 = 1$

$\therefore \alpha^{2025} + 2\beta^{2024} - 2\alpha^{2023} + 4\beta^{2022}$

$= 1 + 2\beta^2 - 2\alpha + 4$

$= 2\beta^2 - 2(-1-\beta) + 5 (\because \alpha + \beta = -1)$

$= 2(\beta^2 + \beta + 1) + 5$

$= 5$

답 5

047

일등급의 메모장

사차식 $x^4 + ax^3 + bx^2 + acx + c^2$ 의 곱의 인수분해는 다음과 같이 식을 정리한다.

$x^4 + ax^3 + bx^2 + acx + c^2$

$= x^2 \left\{ x^2 + \frac{c^2}{x^2} + a \left(x + \frac{c}{x} \right) + b \right\}$

$= x^2 \left\{ \left(x + \frac{c}{x} \right)^2 + a \left(x + \frac{c}{x} \right) + b - 2c \right\}$

$x^4 + (a+b)x^3 + (ab+4)x^2 + 2(a+b)x + 4 = 0$ 에서

$x^2 \left\{ x^2 + (a+b)x + ab + 4 + \frac{2(a+b)}{x} + \frac{4}{x^2} \right\} = 0$

$x^2 \left\{ \left(x + \frac{2}{x} \right)^2 + (a+b) \left(x + \frac{2}{x} \right) + ab \right\} = 0$

$x^2 \left(x + \frac{2}{x} + a \right) \left(x + \frac{2}{x} + b \right) = 0$

$\therefore (x^2 + ax + 2)(x^2 + bx + 2) = 0$

따라서 두 이차방정식 $x^2 + ax + 2 = 0, x^2 + bx + 2 = 0$ 이 각각 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$D_1 = a^2 - 8 < 0$

$a^2 < 8$

$\therefore -2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$

이차방정식 $x^2 + bx + 2 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$D_2 = b^2 - 8 < 0$

$b^2 < 8$

$\therefore -2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$

따라서 정수 a 의 값은

$-2, -1, 0, 1, 2$

이고, 정수 b 의 값은

$-2, -1, 0, 1, 2$

이때 $a=b$ 이면 두 이차방정식의 근이 서로 같아지므로 구하는 순서쌍의 개수는

$5 \times 5 - 5 = 20$

답 20

048

일등급의 메모장

사차방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되는 경우

(1) 서로 다른 실근 두 개와 허근 두 개

(2) 서로 다른 중근 두 개

(3) 삼중근과 실근 한 개

$x^4 - x^3 + (b-a^2)x^2 + (a^2 - ab - b)x + ab = 0$ 에서

$(x-1)\{x^3 + (b-a^2)x - ab\} = 0$

$(x-1)(x-a)(x^2 + ax + b) = 0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=a$ 또는 $x^2 + ax + b = 0$

이차방정식

$x^2 + ax + b = 0$

..... ㉠

의 판별식을 D 라 하면

$D = a^2 - 4b$

(i) 이차방정식 ㉠이 중근을 갖는 경우

$D=0$ 에서 $b = \frac{a^2}{4}$ 이므로 주어진 사차방정식은

$(x-1)(x-a)\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = 0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=a$ 또는 $x = -\frac{a}{2}$

㉡ $a=1$ 일 때

$b = \frac{1}{4}$ 이므로

$a^2 + b^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}$

㉢ $a = -\frac{a}{2}$ 일 때

$a=0, b=0$ 이므로

$a^2 + b^2 = 0^2 + 0^2 = 0$

㉣ $-\frac{a}{2} = 1$ 일 때

$a = -2, b = 1$ 이므로

$a^2 + b^2 = (-2)^2 + 1^2 = 5$

㉡~㉣에서 $a^2 + b^2$ 의 값은

$0, \frac{17}{16}, 5$

(ii) 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

㉡ $a \neq 1$ 일 때

$(x-1)(x-a) = x^2 - (a+1)x + a$

$= x^2 + ax + b$

이어야 하므로

$$-a-1=a, a=b \quad \therefore a=-\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore a^2+b^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

⑤ $a=1$ 일 때

이차방정식 $x^2+ax+b=0$, 즉 $x^2+x+b=0$ 이 $x=1$ 을 근으로 가져야 하므로

$$1+1+b=0 \quad \therefore b=-2$$

$$\therefore a^2+b^2=1^2+(-2)^2=5$$

③, ⑥에서 a^2+b^2 의 값은 $\frac{1}{2}$, 5이다.

(i), (ii)에서 a^2+b^2 의 값은 $0, \frac{1}{2}, \frac{17}{16}, 5$ 이므로 구하는 합은

$$0+\frac{1}{2}+\frac{17}{16}+5=\frac{105}{16}$$

답 $\frac{105}{16}$

049

일등급의 메모장

조건 (나), (다)의 결합

→ $(cd)^2=c^{2b}d^{2b}=(cd)^{2b}$ 관계식 발견

→ 조건 (가)에서 $a=1$ 임을 유도

조건 (나), (다)에 의하여

$$a^2=a \times a=c^{2b}d^{2b}$$

$$=(cd)^{2b}=a^{2b}$$

이므로

$$a^{2b-2}=1 \quad \therefore a=1$$

↳ 조건 (가)에 의하여 $1 \leq a < b$ 이므로 $2b-2 > 0$

최고차항의 계수가 1이고, c, d 를 두 근으로 갖는 이차방정식은

$$x^2-(c+d)x+cd=0$$

조건 (다)에서 $c+d=cd=1$ 이므로

$$x^2-x+1=0$$

따라서 주어진 사차방정식은

$$(x-1)(x-b)(x^2-x+1)=0, \text{ 즉}$$

$$x^4-(b+2)x^3+(2b+2)x^2-(2b+1)x+b=0 \text{ 이고}$$

$$x^4-(2k+1)x^3+2k^2x^2-(3k+1)x+k^2-1=0 \text{ 과 같으므로}$$

$$2k+1=b+2, 2k^2=2b+2, 3k+1=2b+1, k^2-1=b$$

위의 식을 연립하여 풀면

$$k=2, b=3$$

$$\therefore k(a+b+c+d)=2 \times (1+3+1)=10$$

답 10

050

일등급의 메모장

세 개의 수가 등간격을 이루면 $a-d, a, a+d$ 로 놓자.

→ 세 수의 합이 $3a$ 가 되어 편하다.

네 개의 수가 등간격을 이루면 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ 로 놓자.

→ 네 수의 합이 $4a$ 가 되어 편하다.

조건 (가)에서 a, β, γ, δ 가 등간격을 이루고 $a < \beta < \gamma < \delta$ 이므로

$$a=a-3d, \beta=a-d, \gamma=a+d, \delta=a+3d \text{ (} a \text{는 실수, } d > 0 \text{)}$$

088 정답과 풀이

라 하자.

조건 (나)에서

$$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=4$$

$$4a=4$$

$$\therefore a=1$$

즉, $a=1-3d, \beta=1-d, \gamma=1+d, \delta=1+3d$ 이므로

$f(x)$

$$=\{x-(1+3d)\}\{x-(1-3d)\}\{x-(1+d)\}\{x-(1-d)\}$$

$$=\{(x-1)+3d\}\{(x-1)-3d\}\{(x-1)+d\}\{(x-1)-d\}$$

$$=\{(x-1)^2-9d^2\}\{(x-1)^2-d^2\}$$

$$=(x-1)^4-10d^2(x-1)^2+9d^4$$

이때 $(x-1)^2=t$ 로 놓으면 $t \geq 0$ 이고, 조건 (나)에서 $t \geq 0$ 일 때 부등식 $t^2-10d^2t+9d^4+16 \geq 0$ 이 성립한다.

이차함수 $y=t^2-10d^2t+9d^4+16=(t-5d^2)^2+16-16d^4$ 은

$t=5d^2$ 일 때 최솟값 $16-16d^4$ 을 갖는다.

즉, $16-16d^4 \geq 0$ 이 성립해야 하므로

$$d^4-1 \leq 0, (d-1)(d+1)(d^2+1) \leq 0$$

이때 $d > 0$ 이므로

$$0 < d \leq 1$$

$$\therefore 0 < d^2 \leq 1$$

$$f(2)=9d^4-10d^2+1=9\left(d^2-\frac{5}{9}\right)^2-\frac{16}{9}$$

이므로 $f(2)$ 는 $d^2=\frac{5}{9}$ 일 때 최솟값 $-\frac{16}{9}$ 을 갖는다.

답 $-\frac{16}{9}$

07

II. 방정식과 부등식

여러 가지 부등식

001

$(1-a)x > a-b$ 의 해가 $x < -4$ 이므로

$$1-a < 0 \quad \therefore a > 1$$

$$\therefore x < \frac{a-b}{1-a}$$

즉, $\frac{a-b}{1-a} = -4$ 이므로

$$a-b = -4(1-a), \quad a-b = -4+4a$$

$$\therefore 3a+b=4$$

이것을 $(3a+b)x \leq 8$ 에 대입하면

$$4x \leq 8 \quad \therefore x \leq 2$$

답 ③

002

$|2x+1| \leq a$ 에서 $-a \leq 2x+1 \leq a$

$$-a-1 \leq 2x \leq a-1 \quad \therefore \frac{-a-1}{2} \leq x \leq \frac{a-1}{2}$$

주어진 부등식의 해가 $b \leq x \leq 2$ 이므로

$$\frac{-a-1}{2} = b, \quad \frac{a-1}{2} = 2$$

$$\frac{a-1}{2} = 2 \text{에서 } a=5$$

$a=5$ 를 $\frac{-a-1}{2} = b$ 에 대입하면 $b=-3$

$$\therefore a+b=5+(-3)=2$$

답 2

003

$||x+4|-5| < 9$ 에서

$$-9 < |x+4|-5 < 9 \quad \therefore -4 < |x+4| < 14$$

그런데 $|x+4| \geq 0$ 이므로 $0 \leq |x+4| < 14$

$$-14 < x+4 < 14 \quad \therefore -18 < x < 10$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는 $-17, -16,$

$-15, \dots, 9$ 의 27이다.

답 27

004

$$x+1 > 3 \text{에서 } x > 2 \quad \dots \text{ ㉠}$$

$$2x < a+1 \text{에서 } x < \frac{a+1}{2} \quad \dots \text{ ㉡}$$

주어진 연립부등식을 만족시키는

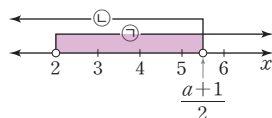
모든 정수 x 의 값의 합이 12가 되

려면 $12=3+4+5$ 이므로

$$5 < \frac{a+1}{2} \leq 6, \quad 10 < a+1 \leq 12$$

$$\therefore 9 < a \leq 11$$

따라서 자연수 a 의 최댓값은 11이다.



답 11

005

$$\frac{3x+2}{6} > \frac{x-2}{3} \text{에서 } 3x+2 > 2(x-2)$$

$$3x+2 > 2x-4 \quad \therefore x > -6 \quad \dots \text{ ㉠}$$

$$\frac{x+a}{2} \leq \frac{x}{4} + 3 \text{에서 } 2(x+a) \leq x+12$$

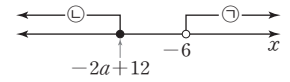
$$2x+2a \leq x+12 \quad \therefore x \leq -2a+12 \quad \dots \text{ ㉡}$$

주어진 연립부등식이 해를 갖지

않으려면 $-2a+12 \leq -6, 2a \geq 18$

$$\therefore a \geq 9$$

따라서 a 의 최솟값은 9이다.



답 9

006

$$-2(x+3) + k \leq x-6 \text{에서 } -2x-6+k \leq x-6$$

$$3x \geq k \quad \therefore x \geq \frac{k}{3} \quad \dots \text{ ㉠}$$

$$x-6 < 3-kx \text{에서 } (k+1)x < 9$$

이때 $k+1 < 0$ 이면 $x > \frac{9}{k+1}$ 이고, 이것과 ㉠을 동시에 만족시키는 정수 x 의 값이 무수히 많다.

또, $k+1=0$ 이면 $0 \times x < 9$ 에서 x 는 모든 실수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$k+1 > 0 \text{이면 } k > -1$$

$$\therefore x < \frac{9}{k+1} \quad \dots \text{ ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } \frac{k}{3} \leq x < \frac{9}{k+1}$$

이를 만족시키는 정수 x 의 값이 2뿐
이므로

$$1 < \frac{k}{3} \leq 2, \quad 2 < \frac{9}{k+1} \leq 3$$

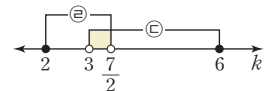
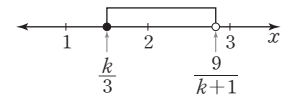
$$1 < \frac{k}{3} \leq 2 \text{에서 } 3 < k \leq 6 \quad \dots \text{ ㉢}$$

$$2 < \frac{9}{k+1} \leq 3 \text{에서 } \frac{1}{3} \leq \frac{k+1}{9} < \frac{1}{2}$$

$$3 \leq k+1 < \frac{9}{2} \quad \therefore 2 \leq k < \frac{7}{2} \quad \dots \text{ ㉣}$$

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$$3 < k < \frac{7}{2}$$



답 ③

007

상자의 개수를 x 라 하면 초콜릿의 개수는 $5x+4$ 이므로

$$6(x-2)+1 \leq 5x+4 \leq 6(x-1)$$

$$6(x-2)+1 \leq 5x+4 \text{에서 } 6x-11 \leq 5x+4$$

$$\therefore x \leq 15 \quad \dots \text{ ㉠}$$

$$5x+4 \leq 6(x-1) \text{에서 } 5x+4 \leq 6x-6$$

$$\therefore x \geq 10 \quad \dots \text{ ㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$10 \leq x \leq 15$$

이므로

$$50 \leq 5x \leq 75 \quad \therefore 54 \leq 5x+4 \leq 79$$

따라서 초콜릿의 개수의 최댓값은 79, 최솟값은 54이므로 구하는 차는
 $79 - 54 = 25$

답 25

008

$x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0$ 이므로
 $|x^2 + 2x + 3| = x^2 + 2x + 3$
 (i) $x < 7$ 일 때
 $x^2 + 2x + 3 \leq -(x-7), x^2 + 2x + 3 \leq -x + 7$
 $x^2 + 3x - 4 \leq 0, (x+4)(x-1) \leq 0$
 $\therefore -4 \leq x \leq 1$
 그런데 $x < 7$ 이므로 $-4 \leq x \leq 1$

(ii) $x \geq 7$ 일 때
 $x^2 + 2x + 3 \leq x - 7, x^2 + x + 10 \leq 0$
 그런데 $x^2 + x + 10 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{39}{4} > 0$ 이므로 해는 없다.

(i), (ii)에서 $-4 \leq x \leq 1$ 이므로 정수 x 는 $-4, -3, -2, \dots, 1$ 의 6개이다.

답 6

009

이차부등식 $x^2 + ax - 12 \leq 0$ 의 해가 $-4 \leq x \leq b$ 이므로
 $x^2 + ax - 12 = (x+4)(x-b)$
 $= x^2 + (4-b)x - 4b$
 즉, $a = 4 - b, -12 = -4b$ 이므로 $a = 1, b = 3$
 $\therefore a - b = 1 - 3 = -2$

답 ⑤

010

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-1 < x < 3$ 이므로 $a < 0$
 해가 $-1 < x < 3$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x+1)(x-3) < 0 \therefore x^2 - 2x - 3 < 0$
 양변에 a 를 곱하면 $ax^2 - 2ax - 3a > 0$ ($\because a < 0$)
 이 부등식이 $ax^2 + bx + c > 0$ 과 같으므로
 $b = -2a, c = -3a$
 이것을 $bx^2 + cx + 5a > 0$ 에 대입하면
 $-2ax^2 - 3ax + 5a > 0, 2x^2 + 3x - 5 > 0$ ($\because a < 0$)
 $(2x+5)(x-1) > 0 \therefore x < -\frac{5}{2}$ 또는 $x > 1$
 따라서 $bx^2 + cx + a > 0$ 의 해가 아닌 것은 ③이다.

답 ③

011

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2 + (m+4)x + m + 7 > 0$ 이 성립하려면 이차방정식 $x^2 + (m+4)x + m + 7 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때
 $D = (m+4)^2 - 4 \times 1 \times (m+7) < 0$
 $m^2 + 4m - 12 < 0, (m+6)(m-2) < 0$

090 정답과 풀이

$\therefore -6 < m < 2$
 따라서 정수 m 은 $-5, -4, -3, \dots, 1$ 의 7개이다.

답 7

012

모든 실수 x 에 대하여 $\sqrt{x^2 + kx + 2k + 5}$ 가 실수가 되려면 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + kx + 2k + 5 \geq 0$ 이 성립해야 한다.
 이차방정식 $x^2 + kx + 2k + 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 이어야 하므로
 $D = k^2 - 4 \times 1 \times (2k + 5) \leq 0$
 $k^2 - 8k - 20 \leq 0, (k+2)(k-10) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq k \leq 10$
 따라서 정수 k 는 $-2, -1, 0, \dots, 10$ 의 13개이다.

답 13

013

새로 만든 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각 $(30-x)$ m, $(20+x)$ m이므로 넓이가 400 m^2 이상이 되려면
 $(30-x)(20+x) \geq 400, x^2 - 10x - 200 \leq 0$
 $(x+10)(x-20) \leq 0 \therefore -10 \leq x \leq 20$
 그런데 $0 < x < 30$ 이므로 $0 < x \leq 20$
 따라서 x 의 최댓값은 20이다.

답 20

014

$\frac{\sqrt{x^2 - 7x + 10}}{\sqrt{x^2 + 3x - 10}} = -\sqrt{\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 3x - 10}}$ 이므로
 $x^2 - 7x + 10 > 0, x^2 + 3x - 10 < 0$

또는 $x^2 - 7x + 10 = 0, x^2 + 3x - 10 \neq 0$ **참고**

(i) $x^2 - 7x + 10 > 0, x^2 + 3x - 10 < 0$ 일 때

$x^2 - 7x + 10 > 0$ 에서 $(x-2)(x-5) > 0$

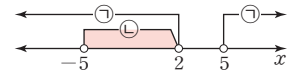
$\therefore x < 2$ 또는 $x > 5$ ㉠

$x^2 + 3x - 10 < 0$ 에서 $(x+5)(x-2) < 0$

$\therefore -5 < x < 2$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5 < x < 2$



(ii) $x^2 - 7x + 10 = 0, x^2 + 3x - 10 \neq 0$ 일 때

$x^2 - 7x + 10 = 0$ 에서 $(x-2)(x-5) = 0$

$\therefore x = 2$ 또는 $x = 5$ ㉤

$x^2 + 3x - 10 \neq 0$ 에서 $(x+5)(x-2) \neq 0$

$\therefore x \neq -5, x \neq 2$ ㉥

㉤, ㉥에서 $x = 5$

(i), (ii)에서 $-5 < x < 2$ 또는 $x = 5$

따라서 모든 정수 x 의 값의 합은

$(-4) + (-3) + (-2) + \dots + 1 + 5 = -4$

답 -4

참고

음수의 제곱근의 성질

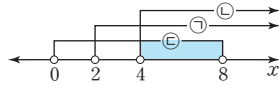
실수 a, b 에 대하여

(1) $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이면 $a < 0, b < 0$ 또는 $a = 0$ 또는 $b = 0$

(2) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 이면 $a > 0, b < 0$ 또는 $a = 0, b \neq 0$

015

$x-2, x, x+2$ 는 변의 길이이므로
 $x-2 > 0, x > 0, x+2 > 0$
 $\therefore x > 2$ ㉠
삼각형이 만들어지려면 가장 긴 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로
 $x+2 < (x-2)+x \quad \therefore x > 4$ ㉡
또, 이 삼각형이 둔각삼각형이 되려면
 $(x+2)^2 > (x-2)^2 + x^2$ (참고)
 $x^2 + 4x + 4 > 2x^2 - 4x + 4, x^2 - 8x < 0$
 $x(x-8) < 0 \quad \therefore 0 < x < 8$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면
 $4 < x < 8$
따라서 자연수 x 는 5, 6, 7의 3개이다.



답 ①

참고

삼각형의 모양

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c ($a \leq b \leq c$)일 때

- (1) $c^2 < a^2 + b^2 \rightarrow$ 예각삼각형
- (2) $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow$ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
- (3) $c^2 > a^2 + b^2 \rightarrow$ 둔각삼각형

016

이차방정식 $x^2 - 2(k+1)x + 2k^2 - 2k - 4 = 0$ 이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \{-(k+1)\}^2 - (2k^2 - 2k - 4) \geq 0 \\ -k^2 + 4k + 5 &\geq 0, k^2 - 4k - 5 \leq 0 \\ (k+1)(k-5) &\leq 0 \quad \therefore -1 \leq k \leq 5 \quad \dots\dots ㉠ \\ \text{한편, 이차방정식 } x^2 - 2(k+1)x + 2k^2 - 2k - 4 &= 0 \text{의 두 실근이 } \alpha, \beta \text{이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여} \\ \alpha + \beta &= 2(k+1), \alpha\beta = 2k^2 - 2k - 4 \\ \therefore (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \{2(k+1)\}^2 - 4(2k^2 - 2k - 4) \\ &= -4k^2 + 16k + 20 \\ &= -4(k-2)^2 + 36 \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $(\alpha - \beta)^2$ 은 $k=2$ 일 때 최댓값 36을 갖는다.

답 36

017

이차방정식 $x^2 + (k^2 - 8k + 12)x + k^2 - 11k + 24 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -(k^2 - 8k + 12), \alpha\beta = k^2 - 11k + 24 \\ \text{이때 두 근의 부호가 서로 다르므로} \\ k^2 - 11k + 24 &< 0, (k-3)(k-8) < 0 \\ \therefore 3 < k < 8 \quad \dots\dots ㉠ \\ \text{또, 두 근의 절댓값이 같으므로} \\ -(k^2 - 8k + 12) &= 0, (k-2)(k-6) = 0 \\ \therefore k &= 2 \text{ 또는 } k = 6 \quad \dots\dots ㉡ \\ \text{㉠, ㉡에서 } k &= 6 \end{aligned}$$

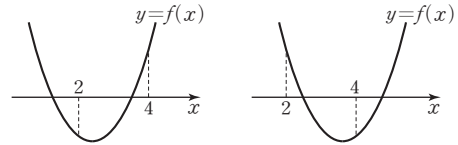
답 6

018

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \text{에서 } (x-2)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 4$$

즉, $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 한 근만이 2와 4 사이에 있어야 하므로 $f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(2)f(4) < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} (4-2a+4)(16-4a+4) &< 0 \\ (a-4)(a-5) &< 0 \quad \therefore 4 < a < 5 \end{aligned}$$

답 ④

019

$|x-a| \leq |x-b|$ 에서

(i) $x < a$ 일 때

$$-(x-a) \leq -(x-b) \quad \therefore 0 \times x \geq a-b$$

이때 $a-b < 0$ 이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $x < a$ 이므로 $x < a$

(ii) $a \leq x < b$ 일 때

$$x-a \leq -(x-b), 2x \leq a+b$$

$$\therefore x \leq \frac{a+b}{2}$$

그런데 $a \leq x < b$ 이므로 $a \leq x \leq \frac{a+b}{2}$

(iii) $x \geq b$ 일 때

$$x-a \leq x-b \quad \therefore 0 \times x \leq a-b$$

그런데 $a-b < 0$ 이므로 해는 없다.

(i)~(iii)에서 $x \leq \frac{a+b}{2}$

이때 $x \leq 10$ 인 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

$$\frac{a+b}{2} \geq 10 \quad \therefore a+b \geq 20$$

따라서 $a+b$ 의 최솟값은 20이다.

답 20

다른풀이

$|x-a| \leq |x-b|$ 의 양변을 제곱하면

$$(x-a)^2 \leq (x-b)^2, x^2 - 2ax + a^2 \leq x^2 - 2bx + b^2$$

$$2(a-b)x \geq a^2 - b^2, 2(a-b)x \geq (a+b)(a-b)$$

이때 $a-b < 0$ 이므로 양변을 $a-b$ 로 나누면

$$2x \leq a+b \quad \therefore x \leq \frac{a+b}{2}$$

이때 $x \leq 10$ 인 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

$$\frac{a+b}{2} \geq 10 \quad \therefore a+b \geq 20$$

따라서 $a+b$ 의 최솟값은 20이다.

020

$|x| + |x-m| < n$ 에서

(i) $x < 0$ 일 때

$$-x - (x - m) < n, -2x < n - m$$

$$\therefore x > \frac{m - n}{2}$$

그런데 $x < 0$ 이고 $\frac{m - n}{2} < 0$ 이므로 $\frac{m - n}{2} < x < 0$

(ii) $0 \leq x < m$ 일 때

$$x - (x - m) < n \quad \therefore 0 \times x < n - m$$

이때 $n - m > 0$ 이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $0 \leq x < m$ 이므로 $0 \leq x < m$

(iii) $x \geq m$ 일 때

$$x + (x - m) < n, 2x < m + n$$

$$\therefore x < \frac{m + n}{2} \quad \begin{cases} \rightarrow m < n \text{이므로 } m + m < m + n \\ 2m < m + n, m < \frac{m + n}{2} \end{cases}$$

그런데 $x \geq m$ 이고 $m < \frac{m + n}{2}$ 이므로 $m \leq x < \frac{m + n}{2}$

(i)~(iii)에서 $\frac{m - n}{2} < x < \frac{m + n}{2}$

$m = 1, n = 3$ 일 때, $-1 < x < 2$ 이므로 $f(1, 3) = 2$

$m = 2, n = 4$ 일 때, $-1 < x < 3$ 이므로 $f(2, 4) = 3$

$m = 3, n = 5$ 일 때, $-1 < x < 4$ 이므로 $f(3, 5) = 4$

⋮

$m = 8, n = 10$ 일 때, $-1 < x < 9$ 이므로 $f(8, 10) = 9$

$\therefore f(1, 3) + f(2, 4) + f(3, 5) + \dots + f(8, 10)$

$$= 2 + 3 + 4 + \dots + 9 = 44$$

답 44

021

$\overline{AC} = |x + 3|, \overline{BC} = |x - 2|$ 이므로 $\overline{AC} + \overline{BC} \leq 9$ 에서

$$|x + 3| + |x - 2| \leq 9$$

(i) $x < -3$ 일 때

$$-(x + 3) - (x - 2) \leq 9, -2x \leq 10$$

$$\therefore x \geq -5$$

그런데 $x < -3$ 이므로 $-5 \leq x < -3$

(ii) $-3 \leq x < 2$ 일 때

$$(x + 3) - (x - 2) \leq 9 \quad \therefore 0 \times x \leq 4$$

즉, 해는 모든 실수이다.

그런데 $-3 \leq x < 2$ 이므로 $-3 \leq x < 2$

(iii) $x \geq 2$ 일 때

$$(x + 3) + (x - 2) \leq 9, 2x \leq 8$$

$$\therefore x \leq 4$$

그런데 $x \geq 2$ 이므로 $2 \leq x \leq 4$

(i)~(iii)에서 $-5 \leq x \leq 4$ 이므로 $M = 4, m = -5$

$$\therefore M - m = 4 - (-5) = 9$$

답 9

022

$ax - b \geq 0$ 에서 $ax \geq b$

이 부등식의 해가 $x \geq 2$ 이므로 $a > 0$

$$\therefore x \geq \frac{b}{a}$$

즉, $\frac{b}{a} = 2$ 이므로 $b = 2a$

092 정답과 풀이

$cx + d < 0$ 에서 $cx < -d$

이 부등식의 해가 $x > 6$ 이므로 $c < 0$

$$\therefore x > -\frac{d}{c}$$

즉, $-\frac{d}{c} = 6$ 이므로 $d = -6c$

따라서 연립부등식 $\begin{cases} ax + b \geq 0 \\ cx - d < 0 \end{cases}$ 에 대하여

$ax + b \geq 0$ 에서 $ax + 2a \geq 0$

$$ax \geq -2a$$

$$\therefore x \geq -2 \quad \dots \textcircled{A}$$

$cx - d < 0$ 에서 $cx + 6c < 0$

$$cx < -6c$$

$$\therefore x > -6 \quad \dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 의 공통부분을 구하면 $x \geq -2$

답 3

023

$2x + 3 > 5$ 에서 $2x > 2$

$$\therefore x > 1 \quad \dots \textcircled{A}$$

$|ax - 1| < 21$ 에서 $-21 < ax - 1 < 21$

$$\therefore -20 < ax < 22 \quad \dots \textcircled{B}$$

(i) $a > 0$ 일 때

$$\textcircled{B} \text{에서 } -\frac{20}{a} < x < \frac{22}{a} \quad \dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{C}$ 을 만족시키는 x 가 존재하면 연립부등식의 해는

$$1 < x < \frac{22}{a} \text{이므로 이를 만족}$$

시키는 자연수 x 의 개수가 2이려면

$$3 < \frac{22}{a} \leq 4, \frac{1}{4} \leq \frac{a}{22} < \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{11}{2} \leq a < \frac{22}{3}$$

따라서 정수 a 는 6, 7이다.

(ii) $a = 0$ 일 때

\textcircled{B} 에서 x 는 모든 실수이므로 주어진 연립부등식의 해는 $x > 1$ 이다.

따라서 연립부등식을 만족시키는 자연수 x 의 개수가 2가 아니다.

(iii) $a < 0$ 일 때

$$\textcircled{B} \text{에서 } \frac{22}{a} < x < -\frac{20}{a} \quad \dots \textcircled{D}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{D}$ 을 만족시키는 x 가 존재하면 연립부등식의 해는

$$1 < x < -\frac{20}{a} \text{이므로 이를 만족}$$

시키는 자연수 x 의 개수가 2이려면

$$3 < -\frac{20}{a} \leq 4, \frac{1}{4} \leq -\frac{a}{20} < \frac{1}{3}$$

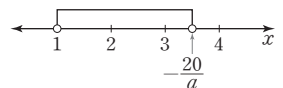
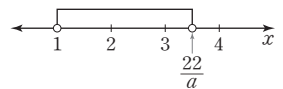
$$\therefore -\frac{20}{3} < a \leq -5$$

따라서 정수 a 는 $-6, -5$ 이다.

(i)~(iii)에서 정수 a 는 $-6, -5, 6, 7$ 이므로 구하는 합은

$$(-6) + (-5) + 6 + 7 = 2$$

답 2



024

농도가 20%인 소금물 200g에 들어 있는 소금의 양은

$$\frac{20}{100} \times 200 = 40 \text{ (g)}$$

농도가 10%인 소금물의 양을 x g이라 하면

$$\frac{14}{100}(200+x) \leq 40 + \frac{10}{100}x \leq \frac{18}{100}(200+x)$$

$$7(200+x) \leq 2000+5x \leq 9(200+x)$$

$$7(200+x) \leq 2000+5x \text{에서}$$

$$1400+7x \leq 2000+5x$$

$$2x \leq 600 \quad \therefore x \leq 300 \quad \text{..... ㉠}$$

$$2000+5x \leq 9(200+x) \text{에서}$$

$$2000+5x \leq 1800+9x$$

$$4x \geq 200 \quad \therefore x \geq 50 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $50 \leq x \leq 300$

따라서 $a=50$, $b=300$ 이므로

$$b-a=300-50=250$$

답 250

참고

소금물의 농도

$$(1) \text{ (소금물의 농도)} = \frac{\text{(소금의 양)}}{\text{(소금물의 양)}} \times 100 \text{ (\%)}$$

$$(2) \text{ (소금의 양)} = \frac{\text{(소금물의 농도)}}{100} \times \text{(소금물의 양)}$$

025

$$a(x^2-x+4) > 2x \text{에서}$$

$$ax^2 - (a+2)x + 4a > 0$$

(i) $a > 0$ 일 때

$ax^2 - (a+2)x + 4a > 0$ 을 만족시키는 실수 x 는 항상 존재한다.

(ii) $a = 0$ 일 때

$$-2x > 0 \text{이므로 } x < 0$$

(iii) $a < 0$ 일 때

$ax^2 - (a+2)x + 4a > 0$ 을 만족시키는 해가 존재하려면 이차 방정식 $ax^2 - (a+2)x + 4a = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$D = \{-(a+2)\}^2 - 4 \times a \times 4a > 0$$

$$-15a^2 + 4a + 4 > 0, \quad 15a^2 - 4a - 4 < 0$$

$$(5a+2)(3a-2) < 0 \quad \therefore -\frac{2}{5} < a < \frac{2}{3}$$

$$\text{그런데 } a < 0 \text{이므로 } -\frac{2}{5} < a < 0$$

(i)~(iii)에서 $a > -\frac{2}{5}$

답 ④

026

$f(x) \leq 0$ 의 해가 $x \leq -2$ 또는 $x \geq 4$ 이므로 $f\left(\frac{x-k}{2}\right) \leq 0$ 의 해는

$$\frac{x-k}{2} \leq -2 \text{ 또는 } \frac{x-k}{2} \geq 4$$

$$x-k \leq -4 \text{ 또는 } x-k \geq 8$$

$$\therefore x \leq k-4 \text{ 또는 } x \geq k+8$$

$x \leq -3$ 또는 $x \geq 9$ 이므로

$$k-4 = -3, \quad k+8 = 9$$

$$\therefore k = 1$$

답 1

다른 풀이

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 두 점 $(-2, 0)$, $(4, 0)$ 에서 만나므로

$$f(x) = a(x+2)(x-4) \quad (a < 0)$$

라 하면 $f\left(\frac{x-k}{2}\right) \leq 0$ 에서

$$a\left(\frac{x-k}{2}+2\right)\left(\frac{x-k}{2}-4\right) \leq 0$$

$$(x-k+4)(x-k-8) \geq 0$$

$$\therefore x \leq k-4 \text{ 또는 } x \geq k+8$$

$x \leq -3$ 또는 $x \geq 9$ 이므로

$$k-4 = -3, \quad k+8 = 9$$

$$\therefore k = 1$$

027

조건 (가)에서 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 축이 직선 $x=p$ 이고, 최고차항의 계수가 각각 3, 2이므로

$$f(x) = 3(x-p)^2 + a, \quad g(x) = 2(x-p)^2 + b \quad (a, b \text{는 상수})$$

라 하면

$$f(x) - g(x) = (x-p)^2 + a - b \quad \text{..... ㉠}$$

조건 (나)에서 $f(x) \leq g(x)$

즉, $f(x) - g(x) \leq 0$ 의 해가 $-3 \leq x \leq 5$ 이고, $f(x) - g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x) - g(x) = (x+3)(x-5)$$

$$= x^2 - 2x - 15$$

$$= (x-1)^2 - 16 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서 $p=1$ 이고, ㉡에서 $f(6) - g(6) = 9$ 이므로

$$\frac{f(6) - g(6)}{p} = 9$$

답 9

028

$y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는

$$f(x) = g(x) \text{에서}$$

$$f(x) - g(x) = 0 \text{이므로}$$

$$(x^2+1) - (-x^2+4x+7) = 0$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0, \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

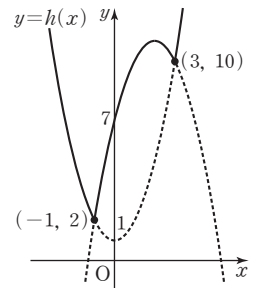
$$(x+1)(x-3) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ g(x) & (-1 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

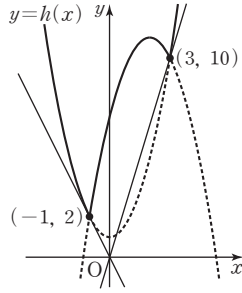
이므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

직선 $y=ax$ 는 원점을 지나므로 부등식 $h(x) \geq ax$ 를 만족시키는 실수 a 의 값은 직선 $y=ax$ 가 $x < 0$ 에서 곡선 $y=h(x)$ 에 접할 때 최솟값을 갖고, 점 $(3, 10)$ 을 지날 때 최댓값



을 갖는다.

직선 $y=ax$ 가 곡선 $y=h(x)$ 에 접할 때의 a 의 값을 k 라 하고, 방정식 $x^2+1=kx$, 즉 $x^2-kx+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D=k^2-4=0$
 $k^2=4 \quad \therefore k=-2 (\because k<0)$
 또, 직선 $y=ax$ 가 점 $(3, 10)$ 을 지날 때의 기울기는 $\frac{10}{3}$ 이다.



따라서 $-2 \leq a \leq \frac{10}{3}$ 이므로

$$M = \frac{10}{3}, m = -2$$

$$\therefore M - m = \frac{10}{3} - (-2) = \frac{16}{3}$$

답 16/3

029

ㄱ. $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ 는 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 y 좌표와 같고, $g\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)$ 는 이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 y 좌표와 같다.

이때 주어진 그래프에서

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < g\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right) \text{ (참)}$$

ㄴ. $f(x)\{f(x)-g(x)\}=0$ 에서

$$f(x)=0 \text{ 또는 } f(x)=g(x)$$

$$\therefore x=\alpha \text{ 또는 } x=\beta \text{ 또는 } x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 방정식 $f(x)\{f(x)-g(x)\}=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다. (참)

ㄷ. $\{f(x)\}^2 \geq f(x)g(x)$ 에서

$$\{f(x)\}^2 - f(x)g(x) \geq 0$$

$$f(x)\{f(x)-g(x)\} \geq 0$$

$$f(x) \geq 0, f(x)-g(x) \geq 0 \text{ 또는 } f(x) \leq 0, f(x)-g(x) \leq 0$$

$$\therefore f(x) \geq 0, f(x) \geq g(x) \text{ 또는 } f(x) \leq 0, f(x) \leq g(x) \text{ (참)}$$

(i) $f(x) \geq 0, f(x) \geq g(x)$ 일 때

주어진 그래프에서

$$x \leq -3 \text{ 또는 } x \geq \beta$$

(ii) $f(x) \leq 0, f(x) \leq g(x)$ 일 때

주어진 그래프에서

$$a \leq x \leq 2$$

(i), (ii)에서 $x \leq -3$ 또는 $a \leq x \leq 2$ 또는 $x \geq \beta$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

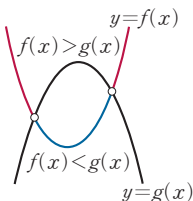
답 3

참고

두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여

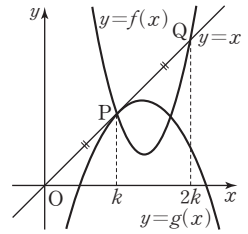
(1) 부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 함수 $y=g(x)$ 의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위와 같다.

(2) 부등식 $f(x) < g(x)$ 의 해는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 함수 $y=g(x)$ 의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위와 같다.



030

조건 (㉔)에서 점 P의 x 좌표를 k ($k > 0$)라 하면 점 Q의 x 좌표는 $2k$ 이므로 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 는 오른쪽 그림과 같다.



조건 (㉕)에서 이차방정식 $f(x)=x$ 의 두 근은 $k, 2k$ 이고, $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 2이므로

$$f(x)-x=2(x-k)(x-2k) \quad \therefore f(x)=2(x-k)(x-2k)+x$$

조건 (㉖)에서 이차방정식 $g(x)=x$ 의 근은 k (중근)이고, $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 -1 이므로

$$g(x)-x=-(x-k)^2 \quad \therefore g(x)=-(x-k)^2+x$$

$$\therefore f(x)+g(x)=2(x-k)(x-2k)+x-(x-k)^2+x \\ =x^2+2(1-2k)x+3k^2$$

이때 부등식 $f(x)+g(x) \geq 0$, 즉 $x^2+2(1-2k)x+3k^2 \geq 0$ 의 해가 모든 실수이므로 이차방정식 $x^2+2(1-2k)x+3k^2=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(1-2k)^2-3k^2 \leq 0$$

$$k^2-4k+1 \leq 0, \{k-(2-\sqrt{3})\}\{k-(2+\sqrt{3})\} \leq 0$$

$$\therefore 2-\sqrt{3} \leq k \leq 2+\sqrt{3}$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $0 < k \leq 2+\sqrt{3}$

따라서 점 P의 x 좌표의 최댓값은 $2+\sqrt{3}$ 이다.

답 2

031

세 점 $P(a, a^2-3a+3), Q(a, 2a^2-4a), R(a, 0)$ 이므로

$$\overline{PR}=|a^2-3a+3|, \overline{QR}=|2a^2-4a|$$

이때 $a^2-3a+3=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0$ 이므로

$$\overline{PR}=|a^2-3a+3|=a^2-3a+3$$

또, $2a^2-4a=2a(a-2)$ 에서

$$0 < a < 2 \text{ 이면 } 2a^2-4a < 0 \text{ 이므로 } \overline{QR}=-2a^2+4a$$

$$a > 2 \text{ 이면 } 2a^2-4a > 0 \text{ 이므로 } \overline{QR}=2a^2-4a$$

즉, $\overline{PR}+\overline{QR} \leq 3$ 에서

(i) $0 < a < 2$ 일 때

$$(a^2-3a+3)+(-2a^2+4a) \leq 3$$

$$a^2-a \geq 0, a(a-1) \geq 0$$

$$\therefore a \leq 0 \text{ 또는 } a \geq 1$$

그런데 $0 < a < 2$ 이므로 $1 \leq a < 2$

(ii) $a > 2$ 일 때

$$(a^2-3a+3)+(2a^2-4a) \leq 3$$

$$3a^2-7a \leq 0, 3a\left(a-\frac{7}{3}\right) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq \frac{7}{3}$$

그런데 $a > 2$ 이므로 $2 < a \leq \frac{7}{3}$

(i), (ii)에서 $1 \leq a < 2$ 또는 $2 < a \leq \frac{7}{3}$

따라서 $M=\frac{7}{3}, m=1$ 이므로

$$3M+m=7+1=8$$

답 8

032

$\left| \frac{bx^2+1}{a^2x^2+2ax+4} \right| \leq 1$ 에서
 $-1 \leq \frac{bx^2+1}{a^2x^2+2ax+4} \leq 1 \rightarrow a^2x^2+2ax+4 = (ax+1)^2+3 > 0$
 $\therefore -a^2x^2-2ax-4 \leq bx^2+1 \leq a^2x^2+2ax+4$
 따라서 주어진 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 연립부
 등식 $\begin{cases} -a^2x^2-2ax-4 \leq bx^2+1 \\ bx^2+1 \leq a^2x^2+2ax+4 \end{cases}$ 즉 $\begin{cases} (a^2+b)x^2+2ax+5 \geq 0 \\ (a^2-b)x^2+2ax+3 \geq 0 \end{cases}$
 이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립해야 한다.
 부등식 $(a^2+b)x^2+2ax+5 \geq 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립해
 야 하므로

$a^2+b > 0$, 즉 $b > -a^2$ ㉠

이차방정식 $(a^2+b)x^2+2ax+5=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$D_1 \leq 0$ 이어야 하므로 **참고**

$\frac{D_1}{4} = a^2 - 5(a^2+b) \leq 0$

$-4a^2 - 5b \leq 0 \quad \therefore b \geq -\frac{4}{5}a^2$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $b \geq -\frac{4}{5}a^2$

또, 부등식 $(a^2-b)x^2+2ax+3 \geq 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립
 해야 하므로 $a^2-b > 0$, 즉 $b < a^2$ ㉢

이차방정식 $(a^2-b)x^2+2ax+3=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$D_2 \leq 0$ 이어야 하므로

$\frac{D_2}{4} = a^2 - 3(a^2-b) \leq 0$

$-2a^2 + 3b \leq 0 \quad \therefore b \leq \frac{2}{3}a^2$ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $b \leq \frac{2}{3}a^2$

따라서 $-\frac{4}{5}a^2 \leq b < 0$ 또는 $0 < b \leq \frac{2}{3}a^2$ 이므로

$-\frac{4}{5} \leq \frac{b}{a^2} < 0$ 또는 $0 < \frac{b}{a^2} \leq \frac{2}{3}$

즉, $M = \frac{2}{3}$, $m = -\frac{4}{5}$ 이므로

$M - m = \frac{2}{3} - \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{22}{15}$

답 $\frac{22}{15}$

참고

$a^2+b=0$ 이면 $2ax+5 \geq 0$

이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 $a=0$ 이어야 하고, 이는
 $a \neq 0$ 에 모순이므로 $a^2+b \neq 0$

따라서 $(a^2+b)x^2+2ax+5=0$ 은 이차방정식이다.

같은 방법으로 $(a^2-b)x^2+2ax+3=0$ 도 이차방정식임을 알 수 있다.

033

$\overline{AB} = 3a$ 라 하면 $\overline{AD} = 3a+3$ 이므로

$\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2B} = a$, $\overline{AQ_1} = \overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2D} = a+1$

따라서

$S_1 = \frac{1}{2} \times (a+1) \times a = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$

$S_2 = \square ABCD - \triangle AP_2Q_2 - \triangle P_2BC - \triangle CDQ_2$

$= 3a(3a+3) - \frac{1}{2} \times 2a \times (2a+2)$

$- \frac{1}{2} \times a \times (3a+3) - \frac{1}{2} \times 3a \times (a+1)$

$= 9a^2 + 9a - (2a^2 + 2a) - \left(\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}a\right) - \left(\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}a\right)$

$= 4a^2 + 4a$

$S_2 - 4S_1 \geq 24$ 에서 $4a^2 + 4a - 4\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a\right) \geq 24$

$2a^2 + 2a - 24 \geq 0$, $a^2 + a - 12 \geq 0$

$(a+4)(a-3) \geq 0 \quad \therefore a \leq -4$ 또는 $a \geq 3$

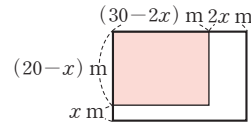
그런데 $a > 0$ 이므로 $a \geq 3$

따라서 $3a \geq 9$ 이므로 선분 AB의 길이의 최솟값은 9이다.

답 9

034

주어진 그림에서 화단과 길을 다음 그림과 같이 겹치지 않도록 이
 동하여도 각각의 넓이는 변하지 않는다.



화단의 넓이는

$(30-2x)(20-x) = 2x^2 - 70x + 600 \text{ (m}^2\text{)}$

길의 넓이는

$2x \times 20 + x(30-2x) = -2x^2 + 70x \text{ (m}^2\text{)}$

따라서 총 비용은

$2(2x^2 - 70x + 600) + (-2x^2 + 70x) = 2x^2 - 70x + 1200 \text{ (만 원)}$

총 비용이 900만 원 이하이어야 하므로

$2x^2 - 70x + 1200 \leq 900$, $2x^2 - 70x + 300 \leq 0$

$x^2 - 35x + 150 \leq 0$, $(x-5)(x-30) \leq 0$

$\therefore 5 \leq x \leq 30$

이때 $x > 0$, $30-2x > 0$, $20-x > 0$ 이므로 $0 < x < 15$

따라서 $5 \leq x < 15$ 이므로 x 의 최솟값은 5이다.

답 ④

035

가격을 인상하기 전의 제품의 가격을 a , 판매량을 b 라 하면 가격
 을 인상한 후의 제품의 가격은 $a\left(1 + \frac{x}{100}\right)$, 판매량은 $b\left(1 - \frac{x}{200}\right)$

이므로 이때의 총 판매액은

$a\left(1 + \frac{x}{100}\right) \times b\left(1 - \frac{x}{200}\right) = ab\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{x}{200}\right)$

총 판매액이 8% 이상 증가해야 하므로

$ab\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{x}{200}\right) \geq ab\left(1 + \frac{8}{100}\right)$

$(100+x)(200-x) \geq 21600$, $x^2 - 100x + 1600 \leq 0$

$(x-20)(x-80) \leq 0 \quad \therefore 20 \leq x \leq 80$

따라서 x 의 최댓값과 최솟값의 차는

$80 - 20 = 60$

답 60

036

$x^2 - 9x + 14 < 0$ 에서 $(x-2)(x-7) < 0$

$\therefore 2 < x < 7$

$x^2 - 2kx + k^2 - 9 > 0$ 에서 $x^2 - 2kx + (k-3)(k+3) > 0$

$\{x - (k-3)\} \{x - (k+3)\} > 0 \quad \therefore x < k-3 \text{ 또는 } x > k+3$

(i) $2 < k-3 \leq 7$, 즉 $5 < k \leq 10$ 일 때

연립부등식의 해는

$2 < x < k-3$ 이므로

$(k-3) - 2 = 2 \quad \therefore k = 7$

(ii) $2 < k+3 < 7$, 즉 $-1 < k < 4$ 일 때

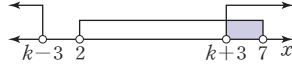
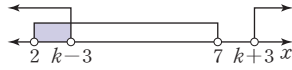
연립부등식의 해는

$k+3 < x < 7$ 이므로

$7 - (k+3) = 2 \quad \therefore k = 2$

(i), (ii)에서 k 의 값이 2, 7이므로 구하는 합은

$2 + 7 = 9$



답 9

037

$\begin{cases} (x+9)(x-a^2+6a) \leq 0 & \dots \textcircled{1} \\ (x-4a)(x-4a+25) \leq 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$

이차방정식 $(x+9)(x-a^2+6a) = 0$ 의 두 근은

$x = -9$ 또는 $x = a^2 - 6a$

이때 $a^2 - 6a - (-9) = (a-3)^2 \geq 0$ 이므로 $a^2 - 6a \geq -9$

(i) $a-3=0$, 즉 $a=3$ 일 때

$\textcircled{1}$ 에서 $(x+9)^2 \leq 0$

$\therefore x = -9$

$\textcircled{2}$ 에서 $(x-12)(x+13) \leq 0$

$\therefore -13 \leq x \leq 12$

따라서 연립부등식을 만족시키는 실수 x 의 값은 -9 이다.

(ii) $a-3 \neq 0$, 즉 $a \neq 3$ 일 때

$\textcircled{1}$ 에서 $-9 \leq x \leq a^2 - 6a$

$\textcircled{2}$ 에서 $4a - 25 \leq x \leq 4a$

연립부등식을 만족시키는 실수 x 가 오직 하나 존재하려면

$-9 = 4a$ 또는 $a^2 - 6a = 4a - 25$ 이어야 한다. **참고**

㉠ $-9 = 4a$ 일 때, $a = -\frac{9}{4}$

㉡ $a^2 - 6a = 4a - 25$ 일 때, $a^2 - 10a + 25 = 0$
 $(a-5)^2 = 0 \quad \therefore a = 5$

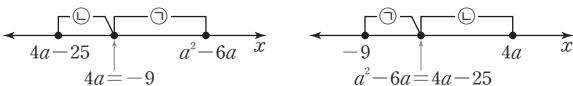
(i), (ii)에서 a 의 값은 $-\frac{9}{4}, 3, 5$ 이므로 구하는 합은

$-\frac{9}{4} + 3 + 5 = \frac{23}{4}$

답 $\frac{23}{4}$

참고

각 부등식을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



038

$x^2 - (a-1)x - a > 0$ 에서 $(x+1)(x-a) > 0$

$\therefore x < -1$ 또는 $x > a$ ($\because a > 0$) ㉠

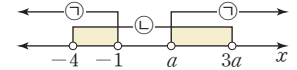
096 정답과 풀이

$x^2 - (3a-4)x - 12a < 0$ 에서 $(x+4)(x-3a) < 0$

$\therefore -4 < x < 3a$ ($\because a > 0$) ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-4 < x < -1$ 또는 $a < x < 3a$



이를 만족시키는 정수 x 가 5개이려면 $-4 < x < -1$ 에 포함되는 정수 x 가 $-3, -2$ 의 2개이므로 $a < x < 3a$ 에 포함되는 정수가 3개이어야 한다.

(i) a 가 정수인 경우

$a < x < 3a$ 를 만족시키는 정수 x 의 개수는 **참고**

$3a - a - 1 = 3, 2a = 4$

$\therefore a = 2$

(ii) a 가 정수가 아닌 경우

㉠ $n < a \leq n + \frac{1}{3}$ (n 은 음이 아닌 정수)일 때

$3n < 3a \leq 3n + 1$ 이므로 $a < x < 3a$ 에 포함되는 정수 x 는 $n+1, n+2, n+3, \dots, 3n$ 이다.

따라서 정수 x 의 개수는

$3n - (n+1) + 1 = 3, \text{ 즉 } n = \frac{3}{2}$

이때 n 은 음이 아닌 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉡ $n + \frac{1}{3} < a \leq n + \frac{2}{3}$ (n 은 음이 아닌 정수)일 때

$3n + 1 < 3a \leq 3n + 2$ 이므로 $a < x < 3a$ 에 포함되는 정수 x 는 $n+1, n+2, n+3, \dots, 3n+1$ 이다.

따라서 정수 x 의 개수는

$(3n+1) - (n+1) + 1 = 3, \text{ 즉 } n = 1$

$\therefore \frac{4}{3} < a \leq \frac{5}{3}$

㉢ $n + \frac{2}{3} < a < n + 1$ (n 은 음이 아닌 정수)일 때

$3n + 2 < 3a < 3n + 3$ 이므로 $a < x < 3a$ 에 포함되는 정수 x 는 $n+1, n+2, \dots, 3n+2$ 이다.

따라서 정수 x 의 개수는

$(3n+2) - (n+1) + 1 = 3, \text{ 즉 } n = \frac{1}{2}$

이때 n 은 음이 아닌 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a = 2$ 또는 $\frac{4}{3} < a \leq \frac{5}{3}$

따라서 a 의 최댓값은 2이다.

답 2

참고

정수의 개수

정수 a, b 에 대하여

(1) $a < x < b$ 를 만족시키는 정수 x 의 개수 $\rightarrow b - a - 1$

(2) $a \leq x < b$ 또는 $a < x \leq b$ 를 만족시키는 정수 x 의 개수 $\rightarrow b - a$

(3) $a \leq x \leq b$ 를 만족시키는 정수 x 의 개수 $\rightarrow b - a + 1$

039

$4x^2 + 2ax - a - 1 = 0$ 에서

$(2x-1)(2x+a+1) = 0$

$\therefore x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = -\frac{a+1}{2}$

이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$$\frac{1}{2} \neq -\frac{a+1}{2}, a+1 \neq -1$$

$$\therefore a \neq -2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$[a]^2 + [\beta]^2 > 0$ 이 성립하지 않으려면 $[a]^2 + [\beta]^2 \leq 0$, 즉 $[a]^2 + [\beta]^2 = 0$ 이어야 하므로 $[a] = [\beta] = 0$ 에서

$$0 \leq a < 1, 0 \leq \beta < 1$$

$$\text{즉, } 0 \leq -\frac{a+1}{2} < 1 \text{ 이어야 하므로}$$

$$-2 < a+1 \leq 0 \quad \therefore -3 < a \leq -1$$

따라서 $[a]^2 + [\beta]^2 > 0$ 이 성립하도록 하는 a 의 값의 범위는

$$a \leq -3 \text{ 또는 } a > -1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통 범위는 $a \leq -3$ 또는 $a > -1$

$$\text{답 } a \leq -3 \text{ 또는 } a > -1$$

040

$$3x^2 - 7x \leq 0 \text{ 에서 } x(3x-7) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq \frac{7}{3}$$

정수 n 에 대하여 $\lceil x \rceil = n$ 이면 $n-1 < x \leq n$

$$\lceil x \rceil^3 - \lceil x \rceil x - 4 \leq 0 \text{ 에서}$$

(i) $x=0$ 이면 $\lceil x \rceil = 0$ 이므로

$$-4 \leq 0 \quad \therefore x \text{ 는 모든 실수}$$

이때 $x=0$ 이므로 연립부등식의 해는 $x=0$

(ii) $0 < x \leq 1$ 이면 $\lceil x \rceil = 1$ 이므로

$$-x-3 \leq 0 \quad \therefore x \geq -3$$

이때 $0 < x \leq 1$ 이므로 연립부등식의 해는 $0 < x \leq 1$

(iii) $1 < x \leq 2$ 이면 $\lceil x \rceil = 2$ 이므로

$$-2x+4 \leq 0 \quad \therefore x \geq 2$$

이때 $1 < x \leq 2$ 이므로 연립부등식의 해는 $x=2$

(iv) $2 < x < \frac{7}{3}$ 이면 $\lceil x \rceil = 3$ 이므로

$$-3x+23 \leq 0 \quad \therefore x \geq \frac{23}{3}$$

이때 $2 < x < \frac{7}{3}$ 이므로 연립부등식의 해는 없다.

(i)~(iv)에서 $0 \leq x \leq 1$ 또는 $x=2$

$$\text{답 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 또는 } x=2$$

041

$$[x]^2 - 2[x] - 3 > 0 \text{ 에서 } ([x]+1)([x]-3) > 0$$

$$\therefore [x] < -1 \text{ 또는 } [x] > 3$$

이때 $[x]$ 는 정수이므로 위의 부등식을 만족시키는 $[x]$ 의 값은 $\dots, -3, -2, 4, 5, \dots$ 이다.

⋮

$$[x] = -3 \text{ 이면 } -3 \leq x < -2$$

$$[x] = -2 \text{ 이면 } -2 \leq x < -1$$

$$[x] = 4 \text{ 이면 } 4 \leq x < 5$$

$$[x] = 5 \text{ 이면 } 5 \leq x < 6$$

⋮

$$\therefore x < -1 \text{ 또는 } x \geq 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x^2 + (2-a)x - 2a < 0 \text{ 에서 } (x+2)(x-a) < 0$$

(i) $a < -2$ 일 때, $a < x < -2$

이때 해에 4가 포함되지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = -2$ 일 때, $(x+2)^2 \geq 0$ 이므로 해는 없다.

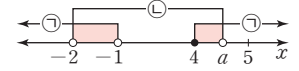
(iii) $a > -2$ 일 때, $-2 < x < a$

(i)~(iii)에서 $-2 < x < a$ ⋮ $\textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통인 정수가 4뿐이어야

하므로

$$4 < a \leq 5$$



$$\text{답 } 4 < a \leq 5$$

042

$$-5 \leq (a-1)x + b \leq x^2 - 2x + 6 \text{ 에서}$$

$$\begin{cases} -5 \leq (a-1)x + b & \dots \textcircled{1} \\ (a-1)x + b \leq x^2 - 2x + 6 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $(a-1)x + b + 5 \geq 0$ 이고, 이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$a-1=0, b+5 \geq 0$$

$$\therefore a=1, b \geq -5 \quad \dots \textcircled{3}$$

$a=1$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $b \leq x^2 - 2x + 6$

즉, $x^2 - 2x + 6 - b \geq 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로 이차 방정식 $x^2 - 2x + 6 - b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

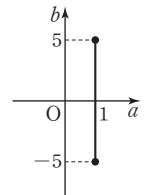
$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (6-b) \leq 0$$

$$b-5 \leq 0$$

$$\therefore b \leq 5 \quad \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}, \textcircled{4}$ 에서 $a=1, -5 \leq b \leq 5$ 이므로 점 (a, b) 가 나타내는 도형의 길이는

$$5 - (-5) = 10$$



$$\text{답 } 10$$

043

이차함수 $f(x) = -x^2 + 2kx + k^2 + 4$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점이 A이므로 $A(0, k^2 + 4)$

$$-x^2 + 2kx + k^2 + 4 = k^2 + 4 \text{ 에서}$$

$$x^2 - 2kx = 0, x(x-2k) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2k$$

$$\therefore B(2k, k^2 + 4)$$

사각형 AOCB의 둘레의 길이가 $g(k)$ 이므로

$$g(k) = 2\{2k + (k^2 + 4)\} = 2k^2 + 4k + 8$$

$$24 \leq g(k) \leq 56 \text{ 에서}$$

$$24 \leq 2k^2 + 4k + 8 \leq 56, 12 \leq k^2 + 2k + 4 \leq 28$$

$$12 \leq k^2 + 2k + 4 \text{ 에서 } k^2 + 2k - 8 \geq 0$$

$$(k+4)(k-2) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -4 \text{ 또는 } k \geq 2$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k \geq 2$ ⋮ $\textcircled{1}$

$$k^2 + 2k + 4 \leq 28 \text{ 에서 } k^2 + 2k - 24 \leq 0$$

$$(k+6)(k-4) \leq 0$$

$$\therefore -6 \leq k \leq 4$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $0 < k \leq 4$ ⋮ $\textcircled{2}$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2 \leq k \leq 4$
따라서 모든 자연수 k 의 값의 합은
 $2+3+4=9$

답 9

044

$2x+1=n$ (n 은 정수)이라 하면 $x=\frac{n-1}{2}$

$(x-2)(x-4)$ 를 소수 첫째 자리에서 반올림한 값이 n 이므로

$$n - \frac{1}{2} \leq (x-2)(x-4) < n + \frac{1}{2}$$

$$n - \frac{1}{2} \leq \left(\frac{n-1}{2} - 2\right)\left(\frac{n-1}{2} - 4\right) < n + \frac{1}{2}$$

$$4n - 2 \leq (n-5)(n-9) < 4n + 2$$

$$4n - 2 \leq n^2 - 14n + 45 < 4n + 2 \quad \text{[다른 풀이]}$$

$$4n - 2 \leq n^2 - 14n + 45 \text{에서}$$

$$n^2 - 18n + 47 \geq 0, \{n - (9 - \sqrt{34})\} \{n - (9 + \sqrt{34})\} \geq 0$$

$$\therefore n \leq 9 - \sqrt{34} \text{ 또는 } n \geq 9 + \sqrt{34} \quad \dots \text{㉠}$$

$$n^2 - 14n + 45 < 4n + 2 \text{에서}$$

$$n^2 - 18n + 43 < 0$$

$$\{n - (9 - \sqrt{38})\} \{n - (9 + \sqrt{38})\} < 0$$

$$\therefore 9 - \sqrt{38} < n < 9 + \sqrt{38} \quad \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$9 - \sqrt{38} < n \leq 9 - \sqrt{34}$$

$$\text{또는 } 9 + \sqrt{34} \leq n < 9 + \sqrt{38}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=3$ 또는 $n=15$

$$\therefore x = \frac{3-1}{2} = 1 \text{ 또는 } x = \frac{15-1}{2} = 7$$

따라서 구하는 합은

$$1+7=8$$

답 8

[다른 풀이]

$$34 \leq n^2 - 18n + 81 < 38$$

$$5^2 < 34 \leq (n-9)^2 < 38 < 7^2$$

n 은 정수이므로 $(n-9)^2 = 6^2$

$$n-9 = \pm 6 \quad \therefore n=3 \text{ 또는 } n=15$$

$$\therefore x = \frac{3-1}{2} = 1 \text{ 또는 } x = \frac{15-1}{2} = 7$$

따라서 구하는 합은

$$1+7=8$$

045

삼각형 ABC에서 $\angle A = \angle C$ 이고, $\angle APQ = \angle C$ (동위각),

$\angle RPC = \angle A$ (동위각)

두 삼각형 AQP, PRC는 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{AQ} = \overline{QP} = a, \overline{PR} = \overline{RC} = 9-a$$

이때 $a > 0, 9-a > 0$ 이므로 $0 < a < 9$

$$\triangle AQP = \frac{1}{2} \times a \times a = \frac{1}{2} a^2$$

$$\triangle PRC = \frac{1}{2} \times (9-a) \times (9-a) = \frac{1}{2} (9-a)^2$$

$$\square QBRP = a(9-a)$$

이므로 $S_1 < S_2 < S_3$ 에서

098 정답과 풀이

$$\frac{1}{2} a^2 < \frac{1}{2} (9-a)^2 < a(9-a)$$

$$\frac{1}{2} a^2 < \frac{1}{2} (9-a)^2 \text{에서 } a^2 < (9-a)^2$$

$$a^2 < a^2 - 18a + 81, 18a < 81$$

$$\therefore a < \frac{9}{2}$$

그런데 $0 < a < 9$ 이므로

$$0 < a < \frac{9}{2} \quad \dots \text{㉠}$$

$$\frac{1}{2} (9-a)^2 < a(9-a) \text{에서 } 9-a < 2a$$

$$3a > 9 \quad \therefore a > 3$$

그런데 $0 < a < 9$ 이므로

$$3 < a < 9 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $3 < a < \frac{9}{2}$

따라서 자연수 a 의 값은 4이다.

답 4

046

B의 속력을 v 라 하면 A의 속력은 kv 이다.

트랙 한 바퀴의 길이를 1이라 하고, 두 사람이 처음 만날 때까지 걸린 시간을 t_1 이라 하자.

두 사람이 같은 방향으로 달리다가 만나려면 A가 B보다 한 바퀴만큼 더 달려야 하므로

$$kvt_1 - vt_1 = 1$$

$$\therefore t_1 = \frac{1}{(k-1)v}$$

또, 두 사람이 처음 만날 때부터 두 번째 만날 때까지 걸린 시간을 t_2 라 하자.

두 사람이 반대 방향으로 달려서 만나려면 두 사람이 달린 거리의 합이 트랙의 한 바퀴만큼이어야 하므로

$$kvt_2 + vt_2 = 1$$

$$\therefore t_2 = \frac{1}{(k+1)v}$$

두 사람이 두 번째로 만날 때 B는 한 바퀴를 지나 두 바퀴째 돌고 있으므로

$$1 < (t_1 + t_2)v < 2$$

$$1 < \left\{ \frac{1}{(k-1)v} + \frac{1}{(k+1)v} \right\} v < 2$$

$$1 < \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1} < 2, 1 < \frac{2k}{k^2-1} < 2$$

$$\therefore k^2 - 1 < 2k < 2k^2 - 2 \quad \rightarrow k > 10 \text{이므로 } k^2 - 1 > 0$$

$$k^2 - 1 < 2k \text{에서 } k^2 - 2k - 1 < 0$$

$$\therefore 1 - \sqrt{2} < k < 1 + \sqrt{2}$$

그런데 $k > 1$ 이므로 $1 < k < 1 + \sqrt{2}$ ㉠

$$2k < 2k^2 - 2 \text{에서 } 2k^2 - 2k - 2 > 0$$

$$k^2 - k - 1 > 0$$

$$\therefore k < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } k > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

그런데 $k > 1$ 이므로 $k > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < k < 1 + \sqrt{2}$

따라서 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = 1 + \sqrt{2}$ 이므로

$$2a - \beta = 1 + \sqrt{5} - (1 + \sqrt{2}) = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

$$\text{답 } \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

047

이차방정식 A는 서로 다른 두 실근을 가지므로 A의 판별식을 D_1 라 하면

$$\frac{D_1}{4} = \{-(2a-1)\}^2 - 4a > 0$$

$$4a^2 - 8a + 1 > 0$$

$$\therefore 0 < a < 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } a > 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} (\because a > 0) \quad \dots \text{㉠}$$

이차방정식 B는 서로 다른 두 실근을 가지므로 B의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = \{-(2a-1)\}^2 - 4a > 0$$

$$4a^2 - 8a + 1 > 0$$

$$\therefore 0 < a < 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } a > 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} (\because a > 0) \quad \dots \text{㉡}$$

다른 풀이

이차방정식 A의 두 실근을 α, β ($\alpha < \beta$)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4a - 2, \alpha\beta = 4a$$

이므로

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2} \\ &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{(4a - 2)^2 - 16a} \\ &= 2\sqrt{4a^2 - 8a + 1} \end{aligned}$$

이차방정식 B의 두 실근을 γ, δ ($\gamma < \delta$)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\gamma + \delta = \frac{2a-1}{a}, \gamma\delta = \frac{1}{a}$$

이므로

$$\begin{aligned} \delta - \gamma &= \sqrt{(\delta - \gamma)^2} \\ &= \sqrt{(\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2a-1}{a}\right)^2 - \frac{4}{a}} \\ &= \frac{\sqrt{4a^2 - 8a + 1}}{a} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } (\beta - \alpha)(\delta - \gamma) = \frac{2(4a^2 - 8a + 1)}{a} \leq 1 \text{에서}$$

$$8a^2 - 16a + 2 \leq a, 8a^2 - 17a + 2 \leq 0$$

$$(8a-1)(a-2) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{8} \leq a \leq 2 \quad \dots \text{㉢}$$

$$\text{㉠, ㉡, ㉢에서 } \frac{1}{8} \leq a < 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} < a \leq 2 \text{이므로 조건}$$

을 만족시키는 양수 a 의 최솟값은 $\frac{1}{8}$ 이다.

$$\text{답 } \frac{1}{8}$$

다른 풀이

A에 x 대신 $\frac{2}{x}$ 를 대입하면

$$\frac{4}{x^2} - \frac{2(4a-2)}{x} + 4a = 0$$

$$\therefore ax^2 - (2a-1)x + 1 = 0$$

따라서 이차방정식 A의 두 근을 α, β ($\alpha < \beta$)라 하면 이차방정식

B의 두 근은 $\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\beta}$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4a - 2, \alpha\beta = 4a$$

이므로

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (4a - 2)^2 - 16a \\ &= 4(4a^2 - 8a + 1) \end{aligned}$$

$$(\beta - \alpha)\left(\frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\beta}\right) \leq 1 \text{에서}$$

$$\frac{2(\beta - \alpha)^2}{\alpha\beta} \leq 1, \frac{8(4a^2 - 8a + 1)}{4a} \leq 1$$

$$8a^2 - 16a + 2 \leq a, 8a^2 - 17a + 2 \leq 0$$

$$(8a-1)(a-2) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{8} \leq a \leq 2 \quad \dots \text{㉣}$$

㉠, ㉡, ㉣에서 조건을 만족시키는 양수 a 의 최솟값은 $\frac{1}{8}$ 이다.

048

이차방정식 $x^2 - 2x + k^2 - 3 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{4} &= (-1)^2 - (k^2 - 3) \\ &= -k^2 + 4 \\ &= -(k+2)(k-2) \end{aligned}$$

이차방정식 $x^2 + 2x - k^2 + 2k + 9 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{4} &= 1^2 - (-k^2 + 2k + 9) \\ &= k^2 - 2k - 8 \\ &= (k+2)(k-4) \end{aligned}$$

(i) 두 그래프가 모두 x 축과 서로 다른 두 점에서 만날 때

$$\frac{D_1}{4} > 0 \text{에서 } -2 < k < 2$$

$$\frac{D_2}{4} > 0 \text{에서 } k < -2 \text{ 또는 } k > 4$$

이를 동시에 만족시키는 k 의 값은 없다.

(ii) 두 그래프가 모두 x 축과 접할 때

$$\frac{D_1}{4} = 0 \text{에서 } k = -2 \text{ 또는 } k = 2$$

$$\frac{D_2}{4} = 0 \text{에서 } k = -2 \text{ 또는 } k = 4$$

이를 동시에 만족시키는 k 의 값은 -2 이다.

(iii) 두 그래프가 모두 x 축과 만나지 않을 때

$$\frac{D_1}{4} < 0 \text{에서 } k < -2 \text{ 또는 } k > 2$$

$$\frac{D_2}{4} < 0 \text{에서 } -2 < k < 4$$

이를 동시에 만족시키는 k 의 값의 범위는 $2 < k < 4$

(i)~(iii)에서 $k = -2$ 또는 $2 < k < 4$ 이므로 정수 k 의 합은

$$-2 + 3 = 1$$

$$\text{답 } 1$$

049

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 조건 ㉠에서 부등식

$f(x) \leq 1$, 즉 $f(x) - 1 \leq 0$ 의 해가 $x=2$ 이므로

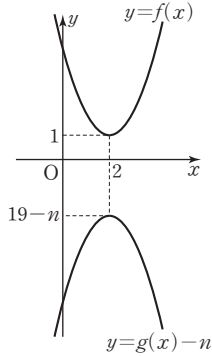
$$f(x) - 1 = (x-2)^2$$

$$\therefore f(x) = (x-2)^2 + 1$$

두 이차함수 $f(x), g(x)$ 의 최고차항의 계수가 각각 1, -1 이므로
함수 $f(x)-g(x)$ 의 최고차항의 계수는 2이고, 조건 ④에서 부등
식 $f(x)-g(x)\leq 0$ 의 해는 $-1\leq x\leq 5$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= 2(x+1)(x-5) \\ \therefore g(x) &= f(x)-2(x+1)(x-5) \\ &= (x-2)^2+1-2(x+1)(x-5) \\ &= -x^2+4x+15 \\ &= -(x-2)^2+19 \end{aligned}$$

두 방정식 $f(x)-k=0$,
 $g(x)-n-k=0$, 즉 $f(x)=k$,
 $g(x)-n=k$ 가 실근을 갖지 않으므로 오
른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프
와 함수 $y=g(x)-n$ 의 그래프가 직선
 $y=k$ 와 만나지 않도록 하는 정수 k 의 개
수가 3개이므로 함수 $y=g(x)-n$ 의 최
댓값이 $19-n$ 이므로
 $-3\leq 19-n<-2 \quad \therefore 21<n\leq 22$
따라서 구하는 정수 n 의 값은 22이다.



답 22

050

$f(x)=x^2+2mx+2-m$ 이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$ 이 실근
을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= m^2-(2-m)\geq 0 \\ m^2+m-2\geq 0, (m+2)(m-1)\geq 0 \\ \therefore m\leq -2 \text{ 또는 } m\geq 1 & \dots \text{㉠} \end{aligned}$$

또, $f(x)=x^2+2mx+2-m=(x+m)^2-m^2-m+2$ 이므로 이
차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은

$$x=-m \quad \text{[다른 풀이]}$$

(i) 이차방정식의 두 근이 모두 음수일 때

- ㉠ $-m<0$ 이므로 $m>0$
- ㉡ $f(0)>0$ 이므로 $2-m>0 \quad \therefore m<2$
- ㉠, ㉡에서 $0<m<2$

(ii) 이차방정식의 한 근이 음수이고, 다른 한 근이 0일 때

- ㉠ $-m<0$ 이므로 $m>0$
- ㉡ $f(0)=0$ 이므로 $2-m=0 \quad \therefore m=2$
- ㉠, ㉡에서 $m=2$

(iii) 이차방정식의 한 근이 음수이고, 다른 한 근이 양수일 때

$$(\text{두 근의 곱})=2-m<0 \quad \therefore m>2$$

(i)~(iii)에서 $m>0 \quad \dots \text{㉢}$

㉠, ㉢의 공통부분을 구하면 $m\geq 1$

답 5

[다른 풀이]

이차방정식 $x^2+2mx+2-m=0$ 의 두 근 중 적어도 하나는 음수
가 되도록 하는 실수 m 의 값의 범위는 전체 범위에서 두 근이 모
두 0보다 크거나 같도록 하는 범위를 제외한 것과 같다.

(i) 이차방정식의 두 근이 모두 양수일 때

- ㉠ $-m>0$ 이므로 $m<0$
- ㉡ $f(0)>0$ 이므로 $2-m>0 \quad \therefore m<2$
- ㉠, ㉡에서 $m<0$

(ii) 이차방정식의 한 근이 양수이고, 다른 한 근이 0일 때

- ㉠ $-m>0$ 이므로 $m<0$
- ㉡ $f(0)=0$ 이므로 $2-m=0 \quad \therefore m=2$
- ㉠, ㉡에서 실수 m 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) 이차방정식의 두 근이 모두 0일 때

- ㉠ $-m=0$ 이므로 $m=0$
- ㉡ $f(0)=0$ 이므로 $2-m=0 \quad \therefore m=2$
- ㉠, ㉡에서 실수 m 의 값은 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에서 $m<0 \quad \dots \text{㉣}$

㉠, ㉣의 공통부분을 구하면 $m\leq -2$

따라서 구하는 실수 m 의 값의 범위는 ㉣에서 $m\leq -2$ 를 제외한
것과 같으므로 $m\geq 1$

051

$f(x)=x^2-2(k+5)|x|+2(k^2+3k+2)$ 라 하면

$$f(x)=|x|^2-2(k+5)|x|+2(k^2+3k+2)$$

이때 $|x|=t (t\geq 0)$ 로 놓으면

$$f(t)=t^2-2(k+5)t+2(k^2+3k+2)$$

방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 네 실근을 가지려면 방정식 $f(t)=0$
이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f(t)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \{-(k+5)\}^2-2(k^2+3k+2)>0 \\ -k^2+4k+21>0, k^2-4k-21<0 \\ (k+3)(k-7)<0 \\ \therefore -3<k<7 \end{aligned}$$

(ii) (두 근의 합) $=2(k+5)>0 \quad \therefore k>-5$

(iii) (두 근의 곱) $=2(k+3k+2)>0$

$$\begin{aligned} (k+1)(k+2)>0 \\ \therefore k<-2 \text{ 또는 } k>-1 \end{aligned}$$

(i)~(iii)에서 $-3<k<-2$ 또는 $-1<k<7$

따라서 정수 k 는 0, 1, 2, ..., 6의 7개이다.

답 7

[다른 풀이]

$x^2-2(k+5)|x|+2(k^2+3k+2)=0$ 이 서로 다른 네 실근을 가
져야 하므로 $x<0, x\geq 0$ 일 때 각각 서로 다른 두 개의 실근을 가
져야 한다.

(i) $x<0$ 일 때

$g(x)=x^2+2(k+5)x+2(k^2+3k+2)$ 라 하면 이차방정식

$g(x)=0$ 이 서로 다른 두 개의 음의 실근을 가져야 한다.

㉠ 이차방정식 $g(x)=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{4} &= (k+5)^2-2(k^2+3k+2)>0 \\ -k^2+4k+21>0, k^2-4k-21<0 \\ (k+3)(k-7)<0 \\ \therefore -3<k<7 \end{aligned}$$

㉡ 이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 축이 직선 $x=-(k+5)$

$$\text{이므로 } -(k+5)<0$$

$$\therefore k>-5$$

㉢ $g(0)>0$ 이므로 $2(k^2+3k+2)>0$

$$(k+1)(k+2)>0$$

$$\therefore k<-2 \text{ 또는 } k>-1$$

㉠~㉢에서 $-3 < k < -2$ 또는 $-1 < k < 7$

(ii) $x \geq 0$ 일 때

$h(x) = x^2 - 2(k+5)x + 2(k^2 + 3k + 2)$ 라 하면 이차방정식 $h(x) = 0$ 이 서로 다른 두 개의 양이 아닌 실근을 가져야 한다.

㉠ 이차방정식 $h(x) = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = \{-(k+5)\}^2 - 2(k^2 + 3k + 2) > 0$$

$$-k^2 + 4k + 21 > 0, k^2 - 4k - 21 < 0$$

$$(k+3)(k-7) < 0 \quad \therefore -3 < k < 7$$

㉡ 이차함수 $y = h(x)$ 의 그래프의 축이 직선 $x = k+5$

$$\text{이므로 } k+5 > 0 \quad \therefore k > -5$$

㉢ $h(0) \geq 0$ 이므로 $2(k^2 + 3k + 2) \geq 0$

$$(k+1)(k+2) \geq 0 \quad \therefore k \leq -2 \text{ 또는 } k \geq -1$$

㉠~㉢에서 $-3 < k \leq -2$ 또는 $-1 \leq k < 7$

(i)~(ii)에서 $-3 < k < -2$ 또는 $-1 < k < 7$

따라서 정수 k 는 0, 1, 2, ..., 6의 7개이다.

052

$f(x) = ax^2 - (a^2 - 2a)x - 2$ 라 하면

(i) $a > 0$ 일 때

$f(0) = -2$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

$$f(-2) > 0 \text{에서 } 4a + 2a^2 - 4a - 2 > 0$$

$$a^2 - 1 > 0, (a+1)(a-1) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 1 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$f(-1) < 0 \text{에서 } a + a^2 - 2a - 2 < 0$$

$$a^2 - a - 2 < 0, (a+1)(a-2) < 0$$

$$\therefore -1 < a < 2 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

$$f(1) > 0 \text{에서 } a - a^2 + 2a - 2 > 0$$

$$a^2 - 3a + 2 < 0, (a-1)(a-2) < 0$$

$$\therefore 1 < a < 2 \quad \dots \textcircled{㉢}$$

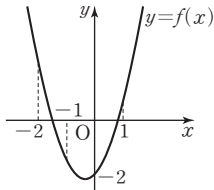
㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $1 < a < 2$

(ii) $a < 0$ 일 때

$f(0) = -2$ 이므로 조건을 만족시키는 $y = f(x)$ 의 그래프를 그릴 수 없다.

(i), (ii)에서 $1 < a < 2$

답 ⑤



053

일등급의 메모장

$\beta - a$ 가 자연수이면

(1) α, β 가 모두 정수

(2) $\alpha = m + k, \beta = n + k$ (단, m, n 은 정수, $m < n, 0 < k < 1$)

$(2x - a^2 + 2a)(2x - 3a) = 0$ 의 두 근은

$$x = \frac{a^2 - 2a}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3a}{2}$$

이때 조건 (나)에서 α, β 가 모두 정수이면 $\beta - \alpha = 2$ 이고, α, β 가 모두 정수가 아닌 실수이면 $\beta - \alpha = 3$ 이어야 한다.

(i) $\frac{a^2 - 2a}{2} > \frac{3a}{2}$ 인 경우

$$a^2 - 2a > 3a, a^2 - 5a > 0$$

$$a(a-5) > 0$$

$$\therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 5$$

한편, $(2x - a^2 + 2a)(2x - 3a) \leq 0$ 의 해는 $\frac{3a}{2} \leq x \leq \frac{a^2 - 2a}{2}$

이므로

$$\beta - \alpha = \frac{a^2 - 2a}{2} - \frac{3a}{2}$$

$$= \frac{a^2 - 5a}{2}$$

㉠ α, β 가 모두 정수일 때

$$\frac{a^2 - 5a}{2} = 2 \text{에서 } a^2 - 5a - 4 = 0$$

$$\therefore a = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$$

그런데 $a = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$ 이면 α, β 가 정수가 아닌 실수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉡ α, β 가 모두 정수가 아닌 실수일 때

$$\frac{a^2 - 5a}{2} = 3 \text{에서 } a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$(a+1)(a-6) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 6$$

이때 $a = -1$ 이면 α, β 가 정수가 아닌 실수이므로 조건을 만족시키고, $a = 6$ 이면 α, β 가 정수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉢, ㉡에서 $a = -1$

(ii) $\frac{a^2 - 2a}{2} < \frac{3a}{2}$ 인 경우

$$a^2 - 2a < 3a, a^2 - 5a < 0$$

$$a(a-5) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 5$$

한편, $(2x - a^2 + 2a)(2x - 3a) \leq 0$ 의 해는 $\frac{a^2 - 2a}{2} \leq x \leq \frac{3a}{2}$

이므로

$$\beta - \alpha = \frac{3a}{2} - \frac{a^2 - 2a}{2}$$

$$= \frac{-a^2 + 5a}{2}$$

㉠ α, β 가 모두 정수일 때

$$\frac{-a^2 + 5a}{2} = 2 \text{에서 } a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$(a-1)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 4$$

이때 $a = 1$ 이면 α, β 가 정수가 아닌 실수이므로 조건을 만족시키지 않고, $a = 4$ 이면 α, β 가 정수이므로 조건을 만족시킨다.

㉡ α, β 가 모두 정수가 아닌 실수일 때

$$\frac{-a^2 + 5a}{2} = 3 \text{에서 } a^2 - 5a + 6 = 0$$

$$(a-2)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = 3$$

이때 $a = 2$ 이면 α, β 가 정수이므로 조건을 만족시키지 않고, $a = 3$ 이면 α, β 가 정수가 아닌 실수이므로 조건을 만족시킨다.

㉢, ㉡에서 $a = 3$ 또는 $a = 4$

(i), (ii)에서 a 의 값은 $-1, 3, 4$ 이므로 구하는 합은

$$-1 + 3 + 4 = 6$$

답 6

054

일등급의 메모장

k 가 정수이면 $k=2m-1$ 또는 $k=2m$ (단, m 은 정수이다.)

$$2k^2+3-(3k+1)=2k^2-3k+2=2\left(k-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$$

이므로

$$(2\langle x \rangle - 2k^2 - 3)(2\langle x \rangle - 3k - 1) \leq 0 \text{에서}$$

$$\frac{3k+1}{2} \leq \langle x \rangle \leq \frac{2k^2+3}{2}$$

(i) $k=2m-1$ (m 은 정수)인 경우

$$3m-1 \leq \langle x \rangle \leq 4m^2-4m+\frac{5}{2}$$

이때 $\langle x \rangle$ 는 정수이므로

$$3m-1 \leq \langle x \rangle \leq 4m^2-4m+2$$

$$\therefore 3m-\frac{3}{2} \leq x < 4m^2-4m+\frac{5}{2}$$

$$\text{즉, } a=3m-\frac{3}{2}, \beta=4m^2-4m+\frac{5}{2} \text{이므로}$$

$$\beta-a=4m^2-7m+4$$

조건 (가)에 의하여 $m=2p$ (p 는 정수)이어야 하므로

$$k=4p-1$$

조건 (나)에 의하여 조건을 만족시키는 정수 k 의 값의 합은

$$-97+(-93)+(-89)+\dots+99=50$$

(ii) $k=2m$ (m 은 정수)인 경우

$$3m+\frac{1}{2} \leq \langle x \rangle \leq 4m^2+\frac{3}{2}$$

이때 $\langle x \rangle$ 는 정수이므로

$$3m+1 \leq \langle x \rangle \leq 4m^2+1$$

$$\therefore 3m+\frac{1}{2} \leq x < 4m^2+\frac{3}{2}$$

$$\text{즉, } a=3m+\frac{1}{2}, \beta=4m^2+\frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$\beta-a=4m^2-3m+1$$

조건 (가)에 의하여 $m=2p-1$ (p 는 정수)이어야 하므로

$$k=4p-2$$

조건 (나)에 의하여 조건을 만족시키는 정수 k 의 값의 합은

$$-98+(-94)+(-90)+\dots+98=0$$

(i), (ii)에서 구하는 합은

$$50+0=50$$

답 50

055

일등급의 메모장

연립부등식 $\begin{cases} \text{(이차부등식)} \\ \text{(이차부등식)} \end{cases}$ 의 해는 $x < p$ 의 꼴이 될 수 없다.

연립부등식의 해가 $x < p$ 이라면 두 부등식 중 적어도 하나는 일차 부등식이여야 한다.

(i) $a=0$ 인 경우

$$\begin{cases} bx+b+1 < 0 \\ bx^2+(b+1)x < 0 \end{cases}$$

$$bx^2+(b+1)x < 0 \text{에서}$$

$$x\{bx+(b+1)\} < 0 \quad \therefore x > 0$$

즉, $\begin{cases} bx+b+1 < 0 \\ x > 0 \end{cases}$ 이므로 연립부등식의 해는 $x < p$ 가 될 수

없다.

(ii) $a+b=0$ 인 경우

$$\begin{cases} ax^2+1 < 0 \\ x+a < 0 \end{cases}$$

㉠ $a > 0$ 일 때

$ax^2+1 > 0$ 이므로 연립부등식의 해가 없다.

㉡ $a=0$ 일 때

$1 < 0$ 이므로 연립부등식의 해가 없다.

㉢ $a < 0$ 일 때

$$ax^2+1 < 0 \text{에서 } x < -\sqrt{-\frac{1}{a}} \text{ 또는 } x > \sqrt{-\frac{1}{a}}$$

$$x+a < 0 \text{에서 } x < -a$$

이므로 $-a \leq \sqrt{-\frac{1}{a}}$ 이면 연립부등식의 해는

$$x < -\sqrt{-\frac{1}{a}} \text{이다.}$$

(i), (ii)에서 $a+b=0, a < 0$ 이고

$-a \leq \sqrt{-\frac{1}{a}}$ 일 때 연립부등식의 해는 $x < -\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 이다.

ㄱ. $a=-1$ 일 때

$$p = -\sqrt{-\frac{1}{-1}} = -1 \text{이다. (참)}$$

ㄴ. $a+b=0$ 이고 $a < 0$ 이므로 $b > 0$ 이다. (참)

ㄷ. $a < 0$ 이고 $-a \leq \sqrt{-\frac{1}{a}}$ 이므로 양변을 제곱하면

$$a^2 \leq -\frac{1}{a}$$

$$\therefore a^3 \geq -1 \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

056

일등급의 메모장

(1) $n \leq x < n+1$ 이면 $[x]=n$ (단, n 은 정수이다.)

(2) $ax < b$ 이면 $a > 0, a=0, a < 0$ 인 경우로 나누어 본다.

$$[|x|]^2|x| \leq 36 \text{에서}$$

$$0 \leq |x| < 1 \text{이면 } [|x|]=0 \text{ 이므로 } 0 \leq 36$$

$$\therefore 0 \leq |x| < 1$$

$$1 \leq |x| < 2 \text{ 이면 } [|x|]=1 \text{ 이므로 } |x| \leq 36$$

$$\therefore 1 \leq |x| < 2$$

$$2 \leq |x| < 3 \text{ 이면 } [|x|]=2 \text{ 이므로 } 4|x| \leq 36$$

$$|x| \leq 9 \quad \therefore 2 \leq |x| < 3$$

$$3 \leq |x| < 4 \text{ 이면 } [|x|]=3 \text{ 이므로 } 9|x| \leq 36$$

$$|x| \leq 4 \quad \therefore 3 \leq |x| < 4$$

$$4 \leq |x| < 5 \text{ 이면 } [|x|]=4 \text{ 이므로 } 16|x| \leq 36$$

$$|x| \leq \frac{9}{4} \quad \therefore \text{해는 없다.}$$

마찬가지로 $|x| \geq 5$ 에서도 해가 존재하지 않는다.

즉, 부등식 $[|x|]^2|x| \leq 36$ 의 해는 $0 \leq |x| < 4$ 이므로

$$-4 < x < 4$$

따라서 이를 만족시키는 정수 x 는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 이다.
 한편, $(a^2-1)x \leq a^2-a$ 에서
 $(a+1)(a-1)x \leq a(a-1)$

(i) $a < -1$ 일 때

$$x \leq \frac{a}{a+1} = 1 - \frac{1}{a+1}$$

이때 $a+1 < 0$ 이므로

$$1 < 1 - \frac{1}{a+1}$$

따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는 5 이상이다.

(ii) $a = -1$ 일 때

$0 \leq 2$ 이므로 해는 모든 실수이다.

따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는 7이다.

(iii) $-1 < a < 1$ 일 때

$$x \geq \frac{a}{a+1} = 1 - \frac{1}{a+1}$$

이때 $0 < a+1 < 2$ 이므로

$$1 - \frac{1}{a+1} < \frac{1}{2}$$

따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는 3이

되려면 $0 < 1 - \frac{1}{a+1} < \frac{1}{2}$ 이어야 하므로

$$-1 < -\frac{1}{a+1} < -\frac{1}{2}, \quad 1 < a+1 < 2$$

$\therefore 0 < a < 1$

(iv) $a = 1$ 일 때

$0 \leq 0$ 이므로 해는 모든 실수이다.

따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는 7이다.

(v) $a > 1$ 일 때

$$x \leq \frac{a}{a+1} = 1 - \frac{1}{a+1}$$

이때 $a+1 > 2$ 이므로

$$\frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{a+1} < 1$$

따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수가 4이다.

(i)~(v)에서 $0 < a < 1$

답 0 < a < 1

057

일등급의 메모장

모든 실수 x 에 대하여 $px^2+qx+r>0$

$\Rightarrow p=0, q=0, r>0$ 또는 $p>0, q^2-4pr<0$

$ax^2+bx+c>x$ 에서 $ax^2+(b-1)x+c>0$

이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$a=0, b-1=0, c>0$ 또는 $a>0, (b-1)^2-4ac<0$

$\therefore a=0, b=1, c>0$ 또는 $a>0, (b-1)^2<4ac$

\neg . [반례] $a=0, b=1, c>0$ 이면 주어진 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하지만 $(b-1)^2=4ac$ 이다. (거짓)

\neg . \neg 에 의하여 $(b-1)^2 \leq 4ac$ 가 성립하고

$$(a+c)^2-4ac=(a-c)^2 \geq 0,$$

$$(b-1)^2-(-4b)=(b+1)^2 \geq 0$$

이므로

$$(a+c)^2 \geq 4ac \geq (b-1)^2 \geq -4b$$

이때 $a=0, b=1, c>0$ 이면

$$(a+c)^2 > 4ac \geq (b-1)^2 > -4b$$

또, $a>0, (b-1)^2 < 4ac$ 이면

$$(a+c)^2 \geq 4ac > (b-1)^2 \geq -4b$$

이므로 $(a+c)^2 > -4b$

$\therefore (a+c)^2+4b > 0$ (참)

\neg . $a=0, b=1, c>0$ 이면 주어진 부등식은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

또, $a>0, (b-1)^2 < 4ac$ 이면 이차방정식

$$ax^2-(4a+b-1)x+4a+2b+c-2=0$$

의 판별식을 D 라 할 때

$$\begin{aligned} D &= \{-(4a+b-1)\}^2 - 4a(4a+2b+c-2) \\ &= 16a^2+b^2+1-8a-2b+8ab - (16a^2+8ab+4ac-8a) \\ &= b^2-2b+1-4ac \\ &= (b-1)^2-4ac < 0 \end{aligned}$$

이므로 주어진 부등식은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다. (참)

따라서 옳은 것은 \neg, \neg 이다.

답 ⑤

다른풀이 확장

곡선 $y=ax^2+bx+c$ 를 점 $(1, 1)$ 에 대하여 대칭이동하면

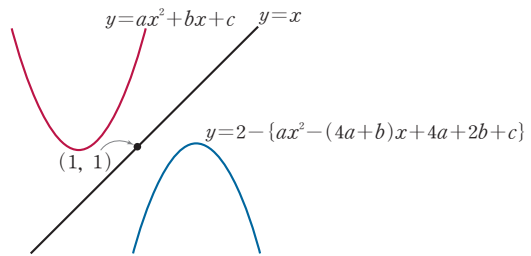
$$2-y=a(2-x)^2+b(2-x)+c$$

$$\therefore y=2-\{ax^2-(4a+b)x+4a+2b+c\}$$

또, 직선 $y=x$ 를 점 $(1, 1)$ 에 대하여 대칭이동하면 $y=x$

따라서 $x > 2 - \{ax^2 - (4a+b)x + 4a + 2b + c\}$, 즉

$ax^2 - (4a+b-1)x + 4a + 2b + c - 2 > 0$ 이 성립한다.



058

일등급의 메모장

$f(x) < 0$ 의 해가 $x < \alpha$ 또는 $x > \beta$ 이면

$f(-x) < 0$ 의 해는 $-x < \alpha$ 또는 $-x > \beta$

$x^2-3x \leq 0$ 에서 $x(x-3) \leq 0$

$\therefore 0 \leq x \leq 3$

$x^2-2(k^2+1)x+k^4+k^2+1 > 0$ 에서

$$\{x-(k^2-k+1)\}\{x-(k^2+k+1)\} > 0$$

..... ①

따라서 위의 부등식의 해는 k 의 값에 따라 다음과 같이 나눌 수 있다.

(i) $k=0$ 인 경우

$$\textcircled{1} \text{에서 } (x-1)^2 > 0 \quad \therefore x \neq 1$$

따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 는 0, 2, 3의 3개이다.

(ii) $k > 0$ 인 경우

부등식 ㉠의 해는 $x < k^2 - k + 1$ 또는 $x > k^2 + k + 1$

㉡ $0 < k^2 - k + 1 \leq 1, 1 < k^2 + k + 1 < 2$ 일 때 $\rightarrow k > 0$ 이므로 $k^2 + k + 1 > 1$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 는 0, 2, 3이다.

$$k^2 - k + 1 = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

$$k^2 - k + 1 \leq 1 \text{에서 } k^2 - k \leq 0$$

$$k(k-1) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq k \leq 1 \quad \dots \text{㉢}$$

$$1 < k^2 + k + 1 \text{에서 } k^2 + k > 0$$

$$k(k+1) > 0$$

$$\therefore k < -1 \text{ 또는 } k > 0 \quad \dots \text{㉣}$$

$$k^2 + k + 1 < 2 \text{에서 } k^2 + k - 1 < 0$$

$$\therefore \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < k < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \dots \text{㉤}$$

㉢, ㉣, ㉤의 공통부분을 구하면

$$0 < k < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

㉢ $1 < k^2 - k + 1 \leq 2, 2 \leq k^2 + k + 1 < 3$ 일 때

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 는 0, 1, 3이다.

$$1 < k^2 - k + 1 \text{에서 } k^2 - k > 0$$

$$k(k-1) > 0$$

$$\therefore k < 0 \text{ 또는 } k > 1 \quad \dots \text{㉥}$$

$$k^2 - k + 1 \leq 2 \text{에서 } k^2 - k - 1 \leq 0$$

$$\therefore \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq k \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \dots \text{㉦}$$

$$2 \leq k^2 + k + 1 < 3 \text{에서 } k^2 + k - 1 \geq 0$$

$$\therefore k \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } k \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \dots \text{㉧}$$

$$k^2 + k + 1 < 3 \text{에서 } k^2 + k - 2 < 0$$

$$(k+2)(k-1) < 0$$

$$\therefore -2 < k < 1 \quad \dots \text{㉨}$$

㉥, ㉦, ㉧, ㉨을 동시에 만족시키는 실수 k 의 값은 존재하지 않는다.

㉣ $2 < k^2 - k + 1 \leq 3, 3 \leq k^2 + k + 1$ 일 때

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 는 0, 1, 2이다.

$$2 < k^2 - k + 1 \text{에서 } k^2 - k - 1 > 0$$

$$\therefore k < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } k > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \dots \text{㉩}$$

$$k^2 - k + 1 \leq 3 \text{에서 } k^2 - k - 2 \leq 0$$

$$(k+1)(k-2) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq k \leq 2 \quad \dots \text{㉪}$$

$$3 \leq k^2 + k + 1 \text{에서 } k^2 + k - 2 \geq 0$$

$$(k+2)(k-1) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -2 \text{ 또는 } k \geq 1 \quad \dots \text{㉫}$$

㉩, ㉪, ㉫의 공통부분을 구하면

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} < k \leq 2$$

㉢~㉣에서 $0 < k < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 또는 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < k \leq 2$

(iii) $k < 0$ 인 경우

부등식 ㉠의 해는 $x < k^2 + k + 1$ 또는 $x > k^2 - k + 1$

그런데 $-k > 0$ 이고 위의 해는

$$x < (-k)^2 - (-k) + 1 \text{ 또는 } x > (-k)^2 + (-k) + 1$$

과 같이 나타낼 수 있으므로 (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$0 < -k < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } \frac{1+\sqrt{5}}{2} < -k \leq 2$$

$$\therefore -2 \leq k < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } \frac{1-\sqrt{5}}{2} < k < 0$$

(i)~(iii)에서

$$-2 \leq k < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } \frac{1-\sqrt{5}}{2} < k < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{또는 } \frac{1+\sqrt{5}}{2} < k \leq 2$$

$$\text{㉬ } -2 \leq k < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } \frac{1-\sqrt{5}}{2} < k < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{또는 } \frac{1+\sqrt{5}}{2} < k \leq 2$$

059

일등급의 메모장

$f(x) < 0, f(x) \geq 0$ 인 경우로 나누어 그래프를 그려 보자.

$$f(x) = x^2 + 2x - 8 = (x+4)(x-2)$$

(i) $f(x) < 0$, 즉 $-4 < x < 2$ 일 때

$$\begin{aligned} \frac{|f(x)|}{3} - f(x) &= -\frac{f(x)}{3} - f(x) \\ &= -\frac{4}{3}f(x) \end{aligned}$$

(ii) $f(x) \geq 0$, 즉 $x \leq -4$ 또는 $x \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} \frac{|f(x)|}{3} - f(x) &= \frac{f(x)}{3} - f(x) \\ &= -\frac{2}{3}f(x) \end{aligned}$$

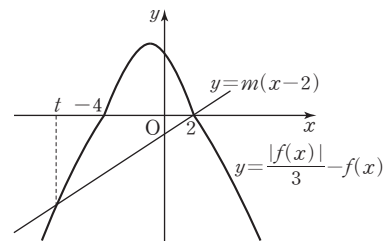
$$g(x) = -\frac{4}{3}f(x), h(x) = -\frac{2}{3}f(x) \text{라 하면}$$

$$\frac{|f(x)|}{3} - f(x) = \begin{cases} g(x) & (-4 < x < 2) \\ h(x) & (x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq 2) \end{cases}$$

또, 직선 $y = m(x-2)$ 는 점 $(2, 0)$ 을 지나고 기울기가 m ($m > 0$)

이므로 함수 $y = \frac{|f(x)|}{3} - f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = m(x-2)$

를 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



직선 $y = m(x-2)$ 와 함수 $y = \frac{|f(x)|}{3} - f(x)$ 의 그래프의 그림

중 점 $(2, 0)$ 이 아닌 점의 x 좌표를 t ($t < -4$)라 하면

$$\frac{|f(x)|}{3} - f(x) \geq m(x-2) \text{의 해는 } t \leq x \leq 2 \text{이다.}$$

이때 $t \leq x \leq 2$ 인 정수 x 의 개수가 10이 되기 위한 실수 t 의 값의

범위는 $-8 < t \leq -7$ 이므로 양수 m 의 값의 범위는 직선

$y = m(x-2)$ 가 점 $(-7, h(-7))$ 을 지날 때보다 크거나 같고,

점 $(-8, h(-8))$ 을 지날 때보다 작다.

$$h(-7) = -\frac{2}{3}\{(-7)^2 + 2 \times (-7) - 8\} = -18$$

$$h(-8) = -\frac{2}{3}\{(-8)^2 + 2 \times (-8) - 8\} = -\frac{80}{3}$$

이므로

$$\frac{0 - (-18)}{2 - (-7)} \leq m < \frac{0 - (-\frac{80}{3})}{2 - (-8)}$$

$$\therefore 2 \leq m < \frac{8}{3}$$

따라서 m 의 최솟값은 2이다.

답 2

060

일등급의 대모장

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

조건 (가)에 의하여 직선 AB의 방정식은 $y = \frac{3}{4}x + k$ 이다.

직선 AB와 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 만나는 두 점 A, B의

x 좌표를 각각 α, β ($\alpha < \beta$)라 하면 $x^2 - 2x + 3 = \frac{3}{4}x + k$ 에서

$$x^2 - 2x + 3 - \left(\frac{3}{4}x + k\right) = 0$$

$$x^2 - \frac{11}{4}x + 3 - k = 0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{11}{4}, \alpha\beta = 3 - k \quad \dots \textcircled{1}$$

또, 위의 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$D = \left(-\frac{11}{4}\right)^2 - 4(3 - k) > 0$$

$$-\frac{71}{16} + 4k > 0$$

$$\therefore k > \frac{71}{64} \quad \dots \textcircled{2}$$

조건 (나)에 의하여 $\frac{5}{4} \leq \beta - \alpha \leq \frac{11}{4}$ 이고,

$$\textcircled{1} \text{에서 } \beta = \frac{11}{4} - \alpha \text{이므로}$$

$$\frac{5}{4} \leq \left(\frac{11}{4} - \alpha\right) - \alpha \leq \frac{11}{4}, -\frac{3}{2} \leq -2\alpha \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq \alpha \leq \frac{3}{4}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned} k &= 3 - \alpha\beta = 3 - \frac{11}{4}\alpha + 3 \\ &= \left(\alpha - \frac{11}{8}\right)^2 + \frac{71}{64} \end{aligned}$$

이므로

k 는 $\alpha = 0$ 에서 최댓값 3, $\alpha = \frac{3}{4}$ 에서 최솟값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

$$\therefore \frac{3}{2} \leq k \leq 3 \quad \dots \textcircled{3}$$

한편, 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축은 직선 $x = 1$ 이므로 직선 AB와 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축이 만나는 점의 좌표는

$\left(1, \frac{3}{4} + k\right)$ 이다.

$$\therefore C\left(0, \frac{3}{4} + k\right), D(0, k)$$

조건 (다)에 의하여 $k\left(k + \frac{3}{4}\right) \leq \frac{27}{4}$ 이므로

$$4k^2 + 3k - 27 \leq 0, (4k - 9)(k + 3) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq k \leq \frac{9}{4} \quad \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 의 공통부분을 구하면 $\frac{3}{2} \leq k \leq \frac{9}{4}$

따라서 구하는 합은

$$\frac{9}{4} + \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$$

답 $\frac{15}{4}$

061

일등급의 대모장

부등식 $f(x) \leq g(x)$ 에서

$f(x) \geq 0$ 이면 $g(x) \geq 0$ 이어야 해가 존재한다.

부등식의 좌변이 항상 0 이상이므로 $4b - b^2 \geq 0$ 이어야 부등식의 해가 존재한다.

$$4b - b^2 \geq 0 \text{에서 } b^2 - 4b \leq 0$$

$$b(b - 4) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq b \leq 4$$

따라서 주어진 부등식의 우변은 $b = 0$ 또는 $b = 4$ 일 때 0, $b = 2$ 일 때 4, $b = 1$ 또는 $b = 3$ 일 때 3이다.

$f(x) = |x - a| + |2x - a| + |3x - a|$ 라 하면

(i) $a > 0$ 일 때

$$f(x) = \begin{cases} -6x + 3a & (x < \frac{a}{3}) \\ a & (\frac{a}{3} \leq x < \frac{a}{2}) \\ 4x - a & (\frac{a}{2} \leq x < a) \\ 6x - 3a & (x \geq a) \end{cases}$$

즉, $0 < a \leq f(x)$ 이므로 $b = 0$ 또는 $b = 4$ 일 때 부등식의 해가 존재하지 않는다.

① $a = 1$ 또는 $a = 2$ 또는 $a = 3$ 이면

$b = 1$ 또는 $b = 2$ 또는 $b = 3$ 일 때 정수인 해를 갖는다.

② $a = 4$ 이면

$b = 2$ 일 때 정수인 해를 갖는다.

③ $a \geq 5$ 이면

$5 \leq a \leq f(x)$ 이므로 해가 존재하지 않는다.

(ii) $a < 0$ 일 때

$$f(x) = \begin{cases} -6x + 3a & (x < a) \\ -4x + a & (a \leq x < \frac{a}{2}) \\ -a & (\frac{a}{2} \leq x < \frac{a}{3}) \\ 6x - 3a & (x \geq \frac{a}{3}) \end{cases}$$

즉, $0 < -a \leq f(x)$ 이므로 $b = 0$ 또는 $b = 4$ 일 때 부등식의 해가 존재하지 않는다.

④ $a = -1$ 또는 $a = -2$ 또는 $a = -3$ 이면

$b = 1$ 또는 $b = 2$ 또는 $b = 3$ 일 때 정수인 해를 갖는다.

⑤ $a = -4$ 이면

$b = 2$ 일 때 정수인 해를 갖는다.

⑥ $a \leq -5$ 이면

$5 \leq -a \leq f(x)$ 이므로 해가 존재하지 않는다.

(iii) $a=0$ 일 때

$f(x)=6|x| \geq 0$ 이므로 $b=0$ 또는 $b=1$ 또는 $b=2$ 또는 $b=3$ 또는 $b=4$ 일 때 정수인 해를 갖는다.

(i)~(iii)에서 구하는 개수는

$$(3 \times 3 + 1 + 0) + (3 \times 3 + 1 + 0) + 5 = 25$$

답 25

062

일등급의 매모장

$f(x) \geq g(x)$ 이면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 함수 $y=g(x)$ 의 그래프보다 위에 있거나 만나는 곳이 있어야 한다.

$$|x-a| - |x-b| \geq |x-c| - |x-d| \text{에서}$$

$$|x-a| + |x-d| \geq |x-b| + |x-c|$$

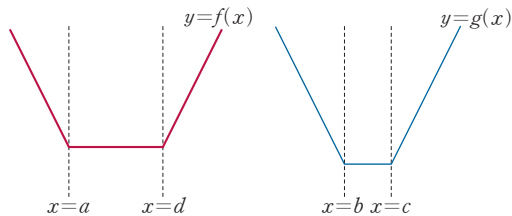
$f(x) = |x-a| + |x-d|$, $g(x) = |x-b| + |x-c|$ 라 하면

$$f(x) \geq g(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x+a+d & (x < a) \\ d-a & (a \leq x < d) \\ 2x-a-d & (x \geq d) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -2x+b+c & (x \geq b) \\ c-b & (b \leq x < c) \\ 2x-b-c & (x < b) \end{cases}$$

이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



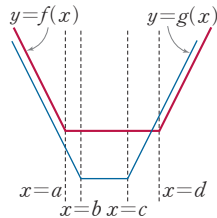
(i) $b+c < a+d$ 일 때

오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가

$$x = \frac{b+c+d-a}{2} \text{에서 만나고}$$

$$x > \frac{b+c+d-a}{2} \text{에서 } f(x) < g(x)$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.



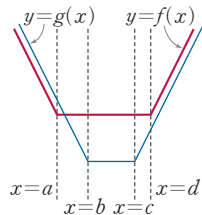
(ii) $a+d < b+c$ 일 때

오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가

$$x = \frac{a+b+c-d}{2} \text{에서 만나고}$$

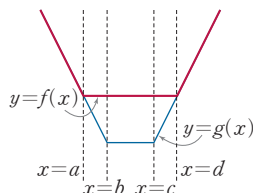
$$x < \frac{a+b+c-d}{2} \text{에서 } f(x) < g(x)$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.



(iii) $a+d = b+c$ 일 때

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식이 성립한다.



(i)~(iii)에서 $a+d=b+c$ 이어야 하므로 주어진 부등식을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d) 는 다음 표와 같다.

a	b	c	d
1	2	3	4
1	2	4	5
1	2	5	6
1	2	6	7
1	2	7	8
1	3	4	6
1	3	5	7
1	3	6	8
1	4	5	8
2	3	4	5
2	3	5	6
2	3	6	7
2	3	7	8
2	4	5	7
2	4	6	8
3	4	5	6
3	4	6	7
3	4	7	8
3	5	6	8
4	5	6	7
4	5	7	8
5	6	7	8

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 22이다.

답 22

001

- (i) 백의 자리의 숫자가 1인 경우
십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의 합이 9이므로
109, 118, 127, 136, 145, 154, 163, 172, 181, 190의 10개
 - (ii) 백의 자리의 숫자가 2인 경우
십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의 합이 8이므로
208, 217, 226, 235, 244, 253, 262, 271, 280의 9개
 - (iii) 백의 자리의 숫자가 3인 경우
십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의 합이 7이므로
307, 316, 325, 334, 343, 352, 361, 370의 8개
 - (iv) 백의 자리의 숫자가 4인 경우
430 이하의 자연수이므로 십의 자리는 0 또는 1 또는 2이다.
즉, 406, 415, 424의 3개
- (i)~(iv)에서 구하는 자연수의 개수는
 $10+9+8+3=30$

답 30

002

- (i) 상자 A에 사이다를 넣는 경우
상자 B에 넣을 음료수 8개 중 콜라가 a 개, 캔 커피가 b 개라 하면 a, b 의 순서쌍 (a, b) 로 가능한 경우는
(1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1), (8, 0)의 8가지이다.
 - (ii) 상자 A에 콜라를 넣는 경우
상자 B에 넣을 음료수 8개 중 사이다가 c 개, 캔 커피가 d 개라 하면 c, d 의 순서쌍 (c, d) 로 가능한 경우는
(1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 6가지이다.
 - (iii) 상자 A에 캔 커피를 넣는 경우
상자 B에 넣을 음료수 8개 중 사이다가 e 개, 콜라가 f 개라 하면 e, f 의 순서쌍 (e, f) 로 가능한 경우는
(0, 8), (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 7가지이다.
- (i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는
 $8+6+7=21$

답 21

003

500원짜리 2개로 지불하는 금액과 1000원짜리 1장으로 지불하는 금액이 같으므로 1000원짜리 2장을 500원짜리 동전 4개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 100원짜리 동전 4개와 500원짜리 동전 $(n+4)$ 개로 지불하는 경우의 수와 같다. **참고**
100원짜리 동전을 사용하여 지불하는 경우의 수는
0, 1, 2, 3, 4
의 5이다.

500원짜리 동전을 사용하여 지불하는 경우의 수는

$$0, 1, 2, 3, \dots, n+4$$

의 $n+5$ 이다.

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로

$$5(n+5)-1=39 \quad \therefore n=3$$

2800원을 1000원짜리 지폐 x 장, 500원짜리 동전 y 개, 100원짜리 동전 z 개를 사용하여 지불한다고 하면

$$1000x+500y+100z=2800$$

$$\therefore 10x+5y+z=28$$

$\rightarrow x$ 의 계수가 가장 크므로 x 의 값을 기준으로 수를 대입하여 y, z 의 값을 구한다.

이때 x, y, z 는 $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 4$ 인 정수이다.

(i) $x=0$ 일 때

$$5y+z=28 \text{ 이므로 } y, z \text{의 순서쌍 } (y, z) \text{는 존재하지 않는다.}$$

(ii) $x=1$ 일 때

$$5y+z=18 \text{ 이므로 } y, z \text{의 순서쌍 } (y, z) \text{는 } (3, 3) \text{의 1가지이다.}$$

(iii) $x=2$ 일 때

$$5y+z=8 \text{ 이므로 } y, z \text{의 순서쌍 } (y, z) \text{는 } (1, 3) \text{의 1가지이다.}$$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$1+1=2$$

답 2

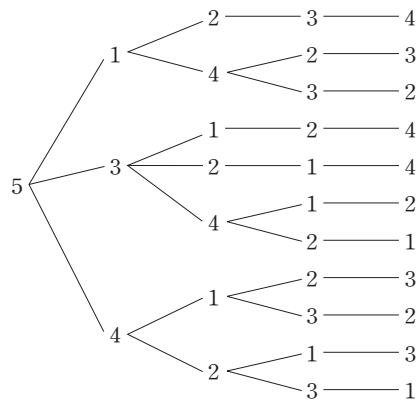
참고

지불할 수 있는 금액의 수는 중복되는 금액이 없으면 지불 방법의 수와 같고, 중복되는 금액이 있으면 단위가 큰 화폐를 단위가 작은 화폐로 바꾸어 생각한다.

004

수형도를 이용하여 주어진 조건을 만족시키도록 일렬로 나열하면 다음과 같다.

첫 번째 두 번째 세 번째 네 번째 다섯 번째



따라서 구하는 경우의 수는 11이다.

답 11

005

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

이므로 서로 다른 항의 개수는 4이다.

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

이므로 서로 다른 항의 개수는 6이다.

$p+q$ 의 서로 다른 항의 개수는 2이다.

따라서 $(a+b)^3(x+y+z)^2(p+q)$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는
 $4 \times 6 \times 2 = 48$

답 48

006

조건 (가)에서 b 가 적힌 정사각형과 e 가 적힌 정사각형에는 같은 색을 칠해야 하고, 조건 (나)에서 변을 공유하는 두 정사각형에는 서로 다른 색을 칠해야 하므로 b, e, a, c, d, f 가 적힌 정사각형의 순서대로 색을 칠한다고 생각하자.

b 가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 4가지

e 가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 b 가 적힌 정사각형에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지

a 가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 b 가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 3가지

c 가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 a, e 가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지

d 가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 b, c 가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지

f 가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 e, d 가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 1 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 96$$

답 96

참고

a, c, d, f 가 적힌 정사각형은 b 또는 e 와 변을 공유하고 있으므로 b, e 가 적힌 정사각형에 칠한 색을 a, c, d, f 가 적힌 정사각형에 칠할 수 없다.

007

8개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 8!

양 끝에 자음이 오는 경우는 자음 c, m, p, t, r 중에서 2개를 뽑아 양 끝에 나열하고 나머지 6개의 문자를 일렬로 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는

$${}_5P_2 \times 6!$$

따라서 적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 경우의 수는

$$8! - {}_5P_2 \times 6! = 8 \times 7 \times 6! - 5 \times 4 \times 6!$$

$$= 36 \times 6!$$

$$\rightarrow 36 \times 6! = 216 \times 5! = 1080 \times 4! = \dots$$

이때 $m+n$ 의 최솟값은 $m=36, n=6$ 인 경우이므로 구하는 최솟값은

$$36 + 6 = 42$$

답 42

다른 풀이

(i) 왼쪽 끝에 모음이 오는 경우

3개의 모음 o, u, e 중에서 1개를 택하여 왼쪽 끝에 세우고 나머지 7개의 문자를 일렬로 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는

$${}_3P_1 \times 7! = 3 \times 7!$$

(ii) 오른쪽 끝에 모음이 오는 경우

3개의 모음 o, u, e 중에서 1개를 택하여 오른쪽 끝에 세우고 나머지 7개의 문자를 일렬로 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는

$${}_3P_1 \times 7! = 3 \times 7!$$

(iii) 양쪽 끝에 모음이 오는 경우

3개의 모음 o, u, e 중에서 2개를 택하여 양쪽 끝에 세우고 나머지 6개의 문자를 일렬로 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는

$${}_3P_2 \times 6! = 6 \times 6!$$

(i)~(iii)에서 적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 경우의 수는

$$3 \times 7! + 3 \times 7! - 6 \times 6! = (21 + 21 - 6) \times 6!$$

$$= 36 \times 6!$$

이때 $m+n$ 의 최솟값은 $m=36, n=6$ 인 경우이므로

$$36 + 6 = 42$$

008

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 사용하여 만든 네 자리 자연수가 6의 배수이려면 2의 배수인 동시에 3의 배수이어야 한다.

이때 3의 배수가 되려면 각 자리의 수의 합이 3의 배수이어야 하므로 1, 2, 4, 5를 택해야 한다. **참고**

또, 2의 배수가 되려면 일의 자리의 숫자는 2 또는 4이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

6의 배수인 네 자리 자연수의 개수는 1, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$3! = 6$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 4인 경우

6의 배수인 네 자리 자연수의 개수는 1, 2, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$3! = 6$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$6 + 6 = 12$$

답 ②

참고

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 4개의 숫자를 택하여 더하면 다음과 같다.

$$2+3+4+5=14, 1+3+4+5=13, 1+2+4+5=12,$$

$$1+2+3+5=11, 1+2+3+4=10$$

009

(i) A□□□□의 풀인 문자열의 개수는 4!

(ii) B□□□□의 풀인 문자열의 개수는 4!

(iii) C□□□□의 풀인 문자열의 개수는 4!

(iv) DA□□□□의 풀인 문자열의 개수는 3!

(v) DB□□□□의 풀인 문자열의 개수는 3!

(i)~(v)에서 A로 시작하는 문자열부터 DB로 시작하는 문자열까지의 총 개수는

$$3 \times 4! + 2 \times 3! = 84$$

따라서 85번째 문자열은 DCABE이므로 마지막 알파벳은 E이다.

답 ⑤

010

할머니와 어머니, 할아버지와 아버지가 이웃하여 앉을 열을 정하는 경우의 수는

$$2! = 2$$

이때 각 열에서 할머니와 어머니, 할아버지와 아버지가 이웃하여 앉는 경우의 수는 각각 2이다.

각 경우에 대하여 할머니와 어머니, 할아버지와 아버지, 동생과 내가 서로 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 각각 2이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 2^2 \times 2^3 = 64$$

답 64

011

오른쪽 그림과 같이 각각의 지역을 a, b, c, d, e, f 라 하고 서로 이웃한 2개의 지역을 짝짓는 경우는

$(a, b), (a, c), (a, e), (b, c), (b, d), (c, d), (c, e), (c, f), (d, f), (e, f)$

의 10개이다. **다른 풀이**

10개의 이웃한 지역 중 하나를 정한 후, 이 지역을 담당할 조사원 1명을 정하고 나머지 조사원 4명을 4개의 지역에 배정하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 5 \times 4! = 10 \times 5 \times 24 = 1200$$

답 ⑤

다른 풀이

이웃한 2개의 지역을 하나로 생각하여 5개의 지역을 5명의 조사원에게 할당하는 경우의 수는 5!이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 5! = 10 \times 120 = 1200$$

012

${}_nP_3 - 3 \times {}_nC_3 = 4 \times {}_nP_2$ 에서 ${}_nP_3 = 6 \times {}_nC_3$ 이므로 주어진 식은

$$6 \times {}_nC_3 - 3 \times {}_nC_3 = 4 \times {}_nP_2$$

$$3 \times {}_nC_3 = 4 \times {}_nP_2$$

$$3 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 4 \times n(n-1)$$

$$\frac{n-2}{2} = 4, n-2=8 \quad \therefore n=10$$

$$\therefore {}_nC_3 = {}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

답 120

013

각 학년의 학생이 적어도 한 명씩 포함되도록 4명을 선택하려면 (1학년 2명, 2학년 1명, 3학년 1명),

(1학년 1명, 2학년 2명, 3학년 1명),

(1학년 1명, 2학년 1명, 3학년 2명)

으로 선택해야 한다.

↳ 4를 3개의 자연수의 합으로 나타내면
 $4=1+1+2$

(i) (1학년 2명, 2학년 1명, 3학년 1명)을 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times {}_4C_1 \times {}_2C_1 = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} \times 4 \times 2 = 24$$

(ii) (1학년 1명, 2학년 2명, 3학년 1명)을 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_1 = 3 \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 2 = 36$$

(iii) (1학년 1명, 2학년 1명, 3학년 2명)을 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_4C_1 \times {}_2C_2 = 3 \times 4 \times 1 = 12$$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$24 + 36 + 12 = 72$$

답 ②

014

여학생 6명 중 1호실에 배정할 여학생 4명을 선택하면 나머지 여학생은 모두 2호실에 배정하면 되므로 여학생을 방에 배정하는 경우의 수는

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

남학생 7명 중 3호실에 배정할 남학생 4명을 선택하면 나머지 남학생은 모두 4호실에 배정하면 되므로 남학생을 방에 배정하는 경우의 수는

$${}_7C_4 = {}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15 \times 35 = 525$$

답 525

015

1부터 9까지의 자연수 중에서 사용할 두 개의 숫자를 택하는 경우의 수는

$${}_9C_2 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$$

이 두 개의 숫자로 만들 수 있는 네 자리 수의 개수는

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

이 중 네 자리 모두 같은 숫자가 되는 경우는 2가지이다.

따라서 구하는 비밀번호의 개수는

$$36 \times (16 - 2) = 504$$

답 504

016

8개의 점 중에서 4개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_8C_4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

택한 4개의 점으로 사각형을 만들 수 없는 경우는 다음과 같다.

(i) 일직선 위의 4개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

(ii) 일직선 위의 3개의 점과 호 위의 1개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3 \times {}_3C_1 = {}_5C_2 \times {}_3C_1 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 3 = 30$$

(i), (ii)에서 사각형을 만들 수 없는 경우의 수는

$$5 + 30 = 35$$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$$70 - 35 = 35$$

답 35

다른 풀이

(i) 일직선 위의 2개의 점과 호 위의 2개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 = {}_5C_2 \times {}_3C_1 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 3 = 30$$

(ii) 일직선 위의 1개의 점과 호 위의 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_3C_3 = 5 \times 1 = 5$$

(i), (ii)에서 구하는 사각형의 개수는

$$30 + 5 = 35$$

017

이웃한 두 수의 곱이 항상 짝수이려면 홀수의 양옆에는 반드시 짝수가 있어야 한다.

이때 2부터 8까지의 자연수 중에서 홀수는 3, 5, 7의 3개이므로 홀수의 개수가 최대인 경우는

(홀수, 짝수, 홀수, 짝수, 홀수)

로 나열하는 경우이고 이때의 짝수의 개수는 2이다.

즉, 짝수는 최소 2개 포함되어야 한다.

(i) 짝수의 개수가 2인 경우

짝수 2개와 홀수 3개를 나열하는 경우의 수는 짝수 2개를 먼저 나열한 후, 그 사이사이와 양 끝의 3개의 자리에 홀수를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$2! \times 3! = 12$$

한편, 4개의 짝수 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$12 \times 6 = 72$$

(ii) 짝수의 개수가 3인 경우

짝수 3개와 홀수 2개를 나열하는 경우의 수는 짝수 3개를 먼저 나열한 후, 그 사이사이와 양 끝의 4개의 자리 중 2개를 택하여 홀수를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$3! \times {}_4P_2 = 72$$

한편, 4개의 짝수 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

3개의 홀수 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$72 \times 4 \times 3 = 864$$

(iii) 짝수의 개수가 4인 경우

짝수 4개와 홀수 1개를 나열하는 경우의 수는 짝수 4개를 먼저 나열한 후, 그 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중 1개를 택하여 홀수를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$4! \times {}_5P_1 = 120$$

한편, 3개의 홀수 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$120 \times 3 = 360$$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$72 + 864 + 360 = 1296$$

답 ③

018

(i) 6명의 1학년 선수를 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times 1 \times \frac{1}{2} = 10$$

(ii) 2학년 선수 8명 중에서 3명, 3명을 뽑아 (i)의 각 팀에 배정하는 경우의 수는

$${}_8C_3 \times {}_5C_3 \times \frac{1}{2!} \times 2 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{1}{2} \times 2 = 560$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 560 = 5600$$

답 ①

019

조건 (가)에 의하여 $x + z = 6 - y$

조건 (나)에 의하여 $0 < 6 - y < 4$

$$\therefore 2 < y < 6$$

이때 y 는 음이 아닌 정수이므로

$$y = 3 \text{ 또는 } y = 4 \text{ 또는 } y = 5$$

(i) $y = 3$ 일 때

$x + z = 3$ 이므로 음이 아닌 정수 x, z 의 순서쌍 (x, z) 는

$(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$ 의 4개이다.

(ii) $y = 4$ 일 때

$x + z = 2$ 이므로 음이 아닌 정수 x, z 의 순서쌍 (x, z) 는

$(0, 2), (1, 1), (2, 0)$ 의 3개이다.

(iii) $y = 5$ 일 때

$x + z = 1$ 이므로 음이 아닌 정수 x, z 의 순서쌍 (x, z) 는

$(0, 1), (1, 0)$ 의 2개이다.

(i)~(iii)에서 구하는 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$$4 + 3 + 2 = 9$$

답 9

020

A가 적힌 카드와 a가 적힌 카드가 같은 열에 배열되지 않도록 하는 방법의 수는 배열할 수 있는 모든 경우의 수에서 A가 적힌 카드와 a가 적힌 카드가 같은 열에 배열되는 경우의 수를 빼면 된다.

1행에 A, B, C, D의 문자가 적힌 카드를 배열하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

2행에 a, b, c, d의 문자가 적힌 카드를 배열하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

이므로 카드를 배열하는 모든 경우의 수는

$$24 \times 24 = 576$$

1행에 A, B, C, D의 문자가 적힌 카드를 배열하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

A가 적힌 카드와 같은 열에 a가 적힌 카드를 놓고, 나머지 문자 b, c, d가 적힌 카드를 배열하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

이므로 A가 적힌 카드와 a가 적힌 카드가 같은 열에 배열되는 경우의 수는

$$24 \times 6 = 144$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$576 - 144 = 432$$

답 432

021

이차함수 $y=x^2+(a+b)x+ab+1$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+(a+b)x+ab+1=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$D=(a+b)^2-4(ab+1)<0$$

$$(a-b)^2-4<0$$

$$\{(a-b)+2\}\{(a-b)-2\}<0$$

$\therefore -2<a-b<2 \rightarrow a, b$ 는 6 이하의 자연수이므로 $a-b$ 의 값은 정수이다.

이때 $a-b$ 의 값은 정수이므로

$$a-b=-1 \text{ 또는 } a-b=0 \text{ 또는 } a-b=1$$

(i) $a-b=-1$ 일 때

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)$ 의 5개

(ii) $a-b=0$ 일 때

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ 의 6개

(iii) $a-b=1$ 일 때

순서쌍 (a, b) 는 $(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$ 의 5개

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$5+6+5=16$$

답 ③

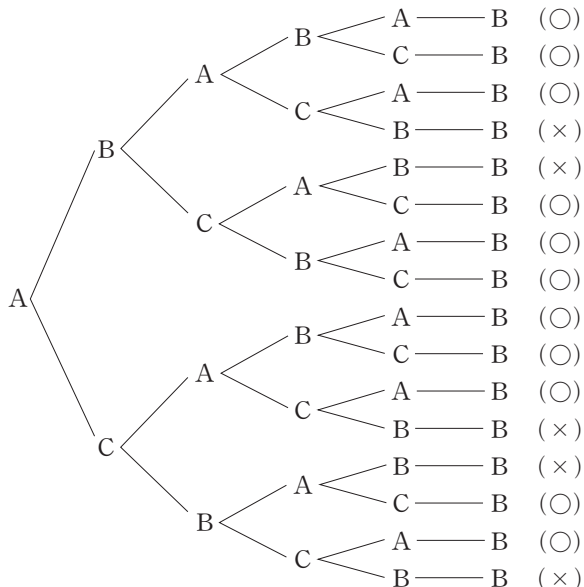
022

가장 왼쪽의 영역과 가장 오른쪽의 영역에 서로 다른 색을 칠하는 경우의 수는

$$3 \times 2 = 6$$

서로 다른 3가지의 색을 A, B, C라 하자.

가장 왼쪽의 영역에 A, 가장 오른쪽의 영역에 B를 칠한 경우 중 간의 4개의 영역에 이웃한 영역끼리 서로 다른 색을 칠하는 경우를 수형도를 이용하여 구하면 다음과 같다.



이때 A-B-A-C-B-B, A-B-C-A-B-B,

A-C-A-C-B-B, A-C-B-A-B-B,

A-C-B-C-B-B인 경우는 이웃한 영역끼리 서로 다른 색을 칠한 경우가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 11 = 66$$

답 66

023

$a+b$ 의 값이 3의 배수가 되려면 a, b 가 모두 3의 배수이거나 a, b 를 3으로 나누었을 때의 나머지가 1, 2 또는 2, 1이어야 한다.

(i) a, b 가 모두 3의 배수인 경우

1부터 29까지의 홀수 중에서 3의 배수는 3, 9, 15, 21, 27이므로 이때의 경우의 수는

$${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$$

(ii) a, b 를 3으로 나누었을 때의 나머지가 각각 1, 2인 경우

1부터 29까지의 홀수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 경우는 1, 7, 13, 19, 25의 5가지이고, 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 경우는 5, 11, 17, 23, 29의 5가지이다.

따라서 이때의 경우의 수는

$$5 \times 5 = 25$$

(iii) a, b 를 3으로 나누었을 때의 나머지가 각각 2, 1인 경우

(ii)와 같은 방법으로 구하면 경우의 수는 25이다.

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$20 + 25 + 25 = 70$$

답 70

024

(i) 같은 학교의 학생끼리 $(15, 25), (16, 26), (17, 27)$ 로 앉는 경우

세 학교에 좌석을 배정하는 경우의 수는 $3!$ 이고 같은 학교의 학생끼리는 서로 자리를 바꿀 수 있으므로

$$3! \times 2 \times 2 \times 2 = 48$$

(ii) 같은 학교의 학생끼리 $(15, 25), (16, 17), (26, 27)$ 로 앉는 경우

(i)과 같은 방법으로 구하면 경우의 수는 48이다.

(iii) 같은 학교의 학생끼리 $(15, 16), (17, 27), (25, 26)$ 으로 앉는 경우

(i)과 같은 방법으로 구하면 경우의 수는 48이다.

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 48 = 144$$

답 144

025

5개의 과목 국어, 영어, 수학, 체육, 음악을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$5! = 120$$

(i) 국어 바로 다음 교시에 영어가 오는 경우의 수는 국어, 영어를 한 묶음으로 보고 (국어, 영어), 수학, 체육, 음악을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$4! = 24$$

같은 방법으로 영어 바로 다음 교시에 수학이 오는 경우의 수와 수학 바로 다음 교시에 국어가 오는 경우의 수도 각각 24이다.

(ii) 국어 바로 다음 교시에 영어가 오고 영어 바로 다음 교시에 수학이 오는 경우의 수는 국어, 영어, 수학을 한 묶음으로 보고 (국어, 영어, 수학), 체육, 음악을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$3! = 6$$

같은 방법으로 영어 바로 다음 교시에 수학이 오고 수학 바로 다음 교시에 국어가 오는 경우의 수와 수학 바로 다음 교시에 국어가 오고 국어 바로 다음 교시에 영어가 오는 경우의 수도 각각 6이다.

(i), (ii)에서 조건 (가), (나), (다) 중 하나라도 만족시키지 않는 경우의 수는

$$3 \times 24 - 3 \times 6 = 54$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$120 - 54 = 66$$

답 66

026

자동차 Q에 탔던 운전자를 제외한 2명을 A, B라 하자.

(i) 돌아올 때 A가 B가 앉았던 자리에 앉는 경우

B는 7개의 자리 중에서 운전석과 돌아올 때 A가 앉은 자리를 제외한 5개의 자리에 앉을 수 있으므로 이때의 경우의 수는 5이다.

(ii) 돌아올 때 A가 B가 앉았던 자리가 아닌 자리에 앉는 경우

A는 7개의 자리 중에서 운전석과 출발할 때 A, B가 앉았던 자리를 제외한 4개의 자리에 앉을 수 있고, B는 7개의 자리 중에서 운전석과 출발할 때 자신이 앉았던 자리, 돌아올 때 A가 앉은 자리를 제외한 4개의 자리에 앉을 수 있으므로 이때의 경우의 수는

$$4 \times 4 = 16$$

(i), (ii)에서 A, B가 출발할 때와 돌아올 때 다른 자리에 앉는 경우의 수는

$$5 + 16 = 21$$

한편, 놀이공원으로 출발할 때 자동차 P에 탔던 4명이 운전석과 A, B가 앉은 자리를 제외한 4개의 자리에 앉는 경우의 수는

$$4! = 24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$21 \times 24 = 504$$

답 504

다른 풀이

자동차 Q에 탔던 운전자를 제외한 2명을 A, B라 하자.

A, B는 모두 놀이공원으로 출발할 때와 다른 자리에 앉아야 하므로 A, B가 자동차 Q에 앉을 수 있는 모든 경우의 수에서 A 또는 B가 놀이공원으로 출발할 때와 같은 자리에 앉는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 돌아올 때 A, B가 자동차 Q에 앉는 경우

운전자는 자리를 바꾸지 않으므로 A, B는 7개의 자리 중에서 운전석을 제외한 6개의 자리에 앉을 수 있으므로 이때의 경우의 수는

$${}_6P_2 = 6 \times 5 = 30$$

(ii) 돌아올 때 A, B 모두 출발할 때와 같은 자리에 앉는 경우

A, B가 놀이공원으로 출발할 때의 자리에 앉으면 되므로 1가지이다.

(iii) 돌아올 때 A만 출발할 때와 같은 자리에 앉는 경우

A가 출발할 때와 같은 자리에 앉는다면 B는 7개의 자리 중에서 운전석과 A, B가 출발할 때 자리에 앉은 두 자리를 제외한 4개의 자리에 앉을 수 있으므로 이때의 경우의 수는 4이다.

(iv) 돌아올 때 B만 출발할 때와 같은 자리에 앉는 경우

(iii)과 같은 방법으로 구하면 경우의 수는 4이다.

(i)~(iv)에서 A 또는 B가 출발할 때와 돌아올 때 다른 자리에 앉는 경우의 수는

$$30 - (1 + 4 + 4) = 21$$

한편, 놀이공원으로 출발할 때 자동차 P에 탔던 4명이 운전석과 A, B가 앉은 자리를 제외한 4개의 자리에 앉는 경우의 수는

$$4! = 24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$21 \times 24 = 504$$

027

영화관의 좌석에 왼쪽부터 차례대로 번호를 정하면 다음과 같다.

A 열	1번	2번	3번	4번	5번
B 열	1번	2번	3번	4번	5번

(i) 아이가 B열 1번에 앉는 경우

아버지 또는 어머니가 아이와 이웃하여 앉는 경우의 수는 아버지와 어머니가 남은 네 자리에 앉는 경우의 수에서 B열 2번을 제외하고 남은 세 자리에 앉는 경우의 수를 빼 것과 같으므로

$${}_4P_2 - {}_3P_2 = 4 \times 3 - 3 \times 2 = 12 - 6 = 6$$

한편, 아이가 B열 1번에 앉으면 A열 1번 좌석은 비어 있어야 한다.

즉, 할아버지와 할머니가 이웃하여 앉는 경우의 수는 할아버지와 할머니가 A열 (2번, 3번) 또는 (3번, 4번) 또는 (4번, 5번)에 앉은 후, 그 각각에 대하여 자리를 서로 바꾸어 앉는 경우의 수와 같으므로

$$3 \times 2! = 6$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

(ii) 아이가 B열 2번에 앉는 경우

아버지 또는 어머니가 아이와 이웃하여 앉는 경우의 수는 아버지와 어머니가 남은 네 자리에 앉는 경우의 수에서 아이의 양 옆 자리를 제외한 두 자리에 앉는 경우의 수를 빼 것과 같으므로

$${}_4P_2 - 2! = 4 \times 3 - 2 = 12 - 2 = 10$$

한편, 아이가 B열 2번에 앉으면 A열 2번 좌석은 비어 있어야 한다.

즉, 할아버지와 할머니가 이웃하여 앉는 경우의 수는 할아버지와 할머니가 A열 (3번, 4번) 또는 (4번, 5번)에 앉은 후, 그 각각에 대하여 자리를 서로 바꾸어 앉는 경우의 수와 같으므로

$$2 \times 2! = 4$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$10 \times 4 = 40$$

(iii) 아이가 B열 3번에 앉는 경우

아버지 또는 어머니가 아이와 이웃하여 앉는 경우의 수는 아버지와 어머니가 남은 네 자리에 앉는 경우의 수에서 아이의 양 옆 자리를 제외한 두 자리에 앉는 경우의 수를 빼 것과 같으므로

$${}_4P_2 - 2! = 4 \times 3 - 2 = 12 - 2 = 10$$

한편, 아이가 B열 3번에 앉으면 A열 3번 좌석은 비어 있어야 한다.

즉, 할아버지와 할머니가 이웃하여 앉는 경우의 수는 할아버지와 할머니가 A열 (1번, 2번) 또는 (4번, 5번)에 앉은 후, 그 각각에 대하여 자리를 서로 바꾸어 앉는 경우의 수와 같으므로

$$2 \times 2! = 4$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$10 \times 4 = 40$$

(iv) 아이가 B열 4번에 앉는 경우

(ii)와 같은 방법으로 구하면 경우의 수는 40이다.

(v) 아이가 B열 5번에 앉는 경우

(i)과 같은 방법으로 구하면 경우의 수는 36이다.

(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

$$36 + 40 + 40 + 40 + 36 = 192$$

답 192

028

다섯 자리 수 중에서 가운데 세 자리의 숫자를 a, b, c ($a \neq b \neq c$)라 하자.

끝에 덧붙인 숫자가 0인 경우는 네 자리 수의 각 자리의 수의 합이 홀수이고 천의 자리의 숫자는 5이므로 $a+b+c$ 는 짝수이다.

(i) a, b, c 가 모두 0 또는 짝수인 경우 $\rightarrow a, b, c$ 는 음이 아닌 정수이고 $a \neq b \neq c$ 이므로 $a+b+c \neq 0$

0, 2, 4, 6, 8 중에서 3개를 택하면 되므로 이때의 경우의 수는

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

(ii) a, b, c 중 홀수가 2개, 0 또는 짝수가 1개인 경우

1, 3, 5, 7, 9 중에서 2개를 택하고, 0, 2, 4, 6, 8 중에서 1개를 택한 후 a, b, c 에 각각 대응시키면 되므로 이때의 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_5C_1 \times 3! = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 5 \times 6 = 300$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$60 + 300 = 360$$

답 ⑤

029

선생님은 여학생 사이에 앉아야 하므로 A와 G를 제외하고 앉아야 한다.



(i) 선생님이 B에 앉을 때

A에 여학생 2명 중 1명이 앉고 C와 D에 여학생과 남학생이 앉으면 되므로 이때의 경우의 수는

$$2 \times 2! = 4$$

(ii) 선생님이 F에 앉을 때

G에 여학생 2명 중 1명이 앉고 D와 E에 여학생과 남학생이 앉으면 되므로 이때의 경우의 수는

$$2 \times 2! = 4$$

(iii) 선생님이 C에 앉을 때

① 선생님 왼쪽에 1명이 앉는 경우

B에 여학생 2명 중 1명이 앉고 D와 E에 여학생과 남학생이 앉으면 되므로 이때의 경우의 수는

$$2 \times 2! = 4$$

② 선생님 왼쪽에 2명이 앉는 경우

A와 B에 여학생 2명 중 1명과 남학생이 앉고 D에 남은 여학생이 앉으면 되므로 이때의 경우의 수는

$$2 \times 2! \times 1 = 4$$

③, ④에서 이때의 경우의 수는

$$4 + 4 = 8$$

(iv) 선생님이 D 또는 E에 앉을 때

(iii)과 같은 방법으로 구하면 경우의 수는 각각 8이다.

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$4 + 4 + 8 \times 3 = 32$$

답 32

다른 풀이

선생님의 양옆에 두 여학생이 앉은 후, 세 사람의 사이사이와 양 끝의 4개의 자리 중 하나를 택하여 남학생이 앉는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

그 각각에 대하여 여학생이 자리를 서로 바꾸어 앉는 경우의 수는

$$2! = 2$$

따라서 네 사람이 서로 이웃하게 앉는 경우의 수는

$$4 \times 2 = 8$$

한편, 여학생 2명, 선생님 1명과 남학생 1명이 모두 이웃하므로 4명을 하나로 묶어 빈 의자 3개의 양 끝과 사이사이의 4곳에 오게 하면 된다.



이때의 경우의 수는

$${}_4P_1 = 4$$

따라서 구하는 경우의 수는

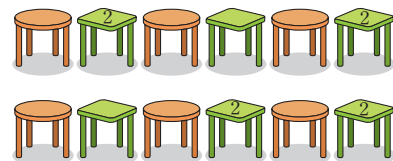
$$8 \times 4 = 32$$

030

2학년 학생은 사각 의자에만 앉아야 하므로 2학년 학생이 사각 의자에 앉는 경우에 따라 다음과 같이 구한다.

(i) 2학년 학생이 가장 오른쪽 사각 의자에 앉는 경우

2학년 학생 중 나머지 한 명이 앉을 사각 의자를 택하는 경우의 수는 다음 그림과 같이 2이다.



위의 각 경우에 대하여 2학년 학생이 두 사각 의자에 앉는 경우의 수는

$${}_2P_2 = 2! = 2$$

④ 2학년 학생이 앉지 않은 사각 의자에 1학년 학생이 앉는 경우

1학년 학생이 앉은 사각 의자와 이웃한 2개의 둥근 의자에
는 3학년 학생이 앉아야 하므로 이때의 경우의 수는
 $2 \times 2! = 4$

- ㉑ 2학년 학생이 앉지 않은 사각 의자에 3학년 학생이 앉는 경우
3학년 학생이 앉은 사각 의자와 이웃한 2개의 둥근 의자에
는 1학년 학생이 앉아야 하므로 이때의 경우의 수는
 $2 \times 2! = 4$

따라서 이때의 경우의 수는

$$2 \times 2 \times (4+4) = 32$$

- (ii) 2학년 학생이 가장 오른쪽 사각 의자에 앉지 않는 경우



가장 오른쪽 사각 의자가 아닌 나머지 2개의 사각 의자에 2학
년 학생 2명이 앉는 경우의 수는

$${}_2P_2 = 2! = 2$$

- ㉒ 가장 오른쪽 사각 의자에 1학년 학생이 앉는 경우
1학년 학생이 앉은 사각 의자와 이웃하지 않은 2개의 둥근
의자에 남은 1학년 학생 한 명이 앉고 나머지 둥근 의자에
3학년 학생 2명이 앉아야 하므로 이때의 경우의 수는
 $2 \times 2 \times 2! = 8$

- ㉓ 가장 오른쪽 사각 의자에 3학년 학생이 앉는 경우
3학년 학생이 앉은 사각 의자와 이웃하지 않은 2개의 둥근
의자에 남은 3학년 학생 한 명이 앉고 나머지 둥근 의자에
1학년 학생 2명이 앉아야 하므로 이때의 경우의 수는
 $2 \times 2 \times 2! = 8$

따라서 이때의 경우의 수는 $2 \times (8+8) = 32$

- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$32 + 32 = 64$$

답 ①

다른 풀이

사각 의자 3개 중 2개의 의자에 2학년 학생 2명이 앉는 경우의 수
는

$${}_3P_2 = 3 \times 2 = 6$$

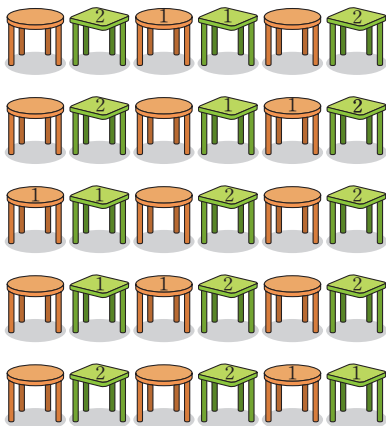
나머지 의자 4개에 1학년 학생 2명과 3학년 학생 2명이 앉는 경
우의 수는

$${}_4P_4 = 4! = 24$$

따라서 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수는

$$6 \times 24 = 144$$

이 중에서 1학년 학생이 서로 이웃하여 앉는 경우의 수는 다음 그
림과 같이 5이다.



위의 각 경우에 대하여 1, 2, 3학년 학생들이 앉는 경우의 수는

$${}_2P_2 \times {}_2P_2 \times {}_2P_2 = 2! \times 2! \times 2! = 8$$

따라서 1학년 학생 2명이 서로 이웃하여 앉는 경우의 수는

$$5 \times 8 = 40$$

같은 방법으로 3학년 학생 2명이 서로 이웃하여 앉는 경우의 수도
40이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$144 - 40 \times 2 = 64$$

031

$2 \leq |a| < |b| < |c| \leq 6$ 을 만족시키는 순서쌍 $(|a|, |b|, |c|)$ 는
2, 3, 4, 5, 6 중에서 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 $|a|$,
 $|b|$, $|c|$ 의 값으로 정하면 되므로 그 개수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

이때 0이 아닌 세 정수 a, b, c 는 각각 절댓값이 같고 부호가 다른
두 개의 값을 가질 수 있다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$10 \times 2 \times 2 \times 2 = 80$$

답 80

032

12장의 카드 중에서 3장을 뽑는 방법의 수는

$${}_{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

꽂이 적혀 있는 카드가 n 장 ($n \geq 3$)이라 하면 꽂이 적혀 있는 카
드만 3장 뽑는 방법의 수는

$${}_n C_3$$

이때 당첨이 적혀 있는 카드가 적어도 한 장 포함되도록 하는 방
법의 수가 200이므로

$$220 - {}_n C_3 = 200, \quad {}_n C_3 = 20$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

$$n(n-1)(n-2) = 120 = 6 \times 5 \times 4$$

$$\therefore n = 6$$

따라서 꽂이 적혀 있는 카드가 6장이므로 당첨이 적혀 있는 카드
의 수는

$$12 - 6 = 6$$

답 ③

033

(i) 0을 한 개 사용하는 경우

- ㉑ 1을 2개, 2를 2개 사용하여 자연수를 만들 때

0은 만의 자리를 제외한 네 자리 중에서 한 자리, 1은 0이
들어간 자리를 제외한 네 자리 중에서 두 자리, 2는 0과 1
이 들어간 자리를 제외한 나머지 두 자리에 들어가면 되므
로 이때의 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = 4 \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 1 = 24$$

- ㉒ 1을 3개, 3을 1개 사용하는 자연수를 만들 때

0은 만의 자리를 제외한 네 자리 중에서 한 자리, 1은 0이

들어간 자리를 제외한 네 자리 중에서 세 자리, 3은 0과 1이 들어간 자리를 제외한 나머지 한 자리에 들어가면 되므로 이때의 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_4C_3 \times {}_1C_1 = 4 \times {}_4C_1 \times 1 = 4 \times 4 \times 1 = 16$$

㉑, ㉒에서 이때의 경우의 수는

$$24 + 16 = 40$$

(ii) 0을 사용하지 않는 경우

1을 4개, 2를 1개 사용하여 자연수를 만들어야 한다.

2는 전체 다섯 자리 중에 한 자리, 1은 2가 들어간 자리를 제외한 나머지 네 자리에 들어가면 되므로 이때의 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_4C_4 = 5 \times 1 = 5$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$40 + 5 = 45$$

답 45

034

(i) 가장 높은 자리의 숫자가 2인 경우

$$21 \square 1 \square 1 \square 1 \square 1 \square 1 \square 1$$

조건 (나)에 의하여 일의 자리의 숫자는 1이어야 한다.

6개의 □에서 2개를 택하여 2를 위치시키면 조건 (가)를 만족시키므로 이때의 경우의 수는

$${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

(ii) 가장 높은 자리의 숫자가 1인 경우

$$1 \square 1 \square 1 \square 1 \square 1 \square 1 \square 1 \square$$

7개의 □에서 3개를 택하여 2를 위치시키면 조건 (가)를 만족시키므로 이때의 경우의 수는

$${}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

(i), (ii)에서 구하는 수는

$$15 + 35 = 50(\text{개})$$

답 ①

035

abcdef가 5의 배수이므로 $f=5$

$\therefore d < e < 5$

(i) $d=3$ 일 때

e의 값을 정하는 경우는 4의 1가지이다.

a, b, c의 값을 정하는 경우의 수는 6, 7, 8, 9의 4개 중에서 3개를 택하여 큰 수부터 차례대로 a, b, c에 대응시키면 되므로

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$1 \times 4 = 4$$

(ii) $d=2$ 일 때

e의 값을 정하는 경우는 3, 4의 2가지이다.

a, b, c의 값을 정하는 경우의 수는 3, 4, 6, 7, 8, 9 중 e의 값을 제외한 5개 중에서 3개를 택하여 큰 수부터 차례대로 a, b, c에 대응시키면 되므로

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$2 \times 10 = 20$$

(iii) $d=1$ 일 때

e의 값을 정하는 경우는 2, 3, 4의 3가지이다.

a, b, c의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 중 e의 값을 제외한 6개 중에서 3개를 택하여 큰 수부터 차례대로 a, b, c에 대응시키면 되므로

$${}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$3 \times 20 = 60$$

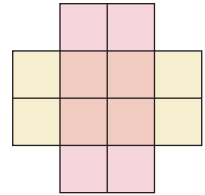
(i)~(iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$4 + 20 + 60 = 84$$

답 84

036

오른쪽 그림과 같이 주어진 도형을 가로로 긴 직사각형과 세로로 긴 직사각형으로 나누어 생각해보자.



(i) 가로로 긴 직사각형에서 만들 수 있는 직사각형의 개수는

3개의 가로선 중 2개를 택하고 5개의 세로선 중 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3C_2 \times {}_5C_2 = {}_3C_1 \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 3 \times 10 = 30$$

(ii) 세로로 긴 직사각형에서 만들 수 있는 직사각형의 개수는

5개의 가로선 중 2개를 택하고 3개의 세로선 중 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times {}_3C_1 = 10 \times 3 = 30$$

(iii) 가로로 긴 직사각형과 세로로 긴 직사각형이 겹치는 부분에서 만들 수 있는 직사각형의 개수는

3개의 가로선 중 2개를 택하고 3개의 세로선 중 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3C_2 \times {}_3C_2 = {}_3C_1 \times {}_3C_1 = 3 \times 3 = 9$$

(i)~(iii)에서 구하는 직사각형의 개수는

$$30 + 30 - 9 = 51$$

답 51

037

막대기의 좌우를 구별한다고 할 때, 막대기의 개수는 7곳 중 검은 색 쌍기 나무가 놓일 4곳을 택하는 방법의 수와 같으므로

$${}_7C_4 = {}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

이때 좌우 대칭인 막대기는 반드시 중앙에 흰색이 위치하고 그 흰색을 기준으로 왼쪽의 세 자리 중 두 자리에 검은색이 위치하므로 좌우 대칭인 막대기의 개수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

한편, 좌우 대칭이 아닌 막대기는 좌우의 구별이 없으므로 다음과 같이 한 쌍으로 존재한다.

$$\blacksquare \square \blacksquare \square \blacksquare \square = \square \blacksquare \square \blacksquare \square \square$$

즉, 좌우 대칭이 아닌 막대기의 개수는

$$35 - 3 = 32$$

따라서 구하는 막대기의 총 개수는

$$3 + 32 \times \frac{1}{2} = 3 + 16 = 19$$

답 19

038

서로 다른 종류의 빵 4개와 같은 종류의 주스 2병을 5명의 학생에게 남김없이 나누어 주려면 5명의 학생 중 1명은 빵을 2개 받거나 주스를 2병 받거나 빵과 주스를 각각 1개씩 받아야 한다.

(i) 1명의 학생이 빵 2개를 받는 경우

5명의 학생 중 빵 2개를 받을 1명을 정한 후, 남은 4명의 학생 중 2명에게 빵을 나누어 주고 나머지 2명의 학생에게 주스를 나누어 주면 된다.

서로 다른 종류의 빵 4개 중에서 2개를 고르는 경우의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

빵 2개를 받을 학생 1명을 정하는 경우의 수는

$${}_5C_1 = 5$$

남은 빵 2개를 나머지 4명의 학생 중 2명에게 1개씩 나누어 주는 경우의 수는

$${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$$

빵을 받지 못한 2명의 학생에게 주스를 각각 1병씩 나누어 주는 경우의 수는

$$1$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$6 \times 5 \times 12 \times 1 = 360$$

(ii) 1명의 학생이 주스 2병을 받는 경우

5명의 학생 중 주스 2병을 받을 학생 1명을 정한 후, 남은 4명의 학생에게 빵을 나누어 주면 된다.

주스 2병을 받을 학생 1명을 정하는 경우의 수는

$${}_5C_1 = 5$$

남은 4명의 학생에게 빵을 1개씩 나누어 주는 경우의 수는

$$4! = 24$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$5 \times 24 = 120$$

(iii) 1명의 학생이 빵과 주스를 각각 1개씩 받는 경우

5명의 학생 중 4명을 선택하여 4개의 빵을 나누어 준 후, 빵을 받은 4명의 학생 중에서 1명을 선택하여 주스를 나누어 주고 빵을 받지 못한 1명의 학생에게 주스를 나누어 주면 된다.

5명의 학생 중 4명에게 4개의 빵을 1개씩 나누어 주는 경우의 수는

$${}_5P_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

빵을 받은 4명의 학생 중에서 1명을 선택하여 주스를 나누어 주고 빵을 받지 못한 1명에게 주스를 나누어 주는 경우의 수는

$${}_4C_1 \times 1 = 4 \times 1 = 4$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$120 \times 4 = 480$$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

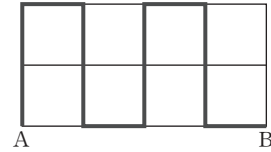
$$360 + 120 + 480 = 960$$

답 960

039

A 지점에서 출발하여 B 지점에 도착할 때, 가로 방향으로 이동한 길이의 합이 4이고 전체 이동한 길이가 12가 되려면 세로 방향으로 이동한 길이의 합이 8이어야 한다.

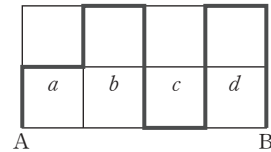
(i) 길이가 2인 세로 방향의 도로를 4개 지나는 경우



길이가 2인 세로 방향의 도로를 4개 지나는 경우의 수는 길이가 2인 세로 방향의 도로 5개 중에서 4개를 선택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

(ii) 길이가 2인 세로 방향의 도로를 3개 지나는 경우



길이가 2인 세로 방향의 도로를 3개 지나는 경우의 수는 두 번째 가로 방향의 도로 a, b, c, d 중에서 1개를 선택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4C_1 = 4$$

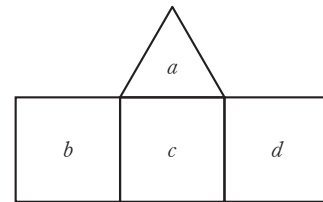
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$5 + 4 = 9$$

답 9

040

다음 그림과 같이 정삼각형에 써넣은 수를 a , 정사각형에 써넣은 수를 왼쪽부터 차례대로 b, c, d 라 하자.



조건 (가)에 의하여 $a < b, a < c, a < d$

조건 (나)에 의하여 $b \neq c, c \neq d$

(i) $b \neq d$ 인 경우

a, b, c, d 가 모두 다른 수이므로 7 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 택하는 경우의 수는

$${}_7C_4 = {}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

이 각각에 대하여 가장 작은 수는 a 로, 나머지 3개의 수를 b , c , d 로 정하면 되므로 이때의 경우의 수는

$$1 \times 3! = 6$$

따라서 $b \neq d$ 인 경우의 수는

$$35 \times 6 = 210$$

(ii) $b = d$ 인 경우

a, b, c, d 중에서 서로 다른 수의 개수는 3이다.

7 이하의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 수를 택하는 경우의 수는

$${}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

이 각각에 대하여 가장 작은 수는 a 로, 나머지 2개의 수를

$b(=d), c$ 로 정하면 되므로 이때의 경우의 수는

$$1 \times 2! = 2$$

따라서 $b = d$ 인 경우의 수는

$$35 \times 2 = 70$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$210 + 70 = 280$$

답 280

다른 풀이

조건 (b), (d)에 의하여 a 보다 큰 수가 적어도 2개 존재해야 하므로 $a \leq 5$

(i) $a = 5$ 인 경우

b, c, d 의 값으로 가능한 것은 6, 7의 2가지이다.

이때 c 의 값을 먼저 정한 후, 이 각각에 대하여 c 의 값을 제외한 나머지 하나의 숫자가 b, d 의 값이므로 이때의 경우의 수는 2이다.

(ii) $a = 4$ 인 경우

b, c, d 의 값으로 가능한 것은 5, 6, 7의 3가지이다.

이때 c 의 값을 먼저 정한 후, 이 각각에 대하여 b, d 의 값으로 가능한 것은 c 의 값을 제외한 나머지 2개의 숫자이므로 이때의 경우의 수는

$$3 \times 2 \times 2 = 12$$

(iii) $a = 3$ 인 경우

b, c, d 의 값으로 가능한 것은 4, 5, 6, 7의 4가지이다.

이때 c 의 값을 먼저 정한 후, 이 각각에 대하여 b, d 의 값으로 가능한 것은 c 의 값을 제외한 나머지 3개의 숫자이므로 이때의 경우의 수는

$$4 \times 3 \times 3 = 36$$

(iv) $a = 2$ 인 경우

b, c, d 의 값으로 가능한 것은 3, 4, 5, 6, 7의 5가지이다.

이때 c 의 값을 먼저 정한 후, 이 각각에 대하여 b, d 의 값으로 가능한 것은 c 의 값을 제외한 나머지 4개의 숫자이므로 이때의 경우의 수는

$$5 \times 4 \times 4 = 80$$

(v) $a = 1$ 인 경우

b, c, d 의 값으로 가능한 것은 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6가지이다.

이때 c 의 값을 먼저 정한 후, 이 각각에 대하여 b, d 의 값으로 가능한 것은 c 의 값을 제외한 나머지 5개의 숫자이므로 이때의 경우의 수는

$$6 \times 5 \times 5 = 150$$

(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

$$2 + 12 + 36 + 80 + 150 = 280$$

041

10층에서 뒀던 7명이 3개의 층에서 나누어 내려야 하므로 7명을 3개의 조로 나누어야 한다. 7 을 3개의 자연수의 합으로 나타내면 $7 = 1 + 1 + 5 = 1 + 2 + 4 = 1 + 3 + 3 = 2 + 2 + 3$

(i) 1명, 1명, 5명으로 나누어 내리는 경우의 수는

$${}_7C_1 \times {}_6C_1 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{2!} = 7 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 21$$

(ii) 1명, 2명, 4명으로 나누어 내리는 경우의 수는

$${}_7C_1 \times {}_6C_2 \times {}_4C_4 = 7 \times \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times 1 = 105$$

(iii) 1명, 3명, 3명으로 나누어 내리는 경우의 수는

$${}_7C_1 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 7 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times 1 \times \frac{1}{2} = 70$$

(iv) 2명, 2명, 3명으로 나누어 내리는 경우의 수는

$${}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 1 \times \frac{1}{2} = 105$$

(i)~(iv)에서 3개의 조로 나누는 경우의 수는

$$21 + 105 + 70 + 105 = 301$$

3개의 조가 3개의 층에 나누어 내리는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 301 = 1806$$

답 1806

042

A, B가 택하는 음식 중에서 서로 일치하는 음식이 한식 메뉴인 경우와 양식 메뉴인 경우로 나누어 구할 수 있다.

(i) 서로 일치하는 음식이 한식 메뉴일 때

3개의 한식 메뉴 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

나머지 6개의 음식 중에서 A가 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

나머지 4개의 음식 중에서 B가 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$3 \times 15 \times 6 = 270$$

(ii) 서로 일치하는 음식이 양식 메뉴일 때

4개의 양식 메뉴 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

위의 각 경우에 대하여 나머지 6개의 음식 중에서 A, B는 한식 메뉴를 1개 이상 택해야 하므로 다음 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

㉠ A, B 모두 한식 메뉴 1개와 양식 메뉴 1개를 택하는 경우

A가 3개의 양식 메뉴 중에서 1개, 3개의 한식 메뉴 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_3C_1 = 3 \times 3 = 9$$

B가 남은 2개의 양식 메뉴 중에서 1개, 남은 2개의 한식 메뉴 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_2C_1 = 2 \times 2 = 4$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$9 \times 4 = 36$$

- ⑥ A, B 중 한 명은 한식 메뉴 2개를 택하고, 다른 한 명은 한식 메뉴 1개와 양식 메뉴 1개를 택하는 경우
A, B 중 한식 메뉴 2개를 선택할 학생을 정하는 경우의 수는
- $${}_2C_1=2$$
- 이 학생이 3개의 한식 메뉴 중 2개를 택하는 경우의 수는
- $${}_3C_2={}_3C_1=3$$
- 다른 한 명이 남아 있는 한식 메뉴 1개를 택하는 경우의 수는
- $${}_1C_1=1$$
- 이 학생이 양식 메뉴 중 공통으로 택한 한 음식을 제외한 3개의 음식 중에서 1개를 택하는 경우의 수는
- $${}_3C_1=3$$
- 따라서 이때의 경우의 수는
- $$2 \times 3 \times 1 \times 3 = 18$$
- ④, ⑥에서 이때의 경우의 수는
- $$4 \times (36 + 18) = 216$$
- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
- $$270 + 216 = 486$$

답 486

043

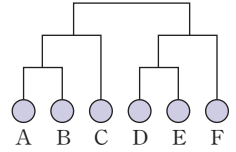
가위바위보 게임에서 비기려면 모두 같은 것을 내거나 가위, 바위, 보를 적어도 하나씩 내야 한다.

- (i) 모두 같은 것을 낸 경우
가위, 바위, 보 3가지 중 하나를 똑같이 내야 하므로 3가지
- (ii) 가위, 바위, 보를 적어도 하나씩 낸 경우
- ④ 5명을 3명, 1명, 1명의 3개의 조로 나누는 경우의 수는
- $${}_5C_3 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!}$$
- $$= \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2}$$
- $$= 10$$
- 3개의 조에 가위, 바위, 보를 분배하는 방법의 수는
- $$3! = 6$$
- 따라서 이때의 경우의 수는
- $$10 \times 6 = 60$$
- ⑤ 5명을 2명, 2명, 1명의 3개의 조로 나누는 경우의 수는
- $${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!}$$
- $$= \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 3 \times 1 \times \frac{1}{2}$$
- $$= 15$$
- 3개의 조에 가위, 바위, 보를 분배하는 방법의 수는
- $$3! = 6$$
- 따라서 이때의 경우의 수는
- $$15 \times 6 = 90$$
- ④, ⑤에서 이때의 경우의 수는
- $$60 + 90 = 150$$
- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
- $$3 + 150 = 153$$

답 ③

044

실력이 4위인 팀이 결승전에 진출할 수 있도록 하려면 1위, 2위, 3위인 팀과 만나지 않아야 하므로 실력이 1위, 2위, 3위인 팀을 A, B, C에 배정하면 실력이 4위, 5위, 6위인 팀은 D, E, F에 배정해야 한다.



- (i) 실력이 1위, 2위, 3위인 팀을 A, B, C에 배정하는 경우의 수는 3개의 팀을 2팀, 1팀으로 분할하는 경우의 수와 같으므로
- $${}_3C_2 \times {}_1C_1 = {}_3C_1 \times {}_1C_1 = 3 \times 1 = 3$$
- (ii) 실력이 4위, 5위, 6위인 팀을 D, E, F에 배정하는 경우
- ① 실력이 4위인 팀이 D(E)에 배정될 때
5위, 6위인 팀은 E(D), F에 배정되어야 하므로 이때의 경우의 수는 $2! = 2$
- ② 실력이 4위인 팀이 F에 배정될 때
5위, 6위인 팀이 D, E에 배정되어야 하므로 이때의 경우의 수는 1
- ①, ②에서 이때의 경우의 수는
- $$2 + 1 = 3$$
- (i), (ii)에서 실력이 4위인 팀이 결승전에 진출할 수 있도록 대진표를 작성하는 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$

답 9

045

일등급의 메모장

(전체 경우의 수) - (합이 9인 두 수를 포함할 경우의 수)

↳ 여사건

(쌍 선택: (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5) 중 1개)
× (나머지 1개 선택: 택한 쌍을 제외한 남은 7개의 숫자 중 1개)
× (자리 배치: 택한 3개의 숫자 나열)
= (여사건)

(i) 9가 포함된 경우

백의 자리의 숫자가 9이면 십의 자리의 숫자로 가능한 것은 1부터 8까지 8가지이다.

이때 일의 자리의 숫자로 가능한 것은 1부터 9까지의 자연수 중에서

9, 십의 자리의 숫자, 9 - (십의 자리의 숫자)

를 제외한 6가지이다.

십의 자리의 숫자 또는 일의 자리의 숫자가 9인 경우도 마찬가지이므로 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$$(8 \times 6) \times 3 = 144$$

(ii) 9가 포함되지 않는 경우

백의 자리의 숫자로 가능한 것은 1부터 8까지 8가지이다.

이때 십의 자리의 숫자로 가능한 것은 1부터 9까지의 자연수 중에서

9, 백의 자리의 숫자, 9 - (백의 자리의 숫자)

를 제외한 6가지이다.

또, 그 각각에 대하여 일의 자리의 숫자로 가능한 것은 1부터 9까지의 자연수 중에서

9, 백의 자리의 숫자, 십의 자리의 숫자,

9 - (백의 자리의 숫자), 9 - (십의 자리의 숫자)

를 제외한 4가지이다.

따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$$8 \times 6 \times 4 = 192$$

(i), (ii)에서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$$144 + 192 = 336$$

답 336

다른 풀이

각 자리의 수 중 어느 두 수의 합이 9가 되는 세 자리 자연수의 개수를 구하면 다음과 같다.

1부터 9까지 자연수 중 합이 9가 되는 두 수의 쌍은

(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5)

의 4개이다.

이 4개의 쌍 중 하나를 택하고 9개의 숫자 중 이미 택한 2개의 숫자를 제외한 7개의 숫자 중 하나를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_7C_1 \times 3! = 4 \times 7 \times 6 = 168$$

한편, 1부터 9까지 자연수 중 세 수를 택하여 세 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

$${}_9P_3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$$504 - 168 = 336$$

046

일등급의 메모장

합이 특정한 자연수의 배수가 되는 $3k+1$ 의 꼴, $3k+2$ 의 꼴, $3k+3$ 의 꼴의 수를 나눈다. (k는 음이 아닌 정수)

1부터 12까지 12개의 자연수 중 음이 아닌 정수 k에 대하여 $4k+1$ 의 꼴, $4k+2$ 의 꼴, $4k+3$ 의 꼴, $4k+4$ 의 꼴의 수는 각각 3개씩 있다.

이때 첫 번째, 두 번째로 가능한 수와 세 번째, 네 번째로 가능한 수는 다음과 같다.

	첫 번째, 두 번째	세 번째, 네 번째
(i)	$4k+4, 4k+1$	$4k+4, 4k+3$
(ii)	$4k+4, 4k+1$	$4k+1, 4k+2$
(iii)	$4k+4, 4k+2$	$4k+4, 4k+2$
(iv)	$4k+4, 4k+2$	$4k+1, 4k+1$
(v)	$4k+4, 4k+2$	$4k+3, 4k+3$
(vi)	$4k+4, 4k+3$	$4k+4, 4k+1$
(vii)	$4k+4, 4k+3$	$4k+3, 4k+2$
(viii)	$4k+1, 4k+1$	$4k+4, 4k+2$
(ix)	$4k+1, 4k+1$	$4k+3, 4k+3$
(x)	$4k+1, 4k+2$	$4k+4, 4k+1$
(xi)	$4k+1, 4k+2$	$4k+3, 4k+2$
(xii)	$4k+2, 4k+3$	$4k+4, 4k+3$
(xiii)	$4k+2, 4k+3$	$4k+1, 4k+2$
(xiv)	$4k+3, 4k+3$	$4k+4, 4k+2$
(xv)	$4k+3, 4k+3$	$4k+1, 4k+1$

위의 15가지 경우에서 첫 번째, 두 번째로 가능한 수를 고르는 것과 세 번째, 네 번째로 가능한 수를 고르는 것을 고려하여 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

(i)에서

$$({}_3C_1 \times {}_3C_1 \times 2!) \times ({}_2C_1 \times {}_3C_1 \times 2!) = (3 \times 3 \times 2) \times (2 \times 3 \times 2) = 216$$

(ii), (iv), (v), (vi), (vii), (viii), (x), (xi), (xii), (xiii), (xiv)에서 같은 방법으로 구하면 경우의 수는 각각 216이다.

(iii)에서

$$({}_3C_1 \times {}_3C_1 \times 2!) \times ({}_2C_1 \times {}_2C_1 \times 2!) = (3 \times 3 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 144$$

(ix), (xv)에서 같은 방법으로 구하면 경우의 수는 각각 144이다.

따라서

$$N = 12 \times 216 + 3 \times 144 = 24 \times 108 + 24 \times 18 = 24 \times 126$$

이므로

$$\frac{N}{24} = 126$$

답 126

047

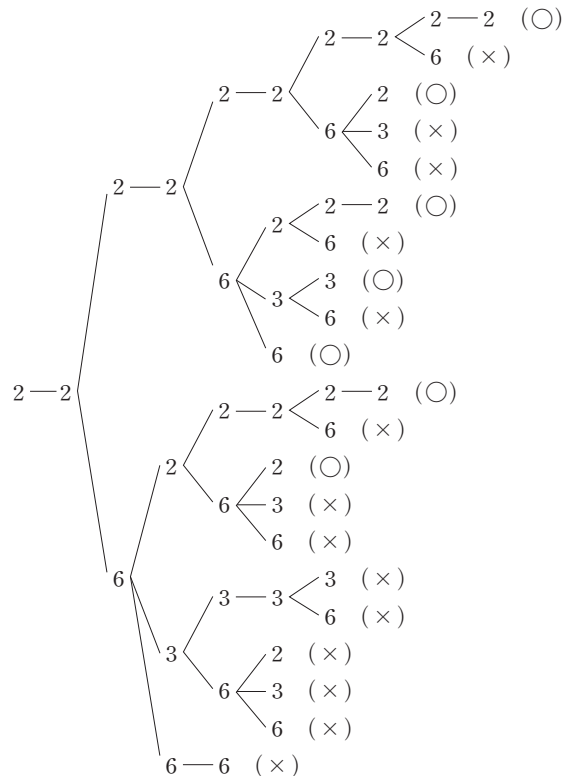
일등급의 메모장

규칙이 복잡한 경우, 수형도를 이용하여 푸는 것이 더 빠를 수 있다.

가능한 경우를 사전에 조사한 후, 이를 조합하여 해결할 수도 있다.

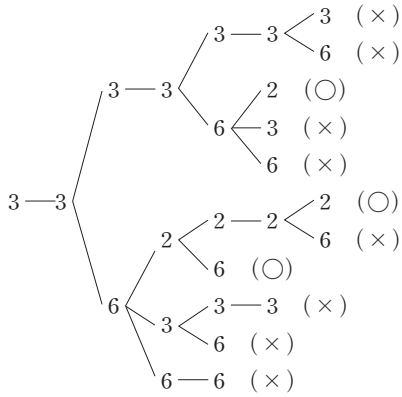
20개의 탁구공을 모두 꺼내는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.

(i) 처음 꺼낸 공의 개수가 2인 경우



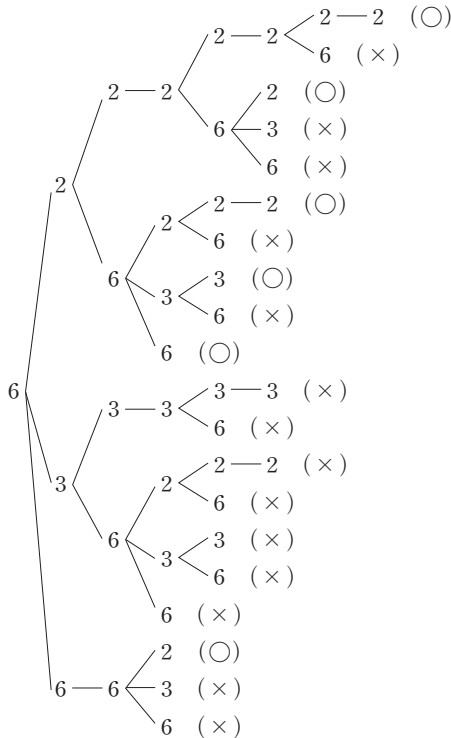
따라서 이때의 경우의 수는 7이다.

(ii) 처음 꺼낸 공의 개수가 3인 경우



따라서 이때의 경우의 수는 3이다.

(iii) 처음 꺼낸 공의 개수가 6인 경우



따라서 이때의 경우의 수는 6이다.

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$7+3+6=16$$

답 16

다른 풀이

탁구공을 2개 꺼낸 횟수를 x , 3개 꺼낸 횟수를 y , 6개 꺼낸 횟수를 z 라 하면

$$2x+3y+6z=20$$

이를 만족시키는 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 는 다음과 같다.

- (1, 0, 3), (1, 2, 2), (4, 0, 2), (1, 4, 1), (4, 2, 1), (7, 0, 1), (1, 6, 0), (4, 4, 0), (7, 2, 0), (10, 0, 0)

(i) (1, 0, 3)일 때

$$6-2-6-6,$$

$$6-6-6-2$$

이므로 2가지

(ii) (1, 2, 2)일 때

$$3-3-6-2-6,$$

$$6-2-6-3-3$$

이므로 2가지

(iii) (4, 0, 2)일 때

$$2-2-2-2-6-6,$$

$$2-2-6-2-6-2,$$

$$6-2-6-2-2-2,$$

$$6-2-2-2-6-2$$

이므로 4가지

(iv) (1, 4, 1)일 때

$$3-3-3-3-6-2$$

이므로 1가지

(v) (4, 2, 1)일 때

$$2-2-2-2-6-3-3,$$

$$3-3-6-2-2-2-2$$

이므로 2가지

(vi) (7, 0, 1)일 때

$$2-2-2-2-2-2-6-2,$$

$$2-2-2-2-6-2-2-2,$$

$$2-2-6-2-2-2-2-2,$$

$$6-2-2-2-2-2-2-2$$

이므로 4가지

(vii) (1, 6, 0), (4, 4, 0), (7, 2, 0)일 때

2와 3은 서로소이므로 불가능하다.

(viii) (10, 0, 0)일 때

$$2-2-2-2-2-2-2-2-2-2$$

이므로 1가지

(i)~(viii)에서 구하는 경우의 수는

$$2+2+4+1+2+4+1=16$$

048

일등급의 메모장

n 이 3 이상의 자연수일 때, 정 n 각형의 세 꼭짓점으로 만들 수 있는 둔각삼각형의 개수를 a_n , 직각삼각형의 개수를 b_n , 예각삼각형의 개수를 c_n 이라 하면

$$a_n = \begin{cases} n \times \left(1+2+\dots+\frac{n-3}{2}\right) & (n \text{은 홀수}) \\ n \times \left(1+2+\dots+\frac{n-4}{2}\right) & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{n(n-1)(n-3)}{8} & (n \text{은 홀수}) \\ \frac{n(n-2)(n-4)}{8} & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{은 홀수}) \\ \frac{n(n-2)}{2} & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

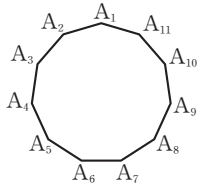
$$c_n = {}_n C_3 - a_n - b_n = \begin{cases} \frac{n(n+1)(n-1)}{24} & (n \text{은 홀수}) \\ \frac{n(n-2)(n-4)}{24} & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

확장

원에 내접하는 정다각형에서 세 꼭짓점을 택하여 삼각형을 만들 때, 원의 지름을 한 변으로 하는 삼각형은 직각삼각형, 세 꼭짓점이 원의 지름을 기준으로 같은 반원 쪽에 있으면 둔각삼각형이다.

이때 직각삼각형, 둔각삼각형이 모두 아닌 삼각형은 예각삼각형임을 이용하여 그 개수를 구해 보자.

(i) 정십일각형



세 꼭짓점으로 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$${}_{11}C_3 = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$$

정십일각형의 두 꼭짓점으로 외접원의 지름을 만들 수 없으므로 세 꼭짓점으로 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는 0이다.

정십일각형의 외접원의 지름은 한 변의 수직이등분선 위에 있으므로 세 꼭짓점으로 만들 수 있는 둔각삼각형의 개수는 다음과 같다.

가장 긴 변의 길이가 선분 A_1A_3 의 길이와 같은 삼각형의 개수는 11

가장 긴 변의 길이가 선분 A_1A_4 의 길이와 같은 삼각형의 개수는 $2 \times 11 = 22$

가장 긴 변의 길이가 선분 A_1A_5 의 길이와 같은 삼각형의 개수는 $3 \times 11 = 33$

가장 긴 변의 길이가 선분 A_1A_6 의 길이와 같은 삼각형의 개수는 $4 \times 11 = 44$

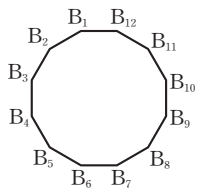
따라서 만들 수 있는 둔각삼각형의 개수는

$$11 + 22 + 33 + 44 = 110$$

이므로

$$a = 165 - 110 = 55$$

(ii) 정십이각형



세 꼭짓점으로 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$${}_{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

정십이각형의 두 꼭짓점으로 만들 수 있는 외접원의 지름의 개수는 6이고, 지름 하나당 선택할 수 있는 꼭짓점의 개수는 10 이므로 세 꼭짓점으로 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는 60 이다.

정십이각형의 지름은 서로 마주 보는 두 꼭짓점을 연결한 선분과 같으므로 세 꼭짓점으로 만들 수 있는 둔각삼각형의 개수는 다음과 같다.

가장 긴 변의 길이가 선분 B_1B_3 의 길이와 같은 삼각형의 개수는 12

가장 긴 변의 길이가 선분 B_1B_4 의 길이와 같은 삼각형의 개수는 $2 \times 12 = 24$

가장 긴 변의 길이가 선분 B_1B_5 의 길이와 같은 삼각형의 개수는 $3 \times 12 = 36$

가장 긴 변의 길이가 선분 B_1B_6 의 길이와 같은 삼각형의 개수

$$\text{는 } 4 \times 12 = 48$$

따라서 만들 수 있는 둔각삼각형의 개수는

$$12 + 24 + 36 + 48 = 120$$

이므로

$$b = 220 - 60 - 120 = 40$$

(i), (ii)에서

$$a + b = 55 + 40 = 95$$

답 95

다른풀이 확장

삼각형의 개수 구하는 공식을 이용하여 a, b 의 값을 간단하게 구할 수 있다.

정십일각형 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}$ 의 세 꼭짓점으로 만들 수 있는 서로 다른 예각삼각형의 개수는

$$a = \frac{11 \times 12 \times 10}{24} = 55$$

정십이각형 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8B_9B_{10}B_{11}B_{12}$ 의 세 꼭짓점으로 만들 수 있는 서로 다른 예각삼각형의 개수는

$$b = \frac{12 \times 10 \times 8}{24} = 40$$

$$\therefore a + b = 55 + 40 = 95$$

049

일등급의 매모장

첫 번째 가로줄을 $\boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{4}$ 로 고정시켜두고 두 번째 가로줄의 배치를 생각해 보자.

두 번째 가로줄 $\left\{ \begin{array}{l} \text{두 개의 짝을 이루는 경우} \\ \text{두 개의 짝을 이루지 않는 경우} \end{array} \right.$

첫 번째 가로줄에 1, 2, 3, 4를 채워 넣는 경우의 수는

$$4! = 24$$

이때 첫 번째 가로줄에 $\boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{4}$ 순서대로 카드를 채워 넣었다고 하면 두 번째, 세 번째, 네 번째 가로줄에 숫자 카드를 채워 넣는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) 두 번째 가로줄의 카드가 두 개의 짝을 이룰 때

첫 번째 가로줄이 $\boxed{1} \boxed{2}$ 일 때 두 번째 가로줄이 $\boxed{2} \boxed{1}$ 인 것처럼 서로 자리를 맞바꾼 쌍이 2개 있는 경우이므로 첫 번째 가로줄에 $\boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{4}$ 일 때 두 번째 가로줄은

$$\boxed{2} \boxed{1} \boxed{4} \boxed{3}, \boxed{3} \boxed{4} \boxed{1} \boxed{2}, \boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{1}$$

로 3가지

이때 두 번째 가로줄이 $\boxed{2} \boxed{1} \boxed{4} \boxed{3}$ 이라 하면 세 번째 가로줄은

$$\boxed{3} \boxed{4} \boxed{1} \boxed{2}, \boxed{3} \boxed{4} \boxed{2} \boxed{1}, \boxed{4} \boxed{3} \boxed{1} \boxed{2}, \boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{1}$$

로 4가지

네 번째 가로줄은 첫 번째, 두 번째, 세 번째 가로줄에 의하여 결정되므로 1가지

따라서 이때의 경우의 수는

$$3 \times 4 \times 1 = 12$$

- (ii) 두 번째 가로줄의 카드가 두 개의 짝을 이루지 않을 때 첫 번째 가로줄에 1 2 3 4 일 때 두 번째 가로줄은
- 2 3 4 1, 2 4 1 3, 3 1 4 2, 3 4 2 1, 4 1 2 3, 4 3 1 2
- 로 6가지
- 이때 두 번째 가로줄이 2 3 4 1 이라 하면 세 번째 가로줄은
- 3 4 1 2, 4 1 2 3
- 으로 2가지
- 네 번째 가로줄은 첫 번째, 두 번째, 세 번째 가로줄에 의하여 결정되므로 1가지
- 따라서 이때의 경우의 수는
- $$6 \times 2 \times 1 = 12$$
- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
- $$24 \times (12 + 12) = 576$$

답 576

050

일등급의 메모장

비어 있는 방을 기준으로 규칙이 바뀌므로 비어 있는 방의 개수를 기준으로 분류하여 문제를 해결한다.

- (i) 첫 번째 선택에서 비어 있는 방이 없을 경우 첫 번째로 방을 선택하는 경우의 수는
- $$3! = 6$$
- ㉠ 두 번째 선택 후 비어 있는 방이 1개인 경우 두 번째 선택할 방을 고르는 경우의 수는
- $${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$
- 그 중에서 두 명이 들어갈 방을 고르는 경우의 수는
- $${}_2C_1 = 2$$
- 선택한 2개의 방에 들어갈 사람을 고르는 경우의 수는
- $${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$
- 따라서 이때의 경우의 수는
- $$3 \times 2 \times 3 = 18$$
- ㉡ 두 번째 선택 후 비어 있는 방이 2개인 경우 조건 (㉠)에 의하여 비어 있는 방이 없다.
- ㉢, ㉡에서 이때의 경우의 수는
- $$6 \times 18 = 108$$
- (ii) 첫 번째 선택에서 비어 있는 방이 1개인 경우 첫 번째로 방을 선택하는 경우의 수는
- $${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$
- 그 중에서 두 명이 들어갈 방을 고르는 경우의 수는
- $${}_2C_1 = 2$$
- 선택한 2개의 방에 들어갈 사람을 고르는 경우의 수는
- $${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$
- 따라서 첫 번째로 선택하는 경우의 수는
- $$3 \times 2 \times 3 = 18$$
- ㉣ 두 번째 선택 후 비어 있는 방이 1개인 경우

두 번째 선택한 방 중에서 두 명이 들어갈 방을 고르는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

선택한 2개의 방에 들어갈 사람을 고르는 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$2 \times 3 = 6$$

- ㉤ 두 번째 선택 후 비어 있는 방이 2개인 경우

두 번째 선택할 방을 고르는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

- ㉠, ㉤에서 이때의 경우의 수는

$$18 \times (6 + 2) = 144$$

- (iii) 첫 번째 선택에서 비어 있는 방이 2개인 경우

첫 번째로 방을 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

이때 두 번째 선택을 하는 경우의 수는 1이다.

- ㉠, ㉤에서 이때의 경우의 수는

$$3 \times 1 = 3$$

- (i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$108 + 144 + 3 = 255$$

답 255

051

일등급의 메모장

문제에서 예시가 주어진 경우, 그 예시를 활용하여 그림 또는 표를 그려서 문제 상황을 이해하는데 이용할 수 있다.

- (i) 하루에 P, Q 경기장 두 곳 모두 시합하는 날이 3번 있는 경우 하루에 경기장 두 곳 모두 시합하는 날이 1일, 3일, 5일 또는 1일, 3일, 6일 또는 1일, 4일, 6일 또는 2일, 4일, 6일인 경우로 4가지이다.

1일, 3일, 5일에 시합한다고 가정해 보면

- ㉠ A가 시합할 일정, 장소를 고르는 경우의 수는

A가 3일 모두 P 경기장 또는 Q 경기장 중에 시합할 장소를 고를 수 있으므로 $2^3 = 8$

예

일정	1일	2일	3일	4일	5일	6일
P 경기장	A	X		X	A	X
Q 경기장		X	A	X		X

- ㉡ B가 시합할 일정, 장소를 고르는 경우의 수는

B는 A와 한 번 시합해야 하므로 ${}_3C_1 = 3$

예

일정	1일	2일	3일	4일	5일	6일
P 경기장	AB	X	B	X	A	X
Q 경기장		X	A	X	B	X

- ㉔ C가 시합할 일정, 장소를 고르는 경우의 수는
A와 한 번, B와 한 번 시합해야 하므로
 $2 \times 1 = 2$

예

일정	1일	2일	3일	4일	5일	6일
P 경기장	AB	X	B	X	A	X
Q 경기장	C	X	AC	X	BC	X

이때 D의 일정과 장소는 자동으로 결정된다.
따라서 이때의 경우의 수는
 $4 \times 8 \times 3 \times 2 = 192$

- (ii) 하루에 P, Q 경기장 두 곳 모두 시합하는 날이 2번 있는 경우
하루에 경기장 두 곳 모두 시합하는 날이 1일, 3일이고 둘 중 한 곳만 시합하는 날이 5일, 6일인 경우 또는 하루에 경기장 두 곳 모두 시합하는 날이 4일, 6일이고 둘 중 한 곳만 시합하는 날이 1일, 2일인 경우 또는 하루에 경기장 두 곳 모두 시합하는 날이 1일, 6일이고 둘 중 한 곳만 시합하는 날이 3일, 4일인 경우로 3가지이다.
하루에 경기장 한 곳만 시합하는 두 날에 경기장 P, Q 중 어느 곳에서 시합할지 정하는 경우의 수는 2가지이다.

두 경기장 모두 시합하는 날이 1일, 3일이고, 5일에 P 경기장에서 한 번, 6일에 Q 경기장에서 한 번 시합한다고 가정해 보면

- ㉕ A가 시합할 일정, 장소를 고르는 경우의 수는
1일, 3일, 5일 또는 1일, 3일, 6일에 시합해야 하고, 1일, 3일에 두 경기장 중에 시합할 장소를 고를 수 있으므로
 $2 \times 2 \times 2 = 8$

예

일정	1일	2일	3일	4일	5일	6일
P 경기장	A	X		X	A	X
Q 경기장		X	A	X	X	

- ㉖ B가 시합할 일정, 장소를 고르는 경우의 수는
A와 한 번 시합해야 하므로 ${}_3C_1 = 3$

예

일정	1일	2일	3일	4일	5일	6일
P 경기장	AB	X	B	X	A	X
Q 경기장		X	A	X	X	B

- ㉗ C가 시합할 일정, 장소를 고르는 경우의 수는
A와 한 번, B와 한 번 시합해야 하므로 $2 \times 1 = 2$

예

일정	1일	2일	3일	4일	5일	6일
P 경기장	AB	X	B	X	A	X
Q 경기장	C	X	AC	X	X	BC

이때 D의 일정과 장소는 자동으로 결정된다.
따라서 이때의 경우의 수는
 $3 \times 2 \times 8 \times 3 \times 2 = 288$ 다른 풀이

- (iii) 하루에 P, Q 경기장 두 곳 모두 시합하는 날이 1번 있는 경우
하루에 경기장 두 곳 모두 시합하는 날이 1일이고 둘 중 한 곳만 시합하는 날이 3일부터 6일까지인 경우 또는 하루에 경기장 두 곳 모두 시합하는 날이 6일이고 둘 중 한 곳만 시합하는 날이 1일부터 4일까지인 경우로 2가지이다.
하루에 경기장 한 곳만 시합하는 네 날에 경기장 P, Q 중 어디서 시합할지 정하는 경우의 수는 2가지이다.
두 경기장 모두 시합하는 날이 1일이고, 3일부터 6일까지 P, Q, P, Q 순서대로 한 경기장에서 시합한다고 가정해 보면

- ㉘ 1일에 시합할 팀을 고르는 경우의 수는
P 경기장에서 시합하는 팀만 고르면 되므로 ${}_2C_2 = 6$

예

일정	1일	2일	3일	4일	5일	6일
P 경기장	AB	X		X		X
Q 경기장	CD	X			X	

- ㉙ A가 시합할 일정, 장소를 고르는 경우의 수는
3일, 5일 또는 3일, 6일 또는 4일, 6일로 3이다.

예

일정	1일	2일	3일	4일	5일	6일
P 경기장	AB	X	A	X	A	X
Q 경기장	CD	X	X		X	

- ㉚ B가 시합할 일정, 장소를 고르는 경우의 수는
A와 한 번 시합해야 하므로 1이다.

예

일정	1일	2일	3일	4일	5일	6일
P 경기장	AB	X	A	X	A	X
Q 경기장	CD	X	X	B	X	B

- ㉛ C가 시합할 일정, 장소를 고르는 경우의 수는
A와 한 번, B와 한 번 시합해야 하므로 1이다.

예

일정	1일	2일	3일	4일	5일	6일
P 경기장	AB	X	AC	X	A	X
Q 경기장	CD	X	X	B	X	BC

이때 규칙 ㉔에 의하여 D의 일정과 장소를 정할 수 없다.
따라서 하루에 P, Q 경기장 두 곳 모두 시합하는 날이 1번 있는 경우는 존재하지 않는다.

(iv) 하루에 P, Q 경기장 두 곳 모두 시합하는 날이 없는 경우
 1일, 3일, 5일에는 P 경기장, 2일, 4일, 6일에는 Q 경기장 또는 1일, 3일, 5일에는 Q 경기장, 2일, 4일, 6일에는 P 경기장으로 2가지이다.

③ A가 시합할 일정, 장소를 고르는 경우의 수는 P 또는 Q 경기장에서 시합해야 하므로 2이다.

예

일정	1일	2일	3일	4일	5일	6일
P 경기장	A	X	A	X	A	X
Q 경기장	X		X		X	

④ B가 시합할 일정, 장소를 고르는 경우의 수는 A와 한 번 시합해야 하므로 1이다.

예

일정	1일	2일	3일	4일	5일	6일
P 경기장	AB	X	A	X	A	X
Q 경기장	X		X	B	X	B

이때 규칙 (라)에 의하여 C의 일정과 장소를 정할 수 없다. 따라서 하루에 P, Q 경기장 두 곳 모두 시합하는 날이 없는 경우는 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$192 + 288 = 480$$

답 480

다른 풀이

(iii) 하루에 P, Q 경기장 두 곳 모두 시합하는 날이 1번 이하인 경우

이 경우 하루에 P, Q 경기장 두 곳 모두 시합하는 날이 없거나 1번뿐이므로 전체 일정 중 적어도 4일 이상은 하루에 한 곳만 시합하는 날이어야 한다.

규칙 (가), (라)에 의하여 A는 6일 중 3번 시합해야 하며 연속으로 출전할 수 없다.

따라서 A가 1일, 3일, 5일에 P 경기장에서 시합하고, 1일의 시합 상대가 B라 가정하자.

일정	1일	2일	3일	4일	5일	6일
P 경기장	AB	X	A	X	A	
Q 경기장	X		X			

B도 3번 시합해야 하므로 남은 5일 중 2번의 시합을 더 해야 하고, 규칙 (가), (라)에 의하여 B는 4일, 6일에 시합해야 한다.

일정	1일	2일	3일	4일	5일	6일
P 경기장	AB	X	A	X	A	
Q 경기장	X		X	B		B

또, A, B는 1일에 시합을 했으므로 2일에는 C, D가 시합을 해야 한다.

일정	1일	2일	3일	4일	5일	6일
P 경기장	AB	X	A	X	A	
Q 경기장	X	CD	X	B		B

이때 규칙 (가), (라)에 의하여 3일에 A와 시합할 상대가 없으므로 P, Q 경기장 두 곳 모두 시합하는 날이 1번 이하인 경우는 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$192 + 288 = 480$$

052

일등급의 메모장

버튼이 여러 개 있는 경우에는 표를 사용하면 더욱 직관적으로 이해할 수 있다. 예를 들어

$a_1 = a_2 = 2, a_3 = 5, a_4 = 3, a_5 = 4$ 를 나타내면 다음과 같다.

	1	2	3	4	5	6
a_1	1	1				
a_2	1	1				
a_3					1	
a_4			1	1	1	1
a_5					1	1

버튼을 짝수 번 누르면 전구가 꺼지므로 3, 4, 5가 적힌 전구만 켜져 있다.

또, 복잡한 조건을 만족하는 경우를 셀 때에는 구분할 수 있는 기준을 세워 경우를 나누는 것이 도움이 된다.

	$a_1 = a_2$	$a_1 \neq a_2$
$a_4 = a_5$	(i)	(iii)
$a_4 \neq a_5$	(ii)	(iv)

전구가 모두 켜져 있으려면 어떤 전구도 버튼이 짝수 번 눌러 효과가 상쇄되어 꺼져 있어서는 안 된다.

즉, 모든 전구의 버튼이 홀수 번 눌러 각각 불이 켜져 있어야 한다. 규칙 (가)에 의하여 1이 적힌 전구의 전원 버튼은 a_1, a_2 의 값과 관계없이 각각 한 번씩 누르고, 규칙 (라)에 의하여 a_4, a_5 의 값과 관계없이 한 번도 누리지 않는다.

이때 규칙 (라)에서 a_3 의 값이 2, 3, 4, 5, 6 중 하나이면 1이 적힌 전구의 전원 버튼은 짝수 번 눌러지게 된다.

따라서 a_1, a_2, a_4, a_5 의 값과 관계없이 모든 전구가 켜져 있을 수 없다.

그러므로 a_3 의 값은 1이어야 한다.

(i) $a_1 = a_2$ 이고 $a_4 = a_5$ 이면

$a_1 = a_2$ 이면 주사위를 던졌을 때 첫 번째 나온 숫자와 두 번째 나온 숫자가 같으므로 누르는 전구의 전원 버튼들이 같아 서로 상쇄된다.

같은 방법으로 $a_4 = a_5$ 일 때 서로 상쇄된다.

따라서 1이 적힌 전구를 제외한 모든 전구의 불을 켤 수 없다.

(ii) $a_1 = a_2$ 이고 $a_4 \neq a_5$ 이면

상쇄되는 $a_1 = a_2$ 인 경우는 6개이고 6개의 전구의 불을 모두 켜는 순서쌍 (a_3, a_4, a_5) 는

$(1, 1, 6), (1, 6, 1)$ 로 2개이다.

따라서 구하는 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ 의 개수는

$$6 \times 2 = 12$$

(iii) $a_1 \neq a_2$ 이고 $a_4 = a_5$ 이면

상쇄되는 $a_4 = a_5$ 인 경우는 6개이고 6개의 전구의 불을 모두 켜는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3) 는

$(1, 6, 1), (6, 1, 1)$ 로 2개이다.

따라서 구하는 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ 의 개수는

$$6 \times 2 = 12$$

(iv) $a_1 \neq a_2$ 이고 $a_4 \neq a_5$ 이면

6개의 전구의 불을 모두 켜는 순서쌍 (a_1, a_5) 는

$(2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)$ 로 4개이다.

또, $a_3 = 1$ 이므로 상쇄되는 순서쌍 (a_2, a_3, a_4) 는

$(1, 1, 6), (6, 1, 1)$ 로 2개이다.

이때 a_1 과 a_2 를 바꿀 수 있고 a_4 와 a_5 를 바꿀 수 있으므로 구하는 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ 의 개수는

$$(4 \times 2) \times 2 \times 2 = 32 \quad \text{참고}$$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$12 + 12 + 32 = 56$$

답 56

참고

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중에서 2개의 조합으로 전구가 켜지고, 나머지 3개의 조합이 서로 상쇄되는 경우뿐만 아니라, 3개의 조합으로 전구가 켜지고 2개의 조합이 서로 상쇄되는 경우도 확인해 보자.

(i) a_3 을 포함하여 a_1 과 a_4 의 3개의 조합으로 전구가 켜진다고 하자.

이 경우 a_2 와 a_5 의 조합이 서로 상쇄되어야 하지만 이를 만족하는 경우는 존재하지 않는다.

(ii) a_3 을 포함하지 않고 a_1, a_2, a_4 의 3개의 조합으로 전구가 켜진다고 하자.

이 경우 a_3 과 a_5 의 조합이 서로 상쇄되어야 하지만 이를 만족하는 경우는 존재하지 않는다.

(iii) a_3 을 포함하지 않고 a_1, a_4, a_5 의 3개의 조합으로 전구가 켜진다고 하자.

이 경우 a_2 와 a_3 의 조합이 서로 상쇄되어야 한다.

$a_2 = 1$ 와 $a_3 = 1$ 일 때 상쇄가 가능하지만 a_1, a_4, a_5 의 조합으로 모든 전구의 불이 켜지는 순서쌍 (a_1, a_4, a_5) 는 $(1, 1, 6), (1, 6, 1)$ 뿐이다.

이는 $a_1 \neq a_2$ 에 모순이다.

다른 풀이

a_i 의 값에 따라 전구의 전원 버튼을 누르는 것을 A_i , 모든 전구의 전원 버튼을 한 번씩 누르는 것을 K 라 하자.

$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5$ 의 결과는

$K \rightarrow K \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5$ 와 같고

$A_1 \rightarrow K \rightarrow A_2 \rightarrow K \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5$ 와 같다.

이때 $A_1 \rightarrow K, A_2 \rightarrow K$ 를 각각 B_1, B_2 라 하면 B_1 (또는 B_2)는 a_1 (또는 a_2)보다 큰 숫자가 적힌 모든 전구의 전원 버튼을 한 번

씩 누르는 것과 같으므로 A_4, A_5 와 같아진다.

또, a_1, a_2, a_4, a_5 의 값에 관계없이 1이 적힌 전구의 전원 버튼을 누르지 않으므로 a_3 은 1이어야 한다.

2가 적힌 전구의 전원 버튼은 최소 한 번 눌러야 하고, 6이 적힌 전구의 전원 버튼은 네 번 누르지 않아야 하므로 1과 6이 반드시 포함되어야 한다.

이때 $a_3 = 1$ 이고 a_1, a_2, a_4, a_5 중 1, 6인 두 수에 의하여 모든 전구의 불이 켜지므로 나머지 두 수는 서로 같은 값으로 상쇄되어야 한다.

(i) 같은 숫자가 3개인 경우의 수는

순서쌍 (a_1, a_2, a_4, a_5) 에서

$(1, 1, 1, 6), (1, 1, 6, 1), (1, 6, 1, 1), (6, 1, 1, 1),$

$(1, 6, 6, 6), (6, 1, 6, 6), (6, 6, 1, 6), (6, 6, 6, 1)$

이므로 8

(ii) 1과 6이 아닌 서로 같은 숫자가 2개인 경우의 수는

$(2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)$ 이므로 4

이때 순서쌍 (a_1, a_2, a_4, a_5) 에서 서로 같은 숫자인

a_i ($i=1, 2, 4, 5$)를 고르는 경우의 수는

$${}^4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

1과 6인 a_i ($i=1, 2, 4, 5$)를 고르는 경우의 수는

$${}_2P_2 = 2$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$4 \times 6 \times 2 = 48$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$8 + 48 = 56$$

001

$a_{ij} = \begin{cases} i+3j & (i \geq j) \\ 2ij & (i < j) \end{cases}$ 에 $i=1, 2, j=1, 2$ 를 차례대로 대입하면

$$a_{11} = 1 + 3 \times 1 = 4, \quad a_{12} = 2 \times 1 \times 2 = 4,$$

$$a_{21} = 2 + 3 \times 1 = 5, \quad a_{22} = 2 + 3 \times 2 = 8$$

따라서 $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ 이므로 행렬 A 의 모든 성분의 합은

$$4 + 4 + 5 + 8 = 21$$

답 21

002

정거장 2에서 세 정거장 1, 2, 3으로 가는 노선의 수는 각각 1, 0, 2이므로

$$a_{21} = 1, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = 2$$

따라서 행렬 A 의 제2행의 모든 성분의 합은

$$1 + 0 + 2 = 3$$

답 3

003

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x - y = 4 \text{에서 } y = x - 4 \quad \dots \text{㉠}$$

$$x^2 + y^2 = 10 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$x^2 + (x - 4)^2 = 10, \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0 \quad \therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$x = 1 \text{일 때 } y = -3, \quad x = 3 \text{일 때 } y = -1$$

$$\therefore |x| + |y| = 1 + 3 = 4$$

답 4

004

$$2X - (A + B) = 2(A - 3B) \text{에서}$$

$$2X = 2(A - 3B) + (A + B) = 3A - 5B$$

$$\therefore X = \frac{3}{2}A - \frac{5}{2}B$$

$$= \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & \frac{15}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

답 ③

005

$$xA + yB = C \text{에서}$$

$$x \begin{pmatrix} a & 5 \\ -1 & b \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b & 9 \\ 3 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 11 & -24 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} ax + by & 5x + 9y \\ -x + 3y & bx - ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 11 & -24 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$ax + by = 10 \quad \dots \text{㉠}$$

$$5x + 9y = 17 \quad \dots \text{㉡}$$

$$-x + 3y = 11 \quad \dots \text{㉢}$$

$$bx - ay = -24 \quad \dots \text{㉣}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x = -2, y = 3$

이것을 ㉠, ㉣에 대입하면

$$-2a + 3b = 10, \quad -3a - 2b = -24$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 4, b = 6$

$$\therefore b - a = 6 - 4 = 2$$

답 2

006

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$B = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 2-a \\ 5-b & 2 \end{pmatrix}$$

$AB = O$ 에서

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 2-a \\ 5-b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -ab + 5a + 8 & a + 2 \\ 10b - 10 & -ab + 2b - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a + 2 = 0, \quad 10b - 10 = 0$$

$$\therefore a = -2, \quad b = 1$$

따라서 $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 2 - (-2) \\ 5 - 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로 행렬 B 의 모든

성분의 합은

$$4 + 2 + 2 + 1 = 9$$

답 ①

007

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} x^2 + y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x^2 + y^2 = 5, \quad 2xy = 4$$

$$\therefore (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 4 = 9$$

이때 $x > 0, y > 0$ 이므로 $x + y = 3$

$$\therefore x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 3^3 - 3 \times 2 \times 3 = 9$$

답 9

008

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{에서 } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} f(a) \\ 3f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$f(a)=0, 3f(a)=0$$

$$\therefore f(a)=0$$

이때 주어진 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-1, 4$ 이므로 $f(a)=0$ 을 만족시키는 a 의 값은 $-1, 4$ 이다.

따라서 구하는 합은

$$-1+4=3$$

답 ③

009

실수 a, b 에 대하여 $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3b \\ 2a+4b \end{pmatrix}$ 가 성립한

다고 하면 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a+3b=1, 2a+4b=3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{5}{2}, b=-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \therefore A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= A \left[\frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{5}{2} A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 22 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

즉, 구하는 $(2, 1)$ 성분은 4이다.

답 4

다른 풀이

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 라 하면

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a+2b=2 \quad \text{..... ㉠}$$

$$c+2d=6 \quad \text{..... ㉡}$$

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+4b \\ 3c+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 22 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$3a+4b=-2 \quad \text{..... ㉢}$$

$$3c+4d=22 \quad \text{..... ㉣}$$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-6, b=4$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $c=10, d=-2$

따라서 $A = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$ 이므로

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

즉, 구하는 $(2, 1)$ 성분은 4이다.

010

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2+1 & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta & 1+\beta^2 \end{pmatrix}$$

이차방정식 $x^2-4x-3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4, \alpha\beta=-3 \quad \text{[다른 풀이]}$$

따라서 행렬 A^2 의 모든 성분의 합은

$$(\alpha^2+1) + (\alpha+\beta) + (\alpha+\beta) + (1+\beta^2)$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha+\beta) + 2$$

$$= (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta + 2(\alpha+\beta) + 2$$

$$= 4^2 - 2 \times (-3) + 2 \times 4 + 2$$

$$= 32$$

답 ⑤

다른 풀이

이차방정식 $x^2-4x-3=0$ 의 두 실근이 α, β 이므로

$$\alpha^2-4\alpha-3=0, \beta^2-4\beta-3=0$$

$$\therefore \alpha^2=4\alpha+3, \beta^2=4\beta+3$$

따라서 행렬 A^2 의 모든 성분의 합은

$$(\alpha^2+1) + (\alpha+\beta) + (\alpha+\beta) + (1+\beta^2)$$

$$= (4\alpha+3+1) + (\alpha+\beta) + (\alpha+\beta) + (1+4\beta+3)$$

$$= 6(\alpha+\beta) + 8$$

$$= 6 \times 4 + 8$$

$$= 32$$

011

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

⋮

$$\therefore A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix} \text{ (단, } n \text{은 자연수이다.)}$$

$$\text{이때 } A^{2n-1} - A^{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$A - A^2 + A^3 - A^4 + \dots + A^{99} - A^{100}$$

$$= (A - A^2) + (A^3 - A^4) + \dots + (A^{99} - A^{100})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 50 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -100 & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 $a=0, b=0, c=-100, d=0$ 이므로
 $a+b+c+d=-100$

답 -100

012

$$A^2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 2 \\ -2 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 2 \\ -2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

$$A^3 = A^2 A = -EA = -A$$

$$A^4 = A^3 A = -AA = -A^2 = E$$

따라서 n 이 4의 배수일 때 $A^n = E$ 의 꼴이므로 100 이하의 자연수 n 의 개수는 25이다.

답 25

다른 풀이

$A = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 2 \\ -2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ 에서 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$A^2 - (-\sqrt{3} + \sqrt{3})A + (-3 + 4)E = O$$

$$A^2 + E = O$$

$$\therefore A^2 = -E$$

$$A^3 = A^2 A$$

$$= -EA = -A$$

$$A^4 = A^3 A = -AA$$

$$= -A^2 = E$$

따라서 n 이 4의 배수일 때 $A^n = E$ 의 꼴이므로 100 이하의 자연수 n 의 개수는 25이다.

013

$A+B=E$ 의 양변의 왼쪽에 A 를 곱하면

$$A^2 + AB = A$$

$$\therefore A^2 = A - E \quad (\because AB = E)$$

위의 식의 양변에 A 를 곱하면

$$A^3 = A^2 - A$$

$$= (A - E) - A = -E$$

$A+B=E$ 의 양변의 오른쪽에 B 를 곱하면

$$AB + B^2 = B$$

$$\therefore B^2 = B - E \quad (\because AB = E)$$

위의 식의 양변에 B 를 곱하면

$$B^3 = B^2 - B$$

$$= (B - E) - B = -E$$

$$\begin{aligned} \therefore A^{1000} + B^{1000} &= (A^3)^{333} A + (B^3)^{333} B \\ &= (-E)^{333} A + (-E)^{333} B \\ &= -A - B \\ &= -(A+B) \\ &= -E \end{aligned}$$

답 ①

014

$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ 이므로

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= (A+B)^2 - (AB+BA) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -11 & 14 \\ 13 & -17 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14 & -13 \\ -14 & 17 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (A-B)^2 &= A^2 - AB - BA + B^2 \\ &= A^2 + B^2 - (AB+BA) \\ &= \begin{pmatrix} 14 & -13 \\ -14 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -11 & 14 \\ 13 & -17 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 25 & -27 \\ -27 & 34 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 행렬 $(A-B)^2$ 의 모든 성분의 합은
 $25 + (-27) + (-27) + 34 = 5$

답 5

015

ㄱ. $A+B=O$ 이면 $B=-A$ 이므로

$$AB = A(-A) = -A^2,$$

$$BA = (-A)A = -A^2$$

$$\therefore AB = BA \quad (\text{참})$$

ㄴ. [반례] $A=O, B=O$ 이면 $AB=B$ 이지만 $A \neq E$ 이다. (거짓)

ㄷ. $A(A-B)=O$ 에서

$$A^2 = AB$$

위의 식의 양변의 오른쪽에 B 를 곱하면

$$A^2 B = AB^2,$$

$$A(AB) = (AB)B$$

$$\therefore A = B \quad (\because AB = E) \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

016

B 고등학교 남학생의 80%, 여학생의 30%가 드럼을 배우므로
 B 고등학교에서 드럼을 배우는 모든 학생 수는

$$130 \times 0.8 + 140 \times 0.3$$

이때

$$\begin{aligned} PQ &= \begin{pmatrix} 120 & 160 \\ 130 & 140 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 120 \times 0.2 + 160 \times 0.7 & 120 \times 0.8 + 160 \times 0.3 \\ 130 \times 0.2 + 140 \times 0.7 & 130 \times 0.8 + 140 \times 0.3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

이므로 B 고등학교에서 드럼을 배우는 모든 학생 수는 행렬 PQ 의 $(2, 2)$ 성분이다.

답 ③

017

(i) $A \neq kE$ (k 는 실수)일 때

케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$a+d=5$$

(ii) $A=kE$ (k 는 실수)일 때
 $A^2-5A-6E=O$ 에서 $(kE)^2-5 \times kE-6E=O$
 $(k^2-5k-6)E=O, (k+1)(k-6)E=O$
 $\therefore k=-1$ 또는 $k=6$
 따라서 $A=-E$ 또는 $A=6E$ 이므로

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ 또는 } A=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore a+d=-2 \text{ 또는 } a+d=12$$

(i), (ii)에서 $a+d$ 의 최댓값은 12이다.

답 12

018

조건 (가), (나)에서 $A=\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & z & 0 \end{pmatrix}$ (x, y, z 는 정수)라 하자.

조건 (나)에서 모든 성분의 제곱의 합이 18이므로

$$2(x^2+y^2+z^2)=18$$

$$\therefore x^2+y^2+z^2=9$$

위의 식을 만족시키는 세 정수 x^2, y^2, z^2 을 순서쌍 (x^2, y^2, z^2) 으로 나타내면

$(1, 4, 4), (4, 1, 4), (4, 4, 1), (0, 0, 9), (0, 9, 0), (9, 0, 0)$ 이다.

(i) $(1, 4, 4)$ 또는 $(4, 1, 4)$ 또는 $(4, 4, 1)$ 인 경우

제공하여 1이 되는 정수는 $-1, 1$ 의 2개이고, 제공하여 4가 되는 정수는 $-2, 2$ 의 2개이므로 행렬 A 의 개수는

$$3 \times (2 \times 2 \times 2) = 24$$

(ii) $(0, 0, 9), (0, 9, 0), (9, 0, 0)$ 인 경우

제공하여 0이 되는 정수는 0의 1개이고, 제공하여 9가 되는 정수는 $-3, 3$ 의 2개이므로 행렬 A 의 개수는

$$3 \times (1 \times 1 \times 2) = 6$$

(i), (ii)에서 구하는 행렬 A 의 개수는

$$24+6=30$$

답 ③

019

$a_{31}a_{32}a_{33}=336, a_{12}a_{22}a_{32}=105$ 에서

$$a_{32} = \frac{336}{a_{31}a_{33}} = \frac{105}{a_{12}a_{22}} \rightarrow \frac{336=2^4 \times 3 \times 7}{105=3 \times 5 \times 7}$$

이므로 a_{32} 는 336과 105의 최대공약수인 21의 약수이다.

이때 a_{32} 는 2 이상 10 이하의 자연수이므로 a_{32} 는 3 또는 7이고,

a_{32} 가 3이면 $a_{31}a_{33}=112$ 를 만족시키는 2 이상 10 이하의 자연수 a_{31}, a_{33} 이 없으므로 $a_{32}=7$ 이다.

$$\therefore a_{31}a_{33}=48, a_{12}a_{22}=15$$

이때 $a_{31}=8, a_{33}=6$ 또는 $a_{31}=6, a_{33}=8$ 이고, $a_{12}=5, a_{22}=3$ 또는 $a_{12}=3, a_{22}=5$ 이다.

$a_{11}a_{21}a_{31}=48$ 에서 $a_{31}=8$ 이면 $a_{11}a_{21}=6$ 이고,

이를 만족시키는 2 이상 10 이하의 자연수는 2와 3이지만 3은 a_{12} 또는 a_{22} 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore a_{31}=6, a_{33}=8$$

$a_{21}a_{22}a_{23}=180$ 에서 $a_{22}=3$ 이면 $a_{21}a_{23}=60$ 이고, 이를 만족시키는 2 이상 10 이하의 자연수는 6과 10이지만 6은 a_{31} 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore a_{12}=3, a_{22}=5$$

즉, $a_{21}a_{23}=36$ 이고, 이를 만족시키는 2 이상 10 이하의 서로 다른 두 자연수는 4와 9이다.

이때 $a_{11}a_{21}a_{31}=48$ 이므로 a_{21} 은 48의 약수이다.

$$\therefore a_{21}=4, a_{23}=9$$

$$a_{11}a_{21}a_{31}=48 \text{에서 } a_{11}=2$$

$$a_{13}a_{23}a_{33}=720 \text{에서 } a_{13}=10$$

$$\text{따라서 } A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=2+5+8=15$$

답 15

020

$a_{ij}=3i-j$ 이므로

$$a_{11}=3 \times 1 - 1 = 2, a_{12}=3 \times 1 - 2 = 1,$$

$$a_{21}=3 \times 2 - 1 = 5, a_{22}=3 \times 2 - 2 = 4$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

이때 $A=B$ 이므로

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z & x^2+y^2 \\ z^2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$x+y+z=2, x^2+y^2=1, z^2=5 \quad \text{[다른 풀이]}$$

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \text{에서}$$

$$2^2 = 1+5+2(xy+yz+zx)$$

$$\therefore xy+yz+zx = -1$$

답 -1

[다른 풀이]

$z^2=5$ 에서 $z=\pm\sqrt{5}$ 이므로 $x+y+z=2$ 에서

$$x+y=2 \mp \sqrt{5} \quad \text{(복호동순)}$$

$$x^2+y^2=1 \text{에서 } (x+y)^2-2xy=1$$

$$(2 \mp \sqrt{5})^2 - 2xy = 1 \quad \therefore xy = 4 \mp 2\sqrt{5}$$

$$\therefore xy+yz+zx = xy+z(x+y)$$

$$= 4 \mp 2\sqrt{5} \pm \sqrt{5}(2 \mp \sqrt{5}) = -1$$

021

$2A-3B=A+kB$ 에서 $A=(k+3)B$

$$\therefore a_{ij}=(k+3)b_{ij}$$

$$=(k+3) \times ka_{ij} \quad (\because b_{ij}=ka_{ij})$$

$$=(k^2+3k)a_{ij}$$

즉, $(k^2+3k-1)a_{ij}=0$ 이고 $A \neq O$ 이므로

$$k^2+3k-1=0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k 의 값의 합은 -3 이다.

답 ①

022

$a_{ij} + a_{ji} = 0$ 에서 $a_{ij} = -a_{ji}$ 이므로

$$a_{11} = 0, a_{12} = -a_{21}, a_{22} = 0$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$b_{ij} - b_{ji} = 0$ 에서 $b_{ij} = b_{ji}$ 이므로

$$b_{12} = b_{21}$$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2A - B &= 2 \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -b_{11} & 2a_{12} - b_{12} \\ -2a_{12} - b_{12} & -b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$-b_{11} = 2, -b_{22} = 1 \text{에서 } b_{11} = -2, b_{22} = -1$$

$$2a_{12} - b_{12} = 1, -2a_{12} - b_{12} = 5$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a_{12} = -1, b_{12} = -3$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

따라서

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

이므로 행렬 $A + 2B$ 의 (1, 2) 성분은 -7 이다.

답 -7

023

1×2 행렬과 2×1 행렬의 곱은 1×1 행렬, 즉 성분이 1개인 행렬이 된다.

$$(n-1 \ n+9) \begin{pmatrix} n^2-10n+10 \\ n-1 \end{pmatrix}$$

$$= (n-1)(n^2-10n+10) + (n+9)(n-1)$$

$$= (n-1)\{(n^2-10n+10) + (n+9)\}$$

$$= (n-1)(n^2-9n+19)$$

$(n-1)(n^2-9n+19)$ 가 소수가 되려면 $n-1=1$ 이고

$n^2-9n+19$ 의 값이 소수이거나 $n^2-9n+19=1$ 이고 $n-1$ 의 값이 소수이어야 한다.

(i) $n-1=1$ 일 때

$$n=2 \text{이고}$$

$$n^2-9n+19=2^2-9 \times 2+19=5 \text{는 소수이다.}$$

(ii) $n^2-9n+19=1$ 일 때

$$n^2-9n+18=0 \text{에서 } (n-3)(n-6)=0$$

$$\therefore n=3 \text{ 또는 } n=6$$

$n=3$ 이면 $n-1=2$ 는 소수이다.

$n=6$ 이면 $n-1=5$ 는 소수이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 n 의 값은 2, 3, 6이므로 구하는 합은

$$2+3+6=11$$

답 11

024

$B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ 라 하면 조건 (가)에서

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-q \\ r-s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

즉, $p-q=0, r-s=0$ 에서 $p=q, r=s$ 이므로

$$B = \begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}$$

조건 (나)에서

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+r & p+r \\ a(p+r) & a(p+r) \end{pmatrix},$$

$$2A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2a & 2a \end{pmatrix}$$

이고, $AB=2A$ 이므로

$$\begin{pmatrix} p+r & p+r \\ a(p+r) & a(p+r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2a & 2a \end{pmatrix}$$

$$\therefore p+r=2$$

..... ㉠

또, 조건 (나)에서

$$BA = \begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(1+a) & p(1+a) \\ r(1+a) & r(1+a) \end{pmatrix},$$

$$6B = 6 \begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6p & 6p \\ 6r & 6r \end{pmatrix}$$

이고, $BA=6B$ 이므로

$$\begin{pmatrix} p(1+a) & p(1+a) \\ r(1+a) & r(1+a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6p & 6p \\ 6r & 6r \end{pmatrix}$$

$$\therefore p=0, r=0 \text{ 또는 } 1+a=6$$

이때 $p=0, r=0$ 이면 ㉠을 만족하지 않으므로

$$1+a=6 \quad \therefore a=5$$

따라서

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+p & 1+p \\ a+r & a+r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

이므로 행렬 $A+B$ 의 (1, 2) 성분과 (2, 1) 성분의 합은

$$\begin{aligned} (1+p) + (a+r) &= 1+a+(p+r) \\ &= 1+5+2=8 \end{aligned}$$

답 8

025

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} 2a-\sqrt{3}b & -\sqrt{3}a+2b \\ 2b-\sqrt{3}a & -\sqrt{3}b+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$2a-\sqrt{3}b=1, -\sqrt{3}a+2b=0$$

$$-\sqrt{3}a+2b=0 \text{에서 } b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\text{이것을 } 2a-\sqrt{3}b=1 \text{에 대입하면 } 2a-\frac{3}{2}a=1$$

$$\therefore a=2, b=\sqrt{3}$$

한편, $\overline{AB}^2 = \overline{AD} \times \overline{AC}$ 이므로

$$2^2 = \sqrt{3} \times \overline{AC}$$

$$\therefore \overline{AC} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$$

$$= \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2^2 = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \overline{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{3} (\because \overline{BC} > 0)$$

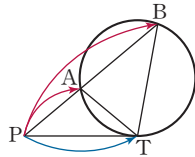
답 ②

참고

원의 할선과 접선의 길이 사이의 관계

오른쪽 그림과 같이 원 밖의 한 점 P에서 그 원에 그은 접선과 할선이 원과 만나는 점을 각각 T, A, B라 하면

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$$



026

$A+B=O$ 에서

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & b-8 \\ a-8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a+b-8 \\ a+b-8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

즉, $a+b-8=0$ 이므로 $b=-a+8$

..... ㉠

$A^2=kE$ 에서

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+ab & 0 \\ 0 & ab+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$\therefore 1+ab=k$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$k=1+a(-a+8)=-a^2+8a+1=-(a-4)^2+17$$

따라서 k 의 최댓값은 17이다.

답 17

027

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ m-2 & 2 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} m & 0 \\ m-2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ m-2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ m^2-4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ m^2-4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ m-2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^3 & 0 \\ m^3-8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} m^3 & 0 \\ m^3-8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ m-2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^4 & 0 \\ m^4-16 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4A = \begin{pmatrix} m^4 & 0 \\ m^4-16 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ m-2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^5 & 0 \\ m^5-32 & 32 \end{pmatrix}$$

⋮

$$\therefore A^n = \begin{pmatrix} m^n & 0 \\ m^n-2^n & 2^n \end{pmatrix}$$

행렬 A^n 의 모든 성분의 합은

$$m^n + 0 + (m^n - 2^n) + 2^n = 2m^n$$

따라서 $2m^n = 2^{25}$ 에서 $m^n = 2^{24}$ 을 만족시키는 자연수 n 은

$$24 = 2^3 \times 3 \text{의 약수이므로 그 개수는}$$

$$(3+1) \times (1+1) = 8$$

답 8

028

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{이므로 } A = A^1 \text{이라 하면}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$\therefore A^1 = A^5 = A^9 = A^{13} = A^{17},$$

$$A^2 = A^6 = A^{10} = A^{14} = A^{18},$$

$$A^3 = A^7 = A^{11} = A^{15} = A^{19},$$

$$A^4 = A^8 = A^{12} = A^{16} = A^{20}$$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$${}_5C_2 \times 4 = 10 \times 4 = 40$$

답 40

029

$$\neg. \text{ [반례]} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{이면}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

이므로

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(A-B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{그런데 } AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$AB \neq O$ (거짓)

⋮. $A^2 = E, B^2 = B$ 이면

$$(ABA)^2 = ABAABA = ABA^2BA$$

$$= ABBA = AB^2A$$

$$= ABA \text{ (참)}$$

㉠. $A(A+E) = E$ 이면

$$A^2 + A = E$$

위의 식의 양변의 오른쪽에 행렬 B 를 곱하면

$$A^2B + AB = B, AAB + AB = B$$

이때 $AB = -E$ 이면

$$A(-E) + (-E) = B, B = -A - E$$

$$\begin{aligned} \therefore B^2 &= (-A-E)^2 \\ &= A^2 + 2A + E \\ &= (A^2 + A) + A + E \\ &= E + A + E \\ &= A + 2E \text{ (참)} \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 5

030

(n+1)번의 시행 후

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a_n + b_n\right) \\ &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ b_{n+1} &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}a_n + b_n\right) \\ &= \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n \end{aligned}$$

이것을 행렬을 이용하여 나타내면

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

따라서 p=2, q=1, r=1, s=2이므로

$$p+q+r+s=2+1+1+2=6$$

답 6

031

1월 1일의 금고의 비밀번호는

$$1169$$

1월 2일의 금고의 비밀번호는 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$ 에서

$$1181$$

1월 3일의 금고의 비밀번호는 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$ 에서

$$1103$$

1월 4일의 금고의 비밀번호는 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ 에서

$$1125$$

1월 5일의 금고의 비밀번호는 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ 에서

$$1147$$

1월 6일의 금고의 비밀번호는 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ 에서

$$1169$$

즉, 금고의 비밀번호는 5일마다 같은 번호가 반복된다.

따라서 23=5×4+3이므로 1월 23일의 비밀번호는 1월 3일의 비밀번호와 같은 1103이다.

답 1103

참고

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix}$ 에서 a=b=10이므로 1행 1열과 1행 2열의 성분은 항상 1로 같고, 2행 1열과 2행 2열의 성분은 2씩 증가하므로 5일마다 같은 번호가 반복됨을 알 수 있다.

032

ㄱ. $2A = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$ 이므로

$$\begin{aligned} D(2A) &= 2a \times 2d - 2b \times 2c \\ &= 4(ad - bc) \end{aligned}$$

$$D(A) = ad - bc \text{이므로}$$

$$2D(A) = 2(ad - bc)$$

이때 $D(A) \neq 0$, 즉 $ad - bc \neq 0$ 이면

$$D(2A) \neq 2D(A) \text{ (거짓)}$$

ㄴ. $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ 라 하면

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

이므로

$$\begin{aligned} D(AB) &= (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg) \\ &= aecf + aedh + bgcf + bgdh \\ &\quad - afce - afdg - bhce - bhdg \end{aligned}$$

$$= aedh - afdg + bgcf - bhce$$

$$= ad(eh - fg) - bc(eh - fg)$$

$$= (ad - bc)(eh - fg)$$

$$= D(A)D(B) \text{ (참)}$$

ㄷ. $D(A) = 0$ 이면 $ad - bc = 0$ 이므로 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$A^2 - (a+d)A = O$$

$$\therefore A^2 = (a+d)A$$

$$A^3 = A^2A$$

$$= (a+d)AA = (a+d)A^2$$

$$= (a+d) \times (a+d)A = (a+d)^2A$$

$$A^4 = A^3A = (a+d)^2AA = (a+d)^2A^2$$

$$= (a+d)^2 \times (a+d)A = (a+d)^3A$$

즉, $A^n = (a+d)^{n-1}A$, $A^{n+2} = (a+d)^{n+1}A$ 이고 $a+d > 1$ 이

므로 $A^n \neq A^{n+2}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 2

033

일등급의 메모장

모든 성분의 합을 구해야 하므로 각 행렬의 성분의 합에 대한 규칙성을 파악하여 계산하면 된다.

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \text{이라 하면 } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 13 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 14 & 18 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ 19 & 23 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 18 & 22 \\ 24 & 28 \end{pmatrix}, \dots$$

이고, $n \geq 2$ 이면 n의 값이 1씩 커질 때마다 a_n, b_n, c_n, d_n 의 값은 5씩 커지므로

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 5n-7 & (n \geq 2) \end{cases}, b_n = \begin{cases} 2 & (n=1) \\ 5n-3 & (n \geq 2) \end{cases},$$

$$c_n = \begin{cases} 4 & (n=1) \\ 5n-1 & (n \geq 2) \end{cases}, d_n = \begin{cases} 8 & (n=1) \\ 5n+3 & (n \geq 2) \end{cases}$$

따라서 행렬 A_n 의 모든 성분의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \begin{cases} 15 & (n=1) \\ 20n-8 & (n \geq 2) \end{cases} \rightarrow A_n = \begin{pmatrix} 5n-7 & 5n-3 \\ 5n-1 & 5n+3 \end{pmatrix} \text{ (단, } n \geq 2 \text{)}$$

이므로 구하는 값은

$$S_{10} = 20 \times 10 - 8 = 192$$

답 192

034

일등급의 메모장

행렬을 몇 개 제시한 뒤, 이에 대한 성질을 발견하려면 문제에서 요구하는대로 합, 곱 등의 개수를 하나씩 늘려서 연산을 하여 규칙성을 발견하는 것이 중요하다.

$$\text{ㄱ. [반례]} M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{이므로 성분 중}$$

홀수인 것이 존재한다. (거짓)

$$\text{ㄴ. } M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} &= 2 \times \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2(M_1 + M_2 + M_3 + M_4) + M_1 \\ &= 3M_1 + 2M_2 + 2M_3 + 2M_4 \end{aligned}$$

$$\therefore m = 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

따라서 조건을 만족시키는 m 의 값이 존재한다. (참)

ㄷ. 주어진 조건을 만족시키려면 $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ 의 모든 성분이 홀수이어야 한다.

(i) $n=1$ 인 경우

M_1, M_2, M_3, M_4 모두 0인 성분이 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n=2$ 인 경우

두 행렬이 서로 같을 때 $2M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 와 같이 모든 성분이

홀수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

ㄱ에서 구한 바와 같이 서로 다른 임의의 두 행렬을 더하면 짝수인 성분이 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $n=3$ 인 경우

세 행렬이 서로 같을 때 $3M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ 과 같이 0인 성분이

존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.

두 행렬이 서로 같고 남은 하나의 행렬이 다를 때는

$2M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ 과 같이 짝수인 성분이 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.

세 행렬이 모두 다를 때 $M_1 + M_2 + M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 과 같이

짝수인 성분이 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $n=4$ 인 경우

ㄴ에서 구한 바와 같이 $M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ 으로

모든 성분이 홀수인 것이 가능하다.

따라서 조건을 만족시키는 n 의 최솟값은 4이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

035

일등급의 메모장

모든 자연수 n 과 제곱수가 아닌 양의 유리수 m 에 대하여 a_n, b_n 이 $(a + b\sqrt{m})^n = a_n + b_n\sqrt{m}$

일 때,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} a & bm \\ b & a \end{pmatrix}$$

이다. (단, a, b, a_n, b_n 은 유리수이다.)

확장

$$a_1 + b_1\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} &= (1 + \sqrt{2})^{n+1} \\ &= (1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^n \\ &= (1 + \sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2}) \\ &= (a_n + 2b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{2} \end{aligned}$$

이고 a_n, b_n 이 유리수이므로 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n, b_{n+1} = a_n + b_n, a_1 = 1, b_1 = 1$$

이고, 이것을 행렬로 나타내면 $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ 이다.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{이라 하면}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} &= M \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{pmatrix} a_{10} \\ b_{10} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_9 \\ b_9 \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} a_8 \\ b_8 \end{pmatrix} = \dots = M^8 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = M^8 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{이때 } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M^4 &= M^2 M^2 \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 24 \\ 12 & 17 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^8 &= M^4 M^4 \\ &= \begin{pmatrix} 17 & 24 \\ 12 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 24 \\ 12 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 577 & 816 \\ 408 & 577 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 행렬 A 가 $M^8 = \begin{pmatrix} 577 & 816 \\ 408 & 577 \end{pmatrix}$ 일 때, $\begin{pmatrix} a_{10} \\ b_{10} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 를 만족시킨다.

$$\therefore \frac{3}{2} a_{21} + a_{22} = \frac{3}{2} \times 408 + 577 = 1189$$

답 1189

참고

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \text{이면 } \begin{pmatrix} a_{n+k} \\ b_{n+k} \end{pmatrix} = M^k \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \text{이다.}$$

특히, $n=10$ 이면 $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = M^k \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ 이다.

다른 풀이 확장

$$\begin{pmatrix} a_{10} \\ b_{10} \end{pmatrix} = M^{10-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{이고}$$

$$\begin{pmatrix} a_{10} \\ b_{10} \end{pmatrix} = M^8 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = M^8 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{이다.}$$

$$\text{이때 } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{이라 하면}$$

$$K^2 - (0+0)K + (0 \times 0 - 2 \times 1)E = 0$$

$$\text{즉, } K^2 = 2E$$

$$M = E + K$$

이므로

$$M^2 = (E + K)^2 \quad \text{참고}$$

$$= E + 2K + K^2 = 3E + 2K$$

$$M^4 = (M^2)^2 = (3E + 2K)^2$$

$$= 9E + 12K + 4K^2 = 17E + 12K$$

$$M^8 = (M^4)^2 = (17E + 12K)^2$$

$$= 289E + 408K + 144K^2 = 577E + 408K$$

$$= \begin{pmatrix} 577 & 0 \\ 0 & 577 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 816 \\ 408 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 577 & 816 \\ 408 & 577 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A 가 $M^8 = \begin{pmatrix} 577 & 816 \\ 408 & 577 \end{pmatrix}$ 일 때, $\begin{pmatrix} a_{10} \\ b_{10} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 를 만족시킨다.

$$\therefore \frac{3}{2}a_{21} + a_{22} = \frac{3}{2} \times 408 + 577 = 1189$$

참고 확장

무리수의 제곱과 비교해 보자.

$$(1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$(1 + \sqrt{2})^4 = (3 + 2\sqrt{2})^2$$

$$= 9 + 12\sqrt{2} + 8 = 17 + 12\sqrt{2}$$

$$(1 + \sqrt{2})^8 = (17 + 12\sqrt{2})^2$$

$$= 289 + 408\sqrt{2} + 288 = 577 + 408\sqrt{2}$$

036

일등급의 메모장

상수 a 와 다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(x)$ 를 $(x-a)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $f'(a)(x-a) + f(a)$ 이다.

이때 다항식 $f(x) = px^n + qx^{n-1} + \dots + rx + s$ 에 대하여

$$f'(x) = npx^{n-1} + (n-1)qx^{n-2} + \dots + r \text{이다.} \quad \text{확장}$$

$$a_{ij} = -a_{ji} \text{에서 } a_{11} = -a_{11}, a_{12} = -a_{21}, a_{22} = -a_{22} \text{이므로}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \text{이라 하자.}$$

또, $b_{ij} = \begin{cases} i+j & (i=j) \\ i-j & (i \neq j) \end{cases}$ 에 $i=1, 2, j=1, 2$ 를 차례대로 대입하면

$$b_{11} = 1+1=2, b_{12} = 1-2 = -1,$$

$$b_{21} = 2-1=1, b_{22} = 2+2=4$$

$$\text{이므로 } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{이다.}$$

케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$A^2 + a^2E = 0, B^2 - 6B + 9E = (B - 3E)^2 = 0 \text{이므로} \quad \text{참고}$$

$$B^4 - 12B^3 + 45B^2 - 54B - 18E \quad \text{다른 풀이}$$

$$= B(B^3 - 12B^2 + 45B - 54E) - 18E$$

$$= B(B - 6E)(B^2 - 6B + 9E) - 18E$$

$$= B(B - 6E)(B - 3E)^2 - 18E$$

$$= -18E$$

$$\text{이므로 } A^2 = -a^2E = -18E \text{에서 } a^2 = 18$$

$$\therefore a = \pm 3\sqrt{2}$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & 3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ 또는 } A = \begin{pmatrix} 0 & -3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

따라서

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$$

이므로 행렬 C 의 모든 성분의 합은

$$18 + 18 = 36$$

답 36

참고

$BE = EB$ 이므로 두 행렬 B, E 에 대하여 곱셈공식이 성립한다.

다른 풀이 확장

$f(x) = x^4 - 12x^3 + 45x^2 - 54x - 18$ 이라 하면

$$f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 90x - 54$$

즉, $f(3) = -18, f'(3) = 0$ 이므로 $f(x)$ 를 $(x-3)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$0 \times (x-3) - 18 = -18$$

즉, $f(x) = (x-3)^2 Q(x) - 18$ ($Q(x)$ 는 다항식)이므로

$$B^4 - 12B^3 + 45B^2 - 54B - 18E = (B - 3E)^2 Q(B) - 18E = -18E$$

$$A^2 = -a^2E = -18E \text{에서}$$

$$a^2 = 18 \quad \therefore a = \pm 3\sqrt{2}$$

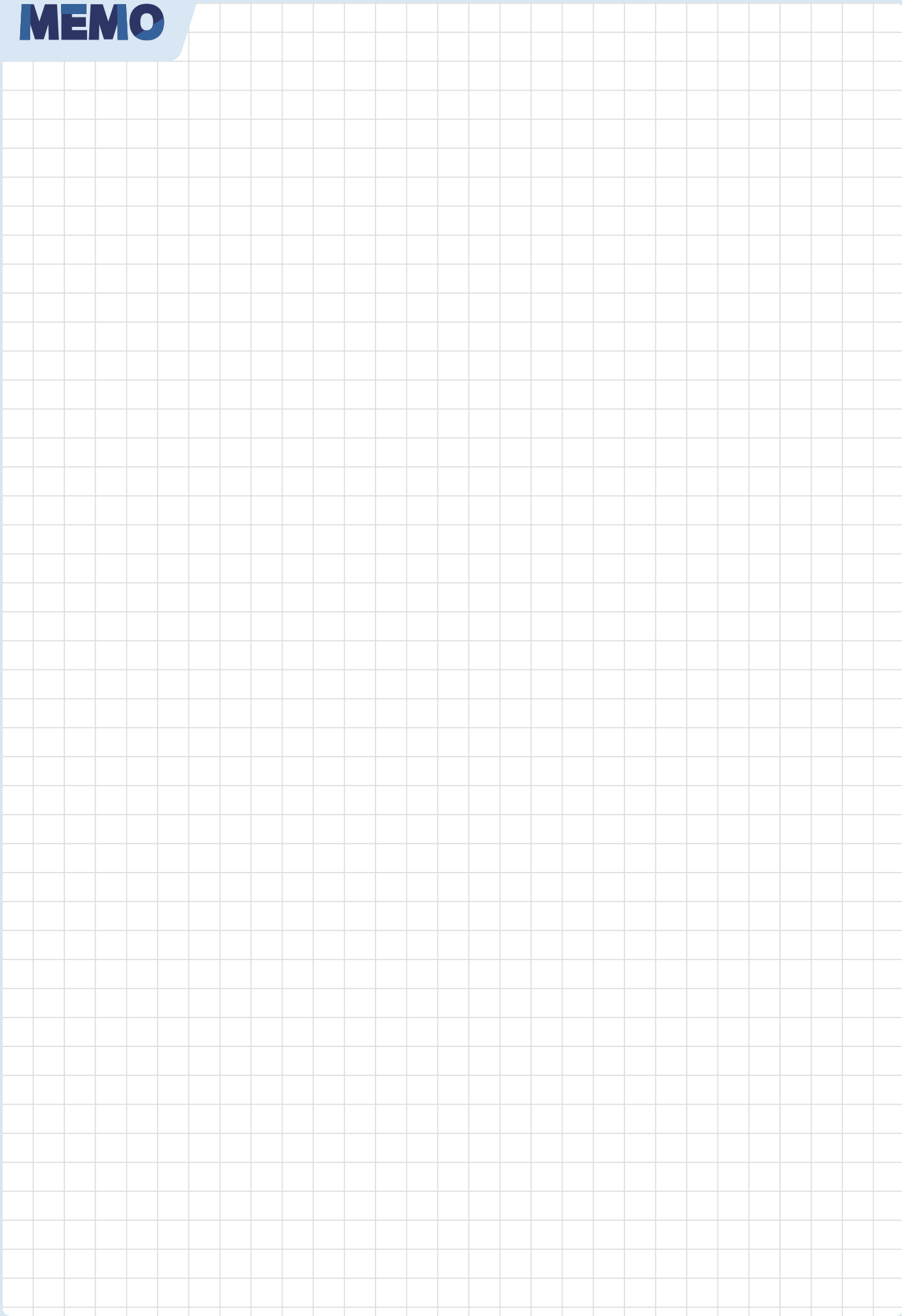
$$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & 3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ 또는 } A = \begin{pmatrix} 0 & -3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 $C = \begin{pmatrix} 0 & 3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$ 이므로 행렬

C 의 모든 성분의 합은

$$18 + 18 = 36$$

MEMO



MEMO

